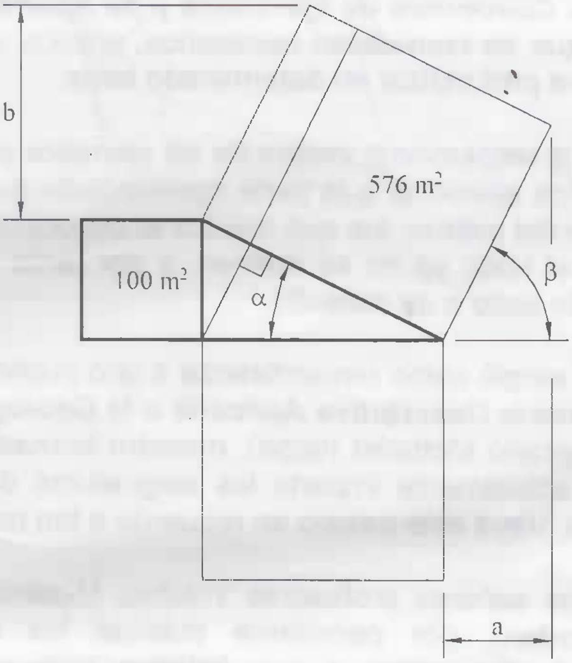
Notas y Ejemplos de

Análisis Gráfico y Geometría Descriptiva



Presentación

Las ***Notas y Ejemplos de Análisis Gráfico y Geometría Descriptiva***, son ejercicios de un alto grado de dificultad, que en determinado momento fueron propuestos o pensados para exámenes, pero que al ser analizados se prefirió no incluirlos en dichos exámenes, salvo uno o dos que mostraron ser adecuados para su aplicación.

El objetivo de presentarlos resueltos obedece a que son ejercicios bastante interesantes, que conviene proponerlos para que los alumnos y profesores tengan un material extra a los ***Cuadernos de Ejercicios y de Apuntes***; para fortalecer el acervo de ejercicios que se consideran necesarios, previos a la presentación de un examen, o bien para profundizar en determinado tema.

Conviene aclarar que la resolución o lectura de los ejemplos propuestos supone la previa realización de los ejercicios a la parte correspondiente del tema tratado, o un buen conocimiento del mismo; los que implica el conocimiento de los términos empleados, pues en el texto ya no se definen, y por tanto ya no funcionan las ***Notas*** como un libro de texto o de consulta.

El nombre del trabajo surgió como remembranza a uno publicado en 1984, ***Notas y Ejemplos de Geometría Descriptiva Aplicada a la Geología***, del cual es autor el Ing. Daniel Díaz Serrano Mothelet (qepd), maestro formador de gran parte del cuerpo docente que actualmente imparte las asignaturas de Análisis Gráfico y Geometría Descriptiva. Vaya este trabajo en recuerdo a tan noble labor.

Deseo agradecer a los señores profesores Yukihiro Minami Koyama y Lorenzo Octavio Miranda Cordero, por permitirme publicar los ejercicios por ellos propuestos. Finalmente me pongo a sus órdenes para cualquier comentario relacionado con el presente trabajo.

Alfredo Arenas González **Noviembre, 2000**

Ejercicio 1
Problema de método axiomático 1.

Determinar la proporción existente entre la medida de los ángulos α y β, si se sabe que el ángulo α está formado por una recta tangente a la circunferencia en el punto T y una cuerda que pasa por T; el ángulo β está formado por dos cuerdas, tal que una de ellas pasa por el punto T. Enuncie los teoremas, axiomas y definiciones empleados en la solución del ejercicio.

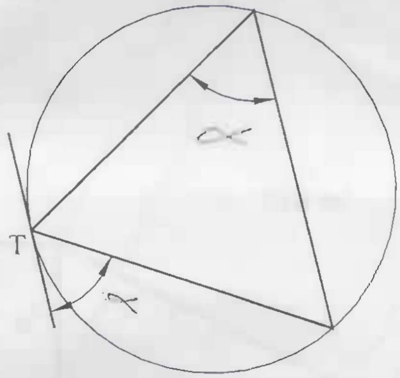


Figura 1 Datos para el ejercicio 1.

Ejercicio 2

Problema de método axiomático 2.

A partir del punto **A** mostrado en la figura 1, trazar un triángulo ABC de tal forma que el lado AB sea horizontal y mida 90 mm. el ángulo en el vértice A sea de 75° y en el vértice B de 45°. Dibujar la circunferencia que circunscriba al triángulo ABC.

Demostrar que el radio de dicha circunferencia mide 51.93 mm ($30\sqrt{3}$), empleando la trigonometría, así como teoremas geométricos.

Figura 1 Punto de partida para el dibujo del ejercicio 2.

Ejercicio 3
Problema de Escalas 1.

Con base en la información proporcionada en la figura 1, determinar la escala práctica a la que se puede dibujar dicha figura que ilustra el Teorema del cateto, aplicado al Teorema de Pitágoras, de tal forma que se ocupe el mayor espacio disponibe de una hoja con formato A4 y que los catetos sean paraleleos a los lados de dicha hoja.

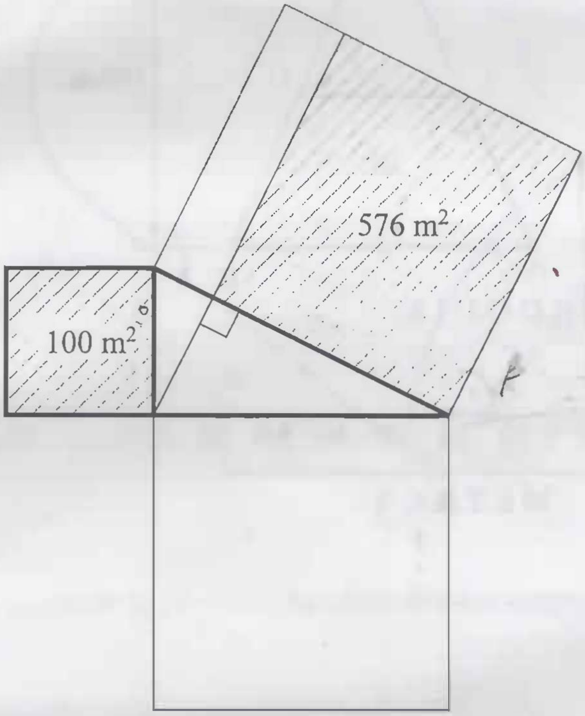
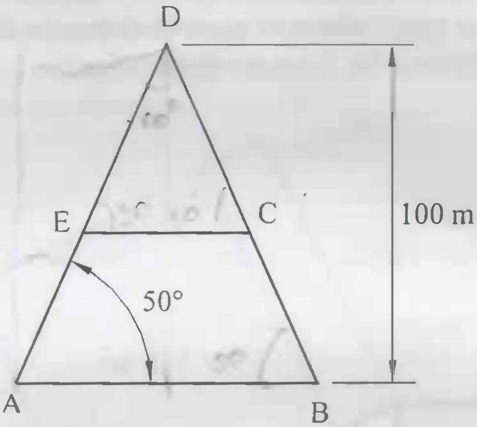


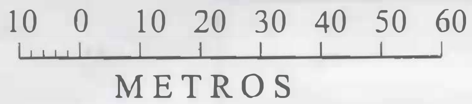
Figura 1 Croquis con los datos para el ejercicio 3.

Ejercicio 4
Problema de escalas 2.

Con base en la escala gráfica mostrada. determinar las dimensiones del papel que se necesitan para dibujar el trapecio isósceles ABCE con medida de 7225 m^2 mostrado en la figura 1.



CROQUIS



Ejercicio 5
Trazos geométricos

Con base en la figura 2, determinar los centros de las circunferencias con centros en A y B, que permitan trazar a escala natural la ***plantilla*** que se muestra en el croquis (figura 1), dejando los trazos auxiliares.

Los segmentos horizontal y vertical proporcionados en la figura 2, son los lugares geométricos de las ubicaciones de A y B respectivamente.

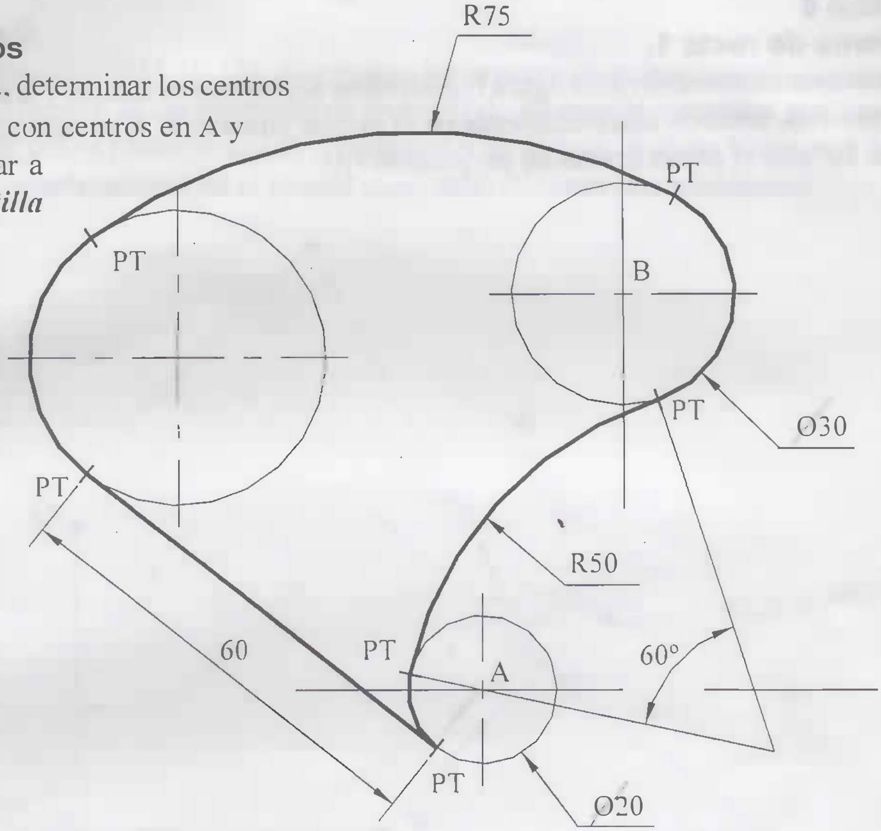


***Figura 1** Croquis de la plantilla, las dimensiones están en milímetros.*

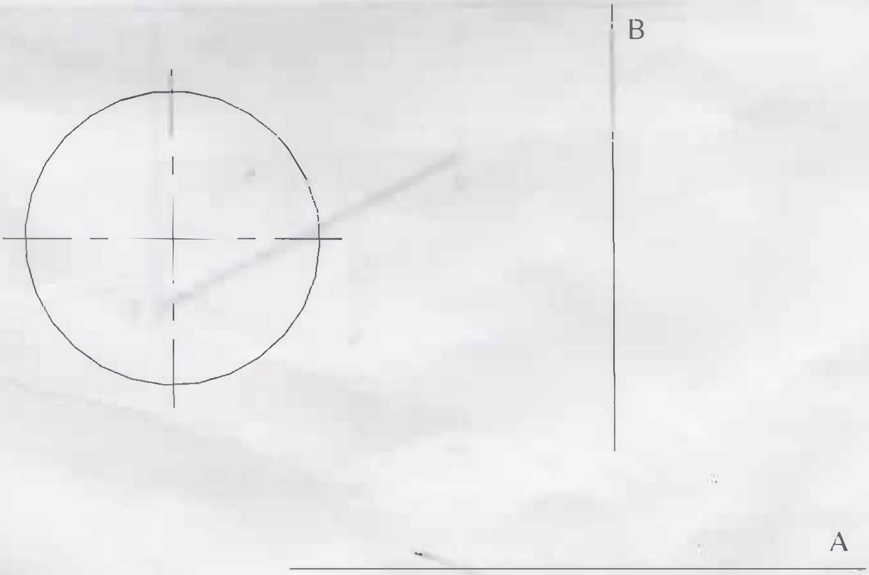


***Figura 2** Información para el trazo de la plantilla.*

Ejercicio 6
Problema de recta 1.

Con base en la información de la figura 1, determinar la proyección faltante y la magnitud real del segmento **AB**, ubicado completamente en el primer cuadrante, si se sabe que forma un ángulo de 20° con el plano frontal de proyección (β).

Recta hor.

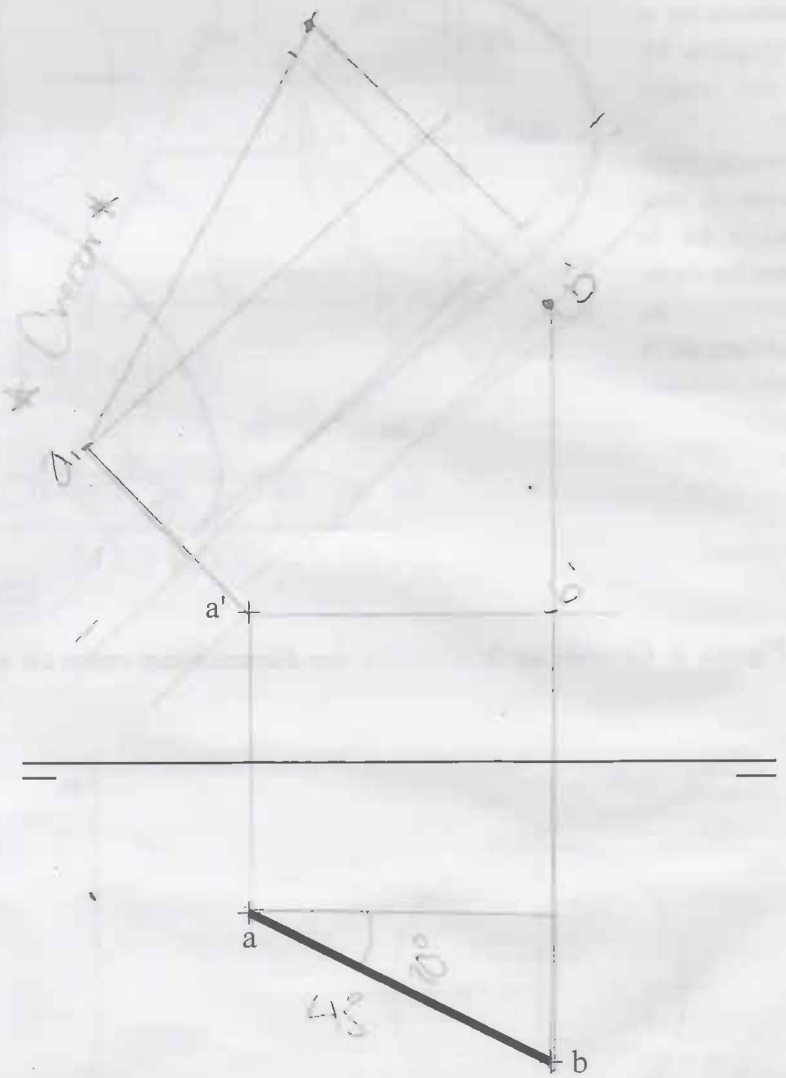


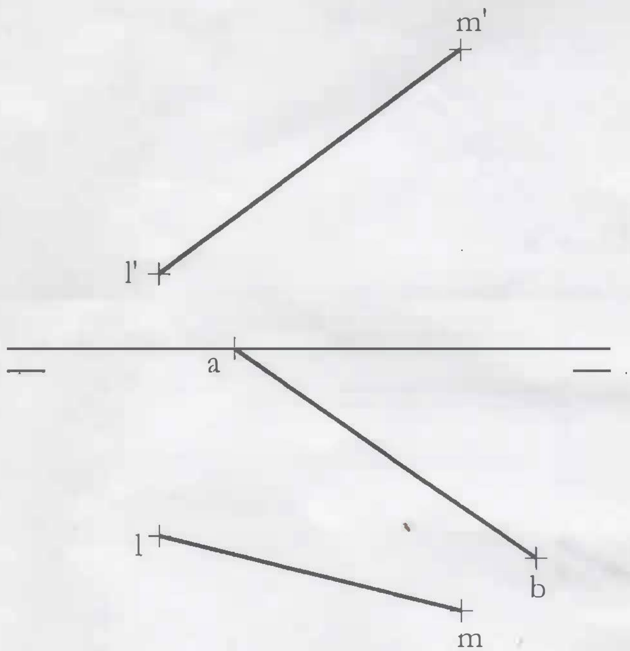
Figura 1 Datos para el ejercicio 6.

Ejercicio 7
Problema de recta 2.

Con base en las coordenadas P(15,10,15), determinar las proyecciones horizontal y frontal originales así como el rumbo, de un segmento de recta PQ de 40 mm de magnitud real, que forme un ángulo de 30º con el plano frontal de proyección y de 45º con el plano horizontal de proyección, ubicado completamente en el primer cuadrante. (Existen dos soluciones)

Ejercicio 8.
Problema de mínima distancia.

Dibujar las proyecciones diédricas originales de PQ tal que sea el segmento de mínima distancia entre AB y LM. sabiendo que PQ tiene una magnitud real de 20 mm y un rumbo N30°E. Q pertenece al segmento AB. mientras que P está contenido en LM.



Ejercicio 9
Problema de recta con características especiales 1.

Determinar las proyecciones del segmento de recta horizontal PQ de 30 mm de magnitud real; P en AB y Q en CD, indicar también su rumbo.

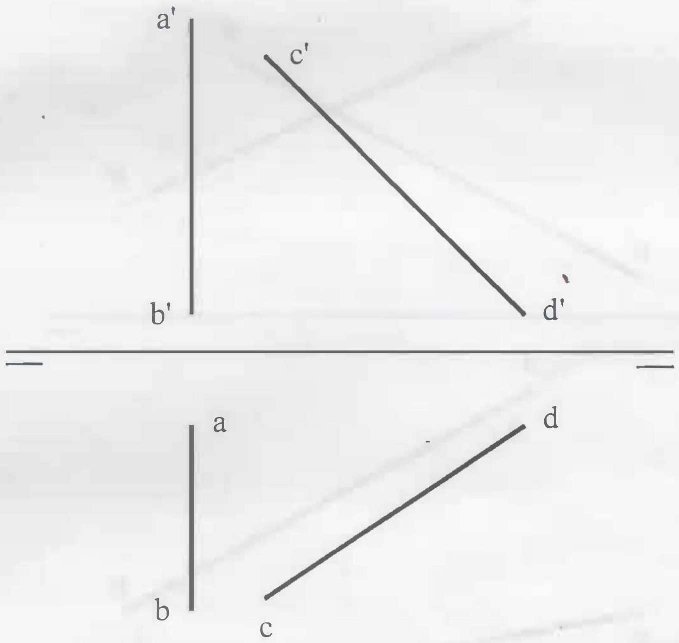


Figura 1 Datos para la solución del problema de recta horizontal

Ejercicio 10
Problema de recta con características especiales 2.

La figura 1 muestra las proyecciones de los segmentos AB y CD, dibujar las proyecciones del segmento XY e indicar su magnitud real si se sabe que tiene un rumbo de N60°E y una pendiente ascendente del 40%. el punto X está ubicado en CD y Y está en AB.

