GUIA de estudio para presentar examen extraordinario de

ESTATICA

PEDRO REYES G.
JOSE J. BERNAL M.
AURELIO ESTRADA S.

División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería UNAM

24-C

PROPOSITO DE LA GUIA

Este material tiene por objeto orientar a los estudiantes que desean prepararse para presentar examen extraordinario de la asignatura Estática.

La guía está destinada a los alumnos que ya han cursado la asignatura y que poseen ciertos conocimientos sobre la materia. LA GUIA NO PRETENDE SUSTITUIR A LOS CURSOS REGULARES, sino mejorar la preparación que el estudiante haya adquirido en ellos.

ESTRUCTURA DE LA GUIA

De cada tema del programa vigente de la asignatura se seleccionaron los conceptos fundamentales agrupándolos en bloques.

Cada uno de estos bloques contiene una *lista de conceptos* con sus respectivas referencias para localizarlos en los textos base, que son:

Ferdinand P. Beer y E. Russell Johnston, Jr.
MECANICA VECTORIAL PARA INGENIEROS ESTATICA (TOMO I)
McGraw-Hill
Tercera Edición, 1979.

F. Ocampo Canabal
MECANICA. ESTATICA (TOMO I)
Editorial Limusa
Primera Edición.

Facultad de Ingeniería, UNAM.
MECANICA I
Impos Editores, S. A.
Segunda Edición, 1980.

Estos textos deberán tenerse a la mano al utilizar la guía.

En cada uno de los bloques se presentan, además, algunos *ejemplos* que ilustran la aplicación de los conceptos.

Al término de cada tema se plantea un conjunto de *problemas propuestos*, para que el estudiante los resuelva y adquiera con ello la práctica necesaria en el manejo de los conceptos del tema.

Al final de la guía aparecen los resultados de algunos problemas propuestos, a fin de que el estudiante pueda compararlos con las respuestas que obtuvo.

INSTRUCCIONES PARA EL USO DE LA GUIA

1. Lea cuidadosamente la lista de conceptos que integran el primer bloque de cada tema y estudie secuencialmente cada uno de ellos en los textos base, poniendo especial cuidado en aquellos conceptos que no haya comprendido o adquirido en su preparación anterior.

2. Analice detenidamente los procedimientos que se siguieron para obtener la solución en los ejemplos, cerciorándose que ha comprendido claramente los razonamientos expuestos; esto puede lograrse reproduciendo el proceso de solución sin recurrir al texto.

3. Estudie los conceptos y los ejemplos del siguiente bloque, con las mismas indicaciones de los dos pasos anteriores.

4. Resuelva los problemas propuestos que se plantean al final de cada tema; en caso de que tenga dificultad, deberá estudiar nuevamente los conceptos del bloque e intentar una vez más resolver dichos problemas.

La guía está diseñada para servir como material de autoinstrucción; no obstante, si el estudiante no logra comprender algún concepto o no consigue resolver un problema, se le sugiere CONSULTAR A LOS ASESORES DE LA ASIGNATURA, quienes podrán orientarle al respecto.

SE REQUIEREN SESENTA HORAS DE TRABAJO, aproximadamente, para realizar las actividades que se proponen en esta guía, recomendándose distribuirlas en un periodo de tres a seis semanas. Es de suma importancia que el estudiante programe su trabajo con la debida anticipación y que inicie el estudio de la guía CUANDO MENOS TRES SEMANAS ANTES DE LA REALIZACION DEL EXAMEN.

La elaboración de este trabajo estuvo a cargo de los señores profesores:

ING. PEDRO REYES GINORI

ING. AURELIO ESTRADA SÁNCHEZ

ING. JOSE J. BERNAL MONTEMAYOR

quienes contaron con la asesoría pedagógica de la licenciada IRMA HINOJOSA FELIX, de la Unidad de Apoyo Editorial de la Facultad.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
MARZO DE 1984

I FUNDAMENTOS DE LA MECANICA CLASICA

Este tema comprende un bloque. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

I.2 MODELOS DE CUERPO: PUNTO, PARTICULA, CUERPO RIGIDO Y CUERPO DEFORMABLE
Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 12 y 13

I.3 CONCEPTOS DE CANTIDADES ESCALAR Y VECTORIAL
Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 13 a la 15
Estática, Beer y Johnston, página 17

I.4 LEYES DE NEWTON DE LA MECANICA CLASICA. LEY DE LA GRAVITACION UNIVERSAL
Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 15 a la 20
y ejemplos de las páginas 20 y 21

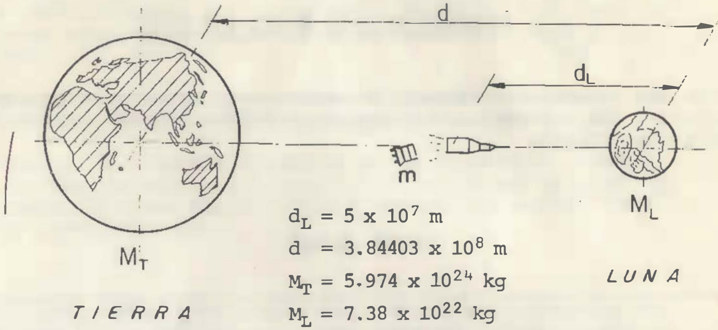
Ejemplo 1

Un cohete es lanzado al espacio desde la Tierra y, cuando se encuentra a 5×10^7 m de la Luna se desprende de él un elemento modular. Sabiendo que en ese instante el módulo no tiene velocidad y que las masas de la Tierra y de la Luna son, respectivamente $M_T = 5.974 \times 10^{24}$ kg y $M_L = 7.38 \times 10^{22}$ kg y que la distancia entre ambas es $d = 3.84403 \times 10^8$ m, determinar hacia dónde caerá y calcular cuál será su aceleración, suponiendo que el módulo en cuestión posee una masa $m = 2 \times 10^5$ kg.

Solución:

Como en el enunciado no se definen las dimensiones de los cuerpos, de I.2 concluimos que el modelo adecuado es la partícula y de I.4 sabemos que se aplicarán la segunda Ley de Newton y la Ley de la Gravitación Universal ya que se encuentran relacionados los conceptos de masa, peso y aceleración.

Conviene realizar un esquema en el que identifiquemos todos los conceptos que intervienen en el problema, así como una lista de los datos:



$$d_L = 5 \times 10^7 \text{ m}$$
$$d = 3.84403 \times 10^8 \text{ m}$$
$$M_T = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$$
$$M_L = 7.38 \times 10^{22} \text{ kg}$$
$$m = 2 \times 10^5 \text{ kg}$$
$$G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}.$$

Para saber hacia dónde caerá es necesario calcular la fuerza de atracción que ejercen ambos cuerpos celestes sobre el módulo en el punto donde se encuentra éste; por lo tanto, se aplicará la Ley de la Gravitación Universal, cuya expresión matemática es:

$$F = G \frac{M\, m}{d^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria de la Luna es:

$$F_L = G \frac{M_L\, m}{(d_L)^2}$$

sustituyendo los datos:

$$F_L = \frac{(6.673 \times 10^{-11})(7.38 \times 10^{22})(2 \times 10^5)}{(5 \times 10^7)^2}$$

efectuando las operaciones, nos queda:

$$F_L = 393.974 \text{ kg } \frac{m}{s^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra es:

$$F_T = G \frac{M_T\, m}{(d_T)^2} = G \frac{M_T\, m}{(d - d_L)^2}$$

sustituyendo los datos:

$$F_T = \frac{(6.673 \times 10^{-11})(5.974 \times 10^{24})(2 \times 10^5)}{(3.84403 \times 10^8 - 5 \times 10^7)^2}$$

y al efectuar las operaciones resulta:

$$F_T = 712.978 \text{ kg } \frac{m}{s^2}$$

Al comparar las fuerzas de atracción gravitatoria calculadas, se observa que la de la Tierra es de mayor magnitud, consecuentemente el elemento modular caerá hacia este planeta, con una aceleración que se determinará aplicando la expresión matemática de la segunda Ley de Newton:

$$F = m a$$

reemplazando los valores de F_T y m:

$$712.978 = 2 \times 10^5\, a$$

de donde:

$$a = \frac{712.978}{2 \times 10^5} = 3.565 \times 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Obsérvese la cuantía de esta aceleración, en comparación con la aceleración gravitatoria estándar.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un alpinista cuya masa es de 6.12 kg se encuentra en la cima del Monte Everest, cuya altura es de 8,839 m S.N.M. ¿Cuál será su peso en dicho lugar?. Considerar que la aceleración gravitatoria al nivel del mar es de 9.80665 m/s^2 y que el radio terrestre es R_T = 6,370,000 m.

2. A qué altura deberá saltar un paracaidista cuya masa es de 70 kg, para que en el instante en que salte pese 680 kg m/s^2. Considerar que la aceleración de la gravedad al nivel del mar es de 9.80665 m/s^2 y que el radio terrestre es R_T = 6,370,000 m.

3. Problema I.20. Series de ejercicios de Estática.

II SISTEMAS DE UNIDADES

Este tema comprende un bloque. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

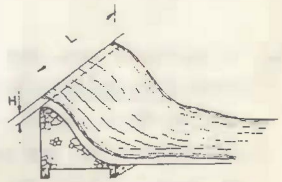
II.3.A ECUACIONES DIMENSIONALES	
Referencia:	Estática. F. Ocampo Canabal, páginas 16 a la 19
II.3.B TRANSFORMACION DE EXPRESIONES Y TRADUCCION DE FORMULAS	
Referencias:	Estática. F. Ocampo Canabal, páginas 21 y 22
	Apuntes de Mecánica I, página 28
	Norma Oficial Mexicana NOM - Z - 1 - 1981. Sistema Internacional de Unidades, páginas 13 a la 20

Ejemplo 1

Para calcular el caudal o gasto de un vertedor de demasías con descarga libre, en una presa de almacenamiento, en condiciones particulares puede aplicarse la fórmula de Francis:

$$Q = 1.933 \; \ell \; H^{3/2}$$

en donde:



Q = gasto (m^3/s)

ℓ = longitud de la cresta vertedora (m)

H = altura del agua sobre la cresta (m)

Investigar la homogeneidad de dicha expresión, determinando las dimensiones del coeficiente numérico y traducirla al sistema F.P.S.

Solución:

De acuerdo con II.3.A, procedemos al análisis dimensional de la fórmula, sustituyendo las literales por sus dimensiones:

$$Q = 1.933 \; \ell \; H^{3/2} \qquad \dots (1)$$

$$\frac{L^3}{T} = 1.933 \; L \; L^{3/2}$$

$$\frac{L^3}{T} = 1.933 \; L^{5/2} \qquad \dots (2)$$

Como las dimensiones no son las mismas en el primero y segundo miembros de la ecuación (2), ésta no es homogénea, por lo cual deducimos que el coeficiente no es adimensional.

