



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**(INGENIERÍA CIVIL) – (GEOTECNIA)**

**ESTUDIO DE LOS MEDIOS GRANULARES POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS  
DISCRETOS**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**JESÚS SÁNCHEZ GUZMÁN**

**TUTOR PRINCIPAL**

**DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD**      **INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM**

**COMITÉ TUTOR**

**DR. BERNARD CAMBOU**      **ÉCOLE CENTRALE DE LYON, FR.**  
**DR. EFRAÍN OVANDO SHELLEY**      **INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM**  
**DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO**      **FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM**  
**DR. EDUARDO BOTERO JARAMILLO**      **INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CD., MX., MARZO DE 2017**

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. EFRAÍN OVANDO SHELLEY  
Secretario: DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO  
Vocal: DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD  
1<sup>er</sup>. Suplente: DR. EDUARDO BOTERO JARAMILLO  
2<sup>do</sup>. Suplente: DR. BERNARD CAMBOU

Lugares donde se realizó la tesis:

INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM  
—  
LABORATOIRE DE TRIBOLOGIE ET DYNAMIQUE DES SYSTEMES, ÉCOLE  
CENTRALE DE LYON, FRANCE

TUTOR DE TESIS:

DR. GABRIEL AUVINET GUICHARD

-----  
FIRMA

## **DEDICATORIAS**

A mi padre, fallecido justo cuando inicié esta espectacular aventura por el doctorado.

A mi familia.

A la educación pública de México.

# AGRADECIMIENTOS

Mi más sincero agradecimiento a las siguientes instituciones por contribuir al desarrollo de mis estudios doctorales:

- Universidad Nacional Autónoma de México
- Instituto de Ingeniería, UNAM
- Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología
- École Centrale de Lyon, Francia

Independientemente de sus valiosas contribuciones a mi formación académica, reconozco la dedicación por parte de los integrantes del comité tutor:

- Dr. Gabriel Auvinet, gracias por esperar treinta años mi llegada y transmitirme tan fascinante tema de investigación.
- Dr. Bernard Cambou, gracias por su confianza, convivencia y ayuda durante mis estancias en la ECL.
- Dr. Efraín Ovando, Dr. Rigoberto Rivera y Dr. Eduardo Botero, gracias por sus motivantes comentarios a lo largo del doctorado.

Necesitaría espacio excesivo para mencionar a todos mis amigos. Por tanto, me limito a agradecerles la convivencia en los distintos lugares de aprendizaje:

- Instituto de Ingeniería, UNAM
- École Centrale de Lyon, Francia
- Polytech Clermont Ferrand, Francia
- Itasca Consulting Group Inc. (Oficinas de Chile y Francia)
- Centro Universitario Cultural
- Departamento de Mecánica de Rocas e Inyecciones, CFE

*¡Estudia México! Entre la oscuridad y las grandes esferas, sólo hay algunos años de estudio.*

## RESUMEN

Esta tesis presenta un estudio de la estructura y del comportamiento mecánico de los medios granulares desde un punto de vista discreto (partícula por partícula). Se pretende así contribuir tanto a los conocimientos tradicionales de la geotecnia como a una teoría general de los medios granulares. Se recurre a un algoritmo geométrico y al método de elementos discretos (DEM) para formar muestras de materiales granulares y simular ensayos triaxiales. Las partículas son de forma esférica e interactúan entre sí en sus puntos de contacto de acuerdo con un modelo de contacto elástico lineal con fricción. Se analizan materiales de granulometría uniforme (partículas de igual tamaño), bimodal (dos tamaños) y continua.

Los medios granulares se describen mediante la evaluación estadística de características microestructurales como: número de contactos por partícula, repartición de contactos sobre la superficie de los granos, porosidad y distribución de tamaño de poros y de características micromecánicas como: magnitud de las fuerzas de contacto, orientación de las fuerzas de contacto y esfuerzos intragranulares. Las características anteriores permiten analizar la anisotropía geométrica (asociada con la repartición de contactos sobre la superficie de los granos), la anisotropía mecánica (asociada con la orientación de las fuerzas de contacto), las cadenas de fuerzas, las partículas inactivas, los contactos potencialmente inestables y la rotura de partículas. A su vez, estos fenómenos se utilizan para interpretar los esfuerzos y deformaciones a la escala global de los medios granulares.

Los resultados indican que el coeficiente de fricción interparticular y la granulometría determinan las características microestructurales y por lo tanto el comportamiento global. El enfoque discreto muestra que la resistencia global de los medios granulares está relacionada con la anisotropía geométrica y mecánica. En efecto, el ángulo de fricción interna se interpreta como el resultado conjunto de la trabazón entre partículas y de la fricción en los puntos de contacto. El análisis de la evolución de las características microestructurales y micromecánicas durante la prueba triaxial permite comprender los procesos de deformación causados por los esfuerzos externos.

La presente investigación culmina con la formulación de un modelo de comportamiento mecánico, que considera las deformaciones del medio como el resultado estadístico de los deslizamientos de los contactos y los esfuerzos como reflejo de las fuerzas de contacto.

Se concluye que el análisis de la información microestructural permite comprender mejor, ciertos conceptos elementales relativos a los medios granulares, así como su comportamiento global.

## **ABSTRACT**

This thesis studies the structure and mechanical behavior of granular media from a discrete viewpoint (particle by particle). This is intended to contribute both to the traditional knowledge of geotechnics and to a general theory of granular media. A geometric algorithm and the Discrete Element Method (DEM) are used to build granular samples and simulate triaxial tests. The particles are of spherical shape and interact with each other at their points of contact according to a linear elastic contact model with friction. Materials of uniform (particles of equal size), binary (two sizes), and continuous grain size distribution are analyzed.

Granular media are described by the statistical evaluation of microstructural characteristics as: number of contacts per particle, distribution of contacts on the surface of grains, porosity and pore size distribution and of micromechanical characteristics such as: magnitude and direction of contact forces and intragranular stresses. The mentioned characteristics allow analyzing the geometric anisotropy (associated with the distribution of contacts on the surface of the grains), mechanical anisotropy (associated with the orientation of contact forces), force chains, inactive particles, potentially unstable contacts and particle breakage. These phenomena are used to explain the stresses and deformations of the granular media at a macro scale.

The results obtained indicate that the interparticular coefficient of friction and grain size distribution determine the microstructural characteristics and therefore the overall behavior. The discrete approach shows that the overall resistance of a granular media is closely related to geometric and mechanical anisotropy. Indeed, the internal friction angle is interpreted as the joint result of interlocking of particles and friction at the points of contact. The analysis of the evolution of the microstructural and micromechanics characteristics during triaxial tests allows understanding the processes of deformation caused by the external stresses.

The present research culminates with the formulation of a model of mechanical behavior, where the medium deformations are considered as a statistical result of slips of contacts and the stresses as a consequence of contact forces.

It is concluded that, the analysis of microstructural information allows a better understanding some elementary concepts regarding to granular media and their overall behavior.

## RÉSUMÉ

Cette thèse présente une étude de la structure et du comportement mécanique des milieux granulaires d'un point de vue discret (particule par particule). L'objectif est de contribuer à la fois aux connaissances traditionnelles de la géotechnique et à une théorie générale des milieux granulaires. On utilise un algorithme géométrique et la méthode des éléments discrets (DEM) pour former des échantillons de matériaux granulaires et pour simuler des essais triaxiaux. Les particules sont de forme sphérique et interagissent à leurs points de contact conformément à un modèle de contact élastique linéaire avec frottement. On s'intéresse à des matériaux à granulométrie uniforme (particules de même taille), bimodale (deux tailles) et continue.

Les milieux granulaires sont décrits en ayant recours à une évaluation statistique des caractéristiques microstructurales telles que le nombre de contacts par particule, la distribution des contacts sur la surface des grains, la porosité et la distribution de taille des pores et des caractéristiques micromécaniques telles que la magnitude et l'orientation des forces de contact et les contraintes intragranulaires. L'évaluation de ces caractéristiques permet d'analyser l'anisotropie géométrique (associée à la distribution des contacts sur la surface des grains), l'anisotropie mécanique (associée à l'orientation des forces de contact), les chaînes de forces, les particules inactives, les contacts potentiellement instables et la rupture des particules. Ces phénomènes sont utilisés pour interpréter les contraintes et les déformations à l'échelle globale des milieux granulaires.

Les résultats indiquent que le coefficient de frottement interparticulaire et la granulométrie déterminent les caractéristiques microstructurales et donc le comportement global. L'approche discrète montre que la résistance globale des milieux granulaires est liée à l'anisotropie géométrique et mécanique. L'angle de frottement interne peut être interprété comme le résultat combiné de l'imbrication des particules et du frottement aux points de contact. L'analyse de l'évolution des caractéristiques microstructurales et micromécaniques lors de l'essai triaxial permet de comprendre les processus de déformation provoqués par des efforts extérieurs.

Cette recherche culmine avec la formulation d'un modèle de comportement mécanique, qui considère la déformation d'un milieu granulaire comme le résultat statistique des glissements des contacts et les contraintes comme un reflet des forces de contact.

Il est conclu que l'analyse des informations microstructurales permet de mieux comprendre certains concepts élémentaires relatifs aux milieux granulaires ainsi que leur comportement global.



## CONTENIDO

RESUMEN

NOTACIÓN

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 Objetivos .....	3
1.2 Alcances .....	4
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES .....	5
2.1 Geometría de los medios granulares .....	6
2.1.1 Tamaño de partículas .....	6
2.1.2 Forma de las partículas .....	6
2.1.3 Porosidad .....	7
2.1.4 Superficie específica .....	8
2.1.5 Distribución y densidad granulométrica .....	8
2.1.6 Porosidad generalizada.....	9
2.1.7 Distribuciones granulométricas generalizadas .....	9
2.1.8 Distribución de tamaño de poros .....	11
2.1.9 Granulometría generalizada .....	13
2.1.10 Distribución espacial de partículas .....	15
2.1.11 Número de coordinación .....	19
2.1.12 Repartición de contactos .....	20
2.1.13 Función característica binaria.....	22
2.2 Transmisión de esfuerzos en medios granulares .....	24
2.2.1 Fuerzas .....	24
2.2.2 Esfuerzos .....	26
2.3 Modelado numérico en geotecnia.....	28
2.3.1 Clasificación de los métodos numéricos.....	28
2.3.2 Métodos para medios continuos .....	30
2.3.3 Métodos para medios discontinuos.....	34
2.4 Método de elementos discretos (DEM) .....	35
2.4.1 Modelado de medios fracturados con el DEM.....	36
2.4.2 Modelado de medios granulares con el DEM .....	38
CAPÍTULO 3. SIMULACIÓN DE MEDIOS GRANULARES Y ESTUDIO DE SU ESTRUCTURA INICIAL.....	51
3.1 Método geométrico (Auvinet, 1975) .....	52
3.2 Método mecánico, PFC <sup>3D</sup> .....	53
3.2.1 Creación del recipiente en PFC <sup>3D</sup> .....	54
3.2.2 Generación de partículas en PFC <sup>3D</sup> .....	54
3.2.3 Condiciones de frontera e iniciales .....	55
3.2.4 Solución mecánica .....	56
3.2.5 Modelo de contacto elegido .....	57

3.3 Formación de la estructura granular .....	58
3.3.1 Parámetros de simulación.....	58
3.1.1 Procedimiento de formación de la estructura .....	59
3.4 Estudio de la estructura inicial de las muestras granulares .....	61
3.4.1 Porosidad .....	61
3.4.2 Distribución de tamaño de poros .....	65
3.4.3 Longitud de los poros en las direcciones cartesianas.....	70
3.4.4 Número de coordinación .....	72
3.4.5 Anisotropía geométrica .....	82
3.4.6 Granulometría generalizada <i>in situ</i> .....	89
3.4.7 Fuerzas de contacto.....	90
3.5 Representatividad de las muestras granulares .....	108
<b>CAPÍTULO 4. COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MEDIOS GRANULARES Y</b>	
<b>EVOLUCIÓN DE SU ESTRUCTURA .....</b>	<b>113</b>
4.1 Prueba triaxial.....	114
4.1.1 Procedimiento de simulación .....	114
4.1.2 Trayectorias de esfuerzos .....	116
4.2 Evolución del número de coordinación .....	121
4.3 Anisotropía geométrica inducida.....	126
4.3.1 Evolución de la repartición de contactos .....	127
4.3.2 Tensor de la estructura granular (fabric tensor).....	136
4.4 Evolución de las fuerzas de contacto.....	139
4.4.1 Magnitud de fuerzas.....	139
4.4.2 Partículas inactivas .....	146
4.4.3 Orientación de fuerzas .....	149
4.4.4 Contactos potencialmente inestables .....	157
4.5 Esfuerzos intragranulares.....	167
4.5.1 Magnitud de los esfuerzos intragranulares.....	170
4.5.2 Orientación de los esfuerzos intragranulares.....	173
4.6 Rotura de partículas .....	177
4.6.1 Resistencia de los granos.....	178
4.6.2 Esfuerzos de tensión actuantes en los granos .....	180
4.6.3 Probabilidad de rotura de granos .....	185
4.7 Contracción y dilatación .....	191
4.7.1 Porosidad .....	192
4.7.2 Distribución de tamaño de poros .....	195
4.7.3 Longitud de los poros en dirección vertical .....	200
4.8 Resistencia de los medios granulares .....	202
4.9 Modelo probabilista de comportamiento mecánico de medios granulares .....	209
<b>CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES .....</b>	<b>217</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>227</b>
<b>A. ANEXOS .....</b>	<b>235</b>
A. 1 Figuras complementarias .....	236
A. 2 Programas de cómputo elaborados .....	270

## NOTACIÓN

$\alpha$	Latitud del punto de contacto sobre la superficie de un grano
$a$	Relación de diámetros máximo y mínimo
$\alpha_d$	Latitud de la posición del contacto deslizante
$\alpha_F$	Ángulo que forma la fuerza de contacto con el plano horizontal
$a_s$	Área superficial de una partícula
$\beta$	Longitud del punto de contacto sobre la superficie de un grano
$\beta_F$	Azimut de la fuerza de contacto
$b_H$	Escalar de anisotropía
$\beta'_X$	Coefficiente de curtosis o de pico de la variable aleatoria $X$
$C$	Esfuerzo intragranular de compresión
$C(\underline{X}, \underline{X})$	Función de autocovarianza
$D$	Diámetro de las partículas
$\delta$	Ángulo que forma la fuerza con la normal al plano tangente en el punto de contacto
$d^{[AB]}$	Vector que va del centroide de la partícula $A$ al centroide de la partícula $B$
$D_{máx}$	Diámetro máximo de las partículas en una muestra granular
$D_{mín}$	Diámetro mínimo de las partículas en una muestra granular
$\Delta t$	Paso de tiempo
$\varepsilon$	Deformación unitaria de la muestra granular
$E \{ \}$	Operador esperanza
$F$	Fuerza de contacto
$\phi$	Ángulo de fricción interparticular (por fricción en los contactos)
$\phi^*$	Ángulo medio de fricción interparticular movilizada en el medio granular
$F^{(n)}$	Fuerza normal en el contacto
$F^{(s)}$	Fuerza cortante en el contacto
$f_{3D}(d)$	Densidad de probabilidad granulométrica en frecuencias de número
$F_{3D}(d)$	Función de distribución granulométrica en frecuencias de número
$F_{3V}(d)$	Función de distribución granulométrica en frecuencias de volumen
$f_{3V}(d)$	Densidad de probabilidad granulométrica en frecuencias de volumen
$F_{3V}(p)$	Distribución de tamaño de poros en frecuencias de volumen
$f_{3V}(p)$	Densidad de probabilidad del tamaño de poros en frecuencias de volumen
$f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$	Densidad de probabilidad conjunta de $\alpha$ y $\alpha_F$
$f_{\alpha, \delta}(a, d)$	Densidad de probabilidad conjunta de $\alpha$ y $\delta$
$f_{\delta}(d)$	Densidad de probabilidad del ángulo $\delta$

$\Gamma(\alpha)$	Función de repartición de contactos independiente de la longitud $\beta$
$\Gamma(\alpha, \beta)$	Función de repartición de los contactos sobre la superficie de los granos
$G_3(d)$	Función de distribución granulométrica generalizada
$\gamma_X$	Coefficiente de asimetría de la variable aleatoria $X$
$H_{ij}$	Tensor de la estructura geométrica
$I$	Momento de inercia
$I'$	Parámetro de inercia
$I_\sigma$	Esfuerzo isotrópico en el interior de un grano
$\varphi$	Ángulo de fricción interna del medio granular
$\varphi^*$	Ángulo de fricción interna aportado por la trabazón de granos
$K(\ )$	Función característica binaria
$K^{(n)}$	Rigidez normal del contacto
$k^{(s)}$	Rigidez cortante en el contacto
$Lp_X, Lp_Y,$ $Lp_Z$	Longitud de los poros en las direcciones cartesianas
$m$	Masa de una partícula
$M$	Momento
$\mu$	Coefficiente de fricción interparticular
$\mu_X$	Media de la variable aleatoria $X$
$n$	Porosidad
$N(V)$	Número de partículas contenidas dentro de una muestra de volumen $V$
$n_A$	Porosidad en un plano de corte
$n_{as}$	Fracción vacía del ángulo sólido alrededor de una partícula
$N_C$	Número de contactos por partícula
$N_C$	Número de coordinación
$N_{C_{eg-eg}}$	Número de coordinación esfera grande-esfera grande
$N_{C_{eg-ep}}$	Número de coordinación esfera grande-esfera pequeña
$N_{C_{ep-eg}}$	Número de coordinación esfera pequeña-esfera grande
$N_{C_{ep-ep}}$	Número de coordinación esfera pequeña-esfera pequeña
$N_{eg-eg}$	Número de contactos esfera grande-esfera grande
$N_{eg-ep}$	Número de contactos esfera grande-esfera pequeña
$N_{ep-eg}$	Número de contactos esfera pequeña-esfera grande
$N_{ep-ep}$	Número de contactos esfera pequeña-esfera pequeña
$N_{es}$	Número de esferas en una muestra granular
$n_L$	Porosidad en un sondeo recto
$N_p$	Número de contactos en un casquete esférico de una partícula
$N_{pi}$	Número de partículas inactivas en una muestra granular
$N_{pt}$	Número de puntos aleatorios para realizar una estimación
$N_{pv}$	Número de puntos aleatorios de una estimación que caen en los vacíos

$\bar{n}$	Vector normal al plano tangente en el punto de contacto
$P$	Diámetro de los poros
$P [ ]$	Probabilidad de ocurrencia de un evento
$p_{3V}$	Proporción en volumen de partículas pequeñas en una mezcla binaria
$P_{3V}(d)$	Distribución granulométrica de muestras de granulometría bimodal
$Pa$	Carga de rotura de un fragmento de roca
$P_R$	Probabilidad de rotura de un grano por tensión
$P_{RV}$	Probabilidad de rotura de los granos por tensión referida al volumen de sólidos
$P_{RV/D}$	Proporción de partículas rotas, en volumen, para las partículas de diámetro D
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	Ángulos que forman los esfuerzos intragranulares principales con los ejes cartesianos
$r$	Radio de una partícula
$\rho$	Constante de amortiguamiento en los contactos
$R(\underline{X}, \underline{X})$	Función de autocorrelación
$r(\underline{X}, \underline{X})$	Coefficiente de autocorrelación
$R^{(A)}$	Radio de la partícula A que forma un contacto
$R_T$	Esfuerzo de resistencia a la tensión de una partícula
$S$	Esfuerzo medio actuante en un medio granular
$\sigma_n$	Desviación estándar de la porosidad asociada a la precisión de la estimación
$S_1, S_2, S_3$	Esfuerzos principales aplicados en el medio granular
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Esfuerzos principales en el interior de una partícula
$s_3$	Superficie específica
$S_d$	Esfuerzo desviador normalizado
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzos
$s_{nV}$	Desviación estándar de la porosidad asociada al tamaño de la muestra
$s_X$	Desviación estándar muestral de la variable aleatoria X
$T$	Esfuerzo intragranular de tensión
$U^{(n)}$	Interpenetración entre partículas
$V$	Volumen de la muestra granular
$v$	Velocidad de un punto de contacto
$\text{var} [ ], \sigma^2$	Varianza
$V_p$	Volumen de una partícula
$V_{pi}$	Volumen de partículas inactivas en una muestra granular
$V_s$	Volumen de sólidos en una muestra granular
$V_v$	Volumen de vacíos en una muestra granular
$\omega$	Ángulo sólido
$w$	Velocidad angular de una partícula
$W$	Peso de una partícula

## Notación

---

$w$	Aceleración angular de una partícula
$x'$	Coefficiente de proporcionalidad entre fuerzas y esfuerzos
$x, y, z$	Coordenadas cartesianas
$\dot{x}$	Velocidad de una partícula
$\ddot{x}$	Aceleración de una partícula
$x_i^{(t)}$	Posición de la partícula $i$ en el tiempo $t$

## INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1. Forma de las partículas.....	7
Figura 2.2. Distribución de tamaño de poros y granos (referidas al volumen total) en una sola gráfica (Auvinet, 1986).....	14
Figura 2.3. Arreglos regulares de esferas de igual diámetro.....	17
Figura 2.4. Definición de la posición de un contacto.....	21
Figura 2.5. Repartición de contactos sobre los granos respecto al ángulo $\alpha$ .....	22
Figura 2.6. Fuerzas de contacto ( $F$ ) e intragranulares ( $P$ ).....	24
Figura 2.7. Fuerzas internas y externas en un conjunto de partículas.....	26
Figura 2.8. Clasificación de los métodos numéricos en geotecnia.....	29
Figura 2.9. Modelos continuos y discretos.....	30
Figura 2.10. Malla de diferencias finitas en 2D.....	31
Figura 2.11. Ejemplo de discretización con elemento finito en 2D.....	33
Figura 2.12. Ejemplo de discretización con elementos frontera en 2D.....	33
Figura 3.1. Recipiente de simulación geométrica con curvatura exagerada.....	52
Figura 3.2. Ejemplos de grupos de partículas.....	55
Figura 3.3. Modelo de contacto adoptado.....	57
Figura 3.4. Secuencia de simulación para la formación de las estructuras granulares.....	59
Figura 3.5. Esquema de la formación de estructuras granulares por depósito vertical en PFC <sup>3D</sup> .....	59
Figura 3.6. Evaluación del equilibrio mecánico por medio de la posición $z$ de la partícula más elevada de dos muestras granulares.....	60
Figura 3.7. Precisión en la estimación de la porosidad, muestra con granulometría uniforme.....	62
Figura 3.8. Densificación de muestras de granulometría uniforme por aplicación de su peso propio.....	63
Figura 3.9. Porosidad teórica de mezclas con granulometría bimodal.....	64
Figura 3.10. Porosidad en mezclas binarias: izquierda $a=3$ , derecha $p_{3V}=0.5$ .....	65
Figura 3.11. Espacio accesible en los poros a esferas de diámetro $p$ o menores.....	66
Figura 3.12. Distribución de tamaño de poros en muestras con granulometría uniforme.....	67
Figura 3.13. Distribución de tamaño de poros obtenida con distintos métodos de simulación.....	68
Figura 3.14. Efecto de la proporción de partículas pequeñas sobre el tamaño de poros en mezclas binarias.....	68
Figura 3.15. Efecto de la relación de diámetros de partículas sobre el tamaño de poros en mezclas binarias.....	69
Figura 3.16. Distribución de tamaño de poros en muestras granulares con granulometría continua.....	69
Figura 17. Continuidad de los poros en las direcciones cartesianas, ejemplo bidimensional.....	70
Figura 3.18. Densidad de probabilidad de la longitud de los poros en muestras con granulometría uniforme.....	70

Figura 3.19. Longitud media de los poros en muestras con granulometría uniforme .....	71
Figura 3.20. Longitud media de los poros en mezclas binarias con $\mu=0.7$ .....	71
Figura 3.21. Densidad de probabilidad de la longitud de los poros en muestras con granulometría continua.....	72
Figura 3.22. Cálculo del número de contactos por partícula, ejemplo bidimensional.....	73
Figura 3.23. Número de contactos por partícula en medios de granulometría uniforme..	74
Figura 3.24. Efecto del coeficiente de fricción sobre el número de coordinación, material uniforme .....	75
Figura 3.25. Relación entre la porosidad y el número de coordinación en muestras con granulometría uniforme.....	75
Figura 3.26. Arreglos tetraédrico (izquierda) y de icosaedro (derecha) .....	76
Figura 3.27. Número de contactos en mezclas de dos componentes con $p_{3V}=0.5$ .....	77
Figura 3.28. Relación del $N_C$ con la granulometría en mezclas binarias .....	77
Figura 3.29. Tipos de contacto por tamaño de partícula en mezclas de dos componentes	78
Figura 3.30. Angulo sólido bajo el cual se ve una partícula desde el centro de otra.....	78
Figura 3.31. Número de contactos parcial en mezcla binaria con $a=3$ , $p_{3V}=0.5$ y $\mu=0$ ....	80
Figura 3.32. Número de coordinación parcial en mezclas binarias con: $\mu=0$ línea continua; $\mu=0.7$ línea discontinua .....	80
Figura 3.33. Número de contactos por partícula en granulometría continua con $a=10$ ....	81
Figura 3.34. Relación entre el diámetro de partícula y el número de contactos. Muestras de granulometría continua.....	82
Figura 3.35. Histogramas polares de la repartición de contactos en el azimut $\beta$ .....	83
Figura 3.36. Histogramas polares de la repartición de contactos en la latitud $\alpha$ .....	83
Figura 3.37. Función de repartición de contactos $\Gamma(\alpha)$ en muestras con granulometría uniforme .....	84
Figura 3.38. Anisotropía geométrica en estructuras de granulometría uniforme .....	85
Figura 3.39. Repartición de contactos $\Gamma(\alpha)$ en muestras con granulometría bimodal.....	86
Figura 3.40. Anisotropía geométrica en muestras de granulometría bimodal.....	86
Figura 3.41. Repartición de contactos <i>ep-ep</i> . Granulometría bimodal con $\mu=0.7$ .....	87
Figura 3.42. Repartición de contactos <i>ep-eg</i> . Granulometría bimodal con $\mu=0.7$ .....	87
Figura 3.43. Repartición por tipo de contactos. Granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.5$ .....	87
Figura 3.44. Repartición de contactos en muestras de granulometría continua con $a=10$ .....	88
Figura 3.45. Repartición de contactos por tamaño de partículas. Granulometría continua con $a=10$ y $\mu=0.7$ .....	89
Figura 3.46. Granulometría <i>in situ</i> de materiales con distintas granulometrías .....	89
Figura 3.47. Magnitud de las fuerzas de contacto causadas por peso propio en muestra granular de granulometría uniforme .....	90
Figura 3.48. Densidad de probabilidad de fuerzas de contacto. Material con granulometría uniforme .....	91
Figura 3.49. Densidades de probabilidad de las componentes cartesianas de las fuerzas de contacto en muestras con granulometría uniforme .....	92
Figura 3.50. Fuerzas de contacto por tamaño de partícula en mezclas binarias con $a=3$ y $p_{3V}=0.5$ .....	93
Figura 3.51. Fuerzas de contacto en muestras de granulometría continua.....	94
Figura 3.52. Fuerzas de contacto por fracción granulométrica, G. Continua.....	94

Figura 3.53. Cadenas de fuerzas en muestras de granulometría uniforme.....	96
Figura 3.54. Densidad de probabilidad de las cadenas de fuerzas en muestras de granulometría uniforme.....	96
Figura 3.55. Inactividad de partículas en muestras con granulometría uniforme.....	96
Figura 3.56. Ejemplos de cadenas de fuerzas en medios de granulometría bimodal .....	97
Figura 3.57. Inactividad de partículas en mezclas binarias .....	97
Figura 3.58. Cadenas de fuerzas en muestras con granulometría continua.....	98
Figura 3.59. Inactividad de partículas en muestras con granulometría continua .....	98
Figura 3.60. Orientación esquemática de las fuerzas de contacto .....	99
Figura 3.61. Histogramas polares del ángulo $\alpha_F$ , muestras de granulometría uniforme ..	100
Figura 3.62. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha,\alpha_F}(a,b)$ en muestras de granulometría uniforme .....	101
Figura 3.63. Densidad de probabilidad condicional $f_{\alpha_F}(b \alpha)$ , muestras con granulometría uniforme y $\mu=0.7$ .....	102
Figura 3.64. Densidad de probabilidad del ángulo $\delta$ en muestras con granulometría uniforme .....	103
Figura 3.65. Probabilidad de encontrar un contacto inestable en muestras depositadas por gravedad con granulometría uniforme .....	104
Figura 3.66. Histogramas polares del ángulo $\alpha_F$ en muestras con granulometría con $\mu=0.7$ y $p_{3V}$ variable .....	104
Figura 3.67. Histogramas del ángulo $\alpha_F$ en mezclas binarias con diferente relación de diámetros $a$ .....	105
Figura 3.68. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha,\alpha_F}(a,b)$ en mezclas binarias con $\mu=0.7$ y $p_{3V}$ variable .....	105
Figura 3.69. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha,\alpha_F}(a,b)$ en mezclas binarias con $a$ variable .....	106
Figura 3.70. Densidad de probabilidad del ángulo $\delta$ en mezclas binarias .....	107
Figura 3.71. Orientación de las fuerzas de contacto $\alpha_F$ en muestras con distinta granulometría depositadas por gravedad y con $\mu=0.7$ .....	108
Figura 3.72. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha,\alpha_F}(a,b)$ en material de granulometría continua depositada por gravedad.....	108
Figura 3.73. Volumen cúbico para evaluar la dispersión de $G_3(d)$ .....	110
Figura 3.74. Dispersión de la porosidad de un medio granular medida en una muestra cúbica .....	110
Figura 3.75. Dispersión de $G_3(d)$ para la muestra de granulometría continua por fracción granulométrica .....	112
Figura 4.1. Procedimiento de simulación y análisis de la estructura.....	115
Figura 4.2. Representación 3D de trayectorias de esfuerzos principales en una masa continua .....	117
Figura 4.3. Curva esfuerzo-deformación obtenida por simulación de prueba triaxial .....	118
Figura 4.4. Curva de deformación volumétrica durante una prueba triaxial.....	120
Figura 4.5. Número de coordinación en etapa inicial y primer confinamiento isótropo en muestras de granulometría uniforme con distintos coeficientes de fricción .....	121
Figura 4.6. Evolución del número de coordinación durante la prueba triaxial en muestras con granulometría uniforme .....	122

Figura 4.7. Ejemplo de pérdida de contactos por cambio en la configuración local de las partículas .....	123
Figura 4.8. Evolución del número de coordinación durante la prueba triaxial en mezclas binarias .....	124
Figura 4.9. Evolución del número de coordinación por tamaño de partículas en mezclas binarias .....	125
Figura 4.10. Evolución del número de coordinación en muestra de granulometría continua .....	126
Figura 4.11. Evolución de la repartición de contactos en el azimut $\beta$ .....	127
Figura 4.12. Repartición de contactos $\Gamma(\alpha)$ inicial e inducida con el confinamiento isótropo en materiales con granulometría uniforme .....	128
Figura 4.13 .Evolución de la repartición de contactos en muestras de granulometría uniforme con $\mu=0.1$ y $\mu=0.3$ .....	128
Figura 4.14 . Evolución de la repartición de contactos en muestras de granulometría uniforme con $\mu=0.5$ y $\mu=0.7$ .....	129
Figura 4.15. Evolución de la repartición de contactos $\Gamma(\alpha)$ en mezclas binarias .....	130
Figura 4.16. Repartición de contactos $ep-ep$ durante la prueba triaxial, G. Bimodal $a=3$ , $\mu=0.7$ .....	131
Figura 4.17. Repartición de contactos $ep-eg$ durante la prueba triaxial, G. Bimodal $a=3$ , $\mu=0.7$ .....	132
Figura 4.18. Repartición de contactos $eg-ep$ durante la prueba triaxial, G. Bimodal $a=3$ , $\mu=0.7$ .....	133
Figura 4.19. Repartición de contactos $eg-eg$ durante la prueba triaxial, G. Bimodal $a=3$ , $\mu=0.7$ .....	133
Figura 4.20. Evolución de la repartición de contactos en muestra con granulometría continua .....	134
Figura 4.21. Ejemplos de repartición de contactos sobre la superficie de los granos .....	135
Figura 4.22. Evolución de $b_H$ en muestras con granulometría uniforme durante la prueba triaxial .....	137
Figura 4.23. Evolución de $b_H$ en mezclas binarias en prueba triaxial.....	138
Figura 4.24. Evolución de $b_H$ en muestra de granulometría continua en prueba triaxial..	139
Figura 4.25. Fuerzas de contacto en cortes horizontales. Muestras con granulometría uniforme con $\mu=0.1$ (izquierda) y $\mu=0.7$ (derecha) .....	142
Figura 4.26. Fuerza media en medios granulares con granulometría uniforme y error en la estimación con la fórmula de Auvinet (1986) .....	142
Figura 4.27. Fuerza media en medios granulares con granulometría bimodal y error en la estimación con la fórmula de Auvinet (1986) .....	145
Figura 4.28. Relación entre la fuerza media y el esfuerzo medio en muestra con granulometría continua.....	145
Figura 4.29. Evolución de partículas inactivas, muestras con granulometría uniforme ...	147
Figura 4.30. Evolución de partículas inactivas en mezclas binarias, en número (izquierda) y en volumen (derecha).....	148
Figura 4.31. Evolución de partículas inactivas en muestras con granulometría continua, en número (izquierda) y en volumen (derecha) .....	149
Figura 4.32. Histogramas polares de $\alpha_F$ en muestras de granulometría uniforme. Estado inicial y primer confinamiento isótropo .....	149

Figura 4.33. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu=0.7$ .....	151
Figura 4.34. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.2$ .....	152
Figura 4.35. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.5$ .....	153
Figura 4.36. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.8$ .....	154
Figura 4.37. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra de granulometría continua .....	156
Figura 4.38. Evolución de la densidad de probabilidad del ángulo $\delta$ en muestras con granulometría uniforme .....	157
Figura 4.39. Probabilidad de que la fuerza de contacto se localice sobre la superficie del cono de fricción en muestras con granulometría uniforme en prueba triaxial .....	158
Figura 4.40. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra con granulometría uniforme con $\mu=0.7$ .....	160
Figura 4.41. Evolución de la densidad de probabilidad del ángulo $\delta$ en mezclas binarias .....	161
Figura 4.42. Probabilidad de que la fuerza de contacto se localice sobre la superficie del cono de fricción en mezclas binarias durante la prueba triaxial .....	161
Figura 4.43. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra con granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.2$ .....	162
Figura 4.44. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra con granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.5$ .....	163
Figura 4.45. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra con granulometría bimodal con $a=3$ y $p_{3V}=0.8$ .....	164
Figura 4.46. Densidad de probabilidad del ángulo $\delta$ y probabilidad de ocurrencia de los contactos potencialmente inestables en una muestra con granulometría continua durante la prueba triaxial .....	165
Figura 4.47. Densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra con granulometría continua .....	166
Figura 4.48. Fuerzas de contacto actuando sobre las partículas, $\mu=0.7$ .....	167
Figura 4.49. Elipsoide de esfuerzos principales en partículas sometidas a un conjunto de fuerzas .....	169
Figura 4.50. Esquema de un disco de roca sometido a prueba de tensión indirecta .....	179
Figura 4.51. Densidad de probabilidad de la resistencia en tensión de Andesita y Conglomerado .....	180
Figura 4.52. Fuerzas equivalentes actuantes sobre una partícula en las direcciones principales .....	182
Figura 4.53. Densidad de probabilidad de los esfuerzos intragranulares máximos de compresión y tensión .....	183
Figura 4.54. Relación del esfuerzo de tensión intragranular con el número de contactos .....	184
Figura 4.55. Relación del esfuerzo de tensión intragranular con el tamaño de las partículas .....	185
Figura 4.56. Densidades de probabilidad del esfuerzo intragranular de tensión. Muestras bajo un confinamiento isótropo de 1MPa .....	186

Figura 4.57. Probabilidad de rotura de granos en muestras con granulometría uniforme, esfuerzos en compresión .....	187
Figura 4.58. Probabilidad de rotura de granos en volumen y por tamaño de partícula en mezclas binarias.....	188
Figura 4.59. Probabilidad de rotura de granos (en número), material con granulometría continua .....	189
Figura 4.60. Probabilidad de rotura de los granos por fracción granulométrica respecto al total de partículas de la muestra granular.....	190
Figura 4.61. Evolución de la porosidad en muestras con granulometría uniforme durante la prueba triaxial.....	192
Figura 4.62. Evolución de la porosidad en materiales con granulometría bimodal durante la prueba triaxial.....	193
Figura 4.63. Evolución de la porosidad en material con granulometría continua y uniforme durante la prueba triaxial.....	194
Figura 4.64. Distribución de tamaño de poros inicial y en el primer confinamiento isótropo, en muestras con granulometría uniforme .....	195
Figura 4.65. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestra con granulometría uniforme y con $\mu=0.1$ .....	196
Figura 4.66. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestra con granulometría uniforme y con $\mu=0.7$ .....	196
Figura 4.67. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestras con granulometría bimodal .....	198
Figura 4.68. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestra con granulometría continua .....	199
Figura 4.69. Longitud de poros media en muestras con granulometría uniforme durante la prueba triaxial .....	200
Figura 4.70. Longitud de poros media en muestras con granulometría bimodal y continua durante la prueba triaxial.....	201
Figura 4.71. Criterio de falla de Mohr-Coulomb.....	202
Figura 4.72. Ángulo de fricción interna para materiales de granulometría uniforme .....	204
Figura 4.73. Ángulo de fricción interna para mezclas binarias .....	206
Figura 4.74. Ángulo de fricción interna en materiales con distinta granulometría .....	207
Figura 4.75. Localización de la fuerza de contacto en el cono de fricción .....	210
Figura 4.76. Evolución de la densidad de probabilidad de la orientación de las fuerzas de contacto por un incremento en el esfuerzo desviador.....	211
Figura 4.77. Deslizamiento de contactos .....	212
Figura 4.78. Deformación vertical por cambio en la posición de los contactos sobre la superficie de los granos .....	212
Figura 4.79. Simulación de prueba triaxial con el modelo probabilista de comportamiento mecánico de medios granulares .....	213
Figura 4.80. Efecto del coeficiente de fricción en la simulación de una compresión triaxial con el modelo probabilista .....	214
Figura 4.81. Efecto de la anisotropía estructural inicial en la simulación de una compresión triaxial con el modelo probabilista.....	215
Figura A.1. Simulación geométrica de muestra con granulometría uniforme .....	236

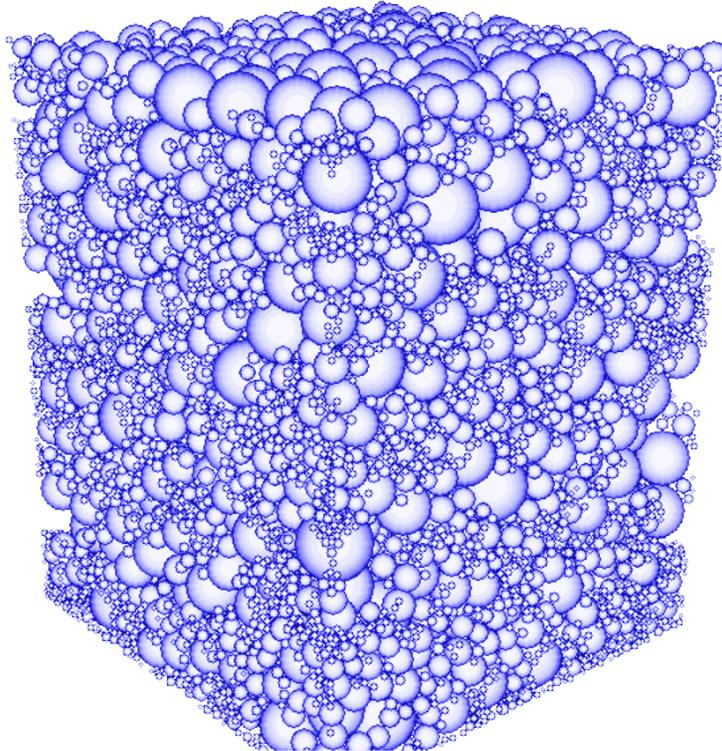
Figura A.2. Simulación geométrica de muestra con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.2$ , $a=3$ .....	237
Figura A.3. Simulación geométrica de muestra con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.5$ , $a=3$ .....	238
Figura A.4. Simulación geométrica de muestra con granulometría continua .....	239
Figura A.5. Curvas esfuerzo-deformación de pruebas triaxiales simuladas .....	240
Figura A.6. Curvas de deformación volumétrica durante las pruebas triaxiales .....	240
Figura A.7. Material con granulometría uniforme con $\mu=0.1$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	241
Figura A.8. Material con granulometría uniforme con $\mu=0.1$ . Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.15$ .....	242
Figura A.9. Material con granulometría uniforme con $\mu=0.1$ . Extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z=-0.04$ .....	243
Figura A.10. Material con granulometría uniforme con $\mu=0.7$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	244
Figura A.11. Material con granulometría uniforme con $\mu=0.7$ . Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.08$ .....	245
Figura A.12. Material con granulometría uniforme con $\mu=0.7$ . Extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z=0.03$ .....	246
Figura A.13. Muestra densa formada con $\mu=0$ y ensayada con $\mu=0.7$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	247
Figura A.14. Muestra densa. Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.11$ .....	248
Figura A.15. Muestra densa. Extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z=0.06$ .....	249
Figura A.16. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.2$ , $a=3$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	250
Figura A.17. Material con granulometría uniforme con $p_{3V}=0.2$ , $a=3$ . Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.14$ .....	251
Figura A.18. Material con granulometría uniforme con $p_{3V}=0.2$ , $a=3$ . Extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z=0.06$ .....	252
Figura A.19. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.5$ , $a=3$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	253
Figura A.20. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.5$ , $a=3$ . Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.13$ .....	254
Figura A.21. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.5$ , $a=3$ . Extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z=0.05$ .....	255
Figura A.22. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.8$ , $a=3$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	256
Figura A.23. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.8$ , $a=3$ . Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.11$ .....	257
Figura A.24. Material con granulometría bimodal con $p_{3V}=0.8$ , $a=3$ . Extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z=0.05$ .....	258
Figura A.25. Material con granulometría continua con $a=10$ . Confinamiento isótropo inicial Is1 .....	259
Figura A.26. Material con granulometría continua con $a=10$ . Compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z=-0.12$ .....	260

Figura A.27. Material de granulometría continua con $a=10$ . Extensión triaxial con $\varepsilon_z = 0.05$ .....	261
Figura A.28. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu=0.3$ .....	262
Figura A.29. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu = 0.3$ .....	263
Figura A.30. Representaciones de la anisotropía geométrica, muestra con granulometría uniforme con $\mu = 0.7$ en compresión triaxial C3 con $\varepsilon_z = -0.08$ .....	264
Figura A.31. Representaciones de la anisotropía geométrica, muestra con granulometría uniforme con $\mu = 0.7$ en extensión triaxial E3 con $\varepsilon_z = 0.03$ .....	265
Figura A.32. Curvas esfuerzo-deformación y deformación volumétrica. Muestra densa	266
Figura A.33. Evolución del número de coordinación durante la prueba triaxial en muestra densa.....	266
Figura A.34. Evolución de la repartición de contactos en muestra densa.....	267
Figura A.35. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, b)$ en prueba triaxial, muestra densa.....	268
Figura A.36. Densidad de probabilidad $f_{\delta}(d)$ (izquierda) y probabilidad de que las fuerzas se localicen sobre el cono de fricción (derecha), muestra densa .....	269
Figura A.37. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta $f_{\alpha, \delta}(a, d)$ durante la prueba triaxial, muestra densa.....	269
Figura A.38. Diagrama de flujo de los principales programas de cómputo para estudiar los medios granulares .....	273

## INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. Distribuciones granulométricas generalizadas .....	12
Tabla 2.2. Arreglos regulares de esferas .....	16
Tabla 3.1. Parámetros de simulación .....	59
Tabla 3.2. Máximo número de contactos parcial en mezclas binarias.....	79
Tabla 3.3. Primeros momentos de la densidad de probabilidad de las fuerzas de contacto en muestras con granulometría uniforme.....	92
Tabla 3.4. Cálculo de la dispersión de la porosidad $s_{nv}$ en muestras con granulometría uniforme .....	111
Tabla 3.5. Cálculo de la dispersión de $G_3(d)$ en muestras con granulometría bimodal....	111
Tabla 4.1 Notación para las etapas de las pruebas triaxiales.....	117
Tabla 4.2. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu=0.1$ .....	140
Tabla 4.3. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu=0.3$ .....	140
Tabla 4.4. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu=0.5$ .....	141
Tabla 4.5. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con $\mu=0.7$ .....	141
Tabla 4.6. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con $a=3$ , $p_{3V}=0.2$ y $\mu=0.7$ .....	143
Tabla 4.7. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con $a=3$ , $p_{3V}=0.5$ y $\mu=0.7$ .....	144
Tabla 4.8. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con $a=3$ , $p_{3V}=0.8$ y $\mu=0.7$ .....	144
Tabla 4.9. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, en muestra de granulometría continua con $a=10$ y $\mu=0.7$ .....	146
Tabla 4.10. Principales momentos del esfuerzo medio intragranular $I_\sigma$ en muestras con granulometría uniforme.....	171
Tabla 4.11. Principales momentos del esfuerzo medio intragranular $I_\sigma$ en muestras con granulometría bimodal .....	172

Tabla 4.12. Principales momentos del esfuerzo medio intragranular $I_{\sigma}$ en muestra con granulometría continua.....	173
Tabla 4.13. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría uniforme en compresión triaxial .....	174
Tabla 4.14. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría uniforme en extensión triaxial.....	175
Tabla 4.15. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría bimodal en compresión triaxial .....	176
Tabla 4.16. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría bimodal en extensión triaxial .....	176
Tabla 4.17. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría continua en compresión triaxial .....	178
Tabla 4.18. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría continua en extensión triaxial .....	177
Tabla 4.19. Ruptura en fragmentos de roca.....	178
Tabla 4.20. Resistencia en tensión en distintos tipos de roca.....	180
Tabla 4.21. Condiciones de esfuerzos intragranulares de compresión y tensión .....	183
Tabla 4.22. Proporción en volumen de partículas rotas por fracción granulométrica en material con granulometría continua .....	190
Tabla 4.23. Resistencia de materiales con granulometría uniforme .....	204
Tabla 4.24. Resistencia de materiales con granulometría bimodal con $\mu =0.7$ .....	206
Tabla 4.25. Resistencia en el material con granulometría continua y con $\mu =0.7$ .....	207
Tabla 4.26. Magnitud relativa de las características de medios granulares .....	208



Muestra granular de partículas esféricas confinada en un recipiente cúbico

## **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN**

Los materiales granulares son bastante comunes en la naturaleza, en diversos campos de la ingeniería y en particular en la geotecnia. En este último campo, tradicionalmente los suelos granulares se han abordado como medios continuos. Sin embargo, desde principios del siglo XX Terzaghi reconoció las limitaciones de la teoría del medio continuo para comprender el comportamiento mecánico de los suelos. Comentó que “Coulomb ignoró a propósito el hecho de que las arenas están constituidas por partículas individuales y trató estos materiales como si fueran una masa homogénea con ciertas propiedades mecánicas. La idea de Coulomb resultó muy útil como hipótesis de trabajo para la solución de un problema particular de la teoría de presiones de tierra, pero constituyó un obstáculo para avances posteriores, al quedar olvidado su carácter hipotético por sus sucesores. Para salir de esta dificultad, es necesario abandonar los viejos principios fundamentales y volver a salir sobre la base que las arenas están constituidas por granos individuales”.

Las consideraciones anteriores, válidas para las arenas, son todavía más obvias para materiales de partículas de dimensiones mayores como las gravas y los enrocamientos (Auvinet, 2012). La falta de representatividad de la hipótesis de continuidad ha conducido a la formulación de numerosas leyes constitutivas con validez limitada. Aunque tales relaciones son aceptadas en términos macroscópicos, no garantizan una representación adecuada de la física del problema (Rothenburg & Bathurst, 1989).

Para tomar en cuenta el carácter discontinuo de los medios granulares es necesario considerar que son un conjunto de cuerpos individuales así como hipótesis realistas respecto a las interacciones mecánicas que se presentan entre los elementos constitutivos.

Diversos esfuerzos se han realizado para desarrollar una teoría para medios discontinuos a partir de los fenómenos que ocurren a la escala de las partículas. Se ha logrado una definición más precisa y sistemática de los conceptos que describen los medios granulares haciendo amplio uso de la teoría de probabilidad (Matheron, 1967 y Auvinet, 1986). Otra serie de investigaciones se ha caracterizado por el desarrollo de conceptos matemáticos que describen la estructura granular a diferentes escalas (Satake, 1982; Cambou *et al.*, 1995 y 2000). La experimentación física (Biarez, 1961; Marsal, 1966, 1973 y 1975; Oda, 1972) ha mostrado la importancia de diversos fenómenos locales en el comportamiento global de estos materiales. Los métodos numéricos, como el método de elementos discretos, han ampliado los alcances de la experimentación mediante la simulación de diversos fenómenos físicos (Cundall & Hart, 1992; Bobet, 2010; O'Sullivan, 2015). Sin embargo se considera que la teoría de medios discontinuos está en pleno desarrollo, ya que existen muchos aspectos fundamentales por precisar.

El método de elementos discretos (DEM) fue introducido por Cundall (1971) para el análisis de problemas de mecánica de rocas y posteriormente se generalizó a medios granulares (Cundall & Strack, 1979). Este método simula el comportamiento mecánico de un conjunto de partículas que interactúan entre sí a través de sus puntos de contacto, donde cada elemento puede desplazarse y rotar en forma individual. Al nivel de cada partícula se hace uso de la mecánica de cuerpo rígido.

Tomando en cuenta lo anterior, en la presente tesis se realiza un estudio de la estructura de los medios granulares desde el punto de vista de la geotecnia. El Capítulo 2 aborda los conceptos útiles para la descripción de los medios granulares así como los métodos numéricos relevantes en geotecnia. En el Capítulo 3 se exponen los métodos numéricos utilizados en esta investigación para la simulación de los medios granulares y se analiza la estructura inherente (inmediatamente después de la formación). El Capítulo 4 se concentra en el estudio de la evolución de las características de los medios granulares cuando se someten a distintas condiciones de esfuerzos y su relación con el comportamiento global. En el Capítulo 5 se presentan las conclusiones relevantes que contribuyen tanto a la teoría

de los medios granulares como a la geotecnia. Los Anexos presentan figuras ilustrativas y la lista de programas de cómputo elaborados para la presente investigación.

Los resultados obtenidos en esta tesis ratifican que al eliminar la hipótesis de continuidad se accede a una gran riqueza de información microestructural. Lo anterior permite comprender mejor, desde conceptos elementales hasta el comportamiento global de los medios granulares respecto a los conocimientos tradicionales de la geotecnia.

## **1.1 Objetivos**

La presente tesis tiene los siguientes objetivos:

Estudiar la estructura inherente de los medios granulares depositados en el campo de la gravedad, considerando las interacciones mecánicas entre partículas mediante la aplicación del método de elementos discretos. El estudio incluye una revisión de conceptos como la porosidad, tamaño de poros, número de coordinación, anisotropía geométrica en términos de la repartición de contactos sobre la superficie de los granos, magnitud de las fuerzas de contacto, cadenas de fuerzas, partículas inactivas y orientación de las fuerzas de contacto.

Identificar las relaciones entre las distintas características microestructurales del medio granular y su importancia en la estructura granular.

Analizar la evolución de las características microestructurales de los medios granulares cuando son sometidos a diferentes condiciones de esfuerzos o de deformaciones. Para esto se recurre a la simulación de pruebas triaxiales clásicas.

Explicar el comportamiento global de los medios granulares a partir de la evolución de las características microestructurales. Se estudia la anisotropía geométrica inducida a través de la evolución de la repartición de contactos sobre la superficie de los granos, la transmisión de esfuerzos a partir de las fuerzas de contacto y los esfuerzos al interior de los granos o intragranulares, los cambios volumétricos por medio de la evolución de la porosidad y tamaño de poros.

Estudiar estadísticamente la rotura de partículas en el interior de un medio granular considerando las fuerzas de contacto actuantes en cada grano.

Analizar la influencia de las características locales en la resistencia y deformación global de los medios granulares. Se toma en cuenta la fricción en los puntos de contacto y la granulometría.

Formular un modelo probabilista del comportamiento mecánico de medios granulares considerando la deformación del medio como resultado de los deslizamientos en los contactos y los esfuerzos como un reflejo de las fuerzas de contacto.

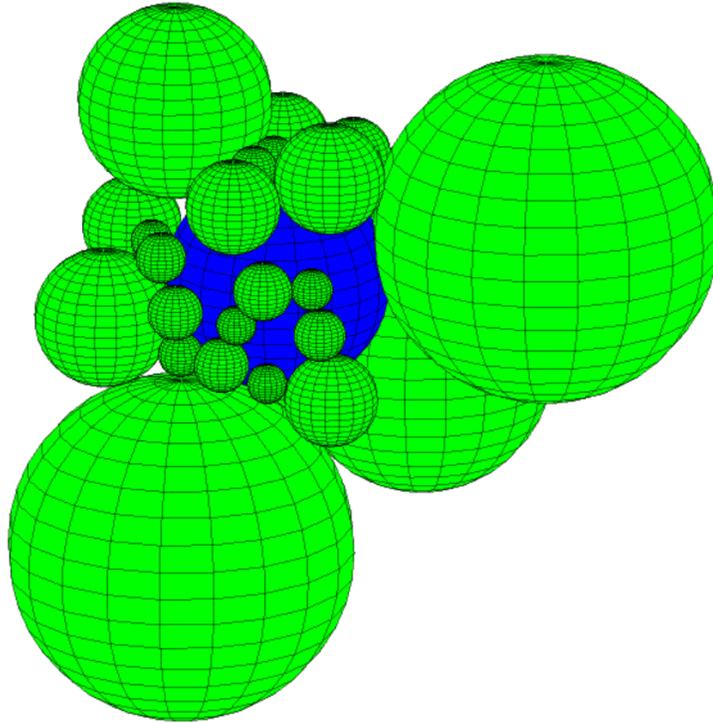
### **1.2 Alcances**

Los estudios realizados en la presente investigación se realizan exclusivamente por simulación numérica. Se consideran medios granulares secos constituidos por partículas de forma esférica. Se analizan materiales de granulometría uniforme, bimodal (dos tamaños de partículas) y continua. Se supone que la resistencia en los puntos de contacto está dada únicamente por fricción.

La secuencia de modelación consiste en generar aleatoriamente muestras granulares con el algoritmo de simulación geométrico de Auvinet (1975). Posteriormente el medio granular se somete a la acción de la gravedad recurriendo al método de elementos discretos (programa de cómputo PFC<sup>3D</sup> de Itasca, 2008). En esta etapa de la simulación se toma en cuenta la interacción mecánica entre partículas. Una vez alcanzado el equilibrio estático, el estudio de la estructura inicial se lleva a cabo considerando solamente las partículas del centro de la muestra para eliminar los efectos de frontera. Este procedimiento permite verificar y enriquecer los resultados obtenidos previamente con los estudios geométricos (Auvinet, 1986).

Para estudiar la transmisión de esfuerzos, anisotropía inducida, contracción y dilatación, rotura de partículas y la ley constitutiva del comportamiento mecánico se simulan pruebas triaxiales con el método de elementos discretos.

Se hace un amplio uso de la probabilidad y estadística para analizar la información a la escala de las partículas, lo cual permite establecer una liga (principalmente cualitativa) entre la micro y la macroescala, así como la formulación del modelo de comportamiento probabilista de medios granulares.



Partículas en contacto con una esfera central, material de granulometría continua

## **CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES**

Los materiales granulares están formados por un conjunto de partículas sólidas semejantes, independientes y perfectamente diferenciables entre sí como elementos constitutivos del medio. Se caracterizan por presentar una alta variación tanto en sus características estructurales como en su comportamiento global.

En este capítulo se definen las características principales de los medios granulares desde el punto de vista de la geotecnia. Se presenta una revisión de los métodos numéricos empleados en geotecnia con énfasis en el modelado de medios discontinuos y en particular en el método de elementos discretos (DEM).

## **2.1 Geometría de los medios granulares**

En geotecnia, tradicionalmente las características estructurales de los suelos granulares se han descrito a través de las distribuciones granulométricas, forma de los granos y porosidad. Pero una descripción más completa puede lograrse con la incorporación de conceptos generalizados (Auvinet, 1986) acompañados de un amplio uso del lenguaje probabilista desde el punto de vista frecuencial (Auvinet, 1977, 1985 y 1991).

### **2.1.1 Tamaño de partículas**

Dada la irregularidad natural de las formas geométricas de los granos, no es sencillo asignar una dimensión única a una partícula y tampoco se tiene un método de aceptación general para definir dicho tamaño.

Entre los procedimientos más comunes que se han sugerido, están los que asignan un diámetro o tamaño único, el cual resulta útil para diversos fines prácticos. Por ejemplo, el método tradicional consiste en un análisis mecánico haciendo pasar el material por un juego de tamices ordenados de diferentes dimensiones, de forma rectangular o circular. A cada partícula se le asigna el tamaño comprendido entre la dimensión de la malla más grande en la que queda retenida y el tamaño de la malla menor por la que logra pasar. A las proporciones de los distintos tamaños de partículas que conforman un material granular se le denomina granulometría.

Es importante señalar que el significado del tamaño de la partícula depende de la dimensión que se mide y de la forma de la medición. Si las partículas se asemejan a una forma equidimensional, como en gravas y arenas, la medida única no está muy alejada de la realidad; pero en partículas donde predomina significativamente una dimensión como en arcillas y macizos rocosos, el concepto proporciona poca información.

### **2.1.2 Forma de las partículas**

En vista de que el tamaño de las partículas no puede expresarse por un valor único, resulta de utilidad hacer referencia a la forma. De manera común se utilizan términos cualitativos como: redondeada, sub-redondeada, sub-angulosa, angulosa; para indicar la agudeza de los bordes de la partícula. El alargamiento preferencial puede estimarse si se asignan medidas en tres dimensiones ortogonales: largo, ancho y espesor; esto permite establecer criterios cuantitativos de comparación dimensional. La forma se clasifica como equidimensional si

las tres dimensiones son aproximadamente iguales, forma aplanada si una de ellas es mucho menor o alargada si se tiene una dimensión mucho mayor a las otras dos. En la figura 2.1 se ilustra el concepto de forma de las partículas.

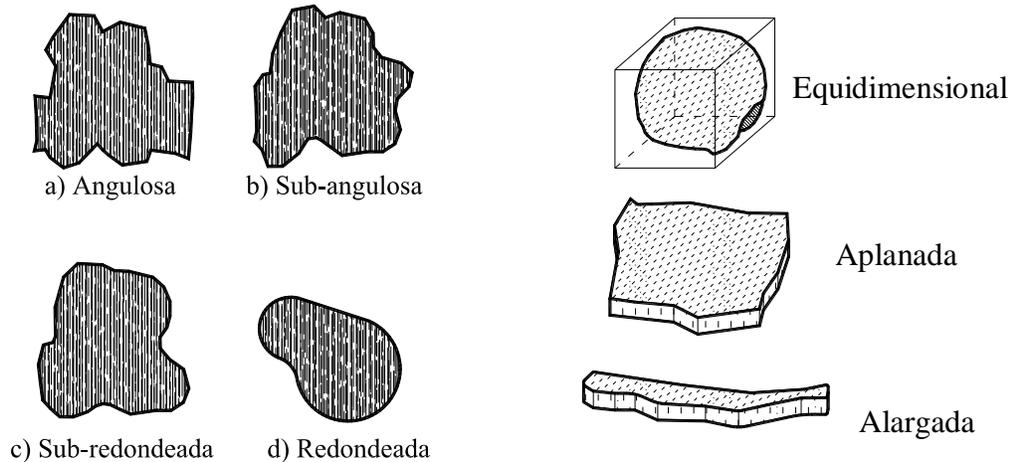


Figura 2.1. Forma de las partículas

Una partícula se llama convexa si, al unir cualquier par de puntos internos de la partícula mediante un segmento de recta, todos los puntos del segmento pertenecen a dicha partícula. La manera más satisfactoria de describir la forma de una partícula convexa consistiría probablemente en recurrir a los parámetros estadísticos (valores extremos, varianza y momentos de orden superior) del diámetro. Sin embargo, la medición de parámetros más simples y más fáciles de medir como los que se comentaron anteriormente siguen siendo los más utilizados.

### 2.1.3 Porosidad

Entre los parámetros que se utilizan para representar las proporciones de vacíos y sólidos en un medio granular, se encuentra la porosidad, la cual es la relación entre el volumen de vacíos y el volumen total del material (ecuación 2.1).

Sea  $V$  el volumen total de la muestra y  $V_S$  el volumen de la fase sólida contenida en ella, entonces el volumen de vacíos ocupados o no por un líquido es  $V_V = V - V_S$  de donde la porosidad  $n$  está dada por:

$$n = \frac{V_v}{V} = \frac{V - V_s}{V} \quad (2.1)$$

### 2.1.4 Superficie específica

Para complementar la caracterización de la forma de las partículas es usual recurrir a la superficie específica ( $s$ ), dada por la relación entre el área superficial ( $a_s$ ) y el volumen ( $V_p$ ) de la partícula.

$$s_3 = \frac{a_s}{V_p} \quad (2.2)$$

En una muestra de material granular la superficie específica se calcula como el cociente entre la suma de las áreas superficiales y la suma del volumen de los sólidos.

### 2.1.5 Distribución y densidad granulométrica

Después de haber determinado el tamaño de las partículas de una muestra representativa (ver inciso 3.5) del medio, es posible establecer una función  $F_{3V}(d)$  definida como la proporción en peso o volumen, aceptando un peso volumétrico constante, de partículas con diámetro menor o igual que  $d$  (Auvinet, 1986). Esta función es monótonamente no decreciente y alcanza el valor máximo de 100% para diámetros iguales o superiores al de la partícula más grande de la muestra.

La hipótesis de peso volumétrico constante en las partículas se considera válida en todo el presente trabajo.

Es posible dar una interpretación probabilista simple a la función de distribución granulométrica  $F_{3V}(d)$ , ya que representa la probabilidad de que un punto tomado al azar dentro de los granos pertenezca a una partícula de diámetro menor o igual que  $d$ .

La derivada,  $f_{3V}(d)$  de la distribución granulométrica respecto al diámetro, se conoce como densidad en el volumen de los diámetros de partícula y es una función tal que:

$f_{3V}(d)\Delta d$  = Proporción, en peso o volumen, de partículas con diámetro comprendido entre  $d$  y  $d+\Delta d$ .

### 2.1.6 Porosidad generalizada

Para ciertas aplicaciones, es conveniente prestar atención a la porosidad en la intersección de un medio granular por un plano o un sondeo (Auvinet, 1986 y 1988).

Se entiende por porosidad en un plano (porosidad bidimensional,  $n_A$ ) a la relación entre el área de vacíos  $A_V$  y el área total del corte  $A$ :

$$n_A = \frac{A_V}{A} \quad (2.3)$$

En la misma forma, se entiende por porosidad a lo largo de un sondeo recto (porosidad unidimensional,  $n_L$ ) a la relación entre la longitud total de intersección con los vacíos  $L_V$  y la longitud total del sondeo  $L$ :

$$n_L = \frac{L_V}{L_T} \quad (2.4)$$

Si se considera una muestra, de un medio granular homogéneo e isótropo, con forma de paralelepípedo de dimensiones mucho mayores a las de las partículas, de longitud  $L$ , área transversal  $A$ , y volumen  $V$  se tiene que:

$$n = \frac{V_V}{V} = \frac{A_V L}{AL} = n_A = \frac{L_V A}{LA} = n_L \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 es conocida como principio de Delesse. Auvinet (1986) señala que en un medio homogéneo, las diferencias que llegan a observarse experimentalmente entre los diferentes tipos de porosidad solamente pueden atribuirse al efecto de escala geométrico o a la anisotropía. En este último caso, es decir en medios homogéneos anisótropos (por ejemplo arreglos regulares de esferas), la porosidad en un plano o a lo largo de un sondeo puede presentar fuertes variaciones de carácter periódico o semi periódico de un plano o de un sondeo a otro. Sin embargo, la esperanza matemática de la porosidad en un plano o sondeo seleccionado al azar coincide necesariamente con la porosidad tridimensional.

### 2.1.7 Distribuciones granulométricas generalizadas

Las dimensiones de las partículas que constituyen un medio granular suelen describirse mediante las distribuciones granulométricas en peso o volumen como se definieron en el inciso 2.1.5. Sin embargo, para el estudio de la estructura, resulta de gran utilidad recurrir a una distribución en número de partículas (Auvinet, 1977, 1985, 1986 y 1988; Auvinet & Bouvard, 1983 y 1984).

a) Distribución granulométrica en número

Se define como distribución granulométrica en número  $F_{3D}(d)$  a la proporción, en número, de partículas con diámetro menor o igual que  $d$ . La derivada de la función anterior respecto al diámetro  $f_{3D}(d)$ , es una densidad de probabilidad en número tal que:

$f_{3D}(d)\Delta d$  = La proporción, en número, de partículas con diámetro comprendido entre  $d$  y  $d+\Delta d$ .

De acuerdo a la definición frecuencial de probabilidad se tiene:

$$F_{3D}(d) = P[D \leq d] \quad (2.6)$$

$$f_{3D}(d)\Delta d = P[d < D \leq d + \Delta d] \quad (2.7)$$

Si las partículas pueden considerarse aproximadamente esféricas, la densidad en número se obtiene a partir de la densidad en volumen (Auvinet, 1986), ponderando las frecuencias de esta últimas por un término inversamente proporcional al volumen de las partículas y por tanto al cubo de su diámetro (ecuación 2.8).

$$f_{3D}(d) = \frac{f_{3V}(d)}{d^3 \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} \frac{f_{3V}(d)}{d^3} dd} = \frac{f_{3V}(d)}{d^3 E_{3V} \left\{ \frac{1}{D^3} \right\}} \quad (2.8)$$

Donde:  $E_{3V}\{ \}$  Esperanza o valor esperado  
 $D_{\min}$  Diámetro mínimo de las partículas  
 $D_{\max}$  Diámetro máximo de las partículas

La densidad granulométrica en volumen también puede obtenerse a partir de la densidad en número como:

$$f_{3V}(d) = \frac{f_{3D}(d)d^3}{E_{3D}\{D^3\}} \quad (2.9)$$

b) Distribuciones granulométricas de partículas intersecadas por cortes y sondeos

Al realizar un corte plano o un sondeo recto a través de una masa granular, los diámetros de las partículas intersecadas presentan una distribución frecuencial diferente de la tridimensional, debido a que las partículas de mayor diámetro tienen una mayor probabilidad de quedar intersecadas por el plano o la recta que las pequeñas.

Por lo tanto, es posible definir granulometrías aparentes en frecuencias de áreas (en los planos de corte) o en frecuencias de longitudes (en los sondeos), transformarlas a frecuencias de número y obtener las relaciones entre éstas y las distribuciones granulométricas en volumen.

A manera de ejemplo, en un corte plano, la distribución granulométrica en número es  $F_{2D}(d)$ , interpretada como la proporción, en número, de partículas intersecadas por el corte con diámetro menor o igual que  $d$ . Y en términos de probabilidad frecuencial:

$$F_{2D}(d) = P[D \leq d] \quad \exists \text{ intersección con el plano de corte}$$

La densidad  $f_{2D}(d)$  se obtiene por derivación de la anterior y es una función tal que:

$$f_{2D}(d) = P[d < D < d + \Delta d] \quad \exists \text{ intersección con el plano de corte}$$

Si las partículas son aproximadamente esféricas, la densidad aparente en número puede obtenerse a partir de la densidad en número  $f_{3D}(d)$  ponderando las frecuencias de esta última con un término proporcional al diámetro de las partículas:

$$f_{2D}(d) = \frac{f_{3D}(d)d}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} df_{3D}(d)dd} = \frac{f_{3D}(d)d}{E_{3D}\{D\}} \quad (2.10)$$

En la tabla 2.1 se resumen las distintas granulometrías que se pueden definir. Un mayor detalle de las definiciones y relaciones entre ellas se puede consultar en Auvinet (1986).

### 2.1.8 Distribución de tamaño de poros

El espacio poroso de un medio granular frecuentemente se estudia en términos de poros individuales para cuantificar sus características esenciales. El concepto mismo de tamaño de poro resulta ambiguo puesto que los vacíos son continuos y cualquier división de los mismos resulta en cierta medida arbitraria. Describir las dimensiones y la forma de los poros mediante una función simple parece una tarea muy complicada, sin embargo, una función que refleja las dimensiones de los poros se define en la forma siguiente (Matheron, 1967):

$F_{3V}(p)$  = Proporción del volumen total de los vacíos inaccesibles a una esfera de referencia de diámetro  $p$ .

Tabla 2.1. Distribuciones granulométricas generalizadas (Auvinet, 1986)

Nombre	Notación	Expresión
<b>GRANULOMETRÍAS BIDIMENSIONALES</b>		
Partículas intersecadas por un plano		
- Distribución granulométrica en volumen	$F_{2V}(d)$	Proporción del volumen de intersección
- Densidad en volumen	$f_{2V}(d)$	$f_{2V}(d) = \frac{f_{2D}(d)d^3}{E_{2D}\{D^3\}}$
- Distribución granulométrica en número	$F_{2D}(d)$	$P[D < d   \exists \cap \text{plano}]$
- Densidad de probabilidad en número	$f_{2D}(d)$	$f_{2D}(d) = \frac{f_{3D}(d)d}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} df_{3D}(d)\Delta d}$
Diámetros aparentes de partículas Intersecadas por un plano		
- Distribución granulométrica en área	$F_{2AS}(d)$	Proporción del área de intersección
- Densidad en área	$f_{2AS}(d)$	$f_{2AS}(d) = \frac{f_{2A}(d)d^2}{E_{2A}\{D^2\}}$
- Distribución granulométrica en número	$F_{2A}(d)$	
- Densidad de probabilidad en número	$f_{2A}(d)$	$f_{2A}(d) = \frac{d}{E_{3D}\{D\}} \int_d^{D_{\max}} \frac{f_{3D}(d_3)}{\sqrt{d_3^2 - d^2}} \Delta d_3$
<b>GRANULOMETRÍAS UNIDIMENSIONALES</b>		
Partículas intersecadas por un sondeo		
- Distribución granulométrica en volumen	$F_{1V}(d)$	Proporción del vol. de intersección
- Densidad en volumen	$f_{1V}(d)$	$f_{1V}(d) = \frac{f_{1D}(d)d^3}{E_{1D}\{D^3\}}$
- Distribución granulométrica en número	$F_{1D}(d)$	$P[D \leq d   \exists \cap \text{sondeo}]$
- Densidad de probabilidad en número	$f_{1D}(d)$	$f_{1D}(d) = \frac{f_{3D}(d)d^2}{\int_{D_{\min}}^{D_{\max}} d^2 f_{3D}(d)\Delta d}$
Diámetros aparentes de partículas Intersecadas por un sondeo		
- Distribución granulométrica en longitud	$F_{1AL}(d)$	Proporción de long. de intersección
- Densidad en longitud	$f_{1AL}(d)$	$f_{1AL}(d) = \frac{f_{1A}(d)d}{E_{1A}\{D\}}$
- Distribución granulométrica en número	$F_{1A}(d)$	
- Densidad de probabilidad en número	$f_{1A}(d)$	$f_{1A}(d) = \frac{2d}{E_{3D}\{D^2\}} [1 - F_{3D}(d)]$

NOTA: Las densidades de probabilidad se calculan para partículas aproximadamente esféricas

La distribución de tamaño de poros  $F_{3V}(p)$  considera los poros en los que puede caber la esfera de referencia pero que no son accesibles desde el exterior por falta de caminos de acceso. Por analogía con las distribuciones de tamaños de granos, se define la derivada de la función anterior como densidad (en volumen) de los tamaños de poros (ecuación 2.11).

$$f_{3V}(p) = \frac{dF_{3V}(p)}{dp} \quad (2.11)$$

Considerando un conjunto de esferas “equivalentes” a los poros (con función de distribución igual a  $F_{3V}(p)$ ), se puede definir la función de distribución y la densidad en número como se expresa en las ecuaciones 2.12 y 2.13.

$$F_{3P}(p) = P[P \leq p] \quad (2.12)$$

$$f_{3P}(p) = \frac{f_{3V}(p)}{p^3 E \left\{ \frac{1}{p^3} \right\}} \quad (2.13)$$

No se debe olvidar que el concepto de conjunto de esferas equivalentes presenta serias limitaciones, ya que la equivalencia es solamente matemática y no refleja la forma precisa de los poros ni su conectividad. La conectividad de los poros ha demostrado jugar un papel importante en las propiedades hidráulicas de un medio granular y en su comportamiento de histéresis. Sin embargo, no es fácil lograr una descripción morfológica cuantitativa.

Una vez aceptadas estas definiciones y sus limitaciones, es posible introducir conceptos análogos a los presentados en la tabla 2.1 para granos (Auvinet, 1986; Auvinet & Bouvard, 1988b). La distribución de tamaño de poros puede referirse al volumen, área o longitud de la muestra.

La distribución del tamaño de poros puede ser de utilidad para describir la complejidad de la estructura (con mucho más detalle que la porosidad), la variación espacial del tamaño de poros, distinción entre micro, meso y macroporos, relación entre el tamaño de los poros con el de las partículas, permeabilidad y transporte de partículas disueltas, entre otras cosas (Nimmo, 2004).

### 2.1.9 Granulometría generalizada

Para representar mediante una función única, tanto la porosidad como la distribución granulométrica de un medio granular se define la función  $G_3(d)$  igual a la proporción del volumen total de una muestra ocupada por partículas de diámetro menor o igual que  $d$  o por vacíos (Auvinet, 1986 y 1988).

Para  $d=0$ ,  $G_3(d)$  corresponde a la porosidad de la muestra. Para otros valores de  $d$ ,  $G_3(d)$  puede interpretarse como la porosidad de las partículas de diámetro mayor que  $d$ , a la condición de considerar las partículas de diámetro inferior a  $d$  como parte de los vacíos.

Si la masa granular se corta según un plano, la distribución de diámetros aparentes de las partículas y poros intersecados puede definirse mediante una segunda función:

$G_2(d)$  = Proporción del área total del corte ocupada por partículas con diámetro aparente menor o igual que  $d$  o por vacíos.

En la misma forma, a lo largo de un sondeo, es posible definir la distribución de diámetros aparentes siguiente:

$G_1(d)$  = Proporción de la longitud total del sondeo ocupada por partículas con un diámetro aparente menor o igual que  $d$  o por vacíos.

Para un medio homogéneo se pueden establecer las siguientes relaciones geométricas:

$$F_{3V}(d) = \frac{G_3(d) - n}{1 - n} \quad (2.14)$$

$$F_{2AS}(d) = \frac{G_2(d) - n}{1 - n} \quad (2.15)$$

$$F_{1AL}(d) = \frac{G_1(d) - n}{1 - n} \quad (2.16)$$

Es posible representar la distribución de granos y de poros en la forma indicada en la figura 2.2, con lo que se reúnen en una misma gráfica varias de las principales características estructurales del medio.

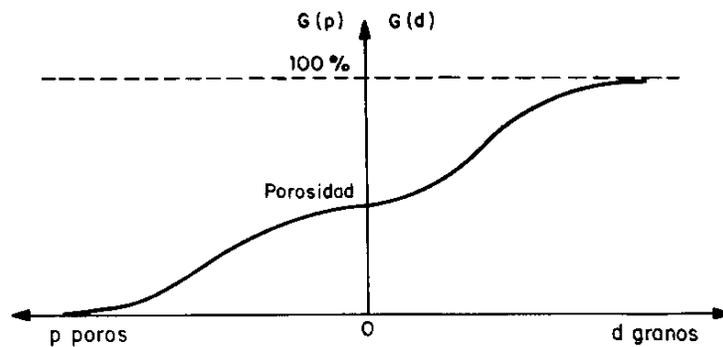


Figura 2.2. Distribución de tamaño de poros y granos (referidas al volumen total) en una sola gráfica (Auvinet, 1986)

### 2.1.10 Distribución espacial de partículas

La representación de la estructura de los medios granulares puede convertirse en una tarea muy difícil dependiendo de la naturaleza del material y el grado de aproximación deseado. Por una parte, el arreglo de las partículas dentro de una masa de material granular se ha descrito por el número de partículas por unidad de volumen, área y longitud (Auvinet, 1986 y 1988).

Por otra parte, los arreglos regulares formados por esferas son un caso particular donde las partículas se distribuyen ordenadamente en el espacio. El caso opuesto son los arreglos estocásticos poissonianos, donde se considera una distribución espacial al azar.

#### a) Número de partículas en un espacio

Sea  $N(V)$  el número de partículas contenidas dentro de una muestra de volumen  $V$  de la masa granular. Este número es una función aleatoria porque puede variar de una muestra a otra, aun en un medio homogéneo. La ecuación 2.17 expresa su distribución de probabilidad y su valor esperado corresponde a la ecuación 2.18.

$$P_{N_V(V)}(k) = P[N_V(V) = k] \quad (2.17)$$

$$E\{N_V(V)\} = \lambda_V V \quad (2.18)$$

En medios homogéneos y para partículas aproximadamente esféricas, la intensidad  $\lambda_V$  de la función  $N_V(V)$  puede calcularse con la ecuación 2.19 (Auvinet, 1986) a partir de la densidad granulométrica en número y de su porosidad.

$$\lambda_V = \frac{1-n}{E_{3D} \left\{ \frac{\pi}{6} D^3 \right\}} \quad (2.19)$$

Por su parte, es posible definir en forma análoga las funciones aleatorias para el número de partículas intersecadas por un plano de área  $A$  o por un sondeo de longitud  $L$ . Sus distribuciones de probabilidad y valor esperado se definen en forma análoga a las ecuaciones 2.17 y 2.18 pero en términos de áreas y longitudes.

Si se toma en cuenta que la probabilidad de que una partícula sea intersecada es proporcional a su diámetro es posible mostrar que las concentraciones de partículas en cortes planos y sondeos están dadas por las ecuaciones 2.20 y 2.21 respectivamente (Auvinet, 1986).

$$\lambda_A = \lambda_V E_{3D} \{D\} \quad (2.20)$$

$$\lambda_L = \lambda_V E_{3D} \left\{ \frac{\pi}{4} D^2 \right\} \quad (2.21)$$

Conviene resaltar que en medios anisótricos, los parámetros  $\lambda_A$  y  $\lambda_L$  son funciones de la orientación del plano o de la recta de intersección (Auvinet, 1986).

b) Arreglos regulares

Aunque los arreglos regulares de esferas constituyen una simplificación radical de la estructura de los medios granulares, permiten visualizar algunas características de las estructuras reales. Pueden concebirse diferentes arreglos de esferas de igual diámetro colocadas de acuerdo con un patrón específico (tabla 2.2 y figura 2.3).

A partir de los arreglos anteriores es posible construir arreglos regulares de menor porosidad introduciendo esferas de menor tamaño en los vacíos dejados por las partículas grandes. Si se considera un arreglo cúbico simple de esferas de diámetro  $D$ , es concebible un nuevo arreglo donde los huecos se rellenen con esferas de diámetro igual a  $\sqrt{3}-1$ . O bien en un arreglo tetraédrico relleno con esferas de diámetro igual a  $0.414D$  (Auvinet & Bouvard, 1987). Estos y otros arreglos como la construcción de Apolonio son de interés para minimizar la porosidad del medio.

De los párrafos anteriores se deduce que es posible concebir estructuras regulares de diferentes tipos, algunas de ellas con porosidades extremadamente bajas. Sin embargo, debe tomarse en cuenta que estas estructuras son idealizaciones que no se dan en la naturaleza, aun si las proporciones y tamaños de las partículas son los adecuados. La probabilidad de que se formen espontáneamente estructuras de este tipo que presentan una baja entropía (alto orden) puede generalmente considerarse nula, ya que existen innumerables estructuras no regulares que tienen la misma probabilidad de presentarse.

Tabla 2.2. Arreglos regulares de esferas

Arreglo	Número de contactos	Contactos en el mismo plano	Contactos en planos adyacentes	Porosidad (%)
Cúbico simple	6	4	2	47.6
Cúbico tetraédrico	8	6	2	39.5
Tetraédrico	12	6	4	30.2
Piramidal	12	4	8	25.9
Tetraédrico	12	6	6	25.9

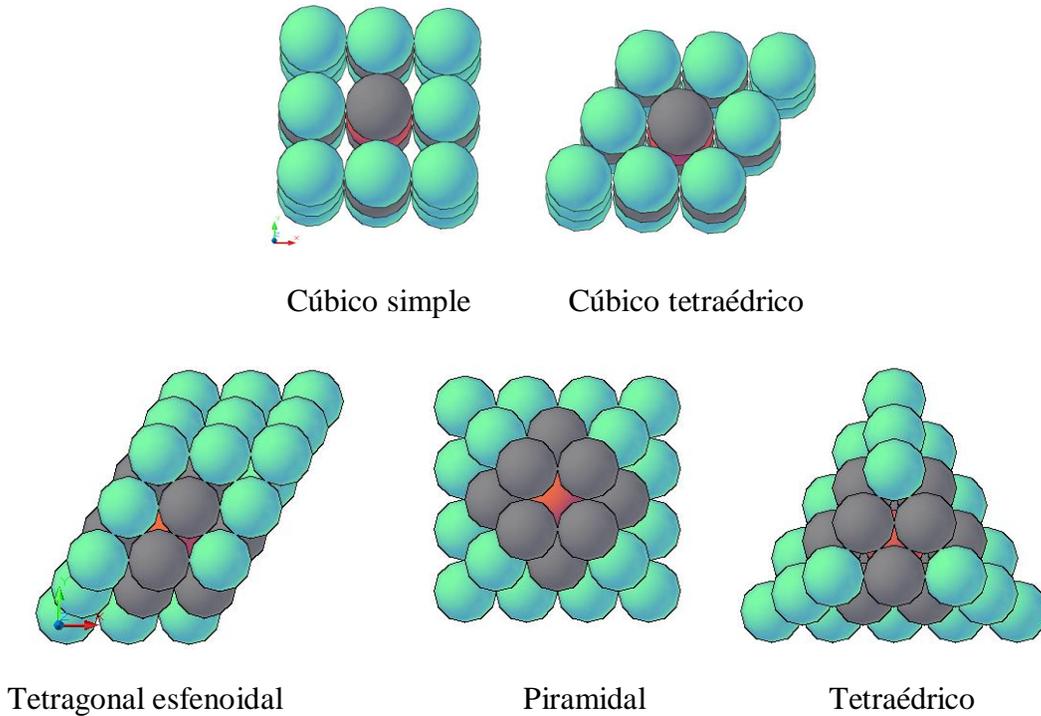


Figura 2.3. Arreglos regulares de esferas de igual diámetro

c) Arreglos estocásticos poissonianos

Esta alternativa teórica consiste en suponer que los centros de gravedad de las partículas se distribuyen al azar en el espacio de acuerdo con un proceso aleatorio de Poisson (Auvinet, 1986). Sin embargo esta hipótesis es cuestionable incluso en medios granulares homogéneos, debido a que la presencia del centro de una partícula condiciona a que otro no pueda ubicarse a una distancia menor o igual al radio de la primera partícula. En consecuencia, las posiciones de los centros de dos partículas no son estrictamente independientes entre sí.

A pesar de la restricción mencionada, la distribución poissoniana es razonablemente aceptable, en casos geotécnicos como los siguientes:

- Cuando se considere una mezcla homogénea de suelo fino con una proporción baja de material granular.
- Cuando dentro de una masa granular homogénea se considere únicamente una fracción granulométrica que represente una proporción baja del total, por ejemplo, tomar en cuenta las partículas mayores que cierta dimensión.

Recordando que la función aleatoria  $N_V(V)$  es el número de partículas contenidas dentro de una muestra de masa granular de volumen  $V$ . La probabilidad de que  $N_V(V)$  sea igual a un

cierto valor entero  $k$ , queda determinada por la siguiente distribución de probabilidad de Poisson:

$$P_{N_V(V)}(k) = P[N_V(V) = k] = \frac{(\lambda_V V)^k \exp(-\lambda_V V)}{k!} \quad (2.22)$$

O bien, en un área  $A$  de un plano de intersección:

$$P_{N_A(A)}(k) = P[N_A(A) = k] = \frac{(\lambda_A A)^k \exp(-\lambda_A A)}{k!} \quad (2.23)$$

Y la distribución del número de partículas intersecadas por un sondeo de longitud  $L$  es:

$$P_{N_L(L)}(k) = P[N_L(L) = k] = \frac{(\lambda_L L)^k \exp(-\lambda_L L)}{k!} \quad (2.24)$$

Dentro de los límites de validez de las ecuaciones 2.22 a 2.24 es posible obtener la densidad de probabilidad de la distancia  $T$  entre el centro de una partícula y el de la más cercana.

De acuerdo al proceso de Poisson, la distancia  $T$  antes de encontrar el primer centro de una esfera tiene una densidad de probabilidad exponencial. La probabilidad de que en el intervalo  $(0, t)$  no se presente ocurrencia alguna es (Auvinet, 1986):

$$P[T \leq t] = 1 - P\left[N_V\left(\frac{4\pi t^3}{3}\right) = 0\right] = 1 - \exp\left[-\lambda_V \frac{4\pi t^3}{3}\right] \quad (2.25)$$

La derivada de esta expresión es la densidad de probabilidad:

$$f_{3T}(t) = 4\pi\lambda_V t^2 \exp\left(-\lambda_V \frac{4\pi t^3}{3}\right) \quad (2.26)$$

La distancia entre el centro de un círculo y el del más cercano en un medio bidimensional o en un plano de intersección tiene la siguiente densidad de probabilidad:

$$f_{2T}(t) = 2\pi\lambda_A t \exp(-\lambda_A \pi t^2) \quad (2.27)$$

Y la distancia entre el centro de un segmento de intersección de una partícula con un sondeo y el centro del segmento más cercano tiene la densidad exponencial clásica:

$$f_{1T}(t) = \lambda_L t \exp(-\lambda_L t) \quad (2.28)$$

Auvinet (1986) observó que para un material dado, la hipótesis poissoniana es más aceptable a lo largo de un sondeo que en un plano o en el espacio. En espacios de dos y tres dimensiones se hace necesario corregir la densidad de  $T$ , puesto que  $T$  necesariamente debe ser mayor al diámetro mínimo.

### 2.1.11 Número de coordinación

En las ciencias de materiales se llama número de contactos  $N_C$  al número de granos que están en contacto directo con una partícula de interés. Es un parámetro importante en la descripción de la disposición geométrica de las partículas en un medio granular. El  $N_C$  es ampliamente utilizado en la evaluación de propiedades estructurales relacionadas con la porosidad, anisotropía geométrica, transmisión de fuerzas, transferencia de calor, etcétera.

En un conjunto de esferas, el número mínimo de contactos es dos y es necesario para que exista continuidad en la estructura. El número de “osculación” es el número máximo de esferas de igual tamaño que pueden tocar simultáneamente una esfera de igual tamaño y sin traslaparse. Schute y van del Waerden demostraron en 1953 que el número máximo es doce (más detalles en Isola, 2008 o en Musin & Tarasov, 2012).

El problema de las trece esferas considera que existen infinitas formas de colocar las doce esferas iguales alrededor de la esfera central. Por ejemplo, si las esferas se disponen en los vértices de un icosaedro siendo tangentes a una esfera centrada en este poliedro, se obtienen doce esferas en contacto con la esfera central pero que no se tocan entre sí. En 1694 este problema se discutió entre Isaac Newton y David Gregory, Newton afirmaba que doce era el número máximo mientras que Gregory opinaba que una treceava esfera podría colocarse modificando el arreglo de las esferas. Siglos después se demostró que Newton tenía razón.

El problema se complica cuando intervienen esferas de distintos tamaños. Por ejemplo, se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número máximo de esferas de diámetro  $A$  que pueden colocarse en la superficie de una esfera con diámetro  $B$  si una esfera de tamaño  $C$  también está en esa superficie? Este planteamiento es conocido como “El problema de las tres esferas” y actualmente no tiene una solución teórica. En un medio granular con múltiples tamaños se presentan problemas todavía más complejos.

Una alternativa para describir el número de contactos por partícula consiste en admitir que  $N_C$  es una variable aleatoria con la distribución de probabilidad siguiente (Auvinet, 1986):

$$P_{N_C}(n_c) = P[N_C = n_c] \quad (2.29)$$

Al número medio de contactos por partícula dentro de un medio granular se le llama número de coordinación ( $N_c$ ). Frecuentemente, en la literatura se emplea número de coordinación como sinónimo de número de contactos por partícula.

En un conjunto de esferas en equilibrio mecánico se deben satisfacer las ecuaciones de Newton para el equilibrio de fuerzas y momentos que actúan sobre cada grano. Por lo tanto, el número de grados de libertad debe equilibrar el número de restricciones. Considérese un sistema coordenado normal-tangencial en una muestra de  $N$  esferas perfectamente lisas,

se tienen  $3N_{es}$  grados de libertad por traslación y existen  $N_{es} \cdot N_c / 2$  restricciones (número de puntos de contacto o de fuerzas normales en la muestra), entonces el número de contactos medio por partícula necesario para el equilibrio isostático es:

$$3N_{es} = N_{es} \frac{N_c}{2}; N_c = 6 \quad (2.30)$$

Cuando las fuerzas de fricción están presentes aparecen tres grados de libertad adicionales por rotación y dos restricciones más a causa de las fuerzas tangenciales, por lo que el número de contactos medio requerido para el equilibrio está dado por la ecuación 2.31.

$$6N_{es} = N_{es} \frac{3N_c}{2}; N_c = 4 \quad (2.31)$$

Se conoce como hipótesis de Bennet (Isola, 2008) al número de coordinación requerido para el equilibrio isostático de un conjunto de granos. Esta hipótesis es una referencia teórica cuando se evalúa el número de contactos de las partículas.

La literatura reporta diversas dificultades para relacionar el número de contactos con otras propiedades de un medio granular. Por lo general se acepta que el número de contactos se distribuye dentro de cierto intervalo y que un arreglo denso da como resultado un mayor número de contactos. Oda (1972) y Cambou *et al.*, (2009) reportan varias correlaciones empíricas entre el número de coordinación y la relación de vacíos (o la porosidad) para materiales de partículas esféricas de igual tamaño (ecuaciones 2.32 a 2.34). Sin embargo, ninguna de las correlaciones tiene validez universal.

$$N_c = 12(1 - n) \quad (2.32)$$

$$N_c = \frac{3}{n} \quad (2.33)$$

$$N_c = 13.28 - 8 \left( \frac{n}{1 - n} \right) \quad (2.34)$$

### 2.1.12 Repartición de contactos

La posición de un contacto sobre la superficie de un grano está dada por las coordenadas esféricas  $(\alpha, \beta, r)$  de la figura 2.4. La distribución de la orientación de los vectores normales a los planos tangentes a los puntos de contacto (o simplemente normales a los contactos) puede representarse por una función  $\Gamma(\alpha, \beta)$  que satisface la condición:

$$\int_{\Omega} \Gamma(\alpha, \beta) d\omega = 1 \quad (2.35)$$

Donde:  $d\omega$  es ángulo sólido elemental  $= \cos(\alpha) d\beta d\alpha$   
 $\Omega$  una esfera con radio unitario

$\Gamma(\alpha, \beta) d\omega$  representa la probabilidad de que un vector normal al plano de contacto tangente en un punto de contacto se localice en el ángulo sólido elemental  $d\omega$  (Auvinet, 1986).

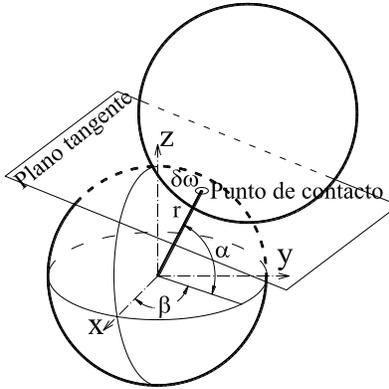


Figura 2.4. Definición de la posición de un contacto

En algunas estructuras, como las depositadas en el campo de la gravedad, la función es independiente del ángulo  $\beta$ , por lo que puede escribirse otra función de repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  tal que:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Gamma(\alpha) \cos \alpha d\alpha = 1 \quad (2.36)$$

Si la repartición es uniforme  $\Gamma(\alpha, \beta) = 1/(4\pi)$  y  $\Gamma(\alpha) = 1/2$ . Cualquier desviación respecto a estos valores significa que existe anisotropía geométrica. La figura 2.5 muestra un ejemplo sobre la repartición de contactos en un medio granular de partículas esféricas.

Otra forma para describir el conjunto de normales a los contactos es tomar una simple media aritmética de sus vectores unitarios ( $\bar{n}$ ). Con seguridad el resultado es un vector nulo debido a que cada vector  $\bar{n}$  es cancelado por otro  $-\bar{n}$  en cada punto de contacto. Para evitar lo anterior, se recurre al producto tensorial  $\bar{n} \otimes \bar{n}$  (Oda & Iwashita, 1999) de donde resulta el tensor de la estructura o “fabric tensor” en inglés (ecuación 2.37). El término “fabric” o estructura se utiliza para denotar el arreglo espacial de partículas y sus vacíos asociados (Oda, 1972).

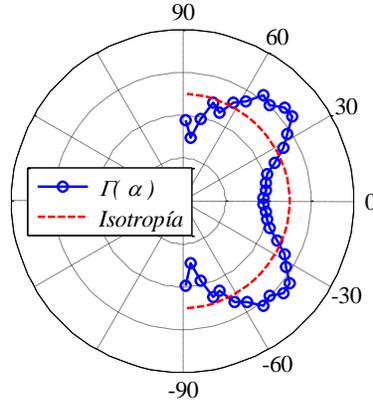


Figura 2.5. Repartición de contactos sobre los granos respecto al ángulo  $\alpha$

$$H_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{n}^k \otimes \bar{n}^k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N n_i^k n_j^k \quad (2.37)$$

Donde:  $N$ : número total de contactos

$\bar{n}$ : vector unitario normal al plano tangente en el punto de contacto

$k$ :  $k$ -ésimo vector normal unitario

$i, j$ : direcciones cartesianas  $x, y, z$ .

El tensor de la estructura es un tensor de segundo orden definido por Satake (1982) e indica la orientación media de las normales a los contactos proyectada sobre los ejes cartesianos. Para mejorar la representación de las orientaciones del conjunto de vectores normales a los contactos se puede recurrir a tensores de orden superior (véase Cambou *et al.*, 2009).

La anisotropía juega un papel muy importante en el comportamiento de los medios granulares ya que la geometría local da origen al comportamiento anisótropo global (Cambou *et al.*, 2002). Se puede distinguir una anisotropía inherente, originada por la formación del medio y una anisotropía inducida vinculada a los procesos de carga.

### 2.1.13 Función característica binaria

La distribución aleatoria de los sólidos y de los vacíos dentro de una masa granular puede describirse en forma concisa mediante una función binaria llamada función característica (Matheron, 1967). En cada punto  $\underline{X}$  seleccionado al azar en el espacio, esta función se define como:

$$K(\underline{X})=1, \text{ si } \underline{X} \text{ pertenece a los poros}$$

$K(\underline{X})=0$ , si  $\underline{X}$  pertenece a los sólidos

En un medio homogéneo, al considerar un punto  $\underline{X}$  al azar dentro del medio se tiene:

$$\begin{aligned} P[K(\underline{X})=1] &= n \\ P[K(\underline{X})=0] &= 1-n \end{aligned} \quad (2.38)$$

Donde  $n$  es la porosidad del medio.

La esperanza y varianza de la función característica son:

$$E\{K(\underline{X})\} = n \quad (2.39)$$

$$\text{var}[K(\underline{X})] = n(1-n) \quad (2.40)$$

Tomando en cuenta que a lo largo de una dirección el proceso es estacionario en el sentido amplio (el valor medio es constante), la función de autocorrelación sólo depende de la distancia entre dos puntos del medio  $h = \underline{X} - \underline{X}'$  y se puede escribir como:

$$R(\underline{X}, \underline{X}') = E\{K(\underline{X})K(\underline{X}')\} = R(\underline{X}, \underline{X}') = R(h) \quad (2.41)$$

La función de autocovarianza es:

$$C(\underline{X}, \underline{X}') = C(\underline{X} - \underline{X}') = R(h) - n^2 = C(h) \quad (2.42)$$

Y su coeficiente de autocorrelación:

$$r(\underline{X}, \underline{X}') = r(\underline{X} - \underline{X}') = \frac{C(h)}{n(1-n)} = r(h) \quad (2.43)$$

La función característica y sus medidas estadísticas descriptivas permiten describir las variaciones aleatorias que presentan las propiedades estructurales de un medio granular como la porosidad, la relación de vacíos y la distribución granulométrica, de una muestra a otra, dentro de un medio homogéneo (Auvinet, 1986).

La porosidad de una muestra de volumen  $V$  es igual a la integral estocástica:

$$n_v = \frac{1}{V} \int_V K(\underline{X}) d\underline{X} \quad (2.44)$$

Entonces la esperanza matemática es la porosidad del medio:

$$E\{n_v\} = \frac{1}{V} \int_V E\{K(\underline{X})\} d\underline{X} = n \quad (2.45)$$

Con una varianza:

$$\text{var}[n_v] = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V C(\underline{X} - \underline{X}') d\underline{X} d\underline{X}' = \sigma_{n_v}^2 \quad (2.46)$$

La reducción de varianza de la porosidad y otros parámetros con el volumen de la muestra ha sido llamado “*efecto de escala geométrico*” (Auvinet & Bouvard, 1988a).

## 2.2 Transmisión de esfuerzos en medios granulares

Las teorías de esfuerzos usadas comúnmente en geotecnia fueron concebidas para medios continuos. Sin embargo, el concepto de esfuerzo en medios granulares debe interpretarse en términos de fuerzas de contacto entre partículas.

### 2.2.1 Fuerzas

Marsal (1973) y Auvinet (1992 y 1993) distinguen dos tipos de fuerzas dentro de un material granular sometido a sollicitaciones mecánicas (figura 2.6). Las fuerzas de contacto interparticulares son las fuerzas de contacto entre dos partículas ( $F^{[BA]}$  y  $F^{[CA]}$ ). Las fuerzas intragranulares ( $P_i$ ) se definen en la intersección de cada partícula con un plano de corte.

Para estimar teóricamente la fuerza media de contacto se acepta que en cada contacto actúa una fuerza proporcional al vector esfuerzo ( $S$  en la ec. 2.47) que actuaría en un medio continuo sobre el plano tangente a la partícula en dicho punto (figura 2.4). Haciendo coincidir el plano de esta figura con los esfuerzos principales, Auvinet (1986) considera que este coeficiente de proporcionalidad ( $\alpha'$  en la ec. 2.47) es función de la orientación de los esfuerzos y del número de contactos entre los que se reparte el esfuerzo.

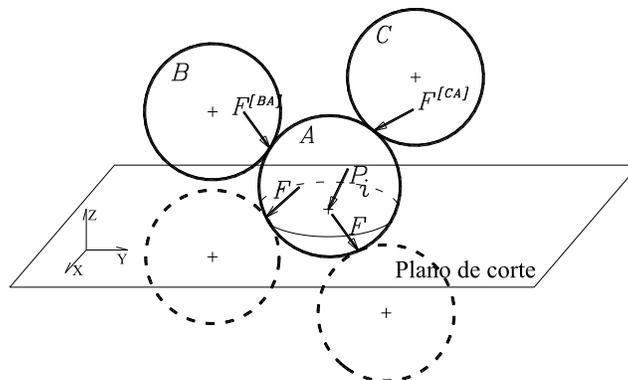


Figura 2.6. Fuerzas de contacto ( $F$ ) e intragranulares ( $P$ )

$$E\{F\} = x'S = x' \begin{cases} S_3 * \cos \beta * \cos \alpha \\ S_2 * \text{sen} \beta * \cos \alpha \\ S_1 * \text{sen} \alpha \end{cases} \quad (2.47)$$

Donde:  $x$  es el coeficiente de proporcionalidad

$$x' = \frac{1}{E\{Np\}E\{\text{sen} \alpha\}}$$

$E\{Np\}$  es la esperanza del número total de contactos en los casquetes de las partículas intersecadas por el plano. Se escoge siempre el casquete de menor dimensión arriba o abajo del plano).

$E\{\text{sen} \alpha\}$  esperanza del seno del ángulo definido en la figura 2.4 para el contacto  $i$  e independiente de  $Np$ .

En un medio de esferas con distribución de contactos isótropa  $E\{\text{sen} \alpha\} = 3/4$  por lo que el coeficiente  $x'$  queda:

$$x' = \frac{8\pi E_{3D}\{D^3\}}{9(1-n)E\{Nc\}E_{3D}\{D\}} \quad (2.48)$$

Entonces, tomando en cuenta la isotropía, el valor medio de las fuerzas de contacto es:

$$E\{F\} = \frac{x'}{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \int_{\beta=-\pi}^{\pi} \sqrt{S_3^2 \cos^2 \alpha \text{sen}^2 \beta + S_2^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + S_1^2 \sin^2 \alpha} \cos \alpha d\beta d\alpha \quad (2.49)$$

Donde:  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  son los esfuerzos principales de mayor a menor

Para materiales con granulometría uniforme (diámetro constante), la ecuación anterior se reduce a:

$$E\{F\} = \frac{\frac{8}{9}\pi D^2 S}{(1-n)E_{2D}\{Nc\}} \quad (2.50)$$

Las fuerzas de contacto reales pueden diferir considerablemente de los valores medios así estimados debido a las concentraciones de esfuerzos que se presentan en ciertas partículas. En experimentos realizados en modelos de material fotoelástico, Dantu (1968) mostró que dentro de un medio granular, pueden existir caminos de partículas sobrecargadas (llamadas cadenas de fuerzas) así como partículas libres en el esqueleto granular (partículas inactivas).

Este enfoque tiene la limitante que únicamente considera la componente geométrica de la variabilidad de las fuerzas. El método de elementos discretos que se presenta más adelante ofrece información más completa para el estudio de las fuerzas de contacto.

### 2.2.2 Esfuerzos

Weber (1966) propuso una fórmula que relaciona las fuerzas de contacto locales con el tensor de esfuerzos de Cauchy (Cambou *et al.*, 2009). A partir de las fuerzas de contacto, este tensor permite asociar un estado de esfuerzos a un volumen elemental representativo compuesto por un arreglo de granos.

Para relacionar las fuerzas de contacto definidas a la microescala con el tensor de esfuerzos a la macroescala, se aplica el principio de trabajo virtual a las fuerzas externas e internas actuantes en el conjunto de partículas en equilibrio (Cambou & Sidoroff, 1985; Tu & Andrade, 2008) como se ilustra en la figura 2.7.

$$\sum_{c=1}^{N_c} F^{[c]} \Delta^{[c]} + \sum_{j=1}^{N_t} t_j u_j + \sum_{k=1}^{N_p} b_k u_k = 0 \quad (2.51)$$

- Donde:  $F^{[c]}$  es la fuerza de contacto en el contacto  $c$   
 $\Delta^{[c]}$  el desplazamiento virtual del contacto  $c$   
 $t_j$  la fuerza externa actuante en el punto  $j$  de la frontera  
 $u_j$  el desplazamiento virtual en el punto  $j$  sobre la frontera  
 $b_k$  el peso propio de una partícula  
 $u_k$  el desplazamiento virtual del centroide del grano  $k$

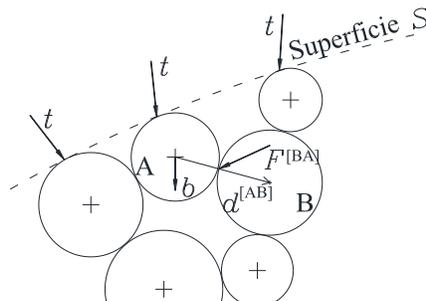


Figura 2.7. Fuerzas internas y externas en un conjunto de partículas

Considerando que el conjunto de partículas ocupa un volumen  $V$  envuelto por una superficie  $S$ , la suma de fuerzas actuantes sobre esta superficie es  $T$  y las fuerzas de cuerpo  $b$  pueden reemplazarse por una fuerza equivalente  $B$  correspondiente a un medio continuo

mecánicamente equivalente al sistema de partículas. Entonces la ecuación 2.51 se escribe como:

$$\sum_{c=1}^{N_c} F^{[c]} \bullet \Delta^{[c]} + \int_S T \bullet u dS + \int_V B \bullet u dV = 0 \quad (2.52)$$

Normalmente se acepta que el campo de desplazamientos es una función lineal de la posición  $X$  de las partículas.

$$u = \Phi \bullet X + C \quad (2.53)$$

Donde:  $\Phi$  y  $C$  son un tensor de segundo orden y un vector respectivamente, constantes en el medio.

