



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA MECÁNICA - TERMOFLUIDOS

ANÁLISIS DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR  
CONVECCIÓN MIXTA ALREDEDOR DE CILINDROS  
ISOTÉRMICOS EN TÁNDEM: EFECTO DE LA  
FLOTACIÓN, LA RELACIÓN DE ESPACIAMIENTO Y EL  
CONFINAMIENTO

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**Erick Salcedo Alvarez**

TUTOR PRINCIPAL  
Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui, E.S.I.M.E. Azcapotzalco, I.P.N.

COMITÉ TUTOR  
Dr. Federico Méndez Lavielle, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.  
Dr. José Roberto Zenit Camacho, I.I.M., U.N.A.M.  
Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.  
Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez, E.S.I.M.E. Azcapotzalco, I.P.N.

Ciudad de México, Agosto 2016

## JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Federico Méndez Lavielle

Secretario: Dr. José Roberto Zenit Camacho

1<sup>er</sup> Vocal: Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui

2<sup>do</sup> Vocal: Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz

3<sup>er</sup> Vocal: Dr. Oscar Eladio Bautista Godínez

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

- Laboratorio de Combustión, Facultad de Ciencias, U.N.A.M.
- E.S.I.M.E. Azcapotzalco, I.P.N.
- Instituto de Investigaciones en Materiales, U.N.A.M.

### TUTOR DE TESIS:

Dr. Lorenzo Alberto Martínez Suástegui



---

FIRMA

# Agradecimientos

Al Dr. Lorenzo por compartirme sus conocimientos y su invaluable amistad. Gracias por su confianza y paciencia, ¡sin usted nada de esto hubiese sido posible!. ¡Siempre será un honor trabajar con usted Doc!

Al Dr. Juan Carlos Cajas por su cálida recepción cuando llegué a la U.N.A.M. Muchas gracias mi hermano por todas tus enseñanzas y por siempre estar tan al pendiente de mi.

Al Dr. César Treviño por su presencia aunque no física, a lo largo de mis estudios. Gracias por tomarse el tiempo de revisar mis trabajos y por sus valiosas enseñanzas. Le agradezco haberme dado un espacio para trabajar en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

Al Dr. Roberto Zenit y al Dr. Carlos Palacios por facilitarme los equipos para realizar el trabajo experimental. Gracias por compartirme sus conocimientos y experiencias. Trabajar con ustedes fue una grata experiencia.

A los miembros del comité tutor: Dr. Federico Méndez, Dr. Roberto Zenit, Dr. Francisco Solorio y Dr. Oscar Bautista, por tomarse el tiempo de revisar este trabajo y por acompañarme durante todo el doctorado.

A mis amigos: Giovanni (Yovas), Eleazar Cervantes (El Eli), Francisco Hidalgo (OSN), Diana Libreros, Víctor Flores (Mujer), María, Juan Manuel Casillas (Tío), Francisco Villa (El Harry), Erika May, Víctor (Meteoro), Agustín Mora (El Agus), Manuel Peralta, Ajax, Salo (Chico), Salo (Grande), Gerardo (Cherry), Laura Casas, Andrés Matías, Andrés Pérez Terrazo, Fernando Aragón, Israel Rosas (Dr. Yescas), Isaac, Ileana Grave y Daniel Pastrana. Gracias a todos por acompañarme en mi viaje de vida, haciéndolo mucho más ameno y por sacarme de muchos problemas.

A la señora María Teresa Toris Chavez por siempre estar dispuesta a ayudarme.

A la señora Elizabeth Ledesma Varela por su confianza a lo largo de estos nueve años de tenerme como inquilino.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto Politécnico Nacional por darme la oportunidad de realizar mis estudios.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo recibido para la realización de este trabajo de tesis a través del proyecto CONACyT 167474.

# Dedicatoria

A mi Mamá, a mi Abuelita y a mi Tía, a quienes debo todo lo que soy

A mi Papá, a quién también agradezco enseñarme a soñar

A mis hermanas y hermano: Alina, Delia, María José y Héctor Gabriel, que son una fuente inagotable de felicidad e inspiración

A Ivonne, ¡TE AMO!

# Índice general

Índice de figuras . . . . .	II
Índice de tablas . . . . .	VIII
Nomenclatura . . . . .	X
Abstract . . . . .	XII
Resumen . . . . .	XIII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
<b>I Estudio Numérico</b>	<b>5</b>
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>6</b>
2.1. Formulación Matemática . . . . .	6
2.2. Solución Numérica . . . . .	9
2.2.1. Validación del algoritmo . . . . .	11
2.2.2. Estudio de independencia de malla . . . . .	12
<b>3. Resultados y discusión</b>	<b>14</b>
3.1. $Pr = 7$ y $BR = 20\%$ . . . . .	14
3.1.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ ) . . . . .	14
3.1.2. Flujo isotérmico ( $Ri = 0$ ) . . . . .	16
3.1.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ ) . . . . .	19
3.1.4. Número de Strouhal y diagramas de fase . . . . .	28
3.1.5. Velocidades promedio en el plano de simetría . . . . .	31
3.1.6. Ángulo de separación . . . . .	33
3.1.7. Relación de espaciamiento $\sigma = 3$ . . . . .	34
3.2. Transferencia de calor . . . . .	34
3.2.1. Número de Nusselt local . . . . .	34
3.2.2. Número de Nusselt promedio . . . . .	36
3.3. $Pr = 0.744$ y $BR = 30\%$ . . . . .	37
3.3.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ ) . . . . .	37
3.3.2. Convección forzada ( $Ri = 0$ ) . . . . .	38
3.3.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ ) . . . . .	40
3.3.4. Número de Strouhal y diagramas de fase . . . . .	46
3.3.5. Velocidades promedio en el plano de simetría del canal . . . . .	52

3.3.6. Ángulo de separación . . . . .	53
3.4. Transferencia de calor . . . . .	55
3.4.1. Números de Nusselt locales . . . . .	55
3.4.2. Número de Nusselt promedio . . . . .	56
<b>II Estudio Experimental</b>	<b>59</b>
<b>4. Materiales y métodos</b>	<b>60</b>
4.1. Diseño experimental . . . . .	60
4.2. Adquisición de imágenes . . . . .	62
4.3. Procesamiento de datos . . . . .	64
4.4. Análisis de incertidumbre . . . . .	64
<b>5. Resultados y discusión</b>	<b>65</b>
5.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ ) . . . . .	65
5.2. Flujo isotérmico ( $Ri = 0$ ) . . . . .	65
5.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ ) . . . . .	70
5.4. Velocidades promedio en el plano de simetría . . . . .	79
5.5. Longitud promedio de las estelas . . . . .	80
5.6. Ángulos de separación . . . . .	82
5.7. Número de Strouhal o frecuencia de desprendimiento . . . . .	83
5.8. Efecto de la relación de aspecto . . . . .	84
5.9. Comparación con los resultados numéricos . . . . .	88
<b>6. Conclusiones</b>	<b>90</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>92</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>98</b>

# Índice de figuras

2.1.	Diagrama esquemático del dominio computacional y configuración de los cilindros dentro del canal. . . . .	7
2.2.	Detalle de las mallas utilizadas con $400 \times 450$ nodos en dirección horizontal y vertical, respectivamente. Imagen izquierda: $\sigma = 2$ y $BR = 30\%$ . Imagen derecha: $\sigma = 5$ y $BR = 20\%$ . . . . .	10
3.1.	Flujo adimensional estacionario para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $Ri = -1$ ( $Gr = -4 \times 10^4$ ) para $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: distribuciones de velocidad $U$ y $V$ , vorticidad $\Omega$ , y campos de temperatura $\theta$ , respectivamente. . . . .	15
3.2.	Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: distribuciones de velocidad $U$ , $V$ y vorticidad $\Omega$ , respectivamente. . . . .	16
3.3.	Flujo adimensional promedio para valores de $Re_D = 200$ , $\sigma = 5$ , $BR = 20\%$ y $Ri = 0$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad $U$ , $V$ y vorticidad $\Omega$ , respectivamente. . . . .	17
3.4.	Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para $Ri = 0$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para varias posiciones en el eje $X$ . . . . .	18
3.5.	Valores adimensionales del flujo promedio para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $Ri = 1$ ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad $U$ y $V$ , vorticidad $\Omega$ y campos de temperatura $\theta$ , respectivamente. . . . .	19
3.6.	Campos adimensionales instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $Ri = 1$ ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para $\sigma = 2$ y $5$ . De izquierda a derecha: contornos de velocidad $U$ y $V$ , vorticidad $\Omega$ y campos de temperatura $\theta$ respectivamente. . . . .	21
3.7.	Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para $Ri = 1$ ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) y para $\sigma = 2$ y $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para diferentes posiciones en el eje $X$ . . . . .	22

3.8. Valores adimensionales del flujo promedio para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$  y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 23

3.9. Campos instantáneos adimensionales de velocidad y vorticidad para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$  mostrando el patrón de desprendimiento de vórtices para diferentes instantes de tiempo. . . . . 25

3.10. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $\sigma = 2$  y  $5$  para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría para diferentes posiciones de  $X$ . 26

3.11. Variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad longitudinal como una función del tiempo adimensional para  $\sigma = 2$  y  $5$  para  $Ri = 3$  (imágenes en la parte superior) y  $Ri = 4$  (imágenes en la parte inferior). Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría para diferentes posiciones de  $X$ . . . . . 27

3.12.  $Re_D = 200$  y  $BR = 20\%$  para  $Ri = 0, 1$  y  $2$ . Primera y la tercera fila: Espectro normalizado de la velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. Segunda y cuarta fila: Diagrama de fase de la señal de la componente de velocidad longitudinal como una función de la señal de la componente de velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 30

3.13. Perfiles adimensionales de velocidad axial a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal para diferentes valores del número de Richardson para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. 32

3.14. Distribución de los valores del número de Nusselt local sobre la superficie de cada cilindro como una función de  $\gamma$  para diferentes valores del número de Richardson con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 35

3.15. Evolución temporal de los números de Nusselt promedio para  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ ,  $BR = 20\%$ , y distintos valores del número de Richardson para el cilindro superior (líneas punteadas) y el cilindro inferior (líneas continuas), respectivamente. . . . . 36

3.16. Flujo adimensional en estado estacionario para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 39

3.17. Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0$  y  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 40

3.18. Flujo instantáneo adimensional para cilindros sin calentar con valores de  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0$  para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 41

3.19. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 0$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para varias posiciones en el eje  $X$ . . . . . 42

3.20. Valores del flujo promedio adimensional para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ),  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 44

3.21. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 46

3.22. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría y en posiciones selectas dentro del canal. . . . . 47

3.23. Valores del flujo promedio adimensional para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 48

3.24. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 2$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente. . . . . 49

3.25. Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) y  $\sigma = 2$  y  $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría y en diferentes posiciones del canal. 50

3.26.  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0, 1$  y  $2$ . Primera y tercera fila: Espectro normalizado de la velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. Segunda y cuarta fila: Diagrama de fase de la señal de la componente de velocidad longitudinal como una función de la señal de la componente de velocidad transversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 51

3.27. Perfiles adimensionales de velocidad axial a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal para valores de  $\sigma = 2, 3$  y  $5$  y para diferentes números de Richardson. . . . . 53

3.28. Distribución de los números de Nusselt locales sobre la superficie de los cilindros como una función de  $\gamma$  para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$ , diferentes valores del número de Richardson y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. . . . . 56

3.29. Evolución temporal de los números de Nusselt promedio para  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ ,  $BR = 30\%$  y distintos valores del número de Richardson para el cilindro superior (líneas punteadas) y el cilindro inferior (líneas continuas), respectivamente. . . . . 57

3.30. Respuesta final del flujo para un valor del número de Reynolds fijo ( $Re_D = 200$ ) y diferentes valores del número de Richardson. . . . . 58

4.1. Diagrama esquemático del diseño experimental. (a) Depósito secundario. (b) Contracción a la entrada del canal con alineadores de flujo tipo panal de abeja. (c) Tubo de rebosadero. (d) Láser. (e) Baño térmico. (f) Cámaras digitales (CMOS). (g) Tanque de almacenamiento. (h) Válvula ajustable. (i) Bomba centrífuga. . . . . 61

4.2. Tamaño de las imágenes obtenidas después de superponer las imágenes de ambas cámaras. Las imágenes presentadas en la siguiente sección muestran una porción de la sección de prueba que corresponde a la región delimitada por el recuadro negro. . . . . 63

5.1. Valores adimensionales de flujo en estado estacionario para  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$ ,  $Ri = -1$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de las componentes de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad, respectivamente. . . . . 66

5.2. Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de las componentes de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad, respectivamente. . . . . 67

5.3. Patrones adimensionales instantáneos de la componente de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$ , y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. . . . . 68

5.4.  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 0$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para diferentes posiciones a lo largo de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal. Las frecuencias adimensionales del desprendimiento de vórtices se ejemplifican por los picos más altos. . . . . 69

5.5. Valores de flujo promedio adimensional con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 1$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 71

5.6. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para  $Ri = 1$ , mostrando las estructuras vorticales que se desprenden para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. . . . . 72

5.7.  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 1$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron a lo largo del eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. Las frecuencias de desprendimiento adimensionales se muestran en los picos más grandes. . . . . 73

5.8. Valores del flujo adimensional promedio con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 2$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, contornos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 74

5.9. Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para  $Ri = 2$ , mostrando las estructuras vorticales que se desprenden para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. . . . . 75

5.10.  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 2$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensionales de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron a lo largo del eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. . . . . 76

5.11. Valores del flujo adimensional promedio con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 3$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, contornos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente. . . . . 77

5.12. Imágenes izquierdas:  $Re = 100$ . Imágenes derechas:  $Re = 200$ . Imágenes superiores: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 3$ . Los datos se obtuvieron a lo largo de eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. . . . . 78

5.13. Perfiles de velocidad adimensional a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal adimensional para  $Re = 100$  y  $200$  y diferentes valores del número de Richardson. . . . . 79

5.14. Valor promedio  $\pm DE$  de la longitud adimensional promedio de la estela del cilindro inferior  $\sigma_{v2}/D$  para  $Re = 100$  y  $200$  como una función del número de Richardson. La longitud es medida desde el centro del cilindro inferior. . . . . 81

5.15. Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = -1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 0$  (imágenes inferiores) para  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. . . . . 85

5.16. Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = 1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 2$  (imágenes inferiores) para  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. . . . . 86

5.17. Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = 3$  y  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con las líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura, con los vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. . . . . 87

5.18. Comparación de flujos promedio obtenidos del estudio numérico y experimental para  $Re = 200$ ,  $Ri = 0$  y  $\sigma = 3$ , mostrando los contornos de la componente de velocidad longitudinal con vectores superpuestos y los contornos de vorticidad, respectivamente. . . . . 89

# Índice de tablas

2.1.	Comparación entre los valores críticos para que haya rompimiento de simetría por medio de una bifurcación de Hopf junto con su número de Strouhal correspondiente. . . . .	11
2.2.	Comparación de los valores del número de Nusselt promedio para un radio de bloqueo de $BR = 0.2$ y diferentes valores del número de Reynolds. . . . .	12
2.3.	Resultados del estudio de independencia de malla para $BR = 30\%$ . . . . .	13
2.4.	Resultados del estudio de independencia de malla para $BR = 20\%$ . . . . .	13
3.1.	Ángulo de separación como función del número de Richardson para $Re_D = 200$ , $BR = 20\%$ y $\sigma = 2, 3$ y $5$ . . . . .	33
3.2.	Ángulo de separación como una función del número de Richardson para $Re_D = 200$ , $BR = 30\%$ y $\sigma = 2, 3$ y $5$ . . . . .	54
5.1.	Resumen de las mediciones del flujo promedio para $Re = 100$ y $200$ como una función del número de Richardson. . . . .	82
5.2.	Ángulo de Separación (en grados) del cilindro superior e inferior como una función del número de Richardson para $Re = 100$ y $200$ . . . . .	83
5.3.	Número de Strouhal para $Re = 100$ y $200$ como una función del número de Richardson. . . . .	84
5.4.	Comparación entre datos experimentales y resultados numéricos para $Re = 100$ y $200$ como función del número de Richardson. . . . .	88

**Nomenclatura**

$BR$	radio de bloqueo, $D/H$
$D$	diámetro del cilindro (longitud característica)
$DE$	desviación estándar
$f$	frecuencia del desprendimiento de vórtices (Hz)
$g$	aceleración gravitacional
$Gr$	número de Grashof, $Gr = g\beta(T_w - T_0)D^3/\nu^2$
$h$	coeficiente de transferencia de calor local
$H$	ancho del dominio computacional
$k$	conductividad térmica del fluido
$L$	distancia entre los centros de los cilindros
$L_{tot}$	longitud del dominio computacional
$L_{v1}$	longitud de la estela del cilindro superior
$L_{v2}$	longitud de la estela del cilindro inferior
$n$	dirección normal
$Nu$	número de Nusselt local (ver Eqs. (2.9) y (2.10))
$\overline{Nu}$	número de Nusselt promedio (ver Eq. (2.11))
$Pe$	número de Peclet, $Pe = u_0D/\alpha$
$Pr$	número de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$
$Re$	número de Reynolds, $Re = u_0D/\nu$
$Re_D$	número de Reynolds basado en el diámetro del cilindro $Re_D = u_0D/\nu$
$Ri$	número de Richardson, $Ri = Gr/Re^2$
$S$	longitud desde el origen hasta la salida del canal
$St$	número de Strouhal, $St = fD/u_0$
$t$	tiempo
$T$	temperatura
$T_0$	temperatura del fluido a la entrada del canal
$T_w$	temperatura sobre la superficie de los cilindros
$u_0$	velocidad promedio del fluido a la entrada del canal
$u_D$	velocidad longitudinal promedio sobre los cilindros
$u, v$	componentes de velocidad longitudinal y transversal
$U$	componente de velocidad longitudinal adimensional, $U = u/u_0$
$V$	componente de velocidad transversal adimensional, $V = v/u_0$
$W$	envergadura de los cilindros (profundidad del canal)
$x, y, z$	coordenadas cartesianas rectangulares
$X$	coordenada longitudinal adimensional, $X = x/D$
$Y$	coordenada transversal adimensional, $Y = y/D$
$Z$	coordenada transversal adimensional, $Z = z/W$

**Letras Griegas**

$\alpha$	difusividad térmica del fluido
$\beta$	coeficiente de expansión volumétrica
$\gamma_s$	ángulo de separación

---

$\mu$	viscosidad dinámica
$\nu$	viscosidad cinemática
$\psi$	función de corriente adimensional
$\Omega$	vorticidad adimensional
$\sigma$	relación de espaciamiento adimensional $\sigma = L/D$
$\sigma_{v1}$	longitud de la estela adimensional, $\sigma_{v1} = L_{v1}/D$
$\sigma_{v2}$	longitud de la estela adimensional, $\sigma_{v2} = L_{v2}/D$
$\tau$	tiempo adimensional
$\theta$	temperatura adimensional

**Subíndices**

0	ambiente o de referencia
1, 2	hace referencia al cilindro superior e inferior, respectivamente
$w$	en la superficie de los cilindros

# Abstract

In this work, two-dimensional numerical simulations are carried out to investigate the unsteady mixed convection heat transfer in a laminar cross-flow from two equal-sized isothermal in-line cylinders confined inside a vertical channel. The governing equations are solved using the vorticity-stream function formulation of the incompressible Navier-Stokes and energy equations using the control-volume method on a non-uniform orthogonal Cartesian grid. The numerical scheme is validated for the standard case of a symmetrically confined isothermal circular cylinder in a plane channel. Calculations are performed for flow conditions with Reynolds number based on cylinder diameter of  $Re = 200$ , two values of the Prandtl number of  $Pr = 0.744$  and  $Pr = 7$ , values of the buoyancy parameter (Richardson number) in the range  $-1 \leq Ri \leq 4$ , and two blockage ratios of  $BR = D/H = 0.2$  and  $0.3$ . We consider all possible flow regimes by setting the pitch-to-diameter ratios ( $\sigma = L/D$ ) to 2, 3 and 5. The interference effects and complex flow features are presented in the form of mean and instantaneous velocity, vorticity and temperature distributions. In addition, separation angles, time traces of velocity fluctuation, Strouhal number, characteristic times of flow oscillation, phase-space relation between the longitudinal and transverse velocity signals, wake structure, and recirculation length behind each cylinder have been determined. Local and average Nusselt numbers for the upstream and downstream cylinders have also been obtained. The results reported herein demonstrate how the flow and heat transfer characteristics are significantly modified by the wall confinement, tube spacing, and thermal effects for a wide range in the parametric space.

An experimental investigation of laminar aiding and opposing mixed convection is carried out using particle image velocimetry (PIV) to assess the thermal effects on the wake of two isothermal cylinders of equal diameter in tandem array placed horizontally and confined inside a vertical closed-loop downward rectangular water channel. The buoyancy effect on the flow distributions are revealed for flow conditions with Reynolds number based on cylinder diameter of  $Re = 100$  and  $200$ , blockage ratio of  $BR = 0.3$ , aspect ratio of  $AR = W/D = 5$ , pitch-to-diameter ratio of  $\sigma = 3$ , and values of the buoyancy parameter in the range  $-1 \leq Ri \leq 3$ . In this work, the interference effects on the complex flow features are presented in the form of mean and instantaneous contours of velocity and vorticity. In addition, separation angles, wake structure, recirculation bubble lengths, time traces of velocity fluctuation, Strouhal number and vortex shedding modes of the two-cylinder system are obtained as a function of the Richardson number. In this arrangement, the results indicate that the effects of the Reynolds number are very pronounced, and the vortex shedding patterns exhibit a strong dependence on  $Ri$ . We also show the modulation effect of the channel walls on the three-dimensional flow under varying thermal buoyancy, and the results reported herein demonstrate how the flow structure, wake behaviour and vortex shedding pattern are entirely different from that behind a single confined circular cylinder under wall confinement and thermal effects.

# Resumen

En este trabajo se llevaron a cabo simulaciones numéricas para estudiar la transferencia de calor por convección mixta en un flujo laminar cruzado a través de dos cilindros isotérmicos de diámetro  $D$  colocados en línea y confinados en un canal vertical. Las ecuaciones de gobierno se resuelven empleando la formulación vorticidad-función de corriente de las ecuaciones de Navier-Stokes y la energía para flujo incompresible empleando el método de volúmenes de control en una malla ortogonal cartesiana no uniforme. El esquema numérico se validó para el caso de un cilindro isotérmico confinado simétricamente. Los cálculos se realizaron con los siguientes parámetros: número de Reynolds basado en el diámetro del cilindro de  $Re_D = 200$ , dos valores del número de Prandtl de  $Pr = 0.744$  y  $7$ , valores del parámetro de flotación (número de Richardson) en un intervalo de  $-1 \leq Ri \leq 4$ , y dos radios de bloqueo de  $BR = D/H = 0.2$  y  $0.3$ . Se consideraron todos los regímenes de flujo empleando una separación entre cilindros ( $\sigma = L/D$ ) de  $2, 3$  y  $5$ . Los efectos de la interferencia y las características del flujo se presentan en forma de contornos promedio e instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura. Adicionalmente, se obtienen ángulos de separación, fluctuaciones temporales de velocidad, número de Strouhal, tiempos característicos de oscilación, diagramas de fase entre las señales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal, estructura de la estela y la longitud de la zona de recirculación de cada cilindro. También se determinaron los valores de los números de Nusselt locales y promedio para cada cilindro. Los resultados demuestran cómo las características del flujo y la transferencia de calor son modificados significativamente por el confinamiento, el espacio entre cilindros y por los efectos térmicos para un intervalo amplio en el espacio paramétrico.

Se realizó un estudio experimental empleando velocimetría por imágenes de partículas (PIV) para evaluar los efectos térmicos en la estela de dos cilindros isotérmicos colocados en tándem y confinados en un canal vertical de sección rectangular. El efecto de la flotación en la distribución del flujo se muestra para las condiciones de flujo siguientes:  $Re = 100$  y  $200$ , radio de bloqueo de  $BR = 0.3$ , relación de aspecto de  $AR = W/D = 5$ , relación de espaciamiento de  $\sigma = 3$ , y valores del parámetro de flotación en el intervalo  $-1 \leq Ri \leq 3$ . En este trabajo se presentan contornos instantáneos y promedio del flujo. Además, se obtienen ángulos de separación, estructura de la estela, longitud de las regiones de recirculación, fluctuaciones temporales de las señales de las componentes de velocidad, número de Strouhal, y patrones de desprendimiento de vórtices del arreglo de cilindros como una función del  $Ri$ . Los resultados muestran que los efectos del  $Re$  son muy pronunciados y el patrón de desprendimiento de vórtices exhibe una fuerte dependencia al  $Ri$ . También se muestra el efecto de modulación de las paredes en el flujo tridimensional bajo la influencia de la flotación térmica, y los resultados reportados demuestran cómo la estructura del flujo, el comportamiento de la estela y el patrón de desprendimiento de vórtices difieren de los reportados para un sólo cilindro circular confinado y sujeto a fuerzas de flotación.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

En las últimas dos décadas, se han realizado numerosos trabajos tanto experimentales como numéricos enfocados al estudio del flujo a través de cilindros en tándem. Ésto se debe a sus múltiples aplicaciones ingenieriles en el diseño de intercambiadores de calor compactos, enfriamiento de barras de combustible nuclear, flujo y transferencia de calor alrededor de estructuras mar adentro y arreglos de chimeneas. Sin embargo, la mayoría de estos trabajos están enfocados en estudiar el efecto del espaciamiento de los cilindros y los efectos de interferencia en la estructura del flujo y en los coeficientes de las fuerzas inducidas sobre la superficie de éstos, como es evidente en las revisiones presentadas en [1–5]. La configuración espacial de dos cilindros puede ser alineada con la dirección del flujo (en tándem), lado a lado o en arreglos escalonados. Para el caso de dos cilindros con diámetros idénticos y colocados en tándem, se han identificado varios regímenes de flujo dependiendo del valor del número de Reynolds y la distancia entre los centros de los cilindros [1, 6]. El régimen de “un solo cuerpo” [7, 8] ocurre cuando la relación de espaciamiento ( $\sigma$ ) entre cilindros es más pequeña o igual que un valor crítico aproximado de  $1 < \sigma < 2$ . En este régimen, la estela de vórtices de Kármán del cilindro que se encuentra aguas arriba se suprime, el conjunto de cilindros se comporta como un solo cuerpo romo, la estela es más angosta y el número de Strouhal es mayor comparado con el de un solo cilindro. La aparición de vórtices ocurre muy cerca del cilindro que se encuentra aguas abajo y las estelas de vórtices de Kármán son más alargadas que las que aparecen para un cilindro [9–12]. El régimen de “reincorporación” aparece para valores de la relación de espaciamiento de aproximadamente  $2 < \sigma < 5$ , y básicamente se han identificado dos tipos de configuraciones para este régimen dependiendo de si la reinsertión del flujo con respecto al cilindro que se encuentra aguas abajo sucede “después del cuerpo” o “antes del cuerpo” [2, 6, 9–17]. El régimen de “co-desprendimiento” se presenta para valores de la relación de espaciamiento de  $\sigma > 5$ . En este caso, la frecuencia de desprendimiento de vórtices para ambos cilindros tiene el mismo valor [6–11, 18, 19].

En contraste, la transferencia de calor en arreglos de cilindros ha sido mucho menos estudiada. Iacovides *et al.* [20] realizaron simulaciones numéricas para estudiar

bancos de tubos alineados y confinados entre paredes paralelas usando los métodos conocidos como "Large eddy simulation (LES)" y "Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes (URANS)" para determinar el efecto del confinamiento en la respuesta del flujo. Chen y Wung [21] estudiaron la transferencia de calor por convección forzada y la caída de presión para arreglos en línea y escalonados con una relación de espaciamiento longitudinal y transversal de  $\sigma = 2$ . Sus resultados muestran que para valores altos del número de Reynolds, la transferencia de calor local tiende a aumentar en el punto de estancamiento del cilindro que se encuentra aguas arriba, mientras que ésta alcanza su mínimo valor en el punto de separación. Mandhani *et al.* [22] investigaron numéricamente la transferencia de calor por convección forzada para un flujo estacionario con un fluido incompresible y newtoniano alrededor de un banco de cilindros bajo condiciones de frontera tanto isotérmicas como de flujo de calor constante, y predijeron el valor del número de Nusselt como función de los números de Prandtl y de Reynolds para diferentes valores de espaciamiento entre cilindros. Gowda *et al.* [23] investigaron numéricamente la respuesta térmica transitoria del flujo alrededor de un arreglo de cilindros en línea y presentaron la evolución temporal de las líneas de corriente, contornos de temperatura, números de Nusselt locales y promedio, campos de presión y distribución de esfuerzo cortante alrededor de los cilindros. Zhang y Chen [24] estudiaron experimentalmente el efecto del espaciamiento entre cilindros en el desempeño térmico de arreglos de cilindros en línea. Zukauskas [25] presentó una revisión de trabajos experimentales de transferencia de calor alrededor de bancos de cilindros sujetos a flujo cruzado. Mahir y Altaç [26] estudiaron numéricamente la transferencia de calor alrededor de dos cilindros isotérmicos colocados en tándem para valores del número de Reynolds de 100 y 200 y para diferentes relaciones de espaciamiento. Encontraron que para  $\sigma > 4$ , el valor promedio del número de Nusselt del cilindro que se encuentra aguas arriba es aproximadamente igual al de un cilindro isotérmico, mientras que el número de Nusselt del cilindro que se encuentra aguas abajo es aproximadamente el 80 % del valor de este último. Harimi *et al.* [27] realizaron simulaciones numéricas para analizar la transferencia de calor por convección forzada en arreglos de dos y tres cilindros en tándem para múltiples relaciones de espaciamiento y propusieron dos nuevas correlaciones para el cálculo del número de Nusselt promedio en términos de la relación de espaciamiento y de los números de Reynolds y de Prandtl. Buyruk [28] estudió numéricamente las características de transferencia de calor de un par de cilindros isotérmicos colocados en tándem e inmersos en un flujo cruzado de aire para un valor del número de Reynolds de  $Re = 400$  y diferentes relaciones de espaciamiento, y obtuvo las variaciones en la distribución del número de Nusselt local y de los coeficientes de transferencia de calor locales. Beale y Spalding [29, 30] estudiaron numéricamente la transferencia de calor en un banco de cilindros sujetos a flujo cruzado y con diferentes configuraciones. Khan *et al.* [31] desarrollaron modelos analíticos para la transferencia de calor en arreglos de cilindros en línea y escalonados en términos de la relación de separación horizontal y vertical y los números de Reynolds y de Prandtl ( $\geq 0.71$ ). Kaptan *et al.* [32] investigaron numéricamente los efectos de la acumulación de material dentro de intercambiadores de calor de tubos y obtuvieron las distribuciones de temperatura y los coeficientes de

transferencia de calor para tres diferentes concentraciones de impurezas, encontrando que la transferencia de calor disminuye conforme aumenta la acumulación de éstas.

Las investigaciones de flujo alrededor de un cilindro confinado entre placas paralelas muestran que el radio de bloqueo tiene una fuerte influencia en los patrones de flujo, en los coeficientes de arrastre y sustentación, en la longitud de la zona de recirculación, en los ángulos de separación y en el valor del número de Strouhal. Sin embargo, a pesar de los numerosos estudios realizados hasta ahora, la gran mayoría de las investigaciones se ha llevado a cabo para arreglos de cilindros sin confinar, y solo algunos trabajos se han enfocado en estudiar el efecto del confinamiento. Jiang y Lin [33] emplearon el método Lattice Boltzmann para estudiar los efectos de pared en el flujo a través de dos cilindros de diferentes diámetros en tándem. Los autores encontraron que el ancho del canal tiene un efecto muy importante en el valor del espaciamiento crítico que hace que el flujo cambie del modo de "reincorporación" al modo de "co-desprendimiento." Nejat *et al.* [34] calcularon el flujo para un fluido no newtoniano de ley de potencia alrededor de un arreglo de dos cilindros confinados en tándem con cuatro diferentes relaciones de espaciamiento y evaluaron el efecto del índice de la ley de potencia, el número de Reynolds y la relación de espaciamiento en los coeficientes de arrastre de los cilindros. Jianzhong *et al.* [35] estudiaron numéricamente el flujo laminar a través de un arreglo de cilindros en tándem en ductos de paredes paralelas y que se pueden mover libremente en la dirección transversal para un número de Reynolds fijo de  $Re = 100$  y un radio de bloqueo de 0.15. Sus resultados muestran la importancia de la fuerza hidrodinámica y cómo ésta es afectada por la pared.

Cabe mencionar que en la literatura especializada existen una gran cantidad de trabajos que estudian la transferencia de calor por convección mixta en cilindros cuadrados, dispuestos en tándem y confinados [36–40]. Sin embargo, es importante aclarar que para cilindros cuadrados en tándem, debido a que el punto de separación permanece fijo, existen diferencias importantes en los regímenes críticos resultantes. Como tal, los patrones de flujo y las estructuras de las estelas difieren considerablemente de las observadas para arreglos de cilindros circulares en tándem. Adicionalmente, dependiendo de las frecuencias de desprendimiento y de las fuerzas aerodinámicas, los mecanismos de separación difieren significativamente para ambas geometrías. Lu *et al.* [41] simulon mediante el método de Lattice Boltzmann el flujo a través de dos cilindros cuadrados calentados/enfriados y dispuestos en tándem para diferentes valores del número de Richardson y números de Reynolds de  $Re = 60$  y  $100$ . Los autores señalan que para flujo asistido, el desprendimiento de vórtices se suprime y el espaciamiento crítico no existe. Sin embargo, para flujo opuesto, la estela de vórtices siempre se genera y los valores del número de Nusselt de las superficies de los cilindros muestran diferentes características dependiendo el valor del número de Richardson. Huang *et al.* [42] estudiaron numéricamente el flujo por convección mixta laminar bidimensional alrededor de dos cilindros cuadrados idénticos e isotérmicos colocados en tándem y confinados en un canal empleando un radio de bloqueo fijo de  $BR = 0.1$ , un número de Prandtl de  $Pr = 0.7$ , un espaciamiento entre cilindros de  $\sigma = 4$ , y un intervalo de valores de los números de Reynolds y de

Richardson de  $80 < Re < 150$  y  $0 < Ri < 1$ , respectivamente. Los autores analizaron la influencia de la flotación debido a la temperatura y sus resultados muestran que el coeficiente de sustentación es más sensible a la flotación térmica que el coeficiente de arrastre y el número de Nusselt. Adicionalmente, mencionan que la transferencia de calor del cilindro superior es mayor que la del cilindro inferior. Chatterjee and Amiroudine [43] realizaron simulaciones numéricas en dos dimensiones con la finalidad de explicar los efectos de la flotación térmica y del número de Prandtl en las características del flujo y la transferencia de calor por convección mixta alrededor de un par de cilindros cuadrados colocados en tándem dentro de un canal para valores bajos del número de Reynolds. Los autores propusieron nuevas correlaciones para el *factor-j* de Colburn como función del número de Reynolds para ambos cilindros, y observaron que los parámetros globales son siempre mayores para el cilindro ubicado aguas arriba en comparación con los valores correspondientes para el cilindro que se encuentra aguas abajo.

La revisión bibliográfica presentada sugiere que aunque existe una gran cantidad de trabajos que estudian los efectos de interferencia en arreglos de cilindros confinados, la mayoría de estos estudios consideran los regímenes de convección natural o forzada, mientras que el efecto de la flotación es prácticamente desconocido. En este trabajo de investigación se estudia numéricamente el flujo transitorio y las características térmicas en un régimen de convección mixta alrededor de un par de cilindros isotérmicos, de igual diámetro, dispuestos en tándem y confinados dentro de un canal vertical de longitud finita para diferentes valores del parámetro de flotación y de la relación de espaciamiento. Es importante señalar que aunque el fenómeno de convección mixta en arreglos de cilindros confinados es inherentemente tridimensional, se asume que es válido restringir las simulaciones numéricas a un espacio en dos dimensiones para un valor de número de Reynolds de  $Re = 200$  [11, 44–50]. La comparación entre los resultados obtenidos y los datos disponibles muestra una buena concordancia, y las características de los campos de flujo y temperatura se presentan y discuten a detalle.

**Parte I**  
**Estudio Numérico**

# Capítulo 2

## Planteamiento del problema

### 2.1. Formulación Matemática

Se considera un sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y)$  con el origen ubicado en el punto central del cilindro que se encuentra aguas arriba. Los cilindros se consideran infinitamente largos, razón por la cual las variaciones a lo largo del eje  $z$  no son consideradas. La representación esquemática del dominio computacional se muestra en la Fig. 2.1, la cual consiste de un flujo estacionario, descendente, incompresible, newtoniano y laminar a la entrada de un ducto vertical. El fluido entra con una velocidad promedio  $u_0$ , y dentro del dominio hay un arreglo de dos cilindros en tándem de igual diámetro  $D$  y que se encuentran colocados en el centro del ducto (plano de simetría). Las paredes del canal están separadas por una distancia  $H$ ,  $L$  es la longitud entre centros de cilindros, los valores de la relación de espaciamiento  $\sigma$  varían desde 2 a 5, y el valor del radio de bloqueo  $BR = D/H$  es de 0.2 y 0.3. La longitud total del canal es  $L_{tot} = 30D$ , la frontera superior por donde entra el flujo se encuentra localizada a  $5D$  aguas arriba del primer cilindro y  $S = 24.5$  es la distancia del origen a la salida del canal. Estos valores se seleccionaron estimando un canal lo suficientemente largo, de manera que permita que la estela del cilindro que se encuentra aguas abajo se desarrolle completamente y que abandone el canal sin producir reflexiones considerables. No se encontraron diferencias significativas con dominios más largos que el seleccionado. El flujo forzado entra al ducto con un perfil de Poiseuille a una temperatura ambiente  $T_0$ . Los cilindros tienen una temperatura uniforme en la pared  $T_w$ , las paredes del canal se asumen adiabáticas y se colocan alineadores de flujo a la salida del canal, produciendo flujo paralelo en  $X = S$ . Se asume que una vez que el fluido abandona el canal, éste no influye en el fluido que se encuentra dentro del canal. La disipación viscosa en la ecuación de la energía es despreciada y las propiedades termofísicas se consideran constantes, excepto la densidad en el término de flotación, la cual se calcula empleando la aproximación de Boussinesq y que es válida para  $\Delta T \ll T_0$  para valores del número de Mach  $\ll 1$  (para el caso del aire). Usando la formulación vorticidad ( $\Omega = \partial V/\partial X - \partial U/\partial Y$ ) y función de corriente ( $U = \partial\psi/\partial Y$ ,  $V = -\partial\psi/\partial X$ ), el flujo es descrito por las siguientes ecuaciones adimensionales:

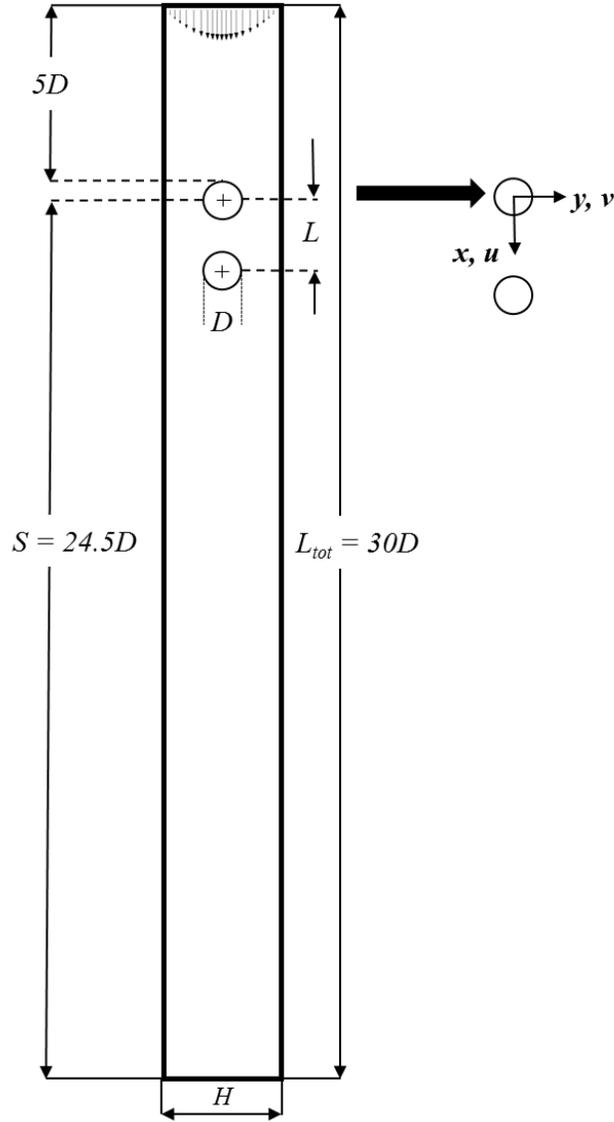


Figura 2.1: Diagrama esquemático del dominio computacional y configuración de los cilindros dentro del canal.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ri \frac{\partial \theta}{\partial Y}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{RePr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right). \quad (2.3)$$

donde  $\vec{V} = (U, V)$  es el vector velocidad adimensional y  $\theta$  es la temperatura adimensional. En las ecuaciones anteriores,  $U$ ,  $V$  representan las componentes  $X$  e  $Y$  del vector  $\vec{V}$ , respectivamente. Todas las componentes de velocidad son escaladas

con la velocidad promedio de entrada  $u_0$ ; las coordenadas transversales y longitudinales son escaladas con el diámetro del cilindro  $D$ ; el tiempo es escalado con el tiempo de residencia del fluido  $D/u_0$ ,  $\tau = tu_0/D$ ; la temperatura es normalizada como  $\theta = (T - T_0)/(T_w - T_0)$ . Los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones son: el número de Reynolds,  $Re = u_0 D/\nu$  (razón entre fuerzas inerciales y viscosas), el número de Prandtl,  $Pr = \nu/\alpha$  (razón entre la difusividad térmica y viscosa) y el número de Richardson  $Ri = g\beta(T_w - T_0)D/u_0^2$  (razón entre el potencial inducido por flotación y la energía cinética). Aquí  $g$  es la aceleración debido a la gravedad y  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica,  $\beta = 1/T_0$  (para un gas ideal). Las ecuaciones (2.1)-(2.3) son resueltas empleando las siguientes condiciones de frontera:

Para la entrada del canal, la condición de entrada del flujo es un perfil de velocidad parabólico (flujo de Poiseuille) expresado en términos de la función de corriente,

$$\psi - 1/2 [1/BR + 3Y - 4(BR)^2 Y^3] = \Omega - 12(BR)^2 Y = \theta = 0, \quad (2.4)$$

Para las paredes del canal,  $\psi = 0$ ,  $+1/BR$  en la pared izquierda ( $Y = -1/(2BR)$ ) y en la pared derecha ( $Y = +1/(2BR)$ ), respectivamente. La vorticidad en las paredes se evalúa empleando la fórmula clásica de Thom de primer orden [51],

$$\Omega_W = 2(\psi_{W+1} - \psi_W)/\Delta n^2, \quad (2.5)$$

donde  $\Delta n$  es el espacio de la malla normal a la pared. Las paredes del canal se asumen adiabáticas,  $\partial\theta/\partial Y = 0$ .

A la salida del canal se adoptan condiciones de frontera homogéneas de Neumann, dado que la frontera de salida está ubicada lo suficientemente lejos aguas abajo de la región de interés.

$$\partial\psi/\partial X|_{X=S} = \partial^2\psi/\partial X\partial Y|_{X=S} = \partial\theta/\partial X|_{X=S} = 0, \quad (2.6)$$

En la superficie de los cilindros,

$$\Omega - 2(\psi_{W+1} - \psi_W)/\Delta n^2 = \theta - 1 = 0. \quad (2.7)$$

En la superficie de cada cilindro se imponen condiciones de no-deslizamiento e impermeabilidad. Debido a que el valor de la función de corriente es una constante cuyo valor se desconoce a lo largo de la superficie de cada cilindro, su valor tiene que ser determinado para cada paso de tiempo como parte del proceso de solución [52,53]. La metodología para encontrar el valor de la función de corriente para una geometría dada es la siguiente:

1. Se interpola la función de corriente en la frontera irregular para calcular su valor promedio en cada cilindro empleando una interpolación polinomial de segundo orden que se percata de las discontinuidades en la frontera y se impone la condición de frontera de forma implícita.
2. Se resuelve la ecuación de la función de corriente en la dirección de  $X$  con la condición de frontera impuesta usando el algoritmo de Thomas.

3. Se utilizan los valores obtenidos de la función de corriente en todo el dominio para actualizar el valor promedio de la función de corriente en la superficie de los cilindros como la nueva condición de frontera.
4. Se resuelve la ecuación de la función de corriente en la dirección  $Y$  usando la condición de frontera actualizada.

El proceso se repite hasta que la solución de la ecuación de la función de corriente converge. Cabe mencionar que este proceso resulta extremadamente eficiente, ya que sólo se presentan pequeñas variaciones en el valor de la función de corriente para cada paso de tiempo, lo que permite emplear la solución del paso anterior como las nuevas condiciones iniciales.

