UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

FASCICULO 2

SISTEMAS DE UNIDADES

JOSE YURRIETA VALDES
MIGUEL M. ZURITA ESQUIVEL

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MECANICA

FI/DCB/86

SISTEMAS DE UNIDADES

CONTENIDO

2. SISTEMAS DE UNIDADES. 1

2.1 BREVE RESEÑA HISTORICA DE LA MEDICION. 1

2.2 CONTAR Y MEDIR. 6

2.3 EL PROCESO DE MEDIR. 9

2.4 PROBLEMAS DERIVADOS. 12

2.5 MAGNITUDES FISICAS 14

2.6 UNIDADES Y SISTEMAS DE UNIDADES. 26

2.7 INSTRUMENTOS DE MEDIDA. 64

2.8 METODOS DE MEDIDA. 68

2.9 CONCLUSIONES. 70

2.10 PROBLEMAS PROPUESTOS 72

2.11 SOLUCION DE PROBLEMAS PROPUESTOS 78

BIBLIOGRAFIA. 81

P R O L O G O

Uno de los aspectos más notables de la ciencia en general, es el carácter acentuadamente cuantitativo de su contenido teórico.

La ingeniería, medio por excelencia para aplicar el conocimiento científico a los problemas tecnológicos inherentes al desarrollo de las sociedades históricamente determinadas, constituye el área en la cual es imperativo ineludible que los planteamientos pertinentes se manejen en términos, expresamente cuantitativos.

Así, la realización de cada actividad dentro de la ingeniería implica llevar a cabo procesos, tanto de estimación numérica como de medición de las variables involucradas. Evidentemente, dichos procesos están en correspondencia con el enfoque típico para elaborar soluciones viables en los distintos campos de la ingeniería: empleo de métodos eficientes, de índole convergente, que a través de aproximaciones sucesivas conformen respuestas satisfactorias u óptimas, para las cuestiones técnicas de que se trate.

Dentro de los procesos señalados destaca, intensamente, la elección del sistema de unidades de medición idóneo.

En general, esta elección así como los procesos citados, se encuentran directamente condicionados por los puntos de vista teórico-científicos adoptados sobre campos específicos de conocimiento. En efecto, de cada paradigma científico, en el sentido asignado por T.S. Kuhn, se derivan problemas de cuantificación que son función de su estructura, e inversamente: anomalías detectadas por la observación cuantitativa permiten criticar al paradigma y, eventualmente, obligar a su sustitución.

El Departamento de Mecánica de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería, considera importante que el estudiante de ingeniería pueda alcanzar desde los primeros cursos de su formación profesional, conocimientos sólidos y amplios en relación con los aspectos indicados.

Con esta intención se publíca el presente trabajo, orientado al área de la mecánica, pero situado en un ámbito suficientemente amplio para que los problemas referentes a la cuantificación de variables, de otras disciplinas, puedan ser enfrentados posteriormente, por el estudiante, con criterio técnico y claridad intelectual.

Cabe señalar que en esta publicación, especialmente dedicada a los sistemas de unidades, se señalan aspectos históricos e incluso antropológicos, para enfatizar la naturaleza estructural de las actividades de medición y del empleo de unidades; éstas son ejercicios de cuantificación, con sentido histórico, que en cada estadio están asociadas a paradigmas de conocimiento.

Asimismo, se incluyen conceptos formales, con el nivel apropiado de rigor, sobre estimación y medición de variables, así como respecto a los rubros relevantes asociados.

El tema central, unidades y sistemas de unidades, se presenta con amplitud, en el contexto de los puntos anteriores, anexándose ilustraciones numéricas para facilitar su estudio.

Se concluye con una exposición global referente al empleo de instrumentos de medida, señalándose su función, manejo, ajuste y control; también se alude al importante problema de presencia de errores en toda acción de medición.

Para complementar adecuadamente este fascículo desde el punto de vista pedagógico, se ha agregado una serie de ejercicios de aplicación. La lista de referencias bibliográficas que aparece al final, permite al lector profundizar en cualesquiera de los temas expuestos.

Se aprovecha este espacio para agradecer a los lectores los comentarios y sugerencias que puedan aportar para enriquecer el contenido de futuras impresiones de este trabajo, o para corregir las posibles deficiencias de la presente.

2. SISTEMAS DE UNIDADES

2.1 BREVE RESEÑA HISTORICA DE LA MEDICION

El hombre, a través del tiempo, siempre ha tratado de medir los diversos objetos que se encuentran en su entorno lo que conduce a plantearse, mental y prácticamente diversas preguntas de las cuales algunas están relacionadas con la medición.

Las antiguas civilizaciones se enfrentaron ya, a este problema.

Las mediciones lineales, como las que se realizaban para obtener la distancia entre dos poblaciones, se encuentran entre las primeras que necesitó y empleó el ser humano. Las primitivas unidades de longitud correspondían a las diferentes partes del cuerpo humano. El hombre fue su propia vara de medición; y, en consecuencia, algunas de las unidades de longitud usadas enlas antiguas civilizaciones fueron: el codo, la ulna o cúbito, la palma, el palmo, el dígito, el pie y la mano.

Todas estas unidades eran muy variables, pero se relacionaban entre sí del mismo modo como se relacionan las actuales.

Las distancias mayores eran medidas por el paso o la braza. Los romanos designaron con el nombre de milla a una distancia equivalente a mil pasos. Los egipcios antiguos usaban la longitud de los brazos extendidos, equivalente a un poco menos de seis pies, a la que dieron el nombre de braza, todavía usada en la actualidad en mediciones naúticas.

En Inglaterra, durante la alta Edad Media, existió muy escasa uniformidad en lo referente a las diversas medidas. Las unidades pequeñas de longitud fueron el pulgar, el palmo, el codo, el ell, el pie, la yarda y el paso; estas unidades, entre otras, sufrieron modificaciones a raíz de la conquista normanda en 1066.

En forma semejante, se originó la yarda, palabra derivada del antiguo vocablo inglés yerde, que significa vara. Cuenta la leyenda que la longitud de la yarda fue fijada por el rey Enrique I, llamado Beaudere, como la distancia comprendida de la punta de su nariz al extremo del pulgar de su brazo derecho extendido.

Para distancias mayores los ingleses usaban unidades de tiempo - trabajo, como la jornada, equivalente a un día de marcha o a una mañana arando, o el furlong, derivado del anglosajón furlang, que significa *longitud de un surco*, sin embargo, las medidas resultaban anárquicas. Hacia el año 1500, las diferentes medidas inglesas de longitud eran:

3	granos de cebada	=	1 pulgada
12	pulgadas	=	1 pie
3	pies	=	1 yarda
4	pulgadas	=	1 mano
9	pulgadas	=	1 palmo
5	palmos	=	1 ell
125	pasos	=	1 furlong (común)
$5\frac{1}{2}$	yardas	=	1 vara inglesa
40	varas	=	1 furlong (estadio)
8	furlongs (estadios)	=	1 milla
6	pies	=	1 braza
12	furlongs (estadios)	=	1 legua

Otro caso de medición, es el referente a la determinación de áreas o superficies. Matemáticamente, el área se define como el tamaño de una región; y, con el transcurso de los años, se ha encontrado que las regiones más convenientes para ser usadas como unidades de área o de superficie son las regiones cuadradas cuyos lados miden lo que una unidad de longitud usual, como el centímetro, la pulgada, el metro, el pie, el kilómetro o la milla; que dan lugar respectivamente al centímetro cuadrado, a la pulgada cuadrada, al metro cuadrado, al pie cuadrado, al kilómetro cuadrado y a la milla cuadrada.

Una de las unidades más antiguas, y aún en uso, para medir tierras es el acre; que equivale, actualmente a 43 560 pies cuadrados. En un principio el acre se tomó como la superficie que se ara en una mañana. En Inglaterra, el acre resultaba igual a cuatro varas por furlong.

Otra medición importante, históricamente considerada, es la de los ángulos; y es casi seguro que el hombre primitivo midió ángulos mucho antes que longitudes. Mucho después, el número de días contenidos en un año fue conocido por los babilonios, cuyo año tenía 360 días; por los egipcios que empleaban el año de 365 días -12 meses de 30 días más cinco días festivos- y por los mesoamericanos que tenían un año de 18 meses de 20 días cada uno más cinco días complementarios.

Se dice que el grado -derivado del latín gradus, que significa paso o marcha- como unidad angular de medida, tuvo su origen en estas 360 divisiones de la jornada solar anual durante su movimiento de translación aparente alrededor de la Tierra. Además, diversos vestigios mesopotámicos nos muestran también que los babilonios ya poseían algunos instrumentos, semejantes al astrolabio o al teodolito, que les permitían medir, rudimentariamente, la altura de los astros -ángulo que forma la visual dirigida a alguno de ellos con el horizonte-. Desde luego, también medir un ángulo es asignarle un número concreto, como en el caso de longitudes o de áreas y la unidad de medida acostumbrada fue precisamente el grado. Sólo los griegos, que tal vez tomaron la costumbre de Persia, solían usar la 1/360 parte de una circunferencia como unidad de medida de arcos; y el ángulo central que subtiende a dicho arco unitario lo emplearon como unidad de medida angular, a la que llamaron, precisamente grado.

En lo concerniente a otras mediciones, tales como la capacidad, el volumen y la masa, existe también abundante material histórico; pero consideramos que, en esta breve reseña, no es necesario profundizar mayormente para concluir que:

1. El problema de la medición es tan antiguo como la humanidad misma.

2. El mismo problema reconoce como punto de partida la medida de longitudes.

3. Ha existido, en el curso del tiempo, demasiada anarquía en el uso de las diferentes unidades de medida.

4. Dichas unidades fueron siempre arbitrariamente definidas, convencionalmente aceptadas y autoritariamente impuestas.

En el año de 1789, en Versalles, los Estados Generales de Francia se abocaron a tratar el problema de las mediciones, encontrándose que, para esa época, los diferentes sistemas de medidas usados adolecían de tres defectos principales:

1. La *inestabilidad* en el tiempo, ya que el valor de una unidad cualquiera podía cambiar, sin justificación, de una época a otra.

2. La *variabilidad*, puesto que una misma unidad adquiría valores distintos según los diferentes países y, en ocasiones según las diversas regiones de cada país.

3. La *complejidad*, debido a que los valores de unidades homogéneas no guardaban entre sí, por lo regular, relaciones sencillas.

El 9 de mayo de 1790, la Asamblea Constituyente francesa decretó la supresión de las antiguas unidades de medida y ordenó la creación de un nuevo sistema que fuera estable, uniforme y racional; confiando a la Academia de Ciencias de París, el estudio y la solución del problema. Esta famosa institución integró una comisión la cual decidió la creación de un sistema de medición decimal; que las medidas de diferentes especies fueran referidas todas, en lo posible, a la unidad de longitud, y que dicha unidad fuera una fracción determinada del meridiano terrestre, ya que en esta forma resultaba una *unidad de medida natural, invariable, cuya determinación no tiene nada de arbitrario ni de particular con referencia a ningún país del globo.*

El meridiano fue calculado, cuidadosamente, en 5,130,740 toesas (antigua unidad francesa de longitud) y la nueva unidad, a la que se dio el nombre de metro -del griego metron, que significa medida-, fue definida como la diezmillonésima parte de dicha longitud. Con estos datos se construyó un prototipo al que se dio el nombre de *metro talón*.

El nuevo sistema se denominó *Sistema Métrico Decimal*; y el 11 de julio de 1903 se establecieron, legalmente, las unidades fundamentales del mismo, asentándose que: *Los prototipos del Sistema Métrico son el Metro Internacional y el Kilogramo Internacional.*

Sin embargo, multitud de experiencias demostraron que este sistema era insuficiente, a pesar de poseer tan relevantes cualidades, debido a que carecía de flexibilidad para enfrentar los nuevos progresos científicos. Con el tiempo el Sistema Métrico fue reemplazado por el nuevo *Système International (SI)*. El cual constituye fundamentalmente, una ampliación del sistema propuesto en el siglo XVIII, con el objeto de incorporar los nuevos desarrollos científicos y tecnológicos del siglo veinte. En la Undécima Conferencia General sobre Pesas y Medidas, celebrada en París en octubre de 1960, se formularon las bases para integrar, en forma totalizadora, el nuevo Sistema Internacional de Unidades (SI) el cual, a partir de 1970, ha sido adoptado por casi toda la comunidad internacional, con la excepción de los Estados Unidos de Norteamérica que siguen utilizando su viejo Sistema Usual (SU), no coincidente ni con el Sistema Métrico ni con el antiguo Sistema Inglés. Esta deplorable intransigencia norteamericana nos obliga, todavía, al uso de muchas equivalencias para transformar unidades SI en unidades SU, y recíprocamente, tal como lo exige la práctica consuetudinaria tanto científica como tecnológica.

Nuestro país, en lo particular, ha adoptado como oficial el Sistema Internacional de Unidades (SI), de acuerdo con la NORMA OFICIAL MEXICANA. *Sistema General de Unidades de Medida. Sistema Internacional de Unidades (SI).* (Nom-z-1-1981) dándole un carácter obligatorio, de orden público y de jurisdicción federal; aunque, por razones obvias, todavía se emplean, principalmente en las áreas industrial, comercial y educativa entre otras, diversas unidades que han dejado de tener vigencia en México, pero que se usan por necesidad o por costumbre, principalmente.

Finalmente, para ilustrar esta breve reseña histórica, a continuación se presentan algunas equivalencias selectas entre las diversas unidades usadas en diferentes países y las unidades del Sistema Internacional.

TABLA DE UNIDADES ANTIGUAS DE MEDICION

Nombre de la unidad	Valor en Unidades (SI)	País en que se usaron
Arroba	144.0 N	España
Braza	1.67 m	España
Codo bíblico	0.4572 m	Hebreos
Codo real egipcio	0.5243 m	Egipto
Codo olímpico	0.4633 m	Grecia
Estadal	3.35 m	España
Furlong	201.168 m	Gran Bretaña
Galón	0.003 785 m^3	Estados Unidos
Legua	5572.0 m	España
Onza líquida	0.000 2841 m^3	Gran Bretaña
Palmo	0.2286 m	Gran Bretaña
Pinta	0.000 4732 m^3	Estados Unidos
Quintal	46.0 kg	España
Toesa	1.949 m	Francia
Vara	0.836 m	España
Versta	1.067 m	U.R.S.S.
Galón	0.004 546 m^3	Gran Bretaña
Pinta	0.000 5683 m^3	Gran Bretaña
Estadio alejandrino	157.50 m	Egipto
Estadio olímpico	192.0 m	Grecia

2.2 CONTAR Y MEDIR

El entorno natural, en su limitado proceso de creación, propuso al hombre, en su oportunidad, dos conceptos que éste asimiló intuitivamente: el de individuo -yo- y el de especie -nosotros-; es decir, los conceptos de unidad y de pluralidad.

Poco más tarde, gracias a la aceleración del desarrollo social y al advenimiento de la propiedad privada, los hombres dedicados a la caza y a la domesticación de animales, así como los pastores, por necesidad, inventaron el *proceso de contar*.

En este proceso destacan, desde luego, las siguientes características:

1. El conjunto por contar es un conjunto perfectamente concreto.
2. La unidad empleada como unidad de cuenta es también una unidad natural y concreta.
3. El elemento representativo de cada individuo es, igualmente, concreto y único.