Cuando dos partículas  $A$  y  $B$  se encuentran en contacto en el punto  $c$ , el desplazamiento virtual es:

$$\Delta_c = u^{[A]} - u^{[B]} = -\Phi \bullet d^{[AB]} \quad (2.54)$$

Siendo  $d^{[AB]}$  el vector que va del centroide de la partícula  $A$  al de  $B$  y se considera que la fuerza de contacto  $F^{[c]}$  es ejercida por la partícula  $B$  sobre la partícula  $A$ .

Las ecuaciones 2.53 y 2.54 se sustituyen en la ecuación 2.52 y se aplica el teorema de divergencia de Gauss (Oda & Iwashita, 1999; Tu & Andrade, 2008) para transformar la integral de superficie en una de volumen. Considerando que por equilibrio la divergencia  $div \sigma(X)=0$  el segundo y tercer término se simplifican para obtener la ecuación 2.55.

$$-\sum_{c=1}^{N_c} F^{[c]} \otimes d^{[AB]} + \int_V \sigma dV = 0 \quad (2.55)$$

De donde se obtiene el tensor de esfuerzos local para un dominio continuo equivalente.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N_c} F_i^{[c]} \otimes d_j^{[c]} \quad (2.56)$$

Donde:  $V$  es el volumen de la muestra granular

$N_C$ , el número de contactos en el volumen  $V$

$F^{[c]}$ , el vector de la fuerza actuante en el contacto  $c$

$d^{[AB]}$ , el vector del centroide de la partícula  $A$  al de la  $B$

$i, j$ , direcciones cartesianas

El tensor de esfuerzos de la ecuación 2.56 se puede utilizar para calcular los esfuerzos al interior de una partícula cuando sobre ésta actúan numerosas fuerzas de contacto.

## **2.3 Modelado numérico en geotecnia**

Al proceso de resolver problemas físicos por una aproximación apropiada de la realidad se le conoce como modelado numérico. Por lo general, este modelado consta de cuatro etapas. Se inicia por formular un modelo matemático que corresponde al problema físico con suposiciones apropiadas, este modelo tiene forma de ecuaciones diferenciales o algebraicas. En muchos casos de ingeniería, este modelo matemático no puede resolverse en forma analítica y por tanto se requiere de una solución numérica aproximada. En el segundo paso se plantea la solución numérica al modelo matemático inicial. Se debe realizar una calibración y validación considerando los resultados preexistentes, así como la evaluación del error de la solución. El tercer paso es la implementación del modelo numérico en una computadora para obtener los resultados. El cuarto paso es la interpretación de los resultados para dar soporte al problema de ingeniería estudiado.

Cuanto mejor sea la aproximación al problema a través de este proceso más precisa será la solución. El desarrollo y selección de un modelo numérico apropiado es clave para obtener resultados satisfactorios.

En geotecnia como en otras áreas, el modelado numérico tiene la ventaja de tomar en cuenta la geometría del problema, la historia de cargas y la respuesta del material. El modelado permite llevar a cabo una gran cantidad de análisis sofisticados con un esfuerzo relativamente bajo. Sin embargo, se requiere de un conocimiento adecuado del fenómeno natural, las leyes relevantes y un buen juicio.

### **2.3.1 Clasificación de los métodos numéricos**

Diversos modelos numéricos se han desarrollado para resolver diferentes problemas en ingeniería. Cada método tiene sus ventajas y limitaciones particulares. La selección del método más apropiado se desprende del buen entendimiento del fenómeno físico.

En un sentido amplio, los métodos numéricos se pueden clasificar de acuerdo al medio que representan, ya sean continuos o discontinuos (figura 2.8). En los métodos continuos todos los puntos del medio permanecen siempre unidos. En los métodos discontinuos, los elementos que constituyen el medio son partículas (o bloques) independientes.

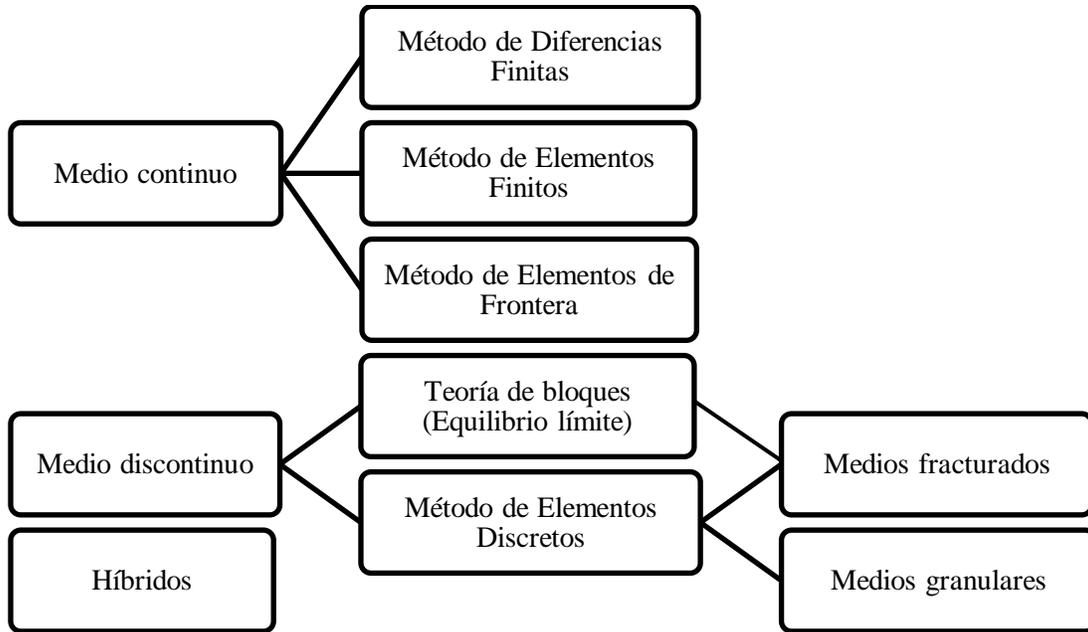


Figura 2.8. Clasificación de los métodos numéricos en geotecnia

Los suelos y rocas son los principales materiales de interés en geotecnia y dependiendo de la escala de observación se pueden analizar como medios continuos o discontinuos. No hay una regla cuantitativa para determinar si el problema es de medio continuo o discontinuo.

Para fines prácticos de la geotecnia se pueden distinguir cuatro posibilidades de análisis. Si el medio es un único cuerpo se tendrá un campo continuo de deformaciones (figura 2.9 a), por lo que los modelos numéricos continuos son los apropiados.

Cuando el tamaño de los bloques o partículas son de tamaño considerable (figura 2.9 b), el campo de desplazamientos será continuo dentro de cada región, pero será modificado drásticamente en las discontinuidades. Por lo tanto, se puede utilizar un modelo continuo que sea capaz de considerar las discontinuidades específicas o bien un modelo discontinuo.

En un medio donde los bloques o partículas constituyentes tienen un tamaño del mismo orden de magnitud que la excavación de interés (figura 2.9 c), los desplazamientos están determinados por los movimientos de los elementos constitutivos. Por lo tanto, un modelo discontinuo es más apropiado.

Si el medio está compuesto por partículas o bloques de tamaño mucho menor que el del problema estudiado (figura 2.9 d), se produce un campo de desplazamientos semicontinuo, por lo que el uso de un modelo continuo puede ser aceptable.

En los estudios teóricos sobre el comportamiento de los geomateriales resulta de interés considerar su naturaleza discontinua, como es el caso de la presente investigación.

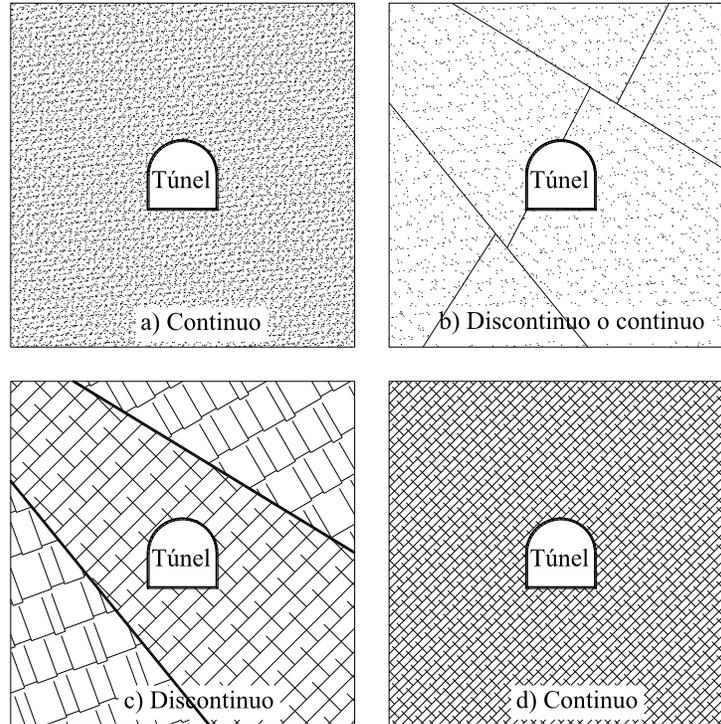


Figura 2.9. Modelos continuos y discretos

### 2.3.2 Métodos para medios continuos

Para resolver un problema continuo por métodos numéricos utilizando computadoras digitales, se procede a dividir el dominio del problema en un número finito de sub-dominios o elementos, cuyo comportamiento es aproximado por descripciones matemáticas simples con grados de libertad finitos. Los sub-dominios deben satisfacer tanto las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema como la condición de continuidad en sus interfaces con los elementos vecinos. Esta discretización permite pasar de un sistema continuo con grados de libertad infinito a un sistema con grados de libertad finito.

Estos métodos numéricos son usados extensivamente en la industria e investigación y puede decirse que muchos problemas no podrían resolverse sin su ayuda.

Entre los métodos de medio continuo más usuales en geotecnia (Bobet, 2010) se encuentra el Método de diferencias finitas (FDM), el Método de elementos finitos (FEM) y Método de elementos frontera (BEM). En los métodos de diferencias finitas y elementos finitos, el interior del medio es dividido en elementos de geometría simple con propiedades geomecánicas predefinidas. En el Método de elementos frontera únicamente se dividen

(discretizan) los elementos sobre las fronteras de las excavaciones, pero el interior del medio se representa matemáticamente como un continuo infinito.

a) Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas (FDM) se basa en la premisa de que las ecuaciones diferenciales que gobiernan un problema pueden representarse por formas algebraicas que involucran únicamente operaciones aritméticas, el proceso de diferencias finitas (Zienkiewicz & Morgan, 1983). Este es el método más antiguo de los métodos numéricos empleados en geotecnia y se utilizó incluso antes de la llegada de las computadoras. La primera aplicación conocida (Bobet, 2010) es el método de Runge, quien utilizó el FDM en 1908 en la solución de problemas de torsión. Con el FDM, el conjunto de ecuaciones diferenciales se reduce a un sistema de ecuaciones lineales resuelto por cualquiera de los métodos clásicos de álgebra. Posteriormente se desarrolló el método de relajación, el cual proporciona una solución rápida del sistema de ecuaciones, lo que favoreció un uso mucho más amplio del FDM con la aparición de las computadoras.

El FDM superpone una malla cuadrada sobre el dominio de análisis. Sobre los nodos de esta malla se aplican las fórmulas de diferencias finitas y se resuelve el sistema de ecuaciones que representan el equilibrio y compatibilidad de deformaciones.

En la figura 2.10 se muestra un ejemplo de la discretización del FDM para la solución de la ecuación de Laplace de flujo de agua bidimensional expresada en la ecuación 2.57.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{d^2} [h(P_1) - 2h(P) + h(P_3)] + \frac{1}{d^2} [h(P_2) - 2h(P) + h(P_4)] \quad (2.57)$$

Siendo:  $h$  la carga hidráulica

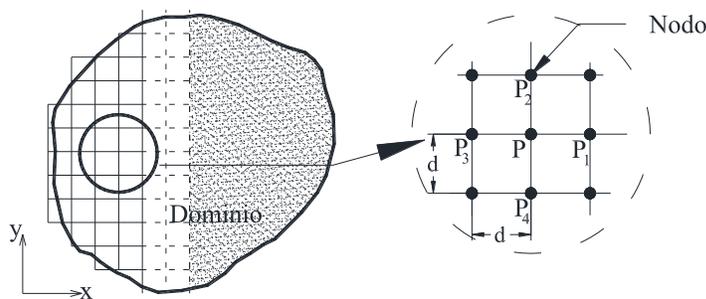


Figura 2.10. Malla de diferencias finitas en 2D

El FDM también se utiliza con mucha frecuencia para resolver problemas dinámicos, donde los desplazamientos son función de la posición y del tiempo, para lo cual se usan técnicas de integración explícita que consideran pequeños incrementos de tiempo. Los incrementos de tiempo se obtienen de acuerdo a la rigidez y densidad del medio. Es común ejecutar miles de pasos para completar un análisis numérico, ya que el tiempo y memoria requeridos para llevar a cabo uno de ellos son pequeños, por lo que pueden realizarse modelaciones dinámicas complejas en tiempos razonables.

La solución se obtiene en un proceso por etapas que implica incrementos de carga suficientemente pequeños hasta que se alcanza el estado final deseado. En cada etapa de carga se obtienen los desplazamientos en los nodos y se calculan los esfuerzos de acuerdo al comportamiento no lineal del material. Una vez que el campo de esfuerzos está actualizado se inicia con el siguiente incremento de carga. Este esquema de cálculo no requiere de iteraciones adicionales como en el método de elementos finitos que se presenta más adelante.

El método de diferencias finitas es apto para problemas dinámicos, comportamiento no lineal, grandes deformaciones, inestabilidad física, flujo de agua, etc. En el FDM pueden incorporarse discontinuidades mediante el uso de nodos en ambos lados de la discontinuidad. El desplazamiento relativo entre los correspondientes nodos determina el deslizamiento a través de la discontinuidad, de acuerdo con las ecuaciones que relacionan el esfuerzo normal con el cortante, así como con las ecuaciones que relacionan la rigidez de la discontinuidad con los desplazamientos normales y cortantes.

### b) Método de elementos finitos

El método de elementos finitos (FEM) es el más utilizado para el análisis de medios continuos. Este método también consiste en una discretización del medio en pequeños elementos que se unen en sus nodos (figura 2.11). El método supone que las ecuaciones diferenciales desconocidas pueden aproximarse con funciones generalmente polinomiales, por lo que las deformaciones en cualquier punto dentro del elemento se calculan a partir de los desplazamientos de los nodos.

Al igual que el FDM se produce un sistema de ecuaciones lineales a resolver. El FEM se adapta bien a problemas de geometría compleja, heterogeneidad en los materiales y condiciones de frontera complejas. Tiene la ventaja de que la estabilidad numérica no es afectada por la magnitud del incremento de tiempo en los pasos de cálculo. Sin embargo, se requiere un proceso iterativo para seguir una ley constitutiva no lineal y por lo tanto se necesita una mayor capacidad cálculo y memoria. Un desarrollo completo de los fundamentos del FEM puede encontrarse en Zienkiewicz & Morgan (1983).

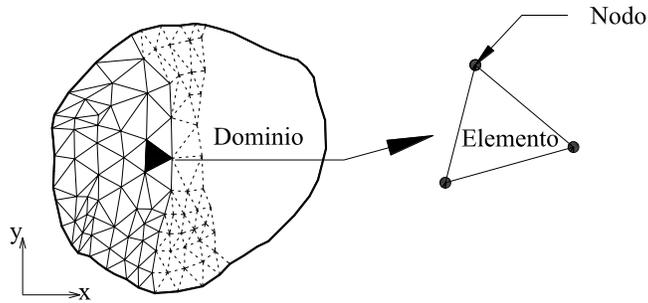


Figura 2.11. Ejemplo de discretización con elemento finito en 2D

c) Método de elementos de frontera

Por otra parte, el método de elementos de frontera (BEM) considera un medio infinito, por lo que no requiere de la imposición de fronteras artificiales como en el FDM y FEM. Este método permite obtener una solución aproximada en las fronteras mientras que en el interior del medio se satisface exactamente el equilibrio y compatibilidad de deformaciones. La ventaja de considerar la discretización solamente en las fronteras es que el problema se reduce una dimensión, de 3D a una superficie 2D y de 2D a un problema lineal (figura 2.12). Este método es muy atractivo cuando la relación entre el volumen y la superficie de las fronteras es grande.

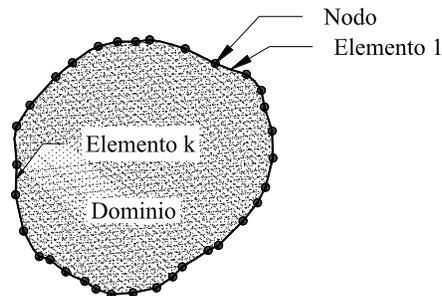


Figura 2.12. Ejemplo de discretización con elementos frontera en 2D

La técnica utilizada en el BEM consiste principalmente en una transformación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan todo el medio a ecuaciones que solo consideran los valores en las fronteras. La solución del problema puede realizarse de dos formas, cuando los parámetros desconocidos (esfuerzos y deformaciones) en cada nodo pueden calcularse directamente de la resolución de las ecuaciones se dice que la solución es directa. La solución indirecta del problema se lleva a cabo en términos de cantidades ficticias,

típicamente esfuerzos o deformaciones, a partir de los cuales se calculan los esfuerzos y deformaciones verdaderos en cada punto del medio.

El método de elementos de frontera se adapta bien a problemas estáticos con comportamiento elástico, aunque los problemas reales no siempre se ajustan a estas limitaciones.

Actualmente es posible realizar modelos híbridos BEM-FEM donde se usa una discretización con elemento finito en las regiones donde puede ocurrir plastificación y elementos frontera en las regiones elásticas.

### **2.3.3 Métodos para medios discontinuos**

Otra familia de modelos numéricos considera el medio como un conjunto de partículas o bloques independientes. Entre los métodos de análisis discontinuos se puede citar a la teoría de bloques, los métodos de dinámica molecular (como el método de elementos discretos de Cundall) y los métodos de dinámica de contactos.

La teoría de bloques identifica un cuerpo con movimiento cinemáticamente posible sobre el cual actúan fuerzas estabilizadoras y desestabilizadoras. El problema se centra en el estudio del equilibrio de un único sólido rígido.

Los métodos numéricos discretos consideran la interacción de un conjunto de partículas. Se requiere de ecuaciones de movimiento para las partículas y de una ley fuerza-desplazamiento para describir la interacción entre ellas. El método de elementos discretos (DEM) considera las partículas como cuerpos rígidos y asume que los contactos obedecen a un comportamiento viscoelástico con fricción, donde la deformación local está representada por las posiciones relativas entre las partículas (interpenetración) y sus desplazamientos. Para la integración de las ecuaciones de movimiento el DEM requiere de una fina resolución en el tiempo.

El método de dinámica de contactos (CD) considera contactos rígidos (no existe deformación de las partículas) en el cálculo de las fuerzas (varios autores en Radjai & Richefeu, 2009). Las interacciones entre partículas son descritas por leyes de contactos en lugar de leyes de fuerzas de contacto. Las leyes de contacto son expresadas como relaciones complementarias entre las fuerzas de contacto y las velocidades en un sistema de contactos múltiples. El método CD utiliza una solución implícita a la escala de arreglos de partículas. Tiene la ventaja de considerar una escala de tiempo mayor que el DEM y es más eficaz para solicitaciones dinámicas (flujo granular).

El método de CD es más complejo que el DEM y por tanto menos accesible para su implementación en computadora ya que requiere de métodos implícitos e iterativos (Radjaï & Dubois, 2010).

En la literatura se pueden encontrar distintas clasificaciones para los métodos discontinuos de acuerdo a la forma de resolver las ecuaciones dinámicas, a la deformabilidad de los contactos, a la forma de las partículas, etc. (Cundall & Hart, 1992; Bobet, 2010; Radjaï & Dubois, 2010). Para los fines del presente trabajo se utilizará la clasificación mostrada en la figura 2.8, donde se considera el método de elementos discretos para medios fracturados, como los macizos rocosos, y para medios granulares.

## **2.4 Método de elementos discretos (DEM)**

El método de elementos discretos fue introducido por Cundall (1971) para analizar la falla progresiva de un sistema de bloques de roca y por Cundall & Strack (1979) para el estudio del comportamiento mecánico de medios granulares. El adjetivo discreto se refiere a los grados de libertad que portan individualmente las partículas del medio.

El DEM permite simular el comportamiento mecánico de un medio formado por un conjunto de partículas que interactúan entre sí a través de sus puntos o superficies de contacto. Las interacciones entre partículas están gobernadas por restricciones geométricas y el carácter unilateral del contacto con una disipación de energía por rozamiento o por choques inelásticos.

Este método tiene un carácter flexible debido a que puede tomar en cuenta un gran número de efectos en las fuerzas de contacto. En geotecnia, usualmente estas fuerzas integran fuerzas de repulsión, fricción, cohesión, así como sollicitaciones exteriores como la gravedad o fuerzas de confinamiento.

Se dice que el DEM es un método general porque se puede utilizar para un amplio rango de problemas de medios discontinuos en reposo o en flujo, desde la escala molecular hasta la astronómica. Actualmente es ampliamente utilizado en numerosas disciplinas de la ciencia y tecnología, incluida la física, química, geología, ciencias de materiales, matemáticas, geotecnia, etc. (O'Sullivan, 2015).

De acuerdo con Cundall & Hart (1992), un modelo numérico puede considerarse de elementos discretos si reúne las siguientes características:

- Los elementos discretos se desplazan como cuerpos independientemente unos de otros e interactúan entre sí en las zonas de contacto.

- El método es capaz de reconocer automáticamente nuevos contactos en el proceso de cálculo.
- Se permiten desplazamientos finitos y rotaciones de los cuerpos discretos, incluyendo el desprendimiento por completo.
- En este medio, al nivel de cada partícula, se hace uso de la mecánica del cuerpo rígido.

La formulación del DEM involucra una serie de problemas que pueden variar de acuerdo con la movilidad de los elementos discretos en el medio.

En medios fracturados, se le llama bloques a los elementos constitutivos del material. En estos problemas geotécnicos, tales como los de la mecánica de rocas, la mayoría de los bloques mantienen una posición relativa constante respecto a los demás, por lo que los vecinos de cada bloque son casi siempre los mismos durante la simulación mecánica. En este caso, la modelación con elementos discretos considera los siguientes puntos relevantes: identificación de sistema de bloques delimitados por discontinuidades, representación de la deformabilidad de los bloques, algoritmo para detección de contactos, modelo constitutivo para la matriz sólida, modelo constitutivo para las discontinuidades (contactos), condiciones de frontera y solución mecánica del problema.

En medios granulares, es más utilizado el término partícula para referirse a los elementos discretos. Las partículas cambian continuamente su posición relativa dentro del medio ante una sollicitación mecánica, por lo que la formulación del DEM difiere de lo expuesto en el párrafo anterior. En los modelos de este tipo, la identificación del sistema de partículas radica principalmente en definir su forma geométrica, no se considera la deformación de las partículas sino de los contactos (en modelos complejos puede considerarse la deformación de la matriz sólida), el algoritmo de detección de contactos es muy demandado y solamente se consideran modelos constitutivos para los contactos. Las condiciones iniciales y de frontera pueden ser tomadas en cuenta como en los modelos de medios fracturados.

Existe una variante del DEM conocido como método de dinámica eventos (EDM) especializado en la simulación de flujo de partículas (gases). Estos problemas se caracterizan porque las colisiones ocurren eventualmente entre partículas que se mueven a grandes velocidades.

#### **2.4.1 Modelado de medios fracturados con el DEM**

En este tipo de modelaciones, como primer paso se reconoce la existencia de discontinuidades o contactos entre los cuerpos que constituyen el medio. En mecánica de

rocas, las discontinuidades son de tipo geológico y su actitud (orientación e inclinación) define la forma de los bloques, normalmente considerados como poliedros.

El modelo numérico debe representar el comportamiento mecánico de la matriz sólida y de las discontinuidades. Se asume que el material es rígido si la deformación global del sistema se debe al movimiento de las discontinuidades: deslizamiento y rotación de bloques, apertura o cierre de discontinuidades. Si la deformación de los sólidos es relevante, su deformabilidad puede incluirse dividiendo los bloques con un método numérico continuo (FDM o FEM), considerando una ley constitutiva dentro de los bloques (figura 2.13).

Para los contactos se adopta una ley constitutiva independiente. La deformabilidad de los contactos se representa en dirección normal con la rigidez normal de las discontinuidades. En la dirección tangencial al contacto (o cortante) son usuales los modelos de resistencia al corte como el elástico, Mohr-Coulomb, debilitamiento continuo y Barton-Bandis.

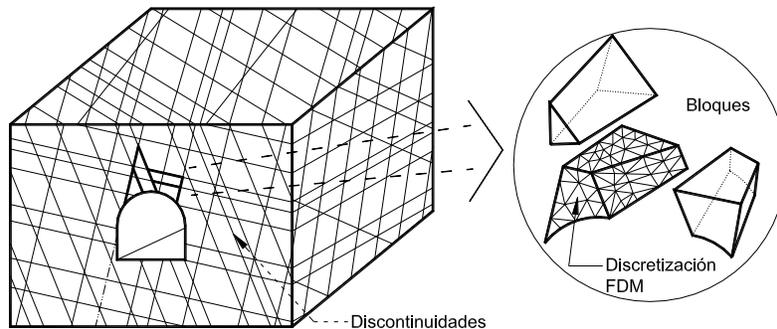


Figura 2.1. Ejemplo de DEM para medios fracturados

La detección de contactos en forma eficiente es un punto clave en la modelación de las complejas interacciones mecánicas en un sistema discontinuo de poliedros. La forma de los elementos discretos da como resultado la presencia de diferentes tipos de contactos: vértice con vértice, borde con borde, cara con cara, vértice con borde, vértice con cara y borde con cara; por lo que se debe contar con procedimiento capaz de encontrar los pares de bloques que interactúan y la forma en que lo hacen en el menor tiempo posible. El programa 3DEC utiliza un esquema y muy potente para resolver este problema (Cundall, 1988; Itasca, 2008). La complejidad de los contactos es tal que se consideran subcontactos y bloques esclavos cuando el contacto se presenta en un superficie discretizada con FDM, FEM.

La solución mecánica se basa en un algoritmo dinámico que resuelve las ecuaciones de movimiento del sistema de bloques por medio de diferencias finitas en el tiempo. Se ha mostrado que este tipo de solución es adecuado para indicar los modos de falla en los

sistemas discontinuos. En cada paso de cálculo se aplican las leyes constitutivas y de movimiento (figura 2.14).

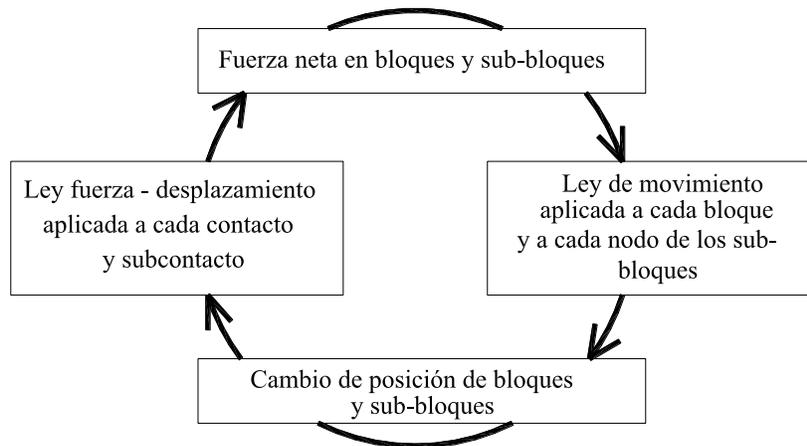


Figura 2.2. Ciclo de cálculo en modelos DEM para medios fracturados (Itasca, 2008)

En el caso de bloques rígidos, el ciclo de cálculo solamente se toma en cuenta la relación fuerza-desplazamiento en los contactos. La integración de la ley de movimiento proporciona la nueva posición de los bloques y por lo tanto los incrementos de desplazamiento en los contactos. La ley fuerza-desplazamiento del contacto se usa para obtener las nuevas fuerzas de contacto, mismas que se aplican a los bloques en el siguiente ciclo de cálculo. Si los bloques son deformables es necesario calcular las fuerzas y desplazamientos en los sub-contactos (elementos de diferencias finitas).

Los detalles sobre el desarrollo matemático de los modelos constitutivos de la matriz sólida y contactos, así como de la ley de movimiento se pueden consultar en Hart *et al.*, (1988).

### 2.4.2 Modelado de medios granulares con el DEM

Por ser de mayor interés para los fines del presente trabajo, en los siguientes incisos se exponen los pasos a seguir en una simulación con el método de elementos discretos para modelar medios granulares.

#### a) Identificación del sistema de partículas

Por conveniencia, en muchos de los modelos de elementos discretos se utilizan discos (en 2D) o esferas (en 3D). Con estas formas, la geometría queda definida con un solo valor, el

diámetro de la partícula. La simplificación geométrica tiene la ventaja de generar un solo tipo de contacto entre partículas que puede detectarse fácilmente. Para una cantidad de partículas dada, la forma esférica simplifica los cálculos respecto a las formas poliédricas.

Sin embargo, se puede esperar que los discos y esferas tiendan a rodar y rotar fácilmente, lo cual sesga el comportamiento de un medio discontinuo, por ejemplo en la formación de una zona de corte. Por lo anterior, otras formas más complejas como elipses, elipsoides, polígonos y poliedros continúan siendo de interés en las modelaciones con el DEM.

Otra alternativa para simular formas realistas de los granos son los agregados o grupos de discos y esferas. En los agregados de partículas circulares y esféricas, los contactos se resuelven con mayor facilidad en comparación con los polígonos y poliedros por lo que el costo del cálculo sigue siendo razonable. Esta técnica es ampliamente utilizada en el estudio de la rotura de granos (Bolton, 2008), daños a la roca en procesos de excavación, mecánica de la fractura, comportamiento de materiales granulares y polvos de partículas irregulares (Gao *et al.*, 2012; Bobet, 2010).

La figura 2.15 muestra algunos ejemplos de la forma de los elementos discretos usados en medios granulares.

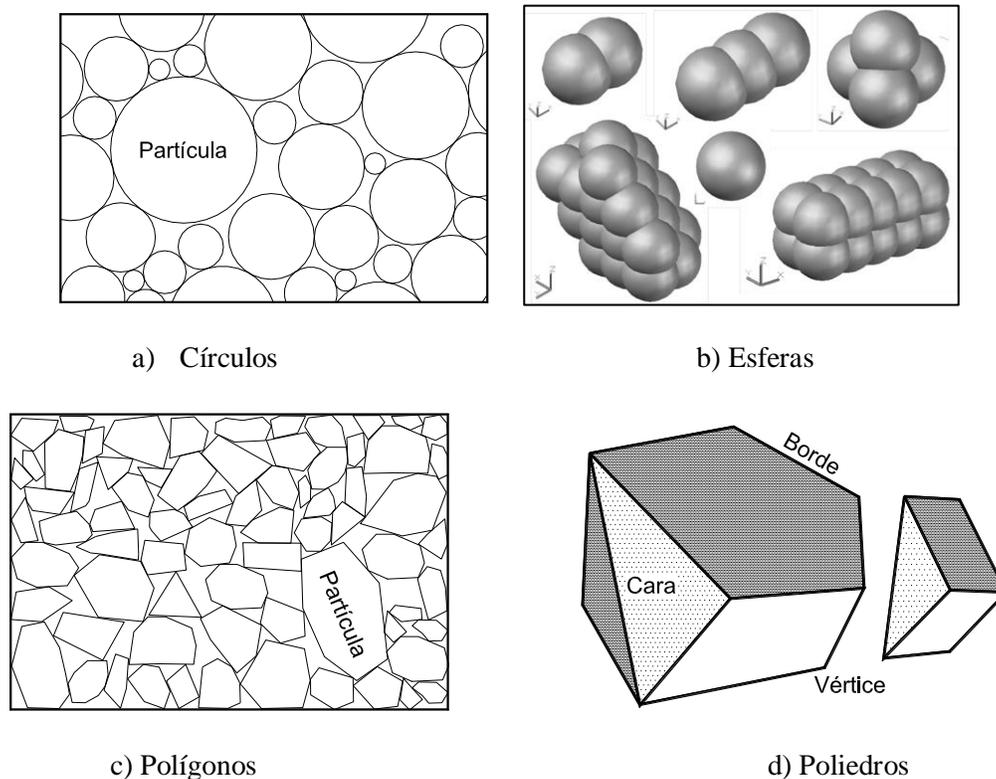


Figura 2.3. Geometría de elementos discretos

### a) Búsqueda y representación de contactos

Los contactos se crean y se destruyen durante el transcurso de la simulación numérica, por lo tanto es necesario contar con una técnica eficiente y robusta para identificar los cuerpos candidatos a entrar en contacto. Es prohibitivo revisar todos los posibles pares de partículas en cada paso de cálculo, puesto que el tiempo de búsqueda se incrementa cuadráticamente con el número de partículas (Itasca, 2008).

Un procedimiento eficiente consiste en dividir el espacio del modelo en celdas rectangulares tridimensionales. Cada partícula se asigna a la celda o celdas que ocupa su espacio envolvente. Se entiende por espacio envolvente como el prisma rectangular de menor volumen que contiene a la partícula, con paredes paralelas al sistema de coordenadas. Una vez que todas las partículas son registradas en las celdas, es fácil identificar los vecinos ya que la celda se interseca con el espacio envolvente de las partículas más cercanas. Entonces el tiempo necesario para buscar los contactos depende de la forma y tamaño de la partícula pero no del número de ellas.

Para obtener el tamaño óptimo de las celdas se sigue el siguiente razonamiento. Si se utiliza una sola, todas las partículas son mapeadas dentro de ella y el tiempo de búsqueda será máximo. En la medida que la densidad de celdas aumenta, el número de vecinos para cada partícula disminuye, hasta que se alcanza un número pequeño de partículas por celda que tiende a optimizar el proceso.

Durante el proceso de cálculo se monitorea el desplazamiento de cada partícula, cuando se excede una cantidad predefinida es necesario actualizar la lista de vecinos. Un contacto inactivo se crea cuando dos partículas se encuentran a una distancia menor o igual que la distancia predefinida. A la inversa, cuando la distancia entre partículas es mayor a la predefinida, el contacto es eliminado. Esta lógica asegura que exista una estructura de datos para el contacto potencial antes de que se tenga el contacto físico y que la búsqueda se realice para partículas en movimiento sin invertir tiempo en partículas relativamente en reposo. Las fuerzas de interacción aparecen justo cuando las partículas realmente entran en contacto (contacto activo).

La lógica de detección de contactos debe proporcionar las características del contacto requeridas durante la simulación con el menor tiempo posible.

Por su parte, el modelo constitutivo en el contacto es un elemento esencial en el DEM, ya que permite la interacción entre partículas. En la figura 2.16 se ilustran algunos modelos de contacto básicos. El modelo de contacto lineal (Itasca, 2008) está constituido básicamente por un elemento elástico en dirección normal y otro en dirección tangencial, con un elemento de fricción en esta última dirección. La función de cada elemento es la siguiente:

- Los resortes describen la fase de comportamiento elástico del contacto entre cada par de partículas. Se utiliza un resorte en dirección normal y otro en dirección tangencial al desplazamiento. En contactos sin cohesión, los resortes normales actúan únicamente en compresión (contacto unilateral).
- Los amortiguadores son empleados con dos objetivos distintos: representar el comportamiento físico del contacto (viscosidad local) o como parámetros numéricos que facilitan el equilibrio general y aceleran la convergencia numérica.
- Los elementos de fricción se utilizan para representar la resistencia al corte en los contactos. Estos elementos son cruciales en la representación del deslizamiento del contacto y determinan los fenómenos de plasticidad a la escala global del medio.

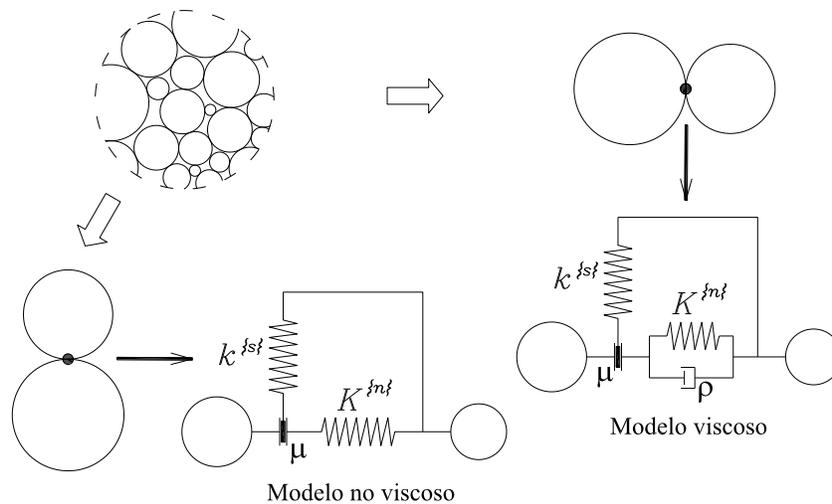


Figura 2.4. Ejemplos de modelos de contacto en medios granulares

Cuando el interés se concentra en el comportamiento global de un medio granular, el carácter discontinuo del DEM permite por sí solo lograr una buena aproximación sin importar el modelo de contacto. El modelo de contacto es más relevante cuando se requiere representar detalladamente las deformaciones elásticas a la escala de los contactos.

En el DEM, la energía se disipa a través de la fricción y el amortiguamiento en los contactos. Si no se incluye ningún amortiguamiento en los contactos, se corre el riesgo de que el sistema de partículas presente vibraciones infinitas y no alcance el equilibrio (Cundall & Strack, 1979). Habitualmente se introducen fuerzas de amortiguamiento calculadas a partir de un factor de amortiguamiento numérico (amortiguamiento local).

b) Ciclo de cálculo

El proceso de cálculo (figura 2.17) está basado en un algoritmo dinámico que resuelve las ecuaciones de movimiento del conjunto de elementos discretos. En cada paso de cálculo se aplica un modelo constitutivo de contacto seguido de la ley de movimiento. El modelo constitutivo fuerza-desplazamiento permite calcular la resultante de fuerzas y momentos sobre cada partícula. La ley de movimiento utiliza la resultante de fuerza y momento para calcular nuevas posiciones de los elementos. Los incrementos de desplazamiento en el contacto son retomados por la ley constitutiva en el siguiente ciclo de cálculo.

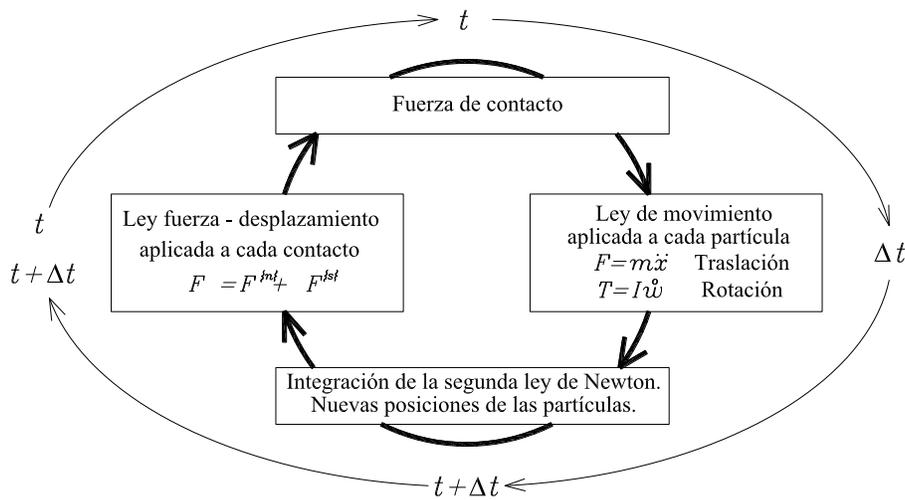


Figura 2.5. Proceso general de cálculo en el MED para medios granulares

En simulaciones estáticas, la simulación se da por terminada cuando en cada partícula la suma de fuerzas y momentos actuantes son iguales a cero. En análisis dinámicos no es de interés alcanzar el equilibrio, por lo que se debe definir el tiempo  $T=t$  en el que se desea analizar la simulación.

Cada ciclo de cálculo considera un intervalo de tiempo o “paso de tiempo” lo suficientemente pequeño para aceptar que la aceleración o velocidad de las partículas son constantes. Se acepta la hipótesis de que en el paso de tiempo escogido, las perturbaciones de una partícula sobre otra no se propagan más allá de sus vecinos inmediatos. A este procedimiento se le llama algoritmo explícito de tiempo en marcha.

La estabilidad numérica requiere de un paso de tiempo  $\Delta T$  menor al paso de tiempo crítico, este último está asociado al mínimo periodo característico del sistema granular (Itasca, 2008). PFC<sup>3D</sup> calcula automáticamente el paso de tiempo que asegura una

integración estable de las ecuaciones de movimiento, tomado en cuenta un sistema unidimensional masa-resorte con masa  $m$  y rigidez  $k$ , con paso de tiempo crítico  $\sqrt{m/k}$ .

Es importante aclarar que el tiempo transcurrido en las simulaciones DEM no corresponde al tiempo real, sino que solo es un tiempo de máquina ficticio.

c) Ley de movimiento

El movimiento de la  $i$ -ésima partícula rígida está afectado por los vectores de fuerza y momento resultantes que actúan sobre ella. Las componentes del movimiento son, la de traslación de un punto dentro de la partícula (centro de masa) y la rotacional. El movimiento de traslación del centro de masa se describe en términos de su posición ( $x_i$ ), velocidad ( $\dot{x}_i$ ) y aceleración ( $\ddot{x}_i$ ). Por su parte, la rotación de la partícula es descrita en términos de su velocidad angular ( $\omega_i$ ) y aceleración angular ( $\dot{\omega}_i$ ).

Las ecuaciones de movimiento pueden expresarse como dos ecuaciones vectoriales: una que relaciona la fuerza resultante con el movimiento de traslación (ecuación 2.58), y otra que relaciona el momento (o par) resultante con el movimiento rotacional (ecuación 2.59).

$$F_i = m(\ddot{x}_i - g) \quad (2.58)$$

$$M_i = I\dot{\omega}_i \quad (2.59)$$

Donde:  $F_i$  es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula  $i$   
 $m_i$ , la masa total de la partícula  
 $g$ , la aceleración de la gravedad  
 $M_i$ , es el momento resultante que actúa en la partícula  
 $I$ , momento de inercia respecto a un sistema coordenado con origen en el centro de masa de la partícula.

Si se consideran partículas aproximadamente esféricas el momento de inercia se calcula como:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (2.60)$$

Siendo:  $r$  el radio de la partícula  
 $m$  la masa

Las ecuaciones 2.58 y 2.59 son integradas utilizando un procedimiento central de diferencias finitas que involucra un incremento o paso de tiempo  $\Delta t$ . Las velocidades se

calculan en la mitad del intervalo de tiempo  $t \pm n\Delta t/2$ , mientras que la posición de la partícula, aceleraciones, fuerza y momento se calculan en los intervalos principales  $t \pm n\Delta t$ .

Las aceleraciones se expresan como:

$$\ddot{x}_i^{\{t\}} = \frac{1}{\Delta t} \left( \dot{x}_i^{\{t+\Delta t/2\}} - \dot{x}_i^{\{t-\Delta t/2\}} \right) \quad (2.61)$$

$$\dot{w}_i^t = \frac{1}{\Delta t} \left( w_i^{\{t+\Delta t/2\}} - w_i^{\{t-\Delta t/2\}} \right) \quad (2.62)$$

Las velocidades son:

$$\dot{x}_i^{\{t+\Delta t/2\}} = \dot{x}_i^{\{t-\Delta t/2\}} + \left( \frac{F_i^{\{t\}}}{m} + g \right) \Delta t \quad (2.63)$$

$$w_i^{\{t+\Delta t/2\}} = w_i^{\{t-\Delta t/2\}} + \left( \frac{M_i^{\{t\}}}{I} \right) \Delta t \quad (2.64)$$

Finalmente, la posición de la partícula se calcula utilizando las velocidades.

$$x_i^{\{t+\Delta t\}} = x_i^{\{t\}} + \dot{x}_i^{\{t+\Delta t/2\}} \Delta t \quad (2.65)$$

De acuerdo al ciclo de cálculo, la ley de movimiento puede resumirse de la siguiente manera: Dados los valores de  $\dot{x}_i^{\{t-\Delta t/2\}}$ ,  $\omega_i^{\{t-\Delta t/2\}}$ ,  $x_i^{\{t\}}$ ,  $F_i^{\{t\}}$ ,  $M_i^{\{t\}}$ ; se utilizan las ecuaciones 2.63 y 2.64 para obtener las velocidades en el intervalo medio  $t \pm n\Delta t/2$  y de acuerdo con la ecuación 2.65 finalmente se calcula la posición en el tiempo  $t+\Delta t$ .

#### d) Ley constitutiva de contactos

La ley fuerza-desplazamiento de los contactos relaciona el desplazamiento relativo entre dos partículas en contacto ( $A$  y  $B$ ) con la fuerza actuante entre ellas. Las entidades en contacto pueden ser dos partículas o una partícula y una frontera del modelo.

Cuando dos cuerpos entran en contacto se provocan deformaciones. La ley de contacto permite calcular la fuerza de interacción en función de la deformación generada. Para representar la deformación, los cuerpos conservan sus formas pero se permite una interpenetración ( $U^{\{n\}} = x^{\{CB\}} - x^{\{CA\}}$  en la figura 2.18). En la mayoría de los casos se acepta que la interpenetración es pequeña ya que se incurre en algunos errores de aproximación asociados a la magnitud del traslape (Radjai & Dubois, 2010).

La ley fuerza-desplazamiento se aplica en cada punto de contacto  $x_i^{\{C\}}$ , contenido en un plano tangente al contacto ( $i$ ). Este plano está definido por su vector normal unitario  $\bar{n}_i$ . De acuerdo con la figura 2.18, la localización del punto de contacto queda determinado por:

$$x_i^{\{C\}} = x_i^{\{A\}} + \left( R^{\{A\}} - \frac{1}{2} U^{\{n\}} \right) \bar{n}_i \quad (2.66)$$

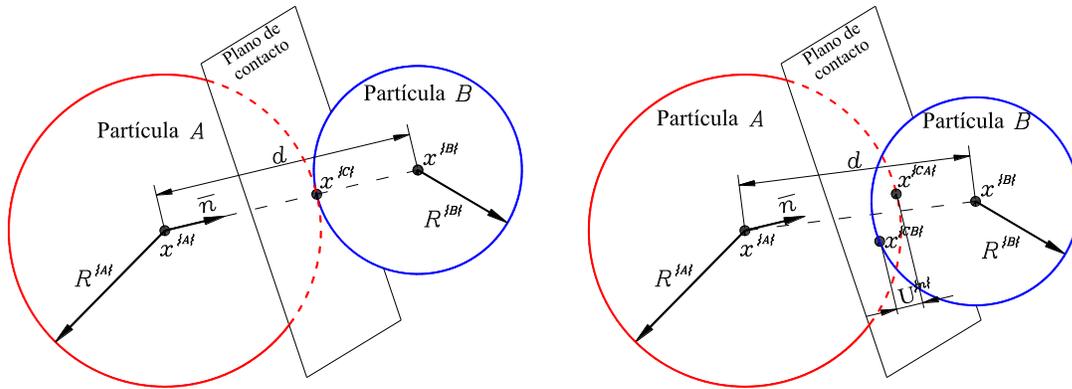


Figura 2.6. Contacto entre dos granos que se tocan (izquierda) y que se traslapan (derecha)

Si las partículas son esféricas, el vector normal coincide con la recta que une los centros entre las partículas en contacto, o con la recta que define la distancia mínima entre el centro de la partícula y la pared. Cuando se trata de partículas de forma cualquiera puede recurrirse al concepto de “plano en común” desarrollado por Cundall (1988).

Cuando se forma un contacto entre partículas esféricas, la interacción ocurre en un punto. Las deformaciones ocasionan que este punto de contacto se desplace sobre cada partícula (figura 2.18). El desplazamiento relativo entre los dos puntos que inicialmente coincidían se utiliza para calcular los desplazamientos y rotaciones relativos entre partículas.

La fuerza de contacto se descompone en una componente normal ( $F_i^{\{n\}}$ ) y una de corte ( $F_i^{\{s\}}$ ) que actúa en el plano de contacto.

$$F_i = F_i^{\{n\}} + F_i^{\{s\}} \quad (2.67)$$

e) Fuerzas elásticas

En un modelo elástico, la fuerza normal es proporcional a la interpenetración  $U^{\{n\}}$  que ocurre en la misma dirección (ecuación 2.68), siendo la rigidez normal ( $K^{\{n\}}$ ) la constante de proporcionalidad.

$$F_i^{\{n\}} = K^{\{n\}} U^{\{n\}} \bar{n}_i \quad (2.68)$$

La fuerza cortante elástica se calcula de manera incremental. Cuando se forma un contacto, la fuerza cortante se inicia en cero. Cada incremento subsecuente de desplazamiento cortante relativo da como resultado un incremento en la fuerza cortante elástica que se agrega al valor actual.

El movimiento del contacto se calcula a partir de los cambios en la posición del contacto y su vector normal en cada paso de tiempo, por lo que la fuerza cortante tiene un componente por traslación y otro por rotación.

El movimiento del contacto  $i$ , o la velocidad de la partícula  $B$  respecto a la  $A$  en el punto de contacto está dada por:

$$v_i = \dot{x}^{\{CB\}} - \dot{x}^{\{CA\}} \quad (2.69)$$

Esta velocidad puede descomponerse en normal y cortante respecto al plano de contacto, de donde la velocidad cortante puede escribirse como:

$$v_i^{\{s\}} = v_i - v_i^{\{n\}} \quad (2.70)$$

La componente cortante del desplazamiento que ocurre durante un paso de tiempo se calcula con la ecuación 2.71.

$$\Delta U_i^{\{s\}} = v_i^{\{s\}} \Delta t \quad (2.71)$$

Y por lo tanto, el incremento en la fuerza elástica cortante es:

$$\Delta F_i^{\{s\}} = -k^{\{s\}} \Delta U_i^{\{s\}} \quad (2.72)$$

Donde  $k^{\{s\}}$  es la rigidez cortante en el contacto y  $\Delta U_i^{\{s\}} = x_i^{\{CB,s\}} - x_i^{\{CA,s\}}$ .

En cuanto a la rotación de partículas, se toma en cuenta la fuerza ( $F_i^{\{s\}}{}_{rot.1}$ ) ocasionada por la rotación respecto a la línea común entre los planos de contacto anterior y nuevo, y otra fuerza ( $F_i^{\{s\}}{}_{rot.2}$ ) que depende de la primera y de la rotación respecto a la nueva dirección normal. Para ver los detalles del cálculo de la fuerza cortante por rotación se puede consultar Itasca (2008).

La fuerza cortante total ( $F_i^{\{s\}}$  en la ecuación 2.67) se calcula como la suma de la fuerza cortante por giro más la fuerza cortante elástica calculada con la ecuación 2.73.

$$F_i^{\{s\}} = F_i^{\{s\}}{}_{rot.2} + \Delta F_i^{\{s\}} \quad (2.73)$$

f) Fuerzas de fricción

Se define como fuerza de fricción a aquella que se presenta entre dos superficies en contacto y que se opone al deslizamiento relativo entre ambas superficies. Asumiendo que se cumple la ley de Coulomb, la fuerza de fricción es directamente proporcional a la fuerza normal actuante en el contacto (ecuación 2.74).

$$F_i^{\{s\}} \leq \mu F_i^{\{n\}} \quad (2.74)$$

Donde:  $\mu$  es el coeficiente de fricción adimensional

Los valores típicos para el coeficiente de fricción de la superficie de las partículas de geomateriales están entre 0.3 y 0.7.

Se acepta que la resistencia al deslizamiento tangencial entre dos cuerpos es independiente de las dimensiones de la superficie de contacto.

En las simulaciones con elemento discreto, la fuerza cortante máxima ( $F_{máx}^{\{s\}}$ ) permisible en el contacto se calcula con la ecuación 2.75. Si las fuerzas tangenciales superan esta resistencia al corte se produce un deslizamiento en el contacto. En los siguientes pasos de cálculo la fuerza cortante será igual a la fuerza máxima (ecuación 2.76), es decir, se considera que la fricción estática es igual a la dinámica. Cuando el contacto se rompe ( $U^{\{n\}} < 0$ ), tanto la fuerza normal como la cortante son anuladas.

$$F_{máx}^{\{s\}} = \mu |F_i^{\{n\}}| \quad (2.75)$$

$$F_i^{\{s\}} = F_i^{\{s\}} \frac{F_{máx}^{\{s\}}}{|F_i^{\{s\}}|} \quad (2.76)$$

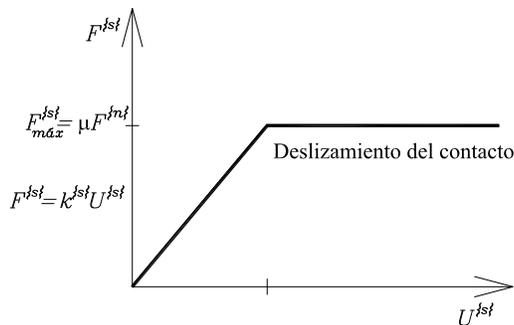


Figura 2.7. Componente tangencial de la fuerza de contacto

g) Fuerzas de amortiguamiento

En una simulación con el DEM, la fricción de la superficie de las partículas contribuye a la disipación de la energía suministrada al medio. Sin embargo, puede no estar presente o no ser suficiente para alcanzar un estado de equilibrio en un número razonable de pasos de cálculo (ciclos). Por lo tanto, se incorporan amortiguadores para disipar la energía cinética. Los amortiguadores actúan en paralelo con los elementos elásticos existentes (amortiguamiento viscoso) y provén fuerzas proporcionales a la velocidad relativa entre los cuerpos en contacto.

Para mejorar el desempeño numérico de algunos programas de cómputo, se introduce un amortiguamiento llamado local, que es proporcional a la fuerza desequilibrada del medio. Para problemas estáticos este amortiguamiento es únicamente un artificio numérico que permite obtener la convergencia del modelo en poco tiempo y no tiene ningún significado físico.

Para arreglos compactos de elementos discretos es más apropiado utilizar el amortiguamiento local para alcanzar el equilibrio y conducir la simulación a un estado de deformación casi estática. Si el problema involucra el libre vuelo de partículas e impactos entre ellas es más apropiado el amortiguamiento viscoso.

El amortiguamiento local agrega una fuerza de amortiguamiento en las ecuaciones de movimiento (2.58 y 2.59). La fuerza de amortiguamiento  $F^{(d)}$  está controlada por una constante  $\rho$  y se calcula como:

$$F_j^{(d)} = -\rho |F_j| \text{signo}\{v_j\}; \text{ para } j=1, 2 \dots 6 \quad (2.77)$$

$$\text{signo}\{v_j\} = \begin{cases} +1, & \text{si } v_j > 0 \\ -1, & \text{si } v_j < 0 \\ 0, & \text{si } v_j = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

$$v_j = \begin{cases} \dot{x}_j; & \text{para } j = 1, 2, 3 \\ w_{j-3}; & \text{para } j = 4, 5, 6 \end{cases} \quad (2.79)$$

Donde:  $v_j$  es la velocidad generalizada  
 $j$  denota los grados de libertad en translación y rotación.

El amortiguamiento local tiene las siguientes ventajas:

- Solo se amortigua el movimiento acelerado, por lo tanto no surgen fuerzas de amortiguamiento erróneas del movimiento de un estado en equilibrio.
- La constante de amortiguamiento  $\rho$  es adimensional.

- Dado que el amortiguamiento es independiente de la frecuencia, las regiones del medio con diferente periodo natural se amortiguan por igual utilizando la misma constante  $\rho$ .
- Para simulaciones aproximadamente estáticas se recomiendan valores de  $\rho$  entre 0.3 y 0.7.

Actualmente existe una gran cantidad de modelos constitutivos implementados para modelar distintos comportamientos de los contactos. Un mayor detalle se puede encontrar en Itasca (2008).

#### h) Fuerzas de tensión

Las fuerzas de tensión se utilizan cuando se desea considerar las fuerzas de tensión superficial que induce el agua contenida en los poros o cuando existe cohesión entre partículas.

En presencia de fuerzas cohesivas, los contactos entre partículas pueden transmitir fuerzas de tensión y momentos. El primer caso se da cuando el contacto se presenta en un solo punto y el segundo cuando las partículas se encuentran unidas en una superficie finita.

Las fuerzas cohesivas son muy utilizadas cuando se simulan grupos de partículas unidas. En las simulaciones con el DEM se acepta que las fuerzas de tensión suprimen las fuerzas de fricción. Cuando se supera la resistencia en tensión, el contacto se rompe y se anulan todas las componentes de las fuerzas de contacto.

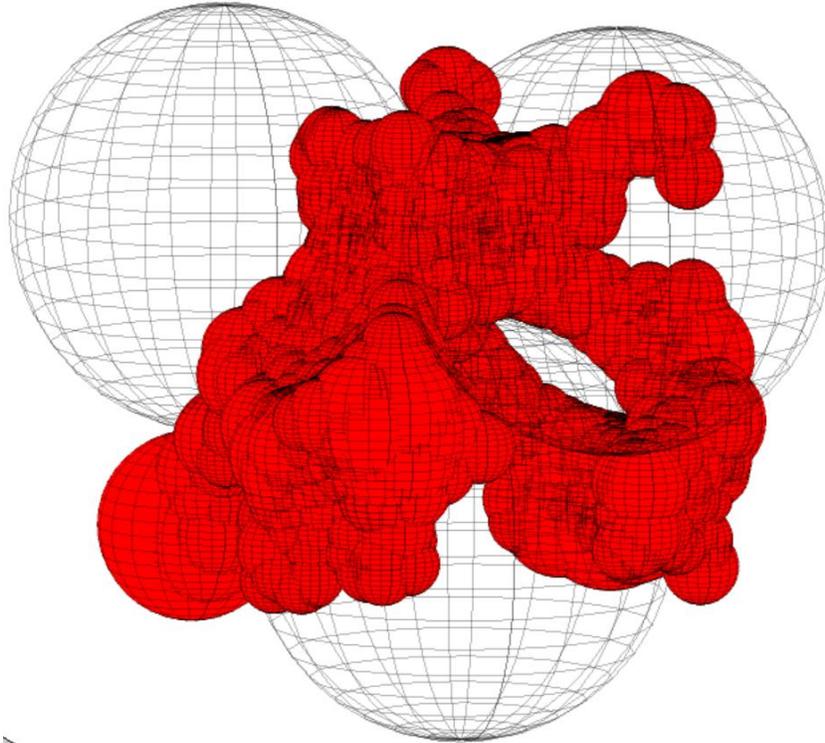
Por otra parte, en presencia de agua aparecen fuerzas cuyos efectos dependen del grado de saturación del medio granular. El DEM permite simular las fuerzas que inducen los meniscos de agua sobre los granos vecinos, particularmente cuando el medio no está saturado. Las partículas unidas por un puente de agua no necesariamente están en contacto físico pero se desarrolla una fuerza de atracción que es función del volumen de agua que forma el puente, el tamaño de las partículas y la naturaleza del fluido como la tensión superficial.

En el presente capítulo se ha presentado una revisión general de los conceptos utilizados para el estudio de medios discretos, particularmente de los medios granulares, desde el punto de vista geométrico y mecánico.

Entre los métodos numéricos usuales en la ingeniería, el método de elementos discretos es más adecuado para modelar medios granulares, su carácter discontinuo le permite

reproducir diversos fenómenos de dichos medios. El DEM requiere menos parámetros e hipótesis que los métodos numéricos de medio continuo.

Para simular la formación de un material granular de partículas esféricas es necesario contar con una granulometría, una densidad de masa de las partículas, una ley de contacto, un paso de tiempo y un factor de amortiguamiento. Los dos últimos normalmente ya están incorporados en el programa de cómputo utilizado (por ejemplo PFC<sup>3D</sup>).



Materialización de los poros en un medio granular

### **CAPÍTULO 3. SIMULACIÓN DE MEDIOS GRANULARES Y ESTUDIO DE SU ESTRUCTURA INICIAL**

En la actualidad existen numerosos métodos para simular arreglos de partículas generalmente esféricas. Isola (2008) distingue cuatro categorías:

- Contracción mecánica. Consiste en generar partículas en un espacio con volumen mucho mayor al del arreglo granular que se desea obtener, en aplicar fuerzas o velocidades en una dirección hasta que las partículas entren en contacto entre sí.
- Monte Carlo. Se generan partículas pequeñas aleatoriamente dentro de un recipiente con volumen aproximadamente igual al volumen esperado del medio granular, se consideran diámetros de partículas mucho más pequeños a los reales y se aumentan por medio de pequeños incrementos sin generar intersección entre partículas.

- Depósito vertical. Las partículas se colocan individualmente por caída vertical dentro de un recipiente, donde se mueven libremente hasta alcanzar el equilibrio.
- Depósito esférico. Las partículas se acomodan en forma centrípeta ocasionando un crecimiento esférico del arreglo de partículas.

Los métodos de contracción mecánica y de depósito vertical conducen a arreglos anisótropos. Los métodos de Monte Carlo y los de depósito esférico tienden a generar estructuras granulares isotropas.

En este trabajo se consideran medios granulares de partículas esféricas. La formación de la estructura se realiza con un método geométrico de colocación vertical (Auvinet, 1975) donde se cumple con un equilibrio local. El efecto completo de la interacción mecánica entre partículas se obtiene posteriormente empleando el método de elementos discretos.

En este capítulo se presenta una descripción de los métodos (geométrico y mecánico) utilizados para la crear muestras granulares, así como de las rutinas de cómputo elaboradas para realizar el estudio de la estructura inicial de cada material. Respecto a medios granulares de partículas no esféricas véase Auvinet & Cambou (1987), Cambou & Sidoroff (1985), Cambou *et al.*, (1995), Cambou *et al.*, (2000) entre otros.

### 3.1 Método geométrico (Auvinet, 1975)

Las muestras granulares se depositan dentro de un recipiente aproximadamente cúbico conformado por cinco esferas secantes de gran tamaño. Cuatro esferas representan las paredes verticales y otra el fondo (figura 3.1). Las dimensiones del recipiente son aproximadamente  $2*2*2.5m$  (largo, ancho y alto respectivamente).

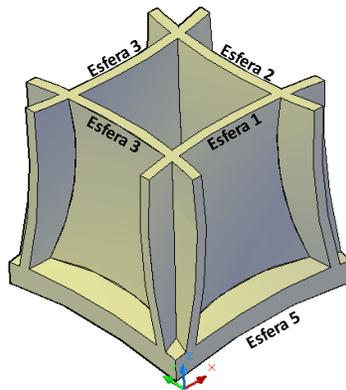


Figura 3.1. Recipiente de simulación geométrica con curvatura exagerada

Una vez definido el recipiente se especifican los parámetros del medio granular como: el número de partículas, granulometría, tamaño mínimo y máximo de partículas. Puede ser conveniente elegir inicialmente un número de partículas para calcular el diámetro mínimo y máximo dentro de la granulometría elegida.

Las partículas son generadas una por una de acuerdo con el siguiente procedimiento:

- Se escoge un diámetro al azar dentro de la granulometría elegida.
- De manera aleatoria se genera la posición de la esfera en el plano horizontal, lo que define el eje de caída de la partícula.
- El eje de caída interseca un grupo de partículas previamente colocadas incluyendo el fondo del recipiente. De las partículas intersecadas se adopta la de mayor elevación como un primer punto de apoyo.
- Se busca una segunda esfera de apoyo diferente y cercana a la primera. Las paredes y el fondo del recipiente también son candidatas.
- Se selecciona la tercera esfera de apoyo en forma análoga a la segunda. Se evalúa que la nueva partícula no pase por el espacio libre entre los tres apoyos.
- Se calculan las coordenadas del centro de la esfera colocada así como las coordenadas de sus puntos de contacto.
- Se verifica que la vertical que pasa por el centroide de la partícula generada cruce el área de sustentación (condición de equilibrio estático). Si no existe equilibrio, la esfera se rechaza y se busca una nueva posición.
- Se revisa la no intersección entre partículas o con el recipiente. Si no existe intersección, la nueva esfera se acepta como parte de la estructura. En caso contrario se buscan otras esferas de apoyo u otra posición.
- Para mejorar el desempeño del algoritmo, las partículas se ordenan de acuerdo a la elevación de su centro y eventualmente se registra el número de contactos en las esferas de apoyo y en la partícula creada.
- Se repiten los pasos anteriores hasta generar el número de esferas indicado o llenar el recipiente a la elevación predeterminada.

A esta etapa de la simulación de la estructura granular se le llama simulación geométrica. El algoritmo descrito se implementó en el lenguaje de programación de MATLAB.

### **3.2 Método mecánico, PFC<sup>3D</sup>**

El programa Código de Flujo de Partículas en tres dimensiones, por sus siglas en inglés PFC<sup>3D</sup> versión 4 (Itasca, 2008), es un programa de elementos discretos para modelar el movimiento e interacción de un conjunto de partículas de forma esférica. PFC<sup>3D</sup> se basa en

un esquema numérico donde se monitorea la interacción entre partículas contacto por contacto, y el movimiento de las partículas se modela partícula por partícula como lo describe Cundall & Strack (1979). Por lo anterior, PFC<sup>3D</sup> es una herramienta poderosa para representar el comportamiento elemental de los medios granulares.

En PFC<sup>3D</sup>, las esferas individuales pueden representar los granos de un material, como en este trabajo, o pueden estar agrupadas formando cuerpos de forma cualquiera. El programa de cómputo permite la creación de recipientes de distintas formas así como la creación de partículas en posiciones arbitrarias. Es posible reproducir cualquiera de los mecanismos de formación de estructuras granulares mencionados al inicio de este capítulo.

En la presente investigación, se aprovecha el método geométrico para facilitar la formación de las muestras granulares. Los resultados obtenidos se retoman en PFC<sup>3D</sup>, donde se consideran otros aspectos de modelado, como se describe en los siguientes incisos.

### **3.2.1 Creación del recipiente en PFC<sup>3D</sup>**

El recipiente de simulación se crea incorporando elementos de pared (comando WALL) predefinidos en PFC<sup>3D</sup>. Las paredes se caracterizan porque únicamente interactúan con las partículas y por lo tanto puede haber intersección de una pared con otra sin generar reacciones mecánicas.

Las paredes pueden tener diferente forma: cilindro, anillo, esfera, disco plano o polígono plano. En el presente trabajo se considera un recipiente de paredes esféricas para obtener un recipiente idéntico al del algoritmo geométrico.

Para que las paredes puedan interactuar mecánicamente con las partículas es necesario asignar sus propiedades (de acuerdo al modelo de contacto) tales como: coeficiente de fricción, rigidez normal y rigidez cortante.

### **3.2.2 Generación de partículas en PFC<sup>3D</sup>**

En PFC<sup>3D</sup> las partículas se pueden generar individualmente (mediante el comando BALL), se especifica la posición en el espacio de su centro y su radio tal y como lo calcula el método geométrico. Es importante señalar que cuando se recurre únicamente al método mecánico para generar las partículas, eventualmente existe intersección entre ellas, lo que produce grandes fuerzas repulsivas durante los primeros pasos de cálculo. El método geométrico contribuye en gran medida a que esto no suceda.

El comando GENERATE permite crear varias partículas simultáneamente. Los centros de las partículas se ubican aleatoriamente en un espacio finito (a este arreglo Auvinet, 1986 lo llama arreglo estocástico poissoniano) y el radio se elige al azar dentro de un intervalo acotado. Por defecto, el radio de las partículas se obtiene de una distribución uniforme (en frecuencias de número de partículas), pero también se tiene la opción de utilizar una distribución normal. Esta forma de generación de partículas no admite intersección entre partículas, por lo que se prueban distintas posiciones en el espacio para satisfacer esta condición. Si no hay espacio suficiente para crear todas las partículas, se generará un número de partículas menor al solicitado.

Por otra parte, en PFC<sup>3D</sup> es posible formar elementos discretos compuestos por varias esferas. El comando CLUMP se utiliza para crear, agregar, quitar partículas y especificar las propiedades de un grupo de partículas. Los grupos puede romperse si las fuerzas que actúan sobre ellos superan la resistencia en los contactos internos, pero si la simulación lo requiere, las partículas pueden permanecer siempre unidas eliminando los contactos internos antes de efectuar la solución mecánica. La forma de los grupos puede ser cualquiera. La figura 3.2 muestra algunos ejemplos.

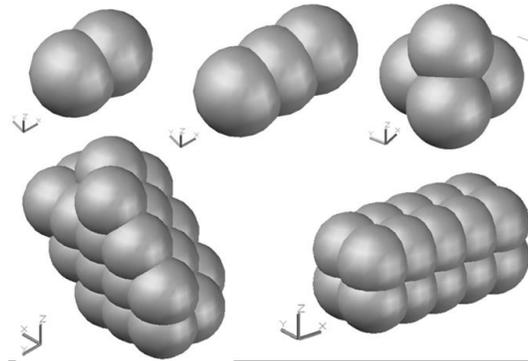


Figura 3.2. Ejemplos de grupos de partículas

### 3.2.3 Condiciones de frontera e iniciales

Las restricciones especiales que permiten ajustar los modelos a un problema de interés se conocen como condiciones de frontera. Las condiciones iniciales son información conocida (por ejemplo el valor de algunas variables) en ciertas partes del modelo.

En las simulaciones que aquí se realizan, las condiciones de frontera están definidas por las velocidades en las paredes del recipiente y por el esfuerzo aplicado en estas paredes.

El movimiento de las paredes se especifica a través de los componentes de la velocidad de traslación y de rotación. Eventualmente puede restringirse el movimiento de las partículas de cierta región del medio. Cuando se asigna un valor a un componente de la velocidad, no se aplican las ecuaciones de movimiento al cuerpo en cuestión durante los ciclos de cálculo posteriores. En PFC<sup>3D</sup>, las velocidades pueden fijarse mediante el comando FIX o ingresando a las propiedades de los elementos: partículas, grupos, contactos o paredes.

Para aplicar un esfuerzo se recurre a un algoritmo de regulación que ajusta la posición de las paredes, de modo que las reacciones de las paredes con el medio granular reproducen el esfuerzo predefinido.

La aceleración de la gravedad terrestre puede ser incorporada en cualquier etapa del cálculo. Se declara por medio de un vector con componentes  $(x, y, z)$ .

### 3.2.4 Solución mecánica

Consiste en aplicar los suficientes pasos de cálculo hasta alcanzar el equilibrio mecánico. Se dice que el medio granular alcanza un estado de equilibrio cuando las fuerzas actuantes sobre las partículas del medio se anulan entre sí. En el método de elementos discretos se conoce como fuerza no balanceada a la fuerza resultante de todas las actuantes sobre una partícula y se utiliza como medida para evaluar la estabilidad numérica de un modelo.

Por defecto, el comando SOLVE de PFC<sup>3D</sup> ejecuta pasos de cálculo hasta que el error máximo en el equilibrio de fuerzas en todas las partículas es menor del 1% (la fuerza no balanceada máxima representa el 1% del promedio de las fuerzas actuantes en las partículas). En este comando también se puede especificar un número máximo de pasos de cálculo por ejecutar o el tiempo exacto en el cual debe detenerse la simulación.

Una alternativa consiste en aplicar un número de pasos de cálculo definido por el usuario utilizando el comando CYCLE. En este caso se debe verificar, por inspección, el estado de equilibrio a través de la fuerza desequilibrada, o bien por monitoreo de otra variable conveniente: energía cinética, velocidad o posición de las partículas.

Cuando existe intersección entre partículas se generan grandes fuerzas repulsivas en los contactos, suficientes para expulsar las partículas fuera de las paredes del recipiente virtual. La expulsión de una partícula tiene lugar si la superposición es mayor que el radio de la partícula. Para evitar que esto ocurra, se impone una energía cinética de cero durante los primeros  $k$  ciclos de cálculo (mediante el comando CALM) hasta eliminar los traslapes excesivos.

Para alcanzar una solución mecánica es de particular relevancia el amortiguamiento mecánico. En el Capítulo 2 se presentaron los tipos de amortiguamiento utilizados. El amortiguamiento local se aplica en forma proporcional a la fuerza desequilibrada de las partículas o grupos de partículas. El amortiguamiento viscoso agrega amortiguadores en los contactos que proporcionan fuerzas proporcionales a la velocidad relativa entre los cuerpos que están en contacto. Ambos tipos de amortiguamiento se activan con el comando DAMP.

Si no se especifican las propiedades de amortiguamiento, PFC<sup>3D</sup> asigna un coeficiente de amortiguamiento local igual a 0.7 y el amortiguamiento viscoso es inactivo. Estos valores están calibrados para obtener una rápida convergencia numérica por solicitaciones cuasi estáticas (Itasca, 2008).

### 3.2.5 Modelo de contacto elegido

Con el objeto de estudiar la estructura de los medios granulares en sus aspectos más elementales, se utiliza un modelo de contacto sencillo pero que permite reproducir diversos comportamientos de los medios granulares. A este modelo de contacto se le conoce como lineal y consiste de un elemento elástico en la dirección normal del contacto, otro elemento elástico en dirección tangencial o cortante y un elemento de fricción en dirección tangencial, estos dos últimos conectados en serie como se ilustra en la figura 3.3.

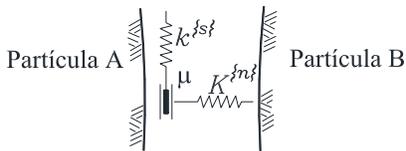


Figura 3.3. Modelo de contacto adoptado

El modelo de contacto lineal es ampliamente utilizado en el DEM. La fuerza normal es una función lineal de la interpenetración normal entre los cuerpos en contacto. La fuerza cortante aumenta linealmente con el desplazamiento relativo tangencial y está limitada por la resistencia por fricción de Coulomb.

Di Enzo & Di Maio (2004) observaron que si los parámetros del modelo lineal se evalúan con precisión, las fuerzas y desplazamientos calculadas con este modelo son tan precisos como los que se obtienen con modelos complejos (Hertz-Mindlin por ejemplo). Un modelo de contacto complejo es relevante cuando se estudian fenómenos a deformaciones unitarias

de la muestra granular  $\varepsilon < 10^{-5}$ . En particular, el modelo lineal es apropiado cuando no se busca describir con precisión la deformación en los contactos.

### 3.3 Formación de la estructura granular

#### 3.3.1 Parámetros de simulación

El presente estudio de los medios granulares considera tres granulometrías: uniforme (partículas con diámetro constante), bimodal (mezcla de partículas de dos tamaños) y continua (partículas de cualquier diámetro entre un mínimo y un máximo). Cada muestra está constituida por 30,000 esferas y los diámetros de las partículas se obtienen a partir de las ecuaciones 2.18 y 2.19.

Una mezcla binaria (granulometría bimodal) es obtenida a partir de dos materiales con partículas de igual diámetro  $D_{máx}$  (esferas grandes) y  $D_{mín}$  (esferas pequeñas). Se denomina  $a = D_{máx}/D_{mín}$  a la relación de los diámetros de las partículas de la mezcla. La distribución granulométrica  $P_{3V}(d)$  es la proporción del volumen total de sólidos que corresponde a las partículas de cada tamaño (ecuación 3.1).

$$P_{3V}(d) = \begin{cases} p_{3V}; & \text{para } d = D_{mín} \\ 1 - p_{3V}; & \text{para } d = D_{máx} \end{cases} \quad (3.1)$$

La granulometría continua se compone por partículas de todos los tamaños comprendidos entre  $D_{mín}$  y  $D_{máx}$ . La distribución granulométrica  $F_{3V}(d)$  se interpreta como la proporción en volumen de partículas con diámetro menor o igual que  $d$ . Para el presente estudio se considera una  $F_{3V}(d)$  lineal en el intervalo  $[0, 1]$ , con  $F_{3V}(d=D_{mín})=0$  y  $F_{3V}(d=D_{máx})=1$ .

Por otra parte, para definir las fuerzas de cuerpo se considera la gravedad terrestre y la densidad (cantidad de masa por unidad de volumen) de las partículas.

De acuerdo con el modelo de contacto lineal, los parámetros mecánicos son: coeficiente de rigidez normal en el contacto  $K^{(n)}$ , coeficiente de rigidez tangencial en el contacto  $k^{(s)}$ , coeficiente de fricción interparticular ( $\mu$ ) y coeficiente de amortiguamiento ( $\rho$ ). En la tabla 3.1 se presentan los valores utilizados en las simulaciones de los parámetros anteriores.

Tabla 3.1. Parámetros de simulación

Parámetro	Valor	Justificación
Parámetros geométricos		
Número de partículas	30 000	Obtener una muestra representativa
Diámetro de partículas	0.0726	Granulometría uniforme (como referencia)
Relación de diámetros, $a=D_{máx}/D_{mín}$	1, 3, 10	
Prop. de esferas pequeñas, $p_{3V}\{D_{mín}\}$	0.2, 0.5, 0.8	Parámetro de granulometría bimodal
G. Continua $a=D_{máx}/D_{mín}$	10	Granulometría bien graduada (Cu=6)
Parámetros mecánicos		
Aceleración de la gravedad	9.81 m/s <sup>2</sup>	
Densidad de partículas	2600 kg/m <sup>3</sup>	Densidad típica de minerales
*Coef. de rigidez normal $K^{(n)}$	10 <sup>7</sup> N/m	Valor representativo de partículas rígidas
*Coef. de rigidez tangencial $k^{(s)}$	10 <sup>7</sup> N/m	Valor representativo de partículas rígidas
*Coef. de fricción interparticular $\mu$	0, 0.7	Valor típico de fácil manejo numérico
**Coef. de amortiguamiento $\rho$	0.5	Fácil manejo numérico
**Paso de tiempo $\Delta t$	10 <sup>-6</sup> – 10 <sup>-5</sup> s	Calculado por el programa PFC <sup>3D</sup>
Método de simulación		
Geométrico (Auvinet, 1986)		Formación geométrica de la estructura
Mecánico (PFC <sup>3D</sup> )		Interacciones mecánicas entre partículas

\* Propiedades aplicadas tanto a partículas como a las paredes del recipiente de simulación.

\*\* Valores tomados de la experiencia reportada en las referencias bibliográficas.

### 3.3.2 Procedimiento de formación de la estructura

La secuencia de modelado utilizada en el presente trabajo (figura 3.4) consiste en generar medios granulares aleatorios con el método de simulación geométrico de Auvinet (1975). En seguida, el medio granular se somete a la acción de la gravedad terrestre recurriendo al programa PFC<sup>3D</sup>. En esta etapa de la simulación se toma en cuenta la interacción mecánica entre partículas hasta alcanzar el equilibrio. La muestra así obtenida es considerada como el estado inicial de la estructura y es el objeto de estudio del presente capítulo.

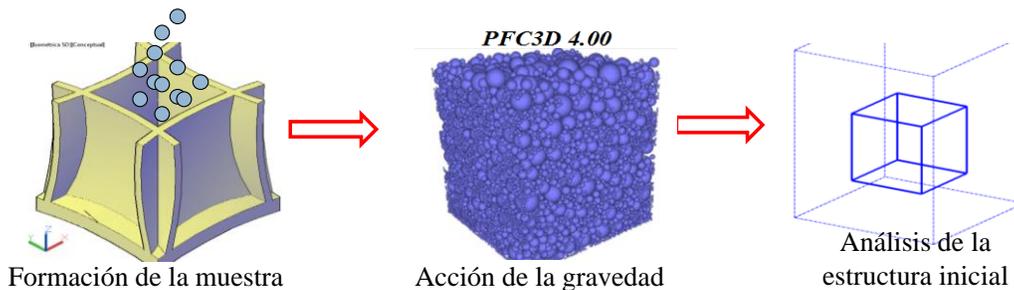


Figura 3.4. Secuencia de simulación para la formación de las estructuras granulares

El procedimiento anterior acelera la fase de la preparación de las muestras granulares, ya que el método geométrico permite colocar rápidamente las partículas en una posición que cumple con un equilibrio local. Para reproducir la colocación vertical aleatoria de partículas, en PFC<sup>3D</sup> se necesita generar las partículas en el espacio de acuerdo a un proceso de Poisson (inciso 2.1.10) y requiere de una gran cantidad de ciclos de cálculo hasta que las partículas alcancen el equilibrio (figura 3.5).

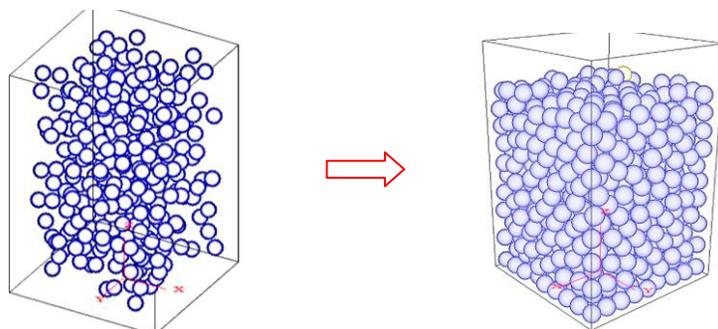


Figura 3.5. Esquema de la formación de estructuras granulares por depósito vertical en PFC<sup>3D</sup>

Se considera que una muestra granular se encuentra en equilibrio cuando el error en el equilibrio de fuerzas (véase inciso 3.2.4) es menor del 1%, cuando el tensor de esfuerzos en cada partícula es simétrico, cuando la posición  $z$  de las partículas es constante o cuando las velocidades son muy bajas (por ejemplo  $10^{-3}$  m/s o menores). En la figura 3.6 se presentan algunos ejemplos sobre la posición vertical de la partícula más elevada en una muestra granular para mostrar el equilibrio mecánico en la formación de la estructura.

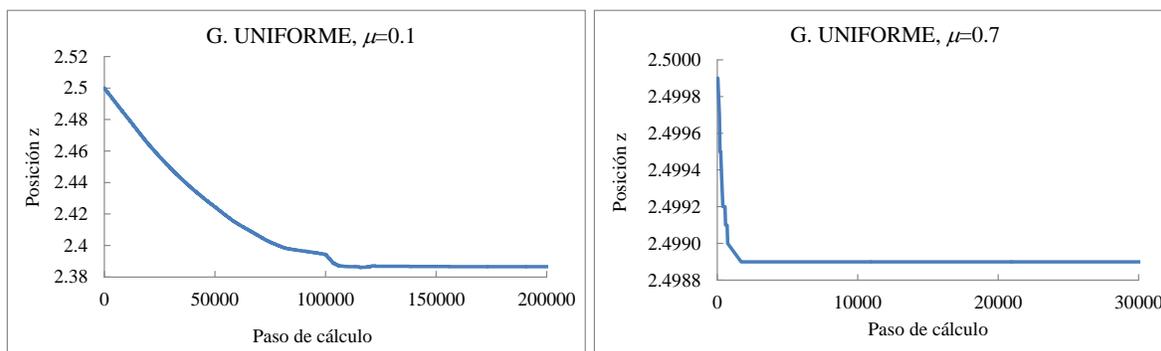


Figura 3.6. Evaluación del equilibrio mecánico por medio de la posición  $z$  de la partícula más elevada de dos muestras granulares

El procedimiento de formación del medio granular puede tener efecto en la estructura. Zhang *et al.*, (2000) mostraron que la porosidad del medio aumenta con el coeficiente de amortiguamiento, la intensidad de depósito de partículas (número de partículas que caen simultáneamente) y el coeficiente de fricción. El número de coordinación aumenta con la altura de caída de las partículas y disminuye con el aumento del coeficiente de fricción, coeficiente de amortiguamiento y con la intensidad de depósito de las partículas.

Salvo mención explícita, en la presente tesis se utiliza el procedimiento de simulación combinado (simulación geométrica + simulación mecánica) para obtener el estado inicial de las muestras granulares.

### 3.4 Estudio de la estructura inicial de las muestras granulares

A continuación se presenta el estudio de la estructura inicial de los medios granulares. Los análisis se llevan a cabo considerando solamente las partículas del centro de la muestra para eliminar los efectos de frontera como se ilustró en la figura 3.4.

De acuerdo con Pinson *et al.*, (1998), en la mayoría de los casos no hay efecto de las fronteras a una distancia de cinco veces el diámetro de las partículas. En el presente trabajo, el núcleo central analizado (con dimensiones  $1x1x1m$ ) se encuentra a 6.9 veces el diámetro de las partículas (granulometría uniforme) de distancia de las paredes del recipiente.

#### 3.4.1 Porosidad

La estimación de la porosidad de una muestra de material granular se realiza con el método de Monte Carlo. El método consiste en generar puntos distribuidos al azar en el espacio y cuantificar el número de puntos que caen en los espacios vacíos. La relación entre el número de puntos en los vacíos ( $N_{pv}$ ) y el número total ( $N_{pt}$ ) de puntos generados permite estimar la porosidad del medio ( $n=N_{pv}/N_{pt}$ ).

El número de puntos ( $N_{pt}$ ) requeridos para alcanzar una precisión en la estimación puede calcularse tomando en cuenta que el número de puntos ubicados en los poros es una variable aleatoria con distribución binomial. Entonces la varianza  $\sigma_n^2$  de la porosidad estimada está dada por la ecuación 3.2. En la figura 3.7 se muestra el intervalo de confianza  $2\sigma_n$  como función del número de puntos usado en la estimación si *a priori* se considera una porosidad  $n=0.40$ . También se muestra la porosidad calculada en la porción central de una estructura granular por el método de Monte Carlo.

$$\sigma_n^2 = \frac{n(1-n)}{N_{pt}} \quad (3.2)$$

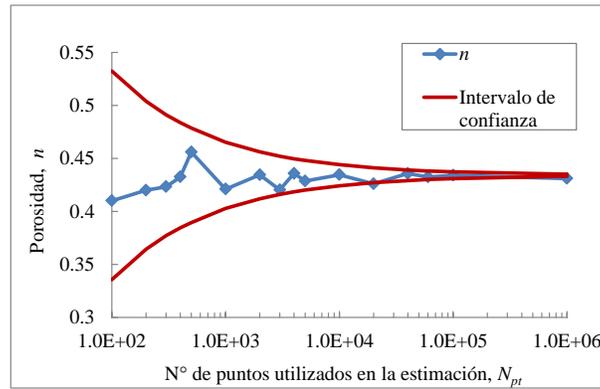


Figura 3.7. Precisión en la estimación de la porosidad, muestra con granulometría uniforme

Las estimaciones de la porosidad se realizan con  $N_{pt}=10^6$  puntos (función POROS.m elaborada en MALTAB), corresponde a un ancho del intervalo de confianza ( $\pm \sigma_n$ ) de 0.0005 con un tiempo de cálculo aceptable. A continuación se analizan los resultados.

a) Porosidad de muestras con granulometría uniforme

La porosidad en medios de partículas esféricas de igual diámetro puede variar entre 0.26 y 0.48 (véase tabla 2.2). Estos son los límites inferior y superior que corresponden a los arreglos regulares tetraédrico y cúbico simple respectivamente. En el material aleatorio simulado con el método geométrico (inciso 3.1) se obtuvo una porosidad de 0.43.

La muestra generada con el método geométrico se sometió a la acción de la gravedad en PFC<sup>3D</sup> donde experimenta una reducción de su porosidad. La figura 3.8 muestra la densificación de una estructura granular sometida a la gravedad terrestre considerando diferentes valores del coeficiente de fricción. Cuando las partículas son perfectamente lisas se obtiene una porosidad mínima  $n=0.36$ , ya que las partículas deslizan hacia posiciones más bajas dentro del medio al no existir fuerzas que se opongan al deslizamiento. Con el aumento del coeficiente de fricción se obtienen porosidades cada vez mayores, y cuando el coeficiente de fricción es unitario o mayor, la porosidad tiende a permanecer constante.

Por otra parte se construyeron estructuras granulares exclusivamente con el método de formación mecánico (PFC<sup>3D</sup>), de donde se obtuvieron porosidades de 0.35, 0.41 y 0.43 para coeficientes de fricción  $\mu=0, 0.3$  y  $0.7$  respectivamente. En la figura 3.8 se observa que no hay efecto en la porosidad debido a los métodos de formación utilizados. Por lo tanto, el

método geométrico puede utilizarse para reducir el tiempo de cómputo en la formación de las muestras granulares.

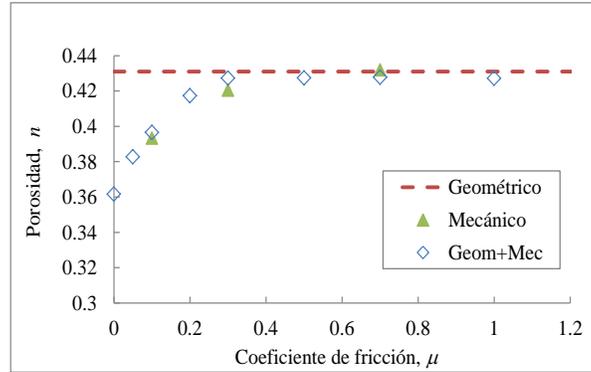


Figura 3.8. Densificación de muestras de granulometría uniforme por aplicación de su peso propio

b) Porosidad de muestras con granulometría bimodal

En mezclas de dos componentes, la porosidad está fuertemente afectada por la proporción de los componentes de la mezcla y por el tamaño de las partículas. Para estudiar la porosidad de estas mezclas conviene establecer relaciones volumétricas. Si  $n_1$  es la porosidad de las partículas grandes incluyendo el volumen ocupado por las pequeñas y  $n_2$  la porosidad marginal de las partículas pequeñas, entonces la porosidad  $n$  del medio se calcula con la ecuación 3.3. La proporción en volumen de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ), con diámetro infinitamente menor, necesaria para rellenar por completo los huecos de un material uniforme de partículas grandes está dada por la ecuación 3.4 (Furnas, 1931).

$$n = n_1 - n_1(1 - n_2) = n_1 n_2 = n_0^2 \quad (3.3)$$

$$p_{3V} = \frac{n_0}{1 + n_0} \quad (3.4)$$

Donde  $n_0$  es la porosidad del medio uniforme.

Dias *et al.*, (2004) analizaron los casos en que la proporción de partículas pequeñas no cumple con la ecuación 3.4. Cuando  $p_{3V} < n_0 / (1 + n_0)$  las partículas pequeñas no ocupan todos los huecos entre las grandes ( $n_2 > n_0$ ) y la porosidad mínima de la mezcla es (ecuación 3.5):

$$n = \frac{n_0 - p_{3V}}{1 - p_{3V}} \quad (3.5)$$

Si la proporción de partículas pequeñas es mayor al valor crítico de Furnas (ec. 3.4), se trata de una mezcla donde las partículas grandes se encuentran dispersas entre las pequeñas y la porosidad está dada por la ecuación 3.6.

$$n = \frac{n_0 p_{3V}}{1 - n_0(1 - p_{3V})} \quad (3.6)$$

Se observa que la porosidad de la mezcla depende de la porosidad considerada de los componentes por separado. La figura 3.9 presenta la variación teórica de la porosidad para  $a=\infty$  en función de la proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ) y la porosidad ( $n_0$ ) del medio uniforme. Se muestran ejemplos con los arreglos regulares tetraédrico ( $n_0=0.26$ ) y cúbico ( $n_0=0.48$ ), así como con medios desordenados con coeficientes de fricción  $\mu=0$  ( $n_0=0.36$ ) y  $\mu=0.7$  ( $n_0=0.43$ ).

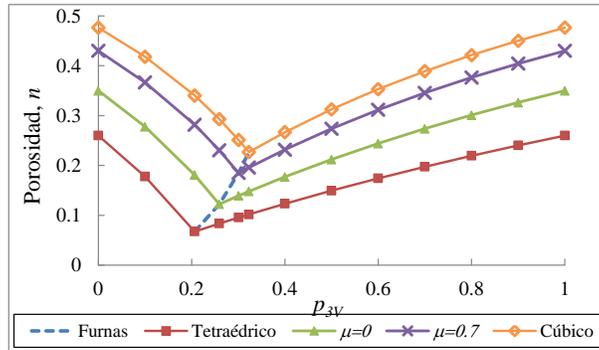


Figura 3.9. Porosidad teórica de mezclas con granulometría bimodal

La porosidad de las muestras granulares simuladas se presenta en la figura 3.10. Con una relación de diámetros  $a=3$  se observa que la porosidad se reduce cuando la proporción  $p_{3V}$  se encuentra entre 0.2 y 0.4. Con el incremento de  $a$  las muestras son cada vez más densas. En cualquiera de los casos, la porosidad máxima se alcanza cuando la granulometría del medio es uniforme. Como se observó en los materiales uniformes, un mayor coeficiente de fricción interparticular incrementa la porosidad.

En el lado izquierdo de la figura 3.10 se agregó la curva de porosidad para  $a=10$  y  $\mu=0$ , para ilustrar que con una relación de tamaños  $a=D_{\text{máx}}/D_{\text{mín}}=10$  prácticamente se alcanza la porosidad mínima calculada con las ecuaciones 3.5 y 3.6. Las desviaciones observadas se deben principalmente a un sesgo en la granulometría.

Las tendencias observadas coinciden con la teoría y con estudios experimentales como los de Mota *et al.*, (2001) y Dias *et al.*, (2004), quienes evaluaron la porosidad de mezclas binarias de esferas de vidrio.

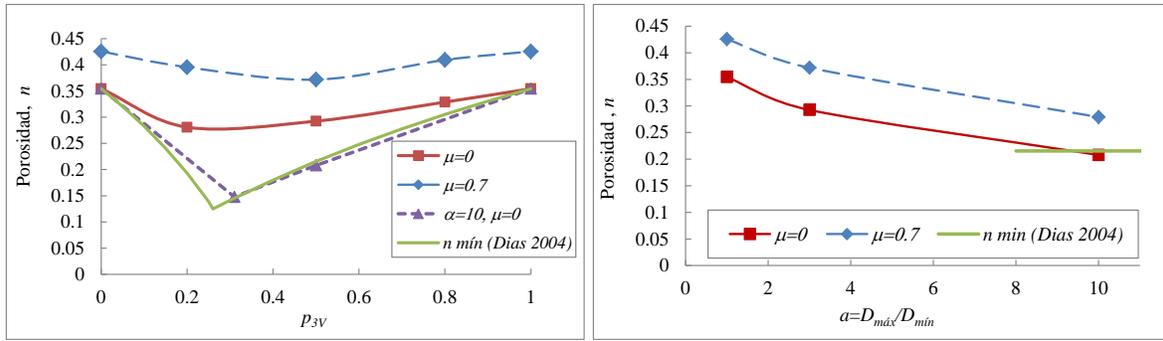


Figura 3.10. Porosidad en mezclas binarias: izquierda  $a=3$ , derecha  $p_{3V}=0.5$

c) Porosidad de muestras con granulometría continua

En las muestras simuladas se obtuvo una porosidad de 0.25 y 0.35 con un coeficiente de fricción de 0 y 0.7 respectivamente. En un material con granulometría continua los granos pequeños pueden rellenar los poros entre los grandes.

Los estudios experimentales reportados en la literatura confirman lo anterior. Polito & Martin (2001) enriquecieron muestras de arena con limos para reducir la porosidad y observaron que la mínima porosidad se alcanza cuando se agrega entre un 20 y 40% de finos en peso (similar a lo presentado en la figura 3.9).

En las simulaciones efectuadas en este trabajo, los materiales con granulometría continua presentan porosidades menores a las de un medio de granulometría uniforme. Sin embargo, para una misma relación de diámetros máximo y mínimo, las mezclas de granulometría discontinua son más densas que las de granulometría continua (Auvinet (1986) y Auvinet & Bouvard (1987) presentan análisis más detallados al respecto).

### 3.4.2 Distribución de tamaño de poros

La estructura de los poros de un medio granular es amorfa y continua, por lo que no es fácil describirla. Una función que permite representar en forma implícita las dimensiones de los poros es la distribución de tamaño de poros  $F_{3V}(p)$  (Matheron, 1967 y Auvinet, 1978). Como se mencionó en el inciso 2.1.8 esta función se define como la proporción del volumen total de vacíos inaccesibles a una esfera de referencia de diámetro  $p$ .

Para determinar la distribución de tamaño de poros se han utilizado distintos procedimientos. El procedimiento que se describe a continuación fue propuesto por Auvinet (1978) y se basa en conceptos de morfología matemática.

- Se generan  $N_p$  puntos ubicados al azar en el espacio dentro del núcleo de una estructura granular y se rechazan los puntos ubicados dentro de los granos. En esta etapa se puede calcular la porosidad del medio como la relación entre el número de puntos aceptados y el número total de puntos generados.
- Cada punto  $v$  dentro de los poros se encuentra dentro de una erosión de los poros de acuerdo a un elemento estructurante  $B$  (de forma esférica), por lo que se incorpora una esfera con centro en  $v$  y radio  $\lambda$  a una colección de esferas  $E_i$  que no intersecan los granos. Lo anterior se ilustra en la figura 3.11 en dos dimensiones.
- Disponiendo de la colección de esferas  $E_i$  se genera una nueva serie de puntos aleatorios y se aceptan los que caen dentro de dicha colección. Para cada punto se identifica el diámetro máximo ( $p=2\lambda$ ) de la esfera que lo contiene. Esto indica que en el poro existe espacio para esferas de diámetro ( $p$ ) o menores (figura 3.11).
- Entonces se obtiene una función  $G_2$  que expresa la fracción del volumen total de los poros que es accesible a esferas iguales o menores que un cierto diámetro de poro  $p$  (Auvinet, 1978). Y la distribución de tamaño de poros se obtiene como:

$$F_{3v}(p)=1-G_2(p) \quad (3.7)$$

Es importante aclarar que el término accesible se refiere a que en un punto dentro de los poros es posible inflar una esfera de diámetro  $p$  o menor sin intersecar los granos, pero no indica la existencia de caminos de acceso a dicho poro.

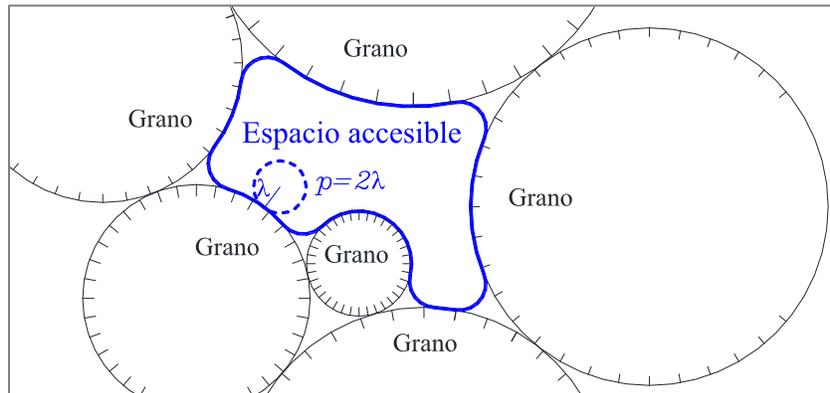


Figura 3.11. Espacio accesible en los poros a esferas de diámetro  $p$  o menores

La precisión de la estimación de  $F_{3v}(p)$  depende del número de puntos aleatorios utilizados en ambas etapas. En la primera no se tiene una forma teórica para estimar el número de puntos aleatorios requeridos para alcanzar una cierta precisión, en la segunda puede recurrirse a la ecuación 3.2. Por tanteos se determinó que el número de puntos aleatorios requeridos en la primera etapa para obtener una curva  $F_{3v}(p)$  confiable es 40 000 y 100 000

en la segunda. En la primera etapa se utiliza un número de puntos menor, pese a la mayor relevancia, porque el tiempo de cálculo es prohibitivo.

A continuación se describen las distribuciones de tamaño de poros determinadas con el método anterior (función GPOROS.m) en las muestras granulares.

a) Tamaño de poros en muestras con granulometría uniforme

Se aprovechan las distintas muestras con granulometría uniforme para observar el efecto del coeficiente de fricción y del método de formación (geométrico contra el geométrico seguido del mecánico).

La figura 3.12 muestra la distribución de tamaño de poros en muestras con granulometría uniforme y distinto coeficiente de fricción. Se observa que el tamaño de los poros es menor al diámetro de las partículas. Por lo general la mayor proporción de poros se encuentra entre el 0.2 y 0.5 veces el diámetro de las partículas. Cuando el coeficiente de fricción aumenta se tienen poros de mayor tamaño, ya que durante el proceso de formación existen fuerzas que impiden el cierre de los huecos.

La misma figura muestra que del método de simulación geométrico resultada una distribución de tamaño de poros similar a la de simulaciones mecánicas con  $\mu \geq 0.3$ . Por tanto, los análisis de Auvinet (1986) son válidos en estos casos.

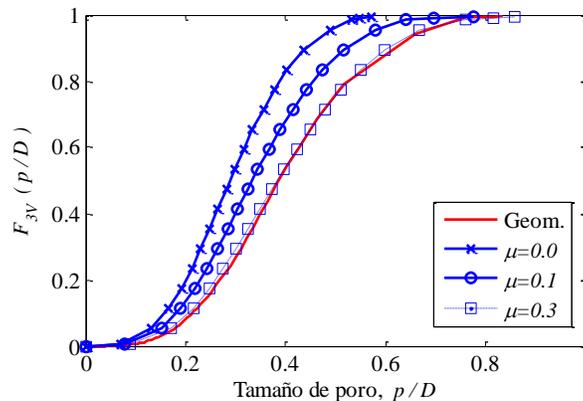


Figura 3.12. Distribución de tamaño de poros en muestras con granulometría uniforme

La figura 3.13 muestra que el uso combinado de los algoritmos de simulación conduce a estructuras iguales a las que se obtienen con el empleo exclusivo del método mecánico (PFC<sup>3D</sup>).

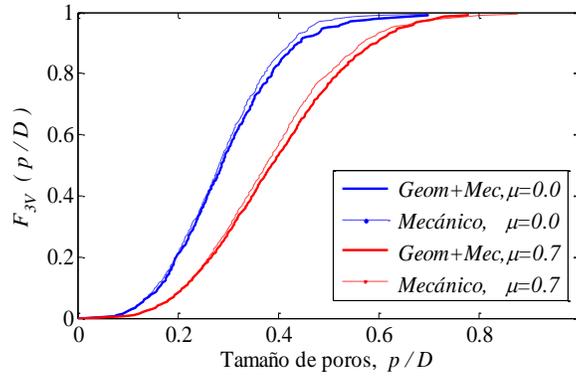


Figura 3.13. Distribución de tamaño de poros obtenida con distintos métodos de simulación

b) Tamaño de poros en muestras con granulometría bimodal

En esta granulometría, el tamaño de los poros se normaliza respecto al diámetro de los granos pequeños ( $D_{mín}$ ). Cuando las partículas son perfectamente lisas, la distribución del tamaño de poros es similar a la de medios uniformes (generalmente los poros son menores al  $D_{mín}$ ). Cuando existe fricción en los contactos, las partículas grandes forman puentes y dan lugar a poros de mucho mayor tamaño que el diámetro mínimo de partículas.

La variación de la proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ) permite observar que los poros son de mayor tamaño cuando existe una proporción importante de partículas grandes:  $p_{3V}=0.2$  en la figura 3.14 y  $p_{3V}=0.5$  en la figura 3.15. Si  $p_{3V}=0.8$  (ver lado derecho de la figura 3.14) predominan las partículas pequeñas en número y  $F_{3V}(d)$  es aproximadamente igual a la de un material con granulometría uniforme.

