

**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

CURSOS INSTITUCIONALES

ELECTROMAGNETISMO
7, 8, 14 y 15 de marzo de 1997.

APUNTES GENERALES

Ing. Gabriel A. Jaramillo Morales
Ing. Alfonso A. Alvarado C.
Universidad Veracruzana



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA



contenido. Al final de cada capítulo, se encuentra un conjunto de problemas propuestos en los que se desea que el estudiante aplique los conceptos y leyes del tema, y consolide su aprendizaje. La resolución de los problemas tiene un grado de dificultad creciente, pero asociada al avance del contenido de cada capítulo.

Cabe aclarar que estos problemas no son de sustitución directa de valores en una fórmula determinada, sino que requieren de planteamientos generales y la utilización de algunas expresiones particulares.

En la parte final de la obra se presentan un apéndice y las respuestas de todos los problemas propuestos; con esto último se pretende que el estudiante verifique si ha logrado el aprendizaje esperado. Se recomienda recurrir a la respuesta después de resolver el problema, ya que algunas de ellas muestran parte del razonamiento que es deseable que el alumno realice.

La responsabilidad de impartir esta asignatura también nos ha hecho conscientes de que para su mejor aprendizaje es conveniente que, además de las clases teóricas y de laboratorio, se realicen clases de ejercicios en las cuales un profesor con experiencia coordine las sesiones aplicando una metodología en la resolución de problemas; para este fin, los problemas propuestos al final de cada capítulo resultan ser de gran utilidad.

El presente trabajo, como ya se mencionó, cubre los conceptos fundamentales y varias de las aplicaciones de la electricidad y magnetismo; sin embargo, no pretende agotar el tema. Por esta razón, al final del texto hemos presentado la bibliografía complementaria que puede ser consultada para conseguir una ampliación de los conceptos de esta obra, la cual ponemos a la consideración de los lectores.

Mucho agradeceremos que los errores involuntariamente cometidos, así como las observaciones y críticas que motive el estudio de este libro, se nos hagan llegar al Departamento de Física de la Facultad de Ingeniería.

Deseamos destacar el apoyo brindado por las autoridades y por el personal de la Unidad de Apoyo Editorial de esta Facultad, muy especialmente a la Lic. María Cuairán Ruidíaz, actual Jefa de dicha Unidad, quien se encargó de la revisión de los originales y a la Sra. Araceli Mora Arceo quien, además de su profesionalismo y calidad, supo imprimir en este trabajo un cariño que rebasa, con mucho, su responsabilidad de colaboradora y compañera.

Finalmente, agradecemos a todas aquellas personas entre las que se cuentan compañeros, alumnos y profesores cuyos nombres sería muy largo mencionar, con el riesgo de omitir alguno, por su ayuda en la realización de esta edición, la cual esperamos tenga la misma acogida que la anterior y cumpla con el cometido educativo con que fue creada en beneficio de la juventud estudiosa.

ING. ALFONSO A. ALVARADO CASTELLANOS

ING. GABRIEL A. JARAMILLO MORALES

Julio de 1990

C O N T E N I D O

CAPITULO 1 CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICO

INTRODUCCION	
1.1 CARGA ELECTRICA	
1.2 CONDUCTORES Y DIELECTRICOS	
1.3 INDUCCION DE CARGA.	
1.4 LEY DE COULOMB	
1.5 CAMPO ELECTRICO	
1.6 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION	
1.7 DISTRIBUCIONES DE CARGA	
1.8 CALCULO DE CAMPOS ELECTRICOS DEBIDOS A DISTRIBUCIONES DE CARGA	
1.9 ESQUEMAS DE CAMPO ELECTRICO	
1.10 FLUJO ELECTRICO Y LEY DE GAUSS	
1.11 EJEMPLOS DE APLICACION DE LA LEY DE GAUSS	
1.12 LEY DE GAUSS EN FORMA DIFERENCIAL	

1.13	CIRCULACION Y ROTACIONAL DEL CAMPO ELECTROSTATICOS . . .	48
1.14	POTENCIAL ELECTRICO	57
1.15	EJEMPLOS DE CALCULO DE POTENCIAL Y DIFERENCIAS DE POTENCIAL DEBIDOS A DISTRIBUCIONES DE CARGA	69
1.16	GRADIENTE DE POTENCIAL	83
1.17	ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE	85
1.18	CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICO EN PRESENCIA DE CONDUCTORES	92
1.19	METODO DE IMAGENES	99
	P R O B L E M A S	103

CAPITULO 2 CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS

	I N T R O D U C C I O N	113
2.1	CAPACITANCIA Y SU CALCULO	113
2.2	EJEMPLOS DE CALCULO DE CAPACITANCIA	116
2.3	CAPACITORES Y SU CLASIFICACION	120
2.4	DENSIDAD DE ENERGIA ELECTRICA	123
2.5	ARREGLOS DE CAPACITORES EN SERIE Y PARALELO	128
2.6	POLARIZACION DE LA MATERIA	140

2.7	CONSTANTES DIELECTRICAS	146
2.8	RIGIDEZ DIELECTRICA	149
2.9	VECTORES ELECTRICOS	151
2.10	LEYES DE LA ELECTROSTATICA EN DIELECTRICOS	155
2.11	CAPACITORES Y DIELECTRICOS	160
P R O B L E M A S		173

CAPITULO 3 CORRIENTE, RESISTENCIA Y FUERZA ELECTROMOTRIZ

I N T R O D U C C I O N		181
3.1	MOVIMIENTO DE CARGA A TRAVES DE CONDUCTORES Y DENSIDAD DE CORRIENTE	181
3.2	CORRIENTE ELECTRICA	184
3.3	PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CARGA	188
3.4	LEY DE OHM	189
3.5	CONDUCCION DE CARGA A TRAVES DE SOLIDOS HOMOGENEOS	193
3.6	EFFECTO DE LA VARIACION DE LA TEMPERATURA EN LA RESISTIVIDAD	196
3.7	LEY DE JOULE	202

3.8	RESISTENCIA Y RESISTORES	206
3.9	RESISTORES CONECTADOS EN SERIE Y EN PARALELO	211
3.10	FUENTES DE FUERZA ELECTROMOTRIZ	217
3.11	FUERZA ELECTROMOTRIZ DE LAS CELDAS QUIMICAS	221
	PROBLEMAS	228

CAPITULO 4 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

	INTRODUCCION	233
4.1	NOMENCLATURA BASICA EMPLEADA EN LOS CIRCUITOS ELECTRICOS .	233
4.2	LEYES DE KIRCHHOFF	237
4.3	FORMA PRACTICA DE APLICAR LAS LEYES DE KIRCHHOFF	243
4.4	CIRCUITOS RESISTIVOS CON CORRIENTE ALTERNA SENOIDAL	250
4.5	CONEXION Y SIMBOLOGIA DE LOS INSTRUMENTOS DE MEDICION DE CORRIENTE, VOLTAJE Y RESISTENCIA	260
4.6	CIRCUITO RC CON SEÑAL DE VOLTAJE CONTINUO	264
	PROBLEMAS	278

CAPITULO 5 CAMPO MAGNETICO

I N T R O D U C C I O N	285
5.1 EXPERIMENTO DE OERSTED	285
5.2 FUERZA DE ORIGEN MAGNETICO SOBRE CARGAS EN MOVIMIENTO	287
5.3 DEFINICION DE CAMPO MAGNETICO	292
5.4 LEY DE BIOT-SAVART.	298
5.5 APLICACIONES DE LA LEY DE BIOT-SAVART	301
5.6 LEY DE AMPERE	325
5.7 ESQUEMAS DE CAMPO MAGNETICO	329
5.8 APLICACIONES DE LA LEY DE AMPERE	333
5.9 FLUJO DE LA INDUCCION MAGNETICA	340
5.10 FUERZA MAGNETICA SOBRE CONDUCTORES	347
5.11 MOMENTO DIPOLAR MAGNETICO	355
P R O B L E M A S	367

CAPITULO 6 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA

I N T R O D U C C I O N	377
6.1 LEY DE FARADAY	377

6.2	PRINCIPIO DE LENZ	381
6.3	FUERZA ELECTROMOTRIZ DE MOVIMIENTO	385
6.4	TRANSFORMADOR CON NUCLEO DE AIRE	393
6.5	CORRIENTES DE FOUCAULT.	400
6.6	EL GENERADOR HOMOPOLAR	405
6.7	GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA	408
6.8	PRINCIPIO DE OPERACION DEL MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA . .	411
	PROBLEMAS	417

CAPITULO 7 INDUCTANCIA

I N T R O D U C C I O N	425
7.1 INDUCTANCIA	425
7.2 INDUCTANCIA PROPIA O AUTOINDUCTANCIA	427
7.3 INDUCTANCIA MUTUA	430
7.4 EJEMPLOS DE CALCULO DE INDUCTANCIA PROPIA Y MUTUA	435
7.5 ENERGIA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNETICO	446
7.6 INDUCTORES CONECTADOS EN SERIE Y EN PARALELO	453
7.7 CIRCUITO RL CON FUENTE DE VOLTAJE CONTINUO.	458

P R O B L E M A S	475
------------------------------------	------------

CAPITULO 8 PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA

I N T R O D U C C I Ó N	483
8.1 EFECTOS MAGNETICOS DEBIDOS A LA PRESENCIA DE MATERIA . . .	483
8.2 CONTRIBUCION MAGNETICA DE LOS ATOMOS.	487
8.3 MAGNETIZACION DE LA MATERIA Y VECTORES MAGNETIZACION E IN- TENSIDAD DE CAMPO MAGNETICO	500
8.4 PARAMETROS USADOS PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO MAGNE- TICO DE LAS SUSTANCIAS.	509
8.5 COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES FERROMAGNETICOS	512
8.6 CIRCUITOS MAGNETICOS.	520
8.7 APLICACIONES DEL CIRCUITO MAGNETICO	536
P R O B L E M A S	549
A P E N D I C E A	557
R E S P U E S T A S	561
B I B L I O G R A F I A	581
I N D I C E A N A L I T I C O	583

CAPITULO 1 CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICOS

INTRODUCCIÓN

Las primeras observaciones de fenómenos eléctricos registradas en la Historia fueron realizadas por los griegos.

En el año 600 a.C. Tales de Mileto observó que al frotar ámbar con piel, aquél adquiría la propiedad de atraer pequeños pedazos de paja, papel o tela. A pesar de este conocimiento tan antiguo, la comprensión del fenómeno se llevó a cabo después del siglo XVI y la mayor parte de los experimentos y desarrollos teóricos sobre el electromagnetismo fueron realizados en el siglo XIX.

Los fenómenos observados por los griegos quedan contenidos en la parte del electromagnetismo que estudia los cuerpos cargados en reposo, conocida como electrostática.

En este capítulo iniciaremos el estudio del fenómeno electromagnético investigando el comportamiento de las partículas cargadas en reposo y el de cuerpos cuyo exceso de carga ha alcanzado su equilibrio estático.

Introduciremos los conceptos de campo y potencial eléctricos desarrollando los modelos matemáticos que describen el fenómeno electrostático.

1.1 CARGA ELECTRICA

Algunas de las partículas que forman los átomos, adicionalmente a la propiedad fundamental llamada masa, poseen otra propiedad llamada carga eléctrica.

La carga de dichas partículas puede ser de dos tipos: una partícula subatómica puede poseer la carga que caracteriza el protón o la típica del electrón; además existen partículas que poseen ambos tipos de carga simultáneamente (neutrón), en este caso decimos que la partícula no posee exceso de carga.

Analizaremos a continuación un experimento que nos permita darnos cuenta de la existencia de los dos tipos de carga mencionados y de algunas características del fenómeno de atracción y repulsión entre cuerpos con exceso de carga.

Tomemos una barra de vidrio y frotémosla con un pedazo de seda; observaremos que después de frotada es capaz de atraer pequeños pedazos de papel o cualquier otro material ligero.

Si, por otro lado, frotamos una barra de ebonita (hule duro) con piel, observaremos que también adquiere la capacidad de atraer pequeños pedazos de materiales ligeros.

Con un dispositivo semejante al de la figura 1.1 podremos notar que las dos barras, previamente frotadas con sus respectivos excitadores, se atraen entre sí.

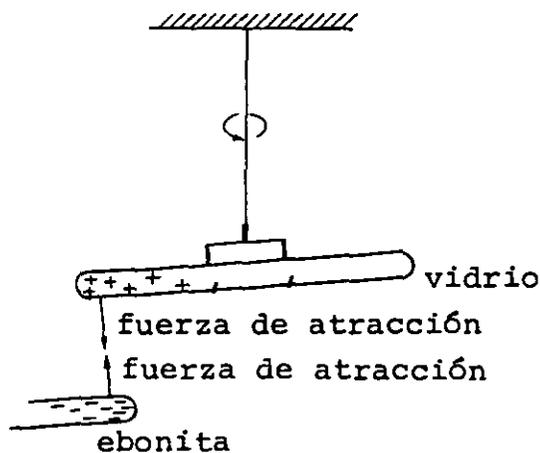


FIGURA 1.1. Dispositivo para detectar la fuerza de atracción entre dos barras con carga opuesta.

Repitiendo el experimento anterior, ahora con dos barras del mismo material frotadas con el mismo excitador, observaremos que se rechazan.

Con base en el experimento descrito, repetido con diversos materiales, concluimos que existen dos tipos de carga eléctrica. A los materiales que adquieren un exceso de carga del mismo tipo que el vidrio frotado con seda les llamaremos materiales con exceso de carga positiva o simplemente cargados positivamente (con defecto de electrones). De manera semejante, a los que adquieren un exceso de carga del mismo tipo que la ebonita frotada con piel les llamaremos materiales con exceso de carga negativa o cargados negativamente (con exceso de electrones).

La convención mencionada fue originalmente propuesta por Benjamín Franklin.

Del experimento analizado se desprende que:

- a) Cargas del mismo tipo se rechazan.
- b) Cargas de diferente tipo se atraen.

Dado que los átomos de cualquier sustancia normalmente poseen igual número de partículas positivas y negativas y que además, la magnitud de las cargas positiva y negativa de las partículas es la misma con una exactitud de una parte en 10^{20} , podemos afirmar que la materia en condiciones normales no posee exceso de carga de ningún tipo.

Como no se ha encontrado una carga de magnitud menor que la del electrón, un cuerpo cargado posee solamente una cantidad de carga en exceso, múltiplo entero de dicha carga.

Se dice que la carga eléctrica está cuantizada; entendiéndose con ello que no existen fracciones de la carga básica e del electrón.

1.2 CONDUCTORES Y DIELECTRICOS

Para poder comprender los primeros fenómenos observados es necesario que distingamos entre materiales conductores y materiales aislantes o dieléctricos. Por el momento esta distinción no será rigurosa, ya que aún no tenemos los elementos suficientes que nos permitan comprender adecuadamente la estructura y características de ambos tipos de materiales.

Un material conductor es cualquier sustancia que posee gran cantidad de portadores de carga libres por unidad de volumen; con ayuda de éstos es posible transportar carga fácilmente de un lugar a otro a través de ellos ($\approx 10^{17}$ o más portadores por cm^3).

EJEMPLOS:

metal
gas ionizado
electrólito

Llamaremos aislante o dieléctrico a cualquier sustancia que no posee portadores de carga libres, o bien, que posee un número muy reducido por unidad de volumen ($\approx 10^5$ o menos portadores por cm^3).

EJEMPLOS:

plástico
aceite
helio no ionizado

Existen materiales que poseen un número de portadores de carga libres del orden de 10^{11} en cada cm^3 a temperatura ambiente de 300 K, que se conocen como semiconductores. Estos materiales no se mencionarán en el desarrollo de este tema.

1.3 INDUCCION DE CARGA

Cuando un material cualquiera es colocado en la vecindad de un cuerpo cargado, se detecta en él la aparición de una distribución superficial de carga; este fenómeno se conoce como inducción de carga.

Si el material es un conductor metálico, la presencia de la carga inducida se debe al movimiento de electrones libres que son atraídos o rechazados dejando exceso de carga positiva al desplazarse y aumentando la negativa donde se acumulan, como se indica en la figura 1.2.

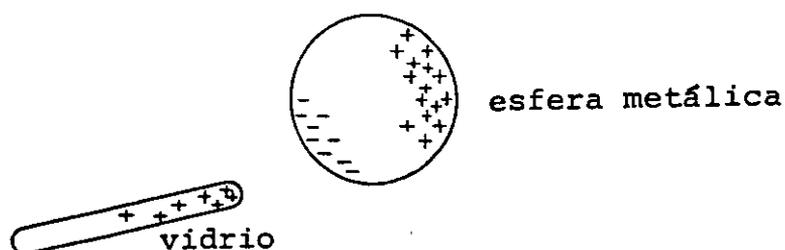


FIGURA 1.2. Fenómeno de inducción de carga en una esfera metálica.

En los dieléctricos la aparición de carga inducida se debe a la orientación molecular o electrónica, que será explicada con detalle en el siguiente tema.

Es conveniente enfatizar que el fenómeno de inducción de carga no altera el balance de cargas positivas y negativas de los cuerpos, ya que si aparece carga de un tipo en una zona del material, la misma cantidad de carga de distinto tipo aparecerá en otra.

1.4 LEY DE COULOMB

Como resultado de los experimentos realizados por Priestley en 1767 y repetidos por Coulomb años después, sabemos que la fuerza eléctrica de atracción o repulsión que actúa entre un par de pequeñas esferas, cargadas y separadas una cierta distancia, obedece a la relación de proporcionalidad siguiente:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

donde

q_1 = carga de la esfera 1

q_2 = carga de la esfera 2

r = distancia entre sus centros

Esta fuerza actúa a lo largo de la línea que une los centros de las esferas.

La relación dada tiene la limitación de cumplirse solamente para cuerpos pequeños cuya separación sea mucho mayor que sus dimensiones; esto es debido al efecto de inducción de carga, por lo anteriormente expuesto es conveniente considerar la idealización que llamaremos *carga punto* o *carga puntual*; entenderemos por ella que la carga está, en esencia, concentrada en un punto. Con esto evitamos el problema que presenta el tener cuerpos geoméricamente irregulares cuyas dimensiones no permiten definir la distancia entre ellos.

Para obtener de la relación de proporcionalidad una igualdad, podríamos seguir cualquiera de los dos caminos siguientes:

a) Escoger la unidad de medición de la carga de tal manera que la constante de proporcionalidad sea unitaria.

b) Emplear el Sistema Internacional de Unidades (SI) donde la unidad de carga está determinada como ampere · segundo \equiv coulomb, y la constante tendrá que obtenerse en forma experimental.

A lo largo de todas las notas usaremos el SI. En dicho sistema la constante de proporcionalidad para el vacío se escribe como

$$\text{Constante de proporcionalidad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

donde

$$\epsilon_0 = \text{permitividad del vacío}$$

Introducir el factor 4π en la constante evitará que este factor aparezca posteriormente en otras expresiones empleadas en electromagnetismo.

Experimentalmente se ha determinado que

$$\epsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \right]$$

entonces

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987518 \times 10^9 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \right]$$

Con objeto de facilitar los cálculos que realizaremos es conveniente considerar

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \right]$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \times 10^9 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \right]$$

La magnitud de la fuerza electrostática en el SI será entonces

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \text{ [N]} \quad (1.1)$$

donde las cargas q_1 y q_2 están medidas en coulombs {C}, la distancia r en metros {m}, y la fuerza se obtendrá en newtons {N} .

Vectorialmente la fuerza eléctrica la expresamos como

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.2)$$

donde \hat{r}^* representa el vector unitario en la dirección que actúa la fuerza eléctrica. Debemos notar que el vector unitario dependerá de la fuerza que se desee calcular, por lo que tomaremos una convención. Llamaremos \vec{F}_{12} a la fuerza que actúa sobre q_1 , debido a la presencia de q_2 . Similarmente, \vec{F}_{21} será la fuerza que actúa sobre q_2 , debida a q_1 , como se indica en la figura 1.3.

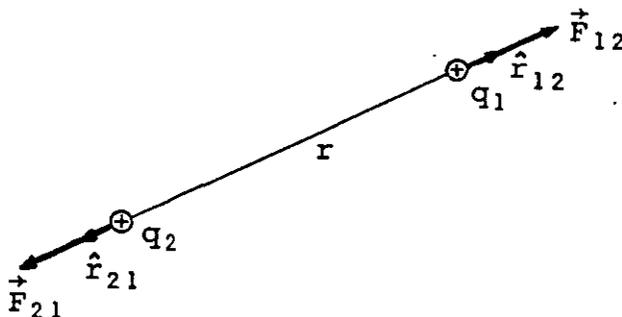


FIGURA 1.3. Convención de nomenclatura para fuerzas eléctricas.

* El símbolo $\hat{}$ sobre cualquier letra denotará que se trata de un vector unitario.

Deben ser claras, entonces, las igualdades siguientes

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} \quad (1.3)$$

$$F_{12} = F_{21} \quad (1.4)$$

Con objeto de hacer énfasis en las limitaciones de aplicación de la expresión analizada, mencionaremos que sólo se emplea si

- a) Podemos considerar los cuerpos cargados como puntuales, o bien,
- b) son esferas con distribución uniforme de carga, es decir, no se considera la inducción.

Además los cuerpos cargados deben estar en reposo o moverse con una velocidad mucho menor que la velocidad de la luz, ya que el fenómeno electromagnético en el vacío se propaga a esa velocidad.

1.5 CAMPO ELECTRICO

Una forma más conveniente de manejar los problemas relacionados con fuerza eléctrica es a través del concepto de campo eléctrico. Si definimos como vector intensidad de campo eléctrico \vec{E} en un punto dado de una región, a la fuerza eléctrica por unidad de carga colocada en el punto, entonces, a cada punto de la región donde existe carga eléctrica podemos asociar un vector intensidad de campo eléctrico. Por ende, existe para dicha región una función vectorial de variable vectorial o campo vectorial; usualmente se dice que existe un campo eléctrico.

Cuando al colocar una carga q en un punto cualquiera experimenta una fuerza eléctrica \vec{F} , entonces

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.5)$$

que es la expresión que permite obtener el vector intensidad de campo eléctrico en el punto considerado.

Supongamos ahora que se tienen dos cargas puntuales positivas cualesquiera q_1 y q_2 separadas una distancia r ; podemos imaginar que la fuerza eléctrica que actúa sobre q_2 es debida a la existencia de un campo eléctrico en la región producido por q_1 y viceversa.

Llamaremos A el punto donde se encuentra ubicada la carga puntual q_2 , como se muestra en la figura 1.4.

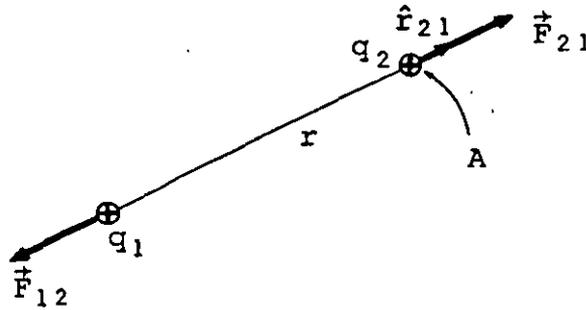


FIGURA 1.4. Campo eléctrico producido por la carga q_1 en el punto A .

El vector intensidad de campo eléctrico en el punto A será

$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}_{21}}{q_2} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}}{q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{r}_{21} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.6)$$

En general, la expresión que determina el campo eléctrico en una región donde existe una carga puntual Q , y considerando, para facilitar, que Q se encuentra en el origen de nuestro sistema de referencia, será

a) En coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(xi + yj + zk)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.7)$$

b) En coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r \hat{r} + z \hat{z})}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

c) En coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \hat{r}}{r^2} \quad (1.9)$$

Explicaremos brevemente cómo se obtiene la expresión en coordenadas cartesianas.

La distancia de la carga Q a un punto cualquiera $P(x, y, z)$, indicado en la figura 1.5, es simplemente

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

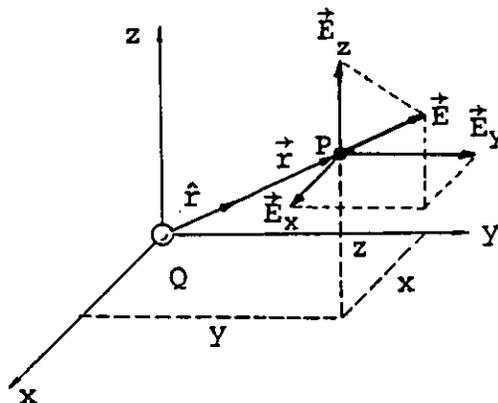


FIGURA 1.5. Campo eléctrico en el punto P en un sistema de coordenadas cartesianas.

La magnitud del campo eléctrico es entonces

$$|\vec{E}(x,y,z)| = E(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

y vectorialmente

$$\vec{E}(x,y,z) = E(x,y,z) (\cos\alpha \mathbf{i} + \cos\beta \mathbf{j} + \cos\gamma \mathbf{k})$$

y

$$\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

finalmente

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

1.6 PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

Cuando en una región del espacio existen dos o más cargas puntuales y se desea calcular la intensidad de campo eléctrico en un punto, podemos aplicar lo que se conoce como principio de superposición, que nos indica que el campo total en un punto se puede calcular como la suma vectorial de los campos producidos por cada una de las cargas que existen en la región. Esto implica que el campo eléctrico que produce una carga no se verá afectado por la presencia de otras cargas.

Cuando se tienen n cargas puntuales, el campo eléctrico se puede expresar de la forma siguiente

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.10)$$

no olvidando, por supuesto, que se trata de una suma vectorial que podemos descomponer en varias sumas de componentes, según el sistema de referencia empleado.

EJEMPLO 1.1

Se desea calcular el vector intensidad de campo eléctrico en el punto A (4,3), considere las acotaciones en cm.

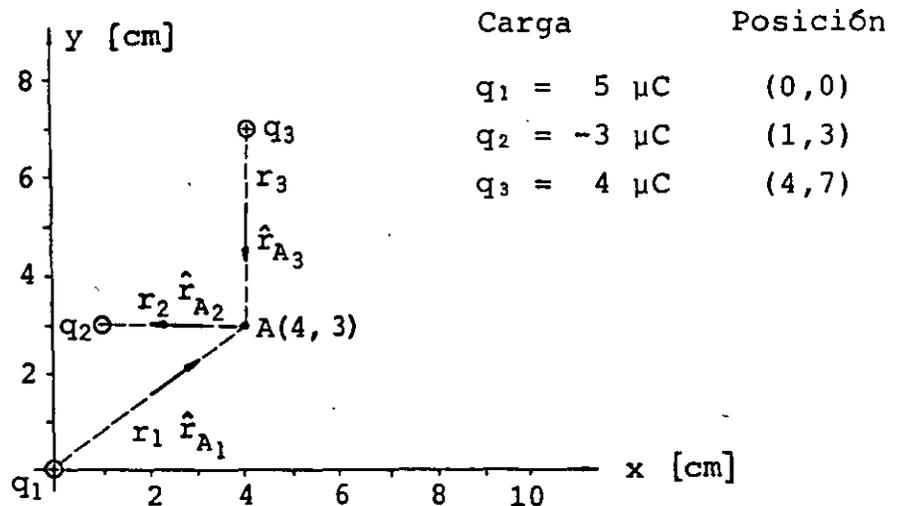


FIGURA 1.6. Campo eléctrico producido por tres cargas puntuales.

Calculemos primero el vector intensidad de campo debido a cada carga por separado.

$$E_{A1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \frac{5 \times 10^{-6} \text{C}}{25 \times 10^{-4} \text{m}^2}$$

y

$$E_{A1} = \frac{90 \times 10^6}{5} = 18 \times 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

$$\vec{E}_{A1} = E_{A1} \hat{r}_{A1} \quad \text{y} \quad \hat{r}_{A1} = \frac{4}{5} i + \frac{3}{5} j$$

finalmente

$$\vec{E}_{A1} = (14.4 i + 10.8 j) 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

De manera semejante

$$E_{A2} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-4}} = 30 \times 10^6 ; \quad \hat{r}_{A2} = - i$$

$$\vec{E}_{A2} = - 30 i \times 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

$$E_{A3} = 9 \times 10^9 \frac{4 \times 10^{-6}}{16 \times 10^{-4}} = 22.5 \times 10^6 ; \quad \hat{r}_{A3} = - j$$

$$\vec{E}_{A3} = - 22.5 j \times 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

Aplicando el principio de superposición

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A1} + \vec{E}_{A2} + \vec{E}_{A3}$$

$$\vec{E}_A = - (15.6 i + 11.7 j) \times 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

o también

$$E_A = 19.5 \times 10^6 \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\theta_x = -143^\circ = 217^\circ = 3.79 \text{ rad}$$

1.7 DISTRIBUCIONES DE CARGA

En general el exceso de carga en los cuerpos puede presentarse distribuido en un volumen, una superficie o una línea.

La figura 1.7 muestra el caso de una región con densidad volumétrica de carga.

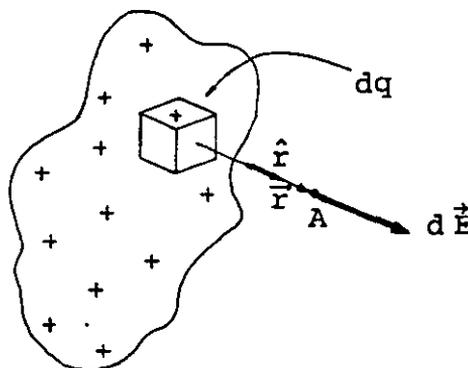


FIGURA 1.7. Campo eléctrico producido por una distribución volumétrica de carga.

Para encontrar el campo total en un punto cualquiera A, se toma la contribución de cada elemento de carga dq , el cual se puede considerar como carga puntual y se integra en toda la región. Es decir, si

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.11)$$

entonces

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.12)$$

Debemos tener presente que se trata de una integral vectorial, es decir, se debe descomponer en las integrales de las componentes.

Tomaremos la convención de notación siguiente

$$\lambda = \frac{dq}{dl} ; \text{ densidad lineal de carga } \left[\frac{C}{m} \right] \quad (1.13)$$

$$\sigma = \frac{dq}{dA} ; \text{ densidad superficial de carga } \left[\frac{C}{m^2} \right] \quad (1.14)$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} ; \text{ densidad volumétrica de carga } \left[\frac{C}{m^3} \right] \quad (1.15)$$

Por ejemplo, si la carga se encuentra distribuida en un volumen, la expresión (1.12) quedará

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r} \quad (1.16)$$

donde se ha introducido el símbolo de integral triple con objeto de enfatizar la generalidad del procedimiento.

Cuando se desea detectar la existencia de un campo eléctrico producido por una distribución de carga y se usa una carga de prueba q , dicha carga afectará la distribución debido al fenómeno de inducción, por lo que una definición más adecuada para el vector intensidad de campo eléctrico es

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (1.17)$$

1.8 CALCULO DE CAMPOS ELECTRICOS DEBIDOS A DISTRIBUCIONES DE CARGA

a) Campo eléctrico producido por un segmento de línea cargada

La figura 1.8 muestra un segmento de línea con distribución lineal uniforme de carga λ y un punto cualquiera A separado una distancia a del eje del segmento.

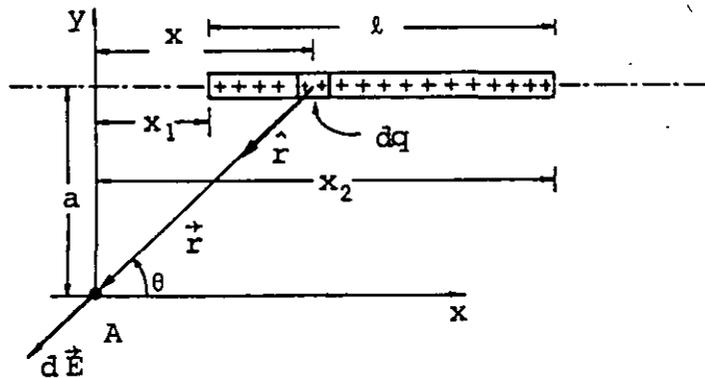


FIGURA 1.8. Campo eléctrico de un segmento de línea cargado.

Por conveniencia haremos coincidir el punto A con el origen de nuestro sistema de referencia. Por tratarse de una distribución lineal, de la expresión (1.11) obtenemos que

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \hat{r} \quad (1.18)$$

como

$$\hat{r} = -\frac{x}{r} \mathbf{i} - \frac{a}{r} \mathbf{j} \quad (1.19)$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \left(-\frac{x}{r} \mathbf{i} - \frac{a}{r} \mathbf{j} \right) \quad (1.20)$$

es decir

$$\vec{E} = \left(\int dE_x \right) i + \left(\int dE_y \right) j \quad (1.21)$$

Integremos primero la componente en x

$$E_x = \int dE_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int \frac{x}{r^3} dx \quad (1.22)$$

$$\text{como } r^3 = (a^2 + x^2)^{3/2} \quad (1.23)$$

sustituyendo (1.23) en (1.22), completando la diferencial e indicando límites tenemos

$$E_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{2x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (1.24)$$

$$E_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{2} \left[\frac{(a^2 + x^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (1.25)$$

$$E_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[\frac{1}{(a^2 + x_1^2)^{1/2}} - \frac{1}{(a^2 + x_2^2)^{1/2}} \right] \quad (1.26)$$

Para la componente en y

$$E_y = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (1.27)$$

expresión que puede integrarse por medio de una sustitución trigonométrica ($x = a \cot \theta$), esto es

$$E_y = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda a \left[\frac{x}{a^2 (a^2 + x^2)^{1/2}} \right]_{x_1}^{x_2} \quad (1.28)$$

$$E_Y = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \left[\frac{x_2}{(a^2 + x_2^2)^{1/2}} - \frac{x_1}{(a^2 + x_1^2)^{1/2}} \right] \quad (1.29)$$

Una forma más usual de expresar estas componentes es por medio de los ángulos terminales indicados en la figura 1.9.

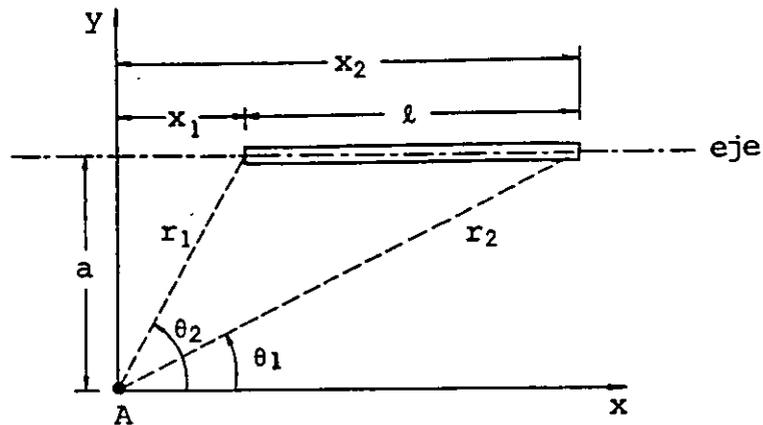


FIGURA 1.9. Angulos terminales de un segmento de línea.

Las expresiones (1.26) y (1.29) quedarán

$$E_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1) \quad (1.30)$$

$$E_y = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\text{cos } \theta_1 - \text{cos } \theta_2) \quad (1.31)$$

Estas últimas expresiones tienen la limitación de no aplicarse a puntos sobre el eje del segmento.

Si el punto se encuentra sobre la mediatriz del segmento, por simetría $E_x = 0$, lo que se comprueba fácilmente con las ecuaciones (1.26) o (1.30) (ya que $x_1 = -x_2$ o bien $\text{sen } \theta_2 = \text{sen } \theta_1$).

En el caso particular en que la distancia a la línea (a), es mucho menor (10 veces menor o más) que la longitud (l) de ésta, y el punto donde queremos obtener el campo eléctrico está aproximadamente en la región media del segmento, tendremos

$$E_x \ll E_y \quad \text{y} \quad E_y \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a}$$

Resumiendo

Si $l \gg a$ y el punto está cerca de la zona media del segmento (en el tercio central de l)

$$E_x \ll E_y$$

(1.32)

$$E_y \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a} \doteq E_{\text{Total}}$$

EJEMPLO 1.2

Calcule el vector intensidad de campo eléctrico en el punto A que se indica en la figura 1.9a. Analice si es posible usar la aproximación propuesta, y calcule el posible error.

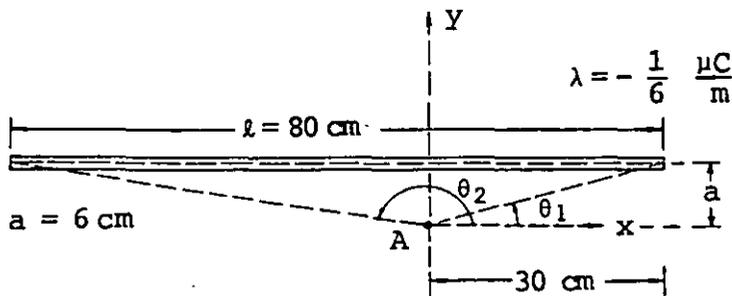


FIGURA 1.9a. Segmento de línea cargado negativamente.

SOLUCION

Cálculo exacto.

Empleando la expresión (1.30)

$$E_{A_x} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1)$$

sustituyendo valores

$$E_{A_x} = -9 \times 10^9 \frac{-\frac{1}{6} \times 10^{-6}}{0.06} \left(\frac{0.06}{\sqrt{(0.06)^2 + (0.5)^2}} - \frac{0.06}{\sqrt{0.09 + 0.0036}} \right)$$

Realizando operaciones, obtenemos la componente en la dirección x

$$E_{A_x} = -1.92 \times 10^3 \left[\frac{N}{C} \right]$$

Similarmente, de (1.31)

$$E_{A_y} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$E_{A_y} = -9 \times 10^9 \frac{-\frac{1}{6} \times 10^{-6}}{0.06} \left(\frac{0.3}{\sqrt{0.0936}} - \frac{-0.5}{\sqrt{0.2536}} \right)$$

La componente en la dirección y será

$$E_{A_y} = 49.34 \times 10^3 \left[\frac{N}{C} \right]$$

Por lo que el vector intensidad de campo queda

$$E_A = 49.37 \times 10^3 \left[\frac{N}{C} \right], \theta_x = 92.2^\circ = 1.61 \text{ rad}$$

Cálculo aproximado.

Dado que $l > 10a$ y la distancia del punto A al extremo más cercano del segmento es mayor que $1/3$ de la longitud de éste, entonces es válido aplicar (1.32), por lo que

$$E_{A_y} = E'_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a}$$

$$E'_A = 9 \times 10^9 \left[\frac{2 \left(\frac{1}{6} \times 10^{-6} \right)}{0.06} \right]$$

$$E'_A = 50 \times 10^3 \left[\frac{N}{C} \right]$$

y como $E_{A_x} \ll E_{A_y}$ se tiene que $\theta'_x = 90^\circ = 1.57 \text{ rad}$

Porcentaje de error en el cálculo aproximado.

$$\begin{aligned} \text{Error en la magnitud } E_A &= 100 \left[\frac{|E'_A - E_A|}{E_A} \right] \\ &= 100 \left[\frac{|50 - 49.37| 10^3}{49.37 \times 10^3} \right] \end{aligned}$$

$$\% \text{ error en } E_A = 1.27\%$$

$$\begin{aligned} \text{error en el ángulo } \theta_x &= 100 \left[\frac{|\theta'_x - \theta_x|}{\theta_x} \right] \\ &= 100 \left[\frac{|90^\circ - 92.2^\circ|}{92.2^\circ} \right] \end{aligned}$$

$$\% \text{ error en } \theta_x = 2.38\%$$

Estos resultados justifican el empleo de (1.32) en el cálculo del vector intensidad de campo eléctrico propuesto.

b) Campo eléctrico producido por un anillo circular cargado

Obtendremos ahora la expresión que permite evaluar la magnitud del vector intensidad de campo eléctrico en puntos sobre el eje de un anillo con distribución lineal uniforme de carga.

Consideremos el anillo circular de radio a mostrado en la figura 1.10, donde se ha indicado un punto cualquiera sobre el eje del anillo a una distancia b del centro.

Según nuestro procedimiento, consideraremos la contribución de cada elemento dq al campo eléctrico total en el punto A .

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

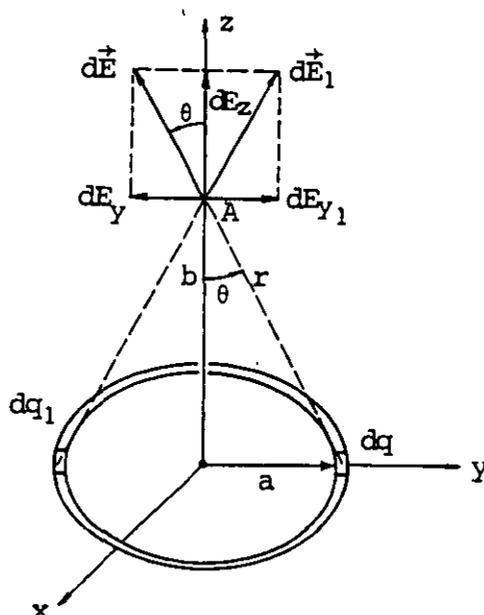


FIGURA 1.10. Anillo con densidad lineal uniforme de carga.

Observamos en la figura que por simetría las componentes en x y y se cancelan entre sí, quedando el campo total en dirección z exclusivamente.

$$E_A = \int dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \cos \theta \quad (1.33)$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cos \theta}{r^2} \quad (1.34)$$

En función del radio a y la distancia b

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qb}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.35)$$

Existen dos casos particulares que el lector debe comprobar

1. Para el centro del anillo $E = 0$

2. Para un punto lejano

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \left[\frac{N}{C} \right]$$

c) Campo eléctrico producido por una superficie circular cargada

Si queremos evaluar el campo eléctrico que existe en puntos alojados sobre el eje de una superficie circular cargada de radio r_0 con una densidad uniforme σ , utilizaremos el resultado obtenido en el inciso anterior.

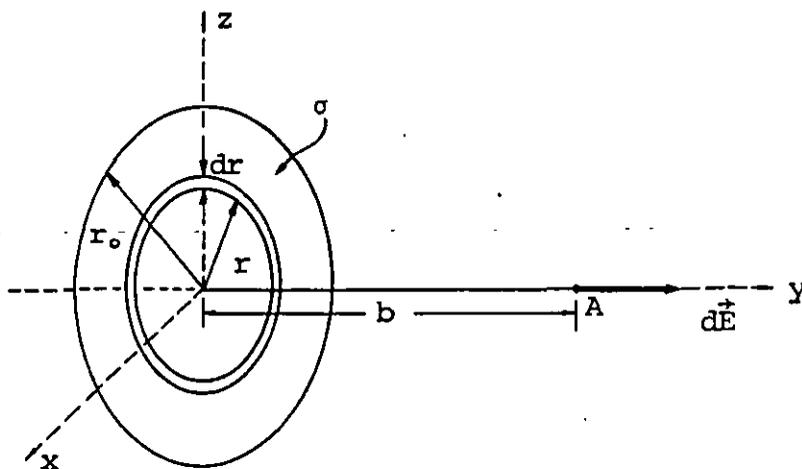


FIGURA 1.11. Superficie circular cargada.

La superficie circular de la figura 1.11 se puede considerar formada por un conjunto de anillos de grosor dr y radio variable r cuya contribución diferencial al campo total será

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{b dq}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (1.36)$$

como

$$dq = \sigma dA = \sigma 2\pi r dr \quad (1.37)$$

entonces

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} b \sigma (\pi) \int_0^{r_0} \frac{2r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (1.38)$$

reduciendo

$$E = \frac{\sigma b}{4\epsilon_0} \int_0^{r_0} \frac{2r dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (1.39)$$

$$E = \left[-\frac{\sigma b}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + b^2)^{1/2}} \right]_0^{r_0} \quad (1.40)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{b}{(r_0^2 + b^2)^{1/2}} \right) \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.41)$$

La expresión (1.41) presenta dos casos particulares de interés.

1. La distancia $b \ll r_0$ y el punto donde se calcula el campo se encuentra cerca del centro de la superficie cargada.

$$E \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{N}{C} \right] \quad (1.42)$$

2. La distancia $b \gg r_0$, por lo que la expresión se debe reducir a la de una carga puntual.

La ecuación (1.41) se puede escribir

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{(r_0^2 + b^2)^{1/2} - b}{(r_0^2 + b^2)^{1/2}} \right)$$

también

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{(1 + (r_0/b)^2)^{1/2} - 1}{(1 + (r_0/b)^2)^{1/2}} \right) \quad (1.43)$$

Usando el teorema del binomio

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{r_0}{b} \right)^2 \right)^{1/2} &= 1 + \frac{1/2}{1!} \left(\frac{r_0}{b} \right)^2 + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!} \left(\frac{r_0}{b} \right)^4 \\ &+ \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!} \left(\frac{r_0}{b} \right)^6 + \dots \end{aligned}$$

dato que $\frac{r_0}{b} \rightarrow 0$ para $b \gg r_0$ es una buena aproximación, considerar

$$\left(1 + \left(\frac{r_0}{b}\right)^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{b}\right)^2$$

por lo que

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{b}\right)^2 - 1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{b}\right)^2} \right] \quad (1.44)$$

Como $1 \gg \frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{b}\right)^2$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{b^2} \right) \quad (1.45)$$

y

$$\sigma = \frac{Q}{\pi r_0^2} \quad (1.46)$$

$$\therefore E = \frac{Q}{2\epsilon_0 \pi r_0^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r_0^2}{b^2} \right)$$

finalmente

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b^2} \quad (1.47)$$

1.9 ESQUEMAS DE CAMPO ELECTRICO

En general los esquemas de campo tienen la finalidad de simplificar la visualización de la configuración de un campo cualquiera.

Cuando se incrementa el número de cargas puntuales en una región o se consideran ciertas distribuciones de carga, las ecuaciones que determinan el campo eléctrico se hacen más complejas y no puede interpretarse la configuración del campo fácilmente.

Es por ello que se ha pensado en representaciones diagramáticas que a simple vista nos indiquen, aunque sea en forma aproximada, cómo es el campo en una región.

Existen diversas posibilidades de representación, aquí mencionaremos la más usual que es la que se realiza por medio de las llamadas líneas de campo o líneas de flujo eléctrico, las cuales poseen las características siguientes:

- a) La dirección de cualquier línea coincide en cada punto con la dirección del campo eléctrico.
- b) Se dibujan de tal manera que su número es proporcional a la magnitud del campo eléctrico.

Como consecuencias de las características mencionadas, tenemos que las líneas: se originan en las cargas positivas, terminan en las negativas y nunca se cruzan.

En la figura 1.12 se presentan dos esquemas típicos de campo eléctrico.

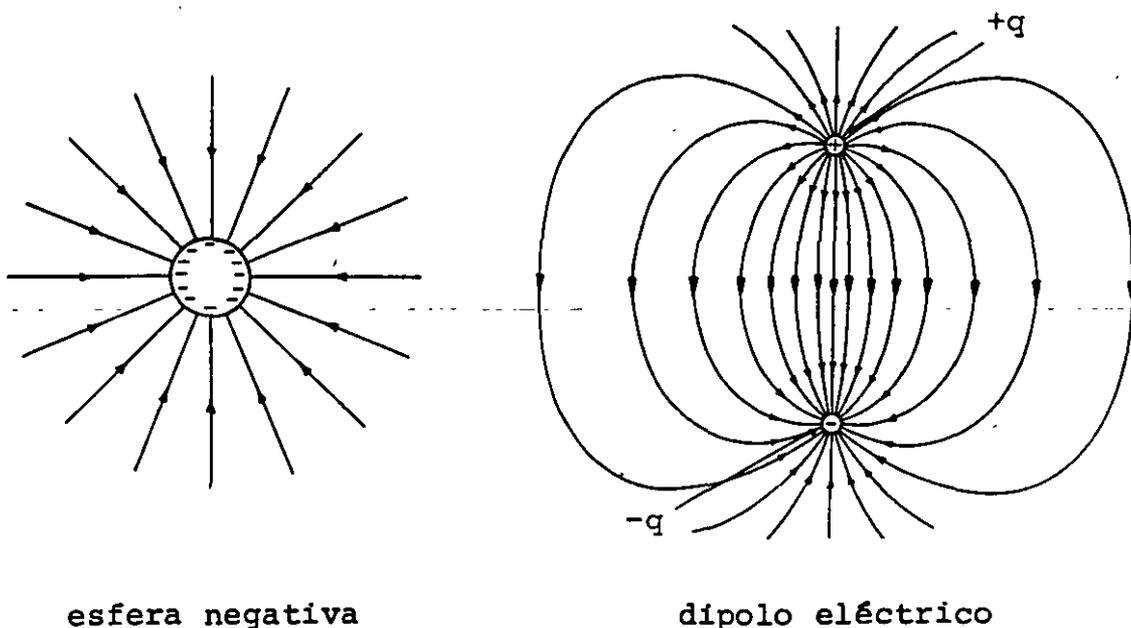


FIGURA 1.12. Esquemas de campos eléctricos.

Para dibujar un número de líneas que represente convenientemente un campo, se escoge un factor de escala, es decir, se hace corresponder a una intensidad de campo dado un cierto número de líneas por cada metro cuadrado.

Un factor de escala típico es considerar una línea por metro cuadrado para una intensidad de 1 N/C ; para esta selección el número de líneas N_l que debemos dibujar, saliendo de una carga puntual positiva Q , se obtiene considerando que para una esfera de radio r_0 concéntrica con la carga, la magnitud del vector intensidad de campo es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^2} \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

entonces

$$\frac{N_l}{4\pi r_0^2} \triangleq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^2}$$

de donde obtenemos

$$N_l = \frac{Q}{\epsilon_0} \text{ líneas}$$

Comprobar que para una esfera de radio $r_0 = 2 \text{ cm}$, con densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 42.256 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$ se deben dibujar 24 líneas.

1.10 FLUJO ELECTRICO Y LEY DE GAUSS

Existen dos características fundamentales de los campos vectoriales que nos permitirán describir las leyes del electromagnetismo de manera simple, éstas son:

- a) Flujo
- b) Circulación

El flujo de cualquier campo vectorial \vec{C} a través de un elemento de superficie dA se define como

$$d\phi = \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (1.48)$$

Donde $d\phi$ se obtiene como resultado de multiplicar la componente de \vec{C} perpendicular a la superficie por el valor de ésta.

Cuando se desea evaluar el flujo a través de una superficie finita, la ecuación (1.48) quedará

$$\phi_c = \iint_A \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (1.49)$$

Para superficies cerradas la dirección del vector $d\vec{A}$ es perpendicular a la superficie y apuntando hacia fuera.

El concepto de flujo así definido nos es útil para describir diversos fenómenos: un caso muy conocido ocurre cuando el campo vectorial es el que representa la velocidad de las partículas de un fluido; al evaluar el flujo de ese campo a través de una superficie se obtiene el volumen (m^3) del fluido que cruza cada segundo la superficie mencionada.

Cuando se obtiene el flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada que contiene una carga neta Q_N , el resultado es

$$\phi_e = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_N}{\epsilon_0} \left[\frac{N \cdot m^2}{C} \right] \quad (1.50)$$

Expresión conocida como ley de Gauss que podemos enunciar de la forma siguiente:

El flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada, es igual a la carga neta contenida en el interior de la superficie dividida entre ϵ_0 .

En general, cuando se tiene carga distribuida, la carga neta Q_N se calculará integrando, es decir, la expresión de Gauss puede ser presentada como

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV \quad (1.51)$$

donde

$$Q_N = \iiint \rho dV \quad (1.52)$$

Esta ley es una consecuencia necesaria de la ley de Coulomb y de nuestra definición de campo eléctrico. A continuación probaremos la validez de la ecuación (1.50), haciendo uso del concepto de ángulo sólido que se presenta en el apéndice A.

Consideremos una superficie cerrada cualquiera con una carga puntual q en su interior, como se indica en la figura 1.13.

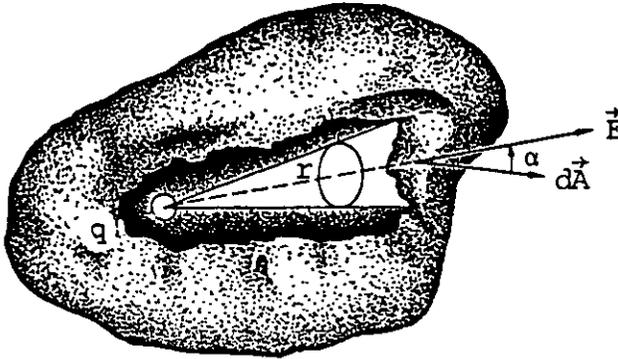


FIGURA 1.13. Superficie gaussiana con una carga q en su interior.

El vector intensidad de campo eléctrico, en un punto sobre la superficie, estará dado por la expresión

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Evaluemos el flujo eléctrico ϕ_e

$$\phi_e = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint E \, dA \cos \alpha \quad (1.53)$$

sustituyendo la expresión de \vec{E}

$$\phi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{q}{r^2} \cos \alpha \, dA$$

$$\phi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \iint \frac{dA \cos \alpha}{r^2}$$

pero $\iint \frac{dA \cos \alpha}{r^2}$ es la integral del ángulo sólido subtendido desde un punto interior, el cual sabemos es igual a 4π esterradianes.

Entonces

$$\phi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Aunque la demostración fue realizada para una carga puntual q , este resultado se puede generalizar ya que existe una relación lineal entre la carga y la magnitud del campo, por lo que podemos aplicar el principio de superposición para obtener la definición general.

La aplicación de la ley de Gauss nos permite obtener la carga contenida en una superficie cerrada imaginaria si se conoce la función que describe el campo eléctrico en la región; también es útil para calcular la función de campo eléctrico de distribuciones de carga simétricas. En éstas, la aplicación de la ley de Gauss nos permite obtener fácilmente el campo eléctrico.

Aunque la expresión (1.51) es general, su aplicación está limitada por la dificultad que se presenta al evaluar las integrales, y es por ello que sólo resulta práctico aplicarla en la obtención del campo eléctrico para distribuciones de carga simétricas.

1.11 EJEMPLOS DE APLICACION DE LA LEY DE GAUSS

a) Campo eléctrico producido por una esfera con distribución superficial (σ) uniforme de carga

Supongamos que se desea obtener la expresión que determina el campo eléctrico producido a una distancia r por una esfera conductora cargada de radio $r_0 < r$, como se indica en la figura 1.14.

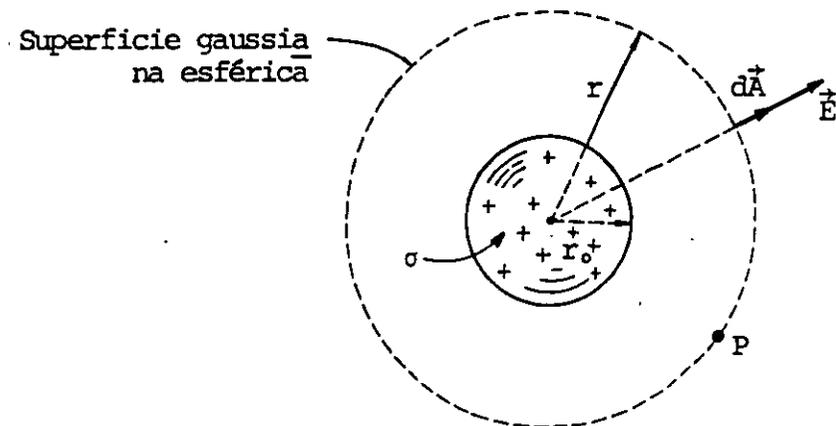


FIGURA 1.14. Superficie gaussiana empleada en el cálculo del campo eléctrico que produce una esfera cargada.

Apliquemos la ley de Gauss suponiendo la existencia de una superficie cerrada que contenga el punto P donde se desea obtener el campo eléctrico, por conveniencia supondremos una superficie esférica concéntrica con la esfera cargada.

Esta superficie posee la ventaja de que, por simetría, la magnitud del campo es constante en ella. Además, la dirección del vector intensidad de campo eléctrico coincide en cada punto con el vector $d\vec{A}$, es decir, el ángulo que forma el campo \vec{E} con $d\vec{A}$ es cero.

Sabemos que

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_N}{\epsilon_0}$$

recordando la expresión (1.50), pero

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint E \, dA \cos \alpha$$

como $\cos \alpha = 1$ y $E = \text{cte}$

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \oiint dA$$

pero $\oiint dA$ es justamente el área de la superficie gaussiana esférica, quedando

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E (4\pi r^2)$$

entonces

$$E (4\pi r^2) = \frac{Q_N}{\epsilon_0}$$

y

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_N}{r^2} \quad (1.54)$$

Aplicando ahora la ley de Gauss para puntos interiores ($r < r_0$), tenemos que como la carga está distribuida sobre la superficie de radio r_0 , la nueva superficie gaussiana empleada para obtener el campo eléctrico en el interior no encierra carga, y la ecuación (1.50) se satisface si E o $\cos \alpha$ es cero, ya que $d\vec{A} \neq 0$.

Por simetría de la figura se concluye que $E = 0$. Podemos resumir los resultados obtenidos en este ejemplo en las expresiones (1.55).

$$E = 0 \quad r < r_0 \quad (1.55)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad r \geq r_0$$

Comprobar que si la densidad superficial de carga es de $4 \mu\text{C}/\text{m}^2$ en una esfera de radio de 15 cm , el campo eléctrico para un punto distante 20 cm del centro de la esfera será

$$\vec{E} = 2.5447 \times 10^5 \hat{r} \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right]$$

b) Campo eléctrico producido por una superficie cargada infinita

La figura 1.15 muestra una porción de superficie infinita donde se ha dibujado una superficie gaussiana cilíndrica que permitirá obtener fácilmente la expresión del campo eléctrico en un punto P contenido en la superficie de la tapa o base del cilindro, ya que el campo por simetría es constante en esa zona.

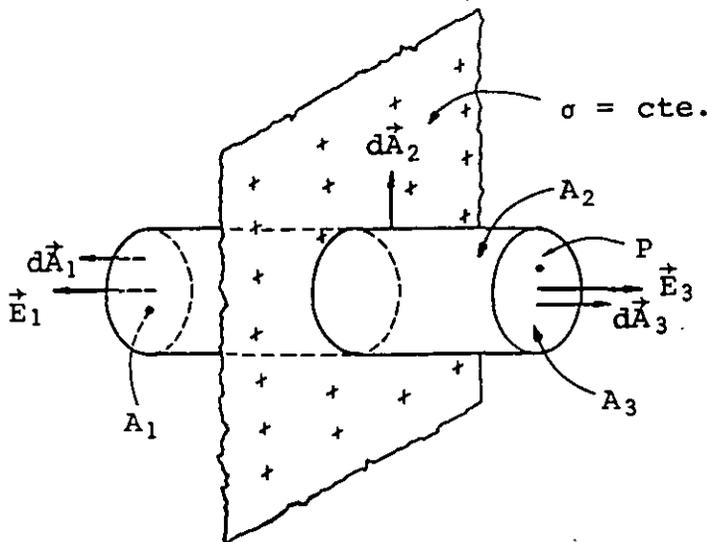


FIGURA 1.15. Porción de superficie cargada y superficie gaussiana.

La integral cerrada de la ecuación (1.50) puede ser expresada como tres integrales abiertas correspondientes al área lateral, base y tapa del cilindro, es decir

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3$$

En la base y tapa, el ángulo que forma el campo con el vector $d\vec{A}$ es 0° , y en el área lateral es 90° por lo que

$$\iint E_2 dA_2 \cos 90^\circ = 0$$

quedando

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint E_1 dA_1 + \iint E_3 dA_3$$

pero

$E_1 = E_3 = E$ por estar base y tapa a la misma distancia, entonces

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA_1 + EA_3 = 2EA$$

Aplicando la ecuación de Gauss

$$2 EA = \frac{Q_N}{\epsilon_0} \quad (1.56)$$

La carga neta Q_N encerrada en el cilindro será simplemente $Q_N = \sigma A$, dado que se está considerando una densidad superficial uniforme; sustituyendo en (1.56)

$$2 EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

finalmente

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.57)$$

c) Campo eléctrico producido por una línea cargada infinita

Obtendremos ahora la expresión que permite evaluar el campo que produce una línea infinita con densidad de carga uniforme, en un punto cualquiera P , para lo cual se construye una superficie de Gauss cilíndrica y coaxial con la línea, como se muestra en la figura 1.16.

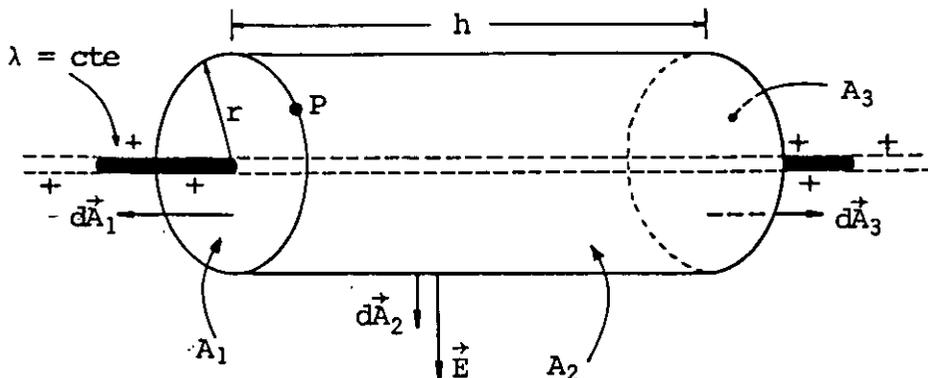


FIGURA 1.16. Superficie gaussiana empleada para obtener el campo producido por una línea infinita cargada.

De manera similar al caso anterior tenemos que

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint \vec{E}_3 \cdot d\vec{A}_3$$

En la base y en la tapa del cilindro, el ángulo que forma el campo con el vector $d\vec{A}$ es 90° , y en la superficie lateral 0° ; por lo que

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint E_2 dA_2$$

dado que todos los puntos de la superficie A_2 se encuentran a la misma distancia de la línea, E_2 es constante en magnitud en A_2 y

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \iint dA_2 = E (2\pi r h)$$

Usando la ley de Gauss

$$E (2\pi r h) = \frac{Q_N}{\epsilon_0} \quad (1.58)$$

Pero $Q_N = \lambda h$ por lo que

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (1.59)$$

La ecuación anterior se expresa de manera más conveniente como

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \quad (1.60)$$

La dirección del vector dependerá del sistema de referencia empleado, si la línea coincide con el eje z de un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , tendremos que

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \hat{r} \quad (1.61)$$

Demuestre que la magnitud de la densidad lineal λ para obtener $E = 90 \times 10^3 \left[\frac{N}{C} \right]$ a una distancia $r = 5 \text{ [cm]}$ es

$$\lambda = 0.25 \left[\frac{\mu C}{m} \right]$$

d) Campo eléctrico producido por un cilindro infinito cargado

Consideremos la porción de cilindro con densidad uniforme σ mostrada en la figura 1.17.

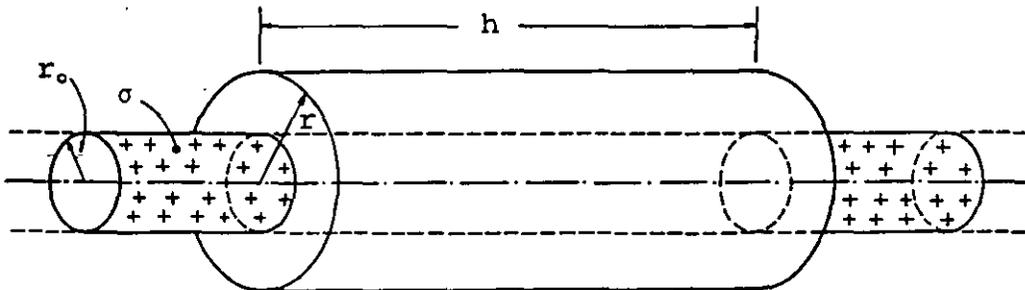


FIGURA 1.17. Porción de cilindro infinito cargado y superficie gaussiana.

La diferencia que existe entre este caso y el de línea es la obtención de Q_N , ya que el exceso de carga en este caso, es superficial

$$Q_N = \sigma(2\pi r_o h) \quad (1.62)$$

Al sustituir (1.62) en (1.58) obtenemos

$$E(2\pi r h) = \frac{\sigma(2\pi r_o h)}{\epsilon_o}$$

$$E = \frac{\sigma r_o}{\epsilon_o r} \quad (1.63)$$

Para simplificar la expresión anterior se presenta en función de una densidad lineal equivalente λ , la cual se obtiene igualando las cargas netas contenidas para el caso de una línea y un cilindro, es decir

$$\lambda h = \sigma(2\pi r_o)h \quad (1.64)$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi r_o}$$

Sustituyendo esta última expresión en (1.63), tenemos

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_o} \frac{\lambda}{r}$$

que es la misma expresión que la obtenida en el caso de la línea.

Como conclusión de nuestro análisis tenemos que para un cilindro infinito cargado de radio r_0 se cumple

$$E = 0 \quad r < r_0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \quad r \geq r_0 \quad (1.65)$$

1.12 LEY DE GAUSS EN FORMA DIFERENCIAL

La ley de Gauss puede ser presentada en forma tal que para algunos problemas resulta más conveniente que la expresión analizada en la sección 1.10. Antes de presentar la forma diferencial de la ley de Gauss es necesario que revisemos brevemente la interpretación física de la divergencia de un campo vectorial y el teorema de la divergencia.

Consideraremos el caso particular de una región donde existe un fluido en movimiento y un campo de velocidad asociado; tomaremos un elemento diferencial de volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ contenido en la región, como se indica en la figura 1.18.

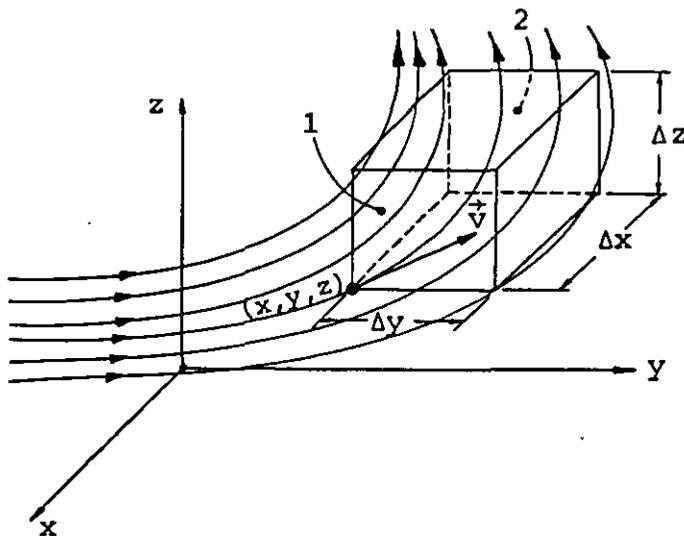


FIGURA 1.18. Elemento de volumen (ΔV) en una región donde existe un campo de velocidades.

Evaluaremos el flujo del campo de velocidad a través de nuestro elemento diferencial de volumen ΔV ; para ello, obtendremos el flujo a través de cada una de las caras del cubo, basándonos en el valor del campo en el punto (x, y, z) .

El flujo a través de la cara 1 es

$$\phi_1 = v_x \Delta y \Delta z$$

donde v_x representa la componente promedio de la velocidad del fluido en la cara 1.

A través de la cara 2 tenemos

$$\phi_2 = \left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

donde se ha aproximado el valor de la velocidad del fluido en la cara 2 a partir de la velocidad v_x en la cara 1.

El flujo total en la dirección x será

$$\left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z - v_x \Delta y \Delta z = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.66)$$

De manera semejante se obtiene el flujo en las direcciones y y z respectivamente, quedando

flujo en la dirección de y

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.67)$$

flujo en la dirección de z

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.68)$$

El flujo neto que sale de nuestro volumen diferencial es entonces la suma de las ecuaciones (1.66), (1.67) y (1.68), y queda

$$\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.69)$$

finalmente el flujo neto que sale de un volumen unitario se expresa

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{Divergencia de } \vec{v} \quad (1.70)$$

y

$$\text{Divergencia de } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (1.71)$$

Al obtener la divergencia del campo vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ en un punto cualquiera (x, y, z) del fluido, estamos evaluando el flujo por unidad de volumen en la vecindad del punto (x, y, z) .

Obviamente el flujo de un fluido incompresible será siempre cero.

En una explosión, o al expanderse un gas, obtendremos un valor positivo para la divergencia y un valor negativo cuando se comprime un gas o se rompe un recipiente al vacío.

Explicaremos ahora la interpretación del teorema de la divergencia, que es una generalización del teorema fundamental del cálculo. Este teorema se expresa matemáticamente para un campo vectorial cualquiera \vec{C} como

$$\oiint_A \vec{C} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \, dV$$

Supongamos una superficie cerrada A donde se desea evaluar el flujo de un campo vectorial \vec{C} . Dividamos el volumen encerrado por la superficie A en dos volúmenes cualesquiera encerrados por las superficies cerradas $A_1 + A_C$ y $A_2 + A_C$, donde A_C es la superficie común indicada en la figura 1.19.

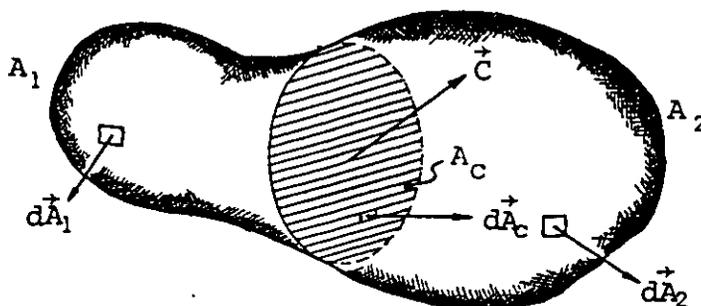


FIGURA 1.19. Superficie cerrada A formada por las superficies A_1 y A_2 .

El flujo a través de la superficie $A_1 + A_C$ será

$$\phi_1 = \iint \vec{C} \cdot d\vec{A}_1 + \iint \vec{C} \cdot d\vec{A}_C$$

y a través de $A_2 + A_C$ tenemos

$$\phi_2 = \iint \vec{C} \cdot d\vec{A}_2 - \iint \vec{C} \cdot d\vec{A}_C$$

donde el signo menos en la última expresión se debe a que el vector $d\vec{A}_C$ es positivo cuando apunta hacia fuera de la superficie cerrada.

Entonces el flujo total es

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 = \iint \vec{C} \cdot d\vec{A}_1 + \iint \vec{C} \cdot d\vec{A}_2 = \oiint \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (1.72)$$

$$\phi_T = \oiint \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

Podemos afirmar entonces que el flujo a través de cualquier superficie cerrada se puede obtener evaluando éste a través de un número cualquiera de superficies cerradas que contengan el mismo volumen y sumando los resultados.

Empleando la expresión (1.69), que determina el flujo a través de un elemento diferencial de volumen ΔV , tenemos

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \Delta V \quad (1.73)$$

Si el volumen se hace tender a cero

$$\Delta V \rightarrow dV \quad \text{y} \quad \Delta \phi \rightarrow d\phi$$

por lo que para obtener el flujo total a través de un volumen finito debemos integrar en todo el volumen

$$\phi = \int d\phi = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV$$

pero de la ecuación (1.49)

$$\phi = \iint_A \vec{C} \cdot d\vec{A}$$

por lo que

$$\oiint_A \vec{C} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} \, dV \quad (1.74)$$

que es el teorema de la divergencia.

Aplicaremos ahora el teorema de la divergencia para obtener la ley de Gauss en forma diferencial.

Recordemos la forma integral, ecuación (1.51)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV \quad (1.75)$$

Según el teorema de la divergencia

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV \quad (1.76)$$

Comparando (1.75) con (1.76)

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV \quad (1.77)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla es necesario que los integrandos sean iguales por lo que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.78)$$

Expresión conocida como ley de Gauss en forma diferencial, que indica que el flujo del campo eléctrico por unidad de volumen en la vecindad de un punto cualquiera será igual a la densidad volumétrica de carga ρ en el punto dividida entre ϵ_0 .

Suponiendo que en el plano xy , el campo eléctrico está dado por la expresión

$$\vec{E} = (15xi + 85yj) \times 10^9 \left[\frac{N}{C} \right], \text{ compruebe que } \rho = 0.885 \left[\frac{C}{m^3} \right] \text{ para}$$

cada punto en dicho plano.

1.13 CIRCULACION Y ROTACIONAL DEL CAMPO ELECTROSTATICO

La propiedad de los campos vectoriales llamada circulación se define para un campo vectorial cualquiera \vec{C} como: la integral a través de cualquier trayectoria cerrada ℓ de la componente de \vec{C} en la dirección de $d\vec{\ell}$ y se expresa

$$c = \oint_{\ell} \vec{C} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.79)$$

Este concepto y el de flujo nos permiten describir el comportamiento de los campos vectoriales.

En el campo de velocidad mencionado en la sección 1.10, podemos interpretar la trayectoria usada para evaluar la circulación como un pequeño conducto por donde puede circular fluido; la circulación del campo de velocidad de las partículas será una indicación de qué tan rápido puede circular el líquido a través del conducto

supuesto. Si la circulación es cero significa que el fluido no circulará a través de la trayectoria escogida.

La figura 1.20 muestra dos representaciones de campo realizadas por medio de líneas; en estos campos la circulación c es cero para cualquier trayectoria cerrada que se seleccione.

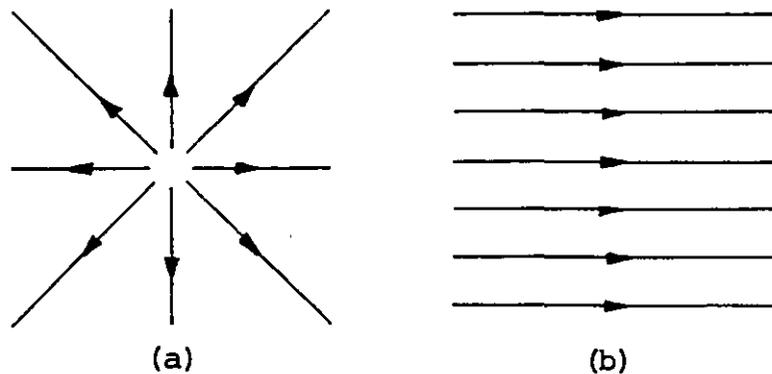


FIGURA 1.20. Campos cuya circulación es cero.

Los campos representados en la figura 1.21 poseen un valor de circulación c diferente de cero para cualquier trayectoria seleccionada.

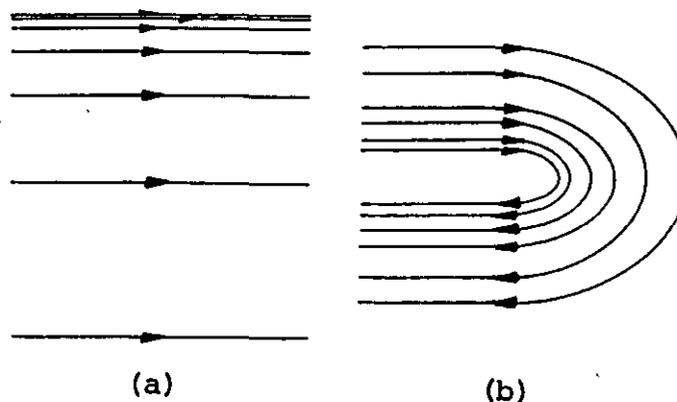


FIGURA 1.21. Campos con circulación diferente de cero.

Para aclarar la situación, supongamos el campo vectorial mostrado en la figura 1.22 en el cual se tiene magnitud constante y dirección variable.

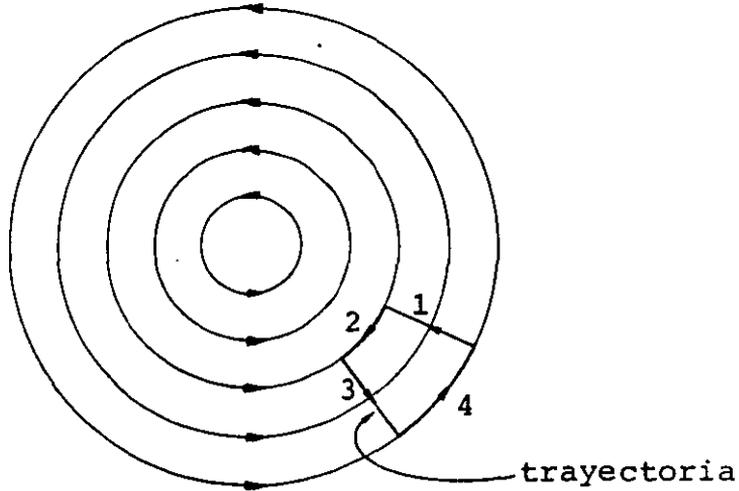


FIGURA 1.22. Campo de magnitud constante y dirección variable.

Al evaluar la circulación c_1 en la trayectoria mostrada, la contribución de los segmentos 1 y 3 es cero dado que el campo es perpendicular a ellos en cada punto; para 2 y 4 el campo es el mismo en magnitud y tiene dirección contraria. Como la contribución de 4 es mayor que la de 2, entonces $c_1 \neq 0$.

Evaluemos ahora la circulación del campo eléctrico producido por una carga puntual para una trayectoria cerrada cualquiera.

$$c_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.80)$$

Sustituyendo la expresión del campo producido por la carga tenemos

$$c_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \oint \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\ell}}{r^2} \quad (1.81)$$

pero $\hat{r} \cdot d\vec{l}$ es la componente de $d\vec{l}$ en la dirección de \hat{r} , es decir, $\hat{r} \cdot d\vec{l} = dr$ con lo que (1.81) queda

$$c_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \oint \frac{dr}{r^2}$$

integral que podemos escribir como

$$c_e = \lim_{r' \rightarrow r} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_r^{r'} \frac{dr}{r^2} = 0 \quad (1.82)$$

Resultado que podemos generalizar para cualquier distribución estática de carga, basados en el principio de superposición, dado que la contribución de cada carga es cero.

En general para el caso electrostático tendremos que

$$c_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.83)$$

Debemos detenernos una vez más en el estudio de los fenómenos electromagnéticos para revisar la interpretación física del concepto de rotacional de un campo vectorial y el teorema de Stokes.

Demostraremos primero que la circulación alrededor de cualquier trayectoria cerrada, es igual a la suma de las circulaciones a través de un número cualquiera de trayectorias cerradas en que se subdivide el área contenida por la trayectoria original.

La figura 1.23 muestra una trayectoria cerrada ℓ donde se desea evaluar la circulación de un cierto campo vectorial \vec{C} . Dividamos la superficie encerrada por la trayectoria ℓ en dos super-

ficies encerradas por las trayectorias cerradas $l_1 + l_c$ y $l_2 + l_c$, donde l_c es la longitud común a ambas trayectorias.

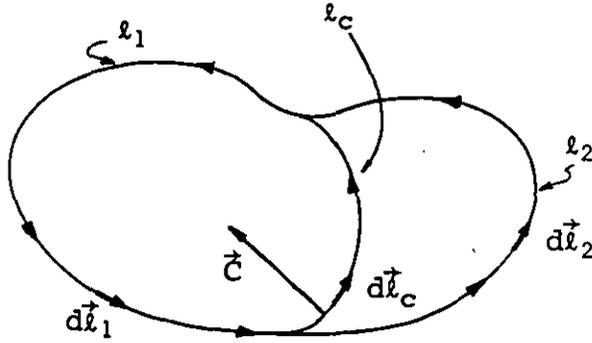


FIGURA 1.23. Trayectoria cerrada l formada por las trayectorias l_1 y l_2 .

La circulación a través de la trayectoria cerrada $l_1 + l_c$ es

$$c_1 = \int \vec{c} \cdot d\vec{l}_1 + \int \vec{c} \cdot d\vec{l}_c$$

y a través de la trayectoria cerrada $l_2 + l_c$

$$c_2 = \int \vec{c} \cdot d\vec{l}_2 - \int \vec{c} \cdot d\vec{l}_c$$

donde el signo menos de la última integral se debe a que $d\vec{l}_c$ para c_2 tiene dirección contraria al considerado en c_1 .

La circulación total c es

$$c = c_1 + c_2 = \int \vec{c} \cdot d\vec{l}_1 + \int \vec{c} \cdot d\vec{l}_2$$

en donde

$$c = \oint \vec{C} \cdot d\vec{\ell}$$

Aplicaremos el resultado anterior para la interpretación física del rotacional y el teorema de Stokes: supongamos un pequeño pedazo de corcho que flota en la superficie de un líquido contenido en un canal, como se indica en la figura 1.24.

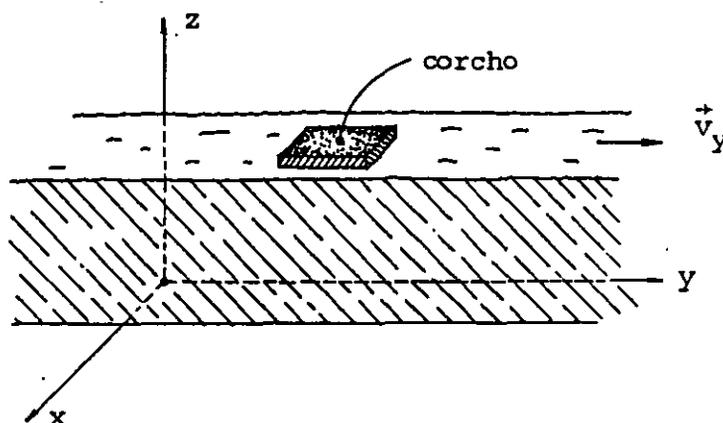


FIGURA 1.24. Pedazo de corcho flotando en la superficie de un líquido.

Si el líquido se desplaza con velocidad \vec{v}_y , en el caso ideal \vec{v}_y será uniforme en la superficie del líquido; y el corcho sólo sufrirá movimiento de traslación. Sin embargo, en general, el corcho se verá afectado adicionalmente por movimiento de rotación.

Para saber si el corcho gira teniendo como eje de rotación la dirección z podemos evaluar la circulación del campo de velocidad alrededor de una trayectoria que coincida con la periferia del corcho, como se indica en la figura 1.25.

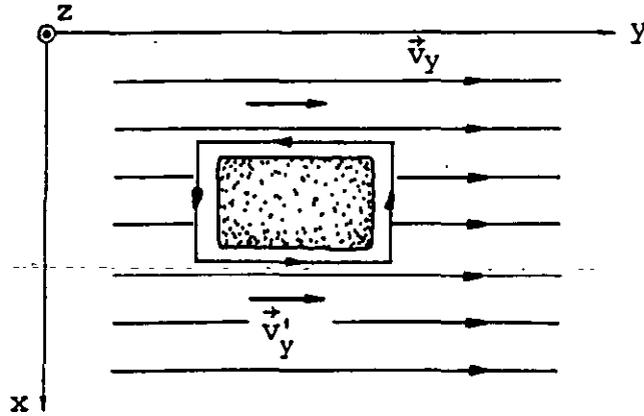


FIGURA 1.25. Vista superior del corcho en la superficie de un líquido.

El corcho girará en dirección contraria a las manecillas del reloj si $v'_y > v_y$, y la circulación alrededor de la trayectoria mostrada será diferente de cero.

Consideremos ahora una trayectoria diferencial como la indicada en la figura 1.26.

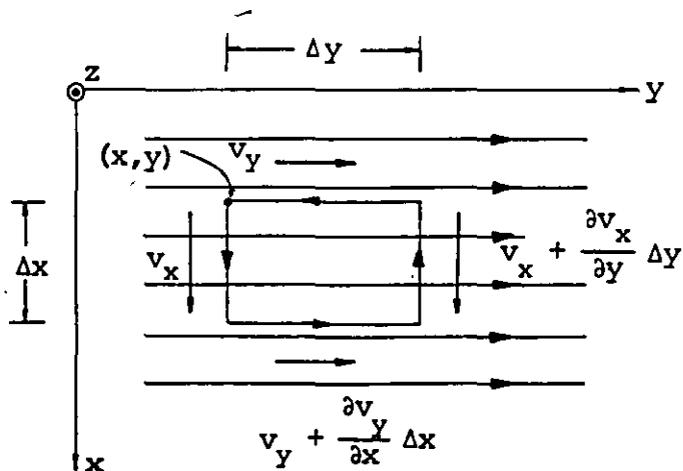


FIGURA 1.26. Trayectoria diferencial en el líquido.

La circulación alrededor de dicha trayectoria es

$$\Delta c = \oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = v_x \Delta x + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - \\ - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x - v_y \Delta y$$

simplificando

$$\Delta c = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (1.84)$$

La rotación alrededor de la dirección z es proporcional a

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

De manera semejante, las rotaciones alrededor de los ejes x y y son respectivamente proporcionales a

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad y \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

Como estas rotaciones tienen carácter vectorial, la rotación total será proporcional al vector

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

expresión conocida como rotacional del campo vectorial \vec{v} , el

cual también se puede expresar como

$$\text{Rotacional de } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

Observando la expresión (1.84) vemos que la circulación alrededor de la trayectoria diferencial de la figura 1.26 es igual a la componente del rotacional normal al área, multiplicada por el valor de ésta.

En general para una trayectoria diferencial con una orientación cualquiera, podemos obtener la circulación multiplicando el área por la componente del rotacional del campo vectorial normal a dicha superficie.

Se debe tener presente que la dirección positiva del vector normal queda determinada por el sentido de la circulación, de acuerdo con la regla usual de la mano derecha.

Con base en lo anteriormente expuesto la ecuación (1.84) se puede expresar como

$$\Delta c = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z \Delta A \quad (1.85)$$

Si la trayectoria se hace tender a cero

$$\Delta c \rightarrow dc \quad \text{y} \quad \Delta A \rightarrow dA$$

por lo que en general podemos expresar que

$$c = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} \quad (1.86)$$

y utilizando (1.79) y (1.86) para evaluar la circulación de un campo vectorial cualquiera \vec{C} , tenemos

$$c = \oint \vec{C} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{C}) \cdot d\vec{A} \quad (1.87)$$

La ecuación anterior se conoce como teorema de Stokes. Aplicando este teorema a la ecuación (1.83)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (1.88)$$

de donde obtenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (1.89)$$

para cualquier campo eléctrico estático.

Compruebe la validez de la expresión (1.89) evaluando el rotacional de la ecuación (1.7).

1.14 POTENCIAL ELECTRICO

Presentaremos ahora los conceptos de energía potencial y potencial eléctricos, los cuales nos ayudarán a resolver problemas que involucran campos eléctricos.

Si colocamos una carga q en un punto cualquiera de una región donde existe un campo eléctrico $\vec{E}(x, y, z)$, dicha carga experimentará una fuerza eléctrica $\vec{F} = q\vec{E}$, y en consecuencia será acelerada. Para que dicha carga permanezca en equilibrio debemos aplicar una fuerza igual y de sentido contrario $-q\vec{E}$.

Si queremos desplazar la carga en contra de la fuerza ejercida por el campo, desde un punto A hasta un punto B, con velocidad constante o bien cuasiestáticamente, el trabajo realizado por el agente externo se puede obtener aplicando la relación siguiente

$${}^A W_B = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad [\text{J}] \quad (1.90)$$

La expresión anterior representa la integral de línea del campo \vec{E} , evaluada a través de la trayectoria que une los puntos A y B.

Demostraremos que la integral de línea del campo electrostático, a través de cualquier trayectoria entre dos puntos cualesquiera A y B, es independiente de ésta y queda determinada por la posición de dichos puntos. Esto es consecuencia de que el campo electrostático satisface la ecuación (1.83) para cualquier trayectoria cerrada seleccionada.

Como resultado de la aplicación del teorema de Stokes a la ecuación mencionada, se satisface también la ecuación (1.89) y se dice que el campo es conservativo.

De (1.89) tenemos que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(x, y, z) = 0$$

sabemos además, del álgebra vectorial, que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V'(x, y, z) = 0 \quad (1.91)$$

para cualquier función escalar de variable vectorial $V'(x, y, z)$, es decir, si se cumple (1.89), siempre existe una función escalar

$V'(x, y, z)$ tal que $\vec{E}(x, y, z)$ puede ser expresado como

$$\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla} V'(x, y, z) \quad (1.92)$$

Podemos entonces igualar las integrales siguientes

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B (\vec{\nabla} V') \cdot d\vec{\ell} \quad (1.93)$$

Como $(\vec{\nabla} V') \cdot d\vec{\ell}$ es la derivada direccional de $V'(x, y, z)$ en la dirección de $d\vec{\ell}$, al integrarla obtendremos la variación total de dicha función desde el punto A hasta el punto B.

Para ilustrar lo expuesto anteriormente consideremos la curva mostrada en la figura 1.27 que une los puntos A y B: si la subdividimos en pequeños segmentos de longitud $\Delta \ell_i$, la variación de la función $V'(x, y, z)$ del punto A al punto 1 es

$$\Delta V' = V'(x_1, y_1, z_1) - V'(x_A, y_A, z_A) \quad (1.94)$$

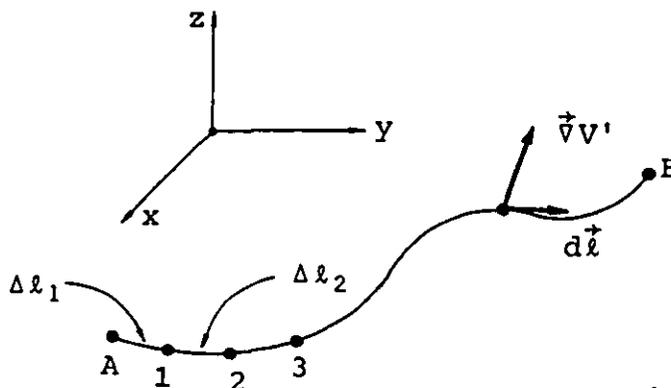


FIGURA 1.27. Curva cualquiera ℓ que une los puntos A y B en una región en que existe campo eléctrico.

Si los Δl_i son muy pequeños, $\Delta V'$ puede aproximarse usando el concepto de diferencial total, por lo que

$$\Delta V' \doteq dV' = \frac{\partial V'}{\partial x} dx + \frac{\partial V'}{\partial y} dy + \frac{\partial V'}{\partial z} dz \quad (1.95)$$

como

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

entonces

$$\Delta V' = (\vec{\nabla} V') \cdot d\vec{l} \quad (1.96)$$

y de (1.94) y (1.96)

$$V'(x_1, y_1, z_1) - V'(x_A, y_A, z_A) = (\vec{\nabla} V')_1 \cdot \Delta \vec{l}_1$$

donde $(\vec{\nabla} V')_1$ representa el gradiente de V' evaluado en el punto 1. De manera semejante la variación de la función del punto 1 al 2 es

$$V'(x_2, y_2, z_2) - V'(x_1, y_1, z_1) = (\vec{\nabla} V')_2 \cdot \Delta \vec{l}_2$$

y así sucesivamente, por lo que al sumar las contribuciones de los n elementos Δl_i resulta

$$V'(x_B, y_B, z_B) - V'(x_A, y_A, z_A) = \sum_{i=1}^n (\vec{\nabla} V')_i \cdot \Delta \vec{l}_i$$

cuando $\Delta l_i \rightarrow 0$

$$V'(x_B, y_B, z_B) - V'(x_A, y_A, z_A) = \int_A^B (\vec{\nabla} V') \cdot d\vec{l} \quad (1.97)$$

Hemos demostrado que la integral de línea del campo electrostático depende exclusivamente de las posiciones de los extremos de la trayectoria, ya que éste puede ser expresado como el gradiente de una función escalar $V'(x, y, z)$.

Sabemos también que en un campo conservativo, cuando se mueve una carga q de un punto A hasta un punto B , cuasiestáticamente o con velocidad constante, el trabajo realizado es igual a la variación de la energía potencial eléctrica.

Entonces la ecuación (1.90) puede representarse en forma equivalente como una diferencia de energías potenciales eléctricas. Para obtener la energía potencial eléctrica en un punto se considera arbitrariamente que en una cierta región dicha energía es cero; tal región se tomará como referencia. La referencia lógica se encuentra a una distancia infinita de una región donde existen cargas, debido a que la influencia del campo eléctrico producido es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado.

Definiremos por ende, energía potencial eléctrica de la carga q en el punto A por medio de la relación siguiente

$$U_A = {}_{\infty}W_A = -q \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.98)$$

expresión que representa el trabajo necesario para traer la carga q cuasiestáticamente desde el infinito hasta el punto A .

A la energía potencial eléctrica U_A por unidad de carga se le conoce como el potencial eléctrico del punto A y se representa

como V_A , por lo que

$$\frac{U_A}{q} = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A \quad (1.99)$$

La unidad en el SI es

$$\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} = \left[\frac{\text{J}}{\text{C}} \right] = [\text{volt}] = [\text{V}]$$

Si un punto A se encuentra a un potencial V_A , y un punto B a un potencial V_B , se dice que existe una diferencia de potencial entre los puntos A y B dada por la relación

$$V_{AB} = V_A - V_B \quad (1.100)$$

y se cumple además

$$V_{AB} = - V_{BA} = - (V_B - V_A) \quad (1.101)$$

Por otro lado, combinando (1.99) y (1.100)

$$V_{AB} = V_A - V_B = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.102)$$

como el campo eléctrico es conservativo, es válido escribir

$$\int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

cualquiera que sea la posición de B , quedando (1.102) como

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.103)$$

La ecuación anterior permite evaluar directamente la diferencia de potencial entre los puntos A y B , que también se conoce como voltaje o tensión entre dichos puntos.

Las ecuaciones (1.99) y (1.103) permiten obtener el potencial en un punto y la diferencia de potencial entre dos puntos respectivamente. Para ello es necesario integrar la función del campo eléctrico \vec{E} ; cuando tal función no se conoce es posible obtener el potencial (y por ende la diferencia de potencial), a partir de la distribución de carga, como se muestra a continuación.

Si obtenemos la expresión que permite evaluar el potencial debido a una carga puntual, basados en el principio de superposición, podremos encontrar el potencial debido a una distribución cualquiera de carga.

Procederemos entonces a obtener la expresión de potencial en un punto cualquiera A , separado una distancia r_A de una carga puntual Q .

Como se indica en la figura 1.28, la trayectoria desde el infinito hasta el punto A será radial por conveniencia.

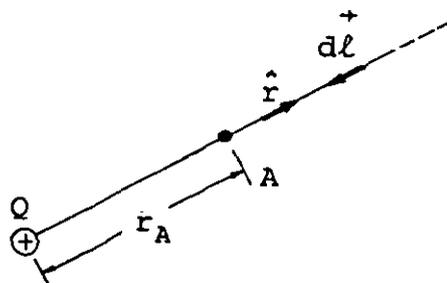


FIGURA 1.28. Carga puntual Q y trayectoria $d\vec{\ell}$ hacia ella.

Partiendo de la ecuación (1.99) tenemos que

$$V_A = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

pero

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

sustituyendo

$$V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{\infty}^A \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\ell}}{r^2}$$

como

$$\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = |\hat{r}| |d\vec{\ell}| \cos \theta = - dl \quad \text{ya que} \quad \theta = 180^\circ$$

y además $dl = -dr$

$$V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{\infty}^{r_A} \frac{dr}{r^2}$$

finalmente

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_A} \quad [V] \quad (1.104)$$

Debemos notar que la ecuación anterior, para simplificar, está expresada en coordenadas esféricas; en coordenadas cartesianas se verá de la manera siguiente:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad [V] \quad (1.105)$$

Ecuación válida en cualquier punto, excepto para aquél en donde está situada la carga, en este caso el origen.

Cuando se tienen n cargas puntuales se obtiene el potencial debido a cada carga, y se suman los resultados, por lo que

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \text{ [V]} \quad (1.106)$$

Para encontrar el potencial debido a una distribución de carga, se toma la contribución de cada elemento de carga dq y se integra, entonces

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \text{ [V]} \quad (1.107)$$

Como en el caso del campo eléctrico dq dependerá del tipo de distribución, por ejemplo para una distribución superficial (1.107), quedará

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma dA}{r} \text{ [V]}$$

EJEMPLO 1.3

Considere el plano xy de la figura 1.29 donde se muestran dos cargas puntuales y los puntos A , B y C .

Con base en las posiciones indicadas calcule:

a) El potencial en el punto A y en el B .

b) La diferencia de potencial V_{AB} .

- c) La energía potencial eléctrica de q_2 .
- d) El trabajo necesario para mover una carga $q_3 = -8\mu\text{C}$, cuasiestáticamente, del punto A al punto B .
- e) Repetir el inciso b) y considerar la referencia en el punto C .

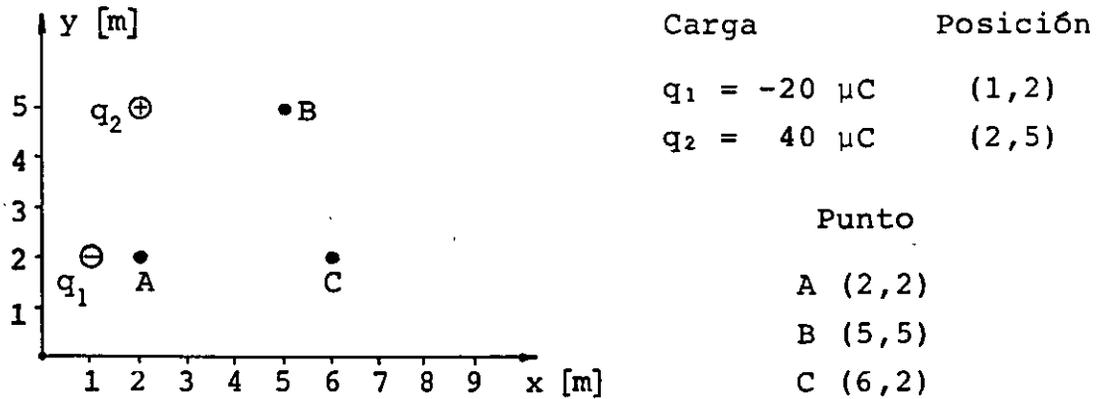


FIGURA 1.29. Posiciones de las cargas q_1 y q_2 y colocación de los puntos para el ejemplo 1.3.

SOLUCION

- a) Aplicando el principio de superposición

$$V_A = V_{A_1} + V_{A_2}$$

pero

$$V_{A_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{A_1}} = 9 \times 10^9 \frac{(-20 \times 10^{-6})}{1} = -18 \times 10^4 \text{ V}$$

$$V_{A_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{A_2}} = 9 \times 10^9 \frac{(40 \times 10^{-6})}{3} = 12 \times 10^4 \text{ V}$$

Por lo tanto

$$V_A = -60 \times 10^3 \text{ [V]}$$

de manera semejante

$$V_B = V_{B_1} + V_{B_2} = 9 \times 10^9 \left(\frac{-20 \times 10^{-6}}{5} + \frac{40 \times 10^{-6}}{3} \right)$$

$$V_B = 84 \times 10^3 \text{ [V]}$$

b) De la expresión (1.100)

$$V_{AB} = V_A - V_B$$

$$V_{AB} = -60 \times 10^3 - 84 \times 10^3 = -144 \times 10^3 \text{ [V]}$$

$$V_{AB} = -144 \text{ [kV]}$$

c) Como el potencial de un punto representa la energía potencial eléctrica por unidad de carga, al multiplicarla por la carga se obtiene la energía potencial total.

$$U_{q_2} = q_2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}} \right)$$

donde r_{12} es la distancia de la carga q_1 a la carga q_2

$$U_{q_2} = 40 \times 10^{-6} (9 \times 10^9) \frac{(-20 \times 10^{-6})}{\sqrt{10}}$$

$$U_{q_2} = -2.277 \text{ [J]}$$

d) Comparando (1.90) con (1.103) tenemos que

$${}^A W_B = -q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q V_{BA}$$

del inciso (b) sabemos que

$$V_{BA} = -V_{AB} = 144 \times 10^3 \text{ [V]}$$

y

$${}^A W_B = q_3 V_{BA} = -8 \times 10^{-6} (144 \times 10^3)$$

$${}^A W_B = -1152 \times 10^{-3} = -1.152 \text{ [J]}$$

donde el signo menos indica que el sistema de las tres cargas pier de energía.

e) Considerando la referencia en el punto C, el potencial V'_A del punto A es

$$V'_A = - \int_C^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_{AC} = V_A - V_C$$

como

$$V_C = V_{C_1} + V_{C_2} = 9 \times 10^9 \left(\frac{-20 \times 10^{-6}}{5} + \frac{40 \times 10^{-6}}{5} \right)$$

$$V_C = 36 \times 10^3 \text{ [V]}$$

del inciso (a) se conoce V_A por lo que

$$V'_A = -60 \times 10^3 - 36 \times 10^3 = -96 \times 10^3$$

de manera semejante

$$V'_B = V_{BC} = 84 \times 10^3 - 36 \times 10^3 = 48 \times 10^3$$

y la diferencia de potencial será

$$V'_{AB} = V'_A - V'_B = -96 \times 10^3 - 48 \times 10^3 = -144 \times 10^3 \text{ [V]}$$

Al comparar el resultado obtenido con el resultado del inciso (b) observamos que la diferencia de potencial no depende de la referencia escogida.

Finalmente comentaremos que es posible también calcular V_{AB} usando la ecuación (1.103) directamente o bien a través del uso del principio de superposición, con objeto de facilitar la expresión del campo a integrar.

1.15 EJEMPLOS DE CALCULO DE POTENCIAL Y DIFERENCIAS DE POTENCIAL DEBIDOS A DISTRIBUCIONES DE CARGA

a) Potencial en un punto producido por una esfera con densidad superficial uniforme de carga

Para obtener la expresión de potencial mencionada podemos usar la ecuación (1.99) o bien la ecuación equivalente (1.107), ambas darán el mismo resultado aunque la dificultad de proceso puede ser diferente.

Por conveniencia aplicaremos en este caso la ecuación (1.99) apoyándonos en los resultados del subtema 1.11, resumidos en las ecuaciones (1.55).

El procedimiento se inicia seleccionando una trayectoria para evaluar la ecuación

$$V_A = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Debido a la forma de las ecuaciones (1.55), la trayectoria conveniente es una trayectoria radial en un sistema de coordenadas esféricas, como se indica en la figura 1.30.

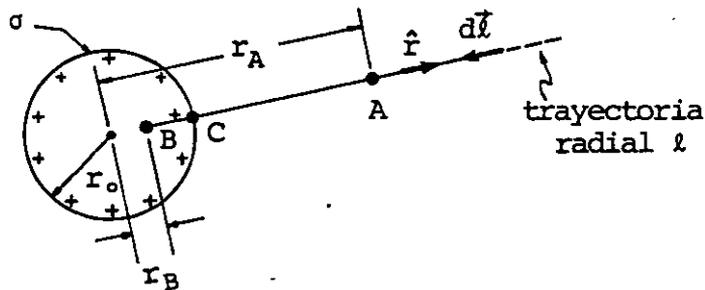


FIGURA 1.30. Esfera con distribución uniforme σ y trayectoria seleccionada para evaluar el potencial en los puntos A y B.

De (1.55) sabemos que

$$E = 0 \quad r < r_0$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad r \geq r_0$$

Para un punto cualquiera A exterior a la esfera

$$V_A = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{\infty}^A \frac{\hat{r} \cdot d\vec{\ell}}{r^2} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \int_{\infty}^{r_A} \frac{dr}{r^2} \quad (1.108)$$

y

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r_A} \quad (1.109)$$

en función de la densidad superficial de carga σ quedará

$$V_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{r_0^2}{r_A} \quad (1.110)$$

ya que

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$$

Al comparar (1.109) con (1.104) concluimos que el resultado para puntos exteriores es igual al obtenido con una carga puntual Q colocada en el centro de la esfera.

Para un punto cualquiera B interior a la esfera, tenemos que

$$V_B = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

donde hemos dividido la trayectoria total en dos debido a que el campo es diferente en cada parte de la trayectoria.

Evaluando las integrales resulta

$$- \int_{\infty}^C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0} = \text{Potencial de la superficie}$$

y

$$- \int_C^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Es decir, el potencial en cualquier punto interior es igual al potencial de la superficie. Resumiendo

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0} \quad r < r_0 \quad (1.111)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad r \geq r_0$$

Compruebe que el potencial en el centro de una esfera conductora de 12 cm de radio y con $\sigma = \frac{2.5}{\pi} \left[\frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \right]$ es $V = 10.8 \text{ [kV]}$

b) Potencial en un punto producido por un segmento de línea con distribución uniforme de carga λ

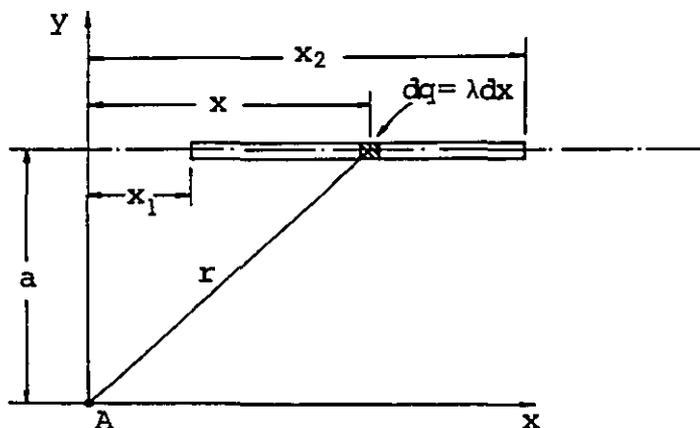


FIGURA 1.31. Segmento de línea con distribución lineal uniforme λ

Aplicaremos para este caso la ecuación (1.107), y basándonos en la figura 1.31 tenemos

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda dx}{r}$$

donde

$$r = (a^2 + x^2)^{1/2}$$

Y

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[\ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right]_{x_1}^{x_2}$$

finalmente

$$V_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \ln \left(\frac{x_2 + \sqrt{x_2^2 + a^2}}{x_1 + \sqrt{x_1^2 + a^2}} \right) \quad (1.112)$$

c) Potencial en un punto sobre el eje de una superficie circular de radio r_0 , con distribución uniforme de carga σ

Usaremos ahora la expresión (1.41) y la ecuación de potencial (1.99). Por conveniencia, la trayectoria ℓ coincide con el eje de la superficie, como se muestra en la figura 1.32.

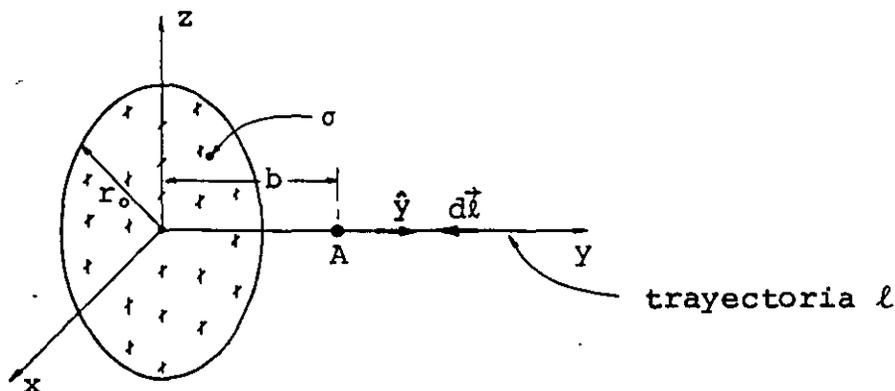


FIGURA 1.32. Superficie circular cargada y trayectoria seleccionada para evaluar el potencial en el punto A .

De la ecuación (1.99)

$$V_A = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

sustituyendo (1.41) y considerando b como la variable "y"

$$V_A = - \int_{\infty}^{Y_A} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{y}{(r_0^2 + y^2)^{1/2}} \right] j \cdot d\vec{\ell}$$

como

$$j \cdot d\vec{\ell} = |j| |d\vec{\ell}| \cos \theta = - dl$$

ya que $\theta = 180^\circ$, pero además $dl = - dy$

y

$$Y_A = b$$

entonces

$$V_A = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\infty}^b \left[dy - \frac{y dy}{(r_0^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

por ser una integral impropia

$$V_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{y' \rightarrow \infty} \int_{y'}^b \left[dy - \frac{y dy}{(r_0^2 + y^2)^{1/2}} \right]$$

$$V_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \lim_{y' \rightarrow \infty} \left[y - (r_0^2 + y^2)^{1/2} \right]_{y'}^b$$

quedando

$$V_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r_0^2 + b^2} - b \right] \quad [V] \quad (1.113)$$

Se sugiere comprobar el resultado anterior evaluando el potencial a través de la ecuación (1.107) con un procedimiento análogo al usado en el subtema 1.8 inciso (c) con objeto de evitar una integral doble.

d) Diferencia de potencial entre dos puntos producida por una superficie infinita

Dado que para una placa infinita no es posible evaluar el potencial teniendo como referencia el infinito, aplicaremos la ecuación (1.103) para obtener directamente la diferencia de potencial.

Consideremos dos puntos cualesquiera A y B ubicados como se indica en la figura 1.33. Sabemos que la diferencia de potencial entre dos puntos no depende de la trayectoria seleccionada, por lo que escogeremos la trayectoria conveniente indicada en la figura.

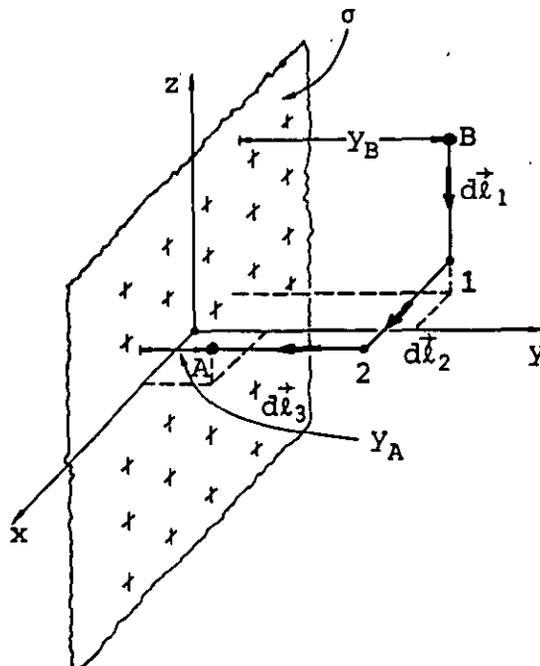


FIGURA 1.33. Parte de superficie cargada infinita que coincide con el plano xz para evaluar la diferencia de potencial V_{AB} .

De la ecuación (1.103) tenemos

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Para nuestro ejemplo podemos escribir que

$$V_{AB} = - \int_B^1 \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}_2 - \int_2^A \vec{E} \cdot d\vec{l}_3$$

En toda la trayectoria se cumple que

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j}$$

y además

$$d\vec{l}_1 = - dl_1 \mathbf{k}, \quad d\vec{l}_2 = dl_2 \mathbf{i} \quad \text{y} \quad d\vec{l}_3 = - dl_3 \mathbf{j}$$

por lo que

$$V_{AB} = - \int_{Y_B}^{Y_A} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dy = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[Y \right]_{Y_B}^{Y_A}$$

quedando

$$V_{AB} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (Y_B - Y_A) \quad [V] \quad (1.114)$$

Observamos que la diferencia de potencial entre los puntos depende de la diferencia de sus distancias a la superficie ya que todos los planos paralelos son superficies cuyos puntos se encuentran al mismo potencial.

e) Diferencia de potencial entre dos puntos producida por una línea infinita cargada uniformemente

Para una línea infinita se cumple la ecuación (1.61); ya que dicha ecuación se presentó en coordenadas cilíndricas, para simplificar, trabajaremos en ese sistema de referencia.

De manera semejante al inciso anterior y apoyándonos en la figura 1.34, se cumple

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_B^1 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_1 - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_2 - \int_2^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_3$$

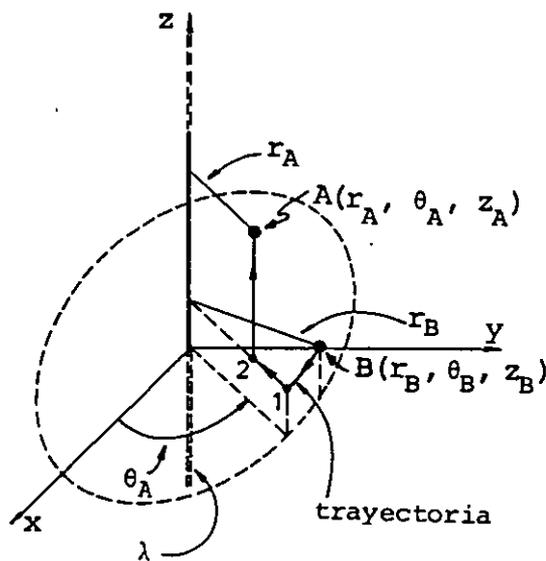


FIGURA 1.34. Porción de línea infinita y trayectoria para evaluar la diferencia de potencial V_{AB} .

Además

$$d\vec{\ell}_1 = - dl_1 \hat{\theta} \quad d\vec{\ell}_2 = - dl_2 \hat{r} \quad \text{y} \quad d\vec{\ell}_3 = dl_3 \hat{z}$$

quedando

$$V_{AB} = - \int_1^2 E dr$$

sustituyendo la magnitud de \vec{E}

$$V_{AB} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \int_{r_B}^{r_A} \frac{dr}{r}$$

integrando

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \left[- \ln r \right]_{r_B}^{r_A}$$

y se obtiene que

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_B}{r_A} \quad [V] \quad (1.115)$$

f) Diferencia de potencial entre dos puntos producida por dos placas conductoras, paralelas y con cargas iguales en magnitud y signo contrario

Antes de iniciar el cálculo de la diferencia de potencial, es conveniente aclarar la diferencia entre el campo que produce una superficie cargada (ecuación 1.41) y el campo que produce una placa. Esta última en realidad posee dos superficies cargadas, como se indica en la figura 1.35.

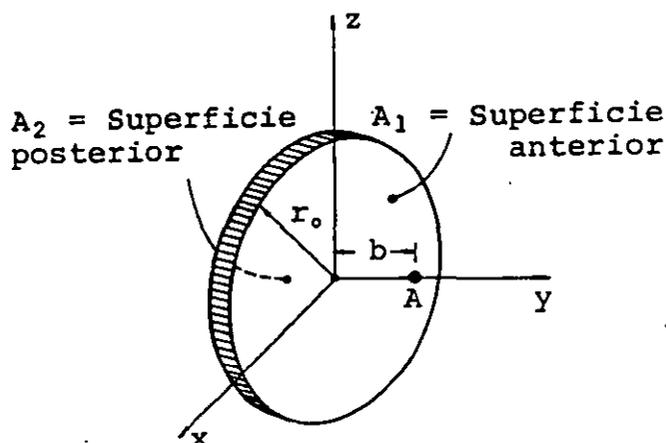


FIGURA 1.35. Placa circular formada por dos superficies cargadas positivamente A_1 y A_2 .

Por lo anteriormente expuesto, si A es un punto cercano a la placa, $b \ll r_0$, se desprecia el efecto de los bordes, y aplicando el principio de superposición se tiene

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{A_1} + \vec{E}_{A_2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{j}$$

quedando

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{j} \left[\frac{V}{m} \right] \quad (1.116)$$

En el caso de dos placas con carga de la misma magnitud y signo contrario, al colocar las placas frente a frente se presenta el fenómeno de inducción, y en esencia todo el exceso de carga aparecerá en las dos superficies cercanas. Aplicando nuevamente el principio de superposición, y considerando las suposiciones mencionadas anteriormente, tenemos que la magnitud del campo entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left[\frac{V}{m} \right] \quad (1.117)$$

y el campo fuera de la zona de placas será aproximadamente cero.

Entonces, la diferencia de potencial entre dos puntos A y B ubicados dentro de la zona de campo se calcula de manera análoga al inciso (d).

Si los puntos son los mostrados en la figura 1.36, entonces

$$V_{AB} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_A - z_B) \quad (1.118)$$

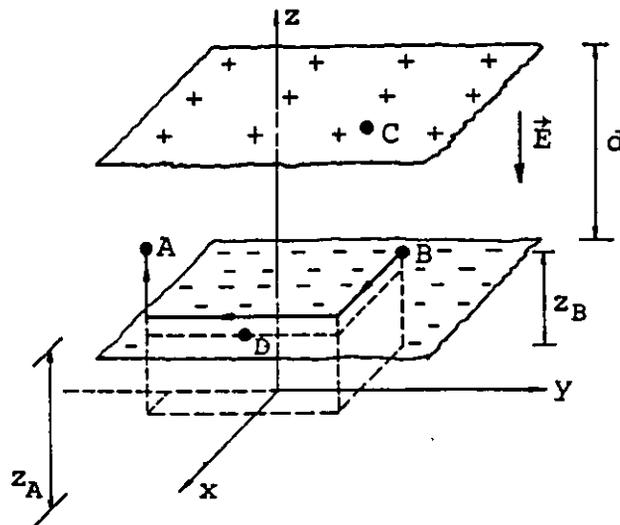


FIGURA 1.36. Superficies paralelas con carga contraria.

Si C y D son puntos sobre las placas, la diferencia de potencial entre éstos es la diferencia de potencial entre placas y

$$V_{DC} = -V_{CD} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (z_D - z_C)$$

$$V_{DC} = E (z_D - z_C) = -Ed \quad (1.119)$$

$$V_{CD} = Ed \quad (1.120)$$

El uso de la expresión (1.120) es muy sencillo, ya que no requiere de un sistema de referencia; sin embargo, debemos tener cuidado con el signo del resultado, como en el caso de la ecuación (1.119).

g) Ejemplos adicionales de interés

Se deja como ejercicio al lector demostrar que:

La diferencia de potencial entre dos esferas conductoras concéntricas con cargas iguales en magnitud y signo contrario es

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad [V] \quad (1.121)$$

donde r_A y r_B son los radios mostrados en la figura 1.37.

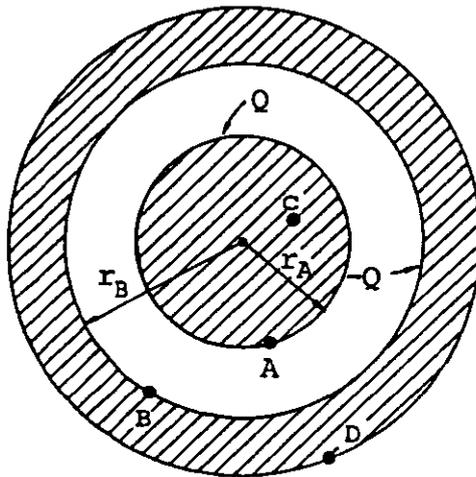


FIGURA 1.37. Esferas conductoras concéntricas con carga contraria.

Explique con base en la figura 1.37, por qué

$$V_{AB} = V_{CD}$$

La diferencia de potencial entre dos cilindros conductores coaxia

les muy largos, con cargas de la misma magnitud y signo distinto es

$$V_{AB} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \frac{r_B}{r_A} \quad [V] \quad (1.122)$$

donde r_A y r_B son los radios indicados en la figura 1.38 y

$$\lambda = \sigma_A (2\pi r_A) = -\sigma_B (2\pi r_B)$$

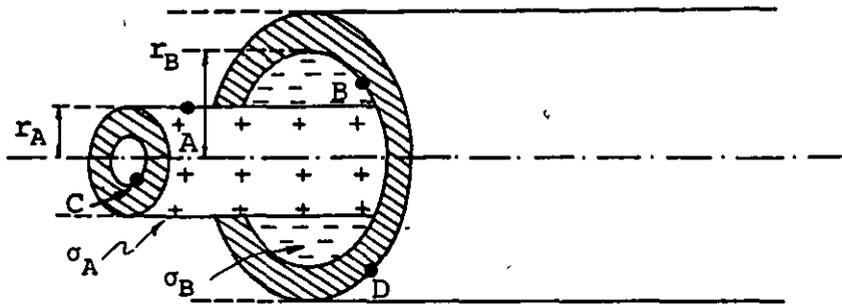


FIGURA 1.38. Cilindros conductores coaxiales con carga contraria.

Explique con base en la figura 1.38 por qué

$$V_{AB} = -V_{DC}$$

1.16 GRADIENTE DE POTENCIAL

En la mayoría de los problemas electrostáticos prácticos no es posible obtener la función que determina el vector campo eléctrico en cada punto de una región, con base en la distribución de carga, debido a que ésta última no es conocida. Generalmente la información que se tiene es la diferencia de potencial que existe entre conductores, por ello el procedimiento usual es obtener primero la función de potencial, como se verá en el subtema siguiente, y a partir de ésta el campo eléctrico, con el procedimiento indicado a continuación.

Si se conoce la función de potencial $V(x, y, z)$ y se considera la ecuación (1.95) tenemos

$$\Delta V \doteq dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \quad (1.123)$$

ecuación que podemos expresar vectorialmente de la forma siguiente

$$\Delta V \doteq dV = (\nabla V) \cdot d\vec{\ell} \quad (1.124)$$

recordando la ecuación (1.103)

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

si A y B son dos puntos muy cercanos, la expresión anterior se puede escribir como

$$\Delta V = - \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (1.125)$$

comparando las ecuaciones (1.124) y (1.125) concluimos que

$$\vec{E} = - \vec{\nabla} V \quad (1.126)$$

Es decir

$$E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \quad y \quad E_z = - \frac{\partial V}{\partial z}$$

Por nuestros cursos de matemáticas sabemos que la función escalar de variable vectorial o campo escalar $V(x, y, z) = V_0$, representa una superficie para cada valor del potencial V_0 . Al evaluar el gradiente de dicha función obtenemos un vector perpendicular a la superficie, el cual señala en la dirección de aumento máximo de la función de potencial; es por ello que aparece un signo negativo en la ecuación (1.126) ya que, por convención, la dirección del vector campo eléctrico es la contraria.

A las superficies que se obtienen para un valor dado V_0 en $V(x, y, z) = V_0$ se les conoce como superficies equipotenciales.

Podemos afirmar entonces que la dirección del vector intensidad de campo eléctrico en un punto, siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que contiene a dicho punto.

Sabiendo que para una carga Q positiva colocada en el origen de un sistema cartesiano de referencia, la función de potencial está dada por la expresión (1.105), evalúe el gradiente negativo de dicha función y obtenga la función del campo eléctrico, ecuación (1.7); demuestre también que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas con la carga Q .

Se sugiere como ejercicio adicional resolver el problema anterior en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

Recuerde que:

El gradiente de potencial en coordenadas cilíndricas se expresa

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

y en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

1.17 ECUACIONES DE POISSON Y LAPLACE

Como se indicó en el subtema anterior, en la mayoría de los problemas electrostáticos prácticos no se conoce la función de potencial y debemos obtenerla generalmente con base en el potencial o la diferencia de potencial entre conductores. Presentaremos ahora las ecuaciones que permiten obtener la función de potencial cuando se conocen las condiciones de frontera.

Recordando la expresión de Gauss en forma diferencial (ecuación 1.78) tenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

y de la ecuación (1.126)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

combinando estas dos ecuaciones resulta

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.127)$$

como

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V \quad (1.128)$$

la ecuación (1.127) queda

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.129)$$

Esta última ecuación se conoce como ecuación de Poisson. En el caso particular de una región con densidad volumétrica de carga ρ igual a cero la expresión (1.129) se reduce a

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.130)$$

que es la llamada ecuación de Laplace.

El teorema de unicidad indica que cualquier solución de la ecuación de Poisson o Laplace que satisface las condiciones de frontera es única, es decir, no existe otra solución. No se dará aquí la demostración, ya que rebasa la intención de este libro.

La integración directa de estas ecuaciones es posible en casos donde el potencial sólo es función de una variable y además se tiene alguna de las siguientes condiciones: $\rho = 0$, o bien ρ es una función integrable.

Cuando el potencial es función de más de una variable, es posible encontrar soluciones para ciertos casos particulares, pero la solución general del problema sólo es factible por medio de métodos numéricos que requieren del uso de una computadora, con la cual se obtienen los puntos requeridos que satisfacen la ecuación de Poisson o Laplace, según el caso, y que describen el comportamiento de la función de potencial en la región considerada.

Resolveremos dos ejemplos donde el potencial es función de una so la variable y se tienen definidas las condiciones de frontera.

a) Superficies conductoras cargadas paralelas

Consideremos las superficies mostradas en la figura 1.39 donde $V = 0$ para $y = 0$ y $V = V_0$ para $y = d$.

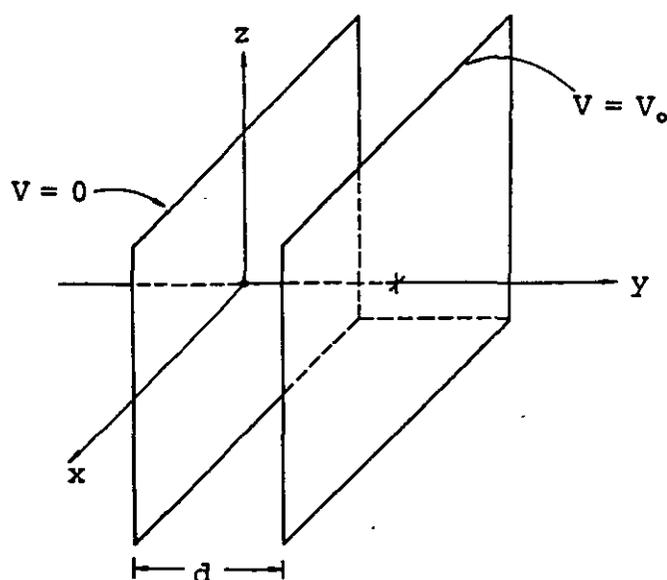


FIGURA 1.39. Superficies conductoras paralelas donde se conocen las condiciones de frontera, al despreciar el efecto de los bordes.

Considerando que en la región entre las superficies no existe car ga, podemos aplicar la ecuación de Laplace para determinar la fun ción de potencial, siempre y cuando se conozcan las condiciones de frontera.

Si despreciamos el efecto de los bordes, es decir, consideramos que no existe campo eléctrico fuera de la región entre las pla cas, conocemos entonces el valor del potencial en toda la fron te ra de la región, y la ecuación de Laplace nos llevará a una solu ción única:

De la ecuación (1.130)

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Al despreciar el efecto de los bordes la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = 0$$

integrando dos veces resulta

$$V(y) = Ay + B$$

aplicando las condiciones de frontera

como $V(0) = 0$; $B = 0$

y $V(d) = V_0$ por lo que $A = \frac{V_0}{d}$

finalmente la expresión buscada es

$$V(y) = \frac{V_0}{d} y$$

b) Cilindros conductores coaxiales cargados

En algunos casos la selección del sistema coordinado conveniente simplificará los problemas y permitirá la integración directa, como en el ejemplo siguiente.

Consideremos los cilindros conductores coaxiales mostrados en la figura 1.40, los cuales pueden representar el cátodo y el ánodo de una válvula de vacío.

Despreciando el efecto de bordes se tiene un problema cuyas condiciones de frontera son conocidas: supondremos que $\rho(r) = \frac{c}{r}$, donde c es una constante, y aplicaremos la ecuación de Poisson para obtener la función de potencial.

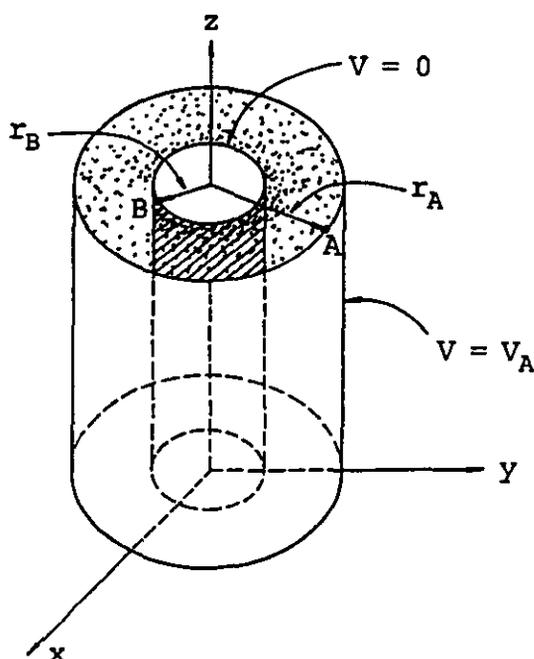


FIGURA 1.40. Cilindros coaxiales conductores con densidad volumétrica de carga entre ellos.

Usaremos para el problema coordenadas cilíndricas; en este sistema se tiene que

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Aplicando la ecuación de Poisson (1.129)

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

para el problema que deseamos resolver se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dV}{dr} \right] = - \frac{c}{\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

y queda, al realizar la primera integración

$$r \frac{dV}{dr} = - \frac{c}{\epsilon_0} r + A$$

después de la segunda integración tenemos

$$V(r) = - \frac{c}{\epsilon_0} r + A \ln r + B$$

Las constantes de integración A y B se evalúan con las condiciones

$$V(r_B) = 0 \quad \text{y} \quad V(r_A) = V_A$$

entonces

$$0 = - \frac{c}{\epsilon_0} r_B + A \ln r_B + B$$

y

$$V_A = - \frac{c}{\epsilon_0} r_A + A \ln r_A + B$$

restando la penúltima expresión de la última expresión

$$A = \frac{V_A + \frac{c}{\epsilon_0} [r_A - r_B]}{\ln \frac{r_A}{r_B}} \quad B = \frac{c}{\epsilon_0} r_B - \frac{V_A + \frac{c}{\epsilon_0} [r_A - r_B]}{\ln \frac{r_A}{r_B}} \ln r_B$$

y la función de potencial buscada es

$$V(r) = -\frac{C}{\epsilon_0} r + \frac{V_A + \frac{C}{\epsilon_0} [r_A - r_B]}{\ln \frac{r_A}{r_B}} \ln r + \frac{C}{\epsilon_0} r_B -$$

$$-\frac{V_A + \frac{C}{\epsilon_0} [r_A - r_B]}{\ln \frac{r_A}{r_B}} \ln r_B$$

$$V(r) = \frac{C}{\epsilon_0} (r_B - r) + \frac{V_A + \frac{C}{\epsilon_0} [r_A - r_B]}{\ln \frac{r_A}{r_B}} \ln \frac{r}{r_B} \quad [V]$$

Compruebe que la expresión de potencial en la región entre dos esferas conductoras concéntricas de radios r_B y r_A y potenciales $V = 0$ y $V = V_A$ respectivamente, está dada por la expresión en coordenadas esféricas

$$V(r) = \frac{V_A r_A}{r_A - r_B} \left[1 - \frac{r_B}{r} \right]$$

Recuerde que en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\sin \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right] = 0$$

1.18 CAMPO Y POTENCIAL ELECTRICO EN PRESENCIA DE CONDUCTORES

Cuando existe un campo eléctrico en el interior de un conductor, sus portadores de carga se moverán en dirección del campo si son positivos y en dirección contraria en caso de ser negativos; este movimiento dará como resultado una acumulación de carga que, en estado estable o electrostático, se opondrá al movimiento original creando un campo eléctrico contrario al aplicado.

El equilibrio estático de carga se logra entonces cuando el campo eléctrico inducido cancela exactamente el aplicado; esto implica que el campo electrostático dentro de cualquier conductor cargado o descargado, en presencia o no de otros cuerpos cargados cercanos, será siempre cero.

Como consecuencia de lo anteriormente expuesto, el exceso de carga y la carga inducida en un conductor, bajo condiciones electrostáticas residen en su superficie. Aplicando la ley de Gauss en una región interior del conductor, como $E = 0$, concluimos que no existe carga neta en esta región.

Podemos asegurar también que la dirección del campo electrostático es normal a la superficie del conductor, ya que si existiera una componente en la dirección tangente a la superficie, esta componente ocasionaría movimiento de cargas, lo cual contradice nuestra suposición de que se ha alcanzado el equilibrio estático.

Al aplicar la ley de Gauss a una parte de la superficie de un conductor cargado, construyendo una superficie gaussiana cilíndrica, como la mostrada en la figura 1.41, podemos demostrar que el campo eléctrico depende de la densidad superficial local de carga.

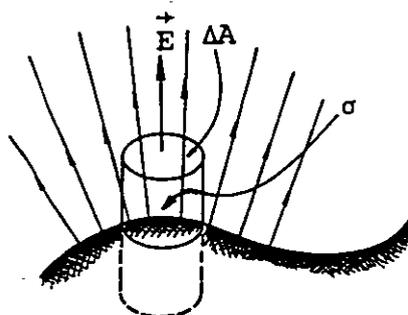
Conductor $E = 0$

FIGURA 1.41. Superficie gaussiana que contiene una porción de conductor.

De la ecuación (1.50)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_N}{\epsilon_0}$$

Por ser la superficie gaussiana muy pequeña, E se puede considerar constante en toda la superficie ΔA y perpendicular a ésta, por lo tanto

$$E\Delta A = \frac{\sigma\Delta A}{\epsilon_0}$$

de donde

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.131)$$

Este último resultado es engañoso ya que podemos pensar que el campo eléctrico no depende de la existencia de carga en el resto de la superficie del conductor, sin embargo no olvidemos que la densidad superficial σ que aparece es el resultado de la ubicación estática del exceso de carga en toda la superficie de dicho conductor.

Con base en lo comentado y apoyándonos en la ecuación del gradiente de potencial, concluimos que el potencial en el interior del conductor debe ser constante ya que

$$\vec{E} = - \vec{\nabla}V$$

pero $E = 0$ en el interior, entonces

$$\vec{\nabla}V = 0$$

y $V = \text{constante}$.

Además, todos los puntos de la superficie deben estar al mismo potencial, ya que si existe diferencia de potencial entre dos puntos de dicha superficie, las cargas se desplazarán contradiciendo una vez más nuestra suposición de equilibrio estático. Concluimos que un conductor bajo condiciones electrostáticas es un volumen equipotencial.

Dado que la superficie del conductor es equipotencial, al evaluar el gradiente de potencial en la superficie obtendremos en cada punto un vector perpendicular a ella, como ya se había indicado.

En un cuerpo conductor cargado de forma irregular, la densidad superficial de carga no es constante, debido a que el exceso de carga se distribuye de tal forma que la energía potencial sea mínima, es decir, las cargas en exceso tratan de alejarse lo más posible unas de otras. Como las zonas de menor radio de curvatura son las más lejanas y además su superficie es pequeña, la densidad superficial de carga será mayor en ellas, y en consecuencia el campo eléctrico más intenso se localizará en los puntos cercanos a las puntas.

El conocimiento de las características mencionadas nos permitirá simplificar la solución de muchos problemas prácticos como el que a continuación se describe: consideremos un cable típico, formado por dos alambres conductores cilíndricos paralelos, en el que deseamos conocer el campo eléctrico que existe entre los conductores cuando se les aplica una cierta diferencia de potencial.

Aunque conocemos la forma de evaluar el campo eléctrico que produce un cilindro conductor cargado y la validez del principio de superposición, no podemos aplicar directamente estos conocimientos, ya que por ser dos conductores cercanos, el fenómeno de inducción alterará la distribución de carga de cada cilindro.

Aunque para resolver el problema es posible aplicar la ecuación de Laplace fijando las condiciones de frontera, usaremos un procedimiento más simple basado en las propiedades del campo y potencial eléctricos en presencia de conductores.

La figura 1.42 muestra dos segmentos de línea muy largos con distribuciones lineales de carga λ y $-\lambda$, el potencial en un punto cualquiera A es

$$V_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a_2}{a_1} \quad (1.132)$$

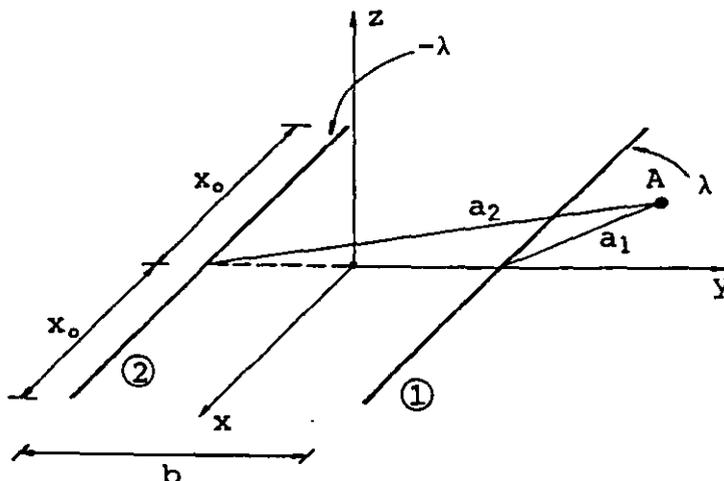


FIGURA 1.42. Segmentos de alambres conductores con distribuciones lineales de carga constante λ y $-\lambda$.

Se sugiere como ejercicio al lector comprobar la ecuación (1.132), integrando la ecuación (1.107) o por medio de la ecuación (1.112) y el principio de superposición, haciendo en ambos casos tender x_0 a infinito.