Con el transcurso del tiempo, la abstracción simplificadora se apoderó del proceso de contar, se inventaron los números como características distintivas de los conjuntos coordinables y, se les dieron nombres adecuados a partir del uso de los dedos o dígitos.

En esta forma había nacido el proceso aritmético de contar, el cual exigía la existencia de una pluralidad de la misma especie que debía ser contada; la de un individuo perteneciente a ella elegido como unidad de cuenta; y la de un conjunto de elementos abstractos, los números, que permitían determinar la cantidad de individuos contenidos en la pluralidad dada.

De manera semejante se originó el proceso de medir. En este sentido la naturaleza ofrecía al hombre un marco de referencia para poder responder a las interrogantes: ¿dónde? ¿cuándo?

Pero las respuestas adecuadas a estas cuestiones llevaban, en una forma implícita y desde luego no asequible para el hombre primitivo, la noción de cantidad. Es decir, como ocurrió en el proceso de contar, el descubrimiento del ámbito espacio-temporal exigía por sus características cuantitativas, de otro proceso paralelo a aquél, el proceso de medir que, sin embargo, difería grandemente del de la simple cuenta, tanto en su esencia como en su forma de realización; puesto que el proceso de medir buscaba -y busca- cuantificar rigurosamente determinadas cualidades de los individuos o de los fenómenos, que se encuentran, o que ocurren, en un determinado entorno geográfico el cual, invariablemente encierra al observador y le obliga también a plantearse la pregunta ¿cuánto?; cuya respuesta le permitirá adquirir el conocimiento científico y riguroso de la realidad del universo y del universo mismo, así como de los agentes naturales que actúan en él, y del sistema de referencia espacio-temporal que exige ese conocimiento, evolutivo y desde luego meramente local, que caracteriza la certidumbre del mundo físico.

Puntualizando, el proceso de medir nació de la simple comparación de cierta característica o cualidad, presente en todos los individuos de una pluralidad, que presentaba variaciones cuantitativas importantes que los diferenciaban entre sí. Con posterioridad, se amplió para cuantificar en forma semejante, las propiedades del espacio, sus dimensiones, sus distancias, que constituyeron el objeto de las geometrías primitivas; así como el transcurrir del tiempo, el cual representó siempre una dimensión incontrolable y diferente de aquellas fundamentalmente objetivas. Mucho tiempo después, el mismo proceso se aplicó para conocer, también cuantitativamente, las características de los diferentes agentes físicos que actúan en los diversos fenómenos que ocurren continuamente en la naturaleza; al grado de que el objetivo fundamental de la Física, en los tiempos de su consolidación definitiva, fue precisamente el de medir, con la mayor aproximación posible, la acción de dichos agentes, a través de sus efectos para poder caracterizarlos y definirlos adecuadamente.

En fin, el proceso de medir se convirtió en el objetivo principal de las ciencias físicas hasta casi la segunda mitad del siglo XIX. A partir de entonces, y con bases en la medición perfeccionada, los científicos pudieron dirigir sus esfuerzos en otras direcciones para definir, analizar y explicar la esencia de determinados agentes causales, así como sus relaciones, tanto cualitativas como cuantitativas, con otros agentes diferentes, las cuales caracterizan finalmente la función universal.

En el proceso de medir, destacan fundamentalmente, los siguientes rasgos:

1º La propiedad o dimensión por medir es definitivamente objetiva, pero no concreta. Por ejemplo: la distancia, el peso, la deformación, la temperatura, etc.

2º La unidad empleada como unidad de medida es también una unidad objetiva, pero elegida siempre en forma convencional. Por ejemplo: el metro, la libra, los grados, el segundo, etc.

3º La medida constituye siempre un número concreto, es decir, un número cualquiera pero con unidades. Por ejemplo: 12 m, 35 kg, 40°C, 120 Cd, etc.

En otras condiciones, el proceso de medir se volvería abstracto y, de hecho, se convertiría en un simple proceso aritmético de contar, el cual sería incapaz de caracterizar la realidad objetiva de la ocurrencia de un fenómeno cualquiera, cuya naturaleza es perfectamente concreta, como lo han comprobado siempre las ciencias físicas a todo lo largo de su evolución cognoscitiva.

2.3 EL PROCESO DE MEDIR

En general, cualquier medida comienza con la definición de una cantidad, de una condición, de una propiedad o de cualquiera otra característica, la cual debe ser objeto de una precisa determinación. Así, se establece entonces la idea de *magnitudes*, idea que puede definirse en forma conceptual o en forma operacional.

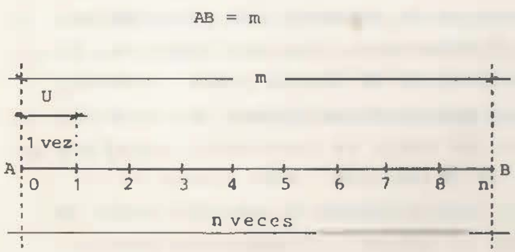
Si la definición es conceptual, entonces debe ser transformada en definición operacional como una preparación para la medida. Esto es, debe ser expresada en términos de una secuencia de pasos u operaciones que sean capaces de describir un procedimiento para realizar la medida. Precisamente, los instrumentos de medida constituyen la materialización de dichos pasos operacionales. Por otra parte, si una magnitud cualquiera no está totalmente definida, el proceso de medir se convierte, por sí mismo, en una parte esencial de la definición; como ocurre en el caso de la dureza, en el cual varias clases de escalas están, cada una de ellas, definidas por el método o dispositivo particular usado para medirla. Sin embargo y en general, la conversión de una definición conceptual de cualquier magnitud en una definición operacional no es perfecta; y consecuentemente, dicha magnitud definida por el proceso de medir difiere, a veces, grandemente, de la magnitud ideal propuesta.

La información contemplada por *el proceso de medir es siempre una comparación de la magnitud por medir con una referencia cuantitativa de la misma especie, llamada unidad.* Si una serie escalonada de unidades, de todos los tamaños posibles, se encuentra disponible, la comparación de la magnitud con su unidad de referencia se reduce a demostrar que dicha magnitud es igual, en valor, a un elemento particular del conjunto de valores de referencia. Recíprocamente, esa magnitud puede ser, a su vez, subdividida en partes iguales, de tamaño uniforme, como el correspondiente a la unidad de medida; y entonces el número de semejantes partes puede ser contado. Ejemplos de las unidades de referencia escalonadas son la subdivisión del metro o de la yarda en centímetros o pulgadas respectivamente, y su multiplicación en kilómetros o millas.

Es decir, medir es establecer una proporción geométrica entre los siguientes términos:

1. La magnitud por medir.
2. La unidad de medida.
3. El número de veces que la magnitud contiene a la unidad.
4. El número de veces que la unidad se contiene a sí misma, que, siempre es uno.

Así, para una magnitud familiar como la longitud o la temperatura, se tiene:



u = unidad
m = magnitud
n = número de veces que u cabe en m.

Figura 2.1

En estas condiciones, por comparación geométrica de segmentos, se establece la proporción:

$$\frac{m}{n} = \frac{u}{1}$$

que se expresa por la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & u \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix} = 0$$

llamada *matriz o tensor de medida* válida para una magnitud cualquiera. Resolviéndola se tiene que:

(1)	$m - nu = 0$	define el proceso de medir
(2)	$m = nu$	define la medida
(3)	$n = \frac{m}{u}$	define la medición

Obsérvese que la medida y la medición se expresan por el mismo número, pero en tanto que la medida es concreta la medición es abstracta.

La teoría de la medida, no bien conformada hasta ahora, afronta tres problemas fundamentales:

1. *Problema de representación.*- Consiste en la exigencia de justificar la asignación de números a objetos o fenómenos; es decir, reside en el paso de las operaciones y procedimientos empíricos a la representación numérica de los mismos.

2. *Problema de exclusividad.*- Consiste en la exigencia de que la medida tenga una representación única, es decir, que sea, con toda certeza, la única posible representación de su tipo, puesto que, elegidas convenientemente las unidades respectivas, la exclusividad de la medida tiene importantes consecuencias en el manejo de datos. Este problema está íntimamente relacionado con el análisis dimensional.

3. *Problema de error.*- Consiste en la exigencia de que cualquier medida física significativa debe reportarse siempre junto con alguna indicación sobre el error probable que presenta; ya que muchas leyes y teorías se comprueban al ser confirmadas en los errores de medida, como ocurrió con la Teoría General de la Relatividad.

Actualmente la teoría de la medida se ha desarrollado sobre bases axiomáticas, estableciendo:

a) Axiomas de orden
b) Axiomas de extensión
c) Axiomas de diferencia
d) Axiomas de asociación
e) Axiomas de geometría

pero el estudio de esta axiomática se encuentra fuera de los límites de este fascículo, cuya exigencia de medidas no es muy grande, y por lo mismo, no requiere de gran profundidad.

2.4 PROBLEMAS DERIVADOS

El desarrollo de los conceptos centrales de la Física Clásica, tales como los conceptos mecánicos de masa, fuerza, momento y energía cinética; o de los conceptos electromagnéticos de intensidad de corriente, diferencia de potencial eléctrico, resistencia e impedancia; ha estado estrechamente relacionado con el desarrollo de procedimientos para medir, cuantitativamente, las propiedades de los fenómenos asociados con cada uno de esos determinados conceptos. La teoría y la práctica de la medida extensiva; así como el análisis de dimensión y de unidades han sido desarrollados, principalmente, en el contexto de la Física Clásica.

Una de las más importantes actitudes con respecto a la medida en la Física Clásica, fue la creencia, firmemente enraizada, de que, con suficiente esfuerzo, los errores de medida podían ser eliminados en principio; que no existía limitación alguna en la precisión de las medidas; y, consecuentemente, en la exactitud con la cual las teorías podían ser establecidas a partir de la comprobación de su validez. Aunque la Física Clásica continúa siendo de la mayor importancia en la ciencia aplicada, actualmente una actitud mucho más cautelosa con respecto a la medida se ha vuelto práctica acostumbrada. Así, en las aplicaciones de la teoría electromagnética clásica, por ejemplo, es usual imponer un límite inferior para definir la mínima longitud admisible que puede ser considerada; y, en este sentido, una restricción típica es la de conservar todas las longitudes mayores que un diezmilímetro para evitar cualquier efecto atómico o subatómico que pudiera corresponder, propiamente, a los campos de estudio específicos de la Física Cuántica. Otro tanto ocurre con ciertas aplicaciones termodinámicas que, generalmente, pertenecen al dominio de la Teoría de los Cuantos.

En estas condiciones, en la Física Clásica el proceso general de medir da origen a cuatro problemas derivados, o subproblemas, que se encuentran siempre presentes en el contexto de cualquier medida. Estos problemas, que se pueden plantear interrogativamente, son los siguientes:

1. ¿Qué se va a medir?
   El problema de las magnitudes físicas o dimensiones, y el del análisis dimensional.
2. ¿En qué se va a medir?
   El problema de unidades y el de los sistemas de unidades de medida.
3. ¿Con qué se va a medir?
   El problema de los instrumentos de medida.
4. ¿Cómo se va a medir?
   El problema del uso de aparatos, y de los métodos de medida.

Cada uno de estos problemas es específico, y debe tratarse en forma separada de los demás.

2.5 MAGNITUDES FISICAS

Las leyes de la ciencia están basadas en ciertas características de los sistemas y procesos físicos que siempre pueden ser medidas. Estas características, que generalmente representan agentes físicos, son colectivamente llamadas *magnitudes o dimensiones*. Las medidas especiales de un objeto, tales como su longitud, su anchura y su altura, son dimensiones que caracterizan el tamaño del objeto. El intervalo de tiempo entre dos eventos es también otra dimensión. La intensidad de la corriente eléctrica que fluye a través de un conductor también puede ser medida y, por lo tanto, la corriente eléctrica puede ser identificada como una magnitud física o dimensión.

Ciertos tipos de dimensiones suponen una naturaleza más fundamental en el sentido de que pueden ser usadas para describir todas las otras relaciones físicas. Así por ejemplo, un cierto conjunto de semejantes dimensiones fundamentales está compuesto por las siguientes:

Longitud	=	(L)
Masa	=	(M)
Tiempo	=	(T)
Intensidad de corriente eléctrica	=	(I)
Temperatura termodinámica	=	(θ)
Cantidad de substancia	=	(N)
Intensidad luminosa	=	(I_V)

Obsérvese que, para designar a cada una de estas dimensiones fundamentales, se ha escogido como símbolo una letra latina generalmente mayúscula de molde, a excepción de la temperatura que se designa por la letra griega θ.

Todas las demás dimensiones que caracterizan a las cantidades físicas pueden ser obtenidas, por combinación, de semejantes magnitudes fundamentales. Nos referimos a ellas como magnitudes o dimensiones derivadas; y para obtenerlas debe realizarse un cierto proceso de cálculo, a partir de una definición o de una ley física, que recibe el nombre de *Análisis dimensional*, el cual será descrito con posterioridad. A continuación se presenta una tabla que contiene un conjunto de dimensiones fundamentales y ejemplos de dimensiones derivadas.

DIMENSIONES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS

DIMENSIONES FUNDAMENTALES DEL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)	SIMBOLO	DIMENSIONES DERIVADAS	SIMBOLO
Longitud	L	Velocidad	L/T , LT^{-1}
Masa	M	Aceleración	L/T^2 , LT^{-2}
Tiempo	T	Area	L^2
Intensidad de corriente eléctrica	I	Densidad	M/L^3 , ML^{-3}
Temperatura termodinámica	θ	Fuerza	ML/T^2 , MLT^{-2}
Cantidad de substancia	N	Energía y Trabajo	ML^2/T^2 , ML^2T^{-2}
Intensidad luminosa	I_V	Potencia	ML^2/T^3 , ML^2T^{-3}

Resulta ventajoso el menor número de dimensiones fundamentales que sea posible. Pero desde luego, la selección de cual debe ser una dimensión fundamental y cual debe ser considerada como derivada no es única o exclusiva. Un *Sistema de dimensiones o sistema dimensional* puede ser definido como el menor número de dimensiones fundamentales que es capaz de formar un conjunto consistente y completo para ser usado en determinado campo de interés. Por ejemplo, en Mecánica solamente tres dimensiones fundamentales son necesarias; pero la selección de estas dimensiones no es exclusiva. Así en un *Sistema Absoluto* de dimensiones la longitud (L), el tiempo (T) y la masa (M) son elegidas como dimensiones fundamentales. La fuerza (F), entonces, debe ser una dimensión derivada (ML/T^2). Sin embargo, en la alternativa representada por un *Sistema Gravitacional*, las dimensiones fundamentales son la longitud (L), el tiempo (T) y la fuerza (F); y la masa (M), como magnitud derivada, queda expresada por (FT^2/L). En ambos casos la relación entre masa y fuerza queda establecida por la *Segunda Ley de Newton* relativa al movimiento, que en su forma escalar se expresa por:

$$F = ma \qquad \ldots (1)$$

pero, en los sistemas absolutos:

$$[m] = [M]$$

$$a = \ell/t^2$$

$$[a] = [L/T^2] = [LT^{-2}]$$

sustituyendo dimensionalmente la masa y la aceleración en la ecuación (1):

$$[F] = [ML/T^2] = [MLT^{-2}]$$

que son las dimensiones absolutas de la fuerza.