Para determinar las dimensiones del coeficiente numérico lo despejamos de la ecuación (2):

$$1.933 = \frac{L^3}{T} \; \frac{1}{L^{5/2}}$$

simplificando:

$$1.933 = \frac{L^{1/2}}{T} \qquad \dots (3)$$

Así, las dimensiones de 1.933 son $\frac{L^{1/2}}{T}$, quedando homogénea la fórmula.

De II.3.B, puesto que la expresión (1) es válida en el SI, para que lo sea en el sistema inglés (F.P.S.) es necesario obtener el valor del coeficiente numérico correspondiente que, por lo pronto, lo identificamos con K.

$$Q = K \; \ell \; H^{3/2} \qquad \dots (4)$$

Como las dimensiones de la constante son $\frac{L^{1/2}}{T}$, quedará:

en el SI:

$$1.933 \; \frac{m^{1/2}}{s} \qquad \dots (5)$$

en el FPS:

$$K \; \frac{ft^{1/2}}{s} \qquad \dots (6)$$

igualando los términos (5) y (6):

$$K \; \frac{ft^{1/2}}{s} = 1.933 \; \frac{m^{1/2}}{s} \qquad \dots (7)$$

en la expresión (7) transformamos los metros a pies (o los pies a metros) para obtener el valor de K:

$$K \; \frac{ft^{1/2}}{s} = 1.933 \; \frac{(3.281 \; ft)^{1/2}}{s}$$

despejando K:

$$K = \frac{1.933 \; (3.281)^{1/2} \; (ft)^{1/2}}{s} \; \frac{s}{ft^{1/2}}$$

efectuando la operación y simplificando:

$$K = 3.5$$

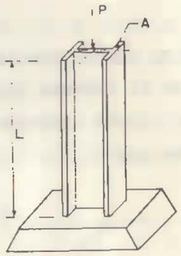
sustituyendo este valor en la expresión (4) tenemos la fórmula de Francis aplicable en el sistema F.P.S. de unidades:

$$Q = 3.5\ \ell\ H^{3/2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el cálculo del esfuerzo permisible para diseñar una columna metálica larga es posible aplicar la expresión:

$$f = 1195 - 0.0299 \left(\frac{L}{r}\right)^2$$



en donde:

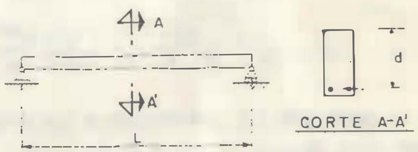
f = esfuerzo (kg/cm^2)

L y r = longitudes (cm)

Efectuar el análisis dimensional correspondiente para determinar las dimensiones de los términos numéricos y obtener la magnitud de éstos a fin de que dicha expresión sea válida en el sistema inglés.

2. La siguiente expresión relaciona el momento flexionante con el peralte efectivo de una viga de concreto armado:

$$M = 1640\ d - 557$$



en donde:

M = momento flexionante (lb · pulg)

d = peralte efectivo (pulg)

Analizar la homogeneidad y obtener el valor de los coeficientes para que en la expresión, M esté en kg · cm y d en cm.

3. Problema II.28. Series de Ejercicios de Estática.

4. Problema II.30. Series de Ejercicios de Estática.

(III) CONCEPTOS BASICOS DE LA ESTATICA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

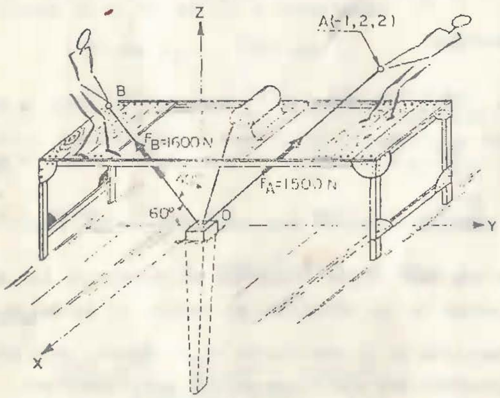
III.1	POSTULADO DE STEVINUS O REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 65 a la 67
III.3	COMPOSICION Y DESCOMPOSICION DE FUERZAS Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 73 a la 76 y ejemplo de la página 77

Ejemplo 1

Dos albañiles intentan extraer del suelo una tablestaca aplicando sus respectivas fuerzas mediante cables atados a ella, como se muestra en la figura.

a) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que debe generar el motor del malacate para producir el mismo efecto que el de los albañiles?

b) Si se requiere que los cables estén contenidos en el plano Y Z ¿Cuáles serán sus direcciones a fin de que su efecto sea igual al de la fuerza del motor actuando en la dirección del eje Z?



Solución:

En ambas preguntas intervienen los conceptos III.1, mientras que de III.3 se aplicará la composición de fuerzas para resolver la primera de ellas y para la segunda, la descomposición.

a) Dado que se pide una fuerza (R) que sustituya a dos conocidas (F_A y F_B), dicha fuerza es la resultante de éstas.

Como paso previo a la obtención de la resultante, conviene expresar vectorialmente a F_A y F_B:

$$\vec{F}_A = |\vec{F}_A|\ \vec{e}_{OA} \qquad y \qquad \vec{F}_B = |\vec{F}_B|\ \vec{e}_{OB}$$

sustituyendo los datos:

$$\vec{F}_A = 1500 \left[\frac{-i + 2j + 2k}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2}}\right]$$

$$\vec{F}_A = -500i + 1000j + 1000k \qquad [N]$$

Para determinar el vector equipolente $\vec{F}_B$, primero debemos obtener el valor del ángulo α:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - (\cos^2 60° + \cos^2 40°)} = 0.4040$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0.4040) = 66.2°$$

El vector equipolente F_B:

$$\vec{F}_B = 1600\ (\cos 66.2°\, i - \cos 60°\, j + \cos 40°\, k)$$

$$\vec{F}_B = 646.3i - 800j + 1225.7k \quad [N]$$

la fuerza resultante:

$$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = (-500i + 1000j + 1000k) +$$

$$+ (646.3i - 800j + 1225.7k)$$

$$\vec{R} = 146.3i + 200j + 2225.7k \quad [N]$$

su magnitud:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(146.3)^2 + (200)^2 + (2225.7)^2} = 2239.45 \quad [N]$$

y la dirección:

$$\cos\alpha = \frac{146.3}{2239.45} = 0.0653; \qquad \alpha = \cos^{-1}(0.0653) = 86.3°$$

$$\cos\beta = \frac{200}{2239.45} = 0.0893; \qquad \beta = \cos^{-1}(0.0893) = 84.9°$$

$$\cos\gamma = \frac{2225.7}{2239.45} = 0.9939; \qquad \gamma = \cos^{-1}(0.9939) = 6.4°$$

b) Para resolver este inciso tendremos en cuenta que las magnitudes de las fuerzas de los albañiles no varían, ni la del malacate.

Como la magnitud de la resultante ya se obtuvo, pero ahora tendrá la dirección del eje Z, su vector equipolente es:

$$\vec{R} = 2239.45\ k$$

De III.3, sabemos que se trata de descomponer una fuerza en dos ($\vec{F}_{A'}$ y $\vec{F}_{B'}$) cuyas magnitudes se conocen. Se debe cumplir:

$$\vec{R} = \vec{F}_{A'} + \vec{F}_{B'}$$

$$2239.45k = 1500\ (\cos\alpha_A i + \cos\beta_A j + \cos\gamma_A k) +$$

$$+ 1600\ (\cos\alpha_B i + \cos\beta_B j + \cos\gamma_B k)$$

$$0i + 0j + 2239.45k = (1500\cos\alpha_A + 1600\cos\alpha_B)\,i +$$

$$+ (1500\cos\beta_A + 1600\cos\beta_B)\,j +$$

$$+ (1500\cos\gamma_A + 1600\cos\gamma_B)\,k$$

Como los coeficientes de los vectores unitarios iguales, en ambos miembros, deben ser iguales también, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$1500\cos\alpha_A + 1600\cos\alpha_B = 0 \quad \ldots (1)$$

$$1500\cos\beta_A + 1600\cos\beta_B = 0 \quad \ldots (2)$$

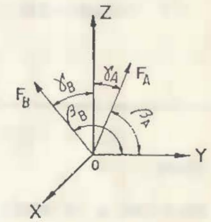
$$1500\cos\gamma_A + 1600\cos\gamma_B = 2239.45 \quad \ldots (3)$$

Auxiliándonos de un esquema analizaremos la relación entre los ángulos directores de los vectores equipolentes de las fuerzas. En el esquema observamos que se cumple:

$$\cos\alpha_A = \cos\alpha_B = 0 \quad \ldots (4)$$

$$\cos\beta_A = \text{sen}\,\gamma_A \quad \ldots (5)$$

$$\cos\beta_B = \text{sen}\,\gamma_B \quad \ldots (6)$$



por lo cual tenemos un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas.

Sustituyendo (5) y (6) en (2) y despejando:

$$1500\ \text{sen}\,\gamma_A = -1600\ \text{sen}\,\gamma_B$$

$$1500\cos\gamma_A = 2239.45 - 1600\cos\gamma_B$$

elevando al cuadrado ambas igualdades y sumándolas miembro a miembro:

$$(1500)^2(\text{sen}^2\gamma_A + \cos^2\gamma_A) = (2239.45)^2 - 2(2239.45)(1600)\cos\gamma_B +$$

$$+ (1600)^2(\cos^2\gamma_B + \text{sen}^2\gamma_B)$$

despejando:

$$\cos\gamma_B = \frac{(2239.45)^2 + (1600)^2 - (1500)^2}{2(2239.45)(1600)} = 0.7431$$

$$\therefore \quad \gamma_B = 42°$$

A partir de este valor podemos conocer todos los demás ángulos que definen la dirección de cada una de las fuerzas:

Dirección de F_A	Dirección de F_B
$\alpha_A = 90°$	$\alpha_B = 90°$
$\beta_A = 44.45°$	$\beta_B = 132°$
$\gamma_A = 45.55°$	$\gamma_B = 42°$

SEGUNDO BLOQUE

III.5 COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA; ECUACION VECTORIAL DE SU SOPORTE

Referencia: Apuntes de Mecánica 1, páginas 88, 89 y 83, y ejemplos de las páginas 89 y 90

III.6 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 91 y 92 y ejemplo de la página 94

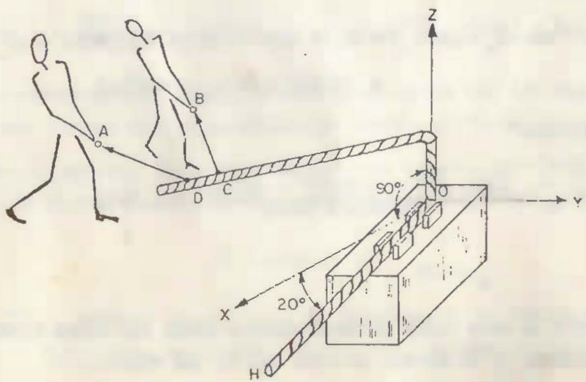
Estática, Beer y Johnston, páginas 81 a la 83

Ejemplo 2

Para dar a la varilla la forma requerida en el armado de una columna, dos fierreros le aplican fuerzas cuyas líneas de acción quedan definidas por los puntos A(200, -80, 95), B(150, -70, 90) C(130, 0, 75) y D(140, -20, 70) en centímetros. Las magnitudes de las fuerzas son $F_{DA} = 150\ kg_f$ y $F_{CB} = 180\ kg_f$.

a) ¿Cuáles serán las coordenadas vectoriales de ambas fuerzas?

b) ¿Cuál será la expresión vectorial del momento de cada fuerza con respecto al tramo HO?