Las superficies equipotenciales que este arreglo produce son cilindros no coaxiales, y las intersecciones de estas superficies con el plano yz de la figura son circunferencias no concéntricas, como se muestra a continuación: la superficie de potencial V_0 se obtiene con la ecuación (1.132)

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a_2}{a_1} \quad (1.133)$$

de donde

$$\frac{a_2}{a_1} = e^{\left[\frac{V_0 2\pi\epsilon_0}{\lambda} \right]} = \beta \quad (1.134)$$

y de la figura 1.42

$$a_1^2 = z^2 + (y - b/2)^2$$

$$a_2^2 = z^2 + (y + b/2)^2$$

quedando que

$$\beta^2 = \frac{z^2 + (y - b/2)^2}{z^2 + (y + b/2)^2} \quad (1.135)$$

La ecuación anterior representa una circunferencia con centro en las coordenadas

$$\left[\frac{b}{2}, \frac{\beta^2 + 1}{1 - \beta^2}, 0 \right] \quad (1.136)$$

y su radio es

$$r = \frac{\beta b}{\beta^2 - 1} \quad (1.137)$$

La figura 1.43 muestra los conductores y algunas de las circunferencias mencionadas.

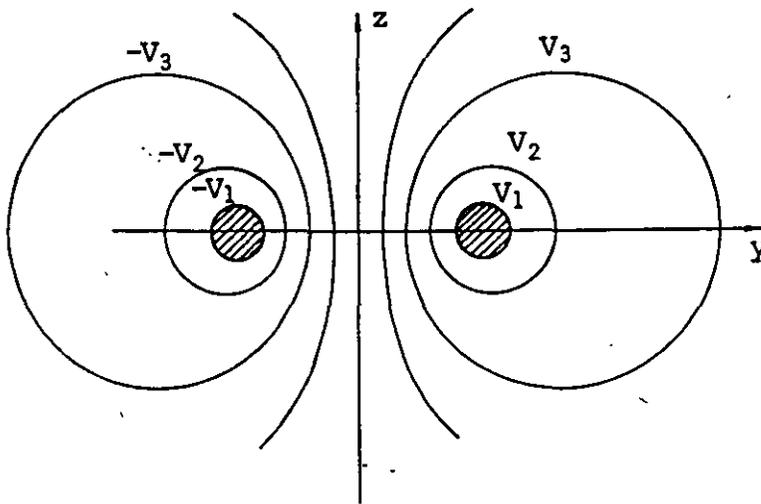


FIGURA 1.43. Alambres conductores paralelos largos y superficies equipotenciales asociadas.

Por ser equipotencial la superficie de cualquier conductor cargado, podemos sustituir una de las superficies equipotenciales encontradas por la de un conductor, sin alterar las características electrostáticas del arreglo en puntos exteriores a éste.

Regresando a nuestro problema original observamos que los cilindros conductores pueden ser sustituidos por dos líneas con densidades superficiales constantes y con base en la diferencia de potencial entre los cilindros obtendremos la posición de las líneas que los sustituyen.

Si tenemos dos cilindros conductores de radio de sección transversal a , separados sus centros una distancia d con una diferen

cia de potencial entre ellos V_{12} , conocemos el radio y el centro de cada circunferencia, por lo que de las ecuaciones (1.136) y (1.137) tenemos que

$$a = \frac{\beta b}{\beta^2 - 1} \quad \text{y} \quad \frac{d}{2} = \frac{b}{2} \frac{\beta^2 + 1}{1 - \beta^2}$$

de donde

$$\frac{d}{a} = \frac{\beta^2 + 1}{\beta}$$

o su equivalente

$$a\beta^2 - d\beta + a = 0$$

finalmente

$$\beta = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a}$$

Si los potenciales de cada cilindro son V_1 y V_2 , de (1.132)

$$V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \beta$$

$$V_2 = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \beta$$

y como $V_1 = -V_2$, la diferencia de potencial es

$$V_{12} = V_1 - V_2 = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \beta \quad (1.138)$$

Suponiendo un cable con dimensiones

$$a = 1 \text{ mm} \quad d = 6 \text{ mm} \quad \text{y} \quad V_{12} = 120 \text{ V}$$

compruebe que es posible sustituir los cilindros por líneas colocadas en $y = \pm 2.83 \text{ mm}$ con densidades lineales constantes.

$$\lambda = \pm 1.89 \frac{\text{nC}}{\text{m}}.$$

Verifique también que la magnitud máxima del campo eléctrico que se presenta en la superficie de cualquier cilindro es

$$E_{\text{máx}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \left[\frac{1}{4.83} + \frac{1}{0.83} \right] 10^3 = 4.8 \times 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

1.19 METODO DE IMAGENES

La solución de muchos problemas electrostáticos puede simplificar se reemplazando la distribución original de carga por otra que simplifique los cálculos, y que en la región de interés sea equivalente.

Ya que cualquier superficie conductora puede ser reemplazada por una superficie equipotencial idéntica producida por un arreglo de cargas, el problema será encontrar la ubicación de las cargas que producen tal superficie equipotencial. Una vez encontrada podemos utilizar el arreglo para cualquier cálculo, como se indica a continuación.

Un caso típico se muestra en la figura 1.44, donde se tiene una carga puntual Q cercana a una superficie conductora conectada a tierra.

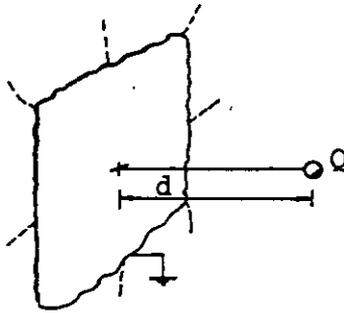


FIGURA 1.44. Carga puntual Q cerca de una superficie plana conductora muy grande y aterrizada.

Si se desea, por ejemplo, conocer el campo eléctrico en un punto cualquiera de la región entre la superficie y la carga Q , no podemos evaluarlo de la manera usual porque no se conoce la distribución de carga en la superficie conductora.

Si suponemos la existencia de una carga $-Q$ colocada detrás de la placa a una distancia d , debido a la simetría de la figura se obtendrá el potencial deseado en la superficie conductora, es decir, estará a un potencial cero por estar conectado a la referencia.

Para calcular el campo eléctrico en la región deseada, usaremos en vez de la superficie, la carga ficticia $-Q$, llamada carga imagen. Este procedimiento dará el valor correcto para el campo en esta región, pero no es válida su aplicación para puntos a la izquierda de la placa, ya que en esa zona el campo eléctrico es cero.

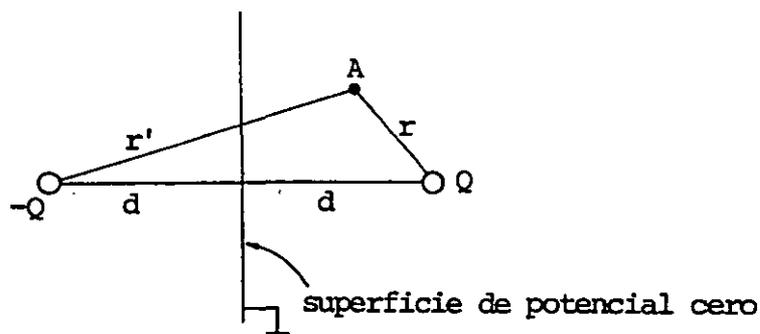


FIGURA 1.45. Carga puntual Q y posición de su carga imagen detrás de la superficie conductora.

Con referencia a la figura 1.45, el potencial en un punto cualquiera A es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} - \frac{Q}{r'} \right]$$

La densidad de carga inducida en la superficie conductora se puede obtener con la componente normal del campo eléctrico

$$\sigma_i = \epsilon_0 E_n$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\sigma_i = - \frac{Qd}{2\pi r^3}$$

Otro ejemplo de aplicación del método de imágenes es el caso de una carga puntual Q cercana a una esfera conductora conectada a tierra, como se muestra en la figura 1.46.

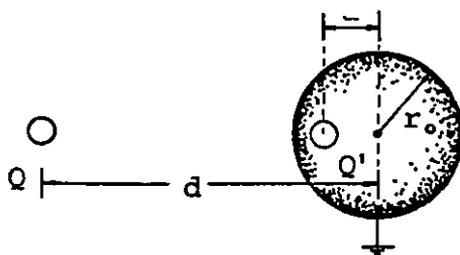


FIGURA 1.46. Carga puntual Q cerca de una superficie esférica conductora.

Es posible demostrar que la carga imagen debe ser colocada a una distancia a del centro de la esfera dada por la relación

$$a = \frac{r_0^2}{d}$$

y su magnitud debe ser

$$Q' = - \frac{r_0}{d} Q$$

Si la esfera no está conectada a tierra y posee además un exceso de carga, el problema se resuelve colocando dos cargas puntuales; la primera producirá el efecto considerado anteriormente y la segunda colocada en el centro de la esfera fijará el potencial deseado en su superficie.

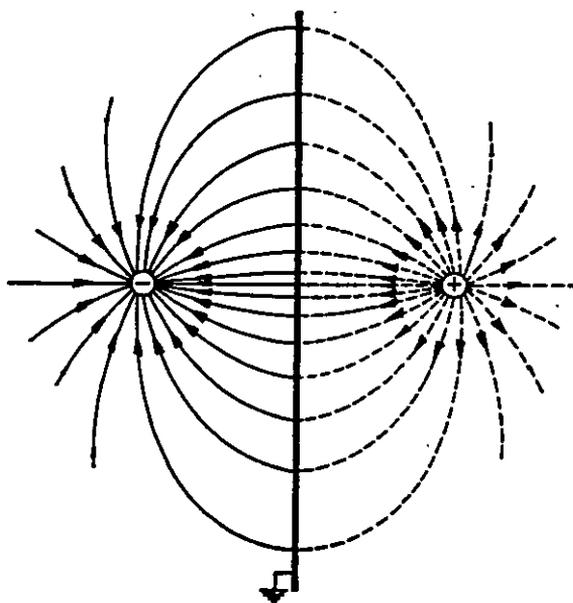


FIGURA 1.47. Carga negativa cercana a una placa conductora grande y aterrizada, carga imagen y líneas de campo eléctrico asociadas.

PROBLEMAS

1.1 Calcule en forma vectorial la fuerza que ejerce cada carga puntual sobre la otra, ver la figura P1.1.

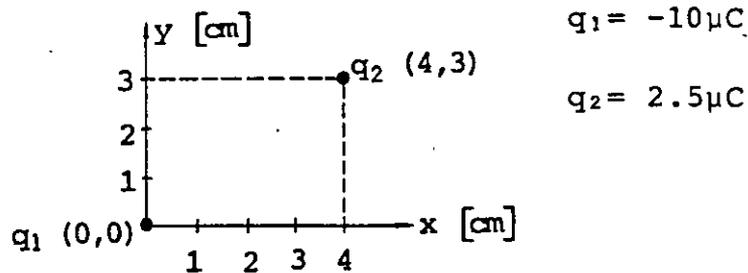


Figura P1.1

1.2 Con referencia a la figura P1.2, si al colocar un electrón ($q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) en el punto A, la fuerza eléctrica que se ejerce sobre él es $\vec{F} = -(80 \hat{x} + 40 \hat{y}) \times 10^{-16} \text{ N}$, calcule:

- El vector intensidad de campo eléctrico en el punto A.
- La magnitud y signo de la carga Q , que colocada en el origen produciría dicho campo.

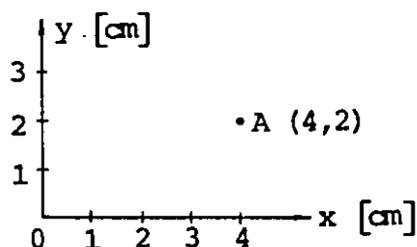


Figura P1.2

1.3 Calcule el vector intensidad de campo eléctrico en los puntos P, Q y R de la figura P1.3, debido a la presencia de las cargas puntuales $q_1 = -8 \mu\text{C}$ colocada en $A(0, 0, 0)$, $q_2 = 2 \mu\text{C}$ colocada en $B(0, 3, 0)$ cm y $q_3 = 6 \mu\text{C}$ colocada en $C(4, 0, 1)$ cm.

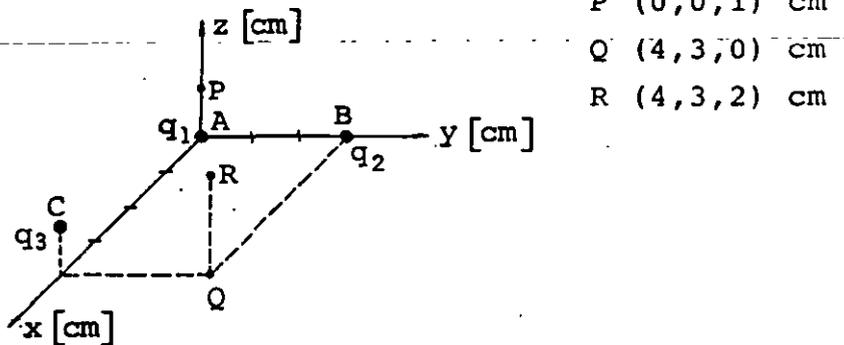


Figura P1.3

1.4 Un alambre delgado se dobla para formar un cuadrado de 6 cm de lado.

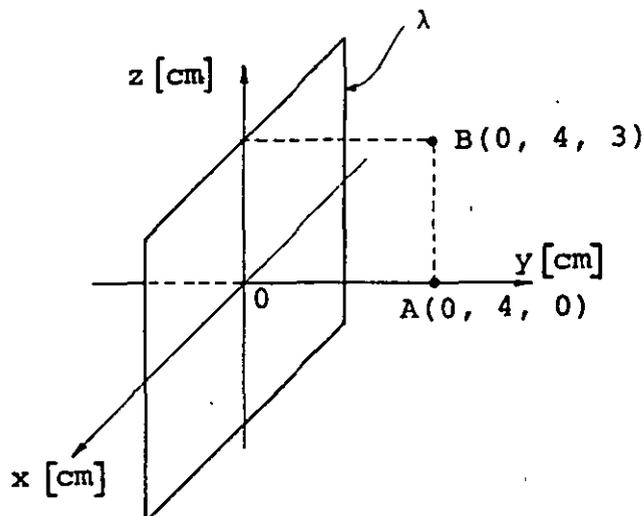


Figura P1.4

Considere el sistema de referencia mostrado en la figura P1.4, suponga que el alambre posee una densidad de carga uniforme $\lambda = -\frac{1}{3} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$ y calcule:

a) El vector intensidad de campo eléctrico en los puntos O , A y B .

b) El vector intensidad de campo eléctrico para un punto C situado sobre el lado positivo del eje y , a 90 cm del origen. Compare el resultado anterior con el obtenido por medio de la suposición de que, a esa distancia, el arreglo puede ser considerado como carga puntual, y concluya.

1.5 Suponga un anillo circular cargado y colocado en el plano yz , como se muestra en la figura P1.5. Si el vector intensidad de campo eléctrico en el punto B es $\vec{E}_B = 36 \hat{i} \frac{N}{C}$, cuando la densidad lineal de carga es uniforme, calcule:

a) El radio del anillo si su carga en exceso es $Q = 12.5 \text{ pC}$.

b) El vector intensidad de campo eléctrico en el punto $C(90, 0, 0)$ cm.

Use el resultado obtenido en el inciso a y compare el resultado con la aproximación que resulta al considerar el anillo como una carga puntual y concluya.

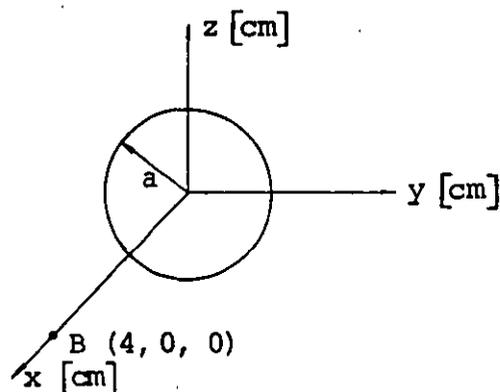


Figura P1.5

1.6 Suponga una superficie circular de radio $a = 20 \text{ cm}$, con una carga $Q = 40 \text{ } \mu\text{C}$ uniformemente distribuida en ella. Considere el sistema de referencia de la figura P1.6, en el cual el eje y coincide con la perpendicular a la superficie que pasa por el centro y calcule:

a) El vector intensidad de campo eléctrico \vec{E} en los puntos $A(0, 1, 0) \text{ cm}$, $B(0, 10, 0) \text{ cm}$ y $C(0, 400, 0) \text{ cm}$.

b) El error involucrado en el cálculo de \vec{E} , para cada punto del inciso anterior, considerando la superficie muy grande y concluya.

c) Lo mismo que en el inciso anterior, pero ahora considere a la superficie como carga puntual.

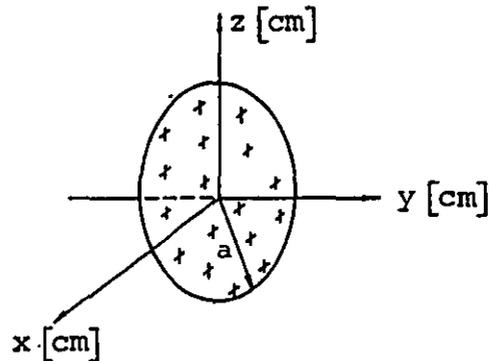


Figura P1.6

1.7 Se sabe que en el interior de una superficie cerrada de forma irregular existe carga positiva y negativa; la magnitud de la carga negativa es $0.522 \times 10^{-8} \text{ C}$. Si el flujo eléctrico ϕ_e , a través de dicha superficie es $2800 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$, calcule la magnitud de la carga positiva que existe en el interior de la misma.

1.8 Una esfera dieléctrica maciza, de 10 cm de radio, posee una carga uniformemente distribuida en todo su volumen.

Si $\rho = \frac{2.5}{\pi} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^3}$, calcule la magnitud del vector intensidad de campo para puntos que distan del centro de la esfera la cantidad r indicada.

- Centro de la esfera ($r = 0$).
- Punto interior ($r = 0.05$ m).
- En la superficie de la esfera ($r = 10$ cm).
- Punto exterior ($r = 20$ cm).

1.9 Se tienen tres cargas puntuales colocadas en el plano xy de la figura P1.9, calcule:

- El potencial en los puntos A y B.
- La diferencia de potencial V_{BA} .
- La energía potencial eléctrica de q_3 .
- El potencial en el punto A y en el punto B y la diferencia de potencial V_{AB} , considerando el origen como punto de potencial cero.

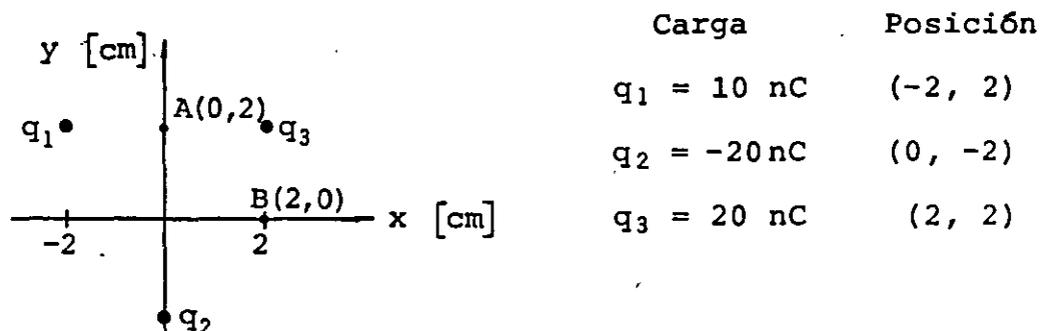
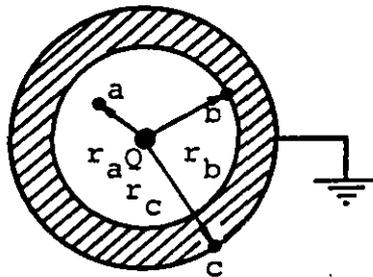


Figura P1.9

1.10 Dentro de la esfera conductora hueca de la figura P1.10 existe una pequeña esfera con carga $Q = 100 \text{ nC}$. Si la superficie exterior se conecta a tierra mediante un alambre conductor y considerando las condiciones de equilibrio estático, calcule:

- La densidad superficial de carga σ en la superficie interior y exterior de la esfera.
- Los potenciales en las superficies interior y exterior de la esfera y en el punto a .
- La diferencia de potencial entre los puntos a y c .



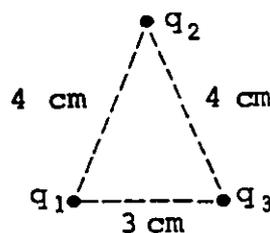
$$r_a = 6 \text{ cm}$$

$$r_b = 9 \text{ cm}$$

$$r_c = 12 \text{ cm}$$

Figura P1.10

1.11 Obtenga la energía potencial eléctrica que posee el arreglo de cargas puntuales de la figura P1.11. Indique también si fue necesario suministrar energía para lograr dicho arreglo.



$$q_1 = 4 \text{ } \mu\text{C}$$

$$q_2 = -6 \text{ } \mu\text{C}$$

$$q_3 = 8 \text{ } \mu\text{C}$$

Figura P1.11

1.12 Calcule el potencial en el centro del marco conductor cargado de la figura P1.12, suponga que posee una distribución lineal uniforme $\lambda = -\frac{1}{6} \times 10^{-6} \frac{C}{m}$.

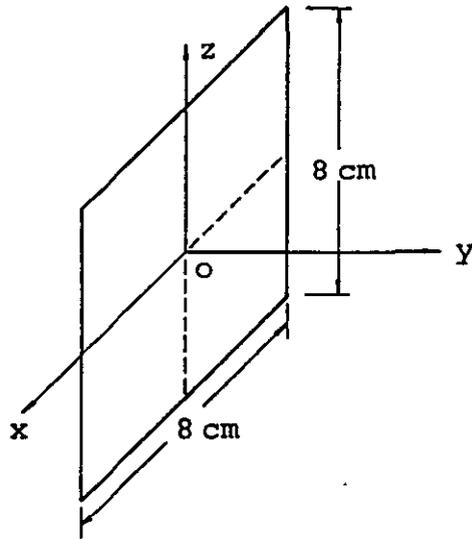


Figura P1.12

1.13 Suponga que la superficie circular de radio $r_0 = 40 \text{ cm}$ de la figura P1.13 posee una densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 70.8 \frac{\mu C}{m^2}$. Para puntos colocados sobre su eje y a las distancias indicadas:

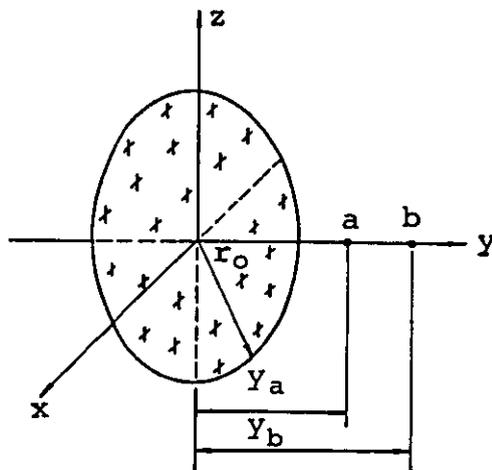


Figura P1.13

a) Calcule los potenciales V_a y V_b así como la diferencia de potencial V_{ab} para los casos siguientes:

a.1) $y_a = 0.5 \text{ cm}$; $y_b = 1 \text{ cm}$

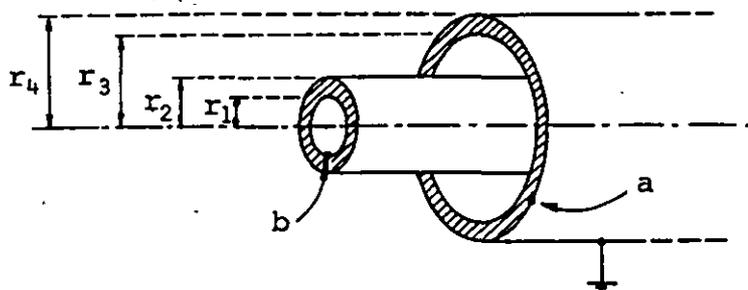
a.2) $y_a = 40 \text{ cm}$; $y_b = 50 \text{ cm}$

a.3) $y_a = 25 \text{ m}$; $y_b = 30 \text{ m}$

b) Compare los resultados de V_{ab} de los incisos a.1 y a.3 con los obtenidos al considerar la placa muy grande o carga puntual según las distancias involucradas.

1.14 Suponga un par de cilindros conductores muy largos y coaxiales, con las dimensiones mostradas en la figura P1.14; si se les aplica una diferencia de potencial $V_{ab} = 120 \text{ V}$ y considerando como referencia el cilindro exterior obtenga:

- El potencial de cada cilindro.
- La densidad superficial de carga en las superficies interior y exterior de cada uno de los cilindros.
- El exceso de carga en 3 m de longitud del cilindro externo.
- El vector intensidad de campo eléctrico máximo.



$$r_1 = 2 \text{ mm}$$

$$r_2 = 5 \text{ mm}$$

$$r_3 = 9 \text{ mm}$$

$$r_4 = 1.2 \text{ cm}$$

Figura P1.14

1.15 La gráfica de la figura P1.15 representa la variación del potencial con respecto a la distancia x , a un cierto punto de referencia, en una zona donde existe campo eléctrico. Obtenga la variación del campo eléctrico en la dirección de x y represente la en una gráfica.

Explique por qué el área total dada por la integral $A = \int E_x dx$ debe de ser cero.

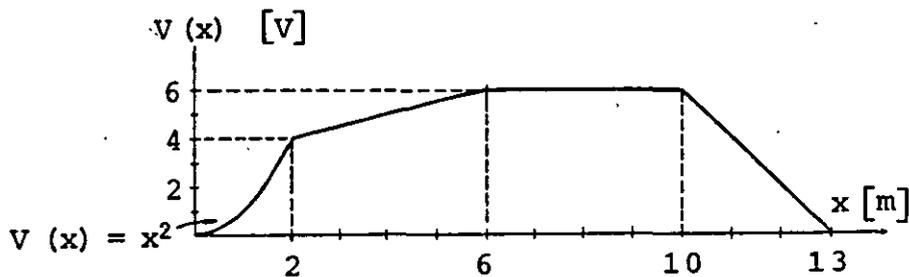
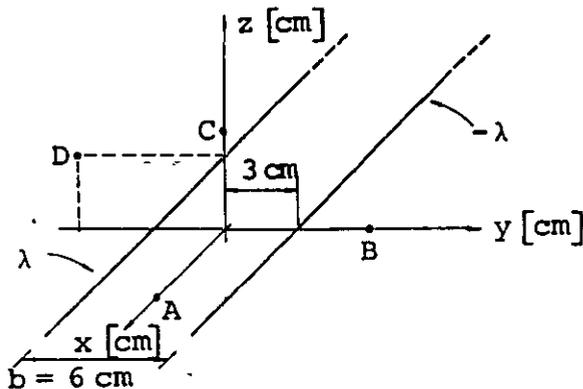


Figura P1.15

1.16 Considere que las líneas de la figura P1.16 son muy largas y calcule el potencial para los puntos A, B, C y D, cuando las líneas poseen densidades lineales uniformes λ y $-\lambda$.



$$\lambda = \frac{1}{9} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}}$$

$$A(4, 0, 0) \text{ cm}$$

$$B(0, 6, 0) \text{ cm}$$

$$C(0, 0, 4) \text{ cm}$$

$$D(0, -6, 3) \text{ cm}$$

Figura P1.16

1.17 Suponga un cable muy largo con las dimensiones mostradas en la figura P1.17, al cual se le aplica una diferencia de potencial $V_{12} = 120 \text{ V}$; calcule el vector intensidad de campo eléctrico en los puntos A, B y C.

$$a = 1 \text{ mm} \quad A(0, -1, 0) \text{ mm}$$

$$d = 4 \text{ mm} \quad B(0, 0, 2) \text{ mm}$$

$$C(0, -3, 0) \text{ mm}$$

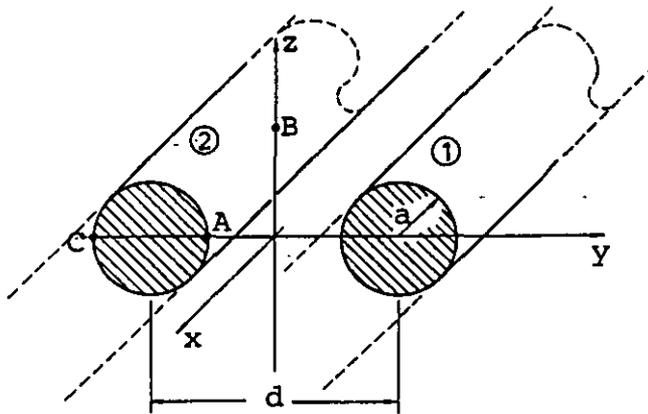


Figura P1.17

CAPITULO 2 CAPACITANCIA Y DIELECTRICOS

INTRODUCCIÓN

Uno de los elementos eléctricos básicos que existen es el capacitor. En el presente tema estudiaremos la propiedad de los conductores conocida como capacitancia y realizaremos el cálculo de los capacitores de uso común.

Al analizar los dieléctricos (sustancias aislantes), observaremos cuál es su influencia en las características del capacitor y cuándo se emplean en el espacio comprendido entre los conductores que lo forman.

Para los estudios antes indicados emplearemos los conceptos y leyes expuestos en el primer tema, haciendo énfasis en el tratamiento del concepto de energía potencial eléctrica, así como en las propiedades eléctricas de los materiales empleados en los capacitores.

2.1 CAPACITANCIA Y SU CALCULO

Consideremos dos piezas metálicas, a las que denominaremos electrodos, sin exceso de carga y separados una cierta distancia, colocados en el vacío tal como se muestra en la figura 2.1 .

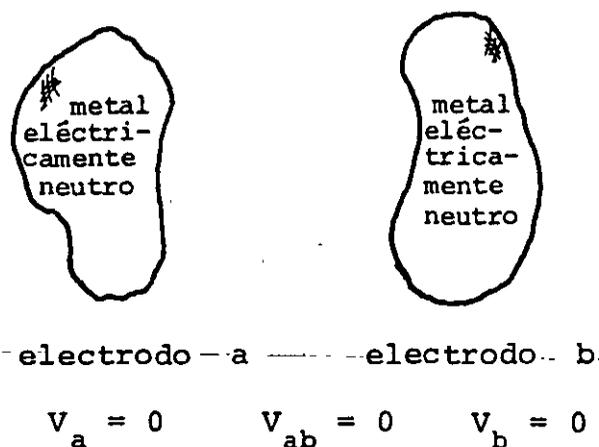


FIGURA 2.1. Modelo de capacitor descargado.

Por ser cuerpos descargados, el potencial eléctrico de cada uno de los electrodos es cero. Empleando un agente externo que se en cargue del transporte de carga, de un electrodo a otro, traslademos un electrón del electrodo a al electrodo b . A partir de este momento el electrodo a adquiere una carga neta positiva y en consecuencia un potencial eléctrico positivo. Por lo que respecta al electrodo b , éste adquiere carga neta negativa y asimismo un potencial eléctrico negativo. Por esta razón, entre las armaduras tendremos una diferencia de potencial que llamaremos V_{ab} ; si el proceso de transporte de cargas continúa, se incrementará la carga neta de cada electrodo y en consecuencia, la diferencia de potencial V_{ab} , tal como se muestra en la figura 2.2.

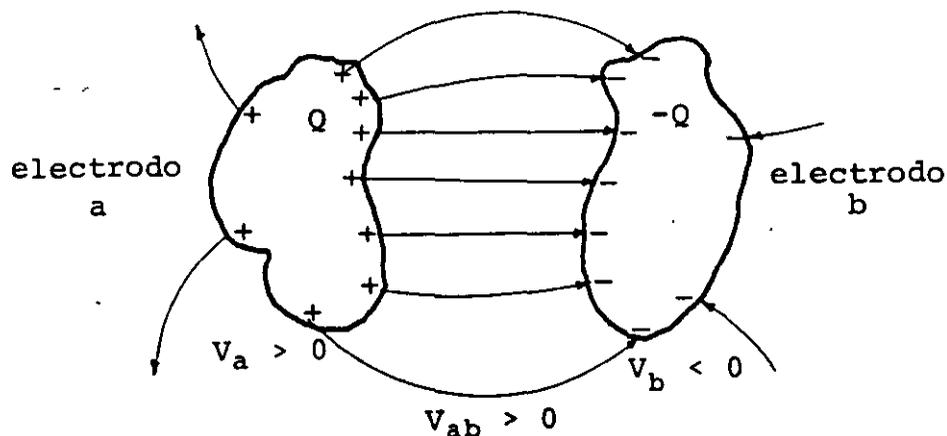


FIGURA 2.2. Modelo de capacitor cargado.

Si llamamos Q a la carga que tiene el electrodo a , el electrodo b deberá tener una carga igual en magnitud pero negativa ($-Q$) y se observa que la carga neta del conjunto de electrodos es cero.

En este proceso de carga resulta que a medida que Q aumenta, también lo hace V_{ab} , por lo que es posible establecer una relación de proporcionalidad entre dichas magnitudes

$$Q \propto V_{ab}$$

Si introducimos en la última expresión una constante de proporcionalidad, a la que denominaremos C , tenemos

$$Q = CV_{ab} \quad (2.1)$$

de donde

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \quad (2.2)$$

A la constante C se le denomina capacitancia y al dispositivo mostrado en las figuras 2.1 y 2.2 se le llama capacitor, siendo la expresión (2.2) la definición de esta propiedad en el caso de dos conductores con cargas Q y $-Q$.

La unidad de C , en el SI es

$$[C]_u = \left[\frac{Q}{V_{ab}} \right]_u = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = \frac{C}{V} = F$$

A este cociente de unidades se le ha dado el nombre de farad, en honor al físico Michael Faraday.

2.2 EJEMPLOS DE CALCULO DE CAPACITANCIA

a) Capacitor de placas planas y paralelas

Analicemos el dispositivo formado por un par de electrodos metálicos planos y paralelos, los cuales han sido cargados en forma semejante a la antes descrita; por el momento consideremos que existe vacío entre dichos electrodos.

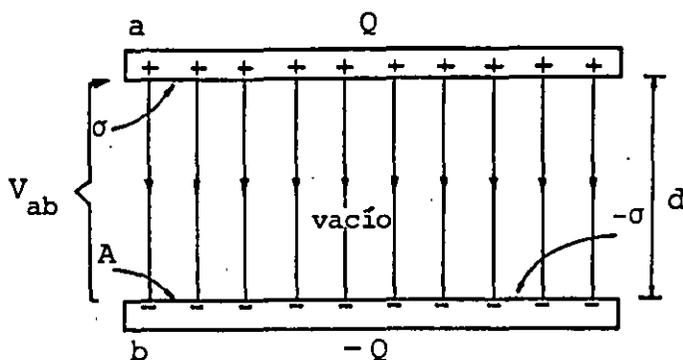


FIGURA 2.3. Capacitor de placas planas y paralelas.

Solución

De la definición de capacitancia tenemos que

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

además, de la Ley de Gauss, sabemos que el campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ es decir, } E = \frac{Q}{A \epsilon_0}$$

o sea

$$Q = A \epsilon_0 E \quad (2.3)$$

Por otro lado, del tema anterior, tenemos que

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{de la cual se obtiene}$$

$$V_{ab} = Ed \quad (2.4)$$

Sustituyendo (2.3) y (2.4) en la expresión de la capacitancia que da

$$C = \frac{A\epsilon_0 E}{Ed}$$

o sea

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad (2.5)$$

Si el área de cada placa es de 2.5 m^2 y la separación entre placas es de 1 mm , verificar que

$$C = 22.125 \times 10^{-9} \text{ F} = 22.125 \text{ nF} \quad (\text{nF} = \text{nanofarads})$$

b) Capacitor esférico

Calculemos la capacitancia de dos electrodos esféricos concéntricos cargados con igual cantidad de carga pero de signo diferente cada uno.

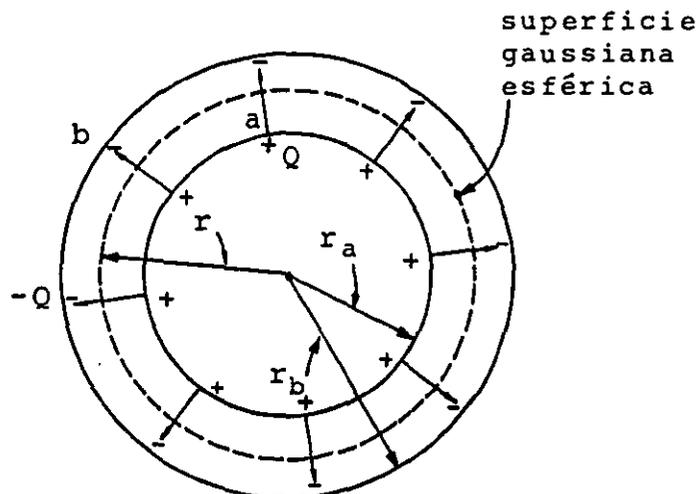


FIGURA 2.4. Capacitor esférico.

Solución

Sabemos que $C = \frac{Q}{V_{ab}}$

La diferencia de potencial V_{ab} se puede calcular de la expresión

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.6)$$

Para este tipo de capacitores, observamos que el campo eléctrico entre los electrodos dependerá del valor de r , es decir $E = f(r)$.

Mediante la aplicación de la ley de Gauss a la superficie gaussiana representada en la figura 2.4, obtenemos que

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.7)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.6) tendremos

$$V_{ab} = - \int_{r_b}^{r_a} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right] \quad (2.8)$$

Sustituyendo (2.8) en la definición de capacitancia, tenemos

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right]}$$

o sea

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left[\frac{r_a r_b}{r_b - r_a} \right] \quad (2.9)$$

Si los radios de las esferas a y b fueran respectivamente de 5 y 10 cm , verificar que

$$C = 1.112 \times 10^{-11} \quad F = 11.12 \text{ pF} \quad (\text{pF} = \text{picofarads})$$

c) Esfera aislada

Obtengamos la capacitancia de un electrodo esférico aislado. En este caso podemos considerar que el otro electrodo es una esfera concéntrica de radio infinito.

Solución

Partamos de la expresión (2.9)

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right]}$$

Si la esfera b es de radio infinito, se tendrá

$$r_b \rightarrow \infty$$

por lo tanto $\frac{1}{r_b} \rightarrow 0$

sustituyendo este resultado en la expresión (2.9), tendremos

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left[\frac{1}{r_a}\right]}$$

es decir

$$C = 4\pi\epsilon_0 r_a \quad (2.10)$$

Con la expresión (2.10) podemos calcular la capacitancia de una esfera metálica con radio de 30 cm . Comprobar que este valor es

$$C = 3.336 \times 10^{-11} \text{ F} = 33.36 \text{ pF}$$

Podemos observar de los ejemplos de capacitancia calculados, que esta propiedad, de un conductor o conjunto de conductores, depende de las características del dispositivo (capacitor) tales como: factores geométricos (distancia entre placas, área de las placas, radios, etc.) y el medio existente entre los electrodos, que en los ejemplos fue el espacio libre o vacío, por lo cual aparece en las expresiones obtenidas (2.5), (2.9) y (2.10), la permitividad ϵ_0 .

Cuando la expresión de la capacitancia de un arreglo de conductores no depende de la carga Q ni de la diferencia de potencial aplicada V_{ab} , se dice que dichos capacitores son lineales, tales como los ejemplos analizados anteriormente.

2.3 CAPACITORES Y SU CLASIFICACION

El capacitor es uno de los elementos pasivos de las redes eléctricas; su importancia radica en que es un dispositivo que permite almacenar carga eléctrica y, como veremos más adelante, nos permite almacenar energía. Los símbolos más comúnmente empleados para su representación son los que aparecen en la figura 2.5.

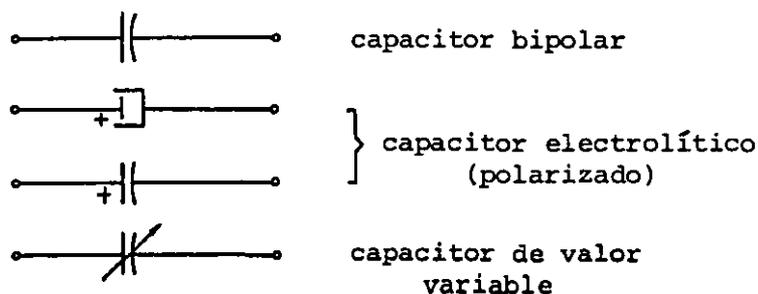


FIGURA 2.5. Símbolos del capacitor.

Los capacitores se pueden clasificar de diversas maneras, según la característica que se tome como referencia.

a) Capacitores lineales y no lineales

Esta clasificación obedece al comportamiento del capacitor cuando se está llevando a cabo el proceso de carga.

Capacitor lineal es aquel cuya capacitancia permanece constante sin importar la magnitud de la diferencia de potencial aplicada; en la figura 2.6 se representan los modelos gráficos de este tipo de capacitores.

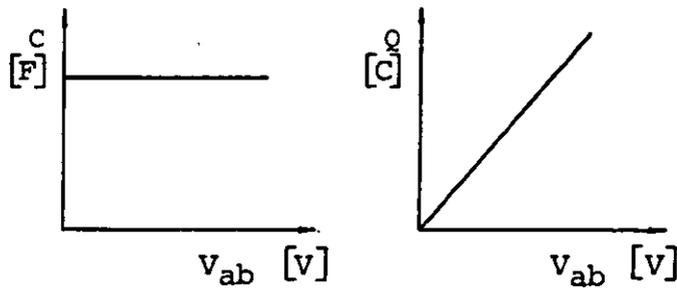


FIGURA 2.6. Modelos gráficos de un capacitor lineal.

Capacitor no lineal es aquel cuya capacitancia varía en función de la diferencia de potencial aplicada; en la figura 2.7 se representan los modelos gráficos de un capacitor no lineal.

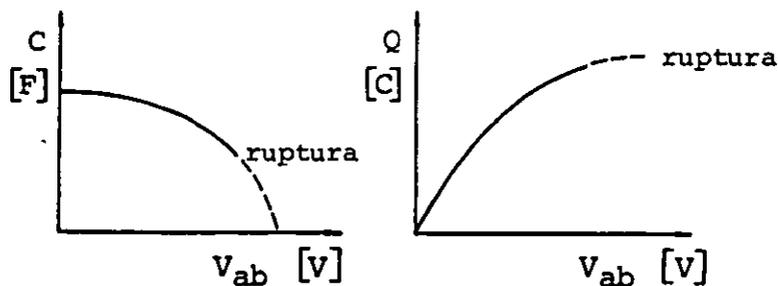


FIGURA 2.7. Modelos gráficos del capacitor no lineal.

En adelante, emplearemos exclusivamente capacitores lineales.

b) Capacitores fijos y variables

Un capacitor puede ser diseñado de manera que los factores que influyen en forma más significativa en su valor de capacitancia no se puedan modificar y, por tanto, su valor sea aproximadamente constante; a este tipo de capacitores se les da el nombre de capacitores fijos.

Cuando alguna de las características del capacitor, por ejemplo la distancia entre placas, se pueda cambiar a voluntad, generalmente mediante un dispositivo mecánico acoplado, se dice que tenemos un capacitor variable.

c) Clasificación de los capacitores atendiendo al material empleado en su fabricación

De acuerdo con el material empleado entre los electrodos metálicos, los capacitores se pueden agrupar, por ejemplo, en capacitores de:

- Cerámica
- Policarbonato
- Poliéster
- Electrolíticos
- Tantalio
- Aire
- Polietileno, etc.

d) Clasificación de los capacitores en polarizados y no polarizados

Algunos tipos de capacitores, debido al material empleado en su fabricación, requieren conectarse a la diferencia de potencial con la polaridad indicada en ellos, tales como los electrolíticos

y los de tantalio; estos capacitores reciben el nombre de polarizados, a diferencia de los no polarizados, en los que no importa el sentido en que se aplique la diferencia de potencial en sus terminales, como el de aire o de polietileno.

2.4 DENSIDAD DE ENERGIA ELECTRICA

Por lo que hemos visto, para cargar un capacitor se requiere de un agente externo, esto es, una diferencia de potencial a la cual se puedan conectar las terminales del capacitor. Este alcanzará su carga máxima cuando la diferencia de potencial entre sus electrodos sea igual a la del agente externo.

Al efectuar el proceso de carga, se realiza un trabajo al trasladar dichas cargas de un electrodo a otro. Si a las terminales del capacitor cargado les conectamos, por ejemplo, un conductor o un foco de filamento, las cargas tendrán un camino por donde regresar a la placa de donde fueron extraídas; en este proceso se observará respectivamente, la aparición de energía en forma de calor o luminosa. Esto significa que el capacitor cargado ha adquirido una capacidad para producir cambios, esto es, ha adquirido energía potencial eléctrica ya que las cargas fueron trasladadas a una región de mayor potencial.

Calculemos la energía almacenada en un capacitor a través del trabajo realizado en el proceso de carga.

Recordemos que el trabajo necesario para trasladar una carga puntual q de un punto b hasta un punto a a través de un campo eléctrico es

$$W_{ba} = q V_{ab}$$

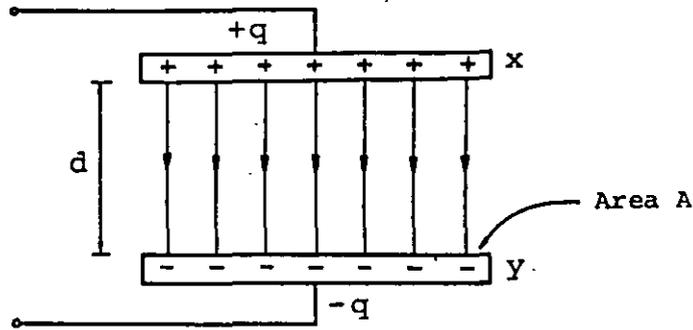


FIGURA 2.8. Carga de un capacitor.

Refiriéndonos a la figura 2.8, pensamos en que el trasladar la carga Q total de la placa inferior a la placa superior, se ha realizado trasladando pequeñas porciones de carga dq y efectuando para cada una de ellas un trabajo dW , esto es

$${}_y dW_x = dq V_{xy} \quad (2.11)$$

Integrando la expresión (2.11) obtenemos el trabajo total efectuado al cargar el capacitor con una carga Q , por lo tanto

$${}_b W_a = \int_0^Q {}_y dW_x = \int_0^Q V_{xy} dq \quad (2.12)$$

pero observamos que la diferencia de potencial V_{xy} es variable, ya que depende de la cantidad de carga en las placas, es decir, $V_{xy} = f(q)$; esta función se obtiene de la definición de capacitancia y queda

$$V_{xy} = \frac{q}{C}$$

Sustituyendo esta expresión en la (2.12) tenemos

$${}_b W_a = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

la cual al integrar

$${}_b W_a = \left[\frac{q^2}{2C} \right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.13)$$

En la expresión (2.13), ${}_b W_a$ representa el trabajo total efectuado al cargar el capacitor. Si no existen efectos disipativos, la energía almacenada deberá ser de igual valor. De este modo, si denominamos a la energía almacenada con la letra U , se tendrá que

$$U = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.14)$$

Combinando la última expresión con la definición de capacitancia, se puede obtener

$$U = \frac{1}{2} C V_{ab}^2 \quad (2.15)$$

o también

$$U = \frac{1}{2} Q V_{ab} \quad (2.16)$$

Hagamos un análisis de unidades en la expresión (2.14) para verificar que U está dada en unidades de energía

$$[U]_u = \frac{[Q^2]_u}{[2C]_u}$$

donde

$$[Q^2]_u = C^2 \quad \text{y} \quad [2C]_u = F$$

ya que el 2 es adimensional, por lo tanto

$$[U]_u = \frac{C^2}{F} = \frac{C^2}{C} = CV = C \frac{J}{C} = J$$

Comprobar que un capacitor de $100 \mu\text{F}$, que tiene una diferencia de potencial de 40 V entre sus terminales, posee una energía almacenada de 0.08 J .

La energía almacenada en el capacitor se debe a la presencia de cargas en las placas, pero también debido a estas cargas existe un campo eléctrico entre ellas. Investiguemos la relación que tienen la energía y el campo eléctrico en un capacitor.

De la expresión (2.15) sabemos que

$$U = \frac{1}{2} CV_{ab}^2$$

pero la diferencia de potencial, para el caso del capacitor de placas planas, se puede obtener de la ecuación

$$V_{ab} = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \text{ quedando } V_{ab} = Ed$$

y, de la expresión (2.5) tenemos que la capacitancia está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (2.15), tendremos

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{\epsilon_0 A}{d} \right] [Ed]^2$$

o sea

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d E^2 \quad (2.17)$$

En la última ecuación se observa que $U = f(E)$ ya que ϵ_0 , A y d son constantes para un capacitor dado, y al no existir campo eléctrico E , la energía U es cero.

Resulta válido considerar que la energía almacenada en el capacitor fue la requerida para establecer el campo eléctrico. Para el caso del capacitor de placas planas y paralelas, el campo eléctrico significativo se localiza en el espacio entre las placas, existiendo un efecto de bordes que generalmente se desprecia.

Por lo anterior, es posible definir una densidad de energía como

$$u = \frac{U}{v} \quad (2.18)$$

siendo v el volumen donde existe campo eléctrico, es decir, el paralelepípedo de base A y altura d .

Sustituyendo (2.17) en (2.18), se tendrá

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (2.19)$$

Aunque la expresión anterior se ha obtenido por medio del capacitor de placas planas, es de validez general.

Verificar que para un capacitor de placas planas y paralelas, de área igual a 4 m^2 y separadas 0.1 mm con una diferencia de potencial de 90 V , se tiene una densidad de energía

$$u = 3.584 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

2.5 ARREGLOS DE CAPACITORES EN SERIE Y PARALELO

Comercialmente sólo se fabrican capacitores de pocos valores, esta situación nos limita cuando requerimos un capacitor de valor especial. Sin embargo es posible superar esta limitación pues haciendo conexiones con los capacitores de valores comerciales se puede obtener un capacitor equivalente del valor deseado.

Estudiaremos las conexiones de capacitores más usuales en paralelo y en serie.

a) Capacitores en paralelo.

Una conexión de elementos eléctricos está en paralelo cuando las terminales de cada uno de los elementos están conectadas al mismo par de puntos. Analicemos una conexión de este tipo para tres capacitores, buscando obtener el capacitor equivalente a dicha conexión. Entenderemos como capacitor equivalente aquel que tendrá igual cantidad de energía almacenada que el arreglo de capacitores en su conjunto.

Sea la conexión de la figura 2.9.

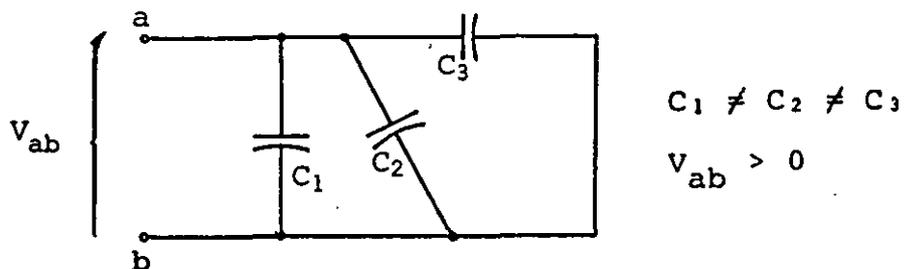


FIGURA 2.9. Capacitores conectados en paralelo.

Si observamos con detenimiento esta figura, se puede concluir que los tres capacitores tienen la misma diferencia de potencial.

De la expresión (2.16)

$$U = \frac{1}{2} Q V_{ab}$$

El capacitor equivalente tendrá la misma energía almacenada que la del arreglo de capacitores, siempre y cuando la cantidad de carga Q en ambos sea la misma, además de poseer igual diferencia de potencial entre sus terminales.

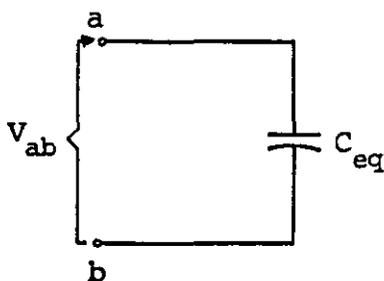


FIGURA 2.10. Capacitor equivalente al arreglo en la figura 2.9.

Analicemos la conexión de capacitores en paralelo la cual, al estar formada por elementos de diferentes valores (C_1 , C_2 y C_3) y tener iguales diferencias de potencial, conduce a que cada capacitor tenga una carga diferente. Conclusión que se obtiene de la definición de capacitancia, es decir

como $C = \frac{Q}{V_{ab}}$, se tiene que

$$Q_1 = C_1 V_{ab} \quad , \quad Q_2 = C_2 V_{ab} \quad \text{Y} \quad Q_3 = C_3 V_{ab}$$

La carga total almacenada será igual a la suma de las cargas de los capacitores del arreglo, o sea

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

y sustituyendo los valores de cada carga, se obtiene

$$Q_T = (C_1 + C_2 + C_3) V_{ab}$$

Por otra parte, en el capacitor equivalente se tiene que

$$Q_T = C_{eq} V_{ab}$$

y de acuerdo con las condiciones que debe cumplir el capacitor equivalente (igual Q almacenada e igual V_{ab} entre electrodos), se obtiene que

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

resultado que se puede generalizar a un arreglo de n capacitores en paralelo, denotando el capacitor equivalente como C_{eq_p} , tendremos

$$C_{eq_p} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (2.20)$$

Refiriéndonos a la figura 2.9, si $V_{ab} = 10 \text{ V}$, $C_1 = 2 \text{ } \mu\text{F}$, $C_2 = 15 \text{ } \mu\text{F}$ y $C_3 = 100 \text{ } \mu\text{F}$, comprobar que la energía total almacenada es de $5.85 \times 10^{-3} \text{ J}$.

Asimismo, verificar que la energía almacenada en el capacitor equivalente es igual a la suma de las energías almacenadas en los capacitores C_1 , C_2 y C_3 .

b) Capacitores en serie.

Una conexión de elementos eléctricos está en serie cuando dichos

elementos forman una sola trayectoria entre un par de puntos, como se muestra en la figura 2.11.

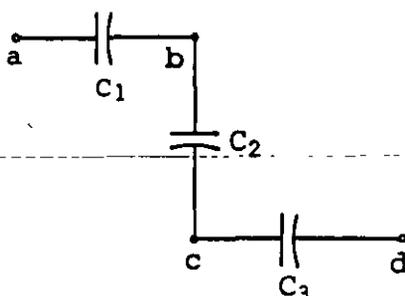


FIGURA 2.11. Capacitores conectados en serie entre los puntos a y d .

Al aplicar a esta conexión de capacitores una diferencia de potencial entre los puntos a y d , suponiendo que $V_{ad} > 0$, el electrodo de la izquierda de C_1 alcanza el potencial V_a debido a un exceso de carga positiva en dicho electrodo. De la misma forma el electrodo derecho de C_3 adquiere un exceso de carga negativa y, por lo tanto, alcanza el potencial V_d .

Por medio de la diferencia de potencial V_{ad} fue posible el traslado de la carga $-q$ (negativa) desde el electrodo izquierdo de C_1 al electrodo derecho de C_3 , dejando en el primero de estos electrodos una carga $+q$ (positiva).

Ahora bien, la carga q en el electrodo izquierdo de C_1 no puede cruzar la separación que existe con el electrodo derecho, pero en éste se presenta el fenómeno de inducción y adquiere una carga $-q$. La carga $-q$ que se induce en el electrodo derecho de C_1 se trasladó desde el electrodo superior de C_2 , dejando en dicho electrodo un exceso de carga q que, a su vez, induce en el electrodo inferior de este capacitor (C_2) una carga $-q$. La carga $-q$ que aparece en el electrodo inferior de C_2 se desplazó desde el electrodo izquierdo de C_3 , también debido al fenómeno de inducción.

Al finalizar el proceso antes descrito, los capacitores del arreglo quedan como se muestra en la figura 2.12.

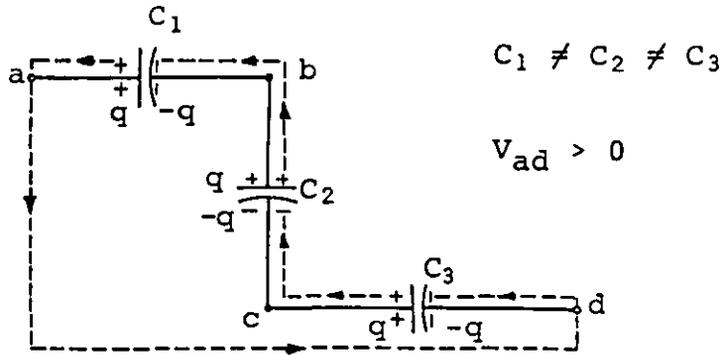


FIGURA 2.12. Proceso de carga en una conexión de capacitores en serie.

Se puede concluir que en cada capacitor de la figura 2.12 se tiene igual cantidad de carga q . En condiciones electrostáticas todos los conductores conectados a un mismo punto adquieren el mismo potencial eléctrico, por ejemplo los electrodos derecho de C_1 y superior de C_2 y el alambre que los interconecta adquieren el potencial V_b , pero la diferencia de potencial es diferente en cada capacitor; lo que se obtiene de la definición de capacitancia, es decir

$$V_{ab} = \frac{q}{C_1}, \quad V_{bc} = \frac{q}{C_2} \quad \text{y} \quad V_{cd} = \frac{q}{C_3}$$

como

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd}$$

se tiene

$$V_{ad} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

es decir

$$\frac{V_{ad}}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Por otra parte, en el capacitor equivalente a la conexión de la figura 2.11, se tendrá

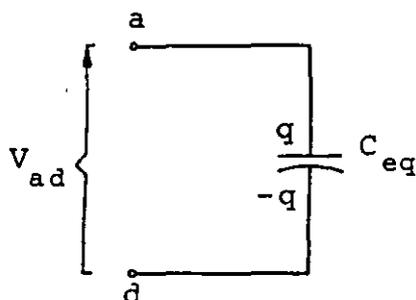


FIGURA 2.13. Capacitor equivalente al capacitor de la figura 2.12.

De lo anterior se puede concluir que

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Este resultado se puede generalizar al caso de n capacitores conectados en serie escribiendo

$$\frac{1}{C_{eq_s}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (2.21)$$

donde C_{eq_s} es el capacitor equivalente a los n conectados en serie.

Con referencia a la figura 2.11 considere que $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$, $C_3 = 6 \mu\text{F}$ y $V_{ad} = 40 \text{ V}$. Compruebe que la energía total almacenada en el arreglo, y por lo tanto en el capacitor equivalente, es de $1.2 \times 10^{-3} \text{ J}$.

EJEMPLO 2.1

Para la conexión de capacitores mostrada en la figura 2.14, considerar que se aplica una diferencia de potencial $V_{ad} = 100 \text{ volt}$, calcular:

- La capacitancia entre los puntos c y b .
- La capacitancia entre los puntos a y d .
- La carga en el capacitor C_5 .
- La diferencia de potencial V_{cd} en las terminales del capacitor C_4 .
- La energía total almacenada en el arreglo.

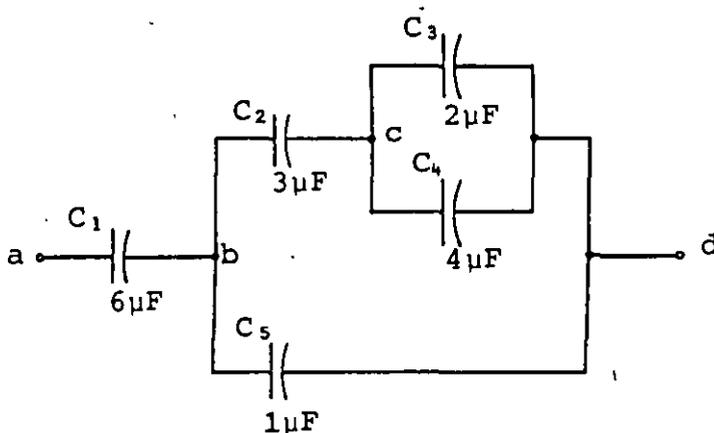


FIGURA 2.14. Conexión de capacitores.

SOLUCION

a) $C_{cb} = ?$

Para calcular esta capacitancia se requiere analizar las conexiones existentes entre los puntos c y b y se observa lo siguiente:

i) Los capacitores C_3 y C_4 están conectados en paralelo entre los puntos c y d , y podrían ser sustituidos por un capacitor equivalente C_{eq_1} .

ii) El capacitor C_{eq_1} , indicado en el inciso anterior, se encontraría conectado en serie con el capacitor C_5 entre los puntos c y b , con lo que se puede obtener un capacitor equivalente de ambos al que llamaremos C_{eq_2} .

iii) El capacitor C_2 resultaría conectado en paralelo con C_{eq_2} entre los puntos b y c , de estos capacitores se puede obtener un equivalente, el cual sería el C_{cb} pedido.

iv) El capacitor C_1 no se considera para la obtención de la capacitancia entre los puntos c y b , ya que no se encuentra dentro de las trayectorias existentes entre dichos puntos.

Realizando operaciones

$$C_{eq_1} = C_3 + C_4 = 2 + 4 = 6 \mu F$$

$$\frac{1}{C_{eq_2}} = \frac{1}{C_{eq_1}} + \frac{1}{C_5}, \text{ o sea } C_{eq_2} = \frac{C_{eq_1} C_5}{C_{eq_1} + C_5}$$

$$C_{eq_2} = \frac{6(1)}{6+1} = \frac{6}{7} \mu F$$

$$C_{cb} = C_{eq_2} + C_2 = \frac{6}{7} + 3 = \frac{27}{7} \mu F$$

La capacitancia entre los puntos c y b es

$$C_{cb} = 3.857 \mu F$$

b) $C_{ad} = ?$

Realizando un análisis semejante al efectuado para la pregunta a, se tiene:

i) Los capacitores C_3 y C_4 están conectados en paralelo entre los puntos c y d y pueden ser sustituidos por un C_{eq1} .

ii) El capacitor C_{eq1} quedará conectado en serie con el C_2 entre los puntos b y d , esta conexión se puede sustituir por un C_{eq2} .

iii) El capacitor C_{eq2} queda conectado en paralelo con el C_5 entre los puntos b y d , puede obtenerse un equivalente de ambos al que llamaremos C_{eq3} .

iv) La capacitancia entre los puntos a y d se obtendrá al calcular el capacitor equivalente a la conexión serie de C_1 y C_{eq3} .

Realizando operaciones

$$C_{eq1} = C_3 + C_4 = 2 + 4 = 6 \mu F$$

$$\frac{1}{C_{eq2}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{eq1}}, \text{ o sea } C_{eq2} = \frac{C_2 C_{eq1}}{C_2 + C_{eq1}}$$

$$C_{eq2} = \frac{3(6)}{3+6} = 2 \mu F$$

$$C_{eq3} = C_{eq2} + C_5 = 2 + 1 = 3 \mu F$$

$$\frac{1}{C_{ad}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{eq3}}, \quad C_{ad} = \frac{C_1 C_{eq3}}{C_1 + C_{eq3}}$$

$$C_{ad} = \frac{6(3)}{6+3} = 2 \mu F$$

La capacitancia entre los puntos a y d es

$$C_{ad} = 2 \mu F$$

c) $q_5 = ?$

Para el cálculo de la carga en el capacitor C_5 , observamos lo siguiente:

i) Conociendo la diferencia de potencial aplicada V_{ad} y la capacitancia entre los puntos a y d (C_{ad}), podemos calcular la carga total q_T es decir, la carga del capacitor equivalente al arreglo.

ii) Como los capacitores conectados en serie poseen la misma cantidad de carga, la carga en C_1 y en C_{eq3} será en cada uno, la misma q_T del capacitor C_{a-d} .

iii) La carga q_T del capacitor C_{ad} , es la suma de las cargas q_{eq2} (del capacitor C_{eq2}) más la carga q_5 (del capacitor C_5).

Efectuando operaciones tendremos

$$\text{como } C_{ad} = \frac{q_T}{V_{ad}}, \quad q_T = C_{ad} V_{ad}$$

$$q_T = 2 \times 10^{-6} (100) = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$$

$$\text{Por lo tanto } q_1 = q_T = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$$

$$\text{y } q_{eq3} = q_T = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Al conocer la carga q_1 , se puede calcular la diferencia de potencial V_{ab}

$$V_{ab} = \frac{q_1}{C_1}, \quad V_{ab} = \frac{2 \times 10^{-4}}{6 \times 10^{-6}} = 33.33 \text{ V}$$

y

$$V_{bd} = \frac{q_{eq3}}{C_{eq3}}, \quad V_{bd} = \frac{2 \times 10^{-4}}{3 \times 10^{-6}} = 66.67 \text{ V}$$

Observamos que

$$V_{ab} + V_{bd} = V_{ad} = 100 \text{ V}$$

Conociendo la diferencia de potencial V_{bd} y la capacitancia C_5 , podemos calcular q_5

$$q_5 = V_{bd} C_5, \quad q_5 = 66.67 (1 \times 10^{-6}) = 66.67 \mu\text{C}$$

La carga en el capacitor C_5 es $q_5 = 66.67 \mu\text{C}$.

d) $V_{cd} = ?$

Para calcular esta diferencia de potencial, destacamos lo siguiente:

i) La diferencia de potencial V_{bd} es la suma de las diferencias V_{bc} más V_{cd} , es decir

$$V_{bd} = V_{bc} + V_{cd}$$

ii) La carga q_{eq_3} es la suma de las cargas q_5 y q_{eq_2} del capacitor C_{eq_2}

iii) La carga q_2 del capacitor C_2 es igual a q_{eq_2} . Conociendo q_2 y q_{eq_2} se puede calcular V_{bc} .

iv) Conociendo V_{bc} y V_{bd} se puede calcular V_{cd} , el cual es el voltaje entre las terminales de C_4 .

Efectuando operaciones

$$q_{eq_3} = q_5 + q_{eq_2},$$

$$q_{eq_2} = q_{eq_3} - q_5$$

$$q_{eq_2} = 2 \times 10^{-4} - 0.6667 \times 10^{-4}$$

$$q_{eq_2} = 1.3333 \times 10^{-4} \text{ C}$$

$$q_{eq2} = q_2 = 133.33 \mu C$$

por lo tanto $V_{bc} = \frac{q_2}{C_2}$, $V_{bc} = \frac{133.33 \times 10^{-6}}{3 \times 10^{-6}}$

$$V_{bc} = 44.44 \text{ V}$$

Como

$$V_{bd} = V_{bc} + V_{cd}$$

tenemos que

$$V_{cd} = V_{bd} - V_{bc} , \quad V_{cd} = 66.67 - 44.44$$

$$V_{cd} = 22.23 \text{ V}$$

e) $U_T = ?$

Esta energía puede ser calculada a partir de la capacitancia total (C_{ad}) y la diferencia de potencial V_{ad} , es decir

$$U_T = \frac{1}{2} C_{ad} V_{ad}^2$$

$$U_T = \frac{1}{2} (2 \times 10^{-6}) (100)^2 = 1 \times 10^{-2}$$

$$U_T = 1 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Observación

En los incisos c , d y e existen varios procedimientos de resolución, empleando razonamientos similares a los aquí presentados, algunos de los cuales pueden involucrar cálculos más simples por lo que se sugiere al lector comprobar los resultados empleando un procedimiento distinto.

2.6 POLARIZACION DE LA MATERIA

Cuando cualquier cuerpo descargado se coloca dentro de un campo eléctrico, se produce en él una redistribución de las partículas cargadas de los átomos. Si el cuerpo es de material conductor, sus electrones libres se trasladan de tal forma que el volumen del cuerpo constituye una región equipotencial; si es de material aislante, los electrones y los núcleos positivos de cada átomo o molécula sufren un desplazamiento, debido a la acción del campo, pero en este caso el cuerpo no constituye una región equipotencial. Los materiales que tienen este comportamiento se conocen con el nombre de dieléctricos.

En los casos descritos, la carga neta del cuerpo es nula, aunque algunas regiones del mismo adquieren un exceso de carga positiva o negativa. A las cargas que aparecen en la superficie del cuerpo, debido al proceso mencionado, se les denomina cargas inducidas, y, cuando ha ocurrido el desplazamiento de cargas debido a un campo eléctrico, se dice que la materia se ha polarizado. Con el objeto de aclarar estos conceptos analicemos las figuras 2.15 y 2.16.

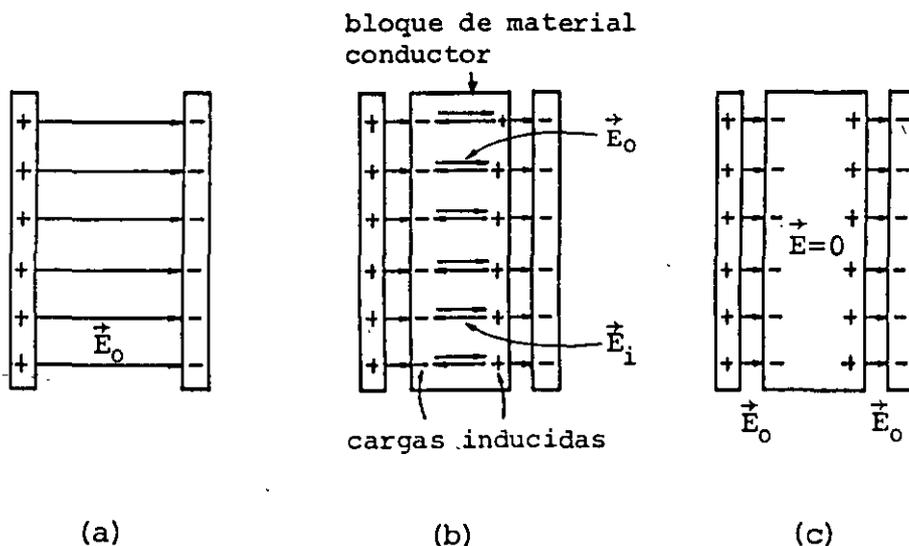


FIGURA 2.15: Comportamiento de un bloque metálico al ser introducido en un campo eléctrico: (a) campo eléctrico entre dos placas paralelas cargadas; (b) superposición de los campos eléctricos producidos por las placas cargadas y por las cargas inducidas en el bloque metálico, obsérvese que $|\vec{E}_0| = |\vec{E}_i|$; (c) campos eléctricos resultantes en el interior y exterior del bloque metálico.

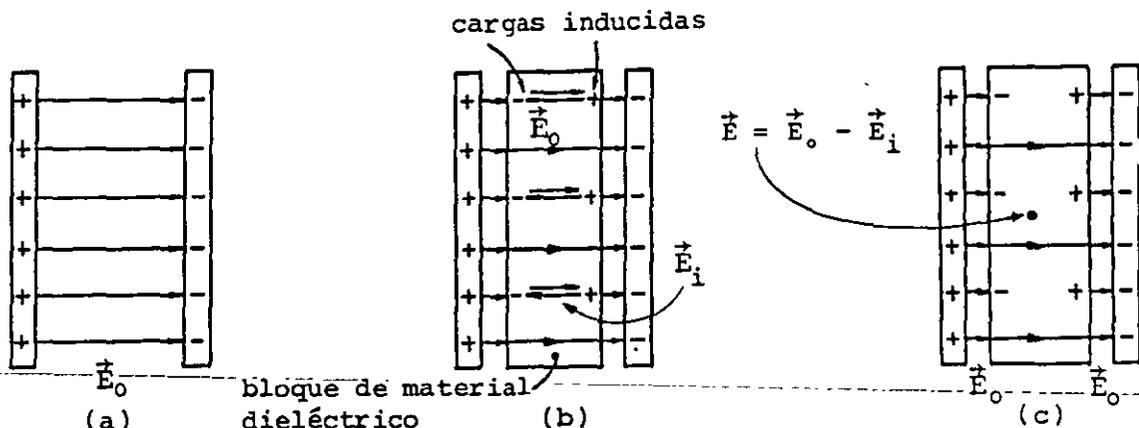


FIGURA 2.16. Comportamiento de un bloque dieléctrico al ser introducido en un campo eléctrico: (a) campo eléctrico entre dos placas paralelas cargadas; (b) superposición de los campos eléctricos producidos por las placas cargadas y por las cargas inducidas en el bloque de dieléctrico, nótese que $|\vec{E}_0| > |\vec{E}_i|$; (c) campos eléctricos resultantes en el interior y exterior del bloque dieléctrico.

En los dieléctricos, las cargas de las moléculas no pueden sufrir desplazamientos semejantes a los que experimentan los electrones de conducción en un bloque metálico. Por consiguiente, los desplazamientos originados por fuerzas eléctricas debidas a campos eléctricos externos al dieléctrico son muy pequeños, y la magnitud de éstos dependerá de la mayor o menor rigidez con que las cargas de un átomo o molécula estén unidas.

En la figura 2.17 se muestra un ejemplo de polarización de la materia sencillo y bidimensional.

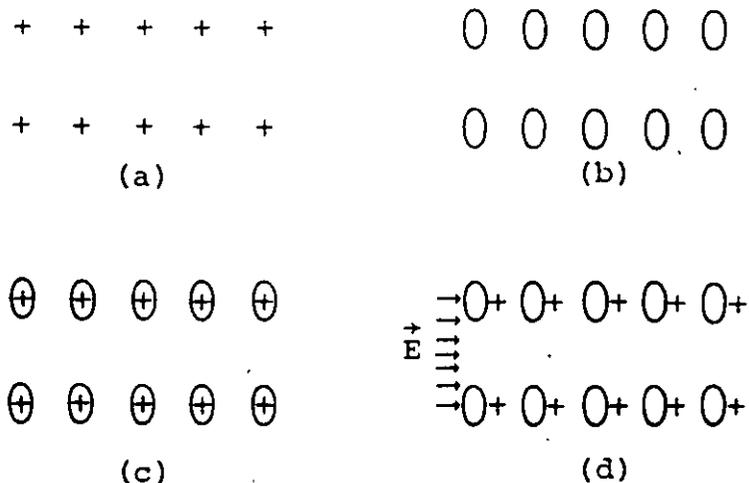


FIGURA 2.17. Para una muestra de dieléctrico: (a) representa

la red de cargas positivas; (b) representa la red de cargas negativas; (c) superposición de retículos positivo y negativo en ausencia de campo eléctrico externo; (d) desplazamiento originado en los retículos positivo y negativo debido a la influencia del campo eléctrico externo \vec{E} .

Analizaremos con mayor profundidad el comportamiento de los materiales dieléctricos. Definiremos la magnitud momento dipolar \vec{p} como

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (2.22)$$

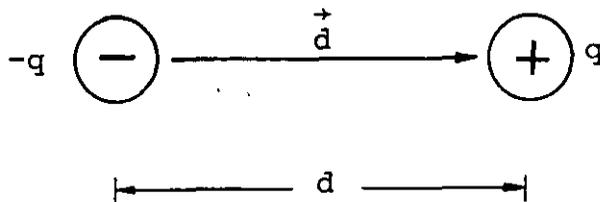


FIGURA 2.18. Dipolo y momento dipolar eléctricos.

En la expresión (2.22), \vec{d} es una magnitud vectorial dirigida de la carga negativa a la positiva; $|\vec{d}|$ es la distancia de separación entre las dos cargas puntuales q y $-q$, y q representa la magnitud de cualquiera de dichas cargas (ver figura 2.18). El sistema de dos cargas de la misma magnitud, de signo contrario y separadas una distancia se denomina dipolo eléctrico.

Las moléculas que constituyen los diferentes tipos de dieléctricos se pueden clasificar en dos clases, atendiendo al momento dipolar \vec{p} de cada una de ellas:

a) Moléculas no polares

Son aquellas que no poseen un momento dipolar, es decir, su centro de cargas positivas coincide con el centro de cargas negativas. Unos ejemplos de este tipo lo constituyen las moléculas de

oxígeno diatómico (O_2) y de bióxido de carbono (CO_2), ver figura 2.19.

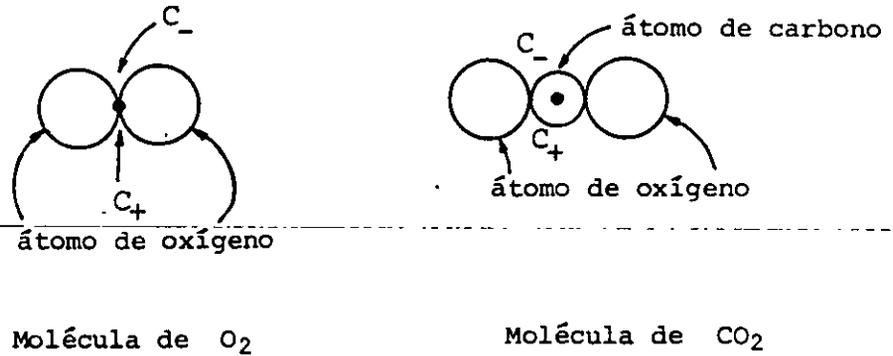


FIGURA 2.19. Ejemplos de moléculas no polares. Los centros de carga positiva (C_+) y negativa (C_-) coinciden en el mismo punto.

Sin embargo, si colocamos moléculas de este tipo dentro de un campo eléctrico, cada una de ellas se comportará como un dipolo eléctrico inducido, debido a que sus partículas subatómicas sufren un desplazamiento originado por la acción de las fuerzas eléctricas.

b) Moléculas polares

Son aquellas en las que los centros de carga positiva y negativa no coinciden y su comportamiento es el de un dipolo eléctrico. Algunos ejemplos de este tipo de moléculas se presentan en la figura 2.20.

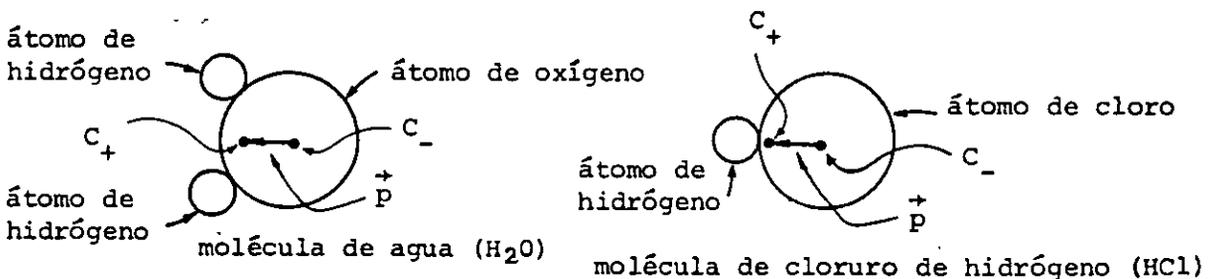


FIGURA 2.20. Ejemplos de moléculas polares.

Al colocar un dieléctrico constituido por moléculas polares dentro de un campo eléctrico, lo que sucede es que los dipolos de dichas moléculas, que tenían una orientación totalmente al azar, se orientan en la dirección del campo eléctrico aplicado, y el resultado macroscópico es que en las caras del dieléctrico, perpendiculares al campo eléctrico, se presentan cargas inducidas como se muestra en la figura 2.21.

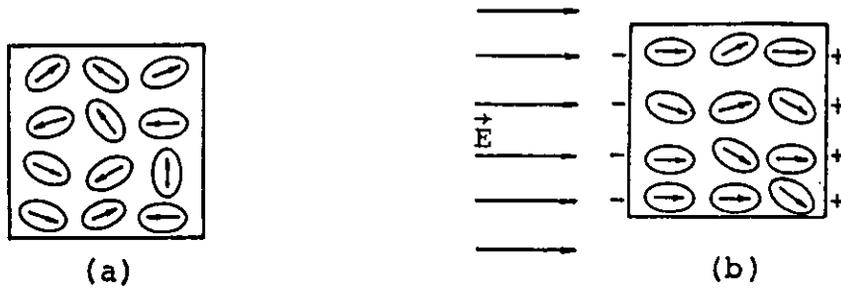


FIGURA 2.21. Moléculas de un dieléctrico de tipo polar: (a) sin campo eléctrico aplicado; (b) al aplicarle un campo eléctrico.

Podemos observar que ya sean moléculas polares o no polares las que constituyen un dieléctrico, el efecto externo de aplicarle un campo eléctrico es el mismo; es decir, en ambos casos en las caras perpendiculares al campo eléctrico se presentan cargas inducidas que hacen que todo el dieléctrico se comporte como un dipolo. Este efecto cesa al interrumpirse el campo eléctrico aplicado.

Consideremos el bloque dieléctrico mostrado en la figura 2.22, al cual se ha aplicado un campo eléctrico. Es posible cuantificar el momento dipolar \vec{p} del bloque, considerándolo como un dipolo, de la manera siguiente

$$\vec{p} = q_i \vec{\ell}$$

pero

$$q_i = \sigma_i A$$

por lo tanto

$$\vec{p} = \sigma_i A \vec{\ell} \quad (2.23)$$

Si dividimos la expresión (2.23) entre el volumen del bloque, tendremos el momento dipolar en la unidad de volumen

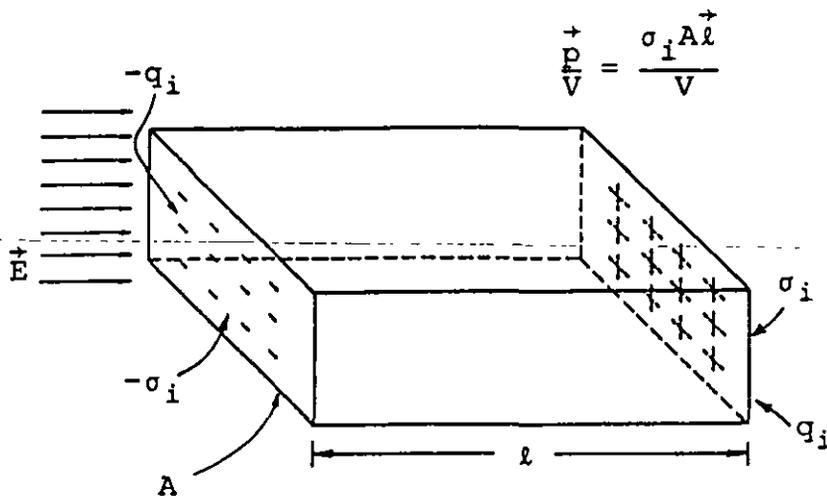
$$\vec{p} \frac{+}{V} = \frac{\sigma_i A \vec{l}}{V} \quad (2.24)$$


FIGURA 2.22. Bloque dieléctrico bajo la acción de un campo eléctrico.

El primer miembro de la expresión (2.24), que representa el momento dipolar en cada unidad de volumen, se conoce como vector polarización \vec{P} , es decir

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \quad (2.25)$$

y como el volumen del bloque es $V = A l$ se puede concluir que la magnitud del vector polarización es igual a la densidad superficial de carga inducida en el bloque y, por lo tanto, sus unidades son idénticas.

$$|\vec{P}| = \sigma_i \left[\frac{C}{m^2} \right] \quad (2.26)$$

El momento dipolar \vec{p} a nivel molecular, no es medible por métodos macroscópicos, sin embargo, como se observa en la expresión (2.26), el vector polarización (\vec{P}) tiene una íntima relación con la densidad superficial de carga inducida en el bloque de dieléctrico.

2.7 CONSTANTES DIELECTRICAS

Al aplicarle a un dieléctrico, como el de la figura (2.22), diferentes intensidades de campo eléctrico, las fuerzas eléctricas sobre las cargas de dicha sustancia variarán en relación directa a las intensidades aplicadas. Esto quiere decir que se modificará, en cada caso, el momento dipolar de las moléculas y en consecuencia la polarización de dicha sustancia. Además, si con una misma intensidad de campo eléctrico se emplean diversas sustancias, la polarización en cada una de ellas será, en general, diferente y esto dependerá de la rigidez con que las cargas estén dispuestas en un átomo dado.

Es posible definir una magnitud que cuantifique el comportamiento descrito, que llamaremos susceptibilidad eléctrica, y representaremos por la letra griega χ_e (χ_e), con la cual se puede establecer una relación entre la polarización y el campo eléctrico que la produce

$$\vec{P} \propto \chi_e \vec{E}$$

Esta última expresión se puede convertir en una ecuación si introducimos una constante de proporcionalidad que, de acuerdo con nuestro sistema de unidades resulta ser la permitividad del vacío; la relación entre polarización y campo eléctrico se escribe

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (2.27)$$

Realizando un análisis de unidades veremos cuáles son las correspondientes a la susceptibilidad eléctrica

$$[\chi_e]_u = \frac{[P]_u}{[\epsilon_0 E]_u} = \frac{\frac{C}{m^2}}{\frac{C^2}{N \cdot m^2} \frac{N}{C}} = 1$$

Es decir, la susceptibilidad es una cantidad adimensional que nos indica la forma como se comporta una sustancia al ser introducida en una región en la que existe un campo eléctrico; y su valor será típico para cada sustancia.

Analicemos ahora lo que sucede cuando un bloque dieléctrico se encuentra entre dos placas metálicas cargadas con igual cantidad de carga pero de signos diferentes, tal como se muestra en la figura 2.23.

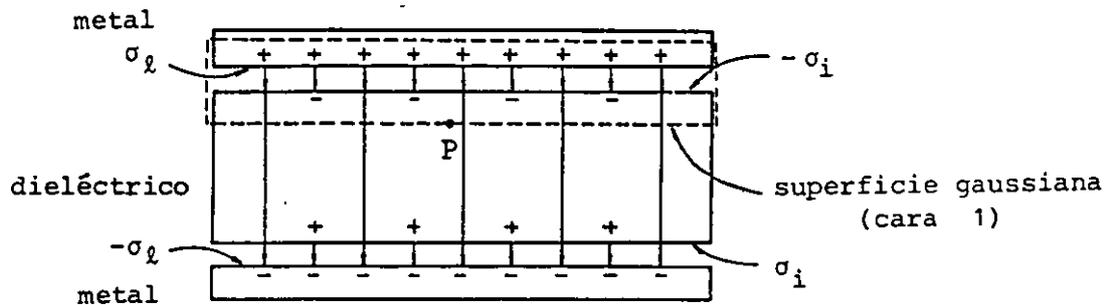


FIGURA 2.23. Aplicación de la ley de Gauss a un caso en que se tienen dieléctricos presentes.

Se puede observar que el arreglo de la figura 2.23 es realmente un capacitor de placas planas y paralelas en el que se ha introducido un dieléctrico entre los electrodos. En esta figura se han denominado σ_l la densidad superficial de carga en los electrodos, y σ_i la densidad superficial de carga inducida en las caras del dieléctrico.

Al aplicar la ley de Gauss a la superficie gaussiana mostrada y recordando la expresión (1.51)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

se obtiene

$$EA = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_l - \sigma_i)A$$

y el campo eléctrico para todos los puntos de la cara 1 de la su perficie gaussiana está dado por

$$E = \frac{\sigma_l - \sigma_i}{\epsilon_0}$$

y recordando que

$$|\vec{P}| = \sigma_i \quad \text{y que} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

se obtiene

$$E = \frac{\sigma_l - \epsilon_0 \chi_e E}{\epsilon_0}$$

Si en esta última expresión se despeja la magnitud del campo eléctrico E , se tiene

$$E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0 (1 + \chi_e)} \quad (2.28)$$

Definiendo una nueva constante dieléctrica K_e , que denominaremos permitividad relativa, como

$$K_e = 1 + \chi_e \quad (2.29)$$

la expresión (2.28) nos queda

$$E = \frac{\sigma_l}{K_e \epsilon_0} \quad (2.30)$$

De la expresión (2.30), se concluye que el campo eléctrico en un punto como el P de la figura 2.23 se ve disminuido por el factor $1/K_e$ al introducir en esa región una sustancia dieléctrica. De la definición dada en la expresión (2.29) se observa que la permitividad relativa K_e , es también adimensional.

Al producto $K_e \epsilon_0$ se le denomina permitividad del material, es decir

$$\epsilon = K_e \epsilon_0 \quad (2.31)$$

De esta última expresión se destaca el porqué del nombre de K_e como permitividad relativa, ya que su valor depende de la relación entre la permitividad del material y la del vacío. En función de esta nueva constante, la expresión (2.30) se puede escribir como

$$E = \frac{\sigma_l}{\epsilon} \quad (2.32)$$

Podemos concluir diciendo que el comportamiento de un dieléctrico, al estar en presencia de un campo eléctrico, es cuantificable por las constantes del dieléctrico en cuestión (χ_e , $K_e \epsilon_0$); aunque cabe resaltar el hecho de que dada la relación existente entre dichas cantidades, al conocer cualquiera de ellas es factible determinar las dos restantes. En la expresión (2.33) se resumen estas relaciones

$$\epsilon = K_e \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \quad (2.33)$$

En la tabla 2.1 se presentan los valores de las constantes dieléctricas de algunos materiales comúnmente empleados.

2.8 RIGIDEZ DIELECTRICA

Hemos visto que el efecto de colocar un dieléctrico dentro de un campo \vec{E} conlleva la aparición de cargas inducidas en sus caras (ver figura 2.22), esto se debe a la polarización que ha experimentado la sustancia. Además, de las expresiones (2.26) y (2.27), se puede concluir que para un material dado, a mayor intensidad de campo eléctrico se tendrá una mayor densidad superficial de carga inducida; pero este fenómeno no puede crecer indefinidamente.

te, ya que la orientación que sufren las cargas de un átomo o molécula expuesta a un campo eléctrico es, en esencia, debida a fuerzas de origen eléctrico. Si el campo eléctrico aplicado es de magnitud elevada, las fuerzas de origen eléctrico pueden originar la ionización en los átomos o moléculas. Este desprendimiento de electrones, por el efecto de fuerzas eléctricas, origina que los electrones se desplacen y el material pierda sus propiedades dieléctricas y, en algunos casos, se destruya por combustión.

El campo eléctrico que origina la ionización del dieléctrico se conoce como campo eléctrico de ruptura, y el fenómeno de ionización de la sustancia se denomina ruptura de la rigidez dieléctrica.

En la tabla 2.1 se indican los valores del campo de ruptura para diferentes sustancias.

PROPIEDADES DE ALGUNAS SUSTANCIAS DIELECTRICAS			
Dieléctrico	Susceptibilidad χ_e	Permitividad relativa K_e	Campo eléctrico de ruptura [MV/m]
aire	0.00059	1.00059	0.8
bakelita	3.8	4.8	12
mica	2 a 5	3 a 6	160
neopreno	5.9	6.9	12
papel	2.5	3.5	14
polietileno	1.3	2.3	50
porcelana	5.5	6.5	4
vacío	0	1	∞
vidrio	3.5	4.5	13

TABLA 2.1

2.9 VECTORES ELECTRICOS

A través de nuestro estudio de los dieléctricos hemos utilizado las magnitudes vectoriales campo eléctrico \vec{E} y polarización \vec{P} . Además de éstos resulta conveniente definir un nuevo vector \vec{D} , denominado por razones históricas desplazamiento eléctrico, por medio de la expresión (2.34)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.34)$$

La expresión (2.34) establece la relación entre el campo vectorial \vec{E} y el campo vectorial de desplazamiento eléctrico \vec{D} , y sólo es válida en materiales lineales e isótropos, los cuales son empleados a lo largo del presente curso.

Se puede observar que en este tipo de materiales, los vectores \vec{D} y \vec{E} , para cada punto, son paralelos entre sí y sus magnitudes se relacionan mediante la permitividad del material en cuestión.

Recordemos del tema anterior la expresión (1.49), la cual nos expresa la forma de calcular el flujo de un campo vectorial cualquiera \vec{C}

$$\phi = \iint \vec{C} \cdot d\vec{A} \quad (1.49)$$

Evaluemos el flujo del campo vectorial \vec{D} a través de la superficie indicada en la figura 2.24.

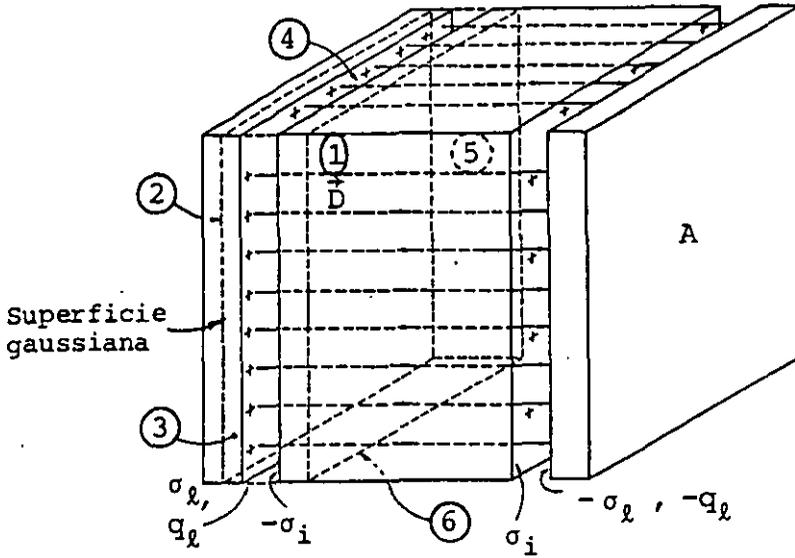


FIGURA 2.24. Superficie gaussiana en forma de paralelepípedo rectángulo para evaluar el flujo de \vec{D} .

Llamaremos ϕ_d el flujo de \vec{D} a través de la superficie gaussiana mostrada, por tanto

$$\phi_d = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (2.35)$$

Ahora bien, sabemos que los vectores \vec{E} y \vec{D} son paralelos en cada punto del dieléctrico, por lo tanto, las líneas de \vec{D} serían las que se representan en la figura 2.24. Al descomponer la integral de la expresión (2.35) en seis integrales, una para cada cara del paralelepípedo rectángulo, se observa que las integrales en las caras 3, 4, 5 y 6 son nulas, ya que para ellas \vec{D} y $d\vec{A}$ son perpendiculares. La integral en la cara 2 es nula ya que se localiza en el interior de un conductor cargado y $\vec{E} = 0$, y por ende $\vec{D} = 0$. De esta forma la expresión (2.35) se reduce a

$$\phi_d = \int_1 \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad (2.36)$$

Es decir, sólo la integral en la cara 1 es diferente de cero.

En esta cara los vectores \vec{D} y $d\vec{A}$ son paralelos ($\theta = 0$) y la expresión (2.36) se puede escribir

$$\phi_d = \int_1 D dA \cos \theta = \int_1 D dA \quad (2.37)$$

Además, dada la uniformidad del campo vectorial \vec{D} , se puede concluir que la magnitud del desplazamiento eléctrico \vec{D} es constante para todos los puntos de la cara 1, la cual tiene un área A . La expresión (2.37) quedará

$$\phi_d = D \int_1 dA = DA \quad (2.38)$$

pero de la definición del vector desplazamiento eléctrico, tenemos

$$\phi_d = \epsilon EA = \epsilon \frac{\sigma_l}{\epsilon} A = \frac{q_l}{A} A$$

es decir

$$\phi_d = q_l \quad (2.39)$$

La expresión (2.39) nos indica que el flujo del campo vectorial (desplazamiento eléctrico) \vec{D} es igual a la cantidad de carga libre q_l (carga de la placa) encerrada por la superficie gaussiana empleada; por lo anterior, podemos escribir de (2.35) y (2.39), la expresión siguiente

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_l \quad (2.40)$$

La expresión (2.40) también se podría escribir como

$$\epsilon \oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_l \quad (2.41)$$

La ecuación (2.40) o la (2.41) constituye una generalización de la ley de Gauss al caso en que esté presente un dieléctrico, de

ahí que en dichas expresiones se encuentre implícita la permitividad ϵ del material. También se puede observar que el vector desplazamiento eléctrico tiene una relación íntima con la carga libre o carga de la placa y no con la carga inducida en el dieléctrico.

De las expresiones (2.38) y (2.39) se puede concluir que la magnitud del vector desplazamiento eléctrico es

$$|\vec{D}| = \frac{q_l}{A} = \sigma_l$$

Es decir, la magnitud de \vec{D} es igual a la densidad superficial de carga libre en la placa encerrada, de ahí que sus unidades sean las de C/m^2 .

En la figura 2.25 se han representado por medio de líneas los campos vectoriales de \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} existentes en un dieléctrico que se ha introducido en medio de dos placas cargadas con igual magnitud de carga pero de signos diferentes.

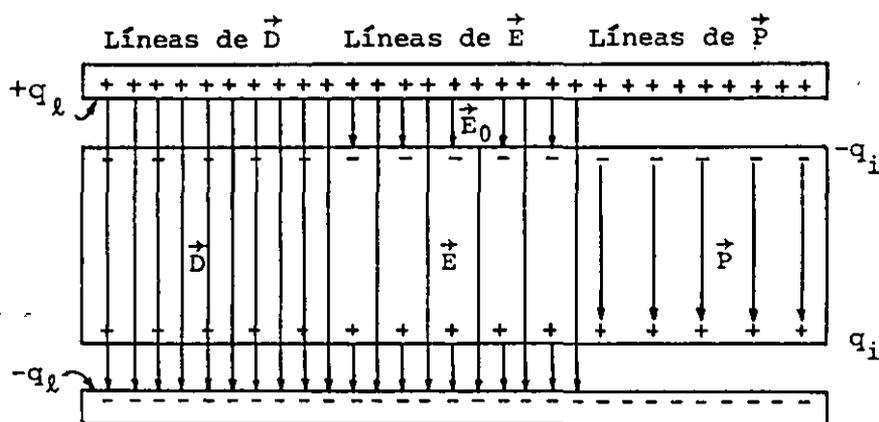


FIGURA 2.25. Representación de los campos \vec{D} , \vec{E} y \vec{P} en un dieléctrico.

Respecto a la figura 2.25 podemos concluir lo siguiente:

- a) El campo vectorial del desplazamiento eléctrico \vec{D} se representa por medio de líneas que empiezan en las cargas de la placa positiva y terminan en las cargas de la placa negativa, ya que este campo tiene relación sólo con las cargas libres.
- b) El campo vectorial de la polarización eléctrica \vec{P} se representa mediante líneas que empiezan en las cargas inducidas negativas y terminan en las cargas inducidas positivas del dieléctrico, ya que el vector polarización está en función de las cargas inducidas.
- c) El campo eléctrico \vec{E} se representa por líneas que empiezan en cargas positivas y terminan en cargas negativas, sin importar si dichas cargas son libres o inducidas, ya que el campo eléctrico tiene relación con todo tipo de cargas.

2.10 LEYES DE LA ELECTROSTATICA EN DIELECTRICOS

De la definición del vector desplazamiento eléctrico, expresión (2.34), y de la relación entre las constantes dieléctricas, expresión (2.33), se puede establecer una expresión que relacione los tres vectores eléctricos

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

Y

$$\epsilon = K_e \epsilon_0 = (1 + \chi_e) \epsilon_0$$

por lo tanto

$$\vec{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E}$$

o sea

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

pero de la expresión (2.27), que define al vector polarización se tiene que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.42)$$

Esta última expresión nos muestra la combinación lineal existente entre los vectores \vec{E} y \vec{P} para formar el vector desplazamiento \vec{D} .

Por otra parte, supóngase un material en el cual la polarización \vec{P} no sea constante y uniforme en todos sus puntos, en este caso es de esperarse encontrarnos con una densidad volumétrica de carga, ya que la carga que entrara a un pequeño volumen de dieléctrico sería diferente a la que saliera en el momento de la polarización. Para cuantificar este efecto, pensemos en una superficie imaginaria dentro del material en el momento en que éste se polariza, como se muestra en la figura 2.26.

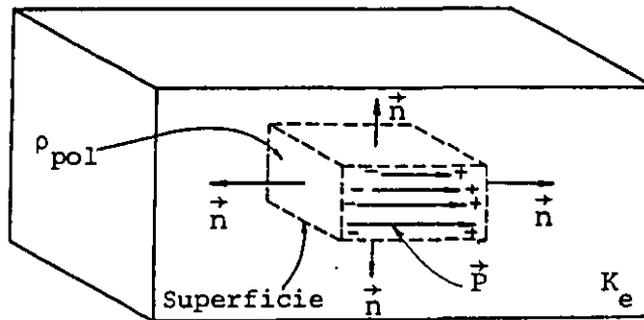


FIGURA 2.26. Densidad volumétrica de carga originada por una polarización \vec{P} no uniforme.

La cantidad de carga que atraviesa nuestra superficie será la polarización \vec{P} por el área de la superficie, si \vec{P} es normal a dicha superficie. Si \vec{P} es tangencial a la superficie, no hay desplazamiento de cargas a través de la superficie, por lo que en el caso general escribiremos

$$\sigma_i = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (2.43)$$

El movimiento de cargas dentro del dieléctrico puede producir una densidad volumétrica de carga; la carga total desplazada al exterior de cualquier volumen V , debido a la polarización, es la integral de la componente normal saliente de \vec{P} sobre la superficie A que limita dicho volumen. Una cantidad de carga igual pero de signo contrario permanece en el interior. Si llamamos q_i a esta carga se tiene

$$q_i = - \oiint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} \quad (2.44)$$

donde

$$d\vec{A} = \vec{n} dA$$

También se puede atribuir al volumen V que contiene la carga q una densidad volumétrica de carga (ρ_p), es decir

$$q_i = \iiint_V \rho_p dV \quad (2.45)$$

Igualando las últimas dos ecuaciones, se puede escribir

$$\iiint_V \rho_p dV = - \oiint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} \quad (2.46)$$

Si en la expresión (2.46) aplicamos el teorema de la divergencia visto en el tema 1, el cual recordamos

$$\oiint_A \vec{C} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV$$

tendremos que

$$\oiint_A \vec{P} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV \quad (2.47)$$

y de las expresiones (2.46) y (2.47) se puede escribir

$$- \iiint_V \rho_p dV = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV$$

o sea que

$$\rho_p = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (2.48)$$

Recordando ahora la ley de Gauss en forma diferencial, expresión (1.77)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

la cual se verá modificada al aplicarse en medios dieléctricos, ya que la densidad volumétrica de carga estará compuesta de dos partes: la densidad de carga libre (ρ_l) y la densidad de carga de polarización (ρ_p), por lo tanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_l + \rho_p}{\epsilon_0}$$

y empleando (2.48)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$$

la cual se puede escribir

$$\vec{\nabla} \cdot (1 + \chi_e) \vec{E} = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$$

o también

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \rho_l$$

y por la expresión (2.33) se obtiene finalmente la ley de Gauss en forma diferencial, cuando existen presentes materiales dieléctricos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\ell} \quad (2.49)$$

Expresión en la cual aparece el vector desplazamiento. Podemos modificar un poco la expresión (2.40), que es una generalización de la ley de Gauss en forma integral, y escribir

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_{\ell} dV \quad (2.50)$$

Recordemos la expresión (1.89), la cual nos indica que el campo eléctrico estático es un campo irrotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

y empleando la definición dada en (2.34) se tendría

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{D}}{\epsilon} = 0$$

o sea

$$\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0 \quad (2.51)$$

La última expresión nos expresa que el campo vectorial del desplazamiento eléctrico, en el caso electrostático, es un campo irrotacional.

Las expresiones (2.49) y (2.51) son las leyes de la electrostática, extendidas al caso de fenómenos que involucran materiales dieléctricos.

2.11 CAPACITORES Y DIELECTRICOS

Calculemos nuevamente la capacitancia de un capacitor de placas planas y paralelas, pero ahora consideremos que entre las placas se tiene un dieléctrico de permitividad ϵ , ver figura 2.3.

De la definición de capacitancia, tenemos

$$C = \frac{Q}{V_{ab}}$$

y de la aplicación de la ley de Gauss, en este caso, se obtiene que la magnitud del campo eléctrico entre las placas es, de acuerdo con la expresión (2.32)

$$E = \frac{\sigma \ell}{\epsilon}$$

es decir

$$E = \frac{Q}{A\epsilon}$$

o sea

$$Q = A \epsilon E$$

y de la expresión (2.4) se sabe que

$$V_{ab} = Ed$$

Sustituyendo en la definición de capacitancia, se obtiene

$$C = \frac{A \epsilon E}{Ed}$$

es decir

$$C = \frac{A\epsilon}{d} \quad (2.52)$$

La expresión (2.52) nos indica que al emplear un dieléctrico diferente del vacío, la capacitancia del dispositivo de placas planas depende de la permitividad del dieléctrico empleado, y esto constituye un resultado general. Por esta razón cuando entre las placas existe el vacío, la permitividad que aparece en las expresiones de capacitancia es la del vacío (ϵ_0).

Si llamamos C_0 la capacitancia calculada en la expresión (2.5)

$$C_0 = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

además, recordando que $\epsilon = K_e \epsilon_0$ y sustituyendo este resultado en la ecuación (2.52), se obtiene

$$C = K_e \frac{A\epsilon_0}{d}$$

es decir

$$C = K_e C_0 \quad (2.53)$$

Esto es, la capacitancia de cualquier capacitor con vacío entre sus electrodos se ve incrementada en un factor K_e , cuando el espacio entre dichos electrodos es llenado con un dieléctrico de permitividad relativa K_e .

Compruebe que si en el capacitor indicado al final del ejemplo del inciso a) del subtema 2.2 se empleara un dieléctrico de permitividad relativa $K_e = 4.8$ (bakelita), se tendría una capacitancia de

$$C = 0.1062 \times 10^{-6} \text{ F} = 0.1062 \text{ } \mu\text{F}$$

EJEMPLO 2.2

En la figura 2.27 se muestra una sección de un cable coaxial de longitud muy grande; si entre el conductor central y el forro me-

tálico se tiene una diferencia de potencial de 120 volts.

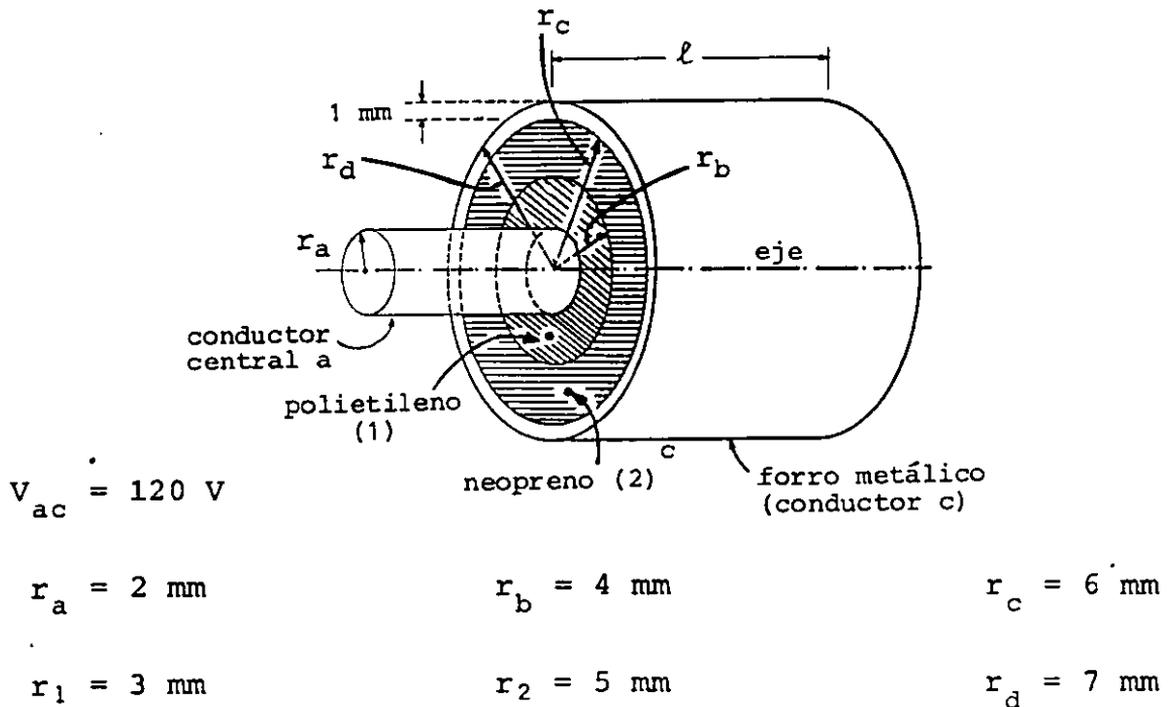


FIGURA 2.27. Sección de un cable coaxial.

Calcule:

- Las tres constantes dieléctricas de cada dieléctrico empleado.
- La densidad superficial de carga en el conductor a .
- La densidad superficial de carga en el conductor c .
- El campo eléctrico en los puntos 1 y 2.
- El desplazamiento eléctrico en los puntos 1 y 2.
- La polarización eléctrica en los puntos 1 y 2.
- La capacitancia de un metro y de 100 m de cable coaxial.
- El valor de la densidad de energía en el punto 1 y en el punto 2.
- La energía almacenada en 100 m de cable coaxial.

SOLUCION

a) De la tabla 2.1, obtenemos

$$\text{polietileno} \quad \chi_{e_1} = 1.3, \quad K_{e_1} = 2.3$$

$$\text{neopreno} \quad \chi_{e_2} = 5.9, \quad K_{e_2} = 6.9$$

y recordamos, de la expresión (2.33)

$$\epsilon = K_e \epsilon_0$$

por lo tanto, para el polietileno

$$\epsilon_1 = K_{e_1} \epsilon_0$$

$$\epsilon_1 = 2.3(8.85 \times 10^{-12}) = 2.0355 \times 10^{-11} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

y para el neopreno

$$\epsilon_2 = K_{e_2} \epsilon_0$$

$$\epsilon_2 = 6.9(8.85 \times 10^{-12}) = 6.1065 \times 10^{-11} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

b) De acuerdo con la expresión (1.122), se tiene

$$V_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} 2\lambda \ln \frac{r_b}{r_a} \quad \text{y} \quad V_{bc} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} 2\lambda \ln \frac{r_c}{r_b}$$

en las cuales λ indica la densidad lineal de carga equivalente a la carga de cada metro del conductor a .

Como

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc}$$

se puede escribir

$$\lambda = \frac{2\pi V_{ac}}{\frac{\ln \frac{r_b}{r_a}}{\epsilon_1} + \frac{\ln \frac{r_c}{r_b}}{\epsilon_2}}$$

de la cual se obtiene

$$\lambda = \frac{2\pi(120)}{\frac{\ln \frac{4}{2}}{2.0355 \times 10^{-11}} + \frac{\ln \frac{6}{4}}{6.1065 \times 10^{-11}}} = 1.8528 \times 10^{-8} \frac{C}{m}$$

Pero la carga en el conductor a realmente está distribuida sobre la superficie exterior de dicho conductor en forma de una densidad superficial, que llamaremos σ_a , por lo tanto

$$\lambda = \frac{\sigma_a 2\pi r_a l}{l} = 2\pi \sigma_a r_a$$

de donde se obtiene que

$$\sigma_a = \frac{\lambda}{2\pi r_a}$$

Como $V_{ac} > 0$ implica que $V_a > V_c$ y el conductor a debe tener carga positiva, por lo cual

$$\sigma_a = \frac{1.8528 \times 10^{-8}}{2\pi(2 \times 10^{-3})} = 1.474 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$

o sea

$$\sigma_a = + 1.474 \frac{\mu C}{m^2}$$

c) Como el cable coaxial se comporta como un capacitor, la cantidad de carga en cada metro del conductor a debe ser igual a la carga en la misma longitud del conductor c, por lo que se puede escribir

$$\lambda = 2\pi \sigma_c r_c$$

tomamos el valor r_c ya que las cargas deben encontrarse en la superficie interior del conductor c debido al fenómeno de inducción, por lo tanto

$$\sigma_c = \frac{\lambda}{2\pi r_c}$$

como

$$V_{ac} > 0 \quad \text{y} \quad V_c < V_a,$$

la carga en el conductor c debe ser negativa, por lo cual

$$\sigma_c = - \frac{1.8528 \times 10^{-8}}{2\pi(6 \times 10^{-3})} = - 4.914 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

es decir

$$\sigma_c = - 0.4914 \frac{\mu C}{m^2}$$

d) De la expresión (1.65), se tiene que el campo eléctrico entre los conductores a y c , si existiera vacío entre ellos, sería

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r}$$

En este caso, el punto 1 se encuentra dentro de un dieléctrico de permitividad ϵ_1 , por lo cual la expresión anterior queda

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{2\lambda}{r} \quad \text{si} \quad r_a \leq r < r_b$$

Esta ecuación nos permite calcular la magnitud del campo eléctrico para cualquier punto del dieléctrico 1, conociendo la distancia del punto al eje del cable coaxial, por lo tanto

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{2\lambda}{r_1}$$

$$E_1 = \frac{2(18.528 \times 10^{-9})}{4\pi(2.0355 \times 10^{-11})(3 \times 10^{-3})} = 4.829 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

$$E_1 = 4.829 \times 10^4 \frac{N}{C} \quad \text{en dirección radial.}$$

En forma análoga, se puede calcular E_2 con la expresión

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{2\lambda}{r_2} \quad \text{si} \quad r_b < r \leq r_c$$

$$E_2 = \frac{2(18.528 \times 10^{-9})}{4\pi(6.1065 \times 10^{-11})(5 \times 10^{-3})} = 9.658 \times 10^3 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = 9.658 \times 10^3 \frac{N}{C} \quad \text{en dirección radial.}$$

e) De la expresión (2.40) se tiene que

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q_{\ell}$$

Separemos esta ecuación en tres integrales, una para cada cara circular de la superficie gaussiana mostrada en la figura 2.28 y otra para la cara lateral de dicha superficie.

$$\iint_1 \vec{D}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint_2 \vec{D}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint_3 \vec{D}_3 \cdot d\vec{A}_3 = q_{\ell}$$

o sea

$$\iint_1 D_1 dA_1 \cos\theta_1 + \iint_2 D_2 dA_2 \cos\theta_2 + \iint_3 D_3 dA_3 \cos\theta_3 = q_{\ell}$$

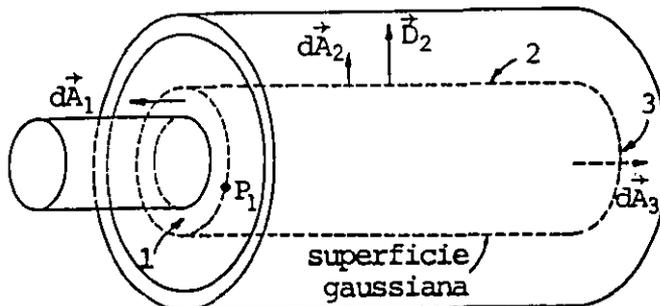


FIGURA 2.28. Superficie gaussiana para el cable coaxial.

Como \vec{D} es un vector paralelo al campo eléctrico, estará dirigido radialmente y hacia afuera de la superficie gaussiana, y se tendrá

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = 0, \quad \cos\theta_2 = 1 \quad \text{y} \quad \theta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\theta_3 = 0$$

~~por lo anterior, la primera y tercera integrales son nulas, de este modo tendremos~~

$$\iint_2 D_2 dA_2 = q_\ell$$

Como la superficie gaussiana cilíndrica de radio r es coaxial al cable, se tiene que la magnitud del desplazamiento es constante, por lo cual

$$D_2 \iint_2 dA_2 = q_\ell$$

e integrando

$$D_2 A_2 = q_\ell$$

donde A_2 es el área lateral de la superficie gaussiana, es decir

$$D_2 (2\pi r \ell) = q_\ell$$

$$D = \frac{q_\ell}{2\pi r \ell}$$

y como

$$\frac{q_\ell}{\ell} = \lambda$$

se tendrá finalmente

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

Aplicando esta última expresión en el punto 1 se obtiene

$$D_1 = \frac{\lambda}{2\pi r_1}$$

$$D_1 = \frac{18.528 \times 10^{-9}}{2\pi(3 \times 10^{-3})} = 9.829 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

$$D_1 = 0.9829 \frac{\mu C}{m^2} \text{ y en dirección radial.}$$

En forma análoga se obtiene la magnitud del desplazamiento en el punto 2, empleando una superficie gaussiana cilíndrica de radio r

$$D_2 = \frac{\lambda}{2\pi r_2}$$

$$D_2 = \frac{18.528 \times 10^{-9}}{2\pi(5 \times 10^{-3})} = 5.897 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

$$D_2 = 0.5897 \frac{\mu C}{m^2} \text{ y en dirección radial.}$$

A manera de comprobación, recordamos la expresión (2.34)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

por la cual

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = 2.0355 \times 10^{-11} (4.829 \times 10^4) = 9.829 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

y

$$D_2 = \epsilon_2 E_2 = 6.1065 \times 10^{-11} (9.658 \times 10^3) = 5.897 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2}$$

Ambos desplazamientos, por ser paralelos al campo eléctrico, son en dirección radial.

Se puede observar que en este caso no se cumple la relación.

$|\vec{D}| = \sigma_l$ y esto es debido a que el campo vectorial del desplazamiento no es uniforme como en el caso de electrodos de placas planas y paralelas.

f) Para el cálculo de los vectores polarización en los puntos 1 y 2 emplearemos la expresión (2.42)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

De donde, la polarización en el punto 1 será

$$\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1$$

$$P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = 9.829 \times 10^{-7} - 8.85 \times 10^{-12} (4.829 \times 10^4)$$

por lo tanto

$$P_1 = 5.555 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2} \text{ en dirección radial}$$

y en forma semejante

$$P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = 5.897 \times 10^{-7} - 8.85 \times 10^{-12} (9.658 \times 10^3)$$

$$P_2 = 5.042 \times 10^{-7} \frac{C}{m^2} \text{ en dirección radial.}$$

Comprobar que se obtienen los mismos resultados si se emplea la expresión (2.27)

g) Para el cálculo de la capacitancia de un metro de cable coaxial, emplearemos la definición de capacitancia, expresión (2.2)

$$C = \frac{Q}{V_{ac}}$$

Sabemos que la carga en cada metro de los conductores a y c es la misma pero de signo diferente.

La carga q en un metro del conductor a será

$$q = \lambda \ell, \quad \text{donde } \ell = 1 \text{ m}$$

$$\therefore q = 18.528 \times 10^{-9} \text{ C}$$

y la capacitancia C_1 de un metro de cable será

$$C_1 = \frac{q}{V_{ac}} = \frac{18.528 \times 10^{-9}}{120}$$

y

$$C_1 = 1.544 \times 10^{-10} = 154.4 \text{ pF}$$

Para cien metros de cable, la carga en el conductor a será

$$Q = \lambda L, \quad \text{donde } L = 100 \text{ m}$$

$$\therefore Q = 18.528 \times 10^{-9} (100) = 18.528 \times 10^{-7} \text{ C}$$

y la capacitancia C de 100 m de cable será

$$C = \frac{Q}{V_{ac}} = \frac{18.528 \times 10^{-7}}{120}$$

y

$$C = 15.44 \times 10^{-9} \text{ F} = 15.44 \text{ nF}$$

Observamos que C sería el capacitor equivalente a 100 capacitores C_1 conectados en paralelo.

h) La densidad de energía en los puntos 1 y 2 se puede calcular empleando la expresión (2.19) y sustituyendo la permitividad del vacío por las permitividades de los dieléctricos en cuestión

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2$$

Por lo tanto

$$u_1 = \frac{\epsilon_1}{2} E_1^2$$

$$u_1 = \frac{2.0355 \times 10^{-11}}{2} (4.829 \times 10^4)^2 = 2.373 \times 10^{-2} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$u_1 = 23.73 \frac{\text{mJ}}{\text{m}^3}$$

y de manera semejante

$$u_2 = \frac{\epsilon_2}{2} E_2^2$$

$$u_2 = \frac{6.1065 \times 10^{-11}}{2} (9.658 \times 10^3)^2 = 2.848 \times 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

$$u_2 = 2.848 \frac{\text{mJ}}{\text{m}^3}$$

i) Para el cálculo de la energía total, como en este caso donde el campo eléctrico \vec{E} no es uniforme, se requiere de una integral extendida a todo el volumen en donde existe el campo eléctrico, por lo tanto, la expresión (2.17) toma la forma

$$U = \frac{\epsilon}{2} \iiint E^2 dV$$

Calcularemos la energía total almacenada como la suma de la energía en el dieléctrico 1 (U_1) más la energía en el dieléctrico 2 (U_2). Además, del inciso d de este ejemplo, se tiene que el campo eléctrico entre los conductores está definido por

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{2\lambda}{r} \quad \text{si} \quad r_a \leq r < r_b$$

y

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{2\lambda}{r} \quad \text{si} \quad r_b < r \leq r_c$$

por lo tanto, tendremos que

$$U_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \iiint E_1^2 dV$$

o sea

$$U_1 = \frac{\epsilon_1}{2} \iiint \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{2\lambda}{r} \right)^2 dV = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_1} \iiint \frac{dV}{r^2}$$

empleando coordenadas cilíndricas, el elemento de volumen se expresa como

$$dV = \rho d\rho d\theta dz \quad \text{y} \quad r = \rho$$

$$\therefore U_1 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_1} \int_{r_a}^{r_b} \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{dz d\theta \rho d\rho}{\rho^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_1} \left[100 \int_{r_a}^{r_b} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\rho}{\rho} \right]$$

$$U_1 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_1} \left[100(2\pi) \int_{r_a}^{r_b} \frac{d\rho}{\rho} \right] = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_1} (100)(2\pi) \ell_n \frac{r_b}{r_a}$$

$$U_1 = \frac{25\lambda^2}{\pi\epsilon_1} \ell_n \frac{r_b}{r_a}$$

$$U_1 = \frac{25(18.528 \times 10^{-9})^2}{\pi(2.0355 \times 10^{-11})} \ell_n \frac{4}{2} = 93.025 \times 10^{-6} \text{ J}$$

y para la energía en el dieléctrico 2 tendremos

$$U_2 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_2} \int_{r_b}^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_0^{100} \frac{dz d\theta d\rho}{\rho} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_2} \left[100 \int_{r_b}^{r_c} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{d\rho}{\rho} \right]$$

$$U_2 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_2} \left[100(2\pi) \int_{r_b}^{r_c} \frac{d\rho}{\rho} \right] = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_2} (100)(2\pi) \ell_n \frac{r_c}{r_b}$$

$$U_2 = \frac{25\lambda^2}{\pi\epsilon_2} \ln \frac{r_c}{r_b}$$

$$U_2 = \frac{25(18.528 \times 10^{-9})^2}{\pi(6.1065 \times 10^{-11})} \ln \frac{6}{4} = 18.138 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$\therefore U_t = U_1 + U_2$$

$$U_t = 1.1116 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Este resultado se puede verificar aplicando la expresión (2.16)

$$U = \frac{Q V_{ac}}{2}$$

y del inciso g de este ejemplo tenemos

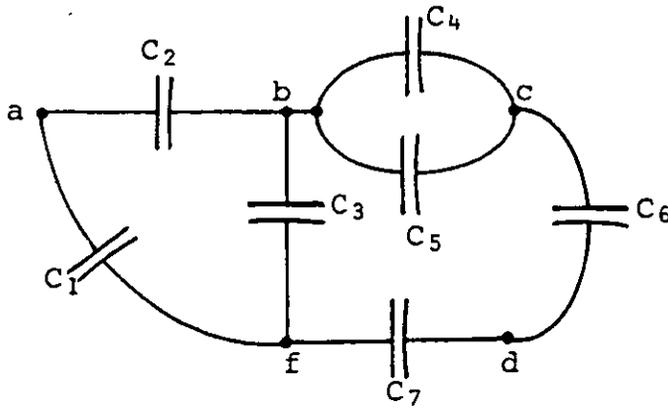
$$U = \frac{18.528 \times 10^{-7} (120)}{2} = 1.1116 \times 10^{-4} \text{ J}$$

PROBLEMAS

2.1 El potencial de una cierta esfera conductora aislada en el aire es 2×10^4 V cuando la carga que posee es $0.2 \mu\text{C}$. Calcule la capacitancia y el radio de la esfera.

2.2 Para el arreglo de capacitores mostrado, calcule el capacitor equivalente entre los pares de puntos siguientes

- a) a y b
- b) b y f
- c) c y d



$$C_1 = C_2 = 4 \mu\text{F}$$

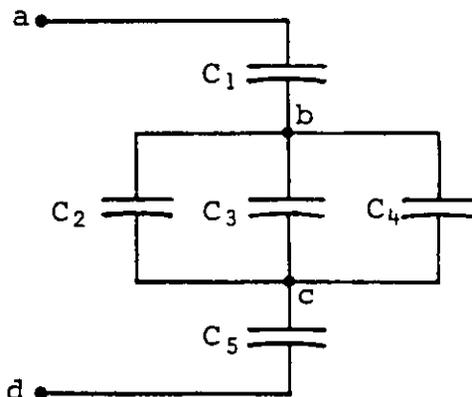
$$C_3 = C_4 = C_5 = 2 \mu\text{F}$$

$$C_6 = C_7 = 8 \mu\text{F}$$

Figura P2.2

2.3 Se sabe que, en el arreglo de capacitores de la figura P2.3, el capacitor C_4 posee una carga almacenada $Q_4 = 43.2 \mu\text{C}$, entonces calcule:

- La diferencia de potencial que aparece en las terminales de cada capacitor.
- La carga almacenada en cada uno de los capacitores restantes.
- La energía almacenada en cada capacitor.
- La diferencia de potencial V_{ad}
- La carga y la energía almacenada en el capacitor equivalente.



$$C_1 = 12 \mu\text{F}$$

$$C_2 = 4 \mu\text{F}$$

$$C_3 = 2 \mu\text{F}$$

$$C_4 = 6 \mu\text{F}$$

$$C_5 = 9 \mu\text{F}$$

Figura P2.3

2.4 En un cierto dispositivo eléctrico con problemas, se ha detectado la necesidad de sustituir los capacitores por otros cuyos valores aproximados son: 8.3 μF a 30 V máximo y 27.2 μF a 55 V máximo.

Con base en la tabla P2.4 que contiene algunos valores de capacitores comerciales y sus costos estimados, encuentre la combinación óptima en cada caso. Para simplificar no considere la tolerancia.

Valores en μF	Costo estimado según su voltaje máximo		
	25 V	50 V	100 V
0.1	\$ 5.00	\$ 7.00	\$ 10.00
1	5.00	7.00	10.00
5	5.00	10.00	15.00
10	6.00	10.00	20.00
25	6.00	15.00	25.00
40	6.00	15.00	25.00
50	8.00	18.00	35.00
100	10.00	20.00	40.00

TABLA P2.4

2.5 Se sabe que el aire se ioniza con una intensidad de campo eléctrico $E_{Ra} \doteq 3 \times 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$; obtenga la carga máxima que se puede almacenar en una esfera de 15 cm de radio y la densidad superficial de carga máxima. Repita el cálculo para una esfera de 30 cm de radio y compare las densidades superficiales máximas.

2.6 Desprecie el efecto de los bordes y calcule la diferencia de potencial V_{xy} necesaria para ionizar el aire entre un par de placas planas conductoras y paralelas, separadas en el primer caso 0.25 mm y en el segundo 0.5 mm. Calcule también la densidad superficial de carga máxima para cada caso y compárela con la obtenida en el problema 2.5.

2.7 Para una configuración de placas planas con un dieléctrico entre ellas, como se muestra en la figura P2.7, la permitividad relativa o constante dieléctrica es $K_e = 4$, y su campo eléctrico de ruptura es $E_R = 8 \times 10^6 \frac{V}{m}$. Si se le aplica una diferencia de potencial $V_{ab} = 120 V$, calcule:

- La densidad superficial de carga libre σ .
- La densidad superficial de carga inducida en el dieléctrico σ_i .
- La permitividad ϵ del material y la susceptibilidad eléctrica χ_e .
- La energía almacenada en el arreglo y la densidad de energía en el dieléctrico.
- ¿Hasta qué valor se puede aumentar V_{ab} sin que se dañe el dieléctrico?

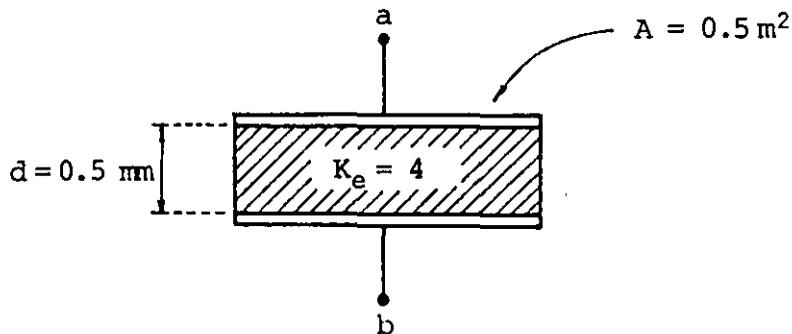


Figura P2.7

2.8 Se desean comparar las dimensiones de tres tipos de capacitores con igual capacitancia; dichos capacitores se construyen usando el mismo dieléctrico de permitividad $\epsilon = 3.54 \times 10^{-11} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ y de espesor igual a 0.2 mm . Para un capacitor de 20 nF calcule las dimensiones siguientes:

- El área necesaria si el capacitor se construye con un par de placas planas.
- La magnitud de los radios si el capacitor es esférico.

c) La magnitud de los radios si el capacitor es cilíndrico y de 20 cm de longitud.

2.9 Indique a cuál de los dieléctricos mencionados en la tabla P2.9 se le puede aplicar mayor diferencia de potencial, si cada dieléctrico se coloca separando un par de placas planas paralelas. Con base en los resultados obtenidos, si se requiere un dieléctrico que soporte una diferencia de potencial de 1400 V con un 20% de seguridad, indique cuál escogería y explique la razón.

Dieléctrico	K_e	E_R [kV/mm]	espesor [mm]	Costo supuesto por cada m^2
Papel	3.6	12	0.09	\$ 15.00
Baquelita	4.8	16	0.08	30.00
Polietileno	2.3	40	0.06	20.00
Poliestireno	2.6	20	0.07	25.00
Mica	5.2	50	0.05	40.00

TABLA DE DIELECTRICOS P2.9

2.10 Suponga que se desean aislar dos placas planas cargadas con densidades superficiales de carga iguales y opuestas $\sigma = \pm 300 \frac{\mu C}{m^2}$. Seleccione de la tabla de dieléctricos el más adecuado si se desea un margen de seguridad del 10%. Explique su selección.

2.11 Use la tabla de dieléctricos P2.9 para diseñar los capacitores planos que se indican. Calcule además el área necesaria para obtener las capacitancias deseadas con el dieléctrico seleccionado.

a) Capacitor que funcione a 1000 V máximo y tenga una capacitancia de 40 nF .

b) Capacitor que funcione a 2000 V máximo y tenga una capacitancia de 80 nF .

2.12 Con los datos de la tabla de dieléctricos P2.9, obtenga la capacitancia y el voltaje máximo que soporta el arreglo de la figura.

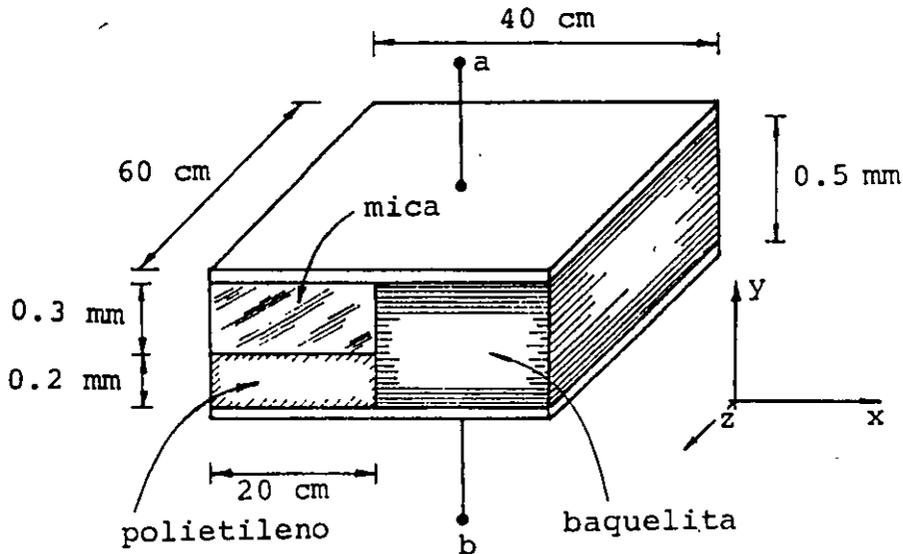


Figura P2.12

2.13 Si al arreglo del problema anterior se le aplica una diferencia de potencial $V_{ab} = -400 \text{ V}$, en cada dieléctrico calcule:

- El vector intensidad de campo eléctrico.
- El vector polarización.
- El vector desplazamiento eléctrico.
- La densidad de energía.

2.14 Un cable coaxial se compone normalmente de un alambre conductor cubierto con un material aislante; sobre éste último se coloca una malla conductora que a su vez se cubre con un segundo aislamiento.

Para el cable coaxial de la figura P2.14 calcule:

- La capacitancia por metro de longitud.
- La diferencia de potencial máxima que se puede aplicar a los conductores.
- La energía eléctrica que almacena el cable, por metro de longitud, cuando se le aplica una diferencia de potencial $V_{xy} = 120 \text{ V}$.

$$E_{R1} = 10 \frac{\text{kV}}{\text{mm}} \quad a = 1 \text{ mm}$$

$$E_{R2} = 6 \frac{\text{kV}}{\text{mm}} \quad b = 3 \text{ mm}$$

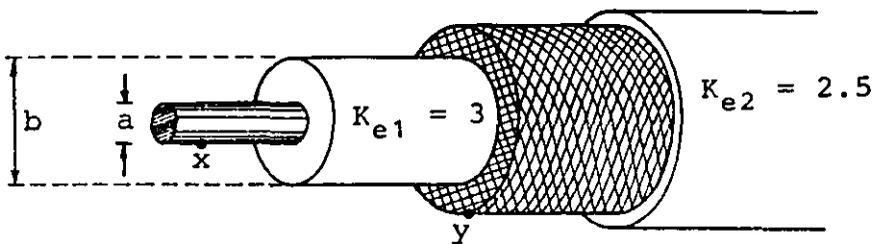
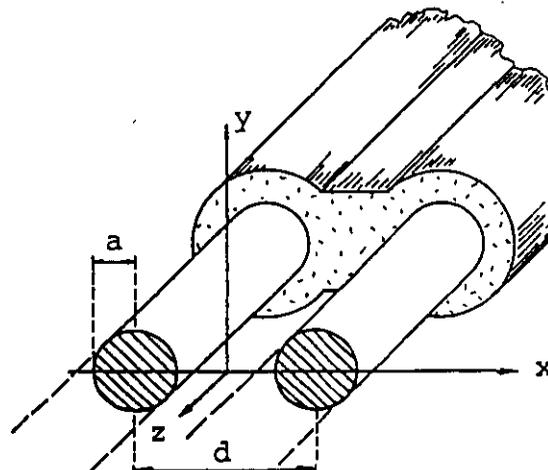


Figura P2.14

2.15 Calcule la capacitancia por metro de longitud de un cable dúplex, como el de la figura P2.15; considere que la permitividad relativa del material entre los alambres es $K_e = 2.4$. Aproveche parte de los cálculos realizados en el problema 1.17.



$$a = 1 \text{ mm}$$

$$d = 4 \text{ mm}$$

Figura P2.15

CAPITULO 3 CORRIENTE, RESISTENCIA Y FUERZA ELECTROMOTRIZ

INTRODUCCIÓN

En los dos temas anteriores se han analizado efectos electrostáticos, es decir, que involucran exclusivamente cargas en reposo. En éste iniciaremos el estudio de los fenómenos que involucran cargas en movimiento.

El estudio de los efectos producidos por cargas en movimiento se inició cuando Alessandro Volta (1745-1827) construyó la primera *pila voltaica*; tal dispositivo es capaz de producir movimiento constante de carga a través de conductores. Este hecho es el inicio de una gran cantidad de descubrimientos realizados en el siglo XIX.

En este capítulo hablaremos del movimiento de carga a través de sólidos, de la propiedad llamada resistencia y de la ley de Ohm; presentaremos el elemento conocido como resistor y calcularemos la energía eléctrica que se transforma en calor por unidad de tiempo mediante la ley de Joule. Dada la importancia de las cel das qu micas, al final del tema comentaremos brevemente los prin ci pios del funcionamiento de éstas.

3.1 MOVIMIENTO DE CARGA A TRAVES DE CONDUCTORES Y DENSIDAD DE CORRIENTE

Como ya hemos mencionado, la existencia de un campo eléctrico en el interior de un conductor provoca el movimiento de los portadores de carga libres de éste. En general, dichos portadores se pueden mover bajo la acción de un campo eléctrico no uniforme, en un espacio tridimensional, y la fuerza eléctrica que actúa sobre

cada portador se puede obtener de la relación

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad (3.1)$$

donde q es la carga de cada portador y \vec{E} es el campo eléctrico que actúa sobre él en la posición que ocupa. Al observar la ecuación (3.1), esperamos que tal fuerza produzca una aceleración a la partícula; sin embargo, esto sólo ocurre cuando la partícula se desplaza en el vacío. En las sustancias conductoras, los portadores se ven influidos por efectos térmicos asociados con la energía interna de aquéllas, por fuerzas eléctricas debidas a las partículas cargadas vecinas y por la fuerza que les produce el campo eléctrico aplicado; este último efecto es, en la mayoría de los casos, el menos significativo.

Aunque en realidad el movimiento de las partículas no es uniforme ya que chocan constantemente con la estructura de la sustancia debido a la agitación térmica, es posible considerar que el campo eléctrico aplicado las desplaza a una velocidad constante, ésta es un promedio de la velocidad con la cual se mueven las partículas cargadas en la línea de acción del campo eléctrico aplicado, y para sustancias homogéneas es directamente proporcional a dicho campo, entonces

$$\vec{v}_p \propto \vec{E} \quad (3.2)$$

La relación anterior se puede expresar como una igualdad, introduciendo la constante de proporcionalidad requerida, por lo que

$$\vec{v}_p = \mu\vec{E} \quad (3.3)$$

donde μ se conoce como movilidad de los portadores de carga libres y para cada sustancia toma un valor característico.