Y en los sistemas gravitacionales:

despejando la masa de la ecuación (1):

$$m = \frac{F}{a} \qquad \ldots (2)$$

donde:

$$[F] = [F]$$

$$a = \ell/t^2$$

$$[a] = [L/T^2] = [LT^{-2}]$$

sustituyendo dimensionalmente la fuerza y la aceleración en la ecuación (2):

$$[m] = [M] = [F/L/T^2] = [FT^2/L]$$

por lo tanto:

$$[M] = [FL^{-1}T^2]$$

que son las dimensiones gravitacionales de la masa.

Además, en los cálculos de ingeniería algunas cantidades no tienen dimensiones, por ejemplo, ciertas constantes numéricas como Π ó e. Los ángulos geométricos también carecen de dimensiones, ya que solamente representan un cambio de dirección y no una distancia o longitud; aunque los ángulos se miden tomando la razón entre dos longitudes. Otro ejemplo es el porcentaje, el cual

puede ser expresado como la razón entre dos cantidades caracterizadas por tener las mismas dimensiones. Desde luego, los números abstractos siempre carecen de dimensiones.

a). *Análisis dimensional*.- Como ya se dijo cualquier atributo susceptible de ser medido constituye una dimensión; sin embargo, muchas de esas dimensiones no son independientes, sino que pueden ser expresadas como potencias -funciones potenciales- de otras; circunstancia muy importante que refuerza tanto al método del análisis dimensional como a la existencia de conjuntos coherentes de unidades.

Muchas magnitudes son medibles en forma extensiva; pero, en cambio muchas otras, como la densidad no son extensivas, o sea que son independientes de la masa y, en semejantes casos, una ley puede ser establecida para permitir que la medida no extensiva, o derivada, sea expresada como un producto de potencias de dos medidas extensivas. Esta posibilidad surge de dos hechos empíricos:

1. La masa varía tanto con la substancia como con el volumen; y el manejo que induce sobre los pares substancia-volumen es tal, que una representación asociada multiplicativa existe. Así la medida asociada de substancia puede ser expresada como el producto de la medida de su masa por el recíproco de la medida de su volumen. Estas dos magnitudes, desde luego, tienen medidas extensivas independientes.

2. Una ley cualitativa, conocida como *Ley de Similitud*, relaciona las series de volumen con las de masa a través de la asociación manejada. A partir de esta ley, es posible probar que las medidas asociadas y extensivas son funciones potenciales de alguna otra; por supuesto, en este caso, la medida asociada de substancia es, para una selección apropiada de exponente, simplemente la razón de la medida extensiva de la masa a la medida extensiva del volumen; es decir, la densidad.

En otros casos, como en el de la dependencia de la energía cinética y del moméntum con respecto de la masa y de la velocidad, las componentes asociadas son ambas extensivas; y la ley que las relaciona a través de la asociación manejada constituye una ley de intercambio. Casos interesantes de semejantes leyes parecen involucrar cantidades que introducen principios de conservación, como en el caso del moméntum y de la energía. Además, en cualquier fenómeno, todas las medidas no extensivas de la Física Clásica pueden ser expresadas como productos de potencias de otras medidas sí extensivas. Semejante modelo constituye el usual punto de partida del análisis dimensional.

b). *Constantes universales, materiales y sistémicas*.- En algunas ocasiones dos magnitudes, aparentemente diferentes, no son independientes sino covariantes. En el ejemplo clásico de la masa inercial y de la masa gravitacional, la covariación está descrita por una constante conocida como *Constante de la Gravitacional Universal*. Este caso puede ser comparado con la covariación de dos medidas para sistemas específicos. Por ejemplo, masa y volumen covarían perfectamente para cualquier substancia homogénea; o longitud y fuerza, dentro de ciertos límites, para un resorte específico. Las constantes que describen semejante covariación particular, llamadas constantes materiales o sistémicas, -dependiendo del contexto- constituyen una forma de medida derivada.

Bastantes leyes físicas mucho más complejas pueden ser representadas como combinaciones establecidas de valores -configuraciones- de ciertas dimensiones que pueden ser obtenidas en un tipo particular de sistema físico. Semejantes leyes, como la Ley de Hooke, incluyen no solamente dimensiones medibles del sistema, sino también constantes materiales y sistémicas -el módulo de elasticidad- características del sistema particular en cuestión. Un hecho curioso, y no totalmente explicado, de la teoría física es el principio enunciado en 1914 por el analista norteamericano Edgar Buckingham, llamado *Teorema* Π, de acuerdo con el cual cuando las constantes y las medidas dimensionales de alguna ley física son agrupadas en uno o más términos en los cuales las dimensiones se cancelan, algunas funciones de dichas cantidades adimensionales, llamadas argumentos Π, deben ser iguales a cero para cualquier configuración realizable del sistema.

El análisis dimensional pretende, en parte, establecer una ley física particular suponiendo que tiene el carácter de un teorema Π, y que las constantes y variables relevantes son conocidas. Cuando esto ocurre, condición importante, un cálculo simple permite descubrir todos los términos adimensionales. En muchos casos,

sos, lo anterior proporciona considerable información sobre la ley que describe al sistema. Algunas veces diversas observaciones empíricas, como las que proporciona un túnel de viento, por ejemplo, son usadas para obtener una aproximación, también empírica, de la función desconocida de los argumentos Π.

c). *Teorema* Π.- La independencia de una ley física con respecto al sistema particular de unidades empleado, propiedad llamada a veces de *exclusividad*, está expresada por el *Teorema* Π, que puede ser enunciado en la siguiente forma:

> Si $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ designan a n parámetros físicos y constantes dimensionales contenidos en una ley física, entonces ésta puede siempre ser expresada como una relación funcional de la forma:
>
> $$f(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0$$
>
> o bien, esta relación, a su vez, puede expresarse como:
>
> $$g(\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n) = 0$$
>
> donde cada argumento Π es un producto independiente adimensional de algunas q.

Un resultado importante obtenido del Teorema Π es el llamado *Principio de homogeneidad dimensional*, a menudo mencionado como el principio fundamental del análisis dimensional, que establece:

> *Las dimensiones de los dos miembros de una ley física deben ser iguales*

lo que implica que la ecuación que la expresa es dimensionalmente homogénea.

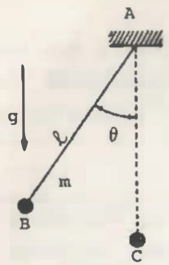
El análisis dimensional tiene dos aplicaciones:

a) Para establecer una ecuación física.

EJEMPLO 2.1

Establecer la ecuación del péndulo matemático:

Elegimos: longitud (L), masa (M) y tiempo (T), como magnitudes fundamentales:



Parámetros físicos	Fórmula dimensional
masa = m	M
longitud = ℓ	L
amplitud = θ	θ
gravedad = g	$L/T^2 = LT^{-2}$
período = T	T

SOLUCION

La amplitud θ es un ángulo y, por tanto, carece de dimensiones; entonces puede establecerse la función:

$$\theta = f(m, \ell, g, T)$$

que, como producto de potencias, toma la forma:

$$\theta = m^{\alpha}\,\ell^{\beta}\,g^{\gamma}\,T^{\delta}\ , \quad \text{según el Teorema } \Pi$$

la cual carece también de dimensiones; por lo que:

$$\text{Si} \quad |\theta| = |\theta^0| = 1$$

$$|m^{\alpha}\,\ell^{\beta}\,g^{\gamma}\,T^{\delta}| = 1$$

o bien, sustituyendo cada parámetro por su fórmula dimensional:

$$M^{\alpha}\,L^{\beta}\,(LT^{-2})^{\gamma}\,T^{\delta} = 1$$

producto que debe ser adimensional. Por lo tanto:

$$M^{\alpha}\,L^{\beta+\gamma}\,T^{-2\gamma+\delta} = 1$$

posible sólo si:

$$M^{\alpha} = M^0 = 1$$
$$L^{\alpha+\gamma} = L^0 = 1$$
$$T^{-2\gamma+\delta} = T^0 = 1$$

de donde se deduce:

$$\alpha = 0 \qquad \ldots (1)$$
$$\beta + \gamma = 0 \qquad \ldots (2)$$
$$-2\gamma + \delta = 0 \qquad \ldots (3)$$

Se tienen tres ecuaciones con cuatro incógnitas, lo que significa que una de ellas debe suponerse arbitrariamente, sin olvidar que es un exponente.

Supongamos entonces que:

δ es la incógnita supuesta

DESARROLLO

De la ecuación (2) despejamos γ:

$$\gamma = -\beta$$

y sustituyendo en la ecuación (3) obtenemos:

$$-2(-\beta) + \delta = 0$$
$$2\beta + \delta = 0$$
$$2\beta = -\delta$$
$$\beta = -\frac{\delta}{2}$$

$$|m^{\alpha}\,\ell^{\beta}\,g^{\gamma}\,T^{\delta}| = 1$$

ahora sustituyendo β en (2):

$$-\frac{\delta}{2} + \gamma = 0$$
$$\gamma = \frac{\delta}{2}$$

entonces las soluciones son:

$$\alpha = 0$$
$$\gamma = \frac{\delta}{2}$$
$$\beta = -\frac{\delta}{2}$$

y en consecuencia:

$$\left[m^0\,\ell^{-\frac{\delta}{2}}\,g^{+\frac{\delta}{2}}\,T^{\delta} \right] = 1$$

o bien, como $m^0 = 1$:

$$\left[\ell^{-\frac{\delta}{2}}\,g^{\frac{\delta}{2}}\,T^{\delta} \right]$$

$$\therefore \quad \left[\ell^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}\,T \right]^{\delta} = 1$$

El Teorema Π establece que la solución es alguna relación funcional entre los dos productos independientes en los cuales la forma funcional es totalmente indeterminada, es decir:

$$F\left[(\ell^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, T)^{\delta},\ \theta\right] = 0 \qquad \text{función adimensional}$$

que puede resolverse como:

$$\ell^{-\frac{1}{2}}\, g^{\frac{1}{2}}\, T = f(\theta) \qquad \text{fórmula adimensional}$$

y despejando al período T, por ser racional:

$$T = f(\theta)\,\ell^{\frac{1}{2}}\, g^{-\frac{1}{2}}$$

o bien:

$$T = f(\theta)\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

donde:

$f(\theta)$: es indeterminada

y que nos dice:

El período de un péndulo matemático es independiente de la masa, proporcional a la raíz cuadrada de la longitud e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la aceleración de la gravedad.

Experimentalmente se obtiene que, para pequeñas amplitudes, $f(\theta)$ tiene, aproximadamente, el valor constante 2π, por lo tanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

que es la ecuación del péndulo matemático.

b) Para determinar las dimensiones de una magnitud cualquiera conociendo cierta ecuación.

EJEMPLO 2.2

Determinar las dimensiones de la potencia.

SOLUCION

En este caso hay dos variantes prácticas que difieren en las dimensiones elegidas como fundamentales.

Variante a.- Elegimos: Longitud (L), masa (M), y tiempo (T) como magnitudes fundamentales.

La ecuación de la potencia es:

$$p = \frac{\tau}{t} \quad \text{(por definición)} \qquad \tau = \text{trabajo mecánico}$$

pero:

$$\tau = \vec{F}\cdot\vec{r}$$

$$\therefore \qquad p = \frac{1}{t}\,(\vec{F}\cdot\vec{r})$$

pero:

$$\vec{F}\cdot\vec{r} = Fr\cos\theta$$

$$\therefore \qquad p = \frac{Fr\cos\theta}{t}$$

que es la ecuación de la potencia, donde $\cos\theta$ es adimensional.

En consecuencia:

Parámetros físicos	Fórmula dimensional
Fuerza = F	$M\,L\,T^{-2}$
Distancia = r	L
Tiempo = t	T

Sustituyendo en la ecuación de la potencia los parámetros por sus fórmulas dimensionales se tiene:

$$[P] = \frac{[MLT^{-2}][L][\theta^0]}{[T]} \quad \text{donde } \theta \text{ es adimensional}$$

$$[P] = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[T]}$$

$$\therefore \quad P = [ML^2T^{-3}]$$

que son las dimensiones absolutas de la potencia.

Variante b.- Elegimos: Longitud (L), fuerza (F) y tiempo (T) como magnitudes fundamentales.

La ecuación de la potencia, independiente del sistema de dimensiones usado, vuelve a ser la anterior:

$$P = \frac{Fr\cos\theta}{t}$$

donde:

$\cos\theta$: es adimensional

En consecuencia:

Parámetros físicos	Fórmula dimensional
Potencia = P	P
Fuerza = F	F
Distancia = r	L
Tiempo = t	T

Sustituyendo nuevamente en la ecuación de la potencia los parámetros por sus fórmulas dimensionales se tiene:

$$[P] = \frac{[F][L][\theta^0]}{[T]}$$

$$[P] = \frac{[FL]}{[T]}$$

$$\therefore \quad [P] = [FLT^{-1}]$$

que son las dimensiones gravitacionales de la potencia.

Obsérvese que las dimensiones elegidas como fundamentales son arbitrarias, pero adecuadas. En el caso de las magnitudes mecánicas son suficientes tres, como ya se dijo; y además como la longitud, que mide al espacio, y el tiempo son las dimensiones que definen el marco de referencia natural, su elección es imprescindible; por lo que la única variación posible radica en la elección de la masa (M) o de la fuerza (F), como la tercera magnitud fundamental; quedando su relación establecida por la segunda ley de Newton. En esta forma quedan definidos, en Mecánica, dos sistemas de dimensiones diferentes:

1. Sistema que elige como dimensiones fundamentales la longitud (L), la masa (M) y el tiempo (T); el cual recibe el nombre de *Sistema Dimensional Absoluto*.

2. Sistema que elige como dimensiones fundamentales la longitud (L), la fuerza (F) y el tiempo (T); el cual recibe el nombre de *Sistema Dimensional Gravitacional*.

Desde luego, no deben confundirse estos sistemas dimensionales con sus correlativos sistemas de unidades.

2.6 UNIDADES Y SISTEMAS DE UNIDADES

a) *Sistemas Absoluto y Gravitacional.* El valor de las dimensiones en los cálculos físicos puede ser cuantificado únicamente cuando se les compara con ciertos patrones de referencia conocidos como Unidades; el resultado de cualquier medida de una dimensión es, precisamente, la determinación de cuantos de esos patrones o unidades contiene. Esto es, cuando se mide una dimensión, se debe especificar no solamente la magnitud de dicha dimensión, sino también las unidades en las cuales está expresada. Por ejemplo, puede medirse la longitud de un objeto en diferentes unidades como el metro, el pie, el centímetro, la pulgada o el kilómetro; pero la elección -por otra parte libre- de la unidad respectiva debe recaer, con buen criterio, en la unidad más conveniente. Sería absurdo medir las dimensiones de la célula en kilómetros, o la distancia Tierra-Sol en milímetros.

Cuando los ingenieros analizan o proyectan sistemas físicos, deben estar siempre seguros de que las unidades usadas para caracterizar las dimensiones físicas involucradas son *consistentes.* Las unidades apropiadas deben ser asignadas a constantes y variables; y así, operaciones matemáticas válidas deben ser realizadas, únicamente sobre estas cantidades. *Si todas las dimensiones o unidades de cada miembro de una ecuación son consistentes, entonces se dice que dicha ecuación es dimensionalmente homogénea.* La consistencia dimensional es una herramienta extremadamente útil para comprobar la validez de las ecuaciones físicas; así como también reviste gran importancia en las medidas diversas que se realizan en la ingeniería. Mas aun, si las medidas exigen una comparación con varios valores de referencia, se debe disponer de un conjunto adecuado de *standards* o *patrones* de unidades para realizar esa comparación.