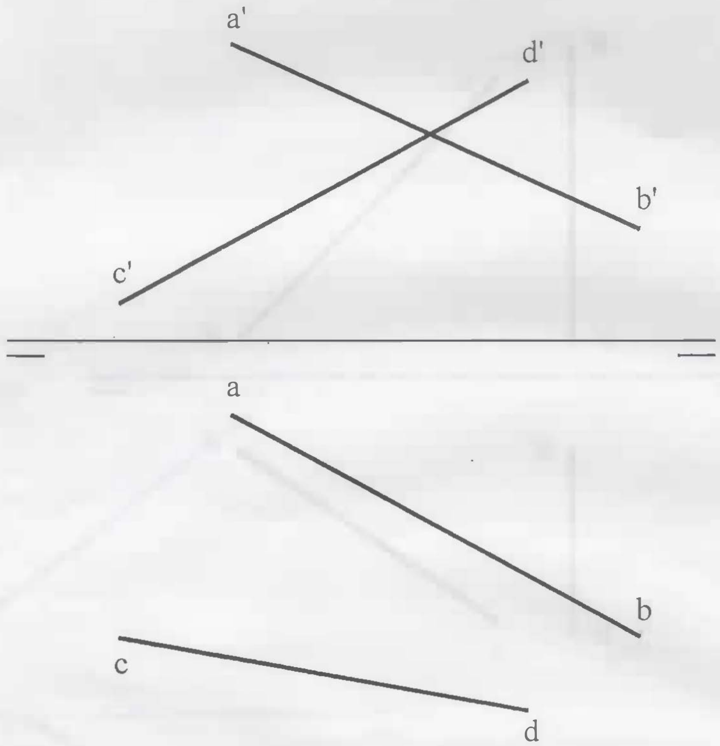


Figura 1 Datos para el ejercicio 10.

Ejercicio 11
Problema de figura plana 1.

Dibujar las proyecciones diédricas de un rectángulo ABCD contenido en un plano paralelo a la línea de tierra, tal que una de sus diagonales sea AC y que dos de sus lados tengan una pendiente del 50%.

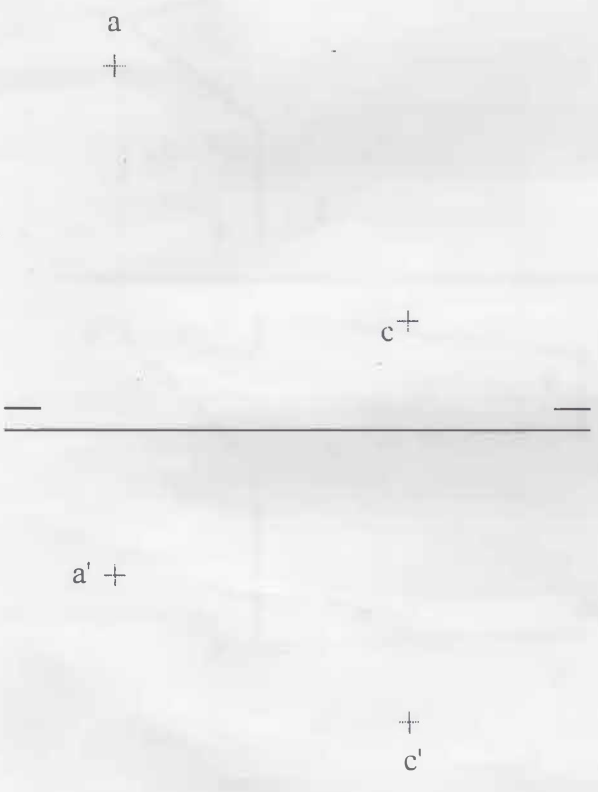


Figura 1 Datos para el ejercicio 11.

Ejercicio 12
Problema de figura plana 2.

Dibujar las proyecciones horizontal y frontal de un triángulo equilétero de 30 mm de lado, si se sabe que uno de sus lados tiene rumbo norte y otro de sus lados tiene rumbo este. La solución deberá estar completamente en el primer cuadrante.

Ejercicio 13
Problema de intersecciones 1.

Obtener la rpoyección horizontal del punto C tal que ABCD sea un trapecio plano. Determinar la visibilidad e intersección de dicho trapecio ABCD y el paralelogramo EGJK.

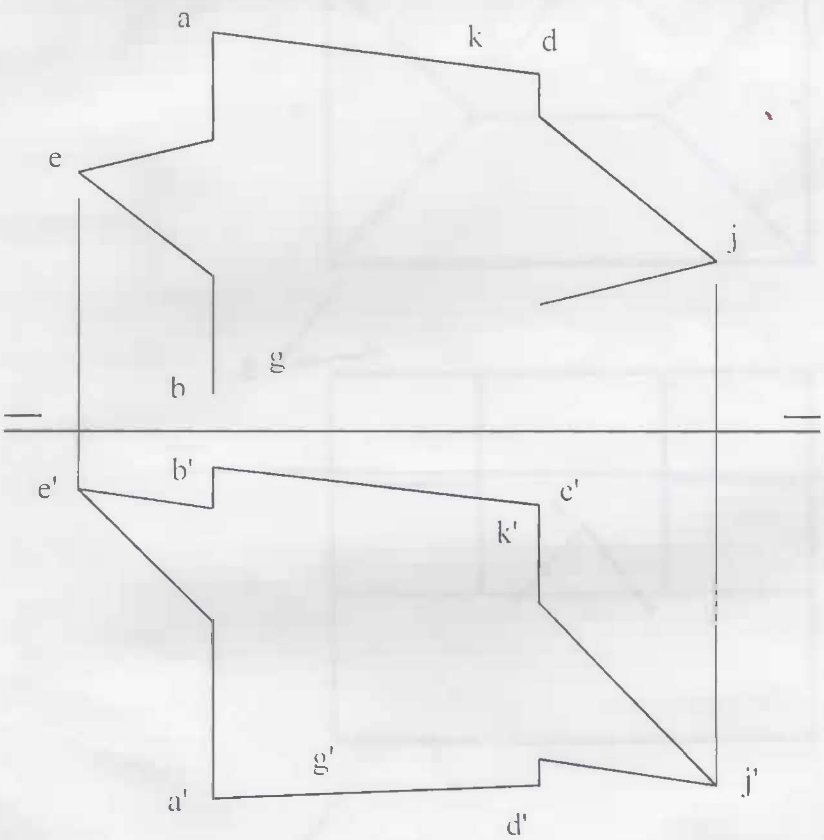


Figura 1 Información del ejercicio 13.

Ejercicio 14
Problema de intersecciones 2.

Dibujar las proyecciones diédricas del triángulo STU, sabiendo que su intersección con el triángulo PQR es el segmento IJ y que el alejamiento de I es de -32 mm. Determinar la visibilidad de dichos triángulos.

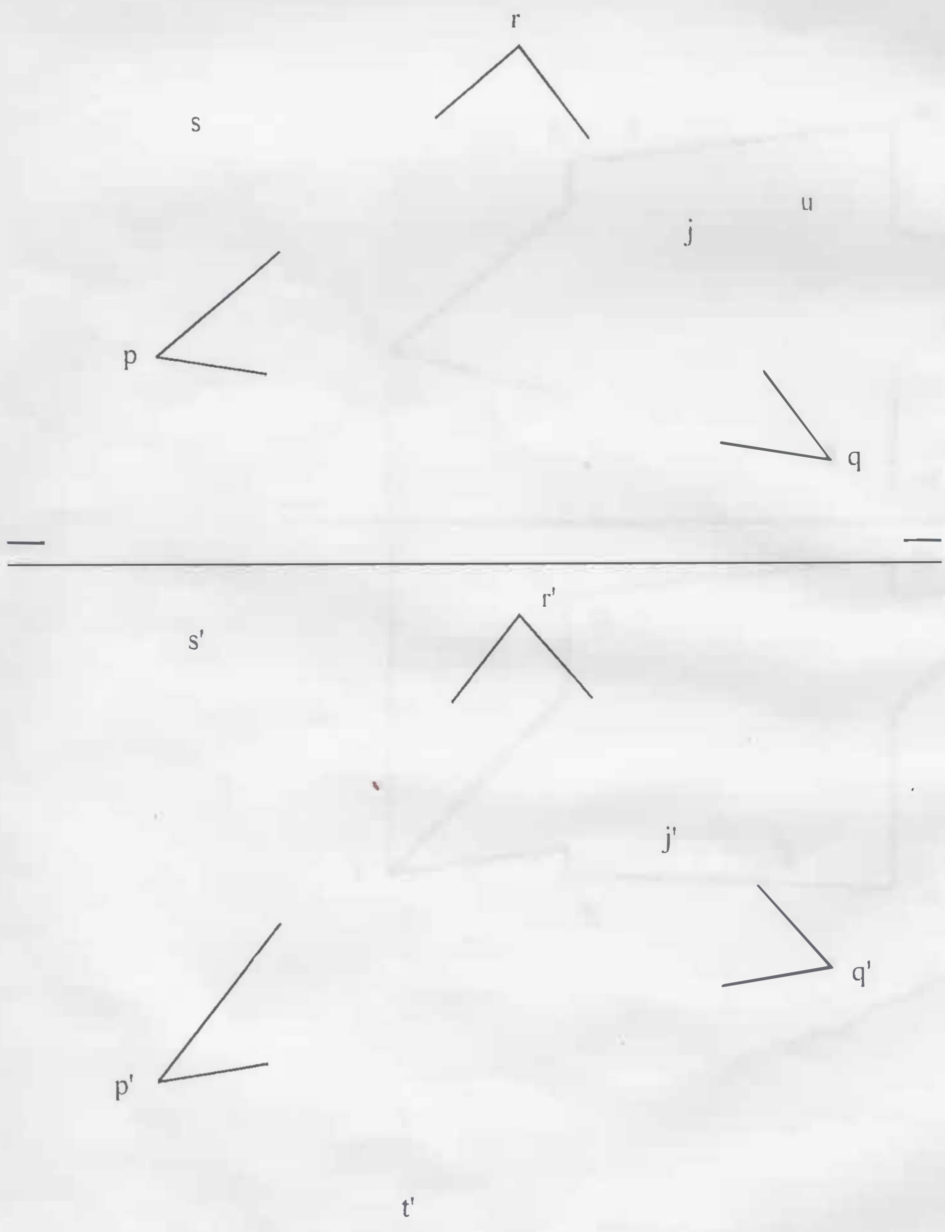


Figura 1 Datos para el ejercicio 14.

Ejercicio 15
Problema de proyecciones.

Con base en las dos proyecciones mostradas que fueron dibujadas según el sistema del tercer ángulo (o sistema "americano"). obtener el isométrico correspondiente a la misma escala.

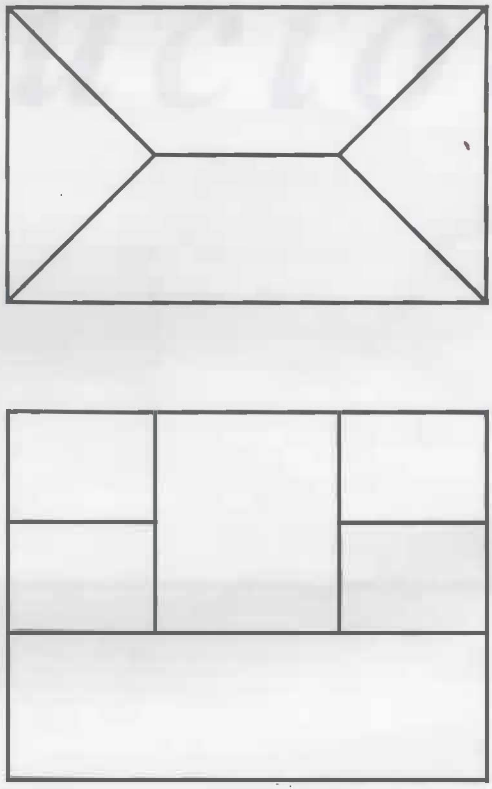


Figura 1 Proyecciones para la obtención de su dibujo isométrico.

Ejercicio 16
Problema de trazas 1.

Dibujar las trazas de un plano que contiene rectas horizontales con un rumbo N45°W, una de sus rectas de máxima pendiente contiene al segmento MN cuya pendiente es positiva, y dicho plano forma un ángulo de 30° con el plano horizontal de proyección.

Dibujar las proyecciones diédricas del punto Q(d.20.15) [mm] tal que esté contenido en el plano; por este punto trazar las proyecciones diédricas de una recta perpendicular al plano citado y ubicar un punto R contenido en ella que tenga 40 mm de cota; pot último, trazar las proyecciones del segmento RT tal que sea paralelo al plano previamente mencionado.

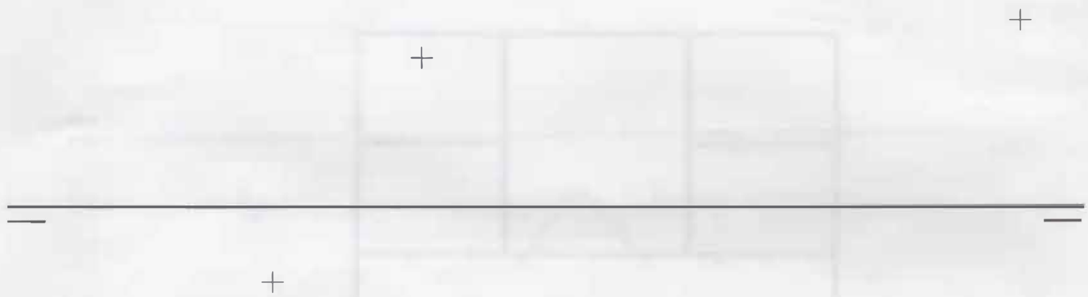


Figura 1 Datos para la solución del ejercicio 16.

Soluciones

Solución del ejercicio1

Este ejercicio se resolverá con el formato proporcionado (tabla 1) y los números que aparecen en la parte izquierda de la columna de razones indican el comentario correspondiente.

	Razones	Resultados
1	$T: \nabla\, \Delta \Sigma \mu < \text{int} = \pi$	$2\gamma+2\theta+2\phi = \pi$
		$\gamma+\theta+\phi = \pi/2$
2	D: perpendicularidad	$\alpha+\gamma = \pi/2$
3	A: transitividad	$\alpha+\gamma = \gamma+\theta+\phi$
4	$\mu\nabla=\Sigma\mu$ partes	$\beta = \theta+\phi$
		$\alpha+\gamma = \gamma+\beta$
		$\therefore\ \alpha = \beta$

Tabla 1 Solución del ejercicio.

1. ***Léase***: Teorema: para todo triángulo, la sumatoria de las medidas de sus ángulos interiores es equivalente con un ángulo llano.
   Una vez identificados los vértices del triángulo TUV (como se muestra en la figura 2) y el centro C de la circunferencia, se trazan los triángulos TCU, UCV y VCT, los cuales resultan isósceles, dado que los lados que tienen como vértices al punto C, son radios de la circunferencia y por tanto son congruentes.

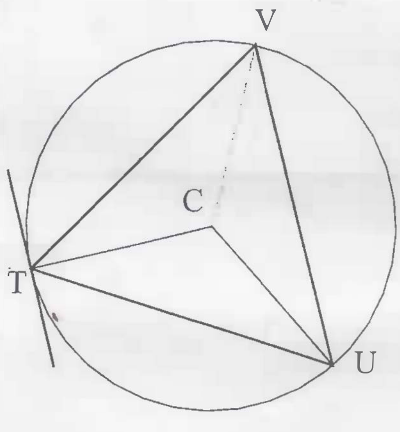


Figura 2 identificación de vértices y ángulos

2. El segmento CT es el segmento normal a la recta tangente dada y por tanto es perpendicular a ella (las rectas tangente y normal son perpendiculares).
3. Recordemos el axioma de congruencia entre ángulos y segmentos conocido como transitividad, si un ángulo es congruente a otro y éste a su vez es congruente a un tercero, entonces en primero es congruente con el tercero.
4. ***Léase:*** La medida del todo es equivalente a la sumatoria de las medidas de sus partes.

El procedimiento descrito descarta la posibilidad de resolver el ejercicio empleando los ángulos inscrito, central y seminscrito, en virtud de que son ángulos en la circunferencia y no es claro que sea un tema que esté contemplado en el temario de la asignatura, pero como algunos profesores lo consideran, se plantea como segunda posibilidad de solución el conocimiento de dichas definiciones y los teoremas, que en seguida se enuncian:

Ángulo inscrito: es aquel cuyo vértice está sobre la circunfrencia y cuyos lados son cuerdas.
Ángulo central: es aquel cuyo vértice es el centro de una circunferencia.
Terorema: La medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que abarca el mismo arco.
Ángulo seminscrito: es aquel cuyo vértice está en la circunferencia y cuyos lados son una cuerda y una tangente.
Teorema: la medida de un ángulo central es el doble de la medida de un ángulo seminscrito que abarca el mismo arco.

Obsérvese que el ejercicio cumple justamente con las definiciones anteriores, con lo que se comprueba de otra forma que $\alpha = \beta$.

Teorema: la medida de un ángulo central es el doble de la medida de un ángulo seminscrito que abarca el mismo arco.

Obsérvese que el ejercicio cumple justamente con las definiciones anteriores, con lo que se comprueba de otra forma que $\alpha = \beta$.

Solución del ejercicio 2

El trazo de la figura no debe tener problema alguno, basta con trazar las mediatrices de los lados del triángulo (con dos es suficiente) y su intersección es el centro de la circunferencia buscada, que se identificó en la figura 2 como O.

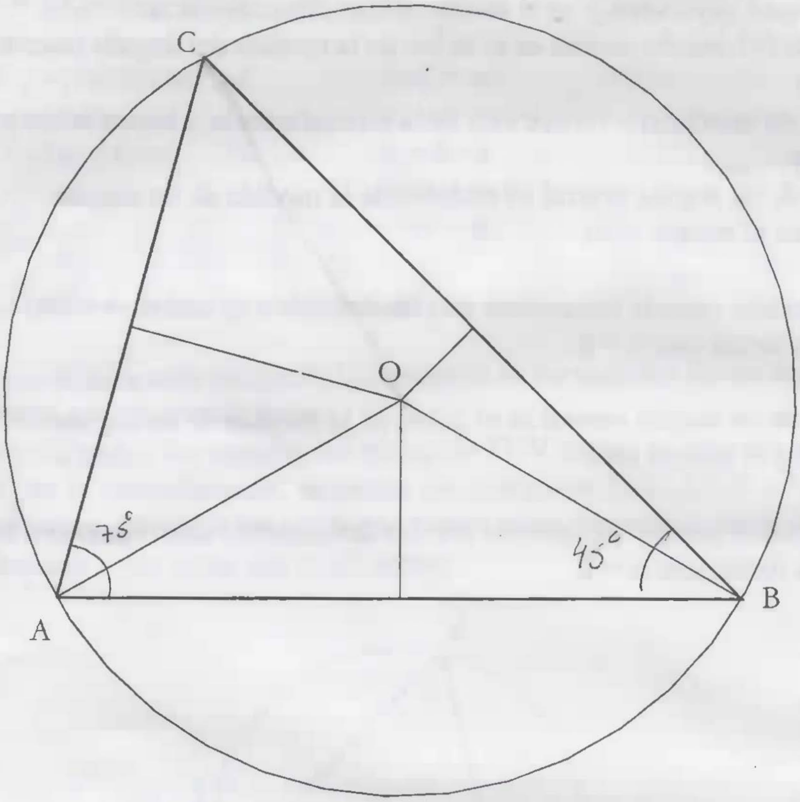


Figura 2 Solución gráfica.

Razones	**Resultados**
D: circunferencia	OA = OB
	OB = OC
	OC = OA
T: $\nabla\Delta\ \Sigma\ \mu$<int=$\pi$	$75°+45°+\gamma+\beta = 180°$
	$\gamma+\beta = 60°$
$\mu\nabla = \Sigma\ \mu$ partes	$\alpha+\beta = 45°$ (1)
	$\beta+\gamma = 60°$ (2)
	$\gamma+\alpha = 75°$ (3)
	de (1) $\alpha = 45° - \beta$ (4)
	de (2) $\gamma = 60° - \beta$ (5)
	(4) y (5) en (3)
	$45°-\beta+60°-\beta = 75°$
	$\beta = 15°$, sustituyendo en (1)
	$\alpha = 30°$

Razones	**Resultados**
D: Coseno	$\cos\alpha = \dfrac{45mm}{OA}$
	$OA = \dfrac{45}{\cos 30}$; pero como $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
	$OA = \dfrac{90}{\sqrt{3}}$; racionalizando el denominador
	$OA = \dfrac{90}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$
	$OA = 30\sqrt{3}$; qed

Solución del ejercicio 3.