Como se describió en el subtema 1.10, el volumen por unidad de tiempo que cruza una superficie cualquiera A se obtiene evaluando el flujo del campo de velocidad \vec{v}_p con la expresión

$$\phi_v = \iint \vec{v}_p \cdot d\vec{A} \quad (3.4)$$

por lo que la cantidad de carga neta que cruza esa superficie por unidad de tiempo es:

$$\phi'_v = \iint \rho_L \vec{v}_p \cdot d\vec{A} \quad (3.5)$$

donde ρ_L es la densidad de portadores de carga libres por unidad de volumen y se obtiene conociendo el número de portadores por unidad de volumen en el material (n) y la carga de cada uno de ellos (q), entonces

$$\rho_L = nq \quad (3.6)$$

La velocidad promedio \vec{v}_p podría ser obtenida sumando vectorialmente la velocidad de cada portador en un instante, para un volumen dado, y dividiendo este resultado entre el número de portadores en dicho volumen (N)

$$\vec{v}_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \quad (3.7)$$

Más adelante analizaremos un método más práctico de obtener esta velocidad promedio.

A la expresión $\rho_L \vec{v}_p$ se le conoce como densidad de corriente y se representa con la letra \vec{J} , entonces

$$\vec{J} = \rho_L \vec{v}_p = nq\vec{v}_p \quad (3.8)$$

sus unidades en el SI son

$$[J]_u = \frac{C}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{C}{s \cdot m^2}$$

pero

$$\frac{C}{s} = \text{ampere} = A$$

por lo que

$$[\mathcal{J}]_u = \frac{A}{m^2} \quad (3.9)$$

Debemos observar en la ecuación (3.8), que la dirección del vector densidad de corriente \vec{J} es la dirección de la velocidad promedio \vec{v}_p cuando los portadores son positivos y es contraria cuando son negativos.

De la ecuación (1.49)

$$\phi_j = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (3.10)$$

Cuando evaluamos el flujo del campo vectorial \vec{J} a través de una superficie cualquiera A obtendremos la carga neta que cruza en la unidad de tiempo la superficie escogida. En general, si esta cantidad de carga varía en cada instante, se cumple

$$\phi_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (3.11)$$

donde Δq es la carga que cruza la superficie en el intervalo Δt .

3.2 CORRIENTE ELECTRICA

Comparando las ecuaciones (3.10) y (3.11) obtenemos las igualdades siguientes

$$\phi_j = \iint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{dq}{dt} \quad [A] \quad (3.12)$$

Históricamente la magnitud escalar ϕ_j se conoce como corriente eléctrica y se representa con la letra i , por lo que

$$i = \phi_j \quad [A] \quad (3.13)$$

Cuando la corriente eléctrica a través de una superficie es un *ampere* (A), se debe entender que a través de dicha superficie cru

za un coulomb de carga neta cada segundo, sin importar si el vector densidad de corriente \vec{J} es constante o no en tal superficie.

Debemos notar también en la ecuación (3.12) que el valor de la corriente i puede ser positivo o negativo, dependiendo de las direcciones relativas del vector densidad de corriente \vec{J} y el vector diferencial de superficie $d\vec{A}$, como se muestra en la figura 3.1.

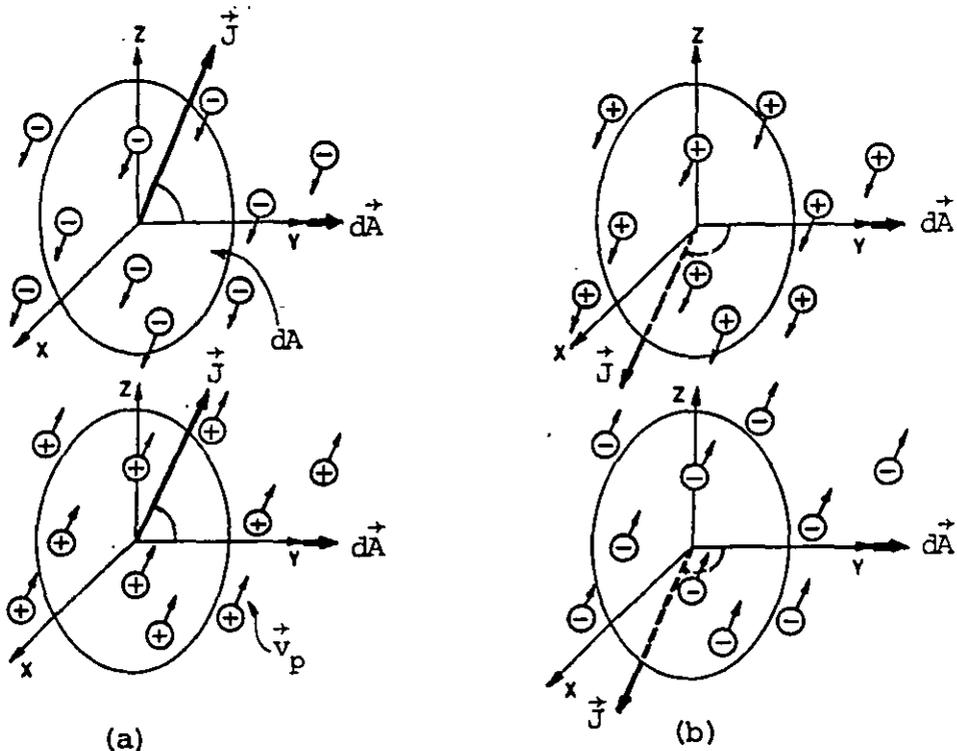


FIGURA 3.1. Diversas posibilidades de movimiento de portadores a través de la superficie $d\vec{A}$. (a) Corriente eléctrica positiva, (b) corriente eléctrica negativa.

Existen diversos criterios para clasificar la corriente eléctrica, el más común considera su comportamiento con respecto al tiempo. Con base en éste distinguiremos los tres tipos de corriente siguientes

Corriente eléctrica continua (cc)

Corriente eléctrica alterna (ca)

Corriente eléctrica directa (cd)

Una corriente eléctrica es continua en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ cuando su magnitud y signo no varían con respecto al tiempo en dicho intervalo. Gráficamente se representa como se indica en la figura 3.2.

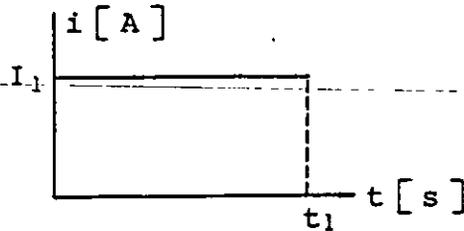


FIGURA 3.2. Representación gráfica de una corriente continua en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$.

A una corriente eléctrica que varía su magnitud y signo con respecto al tiempo, en el intervalo considerado, se le llama corriente alterna. Las gráficas de la figura 3.3 representan algunos ejemplos de este tipo de corriente.

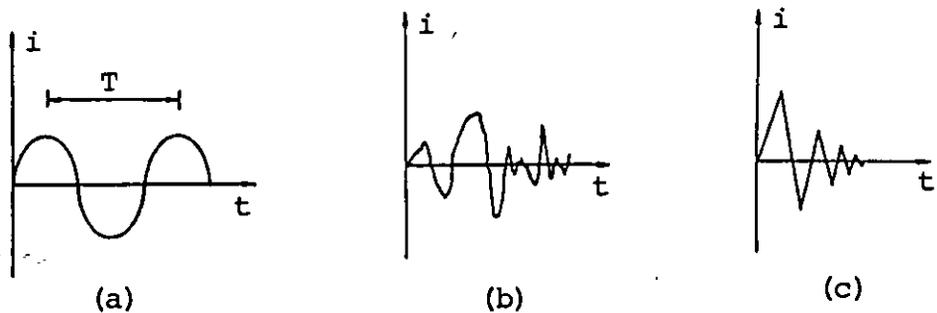


FIGURA 3.3. Representación gráfica de algunos ejemplos de corriente alterna: (a) periódica, (b) aleatoria y (c) transitoria.

Una corriente eléctrica directa es aquella que en el intervalo de interés varía su magnitud pero no su signo, como se muestra en las gráficas de la figura 3.4.

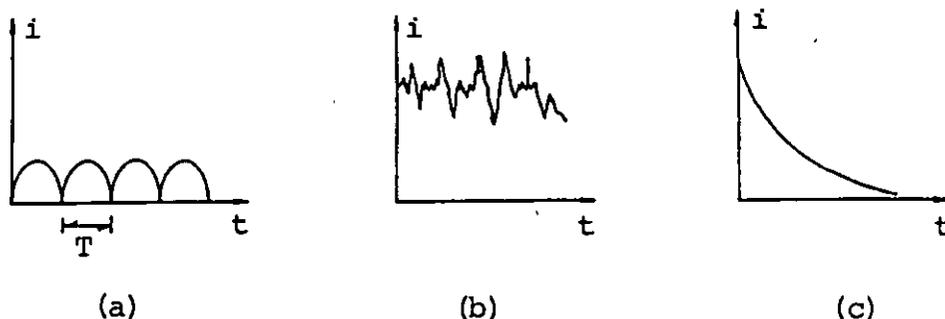


FIGURA 3.4. Representación gráfica de algunos ejemplos de corriente directa: (a) periódica, (b) aleatoria y (c) transitoria.

Otra expresión para obtener la corriente eléctrica se encuentra sustituyendo la ecuación (3.8) en la (3.12), entonces

$$i = \iint nq\vec{v}_p \cdot d\vec{A}$$

$$i = nq \iint \vec{v}_p \cdot d\vec{A} \quad (3.14)$$

en el caso particular en que \vec{v}_p no varía a través de la superficie considerada, la ecuación (3.14) se reduce a

$$i = nqv_p A \cos \theta \quad (3.15)$$

donde θ es el ángulo que forma \vec{v}_p con \vec{A} .

Compruebe que la velocidad promedio de los electrones libres de un alambre conductor de cobre, por el cual circula 1 A es $v_p = 4.45 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$ cuando el área de la sección transversal del alám

bre es 1 mm^2 . Considere un electrón libre por cada átomo de Cu , por lo que

$$n = (1) \rho \frac{N_0}{M}$$

donde

$$\rho = \text{densidad del cobre} = 8.9 \text{ g/cm}^3$$

$$N_0 = \text{número de Avogadro} = 6.023 \times 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{mol}}$$

$$M = \text{masa atómica} = 63.54 \text{ g/mol}$$

3.3 PRINCIPIO DE CONSERVACION DE LA CARGA

Se ha demostrado experimentalmente que la carga eléctrica en un sistema aislado se conserva, por lo que si evaluamos el flujo del vector densidad de corriente \vec{J} a través de una superficie cerrada, obtenemos

$$\phi_j = \oiint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{dq}{dt} = - \frac{dQ}{dt} \quad (3.16)$$

donde q es la carga neta que cruza la superficie considerada hacia afuera y Q es la carga contenida en el volumen encerrado por tal superficie; la aparición del signo negativo se demuestra de la forma siguiente

$$Q(t) = Q_0 - q(t) \quad (3.17)$$

donde Q_0 es la carga inicial encerrada.

Al derivar la ecuación 3.17 obtenemos la relación deseada

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{dq}{dt} \quad (3.18)$$

Como la carga eléctrica se conserva, si una cierta cantidad de carga neta cruza la superficie hacia afuera, en esa misma cantidad debe disminuir la carga contenida en dicha superficie.

Como Q puede estar distribuida en el volumen considerado, entonces

$$Q = \iiint \rho dV \quad (3.19)$$

por lo que en general la ecuación (3.16) se expresa

$$\oiint \vec{J} \cdot d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \iiint \rho dV \quad (3.20)$$

A esta ecuación se le conoce como principio de conservación de la carga.

Es posible también expresar la ecuación (3.20) en forma diferencial aplicando el teorema de Gauss o de la divergencia, ecuación (1.74), al campo vectorial \vec{J} , entonces

$$\oiint \vec{J} \cdot d\vec{A} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \quad (3.21)$$

De (3.20) y (3.21)

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV = - \frac{d}{dt} \iiint \rho dV \quad (3.22)$$

es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.23)$$

donde se ha introducido el símbolo de derivada parcial, dado que en general ρ es una función no sólo del tiempo sino también de la posición.

3.4 LEY DE OHM

Para simplificar limitaremos nuestro estudio del movimiento de carga a través de la materia a sólidos homogéneos y valores de

campo eléctrico tales que se cumpla la relación (3.3), ya que tal relación no es válida para campos eléctricos intensos.

Recordemos las ecuaciones (3.3) y (3.8)

$$\vec{v}_p = \mu \vec{E}$$

$$\vec{J} = nq \vec{v}_p$$

si sustituimos la primera ecuación en la segunda obtenemos

$$\vec{J} = nq \mu \vec{E} \quad (3.24)$$

Para los materiales en estudio, la cantidad $nq\mu$ es una constante llamada conductividad y es representada por la letra griega σ , es decir

$$\sigma = nq\mu \quad (3.25)$$

sus unidades son

$$[\sigma]_u = \frac{1}{m^3} C \frac{C \cdot m}{N \cdot s}$$

como

$$\frac{C}{s} = A \quad \text{y} \quad \frac{N \cdot m}{C} = V$$

$$[\sigma]_u = \frac{A}{V \cdot m}$$

sustituyendo (3.25) en (3.24) obtenemos

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.26)$$

Ecuación conocida como expresión vectorial de la ley de Ohm, en honor del físico alemán Georg Simon Ohm (1789-1854).

Algunas veces se usa el recíproco de la conductividad σ , al que se le conoce como resistividad y se representa con la letra griega ρ , entonces

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \left[\frac{V \cdot m}{A} \right] \quad (3.27)$$

y la expresión vectorial de la ley de Ohm se escribe en forma equivalente como

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (3.28)$$

A continuación analizaremos una aplicación muy frecuente de esta ley.

Cuando se conectan las terminales de un alambre conductor a una diferencia de potencial, se produce en el interior de éste un campo eléctrico, y la existencia del campo provoca a su vez una corriente eléctrica a través de cualquier sección transversal del alambre.

Antes de continuar debemos notar que la situación que se describe no es electrostática, ya que se tiene un flujo constante de carga de una terminal a otra, mientras se mantenga aplicada la diferencia de potencial V_{ab} . La razón es que ésta última mantiene un campo eléctrico \vec{E} en el interior del alambre conductor. En este caso los portadores de carga libres son electrones que se mueven a lo largo del alambre de la terminal negativa hacia la terminal positiva. La dirección del campo eléctrico (o de la densidad de corriente) coincide con la forma del alambre y para un segmento cualquiera de éste apunta hacia su parte más negativa, como se muestra en la figura 3.5.

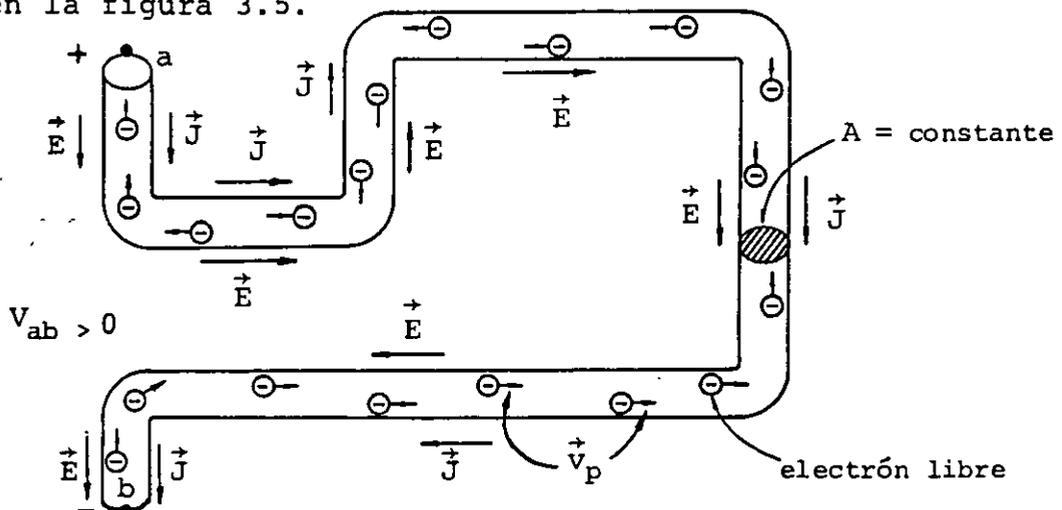


FIGURA 3.5. Conductor de sección transversal circular de área A y longitud total L al cual se le aplica una diferencia de potencial V_{ab} . También se muestran los electrones libres moviéndose con una velocidad promedio \vec{v}_p .

Ya que el área de la sección transversal del alambre es constante y el conductor es homogéneo, la ecuación (3.12) se reduce a

$$i = JA \quad (3.29)$$

y de la ecuación (1.103) obtenemos

$$E = \frac{V_{ab}}{L} \quad (3.30)$$

Al combinar estas últimas ecuaciones con la expresión (3.28)

$$\frac{V_{ab}}{L} = \rho \frac{i}{A}$$

o también

$$V_{ab} = \rho \frac{L}{A} i \quad (3.31)$$

Podemos simplificar la ecuación (3.31) llamando al factor $\frac{\rho L}{A}$ resistencia eléctrica y representándolo con la letra R , entonces

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (3.32)$$

al sustituir (3.32) en (3.31) obtenemos que

$$V_{ab} = Ri \quad (3.33)$$

Aunque la ecuación anterior es un caso particular de la expresión (3.26) llamada expresión vectorial de la ley de Ohm, históricamente se obtuvo primero y se le llamó ley de Ohm, a lo largo de esta obra conservaremos esta denominación.

De la ecuación (3.33) observamos que

$$R = \frac{V_{ab}}{i} \quad \left[\frac{V}{A} \right] \quad (3.34)$$

En el SI a la unidad de resistencia eléctrica se le llama ohm, entonces

$$\left[R \right]_U = \frac{\text{volt}}{\text{ampere}} = \text{ohm} = \Omega$$

Cuando al conectar un sólido homogéneo a una diferencia de potencial de un volt circula un ampere de corriente, su resistencia eléctrica es de un ohm.

3.5 CONDUCCION DE CARGA A TRAVES DE SOLIDOS HOMOGENEOS

Dado que los átomos de un sólido están fijos en la estructura del material, el flujo de carga o conducción a través de ellos es debido a electrones libres. Es por ello que el sólido conduce, siempre y cuando existan electrones libres.

Haremos uso de algunos resultados de la mecánica cuántica para describir el comportamiento de los electrones de un sólido.

La energía que puede poseer un electrón está cuantizada (toma valores discretos); a este conjunto de valores de energía se les denomina niveles energéticos del electrón o bandas, éstas están separadas debido a que existen rangos de valores de energía que el electrón no puede poseer; a tales rangos se les denomina zonas prohibidas.

En el esquema de la figura 3.6 se muestran las bandas mencionadas, separadas en dos grupos llamados bandas de conducción y bandas de valencia.

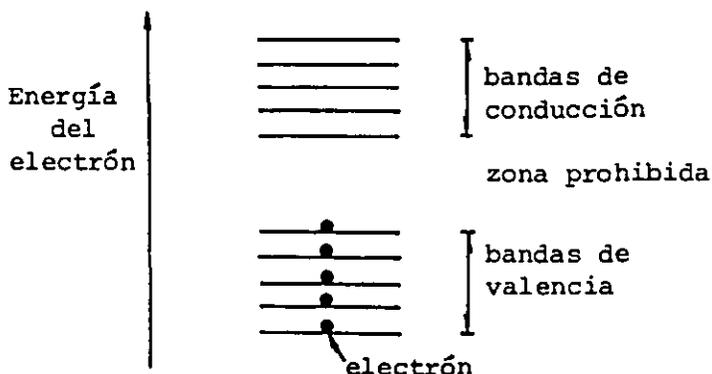


FIGURA 3.6. Representación esquemática de las bandas de energía para los electrones de un átomo.

Las bandas de valencia representan los niveles de energía que poseen los electrones de los átomos o moléculas cuando el material no recibe energía externa. Las bandas de conducción representan los niveles energéticos que puede poseer un electrón cuando recibe energía adicional. La zona prohibida central, en términos de energía, representa la necesaria para que los electrones de la banda de valencia de mayor energía (exteriores), pasen a la banda de conducción de menor energía.

La representación de un metal, según esta teoría de bandas de energía, es la que se indica en la figura 3.7, en la que como ejemplo se ha representado el cobre (Cu).

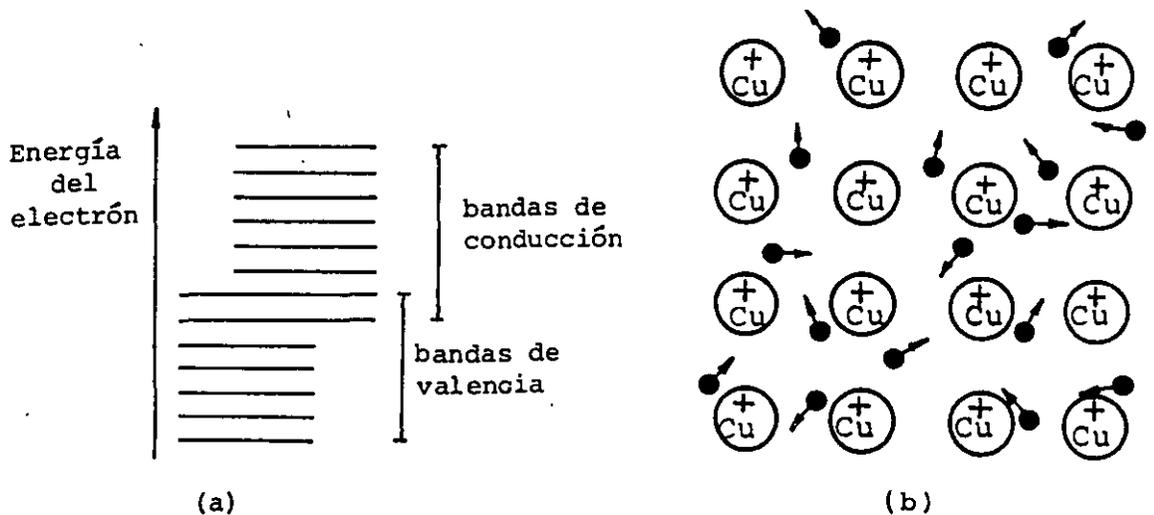


FIGURA 3.7. Representación esquemática de las bandas de energía (a) y de la estructura cristalina para el cobre (b).

Según se observa en la figura 3.7, las bandas están traslapadas, esto se debe a que el enlace metálico que existe entre los átomos implica la existencia de electrones libres (electrones en las bandas de conducción).

Los electrones exteriores de los átomos de los metales son compartidos con los átomos vecinos, lo que da la rigidez a su estructura cristalina.

Por lo anterior, no se requiere energía para liberar estos electrones de la influencia del núcleo, pues aun la aplicación de un campo eléctrico pequeño a estos materiales produce corrientes eléctricas.

En los materiales semiconductores, se requiere una cantidad pequeña de energía para transferir un electrón de la banda de valencia de mayor energía a la banda de conducción de menor energía. En la figura 3.8 se muestra el esquema correspondiente al silicio (Si) cristalizado.

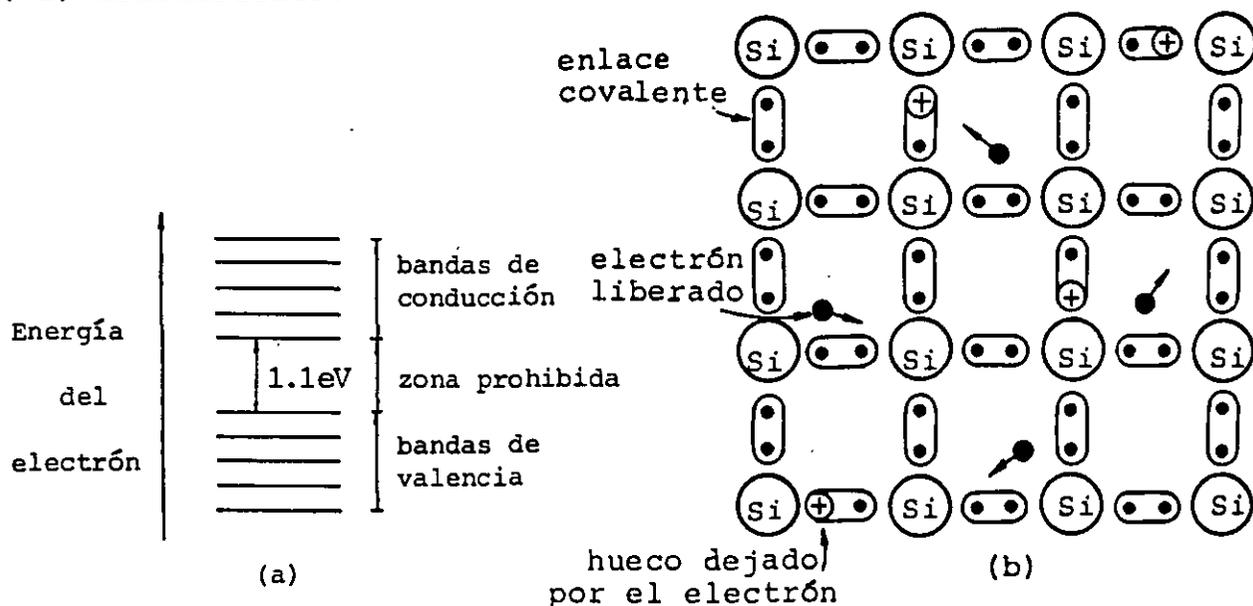


FIGURA 3.8. Representación esquemática de las bandas de energía (a) y la estructura cristalina para el silicio (b).

Como el silicio posee cuatro electrones en su última órbita, en un cristal de silicio cada átomo comparte sus cuatro electrones en enlaces covalentes con sus cuatro vecinos más próximos. A temperaturas cercanas al cero absoluto, todos los enlaces covalentes están completos (excepto en la superficie) y el cristal no conduce. A temperatura ambiente, la energía que recibe el material en forma de calor es suficiente para excitar algunos electrones y pasarlos a la banda de conducción más próxima, es decir, los libera del enlace covalente que los mantiene unidos a la estructura, y los convierte en electrones libres; por ello la cantidad de electrones libres en el cristal depende de la energía que se le suministre al mismo.

En los aislantes, la energía necesaria para que un electrón de valencia pase a la banda de conducción más próxima es grande, por lo que a temperatura ambiente es muy difícil la conducción de carga a través de ellos, a menos que se rompa su rigidez dieléctrica.

La figura 3.9 muestra el caso del carbono (C) cristalizado (diamante). Aunque los cristales de carbono tienen la misma estructura que los de silicio, su diferencia fundamental estriba en el ancho de la zona prohibida.

En los aislantes cristalinos o amorfos, las impurezas (átomos de otros elementos) contribuyen a la existencia de electrones libres; también en los aislantes cristalinos las imperfecciones en la estructura afectan el número de electrones libres.

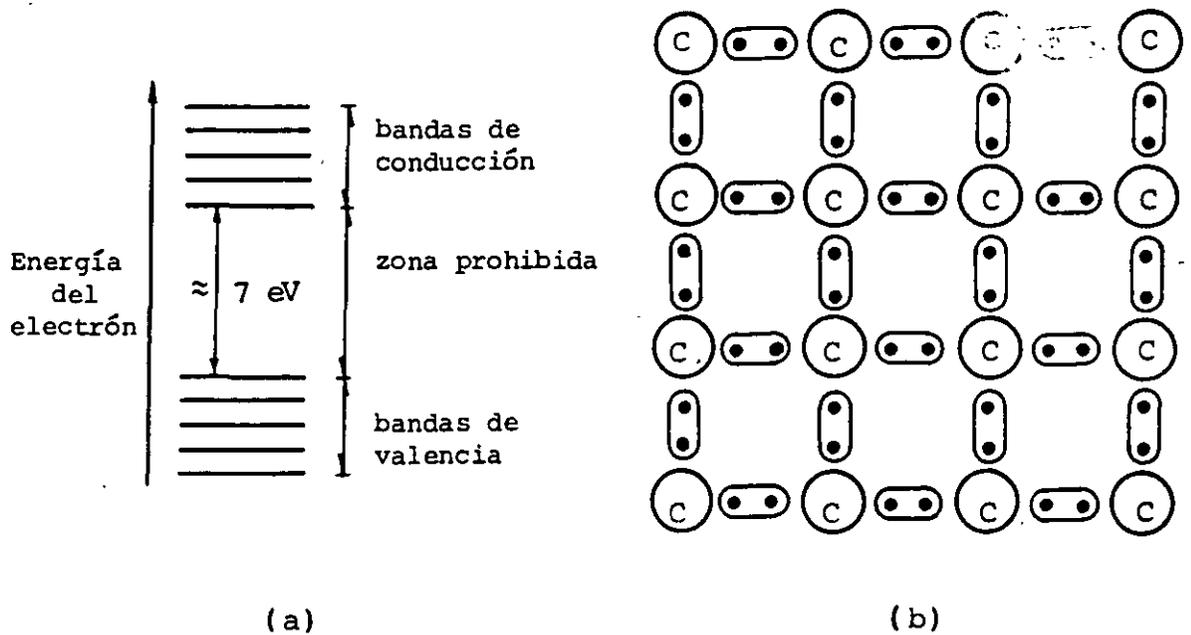


FIGURA 3.9. Representación esquemática de las bandas de energía (a) y la estructura cristalina del carbono (b).

3.6 EFECTO DE LA VARIACION DE LA TEMPERATURA EN LA RESISTIVIDAD

Hasta este momento sabemos que la resistividad se obtiene por medio de la ecuación (3.27)

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{nq\mu} \quad [\Omega \cdot m] \quad (3.35)$$

En los metales, el efecto de la temperatura se refleja fundamentalmente como un decremento en la movilidad μ de los electrones.

La energía en forma de calor que recibe el metal se traduce, desde el punto de vista macroscópico, en un incremento de temperatura y, desde el microscópico, en un incremento de la energía cinética de las partículas que lo constituyen.

El movimiento de los electrones libres en el cristal es completamente aleatorio, ya que chocan constantemente con la estructura del metal, como se indica en la figura 3.10 (a); cuando se le aplica un campo eléctrico, dichos electrones conservan el movimiento aleatorio mencionado, al cual se sobrepone el efecto menos significativo debido al campo aplicado, como se muestra en la figura 3.10 (b).

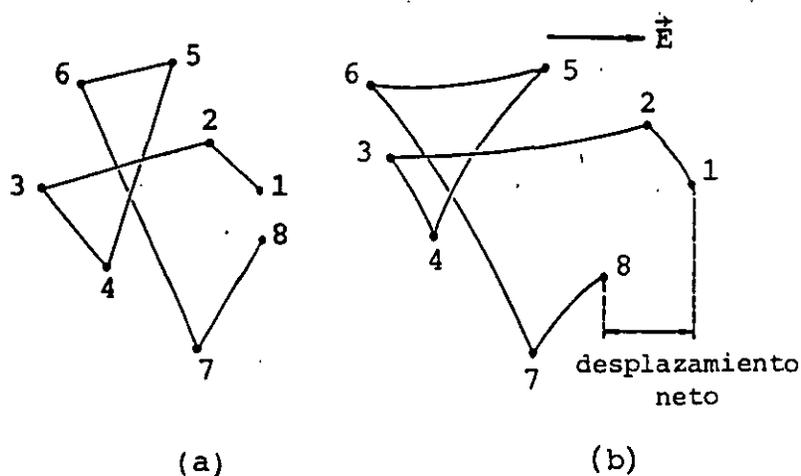


FIGURA 3.10. (a) Movimiento de un electrón en un cristal conductor o semiconductor sin campo eléctrico aplicado, (b) con campo eléctrico aplicado.

Al aumentar la temperatura, aumenta también la probabilidad de que los electrones choquen con la estructura y se reduzca así la movilidad.

Se concluye por lo expuesto que la resistividad de los metales aumenta al aumentar la temperatura.

La figura 3.11 muestra la curva de variación de la resistividad con respecto a la temperatura para el cobre.

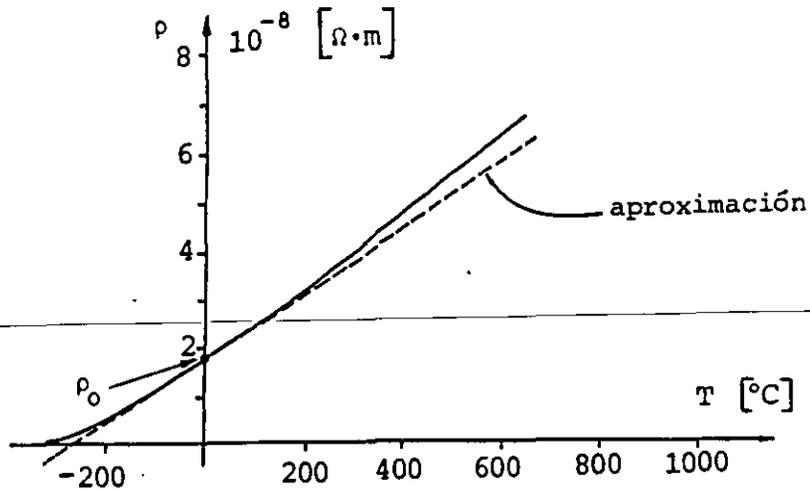


FIGURA 3.11. Curva de resistividad del cobre en función de la temperatura.

Para diversos metales el comportamiento de la resistividad es semejante. Estas funciones pueden ser representadas mediante la serie de potencias siguiente

$$\rho = \rho_0 + aT + bT^2 + cT^3 + \dots \quad (3.36)$$

donde el número de términos empleados depende de la aproximación requerida, y los valores de las constantes dependerán del metal seleccionado.

Para las temperaturas de interés, en la mayoría de los problemas en ingeniería de -50°C a 400°C aproximadamente, la función de resistividad de los metales y sus aleaciones tiene un comportamiento, aproximadamente, lineal. Por ello podemos aproximar la función, para el rango de temperaturas mencionado, mediante una recta, reduciendo la ecuación (3.36) a

$$\rho = \rho_0 + aT \quad (3.37)$$

la cual puede ser expresada como

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{a}{\rho_0} T \right)$$

a la relación $\frac{a}{\rho_0}$ se le conoce como coeficiente de variación de la resistividad con la temperatura para cero °C y se representa con la letra griega α_0 , entonces

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha_0 T) \quad (3.38)$$

En general a una temperatura T_X , $\alpha_X = \frac{a}{\rho_X}$ y sus unidades son:

$$[\alpha]_u = \frac{1}{^\circ\text{C}} = ^\circ\text{C}^{-1}$$

Usualmente se conocen la resistividad y el coeficiente α de los materiales a temperatura ambiente, por lo que para emplear (3.38) es necesario calcular primero α_0 y ρ_0 . Se deja al lector demostrar que dada α_1 a una temperatura T_1 , α_0 se puede obtener mediante la relación siguiente

$$\alpha_0 = \frac{1}{(1/\alpha_1) - T_1} \quad (3.39)$$

Por la ecuación (3.38) sabemos que las resistividades a las temperaturas T_1 y T_2 se obtienen como

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0(1 + \alpha_0 T_1) \\ \rho_2 &= \rho_0(1 + \alpha_0 T_2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

El cociente de las ecuaciones anteriores resulta

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \alpha_0 T_2}{1 + \alpha_0 T_1}$$

finalmente

$$\rho_2 = \rho_1 \left[\frac{1 + \alpha_0 T_2}{1 + \alpha_0 T_1} \right] \quad (3.41)$$

o bien en términos de α_1

$$\rho_2 = \rho_1 \left[1 + \alpha_1 (T_2 - T_1) \right]$$

expresión que se puede obtener sustituyendo el valor de α_0 , de la ecuación (3.39), en la ecuación (3.41).

La tabla 3.1 muestra los valores de resistividad y del coeficiente α para algunos metales y aleaciones.

RESISTIVIDAD DE ALGUNOS METALES Y ALEACIONES		
Metal o aleación	Resistividad a 20° C $\Omega \cdot m \times 10^{-8}$	Coefficiente α a 20° C $^{\circ}C^{-1} \times 10^{-3}$
Ag Plata	1.63	3.9
Cu Cobre	1.72	3.9
Au Oro	2.22	3.8
Al Aluminio	2.83	4.1
W Tungsteno	5.50	4.6
Ni Níquel	7.70	6.5
Fe Hierro	9.80	6.3
4% Ni, 12% Mn, 84% Cu (Manganina)	47	0.01
45% Ni, 55% Cu (Constantán)	48	0.01
60% Ni, 15% Cr, 25% Fe (Nicromel)	108	0.16

TABLA 3.1

Con ayuda de la tabla 3.1, compruebe que la resistividad del cobre a 55°C es $\rho = 1.95 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$.

A temperaturas cercanas al cero absoluto, la conductividad σ de algunos metales y aleaciones se incrementa de tal manera que su valor tiende a infinito ($\rho \rightarrow 0$), a este fenómeno se le conoce como superconductividad.

En algunos casos, como en el del cobre, la conductividad no tiene a infinito debido a imperfecciones en su estructura cristalina.

La tabla 3.2 muestra valores de resistividad para algunos semiconductores.

RESISTIVIDAD DE LOS SEMICONDUCTORES USUALES		
Semiconductor		Resistividad a 20°C $\Omega \cdot m$
C	Carbono	35.7×10^{-4}
Ge	Germanio	45.4
Si	Silicio	62.5×10^3

TABLA 3.2

Al incrementar la temperatura de un semiconductor, como ya se ha explicado, se incrementa el número de electrones libres por unidad de volumen n ; tal aumento es más importante que la disminución de la movilidad, lo que da por resultado un decremento en la resistividad del semiconductor y en consecuencia α toma valores negativos.

Dado que el comportamiento de la resistividad de un semiconductor, al variar la temperatura, es altamente no lineal, no es posible considerar una α constante para un rango amplio de temperaturas como ocurre en los metales.

En la tabla 3.3 se presentan valores aproximados de la resistividad de algunos aislantes.

RESISTIVIDAD APROXIMADA DE ALGUNOS AISLANTES A 20° C	
Aislante	Resistividad $\Omega \cdot m$
Agua destilada	10^4
Parafina	10^7
Baquelita	10^9
Vidrio	10^{12}
Mica	10^{13}
Teflón	10^{14}
Hule duro	10^{15}
Cuarzo	10^{17}

TABLA 3.3 .

En los aislantes la conducción se presenta adicionalmente por un efecto, no tratado aquí, llamado difusión de iones a través de sólidos; sin embargo, su estudio rebasa la intención de este trabajo.

El comportamiento típico de los aislantes es semejante al del vidrio, el cual, al incrementar su temperatura, disminuye su resistividad en forma no lineal. Con objeto de dar idea de cuál puede ser esa variación, mencionaremos el caso de una cierta muestra de vidrio donde $\rho \doteq 10^{16} \Omega \cdot m$ a $20^\circ C$ y a $700^\circ C$ disminuye hasta $\rho \doteq 10^8 \Omega \cdot m$.

3.7 LEY DE JOULE

Los electrones libres de los sólidos, al desplazarse por efecto del campo eléctrico aplicado, ganan energía cinética, que es transmitida a la estructura del material al chocar éstos con ella. Este intercambio de energía entre los electrones, acelerados por el campo eléctrico y los átomos que la reciben por choque, da por re

sultado un incremento de la temperatura del material, y como consecuencia de éste, la resistividad del material varía.

El estado estable se obtiene cuando el material transfiere a su ambiente una cantidad de energía en forma de calor por segundo, igual a la energía eléctrica que recibe, manteniéndose así la temperatura constante.

Obtendremos a continuación la expresión que permite evaluar la energía eléctrica transformada en calor por segundo y por unidad de volumen en un material de resistividad ρ .

Consideremos el sólido mostrado en la figura 3.12 al cual se le aplica un campo eléctrico, para simplificar, perpendicular a una de sus caras, como se indica

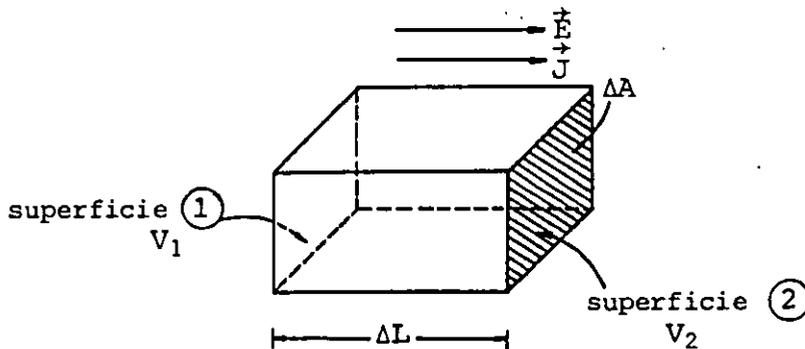


FIGURA 3.12. Sólido homogéneo con un campo eléctrico aplicado.

De la definición de diferencia de potencial, tenemos que la energía que se transforma en calor (ΔU) al trasladar una carga Δq de la cara ① a la cara ② del material sólido en forma de paralelepípedo mostrado en la figura 3.12 es

$$\Delta U = V_{12} \Delta q \quad (3.42)$$

como

$$V_{12} = E \Delta L$$

La expresión (3.42) se transforma en

$$\Delta U = E \Delta L \Delta q \quad (3.43)$$

y la energía que se transforma en calor por unidad de volumen se obtiene como

$$\frac{\Delta U}{\Delta V} = \Delta u = \frac{E}{\Delta A} \Delta q \quad (3.44)$$

en la cual

$$\Delta V = \Delta A \Delta L$$

donde $\Delta A = \text{área}$ y $\Delta L = \text{longitud}$, (ver figura 3.12) por lo que la energía por unidad de volumen que se transforma en calor cada unidad de tiempo o potencia eléctrica por unidad de volumen es

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{E}{\Delta A} \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (3.45)$$

en el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{E}{\Delta A} \frac{dq}{dt} = \frac{E}{\Delta A} i \quad (3.46)$$

como para el caso analizado

$$\frac{i}{\Delta A} = J$$

entonces

$$\frac{du}{dt} = EJ$$

usando la expresión vectorial de la ley de Ohm

$$\frac{du}{dt} = EJ = \rho J^2 = \sigma E^2 \left[\frac{J}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right] \quad (3.47)$$

pero

$$\frac{J}{s} = \text{watt} = W$$

entonces

$$[EJ]_u = \frac{W}{m^3}$$

En muchos casos se desea obtener la energía total transformada en calor en un sólido de dimensiones conocidas. El procedimiento que se ha de seguir es integrar en todo el volumen, como se muestra a continuación.

La energía total transformada estará dada por

$$U = \iiint u dV \quad (3.48)$$

derivando ambos miembros de la ecuación anterior con respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint u dV = \iiint \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (3.49)$$

Si sustituimos la relación (3.47) en la (3.49)

$$\frac{dU}{dt} = \iiint \rho J^2 dV = \iiint \sigma E^2 dV \quad (3.50)$$

Un caso muy frecuente en ingeniería es el de un sólido de longitud L y área de sección transversal A , en el cual ρ , \vec{J} y \vec{E} son constantes en todo su volumen. Si este es el caso, la ecuación (3.50) se reduce a

$$\frac{dU}{dt} = \rho J^2 \iiint dV = \rho J^2 V \quad (3.51)$$

como

$$V = AL \quad \text{y} \quad J^2 = \frac{i^2}{A^2}$$

$$\frac{dU}{dt} = \rho L J^2 A = \frac{\rho L}{A} i^2 [W] \quad (3.52)$$

usando la ecuación (3.32)

$$\frac{dU}{dt} = Ri^2 [W] \quad (3.53)$$

~~Esta expresión es conocida como ley de Joule en honor al físico inglés James Prescott Joule (1818-1889) y representa la energía eléctrica que se transforma en calor por segundo en un dispositivo de resistencia R por el cual circula una corriente i .~~

En un resistor puro, toda la energía eléctrica que recibe en un segundo (potencia eléctrica) se transforma en calor, y podemos expresar la potencia eléctrica P utilizando las ecuaciones (3.33) y (3.53) de la forma siguiente:

$$P = \frac{dU}{dt} = Ri^2 = V_{12}i = \frac{V_{12}^2}{R} [W] \quad (3.54)$$

Compruebe que al conectar un dispositivo de resistencia $R = 240 \Omega$ a una diferencia de potencial de 120 V durante 2 minutos se obtienen 1720.02 cal.

Recuerde que $4.186 \text{ J} = 1 \text{ cal}$.

3.8 RESISTENCIA Y RESISTORES

La resistencia es una propiedad de los materiales que de acuerdo con su aplicación particular será necesario reducir o aumentar de valor.

A los dispositivos que se fabrican especialmente con el fin de emplear tal propiedad se les conoce como resistores. En la figura 3.13 se muestran los símbolos más comúnmente empleados para resistores.

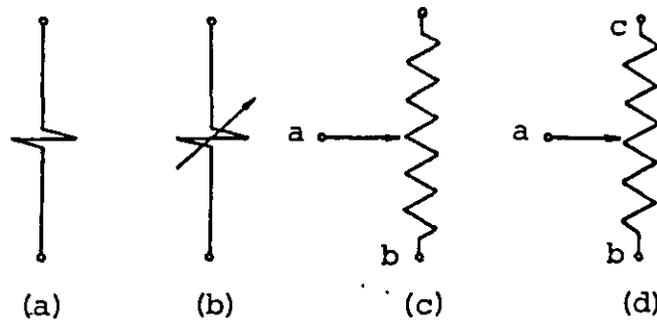


FIGURA 3.13. Símbolos usados para resistores: (a) fijo, (b) variable, (c) variable de dos terminales o reóstato y (d) variable de tres terminales o potenciómetro.

Cuando conectamos un resistor a una diferencia de potencial, circula a través de él una corriente, cuyo signo generalmente depende de la selección de la dirección del vector $d\vec{A}$ necesaria para evaluar

$$i = \oint \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Aún así, resulta más práctico considerar el signo de la corriente asociado con el signo de la diferencia de potencial aplicada y asignarle un sentido según dicho signo, como se muestra en la figura 3.14.

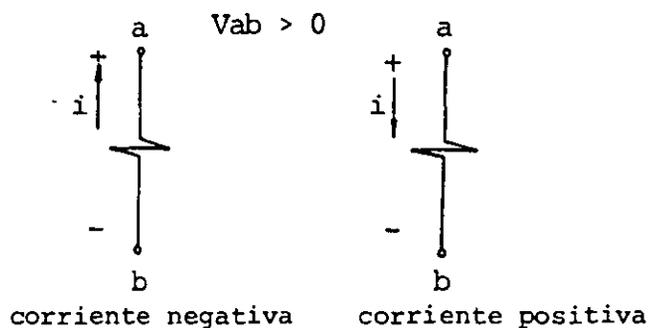


FIGURA 3.14. Sentidos de corriente asociados asignados a un resistor conectado a una diferencia de potencial V_{ab} mayor que cero.

Si una corriente positiva circula a través de un resistor de la terminal a hacia b, entonces la terminal a es más positiva que la b, es decir, la corriente eléctrica positiva señala en

la dirección del movimiento de los portadores de carga positivos. En esta situación el producto $V_{ab}i$ representa la energía que recibe un elemento por segundo, y somos congruentes con la convención que expresa que si el sistema recibe energía, esta energía será considerada positiva y viceversa, como se muestra en la figura 3.15.

En ambos casos V_{ab} e $i > 0$

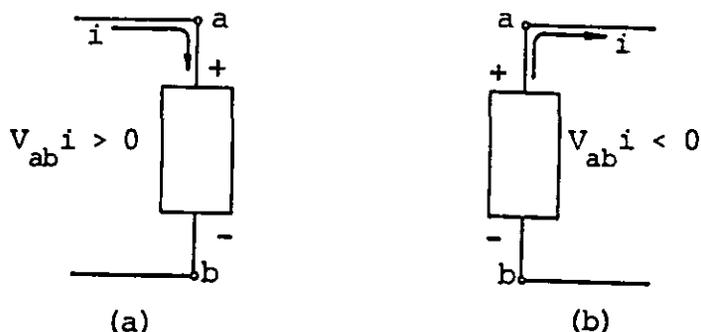


FIGURA 3.15. Uso de la corriente asociada para determinar si un elemento recibe o cede energía. Si V_{ab} e $i > 0$, (a) el elemento recibe energía; (b) cede energía.

Los resistores pueden también ser clasificados como resistores lineales y no lineales. En los primeros la relación entre la diferencia de potencial aplicada v y la corriente que circula i es lineal, es decir, R es una constante y su representación gráfica es la mostrada en la figura 3.16.

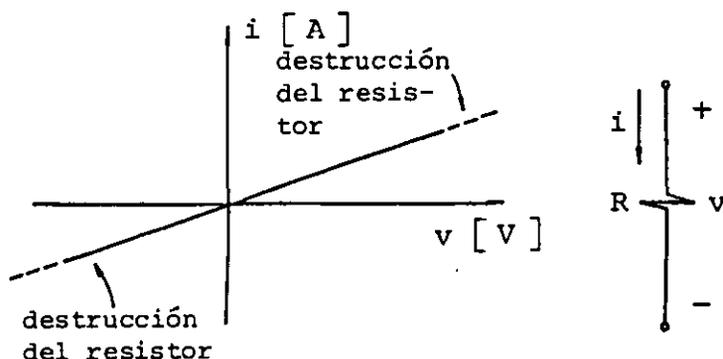


FIGURA 3.16. Representación gráfica de la característica de un resistor lineal.

Debemos notar que su comportamiento es el mismo para diferencias de potencial positivas y negativas, esto es, el resistor lineal no posee polaridad. Se observa también en la gráfica que existe un valor crítico del producto $vi = Ri^2$, para el cual un resistor real se destruye por calentamiento excesivo.

Los resistores lineales obedecen la relación planteada por Ohm, ecuación (3.33).

La figura 3.17 muestra la característica de un cierto resistor no lineal.

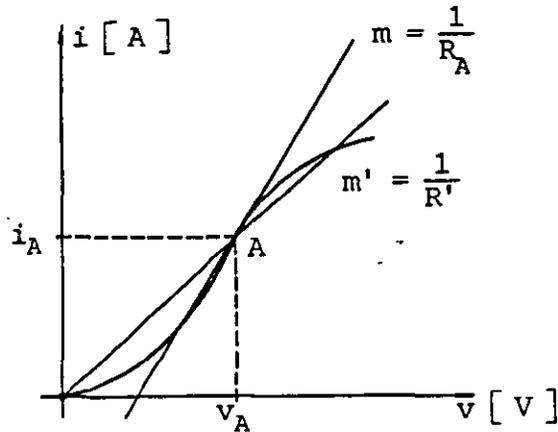


FIGURA 3.17. Representación gráfica del comportamiento de un cierto resistor no lineal.

Observamos que para un valor dado de v_A , la relación $\frac{v_A}{i_A}$ no representa la resistencia del dispositivo en ese punto de operación, por lo que la resistencia debe evaluarse a través de la ecuación

$$\left. \frac{di}{dv} \right|_{v = v_A} = \frac{1}{R_A} \quad (3.55)$$

Existe una gran variedad de elementos o dispositivos en los cuales la relación entre corriente y diferencia de potencial aplicada es no lineal. Aunque muchos de ellos pueden considerarse resistores no lineales, tienen nombres muy diversos. En la figura 3.18 se muestran las características v contra i para dos casos típicos.

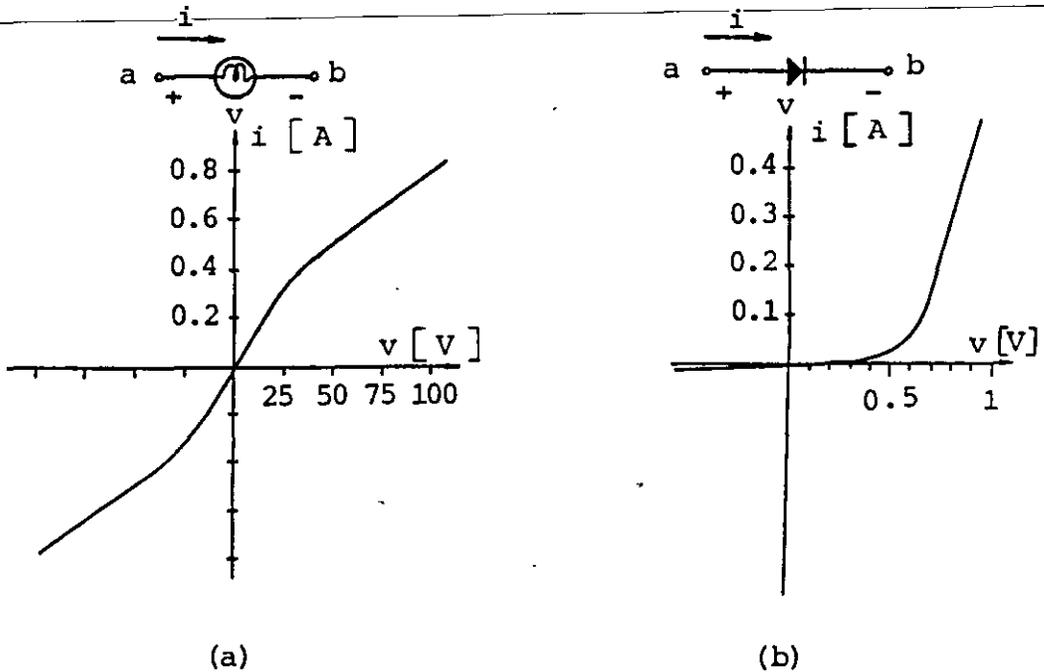


FIGURA 3.18. Representación gráfica del comportamiento de: (a) un foco incandescente, (b) un diodo.

En el primer caso de la figura 3.18 se muestra el símbolo y la característica de un foco incandescente, el cual no posee polaridad; en el segundo se muestra el símbolo y la característica del dispositivo llamado diodo, el cual, como se observa, sí posee polaridad.

Cuando la terminal b es más positiva que la a ($v < 0$), el diodo presenta una resistencia muy alta, por lo que la corriente a través de él es aproximadamente cero.

3.9 RESISTORES CONECTADOS EN SERIE Y EN PARALELO

Presentaremos a continuación la forma de obtener el resistor equivalente de un arreglo de resistores lineales conectados en serie o en paralelo.

En la figura 3.19 se muestra un arreglo de dos resistores, R_1 y R_2 , conectados en serie a una diferencia de potencial V_{ac} .

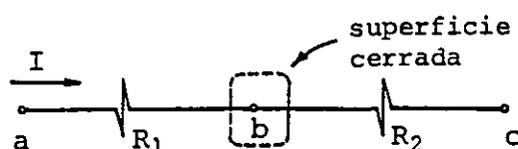


FIGURA 3.19. Resistores conectados en serie.

La relación que existe entre la diferencia de potencial aplicada y las diferencias de potencial en cada resistor es

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} \quad (3.56)$$

Además, cada resistor obedece la ley de Ohm, por lo cual se cumplen las relaciones

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \quad (3.57)$$

$$I_2 = \frac{V_{bc}}{R_2}$$

Analizaremos con detalle la relación que existe entre las corrientes I_1 e I_2 a través de cada resistor.

Si construimos una superficie cerrada que contenga el punto de unión entre los resistores (punto b) y aplicamos el principio de conservación de la carga, concluiremos que si la corriente que sale del resistor R_1 a través de su terminal b, es diferen-

te de la corriente que entra al resistor R_2 a través de la misma terminal b , se producirá una acumulación de carga en dicho punto, ya que la carga no se crea ni se destruye.

Como el campo eléctrico aplicado es uniforme a través de los materiales que forman los resistores, es imposible que ocurra la acumulación de carga descrita, por ello necesariamente

$$I_1 = I_2 = I \quad (3.58)$$

Al sustituir este último resultado en las relaciones (3.57), obtenemos

$$V_{ab} = R_1 I ; \quad V_{bc} = R_2 I \quad (3.59)$$

por lo que

$$V_{ac} = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I \quad (3.60)$$

de donde

$$\frac{V_{ac}}{I} = R_1 + R_2 \quad (3.61)$$

Como la relación del voltaje total aplicado (entre las terminales a y c) y la corriente total que circula es el valor del resistor equivalente, concluimos que

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \quad (3.62)$$

De manera semejante, si tenemos n resistores conectados en serie

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.63)$$

Consideremos ahora los resistores conectados en paralelo entre los puntos a y b , mostrados en la figura 3.20.

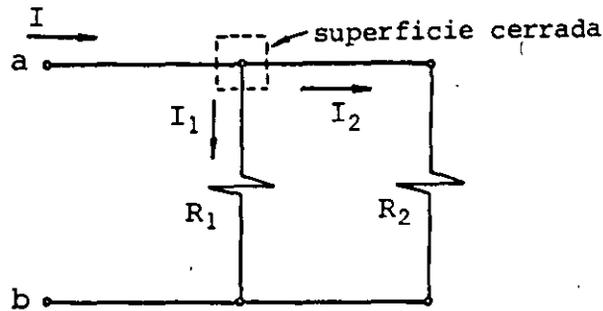


FIGURA 3.20. Resistores conectados en paralelo.

En esta conexión la diferencia de potencial en cada resistor es igual a la diferencia de potencial aplicada V_{ab} .

Entonces, las corrientes a través de cada resistor son

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} ; \quad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \quad (3.64)$$

Aplicando el principio de conservación de la carga en el punto donde se unen los resistores y considerando los sentidos de corrientes y la superficie cerrada indicados en la figura 3.20, se cumple que

$$I = I_1 + I_2 \quad (3.65)$$

sustituyendo las relaciones (3.64) en la ecuación anterior y factorizando

$$I = V_{ab} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (3.66)$$

o sea

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.67)$$

Como la relación anterior representa el inverso del resistor equivalente, se tiene

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.68)$$

En general, cuando se conectan entre un par de puntos n resistores en paralelo, se cumple

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (3.69)$$

Una forma más práctica de trabajar con la ecuación (3.68) se obtiene expresándola como

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.70)$$

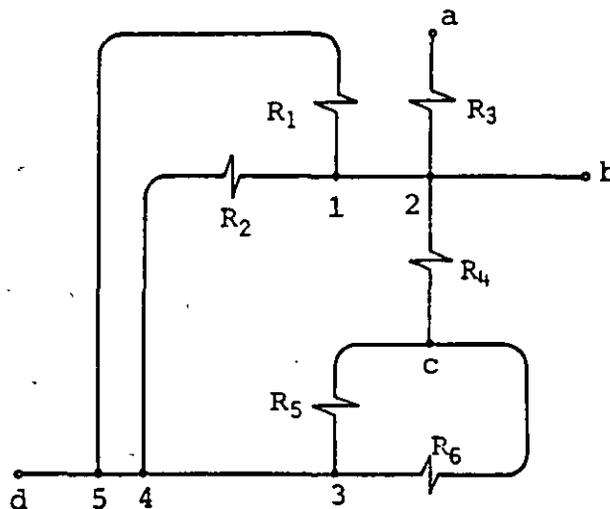
Si se desea obtener el resistor equivalente de un arreglo de n resistores conectados en paralelo, usamos solamente la expresión (3.70), tomando los resistores de dos en dos.

EJEMPLO 3.1

Para el arreglo de resistores mostrado en la figura 3.21, obtenga el resistor equivalente entre los puntos indicados en cada inciso.

a) a y d

b) b y c



$$R_1 = 20 \, \Omega$$

$$R_2 = 20 \, \Omega$$

$$R_3 = 5 \, \Omega$$

$$R_4 = 8 \, \Omega$$

$$R_5 = 6 \, \Omega$$

$$R_6 = 3 \, \Omega$$

FIGURA 3.21. Arreglo de resistores.

SOLUCION

Antes de iniciar los cálculos debemos tomar en cuenta lo siguiente:

1. Consideraremos que la resistencia de los alambres conductores usados para interconectar los resistores es despreciable.

2. Basados en la consideración anterior, los puntos 1, 2 y b representan, eléctricamente hablando, un solo punto, lo mismo ocurre con 3, 4, 5 y d.

3. Entre los puntos c y d, los resistores R_5 y R_6 están en paralelo.

4. Entre los puntos b y d, el sistema formado por R_5 y R_6 está en serie con el resistor R_4 .

5. R_1 , R_2 y el sistema formado por R_4 , R_5 y R_6 están en paralelo entre los puntos b y d.

a) El procedimiento de reducción se realiza como se indica en la figura 3.22, donde se ha redibujado el circuito para facilitar la observación de las conexiones.

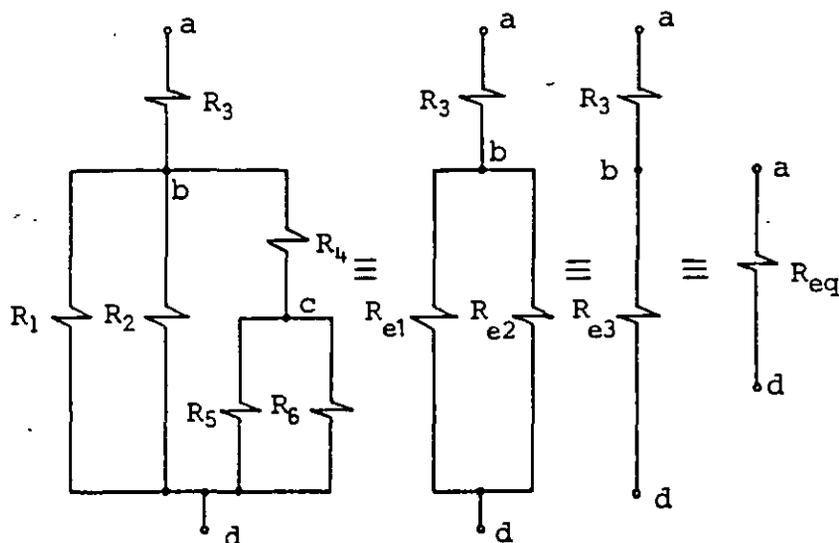


FIGURA 3.22. Obtención del resistor equivalente entre los puntos a y d.

Los valores intermedios de la figura se obtienen como sigue

$$R_{e1} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = 10 \Omega$$

$$R_{e2} = \frac{R_5 \times R_6}{R_5 + R_6} + R_4 = 2 + 8 = 10 \Omega$$

$$R_{e3} = \frac{R_{e1} \times R_{e2}}{R_{e1} + R_{e2}} = 5 \Omega$$

finalmente

$$R_{eq} = R_3 + R_{e3} = 10 \Omega$$

$\therefore R_{eq}$ entre a y d es 10Ω

b) De manera semejante, para este inciso, tenemos

R_{eq} entre b y c es

$$R_{eq} = \frac{R_4 \times R_{e4}}{R_4 + R_{e4}}$$

donde

$$R_{e4} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_5 \times R_6}{R_5 + R_6} = 10 + 2 = 12 \Omega$$

$$\therefore R_{eq} = \frac{8(12)}{20} = 4.8 \Omega \quad \text{entre b y c}$$

Debemos notar que en este caso el resistor R_3 no interviene, ya que no existe ninguna trayectoria de b a c que lo contenga.

3.10 FUENTES DE FUERZA ELECTROMOTRIZ

Definiremos fuente de fuerza electromotriz como cualquier dispositivo capaz de transformar algún tipo de energía en energía eléctrica. En la tabla 3.4 presentamos una lista de los dispositivos más conocidos que cumplen con los requerimientos de nuestra definición de fuente de fuerza electromotriz.

DISPOSITIVO	TIPO DE ENERGIA TRANSFORMADA EN ENERGIA ELECTRICA
Celda química	Química
Celda de combustible	Química
Celda fotovoltaica	Luminosa
Celda térmica	Calor
Generador	Mecánica
Cristal piezoeléctrico	Mecánica

TABLA 3.4

La característica común de estos dispositivos es que, al recibir energía en alguna de las formas mencionadas, producen una diferencia de potencial, históricamente conocida como fuerza electromotriz (fem) y representada con la letra E .

Todas las fuentes de fem, debido a su estructura interna, poseen cierta resistencia, que se conoce como resistencia interna de la fuente. Por ello la representación de una fuente de fuerza electromotriz es la combinación de una fuente ideal en serie con un resistor, como se muestra en la figura 3.23.

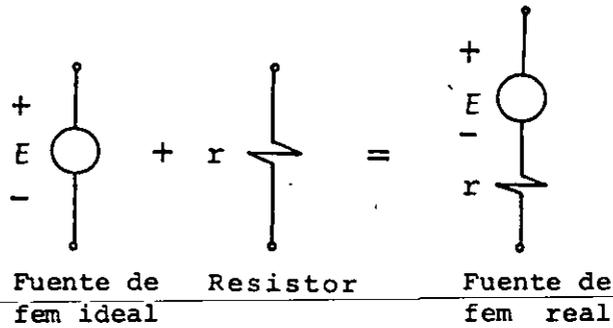


FIGURA 3.23. Representación de una fuente de fuerza electromotriz.

En teoría de circuitos, a las fuentes de fuerza electromotriz se les conoce como fuentes de voltaje. También se emplean otras representaciones simbólicas para distinguir los diversos tipos de fuentes. La figura 3.24 muestra algunas de ellas.

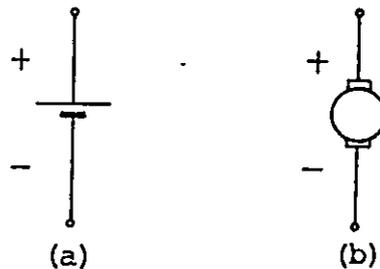


FIGURA 3.24. Representaciones usuales para las celdas químicas (a) y los generadores (b).

Una fuente de fem es capaz de suministrar energía eléctrica a otro dispositivo o elemento. En este subtema analizaremos lo que ocurre al conectar un resistor de resistencia R a una fuente de fem, mediante la conexión mostrada en la figura 3.25.

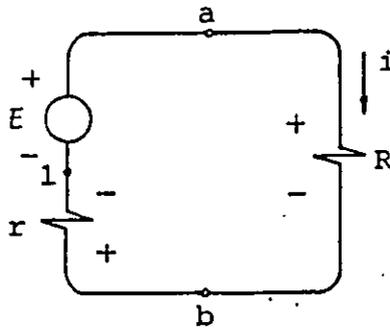


FIGURA 3.25. Resistor conectado a una fuente de fuerza electromotriz.

Según hemos visto, al conectar un resistor a una diferencia de potencial circula a través de él una corriente, como se muestra en la figura 3.25.

A través de la fuente, esta corriente circula de su terminal negativa a la positiva, dado que la fuente cede energía al resistor.

La energía eléctrica transformada en calor por segundo, en el resistor R , es según la ley de Joule

$$P_{tR} = V_{ab}i = Ri^2 \quad [W] \quad (3.71)$$

y en la resistencia interna r

$$P_{tr} = ri^2 \quad [W] \quad (3.72)$$

La energía que entrega la fuente ideal por segundo es

$$P_e = Ei \quad [W] \quad (3.73)$$

Basados en el principio de conservación de la energía se debe cumplir que

$$P_e = P_{tr} + P_{tR} \quad (3.74)$$

es decir

$$Ei = ri^2 + Ri^2 \quad (3.75)$$

La energía que se obtiene de la fuente de fem en un segundo o potencia suministrada P_s , de las ecuaciones (3.71) y (3.75), es

$$P_s = E i - r i^2 = V_{ab} i \quad [W] \quad (3.76)$$

dividiendo entre i

$$V_{ab} = V_{a1} + V_{1b} = E - r i = R i \quad (3.77)$$

y la corriente se puede obtener como:

$$i = \frac{E}{R + r} \quad [A] \quad (3.78)$$

En la ecuación anterior se observa que la corriente i queda determinada por el valor de la fem de la fuente, por su resistencia interna y por el resistor conectado exteriormente. Para una fuente de valores conocidos (E , r), la diferencia de potencial que aparece en sus terminales (V_{ab}) dependerá del valor del resistor R conectado. En una fuente ideal, como su resistencia interna es cero, la diferencia de potencial que aparece en sus terminales es igual al valor de la fem de la fuente, independientemente de la corriente que circule y por ende, del valor de R .

Cuando r existe, si $r \ll R$ $V_{ab} \approx E$ y si $r \gg R$ $V_{ab} \approx 0$

Compruebe que al conectar un resistor $R = 11.5 \Omega$ a una fuente cuya fem vale $E = 6 V$, con resistencia interna $r = 0.5 \Omega$, con una conexión como la de la figura 3.25 se obtiene que:

- a) La corriente i es igual a $0.5 A$.
- b) La diferencia de potencial V_{1b} es $-0.25 V$.
- c) La diferencia de potencial V_{ba} es $-5.75 V$.
- d) La energía suministrada por la fuente en un segundo es $P_s = 2.875 W$.

3.11 FUERZA ELECTROMOTRIZ DE LAS CELDAS QUIMICAS

Las celdas químicas pueden ser clasificadas en las dos categorías siguientes:

Celdas químicas primarias

Celdas químicas secundarias

Esta clasificación, aunque imprecisa, es suficiente para la pretensión de este trabajo.

Las celdas químicas primarias o pilas primarias son las que transforman energía química en eléctrica; durante esta transformación ocurren procesos químicos que no se pueden realizar en forma inversa en la celda.

Las celdas químicas secundarias o pilas secundarias almacenan energía eléctrica en forma química; el proceso de transformar la energía química almacenada en energía eléctrica se puede invertir en la celda, ya que si suministramos energía a la celda es posible reenergizarla.

Describiremos brevemente el principio de operación de estas celdas, el cual se basa en reacciones de oxidación y reducción.

Cada celda, en general, consta de dos partes independientes entre sí, que denominaremos medias celdas o semipilas.

A su vez, cada media celda está constituida por un conductor metálico (electrodo) y un conductor electrolítico (solución).

Los electrones que intervienen en los procesos de oxidación y reducción son recibidos o suministrados por el electrodo metálico, por una sustancia sólida depositada en la superficie del electrodo, por un gas que burbujea y cubre la superficie del electrodo o por el soluto de la solución que está en contacto con el electrodo.

La función de la solución es permitir el flujo de iones de un electrodo a otro.

Las semipilas, casi siempre, están unidas electrolíticamente mediante un recipiente o tabique poroso que impide que se mezclen las soluciones, pero que permite el flujo de iones de un lado a otro (ver figura 3.26).

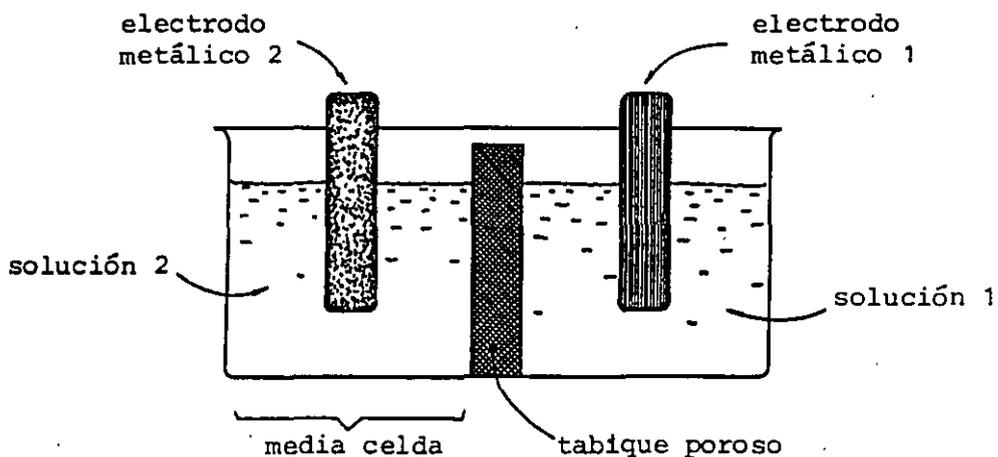


FIGURA 3.26. Esquema de una celda química.

Las soluciones pueden estar separadas exclusivamente por su densidad, y en el caso más simple, la división de la celda en semipilas no es apreciable, ya que la solución es la misma.

Describiremos el funcionamiento de cada semipila con base en la teoría del potencial de electrodo del físico alemán Herman Walter Nerst (1864-1941).

El caso más sencillo ocurre cuando se introduce un electrodo metálico en agua o en una solución ácida; el metal tenderá a disolverse debido a la atracción que ejercen las moléculas de la disolución (presión electrolítica de solución).

Muchos de los átomos de la superficie del electrodo metálico vencen las fuerzas de cohesión que los mantienen unidos a la estructura del metal e ingresan a la solución en forma de iones positivos, dejando el electrodo con un exceso de carga negativa que se

acumula en la superficie. Este proceso no continúa indefinidamente, ya que entre más iones positivos abandonan el metal, mayor será el exceso de carga negativa del electrodo y, en consecuencia, mayor será también la fuerza eléctrica de atracción que ejerza éste sobre los iones que ha perdido.

Se establece, entonces, una doble capa eléctrica formada por los iones positivos atraídos por el electrodo y la capa superficial de electrones. Esta doble capa eléctrica, en equilibrio, contrarresta la tendencia del metal a disolverse.

El electrodo metálico ha obtenido, de este modo, un potencial negativo con respecto a la solución cuyo valor es característico para cada metal, por lo que otro metal distinto obtendrá un valor de potencial negativo diferente. Estos valores de potencial se ven afectados por la temperatura y la concentración de soluto. Con objeto de determinar con facilidad tal potencial, para diversos materiales, se ha tomado como referencia (asignándole potencial cero) el potencial del electrodo de hidrógeno. Este electrodo se obtiene haciendo burbujear el gas en un electrodo inerte de platino.

La tabla 3.5 muestra algunos valores de potencial obtenidos con este procedimiento para una concentración unitaria (un mol de soluto por litro de solución).

En los metales nobles (Cu, Ag, Hg, etc.), es posible formar la capa eléctrica mencionada de manera contraria, con una solución que contenga iones del metal del electrodo, ya que éstos contribuyen a contrarrestar la presión electrolítica de la solución dando lugar a que predomine la tendencia de los iones metálicos a depositarse en el metal, sobre la tendencia de los mismos a pasar hacia la solución, por lo que el electrodo tendrá carga positiva.

El funcionamiento de la celda química completa implica la conexión externa de los electrodos metálicos de las dos semipilas a través de algún elemento o dispositivo por el cual circule corriente.

ELEMENTO	ION	POTENCIAL A 25°C [V]
Li	Li ⁺	- 3.045
Na	Na ⁺	- 2.715
Al	Al ⁺⁺⁺	- 1.662
Zn	Zn ⁺⁺	- 0.763
Fe	Fe ⁺⁺	- 0.440
Cd	Cd ⁺⁺	- 0.402
Co	Co ⁺⁺	- 0.278
Sn	Sn ⁺⁺⁺	- 0.336
Pb	Pb ⁺⁺	- 0.120
H	H ⁺	0.000
Cu	Cu ⁺⁺	+ 0.338
Ag	Ag ⁺	+ 0.799
Hg	Hg ⁺⁺	+ 0.854
Au	Au ⁺⁺⁺	+ 1.497

TABLA 3.5

Al pasar electrones, del electrodo más negativo al otro, desaparece el equilibrio, debilitándose y fortaleciéndose la capa eléctrica de electrones respectivamente en los electrodos; esto permite que continúe el proceso inicialmente descrito en cada electrodo.

La fem de la celda se obtiene como la diferencia de los potenciales de cada electrodo, y la resistencia interna de la fuente es la combinación de los efectos resistivos de los electrodos, la solución y la zona de interfase entre electrodos y solución.

Otra influencia adicional en la determinación de la fem de las celdas químicas es la llamada diferencia de potencial de contacto, que se presenta cuando dos metales distintos se unen, la cual es debida a la difusión de electrones de un metal a otro.

Una celda química primaria práctica es la llamada pila de Leclanche, de donde se deriva la conocida pila seca. En la figura 3.27 se presenta un esquema de la construcción básica de la pila de Leclanche.

El electrólito de la semipila que contiene al Zn es una solución de cloruro de amoníaco (NH_4Cl), el cual se disocia en iones amonio NH_4^+ y cloro Cl^- . El cloro se combina con algunos de los iones de zinc formando cloruro de zinc.

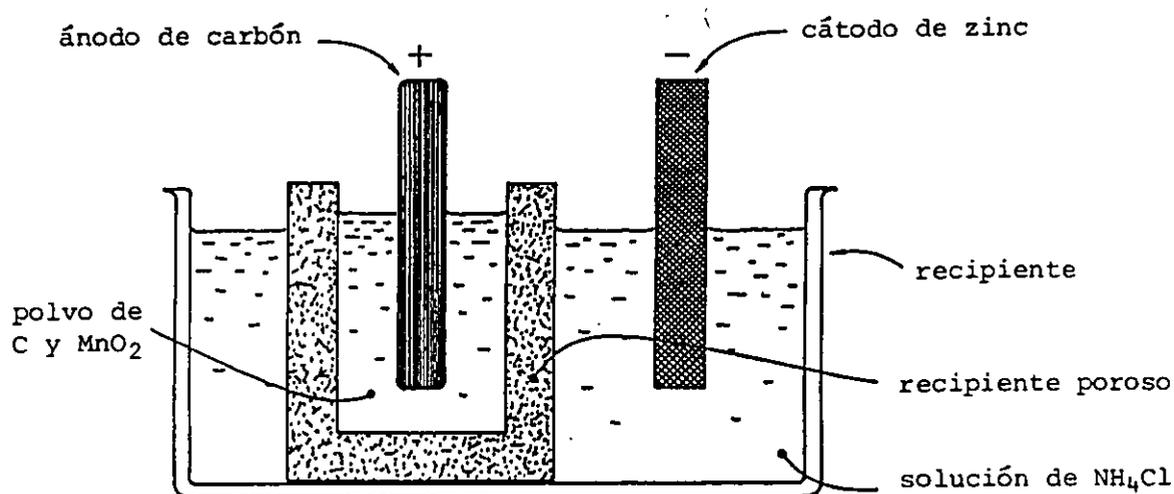


FIGURA 3.27. Esquema de la construcción básica de una celda de Leclanche.

Los iones de amonio, cloro y zinc se difunden a través de la membrana porosa hacia la semipila que contiene al electrodo de carbono, el cual está contenido en una mezcla de carbono pulverizado y bióxido de manganeso.

Al reaccionar los iones de amonio NH_4^+ que llegan al electrodo de carbono, se transforman en gas amoníaco NH_3 y gas hidrógeno, y se forman burbujas de estos gases.

Algunas de las burbujas se adhieren al electrodo de carbono reduciendo su superficie activa. Además, los iones positivos tienden a agruparse alrededor de las burbujas de los gases y producen una

carga positiva local que repele los iones positivos (efecto de polarización de la celda).

El bióxido de manganeso se combina con el gas hidrógeno para formar agua, y el cloruro de Zn que se ha difundido hasta el electrodo de carbono se combina con el gas amoníaco, eliminándose así las burbujas de NH_3 y H_2 que se forman alrededor del electrodo, minimizando la polarización.

La figura 3.28 muestra el esquema de una pila seca típica.

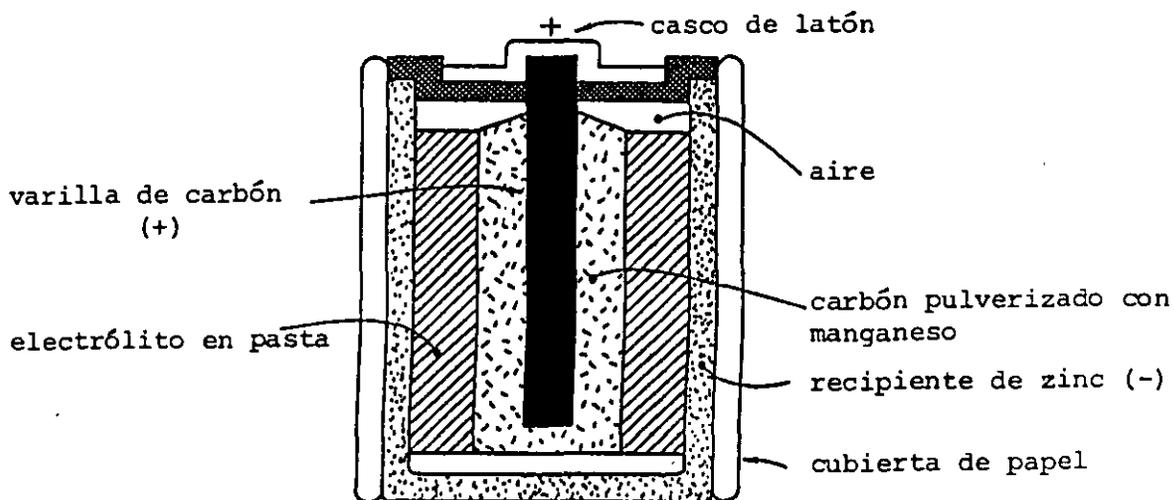


FIGURA 3.28. Pila seca típica.

El acumulador de plomo ácido es un ejemplo del uso de las celdas químicas secundarias; los elementos básicos usados en su construcción son:

Acido sulfúrico diluido en agua (electrolito)

Placa negativa de plomo (electrodo)

Placa positiva de peróxido de plomo (electrodo)

El electrolito se separa en iones hidrógeno H^+ y sulfato SO_4^{--} , estos últimos se combinan con el plomo esponjoso del electrodo negativo, forman sulfato de plomo PbSO_4 y dejan exceso de electrones en este electrodo.

En el electrodo positivo, el peróxido de plomo PbO_2 se disocia en iones oxígeno O^{--} y Pb^{++++} . Los iones oxígeno se combinan con los hidrógeno del electrólito, forman agua (H_2O), y dejan un exceso de carga positiva asociada a los iones de plomo Pb^{++++} que permanecen en el electrodo. La actividad cesa cuando la celda produce una fem de aproximadamente 2.1 V.

Al desenergizarse la celda a través de un elemento o dispositivo, pasan electrones del electrodo negativo al positivo, lo que permite que los iones sulfato SO_4^{--} del electrólito reaccionen nuevamente con el electrodo negativo formando mayor cantidad de $PbSO_4$.

Los electrones que llegan al electrodo positivo a través de la conexión exterior, se combinan con los iones Pb^{++++} y los transforman en Pb^{++} . Este ion a su vez se combina con el ion sulfato y se deposita sulfato de plomo en el electrodo.

La disminución de iones Pb^{++++} permite la disociación del peróxido de plomo PbO_2 en iones oxígeno O^{--} y plomo Pb^{++++} . El oxígeno O^{--} forma agua y se sustituye el ácido sulfúrico por H_2O en la desenergización.

Haciendo circular corriente hacia la celda, se descompone el sulfato de plomo depositado en las placas y se restablece la concentración de ácido sulfúrico en la solución. Durante este proceso se forma hidrógeno en el electrodo negativo y oxígeno en el positivo, como resultado de la descomposición del agua producida por la corriente en exceso que no fue usada para transformar el sulfato de las placas.

Dado que la concentración de la solución depende de la cantidad de energía almacenada en la celda, es posible usar un densímetro para medir indirectamente dicha energía. La densidad relativa de la solución de la celda energizada es aproximadamente de 1.28, y desenergizada de 1.15.

La diferencia de potencial o fem que producen las celdas químicas es constante o continua, por lo que al conectar un resistor lineal a sus terminales producen corriente continua.

PROBLEMAS

3.1 Suponga que al conectar un alambre de cobre AWG # 40 (diámetro nominal de 0.079 mm) a una diferencia de potencial, la velocidad promedio de los electrones es $v_p = 0.02$ mm/s. El número de electrones libres en cada cm^3 de cobre es 8.38×10^{22} . Considerando el sistema de referencia mostrado en la figura P3.1, obtenga el vector densidad de corriente en un punto cualquiera dentro del conductor y la corriente que circula en el alambre, indicando su sentido.

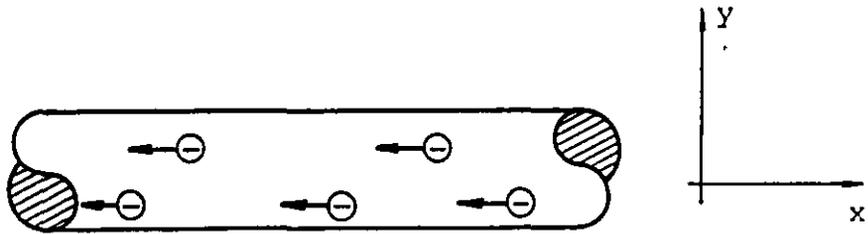


Figura P3.1.

3.2 Un alambre de plata transporta una corriente de 16 mA. ¿Cuántos electrones cruzan una sección transversal cualquiera del alambre en medio segundo? ¿Cambiaría el resultado obtenido al cambiar el material y/o el diámetro del alambre?

3.3 Una corriente de 500 mA circula a través de un alambre AWG # 20 (diámetro nominal = 0.813 mm). Calcule la velocidad de arrastre o promedio, en alambres de los siguientes materiales: cobre, aluminio y plata. Repita el cálculo para alambres AWG # 30 ($d_n = 0.254$ mm). En cada caso considere un electrón libre por cada átomo.

Elemento	Densidad g/cm^3	Masa atómica g/mol
Cu	8.9	64
Al	2.7	27
Ag	10.5	108

3.4 Por un alambre de cobre AWG # 20 de 40 m de longitud circula una corriente de 50 mA. Calcule a 20°C ($\rho_{Cu} = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ a 20°C):

- La magnitud de la densidad de corriente en el conductor.
- La magnitud del campo eléctrico en el interior del conductor.
- La velocidad de arrastre de los portadores de carga.
- La movilidad de los electrones.
- La diferencia de potencial V_{xy} entre los extremos del conductor.

3.5 La corriente que circula en una varilla, con las dimensiones mostradas en la figura P3.5, es de 1.4 A cuando la diferencia de potencial en sus extremos es de 700 mV. Calcule la resistencia entre los extremos de la varilla y la conductividad del material.

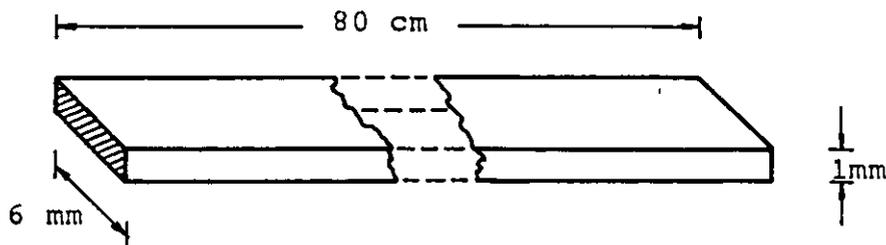


Figura P3.5.

3.6 Calcule la resistencia entre los extremos de un tubo cilíndrico de aluminio a 20°C ($\rho_{Al} = 2.83 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ a 20°C) con las dimensiones mostradas en la figura P3.6.

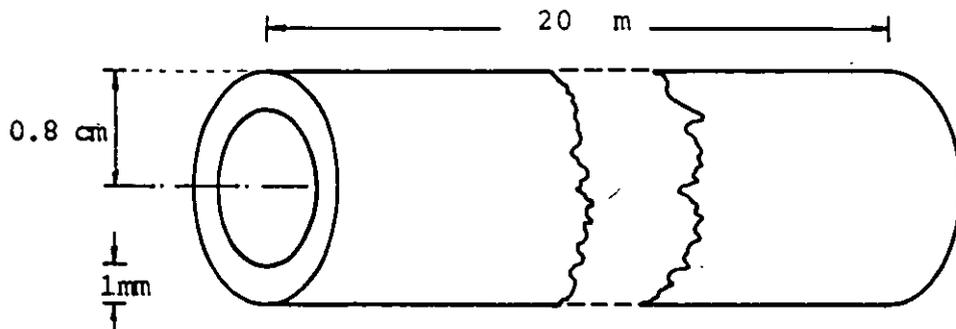


Figura P3.6.

3.7 Calcule la resistencia, por metro de longitud, del aislamiento del cable coaxial de la figura P3.7.

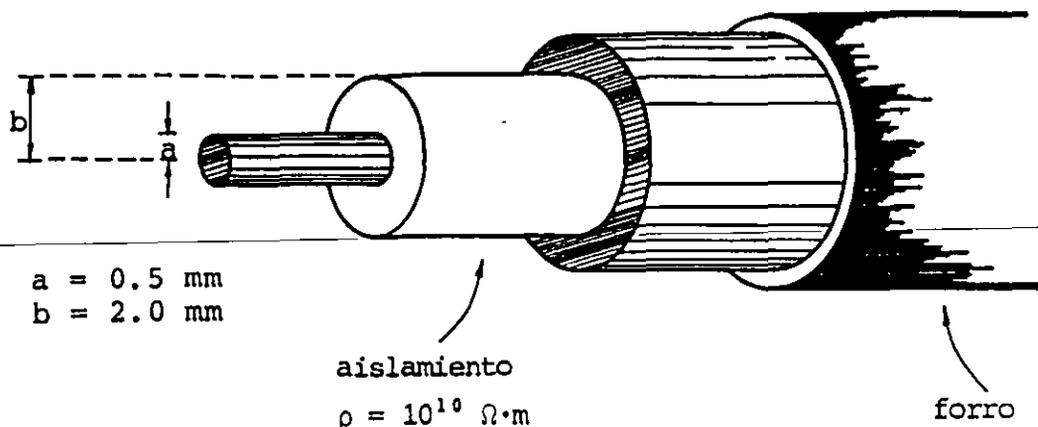


Figura P3.7.

3.8 Obtenga la resistencia de 180 m de alambre de aluminio AWG # 35 ($d_n = 0.142 \text{ mm}$) a las temperaturas siguientes: 0°C , 40°C y 90°C . Considere que a 20°C $\rho_{Al} = 2.83 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$ y $\alpha_{Al} = 4.1 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

3.9 Calcule el error involucrado en el cálculo de la resistencia de un alambre de cobre, cuando la temperatura de éste se eleva de 20°C a 60°C y no se considera la dilatación térmica. Las dimensiones del alambre son: 100 m de longitud y $d_n = 2.588 \text{ mm}$ (AWG # 10) a 20°C . El coeficiente de dilatación lineal para el cobre es $17 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y su coeficiente de variación de resistividad es $0.00393 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ a 20°C .

3.10 Un termistor es un resistor con coeficiente negativo de variación de resistividad con la temperatura. Si un termistor es conectado a una diferencia de potencial $V_{ab} = 12 \text{ V}$, como se muestra en la figura P3.10, calcule la temperatura para la cual el valor de la corriente que circula a través de él es $I = 80 \text{ mA}$. Suponga que su resistividad varía proporcionalmente con la temperatura ($\alpha_r = -0.02^\circ\text{C}^{-1}$) para el rango de temperaturas considerado en el problema, y que su resistencia a 20°C es de 200Ω .

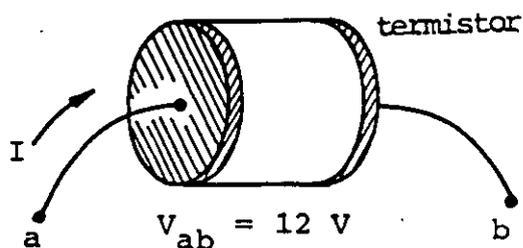


Figura P3.10.

3.11 Suponga que posee cuatro resistores de 1000Ω cada uno. Obtenga todos los valores posibles de resistencia que se pueden obtener al combinar dos, tres o cuatro resistores a la vez.

3.12 Para el arreglo de resistores mostrado en la figura P3.12, obtenga el resistor equivalente entre los pares de puntos siguientes:

- a) a y b
- b) a y d
- c) b y c
- d) b y e

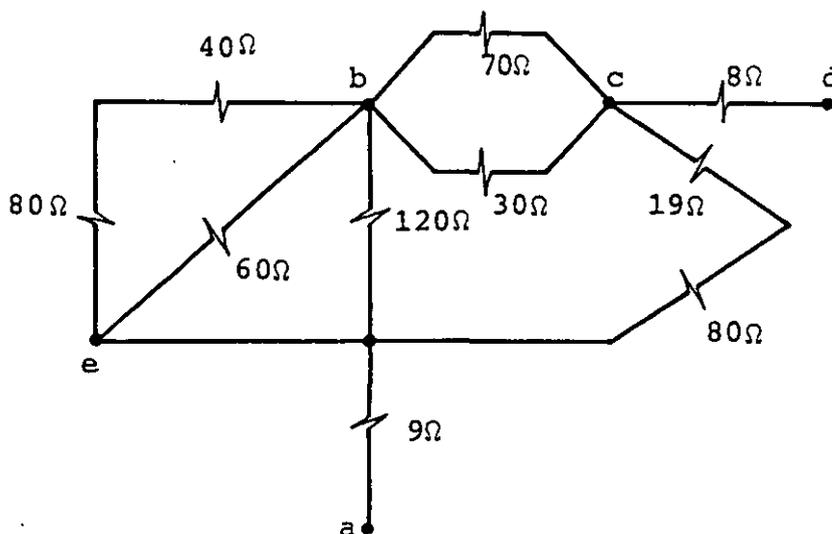


Figura P3.12.

3.13 Algunos resistores comerciales son diseñados para soportar, sin dañarse, una potencia de $1/2 \text{ W}$ máxima. Calcule el valor mínimo de resistencia que debe poseer un resistor de $1/2 \text{ W}$ para poder ser conectado a una diferencia de potencial de 120 V sin que se dañe.

3.14 En un departamento se utilizan para la iluminación 12 focos de 100 W , los cuales operan a 120 V durante 2 horas en promedio cada día. Calcule:

a) La resistencia de cada foco a su temperatura de operación.

b) El costo bimestral (61 días) considerando que cada kilowatt-hora cuesta \$-1.20.

c) El dinero ahorrado bimestralmente si se sustituyen los focos por 6 de 60 W y 6 de 40 W .

3.15 Una cierta batería produce una diferencia de potencial de 9.3 V en circuito abierto. Cuando se conecta un resistor de 30Ω a sus terminales, la diferencia de potencial que aparece en el resistor es de 9.0 V . Calcule:

a) La resistencia interna de la fuente.

b) La diferencia de potencial que aparecerá en las terminales de un resistor de 10Ω al ser conectado a dicha batería.

c) El valor del resistor que conectado a la batería, obtendrá la máxima potencia.

CAPITULO 4 CIRCUITOS DE CORRIENTE DIRECTA

I N T R O D U C C I Ó N

La finalidad de este tema es presentar una introducción al análisis de los circuitos eléctricos resistivos, así como analizar el circuito que se forma al conectar un capacitor y un resistor en serie a una fuente de voltaje continuo.

Se presenta parte de la terminología usual para facilitar el planteamiento de las leyes de Kirchhoff y de las ecuaciones necesarias para la solución de los circuitos.

Actualmente existe una extensa teoría para el análisis de circuitos eléctricos, la cual excede los propósitos del presente trabajo.

En este tema trataremos con profundidad algunos aspectos particulares del fenómeno electromagnético en razón de la importancia práctica de estos conceptos.

4.1 NOMENCLATURA BASICA EMPLEADA EN LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Definiremos como circuito eléctrico cualquier conexión de elementos a través de los cuales puede circular corriente en forma permanente o transitoria. La definición anterior implica la existencia de al menos una fuente de fem, o algún elemento capaz de almacenar energía y suministrarla a otros elementos de la conexión.

En la figura 4.1 se muestran algunos circuitos eléctricos típicos.

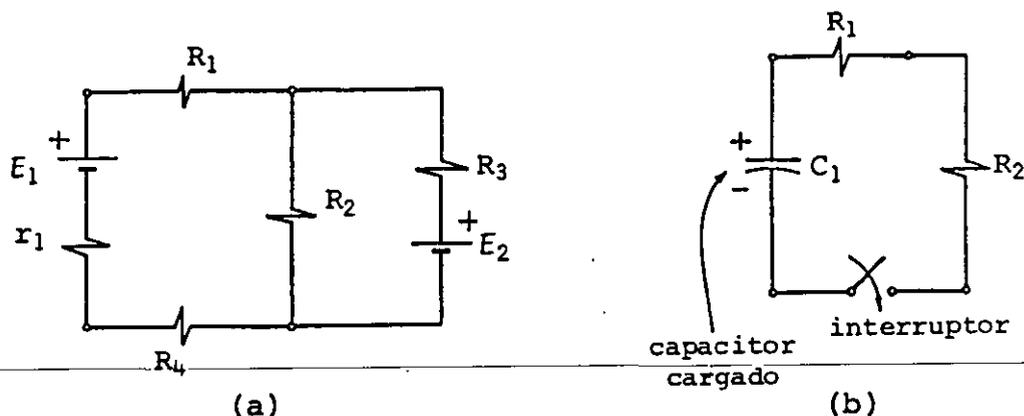


FIGURA 4.1. Ejemplos de circuitos eléctricos. (a) circuito de corriente continua, (b) circuito de corriente directa transitoria.

En el circuito (a) se tendrá una corriente continua y permanente. En el circuito (b) la energía almacenada en el capacitor se transformará en energía en forma de calor al cerrar el interruptor y la corriente cesará al transformarse toda la energía almacenada en el capacitor.

A continuación definiremos algunos términos útiles para el análisis del comportamiento de los circuitos eléctricos.

A cada elemento de dos terminales, componente de un circuito eléctrico, se le llama *rama*; a cada terminal del elemento componente de un circuito, que sirve de unión con otro u otros elementos se le llama *nodo*; al conjunto conectado de ramas que forman una trayectoria cerrada, en la cual cada nodo conecta únicamente dos ramas de la trayectoria, se le denomina *malla*.

Dado que nuestro interés primordial en este tema es analizar circuitos resistivos, definiremos adicionalmente conceptos que aunque no forman parte de la teoría general de circuitos, nos permitirán simplificar nuestro análisis.

Llamaremos *nodo principal* el punto de unión de tres o más ramas; a la rama o conjunto de ramas que forma una trayectoria entre dos nodos principales adyacentes se le llama *rama principal*.

Con objeto de aclarar los términos mencionados anteriormente, nos

referiremos al circuito de la figura 4.2.

En este circuito, así como en los circuitos analizados en este tema, a menos que se indique lo contrario, despreciaremos la resistencia de los conductores usados para realizar las conexiones de los elementos.

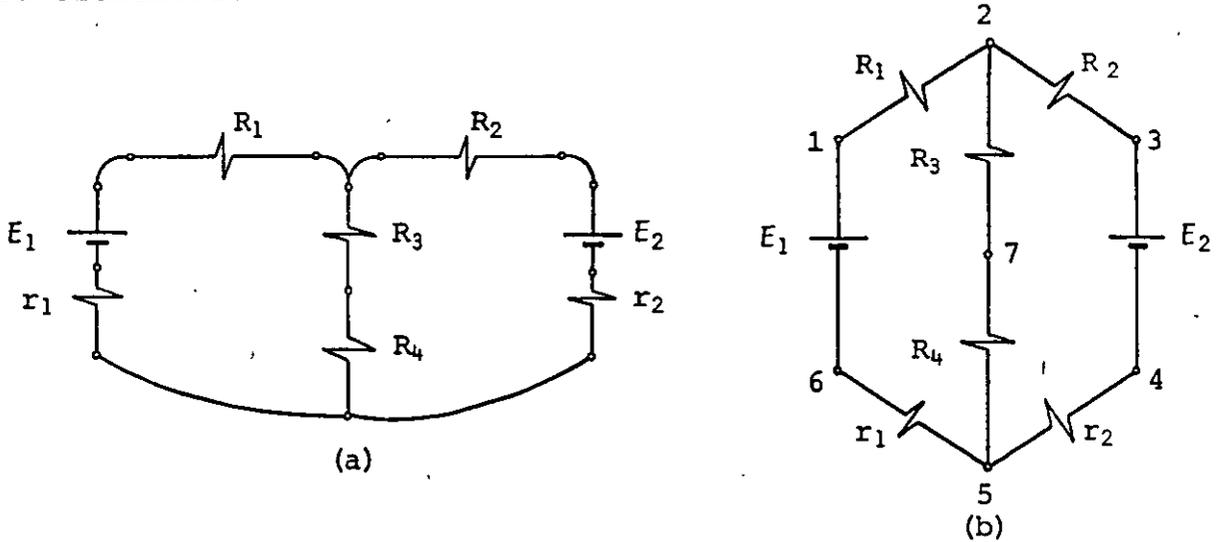


FIGURA 4.2. Circuito eléctrico formado por dos fuentes de fem con resistencia interna y cuatro resistores. En (b) se muestra una forma equivalente de representar el circuito de (a) y se señalan con números los nodos.

En el circuito de la figura 4.2 se observa que existen ocho ramas, siete nodos y tres mallas, estas últimas constituidas por los conjuntos de ramas indicados en la figura 4.3.

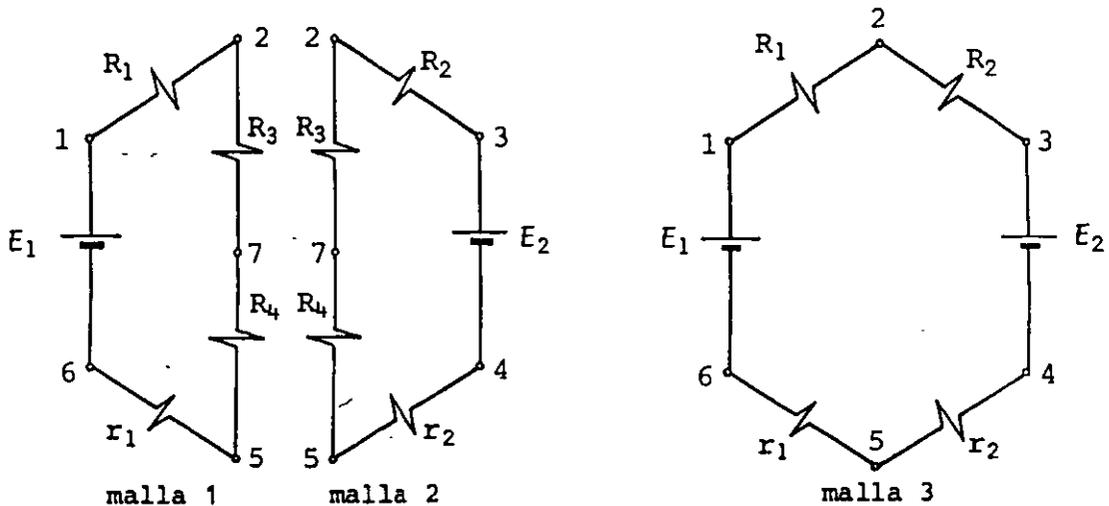


FIGURA 4.3. Mallas correspondientes al circuito de la figura 4.2.

Los nodos principales del circuito son el (2) y el (5) y las ramas principales son las mostradas en la figura 4.4

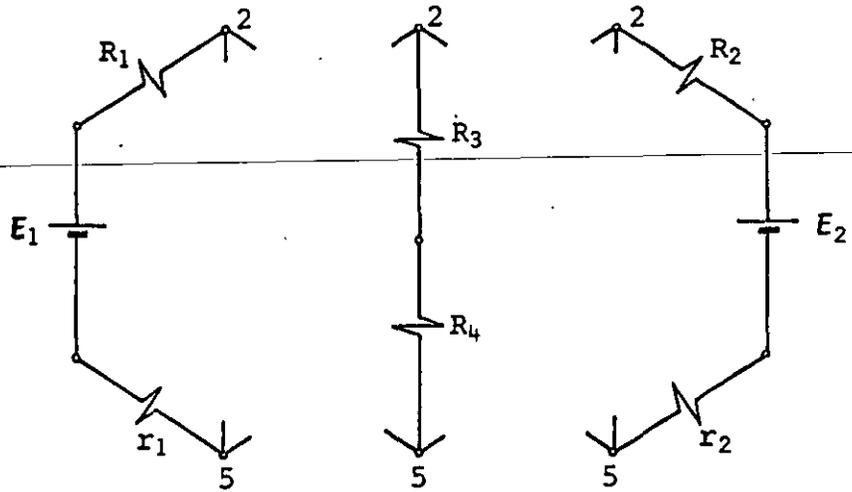


FIGURA 4.4. Ramas principales del circuito de la figura 4.2.

Para el circuito de la figura 4.5 verifique que existen diez ramas, ocho nodos, siete mallas, cuatro nodos principales y seis ramas principales.

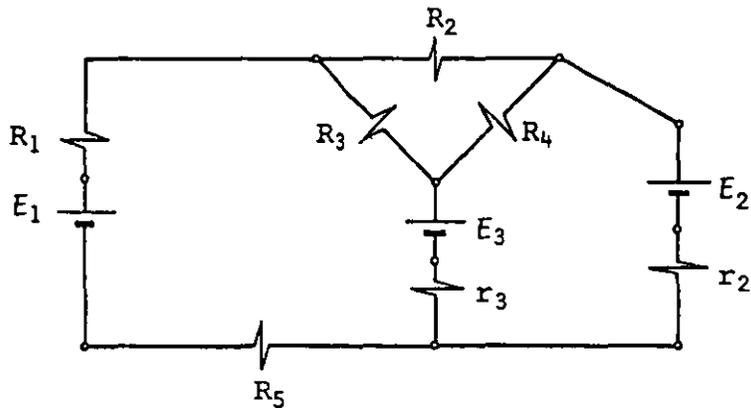


FIGURA 4.5. Circuito eléctrico de tres fuentes de fem, dos de ellas con resistencia interna y cinco resistores.

4.2 LEYES DE KIRCHHOFF

Haremos uso de las definiciones presentadas en el subtema anterior para establecer las dos leyes que rigen el comportamiento de los circuitos eléctricos establecidas por Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887).

La aplicación de estas leyes permite plantear las ecuaciones de donde se obtienen la corriente y la diferencia de potencial en cada elemento de un circuito eléctrico, independientemente de su naturaleza.

a) Ley de corrientes de Kirchhoff (LCK)

El enunciado de esta ley es: en cualquier instante la suma algebraica de las corrientes en un nodo es cero.

Esta ley es el resultado de la aplicación del principio de conservación de la carga a cada nodo.

Para aplicar la LCK a un nodo cualquiera debemos asignar primero sentidos de corriente a cada rama del circuito, considerar signo positivo para las corrientes que entran al nodo y negativo a las que salen o viceversa.

En la figura 4.6 se muestra el nodo marcado con el número ② en el circuito de la figura 4.2 y una posible asignación para las corrientes a través de los resistores R_1 , R_2 y R_3 .

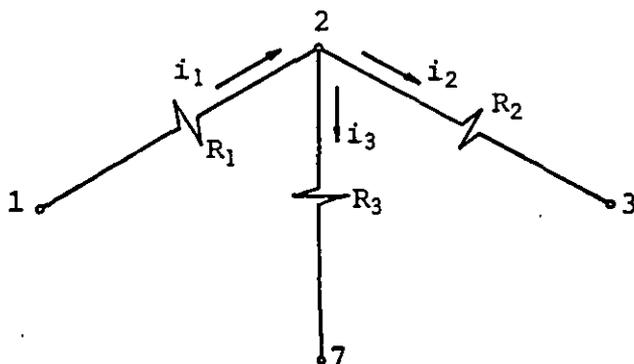


FIGURA 4.6. Asignación posible de corrientes a través de los resistores R_1 , R_2 y R_3 del circuito de la figura 4.2.

Al aplicar la LCK se debe cumplir

$$\sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad (4.1)$$

y para el nodo ②

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (4.2)$$

Aplicaremos ahora la LCK a los nodos ① y ⑥ del mismo circuito, con la asignación de corrientes indicada en la figura 4.7

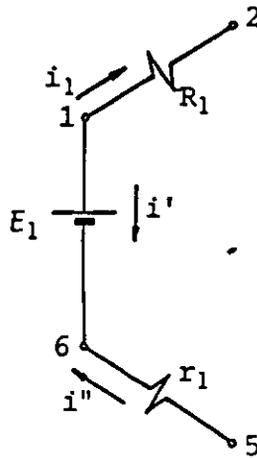


FIGURA 4.7. Asignación de corrientes de rama.

Para el nodo ①

$$i_1 + i' = 0 \quad (4.3)$$

de donde

$$i' = -i_1 \quad (4.4)$$

para el nodo ⑥

$$-i' - i'' = 0 \quad (4.5)$$

usando la ecuación (4.4)

$$i'' = i_1 \quad (4.6)$$

Como resultado de este análisis podemos concluir que por cada rama principal circula una misma corriente, por lo que existirán tantas corrientes como ramas principales haya en el circuito.

Por lo anteriormente expuesto es posible asignar una sola corriente por cada rama principal, y sólo se plantearán ecuaciones para los nodos principales.

En un circuito como el de la figura 4.2 circularán tres corrientes distintas, y en el de la figura 4.5 habrá seis corrientes diferentes.

Para aplicar la LCK al nodo (5) del circuito de la figura 4.2, conservando la asignación de corrientes anterior para cada rama principal, tenemos la situación mostrada en la figura 4.8

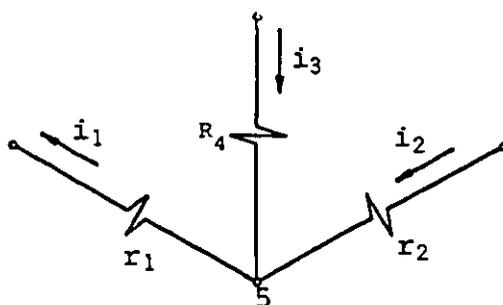


FIGURA 4.8. Asignación de corriente por cada rama principal que conecta el nodo (5).

De donde se obtiene que

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0 \quad (4.7)$$

Al comparar la ecuación anterior con la ecuación (4.2) observamos que es la misma ecuación multiplicada por menos uno, es decir, son linealmente dependientes.

En general, es posible demostrar que el número de ecuaciones inde

pendientes de nodo que se pueden plantear para un circuito es igual al número de nodos principales menos uno, es decir:

Número de ecuaciones independientes de nodo o número de nodos independientes = $n - 1$

donde

n = número de nodos principales.

b) Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

El enunciado de esta ley es: en un instante cualquiera, la suma algebraica de las diferencias de potencial (voltajes) de cada una de las ramas que forman una malla, es cero.

Esta ley es consecuencia de la aplicación del principio de conservación de la energía en cada malla.

Para aplicar la LVK a una malla cualquiera debemos asignar polaridades a las diferencias de potencial de cada rama del circuito. Como trabajaremos con sentidos asociados de corriente y voltaje, la asignación de uno de ellos es suficiente para la aplicación de ambas leyes.

Al seleccionar un sentido supuesto para la corriente, se está asignando simultáneamente polaridad a las diferencias de potencial que aparecen en los resistores. En las fuentes la polaridad no depende de esta asignación, ya que dicha polaridad es conocida.

La figura 4.9 muestra una posible asignación de corrientes para el circuito de la figura 4.2 y las polaridades de voltaje resultantes.

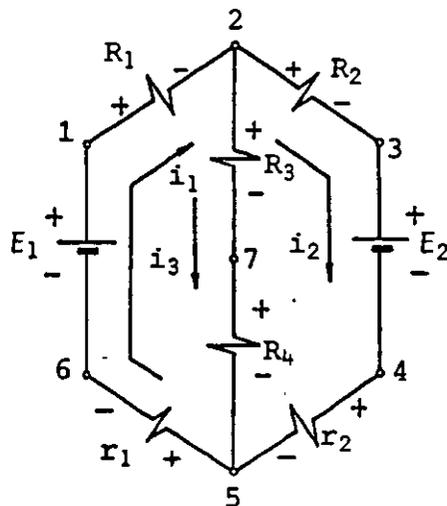


FIGURA 4.9. Polaridades de voltaje en los resistores que resultó de la asignación de corrientes indicada.

Para realizar la suma algebraica de voltajes, mencionada en la LVK , tomaremos un nodo inicial e iniciaremos un recorrido sumando algebraicamente las diferencias de potencial en cada rama.

Al movernos a través de un elemento desde un punto de mayor potencial a otro de menor, el signo de la diferencia de potencial será considerado positivo y viceversa. Esta convención es congruente con lo establecido en el subtema 3.8.

Con base en la figura 4.9 y la llamada malla 1 de la figura 4.3, aplicaremos la LVK iniciando el recorrido de la malla en el sentido de las manecillas del reloj.

De la LVK tenemos que

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0 \quad (4.8)$$

$$V_{12} + V_{27} + V_{75} + V_{56} + V_{61} = 0$$

pero

$$V_{12} = R_1 i_1 , \quad V_{27} = R_3 i_3 , \quad V_{75} = R_4 i_3$$

$$V_{56} = r_1 i_1 \text{ y } V_{61} = - E_1$$

finalmente

$$(R_1 + r_1) i_1 + (R_3 + R_4) i_3 - E_1 = 0 \quad (4.9)$$

Para la malla 2

$$V_{57} + V_{72} + V_{23} + V_{34} + V_{45} = 0$$

es decir

$$(R_2 + r_2) i_2 - (R_3 + R_4) i_3 + E_2 = 0 \quad (4.10)$$

Para la malla 3

$$(R_1 + r_1) i_1 + (R_2 + r_2) i_2 + E_2 - E_1 = 0 \quad (4.11)$$

Observamos que la ecuación (4.11) es la suma de las ecuaciones (4.9) y (4.10), por lo que el sistema formado por estas tres ecuaciones es linealmente dependiente.

En general, es posible determinar que el número de ecuaciones de malla independientes es igual al número de ramas principales menos el número de nodos independientes (nodos principales menos uno).

Al plantear ecuaciones de malla debemos seleccionar las mallas que contengan el menor número de ramas, con objeto de sumar menos términos.

La solución del circuito se obtiene resolviendo las ecuaciones lineales simultáneas (4.2), (4.9) y (4.10) que a continuación repetimos

$$- i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

$$(R_1 + r_1) i_1 + (R_3 + R_4) i_3 = E_1$$

$$(R_2 + r_2)i_2 - (R_3 + R_4)i_3 = - E_2$$

Si los valores de los resistores y fuentes del circuito de la figura 4.9 son

$$E_1 = 18 \text{ V} , \quad r_1 = 1 \Omega$$

$$E_2 = 6 \text{ V} , \quad r_2 = 1 \Omega$$

$$R_1 = 7 \Omega , \quad R_3 = R_4 = 4 \Omega , \quad R_2 = 3 \Omega$$

compruebe que

$$i_1 = \frac{21}{16} \text{ A} , \quad i_2 = \frac{6}{16} \text{ A} \quad \text{y} \quad i_3 = \frac{15}{16} \text{ A}$$

y

$$V_{15} = \frac{259}{16} \text{ V} , \quad V_{14} = \frac{261}{16} \text{ V} \quad \text{y} \quad V_{25} = \frac{15}{2} \text{ V}$$

4.3 FORMA PRACTICA DE APLICAR LAS LEYES DE KIRCHHOFF

Es posible reducir el número de ecuaciones resultantes al aplicar las leyes de Kirchhoff, si se hacen ciertas consideraciones con objeto de manejar implícitamente la información contenida, en las ecuaciones de malla o de nodo.

a) Ecuaciones de malla o método de Maxwell

Una forma alternativa de plantear las ecuaciones que resuelven un circuito es suponer una corriente para cada una de sus mallas independientes y considerar que por las ramas comunes circula la suma algebraica de las corrientes, teniendo cuidado al tomar las polaridades de los resistores de las ramas comunes, ya que en éstos se aplicará el principio de superposición para obtener la diferencia de potencial como la suma de los efectos de cada una de las corrientes.

El circuito de la figura 4.2 puede ser resuelto considerando las corrientes asociadas a las mallas 1 y 2 que se muestran en la figura 4.10 y cuyas ecuaciones se plantean como a continuación se indica.

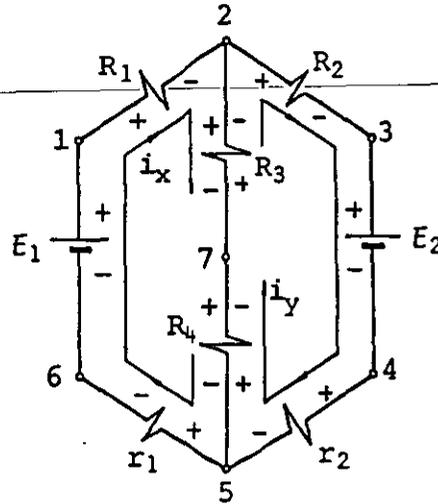


FIGURA 4.10. Asignación de corrientes de malla para el circuito de la figura 4.2.

Para la malla 1, si se inicia el recorrido en el nodo ① en el sentido de las manecillas del reloj

$$R_1 i_x + R_3 (i_x - i_y) + R_4 (i_x - i_y) + r_1 i_x - E_1 = 0$$

y para la malla 2

$$R_2 i_y + E_2 + r_2 i_y + R_4 (i_y - i_x) + R_3 (i_y - i_x) = 0$$

Notemos que la relación que existe entre las corrientes i_x y i_y y las supuestas en el subtema anterior para el mismo circuito es

$$i_1 = i_x, \quad i_2 = i_y \quad \text{y} \quad i_3 = i_x - i_y$$

Si los valores de los parámetros son

$$E_1 = 18 \text{ V} , \quad r_1 = 1 \ \Omega$$

$$E_2 = 6 \text{ V} , \quad r_2 = 1 \ \Omega$$

$$R_1 = 7 \ \Omega , \quad R_3 = R_4 = 4 \ \Omega , \quad R_2 = 3 \ \Omega$$

compruebe que

$$i_x = \frac{21}{16} \text{ A} \quad \text{y} \quad i_y = \frac{6}{16} \text{ A}$$

b) Ecuaciones de nodo

Otra forma de plantear las ecuaciones que resuelven un circuito es considerar como incógnitas las diferencias de potencial o voltajes y plantear ecuaciones para los nodos independientes.

Como uno de los nodos principales es considerado como referencia (asignándole arbitrariamente potencial cero), habrá tantos voltajes desconocidos como nodos independientes.

Es conveniente suponer, al plantear las ecuaciones, que el potencial del nodo analizado es el mayor del circuito, por lo que todas las corrientes saldrán de dicho nodo.

El método equivale a considerar implícitamente las ecuaciones de las mallas; cada una de estas ecuaciones se plantea involucrando los potenciales eléctricos desconocidos (incógnitas) de los nodos independientes.

Para un circuito como el de la figura 4.2 se tiene un solo nodo independiente y la incógnita será V_{25} . Si asignamos al nodo (5) potencial cero, V_{25} será simplemente el potencial en el nodo (2) o V_2 , como se indica en la figura 4.11.

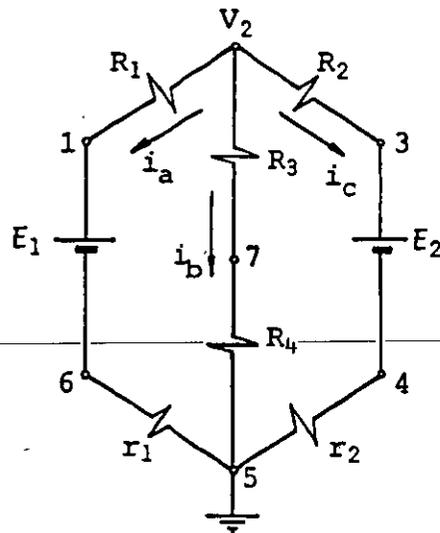


FIGURA 4.11. Asignación del potencial incógnita de nodo y las corrientes correspondientes para el circuito de la figura 4.2.

Al suponer $V_2 > E_1$, $V_2 > E_2$ y aplicando $\sum V = 0$ obtenemos

$$R_1 i_a + E_1 + r_1 i_a - V_2 = 0$$

de donde

$$i_a = \frac{V_2 - E_1}{R_1 + r_1}$$

similarmente

$$i_b = \frac{V_2}{R_3 + R_4} \quad \text{y} \quad i_c = \frac{V_2 - E_2}{R_2 + r_2}$$

La ecuación del nodo será

$$\sum i = 0, \quad i_a + i_b + i_c = 0$$

o sea

$$\frac{V_2 - E_1}{R_1 + r_1} + \frac{V_2}{R_3 + R_4} + \frac{V_2 - E_2}{R_2 + r_2} = 0$$

De esta última ecuación se obtiene el valor de V_2 y a partir de éste, las corrientes i_a , i_b y i_c .

EJEMPLO 4.1

Para el circuito mostrado en la figura 4.12 obtenga la corriente en el resistor de $12\ \Omega$ y la diferencia de potencial V_{ab}

- Planteando ecuaciones de malla
- Planteando ecuaciones de nodo

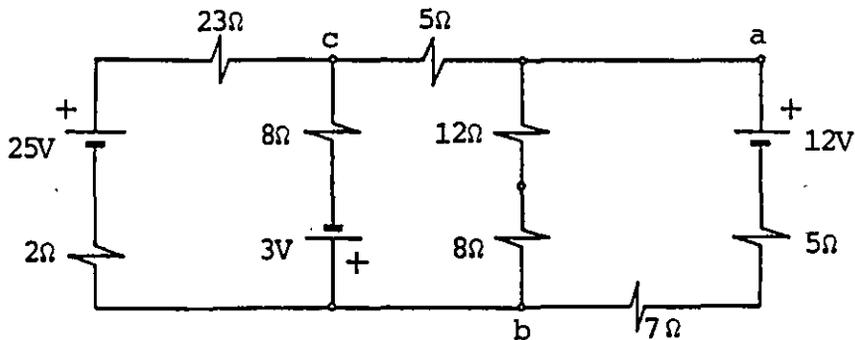


FIGURA 4.12. Circuito para el ejemplo 4.1.

SOLUCION

- La asignación de corrientes de malla puede ser la mostrada en la figura 4.13.

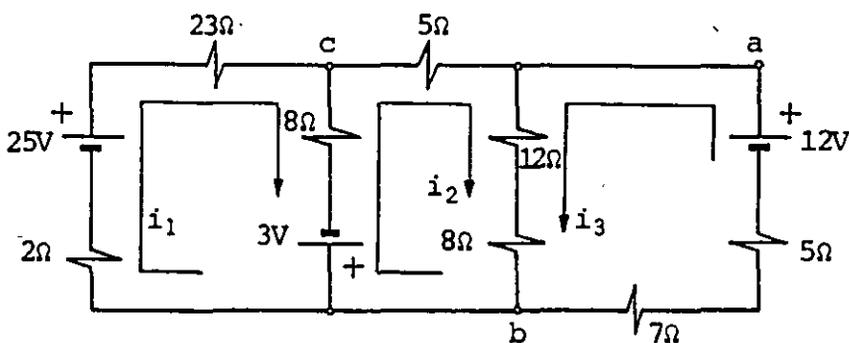


FIGURA 4.13. Asignación de corrientes de malla.

Las ecuaciones son

$$23i_1 + 8(i_1 - i_2) - 3 + 2i_1 - 25 = 0$$

$$5i_2 + 12(i_2 + i_3) + 8(i_2 + i_3) + 3 + 8(i_2 - i_1) = 0$$

$$12(i_3 + i_2) + 8(i_3 + i_2) + 7i_3 + 5i_3 - 12 = 0$$

al simplificar resulta

$$33i_1 - 8i_2 = 28$$

$$-8i_1 + 33i_2 + 20i_3 = -3$$

$$20i_2 + 32i_3 = 12$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que

$$i_1 = 0.8 \text{ A} , \quad i_2 = -0.2 \text{ A} \quad \text{y} \quad i_3 = 0.5 \text{ A}$$

y la corriente a través del resistor de 12Ω es

$$i_2 + i_3 = -0.2 + 0.5 = 0.3 \text{ A}$$

La diferencia de potencial V_{ab} es

$$V_{ab} = 12(i_2 + i_3) + 8(i_2 + i_3)$$

$$\therefore V_{ab} = 20(0.3) = 6 \text{ V}$$

b) La asignación del nodo de referencia y voltajes de nodo puede ser la mostrada en la figura 4.14.

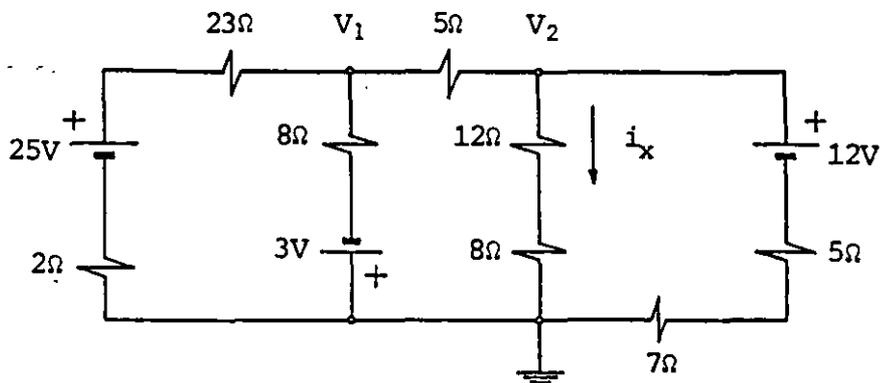


FIGURA 4.14. Asignación de voltajes de nodo.

Las ecuaciones son

$$\frac{V_1 - 25}{25} + \frac{V_1 + 3}{8} + \frac{V_1 - V_2}{5} = 0$$

$$\frac{V_2 - V_1}{5} + \frac{V_2}{20} + \frac{V_2 - 12}{12} = 0$$

Al simplificar resulta

$$73 V_1 - 40 V_2 = 125$$

$$-12 V_1 + 20 V_2 = 60$$

La solución del sistema es

$$V_1 = 5 \text{ V} \quad \text{y} \quad V_2 = 6 \text{ V}$$

notemos que $V_{ab} = V_2$, por lo que $V_{ab} = 6 \text{ V}$ y la corriente en la rama principal que contiene el resistor de 12Ω (i_x en la figura 4.14), es

$$i_x = \frac{V_2}{12 + 8} = \frac{6}{20} = 0.3 \text{ A}$$

Es posible también aplicar el principio de superposición para resolver el circuito, si se considera por separado el efecto de cada fuente y se suman los resultados. Al tomar el efecto de cada una de las fuentes, se considera que las demás poseen fem de salida igual a cero, esto significa que estas fuentes se sustituyen exclusivamente por su resistencia interna.

4.4 CIRCUITOS RESISTIVOS CON CORRIENTE ALTERNA SENOIDAL

Debido a la importancia actual de la corriente alterna, dedicaremos este subtema a comentar las diferencias entre el análisis de los circuitos de corriente alterna senoidal y los de corriente continua.

Como en un resistor lineal la ley de Ohm se cumple para cada valor de voltaje aplicado, si conectamos una fuente de voltaje alterno senoidal a las terminales de un resistor lineal, mediante el circuito de la figura 4.15 a, obtenemos que

$$V_{ab} = v(t) ,$$

por ejemplo

$$v(t) = V_m \text{ sen } \omega t \quad (4.12)$$

donde

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

ω = frecuencia angular

f = frecuencia

T = periodo

de la ecuación de Ohm (3.33)

$$V_{ab} = Ri$$

entonces

$$i(t) = \frac{V_{ab}}{R} = \frac{V_m}{R} \text{ sen } \omega t = I_m \text{ sen } \omega t \quad (4.13)$$

En la figura 4.15 (b) y 4.15 (c) se muestran las gráficas de las señales de voltaje y corriente, respectivamente.

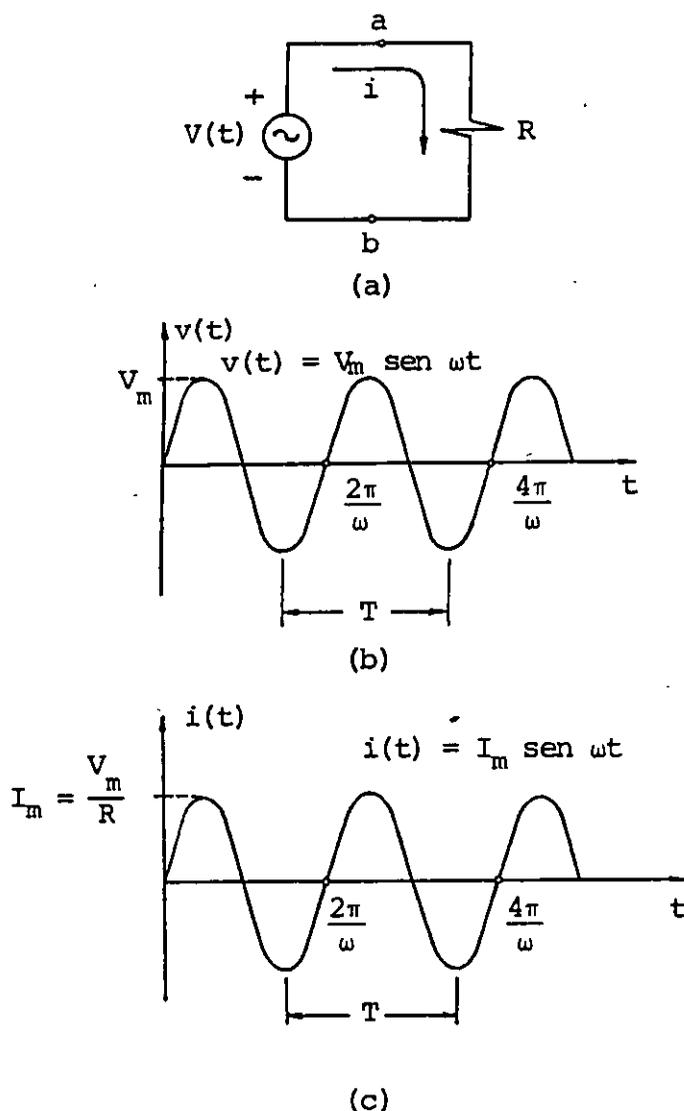


FIGURA 4.15. (a) Conexión de un resistor R a una fuente de voltaje alterno senoidal; (b) gráfica del voltaje $v(t)$; (c) gráfica de la corriente $i(t)$.

Ya que R puede ser el resistor equivalente de un arreglo, en general, los circuitos con una sola fuente de voltaje alterno se resuelven exactamente igual que si tuvieran una fuente de voltaje continuo, teniendo en mente que al obtener las corrientes, éstas serán de la forma

$$i_1 = I_{m1} \text{sen } \omega t, \quad i_2 = I_{m2} \text{sen } \omega t, \quad \text{etcétera.}$$

Un caso más complejo se presenta cuando, en un circuito, se encuentran conectadas varias fuentes de ca de la misma frecuencia, cuyas señales pueden no coincidir en el tiempo, como se muestra en la figura 4.16 para dos señales v_1 y v_2 .

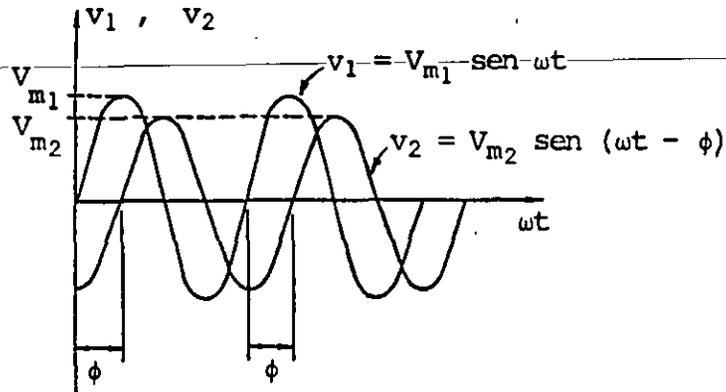


FIGURA 4.16. Señales senoidales de la misma frecuencia desfasadas un ángulo ϕ .

A la desviación, en radianes o grados, entre dos funciones senoidales de la misma frecuencia se le conoce como ángulo de fase y se representa con la letra griega ϕ .

Como la combinación lineal de dos funciones senoidales de igual frecuencia da por resultado una función senoidal de esa misma frecuencia, podemos también aplicar nuestro procedimiento sumando, cuando se requiera, las fuentes de ca como se indica a continuación.

Supongamos que se desean sumar las señales v_1 y v_2 de la figura 4.16

$$v_1 + v_2 = V_{m1} \text{sen } \omega t + V_{m2} \text{sen } (\omega t - \phi) \quad (4.14)$$

Si usamos la identidad trigonométrica

$$\text{sen } (\omega t - \phi) = \text{sen } \omega t \cos \phi - \text{sen } \phi \cos \omega t$$

La ecuación 4.14 se expresa

$$v_1 + v_2 = (V_{m_1} + V_{m_2} \cos \phi) \text{sen } \omega t + (-V_{m_2} \text{sen } \phi) \text{cos } \omega t \quad (4.15)$$

también la ecuación (4.15) se puede escribir como

$$v_1 + v_2 = A \text{sen } \omega t + B \text{cos } \omega t \quad (4.16)$$

donde

$$A = V_{m_1} + V_{m_2} \cos \phi$$

y

$$B = -V_{m_2} \text{sen } \phi$$

y estas constantes se pueden expresar como

$$A = K \cos \phi_1 \quad B = K \text{sen } \phi_1 \quad (4.17)$$

de esta manera se cumple que

$$A^2 + B^2 = K^2 (\text{sen}^2 \phi_1 + \text{cos}^2 \phi_1) = K^2 \quad (4.18)$$

y la ecuación (4.16) es equivalente a

$$v_1 + v_2 = K(\text{cos } \phi_1 \text{sen } \omega t + \text{sen } \phi_1 \text{cos } \omega t) \quad (4.19)$$

la cual, por la identidad trigonométrica usada anteriormente, queda

$$v_1 + v_2 = K \text{sen } (\omega t + \phi_1) \quad (4.20)$$

donde, de (4.18)

$$K = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (4.21)$$

y de (4.17)

$$\phi_1 = \text{ang tan } \frac{B}{A} \quad (4.22)$$

Se concluye que la suma algebraica de dos señales senoidales de la misma frecuencia da por resultado otra señal de amplitud dada por la ecuación (4.21), con un ángulo de fase ϕ_1 entre ellas dado por la ecuación (4.22) y de la misma frecuencia.

Verificar que la suma de las señales senoidales

$$v_1 = 20 \text{ sen } 120 \pi t$$

$$v_2 = 10 \text{ sen } (120 \pi t - \frac{\pi}{6})$$

es
$$v = 29.09 \text{ sen } (120 \pi t - 0.173)$$

Se sugiere hacer las gráficas de v_1 , v_2 y v .

En el caso más general, cuando las señales no son de la misma frecuencia, la solución del circuito se obtiene mediante la aplicación del principio de superposición.

Aunque en los circuitos de ca no es posible considerar que la corriente tiene un sentido constante, es usual indicar polaridad en la fuente e interpretarla como se muestra en la figura 4.17.

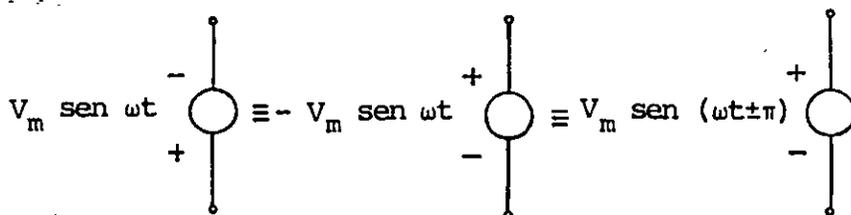


FIGURA 4.17. Interpretación de la polaridad en las fuentes de voltaje alterno senoidal.

Con objeto de aclarar esta idea, observemos el circuito de la figura 4.18.

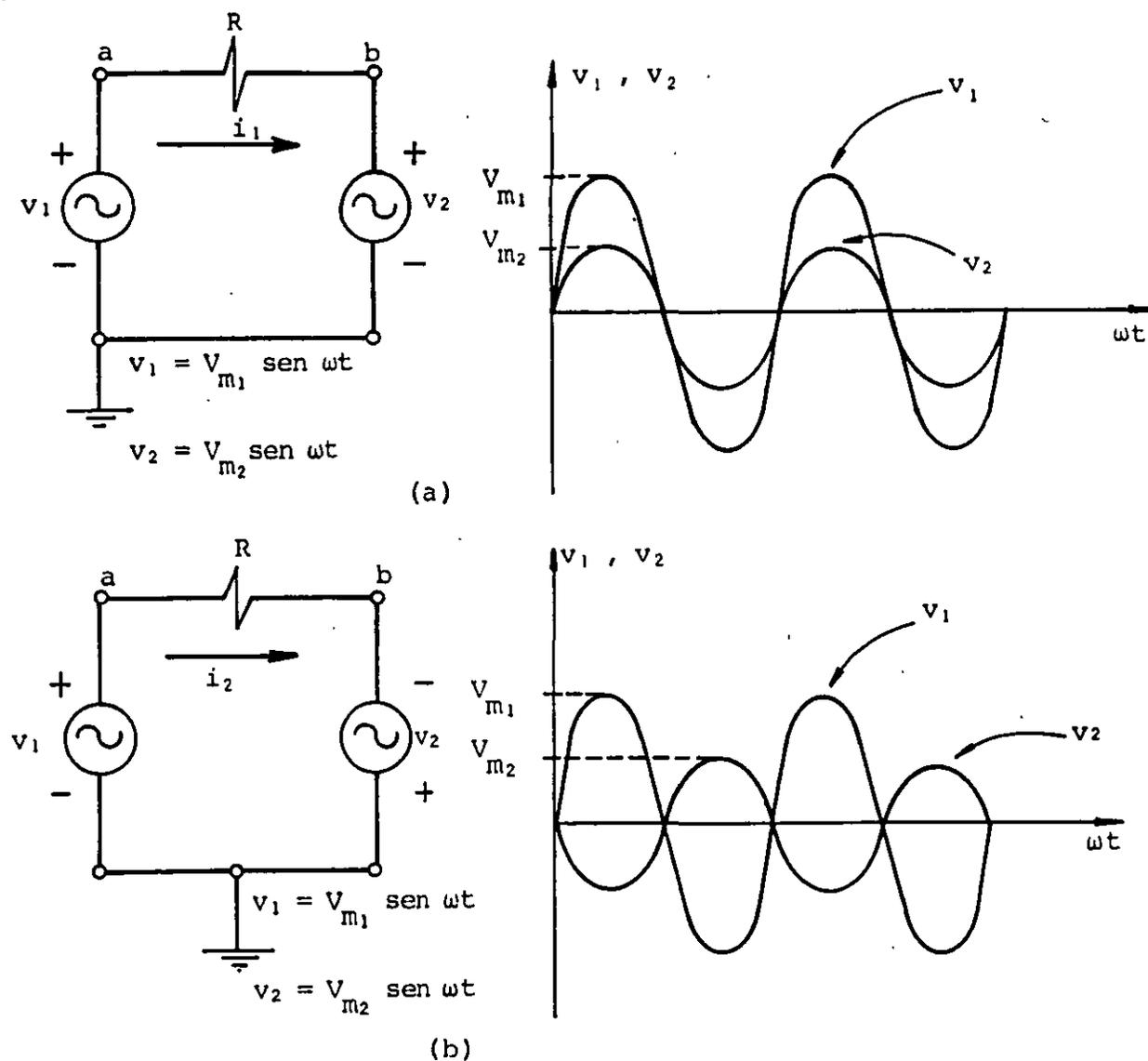


FIGURA 4.18. Efecto de cambiar la polaridad de una fuente de voltaje alterno senoidal en un circuito.

