



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

COMPORTAMIENTO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
EDGAR MANUEL ORTIZ LAZCANO

TUTOR
DR. ALBERTO JAIME PAREDES
INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX. DICIEMBRE 2016

JURADO ASIGNADO:

PRESIDENTE: DR. RIVERA CONSTANTINO RIGOBERTO

SECRETARIO: DR. BOTERO JARAMILLO EDUARDO

VOCAL: DR. JAIME PAREDES ALBERTO

1 ER. SUPLENTE: M.I. MARTÍNEZ MIER JAIME ANTONIO

2 D O. SUPLENTE: M.I. CASTILLA CAMACHO JORGE EFRAÍN

LUGAR O LUGARES DONDE SE REALIZÓ LA TESIS: CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO

TUTOR DE TESIS:

DR. ALBERTO JAIME PAREDES

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Alberto Jaime Paredes, por su dirección en la elaboración de esta tesis.

A los sinodales por el tiempo invertido en la revisión de esta tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al CONACYT por el apoyo económico recibido que me permitió estudiar la maestría.

COMPORTAMIENTO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA

CONTENIDO

| | PÁG. |
|---|-------------|
| LISTA DE FIGURAS | iv |
| LISTA DE TABLAS | viii |
| LISTA DE SÍMBOLOS | ix |
| ANTECEDENTES | 1 |
| OBJETIVO | 2 |
| | |
| 1. CLAVES HISTÓRICAS EN EL DISEÑO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA | 3 |
| 1.1 Enfoques científicos | 4 |
| 1.1.1 Primer enfoque científico..... | 4 |
| 1.2.2 Enfoque con sección definida. | 7 |
| | |
| 2. CLAVES HISTÓRICAS EN EL DISEÑO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA CON CONTRAFUERTES | 9 |
| 2.1 Enfoques empíricos..... | 9 |
| 2.1.1 Regla gótica..... | 9 |
| 2.1.2 Regla Renacentista..... | 11 |
| 2.2 Primeros diseños científicos de contrafuertes | 12 |
| 2.2.1 La escuela francesa..... | 12 |
| 2.2.2 La escuela inglesa | 15 |
| | |
| 3. MÉTODOS DE DISEÑO DE PRESAS EN EL SIGLO XX | 22 |
| 3.1 Presión del agua externa..... | 22 |
| 3.2 Subpresión | 25 |
| 3.3 Presión de azolve | 26 |
| 3.4 Efectos dinámicos y subatmosféricos..... | 27 |
| 3.4.1 Vertedor de cresta aguda..... | 27 |
| 3.4.2 Vertedor de cresta aguda. No aireado. | 29 |
| 3.4.3 Cresta de presas vertedoras..... | 30 |
| 3.4.4 Fuerza dinámica de la corriente aguas abajo..... | 32 |
| 3.5 Peso de la presa | 33 |

| | |
|--|-----------|
| 3.6 Presión hidrodinámica | 34 |
| 3.7 Reacción vertical de la cimentación..... | 35 |
| 3.7.1 Requisitos estáticos | 35 |
| 3.7.2 Efectos de elasticidad | 35 |
| 3.7.3 Ecuaciones para la distribución de presiones verticales..... | 38 |
| 3.7.4 Reacciones combinadas de subpresión y cimentación. | 41 |
| 3.7.5 Requisitos para la estabilidad. | 42 |
| | |
| 4. REQUISITOS PARA LA ESTABILIDAD Y ECUACIONES GENERALES EN EL DISEÑO DE PRESAS DE GRAVEDAD | 44 |
| 4.1 Causas de falla..... | 44 |
| 4.2 Ubicación de las resultantes..... | 45 |
| 4.3 Resistencia al deslizamiento. | 48 |
| 4.4 Esfuerzos de compresión | 50 |
| 4.5 Tensión sobre planos inclinados o verticales..... | 54 |
| 4.6 Margen de seguridad..... | 55 |
| 4.7 Detalles de diseño y métodos de construcción..... | 56 |
| | |
| 5. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS | 58 |
| 5.1 Fundamentos | 58 |
| 5.2 Elementos finitos 3D | 60 |
| 5.2.1 Análisis convencional de elementos finitos 3D..... | 61 |
| 5.2.2 Soluciones iterativas | 65 |
| | |
| 6. REVISIÓN DE LA ESTABILIDAD DE UNA PRESA ANTIGUA DE MAMPOSTERÍA. 73 | |
| 6.1 Bases para el diseño de presas de mampostería con contrafuertes..... | 75 |
| 6.2 Marco de referencia para el análisis geotécnico estructural | 78 |
| 6.2.1 Geología del Sitio..... | 81 |
| 6.2.2 Parámetros para el análisis de estabilidad en condiciones extremas..... | 84 |
| 6.2.3 Problemas de seguridad geotécnica y estructural de la cortina..... | 86 |
| 6.2.3 Selección de propiedades para el análisis | 90 |
| 6.3 Revisión de estabilidad estructural por el método de creager..... | 92 |
| 6.4 Revisión de estabilidad por el metodo de elementos finitos tridimensionales. | 97 |
| 6.4.1 Modelo geomecánico estructural de la cortina | 97 |
| 6.4.2 Análisis de estabilidad de la cortina | 100 |

| | |
|--|-----|
| 6.4.3 Evaluación de la seguridad estructural..... | 102 |
| 7. CONCLUSIONES | 116 |
| APÉNDICE A. ELEMENTOS FINITOS | 119 |
| A.1 Cálculo de variaciones y métodos variacionales | 119 |
| A.2 Discretización del medio continuo | 123 |
| A.3 Aproximación del campo de desplazamientos (modelos de desplazamiento) | 126 |
| A.4 Compatibilidad | 128 |
| A.5 Elementos finitos isoparamétricos..... | 129 |
| A.6 Ecuaciones de los elementos..... | 132 |
| A.6.1 Principio de energía potencial mínima y obtención de la matriz de rigidez..... | 135 |
| A.6.2 Integración numérica | 139 |
| A.7 Ecuaciones globales | 142 |
| A.7.1 Método de ensamble directo de la matriz de rigidez | 143 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 147 |

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 1

| | | |
|------------|---|---|
| Figura 1.1 | Primeras presas de mampostería en España. (a) Presa Almanza y (b) Presa Alicante. (Wegmann, 1927) | 4 |
| Figura 1.2 | Perfil tipo Sazilly. (Wegmann, 1927) | 5 |
| Figura 1.3 | Perfil tipo Declore. (Wegmann, 1927) | 6 |
| Figura 1.4 | Perfil tipo Rankine. (Bretas, 2012) | 7 |

Capítulo 2

| | | |
|------------|---|----|
| Figura 2.1 | Regla Gótica, geométrica, para diseño de contrafuertes. (Derand, 1643; citado por Huerta, 2004) | 10 |
| Figura 2.2 | Aplicación de la regla Renacentista del tercio del tramo de la iglesia del Redentor II, Venecia, por Palladio. (Huerta, 2004) | 11 |
| Figura 2.3 | Procedimiento de La Hire para diseñar el contrafuerte de una bóveda simple: (a) dibujo original; (b) la interpretación de Heyman. (Heyman, 1998) | 12 |
| Figura 2.4 | Ejemplos de los cálculos de Bélidor de diseño de contrafuerte: (a) el caso típico; (b) un edificio complejo (Bélidor, 1729) | 14 |
| Figura 2.5 | Contrafuertes críticos calculados por Audoy en 1820 | 15 |
| Figura 2.6 | (a) Idea de Hooke sobre la analogía entre arco y catenaria; (b) Modelo colgante de Poleni para demostrar la estabilidad de la cúpula de San Pedro de Roma. (Poleni, 1748) | 16 |
| Figura 2.7 | Los primeros dibujos de líneas de empuje dentro de contrafuertes: la explicación gráfica del concepto; (b) de la línea de empuje en contrafuertes rectangulares (Moseley, 1843) | 17 |
| Figura 2.8 | (a) Momento de estabilidad de un contrafuerte (Rankine, 1858); (b) par equivalente | 21 |

Capítulo 3

| | | |
|------------|--|----|
| Figura 3.1 | Presión triangular del agua sobre un plano vertical | 23 |
| Figura 3.2 | Presión trapezoidal del agua sobre un plano vertical | 24 |
| Figura 3.3 | Distribución de subpresión | 26 |
| Figura 3.4 | Vertedor de cresta aguda y aireado | 28 |
| Figura 3.5 | Vertedor de cresta aguda no aireado | 30 |

| | | |
|-----------------------|--|----|
| Figura 3.6 | Presa de desbordamiento | 31 |
| Figura 3.7 | Distribución de presión hidrodinámica sobre una presa | 34 |
| Figura 3.8 | Reacción de la cimentación para una presa de gravedad | 35 |
| Figura 3.9 | Posibilidades de distribución de esfuerzos en la cimentación | 36 |
| Figura 3.10 | Detalle del pie de la presa | 38 |
| Figura 3.11 | Elementos de ecuaciones de distribución de presiones en la cimentación | 38 |
| Figura 3.12 | Diagramas de intensidad de la presión de subpresión práctica | 42 |
| Figura 3.13 | Presiones combinadas de subpresión y cimentación | 42 |
| Capítulo 4 | | |
| Figura 4.1 | Análisis de un plano horizontal en una presa de gravedad | 46 |
| Capítulo 5 | | |
| Figura 5.1 | Tipos de análisis bidimensional para esfuerzo plano, deformación plana y axisimetría | 60 |
| Figura 5.2 | Elementos finitos tridimensionales | 61 |
| Figura 5.3 | Elemento parental para un elemento de 20 nodos | 62 |
| Figura 5.4 | Conectividad nodal (Zienkiewicz, 2013) | 64 |
| Capítulo 6 | | |
| Figura 6.1 | Presa Los Arcos, Aguascalientes, México | 74 |
| Figura 6.2 | Esquema de una presa con contrafuertes | 75 |
| Figura 6.3 | Fuerzas actuantes en una presa de gravedad. (CONAGUA, 2010) | 76 |
| Figura 6.4 | Separación de contrafuertes | 77 |
| Figura 6.5 | Panorámica de la cortina de la presa San Blas desde margen izquierda | 78 |
| Figura 6.6 | La cortina tiene un eje serpenteante | 80 |
| Figura 6.7 | La cortina en su sección máxima | 80 |
| Figura 6.8 | La cortina tiene fugas o filtraciones por la mampostería | 81 |
| Figura 6.9 | Marco Geológico de la zona de la presa San Blas (SGM) | 83 |
| Figura 6.10 | Geología del sitio en donde está la presa San Blas | 83 |

| | | |
|-------------|--|-----|
| Figura 6.11 | Afloramiento de riolitas ignimbritas e ignimbritas riolíticas en la boquilla de San Blas | 84 |
| Figura 6.12 | Acelerogramas sintéticos para $T_r = 475$ años | 86 |
| Figura 6.13 | La cortina se desborda | 89 |
| Figura 6.14 | Ubicación de las secciones críticas de la presa | 98 |
| Figura 6.15 | Secciones críticas de la presa | 99 |
| Figura 6.16 | Modelación de la presa con elementos finitos tridimensionales | 102 |
| Figura 6.17 | Esfuerzos verticales máximos de la cortina (Condición 1) | 103 |
| Figura 6.18 | Esfuerzos verticales máximos de la cortina (Condición 2) | 103 |
| Figura 6.19 | Esfuerzos verticales máximos de la cortina (Condición 3) | 104 |
| Figura 6.20 | Esfuerzos verticales máximos de la cortina (Condición 4) | 104 |
| Figura 6.21 | Esfuerzos verticales máximos de la cortina (Condición 5) | 105 |
| Figura 6.22 | Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+110 de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m | 106 |
| Figura 6.23 | Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+120 de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m | 107 |
| Figura 6.24 | Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+125 (máxima) de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m | 107 |
| Figura 6.25 | Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+127 de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m | 108 |
| Figura 6.26 | Desplazamientos máximos en la corona de la cortina en condiciones de operación extrema con un desbordamiento con una lámina de 1 m | 109 |
| Figura 6.27 | Desplazamientos máximos y vista de la distorsión amplificada 1000X de la cortina con desbordamiento de 1 m | 110 |
| Figura 6.28 | Vista de distorsión amplificada 1000x de la cortina con desbordamiento de 1 m como caso de operación extrema | 110 |

Apéndice A

| | | |
|------------|---|-----|
| Figura A.1 | Dominio $[x_1, x_2]$ | 120 |
| Figura A.2 | Notación variacional | 120 |
| Figura A.3 | Elementos finitos bidimensionales | 124 |
| Figura A.4 | Numeración de los nodos y elementos | 125 |
| Figura A.5 | Elemento de tres nodos | 126 |
| Figura A.6 | Variación lineal de desplazamiento a través de un elemento de 4 nodos | 128 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| Figura A.7 | Variación del desplazamiento sobre una malla de elementos de 4 nodos | 129 |
| Figura A.8 | Elemento isoparamétrico de 8 nodos | 130 |
| Figura A.9 | Ejemplos de integración numérica | 140 |
| Figura A.10 | Ubicación de los puntos de Gauss | 142 |
| Figura A.11 | Matriz de rigidez de un elemento de 4 nodos | 144 |
| Figura A.12 | Matriz de rigidez del elemento en términos de grados de libertad globales | 145 |
| Figura A.13 | Procedimiento de ensamble para una malla simple con dos elementos | 146 |

LISTA DE TABLAS

Capítulo 3

| | | |
|-----------|---|----|
| Tabla 3.1 | Peso volumétrico de algunos tipos de mampostería. (Merriman, 1892). | 33 |
|-----------|---|----|

Capítulo 4

| | | |
|-----------|--|----|
| Tabla 4.1 | Esfuerzos permisibles para diferentes tipos de materiales. | 52 |
|-----------|--|----|

Capítulo 6

| | | |
|------------|--|-----|
| Tabla 6.1 | Presas coloniales en México. (Schnitter, 1994). | 73 |
| Tabla 6.2 | Coeficientes sísmicos para análisis pseudoestático de estabilidad. | 85 |
| Tabla 6.3 | Factores de amplificación por efecto del tipo de suelo. | 85 |
| Tabla 6.4 | Comparación de los análisis de estabilidad. | 96 |
| Tabla 6.5 | Parámetros de la presa San Blas para revisión estructural. | 97 |
| Tabla 6.6 | Presiones máximas sobre la cortina. | 101 |
| Tabla 6.7 | Factores de Seguridad Admisibles (USACE, USBR, CONAGUA). | 101 |
| Tabla 6.8 | Esfuerzos normales máximos σ_{xx} en la cortina. | 105 |
| Tabla 6.9 | Esfuerzos normales máximos σ_{yy} en la cortina. | 105 |
| Tabla 6.10 | Esfuerzos normales máximos σ_{zz} en la cortina. | 106 |
| Tabla 6.11 | Desplazamientos laterales máximos y distorsiones de la cortina. | 109 |
| Tabla 6.12 | Distorsiones que inician el daño en diferentes sistemas estructurales a base de mampostería (Reyes, 1999). | 111 |
| Tabla 6.13 | Cortantes actuantes totales V_{tot} en la base de la cortina. | 114 |
| Tabla 6.14 | Relación entre cortantes resistentes y actuante (V_{mR}/ V_{tot}) en la cortina. | 114 |

Capítulo 7

| | | |
|-----------|---|-----|
| Tabla 7.1 | Comparación de los análisis de estabilidad. | 116 |
| Tabla 7.2 | Factores de seguridad comparados con los admisibles por USACE, USBR, CONAGUA. | 116 |
| Tabla 7.3 | Comparación de los análisis de estabilidad con el MEF en la sección 0+125, condición 4. | 117 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------------|---|
| A | Área de la base de la cortina |
| A_m | Área de la sección transversal de la cortina |
| $[B]$ | Matriz de derivadas de las funciones de forma |
| c | Porcentaje de reducción de subpresión |
| c | Cohesión |
| $[D]$ | Matriz constitutiva |
| $\{\Delta d\}_n$ | Vector de desplazamientos nodales de cada elemento |
| E | Módulo de elasticidad |
| e | Excentricidad de la carga |
| f | Coefficiente de fricción |
| f_m' | Resistencia de diseño a compresión |
| G_m | Módulo de rigidez al cortante |
| g | Aceleración de la gravedad |
| g^k | Vector residual o fuera de balance |
| h_c | Carga real sobre la cresta |
| h_v | Carga debida a la velocidad |
| H_w | Distancia vertical desde la superficie del agua hasta la base de la cortina |
| I | Momento de inercia de la base alrededor de su centro de gravedad |
| $[I]$ | Matriz identidad |
| $[J]$ | Matriz jacobiana |
| k | Porcentaje de vacíos en una muestra unitaria de azolve |
| k_h | Coefficiente sísmico horizontal |
| $[K]$ | Matriz de rigidez |
| l_n | Longitud efectiva de cresta |
| m | Distancia desde el centro de gravedad hasta el punto de presión |
| $[N]$ | Matriz de funciones de forma |
| N_i | Funciones de interpolación |
| p'_v | Presión vertical sobre la cimentación en el pie de la presa |
| p''_v | Presión vertical sobre la cimentación en el talón de la presa |
| P_{az} | Presión de azolve |
| P_w | Presión total debida al empuje del agua |
| Q | Gasto total |

| | |
|------------------|--|
| q | Gasto por metro lineal |
| r | Relación de la media del esfuerzo cortante máximo en el plano |
| S, T, U | Coordenadas naturales |
| s_a | Resistencia cortante unitaria del material |
| s_{s-f} | Factor de seguridad cortante-friccionante |
| t | Espesor de la sección transversal de la cortina |
| u, v, w | Desplazamientos nodales |
| u', u'' | Funciones de x |
| V_i | Velocidad de onda de corte |
| V_s^{30} | Velocidad de ondas de cortante en los 30 m superficiales |
| V_m^* | Resistencia al esfuerzo cortante |
| W_u | Subpresión |
| x, y, z | Coordenadas cartesianas |
| x_0 | Brazo del momento al centro de gravedad de la base |
| Y_w | Tirante de agua |
| z | Posición de la resultante de todas las fuerzas actuantes contra la cortina |
| α | Ángulo de fricción interna del azolve |
| γ_w | Peso volumétrico del agua |
| γ_{az} | Peso volumétrico del azolve |
| γ_{az}' | Peso volumétrico seco del azolve |
| γ_m | Peso volumétrico de la mampostería |
| $\{\Delta F\}^T$ | Vector de fuerzas de cuerpo |
| $\{\Delta R\}$ | Vector de cargas |
| $\{\Delta T\}^T$ | Vector de fuerzas de superficie |
| ζ | Factor de intensidad de subpresión |
| θ | Ángulo de fricción |
| ν | Relación de Poisson |
| $\Sigma(P)$ | Resultante de todas las fuerzas horizontales |
| $\Sigma(W)$ | Resultante de todas las fuerzas verticales |
| $\Sigma(Wx_0)$ | Momento generado por las fuerzas verticales sobre el centro de gravedad |
| $\Sigma(Px_0)$ | Momento generado por las fuerzas horizontales sobre el centro de gravedad |
| φ | Inclinación de los paramentos de la cortina con respecto a la vertical |
| Φ | Distorsión |

ANTECEDENTES

Las presas, al mismo tiempo que benefician a la humanidad en sus actividades de riego, control de avenidas y generación de energía, representan una amenaza potencial debido a que sus fallas causan pérdidas de vidas humanas y propiedades o deterioro del medio ambiente. De ahí la importancia primordial de la seguridad de estas estructuras.

Las presas son las obras donde, sin duda, el papel de la geotecnia es más relevante y trascendental. Debe haber una sincronización y coordinación prácticamente perfecta entre la geología, la topografía, la hidráulica, la geotecnia y la ingeniería estructural, así como la ingeniería sísmica cuando se trate de una presa localizada en una zona de temblores.

Debido a múltiples razones, hoy día la construcción de presas nuevas ha dejado lugar a la conservación de las estructuras existentes, tarea que no es menos importante. En los últimos años, se han involucrado cada vez más ingenieros en las actividades relacionadas con el manejo de seguridad de presas. Entender los principios de análisis y diseño es fundamental para poder revisar el estado de seguridad de las presas construidas dando diagnósticos acertados a los síntomas de mal funcionamiento y proponiendo soluciones ingenieriles eficientes (Flores *et al*, 2001)

OBJETIVO

Esta investigación se ha realizado dada la importancia de las presas de mampostería en México. Construidas desde el siglo XVII a la fecha. Dicha importancia radica en el número tan elevado de ellas. Además, muchas muy antiguas siguen en uso. Por ello, es importante revisar su comportamiento y en su caso, elevar su nivel de seguridad.

Por lo tanto, es necesario investigar los métodos y enfoques empleados del siglo XVII al XX, para el diseño de presas de mampostería con y sin contrafuertes. Con el fin de realizar la evaluación de su seguridad resolviendo ejemplos, y al comparar el estado actual de una presa real con el comportamiento teórico, usando los métodos de análisis tradicionales y mediante el uso de modelos numéricos.

Para ello se hicieron análisis de una presa de mampostería existente y se comparó con los resultados obtenidos por el método de elementos finitos tridimensionales. Así se determinaron los esfuerzos actuantes en la cortina a través de un análisis estático y pseudoestático.

1. CLAVES HISTÓRICAS EN EL DISEÑO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA.

Naturalmente, las primeras presas construidas fueron de tierra ya que era el material más abundante y accesible. Estas presas podrían ser consideradas una obra artesanal ya que dependían únicamente de la experiencia; sin embargo, el arte lentamente dejó paso a la ciencia.

Las primeras presas de mampostería, al igual que sus antecesoras, construidas con tierra, carecían de consideraciones científicas, pero al ser construidas con materiales más firmes, se volvieron un tipo utilizado con frecuencia.

Wegmann (1927) menciona que este método de construcción parecía haber sido adoptado en un inicio al sur de España donde, alrededor del siglo XVI, se construyeron grandes vasos para irrigación. Muchas de estas presas impresionan por su dimensión y apariencia sólida; sus proporciones demuestran que sus diseñadores no tenían una concepción correcta de las fuerzas que debían resistir. La presa Almanza (Fig 1.1a) está registrada como la presa de mampostería más vieja existente, probablemente construida a inicios del siglo XVI, con mampostería irregular en su interior y revestimiento de roca tallada. La presa Alicante (Fig 1.1b) es de mayores proporciones; fue construida a finales del siglo XVI y de acuerdo con Wegmann es la más alta de las presas españolas antiguas.

A pesar de la falta de conocimiento científico, los primeros constructores de presas españoles tuvieron mayores avances que sus contemporáneos en otras partes del mundo; estos constructores trajeron sus técnicas a la Nueva España.

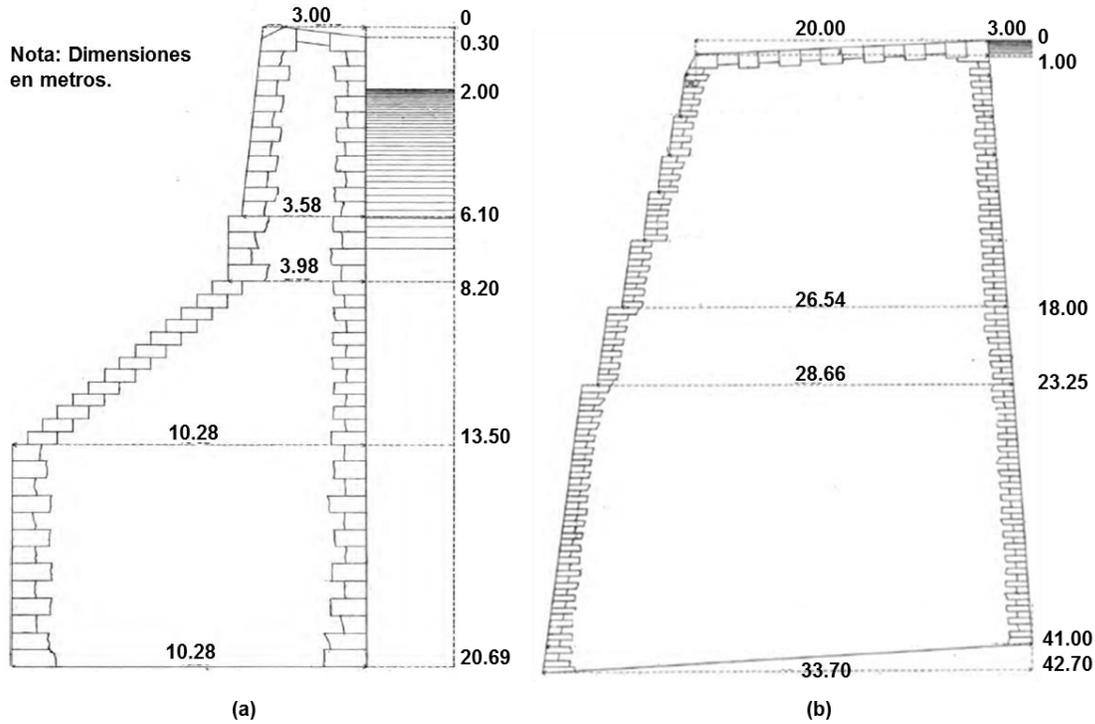


Figura 1.1 Primeras presas de mampostería en España. (a) Presa Almanza y (b) Presa Alicante. (Wegmann, 1927)

1.1 ENFOQUES CIENTÍFICOS

Las presas francesas comenzaron a mostrar un incremento en la tendencia hacia la economía de materiales y a mediados del siglo XIX los ingenieros franceses comenzaron la investigación de enfoques racionales para su diseño.

1.1.1 Primer enfoque científico.

“El primero que investigó el diseño de presas de gravedad de una manera satisfactoria fue M. de Sazilly”. (Wegmann, 1927), cuyo primer documento apareció en 1853. Sazilly introdujo las ideas de que si la presión se mantiene en límites seguros, se imposibilita el deslizamiento, además, que las presiones deben ser consideradas para el vaso lleno, así como para el vaso vacío; sin embargo, no tuvo éxito para encontrar ecuaciones matemáticas que contemplaran las ideas anteriores para obtener ambas caras de la presa, por lo que se vio forzado a realizar un diseño

paso a paso que resultara en las caras poligonales. Debido a que los ángulos cóncavos no eran de su agrado, recomendó un diseño escalonado. Su perfil escalonado para una presa de 50 m de altura se muestra en la Fig 1.2.

Nota:
Dimensiones en metros.

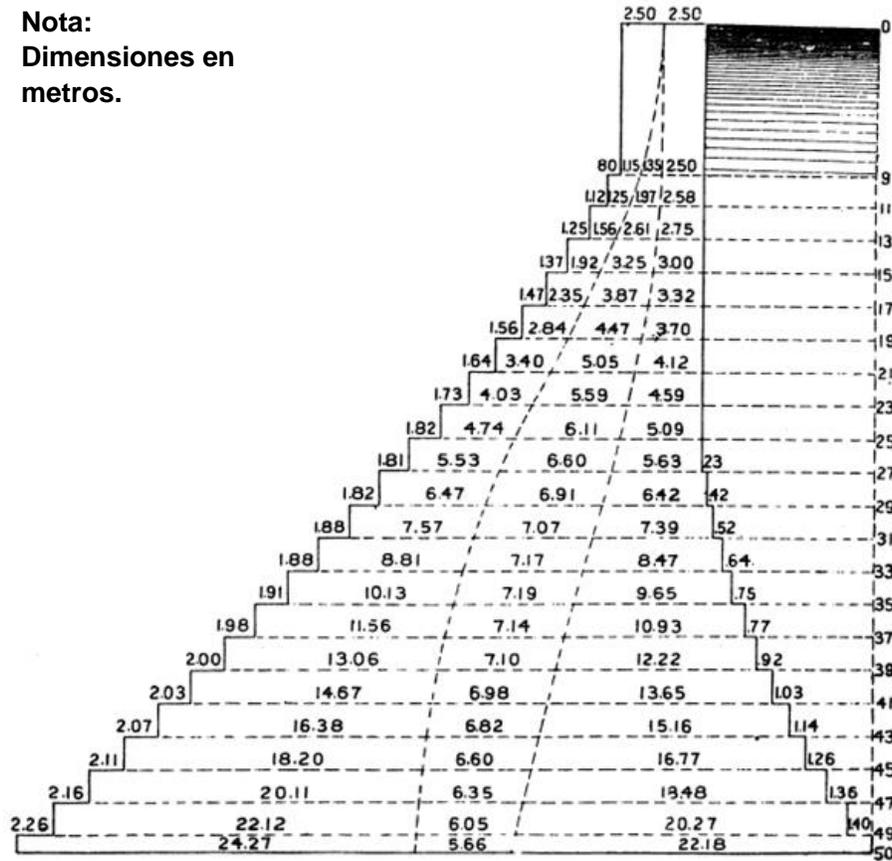


Figura 1.2. Perfil tipo Sazilly. (Wegmann, 1927)

El siguiente enfoque científico fue hecho por Delocre, otro ingeniero francés, quien empezó con los supuestos básicos de Sazilly, pero descartando el perfil poligonal. De la misma forma que Sazilly buscó una sección matemáticamente compatible para la presa y produjo fórmulas para este propósito. Su perfil estándar para una presa de 50 m se muestra en la Fig 1.3

Nota: Dimensiones en metros.

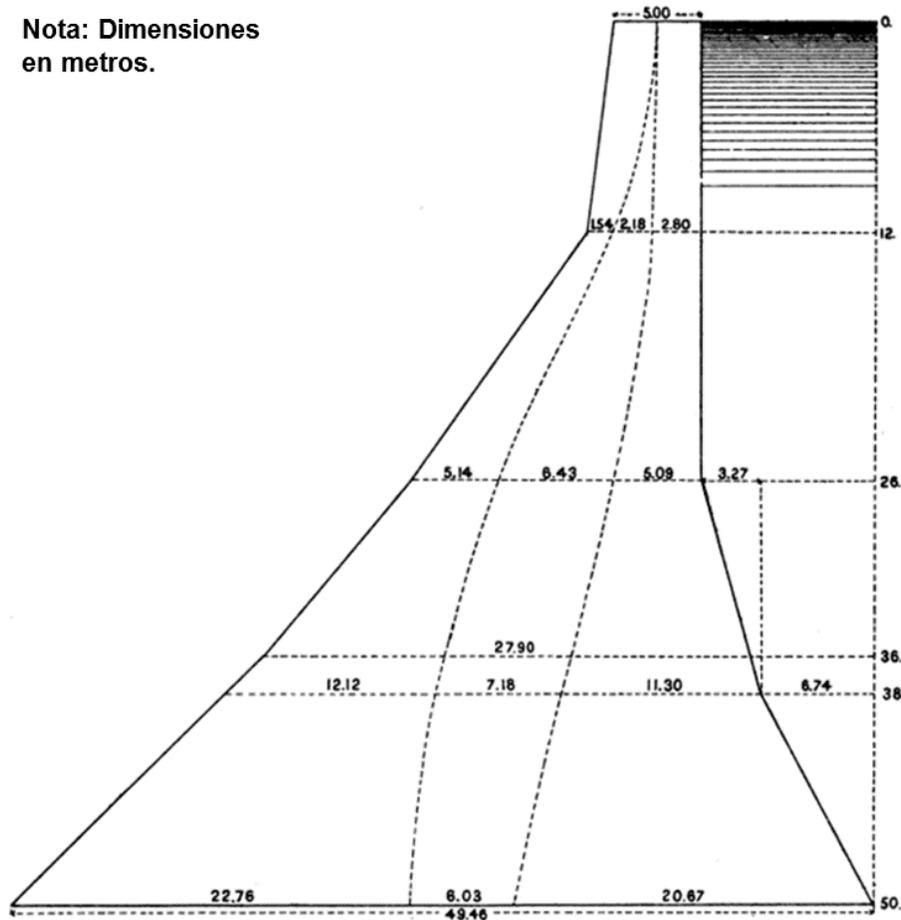


Figura 1.3 Perfil tipo Declore. (Wegmann, 1927)

Sazilly y Declore no reconocieron la “ley del tercio medio” ni prestaron atención a la tensión en las caras. Además, no reconocieron que las presiones calculadas en planos horizontales eran menores que los esfuerzos reales normales a la cortina. Este tema fue abordado por W.J.M. Rankine antes de 1881. Él no llegó a una relación matemática entre las presiones sobre planos horizontales y normales, pero propuso que este problema podía resolverse suponiendo diferentes presiones unitarias permisibles para las caras aguas arriba y aguas abajo. Escogió curvas logarítmicas en la búsqueda de caras matemáticamente compatibles, produciendo la sección mostrada en la Fig 1.4.

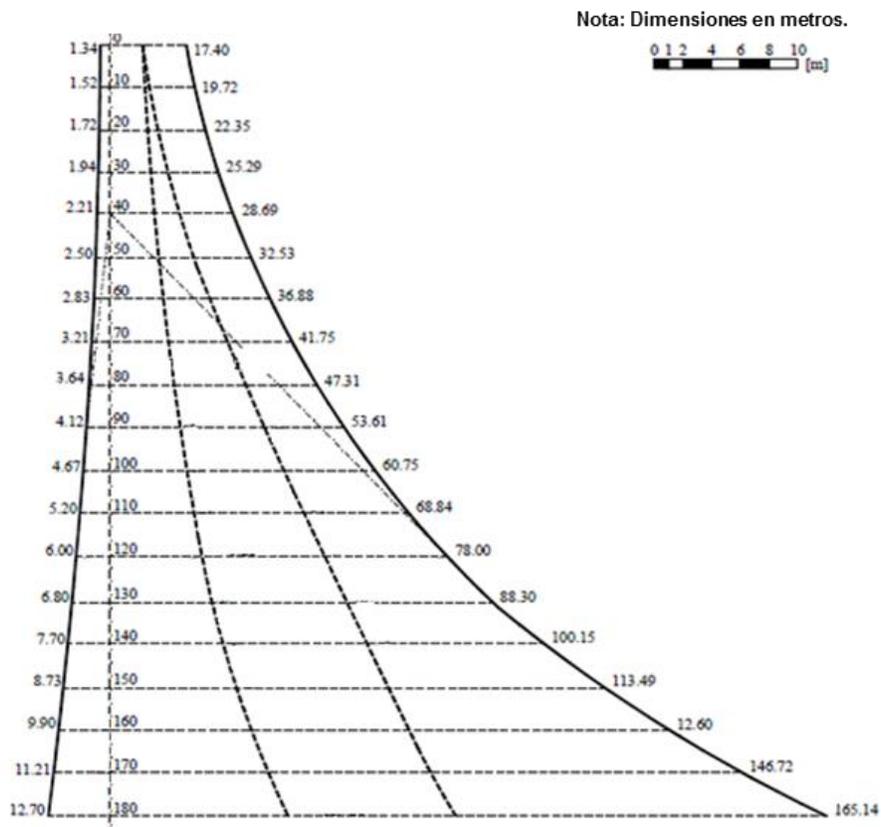


Figura 1.4. Perfil tipo Rankine. (Bretas, 2012).

1.2.2 Enfoque con sección definida.

L.W. Atcherly (1904), inspirado por el trabajo de investigadores contemporáneos, contemplo la existencia de tensión a través de planos verticales o casi verticales, particularmente cerca del pie aguas abajo. Esta teoría condujo a una serie de interesantes experimentos sobre distribución de esfuerzos en presas por Atcherly, Pearson, Sir John Ottley, Arthur W. Brightmore, John S. Wilson y William Gore, todos a principios del siglo XX. Este trabajo experimental llevó a las conclusiones siguientes:

1. Los esfuerzos de tensión, que podrían tener una gran magnitud local, ocurren en la cara aguas arriba.
2. Los esfuerzos de tensión no ocurren en otra parte de la presa.
3. Debido a la uniformidad de la base y al cambio de presión de agua en ella, los esfuerzos en la cimentación están distribuidos casi uniformemente.

4. Para juntas sobre la cimentación, el supuesto usual para la distribución lineal de los esfuerzos normales sobre planos horizontales es aproximadamente correcta; esto sobrestima la intensidad máxima de esfuerzos.

5. Los esfuerzos máximos de compresión en la cara aguas abajo ocurren sobre planos normales a dicha cara.

6. Cerca de la base de la presa, los esfuerzos máximos de compresión sobre planos horizontales no exceden aquellos calculados sobre el supuesto de distribución lineal de esfuerzos normales.

A pesar de que estas conclusiones no estaban completas y que de alguna manera no concordaban totalmente con descubrimientos posteriores, representaron un gran adelanto en los métodos de diseño de presas.

Cabe resaltar que, a través del tiempo fueron construidos distintos tipos de presas de mampostería. Debido al gran número existente, uno de los más importantes eran las que se apoyaban en contrafuertes. Este tipo tomó popularidad ya que representaba un ahorro considerable de material. Lo anterior se considera de suma relevancia para el presente trabajo, por lo que es necesario brindar un panorama histórico de los métodos de diseño de contrafuertes, y así, poder desarrollar un análisis donde se evalúa la seguridad geotécnica estructural de una presa de mampostería con contrafuertes (capítulo 6), partiendo de las reglas de diseño que tuvieron origen en los enfoques que se presentarán a continuación.

2. CLAVES HISTÓRICAS EN EL DISEÑO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA CON CONTRAFUERTE.

Antes de que la ciencia de la estática se desarrollara lo suficiente (finales del siglo XVII), el único enfoque posible era el uso de reglas estructurales empíricas. Las reglas codifican los tamaños de los principales elementos estructurales, las profundidades de contrafuertes, los espesores de arcos, el espesor de las paredes, etc. Un antecedente que dio origen a posteriores enfoques científicos para el diseño de contrafuertes se dio al momento que los maestros constructores diseñaban la forma y el tamaño de los contrafuertes para bóvedas o sistemas de bóvedas.

Las reglas eran específicas para cada tipo estructural: las normas para el diseño de los contrafuertes de bóvedas góticas ligeras no se podrían aplicar a las pesadas bóvedas de cañón del Renacimiento de los siglos posteriores. Para comprender la naturaleza de las reglas de diseño, dos reglas, una gótica y otra derivada del Renacimiento, se consideran ahora.

2.1 ENFOQUES EMPÍRICOS

2.1.1 Regla gótica

Las reglas de diseño góticas eran de dos tipos: geométricas y aritméticas. En ambos casos, el objetivo era decidir la profundidad del contrafuerte como una fracción del tramo. En los manuales del final del gótico alemán, a principios del siglo XV, fracciones simples se utilizaban para decidir los elementos principales (paredes, contrafuertes y bóvedas de crucería) para posteriormente usar procedimientos geométricos para definir las formas (impostas, molduras, etc.). En Alemania, Francia y España existe evidencia documental indirecta del uso de varias reglas geométricas. Estas reglas sobrevivieron en los últimos manuales de cantería Renacentistas y Barroca que siguieron la tradición de los canteros medievales.

La regla geométrica más citada se representa en la Fig 2.1. Apareció por primera vez en el manual perdido de Bacciojani, Alemania, c. 1550 (Müller, 1990), en el manuscrito de Martínez de Aranda, España (c. 1590) y el tratado de Derand que en

1643 fue publicado por primera vez en Francia. Se publicó entonces en muchos manuales arquitectónicos y de cantería hasta el siglo XX. La norma aborda el problema de diseñar el contrafuerte de una bóveda de crucería gótica. El perfil del arco transversal se utiliza para generar la forma y el tamaño de la bóveda. Sin embargo, la altura del contrafuerte no estaba considerada. A partir del siglo XVII, esta regla fue mal interpretada como una regla para obtener las dimensiones del contrafuerte para un arco o bóveda de barril cuyo intradós fue el arco de un círculo, pero Derand es explícito acerca de su origen gótico y, además, las proporciones de los contrafuertes obtenidos por la regla son de estilo gótico. Por supuesto, la regla sólo era una guía aproximada del diseñador para ser interpretada solamente por un maestro, no debía aplicarse a ciegas.

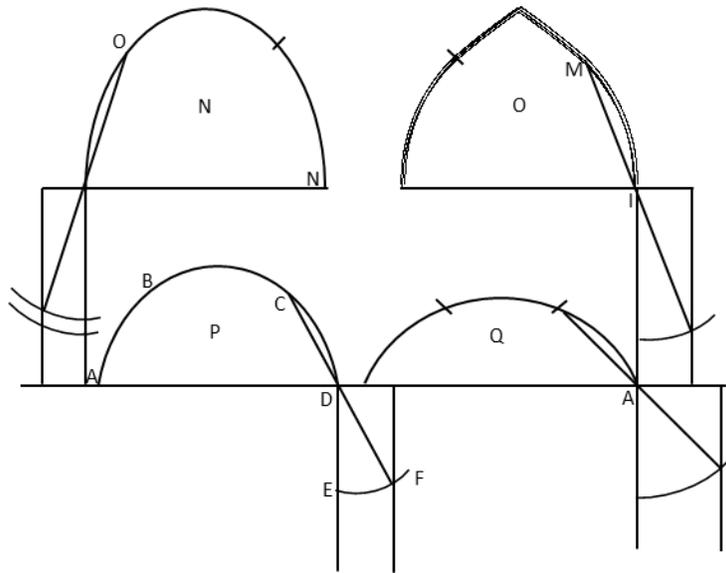


Figura 2.1. Regla gótica geométrica, para diseño de contrafuertes. El arco transversal de la bóveda es dividido en tres partes y luego CD se hace igual a DF. Derand, 1643; citado por Huerta, 2004.

2.1.2 Regla Renacentista

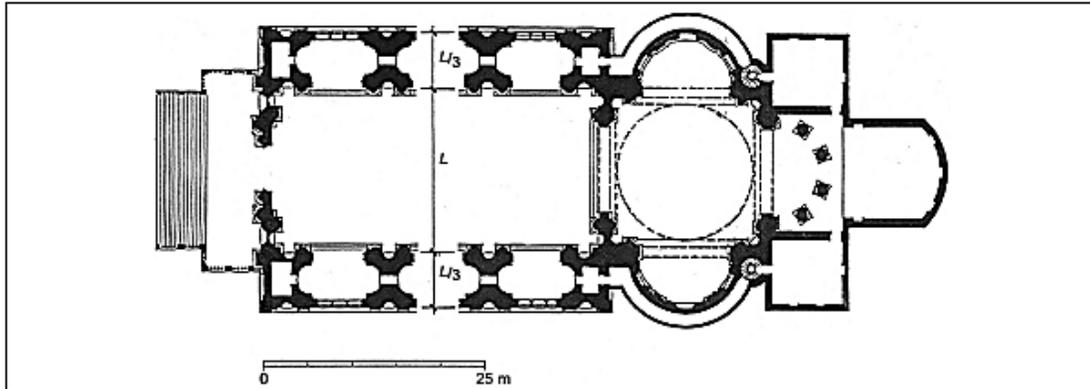


Figura 2.2 Aplicación de la regla Renacentista del tercio del tramo de la iglesia del Redentor II, Venecia, por Palladio. Huerta, 2004.