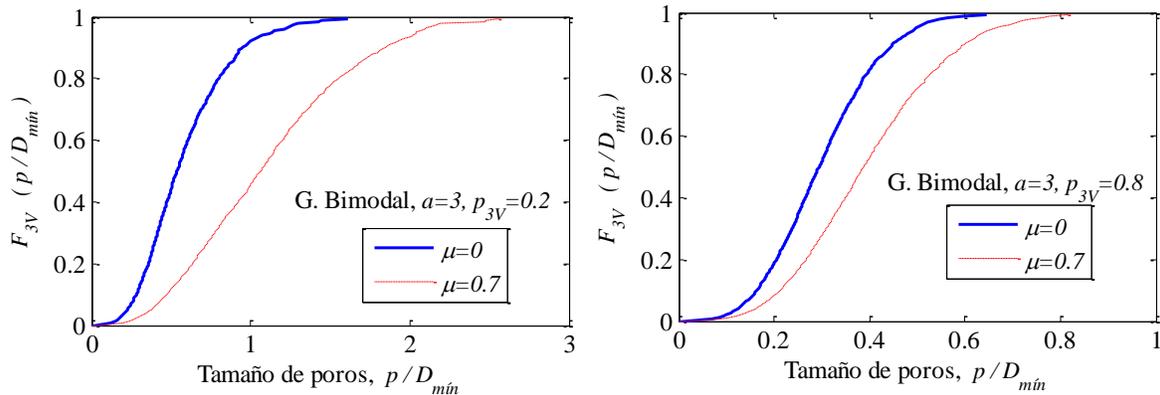


Figura 3.14. Efecto de la proporción de partículas pequeñas sobre el tamaño de poros en mezclas binarias

La figura 3.15 muestra que para  $\mu=0.7$ , el tamaño de los poros disminuye si aumenta la relación de diámetros ( $a=D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$ ). Las partículas pequeñas rellenan los huecos entre las grandes. Para  $\mu=0$  no se observa efecto de la relación de diámetros.

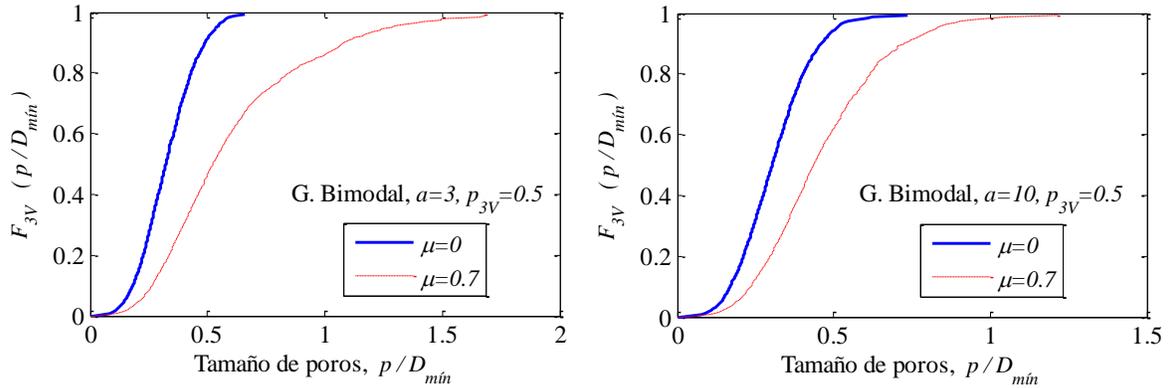


Figura 3.15. Efecto de la relación de diámetros de partículas sobre el tamaño de poros en mezclas binarias

c) Tamaño de poros en muestras con granulometría continua

La distribución de tamaño de poros en materiales con granulometría continua es mejor graduada (figura 3.16) en comparación con las granulometrías anteriores. Se obtienen poros grandes respecto a las partículas de  $D_{m\acute{i}n}$ . Como ya es de esperarse, en un medio sin fricción los espacios vacíos son más pequeños.

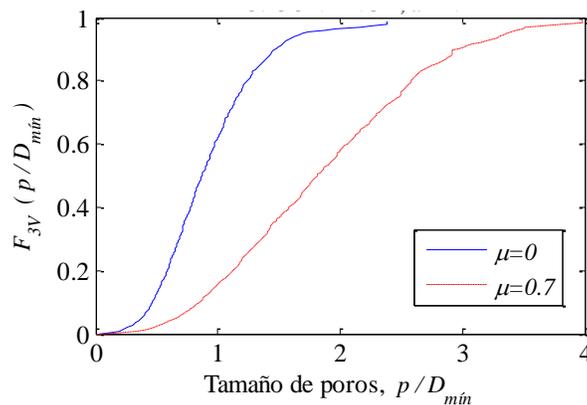


Figura 3.16. Distribución de tamaño de poros en muestras granulares con granulometría continua

### 3.4.3 Longitud de los poros en las direcciones cartesianas

Para complementar la descripción de los poros se evalúa la continuidad de los poros en las tres direcciones cartesianas ( $x,y,z$ ). La función LPORO.m genera puntos al azar en el espacio y toma en cuenta los puntos que se ubican en los poros. Para cada punto en los poros se buscan las partículas más cercanas sobre las direcciones cartesianas (figura 3.17). Se registra la longitud del segmento de recta contenido en el espacio vacío y se genera otro punto aleatorio hasta obtener un número grande de repeticiones.

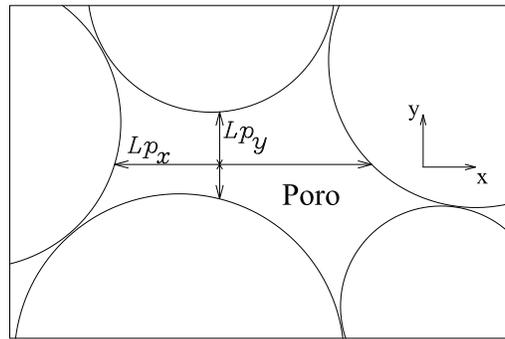


Figura 17. Continuidad de los poros en las direcciones cartesianas, ejemplo bidimensional.

#### a) Granulometría uniforme

Las mediciones realizadas muestran que la longitud de los poros ( $Lp$ ) a lo largo de un sondeo recto varía de cero a nueve veces el diámetro de las partículas. La figura 3.18 muestra ejemplos de la densidad de probabilidad obtenida.

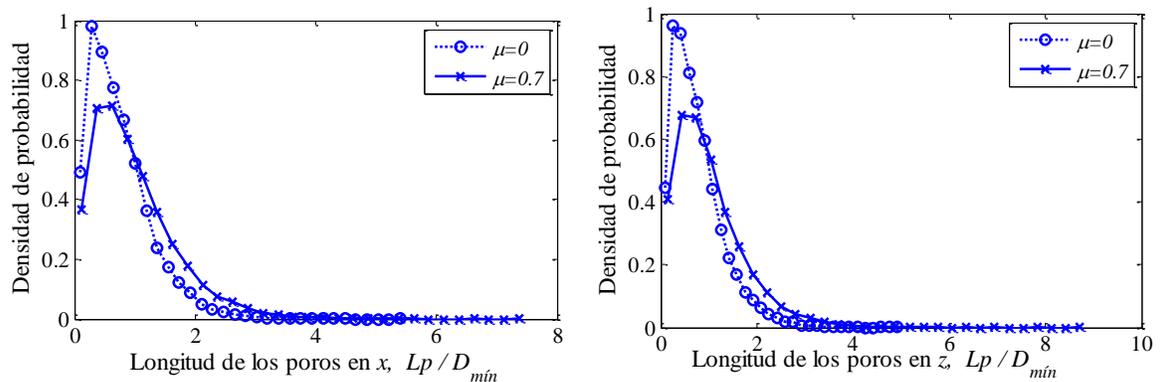


Figura 3.18. Densidad de probabilidad de la longitud de los poros en muestras con granulometría uniforme

La longitud media de los poros varía con el coeficiente de fricción. En un medio sin fricción los poros tienen menor continuidad como se ilustra en la figura 3.19. Los resultados de esta figura indican que las estructuras depositadas en el campo de la gravedad presentan poros con una continuidad ligeramente mayor en la dirección vertical.

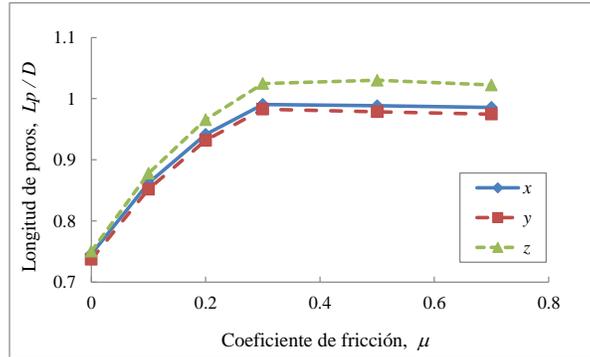


Figura 3.19. Longitud media de los poros en muestras con granulometría uniforme

b) Granulometría bimodal

Para efectos de comparación, la longitud de los poros se normaliza con respecto al diámetro de las partículas pequeñas ( $D_{min}$ ). En la figura 3.20 se observa que la longitud media de los poros depende de la composición de la mezcla granular. Por ejemplo, cuando se tiene una baja proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}=0.2$ ), los poros son de mayor continuidad. Si prevalecen las partículas pequeñas, la longitud de los poros es similar a los resultados obtenidos en granulometría uniforme.

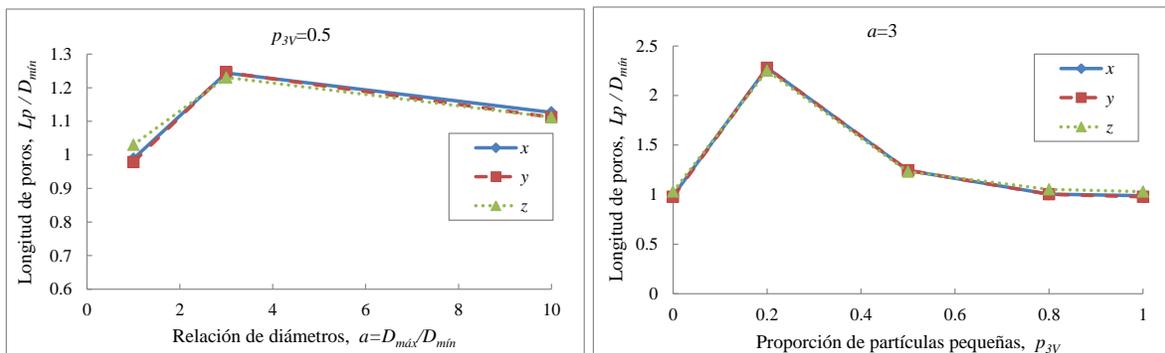


Figura 3.20. Longitud media de los poros en mezclas binarias con  $\mu=0.7$

Respecto a la relación de tamaños, se obtienen poros con mayor continuidad cuando el tamaño de las partículas es similar, por lo que la estructura se abre. Si la diferencia de tamaños es amplia ( $a=10$ ), las partículas pequeñas rellenan los huecos entre las grandes y la longitud de los poros a lo largo de una recta es menor.

c) Granulometría continua

En la muestra con granulometría continua se obtiene un intervalo más amplio de la longitud de los poros. La densidad de probabilidad es aproximadamente la misma en las tres direcciones cartesianas (figura 3.21) con valores medios de 3.62, 3.68 y  $3.43D_{\min}$  en dirección  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente.

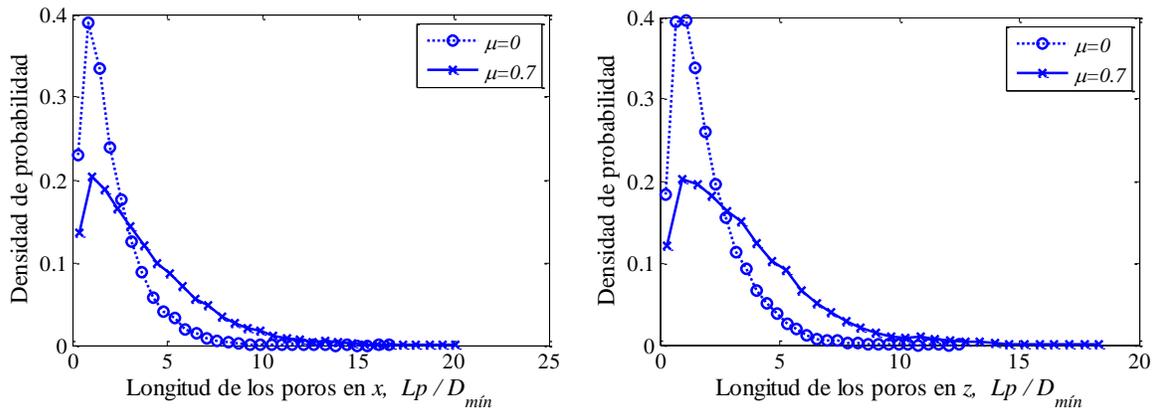


Figura 3.21. Densidad de probabilidad de la longitud de los poros en muestras con granulometría continua

Los resultados del presente inciso y el anterior ponen en evidencia la complejidad del espacio vacío en los medios granulares. La distribución de tamaño de poros y la continuidad ofrecen información valiosa sobre la geometría irregular de los poros, pero no son en ninguna forma definitivos.

### 3.4.4 Número de coordinación

Diversos estudios se han enfocado al análisis del número de contactos por partícula, sin embargo su determinación presenta serias dificultades tanto teóricas como experimentales.

En la literatura se reportan varios métodos experimentales para encontrar partículas en contacto. El método más usual consiste en saturar muestras granulares con pintura, después de drenar y secar la muestra, los contactos se hacen visibles (Marsal, 1966). Este tipo de experimentos no son totalmente satisfactorios debido a que se forman cuellos capilares entre dos partículas cercanas pero que en realidad no están en contacto. Este procedimiento tiende a sobrestimar el número de contactos.

Con la llegada de las técnicas de microscopía y microtomografía con rayos X es posible realizar mediciones muy precisas (Aste *et al.*, 2005). En partículas esféricas del mismo tamaño se ha observado que el error es despreciable si se admite la existencia de un contacto a una distancia entre centros de partículas menor que  $1.01$  veces el diámetro ( $D$ ). Para distancias mayores a  $1.05D$  no solo se altera el  $N_c$  sino también su distribución de probabilidad (Isola, 2008).

El problema descrito anteriormente se resuelve con relativa facilidad en las simulaciones numéricas, donde la posición y diámetro de las partículas son conocidas con exactitud. En el presente trabajo se cuenta con dos procedimientos para obtener el número de contactos.

Durante la formación de las estructuras granulares con el algoritmo geométrico, se agrega un contacto a cada una de las esferas de apoyo y tres a la nueva partícula colocada. Al terminar la simulación se tiene registrado el número de contactos de todas las partículas.

Cuando las estructuras granulares son construidas con otro método o han sido modificadas (por ejemplo en una simulación mecánica) es necesario cuantificar nuevamente el número de contactos. La función CONTACTO.m realiza esta actividad mediante una pequeña dilatación de las partículas (figura 3.22). Entonces la partícula de referencia se interseca con un cierto número de vecinos, el cual representa el número de contactos. El procedimiento se repite para cada partícula hasta examinar toda la muestra granular.

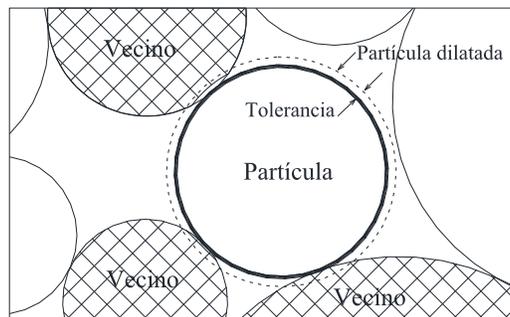


Figura 3.22. Cálculo del número de contactos por partícula, ejemplo bidimensional

La función CONTACTO.m fue calibrada en las simulaciones geométricas de granulometría uniforme comparando el número de contactos obtenido con los dos procedimientos ya descritos. Por prueba y error se eligió una tolerancia de  $D_{min}/10\ 000$  para admitir la presencia de un contacto.

Para almacenar la información, PFC<sup>3D</sup> crea un contacto (como un elemento de datos en la memoria) antes de que dos granos entren en contacto (Itasca, 2008). Se reconoce como contacto activo hasta que aparecen las fuerzas de interacción entre partículas.

Tomando en cuenta que se conoce cada par de partículas en contacto es posible comparar el número de contactos obtenidos por PFC<sup>3D</sup> y por la función CONTACTO.m elaborada en Matlab. El error obtenido es de aproximadamente un contacto en 30 000.

a) Granulometría uniforme

En las muestras con granulometría uniforme, el número de contactos por partícula se distribuye entre 3 y 11 (figura 3.23). La distribución de probabilidad del número de contactos por partícula tiene forma gaussiana y se desplaza hacia la izquierda cuando se incrementa el coeficiente de fricción interparticular ( $\mu$ ).

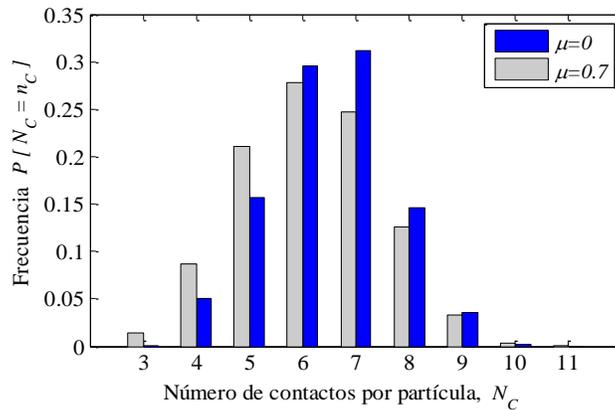


Figura 3.23. Número de contactos por partícula en medios de granulometría uniforme

En la figura 3.24 se presenta la variación del promedio del número de contactos por partícula (o simplemente número de coordinación) con el coeficiente de fricción. El modelo de simulación geométrico conduce a un  $N_c=6$ , el cual se modifica al aplicar el campo de gravedad terrestre, como lo señalan las flechas en dicha figura.

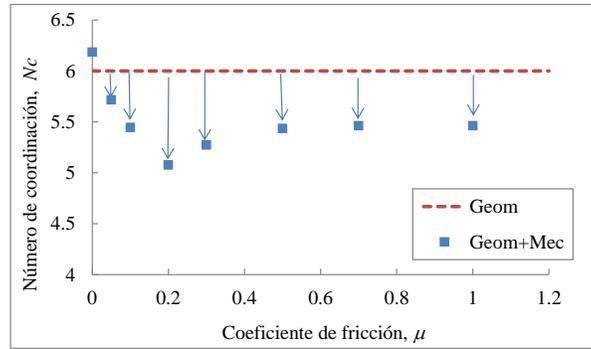


Figura 3.24. Efecto del coeficiente de fricción sobre el número de coordinación, material uniforme

La interpretación de los cambios en el  $N_c$  al aplicar la simulación mecánica es la siguiente:

- $\mu=0$ : Los seis contactos inicialmente impuestos por el algoritmo geométrico no son suficientes para la estabilidad de la estructura, es necesaria la creación de contactos adicionales para el equilibrio de fuerzas. Lo anterior va acompañado de una reducción de la porosidad (figuras 3.24 y 3.25). La estructura colapsa bajo la acción de su peso propio.
- $0 < \mu \leq 0.2$ : Para estar en equilibrio, la estructura requiere menos contactos de los que se imponen en la formación del medio granular (figura 3.24). Con el aumento de  $\mu$ , el  $N_c$  disminuye debido al aumento de las fuerzas de fricción. La porosidad permanece en su valor inicial e indica menores modificaciones en la estructura (figura 3.25).
- $\mu > 0.2$ : La estructura admite una pérdida de contactos porque no son necesarios para el equilibrio mecánico. Con el aumento de  $\mu$ , las mismas fuerzas de fricción impiden la pérdida de contactos y por tanto el número de contactos se conserva cada vez más cercano a seis (figura 3.24). La estructura no colapsa.

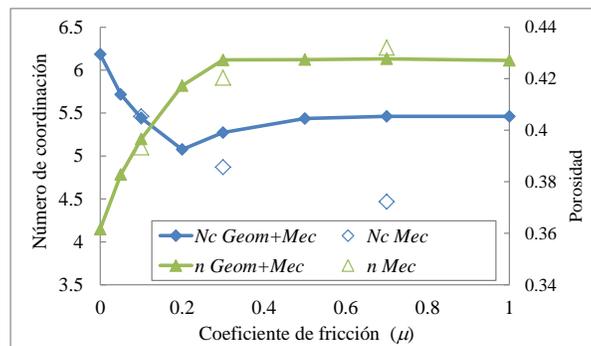


Figura 3.25. Relación entre la porosidad y el número de coordinación en muestras con granulometría uniforme

En la literatura es común correlacionar la porosidad y el número de coordinación. Se considera que el aumento del número de coordinación se debe a la reducción de la porosidad. Las simulaciones realizadas exclusivamente con el algoritmo mecánico coinciden con lo anterior como se muestra en la figura 3.25. Sin embargo, la formación de la estructura con el algoritmo geométrico seguido del mecánico pone en evidencia que la porosidad y número de coordinación pueden aumentar al mismo tiempo.

Para comprender lo anterior, considérense el problema de las trece esferas (Inciso 2.1.11). Al cambiar el arreglo de las esferas sobre la superficie de la esfera central, el número de contactos puede variar drásticamente sin ningún cambio en la porosidad.

En el arreglo tetraédrico de la figura 3.26, cada una de las doce esferas de la superficie está en contacto con cuatro esferas de la superficie y con la central. Por su parte, en el arreglo de icosaedro las esferas de la superficie únicamente están en contacto con la esfera central. En ambas configuraciones la porosidad local es la misma, por lo tanto, se concluye que el número de coordinación es independiente de la porosidad.

El algoritmo geométrico impone un número de coordinación de seis e introduce un mayor orden del que requiere la estructura granular. Comparando la configuración en tetraedro con la de icosaedro, esta última tiene mayor probabilidad de presentarse porque es menos ordenada. Por lo anterior, la tendencia general es de perder contactos.

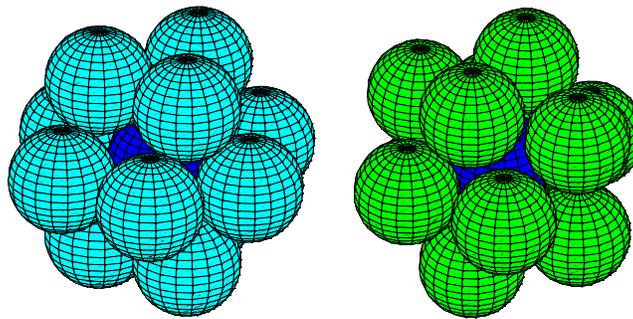


Figura 3.26. Arreglos tetraédrico (izquierda) y de icosaedro (derecha)

#### b) Granulometría bimodal

El número de contactos por partícula en mezclas de dos componentes se distribuye en un intervalo que depende de la granulometría (figura 3.27). Dicho intervalo es más amplio cuando la relación de diámetros ( $a=D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$ ) crece.

En la figura 3.27 se presenta el histograma del  $N_c$  en mezclas binarias, donde las partículas de cada tamaño representan la mitad del volumen de sólidos. Se observan dos modas, una

alrededor de seis contactos relacionada con arreglos aleatorios de esferas de igual diámetro. Otra moda mucho mayor se asocia con los contactos de partículas pequeñas sobre las grandes.

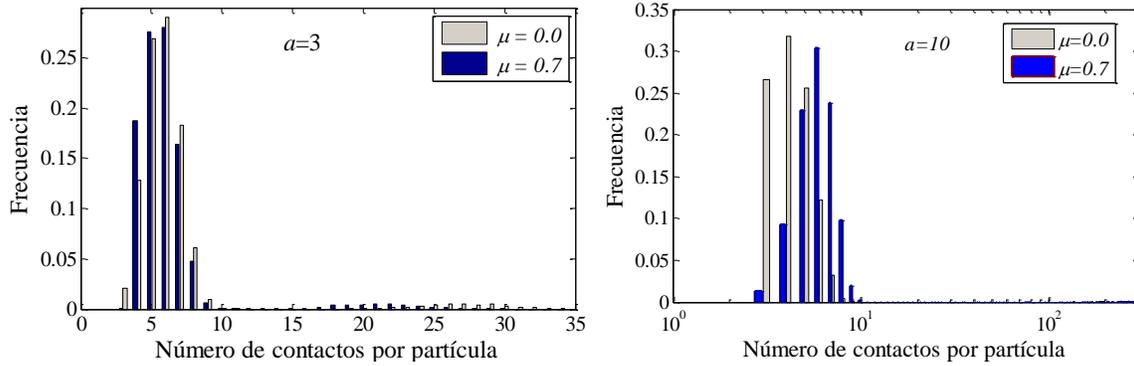


Figura 3.27. Número de contactos en mezclas de dos componentes con  $p_{3v}=0.5$

La figura 3.28 muestra que el promedio del número de contactos es mayor cuando la granulometría es uniforme. La presencia de partículas pequeñas disminuye ligeramente el  $N_c$  porque ocasionan una separación entre partículas grandes.

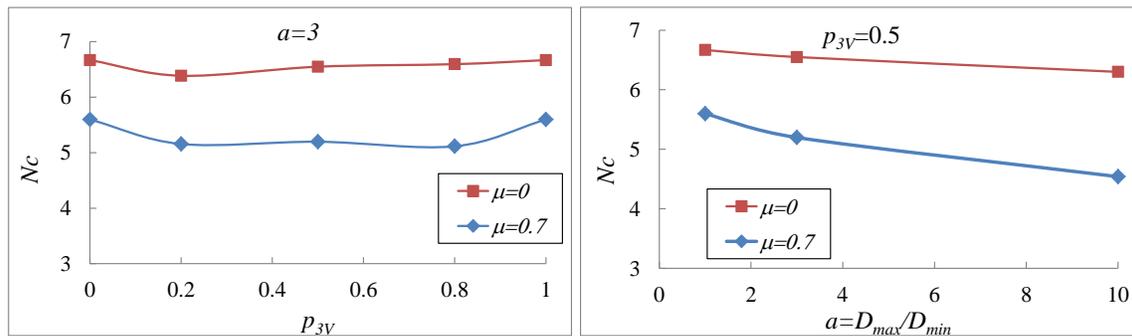


Figura 3.28. Relación del  $N_c$  con la granulometría en mezclas binarias

Se puede decir que el  $N_c$  ofrece una pobre información sobre la estructura local, por lo que conviene revisar el número de contactos de acuerdo al tamaño de las partículas.

En mezclas binarias se distinguen cuatro tipos de contactos entre las esferas grandes ( $eg$ ) y las pequeñas ( $ep$ ) como lo muestra la figura 3.29:  $N_{ep-ep}$ ,  $N_{ep-eg}$ ,  $N_{eg-ep}$  y  $N_{eg-eg}$ ; A éstos se les llama número de contactos parcial. El número de contactos total de una  $ep$  es la suma de

sus contactos  $ep-ep$  y  $ep-eg$ , mientras que en una  $eg$  es la suma de los contactos  $eg-ep$  y  $eg-eg$ .

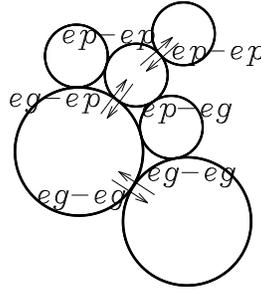


Figura 3.29. Tipos de contacto por tamaño de partícula en mezclas de dos componentes

Para calcular en forma teórica el número de contactos se puede plantear una relación (ecuación 3.8) entre el ángulo sólido ( $\omega$ ) que ocupa una partícula con diámetro  $D_2$  sobre otra partícula de diámetro  $D_1$  y el ángulo sólido total  $\Omega=4\pi$  de esta última (figura 3.30). Se debe considerar que las partículas colocadas sobre una esfera central siempre dejan vacía una fracción del ángulo sólido total.

$$N_c = \frac{4\pi(1-n_{as})}{2\pi(1-\cos\theta)} = \frac{2(1-n_{as})(D_1+D_2)}{D_1+D_2-\sqrt{D_1^2+2D_1D_2}} \quad (3.8)$$

Donde:  $n_{as}$  es la fracción vacía del ángulo sólido total o porosidad del ángulo sólido  $D_1$  y  $D_2$  pueden ser  $D_{\min}$  o  $D_{\max}$  en granulometría bimodal.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{D_1^2+2D_1D_2}}{D_1+D_2}, \text{ de acuerdo con la figura 3.30.}$$

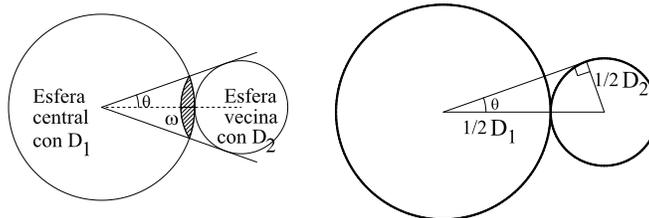


Figura 3.30. Ángulo sólido bajo el cual se ve una partícula desde el centro de otra

La porosidad del ángulo sólido  $n_{as}$  es difícil de calcular, ya que depende del número de las partículas alrededor de la partícula de interés. Sin embargo se puede conocer en ciertos casos particulares:

- Cuando las partículas involucradas son todas del mismo tamaño (contactos  $ep-ep$  o  $eg-eg$ ), se sabe que el número máximo de contactos es 12, por lo que despejando de la ecuación 3.8  $n_{as}=0.196$ .
- Para los contactos  $eg-ep$ , si  $D_1=D_{máx} \gg D_2=D_{mín}$ ,  $n_{as}$  es aproximadamente igual a la porosidad de un medio bidimensional de discos uniformes.

En la tabla 3.2 se presenta el número máximo de contactos a los que conducen las consideraciones anteriores para  $n_{as}=0.215$  y  $0.093$ , que corresponden a la porosidad de los arreglos cuadrado y triangular de discos respectivamente. Por su parte, el número máximo de contactos  $ep-eg$  se puede determinar fácilmente por inspección (Si  $a>6.5$  el máximo  $N_{ep-eg}=2$ ).

Tabla 3.2. Máximo número de contactos parcial en mezclas binarias

$a=D_{máx}/D_{mín}$	$N_{ep-eg}$	$N_{eg-ep} (n_{as}=0.215)$	$N_{eg-ep} (n_{as}=0.093)$	$N_{ep-ep}$ o $N_{eg-eg}$
1	12	12	12	12
2	6	27	31	12
3	5	49	57	12
10	2	379	438	12

Pinson *et al.*, (1998) realizaron un estudio experimental en mezclas binarias de esferas de vidrio. Analizaron mezclas binarias con relaciones de diámetros  $a=2$  y  $4$ , proporciones de partículas pequeñas  $p_{3V}=0.28, 0.5$  y  $0.72$ , y un total de 500 partículas por muestra. Sus resultados mostraron que el aumento de  $p_{3V}$  incrementa los contactos  $ep-ep$  y  $eg-ep$  pero disminuye los contactos  $ep-eg$  y  $eg-eg$ . La tendencia fue más marcada a mayor diferencia entre el tamaño de los granos.

En la figura 3.31 se muestra la distribución del número de contactos parcial en una de las muestras granulares simuladas en este trabajo. Los contactos  $ep-ep$  se comportan como en un medio uniforme porque las  $ep$  son las más numerosas en el medio granular. Con gran frecuencia el número de contactos  $ep-eg$  es cero, lo que significa que las  $ep$  están en contacto exclusivamente con otras del mismo tamaño.

Como era de esperarse, el número de contactos  $eg-ep$  es el mayor de todos, ya que una  $ep$  ocupa un ángulo sólido relativamente pequeño sobre una  $eg$ . Los contactos  $eg-eg$  son escasos porque las partículas grandes son las menos numerosas en el medio granular. Cuando las  $eg$  no tienen contactos  $eg-eg$  significa que están rodeadas exclusivamente por  $ep$ .

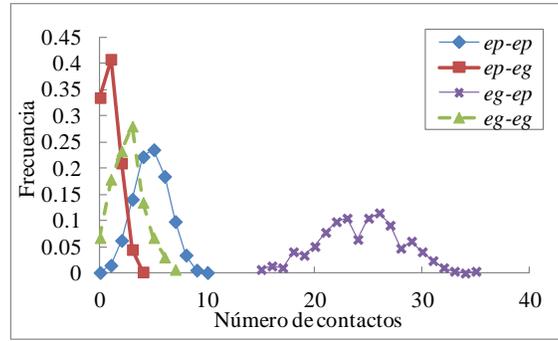


Figura 3.31. Número de contactos parcial en mezcla binaria con  $a=3$ ,  $p_{3V}=0.5$  y  $\mu=0$

Los resultados obtenidos en este trabajo coinciden con los datos experimentales de Pinson *et al.*, (1998).

La figura 3.32 presenta el efecto de la granulometría sobre el número de coordinación parcial de las muestras granulares analizadas. Cuando la proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ) aumenta, el número de coordinación parcial  $ep-ep$  ( $N_{c_{ep-ep}}$ ) crece asintóticamente hasta alcanzar el valor de un medio uniforme y no se afecta con el incremento de la relación de diámetros  $a$ .

El  $N_{c_{ep-eg}}$  disminuye cuando las  $eg$  escasean y con el aumento de  $a$ , porque una esfera grande ocupa un ángulo sólido cada vez mayor sobre la esfera pequeña.

De acuerdo con la ecuación 3.8 el  $N_{c_{eg-ep}}$  crece con el aumento de  $a$ , en las muestras granulares se observa esta tendencia pero los valores obtenidos son mucho menores que el los máximos de la tabla 3.2.

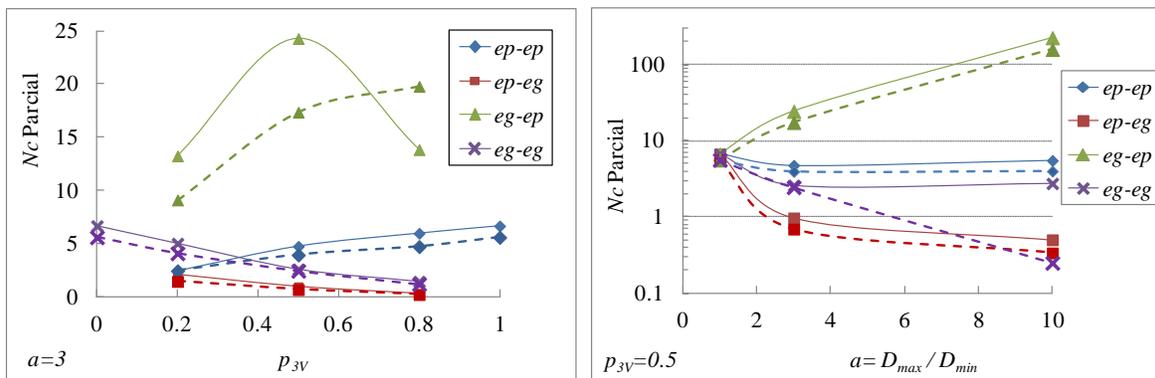


Figura 3.32. Número de coordinación parcial en mezclas binarias con:  $\mu=0$  línea continua;  $\mu=0.7$  línea discontinua

Si  $a$  permanece constante, el  $N_{c_{eg-ep}}$  aumenta con  $p_{3V}$ . Sin embargo, en la muestra con  $p_{3V}=0.8$  y  $\mu=0$  no se cumple lo anterior debido a la presencia de contactos  $eg-eg$ .

El  $N_{c_{eg-eg}}$  decrece si la proporción de  $eg$  disminuye porque estas partículas quedan aisladas entre las  $ep$ . En la figura 3.32 (derecha) se observa una estructura con disminución del  $N_{c_{eg-eg}}$  cuando aumenta  $a$ . Esto se debe a una falta de representatividad estadística por el escaso número de  $eg$  en la muestra granular. La tendencia de los números de contacto parciales observados coincide cualitativamente con la tendencia teórica de la tabla 3.2.

Estos resultados indican que el número de coordinación parcial depende de un factor geométrico y otro estadístico. Geométricamente las partículas grandes tienen mayor  $N_c$  de acuerdo con la ecuación 3.8. Estadísticamente, el aumento de la proporción de uno de los componentes de la mezcla favorece al incremento de cierto tipo de contactos.

El número de coordinación ( $N_c$ ) por tamaño de partículas ofrece información valiosa para describir la agrupación de partículas del mismo tamaño, la segregación por tamaño.

### c) Granulometría continua

El número de contactos de las partículas de muestras con granulometría continua se distribuye un intervalo menos amplio que el de granulometría bimodal, debido a la mayor diversidad de diámetros. El intervalo se cierra cuando el coeficiente de fricción es mayor (figura 3.33). Como lo observó Auvinet (1986) la distribución del número de contactos es aproximadamente poissoniana.

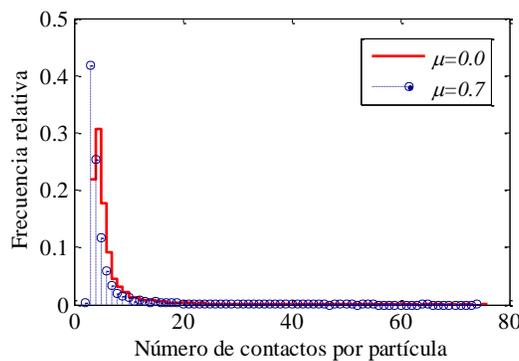


Figura 3.33. Número de contactos por partícula en granulometría continua con  $a=10$

El número de contactos de una partícula depende del ángulo sólido que ocupan las partículas en contacto con ella. Si se acepta que el promedio del diámetro de las partículas

de la muestra granular es una medida representativa de  $D_2$  (ecuación 3.8), dicha ecuación se puede ajustar por regresión a la relación entre el diámetro de la partícula  $D_1$  con su número de contactos, siendo  $n_{as}$  el parámetro de ajuste.

En la figura 3.34 se muestran los resultados del ajuste. Para la muestra sin fricción ( $\mu=0$ ) se tiene una  $n_{as}=0.61$  en promedio y una  $n_{as}=0.69$  cuando  $\mu=0.7$ . Este resultado indica que en el segundo caso hay más espacio vacío alrededor de cada partícula.

El número de coordinación de las muestras con granulometría continua es 6.27 y 5.29 para  $\mu=0$  y  $\mu=0.7$  respectivamente.

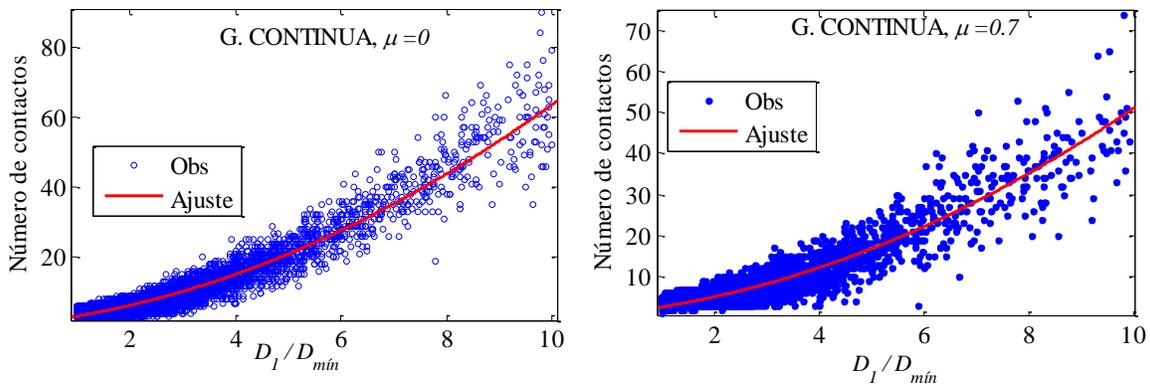


Figura 3.34. Relación entre el diámetro de partícula y el número de contactos. Muestras de granulometría continua

A partir de las granulometrías analizadas, se concluye que el intervalo del número de contactos por partícula se incrementa a mayor relación  $a=D_{máx}/D_{mín}$  particularmente en mezclas de dos componentes. En materiales con granulometría continua existe una mayor proporción de ángulo sólido vacío y por tanto un menor número de coordinación a causa de la diversidad de tamaño de partículas. El estudio del número de contactos por tamaño de partículas es un tema de investigación que merece ser revisado detalladamente.

### 3.4.5 Anisotropía geométrica

A la escala de las partículas es usual estudiar la anisotropía a través de la repartición de los contactos sobre la superficie de los granos. En un sistema de referencia con origen en el centro de un grano esférico, los puntos de contacto quedan definidos en coordenadas

esféricas por su latitud (ángulo vertical,  $\alpha$ ), su azimut (ángulo horizontal,  $\beta$ ) y el radio de la partícula (figura 2.4).

El programa CONTACTO.m encuentra las coordenadas esféricas de los puntos de contacto ubicados en el núcleo central de una estructura granular.

En los medios granulares depositados por gravedad la repartición de contactos es uniforme en el azimut  $\beta$  (figura 3.35), por lo que únicamente es de interés estudiar la repartición en la latitud  $\alpha$ .

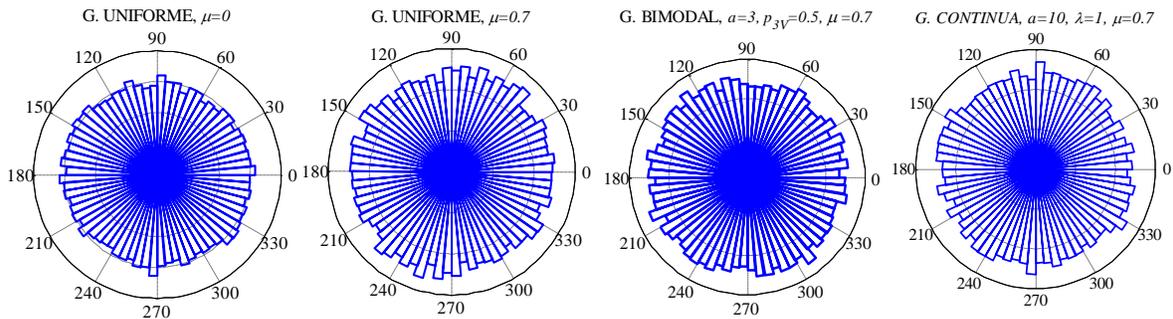


Figura 3.35. Histogramas polares de la repartición de contactos en el azimut  $\beta$

Se debe considerar que para un intervalo constante  $[\alpha_1, \alpha_2]$  de latitud, la superficie de la esfera acotada por éste es máxima en el ecuador y mínima en los polos, por lo que en latitudes cercanas a cero se tiende a registrar un mayor número de contacto como se muestra en la figura 3.36.

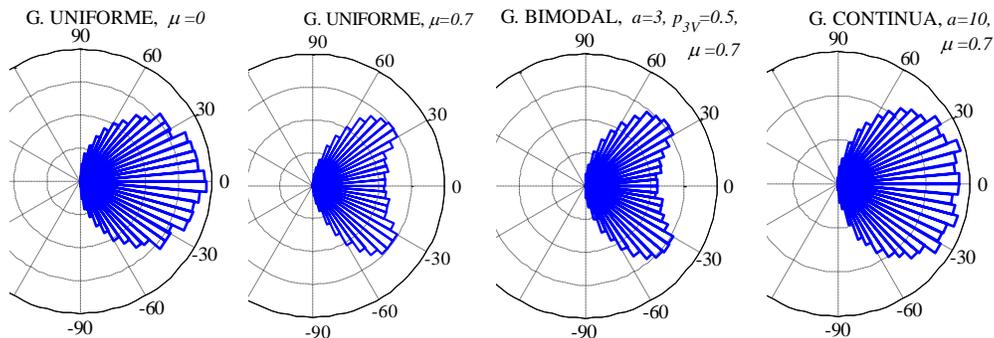


Figura 3.36. Histogramas polares de la repartición de contactos en la latitud  $\alpha$

Para investigar la repartición de contactos en la latitud se recurre a función de repartición  $\Gamma(\alpha)$  que indica el número de contactos por unidad de superficie en la latitud  $\alpha$ . Es importante señalar que la representatividad disminuye cuando  $\alpha \rightarrow 90^\circ$  debido a que la superficie asociada es cada vez más pequeña.

a) Granulometría uniforme

En los materiales con granulometría uniforme se estudia el efecto del coeficiente de fricción sobre la anisotropía geométrica. La figura 3.37 muestra que un medio granular sin fricción es isótropo (la repartición de contactos es uniforme en  $\alpha$ ), mientras que en presencia de fricción existe una concentración de contactos de  $30$  a  $60^\circ$  y menor número de contactos en los polos y el ecuador de las partículas. El método de simulación geométrico introduce una anisotropía similar a la de materiales con altos coeficientes de fricción.

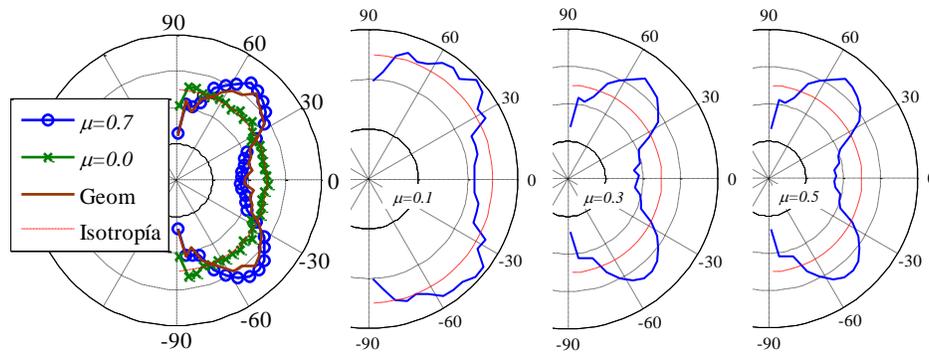


Figura 3.37. Función de repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  en muestras con granulometría uniforme

El déficit de contactos en los polos de las partículas se debe a que en esta posición se tiene un equilibrio inestable, cualquier fuerza en dirección distinta a la vertical obliga a los contactos a desplazarse hacia posiciones más bajas de  $\alpha$ .

Además de la gráfica de  $\Gamma(\alpha)$ , la anisotropía geométrica puede describirse utilizando el tensor de la estructura  $H_{ij}$  expresado por la ecuación 3.9 (obtenida de la ecuación 2.37). Noughier-Lehon *et al.*, (2003) utilizan el escalar de anisotropía ( $b_H$ ) de la ecuación 3.13 para indicar la orientación preferencial de los vectores normales a los contactos.

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} H_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & H_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & H_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

De donde:

$$p = \frac{1}{3}(H_{xx} + H_{yy} + H_{zz}) \quad (3.10)$$

$$q = H_{zz} - H_{xx} \quad (3.11)$$

$$b_H = \frac{q}{p} = \frac{3(H_{zz} - H_{xx})}{H_{xx} + H_{yy} + H_{zz}} \quad (3.12)$$

Donde:  $x, y, z$ . son las direcciones cartesianas.

En la figura 3.38 se observa que el modelo de simulación geométrica induce una anisotropía que se pierde o aumenta con la acción del peso de las partículas. El material sin fricción es isotrópico ( $b_H=0$ ). La anisotropía es cada vez mayor cuando el coeficiente de fricción interparticular aumenta de 0 a 0.3. La anisotropía inducida por el algoritmo de simulación geométrico es similar a la de un medio granular con coeficiente de fricción  $\mu=0.15$ . Cuando  $\mu>0.15$  se obtienen estructuras con mayor anisotropía debido a que se pierden algunos contactos cerca del ecuador de las partículas. Wang (2006) reporta resultados similares en simulaciones 2D.

Para los arreglos regulares (inciso 2.1.10), el escalar de anisotropía es  $b_H=0$ , excepto para el arreglo cúbico tetraédrico ( $b_H=-0.375$ ) y para el arreglo tetragonal esfenoidal ( $b_H=-0.225$ ). Los valores negativos señalan un mayor número de contactos en el plano horizontal.

Los valores positivos de  $b_H$  se obtienen cuando predominan los contactos cerca de los polos de las partículas. Suponiendo un número de coordinación  $N_c=6$  y que se tienen 3 partículas en cada polo, el escalar de anisotropía es máximo  $b_H = 1.5$ . Este resultado representa sólo una referencia y su probabilidad de ocurrencia en un medio granular es nula.

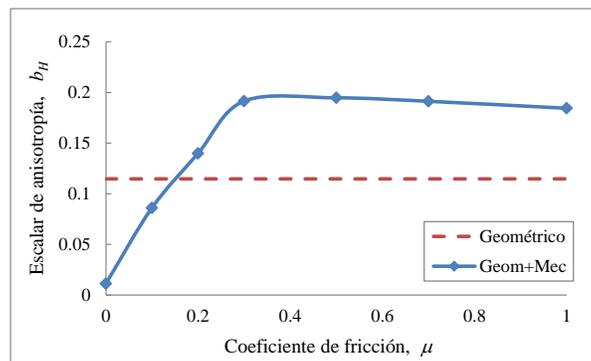


Figura 3.38. Anisotropía geométrica en estructuras de granulometría uniforme

b) Granulometría bimodal

En las mezclas binarias simuladas en este trabajo se observa que cuando se tiene un coeficiente de fricción nulo y una mayor relación de diámetros, la repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  es aproximadamente uniforme (figura 3.39).

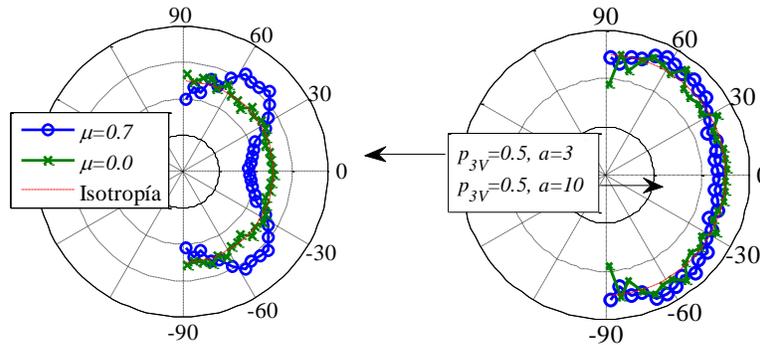


Figura 3.39. Repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  en muestras con granulometría bimodal

Como se observa en la figura 3.40, la anisotropía en granulometría bimodal es mayor cuando el coeficiente de fricción es mayor. Se requiere ampliar el experimento para dar conclusiones respecto al efecto de la composición de la mezcla sobre la anisotropía.

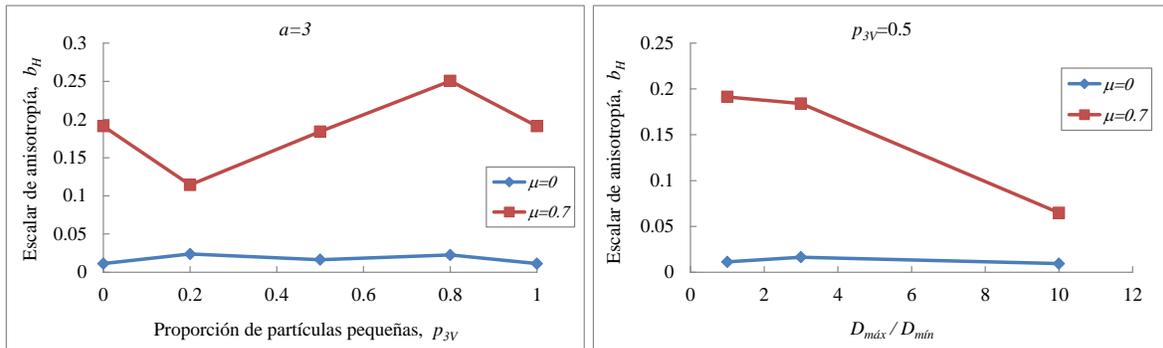


Figura 3.40. Anisotropía geométrica en muestras de granulometría bimodal

Para salir de la dificultad anterior se revisa la repartición de contactos por tamaño de partículas. La repartición de contactos entre esferas pequeñas (*ep-ep*) es similar a la de toda la estructura (figuras 3.41 y 3.43) debido a que estas partículas son las que predominan en el medio. La partición de estos contactos es independiente de  $p_{3V}$ . En cambio, a mayor diferencia entre diámetros de partículas se obtiene una repartición cada vez más uniforme.

La concentración de contactos  $ep$ - $eg$  en el hemisferio inferior (figuras 3.42 y 3.43) señala que las partículas pequeñas se acumulan sobre las grandes (la repartición de contactos  $eg$ - $ep$  es simétrica respecto al ecuador) cuando las fuerzas de fricción lo permiten. La variable  $p_{3V}$  no tiene un efecto visible. También se observa que cuando la relación de diámetros ( $a=D_{máx}/D_{mín}$ ) crece, las  $ep$  pueden apoyarse más uniformemente sobre las  $eg$ .

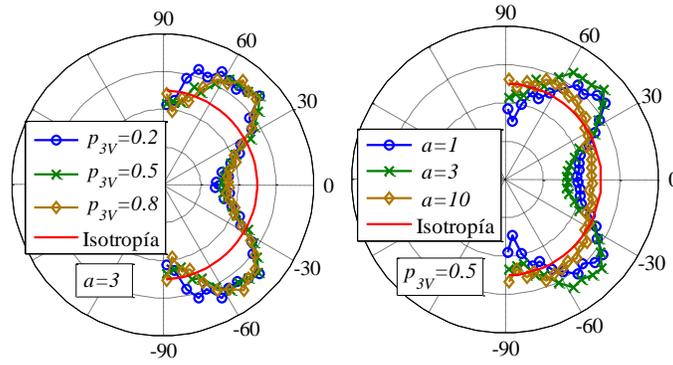


Figura 3.41. Repartición de contactos  $ep$ - $ep$ . Granulometría bimodal con  $\mu=0.7$

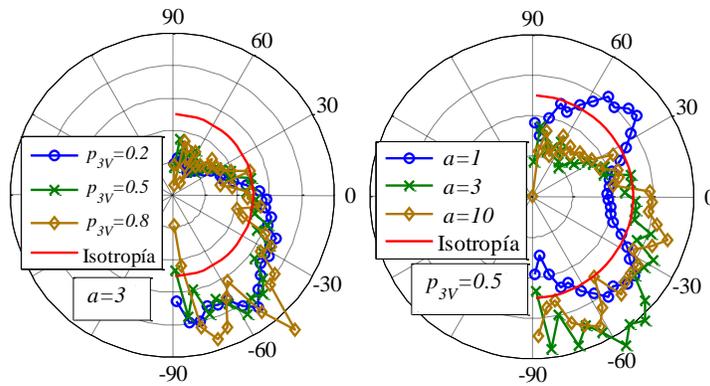


Figura 3.42. Repartición de contactos  $ep$ - $eg$ . Granulometría bimodal con  $\mu=0.7$

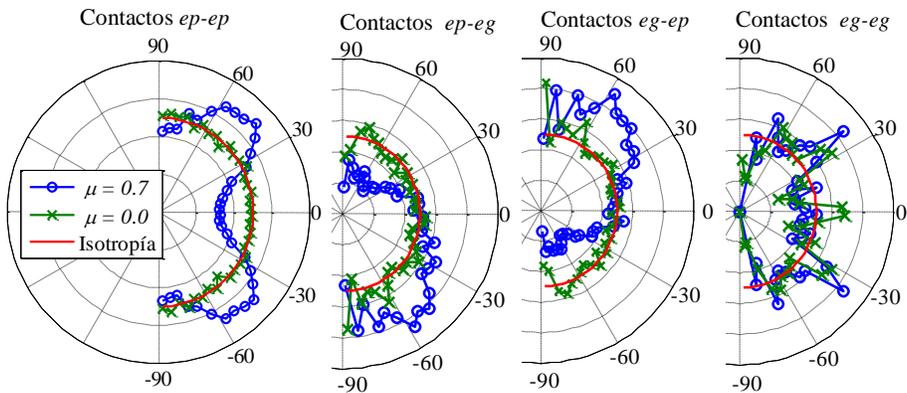


Figura 3.43. Repartición por tipo de contactos. Granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.5$

La repartición típica de contactos *eg-eg* es difícil de obtener (figura 3.43) por el reducido número de *eg*, principalmente cuando  $p_{3V} > 0.8$ . La misma figura muestra que la repartición de todos los tipos de contacto tiende a ser uniforme cuando desaparece la fricción.

c) Granulometría continua

La repartición de contactos en estos materiales tiende a ser más uniforme que en otras granulometrías. Auvinet (1986) notó que la anisotropía se reduce notablemente en los materiales mejor graduados. Las simulaciones con elemento discreto realizadas en esta tesis muestran que la anisotropía geométrica es despreciable incluso en medios friccionantes (figura 3.44). El escalar de anisotropía ( $b_H$ ) medido en las muestras granulares simuladas es 0.0558 y 0.0868 para un coeficiente de fricción de 0 y 0.7 respectivamente.

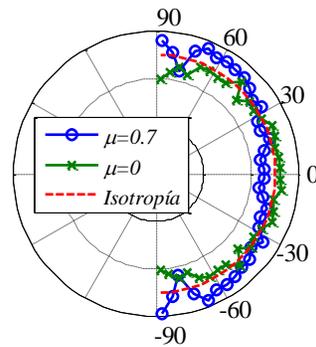


Figura 3.44. Repartición de contactos en muestras de granulometría continua con  $a=10$

Considerando las partículas por fracción granulométrica, se observa que las partículas pequeñas se encuentran apoyadas sobre las grandes. Los contactos entre partículas pequeñas (por ejemplo las de  $D_0$  a  $D_{10}$  como se ilustra en la figura 3.45) presentan la anisotropía típica de los materiales uniformes. Aparentemente, la repartición de contactos entre partículas de las demás fracciones granulométricas ( $D_{10}$  a  $D_{20}$ ,  $D_{20}$  a  $D_{30}$ , etc.) tiende poco a poco a ser uniforme, pero rápidamente se pierde la representatividad estadística.

La anisotropía geométrica asociada a la repartición de contactos sobre la superficie de los granos es más marcada cuando la granulometría es uniforme. En esta granulometría las partículas tienen oportunidad de formar arreglos mejor organizados.

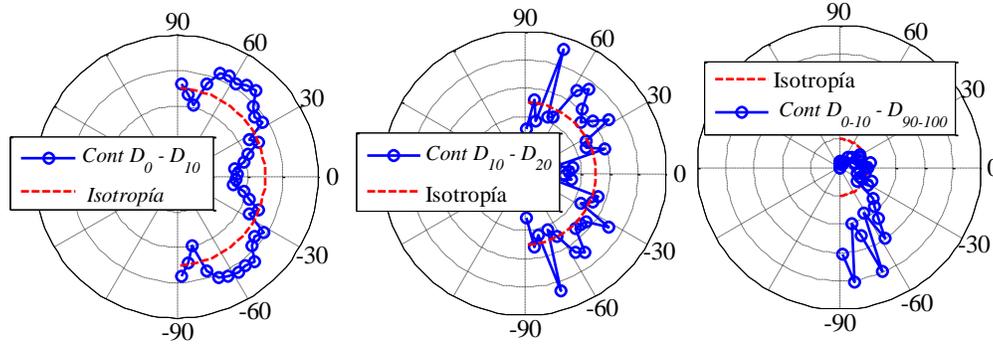


Figura 3.45. Repartición de contactos por tamaño de partículas. Granulometría continua con  $a=10$  y  $\mu=0.7$

### 3.4.6 Granulometría generalizada *in situ*

Permite representar la porosidad y distribución granulométrica en una función única dada por la ecuación 3.13 La figura 3.46 presenta algunos ejemplos de la granulometría *in situ*  $G_3(d)$  en distintos materiales granulares.

$$G_3(d) = (1-n)F_{3V}(d) + n \quad (3.13)$$

Donde  $n$ : la porosidad del medio  
 $F_{3V}(d)$ : Distribución de tamaño de partículas en volumen

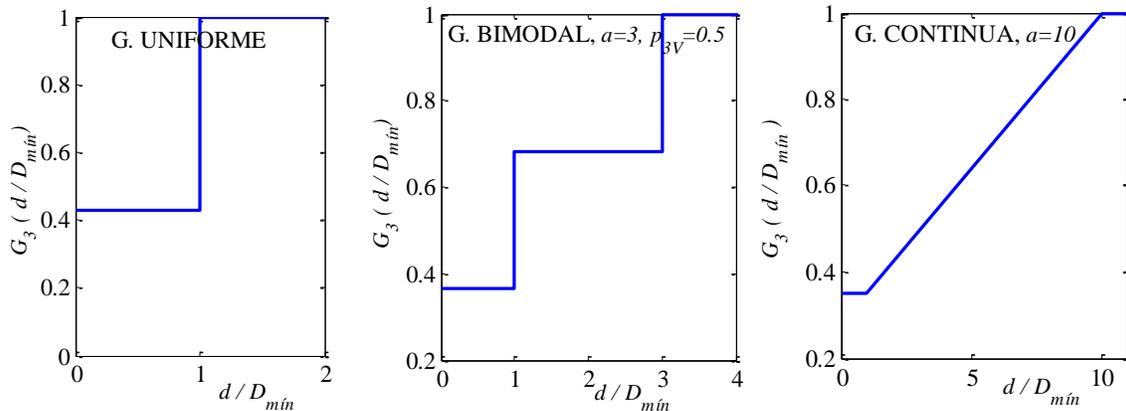


Figura 3.46. Granulometría *in situ* de los materiales con distintas granulometrias

### 3.4.7 Fuerzas de contacto

Dantu (1968) descubrió una fuerte heterogeneidad en la distribución de las fuerzas de contacto en materiales granulares. Posteriormente, se consiguió imprimir estas fuerzas sobre papel carbón y se observó que la magnitud de las fuerzas tiene una distribución aproximadamente exponencial. Diversos autores consideran que estas características se deben al desorden inherente dentro de un medio granular.

A continuación se estudian diversos rasgos de las fuerzas de contacto en los materiales granulares simulados por depósito en el campo de gravedad.

#### a) Magnitud de las fuerzas

##### *Granulometría uniforme*

En un medio continuo sujeto únicamente a la acción del campo de gravedad, el esfuerzo se incrementa linealmente con la profundidad. En un arreglo regular de esferas (cúbico, tetraédrico, etc.) sucede algo similar con las fuerzas de contacto. Sin embargo, la magnitud de las fuerzas en medios granulares aleatorios dista mucho de seguir ese comportamiento “geostático”. La figura 3.47 muestra que existen fuerzas de muy diversas magnitudes a una misma profundidad dentro del medio.

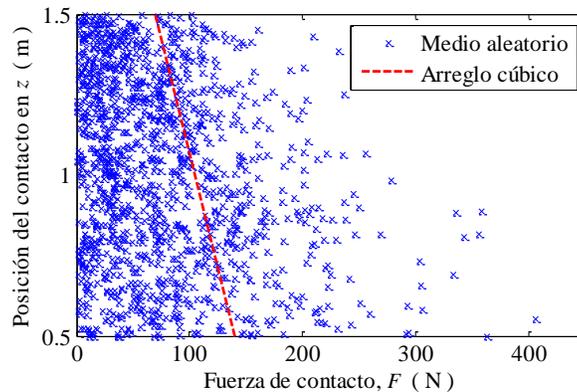


Figura 3.47. Magnitud de las fuerzas de contacto causadas por peso propio en muestra granular de granulometría uniforme

La presencia de fuerzas mucho mayores y mucho menores a la media se debe al efecto de arqueado en el medio granular. Existe una concentración de fuerzas a lo largo de ciertas trayectorias aleatorias y en consecuencia a la disminución de fuerzas en otros contactos.

A la colección de todas las fuerzas de contacto se le llama red de fuerzas, su densidad de probabilidad (figura 3.48) presenta un pico en un valor inferior a la media y tiene una cola a la derecha que decrece en forma aproximadamente exponencial. Es fácil comprender que la presencia de una fuerza de gran magnitud requiere de numerosas fuerzas pequeñas para garantizar el equilibrio.

Aunque se experimentan cambios ligeros, con la variación del coeficiente de fricción interparticular, la densidad de probabilidad mantiene su forma típica, ya sea la fuerza de contacto, la componente normal (muy similar a la fuerza de contacto total) o la componente cortante. Esta descripción de fuerzas no da información espacial de las fuerzas de contacto.

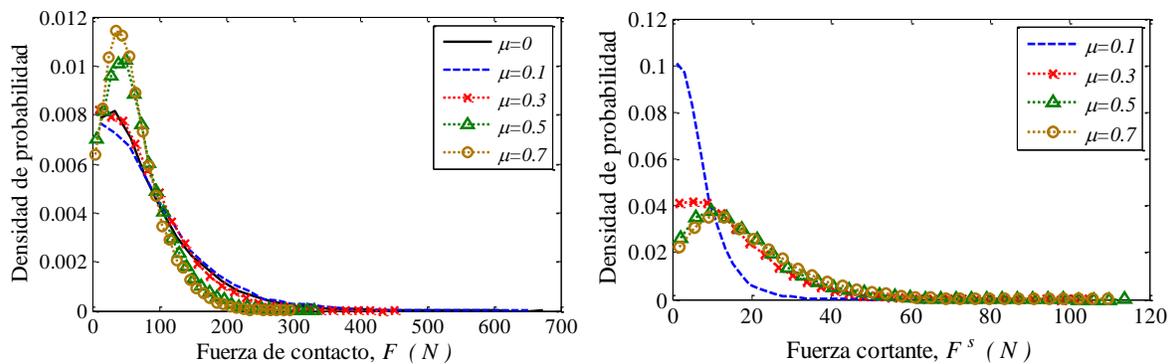


Figura 3.48. Densidad de probabilidad de fuerzas de contacto. Material con granulometría uniforme

La forma de la densidad de probabilidad de las fuerzas de contacto se ha observado tanto en pruebas físicas como en simulaciones numéricas bajo distintas condiciones de carga. van Eerd (2008) destaca que las fuerzas débiles son sensibles a los detalles del método de preparación, de la forma, tamaño de las partículas y como se observa en la figura 3.48 al coeficiente de fricción.

Para describir la forma de la densidad de probabilidad de las fuerzas de contacto, en la tabla 3.3 se presenta la media ( $\mu_F$ ), desviación estándar ( $s_F$ ), coeficiente de asimetría ( $\gamma_F=(F-\mu_F)^3/s_F^3$ ) y coeficiente de curtosis o de pico ( $\beta'_F=(F-\mu_F)^4/s_F^4$ ).

Como su nombre lo indica,  $\gamma_F$  muestra el grado de asimetría de la densidad de probabilidad. Si  $\gamma_F=0$  la función es simétrica, si  $\gamma_F>0$  la cola a la derecha es más larga que a la izquierda y si  $\gamma_F<0$  hay valores más separados de la media hacia la izquierda. En las muestras depositadas por gravedad se tiene una asimetría a la derecha siendo el caso más acentuado cuando  $\mu=0.2$ .

Tabla 3.3. Primeros momentos de la densidad de probabilidad de las fuerzas de contacto en muestras con granulometría uniforme

Coef. de fricción	Fuerza media, $\mu_F$ (N)	Desv. estándar $s_F$	Asimetría $\gamma_F$	Curtosis $\beta'_F$
0.0	83.0	70.8	1.6	6.6
0.05	88.1	74.8	1.6	6.3
0.1	88.9	75.9	1.6	6.5
0.2	92.9	83.9	1.7	7.1
0.3	76.9	60.1	1.2	4.9
0.5	64.3	45.2	1.1	4.7
0.7	59.7	40.4	1.1	4.7
1.0	56.4	37.0	1.1	4.5

Una mayor curtosis implica una mayor concentración de datos muy cerca de la media coexistiendo al mismo tiempo con una relativamente elevada frecuencia de datos muy alejados de la media. Tomando en cuenta que la curtosis de la distribución normal es 3, la densidad de probabilidad de las fuerzas de contacto tiene un pico mucho más marcado.

Por otra parte, en algunos trabajos se ha supuesto que las componentes cartesianas de las fuerzas de contacto tienen una densidad de probabilidad aproximadamente normal (Auvinet & Marsal, 1975). Las estructuras depositadas por gravedad simuladas en esta investigación confirman las consideraciones anteriores. En la figura 3.49 se muestra que las distribuciones de las componentes cartesianas de las fuerzas de contacto son simétricas y con un pico muy marcado en las fuerzas cercanas a cero así como unas colas muy extendidas, particularmente cuando no hay fricción (coeficiente de curtosis  $\beta'_F=7$ ).

Las distribuciones de las componentes cartesianas de las fuerzas de contacto han permitido formular modelos para el análisis de rotura de granos (Auvinet & Marsal, 1975). La rotura de partículas es de gran interés en geotecnia, porque afecta significativamente en el comportamiento mecánico de masas granulares como las presas de enrocamiento.

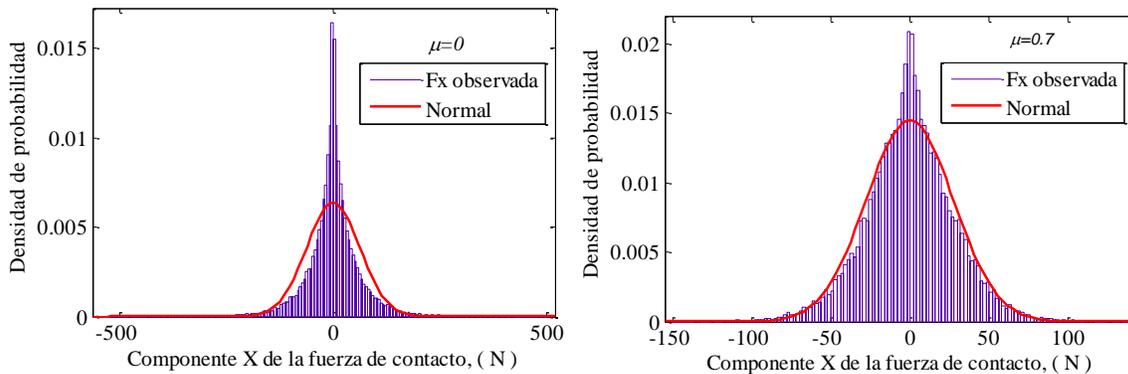


Figura 3.49. Densidades de probabilidad de las componentes cartesianas de las fuerzas de contacto en muestras con granulometría uniforme

*Granulometría bimodal*

Marsal (1966 y 1973) consideraba que la magnitud de las fuerzas de contacto depende del tamaño de las partículas, del número de contactos por partícula entre otros factores. La densidad de probabilidad de las fuerza de contacto por tamaño de partículas (figura 3.50) permiten observar que con gran frecuencia se tienen fuerzas cercanas a cero entre partículas pequeñas (*ep-ep*), mientras las fuerzas grandes aparecen con mayor frecuencia entre partículas grandes (*eg-eg*). Cuando el contacto involucra partículas de distintos tamaños no se puede asociar un tamaño de partícula.

En mezclas de dos componentes, la distribución de probabilidad de las componentes cartesianas de las fuerzas de contacto también tiene distribución normal pero con un pico mucho más acentuado que el de los medios uniformes. Los coeficientes de curtosis son mayores de diez y varían bruscamente con la granulometría.

Para observar el efecto del coeficiente de fricción, proporción de partículas pequeñas y relación de tamaños sobre la magnitud de las fuerzas de contacto es necesario realizar un estudio más detallado.

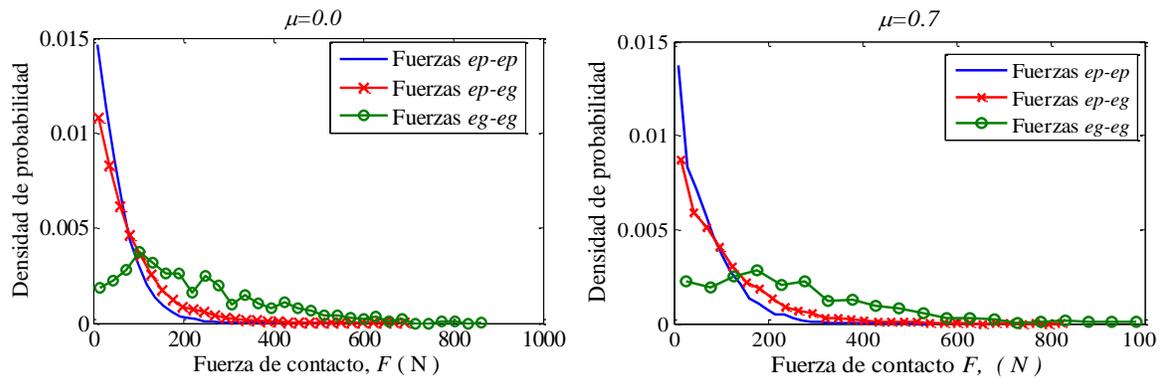


Figura 3.50. Fuerzas de contacto por tamaño de partícula en mezclas binarias con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.5$

*Granulometría continua*

La magnitud de las fuerzas en muestras de granulometría continua se comporta de manera similar a lo expuesto anteriormente. En las muestras con esta granulometría se alcanzan los valores más altos de las fuerzas de contacto (figura 3.51).

Para las muestras con  $\mu=0$  y  $0.7$ , el coeficiente de asimetría es 4.6 y 3.2, el coeficiente de curtosis es 35.6 y 20.0 respectivamente. Las muestras con granulometría continua presentan

fuerzas de contacto que se distribuyen en un intervalo más amplio, con mayor asimetría y con un pico más marcado en su distribución.

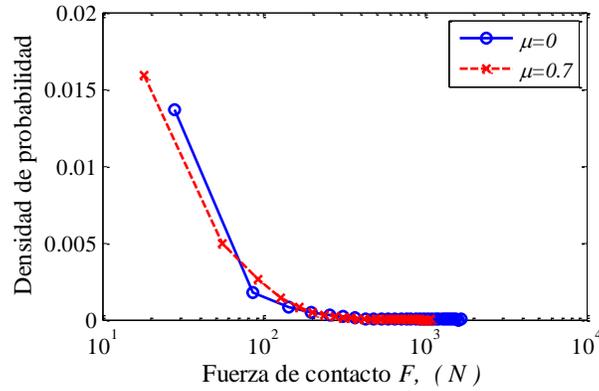


Figura 3.51. Fuerzas de contacto en muestras de granulometría continua

El análisis por fracción granulométrica muestra que los contactos entre partículas pequeñas transmiten fuerzas pequeñas. Los contactos entre partículas pequeñas y grandes transmiten fuerzas de cualquier magnitud. El análisis de las fuerzas entre partículas grandes se complica debido su escasez en número (falta de representatividad estadística). En la figura 3.52 se presenta la densidad de probabilidad de las fuerzas entre partículas menores de  $D_{10}$ , entre las anteriores y las partículas mayores de  $D_{90}$ , y entre los granos mayores de  $D_{90}$ .

La relación directa entre el tamaño de las partículas y las fuerzas de contacto puede considerarse cualitativa.

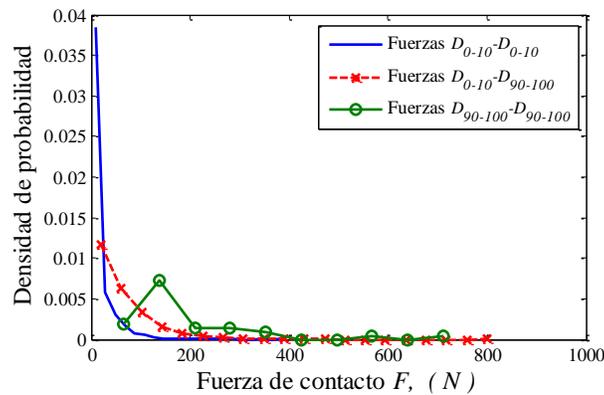


Figura 3.52. Fuerzas de contacto por fracción granulométrica, G. Continua

b) Cadenas de fuerzas y actividad de partículas

Dentro de un medio granular existen partículas sobrecargadas así como otras que no participan en el esqueleto granular llamadas partículas inactivas. A la secuencia de partículas que transmiten las fuerzas mayores se les denomina cadenas de fuerzas o cadenas de Dantu. Tighe *et al.*, (2010) consideran que las cadenas de fuerzas juegan un papel muy importante en el efecto de memoria que exhiben los medios granulares.

El programa de cómputo CADENA.m busca los granos que conforman cadenas de fuerzas en el núcleo central de los materiales granulares de acuerdo al siguiente procedimiento:

- Se elige una esfera ( $E_1$ ) al azar sobre el borde del núcleo central.
- Se identifican las partículas que están en contacto con  $E_1$  y se elige como segunda esfera ( $E_2$ ) aquella que forma el contacto donde registra la fuerza máxima.
- Se asigna  $E_1=E_2$ , se repite el paso anterior sin que haya repetición de partículas hasta obtener un número suficiente de partículas en la cadena o hasta alcanzar nuevamente un borde del núcleo central.
- Otra alternativa consiste en iniciar el procedimiento con la partícula que registra la fuerza máxima en lugar de una partícula al azar.

Por otro lado, es de interés identificar las partículas que no transmiten cargas en el esqueleto granular. En forma cualitativa se considera como partícula inactiva aquella que presenta fuerzas inferiores a su propio peso.

A continuación se presentan los resultados de la inspección de las cadenas de fuerzas y partículas inactivas dentro de las muestras granulares.

### *Granulometría uniforme*

Muchas de las cadenas de fuerzas encontradas tienen una tendencia aproximadamente vertical debido a que las partículas fueron depositadas por gravedad. Algunos tramos de las cadenas toman otras direcciones lo cual es una evidencia del arqueado. Eventualmente las cadenas forman nudos, revelando que las fuerzas se transmiten con mayor uniformidad. Lo anterior se ilustra en la figura 3.53.

La magnitud de las fuerzas en las cadenas se distribuye aproximadamente normal (figura 3.54). Es de esperarse la presencia de fuerzas grandes en las cadenas, pero pueden disminuir drásticamente si se distribuyen entre varios contactos.

La figura 3.55 compara las fuerzas de contacto con el peso propio de una partícula. Los granos que tienen fuerzas inferiores a su peso (línea horizontal) se pueden considerar inactivos. Se observa que las partículas inactivas suelen tener pocos contactos. La cantidad

de partículas inactivas es despreciable, representan el 0.53% del volumen de los sólidos en la muestra con  $\mu=0$  y el 0.25% en la muestra con  $\mu=0.7$ .

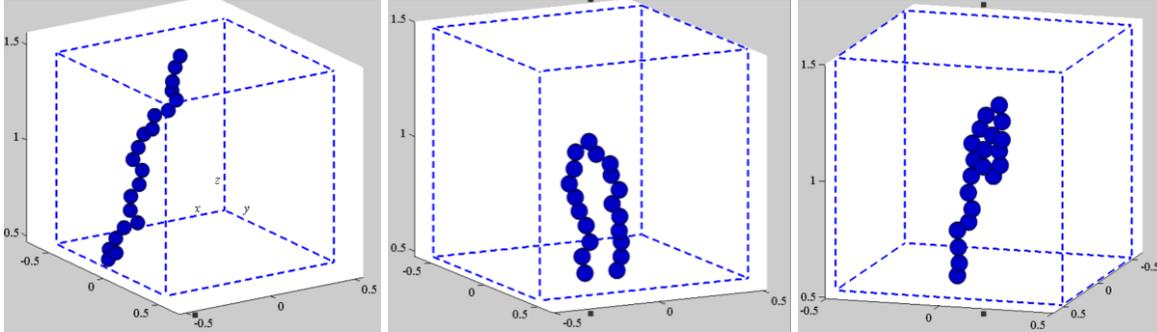


Figura 3.53. Cadenas de fuerzas en muestras de granulometría uniforme

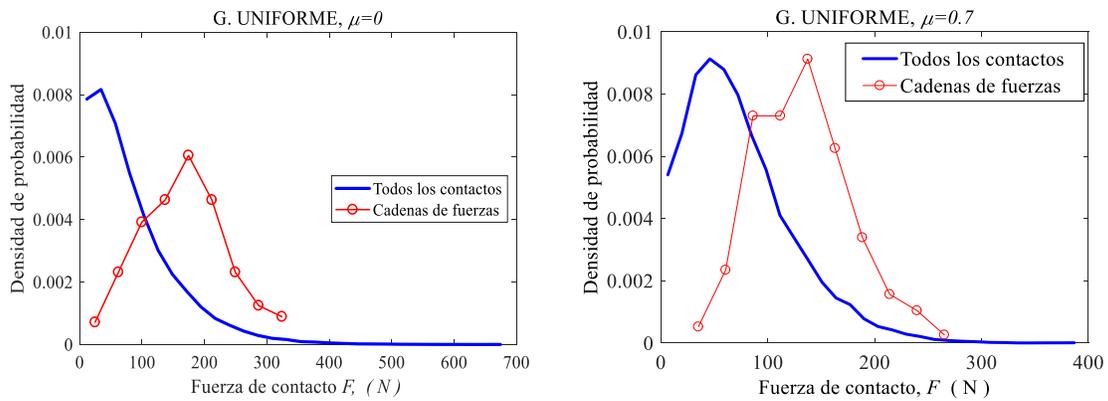


Figura 3.54. Densidad de probabilidad de las cadenas de fuerzas en muestras de granulometría uniforme

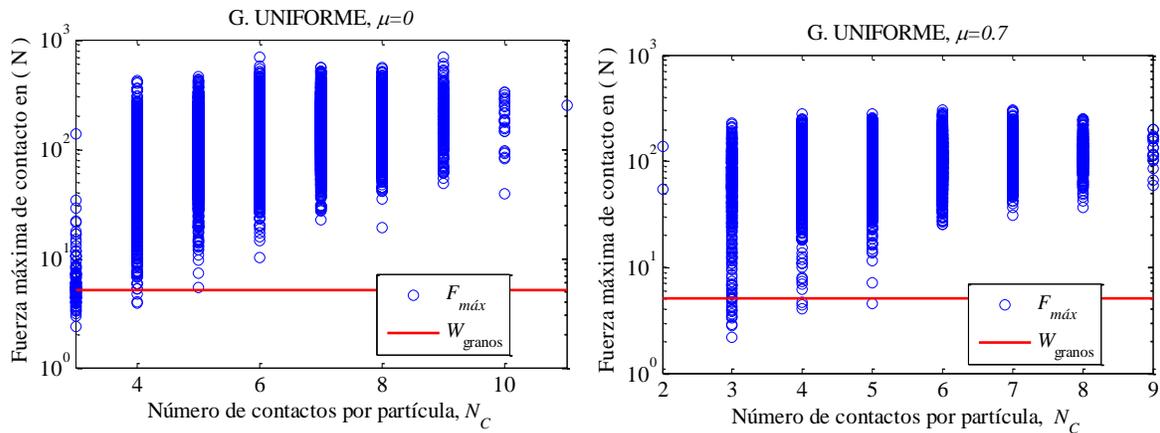


Figura 3.55. Inactividad de partículas en muestras con granulometría uniforme

*Granulometría bimodal*

Las observaciones realizadas en las mezclas binarias muestran que tanto las partículas grandes como las pequeñas participan en las cadenas de fuerzas como se muestra en la figura 3.56. Las partículas grandes representan la mayor proporción en peso o longitud de la cadena.

Las partículas inactivas son exclusivamente esferas pequeñas (puntos por debajo de la línea que representa el peso ( $W_{ep}$  y  $W_{eg}$ ) de los granos en la figura 3.57), que quedan aisladas en los grandes poros que existen entre las partículas grandes. La proporción de partículas inactivas referida al volumen de los sólidos es menor del 0.4%. Las esferas grandes son siempre activas porque las partículas pequeñas tienden a acumularse sobre ellas.

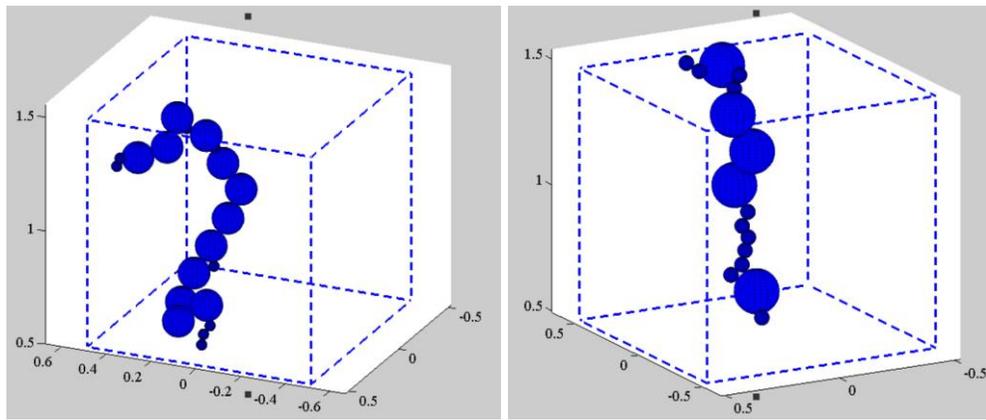


Figura 3.56. Ejemplos de cadenas de fuerzas en medios de granulometría bimodal

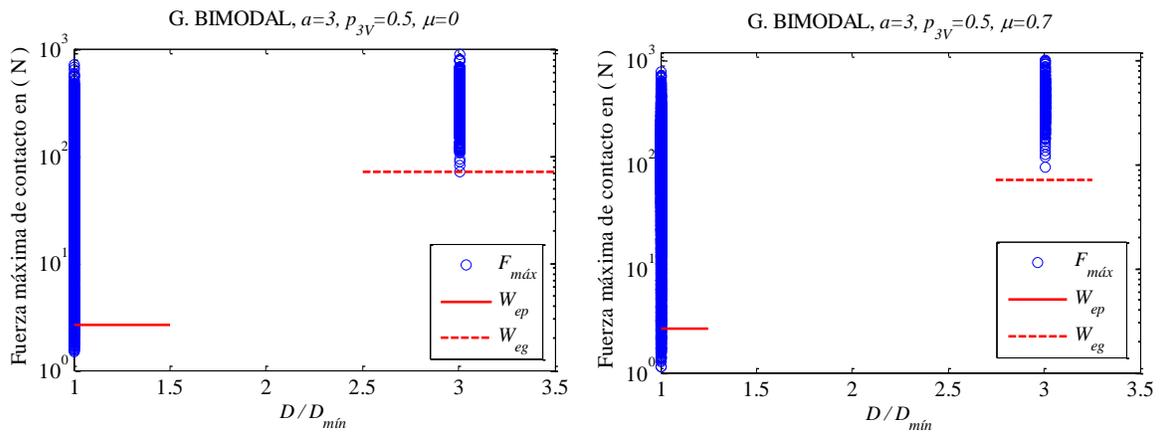


Figura 3.57. Inactividad de partículas en mezclas binarias

*Granulometría continua*

Las cadenas de fuerzas en granulometría continua tienden a entrelazarse entre sí formándose numerosos arcos (figura 3.58). Las partículas grandes aparecen con mayor frecuencia dado que tienen mayor volumen y por lo tanto mayor posibilidad de formar parte de una cadena de fuerzas.

En la figura 3.59 se observa que las partículas pequeñas transmiten fuerzas de todas magnitudes. Las partículas inactivas (puntos por debajo de la curva del peso de los granos) son principalmente de diámetro menor a  $2.5D_{\text{mín}}$ , eventualmente se encontraron partículas inactivas de mayor tamaño cuando  $\mu=0.7$ . La presencia de partículas inactivas de diámetro mayor se explica porque las fuerzas de fricción favorecen a la formación de puentes en el medio granular. En las muestras con granulometría continua se encontró hasta un 4% de partículas inactivas en proporción de volumen de sólidos.

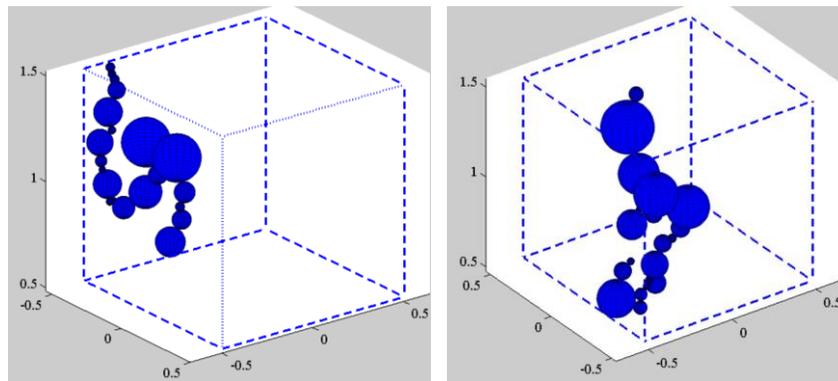


Figura 3.58. Cadenas de fuerzas en muestras con granulometría continua

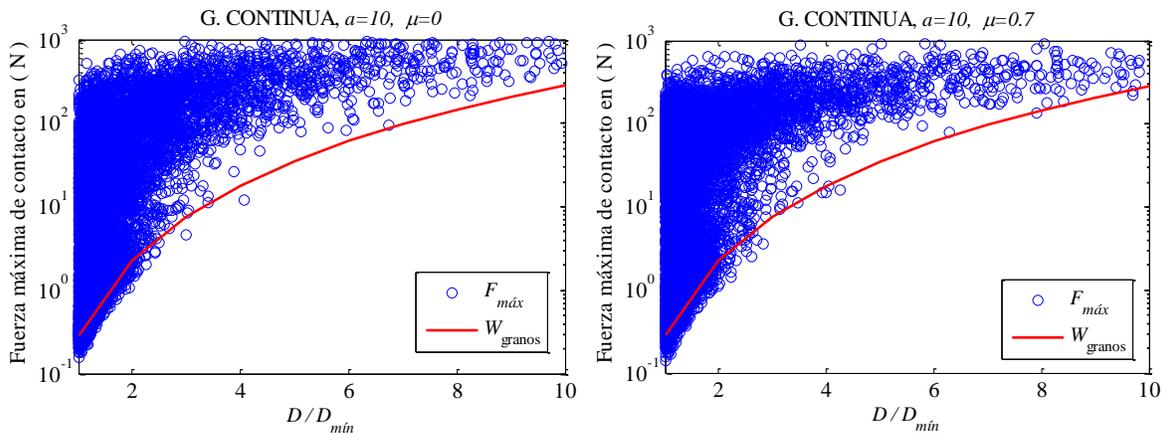


Figura 3.59. Inactividad de partículas en muestras con granulometría continua

El criterio adoptado para definir la inactividad de partículas puede sobrestimar la cantidad de partículas inactivas. Un grano con numerosos contactos bien distribuidos sobre su superficie puede estar sometido a fuerzas de contacto muy pequeñas pero ser necesario para la estabilidad del esqueleto granular.

En las muestras analizadas se observó que la proporción en número y en volumen de partículas inactivas es baja. Estas partículas son inactivas para un estado de esfuerzos en particular, pero al cambiar las solicitaciones, algunas de ellas pueden activarse y a la inversa. En general, todas las partículas son útiles en el esqueleto granular.

La presencia de partículas pequeñas inactivas tiene implicaciones en casos prácticos de la geotecnia como el arrastre de partículas con problemas de erosión. Futuras investigaciones deberán evaluar la relevancia del concepto de relación de vacíos estructural sugerido por Marsal (1971).

c) Orientación de fuerzas

En el inciso 3.4.5 se estudió la anisotropía geométrica asociada a la repartición de contactos sobre la superficie de los granos. La orientación de las fuerzas de contacto permite estudiar la anisotropía desde el punto de vista mecánico.

Las fuerzas de contacto tienen orientaciones asociadas a la posición de sus puntos de contacto (Rothenburg & Bathurst, 1989). Cuando la superficie de los granos es perfectamente lisa, las fuerzas de contacto tienen la misma orientación que las normales a los planos tangentes en los puntos de contacto. Si existe fricción en los contactos, el vector de la fuerza de contacto forma un ángulo  $\delta$  con el vector normal al plano tangente en el punto de contacto como se ilustra en la figura 3.60.

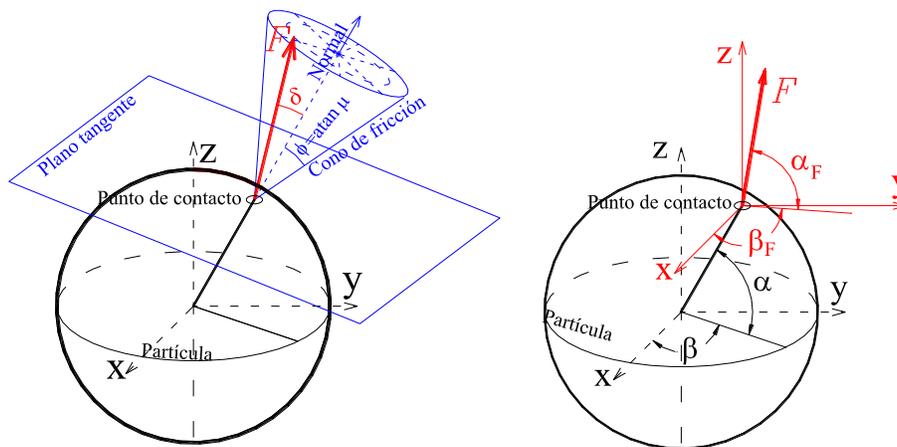


Figura 3.60. Orientación esquemática de las fuerzas de contacto

El ángulo  $\delta$  está contenido en el intervalo  $[0, \phi = \text{atan}(\mu)]$ , el límite superior corresponde a la resistencia máxima por fricción y por lo tanto se considera que el contacto es inestable. Auvinet (1998) recurrió al estudio del ángulo  $\delta$  para estudiar la probabilidad de deslizamiento de los contactos.

Otra alternativa para definir la orientación de la fuerza de contacto es por medio del ángulo ( $\alpha_F$ ) que forma con el plano horizontal y el azimut ( $\beta_F$ ) dentro de dicho plano (figura 3.60).

De igual forma que la repartición de contactos, para materiales depositados por gravedad, la orientación de las fuerzas es uniforme en el azimut ( $\beta_F$ ). Por lo tanto, se prestará atención únicamente al ángulo ( $\alpha_F$ ). Por conveniencia para estos análisis se acepta que la fuerza sale de la partícula.

### Granulometría uniforme

La figura 3.61 presenta los histogramas polares del ángulo  $\alpha_F$  que forman las fuerzas de contacto con el plano horizontal. Se observa que a mayor coeficiente de fricción, las fuerzas se orientan en dirección de la gravedad. Cuando  $\mu=0$ , la mayor proporción de fuerzas tienen una dirección horizontal, el histograma polar es idéntico al de la repartición de contactos.

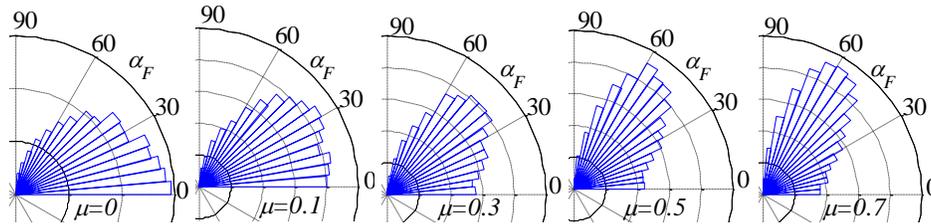


Figura 3.61. Histogramas polares del ángulo  $\alpha_F$  en muestras con granulometría uniforme

La representación polar de la orientación de  $\alpha_F$  resulta complicada, ya que la orientación de la fuerza está afectada por la posición del contacto. Por lo tanto es conveniente considerar la posición del contacto.

Los ángulos  $\alpha$  del contacto y  $\alpha_F$  de la fuerza son dos variables aleatorias continuas asociadas a un mismo experimento, por lo que es posible definir una densidad de probabilidad conjunta tal que:

$$f_{\alpha, \alpha_F}(a, b) da db = P[a_1 < \alpha < a_1 + da, b_1 < \alpha_F < b_1 + db] \quad (3.14)$$

Las densidades de probabilidad marginales de cada variable son:

$$f_{\alpha}(a) = P[a_1 < \alpha < a_1 + da] \quad (3.15)$$

$$f_{\alpha_F}(b) = P[b_1 < \alpha_F < b_1 + db] \quad (3.16)$$

La densidad de probabilidad condicional está dada por la ecuación 3.17 y expresa la probabilidad de ocurrencia de  $\alpha_F$  dado que ha ocurrido  $\alpha$ .

$$f_{\alpha_F}(b|\alpha) = \frac{f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)}{f_{\alpha}(a)} \quad (3.17)$$

En la figura 3.62 se muestran ejemplos de la densidad de probabilidad conjunta de  $\alpha$  del contacto y  $\alpha_F$  de la fuerza respecto al plano horizontal. En estas gráficas, la probabilidad de que un contacto se encuentre en el intervalo  $[a, a+da]$  es proporcional a la superficie de la esfera en dicho intervalo, por lo que se registra una mayor proporción de contactos en el ecuador que en los polos.

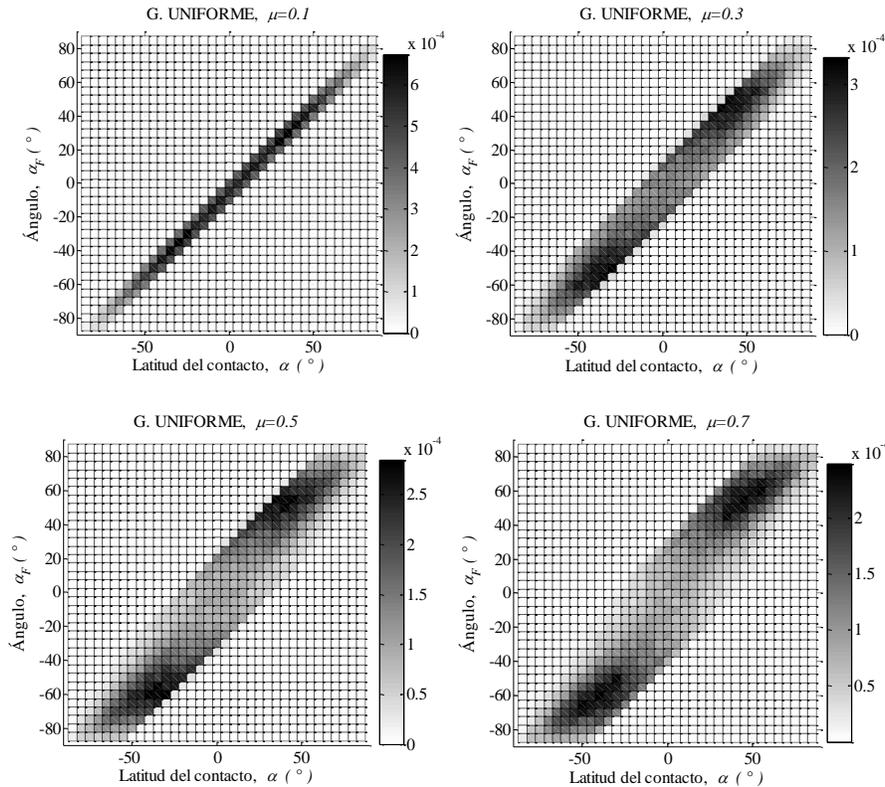


Figura 3.62. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en muestras de granulometría uniforme

En la muestra con  $\mu=0.1$  se observa que la densidad  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  se concentra en la diagonal  $\alpha=\alpha_F$ , es decir, que la orientación de las fuerzas es muy próxima a la normal a los contactos. La mayor frecuencia observada está alrededor de los  $40^\circ$  en ambas variables como se observó en la repartición de contactos de la figura 3.37.

En las muestras con  $\mu=0.3, 0.5$  y  $0.7$ , las fuerzas toman orientaciones que difieren cada vez más de la orientación de las normales a los contactos, porque el cono de fricción (figura 3.60) es más abierto. Cuando el coeficiente de fricción crece  $\alpha_F > \alpha$ , lo que indica que las fuerzas toman una tendencia vertical.

La densidad de probabilidad condicional (figura 3.63) muestra con más detalle la orientación de las fuerzas de contacto respecto a la posición del contacto. Para fines didácticos se toma como ejemplo la muestra con  $\mu=0.7$ . Si el contacto se localiza cerca del ecuador, la orientación de la fuerza alrededor del punto de contacto es uniforme. Cuando los contactos se alejan del ecuador, las fuerzas tienen una mayor inclinación que la normal al contacto. Pero en las cercanías al polo, las fuerzas son menos inclinadas que la normal al contacto.

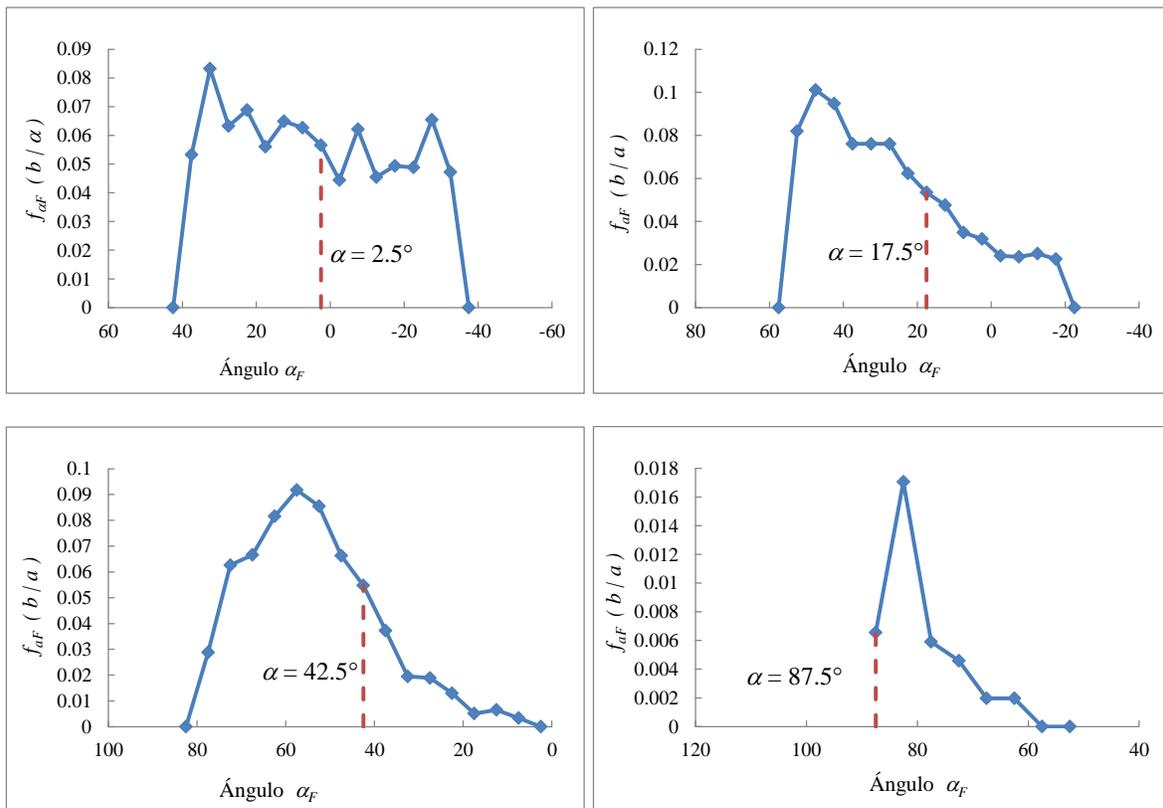


Figura 3.63. Densidad de probabilidad condicional  $f_{\alpha_F}(b/a)$ , muestras con granulometría uniforme y  $\mu=0.7$

Con la ayuda de la densidad de probabilidad condicional se puede saber dónde encontrar el vector de fuerza de contacto conocida la posición del contacto.

Por otra parte, se revisa la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  (figura 4.60) en cada material granular. La densidad de probabilidad es de tipo mixto, ya que el ángulo  $\delta$  es una variable aleatoria continua con probabilidad mayor a cero en  $\delta=\phi$ .

Para coeficientes de fricción cercanos a cero, por ejemplo  $\mu=0.1$ , la probabilidad de  $\delta=\pm\phi$  es 0.54 de acuerdo con la densidad de probabilidad de la figura 3.64, es decir, el 54% de las fuerzas de contacto se sitúan sobre el cono de fricción. Estos contactos se encuentran en un estado inminente de deslizamiento. La condición es necesaria pero no suficiente para el deslizamiento, ya que existen otras partículas que pueden impedir los movimientos.