En el caso (a) la corriente i_1 se obtiene como

$$i_1 = \frac{v_{ab}}{R} = \frac{v_1 - v_2}{R} = \frac{V_{m1} - V_{m2}}{R} \text{ sen } \omega t \quad (4.23)$$

en el caso (b) la corriente i_2 es

$$i_2 = \frac{v_{ab}}{R} = \frac{v_1 + v_2}{R} = \frac{V_{m1} + V_{m2}}{R} \text{ sen } \omega t \quad (4.24)$$

Sólo resta analizar la forma de obtener la potencia eléctrica en estos circuitos.

El cálculo de la potencia eléctrica en un resistor con corriente alterna, se efectúa aplicando la ecuación (3.53)

$$P = Ri^2$$

pero en corriente alterna senoidal, tenemos

$$i = I_m \text{ sen } \omega t$$

por lo que

$$P(t) = R I_m^2 \text{ sen}^2 \omega t \quad (4.25)$$

además sabemos que

$$\text{sen}^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \omega t \quad (4.26)$$

sustituyendo (4.26) en (4.25)

$$P(t) = \frac{1}{2} R I_m^2 - \frac{1}{2} R I_m^2 \cos 2 \omega t \quad (4.27)$$

Dado que el valor promedio de cualquier señal senoidal es cero, la potencia eléctrica promedio es

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2 \quad (4.28)$$

y la ecuación anterior se puede escribir

$$P = R \left[\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right]^2 \quad (4.29)$$

Si comparamos la ecuación (4.29) con la ecuación de potencia para corriente continua, observamos que cuando un resistor R transforma la misma cantidad de energía eléctrica a calor por segundo

con corriente continua y alterna, se cumple

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4.30)$$

Es decir, se obtiene la misma potencia eléctrica en un resistor cuando se le aplica una corriente continua I , o bien una corriente alterna $i = I_m \sin \omega t = I \sqrt{2} \sin \omega t$.

El valor $I_m/\sqrt{2}$ se conoce como valor eficaz de la corriente alterna $i = I_m \sin \omega t$

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \text{valor eficaz de la corriente senoidal.}$$

De la misma manera

$$\frac{V_m}{\sqrt{2}} = \text{valor eficaz del voltaje senoidal.}$$

Resulta muy conveniente trabajar con los valores eficaces de corriente y voltaje en circuitos de corriente alterna, ya que el procedimiento de cálculo de la corriente, el voltaje y la potencia, se realiza de la misma forma que en los circuitos de corriente continua.

EJEMPLO 4.2

Para el circuito con dos fuentes de ca de la figura 4.19 obtenga:

- a) La diferencia de potencial V_{ab}
- b) La diferencia de potencial V_{cd}
- c) La potencia eléctrica en el resistor de 200Ω

d) La energía eléctrica transformada en calor en el resistor de $200\ \Omega$ durante 2 minutos.

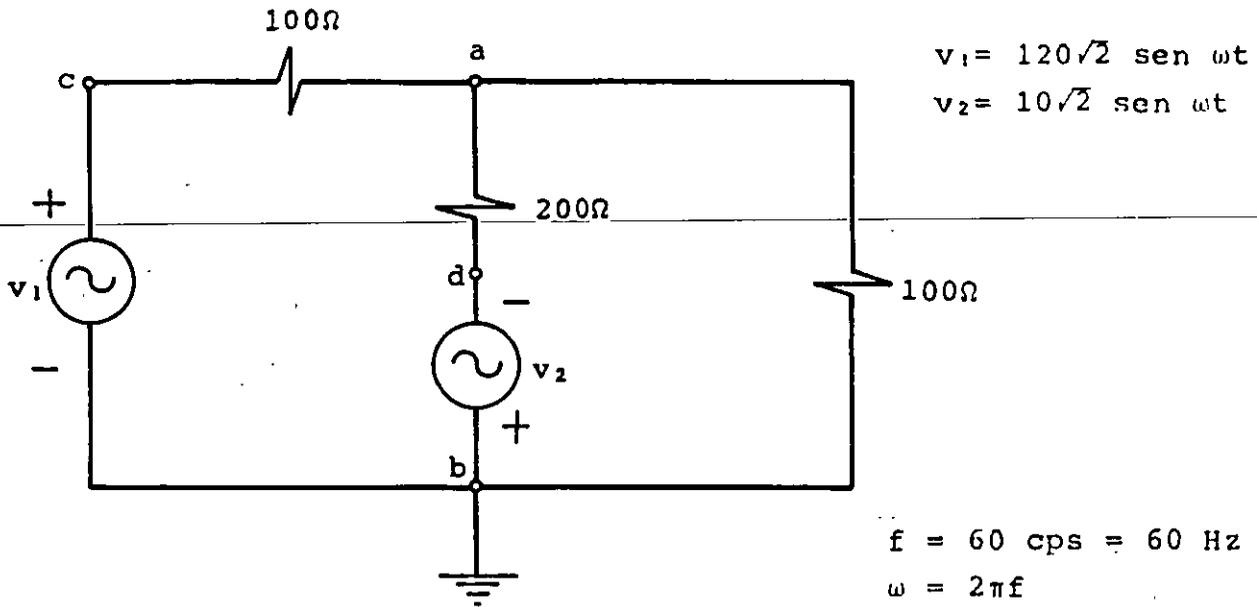


FIGURA 4.19. Circuito eléctrico con dos fuentes de ca de la misma frecuencia.

SOLUCION

El circuito se puede resolver sustituyendo las fuentes de ca por su valor eficaz o efectivo, por lo que el circuito queda como se muestra en la figura 4.20.

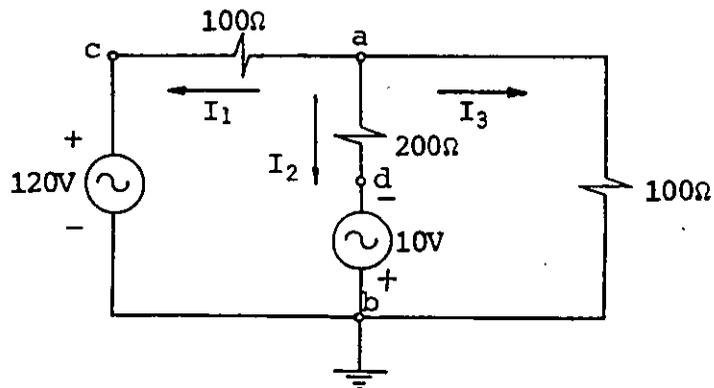


FIGURA 4.20. Circuito de la figura 4.19 donde se han sustituido las fuentes por sus valores eficaces.

a) Plantearemos la ecuación del nodo a y consideraremos como incógnita la diferencia de potencial V_{ab} , o sea V_a , ya que b se ha tomado como referencia.

La ecuación resultante es

$$\frac{V_a - 120}{100} + \frac{V_a + 10}{200} + \frac{V_a}{100} = 0$$

si despejamos V_a

$$V_a = \frac{230}{5} = 46$$

$$\therefore V_a = 46\sqrt{2} \text{ sen } 120 \pi t = 65.05 \text{ sen } 377 t \text{ V}$$

b) Como

$$V_{cd} = V_{ca} + V_{ad}$$

y

$$V_{ca} = -100 I_1$$

$$V_{ad} = 200 I_2$$

además

$$I_1 = \frac{V_a - 120}{100} = \frac{46 - 120}{100} = -0.74 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_a + 10}{200} = \frac{46 + 10}{200} = 0.28 \text{ A}$$

$$\therefore V_{ca} = +74 \text{ V}$$

$$V_{ad} = +56 \text{ V}$$

y

$$V_{cd} = \underline{130 \text{ V}}$$

Otro camino más simple hubiese sido

$$V_{cd} = V_{cb} + V_{bd} = 120 + 10 = \underline{130 \text{ V}}$$

finalmente, si el resultado se expresa como señal senoidal

$$v_{cd} = 130\sqrt{2} \sin 120 \pi t = 183.85 \sin 377 t \text{ V}$$

c) La potencia promedio se calcula como

$$P = R I_2^2 = 200(0.28)^2 = \underline{15.68 \text{ W}}$$

d) $U = P t = 15.68(120) = \underline{1881.6 \text{ J}}$

4.5 CONEXION Y SIMBOLOGIA DE LOS INSTRUMENTOS DE MEDICION DE CORRIENTE, VOLTAJE Y RESISTENCIA

Presentaremos ahora una breve descripción de la forma de representar y de conectar los instrumentos que se usan para medir diferencias de potencial, corrientes y resistencias.

No describiremos el funcionamiento, ni la construcción, ni las precauciones que se deben tener en su uso, ya que estas cuestiones dependen de las características particulares del instrumento empleado.

Los instrumentos que trataremos son:

1. Vóltmetro
2. Ampérmetro
3. Ohmetro

En muchas ocasiones los tres instrumentos se integran en uno solo llamado multímetro.

Estos aparatos pueden producir un desplazamiento angular, de una aguja indicadora, proporcional al parámetro que se desea medir (instrumentos analógicos) o bien pueden dar directamente la cifra que indica el valor del parámetro medido (instrumentos digitales). Sin embargo, todos ellos pueden ser representados como se muestra en la figura 4.21.

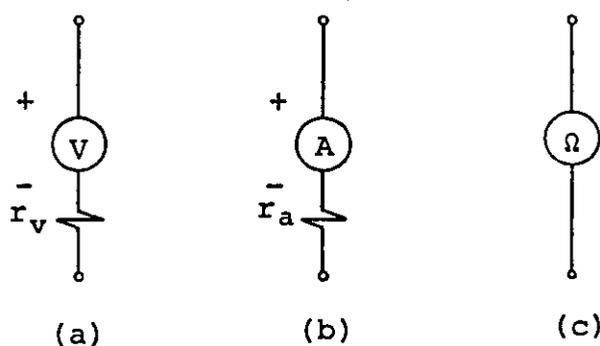


FIGURA 4.21. Representación usual de algunos instrumentos de medición; (a) voltímetros, (b) amperímetros y (c) óhmetros.

Como el voltímetro mide la diferencia de potencial entre un par de puntos, sus terminales deben ser conectadas a esos puntos. Por ello se dice que el voltímetro debe ser conectado en paralelo con el elemento en el cual se desea medir la diferencia de potencial. Con objeto de no alterar las condiciones existentes en el circuito antes de efectuar la medición, su resistencia interna r_v debe ser muy grande. Entre menos energía se requiera para obtener una medición, mejor será la exactitud del aparato.

Cuando se desean medir diferencias de potencial continuas o directas, se debe respetar la polaridad del instrumento colocando su terminal positiva en el punto de mayor potencial.

Como el amperímetro es un medidor de flujo deberá conectarse en serie con el elemento o elementos a través de los cuales se desea medir la corriente eléctrica; para conectarlo será necesario interrumpir el circuito e intercalarlo en la rama deseada. Con objeto de no alterar las condiciones existentes en el circuito antes

de efectuar la medición, su resistencia interna r_a debe ser muy pequeña. De manera semejante al caso del vóltmetro, cuando se mide corriente continua o directa debemos respetar la polaridad del aparato.

El óhmetro debe ser conectado directamente a las terminales entre las cuales se desea medir resistencia. Para efectuar la medición ~~de la resistencia de un elemento conectado a un circuito~~ es necesario desconectar alguna de sus terminales, con el objeto de no incluir la resistencia de los elementos conectados en paralelo con el que se desea medir.

Como el óhmetro mide la propiedad denominada resistencia, es necesario que internamente posea una fuente de energía para lograr la lectura y no es necesario considerar su resistencia interna porque no toma energía del elemento que se mide.

EJEMPLO 4.3

Se desea medir la corriente y la diferencia de potencial en el resistor R_2 , del circuito mostrado en la figura 4.22, para ello se cuenta con los aparatos mostrados.

Obtenga el error involucrado debido a la resistencia interna de los aparatos.

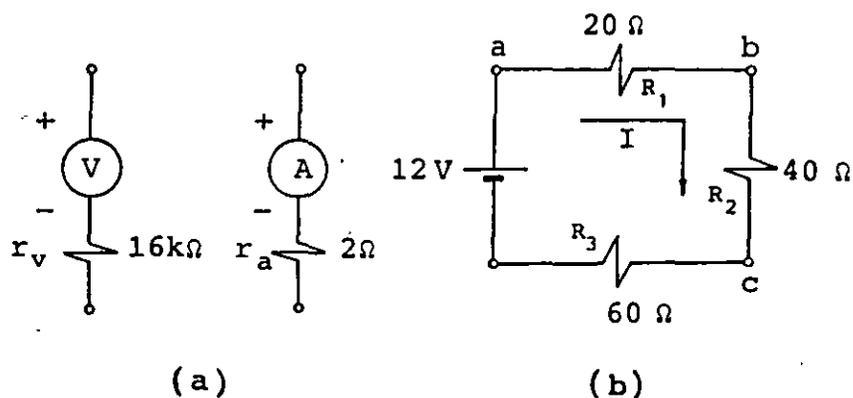


FIGURA 4.22. (a) Vóltmetro y ampérmetro con los cuales se desea medir la diferencia de potencial y la corriente en el resistor R_2 del circuito de la figura (b).

SOLUCION

Calcularemos primero la corriente y la diferencia de potencial en el resistor R_2 sin conectar los aparatos de medición.

Con base en la figura 4.22 (b) tenemos que

$$I = \frac{12}{120} = 100 \text{ mA}$$

y

$$V_{bc} = 40 (0.1) = 4 \text{ V}$$

La medición de la corriente y la diferencia de potencial se realiza conectando los aparatos, como se muestra en la figura 4.23.

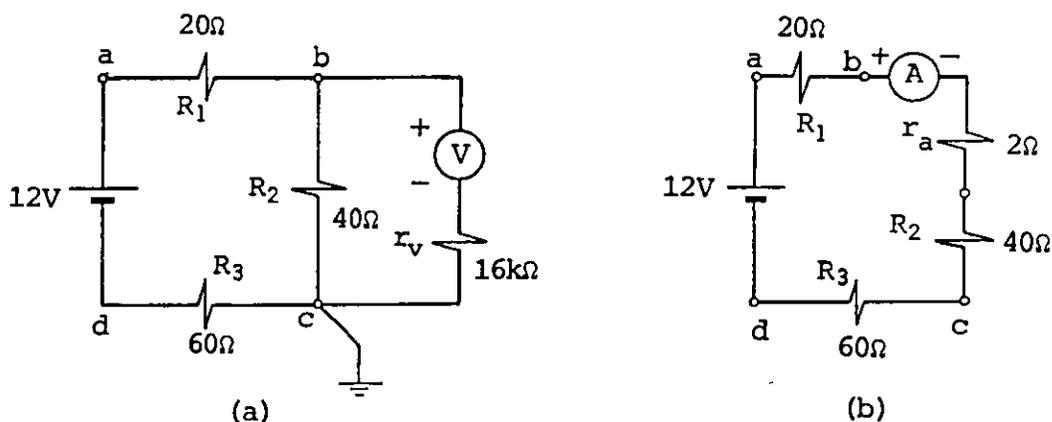


FIGURA 4.23. (a) Conexión del vóltmetro para medir la diferencia de potencial V_{bc} ; (b) conexión del amperímetro para medir la corriente en el circuito.

Al conectar el vóltmetro se forma un circuito de un nodo independiente cuya ecuación es

$$\frac{v'_{bc} - 12}{80} + \frac{v'_{bc}}{40} + \frac{v'_{bc}}{16,000} = 0$$

simplificando

$$200 v'_{bc} - 2400 + 400 v'_{bc} + v'_{bc} = 0$$

de donde

$$v'_{bc} = \frac{2400}{601} = 3.993 \text{ v}$$

y el error en la medición de v_{bc} es

$$\text{error en } v_{bc} = 100 \frac{|v'_{bc} - v_{bc}|}{v_{bc}} = 0.17\%$$

Al conectar el ampermetro, la corriente se modifica al valor

$$I' = \frac{12}{122} = 98.36 \text{ mA}$$

y

$$\text{error en } I = 100 \frac{|I' - I|}{I} = 1.64\%$$

4.6 CIRCUITO RC CON SEÑAL DE VOLTAJE CONTINUO

Después de definir las propiedades capacitancia y resistencia y comprender la función de los capacitores y resistores por separado, analizaremos por medio de las leyes de Kirchhoff el comportamiento de un capacitor cuando se conecta a una fuente de fem real, es decir, considerando el efecto resistivo del circuito.

Llamaremos circuito RC a la combinación en serie de un capacitor y un resistor. Dicho circuito puede representar cualquier conexión de resistores y capacitores cuyo equivalente sea un solo resistor en serie con un capacitor.

A continuación analizaremos el comportamiento de este circuito cuando se conecta a una fuente de voltaje continuo, como se mues

tra en la figura 4.24.

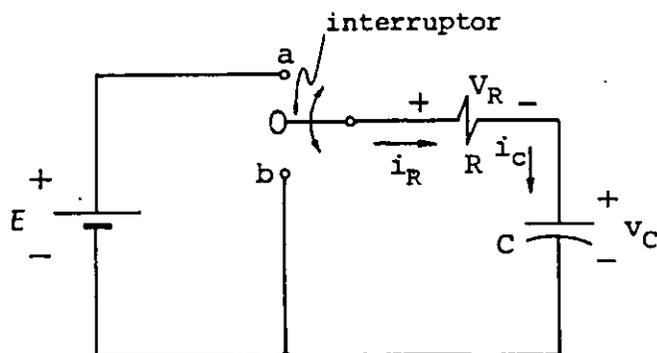


FIGURA 4.24. Circuito RC con señal de voltaje continuo.

El interruptor en el circuito de la figura 4.24 se usa para que iniciemos el análisis; en el momento que lo coloquemos en la posición a consideraremos que el tiempo t es igual a cero segundos.

Supondremos que la resistencia interna de la fuente, de los alambres usados para la conexión, de los contactos del interruptor o cualquier otra resistencia en el circuito, está contenida en R y algo semejante es válido para el capacitor C ; además se considerará que el capacitor está completamente descargado antes de realizar la conexión, es decir, $v_C = 0$ para $t \leq 0$.

Si consideramos las direcciones de referencia asociadas mostradas en la figura 4.24 para R y C y aplicamos la LVK, obtenemos que

$$\sum v = -E + v_R + v_C = 0 \quad (4.31)$$

donde

$$v_R(t) = R i_R(t) \quad (4.32)$$

$$q(t) = C v_C(t) \quad (4.33)$$

si derivamos (4.33)

$$\frac{dq(t)}{dt} = i_C(t) = C \frac{d v_C(t)}{dt} \quad (4.34)$$

También se cumple, con base en la figura 4.24, que

$$i_R(t) = i_C(t) \quad (4.35)$$

Si usamos las expresiones (4.32), (4.34) y (4.35) en la ecuación (4.31), se obtiene

$$R C \frac{dv_C}{dt} + v_C = E \quad (4.36)$$

Al dividir la ecuación entre RC obtenemos

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = \frac{E}{RC} \quad (4.37)$$

Por nuestros cursos de matemáticas sabemos que la ecuación (4.37) es una ecuación diferencial lineal de primer orden, no homogénea y de coeficientes constantes, cuya solución consta de dos partes: la solución homogénea y la solución particular.

Obtendremos primero la solución homogénea v_{Ch} , que es la solución de la ecuación

$$\frac{dv_{Ch}}{dt} + \frac{1}{RC} v_{Ch} = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{dv_{Ch}}{v_{Ch}} = - \frac{1}{RC} dt \quad (4.39)$$

Al integrar ambos miembros de la igualdad (4.39)

$$\ln v_{Ch} + C_1 = - \frac{1}{RC} t \quad (4.40)$$

La constante de integración C_1 se puede expresar como

$$C_1 = - \ln K \quad (4.41)$$

Entonces la ecuación (4.40) se reduce a

$$\ln \frac{v_{Ch}}{K} = - \frac{t}{RC} \quad (4.42)$$

Si obtenemos el antilogaritmo en ambos miembros de (4.42), se tiene

$$\frac{v_{Ch}}{K} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.43)$$

de donde

$$v_{Ch} = K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.44)$$

Debido a que el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea (4.37) es una constante, la solución particular será del tipo

$$v_{Cp} = A \quad (4.45)$$

donde

$$A = \text{constante}$$

Al sustituir (4.45) en la ecuación original (4.37), obtenemos

$$\frac{1}{RC} A = \frac{E}{RC} \quad (4.46)$$

de donde

$$A = E = v_{Cp} \quad (4.47)$$

Y la solución completa es

$$v_C(t) = v_{Ch} + v_{Cp} \quad (4.48)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.44) y (4.47) en (4.48) se obtiene que

$$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + E \quad (4.49)$$

Para evaluar la constante de integración K usamos la condición inicial $v_C(0) = 0$

$$v_C(0) = 0 = K e^0 + E \quad (4.50)$$

de donde

$$K = -E \quad (4.51)$$

Finalmente

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (4.52)$$

también, de la ecuación (4.34) resulta

$$i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.53)$$

Un parámetro que permite caracterizar un circuito RC particular, es la llamada constante de tiempo τ_C definida como

$$\tau_C = RC \text{ [s]} \quad (4.54)$$

La figura 4.25 muestra las gráficas de las ecuaciones (4.52) y (4.53) en función del tiempo y con una escala de tiempo en múltiplos de τ_C .

Observemos que τ_C es el tiempo para el cual el exponente de e (base de los logaritmos naturales), vale menos uno en las ecuaciones (4.52) y (4.53).

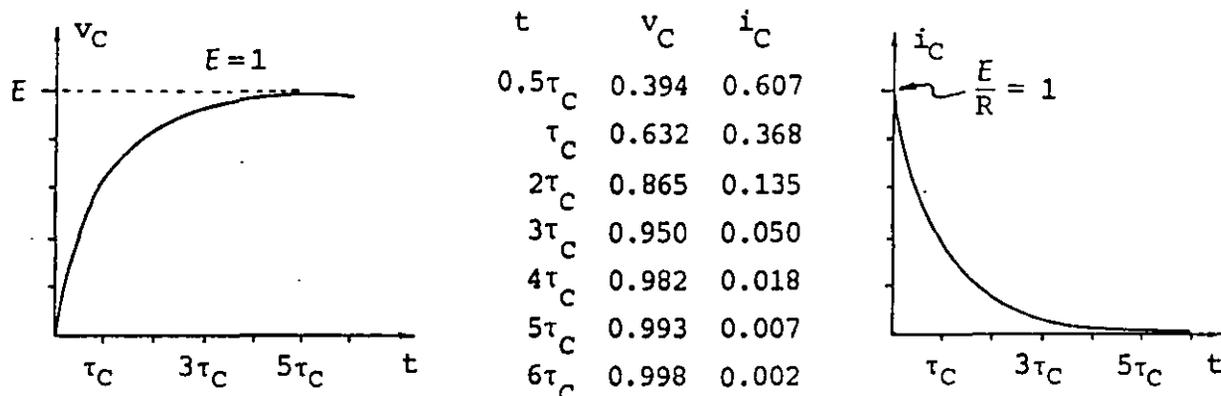


FIGURA 4.25. Gráficas del comportamiento, con respecto al tiempo, del voltaje v_C y la corriente i_C en un circuito RC con fuente de voltaje continuo.

En función de τ_C , las ecuaciones (4.52) y (4.53) se expresan

$$v_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right) \quad (4.55)$$

$$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_C}} \quad (4.56)$$

En las gráficas o en las ecuaciones, se observa que el capacitor, para cuando $t \rightarrow \infty$, se carga y adquiere el voltaje de la fuente E . Para entonces ya no existe diferencia de potencial entre las terminales del resistor, por lo que la corriente es cero.

Concluyendo, si $t \rightarrow \infty$

$$v_C(\infty) = E$$

$$i_C(\infty) = 0$$

Afortunadamente no es necesario esperar un tiempo infinito para considerar que el capacitor se ha cargado, debido a que las funciones se acercan asintóticamente a sus valores para cuando $t \rightarrow \infty$.

Nótese que si $t = 4 \tau_C$

$$v_C(4\tau_C) = 0.982 E$$

$$i_C(4\tau_C) = 0.018 \frac{E}{R}$$

Es decir, para $t = 4 \tau_C$ se ha alcanzado el 98.2% del valor final del voltaje en el capacitor y se tiene el 1.8% de la corriente inicial en el circuito; es por ello que, para fines prácticos, se considera que para $t \geq 4 \tau_C$ se han alcanzado las condiciones estables del circuito y el proceso de carga, por tanto, se desarrolla esencialmente en el intervalo $0 < t < 4 \tau_C$.

Con referencia al circuito RC de la figura 4.24: si después de cargado el capacitor hasta alcanzar una diferencia de potencial $v_C = V_0$ se cambia el interruptor a la posición b, se obtendrá un circuito a través del cual se puede desenergizar el capacitor, transformando su energía almacenada a energía en forma de calor en el resistor.

Como en el momento de pasar el interruptor a la posición b el capacitor posee un voltaje $v_C = V_0$, el capacitor tiene condiciones iniciales diferentes de cero. Por lo cual dicho circuito se reduce al de la figura 4.26.

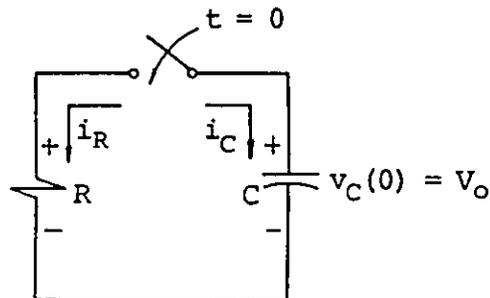


FIGURA 4.26. Circuito RC con condiciones iniciales $v_C(0) = V_0$ en el capacitor.

Si aplicamos la LVK al circuito de la figura 4.26, obtenemos que

$$v_R - v_C = 0 \quad (4.57)$$

pero

$$v_R = Ri_R \quad \text{y} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad (4.58)$$

además

$$i_R = -i_C \quad (4.59)$$

Al sustituir (4.58) y (4.59) en la ecuación (4.57) obtenemos

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \quad (4.60)$$

si dividimos entre RC

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C = 0 \quad (4.61)$$

La solución de esta última ecuación se obtuvo con anterioridad y a continuación se repite

$$v_C(t) = v_{Ch} = K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.62)$$

para evaluar K usamos la condición inicial

$$v_C(0) = V_0 = K e^0 = K$$

finalmente

$$v_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.63)$$

y la corriente se obtiene

$$i_C = C \frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.64)$$

En la figura 4.27 se muestran las gráficas de las ecuaciones (4.63) y (4.64).

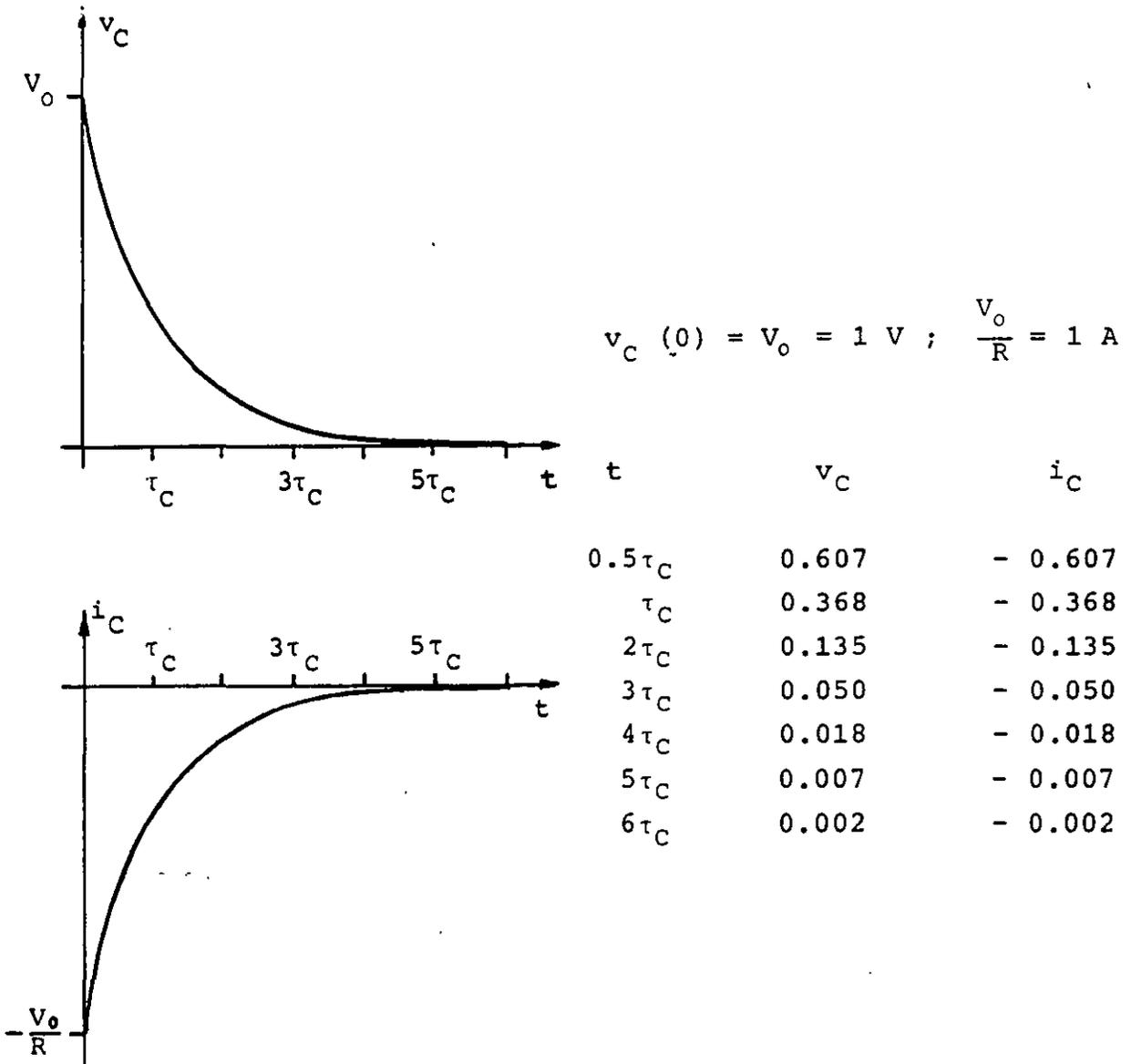


FIGURA 4.27. Gráficas del comportamiento de un circuito RC si fuente de fem y con condiciones iniciales $v_C(0) = V_0$

EJEMPLO 4.4

Para el circuito de la figura 4.28 obtenga:

- El circuito RC equivalente
- El tiempo para el cual $v_{ac} = 5.8 \text{ V}$
- La diferencia de potencial v_{ae} para $t = 0.8 \text{ ms}$
- La energía almacenada por los capacitores en $t = 0.8 \text{ ms}$

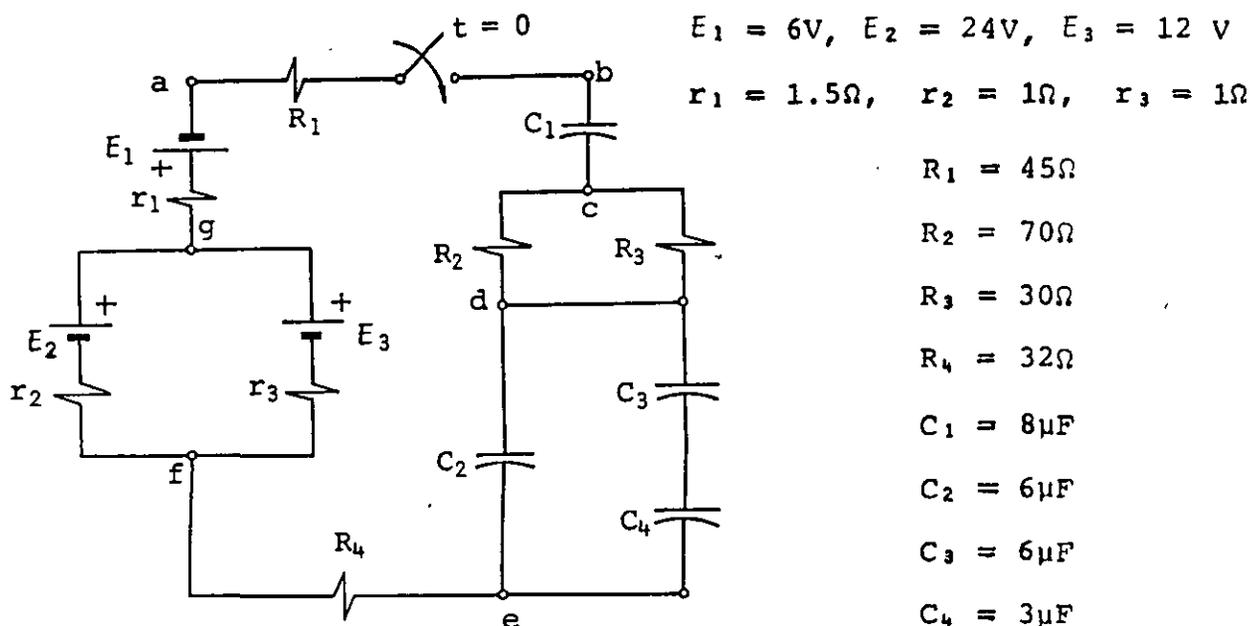


FIGURA 4.28. Circuito para el ejemplo 4.4.

SOLUCION

a) Ya que las expresiones obtenidas sólo sirven para un circuito de un capacitor, un resistor y una fuente, reduciremos el circuito a una sola fuente, un resistor y un capacitor equivalentes.

Las fuentes E_2 y E_3 están en paralelo entre los puntos g y f . Con base en la figura 4.29, donde se han desconectado las fuentes del circuito para obtener su equivalente, resulta que

$$I_1 = \frac{24 - 12}{2} = 6 \text{ A}$$

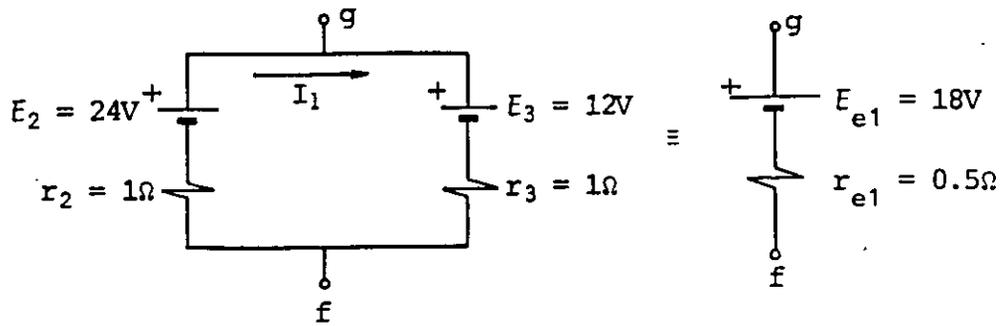


FIGURA 4.29. Reducción de dos fuentes en paralelo a una sola fuente equivalente.

En la misma figura 4.29 se observa que el valor de la fuente equivalente E_{e1} es

$$E_{e1} = v_{gf} = E_2 - r_2 I_1 = E_3 + r_3 I_1 = 18 \text{ V}$$

La resistencia equivalente r_{e1} es la resistencia entre los puntos g y f, entonces

$$r_{e1} = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3} = 0.5 \Omega$$

La fuente total equivalente entre a y f se puede obtener con base en la figura 4.30 como

$$E_e = v_{af} = E_{e1} - E_1 = 12 \text{ V}$$

$$r_e = r_1 + r_{e1} = 2 \Omega$$

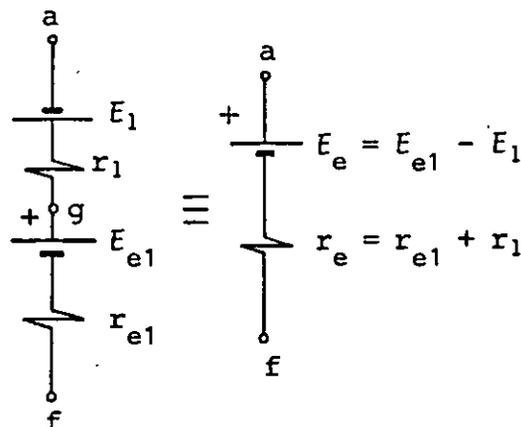


FIGURA 4.30. Reducción de fuentes en serie a una sola fuente equivalente.

El circuito de la figura 4.28 puede ser reducido al de la figura 4.31a, donde

$$R_{e1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 21 \Omega$$

$$C_{e1} = C_2 + \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} = 8 \mu\text{F}$$

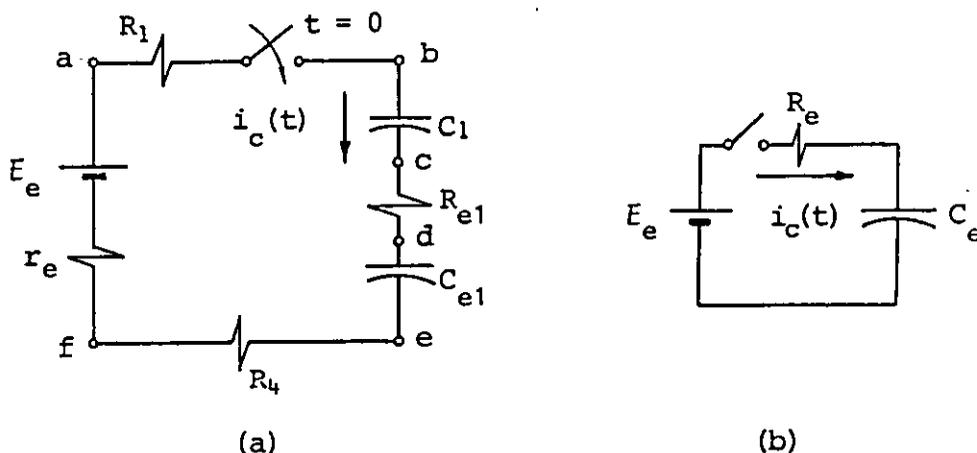


FIGURA 4.31. (a) Circuito de la figura 4.28 reducido a una sola malla; (b) circuito RC equivalente al circuito de la figura (a).

Hasta el momento se ha obtenido un circuito de una sola malla, figura 4.31a, que fácilmente se reduce al de la figura 4.31b, dado que los resistores, en cualquier parte de la malla en que se ubiquen, contribuyen a incrementar la resistencia total conectada a la fuente equivalente.

Finalmente se obtiene el circuito RC equivalente de la figura 4.31b, donde

$$R_e = R_1 + r_e + R_4 + R_{e1} = \underline{100 \Omega}$$

$$C_e = \frac{C_1 C_{e1}}{C_1 + C_{e1}} = \underline{4 \mu\text{F}}$$

$$E_e = \underline{12 \text{ V}}$$

b) De la figura 4.31a, se tiene

$$v_{ac} = v_{ab} + v_{bc}$$

donde

$$v_{ab} = R_1 i_C(t)$$

y tomando en cuenta que $C_1 = C_{e1}$, se puede escribir

$$v_{bc} = \frac{v_{C_e}(t)}{2}$$

De las ecuaciones (4.52) y (4.53), tenemos

$$v_{C_e}(t) = E_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right)$$

$$i_{C_e}(t) = \frac{E_e}{R_e} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

en las cuales

$$\tau_C = R_e C_e = 0.4 \text{ ms}$$

Por lo que

$$v_{ac} = 45 \left(\frac{12}{100} \right) e^{-2.5 \times 10^3 t} + \frac{12}{2} (1 - e^{-2.5 \times 10^3 t}) = 5.8 \text{ V}$$

$$5.8 = 6 - 0.6 e^{-2.5 \times 10^3 t}$$

$$\frac{1}{3} = e^{-2.5 \times 10^3 t}$$

$$t = \frac{\ln 3}{2.5 \times 10^3} = \underline{0.439 \text{ ms}}$$

c) Del circuito de la figura 4.31a

$$v_{ae} = E_e - (r_e + R_4) i_{Ce}(t)$$

para $t = 0.8 \text{ ms}$ tenemos que

$$v_{ae} = 12 - (2 + 32) \frac{12}{100} e^{-8/4} = \underline{11.45 \text{ V}}$$

d) Como

$$U = \frac{1}{2} C_e v_{Ce}^2$$

para $t = 0.8 \text{ ms}$

$$v_C(t) \Big|_{t = 0.8 \text{ ms}} = 12(1 - e^{-8/4}) = 10.38 \text{ V.}$$

y

$$U = \frac{1}{2} (4 \times 10^{-6}) (10.38)^2 = \underline{0.215 \text{ mJ}}$$

PROBLEMAS

4.1 Para la conexión de resistores de la figura P4.1, calcule la corriente, la diferencia de potencial y la potencia en cada resistor si $V_{ad} = 120 \text{ V}$.

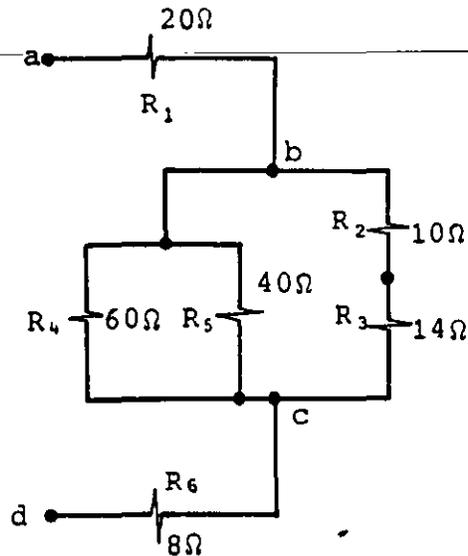
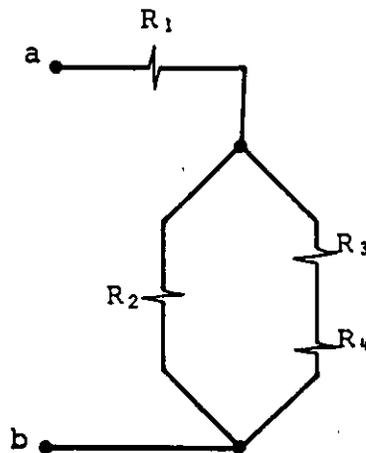


Figura P4.1

4.2 Suponga un arreglo de resistores como el de la figura P4.2, y obtenga la diferencia de potencial V_{ab} máxima que soporta el arreglo sin dañarse; indique también cuál resistor se dañaría primero por elevación excesiva en su temperatura, en caso de exceder la diferencia de potencial calculada.



$R_1 = 200\Omega$, $1/2 \text{ W}$
 $R_2 = 1.5 \text{ k}\Omega$, $1/2 \text{ W}$
 $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $1/2 \text{ W}$
 $R_4 = 2 \text{ k}\Omega$, $1/2 \text{ W}$

Figura P4.2

4.3 Para el circuito de la figura P4.3, obtenga las diferencias de potencial siguientes: V_{13} , V_{48} , V_{51} y V_{32} ; compruebe que por las dos trayectorias posibles, los resultados son los mismos; seleccione el nodo 2 como referencia y calcule el potencial en cada uno de los nodos restantes; a partir de los potenciales obtenidos, calcule nuevamente las diferencias de potencial solicitadas con anterioridad.

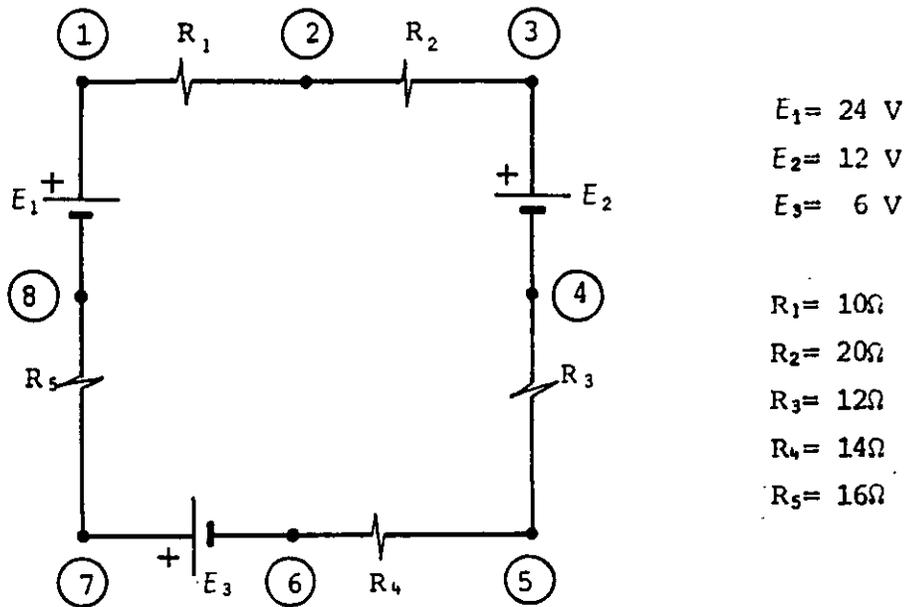


Figura P4.3

4.4 La figura P4.4 muestra un circuito en el cual se desea conocer la corriente y la diferencia de potencial en cada elemento. Resuelva el circuito por el método de mallas y verifique que al aplicar el método de nodos los resultados son idénticos; demuestre también que el valor de V_{xy} calculado por las tres trayectorias existentes es el mismo.

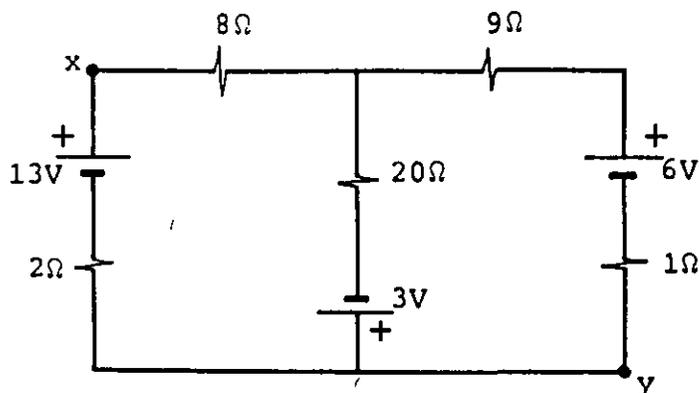


Figura P4.4

4.5 Determine la energía por segundo que está recibiendo o suministrando cada una de las fuentes de fuerza electromotriz del circuito de la figura P4.5; compruebe que la energía suministrada por las fuentes al resto del circuito, en un segundo, es igual a la energía transformada en calor en los resistores sumada a la que se almacena en las fuentes que reciben energía en el mismo lapso.

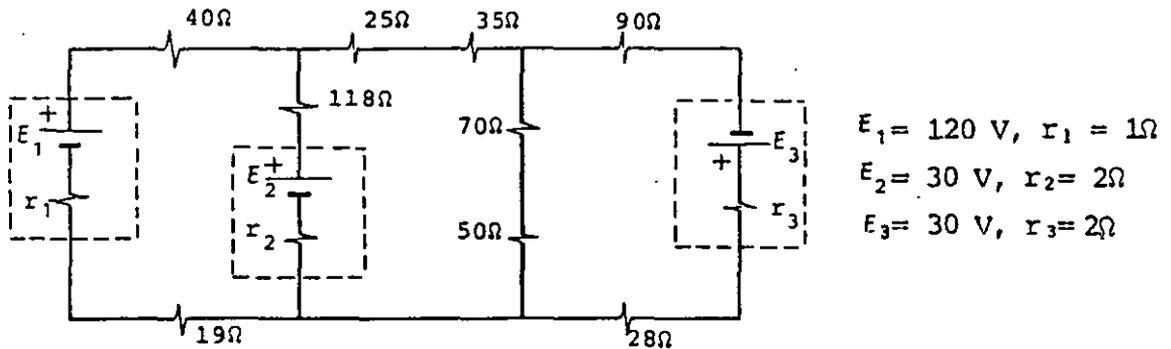


Figura P4.5

4.6 Se desea suministrar energía a un elemento resistivo $R = 1 \Omega$ y para ello se cuenta con las dos fuentes de fem de la figura P4.6. Calcule la potencia en el resistor obtenida al conectarlo a cada fuente por separado y a sus conexiones en serie y en paralelo; obtenga una fuente equivalente de la conexión en serie de las fuentes y otra de la conexión paralelo; verifique que al conectar la carga resistiva a estos equivalentes los resultados son los mismos que los obtenidos con anterioridad.

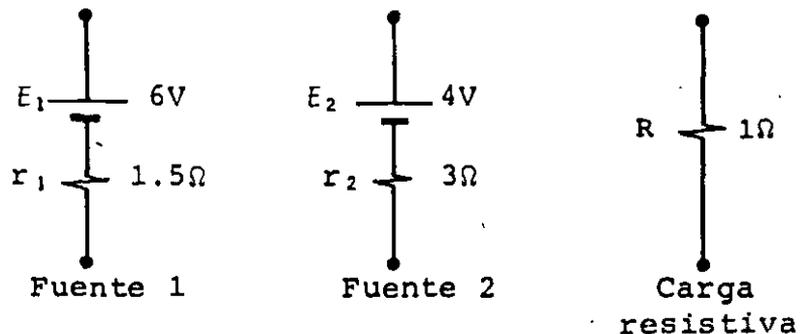


Figura P4.6

4.7 Se desea medir la corriente I_1 y la diferencia de potencial V_{xy} en el circuito de la figura P4.7; para efectuar las mediciones mencionadas se utiliza un multímetro con $8\text{ k}\Omega$ de resistencia interna como voltímetro y $4\ \Omega$ de resistencia interna como amperímetro. Calcule el error involucrado, en dichas mediciones, debido a la resistencia de los aparatos de medición.

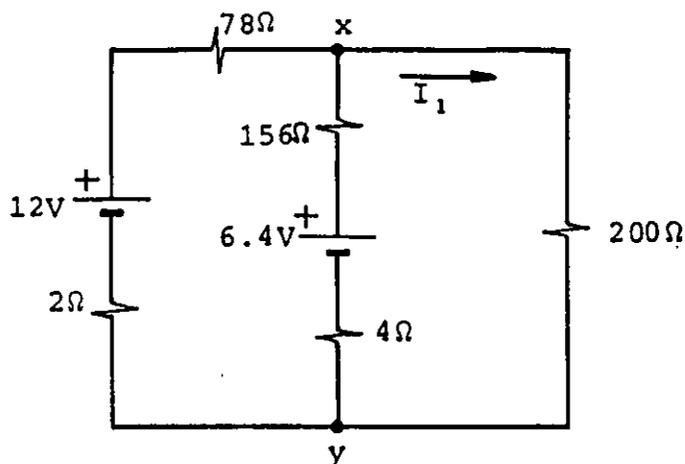


Figura P4.7

4.8 Para encender dos focos se cuenta con una batería de 12 V , la cual posee una resistencia interna de $1\ \Omega$. Si el foco $F1$ es de 3 V , 1.2 W y el foco $F2$ es de 6 V , 3.6 W , dibuje el diagrama del circuito con los resistores necesarios para que cada foco funcione al voltaje y potencia nominales. Tome en cuenta que si alguno de los focos se daña el otro debe permanecer encendido sin que su voltaje exceda 10% del voltaje nominal.

Además, calcule la resistencia y la potencia de los resistores necesarios.

4.9 Con los elementos mostrados en la figura P4.9 se desea construir un circuito con el cual se logre el funcionamiento del motor y el foco a voltaje y potencia nominales. Considere que el fusible se funde y abre el circuito cuando se excede su corriente especificada y debe proteger el foco y el motor, además el foco debe encenderse sólo cuando el motor está funcionando y apagarse cuando el motor se dañe (circuito abierto o corto circuito).

Dibuje el diagrama del circuito eléctrico necesario y calcule los valores de resistencia y potencia de los resistores R_1 y R_2 ¿Para qué corriente debe ser el fusible?

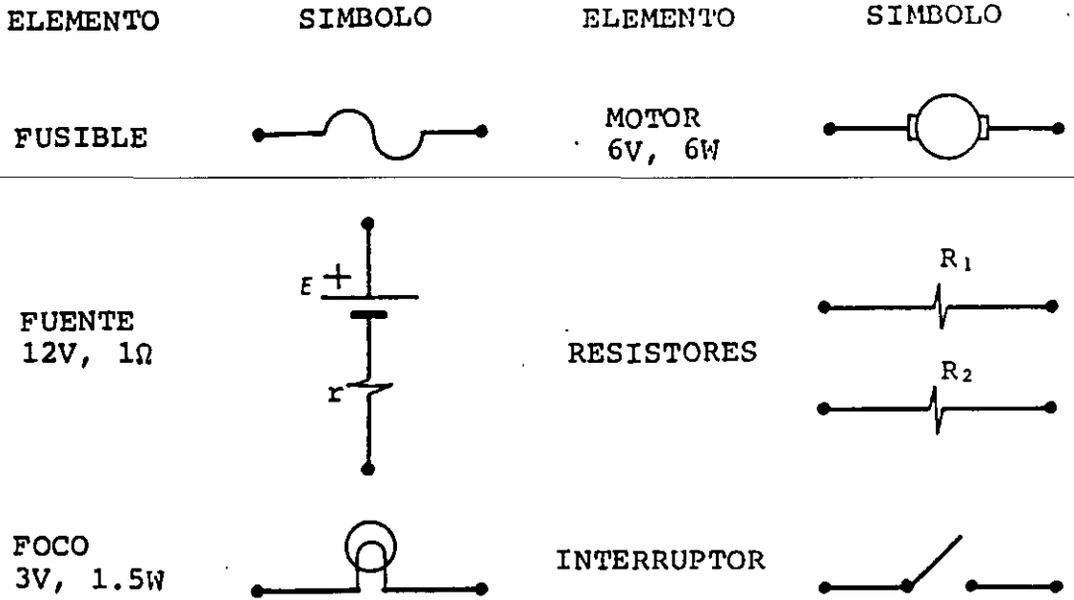


Figura P4.9

4.10 El capacitor C del circuito de la figura P4.10 está originalmente descargado. El interruptor 1 se cierra en $t = 0$ y se abre 30 s más tarde; 10 s después de abierto el interruptor 1 se cierra el 2 y permanece cerrado 20 s, al término de los cuales se abre el interruptor 2. Finalmente, 10 s después de abierto el interruptor 2, se cierra por segunda vez el 1. Dibuje las gráficas V_{ab} , V_{bd} , V_{bc} , V_{cd} , i_1 e i_2 contra t para el intervalo $0 \leq t \leq 90$ s e indique los valores de las ordenadas cada 5 segundos.

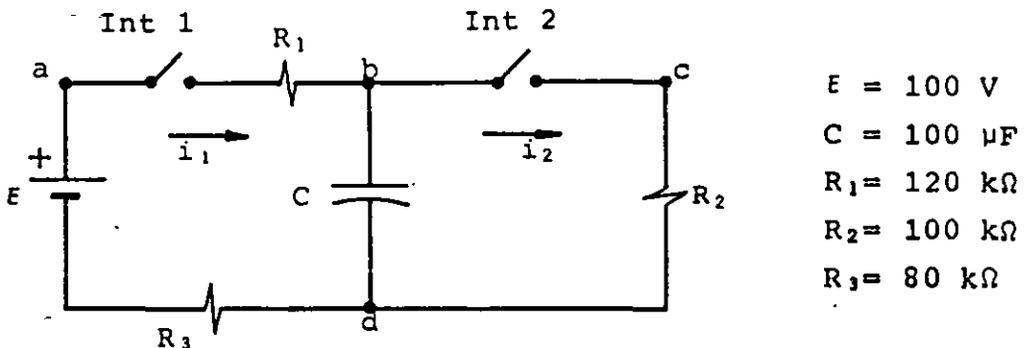
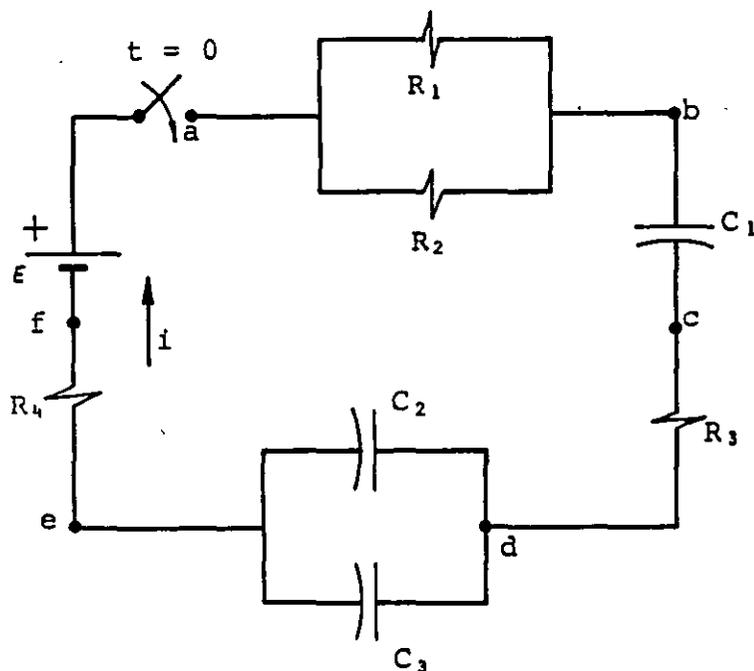


Figura P4.10

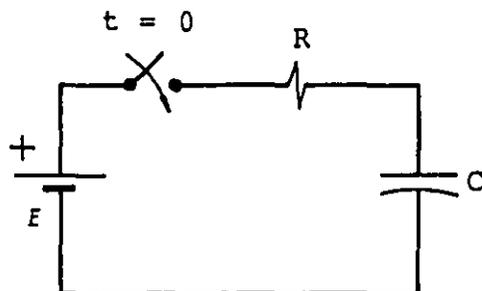
4.11 Calcule, para $t = 0.1 \text{ s}$, la diferencia de potencial V_{ac} en el circuito de la figura P4.11; considere que el interruptor se cierra en $t = 0$; y compruebe que para ese instante $E = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} + V_{de} + V_{ef}$.



$$\begin{aligned} E &= 120 \text{ V} \\ C_1 &= 6 \mu\text{F} \\ C_2 &= 1 \mu\text{F} \\ C_3 &= 2 \mu\text{F} \\ R_1 &= 60 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 40 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 16 \text{ k}\Omega \\ R_4 &= 60 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Figura P4.11

4.12 Para el circuito de la figura P4.12, suponga que el interruptor se cierra en $t = 0$ y que $V_C(0) = 0$; para el intervalo $0 \leq t \leq 2 \text{ s}$, calcule la energía almacenada en el capacitor (U_C), la energía transformada en calor en el resistor (U_R) y la energía suministrada por la fuente (U_S). Compruebe también el principio de conservación de la energía en el circuito, es decir que $U_S = U_C + U_R$.



$$\begin{aligned} R &= 10 \text{ k}\Omega \\ C &= 100 \mu\text{F} \\ E &= 100 \text{ V} \end{aligned}$$

Figura P4.12

CAPITULO 5 CAMPO MAGNETICO

I N T R O D U C C I Ó N

Con el objeto de complementar nuestro estudio del fenómeno electromagnético, en el presente tema estudiaremos los efectos producidos por cargas eléctricas móviles, movimiento que finalmente es la causa esencial del magnetismo.

Iniciaremos el estudio de esta faceta del fenómeno electromagnético partiendo de las observaciones de Hans Christian Oersted. Por medio de la expresión de la fuerza de Lorentz, obtendremos una definición formal de campo magnético con base en la cual relacionaremos dicho campo con el eléctrico.

En seguida, desarrollaremos los modelos matemáticos empleados en el cálculo de campos originados por corrientes eléctricas, al circular por conductores de formas comúnmente empleadas en la producción de campos magnéticos, y obtendremos dichos modelos a partir de las leyes de Biot-Savart y Ampere.

Al final del tema se analizarán las fuerzas de origen magnético que actúan sobre conductores que transportan corrientes y que se encuentran localizados en una región de campo magnético; incluimos en este análisis los conceptos de momento dipolar magnético y energía potencial magnética, mismos que serán de utilidad en el tratamiento de las propiedades magnéticas de las sustancias, lo cual es motivo de un tema posterior.

5.1 EXPERIMENTO DE OERSTED

Hasta el año de 1819, el estudio de la electricidad y el magnetismo estaba limitado a la electrostática y las fuerzas entre imanes, respectivamente. En este año el físico danés Hans Christian Oersted (1777-1851), observó que una corriente eléctrica que fluye

por un conductor produce un efecto tal que una brújula colocada en su cercanía modificaba su posición natural: es decir, el extremo norte de la brújula deja de apuntar hacia el Norte geográfico, y el efecto cesa al dejar de circular la corriente mencionada.

Cabe aclarar que para esta época ya se conocía el comportamiento cualitativo entre polos magnéticos (extremos de un imán), esto es: polos del mismo tipo se rechazan y polos de tipos diferentes se atraen. Por otra parte, el fenómeno observado por Oersted no pudo realizarse con anterioridad en virtud de que se desconocía la forma de producir corrientes eléctricas intensas y con suficiente duración como para observar sus efectos. Por ello las aportaciones de Aloisio Galvani y de Alessandro Volta fueron determinantes en el estudio de la electricidad.

Con ayuda de las pilas voltaicas, Oersted pudo realizar su experimento, del cual reproducimos a continuación la parte esencial.

El efecto de orientación de una brújula debida al campo magnético terrestre era un fenómeno bien conocido por los chinos desde el año 1000 de nuestra era, por esta razón la deflexión en una brújula se atribuía al mencionado campo magnético. Oersted observó una situación semejante a la mostrada en la figura 5.1.

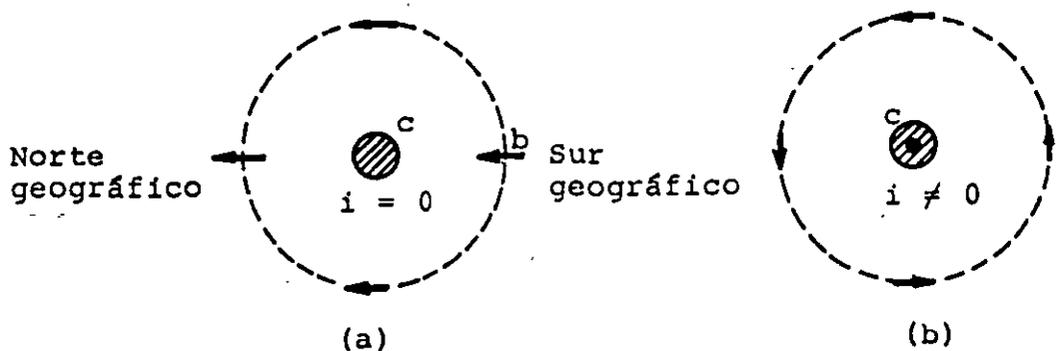


FIGURA 5.1. Experimento de Oersted: c es un conductor recto perpendicular a la hoja y b es una brújula. (a) Si la corriente en el conductor es nula, las brújulas se orientan en la dirección Norte-Sur; (b) si la corriente en el conductor sale de la hoja, las brújulas se orientan tangentes a una circunferencia concéntrica al conductor.

La explicación que Oersted dio al fenómeno fue que la corriente eléctrica debía producir un campo magnético, que superpuesto al terrestre daba por resultado la nueva orientación de las brújulas.

Con este resultado se relacionaron dos fenómenos cuyos estudios se habían mantenido desligados: el eléctrico y el magnético. En realidad dichos fenómenos son formas particulares de uno solo: el electromagnético.

A partir del anterior descubrimiento se sucedieron en forma ininterrumpida otros tan sorprendentes como el ya descrito; algunos de los cuales serán tratados posteriormente.

Como hemos visto en temas anteriores, una corriente eléctrica no es otra cosa que un movimiento de cargas; de esto se puede concluir un resultado absolutamente general: cualquier carga eléctrica en movimiento produce un campo magnético. Este resultado nos es útil también para explicar el magnetismo de los imanes naturales, como se verá en temas posteriores.

5.2 FUERZA DE ORIGEN MAGNETICO SOBRE CARGAS EN MOVIMIENTO

De manera semejante a los campos gravitatorio y eléctrico, es posible adoptar la idea de que un magneto o una carga en movimiento producen campo magnético en el espacio que les rodea.

Al colocar una carga eléctrica en reposo dentro de un campo magnético, ésta no experimentará efecto alguno, ya que la interacción magnética está íntimamente asociada al movimiento de las cargas.

Representemos dicho campo por medio de la letra B y dejemos para más adelante una definición formal de dicho campo.

En el primer tema se concibió la existencia de un campo eléctrico en un punto, cuando se colocaba una carga eléctrica en dicho punto y ésta experimentaba una fuerza de origen eléctrico, o sea, la

expresión (1.5)

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Ahora bien, en el caso del campo magnético se procede de manera semejante, con la salvedad de que en este caso se requiere como carga de prueba una carga móvil, es decir, con una velocidad \vec{v} . Si por un punto dentro de un campo magnético hacemos pasar una carga q con diferentes velocidades (\vec{v}) y realizamos las mediciones convenientes, se puede establecer la siguiente relación de proporcionalidad

$$F_m \propto v \quad (5.1)$$

La cual significa que la magnitud de la fuerza magnética que experimenta una cierta carga es proporcional a la magnitud de su velocidad. Pero además, también es factible hacer pasar por un mismo punto cargas de diferentes valores, e inclusive signos, pero todas ellas con la misma velocidad \vec{v} ; se puede establecer, en este caso, una proporcionalidad entre la magnitud de la fuerza magnética que experimenta cada una de las cargas y el valor de la misma, es decir

$$F_m \propto q \quad (5.2)$$

Es posible observar, experimentando en diferentes puntos donde existen distintos valores de campo magnético B , que sobre una carga con velocidad \vec{v} fija actúan fuerzas diferentes, de donde se puede concluir que la fuerza magnética es directamente proporcional al campo B , es decir

$$F_m \propto B \quad (5.3)$$

Combinando las expresiones (5.1), (5.2) y (5.3) se puede establecer que

$$F_m \propto q v B \quad (5.4)$$

Para hacer de la expresión (5.4) una ecuación, requerimos aún de algunos elementos adicionales. Es un hecho conocido que la fuerza y la velocidad son magnitudes de tipo vectorial, mientras que q es de tipo escalar. Para determinar la naturaleza de la magnitud del campo magnético B , analicemos lo que sucede experimentalmente.

Cuando una misma carga se hace pasar por el mismo punto dentro de un campo magnético, manteniendo constante la magnitud de su velocidad, pero variando la dirección de ésta, se observan, sobre la carga, fuerzas diferentes (en magnitud y dirección) e inclusive existe una dirección de esta velocidad para la cual la fuerza sobre q es cero, lo que también ocurre cuando la dirección de la velocidad es diametralmente opuesta.

Además, la dirección de la fuerza es siempre perpendicular a la dirección de la velocidad, lo que significa que la magnitud B tiene carácter vectorial, ya que si fuese de tipo escalar, la fuerza y la velocidad serían paralelas en cualquier punto.

Ahora bien, si la fuerza magnética F_m es proporcional al producto de dos magnitudes vectoriales (\vec{v} y \vec{B}), dicho producto deberá ser vectorial para dar por resultado una fuerza \vec{F} . Lo anterior se puede resumir diciendo que

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) concuerda perfectamente con los resultados experimentales. En la figura 5.2 se muestra la relación vectorial entre las magnitudes involucradas en la ecuación (5.5).

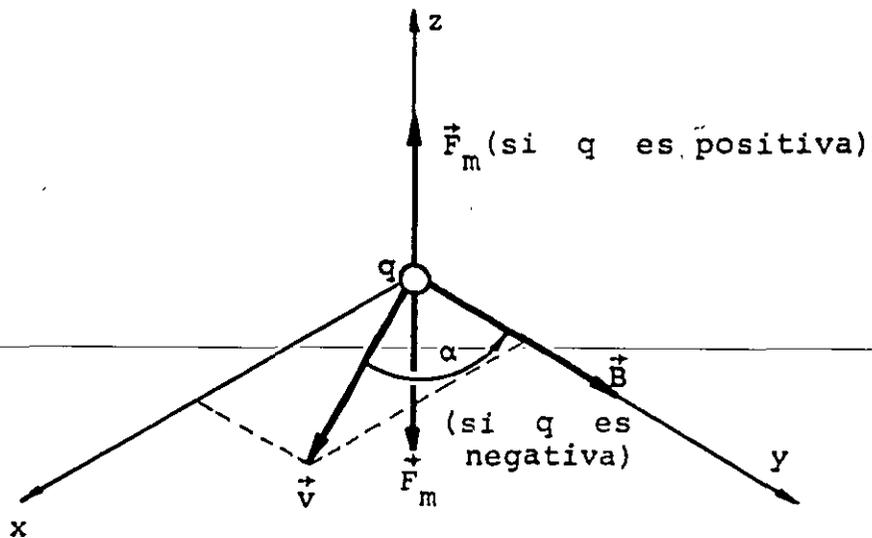


FIGURA 5.2. Relación vectorial entre \vec{F} , \vec{v} y \vec{B} para una carga q situada en el origen. Los vectores velocidad \vec{v} y campo magnético \vec{B} están contenidos en el plano xy , y \vec{F} se determina de acuerdo con la regla del producto vectorial y con el signo de la carga q .

Por nuestros conocimientos de matemáticas sabemos que se puede escribir la magnitud de la fuerza magnética \vec{F}_m como

$$|\vec{F}_m| = q |\vec{v}| |\vec{B}| \text{ sen } \alpha \quad (5.6)$$

o sea

$$F_m = q v B \text{ sen } \alpha \quad (5.7)$$

De la ecuación (5.7) se puede despejar B para conocer en qué unidades se mide

$$[B]_u = \left[\frac{F_m}{q v \text{ sen } \alpha} \right]_u$$

Es decir

$$[B]_u = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{N \cdot s}{C \cdot m} = \frac{N \cdot m \cdot s}{C \cdot m^2} = \frac{J \cdot s}{C \cdot m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2} \quad (5.8)$$

A la última combinación de unidades en el SI se le conoce como tesla (T), en honor del ingeniero norteamericano, nacido en Yugoslavia, Nicholas Tesla (1856-1943). El producto $V \cdot s$ comúnmente se conoce como weber (Wb), como homenaje al físico alemán Wilhelm E. Weber (1804-1891). De esta forma tendremos

$$[B]_u = \frac{Wb}{m^2} = T \quad (5.9)$$

De la ecuación (5.5) se pueden obtener algunas consideraciones:

- a) La relación entre fuerza magnética y campo magnético es más compleja que en el caso eléctrico.
- b) La fuerza magnética es siempre perpendicular a la velocidad \vec{v} y al campo \vec{B} . Por la perpendicularidad con \vec{v} , la fuerza magnética no realiza trabajo alguno sobre la partícula cargada, es decir, no origina cambios en la energía de la partícula, modificando la dirección de \vec{v} sin cambiar su magnitud.
- c) Como la magnitud \vec{B} debe ser de carácter vectorial en todos los puntos es necesario asociar a cada uno un vector \vec{B} , es decir, el campo magnético es un campo vectorial, también llamado función vectorial de variable vectorial.
- d) Como la fuerza \vec{F}_m depende de q , variará según la carga de que se trate, sin olvidar el efecto de su signo, como se muestra en la figura 5.2.

Si consideramos una carga q móvil en una región en la que existan un campo eléctrico y un campo magnético simultáneamente, la carga experimentará dos fuerzas, una debida al campo eléctrico y otra al campo magnético. Por esta razón es factible determinar la fuerza electromagnética, la cual será la resultante de las dos mencionadas anteriormente; combinando las expresiones (1.5) y (5.5) se obtiene

$$\vec{F}_{em} = \vec{F}_e + \vec{F}_m \quad (5.10)$$

o sea

$$\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.11)$$

La ecuación (5.11) se conoce como la fuerza de Lorentz.

5.3 DEFINICION DE CAMPO MAGNETICO

A raíz de la publicación de los resultados obtenidos por Oersted, el físico francés André Marie Ampere (1775-1836) realizó una serie de experimentos en los cuales se muestra que existen fuerzas entre conductores por los que circulan corrientes eléctricas, siendo dichas fuerzas función de las magnitudes de las corrientes (i_1 e i_2), del ángulo formado por los conductores (θ) y de la distancia existente entre éstos (r_{12}), es decir

$$F_{conds} = f(i_1, i_2, \theta, r_{12}) \quad (5.12)$$

Los resultados obtenidos por Ampere se ilustran en la figura 5.3.

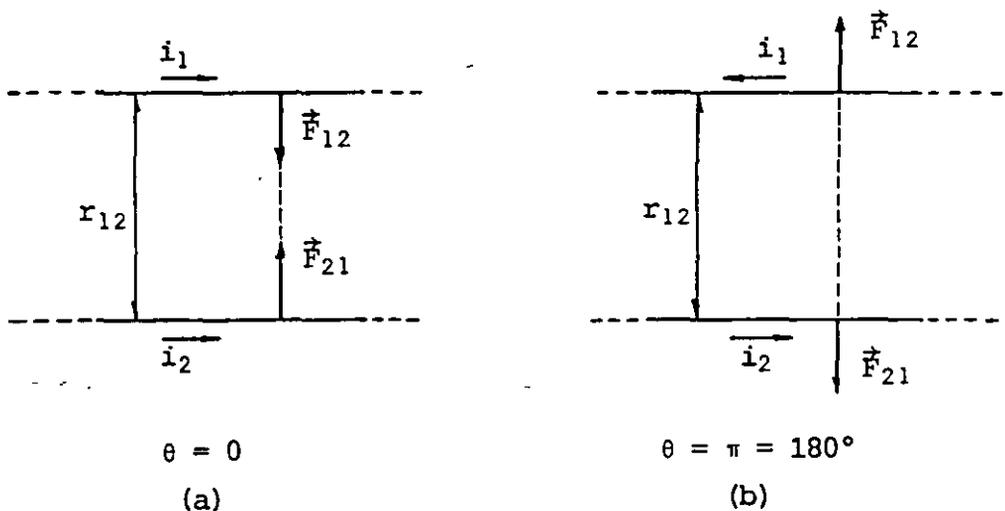


FIGURA 5.3. Resultados obtenidos por Ampere: (a) cuando los conductores forman un ángulo $\theta = 0$, se atraen y (b) cuando los conductores forman un ángulo $\theta = \pi$, se repelen.

Ampere divulgó sus experimentos y de esta publicación extractamos algunas de sus conclusiones.

Las atracciones y repulsiones observadas difieren de las fuerzas que se presentan entre cuerpos eléctricos en reposo, ya que:

- a) Cesan cuando cualquiera de las corrientes o ambas se interrumpen.
- b) En el caso electrostático, cargas del mismo signo se repelen y se atraen si son de diferentes signos; en cambio, si las corrientes van en la misma dirección se atraen y si van en dirección contraria se repelen.

Estas observaciones son razones suficientes como para considerar estas fuerzas de una naturaleza diferente, y, tomando en cuenta los experimentos de Oersted, se optó por denominarlas fuerzas de origen magnético.

Otro experimento que puede realizarse para conocer más sobre el origen y comportamiento de estas fuerzas, es el mostrado en la figura 5.4; consiste de un tubo de rayos catódicos, cuyo haz es colocado paralelamente a un conductor por el que circula corriente eléctrica. Nótese que el haz, aun al desviarse, se encuentra siempre formando un plano con el conductor.

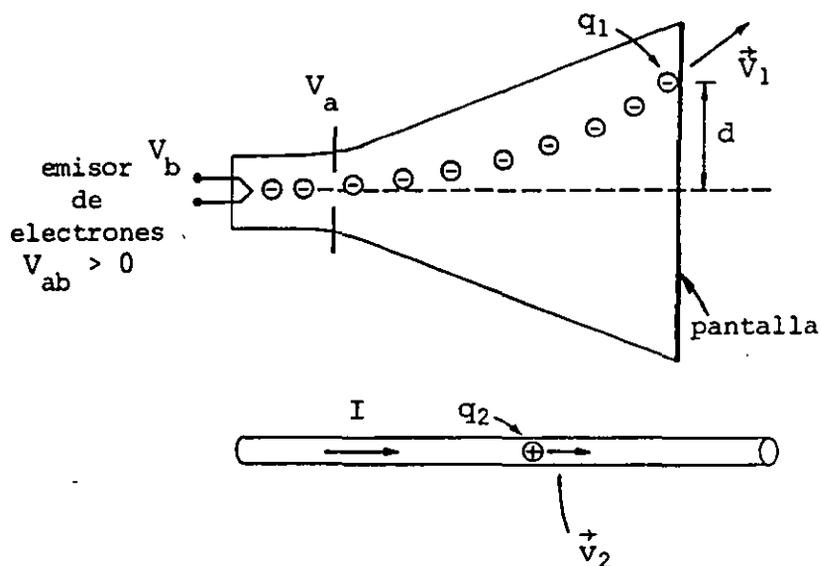
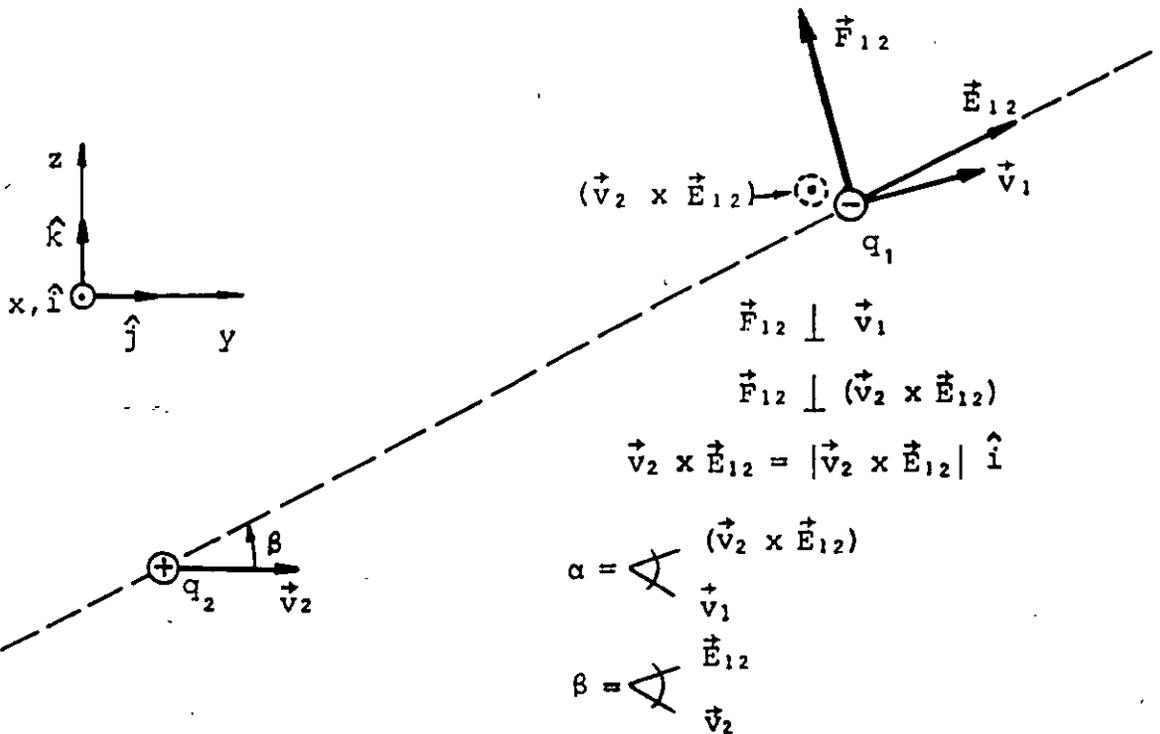


FIGURA 5.4. Experimento para mostrar la fuerza de origen magnético sobre cargas en movimiento, en un tubo de rayos catódicos.

Debido a que el haz electr3nico de la figura 5.4 es una corriente el3ctrica de direcci3n contraria a la del conductor, se explica, con base en las observaciones de Ampere, la repulsi3n observada sobre los electrones; adem3s, por efecto de esta repulsi3n, describen una trayectoria curva, origin3ndose una desviaci3n de una distancia d , observable en la pantalla del tubo.

Esta distancia d depende directamente de la corriente I y del 3ngulo que forman el haz electr3nico y el conductor e inversamente de la separaci3n entre 3stos.

Para analizar este fen3meno, consideremos dos cargas representativas, pertenecientes una al haz y otra a la corriente en el conductor: denominaremos q_1 a la carga del haz y \vec{v}_1 a su velocidad, q_2 a la carga perteneciente a la corriente I y \vec{v}_2 a su velocidad. Adem3s, sea \vec{E}_{12} el campo el3ctrico en la posici3n de la carga q_1 producido por q_2 , y \vec{F}_{12} la fuerza no electrost3tica producida sobre q_1 debida a q_2 . En la figura 5.5 se muestran las direcciones de las magnitudes antes citadas.



(a)

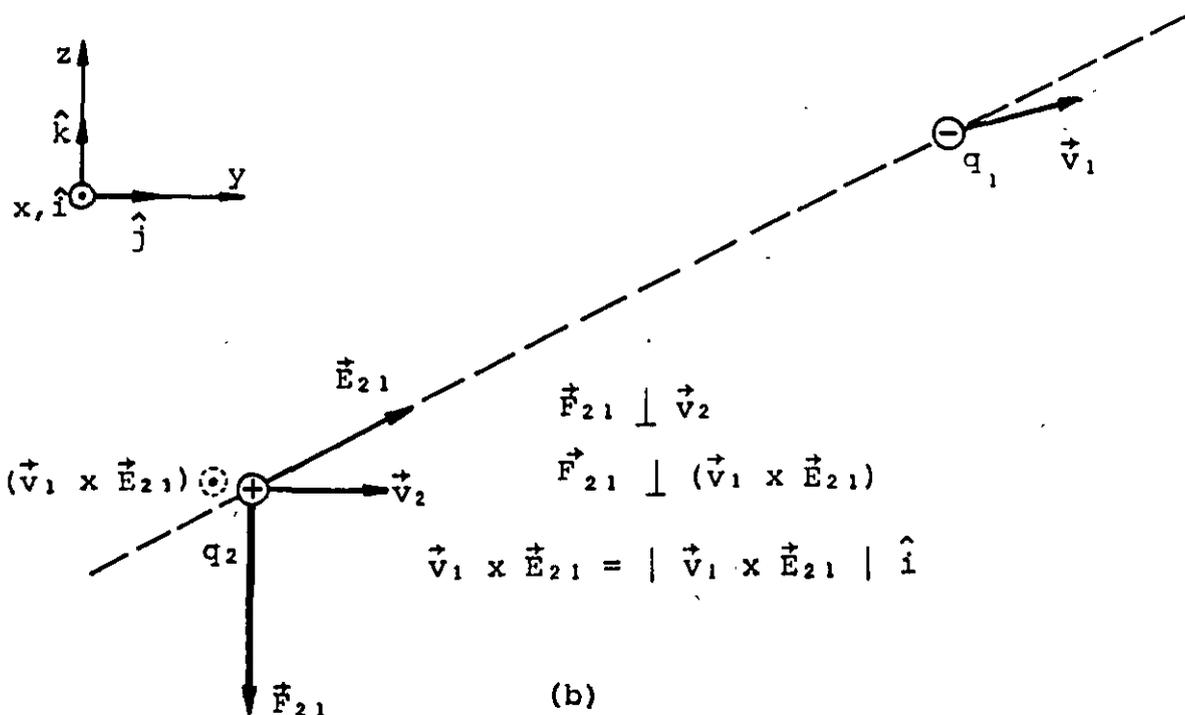


FIGURA 5.5. Interacción magnética entre dos cargas móviles. (a) Fuerza que experimenta la carga q_1 ; (b) fuerza que experimenta la carga q_2 .

Las observaciones realizadas experimentalmente se pueden resumir en la siguiente relación

$$|\vec{F}_{12}| \propto |\vec{E}_{12}| |\vec{v}_2| \sin \beta \quad q_1 |\vec{v}_1| \sin \alpha \quad (5.13)$$

Introduciendo en la expresión (5.13) una constante de proporcionalidad que satisfaga los requerimientos experimentales, se obtiene

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{1}{c^2} q_1 |\vec{v}_1| \sin \alpha |\vec{v}_2| |\vec{E}_{12}| \sin \beta \quad (5.14)$$

en la cual; c es la velocidad de la luz.

La expresión (5.14) se puede escribir también como

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{c^2} q_1 |\vec{v}_1| |\vec{v}_2 \times \vec{E}_{12}| \sin \alpha \quad (5.15)$$

y en forma vectorial

$$\vec{F}_{12} = q_1 \vec{v}_1 \times \frac{1}{c^2} (\vec{v}_2 \times \vec{E}_{12}) \quad (5.16)$$

Observamos de la figura 5.5 (a) y (b), que las fuerzas \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} no se encuentran alojadas en la misma línea de acción y por lo tanto, en general, las interacciones magnéticas no obedecen la tercera ley de Newton.

Además, el término $\frac{1}{c^2} \vec{v}_2 \times \vec{E}_{12}$ depende del valor de la carga q_2 y de su velocidad; nótese que si $\vec{v}_2 = 0$ (si q_2 estuviera estática), la carga q_1 no experimentaría la interacción magnética.

Comparando las expresiones (5.16) y (5.5), podemos dar una definición formal de campo magnético, es decir

$$\vec{B}_{12} = \frac{1}{c^2} \vec{v}_2 \times \vec{E}_{12} \quad (5.17)$$

Como al desplazarse q_2 también se desplaza el campo eléctrico que esta carga produce, es válido afirmar que un campo eléctrico que se desplaza (o que varía con el tiempo) produce un campo magnético, y la forma en que se relacionan está dada por la definición (5.17).

Cabe aclarar que la definición (5.17) es válida para velocidades (\vec{v}_2) mucho menores que la velocidad de la luz (c).

Realizando un análisis de las unidades de \vec{B} en la expresión (5.17) se tiene que

$$[B]_u = \left[\frac{1}{c^2} \vec{v}_2 \times \vec{E}_{12} \right]_u = \left[\frac{1}{c^2} \vec{v}_2 \vec{E}_{12} \text{ sen } \beta \right]_u$$

o sea

$$[B]_u = \frac{1}{\frac{m^2}{s^2}} \frac{m}{s} \frac{N}{C} = \frac{s \cdot J}{m^2 \cdot C} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{Wb}{m^2} = \text{tesla} \quad (5.18)$$

Lo cual coincide perfectamente con lo desarrollado en la expresión (5.8).

Por otra parte, si colocamos en la expresión de la fuerza de Lorentz los subíndices convenientes, resulta

$$\vec{F}_{12} = q_1 (\vec{E}_{12} + \vec{v}_1 \times \vec{B}_{12})$$

La expresión entre paréntesis es intrigante, ya que si \vec{E}_{12} y $\vec{v}_1 \times \vec{B}_{12}$ son magnitudes que se suman, ambas deben tener las mismas dimensiones y por consecuencia unidades idénticas, veamos

$$[\vec{v}_1 \times \vec{B}_{12}]_u = [v_1 B_{12} \text{ sen } \theta]_u = \frac{m}{s} T = \frac{m \text{ Wb}}{s \text{ m}^2} = \frac{1}{s} \frac{V \cdot s}{m} = \frac{J}{C \cdot m} = \frac{N \cdot m}{C \cdot m}$$

$$[\vec{v}_1 \times \vec{B}_{12}]_u = \frac{N}{C}$$

Efectivamente, $(\vec{v}_1 \times \vec{B}_{12})$ representa un campo eléctrico; en forma análoga a la definición (5.17), podemos escribir que

$$\vec{E}'_{12} = \vec{v}_1 \times \vec{B}_{12} \quad (5.19)$$

La expresión (5.19) nos indica que cuando la carga q_1 se mueve con velocidad \vec{v}_1 dentro de un campo magnético \vec{B}_{12} , esta carga experimenta un efecto equivalente al producido por un campo eléctrico \vec{E}'_{12} ; es decir, en el punto 1 existe un campo eléctrico producido por un campo magnético que se mueve o que, en general, varía con el tiempo; la relación entre dichas magnitudes es la expresión (5.19).

5.4 LEY DE BIOT-SAVART

Buscaremos ahora la forma de calcular el campo magnético producido por una corriente que fluye por un conductor. Considérese el conductor mostrado en la figura 5.6.

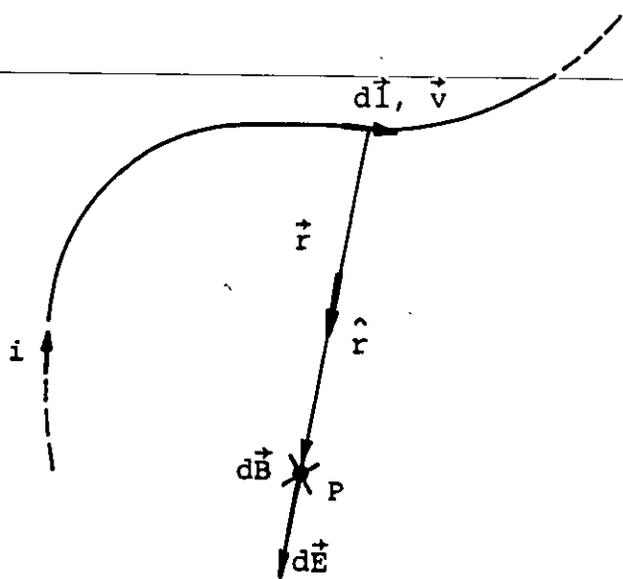


FIGURA 5.6. Conductor irregular, pero coplanar, por el cual circula la corriente i .

Donde:

$d\vec{l}$ es un vector tangente al conductor en cada punto y de igual sentido que la corriente i

\vec{v} es el vector que indica la velocidad con que se desplazan los portadores de carga positivos dentro del conductor

\vec{r} es un vector dirigido desde cada elemento ($d\vec{l}$) del conductor hacia el punto (P) en el que deseamos conocer el campo magnético

\hat{r} es un vector unitario en la dirección de \vec{r} .

De la definición de campo magnético dada en la expresión (5.17), podemos obtener su expresión diferencial.

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times d\vec{E} \quad (5.20)$$

Ahora bien, la velocidad \vec{v} , puede ser expresada como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt} \quad (5.21)$$

y el campo eléctrico $d\vec{E}$, que es producido por una dq que se mueve a velocidad \vec{v} dentro del conductor, será

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (5.22)$$

Sustituyendo las últimas dos ecuaciones en la expresión (5.20) se tiene

$$d\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{l}}{dt} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Agrupando las cantidades constantes, las variables escalares y las vectoriales, se obtiene

$$d\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\frac{dq}{dt} d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (5.23)$$

pero, por definición

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \equiv \mu_0$$

donde la constante μ_0 representa la permeabilidad magnética del vacío.

Del valor de la constante de proporcionalidad empleada en la ley de Coulomb, tenemos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi(9 \times 10^9)}$$

Sustituyendo en la definición (5.24) nos queda

$$\mu_0 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \frac{4\pi(9 \times 10^9)}{c^2}$$

y considerando que $c^2 = (3 \times 10^8)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ se tiene que

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

Pero es evidente que no es una cantidad adimensional, por lo cual obtendremos sus unidades

$$[\mu_0]_u = \left[\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \right]_u = \frac{1}{\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}}{\frac{\text{C}^2}{\text{s}} \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Finalmente se tiene

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Por otro lado, vemos que en la expresión (5.23) aparece el término $\frac{dq}{dt}$ que es precisamente la corriente I , por lo que la expresión (5.23) se puede escribir

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (5.24)$$

La expresión (5.24) se conoce como la ley de Biot-Savart.

5.5 APLICACIONES DE LA LEY DE BIOT-SAVART

Ahora emplearemos la ley de Biot-Savart para cuantificar el campo magnético producido por una corriente eléctrica al fluir por un conductor dispuesto en diversas formas.

a) Segmento de conductor recto

Consideremos que por el conductor mostrado en la figura 5.7 circula una corriente y que deseamos conocer el campo magnético producido por ésta en el punto P .

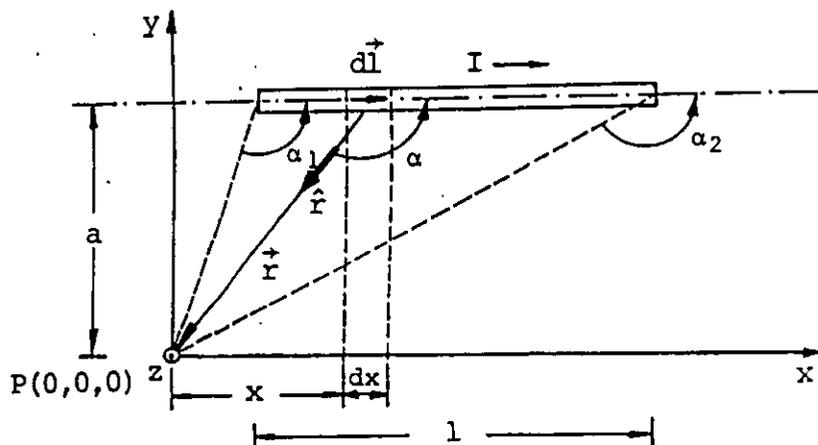


FIGURA 5.7. Campo magnético en el punto P producido por un segmento de conductor recto de longitud l .

Si dividimos la longitud del conductor en pequeños segmentos $d\vec{l}$ dirigidos de acuerdo al sentido de la corriente, observamos que cada uno de estos segmentos multiplicados por la corriente I (a los que llamaremos elementos de corriente), produce un campo magnético $d\vec{B}$ en el punto P , cuya dirección puede ser deducida al aplicar la regla de los productos vectoriales al producto indicado en la ley de Biot-Savart.

Por comodidad se ha elegido el sistema de referencia mostrado en la figura 5.7, según éste los vectores $d\vec{l}$ y \hat{r} se encuentran

en el plano xy ; el vector $d\vec{B}$ correspondiente se encuentra dirigido entrando a dicho plano, es decir, en dirección del vector unitario $-\hat{k}$. Se puede observar que para cualquier elemento de corriente (idl) del conductor mostrado, el campo magnético correspondiente $d\vec{B}$ siempre estará en la dirección antes indicada y, por lo tanto, el campo magnético total producido por el conductor recto se encontrará dirigido hacia la parte negativa del eje z .

De la ley de Biot-Savart, expresión (5.24), se observa que para conocer el campo total en el punto P se requiere de una integral, que por lo antes dicho respecto a la colinealidad de los vectores $d\vec{B}$, se ha convertido de una integral vectorial a una integral escalar, es decir

$$B = B_z = \int dB_z$$

y

$$\vec{B} = B(-\hat{k})$$

ya que

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \int dB (-\hat{k}) = B (-\hat{k})$$

por lo tanto

$$B = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2} \quad (5.25)$$

De la última integral observamos que μ_0 y 4π son constantes; a la corriente I la supondremos constante, ya que si ésta variara también variaría el valor del campo magnético en el punto P . Por otra parte, las magnitudes restantes dentro del integrando (dl , α y r) son variables, y por lo tanto habrá que expresar a dos de ellas en función de la tercera. De la figura 5.7 tenemos

$$dl = dx, \quad \frac{x}{a} \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \text{ y } \frac{r}{a} = \operatorname{csc}(\pi - \alpha) = \operatorname{csc} \alpha$$

por lo que

$$dx = -a (-\csc^2 \alpha) d\alpha = a \csc^2 \alpha d\alpha \quad (5.26)$$

$$r = a \csc \alpha \quad (5.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.26) y (5.27) en la expresión (5.25) y tomando los límites de integración adecuados, se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{a \csc^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha d\alpha}{a^2 \csc^2 \alpha}$$

Integrando

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen} \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[-\cos \alpha \right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

Finalmente

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (5.28)$$

Se concluye que el campo magnético producido por la corriente I , al circular por el segmento de conductor de longitud l , en el punto P situado a una distancia a del conductor, tiene una magnitud dada por la expresión (5.28) y está dirigido según el vector unitario $(-\hat{k})$; si se elige el sistema de referencia mostrado en la

figura (5.7), es decir

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \hat{k}$$

Consideremos ahora que el punto en el cual deseamos conocer el campo magnético se encuentra a una distancia a mucho menor que la longitud del segmento de conductor y que el punto se encuentra cerca de la mediatriz de dicho segmento, tal como se muestra en la figura 5.8.

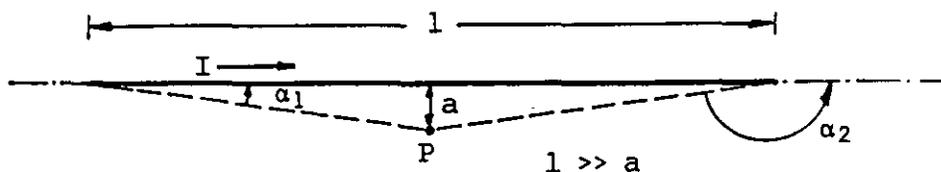


FIGURA 5.8. Segmento de conductor recto y punto que se encuentra muy cercano a dicho conductor.

Si la longitud l del conductor es mayor, diez veces o más, que la distancia del punto al conductor, y el punto se encuentra dentro de la zona media del segmento, son válidas las siguientes

aproximaciones

$$\alpha_1 = 0, \quad \cos \alpha_1 = 1$$

y

$$\alpha_2 = \pi, \quad \cos \alpha_2 = -1$$

y de la expresión (5.28) se obtiene que

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (5.29)$$

EJEMPLO 5.1

Calcular el campo magnético en el punto P producido por una corriente continua de 10 amperes; la corriente circula por un conductor recto de 3 m de longitud y el punto se encuentra localizado de acuerdo con lo mostrado en la figura 5.9.

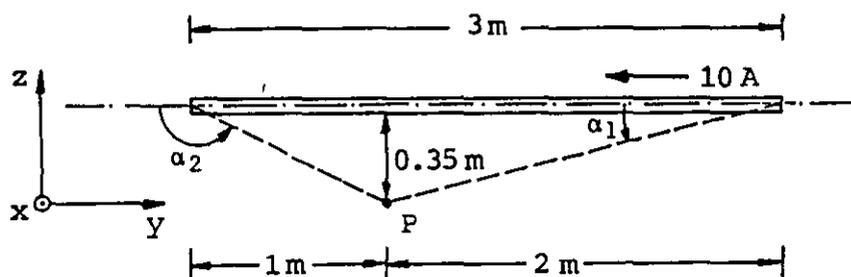


FIGURA 5.9. Campo magnético producido por un conductor recto y de longitud finita, por el cual circula una corriente eléctrica.

SOLUCION

Realizaremos el cálculo exacto empleando para este fin la expresión (5.28), en lo que refiere a la magnitud del campo magnético

en el punto en cuestión, es decir

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Sustituyendo los valores obtenemos

$$B_P = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10)}{4\pi(0.35)} \left[\frac{2}{\sqrt{(2)^2 + (0.35)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + (0.35)^2}} \right]$$

$$B_P = 2.857 \times 10^{-6} (0.985 + 0.944) = 5.511 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Ahora bien, aplicando la regla de los productos vectoriales se obtiene la dirección de este campo magnético; de la expresión (5.25) se concluye que \vec{B}_P es perpendicular al plano de la figura 5.9 y sale de la misma, es decir

$$\vec{B}_P = 5.511 \hat{i} \quad \mu\text{T}$$

Calculemos el mismo caso, pero empleando la expresión aproximada (5.29) de la cual obtenemos

$$B'_P = \frac{(4\pi \times 10^{-7})10}{2\pi(0.35)} = 5.714 \times 10^{-6} \text{ T}$$

Si calculamos el porcentaje de error en el cálculo aproximado, tendremos

$$\begin{aligned} \text{error en la magnitud } B_P &= 100 \frac{|B'_P - B_P|}{B_P} \\ &= 100 \frac{|5.714 - 5.511| \times 10^{-6}}{5.511 \times 10^{-6}} \end{aligned}$$

por lo tanto, % error en $B_P = 3.68\%$

Como puede observarse el error es apreciable; esto se debe a que en el problema planteado no se cumple que $l > 10a$, además de que el punto de interés no se encuentra dentro de la zona media del segmento conductor, por lo que en este caso, lo correcto es emplear la expresión (5.28).

b) Espira cuadrada

Del análisis realizado para el segmento de conductor recto, se puede observar que la dificultad del cálculo del campo magnético depende fundamentalmente de la ubicación del punto o puntos de interés.

En el caso de la espira cuadrada calcularemos el campo magnético para un punto contenido en el plano de la espira y para un punto fuera de dicho plano, como se muestra en la figura 5.10.

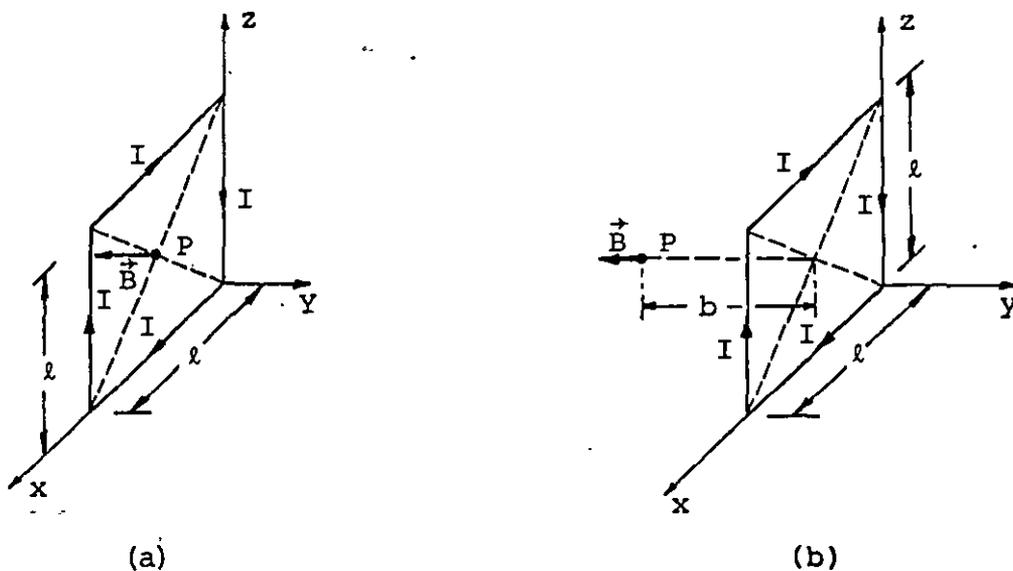


FIGURA 5.10. Campo magnético producido por una corriente I al circular por una espira cuadrada; (a) en un punto en el plano de la espira, (b) en un punto fuera del plano de la espira.

En los casos mostrados en la figura 5.10 será necesario aplicar el principio de superposición, para el cálculo del campo magnético, en el punto P , en cada caso.

Consideraremos cada lado de la espira como un segmento de conductor recto, cada uno de los cuales produce una componente de campo magnético, y la suma de dichas componentes de carácter vectorial, nos dará el campo magnético buscado.

De la Ley de Biot-Savart, expresión (5.24), se puede concluir que la dirección de las componentes producidas por los cuatro lados de la espira del caso (a) de la figura 5.10, es la misma y en dirección del vector unitario $(-\hat{j})$, por esta razón el campo magnético total estará en dicha dirección. En lo que se refiere a su magnitud, ésta será la suma de las cuatro componentes producidas por los cuatro lados de la espira, las cuales por la simetría de este caso, son iguales y de valor

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

en la cual, a representa la distancia del punto P a cada lado de la espira y los ángulos α_1 y α_2 se determinan analizando la espira en el plano xz , como se muestra en la figura 5.11.

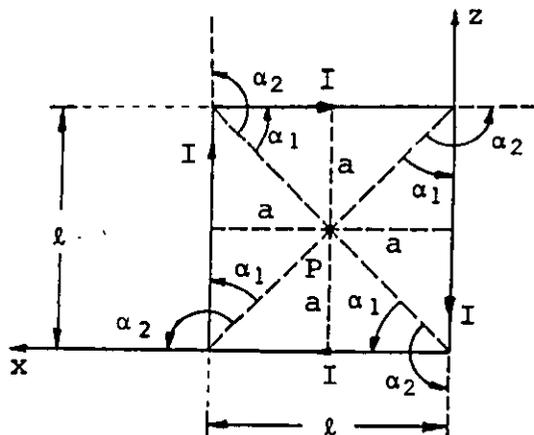


FIGURA 5.11. Espira cuadrada y los ángulos α_1 y α_2 para calcular la magnitud del campo magnético en el punto P .

De la figura 5.11, se tiene que

$$\cos \alpha_1 = \frac{\ell}{2\sqrt{(\ell/2)^2 + a^2}}$$

$$\cos \alpha_2 = -\frac{\ell}{2\sqrt{(\ell/2)^2 + a^2}}$$

y de esta forma, observando que $a = (\ell/2)$, obtenemos

$$(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \sqrt{2}$$

Entonces el campo magnético producido por un lado de la espira tendrá la magnitud siguiente

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi\ell}$$

y el campo total

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi\ell} \quad (5.30)$$

Vectorialmente, el campo magnético en el punto P de la figura 5.10 (a), será

$$\vec{B} = \frac{-2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi\ell} \hat{j} \quad [\text{T}]$$

Analizando el caso (b) de la figura 5.10 se observa que cada lado de la espira y el punto P definen un plano; el campo magnético producido por cada lado de la espira es de dirección perpendicular al plano formado por dicho lado y el punto P, de tal forma que

$$\hat{B} = \hat{\ell} \times \hat{a}$$

donde $\hat{\ell}$ es el vector unitario en la dirección del lado de la espira en cuestión, tomando en cuenta el sentido de la corriente en el conductor, y \hat{a} es el vector unitario dirigido perpendicularmente del lado de la espira al punto P.

Si llamamos 1, 2, 3 y 4, los lados de la espira, como se indica en la figura 5.12, tendremos para el lado 1

$$\hat{B}_1 = \hat{l}_1 \times \hat{a}_1$$

Como \hat{a}_1 está dirigido del centro del lado 1 al punto P, se tiene que

$$\vec{a}_1 = -\frac{\ell}{2} \hat{i} - b\hat{j}$$

y

$$\vec{a}_1 = -\left[\frac{\ell}{2a}\right] \hat{i} - \frac{b}{a} \hat{j}$$

donde

$$a = |\vec{a}| = |\vec{a}_1| = (\ell/2)^2 + b^2$$

Además

$$\hat{l}_1 = \hat{k}$$

Por lo tanto

$$\hat{B}_1 = \hat{k} \times \left[-\frac{\ell}{2a} \hat{i} - \frac{b}{a} \hat{j}\right]$$

$$\vec{B}_1 = \frac{b}{a} \hat{i} - \frac{\ell}{2a} \hat{j}$$

(5.31)

Para los lados 2, 3 y 4 de la espira se tienen

$$\hat{l}_2 = -\hat{i}, \quad \hat{r}_2 = -\frac{b}{a} \hat{j} - \frac{\ell}{2a} \hat{k}$$

$$\hat{l}_3 = -\hat{k}, \quad \hat{r}_3 = \frac{\ell}{2a} \hat{i} - \frac{b}{a} \hat{j}$$

$$\hat{l}_4 = \hat{i}, \quad \hat{r}_4 = -\frac{b}{a} \hat{j} + \frac{\ell}{2a} \hat{k}$$

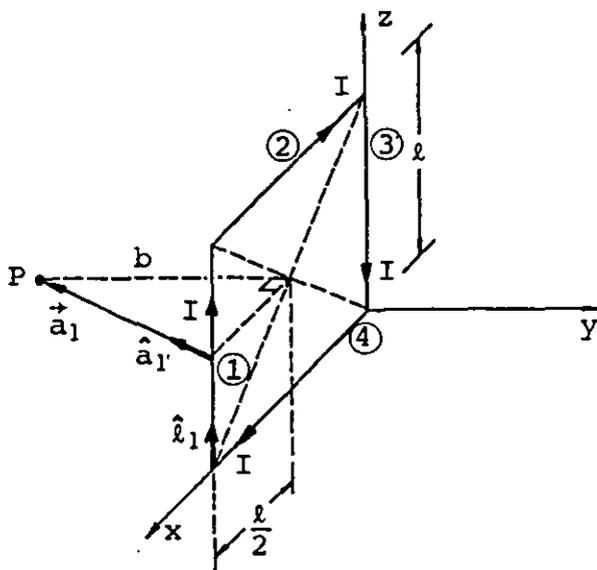


FIGURA 5.12. Numeración de los lados de la espira cuadrada y direcciones de los vectores \hat{l}_1 , \vec{a}_1 y \hat{a}_1 .

Por lo anterior, las direcciones de las componentes de campo magnético producidas por los lados 2, 3 y 4 de la espira están dadas por los vectores unitarios

$$\hat{B}_2 = \hat{l}_2 \times \hat{a}_2 = -\frac{\ell}{2a} \hat{j} + \frac{b}{a} \hat{k} \quad (5.32)$$

$$\hat{B}_3 = \hat{l}_3 \times \hat{a}_3 = -\frac{b}{a} \hat{i} - \frac{\ell}{2a} \hat{j} \quad (5.33)$$

$$\hat{B}_4 = \hat{l}_4 \times \hat{a}_4 = -\frac{\ell}{2a} \hat{j} - \frac{b}{a} \hat{k} \quad (5.34)$$

Por encontrarse el punto P en la perpendicular al plano de la espira que pasa por el centro de ésta, la distancia (a) del punto P a cada lado de la espira es la misma, y de igual manera los ángulos α_1 y α_2 , los cuales pueden ser calculados observando la figura 5.13 en la que se representa el plano formado por el lado 1 de la espira y el punto P .

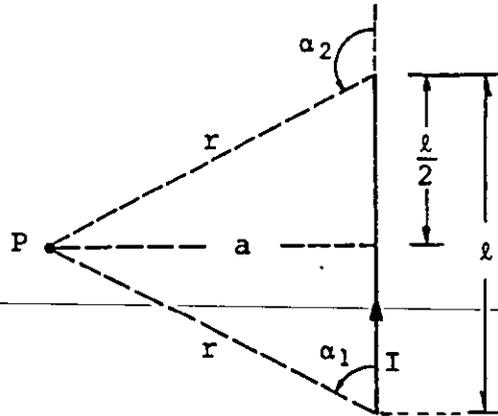


FIGURA 5.13. Plano formado por el lado 1 de la espira y el punto P

De la última figura se concluye que

$$\cos \alpha_1 = \frac{l}{2\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + a^2}}$$

y

$$\cos \alpha_2 = \frac{-l}{2\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + a^2}}$$

por lo tanto

$$(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = \frac{l}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + a^2}} = \frac{l}{r} \quad (5.35)$$

De la ecuación (5.28) obtenemos la magnitud del campo magnético producido por cualquier lado de la espira. Tomando en cuenta el resultado de la ecuación (5.35), se tiene

$$B = \frac{\mu_0 I l}{4\pi a r} \quad (5.36)$$

Al multiplicar la magnitud expresada por la última ecuación, por cada uno de los vectores unitarios de las ecuaciones (5.31) a la (5.34), obtenemos las componentes vectoriales del campo magnético producidas por los cuatro lados de la espira en el punto P. Realizando la suma vectorial de dichas componentes se obtiene el campo magnético total, es decir

$$\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

$$B_P = \frac{\mu_o I \ell}{4\pi ar} \left[\hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{B}_4 \right]$$

resultando

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_o I \ell}{4\pi ar} \left[-\frac{4\ell}{2a} \hat{j} \right]$$

Finalmente

$$\vec{B}_P = -\frac{\mu_o I \ell^2}{2\pi a^2 r} \hat{j} \quad (5.37)$$

c) Espira en forma de polígono regular

Analícemos ahora el campo magnético producido por una corriente que circula por una espira conductora en forma de polígono regular, restringiendo nuestro análisis a los puntos localizados sobre el eje de la espira, entendiendo como eje la línea perpendicular al plano de la espira que pasa por el centro de ésta. Para este fin utilizaremos la figura 5.14, de la cual se pueden concluir las siguientes relaciones.

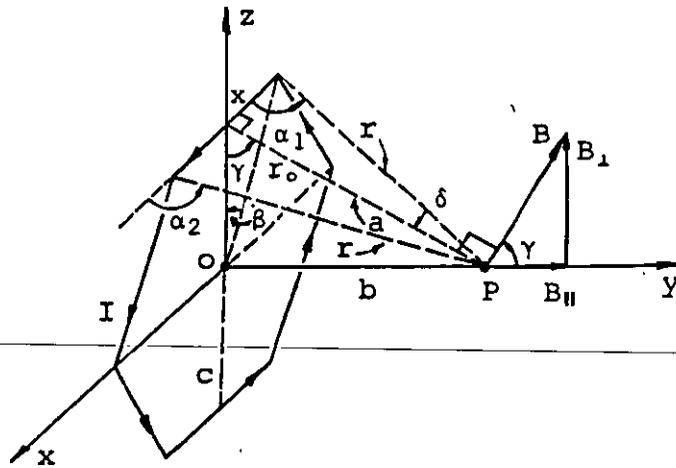


FIGURA 5.14. Espira poligonal por la que circula una corriente I , la cual origina un campo magnético en el punto P .

El campo magnético total en el punto P , (\vec{B}_P), se puede obtener a partir de la expresión (5.38), en donde \vec{B}_i es la componente de campo magnético producida por un lado de la espira poligonal y n representa el número de lados de la espira.

$$\vec{B}_P = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \quad (5.38)$$

Con el objeto de simplificar el cálculo del campo magnético en el punto P , se puede descomponer cada vector \vec{B}_i en su proyección sobre el eje de la espira, al que llamaremos $\vec{B}_{i||}$, y en la proyección de \vec{B}_i sobre una perpendicular al eje de la espira, a la que designaremos con $\vec{B}_{i\perp}$; con base en estas proyecciones, la expresión (5.38) se puede escribir en forma equivalente como

$$\vec{B}_{P||} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_{i||} \quad (5.39)$$

$$\vec{B}_{P\perp} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_{i\perp} \quad (5.40)$$

y

$$\vec{B}_P = \vec{B}_{P||} + \vec{B}_{P\perp} \quad (5.41)$$

Es posible demostrar que la sumatoria indicada en la expresión (5.40), cuando se aplica a una espira en forma de polígono regular, nos da un resultado nulo, es decir

$$\vec{B}_{P\perp} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_{i\perp} = 0 \quad (5.42)$$

Considerando este último resultado se concluye que el campo magnético en el punto P será exclusivamente en dirección paralela al eje de la espira, en dirección \hat{j} o $-\hat{j}$, dependiendo del sentido de circulación de la corriente, por lo cual

$$\vec{B}_P = \vec{B}_{P\parallel} \quad (5.43)$$

La magnitud de $\vec{B}_{P\parallel}$ se obtiene multiplicando por n (número de lados de la espira) la proyección de \vec{B}_i sobre el eje, es decir

$$B_{P\parallel} = n \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \cos \gamma \quad (5.44)$$

De la figura 5.14, se observa que

$$\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$$

$$\cos \alpha_1 = \sin \delta$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (5.44), se obtiene

$$\vec{B}_P = n \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sin \delta \cos \gamma \quad (5.45)$$

Además, se tiene

$$x = r_0 \sin \beta \quad y \quad \beta = \frac{\pi}{n}$$

por lo tanto

$$x = r_0 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$$

y

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{r_0 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{r^2 \operatorname{sen}^2 (\pi/n) + b^2 + c^2}}$$

también

$$c = r_0 \operatorname{cos} \frac{\pi}{n}$$

y

$$\operatorname{cos} \gamma = \frac{c}{a} = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{r_0 \operatorname{cos} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{b^2 + r_0^2 \operatorname{cos}^2 (\pi/n)}}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (5.45), y realizando las simplificaciones convenientes, se obtiene

$$B_{P\parallel} = \frac{n \mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{r_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\sqrt{r_0^2 + b^2}} \right] \left[\frac{\operatorname{cos} \frac{\pi}{n}}{b^2 + r_0^2 \operatorname{cos}^2 \frac{\pi}{n}} \right]$$

Finalmente

$$\vec{B}_P = \vec{B}_{P\parallel} = \frac{n \mu_0 I r_0^2}{4\pi \sqrt{r_0^2 + b^2}} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{b^2 + r_0^2 \operatorname{cos}^2 \frac{\pi}{n}} \right] \hat{j} \quad [\text{T}] \quad (5.46)$$

Comprobar que aplicando la expresión (5.46) al caso en que $n = 4$, se obtiene la expresión (5.37) y que si además $b = 0$ se obtiene la expresión (5.30).

d) Espira en forma de circunferencia

Calculemos ahora el campo magnético producido por una corriente al circular por una espira en forma de circunferencia. También en este caso nos restringiremos a los puntos localizados sobre el eje de la espira, como se muestra en la figura 5.15.

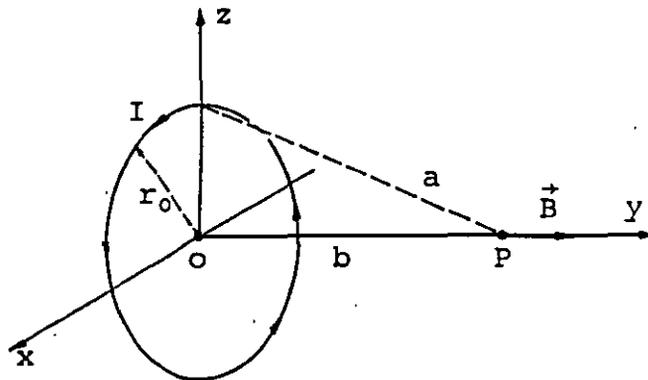


FIGURA 5.15. Campo magnético producido por una corriente al circular por una espira en forma de circunferencia.

Es posible considerar que una circunferencia es un polígono regular de un número infinito de lados; por esta razón, calcularemos el campo magnético en este caso a partir de la expresión (5.46), para lo cual será necesario determinar el límite de dicha expresión cuando n tiende a infinito, es decir

$$\vec{B}_P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \mu_0 I r_0^2}{4\pi \sqrt{r_0^2 + b^2}} \left[\frac{\text{sen } \frac{2\pi}{n}}{b^2 + r_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}} \right] \hat{j} \quad (5.47)$$

En la ecuación anterior observamos que existen varias magnitudes constantes, una sola variable y funciones que dependen de esta última, por lo que aplicando las propiedades de los límites se puede escribir

$$B_P = \frac{\mu_0 I r_0^2}{4\pi \sqrt{r_0^2 + b^2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n \text{ sen } \frac{2\pi}{n}}{b^2 + r_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{n}} \right] \quad (5.48)$$

Para calcular el límite expresado en la ecuación anterior se requiere aplicar las propiedades de los límites y la regla de L'Hospital de la siguiente forma

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\text{sen} (2\pi/n)}{1/n} \right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[b^2 + r_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \right]} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2\pi(-1/n^2) \cos (2\pi/n)}{(-1/n^2)} \right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[b^2 + r_0^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \right]} = \frac{2\pi}{b^2 + r_0^2} \quad (5.49)$$

Sustituyendo el valor encontrado para el límite cuando $n \rightarrow \infty$ en la expresión (5.48), se obtiene la magnitud del campo magnético producido por la corriente al circular por la espira mostrada en la figura 5.15. La dirección de dicho campo es la del vector unitario \hat{j} y finalmente se puede escribir

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2(r^2 + b^2)^{3/2}} \hat{j} \text{ [T]} \quad (5.50)$$

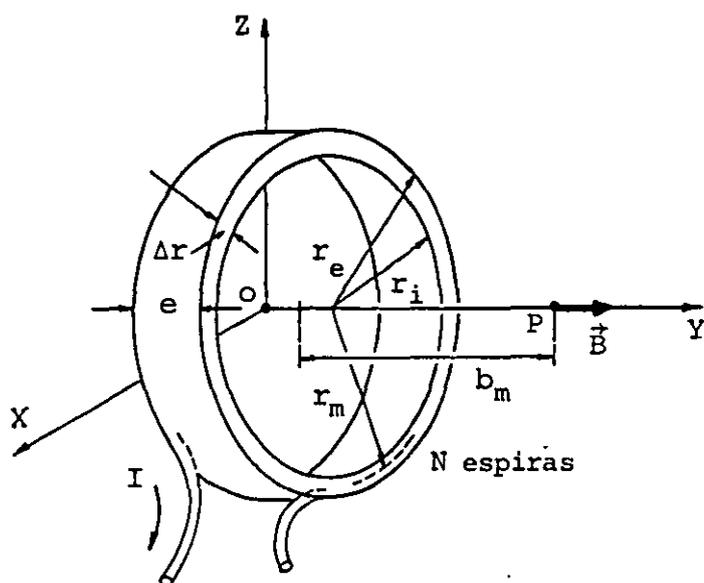
Un caso particular de la última expresión se presenta cuando el punto P es el centro de la espira ($b = 0$), con lo cual la magnitud del campo magnético en dicho punto resulta

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 r_0} \text{ [T]} \quad (5.51)$$

Comprobar que el campo magnético producido por una corriente de 10 A, al circular por una espira de radio de 5 cm, como la mostrada en la figura 5.15, en un punto sobre el eje de la espira situado a 20 cm del centro, tiene un valor de $1.793 \hat{j} \text{ [\mu T]}$. Además, comprobar que si el punto de interés fuera el centro de dicha espira, el campo magnético sería de $1.257 \times 10^{-4} \hat{j} \text{ [T]}$.

e) Bobina

La bobina es un dispositivo de alto interés práctico, ya que rara vez se utiliza una sola espira para producir un campo magnético. Identificaremos como bobina aquel conjunto de espiras formadas por un conductor, necesariamente con un aislamiento en su superficie, cuya diferencia entre los radios exterior e interior (Δr) y cuyo espesor sean mucho menores que el radio medio de la bobina, tal como se muestra en la figura 5.16.



r_m = radio medio
 r_e = radio exterior
 r_i = radio interior
 $\Delta r = r_e - r_i$
 e = espesor

FIGURA 5.16. Bobina que produce un campo magnético en el punto P debido a la corriente I.

Si las condiciones expresadas se cumplen, es decir si $\Delta r \ll r_m$ y $e \ll r_m$, entonces es posible calcular el campo magnético en el punto P en forma bastante aproximada, empleando la expresión (5.50) con algunas modificaciones, ya que dicha expresión es válida cuando se tiene una sola espira. Realizando las sustituciones convenientes, el campo magnético producido por una corriente I al fluir en una bobina de devanado uniforme, como la mostrada en la figura 5.16, se obtendría como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I r_m^2 N}{2(r_m^2 + b_m^2)^{3/2}} \hat{j} \text{ [T]} \quad (5.52)$$

Se puede observar que la ecuación (5.52) equivale a decir que el campo magnético en el punto P se debe a N espiras, todas ellas de radio r_m cuyo centro se encuentra a una distancia b_m del punto de interés; de esta observación se puede comprender el carácter aproximado de dicha ecuación.

f) Solenoide

El elemento más comúnmente empleado para producir un campo magnético, a base de una corriente eléctrica, es el solenoide, el cual está formado por conductor devanado o enrollado en forma helicoidal sobre un núcleo. A medida que las espiras así formadas se encuentren más cercanas, el campo producido en su interior, es decir en el núcleo, será de mayor uniformidad. Con el objeto de aclarar estas ideas veamos la figura 5.17.

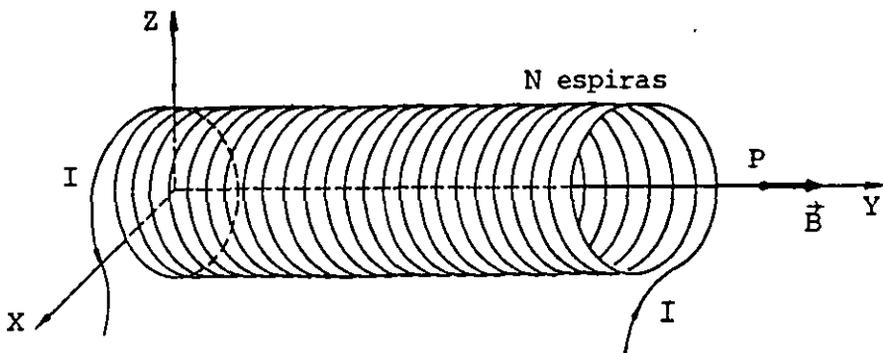


FIGURA 5.17. Campo magnético producido en el punto P debido a la circulación de la corriente I por el solenoide.

Calcularemos el campo magnético que produce una corriente al fluir por un solenoide, analizando exclusivamente los puntos sobre su eje. Para realizar este estudio, consideremos la sección longitudinal de solenoide mostrada en la figura 5.18.

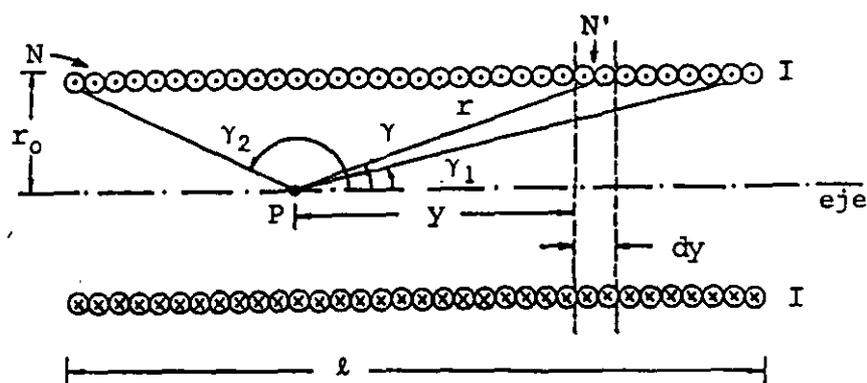


FIGURA 5.18. Corte longitudinal de un solenoide de N espiras.

De la ecuación (5.50) se tiene la forma de calcular el campo magnético producido por una espira circular en el punto P , es decir

$$B = \frac{\mu_0 I r_0^2}{2(r_0^2 + y^2)^{3/2}}$$

Si dividimos el solenoide de longitud l y N espiras, en pequeños segmentos de longitud dy que contengan un número N' de vueltas, se puede considerar que cada segmento de solenoide produce una componente de campo de valor

$$dB = \frac{N' \mu_0 I r_0^2}{2(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5.53)$$

donde

$$N' = \frac{N dy}{l}$$

o sea

$$dB = \frac{N dy}{l} \frac{\mu_0 I r_0^2}{2(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5.54)$$

Integrando la expresión (5.54) obtenemos la magnitud del campo magnético producido en el punto P, es decir

$$B_P = \int dB = \frac{\mu_0 I N r_0^2}{2\ell} \int_0^\ell \frac{dy}{(r_0^2 + y^2)^{3/2}} \quad (5.55)$$

De la figura 5.18, se puede escribir que

$$y = r_0 \operatorname{ctg} \gamma$$

$$dy = -r_0 \operatorname{csc}^2 \gamma d\gamma$$

$$B_P = \frac{\mu_0 I N r_0^2}{2\ell} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{-r_0 \operatorname{csc}^2 \gamma d\gamma}{(r_0^2 + r_0^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma)^{3/2}}$$

y empleando algunas identidades trigonométricas se obtiene

$$B_P = \frac{\mu_0 I N}{2\ell} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} -\operatorname{sen} \gamma d\gamma$$

e integrando

$$B_P = \frac{\mu_0 I N}{2\ell} (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) \quad (5.56)$$

Por medio de la expresión (5.56) es posible evaluar la magnitud del campo magnético en un punto cualquiera del eje del solenoide, conociendo sus dimensiones, la corriente que produce dicho campo y, por supuesto, la ubicación del punto de interés.

Cuando la longitud ℓ de un solenoide es mucho mayor que su radio r_0 , ($\ell \geq 10 r_0$), aquél se conoce como solenoide largo. Si en este caso deseamos conocer el campo magnético en puntos interiores localizados en la zona media del solenoide, es posible obtener una aproximación de la expresión (5.56) tomando en cuenta las siguientes consideraciones

$$\gamma_1 \rightarrow 0 \quad , \quad \cos \gamma_1 \rightarrow 1$$

y

$$\gamma_2 \rightarrow \pi \quad , \quad \cos \gamma_2 \rightarrow -1$$

Incluyendo estos resultados en la expresión (5.56), obtenemos una ecuación aplicable a los solenoides largos

$$B_c = \frac{\mu_0 I N}{\ell} \quad (5.57)$$

EJEMPLO 5.2

Obtener el campo magnético para diversos puntos sobre el eje de un solenoide largo de longitud $\ell = 12 r_0$, donde r_0 es el radio del solenoide, e I es la corriente que circula por el mismo; también dibujar una gráfica que muestre la variación de la magnitud del campo para dichos puntos.

SOLUCION

En este cálculo emplearemos la expresión (5.56) y nos auxiliaremos de la figura 5.19, en la que se muestran algunos puntos de interés localizados sobre el eje.

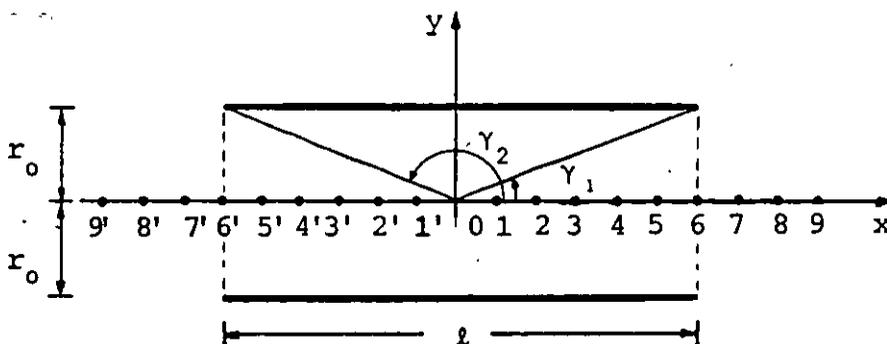


FIGURA 5.19. Solenoide largo ($\ell = 12 r_0$).

Sustituyendo la expresión (5.57) en la (5.56), tenemos que

$$B_P = \frac{B_C}{2} (\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2) \quad (5.58)$$

Aplicando esta última ecuación para los puntos mostrados en la figura 5.19, se obtienen los siguientes resultados.

PUNTO	$\cos \gamma_1$	$\cos \gamma_2$	$ \vec{B} $
0	0.986	-0.986	0.986 B_C
1	0.981	-0.990	0.986 B_C
1'	0.990	-0.981	0.986 B_C
2	0.970	-0.992	0.981 B_C
2'	0.992	-0.970	0.981 B_C
3	0.949	-0.994	0.971 B_C
3'	0.994	-0.949	0.971 B_C
4	0.894	-0.995	0.945 B_C
4'	0.995	-0.894	0.945 B_C
5	0.707	-0.996	0.851 B_C
5'	0.996	-0.707	0.851 B_C
6	0.000	-0.000	0.498 B_C
6'	0.997	0.000	0.498 B_C
7	-0.707	-0.997	0.145 B_C
7'	0.997	0.707	0.145 B_C
8	-0.894	-0.997	0.052 B_C
8'	0.997	0.894	0.052 B_C
9	-0.949	-0.998	0.025 B_C
9'	0.998	0.949	0.025 B_C

La gráfica pedida aparece en la figura 5.20.

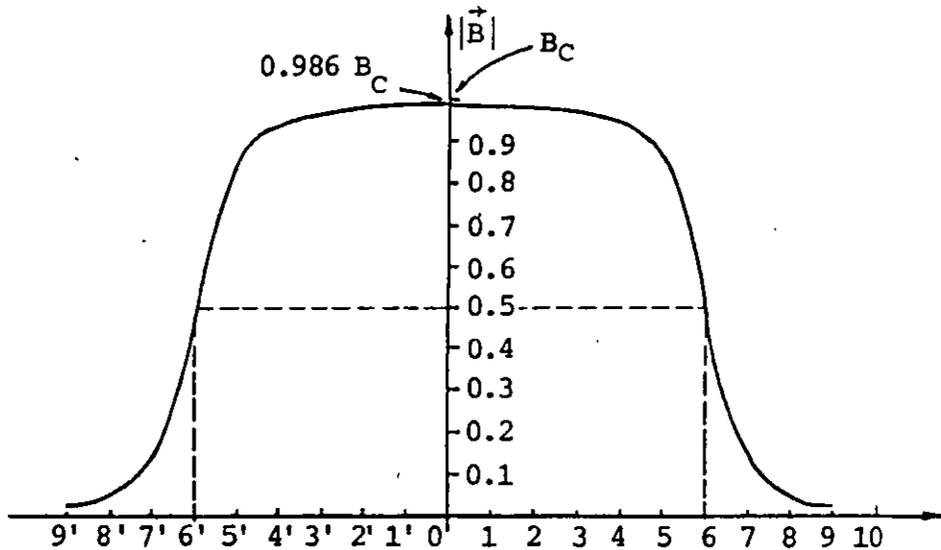


FIGURA 5.20. Variación de la magnitud del campo magnético en puntos del eje de un solenoide largo.

En la figura 5.20 observamos que la magnitud del campo magnético para los puntos del eje del solenoide, localizados en el tercio central, se mantiene prácticamente constante; a partir de ahí dicha magnitud decrece en forma considerable y en los extremos (puntos 6 y 6' de la figura), se tiene una magnitud de aproximadamente $0.5 B_C$. El campo magnético para puntos exteriores al solenoide se hace despreciable a muy corta distancia del mismo.

5.6 LEY DE AMPERE

En el subtema 1.13 se mencionó que los conceptos circulación y flujo son aplicables a los campos vectoriales. En virtud de que la inducción magnética \vec{B} representa un campo vectorial, es factible evaluar para éste las propiedades mencionadas.

Consideremos un conductor recto y muy largo por el cual circula la corriente I . Emplearemos en este análisis las trayectorias ℓ_1 y ℓ_2 mostradas en la figura 5.21.

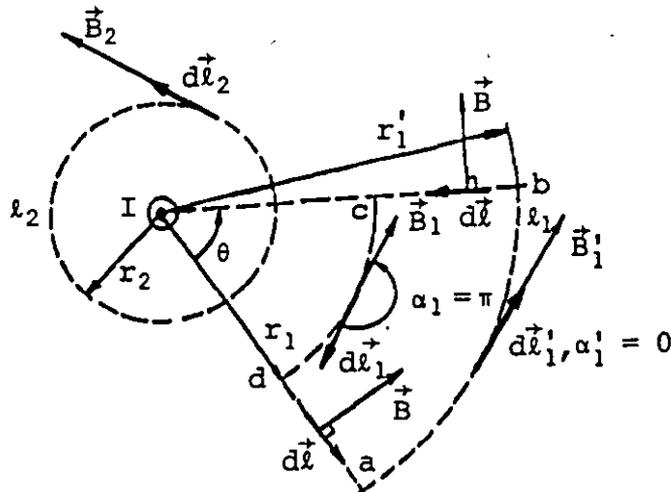


FIGURA 5.21. Conductor recto y largo perpendicular al plano de la hoja y cuya corriente se dirige hacia el lector. También se muestran las trayectorias l_1 y l_2 .

Evaluemos la circulación de \vec{B} a lo largo de la trayectoria cerrada l_1 ; de la expresión (1.79), se tiene

$$C_b = \oint_{l_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{5.59}$$

Como se demostró en el tema 1, esta integral puede ser descompuesta en varias integrales, de acuerdo con la trayectoria de integración elegida, de tal forma que

$$C_b = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{B} \cdot d\vec{l} \tag{5.60}$$

Las integrales segunda y cuarta son nulas, ya que para todos los puntos de los segmentos \overline{bc} y \overline{da} se tiene que la inducción magnética es perpendicular al vector $d\vec{l}$, así queda

$$C_b = \int_a^b \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

es decir

$$C_b = \int_a^b B_1' dl_1' \cos\alpha_1' + \int_c^d B_1 dl_1 \cos\alpha_1$$

Además, como $\alpha_1' = 0$, $\alpha_1 = \pi$ y las magnitudes B_1' y B_1 se mantienen constantes a lo largo de los arcos concéntricos \widehat{ab} y \widehat{cd} respectivamente, se tiene que

$$C_b = B_1' (\widehat{ab}) - B_1 (\widehat{cd})$$

la cual se puede escribir como

$$C_b = B_1' r_1' \theta - B_1 r_1 \theta \quad (5.61)$$

Ahora bien, de la expresión (5.29), podemos escribir las magnitudes de campo magnético como

$$B_1' = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1'} \quad \text{y} \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$$

Sustituyendo en la expresión (5.61), nos resulta

$$C_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1'} r_1' \theta - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} r_1 \theta = 0$$

O sea que la circulación de \vec{B} a lo largo de la trayectoria ℓ_1 resulta nula.