Las bóvedas renacentistas solían ser bóvedas de cañón. El empuje hacia el exterior de la bóveda de cañón es mucho mayor que una bóveda gótica (por lo general, su peso puede ser el doble de una bóveda gótica). Las reglas góticas eran inútiles y se desarrollaron nuevas reglas de diseño, basadas principalmente en la observación de las ruinas romanas y también, quizás, en la inspección de las iglesias románicas. Como el perfil de la bóveda siempre fue semicircular no era necesario tener en cuenta la forma de la bóveda; se utilizó una fracción simple del tramo. La regla declaraba que el contrafuerte debe tener una longitud de entre un tercio y la mitad de la envergadura, como se cita en muchos manuales de arquitectura (Fig 2.2).

Las normas italianas de diseño Renacentista, señalaban que el panel compuesto por la pared más el contrafuerte, debe tener una longitud de un tercio del espaciamiento. La regla gótica dio una relación longitud/espaciamiento de un cuarto o menos. Esta discrepancia es enorme, ya que se debe considerar la diferencia entre ambos tipos estructurales. Por supuesto, la transición entre los dos tipos llevó a algunos desastres. Los constructores renacentistas, educados en la tradición medieval, habrían considerado la estereotomía de las "modernas" bóvedas triviales Renacentistas, pero no habrían sabido cómo determinar el tamaño exacto del contrafuerte.

2.2 PRIMEROS DISEÑOS CIENTÍFICOS DE CONTRAFUERTES

2.2.1 La escuela francesa

Philippe de La Hire (La Hire, 1712, citado por Heyman, 1998) fue el primero en intentar diseñar contrafuertes utilizando cálculos estáticos (Fig 2.3a). Para ello necesitaba estimar el empuje de la bóveda, aunque su objetivo principal era obtener el ancho del contrafuerte. La Hire supuso que la bóveda falla en un cierto punto (la junta de ruptura) donde el empuje de la parte superior de la bóveda actúa en un ángulo inclinado, aproximadamente tangencial a la curva del intradós (Fig 2.3b).

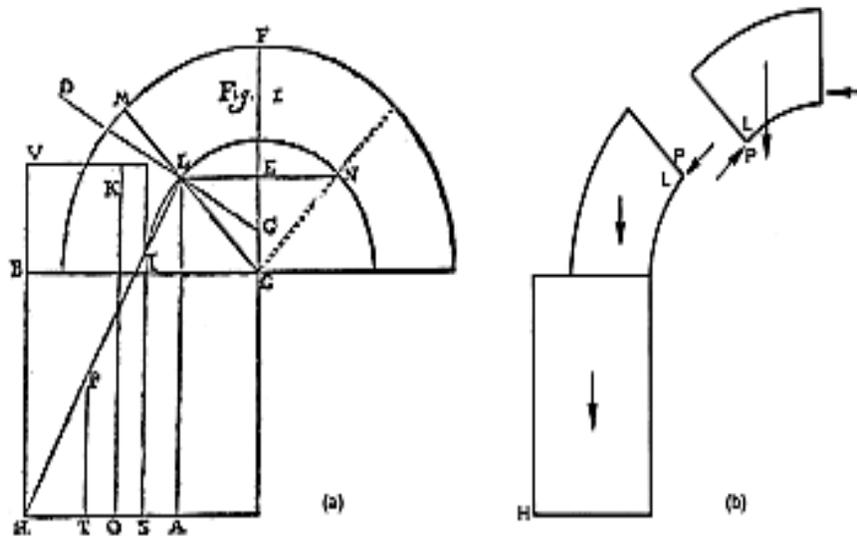


Figura 2.3 Procedimiento de La Hire para diseñar el contrafuerte de una bóveda simple: (a) dibujo original; (b) la interpretación de Heyman (Heyman, 1998)

La Hire no fijó la posición de la junta de ruptura, ni de manera explícita, la dirección de la fuerza. Esto hizo el procedimiento inadecuado para su uso práctico, ya que implicaba varias pruebas para encontrar la peor posición. Fue Bélidor (Bélidor, 1729) quien transformó la idea de La Hire en un procedimiento de diseño ingenieril. Bélidor encuentra la junta de ruptura (L) en el intradós equidistante del impuesto (E) y la corona (D); el empuje actúa a través del centro de la junta y es normal al plano de esta. Así, el cálculo del empuje debido al arco se puede hacer usando un paralelogramo de fuerzas (Fig 2.4a).

Béldor era consciente de la utilidad de su método y lo aplicó a muchas situaciones prácticas, incluso en edificios complejos (Fig 2.4b). Como siempre ocurre cuando los centros de gravedad están involucrados, las expresiones algebraicas resultan bastante extensas, pero como cualquier ingeniero francés, esto no fue un problema. La Hire y Béldor consideraron el contrafuerte tan sólido, como un monolito. Esto puede parecer sorprendente, ya que sabían que los contrafuertes se construyeron con rocas discontinuas, pero el estudio del equilibrio general era básicamente correcto. Consideraron el equilibrio en el límite del contrafuerte, con el momento de volteo del empuje de la bóveda equilibrada por el momento debido al peso del contrafuerte. El contrafuerte así obtenido estaba en perfecto balance, equilibrado con la bóveda y era, por tanto, crítico y poco seguro. Béldor aseguró que los resultados de sus cálculos de diseño estarían seguros al recomendar que los contrafuertes se construyeran unos centímetros más anchos. El hecho es que los resultados basados en cálculos de equilibrio estático coincidieron bien con los resultados obtenidos utilizando reglas de diseño tradicionales y la observación de las construcciones existentes. Ahora sabemos que esto es debido a que el empuje calculado de la bóveda no era el empuje real en la situación de colapso, sino un empuje mucho más desfavorable (principalmente a causa de la inclinación): el cálculo "equivocado" incorpora un margen de seguridad.

Béldor también estudió el caso de contrafuertes compuestos: un muro reforzado con contrafuertes. Él continuó tratando el sistema de pared-contrafuerte como un monolito, tomando momentos respecto de la frontera exterior del contrafuerte.

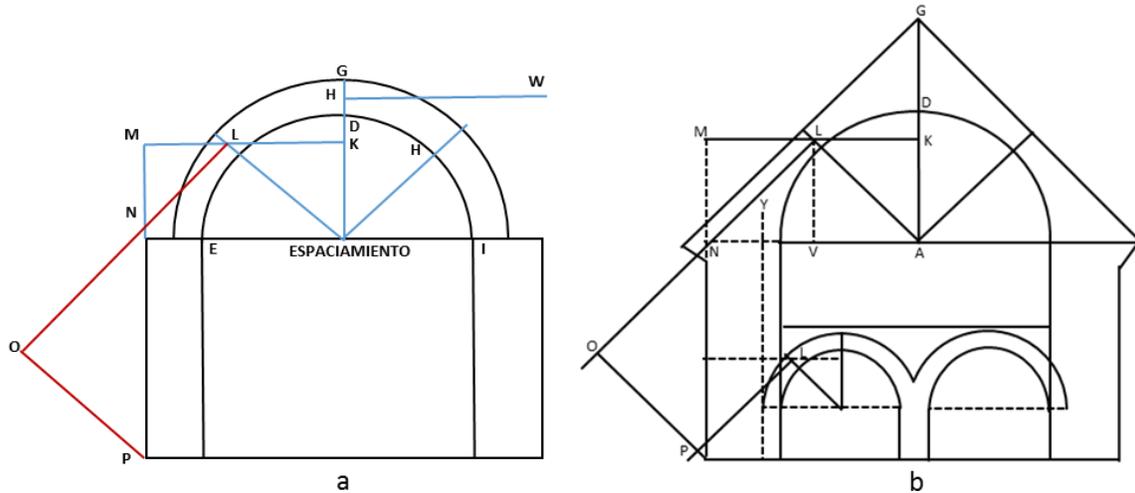


Figura 2.4 Ejemplos de los cálculos de Bélidor de diseño de contrafuerte: (a) el caso típico; (b) un edificio complejo (Bélidor, 1729)

Posteriormente, Audoy, fue el primero en diseñar contrafuertes utilizando el empuje correcto de la bóveda (Audoy, 1820). Redescubrió la teoría de Coulomb de 1773, que había permanecido en el olvido durante 50 años, y la aplicó al cálculo de los empujes de la bóveda. En la segunda parte de sus Memorias (*Mémoire*), se enfocó a la cuestión del diseño de contrafuertes. Las profundidades obtenidas fueron esta vez claramente críticas (Fig 2.5) y Audoy se vio obligado a estudiar el problema de la seguridad. Consideró que una forma de atacar el problema era multiplicar el empuje de la bóveda (el empuje horizontal en la corona) por un factor.

Audoy sabía que el factor de seguridad debe tener en cuenta muchos aspectos diferentes que serían casi imposibles de expresar en términos matemáticos. Entonces decidió ser pragmático: la teoría errónea de La Hire / Bélidor había estado en uso durante un siglo, dando buenos resultados prácticos. Por lo que el factor debía ser elegido de tal manera que el ancho del contrafuerte sería el mismo que el obtenida usando el método de La Hire. Él utilizó una teoría incorrecta para calibrar los resultados de una teoría correcta. De esta manera llegó a un valor numérico de 1.9 para el factor de seguridad.

Este fue el enfoque francés para el diseño de contrafuertes durante todo el siglo XIX: los momentos de volteo, multiplicado por un factor conocido como el coeficiente

de estabilidad, se hicieron igual al momento de estabilización producido por el peso de todo el contrafuerte. Una vez más, la consideración de los contrafuertes como un monolito está implícita.

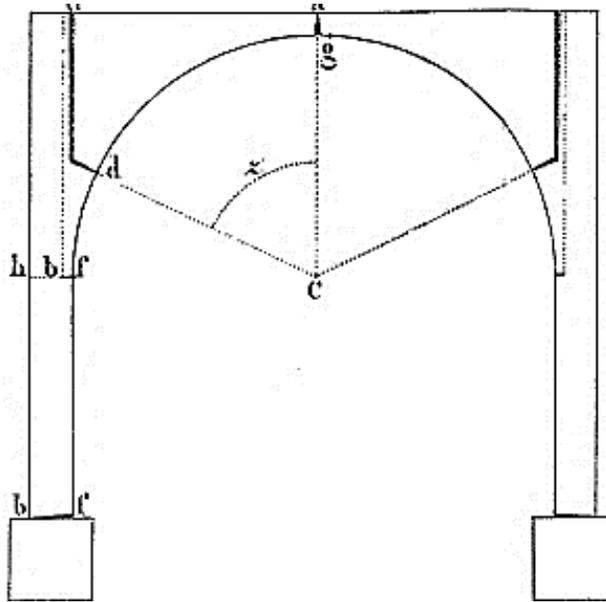


Figura 2.5. Contrafuertes críticos calculados por Audoy (1820)

2.2.2 La escuela inglesa

La teoría francesa considera al arco en un estado de colapso (imaginario a los ojos de La Hire y Bélidor, real después de Coulomb y Audoy) y luego multiplica el empuje horizontal calculado por un factor de seguridad para diseñar el contrafuerte. Las fuerzas internas en la mampostería, tanto de la bóveda como de los contrafuertes no se consideraron. El análisis inglés de arcos y bóvedas se inició con Robert Hooke quien, en 1675, afirmó que: "*Del mismo modo que cuelga un hilo flexible, pero de manera invertida, se sostendrá el arco rígido*" (Figura 2.6). Esta fue la solución de Hooke para el problema de encontrar la "*verdadera...forma de todo tipo de arcos para la construcción, con los contrafuertes verdaderos necesarios para cada uno de ellos*", que incluyó en una nota de su Descripción de Helioscopios (Hooke, 1676). No hubo ninguna explicación, pero hay evidencia indirecta de que Hooke consideró que el arco invertido podría prolongarse en el interior del contrafuerte, como se

muestra en uno de los diseños preliminares realizados en colaboración con Christopher Wren para la cúpula de la catedral de St. Paul (Heyman, 2003; Huerta, 2006).

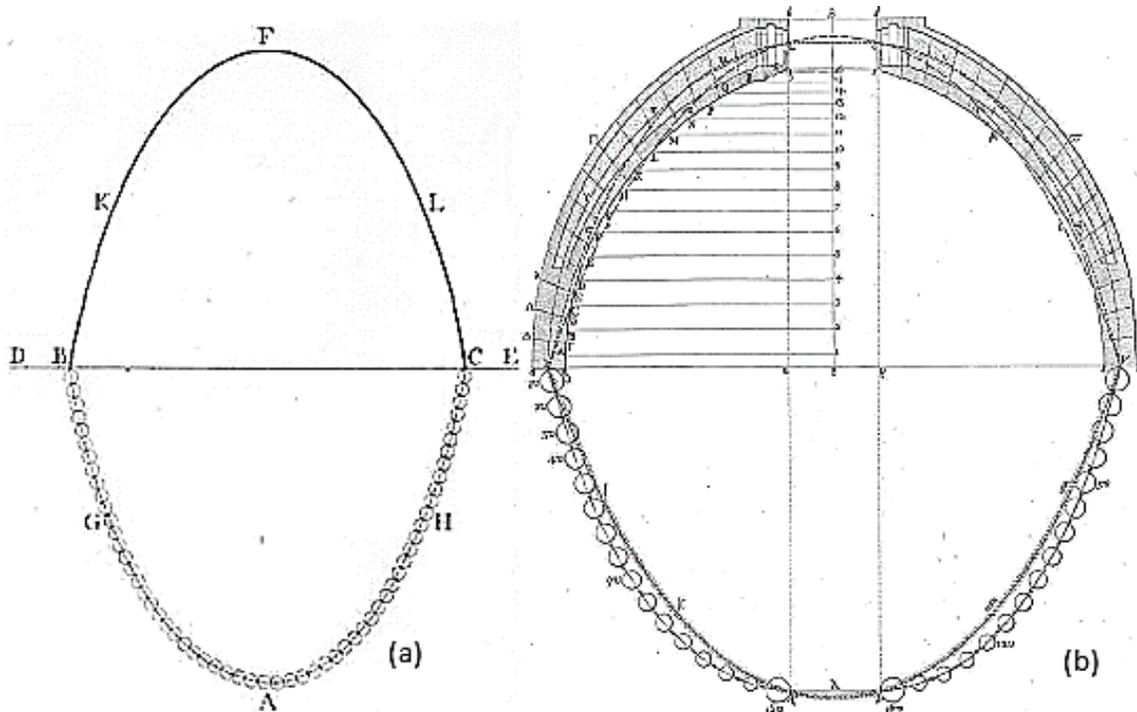


Figura 2.6. (a) Idea de Hooke sobre la analogía entre arco y catenaria; (b) Modelo colgante de Poleni para demostrar la estabilidad de la cúpula de San Pedro de Roma. Poleni, 1748.

La afirmación de Hooke fue completada por Gregory unos años más tarde en 1697 *"... nada sino la catenaria es la figura de un verdadero arco legítimo... y cuando se apoya un arco de cualquier otra figura, es porque en su espesor se incluye una catenaria"* (Heyman, 1998).

No fue hasta que Thomas Young (1817) liberó a la "curva de equilibrio" de la camisa de fuerza de tener que seguir la forma del intradós para que un avance fuera posible. Young define el concepto de "línea de empuje" como aquello que *"... representa, cada parte de un sistema de cuerpos apoyados mutuamente con la dirección general de su presión mutua"*. Cualquier desviación del intradós del arco se hace posible por el efecto de la fricción, como Young indica explícitamente. Esta contribución crucial de Young fue ignorada por sus contemporáneos.

A Moseley se le atribuye la invención del concepto de línea de empuje y, de hecho, él también presentó una teoría matemática completa de arcos y contrafuertes. En un principio consideró el problema del contrafuerte de una manera muy abstracta. Sin embargo, en *Mechanical Principles of Engineering and Architecture* (Moseley, 1843) se prestó gran atención a los problemas de diseño de contrafuerte, con miras a la solución de problemas prácticos de diseño y estudió a detalle la transmisión de fuerzas dentro de la propia mampostería (Fig 2.7a). Al hacerlo, mejoró el enfoque francés, que sólo garantizaba la estabilidad del contrafuerte con respecto a su base e ignoraba la posibilidad de falla en cualquier otra articulación en el arco (que puede ser el caso en un contrafuerte de sección variable).

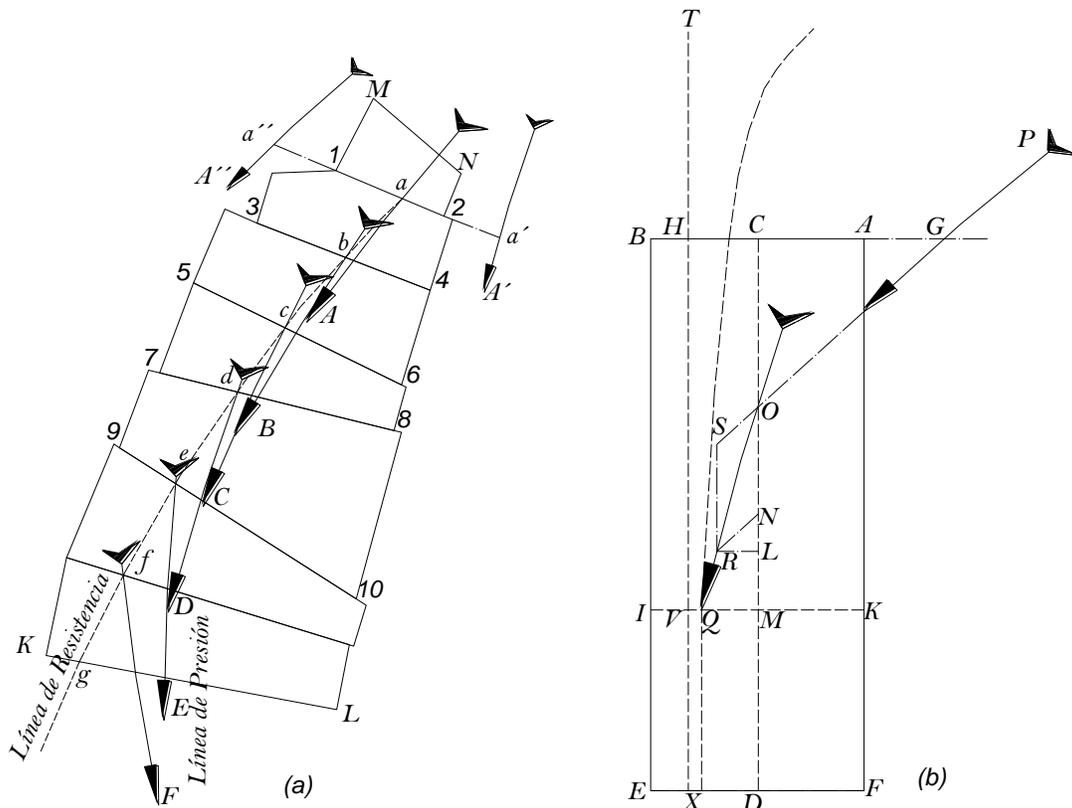


Figura 2.7 Los primeros dibujos de líneas de empuje dentro de contrafuertes: (a) la explicación gráfica del concepto; (b) de la línea de empuje en contrafuertes rectangulares (Moseley, 1843)

Moseley estudió la forma de la línea de empuje a través de un contrafuerte rectangular y se dio cuenta de que un contrafuerte de altura infinita puede tener un

espesor finito. Representó una columna de dimensiones uniformes mediante el polígono $ABEF$ (Fig 2.7b), posteriormente consideró PS como la dirección de una presión cualquiera P sostenida por la columna, intersectando al eje medio en O . Dibujó una sección horizontal IK y tomó ON para representar el peso de la porción $AKIB$ de la columna y consideró OS en la misma escala para representar la presión P , así completó el paralelogramo $ONRS$. Evidentemente OR representaría en dirección y magnitud, la resultante de las presiones sobre la porción $AKIB$, y ese punto donde intersecta Q con IK representará un punto en la línea de resistencia. Moseley también estudió la seguridad de los arcos y su enfoque era completamente diferente del enfoque francés. Siendo conscientes de que la seguridad de todas las articulaciones dependía principalmente de la posición de la línea de empuje (centro de la resistencia) definió su "módulo de la estabilidad" como "la distancia más cercana que la línea de la resistencia (línea de empuje) se acerca el trasdós (Moseley, 1843). Moseley está aquí considerando la seguridad como una cuestión de geometría.

W.J.M. Rankine explotó todas las consecuencias de la contribución de Moseley y propuso una teoría completa de contrafuertes de mampostería (Rankine, 1858). Rankine declaró las dos condiciones de estabilidad de una junta plana de la siguiente manera:

“La oblicuidad de la presión no debe exceder el ángulo de reposo. La relación que la desviación del centro de la presión desde el centro de la figura de las juntas de soporte hasta la longitud del diámetro de la junta atravesando esos dos centros, no debe exceder de una cierta fracción, cuyo valor varía, según las circunstancias, de un octavo a tres octavos”.

Llamó a la primera “estabilidad de fricción” y a la segunda "estabilidad de posición". Rankine entonces adoptó el mismo enfoque geométrico de seguridad que Moseley, pero definiendo la posición de la línea de empuje con relación a las dimensiones de la junta, la fijación de la desviación máxima desde el centro a la junta es qt , donde t es la longitud de la junta. El parámetro q sirve como el medio para la definición de

la seguridad requerida. Rankine indicó que esta relación debe ser obtenida a través de considerar la resistencia de los materiales, pero luego añadió:

“Sin embargo, una aproximación a esa posición se puede deducir a partir de examinar los ejemplos que se producen en la práctica, sin tener que recurrir a una investigación basada en la teoría de la resistencia de materiales”.

Luego discutieron posibles valores de q y estableció, como límite inferior, el valor general adoptado para muros de contención: para ingenieros británicos $q = 3/8 = 0.375$ y para los ingenieros franceses $q = 3/10 = 0.3$. Rankine pasó a la observación:

“En los pilares de arcos, en muelles, contrafuertes individuales, torres y chimeneas expuestas a la presión del viento, es aconsejable limitar la desviación de la línea de presión desde el centro de la figura. La intensidad máxima de presión, suponiendo que sea una presión que varía de manera uniforme, no superará el doble de la intensidad media”.

Esto significa que el punto de aplicación del empuje debe estar dentro del núcleo de la sección transversal, de modo que todos los esfuerzos deben ser a compresión, y Rankine dio una tabla que relaciona la forma de la sección al parámetro q , que define el tamaño limitante de la base que garantiza la seguridad, como se explicó anteriormente.

La regla del tercio medio para secciones rectangulares es popular porque parece ser una condición de resistencia, compatible con el enfoque “elástico”; de hecho, la consideración de no esfuerzo de tensión conduce a una estricta condición geométrica. Es esta condición geométrica que garantiza la seguridad, si el ingeniero o arquitecto es consciente de ello o no, es discutible.

Rankine también estaba interesado en las propiedades geométricas intrínsecas de contrafuertes relacionados con la estabilidad. Para esto, inventó el momento de

estabilidad (Fig 2.8a) como una propiedad geométrica del contrafuerte, independiente de la fuerza o fuerzas que resiste, que define de este modo:

“El momento de estabilidad de un cuerpo o estructura soportada en un plano dado, es el momento de la pareja de fuerzas que deben aplicarse en un plano vertical dado a que el cuerpo o estructura además de su propio peso, a fin de transferir el centro de la resistencia de la articulación a la posición de limitación compatible con la estabilidad”.

La expresión matemática para una junta horizontal es $M_s = W(q \pm q')t$, $q't$ es la distancia desde la línea vertical que pasa por el centro de gravedad de la mampostería encima de la junta hasta el centro de la junta C. El valor de la propiedad denotada por \pm depende de la posición de esta línea vertical, a la derecha (+) o hacia la izquierda (-) de C (Fig 2.8b). Rankine continúa explicando que el momento de la estabilidad es de hecho (Fig 2.8b):

“En el momento de la pareja, que, al ser combinada con una sola fuerza igual al peso de la estructura, transfiere la línea de acción de esa fuerza paralela a sí misma a través de una distancia igual a la distancia horizontal dada del centro de resistencia del centro de gravedad de la estructura”.

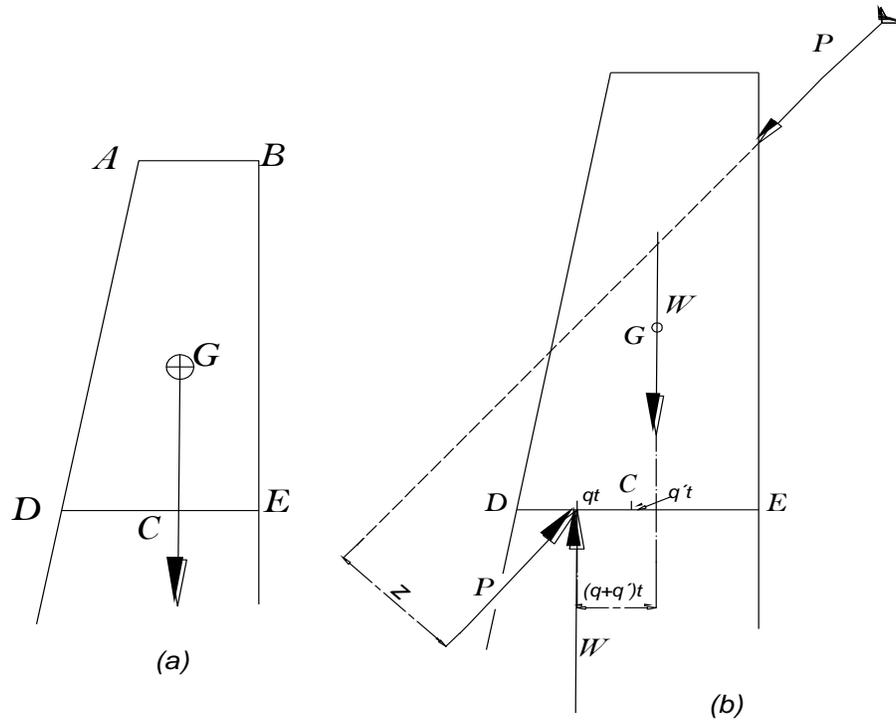


Figura 2.8 (a) Momento de estabilidad de un contrafuerte (Rankine, 1858); (b) par equivalente

Si bien todo esto es simple estática, el enfoque de Rankine permite al ingeniero considerar los beneficios relativos de ciertas formas de contrafuerte desde el punto de vista de la estabilidad.

En cuanto a los contrafuertes compuestos, tanto Rankine como Audoy consideraron (implícitamente) el contrafuerte “dividido” en dos partes: el “muro contrafuerte” que considera el espesor de los contrafuertes y la pared entre los contrafuertes. Se calcula el momento de estabilidad como la suma de los momentos de estabilidad de las dos partes. A continuación, se calcula el espesor de la pared uniforme equivalente (es decir, una pared continua que tiene la misma estabilidad) y se compara el volumen de mampostería en ambos casos. Llegó a la conclusión de que “es un ahorro de mampostería el uso de contrafuertes”.

3. MÉTODOS DE DISEÑO DE PRESAS EN EL SIGLO XX

El método del tercio medio de Rankine, para encontrar las dimensiones que proporcionen seguridad a las presas de gravedad, fue el único criterio utilizado hasta finales del siglo XIX y principios del XX, este método contemplaba la ausencia de tensión en la mampostería cercana a la cara aguas abajo con el vaso vacío y cercano a la cara aguas arriba con el vaso lleno. Se asumió un factor de seguridad de tres contra volteo, considerando cargas de agua y azolve.

Además, factores como la subpresión fueron tomados en cuenta desde el momento en que se notó que las fallas en presas de gravedad, generalmente se acompañaban de un movimiento de la presa en dirección aguas abajo y que esto era facilitado por la penetración de presión hidrostática en la base de la presa o en la cimentación.

A continuación, se presentan los métodos empleados a principios del siglo XX en el cálculo de acciones y esfuerzos considerados para el diseño y análisis de la estabilidad de presas. Estos métodos han servido de guía en la elaboración de manuales y normas vigentes para el diseño y evaluación de seguridad en presas, tales como las Normas Técnicas Complementarias para el diseño y Ejecución de Obras e Instalaciones Hidráulicas del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal (NTC-DEOIH-RCDF, 2004), el manual de diseño de presas de mampostería de la Secretaria de Agricultura, Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación (SAGARPA, 2009) y el Manual de Diseño de Obras Civiles en el capítulo de Diseño por Sismo (CFE, 2008)

3.1 PRESIÓN DEL AGUA EXTERNA

Para el diseño de presas se utilizan valores de densidad y peso volumétrico de agua a una temperatura de 4°C, es decir, $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$. En la Fig 3.1 se muestra una sección triangular homogénea con la cara aguas arriba vertical y de espesor unitario.

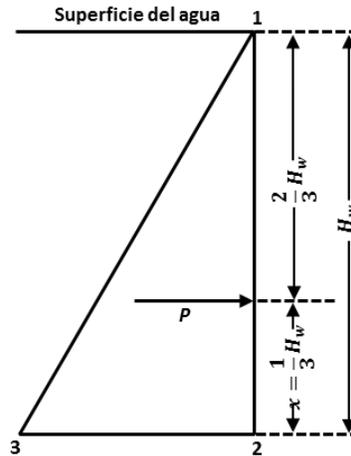


Figura 3.1. Presión triangular del agua sobre un plano vertical.

La presión hidrostática total se obtiene con la siguiente ecuación:

$$P_w = \frac{1}{2} \gamma_w H_w^2 \quad (3.1)$$

Donde γ_w es el peso volumétrico del agua y H_w es la distancia vertical desde la superficie del agua hasta la base de la cortina. La presión P , es una fuerza normal a la superficie y tiene una distribución lineal. En el diseño de presas, esta fuerza también se resuelve para su componente horizontal en caso de que se tenga una inclinación en el paramento aguas arriba.

La distribución de P se representa por el triángulo recto 1-2-3. La longitud del tramo 2-3 es proporcional a $\gamma_w H_w$. Su punto de aplicación se ubica en el centro de gravedad del triángulo, el cual se encuentra por encima de la base de la cara aguas arriba, a una distancia:

$$x = \frac{1}{3} H_w \quad (3.2)$$

El momento generado por P sobre el talón de la presa es:

$$P_w x = \frac{1}{6} \gamma_w H_w^3 \quad (3.3)$$

Si se remueve el tramo 1-5 de la cara 1-2, tal como se indica en la Fig 3.2, se dejará una cara sumergida 5-2 de altura h , con el borde superior por debajo de la superficie de agua a una profundidad h_1 .

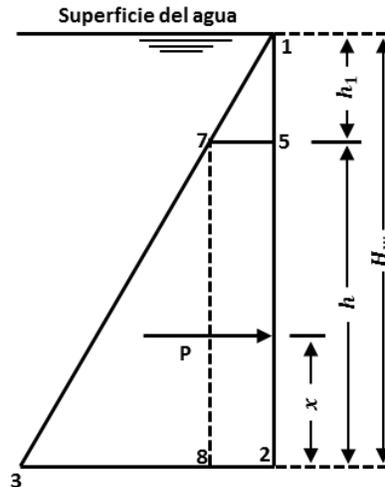


Figura 3.2. Presión trapezoidal del agua sobre un plano vertical.

La presión total sobre la superficie (tramo 2-5) será:

$$P_w = \frac{1}{2} \gamma_w (H_w^2 - h_1^2) \quad (3.4)$$

El resultado sería el mismo si el área del triángulo 1-5-7 fuera sustraída del triángulo 1-2-3. El punto de aplicación pasa a través del centro de gravedad del trapecioide 5-2-3-7, dicho punto puede ser encontrado gráficamente o por la ecuación:

$$x = \frac{1}{3} h \frac{H_w + 2h_1}{H_w + h_1} \quad (3.5)$$

El momento debido a la fuerza P , sobre el talón de la presa puede ser encontrado mediante la multiplicación de las ecuaciones 3.4 y 3.5, obteniendo lo siguiente:

$$P_{wx} = \frac{1}{2} \gamma_w h^2 \left(h_1 + \frac{1}{3} h \right) \quad (3.6)$$

3.2 SUBPRESIÓN

La subpresión es la presión ascendente provocada por el flujo de agua a través de la presa o su cimentación. Causa una reducción en el peso efectivo de la estructura. El agua entra a través de los poros o imperfecciones en la cimentación o de la estructura.

Levy a principios del siglo XX, propuso que la intensidad de subpresión varía uniformemente, desde la cara aguas arriba hasta el pie de la presa en la cara aguas abajo, aplicada al área total de la base. No existía certidumbre en que la distribución de la intensidad de subpresión se ejerciera en toda la base (Leliavsky, 1963).

Henny (1934), concluyó que el área donde se desarrollaba subpresión varía con el esfuerzo en la mampostería (una compresión alta reduce parcialmente los vacíos) y recomendó valores en el rango de 25% a 40% del área total de la base. A pesar de lo mencionado por Henny, la práctica común era la de considerar un área de subpresión desde un tercio hasta dos tercios del área de la base.

La fuerza total de subpresión se obtiene de aplicar el diagrama mostrado en la Fig 3.3. Para una sección de espesor unitario la subpresión se obtiene de la ecuación:

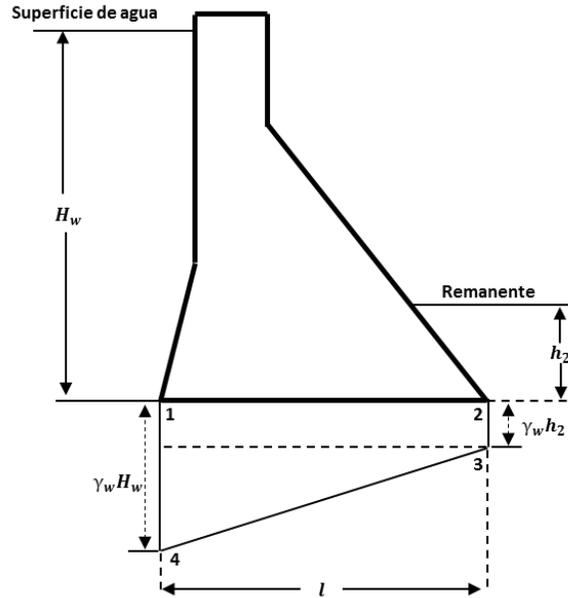


Figura 3.3. Distribución de subpresión

$$W_u = c\gamma_w \left[h_2 + \frac{1}{2}\zeta(H_w - h_2) \right] A \quad (3.7)$$

Donde l es la longitud de la base; A es el área de la base ($A = l \times 1$ para una sección unitaria); c es la porción del área sobre la cual actúa la subpresión; y ζ es un coeficiente de intensidad de subpresión que caracteriza las condiciones en las que la filtración toma lugar en mampostería dañada. El punto de aplicación pasa a través del centro de gravedad del trapecioide 1-4-3-2.

Los diseños modernos se basan en el supuesto de un valor de uno para ζ y de un tercio o dos tercios para c .

3.3 PRESIÓN DE AZOLVE

La determinación de la presión de azolves involucra factores como la inclinación de la superficie del terreno donde está desplantada la presa, la inclinación de las caras (cara aguas arriba principalmente) de la cortina, la rigidez de la estructura, el ángulo de fricción entre la cortina y el azolve, el grado de saturación del azolve, la edad del azolve, el ángulo de fricción interna.

La fórmula de Rankine para el cálculo de la presión de tierra es:

$$P_{az} = \frac{\gamma_{az} h^2}{2} \left(\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} \right) \quad (3.8)$$

Donde γ_{az} es el peso volumétrico del azolve; h es la profundidad; y α es el ángulo de fricción interna. La fuerza P_{az} se localiza a $2/3 h$ debajo de la superficie del azolve. Si γ_{az} está sumergido, la ecuación a utilizar será la siguiente:

$$\gamma_{az} = \gamma_{az}' - \gamma_w(1 - k) \quad (3.9)$$

Donde γ_{az}' es el peso volumétrico seco del azolve; γ_w es el peso volumétrico del agua y k es el porcentaje de vacíos en una muestra unitaria de azolve. Actualmente se considera apropiado restar el peso volumétrico del agua al peso volumétrico de azolve sumergido.

3.4 EFECTOS DINÁMICOS Y SUBATMOSFÉRICOS

3.4.1 Vertedor de cresta aguda.

El movimiento del agua que pasa sobre una presa vertedora, genera una fuerza. Para comprender la influencia de dicho movimiento se considera el vertedor de cresta aguda, cara vertical y aireado de la Fig. 3.4.

Se asume cero o casi cero la velocidad de aproximación del agua, y se considera que el diagrama 3-5-2 representa la presión total que existiría si el espacio 1-3 estuviera cerrado. Es normal suponer que, con este espacio abierto, permitiendo el desbordamiento, la presión contra la cara 1-2 estaría representada por el diagrama 1-4-5-2.

Si la carga correspondiente a la velocidad de aproximación es sobresaliente, existirá un aumento de presión en algunas partes de la cortina. En la Fig. 3.4 se observa que, $h_v = 3-6$, representa la magnitud de la carga de velocidad de aproximación, y se deja 6-8 paralelo a 3-5. La fuerza total contra la cara 1-2 se asume generalmente para ser representada por el diagrama 1-7-8-2.

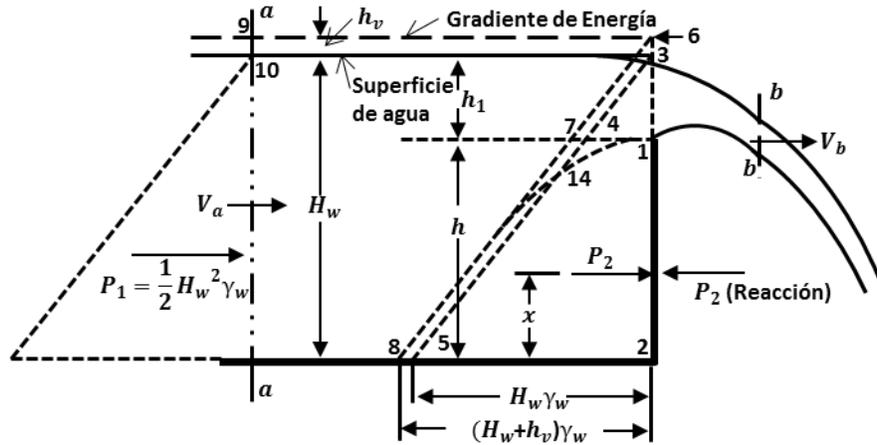


Figura 3.4. Vertedor de cresta aguda y aireado.

La presión unitaria en el punto 1 es cero, por lo que la curva 1-14-8 representaría con mayor exactitud las presiones verdaderas.

La reacción horizontal real entre la cortina y el agua puede ser determinada considerando un cambio en el momento horizontal entre dos secciones, tales como $a - a$ y $b - b$. La relación de cambio de momento entre estas secciones es:

$$\Delta M = \gamma_w \frac{qV_b}{g} - \gamma_w \frac{qV_a}{g} \quad (3.10)$$

Donde ΔM es el cambio en el momento por segundo, V_a y V_b son las velocidades horizontales en $a - a$ y $b - b$, respectivamente; y q es la descarga. El análisis se aplica a un espesor de cresta unitario.

Es necesario un balance entre ΔM y las fuerzas que actúan en el agua. Despreciando la fricción, las únicas fuerzas actuantes, paralelas a la línea de flujo son P_1 , la presión hidrostática conocida en la sección $a - a$; P_2 , la reacción desconocida de la cortina del vertedor que actúa aguas arriba en el embalse; y P_0 , la presión hidrostática (si existiera) en la sección transversal $b - b$, que actúa aguas arriba. Si $a - a$ está por encima del efecto de reducción del vertedor y $b - b$ está más allá de la influencia de contracción de la cresta, es decir, donde la componente

horizontal de la velocidad es constante y P_0 es cero, la ecuación 3.7 se convierte en:

$$P_1 - P_2 = \frac{q}{g} \gamma_w (V_b - V_a) \quad (3.11)$$

Donde $P_1 = 1/2 \gamma_w H_w^2$; q es la descarga por metro de vertedor, $V_a = q/H_w$, y $V_b = K\sqrt{2gh_1}$, K es una constante experimental. Sustituyendo y transponiendo, la ecuación 3.11, queda de la siguiente manera:

$$P_2 = \frac{1}{2} \gamma_w H_w^2 - \frac{q}{g} \gamma_w \left(K\sqrt{2gh_1} - \frac{q}{H_w} \right) \quad (3.12)$$

El valor de q está dado por la ecuación 3.13.

$$Q = ql_n = Cl_n [(h_c + h_v)^{1.5} - h_v^{1.5}] \quad (3.13)$$

Donde Q es el gasto total; q es el gasto por metro lineal; l_n es la longitud efectiva de cresta; h_c es la carga real sobre la cresta tomada en un punto lo suficientemente alejado de la presa como para evitar la curva de reducción; h_v es la carga debida a la velocidad de aproximación y está dada por $h_v = \frac{V_a^2}{2g}$; y C es un coeficiente que depende de la forma de la cresta y de la carga actuante sobre esta.

Para un vertedor de cresta aguda, pared vertical y aireado con velocidad de aproximación despreciable, K es aproximadamente 0.83. Para las mismas condiciones, pero con un talud 1:1 en la cara aguas arriba, este valor es de aproximadamente 0.81.

3.4.2 Vertedor de cresta aguda. No aireado.

Si se desprecia la presión atmosférica en el área debajo de la lámina de agua que desborda sobre la cortina, dicha agua llevará una porción del aire atrapado en el

espacio 1-12-13, Fig 3.5, produciendo un vacío parcial. La presión del aire externo desviará la lámina de agua de su curso normal (líneas punteadas), al curso mostrado en líneas continuas. El agua se levantará en el espacio sujeto a vacío hasta cierto nivel 13-12, con una altura h_3 , por encima del nivel de tirante de agua. Entonces la presión en la cresta se volverá *negativa* (subatmosférica) en una cantidad igual a $\gamma_w h_3$. El incremento total en la reacción horizontal a lo largo del vertedor aireado de la Fig 3.4 es representado por el polígono 1-11-10-9 de la Fig 3.5. Eligiendo un valor de K correspondiente a V_b justo encima del nivel de tirante de agua, la reacción total representada por 1-14-8-2-11-10-9 en la Fig 3.5, se encuentra por la ecuación 3.12.

