



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL

**CARACTERIZACIÓN DE LA MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE UN
DUCTO CON MÚLTIPLES FUGAS**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN INGENIERÍA

PRESENTA:
FLOR DENISSE RENTERÍA QUIROZ

TUTORES PRINCIPALES
DRA. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE, II-UNAM
DRA. FLOR LIZETH TORRES ORTIZ, II-UNAM

MÉXICO, D.F., 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Benítez Pérez Héctor
Secretario: Dr. Carmona Paredes Rafael Bernardo
1er. Vocal: Dra. Verde Rodarte María Cristina
2do. Vocal: Dra. Torres Ortiz Flor Lizeth
3er. Vocal: M.I. Carrera Méndez Rolando

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTORES DE TESIS:

Dra. María Cristina Verde Rodarte

FIRMA

Dra. Flor Lizeth Torres Ortiz

FIRMA

A mi familia, por el apoyo incondicional, por estar en los momentos más importantes de mi carrera, por enseñarme y motivarme a seguir adelante.

A la Dra. Cristina por brindarme su apoyo, por su paciencia, por enseñarme que el trabajo es satisfactorio cuando se logran las metas y que el conocimiento que voy adquiriendo se acrecenta con perseverancia y esfuerzo, gracias por la confianza que depositó en mí para que este trabajo se realizara.

A la Dra. Lizeth, gracias por escucharme y sobre todo a los consejos constructivos que me ayudaron en mi formación profesional y personal.

Al Dr. Rafael y a la Mtra. Libia por la asesoría que me brindaron.

A los sinodales, gracias por sus observaciones y su dedicación en revisar este trabajo.

Quisiera agradecer a mi amigo Luis Ángel por impulsarme y mostrarme que los sueños se logran aferrándose a ellos.

Al grupo de trabajo, gracias por sus sugerencias Alonso, Jorge, Marcos, Ángel, Raúl.

A mis amigos de maestría Pablo, Hugo, Mario y John.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Facultad de Ingeniería por las enseñanzas que han hecho de mí la persona que soy.

Agradecimientos especiales

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su apoyo durante mi formación académica.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM DGAPA por el apoyo económico al proyecto IT100716.

Al Instituto de Ingeniería por brindarme sus instalaciones para realizar el trabajo de tesis.

Índice general

Índice de figuras	V
1. Introducción	1
1.1. Estado del arte	1
1.2. Motivación	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Contribución	5
2. Modelo de un ducto hidráulico	9
2.1. Modelo general	9
2.2. Modelo no lineal usando el MC	11
2.2.1. Condiciones de frontera para la fuga	15
2.2.2. Condiciones de frontera para el tanque	17
2.2.3. Condiciones de frontera para la válvula	17
2.2.4. Diagrama de flujo del simulador con el MC	18
2.3. Modelo de dimensión infinita del fluido	20
2.3.1. Matriz de transferencia para un ducto	21
2.3.2. Matriz de transferencia para una fuga	21
2.3.3. Matriz de transferencia para el sistema con una fuga	22
2.3.4. Matriz de transferencia para el sistema con dos fugas	25
2.3.5. Matriz de transferencia para el sistema con múltiples fugas	29
2.3.6. Presión del fluido ante una perturbación aguas abajo	31
3. Análisis de la onda de presión en presencia de fugas	33
3.1. Onda de presión ante la presencia de una fuga	34
3.1.1. Propiedades de la onda de presión	37
3.1.2. Envolvente de la onda de presión	42
3.2. Onda de presión ante la presencia de dos fugas	43
3.3. Análisis numérico de la onda de presión	46
4. Conclusiones	49

A. Código/Tablas/Información Complementaria	55
A.1. Tabla de parámetros	55
A.2. Transformada inversa de Laplace	56
A.3. Expresiones de las constantes de la presión transitoria aguas abajo del ducto	57
A.4. Apéndice código	58

Índice de figuras

2.1. Ducto recto y horizontal de longitud L	11
2.2. Plano (x, t) con las líneas características	12
2.3. Configuración del ducto con fuga	15
2.4. Condiciones de frontera con una fuga o denota la sección	16
2.5. Condición en la entrada del ducto aguas arriba (tanque)	17
2.6. Condición en la entrada del ducto aguas abajo (válvula)	18
2.7. Diagrama de flujo para la implementación del modelo del ducto con una fuga usando el MC	19
2.8. Diagrama del ducto en el dominio de Laplace	21
2.9. Diagrama de bloques de un ducto con una fuga en x	24
2.10. Esquema con dos fugas	25
2.11. Esquema general para múltiples fugas	30
3.1. Evolución de la presión aguas abajo sin fuga	34
3.2. Fenómeno de Gibbs en la onda cuadrada $f_{50}(t)$	37
3.3. Onda de presión $h(L, t)$ con fuga a la mitad del ducto y en condición nominal	38
3.4. Evolución de la envolvente de la onda de presión $h(L, t)$ en condición de fuga obtenida con (3.11) y $Q_{f_0} = 0.5Q_0$	40
3.5. Fuga en la posición $x = L/3$ y su complemento con $Q_{f_0} = 0.1Q_0$ [m^3/s]	41
3.6. Fuga en la posición $x = L/4$ y su complemento con $Q_{f_0} = 0.1Q_0$ [m^3/s]	41
3.7. Fuga en la posición $x = L/6$ y su complemento con $Q_{f_0} = 0.1Q_0$ [m^3/s]	42
3.8. Transitorio con una fuga en $x = 5L/6$ y $Q_{f_0} = 0.1Q_0$ [m^3/s]	43
3.9. Transitorio de la presión aguas abajo con fugas en: $x_1 = L/2$ y $x_2 = L/3$ con $Q_{1f_0} = 0.3Q_0$ y $Q_{2f_0} = 0.3Q_0$ respectivamente	46
3.10. Presión aguas abajo de un ducto - Efectos de la fricción	47
3.11. Presión aguas abajo de un ducto - considerando que existe una fuga en $x = L/2$	47
A.1. Función periódica: tren de pulsos	56