Una vez que un sistema dimensional consistente ha sido seleccionado, un sistema de unidades correspondiente debe ser introducido para cuantificar la medida de estas dimensiones. En este sentido, las unidades son cantidades relativas; y se definen únicamente por comparación con otras medidas de cantidades de la misma especie. Por ejemplo, el metro está definido con respecto a la longitud de onda de la luz emitida por el átomo de Kriptón; mientras que el kilogramo está definido como la masa de un cilindro de platino iridiado.

Desde luego, hay absoluta libertad para elegir la unidad de medida que se crea adecuada para cada dimensión; y, sobre ella, todos los otros valores quedan determinados por exclusividad. Si algunas dimensiones están relacionadas a otras como productos de potencias, una considerable simplicidad se alcanza escogiendo arbitrariamente sólo las unidades de éstas en un conjunto máximo de dimensiones independientes llamadas *dimensiones base*, dejando después que las dependencias conocidas determinen todas las otras unidades. Un sistema de unidades semejante se llama *sistema coherente*; las unidades escogidas como unidades base se llaman *primarias o fundamentales*, y todas las demás se designan como *secundarias o derivadas.* Así se han originado todos los sistemas científicos de unidades utilizadas a partir del siglo XIX.

Para alcanzar una efectiva comunicación científica y tecnológica, es esencial que cada unidad esté especificada y sea reproducible con cierto grado conocido de precisión. La definición ideal de una unidad se da en términos de algún fenómeno natural altamente invariante y fácilmente repetible u observable, como la longitud de onda de una radiación luminosa monocromática que se reproduce con facilidad. Menos ideal, aunque todavía en uso es el empleo de objetos únicos, cuidadosamente elaborados y mantenidos como el *metro patrón*, que corre el riesgo de llegar a estar en peligro de destrucción o de deterioro. En otras condiciones debe recurrirse a medidas indirectas.

Consecuente con lo anterior, históricamente debe distinguirse entre los sistemas de unidades antiguas, no coherentes, que correspondían a dimensiones inconsistentes, muchas veces artificiales; y los sistemas de unidades modernos, coherentes y en correspondencia con dimensiones consistentes; de los cuales el único empleado, aunque no en forma universal, es el Sistema Internacional de Unidades (SI), cuyo uso es transitivo y poco claro, debido a la persistencia de las costumbres populares y a la gran resistencia de la sociedad para cambiar un status secular como el que nos ocupa.

Así, en términos generales, los sistemas de unidades pueden clasificarse de la siguiente manera, atendiendo a su vigencia y estructura:

- SISTEMAS DE UNIDADES
  - Antiguos
    - Primitivos (en desuso)
      - Romano
      - Español
      - Francés
      - Etc.
    - En uso (habituales)
      - Métrico Decimal
      - Ingleses
        - Imperial Británico
        - Norteamericano
  - Modernos
    - Sistema Internacional (SI)

Pero esta clasificación es de uso general y no exclusiva para ciencia y tecnología. En este caso, debe modificarse adecuadamente para restringir su aplicación; haciendo notar que los sistemas empleados en esas áreas se han originado en el desarrollo de la Mecánica concretamente, como una aplicación importante de la Segunda Ley de Newton relativa al movimiento la cual, dimensionalmente, se expresa como:

$$[F] = [M][a]$$

pero:

$$[a] = [LT^{-2}]$$

por lo tanto:

$$[F] = [MLT^{-2}]$$

lo que implica la existencia de cuatro dimensiones ligadas entre sí: fuerza (F), masa (M), longitud (L) y tiempo (T), de las cuales las dos últimas por corresponder al marco natural de referencia, resultan ajenas a las dos primeras, más ligadas a las nociones de corporeidad. En consecuencia, la funcional matemática expresada en el Teorema Π permite elegir, entre fuerza y masa, la dimensión que consideremos más conveniente, para expresar la otra en función de ésta, como ya se dijo. En consecuen-

cia, para usos científicos y tecnológicos, los sistemas de unidades se clasifican así, atendiendo al espectro de su empleo, y según la terna de unidades elegidas:

- SISTEMAS DE UNIDADES
  - Usuales (SU)
    - Absolutos
      - Decimales
        - M.K.S.(abs): (Metro, Kilogramo-masa, Segundo)
        - C.G.S.(abs): (Centímetro, Gramo-masa, Segundo)
      - Ingleses
        - F.P.S.(abs): (Foot, mass Pound, Second)
    - Gravitacionales
      - Decimales
        - M.K.S.(téc): (Metro, Kilogramo-fuerza, Segundo)
        - C.G.S.(téc): (Centímetro, Gramo-fuerza, Segundo)
      - Ingleses
        - F.P.S.(téc): (Foot, force Pound, Second)
  - Internacional (SI).- En proceso de implantación.

Los sistemas usuales, largamente empleados, tienen el incoveniente de que, en el área electromagnética, generan unidades derivadas demasiado grandes -como el faradio- o demasiado pequeñas -como el franklin-; lo que ha dado lugar al empleo de tres sistemas, derivados del sistema C.G.S., que son:

a) Sistema electrostático (e.s. C.G.S.)

b) Sistema electromagnético (e.m. C.G.S.)

c) Sistema práctico (prác).

además, para fines científicos, también se usa el llamado *Sistema de Giorgi*.

En cualquier sistema de unidades, a partir de las dimensiones fundamentales se obtienen las dimensiones derivadas mediante el producto o el cociente de potencias -por ser éstas las únicas operaciones aritméticas que cumplen la Ley Asociativa de la Multiplicación-, de dichas magnitudes fundamentales; condición que también cumplen las unidades derivadas con respecto a las funda mentales del sistema. Precisamente, *el conjunto de relaciones entre las unidades de las dimensiones fundamentales y las unidades de las dimensiones derivadas constituye un sistema de unidades;* el cual está vinculado, como ya se dijo, a las constantes universales, materiales y sistémicas.

Desde luego, el proceso de obtención de las unidades derivadas -en cualquier sistema- exige, de acuerdo con el Teorema Π, el establecimiento de un modelo matemático o fórmula que puede ser analítico o empírico; para que, a partir del mismo, determinado por una definición o por una ley física, se deduzcan las unidades derivadas en función de las unidades base, mediante operaciones aritméticas -producto y cociente- de potencias de números concretos; y puedan aquellas definirlas adecuadamente.

EJEMPLO 2.3

A partir de la segunda Ley de Newton definir las unidades de fuerza en los sistemas usuales absolutos.

SOLUCION

La segunda Ley de Newton establece, en su forma escalar:

$$F = ma$$

$$\therefore \quad \text{unidad de fuerza} = (\text{unidad de masa})(\text{unidad de aceleración})$$

pero:

$$\text{unidad de aceleración} = \frac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo})^2}$$

$$\therefore \quad \text{unidad de fuerza} = \frac{(\text{unidad de masa})\cdot(\text{unidad de longitud})}{(\text{unidad de tiempo})^2}$$

expresión definitoria válida en todos los sistemas usuales absolutos de unidades.

a). En el sistema MKS (Abs):

$$\text{unidad de masa} = kg_m$$

$$\text{unidad de longitud} = m$$

$$\text{unidad de tiempo} = s$$

por lo tanto, sustituyendo en la expresión definitoria.

$$\text{unidad de fuerza} = \frac{kg_m \cdot m}{s^2}$$

Esta unidad se llama Newton y, en consecuencia:

$$\text{new (N)} = \frac{kg_m \cdot m}{s^2}$$

Un newton es la fuerza que, aplicada a un kilogramo-masa, le produce la aceleración de un metro por segundo cada segundo.

b). En el sistema C.G.S. (abs.):

$$\text{unidad de masa} = g_m$$

$$\text{unidad de longitud} = cm$$

$$\text{unidad de tiempo} = s$$

$$\therefore \quad \text{unidad de fuerza} = \frac{g_m \cdot cm}{s^2}$$

esta unidad se llama *dina* y, por lo tanto:

$$\text{dina} = \frac{g_m \cdot cm}{s^2}$$

Una dina es la fuerza que, aplicada a un gramo-masa, le produce la aceleración de un centímetro por segundo cada segundo.

c). En el sistema F.P.S. (Abs.):

$$\text{unidad de masa} = lb_m$$

$$\text{unidad de longitud} = ft$$

$$\text{unidad de tiempo} = s$$

$$\therefore \quad \text{unidad de fuerza} = \frac{lb_m \cdot ft}{s^2}$$

esta unidad se llama *poundal* y vale:

$$\text{poundal} = \frac{lb_m \cdot ft}{s^2}$$

> *Un poundal es la fuerza que, aplicada a una libra-masa, le produce la aceleración de un pie por segundo cada segundo.*

EJEMPLO 2.4

A partir de la Segunda Ley de Newton definir las unidades de masa en los sistemas usuales gravitacionales.

SOLUCION

La segunda Ley de Newton establece, en su forma escalar:

$$F = ma$$

$$\therefore \quad m = \frac{F}{a}$$

$$\therefore \quad \text{unidad de masa} = \frac{\text{unidad de fuerza}}{\text{unidad de aceleración}}$$

pero:

$$\text{unidad de aceleración} = \frac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo})^2}$$

$$\therefore \quad \text{unidad de masa} = \frac{(\text{unidad de fuerza})(\text{unidad de tiempo})^2}{\text{unidad de longitud}}$$

expresión definitoria válida en todos los sistemas usuales técnicos o gravitacionales de unidades.

a) En el sistema M.K.S. (Grav):

unidad de fuerza $= kg_f$

unidad de longitud $=$ m

unidad de tiempo $=$ s

por lo tanto, sustituyendo en la expresión definitoria:

$$\text{unidad de masa} = \frac{kg_f \cdot s^2}{m}$$

esta unidad se llama *geokilo o unidad técnica de masa* (UTM) y, en consecuencia:

$$\text{geokilo} = \frac{kg_f \cdot s^2}{m}$$

> *Un geokilo es la masa que, al recibir la acción de la fuerza de un kilogramo-fuerza, adquiere la aceleración de un metro por segundo cada segundo.*

b) En el sistema C.G.S. (Grav):

unidad de fuerza $= g_f$

unidad de longitud $=$ cm

unidad de tiempo $=$ s

$$\therefore \quad \text{unidad de masa} = \frac{g_f \cdot s^2}{cm}$$

esta unidad se llama *geogramo* y, por lo tanto:

$$\text{geogramo} = \frac{g_f \cdot s^2}{cm}$$

> *Un geogramo es la masa que, al recibir la acción de la fuerza de un gramo de fuerza, adquiere la aceleración de un centímetro por segundo cada segundo.*

c) En el sistema F.P.S. (Grav) :

unidad de fuerza $= lb_f$

unidad de longitud $=$ ft

unidad de tiempo $=$ s

$$\therefore \quad \text{unidad de masa} = \frac{lb_f \cdot s^2}{ft}$$

esta unidad se llama *geolibra* o *slug* y vale:

$$\text{slug} = \frac{lb_f \cdot s^2}{ft}$$

> *Un slug es la masa que, al recibir la acción de la fuerza de una libra-fuerza, adquiere la aceleración de un pie por segundo cada segundo.*

Resumiendo los resultados obtenidos se puede confeccionar la siguiente tabla:

SISTEMAS USUALES DE UNIDADES

SISTEMA DE UNIDADES	LONGITUD	MASA	FUERZA	TIEMPO
M.K.S. (abs)	metro (m)	Kilogramo (kg_m)	Newton (N)	segundo (s)
C.G.S. (abs)	centímetro (cm)	gramo (g_m)	Dina	segundo (s)
F.P.S. (abs)	pie (ft)	libra (lb_m)	poundal	segundo (s)
M.K.S. (grav)	metro (m)	geokilo	Kilogramo (kg_f)	segundo (s)
C.G.S. (grav)	centímetro (cm)	geogramo	gramo (g_f)	segundo (s)
F.P.S. (grav)	pie (ft)	slug	libra (lb_f)	segundo (s)

EJEMPLO 2.5

A partir de su definición, establecer las unidades de presión en los diferentes sistemas usuales de unidades.

SOLUCION

> *Presión (p) es la fuerza ejercida por unidad de superficie normal a la dirección de la fuerza.*

es decir, escalarmente:

$$p = \frac{F}{s}$$

y en consecuencia, hay dos posibilidades diferentes, según el sistema empleado para establecer las unidades de presión.

1. En los sistemas absolutos de unidades, se tiene:

$$p = \frac{F}{s}$$

como:

$$[F] = [LMT^{-2}]$$

$$[s] = [L^2] = [L^2\, M^0\, T^0]$$

$$\therefore\ [p] = \frac{[L\, M\, T^{-2}]}{[L^2\, M^0\, T^0]}$$

$$\therefore\ [p] = [L^{-1}\, MT^{-2}]$$

que son las dimensiones absolutas de la presión.

2. En los sistemas gravitacionales, se tiene:

$$p = \frac{F}{s}$$

pero:

$$[F] = [L^0\, F\, T^0]$$

$$[s] = [L^2] = [L^2\, F^0\, T^0]$$

$$\therefore\ [p] = \frac{[L^0\, F\, T^0]}{[L^2\, F^0\, T^0]}$$

$$\therefore\ [p] = [L^{-2}\, FT^0]$$

que son las dimensiones gravitacionales de la presión.

Por otra parte, en ambos casos, de la definición de presión:

$$p = \frac{F}{s}$$

puede establecerse:

$$\text{unidad de presión} = \frac{\text{unidad de fuerza}}{\text{unidad de superficie}}$$

que es la expresión definitoria de las unidades de presión, válida en todos los sistemas SU y SI de unidades.

a) En el sistema M.K.S. (Abs):

unidad de fuerza = N

unidad de superficie = m^2

$\therefore$ unidad de presión = N/m^2

esta unidad se llama *Pascal* (Pa) y se define así:

Pascal = N/m^2

> *Un pascal es la presión originada por la fuerza de un Newton al ejercer su acción sobre la superficie de un metro cuadrado.*

b) En el sistema C.G.S. (Abs):

unidad de fuerza = dina

unidad de superficie = cm^2

$\therefore$ unidad de presión = $dina/cm^2$

esta unidad se llama *baria* y vale:

baria = $dina/cm^2$

> *Una baria es la presión originada por la fuerza de una dina al ejercer su acción sobre la superficie de un centímetro cuadrado.*

c) En el sistema F.P.S. (Abs):

unidad de fuerza = poundal

unidad de superficie = ft^2

$\therefore$ unidad de presión = $poundal/ft^2$

esta unidad carece de nombre especial.

d) En el sistema M.K.S. (Grav):

unidad de fuerza = kg_f

unidad de superficie = m^2

$\therefore$ unidad de presión = kg_f/m^2

esta unidad también carece de nombre especial.

e) En el sistema C.G.S. (Grav):

unidad de fuerza = g_f

unidad de superficie = cm^2

$\therefore$ unidad de presión = g_f/cm^2

unidad sin nombre.

f) En el sistema F.P.S. (Grav):

unidad de fuerza = lb_f

unidad de superficie = ft^2

$\therefore$ unidad de presión = lb_f/ft^2

unidad que carece de nombre;

Además de las unidades deducidas, la presión también se mide en unidades convencionales que son múltiplos de las anteriores, como la psi (Pounds-square-inch); o las meteorológicas (el bar y el milibar).