Con el campo de temperatura conocido, el flujo de calor tanto para el cilindro superior como para el inferior,  $q_1$  y  $q_2$ , se pueden obtener en forma adimensional con el número de Nusselt local. Los números de Nusselt locales para ambos cilindros pueden ser evaluados con las siguientes ecuaciones:

$$Nu_1(\gamma, \tau) = -\frac{q_1(\gamma, t)D}{(T_w - T_0)k} = -\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_w \quad (2.8)$$

$$Nu_2(\gamma, \tau) = -\frac{q_2(\gamma, t)D}{(T_w - T_0)k} = -\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_w \quad (2.9)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica del fluido y  $\gamma$  es el ángulo medido con respecto al punto de estancamiento frontal de cada cilindro. El número de Nusselt promedio es obtenido integrando los números de Nusselt locales a lo largo de la superficie de cada cilindro.

$$\overline{Nu}_{1,2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma=0}^{2\pi} Nu_{1,2}(\gamma, \tau) d\gamma \quad (2.10)$$

## 2.2. Solución Numérica

Con el propósito de resolver las ecuaciones de gobierno, se programó un algoritmo numérico en Fortran 90, basado en el método de Volumen Finito, usando programación paralela (OpenMP). Las ecuaciones fueron discretizadas usando el esquema numérico de ley de potencia descrito por Patankar [54]. El sistema de ecuaciones no lineales (2.1)-(2.3) junto con sus correspondientes condiciones de frontera se resuelven usando una malla cartesiana no uniforme con refinamientos locales alrededor de la frontera inmersa y cerca de las paredes del canal. La malla empleada se calculó a partir de las funciones de estrechamiento descritas en [55], y los parámetros de empaquetamiento son modificados de acuerdo al valor del radio de bloqueo y la relación de espaciamiento entre cilindros. La Fig. 2.2 muestra un acercamiento de la malla alrededor de un arreglo de cilindros con una relación de espaciamiento de  $\sigma = 2$  y un radio de bloqueo de  $BR = 0.3$ . Las fronteras dentro del dominio computacional son impuestas y resueltas usando el método de la frontera inmersa [56, 57]. Las variables en cada nodo del dominio del fluido son actualizadas en cada paso de tiempo

mediante la solución de las ecuaciones (2.1)-(2.3) con sus respectivas condiciones de frontera empleando interpolaciones cuadráticas entre los nodos donde hay fluido y los nodos que forman parte del sólido o los nodos fantasma. A fin de mejorar la eficiencia computacional, se eligió un valor óptimo para el paso de tiempo de  $\Delta\tau = 5 \times 10^{-4}$  para todos los cálculos. El fenómeno se estudió con dos diferentes valores

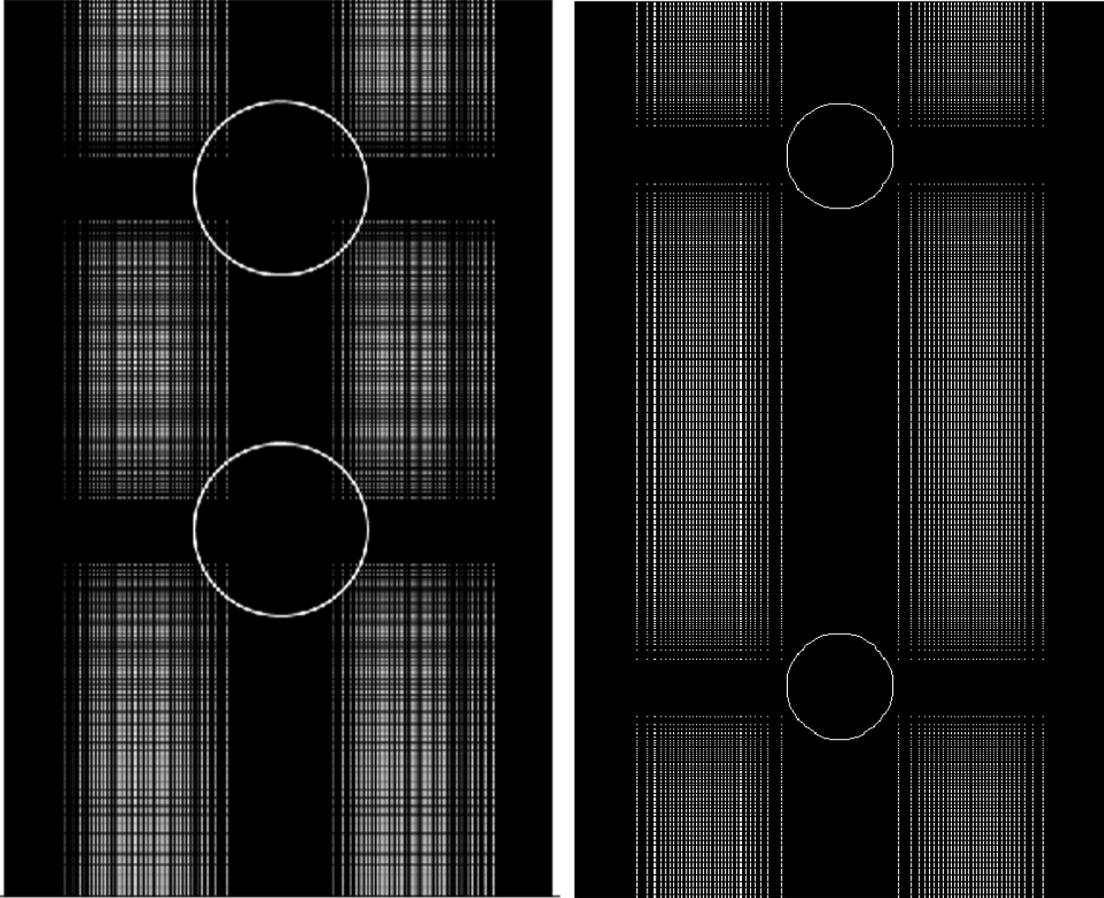


Figura 2.2: Detalle de las mallas utilizadas con  $400 \times 450$  nodos en dirección horizontal y vertical, respectivamente. Imagen izquierda:  $\sigma = 2$  y  $BR = 30\%$ . Imagen derecha:  $\sigma = 5$  y  $BR = 20\%$ .

del número de Prandtl de  $Pr = 7$  y  $Pr = 0.744$  (agua y aire), respectivamente. La convergencia espacial entre dos iteraciones sucesivas se logra cuando la diferencia de los valores máximos absolutos de las variables dependientes en cada iteración son menores que  $1 \times 10^{-6}$  (criterio de convergencia). En el presente estudio se utilizó como condición inicial un canal sin cilindros y con flujo completamente desarrollado. Para un valor dado del parámetro de flotación, los cálculos comienzan inmediatamente después de la imposición de los cilindros, que tienen un valor adimensional de la condición de frontera para la temperatura de  $\theta_W = 1$  en el tiempo  $\tau = 0$ , y los cálculos se realizaron hasta un valor de 1000 constantes de tiempo adimensional. Esto físicamente implica que en un canal vertical con flujo completamente desarrollado

se introduce súbitamente el arreglo de cilindros isotérmicos.

### 2.2.1. Validación del algoritmo

Para garantizar la validez de los resultados obtenidos, se realizó una comparación con los datos disponibles en la literatura especializada, reproduciendo el fenómeno reportado por Chen *et al.* [58] para el caso de un cilindro confinado entre placas paralelas con un radio de bloqueo de  $BR = 0.3$ . Los autores determinaron el mecanismo por el cual las soluciones pierden tanto la simetría como la independencia del tiempo para valores bajos del número de Reynolds. Con la finalidad de poder comparar los resultados numéricos con los datos experimentales disponibles en donde no se toma en cuenta el confinamiento, Chen *et al.* [58] definieron un número de Reynolds  $Re_D = u_D D / \nu$ , donde

$$u_D = \frac{1}{D} \int_{-D/2}^{D/2} u(y) dy. \quad (2.11)$$

En la ecuación (2.11),  $u$  es la componente de velocidad vertical especificada a la entrada del canal. La Tabla 2.1 compara los valores de los números de Reynolds ( $Re_{Dcr}$ ) y Strouhal ( $St_{Dcr}$ ) críticos para los cuales la estela pierde su simetría y el punto de separación de la capa límite comienza a oscilar. Los datos obtenidos coinciden entre ambos estudios. De manera similar, la Tabla 2.2 muestra una comparación

$BR = 0.3$		
	obtenido	Chen <i>et al.</i> [58]
	Resultados numéricos/experimentales	
$Re_{Dcr}$	88.938	92
$St_{Dcr}$	0.202533	0.215

Tabla 2.1: Comparación entre los valores críticos para que haya rompimiento de simetría por medio de una bifurcación de Hopf junto con su número de Strouhal correspondiente.

entre los resultados obtenidos en el presente trabajo y los obtenidos por Khan *et al.* [59] y Mettu *et al.* [60] en términos del número de Nusselt promedio para el caso de un cilindro isotérmico y confinado simétricamente en un canal para un intervalo de valores del número de Reynolds de 20 a 500 con un radio de bloqueo de  $BR = 0.2$  y un valor del número de Prandtl de  $Pr = 0.7441$ . De esta tabla se puede observar claramente que los resultados concuerdan, comprobándose con ésto que el esquema numérico seleccionado y el algoritmo programado son adecuados y confiables. La técnica validada fue aplicada al arreglo de cilindros en tándem descrito en la Sección 2.1.

$BR = 0.2$			
$Re$	$\overline{Nu}$		
	obtenido	Khan <i>et al.</i> [59]	Mettu <i>et al.</i> [60]
20	2.706	2.450	2.667
30	3.181	3.000	3.119
40	3.583	3.464	3.497
50	3.941	3.873	3.830
60	4.272	4.243	4.135
200	8.003	7.747	7.592
300	9.563	9.489	9.326
400	10.795	10.950	10.910
500	12.108	12.210	12.130

Tabla 2.2: Comparación de los valores del número de Nusselt promedio para un radio de bloqueo de  $BR = 0.2$  y diferentes valores del número de Reynolds.

### 2.2.2. Estudio de independencia de malla

El número de nodos en la malla se determinó mediante un estudio de independencia de malla. Se realizaron experimentos numéricos con mallas de diferentes tamaños para cada valor de la relación de espaciamiento con un valor del número de Reynolds de  $Re_D = 200$  y para el caso de cilindros isotérmicos en convección forzada. Las Tablas 2.3 y 2.4 muestran los valores de los números de Nusselt promedio para ambos cilindros usando diferentes tamaños de malla para radios de bloqueo de  $BR = 20\%$  y  $30\%$ , respectivamente. Finalmente, para todos los cálculos se seleccionó un tamaño de  $400 \times 450$  nodos en dirección horizontal y vertical, respectivamente, ya que para mallas con mayor refinamiento la diferencia entre los valores de los números de Nusselt promedio es menor al  $1.1\%$ .

		$Re = 200$		$BR = 30\%$	
$\sigma$	Tamaño de malla	$\overline{Nu}$ Cilindro superior	$\overline{Nu}$ Cilindro inferior	% Error Cilindro superior	% Error Cilindro inferior
2	$400 \times 550$	7.53518	3.63248	-	-
2	$400 \times 450$	7.48359	3.63647	0.685	0.11
2	$400 \times 400$	7.4242	3.64624	1.473	0.379
2	$400 \times 350$	7.39017	3.65305	1.924	0.566
3	$400 \times 550$	7.65826	4.2865	-	-
3	$400 \times 450$	7.59434	4.29159	0.835	0.119
3	$400 \times 400$	7.54323	4.29524	1,502	0.204
3	$400 \times 350$	7.52148	4.3017	1.786	0.355
5	$400 \times 550$	8.21609	7.04402	-	-
5	$400 \times 450$	8.12632	6.9673	1.093	1.089
5	$400 \times 400$	8.07723	6.9673	1.69	2.351
5	$400 \times 350$	8.07667	6.82985	1.697	3.040

Tabla 2.3: Resultados del estudio de independencia de malla para  $BR = 30\%$ .

		$Re = 200$		$BR = 20\%$	
$\sigma$	Tamaño de malla	$\overline{Nu}$ Cilindro superior	$\overline{Nu}$ Cilindro inferior	% Error Cilindro superior	% Error Cilindro inferior
2	$400 \times 550$	7.53518	3.63248	-	-
2	$400 \times 450$	7.48359	3.63647	0.685	0.11
2	$400 \times 400$	7.4242	3.64624	1.473	0.379
2	$400 \times 350$	7.39017	3.65305	1.924	0.566
3	$400 \times 550$	7.65826	4.2865	-	-
3	$400 \times 450$	7.59434	4.29159	0.835	0.119
3	$400 \times 400$	7.54323	4.29524	1,502	0.204
3	$400 \times 350$	7.52148	4.3017	1.786	0.355
5	$400 \times 550$	8.21609	7.04402	-	-
5	$400 \times 450$	8.12632	6.9673	1.093	1.089
5	$400 \times 400$	8.07723	6.9673	1.69	2.351
5	$400 \times 350$	8.07667	6.82985	1.697	3.040

Tabla 2.4: Resultados del estudio de independencia de malla para  $BR = 20\%$ .

# Capítulo 3

## Resultados y discusión

Los resultados numéricos presentados en este trabajo corresponden en todos los casos a valores del número de Reynolds de  $Re_D = 200$ . En esta capítulo, los resultados para los valores instantáneos y promedio del flujo y la transferencia de calor son presentados para tres valores de la relación de espaciamiento y distintos valores del parámetro de flotación ( $Ri$ ).

### 3.1. $Pr = 7$ y $BR = 20\%$

En esta sección, todos los resultados presentados son para un número de Prandtl de  $Pr = 7$  (agua) y un radio de bloqueo de  $BR = 0.2$ .

#### 3.1.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ )

En esta subsección se presentan las características de la respuesta del flujo para flujo asistido,  $T_w < T_0$ . La Fig. 3.1 muestra para  $\sigma = 2$  y 5 los valores adimensionales de flujo en estado estacionario para  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ). Por claridad, solo se muestra una porción del dominio computacional. Las imágenes muestran (de izquierda a derecha) las componentes de velocidad longitudinal y transversal adimensionales con líneas de corriente superpuestas, la distribución adimensional de vorticidad, y el campo de temperatura con perfiles de velocidad superpuestos. Las escalas que se encuentran debajo de cada imagen muestran las variaciones en los contornos de velocidad, vorticidad y temperatura. Aquí, los colores rojo/amarillo representan vorticidad positiva o rotación en sentido anti-horario, mientras que los colores azul/púrpura indican rotación negativa o en sentido horario. Las regiones verdes reflejan la ausencia de movimiento rotacional. El patrón de flujo resultante ilustra como para este valor de número de Richardson, la estela de vórtices se suprime y se alcanza una solución estacionaria y simétrica. Para  $\sigma = 2$ , las zonas de recirculación del cilindro superior se reincorporan en la parte superior de la superficie del cilindro que se encuentra aguas abajo y las zonas de recirculación de éste son más pequeñas y esbeltas. También se observa que los valores de las capas con los esfuerzos de corte alcanzan valores relativamente altos, y en la parte central del canal ( $Y = 0$ ) se observa un incremento en el valor de la componente de velocidad

longitudinal en dirección aguas abajo. Para  $\sigma = 5$ , el patrón de flujo se caracteriza

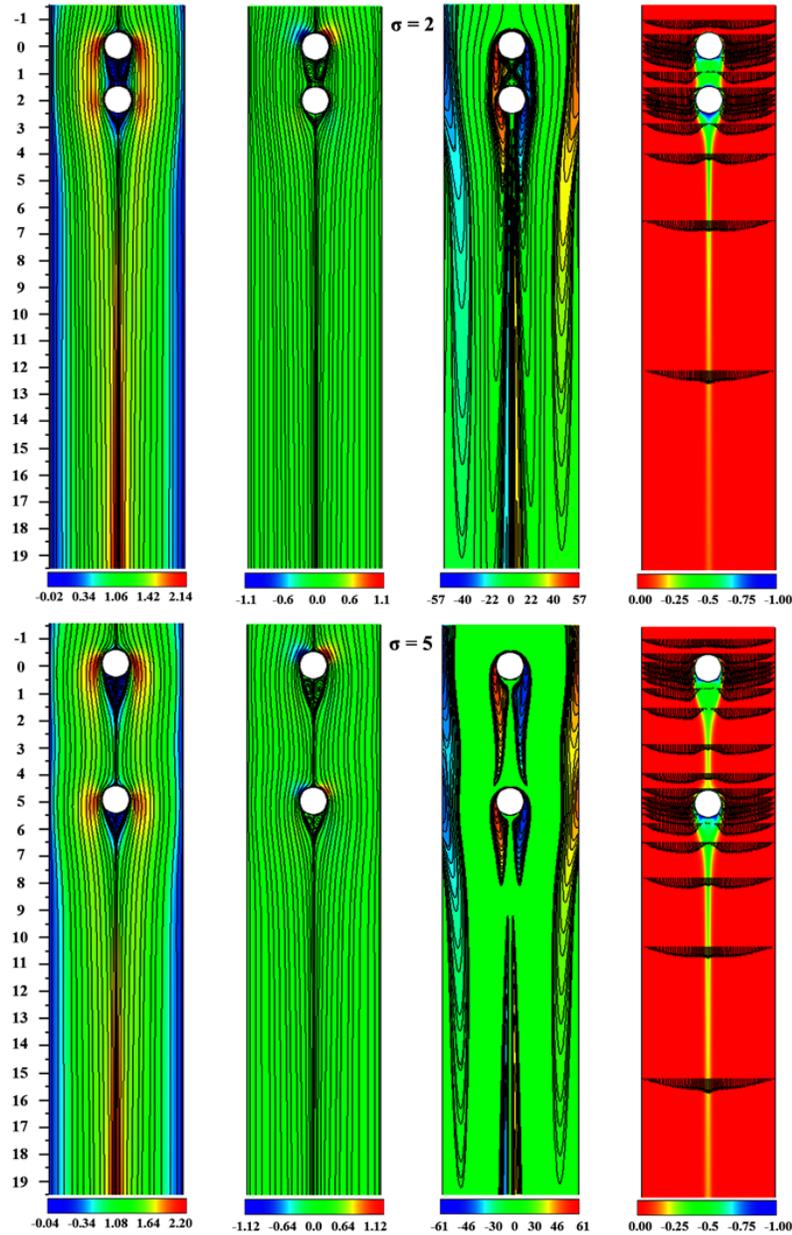


Figura 3.1: Flujo adimensional estacionario para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: distribuciones de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

por la presencia de dos zonas de recirculación esbeltas de tamaño prácticamente igual en la parte posterior de ambos cilindros. Adicionalmente, el punto de separación para ambos cilindros se retrasa y el patrón de flujo es notablemente simétrico. Además, los valores pico de la vorticidad crecen notablemente y la componente de velocidad longitudinal incrementa en la parte central del canal en dirección aguas abajo.

### 3.1.2. Flujo isotérmico ( $Ri = 0$ )

La Fig. 3.2 presenta para  $\sigma = 2$  y 5 una ampliación del dominio computacional mostrando los valores adimensionales promedio para  $Ri = 0$  (flujo isotérmico). En

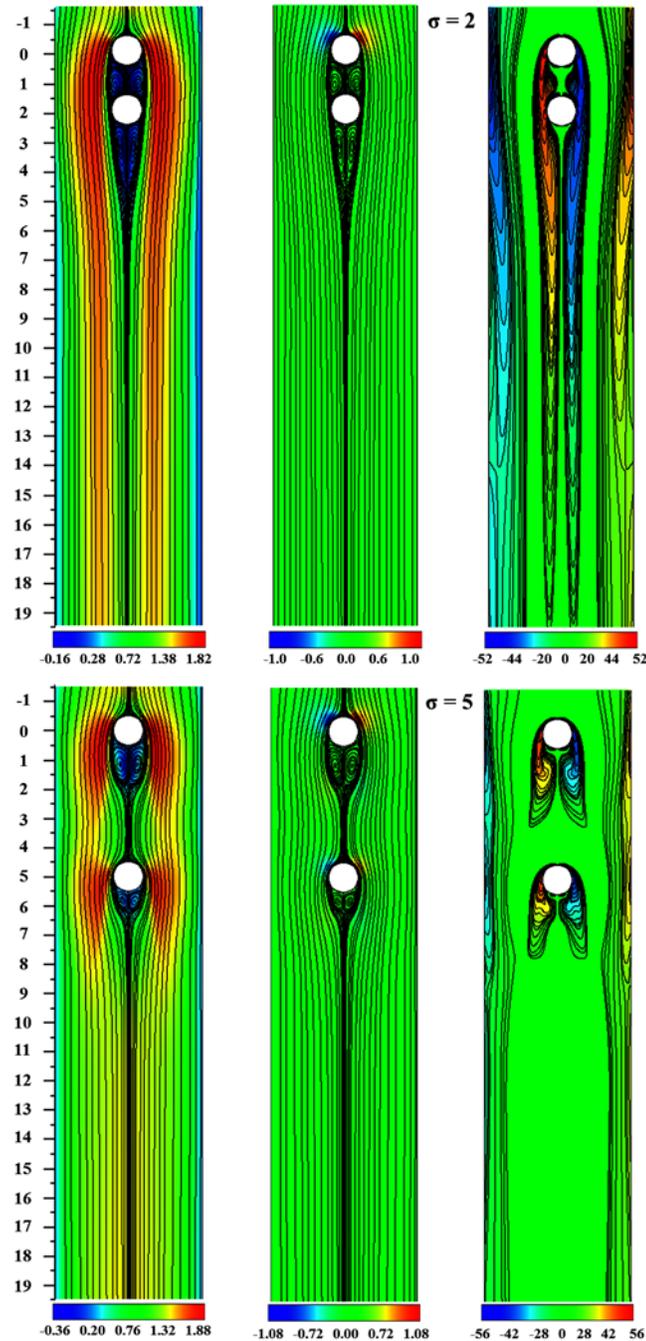


Figura 3.2: Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $\sigma = 2$  y 5. De izquierda a derecha: distribuciones de velocidad  $U$ ,  $V$  y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

la ausencia de flotación y para  $\sigma = 2$ , la solución para el flujo alcanza un estado estacionario simétrico, la zona de recirculación en la parte trasera del cilindro aguas arriba ocupa la totalidad del espacio entre cilindros, y la estela del cilindro inferior es más larga y esbelta. Asimismo, las capas con esfuerzos de corte generadas por el cilindro superior impactan la parte frontal del cilindro inferior, se presenta una ligera reducción en la intensidad de la vorticidad, y existe poca interacción entre la vorticidad generada por el cilindro que se encuentra aguas arriba y las paredes del canal. Debido al efecto de bloqueo, se observa una velocidad descendente máxima de  $U = 1.82$  entre los cilindros y las paredes del canal, mientras que la velocidad ascendente máxima de  $U = -0.21$  en la estela del cilindro inferior se presenta en  $X \approx 1.09$ . Para  $\sigma = 5$ , debido a que la separación entre cilindros es lo suficientemente grande, el flujo en el plano de simetría alcanza valores positivos después de la zona de recirculación. Claramente, la solución del flujo es simétrica con respecto al eje de simetría y la zona de recirculación ubicada en la parte posterior del cilindro inferior es ligeramente más esbelta y corta que la zona de recirculación del cilindro superior. Ésto es una clara indicación de la existencia de una débil interacción entre las estelas de ambos cilindros. La Fig. 3.3 presenta para  $\sigma = 5$  los patrones instantáneos típicos

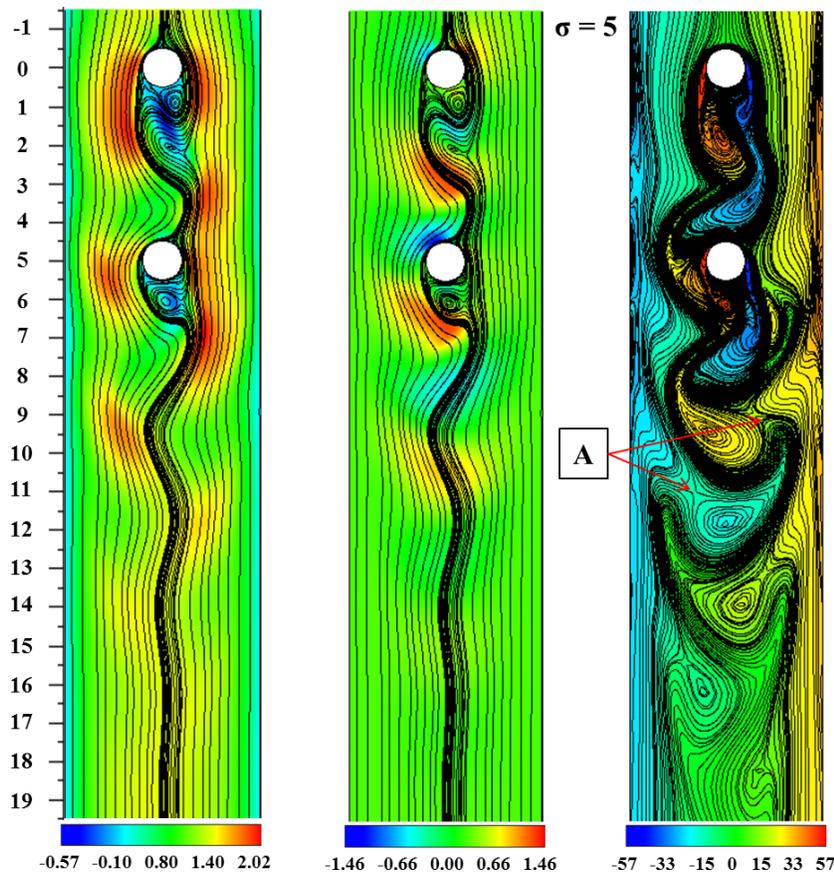


Figura 3.3: Flujo adimensional promedio para valores de  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 5$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 0$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$ ,  $V$  y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

de velocidad y vorticidad mostrando cómo ocurre el régimen de co-desprendimiento, esto es, los vórtices se desprenden tanto del cilindro superior como del cilindro inferior y sus frecuencias son idénticas. La tercera imagen muestra cómo para este valor del espaciamento entre cilindros tienen lugar interacciones complejas entre las capas de corte desprendidas, donde la etiqueta **A** resalta cómo la vorticidad generada por la pared captura a los vórtices libres del mismo signo y cómo los vórtices que se aparean son transportados aguas abajo. La Fig 3.4 presenta para  $\sigma = 5$  las variaciones temporales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal en el plano de simetría del canal para posiciones selectas a lo largo del eje  $X$ . Se puede observar que las fluctuaciones de la velocidad son monocromáticas después de un tiempo de inducción y que éstas alcanzan su máxima amplitud en el espacio entre cilindros en la coordenada  $(X,Y) = (2.5,0)$ .

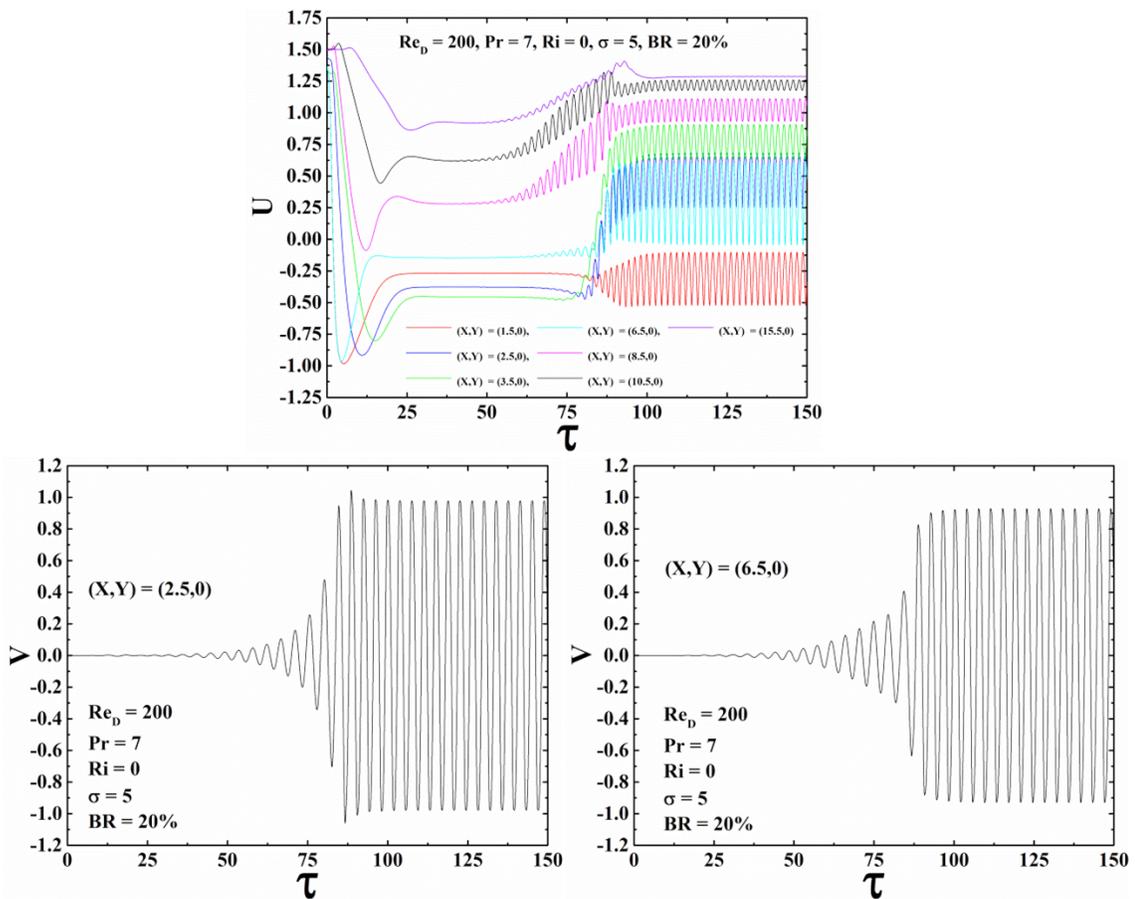


Figura 3.4: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 0$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para varias posiciones en el eje  $X$ .

### 3.1.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ )

En ésta subsección se presenta para  $\sigma = 2$  y  $5$  la respuesta característica para flujo opuesto y para valores crecientes del parámetro de flotación. Para  $\sigma = 2$  y un valor de  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ), no existe una solución estacionaria y los valores del flujo temporal adimensional promedio se muestran en la Fig. 3.5. El flujo en la

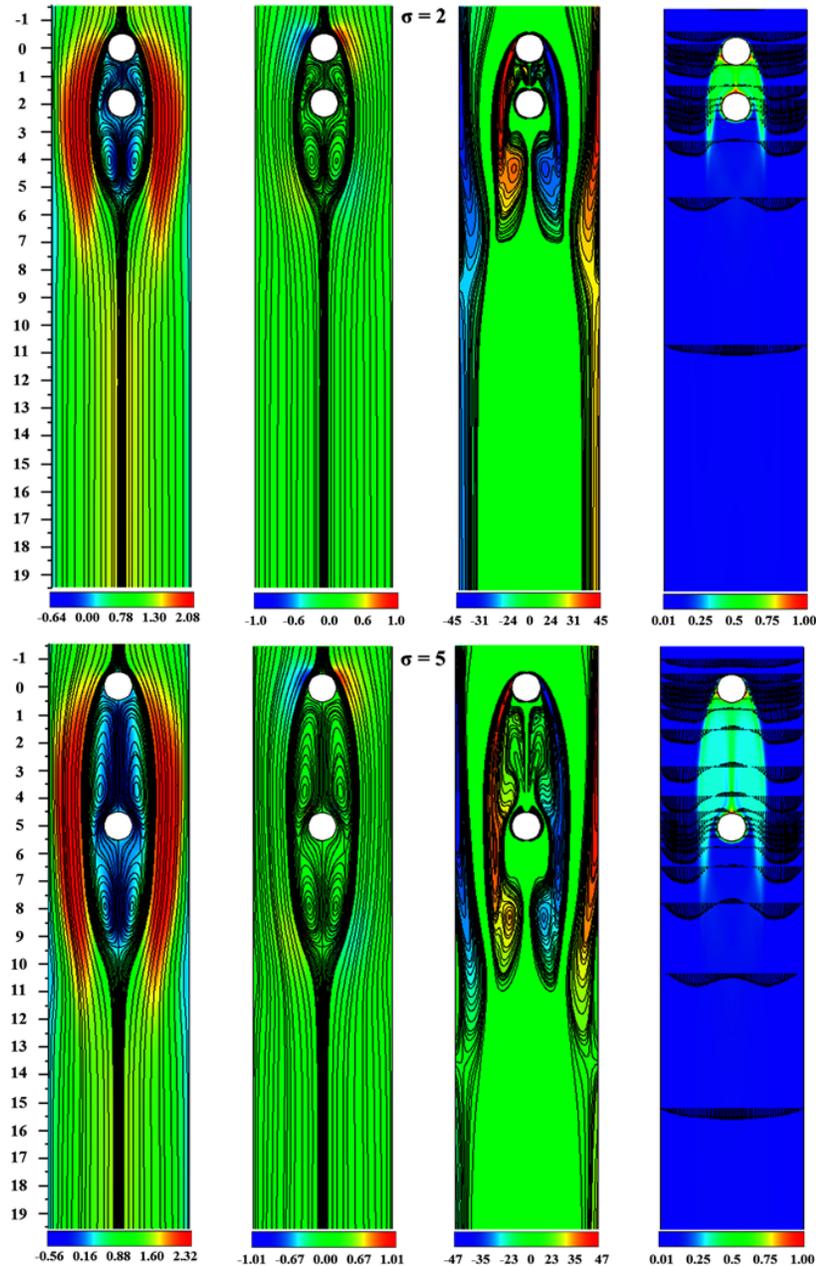


Figura 3.5: Valores adimensionales del flujo promedio para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$  y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

superficie del cilindro ubicado aguas arriba se separa antes y la estela se torna mas ancha y larga en comparación con el caso isotérmico. Debido al ensanchamiento de la estelas, el efecto del bloqueo aumenta y por lo tanto se alcanza una velocidad máxima en dirección longitudinal de  $U = 2.08$  entre los cilindros y las paredes del canal, mientras que se observa una velocidad ascendente máxima de  $U = -0.64$  en  $X \approx 4.08$ . La tercera imagen muestra cómo aunque la intensidad de la vorticidad se reduce, la interacción entre las capas de esfuerzos de corte generadas por el cilindro ubicado aguas arriba y las paredes del canal se incrementa. La cuarta imagen muestra cómo debido a la reversión de flujo presente entre los dos cilindros, la presencia del primer cilindro tiene un efecto significativo en el cilindro inferior, por lo cual la transferencia de calor de éste se reduce considerablemente. La imagen inferior muestra cómo para  $\sigma = 5$  se presentan dos regiones de recirculación alargadas y simétricas debajo de cada cilindro. A causa de la presencia de flujo ascendente en el espacio entre cilindros, aparece una conexión entre las capas límite térmicas de ambos cilindros, se incrementa la flotación y se reduce la intensidad de la vorticidad con respecto al flujo en convección forzada. La velocidad ascendente máxima y mínima ocurren en  $X \sim 3.37$ , que corresponde a la parte inferior del cilindro ubicado aguas abajo y que es donde la zona de recirculación alcanza su máximo espesor. La Fig. 3.6 muestra para  $\sigma = 2$  y  $5$  los patrones instantáneos típicos de flujo y de temperatura para  $Ri = 1$ . Para  $\sigma = 2$ , las imágenes superiores ilustran cómo la zona de recirculación ubicada entre ambos cilindros se aparea periódicamente con los vórtices de Kármán que son desprendidos por el cilindro inferior. La tercera imagen muestra cómo la interacción entre las capas de esfuerzo de corte producidas por el cilindro superior y el cilindro inferior es relativamente baja. Sin embargo, aunque su intensidad disminuye, el desprendimiento de vórtices ocurre tanto desde ambos cilindros como de las paredes del canal, resultando en contornos de vorticidad más complejos. Para ejemplificar esto, la región **B** en la figura resalta cómo los vórtices que giran en el mismo sentido se aparean, creando vórtices de mayor intensidad que son transportados aguas abajo. La cuarta imagen muestra cómo la transferencia de calor decrece debido a la presencia de fluido con una temperatura relativamente alta en la zona entre los cilindros. Obsérvese cómo el fluido caliente abandona el cilindro inferior siguiendo la ruta de la estela de vórtices de Kármán. Las imágenes de la parte inferior muestran los patrones instantáneos representativos de flujo y de temperatura para  $\sigma = 5$ . Estas imágenes muestran cómo las regiones de recirculación que ocupan la totalidad del espacio entre cilindros se reinsertan en la parte superior del cilindro inferior y se desprenden de éste periódicamente, a la par de la estela de vórtices del cilindro inferior. Nótese cómo en  $X \sim 14$ , **C** resalta cómo la vorticidad generada en las paredes captura los vórtices con el mismo signo en dirección aguas abajo. La Fig. 3.7 muestra para  $\sigma = 2$  y  $5$  y  $Ri = 1$  las variaciones temporales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal adimensionales en el plano de simetría para diferentes posiciones a lo largo del canal. Para un valor de  $\sigma = 2$ , las fluctuaciones de velocidad alcanzan su máxima amplitud en la coordenada  $(X,Y) = (5.5,0)$  y son monocromáticas después de un tiempo de inducción. Para  $\sigma = 5$ , la oscilación del flujo también se vuelve periódica después de un tiempo de inducción. Nótese cómo la amplitud de la señal se encuentra ligeramente modulada

con una frecuencia muy baja que se atribuye a la oscilación de los vórtices alargados que se encuentran entre ambos cilindros. Por claridad, dentro de la imagen supe-

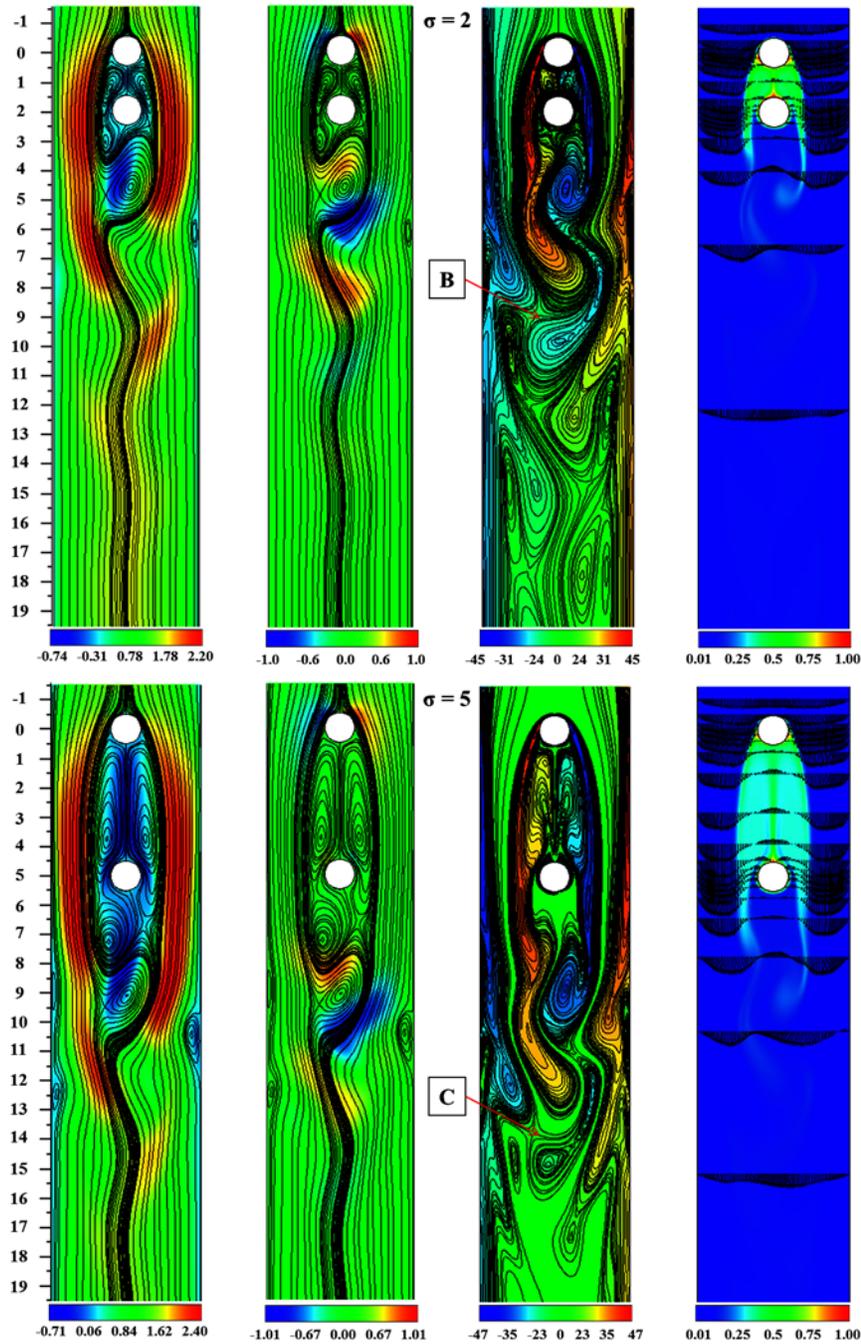


Figura 3.6: Campos adimensionales instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y 5. De izquierda a derecha: contornos de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$  y campos de temperatura  $\theta$  respectivamente.

rior derecha, las trazas de las señales de la componente de velocidad longitudinal

se grafican para un intervalo limitado de tiempo adimensional, desde  $\tau = 280$  a  $\tau = 300$ . La imagen central derecha de la Fig. 3.7 describe cómo tienen lugar oscila-

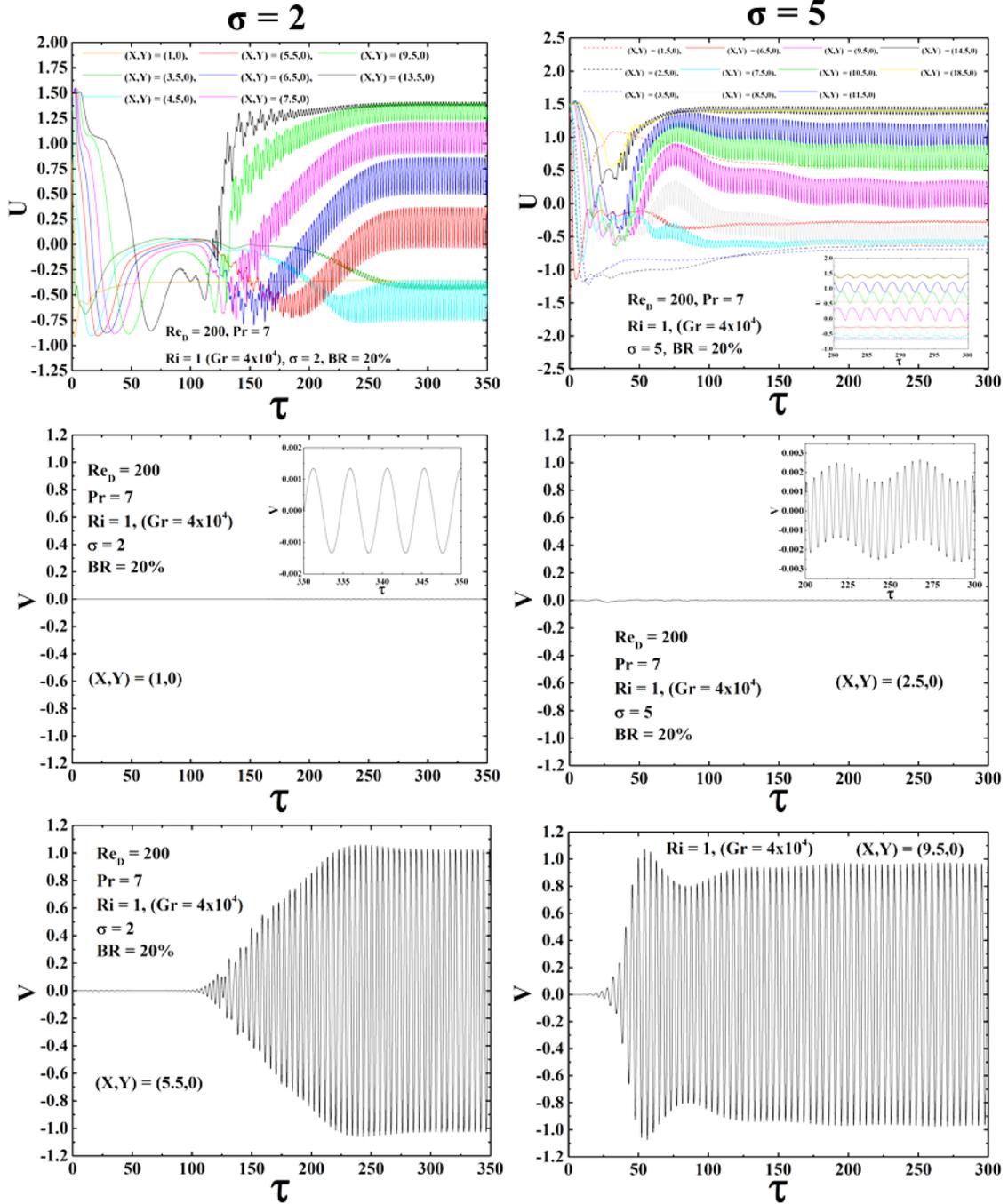


Figura 3.7: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) y para  $\sigma = 2$  y  $5$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para diferentes posiciones en el eje  $X$ .

ciones imperceptibles de amplitud muy pequeña dentro del espacio entre cilindros en  $(X,Y) = (2.5,0)$ . La imagen incrustada dentro de esta figura muestra claramente cómo las fluctuaciones detectadas son cuasi-periódicas. En la Fig. 3.8 se presenta el flujo promedio adimensional para valores de  $\sigma = 2$  y 5 para un valor del parámetro de flotación de  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). Para  $\sigma = 2$ , el comportamiento térmico y