Introducción

Las redes de distribución de fluidos son sistemas de gran interés, puesto que en ellas se transporta: agua potable, gases, hidrocarburos o fluidos de alto valor económico que son utilizados para procesos industriales. Estas redes pueden llegar a ser sistemas complejos por su gran escala, tal es el caso de los ductos que transportan derivados del petróleo a grandes distancias. En nuestro país se cuenta con aproximadamente 14 mil kilómetros de ductos.

La gran mayoría de los sistemas de ductos están expuestos a sufrir fallas, ya sea por daños de fabricación, envejecimiento, falta de mantenimiento, corrosión en la pared, por bloqueos parciales físicos (componentes) o químicos (debido a deposición de minerales), grietas, tomas clandestinas, una mala instalación o por fenómenos naturales.

Por estas razones se pueden presentar fugas. Estos eventos deben identificarse y localizarse a tiempo para evitar: pérdidas económicas y humanas, daños ecológicos cuando el fluido derramado es tóxico. Por ende, los sistemas de distribución de fluidos deben estar en constante vigilancia para garantizar la seguridad y una operación eficiente.

1.1. Estado del arte

La localización de fugas en ductos es un tema que ha llamado la atención de investigadores de diversas áreas, quienes han propuesto diversas metodologías. A continuación se listan las más relevantes reportados en Isermann (2011).

1. INTRODUCCIÓN

- Balance de masa: se toma la diferencia del flujo de masa entre la entrada y la salida. Con este método, las fugas se pueden detectar pero no es posible determinar su localización
- Análisis de la onda de presión: utilizando sensores de presión altamente sensibles y rápidos, pueden medirse y analizarse las ondas de choque después de una fuga. Conociendo la velocidad del sonido en el fluido, que para el agua es de 800 [m/s] a 1500 [m/s], y la longitud del ducto la localización es posible.
- Ruido ultrasónico: una fuga provoca una señal acústica que es transmitida a través de la pared del ducto y puede ser medida por micrófonos en varios puntos a lo largo del ducto; el tiempo de desfase de estas señales permite estimar aproximadamente la posición de las fugas.
- Cables resistivos: Si el ducto está equipado con este tipo de cables, constituidos de resistencias conectadas en serie en la parte inferior del ducto, las propiedades de resistencia cambian en caso de la presencia de fuga, la cual se puede localizar.
- Métodos basados en modelos del fluido: el comportamiento estacionario y dinámico de la presión y del flujo de masa, son descritos por modelos matemáticos y la comparación con variables calculadas con datos reales genera un residuo. Este residuo debe tener propiedades que permita ubicar la posición de la fuga, adicionalmente los parámetros son estimados para su localización.

Este trabajo se centra en los métodos basados en modelos matemáticos para resolver problemas de diagnóstico de fugas, (Verde et al. 2013). Cuando se miden flujos y presiones en algunos puntos de la línea de transmisión de fluidos, estas técnicas se pueden clasificar en y fuera de línea. Los métodos en línea utilizan modelos de balance de masa, (Liou 1993), y técnicas de diagnóstico de fallas como la estimación de parámetros (Torres et al. 2014), (Torres et al. 2011), (Verde et al. 2016). La ventaja de utilizar estos métodos es que el diagnóstico se lleva a cabo en tiempo real y se tiene información de las fugas de manera rápida. La principal desventaja es el alto costo que demanda el

mantenimiento de los sensores colocados a lo largo del ducto para recabar información y el diseño de algoritmos para cada tipo de escenario de fugas. Los métodos fuera de línea se aplican de acuerdo a un programa de evaluación periódica y algunos de ellos ofrecen beneficios, por ejemplo, la medición con un sólo instrumento de presión, lo que resulta deseable desde el punto de vista económico.

Mediante el uso de técnicas fuera de línea y análisis de la respuesta transitoria del fluido se puede detectar más de una fuga, independientemente de su ocurrencia, como está reportado por Verde et al. (2014).