SISTEMA DE UNIDADES	UNIDAD DE PRESION	NOMBRE
M.K.S. (abs)	N/m^2	Pascal (Pa)
C.G.S. (abs)	$dina/cm^2$	Baria
F.P.S. (abs)	$poundal/ft^2$	sin nombre
M.K.S. (grav)	kg_f/m^2	sin nombre
C.G.S. (grav)	g_f/cm^2	sin nombre
F.P.S. (grav)	lb_f/ft^2	sin nombre

De los ejemplos anteriores se concluye en términos generales que:

1. El análisis dimensional no es equivalente al análisis de unidades.
2. El proceso para obtener las unidades derivadas es diferente del proceso dimensional.
3. Dicho proceso de obtención de unidades derivadas es totalmente riguroso y confiable.
4. Las unidades derivadas tienen dimensiones; pero éstas exigen ser establecidas en función de las dimensiones base.
5. La determinación de unidades derivadas no requiere del análisis dimensional previo; sino sólo de ciertas expresiones algebraicas que relacionen los parámetros que intervienen en la definición de dichas unidades.

Aunque una gran variedad de diferentes sistemas de unidades ha sido utilizada y, desde luego, diferentes sistemas de dimensiones fundamentales también se han empleado en el mundo a lo largo del tiempo; la creciente interdependencia de las naciones producida por la tecnología moderna, especialmente en las áreas de viajes y comunicaciones, ha planteado la necesidad de disponer de un sistema común de unidades con el cual medir todas las cantidades físicas.

El prototipo estándar aceptado mundialmente, que rigurosamente viene a constituir un refinamiento del familiar sistema métrico decimal, es el conocido como *Système International d'Unités* (*Sistema Internacional de Unidades*) o *Sistema SI*. Esencialmente todos los países del mundo, con la excepción parcial de los Estados Unidos, han aceptado el Sistema SI para todas las actividades científicas y tecnológicas. Por razones sociales, políticas y económicas los Estados Unidos han retardado grandemente la adopción del Sistema SI; motivo por el cual ese país, y los de su zona de influencia, continúan utilizando los sistemas usuales, principalmente los ingleses, analizados con anterioridad.

b) *Sistema Internacional*.- Este sistema, llamado simplemente Sistema SI, fue adoptado en 1960 y actualmente es preocupación de la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM). Asigna una, y solamente una, unidad llamada *unidad base*, a cada una de las siete dimensiones que ha elegido como fundamentales. Estas unidades base y sus definiciones se consignan en las siguientes tablas:

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

UNIDADES BASE

DIMENSION	UNIDAD BASE	SIMBOLO UNIVERSAL
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de substancia	mol	mol

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

DEFINICIONES DE LAS UNIDADES BASE

NOMBRE	D E F I N I C I O N
Metro	Es la longitud igual a 1 650 763.73 longitudes de onda en el vacío de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de kriptón 86.
Kilogramo	Es la masa igual a la del prototipo internacional del kilogramo.
Segundo	Es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del átomo de cesio 133.
Ampere	Es la intensidad de una corriente eléctrica constante, que mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y colocados en el vacío a una distancia de un metro uno del otro, producirá entre estos conductores una fuerza igual a 2×10^{-7} newton por metro de longitud.
Kelvin	Es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.
Candela	Es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} hertz, y cuya intensidad energética en esa dirección es 1/683 watt por esterradián.
Mol	Es la cantidad de substancia que contiene tantas entidades elementales como existen átomos en 0.012 kilogramos de carbono 12, (cuando se emplea la mol, las entidades elementales deben ser especificadas; y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, de otras partículas o de grupos específicos de tales partículas).

Todas las otras cantidades físicas pueden ser expresadas como combinaciones algebraicas de estas unidades base y se conocen como *unidades derivadas*. Por ejemplo, la unidad derivada de velocidad es:

en movimiento rectilíneo uniforme:

$$v = \frac{d}{t}$$

$$\therefore \quad \text{unidad de velocidad} = \frac{\text{unidad de longitud}}{\text{unidad de tiempo}}$$

pero:

unidad de longitud = metro

unidad de tiempo = segundo

$$\text{unidad de velocidad} = \frac{\text{metro}}{\text{segundo}}$$

que se acostumbra leer, indebidamente:

metro por segundo

la unidad derivada de fuerza es; por la segunda ley de Newton:

$$F = m\,a$$

unidad de fuerza = (unidad de masa)(unidad de aceleración)

además:

$$a = \frac{v}{t}$$

$$\text{unidad de aceleración} = \frac{\text{unidad de velocidad}}{\text{unidad de tiempo}}$$

y:

$$\text{unidad de velocidad} = \frac{\text{unidad de longitud}}{\text{unidad de tiempo}}$$

$$\text{unidad de aceleración} = \frac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo})^2}$$

y en consecuencia, sustituyendo:

$$\text{unidad de fuerza} = (\text{unidad de masa})\,\frac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo})^2}$$

pero:

unidad de masa = kilogramo

unidad de longitud = metro

unidad de tiempo = segundo

$$\text{unidad de fuerza} = \frac{\text{kilogramo}\cdot\text{metro}}{\text{segundo}^2}$$

que se llama:

Newton (N)

La siguiente tabla enumera los nombres y los símbolos de las unidades derivadas aprobadas por la *Conferencia General de Pesas y Medidas* (CGPM).

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)
UNIDADES DERIVADAS

MAGNITUDES	UNIDAD DERIVADA	SIMBOLO	EXPRESION EN OTRAS UNIDADES
Frecuencia	hertz	Hz	$Hz = s^{-1}$
Fuerza	newton	N	$N = Kg \cdot m/s^2$
Presión, esfuerzo	pascal	Pa	$Pa = N/m^2$
Energía, trabajo, cantidad de calor	joule	J	$J = N \cdot m$
Potencia	watt	W	$W = J/s$
Carga eléctrica	coulomb	C	$C = A \cdot s$
Potencial eléctrico	volt	V	$V = W/A$
Capacidad eléctrica	farad	F	$F = C/V$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$\Omega = V/A$
Conductancia eléctrica	siemens	S	$S = \Omega^{-1}$
Flujo magnético	weber	Wb	$Wb = V \cdot s$
Densidad de flujo magnético	tesla	T	$T = Wb/m^2$
Inductancia	henry	H	$H = Wb/A$
Flujo luminoso	lumen	lm	$lm = cd \cdot sr$
Luminosidad	lux	lx	$lx = lm/m^2$
Actividad nuclear	becquerel	Bq	$Bq = s^{-1}$
Dosis absorbida	gray	Gy	$Gy = m^2/s^2 = J/kg$

Las unidades de ángulo plano y de ángulo sólido, que son el radián y el esterradián respectivamente, tomadas de la geometría, en Física pueden ser consideradas unas veces como unidades base y otras como unidades derivadas, razón por la cual se prefiere llamarles *unidades suplementarias*. Sus definiciones se consignan en la siguiente tabla.

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)
UNIDADES SUPLEMENTARIAS

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO	DEFINICION
Angulo plano	radián	rad	Es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que interceptan sobre la circunferencia de este círculo, un arco de longitud igual a la del radio.
Angulo sólido	esterradián	sr	Es el ángulo sólido que teniendo su vértice en el centro de una esfera, corta sobre la superficie de esta esfera una área igual a la de un cuadrado que tiene por lado el radio de la esfera.

Una ventaja importante del Sistema Internacional de Unidades (SI) es la forma mediante la cual asigna prefijos al nombre y al símbolo de una unidad para formar nuevas unidades que son múltiplos o submúltiplos decimales de la unidad original. Estos prefijos, para los múltiplos y submúltiplos mencionados, son los siguientes:

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)
PREFIJOS PARA MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS
DE LAS UNIDADES SI

MULTIPLICADOR	NOMBRE DEL PREFIJO	SIMBOLO
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{0}	UNIDAD	
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

La selección del múltiplo o submúltiplo apropiado de una unidad SI cualquiera es un asunto de conveniencia. Dicho múltiplo o submúltiplo es usualmente escogido de tal manera que el valor numérico de una dimensión se encuentre entre 0.1 y 1 000. Por ejemplo, 2.18×10^4 m puede escribirse como 21.8 km; mientras que 0.0098 s se escribe como 9.8 ms.

El uso del sistema de unidades SI está regido por un cierto número de reglas, que deben ser aprendidas y seguidas cuidadosamente en la práctica. A continuación se han resumido estas reglas, juntamente con ejemplos ilustrativos.

1. Los nombres de las unidades deben escribirse con minúsculas, a menos que aparezcan al principio de un párrafo. Por ejemplo: metro, no Metro; joule, no Joule; etc.
2. Los plurales son usados en la forma gramatical con los nombres de las unidades. Por ejemplo, metros, pascales, etc.
3. Los símbolos deben usarse siempre para representar a las unidades, con exclusión de cualesquiera otros. Por ejemplo: s, no seg.; g, no gm; etc.
4. Los símbolos de las unidades siempre deben escribirse con minúsculas, excepto cuando el nombre de la unidad deriva de un nombre propio; en este caso el símbolo se escribirá con mayúsculas. Por ejemplo: s, no S; m, no M; W, no w; N, no n; etc.
5. Los símbolos de las unidades deben separarse de los valores numéricos por un espacio. Es decir: 2.3 m, no 2.3m.
6. El punto ortográfico nunca debe usarse después de un símbolo unitario, excepto cuando este símbolo se encuentra al final de un párrafo. Es decir, s, m, g, no s., m., g.
7. Los símbolos de las unidades nunca deben escribirse en plural. El mismo símbolo se usa para representar las formas singular y plural. Por ejemplo: 60W, no 60Ws; 12 N, no 12Ns.
8. Los símbolos unitarios deben usarse con preferencia a los nombres de las unidades. Es decir: 8 m, no 8 metros.
9. El producto de símbolos o nombres de unidades puede expresarse por espacio o por puntos. Es decir; newton metro, o newton · metro; N m, o N · m.
10. Los símbolos unitarios compuestos mediante cociente se representan por la diagonal, la división o la potencia negativa. Es decir: m/s, o $\frac{m}{s}$, o m s^{-1}.

11. Nunca debe usarse más de una diagonal en una unidad o símbolo compuesto, a menos que se agreguen paréntesis. Es decir: m/s^2, o ms^{-2}, pero no $m/s/s$.

12. Para evitar errores de cálculo, los prefijos deben ser reemplazados por las potencias de 10 respectivas. Es decir: 1 MJ debe escribirse 10^6J.

13. Un punto sobre el renglón debe usarse como el marcador decimal. Para números menores que uno, un cero debe escribirse antes del punto decimal. Por ejemplo: 0.125, no .125.

14. La coma nunca debe usarse como marcador decimal, sino como separador de grupos numéricos triples. Estos también pueden separarse por espacios. Por ejemplo: 5,000,000, o bien 5 000 000; 0.123456, ó 0.123 456.

15. Los prefijos o la notación científica pueden usarse para indicar el número de cifras significativas. Por ejemplo: 10,000 m, o 10^4m; 10 000 km, ó 10,000 x 10^3m.

16. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades se forman anteponiendo al nombre de éstas, los prefijos correspondientes con excepción de los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa en los cuales los prefijos se antepondrán a la palabra "gramo". Por ejemplo: dag, Mg.

17. Los símbolos de los prefijos deben ser impresos en caracteres romanos (rectos), sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad. Es decir: mN, no m N.

18. Si un símbolo que contiene a un prefijo está afectado de un exponente, indica que el múltiplo o el submúltiplo de la unidad está elevado a la potencia expresada por el exponente. Por ejemplo: $1\ cm^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$.

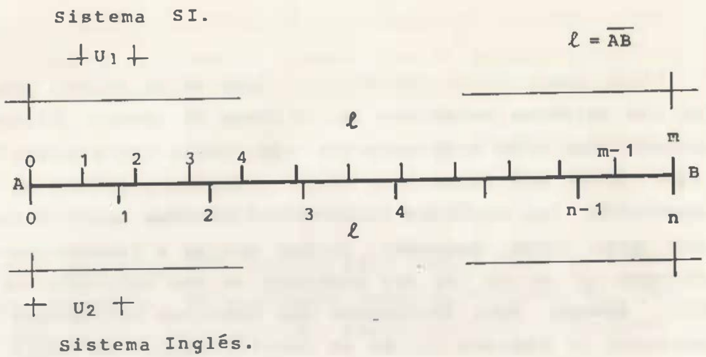
19. Los prefijos compuestos deben evitarse. Es decir: 1 nm, pero no 1m μ m.

c) *Transformación de unidades.*- Como se ha dicho, mientras que las unidades mecánicas del sistema SI (metro, kilogramo, segundo) han sido aceptadas por casi todos los países; los Estados Unidos aún conservan, en la práctica profesional de la ingeniería, las unidades usuales del Sistema gravitacional inglés (pie, libra, segundo); lo que obliga a transformar las unidades de uno de los dos sistemas en sus equivalentes del otro. Además, debe destacarse que mientras el sistema SI es absoluto, el Sistema inglés es gravitacional; es decir, sustituye a la masa por la fuerza como magnitud fundamental; lo que complica la transformación o conversión de unidades.

Por otra parte, muchas veces se confunden aspectos que deben ser nítidamente distinguidos. Así, en el sistema inglés los términos *peso* y *masa* se confunden frecuentemente. Cuando hablamos del peso en el sistema SI, nos estamos refiriendo a la acción de la fuerza de gravedad sobre determinado objeto. En consecuencia, en unidades SI, el peso debe medirse en newtons, no en kilogramos; y reviste gran importancia conservar la distinción entre estas magnitudes en todos los cálculos de ingeniería.

Desde luego, la transformación o conversión de unidades se realiza, siempre entre unidades de la misma especie pertenecientes a sistemas diferentes; ya que, para transformar unidades de un sistema en sus múltiplos o submúltiplos, basta usar los prefijos apropiados en el sistema SI; o las equivalencias respectivas en el sistema inglés. Además, la igualdad de especie entre las unidades que se van a convertir, constituye una condición forzosa.

En consecuencia, tratándose de la misma magnitud, siempre será posible establecer una igualdad que contenga un coeficiente numérico, llamado *equivalencia*, que invariablemente es adimensional; y que permite realizar la conversión deseada. Es decir, para el caso simple y familiar de la longitud, por ejemplo; se tiene:



En el sistema SI:

$$\ell = mU_1$$

En el sistema Inglés:

$$\ell = nU_2$$

como se trata de la misma magnitud, los dos valores pueden igualarse; por lo tanto:

$$\boxed{mU_1 = nU_2}$$

igualdad de la que es posible despejar a cualquiera de las unidades. En consecuencia:

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{n}{m}\right) U_2 \\ U_2 &= \left(\frac{m}{n}\right) U_1 \end{aligned}}$$

Los coeficientes $\left(\frac{n}{m}\right)$ y $\left(\frac{m}{n}\right)$, que son adimensionales como se ve, son las equivalencias. buscadas. Obsérvese que estas equivalencias son números recíprocos, es decir:

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = 1$$

Finalmente, conociendo las diversas equivalencias, la transformación de unidades puede hacerse mediante el siguiente procedimiento matemático.