Solución:

a) De III.5 sabemos que las coordenadas vectoriales las forman el vector equipolente y el momento de la fuerza con respecto al origen del sistema de referencia.

Cálculo de los vectores equipolentes:

$$\vec{F}_{DA} = 150\left[\frac{(200-140)i + (-80+20)j + (95-70)k}{\sqrt{(200-140)^2 + (-80+20)^2 + (95-70)^2}}\right]$$

$$\vec{F}_{DA} = 101.7\,i - 101.7\,j + 42.4\,k \quad [\,kg_f\,]$$

$$\vec{F}_{CB} = 180\left[\frac{(150-130)i + (-70-0)j + (90-75)k}{\sqrt{(150-130)^2 + (-70-0)^2 + (90-75)^2}}\right]$$

$$\vec{F}_{CB} = 48.4\,i - 169.5\,j + 36.3\,k \quad [\,kg_f\,]$$

Cálculo de los momentos con respecto al origen:

$$\vec{M}_O^{DA} = \vec{r}_{OD} \times \vec{F}_{DA} = (140\,i - 20\,j + 70\,k) \times (101.7\,i - 101.7\,j + 42.4\,k)$$

$$\vec{M}_O^{DA} = 6271\,i + 1183\,j - 12204\,k \qquad [\,kg_f \cdot cm\,]$$

$$\vec{M}_O^{CB} = \vec{r}_{OC} \times \vec{F}_{CB} = (130\,i + 75\,k) \times (48.4\,i - 169.5\,j + 36.3\,k)$$

$$\vec{M}_O^{CB} = 12712.5\,i - 1089\,j - 22035\,k \quad [\,kg_f \cdot cm\,]$$

Las coordenadas vectoriales son:

$$\vec{F}_{DA} = \left[\,101.7\,i - 101.7\,j + 42.4\,k,\ 6271\,i + 1183\,j - 12204\,k\,\right]$$

$$\vec{F}_{CB} = \left[\,48.4\,i - 169.5\,j + 36.3\,k,\ 12712.5\,i - 1089\,j - 22035\,k\,\right]$$

b) Aplicando los conceptos III.6 obtenemos el momento de una fuerza con respecto a un eje.

Como el origen del sistema de referencia es un punto que forma parte de HO, con respecto al cual se calcularán los momentos, ya se obtuvieron los momentos respecto a este punto de dicho eje HO.

Ahora determinamos el vector unitario $\vec{e}_{HO}$ que define la dirección HO.

$$\vec{e}_{HO} = -\cos 20°\,i - \cos 70°\,j + \cos 90°\,k = -0.9397\,i - 0.3420\,j$$

Aplicando la expresión:

$$\vec{M}_{E'E} = (\vec{M}_\Omega \cdot \vec{e})\,\vec{e}$$

Cálculo del momento de $\vec{F}_{DA}$ con respecto a HO:

$$\vec{M}_{HO}\,\vec{F}_{DA} = (\vec{M}_O^{DA} \cdot \vec{e}_{HO})\,\vec{e}_{HO}$$

sustituyendo valores:

$$\vec{M}_{HO}\vec{F}_{DA} = \left[(6271i + 1183j - 12204k) \cdot (-0.9397i - 0.3420j)\right](-0.9397i - 0.3420j)$$

$$\vec{M}_{HO}\,\vec{F}_{DA} = (-5892.86 - 404.59)(-0.9397i - 0.3420\,j)$$

$$\vec{M}_{HO}\,\vec{F}_{DA} = 5917.7\,i + 2153.7\,j \quad [\,kg_f \cdot cm\,]$$

Cálculo del momento de $\vec{F}_{CB}$ con respecto a HO:

$$\vec{M}_{HO}\,\vec{F}_{CB} = (\vec{M}_O^{CB} \cdot \vec{e}_{HO})\,\vec{e}_{HO}$$

sustituyendo valores:

$$\vec{M}_{HO}\vec{F}_{CB} = \left[(12712.5i - 1089j - 22035k) \cdot (-0.9397i - 0.3420j)\right](-0.9397i - 0.3420j)$$

$$\vec{M}_{HC}\,\vec{F}_{CB} = (-11945.9 + 372.4)(-0.9397\,i - 0.3420\,j)$$

$$\vec{M}_{HO}\,\vec{F}_{CB} = 10875.6\,i + 3958.1\,j \quad [\,kg_f \cdot cm\,]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Problemas 3.17-i, 4.14, 4.16 y 4.19. Series de ejercicios de Está-
tica.

IV ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

IV.1 COORDENADAS VECTORIALES DE UN SISTEMA DE FUERZAS. EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS DE FUERZAS
Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 99 a la 101, 110 y 111 y ejemplos de las páginas 108 y 111

IV.2 TRASLACION DE UNA FUERZA Y PAR DE TRANSPORTE
Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 119 a la 122 y ejemplo de la página 122
Estática, Beer y Johnston, problema modelo 3.7, página 96

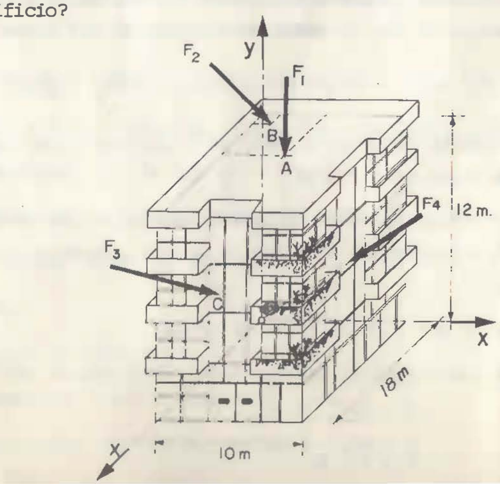
IV.4 REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA SOLA FUERZA
Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 123 a la 125, 129 y 130 y ejemplos de las páginas 131 y 132

Ejemplo 1

En un edificio de departamentos actúa el sistema de fuerzas formado por:

cargas vivas	$\vec{F}^1 = -300\,k$ [t_f] ;	A(9, 5, 12) [m]
cargas muertas	$\vec{F}^2 = 7\,i + 8\,j - 56\,k$ [t_f]	B(3, 4, 12) [m]
fuerzas debidas al viento	$\vec{F}^3 = -30\,i - 6\,j + 5\,k$ [t_f];	C(18, 5, 9) [m]
fuerzas por sismo	$\vec{F}^4 = 25\,i + 2.3\,j + 149.33\,k$ [t_f];	O(0, 0, 0) [m]

¿Cuáles serán las coordenadas vectoriales del sistema equivalente al anterior, si se requiere que la resultante pase por el centro geométrico del edificio?



Solución:

Para determinar un sistema equivalente con las características que se indican, previamente se obtendrán las coordenadas vectoriales del sistema de fuerzas actuante en el edificio, lo cual se lleva a cabo aplicando IV.1.

Cálculo de la resultante:

$$\vec{R}=\sum_{i=1}^{4}\vec{F}^i=\vec{F}^1+\vec{F}^2+\vec{F}^3+\vec{F}^4=(-300k)+(7i+8j-56k)+(-30i-6j+5k)+$$

$$+(25i+2.3j+149.33k)$$

$$\vec{R}=2i+4.3j-201.67k\ [t_f]$$

Cálculo de los momentos:

$$\vec{M}^1_O=\vec{r}_{OA}\times\vec{F}^1=(9i+5j+12k)\times(-300k)=-1500i+2700j$$

$$\vec{M}^2_O=\vec{r}_{OB}\times\vec{F}^2=(3i+4j+12k)\times(7i+8j-56k)=-320i+252j-4k$$

$$\vec{M}^3_O=\vec{r}_{OC}\times\vec{F}^3=(18i+5j+9k)\times(-30i-6j+5k)=79i-360j+42k$$

$\vec{M}^4_O=\vec{0}$ ya que la línea de acción de $\vec{F}^4$ pasa por el centro de momentos.

$$\vec{R}_O=\sum_{i=1}^{4}\vec{M}^i_O=\vec{M}^1_O+\vec{M}^2_O+\vec{M}^3_O+\vec{M}^4_O=(-1500i+2700j)+(-320i+252j-4k)+$$

$$+(79i-360j+42k)$$

$$\vec{R}_O=-1741i+2592j+38k\ [t_f\cdot m]$$

Las coordenadas vectoriales del sistema original de fuerzas son:

$$\vec{R}=(2i+4.3j-201.67k\ ,\ -1741i+2592j+38k)$$

Para saber a qué se reduce este sistema de fuerzas, efectuamos el producto escalar de las coordenadas vectoriales del mismo.

$$\vec{R}\cdot\vec{R}_O=(2i+4.3j-201.67k)\cdot(-1741i+2592j+38k)=0$$

Como este producto es igual a cero, de IV.4, concluímos que el sistema se reduce a una sola fuerza.

Entre las características de la fuerza resultante que debemos definir, está la ubicación de su línea de acción, además de su magnitud y dirección.

Obtención de un punto de la línea de acción:

Se supone un punto cualquiera cuyo vector de posición es:

$$\vec{r}=xi+yj+zk$$

$$\vec{r}\times\vec{R}=\vec{R}_O \qquad \ldots (1)$$

sustituyendo en (1) los valores correspondientes:

$$(xi+yj+zk)\times(2i+4.3j-201.67k)=-1741i+2592j+38k$$

$$(-201.67y-4.3z)i-(-201.67x-2z)j+(4.3x-2y)k=-1741i+2592j+38k$$

en esta expresión igualamos los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes:

$$-201.67y-4.3z=-1741 \qquad \ldots (2)$$

$$201.67x+2z=2592 \qquad \ldots (3)$$

$$4.3x-2y=38 \qquad \ldots (4)$$

y al despejar z de las ecuaciones (2) y (3):

$$z=\frac{-201.67y+1741}{4.3}\ ; \qquad z=\frac{-201.67x+2592}{2}$$

$$\frac{x-\frac{2592}{201.67}}{\frac{-2}{201.67}}=\frac{y-\frac{1741}{201.67}}{\frac{-4.3}{201.67}}=\frac{z-0}{1}$$

$$\frac{x-12.85}{-0.0099}=\frac{y-8.63}{-0.0213}=\frac{z-0}{1}$$

a partir de la ecuación simétrica obtenida se determina el punto P(12.85, 8.63, 0) por donde pasa la línea de acción de la resultante. Como se requiere que la resultante pase por el punto Q(9, 5, 6), aplicamos los conceptos IV.2.