Las técnicas llamadas pruebas transitorias se basan en la propagación y reflexión de la onda de presión y es la razón por la que sólo se necesita un sensor. En Colombo et al. (2009) se presenta un panorama general de las técnicas basadas en pruebas transitorias que pueden clasificarse en uso directo del transitorio, uso inverso del transitorio y análisis frecuencial. Los primeros están diseñados para dar una interpretación directa de los cambios de la señal a fin de detectar efectos de las fugas en ellos, (Brunone 1999), (Brunone and Ferrante 2001), (Wang et al. 2002). El segundo tipo de métodos formula el problema de reconstruir, identificar o recuperar parámetros desconocidos de un modelo en el dominio del tiempo asociado a la presencia de fugas a partir de un conjunto de mediciones reales (Digernes 1980), (Benkherouf and Allidina 1988), (Pudar and Liggett 1992), (Liggett and Chen 1994), (Vítkovský et al. 1999), (Kapelán et al. 2004), (Verde et al. 2014). El tercer conjunto formula el problema de diagnóstico con modelos de fallas en el dominio frecuencial (Mpesha et al. 2001), (Brunone and Ferrante 2004), (Lee et al. 2005a), (Lee et al. 2005b), (Covas et al. 2005).

Una técnica de análisis muy usada para diagnosticar el estado de un medio es la reflectometría, la cual consiste en inyectar una señal al medio (causa) y determinar a partir de la señal reflejada (efecto) información sobre el estado del medio. En el caso de un fluido en un ducto (Brunone 1999), se puede explotar el análisis de las ondas reflejadas generadas por singularidades tales como las fugas. Sin embargo, la señal de presión en ciertas condiciones de operación no es suficientemente sensible para revelar los efectos

1. INTRODUCCIÓN

de las fugas en las ondas reflejadas. Para obtener más información es necesario generar un transitorio considerable en la presión, como podría ser mediante el apagado de una bomba o el cierre de una válvula; este último escenario es el que se considera en este trabajo.

Cuando se genera una perturbación discontinua a propósito y existe una fuga, la onda de presión pasa por el punto de fuga, parte de la energía se desvía y se forma una nueva onda reflejada que se disipa con el tiempo debido tanto al flujo de fuga como a la rugosidad del ducto. Por tanto, la posición de las fugas puede determinarse a partir de las discontinuidades en la señal de presión debido a las ondas reflejadas, mientras que el flujo de fuga puede deducirse del amortiguamiento adicional de la onda de presión. Esto significa que la presión y el flujo perdido se pueden determinar mediante el uso de un único sensor de presión y la ejecución de una sola prueba transitoria adecuada para no dañar la operación del ducto. El análisis detallado de este hecho, para una fuga fue presentado en Muñoz et al. (2015).

1.2. Motivación

Para el caso de las redes de distribución de agua, se han hecho estudios para cuantificar las pérdidas del fluido por fugas en diferentes países, en Alemania las mermas van con un mínimo de 9 %, en Malasia hasta con un 43 %, mientras que en la mayoría de los países están en el rango de 20 a 30 %, (Colombo et al. 2009), en México las pérdidas son de un 40 %.

Soluciones para el problema de detección y localización de fugas múltiples se han reportado poco; no se conocen estrategias satisfactorias que logren el propósito por lo que sigue siendo aún un campo abierto para el desarrollo de nuevos métodos. En Muñoz et al. (2015) se propuso utilizar reflectometría y así se puede detectar y localizar más de una fuga. Un procedimiento atractivo para probar la integridad de los sistemas de distribución de fluidos es a través de una perturbación del flujo, para crear un

transitorio, en tal caso el fluido sufre un cambio brusco de su velocidad que se propaga a través del ducto en forma de una onda.

1.3. Objetivos

- Analizar la propagación de la onda de presión a lo largo de un ducto en presencia de fugas.
- Estudiar la respuesta al escalón en un ducto cuando se cierra una válvula aguas abajo en presencia de fugas.
- Caracterizar los parámetros de la fuga, como son su gasto y posición a partir de la respuesta transitoria de una señal de presión.
- Obtener la respuesta analítica de la onda de presión en presencia de dos fugas.
- Detectar y localizar fugas en un ducto mediante la información de la onda de presión cuando se cierra una válvula.

1.4. Contribución

La contribución de este trabajo es la caracterización de los parámetros asociados a una fuga usando un modelo lineal de dimensión infinita en el dominio de Laplace. El análisis está inspirado en los trabajos previos de Suo and Wylie (1989), Wang et al. (2002), Kim (2005), Mpesha et al. (2002), Muñoz et al. (2015). En particular, se usa la respuesta temporal analítica de la presión obtenida vía la transformada de Laplace, la cual depende de la longitud de la tubería, la velocidad de la onda de presión y la posición de fuga. En trabajos previos, se han reportado expresiones similares a las que se derivan aquí, sin embargo éstas son más difíciles de parametrizar en términos de las fugas. Wang et al. (2002) modelan la presión en términos de una serie de Fourier, en la que es necesario conocer todos los coeficientes para determinar el comportamiento en intervalos de tiempo específicos. La principal ventaja de la representación aquí utilizada, es que

1. INTRODUCCIÓN

permite obtener frentes de onda con pocos términos en la expansión infinita, a partir de los argumentos y la amplitud de las funciones escalón de la respuesta transitoria, por tanto, se parametrizan tanto la posición como la magnitud de la fuga.