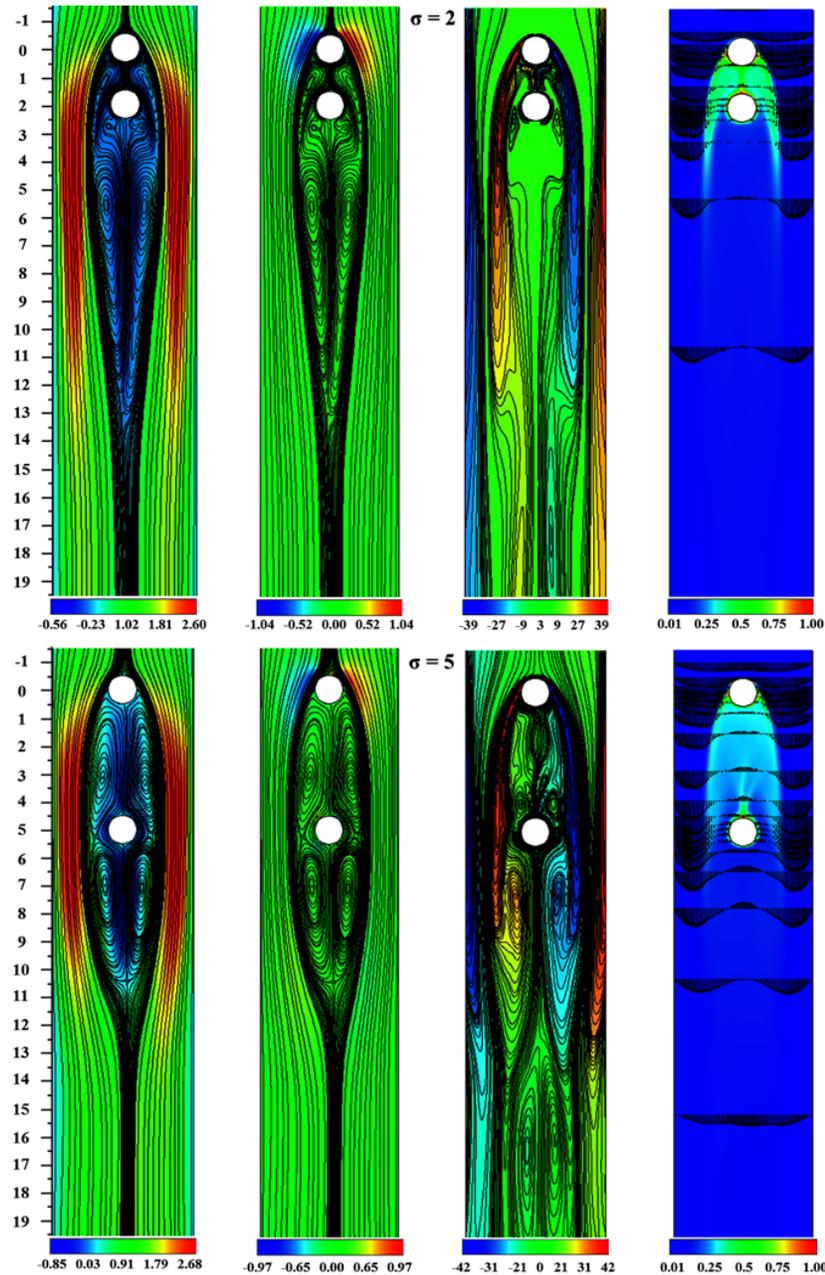


Figura 3.8: Valores adimensionales del flujo promedio para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y 5. De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$  y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

de flujo cambia drásticamente. La zona neutra (región con velocidad casi nula) que

se encuentra debajo del cilindro inferior deja de ser estable, el flujo en la superficie del cilindro superior se desprende antes y las zonas de recirculación de ambos cilindros incrementan su espesor y longitud. Como resultado, la velocidad máxima incrementa hasta alcanzar un valor de  $U = 2.60$  en el espacio entre los cilindros y las paredes del canal. La longitud de la estela crece hasta un valor de  $X \approx 13.46$ , y el flujo promedio revela una pequeña asimetría con respecto a la línea central del canal. También, debido a que las capas de esfuerzos de corte generadas en la superficie del cilindro superior tienen una leve interacción con el cilindro inferior, la intensidad de vorticidad de los vórtices que se desprenden disminuye con respecto a  $Ri = 1$ . Las imágenes en la parte inferior de la figura exhiben cómo para  $\sigma = 5$ , las regiones de recirculación debajo de cada cilindro incrementan su tamaño. Como consecuencia del ensanchamiento de la estela, el efecto de bloqueo también aumenta y tiene lugar un incremento en el valor máximo y mínimo de la componente de velocidad longitudinal promedio. La tercera imagen muestra una reducción considerable en la intensidad de la vorticidad. No obstante, la interacción entre las capas de esfuerzo de corte generadas por el cilindro superior y las paredes del canal se intensifica. La cuarta imagen exhibe cómo debido al aumento en la reversión de flujo en esta zona, la región de recirculación entre los cilindros se vuelve asimétrica. Cabe destacar que el cilindro inferior está cubierto por una capa térmica delgada producida por el flujo ascendente que se encuentra relativamente frío, el cual produce una pluma térmica en la parte superior del punto de estancamiento del cilindro inferior. La Fig. 3.9 muestra para  $\sigma = 2$  y  $5$  los patrones instantáneos de velocidad y vorticidad para diferentes instantes de tiempo. Claramente, para  $\sigma = 2$ , existe un cambio muy pronunciado en el patrón de la estela, y estas imágenes ilustran cómo el desprendimiento de vórtices cambia de una frecuencia alta a una frecuencia baja: (a) Estela de vórtices de Kármán típica; (b) Vórtices de baja frecuencia y (c) Tren de vórtices ligeramente asimétrico. En esta figura se aprecia cómo la zona neutra en donde la velocidad y vorticidad son cercanos a cero se vuelve menos estable. También se puede distinguir cómo las capas de esfuerzos de corte generadas en la superficie del cilindro superior rebazan al cilindro inferior, la vorticidad se transporta a lo largo de la superficie exterior de la zona neutra, y los vórtices se desprenden en la parte inferior de la región neutra. El fluido dentro de la zona neutra juega un papel muy importante en la dinámica de la estela. Debido al incremento de masa en la zona neutra proveniente de la parte inferior, la velocidad descendente de las estructuras vorticales que se forman decrece y éstas son atrapadas por vórtices que se acaban de formar. Este proceso genera vórtices de mayor tamaño que se desprenden con velocidades más bajas, como se presenta en la Fig. 3.9b. Estos vórtices de mayor tamaño se vuelven inestables y se rompen, produciendo pares de vórtices que se desprenden casi simultáneamente (Fig. 3.9c). Debido a que el tren de vórtices también es inestable, finalmente produce vórtices de Kármán intercalados. Las imágenes en la parte inferior de la Fig. 3.9 muestran cómo para  $\sigma = 5$ , el desprendimiento de vórtices y los contornos de vorticidad incrementan su complejidad. En éste caso, la interacción entre los esfuerzos de corte que se forman desde ambos cilindros tienen una fuerte influencia en la frecuencia irregular de desprendimiento de vórtices. Cabe destacar cómo debido al aumento en la reversión del flujo, la zona

neutra se vuelve más ancha pero más corta. La Fig. 3.10 muestra para  $Ri = 2$  y

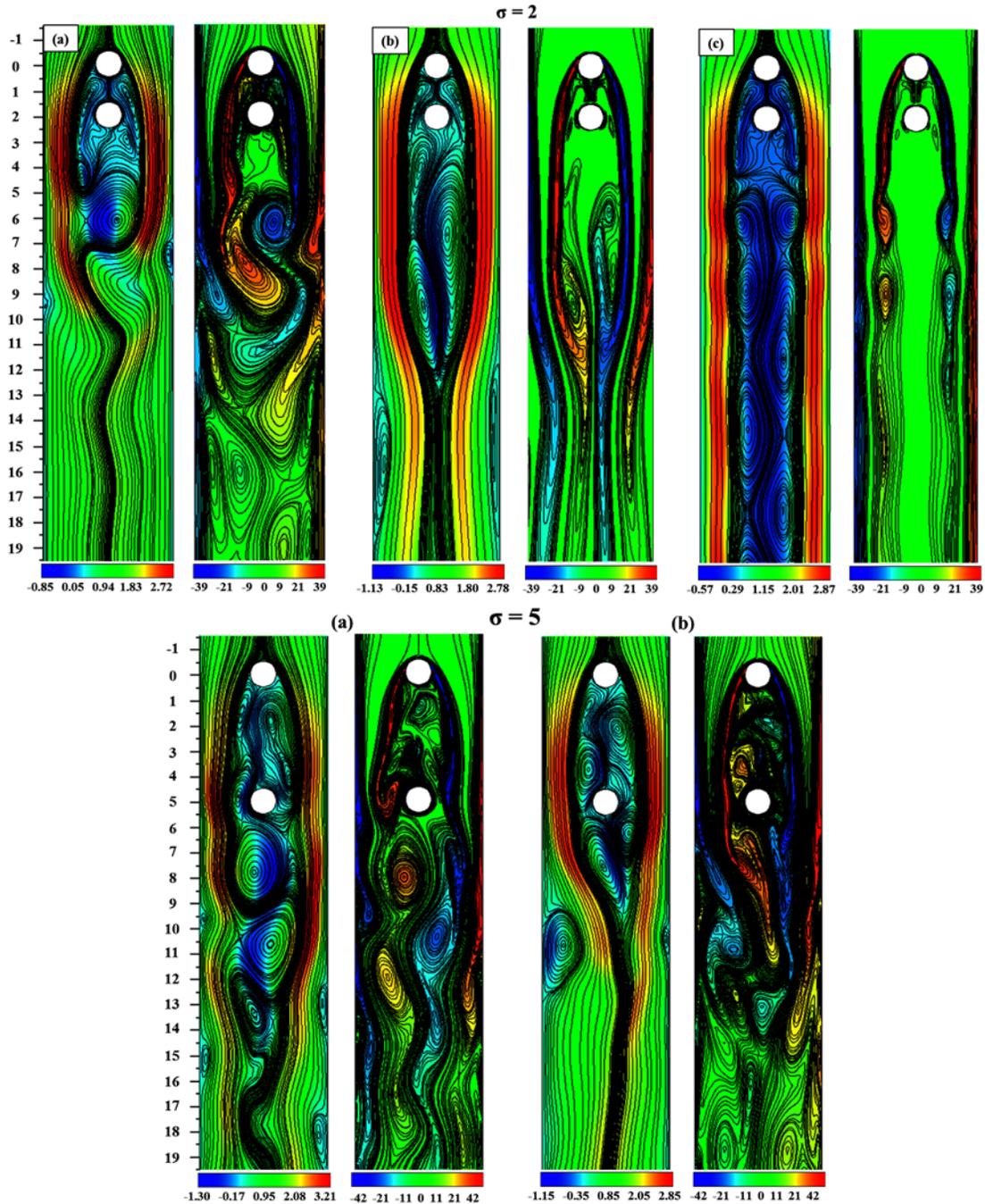


Figura 3.9: Campos instantáneos adimensionales de velocidad y vorticidad para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$  mostrando el patrón de desprendimiento de vórtices para diferentes instantes de tiempo.

valores de  $\sigma = 2$  y  $5$  las variaciones temporales adimensionales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal como función del tiempo adimensional en posiciones selectas en el plano de simetría del canal. Para  $\sigma = 2$ , las fluctuaciones

detectadas son transitorias tanto en frecuencia como en amplitud, indicando que el fluido tiene un comportamiento bi-modal debido a la flotación adversa. En esta

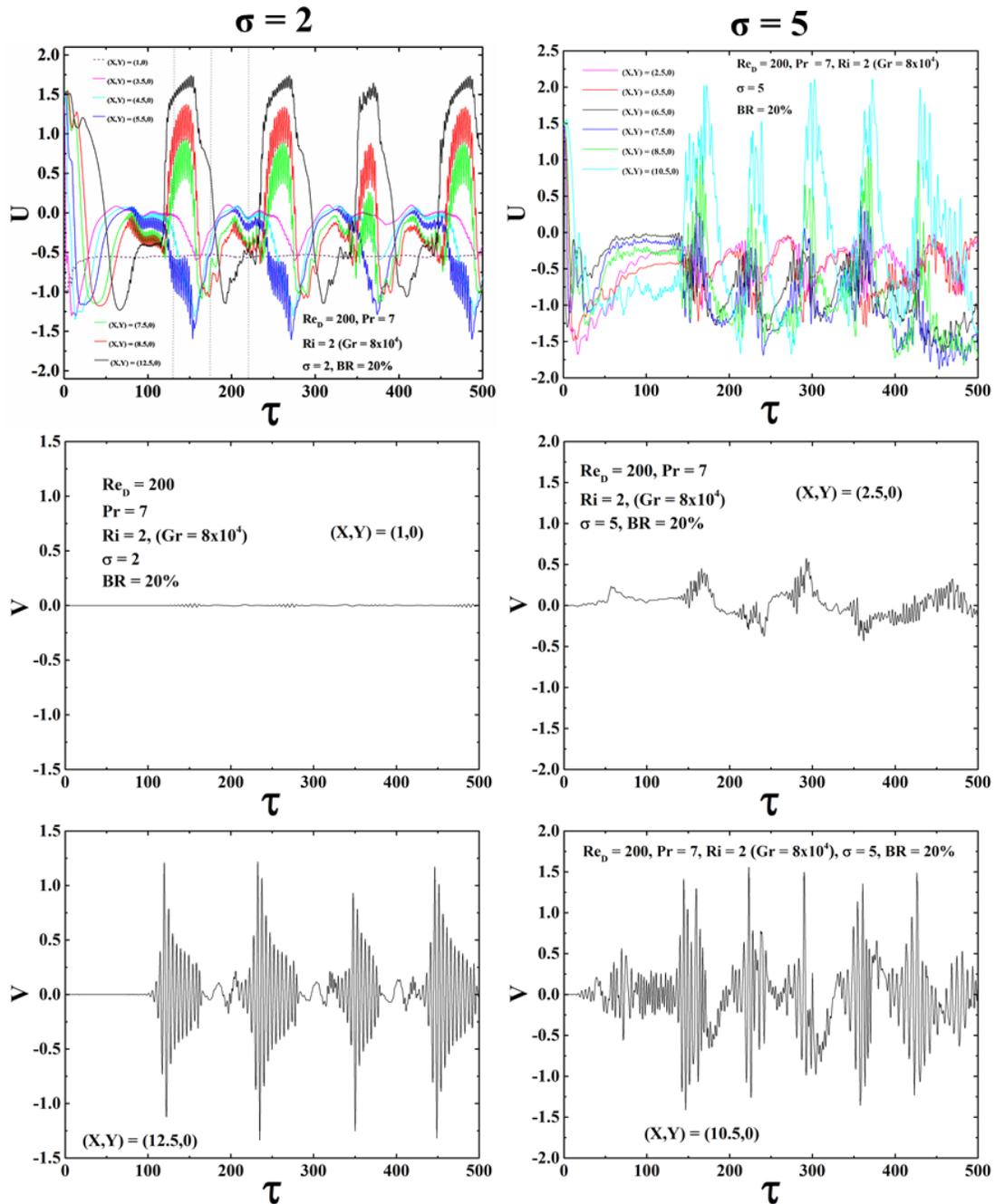


Figura 3.10: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $\sigma = 2$  y  $5$  para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría para diferentes posiciones de  $X$ .

imagen se pueden observar pequeñas (pero detectables) oscilaciones en el espacio

entre cilindros. Las líneas punteadas verticales de la imagen superior izquierda en la Fig. 3.10 corresponden a los instantes de tiempo mostrados en la Fig. 3.9 para  $\sigma = 2$ . Curiosamente, la amplitud de la señal correspondiente a la velocidad longitudinal fuera de la zona neutra es aproximadamente el doble que la amplitud dentro de la zona neutra, y estas señales presentan un desfase de  $\pi$  radianes. Para un valor de  $\sigma = 5$ , las señales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal muestran variaciones irregulares, lo que implica que la flotación adversa destruye el desprendimiento regular de vortices. Incrementando nuevamente el valor del número de Richardson a  $Ri = 3$  ( $Gr = 1.2 \times 10^5$ ) y  $Ri = 4$  ( $Gr = 1.6 \times 10^5$ ), las simulaciones numéricas muestran que debido al incremento del flujo opuesto dentro del espacio entre cilindros, éste penetra aguas arriba, y como consecuencia el fluido permanece adherido a la superficie en una menor longitud. Con respecto a la estela aguas abajo

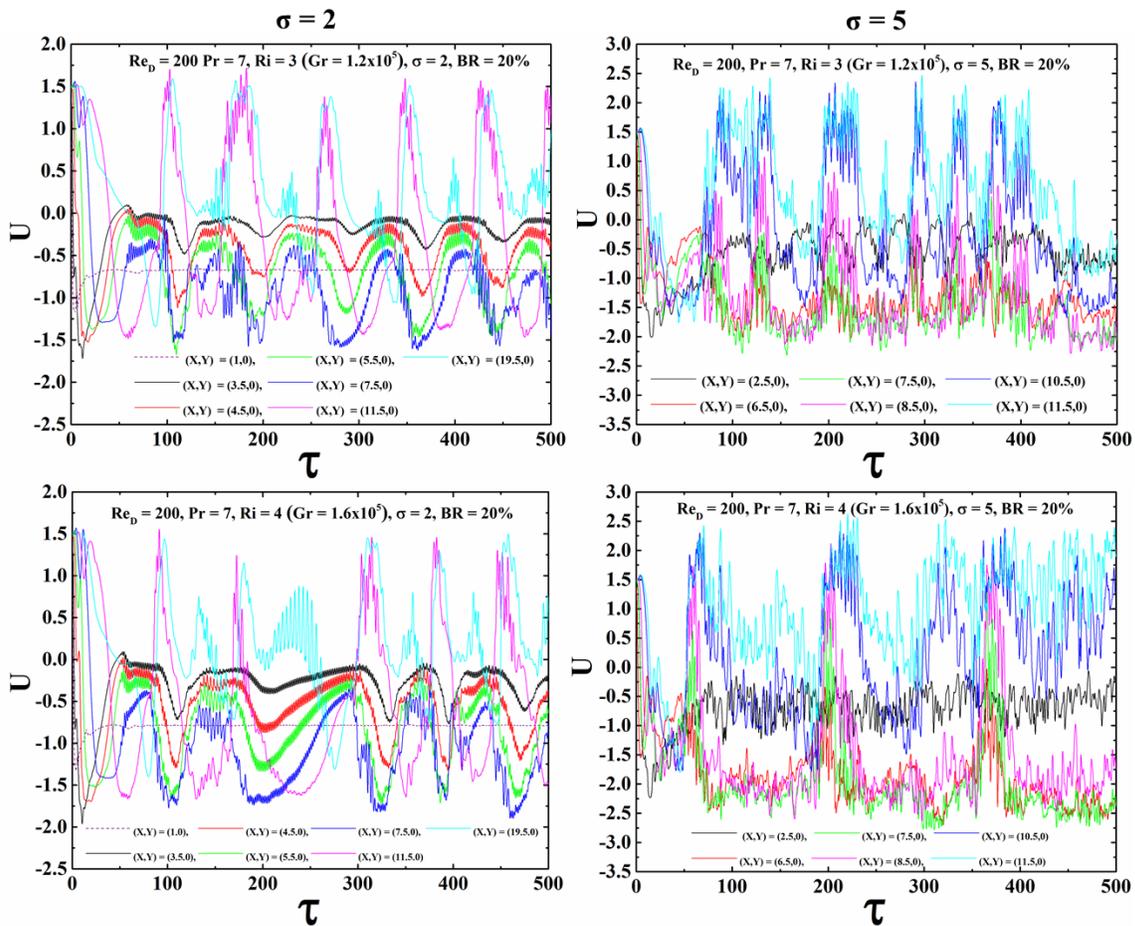


Figura 3.11: Variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad longitudinal como una función del tiempo adimensional para  $\sigma = 2$  y  $5$  para  $Ri = 3$  (imágenes en la parte superior) y  $Ri = 4$  (imágenes en la parte inferior). Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría para diferentes posiciones de  $X$ .

del cilindro inferior, se puede observar que como efecto del incremento de los valores del número de Richardson, incrementan tanto el espesor como la longitud de la

zona neutra, incrementando también el tamaño de la zona de recirculación. Como resultado de lo anterior, aumenta el efecto de bloqueo y por lo tanto crece el valor de la velocidad máxima en la región comprendida entre los cilindros y las paredes del canal. Comparando estos resultados con los de las Figs. 3.1, 3.2 y 3.5, es claro que la longitud y el espesor de la zona de recirculación son una función creciente del número de Richardson para  $Re_D = 200$  en un rango de  $0.5 \leq Ri \leq 4$ . La Fig. 3.11 muestra para  $\sigma = 2$  y 5 las variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad longitudinal como una función del tiempo adimensional en el plano de simetría para posiciones selectas dentro del canal para  $Ri = 3$  y 4. Claramente, al igual que para  $Ri = 2$ , las trazas temporales de las fluctuaciones de la velocidad para  $\sigma = 2$  muestran distintos modos en el patrón de desprendimiento de vórtices, sugiriendo que éste cambia de una frecuencia a otra. Estos resultados confirman la presencia de un flujo bi-estable con dos diferentes frecuencias de desprendimiento de vórtices. Nótese como para el valor de número de Richardson de  $Ri = 4$ , las trazas temporales en la señal de la velocidad muestran distintas irregularidades, indicando que el patrón de desprendimiento de vórtices se vuelve inestable cuando es perturbado por una gran fuerza de flotación adversa. Para  $\sigma = 5$ , el ancho de las zonas de recirculación de ambos cilindros incrementa progresivamente, y las simulaciones numéricas exhiben un patrón de desprendimiento de vórtices altamente irregular. Para ilustrar este estado espacio-temporal caótico, las trazas temporales de las fluctuaciones de la señal de la velocidad para ambos valores del parámetro de flotación muestran una pérdida de periodicidad evidente en el régimen de desprendimiento de vórtices, indicando que el flujo se ha vuelto inestable.

### 3.1.4. Número de Strouhal y diagramas de fase

Se obtuvo un análisis espectral de las oscilaciones empleando la señal de la componente de velocidad transversal medida en una posición bien determinada. El número de Strouhal,  $St = fD/u_0$  relaciona la frecuencia característica de oscilación  $f$  con el del tiempo de residencia del fluido,  $u_0/D$ , y éste es obtenido a partir de la amplitud normalizada de la transformada de Fourier (FFT) de la auto-correlación de la señal periódica de la componente de velocidad transversal. Las Figs. 3.12a y 3.12b muestran para  $\sigma = 2$  la amplitud normalizada del espectro de la componente de velocidad transversal como función del número de Strouhal para  $Ri = 1$  y 2, respectivamente. Para  $Ri = 1$ , la Fig. 3.12a muestra cómo en la coordenada  $(X, Y) = (5.5, 0)$ , existe un pico en  $St = 0.21499$  (periodo de tiempo cercano a  $4.65D/u_0$ ), y el patrón de desprendimiento de vórtices para este número de Richardson es evidentemente monocromático. La Fig. 3.12b muestra el espectro normalizado de la señal de la componente de velocidad longitudinal para  $Ri = 2$  obtenida en la coordenada  $(X, Y) = (12.5, 0)$ . Como se puede observar en esta figura, las señales presentan dos frecuencias dominantes, sugiriendo que los vórtices cambian de una frecuencia a otra. El espectro de frecuencia de la señal de la componente de velocidad longitudinal exhibe un pico agudo en  $St = 0.0075$  (periodo de tiempo cercano a  $133.33D/u_0$ ), el cual corresponde a las fluctuaciones de velocidad intermitentes y de baja frecuencia en la estela y que son mostradas en la Fig. 3.9b. El espectro normalizado correspondiente

a la señal de la componente de velocidad transversal cuenta con dos picos en  $St = 0.2$  y  $St = 0.20749$ , los cuales se atribuyen a las altas frecuencias de la estela de vórtices de Kármán y del tren de vórtices asimétrico mostrado en las Figs. 3.9a y 3.9c, respectivamente. Esta aparente condición bi-estable se atribuye a la inestabilidad del flujo debido a la flotación adversa. Las Figs. 3.12c y 3.12d muestran para  $\sigma = 2$  los diagramas de fase de las componentes de velocidad longitudinal y transversal para  $Ri = 1$  y  $2$ , respectivamente. La Fig. 3.12c muestra para  $Ri = 1$  el diagrama de fase obtenido en la coordenada  $(X,Y) = (5.5,0)$  una vez que el desprendimiento de vórtices alcanza un estado periódico. Evidentemente, la existencia de una sola órbita con trayectoria circular ejemplifica la naturaleza simétrica y periódica del desprendimiento de vórtices, en la cual la componente de velocidad transversal tiene dos veces el valor del periodo de la componente de velocidad longitudinal. La Fig. 3.12d muestra el diagrama de fase para  $Ri = 2$ , ilustrando cómo para este valor del parámetro de flotación se presenta la condición bi-estable asociada a la ocurrencia simultánea de dos números de Strouhal diferentes. Las Figs. 3.12e - 3.12g muestran para  $\sigma = 5$  las correspondientes densidades espectrales para  $Ri = 0, 1$  and  $2$ , respectivamente. Para  $Ri = 0$ , las densidades espectrales obtenidas a lo largo del plano de simetría del canal en  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(X,Y) = (6.5,0)$  muestran para ambas posiciones la presencia de un pico en  $St = 0.26594$ , indicando que el cilindro inferior comparte la misma frecuencia de desprendimiento de vórtices que el cilindro superior. La Fig. 3.12f presenta para  $Ri = 1$  y las posiciones  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(X,Y) = (9.5,0)$  un pico agudo en  $St = 0.22428$ , indicando que la frecuencia de oscilación de los vórtices que se desprenden del cilindro superior e inferior es la misma. En la posición  $(X,Y) = (2.5,0)$  se aprecia un pico secundario de baja frecuencia, el cual se asocia con las oscilaciones cuasi-periódicas del flujo que se encuentra entre ambos cilindros. La Fig. 3.12g presenta para  $Ri = 2$  las densidades espectrales obtenidas en las posiciones  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(X,Y) = (10.5,0)$ . La presencia de múltiples picos indica que no hay un patrón regular, lo que indica que el comportamiento del flujo es caótico. Las Figs. 3.12h - 3.12j presentan para  $\sigma = 5$  los diagramas de fase para  $Ri = 0, 1$  y  $2$  respectivamente. La Fig. 3.12h muestra para  $Ri = 0$  el diagrama de fase obtenido en las posiciones  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(6.5,0)$  después de que el flujo alcanza un estado periódico. Claramente, el diagrama de fase es simétrico para ambas posiciones y exhibe variaciones regulares y periódicas. Nótese cómo la amplitud de las fluctuaciones de la señal de la componente de velocidad transversal es ligeramente mayor dentro del espacio entre cilindros, mientras que la amplitud de las fluctuaciones de la señal de la componente de velocidad longitudinal es claramente mayor debajo del cilindro inferior. La Fig. 3.12i muestra el diagrama de fase para  $Ri = 1$  en las coordenadas  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(9.5,0)$ . Como se puede observar, una vez que se establece la naturaleza periódica del flujo, el diagrama de fase presenta variaciones irregulares y periódicas dentro del espacio entre cilindros, implicando que la dinámica en esta posición se encuentra en un régimen cuasi-periódico, mientras que la estela del cilindro inferior exhibe un desprendimiento de vórtices regular y periódico. La Fig. 3.12j presenta el diagrama de fase para  $Ri = 2$  en las coordenadas  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(10.5,0)$ . Claramente se observa una aparente pérdida de simetría, y la irregularidad de las trayectorias confirma que la transición del régimen de desprendimiento

de vórtices regular y periódico a un régimen irregular se lleva a cabo debido a la intensa fuerza de flotación adversa.

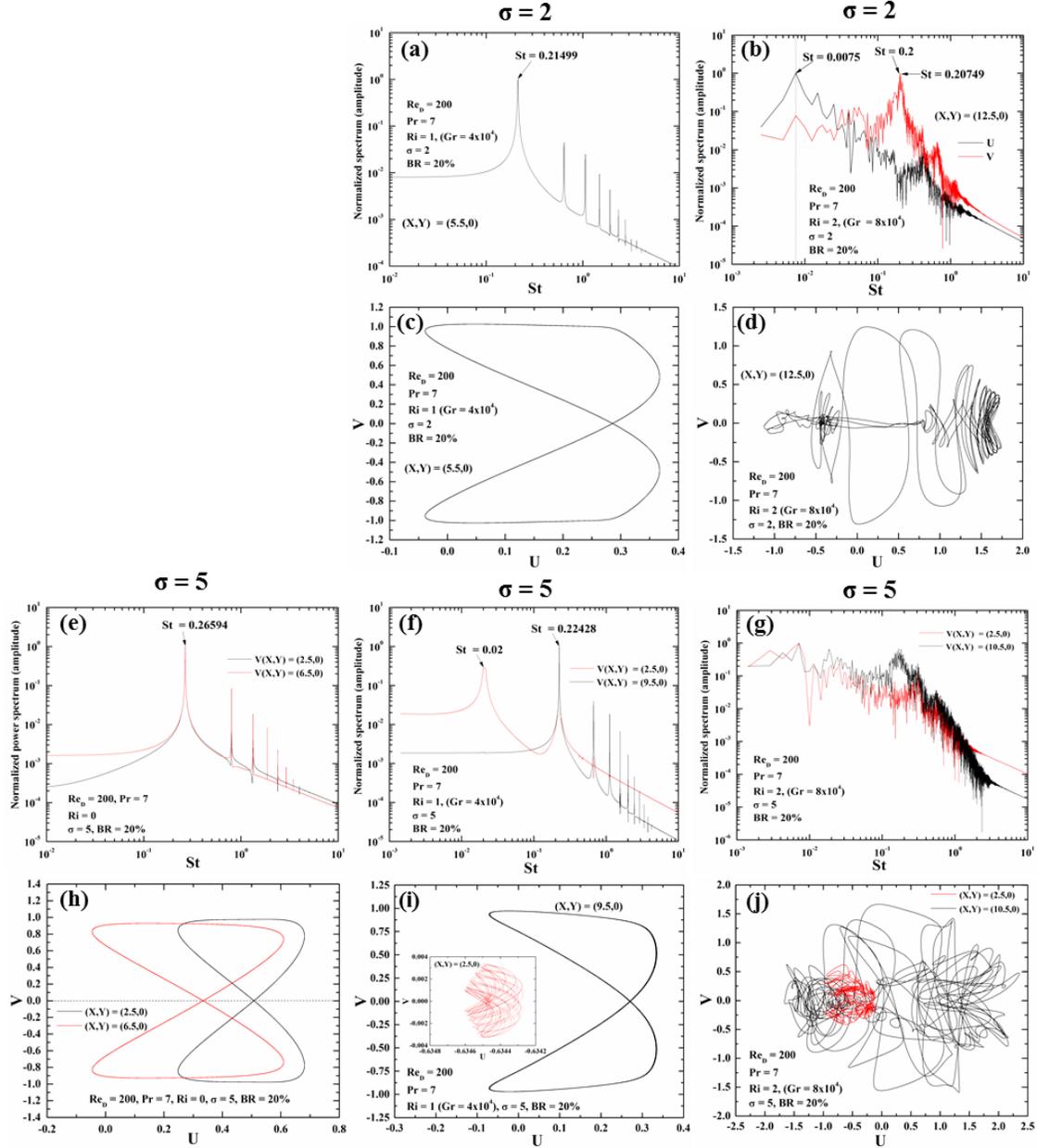


Figura 3.12:  $Re_D = 200$  y  $BR = 20\%$  para  $Ri = 0, 1$  y  $2$ . Primera y la tercera fila: Espectro normalizado de la velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. Segunda y cuarta fila: Diagrama de fase de la señal de la componente de velocidad longitudinal como una función de la señal de la componente de velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente.

### 3.1.5. Velocidades promedio en el plano de simetría

La Fig. 3.13 muestra para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$  los perfiles promedio de la componente de velocidad longitudinal adimensional como una función del eje vertical del plano de simetría a lo largo de todo el dominio computacional para múltiples valores del número de Richardson. Para mayor claridad, dentro de cada gráfica de la Fig. 3.13, se realizó una ampliación en la parte del plano de simetría correspondiente al espacio entre cilindros. Para  $\sigma = 2$ , la variación de la velocidad en la línea central de la estela se puede dividir en tres grupos dependiendo del parámetro de flotación: el primer grupo es para flotación asistida ( $Ri = -1$ ); el segundo grupo es para cilindros sin calentar y para casos con números de Richardson relativamente pequeños ( $0 \leq Ri \leq 1.8$ ), donde la solución final alcanza un estado estacionario o un desprendimiento periódico de vórtices similar a una estela de vórtices de Kármán; y el tercer grupo es para casos con números de Richardson relativamente grandes ( $2 \leq Ri \leq 4$ ), en donde la zona neutra y la región de recirculación son de mayor tamaño, lo que produce el ya mencionado comportamiento bi-modal. Nótese cómo el flujo que se encuentra en el espacio entre cilindros presenta velocidades negativas (flujo ascendente) para todos los valores del número de Richardson, donde éste es producido por los dos vórtices que giran en sentidos opuestos y que se encuentran en esta región. Para  $Ri = -1$ , no hay separación de flujo debajo del cilindro inferior y se observa un incremento progresivo en la velocidad longitudinal conforme el flujo se desplaza aguas abajo del canal. Para valores del número de Richardson  $Ri = 0, 0.5$  y  $1$ , las longitudes promedio de la estela son de  $X \approx 2.70, 2.78$  y  $3.38$  diámetros de cilindro, respectivamente. Nótese que para  $Ri = 1.5$ , la velocidad de la estela medida en la posición aguas abajo de  $X \approx 3.17$  indica que la zona de recirculación es más corta que la que se presenta para  $Ri = 1$ . Para  $Ri = 2, 3$  y  $4$ , los perfiles promedio de velocidad de la estela a lo largo de la línea central son significativamente diferentes de los que se presentan para valores relativamente pequeños del número de Richardson. Esto se debe a que a las velocidades negativas les toma una mayor distancia para recuperar su valor positivo. Esto es consistente con la aparición de la zona neutra con velocidades cercanas a cero. Para estos valores de  $Ri$ , la longitud adimensional de la estela es obtenida sumando la longitud de la zona neutra a la longitud de la región de recirculación. Cabe mencionar que para  $Ri = 1.9$ , y  $Ri = 2.1$ , la respuesta del flujo en la estela es diferente y la variación de la velocidad en la línea media se encuentra entre el segundo y el tercer grupo mencionados con anterioridad. Es interesante que para todos los casos, no se presenta reversión de flujo en la parte superior del cilindro ubicado aguas arriba, lo que indica que la flotación no puede desarrollar una burbuja de recirculación debido a los esfuerzos cortantes que son producidos por el fluido frío descendente. La extensión de la zona de recirculación para cada cilindro hace referencia a la distancia medida desde el origen hasta el punto donde la velocidad promedio en la línea media cambia de valores negativos a cero, y las longitudes adimensionales de la estela del cilindro superior e inferior se definen como  $\sigma_{v1} = L_{v1}/D$  y  $\sigma_{v2} = L_{v2}/D$ , donde  $L_{v1}$  y  $L_{v2}$  son las distancias medidas en dirección axial desde los centros de cada cilindro al punto donde la velocidad promedio en la línea media cambia de valores negativos a cero, respectivamente.

Para  $\sigma = 3$  y  $Ri = -1$ , la longitud adimensional de la estela del cilindro superior e inferior se extiende a  $\sigma_{v1} \approx 1.50$  y  $\sigma_{v2} \approx 0.59$  diámetros, respectivamente. Para  $Ri = 0$  y para valores de hasta  $Ri = 4$ , la región de recirculación originada por el cilindro superior con velocidades negativas ocupa la totalidad del espacio entre cilindros y la longitud de la estela generada por el cilindro inferior aumenta para valores crecientes del parámetro de flotación. Para  $\sigma = 5$  y  $Ri = -1$ , la longitud de las estelas tanto del cilindro superior como del cilindro inferior tienen un valor de  $\sigma_{v1} \approx 1.42$  y  $\sigma_{v2} \approx 1.04$ , respectivamente. Para  $Ri = 0$ , la longitud de la estela del cilindro superior e inferior aumentan a  $\sigma_{v1} \approx 1.86$  y  $\sigma_{v2} \approx 1.15$ , respectivamente. Desde  $Ri = 0.5$  hasta  $Ri = 4$ , la totalidad del espacio entre cilindros es ocupado por la región de recirculación del cilindro superior con valores negativos de la velocidad. Para  $Ri = 0.5, 1$  y  $1.5$ , la longitud adimensional de la estela del cilindro inferior aumenta a  $\sigma_{v2} \approx 2.72, 4.31$  y  $13.60$ , respectivamente. Se puede observar cómo para  $Ri = 1$  y  $1.5$  aparece una zona neutra debajo del cilindro inferior. Resulta interesante que para  $Ri = 2, 3$  y  $4$ , la zona neutra desaparece y la longitud de la estela inducida por el cilindro inferior es de  $\sigma_{v2} \approx 5.43, 6.39$  y  $4.92$ , respectivamente.

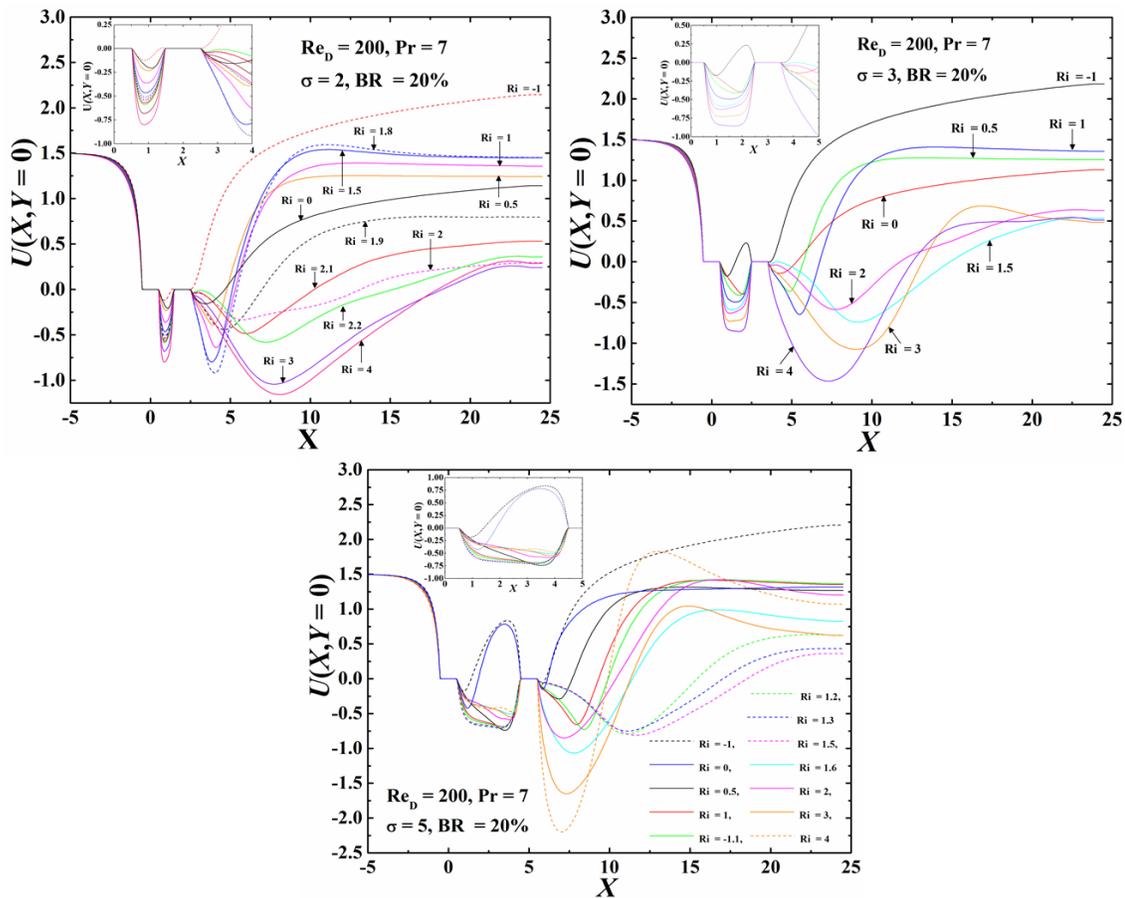


Figura 3.13: Perfiles adimensionales de velocidad axial a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal para diferentes valores del número de Richardson para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente.

### 3.1.6. Ángulo de separación

Para ambos cilindros, la posición del ángulo de separación  $\gamma_s$  es medida desde su punto de estancamiento frontal hasta el punto de separación (posición en donde se detecta un gradiente con reversión de flujo en la superficie de los cilindros). A causa de que el ángulo de separación puede variar en el tiempo debido al desprendimiento de vórtices, la Tabla 3.1 presenta para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , el promedio  $\pm DE$  de  $\gamma_s$  para ambos cilindros como una función del número de Richardson. Cabe mencionar que

		Ángulo de separación (promedio $\pm DE$ )	
$\sigma$	$Ri$	Cilindro superior	Cilindro inferior
2	-1	130.85	N
2	0	112.04	133.39
2	0.5	103.19	-
2	1	96.93 $\pm$ 0.33	-
2	1.5	93.98	-
2	2	89.47	-
2	3	79.49	-
2	4	71.23	-
3	-1	131.69	151.47
3	0	111.93	135.19
3	0.5	103.05	-
3	1	96.75 $\pm$ 0.39	-
3	1.5	93.96	-
3	2	89.89 $\pm$ 0.34	-
3	3	80.28 $\pm$ 0.40	-
3	4	73.73 $\pm$ 0.06	-
5	-1	131.14	141.56
5	0	114.08 $\pm$ 1.83	129.00 $\pm$ 14.23
5	0.5	102.70	-
5	1	96.50	-
5	1.5	93.59	-
5	2	90.72 $\pm$ 0.24	-
5	3	81.82 $\pm$ 0.46	-
5	4	75.10 $\pm$ 0.51	-

Tabla 3.1: Ángulo de separación como función del número de Richardson para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ .

en esta tabla no se reporta ángulo de separación para el cilindro inferior cuando las capas con los esfuerzos de corte que se desprenden del cilindro superior rodean completamente al cilindro inferior sin que éstas se reinserten en la superficie del cilindro. Para  $\sigma = 2$  y para flujo asistido, la separación se retraza debido al gradiente de presión favorable ejercido por la temperatura del cilindro y el ángulo de separación del cilindro superior alcanza un valor máximo, mientras que el flujo no

se separa en el cilindro inferior. No obstante, en el intervalo  $0 \leq Ri \leq 4$ , es evidente que el ángulo de separación del cilindro que se encuentra aguas arriba decrece de manera monótona para valores crecientes del número de Richardson. Nótese que en el intervalo  $1 \leq Ri \leq 4$ , el flujo que se separa del cilindro superior no se reinserta en la superficie del cilindro inferior. Para  $\sigma = 3$  y  $5$ , los máximos valores de  $\gamma_s$  se alcanzan para flujo asistido, lo que indica que la separación del fluido se retrasa. Para ambos cilindros, el valor de  $\gamma_s$  disminuye para valores crecientes de  $Ri$ . Se puede observar cómo para  $Ri = -1$  y  $Ri = 0$ , los valores de  $\gamma_s$  son mayores para el cilindro inferior. Para valores de  $Ri = 0.5$  y mayores, no se reportan ángulos de separación para el cilindro inferior, ya que el fluido que se desprende del cilindro superior no se reinserta en el cilindro inferior.

### 3.1.7. Relación de espaciamiento $\sigma = 3$

En esta sección, debido a que el flujo instantáneo y promedio y las características de transferencia de calor no muestran cambios considerables con respecto a  $\sigma = 2$ , a continuación se resume de manera breve las principales características encontradas para  $\sigma = 3$ : (a) La solución del flujo alcanza un estado estacionario para  $Ri = -1$  y  $Ri = 0$ . (b) Para  $Ri = 1$  y  $Ri = 1.5$ , se presenta una solución periódica con oscilaciones monocromáticas y una solución bi-estable, respectivamente. (c) Para  $Ri = 2$  y hasta  $Ri = 4$ , el patrón de desprendimiento de vórtices se caracteriza por la ausencia de un patrón regular, lo que implica que el patrón de desprendimiento de vórtices bi-modal es destruido por el flujo opuesto de gran intensidad que generado por la flotación adversa.

## 3.2. Transferencia de calor

En esta subsección, el efecto del parámetro de flotación en la transferencia de calor del arreglo de cilindros se investiga presentando los valores locales y promedio del número de Nusselt para ambos cilindros como una función de  $\sigma$  para diferentes valores del número de Richardson.