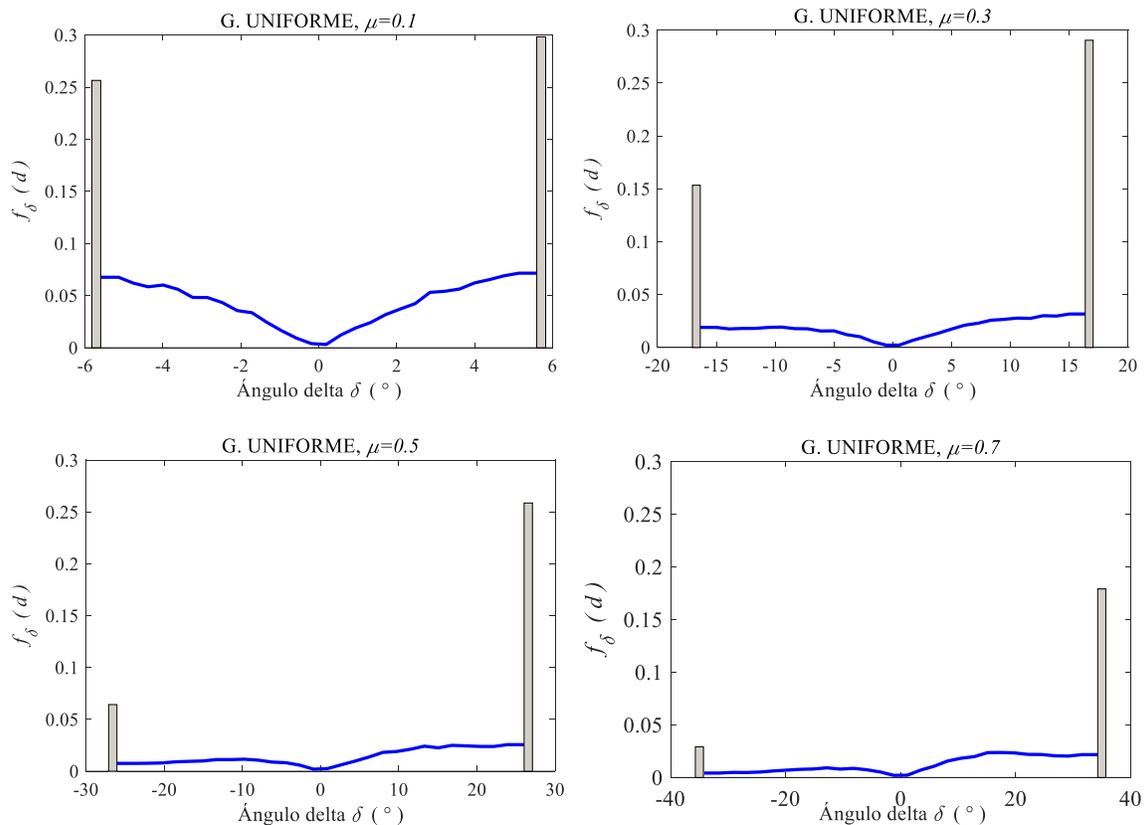


Figura 3.64. Densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  en muestras con granulometría uniforme

Cuando se tiene un coeficiente de fricción cada vez mayor, la probabilidad de que las fuerzas alcancen el cono de fricción es cada vez menor. La densidad de probabilidad muestra que no es usual encontrar fuerzas cerca de la normal. La desigualdad

$P[\delta=\phi] > P[\delta=-\phi]$  indica que las fuerzas se orientan con la gravedad terrestre. La distribución de probabilidad de  $\delta$  es muy importante para formular un modelo probabilista de comportamiento mecánico como el de Auvinet (1998) para medios bidimensionales.

La figura 3.65 muestra la proporción de fuerzas de contacto localizadas en la superficie del cono de fricción en muestras de granulometría uniforme y con distinto coeficiente de fricción. Ignorando las restricciones cinemáticas, esta proporción se interpreta como la probabilidad de que un contacto sea inestable en el medio granular.

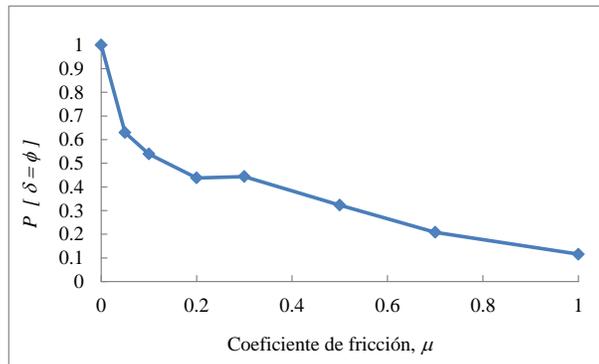


Figura 3.65. Probabilidad de encontrar un contacto inestable en muestras depositadas por gravedad con granulometría uniforme

### Granulometría bimodal

La composición de la mezcla tiene un pequeño efecto en la orientación  $\alpha_F$  de las fuerzas de contacto. Si la granulometría es uniforme (muestras con  $p_{3V}=0$  y  $p_{3V}=0.8$  en la figura 3.66), las fuerzas tienden a una orientación vertical. Si la relación de diámetros crece (por ejemplo  $a=10$  en la figura 3.67), se tiene una mayor uniformidad en la orientación de las fuerzas, posiblemente porque las partículas pequeñas se sitúan uniformemente sobre las grandes.

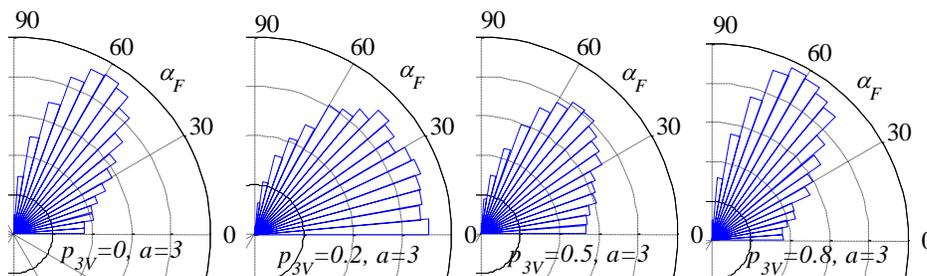


Figura 3.66. Histogramas polares del ángulo  $\alpha_F$  en muestras con granulometría con  $\mu=0.7$  y  $p_{3V}$  variable

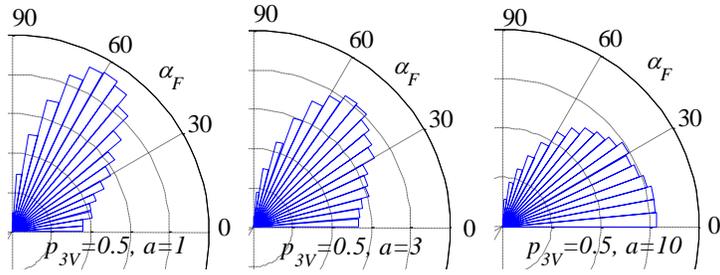


Figura 3.67. Histogramas del ángulo  $\alpha_F$  en mezclas binarias con diferente relación de diámetros ( $a$ )

La densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  de la figura 3.68 muestra la orientación de las fuerzas y los contactos en mezclas binarias con  $p_{3V}$  variable. Cuando prevalece un tamaño de partículas ( $p_{3V}=0.8$ ) o la granulometría es uniforme, la densidad conjunta presenta un pico bien marcado. En cambio, en la muestra con  $p_{3V}=0.2$ , tanto las fuerzas como los contactos se orientan con mayor uniformidad. Esto se debe a que existe un número importante de partículas grandes y pequeñas que cambian la posición de los contactos y dirección de las fuerzas.

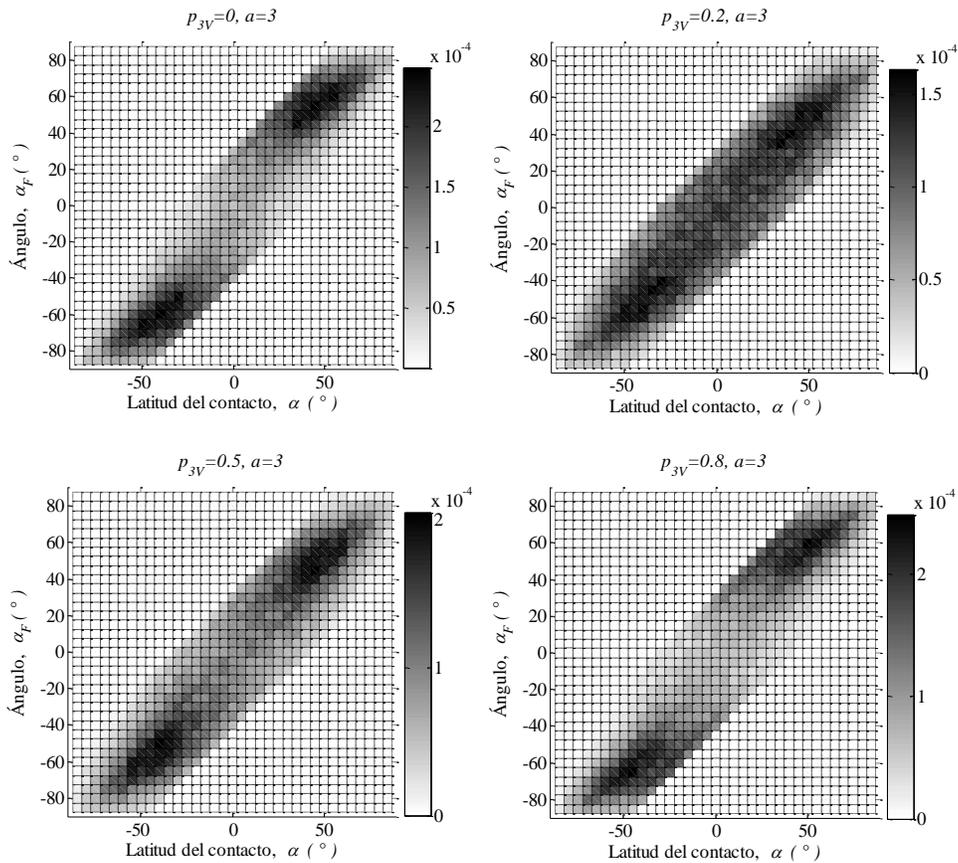


Figura 3.68. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en mezclas binarias con  $\mu=0.7$  y  $p_{3V}$  variable

Cuando la relación de diámetros crece, la densidad de probabilidad conjunta tiende a ser simétrica respecto a la diagonal (figura 3.69). Cualitativamente, se puede decir que la anisotropía es más marcada cuando la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_f}(a, b)$  presenta picos y disminuye cuando esta densidad es uniforme.

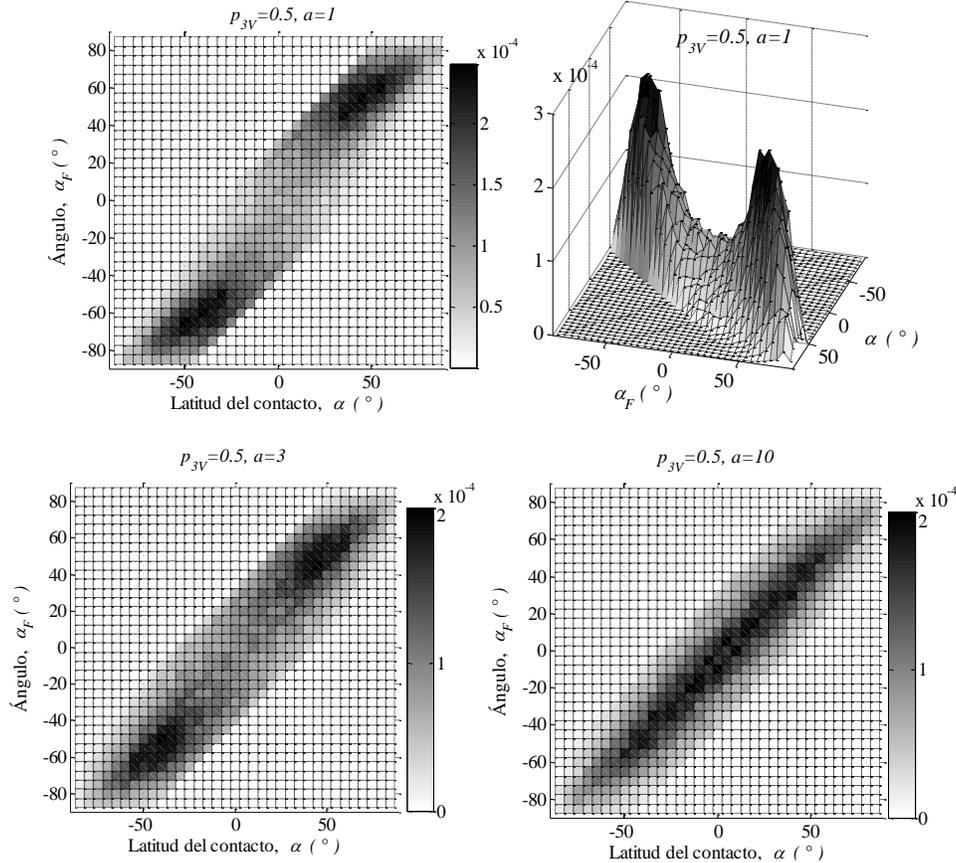


Figura 3.69. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_f}(a, b)$  en mezclas binarias con  $a=D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$  variable

La densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  presenta una concentración en  $\delta=\pm\phi$  y asocia menor probabilidad para intervalos de  $\delta$  cercanos a 0. Como se puede observar en la figura 3.70, en la mezcla con  $p_{3V}=0.2$  y  $a=3$ , la densidad es aproximadamente simétrica con  $P[\delta=\phi]<0.1$ . La densidad de probabilidad se desplaza hacia valores positivos de  $\delta$  cuando aumenta la proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ) pero sobre todo cuando aumenta la relación de diámetros  $a=D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$ .

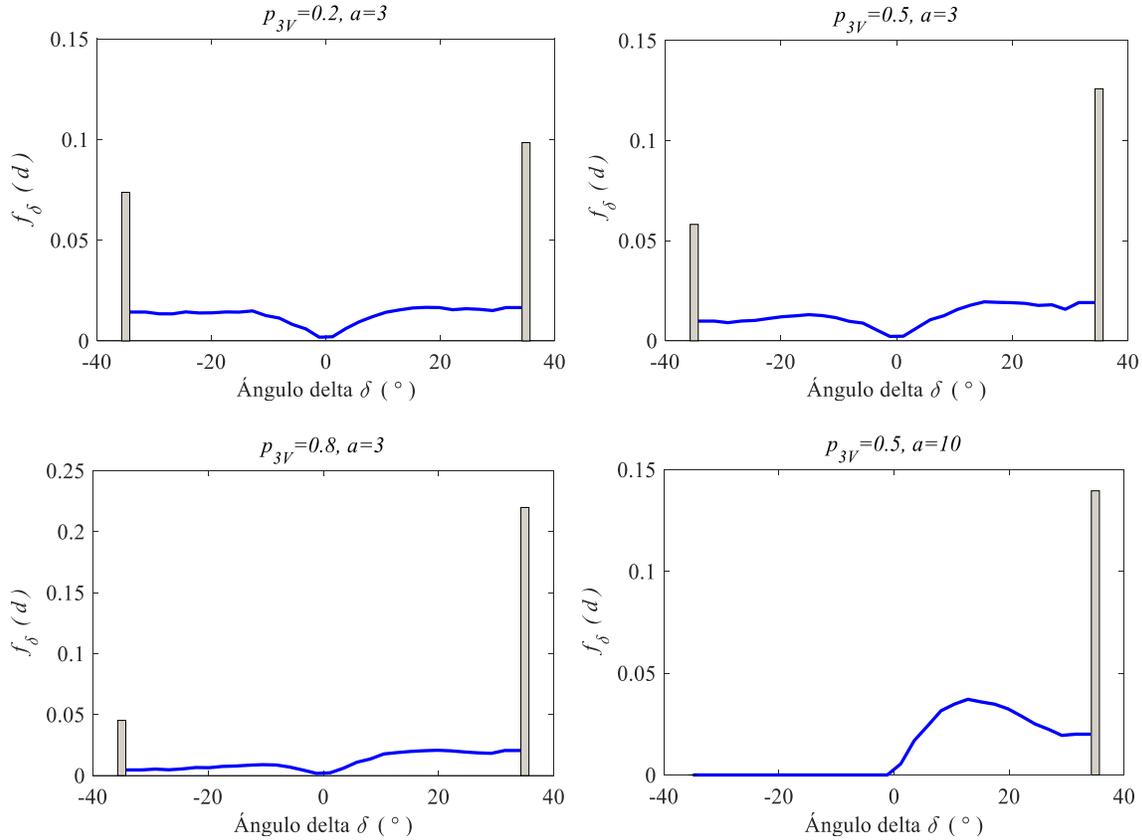


Figura 3.70. Densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  en mezclas binarias

### Granulometría continua

La anisotropía del material con granulometría continua es menor que en materiales con otra granulometría. En la figura 3.71 se observa una orientación de fuerzas en todas direcciones (la mayor frecuencia en  $\alpha_F$  cercano a cero se debe a la mayor proporción de contactos en esa zona).

La densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  (figura 3.72) muestra que no existe concentración ni de contactos ni de fuerzas en un intervalo particular de  $\alpha$  o de  $\alpha_F$ . Esto evidencia la baja anisotropía tanto geométrica como mecánica que se desarrolla en un material de granulometría bien graduada.

El ángulo  $\delta$  que forma la fuerza con la normal al contacto está distribuido en el intervalo  $[0, \phi]$  y su densidad de probabilidad similar a la observada en granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$  y  $a=10$ . En la muestra simulada con granulometría continua y con un coeficiente de fricción  $\mu=0.7$ , se observó que el 15% de las fuerzas de contacto se encuentran en la superficie del cono de fricción.

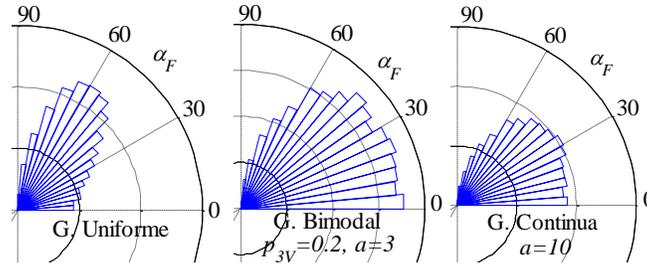


Figura 3.71. Orientación de las fuerzas de contacto  $\alpha_F$  en muestras con distinta granulometría depositadas por gravedad y con  $\mu=0.7$

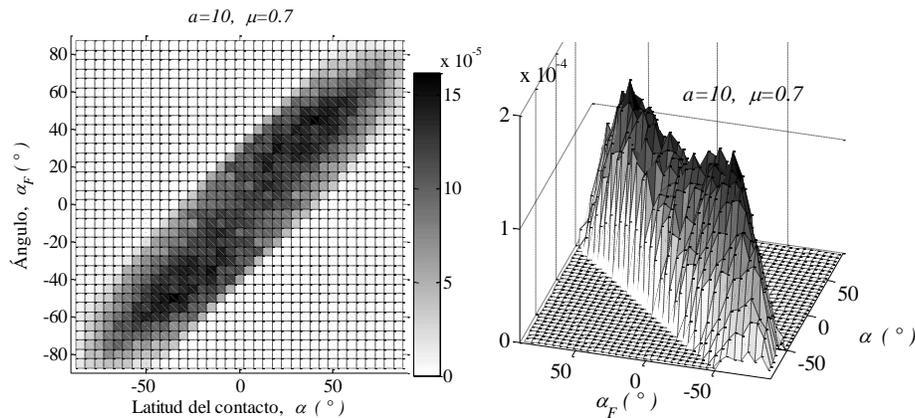


Figura 3.72. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a,b)$  en material de granulometría continua depositada por gravedad

### 3.5 Representatividad de las muestras granulares

Como se vio en los incisos anteriores, el estudio de los medios granulares requiere de la evaluación de algunos parámetros. En la medición de dichos parámetros pueden surgir errores significativos causados por un método de evaluación inadecuado, heterogeneidad del medio o por un tamaño limitado de la muestra. A continuación se concentra el interés en el tamaño de la muestra.

En la literatura se conoce como volumen elemental representativo (REV) al volumen mínimo requerido, para el cual, un parámetro medido es representativo del medio granular. El REV se usa como referencia para distinguir entre la microescala y la macroescala.

El tamaño del REV puede variar considerablemente con cada propiedad evaluada. La porosidad suele ser el parámetro más utilizado para determinar el volumen elemental representativo, sin embargo se sabe (Al-Raoush & Papadopoulos, 2010) que el REV así obtenido es insuficiente para la granulometría y el número de contactos.

Auvinet & Bouvard (1988a) evalúan en términos probabilistas la reducción de la dispersión de la porosidad medida en una muestra granular cuando aumenta el volumen de la muestra. Este aspecto, también conocido como efecto de escala geométrico, se puede utilizar para definir las dimensiones mínimas de la muestra (REV) necesarias para obtener la porosidad o distribución granulométrica con cierto grado de confiabilidad.

Para mayor simplicidad los autores citados consideran la porosidad y distribución granulométrica en una misma función  $G_3(d)$  (presentada en el inciso 2.1.9). Recurriendo a la función característica binaria, en una muestra de volumen  $V$ , la varianza de la porosidad generalizada asociada al volumen de la muestra está dada por la ecuación 2.46.

Para evaluar la varianza de  $G_3(d)$  se requiere de cálculos laboriosos puesto que en un prisma rectangular de aristas  $a, b, c$ , resulta la expresión 3.18. El cálculo puede hacerse numéricamente dividiendo el volumen de interés en un número suficiente de volúmenes elementales y sustituyendo las integrales por sumas (figura 3.73 y ecuación 3.20). Las consideraciones simétricas, el algoritmo de Cauchy, así como la relación entre el coeficiente de autocorrelación con la superficie específica (ecuación 3.19) permiten reducir considerablemente los cálculos (Matheron, 1967; Auvinet, 1986; Auvinet & Bouvard 1988a).

$$\text{var}[G_3(d)] = \frac{1}{(abc)^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c dx dy dz \int_0^a \int_0^b \int_0^c C(x-x', y-y', z-z') dx' dy' dz' \quad (3.18)$$

$$r(h) = \exp\left(\frac{-s_3 h}{4n(1-n)}\right) \quad (3.19)$$

En el lenguaje de programación de Matlab se elaboró la rutina de cálculo REPRESENTATIVO.m para evaluar la dispersión de la granulometría generalizada (varianza  $\text{var}[G_3(d)]$  o desviación estándar  $s_{nv}$ ) en una muestra cúbica de arista  $c$  (figura 3.73) utilizando la expresión 3.20.

$$\text{var}[G_3(d)] = \frac{1}{c^6} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i'=1}^m \sum_{j'=1}^m \sum_{k'=1}^m G_3(d)[1-G_3(d)] \exp\left(\frac{-s_3 h}{4G_3(d)[1-G_3(d)]}\right) \Delta h^6 \quad (3.20)$$

Donde:  $G_3(d)$  es la granulometría generalizada que considera a las partículas con  $D \leq d$  como parte de los poros.

- $c$ : arista del volumen cúbico analizado
- $s_3$ : superficie específica de las partículas con  $D > d$
- $h$ : arista del volumen elemental

$m$ : número de volúmenes elementales en una dirección cartesiana

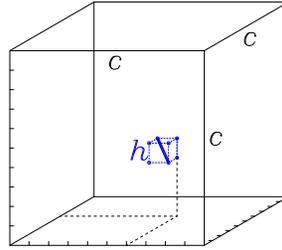


Figura 3.73. Volumen cúbico para evaluar la dispersión de  $G_3(d)$

En la figura 3.74 se presentan los resultados en forma adimensional para una muestra cúbica de tamaño  $(c*c*c)$ , aplicables a cualquier material granular de granulometría generalizada y superficie específica conocidas (Auvinet, 1986).

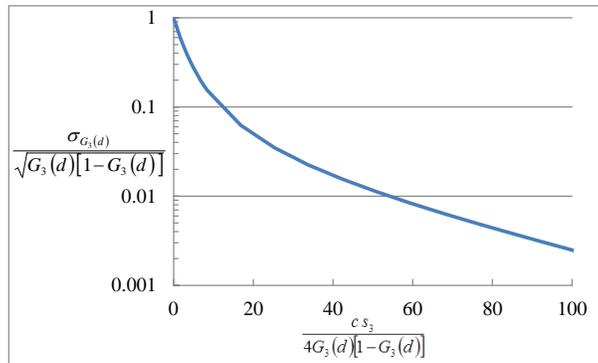


Figura 3.74. Dispersión de la porosidad de un medio granular medida en una muestra cúbica

A continuación se presentan los resultados de la representatividad del núcleo central de las muestras granulares con arista  $c=1$ .

a) Granulometría uniforme

Cálculo de la dispersión de la porosidad asociada al tamaño de la muestra en materiales de granulometría uniforme se presenta en la tabla 3.4. En todos los casos se tiene una desviación estándar de la porosidad menor a 0.001 y es ligeramente menor cuando el coeficiente de fricción disminuye porque la porosidad es menor.

Tabla 3.4. Cálculo de la dispersión de la porosidad  $s_{nv}$  en muestras con granulometría uniforme

$\mu$	$n$	$s_3$	$s_{nv}$	$\mu$	$n$	$s_3$	$s_{nv}$
0.0	0.3616	82.64	0.00078	0.3	0.4273	82.64	0.00095
0.05	0.3828	82.64	0.00084	0.5	0.4274	82.64	0.00095
0.1	0.3966	82.64	0.00088	0.7	0.4277	82.64	0.00095
0.2	0.4173	82.64	0.00093	1.0	0.4271	82.64	0.00095

Se puede decir que el error en la porosidad debido a las dimensiones del núcleo central es despreciable, por lo tanto las muestras son representativas.

b) Granulometría bimodal

En este caso se evalúa la representatividad de la distribución granulométrica  $G_3(d)$  referida al total de la muestra.  $G_3(d)$  se interpreta como una porosidad que incluye entre los vacíos a las partículas de diámetro menor que  $d$ . Los resultados se presentan en la tabla 3.5.

Tabla 3.5. Cálculo de la dispersión de  $G_3(d)$  en muestras con granulometría bimodal

Granulometría bimodal	$n$	$s_{nv}$		
		$G_3(d)=n$	$G_3(d)=n+(1-n)p_{3V}$	$G_3(d)=1$
$\mu=0.7$				
$a=3, p_{3V}=0.2$	0.3996	0.0034	0.0070	0
$a=3, p_{3V}=0.5$	0.3657	0.0025	0.0080	0
$a=3, p_{3V}=0.8$	0.4032	0.0021	0.0012	0
$a=10, p_{3V}=0.5$	0.2792	0.0027	0.0556	0

En cuanto a la porosidad se puede decir que las muestras son representativas toda vez que se obtiene una desviación estándar considerablemente baja ( $s_{nv}<0.34\%$ ). La fracción de partículas pequeñas es más representativa (menor desviación estándar) cuando la proporción  $p_{3V}$  es mayor, como era previsible. En las muestras con  $p_{3V}=0.5$ , cuando  $a=10$  la incertidumbre aumenta drásticamente y podría considerarse como no representativa. En la porosidad generalizada de la muestra completa,  $G_3(d)=1$ ,  $s_{nv}=0$  indica que no se tiene duda.

c) Granulometría continua

Para el estudio de la representatividad, la granulometría se dividió en diez fracciones y se calculó la superficie específica y  $G_3(d)$ . La figura 3.75 presenta la desviación estándar de  $G_3(d)$  para cada fracción granulométrica. Nótese que las fracciones granulométricas

cercanas a  $d/D_{\min}=5$  conducen a un mayor error debido a que la varianza  $G_3(d)[1-G_3(d)]$  es mayor.

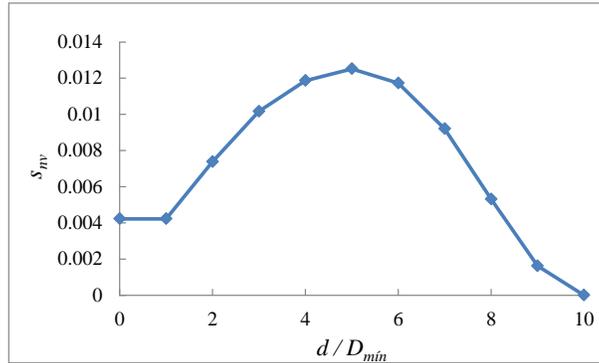


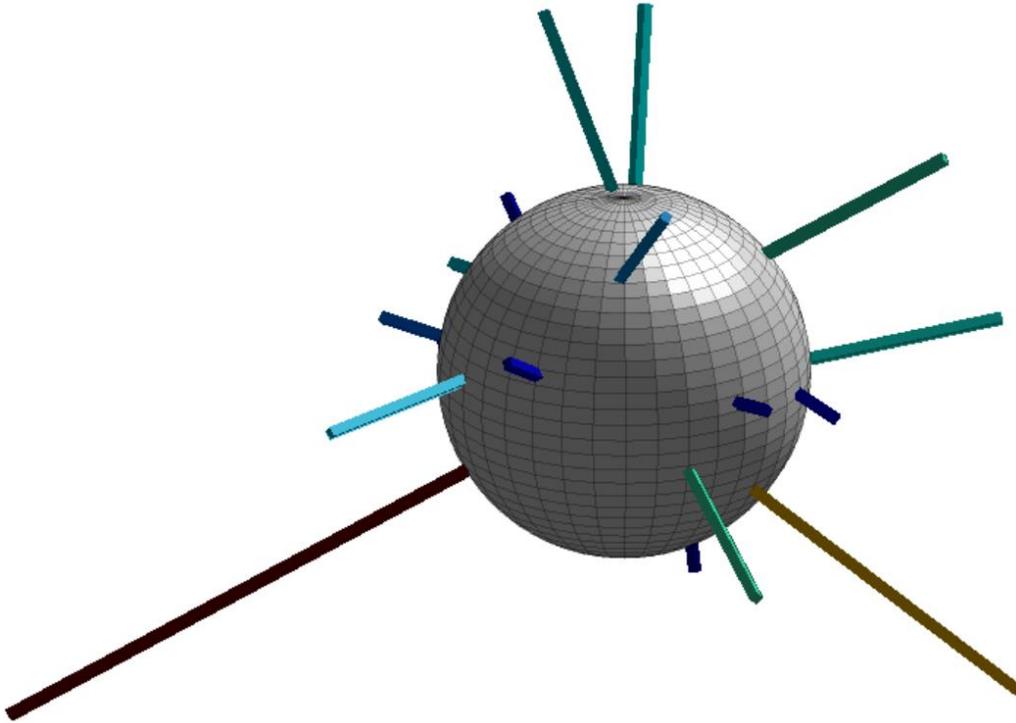
Figura 3.75. Dispersión de  $G_3(d)$  para la muestra de granulometría continua por fracción granulométrica

En términos de porosidad, el tamaño de muestra de todos los materiales en estudio es suficientemente representativo, ya que la máxima desviación estándar asociada al tamaño del núcleo central es 0.4% y se obtuvo en la muestra con granulometría continua.

La granulometría también resultó con buena aproximación, únicamente en la mezcla binaria con  $p_{3V}=0.5$  y  $a=10$  se obtuvo una desviación estándar de  $G_3(d)$  es de 0.05, en todos los otros casos la desviación estándar es menor al 1%.

Las variaciones aleatorias debidas al efecto de escala son frecuentemente confundidas con aquellas asociadas a la heterogeneidad del medio. Ambos tipos de variaciones están presentes casi siempre en el mismo medio. El efecto de escala tiene mayor relevancia cuando el tamaño de la muestra es pequeño con respecto a las dimensiones de los granos (Auvinet & Bouvard, 1988a).

En el presente capítulo se han presentado dos modelos numéricos empleados para la simulación de los materiales granulares estudiados. El uso de éstos permitió acelerar el proceso de simulación, así como observar que no existe una relación uno a uno entre la porosidad y el número de coordinación. El análisis de las características de la estructura granular pone en evidencia que el coeficiente de fricción interparticular y la granulometría afectan de manera importante en la estructura inherente. En términos de la porosidad y la granulometría, el tamaño de las muestras es representativo.



Fuerzas de contacto actuando sobre la superficie de una partícula esférica, la longitud de las barras indica la magnitud de la fuerza

## CAPÍTULO 4. COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MEDIOS GRANULARES Y EVOLUCIÓN DE SU ESTRUCTURA

La ley de comportamiento mecánico de un material puede expresarse esquemáticamente como la relación entre la historia de deformación y el estado de esfuerzos (ecuación 4.1). En esta ley se acepta la hipótesis de que las deformaciones son suficientes para determinar los esfuerzos (Darve, 1987).

$$\sigma(t) = f\{\varepsilon(\tau), \tau < t\} \quad (4.1)$$

Donde:  $\varepsilon(\tau)$  representa la historia de deformación,  
 $\sigma$  el estado de esfuerzo al tiempo  $t$   
 $f$  es una función

La formulación matemática de la ley de comportamiento debe permitir el cálculo del esfuerzo para cualquier historia de deformación. Sin embargo es muy difícil reproducir todas esas historias experimentalmente y solamente ciertos tipos de sollicitaciones pueden estudiarse en función del equipo utilizado en laboratorio.

La estructura de los medios granulares tiene una gran influencia sobre el comportamiento mecánico. Sin embargo, poco se entiende sobre las relaciones que existen entre los fenómenos que ocurren a la escala de las partículas y el comportamiento global del medio. En este capítulo se recurre a la simulación de pruebas triaxiales en PFC<sup>3D</sup> para estudiar las características estructurales de los medios granulares y su relación con el comportamiento global.

## 4.1 Prueba triaxial

En geotecnia, la prueba triaxial es una de las pruebas de laboratorio más difundidas para el estudio de la resistencia al corte de materiales. Esta prueba permite obtener información variada sobre la resistencia del suelo en diversas condiciones controlables a voluntad.

En las simulaciones con elemento discreto se pueden encontrar dos técnicas para aplicar esfuerzos de compresión sobre una muestra confinada por paredes rígidas. Una consiste en desplazar las paredes, la otra mantiene fijas las paredes y agranda las partículas. Por lo general, las paredes son consideradas como completamente lisas a fin de minimizar las heterogeneidades en las fronteras.

### 4.1.1 Procedimiento de simulación

En la presente tesis, la simulación de un ensayo triaxial consiste en los siguientes pasos:

- Se toma una de las muestras de material granular simuladas en el Capítulo 3.
- Se coloca una tapa horizontal al recipiente de simulación (la sexta pared), en forma tangente a la partícula más elevada de la muestra granular.
- La tapa del recipiente se desplaza hacia abajo hasta apoyarse uniformemente sobre la superficie del medio granular.
- Se aplica un confinamiento isótropo ( $S_1 = S_2 = S_3 = 10^6$  Pa) desplazando las paredes hacia el centro del recipiente a velocidad constante muy baja. Las deformaciones se obtienen de los desplazamientos de las paredes y los esfuerzos se calculan como la suma de las fuerzas de contacto actuando en una pared dividida por su área.

- El esfuerzo desviador vertical se aplica al acercar mutuamente la tapa y el piso del recipiente. El modelo de simulación (figura 4.1) permite aplicar un esfuerzo desviador en cualquiera de las tres direcciones cartesianas desplazando las paredes opuestas correspondientes.
- Durante el proceso de carga, el esfuerzo de confinamiento se mantiene constante ajustando la posición de las paredes laterales de acuerdo al servomecanismo propuesto por Itasca (2008), el cual reduce la diferencia entre el esfuerzo medido y el requerido. Este procedimiento permite conservar constante el esfuerzo así como el contacto del recipiente con las partículas del medio granular.
- Para retirar el esfuerzo desviador (descarga) se invierte el sentido del desplazamiento de las paredes.
- Se permite una reducción del esfuerzo vertical a valores inferiores al confinamiento para alcanzar un estado de extensión.
- Para estudiar la evolución de la estructura se realizan varios ciclos de carga y descarga tanto en compresión como en extensión.

La figura 4.1 presenta un esquema del procedimiento de simulación. Para el estudio de la estructura se consideran únicamente las partículas del núcleo central de la muestra granular.

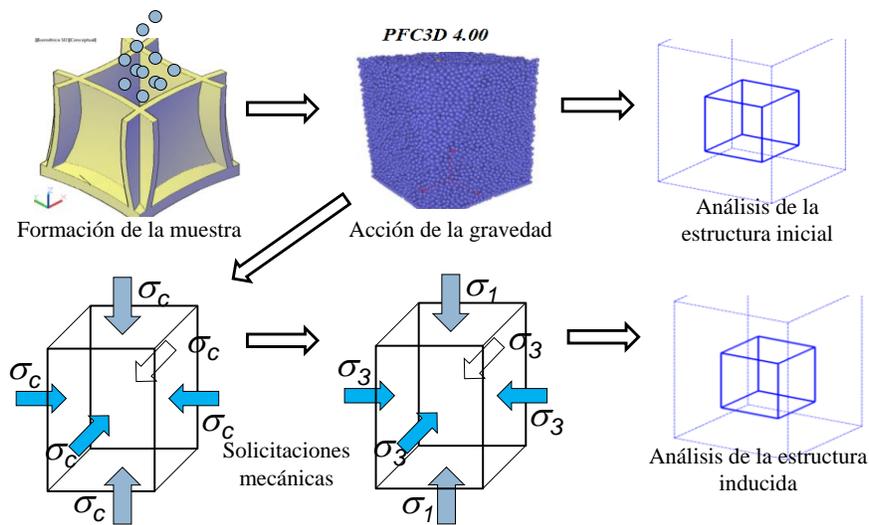


Figura 4.1. Procedimiento de simulación y análisis de la estructura

El modelo de simulación de la prueba triaxial es similar a las prensas verdaderamente triaxiales utilizadas en laboratorio (véase Darve, 1987). El desplazamiento de las paredes del recipiente permite aplicar esfuerzos y deformaciones en tres direcciones cartesianas.

La forma cúbica del recipiente y la rigidez de las paredes favorecen a la homogeneidad de los materiales granulares durante la simulación de las pruebas. Los resultados pueden diferir considerablemente de los obtenidos con muestras cilíndricas, donde se permite una deformación radial no uniforme. Se sabe que las diferentes condiciones de ejecución de una prueba triaxial pueden influir significativamente en los resultados (Ovando, 1986).

En las simulaciones numéricas es importante considerar ciertos parámetros que ayudan a un correcto desempeño numérico. Estos parámetros están ligados a leyes de interacción entre partículas y a las sollicitaciones exteriores (Radjai & Dubois, 2010).

Una rapidez excesiva en el desplazamiento de las paredes del recipiente genera alteraciones en la estructura granular que no son representativas de un estado estático. El parámetro de inercia ( $I'$ ) permite calcular una velocidad de desplazamiento de las paredes suficientemente pequeña para evitar estos efectos dinámicos en el medio granular. La condición  $I' \leq 10^{-4}$  ofrece resultados razonables en la práctica, donde  $I'$  es el parámetro de inercia adimensional expresado en la ecuación 4.2.

$$I' = \varepsilon \sqrt{\frac{m}{S_0 d^{[D'-2]}}} \quad (4.2)$$

Donde:

- $\varepsilon$ : es la velocidad unitaria de la pared
- $d$ : diámetro medio de las partículas
- $D'$ : dimensión = 3
- $m$ : masa media de las partículas
- $S_0$ : confinamiento aplicado

Para simular las pruebas triaxiales de esta investigación, se propone un valor de  $I' = 10^{-4}$  y se calculan las velocidades de desplazamiento de las paredes para cada muestra granular. Se considera el diámetro medio de la distribución granulométrica en volumen ( $\bar{d}_{3V}$ ).

#### 4.1.2 Trayectorias de esfuerzos

El estado de esfuerzos se puede representar en el espacio tridimensional de los esfuerzos principales ( $S_1, S_2, S_3$ ). En este espacio se distinguen los siguientes estados de esfuerzos (figura 4.2):

- Estado de esfuerzos isótropo. Donde  $S_1 = S_2 = S_3$  y se encuentra contenido en la línea llamada trisectriz.

- Estados de revolución. Donde dos de los esfuerzos principales son iguales, por ejemplo  $S_2 = S_3$  (plano bisector).
- Compresión triaxial clásica. Se obtiene cuando  $S_1 > S_2 = S_3$ . Al caso cuando  $S_1 < S_2 = S_3$  se le conoce como estado de extensión.

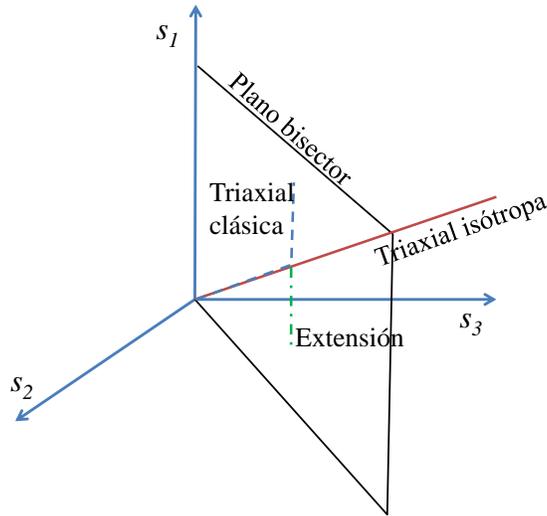


Figura 4.2. Representación 3D de trayectorias de esfuerzos principales en una masa continua

En esta tesis, los ensayos triaxiales consisten en aplicar una presión confinante isotropa, seguida de etapas de compresión triaxial clásica (carga y descarga con  $S_2 = S_3 = 1$  MPa) y etapas de carga y descarga en extensión. Por facilidad se usa la notación de la tabla 4.1 para designar cada etapa de la simulación. La representación clásica en el espacio deformación-esfuerzo de un ensayo simulado se presenta en la figura 4.3, los resultados correspondientes al resto de las simulaciones se encuentran en el Anexo 1.

Tabla 4.1 Notación para las etapas de las pruebas triaxiales

Notación	Etapas	Notación	Etapas
INI	Estado inicial	E1	Primera carga en extensión
Is1	Primer confinamiento isotropo	Is5	Descarga, confinamiento isotropo
C1	Primera carga en compresión	E2	Segunda carga en extensión
Is2	Descarga, confinamiento isotropo	Is6	Descarga, confinamiento isotropo
C2	Segunda carga en compresión	E3	Tercera carga en extensión
Is3	Descarga, confinamiento isotropo	Is7	Descarga, confinamiento isotropo
C3	Tercera carga en compresión	C4	Carga final en compresión
Is4	Descarga, confinamiento isotropo		

Se realizan pruebas triaxiales con muestras de granulometría uniforme, cada una con distinto coeficiente de fricción ( $\mu=0.1, 0.3, 0.5$  y  $0.7$ ). Con granulometría bimodal se ensayan muestras con  $p_{3V}=0.2, 0.5$  y  $0.8$ , todas con relación de diámetros  $a=3$  y  $\mu=0.7$ . Se realiza una prueba triaxial en la muestra de granulometría continua con  $a=10$  y  $\mu=0.7$ .

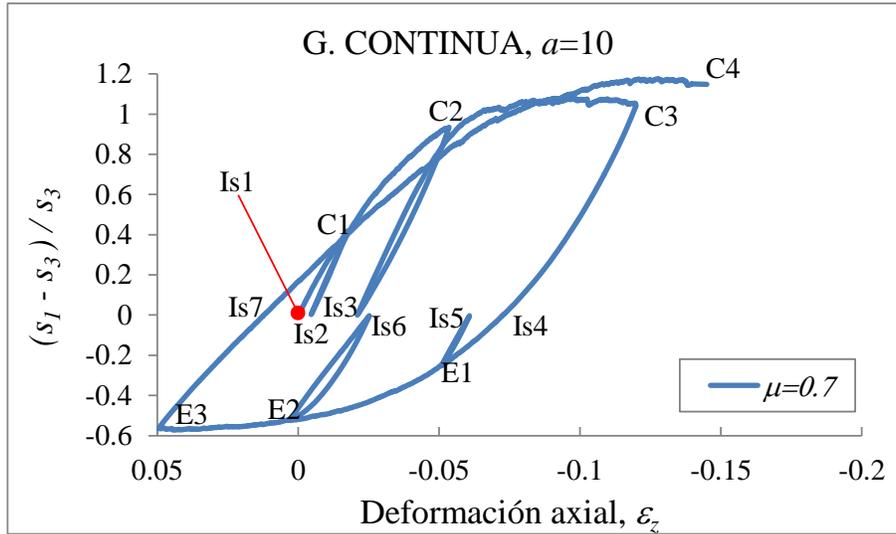


Figura 4.3. Curva esfuerzo-deformación obtenida por simulación de prueba triaxial

Para simular pruebas con granulometría bimodal con  $a=10$  sería necesario aumentar el tamaño de muestra, incluso con 30,000 partículas se tienen serias dificultades para lograr un apoyo uniforme de la tapa del recipiente sobre el medio granular.

En las curvas esfuerzo-deformación se presenta el esfuerzo desviador normalizado  $(S_1 - S_3) / S_3$  para fines de comparación entre las distintas pruebas realizadas. Sobre el comportamiento de las muestras granulares durante el proceso de deformación se puede observar lo siguiente:

- Al iniciar el proceso de carga en compresión (tramo Is1 a C1), la trayectoria es aproximadamente recta. La pendiente de este segmento de recta varía con el coeficiente de fricción interparticula y con la granulometría.
- La trayectoria de la primera descarga (de C1 a Is2) es una recta más inclinada que la del tramo de carga anterior, por lo que en Is2 se tienen deformaciones no recuperables. Estas deformaciones son causadas porque las partículas que se desplazan no regresan a sus posiciones iniciales.
- La recarga del espécimen (tramo Is2 a C2) introduce deformaciones menores que la primera carga, siempre que el esfuerzo desviador sea menor al máximo aplicado en

la etapa C1. Auvinet (1986) interpreta la pseudo coincidencia del tramo de descarga con el de recarga como la creación de un dominio elástico por parte de la carga axial previa. Cuando la recarga supera el esfuerzo desviador aplicado en C1 la tasa de deformaciones aumenta (nuevamente ocurren deslizamientos de contactos), por lo que la pendiente de la curva se reduce considerablemente. La curva esfuerzo-deformación presenta una concavidad hacia abajo bien marcada.

- En la descarga de C2 a Is3, la pendiente de la curva es menor que en la primera descarga (de C1 a Is2). El material se ha reorganizado de modo que es capaz de recuperar una parte de las deformaciones pero la mayor parte siguen siendo irreversibles.
- Al aplicar la tercera carga en compresión (Is3 a C3) se obtiene una trayectoria aproximadamente recta con alta pendiente, pero cuando la curva alcanza nuevamente la rama virgen, el medio granular experimenta grandes deformaciones sin poder soportar un esfuerzo desviador mayor.
- La trayectoria de descarga de C3 a Is4 inicia con una pendiente alta, la cual se reduce gradualmente. Es una trayectoria aproximadamente inversa a la trayectoria de carga.
- Si se continúa la reducción del esfuerzo vertical hasta alcanzar condiciones de extensión (tramo Is4 a E1), el material se vuelve altamente deformable. El material es más deformable en dirección horizontal debido a la anisotropía que indujo la historia previa de cargas (efecto Bauschinger).
- En extensión también se crea un dominio aproximadamente elástico cuando se realizan cargas y descargas (etapas de E1 a Is7). Durante estos ciclos se obtienen grandes deformaciones irreversibles cada vez que se retorna a la rama virgen de la curva esfuerzo-deformación.
- Al volver a pasar a compresión (tramo Is7 a C4), la deformabilidad es mucho mayor que la inicial (tramo Is1 a C3). Es decir que las deformaciones en una dirección inducen mayor deformabilidad en las direcciones perpendiculares a la misma puesto que la estructura granular necesita reorganizarse para resistir los esfuerzos.
- Los materiales de granulometría uniforme con  $\mu=0.5$  y  $0.7$  y el de granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.8$  presentan una resistencia de pico en compresión (las curvas esfuerzo-deformación se encuentran en el Anexo 1).

El comportamiento esfuerzo-deformación descrito anteriormente se explica en los siguientes incisos a partir de los fenómenos que ocurren a la escala de las partículas.

En ocasiones son de interés los cambios volumétricos de las muestras granulares para complementar la descripción del comportamiento. En la figura 4.4 se presenta un ejemplo de las curvas de deformación volumétrica, los resultados de las demás pruebas triaxiales se encuentran en el Anexo 1. La notación de la tabla 4.1 continua siendo válida.

Durante la prueba triaxial, las muestras granulares que experimentan cambios volumétricos que se deben al cierre o apertura de los poros. La deformación de los granos puede considerarse despreciable ya que se observó que la intersección entre partículas, debido a la aplicación del máximo esfuerzo desviador, es menor al 3% del diámetro.

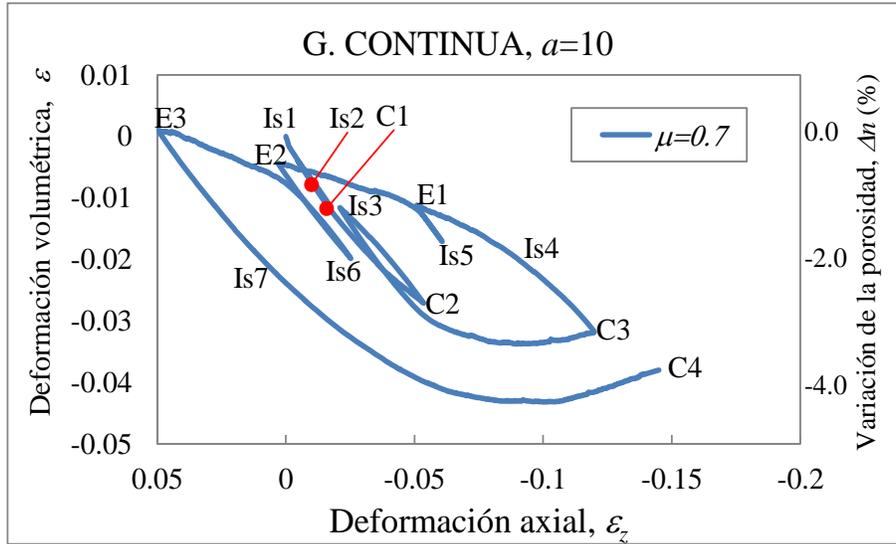


Figura 4.4. Curva de deformación volumétrica durante una prueba triaxial

Las deformaciones volumétricas (o bien los cambios en la porosidad) cambian en función del coeficiente de fricción interparticular y de la granulometría como se describe a continuación.

- Al iniciar la compresión (tramo de Is1 a C1 en la figura 4.4 y figura A.7), las muestras reducen su volumen. La trayectoria de deformación volumétrica es aproximadamente recta y su pendiente aumenta a mayor coeficiente de fricción.
- La descarga de C1 a Is2 ocasiona una recuperación parcial del volumen. En la mayoría de las muestras granulares, la trayectoria de descarga se sobrepone con la trayectoria de carga anterior.
- De Is2 a C2 se observa que la pendiente de las curvas disminuyen cuando aumenta la deformación axial. La aplicación de la carga en compresión se detiene cuando el volumen de las muestras permanece aproximadamente constante (estado de compresión C3). En esta etapa, las muestras de granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$  y  $p_{3V}=0.8$  y de granulometría continua, experimentan una dilatación.
- Cuando se reduce el esfuerzo desviador de C3 a Is4 y hasta alcanzar condiciones de extensión (E1, E2 y E3) se tiene un aumento del volumen de las muestras granulares. En los materiales de granulometría uniforme con  $\mu=0.1$  y  $\mu=0.3$ ; y los

de granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$  y  $p_{3V}=0.8$  presentan el menor aumento de volumen.

- Al retirar la carga en extensión y volver al confinamiento isótropo (Is5, Is6 y Is7) se recupera gran parte de la deformación volumétrica, no así la deformación axial.
- En la última etapa de compresión (Is7 a C4) los materiales reducen su volumen hasta un mínimo y finalmente presentan una dilatación causada por la rotura de la estructura granular.

Los comportamientos descritos de las curvas de esfuerzo-deformación y de deformaciones volumétricas se basan en los esfuerzos y desplazamientos medidos en las paredes del recipiente. Las interpretaciones pueden ser enriquecidas revisando la evolución de la estructura a la escala de las partículas.

## 4.2 Evolución del número de coordinación

Con la variación de los esfuerzos aplicados se producen movimientos en el interior de los medios granulares y las partículas pueden ganar o perder contactos. En este inciso se revisa la evolución de la conexión entre partículas durante la prueba triaxial.

### a) Granulometría uniforme

En el estado inicial (INI), las muestras con  $\mu=0.1, 0.3, 0.5$  y  $0.7$  presentan un número de coordinación que en promedio es 5.4. Al aplicar el confinamiento isótropo de 1.0MPa, el  $N_c$  aumenta a 6.2 en promedio. La figura 4.5 presenta el aumento del número de coordinación para cada muestra granular.

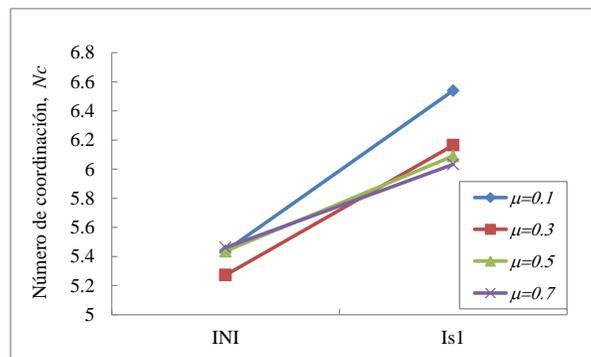


Figura 4.5. Número de coordinación en etapa inicial y primer confinamiento isótropo en muestras de granulometría uniforme con distintos coeficientes de fricción

Con la aplicación del confinamiento (Is1) se obtiene un  $N_c$  cada vez mayor si el coeficiente de fricción disminuye, esto se debe a que la estructura necesita generar más contactos para resistir los esfuerzos aplicados. Cuanto más débiles son los contactos se requieren más puntos de contacto para lograr el equilibrio como lo muestra el material con  $\mu=0.1$ .

En las siguientes etapas de la prueba triaxial, la magnitud de los cambios en el  $N_c$  es menor (figura 4.6). La primera carga en compresión (C1) ocasiona un pequeño aumento del  $N_c$ , lo cual se explica por la reducción de volumen que experimentan las muestras de acuerdo a la figura A.7. Al retirar el esfuerzo desviador (Is2), las muestras granulares recuperan el número de coordinación (pérdida de contactos) que tenían en el primer confinamiento isótropo. Este comportamiento se repite durante los siguientes ciclos de carga y descarga (C2 a Is4) únicamente en la muestra con  $\mu=0.1$ .

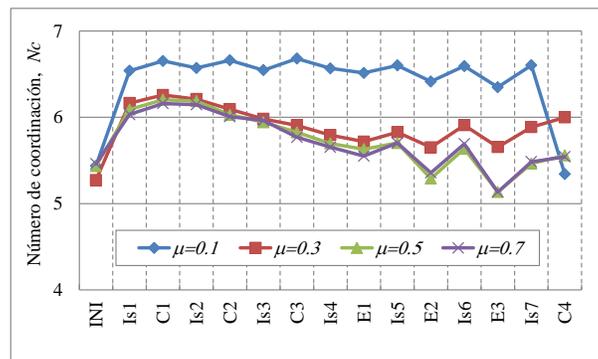


Figura 4.6. Evolución del número de coordinación durante la prueba triaxial en muestras con granulometría uniforme

Las muestras con  $\mu=0.3$ ,  $0.5$  y  $0.7$  presentan una reducción continua del  $N_c$  durante las etapas de carga y descarga en compresión (de C1 a Is4), así como en la primera carga en extensión (E1). Este comportamiento se debe al acomodamiento local de las partículas (figura 4.7) y es causado por la pérdida gradual del orden introducido en la formación de la estructura. Tomando en cuenta la figura A.7, el número de coordinación no siempre disminuye cuando aumenta el volumen del medio granular, sino que puede ser independiente cambios volumétricos.

Después del primer estado de esfuerzos en extensión (E1), el número de coordinación aumenta y disminuye al mismo tiempo que lo hace el esfuerzo vertical. Se tiene un número de coordinación mayor en los estados isótropos de esfuerzos Is5, Is6 e Is7 que en los de extensión E2 y E3.

En la etapa de compresión final (C4) se impone una reducción volumétrica considerable, por lo que el número de coordinación aumenta. Sin embargo, en la muestra con  $\mu=0.1$  se tiene una disminución en el  $N_c$  porque se alcanzó la ruptura de la estructura.

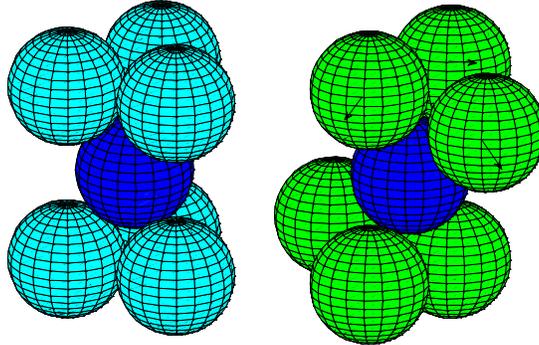


Figura 4.7. Ejemplo de pérdida de contactos por cambio en la configuración local de las partículas

#### b) Granulometría bimodal

La evolución del número de coordinación en las distintas mezclas binarias se presenta en la figura 4.8. Con la aplicación del primer confinamiento isótropo (Is1) todas las muestras presentan un aumento de su número de coordinación, hasta de 0.9 contactos en la muestra con  $p_{3V}=0.8$ . Esto es normal si se toma en cuenta que es la primera vez que las muestras granulares se someten a un estado de esfuerzos considerable.

La aplicación de la primera carga en compresión (C1) ocasiona un ligero incremento en el  $N_c$ . La descarga y las siguientes etapas de carga y descarga (C1 a Is4) permiten a las partículas perder gradualmente los contactos innecesarios para el equilibrio.

En las muestras con  $p_{3V}=0.5$  y 0.8 se observa un descenso drástico del  $N_c$  en la etapa de compresión (C3). En esta etapa, las muestras han pasado por una resistencia de pico acompañada por una disminución y aumento de volumen considerables, por lo que la estructura granular se rompe y las partículas tienen que adoptar una configuración muy distinta (ver explicación gráfica en la figura 4.7).

En las etapas de extensión (E1 a Is7) se observan pérdidas (al reducir el esfuerzo vertical) y ganancias (en el confinamiento isótropo) de contactos, principalmente cuando la granulometría tiende a ser uniforme ( $p_{3V}=0.8$  y 1).

En la etapa de compresión (C4) se obtiene un bajo número de coordinación, relacionado con la dilatación bien marcada en la figura A.7.

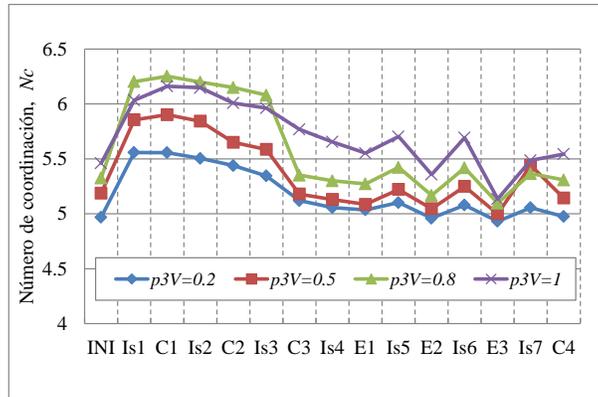


Figura 4.8. Evolución del número de coordinación durante la prueba triaxial en mezclas binarias

Se observa que para una baja proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}=0.2$ ) se obtiene menor variación del  $N_c$ . En esta composición de la mezcla, la conexión interparticular sufre pocas modificaciones cuando cambia el estado de esfuerzos.

También se evaluó el número de coordinación por tamaño de partícula: esfera pequeña ( $ep$ ) o esfera grande ( $eg$ ). Como se muestra en la figura 4.9, el  $N_c$   $ep$ - $ep$  presenta la tendencia del  $N_c$  global (figura 4.8) principalmente cuando  $p_{3V}=0.8$  (y con  $p_{3V}=1$ ). En estas muestras la conexión dentro del material granular ocurre principalmente entre partículas pequeñas.

El número de coordinación de las esferas pequeñas en contacto con las grandes ( $N_c$   $ep$ - $eg$ ) es mayor cuando  $p_{3V}=0.2$ . En este material, las partículas pequeñas necesitan apoyarse sobre las partículas grandes, dada su baja proporción en la mezcla granular. Si la proporción en volumen de partículas pequeñas aumenta (por ejemplo  $p_{3V}=0.8$ ), las  $ep$  tienen menor oportunidad de interactuar con las  $eg$ , por lo que el  $N_c$   $ep$ - $eg$  y sus variaciones son muy bajos.

La mayor magnitud del  $N_c$  parcial se obtiene en los contactos  $eg$ - $ep$  y se debe a condiciones geométricas (Capítulo 3). Si la proporción de partículas pequeñas es  $p_{3V}=0.2$ , las  $eg$  mantienen un  $N_c$   $eg$ - $ep$  aproximadamente constante durante la prueba triaxial. En cambio, en la mezcla con  $p_{3V}=0.8$  las partículas grandes ganan y pierden numerosos contactos con partículas pequeñas. Durante toda la prueba triaxial el máximo valor de  $N_c$   $eg$ - $ep$  es mucho menor que 49, el máximo que se puede obtener si las esferas pequeñas ( $ep$ ) se disponen en un arreglo cuadrado sobre la superficie de la esfera grande ( $eg$ ).

El número de coordinación entre partículas grandes ( $N_c$   $eg$ - $eg$ ) se comporta como el  $N_c$  global cuando  $p_{3V}=0.2$  y  $0.5$ . Sin embargo, cuando  $p_{3V}=0.8$  los contactos  $eg$ - $eg$  se pierden gradualmente al desarrollarse la prueba triaxial, el reacomodo de partículas aísla a las partículas grandes en el medio granular.

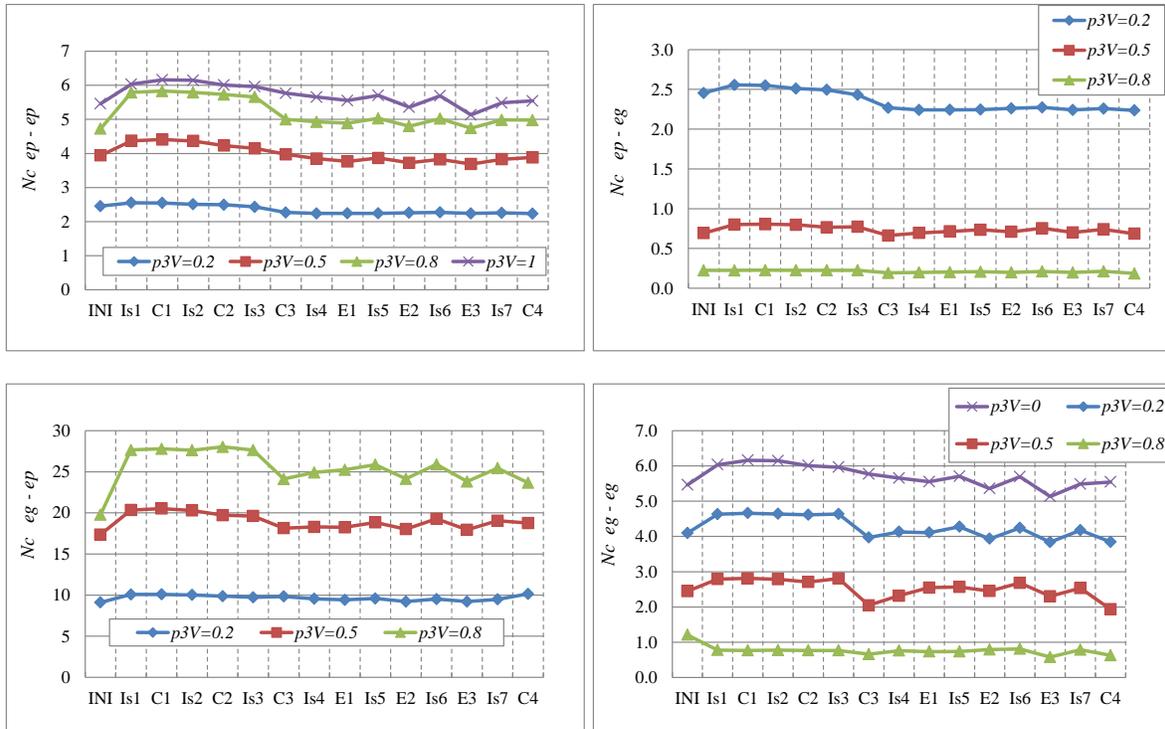


Figura 4.9. Evolución del número de coordinación por tamaño de partículas en mezclas binarias

El análisis del número de coordinación por tamaño de partículas ayuda a comprender la evolución de las conexiones entre los componentes de la mezcla granular. Podría ser de utilidad para estudiar fenómenos como la segregación y percolación en medios granulares.

### c) Granulometría continua

En el material de granulometría continua el número de coordinación aumenta con la aplicación del primer confinamiento isótropo (Is1) y disminuye gradualmente durante los ciclos de carga y descarga en compresión (C1 a Is4) como lo muestra la figura 4.10. En extensión (E1, E2 y E3) el  $N_c$  es menor respecto a los estados de confinamiento isótropo (Is5, Is6 y Is7).

Una muestra con granulometría continua presenta menor número de coordinación que una de granulometría uniforme. En granulometría continua existen pocas partículas grandes con un número grande de contactos, a la inversa, existen numerosas partículas pequeñas con pocos contactos. El efecto de las partículas pequeñas se impone estadísticamente en el medio granular.

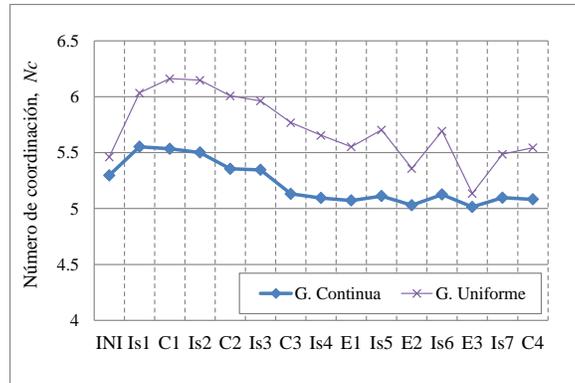


Figura 4.10. Evolución del número de coordinación en muestra con granulometría continua

De acuerdo al número de coordinación, se concluye que el estado inicial de una estructura granular es bastante diferente de la observada durante la prueba triaxial, debido a la gran diferencia de esfuerzos. El estado inicial está fuertemente afectado por el método de formación de las estructuras granulares.

De acuerdo a la granulometría, los materiales bimodales experimentan mayores cambios en el número de coordinación durante la prueba triaxial, sobre todo cuando las partículas pequeñas ocupan una alta proporción del volumen de los sólidos. El número de coordinación es menos sensible a los esfuerzos externos cuando se tiene un material granular con granulometría continua.

La evolución del número de coordinación refleja los cambios en la organización local de las partículas y puede ser independiente de la variación volumétrica de un medio granular. Por lo anterior, no es conveniente establecer correlaciones entre el  $N_c$  y la porosidad.

### 4.3 Anisotropía geométrica inducida

Cuando un medio granular se somete a diferentes condiciones de esfuerzos, diversos fenómenos ocurren en el interior como respuesta a la sollicitación externa. Por ejemplo, Auvinet (1986) explica que los planos tangentes en los contactos tienden a orientarse normalmente al esfuerzo principal mayor. Por lo tanto, se puede estudiar la componente geométrica de la anisotropía inducida a partir de los cambios en la repartición de contactos sobre la superficie de los granos.

### 4.3.1 Evolución de la repartición de contactos

En cada etapa de la prueba triaxial (tabla 4.1) se analiza la posición relativa de los contactos sobre la superficie de los granos. Únicamente se presta atención a la repartición de contactos en la latitud ( $\alpha$ ), en la longitud ( $\beta$ ) la repartición siempre es uniforme (figura 4.11) debido a que los esfuerzos horizontales se mantienen constantes.

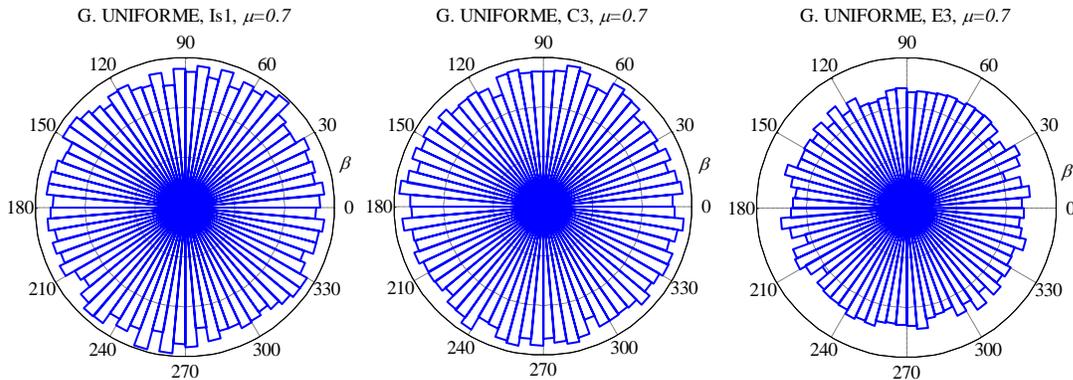


Figura 4.11. Evolución de la repartición de contactos en el azimut  $\beta$

#### a) Granulometría uniforme

La repartición de contactos inicial está dada por el equilibrio de las partículas bajo la acción de la gravedad terrestre y por el coeficiente de fricción interparticular. En la figura 4.12 se muestran los cambios que induce la aplicación de un confinamiento isótropo sobre la repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$ . Se obtiene una reducción de contactos entre  $40$  y  $50^\circ$  (zona de mayor concentración inicial) y un incremento en el ecuador de las partículas. El esfuerzo lateral desplaza algunos contactos hacia el ecuador de las partículas y se crean otros debido al cierre de poros en dirección horizontal. El resultado es una repartición de contactos ligeramente más uniforme. En esta etapa Is1, el aumento de contactos en el ecuador de las partículas está directamente relacionado con el incremento del  $N_c$ .

La evolución de la anisotropía geométrica asociada a la repartición de contactos durante la prueba triaxial se presenta en las figuras 4.13 y 4.14. En las primeras etapas de confinamiento isótropo y compresión (Is1 y C1) la repartición de contactos resulta poco afectada (la sollicitación está dirigida en la misma dirección que el campo de gravedad terrestre). Los contactos conservan sus posiciones relativas, lo que se refleja globalmente en los materiales como pequeñas deformaciones principalmente elásticas (ver curvas esfuerzo-deformación en la figura A.6).

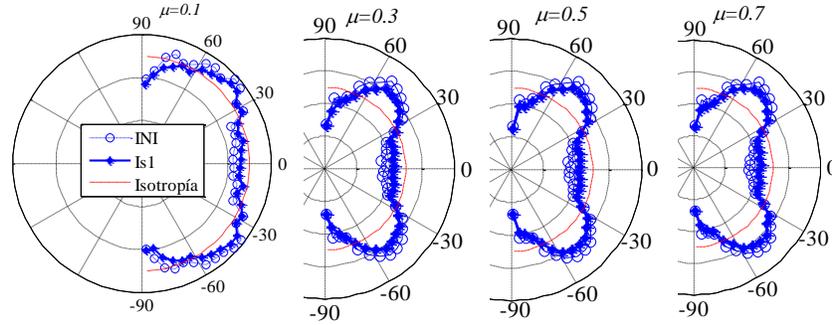


Figura 4.12. Repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  inicial e inducida con el confinamiento isótropo en materiales con granulometría uniforme

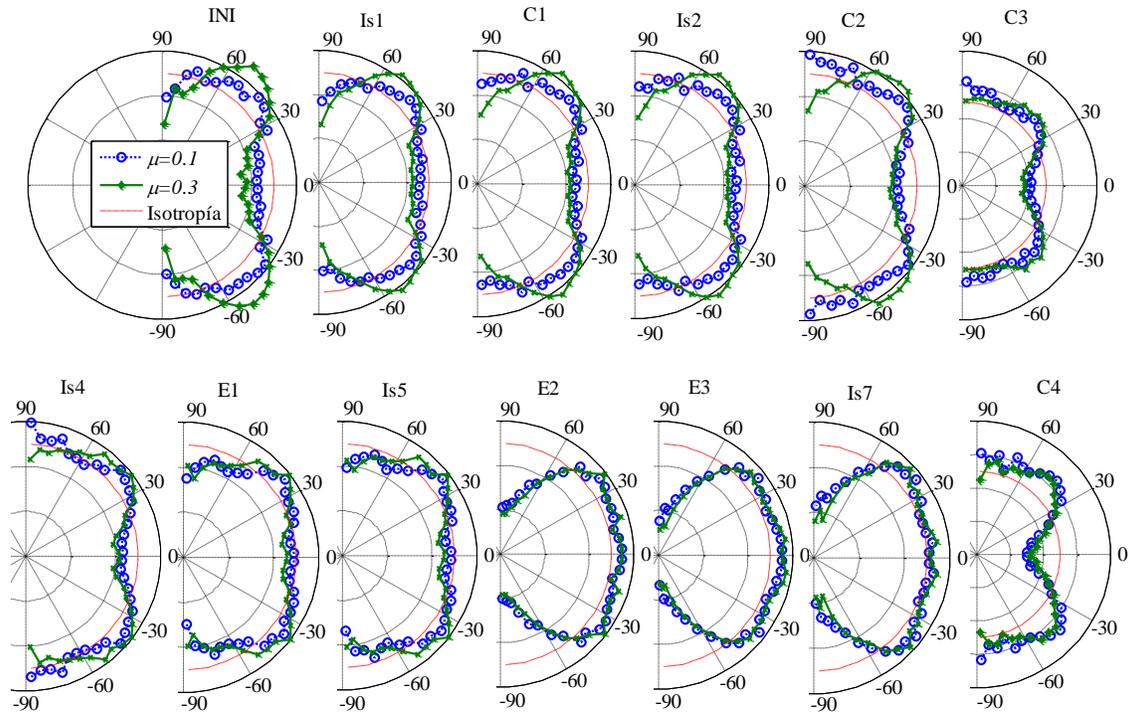


Figura 4.13. Evolución de la repartición de contactos en muestras de granulometría uniforme con  $\mu=0.1$  y  $\mu=0.3$

La descarga (etapa C1 a Is2) no implica cambios significativos en la anisotropía geométrica, los contactos no deslizan y la estructura granular está preparada para resistir nuevamente un esfuerzo desviador vertical. Las deformaciones recuperadas corresponden a las deformaciones elásticas de los granos.

Durante las etapas de compresión a mayores deformaciones (C2, C3) se obtiene un aumento de contactos en el intervalo de  $\alpha$  (30,60°). Esta concentración es más marcada

cuando el coeficiente de fricción aumenta. Los contactos se localizan principalmente en las posiciones que dan estabilidad a la estructura bajo la acción del esfuerzo desviador vertical.

Al reducir el esfuerzo vertical hasta un estado de extensión (esfuerzo vertical menor que la presión de confinamiento), disminuye la concentración de contactos en  $\alpha > 30^\circ$  y aumenta en el ecuador de las partículas. Esto ocurre gradualmente de E1 a E3. Cuando el esfuerzo desviador es mínimo, se alcanza la mayor concentración de contactos en  $\alpha \in (-30, 30^\circ)$  (etapa E3). El estado de esfuerzos en extensión es novedoso para el medio granular y es necesaria una reorganización de las partículas para resistir el esfuerzo principal mayor en dirección horizontal.

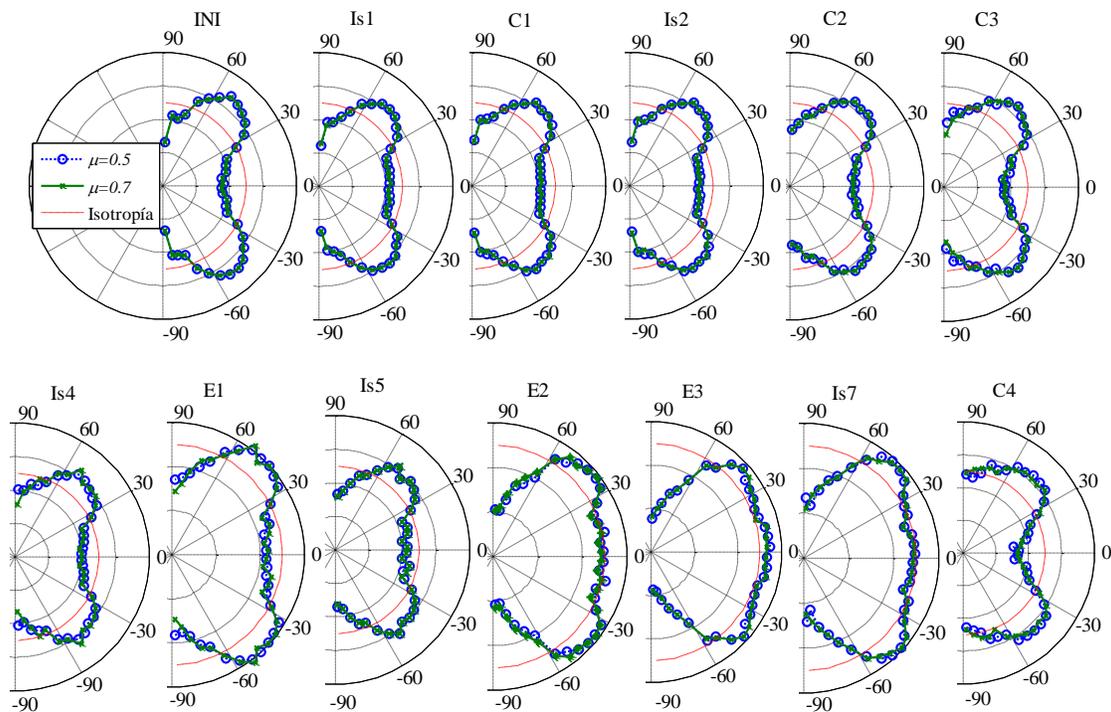


Figura 4.14. Evolución de la repartición de contactos en muestras de granulometría uniforme con  $\mu=0.5$  y  $\mu=0.7$

De acuerdo con la figura 4.6 el número de coordinación disminuye durante la prueba triaxial. En las etapas de extensión, los contactos formados cerca del ecuador son menos numerosos que los que desaparecen en latitudes mayores. Por lo tanto, la evolución de la anisotropía geométrica se debe a la pérdida de contactos, al deslizamiento de contactos y al rodamiento relativo entre partículas.

En las figuras 4.13 y 4.14 no se consideraron las etapas de confinamiento isótropo Is3 e Is6 debido a que la repartición de contactos es igual a la de sus respectivas etapas previas C2 y

E2. Esto es un efecto de memoria causado por el estado de esfuerzos anterior. Las muestras con coeficiente de fricción más bajo ( $\mu=0.1$  y  $0.3$ ) sufren mayores cambios asociados a una mayor debilidad de los contactos.

b) Granulometría bimodal

La repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  evoluciona durante la prueba triaxial como se muestra en la figura 4.15. En el estado inicial existe una marcada concentración de contactos en  $\alpha \in (30, 60^\circ)$ , la cual disminuye con la aplicación del confinamiento isótropo y resalta nuevamente al aumentar el esfuerzo desviador en compresión. En condiciones de extensión (por ejemplo en E3) se obtiene un aumento de contactos cerca del ecuador de las partículas. La repartición de contactos es aproximadamente uniforme en el intervalo de  $\alpha (-40, 40^\circ)$ . En los polos se tiene un déficit de contactos muy marcado.

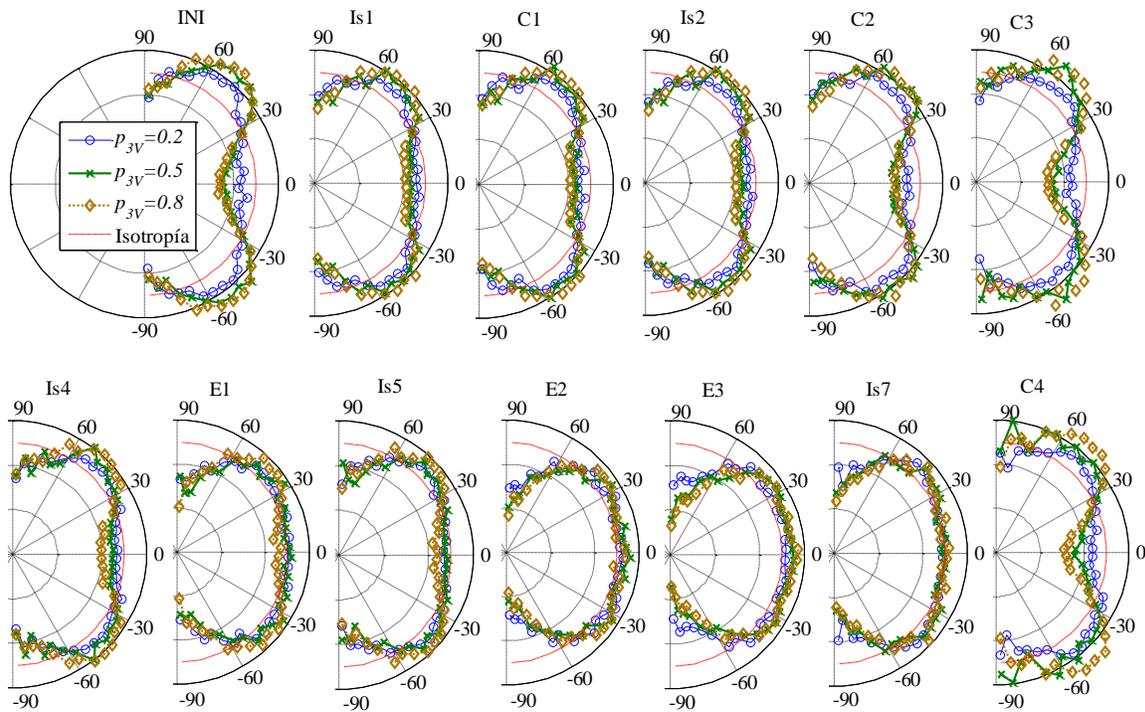


Figura 4.15. Evolución de la repartición de contactos  $\Gamma(\alpha)$  en mezclas binarias

Del estado inicial a la etapa Is4, la muestra con  $p_{3V}=0.8$  presenta mayor irregularidad en la repartición de contactos. Una mezcla donde prevalecen las partículas pequeñas (en número) tiene mayor anisotropía geométrica.

De acuerdo con las gráficas de esfuerzo-deformación (figura A.6), de deformación volumétrica (figura A.7) y de repartición de contactos (figura 4.15), los materiales granulares que desarrollan mayor resistencia y mayor dilatación presentan una mayor anisotropía en la repartición de contactos.

Para complementar la descripción de la repartición de contactos en las mezclas de dos componentes se realiza el análisis de los contactos por tamaño de partículas. En la figura 4.16 se observa que los contactos entre partículas pequeñas (*ep-ep*) tienen una repartición muy parecida a la de todos los contactos. En todos los casos analizados las partículas pequeñas son las más numerosas, por tal razón la repartición de los contactos *ep-ep* se impone en el medio granular.

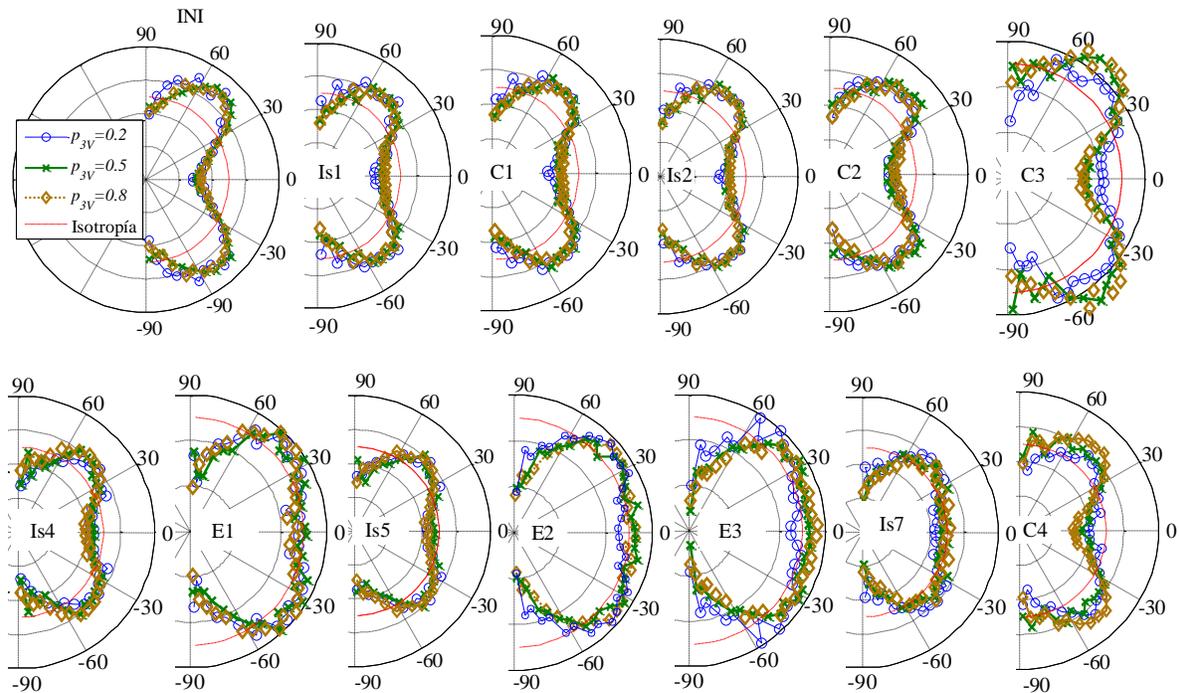


Figura 4.16. Repartición de contactos *ep-ep* durante la prueba triaxial, G. Bimodal  $a=3$ ,  $\mu=0.7$

La repartición de contactos de esferas pequeñas sobre las grandes (*ep-eg*) de la figura 4.17 indica que las partículas pequeñas se apoyan sobre las grandes principalmente en las etapas inicial, de confinamiento isótropo y de compresión (de INI a Is4). Cuando existe una alta proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}=0.8$ ), aparecen contactos en su hemisferio superior con las esferas grandes. A mayor deformación axial aumenta la proporción de contactos *ep-eg* en el hemisferio superior de las esferas pequeñas.

En las etapas de extensión (E1, E2 y E3), los contactos  $ep-eg$  se mueven gradualmente hacia el ecuador y es notoria la desaparición de este tipo de contactos en el hemisferio superior de las esferas pequeñas. En la muestra con  $p_{3V}=0.2$ , los contactos  $ep-eg$  permanecen en el hemisferio inferior durante toda la prueba triaxial porque las partículas pequeñas no son suficientes para rodear a las grandes.

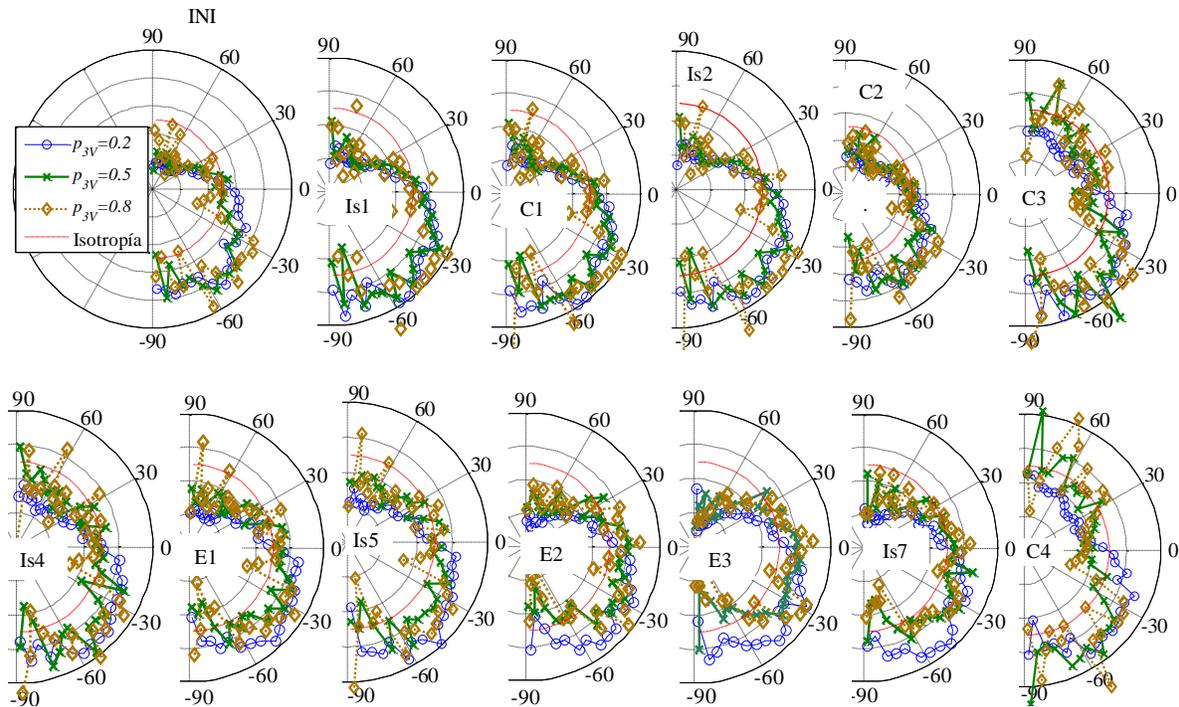


Figura 4.17. Repartición de contactos  $ep-eg$  durante la prueba triaxial, G. Bimodal  $a=3$ ,  $\mu=0.7$

La repartición de contactos  $eg-ep$  es inversa a la de los contactos  $ep-eg$ . La figura 4.18 muestra la función de repartición de los contactos de este tipo. Los picos que aparecen eventualmente se deben a la falta de representatividad estadística ocasionada por el limitado número de partículas grandes en el medio granular.

La figura 4.19 presenta la repartición de los contactos  $eg-eg$ . Únicamente en la muestra con  $p_{3V}=0.2$  puede observarse un comportamiento similar al de partículas uniformes durante la prueba triaxial. La irregularidad en la repartición de los contactos  $eg-eg$  es causada por una falta de representatividad estadística.

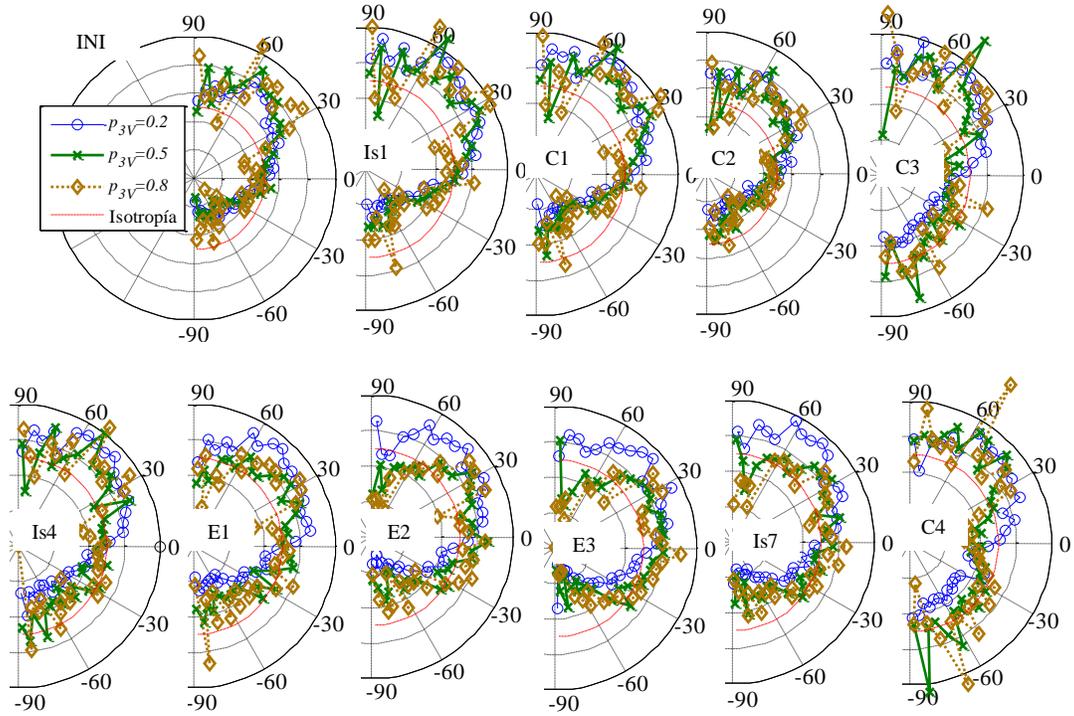


Figura 4.18. Repartición de contactos  $eg-ep$  durante la prueba triaxial, G. Bimodal  $a=3$ ,  $\mu=0.7$

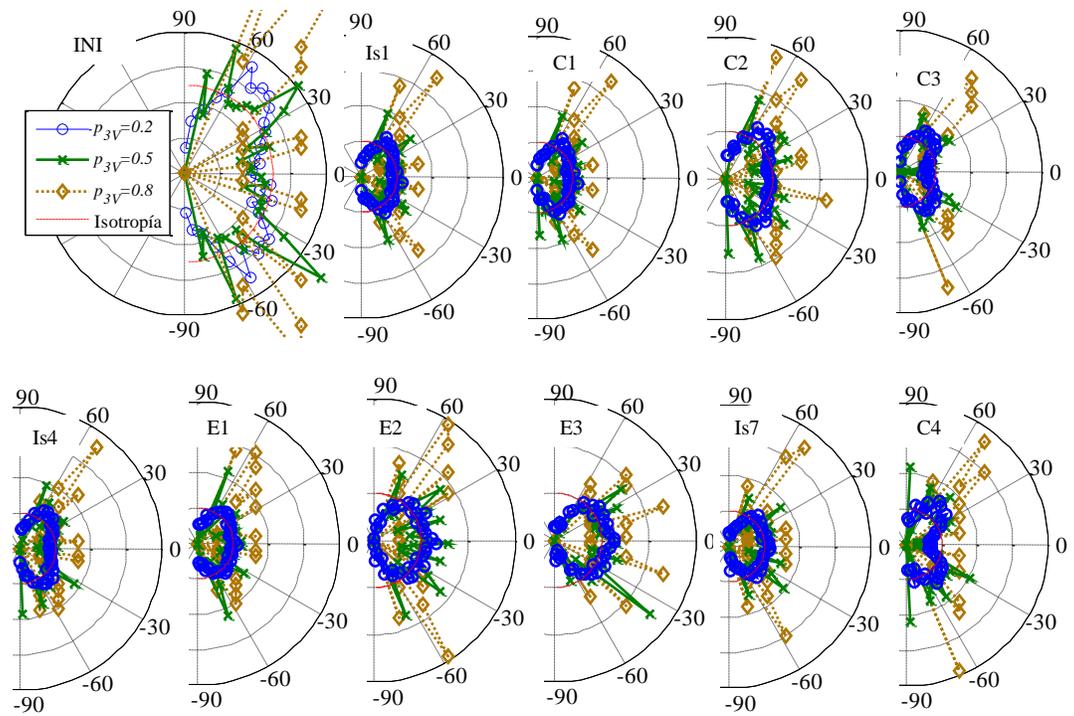


Figura 4.19. Repartición de contactos  $eg-eg$  durante la prueba triaxial, G. Bimodal  $a=3$ ,  $\mu=0.7$

c) Granulometría continua

La coexistencia de los diferentes tamaños de partículas se refleja en una repartición de contactos aproximadamente uniforme en la etapa inicial (INI). Durante las primeras etapas de la prueba triaxial, esta repartición permanece aproximadamente constante (ver etapas de Is1 a Is2 en la figura 4.20). A pequeñas deformaciones del medio granular, las partículas no cambian sus posiciones relativas.

A grandes deformaciones en compresión (etapa C3) se pierden contactos tanto en los polos como en el ecuador de las partículas pero aparecen otros contactos en latitudes de 50 a 60°.

En condiciones de extensión, al pasar de la etapa E1 a la E3 aumenta la concentración de contactos en la zona del ecuador de las partículas, mientras disminuye en los polos. Por lo tanto, en extensión, las posiciones cercanas al ecuador ofrecen mayor estabilidad a los contactos.

Los estados isotrópicos de esfuerzos (Is1, Is2, Is4, Is5 e Is7) ponen en evidencia el efecto de memoria de la estructura granular, en cada caso la repartición de contactos es casi igual a la del estado anterior de compresión o extensión. Esto significa que la descarga hasta el estado isotrópico de esfuerzos se realiza en un dominio principalmente elástico.

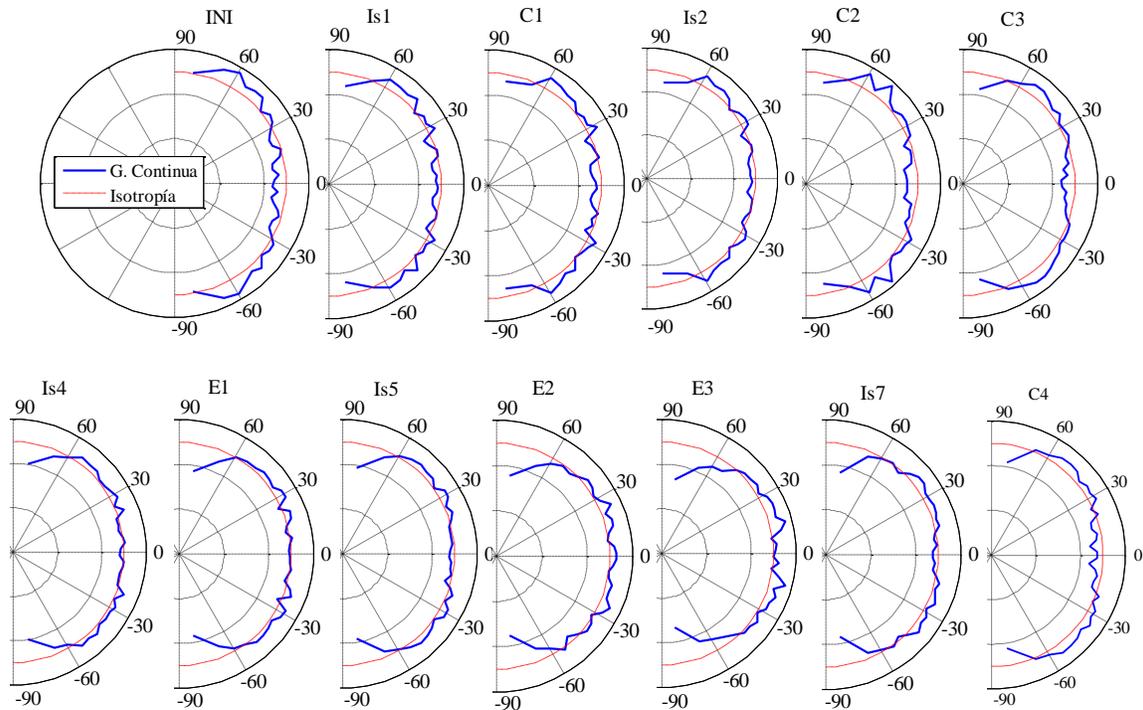


Figura 4.20. Evolución de la repartición de contactos en muestra con granulometría continua

Entre los materiales ensayados, el de granulometría continua presenta una de las resistencias más bajas de acuerdo con la figura 4.3 y A.6. También presenta una mayor uniformidad en la repartición de contactos. Esto indica que existe una baja trabazón entre los granos. Las partículas de diversos tamaños tienen mayor posibilidad de acomodarse sin brincar una sobre otra, lo que limita la dilatación del medio.

d) Repartición de contactos en histograma esférico

Para mayor claridad sobre la repartición de contactos, en la figura 4.21 se presentan algunos ejemplos tridimensionales de la repartición de contactos sobre la superficie de los granos. Se muestran casos de anisotropía inicial (granulometría uniforme con  $\mu=0.7$ ), anisotropía en extensión (granulometría uniforme con  $\mu=0.3$  en la etapa E3), repartición de los contactos en compresión en muestra de granulometría bimodal ( $p_{3V}=0.2$ ,  $a=3$  y  $\mu=0.7$  en C3) y en granulometría continua (muestra con  $a=10$ ,  $\mu=0.7$  en C3).

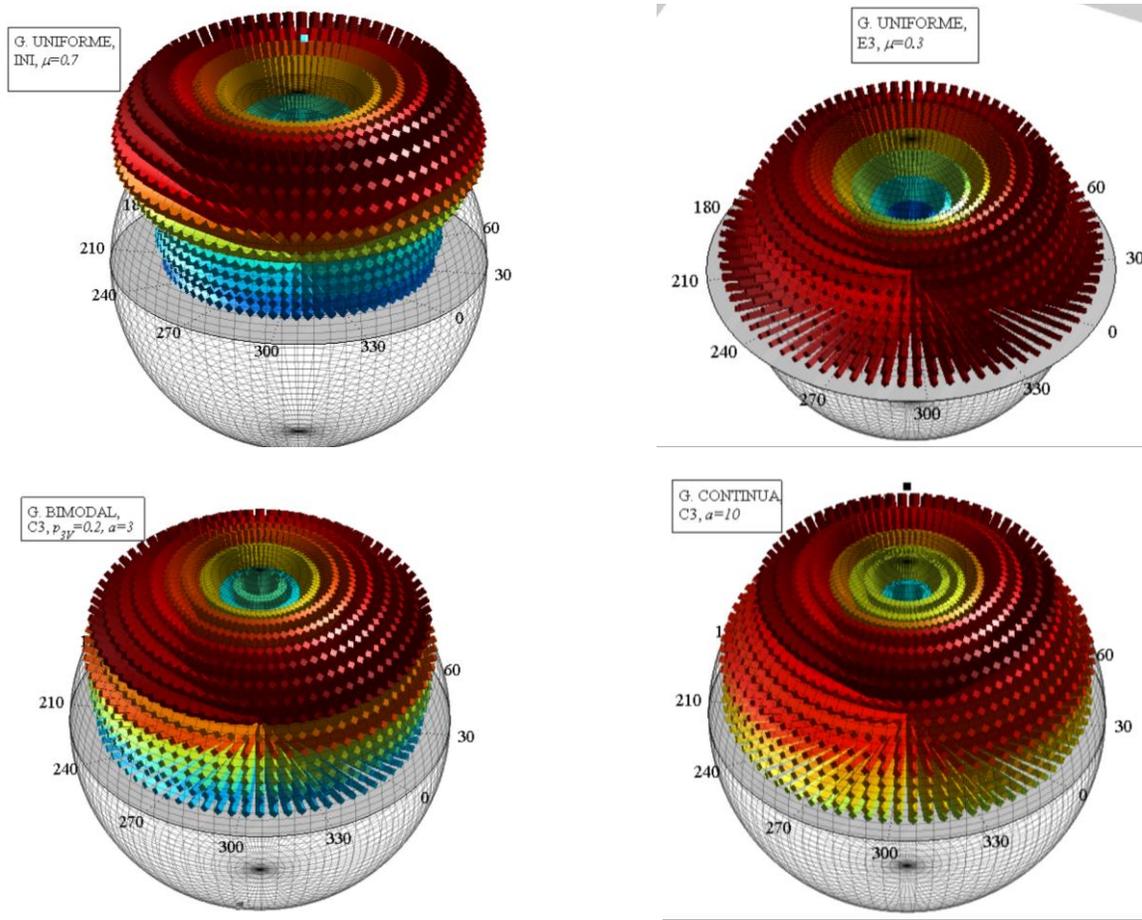


Figura 4.21. Ejemplos de repartición de contactos sobre la superficie de los granos

Puede notarse que desde la formación de la estructura existe un déficit de contactos en los polos de las partículas, ya que es una posición inestable. El número de contactos en esta región es mayor cuando se tiene un bajo coeficiente de fricción ( $\mu=0.1$ ) y después de varios ciclos de carga en compresión. También existe una falta de representatividad estadística si el conteo de contactos se hace por intervalos constantes del ángulo  $\alpha$ , lo cual puede mejorarse considerando intervalos de superficie constante y  $\alpha$  variable.

La evolución de la anisotropía geométrica es parte de la respuesta de un medio granular a los esfuerzos externos. Esta evolución se debe al colapso de grupos de granos metaestables, deslizamiento relativo de partículas por vencimiento de la fricción en los puntos de contacto, giro con o sin deslizamiento de una partícula sobre otra, desaparición y creación de contactos (Auvinet, 1986).