Un método numérico utilizado en este trabajo para aproximar las ecuaciones hiperbólicas que describen el flujo transitorio en ductos cerrados, es el de las características; éste es una herramienta poderosa para analizar transitorios, que reduce las ecuaciones parciales de movimiento y continuidad a ecuaciones diferenciales ordinarias. Ésta es una alternativa para estudiar la presión cuando hay un cambio en el flujo al considerar que existen pérdidas en el ducto, es decir la fricción diferente de cero, ya que con el modelo de dimensión infinita no se puede determinar directamente de tablas para una fricción diferente de cero la transformada inversa de Laplace de la presión. Para obtener la respuesta transitoria en presencia de múltiples fugas, se utilizan tanto el modelo de matriz de transferencia como el método de las características.

La estructura de este trabajo es la siguiente, en el capítulo 2 el análisis se inicia con el modelo general de un ducto recto horizontal, el cual es la base para obtener de la solución numérica y analítica de la propagación de la onda de presión al aplicarle una excitación al fluido, por medio de dos modelos, el de las características y mediante la función de transferencia.

Con la matriz de transferencia, que representa un cuadripolo en el dominio de Laplace, de un ducto con una fuga, posteriormente, las condiciones de frontera se imponen al cuadripolo con el fin de obtener la presión aguas abajo cuando la válvula de salida se cierra por completo. Antes de la conversión de la respuesta de la presión en el dominio de Laplace al tiempo, se expresa en términos de sumas de residuos con exponentes negativos para poder determinar la respuesta durante intervalos específicos de tiempo. En el capítulo 3 el análisis que se presenta es relevante porque permite la caracterización y parametrización de una fuga a partir de una señal de presión. Además se presenta el simulador con el método de las características para analizar la respuesta con fricción y sin fricción. En el capítulo 4 se tienen las conclusiones a partir del desarrollo presentado.

En resumen, el análisis que se presenta justifica: el por qué múltiples fugas pue-

den ser localizadas solamente durante los transitorios; además como trabajo futuro se pretende estudiar qué tipos de transitorios se deben generar para localizar múltiples fugas y cómo maximizar la detectabilidad de ellas. Su valor radica en la posibilidad de extender el análisis para casos más complejos de múltiples fugas.

Modelo de un ducto hidráulico

En este capítulo se presenta el modelo general de un ducto recto en condiciones normales y de fugas. En particular, se describen las consideraciones del sistema de estudio formado por un tanque-ducto-válvula sin falla y con una fuga intermedia en el ducto. El objetivo principal de utilizar el método de las características (MC) para analizar el fluido radica en que permite obtener la respuesta transitoria de la presión con pérdidas debidas a la fricción sin falla y con falla, aun en el caso de suponer no linealidades en el modelo.

El objetivo de utilizar el método de la matriz de transferencia consiste en obtener la expresión analítica en un espacio de dimensión infinita de la onda de presión y obtener los parámetros asociados con el flujo y posición de la fuga.

Para ambas herramientas de análisis se presentan las expresiones de las componentes del sistema de estudio como son: tanque, ducto, fuga, válvula y se muestra la forma en la que se interconectan.

2.1. Modelo general

Las ecuaciones que describen flujos transitorios en ductos cerrados son las de momento y de conservación de masa, ecuaciones diferenciales parciales, ya que la velocidad del flujo y la presión son funciones del tiempo y la distancia, también se llaman ecuaciones de movimiento y continuidad. Considerando que: el fluido es incomprensible y de densidad constante, las paredes del ducto son rígidas, la velocidad de onda es grande, el

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

cambio en la velocidad del fluido en el sistema es instantánea y los cambios convectivos en la velocidad son despreciables, tales ecuaciones se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q|Q| &= 0 \\ c^2\frac{\partial Q}{\partial x} + gA\frac{\partial H}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

- H : Presión del tanque sobre la superficie de referencia, [mca]
- Q : flujo, [m^3/s]
- g : gravedad, [m/s^2]
- c : velocidad de la onda de presión, [m/s]
- A : área de la sección transversal del tubo, [m^2]
- D : diámetro de la sección transversal del ducto, [m]
- x : coordenada espacial, [m]
- t : coordenada temporal, [s]
- f : coeficiente de fricción que puede aproximarse con diferentes funciones, (Carmona 2016)
- μ : $\frac{f}{(2DA)}$

donde los parámetros c y D no varían con el tiempo. La velocidad de onda c depende de las características físicas del ducto y de las propiedades del fluido. El factor f usualmente varía con el número de Reynolds, Chaudhry (2013). Este modelo (2.1) tiene la ventaja de permitir analizar la propagación de onda de un fluido ducto recto y horizontal como el mostrado en la Fig. 2.1.

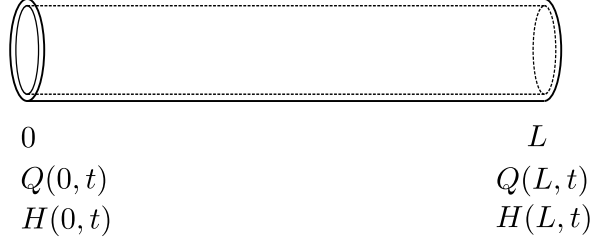


Figura 2.1: Ducto recto y horizontal de longitud L

2.2. Modelo no lineal usando el MC

Para calcular los valores de flujo y presión del fluido confinado en un ducto en puntos específicos del sistema (2.1) hay diferentes métodos numéricos, como el de intervalos específicos, el de diferencias finitas, el de las características, entre otros, que pueden consultarse en Chaudhry (2013) y Wylie (1993). Dado que se está interesado en el comportamiento transitorio del fluido, se propone usar el método de las características, dado que arroja resultados exactos en al menos ciertos puntos del ducto y en ciertos instantes del tiempo. Dicho método consiste en transformar el sistema (2.1) vía una combinación lineal para llevarlas a ecuaciones diferenciales exactas.