Obtención del par de transporte:

$$\vec{QP}=3.85i+3.63j-6k$$

$$\vec{QP}\times\vec{R}=(3.85i+3.63j-6k)\times(2i+4.3j-201.67k)$$

$$\vec{QP}\times\vec{R}=-706.26i+764.43j+9.3k$$

o sea que el par de transporte necesario para que la resultante pase por el centro geométrico del edificio, tiene como vector:

$$\vec{m}=-706.26i+764.43j+9.3k$$

Por lo tanto, el sistema equivalente está formado por una fuerza y un par cuyas coordenadas vectoriales son:

<u>FUERZA</u>

$$\vec{R}=(2i+4.3j-201.67k\ ,\ -1034.74i+1827.57j+28.7k)$$

Magnitud $|\vec{R}|=201.73$ $[t_f]$

Dirección $[0.00989\ ,\ 0.02129\ ,\ 0.9997]$

Posición Q(9, 5, 6) $[m]$

<u>PAR</u>

$$\vec{m}=(0,\ -706.26i+764.43j+9.3k)$$

Magnitud $|\vec{m}|=1040.79$ $[t_f\cdot m]$

Dirección $[-0.6786\ ,\ 0.7345\ ,\ 0.0089]$

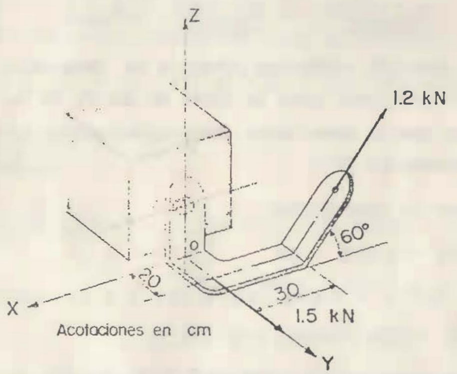
SEGUNDO BLOQUE

IV.6 REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR NO COPLANOS. REDUCCION CANONICA Y EJE CENTRAL

Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 137 a la 140 y ejemplo de la página 141
Estática, Beer y Johnston, problema modelo 3.10 página 111

Ejemplo 2

Un soporte, cuya forma se muestra en la figura, se encuentra sometido a la acción de dos tensiones que le transmiten dos cables sujetos a él. ¿Cuál es la expresión canónica del sistema de fuerzas y dónde se localiza el eje central?



Solución:

En la figura se observa que las dos fuerzas se cruzan, por lo cual en su reducción se aplicarán los conceptos IV.6.

Obtención de la resultante:

$$\vec{R} = \vec{F}^1 + \vec{F}^2 = 1.2(-\cos 60° i + \cos 30° k) + 1.5 j$$

$$\vec{R} = -0.6 i + 1.5 j + 1.04 k$$

$$|\vec{R}| = 1.9214 \quad [\text{kN}]$$

Cálculo del momento resultante:

$$\vec{R}_O = \vec{M}_O^1 + \vec{M}_O^2 = (-30i + 20j) \times (-0.6i + 1.04 k) + \vec{0}$$

$$\vec{R}_O = 20.8i + 31.2 j + 12k \qquad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

$$\vec{R} \cdot \vec{R}_O = (-0.6i + 1.5j + 1.04k) \cdot (20.8i + 31.2j + 12k) = 46.8 \neq 0$$

Como se había previsto, el sistema se reduce a una fuerza y un par no coplanos (motor o wrench).

Procedemos a efectuar la reducción canónica.

Ecuación del eje central:

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{R}_O - \lambda \vec{e}$$

donde:

$$\vec{r} = xi + yj + zk$$

$$\lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{R}_O}{|\vec{R}|}$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = -0.3123i + 0.7807j + 0.5413k$$

$$(xi + yj + zk) \times (-0.6i + 1.5j + 1.04k) = (20.8i + 31.2j + 12k) - \frac{46.8}{1.9214}(-0.3123i + 0.7807j + 0.5413k)$$

$$(xi + yj + zj) \times (-0.6i + 1.5j + 1.04k) = (20.8i + 31.2j + 12k) - (-7.61i + 19.02j + 13.18k)$$

$$= 28.41i + 12.18j - 1.18k$$

$$(1.04y - 1.5z)i - (1.04x + 0.6z)j + (1.5x + 0.6y)k = 28.41i + 12.18j - 1.18k$$

igualando los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes:

$$1.04y - 1.5z = 28.41 \quad \ldots (1)$$
$$-1.04x - 0.6z = 12.18 \quad \ldots (2)$$
$$1.5x + 0.6y = -1.18 \quad \ldots (3)$$

despejando z de las ecuaciones (1) y (2):

$$z = \frac{1.04y - 28.41}{1.5} \quad ; \quad z = \frac{1.04x + 12.18}{-0.6}$$

$$\frac{x + 11.71}{-0.5769} = \frac{y - 27.32}{1.4423} = \frac{z - 0}{1}$$

un punto del eje central es P(-11.71, 27.32, 0) [cm]

De los resultados obtenidos se concluye que el sistema se reduce a una fuerza y un par mínimo cuyas coordenadas vectoriales son:

FUERZA

$$\vec{R} = (-0.6i + 1.5j + 1.04k \ , \ 20.8i + 31.2j + 12k)$$

Cuya posición es P(-11.71, 27.32, 0) [cm]

PAR MINIMO

$$\vec{m} = (\vec{0}, \ -7.61i + 19.02j + 13.18k) \qquad [\text{kN} \cdot \text{cm}]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problemas 3.66 y 3.92. Estática, Beer y Johnston, páginas 100 y 117.
2. Problema 3 - A.6. Estática, F. Ocampo Canabal, página 77.
3. Problema 5 - 14. Series de ejercicios de Estática.
4. Dadas tres fuerzas y dos pares:

$\vec{F}^1 = 3i + 4j + 12k$ [lb_f] A(-4, 3, 0) pies

$\vec{F}^2 = 4i - 5j - 7k$ [lb_f] B(-4, -3, 0) pies

$\vec{F}^3 = -6i - 7j - 2k$ [lb_f] C(-2, 0, 2) pies

$\vec{m}^1 = 8i - 4j - 4k$ [$lb_f \cdot$ pie]

$\vec{m}^2 = 3i + 2j + 5k$ [$lb_f \cdot$ pie]

reemplazarlas por un sistema de fuerzas equivalente que actúe en el punto Q(1, 1, 1) pies.

V EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

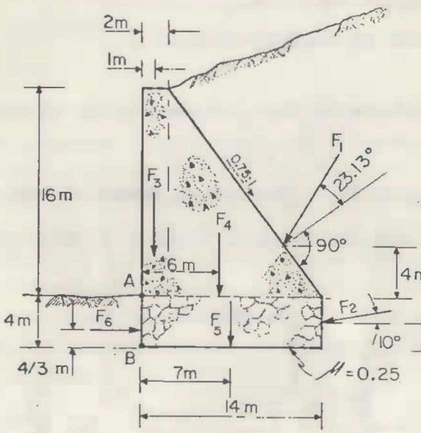
PRIMER BLOQUE

V.1.A	DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 45 a la 47	
V.2	LEYES DE LA FRICCION EN SECO Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 36 a la 44 Estática, Beer y Johnston, problemas modelo 8.2 y 8.3, páginas 312 y 313	
V.3.A	ECUACIONES VECTORIALES Y ECUACIONES ESCALARES CARTESIANAS PARA EL CASO GENERAL DE EQUILIBRIO Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 143 y 144	

Ejemplo 1

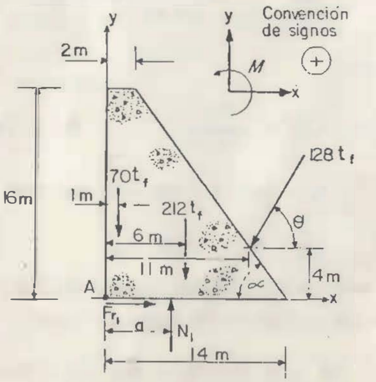
En la figura se ilustra un muro de retención formado por dos cuerpos, el inferior de mampostería cuyo peso es $F_5 = 168\ t_f$ y el superior de concreto ciclópeo, cuyo peso está representado por las fuerzas $F_3 = 70\ t_f$ y $F_4 = 212\ t_f$. El relleno compactado ejerce sobre el cuerpo superior una fuerza $F_1 = 128\ t_f$ y sobre el inferior $F_2 = 96\ t_f$, como se muestra. Considerando que el muro se encuentra en equilibrio:

a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción entre las superficies en contacto de ambos cuerpos del muro?
b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza horizontal F_6 que opone la banqueta?
c) ¿A qué distancia de B se localiza la reacción normal del suelo?



Solución:

Previamente al desarrollo matemático del problema efectuamos los diagramas de cuerpo libre a que haya lugar, con apego a V.1.A.



a) Dado que el sistema debe encontrarse en equilibrio, se aplicarán los conceptos V.3.A. Se establece el sistema de referencia y se calcula el ángulo θ:

como $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{16}{12}\right) = 53.13°$

$\therefore \ \varepsilon = 23.13° + 36.87° = 60°$

$\Sigma Fx = 0$; $Fr_1 - 128 \cos 60° = 0 \quad \therefore \quad Fr_1 = 64 \ t_f$

$\Sigma Fy = 0$; $N_1 - 70 - 212 - 128 \text{ sen } 60° = 0 \quad \therefore \quad N_1 = 392.85 \ t_f$

Para obtener el coeficiente de fricción se aplican los conceptos V.2.

$$\mu = \frac{Fr_1}{N} = \frac{64}{392.85} \quad \therefore \quad \mu = 0.163$$

En la verificación del equilibrio del cuerpo es necesario que la suma de los momentos de las fuerzas, con respecto a un punto, sea cero de acuerdo con V.3.A.