La evolución de la repartición de contactos sobre la superficie de los granos durante la prueba triaxial muestra que las deformaciones plásticas del medio granular son resultado del cambio de posición de los contactos y las deformaciones elásticas del medio son consecuencia de las deformaciones elásticas de las partículas en los contactos.

#### **4.3.2 Tensor de la estructura granular (fabric tensor)**

La información de la orientación de los vectores normales a los planos tangentes a los puntos de contacto se encuentra resumida en el tensor de la estructura. Los componentes principales de este tensor permiten evaluar la anisotropía geométrica. Para representar la anisotropía en un solo valor, se recurre al escalar de anisotropía dado por el cociente entre la componente desviadora y la componente isotrópica del tensor (ecuación 3.12).

Se puede verificar que en las etapas de compresión, la componente principal mayor del tensor de la estructura tiene dirección vertical. En las etapas de extensión, la componente principal menor de este tensor es la que tiene dirección vertical.

Geoméricamente, el tensor de la estructura se puede representar por el elipsoide que más se aproxima a la repartición de los contactos. Sin embargo, dicha repartición puede diferir significativamente de una forma elipsoidal como puede observarse en las figuras del inciso 4.3.1. En este caso se sugiere un tensor de cuarto orden mejora la aproximación (Cambou *et al.*, 2009).

a) Granulometría uniforme

El estado inicial de las muestras presenta una anisotropía relativamente alta, tan marcada como la que se observa en las etapas de compresión a grandes deformaciones (C3 y C4). En el estado inicial, el método de colocación vertical de las partículas impone un arreglo de partículas con anisotropía relevante.

La evolución de la anisotropía geométrica de acuerdo con el escalar de anisotropía (figura 4.22) corresponde con lo descrito el inciso anterior. La anisotropía disminuye al aplicar el confinamiento isótropo (etapa Is1), aumenta en presencia de un esfuerzo desviador en compresión (etapas C1, C2 y C3) y disminuye parcialmente cada vez que éste se retira (Is2, Is3 e Is4).

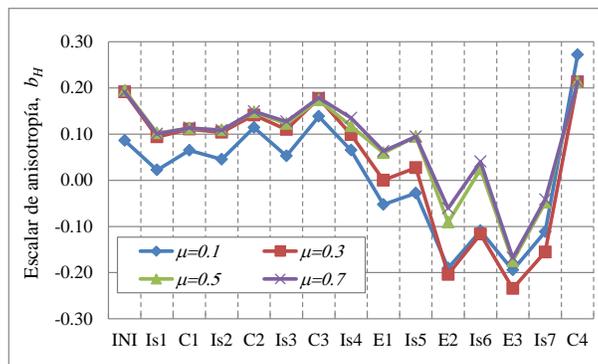


Figura 4.22. Evolución de  $b_H$  en muestras con granulometría uniforme durante la prueba triaxial

En las etapas de extensión E1, E2 y E3, los vectores normales a los planos tangentes a los puntos de contacto se orientan en dirección horizontal y por lo tanto el escalar de anisotropía toma valores negativos. En la máxima anisotropía en extensión se obtiene para la máxima deformación axial (E3).

El paso del escalar de anisotropía de valores negativos a positivos hace pensar que en algún momento no hay anisotropía, pero como se pudo observar en las gráficas de la repartición de contactos esto no sucede. Este es un defecto de considerar un único valor para describir la anisotropía geométrica.

Se recalca que en granulometría uniforme existe una estructuración con tendencia a formar arreglos regulares y su anisotropía geométrica es bien marcada. Por lo tanto un elipsoide (tensor de la estructura) resulta poco representativo de la repartición de contactos.

b) Granulometría bimodal

La figura 4.23 presenta la evolución de la anisotropía de las mezclas binarias en la prueba triaxial. En todas las muestras, la anisotropía disminuye al pasar del estado inicial al confinamiento isótropo Is1. El confinamiento isótropo favorece a una repartición de contactos más uniforme sobre la superficie de los granos.

En la primera etapa de compresión (C1) las deformaciones del medio son pequeñas y por lo tanto no se tienen cambios importantes en las posiciones de los contactos. A partir de la etapa C2 se tiene un aumento importante en la anisotropía cuando se aplica el esfuerzo desviador, así como una reducción al regresar al estado de confinamiento isótropo. En el paso de compresión a extensión (o a la inversa) se presenta el mayor cambio en la anisotropía geométrica.

En general, una pequeña proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}=0.2$ ) da como resultado un material que desarrolla menor anisotropía. En cambio, en la muestra con  $p_{3V}=0.8$  la anisotropía es más sensible a los cambios en los esfuerzos aplicados al medio granular.

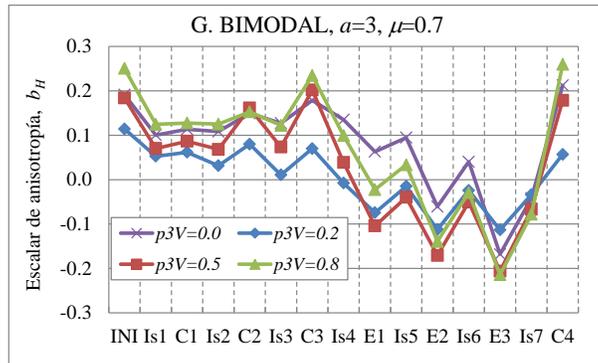


Figura 4.23. Evolución de  $b_H$  en mezclas binarias en prueba triaxial

c) Granulometría continua

Como se observó en la evolución de la repartición de contactos, la anisotropía geométrica en el material con granulometría continua es la menor entre las granulometrías analizadas.

El escalar de anisotropía de la figura 4.24 indica que la máxima anisotropía se presenta en la etapa inicial, experimenta una disminución con el primer confinamiento isótropo (Is1) y aumenta en los estados de esfuerzos en compresión (C1, C2, C3 y C4). En cada etapa de confinamiento isótropo, el escalar de anisotropía es muy cercano a cero. En las etapas de extensión (E1, E2 y E3) se obtiene eventualmente una anisotropía mayor que en las etapas de compresión precedentes.

La diversidad de tamaño de las partículas conduce irremediablemente a un mayor desorden en el medio granular y por lo tanto a una menor anisotropía respecto a un material con granulometría uniforme.

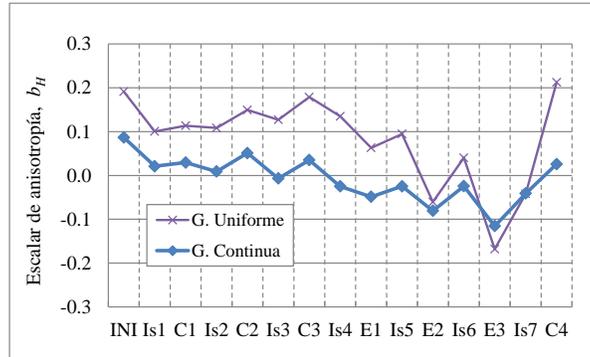


Figura 4.24. Evolución de  $b_H$  en muestra con granulometría continua en prueba triaxial

De acuerdo con los resultados en las distintas pruebas triaxiales, se puede decir que a mayores deformaciones axiales se desarrolla una mayor anisotropía geométrica. Los contactos viajan a posiciones que favorecen a la estabilidad de la estructura granular.

## 4.4 Evolución de las fuerzas de contacto

### 4.4.1 Magnitud de fuerzas

Tomando en cuenta que las densidades de probabilidad de las fuerzas de contacto presentan las mismas formas típicas mostradas en el inciso 3.4.7 independientemente del estado de esfuerzos, en esta sección únicamente se presentan la media, la desviación estándar, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de pico como medidas descriptivas. También se evalúa la fuerza media teórica dada por la ecuación (2.49) de Auvinet (1986), donde se considera que las fuerzas de contacto son proporcionales al número de contactos y a los esfuerzos actuantes en los planos tangentes a los puntos de contacto.

#### a) Granulometría uniforme

En las tablas 4.2 a 4.5 se presentan los esfuerzos en el medio granular obtenidos a partir de las fuerzas de contacto. En estas tablas, los esfuerzos se calculan con la ecuación 2.56 tomando en cuenta únicamente las partículas del núcleo central de las muestras granulares.

En la presente tesis se utilizan letras “*S*” para denotar los esfuerzos en el medio granular (sólidos y vacíos) y como se verá más adelante letras “ $\sigma$ ” para los esfuerzos al interior de las partículas.

Tabla 4.2. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.1$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	1.03	1.01	0.98	1.00	4009	2577	0.75	3.39	3549
C1	1.07	1.06	1.40	1.18	4559	2980	0.78	3.44	4050
Is2	1.05	1.04	1.11	1.07	4199	2778	0.79	3.45	3728
C2	1.07	1.06	1.59	1.24	4831	3411	1.02	4.12	4213
Is3	1.03	1.01	1.07	1.04	4122	2869	0.96	3.92	3603
C3	1.11	1.09	1.74	1.31	4968	3531	1.01	4.11	4429
Is4	1.03	1.02	1.10	1.05	4069	2853	0.95	3.88	3610
E1	1.02	0.99	0.76	0.92	3682	2579	0.92	3.75	3207
Is5	1.03	1.00	0.96	1.00	3917	2597	0.89	3.72	3404
E2	1.00	0.98	0.61	0.86	3527	2546	1.04	4.21	3074
Is6	1.02	0.99	0.96	0.99	3910	2567	0.85	3.71	3390
E3	0.99	0.99	0.60	0.86	3549	2579	1.05	4.27	3096
Is7	0.97	0.99	0.92	0.96	3866	2552	0.88	3.83	3305
C4	1.10	1.09	1.65	1.28	4767	3389	1.07	4.27	4209

*S*: esfuerzo medio,  $\mu_F$ : fuerza media,  $s_F$ : desviación estándar,  $\gamma_F$ : coeficiente de asimetría,  $\beta_F$ : coeficiente de pico,  $S_{zz}$ : esfuerzo principal vertical y  $F^*$ : fuerza media calculada con la ec. 2.49.

Tabla 4.3. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.3$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	0.95	0.93	0.88	0.92	4339	2367	0.50	3.02	3650
C1	1.01	0.99	1.50	1.17	5312	2833	0.44	3.00	4514
Is2	1.02	1.00	1.16	1.06	4849	2620	0.44	2.92	4143
C2	1.09	1.06	1.96	1.37	6286	4107	0.76	3.42	5368
Is3	1.06	1.03	1.23	1.11	5170	3320	0.71	3.32	4450
C3	1.12	1.10	2.06	1.43	6518	4907	1.12	4.40	5663
Is4	1.05	1.01	1.18	1.08	5122	3814	1.06	4.26	4411
E1	1.00	0.98	0.78	0.92	4429	3254	0.96	3.90	3803
Is5	1.01	0.99	1.01	1.00	4718	3312	0.96	3.92	4056
E2	1.00	0.99	0.51	0.83	4034	3124	1.11	4.32	3489
Is6	1.02	1.01	0.96	0.99	4596	3122	0.88	3.80	3927
E3	1.02	1.00	0.51	0.85	4186	3268	1.16	4.46	3560
Is7	1.02	1.01	0.91	0.98	4648	3189	0.95	4.02	3910
C4	1.02	1.08	2.24	1.44	6538	5014	1.14	4.45	5524

Tabla 4.4. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.5$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	0.71	0.71	0.58	0.67	3435	1701	0.46	3.21	2731
C1	0.80	0.80	1.50	1.03	5009	2464	0.48	3.36	4072
Is2	0.83	0.83	1.05	0.91	4389	2075	0.36	3.16	3608
C2	1.04	1.03	2.35	1.47	7205	4509	0.68	3.22	5867
Is3	1.01	1.00	1.28	1.10	5353	3122	0.60	3.27	4486
C3	1.14	1.13	2.52	1.60	7874	5540	0.93	3.87	6532
Is4	1.09	1.07	1.31	1.15	5798	3897	0.88	3.92	4889
E1	1.03	1.00	0.87	0.97	4994	3352	0.80	3.62	4170
Is5	0.97	0.97	1.10	1.01	5164	3171	0.72	3.61	4323
E2	0.96	0.94	0.46	0.79	4316	3103	0.90	3.72	3641
Is6	0.95	0.94	1.03	0.97	4946	3061	0.69	3.37	4188
E3	0.97	0.93	0.42	0.77	4346	3387	1.11	4.35	3687
Is7	0.94	0.91	0.95	0.93	4938	3270	0.80	3.64	4132
C4	1.17	1.16	3.02	1.78	9100	6577	1.04	4.09	7357

Tabla 4.5. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.7$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	0.61	0.61	0.45	0.56	2961	1429	0.47	3.38	2347
C1	0.67	0.67	1.31	0.88	4460	2096	0.61	3.78	3687
Is2	0.72	0.72	0.90	0.78	3877	1712	0.43	3.50	3160
C2	0.91	0.91	2.44	1.42	7218	4272	0.61	3.13	6162
Is3	0.91	0.90	1.23	1.01	5061	2682	0.50	3.22	4226
C3	1.08	1.09	2.77	1.65	8468	5707	0.85	3.72	7328
Is4	1.03	1.02	1.30	1.12	5796	3646	0.82	3.92	4863
E1	0.97	0.97	0.72	0.89	4747	3010	0.74	3.63	3970
Is5	0.97	0.97	1.10	1.01	5164	3171	0.72	3.61	4364
E2	0.97	0.95	0.49	0.80	4360	3036	0.84	3.61	3796
Is6	0.96	0.95	1.04	0.98	4950	3033	0.67	3.35	4237
E3	0.96	0.93	0.43	0.77	4359	3358	1.10	4.36	3849
Is7	0.94	0.92	0.96	0.94	4944	3246	0.79	3.62	4170
C4	1.31	1.26	2.94	1.84	9310	6881	1.10	4.44	8341

Durante toda la prueba triaxial, los esfuerzos en las paredes laterales  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$  permanecen constantes e igual a 1MPa. Sin embargo, los esfuerzos en el núcleo central son inferiores a causa del arqueado entre las paredes del recipiente. En la figura 4.25 se muestra la magnitud de las fuerzas de contacto de las partículas intersecadas por planos de corte horizontales. Para  $\mu=0.1$  se tiene una distribución uniforme de las fuerzas en el espacio, pero para  $\mu=0.7$  la magnitud de las fuerzas es mucho mayor en las esquinas de recipiente. El grosor de las líneas indica la magnitud de las fuerzas de contacto.

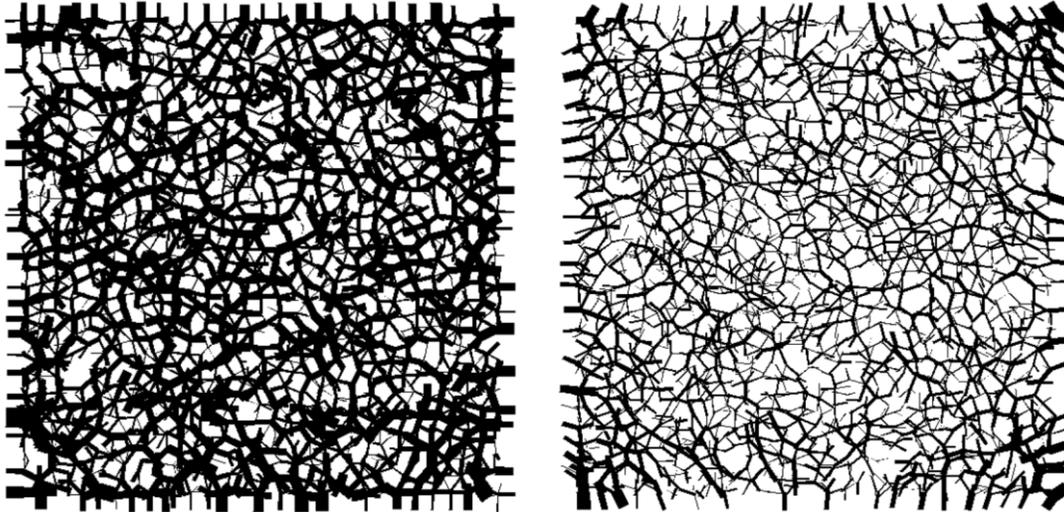


Figura 4.25. Fuerzas de contacto en cortes horizontales. Muestras con granulometría uniforme con  $\mu=0.1$  (izquierda) y  $\mu=0.7$  (derecha)

La magnitud de la fuerza media observada varía en proporción directa a los esfuerzos externos. La desviación estándar de las fuerzas de contacto aumenta cuando los esfuerzos aumentan porque, simultáneamente aumentan las fuerzas máximas y continúan existiendo contactos inactivos. Los coeficientes de asimetría y pico también aumentan durante la prueba triaxial, lo cual indica una mayor heterogeneidad en la red de fuerzas dentro del medio.

En las tablas 4.2 a 4.5 y en la figura 4.26 se observa que la fórmula de Auvinet (1986) subestima la fuerza media real. Considerando la alta heterogeneidad de las fuerzas de contacto y que el error está entre el 10 y el 20%, la fuerza media estimada ( $F^*$ ) ofrece una buena aproximación de la real.

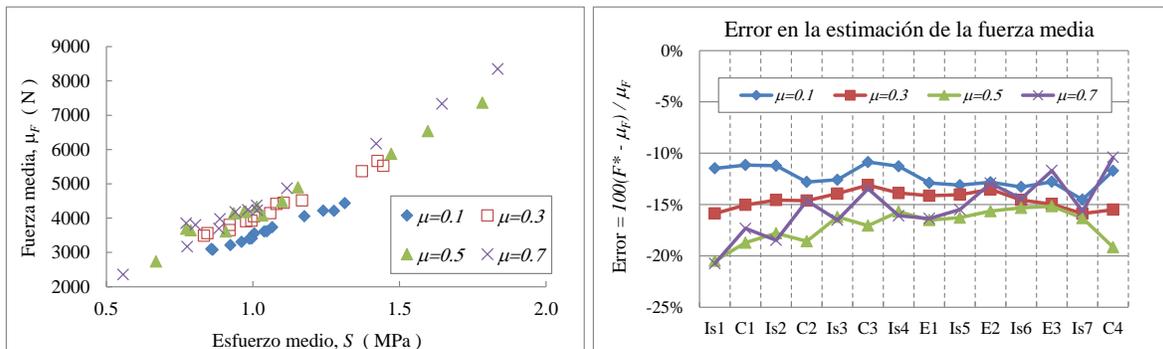


Figura 4.26. Fuerza media en medios granulares con granulometría uniforme y error en la estimación con la fórmula de Auvinet (1986)

La estimación de la fuerza media es mejor cuando el coeficiente de fricción interparticular es 0.1 posiblemente porque en este caso los factores geométricos prevalecen sobre los mecánicos. En efecto, para el cálculo de las fuerzas de contacto a partir de los esfuerzos, Auvinet (1986) considera únicamente los factores geométricos de la estructura granular.

b) Granulometría bimodal

El efecto de arqueado de las esquinas del recipiente tiene poca relevancia en esta granulometría. Los esfuerzos calculados (ecuación 2.56 y tablas 4.6 a 4.8) en el núcleo central están muy próximos a los esfuerzos aplicados en las paredes del recipiente.

Tomando en cuenta que los esfuerzos laterales  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$  permanecen aproximadamente constantes, la fuerza media observada es un reflejo de la variación del esfuerzo vertical. Puede observarse tanto en las tablas 4.6 a 4.8 como en la figura 4.27 que se obtienen mayores fuerzas de contacto cuando aumenta la proporción de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ).

Tabla 4.6. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con  $a=3$ ,  $p_{3V}=0.2$  y  $\mu=0.7$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	1.05	1.06	1.00	1.04	4205	4086	1.15	4.37	5692
C1	1.04	1.05	1.50	1.20	4829	4858	1.36	5.17	6569
Is2	1.05	1.06	1.02	1.04	4193	4206	1.22	4.52	5759
C2	1.01	1.01	2.09	1.37	5653	6880	1.99	8.10	7798
Is3	1.04	1.05	1.03	1.04	4174	4817	1.58	5.91	5827
C3	1.00	0.96	1.97	1.31	5451	8585	2.71	12.96	7906
Is4	1.00	0.97	1.02	1.00	4172	6363	2.42	10.69	5866
E1	0.99	1.01	0.59	0.86	3670	5634	2.20	8.74	5206
Is5	0.99	0.99	0.98	0.99	4039	5916	2.18	8.87	5740
E2	0.99	1.00	0.44	0.81	3507	5790	2.41	9.83	5063
Is6	1.00	1.01	0.97	0.99	4040	5865	2.07	7.96	5727
E3	0.98	1.03	0.45	0.82	3511	6023	2.57	10.83	5192
Is7	1.01	1.03	1.01	1.02	4069	6080	2.14	8.23	5943
C4	0.99	1.00	1.97	1.32	5009	8584	2.94	14.34	8405

$S$ : esfuerzo medio,  $\mu_F$ : fuerza media,  $\sigma_F$ : desviación estándar,  $\gamma_F$ : coeficiente de asimetría,  $\beta_F$ : coeficiente de pico,  $S_{zz}$ : esfuerzo principal vertical y  $F^*$ : fuerza media calculada con la ec. 2.49.

## Capítulo 4. Comportamiento mecánico de medios granulares y evolución de su estructura

Tabla 4.7. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con  $a=3$ ,  $p_{3V}=0.5$  y  $\mu=0.7$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	1.13	1.08	1.01	1.07	4169	2833	1.23	5.97	4818
C1	1.10	1.05	1.51	1.22	4746	3194	1.32	6.54	5450
Is2	1.12	1.07	1.03	1.07	4173	2867	1.23	5.93	4816
C2	0.98	0.96	2.44	1.46	6250	5385	1.97	10.08	7072
Is3	1.07	1.03	1.05	1.05	4341	3378	1.45	7.10	4912
C3	0.98	1.01	2.31	1.43	6247	6753	2.98	18.71	7345
Is4	1.01	1.02	1.03	1.02	4477	4598	2.44	13.78	5113
E1	1.06	1.04	0.60	0.90	3994	4156	2.06	9.66	4654
Is5	1.05	1.04	1.00	1.03	4321	4237	2.08	10.10	5043
E2	1.07	1.03	0.46	0.85	3763	4299	2.54	13.17	4581
Is6	1.06	1.02	1.01	1.03	4293	4252	2.16	10.67	5108
E3	1.07	1.03	0.43	0.84	3713	4616	3.00	17.31	4644
Is7	1.05	1.00	1.00	1.02	4281	4470	2.47	13.50	5052
C4	0.99	0.98	2.26	1.41	6091	6974	3.47	24.51	7287

Tabla 4.8. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con  $a=3$ ,  $p_{3V}=0.8$  y  $\mu=0.7$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	1.09	1.08	0.99	1.05	4423	2002	0.66	4.68	4112
C1	1.07	1.06	1.46	1.20	4998	2111	0.71	5.59	4675
Is2	1.09	1.08	0.99	1.05	4416	1999	0.65	4.67	4096
C2	1.00	0.97	2.74	1.57	6860	4158	1.09	6.29	6582
Is3	1.06	1.05	1.03	1.05	4532	2299	0.62	4.44	4179
C3	1.03	0.97	2.36	1.45	7321	5785	1.59	8.52	6895
Is4	1.05	1.00	1.05	1.03	5121	3769	1.23	6.36	4722
E1	1.06	1.02	0.70	0.93	4631	3440	1.06	4.71	4294
Is5	1.05	1.01	1.05	1.04	4926	3500	1.10	5.16	4621
E2	0.99	1.01	0.50	0.83	4367	3522	1.28	5.45	3978
Is6	1.00	1.01	1.03	1.01	4858	3460	1.09	4.97	4476
E3	1.00	0.99	0.44	0.81	4278	3598	1.50	6.81	3937
Is7	1.00	0.99	1.02	1.00	4876	3533	1.13	5.25	4441
C4	1.02	1.00	2.39	1.47	7256	6085	1.78	9.41	6889

El esfuerzo desviador aplicado en el primer ciclo de carga (C1) no modifica la red de fuerzas, la desviación estándar de las fuerzas de contacto permanece aproximadamente constante en estas etapas (hasta Is2). Si el esfuerzo desviador aumenta (C2), la desviación estándar de las fuerzas aumenta sin regresar a los valores iniciales. Esta es otra evidencia de que la muestra granular registra un efecto de memoria en el transcurso de la prueba triaxial.

Los coeficientes de asimetría y pico son mayores en las muestras con  $p_{3V}=0.2$  y  $0.5$ . El coeficiente de asimetría indica que las cadenas de fuerzas están más concentradas. El

coeficiente de pico señala que al mismo tiempo existen fuerzas pequeñas muy numerosas que aumentan el pico de la densidad de probabilidad (contactos inactivos).

El error en la estimación de la fuerza media es mayor para  $p_{3V}=0.2$  y  $0.5$ , posiblemente debido a la menor representatividad de las partículas pequeñas con respecto a la mezcla con  $p_{3V}=0.8$  (figura 4.27).

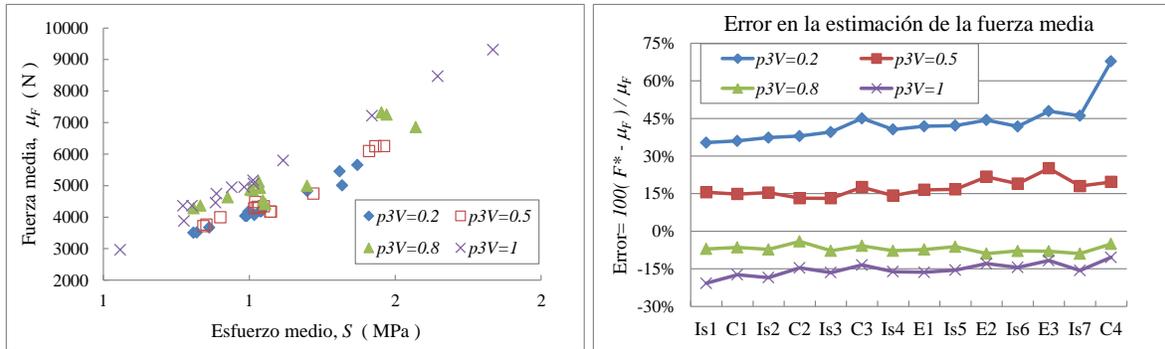


Figura 4.27. Fuerza media en medios granulares con granulometría bimodal y error en la estimación con la fórmula de Auvinet (1986)

c) Granulometría continua

En la muestra con granulometría continua se desarrollan fuerzas de menor magnitud que en la de granulometría uniforme (tabla 4.9 y figura 4.28). La desviación estándar es la mínima entre todas las granulometrías analizadas. Los coeficientes de asimetría y pico alcanzan valores máximos en la granulometría continua, lo cual indica la presencia de algunas fuerzas muy grandes (asimetría) y una alta proporción de fuerzas pequeñas (pico).

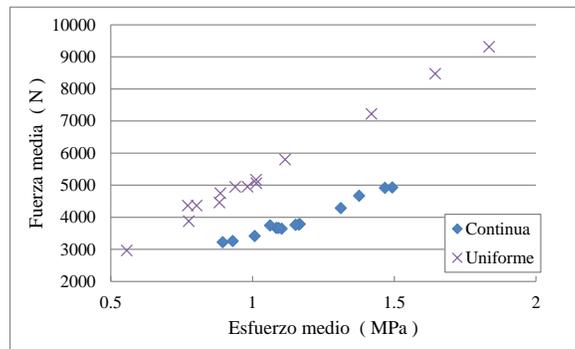


Figura 4.28. Relación entre la fuerza media y el esfuerzo medio en muestra con granulometría continua

Tabla 4.9. Esfuerzos en el medio granular (núcleo central) y primeros momentos de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial, en muestra de granulometría continua con  $a=10$  y  $\mu=0.7$

ETAPA	$S_{xx}$ (MPa)	$S_{yy}$ (MPa)	$S_{zz}$ (MPa)	$S$ (MPa)	$\mu_F$ (N)	$s_F$ (N)	$\gamma_F$	$\beta_F$	$F^*$ (N)
Is1	1.14	1.15	1.19	0.56	3773	4149	1.56	6.68	6865
C1	1.11	1.14	1.69	0.88	4284	4962	1.91	8.95	7823
Is2	1.13	1.17	1.20	0.78	3785	4307	1.69	7.37	6937
C2	1.09	1.10	2.29	1.42	4924	6972	2.67	13.93	7798
Is3	1.11	1.14	1.21	1.01	3763	4915	2.17	10.10	7123
C3	1.06	1.03	2.31	1.65	4914	8626	3.60	23.73	9707
Is4	1.05	1.06	1.14	1.12	3666	5943	3.08	18.25	6955
E1	1.08	1.09	0.86	0.89	3413	5409	2.59	12.38	6517
Is5	1.09	1.10	1.13	1.01	3643	5670	2.75	14.17	7041
E2	1.06	1.13	0.50	0.80	3219	5453	2.74	12.98	6056
Is6	1.06	1.14	1.08	0.98	3662	5508	2.43	10.94	6956
E3	1.15	1.16	0.48	0.77	3255	5867	3.20	17.58	6430
Is7	1.09	1.09	1.01	0.94	3741	5824	2.60	12.33	6783
C4	1.00	1.02	2.11	1.84	4670	8510	3.66	23.72	8833

$S$ : esfuerzo medio,  $\mu_F$ : fuerza media,  $\sigma_F$ : desviación estándar,  $\gamma_F$ : coeficiente de asimetría,  $\beta_F$ : coeficiente de pico,  $S_{zz}$ : esfuerzo principal vertical y  $F^*$ : fuerza media calculada con la ec. 2.49.

La ecuación 2.49 sobrestima la magnitud de la fuerza media hasta en un 100% en el material de granulometría continua. Se requieren análisis más detallados para lograr una mejor aproximación.

#### 4.4.2 Partículas inactivas

Se revisa la evolución las partículas inactivas durante la prueba triaxial considerando que pueden existir algunas implicaciones sobre la estructura de los medios granulares.

La proporción, en número, de partículas inactivas es el cociente del número de partículas inactivas ( $N_{pi}$ ) entre el número total de partículas en la muestra ( $N_{es}$ ). La proporción en volumen es la proporción que representa el volumen de las partículas inactivas ( $V_{pi}$ ) respecto al volumen de sólidos ( $V_s$ ) del material granular.

##### a) Granulometría uniforme

La máxima proporción de partículas inactivas se obtiene en el estado inicial. Una vez que se aplica el confinamiento isótropo (Is1), las partículas se activan porque se requiere de la

participación de casi todas las partículas para resistir los esfuerzos. La figura 4.29 muestra que la proporción de partículas inactivas (en número o volumen) del material con  $\mu=0.1$  pasa del 1.4% a aproximadamente el 0.2% del estado inicial al resto de la prueba triaxial.

Para el material con  $\mu=0.3$ , la proporción de partículas inactivas pasa de 0.8% en el estado inicial a menos del 0.2% en las primeras etapas de confinamiento isotrópico y de compresión (Is1 a Is3). La proporción de partículas inactivas aumenta en compresión a grandes deformaciones (C3 y C4) y en las etapas de extensión debido a la formación de nuevas cadenas de fuerzas.

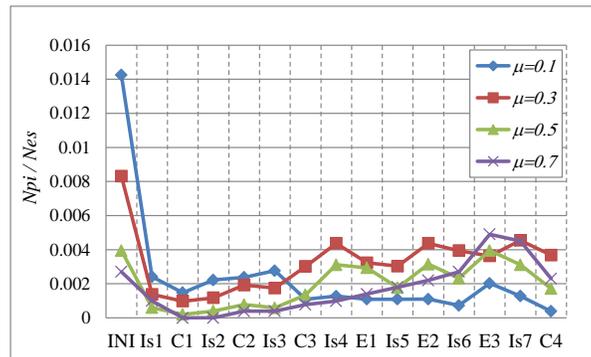


Figura 4.29. Evolución de partículas inactivas en muestras con granulometría uniforme

Cuando se tiene un coeficiente de fricción interparticular  $\mu \geq 0.5$ , la proporción inicial de partículas inactivas es menor. En las primeras etapas de compresión y de confinamiento isotrópico (Is1, C1, Is2, C2 e Is3) prácticamente desaparecen las partículas inactivas, pero su proporción aumenta a partir de la etapa de compresión C3.

En granulometría uniforme, un coeficiente de fricción alto, como  $\mu=0.7$ , permite la formación de cadenas de fuerzas y en consecuencia aumenta la proporción de partículas inactivas debido al efecto de arqueo.

#### b) Granulometría bimodal

En una mezcla binaria con baja proporción en volumen de partículas pequeñas como  $p_{3v}=0.2$ , las partículas pequeñas pueden quedar sueltas en los huecos que forman las partículas grandes. En la figura 4.30 se observa que, inicialmente se tiene un 4% ó 1% de partículas inactivas (en número y volumen respectivamente), el porcentaje disminuye de Is1 a Is2 y aumenta con la aplicación del esfuerzo desviador tanto en compresión como en extensión (C2, C3, E1 y E2). A grandes deformaciones (E3 y C4) la proporción de

partículas inactivas disminuye posiblemente porque las cadenas de fuerzas son vencidas y se requiere de la intervención de cada vez más partículas.

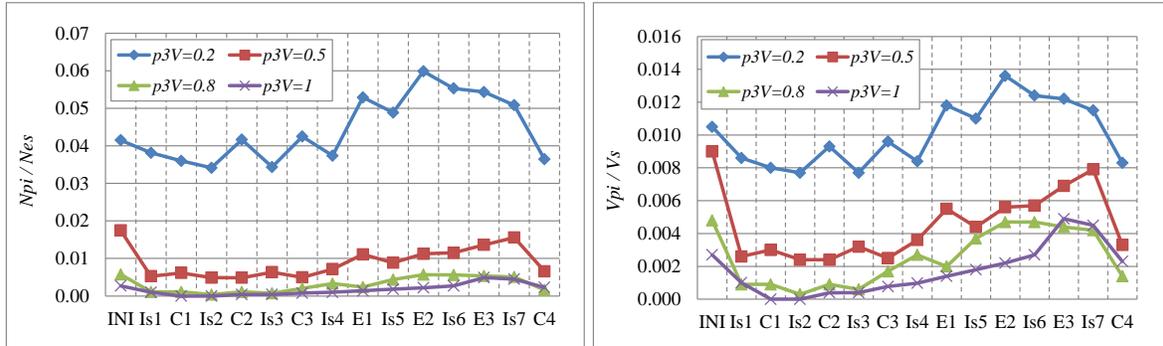


Figura 4.30. Evolución de partículas inactivas en mezclas binarias, en número (izquierda) y en volumen (derecha)

Al aumentar la proporción de partículas pequeñas en la mezcla, se obtiene cada vez una menor proporción de partículas inactivas. Para  $p_{3V} \geq 0.8$ , el esqueleto granular es completamente dependiente de las partículas pequeñas por lo que la posibilidad de quedar inactivas es despreciable.

En todos los casos analizados, por inspección se verificó que las partículas inactivas en una mezcla de dos componentes son exclusivamente partículas pequeñas.

### c) Granulometría continua

Las partículas inactivas de la muestra con granulometría continua representan inicialmente el 5 y 3% del número de partículas y del volumen de sólidos respectivamente. Durante la prueba triaxial, la proporción en número varía entre el 4 y 6%, mientras que la proporción en volumen se mantiene por debajo del 1% (figura 4.31).

En la estructura inicial se tienen partículas inactivas relativamente grandes, pero al aplicarse los esfuerzos externos, las partículas más pequeñas son las únicas que pueden quedar en los poros y permanecer inactivas.

Las características de las partículas inactivas, tal como el número de coordinación, la repartición de contactos, etc., pueden ser particularmente distintas a las del medio granular y merece ser objeto de una investigación detallada. Por la baja proporción en la que se encuentran, en esta tesis se acepta que las partículas inactivas no introducen un sesgo al describir la estructura granular tomándolas en cuenta.

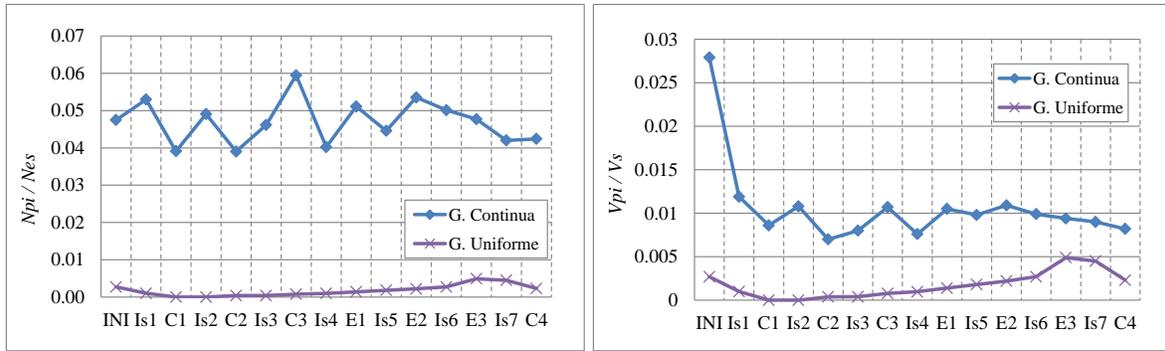


Figura 4.31. Evolución de partículas inactivas en muestras con granulometría continua, en número (izquierda) y en volumen (derecha)

### 4.4.3 Orientación de fuerzas

La orientación de las fuerzas de contacto es de gran relevancia para describir la respuesta mecánica de los medios granulares sometidos a diferentes estados de esfuerzos. Por ejemplo, la estructura granular puede conservar la misma posición de sus contactos cambiando únicamente la orientación y magnitud de las fuerzas de contacto.

#### a) Granulometría uniforme

En la figura 4.32 se presentan los histogramas polares del ángulo  $\alpha_F$  (que forma la fuerza de contacto con el plano horizontal) en el estado inicial y en el primer confinamiento isótropo. Cuando el coeficiente de fricción es  $\mu=0.1$  se desarrollan fuerzas cortantes muy pequeñas y por lo tanto, la orientación de las fuerzas es muy similar a la de las normales a los planos tangentes a los contactos. En la figura 4.12 se observó que en el estado inicial y primer confinamiento isótropo la repartición de contactos permanece casi constante.

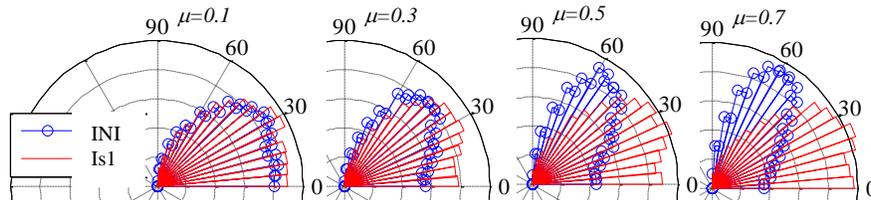


Figura 4.32. Histogramas polares de  $\alpha_F$  en muestras de granulometría uniforme. Estado inicial y primer confinamiento isótropo

Cuando se consideran coeficientes de fricción interparticular grandes, en el estado inicial las fuerzas se orientan con la gravedad. La aplicación de un estado isótropo de esfuerzos genera una orientación isótropa de fuerzas de contacto, por lo que respecto al estado inicial se tiene un aumento de las fuerzas orientadas en dirección horizontal.

Se recurre a la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  resulta de gran utilidad para describir simultáneamente la orientación de fuerzas y la latitud de los puntos de contacto. La latitud  $\alpha$  de un punto de contacto tiene el mismo valor numérico que el ángulo que forma la normal al plano tangente en el punto de contacto con el plano horizontal, en este trabajo se usa esta equivalencia para describir la orientación de las fuerzas.

Para fines didácticos solo se muestran las etapas más ilustrativas de la prueba triaxial correspondientes al material con  $\mu=0.7$ . En esta muestra se observa con mayor claridad la evolución de la orientación de las fuerzas de contacto durante la prueba triaxial.

En la figura 4.33 se observa que en el estado inicial los contactos se concentran principalmente en  $\alpha \in (35, 55^\circ)$  y las fuerzas en  $\alpha_F \in (45, 65^\circ)$ . Siempre existe una simetría en la densidad conjunta ( $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$ ) debido a la paridad de fuerzas (tercera ley de Newton).

Con la aplicación del confinamiento isótropo (Is1) la densidad de probabilidad conjunta se muestra que las fuerzas y las normales a los contactos están aproximadamente alineadas ( $\alpha = \alpha_F$ ). Las fuerzas cambian de dirección para equilibrar el esfuerzo lateral que no existía durante la formación del medio granular. Estadísticamente, las fuerzas se alinean con las normales a los contactos.

Cuando se aplica el esfuerzo desviador en compresión vertical (por ejemplo en la etapa C3) las fuerzas se orientan con el esfuerzo principal mayor. En la densidad de probabilidad  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  se observa un ángulo  $\alpha_F$  mayor que  $\alpha$ .

Después de retirar el esfuerzo desviador de compresión (Is4), la densidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  tiene una mayor uniformidad que en la etapa C3. Se observa que para una posición dada del contacto, frecuentemente las fuerzas tienen una menor inclinación que las normales a los contactos  $abs(\alpha_F) < abs(\alpha)$ . Esto se debe a que en el confinamiento isótropo, los esfuerzos horizontales aplicados al espécimen toman importancia y por lo tanto las fuerzas se orientan en la misma dirección.

En las etapas de extensión es más evidente que las fuerzas se orientan preferentemente en dirección horizontal. Por ejemplo, los contactos con  $\alpha \in (0, 40)$  tienen una alta proporción de fuerzas con  $\alpha_F = 0^\circ$ . Estas etapas ponen en evidencia que se requiere de grandes cambios en los esfuerzos y deformaciones en el medio granular para eliminar la configuración inducida por los estados de esfuerzos anteriores.

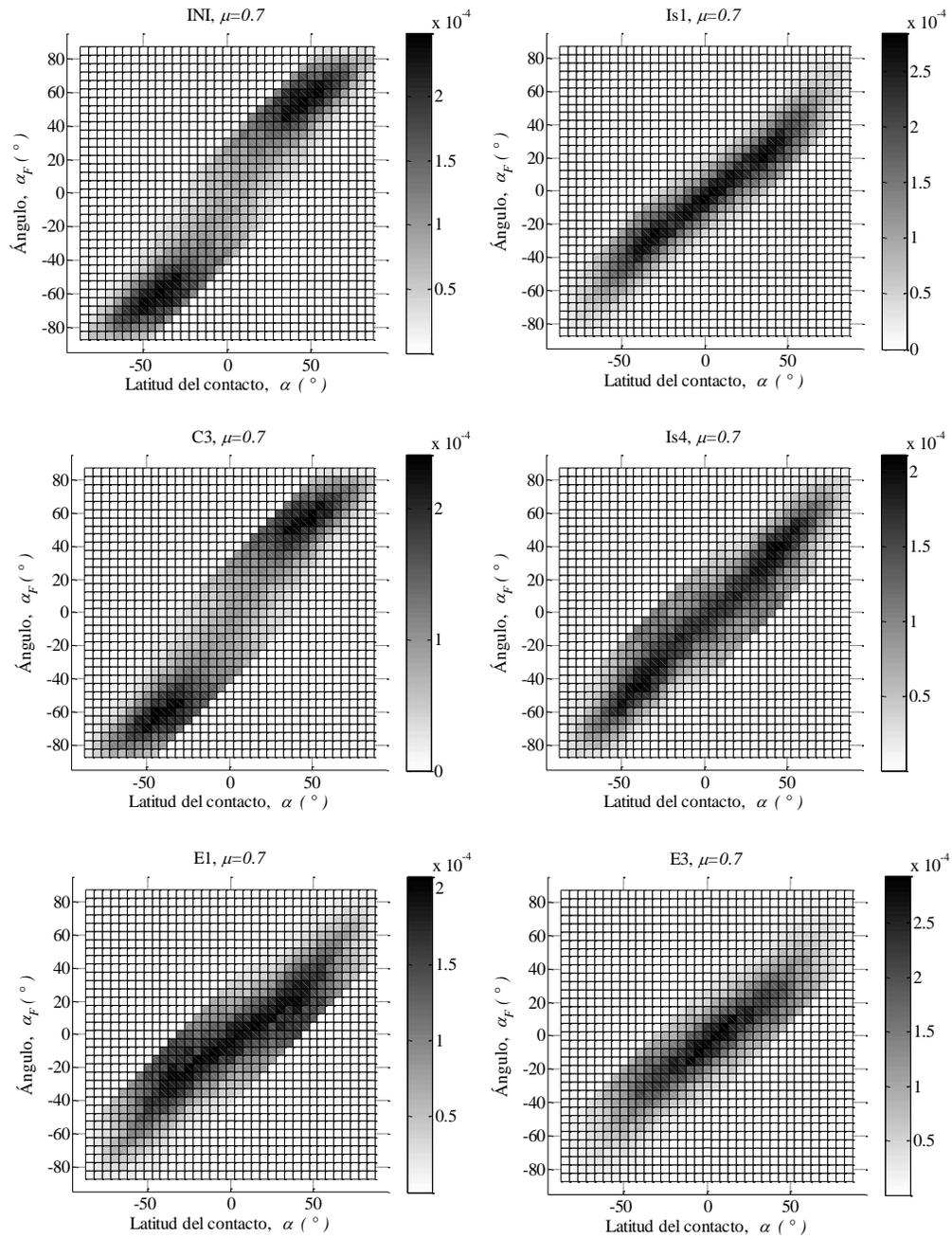


Figura 4.33. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.7$

De manera cualitativa se puede decir que la anisotropía mecánica, asociada a la orientación de las fuerzas de contacto, es más sensible a los esfuerzos externos que la anisotropía geométrica. Las fuerzas se orientan de inmediato en la dirección del esfuerzo principal mayor mientras que los contactos cambian gradualmente su repartición. En un medio granular, primero se moviliza la anisotropía mecánica y después la geométrica.

b) Granulometría bimodal

En las figuras 4.34 a 4.36 se muestra la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en las mezclas de dos componentes con diferentes proporciones de partículas pequeñas ( $p_{3V}$ ). La forma de esta densidad está afectada por la granulometría.

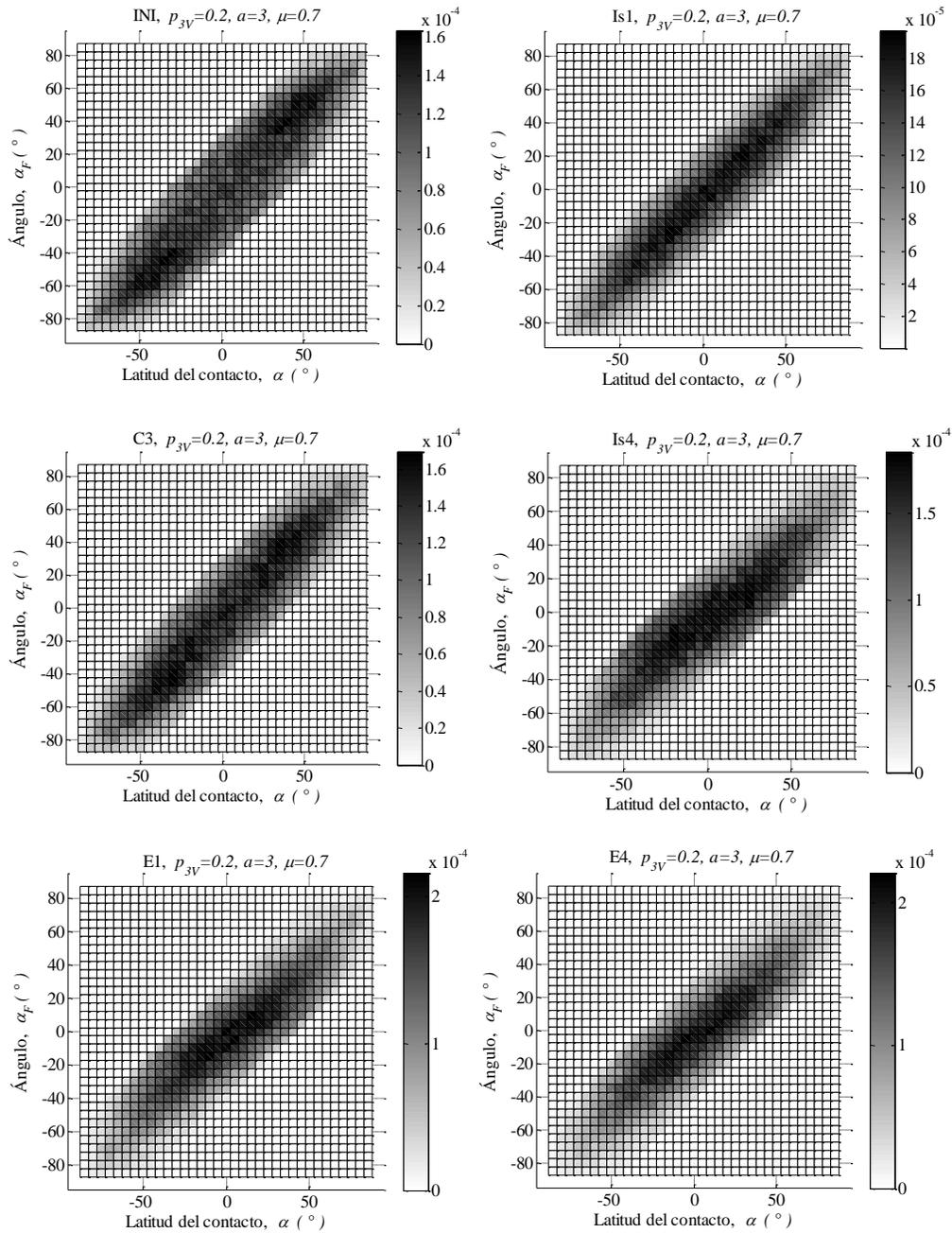


Figura 4.34. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.2$

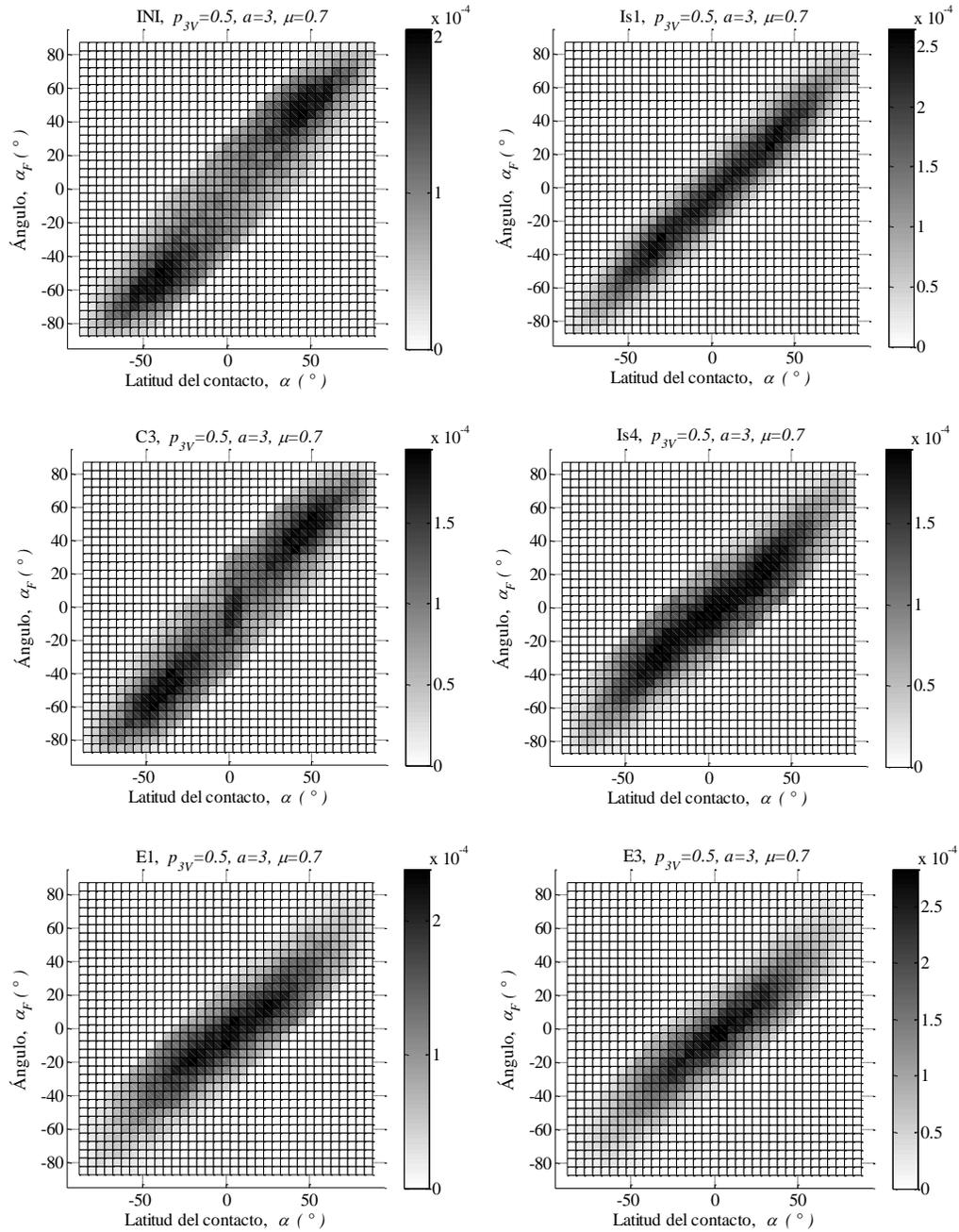


Figura 4.35. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.5$

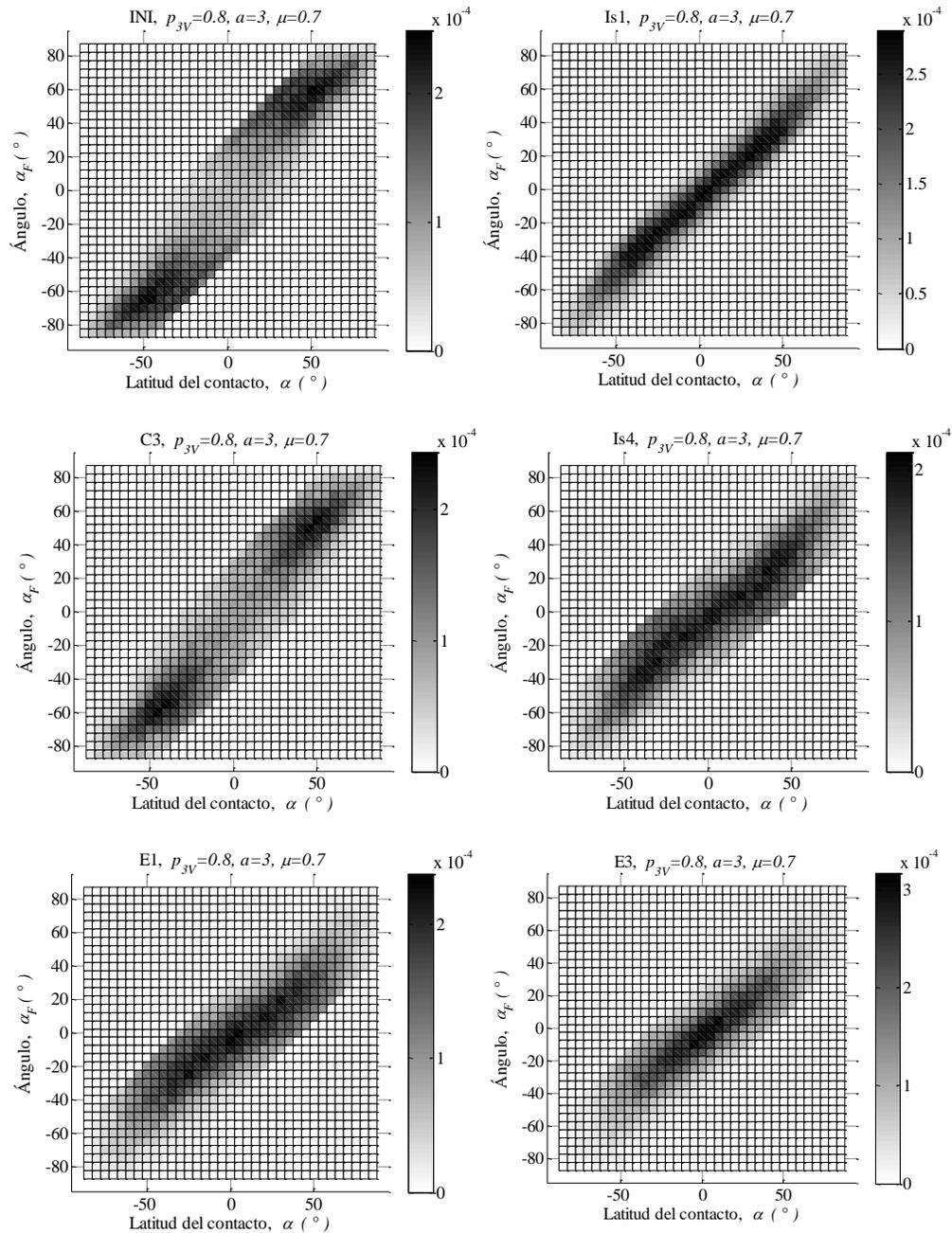


Figura 4.36. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra de granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.8$

En el estado inicial de la mezcla con  $p_{3V}=0.2$ , se tienen dos picos en  $\alpha$  y  $\alpha_F \in (-35, -55^\circ)$  y  $(35, 55^\circ)$ , aunque menos marcados que en el material con granulometría uniforme. En el confinamiento isotrópico Is1, las fuerzas se encuentran con mayor probabilidad alrededor de las normales a los contactos. En compresión (C3) reaparece la anisotropía. En el confinamiento Is4 y en las etapas de extensión se aprecia una orientación de las fuerzas con

tendencia horizontal (las fuerzas toman la dirección del esfuerzo principal mayor). En la figura 4.15 se observó que, entre las mezclas binarias, los contactos se reparten con mayor uniformidad en la superficie de los granos cuando  $p_{3V}=0.2$ .

Las mezcla con  $p_{3V}=0.5$  la anisotropía asociada a la orientación de fuerzas es más marcada que en la muestra analizada anteriormente (figura 4.35). Inicialmente y en compresión se tiene una alta concentración de contactos y fuerzas entre 40 y 60°. Al aplicar el confinamiento isótropo, la orientación de las fuerzas es muy próxima a la de los contactos. En compresión (C3) y extensión (E1 y E3) las fuerzas adoptan una inclinación mayor o menor (respectivamente) que las normales a los contactos.

La evolución de la orientación de fuerzas y contactos en la muestra con  $p_{3V}=0.8$  es muy similar a la del material de granulometría uniforme (figura 4.36). En este material, las partículas pequeñas dominan en número y por lo tanto confieren a la mezcla una repartición de contactos y orientación de fuerzas anisótropas como ya se describió anteriormente.

### c) Granulometría continua

La distribución conjunta de la orientación de las normales a los contactos y la orientación de las fuerzas evoluciona sin mostrar picos durante la prueba triaxial. En la figura 4.37 se observa que  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  se distribuye aproximadamente uniformemente alrededor de la diagonal  $\alpha = \alpha_F$  en la mayor parte de las etapas de la prueba triaxial.

En el estado inicial y en compresión (INI y C3), se observan picos más marcados en la densidad conjunta en  $\alpha_F > \alpha$ . En los estados de esfuerzos isótopos y extensión se obtienen fuerzas de contacto menos inclinadas que las normales los contactos  $\alpha_F < \alpha$ .

De acuerdo con las figuras 4.20 y 4.37, los contactos conservan una repartición uniforme durante toda la prueba triaxial, por lo que los cambios en  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  se deben fundamentalmente a los cambios de orientación de las fuerzas. El material con granulometría continua no desarrolla ni anisotropía mecánica ni geométrica ante los esfuerzos exteriores, lo cual explica su menor resistencia (figura 4.3 y A.6) respecto al de granulometría uniforme.

Los resultados anteriores ponen en evidencia que los materiales con granulometría uniforme desarrollan cambios importantes tanto en la repartición de contactos como en la orientación de fuerzas durante la prueba triaxial. En cambio, en materiales con granulometría continua se tiene una repartición de contactos aproximadamente constante con las fuerzas repartidas de manera uniforme alrededor de la normal al contacto.

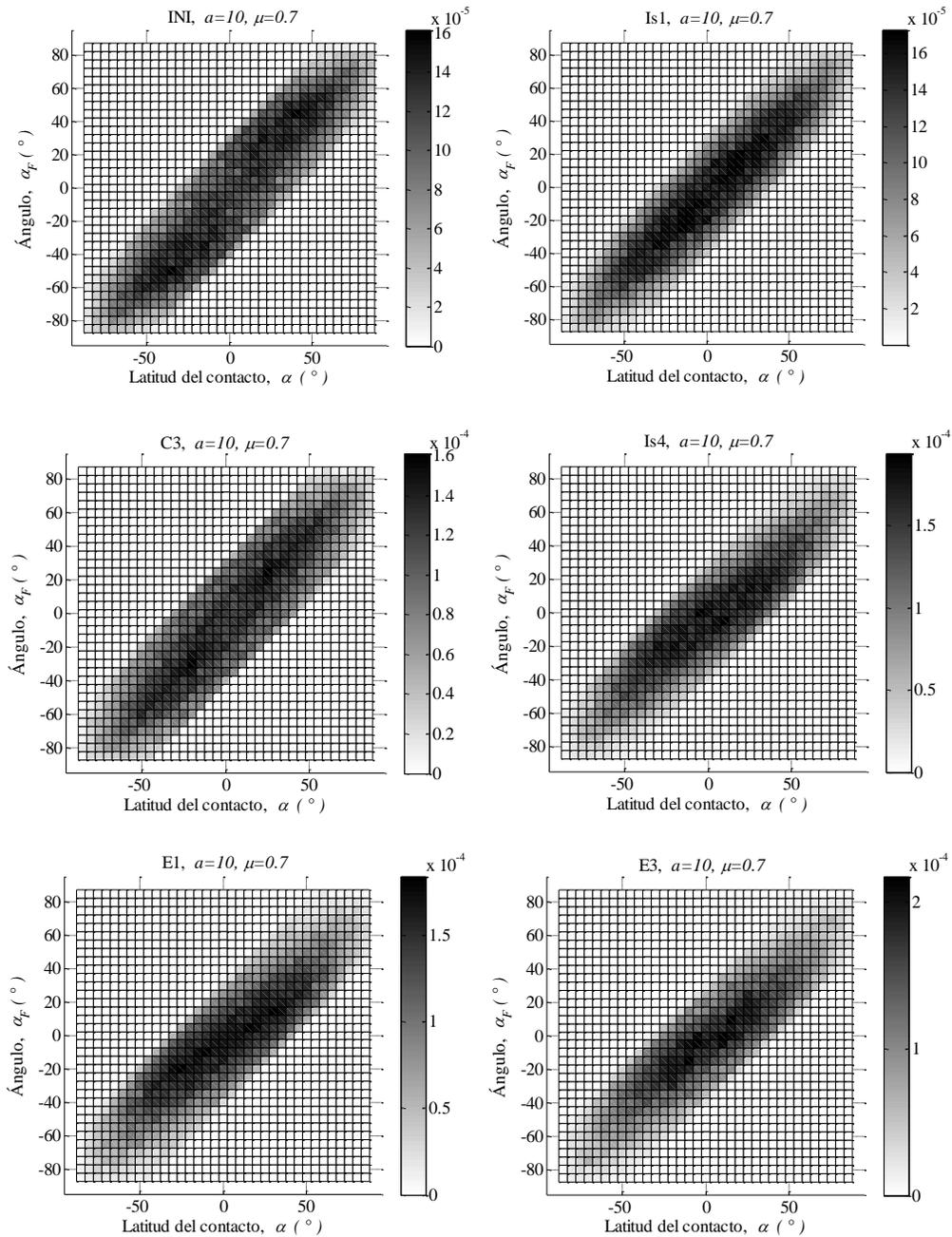


Figura 4.37. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra de granulometría continua

Los cambios en la orientación de las fuerzas de contactos son necesarios en el medio granular para mantener el equilibrio como respuesta inmediata a los esfuerzos aplicados sobre el medio. Los cambios en las posiciones de los contactos ocurren en segunda instancia cuando se vence la resistencia por fricción en los contactos.

#### 4.4.4 Contactos potencialmente inestables

De acuerdo con la figura 3.60, los contactos con potencial deslizamiento son aquellos en los que la fuerza de contacto se encuentra sobre la superficie del cono de fricción. La densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  (que forma el vector fuerza con la normal al plano tangente en el punto de contacto) permite obtener la probabilidad de que un contacto se encuentre sobre la superficie de dicho cono. A continuación se exponen los resultados obtenidos de las simulaciones con el método de elementos discretos.

##### a) Granulometría uniforme

En la figura 4.38 se presentan las densidades de probabilidad del ángulo  $\delta$  en las principales etapas de la prueba triaxial. Estas densidades son aproximadamente simétricas en el estado inicial y en el primer confinamiento isótropo, pero se concentran en valores positivos de  $\delta$  en las etapas de compresión y en valores negativos en las etapas de extensión.

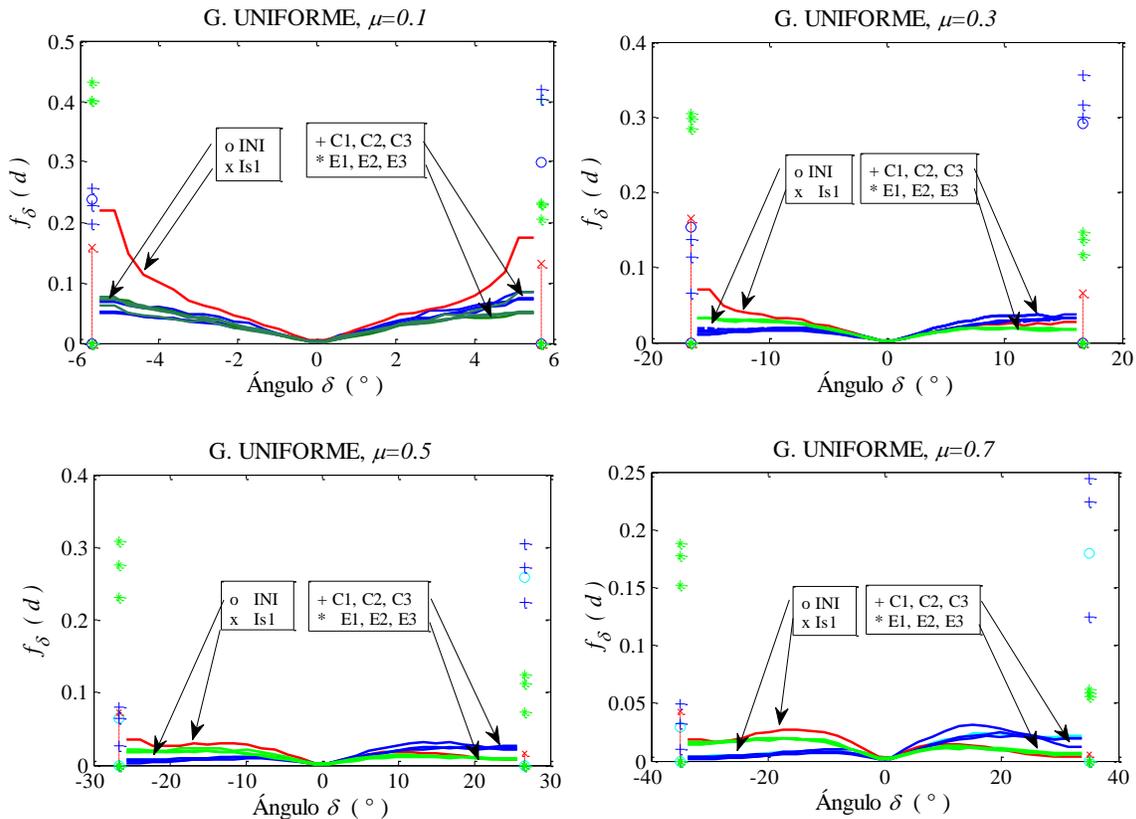


Figura 4.38. Evolución de la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  en muestras con granulometría uniforme

Independientemente del coeficiente de fricción o del estado de esfuerzos, la densidad de probabilidad  $f_{\delta}(d)$  indica que existe una baja proporción de fuerzas cerca del eje del cono de fricción.

Para  $\mu=0.1$ , la forma de la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  es aproximadamente lineal con un mínimo en  $\delta=0$ . En particular, en el primer confinamiento isótropo (Is1) la densidad que difiere del resto de las etapas de la prueba triaxial.

En las muestras granulares con  $\mu=0.3, 0.5$  y  $0.7$  se aprecia que la densidad de  $\delta$  se sesga hacia valores positivos de  $\delta$  en compresión y hacia valores negativos en extensión. La magnitud del esfuerzo desviador aplicado al medio granular modifica la probabilidad concentrada en  $\delta=\phi$ .

En términos de frecuencia, la probabilidad concentrada en  $\phi=atan(\mu)$  (figura 4.38) representa la proporción de contactos potencialmente inestables.

En la figura 4.39 se muestra la evolución de la proporción de contactos potencialmente inestables durante el ensayo triaxial.

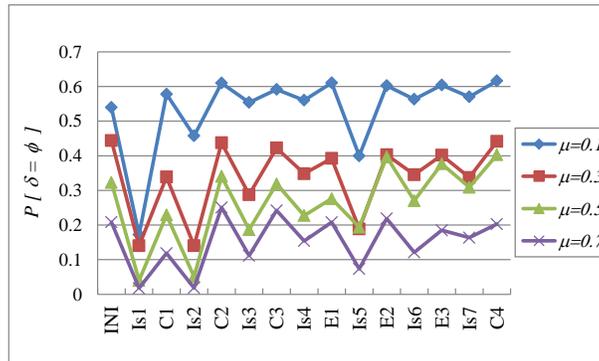


Figura 4.39. Probabilidad de que la fuerza de contacto se localice sobre la superficie del cono de fricción en muestras con granulometría uniforme en prueba triaxial

Si la resistencia por fricción es baja ( $\mu=0.1$ ), más del 50% de las fuerzas de contacto se localizan sobre el cono de fricción en el estado inicial. En el primer confinamiento isótropo (Is1) la probabilidad de  $\delta=\phi$  baja considerablemente. En las etapas de compresión y extensión (C1, C2, C3, E1, E2, E3 y C4) se tiene alrededor de un 60% de contactos potencialmente inestables independientemente de la magnitud del esfuerzo desviador. La resistencia por fricción es tan baja que se requiere un mínimo esfuerzo para llevar las fuerzas de contacto a la superficie del cono de fricción y la proporción de contactos potencialmente inestables no aumenta más debido a la existencia de cadenas de fuerzas y al

efecto de arqueo. La proporción de contactos inestables se reduce significativamente en los estados de confinamiento y en particular en Is1 e Is5, correspondientes a cambios importantes del estado de esfuerzos.

Para  $\mu=0.3, 0.5$  y  $0.7$  cada vez se tiene una menor proporción de contactos potencialmente inestables. El comportamiento durante la prueba triaxial es similar al descrito para la muestra con  $\mu=0.1$ .

También surge el interés por conocer la ubicación de los contactos inestables. Para esto se utiliza la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  del ángulo  $\alpha$  de la posición del contacto y el ángulo  $\delta$  formado por la fuerza y la normal al contacto. Esta densidad considera el número de contactos por unidad de superficie.

La figura 4.40 presenta la evolución de la densidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$ . Únicamente se muestran los resultados para el material con  $\mu=0.7$  por ser el caso más ilustrativo. En el estado inicial se observa que los contactos inestables ( $\delta \cong 35^\circ$ ) se localizan principalmente en  $\alpha \in (0,40)$  y prácticamente no existen en  $\alpha > 75^\circ$ . Los contactos inestables ocupan las posiciones de  $\alpha$  donde el esfuerzo externo actúa en forma tangencial, en este caso la gravedad terrestre es vertical.

Con la aplicación del confinamiento isótropo (Is1), la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  indica que hay una baja proporción de contactos inestables y se localizan alrededor de  $\alpha=50^\circ$ .

En las etapas de compresión (C1 y C3 de la figura 4.39) nuevamente aparecen contactos inestables en el intervalo  $\alpha \in (0,40^\circ)$  y son más frecuentes cuando aumenta el esfuerzo desviador (etapa C3).

En el confinamiento isótropo (Is4) posterior a las etapas de compresión prevalece una cantidad considerable de contactos inestables en  $\alpha$  de 25 a  $50^\circ$ . Existe un efecto residual de las etapas de compresión anteriores.

Cuando los esfuerzos horizontales son mayores que el vertical, los contactos inestables se localizan a mayor latitud sobre la superficie de las partículas (etapa E3 en la figura 4.40). En extensión, las fuerzas toman alineaciones horizontales y actúan en forma tangencial en los contactos cercanos al polo de las partículas. No se obtiene la mayor concentración de contactos inestables en  $\alpha=90^\circ$  porque existen pocos contactos en los polos de acuerdo con la figura 4.14.

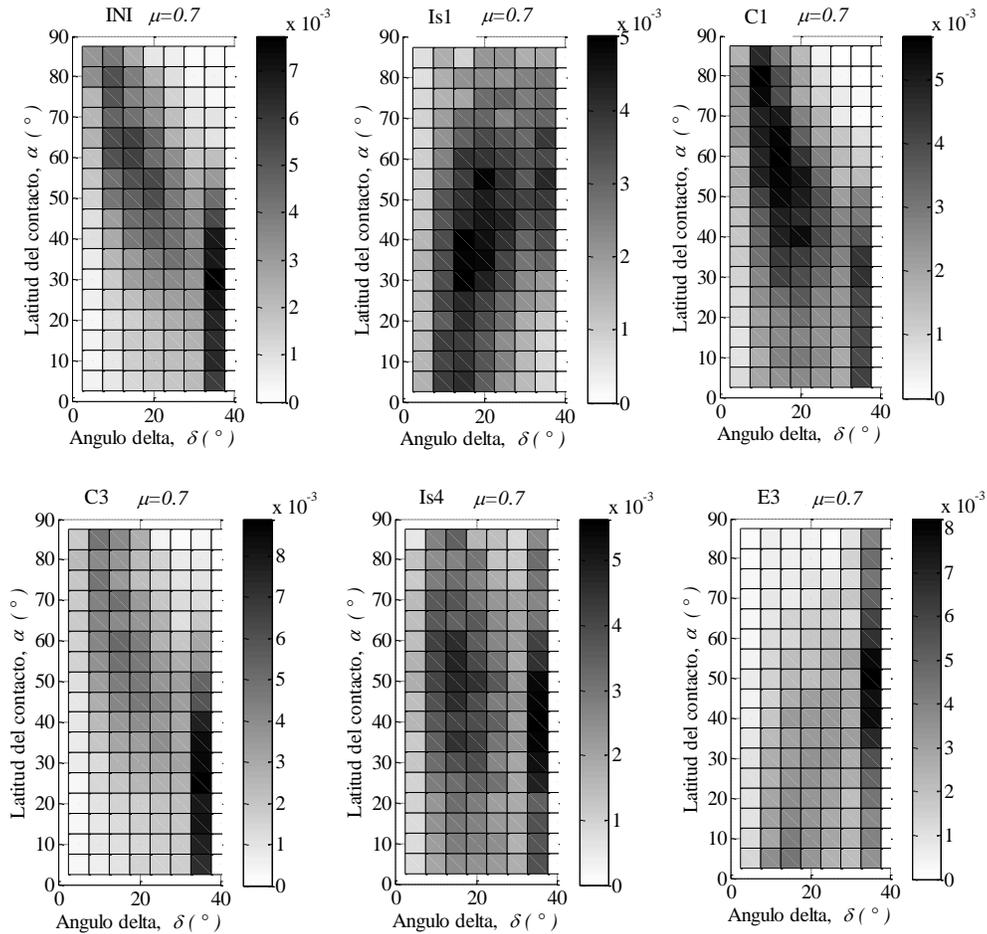


Figura 4.40. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  durante la prueba triaxial, muestra con granulometría uniforme con  $\mu=0.7$

b) Granulometría bimodal

En las simulaciones de pruebas triaxiales con mezclas binarias se observa que la forma de la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  está afectada por la composición de la mezcla (figura 4.41). En la mezcla con  $p_{3V}=0.2$  la densidad de probabilidad  $f_{\delta}(d)$  permanece aproximadamente simétrica durante la prueba triaxial, sólo puede apreciarse el aumento de  $P[\delta=\phi]$  en compresión y de  $P[\delta=-\phi]$  en extensión.

En la muestra con  $p_{3V}=0.8$ , la parte continua de la densidad  $f_{\delta}(d)$  evoluciona en cada etapa del ensayo. Conforme aumenta el esfuerzo desviador en compresión o en extensión, aumenta la probabilidad para valores grandes de  $\delta$  y se reduce para intervalos cercanos a  $\delta=0$ .

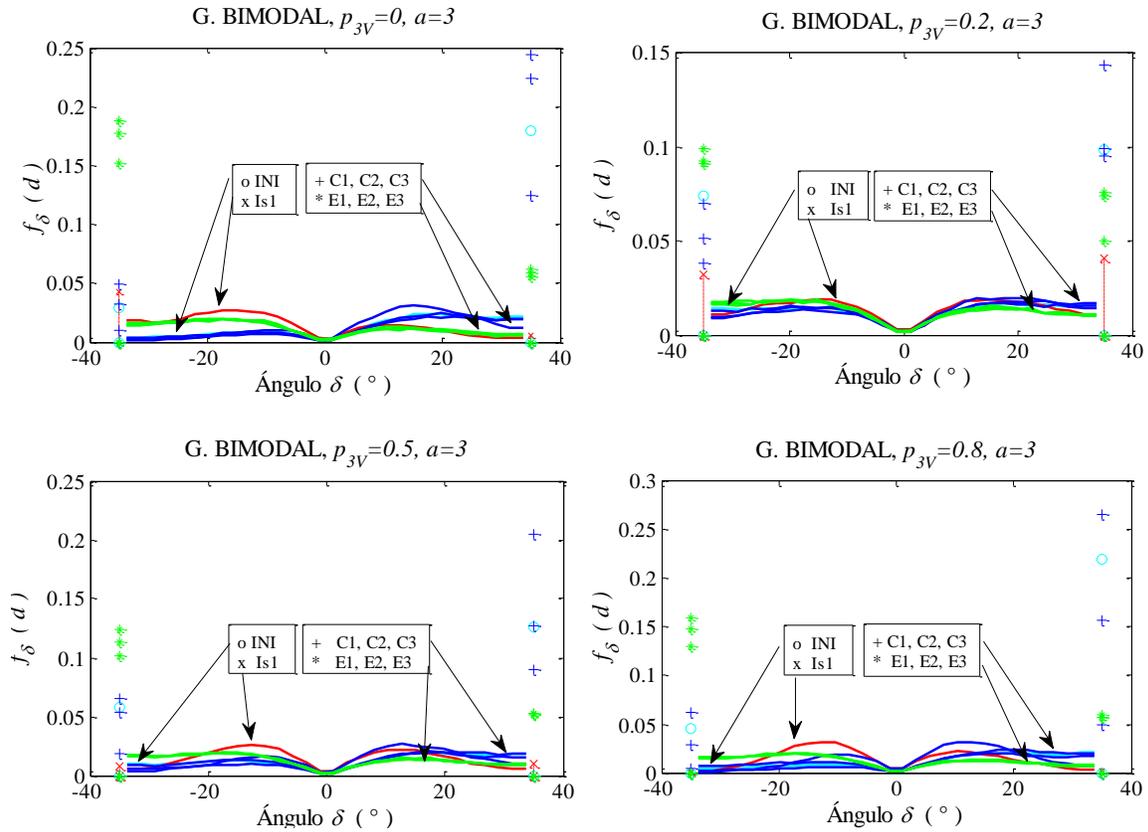


Figura 4.41. Evolución de la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  en mezclas binarias

La probabilidad  $P[\delta=\pm\phi]$  cambia durante la prueba triaxial y no parece estar directamente asociada con la magnitud de los esfuerzos. En la figura 4.42 se muestra esta probabilidad igual a la proporción de contactos potencialmente inestables. En el estado inicial se tiene entre un 16 y un 25% de contactos inestables, la muestra con  $p_{3V}=0.2$  presenta el menor porcentaje y la muestra con  $p_{3V}=0.8$  el mayor porcentaje.

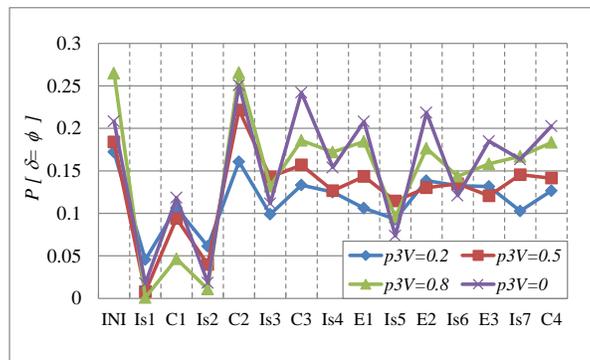


Figura 4.42. Probabilidad de que la fuerza de contacto se localice sobre la superficie del cono de fricción en mezclas binarias durante la prueba triaxial

La aplicación del confinamiento isótropo (etapa Is1) reduce drásticamente el número de contactos inestables, sobre todo en la muestra con  $p_{3V}=0.8$ . La proporción de contactos inestables aumenta con el esfuerzo desviador en compresión y alcanza el máximo en la etapa C2 (cerca de la resistencia máxima del medio granular). Cuando se retira el esfuerzo desviador para regresar a un estado de esfuerzos isótropo (Is2, Is3, Is4) una parte de los contactos inestables recobran la estabilidad.

En las etapas de extensión (E1, E2 y E3) aumenta la proporción de contactos potencialmente inestables pero en menor cantidad que en la etapa de compresión C3.

La densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  correspondientes a las muestras de granulometría bimodal se presentan en las figuras 4.43 a 4.45. En el estado inicial se observa una concentración de contactos potencialmente inestables ( $\delta \approx 35^\circ$ ) en  $\alpha \in (0,40^\circ)$  y es más evidente en la mezcla con  $p_{3V}=0.8$  (mayor uniformidad granulométrica).

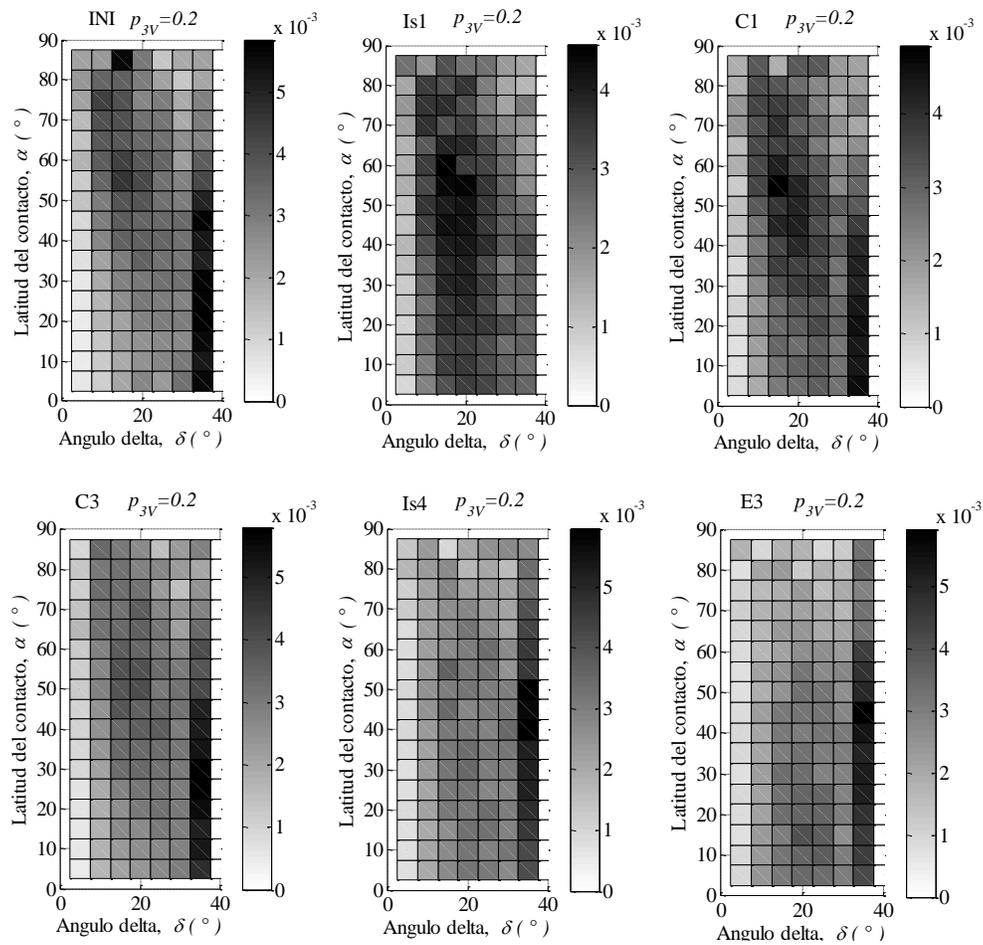


Figura 4.43. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  durante la prueba triaxial, muestra con granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.2$

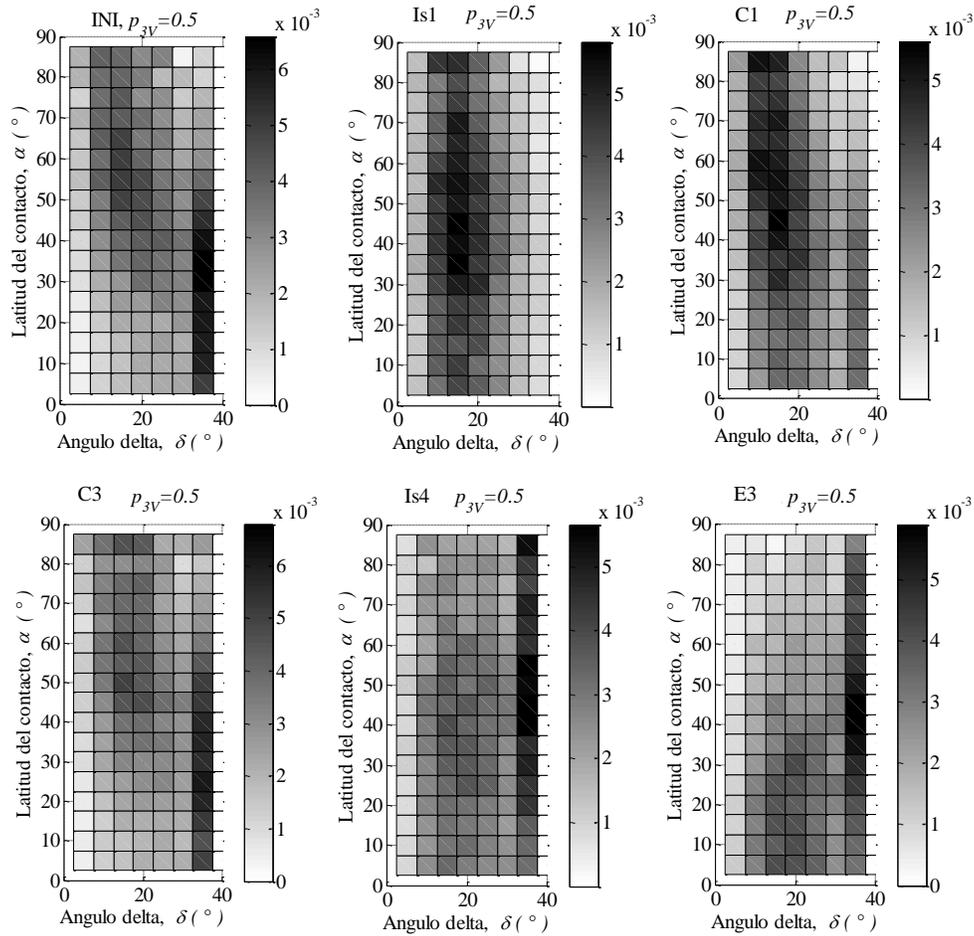


Figura 4.44. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \delta}(a, d)$  durante la prueba triaxial, muestra con granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.5$

En el primer confinamiento isótropo (Is1) se tiene pocos contactos inestables repartidos uniformemente en toda la superficie de las partículas, particularmente en las muestras con  $p_{3V}=0.5$  y 0.8.

En las etapas de compresión C1 y C3, el material con  $p_{3V}=0.2$  presenta una concentración de contactos potencialmente inestables en  $\alpha \in (0, 40^\circ)$ , esta concentración es mayor cuando el esfuerzo desviador es grande (etapa C3). En las muestras con  $p_{3V}=0.5$  y 0.8 la concentración de contactos potencialmente inestables ocurre en  $\alpha \in (20, 40^\circ)$ .

En el estado de esfuerzos isótropo (Is4), después de tres ciclos de carga en compresión, prevalece una alta proporción de contactos potencialmente inestables que se localizan en los intervalos de  $\alpha$  (40,50°), (40,90°) y (40,60°) para las muestras con  $p_{3V}=0.2$ , 0.5 y 0.8 respectivamente.

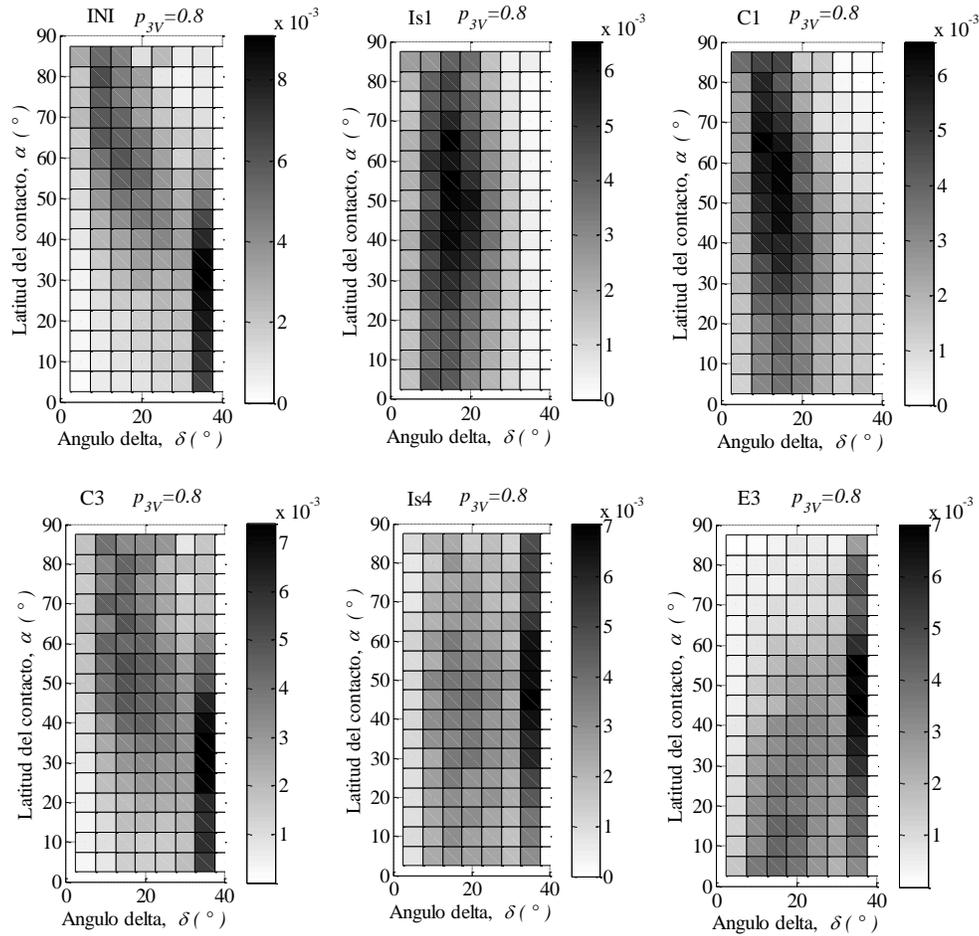


Figura 4.45. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \delta}(a, d)$  durante la prueba triaxial, muestra con granulometría bimodal con  $a=3$  y  $p_{3V}=0.8$

Cuando los esfuerzos laterales son mayores que el esfuerzo vertical (por ejemplo en E3) los contactos inestables se distribuyen en toda la superficie de las partículas pero con mayor proporción en  $\alpha=45^\circ$  en la muestra con  $p_{3V}=0.2$ . Esta concentración aparece en  $\alpha \in (35, 60^\circ)$  para  $p_{3V}=0.5$  y  $0.8$ .

La mezcla con  $p_{3V}=0.2$  presenta por lo general, una menor proporción de contactos potencialmente inestables y una mayor complejidad en la repartición de estos contactos sobre la superficie de las partículas. La mezcla con  $p_{3V}=0.8$  presenta una repartición de contactos potencialmente inestables más sistemática como en el caso del material uniforme.

Está claro que cuando domina un tamaño de partícula, en número dentro de la estructura, se obtiene una repartición sistemática de los contactos potencialmente inestables. En caso

contrario, parece más adecuado un estudio considerando distintas proporciones de partículas pequeñas en número ( $p_{3D}$ ) y posiblemente por tamaño de partícula.

c) Granulometría continua

La densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  obtenida en cada etapa de la prueba triaxial es aproximadamente la misma (lado izquierdo de la figura 4.46). La densidad aumenta en forma lineal de 0 a  $15^\circ$  y permanece aproximadamente constante de  $15^\circ$  a  $35^\circ$ . En  $\delta=35^\circ$  se tiene una probabilidad concentrada de 0.08 a 0.21 (ver lado derecho de la figura 4.46).

La proporción de contactos potencialmente inestables  $P[\delta=35^\circ]$  es de 0.11 en el estado inicial, disminuye a 0.08 con el primer confinamiento isotrópico y aumenta gradualmente con el aumento del esfuerzo desviador en compresión (C1, C2 y C3) hasta 0.21.

Las descargas (Is2, Is3, Is4, Is5, Is6 e Is7) conservan una fracción de los contactos potencialmente inestables introducidos por las etapas anteriores de compresión o extensión.

La proporción de contactos potencialmente inestables en una muestra de granulometría continua sufre menos variación durante la prueba triaxial que la de un material granular con granulometría uniforme. Los pequeños cambios en la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  ocasiona cambios importantes en la proporción de contactos potencialmente inestables en todas las muestras granulares analizadas.

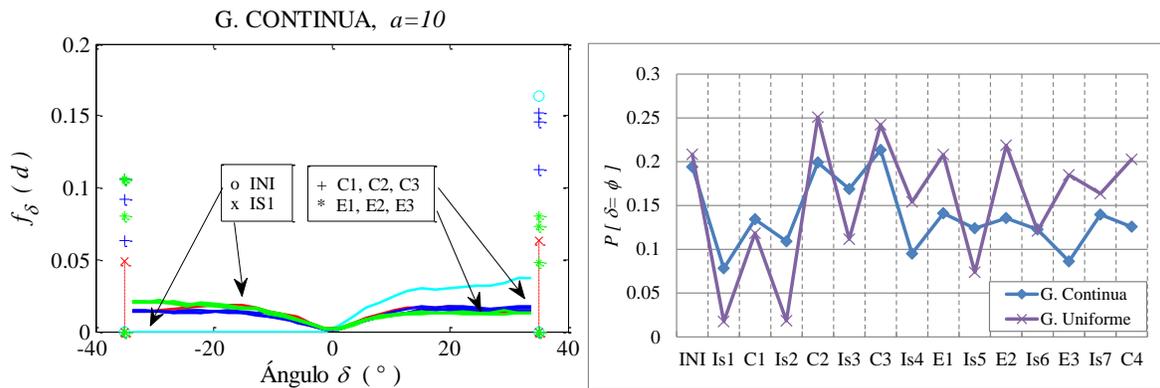


Figura 4.46. Densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  y probabilidad de ocurrencia de los contactos potencialmente inestables en una muestra con granulometría continua durante la prueba triaxial

La densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  en las etapas más ilustrativas de la prueba triaxial se presenta en la figura 4.47. En el estado inicial se tiene una alta proporción de contactos potencialmente inestables en  $\alpha \in (0,35^\circ)$ , disminuye de  $40^\circ$  a  $80^\circ$  y aumenta ligeramente en  $\alpha > 85^\circ$ .

Con la aplicación del confinamiento isótropo disminuyen los contactos potencialmente inestables, sobre todo en el polo de las partículas ( $\alpha > 80^\circ$ ). Al incrementar el esfuerzo vertical (etapa de compresión C1 y C3) aumenta la proporción de contactos potencialmente inestables en  $\alpha < 40^\circ$ .

En el estado de esfuerzos isótropo Is4 permanece una alta proporción de contactos en  $\alpha \in (20, 50^\circ)$ . Al reducir el esfuerzo vertical para alcanzar un estado de esfuerzos en extensión (E1) se tiene un aumento de contactos potencialmente inestables repartidos con mayor uniformidad sobre la superficie de las partículas.

La repartición de contactos potencialmente inestables en el material de granulometría continua es más irregular en comparación con las muestras de granulometría uniforme y bimodal con  $p_{3V}=0.8$ .

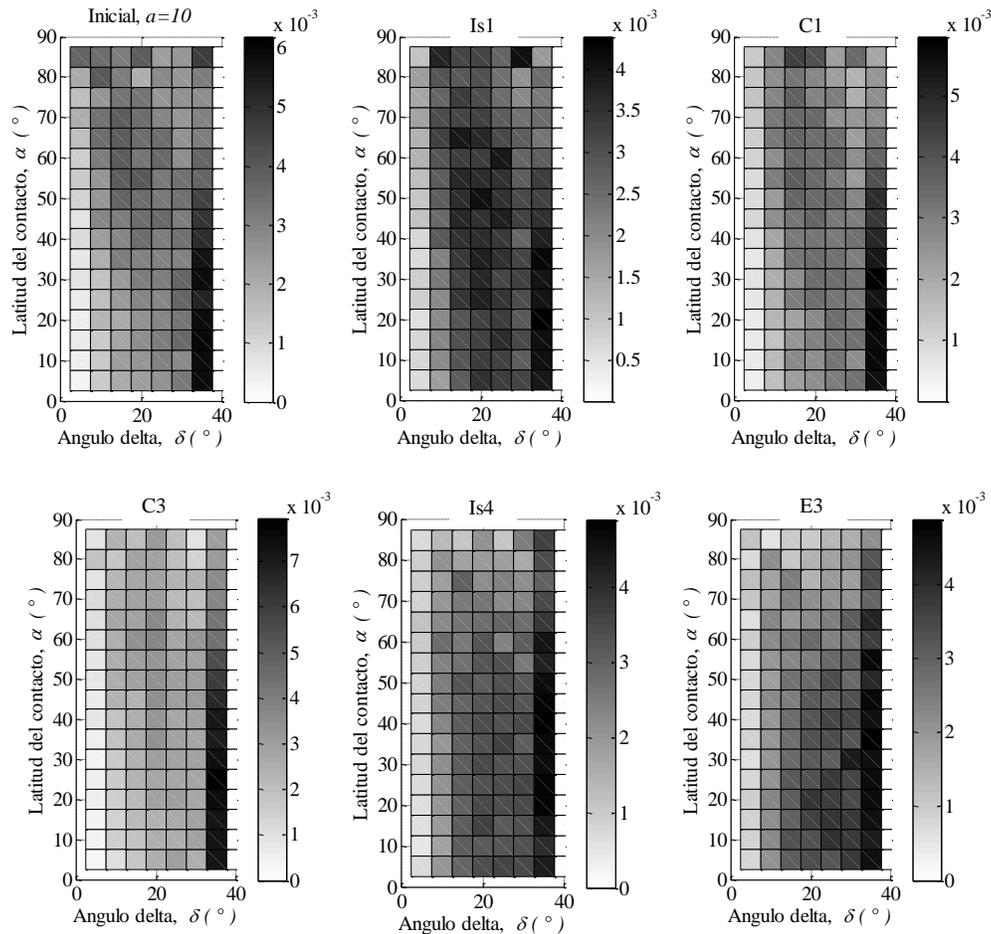


Figura 4.47. Densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(a,d)$  durante la prueba triaxial, muestra con granulometría continua

## 4.5 Esfuerzos intragranulares

Marsal (1966) y Auvinet (1986) llamaron fuerzas intragranulares a las fuerzas definidas en la intersección de cada partícula de un medio granular con un plano de corte. De manera análoga, en esta sección se entiende como esfuerzo intragranular ( $\sigma_{ij}$ ) al esfuerzo en el interior de las partículas.

La figura 4.48 presenta tres ejemplos de partículas sometidas a un conjunto de fuerzas que actúan en sus puntos de contacto, donde la longitud de las barras indica la magnitud de la fuerza. Resalta la presencia de pocas fuerzas de gran magnitud y muchas fuerzas pequeñas. Las fuerzas no inciden de manera normal a la superficie de las partículas a causa de las fuerzas de fricción.

La distribución de esfuerzos al interior de una partícula sometida a un conjunto de fuerzas en sus puntos de contacto es compleja, con grandes concentraciones de esfuerzos alrededor de los puntos de contacto.

La ecuación 4.3 permite calcular el tensor de esfuerzos medio ejercido en el volumen ocupado por la partícula considerada. Este tensor es más representativo de los esfuerzos intragranulares cuando existe un mayor número de contactos.

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V_p} \sum_{c=1}^{N_c} F^{[c]} \otimes d^{[c]} \quad (4.3)$$

Donde:  $V_p$  es el volumen de la partícula

$F^{[c]}$  el vector de fuerza actuando en el contacto  $c$

$d^{[c]}$  el vector del centro de la partícula al punto de contacto

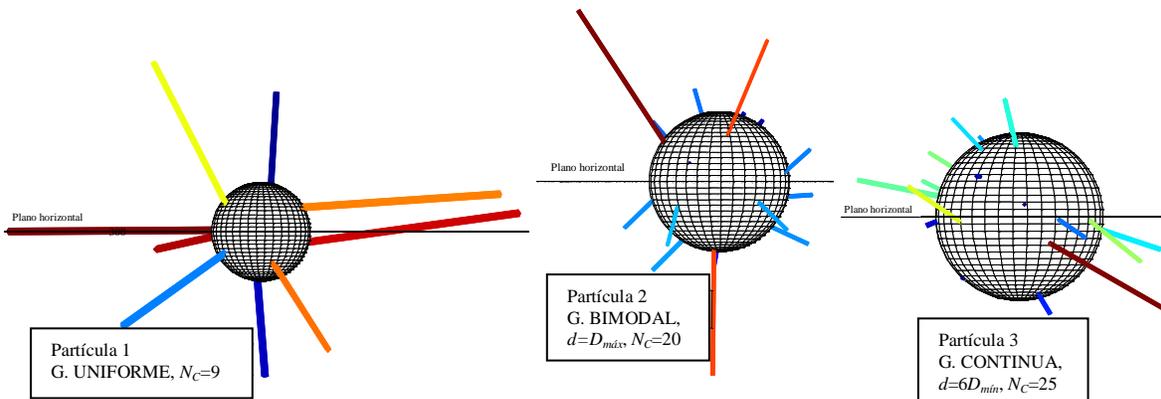


Figura 4.48. Fuerzas de contacto actuando sobre las partículas,  $\mu=0.7$

En una partícula en equilibrio estático el tensor de esfuerzos es simétrico. Este es un criterio utilizado para verificar el equilibrio en las simulaciones de las pruebas triaxiales. A continuación se muestran los tensores correspondientes a las partículas de la figura 4.48.

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0583 & 0.0266 & -0.1082 \\ 0.0266 & 1.5862 & 0.1366 \\ -0.1082 & 0.1366 & 0.9667 \end{Bmatrix}, MPa$$

Partícula 1: G. Uniforme

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1310 & 0.0959 & -0.1970 \\ 0.0963 & 1.3909 & 0.2146 \\ -0.1989 & 0.2168 & 2.3946 \end{Bmatrix}, MPa$$

Partícula 2: G. Bimodal

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0744 & 0.1126 & 0.3484 \\ 0.1107 & 2.1693 & -0.5228 \\ 0.3487 & -0.5216 & 0.4799 \end{Bmatrix}, MPa$$

Partícula 3: G. Continua

En los ejemplos anteriores sobresale la magnitud de los esfuerzos normales  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$ , ya que reflejan la dirección de los esfuerzos aplicados sobre la muestras granulares.

Los esfuerzos principales son esfuerzos normales que actúan sobre tres planos mutuamente ortogonales y en donde los esfuerzos cortantes son nulos. Los esfuerzos principales dentro de cada partícula ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ ) se encuentran calculando los vectores y valores característicos (diagonalización del tensor de esfuerzos) como se ejemplifica a continuación.