1. Comprobación de que las unidades que se van a transformar son de la misma especie y tienen el mismo exponente.

2. Planteamiento de una ecuación que contenga una cierta constante.

3. Aislamiento de dicha constante en un miembro de la ecuación.

4. Determinación por sustitución del valor de esa constante, a partir de las equivalencias de las unidades involucradas.

5. Sustitución del valor de la constante en la ecuación planteada.

EQUIVALENCIAS DE ALGUNAS UNIDADES MECANICAS
EN EL SISTEMA INTERNACIONAL (SI)

NOMBRE DE LA UNIDAD	SIMBOLO	VALOR EN UNIDADES SI
pie	ft	0.3048 m (1 m = 3.2808 ft)
pulgada	in	0.0254 m (1 cm = 0.3937 in)
yarda	yd	0.9144 m (1 m = 1.0936 yd)
milla terrestre		1 609 m
angströn	Å	1×10^{-10} m
unidad astronómica	UA	$149\,600 \times 10^{6}$ m
parsec	pc	$30\,857 \times 10^{12}$ m
milla marina		1 852 m
nudo		0.5144 m/s
pie cuadrado	sq.ft	9.290306 dm^2 = 0.09290306 m^2
yarda cuadrada	sq.yd	0.8361 m^2
acre	ac	4 046.873 m^2
pulgada cuadrada	sq.in	6.4516 cm^2 = 0.00064516 m^2
⋮	⋮	⋮

pie cúbico	cub.ft	$28.317\ dm^3 = 0.028317\ m^3$
pulgada cúbica	cub.in	$16.387\ cm^3 = 0.000016387\ m^3$
yarda cúbica	cub.yd	$0.764\ m^3$
galón inglés	gal	$4.546\ \ell = 0.004546\ m^3$
libra (Av)	lb	0.45359 kg
onza (Av)	oz	0.02835 kg
unidad atómica de masa	uam	$1.6605655 \times 10^{-27}\ kg = 107\ kg_m$
Britsh Thermal Unit	B.T.U.	0.252 kcal = 1.05 kJ
minuto (tiempo)	min	60 s
hora	h	3 600 s
día	d	86 400 s
grado	°	$(\pi/180)$ rad
minuto (ángulo)	'	$(\pi/10\,800)$ rad
segundo (ángulo)	"	$(\pi/648\,000)$ rad
revolución por minuto	RPM	$(1/60)\ s^{-1}$
bar	bar	10^5 Pa
kilogramo fuerza	kg_f	9.80665 N
atmósfera normal	atm	101 325 Pa
caloría	cal	4.1868 J
pie sobre segundo	ft/s	0.3048 m/s
milla sobre hora	mph	1609 m/h
knot	kt	0.51477 m/s
dina	dyn	10^{-5} N
erg	erg	10^{-7} J
pie · libra	ft · lb	0.138 kg · m = 1.356 J
horse power	HP	76.02 kg · m/s = 745 W = 1.013 CV
libra sobre pulgada cuadrada	lb/sq · in	$0.07\ kg/cm^2$

EJEMPLO 2.6

Si el módulo de elasticidad del acero es:

$$E = 2.1 \times 10^6\ kg_f/cm^2$$

encontrar su valor en:

a) lb_f/in^2

b) N/m^2

SOLUCION

a) **En lb_f/in^2.- Las unidades kg_f/cm^2 y lb_f/in son de la misma especie y tienen el mismo exponente.**

Por lo tanto:

$$X\ lb_f/in^2 = 2.1 \times 10^6\ kg_f/cm^2$$

$$X = 21. \times 10^6\ kg_f/cm^2\ in^2/lb_f$$

$$X = 2.1 \times 10^6\ \frac{kg_f}{cm^2} \cdot \frac{in^2}{lb_f}$$

como:

$$kg_f = \frac{1}{0.45359}\ lb_f$$

$$in^2 = (2.54)^2\ cm^2$$

sustituyendo:

$$X = 2.1 \times 10^6\ \frac{(2.54)^2}{0.45359}$$

$$\boxed{X = 29.869 \times 10^6}$$

finalmente:

$$\boxed{E = 2.1 \times 10^6\ kg_f/cm^2 = 29.869 \times 10^6\ lb_f/in^2}$$

b) **En N/m^2.- A partir, nuevamente, de la expresión:**

$$E = 2.1 \times 10^6\ kg_f/cm^2$$

las unidades kg_f/cm^2 y N/m^2 son de la misma especie y tienen el mismo exponente, por lo tanto:

$$X = \frac{N}{m} = 2.1 \times 10^6 \; kg_f/cm^2$$

$$X = 2.1 \times 10^6 \; kg_f/cm^2 \cdot \frac{m^2}{N}$$

$$X = 2.1 \times 10^6 \; \frac{Kg_f \cdot m^2}{N \cdot cm^2}$$

de la tabla:

$$1 \; kg_f = 9.81 \; N$$

$$1 \; m^2 = (100)^2 \; cm^2$$

sustituyendo:

$$X = 21. \times 10^6 \; \frac{9.81 \times (100^2) \; N \cdot cm^2}{N \cdot cm^2}$$

$$\boxed{X = 20.601 \times 10^{10}}$$

por lo tanto:

$$\boxed{E = 2.1 \times 10^6 \; kg_f/cm^2 = 20.601 \times 10^{10} \; N/m^2}$$

resumiendo:

$$\boxed{E = 2.1 \times 10^6 \; kg_f/cm^2 = 29.869 \times 10^6 \; lb_f/in^2 = 20.601 \times 10^{10} \; N/m^2}$$

d) *Traducción de fórmulas.*- Como ya se ha establecido, todas las fórmulas fundamentales, que simplemente son sólo modelos matemáticos de los diversos fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza, deben ser válidas en todos los diferentes sistemas de unidades, sean éstos vigentes o no; y, en consecuencia, dichas fórmulas o ecuaciones exigen, como condición, el ser *dimensionalmente homogéneas*; entendiéndose por homogeneidad dimensional la:

> *Propiedad que tiene una ecuación física de no cambiar en su estructura con el uso de los distintos sistemas de unidades;*

lo que implica que, en sus dos miembros, los distintos términos deben tener siempre las mismas dimensiones, como se ha demostrado a partir del Teorema II.

Lo anterior debe cumplirse en todas las fórmulas derivadas analíticamente a partir de los principios o leyes fundamentales de la Física. Sin embargo, en diferentes ecuaciones empíricas utilizadas ampliamente en ingeniería, algunos términos contienen coeficientes numéricos que, para satisfacer las exigencias de la homogeneidad dimensional no pueden ser simples números abstractos; sino que requieren el estar afectados de determinados exponentes dimensionales; lo que implica que las fórmulas empíricas cambian su expresión -aunque no su estructura- con el uso de los diversos sistemas de unidades.

En consecuencia, la utilización de fórmulas físicas establecidas matemáticamente es directa, porque los coeficientes numéricos que contienen sus términos son números abstractos o adimensionales, lo que las hace tener la misma expresión en cualquier sistema de unidades; el uso de las ecuaciones establecidas empíricamente exige realizar su *traducción* cuando los datos de que se dispone, correspondientes a las cantidades involucradas en las mismas, están expresados en unidades diferentes a aquellas correspondientes al sistema utilizado originalmente para establecerlas; lo que se manifiesta en que los coeficientes numéricos de sus términos se modifiquen, es decir, cambian de expresión. Precisamente, la transformación numérica de dichos coeficientes constituye la traducción de la fórmula, la que se realiza específicamente para cada caso particular.

EJEMPLO 2.7

Traducir la fórmula empírica de Manning del sistema SI a los sistemas ingleses.

La llamada fórmula de Manning permite calcular la velocidad de la corriente de agua que fluye por un canal según la expresión:

$$\boxed{v = \frac{1}{n}\, r^{\frac{2}{3}}\; s^{\frac{1}{2}}}$$

válida en el sistema *SI* donde:

v = rapidez del agua en m/s

1 = coeficiente abstracto

n = coeficiente de rugosidad de las paredes del canal, también abstracto

r = radio hidráulico en m

s = pendiente del fondo del canal, también abstracta

SOLUCION

Dicha expresión puede escribirse:

$$v = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{n}\;(1)\; r^{\frac{2}{3}}$$

y si hacemos:

$$\frac{s^{\frac{1}{2}}}{n} = k \quad \text{(coeficiente abstracto)}$$

entonces:

$$v = k\;(1)\; r^{\frac{2}{3}}$$

Sustituyendo las unidades SI:

$$\frac{m}{s} = k\;(1)\; m^{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{k = (1)\;\frac{m^{\frac{1}{3}}}{s}}$$

En el sistema inglés (abs) o (grav); la fórmula de Manning queda:

$$\boxed{v = \frac{C}{n}\; r^{\frac{2}{3}}\; s^{\frac{1}{2}}}$$

donde:

v = rapidez del agua en ft/s

C = coeficiente abstracto

n = coeficiente de rugosidad (abstracto)

r = radio hidráulico (en ft)

s = pendiente (abstracto)

que puede escribirse:

$$v = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{n}\quad C\; r^{\frac{2}{3}}$$

y si hacemos:

$$\frac{s^{\frac{1}{2}}}{n} = k \quad \text{(coeficiente abstracto)}$$

entonces:

$$v = k(C)\; r^{\frac{2}{3}}$$

Sustituyendo las unidades inglesas:

$$\frac{ft}{s} = k(C)\; ft^{\frac{2}{3}}$$

y, por tratarse de unidades:

$$\boxed{k = (C)\ \frac{ft^{\frac{1}{3}}}{s}}$$

igualando las dos expresiones obtenidas para k:

$$(C)\ \frac{ft^{\frac{1}{3}}}{s} = (1)\ \frac{m^{\frac{1}{3}}}{s}$$

$$(C)\,ft^{\frac{1}{3}} = (1)\,m^{\frac{1}{3}}$$

$$C = (1)\ \frac{m^{\frac{1}{3}}}{ft^{\frac{1}{3}}}$$

$$C = (1)\ \left(\frac{m}{ft}\right)^{\frac{1}{3}}$$

de la tabla de equivalencia:

$$1\ m = 3.28\ ft$$

$$C = (1)\ \left(\frac{3.28\ \cancel{ft}}{\cancel{ft}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$C = 3.28^{\frac{1}{3}}$$

$\boxed{C = 1.486}$ (que es un número abstracto)

Sustituyendo este valor de C en la fórmula de Manning dada en los sistemas ingleses, tendremos:

$$\boxed{v = \frac{1.486}{n}\ r^{\frac{2}{3}}\ s^{\frac{1}{2}}}$$

donde V se mide en ft/s, y r en ft.

Que es la expresión de dicha fórmula traducida del sistema SI a los sistemas ingleses.

EJEMPLO 2.8

Traducir la expresión para el cálculo de un momento M:

$$\boxed{M = 17.2\ bd^2}$$

donde:

M: se mide en $kg_f \cdot cm$

b = ancho, medido en cm

d = peralte, medido en cm

a otra en que el momento se mida en $lb_f \cdot ft$, cuando b y d se midan en pulgadas (in).

SOLUCION

En este caso, como:

$$M = 17.2\ bd^2$$

el coeficiente númerico 17.2, si la ecuación es dimensional homogénea, no puede ser un número abstracto; sino que debe de tener unidades para que la fórmula sea adimensional. Por lo tanto:

$$M = 17.2\ bd^2$$

$$17.2 = \frac{M}{bd^2}$$

si:

M está en $kg_f \cdot cm$

b en cm

d^2 en cm^2

entonces:

17.2

está en

$$\frac{kg_f \cdot \cancel{cm}}{\cancel{cm} \cdot cm^2}$$

$$\boxed{17.2 \ \frac{kg_f}{cm^2}}$$

es el coeficiente dimensional.

Del mismo modo, en las nuevas unidades que se piden:

$$\boxed{M = Cbd^2}$$

$$C = \frac{M}{bd^2}$$

si:

M está en $lb_f \cdot ft$

b en in

d^2 en in^2

entonces:

$$C \text{ está en } \frac{lb_f \cdot ft}{in \cdot in^2}$$

$$\boxed{C \ \frac{lb_f \cdot ft}{in^3}}$$

es el nuevo coeficiente dimensional.

Si la ecuación dada es dimensionalmente homogénea, entonces los dos coeficientes dimensionales obtenidos tienen que ser iguales, de acuerdo con el Teorema Π, porque la expresión debe permanecer adimensional.

Por lo tanto:

$$C \ \frac{lb_f \cdot ft}{in^3} = 17.2 \ \frac{kg_f}{cm^2}$$

$$C = 17.2 \ \frac{kg_f \cdot in^3}{lb_f \cdot ft \cdot cm^2}$$

de la tabla de equivalencias:

$$in^3 = (2.54 \text{ cm})^3 = 2.54^3 \text{ cm}^3$$

$$lb_f = 0.454 \ kg_f$$

$$ft = 30.48 \text{ cm}$$

sustituyendo:

$$C = 17.2 \ \frac{\cancel{kg_f} \ (2.54)^3 \ \cancel{cm}^3}{0.454 \ \cancel{kg_f} \ (30.48 \ \cancel{cm}) \ \cancel{cm}^2}$$

$$C = \frac{17.2(2.54)^3}{0.454 \ (30.48)}$$

$$\boxed{C = 20.368}$$

y, en consecuencia, la nueva expresión buscada será:

$$\boxed{M = 20.368 \ bd^2}$$

donde:

M está en $lb_f \cdot ft$

b en in

d^2 en in^2

EJEMPLO 2.9

Traducir la expresión de la ecuación de estado de Van der Walls para el bióxido de carbono a los sistemas Internacional e inglés (imperial).

Para el CO_2:

$$\boxed{\left(p + \frac{3.6}{V_m^2}\right)\left(V_m - 0.0428\right) = 0.08207\,T}$$

(ecuación dimensionalmente correcta), donde:

p = presión en atm

V_m = volumen molar en L/mol. (L = litros)

T = temperatura absoluta en (K)

SOLUCION

a) Encontrar las unidades de los coeficientes numéricos: 3.6, 0.0428 y 0.08207

Si p está en atm; entonces $p + \frac{3.6}{V_m^2}$ debe también estar atm, por lo tanto:

$$\frac{3.6}{V_m^2} = atm \quad ; \quad \text{pero} \quad V_m = \frac{L}{mol} \quad ; \quad V_m^2 = \frac{L^2}{mol^2} \; .$$

sustituyendo:

$$\frac{3.6}{\frac{L^2}{mol^2}} = atm \quad ; \quad \therefore \quad 3.6 = atm\,\frac{L^2}{mol^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{3.6 \text{ está en } \frac{atm \cdot L^2}{mol^2}}$$

Si V_m está en $\frac{L}{mol}$; entonces:

$(V_m - 0.0428)$ está también en $\frac{L}{mol}$

$$\therefore \quad \boxed{0.0428 \text{ está en } \frac{L}{mol}}$$

Si $(atm)\left(\frac{L}{mol}\right) = 0.08207\,T$; y T está en K, entonces:

$$\frac{atm \cdot L}{mol} = 0.08207 \quad (K)$$

$$\therefore \quad 0.08207 \text{ está en } \frac{atm \cdot L}{mol \cdot (K)}$$

Comprobación:

Sustituyendo en la ecuación original:

$$atm\left(\frac{L}{mol}\right) = \frac{atm \cdot L}{mol \cdot (K)}\,(K)$$

$$\therefore \quad \boxed{1 = 1}$$

luego la ecuación es dimensionalmente correcta.

b) Traducción al Sistema Internacional (SI).