Evaluemos ahora la circulación de \vec{B} a lo largo de la trayectoria ℓ_2

$$C_b = \oint_{\ell_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B_2 d\ell_2 \cos\alpha_2$$

En la última expresión, B_2 permanece constante para toda la trayectoria ℓ_2 y $\alpha_2 = 0$, por lo cual

$$C_b = B_2 \oint d\ell_2 = B_2 (2\pi r_2)$$

Como el campo magnético producido por una corriente en un conductor recto y largo se cuantifica con la expresión (5.29), podemos escribir

$$C_b = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} (2\pi r_2) = \mu_0 I$$

El último resultado significa que la circulación de \vec{B} a lo largo de la trayectoria ℓ_2 , resulta igual a μ_0 veces la corriente que cruza el área limitada por la trayectoria ℓ_2 , misma que de aquí en adelante denominaremos corriente concatenada.

Este es un resultado general, que se puede aplicar al caso de la trayectoria ℓ_1 , en la cual, por no concatenar ninguna corriente, nos da por resultado que la circulación sea nula. A la ecuación que relaciona la circulación de \vec{B} con la corriente neta concatenada se le conoce como ley de Ampere en forma integral, y se representa

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_N \quad (5.62)$$

donde

$$I_N = \sum_{j=1}^n I_j$$

Recordemos que la corriente eléctrica es, matemáticamente hablando, el flujo de la magnitud vectorial denominada densidad de corriente (\vec{J}), entonces, de la expresión (3.12) se tiene

$$I = \phi_j = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

Combinando esta última ecuación con la (5.62) se obtiene que

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad (5.63)$$

Aplicando al primer miembro de la ecuación anterior el teorema de Stokes, ecuación (1.87), resulta

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} \quad (5.64)$$

Igualando los primeros miembros de las expresiones (5.63) y (5.64)

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

es decir

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.65)$$

A la ecuación (5.65) se le conoce como ley de Ampere en forma diferencial. Se observa que en el caso del campo magnético, en general, el rotacional de \vec{B} es diferente de cero, por lo que se puede afirmar que el campo magnético es un campo no conservativo y no se puede definir un potencial magnético en el mismo sentido en el que se hizo para el campo electrostático.

5.7 ESQUEMAS DE CAMPO MAGNETICO

Como hemos visto en secciones anteriores, al aplicar la ley de Biot-Savart, obtenemos el campo magnético en un punto de interés. Aplicando dicha ley a un conjunto de puntos en torno al conductor en cuestión, es factible obtener una idea bastante aproximada a la realidad, de cómo varía el campo magnético en una región.

Para este tipo de representaciones se utilizan las líneas de inducción magnética, las cuales poseen las siguientes características:

- a) Se inician en un polo magnético norte y se dirigen hacia un polo magnético sur.
- b) Son líneas continuas, de tal forma que la tangente a una línea en un punto, nos da la dirección del campo magnético en ese punto.
- c) Las líneas se dibujan en cantidad proporcional a la magnitud del campo magnético que representan.

A continuación se muestran los esquemas de campo magnético de conductores de uso común.

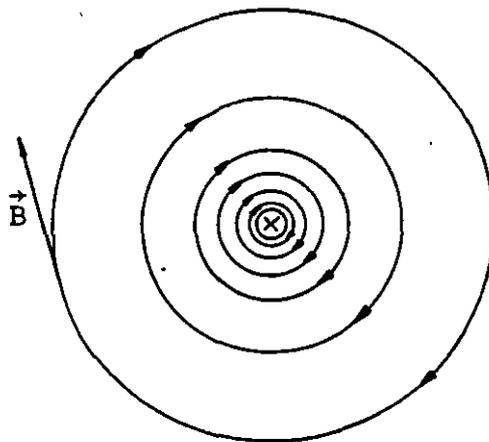


FIGURA 5.22. Campo magnético en torno a un conductor recto y largo, con corriente entrando al plano de la figura.

Observando la figura 5.22 se puede concluir una regla práctica y sencilla para determinar la dirección de las líneas de inducción magnética originadas por la circulación de una corriente a través de un conductor; dicha regla se conoce como *la regla de la mano derecha* y se expresa como sigue: se toma el conductor con la mano derecha; con el dedo pulgar se apunta hacia donde fluye la corriente (sentido convencional) y la dirección de los dedos restantes nos indica la dirección de las líneas de \vec{B} , tal como se muestra en la figura 5.23.

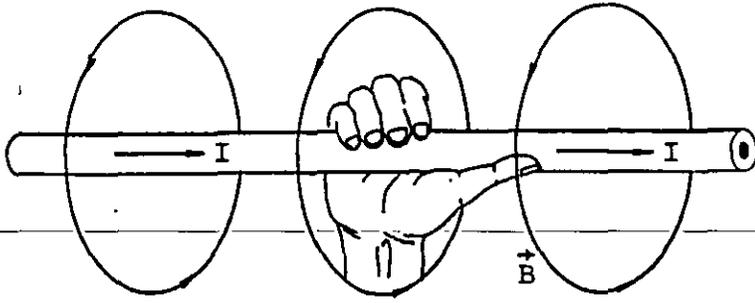


FIGURA 5.23. Esquema que muestra la forma de aplicar la regla de la mano derecha en la determinación de la dirección del campo magnético producido por I .

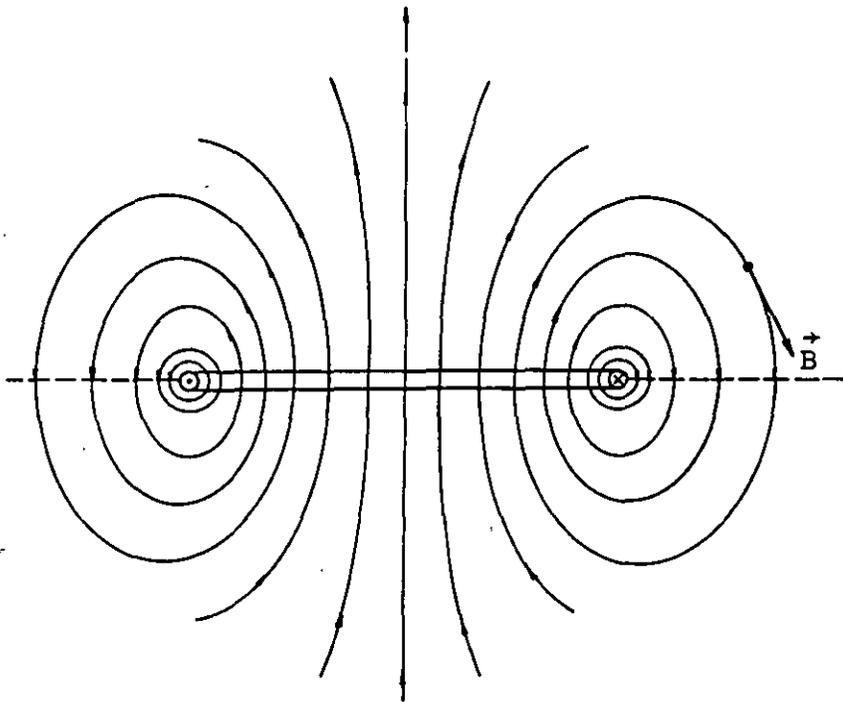


FIGURA 5.24. Campo magnético en el plano de corte de una espira circular.

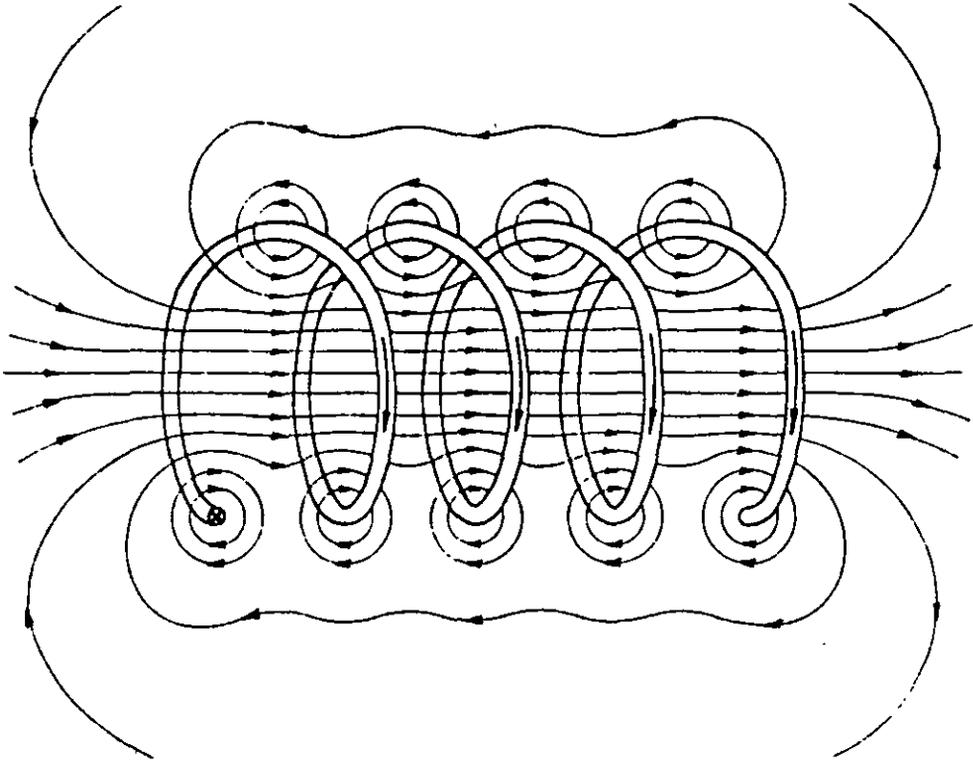


FIGURA 5.25. Campo magnético de un solenoide de espiras separadas.

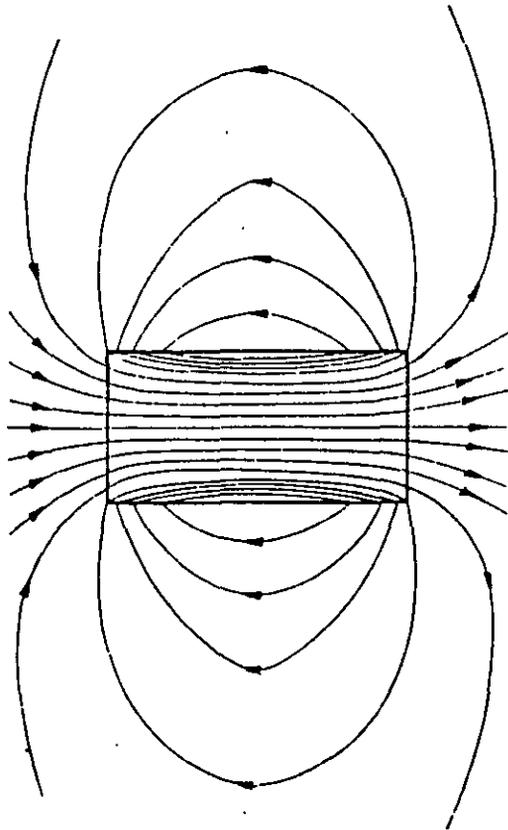


FIGURA 5.26. Campo magnético producido por un solenoide.

5.8 APLICACIONES DE LA LEY DE AMPERE

La utilidad de la ley de Ampere, expresión (5.62), estriba en su aplicación en el cálculo del campo magnético producido por corrientes eléctricas. Aunque es una ley de validez general, para campos magnéticos estáticos, su aplicación a casos prácticos se restringe a los que por sus características de simetría permiten elegir una trayectoria de integración por medio de la cual se evalúa con facilidad la integral correspondiente. Utilizando esta ley calcularemos algunos de los casos típicos.

a) Campo magnético de un conductor recto y largo

Aplicando la ley de Ampere, calcularemos el campo magnético en un punto interior (1) y en otro exterior (2) al conductor, cuya sección se muestra en la figura 5.27.

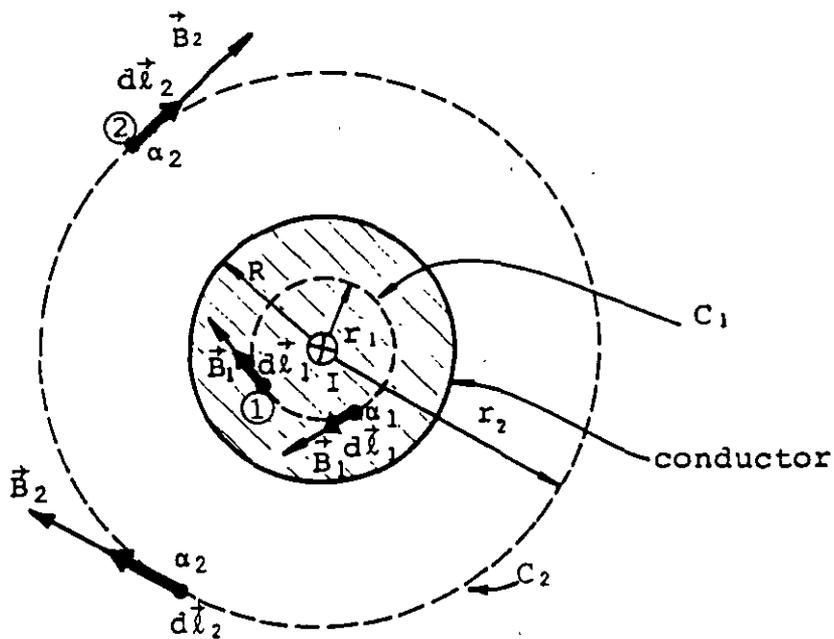


FIGURA 5.27. Campo magnético en el interior y exterior de un conductor recto y largo, perpendicular al plano de la hoja y con una corriente entrando a la misma.

Para el cálculo del campo magnético en el punto 1 se utilizará la trayectoria de integración denominada C_1 . Si la densidad de corriente \vec{J} es uniforme, la corriente I se puede obtener como

$$I = J \pi R^2 \quad (5.66)$$

Ahora bien, la corriente neta concatenada por la trayectoria C_1 será el producto de la densidad de corriente y el área limitada por C_1 , es decir

$$I_N = J(\pi r_1^2) = I \frac{r_1^2}{R^2} \quad (5.67)$$

De la ley de Ampere se tiene que

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} B_1 d\ell_1 \cos \alpha_1 = \mu_0 I_N \quad (5.68)$$

De la figura 5.27 se observa que, para todos los puntos de la trayectoria C_1 , el ángulo α_1 vale cero y, por lo tanto

$$\cos \alpha_1 = 1$$

Como la trayectoria de integración elegida es coaxial al conductor, la magnitud de B en toda la trayectoria es constante y la expresión (5.68) se puede escribir, sustituyendo el valor de I_N , como

$$B_1 \int d\ell = \mu_0 I \frac{r_1^2}{R^2} \quad (5.69)$$

La integral de la ecuación (5.69) es igual al perímetro definido por la trayectoria de integración, es decir

$$B_1 (2\pi r_1) = \mu_0 I \frac{r_1^2}{R^2}$$

y en general, para cualquier punto interior, la magnitud del campo será

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad r \leq R \quad (5.70)$$

En la determinación del campo magnético para un punto exterior al conductor, como el punto 2, se utilizará la trayectoria de integración C_2 mostrada en la figura 5.27; aplicando la ley de Ampe_{re} obtenemos

$$\oint_{\ell} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\ell} B_2 dl_2 \cos\alpha_2 = \mu_0 I_N$$

De la figura mencionada, se puede concluir que $\alpha_2 = 0$ y que $B = \text{cte}$ para todos los puntos de la trayectoria de integración C_2 , por lo cual, la expresión anterior quedará

$$B_2 \oint_{\ell} dl_2 = \mu_0 I_N = \mu_0 I$$

es decir

$$B_2 (2\pi r_2) = \mu_0 I$$

de donde

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

y en general, para cualquier punto exterior al conductor se tendrá

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r \geq R \quad (5.71)$$

La expresión (5.71) concuerda con el resultado obtenido por medio de la ley de Biot-Savart, o sea, la ecuación (5.29).

Además, puede observarse que se tendría el mismo campo magnético en el punto exterior si la corriente I circulara en un filamento metálico coincidente con el eje, o si circulara por un cilindro hueco de pequeño espesor, en cuyo caso el campo magnético de un punto del interior de dicho cilindro sería nulo; algo semejante al campo eléctrico en el interior de un conductor cargado, cuando se aplica la ley de Gauss.

En la figura 5.28 se muestra una gráfica del comportamiento de B al variar el radio r , tanto para puntos interiores como exteriores al conductor cilíndrico sólido.

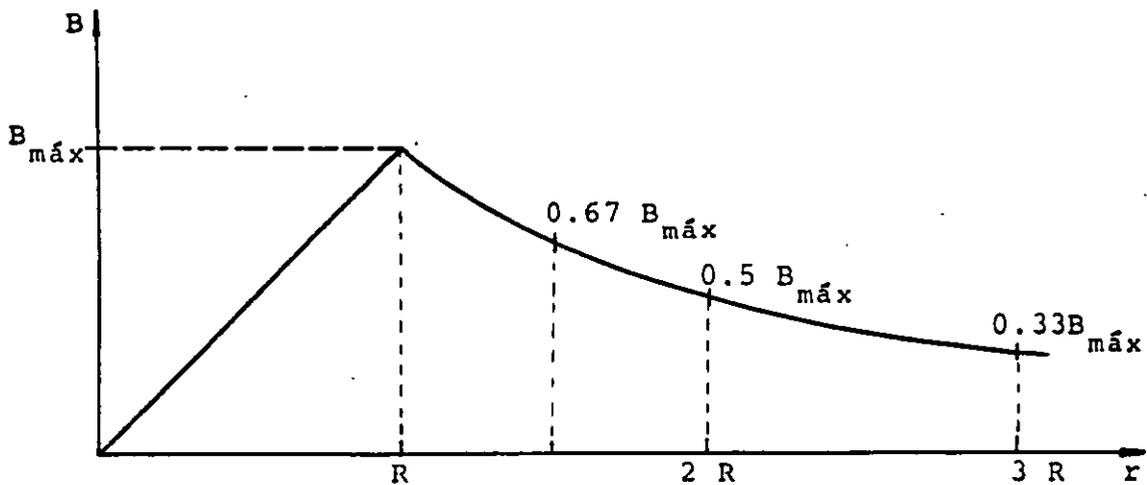


FIGURA 5.28. Variación de B en función de la distancia del punto de interés al eje del conductor cilíndrico sólido.

b) Solenoide largo

En este inciso calcularemos el campo magnético producido por una corriente al circular por un solenoide largo, para este fin consideremos la sección de solenoide mostrada en la figura 5.29; hemos elegido en este caso la trayectoria de integración C_1 mostrada en dicha figura, ya que deseamos conocer el valor del campo magnético en el punto P . La dirección de las líneas de \vec{B} se puede determinar aplicando la regla de la mano derecha.

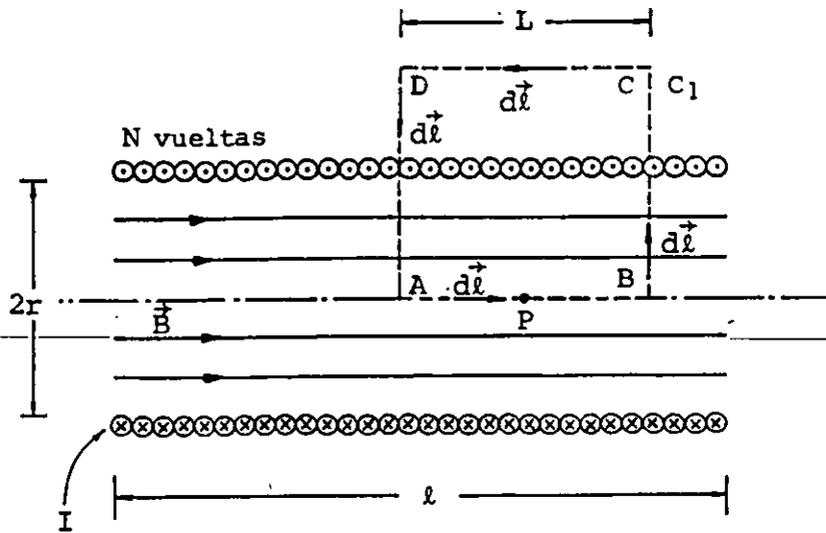


FIGURA 5.29. Sección longitudinal de un solenoide largo.

Al aplicar la ley de Ampere, expresión 5.62, a la trayectoria C_1 , se obtiene

$$\int_A^B \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_N \quad (5.72)$$

Para facilitar la evaluación de las integrales de la expresión anterior resulta conveniente establecer algunas consideraciones.

El campo magnético en el interior del solenoide es uniforme, esto es, todos los puntos interiores tienen un campo magnético de igual dirección y magnitud.

El campo magnético en el exterior del solenoide es despreciable en comparación con el del interior.

De acuerdo con esto, la expresión (5.72) se reduce a

$$\int_A^B B \, dl \cos \alpha_1 = \mu_0 I_N$$

ya que las integrales en los tramos BC y DA son nulas en virtud de que en una parte de cada uno de estos tramos de trayecto-

ria, el campo \vec{B} es perpendicular a los vectores $d\vec{l}$, y en la otra parte, el campo es despreciable.

Por esta última razón, la integral en el tramo CD es despreciable en comparación con la integral en el tramo AB.

De la figura 5.29 se observa que $\alpha_1 = 0$, por lo que $\cos \alpha_1 = 1$, y la última expresión se puede escribir de la siguiente forma

$$B \int_A^B dl = B L = \mu_0 I_N \quad (5.73)$$

Ahora bien, se acostumbra designar con la letra n el cociente del número de vueltas (N) entre la longitud del solenoide, es decir

$$n = \frac{N}{L} \quad (5.74)$$

Por otra parte, el término I_N nos representa la corriente neta concatenada por la trayectoria de integración (C_1), la cual será igual a N' veces la corriente I , donde N' es el número de vueltas enlazadas por la misma trayectoria de integración, con lo cual

$$I_N = N' I = \frac{N}{L} L I = n L I \quad (5.75)$$

Sustituyendo el último resultado en la expresión (5.73) y despejando el campo B se obtiene

$$B = \mu_0 n I \quad (5.76)$$

expresión equivalente a la que resulta de la aplicación de la ley de Biot-Savart para puntos interiores localizados en la zona media de un solenoide largo, expresión (5.57).

c) Toroide de sección transversal rectangular

Hasta este momento hemos visto que los resultados obtenidos con la aplicación de la ley de Biot-Savart y con el empleo de la ley de Ampere, coinciden. En este inciso calcularemos el campo mag-

nético producido por una corriente al circular por un enrollamiento toroidal, como el que se muestra en la figura 5.30. Para este cálculo lo más conveniente es emplear la ley de Ampere dada la simetría de esta forma de enrollamiento.

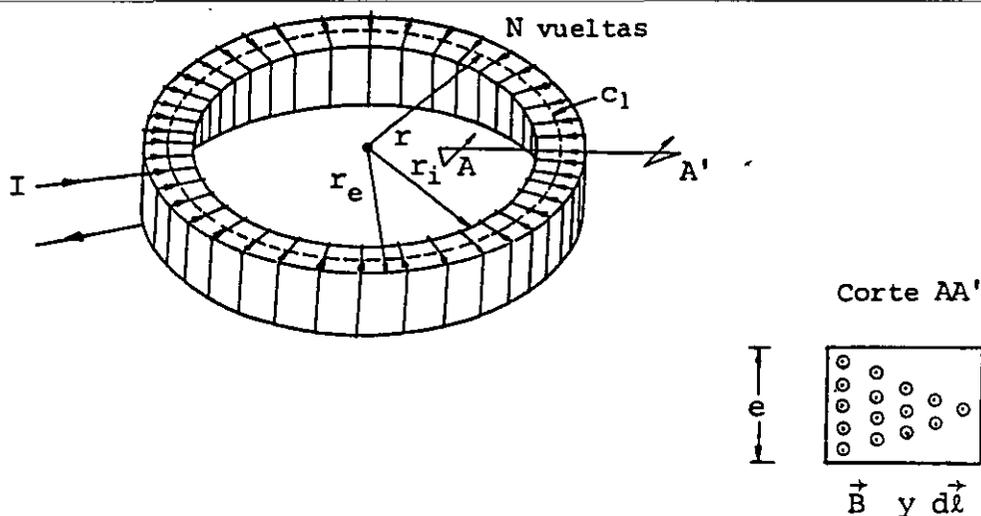


FIGURA 5.30. Toroide de sección transversal rectangular. En el corte AA' se muestran las líneas de inducción de \vec{B} (\odot).

Un toroide se puede formar si se unen cara a cara los extremos de un solenoide, doblando este último hasta formar una circunferencia; por esta razón resulta comprensible que el campo magnético en el exterior del toroide sea nulo, ya que las líneas de inducción magnética quedan confinadas en el interior.

Para aplicar la ley de Ampere utilizamos la trayectoria de integración C_1 mostrada en la figura 5.30. Esta trayectoria en forma de circunferencia, de radio r , se elige coaxial con el toroide y por esta razón se puede observar que los vectores \vec{B} y $d\vec{l}$ son colineales en todos los puntos de la trayectoria, además de que la magnitud del campo magnético permanece constante por la simetría del dispositivo.

Por todo lo anterior, al aplicar la expresión (5.62), se obtiene

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B \, d\ell \cos\alpha_1 = B \oint d\ell = B(2\pi r) = \mu_0 I_N \quad (5.77)$$

Ahora bien, la corriente neta concatenada por la trayectoria de integración es igual a N veces I , con lo que la última expresión queda, despejando la magnitud del campo magnético

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2\pi r} \quad r_i < r < r_e \quad (5.78)$$

En la expresión (5.78) se destaca la proporcionalidad inversa existente entre la magnitud del campo magnético (B) y el radio del toroide (r). Este hecho se representa cualitativamente en el corte transversal mostrado en la figura 5.30, en el que se muestra una mayor densidad de líneas de campo magnético en la zona de radio menor (radio interno r_i) que en la zona de radio mayor (radio externo r_e). Esta misma expresión puede ser utilizada para el cálculo del campo magnético producido por un toroide de sección transversal en forma de polígono regular, cuyo apotema (a) sea mucho menor que el radio interior (r_i) del toroide, es decir, $r_i \geq 10a$; cabe resaltar que cuando se cumple la condición anterior se tiene un campo magnético aproximadamente uniforme en la sección del toroide.

5.9 FLUJO DE LA INDUCCION MAGNETICA

En diversos problemas de electromagnetismo se requiere evaluar el flujo de \vec{B} a través de un área determinada. De la expresión (1.49), la cual recordamos

$$\phi_c = \iint_s \vec{c} \cdot d\vec{A}$$

se obtiene la forma de calcular el flujo de cualquier campo vectorial; por lo tanto, para la inducción magnética \vec{B} se tiene

$$\phi_b = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (5.79)$$

Aplicaremos la expresión (5.79) en el cálculo del flujo de \vec{B} en algunos casos comunes.

a) Flujo debido a un conductor recto y largo

Consideremos las superficies mostradas en la figura 5.31; evaluaremos el flujo a través de las mismas si por el conductor circula una corriente constante de valor I .

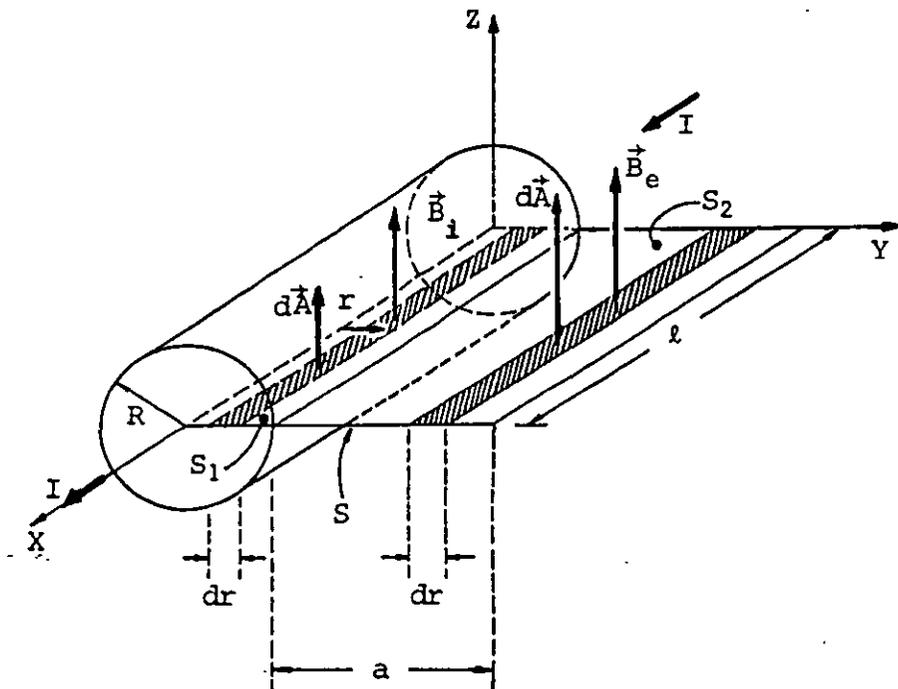


FIGURA 5.31. Segmento de un conductor recto y largo, y superficies (S_1 y S_2) para evaluar el flujo magnético.

En la figura 5.31 se observa que la superficie S se extiende radialmente a lo largo del conductor. Dicha superficie se ha dividido en dos partes, una interior al conductor S_1 y otra exterior al mismo S_2 . Aplicando la expresión (5.79) se tiene

$$\phi_b = \iint_{S_1} \vec{B}_i \cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{B}_e \cdot d\vec{A}$$

es decir

$$\phi_b = \iint_{S_1} B_i dA \cos\alpha_1 + \iint_{S_2} B_e dA \cos\alpha_2 \quad (5.80)$$

De la figura 5.31 se puede concluir que los ángulos α_1 y α_2 son iguales a cero, el elemento de área es igual a ℓdr y las magnitudes de los campos magnéticos B_i y B_e son funciones de la distancia al eje del conductor (r), las cuales se encuentran definidas por las expresiones (5.70) y (5.71) respectivamente; tomando en consideración todo esto, la expresión (5.80) se puede escribir

$$\phi_b = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi R^2} \int_0^R r dr + \frac{\mu_o I \ell}{2\pi} \int_r^{R+a} \frac{dr}{r}$$

e integrando

$$\phi_b = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi R^2} \left[\frac{R^2}{2} \right] + \frac{\mu_o I \ell}{2\pi} \ell n \frac{R+a}{R}$$

o sea

$$\phi_b = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \ell n \frac{R+a}{R} \right] [\text{Wb}] \quad (5.81)$$

Comprobar que si la corriente que circula por un conductor recto de radio de 2 cm es de 10 A, el flujo total a través de una superficie como la mostrada en la figura 5.31, de longitud unitaria y ancho de 50 cm, es de 7.516 μWb .

b) Flujo en una sección de un solenoide largo

Consideremos el solenoide mostrado en la figura 5.32, en el cual evaluaremos el flujo magnético a través de la sección transversal de área A , localizada en la zona central del solenoide.

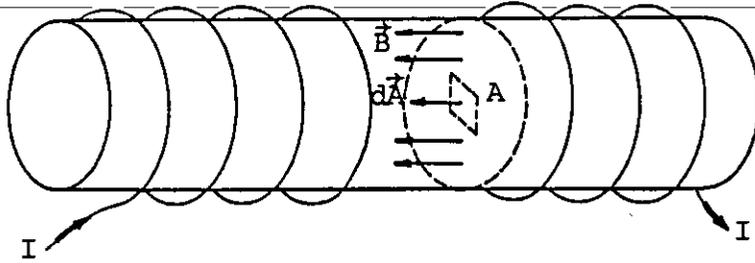


FIGURA 5.32. Flujo magnético a través de una sección transversal localizada en la zona central de un solenoide.

De la última figura se puede concluir que el ángulo, entre los vectores campo magnético y diferencial de superficie (θ), es cero para todos los puntos del área A , por esta razón al aplicar la expresión (5.79), se obtiene

$$\phi_b = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_S B \, dA \cos\theta = \iint_S B \, dA$$

Además, el área A se encuentra en la zona central del solenoide, por lo cual se puede considerar que el campo magnético no varía ni en magnitud ni en dirección para los puntos que la forman, por lo tanto

$$\phi_b = B \iint_S dA = BA \quad [\text{Wb}] \quad (5.82)$$

Verificar que si se desea que el flujo a través de la sección transversal de un solenoide de 20 cm de largo y 1 cm de radio, sea de 0.395 mWb, se requiere que la corriente que circule por dicho solenoide sea de 20 A y que éste posea 10^4 vueltas.

c) Flujo a través de la sección transversal de un toroide

Calculemos el flujo magnético a través del área A de la figura 5.33. En esta figura observamos que el ángulo, entre los vectores campo magnético y diferencial de superficie, es cero para todos los puntos de dicha sección; por otro lado, la magnitud del campo magnético es función del radio del toroide, como lo expresa la ecuación (5.78). Con base en lo anterior, de la expresión (5.79) se obtiene

$$\phi_b = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_S B \, dA = \int_{r_i}^{r_e} \frac{\mu_o N I}{2\pi r} (e) \, dr$$

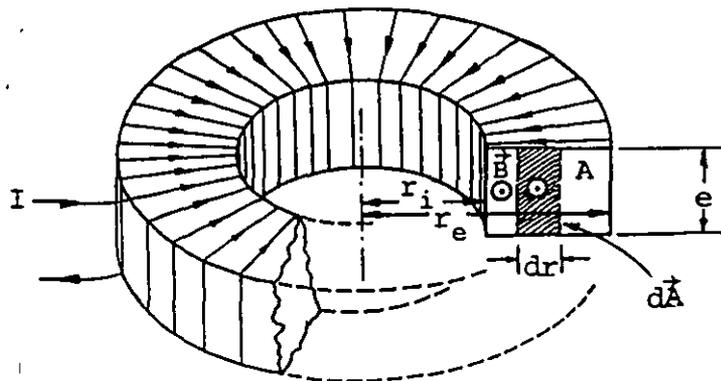


FIGURA 5.33. Flujo magnético a través de una sección transversal de un toroide de sección rectangular.

Integrando la última expresión tenemos

$$\phi_b = \frac{\mu_o N I e}{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o N I e}{2\pi} \ln r \Big]_{r_i}^{r_e}$$

$$\phi_b = \frac{\mu_o N I e}{2\pi} \ln \frac{r_e}{r_i} \quad [\text{Wb}] \quad (5.83)$$

d) Flujo a través de una superficie cerrada

En este inciso veremos lo que resulta al aplicar la ecuación (5.79) a una superficie cerrada; por ejemplo el cilindro mostrado en la figura 5.34 que se encuentra en el interior y en la zona central de un solenoide largo.

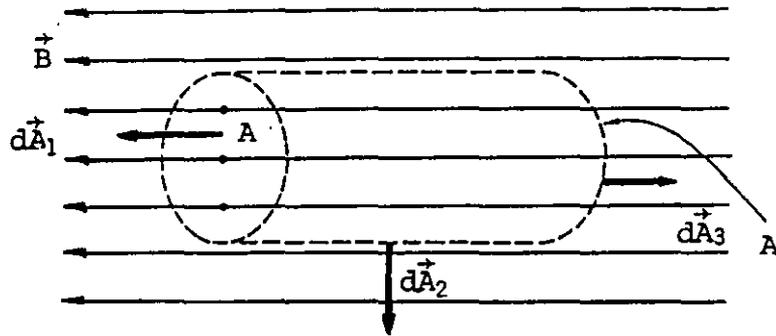


FIGURA 5.34. Superficie gaussiana dentro de un campo magnético uniforme producido por un solenoide largo.

De la expresión (5.79), podemos escribir para este caso que

$$\phi_b = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_1 \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_1 + \iint_2 \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_2 + \iint_3 \vec{B}_3 \cdot d\vec{A}_3 \quad (5.84)$$

En la figura 5.34 observamos que

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \vec{B}$$

ya que el campo magnético en cuestión es uniforme. Además, la integral de superficie sobre la cara lateral del cilindro (2) es nula, porque para todo punto de dicha superficie, los vectores campo magnético y diferencial de superficie son perpendiculares. Por otra parte, el ángulo formado por \vec{B} y $d\vec{A}_1$ es cero, mientras que el formado por \vec{B} y $d\vec{A}_3$ es de π radianes; debido a esto la expresión (5.84) nos queda

$$\phi_b = \iint_1 B \, dA_1 - \iint_3 B \, dA_3 = BA - BA = 0$$

es decir
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (5.85)$$

El resultado obtenido en la última expresión es completamente general, y a dicha expresión se le conoce como ley de Gauss para el magnetismo y nos indica que el flujo neto a través de una superficie cerrada (gaussiana), colocada en un campo magnético, es cero.

Si aplicamos a la expresión (5.85) el teorema de la divergencia, ecuación (1.74), obtendremos

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \, dV = 0$$

o sea

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.86)$$

La expresión (5.86) es la ley de Gauss para el magnetismo en forma diferencial y constituye una de las ecuaciones de Maxwell.

El significado de la expresión (5.85) o su equivalente, la (5.86), es el de que los campos magnéticos son debidos exclusivamente a corrientes eléctricas, es decir, a cargas en movimiento, y hasta la fecha nunca se han observado lo que podrían llamarse las *cargas magnéticas*. La existencia de las *cargas magnéticas elementales* fue postulada por el científico Dirac en el año de 1931; les dio el nombre de monopolos magnéticos y su importancia teórica radica en que, de existir, su valor sería de $2h/e$, es decir, 8.271×10^{-15} Wb, donde h es la constante de Planck ($h = 6.625 \times 10^{-34}$ J·s) y e es la carga eléctrica del electrón ($e = 1.602 \times 10^{-19}$ C).

Por lo anterior, se puede decir que el flujo de \vec{B} a través de cualquier superficie cerrada es igual a cero, mientras no se logren aislar o descubrir *cargas magnéticas*.

5.10 FUERZA MAGNETICA SOBRE CONDUCTORES

Al principio del presente tema se analizó el comportamiento de una carga q , que se mueve con una velocidad \vec{v} dentro de un campo magnético de inducción \vec{B} , la cual experimenta una fuerza dada por la expresión (5.5), o sea

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Ahora bien, una corriente eléctrica es un movimiento de cargas, y si por un conductor que es colocado dentro de un campo magnético circula una corriente, es lógico suponer que el conductor experimentará una fuerza. Consideremos el conductor mostrado en la figura 5.35 con el objeto de poder cuantificar la fuerza arriba mencionada.

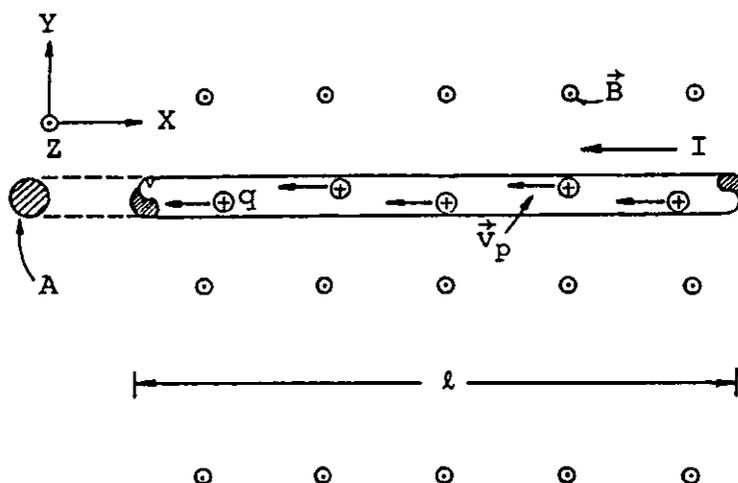


FIGURA 5.35. Segmento de conductor recto colocado dentro de un campo magnético uniforme \vec{B} por el cual circula una corriente I .

Cada uno de los portadores de carga q experimenta una fuerza \vec{f} expresada por la ecuación (5.87), y en virtud de que la corriente eléctrica está formada por diversas cargas q , el conductor experimenta la fuerza \vec{F} , que es la suma de las fuerzas \vec{f} que actúan sobre todas las cargas; de manera semejante a lo mostrado en

la figura 5.36.

$$\vec{f} = q \vec{v}_p \times \vec{B} \quad (5.87)$$

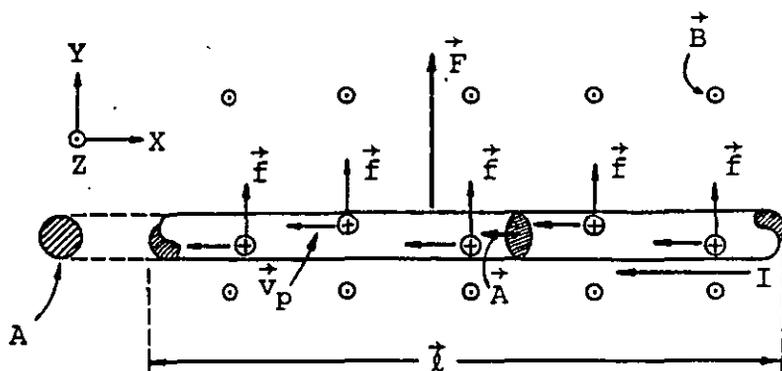


FIGURA 5.36. Segmento de conductor en el que se muestran las direcciones de los vectores \vec{f} , \vec{F} , \vec{v}_p , \vec{l} , \vec{A} y \vec{B} .

Como todas las fuerzas \vec{f} son paralelas, la suma de todas ellas estará también en la misma dirección, es decir, hacia la parte positiva del eje y . La magnitud de la fuerza \vec{F} será N veces la magnitud de \vec{f} , siendo N el número de cargas q que se mueven en el segmento de conductor, es decir

$$\vec{F} = N \vec{f}$$

o sea

$$\vec{F} = N q \vec{v}_p \times \vec{B} \quad (5.88)$$

Si llamamos α el ángulo entre la velocidad promedio de los portadores \vec{v}_p y el campo magnético \vec{B} , se tendría que $\alpha = \pi/2$. Por otra parte, el número de portadores de carga (N) contenidos en el segmento de conductor será el producto del número de portadores libres en cada unidad del volumen (n) y el volumen del conductor, es decir

$$N = n A l \quad (5.89)$$

Considerando lo anterior, la expresión (5.88) quedará

$$\vec{F} = n A \ell q \vec{v}_p \times \vec{B}$$

y si definimos un vector $\vec{\ell}$ que tenga la misma dirección que la velocidad \vec{v}_p , se puede escribir

$$\vec{F} = n A q v_p \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (5.90)$$

Recordando la ecuación (3.15), la cual reescribimos

$$i = n q v_p A \cos \theta$$

en la que θ es el ángulo entre la velocidad de los portadores (\vec{v}_p) y la normal a la sección considerada (A), podemos concluir, de la figura 5.36, que

$$i = n q v_p A$$

Sustituyendo la última ecuación en la expresión (5.90), se obtiene

$$\vec{F} = i \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (5.91)$$

Por medio de la expresión (5.91) podemos determinar la fuerza de origen magnético que actúa sobre un conductor recto de longitud ℓ , que se encuentra en una región de campo magnético \vec{B} y por el cual circula la corriente i ; nótese que el vector $\vec{\ell}$ tiene la dirección definida por el sentido convencional de circulación de la corriente.

Si estamos interesados en calcular la fuerza sobre un conductor en el caso general (conductor no recto, campo no uniforme o ambos), se toma un elemento de longitud diferencial, ya que sobre éste se puede considerar que actúa un campo uniforme, y se aplica la ecuación (5.91), que queda

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (5.92)$$

E integrando esta última, se encontraría la fuerza buscada.

La aplicación de la expresión (5.91) nos permitirá analizar las fuerzas entre conductores paralelos observadas por Ampere. En la figura 5.37 (a) se muestran dos conductores rectos, paralelos y muy largos por los cuales circulan las corrientes i_1 e i_2 mostradas.

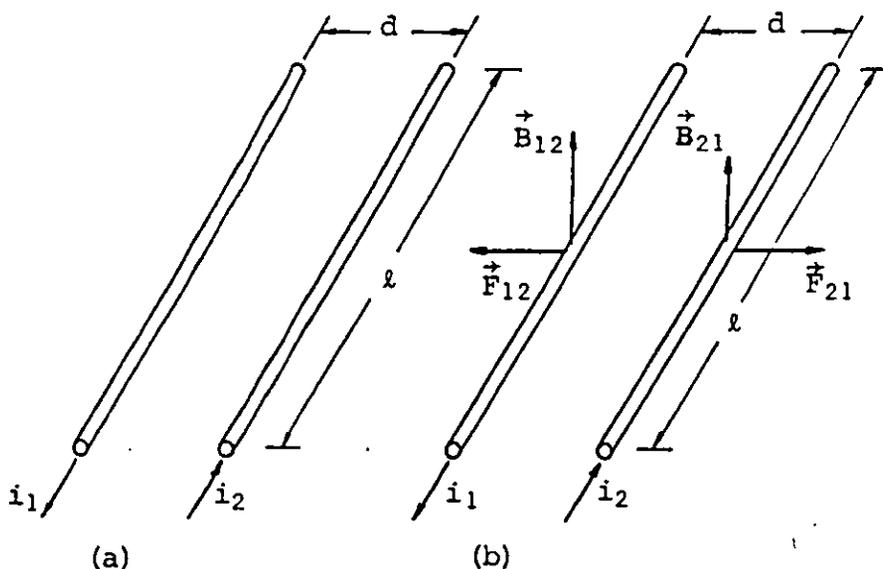


FIGURA 5.37. (a) Conductores rectos y paralelos con corrientes en sentidos opuestos; (b) campos magnéticos y fuerzas del mismo origen que experimentan los conductores paralelos.

Como hemos visto, cada conductor producirá su campo magnético propio y cada uno de éstos afectará el otro conductor, el cual experimentará una fuerza dada por la expresión (5.91). En la figura 5.37 (b) se indican las direcciones de los campos magnéticos y de las fuerzas que actúan sobre los conductores.

La magnitud del campo magnético en la región ocupada por el conductor 1 debida a la corriente en el conductor 2 es, de acuerdo con la expresión (5.29), la siguiente

$$B_{12} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}$$

Y de la ecuación (5.91) podemos escribir la magnitud de la fuerza que experimenta el conductor 1 debida al conductor 2 como

$$F_{12} = i_1 |\vec{\ell}| |\vec{B}_{12}| \text{ sen } \alpha$$

En el caso de conductores paralelos, $\alpha = \pi/2$ radianes, por lo cual tendremos

$$F_{12} = i_1 \ell \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d} \quad (5.93)$$

De manera semejante se puede concluir que el campo magnético en la región ocupada por el conductor 2 debido a la corriente en el conductor 1 es

$$B_{21} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

Y la fuerza que experimenta el conductor 2 será

$$F_{21} = i_2 \ell \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \quad (5.94)$$

Si los conductores paralelos son de igual longitud ℓ , la fuerza total que experimenta un conductor es de igual magnitud pero de dirección contraria a la que actúa sobre el otro conductor, lo cual se puede concluir comparando las ecuaciones (5.93) y (5.94). Nótese que dichas fuerzas tienden a separar los conductores.

Para ambos conductores la magnitud de la fuerza que actúa sobre una longitud unitaria sería la misma, es decir

$$f_{12} = \frac{F_{12}}{\ell}, \quad f_{21} = \frac{F_{21}}{\ell} \quad \text{y} \quad f_{12} = f_{21} \quad (5.95)$$

Si los conductores paralelos transportan corrientes en el mismo sentido, como se muestra en la figura 5.38 (a), las direcciones de los campos magnéticos y de las fuerzas entre los conductores serán las que se representan en la figura 5.38 (b).

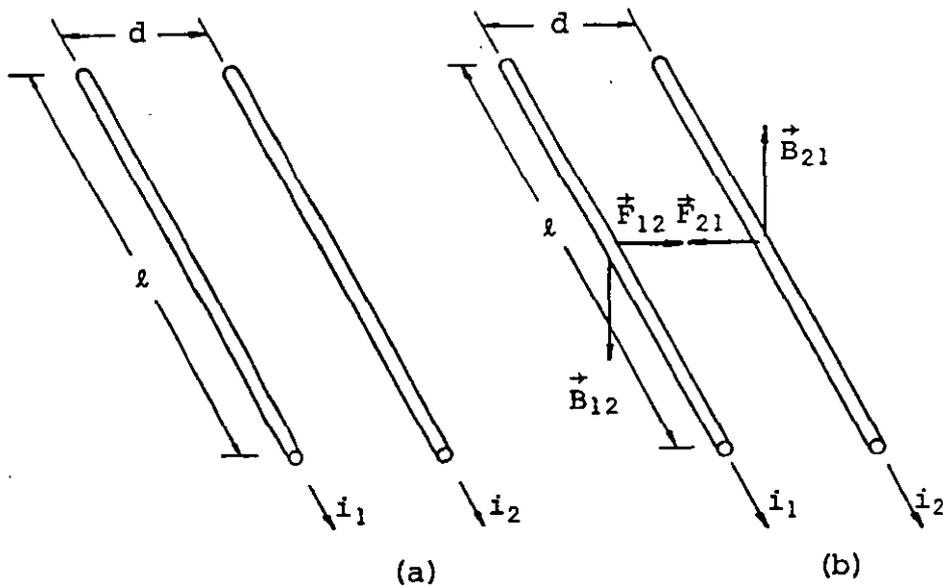
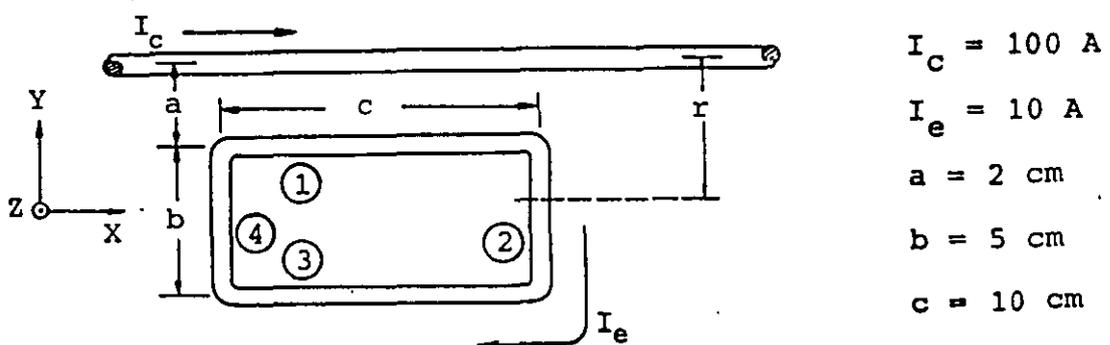


FIGURA 5.38. (a) Conductores paralelos con corrientes en el mismo sentido; (b) campos magnéticos y fuerzas del mismo origen que experimentan los conductores paralelos.

Basados en el desarrollo realizado para el caso mostrado en la figura 5.37, podemos concluir que en esta situación de corrientes en el mismo sentido, las fuerzas que actúan sobre los conductores son iguales entre sí en lo que se refiere a su magnitud, pero son de direcciones opuestas, y la tendencia de dichas fuerzas es juntar los conductores.

EJEMPLO 5.3

Calcular la fuerza total sobre la espira mostrada en la figura 5.39, por la cual circula una corriente $I_e = 10 \text{ A}$, sabiendo que por el conductor recto y largo fluye una corriente $I_c = 100 \text{ A}$.



$$\begin{aligned}
 I_c &= 100 \text{ A} \\
 I_e &= 10 \text{ A} \\
 a &= 2 \text{ cm} \\
 b &= 5 \text{ cm} \\
 c &= 10 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

FIGURA 5.39. Espira rectangular y conductor recto y largo que se encuentran en un mismo plano.

SOLUCION

Debido a que la espira se encuentra dentro del campo magnético producido por el conductor recto y largo, cada lado de ésta experimentará una fuerza originada por dicho conductor, de tal forma que

$$\vec{F}_{\text{esp}} = \vec{F}_{1c} + \vec{F}_{2c} + \vec{F}_{3c} + \vec{F}_{4c} \quad (\text{a})$$

En la figura 5.40 mostramos las direcciones de estas fuerzas, las cuales han sido obtenidas aplicando la expresión (5.91).

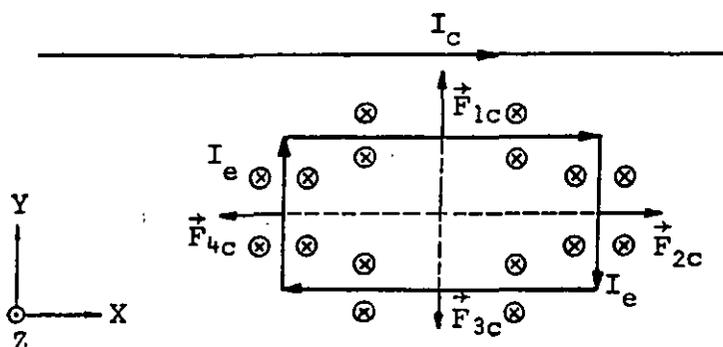


FIGURA 5.40. Direcciones de campo magnético y fuerzas sobre cada lado de la espira rectangular.

De la figura 5.40 se concluye que el ángulo α formado por el campo magnético, y cada lado de la espira rectangular, es de $\pi/2$ radianes.

De esta manera se tiene que

para el lado 1

$$F_{1c} = I_e c B = I_e c \frac{\mu_0 I_c}{2\pi a} \quad (\text{b})$$

para el lado 3

$$F_{3c} = I_e c B = I_e c \frac{\mu_0 I_c}{2\pi(a+b)} \quad (\text{c})$$

Para el lado 2 es necesario integrar la expresión (5.92), ya que el campo magnético no es uniforme, por lo tanto

$$F_{2c} = \int dF = \int I_e dl B$$

donde

$$B = f(r) \quad \text{y} \quad dl = dr$$

es decir

$$F_{2c} = \int dF = \int I_e dr \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r} = \frac{I_e \mu_0 I_c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r}$$

o sea

$$F_{2c} = \frac{I_e \mu_0 I_c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \quad (d)$$

En forma análoga para el lado 4, se tiene

$$F_{4c} = \int dF = \int I_e dl B$$

en la cual $B = f(r)$ y $dl = dr$

de donde

$$F_{4c} = \int dF = \int I_e dr \frac{\mu_0 I_c}{2\pi} = \frac{I_e \mu_0 I_c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r}$$

y finalmente

$$F_{4c} = \frac{I_e \mu_0 I_c}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \quad (e)$$

De las expresiones (d) y (e) se concluye que las fuerzas que actúan sobre los lados 2 y 4 son de igual magnitud y como ambas se localizan sobre una misma línea de acción, los efectos de estas fuerzas sobre una espira rígida se cancelan mutuamente; de esta

manera, de la expresión (a) se tendrá

$$\vec{F}_{\text{esp}} = \vec{F}_{1c} + \vec{F}_{3c}$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en las expresiones (b) y (c) y considerando las direcciones indicadas en la figura 5.40, la última expresión se puede escribir

$$\vec{F}_{\text{esp}} = I_e c \frac{\mu_o I_c}{2\pi a} \hat{j} - I_e c \frac{\mu_o I_c}{2\pi(a+b)} \hat{j}$$

o sea

$$\vec{F}_{\text{esp}} = \frac{I_e c \mu_o I_c}{2\pi} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(a+b)} \right] \hat{j}$$

De acuerdo con los valores indicados en la figura (5.39) se obtendrá

$$\vec{F}_{\text{esp}} = \frac{10(10 \times 10^{-2})(2 \times 10^{-7})100}{2\pi} \left[\frac{1}{0.02} - \frac{1}{0.07} \right] \hat{j} \quad [\text{N}]$$

es decir

$$\vec{F}_{\text{esp}} = 7.143 \times 10^{-4} \hat{j} \quad [\text{N}]$$

5.11 MOMENTO DIPOLAR MAGNETICO

Una aplicación de gran importancia de la fuerza de origen magnético sobre conductores, es el par magnético que actúa sobre una bobina con corriente cuando ésta se encuentra dentro de un campo magnético externo a la bobina. Consideremos la espira mostrada en la figura 5.41.

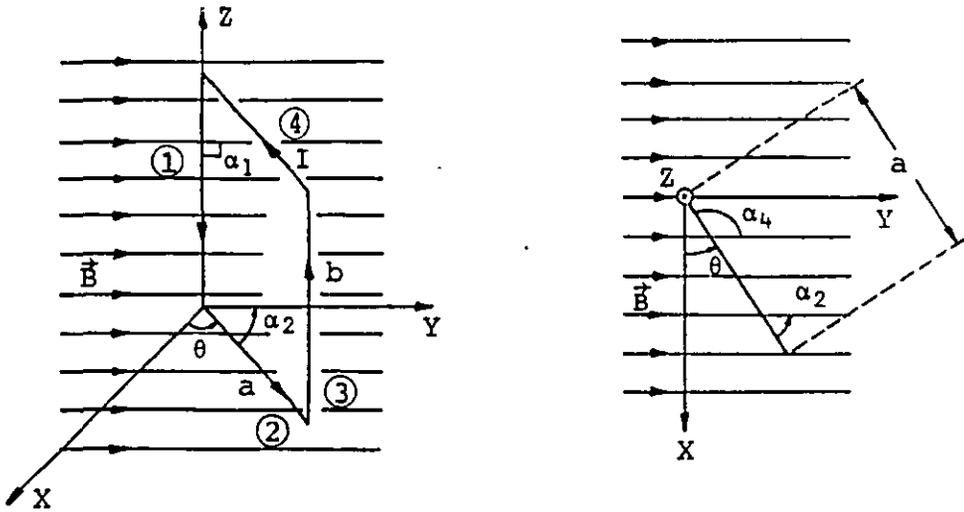


FIGURA 5.41. Espira rectangular localizada dentro de un campo magnético uniforme.

Cada uno de los lados de la espira experimenta una fuerza magnética que se puede obtener mediante la aplicación de la expresión (5.91), es decir

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= I \vec{b}_1 \times \vec{B} \\
 \vec{F}_2 &= I \vec{a}_2 \times \vec{B} \\
 \vec{F}_3 &= I \vec{b}_3 \times \vec{B} \\
 \vec{F}_4 &= I \vec{a}_4 \times \vec{B}
 \end{aligned}
 \tag{5.96}$$

Las direcciones de cada una de estas fuerzas se indican en la figura 5.42.

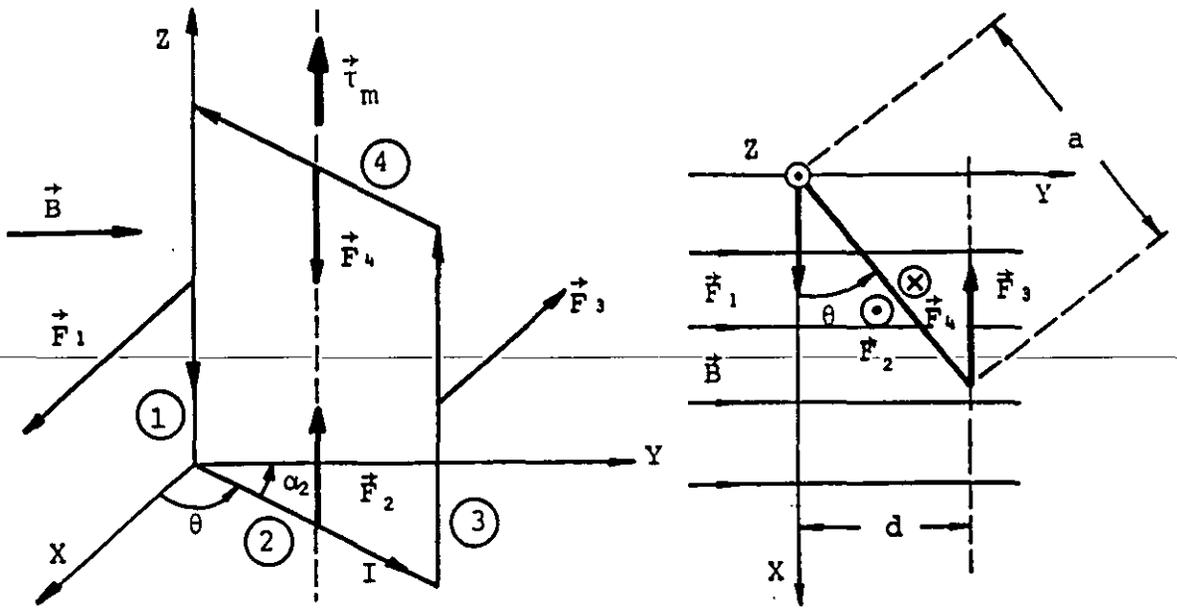


FIGURA 5.42. Direcciones de las fuerzas que actúan sobre cada uno de los lados de una espira rectangular sujeta a un campo magnético externo.

Si expresamos las fuerzas indicadas en las expresiones (5.96) en términos de los vectores unitarios del sistema de coordenadas rectangulares mostrado, se tiene

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= I b B \operatorname{sen} \alpha_1 \hat{i} & , \quad \alpha_1 &= \frac{\pi}{2} \\
 \vec{F}_2 &= I a B \operatorname{sen} \alpha_2 \hat{k} & , \quad \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} - \theta \\
 \vec{F}_3 &= I b B \operatorname{sen} \alpha_3 (-\hat{i}) & , \quad \alpha_3 &= \frac{\pi}{2} \\
 \vec{F}_4 &= I a B \operatorname{sen} \alpha_4 (-\hat{k}) & , \quad \alpha_4 &= \frac{\pi}{2} + \theta
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

De la segunda y cuarta expresiones del conjunto (5.97), se puede concluir que

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$$

y dichas fuerzas no producirán efecto alguno si la espira es rígida; si fuera flexible, las fuerzas \vec{F}_2 y \vec{F}_4 originarían una deformación en los lados 2 y 4 respectivamente.

En cambio, de la primera y tercera expresiones del conjunto (5.97), se concluye que las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_3 constituyen un par de fuerzas que producen un momento sobre la espira.

Si nuestra espira estuviera atada a un eje o flecha alojado sobre la línea punteada mostrada en la figura 5.42 (a), la espira tendría la posibilidad de girar.

El valor del momento magnético (τ_m) sobre la espira se obtiene mediante un producto vectorial, multiplicando un vector \vec{d} , dirigido de la línea de acción de una de las fuerzas del par hacia la línea de la otra fuerza, por el vector que representa esta segunda fuerza; entonces podemos escribir, con base en la figura 5.42 que

$$\vec{\tau}_m = \vec{d} \times \vec{F}_3 \quad (5.98)$$

También se observa que la magnitud del vector \vec{d} es función del valor del ángulo θ , es decir

$$d = a \operatorname{sen} \theta$$

y utilizando el vector unitario en dirección del eje Y, tendremos que

$$\vec{d} = d \hat{j} = a \operatorname{sen} \theta \hat{j} \quad (5.99)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.98) las expresiones de \vec{F}_3 de la (5.97) y \vec{d} de la (5.99), se obtiene

$$\vec{\tau}_m = -a \operatorname{sen} \theta \hat{j} \times I b B \operatorname{sen} \alpha_3 \hat{i}$$

y como $\operatorname{sen} \alpha_3 = 1$, la última expresión se puede escribir

$$\vec{\tau}_m = I a b B \operatorname{sen} \theta \hat{i} \times \hat{j} \quad (5.100)$$

En la última expresión notamos que el producto ab es precisamente el área de la bobina, o sea

$$ab = A$$

además

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

y

$$\text{sen } \theta = \text{sen } (\pi - \theta)$$

Con lo anterior, la ecuación (5.100) nos queda como sigue

$$\vec{\tau}_m = I A B \text{sen } (\pi - \theta) \hat{k} \quad (5.101)$$

en la cual $|\vec{\tau}_m| = I A B \text{sen } (\pi - \theta)$

Ahora bien, en realidad B es una cantidad vectorial y el área también lo es. Definamos el vector \vec{A} como aquel de magnitud A , de dirección perpendicular al área que representa colocado en el centro de la misma y cuya dirección será aquella en la que avance un tornillo roscado a derechas girando en el mismo sentido en que circula la corriente en la espira.

De la figura 5.43 se puede observar que el ángulo $\beta = (\pi - \theta)$ es el formado por los vectores \vec{A} y \vec{B} de tal forma que se puede escribir que

$$|\vec{\tau}_m| = I |\vec{A}| |\vec{B}| \text{sen } \beta$$

Como la dirección del vector $\vec{A} \times \vec{B}$ es precisamente la dirección del vector unitario \hat{k} y, en consecuencia, la misma que la del vector $\vec{\tau}_m$, la expresión (5.101) se puede expresar como

$$\vec{\tau}_m = I \vec{A} \times \vec{B} \quad (5.102)$$

Aunque la deducción de la última expresión fue realizada para

una espira rectangular, es aplicable a espiras de forma geométrica irregular, planas y colocadas en una región de campo magnético uniforme.

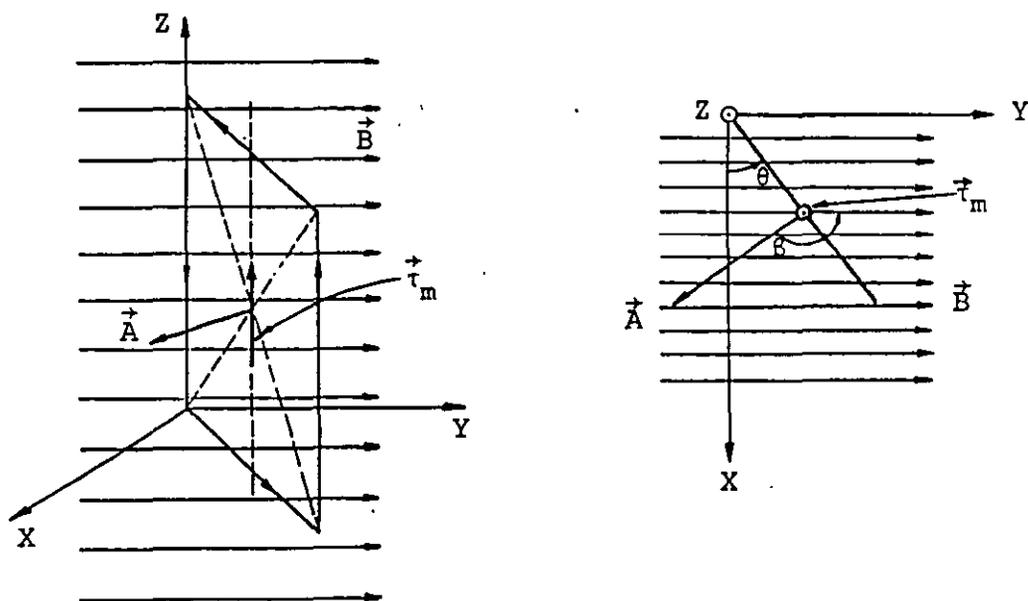


FIGURA 5.43. Direcciones de los vectores: área (\vec{A}), campo magnético (\vec{B}) y momento magnético ($\vec{\tau}_m$).

Si en lugar de una espira se cuenta con una bobina de N espiras muy juntas y de espesor despreciable que se pueden considerar afectadas por el mismo campo magnético, el momento magnético total se puede aproximar de la siguiente manera

$$\vec{\tau}_m = N I \vec{A} \times \vec{B} \quad (5.103)$$

Resultará de utilidad posterior el definir la cantidad $I\vec{A}$ como el momento dipolar magnético \vec{p}_m de la espira en cuestión, o sea

$$\vec{p}_m = I \vec{A} \quad (5.104)$$

La definición anterior será utilizada cuando sean analizados los materiales y sus propiedades magnéticas.

EJEMPLO

Analicemos el principio de operación del galvanómetro como un ejemplo de aplicación del momento de origen magnético sobre una bobina. En la figura 5.44 se muestra un galvanómetro en forma esquemática.

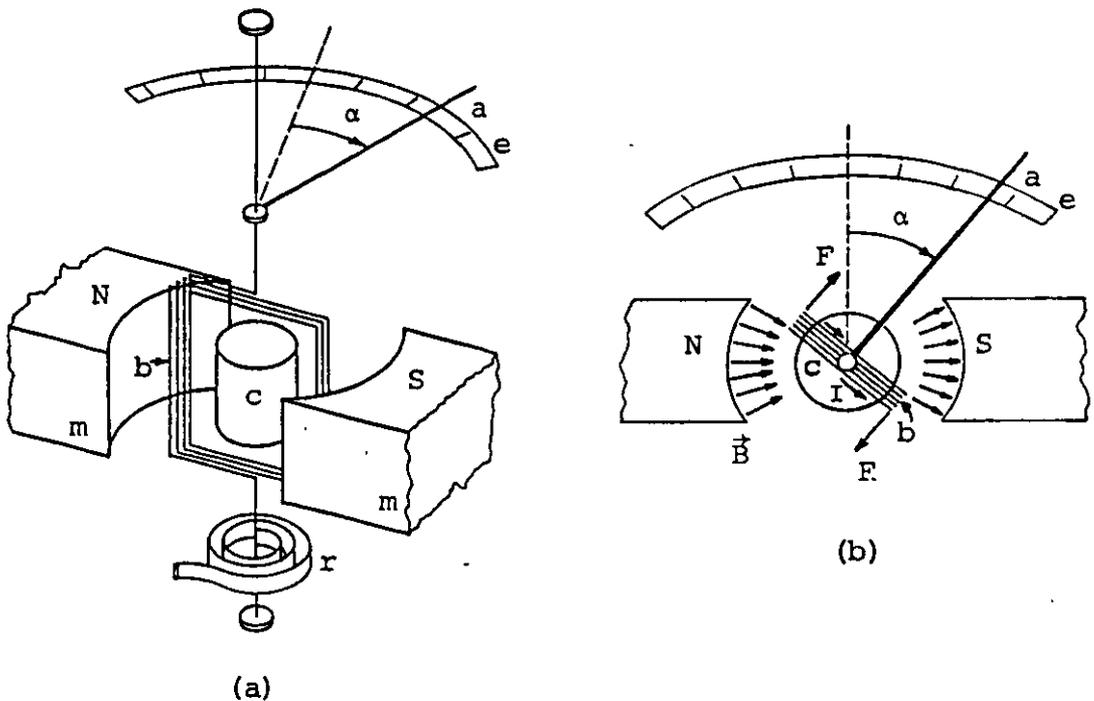


FIGURA 5.44. Galvanómetro elemental; m es un magneto permanente, b es la bobina, c es un cilindro de hierro dulce, r es el resorte espiral, a es la aguja indicadora y e es la escala del instrumento.

Para medir una corriente eléctrica ésta se hace circular por la bobina del galvanómetro; la bobina se encuentra dentro del campo magnético producido por un imán permanente, el cual produce un campo de configuración radial debido al cilindro de hierro dulce sobre el que se encuentra devanada la bobina. Cuando circula una corriente por el galvanómetro, los lados de la bobina, perpendiculares a la dirección del campo magnético, experimentan cada uno una fuerza, dando por resultado que sobre la bobina ac-

túe un par de fuerzas que le origina un giro hasta que el momento magnético se equilibra con el momento producido por la deformación del resorte espiral. En esta posición, la aguja del instrumento ha girado un ángulo α que guarda una relación con la corriente que circula en la bobina, cuyo valor se puede leer en una escala debidamente graduada, tal como se muestra en la figura 5.44 (b).

Con el objeto de encontrar la relación entre la corriente que circula por la bobina y el ángulo α , analicemos el galvanómetro de la figura 5.44 (b).

Cuando la aguja del instrumento alcanza su equilibrio se pueden igualar los momentos que actúan sobre la bobina, esto es, el de origen magnético con el de origen mecánico debido al resorte.

$$\tau_{\text{mag}} = \tau_{\text{mec}} \quad (\text{a})$$

De la expresión (5.103) y por nuestros conocimientos de mecánica, podemos escribir

$$N I A B \sin \theta = K \alpha \quad (\text{b})$$

Debido a que el campo magnético del galvanómetro es radial, el ángulo θ formado por el vector normal a la bobina (\vec{A}), que es la dirección de la aguja, y el campo magnético que afecta la bobina es de $\frac{\pi}{2}$ radianes, por lo tanto

$$N I A B = K \alpha \quad (\text{c})$$

Por la última expresión observamos que el ángulo α resulta directamente proporcional a la corriente que circula en la bobina, ya que la constante K del resorte espiral, el número de vueltas N , el área de la bobina y el valor del campo magnético tienen un valor determinado para un instrumento en particular. De lo anterior se concluye que la escala del galvanómetro será de tipo lineal.

Comprobar que para un galvanómetro que consta de una bobina de 200 vueltas, cuya área es de $1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, un campo magnético de 6 mT, cuyo resorte tiene una constante de $1.2 \times 10^{-4} \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}$ cuando circula una corriente de 0.2 A, la aguja se desplaza a un ángulo de 0.2 rad, (11.46°).

Un concepto de gran utilidad para los temas posteriores es el de energía potencial del dipolo magnético, mismo que analizaremos a continuación.

Supongamos un campo magnético uniforme y una espira cuadrada por la que circula una corriente eléctrica colocada dentro de dicha región, tal como se muestra en la figura 5.45.

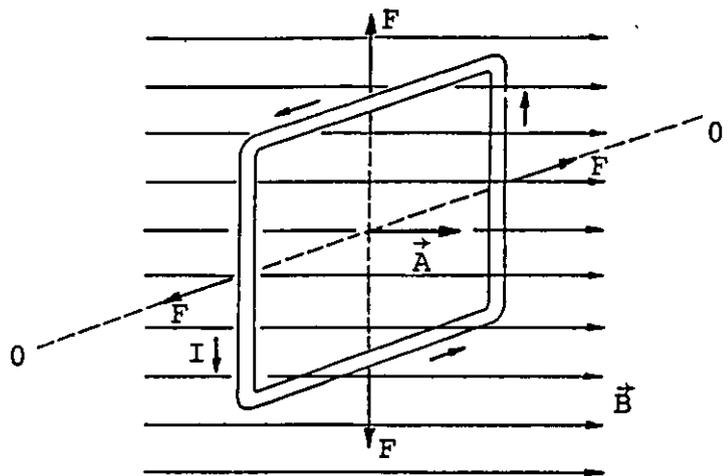


FIGURA 5.45. Espira cuadrada dentro de un campo magnético uniforme. Se observa que las fuerzas de origen magnético se encuentran en equilibrio.

Si la espira se encuentra en la posición mostrada en la figura anterior, esto es, su vector \vec{A} paralelo a la dirección del campo \vec{B} , se puede considerar que posee la mínima energía.

En realidad podemos referirnos a la espira como un dipolo magnético, ya que debido a la corriente que por ella circula, su cara derecha se comporta como un norte magnético, puesto que por esa cara emergen líneas de campo producidas por la corriente, y de igual manera, la cara izquierda se comporta como un sur magnético.

Si nos preguntamos ¿qué energía se requirió para trasladar el dipolo magnético desde el infinito hasta la posición mostrada en la figura, conservando la orientación del vector \vec{A} ?, la respuesta sería: ninguna; ya que si consideramos el efecto del campo magnético sobre el dipolo, su cara sur experimentaría una atracción hacia la izquierda, la cual se vería equilibrada con otra fuerza de atracción sobre la cara norte, pero actuando hacia la derecha. En consecuencia, para realizar dicho traslado no sería necesaria la aplicación de fuerzas externas, y al no realizar trabajo sobre la espira, su energía potencial se mantiene constante.

Ahora, tratemos de girar el dipolo desde la posición mostrada en la figura 5.46 hasta que su vector \vec{A} forme un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ con respecto a la dirección de \vec{B} .

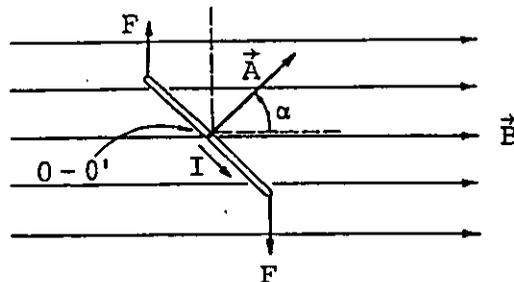


FIGURA 5.46. Vista de perfil de una espira cuadrada que ha sido girada un ángulo α de su posición de equilibrio; se indica el par de fuerzas de origen magnético que actúa sobre la espira en esta posición.

De la figura anterior se puede concluir que para lograr el giro pretendido de manera cuasiestática será necesario aplicar un par de fuerzas externas que equilibre al par magnético, con una fuerza cuyo momento con respecto al eje de rotación ($O - O'$) se oponga al momento de origen magnético.

En el movimiento de rotación descrito, se realiza un trabajo que origina un incremento en la energía potencial del dipolo; por nuestros conocimientos de mecánica, podemos escribir que

$$W_{\frac{\pi}{2}} = \Delta EP = EP_{\frac{\pi}{2}} - EP_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \tau_{\text{ext}} d\alpha' \quad (5.105)$$

Por medio de esta expresión calculamos la energía potencial magnética del dipolo, cuando se encuentra en la posición mostrada en la figura 5.46.

Debido a que sólo es de interés la variación de energía potencial del dipolo, arbitrariamente se fija la posición en que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ como aquélla en la cual el dipolo magnético posee energía potencial cero, es decir

$$EP_{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Por lo anterior, la ecuación (5.105) queda

$$-EP_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \tau_{\text{ext}} d\alpha' \quad (5.106)$$

También es conveniente aclarar que la magnitud del momento originado por el agente externo (τ_{ext}), es variable, ya que el par de origen magnético depende del valor del ángulo α .

De la expresión (5.102), podemos escribir

$$\tau = I A B \text{ sen}\alpha$$

y utilizando la definición (5.104), la última ecuación se convierte en

$$\tau = p_m B \text{ sen}\alpha \quad (5.107)$$

Sustituyendo la ecuación (5.107) en la (5.106) e integrando, obtenemos

$$-EP_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} p_m B \text{ sen}\alpha' d\alpha'$$

$$-EP_{\alpha} = p_m B \left[-\cos\alpha' \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

es decir

$$EP_{\alpha} = -p_m B \cos\alpha \quad (5.108)$$

Como en realidad el momento dipolar magnético y el campo magnético son magnitudes vectoriales, la última expresión se puede generalizar escribiendo

$$EP = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \quad (5.109)$$

Considerando que en la figura 5.47 se muestra una espira circular de radio igual a 2 cm, vista de perfil, por la cual circula una corriente de 100 mA y los vectores campo y momento dipolar magnéticos tienen las direcciones mostradas; comprobar que la energía potencial magnética de dicha espira es de -6.504×10^{-7} J y que el trabajo necesario para girarla hasta que el ángulo α sea igual a cero, es de -1.863×10^{-6} J. ¿Quién realizaría este trabajo?

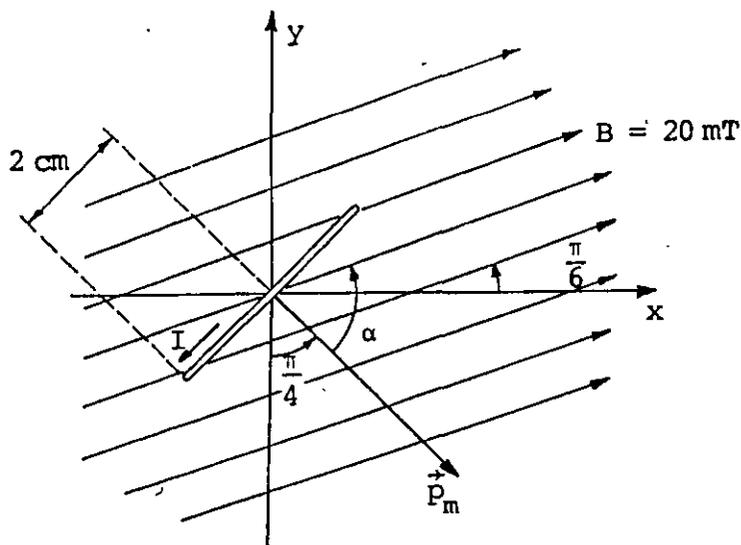


FIGURA 5.47. Espira circular en una zona de campo magnético uniforme.

PROBLEMAS

5.1 Cuando un electrón ($q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$) se mueve con velocidad constante en una zona donde el campo magnético es

$$\vec{B} = (0.5\hat{i} - 0.8\hat{j}) \text{ T} ,$$

~~experimenta una fuerza magnética~~

$$\vec{F}_m = (-3.84\hat{x} - 2.40\hat{y}) \times 10^{-17} \text{ N} .$$

Determine la velocidad del electrón.

5.2 Una partícula α ($q_\alpha = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$) se mueve con velocidad constante $\vec{v} = (4\hat{y} + 3\hat{z}) \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; suponga que para un cierto instante su posición es la mostrada en la figura P5.2 y calcule el vector inducción magnética \vec{B} en los puntos $A(4, 4, 0)\text{mm}$, $B(0, 4, 0)\text{mm}$, $C(0, 0, 3)\text{mm}$ y $O(0, 0, 0)\text{mm}$.

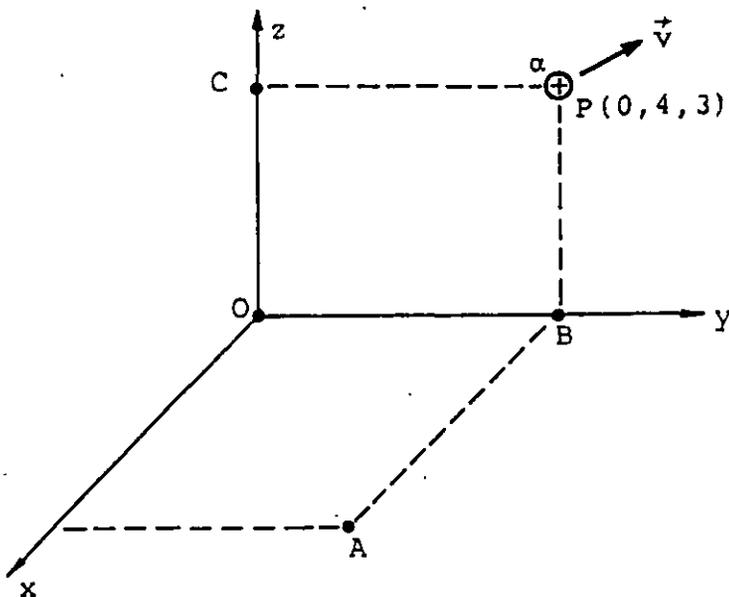


Figura P5.2

5.3 Cuando un conductor que transporta corriente es colocado en una región donde existe un campo magnético, los portadores de carga que se desplazan son desviados por una fuerza magnética, dando por resultado la aparición de un campo eléctrico debido a la acumulación de carga, como se indica en la figura P5.3 (a), para una parte del conductor.

Dicha acumulación de carga cesa cuando la fuerza eléctrica (que actúa sobre cada portador) iguala la fuerza magnética, es decir, $q \vec{E} = q [\vec{v} \times \vec{B}]$; a esta acumulación se le conoce como efecto Hall. Ahora suponga que se desea medir un campo magnético por medio de un arreglo como el de la figura P5.3 (b) y que el voltaje Hall medido es $V_H = 32.8 \mu\text{V}$, cuando la corriente es $I = 10 \text{ mA}$. Considere además, que el material usado es silicio y que a la temperatura de la medición su relación $\frac{1}{nq}$ vale $4.1 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$; donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen y q es la carga de cada portador. Determine la magnitud y dirección del campo magnético B .

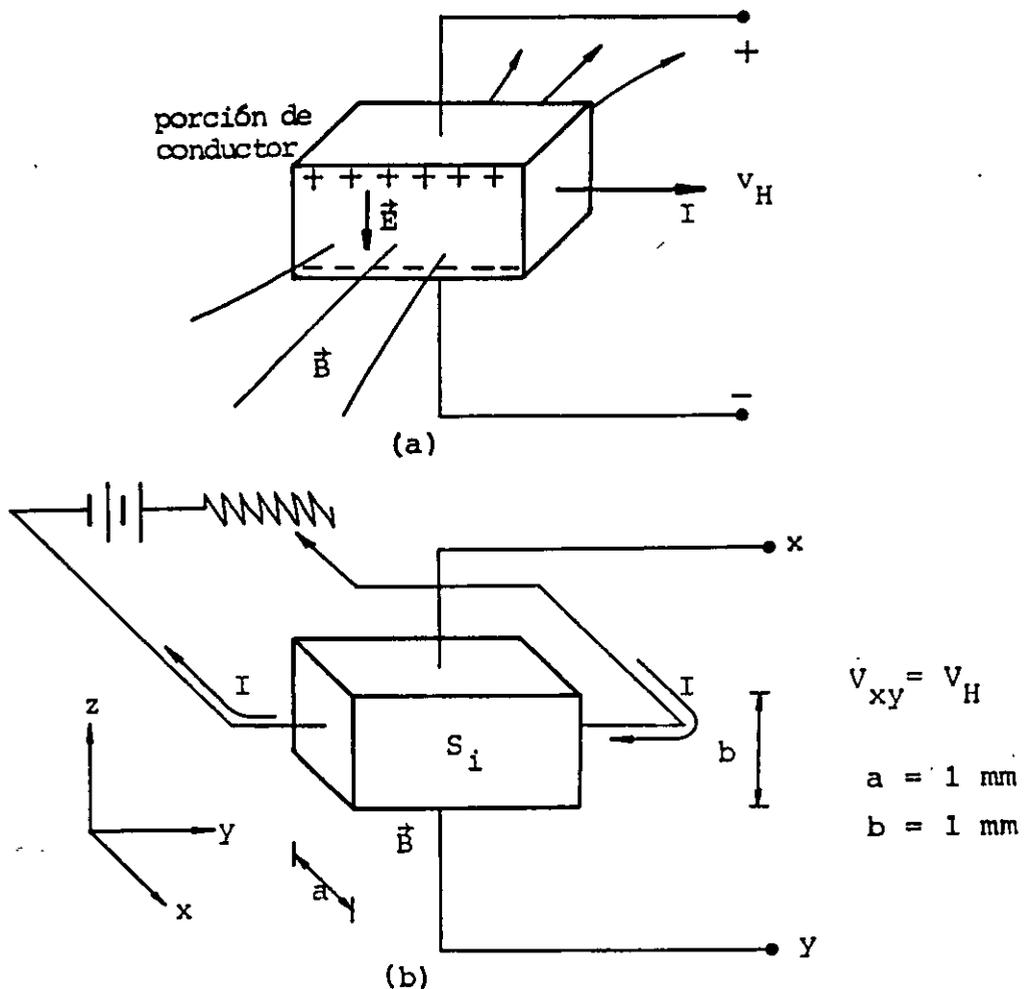


Figura P5.3

5.4 Un espectrómetro de masa es un dispositivo para separar partículas de la misma carga y diferente masa (isótopos ionizados). Las partículas son inyectadas con una velocidad conocida \vec{v} dentro de una zona de campo magnético uniforme \vec{B} , como se muestra en la figura P5.4. Las partículas con mayor masa chocan con la

pantalla fosforescente a mayor distancia del punto de entrada. Entonces

a) Si las dimensiones de la pantalla son las indicadas en la figura P5.4 y $B = 0.8 \text{ T}$, calcule las velocidades máxima y mínima que permiten a un deuterón ($q_d = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ y $m_d = 2 (1.67 \times 10^{-27}) \text{ kg}$) chocar con la pantalla.

b) Al ingresar dos partículas x cargadas ($q_x = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$) con la misma velocidad, se observa una diferencia de 24 cm entre los puntos de choque. Calcule la diferencia de masa entre las dos partículas, si la más ligera chocó a 12 cm del punto de ingreso.

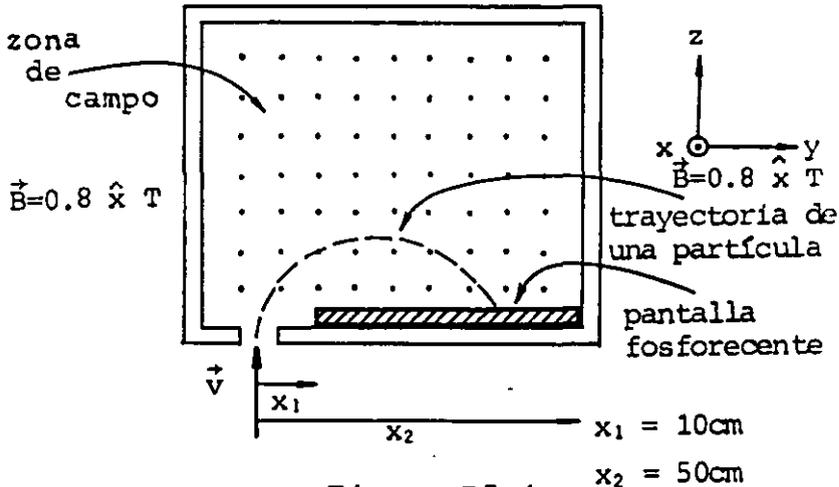


Figura P5.4

5.5 En la figura P5.5 se muestran en corte tres conductores rectos, paralelos y muy largos con su eje perpendicular al plano del dibujo. Si la corriente en cada conductor tiene la magnitud y sentido indicado, determine el vector inducción magnética en los puntos A, B, C y D.

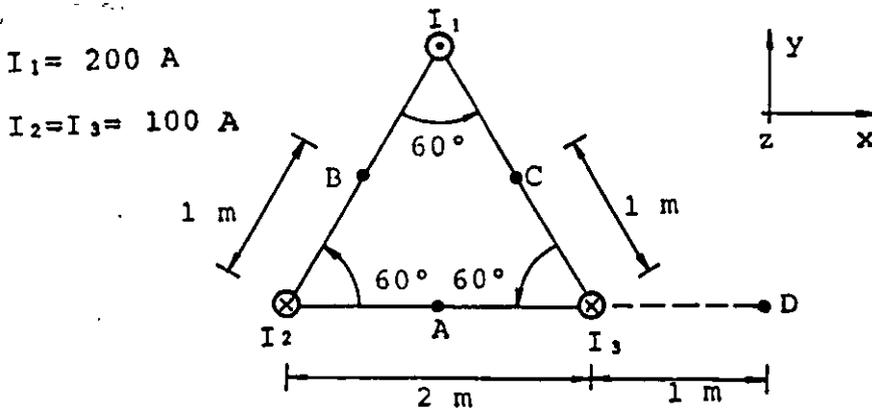


Figura P5.5

5.6 Para la espira cuadrada plana de la figura P5.6, haga una gráfica de la variación de la magnitud del campo magnético \vec{B} a lo largo del eje y y sobre el plano de la espira, en función de la distancia x al centro de la misma. Considere el intervalo $-15 \leq x \leq 15$ cm y calcule valores de B , cada 3 cm.

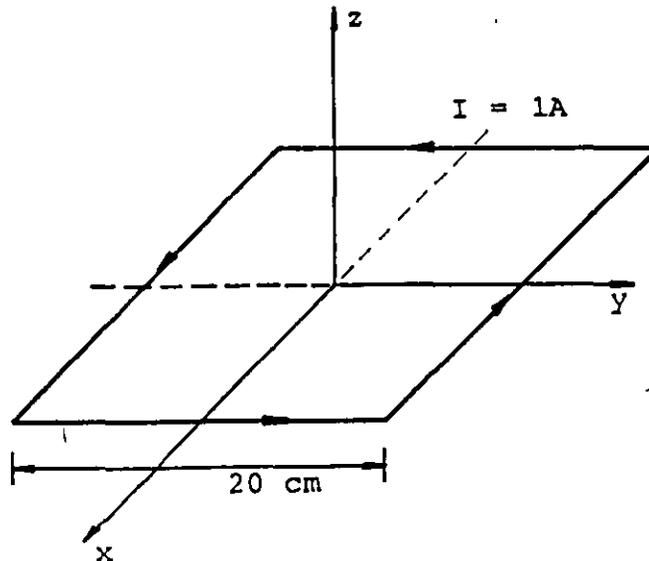


Figura P5.6

5.7 Considere la espira cuadrada mostrada en la figura P5.7 cuyo centro coincide con el origen del sistema de referencia, y calcule el vector densidad de flujo magnético \vec{B} para los puntos A, B, C y D.

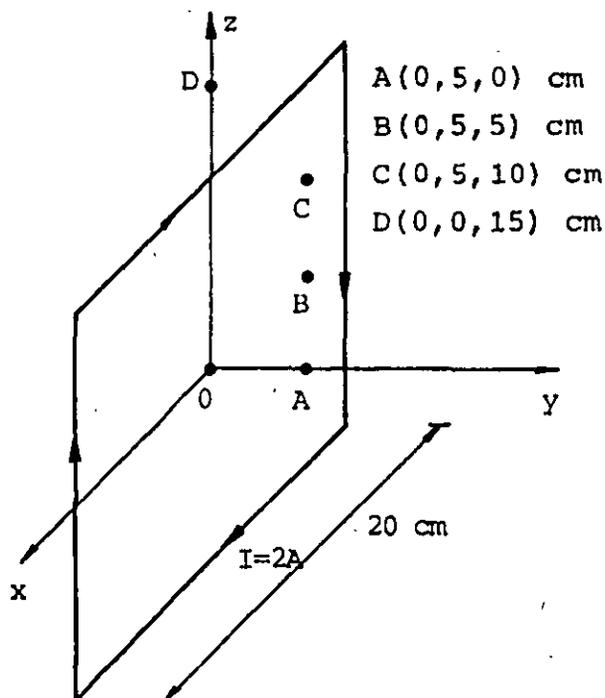


Figura P5.7

5.8 Obtenga el valor de la corriente I que debe circular en la bobina de la figura P5.8, la cual es coplanar al plano xz y cuyo centro coincide con el origen, para que el campo magnético \vec{B} en el punto A sea $\vec{B}_A = -12\hat{y}$ mT .

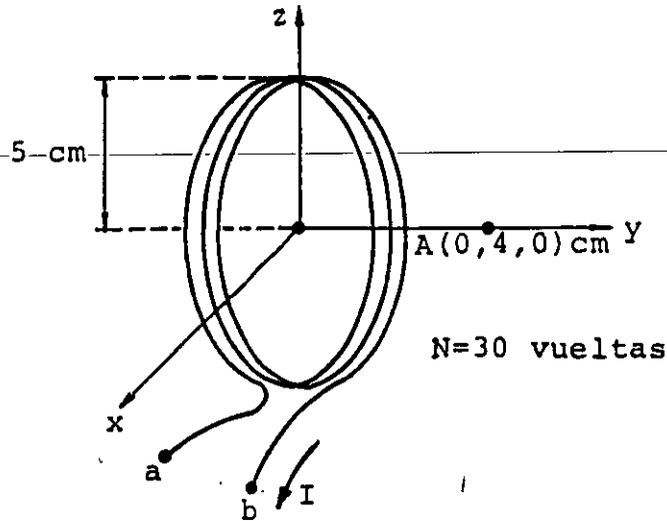


Figura P5.8

5.9 El arreglo conocido como bobinas de Helmholtz se obtiene con dos bobinas circulares iguales y paralelas, con sus centros separados una distancia igual a su radio, como se muestra en la figura P5.9. Tal dispositivo permite obtener una zona de campo magnético uniforme alrededor del punto O del arreglo. Obtenga la expresión que permite obtener \vec{B} en puntos sobre el eje y , el cual pasa por los centros de las bobinas, y compruebe que

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{a} (0.8)^{3/2} .$$

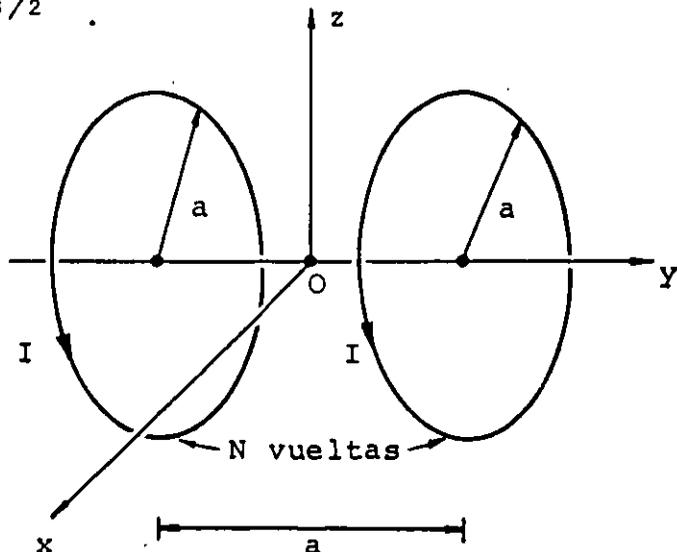


Figura P5.9

5.10 Para el solenoide de la figura P5.10, y con base en el sistema de referencia indicado, calcule el campo magnético \vec{B} para los puntos A, B, C y D.

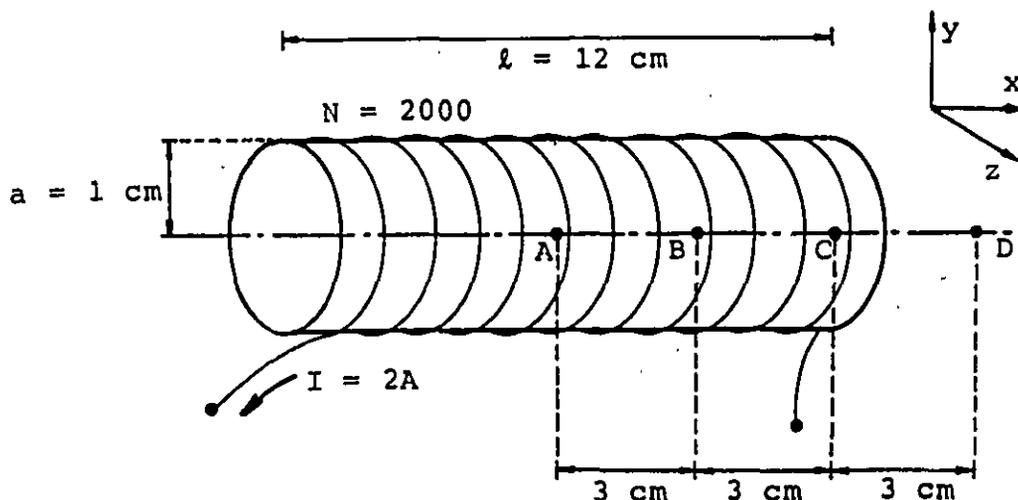


Figura P5.10

5.11 Se desea construir un solenoide con alambre magneto cuyo diámetro, incluyendo el esmalte, es de 0.8611 mm (AWG # 20). Si las características deseadas en el solenoide son: 10 cm de longitud, 0.5 cm de radio menor y 5 capas de embobinado. Determine:

- El número de vueltas N del solenoide.
- La resistencia del solenoide a 20°C , si se dejan 15 cm adicionales de alambre, para conexiones, al final y al principio del embobinado; considere que a 20°C la resistencia del alambre es de 33.2Ω por cada km .
- El campo B en el centro y en el extremo del eje del solenoide, si la corriente en el mismo es de 1 A .

5.12 Un tubo conductor cilíndrico hueco y largo, con las dimensiones mostradas en la figura P5.12, transporta una corriente I uniformemente distribuida en su sección transversal. Obtenga las expresiones que determinan la magnitud del campo magnético B en

función de r para los intervalos siguientes

$$r \leq r_1, \quad r_1 \leq r \leq r_2 \quad \text{y} \quad r \geq r_2.$$

Considere que

$$\mu_{\text{cond}} = \mu_0.$$

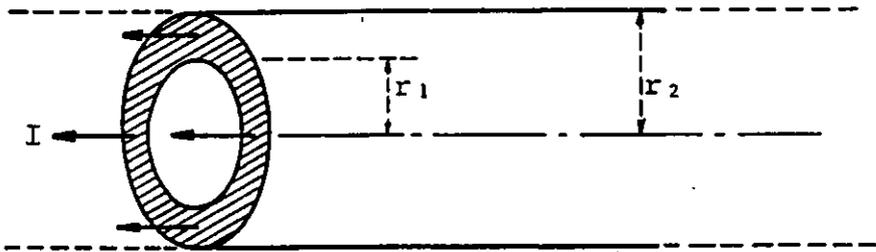


Figura P5.12

5.13 Un toroide de 4 000 vueltas enrolladas uniformemente, posee las dimensiones mostradas en la figura P5.13, determine:

a) Los valores máximo y mínimo de la inducción magnética producida por el toroide para puntos interiores del mismo.

b) El flujo magnético que cruza la superficie S señalada en la misma figura.

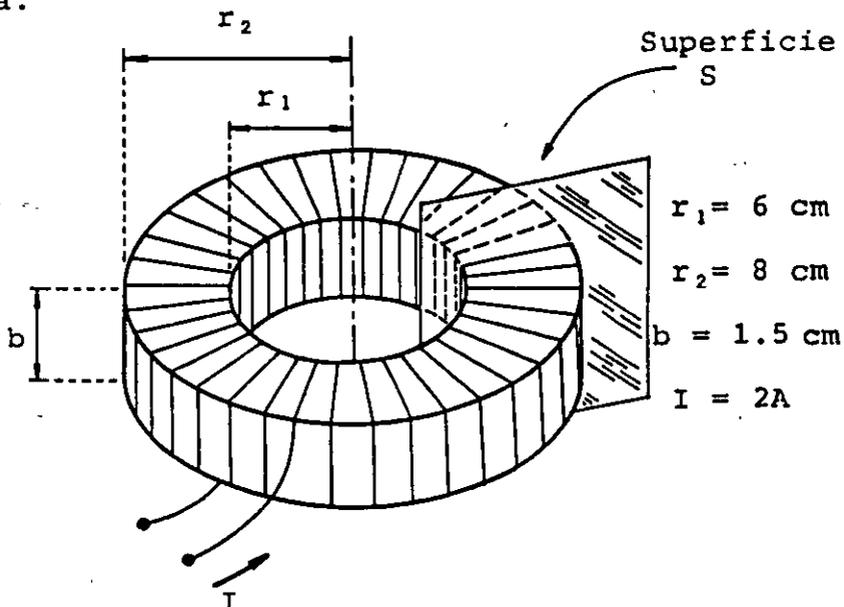


Figura P5.13

5.14 Con base en las características del solenoide mostrado en la figura P5.14, calcule el flujo magnético a través de las superficies S_1 y S_2 indicadas en la misma figura.

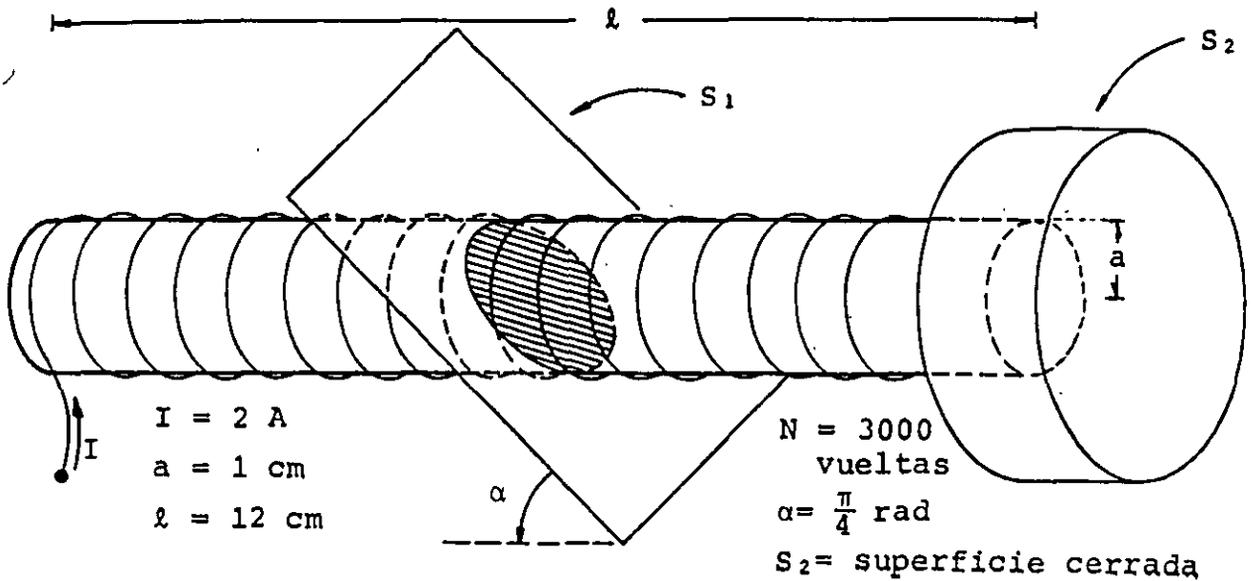


Figura P5.14

5.15 Suponga dos conductores rectos y muy largos paralelos al eje x del sistema de referencia de la figura P5.15 y calcule el flujo magnético a través de la superficie sombreada.

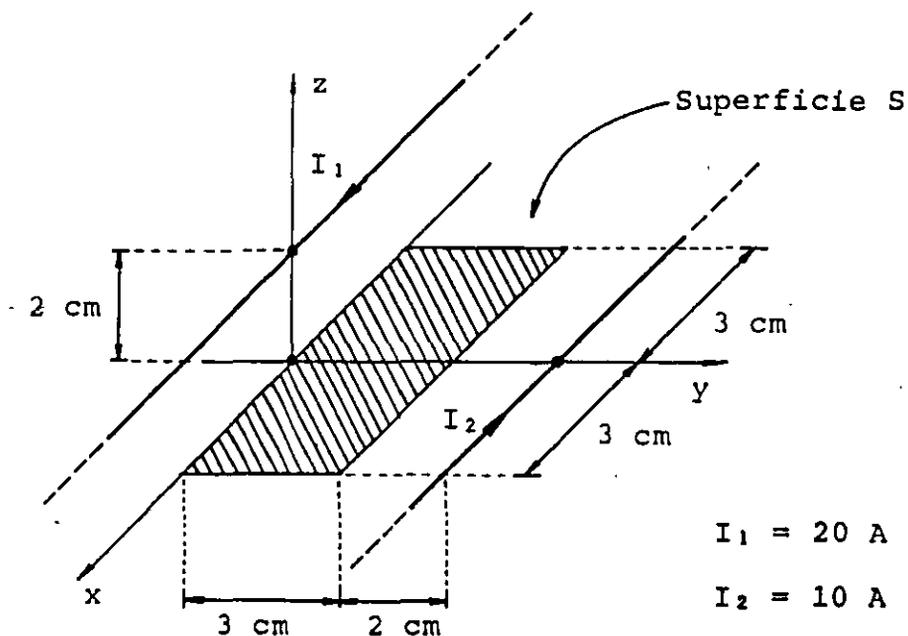
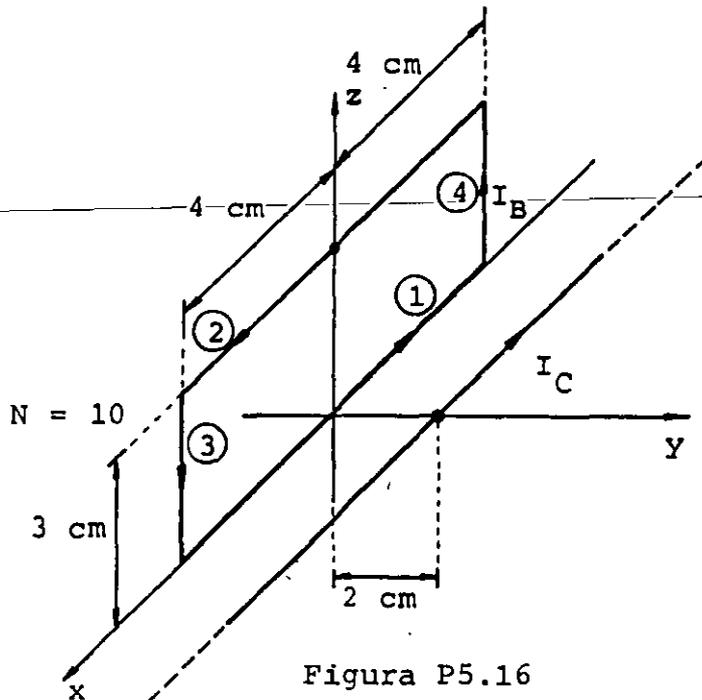


Figura P5.15

5.16 Obtenga la fuerza magnética que actúa sobre cada lado de la bobina rectangular rígida contenida en el plano xz , mostrada en la figura P5.16, y que es debida al conductor recto y muy largo.



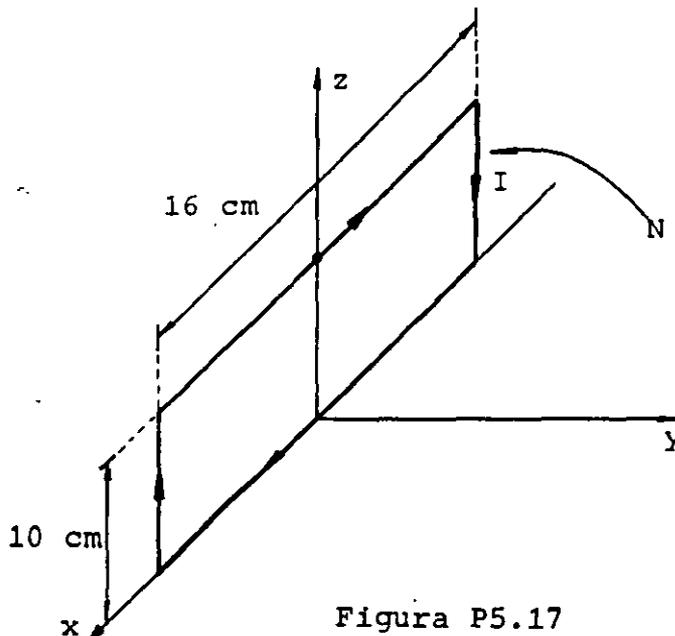
$$I_C = 10 \text{ A}$$

$$I_B = 2 \text{ A}$$

Figura P5.16

5.17 Suponga una bobina rígida de 30 vueltas coplanar al plano xz , como se indica en la figura P5.17. Si en la región existe un campo magnético $\vec{B} = (0.3\hat{x} + 0.4\hat{y})\text{T}$, calcule:

- El momento dipolar magnético de cada espira.
- El momento magnético total de la bobina.



$$I = 2 \text{ A}$$

$$N = 30 \text{ vueltas}$$

Figura P5.17

CAPITULO 6 FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA

INTRODUCCIÓN

En el tema anterior estudiamos que a raíz de las observaciones realizadas por Oersted, los fenómenos eléctrico y magnético que hasta esa fecha se habían considerado como independientes, no eran sino presentaciones particulares de un fenómeno más general y complejo: el electromagnético.

En el presente tema se analiza el fenómeno de inducción electromagnética que consiste en obtener energía eléctrica a partir de variaciones de flujo magnético, principio bajo el cual operan la mayor parte de los generadores eléctricos que suministran la energía necesaria para el funcionamiento del aparato tecnológico del mundo en que vivimos.

De esta forma, en las siguientes páginas se analizan los principios de operación del generador de corriente alterna (alternador), del generador de corriente directa, del transformador con núcleo de aire y del motor de corriente directa.

6.1 LEY DE FARADAY

El hecho experimental consistente en que una corriente eléctrica produce un campo magnético, suscitó inquietudes y motivó en algunos científicos, entre ellos el químico y físico inglés Michael Faraday (1791-1867), el razonamiento recíproco, es decir, el pensar que un campo magnético podría producir corrientes eléctricas.

Durante varios años Faraday tuvo en mente este razonamiento y en 1831, descubre y publica la ley de la inducción electromagnética, que, sintéticamente, consiste en que a partir de campos magnéticos variables respecto al tiempo, se pueden producir campos eléctricos en consecuencia corrientes eléctricas. Cabe aclarar que

un contemporáneo de Faraday, el físico norteamericano Joseph Henry, llegó en 1830 a la misma conclusión, pero sus resultados fueron publicados posteriormente a los de Faraday, razón por la cual se le reconoce a éste el mérito de su descubrimiento.

Existe una gran variedad de experimentos en los que es posible detectar corrientes *inducidas*, que a su vez son producidas por fuerzas electromotrices del mismo nombre; sin embargo en estos apuntes presentaremos sólo aquellos de carácter esencial.

Si disponemos de un magneto de barra y una espira de alambre conductor en cuyas terminales se conecta un voltímetro, al existir movimiento relativo entre imán y espira, el voltímetro detecta una diferencia de potencial que recibe el nombre de fuerza electromotriz inducida; con el objeto de aclarar estas ideas, veamos la figura 6.1.

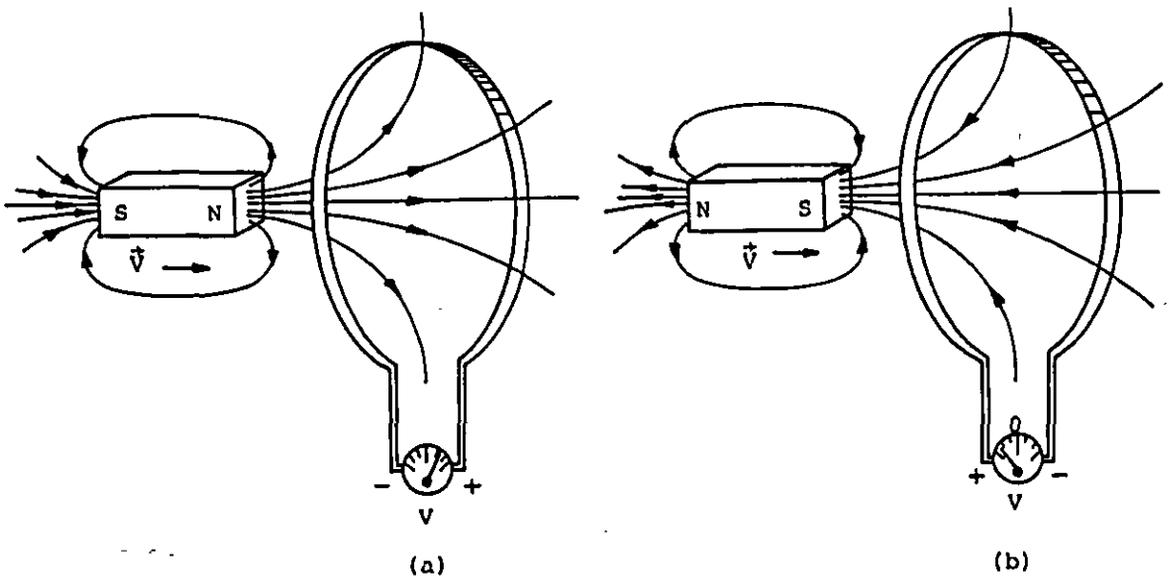


FIGURA 6.1. Fuerza electromotriz inducida en una espira al moverse un magneto respecto a dicha espira: (a) al acercarse el polo norte del imán a la espira; (b) al acercarse el polo sur del imán a la espira.

Si el movimiento relativo entre magneto y espira es diferente al mostrado en la figura 6.1 (por ejemplo, alejándose el imán de la espira), la fuerza electromotriz inducida puede cambiar su polaridad o inclusive su magnitud.

Del estudio del tema anterior, podemos pensar en sustituir el magneto por un circuito con una corriente eléctrica circulante, tal como se muestra en la figura 6.2, y desplazando ahora a la espira hacia el circuito, se inducirá en las terminales de la espira una fuerza electromotriz como en el caso mostrado en la figura 6.1.

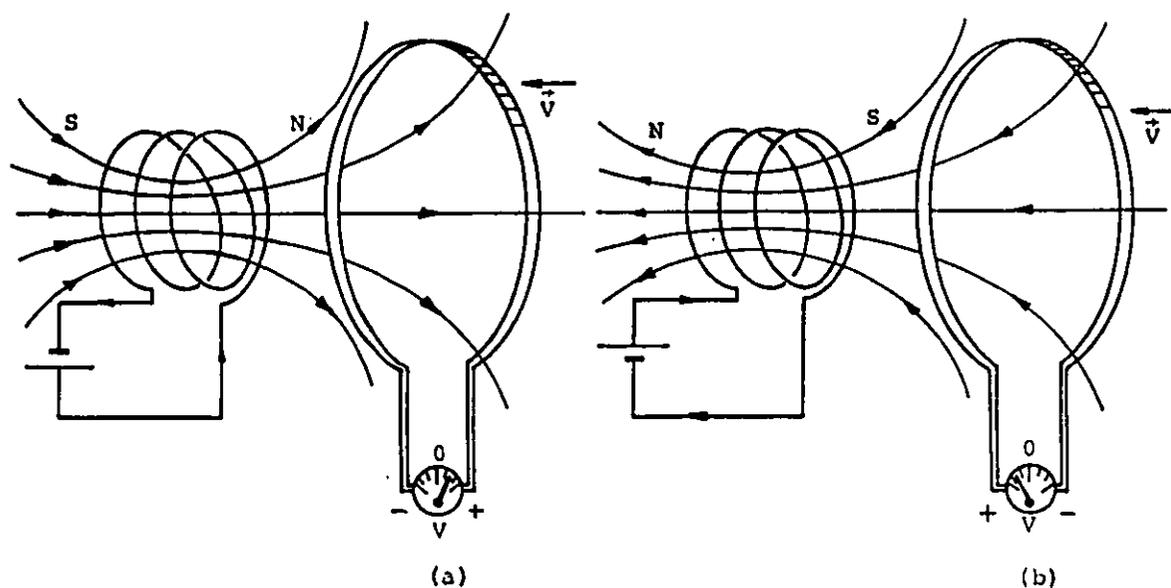


FIGURA 6.2. Fuerza electromotriz inducida en una espira al moverse respecto a un circuito energizado: (a) al acercarse al extremo norte de la bobina; (b) al acercarse al extremo sur de la bobina.

En los dos experimentos descritos se destaca que para que exista una fuerza electromotriz inducida en un circuito (por ejemplo una espira) es necesario un movimiento relativo entre productor de campo y espira. Dicho experimento se muestra en la figura 6.3.

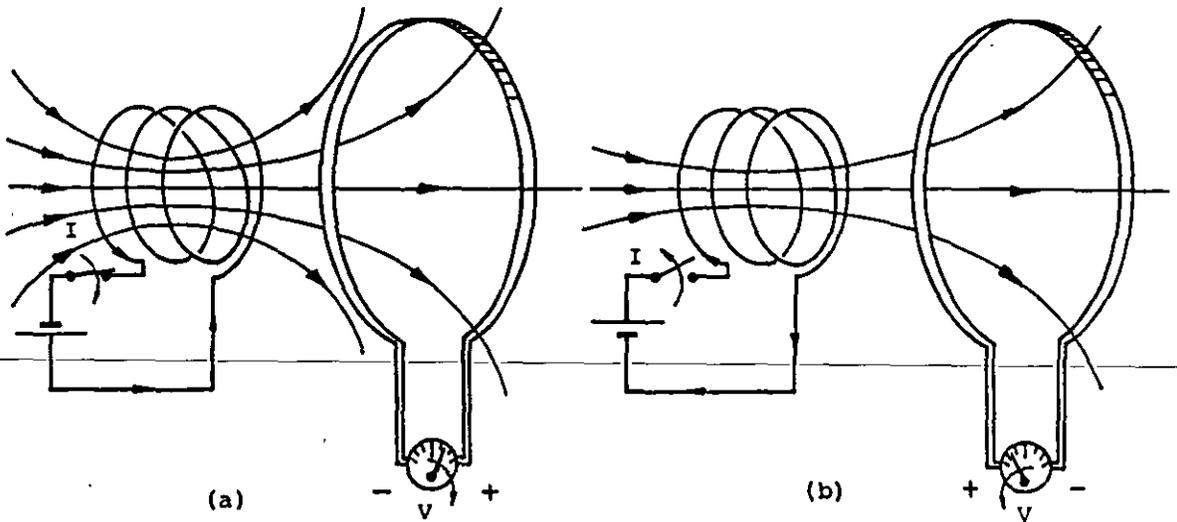


FIGURA 6.3. Fuerza electromotriz inducida en una espira que se presenta sólo al variar la corriente en un circuito vecino: (a) al cerrar el interruptor I del circuito; (b) al abrir el interruptor I del circuito.

Aunque los tres experimentos descritos son diferentes, en todos ellos existe una causa común que origina la fuerza electromotriz inducida en la espira y ésta es: *la variación del flujo concatenado o enlazado por la espira con respecto al tiempo*. En los casos en que existe movimiento relativo entre productor de campo y espira, el flujo enlazado por la espira aumenta o disminuye, según sea que se acerquen o alejen la espira y el productor de campo, y, en estos casos, las fuerzas electromotrices inducidas serán de polaridades inversas; pero aun cuando no exista movimiento relativo, como en el caso de la figura 6.3, las fuerzas electromotrices se presentan ya sea al cerrar o abrir el circuito, puesto que con esta acción el flujo magnético producido por el circuito aumenta o disminuye respectivamente, y en consecuencia sucede lo mismo con el flujo concatenado por la espira.

Expresando matemáticamente la relación entre (la causa) la rapidez de cambio del flujo concatenado, que denominaremos con la letra griega λ , y la fuerza electromotriz inducida (el efecto), se obtiene la ley de la inducción de Faraday, que anotamos a continuación.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\lambda}{dt} \quad (6.1)$$

El signo en la expresión anterior significa que la polaridad de la fuerza electromotriz inducida es opuesta a la de la variación del flujo concatenado. Cabe hacer notar que la ecuación (6.1) describe completamente el fenómeno electromagnético de inducción, pero requiere definir la dirección para la cual el flujo y la corriente que lo produce son positivos; para facilitar la aplicación de esta ley nos valdremos del principio enunciado por el físico alemán Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865) que estudiaremos en el siguiente inciso de este tema.

Además, cuando la fuerza electromotriz se induce en un embobinado de N espiras, se suele aproximar el flujo concatenado como el producto de N por el flujo magnético que cruza a través de una de las espiras; haciendo la consideración que es el mismo para todas ellas, de tal forma que la ley de Faraday se expresa comúnmente como

$$E_i = -N \frac{d\phi_b}{dt} \quad (6.2)$$

6.2 PRINCIPIO DE LENZ

En el año de 1834, el físico alemán Lenz realiza los mismos experimentos que Faraday y Henry. Su aportación consiste en haber explicado, en forma concisa, el sentido de la fuerza electromotriz y en consecuencia el de la corriente inducida en un circuito sujeto a un flujo magnético variable en el tiempo.

Para concluir este principio, analicemos lo que sucede al acercar el extremo norte de un imán de barra a una espira cerrada, como se muestra en la figura 6.4.

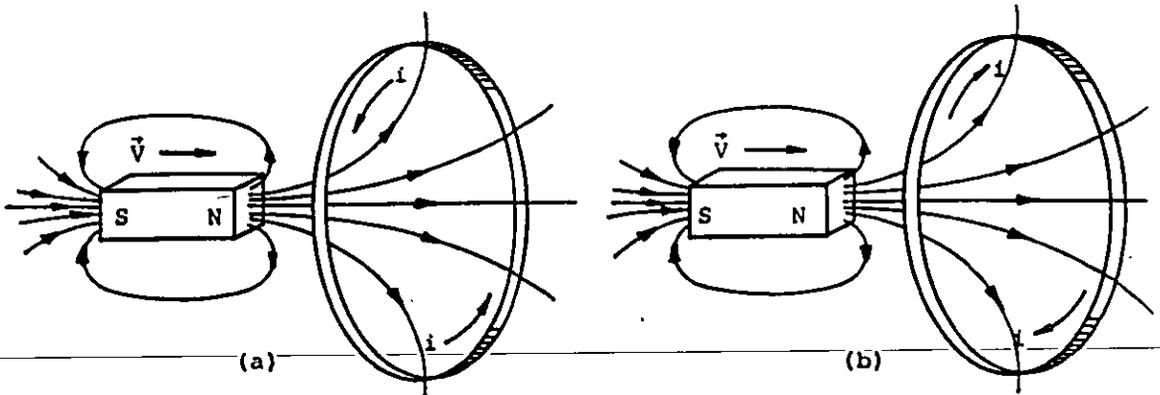


FIGURA 6.4. Corriente inducida en una espira debido al acercamiento de un magneto. ¿Cuál es el sentido correcto?

Si suponemos que el sentido de la corriente inducida mostrado en la figura 6.4 (a) es el correcto, implicaría que el lado izquierdo de la espira se comportaría como un polo sur magnético y debido a la atracción entre polos diferentes, esta fuerza sería capaz de desplazar el imán y desarrollar un trabajo. Por otra parte, la espira posee cierta resistencia, y al circular por ella una corriente eléctrica, existiría una disipación de energía en forma de calor. Más aún, si pensamos que el experimento se realiza en el vacío, no habrá fricción y la fuerza magnética entre el polo norte del imán y la cara izquierda de la espira, aceleraría el imán produciendo una mayor rapidez de variación del flujo magnético, una mayor fuerza electromotriz y en consecuencia mayor corriente inducida y disipación de energía en forma de calor; todo esto *gratuitamente*, es decir, se obtiene un trabajo sobre el imán y una energía en forma de calor en la espira, sin invertir más allá que un ligero impulso inicial para mover el imán y propiciar la ocurrencia del fenómeno descrito.

Lo anterior viola el principio de conservación de la energía y la raíz de este absurdo estriba en haber supuesto la corriente inducida en el sentido mostrado en la figura 6.4 (a) .

Si en cambio suponemos que el sentido de la corriente es el de la figura 6.4 (b), no existe violación alguna, ya que al circular la corriente, el extremo izquierdo de la espira se comporta como un polo norte y, debido a la repulsión entre polos magnéticos del mismo tipo, será necesario aplicar una fuerza externa que contra-

reste dicha repulsión y permita mover el imán con velocidad constante. Esta fuerza desarrolla trabajo sobre el imán y, en ausencia de efectos disipativos (fricciones), este trabajo será igual a la energía disipada en forma de calor en la espira, ya que éstas son las únicas transformaciones de energía que ocurren en el fenómeno.

El sentido de la corriente inducida se puede determinar fácilmente aplicando la regla enunciada por Lenz, que en estos apuntes se presenta como el *Principio de Lenz*, ya que como hemos visto, el sentido de dicha corriente tiene una íntima relación con el principio de conservación de la energía. El enunciado es el siguiente:

El sentido de una corriente inducida debe ser tal, que se oponga a la causa que la produce.

La causa mencionada en el principio es única: la variación del flujo concatenado, aunque dicha variación puede ser un aumento o una disminución. Como ejemplo, tomemos el caso de la figura 6.4: al acercarse el polo norte del imán a la espira, el flujo concatenado por ésta aumenta y es mayor el número de líneas de campo magnético que cruzan la espira hacia la derecha; de acuerdo con el principio de Lenz, la corriente debe oponerse a dicho aumento y esto se consigue con una corriente inducida que produzca flujo magnético en dirección opuesta al que proviene del polo norte del magneto.

Aplicando la *regla de la mano derecha*, se determina que la corriente inducida debe tener el sentido mostrado en la figura 6.4 (b).

Para reafirmar este concepto, determine el sentido de la corriente inducida para el caso de la figura 6.4, si el movimiento del imán fuera en dirección contraria al mostrado en la misma figura.

Cuando el embobinado que experimenta una variación en su flujo concatenado no tiene unidas sus terminales; esto es, que no puede circular corriente alguna por sus espiras, sólo se presenta

una fuerza electromotriz inducida en dichas terminales y la determinación de la polaridad, de esta fem, se logra mediante la aplicación del principio de Lenz imaginando que las terminales son unidas externamente por un conductor; siendo la terminal de mayor potencial eléctrico (terminal positiva) aquella por la cual saldría la corriente para circular por el conductor imaginario, y la terminal de menor potencial (terminal negativa) aquella por la que la corriente inducida entraría a las espiras del embobinado en cuestión. Con el objeto de ilustrar esta explicación, veamos el caso mostrado en la figura 6.5.

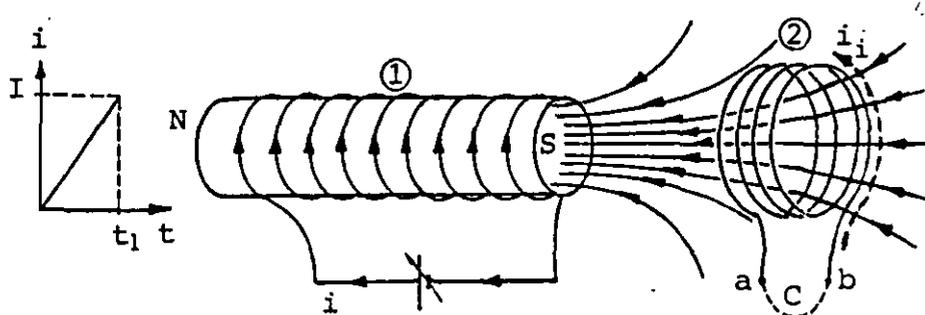


FIGURA 6.5. Fuerza electromotriz inducida en el embobinado 2 debida a la variación (aumento) de la corriente que circula en el embobinado 1.

Durante el intervalo $0 \leq t \leq t_1$, la corriente i del circuito está aumentando con rapidez constante; el flujo magnético que cruza de derecha a izquierda el embobinado 2 se incrementa en cada instante. Si imaginamos que con el conductor C unimos las terminales a y b del embobinado 2, por éste circularía una corriente inducida i_1 , como la mostrada en la figura 6.5, la cual se determina con ayuda del principio de Lenz. Dicha corriente circularía por el embobinado y saldría del mismo por la terminal a, la que resultaría de mayor potencial. Esta supuesta corriente inducida circularía por el conductor imaginario y entraría al embobinado por la terminal b, que resultaría ser la terminal de menor potencial. Dicho de otra forma, un voltmetro conectado a estas terminales indicaría una diferencia de potencial (fuerza electromotriz inducida) $V_{ab} > 0$ para todo el intervalo $0 \leq t \leq t_1$.

Con el objeto de facilitar la determinación de la magnitud y sentido de la fuerza electromotriz inducida, es conveniente calcular la magnitud de la misma por medio de la expresión (6.1), omitiendo el signo y encontrando su sentido al aplicar el principio de Lenz.

Verificar los signos de las polaridades de las fems inducidas en los casos mostrados en las figuras 6.1, 6.2 y 6.3.

6.3 FUERZA ELECTROMOTRIZ DE MOVIMIENTO

Veamos ahora una aplicación cuantitativa de la ley de Faraday al analizar la fuerza electromotriz que se induce en una espira que se mueve con velocidad constante dentro de un campo magnético, que para simplificar consideraremos uniforme, como se muestra en la figura 6.6.

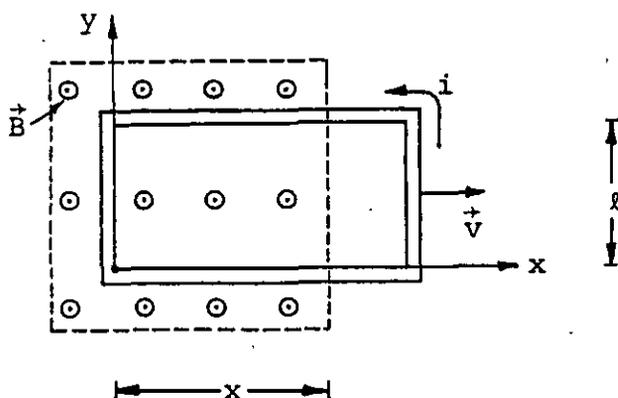


FIGURA 6.6. Espira conductora con velocidad paralela al eje x ; una parte de la misma se encuentra dentro de un campo magnético uniforme.

Al desplazarse la espira de la figura anterior, disminuirá su flujo concatenado y se inducirá una fem que hará circular una corriente cuyo sentido será contrario al de las manecillas del reloj lo cual se determina de la aplicación del principio de Lenz.

Para calcular la fuerza electromotriz inducida, emplearemos la ley de Faraday, ecuación (6.1)

$$\mathcal{E} = \frac{d\lambda}{dt}$$

como $\lambda = N\phi_b$ y $N = 1$ en este caso, se tiene

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi_b}{dt}$$

y de la ecuación (5.79), se tiene que el flujo magnético es

$$\phi_b = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

y en este caso

$$\phi_b = BA$$

pero el área A , representa aquella por la cual cruza el flujo magnético, es decir

$$A = l x$$

Sustituyendo estos resultados en la ley de Faraday, se obtiene

$$\mathcal{E} = \frac{d(B l x)}{dt} \quad (6.3)$$

o sea

$$\mathcal{E} = B l \frac{dx}{dt} \quad (6.4)$$

ya que B y l son constantes.

Por otra parte, $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad con que se mueve la espira, es decir, la magnitud de la fuerza electromotriz inducida por movimiento será

$$E = B l v \quad (6.5)$$

La ecuación (6.5) nos permite calcular la magnitud de la fuerza electromotriz, pero no nos indica nada respecto a su sentido y localización. Respecto al sentido, podemos decir que debe ser tal que impulse las cargas de la espira a formar una corriente en sentido antihorario, tal como se dedujo anteriormente. La relación entre la fem inducida y la corriente inducida, se obtiene de la LVK, o sea

$$E = R i$$

en la cual R representa la resistencia eléctrica de la espira conductora.

Respecto a la determinación de la localización de la fem inducida, realizaremos el siguiente análisis. Tomemos nuevamente la espira móvil dentro del campo magnético como se muestra en la figura 6.7.

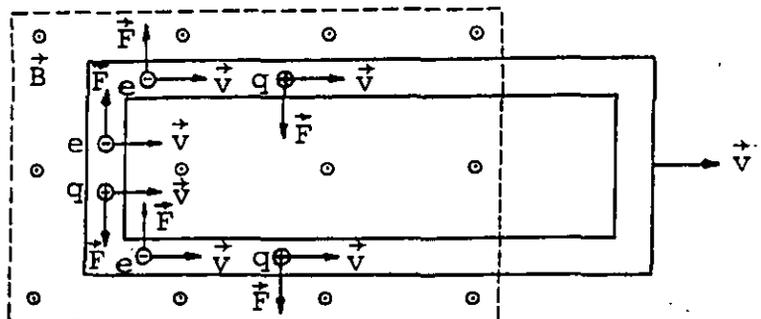


FIGURA 6.7. Fuerzas de origen magnético sobre diversas cargas de una espira conductora móvil.

De la última figura observamos que las cargas eléctricas de la espira conductora experimentan fuerzas de origen magnético dadas por la expresión (5.5). Dichas fuerzas sólo actúan sobre las cargas de la porción de espira que se encuentra dentro del campo magnético y causan desplazamientos en los portadores de carga libres (en este caso electrones). Se puede concluir que las partes superiores de los tramos de esta parte de la espira, quedarán eléctricamente negativas y las partes inferiores quedarán positivas, de manera semejante a lo mostrado en la figura 6.8.

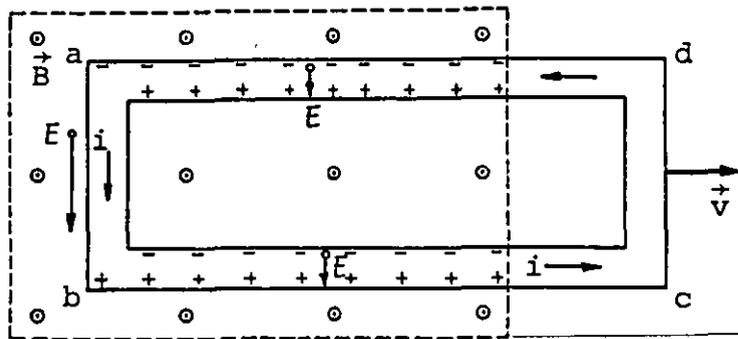


FIGURA 6.8. Fuerzas electromotrices inducidas en una espira conductora móvil dentro de un campo magnético uniforme. También se muestra el sentido de la corriente inducida.

De este análisis, obtenemos los siguientes resultados:

- a) En toda la porción de espira sujeta al campo magnético, se inducen fuerzas electromotrices.
- b) De las fems inducidas, sólo la que se localiza en el lado ab de la espira impulsa las cargas que forman la corriente inducida; por esta razón se suele considerar a este lado el asentamiento de la fem inducida en la espira.

Se puede destacar que para la determinación del sentido de la fem inducida, es posible utilizar o aplicar el principio de Lenz ya que dicha fem deberá tener el mismo sentido que el de la co-

riente; pero del análisis anterior se hace notar que existe una manera alternativa y consistente para determinar dicho sentido, sobre todo en aquellos casos en que no es fácil detectar una variación en el flujo concatenado. Como ejemplo de esto supongamos que en lugar de una espira, se trata de una barra conductora que se mueve dentro del campo magnético uniforme, como se muestra en la figura 6.9 (a).

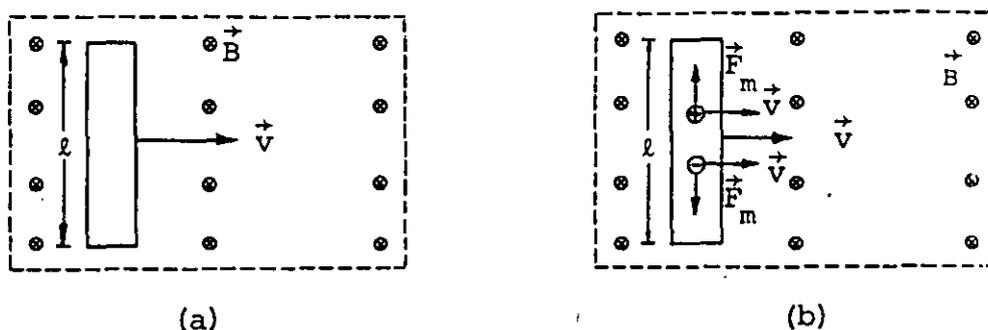


FIGURA 6.9. (a) Barra conductora móvil dentro de un campo magnético uniforme; (b) fuerzas de origen magnético sobre cargas positivas y negativas de la barra.