Así, renombrando las ecuaciones de movimiento y de continuidad se tiene

$$L_1 = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q|Q| \quad (2.2)$$

y

$$L_2 = c^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + gA \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.3)$$

Definiendo la combinación lineal de (2.2) y (2.3) como $L_c = L_1 + \lambda L_2$, con λ un multiplicador constante, se obtiene

$$L_c = \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \mu Q|Q| + \lambda c^2 \frac{\partial Q}{\partial x} + \lambda gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Reagrupando términos en esta ecuación para describirla como diferenciales totales

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \lambda c^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \lambda gA \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \mu Q|Q| = 0 \quad (2.4)$$

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

Considerando H y Q funciones de la distancia y del tiempo, las derivadas totales se pueden escribir como

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.6)$$

Así que si se compara el primer término de (2.4) con (2.5) y el segundo término con (2.6), se tiene

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{dx}{dt} = \lambda c^2 \Rightarrow \lambda \pm \frac{1}{c}$$

y por tanto las líneas características están dadas por $\frac{dx}{dt} = \pm c$

Esto permite reescribir (2.4) como dos ecuaciones, al sustituir λ , ya que se tienen dos soluciones diferentes que dependen de la velocidad de onda, llamadas de compatibilidad.

$$\frac{dH}{dt} + \frac{c}{gA} \frac{dQ}{dt} + \frac{c\mu}{gA} |Q| = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{dH}{dt} - \frac{c}{gA} \frac{dQ}{dt} - \frac{c\mu}{gA} |Q| = 0 \quad (2.8)$$

Estas ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable independiente t , se satisfacen en el plano (x, t) en donde $\pm c$ son las líneas características de la Fig. 2.2. Estas líneas dividen el plano en dos regiones, determinadas por dos soluciones.

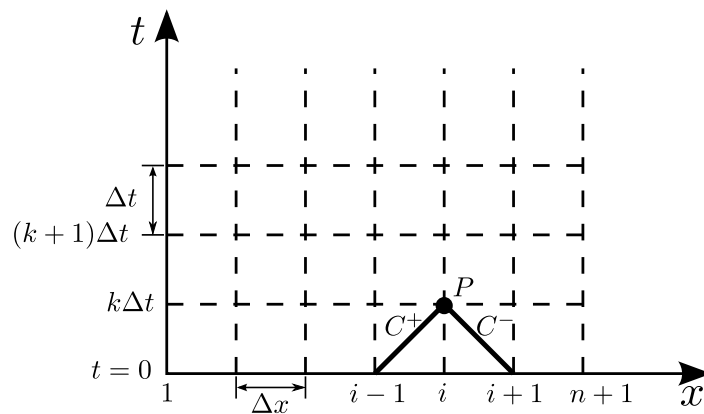


Figura 2.2: Plano (x, t) con las líneas características

Para obtener la evolución de H y Q en los puntos donde se intersectan las líneas características de la Fig. 2.2, es necesario establecer los valores en los extremos del ducto. Es decir en $x = 0$ y $x = L$, que corresponden a la ubicación del tanque y de la válvula. La configuración tanque-ducto-fuga-ducto-válvula se representa en la Fig. 2.3, este es el caso de estudio cuando hay fuga, (Chaudhry 2013).

Para calcular los valores de H y Q en un instante Δt , es decir en el punto P de la Fig. 2.2, se parte del tiempo inicial $t = 0$, y se supone que se conocen los valores en $(i - 1, i + 1)$, donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $i \in \mathbb{N}$. Es decir se busca la solución simultánea en los punto $(i - 1)$ y en $(i + 1)$ de

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} + \frac{c}{gA} \frac{dQ}{dt} + \frac{c\mu}{gA} Q|Q| = 0 & (2.9) \\ \frac{dx}{dt} = +c & (2.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} - \frac{c}{gA} \frac{dQ}{dt} - \frac{c\mu}{gA} Q|Q| = 0 & (2.11) \\ \frac{dx}{dt} = -c & (2.12) \end{cases}$$

Debido a que la velocidad de onda es constante a lo largo del ducto, la línea (2.10) es una recta y corresponde con la pendiente positiva del plano (x, t) que satisface (2.9); y de la misma forma, la pendiente negativa corresponde con la característica (2.12) y satisface (2.11).

Las ecuaciones de compatibilidad se cumplen en su respectiva línea característica como se muestra en la Fig. 2.2. Para resolver (2.9)-(2.12) se integra (2.9) a lo largo de $+c$ y (2.12) a lo largo de $-c$ (ver Chaudhry 2013).