En principio recordaremos lo que establece el Teorema del Cateto: ***la medida del rectángulo construido con la proyección de un cateto sobre la hipotenusa y la hipotenusa, es equivalente a la medida del cuadrado construido con el mismo cateto.*** Analizando la información de la figura 1, se observa que uno de los catetos tiene medida de 10 metros y que los 576 m^2 son la medida de un rectángulo cuya medida es equivalente el cuadrado construido con el cateto faltante, por lo que la medida de este último es 24 metros, que es la raíz cuadrada de 576. Ya conocidos los valores de las medidas de los catetos, aplicamos el teorema de Pitágoras para obtener la medida de la hipotenusa, que resulta ser de 26 metros.

Vemos ahora que en realidad el problema se reduce a obtener únicamente las medidas identificadas como **a** y **b** en la figura 2, puesto que todas las demás son conocidas, por otro lado vemos que los ángulos α y β son complementarios, dado que la medida angular $\alpha+\beta+90°$ es equivalente a la medida de un ángulo llano, por el axioma de que la medida del todo es equivalente a la medida de la suma de sus partes, es decir, el ángulo del triángulo rectángulo identificado como α más 90° (el ángulo en el rectángulo) más β suman 180°.

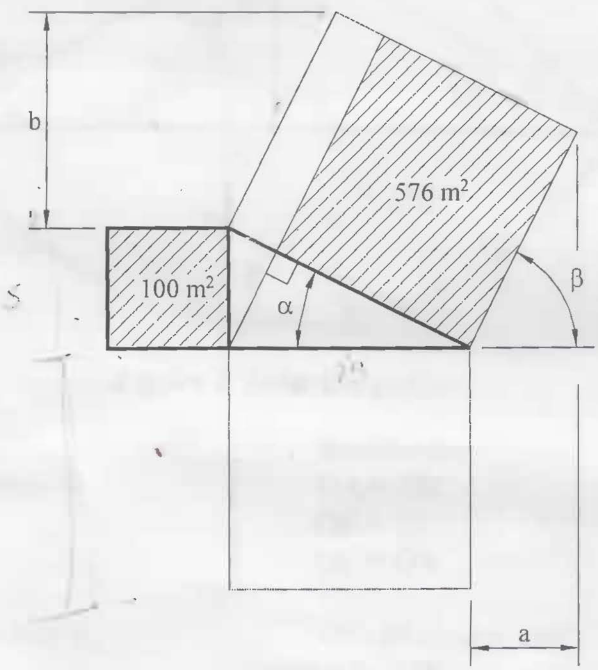


Figura 2 Identificación de medidas para el cálculo de la escala.

La medida b se obtiene se obtiene por:

$b = 26 \text{ sen } \beta$

$b = 26\ (12/13)$

$b = 24$

y la medida a se obtiene por:
$a = 26 \cos \beta$
$a = 26 (5/13)$
$a = 10$

Los valores 12/13 y 5/13 son las relaciones obtenidas del triángulo rectángulo original, dado que sus medidas son 10, 24 y 26 metros, las simplificamos a las medidas de un triángulo semejante con medidas 5, 12 y 13 metros, para aplicar las definiciones de las funciones trigonométricas seno y coseno.

Con estos valores tenemos las medidas para poder determinar la escala práctica pedida, la altura máxima es 54 metros y el ancho máximo es 44 metros. Aplicando el concepto de escala relacionamos medidas dibujadas máximas con medidas reales máximas, con lo que, para el ancho tenemos:

E = 210mm/44m

E = 210/44,000; dividiendo por el menor número:

E = 1/209.52
y para la altura tenemos:
E = 297mm/54m

E = 297/54000

E = 1/181.81

De las dos escalas obtenidas seleccionamos la escala 1:250, dado que es la escala práctica en la que se ocupa el mayor espacio disponible de la hoja.

Solución del ejercicio 4.

Para resolver este ejercicio, se necesitan calcular las dimensiones del segmento AB y la altura del trapecio isósceles. Para la determinación de la longitud de AB partiremos de la información del ángulo conocido, de donde obtenemos:

$$tan 50° = \frac{100m}{\frac{b}{2}}$$

en donde b es la base del triángulo, es decir, el segmento buscado, por lo que :

$$b = \frac{200m}{tan 50°}$$

b = **167.82 m**

Con este valor podemos calcular la altura del triángulo que inscribe al trapecio rectángulo y que es:

$$A = \frac{(167.82m)(100m)}{2}$$

A = 8391 m^2

Conocida la medida del triángulo, le restamos el área del trapecio para determinar la medida del triángulo CDE que es:

At = 8391 - 7225
At = 1166 m^2

con este valor calculamos la altura del triángulo CDE, para que al restársela al dato de 100 metros, obtengamos la altura del trapecio.

$$1166 = \frac{bh}{2}$$

$$bh = 2332 \qquad (1)$$

por otro lado sabemos:

$$tan 50 = \frac{2h}{b} \text{ ; por lo que}$$

$$b = \frac{2h}{tan 50°} \qquad (2)$$

(2) en (1)

$$\left(\frac{2h}{tan50°}\right)h = 2332$$; de donde

$$h = \sqrt{\frac{2332tan50°}{2}}$$

h = 37.27 m

este valor se lo restamos al dato de 100 m y resulta que la altura del trapecio es:

100-37.27 = **62.72 m**

conocidos los valores de la base y la altura del trapecio, las longitudes del papel se pueden determinar mediante comparación directa, o bien, fácilmente se puede determinar que la escala numérica que representa a la escala gráfica es 1:1250 y las dimensiones del papel serán:

$$\frac{1}{1250}:\frac{Ld}{62.72m};\ \mathbf{Ld_1 = 50.18\ mm;}$$

$$\frac{1}{1250}:\frac{Ld}{167.82m};\ \mathbf{Ld_2 = 134.25\ mm}$$

Si se hace la comparación directa, no se puede obtener la misma precisión en la dimensiones buscadas, pero una variación de 1 mm es aceptable, por otro lado es difícil leer inclusive hasta la décima de mm, por lo que la centésima es práctimente imposible, con esta observación damos por terminado el ejercicio.

Solución del ejercicio 5.

Para este ejercicio es conveniente haber resuelto antes varios otros de trazos geométricos, pues implica un buen conocimineto de ellos. El primer paso es ubicar la circunferencia con centro en “A”. Sin este centro A no es posible ubicar B. El ejercicio es susceptible de ser resuelto aplicando el teorema de Pitágoras y la ley de los cosenos, pero en virtud de ser un ejercicio de Anáilsis Gráfico, la solución se hará empleando procedimientos gráficos.

En la figura 3 se muestra como calcular la longitud del segmento CB y que aplicando el teorema de Pitágoras es 3700, que no es exacta, por lo que en dicha figura se hizo el trazo a partir de un PT_1 cualquiera de la circunferencia con centro en “C” (en este caso la intersección del eje de la circunferencia), a partir de este punto se traza la perpendicular al eje y se miden los 60 mm, que es la longitud de la tangente, definiéndose un PT_2, por el cual se traza la normal de 10 mm que sería un punto auxiliar A_1, posteriormente se dibuja la circunferencia de 10 mm que cumple las características del trazo, pero no está en el lugar adecuado, por lo que se dibuja una circunferencia con centro en “C” y radio CA_1 y en donde corte a la recta horizontal es el centro buscado, para la realización del trazo se aplica el teorema de Tales a tangentes externas.

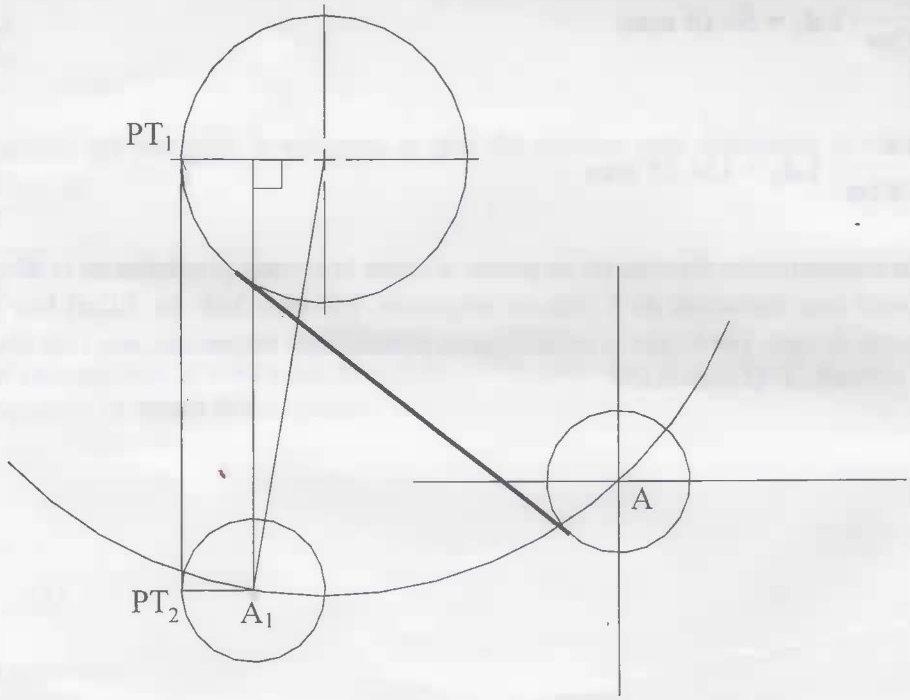


Figura 3 Obtención del centro A

Ya con el punto A se procede de forma similar para la ubicación de B, *supondremos* ahora que conocemos uno de los puntos de tangencia, PT_3 en la figura 4, por comodidad nuevamente en la intersección con el eje, el cual a se vez será la recta normal en donde se ubicará el centro de la circunferencia con R50, y a partir de este centro se traza un segmento que forme 60º con el eje, sobre el último segmento trazado se miden 65 mm (50 mm del radio más 15 mm de la circunferencia buscada) para ubicar el punto auxiliar B_1. Haciendo centro en A y con un radio AB_1 se traza un arco que corte al segmento vertical, ubicando así el punto B, como se muestra en la figura 4, y realizando el trazo por medio de suma y resta de radios. Finalmente el trazo que falta se hace por medio de diferencia de radios (que ya no se muestra).

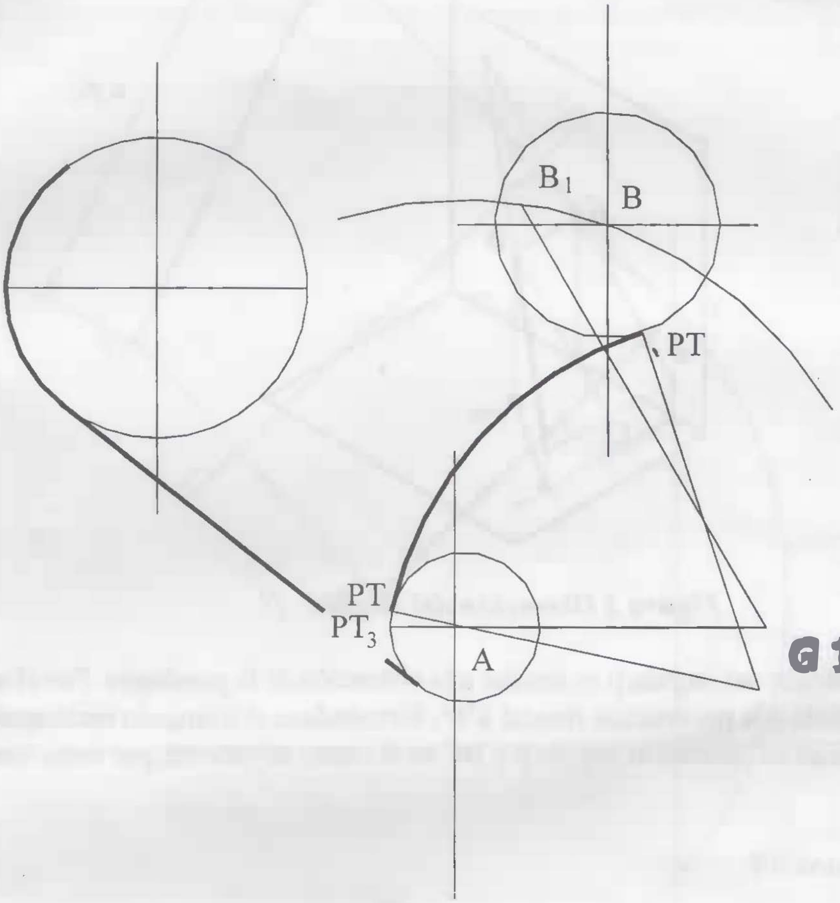


Figura 4 Obtención del centro B y trazo del arco.

Solución del ejercicio 6.

Para poder obtener la medida del ángulo β, necesitamos hacer un cambio de planos de tal forma que la proyección frontal sea paralela a la línea de tierra, es decir, que sus cotas sean constantes. Pero resulta que justamente la proyección frontal de la recta es la que se desconoce. La figura 2 ilustra comc

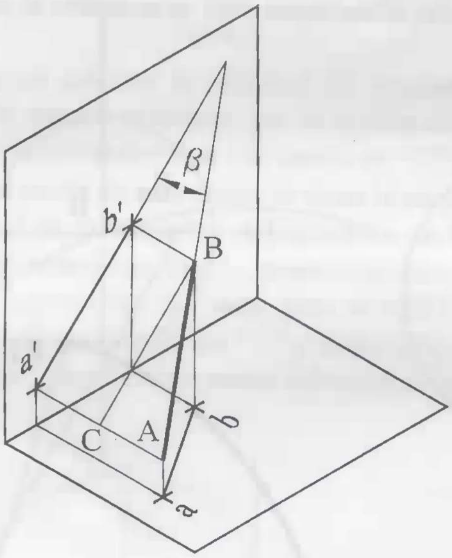


Figura 2 Obtención del ángulo β.

Nótese que la obtención del ángulo β es similar a la obtención de la pendiente. Por el extremo **B** se pasa una paralela a la proyección frontal **a'b'**, formándose el triángulo rectángulo **ABC** en donde **AC** es el cateto opuesto al ángulo β y **BC** es el cateto adyacente, por tanto tanβ=**CA**/**BC**, es decir,

tanβ= Δ alejamientos/lPF

donde lPF es la longitud de la proyección frontal (**b'c'**). Analizando las proyecciones diédricas de la figura 1, vemos que podemos obtener la diferencia de alejamientos y como conocemos **b**, la lPF está dada por:

lPF=Δalej/tanβ; sustituyendo,

lPF=10/tan20°; por lo que

lPF=17.32 mm

Haciendo centro en **a'** se traza un arco con radio igual a la lPF y en donde corte la perpendicular a la línea de tierra trazada por la proyección horizontal **a**, será la ubicación de **b'**. Finalmente se hace el cambio de planos paralelo a cualquiera de las proyecciones diédricas de **AB** y se mide la magnitud real, la solución se muestra en la figura 3.

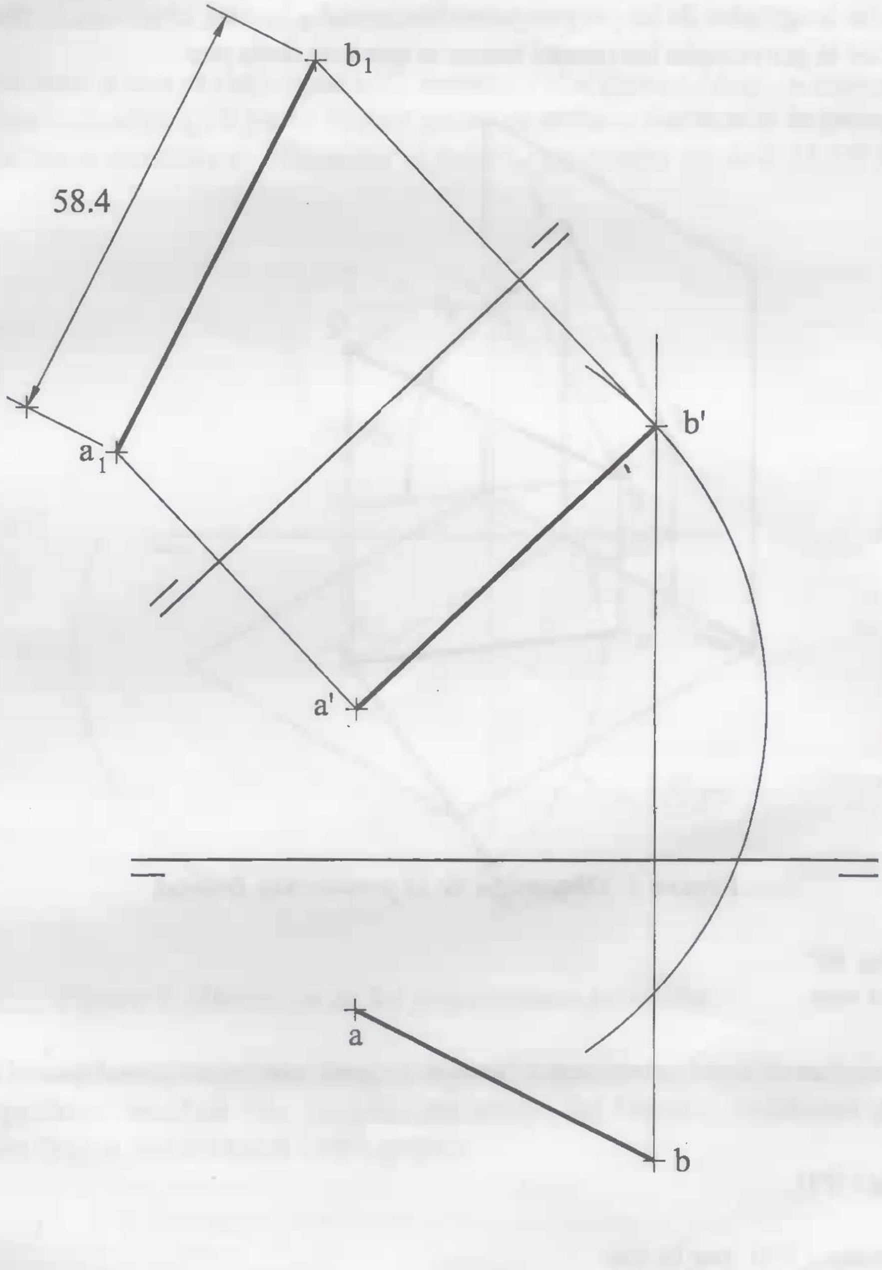


Figura 3 Solución al ejercicio 6

Solución al ejercicio 7.