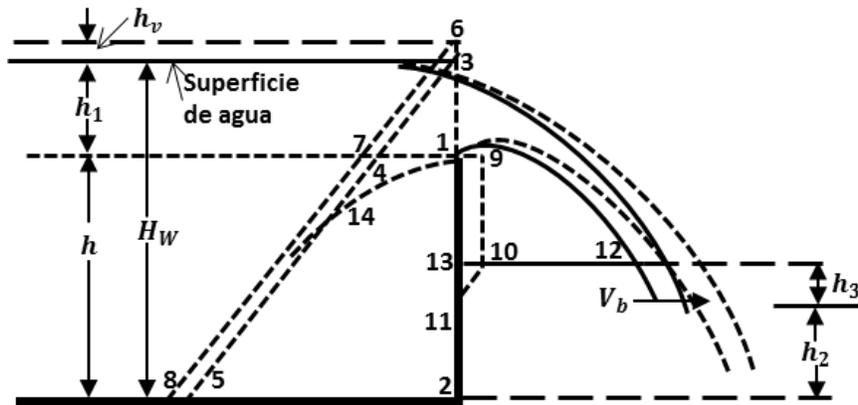


Figura 3.5. Vertedor de cresta aguda no aireado

3.4.3 Cresta de presas vertedoras.

Una presa vertedora, que tiene exactamente la forma de la lámina de agua que desborda la cortina, como se muestra en la Fig 3.4, es sustituida por una presa con un vertedor de cresta aguda que se ilustra en la Fig 3.6, la lámina de agua que cae no ejercerá ninguna fuerza sobre la cara aguas debajo de la presa ya que sigue el curso normal del agua.

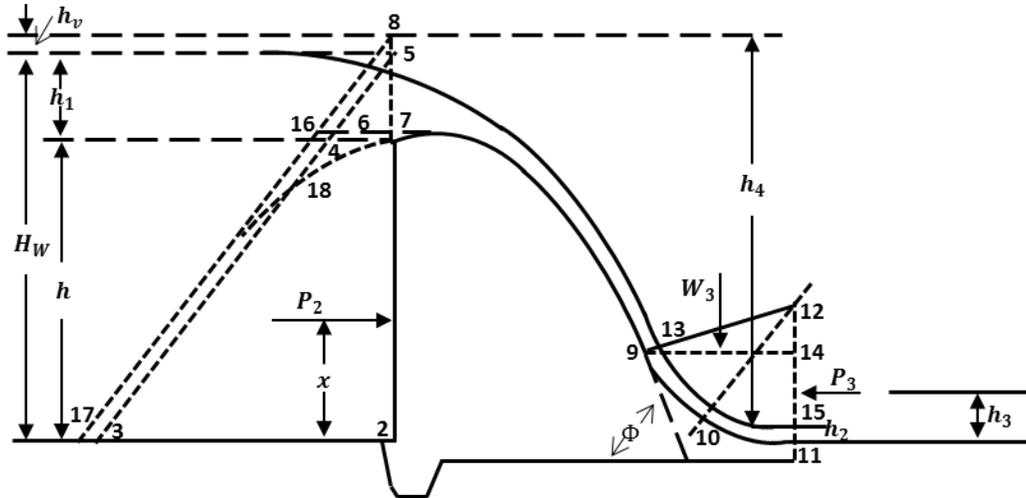


Figura 3.6 Presa de desbordamiento

Un ajuste exacto entre la caída de agua y el perfil de la presa es posible para una sola profundidad de desbordamiento. Para flujos más pequeños, la caída libre del agua es interferida y una parte del peso del agua descansa en la mampostería.

Este peso normalmente es despreciable. También, P_3 asume un valor positivo pequeño, el cual puede ser ignorado en medida que la estabilidad de la presa concierne.

Si la carga se aumenta más allá del valor para el que la cresta está diseñada, el agua tenderá a seguir un camino más amplio, dejando la presa. Si esto es impedido por la falta de aireación, se produce un área de presión subatmosférica (cavitación) a lo largo de la cara aguas abajo. Tal presión se suma al efecto de volteo en la presa. Si la sección de la presa es de forma irregular, puede haber áreas locales donde realmente se aproxime a un vacío total, pero en condiciones normales esto no puede ocurrir en una gran superficie.

Si h_1 es menor o mayor que la carga de diseño, se estima la componente horizontal de la velocidad en algún punto como la sección 9-13, Fig 3.6, posteriormente, se calcula el valor de K . Aun si K se asume como cero (correspondiente a una cara posterior vertical), la presión calculada para cualquier caso probable será mucho menor que la presión atmosférica completa en la cara entera.

La disminución de la presión resultante de cualquier condición que causa un vacío parcial, también tiene un componente vertical, que por lo general se ignora.

El propósito principal de la ecuación 3.12 es permitir determinar los casos que involucren un posible vacío si la fuerza total excede apreciablemente el área 7-16-17-2 de la Fig 3.6. Si esto ocurre, sería recomendable encontrar la ubicación de P_2 experimentalmente.

Para crestas con un mal diseño, la reducción de la presión atmosférica (cavitación) puede llegar a ser intermitente; es decir, un vacío parcial acumula hasta una cierta cantidad de presión, entonces se produce una ruptura, admitiendo aire, con retorno repentino a la presión normal. Esto se repite periódicamente. Tales períodos, generalmente son de una duración muy corta, causando una vibración fuerte, que puede dañar la presa.

3.4.4 Fuerza dinámica de la corriente aguas abajo.

Generalmente, la cara aguas abajo en una presa de desbordamiento es curva en la base, como se ilustra en la Fig 3.6, para reducir el efecto de erosión provocado por el agua que cae sobre ella. Al pasar por una curva tal, el agua ejerce una reacción sobre la presa. Al determinar el valor de K con la ecuación 3.12, al final de la cubeta, como en la sección 11-15 de la Fig 3.6, esta reacción puede ser incluida en P_2 . Sin embargo, a menos que se ignore, debería calcularse por separado.

Las siguientes, son ecuaciones aproximadas para su cálculo, obtenidas de la teoría de momentos:

$$P_3 = \gamma_w \frac{q}{g} V (1 - \text{sen } \varphi) \quad (3.14)$$

$$W_3 = \gamma_w \frac{q}{g} V \cos \varphi \quad (3.15)$$

Donde P_3 es la fuerza horizontal; W_3 la fuerza vertical; V es el promedio de velocidad a lo largo de la cara curveada; φ la inclinación con respecto de la vertical en el punto de análisis, y los otros símbolos ya han sido previamente establecidos. Si la

profundidad del tirante de agua h_2 , es apreciable, la fuerza horizontal deberá incrementar por la presión hidrostática en la sección 11-15, Fig 3.6, así:

$$P_3 = \gamma_w \frac{q}{g} V(1 - \text{sen } \varphi) + \frac{1}{2} \gamma_w h_2^2 \quad (3.16)$$

Como aproximación, V puede ser tomado igual a $\sqrt{2gh_4}$. Los puntos de aplicación de P_3 y W_3 pasan por los puntos medios de 11-14 y 14-9, respectivamente.

La Fig. 3.6 muestra que el tirante de agua se mantiene a cierta distancia de la presa por el salto hidráulico y la presión posterior debida a la profundidad h_3 , no actúa en contra de la presa.

3.5 PESO DE LA PRESA

El peso volumétrico de la presa varía, dependiendo de los materiales que conforman la mampostería. En la Tabla 3.1 se observan los valores promedio de pesos volumétricos para diferentes tipos de mampostería:

Tabla 3.1 Peso volumétrico de algunos tipos de mampostería. Merriman, 1892.

| Tipo de mampostería | Peso volumétrico (kN/m ³) |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| Sillería: | |
| Granito | 26.40 |
| Caliza | 25.60 |
| Arenisca | 22.40 |
| Mampostería irregular con mortero: | |
| Granito | 24.80 |
| Caliza | 24.00 |
| Arenisca | 21.00 |

Para obtener la fuerza vertical provocada por el peso propio de una presa, se multiplica el peso volumétrico de la mampostería γ_m por el área de la sección

transversal A_m y por el espesor t considerado para dicha sección, como se observa en la ecuación 3.14.

$$W_m = \gamma_m A_m t \quad (3.17)$$

3.6 PRESIÓN HIDRODINÁMICA

Para visualizar la acción dinámica del agua contra la presa generada por un sismo, Westergaard (1933) estableció que el incremento de presión de agua puede ser representado por la Fig 3.7. La ecuación 3.18 es una solución aproximada para la distribución parabólica de la presión hidrodinámica:

$$P_{wd} = \frac{7}{8} k_h \gamma_w \sqrt{Y_w H_w^2} \quad (3.18)$$

Donde k_h es el coeficiente sísmico horizontal; γ_w es el peso volumétrico del agua; Y_w es el tirante de agua; y H_w es la profundidad total del embalse.

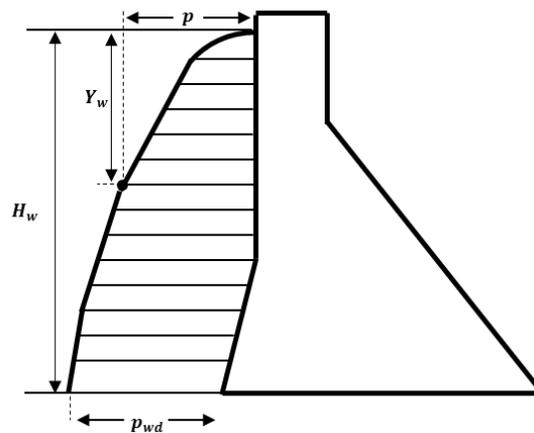


Figura 3.7. Distribución de presión hidrodinámica sobre una presa

3.7 REACCIÓN VERTICAL DE LA CIMENTACIÓN

3.7.1 Requisitos estáticos

Se considera a $\Sigma(W)$ (Fig 3.8) como la resultante de todas las fuerzas verticales actuantes en la presa sobre la cimentación y a $\Sigma(P)$ como la resultante de todas las fuerzas horizontales. La resultante R , de $\Sigma(W)$ y $\Sigma(P)$ representará la resultante de todas las fuerzas.

Para que la presa se encuentre en equilibrio estático, la resultante R , debe ser equilibrada por una reacción opuesta y de igual magnitud provocada por la cimentación, que consiste en la reacción vertical total, igual a $\Sigma(W)$, y a la fuerza cortante o friccionante horizontal igual a $\Sigma(P)$.

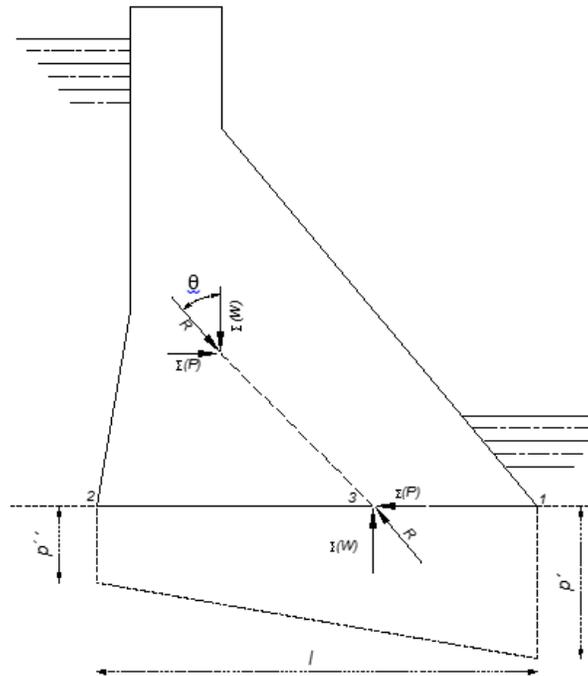


Figura 3.8. Reacción de la cimentación para un presa de gravedad

3.7.2 Efectos de elasticidad

Tanto la mampostería como la cimentación son elásticas. Una idea elemental simplificada es presentada en la Fig 3.9 en la cual se asume a el perfil 1-2-3 como un corte perfectamente rígido, de espesor unitario, apoyado sobre una cimentación

elástica. Se considera que la relación de $\Sigma(P)$ y $\Sigma(W)$ sea tal que R intersecte en la base en el punto 4. La reacción vertical unitaria varía linealmente de 1 a 2 asumiendo que la cimentación corta a lo largo de los planos 1-5 y 2-6, y únicamente considerando la reacción vertical. El diagrama de reacciones tendrá la forma 2-6-5-1. El área del trapecio deberá ser igual a la fuerza $\Sigma(W)$, y su centro de gravedad se encontrará verticalmente por debajo del punto 4.

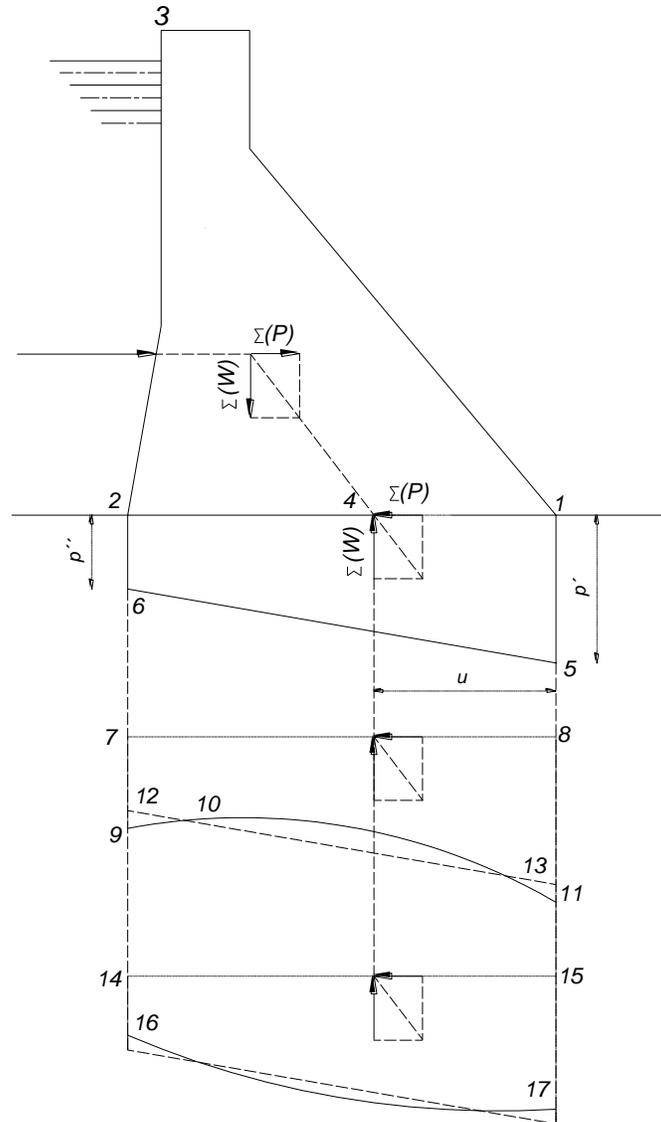


Figura 3.9. Posibilidades de distribución de esfuerzos en la cimentación

En realidad, la presa no es rígida como se ha asumido, pero sí es elástica; por lo tanto, la reacción causará que cambie su forma. En igualdad de condiciones, el

rendimiento es mayor cuando el esfuerzo es más grande; en consecuencia, el rendimiento máximo ocurrirá en la esquina 1. Esto podría esperarse que resultara en una apreciable reducción de la ordenada 8-11 y una pequeña reducción de 7-9, con pequeños incrementos internos para preservar el equilibrio, pero desplazaría el centro de gravedad del diagrama de reacciones. En consecuencia, la presa rota hasta que se establece el equilibrio. El resultado es una modificación de la curva 9-10-11, haciéndose cercana a la línea recta 12-13.

El problema se complica por la reacción horizontal $\Sigma (P)$, la presión directa del agua contra la presa y la cimentación, las relaciones de tensión interna, y otras consideraciones teóricas. Se han propuesto soluciones para el relativamente simple caso de una presa elástica homogénea sobre una base similar de extensión infinita. Prácticamente, la cimentación no es homogénea. Las resistencias al corte en grietas y fisuras pueden sensiblemente alterar el resultado de los cálculos teóricos y pruebas de laboratorio.

La mejor evidencia disponible hasta la fecha indica que un diagrama de reacción trapezoidal se puede utilizar sin error apreciable para las cimentaciones de roca, y para los perfiles de presas con sección homogénea. Se considera la condición extrema que se ilustra en la Figura 3.10. Suponiendo que la distribución de las presiones verticales resulta en una línea recta, el voladizo 1-2-3 se somete a la carga debida al peso 1-4-5-3, y la tensión se indica en un plano vertical en el punto 1. Los esfuerzos cortantes horizontales en 1-3 tienden a reducir o anular esta tensión. Independientemente de la magnitud de esta reducción la deformación elástica de la porción 1-2-3 de la presa es relativamente grande, lo que reduce la presión en la parte de abajo de la cimentación, alterando la distribución en línea recta. Los perfiles tendientes a la condición ilustrada en la Fig 3.10 deben ser evitados.

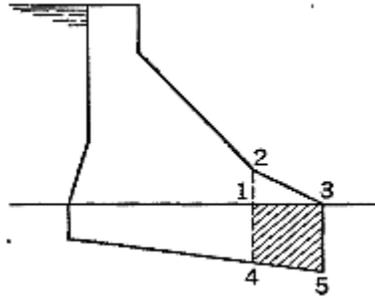


Figura 3.10. Detalle del pie de la presa

3.7.3 Ecuaciones para la distribución de presiones verticales.

Considerando la teoría de la distribución lineal, las presiones unitarias verticales en cualquier punto, se calculan de la manera siguiente:

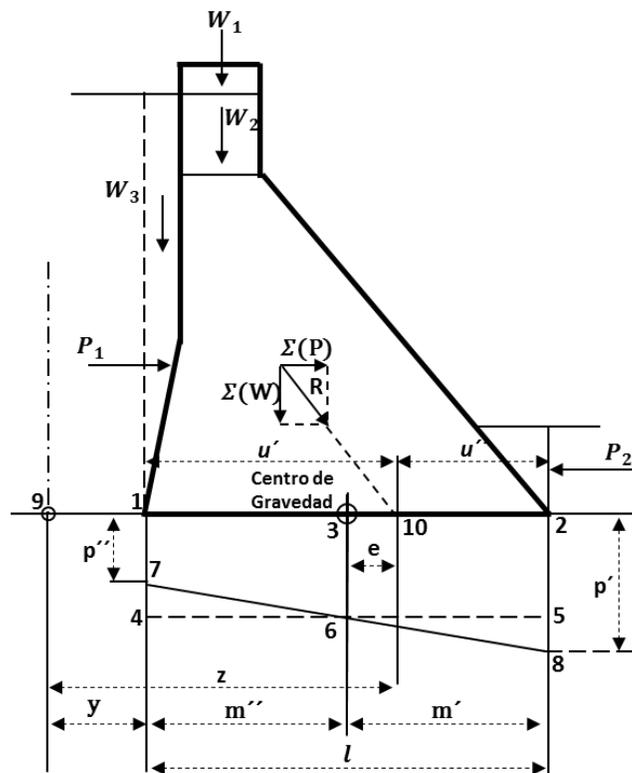


Figura 3.11. Elementos de ecuaciones de distribución de presiones en la cimentación

Considerando que 1-2 en la Fig 3.11 representa la base de un corte de una presa, el centro de gravedad del área de la base está en el punto 3. La presión sobre la

base puede ser considerada como una combinación del esfuerzo directo y del esfuerzo de flexión. Estos componentes se calculan:

$$\text{Esfuerzo directo} = \frac{\Sigma(W)}{A} \quad (3.19)$$

$$\text{Esfuerzo de flexión} = \frac{\Sigma(Px_0) + \Sigma(Wx_0)}{I} m \quad (3.20)$$

o, la alternativa:

$$\text{Esfuerzo de flexión} = \frac{\Sigma(W)e}{I} m \quad (3.20a)$$

Donde A es el área de la base; $\Sigma(W)$ es la suma de todas las fuerzas verticales, incluyendo la subpresión y excluyendo la reacción de la cimentación; $\Sigma(Wx_0)$ es el momento, sobre el centro de gravedad de la base, generado por todas las fuerzas verticales, incluyendo la subpresión pero excluyendo reacción de cimentación; $\Sigma(Px_0)$ es el momento generado por las fuerzas horizontales sobre el centro de gravedad de la base; x_0 es el brazo del momento al centro de gravedad de la base; I es el momento de inercia de la base alrededor de su centro de gravedad; m es la distancia desde el centro de gravedad de la base hasta el punto en el que la presión es deseada; y e es la excentricidad de la carga, o la distancia desde el centro de gravedad de la base a la intersección de la resultante con la base.

Si los momentos se toman sobre un punto arbitrario (punto 9), entonces, la posición de la resultante y su distancia desde el centro de gravedad de la base se calculan como sigue:

$$z = \frac{\Sigma(Px_9) + \Sigma(Wx_9)}{\Sigma(W)} \quad (3.21)$$

$$e = z - (y + m'') \quad (3.22)$$

Donde x_9 es el brazo del momento alrededor del punto 9, y y , m'' , z tienen el significado indicado en la Fig 3.11.

El total de presiones verticales en la cimentación se encuentra mediante la combinación de las ecuaciones 3.19 y 3.20, o 3.19 y 3.20a, por lo tanto:

$$p = \frac{\Sigma(W)}{A} \pm \frac{\Sigma(Px_0) + \Sigma(Wx_0)}{I} m \quad (3.23)$$

o, alternativamente

$$p = \frac{\Sigma(W)}{A} \pm \frac{\Sigma(W)e}{I} m \quad (3.23a)$$

En la Fig 3.11, el esfuerzo directo está representado por el rectángulo 1-4-5-2, y el esfuerzo de flexión por el triángulo 7-4-6 negativo y el positivo 6-5-8. Las presiones combinadas están representadas por el trapecoide 1-7-8-2.

Las ecuaciones 3.19 a 3.23 son generales y son independientes de la forma de la base del corte elemental de la presa que se analiza. Se aplican por igual a una base rectangular de espesor unitario de una presa de gravedad recta que a la base cónica de una porción entre planos radiales de una presa de arco, o la base irregular del contrafuerte de una presa.

Para una sección de espesor unitario, la base es un rectángulo y la longitud es l . El centro de gravedad está en el punto medio, y $m' = m'' = 0.5l$. También, $I = l^3/12$ y $A = l$. Sustituyendo estos valores en la ecuación 3.23 aplicados para la cara aguas arriba y aguas abajo, se obtiene:

Para vaso lleno y base rectangular

$$p' = \frac{\Sigma(W)}{l} \left(1 + \frac{6e}{l}\right) \quad (3.24)$$

$$p'' = \frac{\Sigma(W)}{A} \left(1 - \frac{6e}{l}\right) \quad (3.25)$$

Para el cálculo considerando el vaso vacío y base rectangular, además, de despreciar el valor negativo de e :

$$p' = \frac{\Sigma(W)}{l} \left(1 - \frac{6e}{l}\right) \quad (3.24a)$$

$$p'' = \frac{\Sigma(W)}{A} \left(1 + \frac{6e}{l}\right) \quad (3.25a)$$

3.7.4 Reacciones combinadas de subpresión y cimentación.

Cuando existe subpresión, la reacción ascendente total en la base de la presa es asumida a ser dividida en dos partes, como se ilustra en la Fig 3.13. El diagrama de reacción total 1-5-6-2 se divide en la subpresión 3-4-5-6 y la reacción de cimentación neta $\Sigma(W)$, 1-2-3-4. Ya que la subpresión está incluida en $\Sigma(W)$ y $\Sigma(Wx)$, p' (ecuación 3.22a aplicada a la cara aguas abajo) se representa por 2-3 y p'' (ecuación 3.22a aplicada a la cara aguas arriba) por 1-4. Estos valores se designan como p'_r y p''_r en la Fig 3.13. El total de fuerzas unitarias verticales pueden encontrarse así:

$$p'_v = p'_r + p'_u \quad (3.26)$$

$$p''_v = p''_r + p''_u \quad (3.27)$$

Donde se utilizan símbolos como en la Fig 3.13. Suponiendo que la subpresión se distribuye de acuerdo con la línea 4-3 de la Fig 3.12, los términos de subpresión se calculan:

$$p'_u = c\gamma_w H_w \quad (3.28)$$

$$p''_u = c\gamma_w[h_2 + \zeta(H_w - h_2)] \quad (3.29)$$

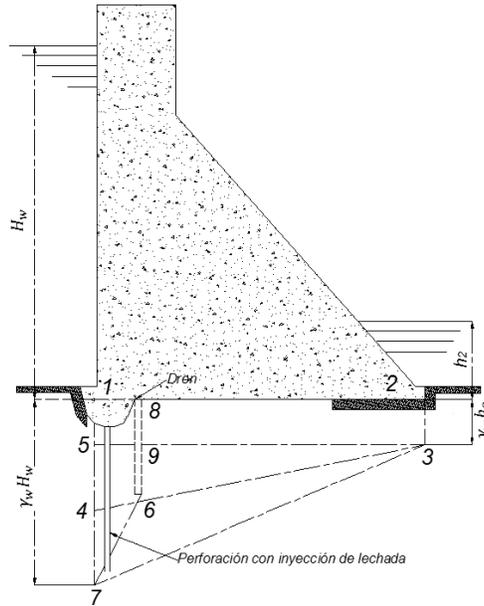


Figura 3.12. Diagramas de intensidad de la presión de subpresión práctica

3.7.5 Requisitos para la estabilidad.

Las presas de mampostería de finales del siglo XIX y principios del XX consideraban como regla general asegurar la ausencia de tensión en la cortina. Esto requiere que ni p'_r ni p''_r (Fig 3.13), sean negativos.

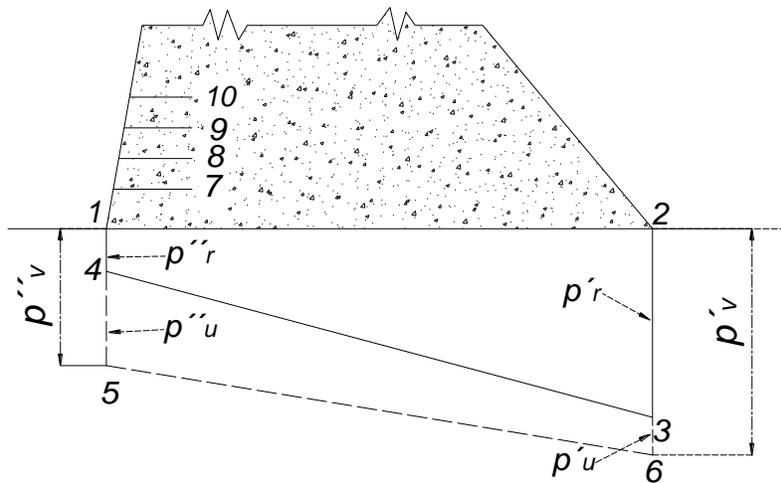


Figura 3.13. Presiones combinadas de subpresión y cimentación

También era necesario limitar los esfuerzos de compresión dentro de la mampostería y en la cimentación de presas de gran altura. Estos esfuerzos se determinan a partir de las presiones verticales. Es probable que la presión del agua contra la mampostería totalmente sumergida no sea perjudicial; por lo tanto, si la subpresión actuara siempre como se asume su distribución sobre la base de la presa, los esfuerzos en el talón y el pie de las presas de gravedad de sección homogénea podrían ser calculados a partir de p'_r ni p''_r . Sin embargo, la subpresión es incierta.

Si el valor de e en la ecuación 3.24 es mayor que $l/6$, p'' es negativo, es decir, existe tensión. Del mismo modo, p' se convierte en negativo para e si es mayor que $l/6$ de la ecuación 3.24a.

Esto lleva a la conocida ley del tercio medio, esta exige que en un *plano horizontal de una presa con base rectangular*, la resultante de todas las condiciones de carga deberá estar dentro del tercio medio de la base.

Esta ley no es más que un medio para determinar que ni p' ni p'' son negativos, bajo condiciones habituales de una presa de gravedad con una base rectangular.

4. REQUISITOS PARA LA ESTABILIDAD Y ECUACIONES GENERALES EN EL DISEÑO DE PRESAS DE GRAVEDAD

Con base en las condiciones del terreno, Creager (1917) menciona que el ancho de la base se calcula mediante un proceso iterativo siguiendo seis reglas básicas para garantizar la estabilidad estructural de la cortina. Dichas reglas derivan de los siete requisitos a tomar en cuenta para la estabilidad de una presa de gravedad. Los requisitos y reglas son los siguientes:

4.1 CAUSAS DE FALLA.

Hay dos formas directas en las cuales una presa de gravedad puede fallar:

1. Por deslizamiento (a) sobre una junta horizontal o casi horizontal sobre la cimentación, (b) en la cimentación, o (c) en una grieta horizontal o casi horizontal en la cimentación.
2. Por volteo en una junta horizontal (a) dentro de la presa, (b) en la base, o (c) en un plano debajo de la base.

La causa directa de deslizamiento es la presencia de fuerzas horizontales mayores que la resistencia al cortante combinado de la articulación o la base y la fricción estática inducida por las fuerzas verticales.

La causa directa de la falla por volteo, no precedido de algún otro tipo de falla, y sin tomar en cuenta la tensión, es la presencia de fuerzas horizontales suficientemente grandes en comparación con las fuerzas verticales para hacer que la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la presa, incluyendo la subpresión, encima de cualquier plano horizontal, pase fuera del tercio medio.

Como la resultante se aproxima a la cara aguas abajo, el esfuerzo de compresión se incrementa rápidamente, de ahí que el volteo sería precedido y acelerado por una falla a compresión.

Una presa empezará a fallar por volteo, pero finalmente fallará por deslizamiento, además, si la resultante pasa fuera del tercio medio (o kern, si la base es de forma

irregular), pueden ocasionarse grietas horizontales debido a la tensión en la cara aguas arriba. También, la intrusión de agua en las grietas incrementa la subpresión, reduciendo la reacción neta y la resistencia friccionante del movimiento horizontal. Adicionalmente, se han presentado fallas en la cimentación debidas a la erosión por derramamiento del agua sobre la cresta. Se puede presentar que la socavación provoque eventualmente la falla por vuelco, o la exposición de grietas horizontales rellenas con arcilla o algún otro material prácticamente sin fricción, que origine la falla por deslizamiento de la cimentación.

4.2 UBICACIÓN DE LAS RESULTANTES.

Si la resultante de todas las fuerzas actuantes contra una presa sobre un plano horizontal, incluyendo la subpresión, pasa por fuera del tercio medio del plano, la presa volcará a menos que el material de dicha junta sea capaz de resistir esfuerzos de tensión. Creager consideraba a la mampostería como un material incapaz de resistir esfuerzos de tensión, aunque sabía que si la resultante se ubicaba fuera del tercio medio, o cuando cualquiera de p' o p'' era negativa, como se determina por la ecuación 3.23 del apartado 3.7.3, aparecerían esfuerzos de tensión. Si la junta es incapaz de resistir estos esfuerzos de tensión, la elasticidad de la mampostería causará una ligera apertura en la cara aguas arriba y, bajo la condición del vaso lleno, puede admitir una presión de agua, lo cual representa una condición más grave que la que generalmente se supone para la subpresión.

Sin embargo, debido a que usualmente las especificaciones y códigos para el diseño de presas prohíben dicha tensión, la primera regla de diseño se escribe de la forma siguiente:

Regla 1, REGULAR LA UBICACIÓN DE LA RESULTANTE

“La tensión no debe existir en ningún plano de la presa bajo ninguna condición de carga. Para presas con planos horizontales rectangulares este requisito se cumple si la resultante de todas las fuerzas, considerando el vaso lleno o vacío, intersecta dentro del tercio medio de la longitud del plano. Para presas con planos irregulares,

no debe existir ningún esfuerzo p de tensión, considerando el vaso lleno o vacío, utilizando la ecuación 3.23 del capítulo 3.7.3”.

Para obtener una ecuación general de la ubicación de la intersección de la resultante R con el plano 1-2, se utiliza la Fig 4.1:

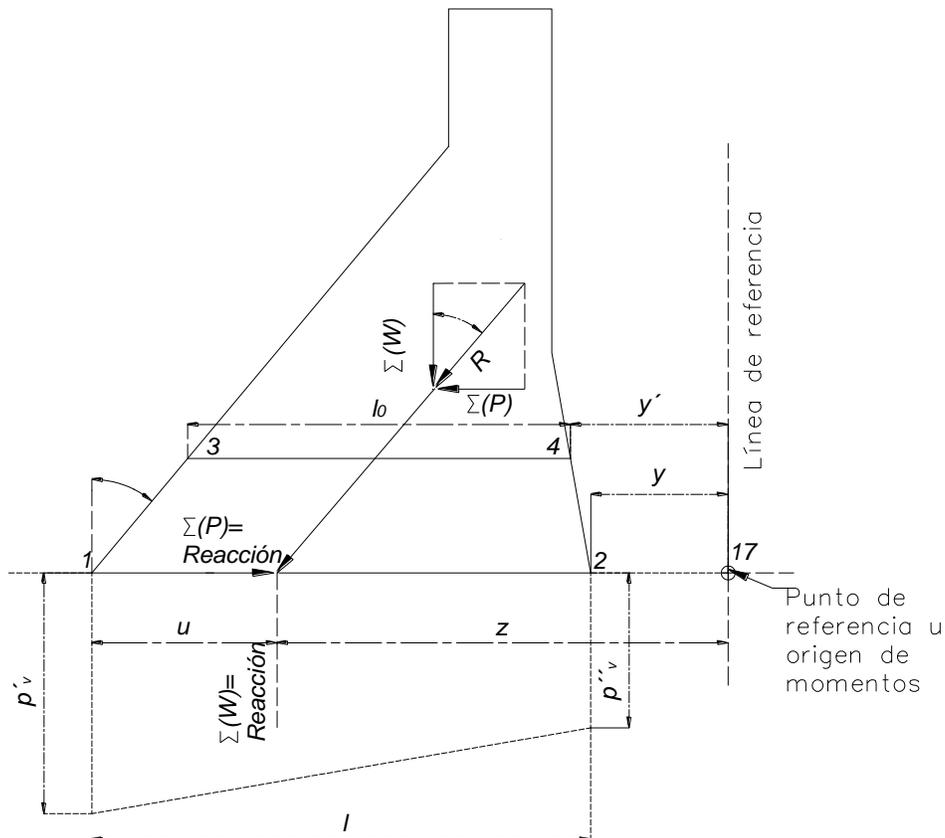


Figura 4.1. Análisis de un plano horizontal en una presa de gravedad

Donde:

$\Sigma (W)$ es la suma algebraica de las componentes verticales de todas las fuerzas que actúan sobre la presa encima de un plano 1-2. Incluyendo el peso de la mampostería.

$\Sigma (Wx)$ es la suma algebraica de los momentos con respecto al punto 17 provocados por las fuerzas verticales por encima del plano 1-2.

$\Sigma(P)$ es la suma algebraica de los componentes horizontales de todas las fuerzas que actúan sobre la presa encima del plano 1-2.

$\Sigma(Px)$ es la suma algebraica de los momentos con respecto al punto 17 de las fuerzas horizontales que actúan por encima del plano.

Subíndice E representa la condición de vaso vacío.

Subíndice F representa la condición de vaso lleno.

El momento de todas las fuerzas actuantes sobre la presa, encima de la junta, alrededor del punto 17, es $\Sigma(Wx) + \Sigma(Px)$. El momento de las reacciones sobre el mismo punto es $\Sigma(W)z$, el momento de la fuerza de $\Sigma(P)$ es cero. Para el equilibrio, estos momentos deben ser iguales, como se muestra a continuación:

$$\Sigma(Wx) + \Sigma(Px) = \Sigma(W)z \quad (4.1)$$

Resolviendo para z , resulta:

$$z = \frac{\Sigma(Wx) + \Sigma(Px)}{\Sigma(W)} \quad (4.2)$$

De acuerdo con la Regla 1, la distancia $z - y$ debe ser inferior a $2/3 l$ para vaso lleno y mayor que $l/3$ para vaso vacío.

Para el análisis considerando vaso lleno se puede sustituir $y + \frac{2}{3}l$ para z en la ecuación 4.2. Añadiendo el subíndice F resulta:

$$y + \frac{2}{3}l = \frac{\Sigma(Wx)_F + \Sigma(Px)_F}{\Sigma(W)_F} \quad (4.3)$$

Para vaso vacío, se sustituye $y + \frac{1}{3}l$ para z en la ecuación 4.1. Añadiendo el subíndice E resulta:

$$y + \frac{l}{3} = \frac{\Sigma(Wx)_E + \Sigma(Px)_E}{\Sigma(W)_E} \quad (4.4)$$

Se sustituyen los valores de las distintas fuerzas y momentos en términos de y y l para obtener ecuaciones exactas y resolver directamente los valores de l y y .

4.3 RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO.

Regla 2a. RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO DESPRECIANDO EL CORTANTE:
“La tangente de θ deberá ser menor que el coeficiente de fricción f' admisible en ese plano”.

La resultante $\Sigma(P)$ de todas las fuerzas horizontales que actúan en la presa sobre cualquier plano horizontal, tienden a provocar un deslizamiento.

Si f representa el coeficiente de fricción estática del material por encima y debajo del plano analizado, entonces $f \Sigma(W)$ será la resistencia friccionante al deslizamiento.

Por equilibrio $f \Sigma(W)$ deberá ser igual o mayor que $\Sigma(P)$. Esto puede ser expresado de la siguiente manera:

$$f \Sigma(W) \geq \Sigma(P) \quad (4.5)$$

$$\frac{\Sigma(P)}{\Sigma(W)} = \tan \theta \leq f \quad (4.6)$$

Donde θ es el ángulo de la resultante con respecto a la vertical.

Por lo tanto, si la tangente de θ se hace igual o menor al coeficiente de fricción, como se indica en las pruebas, se proporcionará un factor de seguridad por lo menos de uno.

Valores de f entre 0.6 y 0.75 pueden considerarse para planos de mampostería sobre mampostería o mampostería sobre una base de roca.

Regla 2b. RESISTENCIA AL DESLIZAMIENTO INCLUYENDO EL CORTANTE:

“La resistencia cortante friccionante total al deslizamiento, en cualquier plano, debe ser mayor que la fuerza horizontal total por encima del plano para todas las condiciones de carga, con un cierto margen de seguridad”.

La relación puede expresarse:

$$\Sigma(P) = < \frac{f \Sigma(W) + r s_a A}{s_{s-f}} \quad (4.7)$$

Donde s_a es la resistencia cortante unitaria del material; s_{s-f} es el factor de seguridad cortante-friccionante; A es el área del plano; r es la relación de la media del esfuerzo cortante máximo en el plano; y las otras variables se definen con las ecuaciones 3.6 y 3.7. Para fines prácticos, el valor de r se considera 0.5.

Houk establece que:

“La principal incertidumbre involucrada en la evaluación del factor de seguridad cortante-friccionante, es la determinación de la resistencia al corte promedio del material. Valores de la resistencia cortante $r s_a$ utilizados para los cálculos de factores de seguridad cortante-friccionante para presas construidas por el Buró de Reclamaciones (Bureau of Reclamation) han variado de 20 a 50 kg/cm²”.

En la ecuación 4.7 el cortante es incluido en los cálculos; por lo tanto, el factor de seguridad s_{s-f} debe acercarse a los valores utilizados en los cálculos estructurales normales, digamos cuatro o cinco.

De acuerdo con Houk:

“El objetivo del Buró de Reclamaciones ha sido mantener el mínimo factor de seguridad cortante-friccionante superior a 5 durante la condición más severa de

carga de embalse combinada con las aceleraciones sísmicas máximas horizontales y verticales. Esto se hace fácilmente en el diseño de presas de gravedad de altura normal, pero requiere una planificación cuidadosa inusual en el de presas de altura sin precedentes”.

Creager (1917) recomienda que el valor de $\tan \theta$ (Regla 2a) siempre debe ser calculado. Si el factor de deslizamiento seguro es excedido, la Regla 2b deberá ser aplicada y el diseño puede ser considerado seguro si s_{s-f} es igual o excede el valor especificado permitido.

4.4 ESFUERZOS DE COMPRESIÓN

Las ecuaciones para la obtención de los esfuerzos de compresión vertical en la base y en los planos horizontales han sido obtenidas en el capítulo 3.7. Los esfuerzos de compresión verticales máximos no son los esfuerzos máximos que se producen en la estructura. Los esfuerzos máximos se producen en los extremos de los planos, en planos inclinados normales a la cara de la presa.

La teoría más aceptada es la de Enger, ampliada por Caín, Hill y otros, que da como resultado un esfuerzo inclinado en un plano, donde no hay fuerzas externas que actúan sobre las caras. Estos esfuerzos inclinados máximos están dados por las ecuaciones:

$$p'_i = p'_v \sec^2 \varphi' \quad (\text{cara aguas abajo}) \quad (4.8)$$

$$p''_i = p''_v \sec^2 \varphi'' \quad (\text{cara aguas arriba}) \quad (4.9)$$

Donde φ' es el ángulo entre la cara aguas abajo y la vertical, φ'' de igual manera, pero para la cara aguas arriba. Los valores de las presiones verticales, p'_v y p''_v , se obtienen de la ecuación 3.23 del apartado 3.7.3.

Cuando se tiene inclinación en las caras aguas arriba y aguas abajo e intervienen fuerzas normales externas, las correspondientes presiones inclinadas son:

$$p'_i = p'_v \sec^2 \varphi' - p'_n \tan^2 \varphi' \quad (4.8a)$$

$$p''_i = p''_v \sec^2 \varphi'' - p''_n \tan^2 \varphi'' \quad (4.9a)$$

Donde p'_n y p''_n son las presiones normales externas en las caras aguas abajo y aguas arriba, respectivamente.

En la realización de cálculos, el uso de tablas se puede evitar señalando que $\sec^2 \varphi$ es igual a $1 + \tan^2 \varphi$.