Si:

$$3.6 \text{ está en } \frac{atm \cdot L^{2}}{mol^{2}}$$

entonces, como:

$$1\ atm = 1.013 \times 10^5\ \frac{N}{m^2}$$

$$1\ L = 0.001\ m^3$$

$$1\ L^2 = (0.001)^2\ m^6 = 0.000\,001\ m^6 = 10^{-6}\ m^6$$

sustituyendo:

$$3.6\,\frac{atm \cdot L}{mol^2} = (1.013 \times 10^5)(10^{-6})\,3.6\,\frac{N \cdot m^6}{m^2 \cdot mol}$$

$$\therefore \quad \boxed{3.6\,\frac{atm \cdot L}{mol^2} = 0.3647\,\frac{N \cdot m^4}{mol}}$$

que es el valor en unidades SI.

Si:

$$0.0428 \text{ está en } \frac{L}{mol}$$

entonces, como:

$$1\ L = 0.001\ m^3$$

$$0.0428\ \frac{L}{mol} = 0.0428(0.001)\ \frac{m^3}{mol} = 0.000\ 0428\ \frac{m^3}{mol}$$

$$\therefore \boxed{0.0428\ \frac{L}{mol} = 4.28 \times 10^{-5}\ \frac{m^3}{mol}}$$

Si:

0.08207 está en $\frac{atm \cdot L}{mol \cdot (K)}$

entonces, como:

$$1\ atm = 1.013 \times 10^5\ \frac{N}{m^2}$$

$$1\ L = 0.001\ m^3 = 10^{-3}\ m^3$$

$$0.08207\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} = 0.08207(1.013 \times 10\ \times 10^{-}\ )\ \frac{N \cdot m^3}{m^2 \cdot mol \cdot K}$$

$$\therefore \boxed{0.08207\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K} = 8.3137\ \frac{N \cdot m}{mol \cdot K}}$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación original:

$$\boxed{\left(p + \frac{0.3647}{V_m^2}\right)(V_m - 4.28 \times 10^{-5}) = 8.3137\,T}$$

que es la ecuación de Van der Walls para el CO_2 en el sistema SI, donde:

p = presión en $\frac{N}{m^2}$

V_m = volumen molar en m^3

T = temperatura absoluta en K

c) Traducción al Sistema Inglés (FPS Imperial):

Si:

0.3647 está en $\frac{N \cdot m^4}{mol^2}$

entonces, como:

$$1\ N = 0.224\ 809\ lb_f$$

$$1\ m^4 = (3.281)^4 ft^4 = 115.884\ ft^4$$

sustituyendo:

$$0.3647\ \frac{N \cdot m^4}{mol^2} = 0.3647(0.224\ 809 \times 115.884)\ \frac{lbf \cdot ft^4}{mol^2}$$

$$\therefore \boxed{0.3647\ \frac{N \cdot m^4}{mol^2} = 9.5011\ \frac{lbf \cdot ft^4}{mol^2}}$$

Si:

0.0000428 está en $\frac{m^3}{mol}$

entonces, como:

$$1\ m = 3.281\ ft$$

$$1\ m^3 = (3.281)^3 ft^3$$

$$1\ m^3 = 35.314\ ft^3$$

sustituyendo:

$$0.0000428\ \frac{m^3}{mol} = 4.28 \times 10^{-5}\ \frac{m^3}{mol} = 4.28 \times 10^{-5} \times 35.314\ \frac{ft^3}{mol}$$

$$\therefore \boxed{0.0000428\ \frac{m^3}{mol} = 151.144 \times 10^{-5}\ \frac{ft^3}{mol}}$$

Si:

8.3137 está en $\frac{N \cdot m}{mol \cdot K}$

entonces, como:

$$1\ N = 0.224809\ lb_f$$

$$1\ m = 3.281\ ft$$

$$1\ K = 1.8\ °R$$

sustituyendo:

$$8.3137 \frac{N \cdot m}{mol \cdot (°K)} = \frac{8.3137 \times 0.224809 \times 3.281}{1.8} \frac{lb_f \cdot ft}{mol \cdot (°R)}$$

$$\therefore \quad \boxed{8.3137 \frac{N \cdot m}{mol \cdot K} = 3.4068 \frac{lb_f \cdot ft}{mol \cdot °R}}$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación SI:

$$\boxed{\left(p + \frac{9.5011}{V_m^2}\right)(V_m - 151.144 \times 10^{-5}) = 3.4068\ T}$$

que es la ecuación de Van der Walls para el CO_2 en el sistema FPS Imperial, donde:

p = presión en $\frac{lb_f}{ft^2}$

V_m = volumen molar en ft^3

T = temperatura absoluta en (°R)

2.7 INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Con frecuencia la magnitud por medir no es accesible, o no es conveniente, para realizar la comparación directa con una referencia, por ejemplo, la intensidad de la radiación dentro de un reactor nuclear. Esta circunstancia permite, entonces, distinguir dos clases de mediciones:

> 1) *Medición directa:* *Es aquélla que se realiza por comparación inmediata.*
>
> 2) *Medición indirecta:* *Es aquélla que se realiza por conversión de la magnitud que se pretende medir en alguna señal análoga susceptible de ser medida.*

En este caso, la magnitud debe ser convertida, traducida en una señal analógica medible; es decir, en una cantidad física de tipo más conveniente, que se encuentre relacionada con la magnitud por medir, de tal manera que un valor dado de la señal represente una medida definida de la magnitud; como en el caso de los relojes analógicos, en los cuales el tiempo es medido *por la abertura de los ángulos* que forman las manecillas con el *sistema de referencia básico*. La cantidad de referencia o unidad, debe entonces ser convertida en forma similar, para proporcionar una señal, también de referencia, de la misma especie que la señal que se trata de medir. En consecuencia, la señal por medir debe compararse con la señal de referencia, después de una conveniente multiplicación o subdivisión. La igualdad de la medida se establece oponiendo la magnitud con su referencia; o bien, oponiendo las señales análogas que las representan; de tal manera que ocurre una transferencia de energía en una dirección o en la otra, dependiendo esto de las magnitudes relativas de las dos. La aproximación a la igualdad queda entonces evidenciada por reducción de la energía transferida a un mínimo.

Como en el proceso de comparación se requiere energía, siempre existe interacción entre la magnitud observada y el instrumento de observación. Por lo tanto, el valor de dicha magnitud observada no es el mismo que el de la magnitud sin perturbación o quieta.

Si dicha perturbación es suficientemente grande para ser significante, el valor exacto de la magnitud que se desea medir debe inferirse a partir del conocimiento del proceso de perturbación. Desde luego, el tiempo requerido para la acumulación y transferencia de energía, limita la capacidad de medir con rapidez fenómenos cambiantes o dinámicos.

El dispositivo o instrumento de comparación constituye, entonces un *instrumento de medida*, el cual, en términos generales, se define así:

> *Un instrumento de medida cualquiera es una aparato o un sistema basado en una propiedad física tal, que su variación es proporcional a la variación de la magnitud que se trata de medir.*

Muchos instrumentos de medida son sistemas, más o menos complejos, en los cuales un cierto número de elementos funcionales se unen para realizar la medida deseada; y, también, para expresar los resultados en la forma igualmente deseada. En algunos casos, los elementos funcionales son unidades discretas interconectadas por el usuario para formar el instrumento de medida completo. En otros, los elementos están de tal manera integrados, que sus funciones individuales no son fácilmente discernibles. Así, la intensidad luminosa puede ser medida interconectando un tubo fotoeléctrico, una fuente de potencia, un amplificador y un voltímetro; o bien, todos estos elementos pueden ser integrados en un solo instrumento que es conocido como fotómetro o exposímetro.

Algunas de las funciones realizadas por los elementos funcionales son básicas en el proceso de la medida. Así, en cualquier instrumento de medida, un elemento debe ser capaz de discriminar la magnitud por medir entre todas las otras condiciones; y, además, debe percibir su importancia. En cualquier sistema de medida, esta magnitud debe ser comparada con la unidad de referencia; y el resultado de esta comparación debe ser comunicado a un observador o a un dispositivo que realizan funciones de control. En otros casos, los elementos funcionales manipulan los resultados de la medición para presentarlos en la forma deseada, y en el lugar y en el tiempo también deseados.

Aunque una secuencia específica de funciones existe en un sistema dado; en cambio, no hay un orden estándar en el cual dichas funciones deban realizarse; incluso, algunas pueden ser efectuadas más de una vez. También debe hacerse notar que muchos de esos elementos funcionales son en sí mismos, instrumentos de medida, porque aceptan una señal como entrada y producen una señal de salida relacionada, cuantitativamente, con la magnitud de la entrada.

Los elementos funcionales de un instrumento pueden ser analizados desde el punto de vista de un sistema ideal y completo, en el cual todas las funciones de medida son realizadas sin la intervención humana, excepto para anotar los resultados finales. En la práctica, los sistemas de medición, a menudo, están sólo parcialmente instrumentados; ya que algunas de las funciones de medida son realizadas por operadores u observadores que son, a su vez, participantes de dichos sistemas de medición. En esta

forma, por ejemplo, un espectrómetro para medir la composición química puede producir la impresión de un espectro infrarrojo que, a su vez, debe ser interpretado, por el observador para producir la información deseada sobre dicha composición.

Las diferentes magnitudes físicas, a su vez, con frecuencia no son medidas directamente; sino que, en su lugar, son inferidas por combinación de los resultados de un cierto número de medidas separadas indirectas. Por eso, analogías de muchas funciones instrumentales pueden ser encontradas en los sistemas biológicos; como por ejemplo, en los sensores de temperatura de muchos organismos vivientes. Recíprocamente, muchas funciones de medición que son realizadas por el hombre, pueden también ser efectuadas por dispositivos instrumentales; aunque el comportamiento de los sistemas vivientes, en algunos casos, como en el del sentido del olfato, no haya sido igualado, hasta la fecha por lo sistemas instrumentales.

Cinco fases deben distinguirse en la evolución de dichos sistemas instrumentales:

1) Definición
2) Investigación y desarrollo
3) Proyecto
4) Producción
5) Aplicación

Estas fases no están claramente separadas; incluso en la última, frecuentemente es deseable retroalimentar las anteriores, para mejorar la operación del instrumento.

2.8 METODOS DE MEDIDA

Como una consecuencia de lo anteriormente expuesto, se desprende de que el uso de un instrumento de medida cualquiera exige de un método particular que, por su misma naturaleza, resulta específico para el instrumento de que se trate. Por lo tanto, no es posible establecer métodos de medida, generales a los cuales se acomode el empleo de cualquier sistema de medición, dado que cada uno de ellos tiene sus propios rangos y limitaciones que excluyen la posibilidad de uniformar su utilización.

Entiéndase que no es lo mismo manipular un longímetro que un reloj, un goniómetro que un dinamómetro; o un electrómetro que un termómetro, por ejemplo.

Sin embargo, algunos requisitos, que deben ser satisfechos por los distintos aparatos y sistemas de medida, sí resultan por completo de tipo general; entre éstos se mencionan, principalmente:

1. *Calibración adecuada*.- Consiste en la graduación de un instrumento para efectuar mediciones en unidades determinadas. Así, si se gradúa la escala de un galvanómetro en amperes, el aparato se transforma en un amperímetro.

2. *Ajustes necesarios*.- Son las operaciones de manipulación a que debe someterse un instrumento de medida para que cumpla los requisitos geométricos y de construcción que exige la medición correcta de una magnitud.

3. *Control de errores*.- Puesto que en la práctica la medición siempre va acompañada con errores, es necesario conocer los tipos de estos y su teoría básica, aunque esta última no será objeto de estudio en este caso.

En general, un error de medida es la discrepancia que aparece siempre entre el valor real de una magnitud y el valor medido de la misma. Desde luego, los errores pueden reducirse hasta límites tolerables, pero no pueden eliminarse completamente, lo que obliga a introducir tolerancias de control en los procesos de medición. En la teoría de observaciones, cuatro clases de errores de observación se distinguen ordinariamente.

1. *Errores instrumentales*.- Son los originados por la inadecuación o imprecisión de los instrumentos empleados para observación.

2. *Errores personales*.- Surgen de las diferentes prácticas y reacciones que tienen los observadores humanos.

3. *Errores sistemáticos*.- Son aquellos que introducen una discrepancia contínua o sistemática en todas las observaciones realizadas en la medición de una magnitud que debe ser reducida o corregida.

4. *Errores fortuitos o de azar*.- Son aquellos que reflejan el hecho de que cuando diferentes observadores repiten las mismas mediciones, siempre ocurrirá alguna variación en los resultados; independientemente de la precisión que puedan tener los instrumentos de medida. Estos errores son los más importantes en la actualidad.

2.9 CONCLUSIONES

Resumiendo, en forma práctica, lo anteriormente estudiado, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1. El resultado final de un cálculo en ingeniería, es generalmente un número; y, además, los ingenieros emplean diferentes sistemas de numeración juntamente con el familiar sistema decimal. En dichos cálculos, el número de cifras significativas de un resultado no debe ser mayor que el menor correspondiente a cualquier cantidad que intervenga en ellos. Además, para manejar números muy grandes o muy pequeños debe usarse la notación científica, en la cual el resultado se escribe en términos de potencias de diez.

2. Las características de los sistemas y procesos físicos sujetos a medida son conocidas, colectivamente, como dimensiones; y todas las medidas físicas pueden ser descritas en términos de un conjunto de dimensiones fundamentales: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, intensidad luminosa y cantidad de substancia. Todas las demás dimensiones pueden ser derivadas en términos de las dimensiones fundamentales.

3. La magnitud de las dimensiones físicas se expresa con relación a cantidades de las mismas llamadas unidades; y, aunque muchos diferentes sistemas de unidades se han empleado en la práctica de la ingeniería, actualmente se usa un sistema estándar de tipo universal, que es un refinamiento del sistema métrico decimal, llamado Sistema Internacional de Unidades o Sistema SI.

4. El Sistema SI está compuesto de siete unidades base que caracterizan a las dimensiones fundamentales; mientras que las unidades derivadas pueden ser expresadas como combinaciones algebraicas de las unidades base, aunque algunos nombres y símbolos se han introducido para designar a las más comunes de estas unidades derivadas. Además, se usan prefijos para reprentar múltiplos o submúltiplos decimales de las unidades; y se han adoptado reglas precisas para controlar el uso de las unidades SI.

5. Los ingenieros deben estar preparados para realizar cálculos tanto en el Sistema SI, como en los diferentes sistemas usuales. La conversión entre sistemas de unidades es una necesidad ineludible.