### 3.2.1. Número de Nusselt local

La Fig. 3.14 muestra de manera representativa las distribuciones del número de Nusselt local definido en la ecuaciones (2.8) y (2.9) en la superficie de cada cilindro para las tres relaciones de espaciamiento estudiadas y para diferentes valores del número de Richardson. En estas figuras, las líneas punteadas y continuas corresponden al cilindro superior e inferior, respectivamente. Examinando estas figuras, se pueden observar las siguientes tendencias generales: Para todos los valores del parámetro de flotación y las tres relaciones de espaciamiento estudiadas, debido a que el fluido frío que descende incide en el cilindro superior, los valores del número de Nusselt para este último son tangiblemente mayores que los alcanzados por el cilindro inferior. Este comportamiento se debe a que el cilindro inferior recoge

la energía térmica de la estela del cilindro superior como resultado de la presencia de zonas de recirculación en el espacio entre ambos cilindros. Además, los valores pico de los números de Nusselt locales en el punto de estancamiento del cilindro superior ( $\gamma = 0^\circ$ ) decrecen conforme el valor del parámetro de flotación aumenta, y los valores mínimos del número de Nusselt local para éste último coinciden con los puntos de separación del fluido. En el caso de flujo asistido, a causa de que la

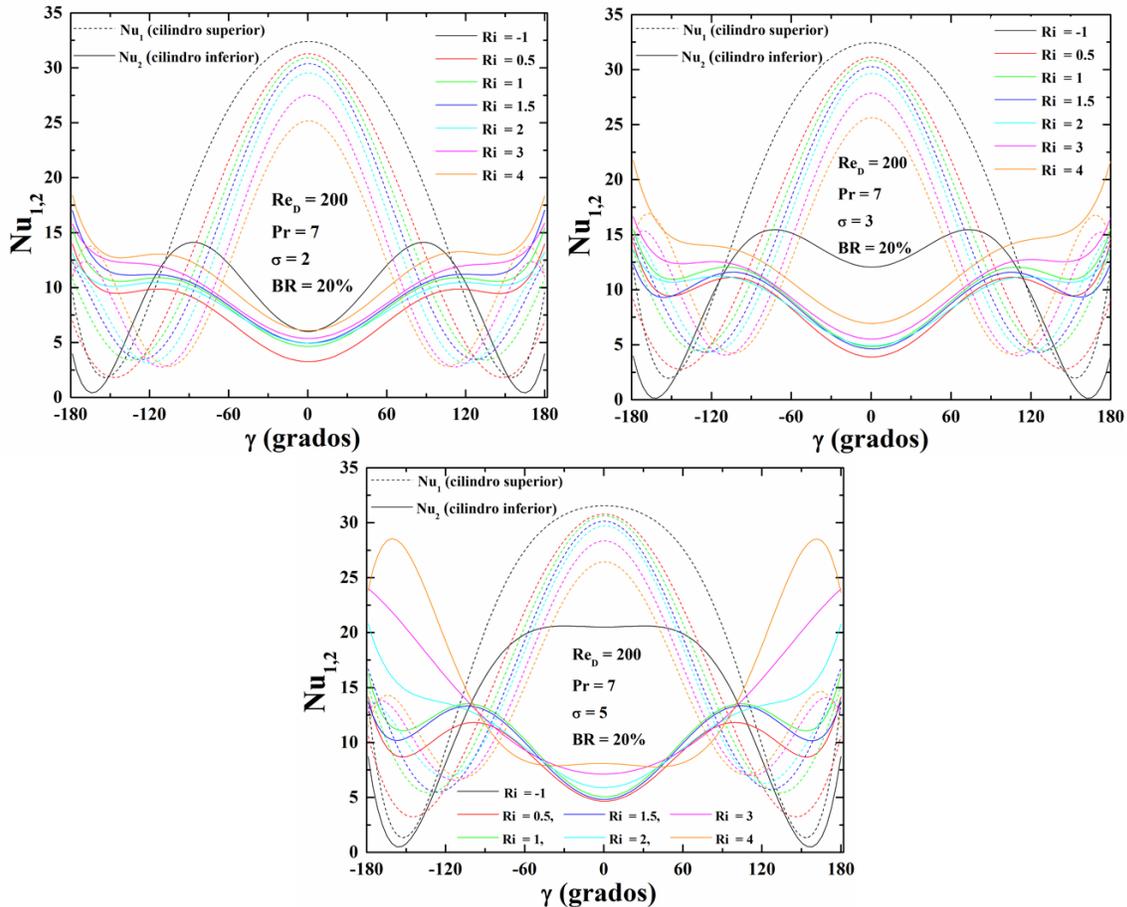


Figura 3.14: Distribución de los valores del número de Nusselt local sobre la superficie de cada cilindro como una función de  $\gamma$  para diferentes valores del número de Richardson con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 20\%$  y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente.

separación del flujo se retarda, los gradientes de temperatura son mayores y ambos cilindros logran una mejor transferencia de calor. Se puede apreciar cómo al aumentar el valor de la relación de espaciamiento, el valor del número de Nusselt local en el punto de estancamiento del cilindro inferior también incrementa, alcanzando su valor máximo en  $\sigma = 5$ . Para el caso de flujo opuesto, a causa de la existencia de zonas de recirculación de gran tamaño en el espacio entre cilindros, el flujo va hacia arriba y el valor mínimo del número de Nusselt local del cilindro inferior se obtiene en una posición cercana a  $\gamma = 0^\circ$ , y el valor máximo de éste se obtiene en el punto de estancamiento inferior ( $\gamma = 180^\circ$ ). Es importante resaltar que para  $Ri$

= 3 y 4, la flotación térmica tiene un efecto muy pronunciado sobre el flujo cercano a las superficies inferiores de los cilindros.

### 3.2.2. Número de Nusselt promedio

La Fig. 3.15 presenta las variaciones temporales del número de Nusselt promedio en la superficie de ambos cilindros para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. En estas figuras, las líneas punteadas y continuas corresponden a los cilindros superior e inferior, respectivamente. Claramente, para  $\sigma = 2$ , la imagen superior izquierda muestra cómo a causa del espacio reducido entre cilindros, la presencia del cilindro superior tiene un efecto significativo en las características de transferencia de calor del cilindro inferior y éste alcanza menores tasas de transferencia de calor. Las oscilaciones

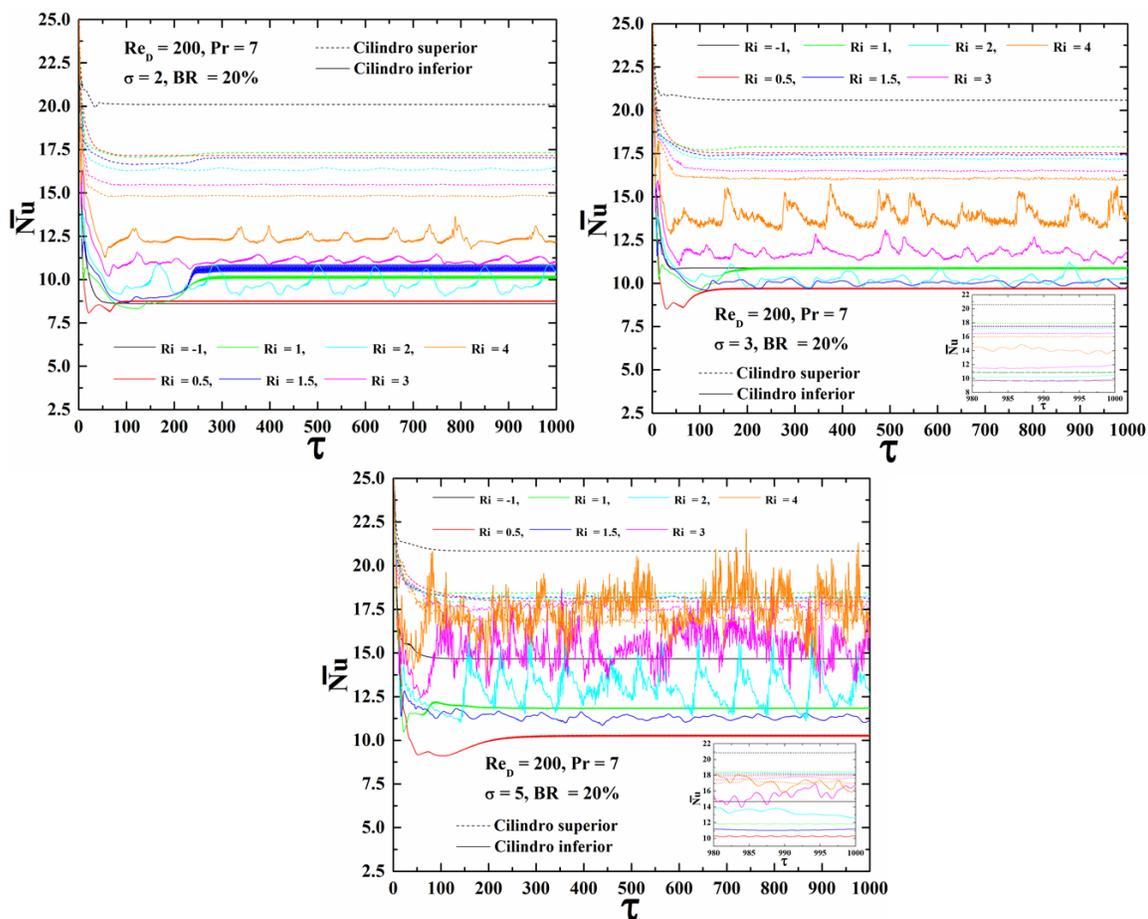


Figura 3.15: Evolución temporal de los números de Nusselt promedio para  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ ,  $BR = 20\%$ , y distintos valores del número de Richardson para el cilindro superior (líneas punteadas) y el cilindro inferior (líneas continuas), respectivamente.

de alta frecuencia del número de Nusselt promedio en el cilindro inferior para  $Ri = 1$  y  $1.5$  se encuentra estrechamente relacionada con las oscilaciones debidas al des-

prendimiento de vórtices, lo que da paso a un incremento pronunciado en la tasa de transferencia de calor promedio. Incrementando la flotación opuesta, claramente se puede apreciar la aparición de oscilaciones de baja frecuencia, las cuales son características de la ya mencionada respuesta bi-modal. En este régimen, el valor global del número de Nusselt incrementa con el valor del número de Richardson. Para  $\sigma = 3$ , la amplitud de las oscilaciones del número del Nusselt promedio del cilindro inferior aumenta para valores crecientes de  $Ri$ . De manera simejante que para el caso anterior de relación de espaciamiento, la relación no lineal entre el número de Nusselt promedio en cada cilindro y el valor del número de Richardson está íntimamente relacionada con la aparición de una zona neutra debajo del cilindro inferior. Curiosamente, los valores globales del número de Nusselt promedio del cilindro superior para  $Ri = 1$  y  $Ri = -1$  son casi iguales. Conforme incrementa la intensidad de la flotación, aparecen las oscilaciones de baja frecuencia y el valor global del número de Nusselt primero decrece (para  $Ri = 1.5$ ) y se incrementa nuevamente con mayores amplitudes. Para  $\sigma = 5$ , se aprecia un leve incremento en el valor promedio del número de Nusselt del cilindro superior con respecto a  $\sigma = 3$ . Se pueden observar importantes oscilaciones para los valores de  $Ri = 1.5$  hasta  $Ri = 4$ , y la pérdida de periodicidad en el número de Nusselt promedio para  $Ri = 3$  y  $Ri = 4$  ilustra cómo el flujo es severamente alterado por la intensa fuerza de flotación. Es interesante observar que se alcanza el máximo valor promedio del número de Nusselt en el cilindro inferior para un valor del número de Richardson de  $Ri = 4$ , comparado con el valor correspondiente al cilindro superior.

### 3.3. $Pr = 0.744$ y $BR = 30\%$

En esta sección, con objeto de elucidar el efecto del número de Prandtl y del radio de bloqueo en la respuesta característica del flujo, se presentan distribuciones de velocidad, vorticidad y temperatura instantáneos y promedio para un número de Prandtl de  $Pr = 0.744$  y un radio de bloqueo de  $BR = 20\%$ .

#### 3.3.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ )

En esta subsección se presenta la respuesta característica para flujo asistido,  $T_w < T_0$ . La Fig. 3.16 muestra para  $\sigma = 2$  y  $5$  el flujo y distribución de temperaturas resultantes adimensionales en estado estacionario para  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ). Por claridad, sólo se presenta una porción del dominio computacional. Los patrones de flujo promedio resultantes muestran cómo para este valor del número de Richardson se suprime el desprendimiento de vórtices de la estela y existe una solución simétrica y estacionaria. Para  $\sigma = 2$ , las zonas de recirculación del cilindro ubicado aguas arriba se reinsertan en la parte superior de la superficie del cilindro inferior y la zona de recirculación de éste es más pequeña y estrecha. Así mismo, se puede observar que la separación del flujo se retrasa y existe un incremento en el valor de la componente de velocidad longitudinal en la parte central del canal ( $Y = 0$ ). Para  $\sigma = 5$ , el patrón de flujo se caracteriza por la presencia de dos zonas de recirculación esbeltas y de

prácticamente el mismo tamaño debajo de cada cilindro. Además, la separación del flujo para ambos cilindros se retrasa y el patrón de flujo es notablemente simétrico. También se puede apreciar que los valores más altos de la vorticidad se vuelven particularmente grandes y la componente longitudinal de la velocidad incrementa en la parte central del canal.

### 3.3.2. Convección forzada ( $Ri = 0$ )

La Fig. 3.17 presenta para valores de  $\sigma = 2$  y 5 una ampliación del dominio computacional mostrando los valores promedio para  $Ri = 0$ . En estos patrones se puede observar cómo para  $\sigma = 2$  existen dos zonas de recirculación simétricas en el espacio entre los cilindros y aguas abajo del cilindro inferior, con una velocidad máxima ascendente del fluido en  $X \approx 1.1$  y una velocidad máxima descendente localizada en el espacio entre los cilindros y las paredes del canal. La tercera imagen muestra el campo de vorticidad promedio, ilustrando cómo las capas de esfuerzos cortantes que se desprenden del cilindro superior se reinsertan en la parte frontal del cilindro inferior. Evidentemente, al incrementar la relación de espaciamiento a  $\sigma = 5$ , tiene lugar sólo una pequeña interacción entre las estelas de ambos cilindros y se observa una simetría en las zonas de recirculación promedio para ambos cilindros, donde la estela del cilindro inferior es ligeramente más esbelta y corta que la del cilindro superior. La Fig. 3.18 muestra para  $\sigma = 2$  y 5 el proceso de desprendimiento de vórtices para el arreglo de cilindros en ausencia de fuentes de calor ( $Ri = 0$ ). La imagen superior presenta patrones instantáneos adimensionales de velocidad y vorticidad para  $\sigma = 2$ . Claramente, no hay desprendimiento de vórtices en el espacio entre cilindros, ya que se observa un par de vórtices simétricos y estacionarios, a la vez que se observa un patrón de estelas de vórtices de Kármán debajo del cilindro inferior. Así mismo, debido al efecto de bloqueo del canal, tienen lugar algunas interacciones entre la vorticidad generada por el cilindro superior y las paredes. La imagen inferior muestra patrones instantáneos típicos de velocidad y vorticidad para  $Ri = 0$  y  $\sigma = 5$ , ilustrando cómo se forman estelas de vórtices de Kármán debajo de cada cilindro. La tercera imagen muestra como tiene lugar un fenómeno interesante debido a la fuerte interacción de las paredes del canal con los vórtices libres, donde la etiqueta **A** indica cómo la vorticidad generada por las paredes captura los vórtices del mismo signo. También para este valor del espacio entre cilindros, los valores pico de la vorticidad se vuelven particularmente grandes a causa de los desprendimientos de vórtices dentro de la región entre cilindros y la incidencia de éstos en la parte superior de la superficie del cilindro inferior. La Fig. 3.19 muestra para valores de  $\sigma = 2$  y 5 las variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal medidas a lo largo del plano de simetría para posiciones selectas dentro del canal, respectivamente. Claramente, para  $\sigma = 2$ , las fluctuaciones de velocidad son monocromáticas después de un tiempo de inducción de  $\tau \sim 150$ . Estas figuras ejemplifican cómo la amplitud de las oscilaciones de las fluctuaciones de velocidad se incrementan a lo largo del plano de simetría en dirección aguas abajo del cilindro inferior, alcanzan un máximo en la posición  $(X,Y) = (5.5,0)$  y posteriormente decrecen progresivamente en dirección aguas abajo. Para  $\sigma = 5$ , las

fluctuaciones de velocidad también son monocromáticas después de un corto tiempo de inducción de  $\tau \sim 50$ , y su máxima amplitud se encuentra en el espacio entre cilindros en la coordenada  $(X,Y) = (2.5,0)$ .

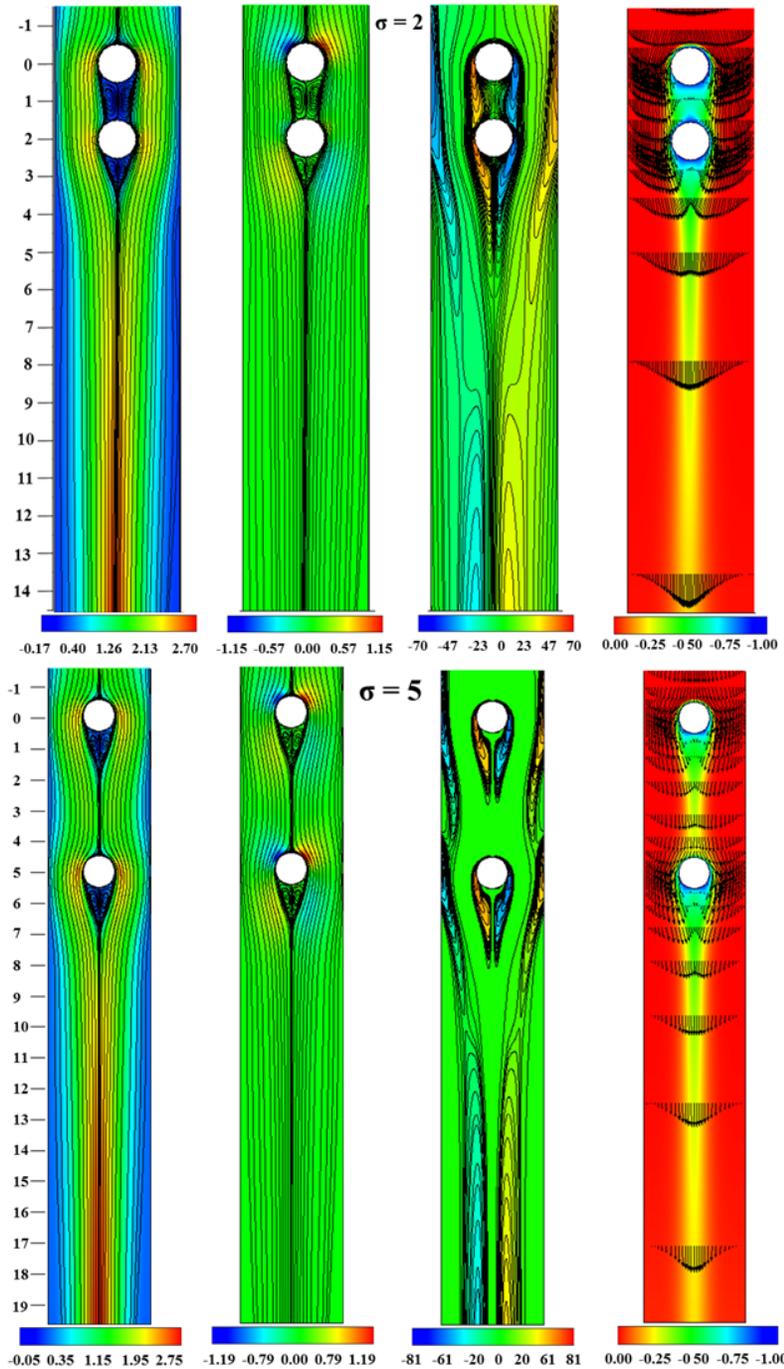


Figura 3.16: Flujo adimensional en estado estacionario para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

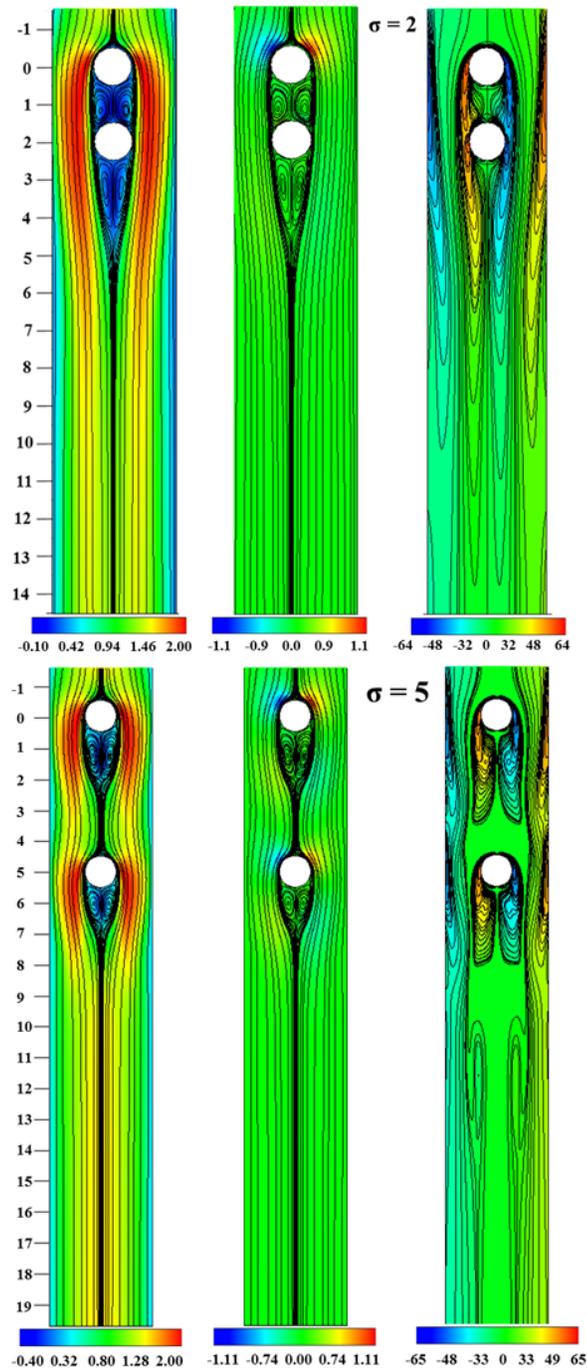


Figura 3.17: Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri=0$ ) con  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0$  y  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

### 3.3.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ )

En ésta subsección se presenta la respuesta característica para flujo opuesto y valores crecientes del parámetro de flotación para  $\sigma = 2$  y  $5$ . La Fig 3.20 muestra los

valores del flujo adimensional promedio para  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ). Para éste valor del parámetro de flotación y  $\sigma = 2$ , el punto de separación del cilindro superior se desplaza aguas arriba, aumenta la reversión del flujo y las dos zonas de recirculación que se encuentran en el espacio entre cilindros incrementan su ancho, ocupando toda

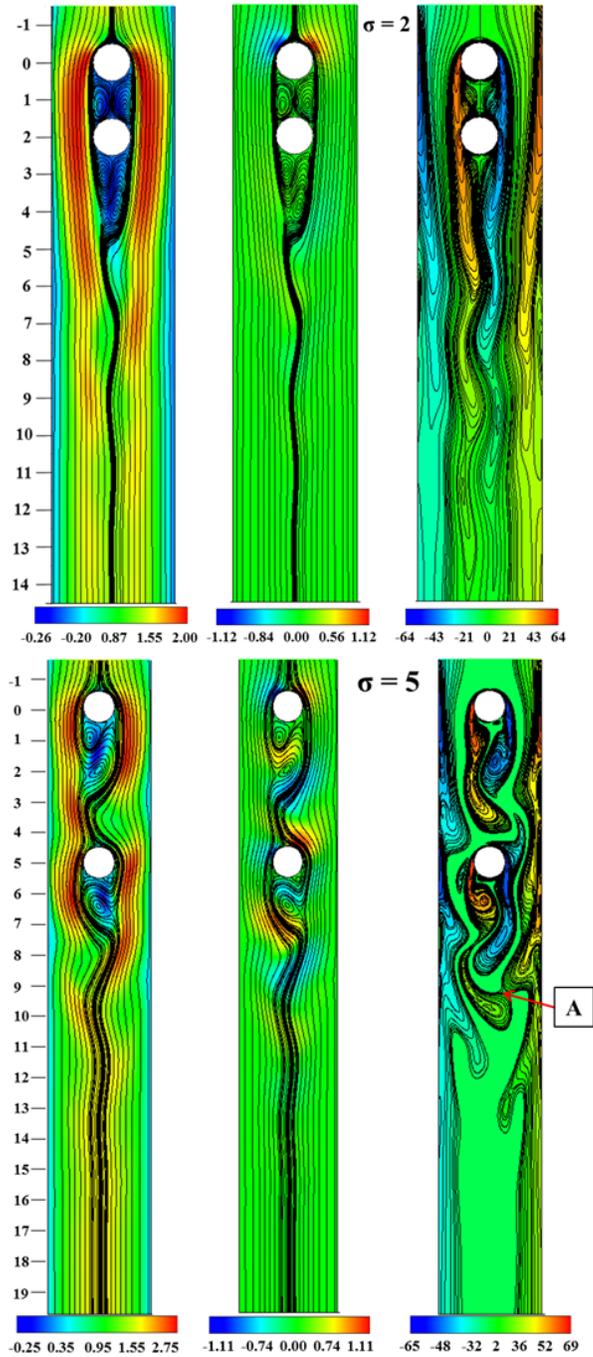


Figura 3.18: Flujo instantáneo adimensional para cilindros sin calentar con valores de  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0$  para  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

la parte frontal del cilindro inferior. También se puede apreciar un cambio notable en el patrón de la estela, ya que las zonas de recirculación se desplazan hacia posiciones aguas abajo, donde su centro y la velocidad promedio máxima se localizan en  $X \approx 8.22$ . La tercera imagen muestra cómo las capas de corte que se desprenden del cilindro superior ahora se reinsertan en vez de en la parte frontal, en la parte lateral del cilindro inferior. Adicionalmente, aparece la zona neutra con velocidades

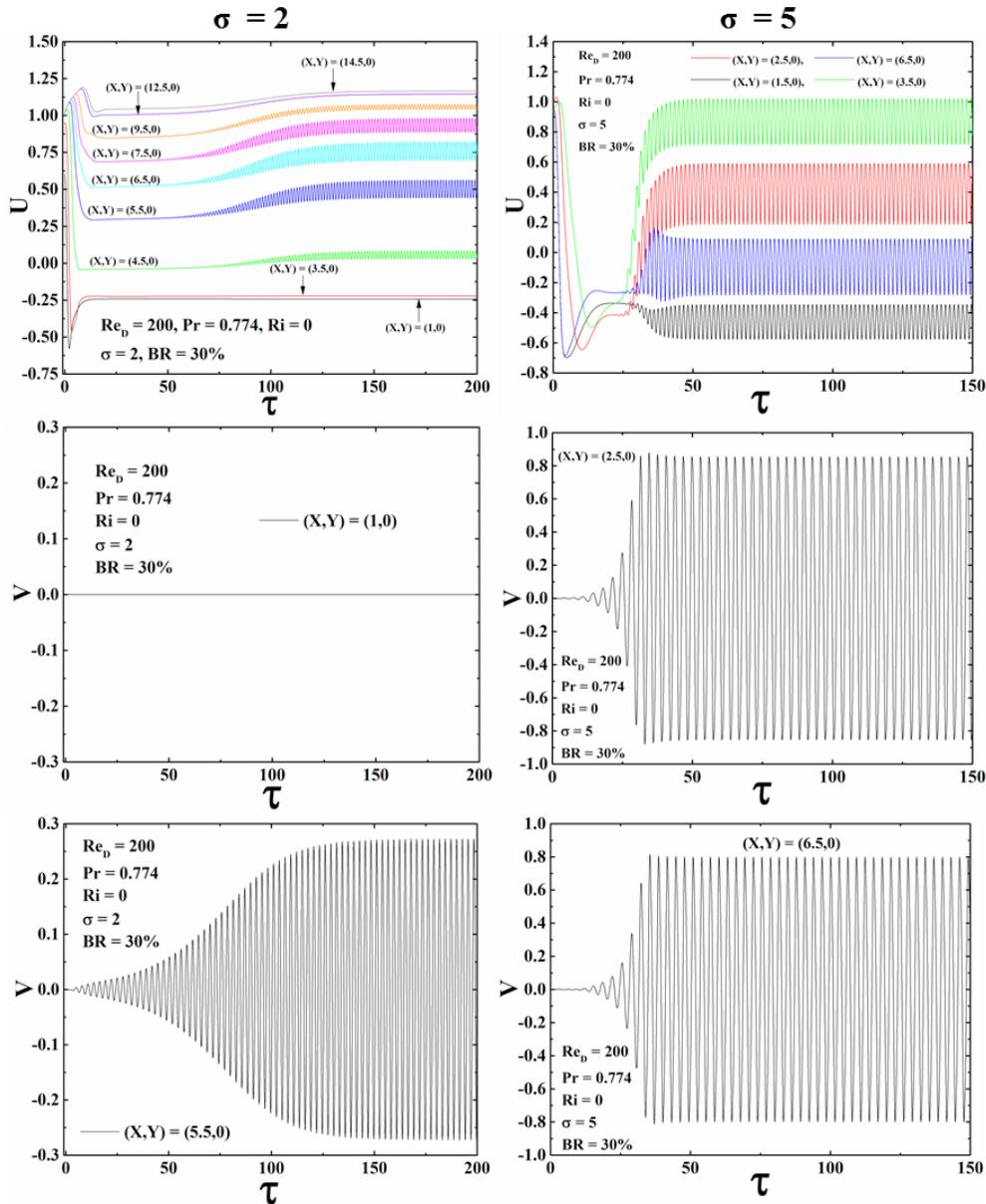


Figura 3.19: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 0$ . Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para varias posiciones en el eje  $X$ .

cercanas a cero debajo del cilindro inferior, ocupando el espacio comprendido entre la parte posterior de éste y el inicio de la zona de recirculación. La cuarta imagen muestra cómo a causa del aumento en la reversión del flujo en espacio comprendido entre cilindros, aparece un puente entre las capas térmicas de ambos cilindros, por lo que incrementa la intensidad de la flotación. La imagen inferior muestra los valores resultantes del flujo adimensional promedio para  $\sigma = 5$ , ilustrando cómo debido al efecto de la flotación térmica se presentan dos zonas de recirculación alargadas y simétricas debajo de cada cilindro. Nótese cómo a causa de la presencia de reversión de flujo en el espacio entre cilindros, la longitud y el espesor de las zonas de recirculación es mayor en comparación con los valores registrados para el cilindro inferior, no hay una concentración significativa de la vorticidad en la parte superior del espacio entre cilindros, y la vorticidad decrece ligeramente con respecto al flujo en convección forzada. La velocidad máxima ascendente en el plano de simetría se encuentra en  $X \sim 3.6$ , que corresponde a la región donde las zonas de recirculación alcanzan su máximo espesor. Por consiguiente, la velocidad máxima se encuentra fuera éstas zonas de recirculación, donde la velocidad alcanza un pico en la misma posición. La Fig. 3.21 muestra patrones instantáneos típicos de flujo y temperatura para  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ). En esta figura y para  $\sigma = 2$ , la etiqueta **B** indica la ubicación de la zona neutra donde la velocidad del fluido y la vorticidad son cercanas a cero y la etiqueta **C** indica la región donde se presenta la zona de recirculación. Se puede observar cómo la vorticidad producida en la superficie del cilindro superior es transportada a lo largo de la superficie exterior de la zona neutra y cómo los vórtices sólo se desprenden en la parte inferior de ésta. Las imágenes en la parte inferior muestran los patrones instantáneos de flujo y temperatura para  $\sigma = 5$ . Como se puede observar, la presencia de dos regiones de recirculación simétricas que ocupan la totalidad del espacio entre cilindros y que se reinsertan en la parte superior de la superficie del cilindro inferior es evidente. En cuanto a la estela del cilindro inferior, se observan vórtices que asemejan a los vórtices de Kármán, ya que la estela exhibe patrones de vórtices bien definidos en la parte inferior de la zona neutra de tamaño relativamente pequeño. Nótese como en  $X \sim 12$ , la vorticidad generada por la pared aún captura los vórtices desprendidos del mismo signo. La Fig. 3.22 presenta las variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal en el plano de simetría para posiciones selectas dentro del canal. Para  $\sigma = 2$ , las fluctuaciones de la velocidad alcanzan su máxima amplitud en la posición  $(X,Y) = (10.5,0)$ , y éstas son monocromáticas después de un tiempo de inducción de  $\tau \sim 300$ . Por claridad, se realizó una ampliación dentro de la gráfica superior derecha de la Fig. 3.22 para poder apreciar el comportamiento oscilatorio de la señal en un intervalo de tiempo de  $\tau = 330$  a  $\tau = 350$ . Para  $\sigma = 5$ , se observa un comportamiento armónico bien definido después de un tiempo de inducción de  $\tau \sim 350$ . En estas figuras podemos apreciar cómo tienen lugar oscilaciones casi imperceptibles de amplitud muy pequeña en el espacio entre cilindros. Los valores de flujo adimensional promedio para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) y  $\sigma = 2$  y  $5$  se muestran en la Fig. 3.23. Para este valor del número de Richardson y para  $\sigma = 2$ , a causa del aumento en la reversión de flujo en el espacio entre cilindros, el punto de separación del flujo en la superficie del cilindro superior se desplaza aguas arriba y la región

de recirculación en el espacio entre cilindros se vuelve más ancha y larga, ocupando toda la parte superior de la superficie del cilindro inferior y una porción de la superficie inferior de éste. Por ésta razón, se observa un incremento en la velocidad

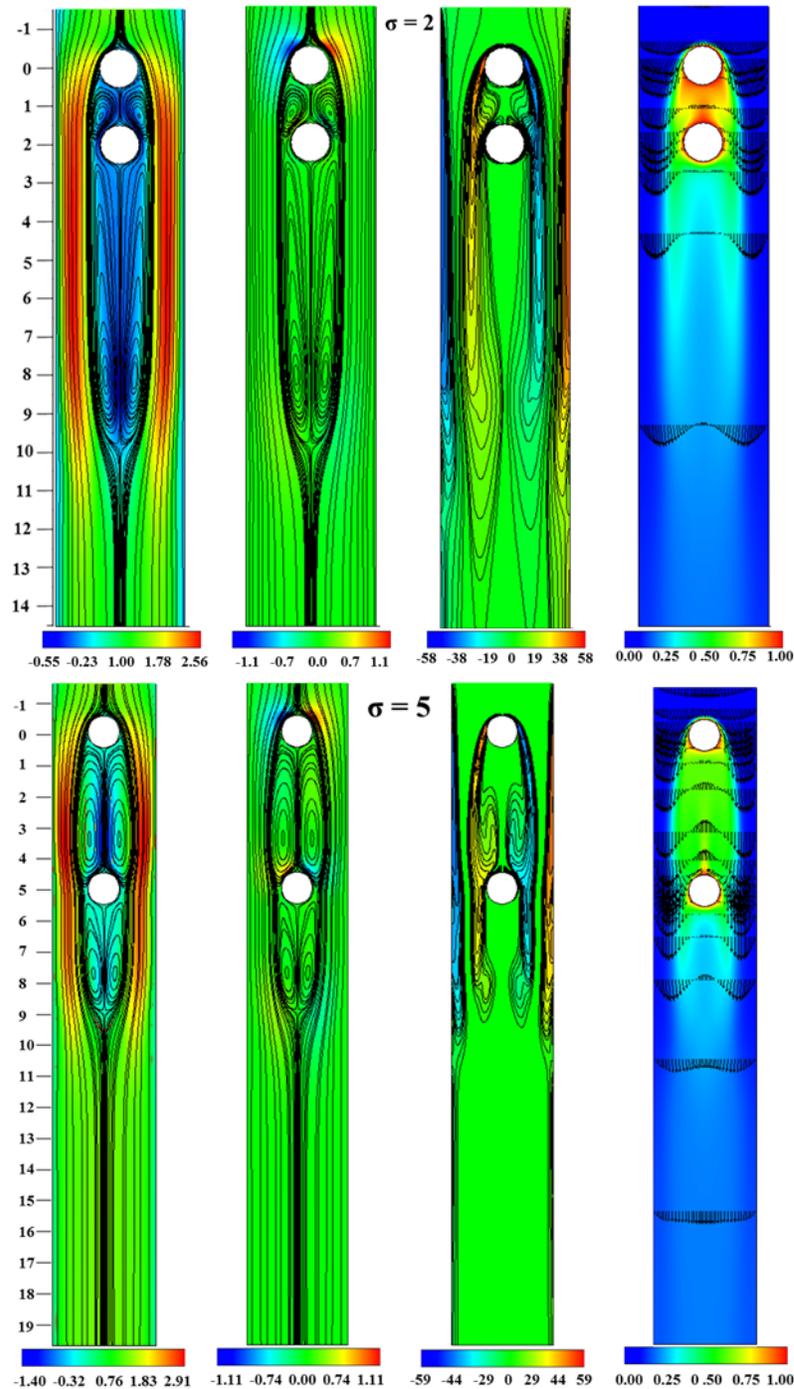


Figura 3.20: Valores del flujo promedio adimensional para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ),  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

promedio máxima y mínima de la componente de velocidad longitudinal. La tercera imagen muestra cómo la zona neutra incrementa de tamaño de forma dramática y se extiende varios diámetros aguas abajo dentro del canal. Además, debido a la poca interacción entre las capas con esfuerzos de corte generadas por ambos cilindros, la intensidad de la vorticidad de las estructuras vorticales que se desprenden se reduce con respecto a  $Ri = 1$ . Para  $\sigma = 5$ , las regiones de circulación incrementan su tamaño y se reinsertan en el cilindro inferior ocupando gran parte de su superficie, lo que a su vez aumenta el efecto del bloqueo. Como resultado, ocurre un incremento y una caída en el valor máximo y mínimo de la componente de velocidad longitudinal, respectivamente. Adicionalmente, la zona neutra con velocidades cercanas a cero se vuelve más larga, más ancha y se extiende hasta la salida del canal. Por lo tanto, la máxima velocidad fuera de la zona neutra se incrementa dramáticamente para satisfacer la conservación de la masa. La Fig. 3.24 presenta para  $\sigma = 2$  los patrones instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura para  $\sigma = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). Claramente, el espesor de los vórtices que se desprenden se reduce y el patrón de desprendimiento presenta varios vórtices alargados que se desordenan de manera alternada. Los patrones instantáneos de velocidad, vorticidad y temperatura no se muestran para  $\sigma = 5$ , ya que son muy similares a los presentados en la Fig. 3.23 para la misma relación de espaciamiento. Para ilustrar como el patrón de desprendimiento de vórtices varía en el tiempo para  $\sigma = 2$  y 5, la Fig. 3.25 muestra para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) las variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función de tiempo adimensional medidas en el plano de simetría en diferentes posiciones del canal. Claramente, a causa de la presencia de la zona neutra ampliada para  $\sigma = 2$ , la señal de la componente de velocidad longitudinal permanece fija después de un transitorio corto de  $\tau \sim 100$ . Nótese cómo aunque las fluctuaciones de la componente de velocidad transversal alcanzan un pico en la posición aguas abajo de  $(X,Y) = (9.5,0)$ , su amplitud es muy pequeña comparada con la del número de Richardson anterior, siendo ésta un orden de magnitud menor que la obtenida para  $Ri = 1$ . Como se puede apreciar para  $\sigma = 5$ , la presencia de grandes zonas de recirculación en el espacio entre cilindros y la zona neutra extendida explican por qué se presentan velocidades cercanas a cero a lo largo del plano de simetría del canal. No obstante, aunque las curvas en la Fig. 3.25 sugieren que el flujo es estacionario, oscilaciones de pequeña amplitud tienen lugar en el espacio entre cilindros. Para  $\sigma = 2$ , al incrementar el valor del número de Richardson a  $Ri = 3$  y 4, las simulaciones numéricas muestran que al incrementar el valor del parámetro de flotación, las zonas de recirculación que se encuentran en el espacio entre cilindros se vuelven más anchas y el flujo ascendente en esta región penetra aguas arriba, lo que ocasiona que el punto de separación del cilindro superior se recorra aguas arriba sobre la superficie de éste. Con respecto a la estela del cilindro inferior, la zona neutra se extiende a lo largo del canal en dirección aguas abajo hasta la salida de éste. Para  $\sigma = 5$ , a medida que el parámetro de flotación se incrementa a  $Ri = 3$  y 4, los patrones de velocidad, vorticidad y temperatura no difieren mucho de los presentados para  $Ri = 2$ , y se observa un incremento progresivo en el espesor de las zonas de recirculación que se encuentran en el espacio entre ambos cilindros y en la longitud de la zona neutra del cilindro inferior.

### 3.3.4. Número de Strouhal y diagramas de fase

Las Figs. 3.26a-3.26c muestran para  $\sigma = 2$  la amplitud normalizada correspondiente a las oscilaciones de la componente de velocidad transversal como una función

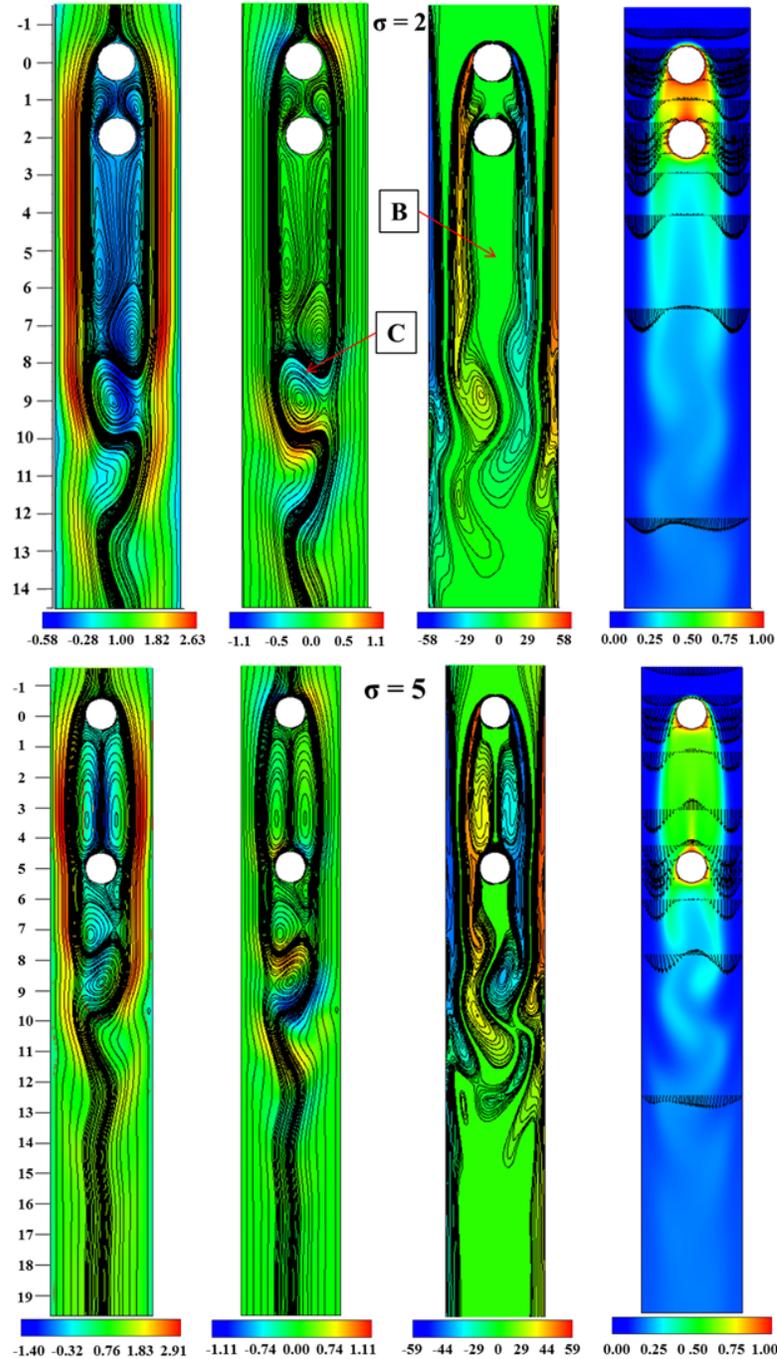


Figura 3.21: Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y 5. De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

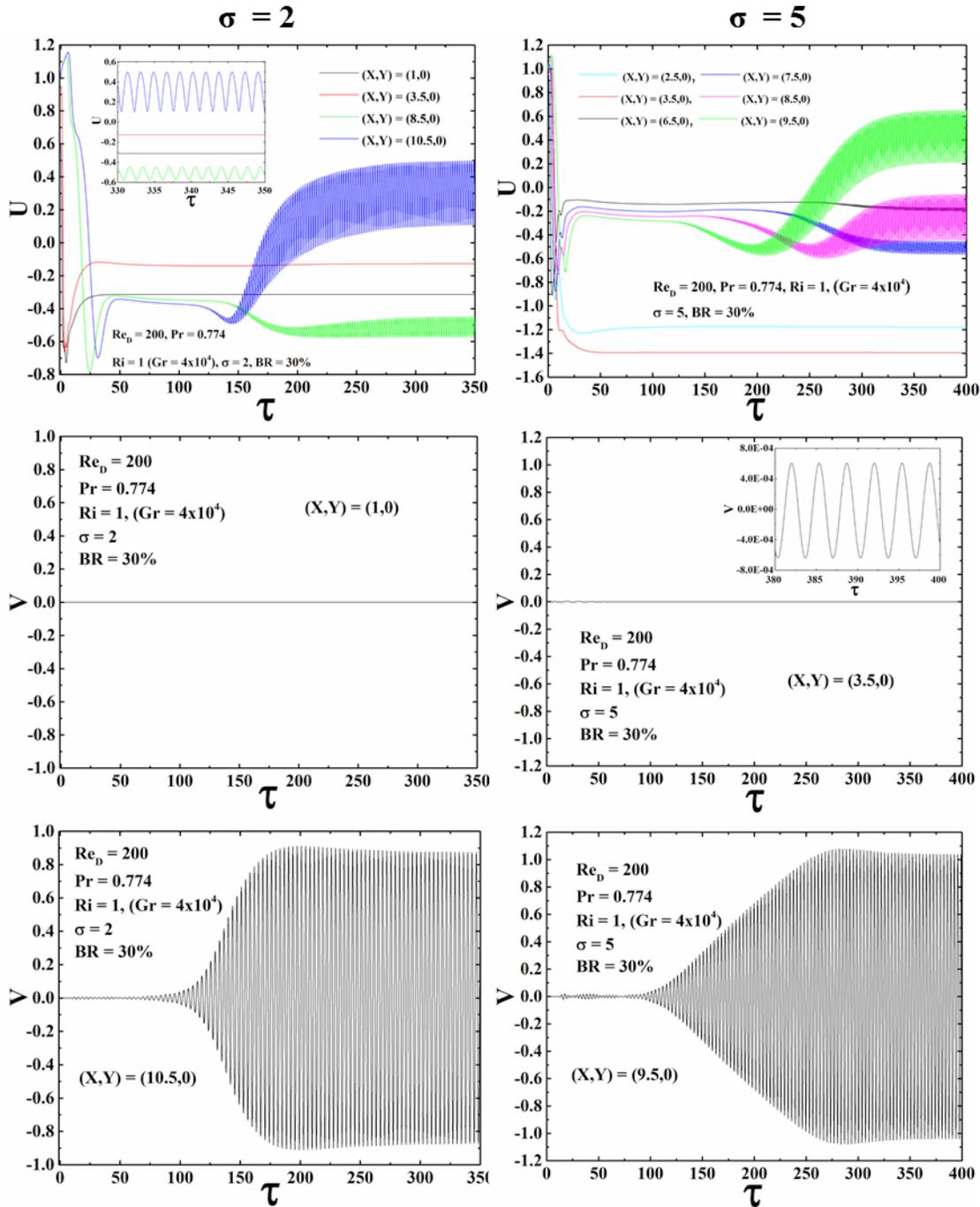


Figura 3.22: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 1$  ( $Gr = 4 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y 5. Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría y en posiciones selectas dentro del canal.