Como se conocen los ángulos que forma el segmento con los planos de proyección, es fácil determinar las longitudes de las proyecciones horizontal y frontal, obsérvese la figura 1, para la longitud de la proyección horizontal tenemos que está dada por:

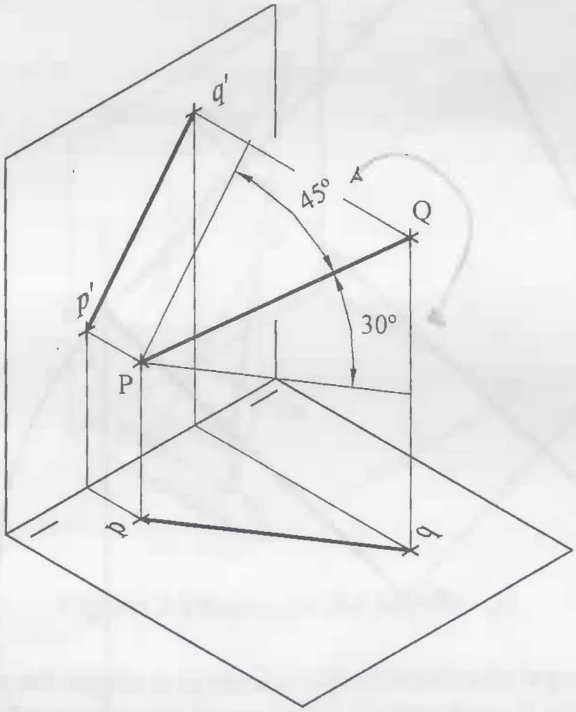


Figura 1 Obtención de la proyección frontal.

lPH = 40 cos 30°
lPH = 34.64 mm

y como al conocer el ángulo conocemos también la pendiente (recordemos que es la tangente del ángulo), tenemos:

m = Δ cotas / lPH

0.577 = Δ cotas / lPH, por lo que

Δ cotas = 0.577 (34.64)

Δ cotas = 20 mm

trazamos la diferència de cotas en la proyección frontal, identificada como LGq' en la figura 2, y la longitud de la proyección horizontal identificada como LG $_{lPH}$. De manera análoga podemos determinar la longitud de la proyección frontal que está dada por:

lPF = 40 cos 45°

lPF = 28.28 mm

y haciendo centro en p' y con un radio igual a lPF cortamos al segmento LGq', la inteserción define la proyección frontal q', a partir de este punto se obtiene fácilmente la proyección horizontal q y lo único que resta es determinar el rumbo, que resulta ser de S 35.25° E

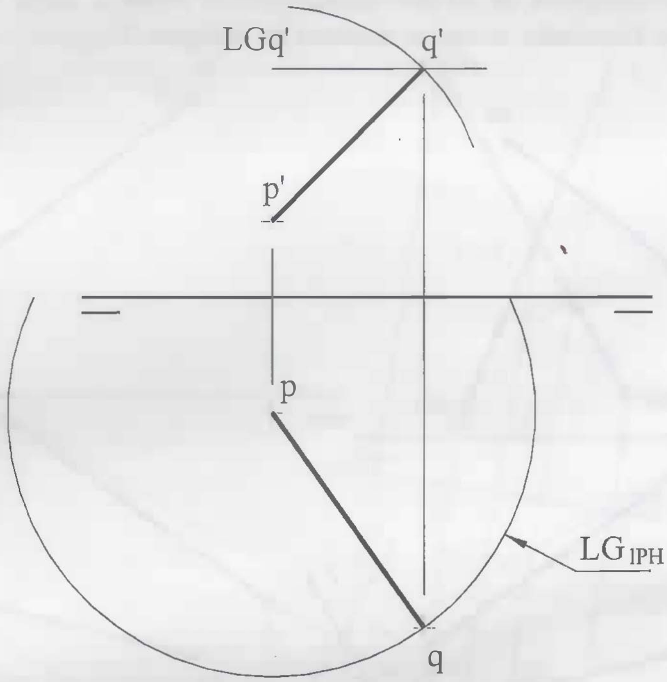


Figura 2 Obtención de las proyecciones buscadas.

Es conveniente hacer el o los los cambio de planos para comprobar la solución, asimismo se recomienda al profesor, resolver este ejercicio por medio del Método de Giros, con este procedimiento se llega a una solución 100% gráfica.

Solución del ejercicio 8.

En virtud de que se conoce el rumbo del segmento de mínima distancia, podemos trazar una línea de tierra paralela a dicho rumbo para que en la proyección auxiliar que resulte, el segmento de mínima distancia PQ aparezca en magnitud real, y por tanto los segmentos AB y LM deberán ser perpendiculares a PQ. La obtención de las proyecciónes auxiliares **l'**$_1$ y **m'**$_1$ son faciles de obtener dado que se conoce toda la información del segmento LM. Como en esta proyección PQ debe estar en magnitud real, necesariamente debe ser perpendicular a LM pero al no tener más información. su ubicación en la proyección auxiliar estará en la familia de rectas perpendiculares de 20 mm comprendidas desde L hasta M, una de estas rectas es la que estamos buscando, como se muestra en la figura 2.

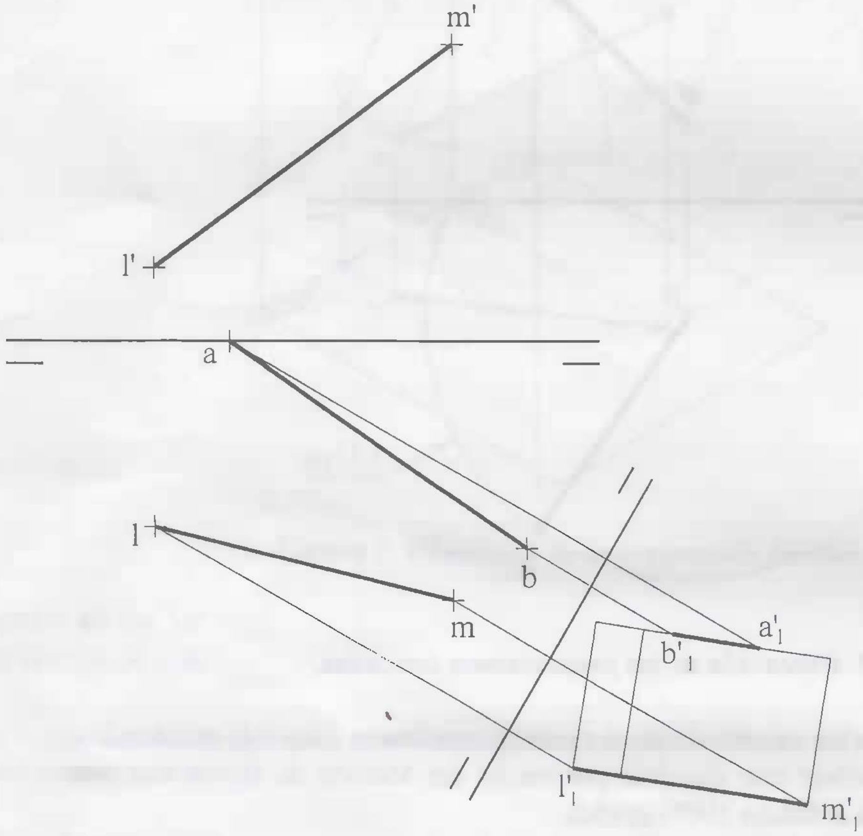


Figura 2 Recta de mínima distancia en magnitud real.

Con respecto a la obtención de las proyecciones auxiliares **a'**$_1$ y **b'**$_1$, basta con trazar los lugares geométricos a partir de las proyecciones horizontales originales **a** y **b**, y en donde corten a la paralela **a'**$_1$**lm'**$_1$ trazada a 20 mm, estarán dichos puntos. La paralela trazada a 20 mm de **l'**$_1$**m'**$_1$, se justifica porque el segmento **a'**$_1$**b'**$_1$, deberá ser perpendicular al segmento **p'**$_1$**q'**$_1$ que se debe encontrar en magnitud real.

Como no se ha fijado la ubicación del segmento PQ en alguna de sus proyecciones, se propone hacer otro cambio de planos, ahora perpendicular a PQ, que al menos sabemos está en magnitud real, y en la proyección auxiliar que resulte, deberá aparecer visto como un punto, y como para la obtención de esta nueva proyección sí tenemos toda la información de los segmentos

AB y LM, obtenemos dichas proyecciones como se muestra en la figura 3. Dado que el segmento PQ tiene sus extremos contenidos en las rectas AB y LM y en esta proyección auxiliar debe aparecer visto como un punto, la única posible ubicación para que esto suceda, es en donde los segmentos AB y LM presentan su cruzamiento, localizando así las proyecciones $\mathbf{p_1 q_1}$. Una vez identificadas estas proyecciones, se traza su lugar geométrico perpendicular a la última línea de tierra y en donde corte a los segmentos $\mathbf{a'_1}$ y $\mathbf{l'_1}$ estarán las ubicaciones de $\mathbf{q'_1}$ y $\mathbf{p'_1}$, respectivamente.

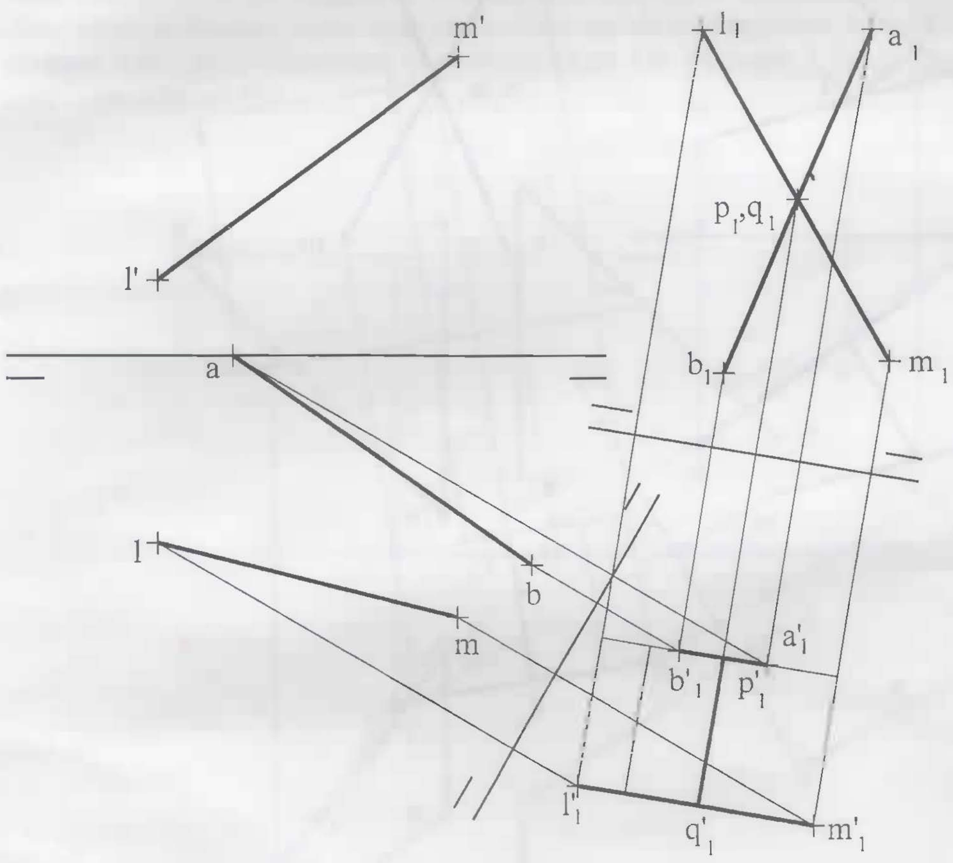


Figura 3 Localización precisa del segmento de mínima distancia.

Para la obtención de la proyección horizontal original **q**, se puede obtener en la intersección de la perpendicular a la segunda línea de tierra dibujada, que parta de $\mathbf{q'_1}$ y la proyección horizontal original **ab**, pero como el ángulo formado por estos dos segmentos es bastante cerrado, se puede caer en imprecisiones, por lo que se recomienda para la obtención de la proyección horizontal **q**, tomar la medida del alejamiento en la proyección auxiliar (identificada como **x** en la figura 4) y regresarla a la proyección horizontal original, con lo que también se define la proyección horizontal **p** en la intersección con **lm**, como se muestra en la figura 4. que presenta además la resolución completa del ejercicio.

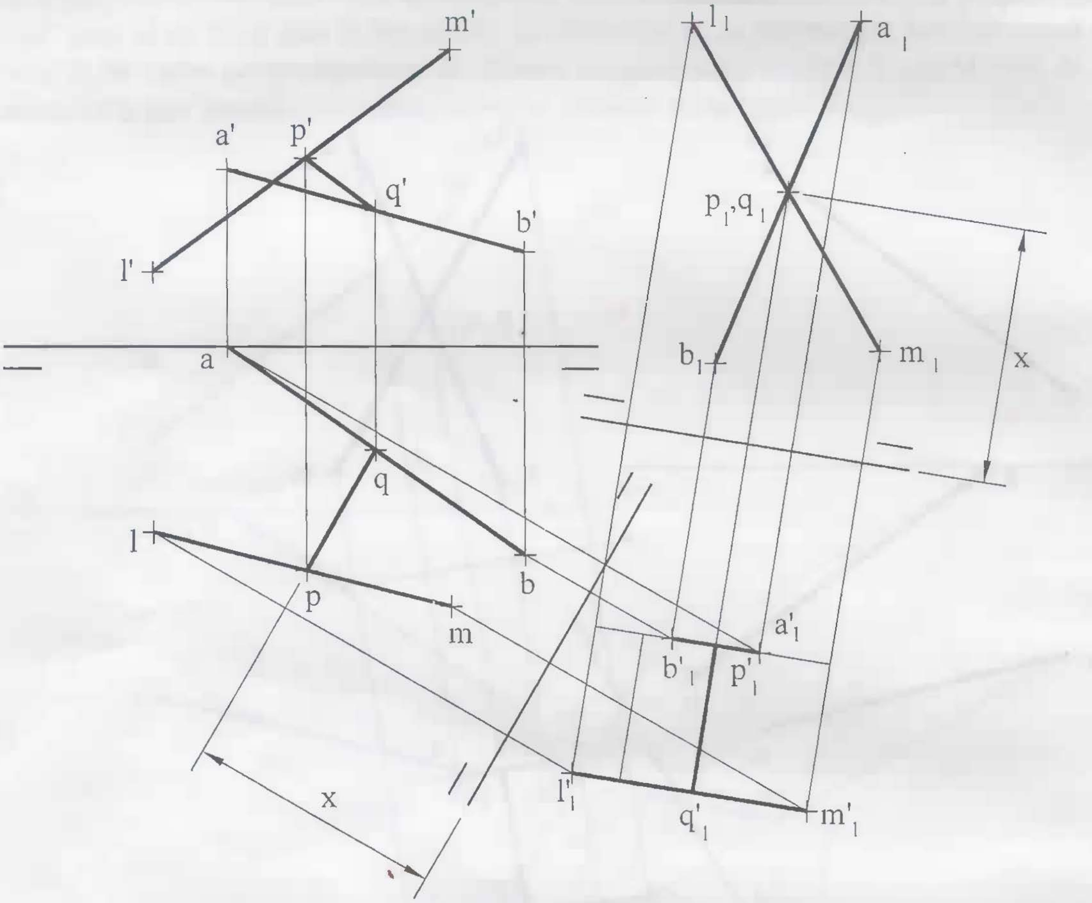


Figura 4 Obtención de las proyecciones faltantes.

Solución del ejercicio 9.

Existen muchos segmentos de recta horizontales cuyos extremos estén contenidos en los segmentos de recta AB y CD. El problema se resuelve por medio de planos paralelos. En este caso por el extremo B se pasa un segmento paralelo a CD y por el extremo C un segmento paralelo a AB en ambas proyecciones identificados como E y G, y con esto garantizamos que se forman dos planos paralelos, dado que cumplen con el teorema: ***dos planos son paralelos si contienen al menos dos segmentos paralelos diferentes,*** el siguiente paso consiste en ver a los planos como filo, evidentemente por ser paralelos, al aparecer uno de los planos visto como filo en una proyección, el otrol plano aparecerá de esta forma. Se hace contener un segmento de recta horizontal en cualesquiera de los planos, en este caso en ABE, como se muestra en la figura 2, obsérvese que se hace uso de un segmento de recta SA, contenido en elplano ABC, para determinar el extremo M en AB. El punto T es un punto del plano que está contenido en EM.

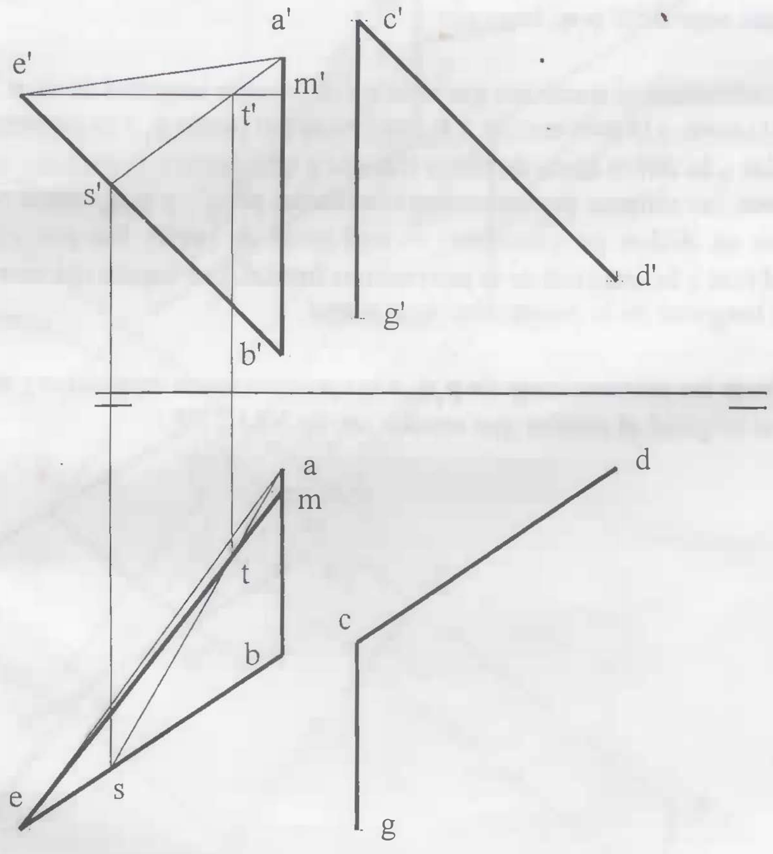


Figura 2 Obtención del segmento de recta horizontal EM contenido en uno de los planos.

Posteriormente se hace un cambio de planos perpendicular al segmento horizontal EM para ver a los planos como filo, como se muestra en la figura 3, podemos ver que en el cambio de planos cualquier segmento de recta horizontal con extremos en AB y CD respectivamente, tiene sus proyecciones en los filos correspondientes, es paralela a la proyección de la nueva línea de tierra (por tener sus cotas constantes) y la longitud de dicha proyección es la misma.

Ahora se hace un nuevo cambio de planos perpendicular a la proyección del segmento EM el cual aparecerá visto como un punto. Nótese que hasta aquí el problema es similar a la obtención de la mínima distancia horizontal entre dos segmentos de recta, la cual en este caso sería en donde en la nueva proyección horizontal los segmentos de recta AB y CD se cruzan. Para el caso que nos ocupa necesitamos hacer más análisis y trazos. Con base en la última línea de tierra tenemos la proyección frontal, en donde los planos aparecen vistos como filo, y la horizontal en donde el segmento EM aparece visto como punto.

En virtud de que conocemos la magnitud real del segmento PQ buscado, y conocemos la longitud de su proyección frontal que midiéndola resulta de 24.1 mm (longitud de $\mathbf{m'_1,n'_1}$) la obtención de la longitud $\mathbf{m_1,n_1}$, la obtendremos gráficamente; por el extremo $\mathbf{n'_1}$, trazamos una perpendicular a la segunda línea de tierra, y haciendo centro en $\mathbf{m_1}$ dibujamos un arco con la magnitud real del segmento PQ buscado, es decir de 30 mm, que corte a la perpendicular trazada por $\mathbf{n'_1}$, identificando al punto $\mathbf{o'_1}$, la longitud del segmento $\mathbf{o'_1,n'_1}$ será la longitud de la proyección deseada del segmento $\mathbf{p_1q_1}$ buscado.