Los esfuerzos inclinados determinados de esta manera pueden ser inexactos, no porque exista alguna deficiencia en las ecuaciones 4.8 y 4.9, sino debido a las incertidumbres involucradas en la determinación de la presión vertical. Estas incertidumbres son ampliamente compensadas por los factores de seguridad usados comúnmente para los esfuerzos de compresión en presas.

La falta de información sobre los esfuerzos inclinados llevó a los primeros diseñadores a la costumbre bastante generalizada de únicamente considerar las presiones verticales; dicha costumbre se mantuvo en uso hasta la primera mitad del siglo. Bajo este plano se permite el efecto de la inclinación asumiendo diferentes esfuerzos admisibles en el talón y la punta. Es más racional utilizar los esfuerzos inclinados que conducen a la tercera regla.

Regla 3. REGULAR EL ESFUERZO A COMPRESIÓN

“Los esfuerzos de compresión unitarios máximos verticales e inclinados en la presa y en la cimentación no podrán exceder ciertos valores prescritos”.

Creager menciona que las muestras ensayadas de mampostería a compresión no proporcionan un valor satisfactorio de su resistencia en grandes masas, debido a las condiciones menos favorables bajo las cuales esta última se construye. Por esta razón, así como a causa de la incertidumbre en la determinación de los esfuerzos máximos, es necesario adoptar esfuerzos actuantes para presas de mampostería correspondientes a un factor de seguridad considerablemente alto.

A pesar de que en la primera mitad del siglo XX se llevaron a cabo algunas pruebas de resistencia a rocas y al mortero de manera individual, bajo condiciones similares a las actuantes en las presas, éstas no revelaban la resistencia del conjunto la cual depende de la acción combinada de los materiales de la mampostería.

Baker recomienda esfuerzos permisibles para diferentes tipos de materiales utilizados en la mampostería (Tabla 4.1):

Tabla 4.1. Esfuerzos permisibles para diferentes tipos de materiales. (Creager et al, 1945)

| | Lb/ft ² | kg/cm ² |
|----------------------------------|--------------------|--------------------|
| Cascajo | 20 000 a 30 000 | 9.7 a 14.6 |
| Roca-cuadrada | 30 000 a 40 000 | 14.6 a 19.5 |
| Sillares de piedra caliza | 40 000 a 50 000 | 19.5 a 24.4 |
| Sillería de granito | 50 000 a 60 000 | 24.4 a 29.2 |

La resistencia de la roca base sobre la que se construyen las presas varía de acuerdo al tipo de roca que puede ser de extrema dureza, débil, pobremente cementadas, o compuesta desde rocas sedimentarias ligeramente consolidadas, hasta gravas, limos y depósitos de arcilla. La permeabilidad, la solubilidad y los asentamientos también deben recibir atención.

Las pruebas de laboratorio sobre muestras de roca y las pruebas de campo realizadas en áreas pequeñas deben analizarse con un amplio criterio, ya que no conducen a resultados confiables para el análisis de la roca como un conjunto.

En el caso de la roca sólida, la realización de las pruebas de laboratorio es simple. Primero son seleccionados especímenes adecuados, posteriormente se cubren, y así, son ensayados para determinar su resistencia a la compresión, su módulo de elasticidad y cualquier otra cualidad que se desee saber. Desafortunadamente, aún no se ha establecido una relación entre la resistencia determinada en las muestras de laboratorio y la resistencia de la roca en conjunto.

Las pruebas de laboratorio se realizan normalmente sobre pequeños especímenes no confinados, los cuales han demostrado que los cilindros para pruebas de concreto resisten un gran aumento de compresión axial cuando se someten a presiones circunferenciales durante las pruebas.

Del mismo modo, se puede esperar que la presión lateral producida por la acción de la relación de Poisson dentro de un material de la cimentación perfectamente confinado, aumente la capacidad para soportar una carga vertical. Sin embargo, las cimentaciones actuales, aun en “roca sana”, son susceptibles a agrietarse y fisurarse al menos en un grado menor, e incluso las mínimas aperturas pueden ser suficientes para aliviar los esfuerzos laterales causadas por la expansión bajo carga. Si la roca contiene fracturas o grietas abiertas, probablemente se pueda fortalecer por medio de la inyección de lechada a fondo, no solo en la cara aguas arriba para mantener la estanqueidad del agua, sino también para otros puntos de esfuerzos máximos.

Resumiendo, en una cimentación que consiste en una masa simple de roca sólida, libre de cualquier tipo de unión, que pueda aliviar presiones laterales causadas por la expansión lateral bajo cargas verticales, la capacidad de carga es sin duda muy superior a la resistencia de laboratorio y ésta puede ser aceptable en circunstancias favorables para permitir al esfuerzo actuante aproximarse a la resistencia a la rotura obtenida en laboratorio.

Para una cimentación de roca sana, con discontinuidades o fracturas, se considerará que la resistencia última de la roca “en masa” no es considerablemente mayor que la resistencia a la rotura en las muestras de laboratorio, y se aplicará un factor de seguridad de 4 a 7 en la selección de un esfuerzo de trabajo permitido.

Las presas cimentadas con pilas deberán estar provistas con amplios puntos de corte, delantales aguas arriba, drenes, o algún otro método adecuado para controlar las filtraciones y tubificación. El pilotaje en ocasiones puede usarse ventajosamente bajo porciones de una presa o bajo estructuras auxiliares donde el flujo inferior no sea un problema.

4.5 TENSIÓN SOBRE PLANOS INCLINADOS O VERTICALES.

Las ecuaciones 4.8, 4.8a, 4.9 y 4.9a son aplicables para el caso de embalse lleno o vacío. Si la ubicación de la resultante es tal que $p''_v \sec^2 \varphi''$ en la ecuación 4.9a, es menor que $p''_n \sec^2 \varphi''$, p''_i será negativo. Tal condición es posible pero no usual. Esto puede producirse en el caso de una cara inclinada aguas arriba en una presa diseñada sin subpresión y donde, como consecuencia p''_v se aproxima al cero.

La tensión por esta causa en la punta aguas abajo de una presa sin carga, sujeta a la presión aguas abajo, no es probable que sea un motivo de preocupación. Los esfuerzos máximos y mínimos en el interior de la presa también son generalmente inclinados. Bajo las hipótesis habituales de diseño, los esfuerzos de compresión internos nunca exceden el máximo en la cara. Además, los procedimientos de cálculo estándar basados en la suposición de una distribución lineal de las presiones verticales no muestran esfuerzos de tensión en los puntos internos de una sección simple de gravedad, a menos que también exista tensión en algún punto de la cara de la mampostería. Sin embargo, cualquier condición inusual que tienda a desarrollar la tensión en cualquier punto que sea debe ser evitado, esto lleva a:

Regla 4. REGULAR LA TENSIÓN INTERNA:

“La presa debe ser diseñada y construida de tal manera que se evite o prevea adecuadamente la tensión en los planos interiores, inclinados, verticales u horizontales”.

La aplicación de esta norma es complicada y no puede ser fácilmente llevada a lo largo de la aplicación paso a paso de las otras reglas para el diseño de una presa. Normalmente no es un factor determinante en el diseño. Por lo tanto, el procedimiento normal es completar el diseño sin tener en cuenta la Regla 4 y luego para la prueba de tensión interna.

4.6 MARGEN DE SEGURIDAD.

Todos los factores de diseño que contribuyen a la seguridad permanente de una presa deben ser elegidos con cuidado y conservadores. Una estimación cuidadosa del peso de la presa no debe variar más de 1 o 2 por ciento del peso real, y el peso y la presión del agua deben ser bien conocidos. La profundidad máxima del agua debe incluir una libre asignación para la inundación más alta posible, y las olas y seiches (ondas estacionarias) deben preverse, si es necesario, con el fin de que la carga de agua asumida seguramente no podrá superarse. La asignación de la subpresión, las fuerzas sísmicas, la presión de limos y las presiones de hielo debe ser adecuada. El factor de deslizamiento supuesto, la resistencia de la cimentación, y la resistencia de la mampostería deben ser conservadores. Si se eligen cuidadosamente todos estos factores, la presa, correctamente diseñada y construida, estará a salvo. Si la base es roca, hay un elemento adicional de seguridad debido a la adherencia del concreto a la cimentación. Para esta característica solo se puede atribuir la continua existencia de una serie de presas mal diseñadas. Estas consideraciones llevan a:

Regla 5, REGULAR EL MARGEN DE SEGURIDAD:

“Todas las suposiciones de las fuerzas que actúan sobre la presa estarán, sin duda, en el lado seguro, todos los esfuerzos unitarios adoptados en el diseño deberán facilitar un amplio margen en contra de la ruptura, y el factor de seguridad de deslizamiento adoptado o el factor de seguridad de cortante-friccionante serán conservadores”.

El término "factor de seguridad" como se usa en el diseño estructural es directamente aplicable a las presas huecas y a las presas de arco a través de las ecuaciones de esfuerzo, pero el término directamente es menos aplicable a presas de gravedad. A veces se dice que una presa de gravedad, con la resultante, con depósito lleno, en un punto al tercio medio aguas abajo tiene un factor de seguridad de dos contra momento. Esta afirmación proviene del hecho de que la duplicación

del momento de volteo activo en una presa de forma triangular con cara vertical aguas arriba moverá el resultante a la cara río abajo. En realidad, la falla por aplastamiento se produciría antes de que la resultante alcance la cara. Por otro lado, la posibilidad de duplicar el momento es inexistente; por lo tanto, un factor numérico de seguridad contra el volteo no tendrá sentido. Lo mismo aplica para el deslizamiento. El factor de seguridad cortante-friccionante y el factor de seguridad contra fallas de compresión tienen un significado estructural ordinario.

Se deben establecer límites de seguridad amplios y conservadores. No existe una estimación que pueda ser colocada en el valor de la vida humana. Nunca deben ser muy reducidos y tampoco se deben incrementar para producir una estructura excesivamente segura.

4.7 DETALLES DE DISEÑO Y MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN

Ya que se ha determinado la sección de la presa conforme a las reglas establecidas, debe ponerse especial atención a los detalles del diseño y los métodos de construcción, con el fin de que la estructura puede ser satisfactoria en todos los aspectos.

La ubicación y la extensión de las juntas verticales de construcción, pasillos y otros planos de debilidad deben estar dentro de los límites adecuados, con el fin de no tener un aumento considerable en los esfuerzos de diseño. Ciertas características como drenes e inyecciones, los cuales se supone disipan la subpresión, deben estar diseñados cuidadosamente.

La mampostería de la estructura debe ser de calidad para soportar con seguridad los esfuerzos actuantes adoptados en el diseño, y ser prácticamente hermética y duradera. Las obras de desfogue y el vertedor deben ser diseñadas para el desbordamiento y para evitar el daño provocado por la de caída de agua. El bordo libre se debe proporcionar para evitar el desbordamiento por las inundaciones o las olas. Estas consideraciones llevan a la regla siguiente:

Regla 6, REGULAR LOS DETALLES DEL DISEÑO Y MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN:

“Todos los datos deberán apoyar y cumplir con los supuestos utilizados en el diseño; la mampostería deberá ser de una calidad adecuada a los esfuerzos actuantes, y deberá ser prácticamente impermeable y duradera; la protección contra el desborde de agua será amplia”.

5. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

5.1 FUNDAMENTOS

El análisis estructural y geotécnico de presas de mampostería es un problema que implica una solución de la distribución de esfuerzos y deformaciones en un medio continuo elástico. Tal problema varía desde casos bidimensionales de estado plano de deformación, hasta sólidos tridimensionales donde están involucrados los materiales y las condiciones de frontera en situaciones complejas.

Con el fin de superar la dificultad que implica dar con la solución cerrada de tales problemas, se recurre a métodos numéricos capaces de brindar una solución aproximada mediante la *discretización* del medio continuo. Tal *aproximación*, se acerca a la solución cerrada del problema, tanto como se incrementa el número de variables discretas.

Los problemas que involucran la discretización de medios continuos han sido abordados de diferente manera por matemáticos e ingenieros. Los matemáticos han desarrollado técnicas generales aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, como aproximaciones por diferencias finitas, diversos procedimientos de residuos ponderados, o técnicas de aproximación para determinar puntos estacionarios de *funcionales* adecuadamente definidos. Los ingenieros, por otro lado, abordaron el problema de una forma más intuitiva mediante la creación de una analogía entre los elementos discretos reales y las partes finitas de un dominio continuo.

El método de elementos finitos (MEF) consiste en modelar la geometría del problema bajo investigación mediante el ensamble de pequeñas regiones interconectadas por sus lados, llamadas *elementos finitos*. Estos elementos tienen *nodos* localizados en las fronteras de los elementos, los cuales son utilizados para definir la geometría de acuerdo a un sistema coordenado.

Para obtener las ecuaciones de equilibrio que rigen el comportamiento del material de cada elemento se emplean los principios variacionales de la mecánica. El más comúnmente utilizado es el *principio de energía potencial mínima*. La energía potencial de un cuerpo elástico cargado es la suma de la energía interna

almacenada durante la deformación del cuerpo y la energía potencial de las cargas externas. Si el cuerpo está en equilibrio, la energía potencial es mínima.

Se realiza el ensamble de las ecuaciones de los elementos para formar las ecuaciones globales, que serán modificadas dependiendo de las condiciones de frontera.

En síntesis, el método de elementos finitos sigue fundamentalmente los pasos siguientes:

1. Discretización del medio continuo. El dominio del problema es dividido por líneas o regiones imaginarias para formar la malla de elementos finitos, la ubicación de tales elementos estará definida por las coordenadas nodales.
2. Selección de los modelos de desplazamiento o de las funciones de interpolación. Se elige un conjunto de funciones que definan el estado de los desplazamientos sobre las fronteras y dentro de cada elemento finito, en términos de sus desplazamientos nodales. Tales funciones definirán únicamente el estado de deformación dentro de un elemento en términos de desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de esfuerzos a través del elemento y sobre sus fronteras.
3. Determinación de las ecuaciones de equilibrio y propiedades elementales. Se determina un sistema de fuerzas equivalentes concentradas en los nodos de un elemento que equilibran el esfuerzo de frontera y cualquier carga distribuida, resultando en una relación de rigidez. La determinación de estas fuerzas equivalentes se realiza, generalmente, usando el *principio de trabajo virtual* o minimizando la *energía potencial total*, siendo este último únicamente aplicable a un comportamiento elástico y reversible del material.
4. Ensamble de las ecuaciones de equilibrio globales.
5. Aplicación de las condiciones de frontera.
6. Solución del sistema de ecuaciones.

Un desarrollo detallado del MEF, se muestra en el **Apéndice A**.

5.2 ELEMENTOS FINITOS 3D

Previamente, se ha puesto especial interés en problemas con condiciones axisimétricas o de estado plano de esfuerzo y deformación (Fig 5.1), donde la simetría implica que no hay desplazamientos en una dirección particular, lo que resulta en simplificaciones considerables. En el análisis por elementos finitos esto significa que solo es necesario tomar cuenta los desplazamientos en dos direcciones, lo que resulta en dos grados de libertad en cada nodo, es decir, este enfoque permite desarrollar el análisis sobre una porción de dos dimensiones representante del problema.

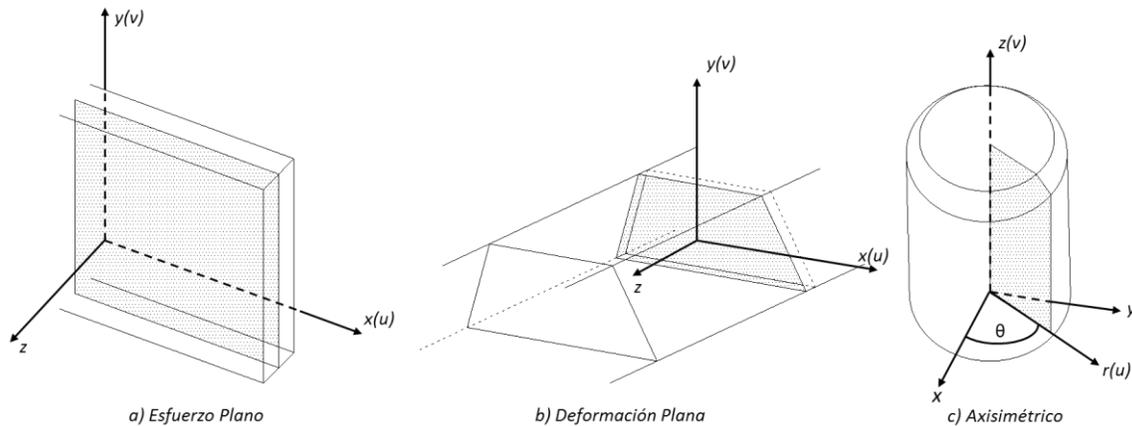


Figura 5.1. Tipos de análisis bidimensional para esfuerzo plano, deformación plana y axisimetría

Sin embargo, en la realidad la mayoría de problemas geotécnicos se deben considerar en tres dimensiones, un ejemplo claro son las presas de mampostería con sección irregular. Esto implica que se deben considerar los tres componentes de desplazamiento y la geometría tridimensional completa. Aunque la descripción teórica presentada en los capítulos anteriores es aplicable, la cantidad de datos y el tamaño de los diferentes vectores y matrices aumentan enormemente. Esto tiene implicaciones graves para los recursos informáticos. La mayoría del tiempo extra es ocasionado por la inversión de la matriz de rigidez global. En consecuencia, los matemáticos han investigado maneras de mejorar el proceso de inversión. Una

manera de hacer esto es utilizar técnicas iterativas para resolver las ecuaciones de la matriz de rigidez, en lugar de métodos directos. Otra manera de simplificar el análisis es sacar provecho de las simetrías geométricas que existen. Un enfoque de realizar esto es mediante las series de Fourier auxiliando el método de elementos finitos.

5.2.1 Análisis convencional de elementos finitos 3D

El análisis convencional de elementos finitos tridimensionales sigue exactamente el mismo procedimiento que el descrito en el capítulo anterior. La única diferencia es que en lugar de analizar una porción bidimensional del dominio del problema original, se debe considerar el dominio completo. Esto implica la discretización del problema en un ensamble de elementos finitos tridimensionales. Los elementos más populares son los tetraedros y hexaedros, Fig 5.2. Sus coordenadas se especifican en términos de las coordenadas de los nodos. Para elementos con caras planas estos nodos se ubican normalmente en las esquinas de los elementos. Si los elementos tienen caras curvas, se deben introducir nodos extra, normalmente a la mitad de cada borde

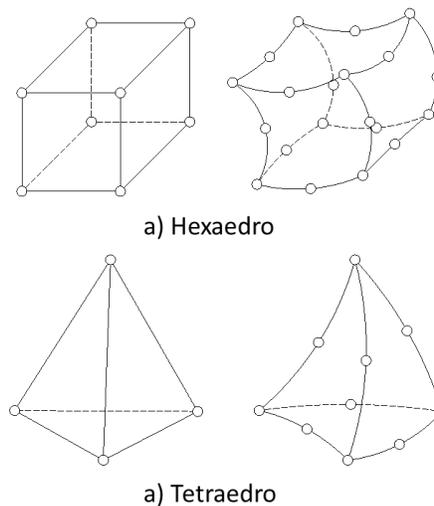


Figura 5.2. Elementos finitos tridimensionales

Si los elementos son isoparamétricos, los elementos globales serán obtenidos de un elemento parental que tendrá el mismo número de nodos, pero será definido con

respecto a un sistema de coordenadas naturales. La Fig 5.3 muestra la configuración de un elemento parental hexaédrico de 20 nodos. Para un elemento global derivado de este elemento parental, las coordenadas globales de un punto en el elemento pueden expresarse mediante la interpolación de coordenadas de la forma:

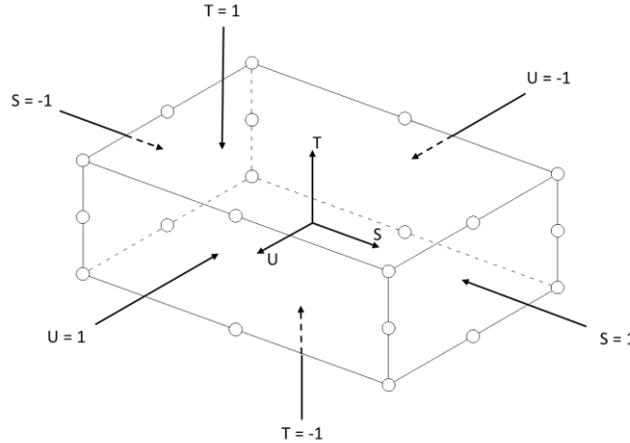


Figura 5.3. Elemento parental para un elemento de 20 nodos

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^{20} N_i x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^{20} N_i y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^{20} N_i z_i
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde x_i , y_i y z_i son las coordenadas globales de los 20 nodos en el elemento y N_i $i = 1, \dots, 20$, son las funciones de interpolación. Estas funciones de interpolación son expresadas en términos de las coordenadas naturales S , T y U las cuales varían de -1 a +1. Estas toman la forma siguiente:

Nodos intermedios:

$$\begin{aligned}
 N_9 &= \frac{1}{4} (1 - S^2)(1 - T)(1 - U) \\
 N_{10} &= \frac{1}{4} (1 - T^2)(1 + S)(1 - U) \\
 N_{11} &= \frac{1}{4} (1 - S^2)(1 + T)(1 - U)
 \end{aligned} \tag{5.2a}$$

$$N_{12} = \frac{1}{4} (1 - T^2)(1 - S)(1 - U)$$

$$N_{13} = \frac{1}{4} (1 - U^2)(1 - S)(1 - T)$$

$$N_{14} = \frac{1}{4} (1 - U^2)(1 + S)(1 - T)$$

$$N_{15} = \frac{1}{4} (1 - U^2)(1 + S)(1 + T)$$

$$N_{16} = \frac{1}{4} (1 - U^2)(1 - S)(1 + T)$$

$$N_{17} = \frac{1}{4} (1 - S^2)(1 - T)(1 + U)$$

$$N_{18} = \frac{1}{4} (1 - T^2)(1 + S)(1 + U)$$

$$N_{19} = \frac{1}{4} (1 - S^2)(1 + T)(1 + U)$$

$$N_{20} = \frac{1}{4} (1 - T^2)(1 - S)(1 + U)$$

Nodos de esquina:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8} (1 - S)(1 - T)(1 - U) - \frac{1}{2} (N_9 + N_{12} + N_{13}) \\
 N_2 &= \frac{1}{8} (1 + S)(1 - T)(1 - U) - \frac{1}{2} (N_9 + N_{10} + N_{14}) \\
 N_3 &= \frac{1}{8} (1 + S)(1 + T)(1 - U) - \frac{1}{2} (N_{10} + N_{11} + N_{15}) \\
 N_4 &= \frac{1}{8} (1 - S)(1 + T)(1 - U) - \frac{1}{2} (N_{11} + N_{12} + N_{16}) \\
 N_5 &= \frac{1}{8} (1 - S)(1 - T)(1 + U) - \frac{1}{2} (N_{13} + N_{17} + N_{20}) \\
 N_6 &= \frac{1}{8} (1 + S)(1 - T)(1 + U) - \frac{1}{2} (N_{14} + N_{17} + N_{18}) \\
 N_7 &= \frac{1}{8} (1 + S)(1 + T)(1 + U) - \frac{1}{2} (N_{15} + N_{18} + N_{19}) \\
 N_8 &= \frac{1}{8} (1 - S)(1 + T)(1 + U) - \frac{1}{2} (N_{16} + N_{19} + N_{20})
 \end{aligned} \tag{5.2b}$$

Puesto que el elemento es isoparamétrico, el desplazamiento dentro del elemento se interpola de la misma manera que la geometría. Por lo tanto, las funciones de interpolación anteriores N_1, N_2, \dots, N_{20} , se utilizan como las funciones de forma que expresan el desplazamiento incremental en cualquier punto dentro del elemento en términos de los valores en los nodos:

$$\begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{Bmatrix}_{\text{nodos}} \tag{5.3}$$

Donde u , v y w son los desplazamientos en las direcciones x , y y z respectivamente. Para un tetraedro de 4 nodos o un hexaedro de 8 nodos el desplazamiento varía linealmente, mientras que para un tetraedro de 10 nodos y un hexaedro de 20 nodos el desplazamiento varía cuadráticamente, Fig 5.4.

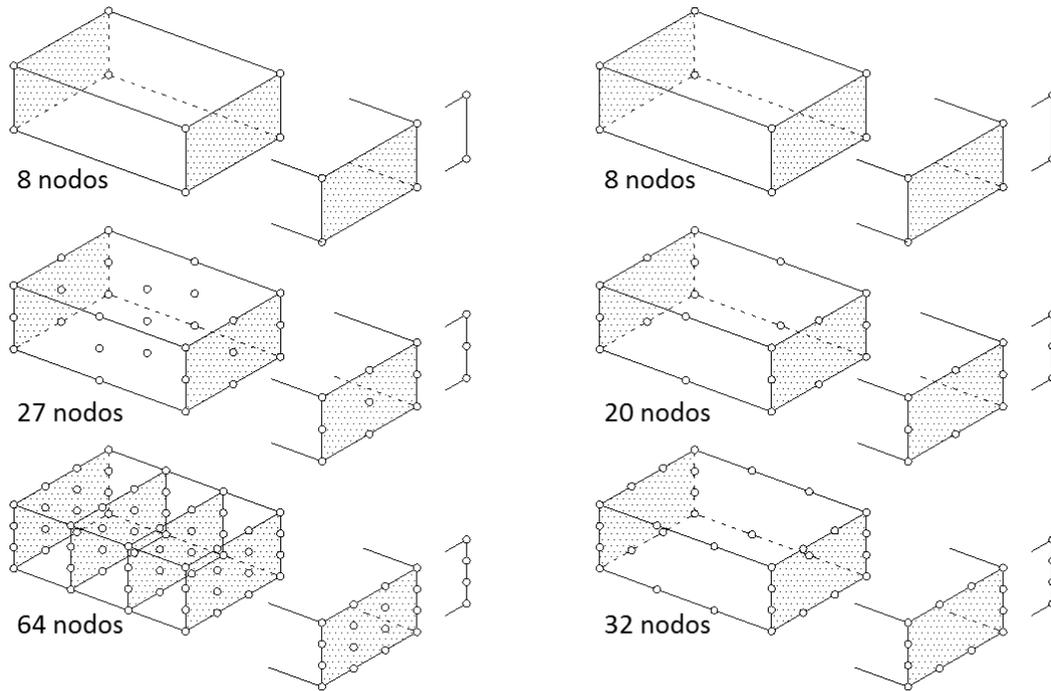


Figura 5.4 Conectividad nodal (Zienkiewicz, 2013)

Entonces, el desarrollo de las ecuaciones del elemento finito sigue el mismo procedimiento descrito en la sección A.6 del apéndice, con la excepción de que ahora hay seis componentes de esfuerzo y deformación diferentes de cero. Al realizar las integraciones numéricas para evaluar la matriz de rigidez del elemento (sección A.6.2), deben tomarse en cuenta las tres dimensiones y por lo tanto se requerirán más puntos de integración. Por ejemplo, para el hexaedro de 20 nodos se utilizan órdenes de integración $2 \times 2 \times 2$ (reducido) o $3 \times 3 \times 3$ (completo).

5.2.2 Soluciones iterativas

Un examen detallado del análisis de elementos finitos tridimensionales revela que la mayor parte de los recursos informáticos se utilizan en invertir la matriz de rigidez global. Un enfoque que agiliza este proceso consiste en utilizar una técnica de solución iterativa, en comparación con el enfoque de eliminación de Gauss que se describe en el presente capítulo.

A continuación, se describe el procedimiento general por el cual las soluciones iterativas invierten la matriz de rigidez global, también se hará referencia al método del gradiente conjugado.

5.2.2.1 Solución iterativa general

La formulación de un sistema de ecuaciones de rigidez global en la forma de la ecuación 5.4 se presentó anteriormente:

$$[\mathbf{K}_G]\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG} = \{\Delta \mathbf{R}_G\} \quad (5.4)$$

En el análisis por elementos finitos es necesario resolver esta ecuación para los incrementos de los desplazamientos nodales desconocidos. Ciertas técnicas de solución directa, requieren elementos de la matriz de rigidez para formar una banda estrecha a lo largo de la diagonal principal, Fig A.13. Esta diagonal principal contiene algunos términos igual a cero, a los que se les debe poner especial atención, ya que pueden llegar a ser diferentes de cero durante el proceso de eliminación. Debido a la conectividad nodal, el número de elementos se incrementa, y un gran número de ceros tienen que ser almacenados dentro de la banda, lo que automáticamente incrementa los requerimientos mínimos de memoria de la computadora.

La ventaja de los métodos iterativos es que estos utilizan solo los términos diferentes de cero en el proceso de solución y por lo tanto no se necesita almacenar ningún término cero.

Escribiendo la ecuación 5.4 en una forma abierta, se proporciona un sistema de ecuaciones simultáneas (ecuación 5.5):

$$\begin{aligned}
K_G^{11} \Delta d_{nG}^1 + K_G^{12} \Delta d_{nG}^2 + \dots + K_G^{1n} \Delta d_{nG}^n &= \Delta R_G^1 \\
K_G^{21} \Delta d_{nG}^1 + K_G^{22} \Delta d_{nG}^2 + \dots + K_G^{2n} \Delta d_{nG}^n &= \Delta R_G^2 \\
\dots + \dots + \dots + \dots &= \dots \\
K_G^{n1} \Delta d_{nG}^1 + K_G^{n2} \Delta d_{nG}^2 + \dots + K_G^{nn} \Delta d_{nG}^n &= \Delta R_G^n
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

A partir del cual los desplazamientos desconocidos pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
\Delta d_{nG}^1 &= -\frac{K_G^{12}}{K_G^{11}} \Delta d_{nG}^2 - \dots - \frac{K_G^{1n}}{K_G^{11}} \Delta d_{nG}^n + \frac{\Delta R_G^1}{K_G^{11}} \\
\Delta d_{nG}^2 &= -\frac{K_G^{21}}{K_G^{22}} \Delta d_{nG}^1 - \dots - \frac{K_G^{2n}}{K_G^{22}} \Delta d_{nG}^n + \frac{\Delta R_G^2}{K_G^{22}} \\
\dots &= \dots - \dots - \dots + \dots \\
\Delta d_{nG}^n &= -\frac{K_G^{n1}}{K_G^{nn}} \Delta d_{nG}^1 - \frac{K_G^{n2}}{K_G^{nn}} \Delta d_{nG}^2 - \dots + \frac{\Delta R_G^n}{K_G^{nn}}
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

Los métodos de solución iterativa llegan a una solución de las ecuaciones 5.6 haciendo una aproximación inicial de dicha solución:

$$\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^0 = \{\Delta d_{nG}^1(0) \Delta d_{nG}^2(0) \dots \Delta d_{nG}^n(0)\}
\tag{5.7}$$

Y entonces iterar hasta que se obtenga la solución correcta:

$$\Delta d_{nG}^i(k+1) = \frac{-\sum_{j=1, j \neq i}^n K_G^{ij} \Delta d_{nG}^j(k) + \Delta R_G^i}{K_G^{ii}}, \quad i = 1, \dots, n
\tag{5.8}$$

Donde Δd_{nG}^i = desplazamientos incrementales desconocidos; k = número de iteración.

Es evidente que el éxito de este enfoque depende de la estimación inicial y sobre la forma como se modifica en sucesivas iteraciones. La ecuación 5.8 es normalmente

conocida como la iteración de Jacobi, o como el “método de los desplazamientos simultáneos”, debido a que cada elemento del vector solución cambia antes que cualquiera de los nuevos elementos que se utilizan en la iteración. Es el procedimiento más simple, pero muy a menudo diverge y, en consecuencia, hay varias manipulaciones diferentes que pueden ser aplicadas para asegurar y acelerar la convergencia.

Sumando y restando $\Delta d_{nG}^i(k)$ de los términos de la derecha de la ecuación 5.8 se obtiene:

$$\Delta d_{nG}^i(k+1) = \Delta d_{nG}^i(k) + \frac{-\sum_{j=1}^n K_G^{ij} \Delta d_{nG}^j(k) + \Delta R_G^i}{K_G^{ii}} \quad (5.9)$$

De aquí, la forma iterativa habitual de la ecuación 5.9, para el vector total $\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}$, puede escribirse como:

$$\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^{k+1} = \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k - [\mathbf{K}_G^{ii}]^{-1} \{\mathbf{g}\}^k \quad (5.10)$$

Donde $\{\mathbf{g}\}^k$ es un vector residual o fuera de balance, generado en cada iteración:

$$\{\mathbf{g}\}^k = [\mathbf{K}_G] \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k - \{\Delta \mathbf{R}_G\} \quad (5.11)$$

Para el balance, es decir, la solución correcta, $\{\mathbf{g}\}^k$ debe ser igual a cero.

La segunda parte del lado derecho de la ecuación 5.10 se escribe generalmente como un vector iterativo, $\{\delta\}^k$, por lo tanto, la ecuación (5.10) se convierte en:

$$\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^{k+1} = \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \{\delta\}^k \quad (5.12)$$

Donde:

$$\{\delta\}^k = -[\mathbf{K}_a]^{-1} \{\mathbf{g}\}^k \quad (5.13)$$

La matriz $[K_a]$ en el vector iterativo $\{\delta\}^k$ debe ser fácilmente invertible con el fin de acelerar el proceso iterativo. La ecuación 5.10 indica que $[K_a]$ debe ser igual a la matriz de términos de rigidez diagonales. Sin embargo, suele utilizarse una matriz alternativa para acelerar la convergencia. La forma más simple de iteración se obtiene de $[K_a] = [I]$ (es decir, la matriz identidad). Si $[K_a] \neq [I]$ el proceso se conoce como escalado (scaled) o preconditionado.

5.2.2.2 El método del gradiente

Este grupo de métodos iterativos se basa en la minimización de la siguiente forma cuadrática (Ralston, 1965):

$$Q(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k) = \frac{1}{2}(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k)^T [K_G] \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k - (\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k)^T \{\Delta \mathbf{R}_G\} \quad (5.14)$$

Minimizando esta expresión con respecto a $\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}$ se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k} = [K_G] \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k - \{\Delta \mathbf{R}_G\} = \{\mathbf{g}\}^k = 0 \quad (5.15)$$

La ecuación 5.15 muestra que el mínimo de Q es la solución de la ecuación 5.14. La técnica general para minimizar Q es elegir un vector inicial $\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^0$, una dirección de minimización v^0 y una cantidad de pasos η^0 para llegar a $\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^1$. Otras iteraciones se pueden escribir de la forma siguiente:

$$\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^{k+1} = \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \eta^k \{v\}^k \quad (5.16)$$

Las bases del método es escoger $\{v\}^k$ para estar en la dirección de la mayor razón de cambio de Q , es decir, en la dirección del gradiente. Sin embargo, debido a que el gradiente refleja la dirección en la que el sistema crece, y aquí se requiere lo contrario (minimización de Q), $\{v\}^k$ debe establecerse en la dirección opuesta a la

dirección del gradiente. Dado que la ecuación 5.15 muestra que el gradiente de Q es el vector residual $\{\mathbf{g}\}^k$, entonces $\{\mathbf{v}\}^k = -\{\mathbf{g}\}^k$:

$$\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^{k+1} = \{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \eta^k \{\boldsymbol{\delta}\}^k \quad (5.17)$$

Donde: $\{\boldsymbol{\delta}\}^k = -\{\mathbf{g}\}^k$

Para encontrar η^k es necesario reescribir Q en términos de η^k :

$$\begin{aligned} Q(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^{k+1}) &= Q(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \eta^k \{\boldsymbol{\delta}\}^k) \\ &= \frac{1}{2}(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \eta^k \{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T [\mathbf{K}_G](\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \eta^k \{\boldsymbol{\delta}\}^k) \\ &\quad - (\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \eta^k \{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T \{\Delta \mathbf{R}_G\}^k \\ &= \frac{1}{2}(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k)^T \{\mathbf{g}\}^k - \frac{1}{2}(\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k)^T \{\Delta \mathbf{R}_G\}^k \\ &\quad + \eta^k (\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T \{\mathbf{g}\}^k + \frac{1}{2}(\eta^k)^2 (\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T [\mathbf{K}_G] \{\boldsymbol{\delta}\}^k \end{aligned} \quad (5.18)$$

Si $\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k$ y $\{\boldsymbol{\delta}\}^k$ se fijan de la iteración anterior, Q tiene un mínimo dependiente de η^k :

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta^k} = (\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T \{\mathbf{g}\}^k + \eta^k (\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T [\mathbf{K}_G] \{\boldsymbol{\delta}\}^k \quad (5.19)$$

Donde:

$$\eta^k = -\frac{(\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T \{\mathbf{g}\}^k}{(\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T [\mathbf{K}_G] \{\boldsymbol{\delta}\}^k} \quad (5.20)$$

A veces es útil para expresar la ecuación 5.20 en una forma alternativa; supongamos que las fuerzas fuera de balance $\{\mathbf{g}\}^{k+1}$ se calculan a partir de la primera expresión de "prueba" $\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^{k+1}$ la cual tiene el paso $\eta = 1$. Entonces:

$$\{\mathbf{g}\}_{(\eta=1)}^{k+1} = [\mathbf{K}_G](\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}^k + \{\boldsymbol{\delta}\}^k) - \{\Delta \mathbf{R}_G\} \quad (5.21)$$

Restando la ecuación 5.20 de 5.21 da:

$$\{\mathbf{g}\}_{(\eta=1)}^{k+1} - \{\mathbf{g}\}^k = [\mathbf{K}_G]\{\boldsymbol{\delta}\}^k \quad (5.22)$$

De manera que la nueva expresión para η^k queda:

$$\eta^k = -\frac{(\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T \{\mathbf{g}\}^k}{(\{\boldsymbol{\delta}\}^k)^T (\{\mathbf{g}\}_{(\eta=1)}^{k+1} - \{\mathbf{g}\}^k)} \quad (5.23)$$

Para modificar $\{\mathbf{g}\}^{k+1}(\eta = 1)$ al nuevo $\{\mathbf{g}\}^{k+1}(\eta^k)$, se utiliza una relación lineal, de tal manera que:

$$\{\mathbf{g}\}_{(\eta^k)}^{k+1} = \eta^k \{\mathbf{g}\}_{(\eta=1)}^{k+1} + (1 - \eta^k) \{\mathbf{g}\}^k \quad (5.24)$$

Sin tener que recurrir a la ecuación 5.11 que resulta más demandante para los equipos informáticos.

El método del gradiente aquí descrito está basado en un vector iterativo, $\{\boldsymbol{\delta}\}$, que es igual al vector residual, $-\{\mathbf{g}\}$, ecuación 5.17. Sin embargo, también se puede aplicar a la dirección del gradiente escalada o preconditionada, de modo que:

$$\{\boldsymbol{\delta}\}^k = -[\mathbf{K}_a]^{-1} \{\mathbf{g}\}^k \quad (5.25)$$

5.2.2.3 El método del gradiente conjugado

Esta es una extensión de dos parámetros del método de gradiente, que implica un vector iterativo, $\{\boldsymbol{\delta}\}$, de la forma:

$$\{\boldsymbol{\delta}\}^k = -[\mathbf{K}_a]^{-1} \{\mathbf{g}\}^k + \beta^k \{\boldsymbol{\delta}\}^{k-1} \quad (5.26)$$

O

$$\{\delta\}^k = \{\delta\}^{k*} + \beta^k \{\delta\}^{k-1} \quad (5.27)$$

El parámetro β^k se encuentra a partir de la condición de que:

$$(\{\delta\}^k)^T [\mathbf{K}_G] \{\delta\}^l = 0 \quad , \quad \text{cuando } l < k \quad (5.28)$$

Lo que esencialmente significa que el proceso implica la generación de un conjunto de vectores $[\mathbf{K}_G]$ -ortogonal (es decir, conjugado) y después minimizar sucesivamente en la dirección de cada uno de ellos, hasta alcanzar la solución final. Se puede demostrar (Crisfield, 1986) que la condición 5.28 conduce a la ortogonalidad de los vectores residuales, de forma que:

$$(\{\mathbf{g}\}^{k+1})^T \{\mathbf{g}\}^m = 0 \quad , \quad m = 0, \dots, k \quad (5.29)$$

Que es la principal condición del “gradiente conjugado”. De aquí, multiplicando la ecuación 5.27 por $[\mathbf{K}_G] \{\delta\}^{k-1}$ se tiene:

$$(\{\delta\}^k)^T [\mathbf{K}_G] \{\delta\}^{k-1} = (\{\delta\}^{k*})^T [\mathbf{K}_G] \{\delta\}^{k-1} + \beta^k (\{\delta\}^{k-1})^T [\mathbf{K}_G] \{\delta\}^{k-1} \quad (5.30)$$

Y teniendo en cuenta la condición 5.28 se tiene:

$$\beta^k = - \frac{(\{\delta\}^{k*})^T [\mathbf{K}_G] \{\delta\}^{k-1}}{(\{\delta\}^{k-1})^T [\mathbf{K}_G] \{\delta\}^{k-1}} \quad (5.31)$$

Como el parámetro η^k , la expresión anterior puede ser simplificada, a fin de evitar grandes cálculos con la matriz $[\mathbf{K}_G]$, y obtener la siguiente expresión para β^k :

$$\beta^k = - \frac{(\{\delta\}^{k*})^T (\{\mathbf{g}\}^k - \{\mathbf{g}\}^{k-1})}{(\{\delta\}^{k-1*})^T \{\mathbf{g}\}^{k-1}} \quad (5.32)$$

Si $[K_a] = [I]$ el método es llamado *básico*, de lo contrario se denomina *escalado* o “preacondicionado”. El procedimiento de iteración termina normalmente cuando un criterio de convergencia, ρ , alcanza un límite predeterminado de, tol . Este criterio de convergencia se calcula generalmente como la relación de la magnitud del vector residual y la magnitud del vector de cargas:

$$\rho = \frac{\|\{g\}^k\|}{\|\{\Delta R_G\}\|} \leq tol \quad (5.33)$$

6. REVISIÓN DE LA ESTABILIDAD DE UNA PRESA ANTIGUA DE MAMPOSTERÍA.

Durante la época virreinal, en los siglos XVII y XVIII, en el centro y norte de México se construyeron cientos de presas de mampostería (Tabla 6.1). Algunas de las más notables se ubicaban en el estado de Aguascalientes, localizado a 480 kilómetros al norte de la Ciudad de México, donde las cortinas que utilizaban contrafuertes para su estabilidad se convirtieron en el tipo más popular entre los constructores de la época. Algunos de los ejemplos más destacados de este tipo son la Presa San Blas (Pabellón) y la Presa Los Arcos (Fig 6.1).