del número de Strouhal para  $Ri = 0$ , 1 y 2, respectivamente. Para  $Ri = 0$ , la Fig. 3.26a muestra la existencia de un pico en  $St = 0.35996$  (periodo de tiempo cercano a

2.78 veces el tiempo de residencia) en la coordenada  $(X, Y) = (5.5, 0)$ , lo que implica que el patrón de desprendimiento de vórtices es periódico y se encuentra dominado por una frecuencia fundamental única. En la Fig. 3.26b, aunque el valor del número

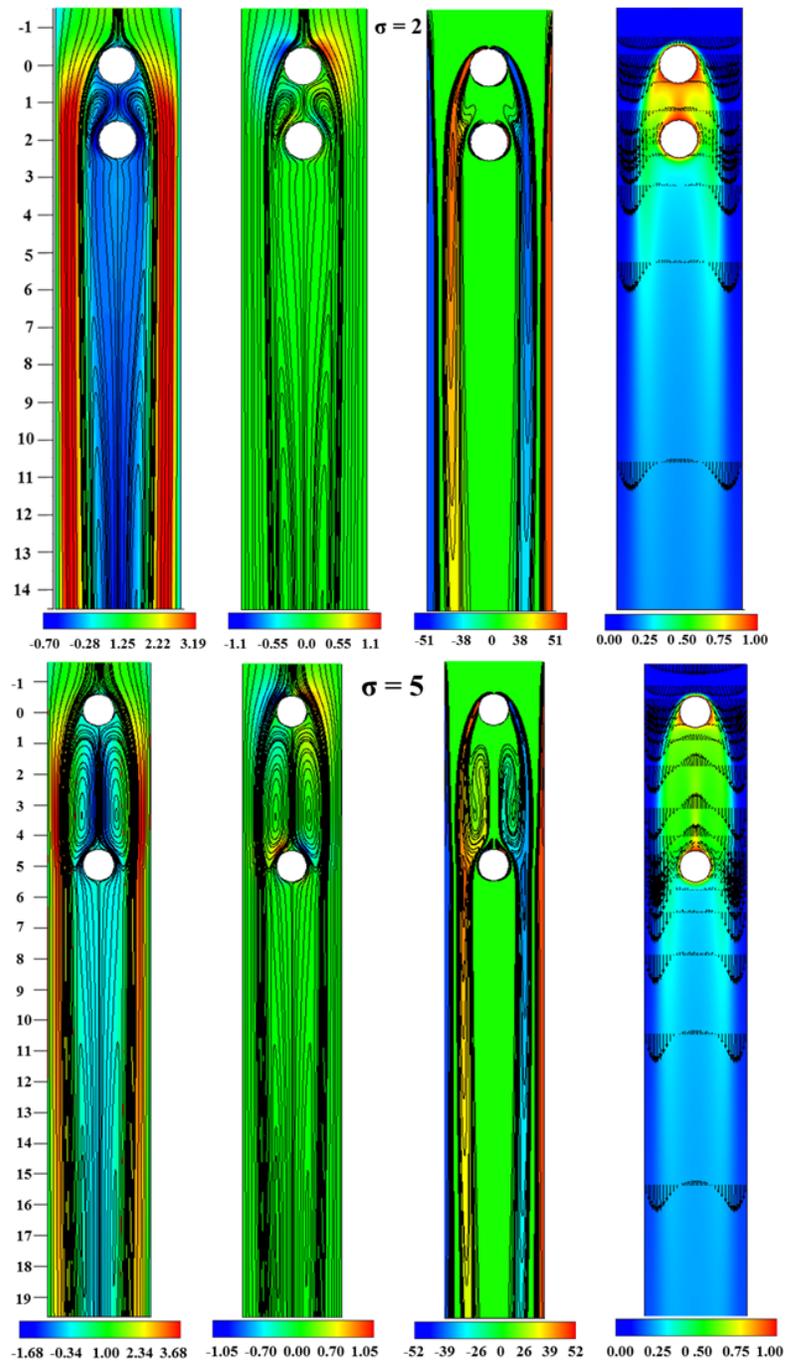


Figura 3.23: Valores del flujo promedio adimensional para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) para  $\sigma = 2$  y  $5$ . De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campos de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

de Strouhal para  $Ri = 1$  decrece con respecto al obtenido para convección forzada pura en ausencia de flotación, un pico en  $St = 0.28332$  (periodo de tiempo cercano a  $3.53D/u_0$ ) en la posición  $(X,Y) = (10.5,0)$  indica que el patrón de desprendimiento de vórtices continúa siendo monocromático. Para  $Ri = 2$ , la Fig. 3.26c presenta un pico en  $St = 0.44999$  (periodo de tiempo cercano a  $2.22D/u_0$ ) en la posición  $(X,Y) = (9.5,0)$ , lo que indica que para este valor de  $Ri$  tiene lugar un incremento dramático en la frecuencia del patrón de desprendimiento de vórtices. Las Figs. 3.26d-3.26f ilustran para  $\sigma = 2$  el plano de fase entre las señales de las componentes de velocidad longitudinal y transversal para  $Ri = 0, 1$  y  $2$ , respectivamente. En la Fig. 3.26d, se observa una trayectoria doble en la coordenada  $(X,Y) = (5.5,0)$  para  $Ri = 0$  como consecuencia de un patrón de desprendimiento de vórtices simétrico y alternado, en el cual la componente de velocidad transversal tiene dos veces el valor del periodo de la componente de velocidad longitudinal. La Fig. 3.26e muestra cómo para  $Ri = 1$ , las trayectorias en el diagrama de fase en la coordenada  $(X,Y) = (10.5,0)$  también presentan una periodicidad bien definida, con un patrón de desprendimiento de vórtices alternado y simétrico. La Fig. 3.26f muestra el diagrama de fase para  $Ri$

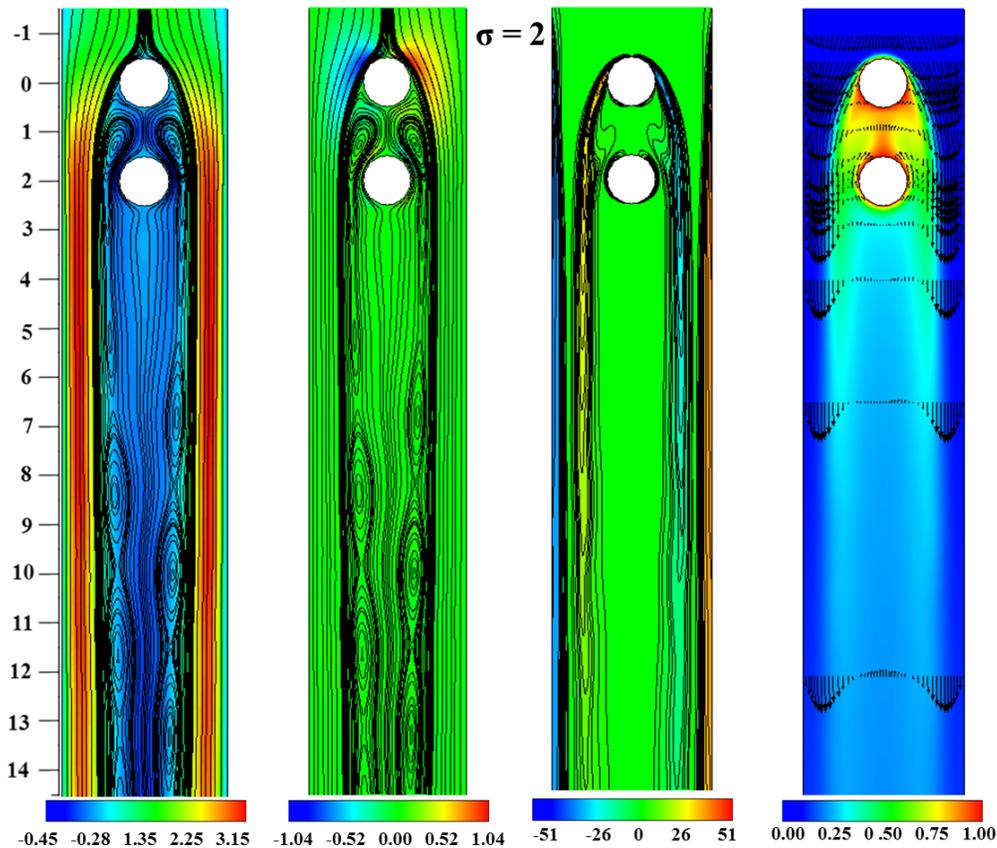


Figura 3.24: Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad, vorticidad y temperatura para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 2$  y  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ). De izquierda a derecha: componentes de velocidad  $U$  y  $V$ , vorticidad  $\Omega$ , y campo de temperatura  $\theta$ , respectivamente.

= 2 en la posición  $(X,Y) = (9.5,0)$ . Como se puede observar en estos patrones, el diagrama de fase es asimétrico y hay una aparente pérdida de simetría en las zonas de recirculación, lo que sugiere que el desprendimiento de vórtices es cuasi-periódico.

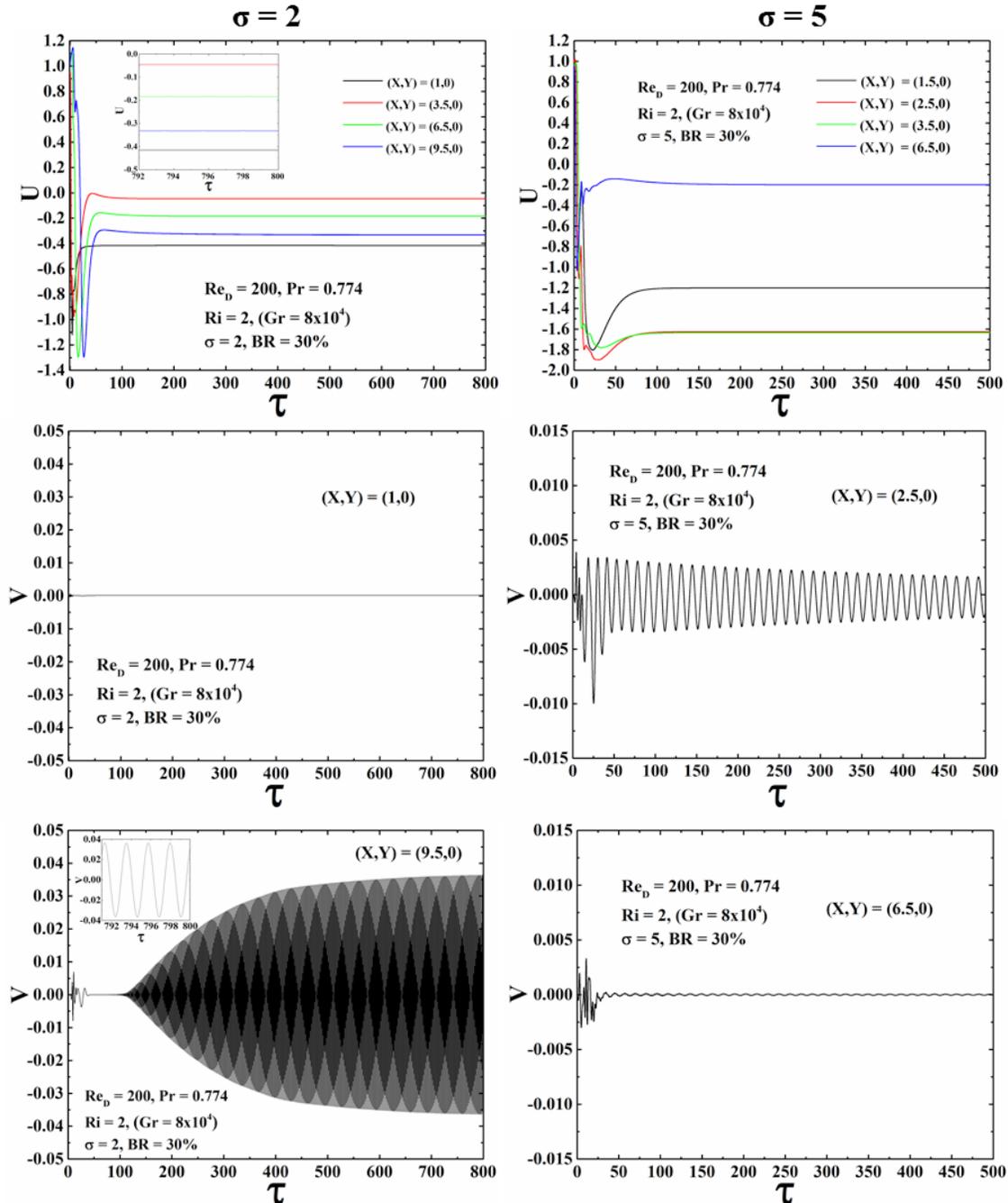


Figura 3.25: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 2$  ( $Gr = 8 \times 10^4$ ) y  $\sigma = 2$  y 5. Los datos extraídos se obtuvieron en el plano de simetría y en diferentes posiciones del canal.

Las Figs. 3.26g-3.26i muestran para  $\sigma = 5$  las correspondientes densidades espectrales para  $Ri = 0, 1$  y  $2$ , respectivamente. Para  $Ri = 0$ , las densidades espectrales

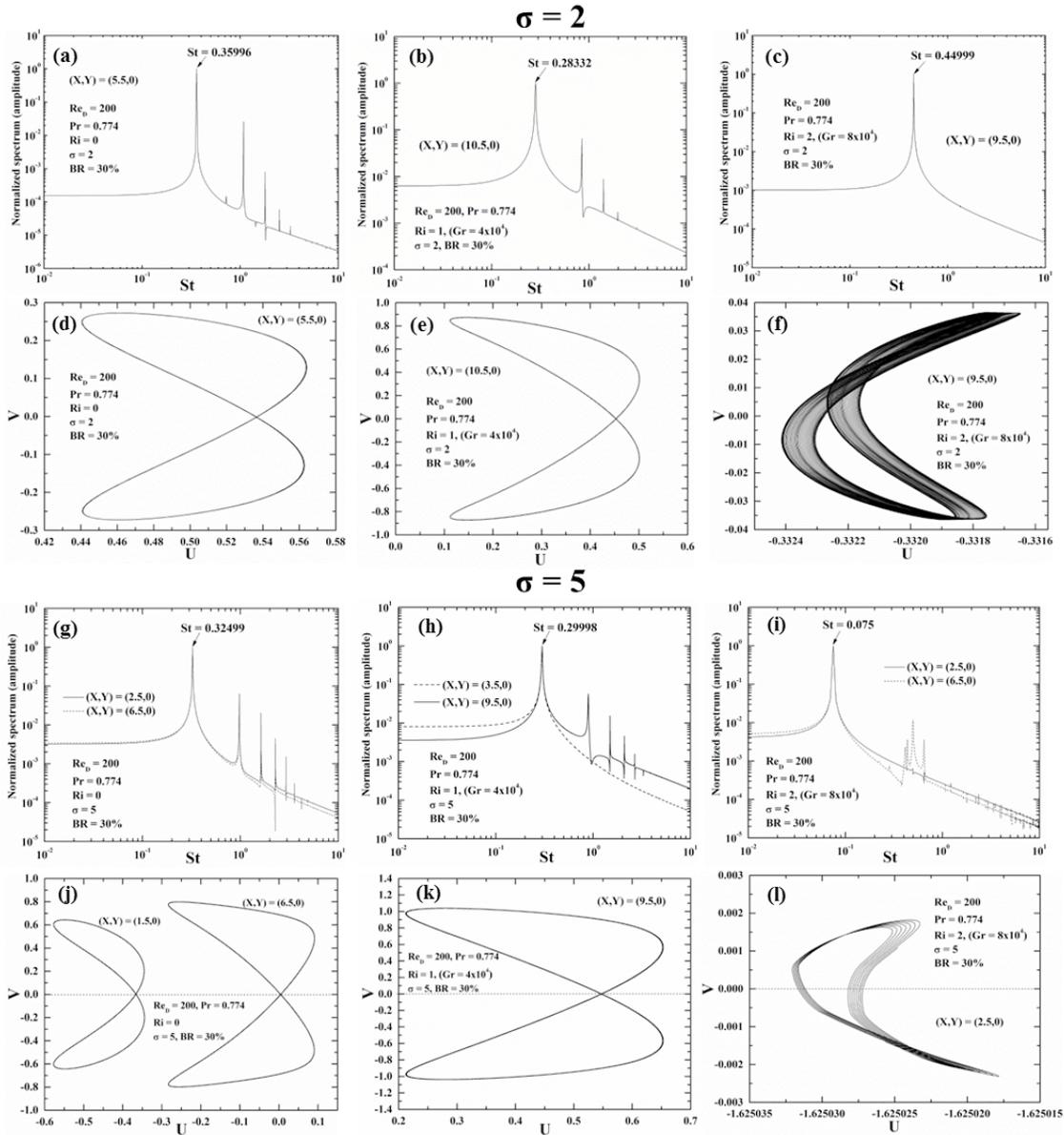


Figura 3.26:  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $Ri = 0, 1$  y  $2$ . Primera y tercera fila: Espectro normalizado de la velocidad trasversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente. Segunda y cuarta fila: Diagrama de fase de la señal de la componente de velocidad longitudinal como una función de la señal de la componente de velocidad transversal para  $\sigma = 2$  y  $5$ , respectivamente.

obtenidas en las posiciones  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(X,Y) = (6.5,0)$  muestran para ambas posiciones la existencia de un pico en  $St = 0.32499$  (periodo cercano a 3.08 veces el tiempo de residencia), indicando que el cilindro inferior tiene la misma frecuencia de desprendimiento de vórtices que el cilindro superior. La Fig. 3.26h exhibe cómo para

$Ri = 1$  y dos posiciones conocidas de  $(X,Y) = (3.5,0)$  y  $(X,Y) = (9.5,0)$ , se presenta un pico en  $St = 0.29998$  (periodo de tiempo cercano a 3.33 veces el tiempo de residencia), lo que indica que la frecuencia de las oscilaciones de amplitud pequeña que se presentan en las zonas de recirculación ubicadas en el espacio entre cilindros y la frecuencia del desprendimiento de vórtices del cilindro inferior es la misma. La Fig. 3.26i exhibe como para  $Ri = 2$  y para dos posiciones conocidas en  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(X,Y) = (6.5,0)$ , aparece un pico en el valor correspondiente del número de Strouhal de  $St = 0.075$  (periodo de tiempo cercano a 13.33 unidades de tiempo adimensional), indicando que la frecuencia de oscilación cae dramáticamente con respecto al valor anterior del número de Richardson. Las Figs. 3.26j-3.26l ilustran para  $\sigma = 5$  los diagramas de fase para  $Ri = 0, 1$  y  $2$ , respectivamente. La Fig. 3.26j exhibe para  $Ri = 0$  y para las posiciones de  $(X,Y) = (2.5,0)$  y  $(X,Y) = (6.5,0)$  cómo aunque el diagrama de fase es simétrico para ambas posiciones, la amplitud del desprendimiento de vórtices es mayor en el espacio entre ambos cilindros. La Fig. 3.26k presenta cómo aún existen oscilaciones periódicas en la posición  $(X,Y) = (9.5,0)$  para  $Ri = 1$ . Sin embargo, para un valor más alto del parámetro de flotación de  $Ri = 2$ , el diagrama de fase obtenido en la posición  $(X,Y) = (2.5,0)$  ilustra la aparición de una oscilación asimétrica cuasi-periódica en el espacio entre cilindros.

### 3.3.5. Velocidades promedio en el plano de simetría del canal

La Fig. 3.27 muestra para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$  los perfiles de la componente de velocidad longitudinal promedio adimensionales como una función del eje de simetría del canal a lo largo de todo el dominio computacional para diferentes valores del número de Richardson. Para mayor claridad, dentro de cada gráfica de la Fig. 3.27, se realizó una ampliación en la parte del plano de simetría correspondiente al espacio entre cilindros. Para  $\sigma = 2$  y  $Ri = -1$  ( $Gr = -4 \times 10^4$ ), el flujo entre ambos cilindros se caracteriza por la presencia de regiones de recirculación con velocidades negativas. También se puede apreciar que la zona de recirculación debajo del cilindro inferior es más corta y la longitud de la estela es de  $\approx 1.16$  diámetros. Nótese cómo el fluido alcanza una velocidad máxima aguas abajo del cilindro inferior. Para  $Ri = 0$ , la velocidad mínima en la región de recirculación entre ambos cilindros decrece y la longitud de la estela se extiende a  $\sigma_v$  *approx* 2.45 diámetros. Para  $Ri = 0.5$ , la estela inducida por la flotación se caracteriza por la ausencia de la zona neutra. Como se mencionó previamente, para valores del número de Richardson desde  $Ri = 1$  y hasta el valor máximo estudiado de  $Ri = 4$ , se presenta una zona neutra debajo del cilindro inferior. Para  $Ri = 1$  y  $Ri = 1.5$ , la longitud de la estela incrementa a  $\sigma_v \approx 8.05$  y  $\approx 16.35$  diámetros, respectivamente. Sin embargo, para  $Ri = 2, 3$  y  $4$ , debido a que la zona neutra se alarga hasta la salida del canal, las velocidades promedio en la línea media del canal sólo muestran valores negativos hasta la salida del canal. Cabe mencionar, que para todos los casos, no se observó reversión de flujo aguas arriba del cilindro superior, lo que indica que la flotación no puede desarrollar una burbuja de recirculación debido a los intensos esfuerzos cortantes producidos por el flujo frío descendente. Para  $\sigma = 3$  y  $Ri = -1$ , la longitud adimen-

sional de la estela del cilindro superior e inferior alcanzan valores de  $L_{v1}/D \approx 1.98$  y  $L_{v2}/D \approx 1.31$  diámetros, respectivamente. Para  $Ri = 0$  y hasta  $Ri = 4$ , la región de recirculación entre ambos cilindros aumenta de tamaño ocupando la totalidad de este espacio y la longitud de la estela debajo del cilindro inferior se incrementa para valores crecientes del parámetro de flotación. Nótese como para  $Ri = 1$  y hasta  $Ri = 4$ , aparece una zona neutra debajo del cilindro inferior. Para  $\sigma = 5$  y  $Ri = -1$ , la longitud de la estela del cilindro superior e inferior disminuye e incrementa a  $L_{v1}/D \approx 1.54$  y  $L_{v2}/D \approx 1.59$  diámetros, respectivamente. Curiosamente, aunque la zona neutra se encuentra presente debajo del cilindro inferior para  $Ri = 1$  y hasta  $Ri = 4$ , su longitud se reduce para  $Ri = 1$  y  $Ri = 1.5$  con respecto a  $\sigma = 3$ .

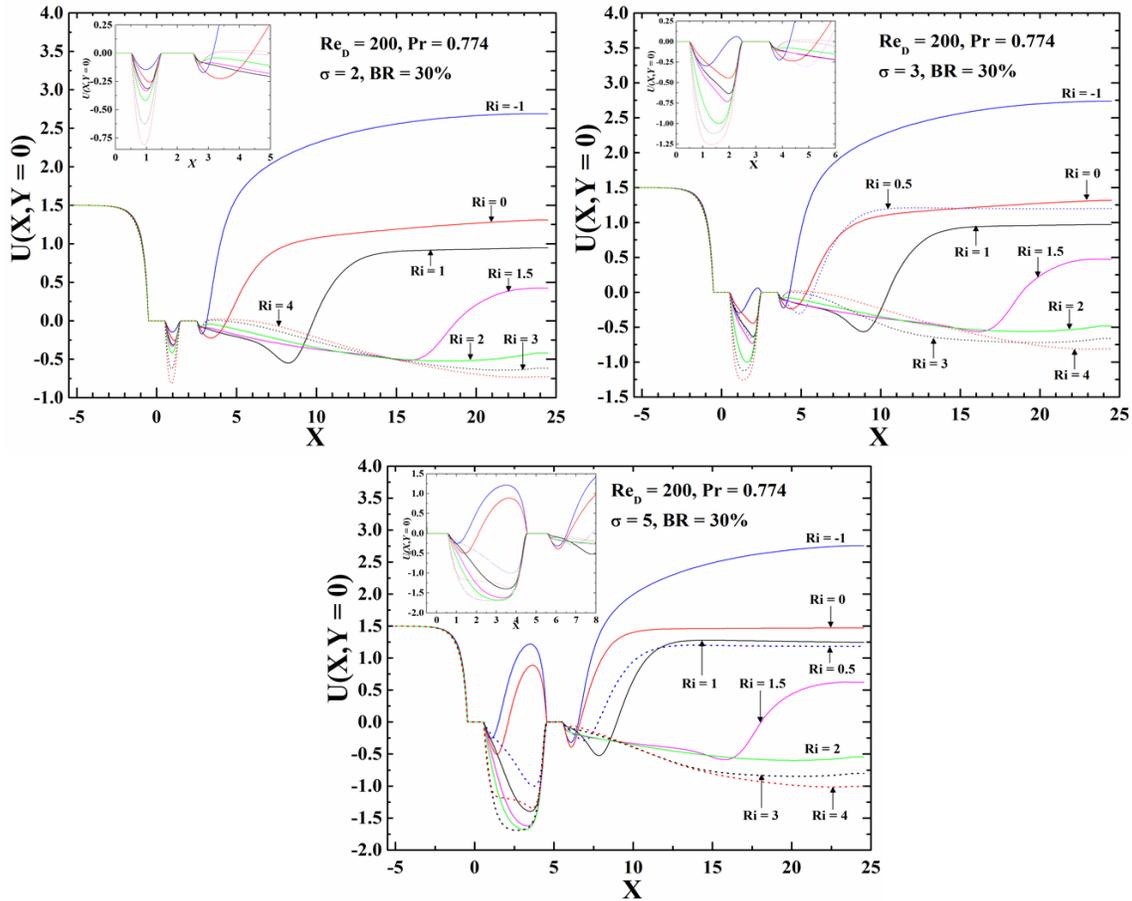


Figura 3.27: Perfiles adimensionales de velocidad axial a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal para valores de  $\sigma = 2, 3$  y  $5$  y para diferentes números de Richardson.

### 3.3.6. Ángulo de separación

Para ambos cilindros, la posición de ángulo de separación  $\gamma_s$  se obtienen de la misma manera que en la Subsección 3.1.6. La tabla 3.2 muestra para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$  el promedio  $\pm DE$  de  $\gamma_s$  para ambos cilindros como una función del número de

Richardson. Para flujo asistido, los ángulos de separación alcanzan un valor máximo para ambos cilindros. Sin embargo, en el intervalo  $0 \leq Ri \leq 4$ , es evidente que el ángulo de separación decrece de manera monótona para valores crecientes del número de Richardson. Para  $\sigma = 3$  y para flujo asistido, el valor del ángulo de separación alcanza un máximo para ambos cilindros. También en el intervalo  $0 \leq Ri \leq 4$ , el valor de  $\gamma_s$  decrece monótonamente para valores crecientes del número de Richardson. Nótese como para valores de  $Ri = 1$  y mayores, no se reportan valores del ángulo de separación para el cilindro inferior, ya que como se explicó anteriormente, las capas de corte que se separan del cilindro superior envuelven completamente al cilindro inferior. Para  $\sigma = 5$  y para flujo asistido, al igual que para la relación de espaciamiento previa, el flujo permanece adherido a la superficie de los cilindros, ocasionando que los ángulos de separación  $\gamma_s$  alcancen un valor máximo. Curiosamente, el valor de  $\gamma_s$

		Ángulo de separación (promedio $\pm$ $DE$ )	
$\sigma$	$Ri$	Cilindro superior	Cilindro inferior
2	-1	125.41	139.94
2	0	112.13	130.49 $\pm$ 0.79
2	0.5	106.46	115.82 $\pm$ 1.08
2	1	101.66	-
2	1.5	96.62	-
2	2	93.33	-
2	3	85.58	-
2	4	80.19	-
3	-1	126.64	135.29
3	0	112.98	129.64
3	0.5	105.83	121.06 $\pm$ 0.72
3	1	102.14	-
3	1.5	96.30	-
3	2	93.19	-
3	3	85.48	-
3	4	79.93	-
5	-1	129.53	127.05
5	0	113.85 $\pm$ 1.26	119.18 $\pm$ 5.16
5	0.5	106.54	124.3 $\pm$ 0.82
5	1	102.24	-
5	1.5	97.18	-
5	2	93.38	-
5	3	85.82	-
5	4	80.07	-

Tabla 3.2: Ángulo de separación como una función del número de Richardson para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$  y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ .

es ligeramente mayor para el cilindro superior para  $Ri = -1$ , mientras que para  $Ri =$

0 y  $Ri = 0.5$ , el ángulo de separación del cilindro superior es más pequeño que el del cilindro inferior. No obstante, el valor de  $\gamma_s$  decrece monótonamente para valores crecientes de  $Ri$  para ambos cilindros. Se observa cómo para  $Ri = 1$  y mayores, no se reportan valores del ángulo de separación para el cilindro inferior, ya que al igual que los casos anteriores, las capas de esfuerzos de corte generadas en el cilindro superior no se reinsertan a la superficie del cilindro inferior.

## 3.4. Transferencia de calor

En esta subsección se presentan los valores de los números de Nusselt locales y promedio para ambos cilindros como una función de  $\sigma$  para diferentes valores del número de Richardson.

### 3.4.1. Números de Nusselt locales

La Fig. 3.28 presenta distribuciones representativas de los números de Nusselt locales definidos en las ecuaciones (2.8) y (2.9) sobre la superficie de cada cilindro para diferentes valores de  $Ri$  y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. Examinando estas figuras, se pueden observar las siguientes tendencias globales:

- (a) Los números de Nusselt locales del cilindro superior  $Nu_1$  son marcadamente mayores que los obtenidos para el cilindro inferior  $Nu_2$ . La posición que corresponde al punto de estancamiento frontal del cilindro superior ( $\gamma = 0$ ) alcanza el máximo valor del número de Nusselt local para todos los valores de  $Ri$ .
- (b) La distribución de los números de Nusselt locales del cilindro superior muestran dos puntos con mínimos locales que corresponden a los puntos de separación de la capa límite.
- (c) Como consecuencia de la presencia de las zonas de recirculación en el espacio entre cilindros que transportan energía térmica de la estela del cilindro superior, se alcanza un mínimo local para el cilindro inferior en  $\gamma = 0$  y para  $\sigma = 2$  y  $3$ . Sin embargo, para  $\sigma = 5$ , debido al hecho de que tiene lugar un régimen de co-desprendimiento, la distribución de los números de Nusselt locales para  $Ri = -1$  exhiben un máximo local en el punto de estancamiento frontal del cilindro inferior.
- (d) El tamaño de la zona de recirculación en el espacio entre cilindros tiene una fuerte influencia en la distribución de los números de Nusselt locales del cilindro inferior. Esta influencia se ejemplifica por los altos valores alcanzados por el número de Nusselt local para valores crecientes de  $Ri$  y de la relación de espaciamiento  $\sigma$ .

### 3.4.2. Número de Nusselt promedio

La Fig. 3.29 presenta las variaciones temporales del número de Nusselt promedio en la superficie de ambos cilindros para  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente. En estas figuras, las líneas continuas y punteadas corresponden al cilindro superior e inferior, respectivamente. El número de Nusselt promedio para  $\sigma = 2$ , diferentes valores de  $Ri$  y hasta un tiempo adimensional de 500 muestra cómo debido a que el fluido descendente frío incide en el cilindro superior, éste alcanza las mayores tasas de transferencia de calor con respecto al cilindro inferior. Así mismo, debido a que el punto de separación se recorre aguas arriba sobre la superficie del cilindro superior para valores crecientes de  $Ri$ , el número de Nusselt promedio también decrece. Curiosamente, se presenta una disminución progresiva del número de Nusselt promedio para el cilindro inferior en el intervalo  $-1 \leq Ri \leq 1$ . Sin embargo, para  $Ri \geq 1.5$  y hasta  $Ri = 4$ , el valor del número de Nusselt promedio correspondiente al cilindro inferior aumenta para valores crecientes del parámetro de flotación. Ésto se debe a que para

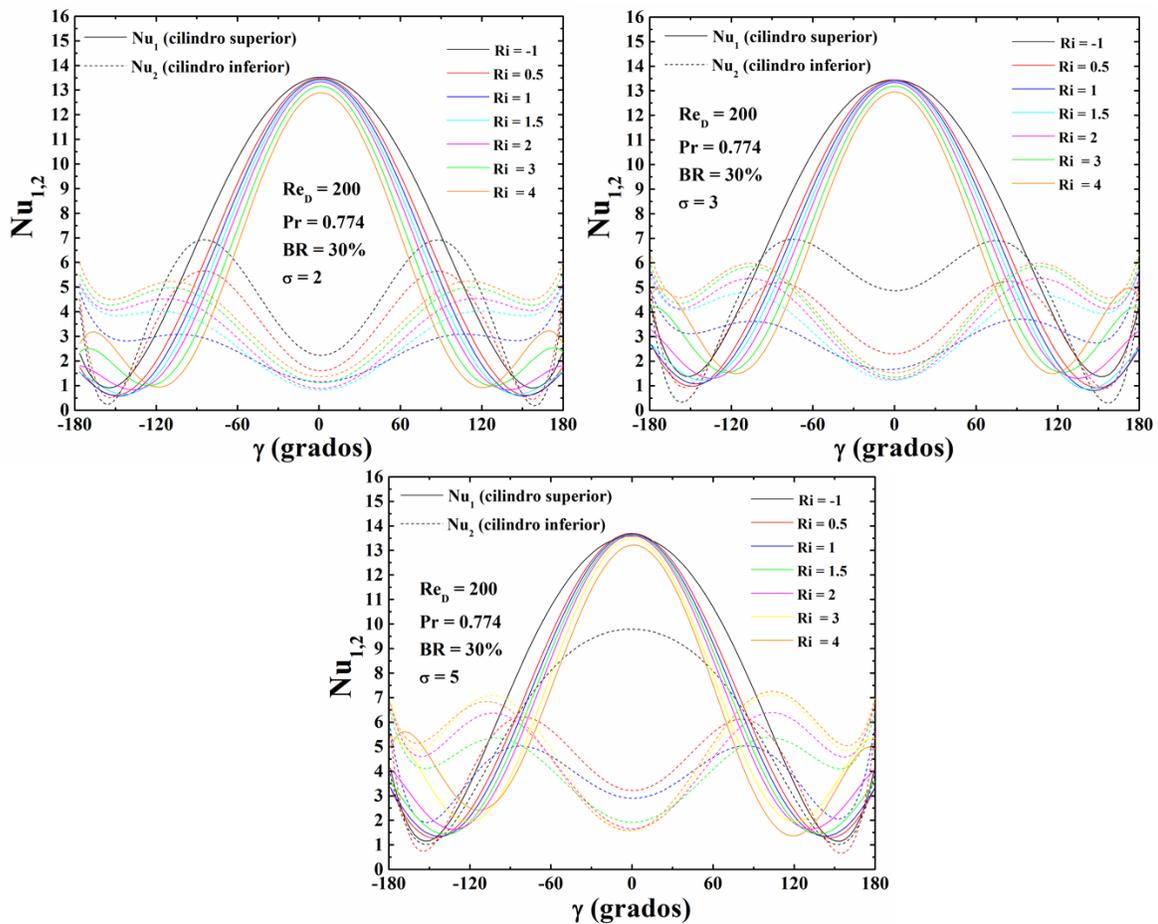


Figura 3.28: Distribución de los números de Nusselt locales sobre la superficie de los cilindros como una función de  $\gamma$  para  $Re_D = 200$ ,  $BR = 30\%$ , diferentes valores del número de Richardson y  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ , respectivamente.

valores relativamente altos del parámetro de flotación, y a causa de la presencia de un fuerte flujo opuesto en el espacio entre cilindros, aparece un puente en las capas térmicas de ambos cilindros, dando como resultado que los efectos de la flotación aumenten. Nótese cómo para  $Ri = 4$ , el número de Nusselt promedio del cilindro inferior es ligeramente mayor que el presentado para flujo asistido ( $Ri = -1$ ). Para  $\sigma = 3$ , ambos cilindros alcanzan altos valores del número de Nusselt promedio debido a la presencia de grandes zonas de recirculación en el espacio entre cilindros. Para  $\sigma = 5$ , aunque se observa un ligero incremento en el valor del número de Nusselt promedio del cilindro superior con respecto a  $\sigma = 2$ , nótese cómo el incremento en el valor del número de Nusselt promedio del cilindro inferior es relativamente alto comparado con el obtenido para  $\sigma = 2$ . Cabe mencionar, que para valores crecien-

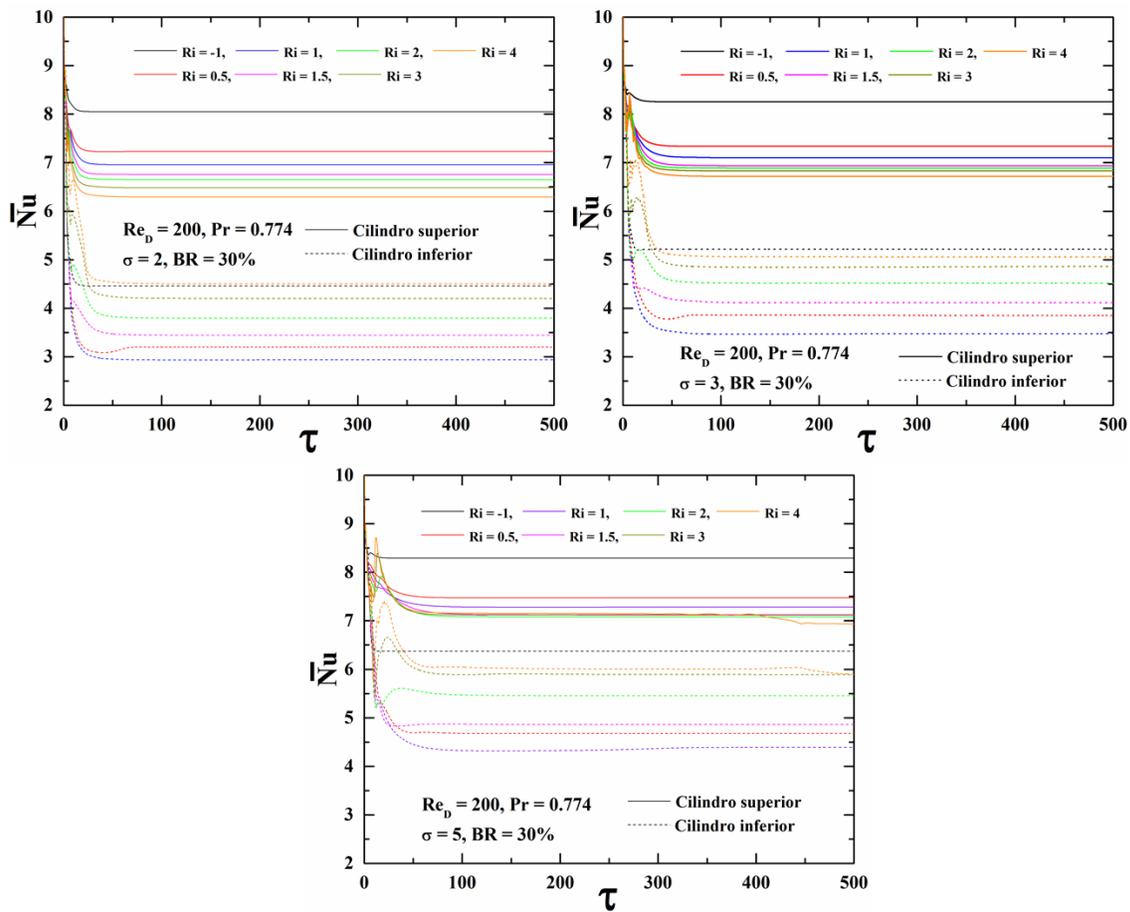


Figura 3.29: Evolución temporal de los números de Nusselt promedio para  $Re_D = 200$ ,  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ ,  $BR = 30\%$  y distintos valores del número de Richardson para el cilindro superior (líneas punteadas) y el cilindro inferior (líneas continuas), respectivamente.

tes del parámetro de flotación, el número de Nusselt promedio del cilindro superior decrece monótonamente. Se observa cómo para valores relativamente pequeños del número de Richardson ( $Ri = 0.5$ ), el número de Nusselt global del cilindro inferior

decrece. Ésto se debe a que la superficie del cilindro inferior es rodeada por la zonas de recirculación que se presentan en el espacio entre cilindros. Sin embargo, en el intervalo  $1.5 \leq Ri \leq 4$ , se presenta un incremento progresivo del número de Nusselt promedio para valores crecientes del parámetro de flotación. Curiosamente, para el valor del número de Richardson de  $Ri = 4$ , el número de Nusselt promedio decrece ligeramente en  $\tau \sim 400$  como consecuencia de una aparente pérdida de simetría en las zonas de recirculación presentes en el espacio entre cilindros. No obstante, la configuración asimétrica rápidamente alcanza un estado estacionario en  $\tau \sim 500$ , manteniendo su configuración hasta un tiempo adimensional de  $\tau = 1000$ .

La Fig. 3.30 muestra un resumen de los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas y de los datos experimentales, en donde se presenta el estado final del flujo para un valor del número de Reynolds fijo ( $Re_D = 200$ ) y diferentes valores del número de Richardson.

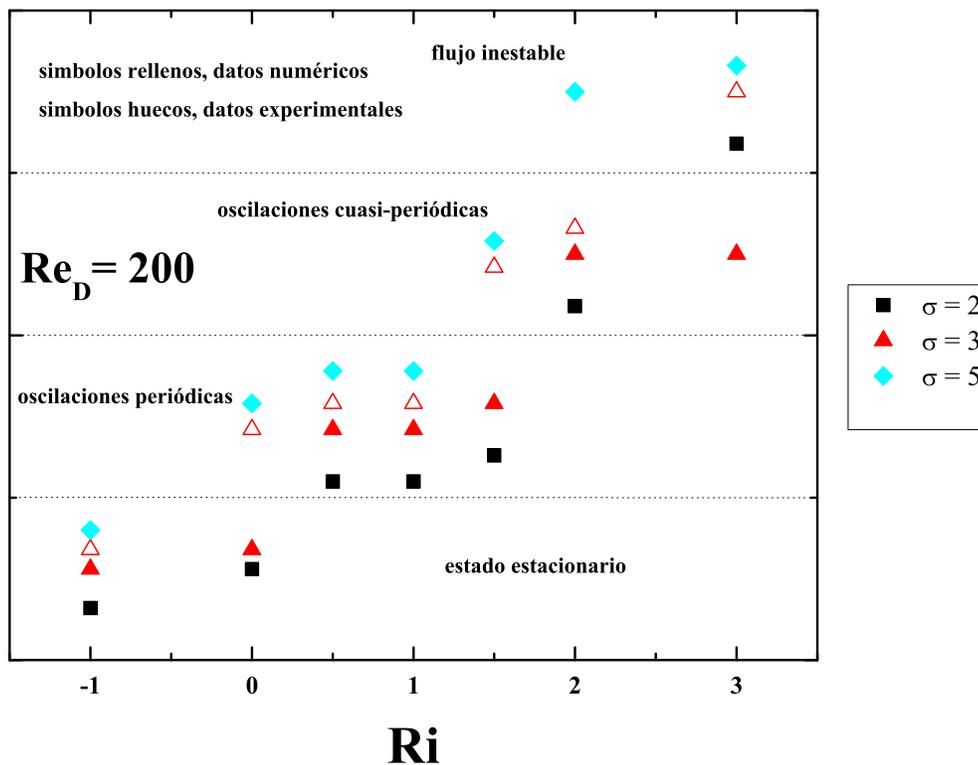


Figura 3.30: Respuesta final del flujo para un valor del número de Reynolds fijo ( $Re_D = 200$ ) y diferentes valores del número de Richardson.