Resulta obvio que en el caso de la figura 6.9 (a), no existe corriente inducida, pero ¿qué se puede decir respecto a la fem inducida?

Si deseamos aplicar la ley de Faraday, nos encontraremos con que el flujo concatenado y su variación son nulos, y esto nos lleva a afirmar que la fem inducida es cero. Sin embargo, al realizar un análisis análogo al realizado para el caso de la espira, se observa que en realidad (debido a las fuerzas de origen magnético que actúan sobre las cargas de la barra) ocurre un acumulado de éstas en los extremos de la misma, que dan por resultado una diferencia de potencial entre dichos extremos, la cual no es otra cosa que una fem inducida.

La pregunta que surge en este momento es: si la barra se sigue moviendo dentro del campo magnético ¿qué ocurre con la fem inducida? ¿sigue creciendo indefinidamente o se mantiene constante?

Para responder a las interrogantes planteadas, se puede observar que si dichas cargas se siguen moviendo, ya que forman parte de la barra, seguirán experimentando las fuerzas de origen magnético pero también habrá que considerar que sobre las cargas se ejercerá una fuerza adicional debido a su acumulación en los extremos, que aumentará de acuerdo con la acumulación mencionada. Esta fuerza de origen eléctrico llegará a equilibrar la fuerza magnética que actúa sobre cada carga, dando, en el equilibrio, una resultante nula y en consecuencia el incremento de la carga en los extremos de la barra cesará. De esta manera, en la barra se obtiene una fem inducida que puede ser cuantificada por medio de la expresión (6.5) y cuya polaridad se encuentra al analizar el movimiento de las cargas que experimentan las fuerzas magnéticas. Queda al final y mientras dure el movimiento de la barra una situación como la mostrada en la figura 6.10.

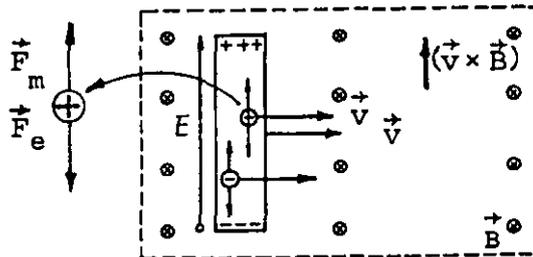


FIGURA 6.10. Fuerza electromotriz inducida en los extremos de una barra conductora móvil dentro de un campo magnético uniforme.

Resulta interesante analizar cuantitativamente, lo que ocurre sobre una carga cuando se ha alcanzado el equilibrio, es decir

$$\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0 \quad (6.6)$$

o sea que

$$\vec{F}_m = -\vec{F}_e \quad (6.7)$$

pero

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \text{y} \quad \vec{F}_e = q\vec{E}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (6.7), obtenemos que

$$\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E} \quad (6.8)$$

El resultado obtenido en la expresión (6.8) no nos debe sorprender ya que en el tema anterior se llegó a la conclusión de que $(\vec{v} \times \vec{B})$ es un campo eléctrico que, en este caso, apunta en dirección contraria al campo eléctrico originado por el acumulamiento de carga en los extremos de la barra conductora.

EJEMPLO 6.1

Determinar la fuerza electromotriz inducida en una barra metálica que se mueve con una velocidad \vec{v} constante y paralela a un conductor recto y muy largo que transporta una corriente, como se muestra en la figura 6.11.

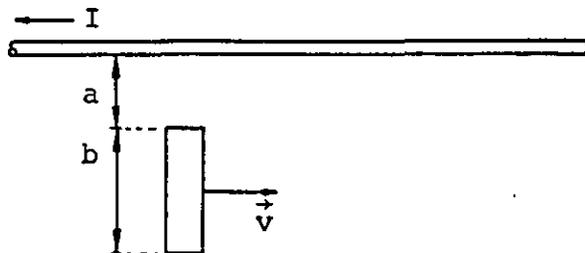


FIGURA 6.11. Barra metálica con velocidad paralela a un conductor recto.

SOLUCION

Primeramente, es conveniente analizar la polaridad de la fuerza electromotriz inducida, la cual se puede determinar estudiando las fuerzas que actúan sobre las cargas de la barra, como se muestra en la siguiente figura.

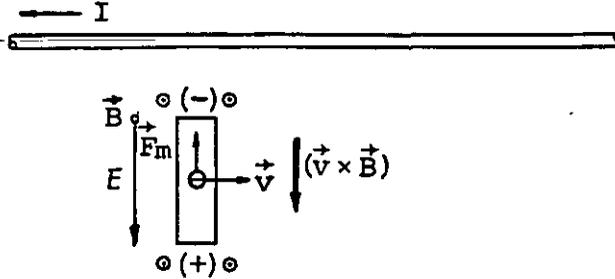


FIGURA 6.12. Determinación de la polaridad de la fuerza electromotriz en la barra móvil de la figura 6.11.

De la figura anterior se observa que el extremo superior de la barra resulta el de menor potencial, por esta razón la fuerza electromotriz apunta hacia abajo.

Por otro lado, se sabe que el campo magnético producido por un conductor recto y largo es función inversa de la distancia al conductor. Por esta razón, será necesario considerar elementos diferenciales de la barra para los cuales se pueda considerar un valor de \vec{B} constante y después sumar todas las fuerzas electromotrices diferenciales, es decir, realizar una integración a lo largo de la barra. De la ecuación (6.5) se tiene que

$$d\mathcal{E} = B v dl$$

e integrando

$$\mathcal{E} = \int B v dl$$

pero

$$dl = dr, \quad v = \text{constante} \quad \text{y} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

por lo que

$$E = v \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

Finalmente, la magnitud de la fuerza electromotriz será

$$E = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

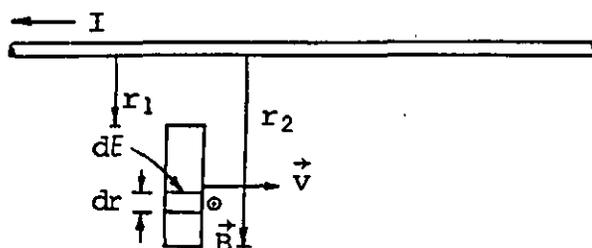


FIGURA 6.13. Fuerza electromotriz diferencial inducida en una diferencial de barra.

Compruebe que si la longitud de la barra móvil fuera de 10 cm, la separación de la misma al conductor recto y largo de 5 cm, la corriente en el conductor de 95 A y la velocidad de la barra de 5 m/s la fuerza electromotriz en los extremos sería de 104.37 μV .

6.4 TRANSFORMADOR CON NUCLEO DE AIRE

Consideremos ahora los dos solenoides superpuestos mostrados en la figura 6.14. Ambos poseen iguales longitudes y áreas de sección transversal aunque diferente número de vueltas.

El solenoide 1 es alimentado por una corriente que aumenta con rapidez constante desde 0 hasta el valor I_1 en el intervalo de tiempo $0 \leq t < t_1$. Al alcanzar el valor I_1 , la corriente permanece constante para el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$.

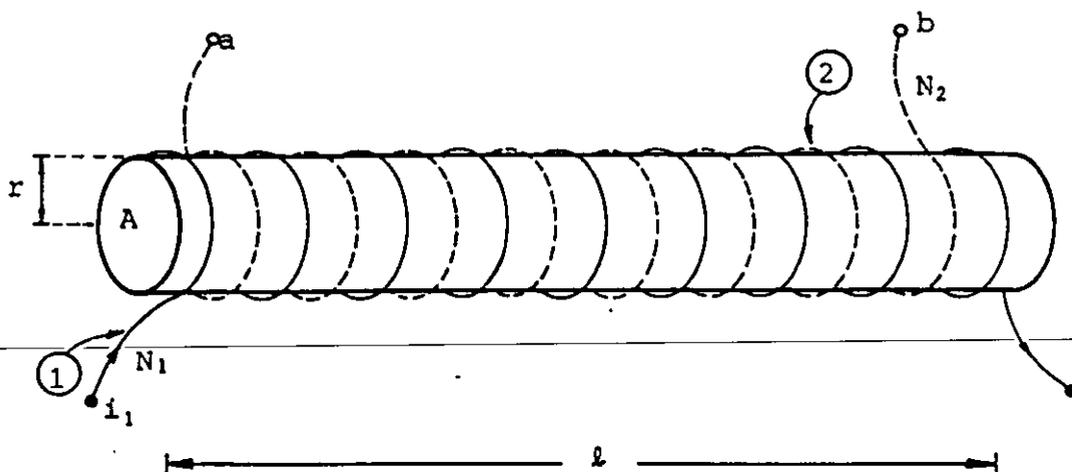


FIGURA 6.14. Solenoides largos ($l \gg r$) superpuestos. Ambos de iguales longitudes y áreas de sección transversal.

Calcularemos la fuerza electromotriz inducida en el solenoide 2, para el intervalo $0 \leq t \leq t_2$. Para este fin emplearemos la ley de Faraday, expresión (6.2), la cual reescribimos con los subíndices convenientes

$$E_2 = N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt}$$

El flujo magnético ϕ_{21} representa el flujo que concatena las vueltas del solenoide 2 y que es producido por el solenoide 1. Dadas las características de los solenoides en cuestión (iguales longitudes y áreas de sección transversal), se cumple que, esencialmente, todo el flujo producido por el solenoide 1 enlaza las espiras del solenoide 2. De la aplicación de la ecuación (5.79), se tiene que

$$\phi_{21} = \phi_{11} = B_1 A \quad (6.9)$$

Por esta razón, la ley de Faraday se puede escribir como

$$E_2 = N_2 A \frac{dB_1}{dt} \quad (6.10)$$

Ahora bien, es posible calcular la inducción magnética B_1 por medio de la expresión (5.77), es decir

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{\ell} \quad (6.11)$$

Sustituyendo la ecuación (6.11) en la (6.10), se tiene

$$E_2 = \frac{N_2 A \mu_0 N_1}{\ell} \frac{di_1}{dt} \quad (6.12)$$

Por medio de la última expresión es posible determinar la fuerza electromotriz inducida en el solenoide 2, si se conocen las características de construcción de los solenoides

$$N_2, A, \mu_0, N_1 \text{ y } \ell$$

y la forma en que varía la corriente i_1 con respecto al tiempo.

En el caso que estamos tratando, la corriente i_1 tiene dos comportamientos es decir

$$\frac{di_1}{dt} = C_1 \quad \text{para } 0 \leq t < t_1$$

$$C_1 = \text{constante}$$

y

$$\frac{di_1}{dt} = 0 \quad \text{para } t_1 \leq t \leq t_2$$

ya que

$$i_1 = I_1 = \text{constante}$$

Para el primer intervalo, la magnitud de la fem inducida E_2 será

$$E_2 = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell} C_1 \quad \text{para } 0 \leq t < t_1$$

y para el segundo intervalo, E_2 será

$$E_2 = 0 \quad \text{para } t_1 \leq t \leq t_2$$

ya que $\frac{di_1}{dt} = 0$ lo que significa que $\phi_{21} = \text{constante}$.

Para determinar la polaridad de la fem E_2 , aplicaremos el principio de Lenz y nos auxiliaremos de la figura 6.15.

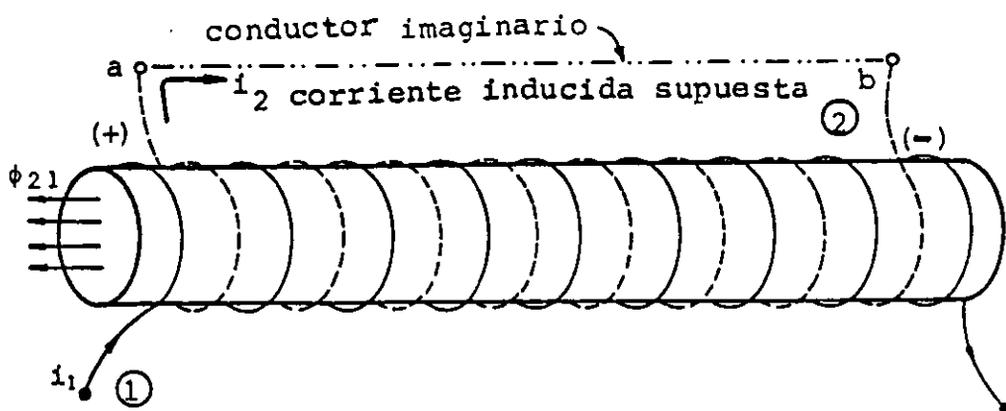


FIGURA 6.15. Determinación de la polaridad de la fuerza electromotriz inducida en el solenoide 2 .

La corriente i_1 producirá un flujo magnético hacia la izquierda, el cual, en el intervalo $0 \leq t < t_1$, estará creciendo con rapidez constante (ésta es la causa). El solenoide 2 experimenta un incremento en el flujo, y de acuerdo con el principio de Lenz, la corriente inducida en este devanado circulará en el sentido en que el flujo que produzca se oponga al aumento de ϕ_{21} , es decir, el flujo debe ser dirigido hacia la derecha.

Si imaginamos el conductor (indicado en la figura 6.15 con línea interrumpida) que une las terminales a y b del solenoide 2, la corriente inducida circularía de la terminal a hacia la b por el conductor supuesto. Cabe recalcar que dicha corriente no podrá circular ya que las terminales a y b, en realidad, se encuentran desconectadas. Lo que sí es real, es la fuerza electromotriz inducida la cual tendrá su punto de mayor potencial (+) en la terminal a, por la que saldría la corriente inducida.

Esto es análogo a considerar el solenoide 2 como una fuente de fem .

Por lo antes expuesto, se tendrá que

$$V_{ab} = E_2 > 0$$

$$V_{ba} = -E_2 < 0$$

En la figura 6.16, resumimos los resultados obtenidos por medio de unas gráficas.

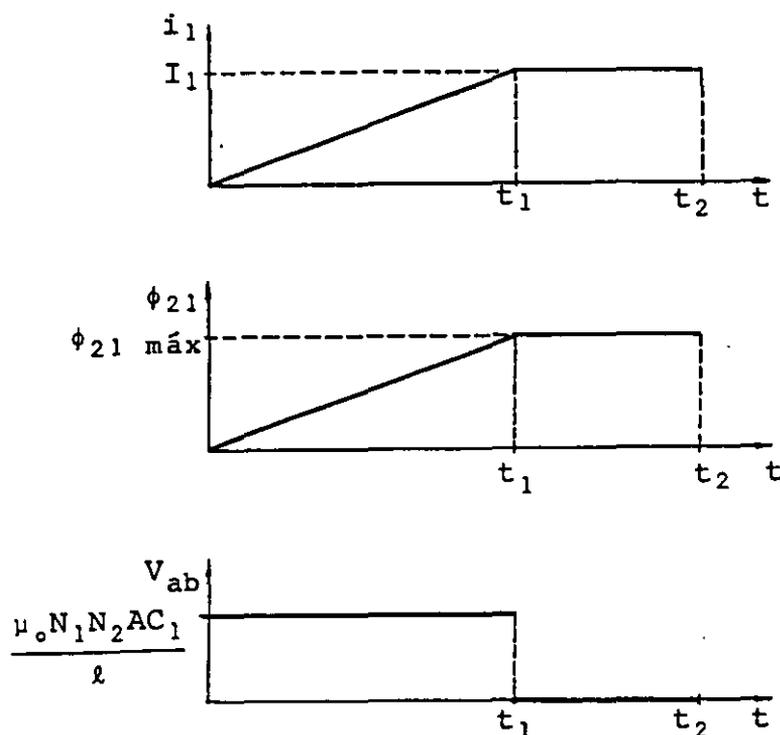


FIGURA 6.16. Gráficas de corriente, flujo y fuerza electromotriz inducida en el transformador ideal con núcleo de aire mostrado en la figura 6.14.

Refiriéndonos a los solenoides de la figura 6.14, considere que $l = 1 \text{ m}$, $r = 3 \text{ cm}$, $N_1 = 100$ vueltas , $N_2 = 10^4$ vueltas y que la corriente i_1 varía como se muestra en la figura 6.17 (a) : Compruebe que la diferencia de potencial inducida V_{ba} que se obtiene en el solenoide 2 , es la mostrada en la figura 6.17 (b), para el mismo intervalo de tiempo.

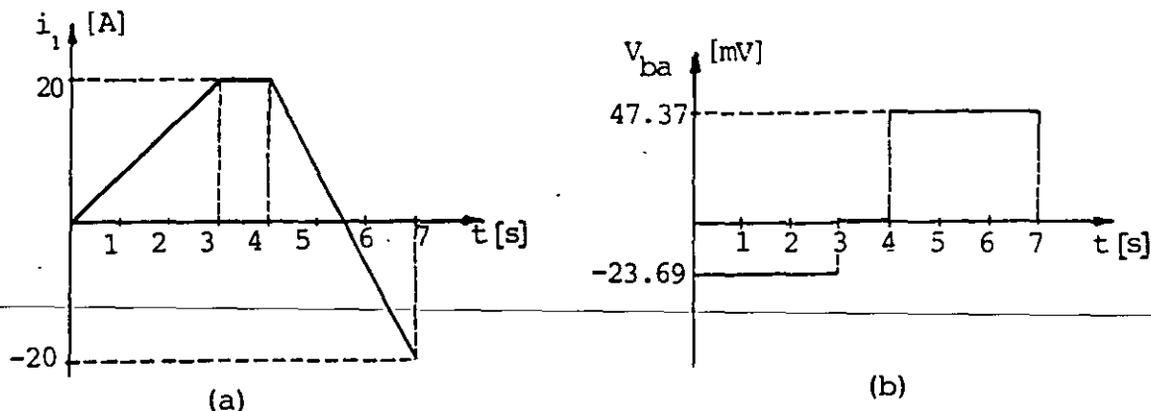


FIGURA 6.17. (a) Variación de i_1 respecto al tiempo; (b) fuerza electromotriz inducida (V_{ba}) en el transformador ideal con el núcleo de aire mostrado en la figura 6.14.

Un dispositivo como el mostrado en la figura 6.14, en el cual existan dos o más devanados acoplados magnéticamente, recibe el nombre de transformador. Cuando en dicho dispositivo se cumplen las condiciones enunciadas a continuación, se le denomina transformador ideal.

- a) El flujo magnético producido por la corriente que circula en cada devanado concatena a todas y cada una de las vueltas que lo constituyen.
- b) La disposición de los devanados es tal, que el flujo que uno de los devanados produce concatena totalmente el otro devanado.
- c) La resistencia eléctrica de cada devanado es nula, por lo cual, no existe disipación de energía en forma de calor debido al efecto Joule.

Como consecuencia de las condiciones anteriores, se tiene que la potencia que se le suministra al transformador ideal es la misma que la potencia que puede proporcionar, modificándose exclusivamente la magnitud del voltaje y la corriente en la salida con respecto a sus valores en la entrada.

Considerando que v_1 y v_2 son los valores de voltajes en la entrada y salida respectivamente de un transformador ideal, y en forma análoga i_1 e i_2 las corrientes correspondientes, se tendrá, con base en la ley de Faraday, que

$$v_1 = N_1 \frac{d \phi_1}{dt}$$

donde ϕ_1 representa el flujo producido por la corriente que circula en el devanado 1 y concatenado por él mismo.

y

$$v_2 = N_2 \frac{d \phi_2}{dt}$$

pero $\phi_2 = \phi_1$ por la segunda condición enunciada, por lo cual

$$\frac{d \phi_1}{dt} = \frac{d \phi_2}{dt}$$

Sustituyendo los valores de estas variaciones de flujo, de las expresiones previas, se obtiene que

$$\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} \quad \text{o} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (6.13)$$

De la aplicación del principio de conservación de la energía al transformador ideal, resulta que

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (6.14)$$

Combinando las expresiones (6.13) y (6.14) se encuentra que

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (6.15)$$

6.5 CORRIENTES DE FOUCAULT

El fenómeno de inducción electromagnética no sólo se presenta en los alambres conductores, sino en todos los materiales que son expuestos a un flujo magnético variable en el tiempo.

En algunos casos las corrientes inducidas acarrearán problemas, tal es el caso de las denominadas corrientes de Foucault o de remolino que se presentan en los núcleos o partes metálicas de algunas máquinas eléctricas (transformadores, motores o generadores).

Con el objeto de comprender la razón de ser y lo perjudicial, en algunos casos, de estas corrientes, analicemos la sección transversal del núcleo metálico mostrada en la figura 6.18. Apliquemos una inducción magnética variable en el tiempo y perpendicular a esta sección.

Tomemos una trayectoria cerrada, por ejemplo la marcada con ①. A través del área limitada por esta trayectoria se observa una variación de flujo magnético y en consecuencia se inducen una fem y una corriente, esta última circulará sobre dicha trayectoria.

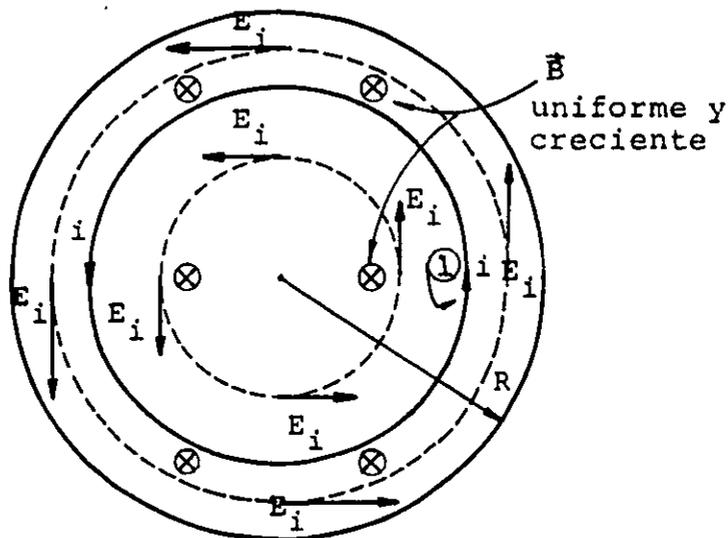


FIGURA 6.18. Sección transversal de un núcleo metálico, sujeta a un campo B uniforme y creciente en el tiempo; se muestran también las direcciones del campo eléctrico inducido (E_i) y una de las trayectorias de la corriente inducida.

El sentido de la corriente ha sido determinado por medio del principio de Lenz, considerando que ϕ_b está aumentando, y la fem inducida es la circulación del campo eléctrico a lo largo de la trayectoria de la corriente, es decir

$$c_e = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_b}{dt}$$

Compruebe que la magnitud del campo eléctrico inducido en una trayectoria circular concéntrica al núcleo de la figura 6.18, para un radio cualquiera $r \leq R$, está dada por la expresión

$$|E_i| = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

En la práctica de la ingeniería existen diversos equipos que operan con corrientes alternas. Si la corriente, en el embobinado que produce el flujo ϕ_b de la figura, fuera alterna, tendríamos que las corrientes inducidas cambiarían de sentido con la misma frecuencia que dicha corriente alterna.

Las corrientes inducidas encuentran a su paso la resistencia eléctrica del material, que depende de la longitud de la trayectoria seguida por la corriente, de la sección por la cual circula y de la resistividad del material del núcleo. Como consecuencia de esto, en dicho núcleo existirá una disipación de energía en forma de calor, producida por el efecto de Joule, y esto constituye un efecto indeseable en diversos equipos eléctricos, no sólo por las pérdidas de energía, sino también por los daños que la elevación de temperatura puede acarrear en el equipo.

Una manera en que se acostumbra minimizar las corrientes de Foucault consiste en evitar los núcleos macizos, laminando el material de que están hechos, con el objeto de aumentar la resistencia que encuentran a su paso estas corrientes inducidas. Además del laminado, se barnizan con materiales dieléctricos; en el caso de las bobinas de inducción, su núcleo se forma con alambres metálicos, con la misma finalidad mencionada para el laminado y para algunos equipos se llegan a formar sus núcleos por medio de hierro pulverizado moldeado a alta presión.

En la figura 6.19 se muestra el efecto logrado sobre las corrientes de remolino, debido a la laminación del núcleo.

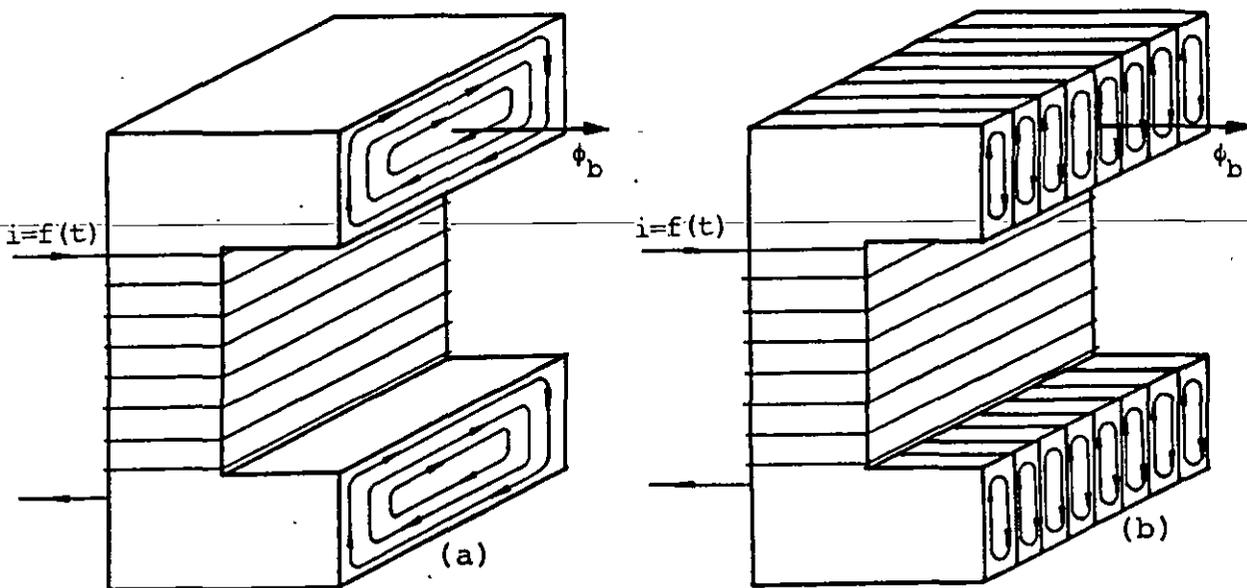


FIGURA 6.19. Secciones de núcleos de transformadores: (a) núcleo macizo; (b) núcleo laminado.

También en la ingeniería se han encontrado aplicaciones útiles al fenómeno de las corrientes de Foucault; tales son los casos de las máquinas soldadoras que operan bajo este principio y en las cuales se llegan a aplicar corrientes alternas de frecuencias del orden de varios cientos de kilohertz con el objeto de lograr altas temperaturas en algunas zonas de los materiales y, por otro lado, el denominado freno magnético, en el cual las fuerzas de origen magnético sobre las corrientes de remolino, originan un momento contrario a la rotación del cuerpo en cuestión, lo que redundará en una disminución de su velocidad angular.

EJEMPLO 6.2

Se dispone de un núcleo macizo de hierro como el mostrado en la figura 6.20 (a), que se utilizará como núcleo de un transformador. Calcular en qué proporción disminuyen las pérdidas de energía debidas a las corrientes de remolino si el núcleo se lamina en n partes y el transformador operara con corriente alterna.

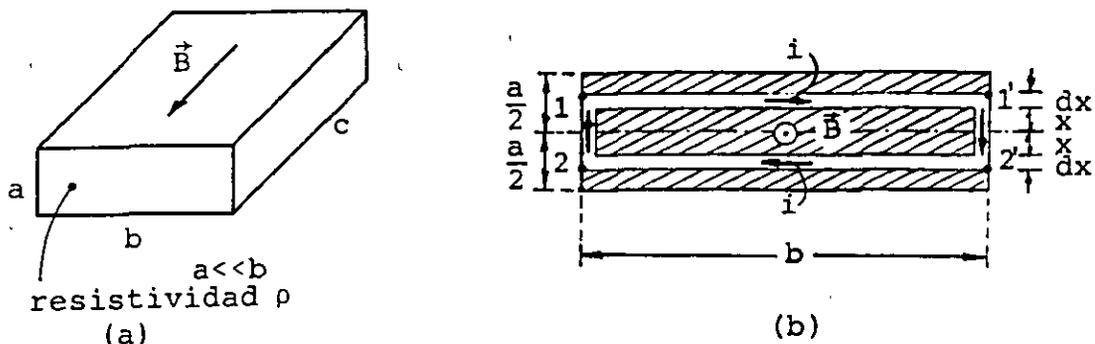


FIGURA 6.20. (a) Núcleo de hierro de un transformador; (b) sección transversal del núcleo que muestra una trayectoria aproximada (1-1'-2'-2) de la corriente inducida del tipo remolino o de Foucault.

SOLUCION

Del tema anterior sabemos que $B \propto i$, si la corriente que produce el campo magnético tiene la misma forma de onda; de esta manera podemos expresar el campo magnético en función del tiempo como

$$B = B_{\text{máx}} \text{sen } \omega t \quad (1)$$

donde $\omega = 2\pi f$ y f es la frecuencia de la onda.

Por otra parte, de la figura 6.20 (b), se observa que el flujo encerrado por la corriente inducida mostrada es

$$\phi_b = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = B A = 2 x b B \quad (2)$$

La fuerza electromotriz inducida en la trayectoria 1-1'-2'-2 resulta de magnitud igual a

$$E = \frac{d\phi}{dt} = 2 x b \omega B_{\text{máx}} \cos \omega t \quad (3)$$

y la resistencia que encuentra a su paso la corriente inducida es

$$R = \frac{2\rho b}{cdx} \text{ ya que } a \ll b \quad (4)$$

Para el cálculo de la energía disipada en la unidad de tiempo debida a la corriente de remolino, conviene utilizar el valor eficaz de la fuerza electromotriz, el cual se define como su valor máximo entre $\sqrt{2}$, es decir

$$E_{ef} = \sqrt{2} \times b \omega B_{m\acute{a}x} \quad (5)$$

y una cantidad diferencial de la potencia disipada P se puede expresar como

$$dP = \frac{E_{ef}^2}{R} = \frac{2(B_{m\acute{a}x} \omega b x)^2 c dx}{2\rho b} \quad (6)$$

integrando esta última expresión entre los límites 0 y $\frac{a}{2}$ se obtiene la potencia disipada en todo el núcleo

$$P = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{B_{m\acute{a}x}^2 \omega^2 b^2 c x^2 dx}{b\rho} = \left[\frac{B_{m\acute{a}x}^2 \omega^2 b c x^3}{3\rho} \right]_0^{\frac{a}{2}}$$

o sea

$$P = \frac{B_{m\acute{a}x}^2 \omega^2 b c a^3}{24\rho} \quad (7)$$

Ahora bien, si dividimos el núcleo macizo en n láminas que aisla das por barniz entre si formen el núcleo, por cada lámina tendremos una potencia disipada p , de tal forma que la potencia total resulta

$$P' = np \quad (8)$$

pero el espesor de cada lámina será a' donde

$$a' = \frac{a}{n} \quad (9)$$

Utilizando la ecuación (7), la potencia p será

$$p = \frac{B_{\text{máx}}^2 \omega^2 b c a^3}{24\rho}$$

y aplicando la expresión (9), obtenemos

$$p = \frac{B_{\text{máx}}^2 \omega^2 b c a^3}{n^3 (24) \rho} \quad (10)$$

siendo la potencia total P' , la siguiente

$$P' = \frac{1}{n^2} \frac{B_{\text{máx}}^2 \omega^2 b c a^3}{24\rho} \quad (11)$$

Comparando las ecuaciones (7) y (11), podemos concluir que el efecto de dividir el núcleo macizo en n láminas es el de disminuir en un factor $\frac{1}{n^2}$ las pérdidas de energía producidas por las corrientes de remolino.

Se puede observar que es conveniente que la laminación se efectúe cortando el espesor o lado más angosto de la sección transversal del núcleo, con lo cual, la consideración hecha en el planteamiento de la ecuación (4) resulta más válido y las pérdidas de energía se reducirán en el factor encontrado; además cabe resaltar que la laminación debe efectuarse dividiendo el área que es cruzada perpendicularmente por el flujo magnético.

6.6 EL GENERADOR HOMOPOLAR

Uno de los primeros dispositivos empleados en la generación de energía eléctrica es el generador homopolar, también conocido como la dínamo de disco de Faraday. Este generador elemental está formado por un disco macizo de material conductor que puede girar sobre su eje y que está expuesto a un campo magnético uniforme pa

ralelo al mismo eje, tal como se muestra en la figura 6.21.

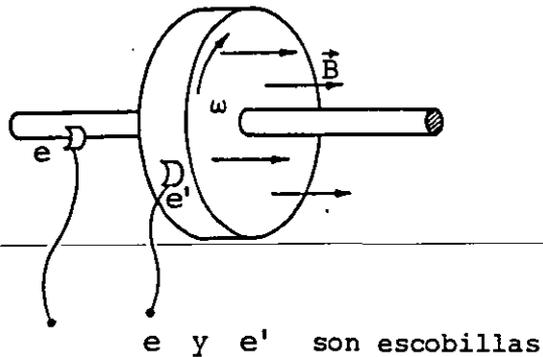


FIGURA 6.21. Generador homopolar o dínamo de disco de Faraday.

Refiriéndonos a la figura anterior, al girar el disco dentro del campo magnético uniforme B , se induce una fuerza electromotriz entre el borde y el eje de dicho disco; a continuación obtendremos el modelo matemático de esta fuerza electromotriz, auxiliándonos de la figura 6.22 que muestra de frente el disco en cuestión.

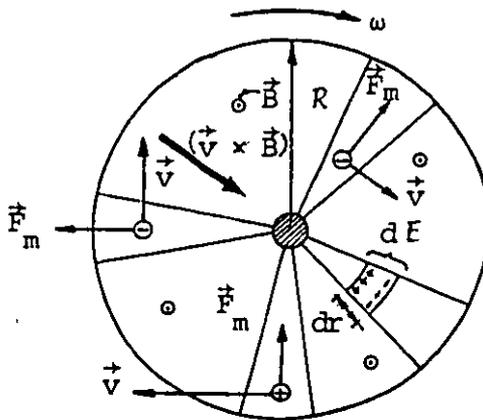


FIGURA 6.22. Disco del generador homopolar de la figura 6.22, visto de frente.

En la figura 6.22 se muestran varios sectores del disco y algunas cargas en los mismos, así como las fuerzas de origen magnético (\vec{F}_m) que actúan sobre ellas. Del análisis de estas fuerzas se

puede concluir que el borde del disco giratorio quedará con un exceso de carga negativa y por lo tanto con un potencial negativo. De la misma manera, el eje del disco quedará con un exceso de carga positiva y, por ende, con un potencial eléctrico positivo.

La diferencia de potencial existente entre borde y eje constituye la fuerza electromotriz inducida en el disco.

En uno de los sectores de la figura anterior se indica, de manera objetiva, una fem inducida de tamaño diferencial (dE); de la ecuación (6.5) se tiene que

$$dE = B v d r \quad (6.16)$$

Integrando esta expresión obtendremos la fuerza electromotriz inducida entre borde y eje del disco

$$E = \int_0^R B v d r \quad (6.17)$$

pero como $B = \text{cte}$ y $v = \omega r$, se puede escribir

$$E = B \omega \int_0^R r d r \quad (6.18)$$

Finalmente, se obtiene

$$E = B \omega \frac{R^2}{2} \quad (6.19)$$

De la expresión (6.19) se puede concluir que la fuerza electromotriz inducida en el generador homopolar depende de la magnitud del campo magnético aplicado, de la velocidad angular y del radio del disco.

Disponiendo de un solenoide cuyo núcleo sea un magneto permanente, es posible construir un generador homopolar cuya entrada de ener-

gía sea exclusivamente mecánica (rotación del disco) y que produzca energía eléctrica en la salida, utilizable ésta para energizar algún circuito, tal como se representa en la figura 6.23.

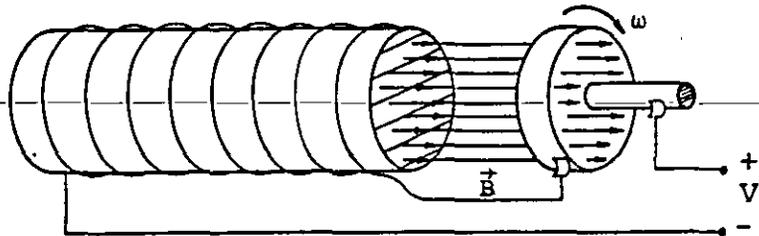


FIGURA 6.23. Generador homopolar con un solenoide conectado en serie. Al conectar el generador a un circuito, la corriente que circule incrementará el campo \vec{B} producido por el núcleo.

6.7 GENERADOR DE CORRIENTE ALTERNA

Analizaremos en este subtema el principio de operación de la mayor parte de los generadores eléctricos que se emplean en la actualidad. Como la corriente eléctrica que generan es del tipo al terno, a este tipo de generadores también se les conoce como al ternadores. En su forma más simple, el generador de corriente al terna consta de una bobina de N vueltas que gira dentro de un campo magnético uniforme. Debido a las variaciones del flujo magnético concatenado por las espiras, en las terminales del embobinado se presenta una fuerza electromotriz inducida que, por medio de anillos conductores y escobillas, puede ser conectada a un cir cuito externo, ver figura 6.24.

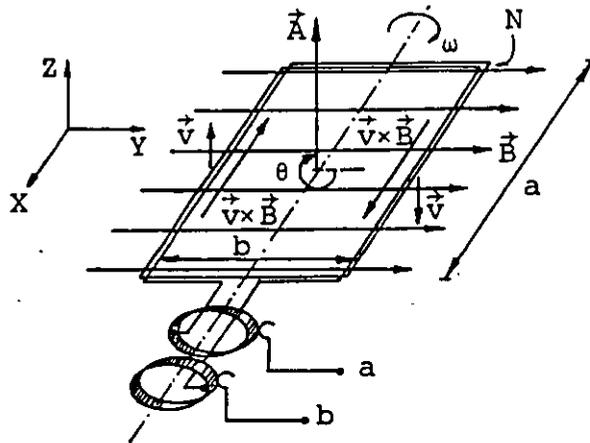


FIGURA 6.24. Modelo simple del generador de corriente alterna.

Partiendo de la ley de Faraday, expresión (6.2), tendremos que la magnitud de la fuerza electromotriz inducida será

$$E = N \frac{d\phi_b}{dt}$$

Debido a que el embobinado se encuentra girando, el flujo ϕ_b a través de cada espira dependerá de la posición del embobinado. Ubiquemos esta posición por medio del ángulo θ , definido como el ángulo formado por la normal al plano del embobinado (\vec{A}) y la dirección del campo magnético (\vec{B}); por ejemplo, en la figura 6.24, el ángulo θ es de $3(\pi/2)$ rad y el flujo ϕ_b que cruza el embobinado en esta posición es nulo. De esta manera, el flujo magnético a través de cada espira, para una posición cualquiera θ del embobinado, será determinado por la expresión (5.79), es decir

$$\phi_b = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.20)$$

la cual, en este caso, nos da

$$\phi_b = B A \cos \theta \quad (6.21)$$

Sustituyendo la última expresión en la ley de Faraday, obtenemos

$$E = N \frac{d\phi_b}{dt} = N B A \frac{d(\cos \theta)}{dt}$$

es decir

$$E = N B A \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (6.22)$$

y $d\theta/dt$, no es otra cosa que la velocidad angular ω del embobinado; de esta manera se puede escribir que

$$v_{ab} = - N B A \omega \operatorname{sen} \theta = - v_{ba} \quad (6.23)$$

En la siguiente figura se muestra la fuerza electromotriz inducida que se obtiene cuando el embobinado gira a velocidad angular constante.

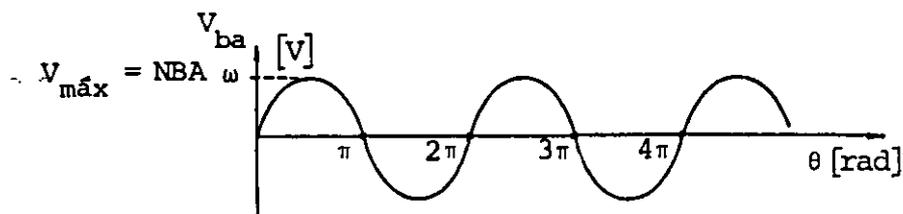


FIGURA 6.25. Fuerza electromotriz inducida por medio de un generador del tipo de la figura 6.24.

ca de una fuente de fem que será conectada a las terminales a y b .

Supongamos que la terminal a del embobinado se conecta al borne positivo de la fuente de fuerza electromotriz, esto hará que circule una corriente como se muestra en la figura 6.27. Todos los conductores que forman el embobinado experimentarán fuerzas de origen magnético, pero como se estudió en el tema anterior, sólo las que actúan sobre los lados paralelos al eje de rotación tendrán efecto sobre el movimiento del embobinado; sobre éste actuará, en consecuencia, un par de fuerzas que originará sobre el embobinado un momento dado por la ecuación (5.103), la cual reescribimos a continuación

$$\vec{\tau}_m = N I \vec{A} \times \vec{B}$$

El anillo seccionado o conmutador permite que la corriente fluya siempre en la dirección mostrada en la figura 6.27, con lo cual se logra que el momento dependa de la posición del embobinado y que inclusive existan dos posiciones en las que dicho momento es nulo ($\theta = 0$ y $\theta = \pi$ rad); sin embargo, para cualquier otra posición habrá un par de fuerzas que impulsará el giro del embobinado, y producirá una rotación continua del mismo.

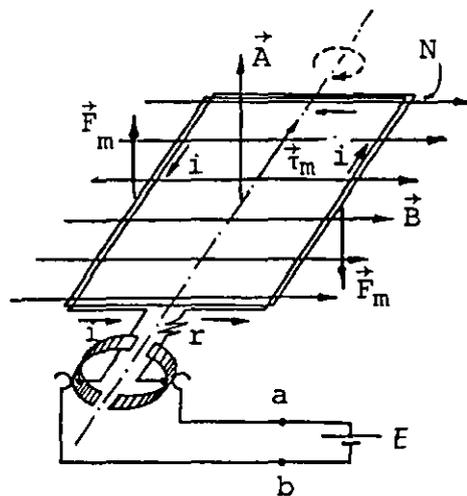


FIGURA 6.27. Modelo simplificado de un motor de corriente directa. La resistencia r representa la correspondiente al embobinado; también se muestran las fuerzas de origen magnético que se producen al girar el rotor.

Se dispone de los siguientes datos de un alternador: embobinado de 200 vueltas rectangulares, de largo 15 cm y ancho 10 cm, que gira con una velocidad angular de 60 revoluciones por segundo y se encuentra en un campo magnético de 0.21 teslas de dirección perpendicular al eje de giro; comprobar que la fuerza electromotriz inducida es $E = 238 \text{ sen}(120 \pi t)$.

Una modificación en los anillos y escobillas del alternador de la figura 6.24 nos permite obtener un generador de corriente directa. El cambio consiste en eliminar uno de los anillos y seccionar en dos partes iguales el restante, cada sección debe hacer contacto con una escobilla, como se muestra en la figura 6.26 (a). De esta forma se evitan los semiciclos negativos obtenidos en el alternador y la fuerza electromotriz inducida será de corriente directa como la indicada en la figura 6.26 (b).

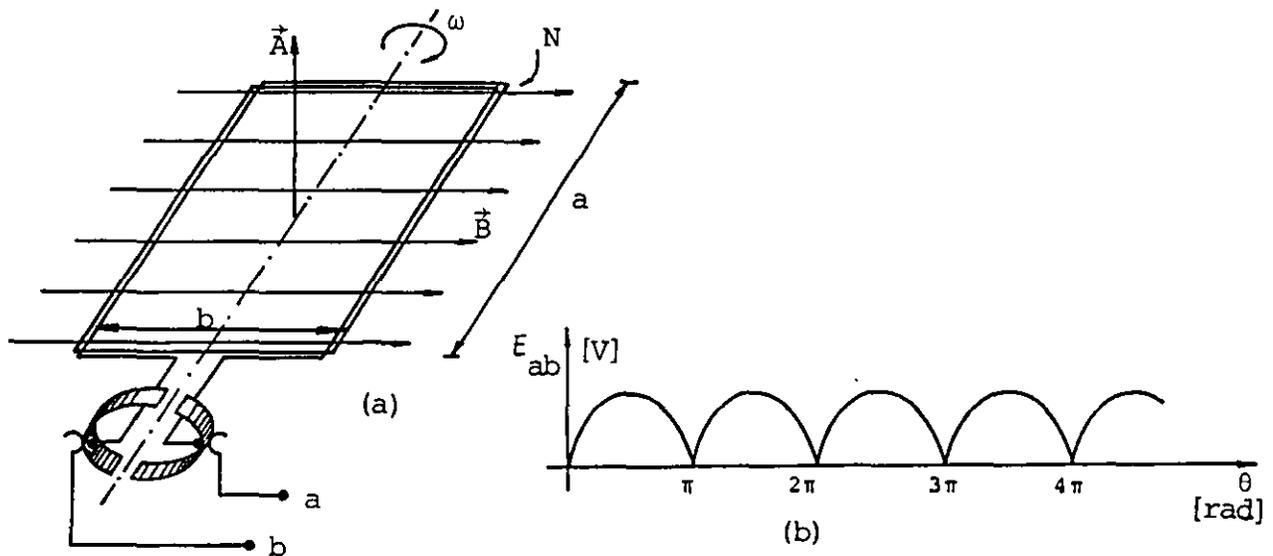


FIGURA 6.26. (a) Generador de corriente directa; (b) fuerza electromotriz inducida que se obtendría con un generador de corriente directa.

6.8 PRINCIPIO DE OPERACION DEL MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA

Para la explicación del funcionamiento de un motor simple alimentado por corriente directa, nos será de utilidad el dispositivo representado en la figura 6.26 (a). En este caso pretendemos obtener la energía mecánica (rotación) a partir de la energía eléctrica.

En la última figura se representa en forma simbólica el efecto resistivo del embobinado por medio de la resistencia r . En el instante inicial de la conexión del motor a la fuente de fem, la corriente que circule sólo se verá limitada por el valor de r ; pero cuando el embobinado comienza a girar, en sus terminales se presenta una fuerza electromotriz inducida que se opone en su sentido al de la corriente. Por esta razón representaremos a esta fem por medio del símbolo $E(t)$.

El circuito eléctrico formado por el motor, su resistencia y la fuente de fuerza electromotriz puede presentarse en el siguiente diagrama.

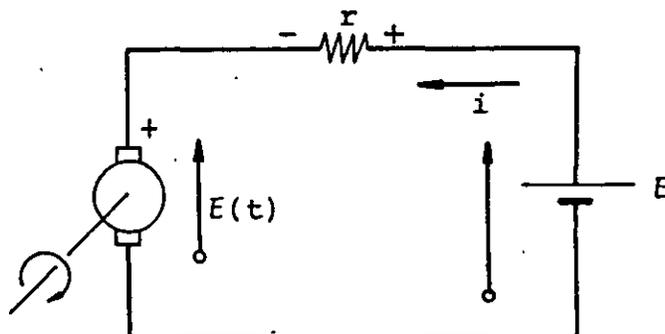


FIGURA 6.28. Diagrama eléctrico del circuito de la figura 6.27.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito de la figura 6.28, se tiene

$$E - ri - E(t) = 0 \quad (6.24)$$

En la última ecuación se tiene que E y r son constantes, lo cual nos lleva a concluir que cuando la fuerza contra-electromotriz f_{cem} es máxima (motor girando en vacío) la corriente en el embobinado es mínima; cuando el motor no gira y la f_{cem} es nula, la corriente alcanza su valor máximo.

Desde el punto de vista energético, cuando el motor gira en el vacío, la fuente externa le suministra la energía que se disipa en las pérdidas por rozamiento y por el efecto de Joule en el embobi-

nado. Cuando el motor mueve algún mecanismo externo o arrastra una carga, su velocidad disminuye con respecto a la obtenida en el giro en vacío, lo cual origina una disminución en la f_{cem} y un aumento en la corriente que circula por el motor, lo que permite al mismo tomar la energía necesaria para realizar su trabajo.

Se dispone de un motor elemental cuyo rotor está formado por 100 espiras rectangulares de 20 cm de largo y 15 cm de ancho, devanadas con alambre de cobre ($\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$) de 4 mm^2 de sección transversal. Se conecta a una fuente de $f e m$ de 100 volts. Comprobar que la corriente máxima que puede circular por el motor es de 336 A y que la fuerza contraelectromotriz es de 85.1 V cuando la corriente es de 50 A .

En la construcción de algunos motores de corriente continua, se utilizan imanes permanentes para producir el campo magnético requerido; sin embargo, cuando los motores no son de tamaño pequeño, resulta necesario generar dicho campo magnético por medio de bobinas devanadas sobre núcleos ferromagnéticos denominados piezas polares

De acuerdo con la forma de conexión entre la bobina del rotor (armadura) y la bobina que produce el campo, se tienen tres tipos de motores de corriente continua.

a) Motor con excitación en serie

Es aquel que tiene conectadas en serie la bobina del rotor y las bobinas de campo, como se muestra en forma esquemática en la figura 6.29 (a). En la misma figura se muestra el diagrama eléctrico correspondiente.

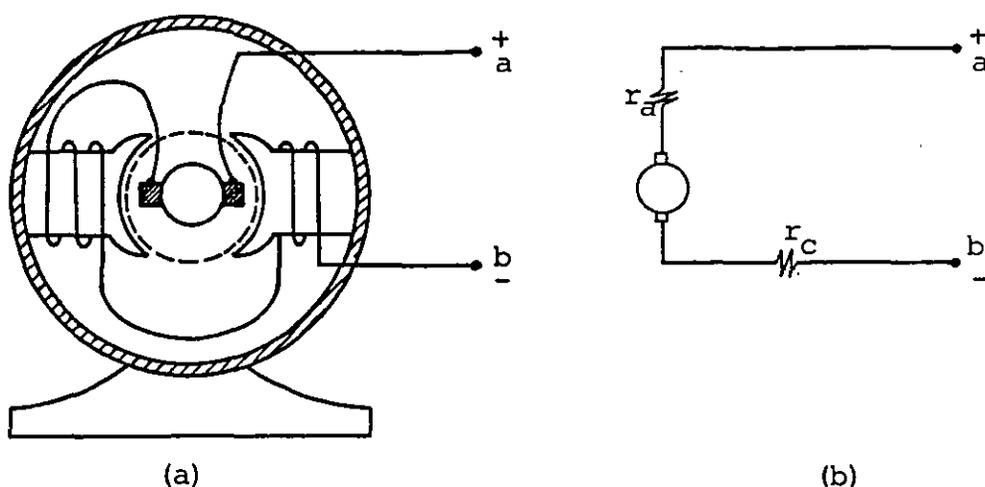


FIGURA 6.29. Motor de corriente continua tipo serie: (a) corte esquemático; (b) diagrama eléctrico.

b) Motor con excitación en paralelo

Este tipo de motor es el que tiene conectadas en paralelo las bobinas de campo y la de armadura, como se indica en la figura 6.30(a) y cuyo diagrama eléctrico aparece en la figura 6.30 (b).

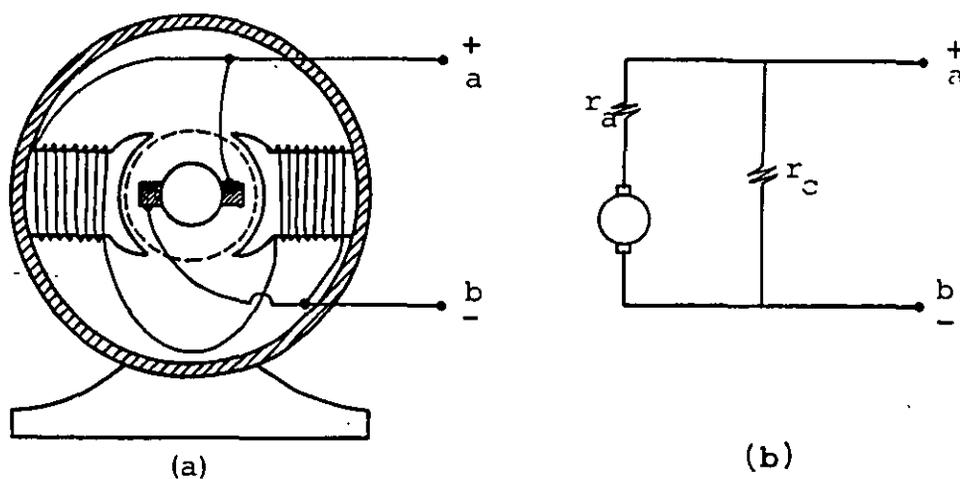


FIGURA 6.30. Motor de corriente continua con excitación en paralelo: (a) corte esquemático; (b) diagrama eléctrico.

c) Motor con excitación compuesta

El motor con este nombre posee bobinas de campo que se encuentran conectadas en serie con la bobina del rotor, pero además, tiene otras bobinas productoras de campo magnético que están conectadas en paralelo con la bobina de armadura. En la figura 6.31 se muestra un esquema de las conexiones así como el diagrama eléctrico correspondiente.

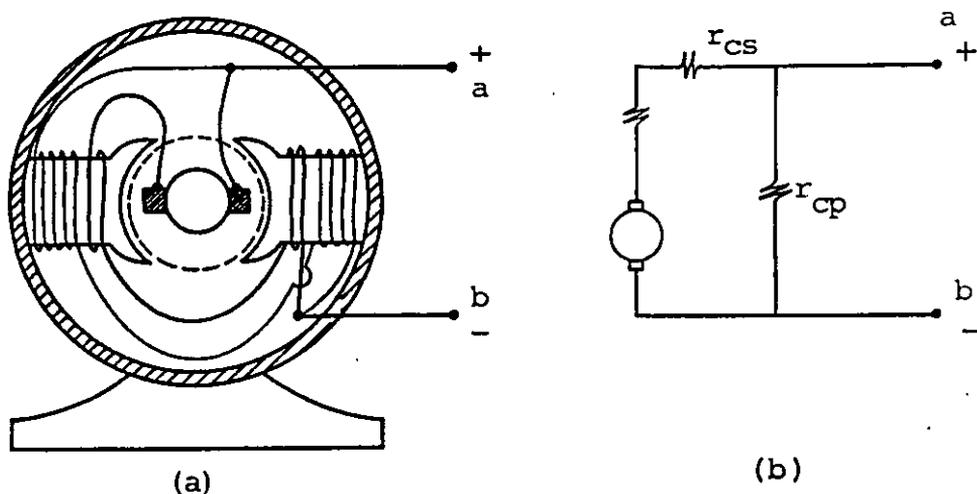


FIGURA 6.31. Motor de corriente continua con excitación compuesta
(a) corte esquemático; (b) diagrama eléctrico.

PROBLEMAS

6.1 Un bobinado de N espiras cuadradas se encuentra dentro de una región de campo magnético uniforme, pero variable en el tiempo, según la relación $B = 0.02 + 0.8 t$, donde B y t están expresados en teslas y segundos respectivamente. La normal al plano del bobinado es colineal a la dirección del campo magnético, como se indica en la figura P6.1

Determine:

- El flujo magnético a través del bobinado en el instante $t = 0$.
- La diferencia de potencial V_{ab} en el instante $t = 10$ s.
- Si en el mismo instante ($t = 10$ s) se conecta el resistor R y el amperímetro A a las terminales a y b , determine el valor de la resistencia del bobinado si la corriente medida fue de 1.85 A.
- ¿En qué sentido circula la corriente inducida al pasar por R ?
- ¿Cambiaría el valor de la corriente inducida para $t = 100$ s?, explíquelo.

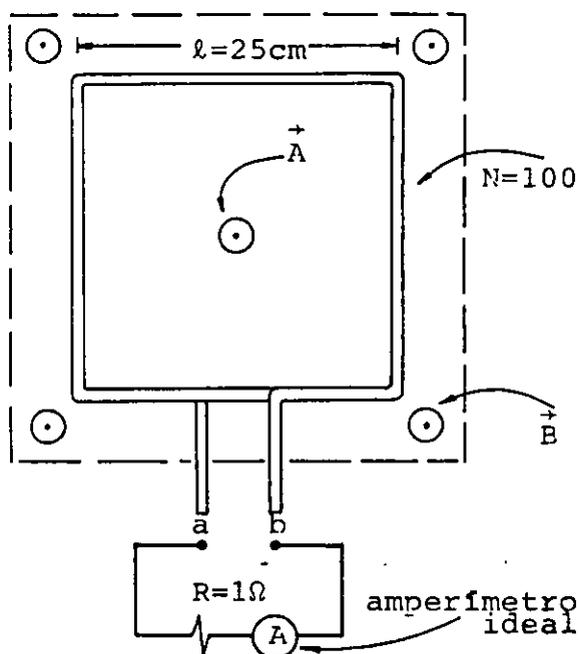


Figura P6.1

6.2 Una barra metálica se desliza sin fricción sobre un conductor doblado en forma de U, como se muestra en la figura P6.2. Si la diferencia de potencial medida entre los puntos c y d es $V_{cd} = 3 \text{ V}$ y se sabe que la resistencia de cada metro de conductor es de 1.5Ω , y la de cada metro de barra es de 0.5Ω , calcule:

- La corriente inducida y el sentido en que circula.
- La diferencia de potencial inducida entre los puntos a y b de la barra.
- La velocidad de la barra en magnitud y dirección.
- La diferencia de potencial inducida entre los extremos e y f de la barra.

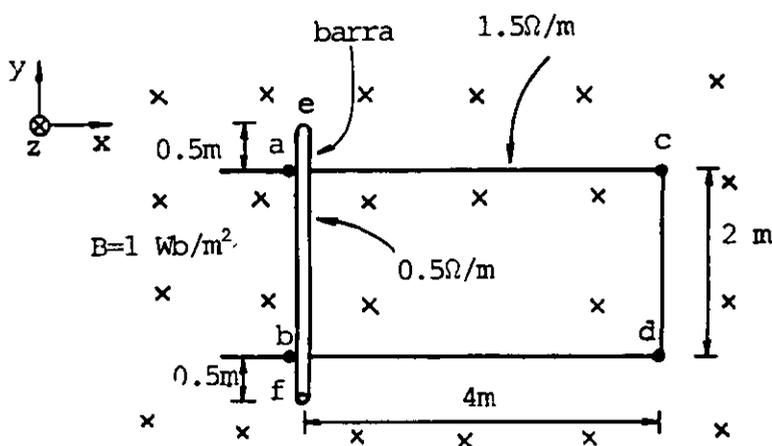


Figura P6.2

6.3 En la figura P6.3 se muestra parte de un conductor recto y muy largo, y una bobina de espiras cuadradas cuyas terminales se han unido. El conductor y la bobina se encuentran en un mismo plano. La bobina tiene una resistencia total de 0.2Ω y se mueve con una velocidad $\vec{v} = 10 \hat{y} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, como se muestra en la figura mencionada. Para la posición mostrada, calcule:

- El vector campo magnético en el punto A, debido al conductor recto.
- La fem inducida neta en la bobina, y su sentido.

- c) La fuerza de origen magnético neta (en magnitud y dirección) que actúa sobre la bobina.
- d) La potencia mecánica necesaria para desplazar la bobina con la velocidad indicada.
- e) ¿Qué habría que hacer para invertir el sentido de la corriente inducida en la bobina?

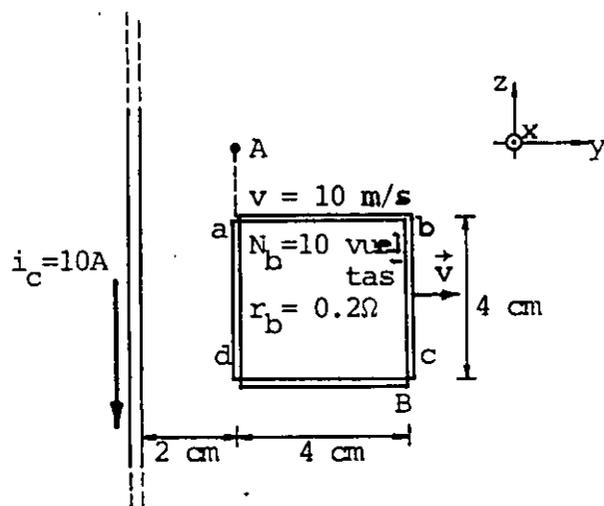


Figura P6.3

6.4 En la figura P6.4 se muestra, en cierto instante, una bobina rectangular cuyo lado largo es paralelo a un conductor recto y muy largo.

El conductor tiene una velocidad de $-10 \hat{x} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la bobina se mueve con velocidad $8 \hat{x} \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ambos movimientos con respecto al sistema de referencia mostrado. El conductor, la bobina y sus movimientos son coplanares. De acuerdo con los datos proporcionados en la figura antes citada y considerando que en $t = 0$ $r_A = 0$ y $r_B = 0.22\text{ m}$, calcule:

- a) El flujo magnético a través de la bobina en función del tiempo.
- b) El flujo magnético en la bobina para el instante mostrado en la figura P6.4, ¿cuánto vale t en este instante?

c) El valor y sentido de la corriente inducida en la bobina, cuando $t = 1 \text{ s}$.

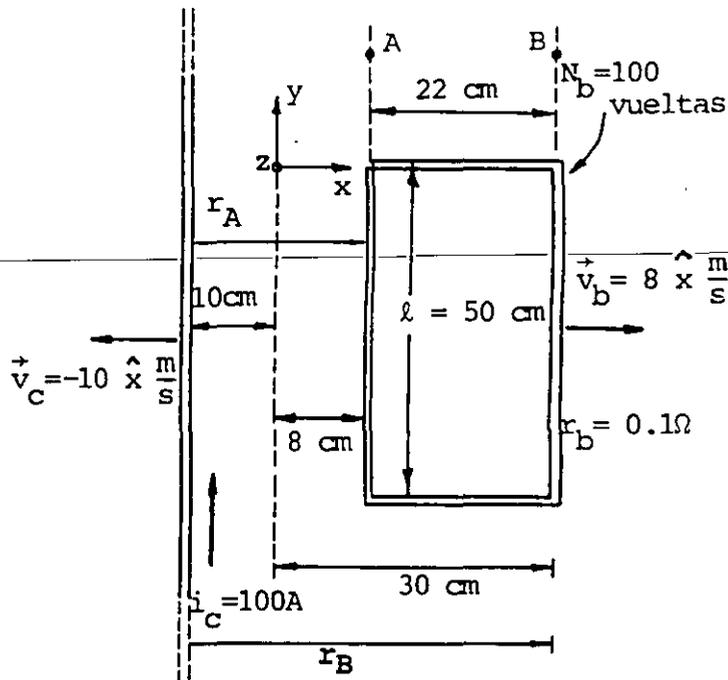


Figura P6.4

6.5 Se dispone de un solenoide con las características indicadas en la figura P6.5 (a). Si la corriente que circula por el solenoide varía en función del tiempo, como se muestra en la figura P6.5 (b), determine la diferencia de potencial inducida V_{xy} en las terminales del solenoide, y dibuje su gráfica para el intervalo $0 \leq t \leq 29.2$ milisegundos.

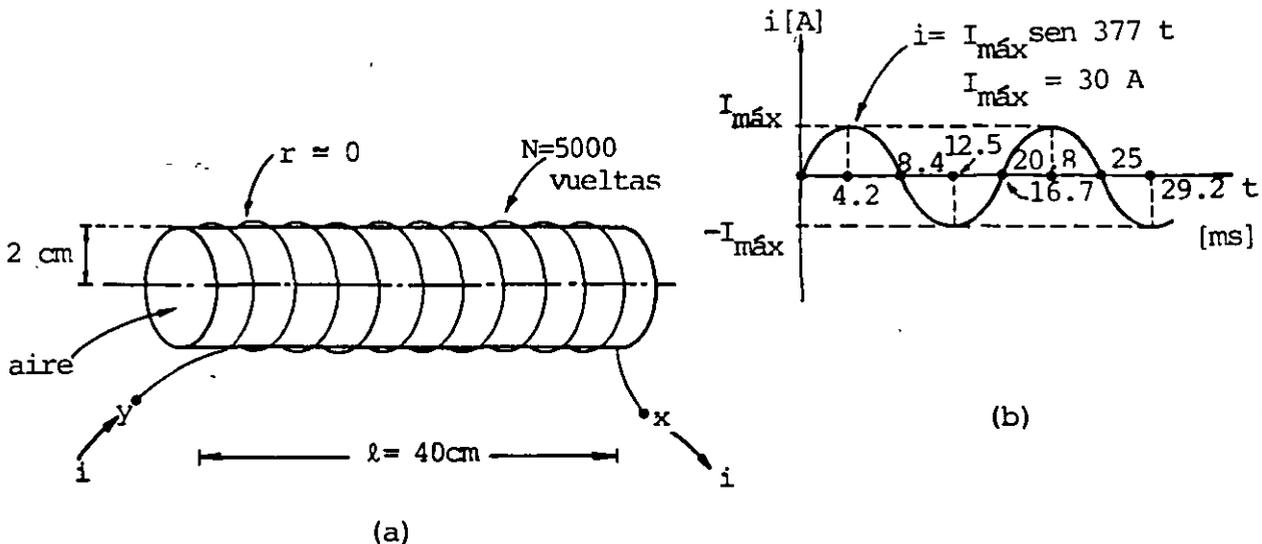


Figura P6.5

6.6 En el arreglo mostrado en la figura P6.6 (a) se muestra un toroide de 2 300 vueltas devanadas uniformemente con núcleo de aire. Sobre una parte del toroide, se tiene enrollada una bobina de 200 vueltas. Considere las dimensiones del arreglo indicadas en la figura, y que la corriente en el toroide varía con el tiempo en la forma mostrada.

Calcule la diferencia de potencial inducida V_{xy} en las terminales de la bobina y dibuje una gráfica de V_{xy} contra el tiempo, t para el intervalo $0 \leq t \leq 35$ milisegundos.

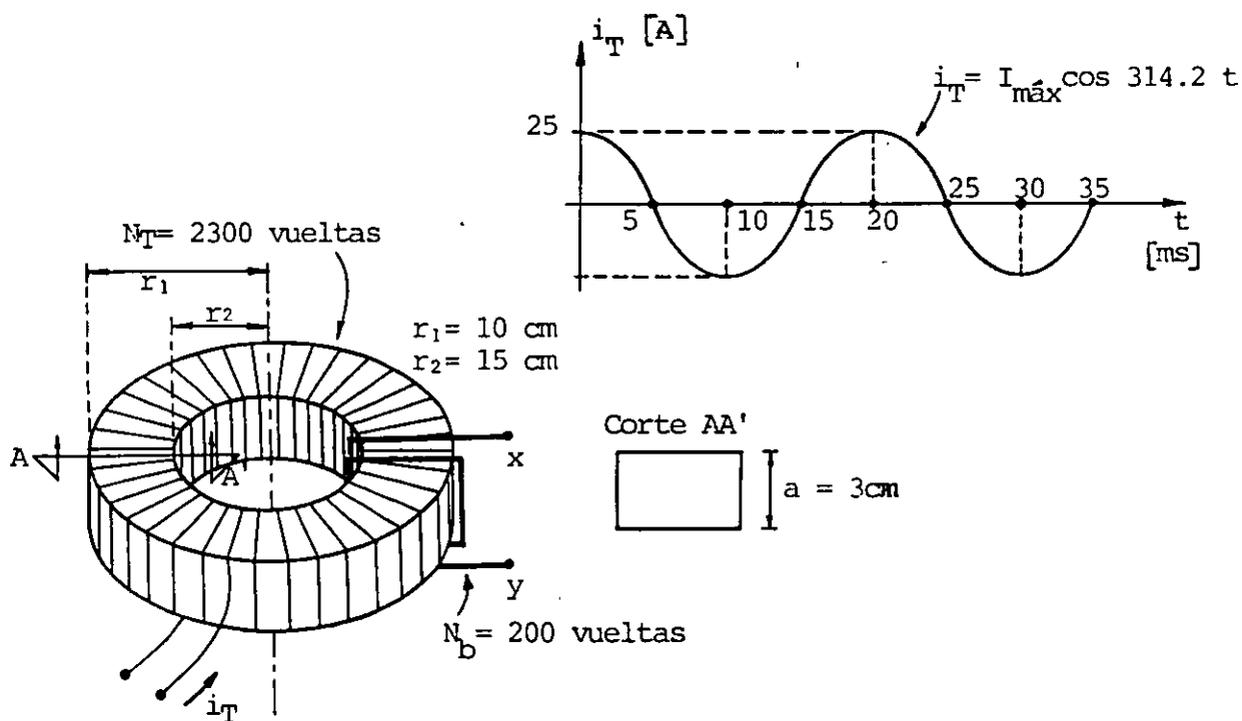


Figura P6.6

6.7 Un transformador es diseñado con dos solenoides devanados sobre un núcleo metálico cilíndrico macizo, como el mostrado en la figura P6.7 (a). Si la corriente en el devanado primario (inductor) es de la forma $i_1 = I_{\text{máx}} \sin \omega t$, determine:

a) La expresión para el cálculo de la energía disipada en forma de calor, en cada unidad de tiempo, por el núcleo en función de las dimensiones y material del mismo, así como de la frecuencia angular ω y del valor máximo de la inducción magnética $B_{\text{máx}}$.

b) Calcule la disipación de energía en cada segundo para un núcleo de aluminio con $R = 3 \text{ cm}$, $\ell = 45 \text{ cm}$, $\mu_{Al} = \mu_0$ y $\rho = 2.8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, si el solenoide inductor tiene una corriente $i_1 = 5 \text{ sen } 377t$. Considere el solenoide con longitud ℓ y $N = 10^3$ vueltas.

c) Si el núcleo macizo se sustituye por 30 alambres del mismo material aislados con barniz, de igual longitud pero de radio $r = 0.005 \text{ m}$, como se muestra en la figura P6.7 (b), ¿cuál sería la potencia disipada por dicho núcleo en las condiciones indicadas en el inciso b? ¿Qué porcentaje representa esta potencia respecto a la calculada en el inciso anterior?

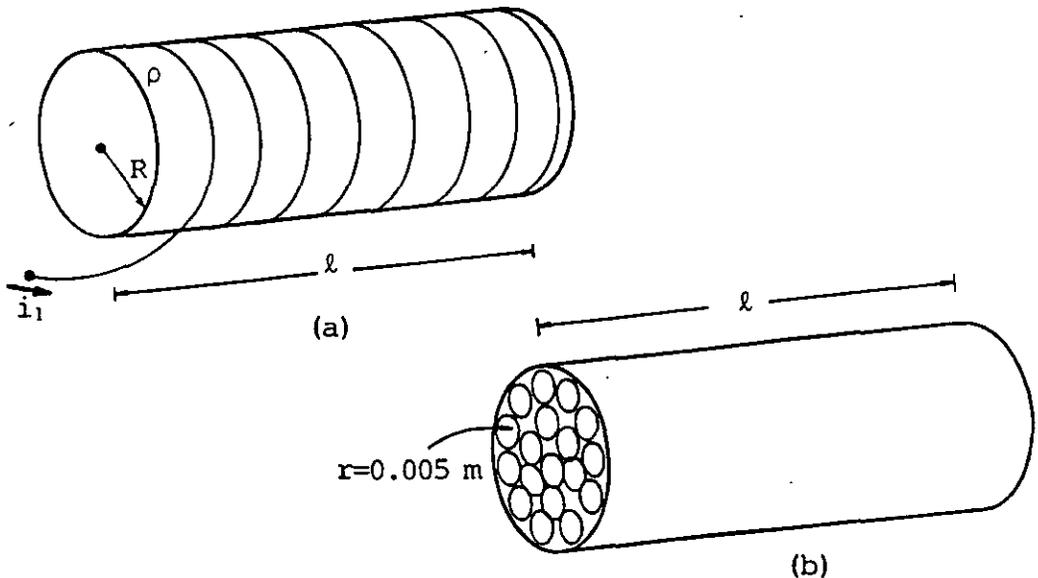


Figura P6.7

6.8. Se dispone de un disco metálico de radio $R = 20 \text{ cm}$ montado sobre un eje, como se muestra en la figura P6.8. Además se cuenta con un dispositivo capaz de producir una inducción magnética uniforme de $B = 0.1 \text{ T}$ en toda el área del disco. Si se desea obtener una fuerza electromotriz inducida de 12 V ($V_{ab} = 12 \text{ V}$) en las terminales de las escobillas, determine:

a) La dirección en que debe ser colocado el campo magnético.

b) La velocidad angular a que debe girar el disco, en rad/s y en revoluciones/s . Indique en qué sentido debe girar el disco considerando la dirección del campo \vec{B} determinada en el inciso a.

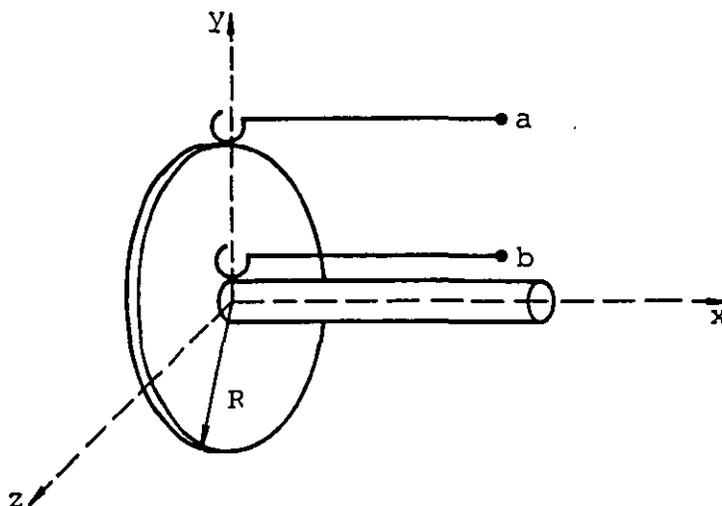


Figura P6.8

6.9 Se ha diseñado un generador eléctrico elemental que está formado por 100 espiras rectangulares que giran a una velocidad angular $\omega = 60$ rev/s dentro de un campo magnético uniforme de $\vec{B} = 0.15 \hat{y}$ T , como se indica en la figura P6.9 (a). Considerando las dimensiones indicadas, calcule:

a) La diferencia de potencial V_{AB} en función del ángulo θ (ángulo formado por la normal \vec{A} al plano de la bobina y la dirección y). Dibuje una gráfica de V_{AB} contra θ para el intervalo $0 \leq \theta \leq \frac{5}{2}\pi$ rad.

b) Si las terminales 1 y 2 de la bobina, para la posición mostrada, se conectan a un conmutador como el mostrado en la figura P6.9 (b), dibuje una gráfica de la diferencia de potencial V_{AB} contra el ángulo θ para el mismo intervalo del inciso anterior. Expresa V_{AB} en función de θ para este caso.

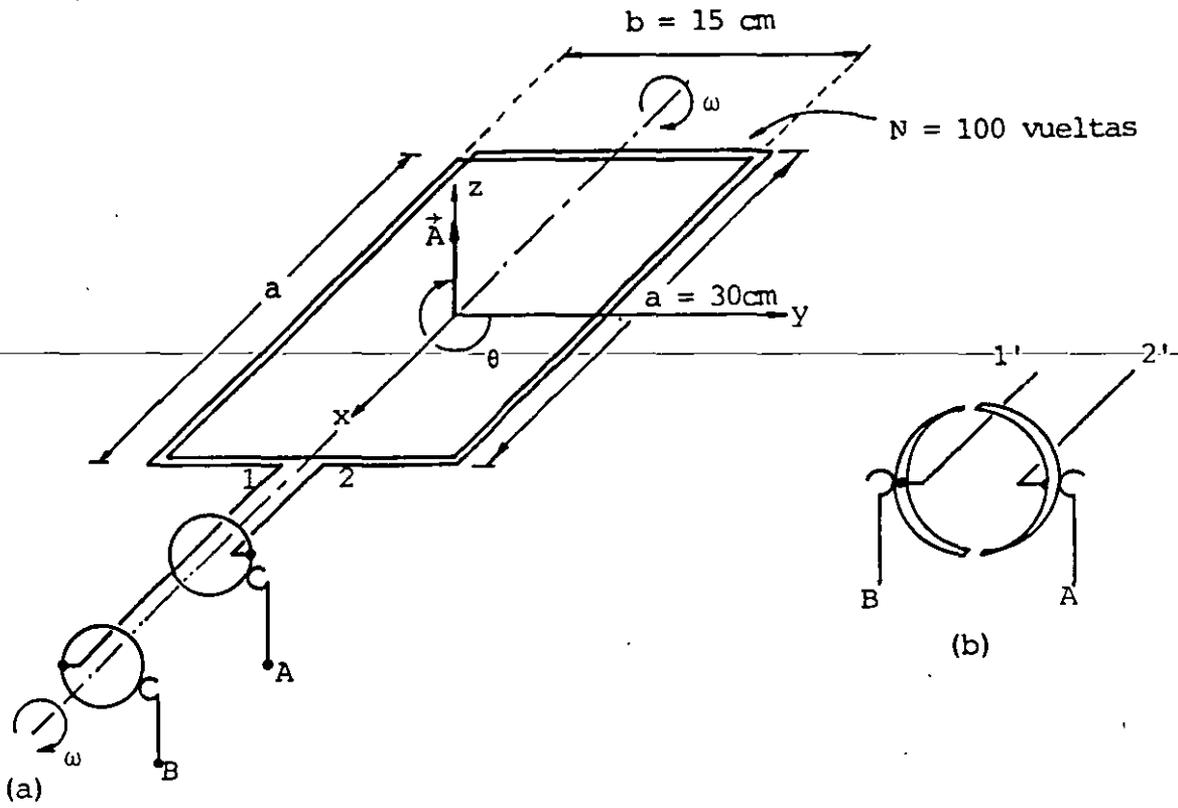


Figura P6.9

CAPITULO 7 INDUCTANCIA

INTRODUCCIÓN

En este tema completaremos el análisis del fenómeno de inducción electromagnética tratado en el tema anterior, presentando el concepto de inductancia y la forma en que lo podemos aplicar para resolver problemas que involucran el cálculo de fuerza electromotriz inducida.

En muchos problemas de ingeniería la variación de flujo magnético involucrada en la ecuación de Faraday es producida por variaciones de corriente, en tales casos, es mucho más simple resolver los problemas por medio del concepto de inductancia, sin aplicar la ley de Faraday en la forma en que se presentó en el tema anterior, dado que la medición directa de la corriente y la inductancia es más sencilla que la del flujo magnético.

Trataremos también los dispositivos conocidos como inductores, sus características y la forma de calcular su inductancia; finalmente analizaremos el comportamiento de un inductor con resistencia conectado a una fuente de voltaje continuo.

7.1 INDUCTANCIA

La manera más práctica de resolver una gran cantidad de problemas que involucran el cálculo de la fuerza electromotriz inducida, es por medio del concepto de inductancia, como a continuación se indica.

De la expresión de Faraday sabemos que

$$e_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_b}{dt}$$

donde

$$\phi_b = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Recordemos que ϕ_b es el flujo del campo magnético \vec{B} , evaluado a través de la superficie limitada por la trayectoria cerrada en la cual se evalúa la circulación c_e .

El flujo ϕ_b , a través del circuito donde se desea calcular la fuerza electromotriz inducida, en gran cantidad de problemas prácticos, es el resultado de la superposición de los flujos producidos por corrientes que circulan en circuitos cercanos, así como en el propio circuito. En el espacio libre o vacío, y en la gran mayoría de las sustancias, existe una relación de proporcionalidad directa entre el flujo ϕ_b y la corriente i que lo produce, por lo que podemos escribir

$$\phi_b \propto i \quad (7.1)$$

Cuando se tiene un circuito aislado que transporta una corriente i' , el único flujo involucrado es el producido por el propio circuito, y la relación de proporcionalidad (7.1) se puede expresar como una igualdad al obtener el valor de la constante de proporcionalidad del circuito particular, la cual dependerá del medio y de sus factores geométricos, por lo que la relación (7.1) se transforma en

$$\phi_b' = L i' \quad (7.2)$$

donde L se conoce como inductancia propia o autoinductancia del circuito.

Cuando el flujo ϕ_b'' a través de un circuito es producido únicamente por una corriente i'' que circula en otro circuito cercano, la constante de proporcionalidad se conoce como inductancia mutua y se representa con la letra M , por lo que la relación (7.1) queda

$$\phi_b'' = M i'' \quad (7.3)$$

Si se presentan ambos efectos simultáneos, el flujo total será la suma algebraica de cada flujo, es decir

$$\phi_b = Li' + Mi'' \quad (7.4)$$

La ventaja de obtener el flujo total de la forma descrita, es que la medición de la corriente y la inductancia es mucho más simple que la medición directa del flujo.

7.2 INDUCTANCIA PROPIA O AUTOINDUCTANCIA

Analicemos con más detalle la definición de inductancia propia y su aplicación en la solución de problemas.

En el circuito aislado de la figura 7.1 se muestran diversas líneas de flujo magnético y la forma en que éstas enlazan una, dos o más veces al circuito.

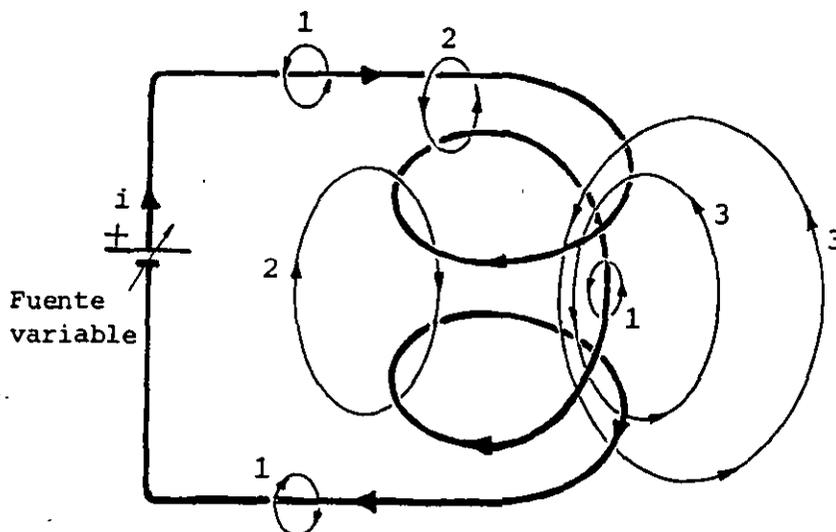


FIGURA 7.1. Circuito aislado donde se muestran algunas líneas de flujo producidas por la corriente i que circula en el circuito y número de veces que cada línea enlaza el mismo.

En general, la fuerza electromotriz inducida depende del flujo enlazado o concatenado por el circuito, y para enfatizar tal dependencia se usa la letra griega λ para representar dicho flujo, entonces, la ecuación (7.2) se expresa

$$\lambda = L i \quad (7.5)$$

~~En casos prácticos se usan bobinas de vueltas muy juntas, donde el flujo a través de cada vuelta es esencialmente el mismo, por lo que el flujo total enlazado es aproximadamente $N \phi_b$, entonces~~

$$\lambda = N \phi_b \quad (7.6)$$

Una práctica usual es indicar las unidades de λ como weber·vuelta, aunque por supuesto la magnitud denominada *vueltas*, no posee dimensiones.

Combinando la ecuación de Faraday y la ecuación (7.5), la fuerza electromotriz inducida E_i se puede obtener como

$$E_i = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\lambda}{dt} = - \frac{d}{dt} (L i) \quad (7.7)$$

entonces

$$E_i = - \frac{d}{dt} (L i) \quad (7.8)$$

donde L queda definida por la expresión (7.5), es decir

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (7.9)$$

y sus unidades son

$$[L]_u = \left[\frac{\text{weber} \cdot \text{vuelta}}{\text{ampere}} \right] = \left[\frac{\text{Wb} \cdot \text{vuelta}}{\text{A}} \right]$$

A la unidad resultante se le conoce como henry, en honor del cien

tífico norteamericano Joseph Henry (1797-1878), entonces

$$\left[\frac{\text{weber} \cdot \text{vuelta}}{\text{ampere}} \right] = [\text{henry}] = [\text{H}]$$

Para el caso particular de un circuito cuya inductancia propia L no depende del tiempo, podemos simplificar la ecuación (7.8), por lo que

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\lambda}{dt} = - L \frac{di}{dt} \quad (7.10)$$

Consideremos adicionalmente la definición más general de autoinductancia, que se obtiene observando que

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\lambda}{di} \frac{di}{dt} \quad (7.11)$$

comparando (7.11) con (7.10)

$$L = \frac{d\lambda}{di} \quad (7.12)$$

La interpretación de esta última ecuación indica que L representa la derivada de la función $\lambda(i)$ con respecto a la corriente i , evaluada para un valor dado i_0 .

La figura 7.2 representa una curva típica de λ contra i para materiales que no cumplen con la ecuación (7.9) y para los cuales es necesario aplicar la ecuación (7.12) en la obtención de la autoinductancia L .

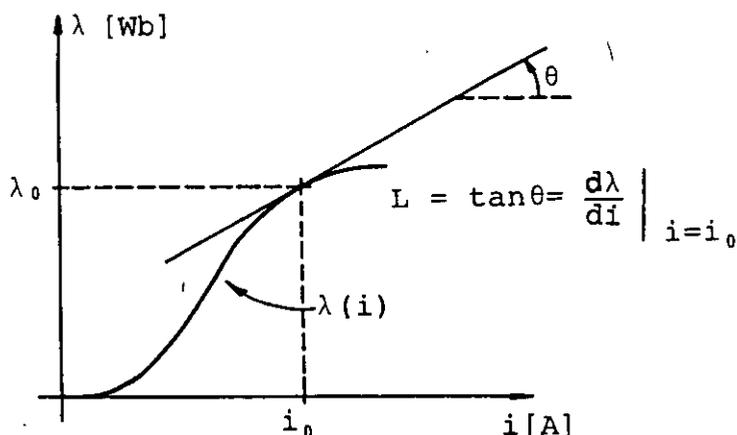
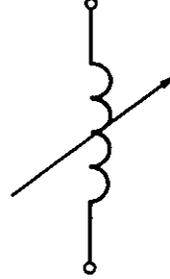


FIGURA 7.2. Variación del flujo con respecto a la corriente para un material que no cumple la relación lineal $\lambda = L i$.

A los dispositivos que se fabrican con el propósito de utilizar la propiedad llamada inductancia se les conoce como inductores. La figura 7.3 muestra los símbolos más comúnmente usados para inductores.



inductor fijo



inductor variable

FIGURA 7.3. Símbolos usados para inductores.

Dadas las características del inductor puro L_1 , mostradas en la figura 7.4, compruebe que el voltaje inducido es $V_{ab} = -2.5$ V para $0 < t < 10$ ms, si la corriente i_1 varía como se indica.

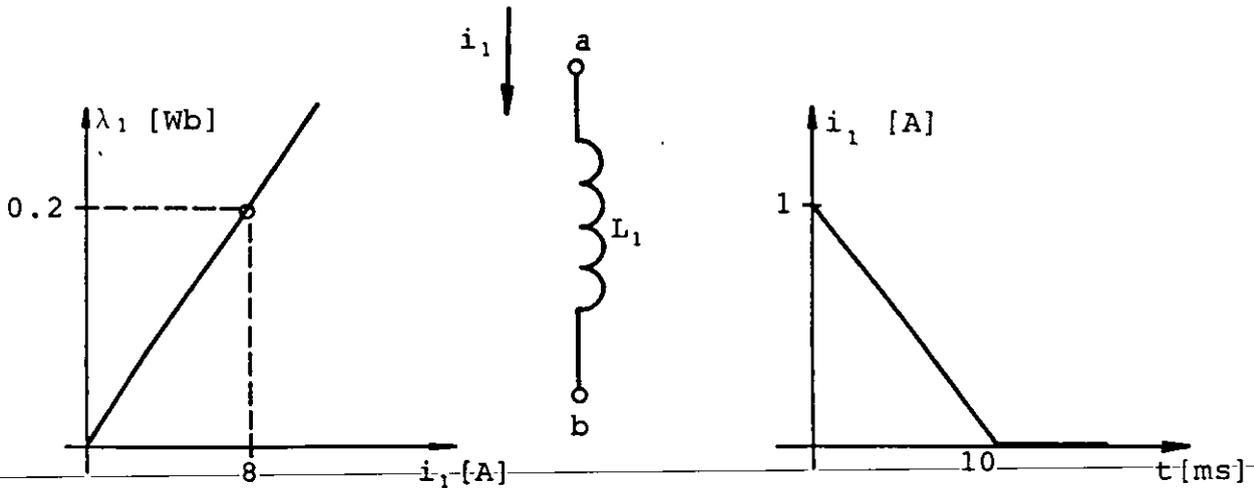


FIGURA 7.4. Características del inductor L_1 y gráfica de su corriente i_1 vs t .

7.3 INDUCTANCIA MUTUA

Con referencia a la figura 7.5 observamos que no todo el flujo ϕ_1 producido por la espira 1 enlaza la espira 2, y la variación de la corriente i_1 produce una fuerza electromotriz inducida en la espira 2 que depende de la variación del flujo enlazado por ésta.

Usando la convención usual para los subíndices, el flujo a través de la espira 2, debido a la corriente i_1 de la espira 1, lo denotaremos ϕ_{21} , similarmente ϕ_{12} será la parte del flujo ϕ_2 que produce la espira 2 y que enlaza la espira 1.

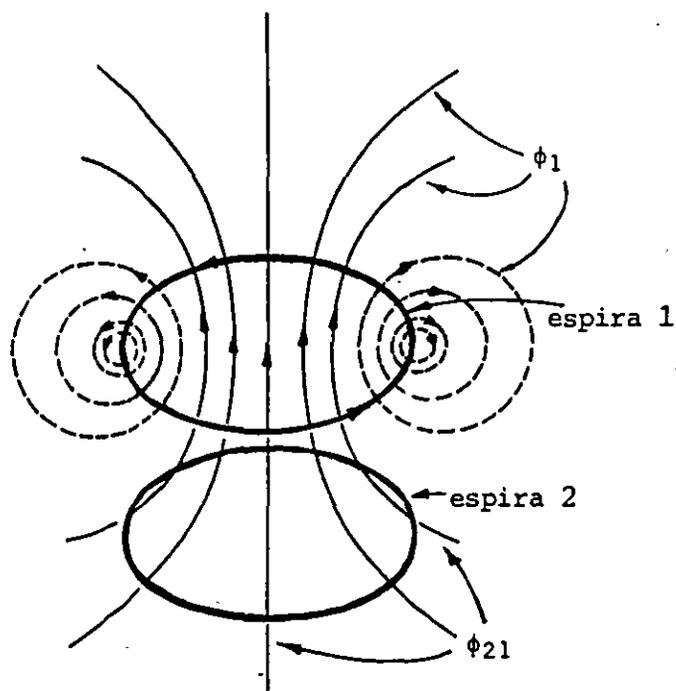


FIGURA 7.5. La espira 1 con corriente i_1 produce un flujo ϕ_1 ; la parte de este flujo a través de la espira 2 se llama ϕ_{21} .

De la ecuación (7.3) tenemos que

$$\phi_{12} = M_{12} i_2 \quad (7.13)$$

$$\phi_{21} = M_{21} i_1$$

Si usamos el concepto de concatenación de flujo, las ecuaciones anteriores quedan

$$\lambda_{12} = M_{12} i_2 \quad (7.14)$$

$$\lambda_{21} = M_{21} i_1$$

de donde obtenemos que

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{i_2} \quad (7.15)$$

$$M_{21} = \frac{\lambda_{21}}{i_1}$$

Veamos qué relación existe entre estas inductancias mutuas. Del capítulo anterior sabemos que la energía potencial magnética EP_m de una espira o bobina con corriente constante en una zona de campo magnético es

$$EP_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} = -Ni \vec{A} \cdot \vec{B} = -Ni(\phi) = -\lambda i$$

En un arreglo de bobinas como el de la figura 7.5 tendremos que la energía potencial magnética que adquiere la bobina 1, con corriente constante i_1 , al enlazar un flujo externo ϕ_{12} con sus N_1 vueltas es

$$-N_1 i_1 \phi_{12} = -\lambda_{12} i_1 \quad (7.16)$$

De manera semejante, la energía potencial magnética que adquiere la bobina 2, con corriente constante i_2 al enlazar un flujo externo ϕ_{21} con sus N_2 vueltas es

$$-N_2 i_2 \phi_{21} = -\lambda_{21} i_2 \quad (7.17)$$

Debido a que la energía final del sistema de dos bobinas debe ser la misma independientemente de cual de las bobinas se coloque primero (ya que la primera que se coloca no adquiere energía potencial por no existir campo externo) las energías potenciales dadas por las ecuaciones (7.16) y (7.17) deben ser iguales, es decir

$$\lambda_{12} i_1 = \lambda_{21} i_2 \quad (7.18)$$

o también

$$\frac{\lambda_{12}}{i_2} = \frac{\lambda_{21}}{i_1} \quad (7.19)$$

Si comparamos esta última expresión con las ecuaciones (7.15), concluimos que

$$M_{12} = M_{21} \quad (7.20)$$

Por ser la ecuación (7.20) un resultado general, a partir de este momento omitiremos los subíndices y la inductancia mutua entre dos circuitos cualesquiera 1 y 2 será

$$M = \frac{\lambda_{12}}{i_2} = \frac{\lambda_{21}}{i_1} \quad (7.21)$$

Cuando el flujo enlazado λ se mide en webers y la corriente i en amperes, la inductancia mutua M resulta en henrys.

Si se requiere evaluar la fuerza electromotriz inducida en un circuito 1 debido a las variaciones de corriente en otro circuito cercano 2, de la ley de Faraday se tiene que

$$E_{i12} = - \frac{d\lambda_{12}}{dt} = - \frac{d}{dt} (M i_2) \quad (7.22)$$

Cuando la inductancia mutua M no depende del tiempo, la ecuación (7.22) se simplifica y se expresa

$$E_{i12} = - M \frac{di_2}{dt} \quad (7.23)$$

Es posible también obtener una definición más general de inductancia mutua considerando que

$$\frac{d\lambda_{12}}{dt} = \frac{d\lambda_{12}}{di_2} \frac{di_2}{dt}$$

y por lo tanto

$$M = \frac{d\lambda_{12}}{di_2} = \frac{d\lambda_{12}}{di_1} \quad (7.24)$$

Para cualquier arreglo se cumple que

$$\lambda_{12} \leq \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_{21} \leq \lambda_1$$

Como el valor máximo de la inductancia mutua se obtiene cuando los flujos enlazados son máximos, entonces

$$\lambda_{12} \text{ máx} = \lambda_2 \quad \text{y} \quad \lambda_{21} \text{ máx} = \lambda_1$$

al combinar este último resultado con las ecuaciones (7.21) y (7.9)

$$M_{\text{máx}}^2 = \frac{\lambda_2}{i_2} \frac{\lambda_1}{i_1} = L_1 L_2$$

en donde

$$M_{\text{máx}} = \sqrt{L_1 L_2} \quad (7.25)$$

para un arreglo cualquiera de dos circuitos, se tiene

$$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

Cuando se desea escribir la inductancia mutua en términos de las inductancias propias, se acostumbra usar un factor k que depende de la geometría del arreglo y cuyo valor se encuentra entre 0 y 1, dado que la inductancia mutua será considerada siempre positiva.

En conclusión, la inductancia mutua se puede obtener como

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (7.26)$$

7.4 EJEMPLOS DE CALCULO DE INDUCTANCIA PROPIA Y MUTUA

Aplicaremos ahora las expresiones (7.9) y (7.21) para calcular la inductancia en algunos casos cuya geometría permite obtener con facilidad el flujo magnético enlazado λ .

a) Inductancia propia de un solenoide

Consideremos el solenoide de sección circular y enrollado uniforme, de radio a , longitud ℓ y número de vueltas N mostrado en la figura 7.6.

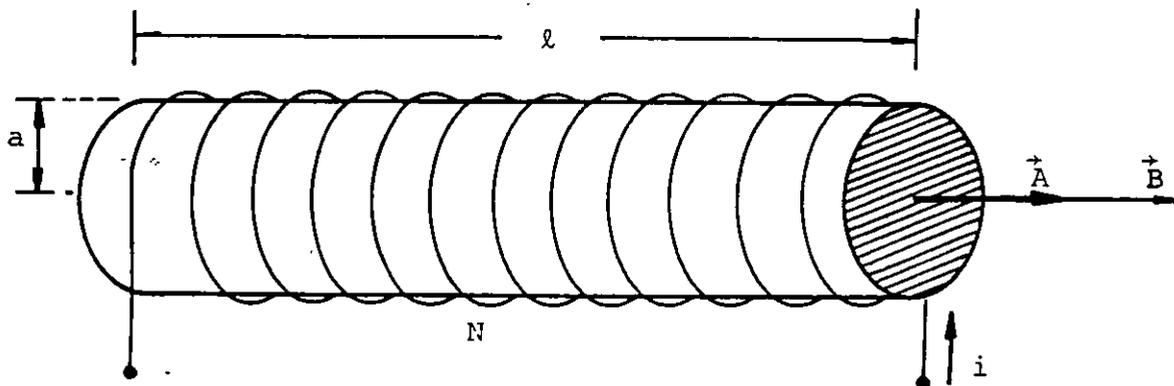


FIGURA 7.6. Solenoide de N vueltas uniformemente enrolladas a lo largo de una longitud ℓ .

Cuando $l \gg a$, la densidad de flujo magnético \vec{B} se puede considerar aproximadamente constante en cualquier sección transversal del solenoide e igual a la densidad de flujo magnético en el centro de éste, entonces

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint B dA \cos \theta$$

como $\cos \theta = 1$, por ser los vectores \vec{B} y $d\vec{A}$ colineales y B aproximadamente constante, se tiene

$$\phi = B \iint dA = B A$$

usando la aproximación mencionada para B

$$\phi = \frac{\mu_0 N i}{l} A \quad (7.27)$$

y en virtud de que el flujo anterior es enlazado por todas y cada una de las vueltas, obtenemos

$$\lambda = N\phi = \frac{\mu_0 N^2 A i}{l}$$

empleando ahora la ecuación (7.9)

$$L = \frac{\lambda}{i}$$

resulta

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad [H] \quad (7.28)$$

ecuación correcta cuando $l \gg a$.

Para el caso de un solenoide corto, es necesario aplicar un fac-

tor K de corrección y la expresión para obtener la inductancia propia es

$$L = K \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \quad [H] \quad (7.29)$$

El factor K es función de la relación a/ℓ y se puede obtener en forma aproximada de la gráfica de la figura 7.7, la cual se obtuvo de resultados experimentales.

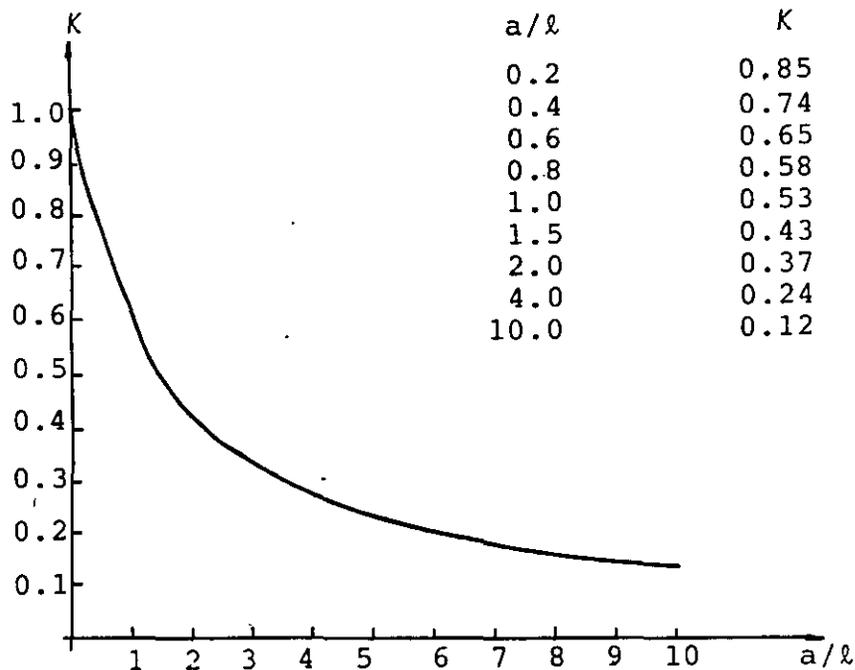


FIGURA 7.7. Variación del factor de corrección K para valores de $\frac{a}{\ell}$ entre 0 y 10.

Compruebe que un solenoide con sección circular de radio $a = 6$ cm, longitud $\ell = 6$ cm y 120 vueltas enrolladas uniformemente, posee una inductancia $L = 1.8$ mH.

b) Inductancia propia de un toroide de sección rectangular

Calcularemos ahora la inductancia propia de un toroide de sección rectangular como el mostrado en la figura 7.8, sus radios interno y externo son r_1 y r_2 respectivamente, con N vueltas enrolladas uniformemente.

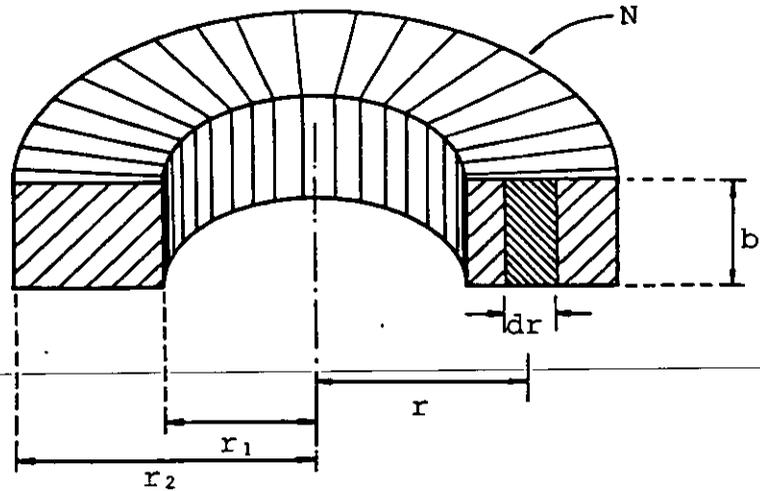


FIGURA 7.8. Toroide de sección rectangular y N vueltas enrolladas uniformemente.

Las expresiones que permiten evaluar la magnitud de campo magnético B producido por el toroide son

$$B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} \quad \text{si } r_1 \leq r \leq r_2 \quad (7.30)$$

$$B = 0 \quad \text{para } r < r_1 \text{ y } r > r_2$$

El flujo a través de la sección transversal del toroide, se obtiene de

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint B dA \cos \theta$$

pero $\cos \theta = 1$, ya que \vec{B} y $d\vec{A}$ son colineales y también se tiene, de la figura 7.8, que

$$dA = bdr \quad (7.31)$$

sustituyendo (7.24) y (7.25) en la ecuación del flujo, obtenemos

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 Ni}{2\pi r} bdr$$

integrando y sustituyendo límites, nos queda

$$\phi = \frac{\mu_0 N i b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (7.32)$$

El flujo obtenido es enlazado por todas y cada una de las vueltas, por lo que

$$\lambda = N\phi = \frac{\mu_0 N^2 i b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

y como

$$L = \frac{\lambda}{i}$$

se obtiene finalmente que

$$L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad [H] \quad (7.33)$$

Si las características de un toroide de sección rectangular son:

$r_1 = 8 \text{ cm}$, $r_2 = 10 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $N = 3\,000$ vueltas, y posee núcleo de aire, compruebe que la inductancia propia es

$$L = 4.017 \text{ mH}$$

c) Inductancia mutua entre dos solenoides coaxiales

A continuación mostraremos la aplicación de la expresión (7.21) en el cálculo de la inductancia mutua.

Consideremos dos solenoides de enrollamientos uniformes colocados uno sobre otro, de tal manera que se puede considerar que poseen la misma sección transversal de radio a , como se indica en la figura 7.9.

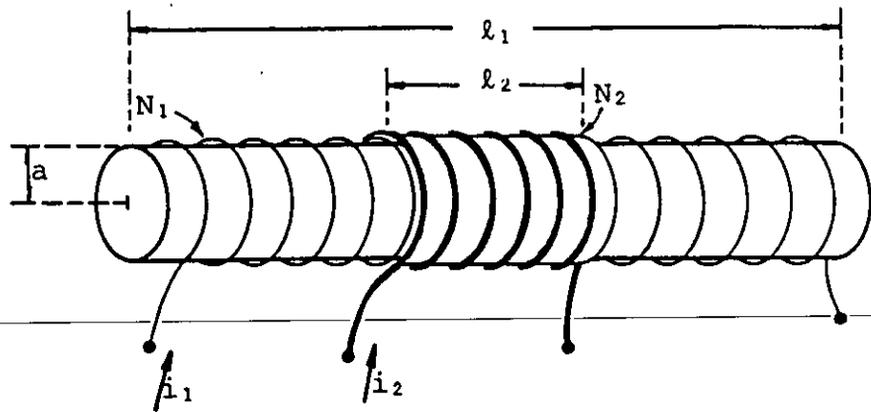


FIGURA 7.9. Solenoides coaxiales de longitudes distintas y secciones transversales aproximadamente iguales.

Supondremos además que el solenoide 1 es largo ($l_1 \gg a$), por lo que el campo fuera del solenoide 1 es pequeño en comparación con el existente en su interior, y en esencia, todo el flujo que produce el solenoide 1 cruza cada vuelta del solenoide 2, entonces

$$\phi_{21} \doteq \phi_1$$

Observemos también que $\phi_{12} \neq \phi_1$

El flujo enlazado por 2 es

$$\lambda_{21} = N_2 \phi_1$$

y de la ecuación (7.21)

$$M = \frac{\lambda_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \phi_1}{i_1}$$

ya que se puede considerar como largo el solenoide 1, se tiene que

$$\phi_1 = B A = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l_1} A$$

y concluimos que

$$M = \frac{\mu_o N_1 N_2 A}{\ell_1} \quad [H] \quad (7.34)$$

d) Inductancia mutua entre un conductor recto largo y una espira rectangular coplanares

Consideremos el arreglo mostrado en la figura 7.10, donde se tiene un conductor recto y largo cercano a una espira rectangular.

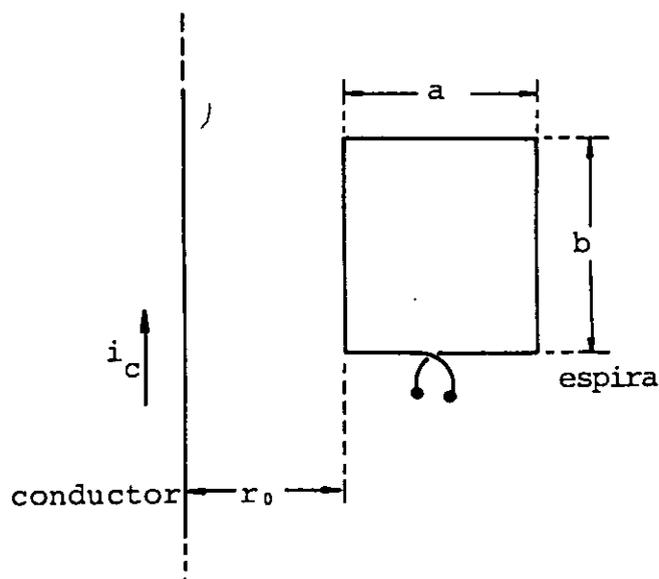


FIGURA 7.10. Espira rectangular cercana a un conductor recto y largo.

El flujo enlazado que podemos evaluar con facilidad es el flujo ϕ_{ec} , por lo cual obtendremos la inductancia mutua con la relación

$$M = \frac{\phi_{ec}}{i_c}$$

y

$$\phi_{ec} = \int_{r_o}^{r_o+a} \frac{\mu_o i_c b}{2\pi r} dr$$

al integrar resulta

$$\phi_{ec} = \frac{\mu_o b i_c}{2\pi} \ell \ln \frac{r_o + a}{r_o}$$

finalmente

$$M = \frac{\mu_o b}{2\pi} \ell \ln \frac{r_o + a}{r_o} \quad [\text{H}] \quad (7.35)$$

En un arreglo de conductor, recto y largo, y espira rectangular como el de la figura 7.10, se tienen las siguientes dimensiones: $a = 6 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ y $r_o = 2 \text{ cm}$. Verifique que el coeficiente de inductancia mutua es $M = 27.73 \text{ nH}$.

EJEMPLO 7.1

La figura 7.11 (a) muestra un par de solenoides sobrepuestos de tal manera que podemos considerar que esencialmente su sección transversal es la misma. Supongamos que a través del solenoide 1 circula la corriente i_1 y que ésta varía como se indica en la figura 7.11 (b).

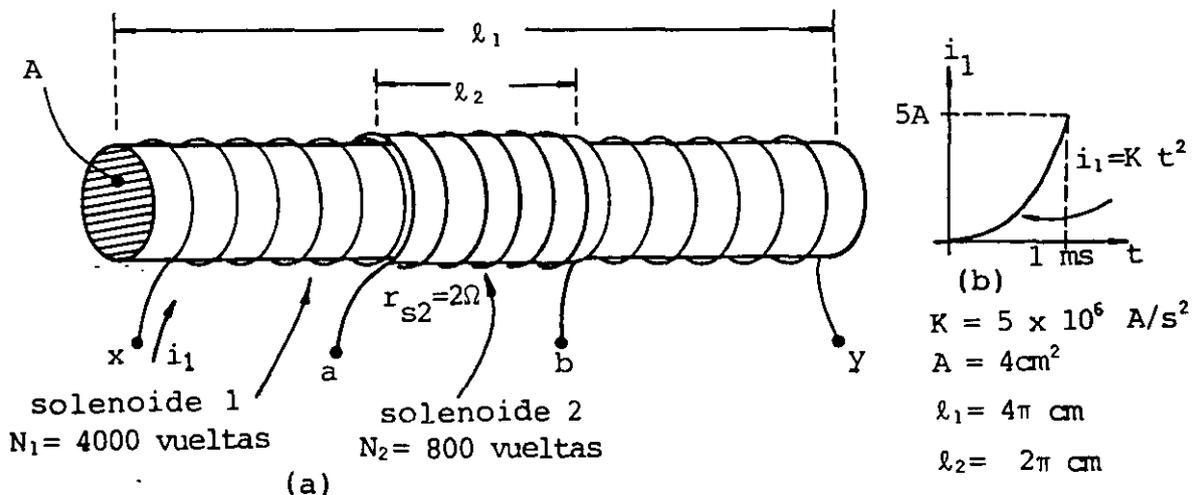


FIGURA 7.11. (a) Solenoides sobrepuestos con objeto de que el área de sección transversal sea la misma para ambos; (b) variación de la corriente i_1 con respecto al tiempo.

Basados en los datos de la figura 7.11, obtener:

- a) Las inductancias propias L_1 y L_2 de cada solenoide.
- b) La inductancia mutua M y el coeficiente de acoplamiento.
- c) La diferencia de potencial en las terminales de cada solenoide para $t = 0.5$ milisegundos.
- d) Repetir el inciso c considerando que se conecta un resistor $R = 14 \Omega$ a las terminales del solenoide 2.

SOLUCION

- a) Para calcular L_1 usaremos la ecuación (7.28) ya que $\ell_1 \gg a$ ($a = 1.13$ cm) por lo que

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{\ell_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (4000)^2 4 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-2}} = 64 \text{ mH}$$

Para calcular L_2 usaremos la ecuación (7.29) y de la gráfica de la figura 7.7 obtenemos que $K = 0.91$ para $\frac{a}{\ell_2} = 0.18$, entonces

$$L_2 = K \frac{\mu_0 N_2^2 A}{\ell_2} = 0.91 \left[\frac{4\pi \times 10^{-7} (800)^2 4 \times 10^{-4}}{2\pi (10^{-2})} \right] = 4.66 \text{ mH}$$

- b) De la ecuación (7.34) la inductancia mutua es

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (4000)(800) 4 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-2}} = 12.8 \text{ mH}$$

y de la ecuación (7.26)

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{12.8 \times 10^{-3}}{\sqrt{64 \times 4.66 \times 10^{-6}}} = 0.74$$

- c) Para el solenoide 2 tenemos que la magnitud de la fuerza electromotriz inducida es

$$E_{i2} = M \frac{di_1}{dt} \Big|_{t = 0.5 \text{ ms}}$$

Para $0 < t < 1 \text{ ms}$

$$i_1 = -Kt^2 \quad \therefore \quad \frac{di_1}{dt} = 2 Kt$$

$$\frac{di_1}{dt} \Big|_{t = 0.5 \text{ ms}} = 2(5 \times 10^6)(0.5 \times 10^{-3}) = 5000 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

entonces

$$E_{i2} = (12.8 \times 10^{-3})(5000) = 64 \text{ V}$$

y con base en la ley de Lenz

$$V_{ab} = - 64 \text{ V}$$

Para el solenoide 1, la magnitud de la fuerza electromotriz inducida es

$$E_{i1} = L_1 \frac{di_1}{dt} \Big|_{t = 0.5 \text{ ms}}$$

$$E_{i1} = 64 \times 10^{-3}(5000) = 320 \text{ V}$$

y con base en la ley de Lenz

$$V_{xy} = + 320 \text{ V}$$

d) En este caso la magnitud de la fuerza electromotriz inducida en el solenoide 2 será como en el inciso anterior $\mathcal{E}_{i2} = M(2Kt)$, pero $i_2 \neq 0$, y como el solenoide 2 posee resistencia la corriente para $0 < t < 1 \text{ ms}$ será

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_{i2}}{r_{s2} + R} = \frac{M(2Kt)}{r_{s2} + R} = 8000 t$$

para el tiempo $t = 0.5 \text{ ms}$

$$i_2 = 8000 t \quad \left| \quad t = 0.5 \text{ ms} \right. = 4 \text{ A}$$

Su dirección estará dada por el principio de Lenz y circulará del punto b al punto a por la resistencia R

$$V_{ab} = -R i_2 = -\mathcal{E}_{i2} + r_{s2} i_2 = -56 \text{ V}$$

Para el solenoide 1 tendremos que la magnitud de la fuerza electromotriz inducida será

$$\mathcal{E}_{i1} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

para $t = 0.5 \text{ ms}$

$$\mathcal{E}_{i1} = 64 \times 10^{-3} (5000) + 12.8 \times 10^{-3} (8 \times 10^3) = 422.4 \text{ V}$$

por lo que

$$V_{xy} = 422.4 \text{ V}$$

7.5 ENERGIA ALMACENADA EN UN CAMPO MAGNETICO

Analizaremos primero la energía que se almacena en un inductor L en el cual, basados en la ley de Faraday, sabemos que es posible obtener una diferencia de potencial inducida, dada por la ecuación (7.10), entonces

$$E_i = - L \frac{di}{dt}$$

Si se desea mover una carga dq a través del campo eléctrico inducido, se tendrá que realizar un trabajo que llamaremos dW y que se expresa como

$$dW = L \frac{di}{dt} dq = L \frac{dq}{dt} di$$

pero

$$\frac{dq}{dt} = i$$

por lo que

$$dW = L i di \quad (7.36)$$

Para obtener la energía total U bastará con integrar la ecuación anterior

$$U = \int dW = \int_0^i L i' di' = \frac{1}{2} L i^2$$

concluimos que

$$U = \frac{1}{2} L i^2 \quad [J] \quad (7.37)$$

Cuando por cualquier inductor circula una corriente, existe energía almacenada asociada al campo magnético, dada por la ecuación (7.37).

Es posible también expresar la energía almacenada en función del flujo enlazado λ , ya que de la relación (7.9) $L = \lambda/i$, por lo tanto

$$U = \frac{1}{2} \lambda i \quad [J] \quad (7.38)$$

De manera análoga como se obtuvo la densidad de energía asociada a un campo eléctrico, podemos encontrar la densidad de energía en el caso magnético. La obtención de tal expresión se hará con objeto de simplificar, para el caso particular de un solenoide largo; posteriormente generalizaremos el resultado.

Recordemos primero la ecuación (7.28) que permite obtener la inductancia propia de un solenoide largo

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

La energía que almacena este solenoide cuando circula por él una corriente i , de la ecuación (7.37), es

$$U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} i^2 \quad (7.39)$$

Sabemos también que el campo magnético que produce es

$$B = \frac{\mu_0 N i}{\ell}$$

por lo que la ecuación (7.39) se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} B \frac{\mu_0 N i}{\ell} \left(\frac{A \ell}{\mu_0} \right)$$

pero $V = A \ell$ es el volumen donde esencialmente existe el campo magnético B , por ende

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V \quad (7.40)$$

de donde obtenemos que la energía por unidad de volumen o densidad de energía u , asociada al campo magnético es

$$u = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \left[\frac{J}{m^3} \right] \quad (7.41)$$

En general, cuando el campo no es constante en el volumen considerado, las ecuaciones (7.40) y (7.41) toman la forma

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 dV \quad (7.42)$$

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (7.43)$$

Cuando tenemos dos circuitos cercanos donde existe inductancia mutua, de (7.38), la energía almacenada en el circuito 1 es

$$U_1 = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_{12}) i_1$$

desarrollando

$$U_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_{12} i_1 \quad (7.44)$$

usando las ecuaciones (7.9) y (7.15)

$$U_1 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} M i_1 i_2 \quad [J] \quad (7.45)$$

Compruebe que para un solenoide corto con sección circular de radio $a = 6 \text{ cm}$, longitud $\ell = 4 \text{ cm}$, 200 vueltas y corriente $i = 600 \text{ mA}$, la energía almacenada es $U = 1.1 \text{ mJ}$.

Una de las posibles aplicaciones de la ecuación de energía (7.42) es la obtención de inductancia propia, como se muestra enseguida. Al igualar las expresiones (7.37) y (7.42) obtenemos

$$\frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 dV$$

de donde

$$L = \frac{1}{\mu_0 i^2} \iiint B^2 dV \quad (7.46)$$

Esta ecuación presenta otro camino para obtener la inductancia propia.

Consideremos un cable coaxial muy largo como el de la figura 7.12.

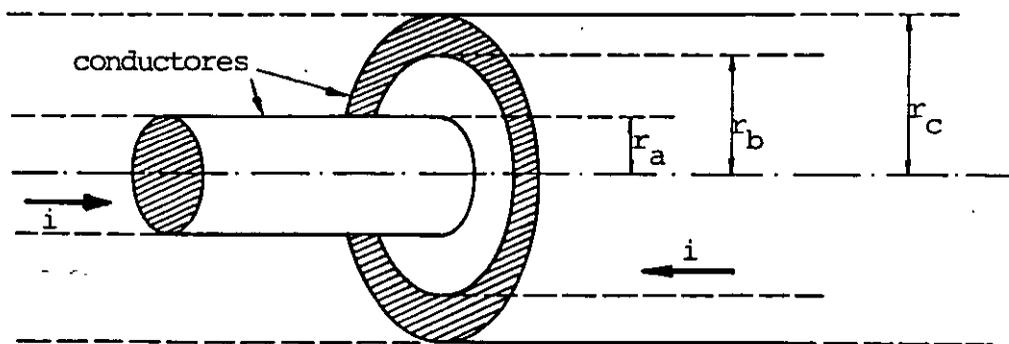


FIGURA 7.12. Cable coaxial con corriente distribuida uniformemente en los conductores interior y exterior, y además de longitud muy grande.

Si los conductores transportan corrientes iguales y de sentidos contrarios, distribuidas uniformemente, las expresiones que determinan el campo magnético, según se desarrolló en el capítulo 5, son

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_a^2}, \quad \text{si } r \leq r_a$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \quad \text{cuando } r_a \leq r \leq r_b$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \frac{r_c^2 - r^2}{r_c^2 - r_b^2}, \quad \text{para } r_b \leq r \leq r_c$$

$$B = 0, \quad \text{si } r_c \leq r$$

Empleando la ecuación (7.42), la energía total almacenada se obtiene como

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 dv$$

donde

$$dv = (2\pi r) \ell dr$$

La energía almacenada total U es la suma de las energías en el conductor interior, en el espacio entre conductores y en el conductor exterior; fuera del cable coaxial la energía es cero, porque $B = 0$ en esa región.

La energía almacenada en el conductor interno es

$$U_1 = \frac{\ell}{2\mu_0} \int_0^{r_a} \left[\frac{\mu_0 i r}{2\pi r_a^2} \right]^2 2\pi r dr = \frac{\ell}{2\mu_0} \left[\frac{\mu_0^2 i^2}{8\pi} \right]$$

$$U_1 = \frac{\mu_o \cdot \ell \cdot i^2}{16\pi} \quad [J] \quad (7.47)$$

En el espacio entre conductores se tiene que

$$U_2 = \frac{\ell}{2 \mu_o} \int_{r_a}^{r_b} \left[\frac{\mu_o \cdot i}{2\pi r} \right]^2 (2\pi r \, dr) = \frac{\ell}{2 \mu_o} \left[\frac{\mu_o^2 \cdot i^2}{2\pi} \ell n \frac{r_b}{r_a} \right]$$

$$U_2 = \frac{\mu_o \cdot \ell \cdot i^2}{4\pi} \ell n \frac{r_b}{r_a} \quad [J] \quad (7.48)$$

En el conductor exterior

$$U_3 = \frac{\ell}{2 \mu_o} \int_{r_b}^{r_c} \left[\frac{\mu_o \cdot i}{2\pi r} \frac{r_c^2 - r^2}{r_c^2 - r_b^2} \right]^2 2\pi r \, dr$$

$$U_3 = \frac{\ell}{2 \mu_o} \left[\frac{\mu_o^2 \cdot i^2}{2\pi} \frac{r_c^4}{(r_c^2 - r_b^2)^2} \ell n \frac{r_c}{r_b} - \frac{\mu_o^2 \cdot i^2}{2\pi} \frac{r_c^2}{(r_c^2 - r_b^2)} + \frac{\mu_o^2 \cdot i^2}{2\pi} \frac{(r_c^2 + r_b^2)}{4(r_c^2 - r_b^2)} \right] \quad (7.49)$$

$$U_3 = \frac{\mu_o \ell i^2}{4\pi} \left[\frac{r_c^4}{(r_c^2 - r_b^2)^2} \right] \ell n \frac{r_c}{r_b} - \frac{\mu_o \ell i^2}{4\pi} \left[\frac{3 r_c^2 - r_b^2}{4(r_c^2 - r_b^2)} \right] \quad [J] \quad (7.50)$$

Por lo que la inductancia propia L del cable coaxial es

$$L = \frac{2}{i^2} \quad U = \frac{2}{i^2} (U_1 + U_2 + U_3) \quad (7.51)$$

sustituyendo

$$L = \frac{\mu_o \ell}{8\pi} + \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \ln \frac{r_b}{r_a} + \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \frac{r_c^4}{(r_c^2 - r_b^2)^2} \ln \frac{r_c}{r_b} - \frac{\mu_o \ell}{8\pi} \left[\frac{3r_c^2 - r_b^2}{(r_c^2 - r_b^2)} \right]$$

(7.52)

En la práctica, las dimensiones del cable se seleccionan de tal manera que la mayor parte de la energía se encuentre almacenada entre los conductores, por lo cual es válida la aproximación

$$L = \frac{\mu_o \ell}{2\pi} \ln \frac{r_b}{r_a} \quad [\text{H}] \quad (7.53)$$

Con objeto de comparar la inductancia obtenida con la de otro tipo de cable, concluiremos este subtema dando la expresión que determina la inductancia de un par de conductores paralelos de sección circular de radio a , con una separación d entre sus ejes, y muy largos

$$L = \frac{\mu_o \ell}{\pi} \ln \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4a^2}}{2a} \quad [\text{H}] \quad (7.54)$$

si $d \gg a$

$$L = \frac{\mu_o \ell}{\pi} \ln \frac{d}{a} \quad [\text{H}] \quad (7.55)$$

7.6 INDUCTORES CONECTADOS EN SERIE Y EN PARALELO

Presentaremos a continuación la forma de obtener un inductor equivalente de un arreglo de inductores conectados en serie o en paralelo.

En la figura 7.13 se muestran dos inductores cercanos conectados en serie y con enrollamientos en sentido opuesto.

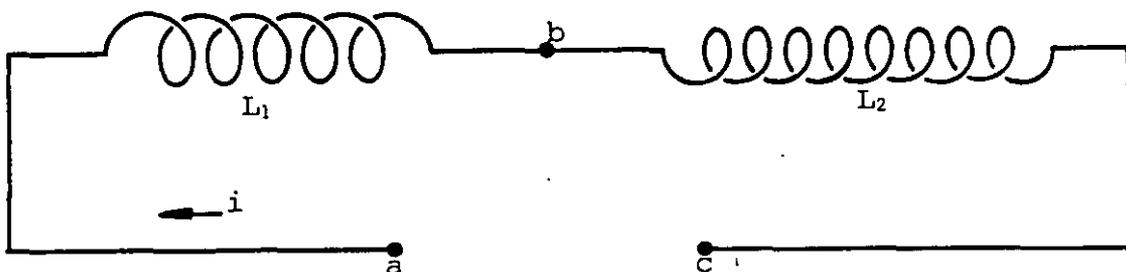


FIGURA 7.13. Inductores conectados en serie, cuyos devanados se encuentran en sentidos opuestos.

Por estar conectados en serie, la corriente i es la misma para ambos inductores, y el voltaje en las terminales de cada inductor es

$$V_{ab} = L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \quad (7.56)$$

$$V_{bc} = L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \quad (7.57)$$

El signo negativo en las expresiones anteriores, aparece debido a que los flujos enlazados λ_{12} y λ_{21} tienen direcciones opuestas a los flujos propios λ_1 y λ_2 respectivamente.

Sabemos que

$$V_{ac} = (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} \quad (7.58)$$

Pero V_{ac} es el voltaje total aplicado y $\frac{di}{dt}$ es la variación de la corriente total del circuito, por lo que un inductor equivalente debe cumplir con la relación

$$V_{ac} = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad (7.59)$$

comparando las ecuaciones (7.58) y (7.59) concluimos que

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \quad (7.60)$$

Cuando los flujos enlazados poseen la misma dirección, se obtiene

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \quad (7.61)$$

Con objeto de simplificar la representación diagramática de los inductores acoplados magnéticamente ($M \neq 0$), es costumbre señalar, mediante puntos, la forma en que está enrollada una bobina con respecto a otra; los puntos mencionados se llaman marcas de polaridad. La figura 7.14 muestra la colocación de estos puntos para el caso de dos inductores conectados en serie.

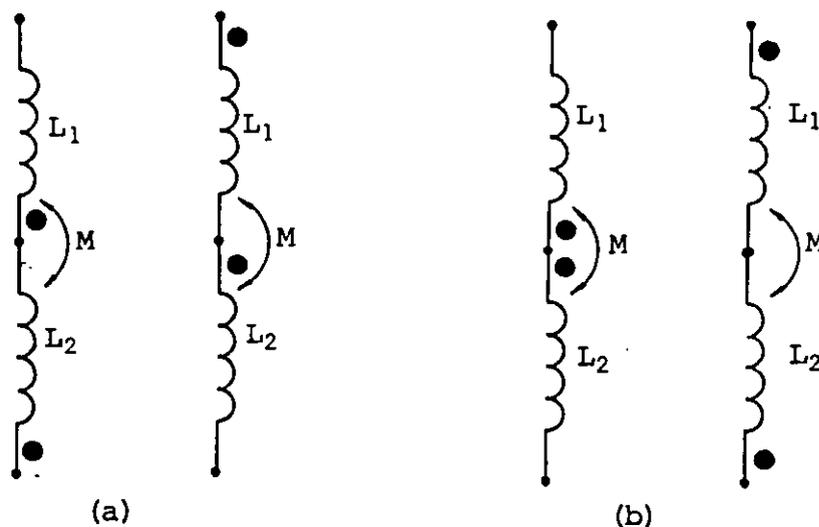


FIGURA 7.14. Colocación de las marcas de polaridad en el caso en que se tienen flujos en la misma dirección (a) y flujos en direcciones contrarias (b).

Las marcas de polaridad se interpretan de la forma siguiente: si debido a las variaciones del flujo λ_1 se induce un voltaje en L_1 , que hace más positiva su terminal marcada con punto, las variaciones del flujo enlazado λ_{21} , harán más positiva la terminal de L_2 marcada también con punto.

En el caso particular en que el coeficiente de acoplamiento es muy pequeño ($k \rightarrow 0$), es decir $M \ll L_1$ y L_2 , las ecuaciones (7.60) y (7.61) se pueden aproximar a

$$L_{eq} = L_1 + L_2 \quad (7.62)$$

En general, si despreciamos todas las inductancias mutuas M de n inductores conectados en serie, se tiene

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i \quad (7.63)$$

Otra posibilidad, es conectar los inductores en paralelo, como se muestra en la figura 7.15.

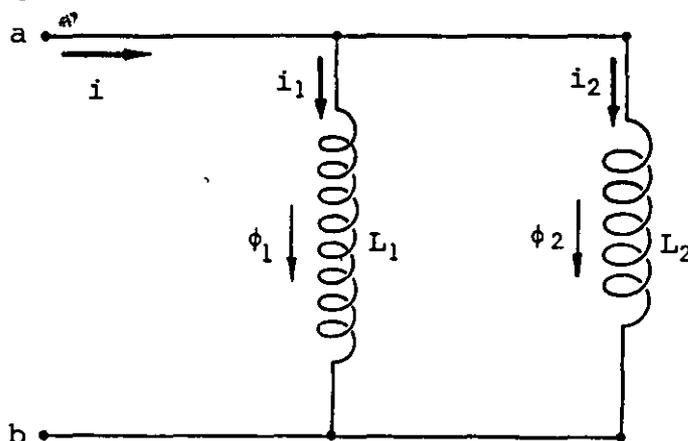


FIGURA 7.15. Inductores conectados en paralelo. Observar que los flujos ϕ_1 y ϕ_2 tienen la misma dirección en los núcleos, pero en el exterior se oponen.

Por estar los inductores conectados en paralelo y con base en la figura 7.15, se tiene

$$i = i_1 + i_2$$

Derivando ambos miembros de esta igualdad con respecto al tiempo

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \quad (7.64)$$

También, con base en la figura 7.15, se tiene que

$$V_{ab} = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad (7.65)$$

$$V_{ab} = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \quad (7.66)$$

igualando estas ecuaciones resulta

$$(L_1 + M) \frac{di_1}{dt} = (L_2 + M) \frac{di_2}{dt} \quad (7.67)$$

combinando la ecuación (7.67) con la ecuación (7.64), obtenemos

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2 + M}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt} \quad (7.68)$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{L_1 + M}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt} \quad (7.69)$$

Sustituyendo estas últimas ecuaciones, ya sea en (7.65) o (7.66), nos resulta

$$V_{ab} = \frac{L_1(L_2 + M)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt} + \frac{-M(L_1 + M)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt}$$

Al factorizar y simplificar obtenemos

$$V_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt} \quad (7.70)$$

dado que V_{ab} es el voltaje total y $\frac{di}{dt}$ es la derivada de la corriente total, se cumple la ecuación

$$V_{ab} = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad (7.71)$$

Si comparamos (7.70) con (7.71), concluimos que

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \quad (7.72)$$

Cuando los flujos de los inductores tienen el mismo sentido, se tiene que el inductor equivalente es

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad (7.73)$$

En el caso particular en que $M \ll L_1$ y L_2 , las ecuaciones (7.72) y (7.73) se pueden aproximar a

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (7.74)$$

En general, si despreciamos todas las inductancias mutuas M de n inductores conectados en paralelo, tendremos

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i} \quad (7.75)$$

La figura 7.16 muestra la forma de representar los inductores conectados en paralelo, usando las marcas de polaridad.

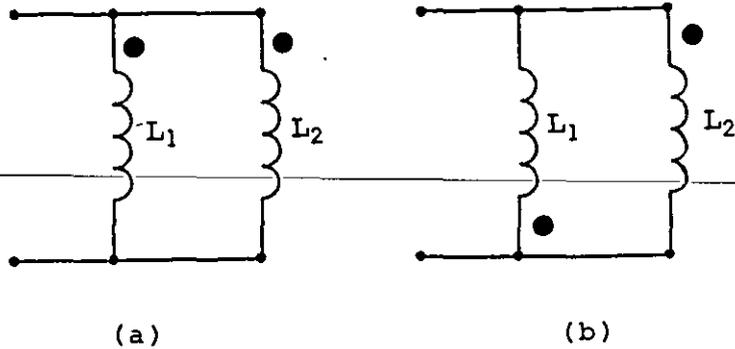


FIGURA 7.16. Colocación de las marcas de polaridad en los casos de flujos de direcciones iguales (a) y flujos de direcciones opuestas (b).

7.7 CIRCUITO R L CON FUENTE DE VOLTAJE CONTINUO

Cuando construimos un solenoide, lo hacemos normalmente enrollando alambre de cobre, este alambre, conductor a temperatura ambiente, posee resistencia apreciable y también capacitancia; aunque esta última, en la mayoría de los casos prácticos, puede ser despreciada.

Podemos afirmar entonces, que un solenoide real no es un inductor puro; lo mismo ocurre con las bobinas y, aun en un conductor recto y aislado, existe inductancia, resistencia y capacitancia.

Por lo anteriormente expuesto, es necesario que analicemos el comportamiento de un elemento que posee simultáneamente inductancia y resistencia, como es el caso de los inductores reales.

Llamaremos circuito R L a la combinación de un resistor y un inductor conectados en serie.

Por el momento analizaremos el comportamiento del circuito solamente para corriente directa, y para ello nos referiremos al circuito

mostrado en la figura 7.17.

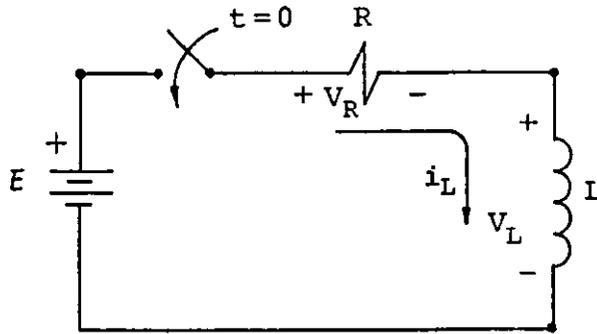


FIGURA 7.17. Circuito R L con fuente de voltaje continuo.

El circuito puede representar la conexión de un solenoide real, donde R es la resistencia total que incluye la resistencia del solenoide y la interna de la fuente, y L es la inductancia del solenoide. El circuito también puede ser la representación del equivalente de un arreglo de inductores y resistores que puede ser reducido al de la figura 7.17.

Consideremos direcciones de referencia asociadas para R y L al aplicar la ley de voltajes de Kirchhoff a la malla del circuito

$$\Sigma v = -E + v_R + v_L = 0 \quad (7.76)$$

donde

$$v_R = R i_R(t) \quad (7.77)$$

$$v_L = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (7.78)$$

además

$$i_R(t) = i_L(t) \quad (7.79)$$

Sustituyendo las relaciones (7.77) a (7.79) en la ecuación (7.76), obtenemos

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = \frac{E}{L} \quad (7.80)$$

~~ecuación que tiene la misma forma que la resuelta en el caso de un circuito RC.~~

Supondremos que el interruptor se cierra en $t = 0$ y además la condición inicial es: $i_L(0) = 0$, debido a que en $t = 0$ la fem inducida es la máxima, obteniéndose.

$$i_L(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}) \quad [A] \quad (7.81)$$

y obtenemos $v_L(t)$ sustituyendo (7.81) en (7.78)

$$v_L(t) = E e^{-\frac{R}{L} t} \quad [V] \quad (7.82)$$

La figura 7.18 muestra las gráficas de las ecuaciones (7.81) y (7.82) con una escala de tiempo en múltiplos de la constante de tiempo del circuito, $\tau_L = \frac{L}{R}$ [s]; observemos que la definición de constante de tiempo es semejante a la del circuito RC, ya que τ_L representa el tiempo para el cual el exponente de e (base de los logaritmos naturales) es -1 en las ecuaciones (7.81) o (7.82).