Tabla 6.1. Presas coloniales en México. Schnitter, 1994.

| Año de término | Nombre | Distancia de la ciudad (Km) | Tipo | H (m) | L (m) | Capacidad (10 ⁶ m ³) |
|----------------|-------------|-----------------------------|---------------|-------|-------|---|
| 1550 | Yuriria | 110 SE León | Gravedad | 12 | -- | 221.0 |
| 1730/1940 | Saucillo | 39 N Ags. | Gravedad | 11 | 175 | 6.0 |
| c. 1750 | Los Arcos | 10 NW Ags. | Contrafuertes | 20 | 219 | -- |
| c. 1750 | San Blas | 33 NW Ags. | Contrafuertes | 24 | 177 | 1.0 |
| c. 1750 | San José | 17 NW Ags. | Contrafuertes | 11 | -- | -- |
| 1760/1971 | Natillas | 54 N Ags. | Contrafuertes | 12 | 100 | 0.5 |
| 1765/1936 | Huapango | 90 NW CDMX | Gravedad | 14 | 840 | 1.9 |
| 1765/1940 | San Antonio | 150 NW CDMX | Gravedad | 11 | 150 | 3.0 |
| 1772 | Aguacate | 130 SE León | Gravedad | 12 | 260 | 1.5 |
| 1800 | Ñadó | 110 NW CDMX | Gravedad | 26 | 180 | 7.0 |



Figura 6.1. Presa Los Arcos, Aguascalientes, México

Julian Hinds (1930), escribió sobre las presas de Aguascalientes y describió la práctica local de colocar piedras verticales con mortero en pozos de poco diámetro realizados en la roca base para anclar las cortinas de mampostería a su cimentación. Conjeturó que esta práctica había sido transmitida de generaciones anteriores y que la Presa San Blas probablemente tenía esta característica.

Cuando visitó el sitio, encontró el embalse con una altura considerable de azolve. Debido a esto, consideró que la presa estaba sometida a un sobreesfuerzo y que las acumulaciones de sedimentos pueden haber tendido a sellar las grietas causadas por la sobrecarga. Se sorprendió ante el hecho de que dichas presas hayan resistido el paso de cientos de años y aún se preservaran en tan buenas condiciones.

Hinds estaba familiarizado con al menos cincuenta presas, de las cuales solo tres habían tenido registro de fallas; a dos de ellas se le atribuyeron fallas por una cimentación inadecuada. Concluyó que un diseño adecuado de la cimentación, aunado a un trabajo de construcción correctamente ejecutado, puede compensar muchas deficiencias en el diseño de la cortina.

6.1 BASES PARA EL DISEÑO DE PRESAS DE MAMPOSTERÍA CON CONTRAFUERTES

En su mayoría, las presas de mampostería son de tipo gravedad y resisten las fuerzas actuantes sobre ellas principalmente por peso propio, donde la resistencia a compresión y tensión de la mampostería toma mayor importancia conforme la altura de la presa aumenta, generando grandes esfuerzos ocasionados por la carga muerta.

Una variante se compone de dos elementos estructurales básicos: un muro impermeable apoyado en contrafuertes que contribuyen a la estabilidad estructural, además, en ocasiones, se agregaba un delantal aguas abajo. Fig 6.2.

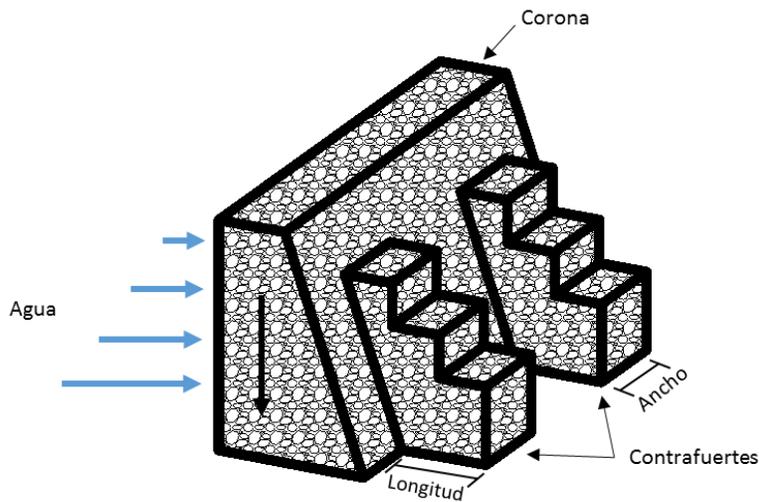


Figura 6.2. Esquema de una presa con contrafuertes

El uso de contrafuertes para reforzar las presas de mampostería se originó por la carencia de roca para la construcción de cortinas de sección homogénea. Esto se reflejaba en la reducción del costo total de la construcción, sin la necesidad de sacrificar la seguridad estructural.

El análisis de estabilidad para este tipo de presas considera las mismas acciones actuantes contra una presa de gravedad (Fig 6.3), exceptuando que la subpresión no es considerada en su totalidad, debido a que el área de contacto con la roca base es considerablemente menor con respecto a presas de sección homogénea.

Sin embargo, bajo condiciones específicas como juntas, grietas horizontales y la unión de losas de cimentación con la roca base, se debe realizar un análisis detallado para considerar de manera adecuada los coeficientes de subpresión. También, se debe tener en cuenta que, ante acciones sísmicas, la carga máxima debida al momento de inercia en la cortina es para el movimiento normal a la cortina.

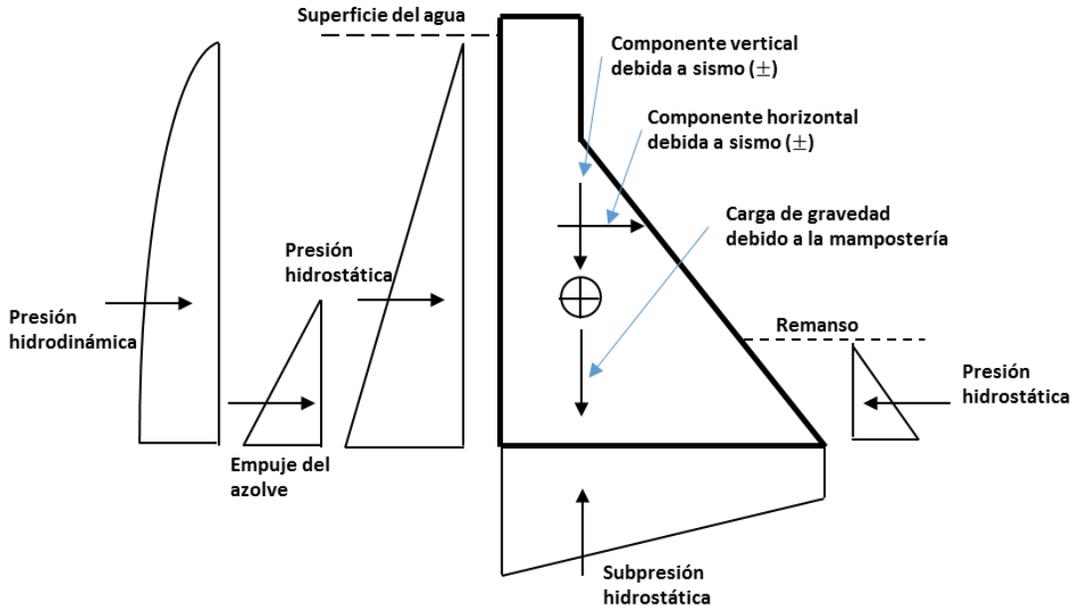


Figura 6.3. Fuerzas actuantes en una presa de gravedad (CONAGUA, 2010)

La economía es el criterio principal para la determinación de la distancia entre contrafuertes. Si los tramos entre contrafuertes son cortos, el muro puede construirse más esbelto y el volumen de mampostería será menor.

A pesar de que el espesor del contrafuerte se diseñaba proporcional al espaciamiento, y se procuraba que el espesor total del muro fuera constante, adoptando un patrón para toda la cortina, en campo se tienen ejemplos como la presa San Blas (Fig 6.4), donde estos patrones no son empleados.

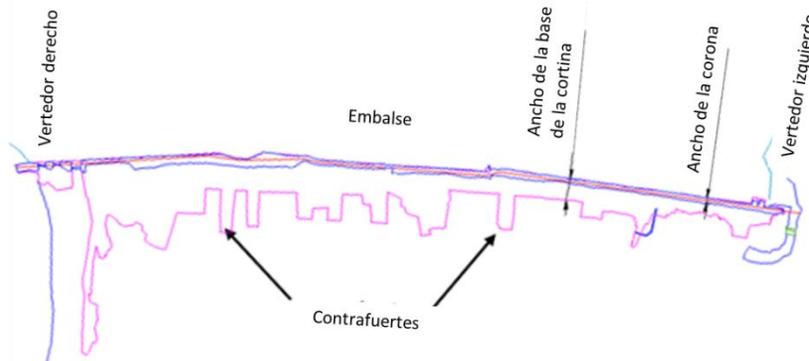


Figura 6.4 Separación de contrafuertes

Las presas con contrafuertes se analizan por estabilidad de la misma manera que las presas de gravedad, con la diferencia de que el objeto de diseño no es un corte transversal de espesor unitario sino un panel compuesto por el contrafuerte y un tramo tributario de cortina.

Los contrafuertes se pueden considerar vigas verticales en cantiliver de sección transversal variable. Tanto la longitud como el ancho pueden variar. En caso de que el vaso se encuentre lleno, debe tener una longitud suficiente para evitar la tensión en la cara aguas arriba y la compresión excesiva en la cara aguas abajo. Como en todas las vigas, los esfuerzos flexionantes son más pequeños para una sección transversal dada si el contrafuerte se hace largo y esbelto.

Los contrafuertes y la mitad del espaciamiento en ambos lados actúan como vigas-T. Debido a la complejidad de la forma y la acción, la aplicabilidad de los supuestos ordinarios de la distribución de esfuerzos en contrafuertes es más incierto que en el caso de presas de sección homogénea. Sin embargo, estos supuestos dan una idea

general de la acción de los contrafuertes. Cualquier incertidumbre es absorbida por el factor de seguridad.

6.2 MARCO DE REFERENCIA PARA EL ANÁLISIS GEOTÉCNICO ESTRUCTURAL

La presa San Blas (Pabellón) se clasifica como una presa grande, de comportamiento rígido, construida en 1755, con el propósito de captar los escurrimientos del río Pabellón, el cual es afluente del río San Pedro. Es una cortina de gravedad con contrafuertes, con sección transversal de geometría variable y de eje serpenteante, aunque sensiblemente recto. No cuenta con un historial arquitectónico, pero se tienen registros hechos por Hinds (1930, 1932) y Jansen (USBR, 1983), que describen una cortina muy similar a la actual, como se muestra en la Fig 6.5.

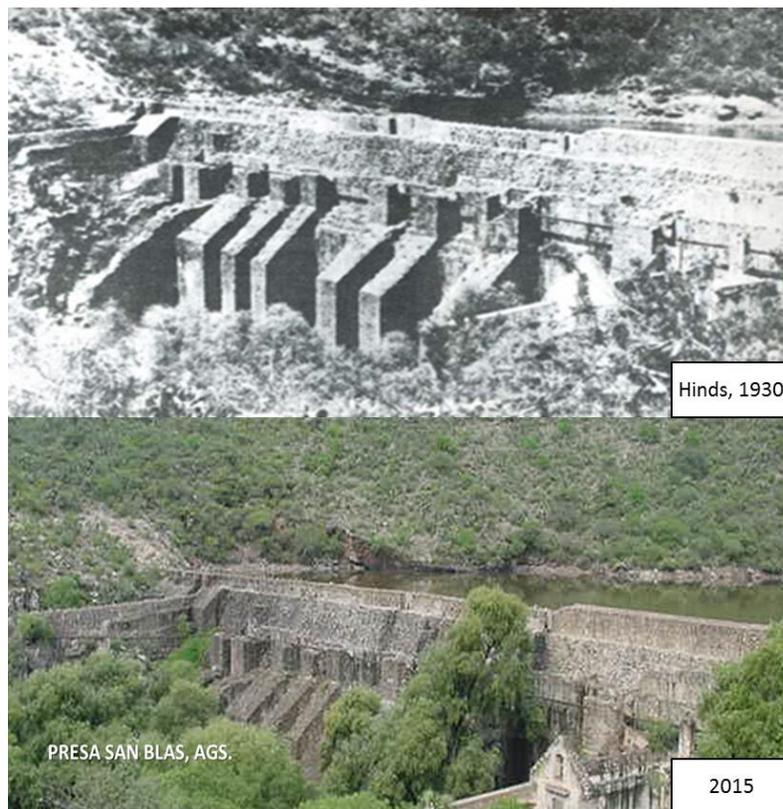


Figura 6.5. Panorámica de la cortina de la presa San Blas desde margen izquierda

Según Jansen y Hinds, la cortina original tenía 17.7 metros de altura y un ancho de cresta aproximado de 4.5 m, posteriormente sufrió un par de sobreelevaciones. Actualmente, la observación de la cortina permite distinguir la existencia de dichas sobreelevaciones de la contención, una primera de 3.5 m y la última de 1.5 m, sin que se conozca su fecha de construcción; además tiene 10 contrafuertes distribuidos a lo largo de la cortina, con un espaciamiento aproximado del 40% el ancho de la cortina, hasta lo que aparenta ser el contacto con la primera sobreelevación.

Hinds, desde entonces describe que la obra de excedencias, ubicada en la margen derecha, se encuentra tapiada y unos centímetros más alta que la altura promedio de la cresta en la mitad de la cortina, por lo que, pasaban gastos pequeños sobre la cresta, incluso en época de las mayores precipitaciones, prácticamente la mitad derecha de la cortina funcionaba como vertedor, condición que prevalece actualmente, a pesar de esto nunca se registraron daños en la presa.

Para fines del análisis de estabilidad y de acuerdo con el estudio topográfico y la visita de inspección, se considera la cortina con 25.0 m de altura máxima sobre el desplante y 23.5 m al cauce, con un enterramiento de 1.50 m en la cimentación para considerar la flexibilidad del suelo o base rígida, que es una toba riolítica. La cortina tiene 1.0 m de ancho promedio en la corona, aunque éste varía entre 1 y 1.85 m; y tiene una longitud de 177.88 m. La cortina tiene una capacidad para almacenar un volumen de 0.533 hm³ al NAMO en la elevación 1943.02 msnm; y un volumen de 0.613 hm³ al NAME a la elevación 1945.00 msnm pues no se puede considerar un bordo libre; la corona tiene una elevación variable de 1947.00 a 1945.00 msnm. En la Fig 6.6, se muestra como el eje de la cortina es serpenteante, aunque se desconoce si la cortina de 1755 también tenía esa forma, o si esto ocurrió después al sobreelevar la cortina sin instrumentos geodésicos. Además, en la estación 0+091 hay una diferencia de nivel de la corona de hasta 60 cm con la estación del metro siguiente, a partir de aquí, el nivel de la corona empieza a disminuir hasta la estación 0+125 (1945.00 msnm), hasta llegar a la sección 0+153, donde inicia la estructura vertedora de la margen derecha, que está sellada con una tapia de losas de concreto.



Figura 6.6. La cortina tiene un eje serpenteante

En la Fig 6.7, se muestra la sección máxima 0+125, con el nivel a unos pocos metros del NAMO, también se aprecia el agua acumulada al pie de la cortina.

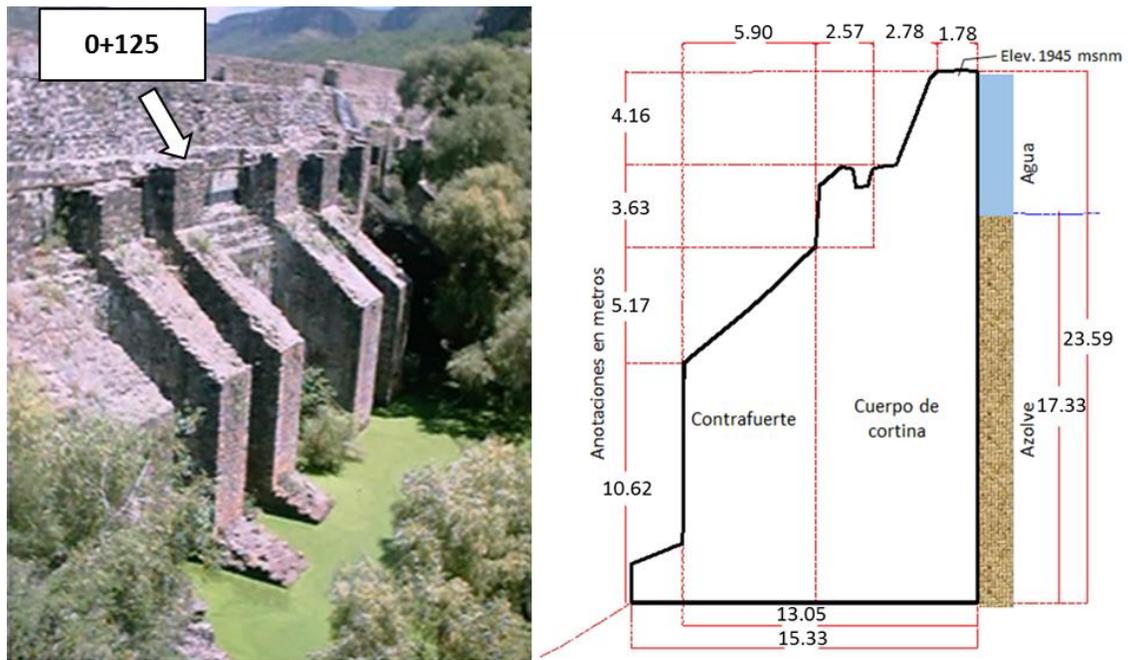


Figura 6.7. La cortina en su sección máxima



Hay fugas o filtraciones por la mampostería de la cortina, en diversos sitios, y se forma una ciénega al pie del paramento aguas abajo



Figura 6.8. La cortina tiene fugas o filtraciones por la mampostería

En la Fig 6.8, se aprecian las fugas o filtraciones en la mampostería de la cortina, las cuales ocurren por la mampostería de aparejo irregular ordinario, en las sobrelevaciones la mampostería está enripiada, y está rejuntada con mortero de cal y arena de la presa original y sus sobrelevaciones. El paramento aguas arriba o mojado de la cortina, no presenta agrietamientos ni otros problemas estructurales, pero no cuenta con una losa de concreto o una capa de mortero, para impermeabilizar la cara mojada de la cortina, lo que permite el flujo de agua a través de la masa del muro que tendría una permeabilidad estimada en 1.67×10^{-7} m/s, por lo que se tienen filtraciones a manera de lloraderos en el paramento aguas abajo. La cortina se ubica en una zona de baja sismicidad, debido a que los temblores que han ocurrido se encuentran relativamente retirados; sin embargo, es probable que dentro de un período de 50 años ocurra cuando menos un temblor que afecte a la estructura de contención y por ello se hizo un estudio de peligro sísmico, cuyos resultados se reportan en el apartado 6.2.2.

6.2.1 Geología del Sitio

En el Terciario, se tuvo la influencia de un arco magmático en el Occidente de México, que fue el resultado de la tectónica convergente que afectó a la región (McDowell y Clabaugh, 1979), dando lugar al paquete volcánico que conforma la

Sierra Madre Occidental, el cual inicia durante el Eoceno medio con derrames riolíticos y eventos ignimbríticos (TeR-Ig). El Oligoceno-Mioceno de la Sierra Madre Occidental se generó en dos eventos, al principio del Oligoceno (McDowell y Keizer, 1977) se depositan rocas de composición intermedia constituidas por andesitas y andesitas basálticas (ToA), que constituyen la secuencia andesítica inferior. El segundo evento aportó las rocas de mayor distribución en la carta con espesores mayores a 800 m. de una secuencia continua con predominancia de tobas riolíticas (TomTR), riolitas-ignimbríticas (TomR-Ig) e ignimbríticas riolíticas (TomIlg-R) y dacitas con edades del Oligoceno superior-Mioceno inferior. En la Fig 6.9, se presenta una composición geológica del sitio tomada del Servicio Geológico Mexicano (SGM), a nivel de la zona de estudio.

Sobreyaciendo esos depósitos de carácter riolítico, durante el Neógeno, una serie de areniscas arcillosas y capas conglomeráticas y tobas líticas de color blanco cuyos fragmentos se encuentran en forma caótica (TnAr-Cgp), se depositan rellenando las fosas tectónicas del graben de Aguascalientes. Los horizontes de gravas son empacadas por arenas gruesas y medianas que representan materiales disgregados y transportados, así como cenizas, y se le estima un espesor superior a 200 m. Posteriormente a esta secuencia, se tiene una unidad de conglomerados epiclásticos ortoconglomeráticos con conglomerados oligomícticos y polimícticos del Plioceno medio, (TplCgo) y (TnCgp) respectivamente. En el sitio, los afloramientos de conglomerados oligomícticos (TplCgo) son numerosos, aunque en gran extensión están cubiertos con suelos agrícolas, sobre los cuales se asienta la ciudad de Calvillo y la cortina de la presa Ojocalientillo.

A nivel del sitio donde está la presa San Blas, se tienen esas rocas cenozoicas, del Oligoceno de era Terciaria, la cortina de la presa San Blas se encuentra desplantada en los afloramientos de tobas riolíticas ignimbríticas (TomR-Ig) e ignimbríticas riolíticas (TomIlg-R), con algunos rellenos de materiales producto de la alteración o intemperización de las tobas al pie de las laderas y en el cauce. En la Fig 6.10, se presenta un acercamiento del sitio preciso en donde están la cortina y el vaso de la presa San Blas, y en la Fig 6.11, se muestran las rocas en los empotramientos.



Figura 6.9. Marco Geológico de la zona de la presa San Blas (SGM)

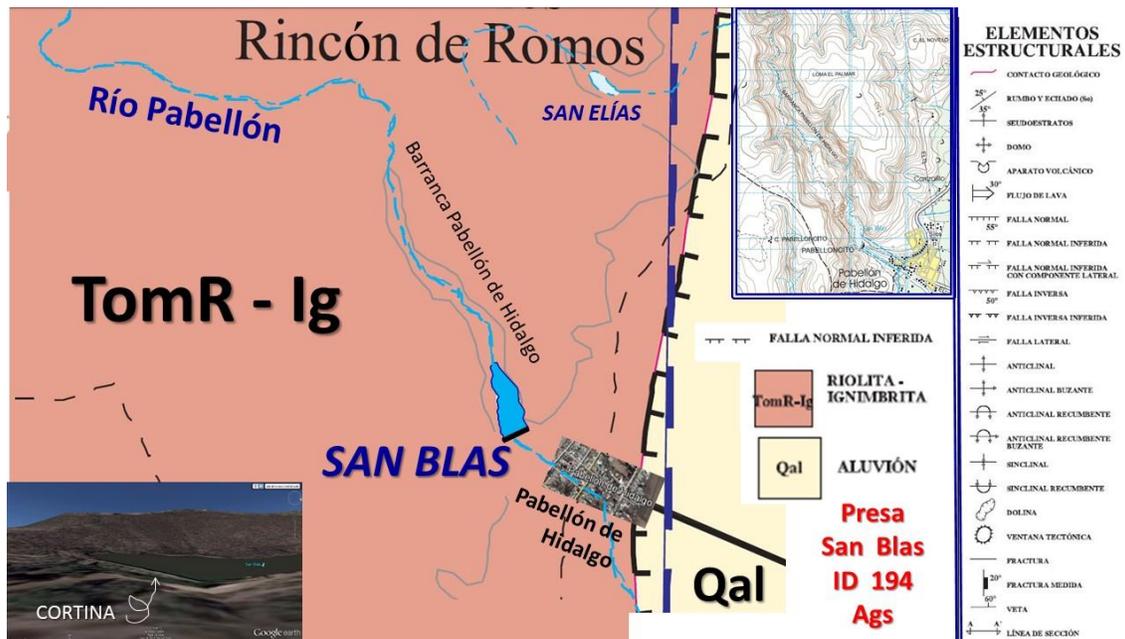


Figura 6.10. Geología del sitio en donde está la presa San Blas

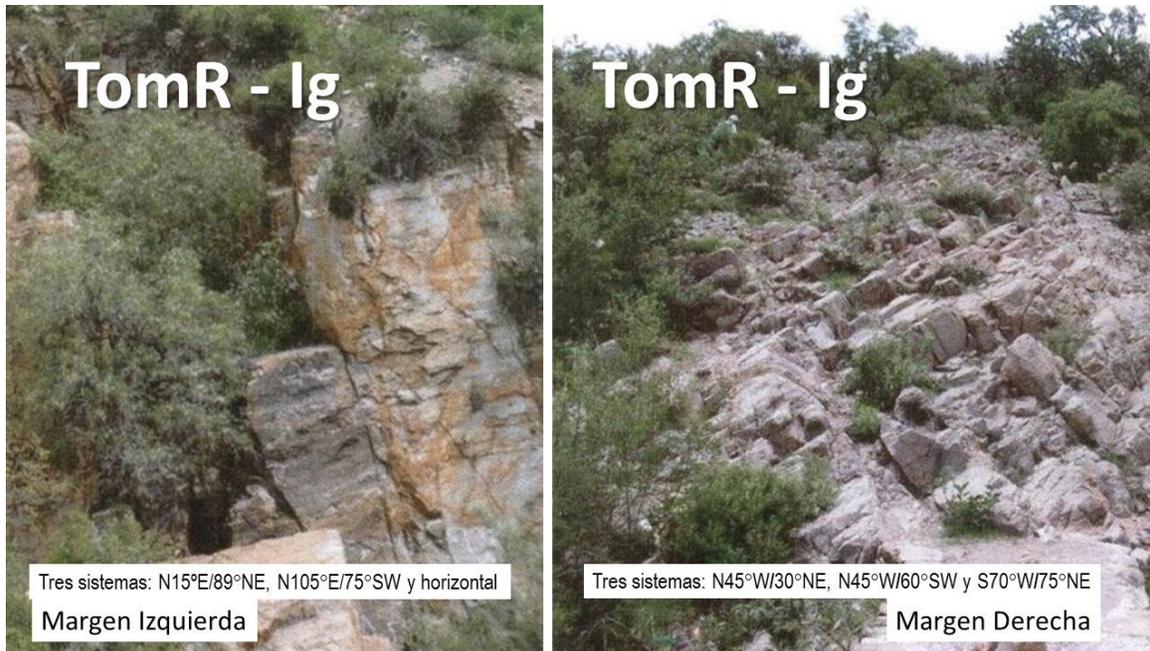


Figura 6.11. Afloramiento de riolitas ignimbríticas e ignimbríticas riolíticas en la boquilla de San Blas

En los afloramientos de las márgenes, se determinó que la geología de la boquilla, formada por tobas riolíticas - ignimbríticas (TomR-Ig) y (TomIg-R).

En la en la margen derecha se tienen tres sistemas de fracturamiento con orientaciones: N45°W / 30°NE, N45°W / 60°SW y S70°W / 75°NE.

En la margen izquierda, también se tienen tres sistemas de fracturamiento: uno es paralelo a la cortina con orientación N15°E / 89°NE, el segundo tiene una orientación perpendicular a la cortina: N105°E / 75°SW; y el tercero es una estratificación horizontal.

6.2.2 Parámetros para el análisis de estabilidad en condiciones extremas

La seguridad sísmica de presas debe demostrarse en términos de la capacidad estructural por estabilidad (estática y dinámica), esfuerzos y deformaciones. Según las NTCDS-RCDF, las presas se clasifican como estructuras importantes del grupo A. Para esto se consideran los sismos máximos especificados en el Manual de Diseño por Sismo de la Comisión Federal de Electricidad (MDS-CFE, 2010).

En la Tabla 6.2 se listan los valores de los coeficientes sísmicos para $T_r = 475$ y 950 años. Debido a que la presa está desplantada en roca el factor de amplificación es de 1.0.

Tabla 6.2. Coeficientes sísmicos para análisis pseudoestático de estabilidad.

| Temblor | Horizontal | | Vertical | |
|----------|------------|-------|----------|-------|
| | a^h_o | k_h | a^v_o | k_v |
| 475 años | 0.03 | 0.030 | 0.025 | 0.025 |
| 950 años | 0.08 | 0.080 | 0.065 | 0.065 |

Para considerar el efecto del tipo de suelo, los parámetros sísmicos en roca pueden amplificarse por los factores de sitio de la Tabla 6.3.

Tabla 6.3. Factores de amplificación por efecto del tipo de suelo.

| Velocidad efectiva | Factor de sitio |
|----------------------------|-----------------|
| $V_s^{30} > 760$ m/s | 1 |
| $360 < V_s^{30} > 760$ m/s | 1.2 |
| $180 < V_s^{30} > 360$ m/s | 1.5 |
| $V_s^{30} < 180$ m/s | 2 |

Donde V_s^{30} es la velocidad efectiva, definida como la velocidad promedio de ondas de cortante en los 30 m superficiales del perfil de suelo bajo consideración. Dicha velocidad puede estimarse como:

$$V_s^{30} = \frac{\sum h_i}{\sum h_i / V_i} \quad (6.1)$$

Donde V_i es la velocidad de onda de corte, h_i el espesor de i -ésimo estrato del subsuelo. Para fines prácticos, se consideraron las aceleraciones del terreno calculadas como ya se expuso antes, las cuales resultan en los siguientes coeficientes sísmicos:

$$k_h = 0.030 \text{ o sea } PGA = 0.030g, \text{ para } Tr = 475 \text{ años}$$

$$k_h = 0.080 \text{ o sea } PGA = 0.080g, \text{ para } Tr = 950 \text{ años}$$

Específicamente, k_h es el coeficiente sísmico de diseño en la roca basal normalizado por g la aceleración de la gravedad, PGA (Peak Ground Acceleration) es la aceleración máxima del terreno y Tr es el periodo de retorno, que tomando en cuenta que la vida útil remanente de la presa es alrededor de 50 años, conviene considerar el de 475 años para evaluación de la seguridad estructural.

Los espectros de diseño y los acelerogramas sintéticos producto del estudio de peligro sísmico se utilizan como datos fundamentales para hacer análisis sísmicos dinámicos de la cortina, los acelerogramas se presentan en la Fig 6.12.

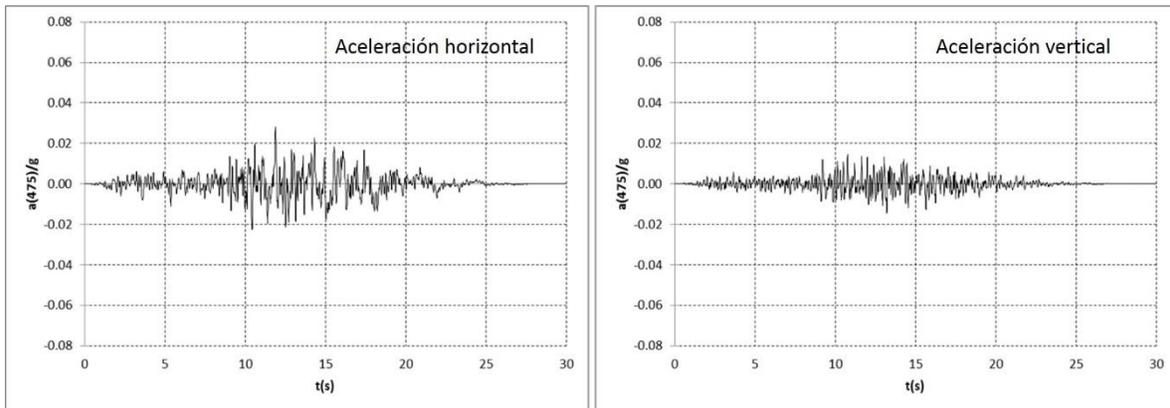


Figura 6.12. Acelerogramas sintéticos para $Tr = 475$ años

6.2.3 Problemas de seguridad geotécnica y estructural de la cortina

La revisión geotécnica y estructural de la presa requiere que se analicen diferentes mecanismos de falla de la estructura de mampostería. La revisión de las condiciones de la cortina ante esos mecanismos de falla permite identificar, analizar, evaluar e interrelacionar los problemas que pueden ser causa de peligro o mal comportamiento de la cortina. En general, esta revisión requiere tomar en cuenta los siguientes aspectos, que deberán adecuarse dependiendo del tipo de presa que se analice:

Deficiencias exteriores de la cortina

- Desbordamiento.
- Agrietamientos, desconchados o huecos en el paramento aguas arriba.
- Agrietamientos, desconchados o huecos en el paramento aguas abajo.
- Árboles y vegetación en los paramentos aguas arriba y abajo.

Deficiencias de las condiciones geométricas

- Revisión del bordo libre (asentamientos, sismo, oleaje, y erosión).
- Sedimentación y acumulación de azolves.
- Otros problemas.

Deficiencias de control de flujo de agua

- Socavación de la cimentación de la cortina.
- Fugas o filtraciones por el terreno natural o cimentación.
- Fugas o filtraciones en la mampostería y el paramento aguas abajo.
- Fugas o filtraciones en los empotramientos.

Asentamientos y agrietamiento de la cortina o su cimentación

- Capacidad de carga o deformación excesiva de la cimentación.
- Revisión del agrietamiento.

Análisis de estabilidad de la cortina

- Revisión de la estabilidad en condiciones de operación normal.
- Revisión de la estabilidad en condiciones de operación inusual por llenado al NAME.
- Revisión de la estabilidad en condiciones de operación extrema por sismo.
- Revisión de la estabilidad en condiciones de operación extrema con desbordamiento.

Se revisaron las condiciones de la cortina ante la acción de mecanismos de falla por defectos externos. A continuación, se muestran los que representan un peligro potencial para la presa San Blas:

Revisión de bordo libre (asentamientos, sismo, oleaje, y erosión)

El bordo libre de la presa San Blas se revisó considerando que la presa tiene más de 200 años de haber iniciado su operación, y más de 80 años de que se sobrelevó, con lo cual se tiene una sedimentación de largo plazo en el vaso.

Así, en el caso de la presa San Blas se asume que no tiene bordo libre, considerando que la frecuente situación de desbordamientos que tiene, implica asumir el NAME al nivel de la corona.

Desbordamiento

El desbordamiento representa el principal problema hidráulico de la Presa San Blas, que puede desencadenar un problema geotécnico y estructural, ya que provoca la erosión de las tobas en el terreno de cimentación, así como de los empotramientos laterales y de la propia estructura de la cortina.

En octubre de 2015, una avenida causada por las lluvias del huracán Patricia, desbordó la corona. En la Fig 6.13, se muestra como al desbordarse la cortina, el torrente pasa también por los empotramientos, sobre todo el de margen derecha, se ve la cascada que se forma al iniciarse el desbordamiento de la cortina.



Figura 6.13. La cortina se desborda

El periódico La Jornada¹ del día 25 de octubre de 2015, señala que el agua de la presa San Blas “salió” con tal fuerza que desbordó el cauce del río Pabellón, de manera que tres tramos carreteros colindantes al embalse fueron cerrados debido a la presencia de agua: la carretera 19, que conduce a San José de Gracia; la carretera 18 que lleva a la localidad Emiliano Zapata y la carretera secundaria con dirección hacia San Luis de Letras pasando por San Luis de Letras.

Socavación de la cimentación de la cortina

La presa San Blas tiene problemas de erosión por la caída del agua en los desbordamientos, que ya han causado problemas de socavación de la cimentación en algunas partes, así como filtraciones por el terreno de cimentación

Fugas o filtraciones en la mampostería y el paramento aguas abajo

La presa San Blas tiene reporte de problemas de fugas o filtraciones por la estructura de contención, las cuales ocurren a través de la mampostería y que por la inspección detallada de éstas, se deberían a un fenómeno de saturación de la

¹ <http://www.lja.mx/2015/10/huracan-patricia-desbordo-la-presa-en-pabellon-de-hidalgo/>

mampostería y defectos en juntas por donde el agua ha encontrado su camino, pero que no se relaciona con un proceso erosivo interno, en donde el agua estuviese desprendiendo partículas del mortero, arrastrándolas y creando tubificación en la cortina de mampostería. Tampoco se aprecia que haya grietas o fisuras debidas a asentamientos o deformaciones por sismo, que estuviesen relacionadas con las filtraciones.

Así, se concluye que las fugas y filtraciones en la mampostería de la cortina de la presa San Blas, no tienen consecuencias en su estabilidad, ni causan mayores problemas que los de la pérdida de agua del embalse. Esto se debería considerar una deficiencia del diseño y construcción de la cortina, por el uso de mampostería rypiada y la falta de una losa frontal para impermeabilización principalmente.

Capacidad de carga o deformación excesiva de la cimentación

El terreno de cimentación de la presa San Blas es roca, con muy sobrada capacidad de carga para las presiones de contacto que provienen de la cortina que forma, y que se estiman en 1800 kN/m^2 en el contacto, con un valor de $c = 1000 \text{ kN/m}^2$, estimada conservadoramente para una toba alterada, con una resistencia a la compresión simple de $f_m' = 6000 \text{ kN/m}^2$. De la misma manera los asentamientos del terreno de cimentación de la cortina ya ocurrieron completamente, durante los más de 200 años de vida operativa transcurridos de la presa.

Revisión del agrietamiento

No se observó agrietamiento en la cortina de la presa San Blas.

6.2.3 Selección de propiedades para el análisis

Las propiedades de la mampostería, se estimaron con base en las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería (NTCM-2004) del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF-2004), y a las experiencias del Instituto de Ingeniería de la UNAM en edificios

coloniales de la Ciudad de México (Sánchez, 1995; Meli et al., 1997), así como en pruebas de laboratorio sobre especímenes de mampostería de una cortina antigua:

- Peso volumétrico mampostería: $\gamma_m = 24.00 \text{ kN/m}^3$ (2.446 t/m³ o 2400 kg/m³)
- Resistencia a la compresión simple o a 90°: $f_m^* = 6,000 \text{ kN/m}^2$ (6,116 t/m² o 61.16 kg/cm²)
- Resistencia de diseño a la compresión: $f_m' = F_R f_m^*$

$$f_m' = 0.30 * 6000 \text{ kN/m}^2 = 2000 \text{ kN/m}^2$$
- Resistencia de la mampostería al esfuerzo de tensión es: $f_t' = 350 \text{ kN/m}^2$
- Resistencia al esfuerzo cortante: $V_m^* = 300 \text{ kN/m}^2$
- Cohesión con el criterio de Mohr – Coulomb: $c = 500 \text{ kN/m}^2$ (5097 t/m² o 5.097 kg/cm²)
- Ángulo de fricción interna es $\varphi = 33^\circ$
- Coeficiente de fricción: $f = \tan \varphi = 0.649$
- Relación entre el cortante promedio y el máximo: $r = 0.5$
- Factor de seguridad cortante-friccionante: $S_{s-f} = 1.5$
- Módulo tangente a 0.1% de deformación axial: $E = 6.67 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$ (679,920 t/m² o 67992 kg/cm²)
- Módulo de elasticidad con cargas sostenidas: $E_m = 350 f_m^*$

$$E_m = 350 * 6000 \text{ kN/m}^2 = 2.1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \ll 6.67 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$$
- Módulo de rigidez al cortante: $G_m = 0.40 E_m$

$$E_m = 0.40 * 2.1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 = 8.4 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$$
 (8,400 kg/cm²)
- Relación de Poisson de $\nu = 0.17$.
- Porcentaje de reducción de subpresión: $c = 1/3$
- Factor de intensidad de subpresión: $\zeta = 1$

6.3 REVISIÓN DE ESTABILIDAD ESTRUCTURAL POR EL MÉTODO DE CREAGER

En el capítulo 4 se describió la metodología de diseño empleada por Creager, la cual se basa en mantener la posición de la resultante dentro de tercio medio. Esta metodología es de principios del siglo XX. La presa San Blas es de 1755, por lo que se verificará que se cumpla con las reglas de diseño propuestas.

Para la revisión de la estabilidad de la presa San Blas se consideraron las propiedades expuestas en el apartado 6.2.3 y las reglas del método de Creager.

Primero, se analizó la sección 0+125 con un espesor de 1 m bajo la condición de desbordamiento $h = 1$ m y una altura de azolve de 17.33 m. Posteriormente, bajo la misma condición, se revisó la estabilidad de un panel compuesto por un contrafuerte de 3 m de ancho y un tramo tributario de cortina de 9 m.

La Tabla 6.4 muestra la comparación de la revisión considerando la sección con espesor unitario con el panel de cortina y contrafuerte.

Revisión de estabilidad para la sección unitaria 0+125:

- Obtención de la posición de la resultante.

Calculo de fuerzas y momento horizontales

$$\Sigma(P) = P_w + P_{az}$$

$$\Sigma(P) = \frac{10 \text{ kN/m}^3 * 26 \text{ m}^2}{2} + \frac{2 \text{ kN/m}^3 * 17.33 \text{ m}^2}{2}$$

$$\Sigma(P) = 3380 \text{ kN} + 300.33 \text{ kN} = 3680.33 \text{ kN}$$

$$\Sigma(Px) = P_w * \left(\frac{1}{3}H_w\right) + P_{az} \left(\frac{1}{3}H_{Az}\right)$$

$$\Sigma(Px) = 3380 \text{ kN} \left(\frac{1}{3}26 \text{ m}\right) + 300.33 \text{ kN} \left(\frac{1}{3}17.33 \text{ m}\right) = 31028.23 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Cálculo de fuerzas verticales (ecuación 3.14 y 3.17)

W_{m1} = Fuerza vertical debida al peso de la mampostería de cortina

W_{m2} = Fuerza vertical debida al peso de la mampostería del contrafuerte

W_u = Fuerza de Subpresión

$$\Sigma(W) = W_{m1} + W_{m2} - W_u$$

$$\Sigma(W) = (A_{m1} * \gamma_m) + (A_{m2} * \gamma_m) - \left(c * \gamma_w * \left(h_2 + \frac{1}{2} * \zeta * (H_w - h_2) \right) * A_u \right)$$

$$\Sigma(W) = (148.33 \text{ m}^2 * 24 \text{ kN/m}^3) + (82.46 \text{ m}^2 * 24 \text{ kN/m}^3) - \left(0.33 * 10 \text{ kN/m}^3 * \left(0 + \frac{1}{2} * 1 * (26 \text{ m} - 0 \text{ m}) \right) * 15.33 \text{ m}^2 \right)$$

$$\Sigma(W) = 3559.92 \text{ kN} + 1979.04 \text{ kN} - 664.30 \text{ kN} = 4874.66 \text{ kN}$$

$$\Sigma(Wx) = (W_{m1})x + (W_{m2})x - (W_u)x$$

$$\Sigma(Wx) = 3559.92 \text{ kN} * 3.38 \text{ m} + 1979.04 \text{ kN} * 10.15 \text{ m} - 664.30 \text{ kN} * 5.11 \text{ m}$$

$$\Sigma(Wx) = 28725.21 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Posición resultante (ecuación 4.2).

$$z = \frac{\Sigma(Wx) + \Sigma(Px)}{\Sigma(W)}$$

$$z = \frac{28725.21 \text{ kN} \cdot \text{m} + 31028.23 \text{ kN} \cdot \text{m}}{4874.66 \text{ kN}} = 12.26 \text{ m}$$

| | | |
|------------------|-------------|-------------------|
| $1/3 \text{ l}$ | z | $2/3 \text{ l}$ |
| 5.11 m | $< 12.26 >$ | 10.22 m |

∴ No cumple.