En la última proyección obtenida se traza una paralela a $\mathbf{c_1d_1}$, con la longitud de $\mathbf{o'_1n'_1}$, en el punto donde esta paralela corte a la proyección $\mathbf{a_1b_1}$, se ubicará al punto $\mathbf{p_1}$ y la proyección $\mathbf{q_1}$ estará en la perpendicular a la útima línea de tierra trazada y que corte a la proyección $\mathbf{c_1d_1}$. Considerando únicamente las ultimas proyecciones obtenidas, $\mathbf{p'_1q'_1}$ y $\mathbf{p_1q_1}$, éstas resultan ser de un segmento que en dichas proyecciones es una recta de perfil, fue por ello que, conociendo la magnitud real y la longitud de la proyección frontal, por medio del teorema de Pitágoras obtuvimos la longitud de la proyección horizontal.

Lo único que resta es llevar las proyecciones de $\mathbf{p_1q_1}$ a las proyecciones originales y medir el la proyección horizontal original el rumbo que resulta ser de N81.27°E.

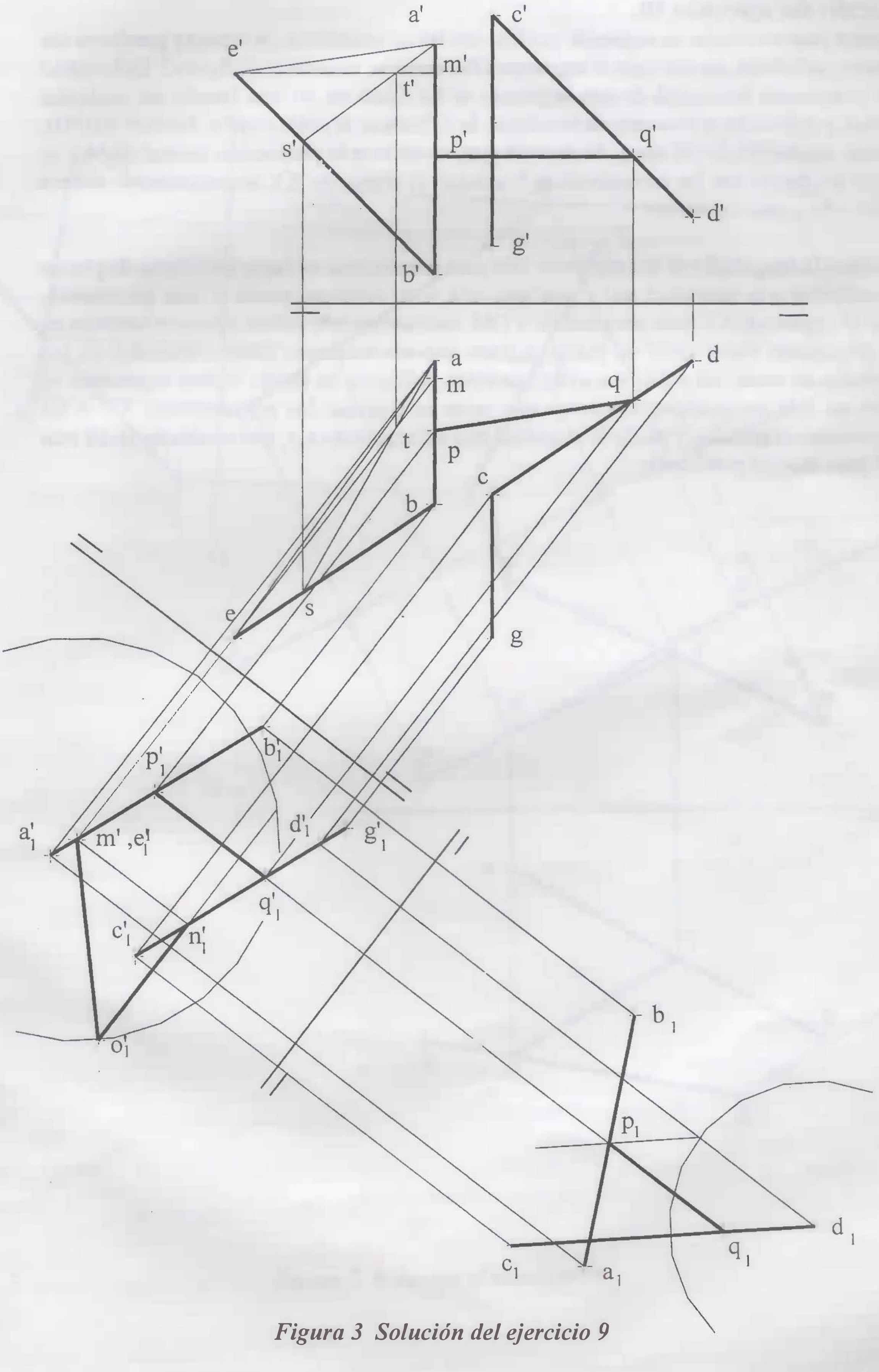


Figura 3 Solución del ejercicio 9

Solución del ejercicio 10.

El primer paso es dibujar un segmento auxiliar con las características de rumbo y pendiente del segmento solicitado, en este caso el segmento DM, como se muestra en la figura 2. La longitud de la proyección horizontal de este segmento se ha fijado en 40 mm (puede ser cualquier medida), y aplicando el concepto de pendiente, la diferencia de cotas resulta: Δcotas= m(lPH), es decir, Δcotas=(0.4) (40 mm), Δcotas=16 mm, se obtiene la proyección frontal de M y se tiene el segmento con las características buscadas, el segmento XY necesariamente deberá ser paralelo a este segmento.

Se obtiene la magnitud real del segmento DM para posteriormente hacer un cambio de planos perpendicular a la magnitud real y que aparezca visto como un punto en una proyección. Como el segmento XY debe ser paralelo a DM, necesariamente deberá aparecer también en esta proyección visto como un punto, y dado que sus extremos están contenidos en los segmentos de recta AB y CD sus extremos están definidos en donde dichos segmentos se cruzan en esta proyección. Lo único que resta es regresar las proyecciones XY a las proyecciones originales, y medir la magnitud real del segmento x_1y_1 que resulta de 36.19 mm (39.2 para efectos prácticos).

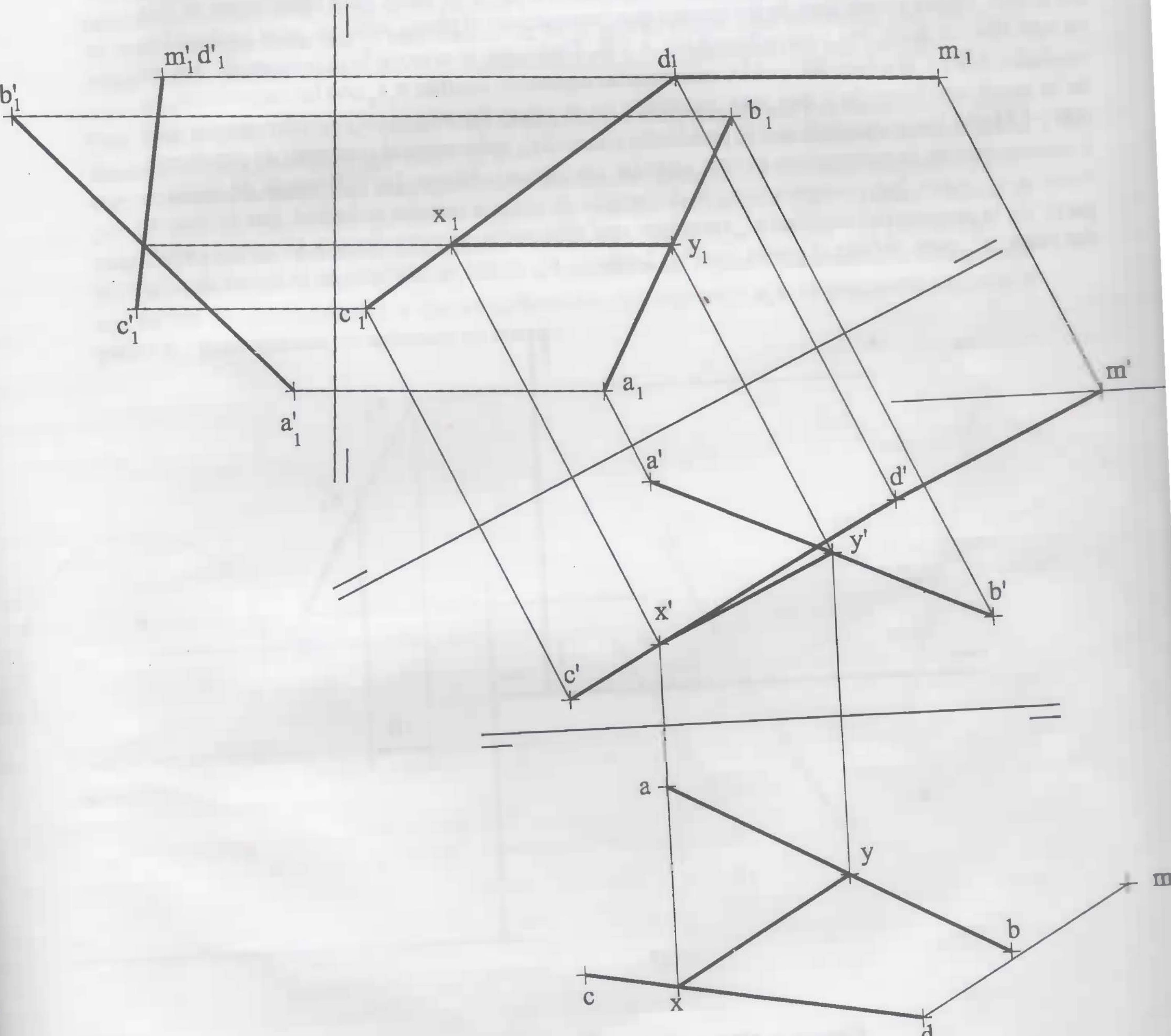


Figura 2 Solución al ejercicio 10

Solución del ejercicio 11.

Por ser un plano paralelo a la línea de tierra, en un cambio de planos que sea perpendicular a la misma, se debe ver el plano del filo, y dado que se conoce la pendiente de dos de sus lados, conviene hacer el cambio de planos perpendicular a la línea de tierra, dejando *fija* la proyección horizontal. Se obtienen las proyecciones auxiliares $\mathbf{a'_1 c'_1}$ y se unen para determinar el filo del plano. Todos y cada uno de los puntos que pertenezcan al plano deberán estar contenidos en este filo, es decir, los puntos buscados A y B. Dado que se conoce la pendiente de dos de sus lados **AB** *y* **CD** o bien **BC** y **AD,** trazamos un segmento auxiliar $\mathbf{a_1 x_1}$ con las características de la pendiente buscada y que esté contenido en el plano (en este caso consideraremos que **AB** y **CD** son los segmentos con la pendiente conocida), aplicamos el concepto de pendiente y vemos que en la proyección frontal auxiliar podríamos obtener las diferencia de cotas y como $\mathbf{a_1 x_1}$ es auxiliar podemos traza la diferencia de cotas a nuestra voluntad, por lo que, a partir de la proyección auxiliar $\mathbf{a'_1}$ trazamos una diferencia de cotas igual a 10 mm a partir del punto $\mathbf{a'_1}$ para definir el punto auxiliar buscado $\mathbf{x'_1}$, como se muestra en la figura 2.

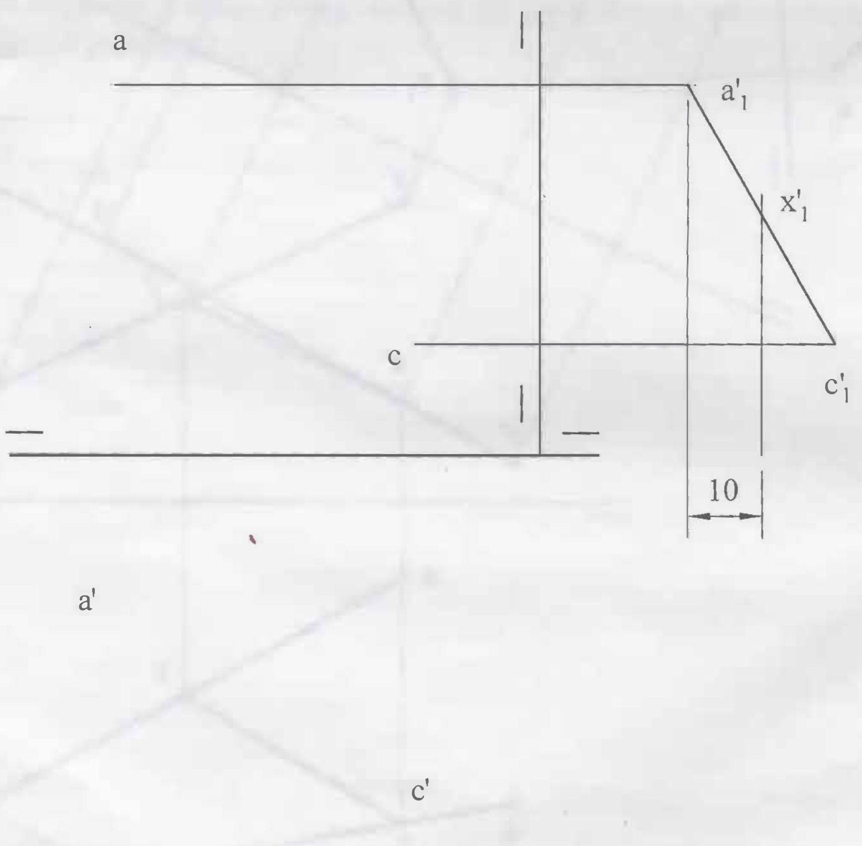


Figura 2 Obtención del filo del plano.

Una vez conocida la diferencia de cotas podemos obtener la longitud de la proyección horizontal por medio de la fórmula conocida de la pendiente:

m=Δcotas/lPH
con lo cual resulta que lPH= Δcotas/m, sustituyendo tenemos:

lPH=10 mm/0.5; LPH = 20 mm.

con lo que la longitud de la proyección horizontal del segmento auxiliar $\mathbf{AX_1}$ resulta de 20 mm. En la proyección horizontal original trazamos un arco con el valor calculado haciendo centro en la proyección horizontal **a,** y a partir del punto $\mathbf{x'_1}$ trazamos la perpendicular a la línea de tierra auxiliar, en donde se interseque con el arco trazado se localizará la proyección horizontal buscada de **x,** nótese que se pueden obtener dos posibles ubicaciones, se trabajará solo con una de ellas.

Para la magnitud real de un plano. ésta se manifiesta si en una de sus proyecciones el plano aparece visto como filo y por tanto en la otra proyección el plano es paralelo a ésta. con lo que se aprecia su magnitud real. En el caso que se nos presenta. ya tenemos el filo del plano. por lo que hay que hacer un nuevo cambio de planos. paralelo al filo. y poder obtener la magnitud real de nuestro cuadrilátero. Resulta que podemos obtener sin problemas las proyecciones horizontales $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{x_1}$, como se muestra en la figura 3. sabemos que el segmento a_1c_1 es una de sus diagonales, y que en la dirección del segmento $\mathbf{a_1x_1}$ se encuentra ubicado el punto $\mathbf{b_1}$, pero todavía no sabemos en donde.

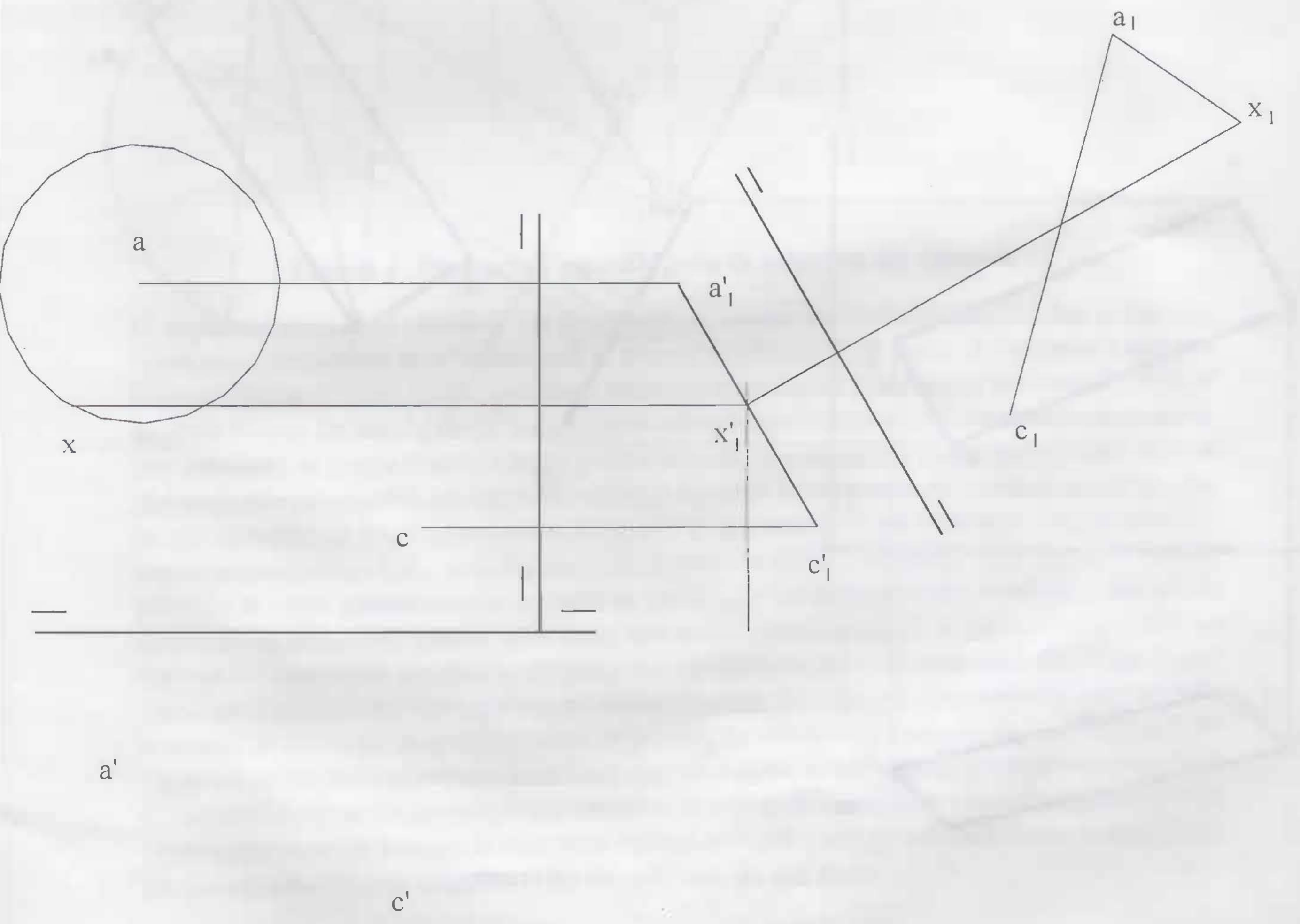


Figura 3 Obtención de la proyección en donde el plano aparecerá en magnitud real.