**Parte II**  
**Estudio Experimental**

# Capítulo 4

## Materiales y métodos

### 4.1. Diseño experimental

En la Fig. 4.1 se muestra un diagrama esquemático del diseño experimental empleado en el presente estudio. Se seleccionó un sistema coordenado cartesiano tridimensional con el origen situado en el centro del cilindro superior, de tal forma que los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  se fijan a lo largo de la dirección longitudinal, transversal y en dirección de la envergadura del cilindro. Los cilindros son expuestos a un flujo cruzado uniforme, y los experimentos se llevaron a cabo para un flujo hidrodinámicamente en desarrollo. El agua que es acelerada por la gravedad ingresa por la parte superior de un canal vertical rectangular de ancho  $H = 95.7$  mm, profundidad  $W = 143.5$  mm y 1.82 m de largo. El fluido entra a la sección de pruebas con una velocidad uniforme  $u_0$  a una temperatura  $T_0$ . Las paredes del canal están hechas de acrílico transparente de 9 mm de espesor ( $k \approx 0.189$  W/m K) y están a la misma temperatura que la corriente libre a la entrada del canal. Dos tubos de cobre de diámetro  $D = 28.7$  mm se encuentran colocados horizontalmente y están confinados simétricamente con respecto a las paredes del canal. Ambos cilindros tienen la misma relación de aspecto ( $AR$ , relación entre la longitud y el diámetro de un cilindro) de 5, el radio de bloqueo es de  $BR = 0.3$  y la relación de espaciamiento entre cilindros es de  $\sigma = 3$ . La temperatura en la superficie de ambos cilindros  $T_w$  se mantiene uniforme y constante desde afuera del canal haciendo circular agua hacia dentro de los tubos por medio de un circuito de recirculación externo que está conectado a un baño térmico (Omega Engineering, HCTB-3020) con una resolución de  $\pm 0.1$  K, como se muestra en la Fig. 4.1. Debido a que los cilindros son de cobre ( $k \approx 401$  W/m K) y tienen un espesor de 0.206 mm, la diferencia de temperaturas entre la superficie interior y la superficie exterior de los cilindros es despreciable [61–64]. Para minimizar las pérdidas de calor a través de las paredes del canal, se colocaron aislamientos de poliestireno ( $k \approx 0.033$  W/m K) de 25 mm de espesor sobre todas las paredes del canal, dejando sin aislar solo la zona de visualización y una ranura de 2 mm de espesor que permite el paso de la hoja láser. Durante el experimento, la carga dentro del depósito secundario se mantiene constante empleando un tubo de rebosadero, y dicho tanque es llenado con el fluido almacenado en un tanque principal por medio de una bomba centrífuga. La uniformidad del flujo se logra con correctores de flujo tipo panel de abeja colocados

dentro de una tobera con una relación de contracción de 4:1, la cual se encuentra justo antes de la entrada del canal. Para asegurar que el flujo se desarrolle por completo antes de alcanzar al cilindro superior, éste se coloca 1.12 m aguas abajo de la entrada del canal (lo que equivale a 10 veces el diámetro hidráulico) y a una distancia de 0.703 m desde el centro de éste a la salida del canal. Para evaluar las

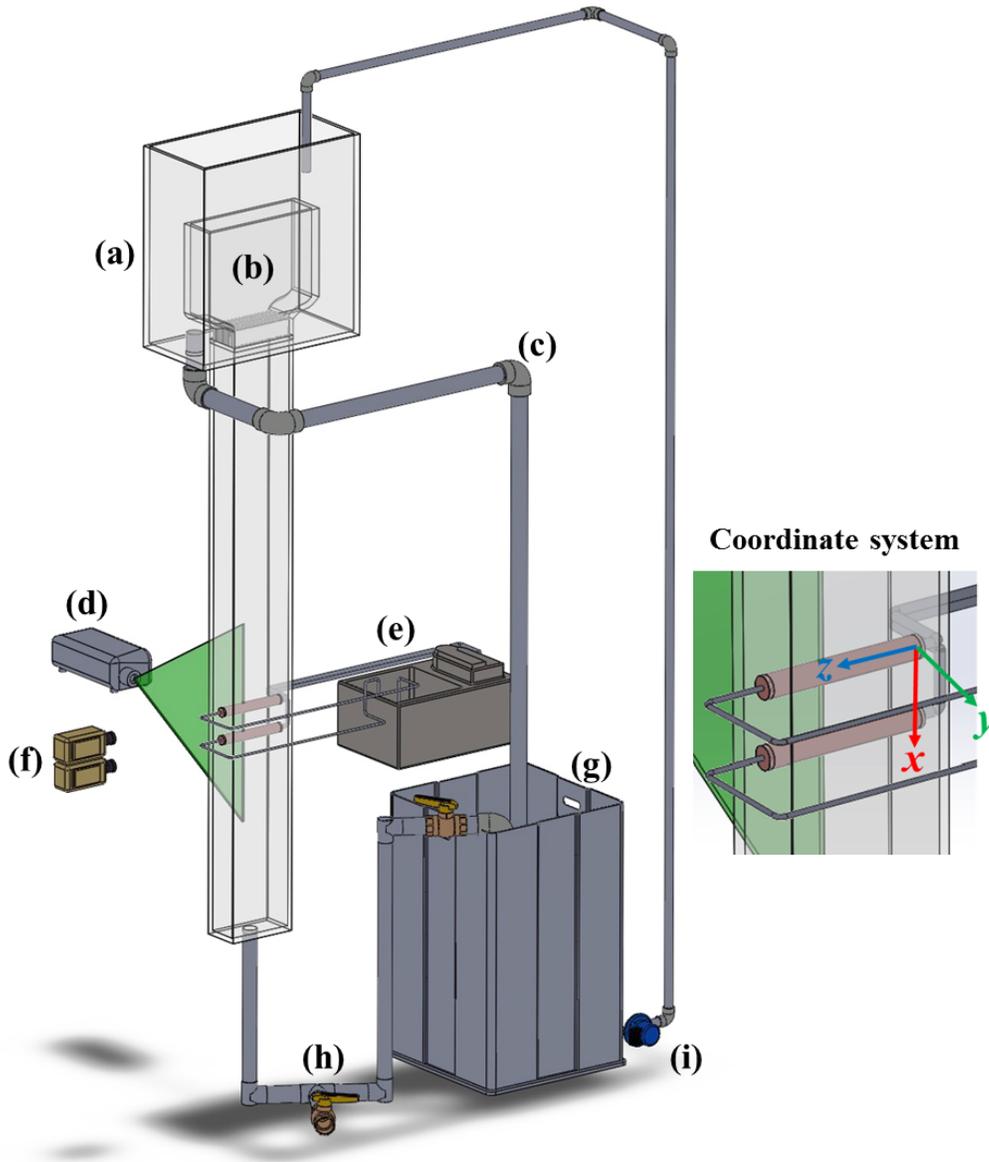


Figura 4.1: Diagrama esquemático del diseño experimental. (a) Depósito secundario. (b) Contracción a la entrada del canal con alineadores de flujo tipo panel de abeja. (c) Tubo de rebozadero. (d) Láser. (e) Baño térmico. (f) Cámaras digitales (CMOS). (g) Tanque de almacenamiento. (h) Válvula ajustable. (i) Bomba centrífuga.

propiedades termofísicas del fluido, la temperatura del agua es medida a la entrada de la sección de prueba, antes y después de cada serie de mediciones por medio de

una sonda termopar de alta precisión (Control Company, 4132 Traceable® Platinum RTD Thermometer) con una resolución de  $\pm 0.01$  K. Las mediciones se llevan a cabo después de que se alcanza el equilibrio térmico entre el agua que abandona la sección de pruebas y el agua almacenada en el tanque de almacenamiento. Esto ocurre cuando las pérdidas de calor en el circuito de recirculación igualan el calor suministrado por los cilindros, lo que ocurre después de aproximadamente 3 h. Dado que se anticipan efectos de histéresis para todas las combinaciones de los parámetros físicos [65–71], para todos los casos, los patrones de flujo se alcanzan por la misma ruta, esto es, comenzando con un flujo en convección forzada ( $Ri = 0$ ) y añadiendo monótonamente flotación asistida/ opuesta al disminuir/incrementar el valor del número de Richardson. Dumouchel *et al.* [61] y Wang *et al.* [72] propusieron el uso de la temperatura efectiva como la temperatura de referencia para determinar las propiedades del fluido. Sin embargo, ya que su uso no ha sido ampliamente aceptado para la determinación de la formación de vórtices generados por un cilindro calentado y que opera en el régimen de convección mixta a contra-flujo [62, 73], todas las propiedades termofísicas del fluido son calculadas basándose la temperatura media del fluido (promedio entre la temperatura a la entrada de canal y la temperatura de los cilindros). El comportamiento del fluido depende de los siguientes parámetros adimensionales independientes: los números de Reynolds, Prandtl y Richardson dados por  $Re = u_0 D / \nu$ ,  $Pr = \nu / \alpha$ , y  $Ri = g\beta(T_w - T_0)D / u_0^2$ , respectivamente (frecuentemente, en vez de emplear el número de Richardson se emplea el número de Grashof,  $Gr = RiRe^2 = g\beta(T_w - T_0)D^3 / \nu^2$ ). Aquí,  $u_0$  es la velocidad de la corriente libre,  $D$  es el diámetro del cilindro,  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $\alpha$  es la difusividad térmica,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica. El número de Reynolds se regula por medio de una válvula ajustable que permite variar el flujo volumétrico. Para un valor fijo del número de Reynolds, el número de Richardson se modifica variando la diferencia de temperatura entre los cilindros y el fluido. Cuando  $T_w \neq T_0$ , la flotación se opone o asiste al flujo forzado, afectando la estructura del flujo y el desprendimiento de vórtices debajo de los cilindros. Estos resultados son reportados y descritos en la siguiente sección.

## 4.2. Adquisición de imágenes

Los campos de velocidad se midieron empleando un sistema PIV Dantec Dynamics, el cual incluye dos cámaras digitales CMOS de 14-bits (Phantom V9.1) con una resolución de  $1632 \times 1200$  píxeles y equipadas con lentes Zeiss de 60 mm. Las cámaras se colocan juntas y alineadas, de tal forma que están dispuestas en una configuración perpendicular al plano de medición. El plano es iluminado con un láser de 10 mJ Nd:YLF (Litron Lasers) con una longitud de onda de 527 nm. El láser se expande en una hoja láser divergente con un espesor de aproximadamente 1 mm por medio de un arreglo óptico. Para reducir los reflejos producidos por el láser, ambos cilindros se pintaron de color negro mate. Se usaron como trazador partículas esféricas de poliamida de  $50 \mu\text{m}$  de diámetro. Se utilizó software de Dantec Dynamics (DynamicStudio version 3.41) para controlar las cámaras y el láser para la

adquisición de datos y el procesamiento de imágenes. Para todos los experimentos, cada cámara adquiere imágenes a una frecuencia de 3 Hz. Las imágenes obtenidas por cada cámara son superpuestas utilizando un algoritmo de unión de imágenes de Dantec Dynamics con un traslape de 2-4 píxeles. Las imágenes unidas de cada

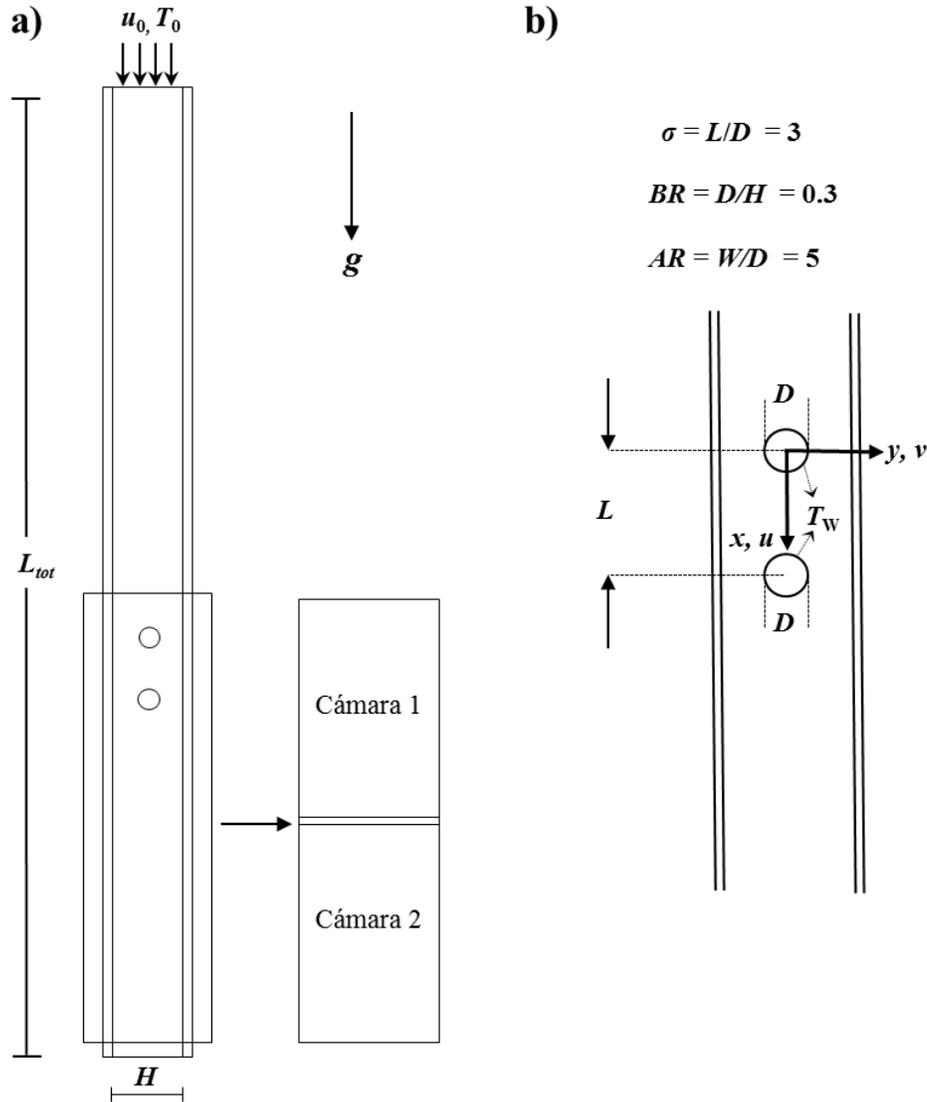


Figura 4.2: Tamaño de las imágenes obtenidas después de superponer las imágenes de ambas cámaras. Las imágenes presentadas en la siguiente sección muestran una porción de la sección de prueba que corresponde a la región delimitada por el recuadro negro.

cámara capturan todo el ancho de canal, 1.5 diámetros aguas arriba del cilindro superior y 17 diámetros aguas abajo del cilindro inferior. La ubicación de la zona de medición y el origen del sistema de coordenadas se representan en las Figs. 4.2a and 4.2b, respectivamente. Se adquieren tres series de 1000 imágenes para cada valor del número de Richardson, y las distribuciones de velocidad promedio en el dominio del

flujo se obtienen al promediar el número total de imágenes adquiridas de cada serie.

### 4.3. Procesamiento de datos

El campo de vectores se obtiene a partir de las imágenes adquiridas empleando un algoritmo de Dantec Dynamics de correlación adaptiva con cinco pasos de refinamiento junto con un algoritmo de validación local (tolerancia de 0.12). Para cada imagen superpuesta se emplean ventanas de interrogación de  $32 \times 16$  píxeles con un traslape vertical y horizontal del 50%. Los vectores que no cumplen con el criterio de validación (menos del 1%) son eliminados y los campos de velocidad son suavizados empleando un filtro local de  $3 \times 3$  píxeles, dando como resultado una imagen de alta resolución espacial que cuenta con un total de 7956 ( $153 \times 52$ ) vectores de velocidad. A los vectores se les aplica un algoritmo de validación de picos, en donde la altura mínima del pico 1 relativa al pico 2 es de 1.15. Los campos de vorticidad perpendiculares al plano de medición se calculan a partir de los campos de velocidad adquiridos,  $\Omega = \partial V / \partial X - \partial U / \partial Y$ . Aquí,  $\Omega$  es la vorticidad adimensional y  $U$  y  $V$  son las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal asociadas a las coordenadas  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Todas las componentes son escaladas con la velocidad de entrada  $u_0$ , y la vorticidad se escala con el tiempo de residencia,  $D/u_0$ . Los campos de velocidad y vorticidad calculados son exportados procesados y presentados empleando Tecplot 360.

### 4.4. Análisis de incertidumbre

Se realizó un análisis de incertidumbre de los parámetros experimentales basado en el método presentado por Kline and McClintock [74]. La incertidumbre de la variable dependiente  $R$  como función de las incertidumbres de las variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , está dada por la relación

$$R = R(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad (4.1)$$

La incertidumbre total se obtiene de la siguiente ecuación

$$\delta R = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i \right)^2}. \quad (4.2)$$

donde  $\delta x_i$  son las incertidumbres en las variables medidas  $x_i$ . Nuestro análisis indica que las incertidumbres experimentales empleando un nivel de confiabilidad de 95% para los números de Reynolds, Grashof y Richardson son de 1.4%, 3.7% y 3.3%, respectivamente.

# Capítulo 5

## Resultados y discusión

Los resultados experimentales presentados en éste trabajo corresponden para todos los casos a  $Pr = 7$ ,  $BR = 0.3$ ,  $AR = 5$  y  $\sigma = 3$ . En este capítulo se presentan las características de flujo promedio e instantáneo para  $Re = 100$  y  $200$  y para diferentes valores del parámetro de flotación.

### 5.1. Flujo asistido ( $Ri = -1$ )

En ésta sección se presenta la respuesta característica para flujo asistido con  $Ri = -1$ . La Fig. 5.1 muestra para  $Re = 100$  y  $200$  los valores del flujo promedio adimensional en estado estacionario para  $Ri = -1$  en el plano adimensional  $X$ - $Y$  que se encuentra ubicado a la mitad de la envergadura de los cilindros. Por claridad, solo se presenta una porción de la imagen superpuesta. Los campos de velocidad y vorticidad se muestran simultáneamente, y las escalas de color ubicadas debajo de cada imagen muestran el valor de cada variable. Las imágenes presentan (de izquierda a derecha) las líneas de corriente, los campos de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal con vectores superpuestos y los contornos de vorticidad adimensional. Para ambos valores de  $Re$ , debido a que la estela de Kármán se suprime, se alcanza una solución simétrica y estacionaria y la estela del cilindro superior es menor que la del cilindro inferior. Nótese como debido a que el flujo frío que desciende es estrecho, la componente de la velocidad longitudinal aumenta en la parte central del canal ( $Y = 0$ ) en dirección aguas abajo. Para  $Re = 100$ , las separación de flujo se retrasa y no hay reversión de flujo. Para  $Re = 200$ , aunque el flujo no se separa debajo del cilindro inferior, la presencia de una pequeña zona de recirculación debajo del cilindro superior es evidente.

### 5.2. Flujo isotérmico ( $Ri = 0$ )

La Fig. 5.2 muestra el flujo promedio adimensional para  $Ri = 0$  (flujo isotérmico). En la ausencia de la flotación y para ambos valores de  $Re$ , se presentan zonas de recirculación simétricas debajo de cada cilindro, la zona de recirculación del cilindro

superior ocupa todo el espacio entre cilindros y la estela del cilindro inferior es claramente más corta y estrecha. Los patrones de las líneas de corriente ilustran cómo el

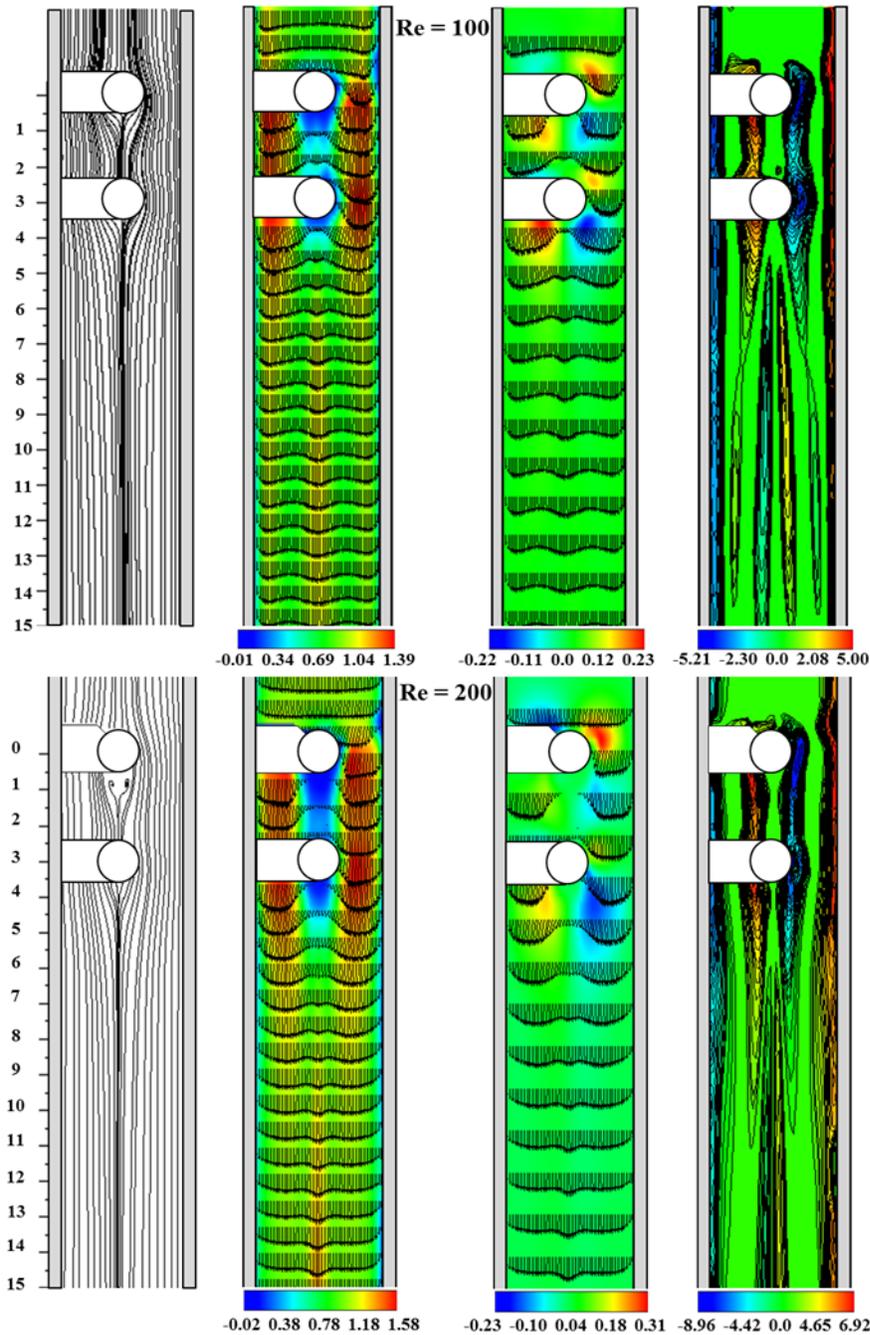


Figura 5.1: Valores adimensionales de flujo en estado estacionario para  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$ ,  $Ri = -1$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de las componentes de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad, respectivamente.

ancho de la zona de recirculación es claramente mayor para  $Re = 100$ , lo que explica

por qué la velocidad máxima y los valores pico de la vorticidad son mayores para un valor de número de Reynolds menor. En esta figura la cuarta imagen muestra cómo las capas con esfuerzos de corte que se desprenden del cilindro superior se reinsertan en la parte superior de la superficie del cilindro inferior. Así mismo debido al efecto

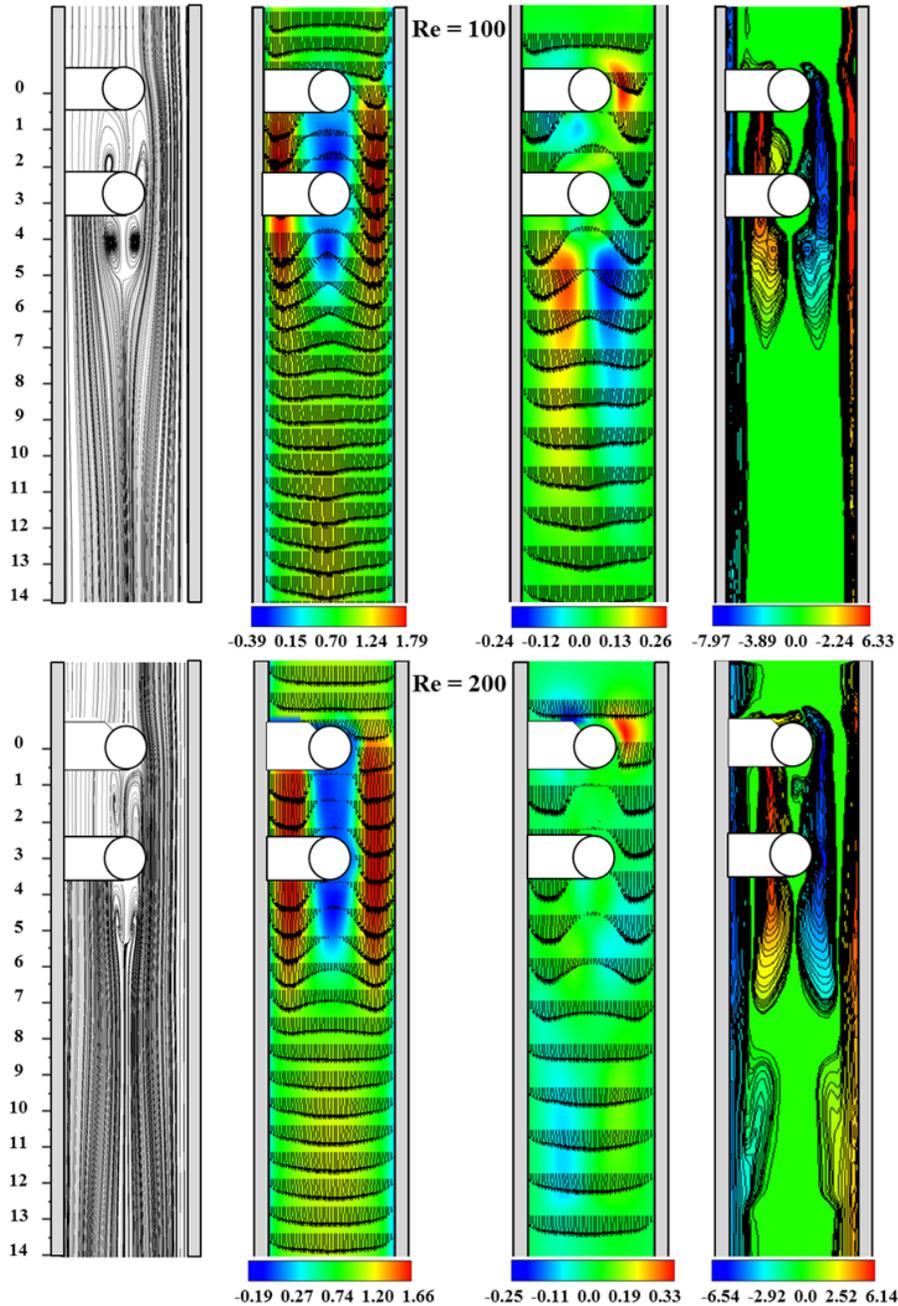


Figura 5.2: Flujo adimensional promedio para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de las componentes de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad, respectivamente.

de bloqueo, tiene lugar una interacción relativamente pequeña entre la vorticidad generada por el cilindro superior y las paredes del canal. La Fig. 5.3 presenta para  $Re = 100$  y  $200$  el proceso de desprendimiento de vórtices para un arreglo de cilindros en ausencia de una fuente de calor ( $Ri = 0$ ), al mostrar los patrones instantáneos de la componente de velocidad transversal adimensional con líneas de corriente superpuestas y los campos de vorticidad para el mismo instante. Para ambos valores de  $Re$ , se desprenden vórtices del cilindro superior y la estela de vórtices de Kármán se presenta debajo del cilindro inferior. En éstas figuras, la etiquetas **A** y **B** resaltan cómo en  $X \approx 9$ , la vorticidad generada por las paredes del canal se aparea aguas abajo con los vórtices del mismo signo. Las imágenes superiores en la Fig. 5.4 mues-

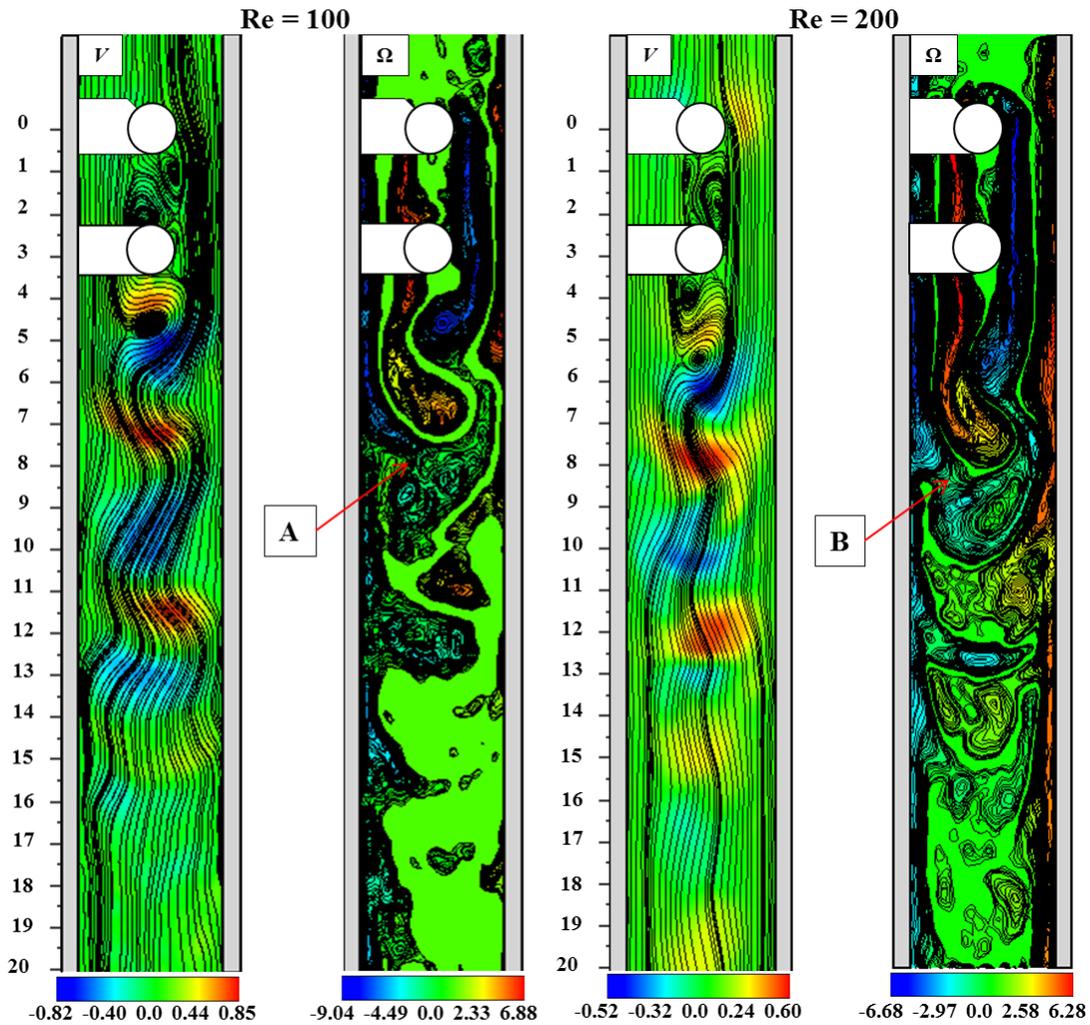


Figura 5.3: Patrones adimensionales instantáneos de la componente de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para los cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ) con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$ , y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente.

tran para  $Ri = 0$  las variaciones temporales adimensionales de la componente de velocidad transversal en el plano de simetría del canal como una función de tiempo

adimensional  $tu_0/D$ . Para  $Re = 100$  y  $200$ , los datos se obtuvieron en las posiciones  $(X,Y) = (5.5,0)$  y  $(X,Y) = (7.5,0)$ , respectivamente. Claramente, las fluctuaciones de la velocidad son casi monocromáticas y la amplitud relativa de las oscilaciones es mayor para  $Re = 100$ . De estos datos se obtuvo un análisis espectral de las os-

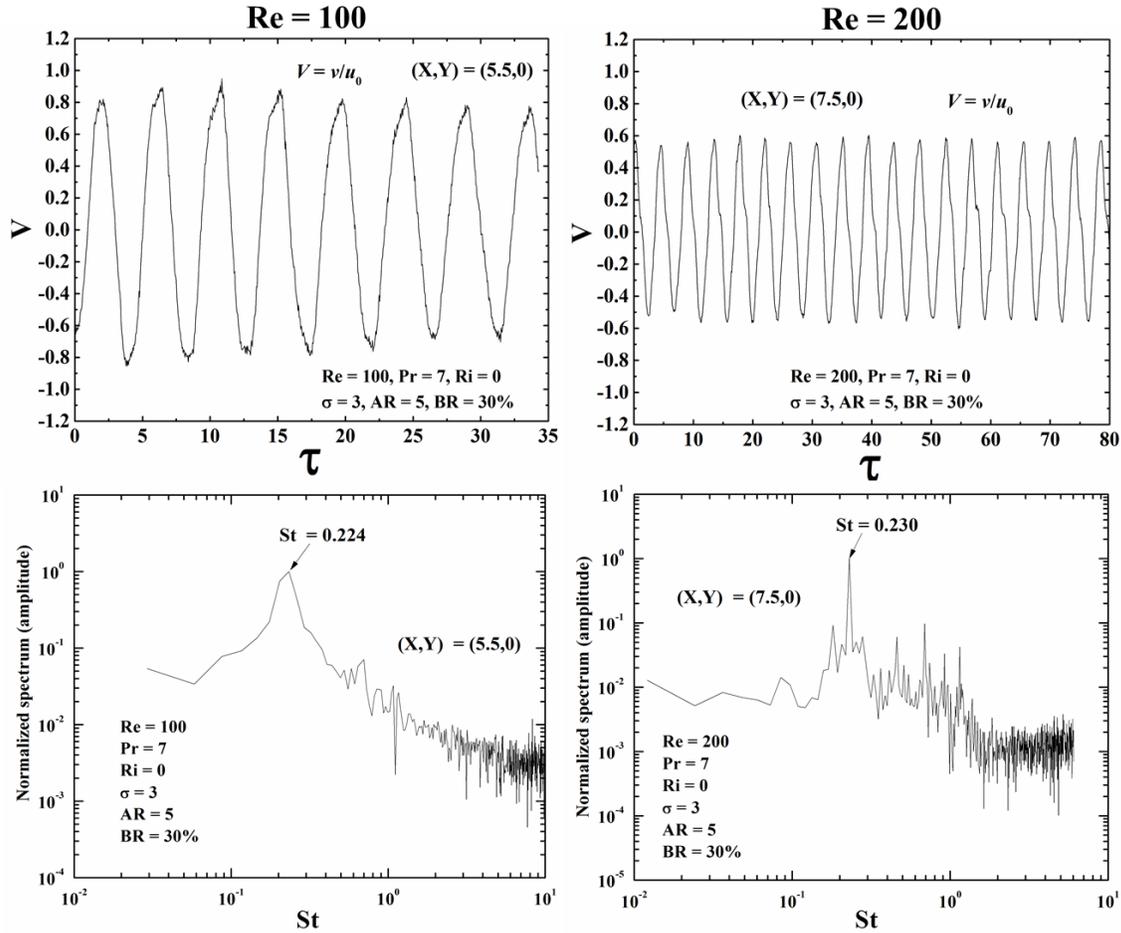


Figura 5.4:  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 0$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron en el plano de simetría del canal para diferentes posiciones a lo largo de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal. Las frecuencias adimensionales del desprendimiento de vórtices se ejemplifican por los picos más altos.

cilaciones de la componente de velocidad transversal en las posiciones mencionadas anteriormente. La transformada de Fourier para la obtención del número de Strouhal se obtiene a partir de las 1000 imágenes adquiridas. Las imágenes inferiores de la Fig. 5.4 muestran la amplitud normalizada de las oscilaciones de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal para los cilindros sin calentar para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Claramente, hay un pico en  $St = 0.22358$  y  $St = 0.23016$  (periodo de tiempo cercano a 4.47 y 4.34 veces el tiempo

de residencia), respectivamente. La presencia de estos picos indica que para el caso de cilindros sin calentar, el desprendimiento de vórtices debajo del cilindro inferior es periódico y está dominado por una frecuencia fundamental única.

### 5.3. Flujo opuesto ( $1 \leq Ri \leq 4$ )

En ésta sección se presenta la respuesta característica para flujo opuesto para valores crecientes del número de Richardson. La Fig. 5.5 muestra los valores del flujo adimensional promedio para  $Ri = 1$  y  $Re = 100$  y  $Re = 200$ , respectivamente. Para  $Re = 100$ , el punto de separación en la superficie del cilindro superior se desplaza aguas arriba, la zona de recirculación que ocupa la totalidad del espacio entre cilindros se vuelve considerablemente más ancha en comparación con el caso isotérmico, y la zona de recirculación debajo del cilindro inferior ahora es más grande que la zona de recirculación que se encuentra entre ambos cilindros. Por tal motivo, el efecto del bloqueo aumenta y se alcanza una velocidad máxima de  $U = 2.67$  localizada entre los cilindros y las paredes del canal, mientras que se observa una velocidad mínima aguas abajo del cilindro inferior de  $U = -0.80$  en  $X \approx 4.75$ . La tercera imagen muestra cómo la intensidad de la vorticidad incrementa y la interacción entre las capas de esfuerzos de corte generadas en el cilindro superior y en las paredes aumenta envolviendo completamente al cilindro inferior. Para  $Re = 200$ , las zonas de recirculación de ambos cilindros también aumentan su ancho y su intensidad. Estas imágenes exemplifican cómo debido al hecho de que el número de Richardson permanece fijo, conforme incrementa el número de Reynolds de  $Re = 100$  a  $200$ , el número de Grashof también incrementa. Como resultado, tiene lugar un aumento en la reversión del flujo y la zona de recirculación que se encuentra debajo del cilindro inferior se vuelve más corta. Nótese como la interacción entre la vorticidad generada por el cilindro superior y por las paredes es ligeramente menor para este valor más alto del número de Reynolds. La Fig. 5.6 presenta para  $Re = 100$  y  $200$  los patrones de flujo instantáneo para  $Ri = 1$ , mostrando los contornos de la componente de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y los contornos de vorticidad en el mismo instante de tiempo. Para ambos valores del  $Re$ , el flujo se ve afectado por la fuerza de flotación, la estela debajo del cilindro inferior es más corta, y el desprendimiento de vórtices que es periódico y alternado se asemeja a la estela de vórtices de Kármán. La imágenes en la parte superior de la Fig. 5.7 muestran para  $Re = 100$  y  $200$  y  $Ri = 1$  las variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional, y las imágenes de la parte inferior muestran las correspondientes densidades espectrales. En esta figura, los datos extraídos para  $Re = 100$  y  $200$  se obtuvieron de las posiciones  $(X,Y) = (6.5,0)$  y  $(X,Y) = (7.5,0)$ , respectivamente. Las imágenes de la parte superior muestran cómo para ambos valores de  $Re$ , aunque la presencia de una periodicidad establecida es evidente, las trazas temporales de las señales de velocidad presentan defectos que aparece debido a la superposición de la fuerza de flotación opuesta. Las imágenes inferiores ilustran cómo la distribución espectral de la señal de la componente de velocidad transversal para  $Re = 100$  y  $200$

se caracteriza por la presencia de dos picos en  $St = 0.2665$  y  $St = 0.21804$  (periodo de tiempo cercano a 3.75 y 4.59 veces el tiempo de residencia), respectivamente. Éstos picos indican que para este valor de  $Ri$ , el desprendimiento de vórtices es periódico en el tiempo y aún permanece dominado por frecuencia fundamental única.

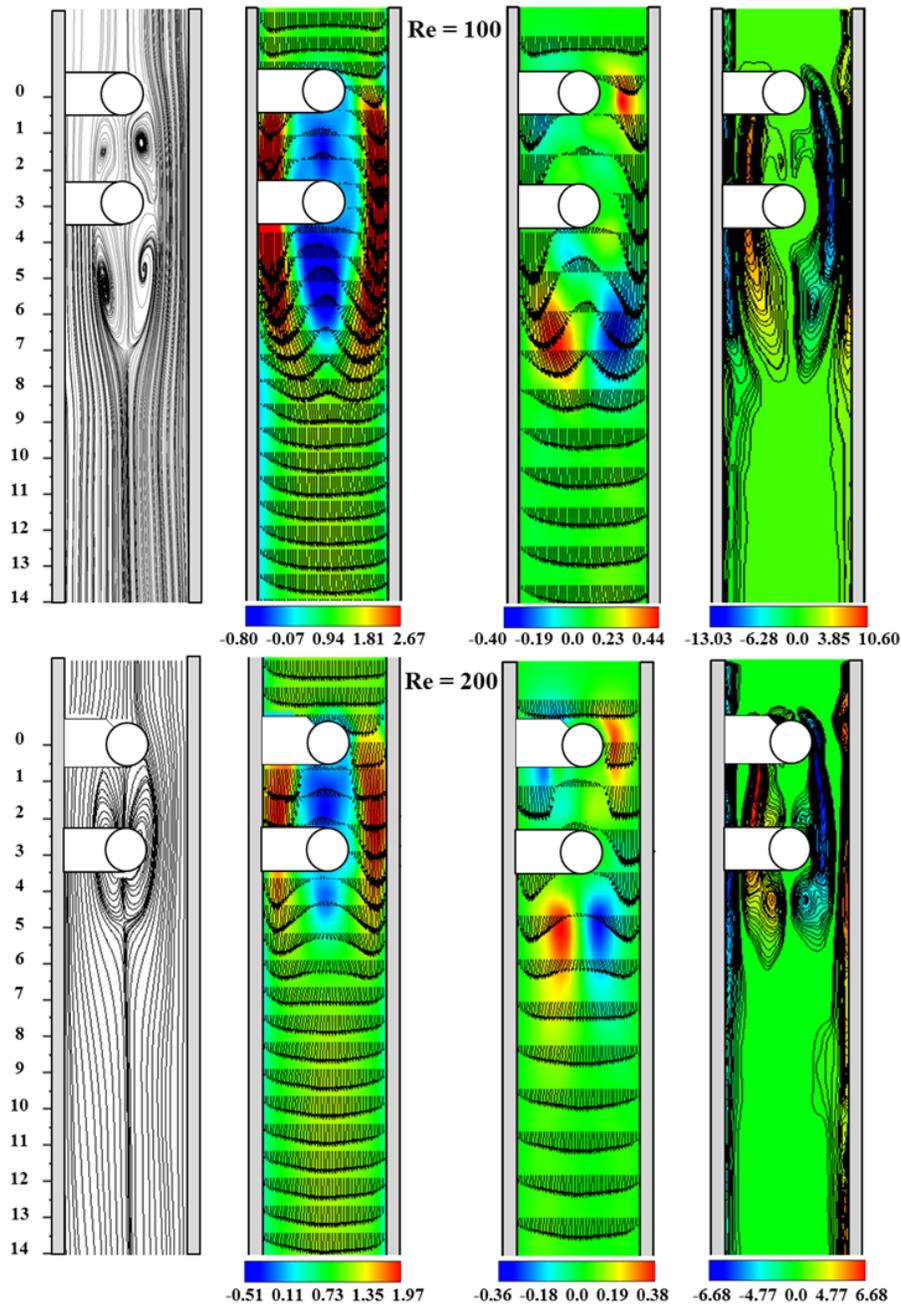


Figura 5.5: Valores de flujo promedio adimensional con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 1$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, campos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y contornos de vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

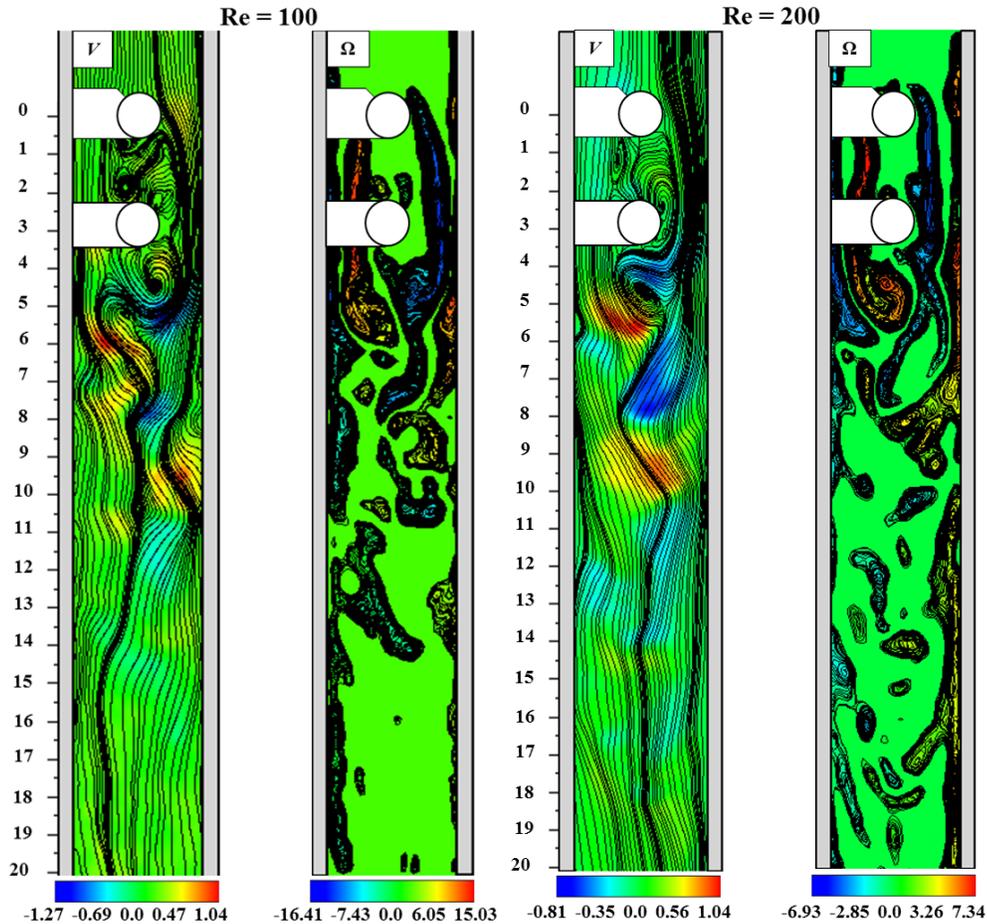


Figura 5.6: Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para  $Ri = 1$ , mostrando las estructuras vorticales que se desprenden para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente.