Por tanto las soluciones del sistema transformado en el punto P se pueden escribir como

$$H_p - H_{i-1} + \frac{c}{gA}(Q_p - Q_{i-1}) + \frac{\mu\Delta x}{gA} Q_{i-1}|Q_{i-1}| = 0 \quad (2.13)$$

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

$$H_p - H_{i+1} - \frac{c}{gA}(Q_p - Q_{i+1}) - \frac{\mu\Delta x}{gA}Q_{i+1}|Q_{i+1}| = 0 \quad (2.14)$$

Para el caso general en el espacio tiempo haciendo $H_p = H_i^k$ se tiene

$$H_i^k - H_{i-1}^{k-1} + \frac{c}{gA}(Q_i^k - Q_{i-1}^{k-1}) + \frac{\mu\Delta x}{gA}Q_{i-1}^{k-1}|Q_{i-1}^{k-1}| = 0 \quad (2.15)$$

$$H_i^k - H_{i+1}^{k-1} - \frac{c}{gA}(Q_i^k - Q_{i+1}^{k-1}) - \frac{\mu\Delta x}{gA}Q_{i+1}^{k-1}|Q_{i+1}^{k-1}| = 0 \quad (2.16)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, $k \in \mathbb{Z}^+$ denota el tiempo e i la posición espacial discretizada del ducto. Al despejar H_i^k de (2.15) y (2.16) se tiene simultaneamente

$$C^+ : H_i^k = H_{i-1}^{k-1} - B(Q_i^k - Q_{i-1}^{k-1}) - RQ_{i-1}^{k-1}|Q_{i-1}^{k-1}| \quad (2.17)$$

$$C^- : H_i^k = H_{i+1}^{k-1} + B(Q_i^k - Q_{i+1}^{k-1}) + RQ_{i+1}^{k-1}|Q_{i+1}^{k-1}| \quad (2.18)$$

donde $B = \frac{c}{gA}$ y $R = \frac{\mu\Delta x}{gA}$. Por tanto, definiendo las constantes C_N y C_M en el punto espacial $(i-1)$ e $(i+1)$ para el instante anterior $(k-1)$

$$C_N = H_{i-1}^{k-1} + BQ_{i-1}^{k-1} - RQ_{i-1}^{k-1}|Q_{i-1}^{k-1}| \quad (2.19)$$

$$C_M = H_{i+1}^{k-1} - BQ_{i+1}^{k-1} - RQ_{i+1}^{k-1}|Q_{i+1}^{k-1}|, \quad (2.20)$$

(2.17) y (2.18) se pueden reescribir en el punto espacial i y temporal k como

$$C^+ : H_i^k = C_N - BQ_i^k \quad (2.21)$$

$$C^- : H_i^k = C_M - BQ_i^k \quad (2.22)$$

y a su vez se cumple $t = k\Delta t$ y $x = i\Delta x$

Estas ecuaciones permiten calcular los valores de flujo y presión en el interior del ducto, si se conoce el valor del componente al que está conectado éste en sus extremos;

osea conociendo el flujo y presión en los extremos de la rejilla. Por tanto, para la presión y flujo en cada punto interior del ducto se tiene la forma compacta al resolver simultáneamente (2.21) y (2.22):

$$H_i^k = \frac{1}{2}(C_N - C_M) \tag{2.23}$$

$$Q_i^k = (H_i^k - C_M)/B \tag{2.24}$$

Tomando en cuenta que el estudio que aquí se realiza, considera como componentes conectados en los extremos al ducto un tanque y una válvula y en un punto interior un orificio asociado a la fuga, se tiene el escenario mostrado en la Fig. 2.3. Los valores de las condiciones de frontera de cada componente se obtiene de forma independiente y se presentan a continuación.

2.2.1. Condiciones de frontera para la fuga

Considere el escenario de la Fig. 2.3 en donde el ducto se divide en dos secciones, una previa y una posterior al punto de fuga Q_f^+ . Además considere dos subíndices en la notación de las variables; el primer subíndice indica el punto i y el segundo indica si dicha sección está antes o después del punto de fuga. Por tanto, como el ducto se divide en dos secciones, antes y después de la fuga, las presiones se consideran iguales $H_{n+1,1}^k = H_{1,2}^k$ como se muestra en la Fig. 2.4, donde $n \in \mathbb{N}$ y representa el número de veces que se divide cada sección.

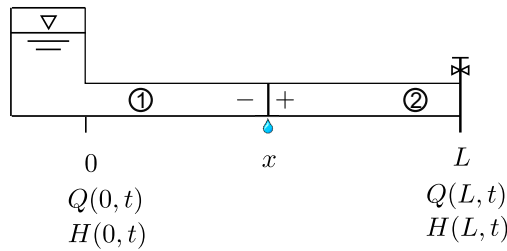


Figura 2.3: Configuración del ducto con fuga

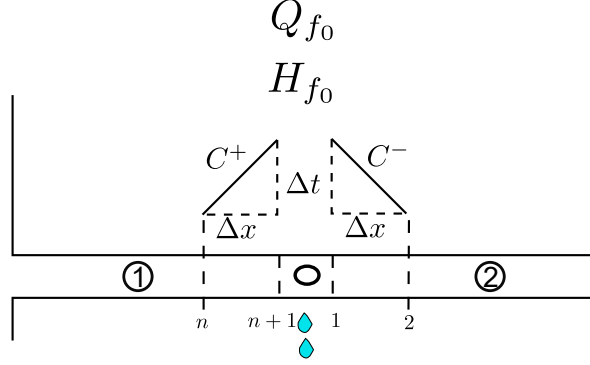


Figura 2.4: Condiciones de frontera con una fuga \circ denota la sección

Para el flujo en la partición $n + 1$ de la primera sección se tiene

$$Q_{n+1,1}^k = \frac{C_N - H_{n+1,1}^k}{B} \quad (2.25)$$

el flujo para la partición 1 después de la fuga

$$Q_{1,2}^k = \frac{H_{1,2}^k - C_M}{B}. \quad (2.26)$$

El flujo que se pierde debido a la fuga Q_f^k se caracteriza como

$$Q_f^k = \frac{Q_{f_0} \sqrt{H_{n+1,1}^k}}{\sqrt{H_{f_0}}} \quad (2.27)$$

donde Q_{f_0} y H_{f_0} son el flujo y presión en el punto de fuga en estado estacionario.