Como en esta proyección se debe apreciar la magnitud real del rectángulo, en cada uno de sus vértices deberá existir un ángulo recto y para garantizarlo emplearemos el teorema de Tales. A partir de la diagonal **a_1c_1**, se traza una semicircunferencia; en donde dicha semicircunferencia corte al segmento **a_1x_1** (en su defecto habría que prolongar dicho segmento hasta que corte a la semicircunferencia, pues su longitud depende de la diferencia de cotas que se haya propuesto) y ésta será la ubicación del punto **b_1** buscado. por paralelismo se concluye el trazo del rectángulo y se regresan las proyecciones auxiliares a las proyecciones originales, con lo que queda resuelto el ejercicio. El rectángulo que aparece con línea segmentada (de perfil oculto), **P** es otra posible solución al ejercicio, y resulta de construir dicho rectángulo tomando como uno de sus lados la intersección de la extensión del segmento **a_1x_2** con la semicircunferencia. El punto **x_2** es la proyección de la otra intersección de la circunferencia mostrada en la figura 3.

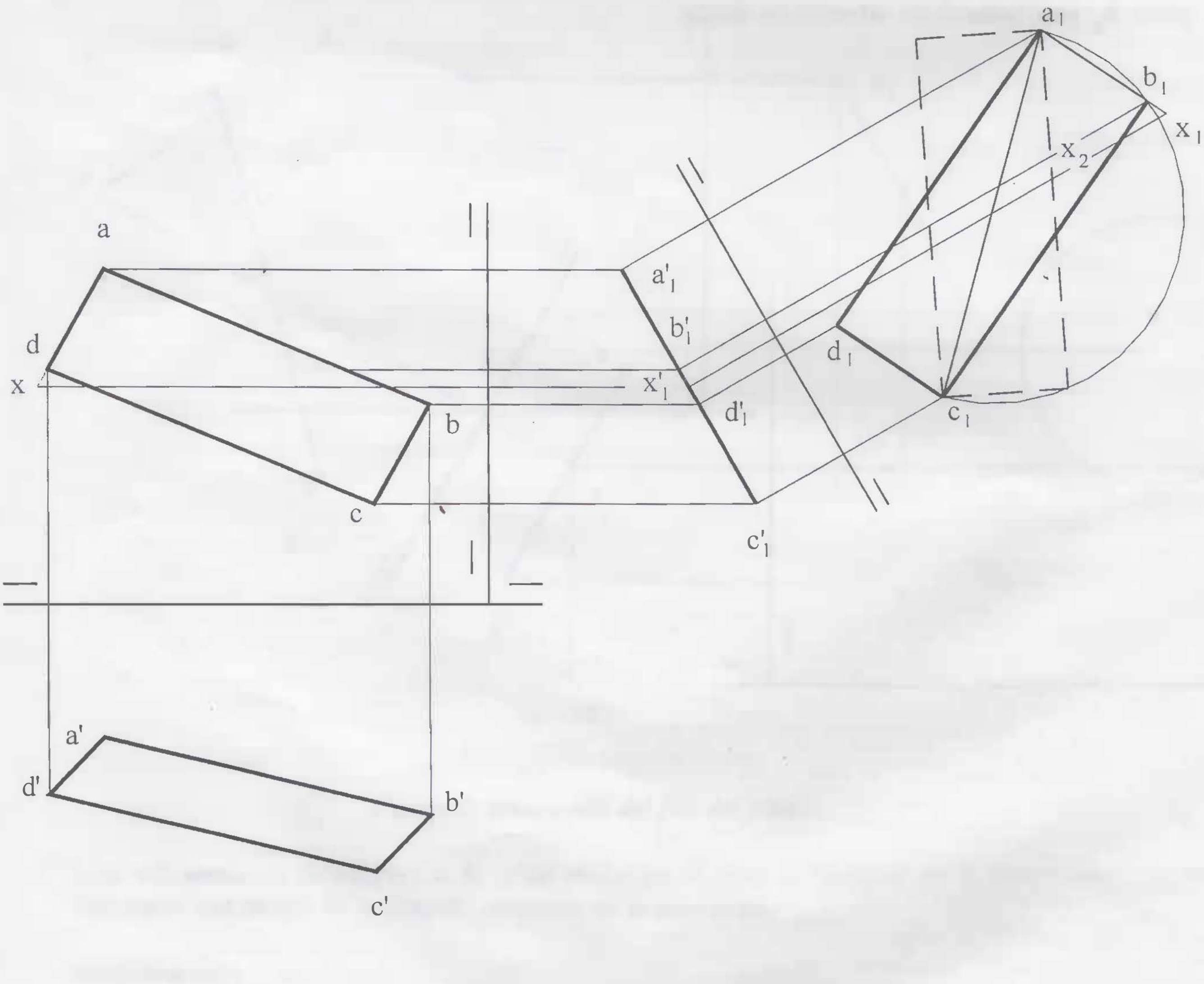


Figura 4 Solución del ejercicio 11

Solución del ejercicio 12.

Para la resolución de este ejercicio, consideraremos primero el tipo de plano que se trata a partir de la información proporcionada, las posibles rectas rectas con rumbo norte son: de punta y de perfil: y las posibles rectas con rumbo este son: fronto-horizontal y frontal . A partir de este análisis. el conjunto formado con las rectas de punta y fronto-horizontal o frontal resulta que forman un ángulo recto, y se necesita que formen un ángulo de 60°. por construcción del triángulo equilátero, por tanto la única posibilidad es que los segmentos sean de perfil y frontal, formando con esto un plano oblicuo que es el que contiene al triángulo equilátero.

La solución más fácil consiste en construir un cubo cuyas diagonales tengan una longitud de 30 mm y considerando el segmento faltante de tipo horizontal, como se muestra en la figura 1.

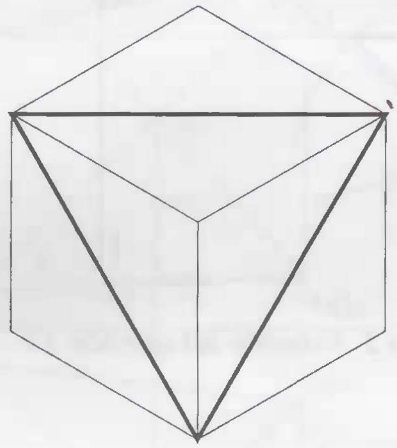


Figura 1 Ilustración espacial para la solución del ejercicio 12

El siguiente paso sería construir las proyecciones diédricas. Dado que no nos dan la línea de tierra consideraremos la solución para el primer cuadrante y un punto **A** cualquiera que nos permita iniciar el trazo. Como podemos observar en la figura 1. las rectas horizontal y frontal deberán formar un ángulo de 45° con respecto a los planos frontal y horizontal respectivamente, por otro lado se puede trazar el lugar geométrico de una de dichas rectas pues tienen cotas y alejamientos constantes, en este caso vamos a suponer al segmento **AC** como horizontal, por lo que trazamos el lugar geométrico del punto **C** que deberá tener la misma cota de **a'** y que identificamos como $\mathbf{LG}_C$ en la figura 2. El cambio de planos mostrado en la figura 2 se hace paralelo al lugar geométrico de la recta de perfil pues en la proyección auxiliar es en donde aparecerá la magnitud real de esta recta, que se ha identificado en la figura 2 como **AB,** se obtiene la proyección auxiliar $\mathbf{a}_1$ y a partir de este punto se traza un segmento de 30 mm y que forme un ángulo de 45° con la línea de tierra, el punto final de este segmento será el punto $\mathbf{b}_1$ buscado. se obtienen las proyecciones originales de este punto y a partir de la proyección **b'** y **a** se traza una circunferencia de 30 mm que va a cortar a los lugares geométricos del punto **C,** determinándose las proyecciones faltantes de triángulo equilátero buscado. Nótese que en ninguna proyección aparece la magnitud real del triángulo pero garantizamos que es equilátero por la construcción en magnitud real de cada uno de sus lados.

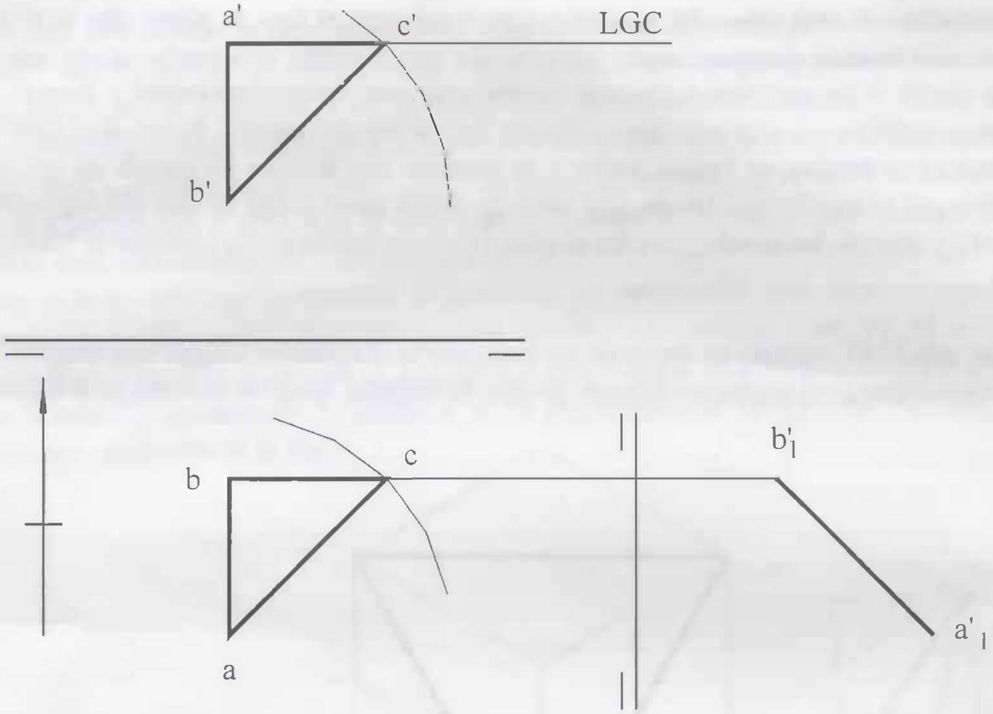


Figura 2 Solución del ejercicio 12.

Solución del ejercicio 13.

Para obtener la proyección horizontal del punto **C** (obsérvese que está en tercer cuadrante), basta con trazar las diagonales en la proyección frontal, definiendo al punto donde se cortan como **m'**, y como sabemos de dos rectas que se cortan definen un plano, encontramos la proyección horizontal **m** en la diagonal que va de **b** a **d**, con lo cual garantizamos que **m** esta contenido en el plano ABCDE, dado que pertenece a una recta que a su vez esta contenida en el plano. Posteriormente trazamos el segmento que va de **a** a **x** y en donde corte al lugar geométrico donde sabemos que esta la proyección de **c** (LGc en la figura 2) definimos al punto **c.**

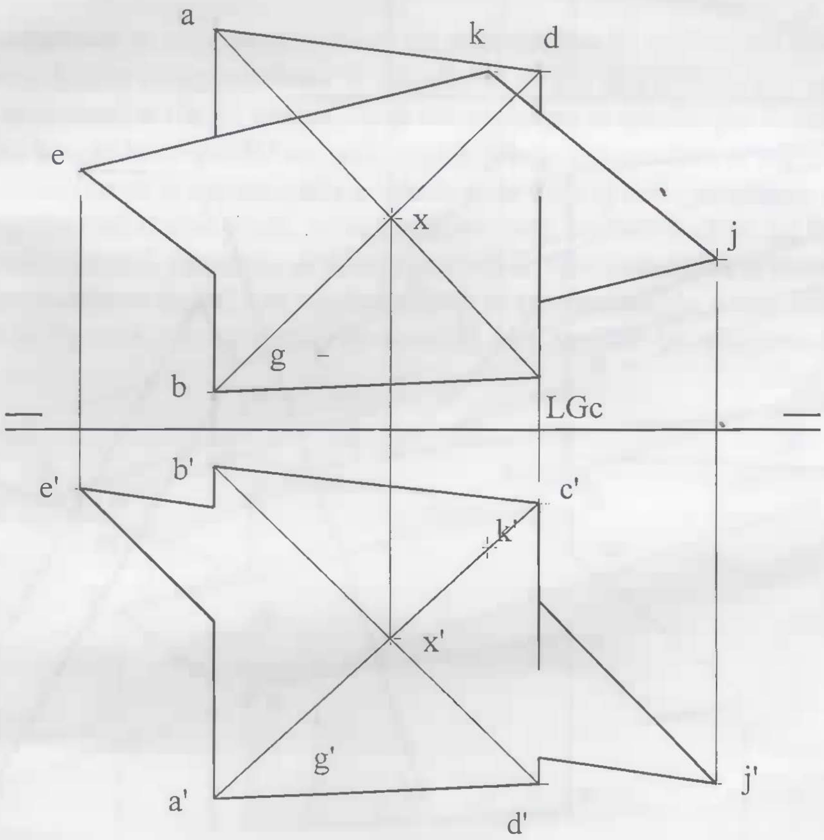


Figura 2 Obtención de la proyección horizontal del punto C.

Para obtener la intersección, lo más fácil es obtener una proyección en donde alguno de los planos se vea como filo, por lo que hay que hacer contener una recta horizontal o frontal en alguno de los planos y posteriormente hacer un cambio de planos perpendicular a la proyección en donde la recta contenida aparezca en magnitud real, para que al momento en que la recta se vea como punto, el plano se vea como filo. En este caso se propone una recta frontal EO, contenida en el plano EGJK, como se muestra en la figura 3.

En la figura 3 se observa que el plano EGJK corta al otro plano en los segmentos $\mathbf{c_1d_1}$ y $\mathbf{a_1b_1}$, definiéndose los puntos $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{m_1}$ respectivamente. Se obtienen las proyecciones originales respectivas, para la proyección frontal mediante líneas de referencia directas, y para la proyección frontal es mas fácil tomando los alejamientos de la proyección auxiliar y trasladándolos a la proyección horizontal original.

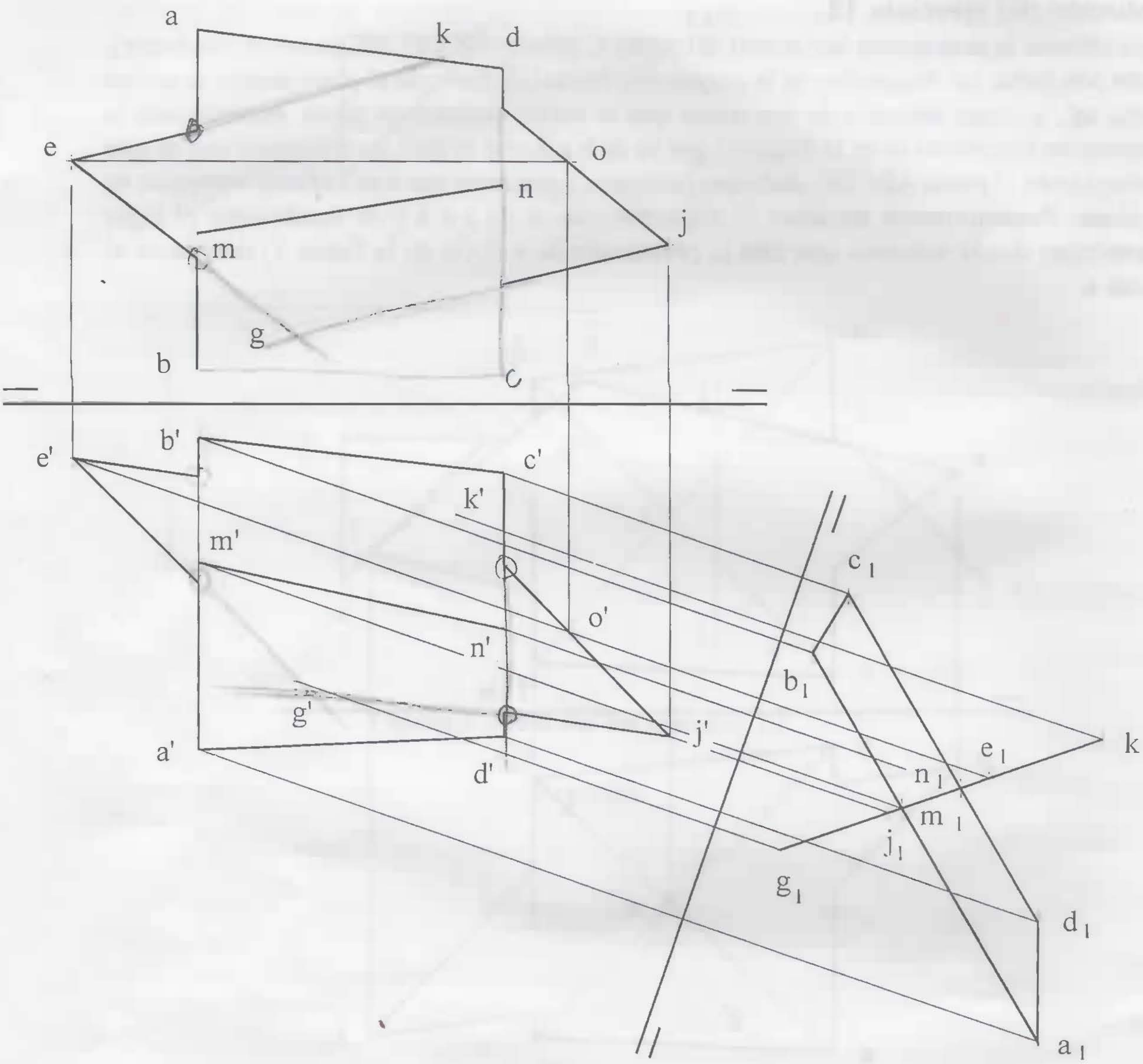


Figura 3 Obtención de un plano visto como filo, para determinar la intersección.

Para la visibilidad en la proyección horizontal, analizaremos primero el cruzamiento de los segmentos DE y AB. Dado que uno de los segmentos es de perfil, se hará uso de la propiedad de proporcionalidad de la recta, que establece: ***si un punto pertenece a una recta, la relación que exista de la longitud del punto en cuestión a uno de los extremos de la recta, deberá conservarse en las proyecciones diedricas***, es decir, si un punto se encuentra a la mitad de un segmento, en sus proyecciones dicho punto deberá estar justo a la mitad de las proyecciones, independientemente de la longitud de la proyección.

Analizando la proyección horizontal, del cruzamiento de los segmentos AB y KE, observamos que el punto que se encuentra sobre AB, identificado en este caso como y en a figura 4, esta aproximadamente a 3/4 del extremo a, por lo que en su proyección frontal deberá guardar esta misma proporción, y haciendo el análisis de visibilidad, vemos que al segmento EK lo ve primero el observador (recuérdese que estamos en el tercer cuadrante), por lo que "ocultaría" al punto **y'**, y por lo tanto en la proyección horizontal AB sera oculto justamente hasta la intersección **m**.

Para el caso de la proyección frontal, analizaremos el cruzamiento de GJ y CD, el punto identificado como **w'** vemos que está a 1/6 del extremo **d'** por lo que en la proyección horizontal deberá tener la misma relación, así el observador ve primero el segmento GJ pues la proyección de **w** esta muy cercana a **d** y el observador no lo vería, por lo tanto en la proyección frontal es visible el segmento GJ por lo que oculta a CD hasta la intersección **n'**.

Una vez determinada la intersección, basta un solo análisis de visibilidad por cruzamientos de rectas, para definir completamente la visibilidad de los dos planos, por ejemplo, para la proyección horizontal si EK es visible, no existe nada que lo oculte, por lo tanto será visible hasta el punto **k**, esto hace que KJ sea todo visible por lo que ocultara al segmento CD y este último será oculto hasta la intersección **n**, donde pasa a ser visible, ocultando a GJ, que al no tener intersección con el otro plano, es ocultada por este, completandose así la visibilidad en la proyección horizontal. Hacemos el mismo análisis de visibilidad para la proyección frontal, a partir del cruzamiento en **W**, y el resultado final de la intersección y visibilidad se muestra completo en la figura 4 con un rayado de sección, para facilitar la interpretación.