Tomamos momentos con respecto al punto A:

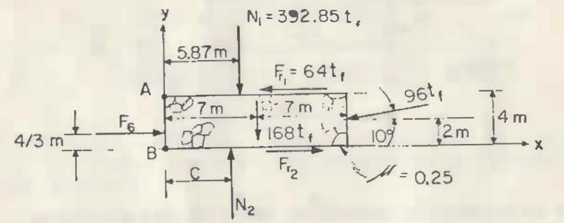
$\Sigma MA = 0$;

$392.85\,(a) + 128 \cos 60°(4) - 128 \text{ sen } 60°(11) - 212(6) - 70(1) = 0$

$$\therefore \quad a = 5.87 \text{ m}$$

que es la posición de N_1 para que el cuerpo no vuelque.

b) Realizamos el diagrama de cuerpo libre de la parte inferior del muro:



$\Sigma Fy = 0$; $N_2 - 168 - 392.85 - 96 \text{ sen } 10° = 0$

$$\therefore \quad N_2 = 577.52 \quad t_f$$

como:

$$\mu = \frac{Fr}{N} \ ; \ 0.25 = \frac{Fr_2}{577.52} \quad \therefore \quad Fr_2 = 144.38 \quad t_f$$

$\Sigma Fx = 0$; $F_6 + 144.38 - 64 - 96 \cos 10° = 0$

$$\therefore \quad F_6 = 14.16 \quad t_f$$

c) Como el cuerpo está en equilibrio la suma de los momentos de todas las fuerzas que actúan en él debe ser igual a cero:

$\Sigma M_B = 0$; $577.52\,(c) - 14.16(4/3) - 392.85(5.87) + 64(4) - 168(7) +$

$+ 96 \cos 10°(2) - 96 \text{ sen } 10°(14)$

de donde:

$$c = 5.68 \text{ m}$$

SEGUNDO BLOQUE

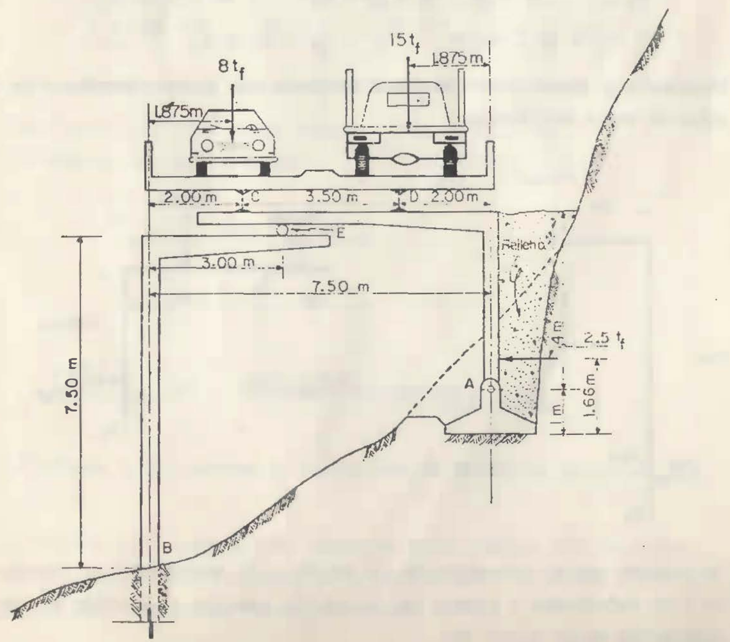
V.1.B TIPOS DE APOYO
Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 54 y 55
Estática, Beer y Johnston, páginas 125 y 151

V.3.B GRADO DE HIPERESTATICIDAD
Referencia: Apuntes de Mecánica I, páginas 159 y 160

V.5 EQUILIBRIO DE SISTEMAS PLANOS: SISTEMAS GENERALES, PARALELOS, CONCURRENTES Y COLINEALES; SUS ECUACIONES ESCALARES CARTESIANAS DETERMINANTES
Referencias: Apuntes de Mecánica I, páginas 145 a la 147
Estática, Beer y Johnston, páginas 126, 143 y 144
Problemas modelo 4.1 y 4.4, páginas 131 y 134

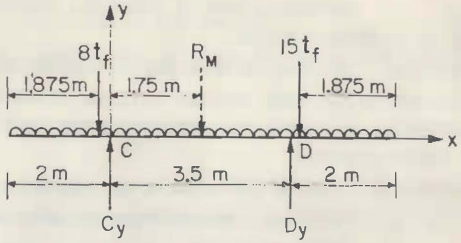
Ejemplo 2

En la construcción de una autopista, las características topográficas obligan a diseñar la estructura que se muestra, donde el apoyo A se considera articulación, el B empotramiento y el E apoyo libre; las fuerzas que se transmitirán al suelo provienen de las actuantes en la estructura y se deben al peso de los vehículos, al empuje horizontal del relleno y a las cargas muertas, consideradas de 10 t_f/m, uniformemente distribuidas a todo lo ancho de la carretera. Como en el diseño de los apoyos A y B debe preverse el equilibrio de todo el sistema, ¿cuáles serán las reacciones de tales elementos de sujección?



Solución:

En el bloque precedente se comprobó la utilidad del diagrama de cuerpo libre, por lo tanto en la solución de este problema también se aprovechará ese recurso.



D.C.L. (1)

En el D.C.L (1) de la superficie de rodamiento incluimos las cargas muertas cuya resultante RM la consideramos en el centro del claro:

$$R_M = 10(7.5) = 75\ t_f$$

Como los apoyos C y D son libres, de V.1.B, las fuerzas reactivas sólo tienen componentes según la dirección del eje y, mientras que de acuerdo con los conceptos V.3.B y V.5:

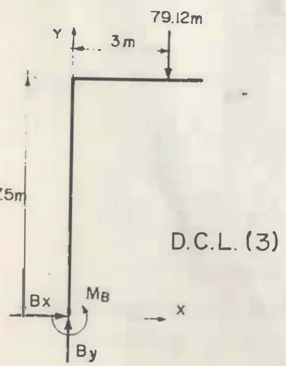
$$\Sigma M_C = 0\ ;\ 8(0.125) - 75(1.75) + D_y(3.5) - 15(3.625) = 0$$

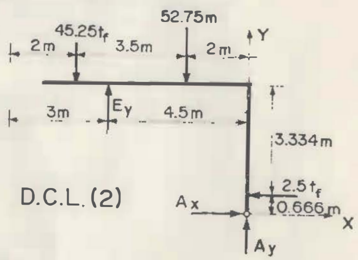
$$\therefore\quad D_y = 52.75\ t_f$$

$$\Sigma F_y = 0\ ;\ -8 - 15 - 75 + C_y + D_y = 0\ ;\ 98 - D_y = C_y$$

$$C_y = 98 - 52.75 \qquad \therefore \quad C_y = 45.25\ t_f$$

Siguiendo el mismo orden de ideas aislamos las partes derecha e izquierda de la estructura.





De acuerdo con el principio de la acción y la reacción, las fuerzas Dy y Cy calculadas a partir del D.C.L (1) cambian su sentido al considerarlas en el D.C.L (2).

$$\Sigma F_x = 0\ ;\quad A_x - 2.5 = 0 \qquad \therefore \quad A_x = 2.5\ t_f$$

$$+\ \Sigma M_A = 0\ ;\ 2.5(0.666) + 52.75(2) - E_y(4.5) + 45.25(5.5) = 0$$

$$\therefore \quad E_y = 79.12\ t_f$$

De $\Sigma F_y = 0$ y considerando el valor de Ey:

$$-45.25 + 79.12 - 52.75 + A_y - 0 \qquad \therefore \quad A_y = 18.88\ t_f$$

Como ya obtuvimos las componentes Ax y Ay de la fuerza reactiva en la articulación A, es posible determinar la magnitud y dirección de dicha fuerza:

Magnitud: $R_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \therefore \quad R_A = 19.04\ t_f$

Dirección: $\alpha = \cos^{-1}\dfrac{2.5}{19.04}\ ; \qquad \alpha = 82.46°$

$\beta = \cos^{-1}\dfrac{18.88}{19.04}\ ; \qquad \beta = 7.43°$

Para calcular las reacciones en el empotramiento B del D.C.L. (3), nos apegamos en consideraciones y procedimientos análogos a los anteriores.

Del equilibrio en la dirección del eje x, deducimos que:

$$B_x = 0\ t_f$$

$$\Sigma F_y = 0\ ;\quad B_y - 79.12 = 0 \qquad \therefore \quad B_y = 79.12\ t_f$$

$$+\ \Sigma M_B = 0\ ;\quad M_B - 79.12(3) = 0 \quad \therefore \quad M_B = 237.3\ t_f \cdot m$$

De estos resultados se concluye que las reacciones en el apoyo B son:

Una fuerza vertical hacia arriba	$B_y = 79.12\ t_f$
Un momento de empotramiento	$M_B = 273.3\ t_f \cdot m$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema 7.18. Series de ejercicios de Estática, página 67 y 68.
2. Problema 4.73, página 159. Problema 6.59, página 247. Problema 8.10, página 315. Problema 8.53, página 327 y problema 6.47, página 245. Estática. Beer y Johnston

VI MOMENTOS ESTATICOS Y PRIMEROS MOMENTOS. CENTROS DE GRAVEDAD Y DE MASA. CENTROIDES.

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

VI.3 PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES DE VOLUMENES. PLANOS Y EJES DE SIMETRIA

Referencias: Estática. F. Ocampo Canabal, página 86, tabla de la página 91 y ejemplo 4.1 de la página 88
Estática. Beer y Johnston, problema modelo 5.11, página 204

Ejemplo 1

En la figura A se muestra una columna formada por un cilindro circular recto, un cono truncado y un cubo, mientras que la zapata sobre la cual se apoya es una pirámide truncada. Si dos de las coordenadas del centroide de volumen de todo el conjunto deben ser cero ¿Cuál será el valor de la tercera coordenada?

Solución:

Por la condición que debe cumplirse aplicamos los conceptos VI.3, de modo que los ejes de referencia se encuentren ubicados como se muestra en la figura B. Así se tendrá:

$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$

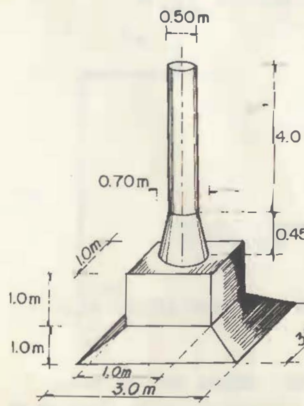


Figura A

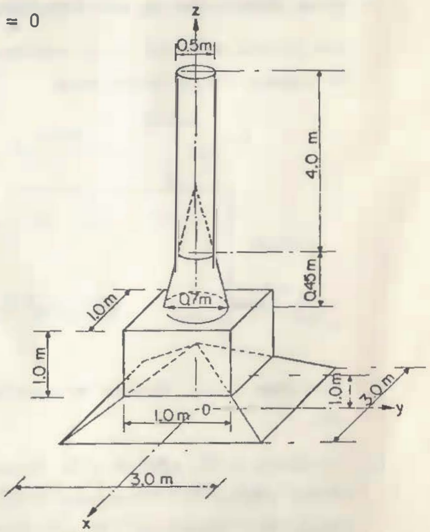


Figura B

Para obtener el centroide de volumen de cada uno de los cuerpos de que está formada la columna, los aislamos de la manera que se indica y recurrimos a la tabla de la referencia VI.3.