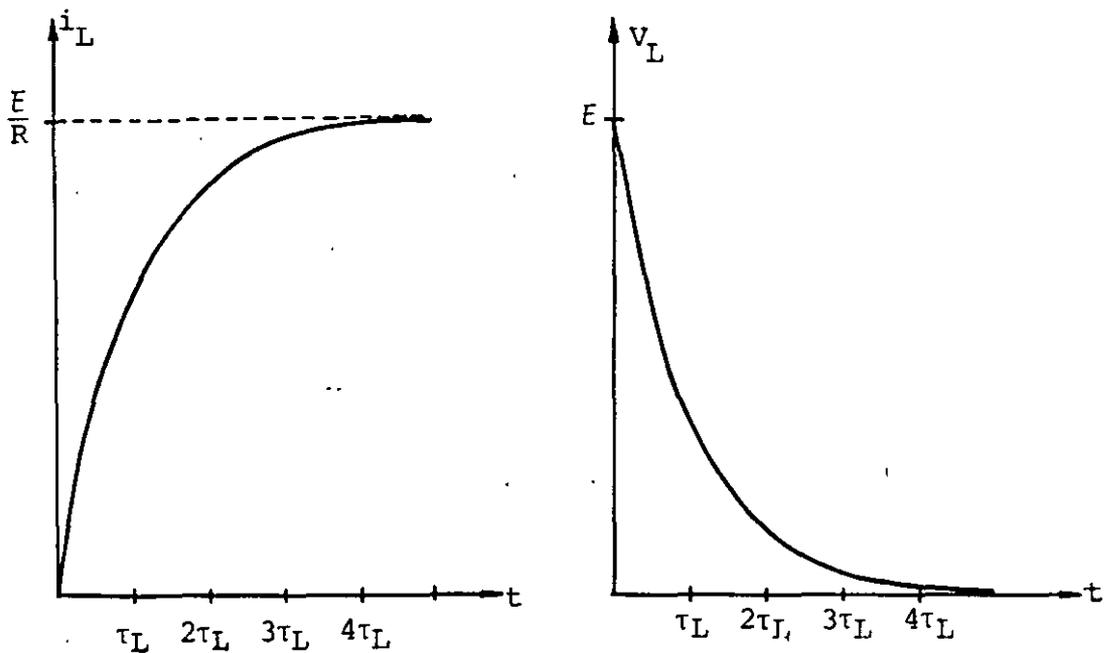


FIGURA 7.18. Gráficas del comportamiento de la corriente i_L y el voltaje v_L en un circuito $R L$.

De manera semejante al circuito $R C$, es posible considerar que, para fines prácticos, se han alcanzado las condiciones de estado estable del circuito si

$$t \geq 4 \tau_L$$

Entonces, el fenómeno transitorio en esencia se presenta durante el intervalo $0 \leq t \leq 4 \tau_L$

Las condiciones para estado estable se obtienen cuando $t \rightarrow \infty$ en las ecuaciones del circuito y son: $i_L = \frac{E}{R}$, $v_L = 0$ y $v_R = E$.

Analizaremos a continuación la transformación de energía que se lleva a cabo en este circuito, para lo cual tomaremos el intervalo de 0 a t_1 .

La potencia entregada por la fuente al circuito es

$$E i(t) = E \left[\frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right]$$

la energía suministrada (U_s) por la fuente en el intervalo de 0 a t_1 será

$$U_s = \int_0^{t_1} E i(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{E^2}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L} t}) dt$$

Al integrar y sustituir límites, obtenemos

$$U_s = \frac{E^2}{R} \left[t_1 + \frac{L}{R} \left[e^{-\frac{R}{L} t_1} - 1 \right] \right]$$

La cual se puede escribir como

$$U_s = \frac{E^2}{R} t_1 - L \frac{E}{R} i_{L1} \quad (7.83)$$

donde

$$i_{L1} = \frac{E}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t_1} \right]$$

En el mismo intervalo, la energía transformada en calor (U_t) por la resistencia es

$$U_t = \int_0^{t_1} R i_L^2(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{E^2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right]^2 dt$$

Al integrar y sustituir límites, se tiene

$$U_t = \frac{E^2}{R} \left[t_1 - \frac{2L}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t_1} \right] + \frac{L}{2R} \left[1 - e^{-\frac{2R}{L} t_1} \right] \right]$$

que puede ser expresado como

$$U_t = \frac{E^2}{R} \left[t_1 - \frac{L}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t_1} \right] - \frac{L}{2R} \left[1 - 2 e^{-\frac{R}{L} t_1} + e^{-\frac{2R}{L} t_1} \right] \right]$$

y empleando la definición de i_{L1} de la expresión 7.83, concluimos que

$$U_t = \frac{E^2}{R} t_1 - L \frac{E}{R} i_{L1} - \frac{1}{2} Li_{L1}^2 \quad (7.84)$$

La energía almacenada por el inductor (U_a) es

$$U_a = \int_0^{t_1} V_L(t) i_L(t) dt = \int_0^{t_1} \frac{E^2}{R} \left[1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right] e^{-\frac{R}{L} t} dt$$

Al integrar y sustituir límites, se tiene

$$\hat{U}_a = \frac{E^2}{R} \left[\frac{1}{2} \frac{L}{R} + \frac{L}{R} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{2R}{L} t_1} - e^{-\frac{R}{L} t_1} \right] \right]$$

Usando la definición de i_{L1}

$$U_a = \frac{1}{2} Li_{L1}^2 \quad (7.85)$$

utilizando las ecuaciones (7.83) a (7.85) comprobamos que

$$U_s = U_t + U_a$$

Al observar (7.85), concluimos que la energía almacenada en el inductor, en el instante $t = t_1$, depende de la corriente en dicho instante.

Cuando no se han alcanzado las condiciones estables del circuito, una parte de la energía que suministra la fuente es almacenada en el inductor y otra parte es transformada en calor en el resistor.

En estado estable ($t \rightarrow \infty$), toda la energía que suministra la fuente es transformada en calor y la energía almacenada en el inductor es la máxima, manteniéndose constante.

Con referencia a la figura 7.19 (a), si pudiéramos cambiar instantáneamente el interruptor de la posición *a* a la posición *b* y no existiera ionización del aire producida por la diferencia de potencial que aparece en los contactos debida a la fem inducida, obtendríamos un circuito en el cual existe la condición inicial $i_L(0) = I_0$.

Es decir, la energía almacenada en el inductor podría ser transformada en calor en el resistor.

En la práctica esto se logra conectando al circuito una fuente de señales como la indicada en la figura 7.19 (b).

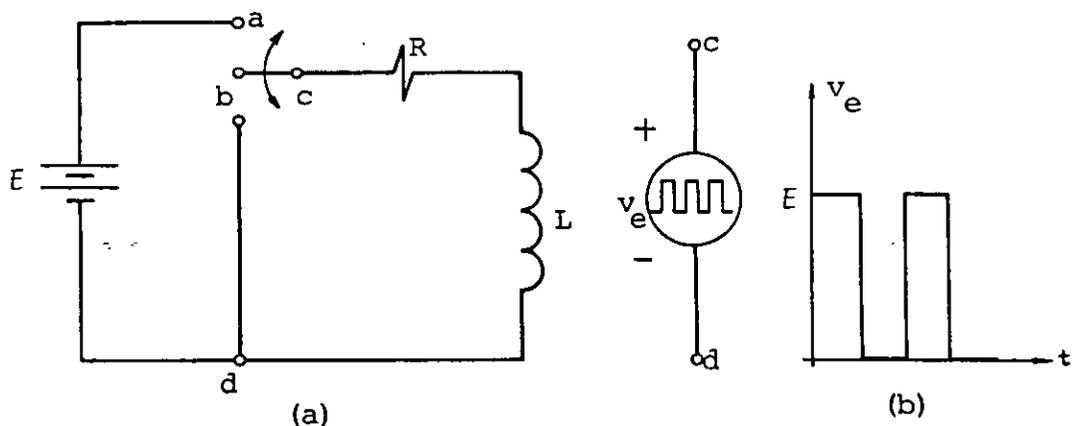


FIGURA 7.19. El interruptor de la figura (a) puede ser sustituido por una fuente de voltaje que genera una señal como la mostrada en (b).

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al circuito mostrado en la figura 7.20, resulta

$$v_R + v_L = 0 \quad (7.86)$$

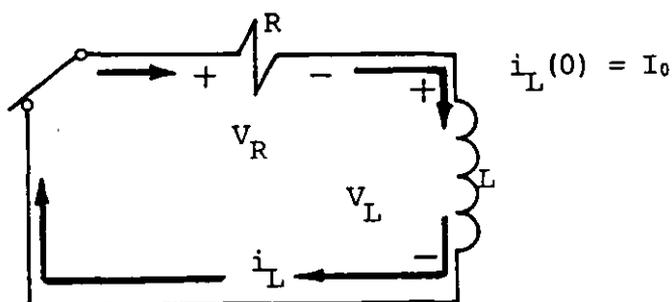


FIGURA 7.20. Circuito R L con condición inicial en el inductor $i_L(0) = I_0$.

Sabemos que

$$v_R = R i_L(t) \quad \text{y} \quad v_L = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Sustituyendo estas últimas, la ecuación (7.86) queda

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L} i_L = 0 \quad (7.87)$$

y resolviendo la ecuación resulta

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (7.88)$$

$$v_L(t) = -R I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad (7.89)$$

La figura 7.21 muestra las gráficas de estas ecuaciones con una escala de tiempo en múltiplos de τ_L .

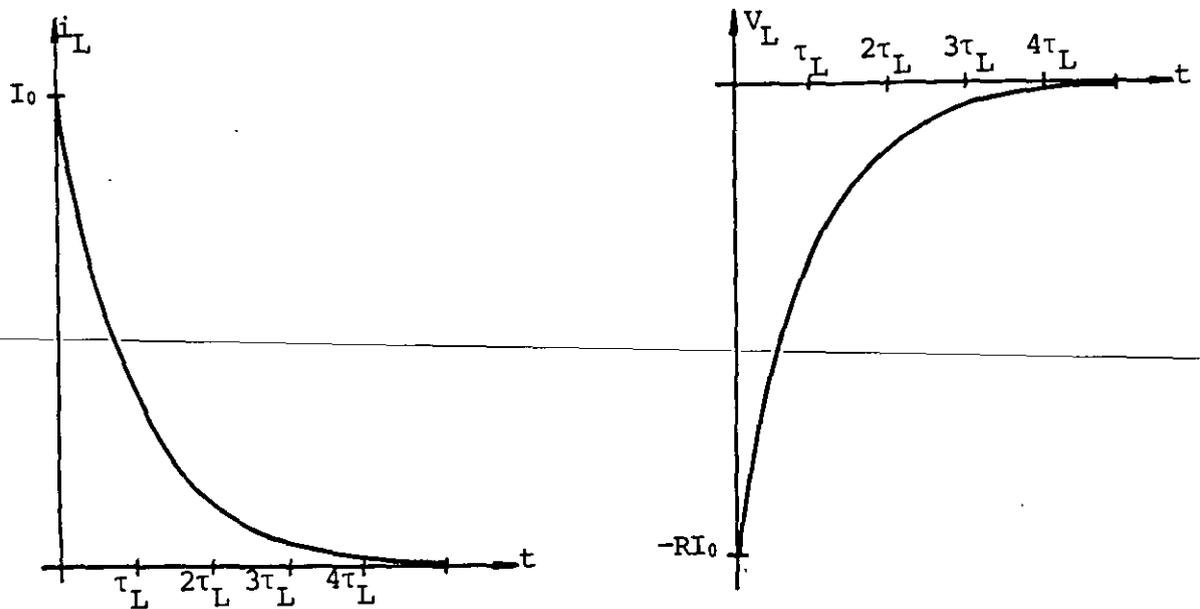
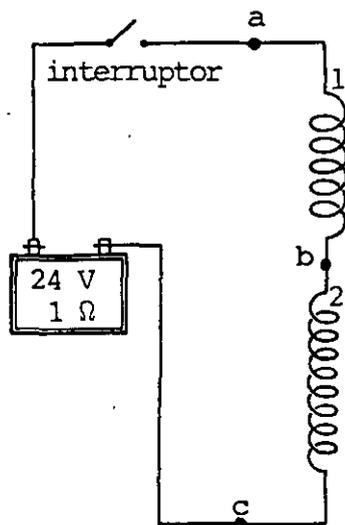


FIGURA 7.21. Gráficas del comportamiento de la corriente i_L y el voltaje v_L en un circuito RL sin fuente y con condición inicial $i_L(0) = I_0$.

EJEMPLO 7.2 Dos solenoides de sección circular se conectan en serie, como se muestra en la figura (7.22), a una fuente de 24 V con 1Ω de resistencia interna; sabemos que el coeficiente de acoplamiento es $k = 0.2$. Si las características de cada solenoide son las indicadas en la misma figura, obtenga:

- Una representación diagramática del circuito.
- El circuito RL equivalente.
- El tiempo para el cual se puede considerar estado estable.
- El voltaje V_{ab} en las terminales del solenoide 1, dos milisegundos después de cerrar el interruptor.
- La energía almacenada por el solenoide 2, dos milisegundos después de cerrar el interruptor.
- La densidad de energía máxima en el solenoide 1.



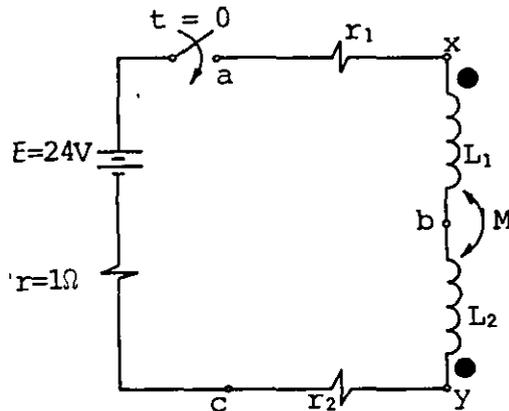
Solenoides:

1	2
$N_1 = 2000$	$N_2 = 800$
$\ell_1 = 12\text{cm}$	$\ell_2 = 10\text{cm}$
$a_1 = 1\text{cm}$	$a_2 = 0.5\text{cm}$
$r_1 = 6\ \Omega$	$r_2 = 3\ \Omega$

FIGURA 7.22. Solenoides largos conectados a una batería.

SOLUCION

a) La representación diagramática es



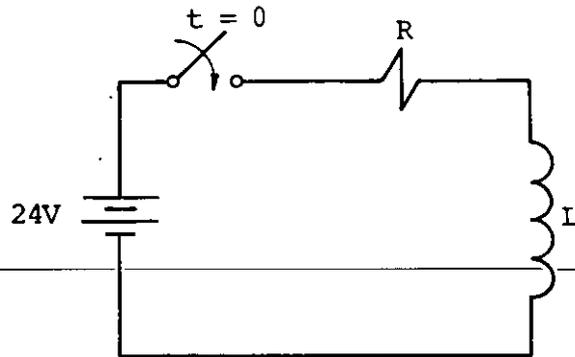
Por ser $\ell_1 \gg a_1$ y $\ell_2 \gg a_2$, se cumple que

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A_1}{\ell_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (2000)^2 \pi (0.01)^2}{0.12} = 13.159\text{ mH}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A_2}{\ell_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} (800)^2 \pi (0.005)^2}{0.1} = 0.632\text{ mH}$$

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} = 0.2 \sqrt{13.2(0.632) \times 10^{-6}} = 0.577\text{ mH}$$

b) El circuito equivalente es



donde

$$L = L_1 + L_2 - 2M = 12.638 \text{ mH}$$

$$R = r + r_1 + r_2 = 10 \Omega$$

c) Como $\tau_L = \frac{L}{R} = 1.264 \text{ ms}$ y el tiempo deseado es aproximadamente $4 \tau_L$, entonces

$$t = 5.05 \text{ ms}$$

d) Para $t = 2 \text{ ms}$ la corriente i_L a través de la malla es

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau_L})$$

$$i_L(t) \Big|_{t=2 \text{ ms}} = \frac{24}{10} \left[1 - e^{-\frac{2}{1.264}} \right] = 1.91 \text{ A}$$

y como

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb}$$

$$V_{ax} = r_1 i_L = 6(1.91) = 11.46 \text{ V}$$

$$V_{xb} = L_1 \frac{di_L}{dt} - M \frac{di_L}{dt} = (L_1 - M) \frac{di_L}{dt}$$

Pero

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{E}{L} e^{-t/\tau_L}$$

por lo que

$$V_{xb} = \frac{L_1 - M}{L} E e^{-t/\tau_L}$$

para $t = 2 \text{ ms}$

$$V_{xb} = \frac{12.582 \times 10^{-3}}{12.638 \times 10^{-3}} (24) e^{-\frac{2}{1.264}} = 4.9 \text{ V}$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb} = 16.36 \text{ V}$$

e) La energía almacenada en el solenoide 2 es

$$U_2 = \frac{1}{2} L_2 i_L^2 - \frac{1}{2} M i_L^2 = \frac{1}{2} (L - M) i_L^2$$

esta energía es máxima cuando i_L es máxima, es decir, cuando

$$i_L = \frac{E}{R} = 2.4 \text{ A}$$

$$\therefore U_{2\text{máx}} = 0.066 \text{ mJ}$$

y la densidad de energía máxima será

$$u_{2\text{máx}} = \frac{U_{2\text{máx}}}{V_2} = \frac{0.066 \times 10^{-3}}{0.1 (\pi) (0.005)^2} = 8.4 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

EJEMPLO 7.3

Suponga un transformador como el mostrado en la figura 7.23 (a), del cual se sabe que los valores de inductancia y resistencia de los devanados primario y secundario son respectivamente, $L_1 = 1 \text{ H}$, $r_1 = 100 \Omega$, $L_2 = 0.25 \text{ H}$ y $r_2 = 10 \Omega$. El coeficiente de acoplamiento de las bobinas es $k = 0.8$. Si al primario del transformador se le aplica una señal de voltaje $v(t)$, que varía como se indica en la figura 7.23 (b), obtenga el valor de i_1 , v_1 y v_2 para el intervalo $0 \leq t < 30 \text{ ms}$, y haga una gráfica de cada una de estas funciones en dicho intervalo.

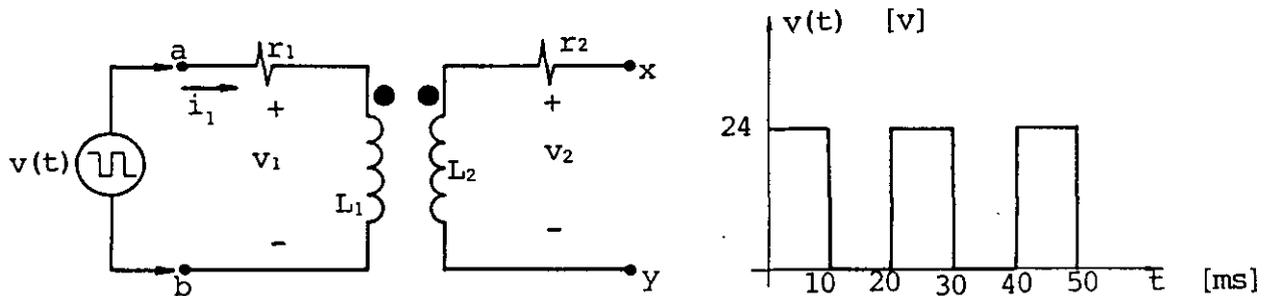


FIGURA 7.23. Diagrama de un transformador alimentado por una fuente de señales.

SOLUCION

Analizaremos primero el comportamiento de las variables para el intervalo $0 \leq t < 10 \text{ ms}$.

El comportamiento del primario del transformador será el de un circuito RL con una fuente de voltaje constante $E = 24 \text{ V}$ y de las ecuaciones (7.80) y (7.81) tenemos que

$$i_1 = \frac{E}{r_1} \left[1 - e^{-\frac{r_1}{L_1} t} \right]$$

$$v_1 = E e^{-\frac{r_1}{L_1} t} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Al sustituir valores, tenemos que para $0 \leq t < 10 \text{ ms}$

$$i_1 = 0.24 (1 - e^{-100t}) \quad 0 \leq t < 10 \text{ ms}$$

$$v_1 = 24 e^{-100t} \quad 0 \leq t < 10 \text{ ms}$$

Para obtener v_2 es necesario calcular primero la inductancia mutua M , entonces de la ecuación (7.26)

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

de donde

$$M = 0.8\sqrt{1 (0.25)} = 0.4 \text{ H}$$

De la ecuación (7.23) y sin considerar los subíndices

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

por lo que

$$v_2 = \frac{M}{L_1} E e^{-\frac{r_1}{L_1} t}$$

al sustituir valores, obtenemos que

$$v_2 = 9.6 e^{-100t} \quad 0 \leq t < 10 \text{ ms}$$

Nótese que la relación entre los voltajes v_1 y v_2 puede ser expresada

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M} = N$$

pero como $k < 1$, $\frac{L_1}{M} < \frac{N_1}{N_2}$

Existe entonces una relación de transformación $N = 2.5$ que no indica, necesariamente, que la relación de vueltas sea 2.5.

Un procedimiento alternativo para obtener v_2 es

$$v_2 = \frac{1}{N} v_1 = \frac{1}{2.5} 24 e^{-100t} = 9.6 e^{-100t}$$

Además, se debe observar que por estar abierto el secundario, $v_2 = v_{xy}$ ya que i_2 es cero y, en consecuencia, el término de voltaje inducido en el primario, debido a variaciones de la corriente en el secundario es nulo, es decir

$$M \frac{di_2}{dt} = 0$$

Para el intervalo $10 \text{ ms} \leq t < 20 \text{ ms}$, tendremos un circuito de de senergización en el primario, por lo que será necesario conocer las condiciones iniciales. El inicio de este proceso se dará cuando $t = 10 \text{ ms}$ y en ese instante tenemos que

$$i_1(t) \Big|_{t=10 \text{ ms}} = I_{01} = 0.24 (1 - e^{-100(10 \times 10^{-3})}) = 0.152 \text{ A}$$

Para utilizar las ecuaciones (7.88) y (7.89) se considerará $t' = 0$ para el instante en que se inicia este proceso, por lo que se tiene

$$i_1 = I_{01} e^{-\frac{r_1}{L_1} t'}$$

$$v_1 = -r_1 I_{01} e^{-\frac{r_1}{L_1} t'}$$

$$v_2 = \frac{1}{N} v_1 = M \frac{di_1}{dt}$$

Al sustituir valores resulta que

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= 0.152 e^{-100t'} \\ v_1 &= -15.171 e^{-100t'} \\ v_2 &= -6.068 e^{-100t'} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &10 \text{ ms} \leq t < 20 \text{ ms} \\ &(0 \leq t' < 10 \text{ ms}) \end{aligned}$$

Para el intervalo $20 \text{ ms} \leq t < 30 \text{ ms}$, se presenta nuevamente un proceso de energización en el primario del transformador, pero la condición inicial para i_1 no es cero ya que para $t = 20 \text{ ms}$, es decir $t' = 10 \text{ ms}$, tenemos

$$i_1(t') \Big|_{t' = 10 \text{ ms}} = I_{02} = 0.056 \text{ A}$$

La constante de integración se evalúa de la forma siguiente.

Partimos de la solución de la ecuación diferencial (7.80), la cual se repite a continuación

$$i_1(t) = K e^{-\frac{r_1}{L_1} t} + \frac{E}{r_1}$$

donde K es la constante de integración que deseamos evaluar.

Si para $t'' = 0$, $i_1(0) = I_{02}$ entonces

$$I_{02} = K e^0 + \frac{E}{r_1}$$

de donde

$$K = I_{02} - \frac{E}{r_1}$$

por lo que

$$i_1(t'') = \frac{E}{r_1} \left(1 - e^{-\frac{r_1}{L_1} t''}\right) + I_{02} e^{-\frac{r_1}{L_1} t''}$$

Al sustituir valores

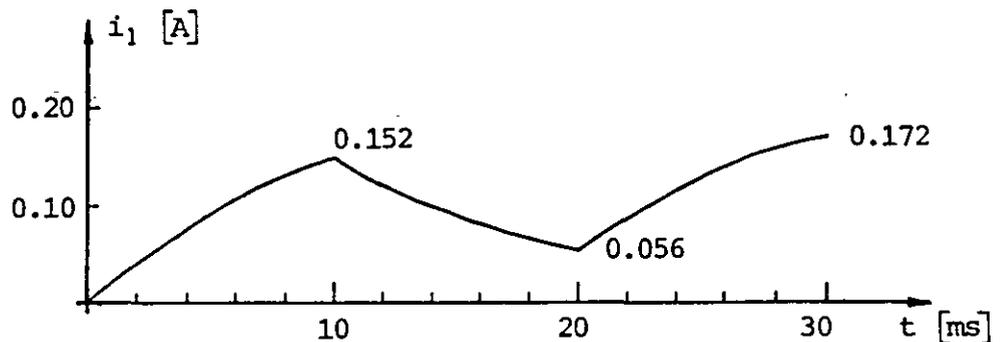
$$i_1(t'') = 0.24 (1 - e^{-100t''}) + 0.056 e^{-100t''}$$

Finalmente

$$\left. \begin{aligned} i_1(t'') &= -0.184 e^{-100t''} + 0.24 \\ v_1(t'') &= L_1 \frac{di_1}{dt} = 18.419 e^{-100t''} \\ v_2(t'') &= \frac{1}{N} v_1(t'') = 7.368 e^{-100t''} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 20 \text{ ms} \leq t < 30 \text{ ms} \\ (0 \leq t'' < 10) \end{array}$$

Nótese que en cada caso se ha considerado un tiempo igual a cero en el inicio de cada proceso.

Las gráficas resultantes son



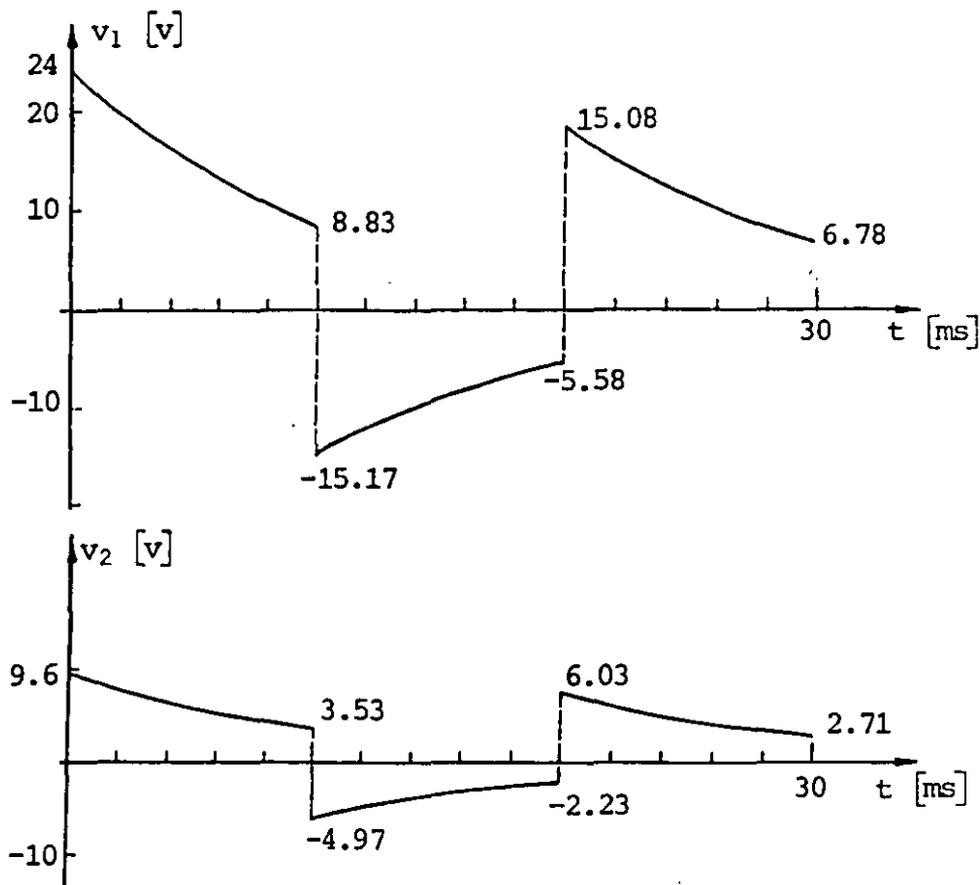


FIGURA 7.24. Gráficas de la corriente y voltaje en el primario, y del voltaje en el secundario de un transformador conectado a una fuente de señales.

PROBLEMAS

7.1 Calcule la inductancia propia de un solenoide construido con alambre magneto AWG # 18, de diámetro nominal incluyendo el esmalte de 1.077 mm. El embobinado se realiza con tres capas de alambre de 150 vueltas muy juntas por cada capa. La primera de ellas se embobina sobre un cilindro de plástico ($\mu_p = \mu_0$) de 1 cm de radio, como se muestra en la figura P7.1.

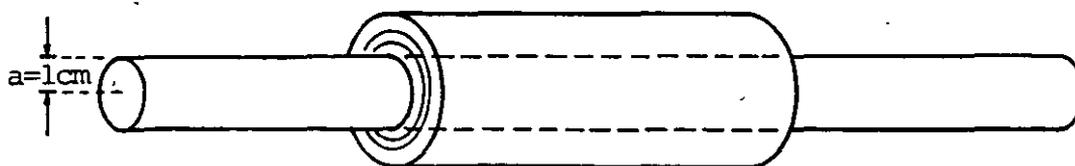


Figura P7.1

7.2 Obtenga el número de vueltas necesario para que el toroide de la figura P7.2 tenga una inductancia $L_t = 575.36 \mu\text{H}$. Calcule además el diámetro máximo (que incluya el esmalte) del alambre con el cual es posible enrollar el número de vueltas obtenido anteriormente en una sola capa.

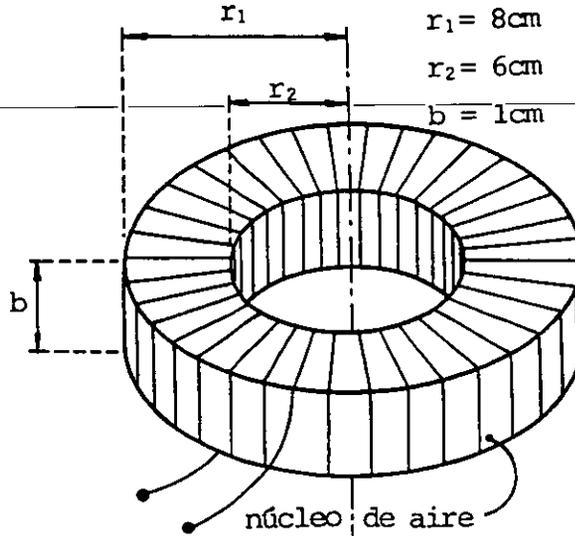


Figura P7.2

7.3 Calcule la inductancia mutua entre los dos solenoides coaxiales y sobrepuestos de la figura P7.3.

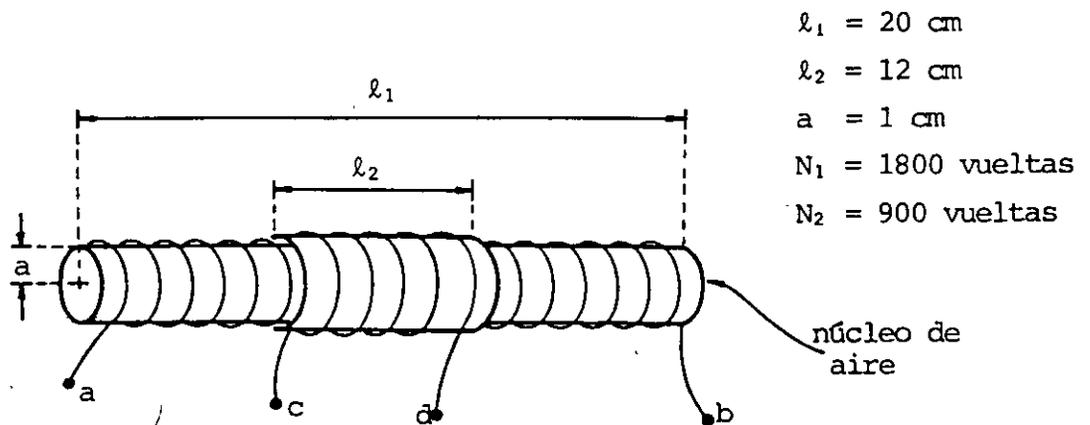


Figura P7.3

7.4 Obtenga el coeficiente de inducción mutua para el arreglo del toroide y el conductor recto y largo de la figura P7.4.

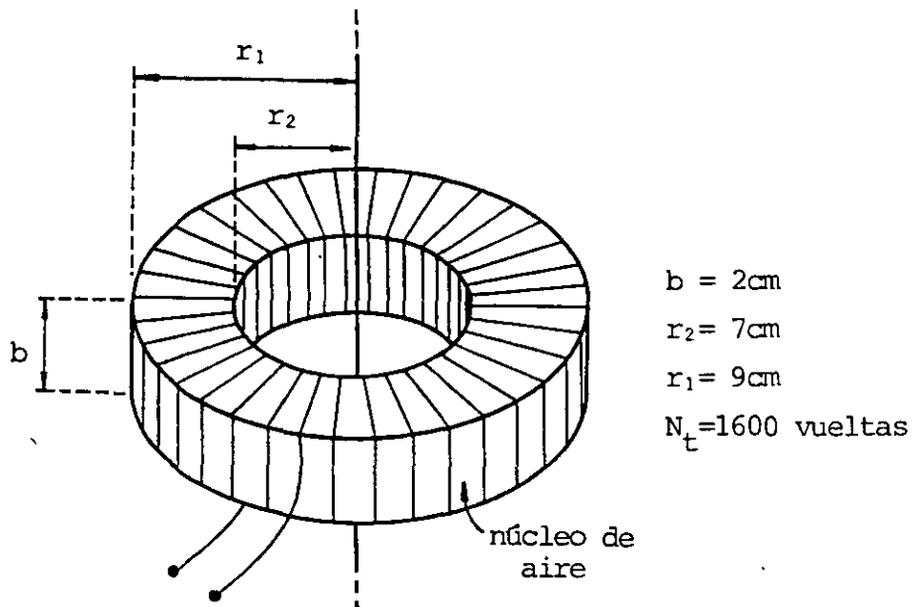


Figura P7.4

7.5 Obtenga la inductancia mutua entre dos bobinas cuadradas mostradas en la figura P7.5.

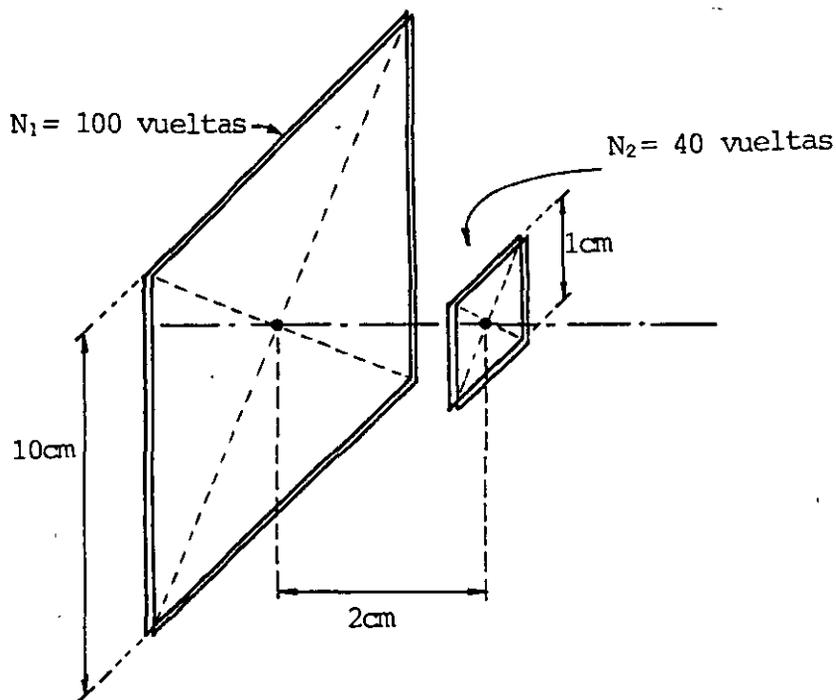


Figura P7.5

7.6 Calcule las inductancias propias, por metro de longitud, para los cables coaxial y dúplex de la figura P7.6.

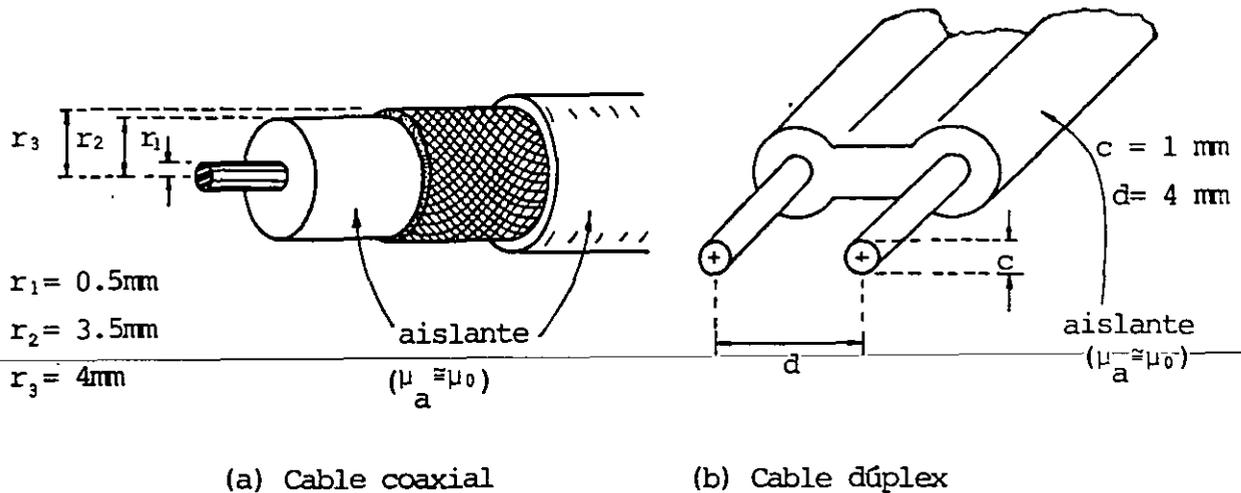


Figura P7.6

7.7 Suponga que los solenoides del problema 7.3 se conectan en serie uniendo la terminal b con la d. Haga una representación simbólica del arreglo. Calcule también el coeficiente de acoplamiento y el inductor equivalente.

7.8 Considere dos inductores ideales (sin resistencia) L_1 y L_2 , los cuales se conectan primero en serie y posteriormente en paralelo, dando por resultado los coeficientes de acoplamiento indicados en la figura P7.8. Si a los arreglos se les aplica una diferencia de potencial $V_{xz} = 10 \text{ sen } 120\pi t \text{ V}$, calcule la corriente y la diferencia de potencial en cada inductor.

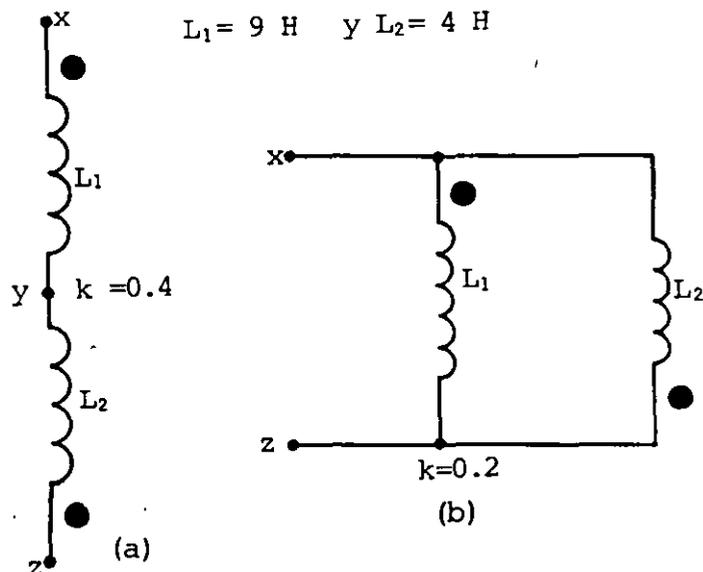


Figura P7.8

7.9 Si la corriente en el primario del transformador de la figura P7.9 (a) varía como se indica en la figura P7.9 (b), y es posible despreciar las resistencias de los embobinados, obtenga:

- La relación de transformación N .
- Los voltajes inducidos en el primario y en el secundario, para el intervalo $0 \leq t \leq 70$ ms.
- La energía máxima almacenada por el transformador.

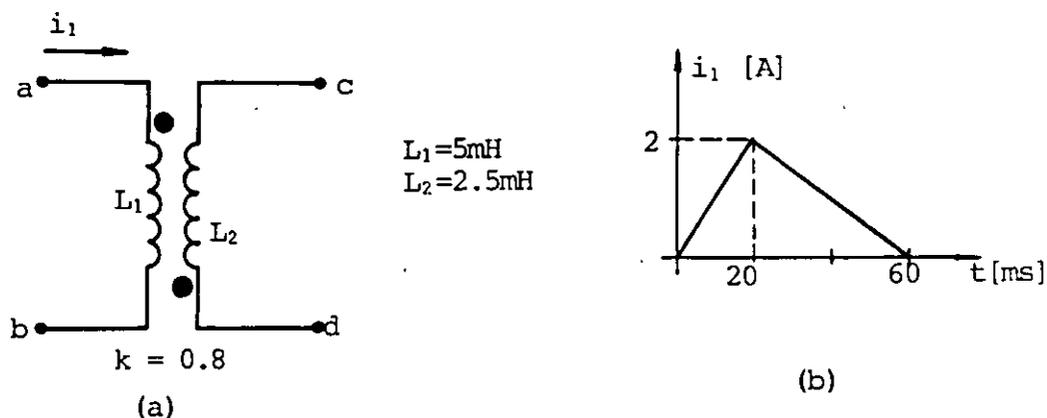


Figura P7.9

7.10 Un solenoide de inductancia propia $L_S = 0.5$ H y resistencia $R_S = 1 \Omega$ se conecta a una fuente de 12 V con resistencia interna $r = 1 \Omega$, como se muestra en la figura P7.10. Dibuje las gráficas de i , V_{ab} y V_{cb} contra el tiempo, para el intervalo $0 \leq t \leq 1.4$ s. Indique las magnitudes de las variables cada 0.2 segundos.

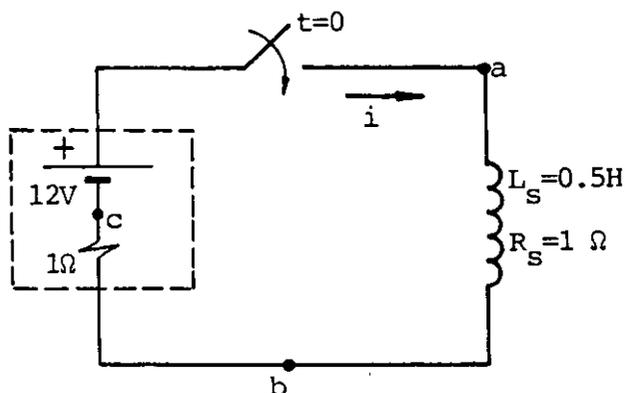


Figura P7.10

7.11 Al circuito RL de la figura P7.11 (a) se le aplica una señal de voltaje $v(t)$ que varía como se observa en la figura P7.11 (b). Dibuje las gráficas del voltaje en el resistor (V_{ab}), el voltaje en el inductor (V_{bc}) y la corriente i en el circuito contra el tiempo, para el intervalo $0 \leq t \leq 6$ s. Calcule valores de voltaje y corriente cada 0.5 segundos.

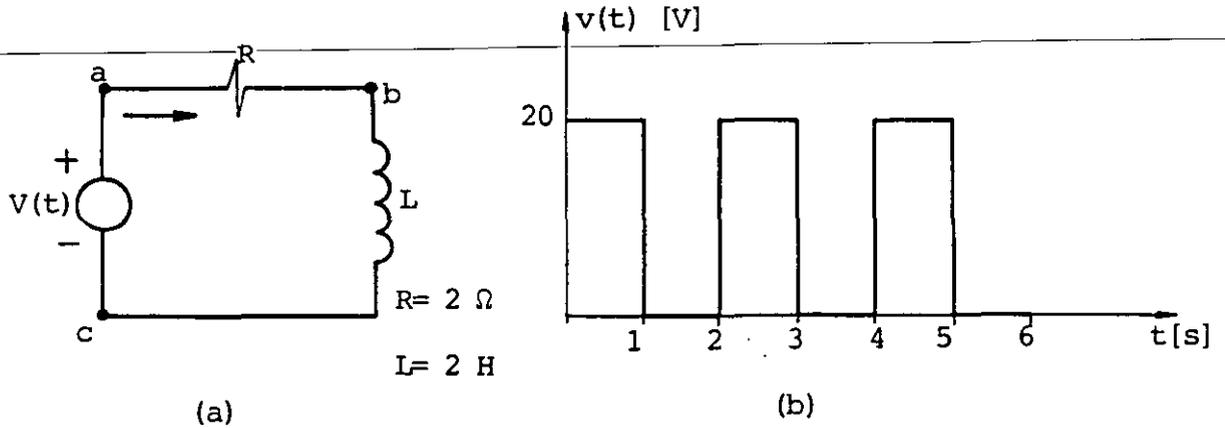


Figura P7.11

7.12 Se conecta la combinación en serie de tres inductores con resistencia a una fuente de voltaje continuo de 100 V y con resistencia interna de 2Ω , como se muestra en la figura P7.12. Si los coeficientes de acoplamiento son los indicados, calcule para $t = 50$ ms :

- a) La diferencia de potencial V_{ac} .
- b) La energía almacenada por L_1 .

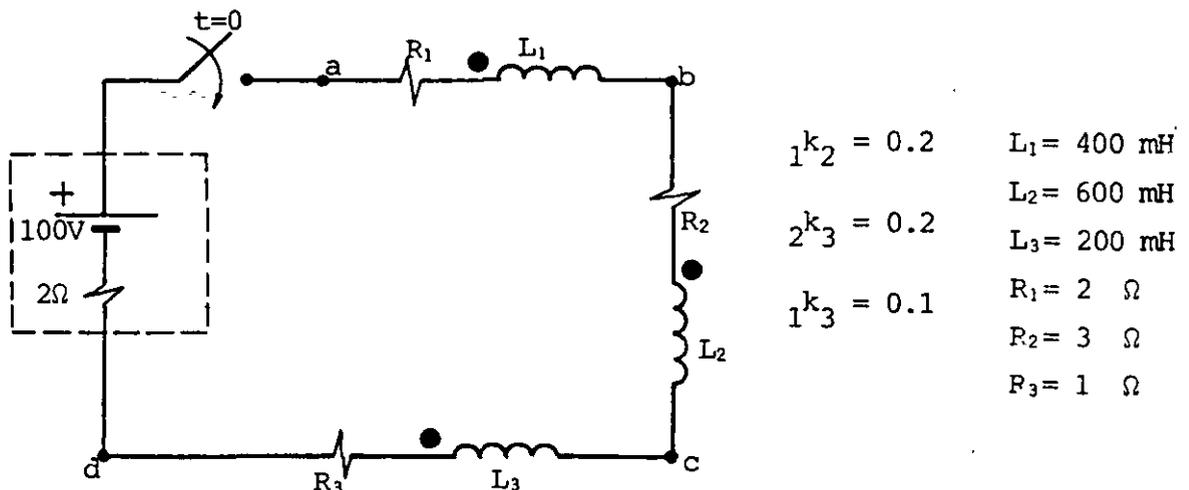
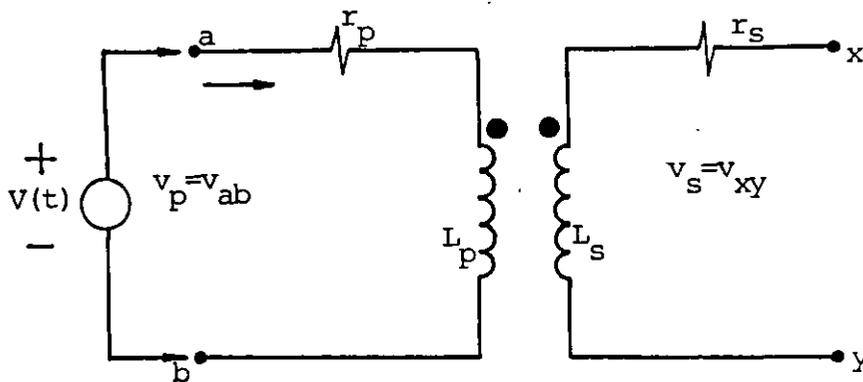
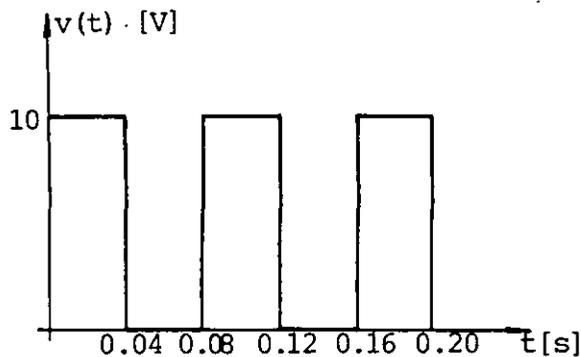


Figura P7.12

7.13 Las características del transformador de la figura P7.13(a) son: $L_p = 1 \text{ H}$, $r_p = 10 \ \Omega$, $L_s = 0.25 \text{ H}$, $r_s = 1 \ \Omega$ y el coeficiente de acoplamiento es $k = 0.8$. Si al primario del transformador se le aplica una señal de voltaje $v(t)$ que varía como se indica en la figura P7.13(b), obtenga las ecuaciones que determinan los valores de i_p , v_p y v_s para el intervalo $0 \leq t \leq 200 \text{ ms}$ y dibuje una gráfica de cada una de estas funciones del tiempo en dicho intervalo.



(a)



(b)

Figura P7.13

CAPITULO 8 PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA

INTRODUCCIÓN

Debido a la importancia de la presencia de la materia en el cálculo de fenómenos electromagnéticos y en especial, por la gran aplicación de los materiales ferromagnéticos en la ingeniería, en este tema trataremos de explicar cualitativamente el origen del comportamiento de los materiales diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos.

Posteriormente analizaremos la forma de considerar la presencia de la materia en el cálculo del campo magnético para los diversos tipos de materiales mencionados. Para el caso particular de los materiales ferromagnéticos, introduciremos el concepto de circuito magnético y analizaremos las características de algunos de estos circuitos, así como sus limitaciones.

Finalmente aplicaremos lo aprendido acerca de los materiales ferromagnéticos en el análisis de la fuerza entre polos magnéticos, la inductancia en presencia de materiales ferromagnéticos y las relaciones para un transformador con núcleo ferromagnético.

8.1 EFECTOS MAGNETICOS DEBIDOS A LA PRESENCIA DE MATERIA

Describiremos inicialmente algunos experimentos que podemos realizar para distinguir diversas clases de comportamiento de los materiales en presencia de un campo magnético. Un experimento típico se realiza con ayuda de un campo magnético no uniforme, el cual puede obtenerse en el extremo de un solenoide o con un par de polos de un electroimán, uno de los cuales termine en punta.

La figura 8.1 muestra un solenoide y el esquema del campo obtenido, en donde se puede observar la zona de campo no uniforme que existe en cualquiera de sus extremos.

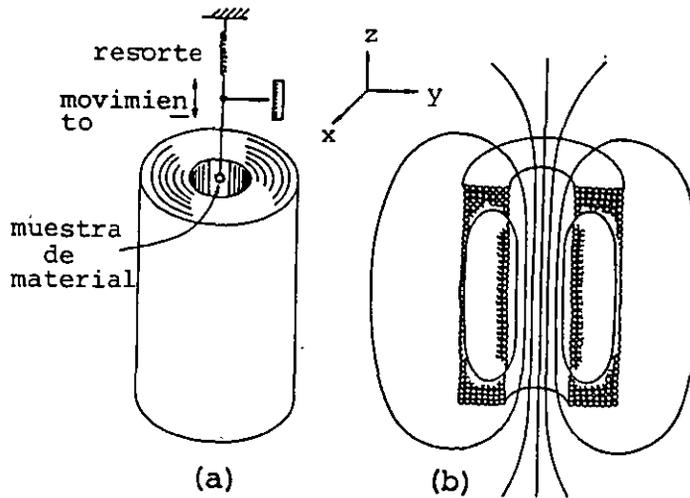


FIGURA 8.1. Solenoide usado para obtener un campo magnético no uniforme. En (a) se indica la forma de colocar las muestras para observar la fuerza magnética sobre ellas y en (b) se presenta el esquema del campo magnético del solenoide.

Otra forma de obtener un campo no uniforme es por medio de un electroimán, como el mostrado en la figura 8.2.

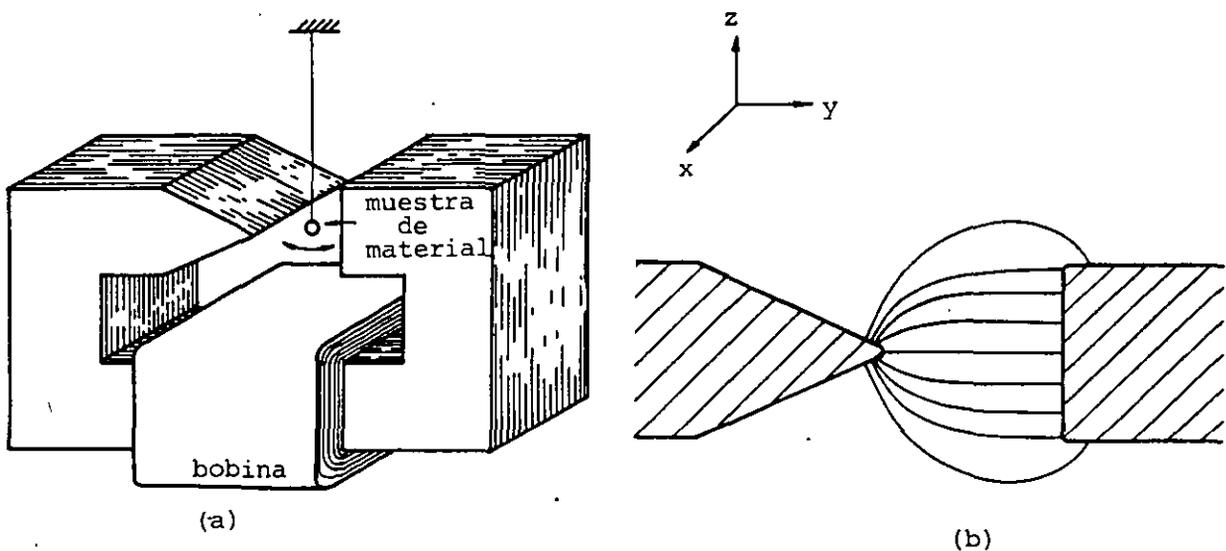


FIGURA 8.2. Par de polos usado para obtener un campo magnético no uniforme. En (a) se indica la forma de colocar las muestras para observar la fuerza magnética sobre ellas y en (b) se presenta el esquema del campo magnético del electroimán.

Al colocar una muestra de cualquier material en la zona de campo no uniforme, observaremos una fuerza de origen magnético que no depende ni de la dirección del campo, ni de su magnitud, sino de su gradiente $\frac{dB_z}{dz}$ para el solenoide o $\frac{dB_y}{dy}$ para el electroimán, es decir, dicha fuerza es más intensa en una zona donde existe mayor variación del campo magnético con respecto a la distancia. Esta fuerza, además, será proporcional a la masa de la muestra.

Si repetimos el experimento con diversos materiales, podremos distinguir esencialmente los tres tipos de comportamiento siguientes:

1. Materiales que experimentan una fuerza en la dirección en que el campo magnético disminuye, éstos son rechazados por el solenoide o por el polo en punta.

A estos materiales se les conoce como diamagnéticos y como ejemplo típico mencionaremos al agua, la cual experimenta una fuerza de 2.2×10^{-4} N por cada gramo, en un punto donde $\frac{dB_z}{dz}$ es igual a $17 \frac{T}{m}$ y $B_z = 1.8$ T .

2. Materiales que experimentan una fuerza en la dirección en que el campo magnético aumenta, éstos son atraídos hacia el interior del solenoide o por el polo en punta. A estos materiales se les conoce como paramagnéticos y como ejemplo mencionaremos el sodio, que experimenta una fuerza de 2×10^{-4} N por cada gramo, en un punto donde $\frac{dB_z}{dz}$ es igual a $17 \frac{T}{m}$ y $B_z = 1.8$ T .

3. Materiales que experimentan una fuerza varias veces mayor a la observada en los casos anteriores y en la dirección en que el campo magnético aumenta, éstos son atraídos con gran fuerza hacia el solenoide o por el polo en punta. A estos materiales se les conoce como ferromagnéticos, de los cuales el ejemplo más conocido es el hierro, sobre el cual actúa una fuerza de 4 N por cada gramo, en un punto donde $\frac{dB_z}{dz} = 17 \frac{T}{m}$ y $B_z = 1.8$ T .

Además, al reducir la variación del campo magnético a la mitad, la fuerza observada sobre los materiales diamagnéticos y paramagnéticos se reducirá a la cuarta parte. En los materiales ferromagnéticos, en cambio, la fuerza se reducirá solamente a la mitad.

Otro experimento que nos permite detectar la existencia de las tres clases de materiales mencionadas, puede ser realizado por medio de un toroide como el mostrado en la figura 8.3.

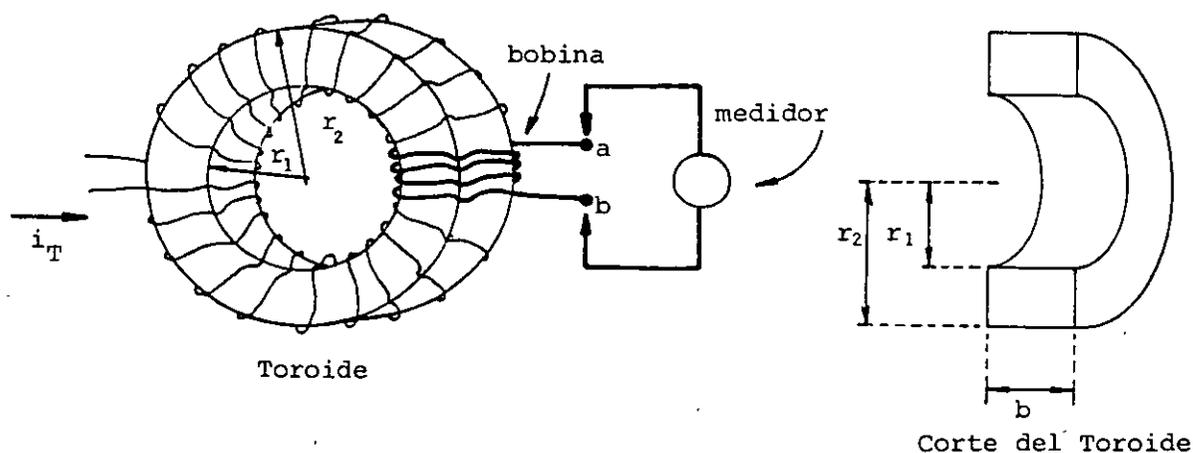


FIGURA 8.3. Toroide de sección rectangular y devanado uniforme, sobre el cual se ha enrollado una bobina para medir voltaje inducido.

Sobre el toroide se devana una bobina, a cuyas terminales se conecta un aparato de medición que permite obtener la lectura del voltaje inducido (por ejemplo un osciloscopio) cuando se varía la corriente en el toroide, por conveniencia en forma senoidal, es decir

$$i_T = I_{Tm} \text{ sen } \omega t \quad (8.1)$$

Si aplicamos la ley de Faraday, obtenemos que la fuerza electromotriz inducida en la bobina es

$$E_b = M \frac{di_T}{dt} \quad (8.2)$$

donde la inductancia mutua se calcula con la expresión

$$M = \frac{\mu_0 N_T N_b b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (8.3)$$

Este dispositivo permite comparar los valores de voltaje inducido cuando el núcleo del toroide se construye con diversos materiales, con el obtenido cuando se coloca sin núcleo en una zona de vacío.

Si tomamos como base el voltaje inducido sin núcleo, observaremos que los materiales que llamamos diamagnéticos producen un voltaje inducido menor, los paramagnéticos lo incrementan y los ferromagnéticos producen un gran incremento en dicho voltaje.

En el siguiente subtema trataremos de explicar el origen de estos efectos y posteriormente presentaremos la forma de incluirlos en el cálculo de fenómenos electromagnéticos.

8.2 CONTRIBUCION MAGNETICA DE LOS ATOMOS

El estudio de los fenómenos cuánticos ha permitido explicar con éxito la estructura de los átomos y el comportamiento de las partículas que los constituyen; es por ello, que en un estudio formal de la contribución magnética de los átomos, es necesario apoyarse en los resultados de la mecánica cuántica. Sin embargo, dado que no poseemos los conocimientos necesarios sobre ella, trataremos de explicar, cuando sea posible y con sus limitaciones, algunos efectos magnéticos, apoyados en la mecánica clásica.

Analizaremos primero cómo contribuyen los electrones, girando alrededor del núcleo, al magnetismo de la materia. Supongamos, para simplificar, un electrón (carga q_e) girando en una órbita circular, con una velocidad tangencial \vec{v} , como se muestra en la figura 8.4.

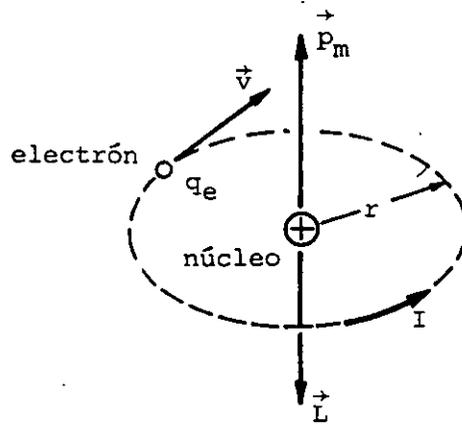


FIGURA 8.4. Electrón girando alrededor del núcleo de un átomo, en una órbita circular.

Este electrón representa una espira de corriente eléctrica, ya que en cada segundo su carga puede pasar varias veces por un punto cualquiera de la trayectoria circular; el valor de esta corriente es

$$I = q_e f \quad [\text{A}] \quad (8.4)$$

donde

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{r 2\pi} \quad (8.5)$$

y la magnitud del momento dipolar magnético \vec{p}_m del electrón en órbita será

$$|\vec{p}_m| = I A = q_e f (\pi r^2) = \frac{q_e}{2} v r \quad (8.6)$$

Por otro lado, sabemos que el *momentum* angular del electrón en órbita es en magnitud

$$|\vec{L}| = m_e v r \quad (8.7)$$

Al relacionar las ecuaciones (8.6) y (8.7), obtenemos que

$$\vec{p}_m = \frac{q_e}{2m_e} \vec{L} \quad (8.8)$$

Observemos en esta última ecuación que los vectores momento dipolar magnético \vec{p}_m y *momentum* angular orbital \vec{L} , están relacionados por medio de la constante $\frac{q_e}{2m_e}$; para el caso de un electrón ésta será negativa, ya que q_e es negativa, por lo que los vectores \vec{p}_m y \vec{L} tendrán direcciones opuestas.

Aunque hemos obtenido una relación para el caso particular de una órbita circular, es posible demostrar que tal relación es general y que para cualquier órbita donde el *momentum* angular sea constante, el momento magnético permanecerá constante. Además, este resultado es válido desde el punto de vista cuántico.

Adicionalmente al magnetismo producido por los electrones en órbita, existe otra contribución magnética debida a la rotación de las partículas alrededor de su eje, llamado espín.

Debido a que el espín es un fenómeno cuántico, su *momentum* angular está cuantizado y su valor y símbolo son

$$|\vec{S}| = \text{momentum angular interno} = \frac{h}{4\pi} \quad (8.9)$$

donde

h = constante de Planck

En la figura 8.5 se muestran las direcciones del momento magnético y del momento angular, para un electrón girando sobre su eje.

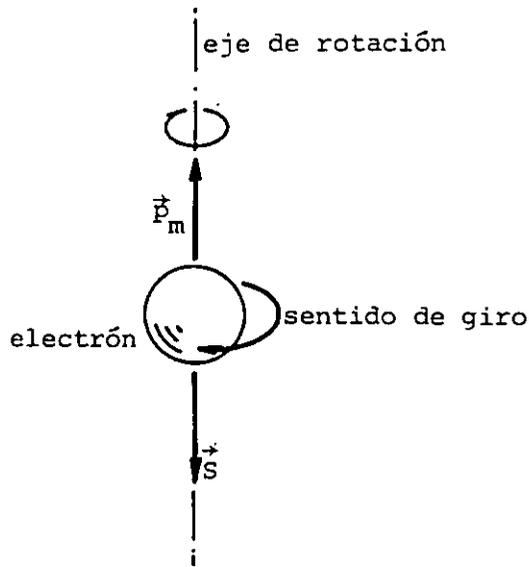


FIGURA 8.5. Direcciones de los vectores momento magnético y *momentum* angular para un electrón.

La dirección del momento magnético puede obtenerse considerando al electrón como una esfera de carga negativa girando sobre su eje.

El protón y el neutrón también poseen espín, es por ello que para cualquiera de estas partículas podemos expresar su momento magnético como

$$\vec{p}_m = \gamma \frac{q}{2m} \vec{S} \quad (8.10)$$

donde

γ = constante giromagnética

Los valores de la constante giromagnética γ para el electrón, el protón y el neutrón son respectivamente

$$\gamma_e = -2.002$$

$$\gamma_p = 5.585 \quad (8.11)$$

$$\gamma_n = -3.860$$

Si observamos los valores de γ para cada una de las partículas mencionadas, es posible obtener algunas conclusiones interesantes. Una de ellas, basada en que $\gamma_e \neq \gamma_p$, nos indica que la estructura interna del electrón es distinta a la del protón y $\gamma_n \neq 0$ es una indicación de la existencia de una distribución de carga en el neutrón.

Basados en los resultados presentados con anterioridad deberíamos esperar que cualquier trozo de material produjera un campo magnético en sus cercanías, sin embargo, existen dos sentidos posibles de rotación de las partículas, tanto orbital como de espín que dan por resultado una cancelación de efectos entre las partículas subatómicas. Si las cancelaciones no fueran totales, cada átomo o molécula poseería un momento dipolar magnético resultante; además, como en un trozo de materia ordinaria no existe ninguna dirección preferente para que se orienten dichos dipolos magnéticos, la orientación aleatoria impedirá que se detecte un efecto magnético externo.

Investigaremos ahora qué sucede con las contribuciones magnéticas de las partículas que constituyen los átomos o moléculas, al colocar un material en una zona donde existe un campo magnético.

a) Diamagnetismo

Cuando colocamos un material en una zona de campo magnético, los electrones en órbita experimentan una fuerza adicional dada por la expresión

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (8.12)$$

Esta fuerza altera la velocidad de los electrones, produciendo momentos magnéticos inducidos que tienden a disminuir el campo magnético existente en el interior del material. Ya que no es posible demostrar el caso general, basándonos en la mecánica clásica, nos limitaremos a analizar el caso básico de un electrón que gira en una órbita circular alrededor del núcleo, como el mostrado en la figura 8.6.

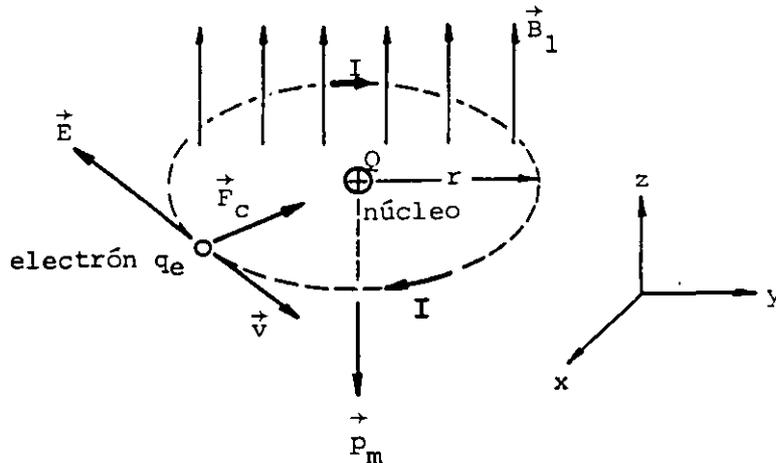


FIGURA 8.6. Electrón girando en una órbita circular alrededor de un núcleo de carga Q .

Cuando no existe campo magnético externo, la magnitud de la fuerza centrípeta esta dada por la expresión de Coulomb, entonces

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_e}{r^2} \quad (8.13)$$

Supongamos que colocamos nuestro sistema en una región donde existe un campo magnético en dirección Z y que es uniforme en toda la zona, según la ley de Faraday, al aumentar el campo magnético desde cero hasta su valor final \vec{B}_1 , aparece un campo eléctrico inducido \vec{E} concéntrico a la órbita, el cual podemos obtener aplicando dicha ley, entonces

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi_b}{dt} \quad (8.14)$$

como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 2 \pi r E \quad (8.15)$$

y

$$\frac{d\phi_b}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (8.16)$$

Al combinar estas dos últimas ecuaciones, obtenemos que

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (8.17)$$

La dirección del campo eléctrico inducido es la indicada en la figura 8.6 y puede ser obtenida con el principio de Lenz. Notemos que la fuerza que ejerce este campo eléctrico, tiende a desacelerar al electrón y la variación de la velocidad se puede obtener a partir de la ley de Newton, entonces

$$ma = q_e E = \frac{q_e r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (8.18)$$

pero

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (8.19)$$

por lo que

$$dv = \frac{q_e r}{2m} dB \quad (8.20)$$

Si el valor final del campo magnético externo es B_1 , podemos calcular el incremento de velocidad integrando la expresión (8.20)

$$\Delta v = \frac{q_e r}{2m} \int_0^{B_1} dB = \frac{q_e r B_1}{2m} \quad (8.21)$$

Debemos observar que el incremento de velocidad es el mismo, independientemente de la rapidez con la cual aumenta el campo magnético de cero a su valor final B_1 .

Para un electrón girando, en sentido opuesto, el efecto es un incremento en su velocidad, de tal manera que el cambio en el momento

to magnético siempre es opuesto a la dirección del campo magnético aplicado. De acuerdo con la expresión (8.6), se cumple que

$$\Delta p_m = \frac{q_e r}{2} \Delta v \quad (8.22)$$

Al sustituir la ecuación (8.21) en la (8.22), obtenemos:

$$\Delta p_m = \frac{q_e^2 r^2 B_1}{4m} \quad (8.23)$$

y vectorialmente

$$\vec{\Delta p}_m = - \frac{q_e^2 r^2 \vec{B}_1}{4m} \quad (8.24)$$

Podemos concluir que estamos obteniendo, de cada electrón en órbita, un momento magnético inducido opuesto al campo magnético externo.

b) Paramagnetismo

Cuando los efectos magnéticos, tanto orbitales como de espín de un átomo o molécula no se cancelan completamente, cada átomo, molécula o ión posee un momento magnético neto. Cuando estos dipolos magnéticos atómicos, son colocados en una zona de campo magnético, experimentan un par

$$\vec{\tau} = \vec{p}_m \times \vec{B} \quad (8.25)$$

Sabemos que este par actúa tratando de alinear la dirección de \vec{p}_m con la del campo magnético aplicado \vec{B} , como se indica en la figura 8.7.

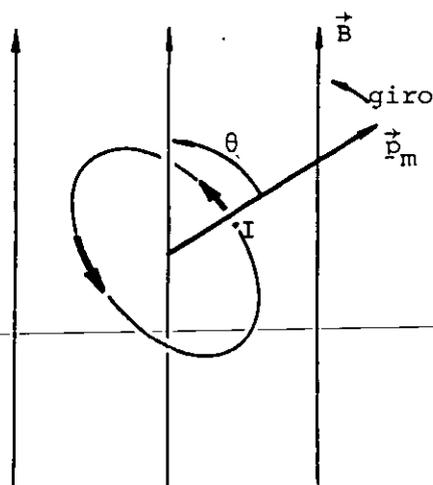


FIGURA 8.7. El vector momento dipolar magnético \vec{p}_m , trata de colocarse en dirección paralela al campo magnético \vec{B} , debido al par $\vec{\tau}$.

La energía potencial magnética del dipolo en un campo magnético es

$$E_p = - \vec{p}_m \cdot \vec{B} \quad (8.26)$$

y la posición donde esta energía es mínima, es justamente cuando \vec{p}_m y \vec{B} son paralelos, sin embargo, debido a la agitación térmica, no se logra una orientación completa de los dipolos. Es por ello que, en general, el alineamiento de los dipolos magnéticos que constituyen una muestra de materia es inversamente proporcional a la temperatura.

El efecto diamagnético está presente siempre, pero puede ser superado por el paramagnetismo, dando lugar a que el material incremente el valor del campo magnético en su interior y la muestra se considerará paramagnética.

c) Ferromagnetismo

En esta clase de materiales los momentos dipolares atómicos, originados principalmente por momentos magnéticos de espín no compensados, poseen una tendencia natural a alinearse, aun sin la exis-

tencia de un campo magnético externo. Debido a esta tendencia, se forman regiones dentro del material del orden de 10^{-7} a 10^{-12} m³ en las cuales todos los momentos magnéticos están alineados, a estas regiones se les llama dominios.

Sin campo magnético aplicado, los dominios existentes en una muestra de material poseen direcciones diversas y el material puede no presentar efectos magnéticos externos. Al aplicar un campo magnético al material, los dominios que poseen orientación en dirección del campo, crecen a expensas de los dominios vecinos que no están orientados favorablemente. Al incrementar el campo aplicado, se presenta también una orientación de dominios en una posición más favorable, como se ilustra en la figura 8.8.

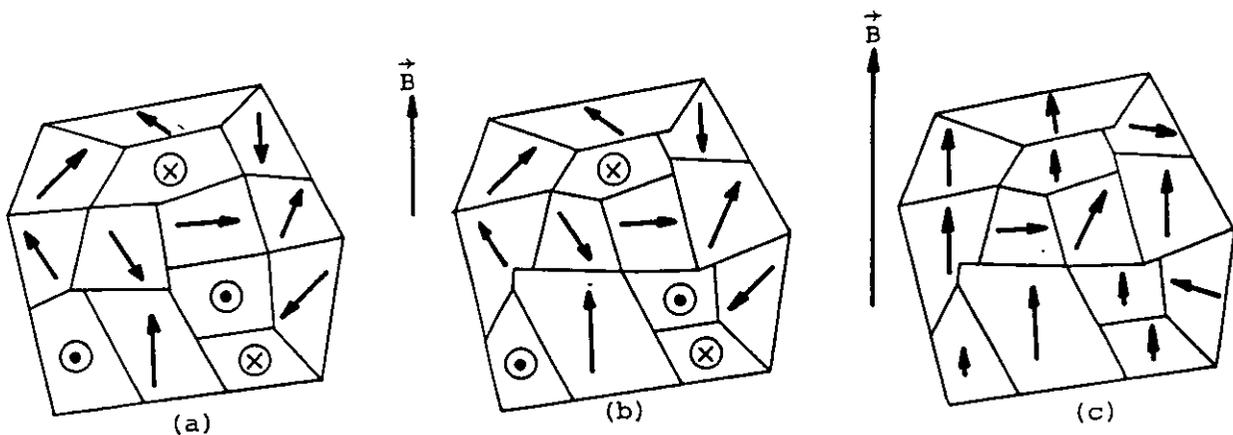


FIGURA 8.8. Muestra de material ferromagnético. (a) Dominios magnéticos. (b) Los dominios magnéticos han crecido a expensas de sus vecinos cuyas direcciones no eran favorables. (c) Los dominios magnéticos se han orientado debido al incremento del campo.

El ferromagnetismo es una propiedad que depende de la temperatura. Para cada sustancia existe una temperatura llamada temperatura Curie, para la cual el material pierde sus propiedades ferromagnéticas comportándose paramagnéticamente. Para temperaturas mayores que la temperatura Curie, la agitación térmica es tan grande, que supera la tendencia al alineamiento. La tabla 8.1 muestra el va-

lor de esta temperatura para los cinco elementos químicos que son ferromagnéticos.

TEMPERATURA CURIE PARA LOS CINCO ELEMENTOS FERROMAGNETICOS		
Elemento		Temperatura Curie
Hierro	Fe	770 °C
Cobalto	Co	1120 °C
Níquel	Ni	358 °C
Gadolinio	Gd	16 °C
Disprosio	Dy	-188 °C

TABLA 8.1

El alineamiento espontáneo está basado en efectos electrostáticos entre los átomos adyacentes, mismos que dependen de la distancia entre los átomos en la estructura cristalina del material. En los materiales ferromagnéticos, este efecto alinea los momentos magnéticos atómicos en dirección paralela.

Es posible que estos efectos produzcan un alineamiento antiparalelo dando origen a los materiales llamados antiferromagnéticos, como ejemplo de estas sustancias tenemos: MnO , FeO , CoO y NiO .

Cuando el alineamiento es antiparalelo, pero además, los momentos magnéticos atómicos son mayores en una dirección, se obtienen materiales llamados ferrimagnéticos. A este grupo de materiales pertenecen las llamadas ferritas, muy usadas debido a sus propiedades magnéticas y alta resistividad. Ejemplos de estos materiales son: la magnetita $Fe_3 O_4$ y la ferrita de níquel $Ni Fe_2 O_4$.

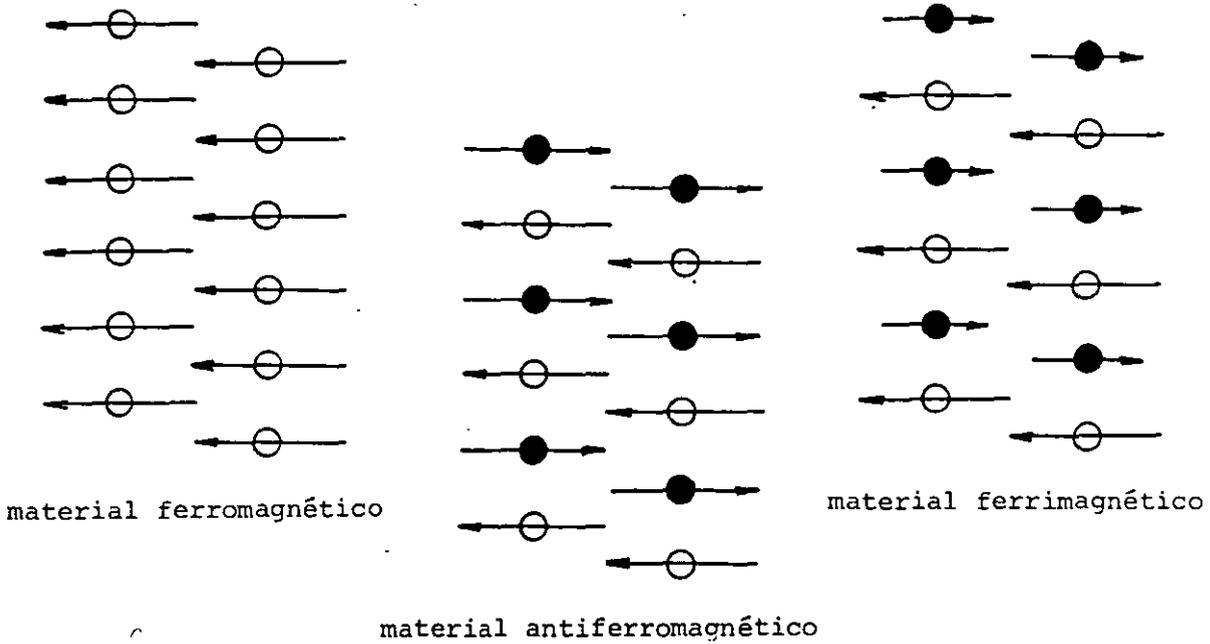


FIGURA 8.9. Esquemas de los tipos de orientación de los momentos dipolares atómicos, en los materiales que presentan alineamiento espontáneo.

Para terminar de justificar los fenómenos descritos en el subtema inicial, analizaremos la fuerza que se presenta sobre los dipolos magnéticos, cuando se colocan en un campo magnético no uniforme, como se muestra en la figura 8.10.

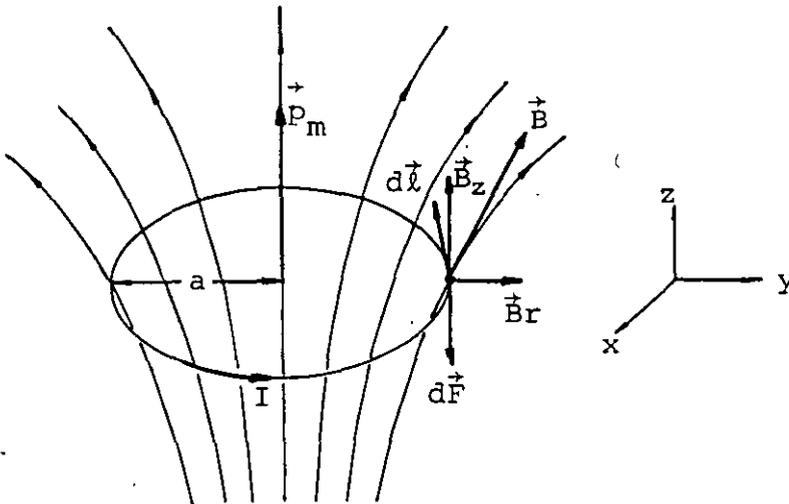


FIGURA 8.10. Espira de corriente situada en una zona donde existe un campo magnético no uniforme. Las líneas mostradas representan el campo externo, no se muestra el producido por la espira.

Sabemos que la fuerza magnética que actúa sobre un conductor de longitud $d\vec{l}$, que transporta una corriente I , en una zona donde existe un campo magnético \vec{B} es

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (8.27)$$

La fuerza de interés es debida a la componente radial del campo \vec{B}_r que forma siempre un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ rad con cualquier elemento $d\vec{l}$ que se considere, por lo que la magnitud de esta fuerza es

$$dF = I dl B_r \quad (8.28)$$

Al integrar, obtenemos que la fuerza es

$$F = I(2\pi a) B_r \quad (8.29)$$

y dirigida hacia abajo, por lo que la espira será llevada hacia la zona donde el campo magnético es más intenso. Si invertimos la dirección de la corriente, \vec{p}_m tendrá dirección opuesta y la fuerza actuará para mover la espira hacia una zona de campo magnético menos intenso.

Es posible obtener una relación entre la fuerza magnética y la variación de la componente del campo en la dirección z , por medio de la ley de Gauss para el magnetismo ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) el resultado es

$$F = p_m \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (8.30)$$

Notar que en un campo magnético uniforme, la fuerza que actúa sobre la espira es cero.

Hasta el momento debemos poder explicar cualitativamente la razón de los fenómenos descritos en el subtema previo.

8.3 MAGNETIZACION DE LA MATERIA Y VECTORES MAGNETIZACION E INTENSIDAD DE CAMPO MAGNETICO

Hemos visto que al colocar un material cualquiera en una zona de campo magnético, se orientan y/o se inducen dipolos magnéticos en los átomos, dando por resultado un momento dipolar magnético total en el material. Se dice entonces, que en dicho material existe una polarización magnética o magnetización.

Si en un volumen ΔV , existen N dipolos magnéticos, entonces, es posible obtener el momento dipolar magnético total mediante la siguiente expresión vectorial

$$\vec{P}_{mt} = \sum_{i=1}^N \vec{P}_{mi} \quad (8.31)$$

Definiremos como vector magnetización \vec{M} al momento dipolar magnético por unidad de volumen, pero dado que el vector puede variar de una zona a otra del material, lo expresaremos mediante el límite siguiente

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{P}_{mt}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{P}_{mi}}{\Delta V} \quad (8.32)$$

Otra forma de definir el vector magnetización \vec{M} , es considerar la existencia de un momento dipolar magnético promedio por átomo \vec{P}_{mp} y si n es el número de átomos por unidad de volumen, tenemos que

$$\vec{M} = n \vec{P}_{mp} \quad (8.33)$$

Las unidades del vector magnetización son

$$[M]_u = \left[\frac{1}{m^3} \right] [A \cdot m^2] = \left[\frac{A}{m} \right]$$

Cuando el material es homogéneo o isótropo, la magnetización tiene la dirección del campo magnético aplicado o causante de la magnetización. Un procedimiento conveniente para tomar en cuenta el efecto de la magnetización, es la suposición de que el material magnetizado está constituido por un gran número de pequeñas espiras de corriente, como se indica en la figura 8.11, para una sección transversal de un toroide magnetizado en forma uniforme.

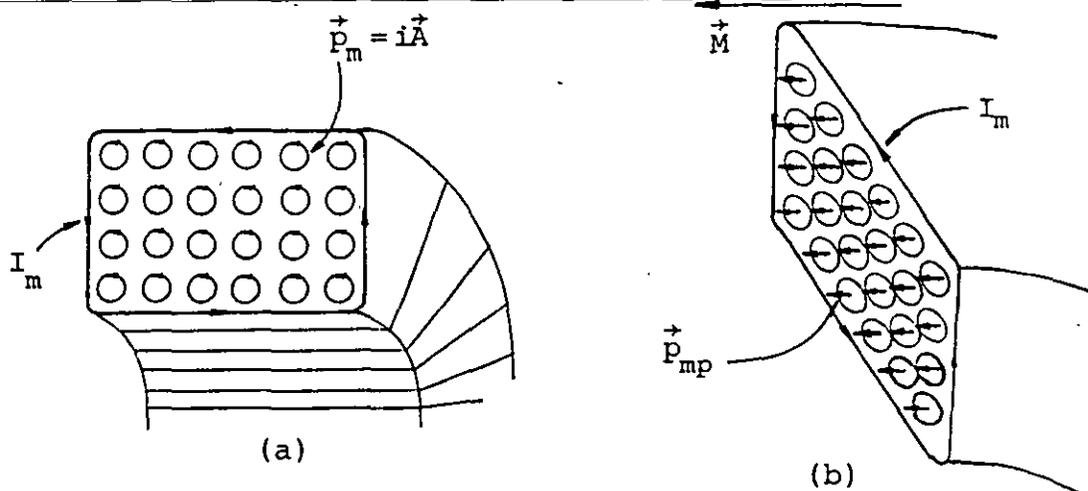


FIGURA 8.11. (a) Sección transversal de un toroide con magnetización uniforme; en (b) se muestran los momentos dipolares promedio por átomo.

Se observa en la figura anterior que cuando la magnetización es uniforme, las corrientes en el interior se cancelan entre sí, permitiéndonos representar el efecto total de las espiras mediante una corriente neta que circula exclusivamente en la superficie del material. A esta corriente equivalente se le llama corriente superficial amperiana o de magnetización, usualmente se distingue de la corriente a través de los conductores mediante el subíndice m , es decir

$$I_m = \text{corriente de magnetización}$$

La magnitud del momento dipolar magnético total de la muestra, se puede obtener en forma equivalente como

$$P_{mt} = I_m A \quad (8.34)$$

donde

$A = \text{área de la sección transversal del toroide}$

Por ser la magnetización uniforme tenemos que

$$M = \frac{I_m A}{A\ell} = \frac{I_m}{\ell} \quad (8.35)$$

donde

$\ell = \text{Longitud media del toroide.}$

Este resultado, aunque ha sido obtenido para un caso particular, tiene validez general e indica que en un trozo de material magnetizado la componente del vector magnetización, paralela al plano tangente de la superficie del cuerpo, es igual a la corriente de magnetización por unidad de longitud. Esta afirmación puede ser expresada matemáticamente, mediante el concepto de circulación del campo vectorial \vec{M} que existe en el interior del material, entonces

$$c_m = \oint \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = I_m \quad (8.36)$$

La figura 8.12 muestra la trayectoria usada para obtener la expresión (8.36)

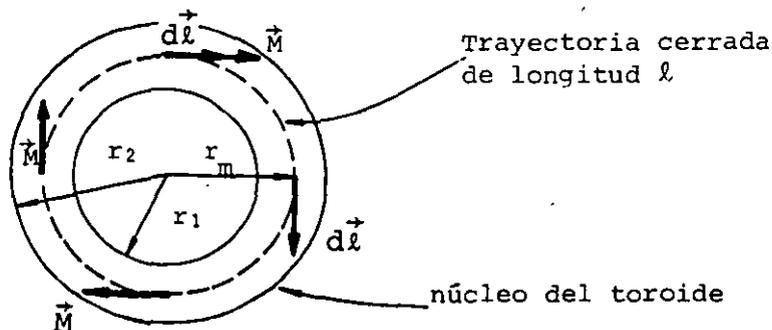


FIGURA 8.12. Corte del toroide donde se muestra la trayectoria usada para obtener la circulación del campo de magnetización que existe en el núcleo del toroide.

Según la ley de Ampere, la circulación del campo magnético \vec{B} es igual a la corriente neta I_N encerrada por la trayectoria, multiplicada por μ_0 , es decir

$$c_b = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_N \quad (8.37)$$

Cuando existen materiales magnetizados, la corriente neta encerrada se compone de dos términos, la corriente de magnetización I_m y la corriente usual de conducción a la que llamaremos corriente libre I_ℓ ; es por ello que para tomar en cuenta ambos efectos, expresaremos la ley de Ampere como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_\ell + I_m) \quad (8.38)$$

o también

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{\ell} - I_m = I_\ell \quad (8.39)$$

Al combinar la ecuación (8.36) con la (8.39) obtenemos que

$$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{\ell} - \oint \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = I_\ell \quad (8.40)$$

Como la trayectoria de integración es la misma, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\oint \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right] \cdot d\vec{\ell} = I_\ell \quad (8.41)$$

Al vector resultante de la diferencia $\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ se le conoce como intensidad de campo magnético y se representa con la letra \vec{H} , por lo que

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad (8.42)$$

Este campo posee la propiedad de que su circulación depende exclusivamente de la corriente de conducción. De las expresiones (8.41) y (8.42) obtenemos que

$$c_h = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_\ell = \iint \vec{J}_\ell \cdot d\vec{A} \quad (8.43)$$

Si aplicamos el teorema de Stokes, la ecuación anterior se puede expresar como

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_\ell \quad \left[\frac{A}{m^2} \right] \quad (8.44)$$

Demuestre que para un toroide de N_t vueltas devanadas uniformemente, la expresión que determina la magnitud del vector intensidad magnética es

$$H = \frac{N_t i_t}{2\pi r} \quad \left[\frac{A}{m} \right]$$

para

$$r_1 \leq r \leq r_2$$

siendo r_1 y r_2 los radios menor y mayor del toroide respectivamente.

Con objeto de aclarar el uso de los vectores magnetización e intensidad de campo magnético, analizaremos el caso de un cilindro en el cual supondremos existe una magnetización uniforme. En un cilindro magnetizado práctico, se presenta un efecto en los extremos que altera la magnetización, pero puede ser despreciado en el caso de cilindros largos.

De la ley de Gauss para el magnetismo, sabemos que

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Al sustituir en esta ley la ecuación (8.42), resulta

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oiint \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \cdot d\vec{A} = 0$$

o también

$$\oiint \vec{H} \cdot d\vec{A} = - \oiint \vec{M} \cdot d\vec{A} \quad [\text{A}\cdot\text{m}] \quad (8.45)$$

Evaluaremos la integral de la derecha de la igualdad anterior, para la superficie cerrada que contiene un extremo del cilindro magnetizado, como se indica en la figura 8.13.

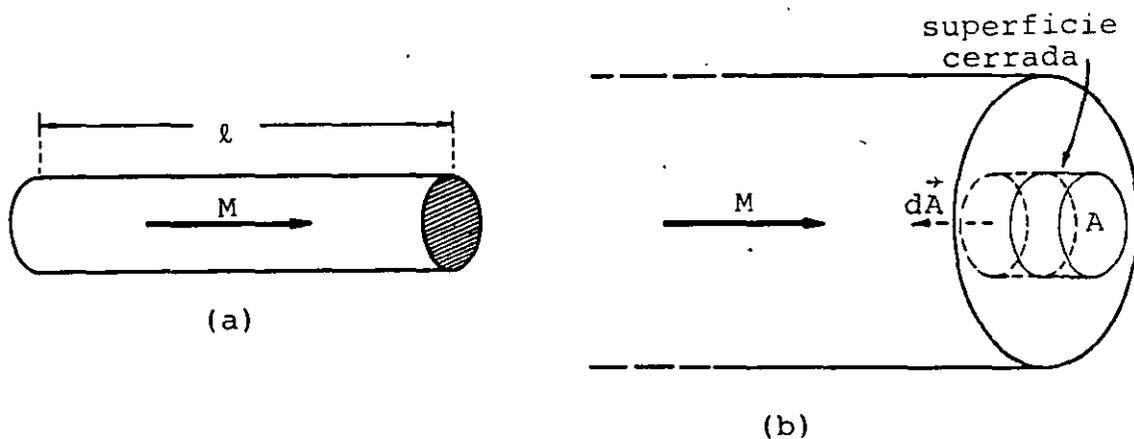


FIGURA 8.13. (a) Cilindro magnetizado uniformemente, (b) corte longitudinal del cilindro y superficie gaussiana usada para evaluar el flujo de \vec{M} en el extremo del cilindro.

Como M es constante y sólo existe flujo a través de la base de la superficie cilíndrica, resulta que

$$\oiint \vec{M} \cdot d\vec{A} = - M A \quad [\text{A}\cdot\text{m}] \quad (8.46)$$

Entonces, la ecuación (8.45) puede ser expresada para este caso como

$$\oiint \vec{H} \cdot d\vec{A} = M A \quad [\text{A}\cdot\text{m}] \quad (8.47)$$

Esta ecuación indica, que existe un flujo de \vec{H} a través de cualquier superficie que encierre una frontera donde haya una componente de \vec{M} perpendicular a dicha frontera.

En muchos casos resulta conveniente considerar la existencia de una carga o polo magnético ficticio (q_m) definida como

$$q_m = M A \quad [A \cdot m] \quad (8.48)$$

Es decir, podemos suponer la existencia, en cada extremo del cilindro, de una densidad de carga o polo magnético, como origen o terminación de \vec{H} .

La ecuación (8.48) puede expresarse de manera equivalente como

$$\oiint \vec{H} \cdot d\vec{A} = q_m \quad [A \cdot m] \quad (8.49)$$

En el caso particular del toroide no existen extremos y en consecuencia la única fuente de \vec{H} es la corriente de conducción I_l .

Debido a la semejanza de la ecuación (8.49) con la ley de Gauss, podemos concluir que es posible considerar la existencia de cargas magnéticas *puntuales*. Esta suposición permite calcular el campo magnético \vec{H} o \vec{B} , producido por el cilindro magnetizado, en algún punto exterior, tomando los polos como cargas magnéticas puntuales, siempre y cuando la distancia del punto a los polos sea grande en comparación con las dimensiones de éstos.

El resultado de la aplicación de la ecuación (8.49) a una carga puntual magnética, será

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad (8.50)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \quad [T]$$

Para obtener el campo magnético que produce en puntos exteriores el cilindro analizado, consideraremos a q_m como una carga positiva para el polo norte, y negativa para el polo sur.

Por medio del principio de superposición, obtendremos el resultado buscado en forma análoga al caso del dipolo eléctrico.

Si el cilindro largo de la figura 8.14 posee una magnetización uniforme $\vec{M} = 200 \hat{i} \frac{A}{m}$, compruebe que $\vec{B}_A = -319.9 \hat{i} \text{ nT}$ y $\vec{H}_B = -0.16 \hat{i} \frac{A}{m}$

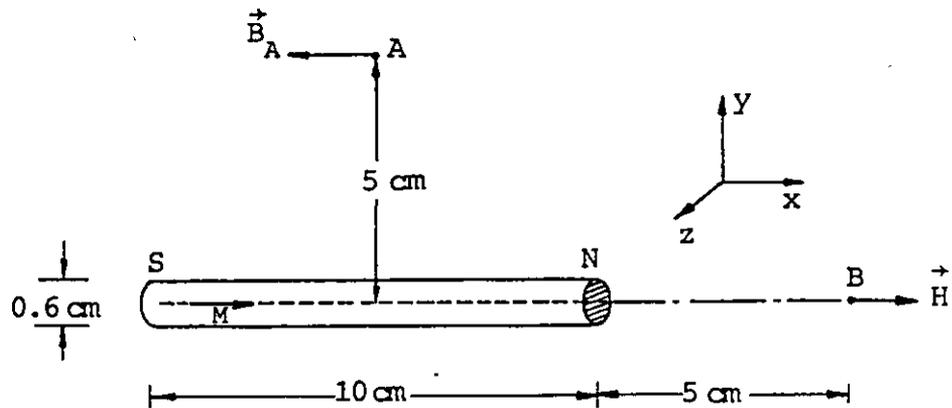
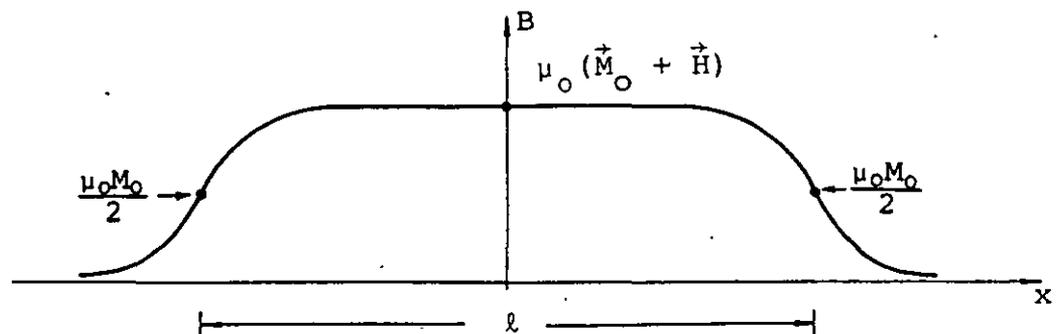


FIGURA 8.14. Cilindro magnetizado uniformemente de 10 cm de longitud.

Para obtener los vectores \vec{H} y \vec{B} en puntos interiores del cilindro magnetizado, es conveniente pensar en función de la corriente equivalente o de magnetización I_m . Los resultados obtenidos son los mostrados en la figura 8.15, donde se muestran las variaciones de los vectores \vec{B} , \vec{M} y \vec{H} a lo largo del eje del cilindro.



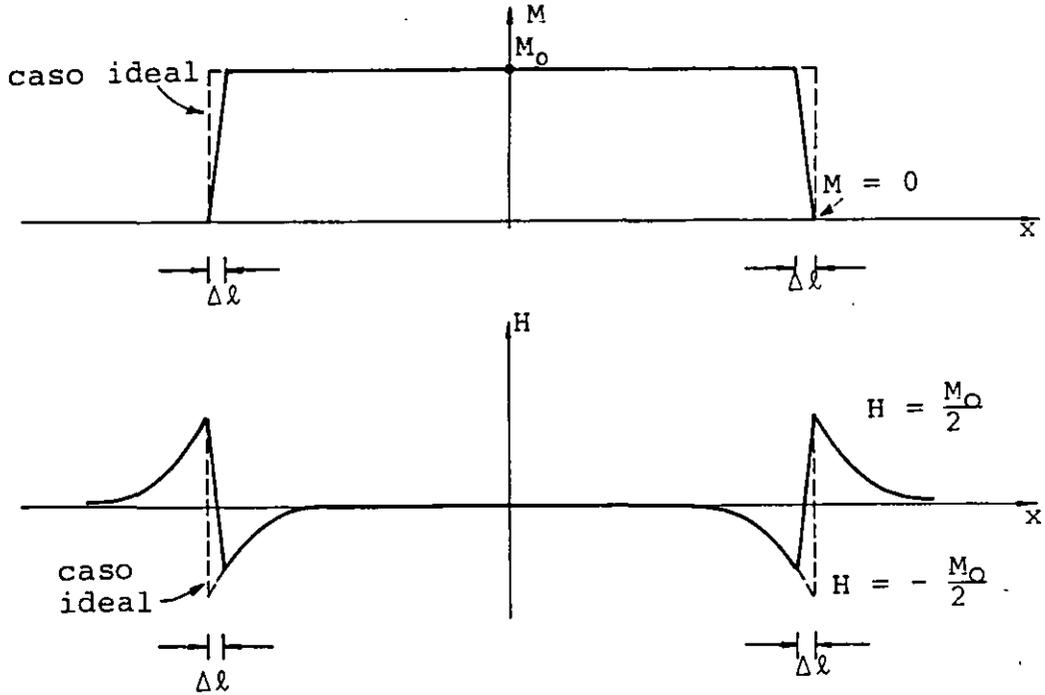


FIGURA 8.15. Magnitud de los vectores \vec{B} , \vec{M} y \vec{H} a lo largo del eje de un cilindro de longitud l con magnetización uniforme. Las líneas gruesas indican el caso real en el cual la magnetización cambia del valor M a cero en un intervalo Δl .

En la figura 8.16 se muestran los esquemas de los campos \vec{B} y \vec{H} en un corte longitudinal del cilindro.

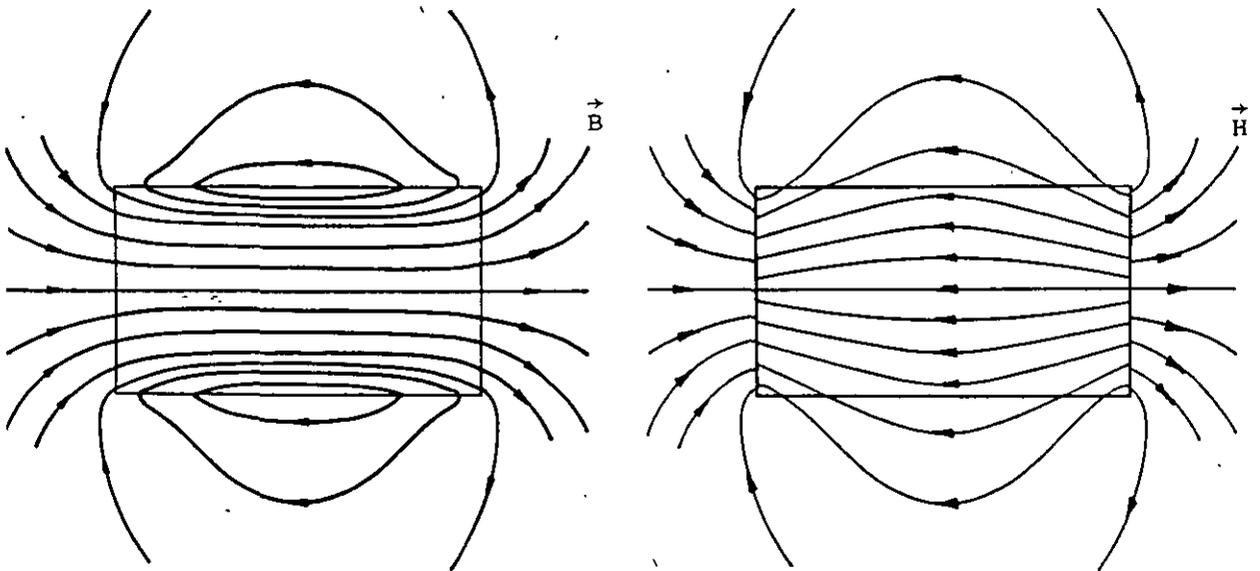


FIGURA 8.16. Esquemas de los campos \vec{B} y \vec{H} dentro y fuera de un cilindro con magnetización uniforme.

Debemos observar en la figura 8.16, que las líneas de \vec{B} , independientemente de la existencia de materiales magnetizados, son continuas y es posible demostrar que en la superficie frontera entre dos materiales se cumple que la componente de \vec{B} perpendicular a ella se conserva.

En el caso de \vec{H} , las líneas no son continuas cuando existen fronteras entre dos medios y es posible demostrar que la componente de \vec{H} tangente a la superficie frontera es la que se conserva.

Compruebe que, para el cilindro con magnetización uniforme de la figura 8.14, el campo de inducción magnética \vec{B} en el centro del cilindro es $\vec{B} = 250.88 \hat{i} \mu\text{T}$ cuando $\vec{M} = 200 \hat{i} \frac{\text{A}}{\text{m}}$ y que la corriente necesaria para obtener este campo con un solenoide de N_s vueltas enrolladas uniformemente es $I_m = N_s I_s = 20 \text{ A}$.

8.4 PARAMETROS USADOS PARA DESCRIBIR EL COMPORTAMIENTO MAGNETICO DE LAS SUSTANCIAS

Las relaciones entre los vectores que caracterizan el comportamiento magnético de la materia, pueden ser descritas convenientemente en función de ciertos parámetros, los cuales serán definidos a continuación.

Definiremos la susceptibilidad magnética χ_m , en un punto del material, a través de la relación siguiente

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right] \quad (8.45)$$

donde

\vec{M} = vector magnetización

\vec{H} = vector intensidad magnética

Debido a que las unidades de los vectores magnetización e intensidad magnética son las mismas, χ_m es adimensional, y como en algunos casos los vectores pueden tener direcciones opuestas, χ_m tendrá también signo positivo o negativo según corresponda.

En la tabla 8.2 se muestran los valores de la susceptibilidad magnética para algunas sustancias diamagnéticas y paramagnéticas. En el caso de los materiales ferromagnéticos la susceptibilidad no puede definirse por medio de la expresión (8.45) y se requerirá un estudio más detallado, el cual será presentado en el siguiente subtema.

SUSCEPTIBILIDAD MAGNETICA DE ALGUNAS SUSTANCIAS A TEMPERATURA AMBIENTE (T = 20°C)			
Paramagnéticas		Diamagnéticas	
Sustancia	$\chi_m \times 10^{-6}$	Sustancia	$\chi_m \times 10^{-6}$
Aire (1atm)	0.4	Nitrógeno (1atm)	-0.005
Oxígeno (1atm)	1.9	Sodio	-2.4
Magnesio	12	Agua	-8.8
Calcio	14	Cobre	-9.6
Aluminio	22	Plomo	-17
Cromo	45	Carbón (Diamante)	-22
Tungsteno	68	Plata	-26
Titanio	71	Mercurio	-32
Platino	290	Oro	-36
Cerio	1300	Bismuto	-170

TABLA 8.2

De la ecuación (8.42) sabemos que

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad [T] \quad (8.46)$$

si sustituimos la ecuación (8.45) en la ecuación anterior y factorizamos \vec{H} obtenemos

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad [T] \quad (8.47)$$

De manera análoga al caso de los dieléctricos, podemos definir como permeabilidad μ del medio a

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right] \quad (8.48)$$

Y a la relación entre la permeabilidad del medio y la permeabilidad del vacío, le llamaremos permeabilidad relativa y la representaremos con la letra K_m , entonces

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m \quad (8.49)$$

En resumen, las relaciones entre los vectores que describen el comportamiento magnético de la materia son

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = K_m \mu_0 \vec{H} = (1 + \chi_m) \mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu}{\chi_m} \vec{M} = \frac{K_m \mu_0}{\chi_m} \vec{M} \quad (8.50)$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

8.5 COMPORTAMIENTO DE LOS MATERIALES FERROMAGNETICOS

En los materiales ferromagnéticos, la permeabilidad μ definida como $\mu = B/H$, no es constante y además, depende de los antecedentes magnéticos del material, es por ello que se requerirá un análisis más detallado de su comportamiento.

Se ha mencionado que en una muestra de material ferromagnético no magnetizado, existen dominios en los cuales las direcciones de los momentos magnéticos atómicos que los constituyen son paralelas. La dirección de cada dominio coincide con una de las llamadas direcciones de fácil magnetización, cuya existencia se explica si pensamos, por ejemplo, en el hierro puro, el cual cristaliza en unidades cúbicas centradas en el cuerpo, como se indica en la figura 8.17.

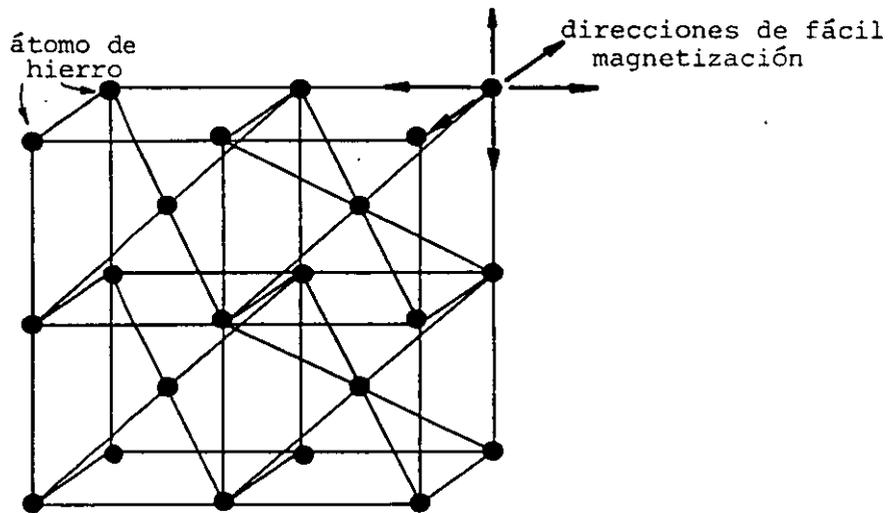


FIGURA 8.17. Cristal de hierro donde se indican las seis direcciones de fácil magnetización.

En un cristal de hierro existen seis direcciones de fácil magnetización y, como en una muestra dada no magnetizada estas direcciones son distintas de dominio a dominio, el campo magnético externo promedio es cero.

La razón de la formación de los dominios es que al incrementarse el número de éstos, se reduce la energía magnética almacenada en el campo externo. En la figura 8.18 se muestra esquemáticamente tal proceso.

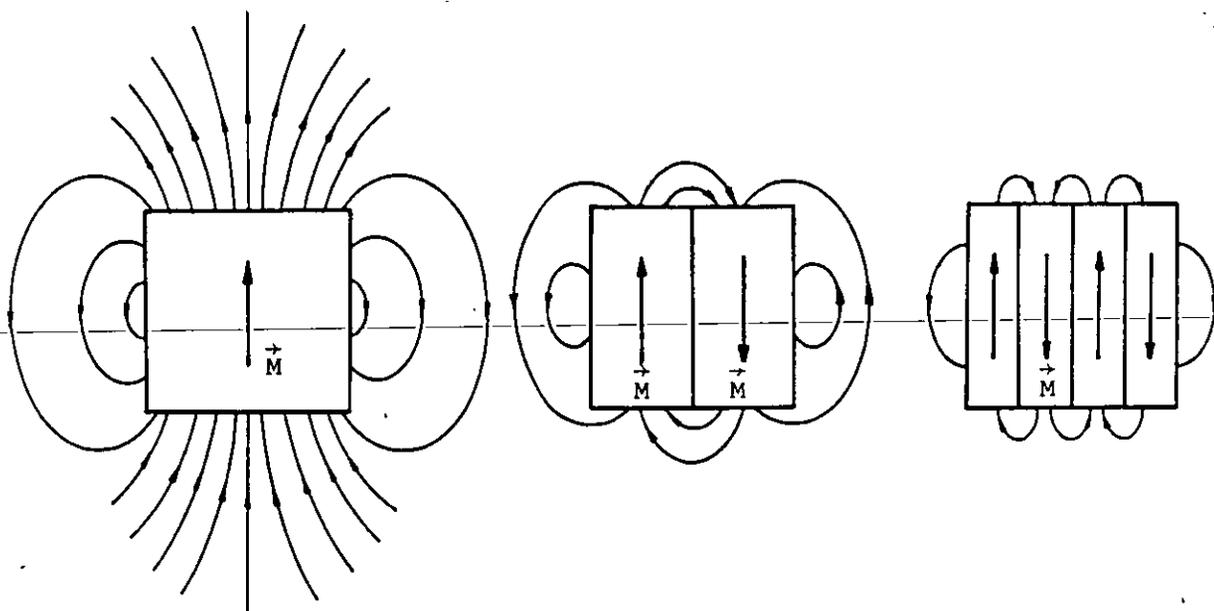


FIGURA 8.18. Esquema cualitativo del efecto del aumento de dominios en la reducción del campo magnético externo.

La formación de dominios cesa cuando la tendencia al alineamiento de los dipolos magnéticos atómicos, en las fronteras de los dominios, se equilibra con la tendencia a la formación de dominios más pequeños; determinándose así un tamaño promedio de éstos, característico para cada material.

Analizaremos ahora las consecuencias de los efectos anteriormente descritos, en la variación de la permeabilidad μ de los materiales ferromagnéticos.

Si se desean obtener las características de un material ferromagnético dado, se toma una muestra del mismo y se construye una gráfica de la magnitud de la inducción magnética B en el material, para diversos valores de la intensidad magnética H . De la gráfica así construida, se podrán obtener los valores de la permeabilidad que se desee, como el cociente B/H .

El procedimiento usual para la obtención de la información necesaria para dibujar la gráfica B contra H , es construir un pequeño núcleo toroidal sobre el cual se devanan dos bobinas, como se muestra en la figura 8.19.

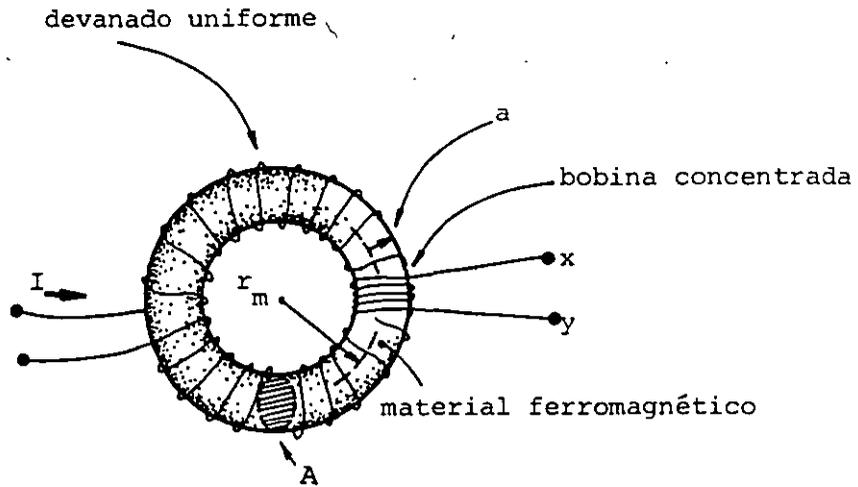


FIGURA 8.19. Dispositivo usado por Rowland para obtener las relaciones entre \vec{H} y \vec{B} .

Este método, conocido como *método del anillo de Rowland*, se basa en la ley de Faraday y aprovecha además el hecho de que para un devanado uniforme los campos son aproximadamente constantes en toda la sección transversal del toroide.

Por medio de la ley de Faraday es posible determinar las variaciones del flujo magnético ϕ_b , midiendo la diferencia de potencial inducida en las terminales x-y.

Para una variación conocida de I es posible determinar ϕ_b , y como B es aproximadamente constante en toda la sección, su valor se obtiene mediante la relación

$$B = \frac{\phi_b}{A}$$

La figura 8.20 muestra una curva típica obtenida con una muestra originalmente sin magnetización. A estas curvas se les llama *curvas iniciales de magnetización* o simplemente *curvas de magnetización*.

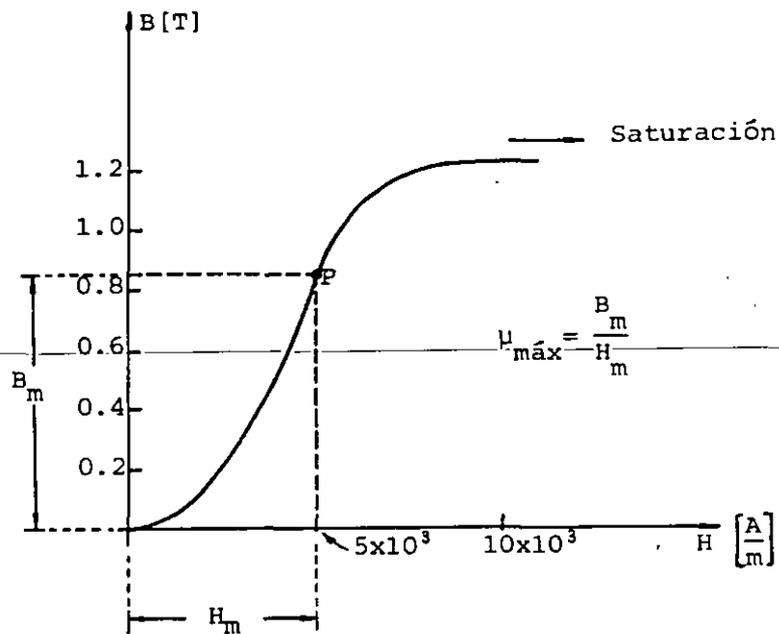


FIGURA 8.20. Curva de magnetización típica para un material ferromagnético.

La curva de magnetización de la figura 8.20 se inicia con un valor pequeño de μ ; este comportamiento tiene su origen en el crecimiento de los dominios orientados favorablemente, a expensas de los que poseen la orientación menos favorable. Cuando se incrementa H , se presenta además el efecto de orientación de dominios descrito en el subtema 8.2.

Generalmente las muestras son policristalinas, y en cada cristal, a pesar de su estructura regular, existen dominios. Es por ello que difícilmente la dirección del campo externo coincide con una de las direcciones de fácil magnetización, y la curva de magnetización decae porque es difícil orientar los momentos magnéticos atómicos en direcciones que no son las de fácil magnetización. La parte plana de la curva (saturación) se presenta cuando ya no se tienen momentos magnéticos atómicos de orientación diferente a la máxima posible.

Debemos notar en la curva de la figura (8.20), que existe un punto P para el cual el valor de la permeabilidad μ es máximo y

que existen dos parejas de valores de B y H para una μ dada. Las afirmaciones anteriores se pueden aclarar si construimos la gráfica de la permeabilidad μ contra la intensidad magnética H , el resultado es una curva semejante a la de la figura 8.21.

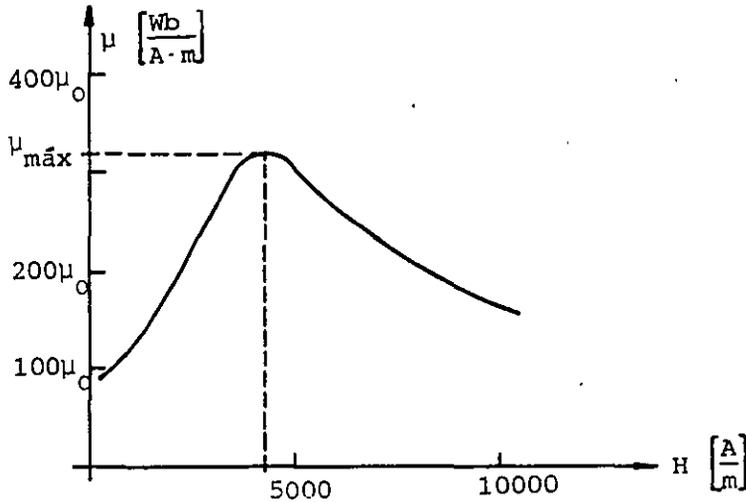


FIGURA 8.21. Curva de permeabilidad contra intensidad magnética H , para un material ferromagnético.

Si después de magnetizar una muestra de material se reduce lentamente el valor de H , se observará que B no decrece sobre la trayectoria inicial de magnetización, de tal forma que cuando H se reduce a cero prevalece un valor del campo inducción magnética B , llamado campo residual. Para reducir B a cero, es necesario aplicar un valor negativo de H . A este valor que desmagnetiza la muestra de material, se le denomina fuerza coercitiva.

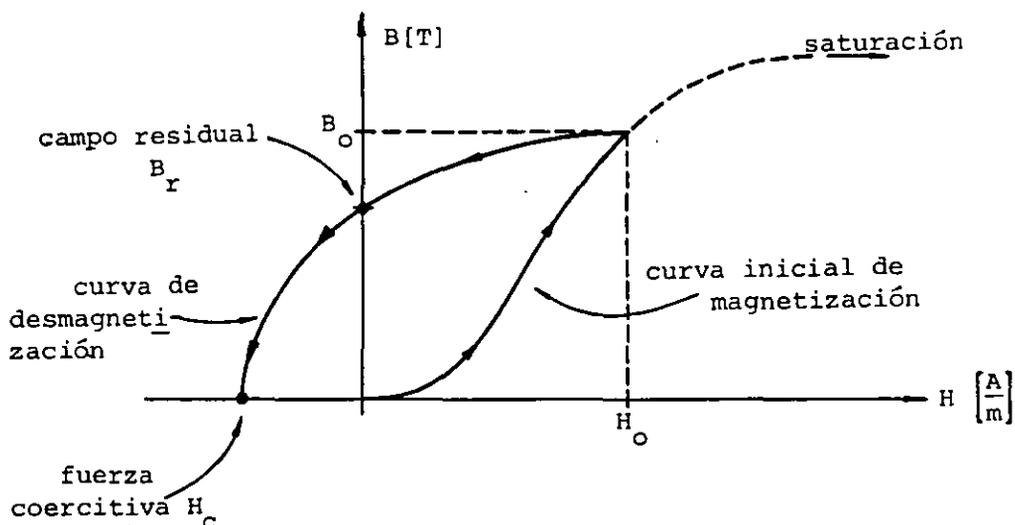


FIGURA 8.22. Campo residual y fuerza coercitiva para una muestra de material, obtenidas reduciendo B desde B_0 hasta 0.

En la figura 8.22 se muestra la trayectoria obtenida mediante el proceso mencionado. Cuando se parte de la región de saturación de la curva de magnetización, el valor del campo residual obtenido se denomina retentividad, y el valor de la fuerza coercitiva correspondiente se llama coercitividad.

Si continuamos aplicando un campo H negativo es posible magnetizar la muestra en sentido contrario hasta llegar a la saturación. Si a partir de ahí se reduce lentamente el valor del campo H , se obtendrá un campo residual inverso y para desmagnetizar la muestra se tendrá que aplicar un campo H positivo. Una vez desmagnetizada, es posible volver a magnetizar la muestra hasta la saturación. A la curva cerrada resultado de llevar la muestra de la saturación en un sentido, a la saturación en el sentido opuesto y regresar, se le conoce como ciclo principal de histéresis o ciclo de histéresis de saturación.

En la figura 8.23 se muestra un ciclo de histéresis y el ciclo de histéresis principal para una muestra de material ferromagnético.

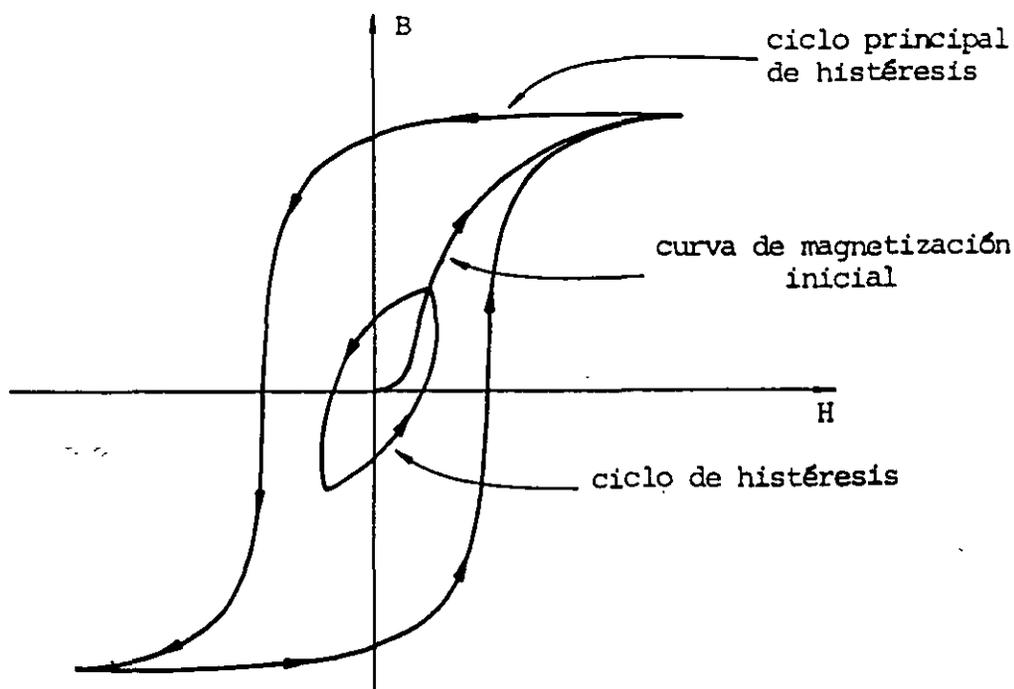


FIGURA 8.23. Ciclo principal de histéresis y un ciclo de histéresis cualquiera.

Según el tamaño del área encerrada por el ciclo principal de histéresis, podemos distinguir dos clases de materiales ferromagnéticos: los materiales fácilmente magnetizables o magnéticamente *suaves* se caracterizan porque dicho ciclo encierra un área pequeña, como se indica en la figura 8.24 (a). Y en contraste, los materiales ferromagnéticos de difícil magnetización o magnéticamente *duros*, poseen un ciclo que encierra un área grande como se muestra en la figura 8.24 (b).

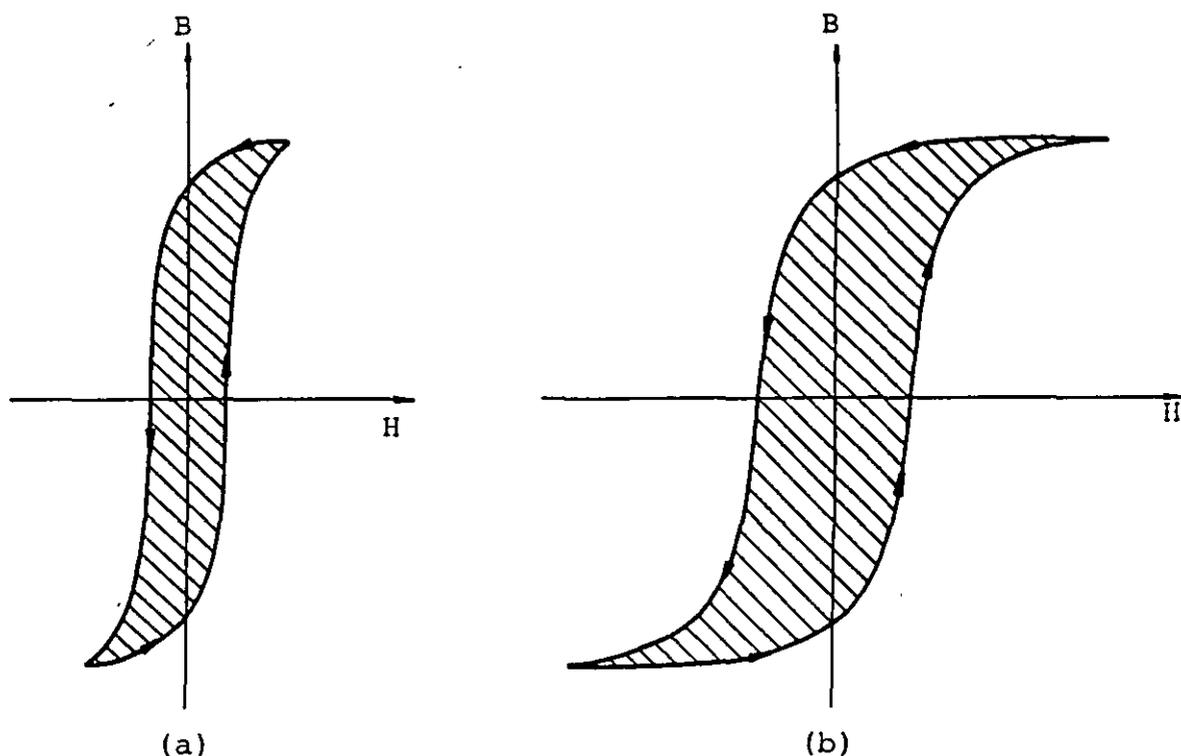


FIGURA 8.24. Ciclos principales de histéresis para materiales magnéticamente *suaves* (a) y magnéticamente *duros* (b).

Es posible demostrar que al llevar un material repetidamente a través de un ciclo de histéresis, el área encerrada por la curva representa la energía por unidad de volumen transformada en calor en los procesos de magnetización y desmagnetización.

En la tabla 8.3 se presentan valores característicos de las propiedades de algunos materiales ferromagnéticos *blandos* y *duros*.

PROPIEDADES DE ALGUNOS MATERIALES FERROMAGNETICOS

1. Materiales magnéticamente blandos o de baja coercitividad

Material	Composición aprox. en %	$\mu_0 M_{\text{máx}}$ [T]	Coercitividad [A/m]
Hierro purificado	99.95 Fe	2.15	3.98
Cobalto		1.76	950
Níquel		0.62	400
Sendust	85 Fe, 9.5 Si, 5.5 Al	1.0	4
Hierro-Silicio	97 Fe, 3 Si	2.0	12
Permendur	50 Fe, 50 Co	2.45	159
Mo-Permalloy 4-79	79 Ni, 16.4 Fe, 4 Mo, 0.6 Mn	0.85	4
Permalloy 78.5	78.5 Ni, 20.9 Fe, 0.6 Mn	1.07	3.9
Hipernik	50 Fe, 50 Ni	1.50	4.78
Mumetal	20 Fe, 74 Ni, 5 Cu, 1 Mn	0.85	4
Supermalloy	15.7 Fe, 79 Ni, 5 Mo, 0.3 Mn	0.80	0.15
Aleación de Heusler	61 Cu, 26 Mn, 13 Al	0.48	560

2. Materiales magnéticamente duros o de alta coercitividad

Material	Composición aprox. en %	Retentividad [T]	Coercitividad [A/m]
Acero al manganeso	98.1 Fe, 0.9 C, 1 Mn	1.0	4000
Acero al cobalto	64 Fe, 1 C, 35 Co	0.95	20700
Acero al cromo	96 Fe, 1 C, 3 Cr, 0.4 Mn	0.97	5200
Acero al tungsteno	93 Fe, 6 W, 1 C	1.0	6400
Remalloy	71 Fe, 17 Mo, 12 Co	1.05	19900
Alnico I	63 Fe, 12 Al, 20 Ni, 5 Co	1.05	35000
Alnico II	54.5Fe, 17Ni, 12.5Co, 10Al, 6Cu	0.72	43000
Alnico V	51 Fe, 24 Co, 14 Ni, 8 Al, 3 Cu	1.25	44000
Alnico VII	35 Fe, 35 Co, 18 Ni, 6 Al, 8 Ti	0.58	76000
Vectoline	30 Fe ₂ O ₃ , 44 Fe ₃ O ₄ , 26 Cu ₂ O ₃	0.16	71000
Platino-Cobalto	77 Pt, 23 Co	0.59	210000
Bismuturo de manganeso	100 Mn Bi	0.46	290000

TABLA 8.3

Antiguamente existía la creencia de que todos los materiales ferromagnéticos contenían hierro (de ahí su nombre). Posteriormente se descubrió el comportamiento ferromagnético de otros elementos puros y, si observamos con detalle la tabla anterior, notaremos que algunos compuestos ferromagnéticos no contienen elementos que sean ferromagnéticos, como son: la aleación Heusler y el bismuto de manganeso, los cuales están constituidos por elementos no ferromagnéticos. Es posible también encontrar aleaciones de materiales ferromagnéticos, cuyo resultado es un material no ferromagnético, como el caso de la aleación 75% Fe y 25% Ni. Estos resultados comprueban la influencia de la distancia interatómica en los compuestos, la cual puede o no, favorecer el alineamiento paralelo de los dipolos magnéticos atómicos.

8.6 CIRCUITOS MAGNETICOS

Existe un grupo particular de problemas que involucran materiales ferromagnéticos, muy común en ciertas áreas de la ingeniería, en los cuales es posible aplicar los procedimientos de análisis desarrollados para circuitos resistivos, haciendo analogías entre estos fenómenos y algunos que involucran materiales ferromagnéticos. Para justificar lo anterior, imaginemos un toroide con núcleo de aire y enrollamiento uniforme como el mostrado en la figura 8.25.

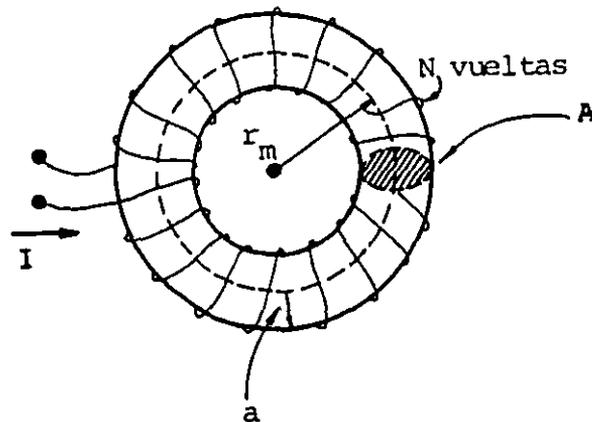


FIGURA 8.25. Toroide de sección circular de radio a y enrollamiento uniforme.

Cuando el radio medio r_m es mucho mayor que el radio a de la sección transversal ($r_m \geq 10 a$) es posible considerar que B es uniforme en el interior del toroide y, si obtenemos la circulación de \vec{H} a través de la trayectoria de radio r_m indicada en la figura 8.25, resulta

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H\ell = 2\pi r_m H \quad (8.51)$$

Por otro lado, de acuerdo con la ley de Ampere sabemos que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_e = N I \quad (8.52)$$

y de las relaciones (8.50), $H = \frac{B}{\mu_0}$, por lo que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{B}{\mu_0} \frac{A}{A} \ell \quad (8.53)$$

pero $BA = \phi_b$, dado que B es aproximadamente constante en toda la sección del toroide.

Finalmente obtenemos que para esta situación

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H\ell = \frac{\ell}{\mu_0 A} \phi_b = N I \quad (8.54)$$

Ya que la mayor parte del flujo ϕ_b está confinada al interior del toroide, aquel es análogo a una corriente que circula en un anillo conductor. También, sabemos que la resistencia de un conductor se puede obtener como

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} [\Omega] \quad (8.55)$$

Si comparamos la expresión anterior con el coeficiente de ϕ_b en la ecuación (8.54), notaremos que son semejantes. Es por ello que este tipo de fenómenos se pueden resolver con la analogía conocida como circuito magnético, considerando la existencia de una *resistencia magnética* llamada reluctancia y representada con la le

tra gótica R ; por lo que la reluctancia de este circuito magnético es

$$R = \frac{\ell}{\mu_0 A} \quad (8.56)$$

y

$$[R]_u = \left[\frac{m}{\frac{Wb}{A \cdot m} \cdot m^2} \right] = \left[\frac{A \cdot \text{vuelta}}{Wb} \right] = \left[\frac{1}{\text{henry}} \right] = \left[\frac{1}{H} \right]$$

Sólo resta hacer la analogía del campo eléctrico que produce la corriente eléctrica, con el campo intensidad magnética que produce el flujo.

A la integral $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ se le conoce como fuerza magnetomotriz y se representa con la letra gótica F , entonces

$$F = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad [A \cdot \text{vuelta}] \quad (8.57)$$

La ecuación (8.54) puede ser escrita como

$$F = R \phi_b \quad [A \cdot \text{vuelta}] \quad (8.58)$$

Después de lo analizado anteriormente, tenemos un procedimiento alternativo para calcular el flujo ϕ_b en el toroide descrito, que consiste en obtener la reluctancia R por medio de la ecuación (8.56), la fuerza magnetomotriz con la (8.57) y el flujo con la relación (8.58).

Supongamos ahora el mismo toroide, pero con una bobina concentrada, como se muestra en la figura 8.26.

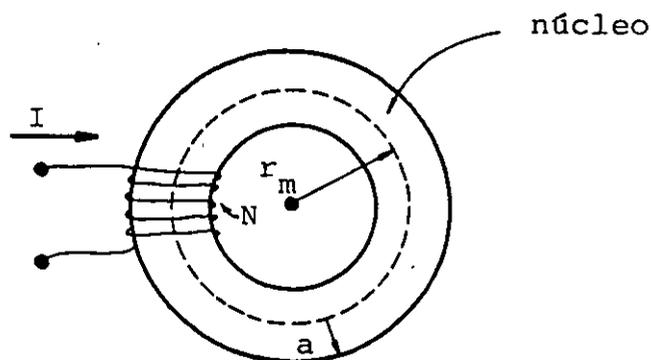


FIGURA 8.26. Toroide de sección circular y enrollamiento concentrado.

Si el núcleo se construye con un material cuya permeabilidad $\mu = \mu_0$, el campo \vec{B} no será constante en el material y no podrá procederse de la manera descrita. En el caso particular, en el que el núcleo es de un material ferromagnético, se cumple $\mu \gg \mu_0$ y el campo es aproximadamente constante; debido a que la magnetización provocada inicialmente en la zona de la bobina, se extiende a todo el núcleo.

Como resultado de esta magnetización, el flujo en el material es mucho mayor que el flujo que existe a través del aire y el procedimiento de análisis del circuito magnético puede ser aplicado tomando en cuenta, adicionalmente, que la reluctancia de una trayectoria de material ferromagnético no es constante, ya que depende de la permeabilidad. Es por ello que debemos conocer la curva de magnetización del material para obtener la permeabilidad μ , para un valor dado de la intensidad magnética \vec{H} . Además, en el toroide con núcleo ferromagnético, entre menor sea la relación entre el radio medio r_m y el radio a de la sección transversal del toroide, menor será el flujo que se dispersa a través del aire y por ende, mejor será la aproximación descrita.

En general, los circuitos magnéticos pueden no tener forma toroidal y frecuentemente poseen espacios de aire, llamados entrehierros, los cuales son imposibles de evitar debido al ensamblado de las piezas ferromagnéticas que los forman.

Con objeto de tener una idea de qué tan grande puede ser la permeabilidad de los materiales ferromagnéticos en relación con la del aire, en la tabla 8.4 se presentan valores de la permeabilidad relativa máxima de algunos materiales ferromagnéticos.