Así el balance de flujos en la sección \circ , en cada nodo temporal de la rejilla permite escribir $\sum Q^k = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} \sum Q^k &= Q_{n+1,1}^k - Q_{1,2}^k - Q_f^k = 0 \\ \frac{C_N - H_{n+1,1}^k}{B} - \frac{H_{1,2}^k - C_M}{B} - \frac{Q_{f_0} \sqrt{H_{n+1,1}^k}}{\sqrt{H_{f_0}}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

finalmente, resolviendo para la presión en el punto de fuga $H_{n+1,1}^k$ se tiene

$$H_{n+1,1}^k = 2(C_f B)^2 - 2\sqrt{(C_f B)^4 + \frac{C_N + C_M}{2}} + \frac{C_N + C_M}{2} \quad (2.29)$$

donde $C_f = \frac{Q_{f_0}}{4\sqrt{H_{f_0}}}$

2.2.2. Condiciones de frontera para el tanque

Si se considera que el tanque tiene una presión constante como se ilustra en la Fig. 2.5, las condiciones en el extremo $x = 0$ para el comportamiento del flujo y presión son válidas a lo largo de la característica negativa ec. (2.22) y se resuelve independientemente de los puntos interiores calculados del ducto.

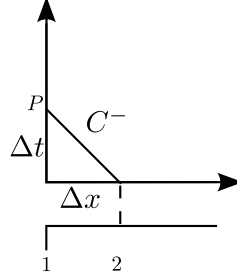


Figura 2.5: Condición en la entrada del ducto aguas arriba (tanque)

Como la presión no varía en el tiempo, entonces la presión en el punto P se expresa como

$$H_{1,1}^k = H_T \tag{2.30}$$

donde H_T es la elevación de la superficie sobre la referencia, para determinar el flujo se tiene la característica negativa (2.22)

$$Q_{1,1}^k = Q_{1,2}^{k-1} + (H_{1,1}^k - H_{1,2}^{k-1} - RQ_{1,2}^{k-1}|Q_{1,2}^{k-1}|)/B. \tag{2.31}$$

2.2.3. Condiciones de frontera para la válvula

Para el caso de la válvula las condiciones de frontera del flujo y presión reportadas en Wylie (1993) son válidas a lo largo de la característica positiva (2.21) como se muestra en la Fig. 2.6. Por tanto, estas condiciones se resuelven independientemente de los puntos interiores calculados, a partir de la ecuación que define un orificio aguas abajo de un ducto.

$$Q_{n+1,2}^k = -C_v B + \sqrt{(C_v B)^2 + 2C_v * C_N} \tag{2.32}$$

$$H_{n+1,2}^k = C_N - BQ_{n+1,2}^k \quad (2.33)$$

donde C_v es una constante que depende del flujo, presión y de la apertura de la válvula $\frac{(Q_0\tau)^2}{2H_0}$, con τ cuando está totalmente abierta su valor será de uno y con valor de cero indica el cierre completo de la válvula.

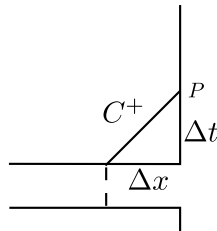


Figura 2.6: Condición en la entrada del ducto aguas abajo (válvula)

2.2.4. Diagrama de flujo del simulador con el MC

Para simular la respuesta transitoria de la presión utilizando el método de las características, el procedimiento de cálculo se puede llevar a cabo mediante la implementación del diagrama de flujo de la Fig. 2.7. Como primer paso se introducen los parámetros del ducto de estudio, a partir de estos datos se calculan las constantes y el incremento de tiempo Δt , es decir en cuántos tramos o particiones se va a dividir el ducto, por lo tanto en cada punto de cada sección se obtienen la evolución de flujo y presión. Se determina la condición en estado estacionario del sistema de la Fig. 2.3. Cuando la válvula se cierra aguas abajo de manera instantánea, el valor que toma τ al estar completamente abierta la válvula es de uno y cuando está completamente cerrada su valor es de cero. Considerando que existe una fuga en algún punto intermedio del ducto, se calculan sus valores de H_p y Q_p , también se obtienen los valores en los extremos del ducto, tanque y válvula H_p y Q_p y para finalizar se guardan los datos. En el diagrama se observa que el cálculo finaliza cuando el tiempo es mayor al tiempo final de simulación TF el cual se selecciona con un valor conveniente para los cálculos.