- Obtención de la inclinación de la resultante.

Sin considerar cortante (ecuación 4.6)

$$\frac{\Sigma(P)}{\Sigma(W)} = \frac{3680.33 \text{ kN}}{4874.66 \text{ kN}} = 0.755$$

$$f = \tan(\theta) = \tan(33^\circ) = 0.649$$

$$0.755 > 0.649 \text{ ∴ No cumple}$$

Considerando resistencia cortante (ecuación 4.7)

$$3680.33 \text{ kN} \leq \frac{0.755 * 4874.66 \text{ kN} + 0.5 * 350 \text{ kN/m}^2 * 15.33 \text{ m}^2}{2}$$

$3680.33 \text{ kN} < 3898.93 \text{ kN} \therefore$ **Si cumple**

- Cálculo de los esfuerzos máximos en la base (ecuaciones 3.23 a 3.29)

Cálculo de esfuerzos aguas arriba y aguas abajo

$$m' = l - C.G. = 15.33 \text{ m} - 5.79 \text{ m} = 9.54 \text{ m}$$

$$m'' = C.G = 5.79 \text{ m}$$

$$e = z - m'' = 12.258 \text{ m} - 5.79 \text{ m} = 6.47 \text{ m}$$

$$p'r = \frac{4874.66 \text{ kN}}{15.33 \text{ m}^2} \pm \frac{4874.66 \text{ kN} * 6.47 \text{ m}}{1452.153 \text{ m}^4} * 9.54 \text{ m} = 1119.876 \text{ kN/m}^2$$

$$p''r = \frac{4874.66 \text{ kN}}{15.33 \text{ m}^2} \pm \frac{4874.66 \text{ kN} * 6.47 \text{ m}}{1452.153 \text{ m}^4} * 5.79 \text{ m} = -168.703 \text{ kN/m}^2$$

$$p'u = 0.33 * 10 \text{ kN/m}^3 * 0 \text{ m} = 0 \text{ kN/m}^2$$

$$p''u = 0.33 * 10 \text{ kN/m}^3 * (0 \text{ m} + 1 * (26 \text{ m} - 0 \text{ m})) = 86.67 \text{ kN/m}^2$$

$$p'v = p'r + p'u = 1119.876 \text{ kN/m}^2 + 0 \text{ kN/m}^2 = 1119.876 \text{ kN/m}^2$$

$$p''v = p''r + p''u = -168.703 \text{ kN/m}^2 - 86.67 \text{ kN/m}^2 = -255.38 \text{ kN/m}^2$$

$pv' \leq$ Resistencia a compresión $\rightarrow 1119.88 \text{ kN/m}^2 \leq 2000 \text{ kN/m}^2 \therefore$ **Si cumple**

$pv'' \leq$ Resistencia a tensión $\rightarrow 255.38 \text{ kN/m}^2 \geq 0 \text{ kN/m}^2 \therefore$ **No cumple**

Revisión de estabilidad para el panel compuesto por un contrafuerte de 3 m de ancho y un tramo tributario de cortina de 9 m:

- Obtención de la posición de la resultante.

Calculo de fuerzas y momento horizontales

$$\Sigma(P) = \frac{10 \text{ kN/m}^3 * 26 \text{ m}^2}{2} * 9 \text{ m} + \frac{2 \text{ kN/m}^3 * 17.33 \text{ m}^2}{2} * 9 \text{ m}$$

$$\Sigma(P) = 30420 \text{ kN} + 2702.96 \text{ kN} = 33122.96 \text{ kN}$$

$$\Sigma(Px) = 30420 \text{ kN} \left(\frac{1}{3} 26 \text{ m} \right) + 2702.96 \text{ kN} \left(\frac{1}{3} 17.33 \text{ m} \right) = 279254.10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Cálculo de fuerzas verticales

$$\Sigma(W) = (148.33 \text{ m}^2 * 24 \text{ kN/m}^3 * 9 \text{ m}) + (82.46 \text{ m}^2 * 24 \text{ kN/m}^3 * 3 \text{ m}) - \left(0.33 * 10 \text{ kN/m}^3 * \left(0 + \frac{1}{2} * 1 * (26 \text{ m} - 0 \text{ m}) \right) * 88.89 \text{ m}^2 \right)$$

$$\Sigma(W) = 32039.28 \text{ kN} + 5937.12 \text{ kN} - 3851.90 \text{ kN} = 34124.50 \text{ kN}$$

$$\Sigma(Wx) = 32039.28 \text{ kN} * 3.38 \text{ m} + 5937.12 \text{ kN} * 10.15 \text{ m} - 3851.90 \text{ kN} * 5.11 \text{ m}$$

$$\Sigma(Wx) = 148871.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Posición resultante

$$z = \frac{148871.33 \text{ kN} \cdot \text{m} + 279254.10 \text{ kN} \cdot \text{m}}{34124.50 \text{ kN}} = 12.55 \text{ m}$$

| | | |
|------------------|-------------|-------------------|
| $\frac{1}{3} l$ | z | $\frac{2}{3} l$ |
| 5.11 m | $< 12.55 >$ | 10.22 m |

∴ **No cumple.**

- Obtención de la inclinación de la resultante

Sin considerar cortante

$$\frac{\Sigma(P)}{\Sigma(W)} = \frac{33122.96 \text{ kN}}{34124.50 \text{ kN}} = 0.971$$

$$f = \tan(\theta) = \tan(33^\circ) = 0.649$$

$$0.971 > 0.649 \therefore \text{No cumple}$$

Considerando resistencia cortante

$$33122.96 \text{ kN} \leq \frac{0.649 * 34124.50 \text{ kN} + 0.5 * 350 \text{ kN/m}^2 * 88.89 \text{ m}^2}{2}$$

$$33122.96 \text{ kN} > 25144.31 \text{ kN} \therefore \text{No cumple}$$

- Cálculo de los esfuerzos máximos en la base

Cálculo de esfuerzos aguas arriba y aguas abajo

$$m' = l - C.G. = 15.33 \text{ m} - 5.79 \text{ m} = 9.54 \text{ m}$$

$$m'' = C.G = 5.79 \text{ m}$$

$$e = z - m'' = 12.258 \text{ m} - 5.79 \text{ m} = 6.76 \text{ m}$$

$$p'r = \frac{34124.50 \text{ kN}}{88.89 \text{ m}^2} \pm \frac{34124.50 \text{ kN} * 6.76 \text{ m}}{1452.482 \text{ m}^4} * 9.54 \text{ m} = 1898.128 \text{ kN/m}^2$$

$$p''r = \frac{34124.50 \text{ kN}}{88.89 \text{ m}^2} \pm \frac{34124.50 \text{ kN} * 6.76 \text{ m}}{1452.482 \text{ m}^4} * 5.79 \text{ m} = -535.119 \text{ kN/m}^2$$

$$p'u = 0.33 * 10 \text{ kN/m}^3 * 0 \text{ m} = 0 \text{ kN/m}^2$$

$$p''u = 0.33 * 10 \text{ kN/m}^3 * (0 \text{ m} + 1 * (26 \text{ m} - 0 \text{ m})) = 86.67 \text{ kN/m}^2$$

$$p'v = p'r + p'u = 1898.128 \text{ kN/m}^2 + 0 \text{ kN/m}^2 = 1898.13 \text{ kN/m}^2$$

$$p''v = p''r + p''u = -535.119 \text{ kN/m}^2 - 86.67 \text{ kN/m}^2 = -621.79 \text{ kN/m}^2$$

$p'v \leq \text{Resistencia a compresión } 1119.88 \text{ kN/m}^2 \leq 2000 \text{ kN/m}^2 \therefore \text{Si cumple}$

$p''v \leq \text{Resistencia a tensión } -621.79 \text{ kN/m}^2 \geq 0 \text{ kN/m}^2 \therefore \text{No cumple}$

Tabla 6.4 Comparación de los análisis de estabilidad.

| Regla | Sección unitaria | Panel cortina y contrafuerte |
|------------------------------|--|------------------------------|
| | Resultante z (m) | |
| Posición | 12.26 | 12.55 |
| | Resistencia al deslizamiento | |
| Sin cortante (tan θ) | 0.755 > 0.649 | 0.971 > 0.649 |
| Con cortante | 3680.33 kN < 3898.93 kN | 33122.96 kN > 25144.31 kN |
| | Esfuerzos máximos verticales (kN/m²) | |
| Aguas arriba | -255.38 | -621.79 |
| Aguas abajo | 1119.88 | 1898.13 |

6.4 REVISIÓN DE ESTABILIDAD POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONALES.

Por la relación entre la longitud y la altura de la cortina, y porque cualquier análisis convencional no permite tomar en cuenta la interacción entre los muros y los contrafuertes, es conveniente construir un modelo de elementos finitos tridimensional a base de elementos sólidos para analizar los esfuerzos, las deformaciones y los elementos mecánicos resultantes por las acciones actuantes para las distintas condiciones de operación que deben considerarse. Para el análisis estructural correspondiente al estado actual de la cortina, es necesario considerar cada una de las diferentes secciones obtenidas de los trabajos de topografía. En la Tabla 6.5, se reportan los valores considerados de los parámetros de importancia para los análisis de flujo de agua y estabilidad de los modelos de la cortina.

Tabla 6.5. Parámetros de la presa San Blas para revisión estructural.

| | Elevación (msnm) | Altura desde la cimentación (m) |
|---|--------------------|---------------------------------|
| Corona | 1945.00 | 25.00 |
| NAME | 1945.00 | 25.00 |
| NAMO | 1943.02 | 23.02 |
| NAMINO | 1937.48 | 17.48 |
| AZOLVE | 1938.14 (variable) | 18.47 |
| Nivel de desplante de la cara aguas abajo | 1920.00 | 0.00 |

6.4.1 Modelo geomecánico estructural de la cortina

De acuerdo con los resultados obtenidos de las investigaciones de los materiales tanto *in situ* como en gabinete, así como de los datos de la topografía y de la modelación de estructuras de presas de mampostería, se realizó la interpretación geotécnica estructural de la cortina y su contacto con la toba de cimentación.

Para este caso, de la modelación por el método de elementos finitos se obtuvo muy poca influencia de la rigidez de la cimentación y del enterramiento, sobre el

comportamiento de la presa, de manera que se consideró el caso de la cortina empotrada en base rígida. Cabe señalar, que la subpresión se aplicó en el siguiente nivel de elementos, con respecto al nivel de elementos que están empotrados, el cual tiene un espesor de 20 cm. Aunque el modelo es tridimensional y se incluye completamente la cortina desde el modelo topográfico de AutoCAD, para fines de ilustrar los resultados, se consideran las secciones críticas de mayor interés que se presentan en la Fig 6.14 y 6.15.

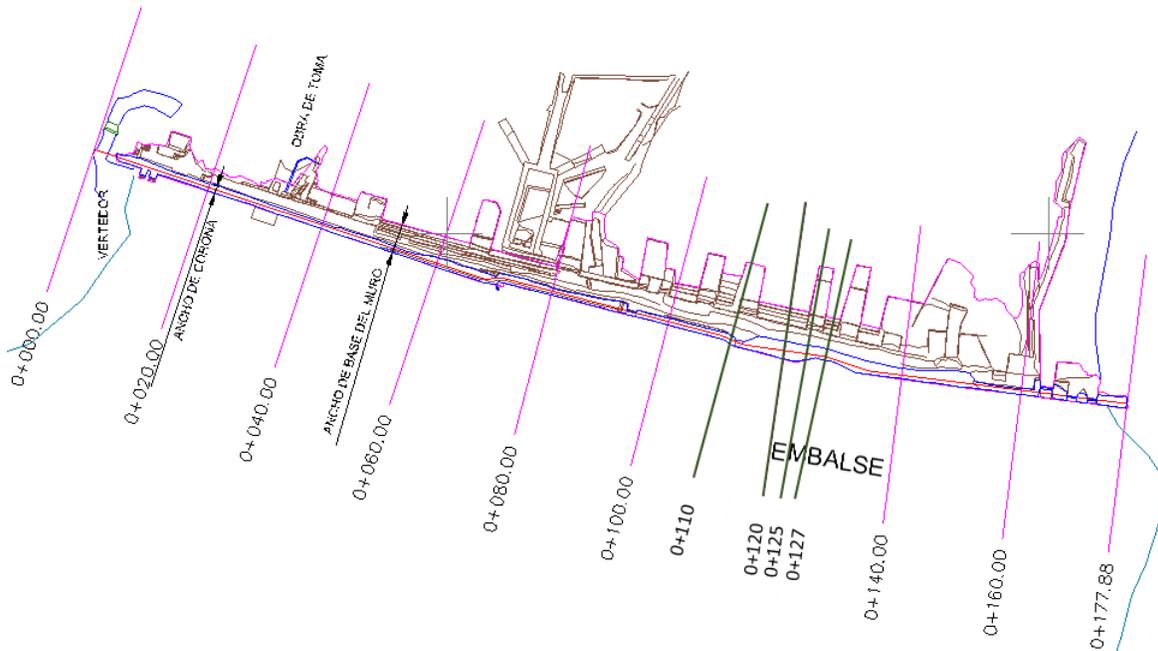


Figura 6.14. Ubicación de las secciones críticas de la presa

6. Revisión de la estabilidad de una presa antigua de mampostería



Figura 6.15. Secciones críticas de la presa

6.4.2 Análisis de estabilidad de la cortina

6.4.2.1 Combinaciones y condiciones de carga

Las combinaciones y condiciones de carga a las que se revisó la cortina son:

- Condición 1 o Inicial de diseño. El nivel del embalse se encuentra al NAMO y el nivel de azolve es cero. Esta condición reproduce las condiciones iniciales de diseño de la cortina.
- Condición 2 o de operación normal al NAMO. El nivel del embalse se encuentra en el NAMO (1943.02 msnm) y se considera la subpresión para esta carga hidrostática; el nivel del azolve es de 18.15 m con respecto a la base de la cortina.
- Condición 3 o de operación inusual al NAME. El nivel del embalse se encuentra a la altura de la corona (1945 msnm) y se considera la subpresión para esta carga hidrostática; el nivel del azolve es de 18.15 m con respecto a la base de la cortina.
- Condición 4 o de operación extrema por desbordamiento. El embalse se encuentra desbordando 1 m sobre la corona de la presa y se considera la subpresión para esta carga hidrostática; el nivel del azolve es de 18.15 m con respecto a la base de la cortina.
- Condición 5 o de operación extrema por sismo. El nivel del embalse se encuentra en el NAMO, y se considera la subpresión para esta carga hidrostática; actúa el sismo y el nivel del azolve es de 18.15 m con respecto a la base de la cortina.

Los análisis se hicieron a partir de la modelación numérica para las combinaciones y condiciones de carga antes mencionadas. Para el análisis se emplea el programa SAP2000 (CSI, 2015), el cual permite realizar el análisis numérico basado en el Método de Elementos Finitos para las combinaciones y condiciones de carga antes mencionadas.

Se consideró una condición de apoyo en la base de la cortina, empotrada. En la Tabla 6.6, se resumen los esfuerzos calculados para las distintas condiciones de carga, apoyos y condiciones de empuje de los casos analizados.

Tabla 6.6. Presiones máximas sobre la cortina.

| Condición de carga | Empuje de tierra | Apoyo | Presión máxima en la cortina (kN/m ²) |
|--------------------|------------------|-----------|---|
| 1 | Fluido Viscoso | Empotrada | 230.2 |
| 2 | Fluido Viscoso | Empotrada | 266.5 |
| 3 | Fluido Viscoso | Empotrada | 286.3 |
| 4 | Fluido Viscoso | Empotrada | 296.3 |
| 5 | Fluido Viscoso | Empotrada | 295.5 |

6.4.2.2 Factores de seguridad

Para garantizar la seguridad estructural de la cortina, se deben cumplir los factores de seguridad que se muestran en la Tabla 6.7.

Tabla 6.7 Factores de Seguridad Admisibles (USACE, USBR, CONAGUA).

| Condición | FS | Subpresión | Notas |
|--------------------------------------|------|------------|---|
| Operación normal | 1.50 | Sí | Embalse con nivel al NAMO. |
| | 2.00 | No | |
| Operación inusual | 1.30 | Sí | Embalse con nivel al NAME. |
| | 1.70 | No | |
| Operación extrema por sismo | 1.10 | Sí | Embalse lleno con nivel al NAMO. |
| | 1.10 | No | |
| Operación extrema por desbordamiento | 1.00 | Sí | El agua desbordando y pasando por encima de la cortina. |
| | 1.25 | No | |

6.4.3 Evaluación de la seguridad estructural.

Con la finalidad de conocer con mayor detalle el estado de esfuerzos y deformaciones en todas las partes de la cortina de la presa San Blas, a partir del levantamiento topográfico de detalle efectuado en campo, se desarrolló un modelo geométrico para analizar la estructura mediante la solución de un modelo de comportamiento mecánico lineal por el método de elementos finitos (Fig 6.16) de manera que se puedan obtener los factores de seguridad conforme con los niveles de esfuerzos que existen en la mampostería en realidad.

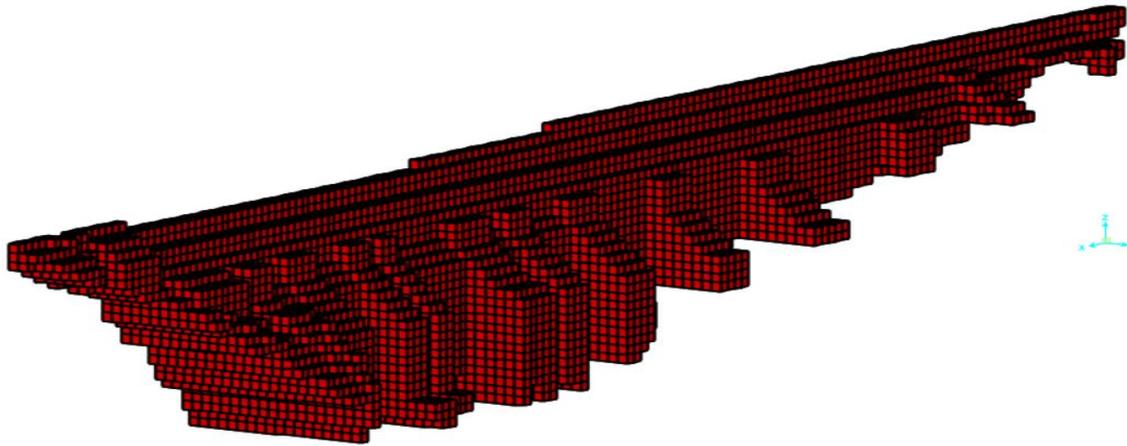


Figura 6.16. Modelación de la presa con elementos finitos tridimensionales

6.4.3.1 Esfuerzos en la cortina

De la Fig 6.17 a 6.21 se presentan los resultados obtenidos para la distribución de esfuerzos verticales máximos (σ_{zz}) en la cara aguas arriba para las 5 condiciones de carga. En todos los casos los esfuerzos de tensión (+) resultaron menores a 1000 kN/m² (10 kg/cm²), que es mayor que la resistencia a la tensión de la mampostería. Los esfuerzos de compresión (-) son de 2000 kN/m² (20 kg/cm²), que es un valor menor que la resistencia a la compresión de la mampostería. Cabe resaltar que los mayores esfuerzos presentados en la cortina fueron para la Condición 4 de desbordamiento $h = 1$ m, por lo que en la Fig 6.20 se muestra las zonas de concentración de esfuerzos en la cara aguas arriba y aguas abajo.

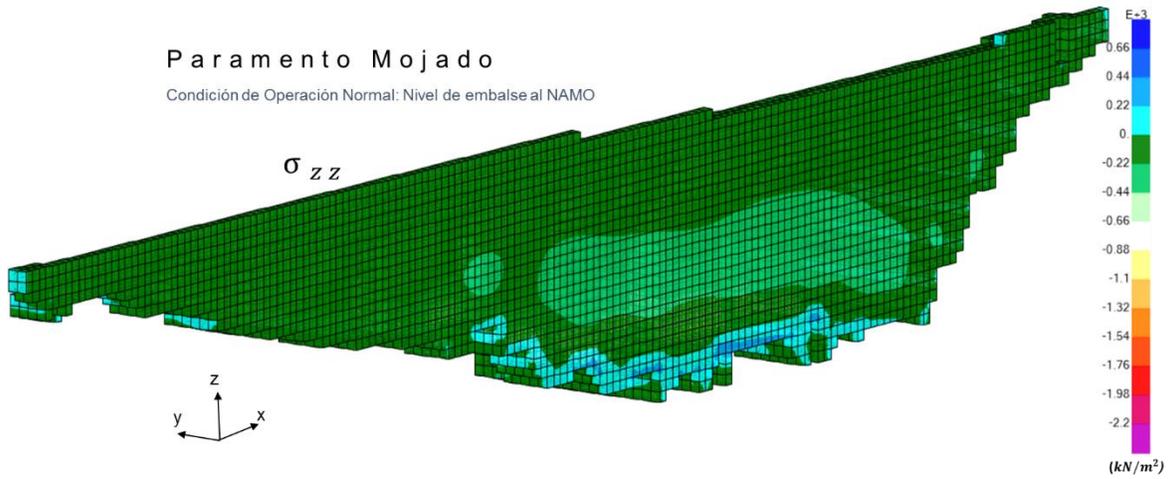


Figura 6.17. Esfuerzos verticales máximos en la cortina (Condición 1)

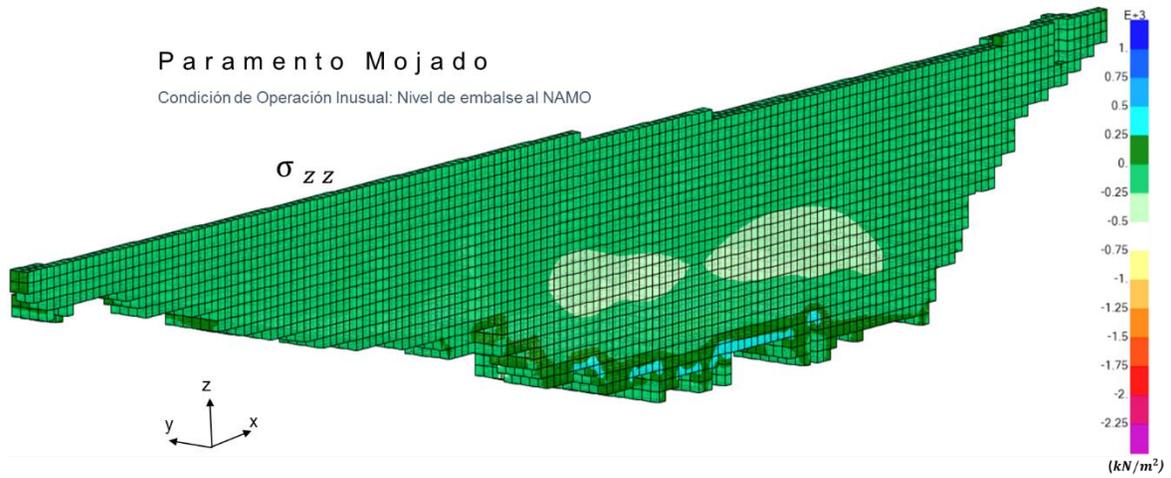


Figura 6.18. Esfuerzos verticales máximos en la cortina (Condición 2)

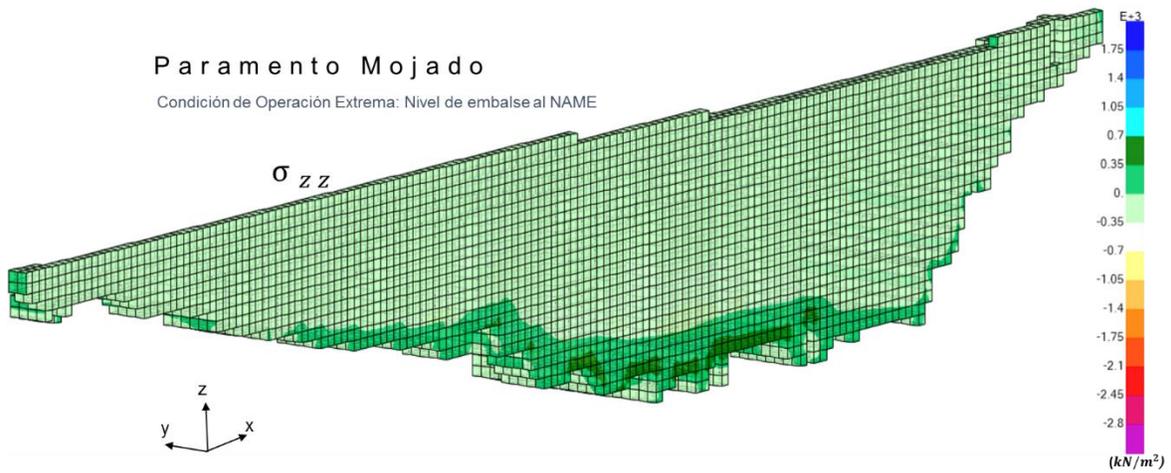


Figura 6.19 . Esfuerzos verticales máximos en la cortina (Condición 3)

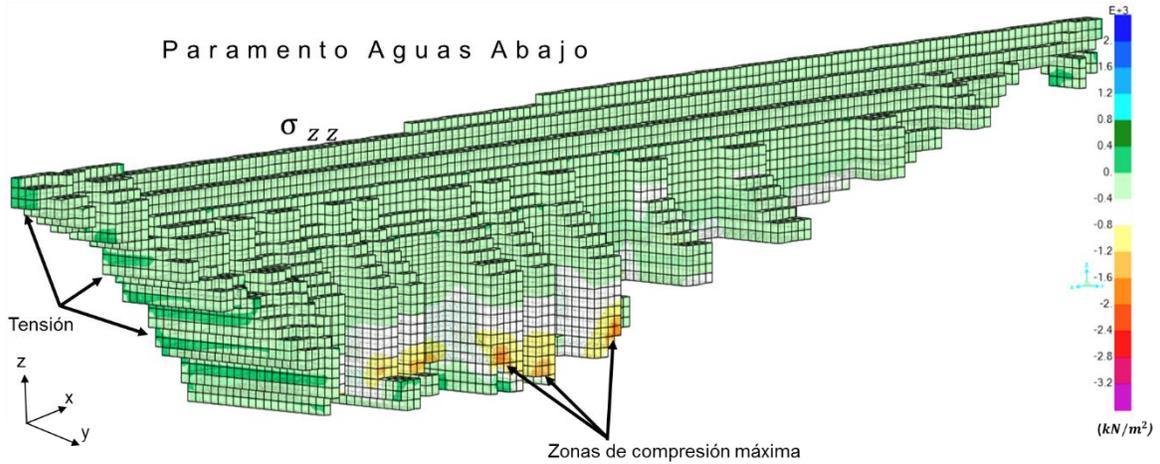
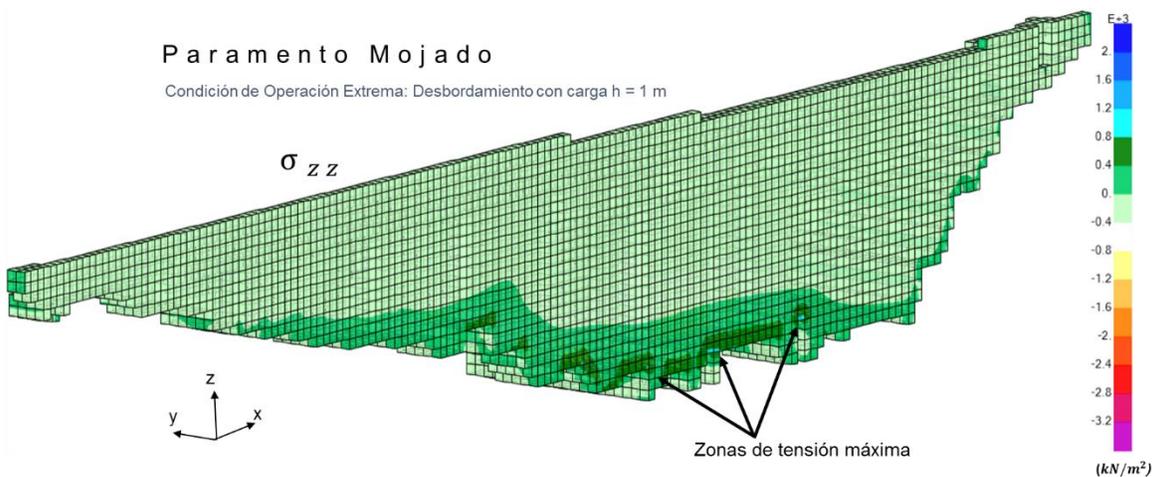


Figura 6.20. Esfuerzos verticales máximos en la cortina (Condición 4)

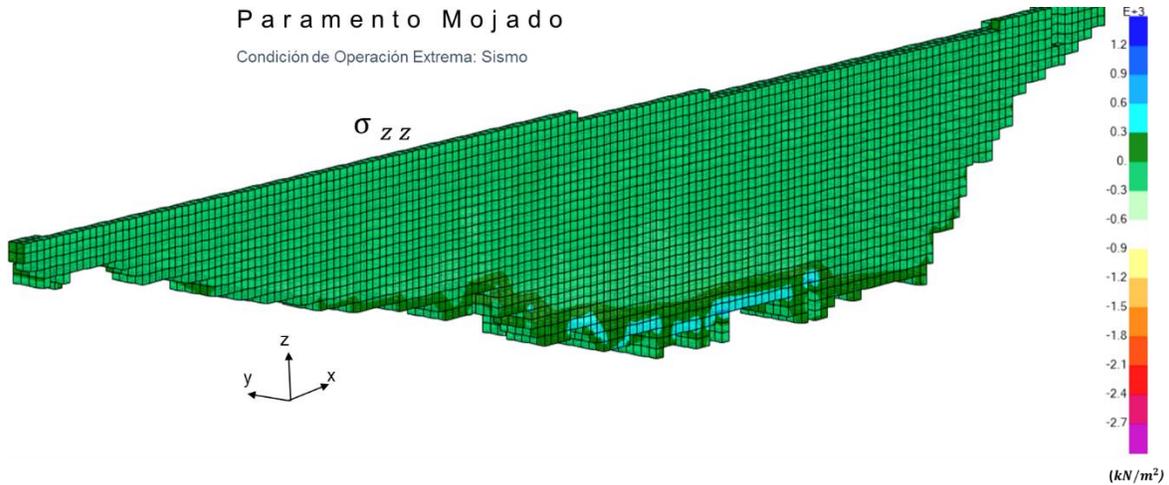


Figura 6.21. Esfuerzos verticales máximos en la cortina (Condición 5)

Los resultados de los análisis de esfuerzos normales σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} , (compresión y tensión) realizados se presentan en la Tabla 6.8, 6.9 y 6.10, respectivamente.

Tabla 6.8. Esfuerzos normales máximos σ_{xx} en la cortina.

| Condición | Apoyo | Esfuerzo de compresión σ_c (kN/m ²) | Esfuerzo de tensión σ_t (kN/m ²) |
|-----------|-----------|--|---|
| 1 | Empotrado | 525 | 250 |
| 2 | Empotrado | 595 | 350 |
| 3 | Empotrado | 660 | 470 |
| 4 | Empotrado | 720 | 600 |
| 5 | Empotrado | 700 | 450 |

Tabla 6.9. Esfuerzos normales máximos σ_{yy} en la cortina.

| Condición | Apoyo | Esfuerzo de compresión σ_c (kN/m ²) | Esfuerzo de tensión σ_t (kN/m ²) |
|-----------|-----------|--|---|
| 1 | Empotrado | 510 | 35 |
| 2 | Empotrado | 540 | 60 |
| 3 | Empotrado | 660 | 100 |
| 4 | Empotrado | 720 | 120 |
| 5 | Empotrado | 550 | 90 |

Tabla 6.10. Esfuerzos normales máximos σ_{zz} en la cortina.

| Condición | Apoyo | Esfuerzo de compresión σ_c (kN/m ²) | Esfuerzo de tensión σ_t (kN/m ²) |
|-----------|-----------|--|---|
| 1 | Empotrado | 1200 | 370 |
| 2 | Empotrado | 1300 | 450 |
| 3 | Empotrado | 1600 | 710 |
| 4 | Empotrado | 2000 | 1000 |
| 5 | Empotrado | 1600 | 700 |

De la Fig 6.22 a 6.25 se presentan los resultados obtenidos de la distribución de esfuerzos normales (σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz}), cortantes (σ_{xy} , σ_{xz} y σ_{yz}), y Von Mises, bajo la condición 5 de desbordamiento, en las secciones representativas de la presa.

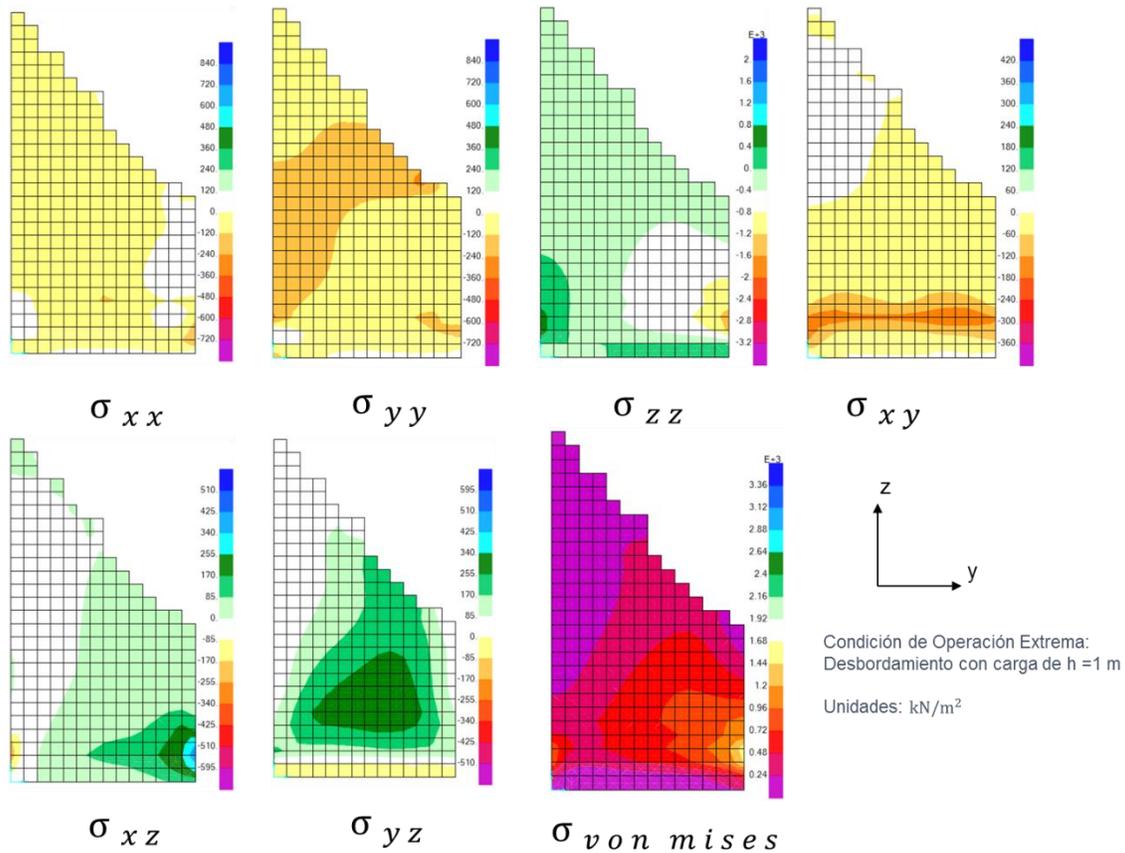


Figura 6.22. Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+110 de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m

6. Revisión de la estabilidad de una presa antigua de mampostería

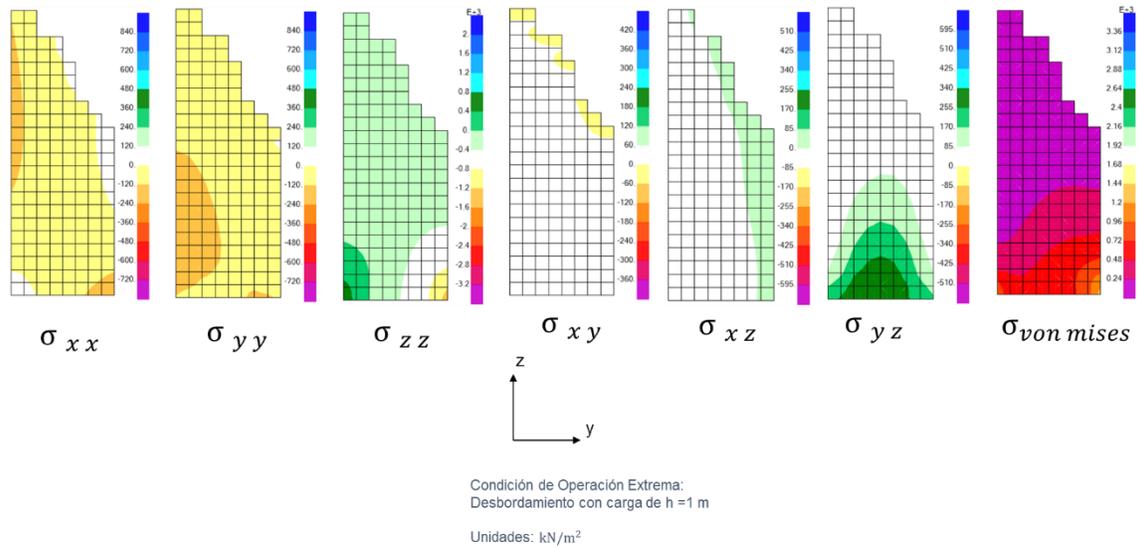


Figura 6.23. Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+120 de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m

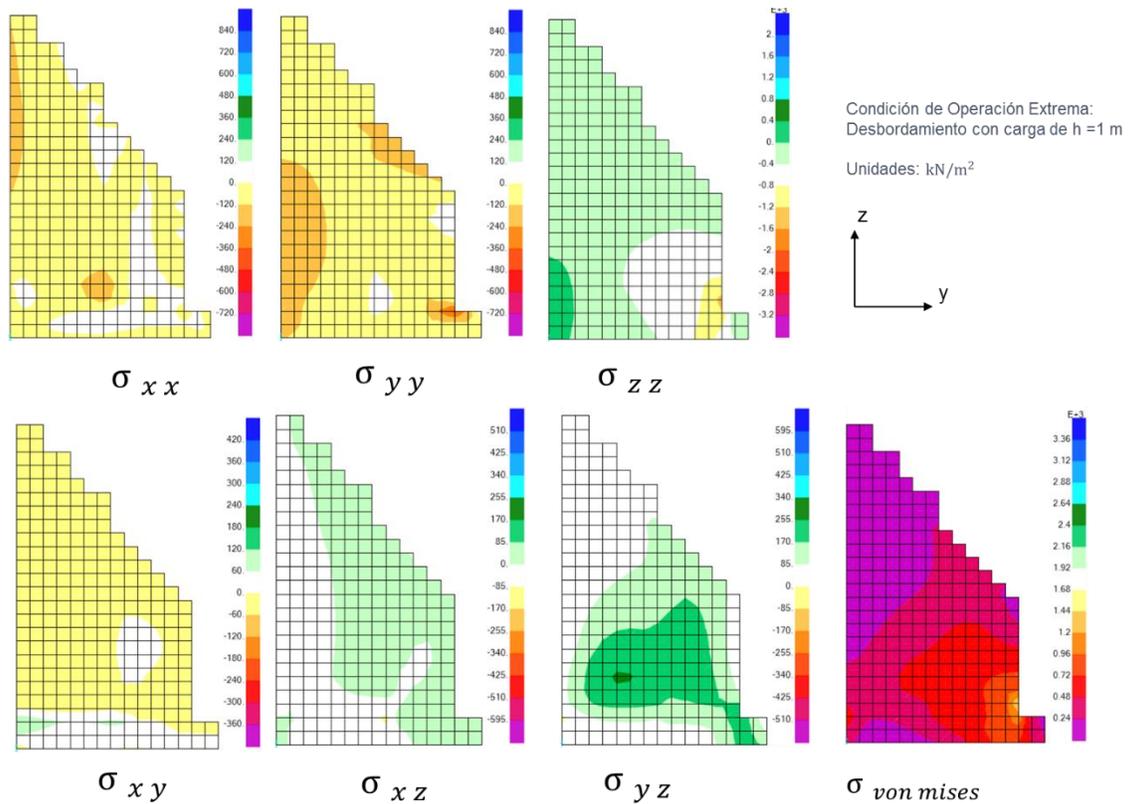


Figura 6.24. Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+125 (máxima) de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m

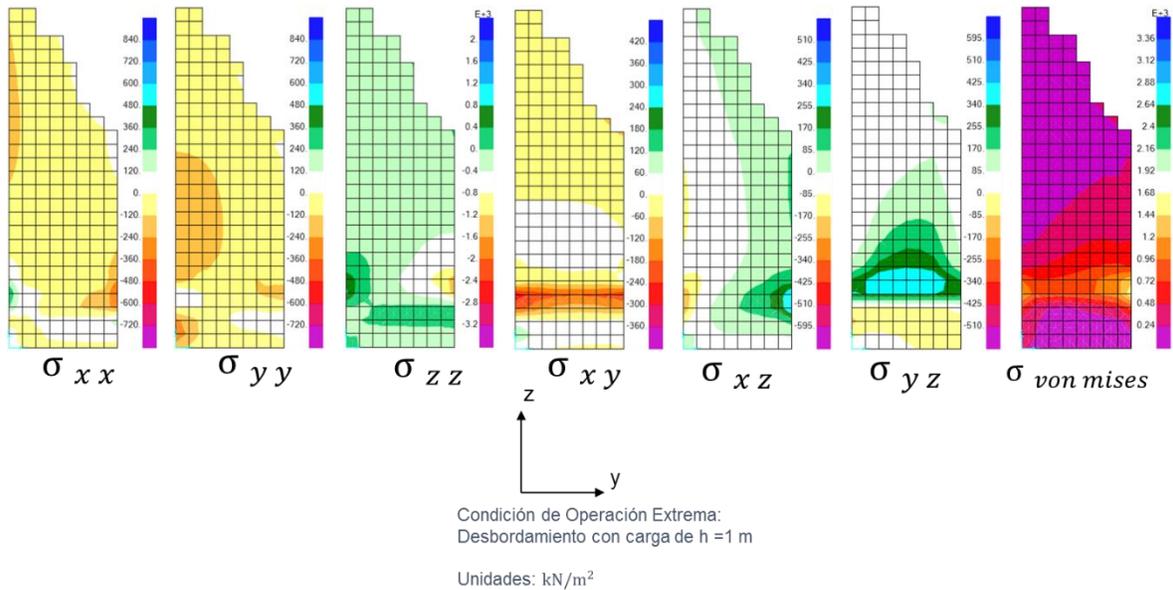


Figura 6.25. Esfuerzos normales y cortantes en la sección 0+127 de la cortina con desbordamiento con una lámina de 1 m

Es notorio observar, como el modelo muestra los efectos tridimensionales, al comparar lo que ocurre entre la cortina y el contrafuerte, ya que para la cortina los mayores valores de los esfuerzos normales se presentan en los cambios abruptos en la topografía, generalmente en el sentido del eje Z (σ_{zz}), seguido por los esfuerzos en el sentido longitudinal del eje X (σ_{xx}).