Figura 1.- Cilindro:

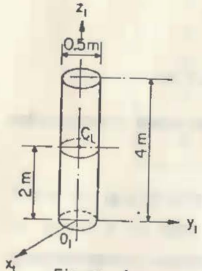


Figura 1

$$V_1 = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{0.5}{2}\right)^2 (4)$$

$$V_1 = 0.7854\ m^3$$

$$\bar{z} = \frac{h}{2} = \frac{4}{2} = 2\ m$$

y tomando como referencia los ejes de toda la columna:

$$\bar{z}_1 = 1.0 + 1.0 + 0.45 + 2.0 = 4.45\ m$$

Figura 2.- En esta figura se considera el cono completo (sin el truncamiento). Auxiliándonos del corte $Y_2\ O_2\ Z_2$ y por semejanza de triángulos.

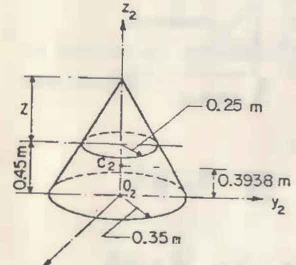
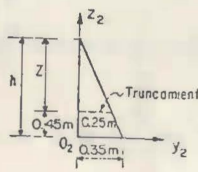


Figura 2



$$\frac{h}{0.35} = \frac{h - 0.45}{0.25}$$

$$\therefore\ h = 1.575\ m$$

$$Z = h - 0.45 = 1.125\ m$$

El volumen del cono completo es:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(0.35)^2(1.575) = 0.202\ m^3$$

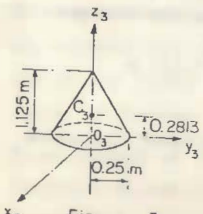
y su centroide:

$$\bar{z} = \frac{1}{4} h = \frac{1.575}{4} = 0.3938\ m$$

respecto al sistema de referencia de toda la columna:

$$\bar{z}_2 = 1.0 + 1.0 + 0.3938 = 2.3938\ m$$

Figura 3.- Constituye el truncamiento del cono y como es un cuerpo inexistente su volumen es negativo.



$$V_3 = -\frac{1}{3}\pi r^2 h = -\frac{\pi}{3}(0.25)^2(1.125)$$

$$V_3 = -0.0736\ m^3$$

$$\bar{z} = \frac{h}{4} = \frac{1.125}{4} = 0.2813\ m$$

Figura 3

y considerando los ejes de referencia de toda la columna:

$$\overline{Z}_3 = 1.0 + 1.0 + 0.45 + 0.2813 = 2.7313 \text{ m}$$

Figura 4.- Se trata de un cubo de 1 m por cada lado.

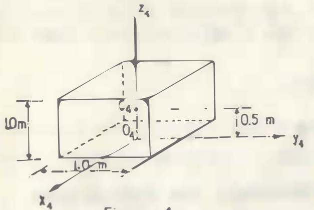


Figura 4

$$\therefore \quad V_4 = 1 \text{ m}^3$$

$$\overline{Z} = \frac{1}{2} h = 0.5 \text{ m}$$

Y refiriéndose a los ejes coordenados de la columna:

$$\overline{Z}_4 = 1.0 + 0.5 = 1.5 \text{ m}$$

Figura 5.- Corresponde a la pirámide sin truncamiento. Para determinar la altura total nos auxiliamos de un corte ($Z_5O_5Y_5$).

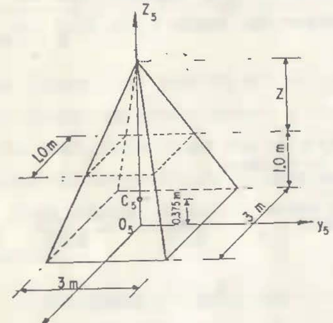
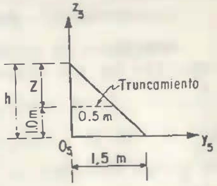


Figura 5



$$\frac{h}{1.5} = \frac{h - 1.0}{0.5}$$

$$h = 1.5 \;; \quad Z = 0.5$$

El volumen de la pirámide completa es:

$$V_5 = \frac{1}{3} \ell^2 h = \left(\frac{1}{3}\right) (3)^2 (1.5) = 4.5 \text{ m}^3$$

$$\overline{Z}_5 = \frac{h}{4} = \frac{1.5}{4} = 0.375 \text{ m}$$

Figura 6.- Como es el truncamiento de la pirámide su volumen se considera negativo.

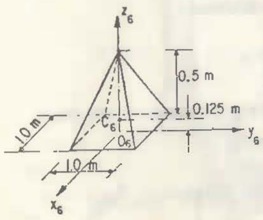


Figura 6

$$V_6 = -\frac{1}{3} \ell^2 h = -\frac{1}{3} (1)^2 (0.5) = -0.1667 \text{ m}^3$$

$$\overline{Z} = \frac{h}{4} = \frac{0.5}{4} = 0.125 \text{ m}$$

y respecto al sistema de referencia general:

$$\overline{Z}_6 = 1.0 + 0.125 = 1.125 \text{ m}$$

Para obtener la coordenada $\overline{Z}$ del centroide de la columna elaboramos la siguiente tabla:

Figura No.	Volumen V_i (m^3)	$\overline{Z}_i$ (m)	$\overline{Z}_i \; V_i$ (m^4)
1	0.7854	4.4500	3.4950
2	0.2020	2.3938	0.4835
3	- 0.0736	2.7313	- 0.2010
4	1.0000	1.5000	1.5000
5	4.5000	0.3750	1.6875
6	- 0.1667	1.1250	- 0.1875
Σ	6.2471	- - -	6.7775

Teniendo en cuenta que el momento de primer orden de todo el volumen es igual a la suma de los primeros momentos de sus partes, es posible plantear:

$$\overline{Z} \, \Sigma V_i = \sum_{i=1}^{6} \overline{Z}_i \, V_i \;; \quad \overline{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{6} \overline{Z}_i \, V_i}{\Sigma V_i} = \frac{6.7775}{6.2471}$$

$$\therefore \quad \overline{Z} = 1.0849 \text{ m}$$

De acuerdo al resultado, el centroide de volumen es el punto de coordenadas:

$$(0, 0, \; 1.0849) \quad [\,\text{m}\,]$$

SEGUNDO BLOQUE

VI.4 PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES DE AREAS COMPUESTAS

Referencia: Estática. Beer y Johnston, páginas 168 a la 170 y 172 a la 174. Figura 5.8.A de la página 171 y figura 5.8.B de la página 172. Problema modelo 5.1 página 175.

Ejemplo 2

El poyo de una estructura de acero para un puente de vehículos, se ha esquematizado en la figura (A) y en la figura (B) se detalla una de las placas en las que el perno se alojará para constituir un apoyo articulado.

Si el espesor de dicha placa se considera irrelevante ¿dónde se encontrará ubicado el centroide de área?

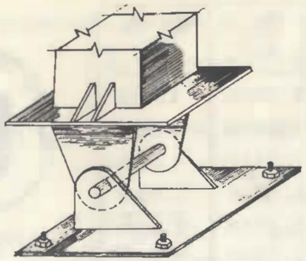


Figura A

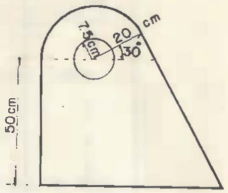


Figura B

Solución:

Observamos que en esta figura no se localizan directamente ejes de simetría, por lo cual ubicaremos los ejes de referencia de modo que todos los momentos de primer orden sean positivos.

Con apego a VI.4 seccionamos la figura en áreas cuyos centroides sean conocidos, como se indica en la figura C, y recurrimos a la tabla de la figura 5.8.A de las referencias.

Suponemos que la placa no tiene perforación.

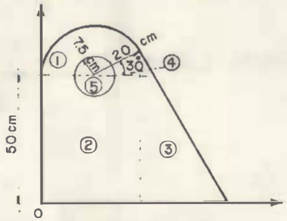


Figura C

Figura 1.- Sector circular. La coordenada del centroide, de un sector circular, medida sobre su eje de simetría es:

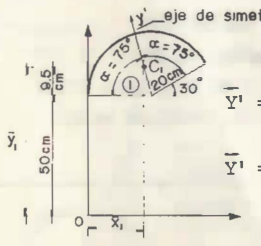


Figura 1

$$\overline{y}' = \frac{2}{3}\ \frac{r \text{ sen } \alpha}{\alpha}\ ;\ r = 20 \text{ cm},\ \alpha = 75° = 1.309 \text{ rad}$$

$$\overline{y}' = \frac{2}{3}\ \frac{20 \text{ sen } 75°}{1.309} = 9.84 \text{ cm}$$

Ahora, con respecto a los ejes escogidos inicialmente x, y:

$$\overline{x}_1 = 20 - \overline{y}' \cos 75° = 17.45 \text{ cm}$$

$$\overline{y}_1 = 50 + \overline{y}' \text{ sen } 75° = 59.50 \text{ cm}$$

$$A_1 = \alpha\, r^2 = 1.309\,(20)^2 = 523.60 \text{ cm}^2$$

Figura 2.- Rectángulo:

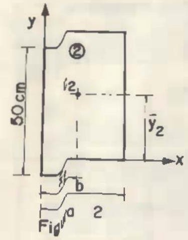


Figura 2

$$b = 20 + 20 \cos 30° = 37.32 \text{ cm}$$

$$\overline{x}_2 = \frac{b}{2} = \frac{37.32}{2} = 18.66 \text{ cm}$$

$$\overline{y}_2 = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}$$

$$A_2 = 50 \times 37.32 = 18.66 \text{ cm}^2$$

Figura 3.- Triángulo:

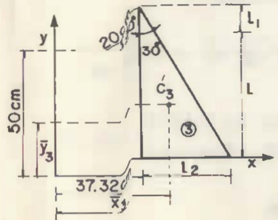


Figura 3

$$\ell_1 = 20 \cos 60° = 10 \text{ cm}$$

$$\ell = 50 + \ell_1 = 60 \text{ cm}$$

$$\tan 30° = \frac{\ell_2}{\ell}\ ;\ \ell_2 = 60 \tan 30° = 34.64 \text{ cm}$$

de donde:

$$\overline{x}_3 = 37.32 + \frac{1}{3}\,(34.64) = 48.87 \text{ cm}$$

$$\overline{y}_3 = \frac{1}{3}\,(60) = 20 \text{ cm}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(34.64)(60) = 1039.23 \text{ cm}^2$$

Figura 4.- Triángulo:

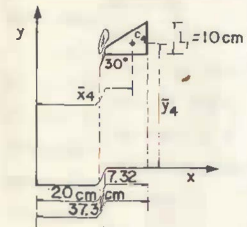


Figura 4

$$\overline{x}_4 = 20 + \frac{2}{3}\,(17.32) = 31.55 \text{ cm}$$

$$\overline{y}_4 = 50 + \frac{1}{3}\,(10) = 53.33 \text{ cm}$$

$$A_4 = \frac{1}{2}\,(17.32)(10) = 86.60 \text{ cm}^2$$

Figura 5.- Es un círculo que corresponde a la perforación de la placa.