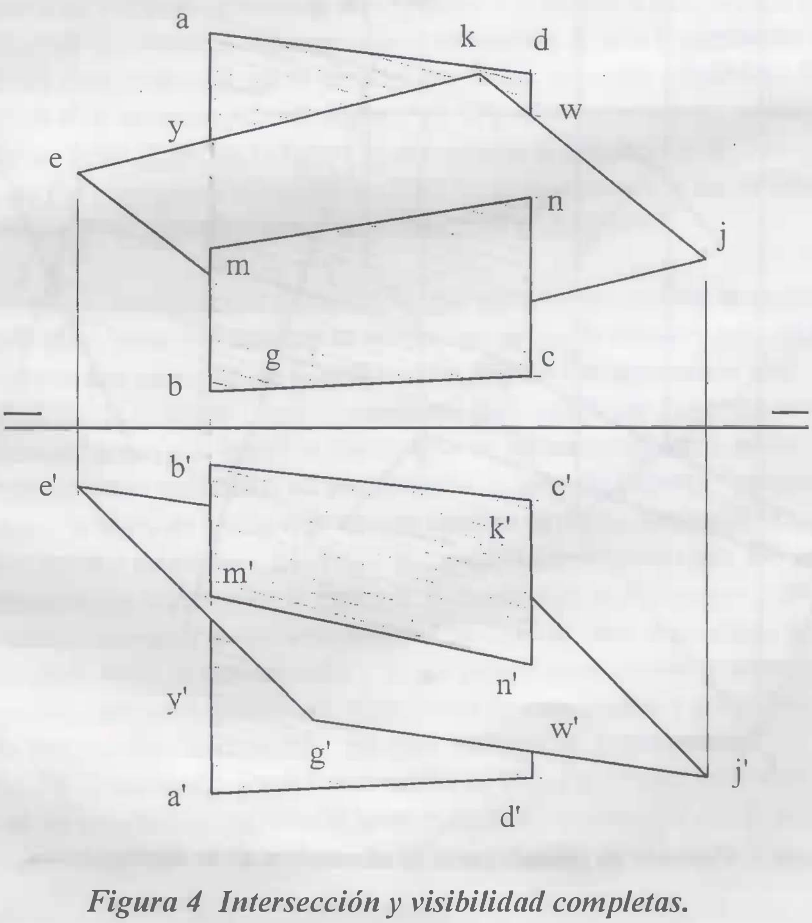


Figura 4 Intersección y visibilidad completas.

Solución del ejercicio 14.

Para la solución de este ejercicio conviene hacer un cambio de planos de tal forma que uno de los dos planos se vea como filo. Como únicamente se tiene la información completa de uno de los planos, en este caso PQR, propondremos una proyección en donde este plano se vea como filo. Como se conoce el alejamiento del punto I, la proyección auxiliar que obtengamos conviene que sea una horizontal, por lo que haremos contener una recta frontal en el plano PQR, PA en la figura 2, y hacemos el cambio de planos perpendicular a este segmento en magnitud real para obtener el filo del plano.

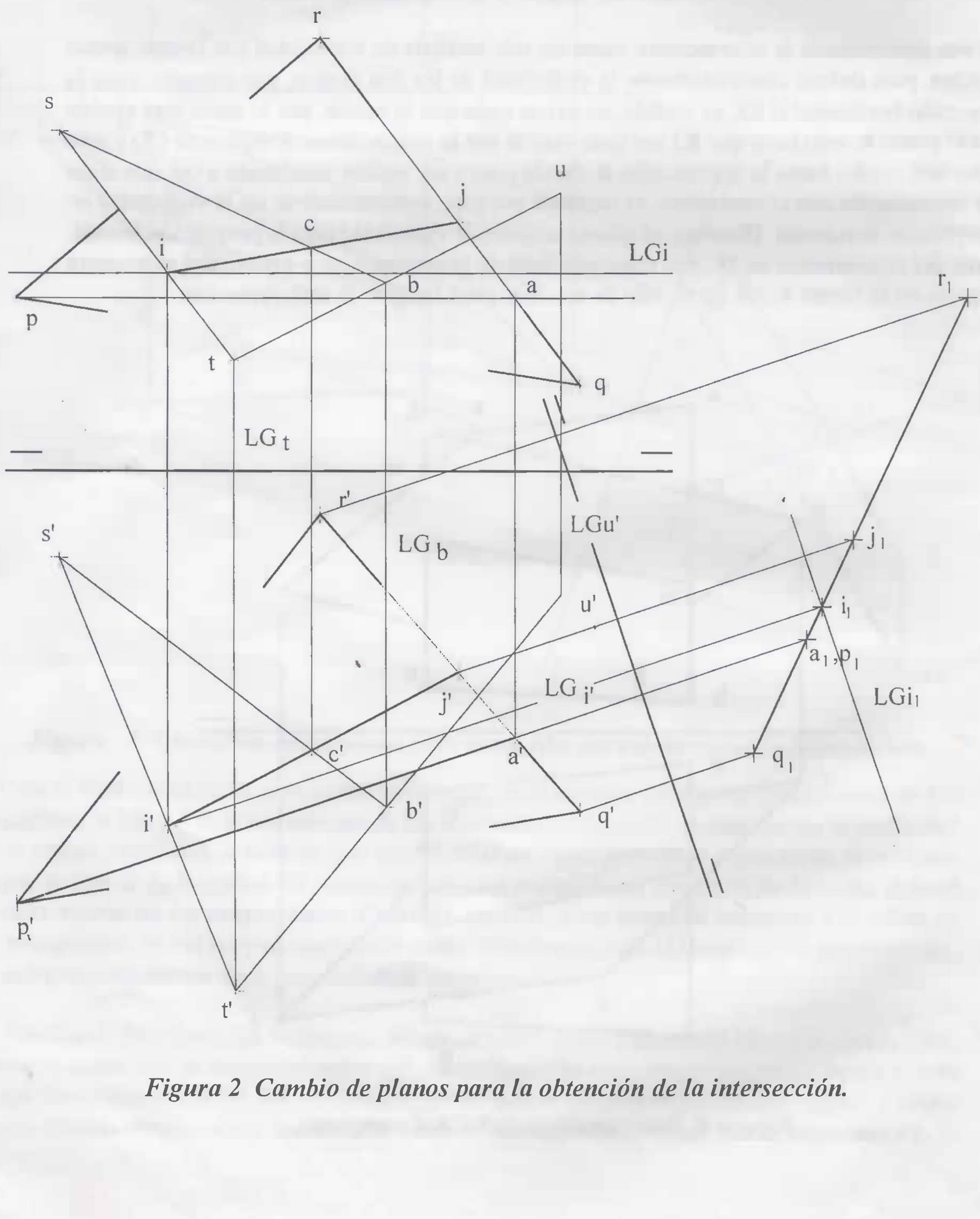


Figura 2 Cambio de planos para la obtención de la intersección.

Como el punto **J** es un punto de la intersección de los planos, debe pertenecer a ambos elementos, por lo que la proyección auxiliar $\mathbf{j_1}$ deberá caer necasariamente en el filo del plano, lo mismo deberá suceder con la proyección del punto $\mathbf{i_1}$, que tiene su ubicación en donde el lugar geométrico de todos los puntos con alejamiento -32, **LG** $\mathbf{i_1}$ en la figura 2, se intereseque con el filo del plano.

Trazamos el lugar geométrico de la proyección frontal original **i', Lgi'** en la figura 2, pero para saber en qué parte del plano se ubica, haremos la siguiente consideración: la intersección de dos planos está, o bien entre los límites de uno de ellos, (necesariamente en sus lados) o bien entre los límites de uno y otro plano, nunca una intersección puede considerarse si no es en los lados de los elementos geométricos, por tanto, en el caso que nos ocupa, la proyección frontal del punto I tiene tres posibilidades de ubicación en la proyección frontal original: el segmento QR, el segmento RP o el segmento ST. Se descartan definitivamente los posibles puntos sobre los límites del plano PQR por no estar comprendidos en la región del plano RST, lo que implica que el punto sobre ST es el que estamos buscando porque sí cae en la región del plano PQR; obtenemos su proyección horizontal **i** en donde la recta proyectante corte al lugar geométrico de todos los puntos de alejamiento -32 mm, **LGi** en la figura 2. Se localiza la proyección horizontal **t** en la intersección de los segmentos **si** y **LGt.**

Para la obtención de la proyección frontal u', emplearemos el concepto de punto contenido en un plano, que establece: ***un punto está contenido en un plano, si el punto está contenido en una recta que a su vez está contenida en el plano.*** Trazamos la proyección horizontal del segmento auxiliar **sb** que corte al segmento de intersección **ij**, con **b** contenido en **TU** y **c** en **IJ**, el segmento **sb** está contenido en el plano y por tanto, el punto **c** también. Obtenemos la proyección frontal **c'** y trazamos el segmento **s'c'**, lo prolongamos, y en su intersección con el lugar geométrico de **b'** (**Lgb'** en la figura 2) obtenemos la proyección **b'** que como sabemos está contenida en **t'u'**; trazamos el segmento **t'b'**, lo prolongamos, y en su intersección con el lugar geométrico de **u'** determinamos la proyección **u'** buscada.

Ya con el segmento de intersección definido, lo que resta es determinar la visibilidad, lo que realmente es más fácil, pues únicamente se analiza un punto de cruzamiento de las rectas que limitan a los planos, por ejemplo, en la proyección frontal los segmentos **r'q'** y **s'u'**, que al determinar su visibilidad en la proyección horizontal para establecer que recta está más cercana al observador (recordemos que estamos trabajando en tercer cuadrante), se hace con base en que tenga un mayor valor numérico de alejamiento, o bien de manera "práctica" aquel que esté más cercano a la línea de tierra, que en este caso es el punto contenido en **su,** por lo que en la proyección frontal marcamos **SU/RQ** , que podría leerse como que **SU** está delante de **RQ,** el procedimiento se muestra en la figura 3. Recordemos también que si un segmento de un plano es visible, entonces **necesariamente** "oculta" al otro segmento, por lo que **RQ** resultará oculto, justo hasta la intersección y de ahí pasará a ser visible ocultando al segmento **TU.** Se sigue estableciendo el análisis de visibilidad de esta forma, y posteriormente se hace lo propio en la proyección horizontal, un solo análisis de cruzamiento, en este caso los segmentos ST y PR (resultando que ST está arriba de PR, y por tanto es visible) y a partir de ahí la visibilidad. El resultado completo de la intersección y visibiildad del ejercicio se muestra en la figura 4, con lo que damos por terminada la resolución de este ejercicio.

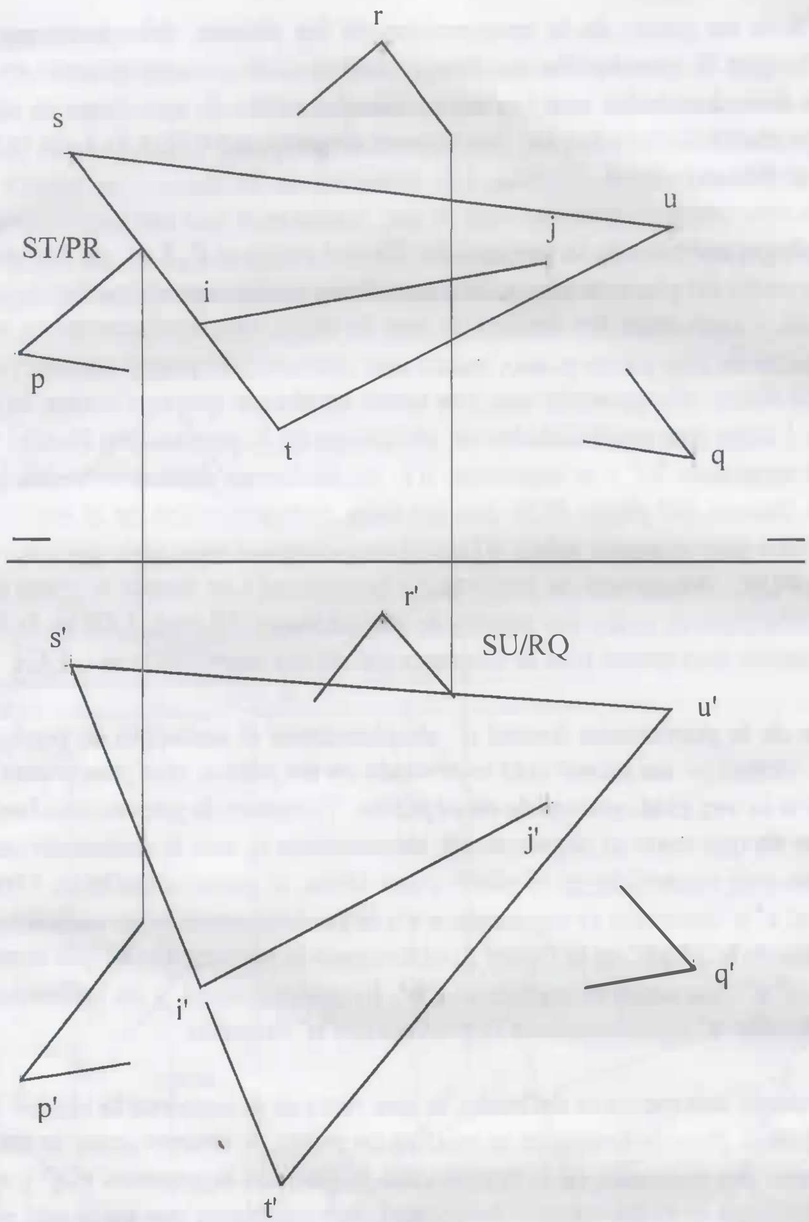


Figura 3 Análisis de visibilidad.

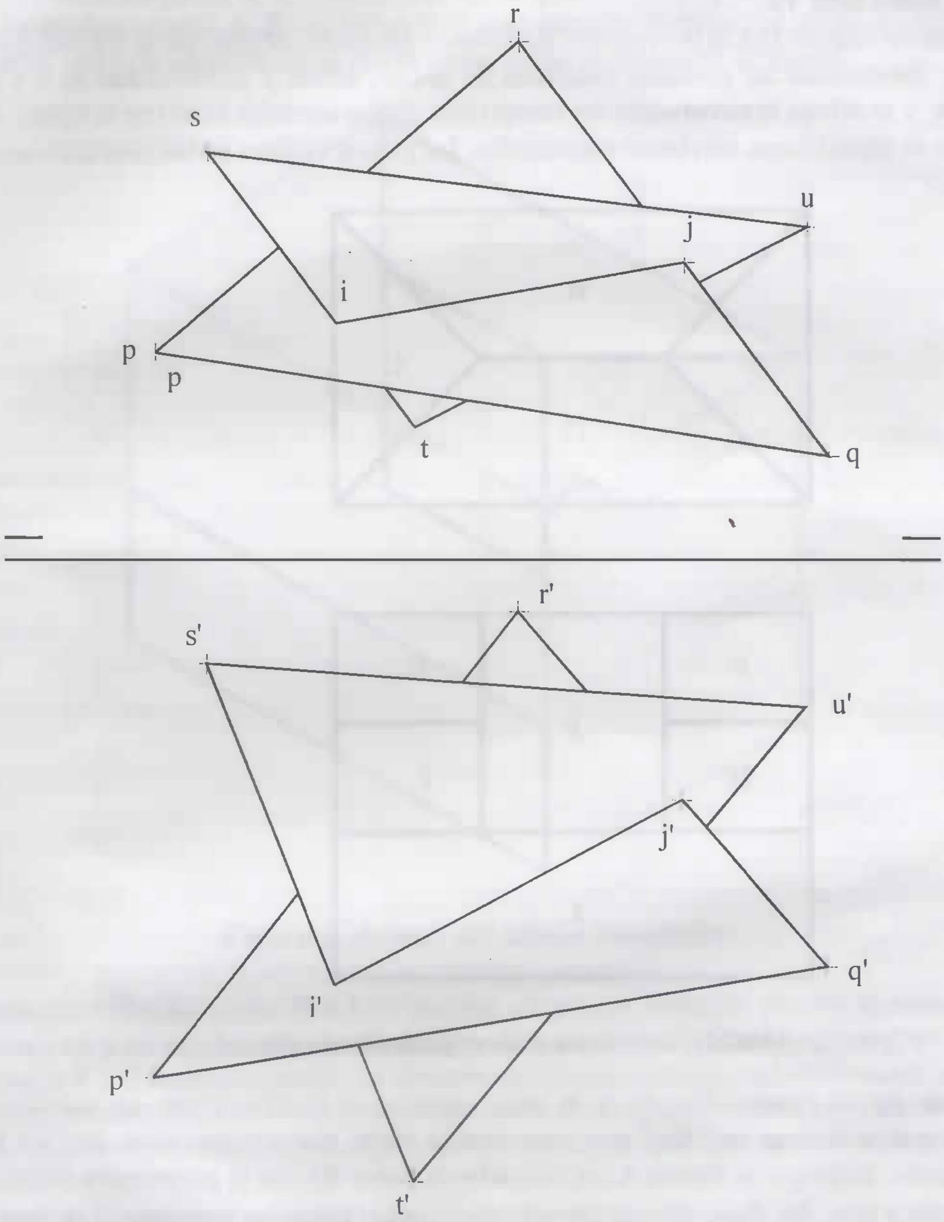


Figura 4 Solución completa de la intersección del ejercicio 14.

Solución del ejercicio 15.

El sistema del tercer ángulo fija la proyección horizontal dibujada "arriba" de la frontal, por consiguiente se determinan las medidas máximas de ancho, altura y profundidad a, h y p respectivamente, y se dibuja la envolvente del cuerpo con dichas medidas como en la figura 2, en la que además se identifican con letras mayúsculas, los planos visibles en las proyecciones.

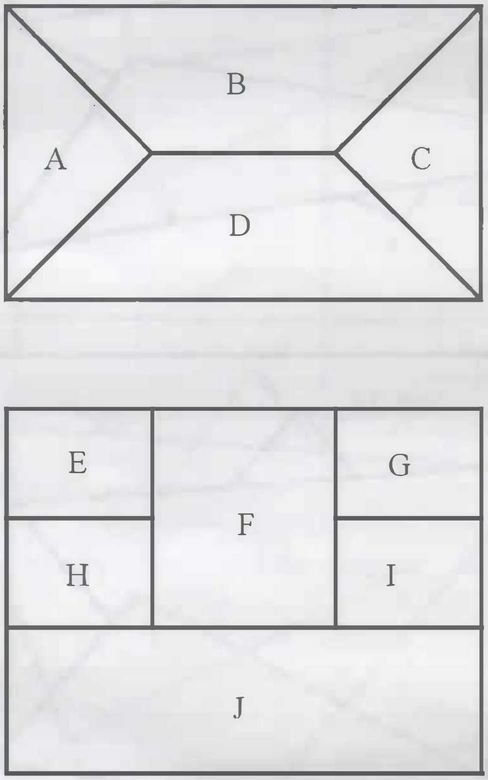


Figura 2 Medidas máximas e identificación de planos.

Supondremos uno de los planos ubicado en la parte superior de la envolvente, en virtud de que la proyección frontal tiene un "filo" que represente a dicho plano, y que tiene que ser **B** o **D** necesariamente, dado que si fueran **A** o **C** no debería haber filo en la proyección frontal en la parte superior y sí existe dicho filo, por lo que se eliminan estas dos opciones. Tampoco puede ser una combinación de ambas, **A** o **C** y **B** o **D**, porque al suponerlos en el límite de la envolvente se hacen mutuamente excluyentes, no podrían compartir un segmento si están contenidos en el mismo plano.