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.0693 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6148 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9271 \end{Bmatrix}, MPa$$

Partícula 1: G. Uniforme

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.4621 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0488 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4056 \end{Bmatrix}, MPa$$

Partícula 2: G. Bimodal

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.3178 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2242 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1816 \end{Bmatrix}, MPa$$

Partícula 3: G. Continua

Y la orientación respectiva del esfuerzo principal mayor ( $\sigma_{11}$ ) está dada por el vector unitario  $\bar{n}$ :

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9952 \\ -0.0282 \\ 0.0942 \end{Bmatrix}$$

Partícula 1

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1310 \\ 0.1834 \\ 0.9743 \end{Bmatrix}$$

Partícula 2

$$\bar{n} = \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0112 \\ -0.9625 \\ 0.2710 \end{Bmatrix}$$

Partícula 3

Tomando en cuenta que los esfuerzos principales son invariantes, los tensores de esfuerzos medidos en cualquier sistema coordenado de referencia representan el mismo estado de esfuerzos. Todo tensor de esfuerzos queda, por tanto, contenido en el elipsoide (elipsoide de Lamé) ilustrado en la figura 4.49 para las tres partículas tomadas como ejemplo.

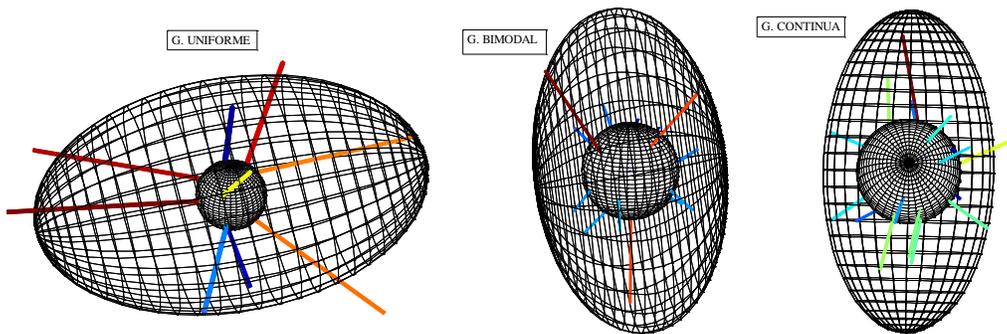


Figura 4.49. Elipsoide de esfuerzos principales en partículas sometidas a un conjunto de fuerzas

El elipsoide refleja el estado de esfuerzos aplicado al medio granular. En los estados de compresión de la prueba triaxial, las fuerzas de contacto mayores y el esfuerzo principal

mayor (eje mayor del elipsoide) son verticales en correspondencia con el esfuerzo desviador de la prueba triaxial. En los estados de extensión, las fuerzas pequeñas y el eje menor del elipsoide se encuentran en dirección vertical.

Un análisis representativo de los esfuerzos intragranulares se consigue examinando una muestra grande de partículas, por ejemplo mediante el muestreo exhaustivo de las partículas localizadas dentro del núcleo central de la muestra granular.

#### 4.5.1 Magnitud de los esfuerzos intragranulares

Describir los esfuerzos al interior de las partículas es una tarea complicada. Como primera aproximación se calcula el tensor de esfuerzos principales en cada partícula y se analiza el esfuerzo medio o isotrópico  $I_\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  considerándolo una variable aleatoria.

La densidad de probabilidad de  $I_\sigma$  se describe mediante los primeros momentos: media ( $\mu_I$ ), desviación estándar ( $s_I$ ), coeficiente de asimetría ( $\gamma_I$ ) y coeficiente de pico ( $\beta_I$ ). Estos momentos se presentan en las tablas 4.10 a 4.12 para las distintas etapas de la prueba triaxial.

##### a) Granulometría uniforme

Los momentos indican que el esfuerzo medio intragranular  $I_\sigma$  se distribuye aproximadamente normal, tomando en cuenta que el coeficiente de asimetría es cercano a cero y el coeficiente de pico cercano a tres.

El esfuerzo medio en las partículas ( $\mu_I$  en la tabla 4.10) varía de acuerdo con el esfuerzo medio aplicado al medio granular (ver tablas 4.2 a 4.5), pero el primero es de mayor magnitud que el segundo. Esto se explica porque los vacíos no transmiten esfuerzos.

La desviación estándar  $s_I$  aumenta ligeramente durante la prueba triaxial, principalmente en la muestra con coeficiente de fricción  $\mu=0.7$ . El desarrollo de fuerzas de fricción favorece a la formación de cadenas de fuerzas que incrementan la desviación estándar  $s_I$ .

Cuando aumentan los esfuerzos externos, éstos se transmiten con mayor intensidad en las partículas que forman las cadenas de fuerzas, donde aumentan los esfuerzos intragranulares. Eventualmente, algunas de estas partículas no se descargan al retirar el esfuerzo desviador. Esto ocasiona un aumento leve del coeficiente de asimetría  $\gamma_I$  durante el transcurso de la prueba triaxial.

Tabla 4.10. Principales momentos del esfuerzo medio intragranular  $I_\sigma$  en muestras con granulometría uniforme

ETAPA	Coef. de fricción interparticular $\mu=0.1$				Coef. de fricción interparticular $\mu=0.3$			
	$\mu_I$ (MPa)	$s_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$	$\mu_I$ (MPa)	$s_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$
Is1	1.58	0.65	0.29	3.22	1.53	0.53	0.16	3.15
C1	1.82	0.73	0.26	3.09	1.92	0.63	0.13	3.21
Is2	1.66	0.69	0.30	3.09	1.74	0.60	0.13	3.14
C2	1.91	0.81	0.28	2.94	2.21	0.88	0.17	3.03
Is3	1.61	0.72	0.32	2.89	1.80	0.78	0.26	3.05
C3	2.00	0.83	0.35	2.99	2.27	1.06	0.33	3.09
Is4	1.61	0.72	0.40	3.06	1.74	0.90	0.45	3.16
E1	1.42	0.65	0.43	3.44	1.48	0.77	0.49	3.19
Is5	1.53	0.67	0.41	3.41	1.60	0.80	0.46	3.15
E2	1.34	0.60	0.39	3.03	1.34	0.70	0.49	3.14
Is6	1.52	0.63	0.33	3.07	1.58	0.74	0.37	2.97
E3	1.34	0.61	0.43	3.14	1.36	0.72	0.48	3.04
Is7	1.48	0.63	0.39	3.10	1.57	0.74	0.41	3.02
C4	2.02	0.87	0.37	3.09	2.29	1.03	0.29	2.99
ETAPA	Coef. de fricción interparticular $\mu=0.5$				Coef. de fricción interparticular $\mu=0.7$			
	$\mu_I$ (MPa)	$s_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$	$\mu_I$ (MPa)	$s_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$
Is1	1.13	0.36	0.14	3.11	0.94	0.29	0.12	3.10
C1	1.71	0.50	0.09	3.16	1.48	0.41	0.15	3.18
Is2	1.52	0.44	0.08	3.16	1.31	0.37	0.11	3.15
C2	2.42	0.85	0.02	3.18	2.33	0.76	-0.06	3.16
Is3	1.82	0.70	0.13	3.14	1.69	0.58	0.01	3.13
C3	2.60	1.08	0.15	3.08	2.68	1.03	0.21	3.41
Is4	1.89	0.88	0.35	3.27	1.84	0.80	0.37	3.37
E1	1.59	0.78	0.42	3.26	1.48	0.69	0.45	3.38
Is5	1.68	0.74	0.35	3.22	1.68	0.74	0.35	3.22
E2	1.30	0.68	0.48	2.94	1.33	0.67	0.45	2.97
Is6	1.59	0.73	0.34	2.91	1.61	0.73	0.32	2.92
E3	1.28	0.74	0.58	3.09	1.28	0.73	0.57	3.10
Is7	1.53	0.77	0.43	2.93	1.54	0.76	0.42	2.97
C4	2.99	1.35	0.24	2.84	2.96	1.36	0.28	2.80

El coeficiente de pico  $\beta'_I$  casi no varía durante la prueba triaxial. La densidad de probabilidad de  $I_\sigma$  conserva un pico aproximadamente igual al de una densidad normal.

b) Granulometría bimodal

La tabla 4.11 presenta los valores de los primeros momentos de la densidad de probabilidad del esfuerzo medio intragranular  $I_\sigma$ . El valor medio del esfuerzo intragranular y su

desviación estándar varían de acuerdo con los cambios en los esfuerzos externos aplicados en las mezclas bimodales. En cambio, el coeficiente de asimetría y de pico aumentan continuamente durante el desarrollo de la prueba triaxial.

De acuerdo con el coeficiente de asimetría  $\gamma_I > 0$  y coeficiente de pico  $\beta'_I > 3$ , la muestra con  $p_{3V}=0.2$  tiene una alta proporción (en número) de partículas donde actúan esfuerzos bajos y una proporción baja de partículas sometidas a esfuerzos altos. Este comportamiento es cada vez menos marcado cuando  $p_{3V}$  aumenta. El esfuerzo medio intragranular tiene una distribución normal cuando la granulometría tiende a ser uniforme ( $p_{3V}=0.8$ ).

Tabla 4.11. Principales momentos del esfuerzo medio intragranular  $I_\sigma$  en muestras con granulometría bimodal

	$a=3, p_{3V}=0.2$				$a=3, p_{3V}=0.5$				$a=3, p_{3V}=0.8$			
	$\mu_I$ (MPa)	$s_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$	$\mu_I$ (MPa)	$\sigma_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$	$\mu_I$ (MPa)	$s_I$ (MPa)	$\gamma_I$	$\beta'_I$
Is1	1.78	1.36	0.28	2.24	1.73	0.74	-0.2	2.99	1.72	0.47	-0.2	3.26
C1	2.02	1.58	0.41	2.45	1.97	0.83	-0.3	2.98	1.95	0.50	-0.2	3.34
Is2	1.74	1.40	0.37	2.30	1.73	0.76	-0.3	2.93	1.71	0.47	-0.2	3.27
C2	2.24	1.99	0.82	3.25	2.39	1.23	0.32	3.05	2.52	0.75	-0.0	3.29
Is3	1.63	1.49	0.77	2.95	1.67	0.90	0.15	2.62	1.71	0.56	-0.1	2.99
C3	1.84	2.24	1.61	5.72	2.23	1.58	1.06	4.65	2.38	1.19	0.44	3.15
Is4	1.34	1.68	1.80	6.95	1.55	1.16	1.07	4.66	1.66	0.90	0.54	3.18
E1	1.13	1.46	1.75	6.55	1.37	1.00	0.83	3.61	1.49	0.81	0.52	0.52
Is5	1.29	1.57	1.67	6.23	1.54	1.07	0.82	3.69	1.67	0.86	0.46	3.09
E2	1.01	1.39	1.95	7.28	1.28	0.76	1.03	4.18	1.36	0.79	0.52	3.01
Is6	1.27	1.52	1.51	5.38	1.51	1.05	0.83	3.67	1.62	0.86	0.39	2.84
E3	1.00	1.43	2.23	9.43	1.20	1.01	1.29	5.26	1.32	0.79	0.64	3.26
Is7	1.29	1.56	1.60	5.96	1.48	1.07	1.00	4.31	1.61	0.85	0.43	2.85
C4	1.65	2.14	1.91	7.62	2.12	1.58	1.17	5.00	2.38	1.25	0.48	3.15

c) Granulometría continua

En el material con granulometría continua, el esfuerzo medio intragranular varía drásticamente de una partícula a otra. La desviación estándar indica un amplio intervalo en el que se distribuye este esfuerzo (tabla 4.12). El coeficiente de asimetría  $\gamma_I > 0$  indica que la densidad de probabilidad de  $I_\sigma$  tiene una cola extendida hacia la derecha (una baja proporción de partículas sometidas a esfuerzos muy altos). Y el coeficiente de pico  $\beta'_I > 3$  indica una alta proporción de partículas con esfuerzos cercanos a la media  $\mu_I$ .

En esta granulometría, el esfuerzo medio intragranular muestra el mismo comportamiento estadístico de las fuerzas de contacto: una densidad de probabilidad aproximadamente exponencial.

Tabla 4.12. Principales momentos del esfuerzo medio intragranular  $I_\sigma$  en muestra con granulometría continua

ETAPA	$a=10, \mu=0.7$			
	$\mu_l$ (MPa)	$s_l$ (MPa)	$\gamma_l$	$\beta'_l$
Is1	2.04	1.83	0.94	3.75
C1	2.26	2.14	1.17	4.66
Is2	2.00	1.90	1.09	4.16
C2	2.48	2.69	1.77	7.63
Is3	1.88	2.02	1.56	6.18
C3	2.16	2.89	2.33	11.15
Is4	1.67	2.20	2.28	10.32
E1	1.58	2.13	2.20	9.33
Is5	1.71	2.21	2.21	9.67
E2	1.40	2.08	2.48	10.81
Is6	1.67	2.19	2.13	8.58
E3	1.42	2.22	2.83	13.49
Is7	1.70	2.33	2.44	10.69
C4	1.88	2.76	2.80	15.14

De acuerdo al análisis de los esfuerzos intragranulares en distintas granulometrías se concluye que los esfuerzos se reparten con mayor uniformidad en las partículas de los materiales con granulometría uniforme, donde la mayor parte de las partículas transmiten esfuerzos. En cambio, en materiales con granulometría continua una baja proporción de partículas transmite esfuerzos muy altos y numerosas partículas transmiten esfuerzos muy bajos.

Otra comparación entre el esfuerzo aplicado a las muestras granulares y el esfuerzo medio intragranular podría realizarse ponderando el esfuerzo en cada partícula por su volumen (esfuerzo medio intragranular en frecuencias de volumen de sólidos).

#### 4.5.2 Orientación de los esfuerzos intragranulares

Durante la prueba triaxial, los esfuerzos ( $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$  y  $S_{zz}$ ) aplicados en las muestras granulares tienen la dirección de los ejes cartesianos  $x, y, z$ . Se espera que estas direcciones sean reproducidas en el medio granular.

Las orientaciones de los esfuerzos principales al interior de una partícula se relacionan directamente con la magnitud y posición de las fuerzas de contacto como se ilustró en la figura 4.49. De una partícula a otra se pueden encontrar esfuerzos con muy distintas orientaciones. El análisis de una muestra representativa de partículas, por ejemplo las del núcleo central de cada muestra, permite verificar que el estado de esfuerzos externo se aplica correctamente al medio granular.

La orientación de estos esfuerzos principales intragranulares está dada por los vectores característicos del tensor de esfuerzos. Por facilidad se analizan los ángulos ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$ ) que forman las direcciones principales de los esfuerzos intragranulares con los ejes cartesianos (cosenos directores).

Se presta mayor atención al ángulo  $\theta_z$  porque el esfuerzo vertical es el único que varía durante las pruebas triaxiales. En las etapas de compresión, el esfuerzo principal mayor ( $\sigma_{11}$ ) forma el ángulo  $\theta_z$  con el eje cartesiano vertical y en las etapas de extensión es el esfuerzo principal menor ( $\sigma_{33}$ ).

a) Granulometría uniforme

En el cálculo de la dirección de los esfuerzos principales en el núcleo central se obtiene una pequeña diferencia con los ejes cartesianos. Las tablas 4.13 y 4.14 presentan los resultados para los estados de compresión y extensión respectivamente, no tiene sentido analizar la dirección de los esfuerzos principales en los estados isótropos de esfuerzos.

Tabla 4.13. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría uniforme en compresión triaxial

$\mu=0.1$	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{11}$ (MPa)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)
C1	1.66	1.64	2.17	37.1	143.1	4.5
C2	1.66	1.62	2.45	29.1	151.0	1.1
C3	1.69	1.66	2.65	177.3	177.8	178.2
C4	1.76	1.71	2.59	13.6	142.0	4.4
$\mu=0.3$						
C1	1.68	1.61	2.46	32.4	147.6	1.8
C2	1.77	1.70	3.16	23.5	156.5	1.4
C3	1.79	1.74	3.28	14.6	14.5	177.9
C4	1.69	1.68	3.49	156.1	23.8	1.5
$\mu=0.5$						
C1	1.35	1.31	2.48	43.8	43.8	1.5
C2	1.71	1.65	3.89	27.2	152.8	1.4
C3	1.86	1.82	4.11	146.0	34.0	1.4
C4	1.69	1.68	3.49	12.4	12.3	178.8
$\mu=0.7$						
C1	1.14	1.10	2.20	138.6	41.4	1.1
C2	1.51	1.47	4.02	39.2	140.8	1.0
C3	1.73	1.79	4.51	139.5	40.5	1.5
C4	2.11	2.03	4.74	175.7	175.9	178.6

El ángulo  $\theta_z$  se desvía de la vertical un máximo de  $4.5^\circ$ . Por el carácter aleatorio de las direcciones principales se puede decir que las desviaciones se deben a la falta de representatividad estadística o al redondeo en el proceso de cálculo. Los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$  pueden tomar cualquier valor porque los esfuerzos  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$  son iguales durante los ensayos triaxiales.

Tabla 4.14. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría uniforme en extensión triaxial

$\mu=0.1$	$\sigma_{11}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)
E1	1.57	1.53	1.17	2.0	177.9	0.6
E2	1.56	1.51	0.95	20.1	159.9	1.0
E3	1.53	1.55	0.93	150.6	29.4	0.7
$\mu=0.3$						
E1	1.61	1.57	1.25	173.3	173.6	178.0
E2	1.65	1.57	0.81	39.4	140.6	1.0
E3	1.65	1.62	0.82	158.4	21.6	1.7
$\mu=0.5$						
E1	1.70	1.64	1.44	7.9	7.7	176.4
E2	1.60	1.55	0.76	7.1	7.0	179.0
E3	1.61	1.55	0.70	173.1	173.2	178.7
$\mu=0.7$						
E1	1.64	1.59	1.20	140.8	39.2	3.5
E2	1.62	1.56	0.80	28.2	151.8	1.7
E3	1.60	1.53	0.71	172.3	172.2	178.3

b) Granulometría bimodal

En las tablas 4.15 y 4.16 se observa que los esfuerzos principales intragranulares ( $\sigma_{33}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{11}$ ) están orientados con los esfuerzos exteriores. El ángulo  $\theta_z$  muestra una desviación máxima de  $4.3^\circ$  (etapa C2 en la muestra con  $p_{3V}=0.2$ ).

Cuando el esfuerzo desviador es bajo, tanto en compresión (C1) como en extensión (E1), resulta una orientación de los esfuerzos principales intragranulares más desviada de los ejes cartesianos. Los efectos de arqueado y de memoria del medio granular limitan la transmisión inmediata del esfuerzo externo hacia las partículas del centro del recipiente.

Tabla 4.15. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría bimodal en compresión triaxial

$p_{3V}=0.2$	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{11}$ (MPa)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)
C1	1.60	1.65	2.34	148.1	32.0	3.6
C2	1.55	1.54	3.22	156.4	156.0	175.8
C3	1.56	1.45	3.02	28.3	151.7	1.7
C4	1.50	1.53	3.00	34.3	145.8	2.5
$p_{3V}=0.5$						
C1	1.68	1.59	2.30	15.7	164.4	4.3
C2	1.47	1.44	3.66	15.1	15.0	178.4
C3	1.45	1.51	3.45	11.4	11.4	178.1
C4	1.52	1.43	3.39	39.4	140.5	1.5
$p_{3V}=0.8$						
C1	1.71	1.68	2.33	25.0	154.9	2.4
C2	1.56	1.51	4.29	159.8	20.2	0.8
C3	1.68	1.52	3.79	26.5	153.5	1.9
C4	1.66	1.56	3.80	38.7	141.3	1.1

Tabla 4.16. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría bimodal en extensión triaxial

$p_{3V}=0.2$	$\sigma_{11}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)
E1	1.53	1.59	0.92	152.6	27.5	2.7
E2	1.53	1.59	0.68	139.0	139.0	1.4
E3	1.51	1.66	0.70	149.7	149.6	2.4
$p_{3V}=0.5$						
E1	1.64	1.56	0.91	32.8	147.1	2.4
E2	1.65	1.58	0.70	11.7	11.7	178.9
E3	1.65	1.55	0.65	23.7	156.3	0.9
$p_{3V}=0.8$						
E1	1.68	1.62	1.10	176.9	177.4	177.9
E2	1.59	1.61	0.80	170.1	170.1	178.2
E3	1.64	1.58	0.71	42.0	138.0	1.5

c) Granulometría continua

Las tablas 4.17 y 4.18 presentan la magnitud y dirección de los esfuerzos principales intragranulares. Se aprecia una desviación importante del esfuerzo vertical en la primera etapa de compresión y primera de extensión por el efecto de memoria.

Entre las granulometrías analizadas, en el material con granulometría continua se tiene una mayor desviación de los esfuerzos principales respecto a los esfuerzos aplicados. Posiblemente esto se debe a una menor representatividad estadística. La presencia de una partícula grande en el núcleo central puede distorsionar localmente la transmisión de esfuerzos en la estructura.

Cuando se tiene un cambio importante en el estado de esfuerzos, éste no se refleja de inmediato en el núcleo central debido a la existencia de cadenas y arcos de fuerzas.

Tabla 4.17. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría continua en compresión triaxial

$a=10$	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{11}$ (MPa)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)
C1	1.44	1.79	2.44	138.5	41.9	6.2
C2	1.41	1.72	3.28	137.4	42.5	2.2
C3	1.59	1.39	3.31	39.4	39.4	3.0
C4	1.41	1.51	3.05	142.5	37.5	0.8

Tabla 4.18. Esfuerzos en el volumen de sólidos del núcleo central, muestras con granulometría continua en extensión triaxial

$a=10$	$\sigma_{11}$ (MPa)	$\sigma_{22}$ (MPa)	$\sigma_{33}$ (MPa)	$\theta_x$ (°)	$\theta_y$ (°)	$\theta_z$ (°)
E1	1.47	1.66	1.23	44.2	43.4	10.5
E2	1.56	1.67	0.74	172.9	7.2	1.7
E3	1.64	1.73	0.70	140.3	140.4	0.7

El tensor de esfuerzos intragranulares indica el estado medio de esfuerzos dentro de las partículas y no refleja las variaciones espaciales (en particular cerca de los puntos de contacto). Un estudio detallado sobre los esfuerzos y deformaciones intragranulares puede realizarse con modelos de elementos finitos o diferencias finitas. Cantor *et al.*, (2015) y Alshibli *et al.*, (2015) han realizado análisis de este tipo para partículas de diversas formas.

#### 4.6 Rotura de partículas

Una partícula dentro de un medio granular puede presentar falla por tensión, por cortante o por atrición. Evaluar todos los posibles mecanismos de falla es una tarea complicada, sin embargo se puede estudiar con cierta confianza la rotura por tensión, que es la más común.

La fragmentación de las partículas es un fenómeno muy influyente en la deformación de los medios granulares, puede causar cambios importantes en la granulometría, en la deformabilidad y en la porosidad del material. Este proceso depende tanto de las características de los granos como del esqueleto granular, por lo que una aproximación estadística al problema es adecuada (Auvinet & Marsal, 1975).

Diversos ensayos de laboratorio (tensión indirecta, compresión unidimensional, compresión triaxial y de deformación plana) muestran que los granos de roca experimentan rotura incluso a niveles de esfuerzos bajos.

#### 4.6.1 Resistencia de los granos

Diversos factores como las fisuras, cavidades y propiedades de los minerales afectan la resistencia a la rotura de los granos. Marsal (1973) realizó numerosas pruebas de laboratorio en fragmentos de roca, gravas y arenas de distintos tamaños para determinar el valor medio y desviación estándar de la fuerza necesaria para romper un grano ( $P_a$ ). La prueba consiste en aplicar cargas con placas metálicas a tres granos de tamaño similar, medir la carga que produce la rotura del primer grano y contar número de contactos para calcular la carga de ruptura ( $P_a$ ) de la roca. Se encontró que la resistencia media  $\bar{P}_a$  y el diámetro nominal de las partículas se relacionan empíricamente de la forma:

$$\bar{P}_a = \eta d_m^\lambda \quad (4.4)$$

Donde  $\bar{P}_a$  está dada en  $\text{kg}_f$  y  $d_m$  en cm. Dependiendo del tipo de roca,  $\eta$  varía en el intervalo (35, 140) y  $\lambda$  en (1.2, 1.8). En la tabla 4.19 se presenta un extracto de los resultados obtenidos por Marsal (1973), para mayor detalle consultar esta fuente. En esta tabla se muestran, a manera de ejemplo, granos fuertes (grava Pizandarán), granos intermedios (gneis) y granos débiles (Toba Las Piedras).

Tabla 4.19. Ruptura en fragmentos de roca

Material	Dimensión media $d_m$ (cm)	Resistencia media a la ruptura $\bar{P}_a$ ( $\text{kg}_f$ )	Desviación estándar de $\bar{P}_a$ ( $\text{kg}_f$ )	$\eta$	$\lambda$
Grava Pizandarán	2.1	439	123	140	1.55
	4.0	1090	191		
	7.9	3490	820		
Gneis seco	2.1	209	33	83	1.59
	4.0	603	98		
	7.8	1790	475		
Gneis húmedo	2.2	187	26	62	1.70
	4.1	580	71		
	7.3	1510	387		
Toba Las Piedras	1.4	68	19	33	1.36
	2.9	163	87		
	5.4	435	123		
	10.8	753	151		

Extraída de Marsal (1973), donde la media y desviación estándar se obtienen de 10 mediciones.

Se puede observar que, si bien los experimentos de Marsal aportan información valiosa, carecen de representatividad estadística. Además los resultados presentan un sesgo porque se evalúa la resistencia mínima de tres granos.

Auvinet & Marsal (1975) consideraron que  $P_a$  tiene una distribución normal con esperanza  $\bar{P}_a$  y desviación estándar  $\sigma_{P_a}$  para formular un modelo de rotura de granos. Modificaron la expresión 4.4 para tomar en cuenta el confinamiento de los granos. Sin embargo obtuvieron contradicciones al comparar sus resultados teóricos con las evidencias prácticas.

Otros autores como Todisco *et al.*, (2015) han estudiado el efecto del número de contactos sobre la resistencia de granos. Sin embargo, estos análisis en términos de esfuerzos internos no evalúan la magnitud de las fuerzas en los contactos y ni el papel que juegan en la rotura de las partículas.

Una alternativa atractiva consiste en evaluar la resistencia a la tensión en pruebas de tensión indirecta (Brasileña). El ensayo consiste en aplicar dos cargas diametralmente opuestas a un cilindro de roca sana hasta ocasionar su ruptura. El aparato de prueba, preparación del espécimen y procedimiento de prueba se rigen por la norma ASTM D-3967.

De acuerdo con la figura 4.50 el esfuerzo de tensión que provoca la rotura se calcula como:

$$R_T = \frac{2F}{\pi LD} \quad (4.5)$$

Donde:

- $R_T$ : Esfuerzo resistente a la tensión, Pa
- $F$ : Carga máxima aplicada, N
- $L$ : Espesor del espécimen, m
- $D$ : Diámetro del espécimen, m

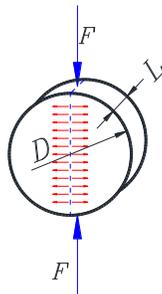


Figura 4.50. Esquema de un disco de roca sometido a prueba de tensión indirecta

En la tabla 4.20 se presentan los resultados de numerosas pruebas de tensión indirecta para diferentes tipos de roca. De acuerdo con los momentos presentados en esta tabla, se considera que  $R_T$  es una variable aleatoria con densidad de probabilidad normal. La figura 4.51 muestra la densidad de probabilidad de  $R_T$  obtenida con los datos de laboratorio y la densidad normal truncada ( $R_T \geq 0$ ).

Tabla 4.20. Resistencia en tensión en distintos tipos de roca

Tipo de roca	N° de pruebas	$R_T$ media (MPa)	Desv. estándar (MPa)	Coefficiente de asimetría	Coefficiente de pico
Andesita	65	6.72	3.39	0.49	2.53
Caliza	50	7.69	2.20	0.18	2.33
Conglomerado	179	8.59	3.50	0.46	3.50
Gneis	34	9.04	2.37	0.29	3.42

Datos proporcionados por el Departamento de Mecánica de Rocas e Inyecciones, CFE

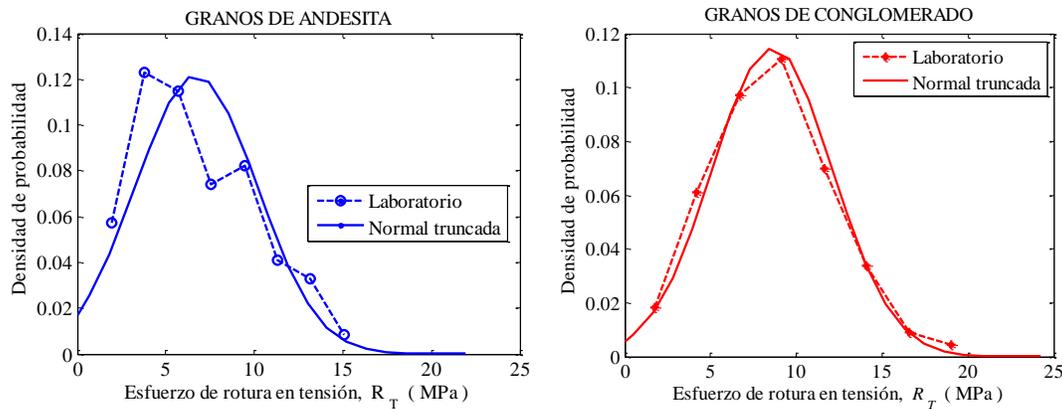


Figura 4.51. Densidad de probabilidad de la resistencia en tensión de Andesita y Conglomerado

#### 4.6.2 Esfuerzos de tensión actuantes en los granos

Wang & Vallejo (2015) consideran que las fuerzas actuantes sobre las partículas dependen del diámetro de los granos y de la localización dentro del medio granular. Cantor *et al.*, (2015) y Zhou & Wang (2015) recurren al tensor de esfuerzos para la transformación de fuerzas en esfuerzos y viceversa en análisis bidimensionales.

En las simulaciones DEM realizadas en este trabajo se conocen las fuerzas de contacto conforme evoluciona el estado de esfuerzos en la prueba triaxial. Para evaluar la rotura de granos es necesario procesar estas fuerzas, obtener los esfuerzos intragranulares, calcular

los esfuerzos de tensión que favorecen la rotura de los granos y compararlos estadísticamente con la resistencia de los granos.

El procedimiento es el siguiente:

- Elegir una partícula dentro del núcleo central de la muestra granular.
- Obtener las fuerzas de contacto.
- Calcular el tensor de esfuerzos principales ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ ) en la partícula (Sección 4.5 de esta tesis) y considerarlo como la suma de tres tensores:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- Reemplazar cada tensor por dos fuerzas ( $F_i$ ) opuestas y normales a los contactos. Cada fuerza está situada en uno de los ejes principales 1, 2 ó 3. Estas fuerzas se obtienen con la ecuación 4.6.
- De acuerdo con la figura 4.52, la fuerza  $F_i$  genera un esfuerzo parcial ( $\sigma_c$ ) de compresión sobre el plano perpendicular (0,2,3) y dos esfuerzos parciales de tensión ( $\sigma_t$ ) sobre los planos 0,1,3 y 0,1,2.
- El esfuerzo parcial de compresión se calcula con la ecuación 4.7.
- El esfuerzo parcial de tensión se calcula con la ecuación 4.8. Véase Timoshenko & Goodier (1934) para la demostración de estas fórmulas.
- En cada plano se calcula la suma de los esfuerzos ( $\sigma_{ijk}$  en la ecuación 4.9). Por conveniencia en la evaluación de la rotura de partículas, los esfuerzos de tensión son positivos y los de compresión son negativos.
- El esfuerzo de tensión ( $T$ ) que favorece la rotura de la partícula es el máximo de los tres planos principales y el esfuerzo de compresión máximo ( $C$ ) es el mínimo.
- Repetir los pasos anteriores hasta obtener una muestra representativa, o bien, realizar un muestreo exhaustivo en todas las partículas contenidas en el núcleo central de la muestra granular.
- Obtener la densidad de probabilidad del esfuerzo de tensión intragranular. Este esfuerzo ya considera el efecto del confinamiento de los granos y por lo tanto puede compararse contra el esfuerzo resistente  $R_T$ .

$$F_i = \frac{V_b \sigma_{ii}}{2r} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{c,i} = \frac{3F_i}{2\pi r^2} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{i,i} = \frac{F_i}{2\pi r^2} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{012} &= \frac{2}{3}\sigma_{11} + \frac{2}{3}\sigma_{22} - 2\sigma_{33} \\ \sigma_{031} &= \frac{2}{3}\sigma_{33} + \frac{2}{3}\sigma_{11} - 2\sigma_{22} \\ \sigma_{023} &= \frac{2}{3}\sigma_{22} + \frac{2}{3}\sigma_{33} - 2\sigma_{11} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$T = \text{máx}(\sigma_{012}, \sigma_{031}, \sigma_{023}) \quad (4.10)$$

$$C = \text{mín}(\sigma_{012}, \sigma_{031}, \sigma_{023}) \quad (4.11)$$

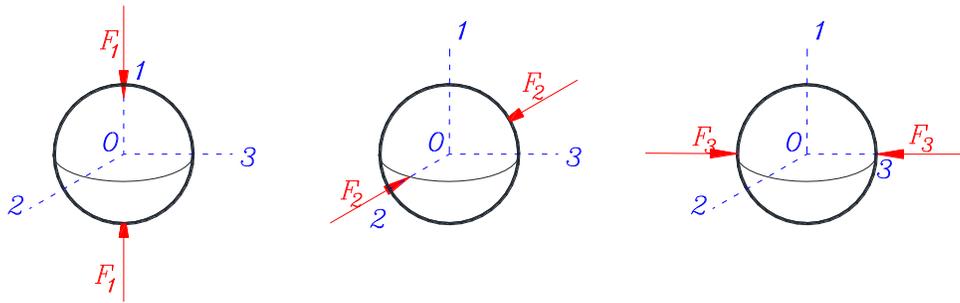


Figura 4.52. Fuerzas equivalentes actuantes sobre una partícula en las direcciones principales

De acuerdo con la ecuación 4.9, dependiendo de la magnitud de los esfuerzos principales ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ ) existen diferentes condiciones dentro de las partículas como se muestra en la tabla 4.21. Para mayor facilidad en la comprensión se consideran dos esfuerzos iguales.

Si los tres esfuerzos principales intragranulares son iguales, la partícula se encuentra en compresión pura. Esta condición prevalece en un pequeño intervalo cuando los tres esfuerzos principales son aproximadamente iguales. En los límites del intervalo indicado en la tabla 4.21, eventualmente los esfuerzos se anulan en uno o dos planos.

Cuando  $\sigma_{33}$  es más pequeño y los otros dos esfuerzos son iguales, se tiene un plano en compresión y dos en tensión. En cambio, si  $\sigma_{11}$  es mucho mayor que  $\sigma_{22}$  y éste es igual o mayor que  $\sigma_{33}$  se generan dos planos en tensión y uno en compresión.

Se observa que cuando el esfuerzo principal mayor es infinitamente mayor que los otros dos, el esfuerzo de compresión generado en un plano es tres veces el esfuerzo de tensión que existe en los otros dos planos.

Tabla 4.21. Condiciones de esfuerzos intragranulares de compresión y tensión

Condiciones	Plano 012	Plano 013	Plano 023
$\sigma_{11} = \sigma_{22} \ \& \ \sigma_{33} < 2/3 \sigma_{22}$	Tensión	Compresión	Compresión
$\sigma_{11} = \sigma_{22} \ \& \ \sigma_{33} = 2/3 \sigma_{22}$	Nulo	Compresión	Compresión
$\sigma_{11} = \sigma_{22} \ \& \ 2/3 \sigma_{22} < \sigma_{33} \leq \sigma_{22}$	Compresión	Compresión	Compresión
$\sigma_{22} < \sigma_{11} < 2\sigma_{22} \ \& \ \sigma_{22} = \sigma_{33}$	Compresión	Compresión	Compresión
$\sigma_{11} = 2\sigma_{22} \ \& \ \sigma_{22} = \sigma_{33}$	Nulo	Nulo	Compresión
$\sigma_{11} > 2\sigma_{22} \ \& \ \sigma_{22} \geq \sigma_{33}$	Tensión	Tensión	Compresión

De acuerdo al procedimiento descrito con anterioridad, la figura 4.53 presenta algunos ejemplos de la densidad de probabilidad de los esfuerzos intragranulares máximos de tensión (*T*) y compresión (*C*).

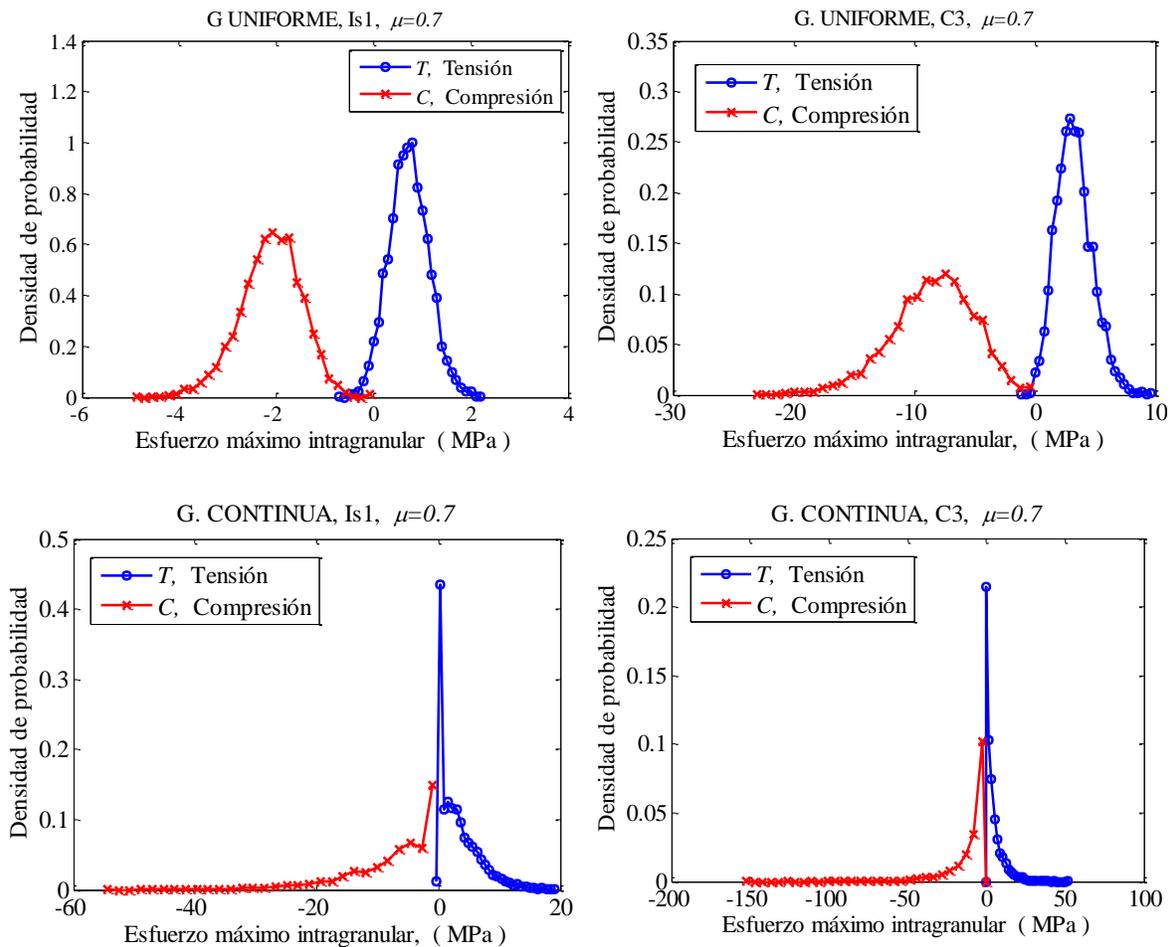


Figura 4.53. Densidad de probabilidad de los esfuerzos intragranulares máximos de compresión y tensión

Por lo general, para cada partícula se tiene un esfuerzo de tensión y uno de compresión. Un esfuerzo de tensión alto está asociado a un esfuerzo de compresión alto. Los esfuerzos máximos nulos corresponden a las partículas inactivas (baja probabilidad de ocurrencia).

Existe una pequeña cantidad de granos exclusivamente en compresión registrada en los valores negativos de la densidad de probabilidad de  $T$ . Nótese que las partículas en compresión pura están sometidas a esfuerzos muy bajos.

Las gráficas de la figura 4.53 muestran que pocas partículas están sometidas a esfuerzos muy altos de compresión, con una magnitud del orden de tres veces el máximo esfuerzo de tensión.

La granulometría modifica drásticamente la forma de la densidad de probabilidad y la magnitud de los esfuerzos intragranulares. En el material con granulometría uniforme, las densidades de probabilidad de  $T$  y  $C$  son aproximadamente normales. En granulometría continua se tiene un número considerable de partículas con esfuerzos cercanos a cero y colas muy extendidas a la derecha (en tensión) y a la izquierda (en compresión).

La figura 4.54 muestra el esfuerzo máximo de tensión en las partículas y su relación con el número de contactos (en granulometría uniforme). Se observa que las partículas con menor número de contactos están sujetas a esfuerzos relativamente bajos. Las partículas en compresión pura (esfuerzo de tensión negativo) presentan entre 6 y 8 contactos.

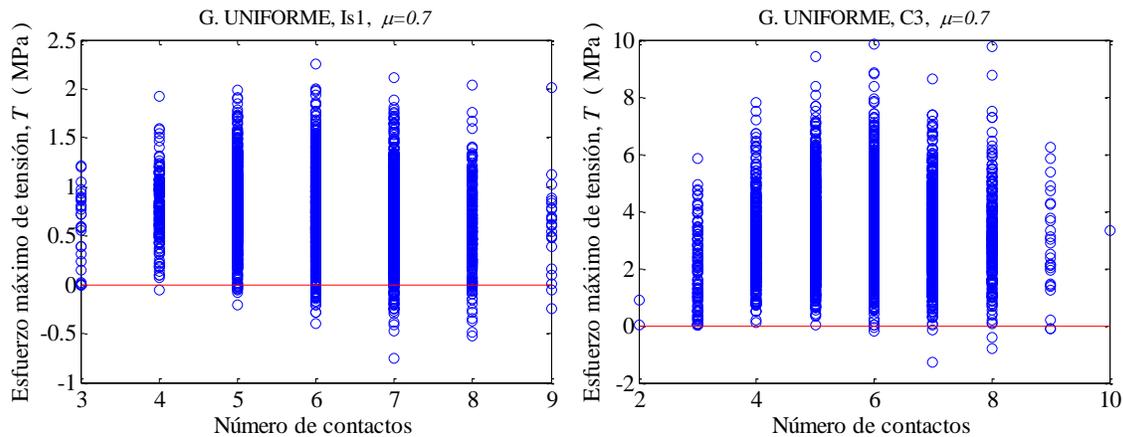


Figura 4.54. Relación del esfuerzo de tensión intragranular con el número de contactos

Para el material con granulometría continua, en la figura 4.55 se relaciona el esfuerzo máximo de tensión con el tamaño de partícula. El esfuerzo de tensión en las partículas pequeñas varía en todo el intervalo registrado en la estructura, una partícula inactiva está sometida a esfuerzos casi nulos, mientras que en una cadena de fuerzas, los esfuerzos

aumentan súbitamente en el reducido volumen de una partícula pequeña. En las partículas grandes, los numerosos contactos y un volumen relativamente alto conducen a esfuerzos pequeños.

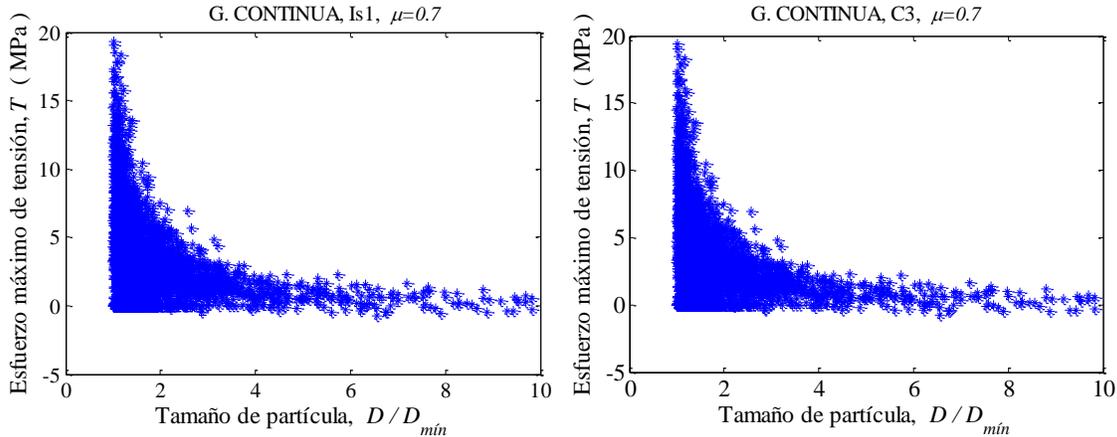


Figura 4.55. Relación del esfuerzo de tensión intragranular con el tamaño de las partículas

### 4.6.3 Probabilidad de rotura de granos

Este análisis se concentra en los materiales con  $\mu=0.7$  por ser el más representativo para granos de roca. La rotura de granos se estudia a partir de los esfuerzos de resistencia a la tensión ( $R_T$ ) y el esfuerzo de tensión intragranular ( $T$ ) que favorece la rotura. Este criterio tiene la ventaja de que es independiente del tamaño de las partículas y de que las pruebas de laboratorio se realizan con un procedimiento estándar.

Tanto el esfuerzo resistente en tensión ( $R_T$ ) como el esfuerzo intragranular de tensión ( $T$ ) se consideran como variables aleatorias. La probabilidad de rotura ( $P_R$ ) de los granos es la probabilidad de que, en una partícula elegida al azar dentro del medio granular el esfuerzo de tensión sea mayor que la resistencia en tensión. La evaluación de  $P_R$  se realiza a partir de las densidades de probabilidad de  $R_T$  y  $T$  de acuerdo con la ecuación 4.12.

$$P_R = P[R_T < T] = \int_{-\infty}^{\infty} F_{R_T}(t) f_T(t) dt \quad (4.12)$$

Donde:  $F_{R_T}(t)$  es la función de distribución acumulativa de  $R_T$  evaluada en  $T=t$   
 $f_T(t)$  es la densidad de probabilidad del esfuerzo de tensión  $T$

La figura 4.56 muestra un ejemplo de las densidades de probabilidad de la resistencia de los granos ( $R_T$ ) y el esfuerzo de tensión intragranular ( $T$ ) que provoca la ruptura. La región

traslapada entre estas densidades es un indicador cuantitativo de la probabilidad de falla. Para fines didácticos se consideran sólo dos tipos de roca de la tabla 4.20.

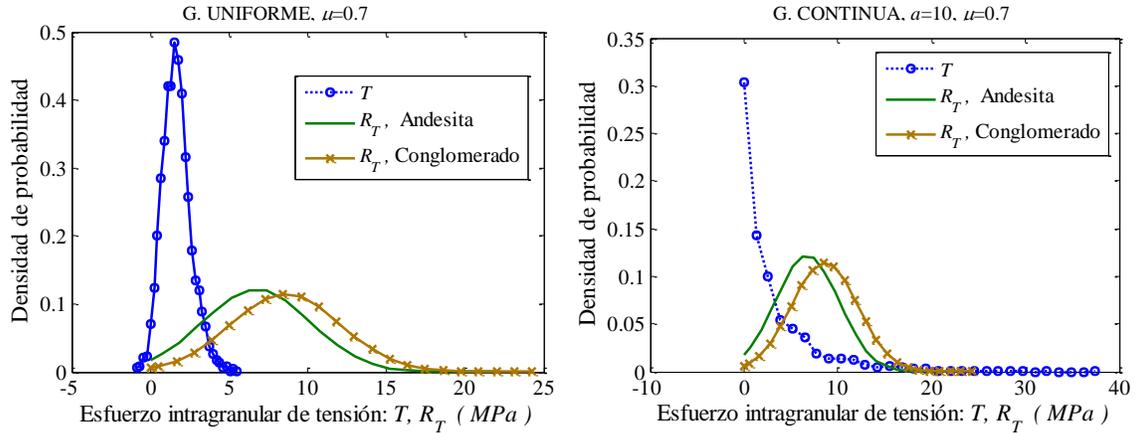


Figura 4.56. Densidades de probabilidad del esfuerzo intragranular de tensión. Muestras bajo un confinamiento isótropo de 1MPa

La probabilidad de rotura también puede interpretarse como la proporción (en número) de partículas que rompen dentro de una muestra granular bajo un estado de esfuerzos dado.

La probabilidad de rotura de granos ( $P_R$ ) se puede calcular en cada etapa de las simulaciones de las pruebas triaxiales. Se debe considerar que son probabilidades asociadas a un estado de esfuerzos instantáneo y no toma en cuenta la historia de la rotura de granos durante la prueba triaxial.

La rotura de las partículas modifica la transmisión de fuerzas en el medio granular. Las simulaciones realizadas con el DEM no toman en cuenta este fenómeno y en caso de haber una alta proporción de partículas rotas, las simulaciones podrían perder representatividad. Por lo anterior se analizan únicamente los estados de compresión (etapas de la simulación Is1, C1, Is2, C2, Is3 y C3 de la figura 4.3 y A.6).

a) Rotura de partículas en granulometría uniforme

Cuando se tiene una roca débil, como la andesita, se obtiene una probabilidad de rotura de granos importante. Para un esfuerzo medio aplicado mayor a 1.0MPa se supera el 10% de partículas rotas, lo cual podría tener implicaciones en la evolución de la estructura granular, tanto en la transmisión de fuerzas como en los cambios volumétricos.

A manera de ejemplo se evalúa la rotura de granos en la muestra con coeficiente de fricción interparticular  $\mu=0.1$ , donde la probabilidad de rotura de granos aumenta ligeramente con el aumento del esfuerzo medio aplicado al medio granular (figura 4.57). Para  $\mu=0.7$  se observa una relación más directa entre el esfuerzo aplicado y la probabilidad de rotura de granos. El análisis resulta limitado porque se tiene un intervalo pequeño del esfuerzo aplicado a la muestra granular.

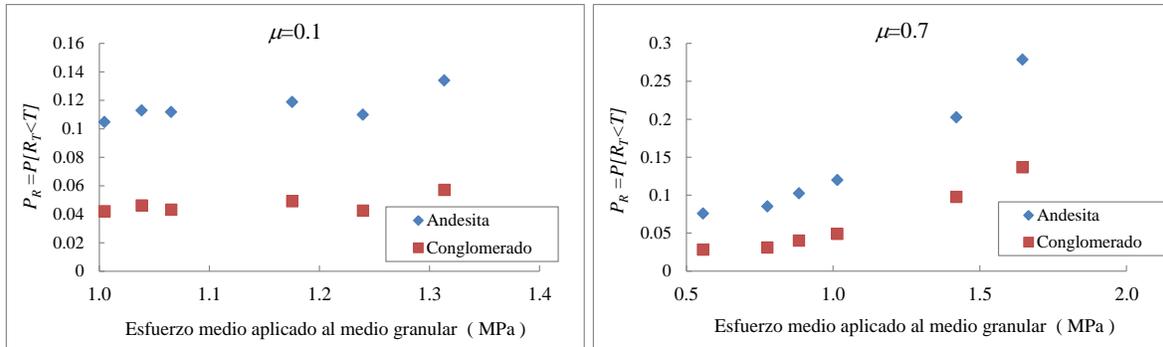


Figura 4.57. Probabilidad de rotura de granos en muestras con granulometría uniforme

En cambio, cuando  $\mu=0.7$ , la anisotropía y la formación de cadenas de fuerzas introducen esfuerzos desviadores intragranulares mucho mayores que aumentan la rotura de granos. En este caso es importante considerar una alta resistencia de los granos para validar las simulaciones de las pruebas triaxiales.

Si se sobreponen los puntos para  $\mu=0.1$  con los de  $\mu=0.7$  (figura 4.57) se observa que existe una continuidad en la trayectoria de las gráficas. De lo anterior se concluye que el coeficiente de fricción interparticular tiene una relevancia secundaria para la rotura de granos, una correlación entre el esfuerzo medio aplicado al material granular y la probabilidad de rotura de los granos es adecuada.

b) Rotura de partículas en granulometría bimodal

Para fines de geotecnia resulta de mayor interés obtener la probabilidad de rotura referida al volumen de sólidos ( $P_{RV}$ ). La proporción de partículas que rompen respecto al volumen total de sólidos ( $P_{RV}$ ) se obtiene ponderando la proporción de partículas rotas en número ( $P_R$ ), por la proporción del volumen de sólidos que representan. Esta proporción de partículas rotas se obtiene para tamaño de partículas ( $P_{RV/D}$ ).

La figura 4.58 presenta la proporción en volumen de partículas rotas para cada tamaño de grano. Cuando las partículas pequeñas ocupan el 20% de los sólidos ( $p_{3V}=0.2$ ), las partículas grandes se rompen en mayor grado puesto que ocupan la mayor parte del volumen. Este efecto es más evidente en la roca débil (Andesita).

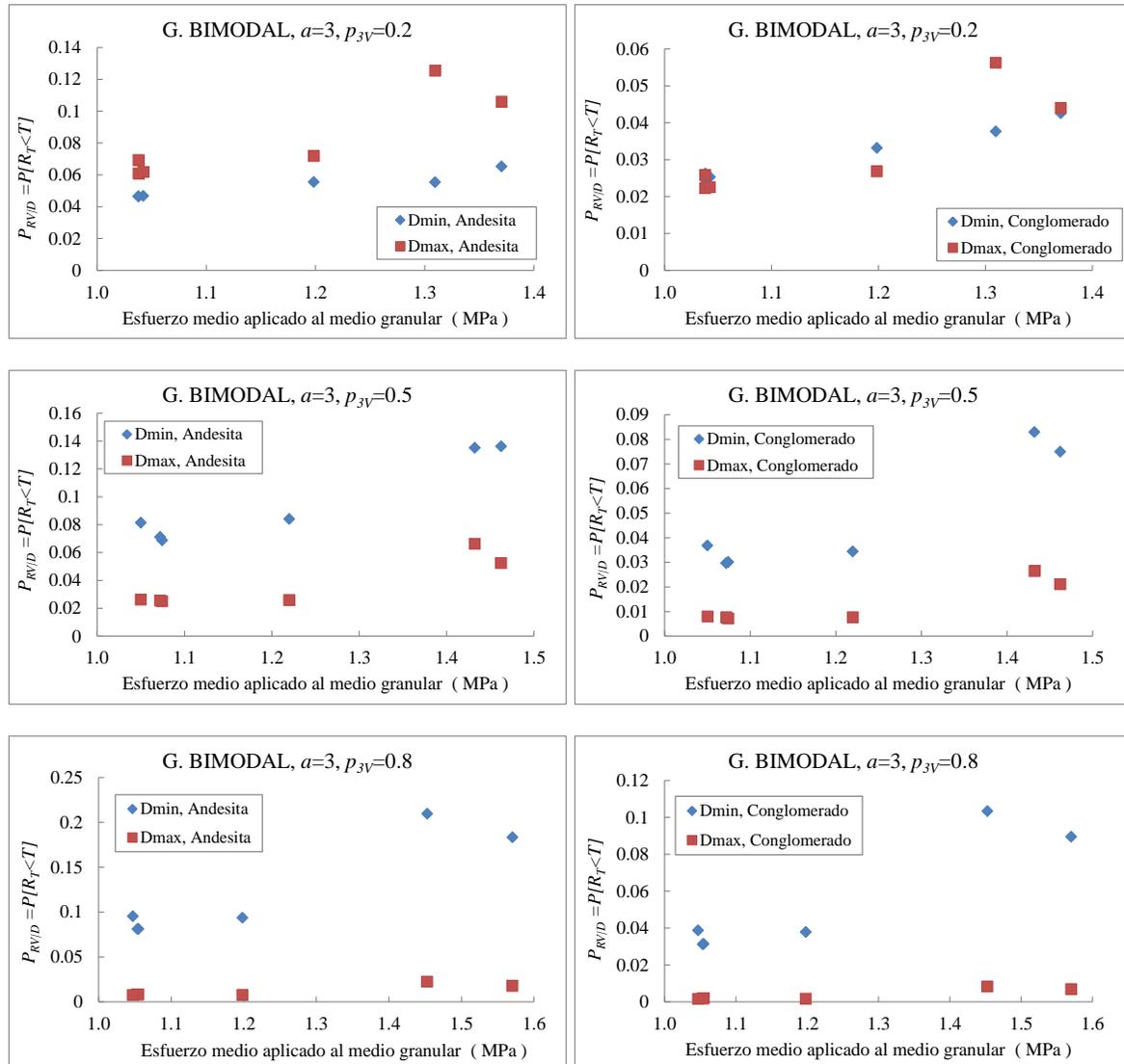


Figura 4.58. Probabilidad de rotura de granos en volumen y por tamaño de partícula en mezclas binarias

En la mezcla con  $p_{3V}=0.5$  las partículas pequeñas contribuyen más al volumen de granos rotos. En este caso, las partículas grandes quedan rodeadas por numerosas partículas pequeñas, lo que reduce el esfuerzo de tensión intragranular ( $T$ ).

Cuando las partículas pequeñas prevalecen en la mezcla ( $p_{3V}=0.8$ ), éstas forman principalmente el esqueleto granular y son más propensas a la rotura. Resulta difícil evaluar la rotura de partículas grandes porque son limitadas en número.

Con la información disponible no se puede concluir si existe una composición de la mezcla binaria para minimizar o maximizar la rotura de granos.

c) Rotura de partículas en granulometría continua

La figura 4.59 muestra la proporción (en número) de partículas rotas. La probabilidad de rotura de las partículas está entre 0.17 y 0.23 para el conglomerado y de 0.26 a 0.32 para la andesita.

Para evaluar la proporción de partículas rotas respecto al volumen de sólidos se divide la granulometría en diez intervalos:  $D_0$  a  $D_{10}$ ,  $D_{10}$  a  $D_{20}$ ...  $D_{90}$  a  $D_{100}$ . Con la ecuación 4.12 se evalúa la probabilidad de rotura de granos en cada fracción granulométrica, este resultado se presenta en la figura 4.60 para las dos fracciones granulométricas de partículas más pequeñas. Se observa que casi la totalidad de partículas rotas pertenecen a estos tamaños de grano.

La proporción en número de partículas rotas se pondera por la fracción del volumen de sólidos que ocupa cada clase granulométrica para calcular la proporción de partículas rotas en volumen. En la tabla 4.22 se muestra proporción en volumen de partículas rotas de cada fracción granulométrica respecto al volumen total de sólidos. El volumen de partículas rotas se encuentra principalmente en las partículas más pequeñas  $D_0$ - $D_{10}$ .

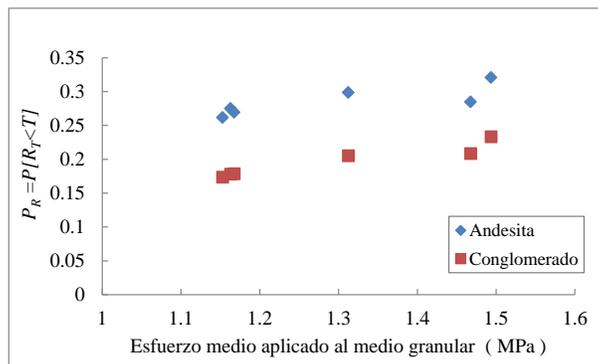


Figura 4.59. Probabilidad de rotura de granos (en número), material con granulometría continua

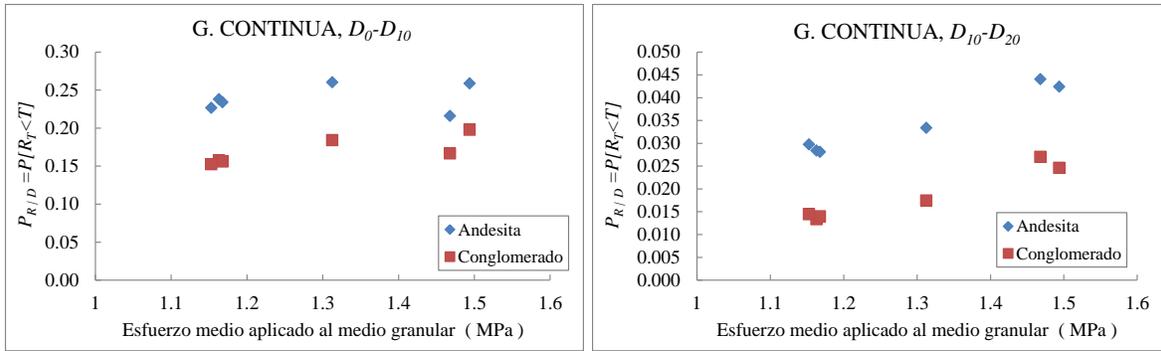


Figura 4.60. Probabilidad de rotura de los granos por fracción granulométrica respecto al total de partículas de la muestra granular

Tabla 4.22. Proporción en volumen de partículas rotas por fracción granulométrica en material con granulometría continua

Etapa	Granos de andesita				Granos de conglomerado			
	$D_0 - D_{10}$	$D_{10} - D_{20}$	$D_{20} - D_{30}$	$D_0 - D_{100}$	$D_0 - D_{10}$	$D_{10} - D_{20}$	$D_{20} - D_{30}$	$D_0 - D_{100}$
Is1	0.024	0.003	0.001	0.025	0.016	0.001	0.000	0.016
C1	0.026	0.003	0.001	0.028	0.018	0.002	0.000	0.019
Is2	0.023	0.003	0.001	0.025	0.016	0.001	0.000	0.016
C2	0.026	0.004	0.001	0.029	0.020	0.002	0.001	0.021
Is2	0.023	0.003	0.001	0.024	0.015	0.001	0.000	0.016
C3	0.022	0.004	0.001	0.025	0.017	0.003	0.001	0.018

Las partículas pequeñas tienen mayor probabilidad de rotura porque tienen pocos contactos que inducen esfuerzos de tensión.

En la práctica puede esperarse que la rotura de granos pequeños no afecte a las deformaciones del medio granular, que la probabilidad de rotura estos granos sea menor debido a su mejor calidad y que la rotura de granos grandes sea mayor debido a los defectos.

De los análisis de la rotura de partículas se puede concluir lo siguiente:

- Los materiales que presentan mayor anisotropía geométrica (por ejemplo la muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.7$ ), desarrollan una mayor resistencia mecánica y pueden ser sometidas a esfuerzos mayores. Por lo tanto la probabilidad de rotura de los granos aumenta.

- En los materiales de granulometría uniforme, el coeficiente de fricción interparticular afecta la resistencia del medio granular. Un coeficiente de fricción bajo conduce a resistencias bajas y a una menor probabilidad de rotura de granos.
- Las mezclas de dos tamaños de partículas muestran que las partículas más abundantes (en volumen) se rompen en mayor grado. Cuando las partículas pequeñas ocupan el 50% o más del volumen de sólidos, las partículas grandes quedan rodeadas por las pequeñas, lo que reduce su probabilidad de rotura por tensión.
- En granulometría continua, las partículas pequeñas tienen mayor probabilidad de romper por tensión, pero representan un volumen bajo comparado con granulometría uniforme. Yan & Shi (2015) observaron con rayos X que algunas partículas grandes no rompen porque están protegidas por los granos pequeños adyacentes.
- Los resultados de los análisis realizados en esta investigación coinciden con la evidencia experimental de Marsal (1973). Este autor concluyó que es conveniente un material bien graduado para reducir los asentamientos en los enrocamientos asociados a la rotura de granos.
- Las simulaciones realizadas permiten identificar el efecto del nivel de esfuerzos y la estructura granular sobre la rotura de granos. Para analizar la influencia de los defectos de los granos asociados a su tamaño es necesario contar con datos experimentales de la resistencia de granos de distintos tamaños. Este efecto podría representarse aumentando la desviación estándar de la resistencia a la tensión.

El esfuerzo de confinamiento de 1MPa es equivalente al de un enrocamiento de aproximadamente 65m de altura. Por lo tanto, la rotura de granos es un fenómeno muy presente en estructuras geotécnicas de mayor altura que merece ser estudiado con más detalle.

#### **4.7 Contracción y dilatación**

En esta sección se realiza un análisis del espacio vacío en el núcleo central de las muestras granulares. Para describir los cambios en los poros se recurre a la porosidad y a la distribución del tamaño de poros.

Se considera que los cambios volumétricos de la figura 4.4 y A.7 se deben a la evolución del espacio vacío. Las deformaciones en los granos, representada por la interpenetración de las partículas en contacto, se desprecian por ser muy pequeñas. En una inspección de la interpenetración entre partículas en contacto, se encontró que el 60% las intersecciones

entre partículas es menor de 0.01 veces el diámetro mínimo de los granos y el 90% menor de  $0.02D_{mín}$ .

En casos reales, la rotura de granos podría influir en los cambios volumétricos de un medio granular. Los análisis realizados en la presente investigación indican que para un esfuerzo medio de 1.5MPa aplicado en el medio granular, las partículas rotas representan hasta el 20% del volumen de sólidos en granulometría uniforme.

### 4.7.1 Porosidad

De acuerdo con la figura 4.4 y A.7, los materiales granulares presentan una reducción de su volumen durante las etapas de compresión y una recuperación parcial cuando se retira el esfuerzo desviador. En las etapas de extensión se tiene un aumento del volumen del medio.

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a las mediciones realizadas en el núcleo central de las muestras granulares, pueden diferir parcialmente de los presentados en el inciso 4.1.2 debido a que existe una fuerte alteración de la porosidad en la cercanía de las fronteras (Auvinet, 1986; Sánchez & Auvinet, 2009).

#### a) Granulometría uniforme

La porosidad de los materiales granulares está fuertemente afectada por el coeficiente de fricción interparticular. Al aplicarse el primer confinamiento isótropo (Is1) todas las muestras presentan una reducción de la porosidad, más marcada cuando el coeficiente de fricción es menor. En la figura 4.61 se observa que esta reducción en Is1 es tan importante en la muestra con  $\mu=0.1$  que durante la prueba triaxial se tienen variaciones muy pequeñas.

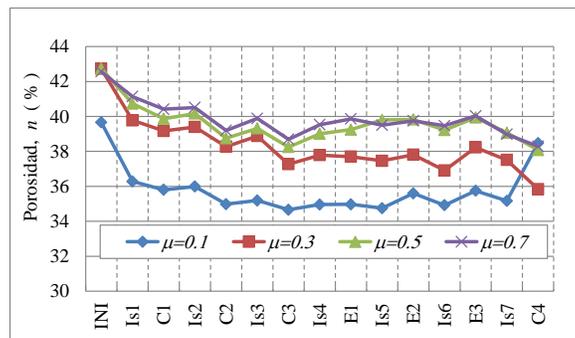


Figura 4.61. Evolución de la porosidad en muestras con granulometría uniforme durante la prueba triaxial

La porosidad disminuye en las etapas de compresión (C1, C2 y C3) y aumenta ligeramente en condiciones de confinamiento isótropo (Is2, Is3 e Is4). En los estados de extensión se registra un aumento de la porosidad hasta la etapa E3, cuando se tienen grandes deformaciones.

En la última etapa de compresión (C4), la muestra con  $\mu=0.1$  registra un aumento de la porosidad porque se presenta una dilatación. En esta situación, los cambios en las posiciones relativas de las partículas, ocasionan la apertura de los poros.

Las figuras 4.6 y 4.61 muestran una reducción simultánea del número de coordinación y de la porosidad de la etapa Is1 a la etapa C3. Esto es posible porque existe una restructuración de los arreglos de partículas como respuesta a los esfuerzos aplicados.

b) Granulometría bimodal

La porosidad inicial de las mezclas de dos componentes depende de la proporción de sus componentes como se vio en el capítulo anterior. En la figura 4.62 se observa que la reducción de porosidad causada por el confinamiento isótropo inicial es mayor en las mezclas con  $p_{3V}=0.2$  y 0.5. En estas mezclas existe una mayor posibilidad de que las partículas pequeñas ocupen los huecos entre las grandes.

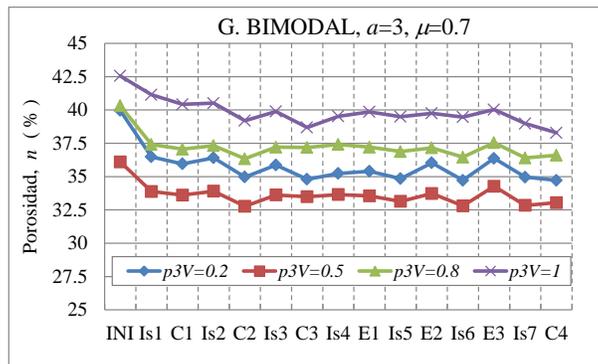


Figura 4.62. Evolución de la porosidad en materiales con granulometría bimodal durante la prueba triaxial

Los cambios en la porosidad durante la prueba triaxial son más marcados en las mezclas con  $p_{3V}=0.2$  y 0.5, sobre todo a grandes deformaciones tanto en compresión (C2 y C3) como en extensión (E2 y E3).

En las mezclas de dos componentes, la reorganización del medio granular da como resultado una reducción de la porosidad durante las primeras etapas de la prueba triaxial (Is1 a C2), al mismo tiempo que el número de coordinación decrece.

c) Granulometría continua

La figura 4.62 presenta las variaciones de la porosidad en la muestra con granulometría continua durante la prueba triaxial. Como referencia se agregó la evolución de la porosidad en un material de granulometría uniforme.

El material con granulometría continua sufre una disminución de su porosidad una vez que se aplica el confinamiento isótropo inicial (Is1). Esta reducción es mayor de la que ocurre en un medio granular con granulometría uniforme. Las etapas de compresión C1, C2 y C3 ocasionan una reducción en la porosidad recuperable una vez que se retira el esfuerzo desviador (etapas Is2, Is3 e Is4).

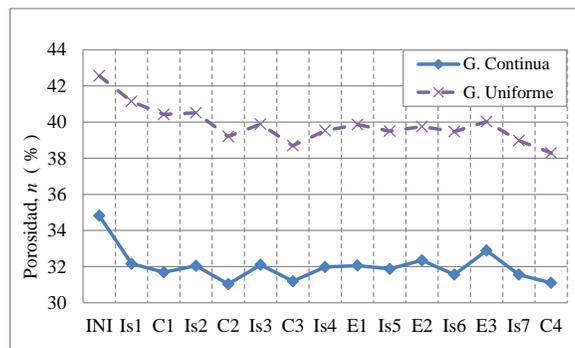


Figura 4.63. Evolución de la porosidad en material con granulometría continua y uniforme durante la prueba triaxial

Las etapas de extensión causan aumentos cada vez mayores en la porosidad cuando las deformaciones axiales de la muestra crecen. Cuando los esfuerzos laterales son mayores que el vertical, el movimiento de las partículas abre el esqueleto granular.

En resumen, la porosidad de los medios granulares está afectada por el coeficiente de fricción interparticular, la granulometría y el estado de esfuerzos. Los materiales que presentan menor porosidad y menores cambios durante la prueba triaxial son los que tienen un coeficiente de fricción interparticular bajo o los de granulometría continua.

Este comportamiento se refleja en el comportamiento global del medio granular con una menor deformabilidad volumétrica pero con menor resistencia.

### 4.7.2 Distribución de tamaño de poros

Durante la prueba triaxial, el espacio poroso cambia su volumen y su forma. Los cambios en el volumen se estudian mediante la porosidad y las deformaciones volumétricas. Para analizar los cambios en la forma de los poros se recurre a la distribución de tamaño de poros  $F_{3V}(p)$ .

#### a) Granulometría uniforme

El diámetro asociado a los poros es menor que el diámetro de las partículas ( $p/d < 1$ ). La distribución de tamaño de poros presenta un mayor intervalo de  $p$  en la muestra con mayor coeficiente de fricción interparticular  $\mu=0.7$ . En la figura 4.64 se observa que el confinamiento isótropo Is1 destruye los poros más grandes (desplazamiento hacia la izquierda de la distribución de tamaño de poros). Cuando  $\mu=0.1$  el confinamiento afecta a los poros mayores que  $0.25d$ , mientras que para  $\mu=0.7$  únicamente resultan afectados los poros con tamaño mayor que  $0.5d$ .

Es evidente que las fuerzas de fricción limitan el colapso de los poros ante la aplicación de un esfuerzo externo.

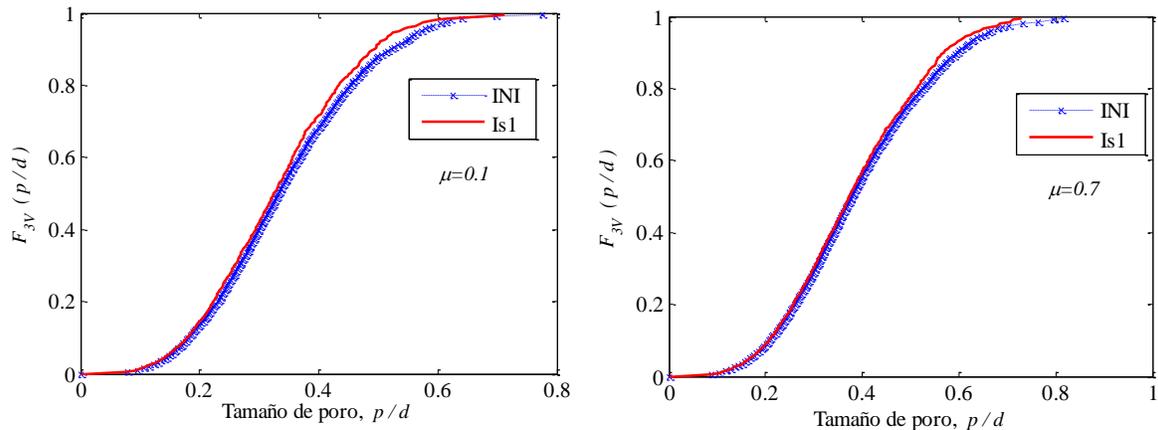


Figura 4.64. Distribución de tamaño de poros inicial y en el primer confinamiento isótropo, en muestras con granulometría uniforme

Durante la compresión triaxial, en el material con  $\mu=0.1$  se reduce el tamaño de los poros con el aumento de la deformación axial (lado izquierdo de la figura 4.65). La proporción de poros de tamaño inferior a  $p/d=0.15$  permanece aproximadamente constante, aumenta el

volumen de poros entre  $p/d=0.2$  y  $p/d=0.4$ . El tamaño máximo de los poros disminuye gradualmente de  $0.8d$  a  $0.6d$ .

En las etapas de extensión (lado derecho de la figura 4.65) no se tiene un aumento importante en el tamaño de los poros, las curvas de  $F_{3V}(p/d)$  se encuentran sobrepuestas y sólo se aprecia un aumento en el tamaño máximo de poro.

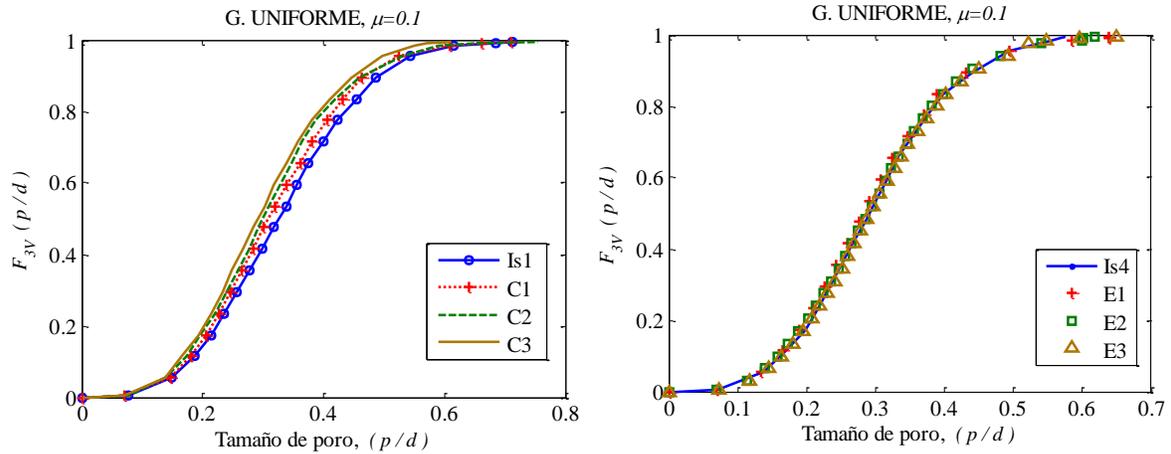


Figura 4.65. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestra con granulometría uniforme y con  $\mu=0.1$

Para el material con  $\mu=0.7$ , no existen cambios importantes en la distribución de tamaño de poros durante las etapas de compresión. Como se observa en la figura 4.66 sólo en la etapa C3 se obtiene un cierre de casi todos los tamaños de poros.

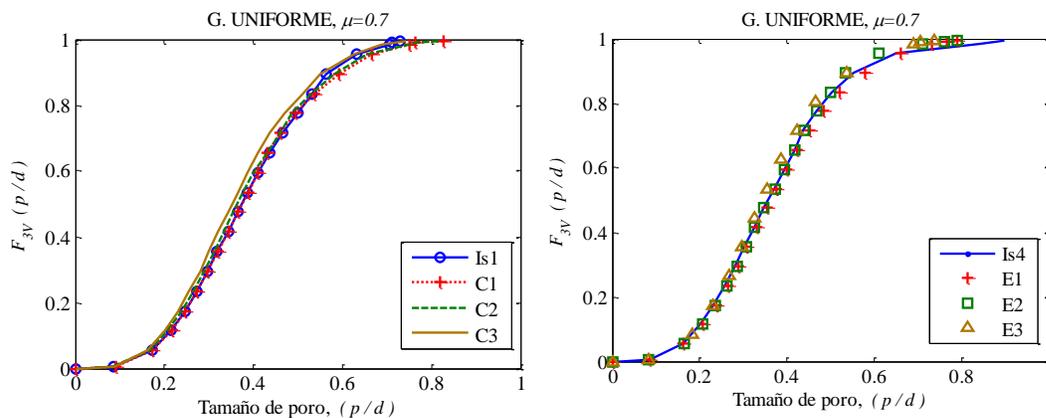


Figura 4.66. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestra con granulometría uniforme y con  $\mu=0.7$

En las etapas de extensión se reduce el tamaño máximo de poros pero aumenta el volumen de poros de  $0.5d$  a  $0.7d$ .

Cuando el coeficiente de fricción es bajo ( $\mu=0.1$ ), los poros que se destruyen en las etapas de compresión no recuperan su tamaño en las etapas de extensión. Cuando se tiene un coeficiente de fricción interparticular alto ( $\mu=0.7$ ) los cambios volumétricos son pequeños y sólo se observan pequeños cambios en  $F_{3V}(p)$ .

b) Granulometría bimodal

La figura 4.67 presenta las gráficas de la evolución de la distribución de tamaño de poros en las mezclas de partículas de dos tamaños.

En la mezcla con  $p_{3V}=0.2$ , el tamaño de los poros se distribuye de cero a  $2.5D_{mín}$  (o bien  $0.8D_{máx}$ ) en el confinamiento Is1. La primera etapa de compresión (C1) no ocasiona cambios en el tamaño de los poros ya que la reducción de la porosidad es de apenas 0.5%. En la etapa C2 disminuye la proporción de poros mayores que  $1.8D_{mín}$  y aumenta la proporción de poros de  $D_{mín}$  a  $1.8D_{mín}$ . En la etapa C3 desaparecen los poros mayores que  $2D_{mín}$  y aumenta el volumen de casi todos los tamaños de poro (la curva toma una mayor pendiente). El balance de Is1 a C3 es una reducción de la porosidad del 2%.

En las etapas de extensión, la distribución de tamaño de poros no sufre cambios en los poros menores  $D_{mín}$ . En los poros de mayor tamaño aumenta el volumen de los poros entre  $1.2D_{mín}$  y  $1.7D_{mín}$ . Al pasar de Is4 a E3 se tiene un aumento de tan sólo el 1% en la porosidad.

La tamaño de los poros en la mezcla con  $p_{3V}=0.5$  se distribuye en un intervalo menor respecto al material con  $p_{3V}=0.2$ . La primera compresión C1 no produce cambios sustanciales en la distribución de tamaño de poros respecto al confinamiento inicial Is1. En la etapa C2 aumenta la proporción de poros con tamaño comprendido entre  $0.5$  y  $0.8D_{mín}$ . En C3 desaparecen los poros mayores que  $1.2D_{mín}$  y los poros mayores que  $0.75D_{mín}$  ocupan aproximadamente el 10% del volumen de vacíos.

En las etapas de extensión se tienen cambios muy pequeños en el tamaño de los poros respecto al confinamiento isótropo Is4. Las deformaciones volumétricas de la muestra granular no inducen el incremento en el tamaño de los poros.

La muestra granular con  $p_{3V}=0.8$  presenta distribuciones de tamaño de poros muy parecidas a las de un material uniforme. Esto se debe a que predominan las partículas de  $D_{mín}$  e imponen sus características en el medio.

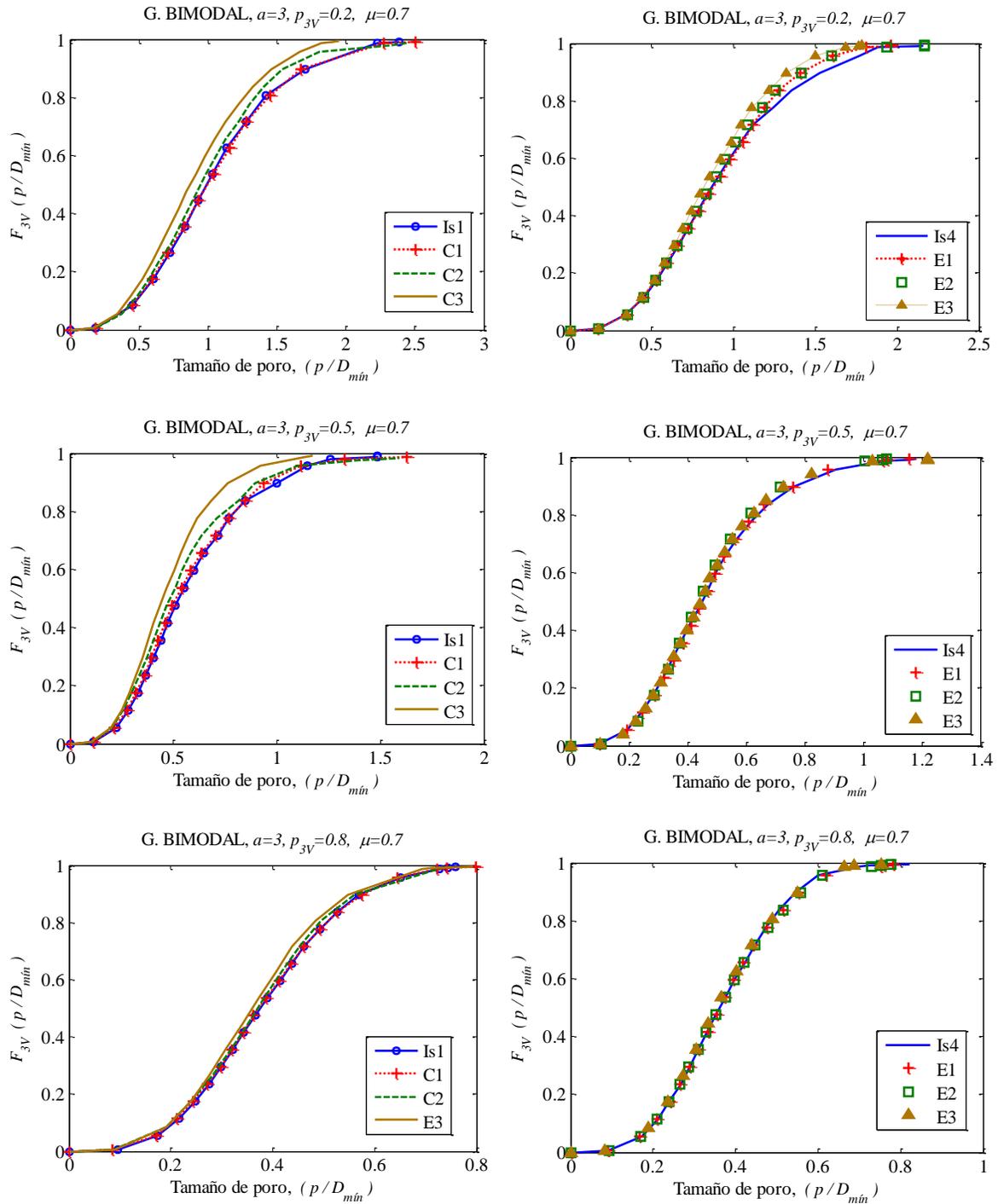


Figura 4.67. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestras con granulometría bimodal

El intervalo en el que se distribuye el tamaño de los poros está fuertemente afectado por el tamaño de las partículas predominantes.

c) Granulometría continua

La distribución de tamaño de poros en la muestra con granulometría continua se ve poco afectada durante la prueba triaxial (figura 4.68). Tanto en el confinamiento inicial como en las etapas de compresión C1 y C2 se tiene la misma distribución de tamaño de poros. En C3 se conserva el intervalo de tamaño de poros, pero disminuye la proporción de poros mayores que  $2.5D_{mín}$  (la curva es aproximadamente horizontal) y aumentan los poros de 1 a  $2.D_{mín}$ . De acuerdo con la porosidad medida en el centro del medio granular, se tiene una pérdida del 1% al pasar de Is1 a C3.

Aunque existe una ganancia de 1% en la porosidad al pasar de Is4 a E3, no se observan cambios en la distribución de tamaño de poros. La pequeña dilatación se distribuye en todo el intervalo de tamaño de los poros.

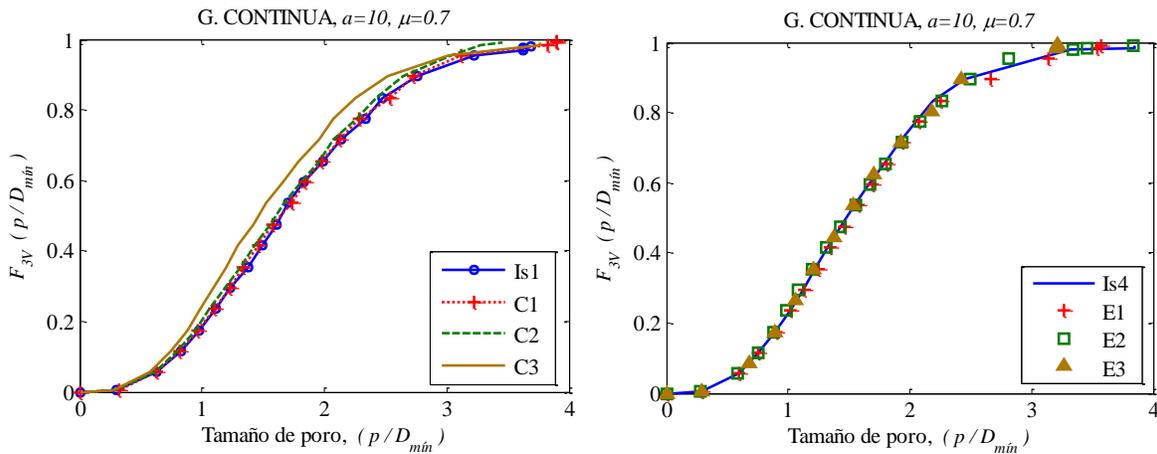


Figura 4.68. Evolución de la distribución de tamaño de poros en muestra con granulometría continua

En las muestras granulares analizadas, la distribución de tamaño de poros es más afectada cuando la granulometría es uniforme. La contracción del medio granular se asocia con el colapso de los poros más grandes y la dilatación se asocia con el aumento de poros de  $p_{50}$  a  $p_{90}$ . El colapso de los poros de mayor tamaño durante las etapas de compresión es irreversible.

La distribución de tamaño de poros ofrece información estadística sobre los cambios locales en el tamaño de los poros. La contracción del medio granular se asocia con el colapso de los poros de mayor tamaño. La dilatación no necesariamente genera poros de gran tamaño.

### 4.7.3 Longitud de los poros en dirección vertical

Siguiendo el procedimiento descrito en el inciso 3.4.3 se evalúa la longitud de los poros a lo largo de las direcciones cartesianas en cada etapa de la prueba triaxial y la atención se concentra en la dirección vertical ( $Lp_z$ ). Las deformaciones axiales del medio granular deben ser el reflejo del cambio de dimensiones de los poros, si se considera que los granos son cuerpos rígidos.

#### a) Granulometría uniforme

La longitud de los poros presenta una reducción importante al pasar del estado inicial al confinamiento isótropo Is1. Esta reducción es mayor cuando el coeficiente de fricción interparticular es menor.

Como se observa en la figura 4.69, durante la prueba triaxial se tiene una reducción continua de la longitud vertical de los poros, tanto en compresión como en extensión. Únicamente en la última etapa de compresión (C4) se obtiene un incremento de  $Lp_z$  y esta apertura de poros se debe a la falla del medio granular.

En la dirección horizontal  $x$  también se obtiene una reducción de la longitud de los poros. Sólo en las etapas de extensión E2 y E3 se aprecia un incremento de  $Lp_x$ .

Estos resultados indican que en general los poros colapsan ante la aplicación de un esfuerzo externo. Las curvas de deformación volumétrica muestran que en extensión se tiene un aumento del volumen del material (volumen de poros). En la figura 4.69 se observa que el aumento de tamaño de los poros ocurre en dirección horizontal ( $Lp_x$ ).

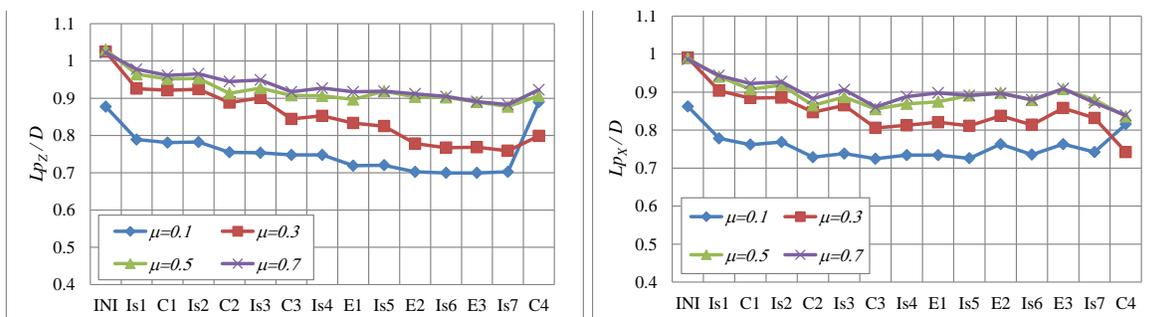


Figura 4.69. Longitud de poros media en muestras con granulometría uniforme durante la prueba triaxial

b) Granulometría bimodal

En los medios con granulometría bimodal se tiene también una reducción continua de la longitud vertical de los poros. El efecto es más notorio cuando las partículas pequeñas representan el 20% del volumen de los sólidos. En esta muestra la longitud de los poros es mayor.

La longitud de poros se divide por la esperanza en número del diámetro de las partículas porque, como se ha visto en la distribución de tamaño de poros, el tamaño de los poros es del orden del diámetro de las partículas más abundantes en el medio granular. Estos resultados pueden verse en la figura 4.70.

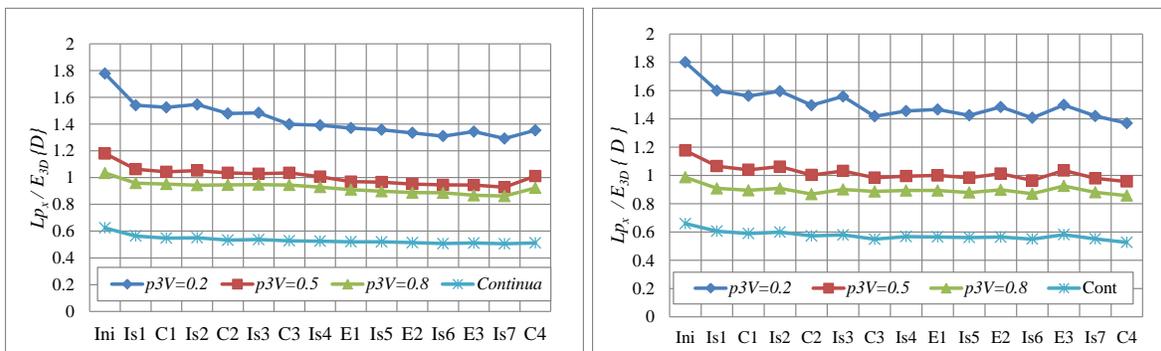


Figura 4.70. Longitud de poros media en muestras con granulometría bimodal y continua durante la prueba triaxial

c) Granulometría continua

La longitud media de los poros es la menor para las granulometrías analizadas y presenta cambios muy pequeños durante la prueba triaxial (figura 4.70). En granulometría continua, la evaluación de la longitud de los poros ofrece información muy pobre respecto a la evolución del espacio vacío.

Respecto al análisis realizado sobre el espacio poroso, la distribución de tamaño de poros es la que permite una mayor descripción acerca de la evolución de los poros. Se concluye que la disminución de la porosidad se debe principalmente al colapso de los poros grandes. Cuando el material aumenta su volumen de vacíos, aumenta la proporción de poros grandes pero no necesariamente se crean poros de tamaños mayores a los ya existentes.

Se puede decir que las deformaciones volumétricas son el resultado directo de los cambios en el volumen de los poros, pero las estas deformaciones no se pueden explicar a partir de

la evolución de los poros porque dichos cambios están gobernados por las interacciones entre los granos.

#### 4.8 Resistencia de los medios granulares

En geotecnia, la resistencia de los medios granulares suele definirse en función de los máximos esfuerzos desarrollados en la curva esfuerzo-deformación (figura 4.3 y A.6). De acuerdo con el criterio de Mohr-Coulomb, en un medio granular seco la resistencia está dada únicamente por el ángulo de fricción interna ( $\varphi$ ).

En las simulaciones realizadas se conocen los esfuerzos aplicados al medio granular y por lo tanto es posible trazar los círculos de Mohr como se ilustra en la figura 4.71. El ángulo de fricción interna queda determinado por la ecuación 4.13.

El ángulo de fricción interna es el resultado conjunto de diversos factores (Lambe & Whitman, 1972). Algunos de ellos como la granulometría, el coeficiente de fricción interparticular y la forma de los granos son características del medio granular. La porosidad inicial y la trabazón entre granos dependen del manejo de un medio granular antes de medir su resistencia. La presión de confinamiento y la velocidad de carga durante la ejecución de una prueba triaxial también pueden afectar el valor de  $\varphi$ .

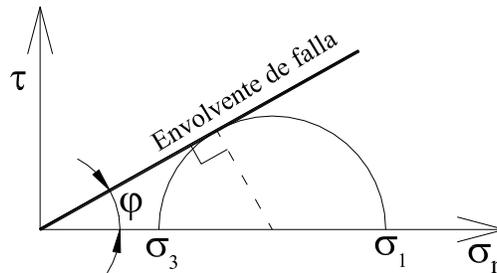


Figura 4.71. Criterio de falla de Mohr-Coulomb

$$\varphi = \arcsen\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}\right) \quad (4.13)$$

Donde:  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son los esfuerzos principales aplicados al medio.

Los valores típicos del ángulo de fricción interna en suelos granulares se encuentran entre 30 y 45°. Basándose en distintas fuentes, Lambe & Whitman (1972) consideran que el ángulo de fricción interna  $\varphi$  de materiales de granos angulosos es aproximadamente 5°

mayor que el de materiales de granos redondeados. Mediante simulaciones DEM bidimensionales, Nougier-Lehon *et al.*, (2003) observaron una mayor resistencia en partículas poligonales respecto a partículas circulares.

Por medio de simulaciones bidimensionales con el Método de Elementos Discretos, Rothemburg & Bathurst (1989) ajustaron funciones a la repartición de contactos, a la orientación de fuerzas normales y a la orientación de fuerzas tangenciales y observaron que los coeficientes de ajuste están bien relacionados con el seno del ángulo de fricción interna. Sus resultados sugieren que la resistencia de un medio granular depende de su capacidad para desarrollar anisotropía en la repartición de sus contactos y a la variación de la orientación de la fuerza de contacto media.

Con la información disponible en esta investigación es posible analizar la contribución de la fricción interparticular, de la granulometría y de la trabazón de partículas a la resistencia. Se anula el efecto de la velocidad de carga (velocidad muy baja) y el tamaño de las partículas (muestras representativas). No se considera a la porosidad inicial como un parámetro independiente sino como una consecuencia del coeficiente de fricción interparticular y de la granulometría.

En una prueba triaxial, el ángulo de fricción interna varía en un intervalo de acuerdo con el nivel de esfuerzos y el valor a considerar dependerá de los intereses prácticos (Bolton, 1986). Es de particular interés obtener el ángulo de fricción interna para tres casos: resistencia pico en compresión, resistencia residual en compresión y resistencia en extensión. En las figuras 4.72 a 4.74 se presentan los resultados para las distintas granulometrías.

En el inciso 4.4.4 se mostró que las fuerzas de contacto se encuentran distribuidas en el interior del cono de fricción y sólo en un cierto porcentaje de los puntos de contacto (contactos potencialmente inestables) se desarrolla toda la resistencia por fricción ( $\delta=\phi$ ).

La fricción interparticular movilizada (fuerza tangencial) está directamente relacionada con el ángulo ( $\delta$ ) de incidencia de la fuerza de contacto sobre el plano tangente al punto de contacto. Por lo tanto se define el ángulo de fricción interparticular movilizado medio ( $\phi^*$ ) como el promedio del ángulo ( $\delta$ ) que forma la fuerza de contacto con la normal al contacto (ecuación 4.14).

El ángulo de fricción interna ( $\phi$ ) medido en el medio granular es la suma del ángulo de fricción interparticular movilizado medio ( $\phi^*$ ) más el ángulo de fricción interna aportado por la trabazón de granos ( $\phi^*$ ) como se expresa en la ecuación 4.15.

$$\phi^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_i \quad (4.14)$$

$$\varphi = \phi^* + \varphi^* \quad (4.15)$$

Los resultados para granulometría uniforme se muestran en la tabla 4.23 y en la figura 4.72. Para  $\mu=0.1$ , el ángulo de fricción interna de pico es  $\varphi=17.1^\circ$ , de los cuales únicamente  $4.9^\circ$  se deben a la fricción en los puntos de contacto y  $12.2^\circ$  son aportados por la trabazón entre los granos. La resistencia residual en compresión es prácticamente la misma por lo que en geotecnia se dice que el material se comporta como un material suelto. En extensión se obtiene un ángulo de fricción interna  $\varphi=19.4^\circ$ . Puede observarse que la fricción movilizada en los contactos permanece constante en los distintos estados de esfuerzos y que la mayor parte de la resistencia es aportada por la trabazón entre partículas.

Tanto en compresión como en extensión, el ángulo de fricción interna aumenta gradualmente para  $\mu=0.3, 0.5$  y  $0.7$ . De igual forma lo hace el ángulo de fricción interparticular movilizado. Cuando aumenta la fricción interparticular, la trabazón entre granos disminuye debido a una porosidad mayor.

Tabla 4.23. Resistencia de materiales con granulometría uniforme

$\mu$	$\phi$ ( $^\circ$ )	$n$ (%)	Ángulo de pico ( $^\circ$ )			Ángulo residual ( $^\circ$ )			Ángulo de extensión ( $^\circ$ )		
			$\varphi$	$\phi^*$	$\varphi^*$	$\varphi$	$\phi^*$	$\varphi^*$	$\varphi$	$\phi^*$	$\varphi^*$
0.1	5.7	36.3	17.1	4.9	12.2	16.9	4.9	12.0	19.4	4.9	14.5
0.3	16.7	39.8	23.9	12.9	11.0	23.9	12.9	11.0	30.9	12.6	18.3
0.5	26.6	40.7	28.3	19.2	9.2	26.5	18.4	8.1	38.7	18.3	20.4
0.7	35.0	41.1	29.8	23.5	6.3	28.7	22.6	6.1	39.4	21.9	17.5
0.7'	35.0	34.0	35.1	25.9	9.1	22.5	21.5	1.0	32.6	22.1	10.5

- 0.7' Muestra formada con  $\mu=0$  (Ver resultados en el Anexo 1)
- $n$  es la porosidad en el primer confinamiento isótropo  $Is1$

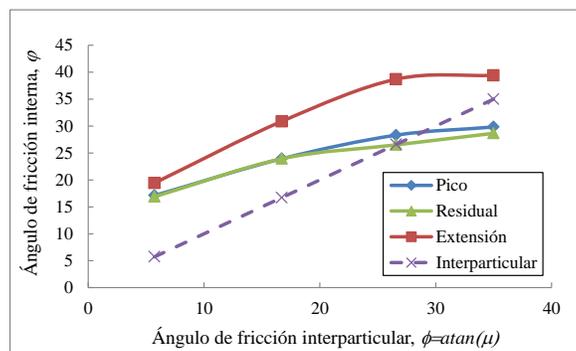


Figura 4.72. Ángulo de fricción interna para materiales de granulometría uniforme

Comparando los valores de  $\phi$  con  $\phi^*$  se observa que cuando se tiene un mayor coeficiente de fricción interparticular, el medio granular moviliza una menor proporción de su capacidad friccionante. Para un coeficiente de fricción dado, la resistencia por fricción movilizada en los contactos es aproximadamente constante e independiente del estado de esfuerzos. El mismo resultado se observó en el cálculo de la cantidad de contactos potencialmente inestables, lo cual señala que la resistencia global está controlada por pequeños grupos de partículas.

El ángulo de fricción interna alcanza valores más altos en extensión que en compresión porque se moviliza más la trabazón entre granos (tabla 4.23). En extensión ocurre una mayor evolución en la repartición de contactos sobre la superficie de los granos y el medio granular presenta mayores deformaciones.

En todos los casos anteriores no se desarrolla una resistencia de pico importante. La resistencia de pico aparece en la muestra depositada con coeficiente de fricción  $\mu=0$  y ensayada con  $\mu=0.7$ . Puede verse en la tabla 4.23 que la diferencia entre el ángulo de fricción interna en el pico y residual se debe a que en el segundo caso se ha destruido la trabazón entre las partículas. En geotecnia se considera a este material como denso.

En extensión no aparece una resistencia pico porque al amentar el volumen del material granular, las partículas tienen espacio suficiente para moverse sin romper los arreglos locales como ocurre en arreglos de partículas compactos.

Los materiales con menor porosidad ( $\mu=0.1$  y  $\mu=0.7$ ) presentan una menor contribución de la trabazón de granos al ángulo de fricción interna. Esto se debe a que la repartición de contactos sobre la superficie de los granos es relativamente uniforme.

Se debe tomar en cuenta que en las muestras granulares con coeficiente de fricción interparticular  $\mu=0.5$  y  $\mu=0.7$ , la resistencia del medio granular puede estar afectada por la rotación de partículas.

Por su parte, las muestras con granulometría bimodal permiten ver el efecto de la granulometría sobre el ángulo de fricción interna. Los resultados aparecen en la tabla 4.24 y en la figura 4.73.

Considérese un material constituido únicamente por partículas grandes ( $p_{3v}=0$ ) donde el ángulo de fricción interna y sus componentes  $\phi^*$  y  $\phi^*$  corresponden al material de granulometría uniforme con  $\mu=0.7$ . Si a la mezcla se agrega un 20% de partículas pequeñas en volumen ( $p_{3v}=0.2$ ), el material se hace más denso respecto al material de granulometría uniforme, pero el ángulo de fricción interna disminuye 9, 10 y 16° para la resistencia de pico, residual y de extensión respectivamente. En estos tres estados de esfuerzos se moviliza un ángulo de fricción interparticular medio aproximadamente constante  $\phi^*=22^\circ$ .