La Fig. 5.8 muestra los valores del flujo adimensional promedio para  $Ri = 2$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Para  $Re = 100$ , se presenta un aumento en la reversión de flujo, el punto de separación se desplaza aguas arriba sobre la superficie del cilindro inferior, las zonas de recirculación de ambos cilindros presentan un aumento de espesor y el máximo/mínimo valor del campo de vorticidad promedio también incrementa. Para  $Re = 200$ , tiene lugar un incremento en el ancho de las zonas de recirculación de cada cilindro, el cilindro inferior está completamente rodeado por flujo ascendente, la longitud de la zona de recirculación de éste incrementa y los valores de la vorticidad pico también aumentan. Es interesante que esta figura muestra cómo debido al hecho de que el ancho de la estela promedio es mayor para  $Re = 100$  que para  $Re = 200$ , se registran valores pico de velocidad y vorticidad más altos para el  $Re$  más bajo. La Fig. 5.9 muestra los patrones instantáneos de flujo para diferentes instantes de tiempo para  $Ri = 2$  y  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Las líneas de corriente ilustran cómo para  $Re = 100$ , tienen lugar diferencias signifi-

ficativas en la dinámica de la estela. La imagen superior de la Fig. 5.9a) muestra a

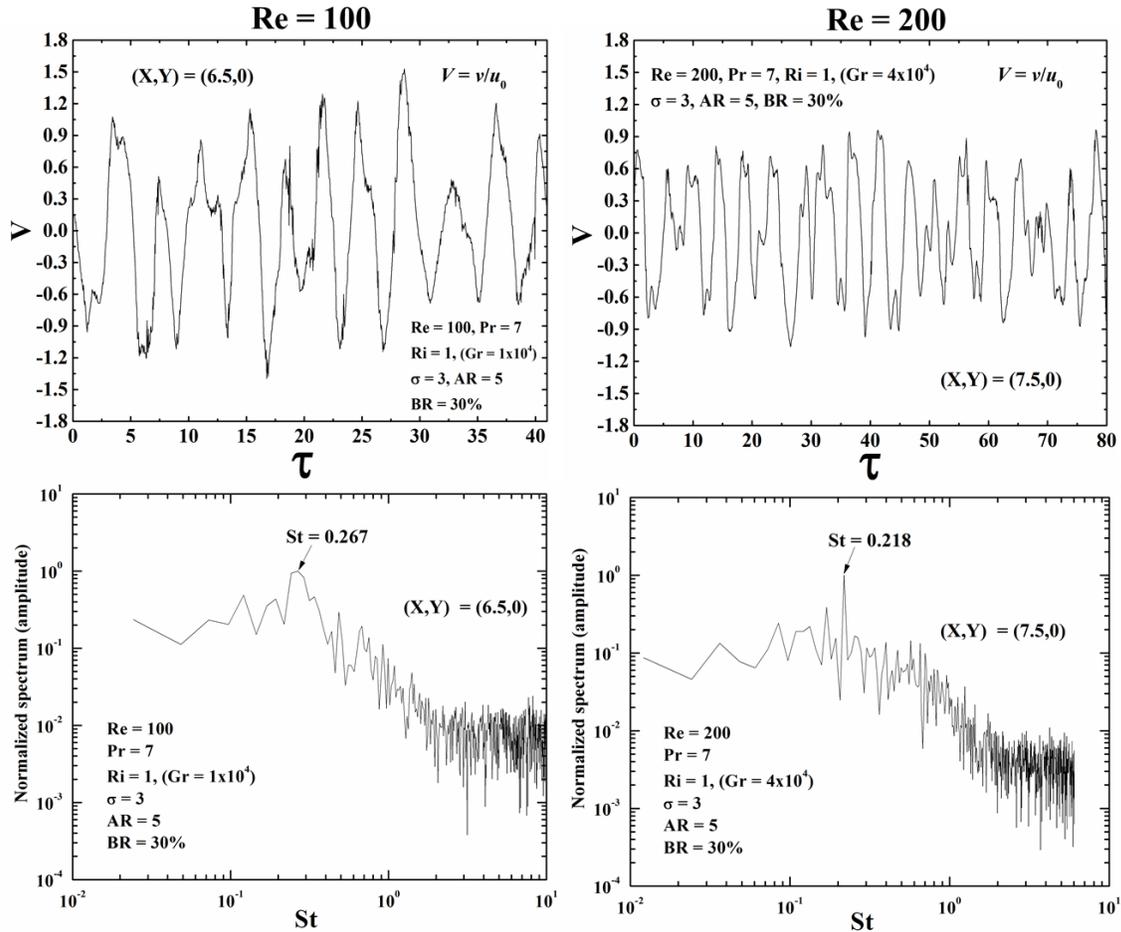


Figura 5.7:  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 1$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensional de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron a lo largo del eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal. Las frecuencias de desprendimiento adimensionales se muestran en los picos más grandes.

los vórtices que se desprenden desplazándose aguas abajo. Aquí, debido a la intensa flotación opuesta, su velocidad se reduce, éstos son atrapados por los vórtices recién formados, y se produce una estructura vortical de gran tamaño que fluye aguas abajo a baja velocidad. Este proceso se muestra en la Fig. 5.9b), donde las líneas de corriente instantáneas muestran un patrón de la estela con tres burbujas de recirculación relativamente grandes que interactúan al mismo tiempo antes de unirse, para convertirse en una estructura vortical de mayor tamaño. Para  $Re = 200$ , el patrón de las líneas de corriente en la parte inferior de la Fig. 5.9a) ilustra cómo el patrón de la estela del cilindro inferior presenta dos vórtices que se desprenden de forma alternada. Sin embargo, en la Fig. 5.9b), las líneas de corriente muestran cómo en

vez de un desprendimiento alternado de vórtices, debido a la inestabilidad que se origina en la estela, el patrón de las líneas de corriente presenta dos vórtices debajo del cilindro inferior que se desprenden al mismo tiempo. La Fig. 5.10 presenta para

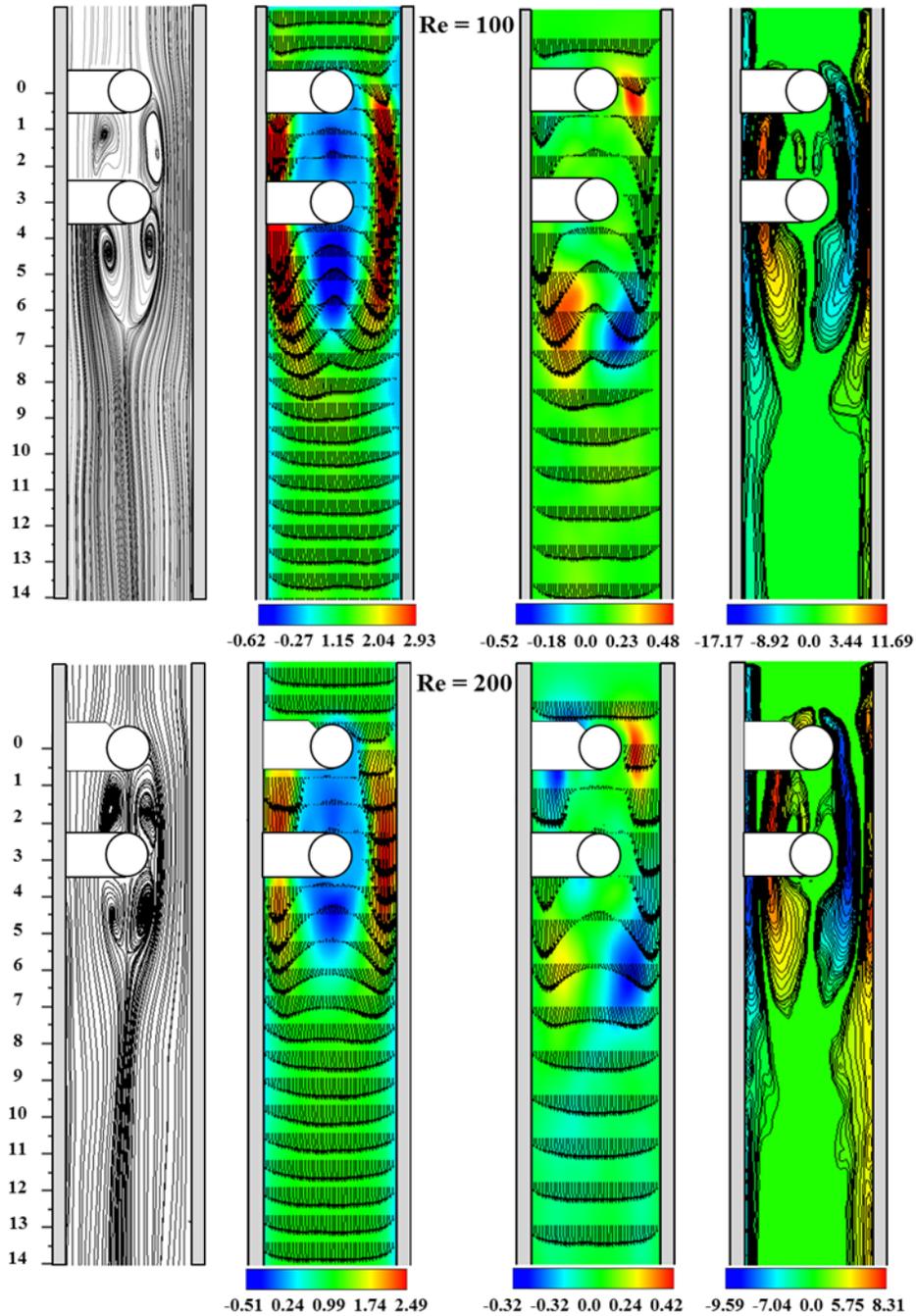


Figura 5.8: Valores del flujo adimensional promedio con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 2$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, contornos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

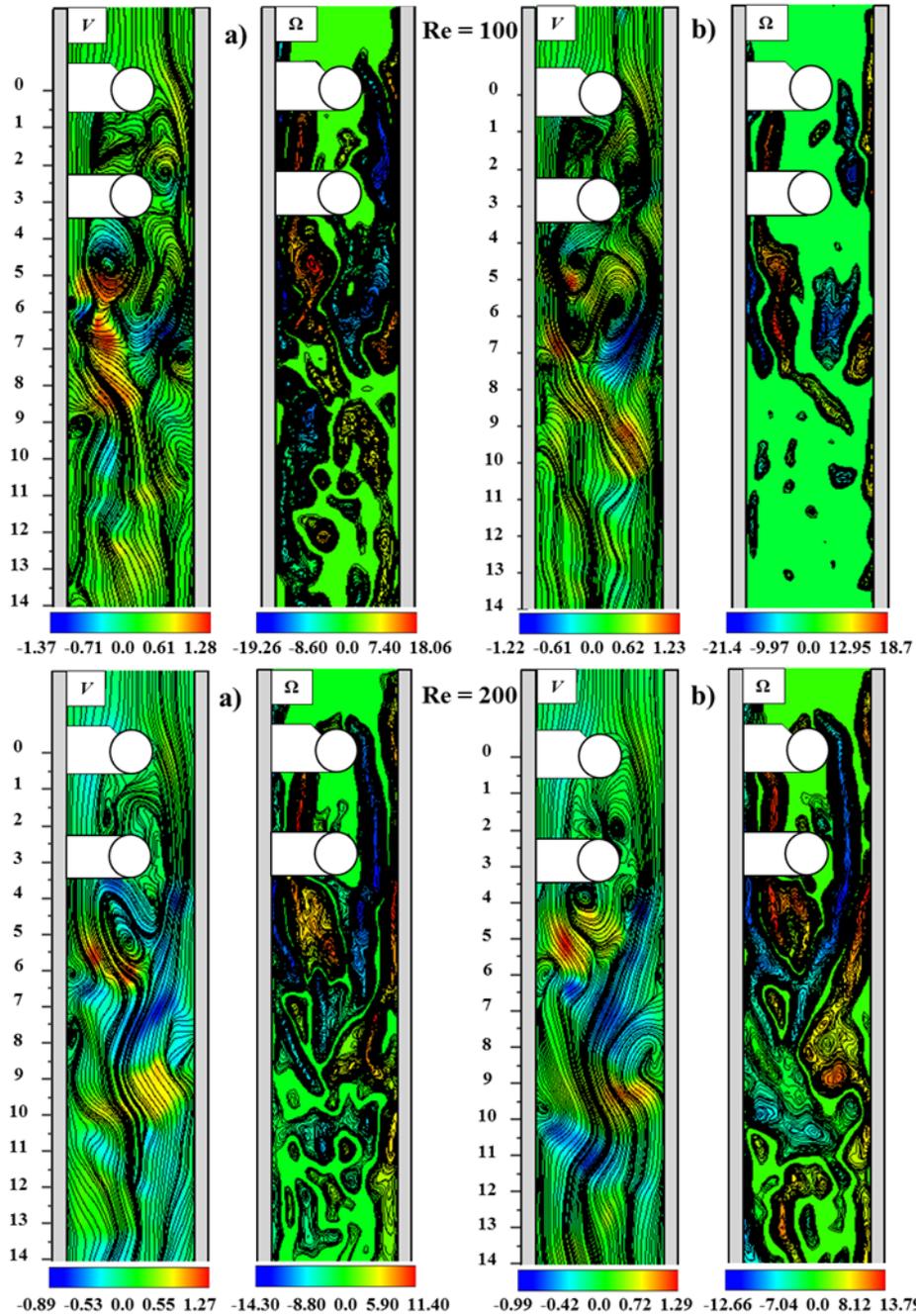


Figura 5.9: Patrones instantáneos de las componentes adimensionales de velocidad transversal con líneas de corriente superpuestas y contornos de vorticidad para  $Ri = 2$ , mostrando las estructuras vorticales que se desprenden para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente.

$Ri = 2$  las variaciones temporales adimensionales de la componente de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional y las densidades espectrales correspondientes. En esta figura, los datos mostrados para  $Re = 100$  y  $200$  se

obtuvieron en las posiciones  $(X,Y) = (8.5,0)$  y  $(X,Y) = (9.5,0)$ , respectivamente. Para  $Re = 100$ , el desarrollo temporal ilustra cómo el patrón de desprendimiento de vórtices se caracteriza por la presencia de defectos en la señal periódica. La imagen

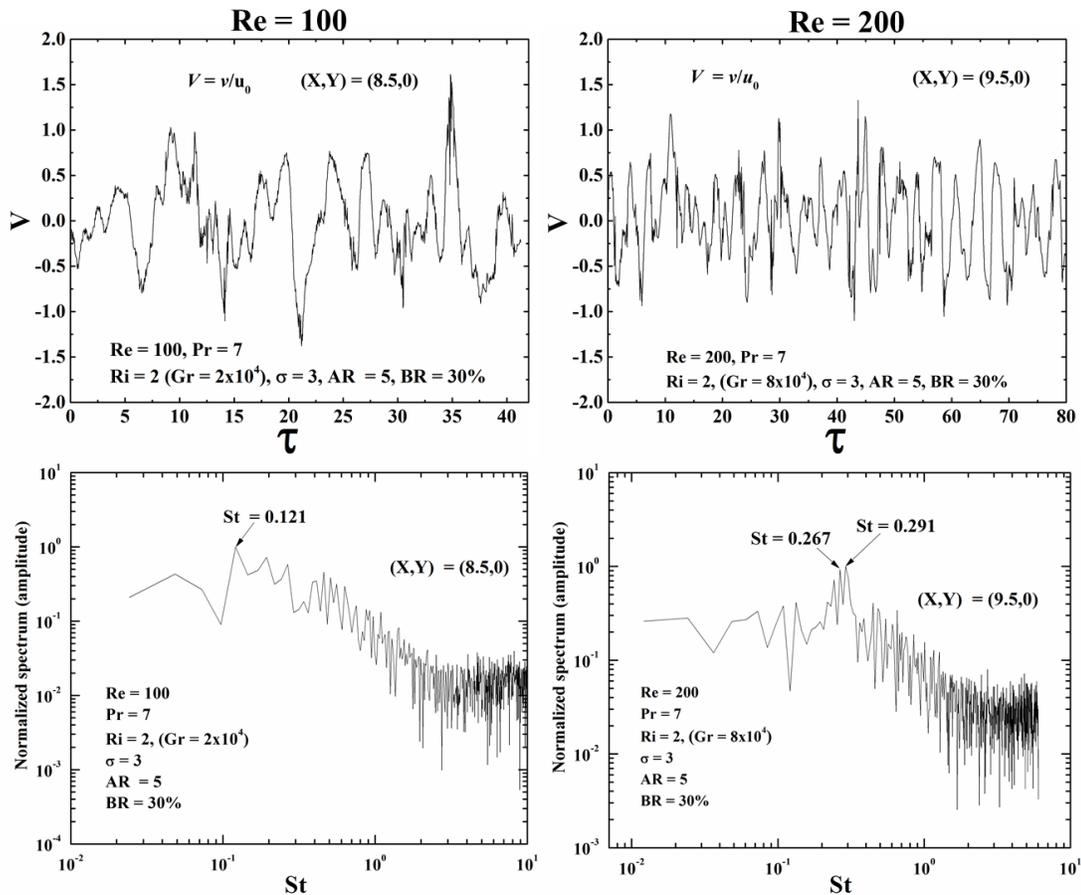


Figura 5.10:  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 2$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. Imágenes superiores: variaciones temporales de la componente adimensionales de velocidad transversal como una función del tiempo adimensional. Los datos se obtuvieron a lo largo del eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal.

inferior izquierda muestra el espectro de la señal correspondiente a la componente de velocidad transversal para  $Re = 100$ . El pico en  $St = 0.12114$  (periodo de tiempo cercano a 8.25 veces el tiempo de residencia) indica que el desprendimiento de vórtices aún mantiene una periodicidad bien establecida de frecuencia relativamente baja. La imagen superior derecha muestra cómo para  $Re = 200$ , la presencia de defectos en las trazas de velocidad es evidente. La imagen inferior derecha ilustra cómo el espectro de la señal de la componente de velocidad transversal se caracteriza por la presencia de dos picos en  $St = 0.2665$  y  $St = 0.29072$  (periodo de tiempo cercano a 3.75 y 3.44 veces el tiempo de residencia), respectivamente. Estos picos indican que para este valor de  $Ri$  y a causa de la reversión de flujo que se desplaza

aguas arriba, el patrón de desprendimiento de vórtices presenta un comportamiento cuasi-periódico de frecuencia relativamente alta. La Fig. 5.11 muestra los valores del flujo promedio adimensional para ambos valores de  $Re$  y  $Ri = 3$ . Esta figura ilustra

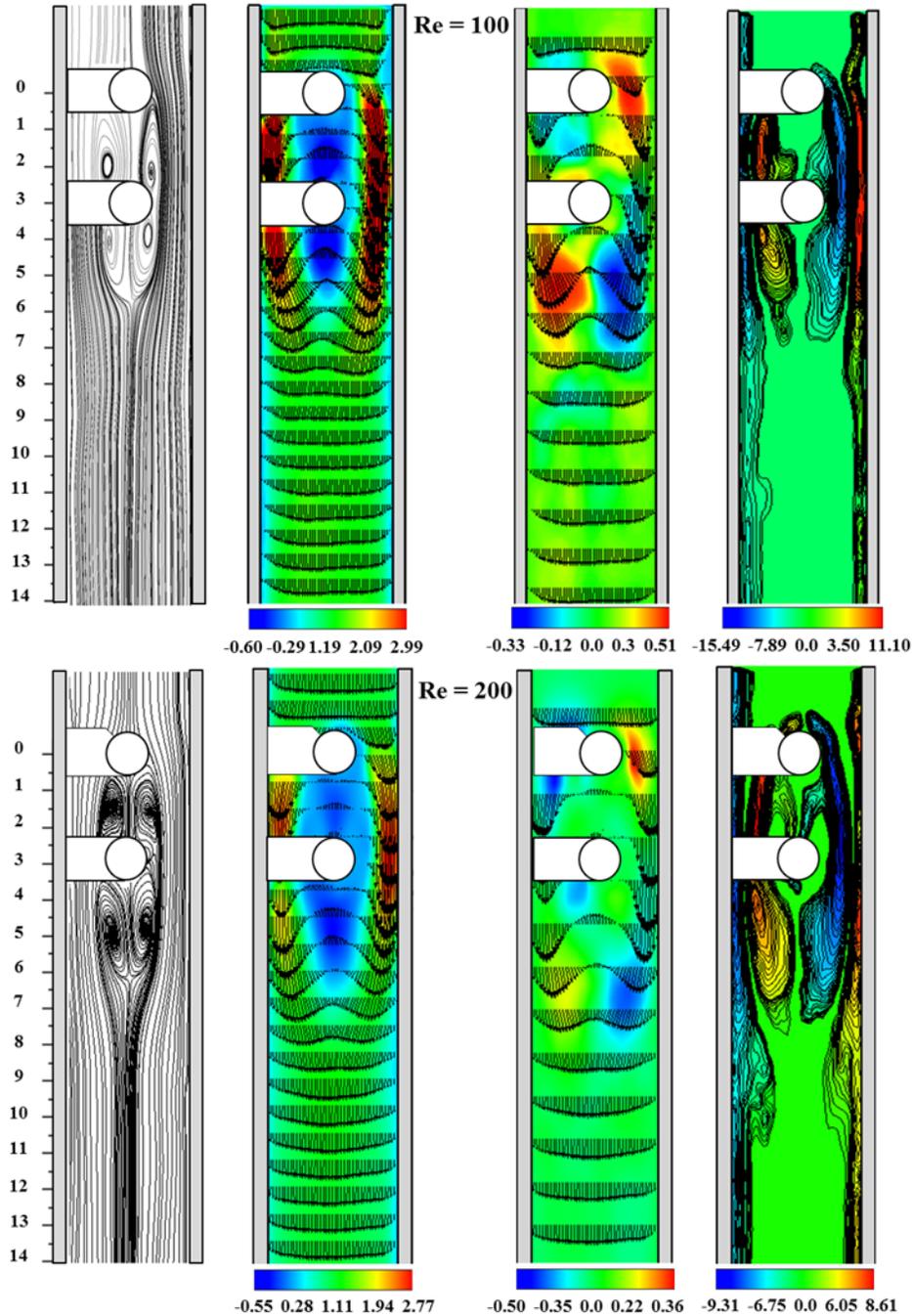


Figura 5.11: Valores del flujo adimensional promedio con  $BR = 30\%$ ,  $\sigma = 3$  y  $Ri = 3$  para  $Re = 100$  y  $200$ , respectivamente. De izquierda a derecha: líneas de corriente, contornos de velocidad  $U$  y  $V$  con vectores superpuestos y vorticidad  $\Omega$ , respectivamente.

cómo el punto de separación en la superficie del cilindro superior se desplaza aguas arriba debido a la intensa fuerza de flotación. Lo anterior sucede a causa del flujo que se encuentra en el espacio entre cilindros y que asciende por efecto de la flotación adversa. Para  $Re = 100$ , conforme incrementa el valor del número de Richardson, el espesor y la longitud de la zona de recirculación del cilindro inferior decrecen. Sin embargo, para  $Re = 200$  ocurre exactamente lo opuesto y el tamaño de la estela del cilindro inferior aumenta cuando se incrementa el valor del parámetro de flotación. La Fig. 5.12 muestra para  $Ri = 3$  y ambos valores de  $Re$  las variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional. Las imágenes de la parte inferior muestran las

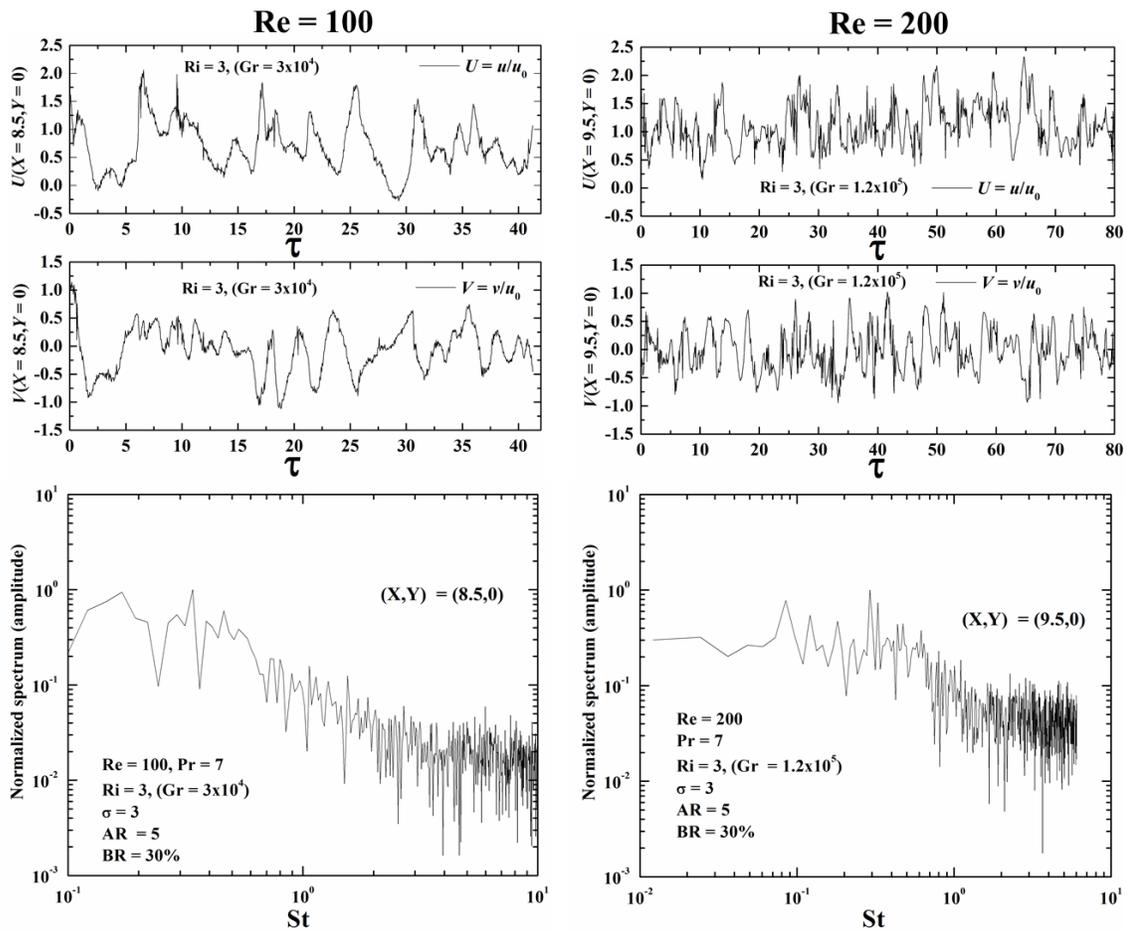


Figura 5.12: Imágenes izquierdas:  $Re = 100$ . Imágenes derechas:  $Re = 200$ . Imágenes superiores: Variaciones temporales de las componentes adimensionales de velocidad longitudinal y transversal como una función del tiempo adimensional para  $Ri = 3$ . Los datos se obtuvieron a lo largo de eje de simetría en diferentes posiciones de  $X$ . Imágenes inferiores: Espectro normalizado de la componente de velocidad transversal como una función del número de Strouhal.

densidades espectrales correspondientes. Para  $Re = 100$  y  $200$ , los datos se obtuvieron de la posiciones  $(X, Y) = (8.5, 0)$  y  $(X, Y) = (9.5, 0)$ , respectivamente. En esta

figura, las señales de las componentes de velocidad indican que debido a la intensa flotación opuesta, el patrón de desprendimiento de vórtices del cilindro inferior se ha vuelto inestable. La falta de periodicidad es evidente en las imágenes inferiores de la Fig 5.12, donde aparecen varios picos en el espectro de la velocidad transversal.

## 5.4. Velocidades promedio en el plano de simetría

La Fig. 5.13 presenta los perfiles de velocidad adimensional a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal adimensional para  $Re = 100$  y  $200$  y diferentes valores del número de Richardson. Estas imágenes muestran

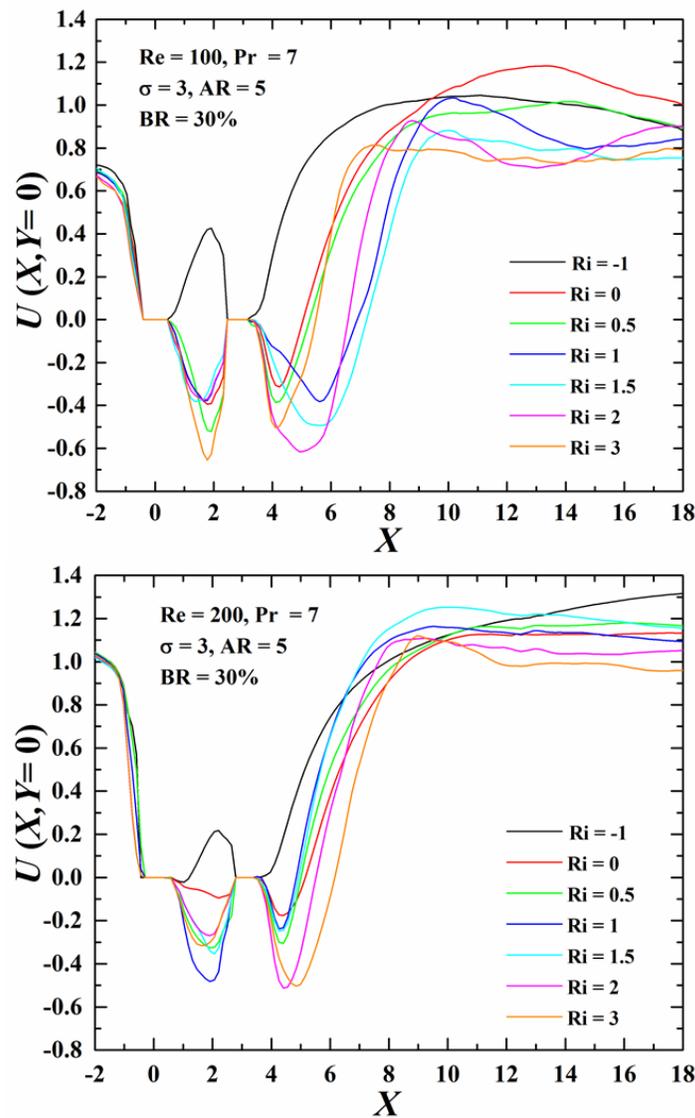


Figura 5.13: Perfiles de velocidad adimensional a lo largo del plano de simetría como una función de la coordenada longitudinal adimensional para  $Re = 100$  y  $200$  y diferentes valores del número de Richardson.

cómo para  $Ri = 0$  y hasta  $Ri = 4$ , el espacio entre cilindros es completamente ocupado por la zona de recirculación generada por el cilindro superior para ambos valores de  $Re$ . Para  $Re = 100$  y flujo asistido, sólo se detectan valores positivos de la componente de velocidad longitudinal a lo largo del eje de simetría y la velocidad longitudinal en el espacio entre cilindros alcanza un valor pico de  $U = 0.43$  en  $X \approx 1.92$ . Para  $Ri = 0$  y  $Ri = 0.5$ , la zona de recirculación del cilindro inferior se extiende hasta  $X \approx 5.07$  y  $X \approx 5.34$ , respectivamente. Nótese cómo para estos valores de  $Ri$ , la intensidad de la zona de recirculación del cilindro inferior es ligeramente menor que la del cilindro superior. Al incrementar el valor del parámetro de flotación a  $Ri = 1$  y  $1.5$ , el tamaño promedio de la estela del cilindro inferior incrementa su longitud. Sin embargo, conforme aumenta el valor del número de Richardson a  $Ri = 2$  y  $Ri = 3$ , el tamaño de la estela del cilindro inferior decrece progresivamente. Para  $Re = 200$  y  $Ri = -1$ , aparece una pequeña zona de recirculación debajo del cilindro superior y no se detecta reversión de flujo debajo del cilindro inferior. Para cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ), la zona de recirculación debajo del cilindro inferior se extiende hasta  $X \approx 5.29$ , y ahora ésta es más fuerte que la que se presenta en el espacio entre cilindros. Al incrementar el parámetro de flotación a  $Ri = 0.5$  y  $Ri = 1$ , la longitud de la zona de recirculación debajo del cilindro inferior decrece a  $X \approx 5.14$  y  $X \approx 4.85$ , respectivamente. Al aumentar aún más el valor del número de Richardson a  $Ri = 2$  y  $Ri = 3$ , el valor promedio de la longitud de la estela del cilindro inferior es de  $X \approx 5.58$  y  $X \approx 6.17$ , respectivamente. Nótese cómo para todos los casos, las velocidades promedio en el plano de simetría incrementan aguas abajo del cilindro inferior y se recuperan por completo en  $X \approx 10$ . También, para todos los valores de  $Ri$ , no se observan reversiones de flujo aguas arriba del cilindro superior, lo que indica que la fuerza de flotación no es capaz de desarrollar una burbuja de recirculación en esta ubicación debido a los grandes esfuerzos cortantes generados por el flujo frío descendente.

## 5.5. Longitud promedio de las estelas

La Fig. 5.14 presenta para  $Re = 100$  y  $200$  la longitud adimensional promedio de la estela del cilindro inferior  $\sigma_{v2} = L_{v2}/D$ , como una función del número de Richardson. Aquí,  $L_{v2}$  se define como la distancia desde el centro del cilindro inferior hasta el punto donde la componente de velocidad longitudinal en el plano de simetría cambia de valores negativos a cero. La medición de la longitud adimensional promedio de la estela se obtiene a partir del promedio de 3 bases de datos de 1000 imágenes para cada valor de  $Ri$ , y los resultados se presentan como promedio  $\pm DE$ . Esta figura ilustra cómo para la flotación asistida y para ambos valores de  $Re$ , no se detecta reversion de flujo debajo del cilindro inferior. La imagen superior muestra cómo para  $Re = 100$  y  $Ri = 0$ , la longitud de la estela es de  $\sim 1.70$  diámetros. Para  $Ri = 0.5$ , la longitud de la estela incrementa ligeramente a  $\sim 2.34$  diámetros. Sin embargo, para  $Ri = 1$  y  $Ri = 1.5$ , la longitud promedio de la estela es tangiblemente mayor, y la longitud promedio de la estela aumenta a  $\sim 3.49$  y  $\sim 4.40$  diámetros, respectivamente. Al incrementar el parámetro de flotación a  $Ri = 2$  y  $Ri = 3$ , debido a la

fuerte flotación opuesta, la longitud promedio de la estela se reduce a  $\sim 3.68$  y  $\sim 2.54$  diámetros, respectivamente. Para  $Re = 200$  y  $Ri = 0$ , la longitud de la estela es  $\sim 2.28$  diámetros. Nótese cómo para este valor más grande de  $Re$ , conforme aumenta el parámetro de flotación a  $Ri = 0.5$  y  $Ri = 1$ , su longitud se reduce a  $\sim 2.14$  y  $1.85$  diámetros, respectivamente. No obstante, al aumentar el valor del número de Richardson a  $Ri = 1.5$ ,  $2$  y  $3$ , la longitud promedio de la estela se extiende a  $\sim 1.99$ ,  $2.58$  y  $3.17$  diámetros, respectivamente. La Tabla 5.1 muestra un resumen de la Fig.

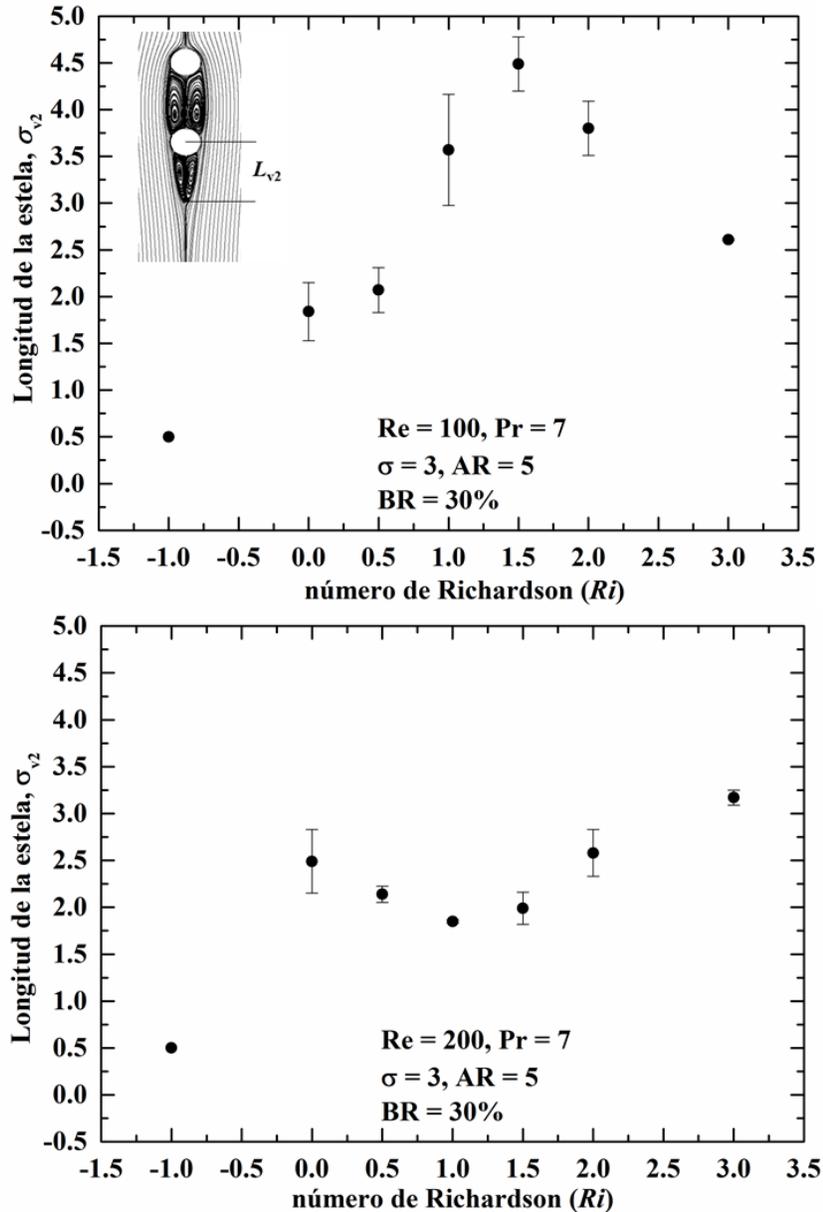


Figura 5.14: Valor promedio  $\pm DE$  de la longitud adimensional promedio de la estela del cilindro inferior  $\sigma_{v_2}/D$  para  $Re = 100$  y  $200$  como una función del número de Richardson. La longitud es medida desde el centro del cilindro inferior.

5.14. Aquí,  $\sigma_{v1} = L_{v1}/D$  corresponde a la longitud adimensional promedio de la estela del cilindro superior. Así mismo, el valor máximo del flujo ascendente debido a la reversión de flujo en el espacio entre cilindros y debajo del cilindro inferior se representa por  $U_{min1}$  y  $U_{min2}$ , respectivamente, y  $X_{min1}$  y  $X_{min2}$  hacen referencia a la posición donde se encuentra el valor máximo de la velocidad del flujo ascendente debajo de cada cilindro.

Tabla 5.1: Resumen de las mediciones del flujo promedio para  $Re = 100$  y  $200$  como una función del número de Richardson.

$Re$	$Ri$	$\sigma_{v1}$	$U_{min1}$	$X_{min1}$	$\sigma_{v2}$	$U_{min2}$	$X_{min2}$
100	-1	-	-	-	-	-	-
100	0	-	-0.39	1.92	1.70	-0.31	4.25
100	0.5	-	-0.52	1.92	1.99	-0.39	4.11
100	1	-	-0.38	1.78	3.49	-0.38	5.61
100	1.5	-	-0.38	1.37	4.40	-0.49	5.61
100	2	-	-0.38	1.64	3.68	-0.62	4.93
100	3	-	-0.65	1.78	2.54	-0.51	4.11
200	-1	1.32	-0.02	1.03	-	-	-
200	0	-	-0.09	2.20	2.28	-0.18	4.40
200	0.5	-	-0.33	1.91	2.14	-0.31	4.41
200	1	-	-0.48	1.91	1.85	-0.24	4.26
200	1.5	-	-0.36	2.08	1.99	-0.25	4.26
200	2	-	-0.27	1.91	2.58	-0.51	4.41
200	3	-	-0.32	1.76	3.17	-0.50	4.85

## 5.6. Ángulos de separación

La posición del ángulo de separación  $\theta_s$ , se mide desde el punto de estancamiento superior de cada cilindro hasta el punto de separación. Debido a la variación temporal del ángulo de separación a causa del desprendimiento de vórtices, el valor promedio se obtiene usando los patrones de flujo promedio de las líneas de corriente. Para obtener la media aritmética del ángulo de separación, se usaron un total de 3 bases de datos de 1000 imágenes para cada valor del parámetro de flotación. La Tabla 5.2 muestra para ambos valores de  $Re$ , la relación entre el ángulo de separación promedio  $\pm DE$  como una función del número de Richardson. Para el caso de flotación asistida, a causa de que la temperatura en ambos cilindros ejerce un gradiente de presión favorable, el valor del ángulo de separación para ambos cilindros alcanza un máximo, donde el valor más grande se alcanza en el cilindro inferior. Sin embargo, el ángulo de separación decrece monótonamente para valores crecientes del número de Richardson en el intervalo  $0 \leq Ri \leq 3$ . Cabe mencionar que para ambos valores de  $Re$  y números de Richardson de  $Ri = 1$  y mayores, las capas con esfuerzos de corte

generadas por el cilindro superior rodean completamente el cilindro inferior, razón por la cuál no se reportan ángulos de separación para éste.

Tabla 5.2: Ángulo de Separación (en grados) del cilindro superior e inferior como una función del número de Richardson para  $Re = 100$  y  $200$ .

		Ángulo de separación (promedio $\pm$ $DE$ )	
$Re$	$Ri$	Cilindro superior	Cilindro inferior
100	-1	142.00 $\pm$ 0.82	157.66 $\pm$ 2.05
100	0	138.66 $\pm$ 0.47	146.00 $\pm$ 0.82
100	0.5	131.33 $\pm$ 0.47	152.33 $\pm$ 0.47
100	1	105.66 $\pm$ 0.47	-
100	1.5	89.33 $\pm$ 0.50	-
100	2	84.50 $\pm$ 0.56	-
100	3	82.66 $\pm$ 0.6	-
200	-1	154.66 $\pm$ 0.47	157.33 $\pm$ 1.01
200	0	135 $\pm$ 0.82	137.66 $\pm$ 1.09
200	0.5	125.66 $\pm$ 1.70	134.33 $\pm$ 1.25
200	1	118.66 $\pm$ 0.47	-
200	1.5	117.66 $\pm$ 0.50	-
200	2	116.01 $\pm$ 0.05	-
200	3	97.66 $\pm$ 2.05	-

## 5.7. Número de Strouhal o frecuencia de desprendimiento

El valor promedio del número de Strouhal  $\pm$   $DE$  como una función del número de Richardson para ambos valores de  $Re$  se muestra en la Tabla 5.3. Para  $Re = 100$  y  $Ri = -1$ , el flujo alcanza un estado estacionario. Para  $Re = 0$ , se alcanza una respuesta oscilatoria periódica y el número de Strouhal correspondiente es  $St = 0.22232$ . Al incrementar el valor del parámetro de flotación a  $Ri = 1$ , la respuesta del flujo aún es oscilatoria periódica y el número de Strouhal también aumenta. No obstante, al aumentar el número de Richardson a  $Ri = 2$ , el número de Strouhal decae dramáticamente. Para  $Ri = 3$ , el patrón de desprendimiento se caracteriza por la ausencia de periodicidad. Para  $Re = 200$  y  $Ri = -1$ , se alcanza un estado estacionario, mientras que para valores de  $Ri = 0$  y hasta  $Ri = 2$ , el número de Strouhal incrementa para valores crecientes del parámetro de flotación. Finalmente, aparece un patrón de estela inestable para  $Ri = 3$ .

Tabla 5.3: Número de Strouhal para  $Re = 100$  y  $200$  como una función del número de Richardson.

$Re$	$Ri$	$St$ (promedio $\pm DE$ )
100	-1	estado estacionario
100	0	$0.22232 \pm 0.00704$
100	1	$0.25842 \pm 0.01399$
100	2	$0.12224 \pm 0.00191$
100	3	patrón inestable
200	-1	estado estacionario
200	0	$0.2342 \pm 0.00699$
200	1	$0.22612 \pm 0.007$
200	2	$0.28265 \pm 0.01398$
200	3	patrón inestable

## 5.8. Efecto de la relación de aspecto

En ésta sección se presenta el efecto de la relación de aspecto pequeña en el desprendimiento de vórtices a lo largo de la envergadura de los cilindros para ambos valores de  $Re$  y diferentes valores del parámetro de flotación. Las Figs. 5.15-5.17 muestran los patrones de flujo promedio medidos en el plano  $X-Z$  que pasa a través de los ejes de los cilindros. En estas figuras y para cada valor de  $Re$ , las imágenes izquierda y derecha muestran la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad a lo largo de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente. La Fig. 5.15 muestra el patrón de flujo promedio para  $Ri = -1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 0$  (imágenes inferiores). Para  $Re = 100$ , se presentan pequeñas regiones con velocidades cercanas a cero debajo de cada cilindro y tiene lugar un incremento importante en la componente de velocidad longitudinal cerca de las paredes del canal y en dirección aguas abajo. Para  $Re = 200$ , la región con valores de la velocidad cercanos a cero ocupa la totalidad de espacio entre cilindros. Nótese como para este valor de  $Re$ , dicha región pierde la simetría y es de mayor tamaño en las regiones cercanas a las paredes, mientras que su tamaño disminuye conforme se acerca al plano de simetría. En la Fig. 5.15, los patrones de flujo promedio para  $Ri = 0$  muestran cómo en ausencia de flotación, tiene lugar un desprendimiento de vórtices paralelo a lo largo de la envergadura de los cilindros. Las imágenes para  $Re = 200$  ilustran cómo debido a los cambios en el espesor de la capa límite de las paredes laterales, aparecen dos celdas de recirculación a lo largo de la envergadura de ambos cilindros, uniéndose éstas en la región media de la envergadura. La Fig. 5.16 presenta para  $Ri = 1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 2$  (imágenes inferiores) el desarrollo espacial de la capa límite sobre ambas paredes laterales. Para  $Re = 100$ , el modo de desprendimiento paralelo es destruido por la flotación opuesta, las celdas que se desprenden son de mayor tamaño en la región central de la envergadura que en las zonas cercanas a las

paredes de canal, y se establece un modo de desprendimiento oblicuo. Para  $Re =$

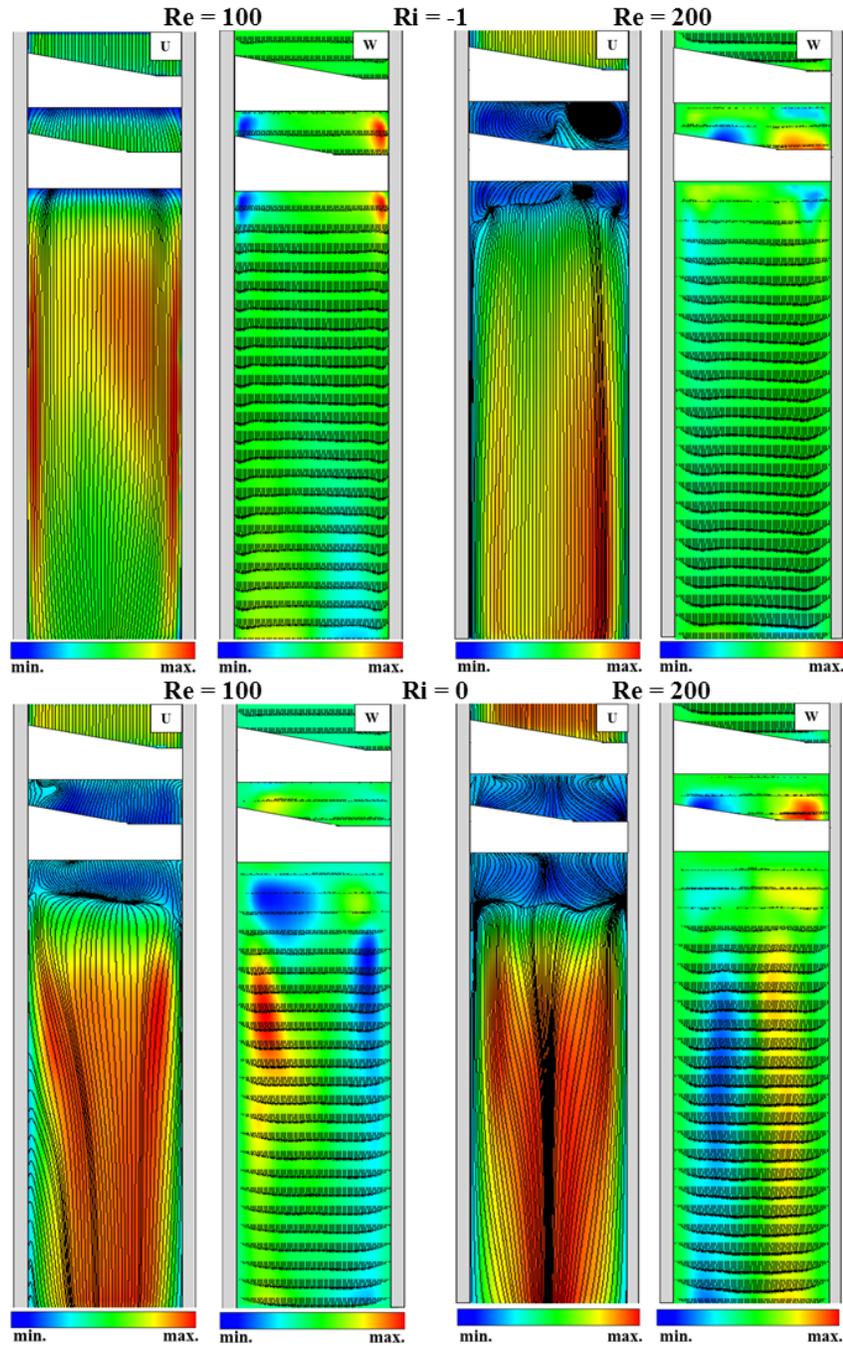


Figura 5.15: Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = -1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 0$  (imágenes inferiores) para  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente.