El estado de esfuerzos de la cortina San Blas muestra una tendencia a tener esfuerzos hacia el lado de la compresión, como se aprecia en la generalización absoluta del desviador Von Mises (Fig 6.22 a 6.25), que presenta un valor positivo, es decir, con resultante en el sentido de la compresión, y con valores del desviador en el rango de $240 \leq q \leq 2000 \text{ kN/m}^2$, con los valores máximos de q en compresión en el contrafuerte de la sección 0+110.

6.4.3.2 Desplazamientos máximos y distorsiones de la cortina.

Para las distintas condiciones de carga analizadas, se determinaron los desplazamientos laterales máximos (δ) de la cortina. Para estos desplazamientos, se calcularon las distorsiones máximas de la cortina ($\phi = \delta/h$). En la Tabla 6.11 se

presentan los desplazamientos máximos de la cortina, así como también las distorsiones asociadas a estos. De la Fig 6.26 a la Fig 6.28, se muestran los desplazamientos obtenidos.

Tabla 6.11 Desplazamientos laterales máximos y distorsiones de la cortina.

| Condición de Operación | δ (mm) | ϕ (mm/mm) |
|------------------------|---------------|------------------------|
| Inicial de diseño | 4.92 | 1.97×10^{-04} |
| NAMO | 5.49 | 2.20×10^{-04} |
| NAME | 9.29 | 3.72×10^{-04} |
| Desbordamiento de 1 m | 11.78 | 4.71×10^{-04} |
| Sismo | 7.65 | 3.06×10^{-04} |

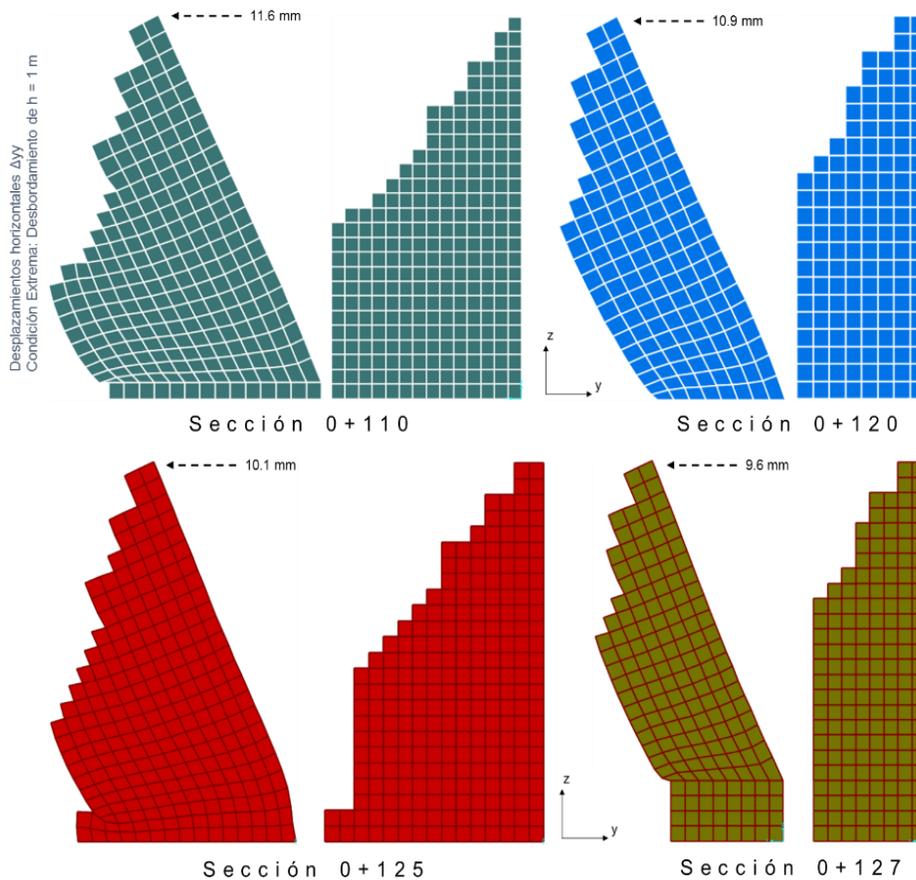


Figura 6.26. Desplazamientos máximos en la corona de la cortina en condiciones de operación extrema con un desbordamiento con una lámina de 1 m

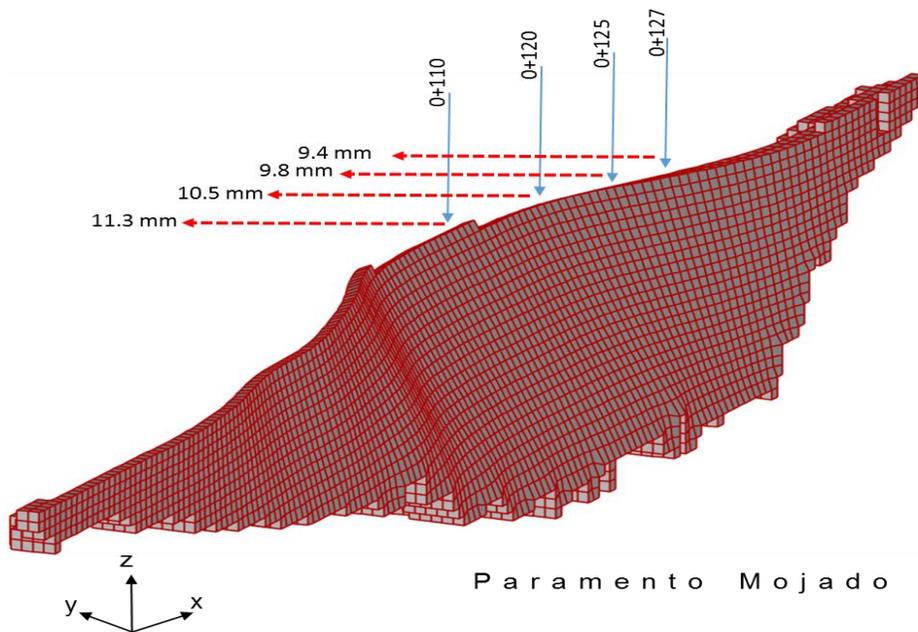


Figura 6.27. Desplazamientos máximos y vista de la distorsión ampliada 1000X de la cortina con desbordamiento de 1 m

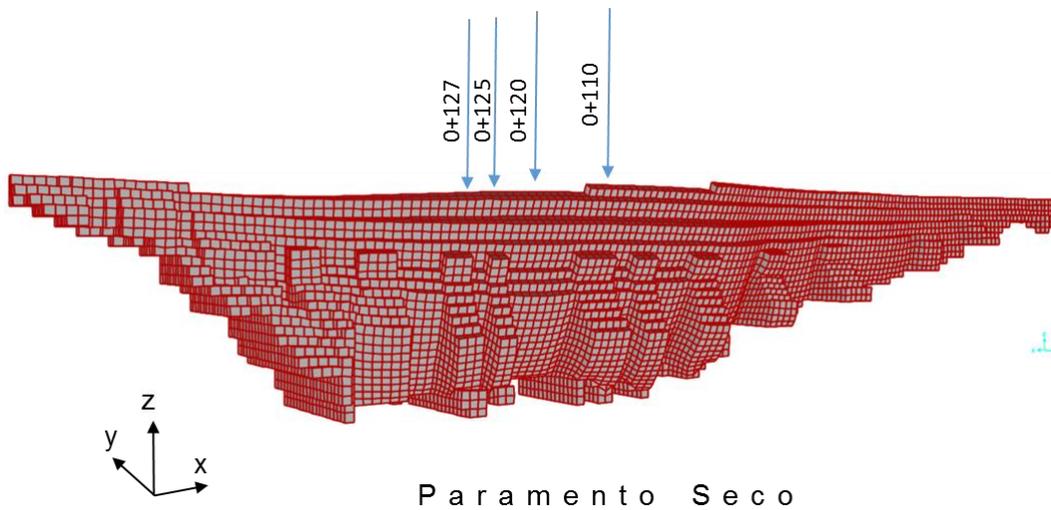


Figura 6.28. Vista de distorsión ampliada 1000x de la cortina con desbordamiento de 1 m como caso de operación extrema

Por otra parte, para fines de comparación, en la Tabla 6.12 se muestra un resumen de los valores de las distorsiones máximas para estructuras de mampostería de

tabique (Reyes, 1999). En dicha tabla, se presentan los valores de distorsiones en donde se considera el inicio de daño y daño total de la mampostería.

Tabla 6.12. Distorsiones que inician el daño en diferentes sistemas estructurales a base de mampostería (Reyes, 1999).

| Muros de mampostería: | Distorsión que inicia el daño | Distorsión para daño total |
|---|-------------------------------|----------------------------|
| De piezas macizas | 0.001 | 0.006 |
| De piezas tipo panal | 0.001 | 0.006 |
| De piezas huecas con refuerzo interior y confinadas por castillos y dalas | - | 0.006 |
| De piezas huecas con refuerzo interior sin confinar | 0.0007 | 0.006 |
| De bloques de concreto confinados por castillos y dalas | 0.0005 | 0.003 |
| De piezas huecas pegadas con mortero pobre o bien piezas sílico-calcáreas | 0.0005 | 0.005 |
| | 0.0003 | 0.003 |

Por otra parte, Sheriff et al. (1987) mostraron que para los muros de mampostería los desplazamientos en la corona de $0.0003H$, donde H es la altura del muro, no producen agrietamiento en muros bien diseñados y se genera el empuje activo de tierras. Experimentos con elementos finitos muestran que dicha condición es seguro alcanzarla para desplazamientos de la corona de $0.0004H$.

Al comparar los valores de las distorsiones calculadas en la Tabla 6.11 con las máximas permisibles, se determinó que, en ninguno de los casos de carga, la distorsión de la cortina resulta mayor de 0.001, que es el valor para que se inicie el daño en piezas de mampostería macizas y se presente la presión activa de tierras. Por lo que, de acuerdo con este criterio de revisión la cortina es segura, con distorsiones menores que 0.00049.

6.4.3.3 Esfuerzo cortante resistente de la cortina.

Se determinó el cortante resistente (V_{mR}) y cortante actuante (V_{tot}) en la base de la cortina de la presa. Para calcular el cortante resistente V_{mR} , las propiedades de los materiales que componen la cortina de la presa, se estimaron de acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería (NTCM-2004) del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF-2004), y a las experiencias del Instituto de Ingeniería (II-UNAM) en los edificios antiguos como la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México (Sánchez, 1995).

Mampostería de piedras naturales (V_{mR1}).

En el II-UNAM se efectuaron pruebas de laboratorio sobre especímenes de mampostería de la cortina de la presa San Bartolo Aguascalientes y de edificios coloniales de la Ciudad de México, que están contruidos con mamposterías de menor calidad que la de la presa San Blas. A partir de los valores experimentales, se determinó que el esfuerzo resistente al cortante de la mampostería de piedras naturales (riolítas) de la presa San Blas es $V_m^* = 350 \text{ kN/m}^2$. Se calcula el cortante resistente para una sección unitaria de la cortina, a partir de la ecuación siguiente:

$$V_{mR1} = 1.5F_R V_m^* A_T \quad (6.1)$$

donde $F_R=0.4$, que es el valor para mampostería no confinada ni reforzada interiormente sujeta a fuerza cortante; A_T , es el área de la sección transversal del muro. Para el contrafuerte en la sección 0+125 con un espesor unitario de la cortina, $A_T= 15.33 \text{ m}^2$, entonces:

$$V_{mR1} = 1.5 (0.4)(350)(15.33) = 3219 \text{ kN}$$

Considerando un plano de falla en una junta de mortero (V_{mR2}).

El cortante resistente V_{mR2} se calculó suponiendo que la falla por cortante de la cortina se presenta en una de sus juntas de mortero. Así, de acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, NTCC-2004, del RCDF-2004, la resistencia a cortante de la junta de mortero sería:

$$V_{mR2} = 0.5F_Rbd\sqrt{f_c^*} \quad (6.2)$$

Donde $f_c^*=0.8 f'_c$ y $F_R=0.8$. Con base en los resultados de las pruebas de laboratorio antes mencionadas se supone que el mortero tiene una resistencia a la compresión de cuando menos $f'_c=6000 \text{ kN/m}^2$, la resistencia al cortante de una sección unitaria de la cortina es:

$$V_{mR2} = 0.5 (0.8)(1)(15000)\sqrt{(0.8)(6000)} = 424.84 \text{ kN}$$

En la Tabla 6.13, se presentan los valores de los cortantes totales actuantes V_{tot} en la base de la cortina. Se calcularon como el volumen de los cortantes actuantes en la base de cada elemento.

Tabla 6.13. Cortantes actuantes totales V_{tot} en la base de la cortina.

| CAD | 0+00 | 0+01 | 0+02 | 0+03 | 0+04 | 0+05 | 0+06 | 0+07 | 0+08 | 0+09 | 0+10 | 0+11 | 0+12 | 0+13 | 0+14 | 0+15 | |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Condición 1 | C | 60.7 | 37.5 | 21.6 | 13.6 | 13.9 | 12.2 | 11.7 | 6.2 | 5.4 | 18.3 | 19.1 | 51.3 | 90.3 | 142.3 | 143.4 | 129.2 |
| | V1 | 11.6 | 8.0 | 4.0 | 0.2 | 0.9 | 0.3 | 2.8 | 0.4 | 6.5 | 0.4 | 16.1 | 19.5 | 26.0 | 0.6 | 7.1 | |
| | V2 | 37.5 | 21.6 | 13.6 | 13.6 | 12.2 | 11.7 | 6.2 | 5.4 | 5.4 | 18.3 | 19.1 | 51.3 | 90.3 | 142.3 | 129.2 | |
| | VA | 49.1 | 29.6 | 17.6 | 13.8 | 13.1 | 12.0 | 9.0 | 5.8 | 11.9 | 18.7 | 35.2 | 70.8 | 116.3 | 142.8 | 136.3 | 681.8 |
| Condición 2 | C | 76.4 | 54.4 | 25.5 | 15.9 | 14.8 | 13.7 | 12.9 | 7.7 | 6.9 | 23.3 | 39.5 | 56.4 | 95.9 | 154.4 | 157.3 | 128.8 |
| | V1 | 11.0 | 14.5 | 4.8 | 0.6 | 0.6 | 0.4 | 2.6 | 0.4 | 8.2 | 8.1 | 8.5 | 19.8 | 29.3 | 1.5 | 14.3 | |
| | V2 | 54.4 | 25.5 | 15.9 | 14.8 | 13.7 | 12.9 | 7.7 | 6.9 | 6.9 | 23.3 | 39.5 | 56.4 | 95.9 | 154.4 | 128.8 | |
| | VA | 65.4 | 40.0 | 20.7 | 15.4 | 14.3 | 13.3 | 10.3 | 7.3 | 15.1 | 31.4 | 48.0 | 76.2 | 125.2 | 155.9 | 143.1 | 781.2 |
| Condición 3 | C | 80.8 | 58.9 | 24.6 | 16.0 | 14.1 | 14.2 | 12.8 | 9.1 | 5.4 | 20.2 | 43.1 | 61.9 | 120.9 | 188.7 | 190.5 | 163.3 |
| | V1 | 11.0 | 17.2 | 4.3 | 1.0 | 0.1 | 0.7 | 1.9 | 1.8 | 7.4 | 11.5 | 9.4 | 29.5 | 33.9 | 0.9 | 13.6 | |
| | V2 | 58.9 | 24.6 | 16.0 | 14.1 | 14.1 | 12.8 | 9.1 | 5.4 | 5.4 | 20.2 | 43.1 | 61.9 | 120.9 | 188.7 | 163.3 | |
| | VA | 69.9 | 41.8 | 20.3 | 15.0 | 14.1 | 13.5 | 10.9 | 7.2 | 12.8 | 31.7 | 52.5 | 91.4 | 154.8 | 189.6 | 176.9 | 902.4 |
| Condición 4 | C | 87.5 | 61.0 | 27.7 | 16.0 | 13.5 | 13.9 | 11.9 | 6.2 | 5.0 | 19.4 | 44.5 | 70.0 | 132.0 | 206.0 | 209.9 | 176.0 |
| | V1 | 13.2 | 16.7 | 5.9 | 1.2 | 0.2 | 1.0 | 2.9 | 0.6 | 7.2 | 12.6 | 12.8 | 31.0 | 37.0 | 2.0 | 17.0 | |
| | V2 | 61.0 | 27.7 | 16.0 | 13.5 | 13.5 | 11.9 | 6.2 | 5.0 | 5.0 | 19.4 | 44.5 | 70.0 | 132.0 | 206.0 | 176.0 | |
| | VA | 74.2 | 44.4 | 21.8 | 14.8 | 13.7 | 12.9 | 9.0 | 5.6 | 12.2 | 32.0 | 57.3 | 101.0 | 169.0 | 208.0 | 193.0 | 968.7 |
| Condición 5 | C | 87.1 | 61.4 | 55.4 | 28.3 | 17.2 | 15.2 | 14.6 | 13.3 | 8.4 | 21.4 | 43.9 | 61.0 | 108.0 | 180.0 | 182.0 | 149.0 |
| | V1 | 12.9 | 3.0 | 13.6 | 5.6 | 1.0 | 0.3 | 0.6 | 2.5 | 6.5 | 11.3 | 8.6 | 23.5 | 36.0 | 1.0 | 16.5 | |
| | V2 | 61.4 | 55.4 | 28.3 | 17.2 | 15.2 | 14.6 | 13.3 | 8.4 | 8.4 | 21.4 | 43.9 | 61.0 | 108.0 | 180.0 | 149.0 | |
| | VA | 74.3 | 58.4 | 41.9 | 22.8 | 16.2 | 14.9 | 14.0 | 10.9 | 14.9 | 32.7 | 52.5 | 84.5 | 144.0 | 181.0 | 165.5 | 928.1 |

CAD = Cadenamiento (m); C = Cortante (kN); V1 y V2 = Volumen Tributario (kN); VA = Volumen Aportado Total (kN)

Finalmente, en la Tabla 6.14 se presenta la comparación entre los cortantes actuantes y los cortantes resistentes (V_{mR}/V_{tot}) para un tramo unitario de la cortina de la presa San Blas.

Tabla 6.14 Relación entre cortantes resistentes y actuante (V_{mR}/V_{tot}) en la cortina.

| Condición | V_{tot} (kN) | V_{mR1}/V_{tot} | V_{mR2}/V_{tot} |
|-----------|----------------|-------------------|-------------------|
| 1 | 681.80 | 4.72 | 0.62 |
| 2 | 781.20 | 4.12 | 0.54 |
| 3 | 902.41 | 3.56 | 0.47 |
| 4 | 968.72 | 3.32 | 0.43 |
| 5 | 928.14 | 3.46 | 0.45 |

En la Tabla 6.14, se observa que, para las cinco condiciones de carga, los cortantes resistentes de la mampostería de piedras naturales, V_{mR1} , son mayores que los cortantes actuantes en la base de la cortina, produciendo factores de seguridad (V_{mR1}/V_{tot}) mayores que 3.3. Caso contrario al análisis realizado considerando únicamente la resistencia al corte del mortero, ya que se obtuvieron valores menores a la unidad para las 5 condiciones de carga. Inclusive, cabe comentar que valores del factor de seguridad por corte poco mayores que la unidad se han calculado para condiciones sísmicas en la Catedral Metropolitana, y éstos se han considerado aceptables dado que el edificio está en pie y sin daños aparentes por sismo (Meli, 1998). Cuanto más para la cortina de la presa San Blas.

7. CONCLUSIONES

Los resultados del análisis de estabilidad de la presa San Blas, realizado con el método tradicional a una sección de espesor unitario (sección 0+125) y a un panel de cortina y contrafuerte, bajo la condición 4 de desbordamiento $h = 1$ m, se presentan en la Tabla 7.1.

Tabla 7.1 Comparación de los análisis de estabilidad.

| Regla | Sección unitaria | Panel cortina y contrafuerte |
|--------------------------------|--|---|
| | Resultante z (m) | |
| Posición | 12.26 | 12.55 |
| | Resistencia al deslizamiento | |
| Sin cortante ($\tan \theta$) | $0.755 > 0.649$ | $0.971 > 0.649$ |
| Con cortante | $3680.33 \text{ kN} < 3898.93 \text{ kN}$ | $33122.96 \text{ kN} > 25144.31 \text{ kN}$ |
| | Esfuerzos máximos verticales (kN/m^2) | |
| Aguas arriba | -255.38 | -621.79 |
| Aguas abajo | 1119.88 | 1898.13 |

Dividiendo los valores de resistencia al deslizamiento entre los valores actuantes mostrados en la Tabla 7.1, para interpretar los resultados en función de factores de seguridad, se obtiene lo siguiente:

Tabla 7.2 Factores de seguridad comparados con los admisibles por USACE, USBR, CONAGUA.

| | Subpresión | Sección unitaria | Panel cortina y contrafuerte |
|--------------------------------|------------|------------------|------------------------------|
| Sin cortante ($\tan \theta$) | Sí | $0.86 < 1.00$ | $0.67 < 1.00$ |
| | No | $1.04 > 1.00$ | $0.79 < 1.00$ |
| Con cortante | Sí | $1.06 > 1.00$ | $0.76 < 1.00$ |
| | No | $1.82 > 1.00$ | $1.29 > 1.00$ |

En los análisis donde se consideró la subpresión actuante contra la cortina, el único factor de seguridad aceptable contra deslizamiento es el obtenido del análisis realizado a la sección unitaria, donde se incluye la resistencia al esfuerzo cortante de la mampostería, dando un factor de 1.06. En los análisis donde no se consideró

la subpresión, el único factor de seguridad que no supera la unidad, es el obtenido del análisis realizado al panel de cortina y contrafuerte, que no incluye la resistencia al esfuerzo cortante de la mampostería, dando un factor de 0.79.

Por otra parte, los resultados en la sección 0+125 del análisis de estabilidad realizado con el método de los elementos finitos a un modelo tridimensional completo de la cortina San Blas, bajo la condición 4 de desbordamiento $h = 1$ m, se presentan en la Tabla 7.3.

Tabla 7.3. Comparación de los análisis de estabilidad con el MEF en la sección 0+125, condición 4.

| Condición | FS | Subpresión | Notas |
|--------------------------------------|-----------|------------|-----------|
| Operación Normal | 4.12>1.50 | Sí | Sí cumple |
| | 4.63>2.00 | No | Sí cumple |
| Operación Inusual | 3.56>1.30 | Sí | Sí cumple |
| | 4.02>1.70 | No | Sí cumple |
| Operación Extrema por sismo | 3.46>1.10 | Sí | Sí cumple |
| | 3.82>1.10 | No | Sí cumple |
| Operación Extrema por desbordamiento | 3.32>1.00 | Sí | Sí cumple |
| | 3.79>1.25 | No | Sí cumple |

Se encontraron valores con mayor similitud entre la sección unitaria y la modelación 3D, aunque en los tres casos el valor de la resultante es considerablemente mayor al intervalo del tercio medio. Se demuestra la influencia de la modelación 3D ya que en un análisis tradicional no se toma en cuenta la interacción con las secciones variables de la presa, por lo que el análisis con elementos finitos tridimensionales, resulta un método confiable cuando la presa posee contrafuertes y una sección variable.

En el caso del análisis 3D se encontró que las zonas de mayor tensión, para las cinco condiciones de carga, se localizan al pie de la cara aguas arriba, y que las zonas de mayor compresión se desarrollaron después del tercio medio en la base de los contrafuertes.

Los desplazamientos y las distorsiones máximas alcanzadas mediante las sollicitaciones a las que se sometió la cortina, son pequeñas e inferiores al valor considerado para que se inicie el daño en la cortina de mampostería.

Por otra parte, los factores de seguridad contra cortante son aceptables considerando únicamente la resistencia al corte de la mampostería, ya que todos los valores son mayores de 3.3. Caso contrario al análisis realizado considerando únicamente la resistencia al corte del mortero, ya que se obtuvieron valores menores a la unidad para las cinco condiciones de carga.

Cabe resaltar que el análisis para la condición de desbordamiento de 1 m sobre la cortina, para los esfuerzos normales σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} arroja los mayores valores de tensión, variando de 860 a 1000 kN/m², resultando alarmantes ya que la bibliografía consultada sugiere que la mampostería no soporta esfuerzos de tensión.

Sin embargo, la cortina está perfectamente en pie, y sin ningún daño estructural. Esto se explicaría por el efecto de Poisson dentro de un material confinado, combinado con la adherencia del mortero y el efecto de trabazón entre piezas angulosas de mampostería de geometría irregular. La combinación de tales efectos, suponiendo que la razón entre el cortante resistente y el actuante fuese de 1.0, la resistencia equivalente del mortero sería de $f'c = 32500$ kN/m², y con la ecuación 6.2, que equivale a una $f'c$, 5.4 veces mayor, que es equivalente a los efectos de la trabazón de las piezas y la adherencia del mortero; esta última tiene un papel fundamental en la resistencia a la tensión

Lo anterior hace necesario la realización de pruebas adecuadas a muestras completas de mampostería unida con mortero, tomadas de presas antiguas, y así obtener datos confiables de resistencia a la compresión, tensión y cortante.

APÉNDICE A. ELEMENTOS FINITOS ²

A.1 CÁLCULO DE VARIACIONES Y MÉTODOS VARIACIONALES

Un *principio variacional* especifica una cantidad escalar (*funcional*) A , que se define por una forma integral, como se observa en la siguiente expresión:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'') dx \quad (A.1)$$

Donde u y su primera y segunda derivadas, u' y u'' , son funciones de x . F y A se llaman *funcionales* porque están en función de otras funciones. La solución del problema en el medio continuo es una solución u que hace al funcional A estacionario con respecto a cambios arbitrarios δu . La ecuación A.1 está definida en un intervalo $[x_1, x_2]$ (Fig A.1) y las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u(x_1) &= u_1 \\ u(x_2) &= u_2 \end{aligned} \quad (A.2)$$

El cálculo de variaciones, surgió hace más de tres siglos y se ocupa de la determinación de máximos y mínimos de las funcionales. Se trata básicamente de encontrar la función argumento $u(x)$ que haga que la integral del tipo A.1 adquiera un valor máximo o mínimo; este valor se llama generalmente *extremo* de la funcional y la función $u(x)$ que le corresponde se le llama *extremal*. El problema se extiende a la búsqueda de extremales de funcionales de cualquier tipo.

² El apéndice A de elementos finitos se realizó con base en información de los libros de Desai, (1972) y Potts, et al, (1999).

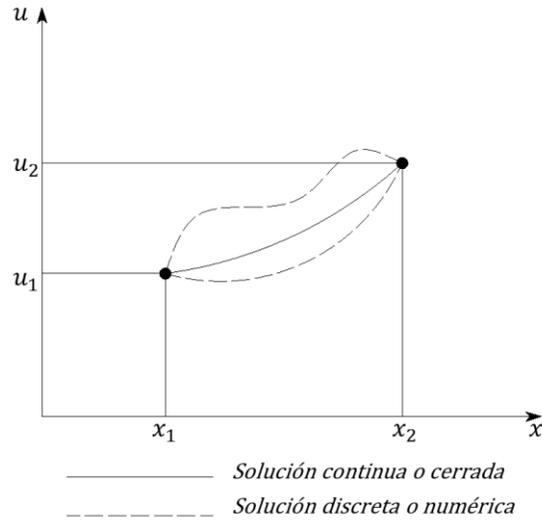


Figura A.1. Dominio $[x_1, x_2]$

El problema fundamental del *cálculo de variaciones* puede expresarse de la siguiente forma: en el dominio de las funciones argumento admitidas para una funcional determinada, hallar esa función argumento (extremal) para la cual la funcional alcanza un valor extremo, con respecto a los valores que ella adquiere para todas las demás funciones argumento del dominio, que se hallan en una vecindad suficientemente pequeña de la extremal. La forma de obtener la extremal es, por analogía con el cálculo ordinario, igualando a cero la primera variación de la funcional.

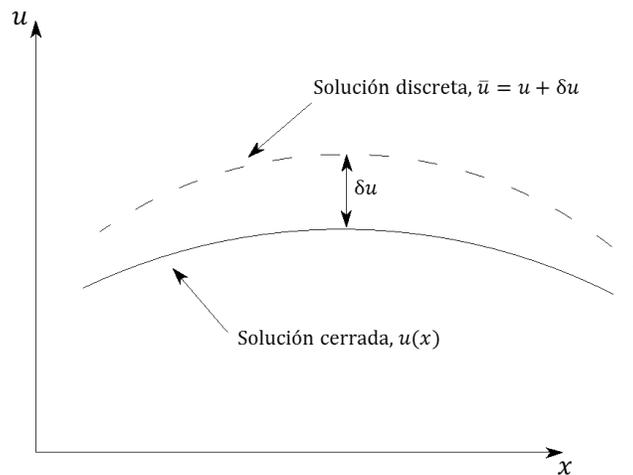


Figura A.2. Notación variacional

Una solución discreta o numérica, \bar{u} , en la vecindad de la solución cerrada u , puede ser representada como la suma de dicha solución exacta más una *variación* de u , δu (Fig A.2)

$$\bar{u} = u + \delta u \quad (A.3)$$

La variación en $u = u(x)$ es definida como un cambio infinitesimal arbitrario en u para un valor fijo de la variable independiente x , es decir, para $\delta x = 0$. La notación δu utilizado en la ecuación A.3 es llamada notación variacional. El símbolo δ de la notación variacional es tratado como un operador, similar al operador de diferencial d . El operador δ es conmutativo con la integración y la diferenciación:

$$\delta \left(\int F dx \right) = \int (\delta F) dx \quad (A.4a)$$

$$\delta (du/dx) = d(\delta u)/dx \quad (A.4b)$$

Se define la variación de una funcional en una manera semejante al diferencial total del cálculo ordinario (en ingeniería se utilizan los tres primeros términos):

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' + \frac{\partial F}{\partial u'''} \delta u''' + \dots \quad (A.4c)$$

Ahora consideremos pequeños cambios o variaciones de la funcional A de la ecuación A.1, correspondientes a las variaciones en la solución. Como ya se mencionó anteriormente, por analogía con el cálculo ordinario, al igualar a cero la primera variación de la funcional A tendremos la condición para que A sea estacionaria (máximo o mínimo de la funcional).

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \right) dx = 0 \quad (A.5c)$$

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = 0 \quad (A.5b)$$

Al integrar por partes los respectivos términos de la ecuación A.5a se obtiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u dx \quad (\text{A. 6a})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u dx \quad (\text{A. 6b})$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u dx \quad (\text{A. 6c})$$

Sumando las ecuaciones A.6a, A.6b y A.6c se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta A = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} \\ + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A. 7})$$

Para satisfacer la igualdad de la ecuación A.7 podemos recordar que la variación δu es arbitraria y puede ser considerada igual a cero. Por lo tanto, las funcionales se pueden igualar a cero y eliminar individualmente:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0 \quad (\text{A. 8a})$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (\text{A. 8b})$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \quad (\text{A. 8c})$$

La ecuación A.8a es la ecuación diferencial que rige el problema y es llamada la *Ecuación de Euler* o la *Ecuación Euler-Lagrange*. Las ecuaciones A.8b y A.8c dan las condiciones de frontera. Las condiciones

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

y

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right] \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

Son llamadas *condiciones naturales de frontera*; si son satisfechas, son llamadas *condiciones de frontera libres*. Si una de las condiciones naturales de frontera no es satisfecha, las correspondientes porciones de las ecuaciones A.8b y A.8c deben ser satisfechas.

$$\begin{aligned} \partial u(x_1) = 0, & \quad \partial u(x_2) = 0 \\ \partial u'(x_1) = 0, & \quad \partial u'(x_2) = 0 \end{aligned}$$

A las últimas se les llama las *condiciones geométricas de frontera*, o *condiciones forzadas de frontera* y son consideradas condiciones iniciales.

La aproximación con el cálculo de variaciones, cuando se aplica a una funcional del tipo expresado en la ecuación A.1, proporcionan una descripción completa del problema.

Obtenemos no sólo la ecuación diferencial gobernante del problema, también obtenemos las condiciones inherentes de frontera. La formulación de este tipo se conoce como *Formulación de Euler-Lagrange*.

A.2 DISCRETIZACIÓN DEL MEDIO CONTINUO

Para discretizar se define la geometría de la frontera del problema tomando en cuenta la topografía, dimensión de la estructura y discontinuidades. Esta geometría se reemplazará por una malla de elementos bidimensionales o tridimensionales equivalente, que serán llamados *elementos finitos*.

El conjunto de elementos en la malla estará interconectado por los lados de dichos elementos y por un número determinado de *nodos*. Generalmente, para problemas bidimensionales se emplean elementos de formas triangulares o cuadrangulares (Fig A.3). La geometría de los elementos finitos estará definida en función de las coordenadas de los *nodos*. Para elementos con lados rectos, los nodos estarán localizados en las esquinas (nodos de esquina), si el elemento posee lados curvos se deberán introducir nodos a la mitad de dicho lado (nodos intermedios).

Mallas de elementos finitos bidimensionales

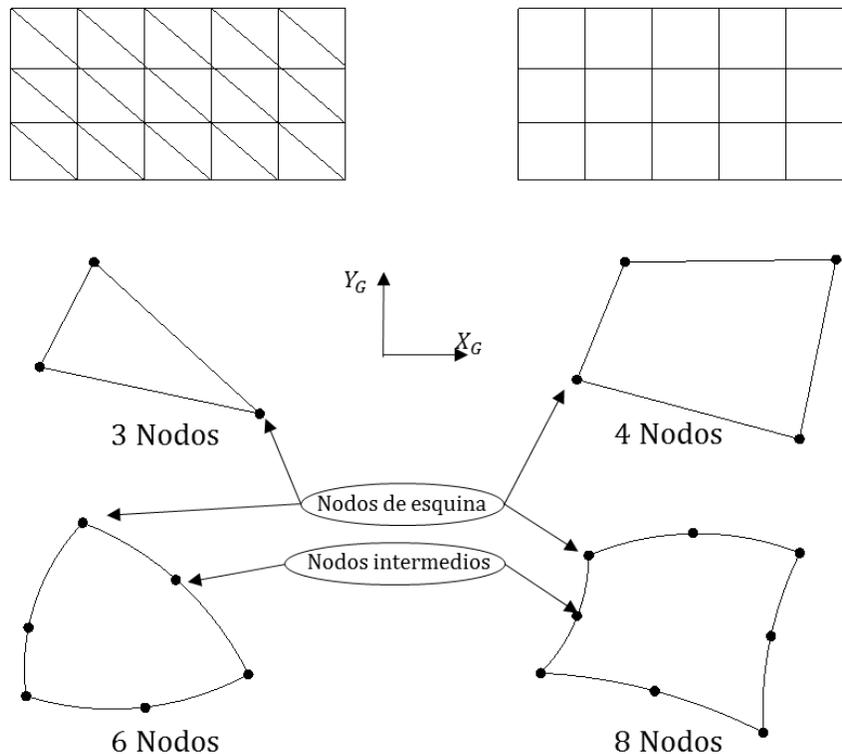


Figura A.3. Elementos finitos bidimensionales

Con el fin de hacer referencia a la malla completa de elementos finitos, los elementos y nodos deberán estar numerados de una manera sistemática. Un ejemplo de esquema de numeración para una malla con elementos cuadriláteros de 4 nodos se muestra en la Fig A.4. Los nodos son numerados secuencialmente de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba; Para describir la ubicación de un

elemento dentro de la malla, se debe utilizar una *lista de conectividad del elemento*. Esta lista contiene el número de los nodos que forman un elemento, normalmente en orden anti horario. Por ejemplo, la lista de conectividad del elemento 2 es 2, 3, 7, 6.

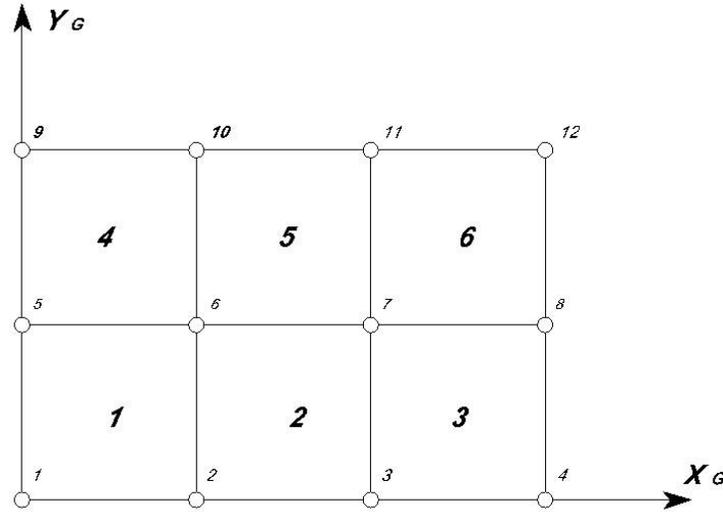


Figura A.4. Numeración de los nodos y elementos

Cuando se construye una malla de elementos finitos, se debe considerar lo siguiente:

- El límite geométrico de la malla de elementos finitos debe ser tan aproximado como sea posible, al límite geométrico real del dominio del problema.
- Se deben utilizar nodos intermedios en elementos curvos ubicados dentro y en el límite del dominio, así como en las interfaces curvas entre materiales.
- En muchos casos, las discontinuidades en la geometría del dominio indican una forma natural de subdivisión.
- El diseño de la malla puede ser influenciado por las condiciones de carga aplicadas. Se pueden introducir nodos en puntos de carga o discontinuidad.

Como se observará más adelante, para la modelación de las presas de mampostería es conveniente dividir el dominio del problema en una malla de elementos cúbicos, considerando elementos de mayor tamaño donde la sección de la cortina sea constante y refinando la malla en aquellos lugares donde la geometría

de la presa presente cambios abruptos o donde sea de mayor interés conocer los esfuerzos generados en la cortina.

A.3 APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS (MODELOS DE DESPLAZAMIENTO)

Se eligen funciones simples que modelen en forma aproximada los desplazamientos en cada elemento finito. A estas funciones se les *llama funciones de desplazamientos o modelos de desplazamientos*. La solución final de las funciones de desplazamientos serán los desplazamientos en los nodos.

En el método de elementos finitos basado en el desplazamiento, la incógnita principal es el campo de desplazamientos variable sobre el dominio del problema. Los esfuerzos y las deformaciones son consideradas cantidades secundarias, que pueden ser calculadas una vez que el campo de desplazamientos sea determinado. En casos bidimensionales el campo de desplazamientos es caracterizado por los dos componentes de desplazamientos globales u y v en las direcciones coordenadas x y y respectivamente.

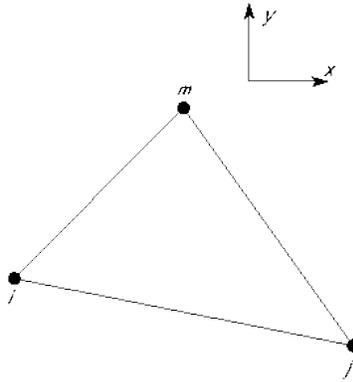


Figura A.5. Elemento de tres nodos

La aproximación principal dentro del método de elementos finitos, consiste en asumir de una forma particular, el modo en que los componentes de los desplazamientos varían dentro del dominio bajo investigación. Los componentes de desplazamiento de cada elemento asumen una forma polinomial simple, donde el orden del polinomio dependerá del número de nodos del elemento. Por lo tanto,

los componentes de desplazamiento serán expresados en términos de sus valores nodales. Por ejemplo, si se consideran las ecuaciones de desplazamiento para los tres nodos del elemento triangular que se muestra en la Fig A.5:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3y \\ v &= b_1 + b_2x + b_3y \end{aligned} \tag{A.9}$$

Las seis constantes ($a_1 \rightarrow b_3$) llamadas coordenadas generales o amplitudes generales de desplazamiento, pueden ser expresadas en términos de desplazamientos nodales mediante la sustitución de las coordenadas nodales dentro de las ecuaciones A.9, entonces se tiene que llegar a la solución de dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas, planteadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2x_i + a_3y_i \\ u_j &= a_1 + a_2x_j + a_3y_j \\ u_m &= a_1 + a_2x_m + a_3y_m \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned} v_i &= b_1 + b_2x_i + b_3y_i \\ v_j &= b_1 + b_2x_j + b_3y_j \\ v_m &= b_1 + b_2x_m + b_3y_m \end{aligned} \tag{A.11}$$

Las ecuaciones anteriores se resuelven para $a_1 \rightarrow b_3$ en términos de los desplazamientos nodales u_i, u_j, u_m, v_i, v_j y v_m y así obtener:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{u_i \ u_j \ u_m \ v_i \ v_j \ v_m\}^T = [N] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{nodos} \tag{A.12}$$

Donde la matriz $[N]$ es conocida como la matriz de *funciones de forma*. Los componentes de desplazamiento u y v ahora estarán expresados en términos de sus valores en los nodos. Por lo tanto, para elementos de tres o cuatro nodos existe una variación lineal de los desplazamientos a través del elemento como se observa

en la Fig A.6. Para elementos de orden superior de seis u ocho nodos, el campo de desplazamientos variará cuadráticamente a través del elemento.