Tabla 4.24. Resistencia de materiales con granulometría bimodal con  $\mu=0.7$

$p_{3V}$	$\phi$	$n$	Ángulo de pico (°)			Ángulo residual (°)			Ángulo de extensión (°)		
	(°)	(%)	$\phi$	$\phi^*$	$\phi^*$	$\phi$	$\phi^*$	$\phi^*$	$\phi$	$\phi^*$	$\phi^*$
0	35.0	41.1	29.8	23.5	6.3	28.7	22.6	6.1	39.4	21.9	17.5
0.2	35.0	36.5	20.9	22.3	-1.3	18.7	21.4	-2.6	23.3	21.6	1.7
0.5	35.0	33.9	24.0	23.3	0.7	22.6	21.5	1.1	24.4	21.0	3.3
0.8	35.0	37.4	27.4	24.0	3.4	23.7	22.0	1.7	23.3	21.5	1.8
1.0	35.0	41.1	29.8	23.5	6.3	28.7	22.6	6.1	39.4	21.9	17.5

Resulta evidente que las partículas pequeñas funcionan como patines y reducen drásticamente la trabazón que existiría exclusivamente entre las partículas grandes.

En compresión se obtiene un ángulo de fricción interna aportado por la trabazón de granos negativo. Este resultado se debe a que no toda la fricción desarrollada en los puntos de contacto contribuye a la resistencia del medio granular, ya que las fuerzas de fricción en los puntos de contacto actúan en todas direcciones en los contactos y las fuerzas en las partículas inactivas sólo actúan para garantizar el equilibrio local.

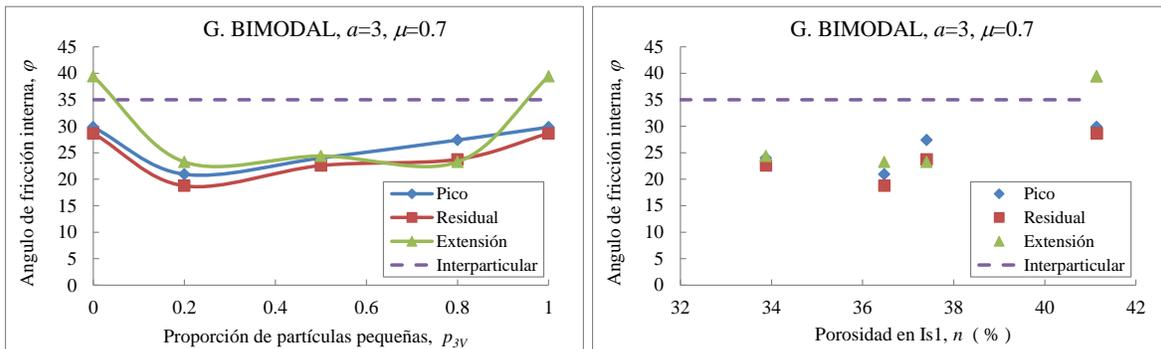


Figura 4.73. Ángulo de fricción interna para mezclas binarias

Para  $p_{3V}=0.5$ , el ángulo de fricción interna del material es mayor que el de la mezcla con  $p_{3V}=0.2$ . La trabazón entre granos aporta alrededor de  $1^\circ$  en compresión y  $3^\circ$  en extensión a la resistencia del medio granular. Por una parte, la trabazón entre partículas grandes se pierde al quedar aisladas en el medio granular, pero por otra aumenta la trabazón entre las partículas pequeñas y este segundo efecto se impone en el medio granular.

Cuando  $p_{3V}=0.8$ , la mezcla tiene una resistencia que se acerca a la de un material uniforme donde la trabazón está dada entre las partículas pequeñas, mientras que las grandes se encuentran aisladas en el medio.

En la figura 4.73 se agregó la gráfica que relaciona la porosidad en el confinamiento isótropo inicial con el ángulo de fricción interna. Sin embargo, resulta difícil dar una interpretación causa efecto ya que la porosidad no refleja la trabazón entre granos. Basándose en pruebas de laboratorio con arenas, Bolton (1986) señala que no existe una relación uno a uno entre el ángulo de fricción interna y la compacidad relativa.

En el material con granulometría continua se obtienen los ángulos de fricción interna más bajos entre las granulometrías analizadas (tabla 4.25 y figura 4.74) con el mismo ángulo de fricción interparticular.

En comparación con granulometría uniforme, la trabazón entre partículas de diversos tamaños es menor, puesto que las partículas pequeñas funcionan como lubricante para las partículas grandes. La trabazón entre partículas pequeñas queda limitada porque éstas caen fácilmente en los huecos formados por las partículas grandes.

Tabla 4.25. Resistencia en el material con granulometría continua y con  $\mu=0.7$

Granulometría	$n$	Ángulo de pico (°)			Ángulo residual (°)			Ángulo de extensión (°)		
	(%)	$\phi$	$\phi^*$	$\phi^*$	$\phi$	$\phi^*$	$\phi^*$	$\phi$	$\phi^*$	$\phi^*$
Uniforme	41.1	29.8	23.5	6.3	28.7	22.6	6.1	39.4	21.9	17.5
Continua	32.1	21.3	23.8	-2.5	19.6	21.7	-2.4	22.7	22.0	1.0

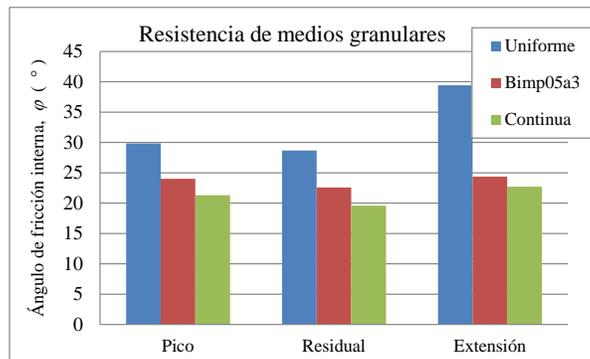


Figura 4.74. Ángulo de fricción interna en materiales con distinta granulometría

La muestra granular de granulometría continua es más densa que la de granulometría uniforme y presenta una resistencia menor. Por las razones explicadas anteriormente se concluye que para la resistencia es más relevante la granulometría que la porosidad inicial.

Todas las muestras analizadas presentan un ángulo de fricción interna mayor en extensión que en compresión. Esto se debe a que en extensión, la estructura granular se reorganiza, se tiene un mayor movimiento relativo entre partículas y se moviliza más la trabazón entre

granos. Macroscópicamente la reorganización de la estructura da como resultado un mayor módulo de deformabilidad conocido como efecto Bauschinger (Biarez, 1961).

Los análisis presentados muestran que la capacidad de un medio granular para resistir cargas depende de la fricción desarrollada en los puntos de contacto, asociada con la orientación de las fuerzas, y de la trabazón entre partículas, asociada con la anisotropía en la repartición de contactos. Rothenburg & Bathurst (1989) obtuvieron una conclusión similar pero con un tratamiento matemático diferente de la información microestructural.

Se concluye que la trabazón entre granos es un fenómeno de gran relevancia en la resistencia y deformación de los medios granulares. Las implicaciones en los problemas prácticos de la geotecnia deben motivar a continuar con estos estudios.

Para complementar las relaciones entre las características a la escala de las partículas y el comportamiento global de los medios granulares estudiados, en la tabla 4.26 se presentan las magnitudes relativas de cada parámetro durante el ensayo triaxial. El valor más alto corresponde al signo +++ y el más bajo a ---. En algunos casos como  $\Gamma(\alpha)$  se refiere a la no uniformidad en la repartición de contactos,  $\alpha_F$  a orientación sistemática de las fuerzas de contacto y  $p/D$  al tamaño máximo de los poros.

Tabla 4.26. Magnitud relativa de las características de medios granulares

Granulometría uniforme												
$\mu$	$Nc$	$\Gamma(\alpha)$	$F$	$Vpi$	$\alpha_F$	$P[\delta=\phi]$	$I_\sigma$	$P_R$	$\varphi$	$n$	$p/D$	$\varepsilon_Z$
0.1	+++	---	-	--	--	+++	--	--	---	-	---	+++
0.3	++	--	-	-	-	++	-	-	--	+	--	++
0.5	+	++	++	-	+	+	++	+	++	++	+	+
0.7	-	+++	+++	-	+++	-	+++	+++	+++	+++	+	-
Granulometría bimodal												
$p_{3V}$												
0	-	+++	+++	-	+++	-	+++	+++	+++	+++	+	-
0.2	---	--	--	+++	--	---	-	-	--	-	++	++
0.5	--	-	-	++	-	--	+	+	-	--	+	+
0.8	-	++	++	+	+	-	++	++	++	+	-	+
1.0	-	+++	+++	-	+++	-	+++	+++	+++	+++	+	-
Granulometría continua												
	---	---	---	+++	---	--	++	---	--	---	+++	++

$Nc$ : número de coordinación,  $\Gamma(\alpha)$ : función de repartición de contactos,  $F$ : magnitud de las fuerzas de contacto,  $Vpi$ : volumen de partículas inactivas,  $\alpha_F$ : orientación de las fuerzas de contacto,  $P[\delta=\phi]$ : proporción de contactos potencialmente inestables,  $I_\sigma$ : esfuerzo medio intragranular,  $P_R$ : probabilidad de rotura de partículas,  $\varphi$ : ángulo de fricción interna del

medio granular,  $n$ : porosidad,  $p/D$ : tamaño de poros y  $\varepsilon_z$ : deformación axial del medio granular.

#### 4.9 Modelo probabilista de comportamiento mecánico de medios granulares

A la escala macroscópica el comportamiento mecánico de un medio granular se expresa por medio de la relación entre las deformaciones y el estado de esfuerzos. Éstos son un resultado estadístico de fenómenos que ocurren a la escala de las partículas.

Como se ha visto en esta investigación, las deformaciones son resultado del cambio de posición de los puntos de contacto (por deslizamiento o rodamiento), de las deformaciones elásticas de los granos y del colapso de grupos de partículas. Los esfuerzos son un reflejo de la magnitud y orientación de las fuerzas de contacto.

Por lo anterior es posible reproducir cualitativamente el comportamiento mecánico de un medio granular simulando las transformaciones sucesivas de las densidades de probabilidad de variables aleatorias que caracterizan el medio (Auvinet, 1986). Un modelo probabilista de comportamiento mecánico, aplicable a medios tridimensionales (similar al modelo 2D de Auvinet, 1986 y 1998) de partículas esféricas sometidos a un estado de esfuerzos triaxial con  $S_2=S_3$ , se basa en las siguientes consideraciones (programa MPC.m):

1. Se supone conocida la repartición inicial de los contactos sobre la superficie de los granos  $\Gamma(\alpha, \beta)$ . Se acepta que la repartición de contactos es isótropa en el ángulo  $\beta$ , por lo que la función de repartición depende únicamente del ángulo  $\alpha$  y es simétrica respecto al plano horizontal. La función de distribución acumulativa es:

$$F_\alpha(a) = \int_0^{\pi/2} \Gamma(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha = 1 \quad (4.16)$$

Cuando la repartición de contactos es isótropa  $\Gamma(\alpha)=1$ .

Durante toda la simulación, los esfuerzos laterales permanecen constantes e iguales ( $S_2=S_3$ ), por lo que se conserva la validez de la ecuación 4.16.

2. Se aplica una presión confinante  $S_1=S_2=S_3$  y se admite que las fuerzas de contacto están contenidas dentro del cono de fricción de acuerdo con dos coordenadas angulares ( $\delta, \theta$ ) como se ilustra en la figura 4.75. El ángulo  $\delta$  está formado por la fuerza de contacto y el vector normal al plano tangente en el punto de contacto. El ángulo  $\theta$  es medido sobre la base del cono de fricción a partir del eje donde  $\alpha=\alpha_f$ .

(medidos respecto al plano horizontal  $x,y$  como se definió en los incisos 2.1.12 y 3.4.7 respectivamente).

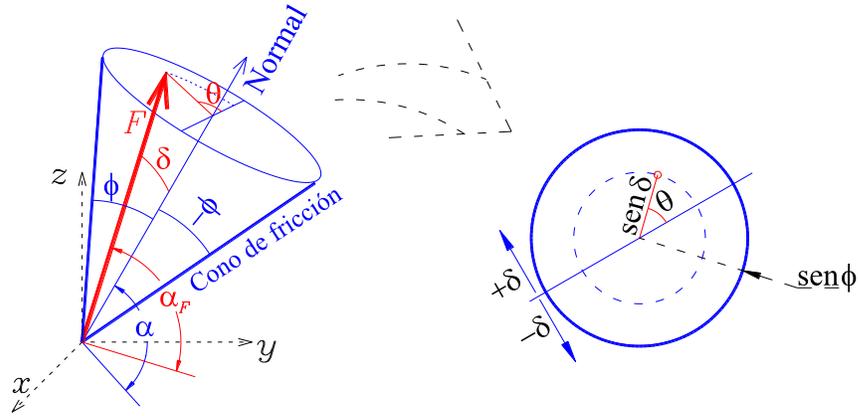


Figura 4.75. Localización de la fuerza de contacto en el cono de fricción

Escribiendo el producto escalar de la fuerza de contacto con la normal al plano tangente se tiene:

$$\cos(\delta) = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)F_x + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)F_y + \text{sen}(\alpha)F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (4.17)$$

Suponiendo que las componentes de las fuerzas de contacto coinciden con sus valores medios indicados en la ecuación 2.47 y considerando que  $S_2=S_3$  el coseno del valor medio del ángulo  $\delta$  es:

$$\cos(E\{\delta\}) = \frac{\cos^2(E\{\alpha\})S_3 + \text{sen}^2(E\{\alpha\})S_1}{\sqrt{\cos^2(E\{\alpha\})S_3^2 + \text{sen}^2(E\{\alpha\})S_1^2}} \quad (4.18)$$

El peso de las partículas y la presión confinante ocasionan que algunas fuerzas alcancen la superficie del cono de fricción por lo que  $P[\delta=\phi]>0$ . Se considera que estos contactos deslizan y que se encuentran repartidos uniformemente al azar sobre la superficie de los granos. La densidad de probabilidad del ángulo  $\alpha_d$  de estos contactos está dada por:

$$f_{\alpha_d}(a_d) = f_{\alpha}(\alpha | \delta = \phi) = \cos(\alpha_d) \quad (4.19)$$

3. Se aplica un incremento en el esfuerzo desviador ( $\Delta S_d$ ) con lo que inicia el ciclo de cálculo  $i$ .

$$S_d = \frac{S_1 - S_3}{S_3} \quad (4.20)$$

4. Se obtiene la orientación de las fuerzas de contacto. El valor esperado de  $\delta$  se calcula con la ecuación 4.18. Dado que  $S_2=S_3$ , la orientación de las fuerzas es independiente del ángulo  $\theta$ .

La variable aleatoria  $\delta$  es de tipo mixto y está comprendida en el intervalo  $[-\phi, \phi]$ . La densidad de probabilidad  $f_\delta(d)$  es un efecto combinado de la orientación uniforme de las fuerzas en el cono de fricción y del aumento de la probabilidad para  $\delta$  cercano a cero ocasionado por el confinamiento isótropo.

El cálculo de probabilidad de deslizamiento de los contactos  $P_i=P[\delta=\phi]_i$  se realiza sobre la densidad de probabilidad truncada (figura 4.76). Cuando el incremento en  $S_d$  es positivo, el truncamiento se realiza en  $\delta=\phi$  y se borra el truncamiento en la otra dirección. Cuando el incremento en  $S_d$  es negativo se procede a la inversa.

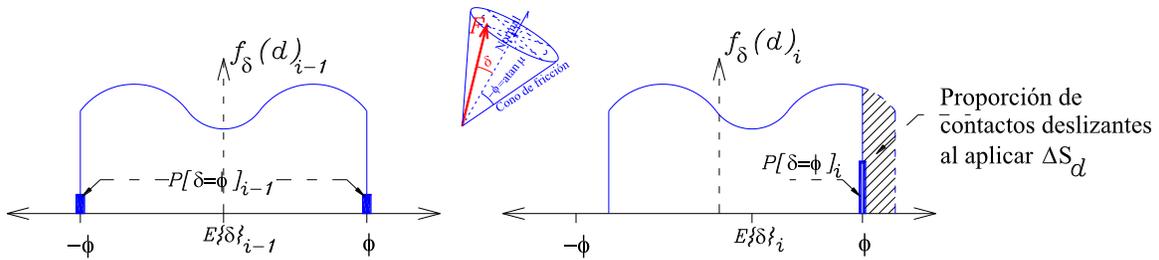


Figura 4.76. Evolución de la densidad de probabilidad de la orientación de las fuerzas de contacto por un incremento en el esfuerzo desviador

5. Se considera que los contactos deslizantes aparecen uniformemente repartidos sobre la superficie de los granos. Los nuevos contactos deslizantes se agregan a la densidad de probabilidad del ángulo  $\alpha_d$ .

$$f_{\alpha_d}(\alpha_d)_i = \frac{1}{P_i} (P_i - \Delta P_i) f_{\alpha_d}(\alpha_d)_{i-1} + \Delta P_i \cos(\alpha_d) \quad (4.21)$$

La ecuación 4.21 es la densidad de probabilidad de  $\alpha_d$  de los contactos deslizantes antes del deslizamiento causado por  $\Delta S_d$ .

6. Los contactos deslizantes se mueven hacia posiciones menos sensibles a los deslizamientos. Para obtener la densidad de probabilidad de  $f_{\alpha_d}(\alpha_d)_{i+1}$  después del deslizamiento se considera que la esperanza  $E\{\alpha_d\}$  se desplaza (figura 4.77)

proporcionalmente a al intervalo  $i\alpha_d$  donde se pueden ubicar los contactos deslizantes, a la proporción de contactos deslizantes  $P_i$ , a la esperanza de los deslizamientos  $E\{\text{sen}(\theta)\}$  en la dirección angular de  $\alpha$  y a la porosidad ( $n$ ) del medio.

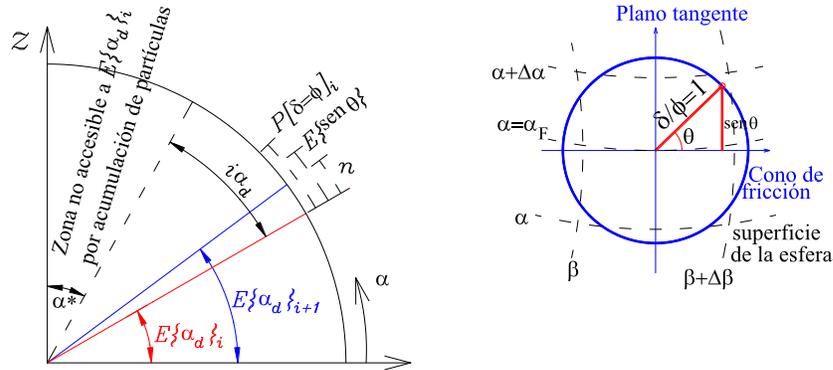


Figura 4.77. Deslizamiento de contactos

7. Se modifica la repartición de los contactos sobre los granos y se obtiene la esperanza  $E\{\alpha\}_i$  para el presente ciclo de cálculo quitando los contactos deslizantes antes del deslizamiento y agregándolos en sus posiciones después del deslizamiento.
8. La proyección sobre el eje vertical (figura 4.78) del cambio en  $E\{\alpha\}$  es un valor representativo del incremento en la deformación  $\Delta\varepsilon_z$  (ecuación 4.22) del medio granular causado por el incremento en el esfuerzo desviador.

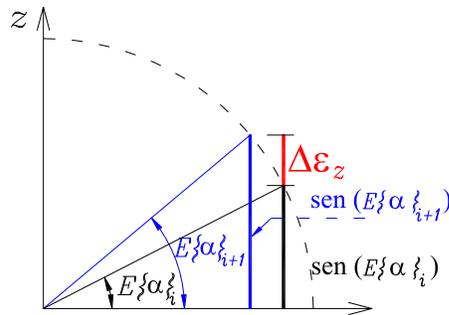


Figura 4.78. Deformación vertical por cambio en la posición de los contactos sobre la superficie de los granos

$$\varepsilon_z = \sum \Delta\varepsilon_z = k \sum [\text{sen}(E\{\alpha\}_{i+1}) - \text{sen}(E\{\alpha\}_i)] \quad (4.22)$$

Donde:  $k$  es una constante de ajuste aproximadamente igual a 5.

9. Regresar al paso 3 para iniciar un nuevo ciclo de cálculo.
10. Tanto para la descarga como para estados de extensión, se borra progresivamente el truncamiento en la densidad de probabilidad del lado positivo del ángulo  $\delta$  y aparece progresivamente del lado negativo porque los contactos deslizan en sentido contrario.

El cálculo de las deformaciones queda resumido en las siguientes preguntas: ¿Cuántos contactos deslizan? ¿Dónde están los contactos deslizantes sobre la superficie de los granos? ¿En qué direcciones angulares ( $\alpha, \beta$ ) deslizan los contactos sobre los granos? Y ¿Qué fracción de los deslizamientos es vertical?

El modelo probabilista de comportamiento mecánico (MPC) toma en cuenta el coeficiente de fricción interparticular, la repartición de contactos sobre la superficie de los granos (anisotropía geométrica) y la porosidad inicial. No se consideran las deformaciones elásticas, el colapso de grupos inestables de partículas, la creación o desaparición de contactos, la evolución de la porosidad, ni los efectos de la rotura de granos. Por lo anterior es de esperarse que el coeficiente de ajuste  $k$  de la ecuación 4.22 sea mayor que uno.

La figura 4.79 presenta una curva esfuerzo-deformación obtenida con el MPC. El material M1 presenta isotropía geométrica inicial (contactos uniformemente repartidos sobre la superficie de los granos), coeficiente de fricción interparticular  $\mu=0.7$  y porosidad  $n=0.4$ . Se reproducen algunos ciclos de carga y descarga en compresión y extensión.

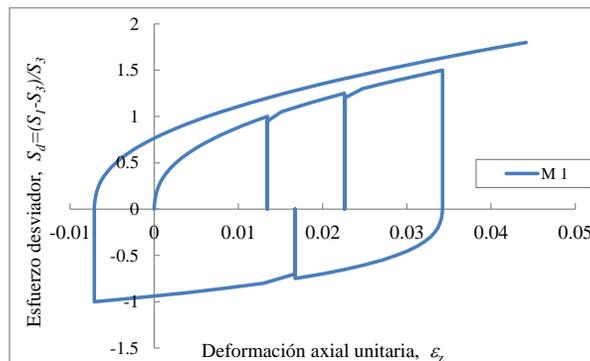


Figura 4.79. Simulación de prueba triaxial con el modelo probabilista de comportamiento mecánico de medios granulares

Se observa que el MPC reproduce satisfactoriamente la evolución de las deformaciones para una trayectoria de esfuerzos en una prueba triaxial clásica. El modelo muestra que la histéresis de un medio granular se debe a la conservación de las posiciones de los puntos de

contacto cuando se retira el esfuerzo desviador (las descargas se realizan en un dominio aproximadamente elástico). El MPC también sugiere que para causar modificaciones estructurales en el medio granular, primero es necesario alterar la orientación de las fuerzas de contacto.

Al reducir el esfuerzo desviador hasta un estado de extensión se observa el efecto Bauschinger. Las modificaciones estructurales causadas por los esfuerzos verticales de compresión conducen a una menor rigidez del medio granular cuando el esfuerzo principal mayor toma una dirección horizontal.

La resistencia de un material granular depende tanto de la fricción en los puntos de contacto como de la estructura del medio. En la figura 4.80 se muestran ejemplos con distintos coeficientes de fricción interparticular. Para  $\mu=0.3$ , es relativamente fácil vencer la resistencia en los contactos, por lo que se obtienen mayores deformaciones para un nivel dado de esfuerzos. A partir del análisis del efecto de  $\mu$  se concluye que la parte continua de la densidad de probabilidad del ángulo  $\delta$  puede considerarse como uniforme.

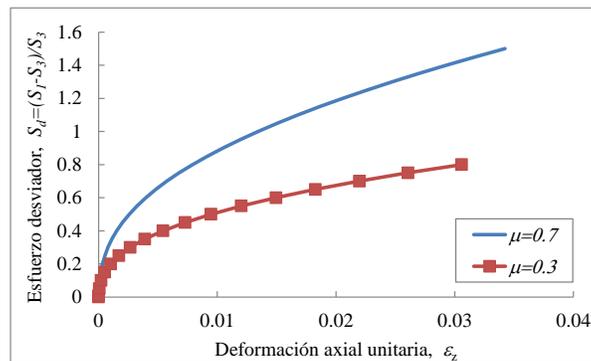


Figura 4.80. Efecto del coeficiente de fricción en la simulación de una compresión triaxial con el modelo probabilista

El MPC permite evaluar la influencia de la estructura inicial considerando diferentes reparticiones de contactos y porosidades. En la figura 4.81 se considera la muestra M1 descrita en párrafos anteriores, una muestra M2 con anisotropía geométrica asociada a la acumulación de contactos en  $\alpha \in (30, 60^\circ)$  y con porosidad inicial  $n=0.3$ , y una muestra M3 con acumulación de contactos cerca del ecuador y con porosidad inicial  $n=0.45$ . La muestra M2 corresponde a un material formado bajo la acción de la gravedad con una granulometría aproximadamente uniforme y la muestra M3 a un material en un estado inicial muy suelto. En estos tres casos el coeficiente de fricción es constante  $\mu=0.7$ .

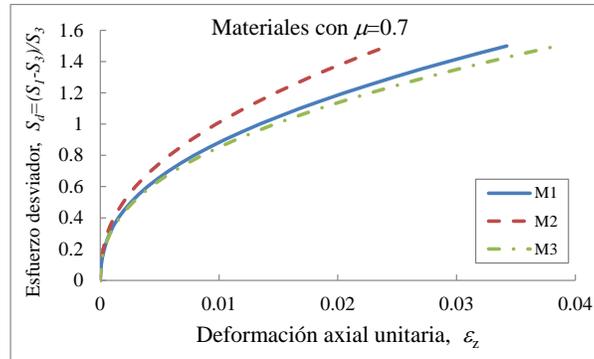


Figura 4.81. Efecto de la anisotropía estructural inicial en la simulación de una compresión triaxial con el modelo probabilista

Cuando la anisotropía inicial representa una posición de los contactos que favorece la estabilidad ante el esfuerzo vertical (muestra M2) se obtiene una mayor rigidez en el material. En caso contrario (muestra M3), una anisotropía inicial con posiciones de contactos tangentes al esfuerzo vertical conduce a una mayor deformabilidad.

El modelo probabilista de comportamiento mecánico de gran relevancia porque permite ligar los mecanismos de deslizamiento de los contactos con la evolución del esfuerzo desviador. Este es válido para una prueba triaxial homogénea, donde los parámetros estadísticos son representativos de todo el medio granular. Por lo tanto, puede ser utilizado para analizar deformaciones antes de la aparición de un plano de falla. Puede ser de gran utilidad para obtener parámetros preliminares en ausencia de herramientas más completas como el método de elementos discretos (DEM) o de pruebas físicas, o simplemente para planificar un programa de simulaciones DEM o de pruebas en laboratorio.

El modelo probabilista de comportamiento mecánico de medios granulares permite explorar distintas trayectorias de esfuerzos a costos de cómputo muy bajos en comparación con el DEM, permite también explorar trayectorias difíciles y costosas en pruebas de laboratorio.

Tomando en cuenta que el MPC sólo considera el deslizamiento de contactos para calcular las deformaciones, está limitado a pequeñas deformaciones ( $\epsilon_z < 5\%$ ) donde la pérdida y creación de contactos no es relevante. Para representar la verdadera evolución de la anisotropía geométrica es necesario ampliar las investigaciones para evaluar la pérdida y creación de contactos durante toda la prueba triaxial.

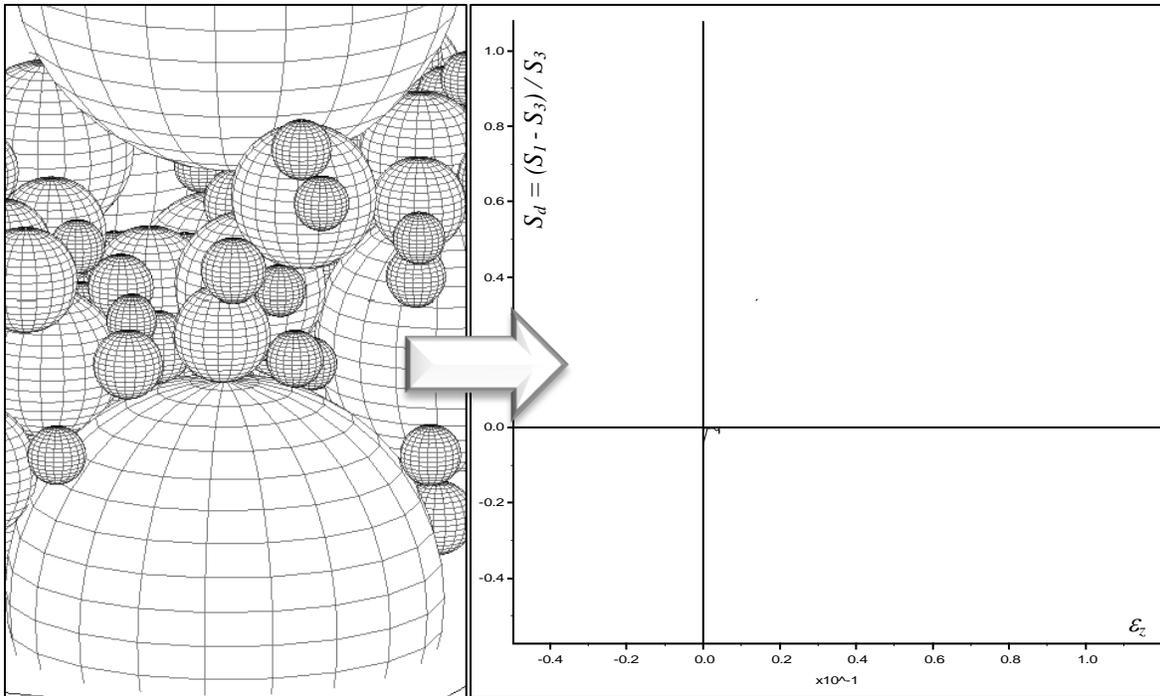
Entre las mejoras más factibles que se pueden implementar en el modelo probabilista de comportamiento mecánico destaca la incorporación de los módulos de rigidez normal y tangencial en los contactos de los granos para representar las deformaciones elásticas. Para simular el proceso de falla es necesario estudiar con detalle la evolución de la estructura en el plano de falla. En efecto, los desplazamientos que ocurren en dicho plano son los que

controlan el comportamiento global, la evolución estructural en el resto del medio granular es de relevancia secundaria.

Para reproducir una prueba triaxial verdadera con  $S_1 \neq S_2 \neq S_3$  es necesario considerar la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\beta}(a,b)$  de las posiciones de los contactos sobre la superficie de los granos y la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\delta,\theta}(d,\theta)$  de la orientación de las fuerzas en el cono de fricción.

El análisis de la evolución estructural de un medio granular basado en los fenómenos que ocurren a la escala de las partículas (como la que presenta este capítulo), sólo es posible desde un punto de vista discreto. La gran cantidad de información microestructural que el Método de Elementos Discretos pone disponible permite comprender y explicar mejor el comportamiento global de los medios granulares. El desarrollo del modelo probabilista es una evidencia de que se ya han dado pasos importantes para ligar la micro y la macroescala.

Los análisis presentados en esta tesis se enfocan a comprender los fenómenos físicos que ocurren a la escala de las partículas y su relación con el comportamiento global. Se requieren estudios particulares para reproducir el comportamiento mecánico de un material en específico.



De la micro a la macroescala

## CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

La presente tesis estudia la estructura de los medios granulares considerándolos como un conjunto de partículas individuales. Se muestra que la eliminación de la hipótesis de continuidad y el estudio a la escala de las partículas con un enfoque discreto permiten una mejor comprensión del comportamiento global de los medios granulares.

Mediante simulaciones numéricas se reproduce la formación de muestras granulares depositando las partículas bajo la acción de la gravedad terrestre. Posteriormente las muestras se someten a ensayos triaxiales. Se recurre a un algoritmo geométrico y al método de elementos discretos.

La estructura de los medios granulares se describe mediante la evaluación estadística de parámetros como: porosidad, número de contactos por partícula, repartición de contactos

sobre la superficie de los granos, magnitud de las fuerzas de contacto, orientación de las fuerzas de contacto y esfuerzos intragranulares.

Las muestras granulares están constituidas por 30,000 partículas esféricas. Se acepta una interacción interparticular exclusivamente en los puntos de contacto de acuerdo con un modelo de contacto elástico lineal con fricción. El estudio considera granulometría uniforme (partículas iguales), bimodal (dos tamaños de partícula) y continua; así como diferentes valores del coeficiente de fricción interparticular ( $\mu$ ).

La forma esférica de los granos permite desarrollar conceptos bien sistematizados para el análisis de la estructura granular. Las muestras con granulometría uniforme y bimodal son de gran importancia para estudiar fenómenos elementales que han sido un poco olvidados en la literatura actual. Se reconoce que estos materiales pueden ser poco representativos de los suelos granulares de interés práctico en geotecnia.

El recipiente de simulación cúbico busca reproducir pruebas triaxiales homogéneas, donde los parámetros estadísticos son representativos del medio granular. Se pretende también evitar algunos defectos del dispositivo cilíndrico como la deformación radial no uniforme.

Las pruebas triaxiales simuladas consideran la aplicación de una presión confinante seguida de varios ciclos de carga y descarga, primero en compresión y después en extensión. La evolución de la estructura de los medios granulares se estudia revisando las características microestructurales a diferentes niveles de esfuerzos.

La evolución estadística de los diferentes parámetros estudiados sirve de base para formular un modelo probabilista del comportamiento mecánico de medios granulares. En esta tesis se propone un modelo que simula las transformaciones sucesivas de los parámetros estructurales que rigen los procesos de resistencia y deformación, a partir de los incrementos en el esfuerzo desviador.

La rotura de granos es un fenómeno que afecta el comportamiento mecánico de los medios granulares. Si bien, no se cuenta con una teoría y herramientas numéricas para incorporar este fenómeno en las simulaciones, en esta tesis se propone un procedimiento estadístico para evaluar el porcentaje de granos rotos para un nivel dado de esfuerzos. El análisis se enfoca principalmente en el efecto de la estructura granular.

Se considera que el estudio del espacio poroso es complementario en la descripción del comportamiento mecánico de los medios granulares. En esta investigación, la distribución del tamaño de poros permite observar la evolución de las dimensiones relativas de los poros, pero tiene la desventaja de requerir tiempos de cálculo muy grandes.

Los resultados de la presente investigación permiten obtener las siguientes conclusiones principales.

### *Estructura inicial*

En los análisis realizados se observa que la granulometría, el coeficiente de fricción interparticular y el método de formación de las muestras granulares tienen una influencia importante en la estructura inherente. A continuación se recalcan los principales efectos sobre las características estructurales como: porosidad, tamaño de poros, anisotropía geométrica, anisotropía mecánica y en el número de contactos por partícula.

Entre las granulometrías analizadas, la mayor porosidad se presenta en materiales con granulometría uniforme. La porosidad mínima se obtiene en muestras con granulometría bimodal, principalmente a mayor relación  $D_{m\acute{a}x}/D_{m\acute{i}n}$  y cuando las partículas pequeñas ocupan entre 0.2 y 0.4 del volumen de sólidos.

Dada una granulometría y considerando que los medios granulares se forman por depósito vertical de las partículas bajo el campo de gravedad terrestre, los materiales sin fricción presentan menor porosidad.

Se ha observado que el tamaño de los poros está relacionado con el tamaño de las partículas y principalmente con el de las más abundantes. Los poros son de dimensiones más grandes cuando se tiene un mayor coeficiente de fricción interparticular.

El número de contactos por partícula tiene una distribución de probabilidad aproximadamente normal, bimodal y poissoniana para granulometría uniforme, bimodal y continua respectivamente. El número máximo de contactos depende de las dimensiones relativas de las partículas en la mezcla. En granulometría bimodal y continua, el número de contactos por tamaño de partículas ofrece información valiosa para describir las conexiones entre granos y la segregación por tamaño.

La determinación teórica del número de contactos es una tarea complicada. En esta tesis se muestra que es posible calcular teóricamente el número de contactos máximo en mezclas de dos componentes, considerando el ángulo sólido que ocupa una partícula sobre otra de referencia.

El método geométrico de formación de las muestras granulares impone un número de coordinación igual a seis, el cual se modifica cuando entran en juego las interacciones mecánicas entre partículas. La estructura granular pierde o gana los contactos necesarios para el equilibrio en función del coeficiente de fricción interparticular.

El número de coordinación es menor en materiales con granulometría bimodal y continua respecto a los de granulometría uniforme. Esto se debe a que las partículas pequeñas son las más numerosas y tienen un menor número de contactos.

Se concluye que no hay una relación directa entre la porosidad y el número de coordinación. Geométricamente es posible lograr una variación drástica del número de coordinación para una porosidad constante, por lo tanto las correlaciones reportadas en la literatura entre estos parámetros deben usarse con reserva.

Con base en un sistema de coordenadas esféricas  $(\alpha, \beta, r)$ , la posición de cada contacto sobre la superficie de los granos está dada por el vector normal al plano tangente en el punto de contacto. El método de formación del medio granular conduce a una repartición uniforme (isotropía) de contactos en la longitud ( $\beta$ ). Por tanto, la anisotropía geométrica (repartición no uniforme de contactos) se puede estudiar considerando únicamente la repartición de contactos en la latitud ( $\alpha$ ).

Los materiales de granulometría uniforme simulados con coeficiente de fricción alto ( $\mu=0.7$ ) se caracterizan por presentar una anisotropía geométrica inherente. En este caso, el método de formación de las muestras granulares favorece la concentración de contactos en latitudes entre 30 y 60°. En cambio, en materiales sin fricción o con granulometría continua se observa una repartición de contactos más uniforme sobre la superficie de los granos.

Las densidades de probabilidad de la magnitud de las fuerzas de contacto muestran que en un medio granular existe una alta proporción de fuerzas pequeñas necesarias para equilibrar las pocas fuerzas grandes. Al menos en forma cualitativa se puede concluir que las partículas grandes transmiten las fuerzas más grandes.

Los materiales granulares simulados presentan una baja proporción de partículas inactivas (menor del 4% en volumen) en su estructura inicial. Las cadenas de fuerzas aparecen en forma simultánea con las partículas inactivas y se pueden observar a través de la dispersión de la densidad de probabilidad de la magnitud de las fuerzas de contacto. Las cadenas de fuerzas son más evidentes en materiales con granulometría bimodal y continua.

Las fuerzas de contacto se orientan al azar en el interior del cono de fricción. Cuando el coeficiente de fricción es grande ( $\mu=0.7$ ), las fuerzas se orientan de acuerdo con el campo de gravedad terrestre. Si las partículas son perfectamente lisas, las fuerzas coinciden con las normales a los contactos.

La orientación del eje del cono de fricción coincide con el vector normal al plano tangente en el punto de contacto. Por lo tanto, la anisotropía mecánica (asociada a la orientación de las fuerzas de contacto) debe estudiarse en conjunto con la anisotropía geométrica (asociada a las posiciones de los contactos).

Para estudiar simultáneamente la anisotropía mecánica y geométrica se recurre a la densidad de probabilidad conjunta de la orientación de las fuerzas de contacto y de la orientación de las normales a los contactos. Estas anisotropías son más evidentes en materiales con granulometría uniforme y con altos coeficientes de fricción.

La orientación de las fuerzas de contacto respecto a las normales a los contactos se utiliza para identificar los contactos potencialmente inestables. Éstos son aquellos donde la fuerza de contacto se localiza sobre la superficie del cono de fricción. Esta condición es necesaria pero no suficiente para el deslizamiento, ya que la existencia de otras partículas puede limitar los movimientos dentro del medio granular.

### *Evolución de la estructura*

Respecto al estado inicial, el número de coordinación aumenta cuando se aplica la presión confinante, al mismo tiempo que la porosidad disminuye. Los ciclos de carga y descarga en compresión ocasionan un reacomodo de la estructura granular y por lo general las muestras presentan una pérdida continua de contactos. En condiciones de extensión, las muestras pierden contactos y los recuperan parcialmente al aplicar y retirar el esfuerzo desviador.

En las muestras con granulometría uniforme, el número de coordinación es poco sensible a los esfuerzos externos cuando se tiene un coeficiente de fricción interparticular bajo ( $\mu=0.1$ ). Un material de granulometría continua presenta menor variación en su número de coordinación durante la prueba triaxial que uno de granulometría uniforme.

Durante la prueba triaxial, la repartición de contactos sobre la superficie de los granos se modifica por la eliminación o creación de contactos y por el cambio de posición de los contactos. El primer confinamiento isótropo favorece el aumento de contactos cerca del ecuador de las partículas. La estructura granular crea apoyos en dirección horizontal para garantizar el equilibrio.

Cuando se aplica un esfuerzo desviador en dirección vertical, que provoca deformaciones elásticas en el medio granular, no se modifica la repartición de contactos.

Las modificaciones en la repartición de contactos aparecen cuando el esfuerzo desviador ocasiona grandes deformaciones en el medio granular. Los contactos se mueven (deslizan, ruedan o se crean) hacia posiciones menos sensibles a los deslizamientos: en los polos en compresión y en el ecuador en extensión.

Por lo anterior se concluye que las deformaciones elásticas de un medio granular reflejan las deformaciones elásticas de los granos. Las deformaciones plásticas son causadas por la modificación de la repartición de contactos sobre la superficie de los granos.

Las descargas se desarrollan en un dominio elástico, ya que la repartición de contactos permanece constante. El esqueleto granular puede resistir nuevamente un esfuerzo en la misma dirección que el esfuerzo desviador del ciclo precedente sin necesidad de modificar su estructura. Se concluye, por tanto, que la repartición de contactos sobre la superficie de los granos expresa el efecto de memoria de los medios granulares.

El efecto Bauschinger puede explicarse considerando que en compresión, el esfuerzo desviador se aplica en la misma dirección que el depósito de las partículas. Por tanto, los contactos presentan pequeños desplazamientos en la latitud ( $\alpha$ ) hacia los polos de las partículas. Estas posiciones son inestables al pasar a un estado de extensión (esfuerzo principal mayor en dirección horizontal) y por tanto los contactos viajan hacia el ecuador, dando como resultado una mayor deformabilidad del medio.

La concentración de contactos inicial en  $\alpha(30$  y  $60^\circ)$ , causada por el método de formación de las muestras granulares, el coeficiente de fricción interparticular y la granulometría, hace más marcado el efecto Bauschinger.

La magnitud media de las fuerzas de contacto es proporcional a los esfuerzos externos aplicados. En las simulaciones realizadas se obtuvieron algunas inconsistencias causadas por el efecto de arqueo, ya que limita la transmisión de los esfuerzos hacia el núcleo central de las muestras granulares.

Las simulaciones con elemento discreto permiten mostrar que el coeficiente de proporcionalidad entre los esfuerzos externos y las fuerzas de contacto es función de la orientación de los esfuerzos y del número de contactos que transmiten las fuerzas.

En el estado inicial, el porcentaje de partículas inactivas observado es de hasta de un 4% en volumen, disminuye con la aplicación del confinamiento y aumenta ligeramente con el esfuerzo desviador. Las observaciones permiten concluir que la proporción de partículas inactivas depende de dos factores: el efecto de arqueo propiciado por un alto coeficiente de fricción interparticular ( $\mu=0.7$ ) y el efecto geométrico que ocurre cuando las partículas pequeñas quedan sueltas en los huecos entre las grandes.

Las fuerzas de contacto se orientan de acuerdo con el esfuerzo principal mayor, en compresión tienden a una orientación vertical y en extensión a una dirección horizontal. Bajo un confinamiento isótropo, estadísticamente las fuerzas se orientan con las normales a los contactos.

La orientación sistemática de las fuerzas de contacto es más evidente en muestras granulares con mayor anisotropía geométrica (granulometría uniforme y coeficiente de fricción interparticular alto).

De acuerdo con el modelo de contacto, las fuerzas de contacto no pueden salir del cono de fricción. Una vez que la fuerza alcanza la superficie del cono, el contacto puede deslizarse. La densidad de probabilidad del ángulo que forma la fuerza de contacto con la normal al contacto permite calcular la probabilidad de deslizamiento de los contactos (proporción de fuerzas que se sitúan sobre el cono de fricción).

Se ha observado que cuando aumenta el esfuerzo desviador, aumenta la proporción de contactos potencialmente inestables hasta un valor máximo que depende principalmente del coeficiente de fricción. La proporción de contactos inestables permanece aproximadamente constante cuando el material se deforma sin aumento de esfuerzos, a partir de este momento la deformación del medio depende únicamente de las partículas en el plano de falla.

La densidad de probabilidad conjunta de la posición de los contactos y el ángulo que forman las fuerzas con las normales a los contactos permite saber estadísticamente dónde se encuentran los contactos inestables. Como es de esperarse esto ocurre en las posiciones tangentes al esfuerzo desviador.

Las simulaciones de pruebas triaxiales muestran que cuando varían los esfuerzos externos, el medio granular responde en primera instancia con un cambio en la orientación de las fuerzas, una vez que se supera la resistencia por fricción los contactos que deslizan conducen a una reorganización de la estructura.

Los esfuerzos intragranulares se calculan recurriendo al tensor de esfuerzos. Se observa que la magnitud media de los esfuerzos al interior de las partículas es mayor a los esfuerzos aplicados en las paredes del recipiente. Las orientaciones de los esfuerzos principales intragranulares reproducen estadísticamente las orientaciones de los esfuerzos externos.

La variación de la magnitud de los esfuerzos intragranulares pone en evidencia la presencia de cadenas de fuerzas y de partículas inactivas en los medios granulares.

Los esfuerzos intragranulares de tensión, son de mayor magnitud en partículas con menor número de contactos y especialmente en partículas pequeñas.

El estudio de la rotura de granos por tensión indica que se tiene un mayor porcentaje de partículas rotas cuando aumenta el nivel de esfuerzos, cuando se tiene un coeficiente de fricción alto ( $\mu=0.7$ ) y cuando se desarrolla mayor anisotropía geométrica (como es el caso de un material con granulometría uniforme).

En las mezclas de dos componentes, las partículas más abundantes (en proporción de volumen o de peso) son más propensas a romperse por tensión. En granulometría continua,

las partículas pequeñas representan la mayor proporción (en volumen o peso) de los granos rotos porque tienen un pequeño número de contactos y pueden recibir grandes fuerzas de partículas de mayor tamaño.

Los resultados obtenidos coinciden con la experimentación física reportada en la literatura en cuanto a que es preferible una granulometría bien graduada para reducir los asentamientos asociados a la rotura de granos.

La presión confinante de 1MPa ocasiona la rotura de hasta el 10% de las partículas (en volumen) dependiendo del tipo de roca considerada en el análisis. Esta presión es equivalente a un terraplén con altura de 65m aproximadamente. En la práctica es común tratar con estructuras térreas de alturas mucho mayores por lo que puede esperarse un mayor porcentaje de rotura de granos.

Las conclusiones anteriores muestran el efecto del nivel de esfuerzos, la granulometría y la estructura granular sobre la rotura de granos. Para analizar la influencia de los defectos de los granos asociados a su tamaño, es necesario contar con datos experimentales de la resistencia de granos de distintos tamaños.

Por otra parte, la evolución del espacio vacío durante las pruebas triaxiales es consecuencia de las interacciones entre los granos. La evolución de la porosidad refleja los cambios volumétricos de las muestras granulares.

La distribución de tamaño de poros indica que en los procesos de contracción y dilatancia, los poros de mayor tamaño juegan el papel más importante. En los procesos de carga y descarga estos poros se destruyen pero no recuperan su tamaño al retirar el esfuerzo desviador, sino que aumenta la proporción de poros de tamaño medio.

### *Conclusiones generales*

El método de elementos discretos permite simular satisfactoriamente una prueba triaxial sin más consideraciones que un modelo de contacto elástico lineal con fricción. De acuerdo con las gráficas esfuerzo-deformación, se reproduce satisfactoriamente el comportamiento global del medio, deformaciones plásticas, deformaciones elásticas, histéresis y efecto de Bauschinger.

Se concluye que el tamaño de muestra cumple con un volumen elemental representativo, ya que la variación de la porosidad y de la granulometría (porosidad generalizada) asociada al tamaño de las muestras es inferior al 5%.

El procedimiento de formación de las muestras granulares da como resultado un comportamiento contractante durante la compresión triaxial. Como es de esperarse, las muestras con menor porosidad inicial presentan menores cambios volumétricos durante la prueba triaxial.

De acuerdo con el criterio de Mohr-Coulomb, en cada muestra granular se evalúa el ángulo de fricción interna ( $\phi$ ) a partir de los esfuerzos principales aplicados. Se acepta que el ángulo de fricción interna es la suma de la fricción movilizada en los puntos de contacto ( $\phi^*$ ) y de la trabazón entre granos ( $\phi^*$ ). El ángulo de fricción interparticular movilizado se obtiene del promedio del ángulo que forma la fuerza de contacto con su componente normal. La trabazón se calcula por diferencia.

El estudio de los fenómenos a la escala de las partículas resulta bastante útil en la descripción del comportamiento mecánico de los medios granulares. Entre las características analizadas, la anisotropía geométrica (asociada a la repartición de contactos sobre la superficie de los granos) es la que más relación guarda con el comportamiento mecánico global. La granulometría y el coeficiente de fricción interparticular afectan esta anisotropía.

Para materiales con bajo coeficiente de fricción interparticular ( $\mu=0.1$ ) la trabazón entre granos proporciona la mayor parte de la resistencia del medio. Para altos valores de  $\mu$  la fricción aporta la mayor parte de la resistencia global.

La resistencia por fricción en los puntos de contacto se moviliza parcialmente incluso cuando el medio granular desarrolla su máxima resistencia. Parte de la fricción movilizada no contribuye a la resistencia global del medio granular, porque las fuerzas actúan en todas direcciones o porque corresponden a puntos de contacto de partículas inactivas.

El medio granular falla cuando se supera la resistencia en los contactos a lo largo de un plano (plano de falla). La máxima resistencia por fricción movilizada es aproximadamente constante en compresión y en extensión.

En esta y otras investigaciones se observa una relación compleja entre la fricción local y el ángulo de fricción interna global. Es necesario continuar con estas investigaciones.

La variación en el ángulo de fricción interna de un estado de esfuerzos a otro se debe a las diferencias en la trabazón entre granos de la estructura granular. La resistencia de pico aparece cuando se tiene una mayor trabazón entre granos. El ángulo de fricción interna en extensión es mayor que en compresión porque hay una mayor restructuración del esqueleto granular (la evolución de la repartición de contactos sobre la superficie de los granos y la deformación del medio granular son evidencia de ello).

Los resultados de la presente tesis muestran que un material de granulometría uniforme presenta un ángulo de fricción interna mayor que uno de granulometría bimodal o continua debido a una mayor trabazón entre granos. Cualitativamente, la anisotropía geométrica observada a través de la repartición de contactos refleja la trabazón entre granos.

Las mezclas de dos tamaños de partículas presentan menor trabazón entre granos y menor anisotropía geométrica que un material de granulometría uniforme. Se concluye que las partículas pequeñas funcionan como patines para las partículas grandes, lo cual reduce drásticamente la trabazón entre granos. La menor resistencia se tiene en la mezcla binaria con 20% de partículas pequeñas en volumen.

En la muestra granular con granulometría continua se tiene una resistencia todavía menor porque los distintos tamaños de partículas limitan la trabazón entre granos.

Para las muestras ensayadas, no se observa una relación directa entre la porosidad y el ángulo de fricción interna. Las muestras con menor porosidad (granulometría bimodal con 20% de partículas pequeñas y granulometría continua) presentan menor resistencia.

La trabazón entre granos es un fenómeno que siempre interviene en el comportamiento de los medios granulares. Las investigaciones futuras deberán evaluar directamente la trabazón para aprovechar sus beneficios en las diversas aplicaciones geotécnicas.

El modelo probabilista de comportamiento mecánico ofrece resultados que, con una calibración sencilla, pueden ser útiles y representativos de casos prácticos. El modelo permite explorar diversas trayectorias de esfuerzos, así como los efectos del coeficiente de fricción interparticular, porosidad inicial y anisotropía geométrica inicial.

El modelo probabilista de comportamiento mecánico es válido para una prueba triaxial homogénea, donde los parámetros estadísticos son representativos de todo el medio granular (antes de la aparición del plano de falla). La localización de deformaciones es un tema no abordado en esta tesis.

La formulación del modelo probabilista es una evidencia de los avances en el entendimiento de los medios granulares y representa un paso muy importante entre la micro y la macroescala.

Esta tesis presenta un análisis extenso pero de ninguna manera definitivo sobre la estructura de los medios granulares. Aunque se han hecho contribuciones relevantes, la mayoría de los temas aquí tratados son temas abiertos a la investigación.

## BIBLIOGRAFÍA

Al-Raoush Riyadh & Apostolos Papadopoulos. 2010. Representative elementary volume analysis of porous media using X-ray computed tomography. *Powder Technology*, 200, 69 – 77.

Alshibli K., Cil M. & Druckrey A. 2015. 3D fracture behavior of sand at the particle level: Experimental versus numerical modeling. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 225-230. ©Taylor & Francis Group, London, UK.

Aste T, Saadatfar M & Senden T. 2005. Geometrical structure of disordered sphere packings. *Physical Review E*, 71, 061302.

Auvinet G. 1975. Generation of granular media by computer. Vth Pan-american conference on soil mechanics and foundation engineering, Vol. 1, 205-216. Buenos Aires, Argentina.

Auvinet G. 1977. Structure des milieux pulvérulents. IXth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, pp. 23-26, Tokyo, Japan.

Auvinet G. 1978. Estructura intersticial de los medios granulares. Pore-size distribution in granular media. *Revista latinoamericana de geotecnia*, IV, 237 – 246. Caracas, Venezuela.

Auvinet G. 1985. Probabilistic Characterization of Granular Media Structure. NATO Advance Study Institute on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. July, Newark, Delaware, USA.

Auvinet G. 1986. Estructura de los medios granulares. Tesis doctoral. Universidad Nacional Autónoma de México.

Auvinet G. 1988. Plane sections and straight crossings of granular media. Powders and grains, International Conference on Micromechanics of Granular Media, September, Balkema, pp. 23-28, Clermont-Ferrand, France.

Auvinet G. 1991. Discussion of Random Nature of Soil Porosity and Related Properties. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, American Society of Civil Engineers, Vol. 117, No 2, pp.426-427, USA.

Auvinet G. 1992. Stress Transfer within Granular Geomaterials. ASCE Engineering Mechanics Conference, pp. 159-162, May, pp. 24-27, College Station, Texas, USA.

Auvinet G. 1993. Random stress fields within granular media. NATO Advanced Research Workshop on Probabilities and Materials, Tests models and Applications, USA, NATO ASI Series, Vol. 269, pp. 285-292, Kluwer Academic Publisher.

Auvinet G. 1998. Probabilistic modeling of granular media anisotropy. PROBAMAT – 21<sup>st</sup> Century: Probabilities and materials, Tests, Models and Applications for the 21<sup>st</sup> Century, Perm, Russia, NATO ASI Series 3. High technology Vol 46, Kluwer Academic Publishers, 455 – 464.

Auvinet G. 2012. Mecánica de medios granulares. La herencia de R. J. Marsal. Congreso Argentino de mecánica de suelos e ingeniería geotécnica, CAMSIG XXI, Rosario, Santa Fe, Argentina.

Auvinet G. & Bouvard D. 1983. Stochastic Characteristics of Granular Soils Structure. IV<sup>th</sup> International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, Vol. II, pp. 1169-1180, June, Florence, Italy.

Auvinet G. & Bouvard D. 1984. Effet d'échelle géométrique dans les milieux granulaires. Revue Française de Géotechnique, N° 25, pp. 63-69, avril, Paris, France.

Auvinet G. & Bouvard D. 1987. Low Porosity Granular Soils Mixtures. VIII<sup>th</sup> Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, august, Vol. III, pp. 251-261, Cartagena, Colombia.

Auvinet G. & Bouvard D. 1988a. Geometric scale effect in granular media, Powders and grains, International Conference on Micromechanics of Granular Media, 29-34. Balkema. Clermont-Ferrand, France.

Auvinet G. & Bouvard D. 1988b. Pore size distribution of granular media. Powders and grains, International Conference on Micromechanics of Granular Media, 35-40. Balkema. Clermont-Ferrand, France.

Auvinet G. & Cambou B. 1987. Contribution à l'étude de la structure des milieux granulaires formés de grains non sphériques. Actes du Colloque Franco-Polonais de Mécanique des Sols, novembre, pp. 1-15, Grenoble, France.

Auvinet G. & Marsal J. 1975. Statistical model for grain breakage. Vth Pan-american conference on soil mechanics and foundation engineering, V. 1, 193-203. Buenos Aires, Argentina.

Biarez, J., 1961, Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents. Thèse doctorale. Université de Grenoble, France.

- Bobet A. 2010. Numerical methods in geomechanics. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, Volume 35, Number 1B, 27-48.
- Bolton, M. 1986. The strength and dilatancy of sands. *Géotechnique*, 36, No. 1, 65-78.
- Bolton M, Nakata Y & Cheng Y. 2008. Micro- and macro-mechanical behaviour of DEM crushable materials. *Géotechnique* 58, No. 6, 471-480.
- Cantor D., Estrada N. & Azéma E. 2015. New approach to grain fragmentation for discrete element methods. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 225-230. ©Taylor & Francis Group, London, UK.
- Cambou B. 1974. Etude du frottement entre matériaux rocheux. Instituto de Ingeniería, UNAM. Coopération technique Franco-Mexicaine.
- Cambou B. & Sidoroff F. 1985. Description de l'état d'un matériau granulaire par variables internes statiques à partir d'une approche discrète. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, Vol. 4, 223-242.
- Cambou B., Dubujet P., Emeriault F. & Sidoroff F. 1995. Homogenization of granular materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*. Vol. 14, N° 2, 255-276.
- Cambou B. 1998. Behaviour of granular materials. CISM courses and lectures N° 385. Springer-Verlag Wien GmbH.
- Cambou B., Chaze M. & Dedecker F. 2000. Change of scale in granular materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*. Vol. 19, 999-1014.
- Cambou B., Dubujet Ph & Nougulier-Lehon C. 2002. Anisotropy in granular materials at different scales. *Mechanics of materials*, 36, 1185 – 1194.
- Cambou B., Jean M. & Radjai F. 2009. *Micromechanics of granular materials*. ISTE, John Wiley & Sons Ed.
- Comisión Federal de Electricidad. 2013. Base de datos de resultados de pruebas de laboratorio en núcleos de roca. Departamento de mecánica de rocas e inyecciones. México.
- Cundall P. 1971. A computer model for simulating progressive largescale movements in blocky rock systems. *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*. Vol. 1, Paper No. II-8. Nancy, France.
- Cundall P. & Strack O. 1979. A Discrete Numerical Model for Granular Assemblies. *Geotechnique*, 29, No. 1, 47 – 65.

Cundall, P. 1988. Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *International journal of rock mechanics and mining sciences*. Vol. 25, N° 3, 107 – 116.

Cundall P. & R. D. Hart. 1992. Numerical Modeling of Discontinua. *Engineering Computations*, 9 (1992), 101-113.

Christian J. & Urzua A. 2001. Practical use of numerical methods. *Computer methods and advances in geomechanics*.

Darve F. 1987. *Manuel de rheology des geomateriaux*. Presses de l'École nationale des ponts et chaussées. France.

Di Renzo A. & Di Maio F. 2004. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. *Chemical Engineering Science* 59 (2004), 525 – 541.

Dias R, Teixeira J, Mota M & Yelshin A. 2004. Particulate binary mixtures: dependence of packing porosity on particle size ratio. *American Chemical Society. Ind. Eng. Chem. Res.* 2004, 43, 7912-7919.

Gao R, Du X, Zeng Y, Li Y & Yan J. 2012. A new method to simulate irregular particles by discrete element method. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2012, 4 (3): 276-281.

Hart R, Cundall P. & Lemos J. 1988. Formulation of a three dimensional distinct element model - part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks. *International journal of rock mechanics and mining sciences*. Vol. 25, N° 3, 117 – 125.

Isola R. 2008. *Packing of granular materials*. PhD Thesis, The University of Nottingham. United Kingdom.

Itasca Consulting Group Inc. 2007. 3 Dimensional distinct element code. Background – The 3D distinct element method. Minneapolis, Minnesota. USA.

Itasca Consulting Group Inc. 2008. Particle flow code in 3 dimensions, version 4.0. User's Manual. Minneapolis Minnesota. USA.

Jing L. 2003. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modeling for rock mechanics and rock engineering. *International journal of rock mechanics and mining sciences*. Vol 40, 283 – 353.

Jouannot-Chesney P., Jernot J. & Lantuéjoul C. 2006. Practical determination of the coordination number in granular media. *Image Anal Stereol*; 25, 55-61.

- Lambe T. W. & Whitman R. 1972. *Mecánica de Suelos*. Limusa, México.
- Lorig L. 1995. Overview and introduction to Itasca codes. Seminario, El papel de los métodos numéricos en geotecnia. Santiago de Chile.
- Marsal R. 1966. Fuerzas de contacto en suelos y enrocamientos. Informe interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Marsal R. 1973. Mechanical properties of rockfill. Embankment dam engineering (Casagrande Volume). John Wiley and Sons, New York, USA.
- Marsal R. 1975. Resistencia y compresibilidad de enrocamientos y gravas. Publicación N° 306, Instituto de Ingeniería, UNAM. México.
- Matheron G. 1967. *Éléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson et Cie. Éditeurs. Paris, France.
- Mota M., Teixeira J., Bowen W. & Yelshin A. 2001. Binary spherical particle mixed beds: porosity and permeability relationship measurement. *The Filtration Society. Trans Filt. Soc.* Vol. 1 (4).
- Nimmo J. R. 2004. Porosity and pore size distribution. *Encyclopedia of soils in the environment*. London, UK. Elsevier, V. 3, 295 – 303.
- Nouguier-Lehon C., Cambou B. & Vincens E. 2003. Influence of particle shape and angularity on the behaviour of granular materials: a numerical analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*; 27: 1207-1226.
- Oda M. 1972. Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material. *Soils and foundations*, V. 12, N° 1, 17-37. Tokyo, Japan.
- Oda M. & Iwashita K. 1999. *Mechanics of Granular Materials: An Introduction*. © Balkema, Rotterdam, Netherlands.
- O'Sullivan C. 2015. Advancing geomechanics using DEM. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (Eds): 21-32. Taylor & Francis Group, London, UK.
- Ovando E. 1986. Stress-Strain behaviour of granular soils tested in the triaxial test. Ph. D. thesis. Imperial College of Science and Technology, University of London, U.K.
- Pinson D., Zou R. P., Yu A. B., Zulli P. & McCarthy MJ. 1998. Coordination number of binary mixtures of spheres. *Journal of Physics D: Applied Physics*. 31, 457 – 462.
- Polito C. P. & Martin J. R. 2001. Effects of nonplastic fines on the liquefaction resistance of sands. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 127(5):408–415.

Radjai F. & Richefeu V. 2009. Contact dynamics as a nonsmooth discrete element method. *Mechanics of materials*, N° 41, 715 – 728.

Radjai F. & Dubois F. 2010. *Modélisation numérique discrète des matériaux granulaires*. Hermes-Lavoisier science publications. France.

Rothenburg L. & Bathurst L. 1989. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Géotechnique* 39, No. 4, 601-614.

Sánchez Guzmán, Jesús. 2009. *Contribución al estudio de la segregación de medios granulares*. Tesis de maestría. Universidad Nacional Autónoma de México.

Sánchez J., Auvinet G. & Cambou B. 2014. Una mirada discreta a los medios granulares. XXVII Reunión Nacional de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica. Puerto Vallarta, Jalisco, México.

Sánchez J., Auvinet G. & Cambou B. 2015 a. Fabric of monosized granular media. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 73-78. ©Taylor & Francis Group, London, UK.

Sánchez J., Auvinet G. & Cambou B. 2015 b. Coordination number and geometric anisotropy in binary sphere mixtures. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 225-230. ©Taylor & Francis Group, London, UK.

Sánchez J., Auvinet G. & Cambou B. 2016. Evolution of the structure of monosized granular media in triaxial test. *Applied Numerical Modeling in Geomechanics* (eds): 235-334. © Itasca International Inc. Minneapolis, USA.

Satake M. 1982. Fabric tensor in granular materials. *IUTAM Symposium on Deformation and Failure of Granular Materials*. Vermeer P. & Luger H., (eds): 63-8. Rotterdam: Balkema.

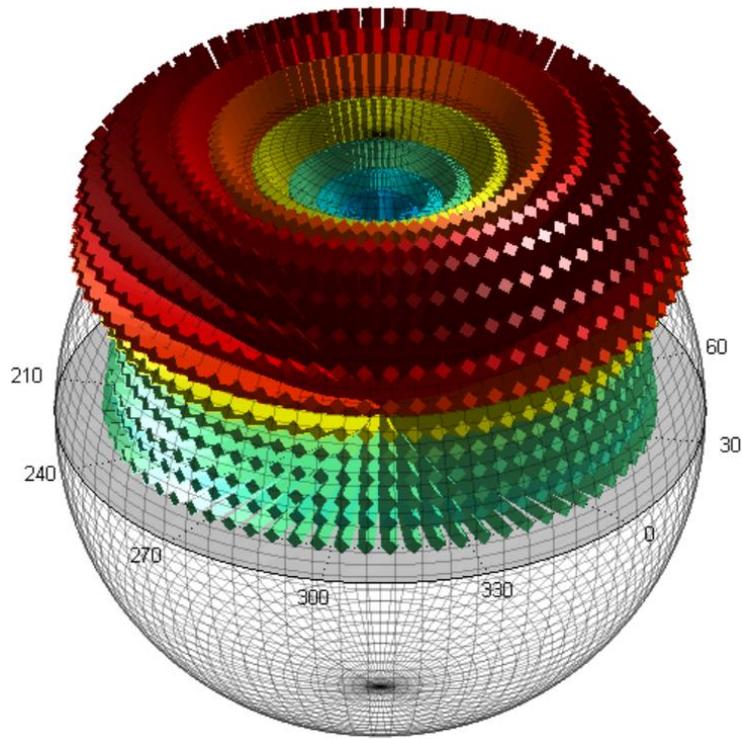
Schweiger H. F. 2002. Results from numerical benchmark exercises in geotechnics. *Proc. 5th European Conf. Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Presses Ponts et chaussees, Paris, 2002, 305-314

Tighe Brian, Snoeijer Jacco, Vlugt Thijs & van Hecke Martin. 2010. The force network ensemble for granular packings. *Soft Matter* Vol 6, 2908 – 2917. The Royal Society of Chemistry.

Todisco M., Coop M. & Guo Q. 2015. The effect of the coordination number on particle crushing. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 1063-1068. ©Taylor & Francis Group, London, UK.

- Tu Xuxin & Andrade José. 2008. Criteria for static equilibrium in particulate mechanics computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75: 1581 – 1606. John Wiley & Sons, Ltd.
- van Eerd A., Ellenbroek W., van Hecke M., Snoeijer J. & Vlugt T. 2007. Tail of the contact force distribution in static granular materials. *Physical review E* 75, 060302(R).
- van Eerd A. 2008. Statistics of large contact forces in granular matter. PhD thesis, Utrecht University, the Netherlands.
- Wang Z. & Vallejo L. 2015. Force chain evolution during the gravity induced crushing of a fractal granular mixture. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 225-230. ©Taylor & Francis Group, London, UK.
- Weber J. 1966. Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents. Application à la rhéologie de ces milieux. *Cahiers du G.F.R.*, 3, 161-170.
- Yan W. & Shi Y. 2015. Visualisation of grain crushing using micro-focused X-ray CT scanning. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 225-230. ©Taylor & Francis Group, London, UK.
- Yang R., Zou R. & Yu A. 2000. Computer simulation of the packing of fine particles. *Physical Review E*. Vol 62. N°. 3. 3900 – 3908.
- Zhang Z. P., Liu L. F., Yuan Y. & Yu A. B. 2001. A simulation study of the effects of dynamic variables on the packing of spheres. *Powder Technology* 116, 23-32.
- Zhou B. & Wang J. 2015. A probability-based approach for predicting particle crushing of granular soil. *Geomechanics from Micro to Macro – Soga et al.*, (eds): 225-230. ©Taylor & Francis Group, London, UK.
- Zienkiewicz O. & Morgan K. 1983. *Finite elements and approximation*. John Wiley & Sons.





Histograma tridimensional de una repartición de contactos sobre la superficie de partículas esféricas

## A. ANEXOS

## A.1 Figuras complementarias

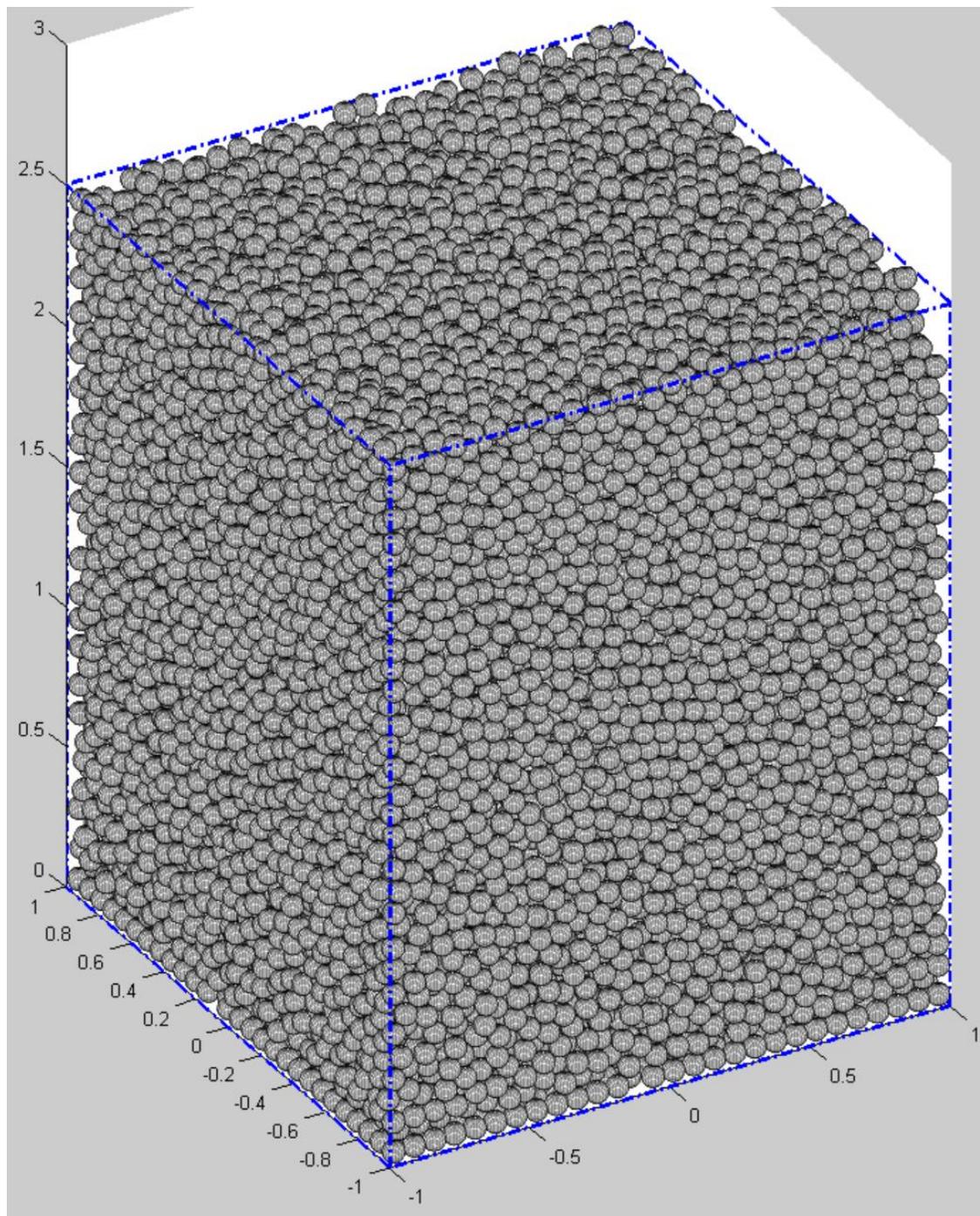


Figura A.1. Simulación geométrica de muestra con granulometría uniforme

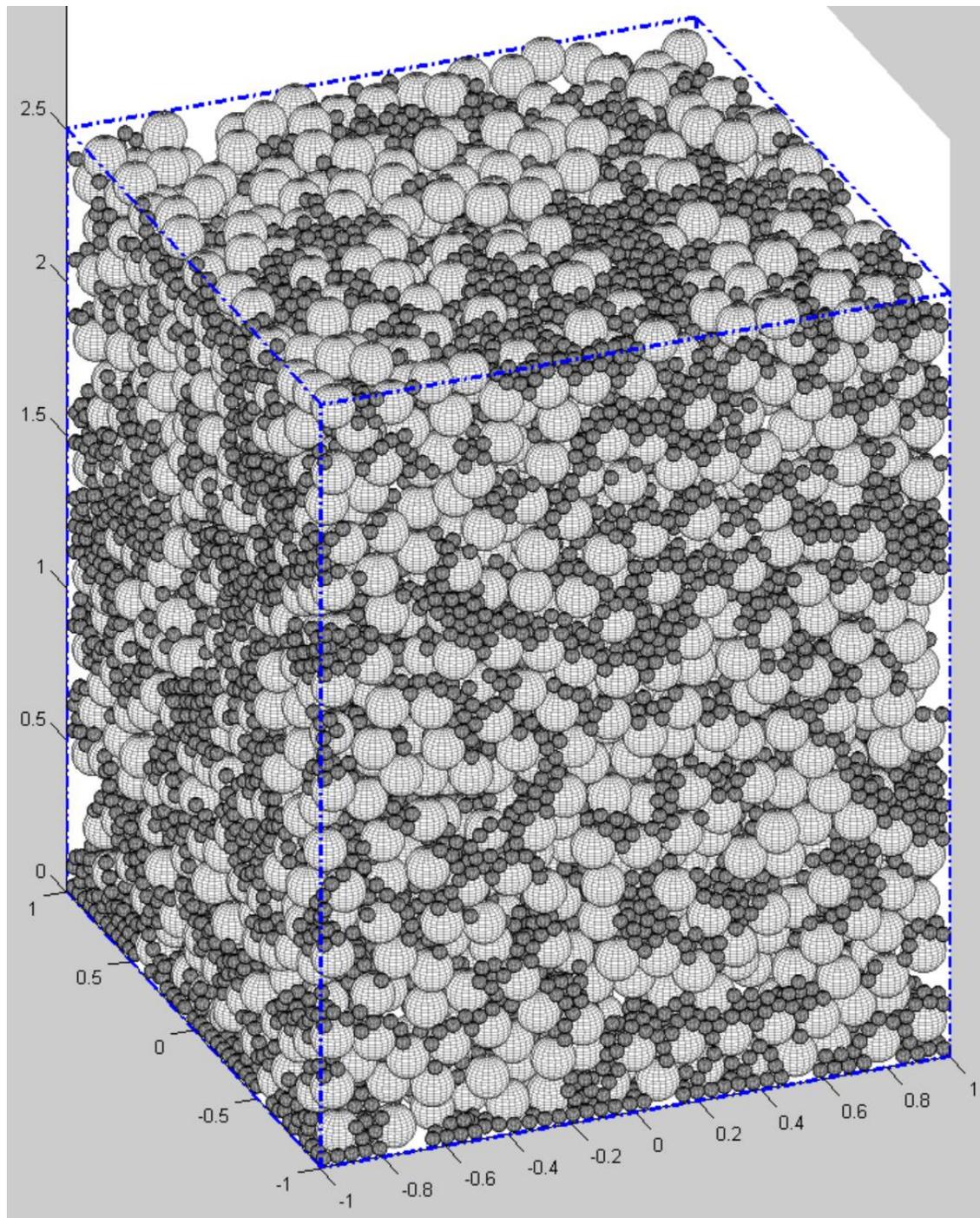


Figura A.2. Simulación geométrica de muestra con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.2$ ,  $a=3$

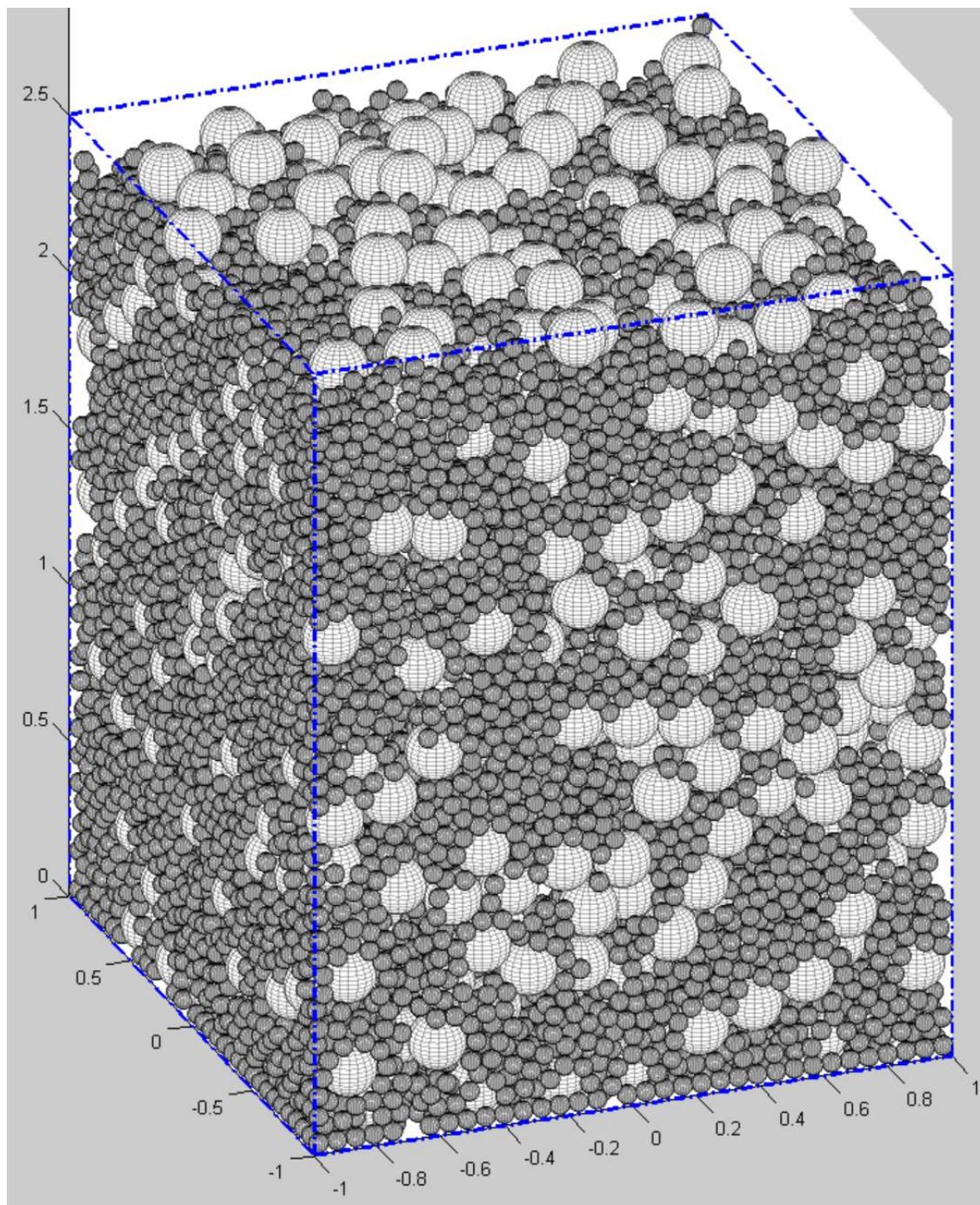


Figura A.3. Simulación geométrica de muestra con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$ ,  $a=3$

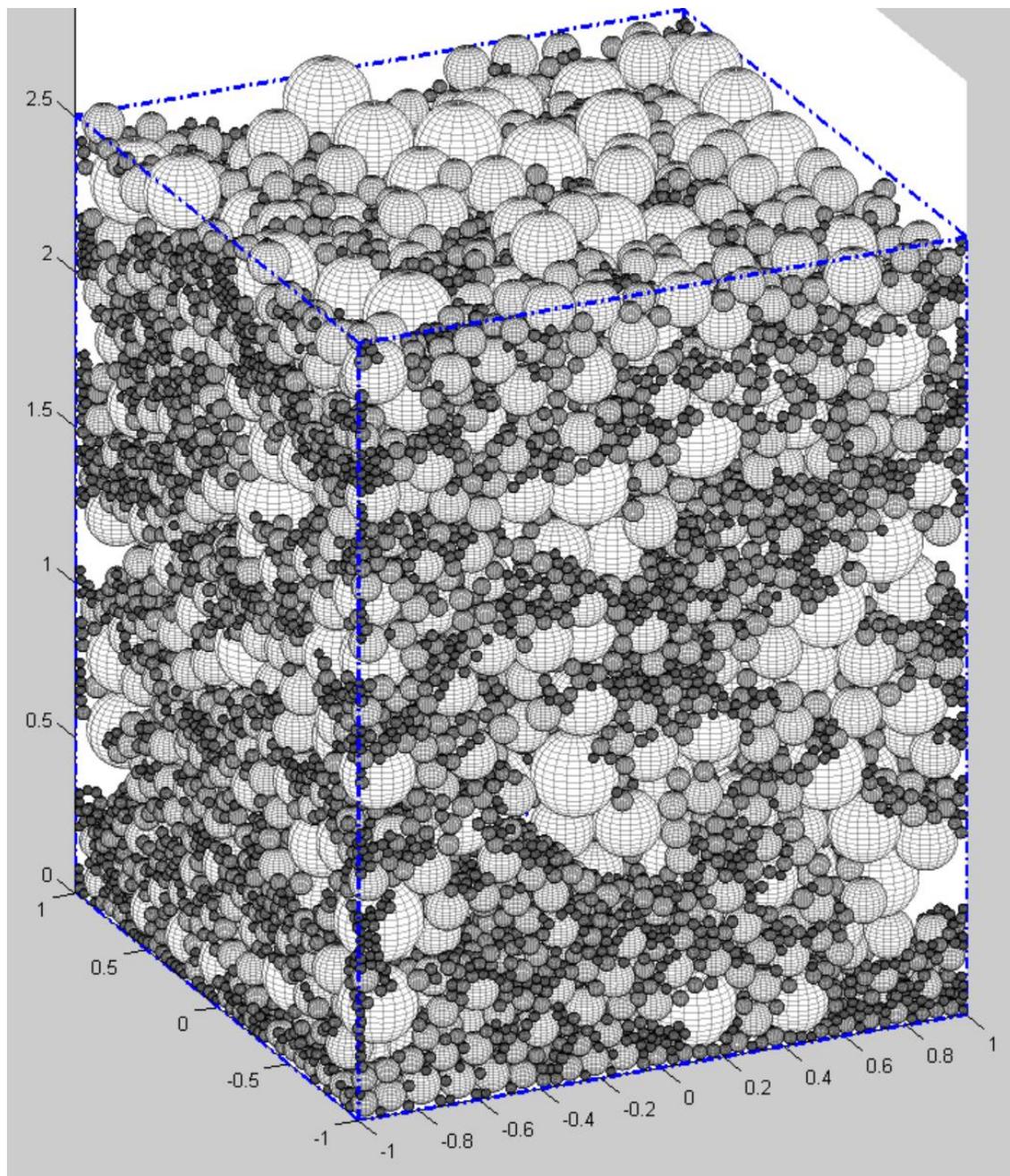


Figura A.4. Simulación geométrica de muestra con granulometría continua

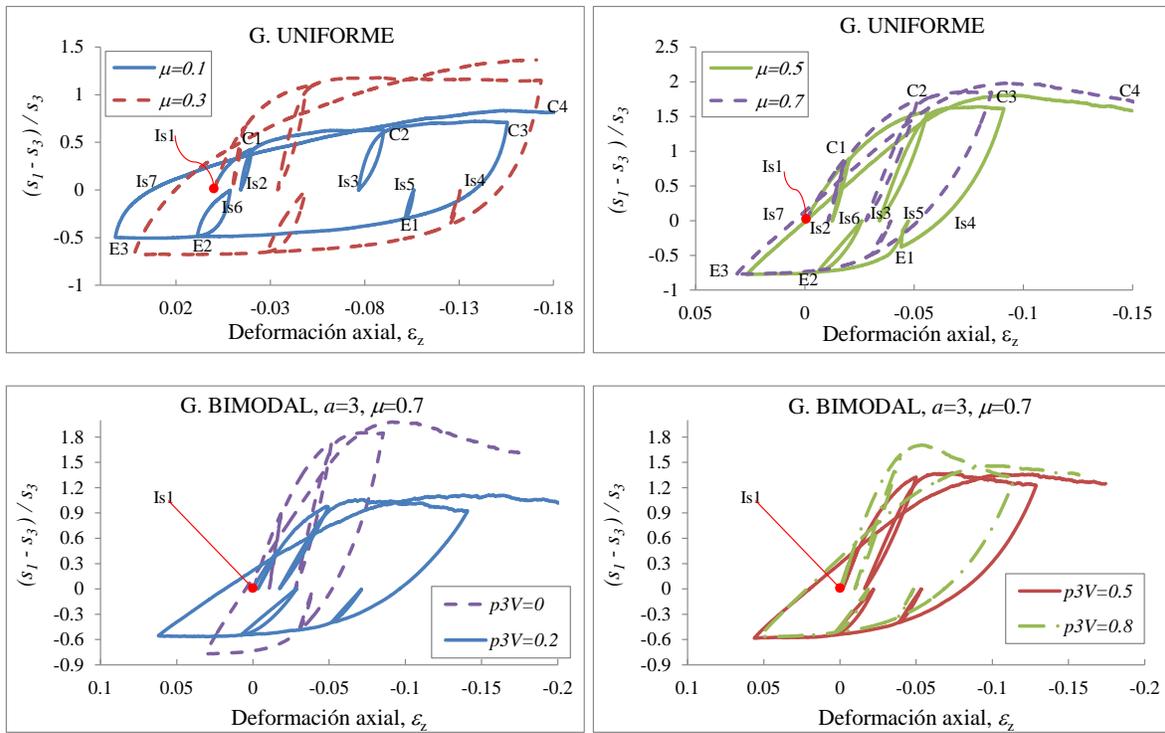


Figura A.5. Curvas esfuerzo-deformación de pruebas triaxiales simuladas

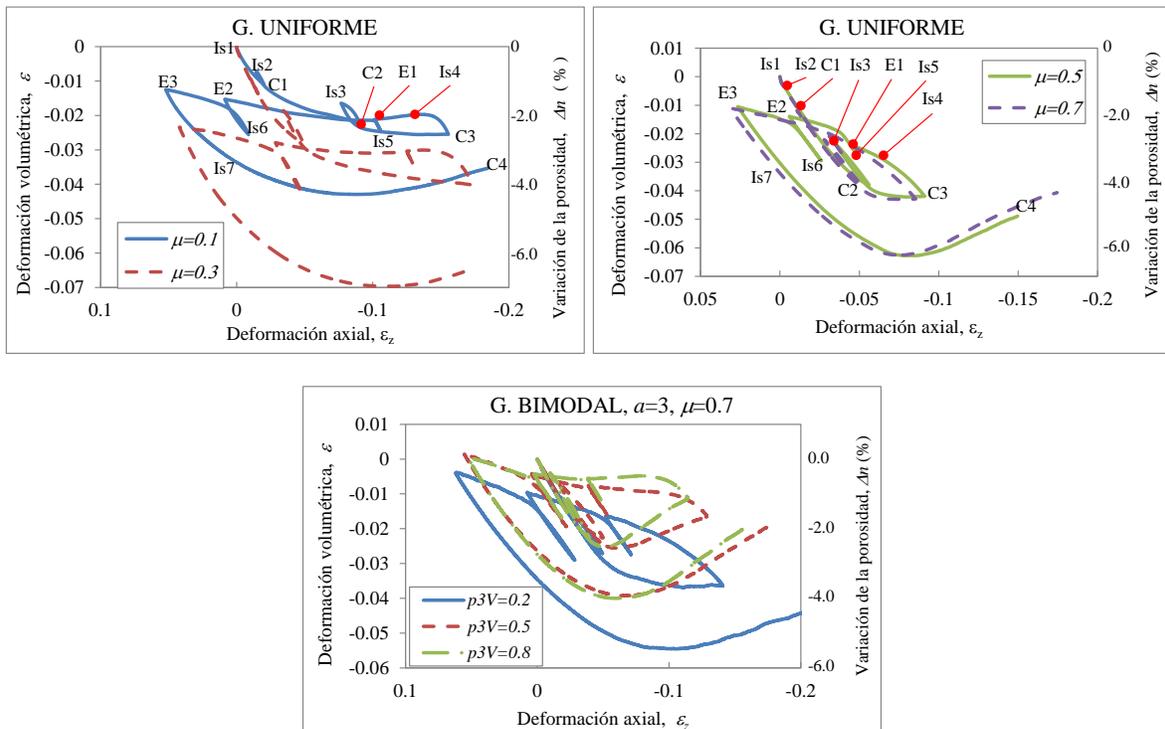


Figura A.6. Curvas de deformación volumétrica durante las pruebas triaxiales

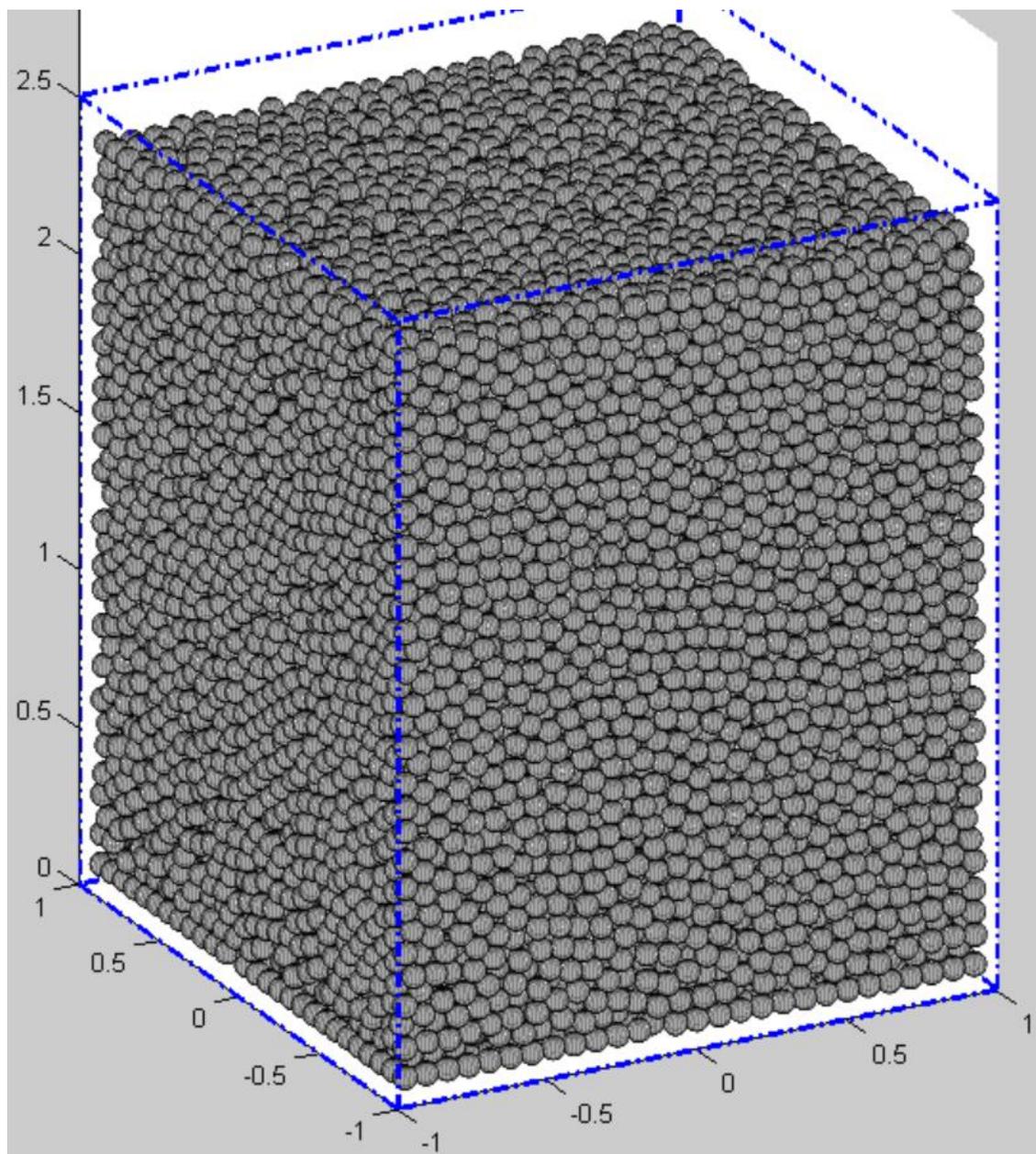


Figura A.7. Material con granulometría uniforme con  $\mu=0.1$ . Confinamiento isótropo inicial Is1

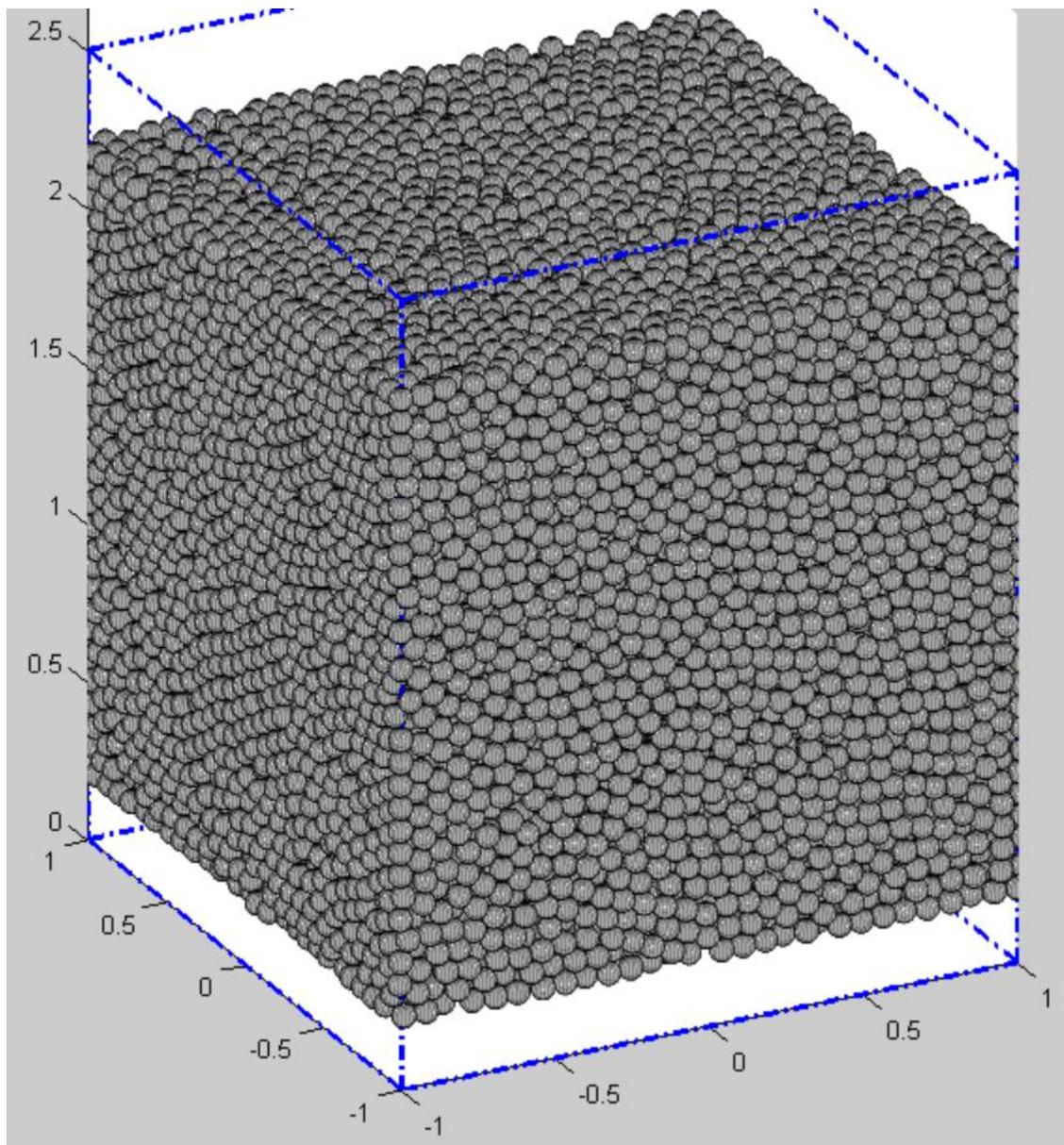


Figura A.8. Material con granulometría uniforme con  $\mu=0.1$ . Compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z=-0.15$

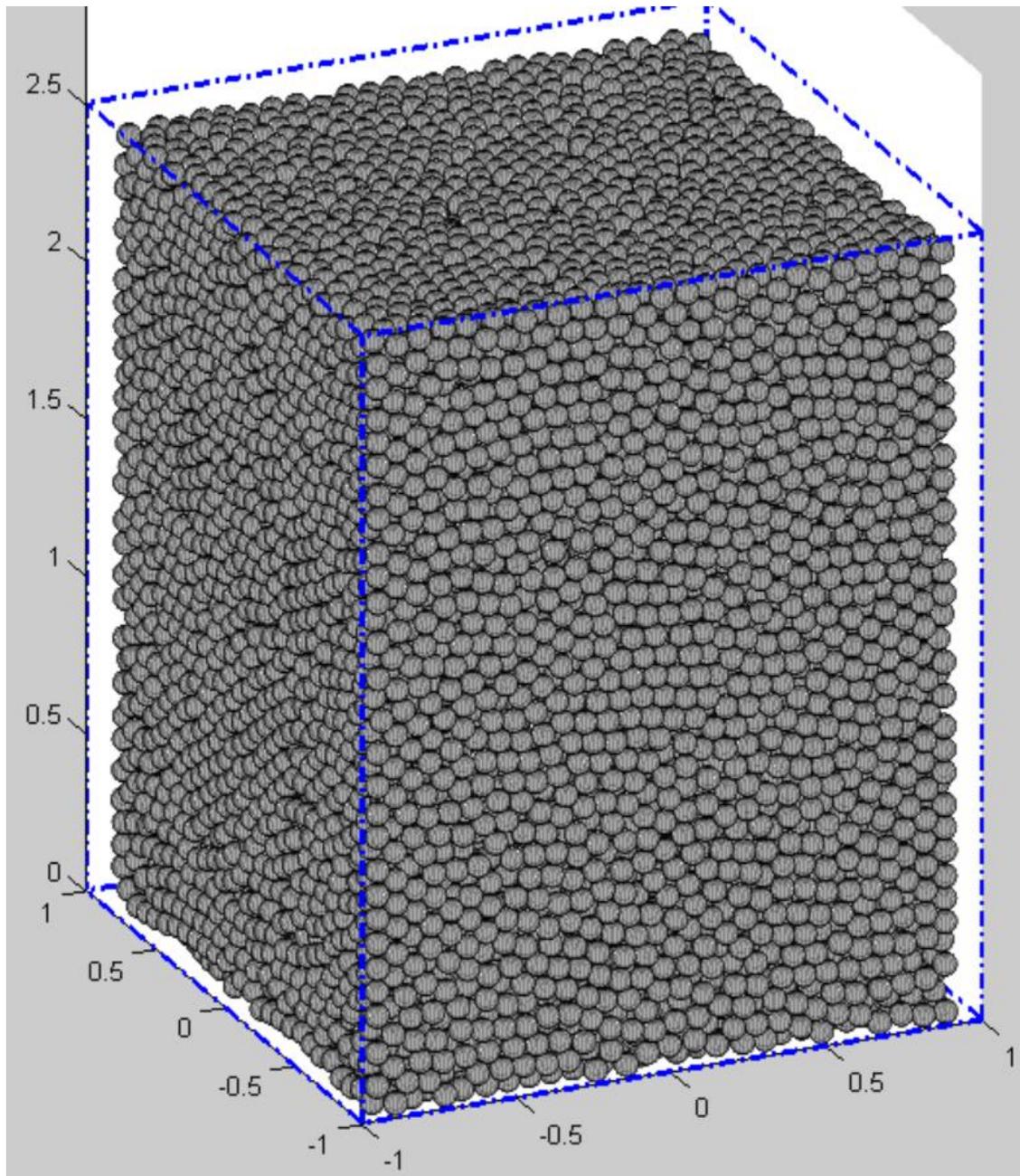


Figura A.9. Material con granulometría uniforme con  $\mu=0.1$ . Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_z=0.04$

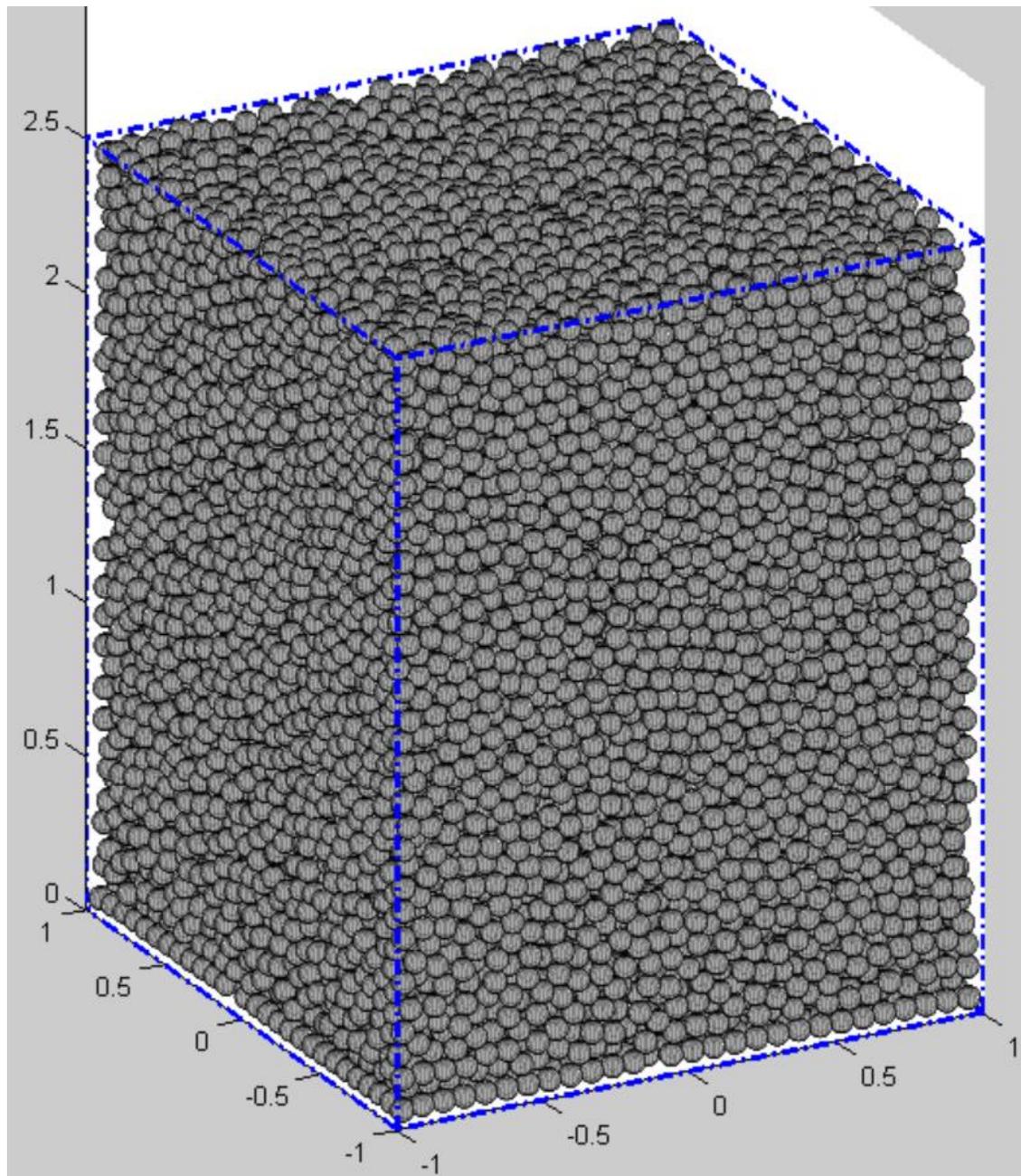


Figura A.10. Material con granulometría uniforme con  $\mu=0.7$ . Confinamiento isotrópico inicial  $Is1$

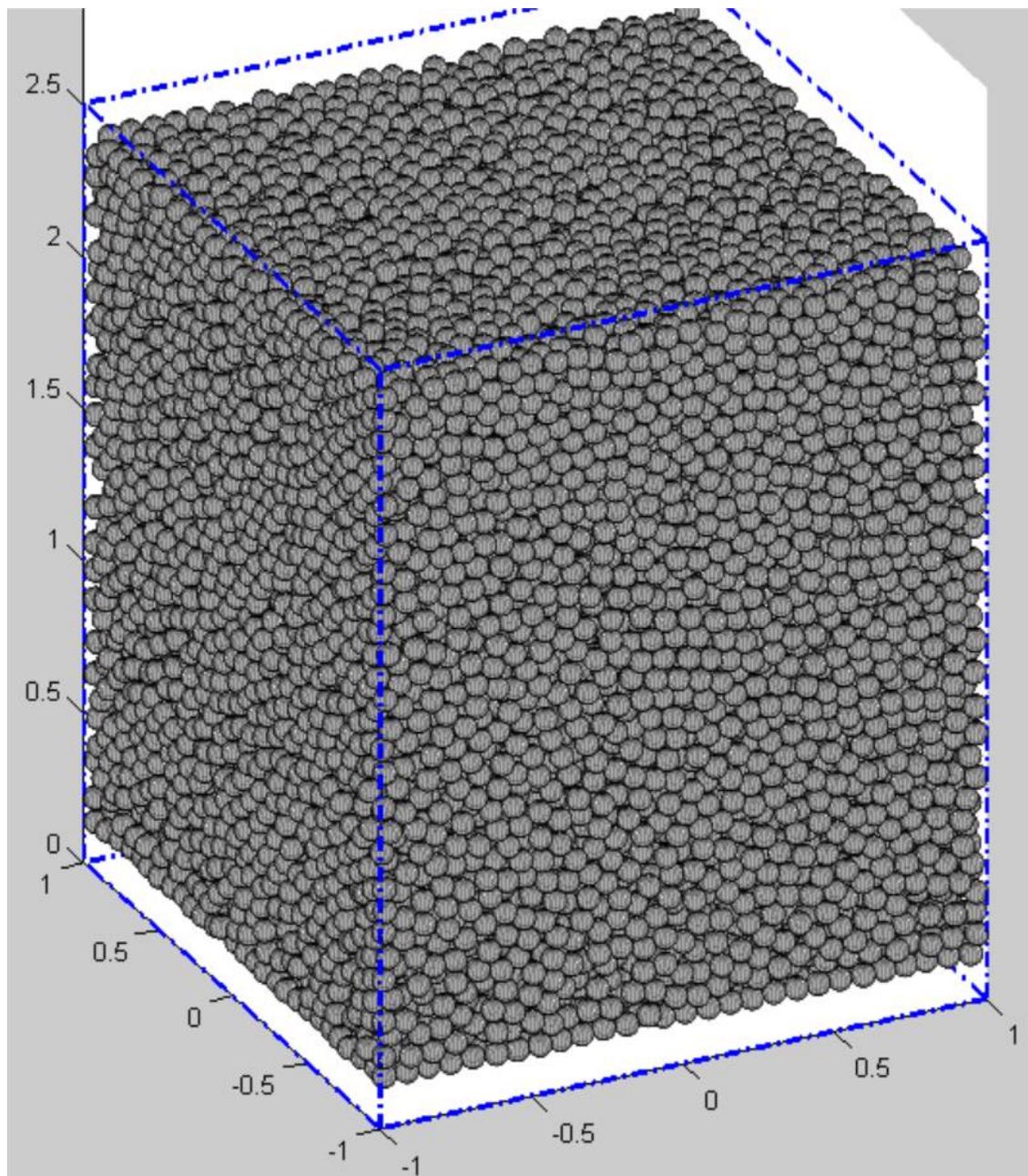


Figura A.11. Material con granulometría uniforme con  $\mu=0.7$ . Compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z=-0.08$

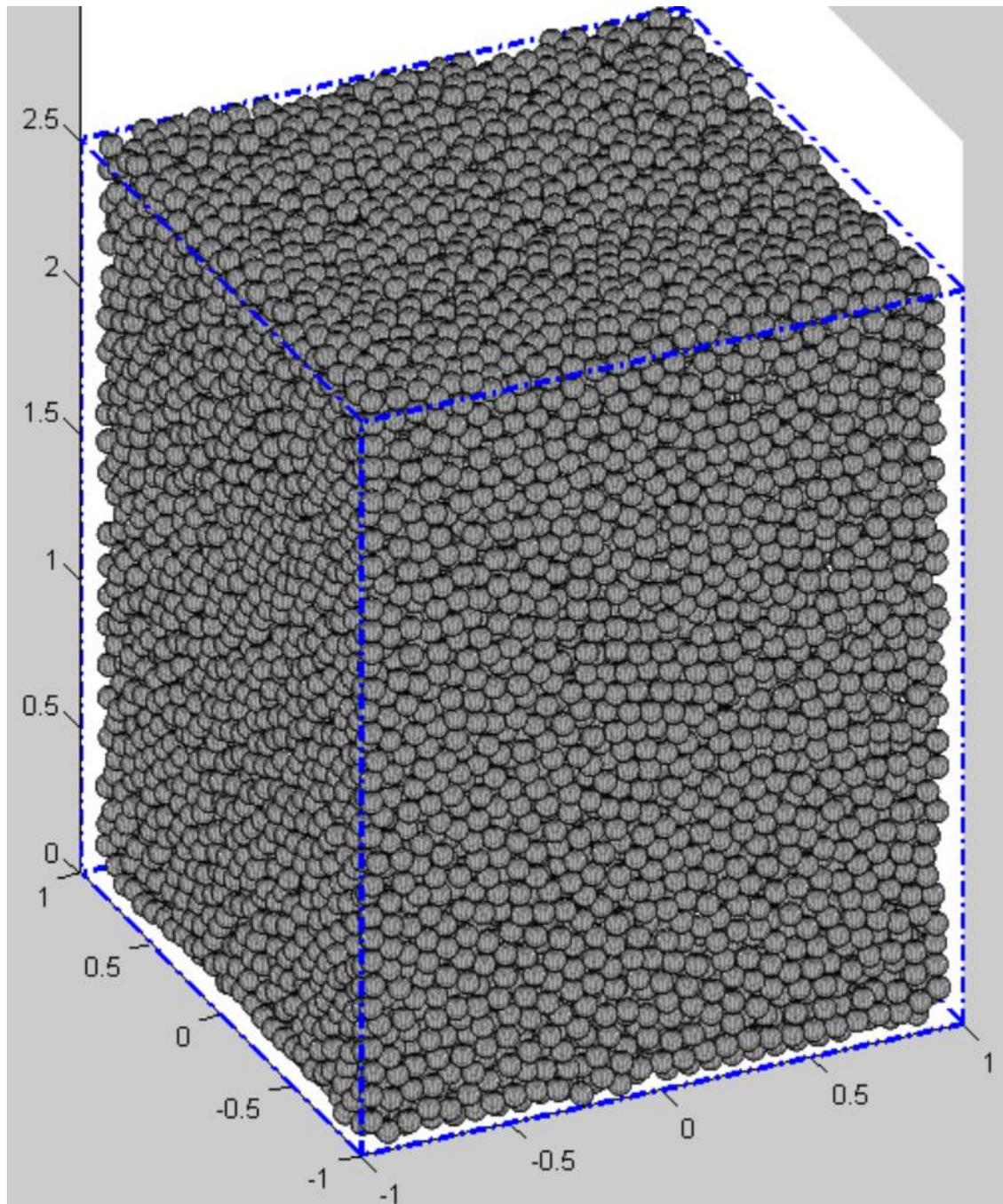


Figura A.12. Material con granulometría uniforme con  $\mu=0.7$ . Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_z=0.03$

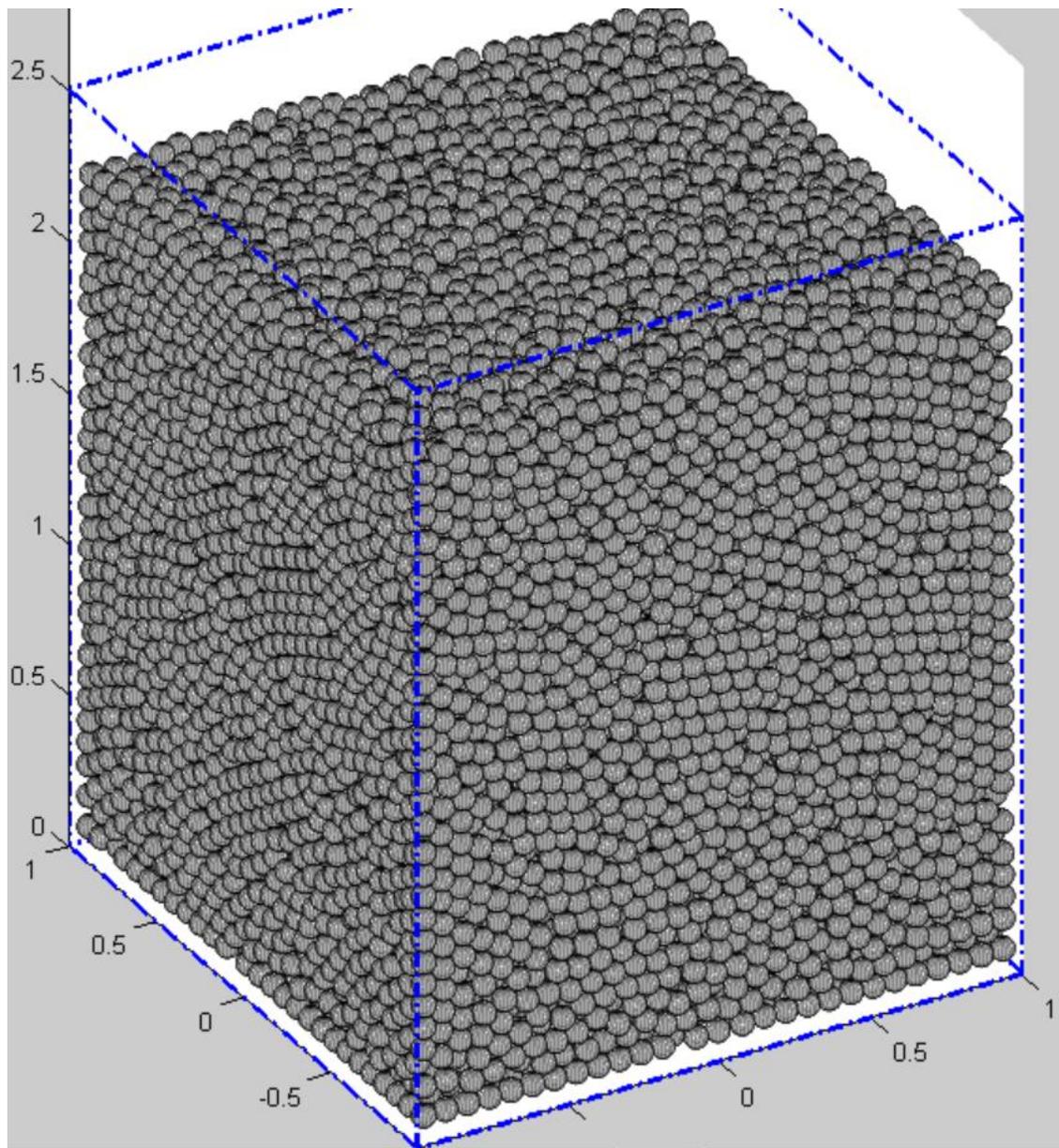


Figura A.13. Muestra densa formada con  $\mu=0$  y ensayada con  $\mu=0.7$ . Confinamiento isótopo inicial  $Is1$

En lo que sigue se entiende que la muestra densa corresponde a aquella de granulometría uniforme formada con  $\mu=0$  y ensayada con  $\mu=0.7$ .