2.10 PROBLEMAS PROPUESTOS

2.1 Determinar el número de cifras significativas en cada una de las siguientes cantidades:

a) 9.040 d) 0.02003

b) 205.8 e) 605.002

c) 0.000581 f) 3.1200

2.2 Realizar el cálculo indicado, redondeando el resultado al número apropiado de cifras significativas:

a) $2.19 + 4.2 + 1.489$ d) $376 \div 0.031$

b) 7.25×3.206 e) $57.34 - 0.0003$

c) $7.110 + 1$ f) $(34.12 + 78.2) \div 1.9$

2.3 Expresar cada uno de los siguientes números en notación científica:

a) 134.2 d) 18 412.002

b) 0.0056 e) 0.000 000 71

c) 59 000 000 f) 0.085 2

2.4 Escribir los siguientes números en forma decimal:

a) 8.15×10^{-4} d) 3.817 E + 03

b) 7.918×10^{1} e) 1.314 E - 06

c) 2.009×10^{5} f) 9.17 E + 10

2.5 Realizar los cálculos indicados, expresando cada respuesta en forma decimal y en notación científica; y redondeando el número apropiado de cifras significativas:

a) $(3.14 \times 10^{-7}) \times (3.21 \times 10^{6})$ d) $(220.6) - (1.42 \times 10^{2})$

b) $(2.91 \times 10^{1}) - (6.32 \times 10^{-3})$ e) $(798.1) \times (3.19 \times 10^{-2})$

c) $(0.89 \times 10^{5}) \div (2.31 \times 10^{17})$ f) $(0.007) \div (1.3 \times 10^{-3})$

2.6 Obtener la relación entre:

a) kilómetros y milímetros d) días y picosegundos

b) $(\text{decámetros})^2$ y $(\text{centímetros})^2$ e) años y minutos

c) nanosegundos y kilosegundos f) $(\text{micrometros})^3$ y $(\text{megámetros})^3$

2.7 Obtener el valor de $p = m \times n$ en el Sistema SI, si:

	Valor de m	Valor de n
a)	$9.2\ \text{cm}^{-2}\ \text{s}^{3}$	$2.7\ \text{km}^{4}\ \text{s}^{-1}$
b)	$7\ \text{nm}^{3}\ \text{ps}^{3}$	$5.9\ \text{m}^{-7}\ \text{ks}$

2.8 Obtener el valor de:

$$q = \frac{m}{n}$$

en el Sistema SI, con los datos del problema anterior.

2.9 Obtener el valor de $\sqrt{q}$ del problema anterior.

2.10 Un avión viaja una distancia de 912 km en un tiempo de 1.3 horas. Calcular la rapidez promedio del avión en el Sistema SI.

2.11 Un núcleo atómico tiene un radio de 1.33×10^{-14} m. Calcular el volumen del núcleo, suponiendo que es esférico, en cm^3.

2.12 Si el núcleo del problema anterior tiene una masa de 6.42×10^{-27} kg. Calcular su densidad en g/cm^3.

2.13 Un sistema Nova laser es capaz de producir un pulso luminoso de energía 3×10^{4} J en un tiempo de $1 \div 10^{-10}$ s. Calcular el nivel de potencia de este laser en el Sistema SI.

2.14 Verificar las siguientes ecuaciones usando el concepto de homogeneidad dimensional.

a) $F = ma$ (fuerza = masa x aceleración)

b) $T = \frac{1}{2}mv^2$ (energía cinética = $\frac{1}{2}$ masa x rapidez)

c) $E = mc^2$ (energía en reposo = masa x rapidez de la luz^2)

d) $P = RI^2$ (potencia = resistencia x intensidad de corriente eléctrica^2)

2.15 Determinar las dimensiones de los siguientes coeficientes a partir de la ecuación correspondiente.

a) Constante universal de los gases R:

$pV = n\,R\,T$ (presión x volumen = número de moles x R x temperatura absoluta)

b) Coeficiente de arrastre C_D:

$F = C_D\, A\delta\, \frac{V^2}{2}$ (fuerza de arraste = C_D x área x densidad x $\frac{1}{2}$ velocidad^2)

c) Coeficiente de transferencia de calor h:

$Q = hA\,(T_1 - T_2)$ (calor transferido = h x área x diferencia de temperaturas)

2.16 A menudo, en ingeniería se encuentran parámetros adimensionales. Verificar que cada uno de los siguientes es de ese tipo:

a) Número de Reynolds, Re:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \quad \frac{\text{densidad x velocidad x diámetro}}{\text{viscosidad}}$$

b) Número de Prandtl, Pr:

$$Pr = \frac{\mu C_p}{K} \quad \frac{\text{viscosidad x calor específico}}{\text{conductividad térmica}}$$

c) Número de Nusselt, Nu:

$$Nu = \frac{hD}{K} \quad \frac{\text{coeficiente de transferencia de calor x longitud}}{\text{conductividad térmica}}$$

2.17 Expresar cada una de las siguientes cantidades en unidades SI fundamentales:

a) 20.000 W

b) 35 g/cm^3

c) 99 Joules

d) 213 kPa

e) 2.5 μf

f) 120 km/h

g) 90 Hz

h) 72 K · m

2.18 Escribir cada una de las siguientes cantidades en unidades SI:

a) Velocidad de la luz

b) Velocidad límite en el periférico

c) Presión atmósferica

d) Punto de congelación del agua

e) Su propio peso

f) Su propia masa

2.19 Convertir las siguientes cantidades en unidades SI:

a) 18 in

b) 11 yd

c) 31 acres

d) 200 HP

e) $\frac{4}{5}$ gal

f) 90 cal

g) 200 Å

h) 12 slugs

i) 97 poundals

j) 31 psi

k) 1 300 BTU

l) 39 lb_m

m) 39 lb_f

n) 98.6° F

o) 15 onzas

p) 14 psi

2.20 Se conduce un auto a 65 millas por hora cuando, repentinamente, se ve una señal que indica que la rapidez límite es de 100 km/h. ¿Se deberá disminuír la rapidez? ¿Cuánto en millas?

2.21 Determinar el peso en unidades SI de los siguientes objetos (se supone que la aceleración de la gravedad es $g = 9.81\ m/s^2$):

a) De un automóvil de 1 000 kg

b) De un camión de 2.2 ton

c) De una cuchara de 0.25 lb_m

2.22. La aceleración de gravedad varía ligeramente de un lugar a otro. Si en el ecuador es $g = 9.81\ m/s^2$ y en Groenlandia es $g = 9.83\ m/s^2$; calcular la diferencia de peso de un objeto de 100 kg llevado de un lugar a otro.

2.23 Un astronauta pesa 900 N en la Tierra. Determinar su peso en la Luna cuya aceleración de la gravedad es $g = 1.6\ m/s^2$.

2.24 Demostrar, a partir del Teorema Π, la ecuación $v = \sqrt{2gh}$ que da la velocidad de caída libre en función de la altura de caída.

velocidad de caída = (2 x gravedad x altura de caída)$^{\frac{1}{2}}$

2.25 Demostrar, a partir del Teorema Π, la primera ecuación de estado de los gases $pV = nRT$

presión x volumen = N° de moles x constante universal x temperatura abs

2.26 Traducir la expresión del Principio de Gravitación Universal:

$$F = 6.673 \times 10^{11} \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad \text{en el SI}$$

donde:

F = fuerza de atracción, medida en N

m_1 y m_2 = masas, medidas en kg

d = distancia, entre masas, medida en m

a otra en que la fuerza se mida en poundals, las masas en lb_m y la distancia entre ellas en ft. (Sistema Inglés Absoluto).

2.27 Traducir la Ecuación de Boltzmann, que establece: "la energía cinética promedio de cada una de las partículas que constituyen un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta", expresada por la fórmula:

$$E_{cin} = 2.071 \times 10^{-23} \quad T_K \quad [J]$$

donde E_{cin} se mide en joules y T_K en K (Sistema SI), a otra en que la energía cinética se mida en BTU y la temperatura absoluta en grados Rankine. (Sistema Inglés Absoluto).

2.28 Traducir la fórmula que permite calcular la fuerza de frotamiento viscoso del aceite de ricino con respecto al vidrio:

$$F_{fr} = 12 \frac{SV}{e} \quad [\text{dinas}] \quad \text{en el CGS}$$

donde:

S: es el área medida en cm^2;

V: la velocidad de escurrimiento en $^{cm}/s$

e: la distancia entre láminas del aceite medida en cm. (Sistema CGS)

con respecto al vidrio; en otra en que la fuerza se mida en poundals; el área en ft^2; la velocidad de escurrimiento en $^{ft}/s$; y la distancia de la lámina en ft. (Sistema Inglés Absoluto).

El coeficiente η (que para el aceite de ricino vale 12 a 20°C) se llama coeficiente de viscosidad absoluta del fluido.

2.11 SOLUCION DE PROBLEMAS PROPUESTOS

2.1

a) 3 cifras

b) 4 cifras

c) 3 cifras

d) 4 cifras

e) 6 cifras

f) 3 cifras

2.2

a) 7.9

b) 23.2

c) 8.0

d) 12 100

e) 57.34

f) 59.1

2.3

a) $1.34 \times 10^2 = 1.342$ E + 02

b) $5.6 \times 10^{-3} = 5.6$ E + 03

c) $5.9 \times 10^7 = 5.9$ E + 07

d) $1.8412 \times 10^4 = 1.8412$ E + 04

e) $7.1 \times 10^{-7} = 7.1$ E + 07

f) $8.52 \times 10^{-2} = 8.52$ E + 02

2.4

a) $0.000\,814 = 8 \times 10^{-4}$

b) $79.18 = 7.918 \times 10^1$

c) $200{,}900 = 2.009 \times 10^5$

d) $3\,817 = 3.817 \times 10^3$

e) $0.000001314 = 1.314 \times 10^{-6}$

f) $91{,}700{,}000{,}000 = 9.17 \times 10^{10}$

2.5

a) 1.01 = 1.01 E + 00

b) $2.9 \times 10^1 = 2.9$ E + 01

c) $3.9 \times 10^{-3} = 3.9$ E − 03

d) $7.86 \times 10^1 = 7.86$ E + 01

e) $2.55 \times 10^1 = 2.55$ E + 01

f) 5.4 = 5.4 E + 00

2.6

a) km = 10^6 mm

b) da = 10^6 cm

c) ns = 10^{-12}ks

d) día − 8.64×10^{16} ps

e) año = 5.26×10^5 min

f) $\mu m^3 = 10^{-36}$ Mm^3

2.7

a) $p = 2.484 \times 10^{17}\ m^6\ s^2$

b) $p = 4.13 \times 10^{-35} m^{-4}\ s^2$

2.8

a) $q = 3.41 \times 10^{-8}\ m^{-2}$

b) $q = 1.19 \times 10^{-42}\ m^{10}$

2.9 a) $\sqrt{q} = 1.85 \times 10^{-4}\ m^{-1}\ s^2$

$\sqrt{q} = 1.09 \times 10^{-21}\ m^5$

2.10

$V = 194.87$ m/s

2.11

$V = 9.85 \times 10^{-36}\ cm^3$

2.12

$\delta = 6.52 \times 10^{11}\ gr/cm^3$

2.13

$P = 3 \times 10^{14}$ W = 300 TW

2.14

a) $|LMT^{-2}| = |LMT^{-2}|$

b) $|L^2MT^{-2}| = |L^2MT^{-2}|$

c) $|L^2MT^{-2}| = |L^2MT^{-2}|$

d) $|L^2MT^{-3}| = |L^2MT^{-3}|$

2.15

a) $|R| = |L^2MT^{-1}n^{-1}T_{em}{}^{-1}|$

b) C_D es adimensional

c) $|h| = L^{\circ}MT^{-3}T_{em}{}^{-1}|$

2.16

a) R_e es adimensional

b) P_r es adimensional

c) NO es adimensional

2.17

a) 20 000 W = 20 000 $kg\cdot m^2\cdot s^{-4}$

b) 35 gr/cm^3 = 35 000 kg/m^3

c) 99 J = 00 $kg.m^2.s^{-2}$

d) 213 kPa = $213 \times 10^3 kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}$

e) 2.5 µf = 2.5×10^{-21}

f) 120 km/h = 33.33 $m\cdot s^{-1}$

g) 90 cps = $180\ \pi\ s^{-1}$

h) 72 km = 72×10^3 m

2.18

a) 300 000 km/s = $3 \times 10^8 m\ s^{-1}$

b) 80 km/h = 22.2 $m\cdot s^{-1}$

c) 1atm = 1.013 x 10 $N\cdot m^{-2}$

d) 0°C = 273.19°K

e) 68 kg_f = 667.08 $kg\cdot m\cdot s^{-2}$

f) m = 68 kg

2.19

a) 18 in = 0.4572 m

b) 11 yd = 10.0584 m

c) 31 acres = 125 4522.66 m^2

d) 200 HP = 149 kW

e) $\frac{4}{5}$ gal = 0.0036344 m^3

f) 90 cal = 376.812 J

g) 2 800 Å = 2.8 x 10^{-7} m

h) 12 slug = 175.128 kg

i) 97 poundal = 13.411 N

j) 31 psi = 2.17 x 10^4 kg/m^2

k) 13 000 BTU = 13 676 kJ

l) 39 lb_m = 17.69 kg

m) 39 lb_f = 173.4798 N

n) 98.6°F = 310.19°K

o) 15 onzas = 0.42525 kg

p) 14 psf = 141.12 x 10^4 kg/

2.20

Debe disminuirse en 2.86 millas/hora

2.21

a) 9810 N

b) 21582 N

c) 1.1129 N

2.22

$\Delta W = W_{Groenlandia} - W_{Ecuador} = 2$ N

2.23

$W_{luna} = 146.79$ N

2.24

Debe demostrarse

2.25

Debe demostrarse

2.26

$F = 1.06907 \times 10^{-9} \frac{m_1 m_2}{d^2}$; F en poundals, m_1 y m_2 en lb_m, d en ft

2.27

$E_{cin} = 8.774 \times 10^{-22} T_R$; E_{cin} en BTU, T_R en grados Rankine

2.28

$f_{ricino} = 0.08067 \frac{SV}{e}$; f_{ricino} en poundals, S en ft^2, V en ft/S e en ft

B I B L I O G R A F I A

- BEER, FERDINAND P. and RUSSELL JOHNSTON, Jr.
  Vector Mechanics for Engineers, S.I. Metric Edition
  New York: Mc Graw-Hill, Ryerson, Ltd., 1981.

- HALLIDAY, F. E.
  An Illustrated Cultural History of England.
  London: Thames and Hudson, Ltd., 1972.

- HOGBEN, LANCELOT.
  Mathematics for the Millions.
  New York: W. W. Morton and Company, Inc., 1951.

- JOHNSON, DONOVAN and WILLIAM H. GLENN.
  The World of Measurement.
  St. Louis: Webster Publishing Co., 1961.

- SMITH, DAVID EUGENE.
  History of Mathematics, Vol. II.
  Boston: Ginn and Co., 1925.

- TAYLOR, JOHN.
  The illustrated Encyclopedia of Technology.
  London: Marshall Cavendish, Ltd., 1978.

- WILLERDING, MARGARET F.
  Mathematical Concepts. A historical Approach.
  Boston: Prindle, Weber and Schmidt, Inc. 1967.

- AMERICAN NATIONAL METRIC COUNCIL.
  Metric Editorial Guide.
  Washington: Bureau of Publications, 1975.

- AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE.
  Standard for Metric Practice.
  Washington: Bureau of Publicacionts, 1976.

- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS.
  The Metric System of Weights and Measures.
  New York: Bureau of Publications, Teachers College.
  Columbia University, 1948.

- SECRETARIA DE PATRIMONIO Y FOMENTO INDUSTRIAL.
  Norma Oficial Mexicana. Sistema General de Unidades de Medidas. Sistema Interancional de Unidades (SI).
  México: Dirección General de Normas, 1981.