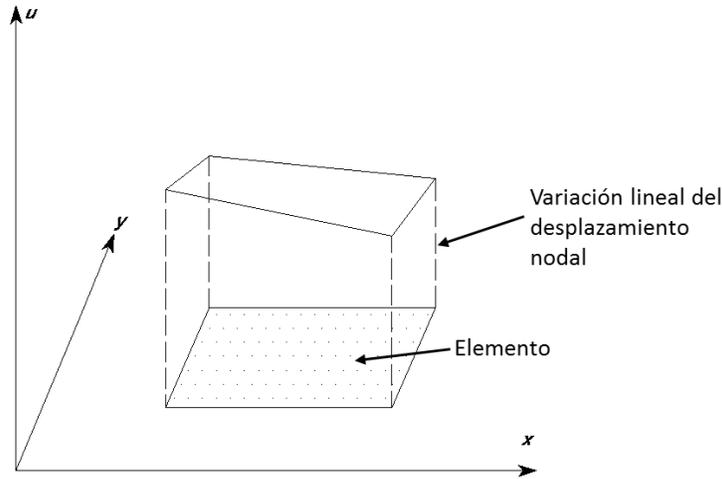


Figura A.6. Variación lineal de desplazamiento a través de un elemento de 4 nodos

A.4 COMPATIBILIDAD

La exactitud de un análisis de elementos finitos dependerá del tamaño de los elementos y de la naturaleza de los modelos de desplazamientos. La exactitud se incrementará conforme los elementos se hagan más pequeños y el modelo de desplazamiento satisfaga las siguientes condiciones de *compatibilidad*:

- Continuidad del campo de desplazamientos. Con el fin de evitar que ocurran vacíos o traslapes cuando se apliquen cargas al dominio, los modelos de desplazamiento deben ser continuos a través de cada elemento. Esto se puede lograr asegurando que los desplazamientos en un lado del elemento dependan solo de los desplazamientos de los nodos en ese lado.
- El modelo de desplazamiento debe ser capaz de representar el movimiento del cuerpo rígido. Ejemplos de tales movimientos pueden ser las traslaciones y rotaciones. Tales desplazamientos no inducen deformaciones en un elemento, Fig A.7.

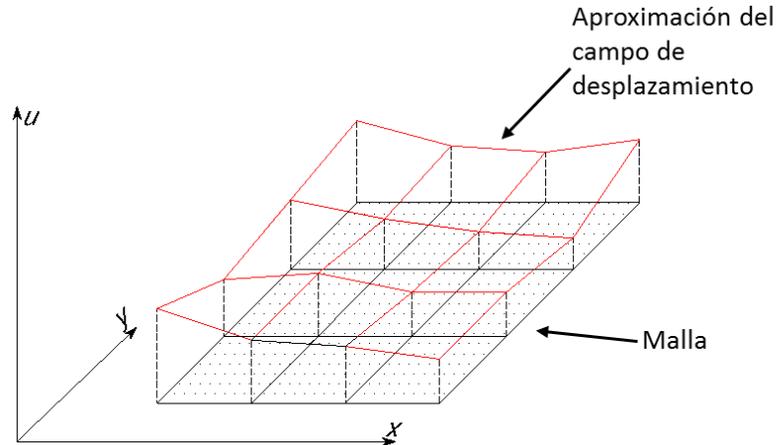


Figura A.7. Variación del desplazamiento sobre una malla de elementos de 4 nodos

- El modelo de desplazamiento debe ser capaz de representar las velocidades de deformación constantes del elemento.

La característica principal en cuanto a la aproximación del elemento, es que la variación de los desplazamientos desconocidos dentro de un elemento se expresa como una función simple del desplazamiento en los nodos. Por lo tanto, el problema de determinar el campo de desplazamientos en toda la malla de elementos finitos, se reduce a determinar los componentes de desplazamiento en un número finito de nodos. Estos desplazamientos nodales se conocen como *grados de libertad*. Para problemas bidimensionales se tienen dos grados de libertad en cada nodo: los desplazamientos u y v .

Por otra parte, se deben seleccionar los modelos de desplazamiento de tal forma que sean independientes de la orientación del sistema de coordenadas local, propiedad conocida como isotropía geométrica.

A.5 ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS

En la Fig A.8 se muestra un elemento cuadrangular isoparamétrico de ocho nodos. Este tipo de elementos son ampliamente usados en software geotécnico basado en el método de los elementos finitos, debido a la sencillez de formular sus ecuaciones

y su fácil modificación mediante la añadidura de nodos internos que sirven para representar con precisión los bordes curvados.

El elemento *global* se obtiene de un elemento matriz o elemento *parental* con el mismo número de nodos, pero definido con respecto a un sistema de coordenadas *naturales*. La Fig A.8 muestra la configuración del elemento parental. Las coordenadas naturales *S* y *T* del elemento satisfacen las condiciones $-1 \leq S \leq 1$ y $-1 \leq T \leq 1$.

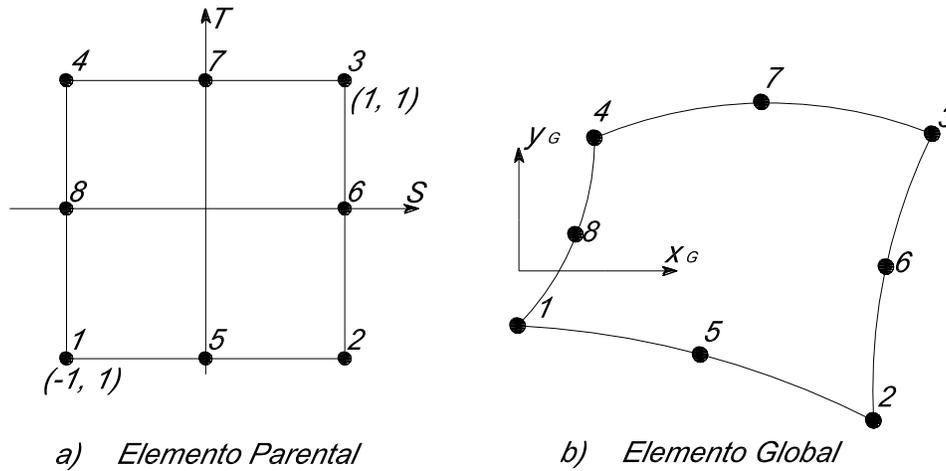


Figura A.8. Elemento isoparamétrico de 8 nodos

El procedimiento básico para la formulación de los elementos finitos isoparamétricos consiste en expresar los desplazamientos y la geometría de los elementos en términos de las funciones de interpolación usando el sistema de coordenadas naturales. El termino isoparamétrico surge del hecho de que la descripción paramétrica utilizada para describir la variación de los desplazamientos desconocidos dentro de un elemento, es exactamente igual a la utilizada para ubicar la geometría del elemento desde los *ejes globales* a los *ejes naturales*.

Para el elemento mostrado en la Fig A.8 las coordenadas globales de un punto en el elemento se pueden expresar por las interpolaciones de las coordenadas, mostradas a continuación:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i ; y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \tag{A.13}$$

Donde x_i y y_i son las coordenadas globales de los ocho nodos del elemento, y N_i , $i = 1, \dots, 8$, son las llamadas *funciones de interpolación*. Para elementos isoparamétricos, las funciones de interpolación están expresadas en términos de las coordenadas naturales S y T que varían de -1 a $+1$. Para la construcción de las funciones de interpolación de un elemento isoparamétrico de ocho nodos, se utilizan las siguientes propiedades. En primer lugar, hay una función de interpolación correspondiente a cada nodo en el elemento y cada función es cuadrática en las coordenadas naturales S y T . En segundo lugar, la función de interpolación N_1 es igual a 1 en el nodo 1 ($S = -1, T = -1$) y es igual a cero en los otros siete nodos; una relación similar se puede aplicar a las funciones de interpolación N_2, N_3, \dots, N_8 . Usando estas propiedades se puede demostrar que las funciones de interpolación toman la forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Nodos internos:} & \text{Nodos principales externos:} \\
 N_5 = 1/2 (1 - S^2)(1 - T) & N_1 = 1/4 (1 - S)(1 - T) - 1/2 N_5 - 1/2 N_8 \\
 N_6 = 1/2 (1 + S)(1 - T^2) & N_2 = 1/4 (1 + S)(1 - T) - 1/2 N_5 - 1/2 N_6 \quad (\text{A. 14}) \\
 N_7 = 1/2 (1 - S^2)(1 + T) & N_3 = 1/4 (1 + S)(1 + T) - 1/2 N_6 - 1/2 N_7 \\
 N_8 = 1/2 (1 - S)(1 - T^2) & N_4 = 1/4 (1 - S)(1 + T) - 1/2 N_7 - 1/2 N_8
 \end{array}$$

Puesto que el elemento es isoparamétrico, el desplazamiento dentro del elemento se interpola de la misma manera que la geometría. Por lo tanto, las funciones de interpolación anteriores N_1, N_2, \dots, N_8 se utilizan como las funciones de forma en la ecuación A.12.

La ventaja principal de la formulación isoparamétrica es que las ecuaciones del elemento únicamente necesitan ser evaluadas en el sistema de coordenadas del elemento parental. Entonces, para cada elemento en la malla se puede calcular las integrales requeridas para la obtención de la matriz de rigideces por un procedimiento estándar. Las integraciones solo necesitan ser desarrolladas sobre un cuadrado, con S y T variando entre -1 y $+1$.

A.6 ECUACIONES DE LOS ELEMENTOS

Las ecuaciones de los elementos son aquellas que rigen el comportamiento de las deformaciones de cada elemento. Estas, en esencia, combinan la compatibilidad, el equilibrio y las condiciones constitutivas.

Desplazamientos: Como se señaló anteriormente, los desplazamientos se asumen como:

$$\{\Delta \mathbf{d}\} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{Bmatrix}_n = [N] \{\Delta \mathbf{d}\}_n \quad (\text{A. 15})$$

Deformaciones: Si los desplazamientos son definidos por funciones continuas, u , v y w en las direcciones x , y y z respectivamente, las deformaciones (asumiendo la teoría de pequeñas deformaciones y una convención de signos con la compresión positiva) se definen como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\partial u}{\partial x}; & \varepsilon_y &= -\frac{\partial v}{\partial y}; & \varepsilon_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; & \gamma_{xz} &= -\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

Las deformaciones correspondientes a los desplazamientos de la ecuación 5.15 se deducen de la ecuación A.16:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_x &= -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial x}; & \Delta \varepsilon_y &= -\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}; & \Delta \gamma_{xy} &= -\frac{\partial(\Delta u)}{\partial y} - \frac{\partial(\Delta v)}{\partial x} \\ \Delta \varepsilon_z &= \Delta \gamma_{xz} = \Delta \gamma_{zy} = 0; & \{\Delta \varepsilon\}^T &= \{\Delta \varepsilon_x \ \Delta \varepsilon_y \ \Delta \gamma_{xy} \ \Delta \varepsilon_z\}^T \end{aligned} \quad (\text{A. 17})$$

Combinando las ecuaciones A.15 y A.17 para un elemento con n nodos, se llega a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\varepsilon_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta v_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta v_2 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta u_n \\ \Delta v_n \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 18})$$

Lo cual, también se puede escribir como:

$$\{\Delta\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{\Delta\mathbf{d}\}_n \quad (\text{A. 19})$$

Donde la matriz $[\mathbf{B}]$ contiene solamente derivadas de las funciones de forma N_i , mientras que el vector $\{\Delta\mathbf{d}\}_n$ contiene los desplazamientos nodales de cada elemento.

En el caso de usar elementos isoparamétricos, las funciones de forma son idénticas a las funciones de interpolación, y N_i dependerá únicamente de las coordenadas naturales S y T . En consecuencia, las derivadas globales $\partial N_i/\partial x$, $\partial N_i/\partial y$ en la ecuación A.18 no podrán ser determinadas directamente. Sin embargo, utilizando la regla de la cadena, que relaciona las derivadas de x y y con las derivadas de S y T , se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial S} & \frac{\partial N_i}{\partial T} \end{Bmatrix}^T = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \quad (\text{A. 20})$$

Donde $[\mathbf{J}]$ es la matriz jacobiana, que es una matriz compuesta por las primeras derivadas parciales de una transformación de coordenadas:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial S} & \frac{\partial y}{\partial S} \\ \frac{\partial x}{\partial T} & \frac{\partial y}{\partial T} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 21})$$

Por lo tanto, si se obtiene la matriz inversa de la ecuación A.20, las derivadas globales de las funciones de interpolación están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial T} & -\frac{\partial y}{\partial S} \\ -\frac{\partial x}{\partial T} & \frac{\partial x}{\partial S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial S} \\ \frac{\partial N_i}{\partial T} \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 22})$$

Donde $|J|$ es el determinante Jacobiano:

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial S} \frac{\partial y}{\partial T} - \frac{\partial y}{\partial S} \frac{\partial x}{\partial T} \quad (\text{A. 23})$$

Las derivadas de las coordenadas en las ecuaciones A.22 y A.23, que se obtienen de la transformación jacobiana, se pueden encontrar por medio de la diferenciación de las relaciones isoparamétricas dadas en la ecuación A.13.

Modelo constitutivo. Esta es una descripción del comportamiento del material. Por lo general toma la forma de una relación entre los esfuerzos y las deformaciones, por lo que proporciona un vínculo entre el equilibrio y la compatibilidad.

Para efectos de cálculo, el comportamiento constitutivo tiene que ser expresado matemáticamente de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\sigma_z \\ \Delta\tau_{xy} \\ \Delta\tau_{xz} \\ \Delta\tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x \\ \Delta\varepsilon_y \\ \Delta\varepsilon_z \\ \Delta\gamma_{xy} \\ \Delta\gamma_{xz} \\ \Delta\gamma_{zy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 24})$$

De forma condensada la misma ecuación queda:

$$\Delta\sigma = [D] \Delta\varepsilon \quad (\text{A. 25})$$

Si se considera la relación esfuerzo-deformación como la ley generalizada de Hooke para un material isotrópico, elástico y lineal, la matriz $[D]$ toma la siguiente forma:

$$\frac{E}{(1 + \mu)} \begin{bmatrix} (1 - \mu) & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & (1 - \mu) & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & (1 - \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/2 - \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2 - \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2 - \mu) \end{bmatrix} \quad (\text{A. 26})$$

Donde E y μ son el módulo de Young y la relación de Poisson respectivamente. Para determinar las ecuaciones de un elemento compuesto de un material con comportamiento lineal, se debe recurrir al principio de energía potencial mínima.

A.6.1 Principio de energía potencial mínima y obtención de la matriz de rigidez

El principio de energía potencial mínima es un teorema variacional de mecánica de sólidos que se utiliza comúnmente para deducir las ecuaciones de equilibrio de los elementos finitos. Estos teoremas son derivados de la aplicación de los principios energéticos de mecánica, específicamente del *principio de trabajo virtual*.

El principio establece que la posición de equilibrio estático de un cuerpo elástico lineal cargado, es aquella que minimiza la energía potencial total.

La energía potencial total de un cuerpo elástico se define como:

$$\text{Energía potencia total } (E) = \text{Energía de deformación } (W) - \text{Trabajo realizado por las cargas aplicadas } (L)$$

El principio de energía potencial mínima establece que para el equilibrio se debe cumplir:

$$\delta \Delta E = \delta \Delta W - \delta \Delta L = 0 \quad (\text{A. 27})$$

El principio dice: *de todas las configuraciones posibles de desplazamientos que un cuerpo puede asumir satisfaciendo la compatibilidad y las condiciones cinemáticas de frontera, la configuración que cumple con el equilibrio es la que hace a la energía potencial mínima.*

La funcional de la energía potencial es:

$$E = \int_{Vol} \int \int \Delta W(u, v) - \int_{Vol} \int \int (\Delta F_x u + \Delta F_y v) dVol - \int_{Srf} \int (\Delta T_x u + \Delta T_y v) dSrf \quad (A. 28)$$

La ecuación A.28 puede ser expresada de forma matricial. Consideremos a la energía de deformación, ΔW , de la siguiente forma:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon\}^T \{\Delta \sigma\} dVol = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{D}] \{\Delta \varepsilon\} dVol \quad (A. 29)$$

Donde la integración será sobre el volumen del cuerpo.

El trabajo realizado por las cargas aplicadas, ΔL , se puede dividir en las contribuciones correspondientes a las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie, para expresarse:

$$\Delta L = \int_{Vol} \{\Delta \mathbf{d}\}^T \{\Delta \mathbf{F}\} dVol + \int_{Srf} \{\Delta \mathbf{d}\}^T \{\Delta \mathbf{T}\} dSrf \quad (A. 30)$$

Donde:

$\{\Delta \mathbf{d}\}^T = \{\Delta u, \Delta v\}$ = Desplazamientos

$\{\Delta \mathbf{F}\}^T = \{\Delta F_x, \Delta F_y\}$ = Fuerzas de cuerpo

$\{\Delta \mathbf{T}\}^T = \{\Delta T_x, \Delta T_y\}$ = Fuerzas de superficie (tracciones de superficie)

Srf es la parte de la frontera del dominio sobre la que se aplica las fuerzas de superficie.

Combinando las ecuaciones A.29 y A.30 se obtiene la energía potencial total del elemento:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \int_{Vol} \{\Delta \varepsilon\}^T [\mathbf{D}] \{\Delta \varepsilon\} dVol - \int_{Vol} \{\Delta \mathbf{d}\}^T \{\Delta \mathbf{F}\} dVol - \int_{Srf} \{\Delta \mathbf{d}\}^T \{\Delta \mathbf{T}\} dSrf \quad (A.31)$$

Ahora la esencia del método de elementos finitos consiste en discretizar el problema en elementos. Esto tiene dos efectos. Primero, la energía potencial total es reemplazada por la sumatoria de la energía potencial en cada uno de los elementos:

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N \Delta E_i \quad (A.32)$$

Donde N es el número de elementos. Segundo, la variación de los desplazamientos puede expresarse en términos de valores nodales utilizando la ecuación A.15. Por lo tanto, la ecuación A.31 queda:

$$\Delta E = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \int_{Vol} (\{\Delta \mathbf{d}\}_n^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\Delta \mathbf{d}\}_n - 2\{\Delta \mathbf{d}\}_n^T [\mathbf{N}]^T \{\Delta \mathbf{F}\}) dVol - \int_{Srf} \{\Delta \mathbf{d}\}_n^T [\mathbf{N}] \{\Delta \mathbf{T}\} dSrf \right]_i \quad (A.33)$$

Ahora la integral de volumen será evaluada sobre el volumen de un elemento y la integral de superficie será evaluada en la porción de la frontera del elemento donde son especificadas las fuerzas de superficie. Las incógnitas principales son los incrementos de desplazamientos nodales sobre la malla completa, $\{\Delta \mathbf{d}\}_n$. Minimizando la energía potencial con respecto a los incrementos en los desplazamientos nodales, se obtiene:

$$\delta \Delta E = \sum_{i=1}^N (\{\delta \Delta \mathbf{d}\}_n^T)_i \left[\begin{array}{c} \int_{Vol} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dVol \{\Delta \mathbf{d}\}_n - \int_{Vol} [\mathbf{N}]^T \{\Delta \mathbf{F}\} dVol - \\ \int_{Srf} [\mathbf{N}]^T \{\Delta \mathbf{T}\} dSrf \end{array} \right]_i = 0 \quad (\text{A. 34})$$

Lo cual es equivalente a un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\sum_{i=1}^N [\mathbf{K}_E]_i (\{\Delta \delta\}_n)_i = \sum_{i=1}^N \{\Delta \mathbf{R}_E\} \quad (\text{A. 35})$$

Donde:

$$[\mathbf{K}_E] = \int_{Vol} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dVol = \text{Matriz de rigidez del elemento}$$

$$\{\Delta \mathbf{R}_E\} = \int_{Vol} [\mathbf{N}]^T \{\Delta \mathbf{F}\} dVol - \int_{Srf} [\mathbf{N}]^T \{\Delta \mathbf{T}\} dSrf = \text{Vector de fuerzas nodales del elemento}$$

Así, el problema se reduce a determinar y sumar *las ecuaciones de equilibrio de los elementos*:

$$[\mathbf{K}_E] \{\Delta \mathbf{d}\}_n = \{\Delta \mathbf{R}_E\} \quad (\text{A. 36})$$

La matriz de rigidez del elemento para elementos isoparamétricos se evalúa utilizando el sistema de coordenadas naturales. De la transformación isoparamétrica de coordenadas, obtenemos:

$$dVol = t dx dy = t |\mathbf{J}| dS dT \quad (\text{A. 37})$$

Para problemas bidimensionales, el espesor t será unitario y la matriz de rigidez del elemento se convierte en:

$$[\mathbf{K}_E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] |\mathbf{J}| dS dT \quad (\text{A. 38})$$

En la ecuación A.38 $|\mathbf{J}|$ esta dado por la ecuación A.23 y representa el determinante de la matriz jacobiana que surge de la correlación entre los elementos globales y parentales. Generalmente, la evaluación explícita de la ecuación A.38 no puede llevarse a cabo, a excepción de formas especiales de los elementos. Por lo que es conveniente usar procedimientos de integración numérica.

A.6.2 Integración numérica

Para evaluar la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del elemento, se deben realizar algunas integraciones. La evaluación explícita de estas integrales generalmente es complicada exceptuando casos especiales, por lo tanto, se debe utilizar un esquema de integración numérica. Por ejemplo, si se considera la integral unidimensional, $\int_{-1}^1 f(x) dx$, mostrada gráficamente en la Fig A.9a. La forma más simple de realizar una integración numérica es dividir el rango x de la integral (por ejemplo, $-1 < x < 1$) en un número de segmentos iguales de tamaño a y asumir que el área bajo la curva es igual a la suma de las áreas trapezoidales $a(f(x_i) + f(x_{i-}))/2$. Tal procedimiento es conocido como la *regla Trapezoidal* y se puede refinar a fin de obtener una mayor precisión para el menor número de evaluaciones de funciones, $f(x_i)$, para esto hay una gran cantidad de procedimientos disponibles.

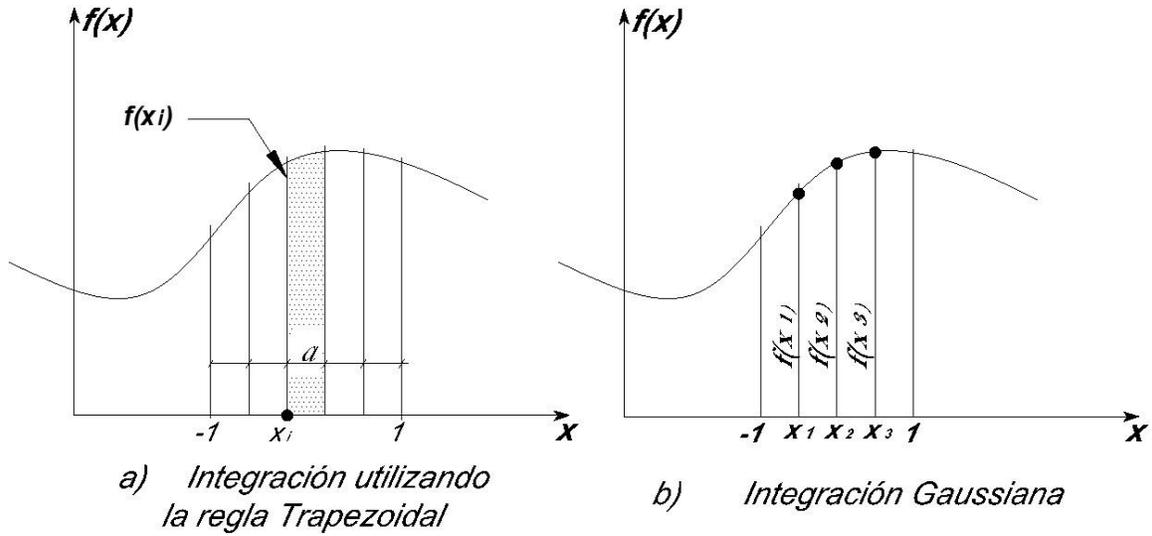


Figura A.9. Ejemplos de integración numérica

En esencia, la integral de una función se sustituye por una suma ponderada de la función evaluada en un número de *puntos de integración* (puntos de muestreo). Por ejemplo, se considera una integral unidimensional con tres puntos de integración, Fig A.9b:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^3 W_i f(x_i) = W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + W_3 f(x_3) \quad (A.39)$$

Donde

W_i = Pesos de cada segmento

$f(x_i)$ = Valores de la función en los tres puntos de integración $x_{i=1,2,3}$.

Los valores de los pesos, W_i , y la ubicación de los puntos de integración, x_i , dependen de la naturaleza del sistema de integración que se este utilizando. El número de puntos de integración determina el *orden de integración*. Un orden de integración mayor da procesos de integración más exactos. Desafortunadamente, el número de evaluaciones de la función también depende del orden de la función. Esto es particularmente importante para integrales de dos o tres dimensiones donde se requiere un arreglo de puntos de integración.

Por ejemplo, se requiere un arreglo de puntos de integración de 3×3 para un problema bidimensional. Para un elemento tridimensional este arreglo se incrementará a uno de $3 \times 3 \times 3$.

El método más común de integración numérica es la *integración Gaussiana*, y los puntos de integración con frecuencia son llamados *puntos de Gauss*. Para la integración de Gauss, el orden de integración óptimo dependerá del tipo y la forma de elemento que se va a utilizar. En experiencia de diversos autores (Potts y Zdravkovic, 1999) se ha demostrado que para elementos isoparamétricos de 8 nodos puede utilizarse un orden de integración, ya sea, 2×2 o 3×3 . En la Fig A.10 se muestran las ubicaciones de los puntos de Gauss en el elemento parental y un ejemplo de su posición en un elemento global para órdenes de 2×2 y 3×3 . Los órdenes de integración 2×2 y 3×3 con frecuencia son llamados integración *reducida* y *completa* respectivamente.

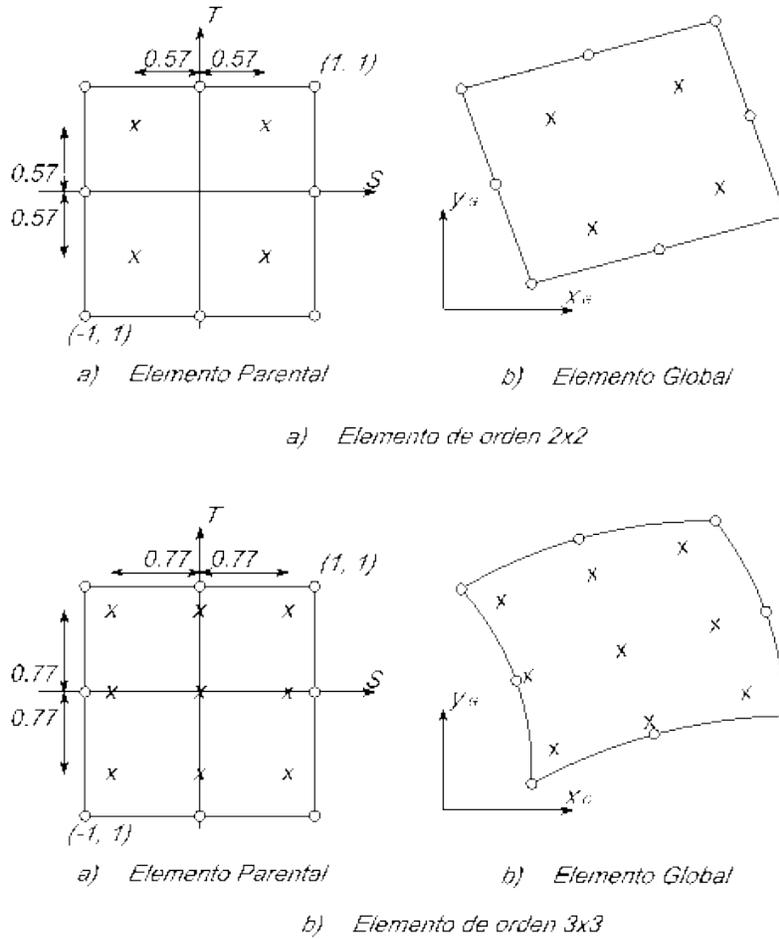


Figura A.10. Ubicación de los puntos de Gauss

A.7 ECUACIONES GLOBALES

El siguiente paso en la formulación de las ecuaciones de los elementos finitos es el ensamble de las ecuaciones de equilibrio de cada elemento dentro de un conjunto de ecuaciones globales.

$$[\mathbf{K}_G]\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG} = \{\Delta \mathbf{R}_G\} \quad (\text{A. 40})$$

Donde:

$[\mathbf{K}_G]$ = Matriz de rigidez global

$\{\Delta \mathbf{d}\}_{nG}$ = vector de desplazamientos nodales de toda la malla de elementos finitos

$\{\Delta \mathbf{R}_G\}$ = vector global de cargas

Los términos de la matriz de rigidez global se obtienen sumando las contribuciones de cada uno de los elementos, teniendo en cuenta sus respectivos grados de libertad. Los términos del vector global de cargas se obtienen de una forma similar mediante la sumatoria de las cargas actuantes en cada nodo.

Como se puede observar en la ecuación A.38, si la matriz constitutiva $[D]$ es simétrica, las matrices de rigidez de los elementos y la matriz de rigidez global también serán simétricas. Esta situación se produce para una amplia gama de comportamiento de los materiales, incluyendo el comportamiento elástico lineal. Los términos diferentes de cero en la matriz global de rigidez, surgen de las conexiones entre los grados de libertad a través de los elementos. A partir de la geometría de la malla, cada grado de libertad únicamente estará conectado a un reducido número de grados de libertad; por lo tanto, la matriz de rigidez global contendrá muchos términos iguales a cero. Además, muchos de estos términos iguales a cero, estarán fuera de la diagonal principal.

A.7.1 Método de ensamble directo de la matriz de rigidez

La esencia del método directo de rigidez es el ensamblar los términos individuales de la matriz de rigidez de cada elemento, $[K_E]$, dentro de la matriz global de rigideces, $[K_G]$, de acuerdo con el esquema de numeración de los grados de libertad globales. A nivel de elemento, los términos de la matriz de rigideces corresponden a la rigidez relativa entre los grados de libertad contenidos en el elemento. A nivel de la malla, los términos de la matriz de rigideces corresponden a la rigidez relativa entre los grados de libertad sobre la malla completa. Por esta razón, el tamaño de la matriz de rigidez global dependerá del número total de grados de libertad y los términos diferentes de cero se producirán a partir de las conexiones de los grados de libertad a través de los elementos.

Para ilustrar las etapas del proceso de ensamble se puede utilizar una malla con elementos rectangulares (4 nodos) con un grado de libertad en cada nodo (nota: para análisis bidimensionales es normal utilizar dos grados de libertad en cada nodo).

La numeración de los grados de libertad y la forma de la matriz de rigidez para un elemento de 4 nodos se ilustra en la Fig A.11. Se supone que todas las matrices de rigidez son simétricas y por lo tanto solamente serán indicadas la diagonal principal y la parte superior de los términos.

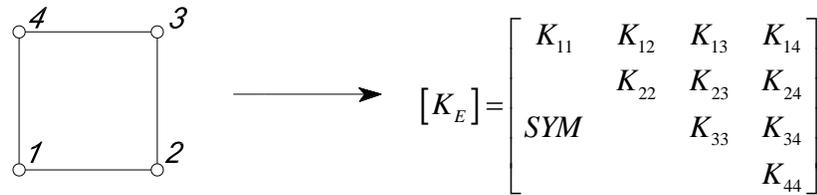


Figura A.11. Matriz de rigidez de un elemento de 4 nodos

Si este único elemento se convierte en parte de una malla de elementos, entonces, con respecto a la numeración global de los grados de libertad, la matriz de rigidez tendrá la forma mostrada en la Fig A.12. Los valores numéricos de los términos de rigideces permanecen iguales, pero las cantidades que ellos representan en términos globales cambiarán. Lo importante es notar que cada fila y columna de la matriz de rigidez de un elemento corresponde a cada grado de libertad del elemento.

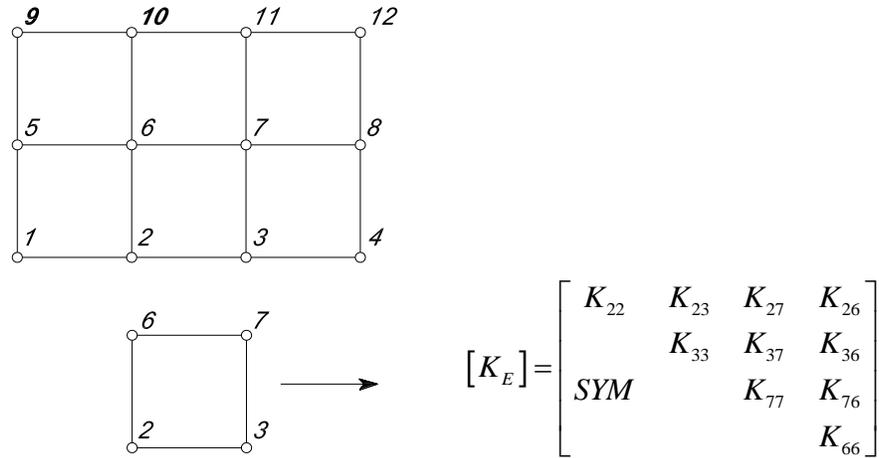


Figura A.12. Matriz de rigidez del elemento en términos de grados de libertad globales

La Fig A.13 muestra una malla simple compuesta por dos elementos, así como la numeración de sus nodos. Las etapas en la Fig A.13 muestran el proceso de ensamble completo de la matriz de rigidez global para esta malla. Los términos en la matriz de rigidez global correspondientes a los grados de libertad que son comunes a más de un elemento surgen de la suma de las contribuciones de los respectivos elementos. Para los grados de libertad que ocurren en solo un elemento hay solo un término ensamblado en la matriz de rigidez global.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Atcherley L. W. 1904. “*On some disregarded points in the stability of masonry dams*”. Draper’s company research memoirs, Technical Series, II.
2. Audoy M. 1820. “*Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau. Mémorial de l’Officier du Génie*” 4: 1 – 96, plates 1- 6.
3. Bélidor B.F. 1729. “*La science des ingenierus dans la conduit des travaux de fortification at architecture civile*”, Claude Jombert. Paris.
4. Bretas E.M., Lemos J.V., and Lourenço P.B. (2012) “*Masonry Dams: Analysis of the Historical Profiles of Sazilly, Delocre, and Rankine*”. International Journal of Architectural Heritage. Vo. 6, No. 1; 6(1); pp 19-45.
5. Cain W. (1909). “*Stresses in masonry dams*”, Transactions ASCE, p. 208.
6. Comisión Federal de Electricidad (2008). “*Manual de Diseño de Obras Civiles, Diseño por Sismo*”, México.
7. Comisión Nacional del Agua (2010). “Manual para capacitación en seguridad de presas. Módulo: Evaluación de la estabilidad de presas de concreto”, México.
8. Creager W.P. (1917). “*Engineering of masonry dams*”, John wiley & sons. New York.
9. Creager W.P., Justin J. D., Hinds J. (1945). “*Engineering for dams. Volume II: Concrete Dams*”. John Wiley & Sons, Inc. Chapman & Hall, Ltd. New York.
10. Crisfield M. A. (1986). “*Finite elements and solution procedures for structural analysis*”, Pineridge press, Swansea, UK.
11. Desai C.S., Abel J. F. (1972). “*Introduction to the finite element method : A numerical method for engineering analysis*”. New York : Van Nostrand Reinhold, pp. 469.
12. Ebeling R. M. et al. (2000) “*Evaluation and comparison of stability analysis and uplift criteria for concrete gravity dams by three federal agencies*”. USACE - US Army Corps of Engineers, Pub. No. ERDC/ITL TR-00-1. 187 p.
13. Flores R., Hristov V., Li Liu X. (2001). “*Geotecnia en ingeniería de presas*”, Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, México.

14. Henny D.C. (1934). "*Stability of straight concrete gravity dams*", Transactions ASCE, p. 1041-1107.
15. Heyman J. (1998). "*Structural analysis: a historical approach*". Cambridge university Press, Cambridge.
16. Heyman J. 2003. "*Wren, Hooke and Partners. Proceedings of the First International Congress on Construction History*" (Huerta S. (ed.)). Instituto Juan de Herrera, Madrid, pp. 3 – 9.
17. Hinds J. (1932). "*200-years-old masonry dams in use in México*", Engineering news record, p. 251.
18. Hinds J. (1953). "*Continuous development of dams since 1950*", Transactions ASCE, p. 489-520.
19. Hooke R. (1676). "*A description of helioscope, and some other instruments*". London.
20. Huerta S. 2004. "*Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*". Instituto Juan de Herrera, Madrid.
21. Huerta S. 2006. "*Structural design in the work of Gaudí*". Architectural Science Review, 49 (4): 324 – 339.
22. Huerta S. 2010. "*The safety of masonry buttresses*". Engineering History and Heritage 163, pp. 3-24.
23. Leliavsky S. (1963). "*Uplift in gravity dams: Calculation methods, experiments and design theories*". Constable & Co. London
24. MDS-CFE. (2010). "*Manual de Diseño de Obras Civiles. Diseño por Sismo*", Comisión Federal de Electricidad, México.
25. McDowell F. W., Clabaugh S. E. (1979). "*Ignimbrites of the Sierra Madre Occidental and their relation to the tectonic history of western Mexico*". Geological Society of America Special Paper, 180, 113- 124.
26. McDowell F. W., Keizer R. P. (1977). "*Timing of mid-Tertiary volcanism in the Sierra Madre Occidental between Durango City and Mazatlán, Mexico*". Geological Society of America Bulletin, 88, 1479-1487.

27. Meli R., Sánchez A.R. (1997). "*Rehabilitation of the Mexico City Cathedral*". Structural engineering International. Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering, vol. 7, No. 2, May.
28. Meli R. (1998). "*Ingeniería Estructural de los Edificios Históricos*". Ed. Fundación ICA. México.
29. Merriman M. (1892). "*Retaining Walls and Masonry Dams*". John Wiley & Sons, New York, 1892.
30. Moseley H. (1843). *Mechanical principles of engineering and architecture*, Longman, Brown, Green and Lognmans. London.
31. NTC-DEOIH. (2004). "*Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Obras e Instalaciones Hidráulicas*". Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Gaceta Oficial del Gobierno del Distrito Federal, México.
32. NTCM. (2004). "*Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería*". Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Gaceta Oficial del Gobierno del Distrito Federal, México.
33. Poleni G. (c 1748). "*Memorie istoriche della gran cupola del tempio vaticano*", Padova. MS. Cod. Marc. It. IV, 656-656a (=5517-8), 327 fols.
34. Potts D. M., Zdravkovic L. (1999). "Finite element analysis in geotechnical engineering. Theory". Thomas Telford, London.
35. Ralston A. (1965). "*A first course in numerical analysis*", International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill.
36. Rankine W.J.M. (1858). *A manual of applied mechanics*, Charles Griffin. London.
37. Reyes J. C., (1999). "*El estado límite de servicio en el diseño sísmico d edificios*". Tesis de doctorado en ingeniería, Posgrado en Ingeniería, UNAM, México.
38. SAGARPA. (2009). "*Presas de mampostería*". Secretaria de Agricultura, Ganadería, Desarrollo rural, Presa y Alimentación.

39. CSI. (2015). *“Analysis Reference Manual for SAP2000 v.17”*. Computers & Structures, Inc. Structural and earthquake engineering software. Berkeley, California, USA.
40. Sánchez T. A. (1995). *“Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería”*. CENAPRED, México.
41. Schnitter N. J. (1994). *“A history of dams: the useful pyramids”*. A. A. Balkema, Rotterdam, pp. 266.
42. Sheriff M.A., Fang Y.S., Sheriff R.I. (1987). *“Ka and K0 behind rotating and non-yielding walls”*. Journal of Geotechnical Engineering ASCE. Vol. 110 No. 1, pp. 41–56.
43. USACE (1995). *“Gravity Dam Design”*. US Army Corps of Engineers, Pub. No. EM 1110-2-2200. 88 p.
44. USBR (1983). *“Dams and Public Safety (A Water Resources Technical Publication) by Robert B. Jansen”*, US Bureau of Reclamation, U.S. Department of the Interior; pp. 33 – 36
45. Wegmann E. (1927). *“The design and construction of dams”*. 8th edition, New York.
46. Westergaard H.M. (1933). *“Water pressures on dams during earthquakes”*, Transactions, ASCE, Vol. 98, p.418.
47. Young Th. 1824 (1817). *Bridge. In: Supplement to the fourth, fifth and sixth editions of the Encyclopaedia Britannica*, 2: 497-520, p. 42-44. Edinburgh: Archibald Constable. Republished in part in: *Miscellaneous Works*, edited by G. Peacock. London: John Murray, 1855.
48. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z. (2013). *“Finite element method: its basis and fundamentals”*. 7th edition, Amsterdam, Butterworth-Heinemann.

Páginas WEB

<http://www.lja.mx/2015/10/huracan-patricia-desbordo-la-presa-en-pabellon-de-hidalgo/>