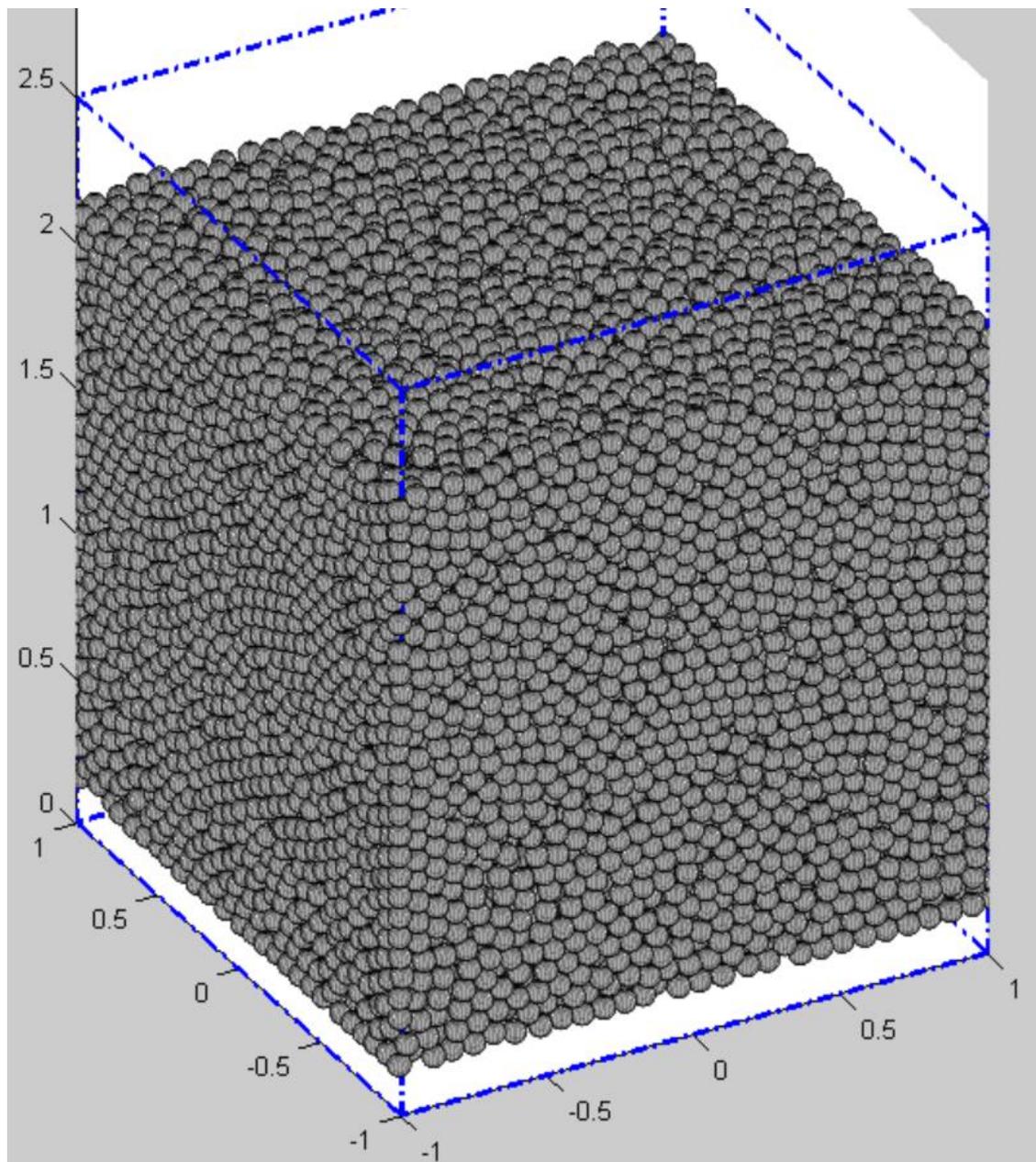


Figura A.14. Muestra densa. Compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z = -0.11$

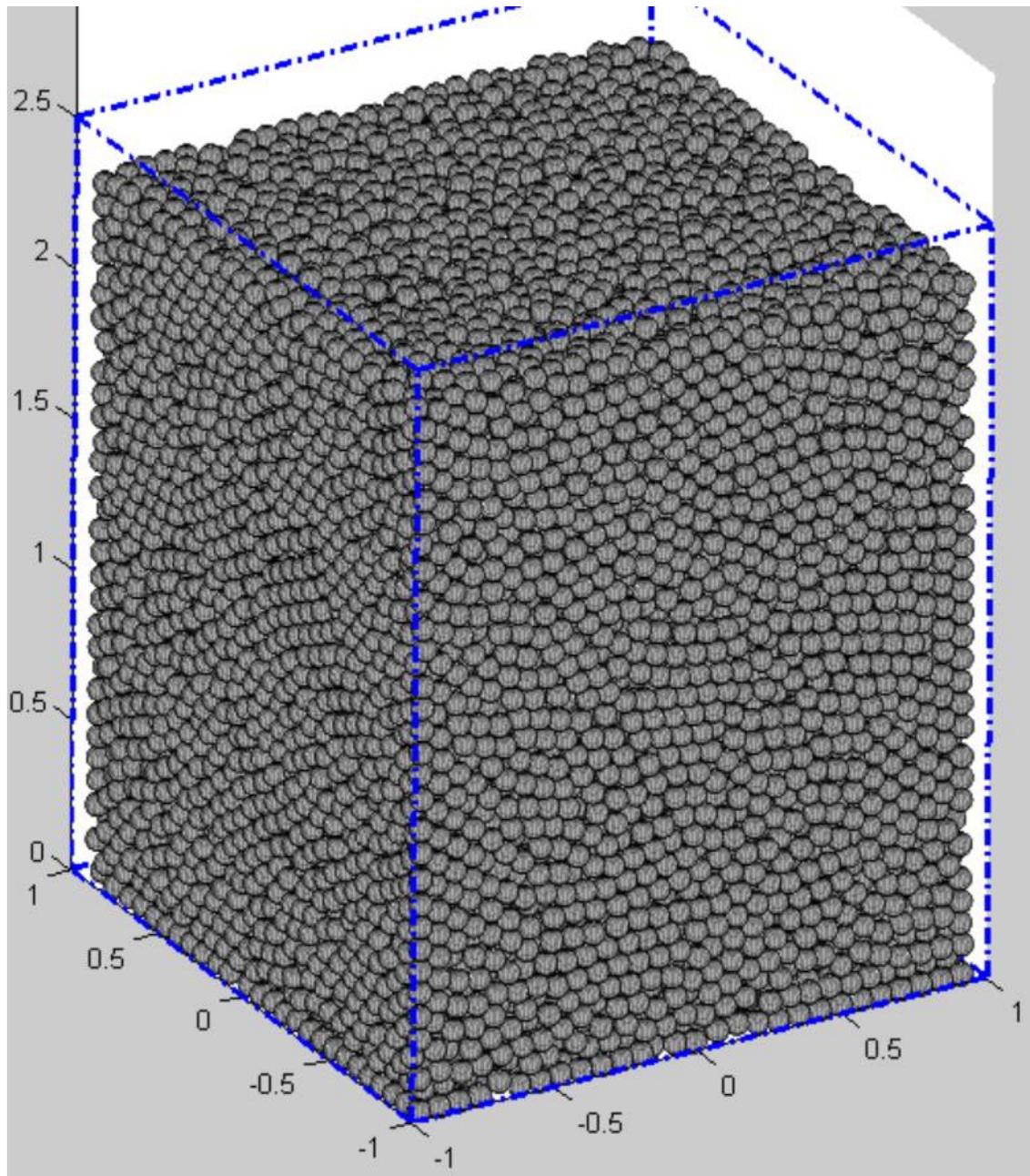


Figura A.15. Muestra densa. Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_z=0.06$

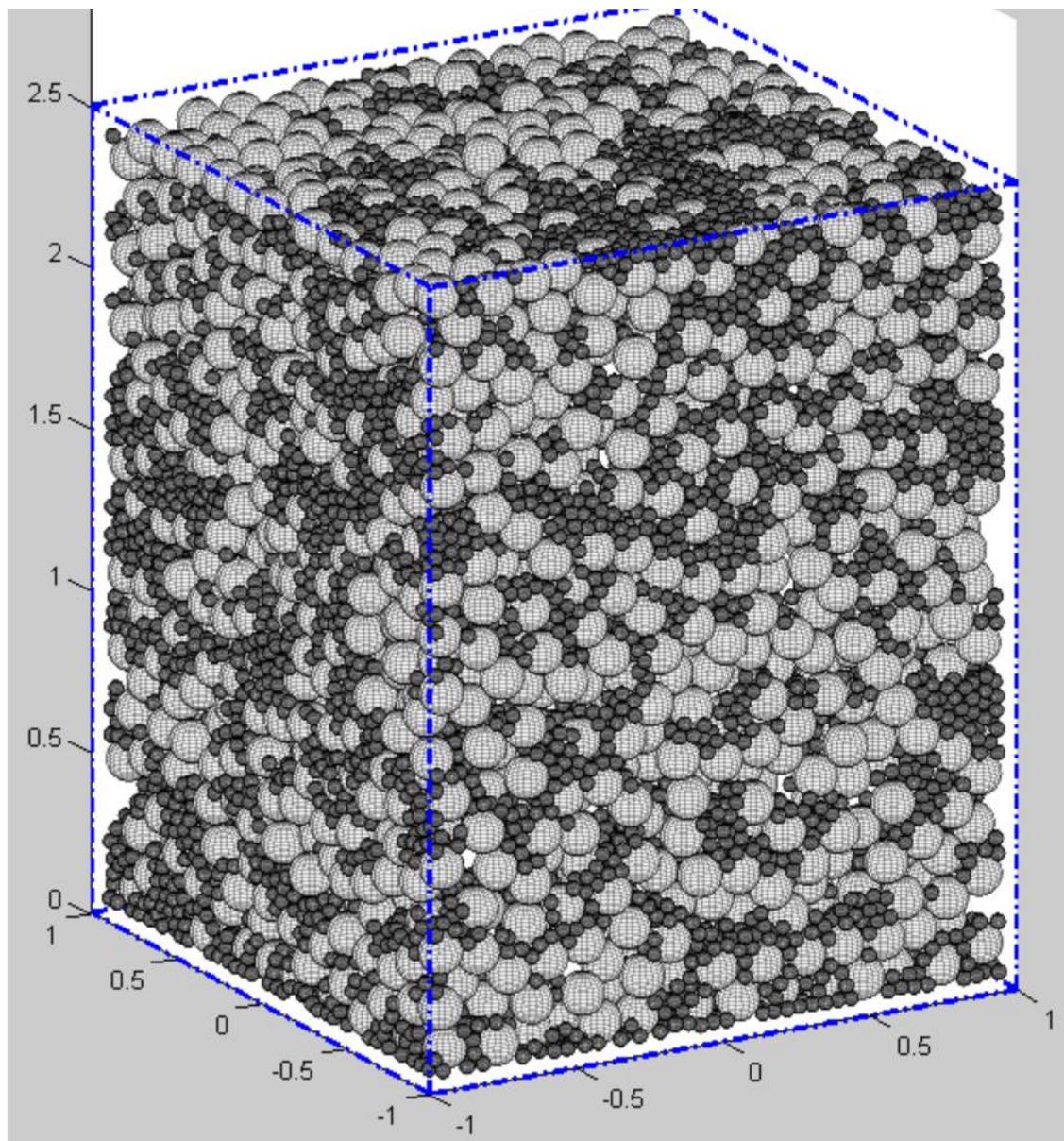


Figura A.16. Material con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.2$ ,  $a=3$ . Confinamiento isotrópico inicial Is1

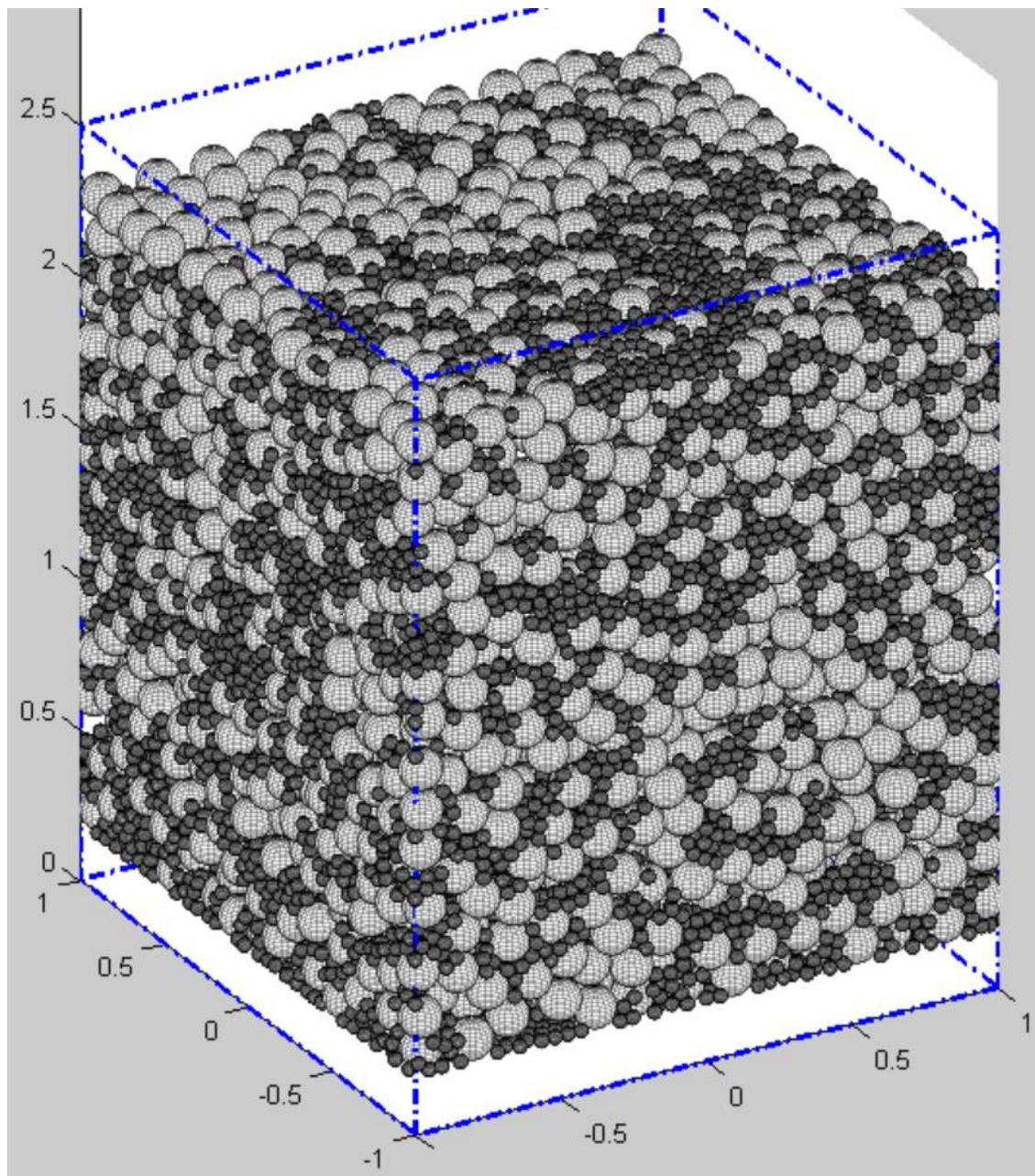


Figura A.17. Material con granulometría uniforme con  $p_{3V}=0.2$ ,  $a=3$ . Compresión triaxial C3 con  $\epsilon_z=-0.14$

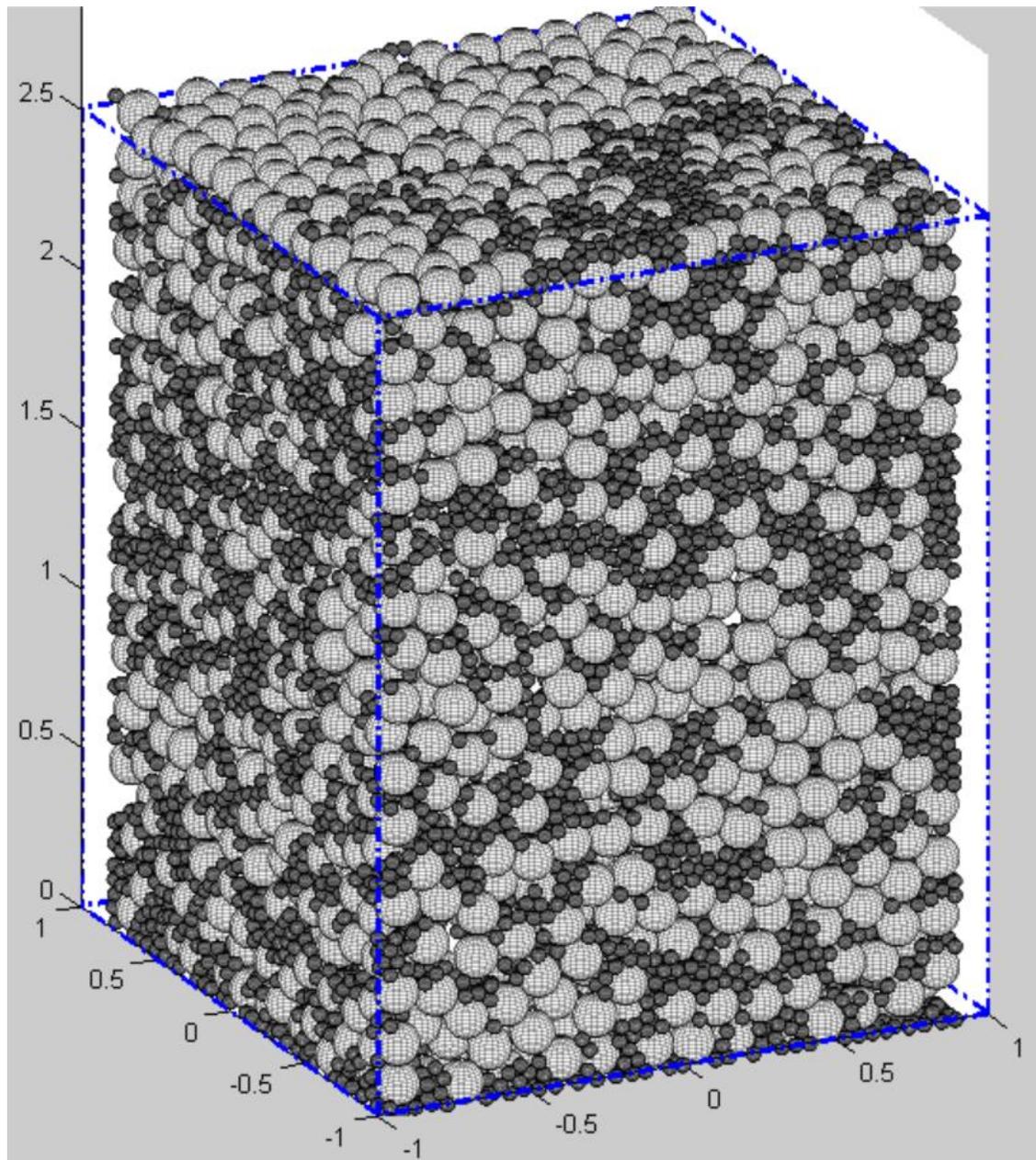


Figura A.18. Material con granulometría uniforme con  $p_{3V}=0.2$ ,  $a=3$ . Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_z=0.06$

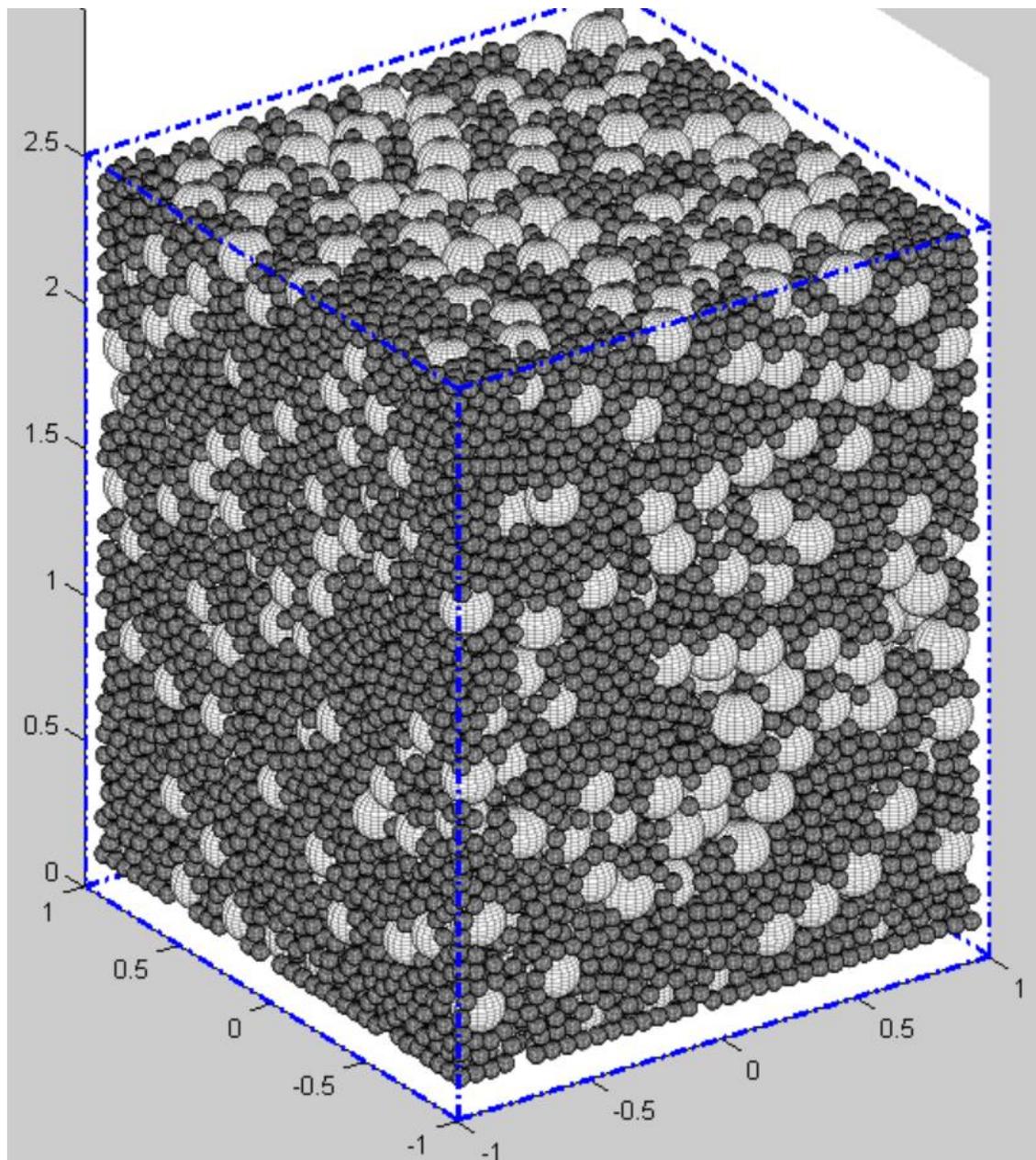


Figura A.19. Material con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$ ,  $a=3$ . Confinamiento isótropo inicial  $Is1$

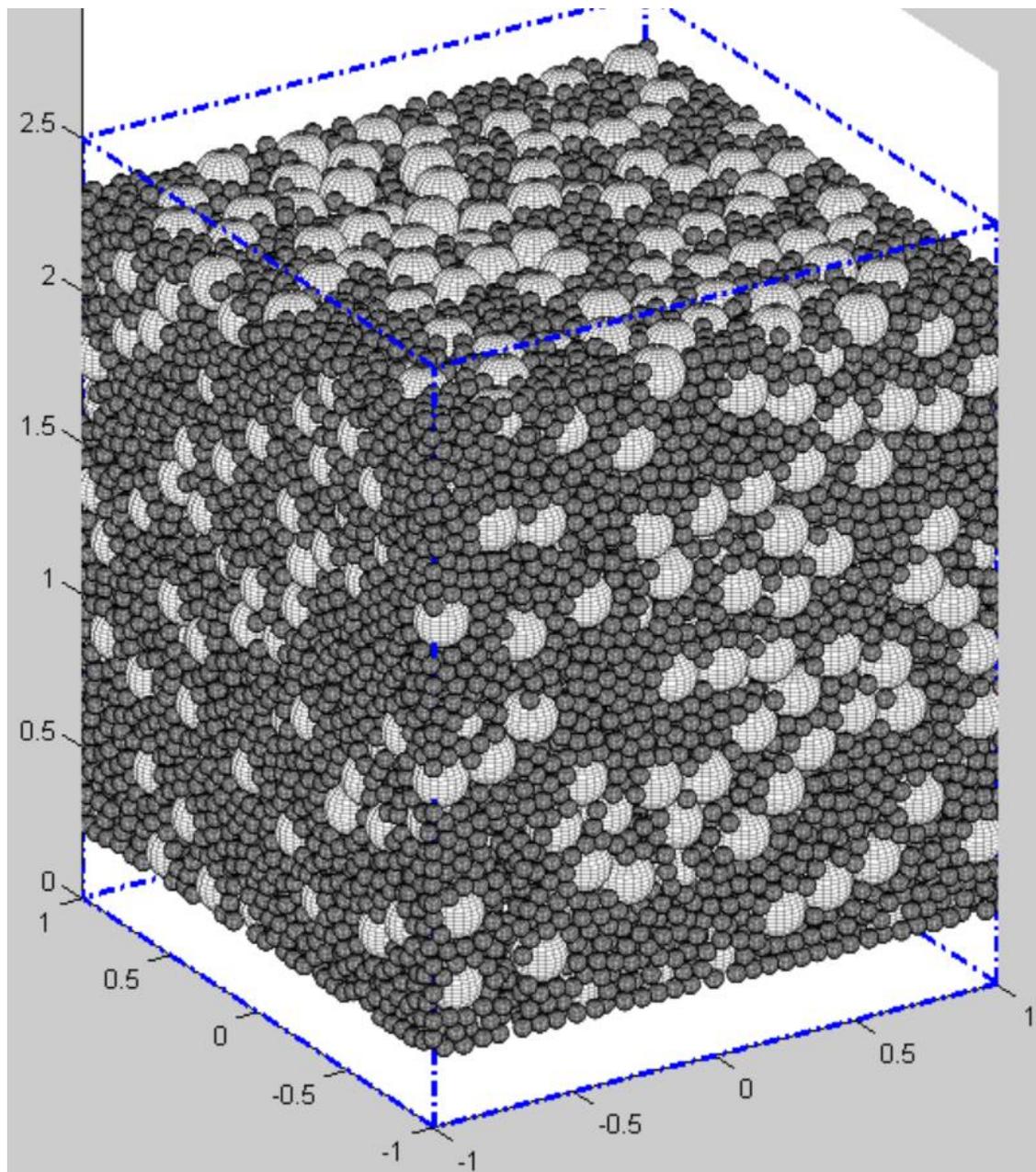


Figura A.20. Material con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$ ,  $a=3$ . Compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z=-0.13$

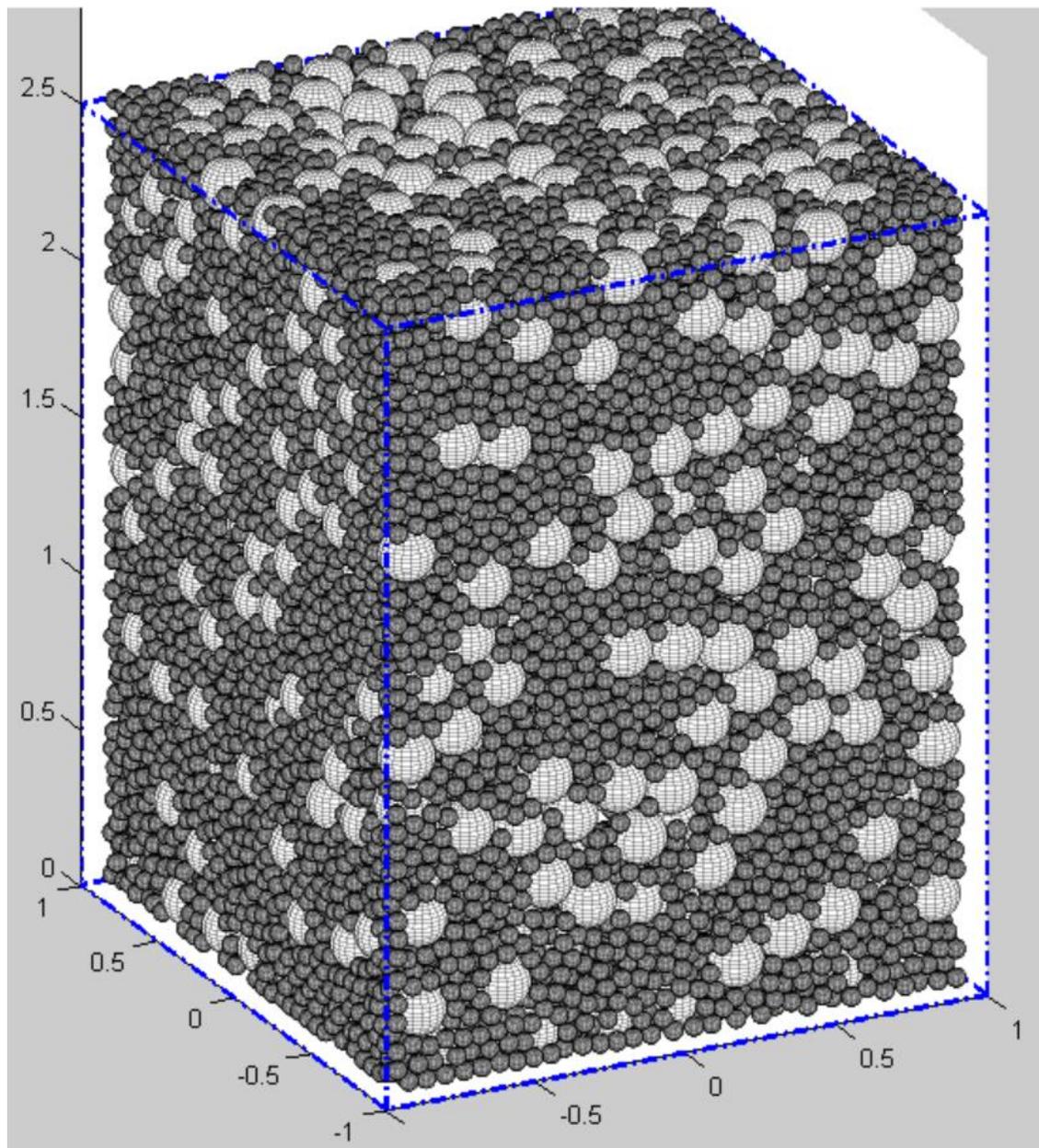


Figura A.21. Material con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.5$ ,  $a=3$ . Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_s=0.05$

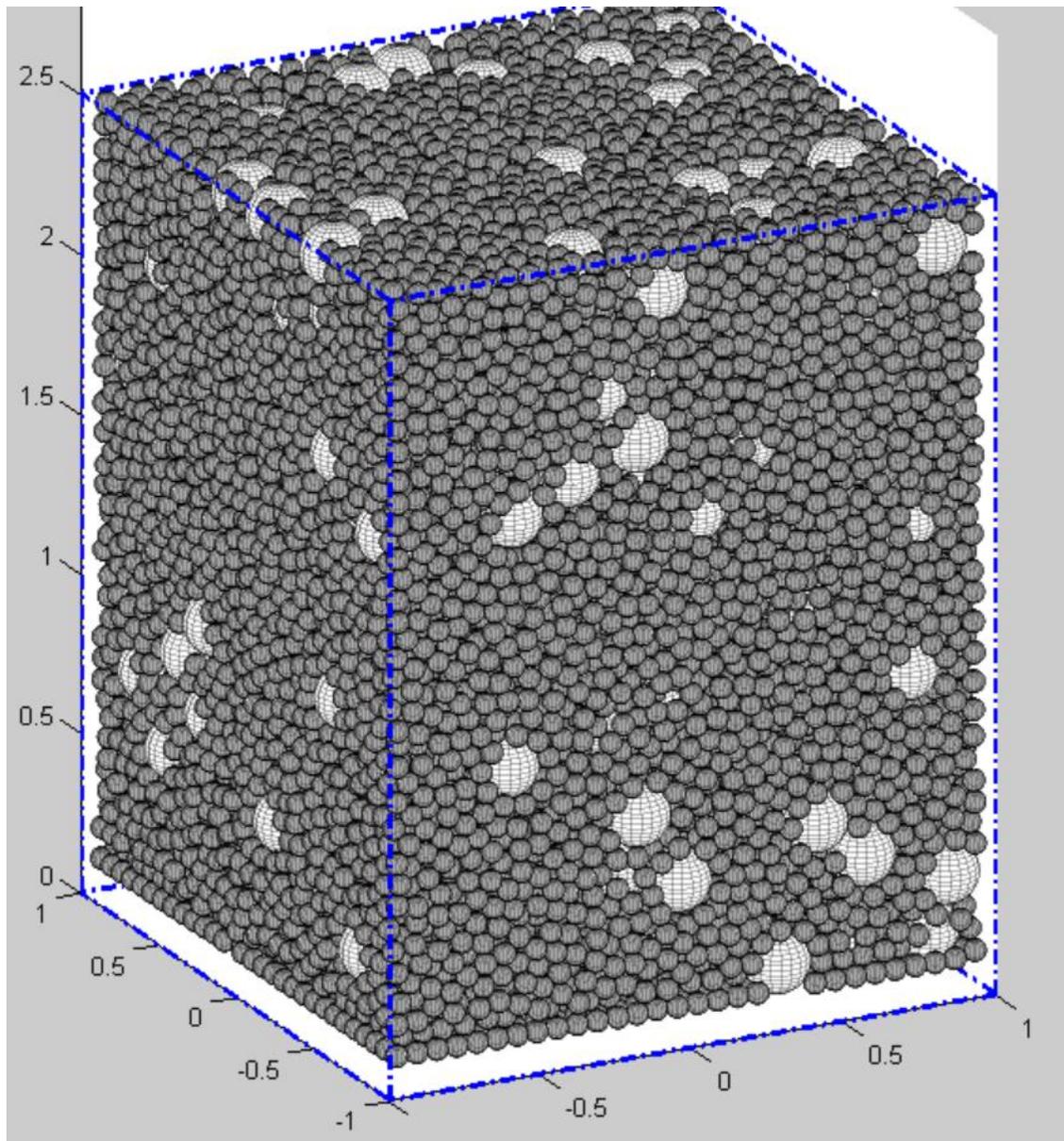


Figura A.22. Material con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.8$ ,  $a=3$ . Confinamiento isótropo inicial Is1

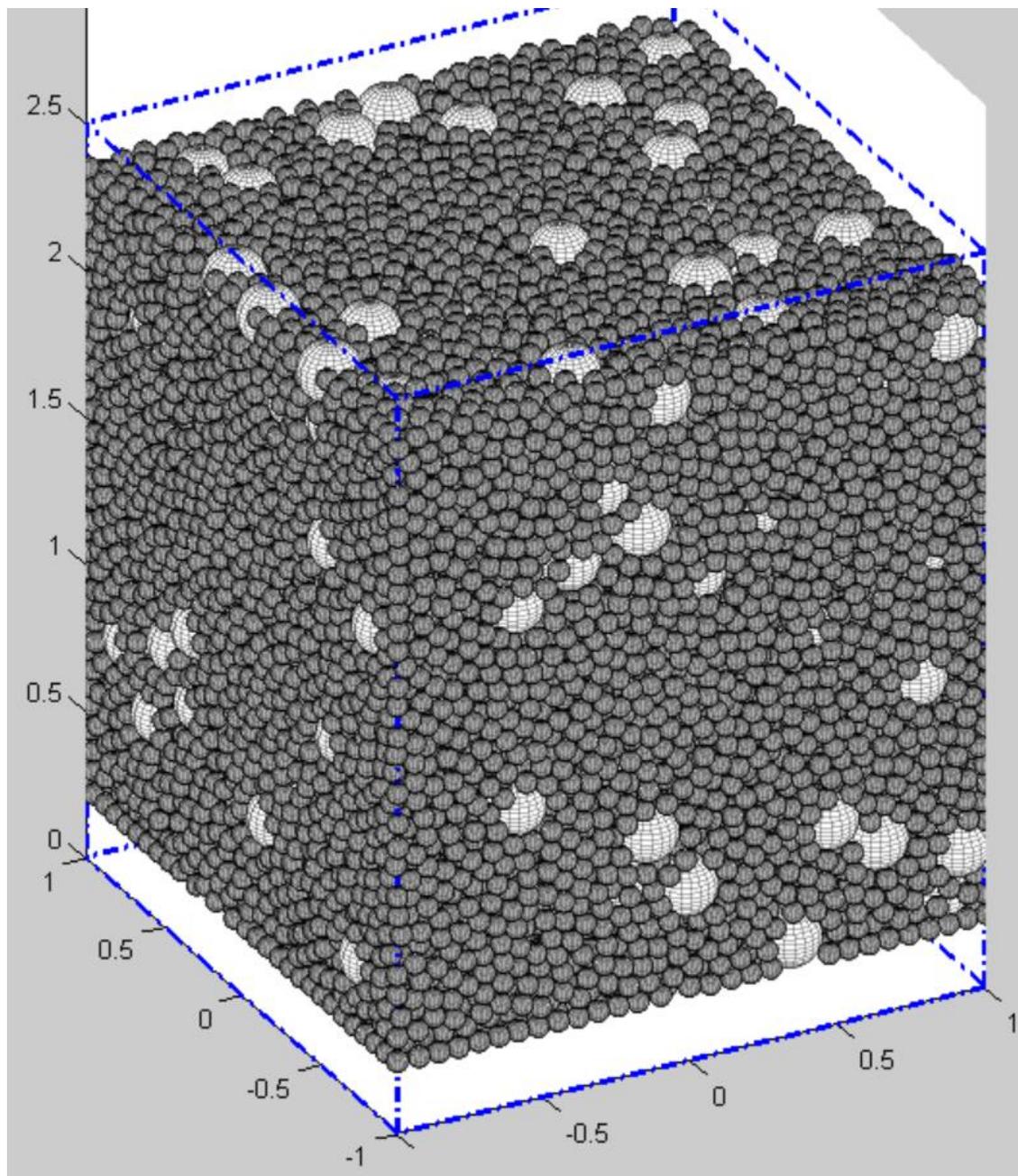


Figura A.23. Material con granulometría bimodal con  $p_{3v}=0.8$ ,  $a=3$ . Compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z=-0.11$

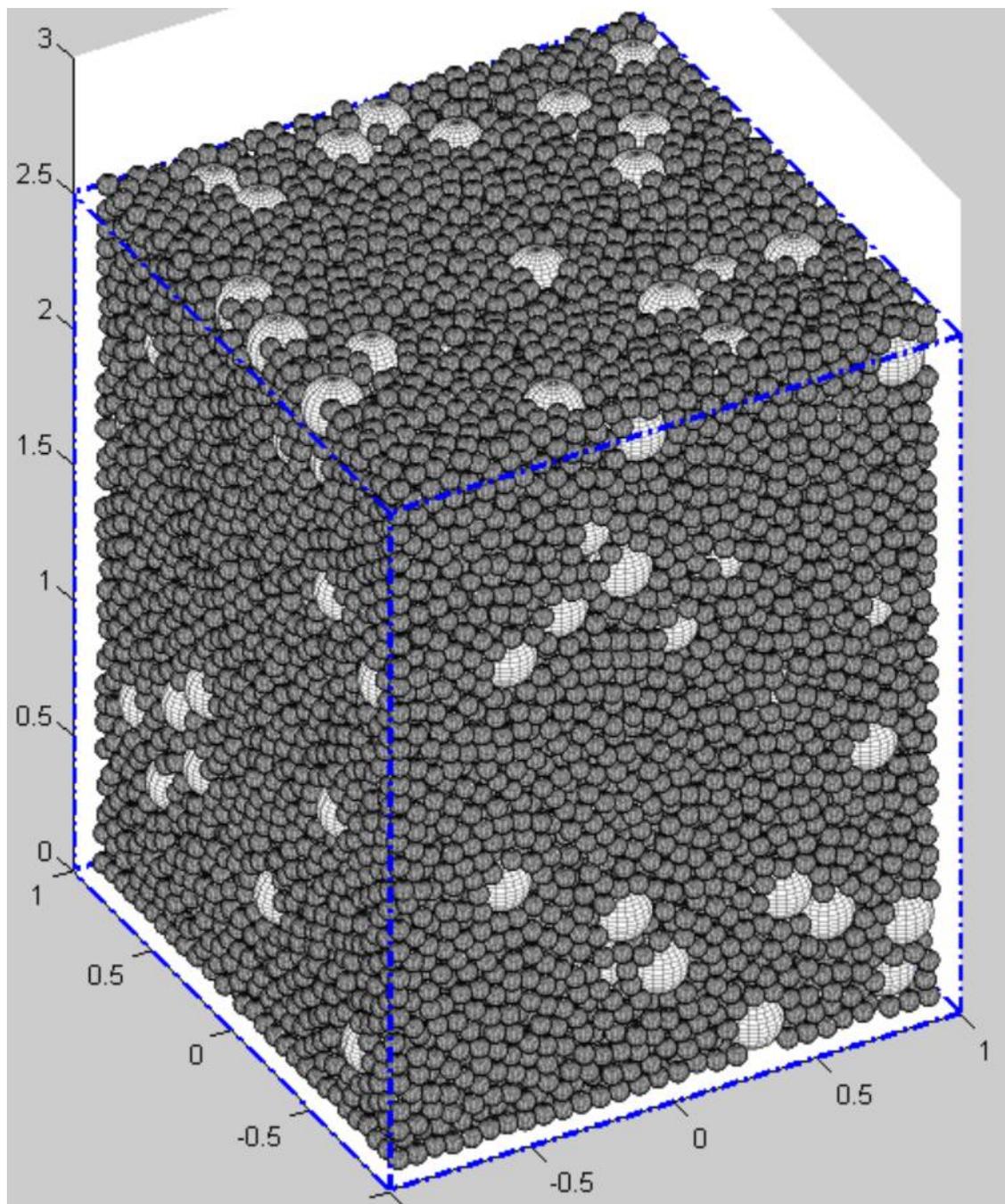


Figura A.24. Material con granulometría bimodal con  $p_{3V}=0.8$ ,  $a=3$ . Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_z=0.05$

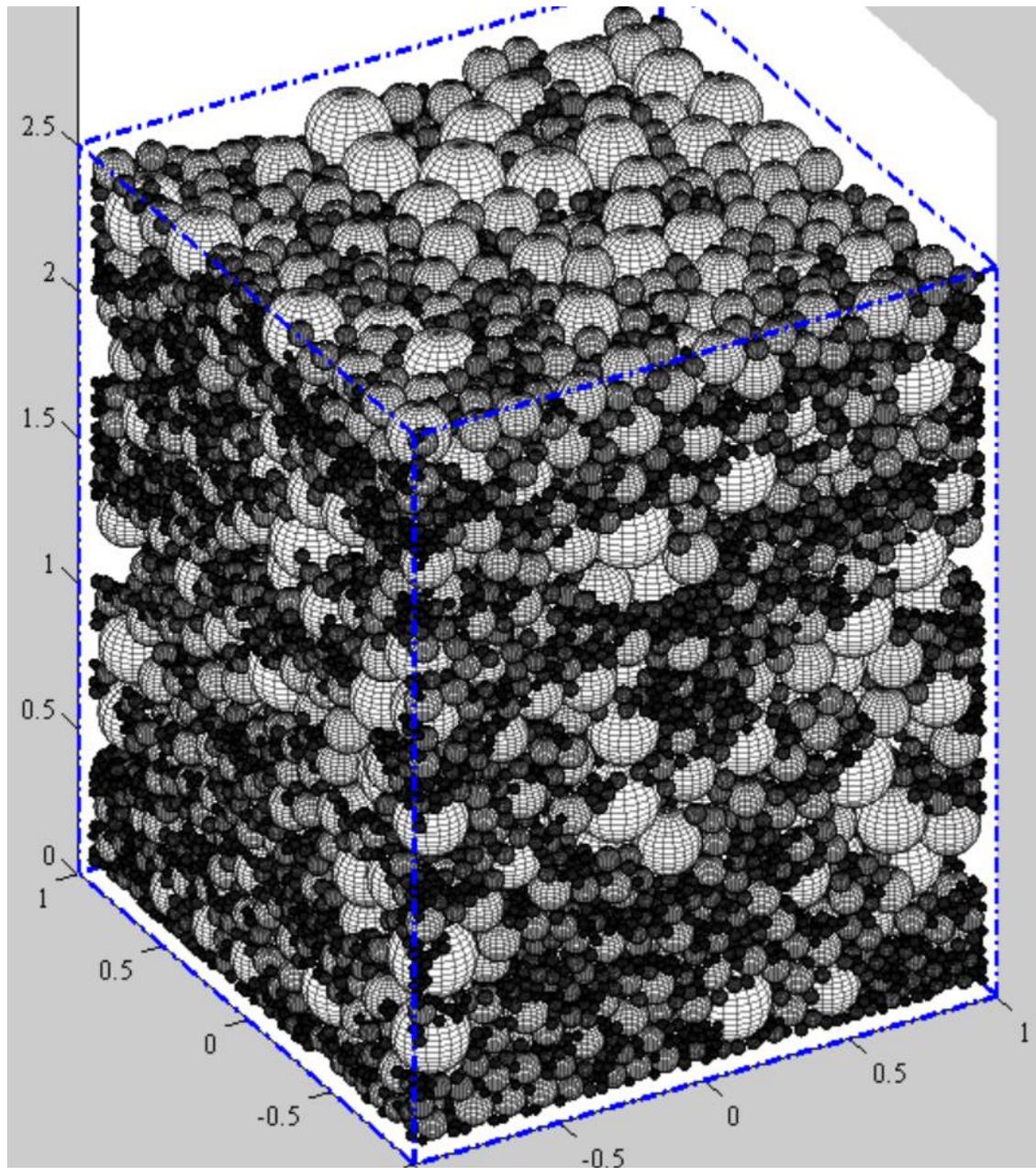


Figura A.25. Material con granulometría continua con  $\alpha=10$ . Confinamiento isótropo inicial Is1

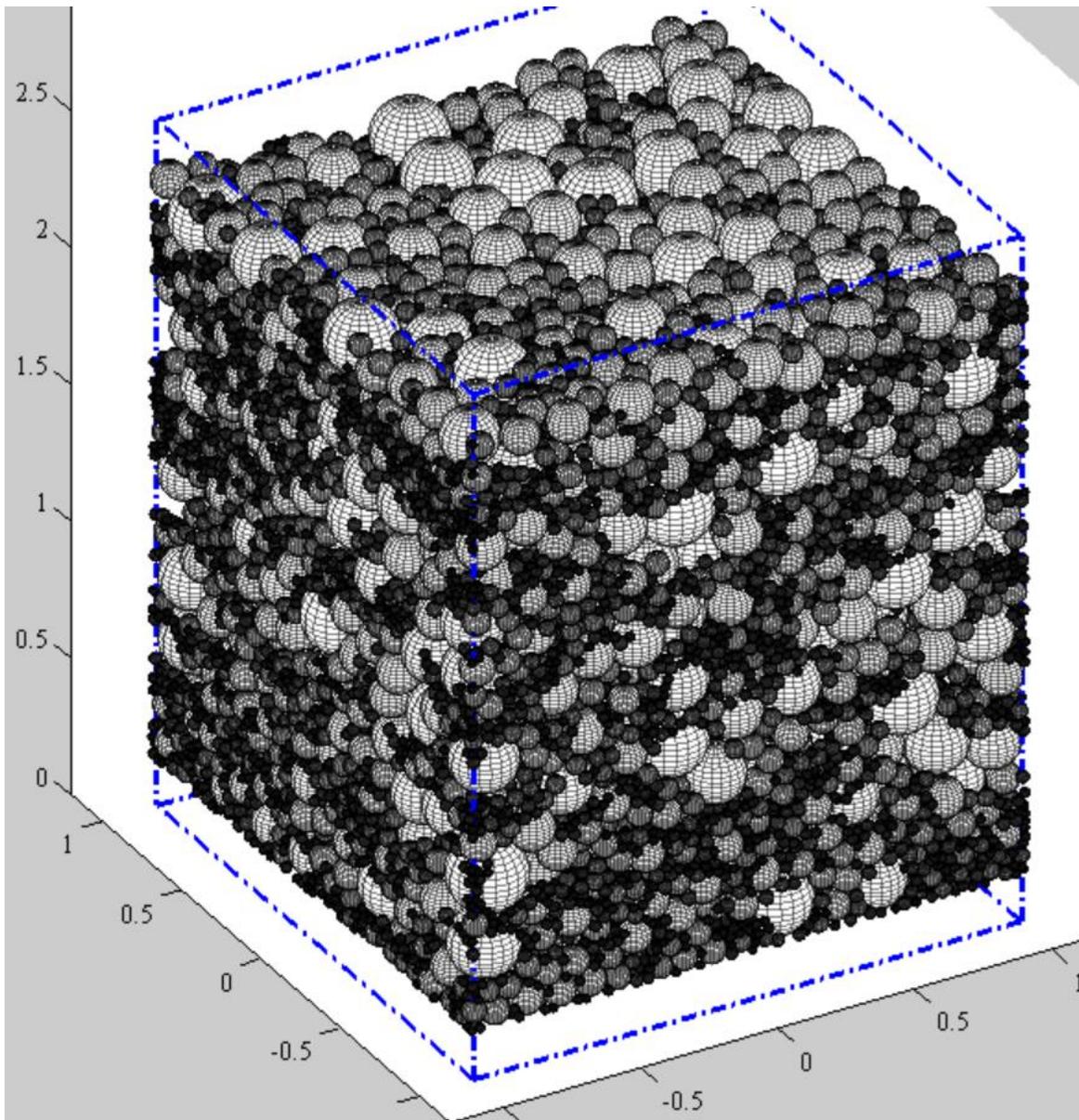


Figura A.26. Material con granulometría continua con  $a=10$ . Compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z=-0.12$

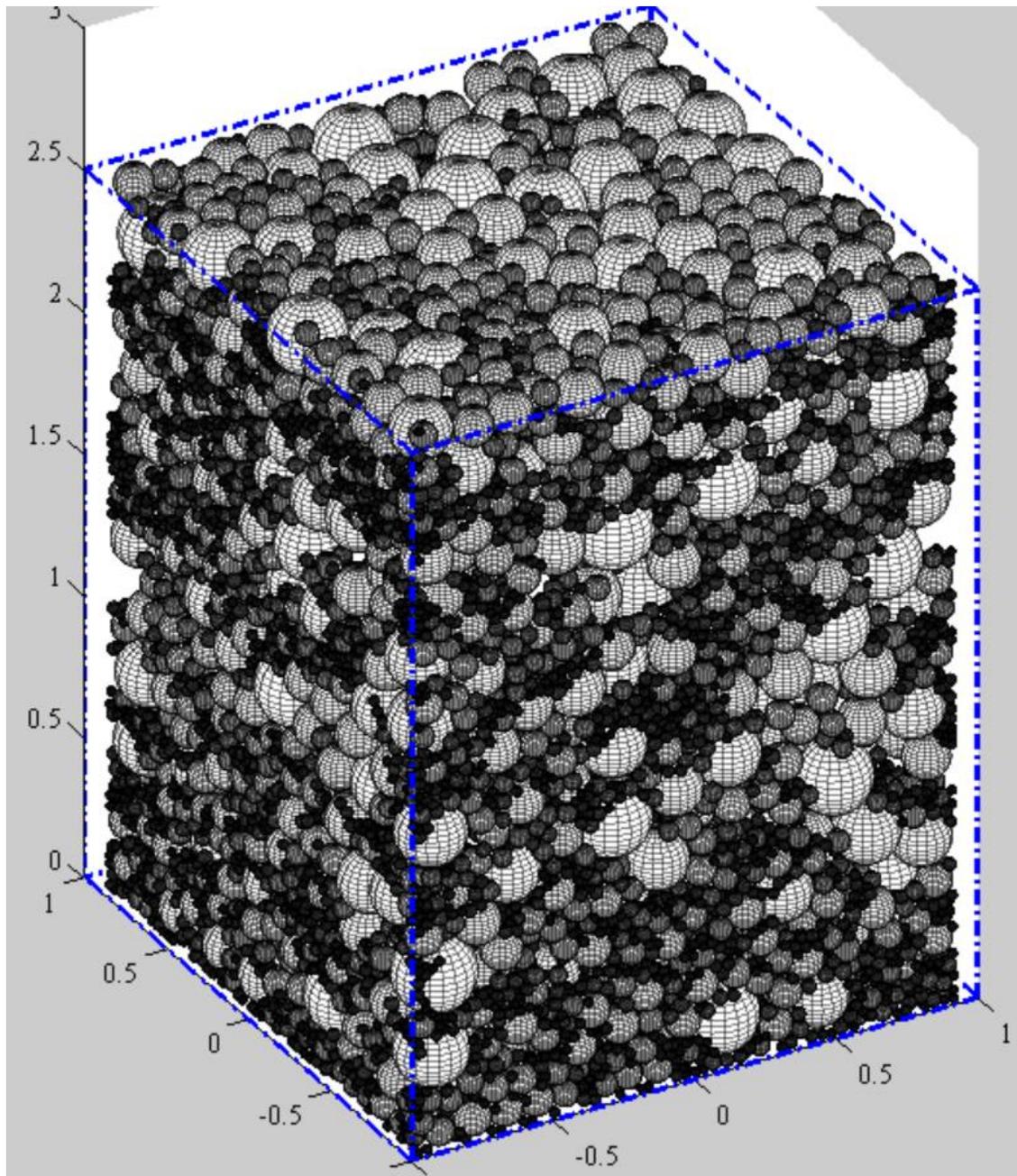


Figura A.27. Material con granulometría continua con  $\alpha=10$ . Extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_z=0.05$

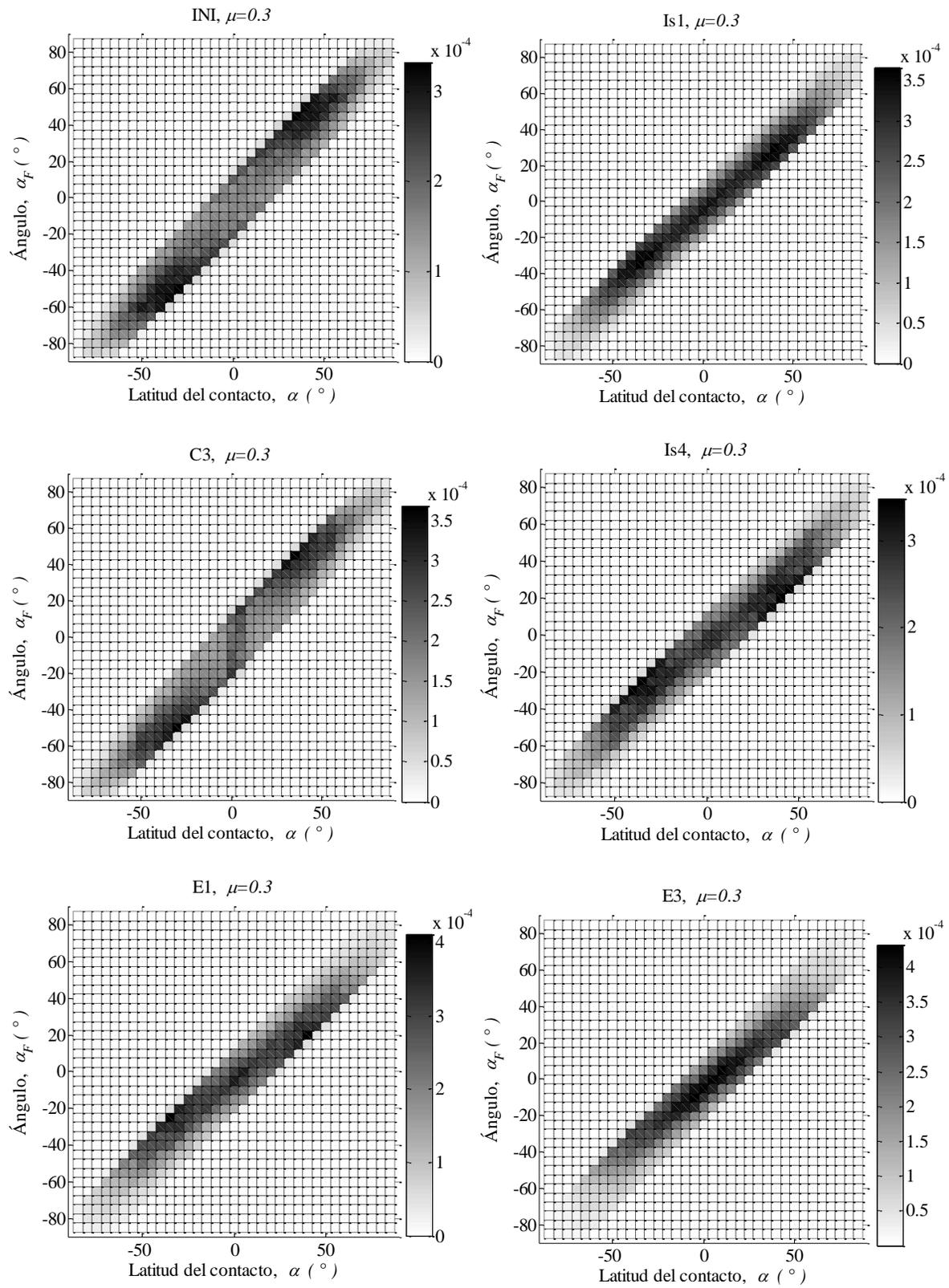


Figura A.28. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.3$

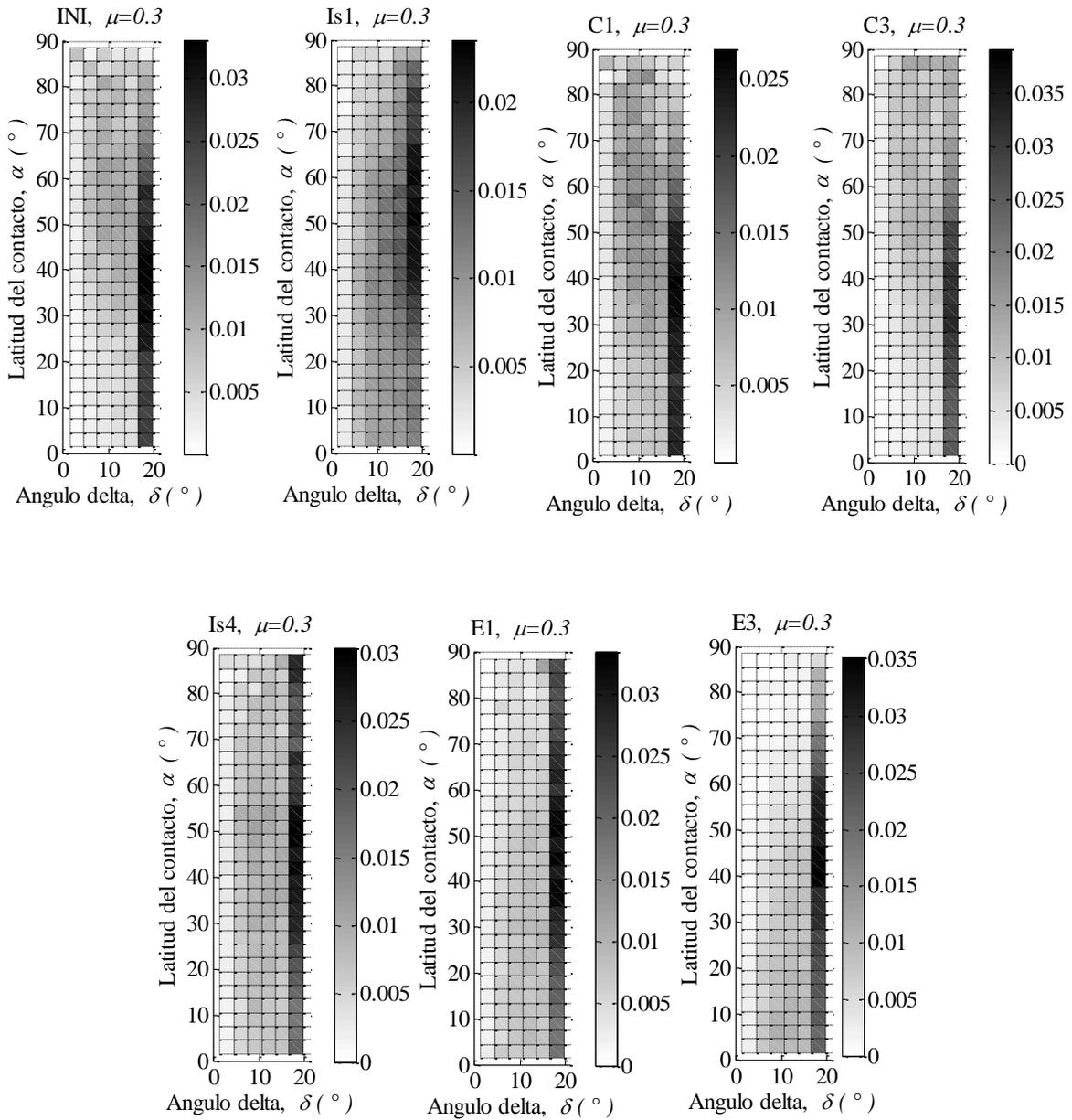
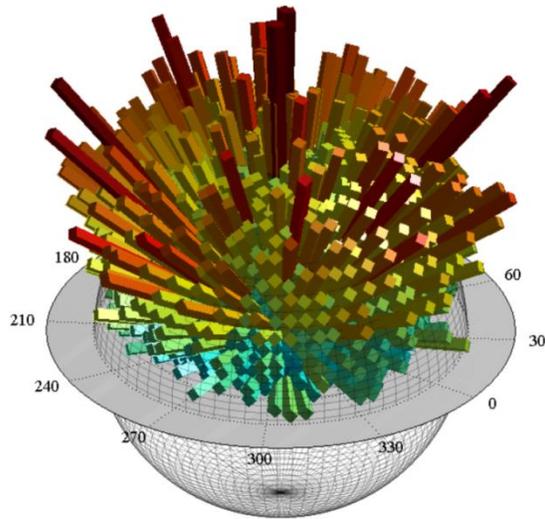
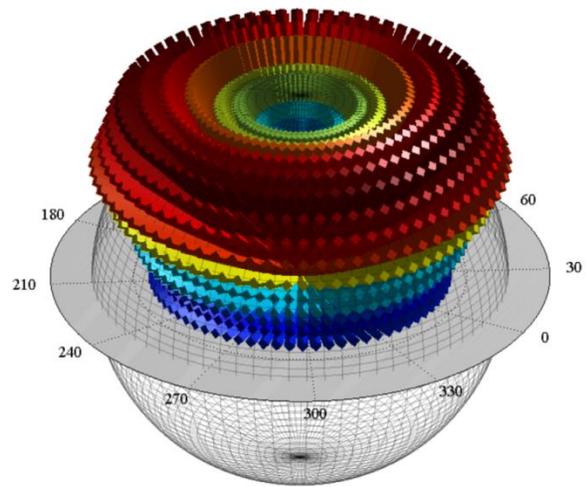


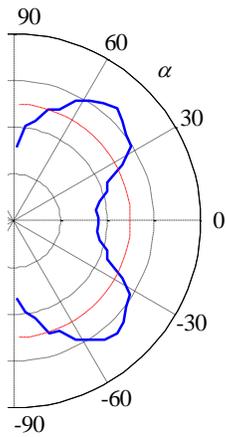
Figura A.29. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(\alpha, \delta)$  durante la prueba triaxial, muestra de granulometría uniforme con  $\mu=0.3$



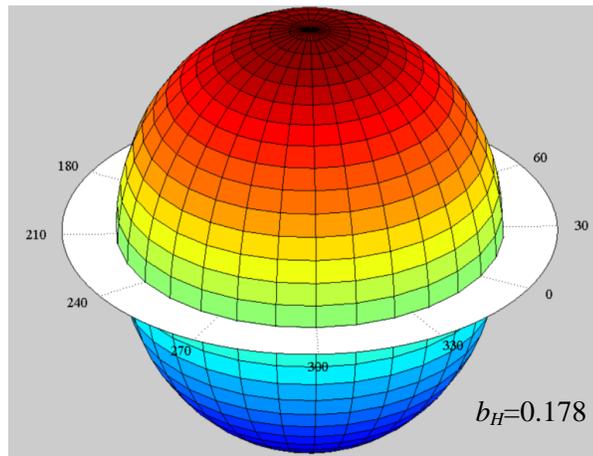
Frecuencias relativas por unidad de superficie



Función de repartición  $\Gamma(\alpha)$  en 3D

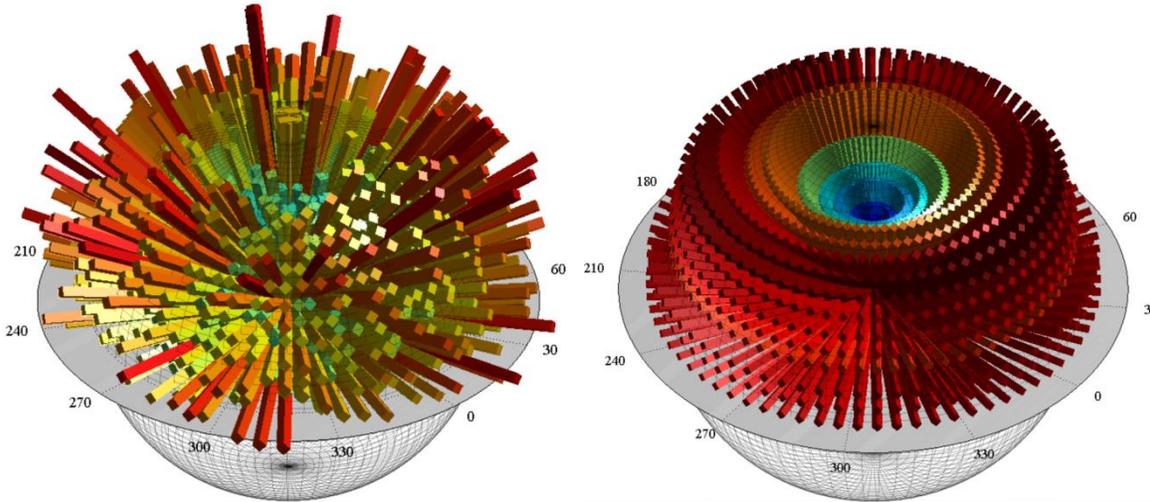


Función de repartición  $\Gamma(\alpha)$  en 2D



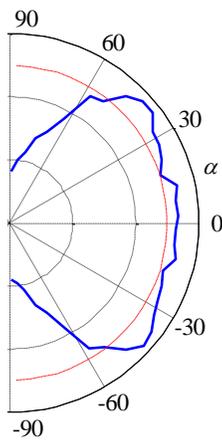
Elipsoide (tensor) de anisotropía

Figura A.30. Representaciones de la anisotropía geométrica, muestra con granulometría uniforme con  $\mu=0.7$  en compresión triaxial C3 con  $\varepsilon_z=-0.08$

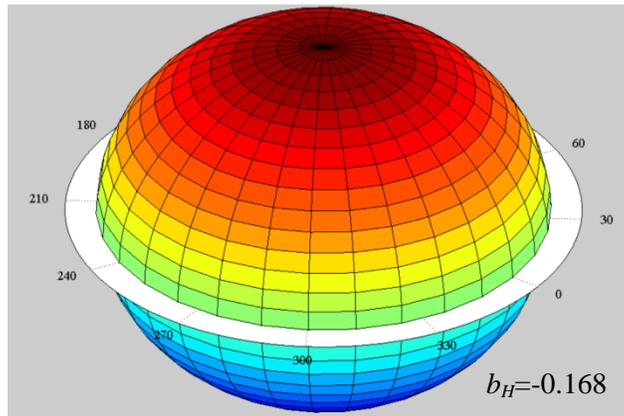


Frecuencias relativas por unidad de superficie

Función de repartición  $\Gamma(\alpha)$  en 3D



Función de repartición  $\Gamma(\alpha)$  en 2D



Elipsoide (tensor) de anisotropía

Figura A.31. Representaciones de la anisotropía geométrica, muestra con granulometría uniforme con  $\mu=0.7$  en extensión triaxial E3 con  $\varepsilon_c=0.03$

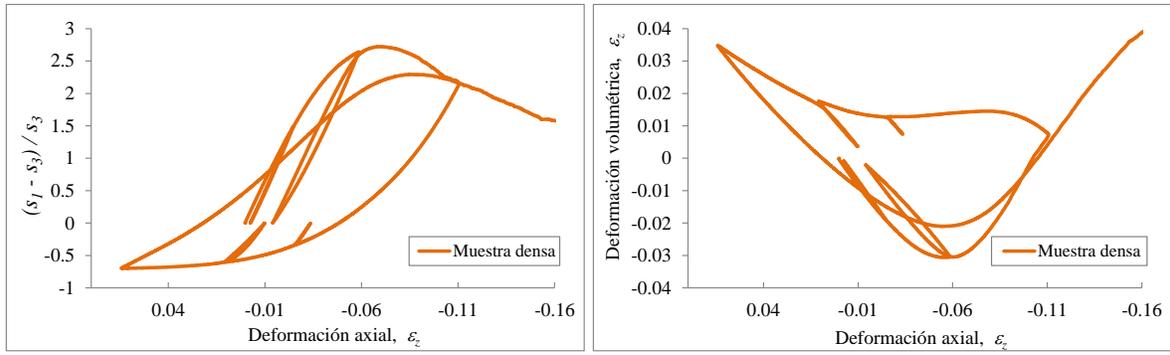


Figura A.32. Curvas esfuerzo-deformación y deformación volumétrica. Muestra densa

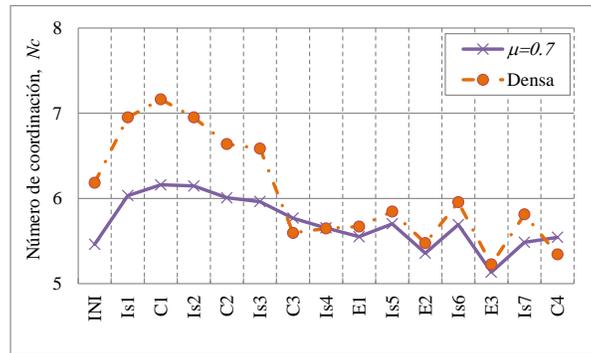


Figura A.33. Evolución del número de coordinación durante la prueba triaxial en muestra densa

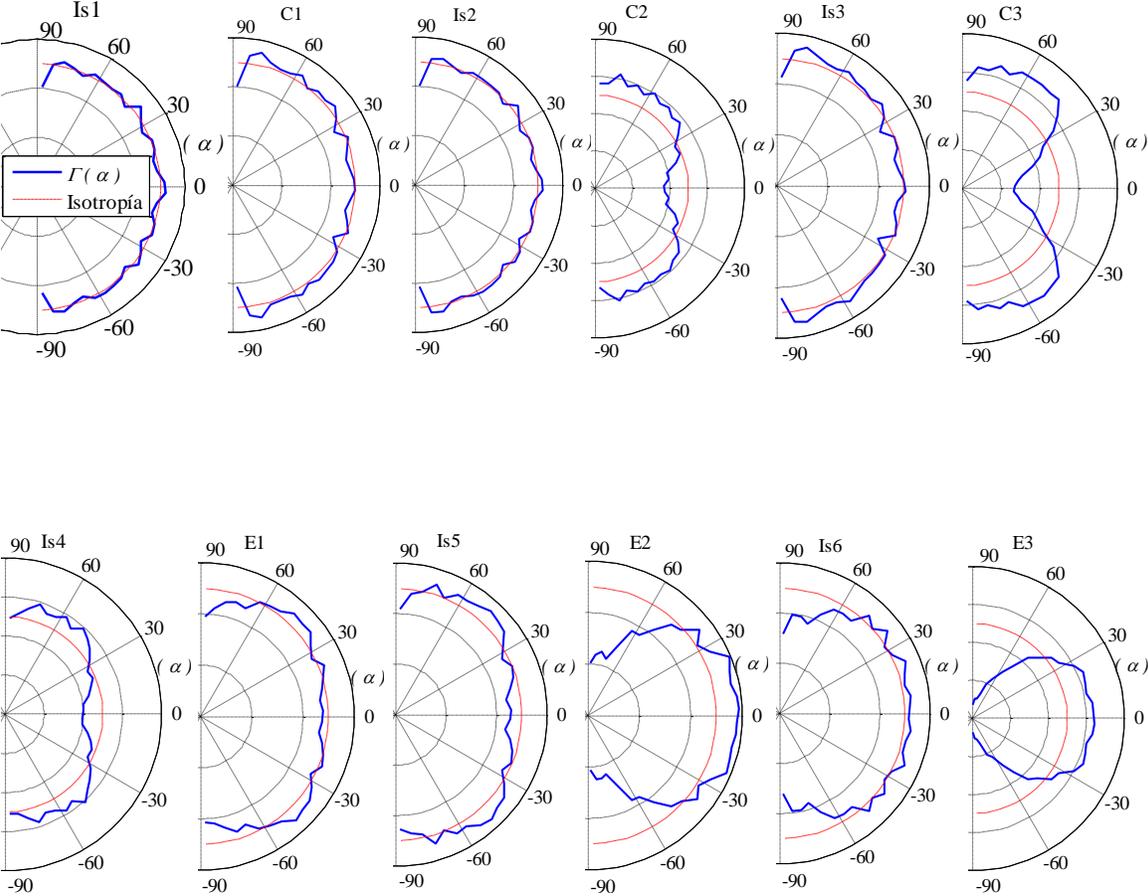


Figura A.34. Evolución de la repartición de contactos en muestra densa

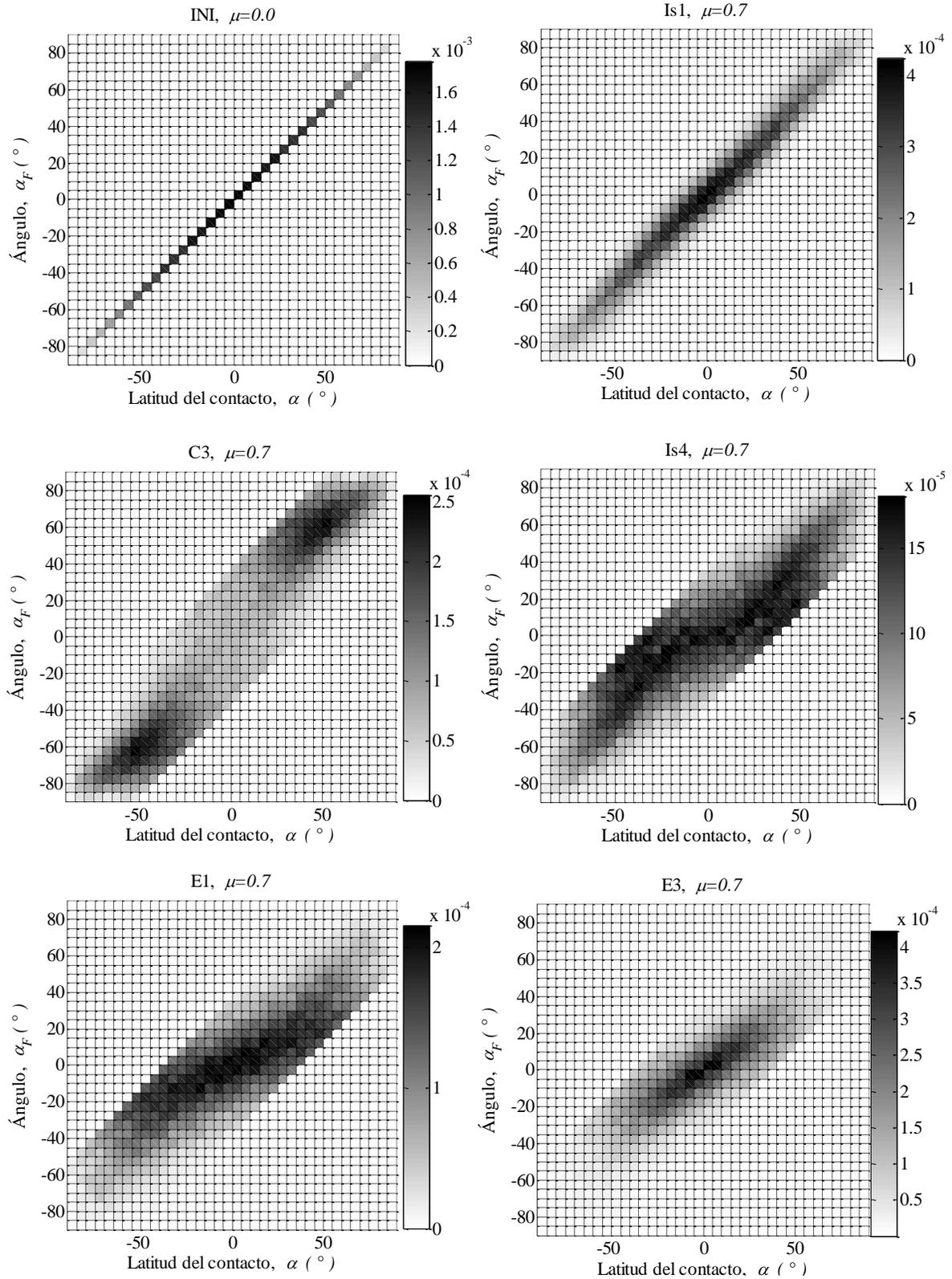


Figura A.35. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha, \alpha_F}(a, b)$  en prueba triaxial, muestra densa

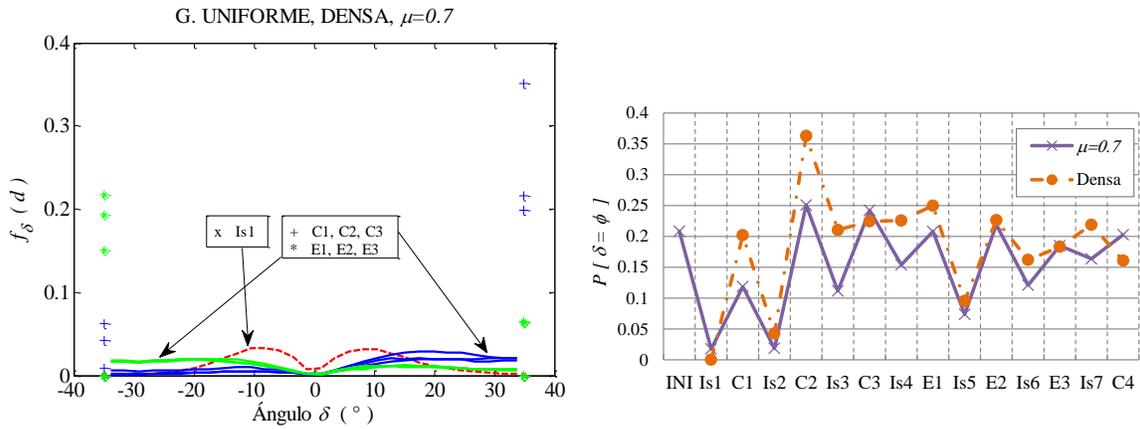


Figura A.36. Densidad de probabilidad  $f_\delta(d)$  (izquierda) y probabilidad de que las fuerzas se localicen sobre el cono de fricción (derecha), muestra densa

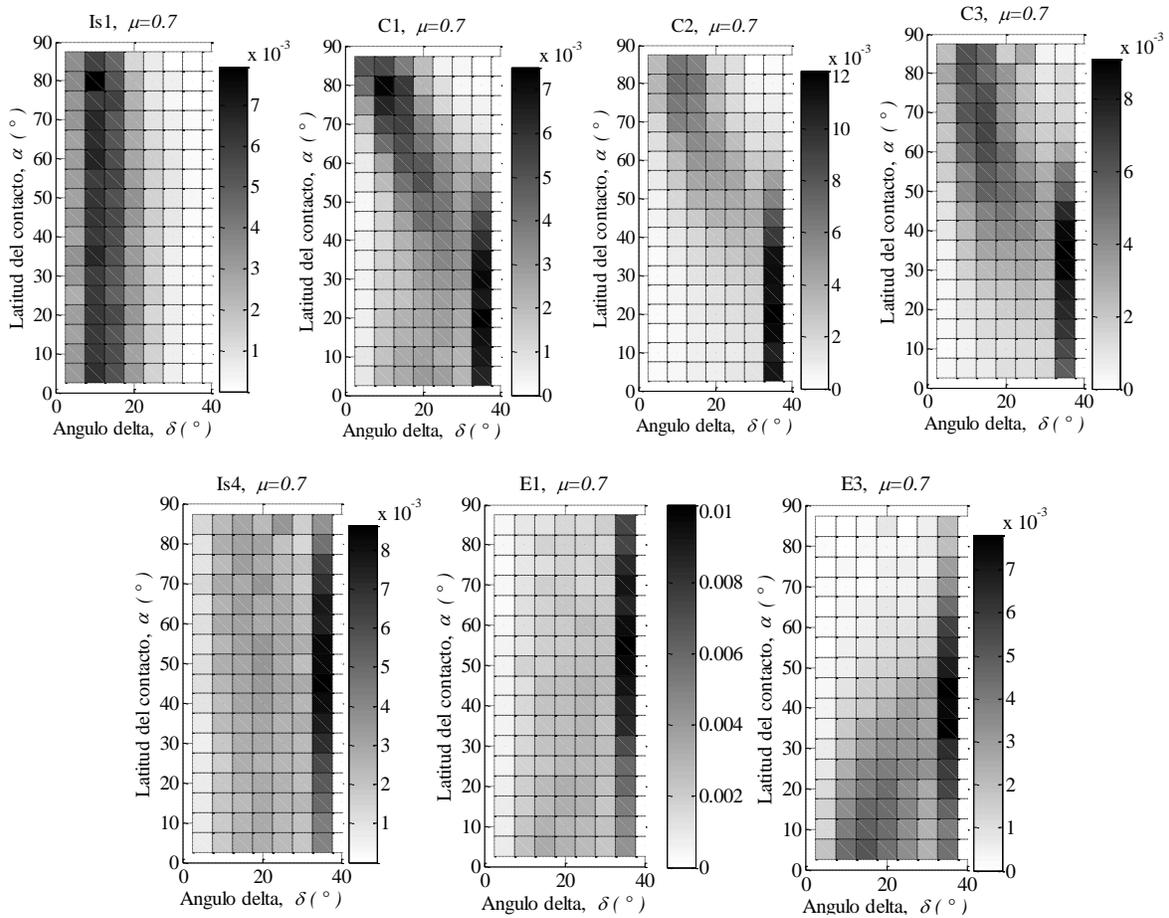


Figura A.37. Evolución de la densidad de probabilidad conjunta  $f_{\alpha,\delta}(\alpha,d)$  durante la prueba triaxial, muestra densa

## A. 2 Programas de cómputo elaborados

Los siguientes programas de cómputo fueron elaborados para el estudio de las estructuras granulares. Los programas están implementados en el lenguaje de programación de MALTAB (extensión .m) y algunos otros en lenguaje FISH de PFC<sup>3D</sup> (extensión .dat).

ESFERAS.m	Construye una muestra granular en un recipiente cúbico de dimensiones 2*2*2.5 con un número de partículas dado.
DOSRADIOS.m	Obtiene el tamaño de una partícula al azar dentro de una granulometría bimodal en frecuencias de número.
TRAPECIALTD.m	Elige el tamaño de una partícula de una densidad de probabilidad granulométrica lineal en proporciones de volumen.
GRANVOLT.D.m	Obtiene la granulometría (en proporción de volumen) de la muestra granular
GRAVEDAD.dat	Lleva al equilibrio una muestra granular obtenida con ESFERAS bajo la acción del campo de gravedad terrestre (PFC <sup>3D</sup> ).
GENUNIFORME.dat	Genera una muestra granular por depósito vertical de las partículas en el campo de gravedad terrestre (PFC <sup>3D</sup> ).
TRIAXIAL.dat	Simulación de una prueba triaxial con varios ciclos de carga y descarga, tanto en compresión como en extensión (PFC <sup>3D</sup> ).
MATCEN.m	Selecciona las partículas contenidas en el núcleo central de la muestra granular.
CONTARC.m	Cuenta el número de contactos en cada partícula.
CONTACTO.m	Calcula la posición de los contactos sobre cada partícula.
TCONTACTO.m	Clasifica los contactos por tamaño de partículas (esfera pequeña-esfera pequeña, esfera pequeña-esfera grande, etc.).
REPARTICION.m	Obtiene la función de repartición $\Gamma(\alpha)$ de los contactos sobre la superficie de los granos de acuerdo con la latitud $\alpha$ .
HESFERA.m	Obtiene el histograma esférico de las coordenadas esféricas de los contactos $(\alpha, \beta)$ , en frecuencias por unidad de superficie.
HISTESFERA.m	Grafica la función de repartición $\Gamma(\alpha)$ como un histograma sobre la superficie de una esfera.

TMATRIZ.m	Calcula el tensor geométrico de la estructura granular ( $H$ ) y el escalar de anisotropía $b_H$ .
FUERZAS.m	Obtiene las componentes y orientaciones de las fuerzas de contacto.
GRAFICAFZA.m	Grafica las fuerzas actuando sobre la superficie de una partícula.
TFUERZA.m	Clasifica las fuerzas de acuerdo al tamaño de las partículas que forman el contacto (esfera pequeña-esfera pequeña, etc.).
DENSIDAD.m	Obtiene la densidad de probabilidad de la magnitud de las fuerzas de contacto.
MOMENTOS.m	Calcula los primeros momentos de una densidad de probabilidad: media, desviación estándar, coeficiente de asimetría y coeficiente de pico.
ACTIVIDAD.m	Obtiene la proporción (en número y volumen) de partículas inactivas en la muestra granular.
CADENA.m	A partir de una partícula elegida al azar, grafica una sucesión de partículas que transmiten fuerzas máximas.
CADENAMAX.m	Busca la fuerza máxima en un conjunto de partículas y grafica la sucesión de partículas que transmiten fuerzas máximas.
BOLAFZA.m	A partir de las fuerzas de contacto actuando en cada partícula, calcula el tensor de esfuerzos en cada grano y el esfuerzo en el volumen de sólidos.
FZAMEDIA.m	Calcula la fuerza de contacto media a partir de los esfuerzos actuando en el medio granular.
DENSMIXTA.m	Obtiene la densidad de probabilidad mixta del ángulo $\delta$ que forma la fuerza de contacto con la normal al plano tangente al punto de contacto.
DENSACAF.m	Obtiene la densidad de probabilidad conjunta del ángulo $\alpha$ (latitud del punto de contacto) y el ángulo $\alpha_F$ (que forma la fuerza de contacto con el plano horizontal).
DENSAD.m	Obtiene la densidad de probabilidad conjunta del ángulo $\alpha$ (latitud del punto de contacto) y el ángulo $\delta$ (que forma la fuerza con la normal al contacto).

TENSION.m	Calcula el esfuerzo de tensión máximo en el interior de cada partícula.
CONFIABILIDAD.m	Calcula la confiabilidad y la probabilidad de rotura por tensión de las partículas de un medio granular.
POROSIDAD.m	Calcula la porosidad en una muestra granular.
POROG3.m	Calcula la porosidad para las partículas de tamaño mayor que D considerando a las de menor dimensión como parte de los poros (porosidad generalizada).
SESPECIFICA.m	Calcula la superficie específica de la muestra granular.
REPRESENTATIVO.m	Evalúa la representatividad de las muestras granulares evaluando la varianza de la porosidad generalizada.
GPOROS.m	Obtiene la distribución de tamaño de poros.
LPORO.m	Mide la continuidad de los poros en las tres direcciones cartesianas.
MPC.m	Modelo probabilista del comportamiento mecánico de medios granulares.
CAJA.m	Grafica un paralelepípedo que se aproxima al recipiente de simulación.
GRANO.m	Grafica una partícula esférica.
GRUMO.m	Selecciona las partículas contenidas en una esfera de tamaño indicado.
CORTE.m	Grafica la intersección de partículas con un plano de corte.
INTBOLA.m	Calcula la intersección entre granos que representa la deformación.
ICOSAEDRO.m	Grafica un arreglo de esferas del mismo tamaño dispuestas en icosaedro.
TETRAEDRO.m	Grafica un arreglo de esferas del mismo tamaño dispuestas en tetraedro.

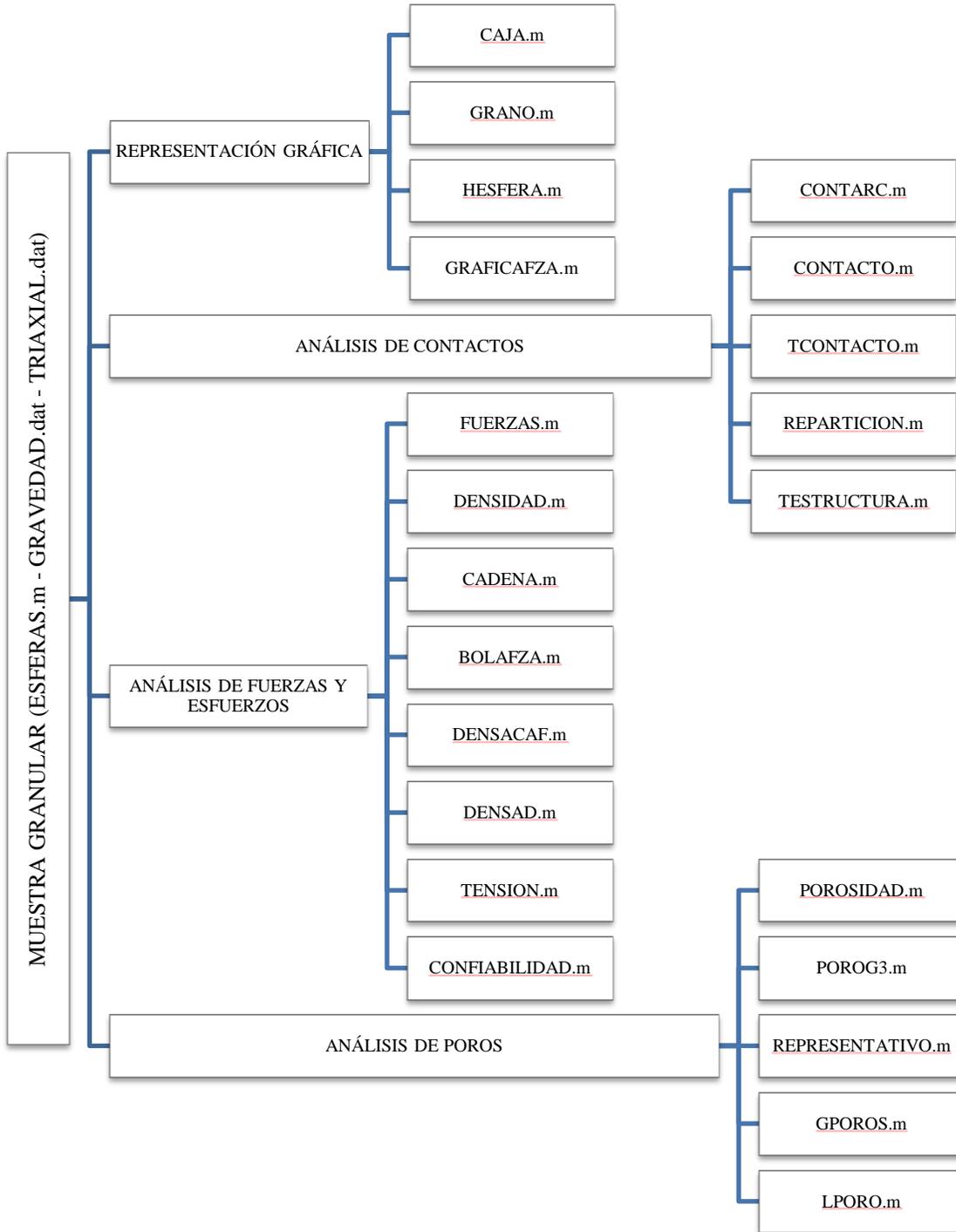


Figura A.38. Diagrama de flujo de los principales programas de cómputo para estudiar los medios granulares