PERMEABILIDADES RELATIVAS MAXIMAS DE ALGUNOS MATERIALES FERROMAGNETICOS	
Material	Permeabilidad relativa máxima K_m
Cobalto	250
Níquel	600
Hierro (99.8 Fe)	5000
Hierro-silicio	7000
Mumetal	81000
Hipernik	90000
Permalloy 78.5	105000
Sendust	120000
Hierro (99.95 Fe)	200000
Supermalloy	1000000

TABLA 8.4

En las figuras 8.27 (a) y (b) se muestran las curvas de magnetización para algunos materiales ferromagnéticos comunes.

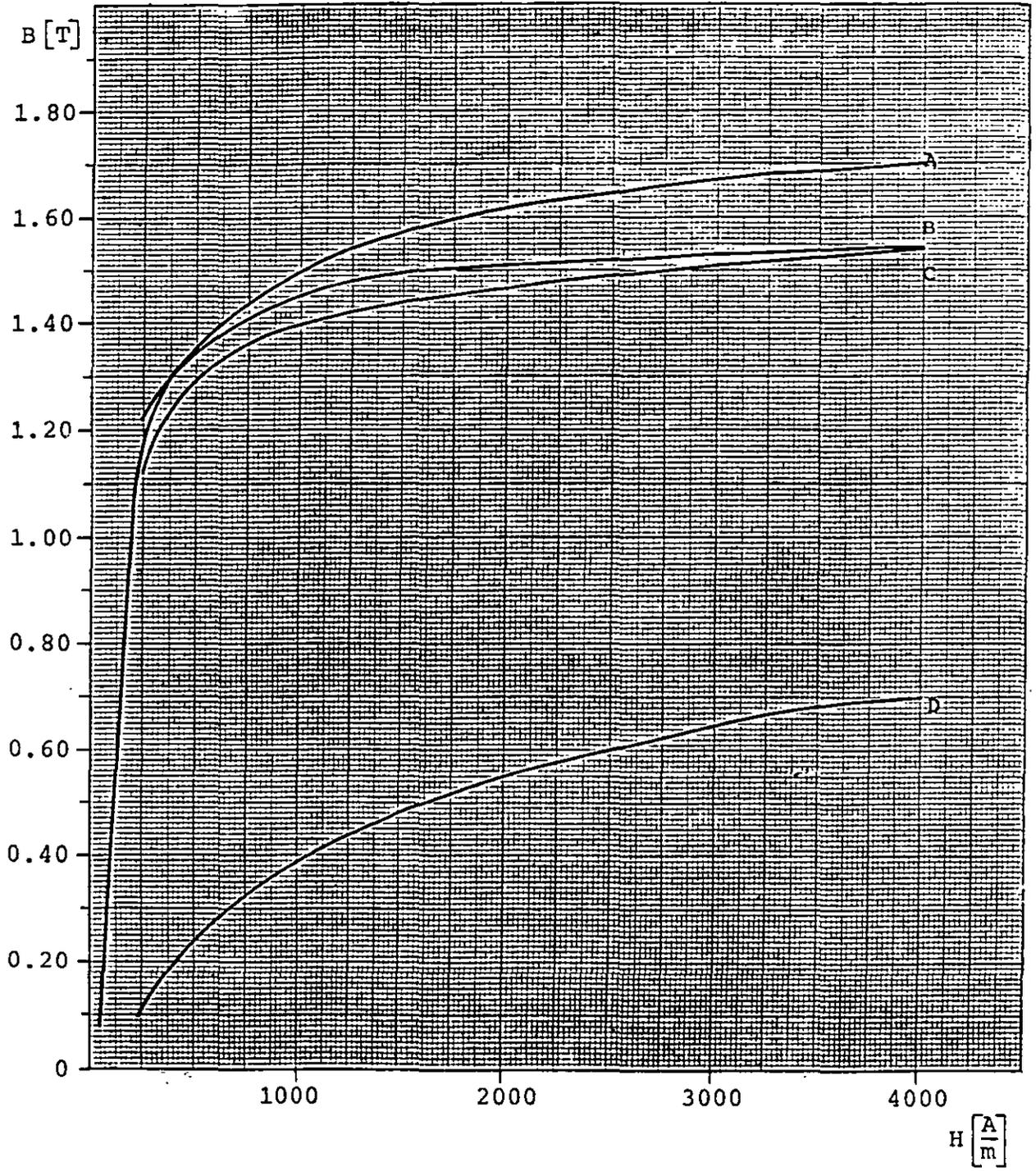


FIGURA 8.27(a). Curvas de magnetización para: hierro puro (A), aleación níquel-hierro (B), acero silicio (C) y el hierro colado (D) .

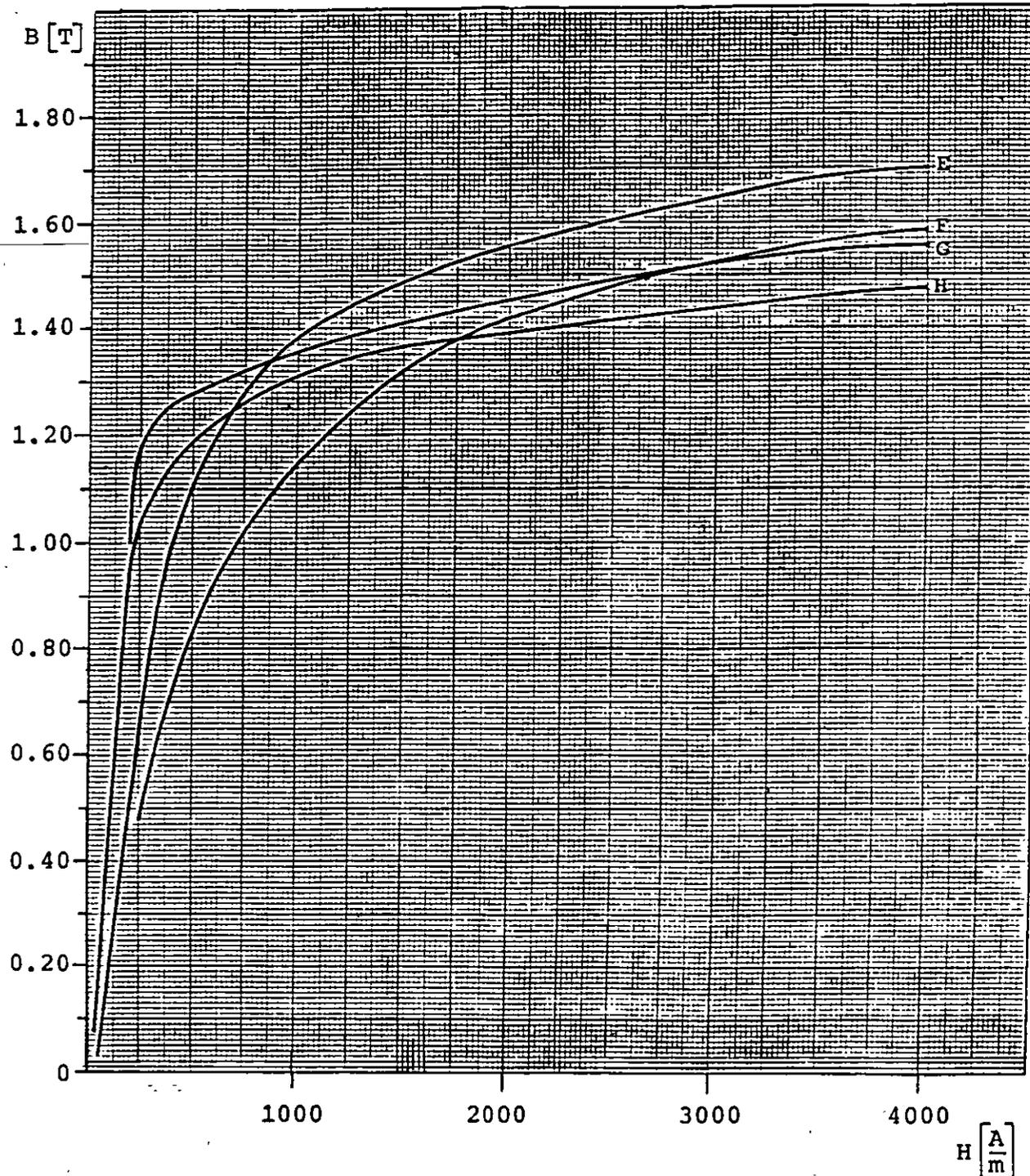


FIGURA 8.27(b). Curvas de magnetización para: acero laminado en frío (E), acero colado (F), acero eléctrico U.S.S. (G) y acero de transformador (H).

A continuación analizaremos con más detalle algunos circuitos magnéticos típicos.

a) Reluctancias en serie.

Consideremos el circuito magnético de la figura 8.28, construido con un núcleo macizo de material ferromagnético que posee un espacio de aire o entrehierro de espesor ℓ_a , en el cual se desea conocer el flujo magnético cuando se aplica una fuerza magnetomotriz F .

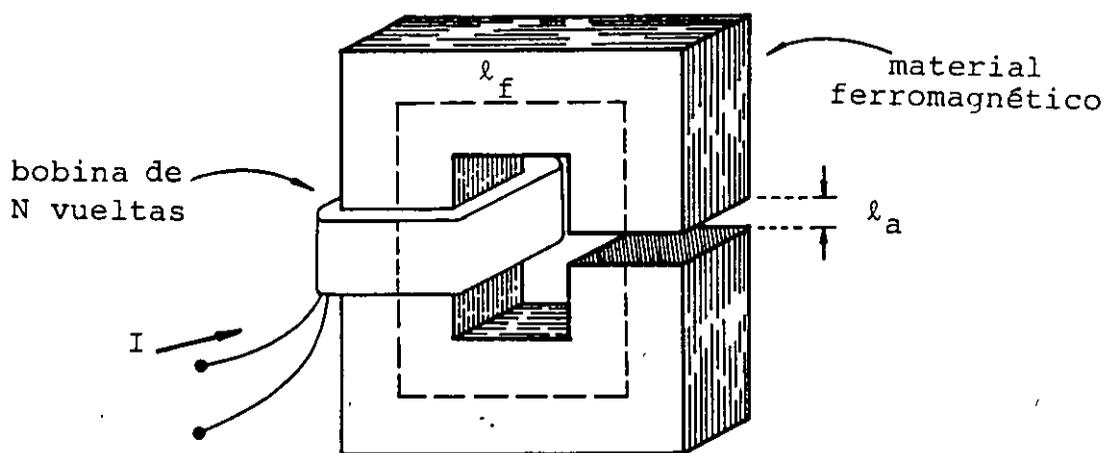


FIGURA 8.28. Circuito magnético con entrehierro de espesor ℓ_a .

De la expresión (8.57) sabemos que

$$F = N I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \quad [\text{A} \cdot \text{vuelta}]$$

Esta integral cerrada puede ser evaluada a través de la trayectoria media indicada, la cual consta de dos partes, una en el material ferromagnético y la otra en el entrehierro, entonces

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{H}_f \cdot d\vec{\ell}_f + \int \vec{H}_a \cdot d\vec{\ell}_a = \bar{H}_f \ell_f + H_a \ell_a \quad (8.59)$$

donde

H_f = intensidad magnética en el material ferromagnético

ℓ_f = longitud media a través del material ferromagnético

H_a = intensidad magnética en el aire

ℓ_a = espesor del entrehierro.

Combinando la expresión (8.57) con la (8.59) obtenemos que

$$N I = H_f \ell_f + H_a \ell_a \quad (8.60)$$

De las relaciones (8.50)

$$H_f = \frac{B_f}{\mu_f} \quad \text{y} \quad H_a = \frac{B_a}{\mu_a}$$

y al multiplicar por las longitudes medias del núcleo y del entrehierro, respectivamente

$$H_f \ell_f = \frac{B_f A_f \ell_f}{\mu_f A_f} = \frac{\ell_f}{\mu_f A_f} \phi_f$$

$$H_a \ell_a = \frac{B_a A_a \ell_a}{\mu_a A_a} = \frac{\ell_a}{\mu_a A_a} \phi_a$$

pero de la ecuación (8.56), tenemos

$$R_f = \frac{\ell_f}{\mu_f A_f} \quad \text{y} \quad R_a = \frac{\ell_a}{\mu_a A_a}$$

además

$$\phi_f = \phi_a = \phi$$

y la ecuación (8.60) puede expresarse como

$$N I = R_f \phi + R_a \phi = (R_f + R_a) \phi \quad (8.61)$$

Como resultado de este análisis hemos obtenido un circuito magnético con dos reluctancias en serie que puede resolverse mediante el circuito análogo de la figura 8.29.

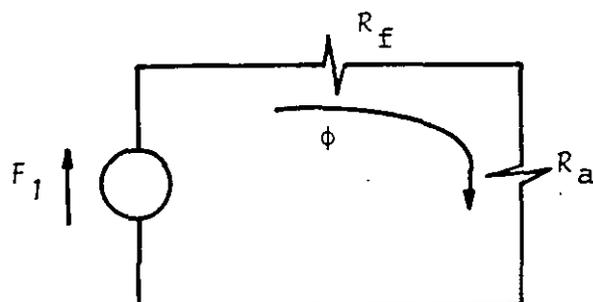


FIGURA 8.29. Circuito magnético equivalente al de la figura 8.28.

En algunos problemas prácticos puede ser importante la dispersión de flujo que se presenta en el entrehierro y que se muestra en la figura 8.30 (a).

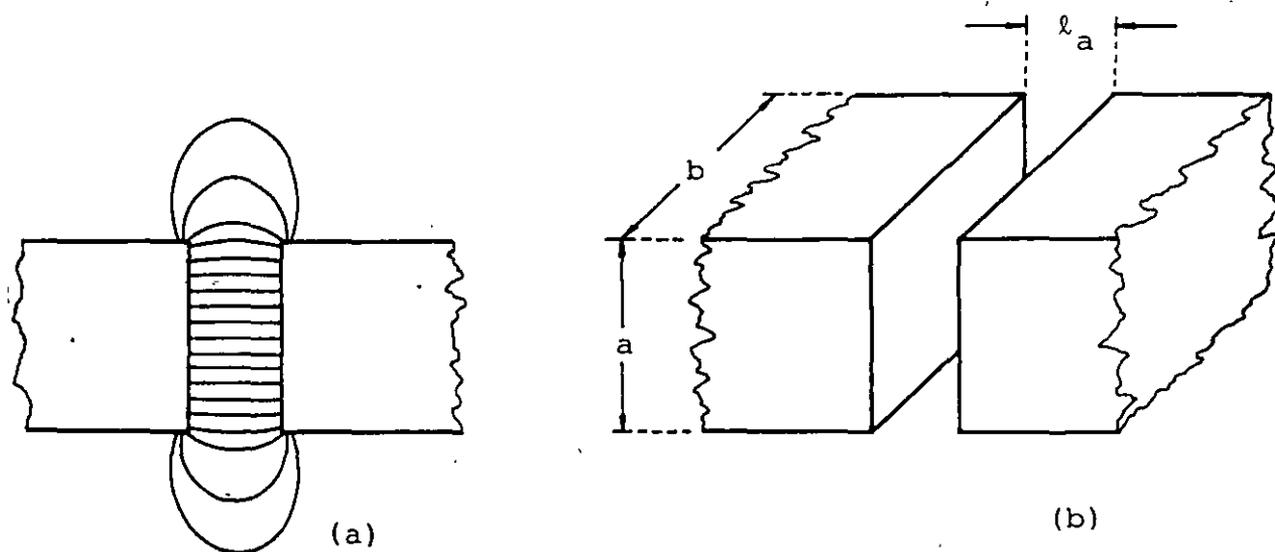


FIGURA 8.30. (a) Dispersión de flujo en un entrehierro. (b) Dimensiones de importancia en un entrehierro.

La dispersión de flujo puede evitarse si colocamos la bobina sobre el entrehierro. Si esto no es posible, su efecto puede ser tomado en cuenta aumentando un poco el valor del área para obtener la llamada área aparente.

El cálculo empírico de esta área se puede realizar, cuando las magnitudes a y b (ver figura 8.30 (b)) son mucho mayores que el espesor ℓ_a (10 veces mayores o más), agregando a cada una de las magnitudes a y b , el valor del espesor, es decir

$$\text{Area aparente} = A_{ap} = (a + \ell_a)(b + \ell_a) \quad [\text{m}^2] \quad (8.62)$$

La solución de los circuitos magnéticos es un poco más compleja que la de los circuitos resistivos equivalentes, debido a que la reluctancia de los materiales ferromagnéticos no es constante y se tendrá que usar la información de las curvas de magnetización, adicionalmente a las ecuaciones del circuito.

La relación (8.60) puede ser escrita como

$$F = N I = H_f \ell_f + R_a \phi \quad (8.63)$$

Como los datos fueron F y las dimensiones del núcleo, desconocemos H_f y ϕ .

Además sabemos también que

$$\phi = B_a A_a = B_f A_f \quad [\text{Wb}] \quad (8.64)$$

de donde

$$B_f = B_a \frac{A_a}{A_f} = \frac{\phi}{A_f} \quad [\text{T}] \quad (8.65)$$

Y de la curva de magnetización, se obtendrá la relación B_f contra H_f . Uno de los procedimientos de solución posibles, es suponer un valor para el flujo ϕ , evaluar B_f mediante la relación (8.65), obtener con el valor de B_f y la curva de magnetización el valor de H_f y verificar la estimación con la ecuación

(8.63). Si no se satisface se repite el procedimiento hasta llegar a los valores de ϕ y H_f que satisfagan simultáneamente la curva de magnetización y la ecuación (8.63).

Un procedimiento gráfico alternativo, se obtiene si de la ecuación (8.63) despejamos H_f y la ecuación que resulta es

$$H_f = \frac{F}{l_f} - \frac{R_a}{l_f} \phi \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad (8.66)$$

Con las ecuaciones (8.65) y (8.66) se obtienen los puntos necesarios, sobre la gráfica B_f contra H_f , para construir la curva (en este caso recta ya que $\mu_a = \mu_o = \text{cte}$) cuya intersección con la curva de magnetización del material dará la solución del circuito magnético.

EJEMPLO 8.1

Suponga el circuito magnético de la figura 8.31, construido con dos materiales ferromagnéticos distintos, uno de ellos es una aleación níquel-hierro y el otro es acero-silicio, los cuales se colocan como se indica en la misma figura. Con ayuda de las gráficas B-H de la figura 8.27, obtenga el valor del flujo, la magnitud de la densidad de flujo magnético B y la magnitud de la intensidad magnética H en cada material; si la fuerza magnetomotriz aplicada es

$$F = N I = 42 \text{ A} \cdot \text{vuelta}$$

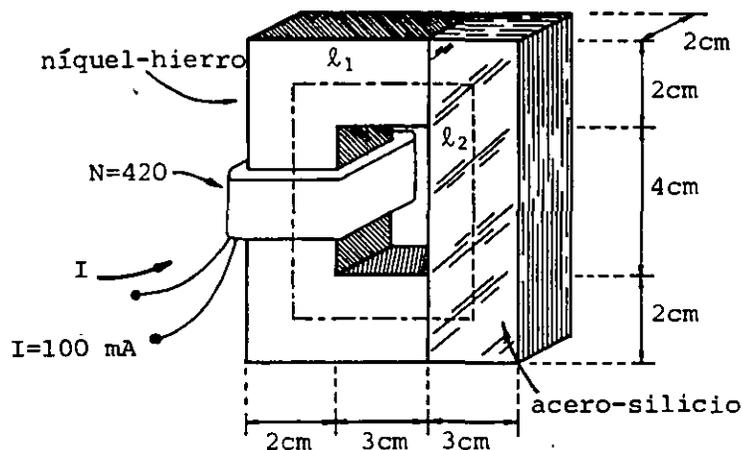


FIGURA 8.31. Circuito magnético formado por dos materiales ferromagnéticos.

SOLUCION

De la figura 8.31 obtenemos que

$$F = 42 \text{ A}\cdot\text{vuelta}, \quad \ell_1 = 14 \text{ cm}, \quad \ell_2 = 9 \text{ cm}$$

$$A_1 = 4 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_2 = 6 \text{ cm}^2$$

Según las ecuaciones (8.65) y (8.60) tenemos que

$$B_1 = B_2 \frac{A_2}{A_1} = 1.5 B_2 \quad [T] \quad (A)$$

$$H_1 = \frac{F}{\ell_1} - H_2 \frac{\ell_2}{\ell_1} = 300 - 0.643 H_2 \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad (B)$$

Aplicaremos el método gráfico propuesto, encontrando los puntos, en la curva de magnetización $B_1 - H_1$, que satisfacen las restricciones dadas por las expresiones A y B. Con objeto de facilitar el proceso, antes de construir la gráfica llenaremos la tabla 8.5 como sigue:

1. Suponemos un valor para B_2
2. Con el valor supuesto en 1 y la curva $B_2 - H_2$ se obtiene H_2
3. Con los valores de B_2 y H_2 y las restricciones A y B, se determina un punto sobre la gráfica $B_1 - H_1$
4. Se repite el procedimiento hasta obtener los puntos necesarios para trazar la curva que representa a las restricciones A y B.
5. El punto de intersección encontrado determina los valores de B_1 y H_1 .
6. Con los valores obtenidos en el paso anterior se evalúan B_2 y ϕ .

PUNTO	B_2 [T]	H_2 [$\frac{A}{m}$]	B_1 [T]	H_1 [$\frac{A}{m}$]
1	0.4	61	0.6	260.8
2	0.6	79	0.9	249.2
3	0.8	110	1.2	229.3
4	0.9	133	1.35	214.5
5	0.81	112	1.21	228

TABLA 8.5

En la figura 8.32 se presentan nuevamente las curvas de magnetización de los materiales involucrados, con objeto de facilitar la obtención de los valores necesarios para llenar la tabla 8.5.

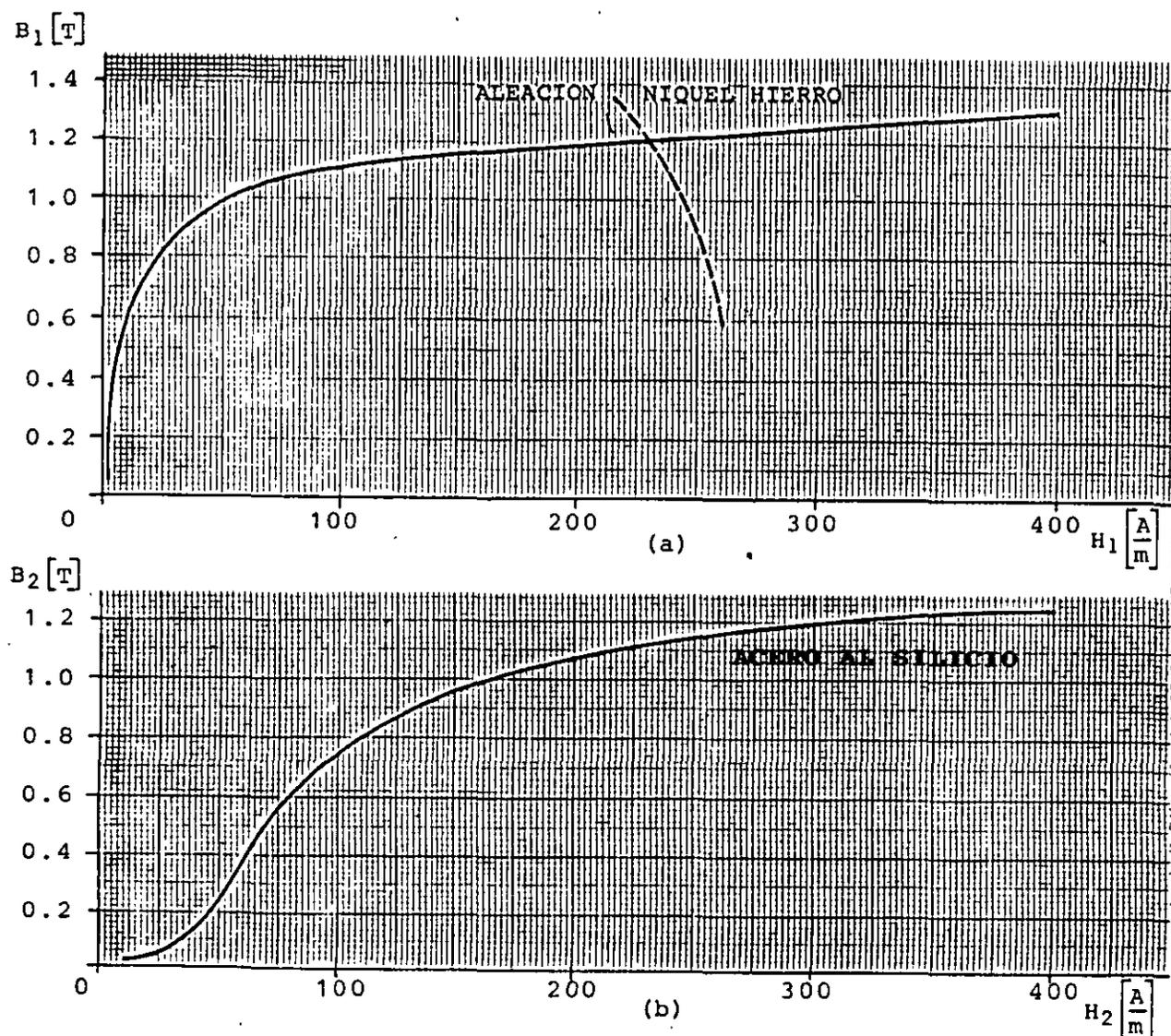


FIGURA 8.32. Curvas de magnetización (a) Níquel-hierro y (b) Acero-silicio.

Se observa en la figura 8.32 (a) que la solución del circuito, es decir, la intersección de las curvas, se encuentra aproximadamente en el punto $B_1 \approx 1.21 \text{ T}$ y $H_1 \approx 228 \frac{\text{A}}{\text{m}}$; por lo cual $B_2 = 0.81 \text{ T}$, $H_2 \approx 112 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ y $\phi_1 = A_1 B_1 = A_2 B_2 = 0.48 \text{ mWb}$.

b) Reluctancias en paralelo

Consideremos ahora el circuito magnético de la figura 8.33 (a) construido con un solo material ferromagnético y una fuente de fuerza magnetomotriz $F = N I$ [A·vuelta].

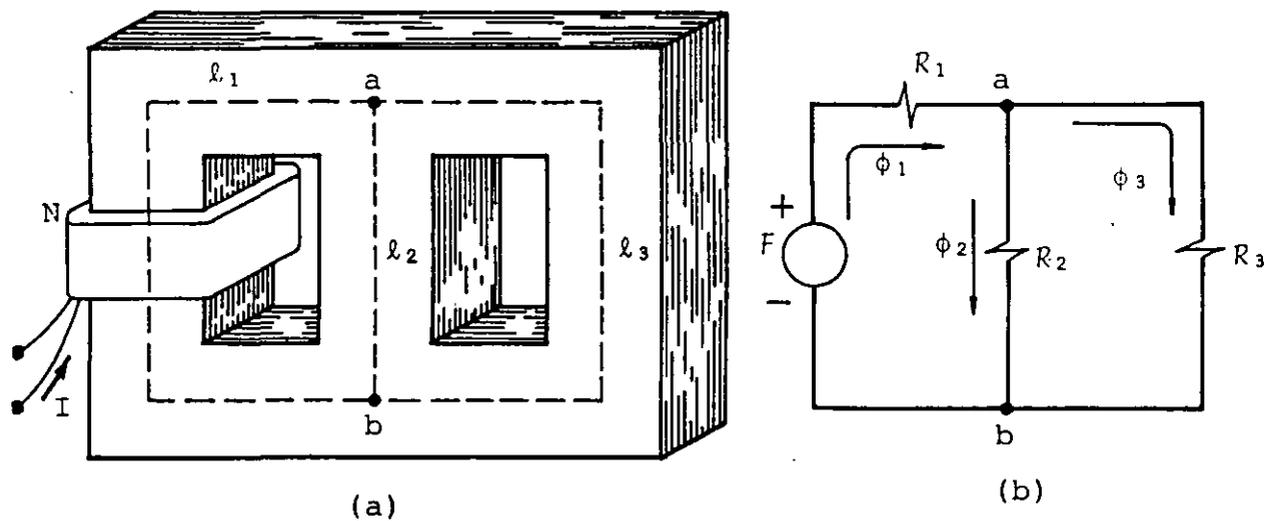


FIGURA 8.33. (a) Circuito magnético con reluctancias en paralelo; (b) representación equivalente al circuito magnético de la figura (a).

Con base en el circuito magnético equivalente de la figura 8.33 (b), se obtiene la ecuación siguiente

$$F - R_1 \phi_1 = R_2 \phi_2 = R_3 \phi_3 \quad (8.67)$$

La ecuación anterior puede ser expresada como

$$F - H_1 l_1 = H_2 l_2 = H_3 l_3 \quad (8.68)$$

y del mismo circuito obtenemos que

$$\phi_1 = \phi_1 + \phi_3 \quad (8.69)$$

Estas ecuaciones y la información obtenida de la curva de magnetización del material, permiten obtener la solución del circuito ya sea numérica o gráficamente.

Compruebe que para el circuito magnético de la figura 8.34, se obtiene que

$\phi_1 \approx 0.118 \text{ mWb}$	$\phi_2 \approx 0.119 \text{ mWb}$	$\phi_3 \approx 0.078 \text{ mWb}$
$B_1 \approx 0.295 \text{ T}$	$B_2 \approx 0.497 \text{ T}$	$B_3 \approx 0.195 \text{ T}$
$H_1 \approx 650 \frac{\text{A}}{\text{m}}$	$H_2 \approx 1600 \frac{\text{A}}{\text{m}}$	$H_3 \approx 400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$
$\mu_1 \approx 4538 \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}$	$\mu_2 \approx 306 \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}$	$\mu_3 \approx 4875 \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}$

Utilice la curva de magnetización del hierro colado dada en la figura 8.27.

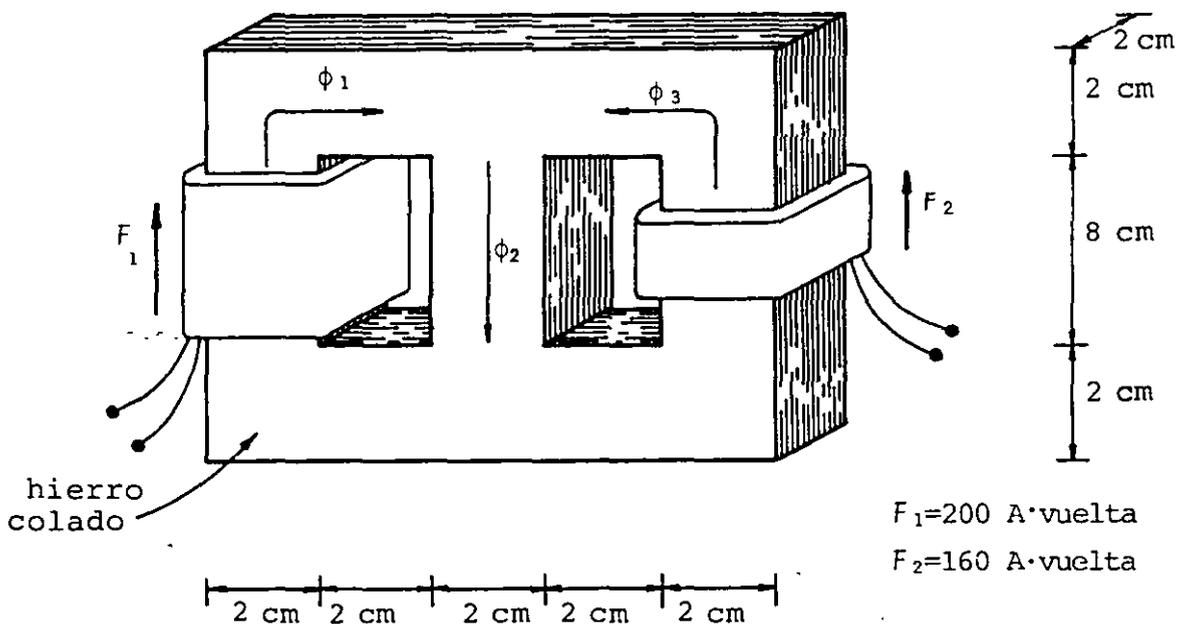


FIGURA 8.34. Circuito magnético con reluctancias en paralelo y dos fuentes de fuerza magnetomotriz.

8.7 APLICACIONES DEL CIRCUITO MAGNETICO

Presentaremos a continuación algunas aplicaciones del concepto de circuito magnético en fenómenos muy comunes en electromagnetismo.

a) Fuerza entre polos magnéticos.

Consideremos el caso de un circuito magnético con un entrehierro como se muestra en la figura 8.35.

Como resultado de la fuerza magnetomotriz aplicada, se produce un campo magnético que a su vez provoca una fuerza que tiende a cerrar el entrehierro debido a la formación de polos opuestos en las caras que se encuentran frente a frente en el entrehierro.

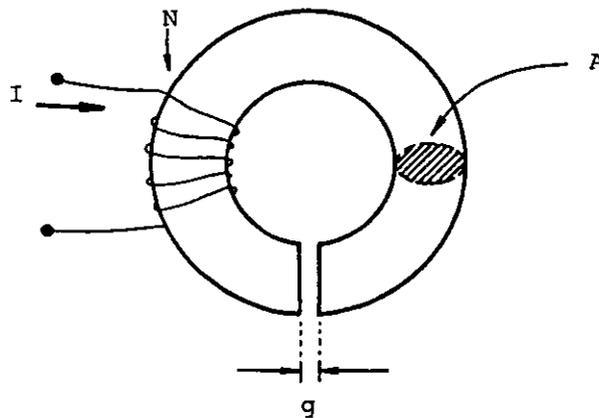


FIGURA 8.35. Circuito magnético con un entrehierro de espesor g y área de sección transversal A .

Debido a la gran aplicación de la fuerza entre polos en diversos dispositivos electromecánicos, analizaremos el procedimiento para su obtención.

Sabemos que la energía magnética por unidad de volumen o densidad de energía almacenada, en una región donde existe campo magnético, se obtiene como

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \left[\frac{J}{m^3} \right]$$

Si el espesor g del entrehierro es pequeño en comparación con las dimensiones (radio o lados) de la superficie A de las caras polares, es posible considerar el campo magnético uniforme en dicho entrehierro, por lo que la energía magnética almacenada es

$$U_m = u_m \text{Vol} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (Ag)$$

Supondremos para nuestro análisis, que el circuito magnético toroidal de la figura 8.35 es perfectamente flexible, con objeto de poder evaluar el trabajo necesario para abrir o cerrar el entrehierro. Si aumentamos el espesor de éste una cantidad Δg y al mismo tiempo aumentamos la corriente una cantidad ΔI , con objeto de mantener constante el campo, la energía almacenada aumentará en un ΔU_m dado por

$$\Delta U_m = \frac{B^2 A}{2\mu_0} \Delta g \quad (8.70)$$

y el trabajo realizado fue

$$W_m = F \Delta g \quad (8.71)$$

donde F es la fuerza necesaria para separar a los polos una distancia Δg .

Al desprestigiar las pérdidas es posible igualar las dos últimas ecuaciones y resulta

$$F \Delta g = \frac{B^2 A}{2\mu_0} \Delta g \quad (8.72)$$

De la última expresión obtenemos que

$$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} \quad [N] \quad (8.73)$$

EJEMPLO 8.2

Un electromagneto tipo émbolo se construye con hierro colado y una bobina de 1000 vueltas, como se indica en la figura 8.36. Se desea obtener la fuerza que actúa sobre el émbolo, cuando el espesor del entrehierro g es de 3 mm y la corriente en la bobina es 2 A .

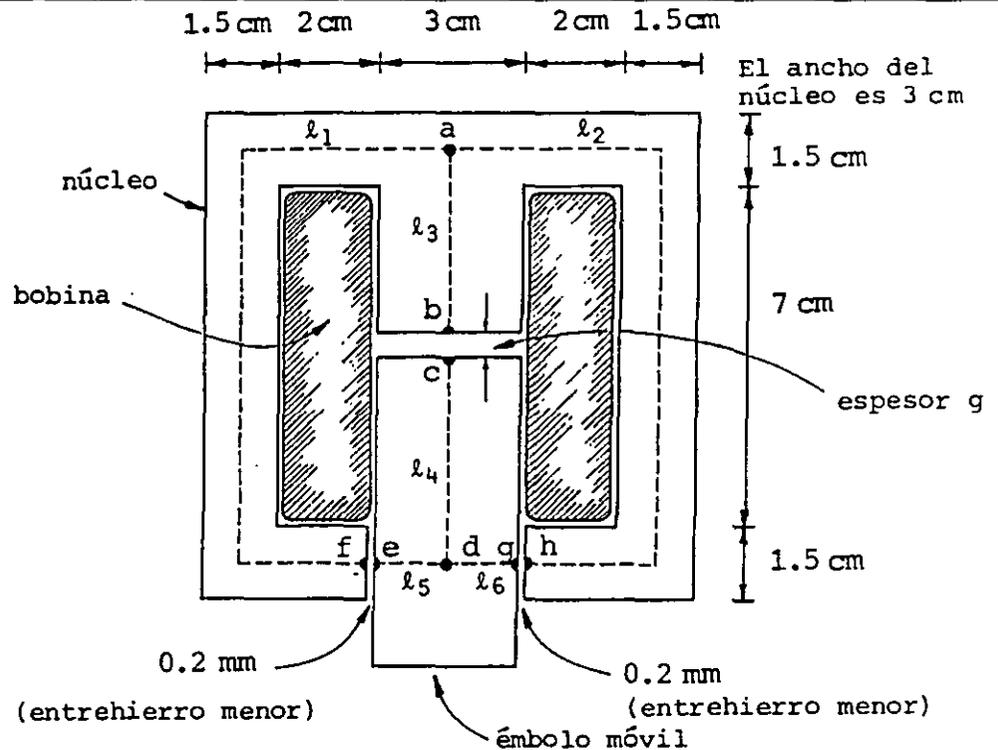


FIGURA 8.36. Corte longitudinal de un electromagneto tipo émbolo donde se observa la colocación del embobinado, el cual cubre el entrehierro.

SOLUCION

Calcularemos primero las reluctancias de los entrehierros menores R_m , despreciando el flujo disperso, ya que su espesor es muy pequeño y además son iguales, por lo que

$$R_{m1,2} = R_m = \frac{l_m}{\mu_o A_m} = \frac{0.2 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} (4.5 \times 10^{-4})} = 354 \times 10^3 \text{ [H}^{-1}\text{]}$$

La reluctancia del entrehierro principal será

$$R_g = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} = \frac{3 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} (9 \times 10^{-4})} = 2\,653 \times 10^3 \quad [\text{H}^{-1}]$$

El circuito magnético equivalente es el mostrado en la figura 8.37 (a), pero dado que las reluctancias de las trayectorias a través del hierro son muy pequeñas, en comparación con las de los entrehierros, es una práctica común despreciarlas y aproximar el circuito por medio del mostrado en la figura 8.37 (b).

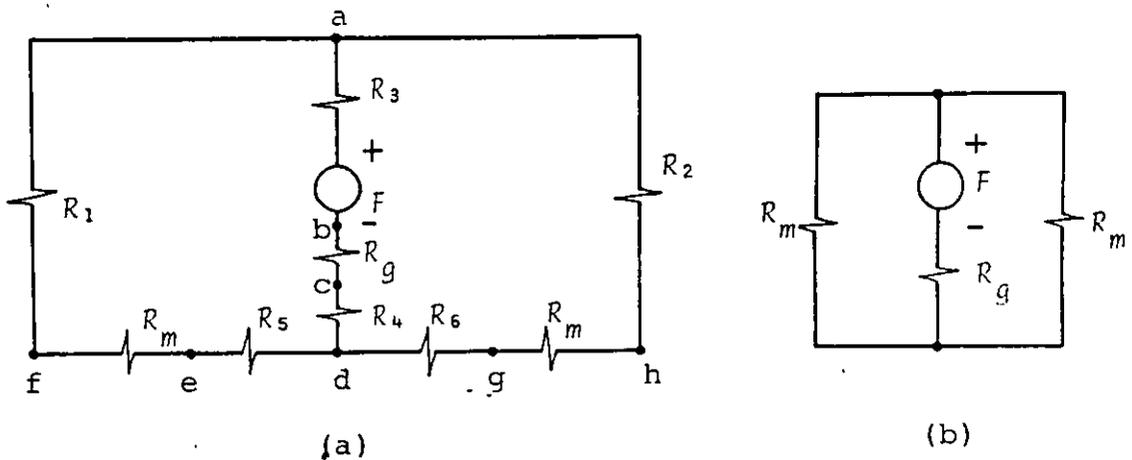


FIGURA 8.37. (a) Circuito magnético equivalente al de la figura 8.36. (b) Circuito magnético reducido al despreciar las reluctancias del núcleo frente a las de los entrehierros.

Con base en el circuito de la figura 8.37 (b), obtenemos que

$$F = N I = 1000(2) = 2000 \text{ A}$$

$$R_{eq} = R_g + R_m \parallel R_m = \left[2653 \times 10^3 + \frac{1}{2} (354 \times 10^3) \right] \text{H}^{-1}$$

$$R_{eq} = 2830 \times 10^3 \text{ H}^{-1}$$

$$\phi = \frac{F}{R_{eq}} = \frac{2000}{2830 \times 10^3} = 0.707 \text{ mWb}$$

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{0.707 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{-4}} = 0.79 \text{ T}$$

De la expresión de fuerza obtenida, (8.73), tenemos que

$$F = \frac{B^2 A}{2\mu_0} = \frac{(0.79)^2 (9 \times 10^{-4})}{2(4\pi \times 10^{-7})} = 220.8 \text{ N}$$

b) Cálculo de inductancia en presencia de materiales ferromagnéticos.

Debido a que la permeabilidad de un material ferromagnético no es constante, la inductancia de una bobina o solenoide con núcleo ferromagnético variará con la corriente aplicada.

Analizaremos primero el caso de un inductor con núcleo ferromagnético, como el de la figura 8.38, al que se le aplica una señal de corriente senoidal de tipo $i = I_m \sin \omega t$.

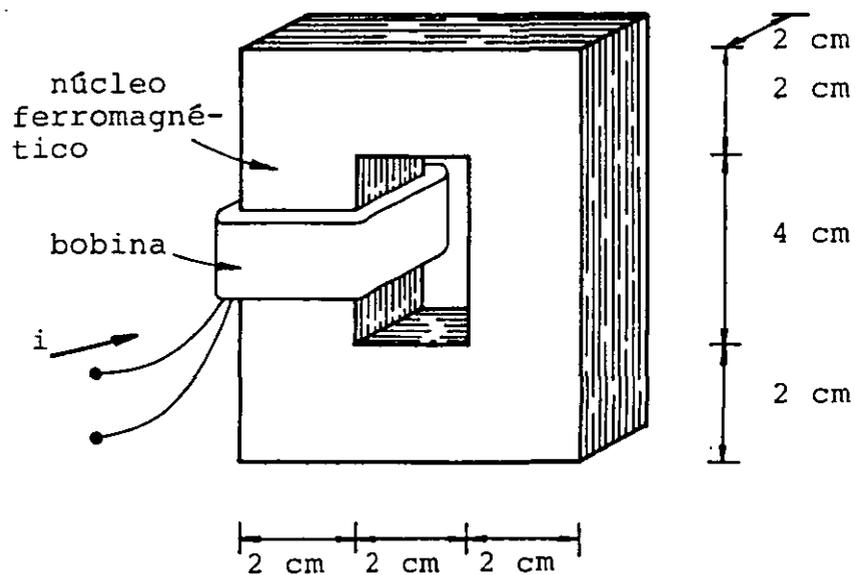


FIGURA 8.38. Inductor con núcleo ferromagnético.

Del capítulo anterior sabemos que la definición general de inductancia propia es

$$L = \frac{d\lambda}{di} \quad [\text{H}]$$

Ya que se forma un circuito ferromagnético, es posible despreciar el flujo disperso y la ecuación anterior puede escribirse como

$$L = N \frac{d\phi}{di} [H] \quad (8.74)$$

también se cumple que

$$d\phi = A dB \quad \text{y} \quad N di = \ell dH$$

Por lo que la expresión de inductancia propia queda

$$L = \frac{N^2 A}{\ell} \frac{dB}{dH} [H] \quad (8.75)$$

La aplicación de una corriente senoidal al inductor, llevará el material a través de un ciclo de histéresis como el mostrado en la figura 8.39 y éste se repetirá durante cada ciclo de la corriente.

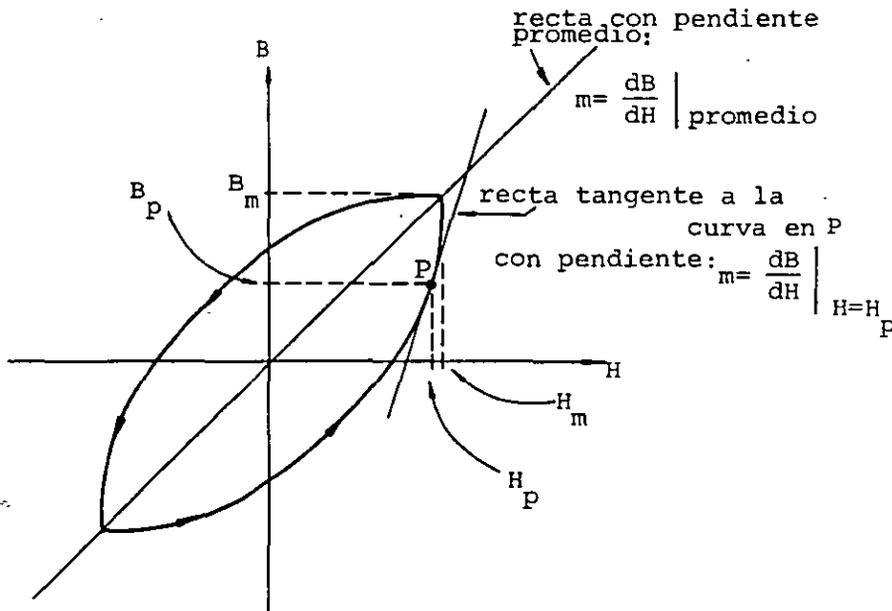


FIGURA 8.39. Ciclo de histéresis producido en el núcleo ferromagnético del inductor, cuando se le aplica una corriente senoidal.

Para un punto P cualquiera, dB/dH representa la pendiente de la recta tangente a la curva de histéresis en ese punto, como se indica en la figura 8.39.

También se puede observar que la derivada dB/dH , evaluada en el punto P , es muy distinta a la pendiente de la línea que va del origen al punto P y que representa la permeabilidad del material en dicho punto, es decir

$$\mu = \frac{B_P}{H_P} \neq \left. \frac{dB}{dH} \right|_{H=H_P} \left[\frac{Wb}{A \cdot m} \right] \quad (8.76)$$

Para poder calcular con la expresión (8.75) un valor de inductancia, se obtiene el valor promedio de dB/dH , el cual, permitirá obtener un valor promedio de la inductancia.

Por tener dB/dH unidades de permeabilidad, se le conoce como permeabilidad diferencial y en este caso su promedio puede ser obtenido fácilmente con la pendiente de la línea que une el origen con el punto de máximo valor de campo en el ciclo, como se indica en la figura 8.39, por lo que

$$\mu_p = \left. \frac{dB}{dH} \right|_{\text{promedio}} = \frac{B_m}{H_m} \text{ para el ciclo de interés} \quad (8.77)$$

Y la inductancia promedio L_p será

$$L_p = \frac{N^2 A}{\ell} \mu_p \quad [H] \quad (8.78)$$

Utilizando la información de la curva de magnetización del acero colado; un núcleo como el de la figura 8.38 y una bobina de $N = 800$ vueltas, compruebe que la inductancia promedio es: $L_p = 909$ mH si $I = 0.5 \text{ sen } 120 \pi t$ y el núcleo originalmente no posee magnetización.

Otro caso frecuente es el de un inductor al cual se le aplica una corriente directa formada por un término continuo I_0 y un térmi

no de alterna $i_a = I_m \text{ sen } \omega t$ donde $I_o \gg I_m$ como se indica en la figura 8.40.

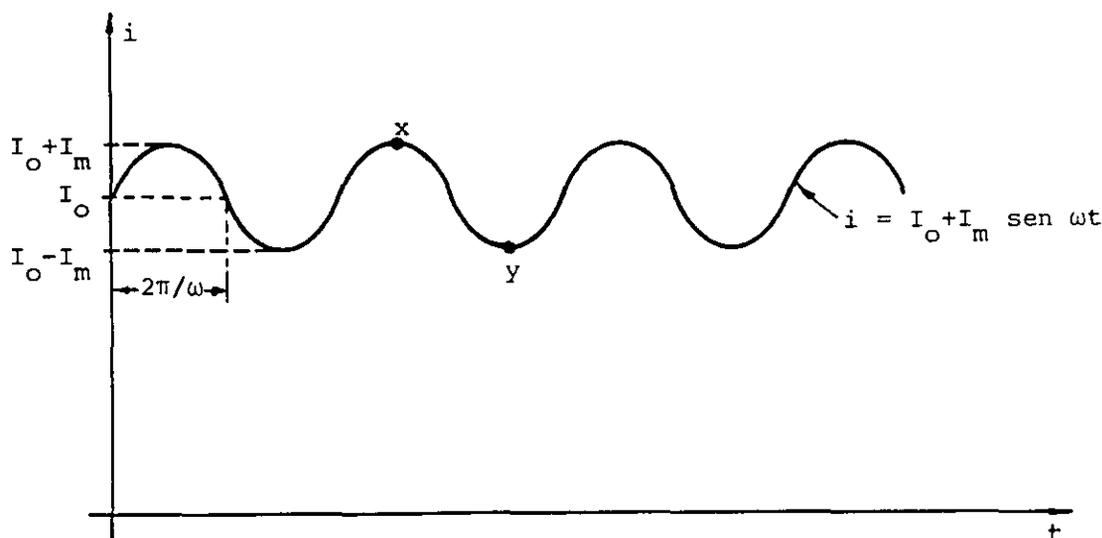


FIGURA 8.40. Corriente directa $i = I_o + I_m \text{ sen } \omega t$.

Si consideramos el material originalmente desmagnetizado, la aplicación de la corriente continua I_o llevará al material sobre la curva de magnetización hasta un valor $H_o = \frac{NI_o}{l}$ y la aplicación de la señal senoidal hará que el material siga un ciclo menor de histéresis como se indica en la figura 8.41.

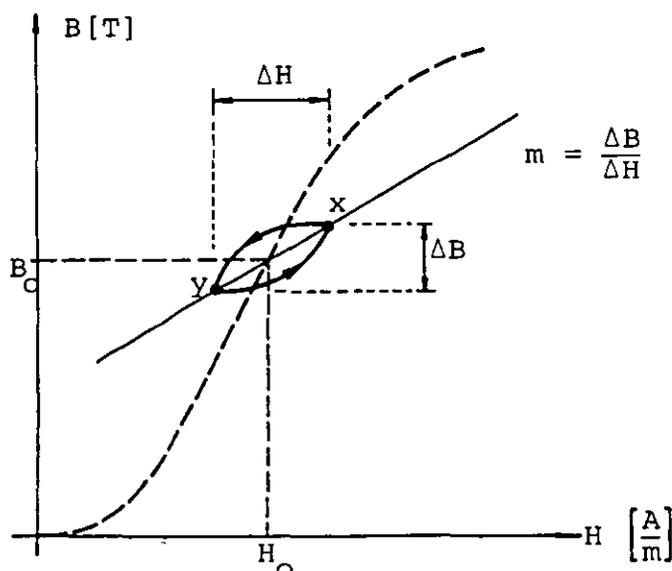


FIGURA 8.41. Curva de histéresis en un material ferromagnético, producido por una corriente directa como la de la figura 8.40.

Notar otra vez, que el valor de la permeabilidad en el punto (H_0, B_0) es diferente a la permeabilidad promedio, ésta última en este caso, se calcula con la pendiente de la recta que une a los puntos extremos de la curva, señalados como x y y en la figura 8.41, entonces

$$\left. \frac{dB}{dH} \right|_{\text{promedio}} = \frac{\Delta B}{\Delta H} \quad (8.79)$$

Debido a la forma en que se obtiene esta permeabilidad, se le conoce como permeabilidad incremental, por lo que cuando la bobina de la figura 8.38 se excita con una corriente directa del tipo descrito, será necesario obtener una permeabilidad incremental μ_i como

$$\mu_i = \frac{\Delta B}{\Delta H} \text{ para el ciclo menor de histéresis de interés} \quad (8.80)$$

y la ecuación (8.75) puede expresarse como

$$L_i = \frac{N^2 A}{l} \mu_i \quad [H] \quad (8.81)$$

En un caso más general, en el cual los circuitos magnéticos sean más complejos, se deberá obtener la reluctancia equivalente del circuito y las expresiones de inductancia propia y mutua serían

$$L = \frac{N^2}{R} \quad [H] \quad (8.82)$$

$$M = \frac{N_1 N_2}{R} \quad [H] \quad (8.83)$$

Para obtener el funcionamiento adecuado de un inductor con núcleo ferromagnético, es necesario que los núcleos sean construidos con

un conjunto de láminas aisladas entre sí, con objeto de reducir las corrientes inducidas en el núcleo producidas por las variaciones de flujo a través de él.

Estas corrientes llamadas corrientes de Foucault, producen pérdidas en el núcleo por efecto de calentamiento y sólo se presentan con corrientes variables.

c) El transformador con núcleo ferromagnético

Los transformadores prácticos poseen un núcleo ferromagnético laminado que forma un circuito magnético. La figura 8.42 muestra un caso típico.

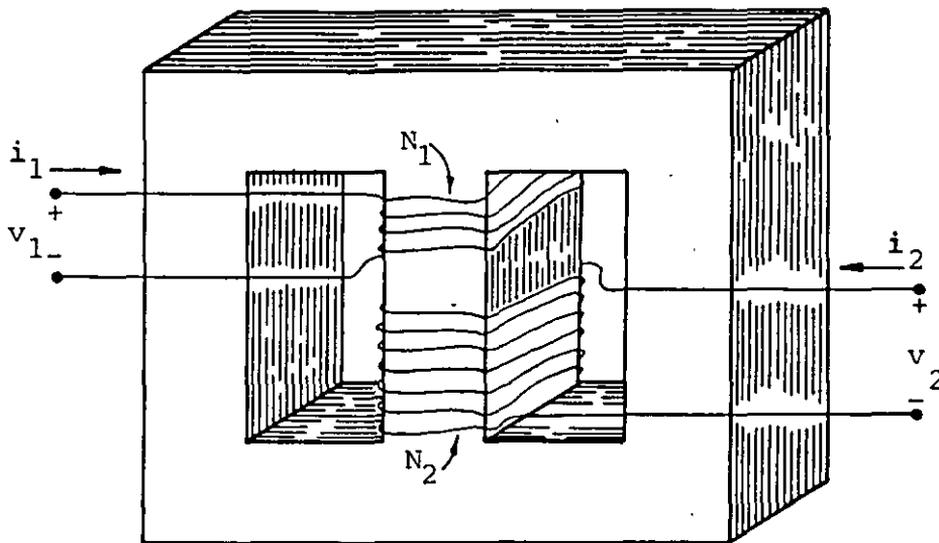


FIGURA 8.42. Esquema de un transformador con núcleo ferromagnético.

En el capítulo seis se encontró que para el transformador ideal se cumple que

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (8.84)$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (8.85)$$

La representación simbólica del transformador de la figura 8.42 es la mostrada en la figura 8.43, donde las líneas verticales entre las bobinas, indican que el transformador posee núcleo ferromagnético.

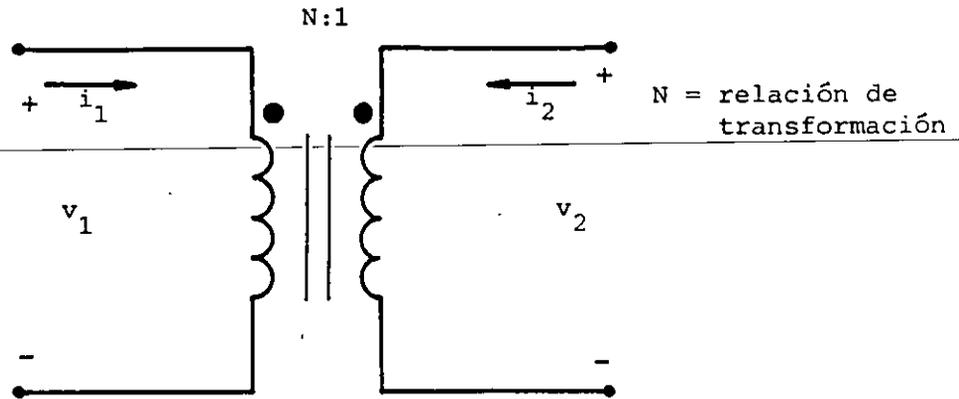


FIGURA 8.43. Representación simbólica de un transformador.

EJEMPLO 8.3

El transformador de la figura 8.44 posee un núcleo ferromagnético laminado de acero-silicio. Considere que el coeficiente de acoplamiento k es aproximadamente 1 y que la resistencia de las bobinas es despreciable. Si la corriente en el primario es $i_1 = 0.08 \text{ sen } 377 t \text{ A}$, obtenga:

- La representación simbólica.
- La inductancia propia del primario.
- La inductancia mutua.
- Los voltajes inducidos V_{ab} y V_{cd} .

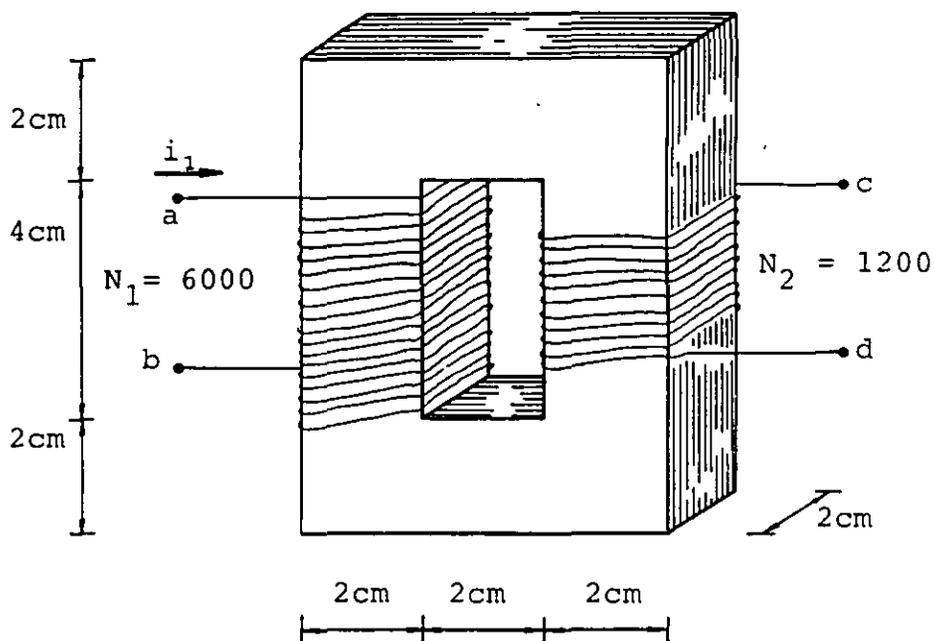
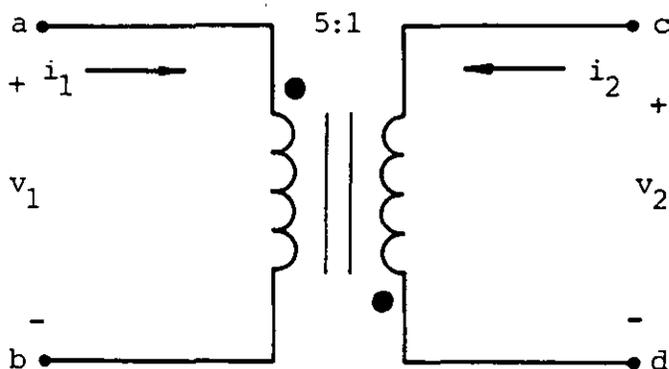


FIGURA 8.44. Transformador con núcleo laminado de acero-silicio.

SOLUCION

a) La representación simbólica es



Como $k = 1$, la relación de transformación es igual a la relación de vueltas por lo que $N = N_1/N_2 = 5$, además debemos notar que las marcas de polaridad son opuestas al transformador de la figura 8.43 debido al enrollamiento relativo de los devanados.

b) Para obtener la inductancia propia es necesario calcular primero la permeabilidad promedio μ_p por medio de la ecuación (8.77), entonces

$$H_m = \frac{N_1 I_m}{\ell} = \frac{6000 (0.08)}{0.2} = 2400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

De la curva de magnetización del acero-silicio obtenemos que para $H_m = 2400 \frac{\text{A}}{\text{m}}$, $B_m = 1.48 \text{ T}$ por lo que

$$\mu_p = \frac{1.48}{2400} = 6.167 \times 10^{-4} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

y de la expresión (8.78)

$$L = \frac{N^2 A}{\ell} \mu_p = \frac{(6000)^2 (4 \times 10^{-4})}{0.2} (6.167 \times 10^{-4}) = 44.40 \text{ H}$$

c) De manera semejante

$$M = \frac{N_1 N_2 A}{\ell} \mu_p = \frac{(6000)(1200)(4 \times 10^{-4})}{0.2} (6.167 \times 10^{-4}) = 8.88 \text{ H}$$

Notar que ℓ no es la longitud de la bobina, sino la longitud media del circuito magnético.

d) Los voltajes inducidos son

$$v_{i1} = L \frac{di_1}{dt} = 44.4 (0.08 (377) \cos 377 t) = 1339.1 \cos 377 t$$

y con base en la ley de Lenz

$$v_{ab} = + 1339.1 \cos 377 t$$

$$v_{i2} = M \frac{di_1}{dt} = 267.82 \cos 377 t$$

o también

$$v_{i2} = \frac{1}{5} v_{i1} = 267.82 \cos 377 t$$

y con base en la ley de Lenz, o bien basados en la posición de las marcas de polaridad, obtenemos

$$v_{cd} = -267.82 \cos 377 t$$

PROBLEMAS

8.1 Considerando que la órbita del electrón de un átomo de hidrógeno es circular, concéntrica al núcleo, de radio $r \approx 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$, y que su velocidad angular es constante; determine la magnitud del momento dipolar magnético producido por el electrón, debido a su movimiento orbital.

8.2 El deuterio (${}^2_1\text{D}$) es un isótopo del hidrógeno, el cual posee un neutrón dentro de su núcleo. Considerando por separado las partículas subatómicas que constituyen al deuterio (protón, neutrón y electrón) determine la magnitud del momento dipolar magnético de cada una de ellas debido al giro sobre su propio eje.

8.3 Suponga que el momento dipolar magnético neto de un átomo de hierro es $9.1 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ y considere que en un gramo de la misma sustancia, existen 3×10^{23} átomos. Para una muestra de hierro en forma de paralelepípedo rectángulo, de masa 50 gramos, colocada dentro de un campo magnético \vec{B} como se muestra en la figura P8.3, determine la magnetización máxima que puede ocurrir en el bloque.

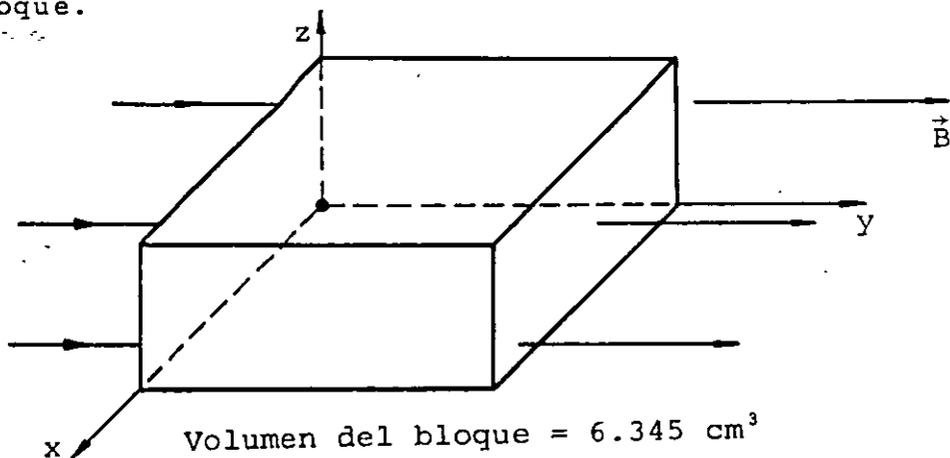


Figura P8.3

8.4 En la figura P8.4 se muestra un solenoide largo con núcleo ferromagnético y devanado uniforme. Al medir el valor del campo magnético en el extremo se obtuvo que $B = 28.85 \text{ mT}$, cuando $I = 2 \text{ A}$ en la dirección indicada.

Considere la magnetización uniforme en todo el núcleo y calcule:

- La magnetización del núcleo.
- La corriente de magnetización.
- Los vectores intensidad de campo y densidad de flujo magnéticos en el centro del solenoide.

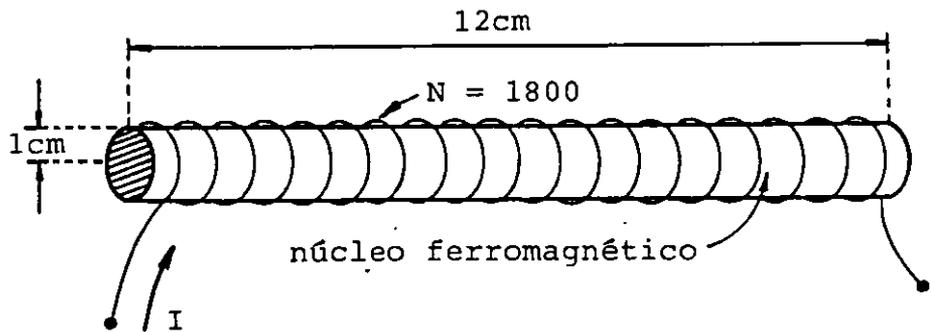


Figura P8.4

8.5 Suponga que un imán de barra como el de la figura P8.5, posee una magnetización uniforme $\vec{M} = 1500 \hat{y} \frac{\text{A}}{\text{m}}$ y calcule los vectores \vec{B} y \vec{H} para los puntos A, B y C.

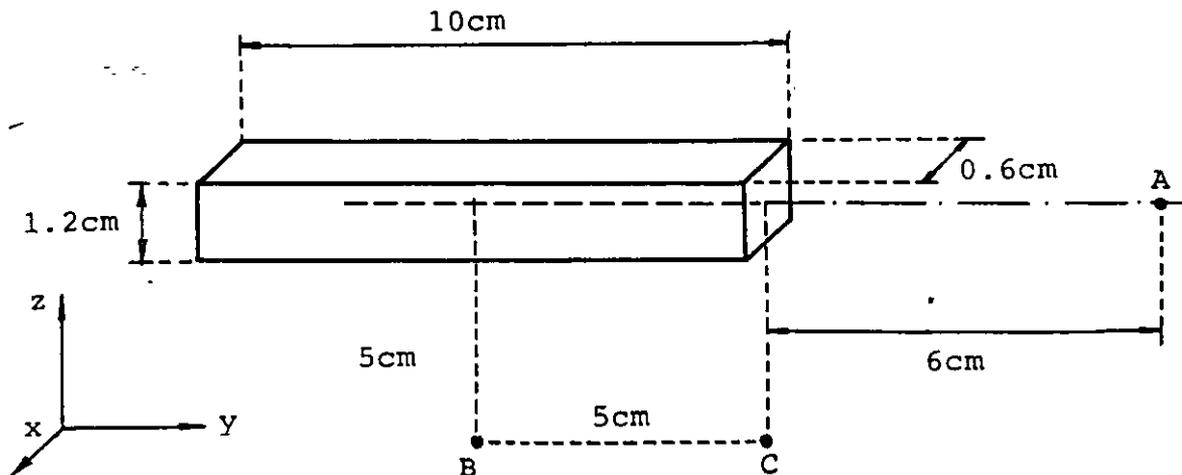


Figura P8.5

8.6 Considere un arreglo de toroide de enrollamiento uniforme y bobina, con las dimensiones mostradas en la figura P8.6 y calcule la permeabilidad, la permeabilidad relativa y los vectores magnetización, intensidad de campo e inducción magnética en el centro de la bobina, para los casos siguientes:

- Núcleo de aire ($\chi_{m1} = 0.4 \times 10^{-6}$)
- Núcleo de platino ($\chi_{m2} = 290 \times 10^{-6}$)
- Núcleo de bismuto ($\chi_{m3} = -170 \times 10^{-6}$)

Calcule también para cada caso la diferencia de potencial inducida V_{xy} máxima si la corriente del toroide vale $i_t = 0.8 \text{ sen } 377 t \text{ A}$.

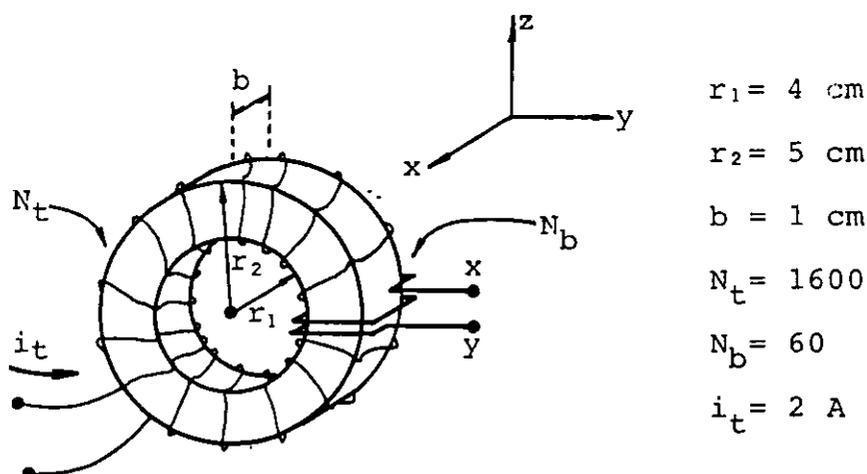


Figura P8.6

8.7 El núcleo toroidal de la figura P8.7 está construido con acero colado. Si la bobina posee 400 vueltas y la corriente a través de ella es de 0.5 A, determine con ayuda de la curva de magnetización del material lo siguiente:

- Las magnitudes de los vectores \vec{B} y \vec{H} en el núcleo.
- El flujo magnético a través de la sección transversal del núcleo.

- c) La magnitud de la magnetización en el núcleo.
- d) La permeabilidad y la permeabilidad relativa del material para las condiciones del problema.
- e) La energía almacenada por el arreglo.

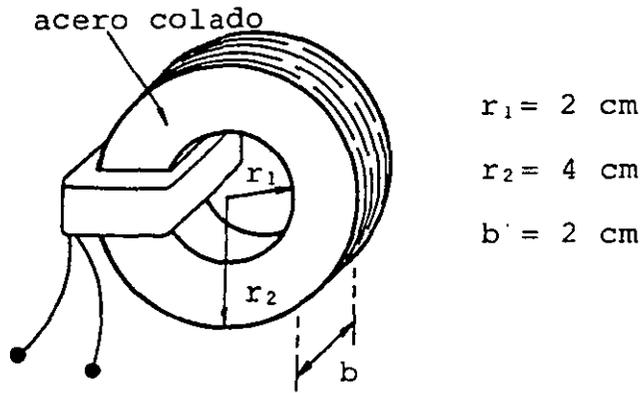


Figura P8.7

8.8 Utilizando el concepto de área aparente para el entrehierro del circuito magnético mostrado en la figura P8.8, calcule la corriente necesaria para obtener un flujo magnético, en dicho entrehierro, de 0.3 mWb .

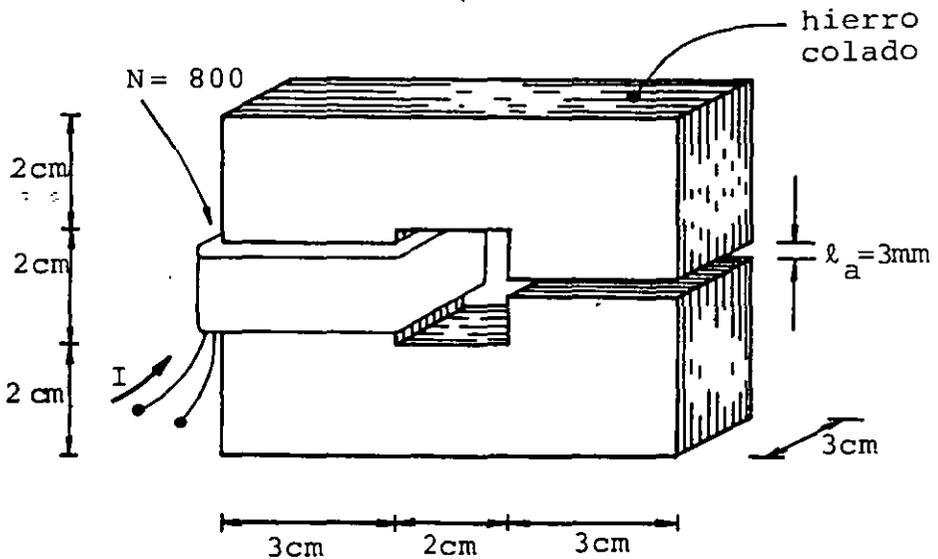


Figura P8.8

8.9 Se tiene un circuito magnético construido con dos materiales ferromagnéticos distintos, como el mostrado en la figura P8.9; utilice la información de las curvas de magnetización de cada material y obtenga el número de vueltas necesario para que el flujo a través del acero colado sea $\phi_a = 0.4 \text{ mWb}$. Calcule también las magnitudes de \vec{B} y \vec{H} en cada material.

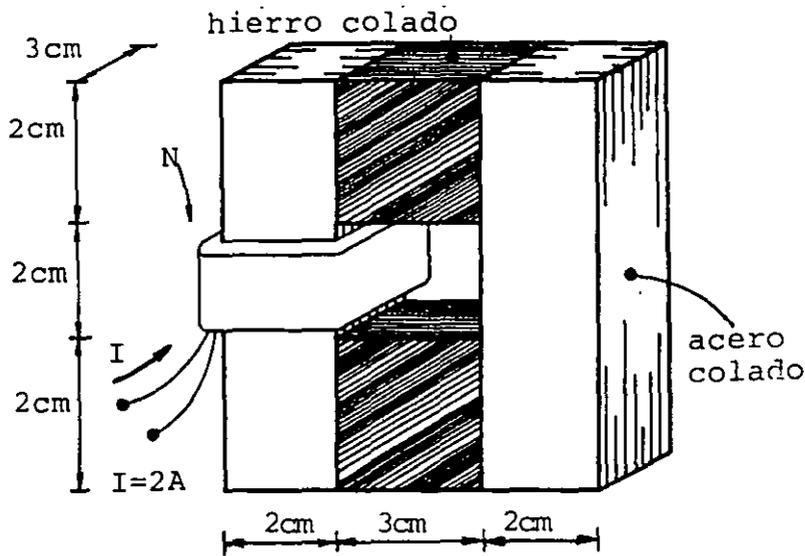


Figura P8.9

8.10 Suponga que en un circuito magnético como el de la figura P8.10, construido con acero laminado en frío, se desea calcular el flujo magnético, la intensidad de campo y la densidad de flujo magnético en el entrehierro y en cada brazo del núcleo. Utilice la información de la curva de magnetización del material y el concepto de área aparente.

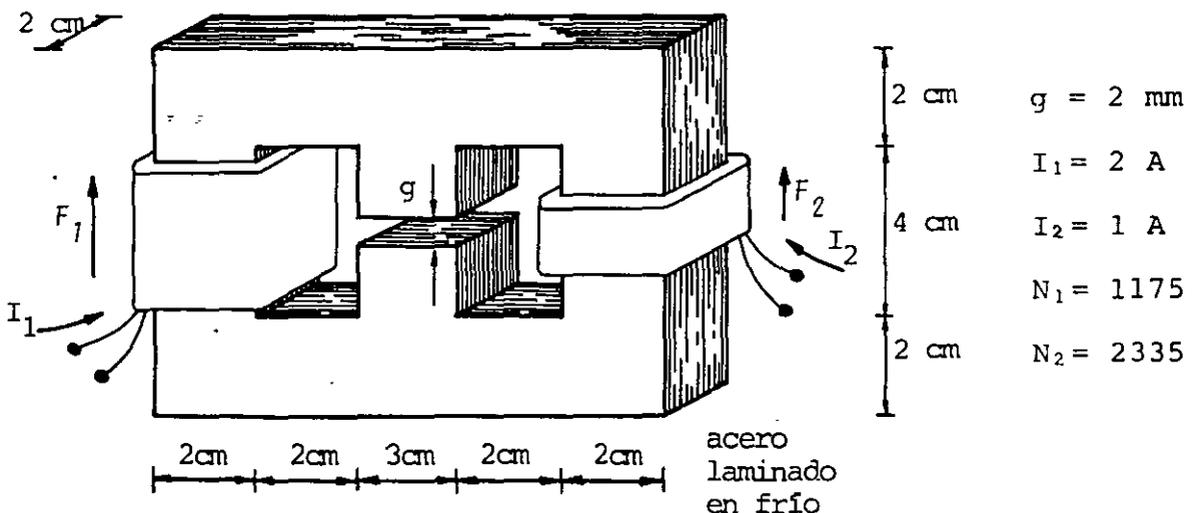


Figura P8.10

8.11 Se desea obtener el número de vueltas necesario en la bobina del electroimán de la figura P8.11, para que éste sea capaz de levantar un peso total de 50 kg_f con una corriente de 4 A . Considere un núcleo construido con acero colado y una longitud de los entrehierros de 3 mm . No desprecie la reluctancia del núcleo frente a las de los entrehierros.

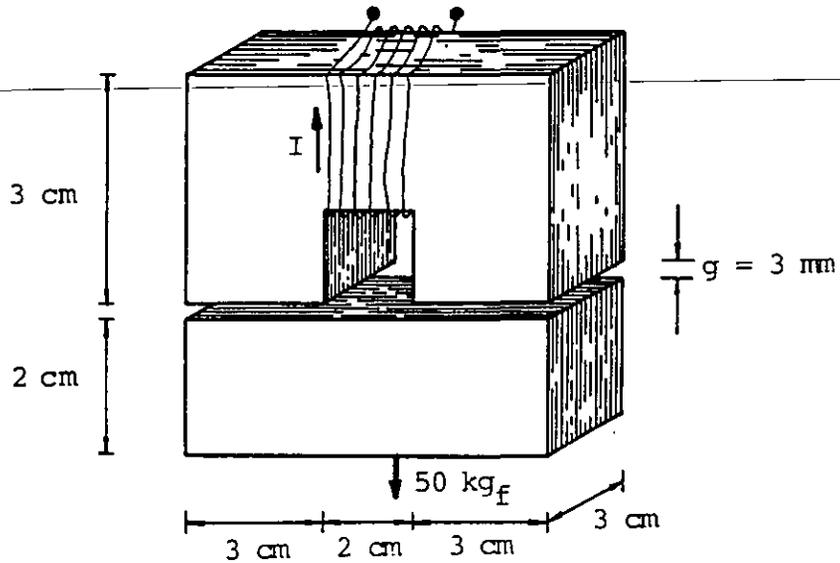


Figura P8.11

8.12 Se desea construir un inductor, utilizando el núcleo laminado de acero de transformador mostrado en la figura P8.12. La inductancia promedio deseada es $L_p = 1.2 \text{ H}$ cuando la corriente es $i = 0.4 \text{ sen } 120\pi t \text{ A}$. Considere que el núcleo originalmente no posee magnetización y determine el número de vueltas necesario para la bobina.

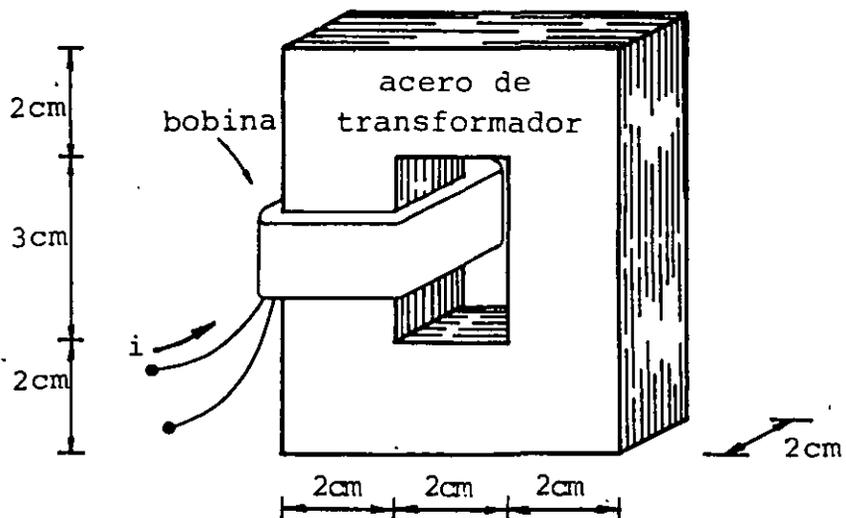


Figura P8.12

8.13 La figura P8.13, muestra un transformador con un núcleo laminado de acero-silicio. Desprecie la resistencia de las bobinas e indique cuánto debe valer la inductancia promedio del primario si se desea una corriente en el primario $i_p = 0.1 \sqrt{2} \text{ sen } 120 \pi t$ cuando se conecta a una diferencia de potencial $V_p = V_{ab} = 120 \sqrt{2} \text{ sen } 120 \pi t$. Considere un coeficiente de acoplamiento entre las bobinas del primario y del secundario de $k = 0.85$ y determine cuántas vueltas se deben enrollar en cada bobina para obtener un voltaje en la salida $V_{cd} = 6 \sqrt{2} \text{ sen } 120 \pi t$, cuando las condiciones en el primario son las enunciadas con anterioridad.

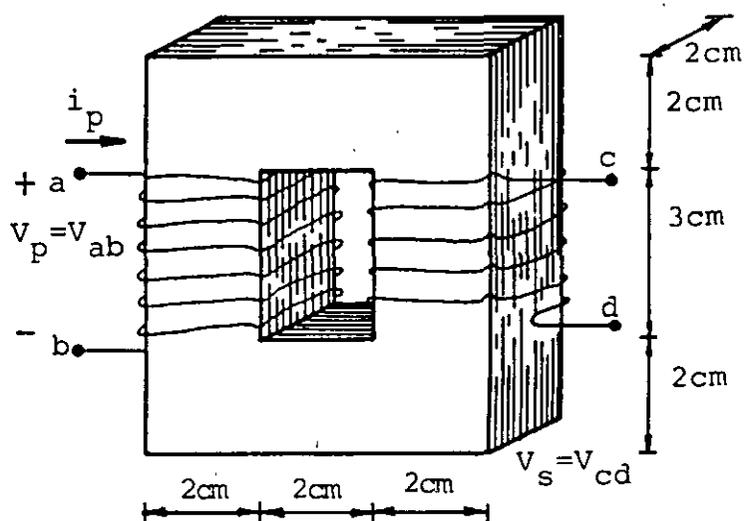


Figura P8.13

APENDICE A

ÁNGULO SÓLIDO

Como antecedente para entender el significado de un ángulo sólido, recordaremos la forma de evaluar el ángulo subtendido por una curva en un punto. Consideremos la curva plana Γ y el punto P mostrados en la figura A.1, donde α es el ángulo subtendido por la curva Γ en el punto P , el cual puede ser evaluado observando que la proyección de $d\ell$ sobre la perpendicular a r , es decir $d\ell \sin \theta$, es igual al arco de circunferencia $r d\alpha$, es por ello que podemos escribir que

$$\alpha = \int_{\Gamma} d\alpha = \int_{\Gamma} \frac{r d\alpha}{r} = \int_{\Gamma} \frac{d\ell \sin \theta}{r}$$

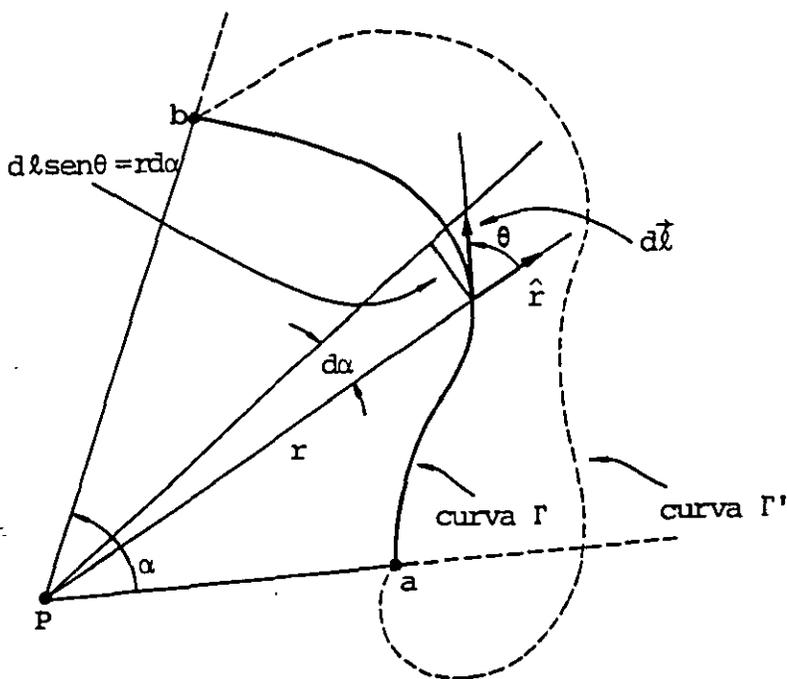


FIGURA A.1. El ángulo α es el subtendido por las curvas Γ y Γ' en el punto P .

Debemos notar además que el ángulo es subtendido en P , también por la curva Γ' y por cualquier otra curva que una los puntos a y b .

Si el punto P es un punto interior a una curva cerrada cualquiera, el ángulo será siempre de 2π radianes (rad) y si el punto se encuentra fuera de una curva cerrada cualquiera, el ángulo subtendido será cero.

Consideremos ahora una superficie S y un punto P , como se muestra en la figura A.2, en la cual se indica también un cono diferencial con vértice en el punto P y que tiene por base la proyección del área dA interceptada por dicho cono, cuya magnitud es $dA \cos \theta$.

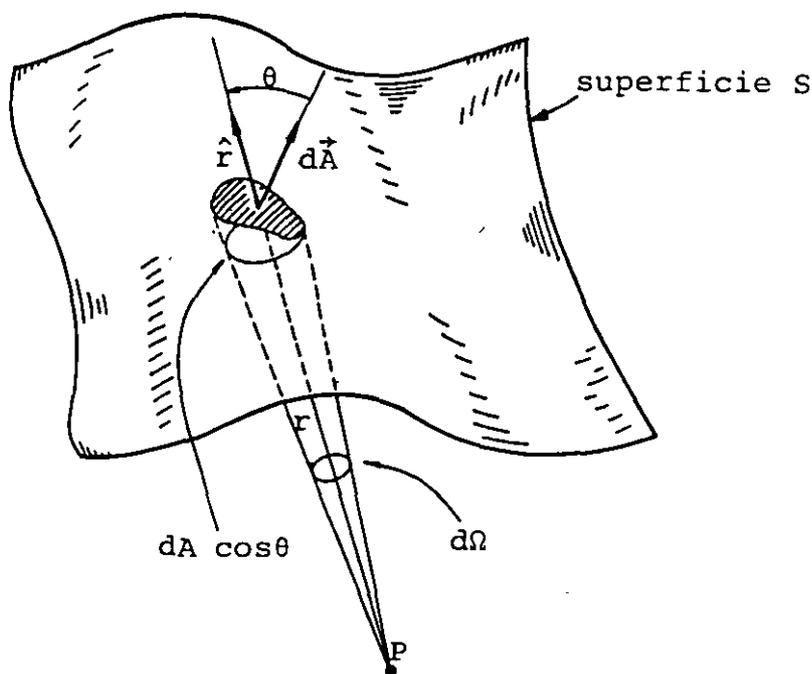


FIGURA A.2. Diferencial de ángulo sólido $d\Omega$, subtendido por la superficie dA en el punto P .

Definiremos como ángulo sólido diferencial subtendido por la superficie dA en el punto P el cociente del área proyectada sobre el plano perpendicular al vector radial \hat{r} y la magnitud del radio r al cuadrado.

Usualmente el ángulo sólido es representado con la letra omega mayúscula Ω y se mide en esterradianes sr por lo que

$$d\Omega = \frac{dA \cos \theta}{r^2} = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{A}}{r^2} \quad [\text{sr}]$$

donde r es la altura del cono diferencial con vértice en P y base $dA \cos \theta$.

El ángulo sólido subtendido por la superficie S , es

$$\Omega = \int \frac{dA \cos \theta}{r^2} \quad [\text{sr}]$$

Con objeto de aclarar esta idea, consideremos una superficie cerrada esférica de radio r_0 y supongamos que se desea evaluar el ángulo sólido subtendido por la esfera, en un punto P que coincide con su centro, como se indica en la figura A.3.

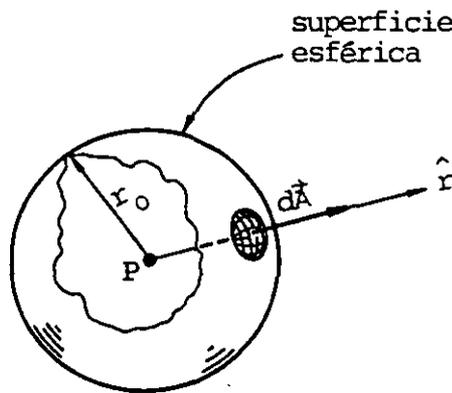


FIGURA A.3. Para el caso particular de una esfera concéntrica con el punto P , los vectores $d\vec{A}$ y \hat{r} son colineales.

Para este caso, el coseno del ángulo que forman los vectores $d\vec{A}$ y \hat{r} es igual a uno y el radio es constante, por lo que

$$\Omega = \frac{1}{r_0^2} \int dA = \frac{1}{r_0^2} (4\pi r_0^2) = 4\pi \text{ sr}$$

Aunque este último resultado ha sido obtenido para un caso especial, es fácil suponer que es válido para cualquier punto interior a cualquier superficie cerrada. Para un punto fuera de una superficie cerrada el ángulo subtendido será siempre cero.

RESPUESTAS

CAPÍTULO I

1.1 $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = (-72 \hat{x} - 54 \hat{y}) \text{ N}$

1.2 A) $\vec{E}_A = (50 \hat{x} + 25 \hat{y}) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

B) $Q = 12.423 \text{ nC}$

1.3 $\vec{E}_P = (-33.75 \hat{x} - 17.08 \hat{y} - 714.31 \hat{z}) 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

$$\vec{E}_Q = (-11.79 \hat{x} + 33.95 \hat{y} - 17.08 \hat{z}) 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_R = (-10.39 \hat{x} + 37.4 \hat{y} + 11.88 \hat{z}) 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

1.4 A) $\vec{E}_O = 0$

$$\vec{E}_A = -1.976 \times 10^5 \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_B = -(18.147 \hat{y} + 6.977 \hat{z}) 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

B) $\vec{E}_C = -886.92 \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{C}}$

$$\vec{E}_C = -888.89 \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

1.5 A) $a = 3 \text{ cm}$

B) $\vec{E}_C = 0.1387 \hat{x} \frac{\text{N}}{\text{C}}$

$$\vec{E}'_C = 0.1389 \hat{x} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

1.6 A) $\vec{E}_A = 17.09 \times 10^6 \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{C}}$

$$\vec{E}_B = 9.94 \times 10^6 \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E}_C = 2.24 \times 10^4 \hat{y} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

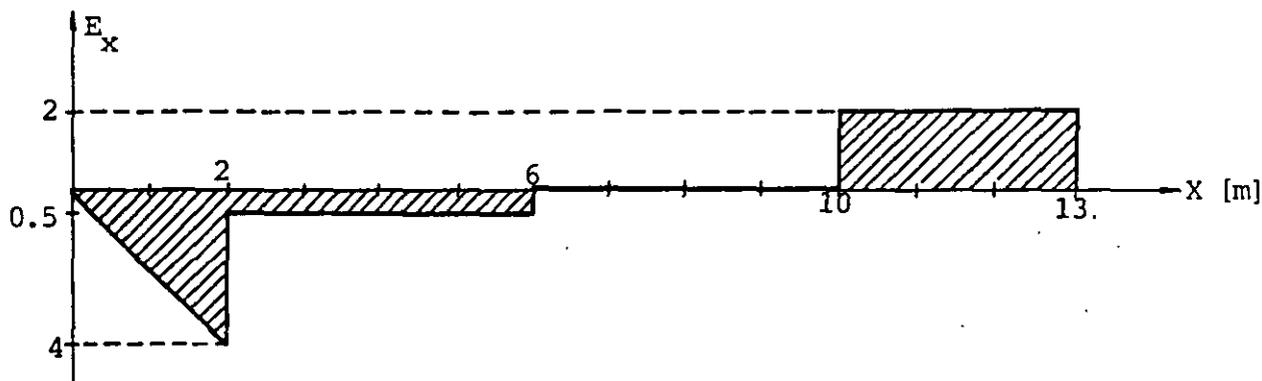
1.14 A) $V_a = 0$, $V_b = -120$ V

B) $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -361.03 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$, $\sigma_3 = 200.57 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}$, $\sigma_4 = 0$

C) $q = 34.026$ nC

D) $\vec{E}_m = -40.831 \hat{r} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

1.15



1.16 $V_A = 0$, $V_B = -2.197$ kV

$V_C = 0$, $V_D = 1.609$ kV

1.17 $\vec{E}_A = -78.988 \hat{y} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

$\vec{E}_B = -22.567 \hat{y} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

$\vec{E}_C = 26.326 \hat{y} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

CAPÍTULO 2

2.1 $C = 10$ pF , $r = 9$ cm

2.2 a) $6 \mu\text{F}$

b) $6 \mu\text{F}$

c) $9.6 \mu\text{F}$

2.3 a) $V_1 = V_2 = 7.2 \text{ V}$, $V_5 = 9.6 \text{ V}$

b) $Q_1 = Q_5 = Q_2 + Q_3 + Q_4 = 86.4 \text{ } \mu\text{C}$

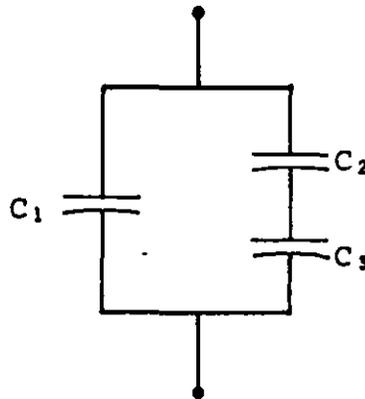
c) $U_1 = 0.311 \text{ mJ}$

d) $V_{ad} = 24 \text{ V}$

e) $Q_T = 86.4 \text{ } \mu\text{C}$ y $U_T = 1.037 \text{ mJ}$

2.4 a) Dos capacitores convenientes a 25 V en serie

b) Un arreglo como el mostrado con: C_1 a 100 V ,
 C_2 a 25 V y C_3 a 50 V .



2.5 a) $Q_{m1} = 7.5 \text{ } \mu\text{C}$, $\sigma_{m1} = 2.65 \times 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

b) $Q_{m2} = 30 \text{ } \mu\text{C}$, $\sigma_{m2} = 2.65 \times 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

2.6 $V_{xy1} = 750 \text{ V}$, $V_{xy2} = 1500 \text{ V}$, $\sigma_m = 2.65 \times 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$

2.7 a) $\sigma = 8.496 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

b) $\sigma_i = 6.372 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

c) $\epsilon = 35.4 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$ y $x_e = 3$

d) $U = 0.255 \text{ mJ}$ y $u = 1.02 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$

e) $V_{abm} = 4 \text{ kV}$

2.8 a) $A = 0.113 \text{ m}^2$

b) $r_1 = 8.98 \text{ cm}$, $r_2 = 9 \text{ cm}$

c) $r_1 = 9.48 \text{ cm}$, $r_2 = 9.5 \text{ cm}$

2.9 a) Mica

b) Polietileno

2.10 Papel

2.11 a) Papel, $A = 0.113 \text{ m}^2$

b) Mica, $A = 0.087 \text{ m}^2$

2.12 a) 17.54 nF

b) 8 kV

2.13 a) $\vec{E}_b = 800 \hat{y} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$, $\vec{E}_m = 531.8 \hat{y} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$, $\vec{E}_p = 1202.3 \hat{y} \frac{\text{kV}}{\text{m}}$

b) $\vec{P}_b = 26.9 \hat{y} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

c) $\vec{D}_b = 33.98 \hat{y} \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$

d) $u_b = 13.59 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$

2.14 a) $C = 0.152 \text{ nF}$

b) $V_{abm} = 5493.1 \text{ V}$

c) $U = 1.094 \mu\text{J}$

2.15 $C = 0.0507 \text{ nF}$

CAPÍTULO 3

3.1 $\vec{J} = 268.16 \hat{x} \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$, $I = 1.314 \text{ mA}$ hacia la derecha

3.2 a) 50×10^{15} electrones

b) No

3.3 a) $V_{\text{PCu}} = 0.072 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$, $V_{\text{PAl}} = 0.10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$, $V_{\text{PAg}} = 0.103 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

3.4 a) $J = 96.316 \frac{\text{kA}}{\text{m}^2}$

b) $E = 1.657 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$

c) $V_p = 0.431 \frac{\text{mm}}{\text{minuto}}$

d) $\mu = 4.335 \times 10^{-3} \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$

e) $V_{xy} = 66.28 \text{ mV}$

3.5 $R = 0.5 \Omega$, $\sigma = 266.67 \times 10^3 \frac{\text{S}}{\text{m}}$

3.6 $R = 0.012 \Omega$

3.7 $R = 2206.4 \text{ M}\Omega$

3.8 a) $R_o = 295.28 \Omega$

b) $R_{40} = 348.03 \Omega$

c) $R_{90} = 413.97 \Omega$

3.9 a) Sin considerar dilatación $R = 0.3784 \Omega$

b) Considerando dilatación $R = 0.3781 \Omega$

c) Error 0.068%

3.10 $T = 27.5 \text{ } ^\circ\text{C}$

3.11 $R = 250, 333.3, 500, 600, 750, 1333.3, 1500, 2000, 2500,$
 $3000 \text{ y } 4000 \text{ } \Omega$

3.12 a) $33 \text{ } \Omega$

b) $50.66 \text{ } \Omega$

c) $18.06 \text{ } \Omega$

d) $24 \text{ } \Omega$

3.13 $R_{\text{mín}} = 28.8 \text{ k}\Omega$

3.14 a) $R = 144 \text{ } \Omega$

b) Costo \$175.68

c) Ahorro \$87.84

3.15 a) $r_i = 1 \text{ } \Omega$

b) 8.45 V

c) $R = r_i$

CAPÍTULO 4

4.1 $V_{ab} = 60 \text{ V} , \quad V_{bc} = 36 \text{ V} , \quad V_{cd} = 24 \text{ V}$

$I_{R1} = 3 \text{ A} , \quad I_{R4} = 0.6 \text{ A} , \quad I_{R5} = 0.9 \text{ A} , \quad I_{R2} = 1.5 \text{ A}$

4.2 a) $V_{ab\text{máx}} = 32.86 \text{ V}$

b) R_2

4.3 a) $V_{13} = 7.5 \text{ V}$, $V_{48} = 4.5 \text{ V}$, $V_{51} = -22.5 \text{ V}$, $V_{32} = -5 \text{ V}$

b) Si $V_2 = 0$

$$V_1 = 2.5 \text{ V} , \quad V_8 = -21.5 \text{ V} , \quad V_7 = -17.5 \text{ V} , \quad V_6 = -23.5 \text{ V}$$

$$V_5 = -20.0 \text{ V} , \quad V_4 = -17.0 \text{ V} \quad \text{y} \quad V_3 = -5.0 \text{ V}$$

4.4 $V_{xy} = 11.8 \text{ V}$

4.5 Potencia suministrada por $E_1 = P_{S1} = 111.62 \text{ W}$

Potencia almacenada por $E_2 = P_{A2} = 8.6 \text{ W}$

Potencia suministrada por $E_3 = P_{S3} = 13.18 \text{ W}$

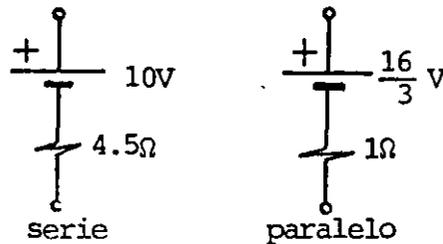
4.6 a) Sólo la fuente 1, $P = 5.76 \text{ W}$

b) Sólo la fuente 2, $P = 1.0 \text{ W}$

c) Conexión serie, $P = 3.31 \text{ W}$

d) Conexión paralelo, $P = 7.11 \text{ W}$

e) Fuentes equivalentes



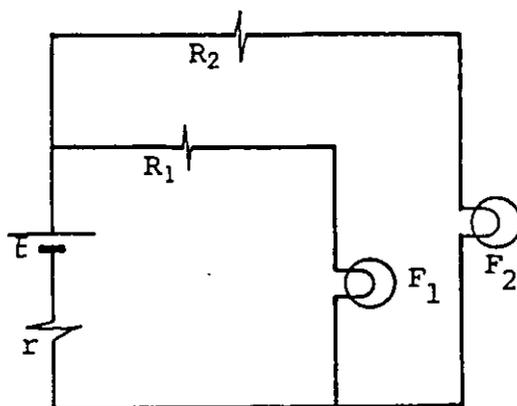
4.7 $V_{xy \text{ medida}} = 7.958 \text{ V}$

$I_1 \text{ medida} = 39.378 \text{ mA}$

% de error en $V_{xy} = 0.52 \%$

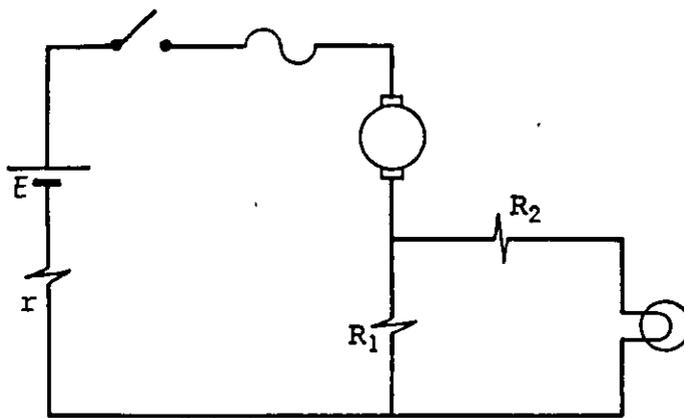
% de error en $I_1 = 1.55 \%$

4.8 Circuito



$$\begin{aligned} R_1 &= 20 \, \Omega \\ R_2 &= 8.33 \, \Omega \\ P_{R1} &> 3.2 \, \text{W} \\ P_{R2} &> 3 \, \text{W} \end{aligned}$$

4.9 Circuito



$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \, \Omega \\ R_2 &= 4 \, \Omega \\ P_{R1} &\geq 2.5 \, \text{W} \\ P_{R2} &\geq 1.0 \, \text{W} \\ \text{Fusible de } &1 \, \text{A} \end{aligned}$$

4.10 $V_{ad} = E - R_3 i_1$

$$i_1 = 0.5 e^{-0.05 t} \, \text{mA} \quad 0 \leq t < 30 \, \text{s}$$

$$i_1 = 0 \quad 30 \leq t < 70 \, \text{s}$$

$$i_1 = 0.447 e^{-0.05 t} \, \text{mA} \quad t \geq 70 \, \text{s}$$

$$V_{bd} = 100 (1 - e^{-0.05 t}) \, \text{V} \quad 0 \leq t < 30 \, \text{s}$$

$$V_{bd} = 77.687 \, \text{V} \quad 30 \leq t < 40 \, \text{s}$$

$$V_{bd} = 77.687 e^{-0.1 t'} \, \text{V} \quad 40 \leq t \leq 60 \, \text{s}$$

$$t' = t - 40$$

$$V_{bd} = 10.514 \, \text{V} \quad 10 \leq t \leq 70 \, \text{s}$$

$$V_{bd} = -89.486 e^{-0.05 t''} + 100 \, \text{V} \quad t \geq 70 \, \text{s}$$

$$t'' = t - 70$$

$$4.11 \quad V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} = 33.207 \text{ V}$$

$$V_{ab} = 17.468 \text{ V}$$

$$V_{bc} = 15.739 \text{ V}$$

$$4.12 \quad U_c = \frac{1}{2} C v_c^2 = 373.82 \text{ mJ}$$

$$U_R = \int R i^2 dt = 490.84 \text{ mJ}$$

$$U_S = \int E i dt = 864.66 \text{ mJ}$$

CAPÍTULO 5

$$5.1 \quad \vec{v} = 300 \hat{z} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$5.2 \quad \vec{B}_A = (-3.072 \hat{x} + 3.072 \hat{y} - 4.096 \hat{z}) 10^{-18} \text{ T}$$

$$\vec{B}_B = -14.22 \times 10^{-18} \hat{x} \text{ T}$$

$$\vec{B}_C = 6 \times 10^{-18} \hat{x} \text{ T}$$

$$\vec{B}_o = 0$$

$$5.3 \quad B = 0.8 \text{ T}, \quad \hat{B} = \hat{x}$$

$$5.4 \quad \text{a) } v_{\text{mín}} = 1.916 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{máx}} = 9.581 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{b) } m_2 - m_1 = 2m_1$$

$$5.5 \quad \vec{B}_A = 23.09 \hat{x} \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_B = [57.73 \hat{x} - 20 \hat{y}] \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_C = [57.73 \hat{x} + 20 \hat{y}] \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_D = [9.9 \hat{x} - 15.24 \hat{y}] \mu\text{T}$$

5.6 Valores de B en μT

$$5.66 \hat{z}$$

$$7.74 \hat{z}$$

$$22.36 \hat{z}$$

$$-10.86 \hat{z}$$

$$-4.24 \hat{z}$$

$$5.7 \vec{B}_A = -8.533 \hat{y} \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_B = [-8.421 \hat{y} - 2.839 \hat{z}] \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_C = [-3.611 \hat{y} - 6.946 \hat{z}] \mu\text{T}$$

$$\vec{B}_D = 4.632 \hat{y} \mu\text{T}$$

5.8 $I = 66.85 \text{ A}$

$$5.9 \vec{B} = -\frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left[\frac{1}{\left[\frac{5a^2}{4} + ay + y^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\frac{5a^2}{4} - ay + y^2\right]^{3/2}} \right] \hat{y}$$

$$5.10 \vec{B}_A = 41.32 \hat{x} \text{ mT}$$

$$\vec{B}_B = 40.68 \hat{x} \text{ mT}$$

$$\vec{B}_C = 20.66 \hat{x} \text{ mT}$$

$$\vec{B}_D = 1.02 \hat{x} \text{ mT}$$

5.11 a) $N = 580$ vueltas

b) $R = 0.875 \Omega$

c) $B_c = 7.218 \text{ mT}$, $B_e = 3.636 \text{ mT}$

$$5.12 \quad B = 0 \quad r \leq r_1$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left[\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right] \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad r \geq r_2$$

$$5.13 \quad a) \quad B_{\min} = 20 \text{ mT}, \quad B_{\max} = 26.67 \text{ mT}$$

$$b) \quad \phi_m = 6.9 \text{ } \mu\text{Wb}$$

$$5.14 \quad \phi_1 = 19.74 \text{ } \mu\text{Wb}$$

$$\phi_2 = 0$$

$$5.15 \quad \phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} \ln \frac{\sec \theta_1}{\sec \theta_2} = 141.43 \text{ nWb}$$

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = 109.95 \text{ nWb}$$

$$\phi_s = \phi_1 + \phi_2 = 251 \text{ nWb}$$

$$5.16 \quad \vec{F}_1 = 160 \hat{y} \text{ } \mu\text{N}$$

$$\vec{F}_2 = [-49.2 \hat{y} + 73.8 \hat{z}] \text{ } \mu\text{N}$$

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4 = 23.6 \hat{x} \text{ } \mu\text{N}$$

$$5.17 \quad \vec{p}_m = -32 \hat{y} \text{ mA} \cdot \text{m}^2$$

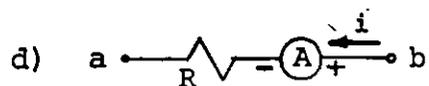
$$\vec{\tau}_m = 288 \hat{z} \text{ mJ}$$

CAPÍTULO 6

6.1 a) $\phi_b = 1.25 \text{ mWb}$

b) $V_{ab} = -5 \text{ V}$

c) $r = 1.7 \ \Omega$



e) No, porque $\frac{dB}{dt} = \text{constante}$

6.2 a) $i = 1 \text{ A}$ en el sentido de las manecillas del reloj

b) $V_{ab} = 15 \text{ V}$

c) $\vec{v} = 8 \hat{x} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

d) $V_{ef} = 23 \text{ V}$

6.3 a) $\vec{B}_A = 10^{-4} \hat{x} \text{ T}$

b) $E = 2.67 \times 10^{-4} \text{ V}$ de a hacia d

c) $\vec{F}_{bc} = -3.56 \times 10^{-8} \hat{y} \text{ N}$

d) $P = 3.56 \times 10^{-7} \text{ W}$

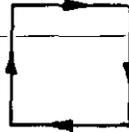
e) Invertir la velocidad de la barra

Invertir el sentido de i_c Mover conductor y bobina de tal forma que la velocidad relativa sea $\vec{v} = 10 \hat{y}$

$$6.4 \text{ a) } \phi = \frac{\mu_0 i_c \ell}{2\pi} \ln \frac{V_{bc} t + 0.22}{V_{bc} t}$$

$$b) \left. \phi(t) \right|_{t=0.015} = 7.985 \text{ } \mu\text{Wb}$$

$$c) i = 1.21 \times 10^{-4} \text{ A}$$



$$6.5 \ V_{xy} = -1.12 \times 10^3 \cos 377 t$$

$$6.6 \ V_{xy} = -8.79 \text{ sen } 314.2 t$$

$$6.7 \text{ a) } P = \frac{(w B_{\text{m}\hat{x}})^2 \pi \ell R^4}{16 \rho} \quad [W]$$

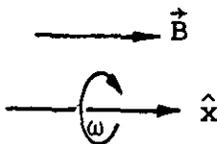
$$b) P_R = 70.8 \text{ W}$$

$$c) P_r = 1.64 \text{ W} , \quad 2.3 \% \text{ aprox.}$$

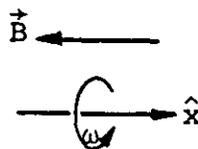
6.8 a) Direcciones \hat{x} o $-\hat{x}$

$$b) \omega = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 955 \frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

$$\text{Si } \hat{B} = \hat{x}$$

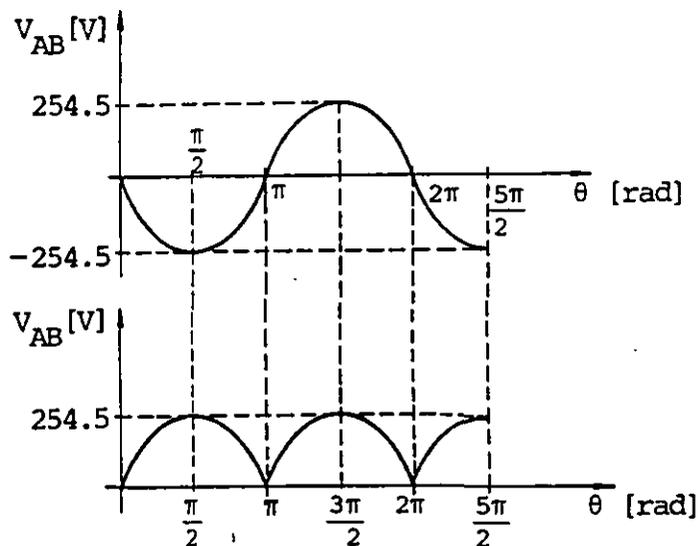


$$\text{si } \hat{B} = -\hat{x}$$



$$6.9 \text{ a) } V_{AB} = -254.5 \text{ sen } \omega t$$

b)



CAPÍTULO 7

7.1 $L = 495 \mu\text{H}$

7.2 $N = 1000$ vueltas

$$d_{\text{máx}} = 0.377 \text{ mm}$$

7.3 $M = 3.2 \text{ mH}$

7.4 $M = 1.61 \mu\text{H}$

7.5 $M = 37.54 \text{ mH}$

7.6 $L_c = 449 \text{ nH}$

$$L_d = 527 \text{ nH}$$

7.7 $k = 0.77$

$$L_e = 15.45 \text{ mH}$$

7.8 a) $i_{L1} = i_{L2} = 3.235 \text{ sen} \left(120 \pi t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ mA}$

$$V_{xy} = 8.049 \text{ sen } 120 \pi t \text{ V}$$

$$V_{yz} = 1.951 \text{ sen } 120 \pi t \text{ V}$$

$$b) \quad i_{L1} = -3.991 \cos 120 \pi t = 3.991 \operatorname{sen} \left(120 \pi t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ mA}$$

$$i_{L2} = -7.829 \cos 120 \pi t = 7.829 \operatorname{sen} \left(120 \pi t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ mA}$$

$$V_{xz} = 10 \operatorname{sen} 120 \pi t \text{ V}$$

$$7.9 \quad a) \quad N = 1.77$$

$$b) \quad V_{ab} = 0.5 \text{ V} \quad 0 \leq t < 20 \text{ ms}$$

$$V_{ab} = -0.25 \text{ V} \quad 20 \leq t < 60 \text{ ms}$$

$$V_{ab} = 0 \quad 60 \leq t < 70 \text{ ms}$$

$$V_{cd} = -0.283 \text{ V} \quad 0 \leq t < 20 \text{ ms}$$

$$V_{cd} = 0.141 \text{ V} \quad 20 \leq t < 60 \text{ ms}$$

$$V_{cd} = 0 \quad 60 \leq t < 70 \text{ ms}$$

$$c) \quad U_{\text{máx}} = 5 \text{ mJ}$$

$$7.10 \quad i(t) = 6(1 - e^{-4t}) \quad t \geq 0$$

$$V_{ab} = 6(1 + e^{-4t}) \quad t \geq 0$$

$$V_{cb} = 6(e^{-4t} - 1) \quad t \geq 0$$

$$7.11 \quad \left. \begin{array}{l} i = 10(1 - e^{-t}) \text{ A} \\ V_{ab} = 20(1 - e^{-t}) \text{ V} \\ V_{bc} = 20e^{-t} \text{ V} \end{array} \right\} 0 \leq t < 1 \text{ s}$$

$$\left. \begin{aligned} i &= 6.321 e^{-t_1} \quad \text{A} \\ V_{ab} &= 12.642 e^{-t_1} \quad \text{V} \\ V_{bc} &= -12.642 e^{-t_1} \quad \text{V} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 1 \leq t < 2 \text{ s} \\ t_1 = t - 1 \\ 0 \leq t_1 < 1 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} i &= (10 - 7.675 e^{-t_2}) \text{A} \\ V_{ab} &= (20 - 15.35 e^{-t_2}) \text{V} \\ V_{bc} &= 15.35 e^{-t_2} \quad \text{V} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 2 \leq t < 3 \text{ s} \\ t_2 = t - 2 \\ 0 \leq t_2 < 1 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} i &= 7.176 e^{-t_3} \quad \text{A} \\ V_{ab} &= 14.352 e^{-t_3} \quad \text{V} \\ V_{bc} &= -14.352 e^{-t_3} \quad \text{V} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3 \leq t < 4 \text{ s} \\ t_3 = t - 3 \\ 0 \leq t_3 < 1 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} i &= (10 - 7.360 e^{-t_4}) \text{A} \\ V_{ab} &= (20 - 14.72 e^{-t_4}) \text{V} \\ V_{bc} &= 14.72 e^{-t_4} \quad \text{V} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4 \leq t < 5 \text{ s} \\ t_4 = t - 4 \\ 0 \leq t_4 < 1 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} i &= 7.292 e^{-t_5} \quad \text{A} \\ V_{ab} &= 14.584 e^{-t_5} \quad \text{V} \\ V_{bc} &= -14.584 e^{-t_5} \quad \text{V} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 5 \leq t < 6 \text{ s} \\ t_5 = t - 5 \\ 0 \leq t_5 < 1 \text{ s} \end{aligned}$$

7.12 a) $V_{ac} = 83.26 \text{ V}$

b) $U_1 = 2.949 \text{ J}$

7.13	$i_p = (1 - e^{-10t})$	A]	$0 \leq t < 40 \text{ ms}$
	$V_p = V_{ab} = 10$	V		
	$V_s = V_{xy} = 4 e^{-10t}$	V		
	$i_p = 329.68 e^{-10t_1}$	mA]	$40 \leq t \leq 80 \text{ ms}$
	$V_p = V_{ab} = 0$	V		$t_1 = t - 40 \text{ ms}$
	$V_s = V_{xy} = -1.319 e^{-10t_1}$	V		$0 \leq t_1 < 40 \text{ ms}$
	$i_p = (1000 - 779.0 e^{-10t_2})$	mA]	$80 \leq t \leq 120 \text{ ms}$
	$V_p = V_{ab} = 10$	V		$t_2 = t - 80 \text{ ms}$
	$V_s = V_{xy} = 3.116 e^{-10t_2}$	V		$0 \leq t_2 < 40 \text{ ms}$
	$i_p = 477.82 e^{-10t_3}$	mA]	$120 \leq t < 160 \text{ ms}$
	$V_p = V_{ab} = 0$	V		$t_3 = t - 120 \text{ ms}$
	$V_s = V_{xy} = -1.911 e^{-10t_3}$	V		$0 \leq t_3 < 40 \text{ ms}$
	$i_p = (1000 - 679.0 e^{-10t_4})$	mA]	$160 \leq t < 200 \text{ ms}$
	$V_p = V_{ab} = 10$	V		$t_4 = t - 160 \text{ ms}$
	$V_s = V_{xy} = 2.716 e^{-10t_4}$	V		$0 \leq t_4 < 40 \text{ ms}$

CAPÍTULO 8

$$8.1 \quad p_m = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

$$8.2 \quad \text{a) } p_{mp} = 1.409 \times 10^{-26} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

$$\text{b) } p_{mn} = -0.974 \times 10^{-26} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

$$\text{c) } p_{me} = -927.1 \times 10^{-26} \text{ A}\cdot\text{m}^2$$

$$8.3 \quad \vec{M} = 21.513 \frac{\text{MA}}{\text{m}}$$

$$8.4 \quad \text{a) } M = 15.916 \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

$$\text{b) } I_m = 1200 \text{ A}\cdot\text{vuelta}$$

$$\text{c) } H = 30 \frac{\text{kA}}{\text{m}}, \quad B = 57.7 \text{ mT}$$

$$8.5 \quad \vec{H}_A = 2.05 \hat{y} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\vec{B}_A = 2.58 \hat{y} \mu\text{T}$$

$$\vec{H}_B = -2.43 \hat{y} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\vec{B}_B = -3.05 \hat{y} \mu\text{T}$$

$$\vec{H}_C = (-0.61 \hat{y} - 3.13 \hat{z}) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\vec{B}_C = (-1.26 \hat{y} - 2.40 \hat{z}) \mu\text{T}$$

$$8.6 \quad \vec{M}_1 = -4.527 \hat{z} \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

$$V_{xy1} = 12.922 \text{ mV}$$

$$\vec{M}_2 = -3.282 \hat{z} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$V_{xy2} = 12.925 \text{ mV}$$

$$\vec{M}_3 = 1.924 \hat{z} \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$V_{xy3} = 12.919 \text{ mV}$$

$$8.7 \quad \text{a) } H = 1061.03 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$B = 1.16 \text{ T}$$

$$\text{b) } \phi = 464 \mu\text{Wb}$$

$$\text{c) } M = 922 \frac{\text{kA}}{\text{m}}$$

$$d) \mu = 1.093 \times 10^{-3} \frac{\text{Wb}}{\text{A}\cdot\text{m}}, \quad K_m = 870$$

$$e) U = 46.4 \text{ mJ}$$

$$8.8 \quad I = 1.25 \text{ A}$$

$$8.9 \quad N = 86 \text{ vueltas}$$

$$8.10 \quad B_g = 1.36 \text{ T}, \quad \phi_g = 0.96 \text{ mWb}, \quad H_g = 1085.15 \frac{\text{MA}}{\text{m}}$$

Brazo central

$$B_3 = 1.3 \text{ T}, \quad \phi_3 = 0.96 \text{ mWb}, \quad H_3 = 2425 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$8.11 \quad N = 1024 \text{ vueltas}$$

$$8.12 \quad N = 864 \text{ vueltas}$$

$$8.13 \quad L_p = 3.183 \text{ H}, \quad N_p = 840 \text{ vueltas}, \quad N_s = 42 \text{ vueltas}$$

BIBLIOGRAFIA

- ALONSO, Marcelo y Edward J. Finn. *Física, volumen II: Campos y ondas*. Segunda edición. México, Fondo Educativo Interamericano, 1976.
- FEYNMAN, Richard P., et. al. *Física, volumen II: Electromagnetismo y materia*. EUA, Fondo Educativo Interamericano, 1972.
- HAYT, William H. *Teoría Electromagnética*. México, McGraw-Hill, 1979.
- JORDAN, Edward C. and Keith G. Balmain. *Electromagnetic waves and radiating systems*. Second edition. New Jersey, Prentice-Hall, Inc. 1968.
- KIP, Arthur F. *Fundamentals of electricity and magnetism*. Second edition. USA, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., 1969.
- KRAUS, John D. and Keith R. Caver. *Electromagnetics*. Second edition. USA, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, 1973.
- LORRAIN, Paul and Dale R. Corson. *Electromagnetism: Principles and Applications*. San Francisco, W.H. Freeman and Company, 1978.
- LORRAIN, Paul and Dale R. Corson. *Electromagnetics fields and waves*. Second edition. San Francisco, W.H. Freeman and Company, 1970.
- McKELVEY, John P. y Howard Grotch. *Física para Ciencias e Ingeniería. Tomo II*. México, Harper & Row Latinoamericana, 1981.
- REIMANN, Arnold L. *Física: Electricidad, magnetismo y óptica. Volumen II*. México, Compañía Editorial Continental, 1975.
- ROMANOWITZ, H. Alex. *Introducción a los circuitos eléctricos*. México, Compañía Editorial Continental, 1980.

INDICE ANALITICO

A

aislantes, 4, 195
 resistividad de, 201
alternadores, 408, 423
Ampere A.M., 292
ampere, 184
Ampere, ley de, 325, 503
ampere vuelta, 522
amperímetro, 261
ángulo de fase, 252
ángulo sólido, 33
anillos conductores, 408
ánodo, 225
antiferromagnéticos, 497
área aparente, 530
autoinductancia, 426
 cálculo de, 427
 energía almacenada en, 446
 de un solenoide, 435
 de un toroide, 437

B

banda de conducción, 193
banda de valencia, 193
Biot-Savart, ley de, 298, 300
bobinas de Helmholtz, 371
brújula, 286

C

campo eléctrico, 9, 16
 circulación del, 48, 51
 conservativo, 58, 61
 de un anillo circular, 23, 105
 de un cilindro, 40
 de un segmento de línea, 17, 38
 de ruptura, 150
 de una carga puntual, 10, 11
 de una esfera, 34
 de una superficie cargada, 36
 de una superficie circular, 24, 106
 en un capacitor, 126
 en un conductor con carga, 92
 en un dieléctrico, 141, 149
 entre placas planas y paralelas, 79
 esquemas de, 28
 flujo del, 30, 106

 inducido, 92, 297, 400, 446
 intensidad del, 9
 líneas de, 28
 rotacional del, 48, 57
 trabajo en un, 58
 unidad de, 9
 y su relación con el potencial eléctrico, 62
campo magnético, 296
 circulación del, 326
 de una bobina, 319, 371
 de un conductor recto y largo, 305, 333
 de un segmento de conductor recto, 301
 de un solenoide, 320, 336
 de un toroide, 338
 de una espira cuadrada, 307
 de una espira en forma de circunferencia, 317
 de una espira en forma de polígono regular, 313
 en el eje de una espira circular, 321
 esquemas de, 329 a la 332
 flujo de, 340 a la 346
 líneas de, 330
 producido por campo eléctrico variable, 296
 residual, 516
 unidad de, 290, 297
capacitancia, 115
 de dos cilindros coaxiales, 162
 de dos esferas concéntricas, 117
 de dos placas paralelas, 116
 de una esfera conductora, 119
 de un cable coaxial, 169, 179
 de un cable dúplex, 179
 equivalente, 130, 133
 lineal, 121
 unidad de, 115
capacitor, 114, 115
 clasificación de, 120
 conexión en paralelo de, 128
 conexión en serie de, 130
 energía almacenada en un, 125
 lineal, 121
 símbolo del, 120
 variable, 122
 voltaje máximo de un, 175, 176
carbono, 196
carga eléctrica, 1
 cuantización de la, 3

de prueba, 16
 del electrón, 3, 103, 346
 del protón, 3, 103
 densidad lineal de, 16
 densidad superficial de, 16
 densidad volumétrica de, 16
 elemental, 3
 imagen, 100
 inducida, 5, 140, 145
 magnética, 506
 por inducción, 131
 portadores de, 181
 principio de conservación de la, 188
 puntual, 6, 103
 tipos de, 3
 unidad de, 7
 cátodo, 225
 celda química, 221
 primaria, 221
 secundaria, 221
 ciclo de histéresis, 517
 cilindros, campo eléctrico entre, 110
 circuito, 233
 acoplados magnéticamente, 439
 de corriente alterna, 250
 de corriente directa, 243
 magnético, 520
 RC, 264
 RL, 458
 circulación, 48
 de la intensidad de campo magnético
 (H), 504
 de la magnetización, 502
 del campo eléctrico, 50, 425
 del campo magnético, 326
 coeficiente de variación de resistivi-
 dad, 199
 coercitividad, 517
 conductividad, 190
 conductores, 4, 192
 conexión en paralelo, 128, 214
 conexión en serie, 130, 212
 conmutador, 412
 conservación de la carga, 188, 237
 conservación de la energía, 219, 240,
 382, 399
 en el campo magnético, 382
 constante de tiempo
 capacitiva, 268
 inductiva, 460
 constantes dieléctricas, 146
 constantes magnéticas, 511
 corriente eléctrica, 184
 alterna (ca), 186, 250
 continua (cc), 186
 de magnetización, 501
 densidad de, 183

directa (cd), 187
 inducida, 383
 remolino, 400
 rms, 257
 superficial, 186
 unidad de, 184
 Coulomb, Ch. A. de, 6
 coulomb, 7
 ley de, 8
 cuantización de la carga, 3
 Curie, temperatura de, 496
 curva de magnetización, 514, 525, 526

D

densidad de carga
 lineal, 16
 superficial, 16, 147
 volumétrica, 16
 densidad de corriente, 183
 unidad de, 184
 densidad de energía
 en un campo eléctrico, 123, 127
 en un campo magnético, 448
 unidad de, 127
 densidad de flujo magnético, 291
 derecha, regla de la mano, 330, 383
 desplazamiento eléctrico, 151
 unidad de, 154
 deuterio, 549
 devanado, 320
 diamagnetismo, 491
 dieléctricos, 140
 constantes de los, 146
 y la ley de Gauss, 147, 159
 diferencia de potencial eléctrico, 63
 dipolo
 eléctrico, 142
 eléctrico inducido, 143
 magnético, 363
 dipolo y momento dipolar
 eléctrico, 142
 magnético, 355
 divergencia
 del campo eléctrico, 48
 del campo magnético, 346
 del campo polarización, 158
 teorema de la, 42, 45
 dominios ferromagnéticos, 496

E

ecuación de
 Laplace, 85
 malla, 243

nodo, 245
 Poisson, 85
 efecto
 de puntas, 94
 Hall, 368
 Joule, 206
 efectos magnéticos, 483
 eléctrica, carga, 1
 eléctrico
 campo, 9, 16
 desplazamiento, 151
 dipolo, 142
 electrón
 carga del, 3, 103
 espín del, 489
 electromotriz, fuente de, 217
 electrostática, 1
 energía
 en un campo eléctrico, 125
 en un campo magnético, 446
 en un circuito eléctrico, 208
 potencial eléctrica, 57, 108
 potencial magnética, 366, 432
 unidad de, 125
 energía almacenada
 en un capacitor, 125
 en un inductor, 446
 energía disipada por un resistor, 206
 entrehierro, 523
 equipotencial
 superficie, 84, 94
 volumen, 94
 equivalente
 capacitor, 128, 130
 fuente, 274
 inductor, 454, 457
 resistor, 212, 214
 escobillas, 406, 411
 espectrómetro de masa, 368
 espín del electrón, 489
 espira circular, 317
 espira de corriente, 498
 momento de una, 494
 espira poligonal, 313
 esquemas de campo eléctrico, 28
 esquemas de campo magnético, 329 a la 332
 esterradián, 558

F

factor de acoplamiento, 435
 farad, 115
 Faraday, M., 377
 ley de, 377, 381
 fem (fuerza electromotriz), 217
 contrafem, 414

de las celdas químicas, 221
 de movimiento, 385
 fuente de, 217
 inducida, 378
 ferrimagnéticos, materiales, 497
 ferromagnéticos, materiales, 485
 ferromagnetismo, 495
 flujo
 concatenado, 380, 428
 eléctrico, 30, 31
 magnético, 340 a la 346
 Foucault, corrientes de, 400
 Franklin, B., 3
 fuente de fem, 217
 fuerza
 atractiva, 2, 3
 coercitiva, 516
 contraelectromotriz (cfem), 414
 de Lorentz, 292
 eléctrica, 8
 electromagnética, 292
 electromotriz, 217
 entre polos magnéticos, 536
 magnética, 287, 347
 magnetomotriz, 522
 repulsiva, 3

G

galvanómetro, 361
 Gauss, ley de, 30, 31, 42, 346
 en dieléctricos, 153
 para el magnetismo, 346
 teorema de, 45
 generador de corriente
 alterna, 408, 423
 directa, 411, 423
 generador homopolar, 405, 422
 gradiente de potencial eléctrico, 83

H

Hall, efecto, 368
 voltaje de, 368
 Helmholtz, bobinas de, 371
 Henry, J., 378
 henry, 428
 histéresis, ciclo de, 517

I

imágenes, método de, 99
 imán, 378
 inducción de carga, 5, 140
 inducción electromagnética, 377

ley de Faraday de la, 380
 inductancia, 425
 auto, 426, 427
 de un cable coaxial, 452
 de un cable dúplex, 452
 de un conductor recto y una espira,
 441
 de un solenoide, 435
 de un toroide, 437
 mutua, 426, 430, 439
 propia, 426, 427

unidad de, 428
 inductores, 430
 en paralelo, 453, 457
 en serie, 453, 455
 energía en un, 446
 símbolo de, 430
 integral de línea, 48
 del campo eléctrico, 58
 del campo magnético, 325
 integral de superficie, 30
 del campo eléctrico, 31
 del campo magnético, 341
 intensidad de
 campo eléctrico, 9
 campo magnético, 503
 corriente eléctrica, 184
 polo magnético, 346
 ionés, 227

J

Joule, ley de, 202, 206

K

Kirchhoff, leyes de, 237
 ley de corrientes de, 237
 ley de voltajes de, 240

L

Laplace, ecuación de, 85
 Lenz, H.F., 381
 Lenz, principio de, 381
 ley de
 Ampere, 325, 503
 Biot-Savart, 298, 300
 Coulomb, 8
 Faraday, 377, 381
 Gauss, 30, 31, 42, 153, 346
 Joule, 202, 206
 Kirchhoff, 237, 240
 Lenz, 381

Ohm, 190
 líneas de campo
 desplazamiento eléctrico, 154
 eléctrico, 28
 intensidad de campo magnético, 508
 magnético, 330
 magnetización, 513
 polarización, 154
 Lorentz, fuerza de, 292
 LR, circuito, 458

M

magnética, fuerza, 287
 magnético
 campo, 291
 circuito, 520
 densidad de flujo, 291
 dipolo, 363
 dominio, 496
 flujo, 340
 intensidad de campo, 503
 materiales, 518
 magnetismo, ley de Gauss del, 346
 magnetización
 circulación de la, 502
 curva de, 515
 de los materiales, 501
 unidad de, 500
 vector de, 500
 mano derecha, regla de la, 290, 330, 383
 marcas de polaridad, 454
 metales, 194
 resistividad de, 200
 método de imágenes, 99
 método de Maxwell, 243
 moléculas
 no polares, 142
 polares, 143
 momento
 dipolar eléctrico, 142
 dipolar magnético, 355, 360
 sobre una espira, 359
 motor de corriente directa
 con excitación compuesta, 416
 con excitación en paralelo, 415
 con excitación en serie, 414
 principio de operación del, 411
 movilidad, 182
 movimiento, fem de, 385
 mutua, inductancia, 426, 430, 439
 Nerst, H.W., 222

nodo de un circuito, 234
principal, 234, 236
nomenclatura en circuitos, 233
norte magnético, 330

O

Oersted, H.C., 285
Ohm G.S., ley de, 189
ohmetro, 262

P

par magnético, 358
paralelo, conexión en, 128
paramagnetismo, 494
partícula alfa, 367
permeabilidad magnética; 511
del vacío, 300
diferencial, 542
relativa, 511
permitividad eléctrica, 149
del vacío, 7
relativa, 148
placas paralelas
campo eléctrico entre, 79
capacitor de, 116
plano cargado, campo de un, 36
Poisson, ecuación de, 85
polaridad, marcas de, 454
polarización, 140
eléctrica, 145
unidad de, 145
vector de, 145
polos magnéticos, 286, 506
potencia eléctrica, 206
en fuentes de fem, 220
en resistores, 206
potencial eléctrico, 57, 62
cálculo del, 64, 65, 69
de electrodo, 222
de referencia, 66
dentro de un conductor, 81, 94
diferencia de, 62
gradiente de, 83
unidad de, 62
potenciómetro, 207
principio de conservación de la carga, 188, 213
principio de conservación de la energía, 219
principio de superposición, 12
proceso cuasiestático, 58, 61
propiedades magnéticas de la materia, 483

prueba, carga de, 16
puntas, efecto de, 94

Q

quántum (cuanto), 3

R

radián, 558
rama de un circuito, 234
principal, 234, 236
RC, circuito, 264
constante de tiempo, 268
regla de la mano derecha, 290, 330, 383
reluctancia, 521
conexión en paralelo de, 534
conexión en serie de, 527
unidad de, 522
reóstato, 207
resistencia eléctrica, 192, 206
disipación de energía en una, 206
equivalente, 212, 214
interna, 217
unidad de, 192
variación de, 199
resistividad, 190
coeficiente de variación de, 199
de aislantes, 201
de metales, 200
de semiconductores, 201
unidad de, 190
resistor, 206
conexión en paralelo, 211, 214
conexión en serie, 211, 212
equivalente, 212, 214
símbolos del, 207
retentividad, 517
rigidez dieléctrica, 149, 195
RL, circuito, 458
rotacional del campo
desplazamiento eléctrico, 159
electrostático, 57
Rowland, anillo de, 486, 514
ruptura, campo de, 150

S

saturación magnética, 515
semiconductores, 4, 195
banda de conducción, 195
banda de valencia, 195
resistividad de, 201
zona prohibida, 195

semipila, 221
 silicio, 195
 solenoide
 autoinductancia del, 435
 campo magnético del, 320
 energía del, 446
 Stokes, teorema de, 53, 57, 329
 superconductividad, 200
 superficie equipotencial, 84
 superficie gaussiana, 34
 superposición, principio de, 12
 sur, polo magnético, 330
 susceptibilidad
 eléctrica, 146
 magnética, 509
 unidad de, 146

T

tabla de
 fuentes de fem, 217
 permeabilidades relativas, 524
 potenciales de electrodo, 224
 propiedades de sustancias dieléctricas, 150
 propiedades magnéticas, 519
 resistividad de aislantes, 202
 resistividad de metales y aleaciones, 200
 resistividad de semiconductores, 201
 susceptibilidad magnética, 510
 temperatura de curie, 497
 Tales de Mileto, 1
 temperatura de Curie, 496
 teorema de
 Gauss, 42, 45
 Stokes, 53, 57, 329
 tercera ley de Newton, 296
 termistor, 230
 Tesla, N., 291
 tesla, 291
 tiempo, constante de
 circuito RC, 268
 circuito RL, 460
 toroide
 autoinductancia del, 437
 campo magnético del, 338
 trabajo al orientar un dipolo, 364
 trabajo y diferencia de potencial, 68
 transformador, 393, 398, 421, 470, 545
 tubo de rayos catódicos, 293

U

unidades eléctricas, 7, 9, 62, 115, 127, 145, 146, 154, 184, 190, 192

unidades magnéticas, 290, 291, 428, 500, 522

V

valencia, banda de, 193
 valor eficaz, 257
 vector
 área, 30
 campo eléctrico, 9, 16
 campo magnético, 291
 densidad de corriente, 183
 desplazamiento eléctrico, 151
 intensidad de campo magnético, 500, 503
 magnetización, 500
 momento dipolar eléctrico, 142
 momento dipolar magnético, 355
 polarización, 145
 velocidad promedio, 182
 vectorial, campo, 9, 42, 291
 velocidad promedio de portadores de carga, 182
 volt, 62
 Volta, A., 181
 voltaje, 63
 de Hall, 368
 de ruptura, 150
 eficaz, 257, 404
 máximo, 251
 voltímetro, 261

W

watt, 205
 weber, 291
 weber vuelta, 428

Z

zona prohibida, 193