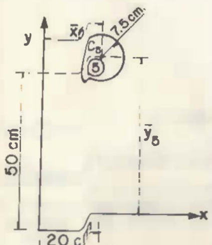


Figura 5

$$\overline{x}_5 = 20 \text{ cm}$$

$$\overline{y}_5 = 50 \text{ cm}$$

$$A_5 = -\pi\,(7.5)^2 = -176.71 \text{ cm}^2$$

Para facilitar la obtención del centroide de toda la placa consignamos los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

Figura No.	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	A_i (cm)	Primeros momentos	
				Qy_i (cm)	Qx_i (cm)
1	17.45	59.50	523.60	9,136.82	31,154.20
2	18.66	25.00	1,866.00	34,819.56	46,650.00
3	48.87	20.00	1,039.23	50,787.17	20,784.60
4	31.55	53.33	86.60	2,732.23	4,618.38
5	20.00	50.00	- 176.71	- 3,534.20	- 8,835.50
Σ	- —	- -	3338.72	93,941.58	94,371.68

Debe cumplirse que el momento de primer orden de un área es igual a la suma de los primeros momentos de sus componentes:

$$\bar{x} \sum_{i=1}^{5} A_i = \sum_{i=1}^{5} Qy_i \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma Qy_i}{\Sigma A_i} = \frac{93,941.58}{3,338.72} = 28.14 \text{ cm}$$

Análogamente:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Qx_i}{A_i} = \frac{94,371.68}{3,338.72} = 28.27 \text{ cm}$$

O sea que el centroide se localiza en el punto:

C(28.14 , 28.27) [cm]

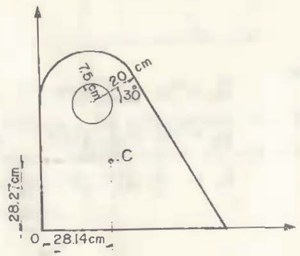


Figura 6

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problema 4.A.5, página 99. Estática. F. Ocampo C.
2. Problemas 5.98 y 5.99, páginas 207. Estática. Beer y Johnston.
3. Problemas 9.16 y 9.17, páginas 95 y 96, respectivamente. Series de ejercicios de Estática.

(VII) MOMENTOS DE INERCIA

Este tema comprende dos bloques. Se sugiere estudiar los conceptos de acuerdo a las referencias, así como revisar los problemas resueltos para cada concepto.

PRIMER BLOQUE

VII.1 RADIO DE GIRO

Referencia: Estática. Beer y Johnston, página 354, problema modelo 9.3, página 356

VII.2 SEGUNDOS MOMENTOS DE AREAS PLANAS. PRODUCTOS DE INERCIA

Referencias: Estática. Beer y Johnston, páginas 351 a la 353, 369 y 370, problemas modelo 9.1 y 9.2, página 355 y 9.6, página 376

Estática. F. Ocampo Canabal, las dos últimas figuras de la página 172 y 173

VII.3.A TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Referencias: Estática. F. Ocampo Canabal, páginas 164 y 165, ejemplo 8.5, página 174

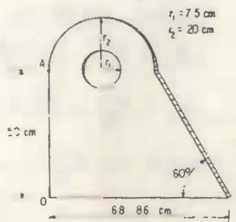
Estática. Beer y Johnston, página 360

Ejemplo 1

En el otro apoyo del puente mencionado en el ejemplo 2 del tema VI, se usó una placa de acero cuya forma, mostrada en la figura, se diseñó considerando:

a) los momentos de inercia,
b) el producto de inercia,
c) los radios de giro.

respecto a la base y al lado OA. Si la placa es homogénea y de espesor despreciable ¿cuáles son las magnitudes correspondientes a los tres incisos?



Solución:

Dividimos la placa en las cuatro partes indicadas en la figura, cuyos momentos y productos centroidales de segundo orden se obtienen aplicando las fórmulas de las tablas consignadas en las referencias VII.2

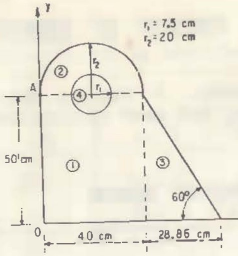


Figura 1.- Rectángulo (se supone completo):

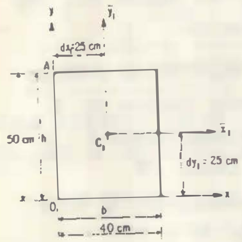


Figura 1

$C_1(20,25)$ cm

$A_1 = 40(50) = 2000 \text{ cm}^2$

segundos momentos y productos centroidales:

$$I\bar{x}_1 = \frac{bh^3}{12} = \frac{40(50)^3}{12} = 416{,}667 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}_1 = \frac{b^3h}{12} = \frac{(40)^3\,(50)}{12} = 266{,}667 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{x}_1\bar{y}_1 = 0$$

Figura 2.- Semicírculo (suponiéndolo completo):

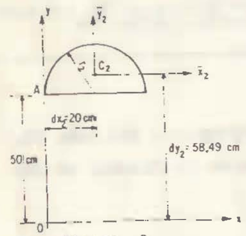


Figura 2

$C_2(20,\ 58.49)$ cm

$$A_2 = \frac{1}{2}\,\pi(20)^2 = 628.32 \text{ cm}^2$$

$$I\bar{x}_2 = \frac{r^4\,(9\pi^2 - 64)}{72\pi} = 17{,}561 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}_2 = \frac{1}{8}\,\pi(20)^4 = 62{,}832 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{x}_2\bar{y}_2 = 0$$

Figura 3.- Triángulo:

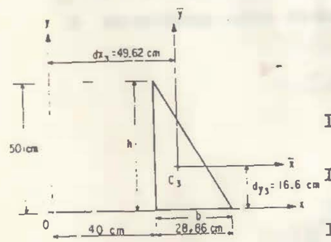


Figura 3

$C_3(49.62,\ 16.67)$ cm

$$A_3 = \frac{1}{2}\,(28.86)\,(50) = 721.5 \text{ cm}^2$$

$$I\bar{x}_3 = \frac{bh^3}{36} = \frac{28.86(50)^3}{36} = 100{,}208 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}_3 = \frac{b^3h}{36} = \frac{(28.86)^3(50)}{36} = 33{,}385 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{x}_3\bar{y}_3 = -\frac{b^2h^2}{72} = -\frac{(28.86)^2(50)^2}{72} = -28{,}920 \text{ cm}^4$$

Figura 4.- Círculo (corresponde a la perforación de la placa).

En este caso, los valores que se obtengan de $I\bar{x}$, $I\bar{y}$ e $I\bar{x}\bar{y}$ se restarán a los demás, debido a que se refieren a un área inexistente. Recuérdese que nunca serán negativos los valores de los momentos de inercia, pero sí pueden restarse.

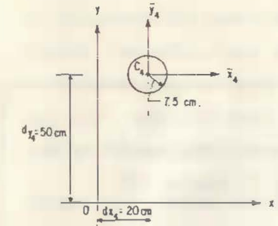


Figura 4

$C_4\ (20,\ 50)$

$$A_4 = -\pi\,(7.5)^2 = -176.71 \text{ cm}^2$$

$$I\bar{x}_4 = I\bar{y}_4 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi\,(7.5)^4}{4} = 2{,}485 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{x}_4\bar{y}_4 = 0$$

Para calcular los momentos y los productos de segundo orden con respecto a los ejes x, y alojados en la base y en el lado OA, respectivamente, aplicamos el teorema de los ejes paralelos:

$$Ix_i = I\bar{x}_i + Ai\,(dy_i)^2$$

donde dy_i es la distancia entre los ejes x, $\bar{x}_i$ cuya determinación requiere de la ubicación previa del centroide del área A_i.

Para el caso del rectángulo, de la figura 1 sustituimos los valores

$$Ix_1 = 416{,}667 + 2{,}000(25)^2 = 1{,}666{,}667 \text{ cm}^4$$

Análogamente se obtienen Iy_1 e Ix_1y_1:

$$Iy_1 = 266{,}667 + 2{,}000(20)^2 = 1{,}066{,}667 \text{ cm}^4$$

$$Ix_1y_1 = 0 + 2{,}000(25)(20) = 1{,}000{,}000$$

El procedimiento seguido para el caso del rectángulo se repite para todas las demás figuras en que se dividió la placa; por esta razón conviene sistematizar los cálculos mediante una tabla.

Fig. i	Area Ai	distancia entre ejes		$Ai(dy_i)^2$	$Ai(dx_i)^2$	$Ai\,dy_i dx_i$	$I\bar{x}_i$	$I\bar{y}_i$	$I\bar{x}_i\bar{y}_i$	$I = \bar{I} + A d^2$		$Ixy = \bar{I}xy + A\,dx_i dy_i$
		dy_i	dx_i							Ix	Iy	
1	2 000.00	25.00	20.00	1 250 000	800 000	1 000 000	416 667	266 667	0	1 666 667	1 066 667	1 000 000
2	628.32	58.49	20.00	2 149 533	251 328	735 009	17 561	62 832	0	2 167 094	314 160	735 009
3	721.50	16.67	49.62	200 497	1 776 437	596 800	100 208	33 385	-28 920	300 705	1 809 822	567 880
4	-176.71	50.00	20.00	-441 775	-70 684	-176 710	-2 485	-2 485	0	-444 260	-73 169	-176 710
Σ	3 173.11	—	—	—	—	—	—	—	—	3 690 206	3 117 480	2 126 179

de donde se obtiene:

a) $Ix = 3{,}690{,}206 \text{ cm}^4$; $Iy = 3{,}117{,}480 \text{ cm}^4$

b) $Ixy = 2{,}126{,}179 \text{ cm}^4$

c) $kx = \frac{Ix}{A} = \frac{3{,}690{,}206}{3{,}173}$ $\therefore$ $kx = 34.1$ cm

$ky = \frac{Iy}{A} = \frac{3{,}117{,}480}{3{,}173}$ $\therefore$ $ky = 31.3$ cm

SEGUNDO BLOQUE

VII.3.B	EJES PRINCIPALES	
	Referencia:	Estática. Beer y Johnston, páginas 371 a la 373, problema modelo 9.7, página 377
VII.4	APLICACIONES A FIGURAS COMPUESTAS	
	Referencias:	Estática. Beer y Johnston, página 360
		Estática. F. Ocampo Canabal, ejemplo 8.6 de la página 177

Ejemplo 2

En la placa del ejemplo 2 del tema VI se determinó su centroide de área. Si este punto se adopta como origen de un sistema de referencia cartesiano ¿Qué ángulo formarán estos ejes, respecto a los iniciales, para que los momentos de segundo orden sean el máximo y el mínimo y cuáles serán sus magnitudes ?