Optamos por el plano **B** en la parte superior de la envolvente y en la parte posterior de la misma, pues no se presentan líneas de perfil oculto en alguna de las proyecciones, cosa que favorecería el plano **C** al ubicarlo arriba y hasta delante. La figura 3 muestra el dibujo isométrico con las dimensiones máximas de la envolvente, y con la ubicación en la misma del plano identificado como **B** en la figura 2. Conviene aclarar que algunas personas se verían seducidas a obtener la proyección de perfil para obtener más información, antes de proceder a obtener el dibujo isométrico, pero resulta más fácil obtener el dibujo isométrico y ya con éste, en caso de que se pidiera, obtener esa tercera proyección.

Con la ubicación del plano **B,** salta a la vista que el plano **F** es un plano frontal que comparte la recta fronto-horizontal de **B;** se ubica **F,** y esto permite localizar al plano **J** como plano frontal en la parte de adelante de la envolvente, como se ilustra el la figura 3.

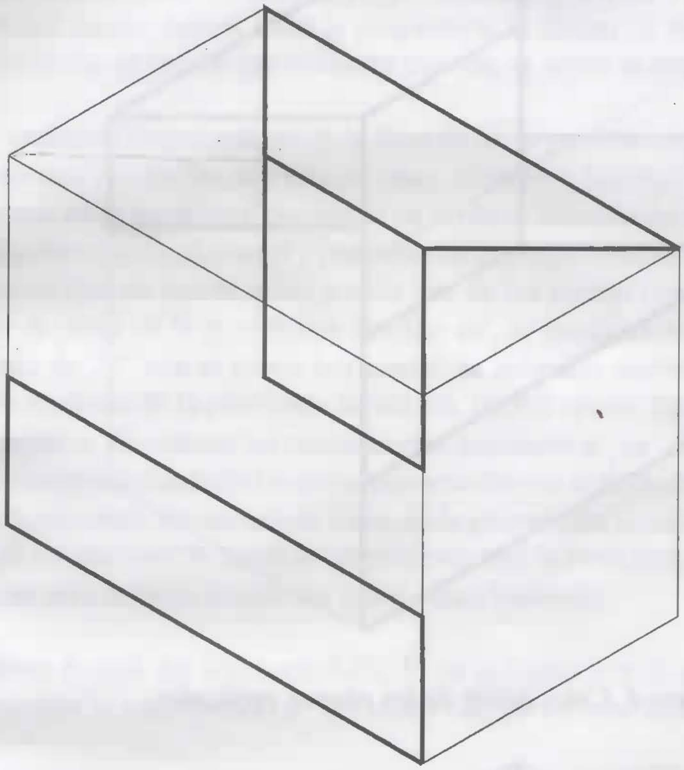


Figura 3 Avance del dibujo isométrico.

Los planos identificados como **H** e **I** no pueden ser planos frontales, porque el plano **J** ya se dibujo como tal y no pueden estar contenidos en el mismo plano y compartir una recta; y junto con los planos **E** y **G**, tampoco pueden ser frontales porque no existe filo en la proyección horizontal que permita hacer esa deducción, por tanto dicho planos tienen que ser verticales y en la proyección horizontal quedar representados por alguno de los segmentos que limitan a los planos **A** o **C**.

En el dibujo isométrico se bajan las rectas verticales del los planos **E** y **G** y se contruyen los planos verticales correspondientes. El plano **G** queda perfectamente definido en el dibujo isométrico, cosa que no sucede con el plano **E** que se "pierde" en el segmento vertical y no se ve su profundidad, esto sucede con algunos planos verticales que forman un ángulo de 45° con el plano frontal de proyección, en algunos casos se complica su interpretación. La figura 4 muestra la ubicación de los planos **E** y **G**.

Con relación a los planos verticales **H** e **I**. estos parten de las esquinas opuestas de los anteriormente trazados y hacia la parte interna. conformando también al plano **D**. como se observa en la figura 4, en donde se aprecia nuevamente que se pierde un plano. en este caso el plano **I**. Nótese que le falta forma al cuerpo, no puede quedar representado por algo que pudiera considerarse como láminas, o con espesor geométrico nulo, y para no variar las proyecciones deben considerarse que son filos los qie hacen falta, en este caso un plano horizontal y uno de perfil, con los cual quedan completas las proyecciones y que se muestran en la figura 5.

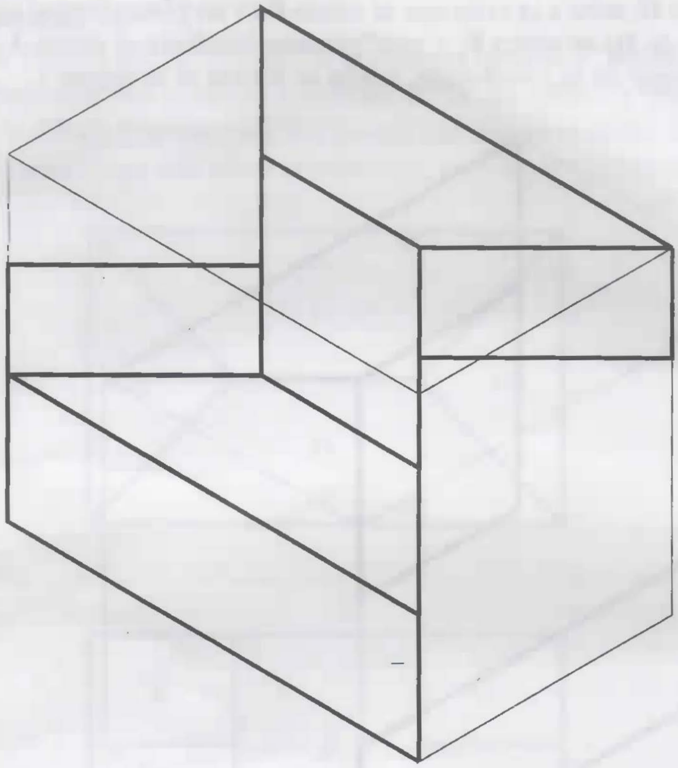


Figura 4 Colocación de los planos verticales.

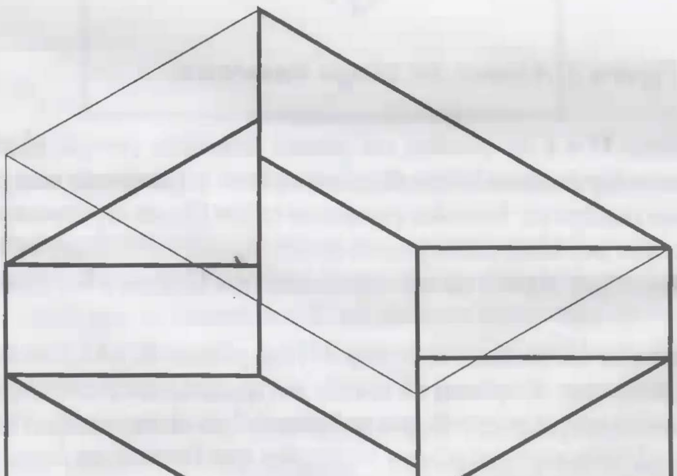


Figura 5 Dibujo isométrico completo del ejercicio 15.

Solución del ejercicio 16.

Como la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente es perpendicular a la traza horizontal del plano, a partir de la proyección **n** se traza una perpendicular al rumbo N45°W, y en este segmento deberá estar ubicada la proyección horizontal **m**. Por el punto **m'** se traza el lugar geométrico donde deberá estar la proyección **m** (LGm en la figura 2) y en donde corte a la perpendicular al rumbo previamente trazada, se ubica la proyección **m**.

Si hacemos un cambio de planos colocando la línea de tierra paralela a la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente, **mn** en este caso, estaremos haciendo un cambio de planos perpendicular a una recta horizontal contenida en el plano buscado (la traza horizontal es una recta horizontal contenida en el plano) y por tanto en la proyección auxiliar el plano buscado se deberá ver como filo, en donde todos y cada uno de los puntos contenidos en él, deberán caer en ese filo. A partir de la proyección auxiliar **m'**$_1$ se pueden trazar dos segmentos que formen un ángulo de 30° con el plano horizontal, la solución correcta es la mostrada por satisfacer la característica de la pendiente solicitada, la otra opción manda un segmento MN con pendiente negativa. Al obtener las proyecciones auxiliares **n'**$_1$ **m'**$_1$, y el segmento definido por dichas proyecciones extenderlo hasta su intersección con la línea de tierra auxiliar (punto **x'**$_1$ en la figura 2), se estará obteniendo la traza, en la proyección auxiliar, del plano buscado. Por **x'**$_1$ se traza el rumbo N45°W hasta la intersección con la línea de tierra original, punto **x'** en la figura 2, que será la traza horizontal α del plano buscado.

Obtenemos la traza frontal del segmento MN, **T**$_f$ en la figura 2, y al unir los puntos **t'**$_f$ y **x'** estaremos obteniendo la traza frontal α' del plano con las características del solicitado.

Para que un punto esté contenido en el plano, el punto deberá estar contenido en una recta que a su vez esté contenida en el plano. Bajo esta premisa y conociendo las trazas del plano que se identificó como A, se traza un segmento de recta frontal que contenga al punto **Q,** es decir, con un alejamiento de 20 mm trazamos una recta paralela a la línea de tierra y en la intersección con la traza horizontal a del plano, dibujamos una recta perpendicular a la línea de tierra hasta la intersección con ésta, que sería la traza horizontal de la recta frontal contenida en A. Como la traza frontal es una recta frontal del plano A, y toda recta frontal contenida en el plano es paralela a dicha traza, dibujamos una paralela a la traza frontal α' y en donde corte al lugar geométrico de la cota de **Q** obtendremos la proyección **q',** por este punto trazamos una perpendicular a la línea de tierra y en donde corte al lugar geométrico del alejamiento **Q,** obtenemos la proyección horizontal **b** buscada, como se muestra en la Figura 3.

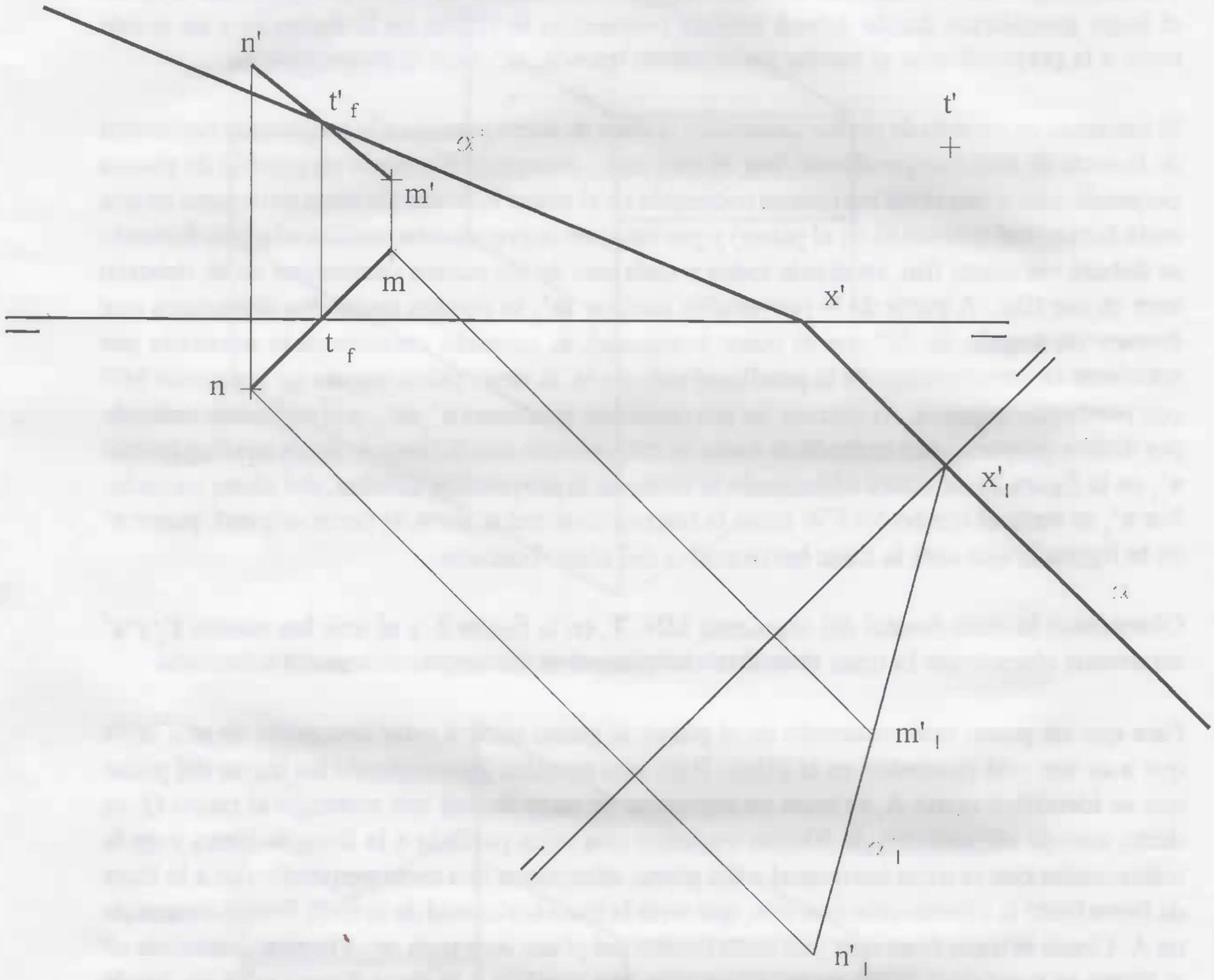


Figura 2 Obtención de las trazas del plano.

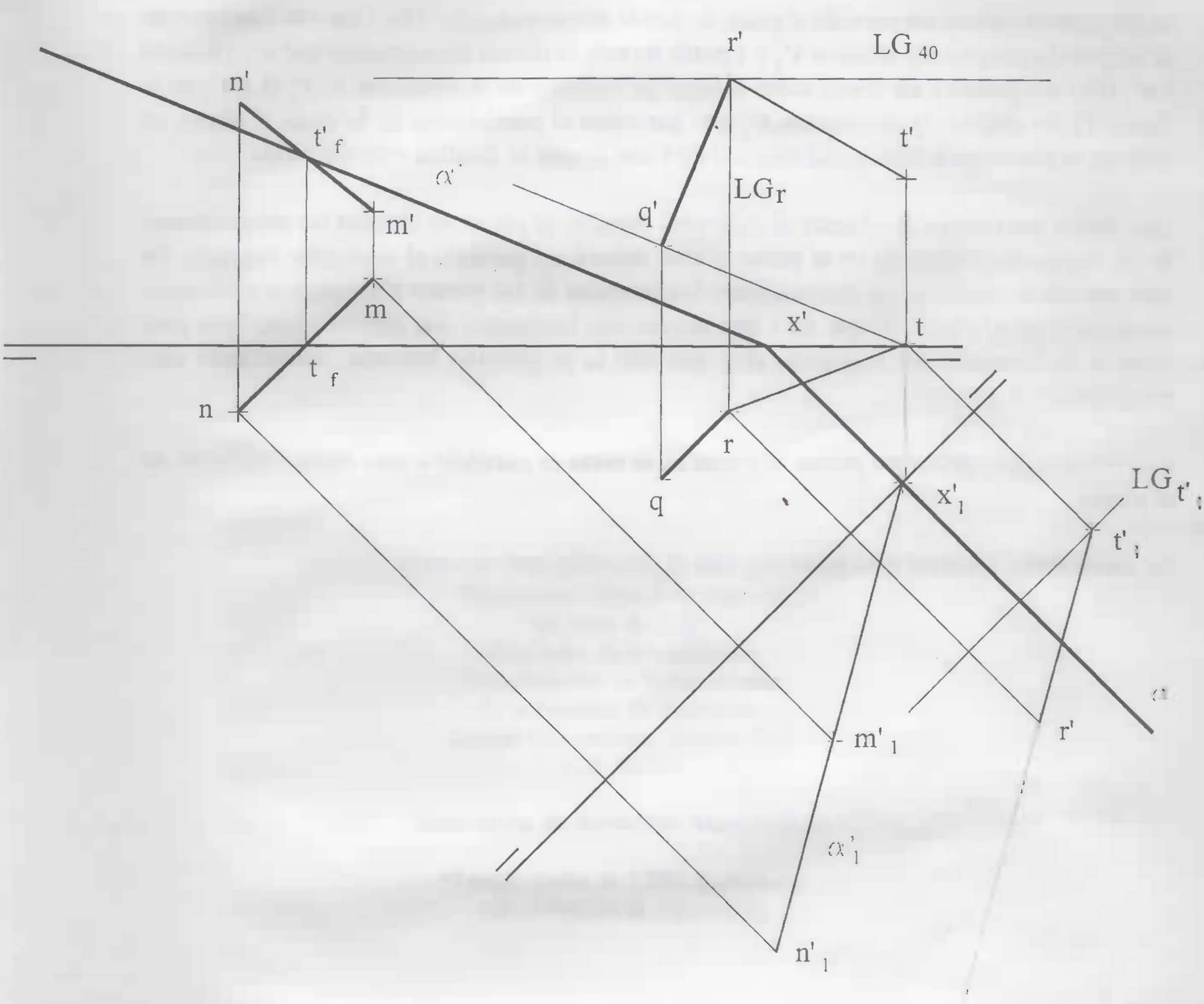


Figura 3 Obtención del punto Q, y las rectas perpendicular y paralela al plano A..

Sabemos que toda recta que sea perpendicular a un plano, deberá ser perpendicular al menos a dos diferentes tipos de rectas contenidas en el plano (de hecho es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano, pero para su ubicación basta con que sea perpendicualr a dos de ellas para poder garantizar dicha perpendicular). Para la obtención de la recta perpendicular al plano y que pase por **Q,** basta con trazar dos rectas perpendiculares a las trazas del plano que pasen por las proyecciones de **Q**, y en la proyección frontal donde la perpendicular que pasa por **q'** corte al lugar geometrico de todos los puntos con cota 40 (**LG** $_{40}$ en la figura 3) se define al punto **r'** buscado. Obtenemos la proyección horizontal **r** en la intersección de la perpendicular trazada por **q** con el segmento identificado como **Lg** $_{r}$ en la figura 3.

Para la obtención del segmento paralelo RT, dado que ya se tiene la proyección del plano A como filo (en donde aparece **n'**$_1$ **m'**$_1$ en magnitud real); toda recta que sea paralela a un plano, su proyección deberá ser paralela al plano en donde éste se vea como filo. Con este fundamento se obtiene la proyección auxiliar **r'$_1$** y a partir de ésta se dibuja un segmento que sea paralelo a **a'$_1$** (filo del plano) y en donde corte al lugar geométrico de la ubicación de **t'$_1$** (**LGt'$_1$** en la figura 1) se obtiene la proyección **t'$_1$** que garantiza el paralelismo de la recta al plano, se obtiene la proyección horizontal original de **t** con lo que se finaliza este ejercicio.

Una forma alternativa de obtener el segmento paralelo al plano, es obtener las proyecciones de un segmento contenido en el plano al cual deberá ser paralelo el segmento buscado. En este sentido se obtienen las proyecciones horizontales de los puntos **r't'** *como si estuvieran contenidos en el plano*, lo que dará una proyección horizontal que servirá como base para obtener la dirección del segmento **rt** y con ello la proyección buscada, sustentando este procedimiento en que:

una recta es paralela a un plano, sí y sólo sí, la recta es paralela a una recta contenida en el plano.

Se recomienda resolver esta parte con con el procedimiento descrito.

Esta obra se terminó de imprimir
en junio de 2001
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 1,500 ejemplares
más sobrantes de reposición.