200, aunque el desprendimiento de vórtices aún no se encuentra en fase a lo largo de

la envergadura, se puede observar un aumento en la reversión de flujo cerca de las paredes del canal y se desarrollan zonas de recirculación en el espacio entre cilindros en el plano  $X$ - $Z$ . La Fig. 5.16 ilustra para  $Ri = 2$  cómo ocurre un cambio drástico

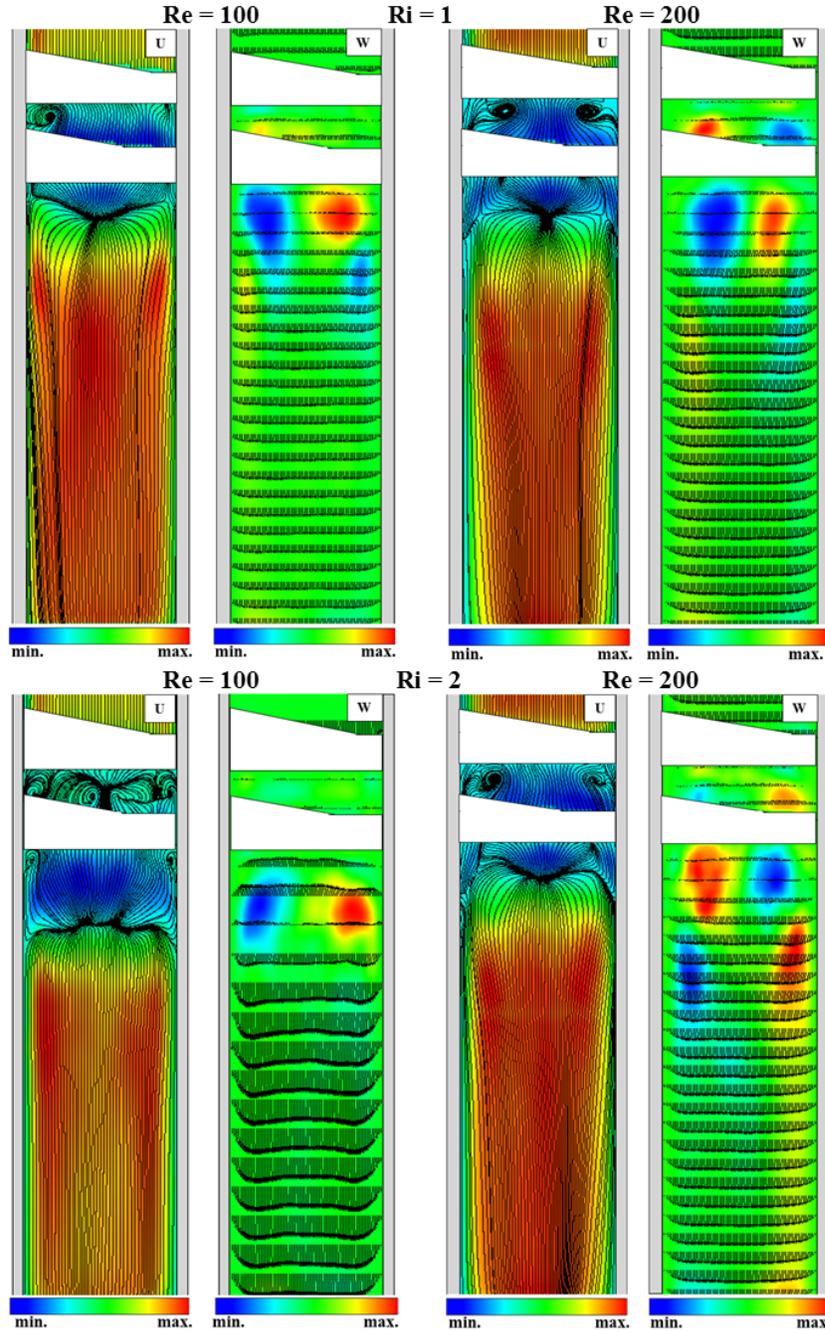


Figura 5.16: Patrones de flujo promedio en el plano  $X$ - $Z$  para  $Ri = 1$  (imágenes superiores) y  $Ri = 2$  (imágenes inferiores) para  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura con vectores de velocidad superpuestos, respectivamente.

en la estructura de la estela dependiendo del valor de  $Re$ . Para  $Re = 100$ , el patrón de desprendimiento en el espacio entre cilindros es muy irregular, lo que indica que el desprendimiento de flujo del cilindro superior aumenta su complejidad y se vuelve asimétrico con respecto al plano medio de la envergadura. Los patrones de flujo

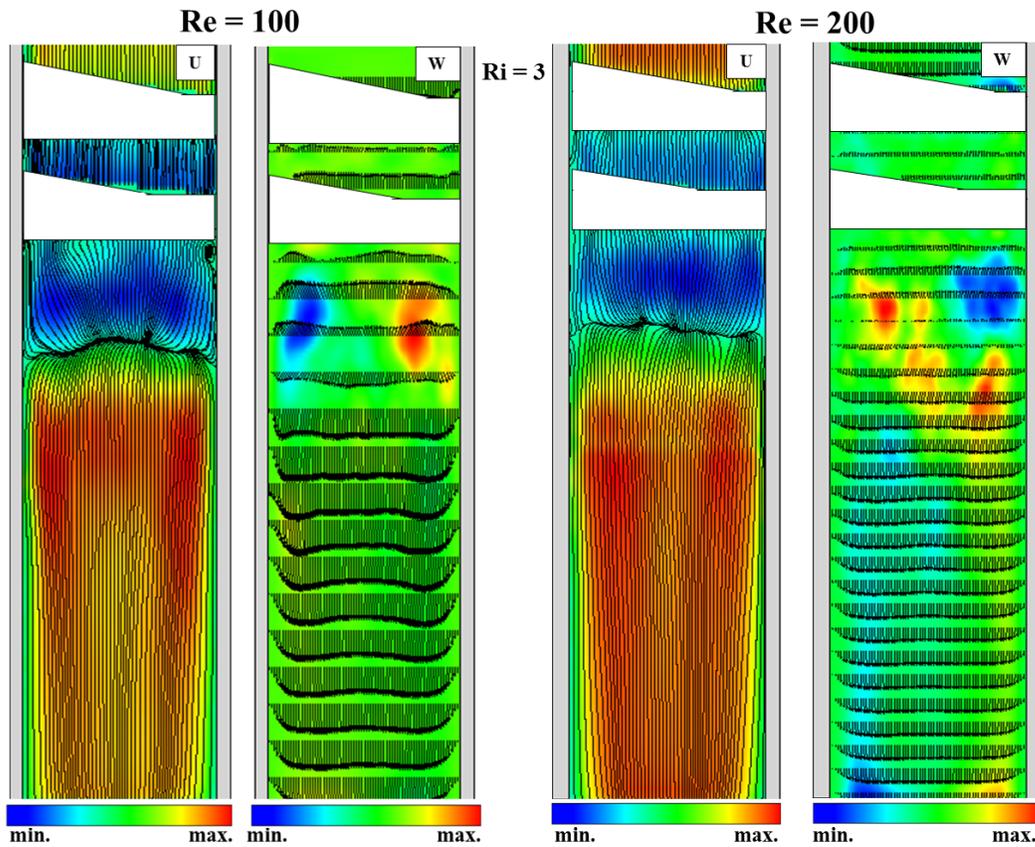


Figura 5.17: Patrones de flujo promedio en el plano  $X-Z$  para  $Ri = 3$  y  $Re = 100$  y  $200$ . Las imágenes muestran de izquierda a derecha el contorno de la componente de velocidad longitudinal con las líneas de corriente superpuestas y la componente de velocidad en dirección de la envergadura, con los vectores de velocidad superpuestos, respectivamente.

de la estela del cilindro inferior ilustran cómo aparecen dos zonas de recirculación cerca de las paredes. Por lo tanto, el patrón de desprendimiento de vórtices no se encuentra en fase a lo largo de la envergadura. Para  $Re = 200$ , aunque en el plano  $X-Z$  persisten las zonas de recirculación en el espacio entre cilindros, los efectos del confinamiento conducen a variaciones en la frecuencia de desprendimiento a lo largo de la envergadura del cilindro inferior. Nótese como las grandes celdas debajo del cilindro inferior promueven un modo de desprendimiento oblicuo, es decir, las celdas son de mayor tamaño en la región media de la envergadura. No obstante, el flujo ascendente de mayor intensidad tiene lugar en la zona cercana a las paredes. La Fig. 5.17 muestra cómo para  $Ri = 3$  y ambos valores de  $Re$ , se presenta un intenso flujo ascendente en el espacio entre cilindros y debajo del cilindro inferior. Sin em-

bargo, el campo de velocidad en dirección  $Z$  muestra un patrón de desprendimiento irregular para  $Re = 200$ , indicando que la flotación opuesta genera un patrón de desprendimiento inestable y no-uniforme a lo largo de la envergadura.

## 5.9. Comparación con los resultados numéricos

En esta subsección se presenta una comparación entre los resultados experimentales y numéricos para los mismos valores de los parámetros geométricos y de los números de Reynolds y Prandtl para un intervalo de números de Richardson de  $-1 \leq Ri \leq 1$ . La Tabla 5.4 muestra los valores del número de Strouhal obtenidos para ambos casos. Para valores del parámetro de flotación mayores a  $Ri = 2$ , los efectos tridimensionales por efecto del confinamiento son muy pronunciados y no pueden despreciarse. Cabe mencionar que la discrepancia en los resultados también se atribuye a que en las simulaciones numéricas, el flujo a la entrada del canal se modela como completamente desarrollado, mientras que en el experimento éste se encuentra en desarrollo hidrodinámico. Por tal motivo, se concluye que la respuesta del flujo es altamente sensible al valor del número de Reynolds.

Tabla 5.4: Comparación entre datos experimentales y resultados numéricos para  $Re = 100$  y  $200$  como función del número de Richardson.

$Re$	$Ri$	datos experimentales resultados numéricos [75]		% Error
		$St$	$St$	
100	-1	estado estacionario	estado estacionario	-
100	0	$0.22232 \pm 0.00704$	estado estacionario	
100	1	$0.25842 \pm 0.01399$	0.2428	6.04
200	-1	estado estacionario	estado estacionario	-
200	0	$0.2342 \pm 0.00699$	0.2474	5.37
200	1	$0.22612 \pm 0.007$	0.2428	7.39

La Fig 5.18 muestra una comparación entre los flujos promedio obtenidos tanto numéricamente como experimentalmente para valores de los números de Reynolds y Richardson de  $Re = 200$  y para flujo isotérmico ( $Ri = 0$ ), respectivamente. Como se puede observar, la zona de recirculación debajo del cilindro superior ocupa la totalidad del espacio entre cilindros y la longitud de la estela aguas abajo del cilindro inferior es de  $L_{v2} \approx 2.5$  para ambos casos. En general, el contorno de velocidad para ambos casos es muy parecido. Sin embargo, en el caso de la distribución promedio de vorticidad se aprecia una ligera discrepancia en la estela que se encuentra aguas abajo del cilindro inferior, la cual se atribuye a la naturaleza tridimensional del experimento.

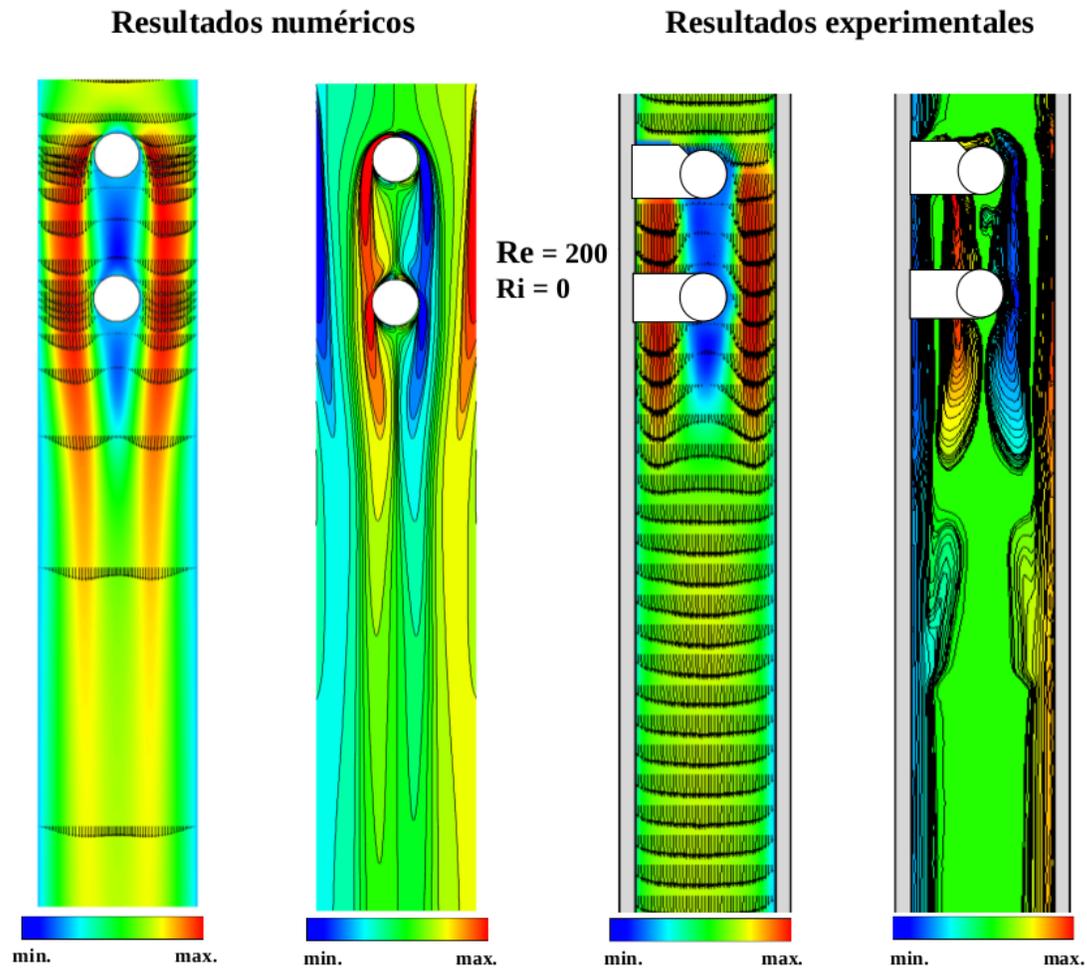


Figura 5.18: Comparación de flujos promedio obtenidos del estudio numérico y experimental para  $Re = 200$ ,  $Ri = 0$  y  $\sigma = 3$ , mostrando los contornos de la componente de velocidad longitudinal con vectores superpuestos y los contornos de vorticidad, respectivamente.

# Capítulo 6

## Conclusiones

En este estudio se llevaron a cabo simulaciones numéricas para el estudio del flujo transitorio y las características de la transferencia de calor alrededor de dos cilindros isotérmicos idénticos colocados en tándem y confinados dentro de un canal vertical para tres diferentes valores de relación de espaciamiento de  $\sigma = 2, 3$  y  $5$ . Se estudiaron dos radios de bloqueo y dos valores del número de Prandtl,  $BR = 20\%$  y  $30\%$  y  $Pr = 7$  y  $0.744$ , respectivamente. Se realizó un análisis numérico usando el método de volumen finito y una malla ortogonal cartesiana no uniforme. Se empleó el método de la frontera inmersa para colocar los cilindros dentro del dominio computacional, y la validación del algoritmo numérico implementado se realizó comparando nuestros resultados con trabajos analíticos y numéricos disponibles para un cilindro isotérmico confinado. Se realizó un estudio paramétrico con la finalidad de evaluar la influencia de la flotación y de la relación de separación sobre el flujo promedio e instantáneo, las propiedades del desprendimiento de vórtices, las frecuencias de oscilación adimensionales (números de Strouhal), diagramas de fase de las oscilaciones del flujo, campos de temperatura y tasas de transferencia de calor tanto locales como globales (números de Nusselt) de cada cilindro. En este espacio paramétrico, los resultados muestran que dependiendo de la separación entre cilindros y el valor del parámetro de flotación, se han identificado cinco diferentes patrones de flujo para  $Pr = 7$  y  $BR = 20$ : (i) flujo en estado estacionario. (ii) estado oscilatorio periódico. (iii) flujo oscilatorio cuasi-periódico. (iv) flujo bi-estable, y (v) movimiento caótico. Para el caso de  $Pr = 0.744$  y  $BR = 30\%$  se identificaron tres diferentes patrones de flujo: (i) flujo en estado estacionario, (ii) estado oscilatorio periódico, y (iii) flujo oscilatorio cuasi-periódico. En general, las zonas de recirculación que se forman en el espacio entre cilindros pueden exhibir patrones de flujo tanto simétricos como asimétricos. Para un espaciamiento entre cilindros pequeño ( $\sigma = 2$ ), la zona de recirculación debajo del cilindro superior ocupa la totalidad del espacio entre cilindros y el fluido relativamente frío pasa de largo el cilindro inferior. Para valores del parámetro de flotación relativamente bajos ( $Ri < 1$ ), se alcanza un estado estacionario final. Incrementando el valor del parámetro de flotación, se produce la típica estela de vórtices de Kármán con un importante incremento en el valor del número de Nusselt global para el cilindro inferior. A medida que los vórtices son transportados aguas abajo, su intensidad disminuye rápidamente debido a la inter-

---

acción con las paredes. Incrementando el parámetro de flotación aún más, aparecen oscilaciones de baja frecuencia debido a la inestabilidad del flujo en las zonas de recirculación de ambos cilindros. Para espaciamientos mayores ( $\sigma = 5$ ), la zona de recirculación debajo del cilindro superior puede ser más corta que la longitud del espacio entre cilindros dependiendo del valor del número de Richardson. A medida que incrementa el parámetro de flotación, la zona de recirculación producida por el cilindro superior ocupa la totalidad del espacio entre cilindros y los vórtices solo se desprenden del cilindro inferior. Finalmente, a medida que las zonas de recirculación pierden estabilidad, aparece una respuesta bi-modal incrementando la complejidad del fenómeno.

El problema también se abordó experimentalmente, estudiando el comportamiento de las estelas presentes en un arreglo de cilindros en tándem de diámetro idéntico confinados en un canal vertical, mediante la técnica no intrusiva conocida como PIV. Los experimentos se llevaron a cabo para valores del número de Reynolds de  $Re = 100$  and  $200$ , un valor del número de Prandtl fijo de  $Pr = 7$ , radio de bloqueo de  $BR = D/H = 0.3$ , una relación de aspecto de  $AR = W/D = 5$ , relación de espaciamiento entre cilindros de  $\sigma = 3$ , y valores del parámetro de flotación (número de Richardson) en un rango de  $-1 \leq Ri \leq 3$ . Los resultados muestran que debido a los efectos de mezcla provocados por la proximidad de las paredes, la fuerza de flotación y la interferencia mutua entre cilindros, el número de Strouhal y los patrones de desprendimiento de vórtices son altamente dependientes de la combinación de los valores de  $Re$  y  $Ri$ . Basándose en las mediciones instantáneas y los patrones de flujo promedio, las principales conclusiones pueden enumerarse como sigue:

1. Para ambos valores de  $Re$  y para la flotación asistida ( $Ri = -1$ ), las estelas de ambos cilindros se estrechan, el desprendimiento de vórtices se suprime y se alcanza una respuesta estacionaria.
2. Para ambos valores de  $Re$ , el ángulo de separación es una función decreciente de  $Ri$  en el intervalo  $-1 \leq Ri \leq 3$ . Para  $Re = 100$ , los valores del ángulo de separación correspondientes al cilindro inferior son hasta 9.93 % mayores que los registrados por el cilindro superior. Sin embargo, el margen se reduce a 1.62 % para  $Re = 200$ .
3. Para  $Re = 100$ , el número de Strouhal incrementa para valores crecientes del parámetro de flotación en el intervalo  $0 \leq Ri \leq 1$ , cae dramáticamente a  $St \approx 0.12$  para  $Ri = 2$ , y el patrón de desprendimiento se vuelve inestable para  $Ri = 3$ . Para  $Re = 200$ , el número de Strouhal es una función creciente de  $Ri$  en el intervalo de  $0 \leq Ri \leq 2$ , y dependiendo del parámetro de flotación, el flujo muestra un comportamiento periódico o cuasi-periódico. Para  $Ri = 3$ , se establece un patrón de estela inestable.
4. Para un valor fijo del parámetro de flotación, el patrón de desprendimiento de vórtices para ambos cilindros exhibe una fuerte dependencia del valor del número de  $Re$ . Para el caso de cilindros sin calentar ( $Ri = 0$ ), se establece

---

un desprendimiento paralelo de vórtices. Para  $Ri = 1$ , se presentan desprendimientos de vórtices cóncavos y convexos para  $Re = 100$  y  $Re = 200$ , respectivamente. Para  $Ri = 2$  y ambos valores de  $Re$ , la frecuencia de desprendimiento de vórtices varía a lo largo de la envergadura del cilindro inferior. Finalmente, para  $Ri = 3$ , el espacio entre cilindros y la zona debajo del cilindro inferior son ocupados por un intenso flujo ascendente y el patrón de desprendimiento de vórtices se vuelve inestable.

5. El patrón de desprendimiento de vórtices del arreglo de cilindros es modificado significativamente bajo el efecto de la variación de la flotación y éstas son tangiblemente más sensibles para el valor más bajo del número de Reynolds estudiado.

# Bibliografía

- [1] M.M. Zdravkovich. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements. *Transactions of the ASME, J. Fluids Eng.*, 99:618–633, 1977.
- [2] M.M. Zdravkovich. Flow induced oscillations of two interfering circular cylinders. *J. Sound Vib.*, 101:511–521, 1985.
- [3] S.S. Chen. *Flow-Induced Vibration of Circular Cylindrical Structures*. Hemisphere Publishing Cooperation, New York, 1987.
- [4] R. Blevins. *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1977.
- [5] D. Sumner. Two circular cylinders in cross-flow: A review. *J. Fluid. Struct.*, 26:849–899, 2010.
- [6] M.M. Zdravkovich. The effects of interference between circular cylinders in cross flow. *J. Fluid. Struct.*, 1:239–261, 1987.
- [7] G. Xu and Y. Zhou. Strouhal numbers in the wake of two inline cylinders. *Exp. Fluids*, 37:248–256, 2004.
- [8] Y. Zhou and M.W. Yiu. Flow structure, momentum and heat transport in a two- tandem-cylinder wake. *Exp. Fluids*, 548:17–48, 2006.
- [9] T. Igarashi. Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem, 1st report. *Bulletin of the JSME B*, 24:323–331, 1981.
- [10] T. Igarashi. Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem, 2nd report. *Bulletin of the JSME B*, 27:2380–2387, 1984.
- [11] J.R. Meneghini, F. Saltara, C.L.R. Siqueira, and J.A. Ferrari Jr. Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side-by-side arrangements. *J. Fluid. Struct.*, 15:327–350, 2001.
- [12] J.C. Lin, Y. Yang, and D. Rockwell. Flow past two cylinders in tandem: instantaneous and averaged flow structure. *J. Fluid. Struct.*, 16:1050–1071, 2002.
- [13] I. Mabuchi M. Hiwada and H. Yanagihara. Fluid flow and heat transfer around two circular cylinders in cross flow. *Bulletin of JSME*, 25:1737–1745, 1982.

- [14] M.N. Dhaubhadel A.A. Hetz and D.P. Telionis. Vortex shedding over five in-line cylinders. *J. Fluid. Struct.*, 5:243–257, 1991.
- [15] T. Lee and S. Basu. Nonintrusive measurements of the boundary layer developing on a single and two circular cylinders. *Exp. Fluids*, 23:187–192, 1997.
- [16] L. Ljungkrona, C. Norberg, and B. Sundén. Free-stream turbulence and tube spacing effects on surface pressure fluctuations for two tubes in an in-line arrangement. *J. Fluid. Struct.*, 5:701–727, 1991.
- [17] L. Ljungkrona and B. Sundén. Flow visualization and surface pressure measurement on two tubes in an inline arrangement. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 6:15–27, 1993.
- [18] S. Ishigai, E. Nishikawa, K. Nishimura, and K. Cho. Experimental study of structure of gas flow in tube banks with tube axes normal to flow (Part 1, Kármán vortex flow from two tubes at various spacings. *Bulletin of JSME*, 15:949–956, 1972.
- [19] M. Alam and J.P. Meyer. Two interacting cylinders in cross flow. *Phys. Rev. E*, 84:056304, 2011.
- [20] H. Iacovides, B. Launder, and A. West. A comparison and assessment of approaches for modelling flow over in-line tube banks. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 49:69–79, 2014.
- [21] C.J. Chen and T.-S. Wang. Finite analytic solution of convective heat transfer for tube arrays in cross flow: Part II - Heat transfer analysis. *ASME J. Heat Transf.*, 111:641–648, 1989.
- [22] V.K. Mandhani, R.P. Chhaabra, and V. Eswaran. Forced convection heat transfer in tube banks in cross flow. *Chem. Eng. Sci.*, 57:379–391, 2002.
- [23] Y.T. Kishne Gowda, BSVP Patnaik, P.A. Aswatha Narayana, and K.N. Seetharamu. Finite element simulation of transient laminar flow and heat transfer past an in-line tube bank. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 19:49–55, 1998.
- [24] Y. Zhang and Z. Chen. Effect of gap between layers on the heat transfer performance of aligned tube banks. *Heat Transf. Eng.*, 13:33–41, 1992.
- [25] A. Zukauskas. Heat transfer from tubes in cross flow. *Adv. Heat Transf.*, 8:93–160, 1972.
- [26] N. Mahir and Z. Altaç. Numerical investigation of convective heat transfer in unsteady flow past two cylinders in tandem arrangements. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, 29:1309–1318, 2008.
- [27] I. Harimi and M. Saghafian. Numerical simulation of fluid flow and forced convection heat transfer from tandem circular cylinders using overset grid method. *J. Fluid Struct.*, 28:309–327, 2012.

- [28] E. Buyruk. Numerical study on heat transfer characteristics on tandem cylinders, inline and staggered tube banks in cross-flow of air. *Int. Commun. Heat Mass*, 29:355–366, 2002.
- [29] S.B. Beale and D.B. Spalding. Numerical study of fluid flow and heat transfer in tube banks with stream-wise periodic boundary conditions. *Trans. CSME*, 22:397–416, 1998.
- [30] S.B. Beale and D.B. Spalding. A numerical study of unsteady fluid flow in in-line and staggered tube banks. *J. Fluid Struct.*, 13:723–754, 1999.
- [31] W.A. Khan, J.R. Culham, and M.M. Yovanovich. Convection heat transfer from tube banks in crossflow: Analytical approach. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 49:4831–4838, 2006.
- [32] Y. Kaptan, E. Buyruk, and A. Eceder. Numerical investigation of fouling on cross-flow heat exchanger tubes with conjugated heat transfer approach. *Int. Commun. Heat Mass*, 35:1153–1158, 2008.
- [33] R.-J. Jiang and J.-Z. Lin. Wall effects on flows past two tandem cylinders of different diameters. *J. Hydrodyn.*, 24:1–10, 2012.
- [34] A. Nejat, V. Abdollahi, and K. Vahidkhan. Lattice Boltzmann simulation of non-Newtonian flows past confined cylinders. *J. Non-Newton. Fluid.*, 166:689–697, 2011.
- [35] J. Lin, R. Jiang, Z. Chen, and X. Ku. Poiseuille flow-induced vibrations of two cylinders in tandem. *J. Fluid Struct.*, 40:70–85, 2013.
- [36] S. Sarkar, A. Dalal, and G. Biswas. Mixed convective heat transfer from two identical square cylinders in cross flow at  $Re = 100$ . *Int. J. Heat Mass Transfer*, 53:2628–2642, 2010.
- [37] A.S. Goharrizi and R. Sadeghi. Thermophoretic deposition of aerosol particles in laminar mixed-convection flow in a channel with two heated built-in square cylinders. *Adv. Powder Technol.*, 21:320–325, 2010.
- [38] D. Chatterjee, G. Biswas, and S. Amiroudine. Mixed convection heat transfer from an in-line row of square cylinders in cross-flow at low Reynolds number. *Numer. Heat Transfer A*, 61:891–911, 2012.
- [39] D. Chatterjee and B. Mondal. Mixed convection heat transfer from tandem square cylinders for various gap to size ratios. *Numer. Heat Transfer A*, 63:101–119, 2013.
- [40] D. Chatterjee and M. Raja. Mixed convection heat transfer past in-line square cylinders in a vertical duct. *Therm. Sci.*, 17:567–580, 2013.

- [41] J. Lu, H. Han, and B. Shi. A numerical study of fluid flow passes two heated/cooled square cylinders in a tandem arrangement via lattice boltzmann method. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 55:3909–3920, 2012.
- [42] Z. Huang, G. Xi, W. Zhang, and S. Wen. Mixed convection heat transfer from confined tandem square cylinders in a horizontal channel. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 66:625–631, 2013.
- [43] D. Chatterjee and S. Amiroudine. Two-dimensional mixed convection heat transfer from confined tandem square cylinders in cross-flow at low Reynolds numbers. *Int. Commun. Heat Mass.*, 37:7–16, 2010.
- [44] M.-M. Liu, L. Lu, B. Teng, M. Zhao, and G.-Q. Tang. Re-examination of laminar flow over twin circular cylinders in tandem arrangement. *Fluid Dyn. Res.*, 46:025501, 2014.
- [45] T. Farrant, M. Tan, and W.G. Price. A cell boundary element method applied to laminar vortex-shedding from arrays of cylinders in various arrangements. *J. Fluid Struct.*, 14:375–402, 2000.
- [46] J. Li, A. Chabbarel, M. Donneaud, and R. Martin. Numerical study of laminar flow past one and two cylinders. *Comput. Fluids*, 19:155–170, 1991.
- [47] A. Slaouti and P.K. Stansby. Flow around two circular cylinders by the random-vortex method. *J. Fluid Struct.*, 6:641–670, 1992.
- [48] B.G. Dehkordi, H.S. Moghaddam, and H.H. Jafari. Numerical simulation of flow over two circular cylinders in tandem arrangement. *J. Hydrodyn.*, 23:114–126, 2011.
- [49] A.B. Harichandan and A. Roy. Numerical investigation of flow past a single and tandem cylindrical bodies in the vicinity of a plane wall. *J. Fluids Struct.*, 33:19–43, 2012.
- [50] P.F. Zhang, J.J. Wang, and L.X. Huang. Numerical simulation of flow around cylinder with an upstream rod in tandem at low Reynolds numbers. *Appl. Ocean Res.*, 28:183–192, 2006.
- [51] A. Thom. The flow past circular cylinders at low speeds. *Proc. R. Soc. A*, 1933.
- [52] T.E. Tezduyar, J. Liou, D.K. Ganjoo, and M. Behr. Solution techniques for the vorticity-streamfunction formulation of the two-dimensional unsteady incompressible flows. *Int. J. Numer. Method. H.*, 11:515–539, 1990.
- [53] T.E. Tezduyar and J. Liou. On the downstream boundary conditions for the vorticity-streamfunction formulation for two-dimensional incompressible flows. *Comput. Method. Appl. M.*, 85:207–217, 1991.
- [54] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.

- [55] L. Martínez-Suástegui and C. Treviño. Transient laminar opposing mixed convection in a differentially and asymmetrically heated vertical channel of finite length. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 51:5991–6005, 2008.
- [56] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech*, 37:239–261, 2005.
- [57] R. Mittal, H. Dong, M. Bozhurttas, F.M. Najjar, A. Vargas, and A. von Leob-  
becbe. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *J. Comput. Phys*, 227:4825–4852, 2008.
- [58] J.H. Chen, W.G. Pritchard, and S.J. Tavener. Bifurcation of flow past a cylinder between parallel plates. *J. Fluid Mech.*, 284:23–41, 1995.
- [59] W.A. Khan, J.R. Culham, and M.M. Yovanovich. Fluid flow and heat transfer from a cylinder between parallel planes. *J. Thermophys. Heat Tr.*, 18:395–403, 2004.
- [60] S. Mettu, N. Verma, and R.P. Chhabra. Momentum and heat transfer from an asymmetrically confined circular cylinder in a plane channel. *Heat Mass Transf.*, 42:1037–1048, 2006.
- [61] F. Dumouchel, J.C. Lecordier, and P. Paranthoen. The effective Reynolds number of a heated cylinder. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 41:1787–1794, 1998.
- [62] A.P. Hatton, D.D. James, and H.W. Swire. Combined forced and natural convection with low-speed air flow over horizontal cylinders. *J. Fluid Mech.*, 42:17–31, 1970.
- [63] A.-B. Wang, Z. Travnicek, and K.-C. Chia. On the relationship of effective Reynolds number and Strouhal number for laminar vortex shedding of a heated circular cylinder. *Phys. Fluids*, 12:1401–1410, 2000.
- [64] I. Guillén, C. Treviño, and L. Martínez-Suástegui. Unsteady laminar mixed convection heat transfer from a horizontal isothermal cylinder in contra-flow: Buoyancy and wall proximity effects on the flow response and wake structure. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 52:30–46, 2014.
- [65] D. Brika and A. Laneville. Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 250:481–508, 1993.
- [66] D. Brika and A. Laneville. An experimental study of the aeolian vibrations of a flexible circular cylinder at different incidences. *J. Fluid Struct.*, 9:371–391, 1995.
- [67] A. Khalak and C.H.K. Williamson. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping. *J. Fluid Struct.*, 13:813–851, 1999.

- [68] T. Sarpkaya. A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *J. Fluid Struct.*, 19:389–447, 2004.
- [69] S.P. Singh and S. Mittal. Vortex-induced oscillations at low Reynolds numbers: hysteresis and vortex-shedding modes. *J. Fluid Struct.*, 20:1085–1104, 2005.
- [70] D. Shiels, A. Leonard, and A. Roshko. Flow-induced vibration of a circular cylinder at limiting structural parameters. *J. Fluid Struct.*, 20:1085–1104, 2005.
- [71] D.J. Newman and G.E. Karniadakis. Direct numerical simulations of flow over a flexible cable. Proc. Sixth Int. Conf. on Flow-Induced Vibration (ed. P.W. Bearman). pages 193–204, 1995.
- [72] L.W. Wang, K.H. Hou, J.G. Lu, and C.F. Hsu. Flow patterns of mixed convection in a horizontal square channel flow. *Exp. Heat Transfer*, 9:257–265, 1996.
- [73] H. Hu and M.M. Koochesfahani. Thermal effects on the wake of a heated circular cylinder operating in mixed convection regime. *J. Fluid Mech.*, 685:235–270, 2011.
- [74] S.J. Kline and F.A. McClintock. Describing uncertainty in single sample experiments. *Mech. Eng.*, 75:3–12, 1953.
- [75] E. Salcedo, J.C. Cajas, C. Treviño, and L. Martínez-Suástegui. Unsteady mixed convection heat transfer from two confined isothermal circular cylinders in tandem: Buoyancy and tube spacing effects. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 60:12–30, 2016.



## Numerical study on buoyancy and inclination effects on transient laminar opposing mixed convection in rectangular channels with symmetric and discrete heating



J. Marroquín-Desentis<sup>a</sup>, C. Treviño<sup>b,c</sup>, J.C. Cajas<sup>d</sup>, E. Salcedo<sup>e</sup>, L. Martínez-Suástegui<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>ESIME Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional, Avenida de las Granjas No. 682, Colonia Santa Catarina, Delegación Azcapotzalco, México, Distrito Federal 02250, Mexico

<sup>b</sup>UMDI, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Sisal, Yucatán, Mexico

<sup>c</sup>Chemical Kinetics Laboratory, Institute of Chemistry, Eötvös Lorand University, ELTE, Budapest, Hungary<sup>1</sup>

<sup>d</sup>Barcelona Supercomputing Center (BCS-CNS), Edificio NEXUS I, Campus Nord UPC, Gran Capitán 2-4, 08034 Barcelona, Spain

<sup>e</sup>Departamento de Termofluidos, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, Distrito Federal 04510, Mexico

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 27 October 2014

Received in revised form 26 December 2014

Accepted 27 December 2014

#### Keywords:

Mixed convection  
Discrete heating  
Inclination angle  
Flow bifurcation  
Unsteady convective flows

### ABSTRACT

Detailed numerical simulations are carried out for transient laminar opposing mixed convection in a rectangular inclined channel with both walls suddenly subjected to discrete isothermal flush-mounted heat sources simulating electronic components. Using the vorticity-stream function formulation of the unsteady two-dimensional Navier–Stokes and energy equations, the governing equations are solved numerically using the control volume method. Simulations are performed for fixed values of the geometrical parameters, Reynolds number of  $Re = 500$ , Prandtl number of  $Pr = 7$  and channel inclination of  $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ . Results illustrate the effects of buoyancy strength or Richardson number  $Ri = Gr/Re^2$  and channel inclination angle on the overall flow structure and nondimensional heat flux (Nusselt number) from the heated slabs. It is found that for the horizontal configuration ( $\gamma = 0^\circ$ ), due to the indirect effect of buoyancy, much higher threshold values of buoyancy strength are required for the appearance of the recirculation flows that take place downstream of the heated slabs. However, for increasing values of the inclination angle, vortex migration to higher positions inside the channel occurs and higher heat transfer rates are obtained. In addition, transition from steady to time-periodic flow takes place for values of the buoyancy parameter larger than a critical one, and the threshold value between the two regimes strongly depends on the value of the Reynolds number and channel orientation. The results include the effects of Reynolds and Prandtl numbers along with heat losses to the channel walls on the evolution of the final flow and thermal response.

© 2015 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

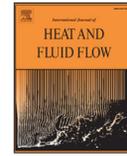
Mixed convection studies in ducts are important for many industrial applications where buoyant forces are comparable to pumping forces. Most studies found in the literature have focused on the horizontal or vertical configuration for different channel geometries, boundary and operating conditions [1–3]. However, in many practical situations in the design of compact heat exchangers, solar collectors, electronic cooling systems, nuclear reactors and other thermal devices, the duct is inclined with respect to the horizontal. Although the inclination angle effect in

mixed convection has received relatively less attention, it is well known that the flow and heat transfer are relatively sensitive to duct orientation and a great deal of research efforts have been devoted to this topic. Guimarães and Menon [4] numerically studied mixed convection in an inclined rectangular channel with three discrete heat sources placed on the bottom surface. Their results show that the inclination angle has a stronger influence on the flow and heat transfer for low Reynolds numbers and that in general, cases which show the lowest temperature distribution on the modules are those where the inclination angles are  $45^\circ$  and  $60^\circ$ . Choi and Ortega [5] numerically investigated the effects of inclination angle during mixed convection for a parallel plane channel with a discrete heat source. Their results indicate that the overall Nusselt number strongly depends on the inclination angle when the latter is larger than  $45^\circ$ , while the changes in the maximum surface temperature and Nusselt number are negligible when the

\* Corresponding author. Tel.: +52 55 57296000x64505; fax: +52 5557296000x64493.

E-mail address: [lamartinez@ipn.mx](mailto:lamartinez@ipn.mx) (L. Martínez-Suástegui).

<sup>1</sup> Sabbatical leave.



## Unsteady mixed convection heat transfer from two confined isothermal circular cylinders in tandem: Buoyancy and tube spacing effects



E. Salcedo<sup>a</sup>, J.C. Cajas<sup>b</sup>, C. Treviño<sup>c,d</sup>, L. Martínez-Suástegui<sup>e,\*</sup>

<sup>a</sup> Departamento de Termofluidos, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, Ciudad de México 04510, Mexico

<sup>b</sup> Barcelona Supercomputing Center (BCS-CNS), Edificio NEXUS I, Campus Nord UPC, Gran Capitán 2-4, Barcelona 08034, Spain

<sup>c</sup> UMDI, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Sisal, Yucatán, Mexico

<sup>d</sup> Chemical Kinetics Laboratory, Institute of Chemistry, Eötvös Lorand University, ELTE, Budapest, Hungary (sabbatical leave)

<sup>e</sup> ESIME Azcapotzalco, Instituto Politécnico Nacional, Avenida de las Granjas No. 682, Colonia Santa Catarina, Delegación Azcapotzalco, México, Ciudad de México 02250, Mexico

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 30 October 2015

Revised 12 February 2016

Accepted 11 April 2016

#### Keywords:

Mixed convection  
Tandem cylinders  
Tube spacing  
Blockage ratio  
Interference effects

### ABSTRACT

In this work, two-dimensional numerical simulations are carried out to investigate the unsteady mixed convection heat transfer in a laminar cross-flow from two equal-sized isothermal in-line cylinders confined inside a vertical channel. The governing equations are solved using the vorticity-stream function formulation of the incompressible Navier–Stokes and energy equations using the control-volume method on a non-uniform orthogonal Cartesian grid. The numerical scheme is validated for the standard case of a symmetrically confined isothermal circular cylinder in a plane channel. Calculations are performed for flow conditions with Reynolds number of  $Re_D = 200$ , a fixed value of the Prandtl number of  $Pr = 0.744$ , values of the buoyancy parameter (Richardson number) in the range  $-1 \leq Ri \leq 4$ , and a blockage ratio of  $BR = D/H = 0.3$ . All possible flow regimes are considered by setting the pitch-to-diameter ratios ( $\sigma = L/D$ ) to 2, 3 and 5. The interference effects and complex flow features are presented in the form of mean and instantaneous velocity, vorticity and temperature distributions. In addition, separation angles, time traces of velocity fluctuation, Strouhal number, characteristic times of flow oscillation, phase-space relation between the longitudinal and transverse velocity signals, wake structure, and recirculation length behind each cylinder have been determined. Local and space-averaged Nusselt numbers for the upstream and downstream cylinders have also been obtained. The results reported herein demonstrate how the flow and heat transfer characteristics are significantly modified by the wall confinement, tube spacing, and thermal effects for a wide range in the parametric space.

© 2016 Elsevier Inc. All rights reserved.

### 1. Introduction

In the last two decades, multiple experimental and numerical work aimed to study the cross-flow past two cylinders in tandem have been performed because of their numerous engineering applications in the design of heat exchangers, cooling of nuclear fuel rods, and flow and heat transfer around offshore structures and chimney stacks. However, the majority of these studies have focused on the effects of the cylinder spacing and proximity-induced interference in the flow structure and the force coefficients, as is evident in the reviews conducted in Blevins (1977); Chen (1987);

Sumner (2010); Zdravkovich (1977, 1985). The spatial arrangement of two cylinders can be aligned with the direction of the main flow (in tandem), placed side-by-side, or placed in a staggered arrangement. For the case of two cylinders of identical diameters in cross-flow placed in tandem, several flow regimes and flow interference between cylinders have been identified depending on the value of the Reynolds number and the location of the downstream cylinder with respect to the upstream one (Zdravkovich, 1977; 1987). The “extended body” regime (Xu and Zhou, 2004; Zhou and Yiu, 2006) occurs if the pitch-to-diameter ratio  $\sigma$  is smaller than a critical value of approximately  $1 < \sigma < 2$ . In this regime, the Kármán vortex shedding from the upstream cylinder is suppressed and the two cylinders behave as a single bluff body, the wake is narrower and the Strouhal number is higher than a single cylinder, the vortex roll-up takes place closer to the downstream

\* Corresponding author. Tel.: +52 55 57296000x64505; fax: +52 5557296000x64493.

E-mail address: [lamartinezs@ipn.mx](mailto:lamartinezs@ipn.mx) (L. Martínez-Suástegui).