Solución:

Adoptamos la misma división que se hizo de la placa en el ejemplo 2 del tema VI, así como los sistemas de referencia; con el resultado obtenido del centroide de toda el área definimos las distancias entre los ejes centroidales de cada figura y los correspondientes a toda la placa.

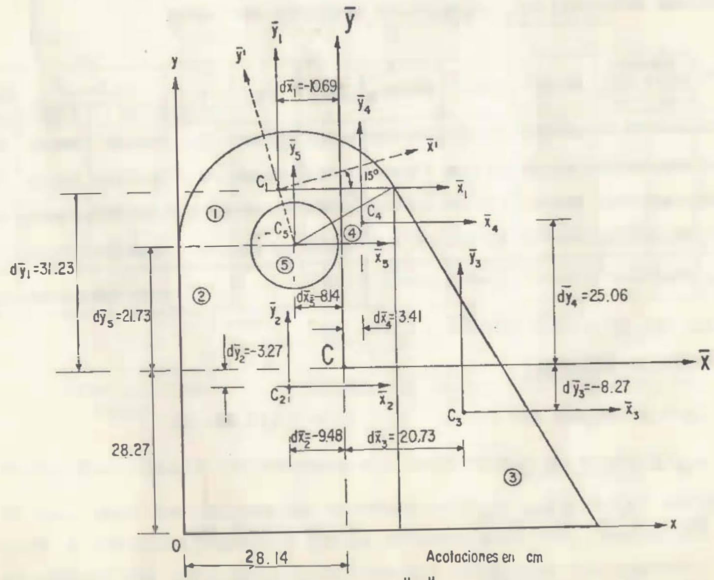


Figura "A"

Calcularemos los momentos y el producto de segundo orden de cada figura, respecto a sus ejes centroidales paralelos a los $\bar{x}$, $\bar{y}$ y posteriormente, mediante una tabulación, aplicamos el teorema de los ejes paralelos para determinarlos respecto a los ejes $\bar{x}$, $\bar{y}$ que son los centroidales de toda el área.

Figura 1.- Sector circular (se considera completo):

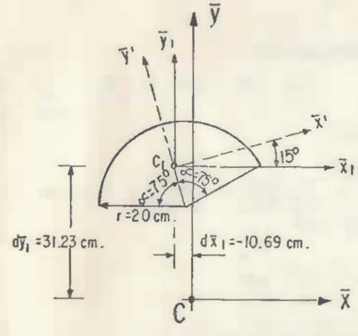


Figura 1

$A_1 = 523.60 \text{ cm}^2$

momentos y producto de segundo orden respecto a los ejes x', $\bar{y}'$:

$$I\bar{x}' = \frac{r^4}{4}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \bar{y}'^2 A_1$$

$$I\bar{x}' = 62\ 360 + 50\ 698 = 113\ 058 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}' = \frac{r^4}{4}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)$$

$$I\bar{y}' = 42\ 360 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}'\bar{x}' \approx 0$$

Ahora, respecto a los ejes $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, aplicamos VII.3.B:

$$I\bar{x}_1 = \frac{I\bar{x}' + I\bar{y}'}{2} + \frac{I\bar{x}' - I\bar{y}'}{2}\cos 2\theta - I\bar{x}'\bar{y}' \operatorname{sen} 2\theta$$

$$I\bar{x}_1 = \frac{113\ 058 + 42\ 360}{2} + \frac{113\ 058 - 42\ 360}{2}\cos 30° - 0 = 108\ 322 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}_1 = \frac{I\bar{x}' + I\bar{y}'}{2} - \frac{I\bar{x}' - I\bar{y}'}{2}\cos 2\theta + I\bar{x}'\bar{y}' \operatorname{sen} 2\theta$$

$$I\bar{y}_1 = \frac{113\ 058 + 42\ 360}{2} - \frac{113\ 058 - 42\ 360}{2}\cos 30° + 0 = 47\ 096 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{x}_1\bar{y}_1 = -\frac{I\bar{x}_1 - I\bar{y}_1}{2}\tan 2\theta = -\frac{108\ 322 - 47\ 096}{2}\tan 30° = -17\ 674 \text{ cm}^4$$

Como en las figuras restantes no es necesario efectuar rotación de sus ejes centroidales aplicamos directamente las fórmulas conocidas, así como VII.3.B y VII.4.

Figura 2.- Rectángulo (se considera completo):

$$A_2 = 1\ 866 \text{ cm}^2$$

$$I\bar{x}_2 = \frac{bh^3}{12} = \frac{(37.32)(50)^3}{12} = 388\ 750 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{y}_2 = \frac{b^3h}{12} = \frac{(37.32)^3(50)}{12} = 216\ 577 \text{ cm}^4$$

$$I\bar{x}_2\bar{y}_2 = 0$$

Figura 3.- Triángulo:

$$A_3 = 1\ 039.23 \quad cm^2$$

$$I\bar{x}_3 = \frac{bh^3}{36} = \frac{(34.64)(60)^3}{36} = 207\ 840 \quad cm^4$$

$$I\bar{y}_3 = \frac{b^3h}{36} = \frac{(34.64)^3(60)}{36} = 69\ 276 \quad cm^4$$

$$I\bar{x}_3\bar{y}_3 = -\frac{b^2h^2}{72} = -\frac{(34.64)^2(60)^2}{72} = -59\ 996 \quad cm^4$$

Figura 4.- Triángulo (se considera completo):

$$A_4 = 86.60 \quad cm^2$$

$$I\bar{x}_4 = \frac{17.32\ (10)^3}{36} = 481 \quad cm^4$$

$$I\bar{y}_4 = \frac{(17.32)^3(10)}{36} = 1\ 443 \quad cm^4$$

$$I\bar{x}_4\bar{y}_4 = -\frac{(17.32)^2(10)^2}{72} = -417 \quad cm^4$$

Figura 5.- Círculo. Corresponde a la perforación, por lo que habrá que restar sus momentos y producto de segundo orden.

$$A_5 = -176.71 \quad cm^2$$

$$I\bar{x}_5 = I\bar{y}_5 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi\ (7.5)^4}{4} = 2\ 485 \quad cm^4$$

$$I\bar{x}_5\bar{y}_5 = 0$$

Con los valores calculados y la figura A efectuamos la tabulación:

Figura	$I\bar{x}_i$	$I\bar{y}_i$	$I\bar{x}_i\bar{y}_i$	$A_i(d\bar{y}_i)^2$	$A_i(d\bar{x}_i)^2$	$A_i(d\bar{x}_i)(d\bar{y}_i)$	$I = \bar{I} + Ad^2$: Ix	Iy	$Ixy = \bar{I}xy + A\,dx_i dy_i$
1	108 322	47 096	-17 674	510 674	59835	-174 803	618 996	106 931	-192 477
2	388750	216 577	0	19 953	167 698	57 845	408 703	384 275	57 845
3	207840	69 276	-59 996	71 076	446 591	-178 163	278 916	515 867	-238 159
4	481	1 443	-417	54 385	1007	7 400	54866	2 450	6983
5	-2485	-2 485	0	-83 441	-11 709	31 257	-85 926	-14 194	31 257
Σ	—	—	—	—	—	—	1 275 555	995 329	-334 551

de donde los segundos momentos, respecto a los ejes centroidales establecidos, son:

$$\bar{I}x = 1{,}275{,}555 \quad cm^4$$

$$\bar{I}y = 995{,}329 \quad cm^4$$

y el producto:

$$\bar{I}xy = -334{,}551 \quad cm^4$$

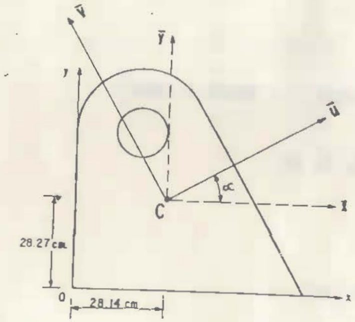
finalmente, con estos valores se obtienen los segundos momentos principales:

$$I_{\substack{Máx\\mín}} = \frac{Ix + Iy}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Ix - Iy}{2}\right)^2 + (Ixy)^2}$$

$$I_{\substack{Máx\\mín}} = \frac{1\ 275\ 555 + 995\ 329}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1\ 275\ 555 - 995\ 329}{2}\right)^2 + (-334\ 551)^2}$$

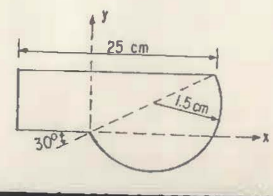
$$I_{\substack{Máx\\mín}} = 1\ 135\ 442 \pm 362\ 707 \quad \begin{cases} I_{Máx} = 1\ 498\ 149 \quad cm^4 \\ I_{mín} = 772\ 735 \quad cm^4 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{2\ Ixy}{Ix - Iy} = \frac{669\ 102}{280\ 226} = 2.3877 \quad \therefore \quad \alpha = 33.6°$$



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Problemas 9.22 y 9.59 Beer y Johnston. Estática, página 366 y 380
2. Problemas 10.19 y 10.24. Series de ejercicios de Estática, páginas 115 y 118.
3. Calcular el valor de Ix para el área de la figura:



RESULTADOS DE ALGUNOS PROBLEMAS PROPUESTOS

TEMA I

1) $W_h = 59.85$ N

3) $g_h = 0.658$ m/s^2

TEMA II

2) $M = 744.56\,d - 642.31$

4) $W = \left(\dfrac{P - 914.81}{20\,000}\right) 4{,}781.21\,\sqrt{d}$

TEMA III

4.14) $\vec{F} \equiv (210i + 420j - 420k\,,\; -2520i + 1260j)$

4.16) $P_1(3, 6, 0)$, $P_2(3, 0, 0)$

TEMA IV

3.66) $\vec{F} = -173.2j + 100k$ [N]

$\vec{M}_A = 7.5i - 6j - 10.39k$ [N·m]

3.92) R = 200 N , P(0, 63.4, 200)

5.14) Son equivalentes los sistemas I y III

TEMA V

4.73) P = 461.88N ; $\vec{R}_B = 1139j$ [N] ; $\vec{R}_A = 123j$ [N]

8.10) P = 36 lb_f , h = 40 pulgadas

8.53) Q = 30kN , P = 80.28 kN

TEMA VI

5.98) CG(0.61, − 2.34 , 0)

5.99) CG(1.875, − 7.5 , 0)

TEMA VII

9.22) $I_x = 1281.4$ pulg^4 , $k_x = 5.98$ pulg

9.59) $I_{MAX} = 11.77$ pulg^4 , $I_{min} = 2.33$ pulg^4

$\theta = 64.3°$

10.19) $I_{xy} = \dfrac{h^2}{24}(a^2 + 4ab + 6b^2)$

3) $I_x = 3{,}718$ cm^4