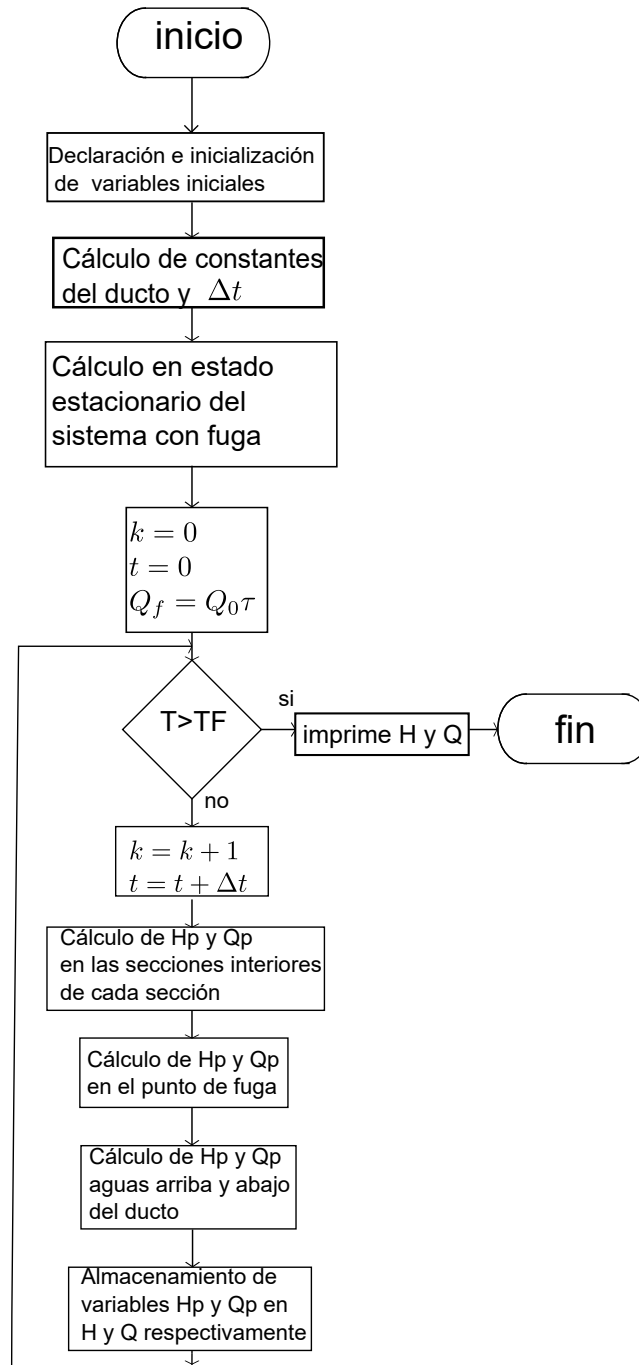


Figura 2.7: Diagrama de flujo para la implementación del modelo del ducto con una fuga usando el MC

2.3. Modelo de dimensión infinita del fluido

Para describir el fluido por medio de un modelo de dimensión infinita, con perturbaciones que incluyen el caso de fugas, se parte de la versión linealizada del sistema (2.1), con la finalidad de obtener su solución de forma matricial en el dominio de Laplace. Este modelo permite analizar el comportamiento del transitorio de la onda de presión del fluido en un ducto cuando hay fugas. Así se utiliza una matriz de transferencia interconectada a matrices puntuales de transferencia asociadas a las fugas. Esta interconexión se lleva a cabo de acuerdo a la configuración de estudio, de manera análoga vía el MC. Además se imponen condiciones de frontera en sus extremos, $x = 0$ y $x = L$. En algunos casos se puede obtener la respuesta transitoria de la presión y flujo.

El sistema lineal en derivadas parciales y en torno a un punto de operación Q_0 y H_0 de (2.1) está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + \mu Q_0 q &= 0 \\ c^2 \frac{\partial q}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

donde

$$\begin{aligned} H(x, t) &= H_0 + h(x, t) \\ Q(x, t) &= Q_0 + q(x, t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde $q(x, t)$, $h(x, t)$ son las variaciones de flujo y de presión con respecto al estado estacionario, respectivamente. Transformando (2.34) al dominio de Laplace s se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{gA}{c^2} s h(x, s) &= -\frac{dq(x, s)}{dx}, \\ \left[\frac{1}{gA} s + \frac{fQ_0}{gDA^2} \right] q(x, s) &= -\frac{dh(x, s)}{dx}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde $q(x, s)$ y $h(x, s)$ corresponden a la transformada de Laplace de $q(x, t)$ y $h(x, t)$, derivando (2.36) con respecto a la variable x se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{gA}{c^2} s \frac{dh(x, s)}{dx} &= -\frac{d^2q(x, s)}{dx^2}, \\ \left[\frac{1}{gA} s + \frac{fQ_0}{gDA^2} \right] \frac{dq(x, s)}{dx} &= -\frac{dh^2(x, s)}{dx^2}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

y manipulando algebraicamente (2.36) y (2.37) se obtiene

$$\frac{\partial^2 q(x, s)}{\partial^2 x} = \gamma(s)q(x, s), \quad \frac{\partial^2 h(x, s)}{\partial^2 x} = \gamma(s)h(x, s), \quad (2.38)$$

donde $\gamma^2(s) = \frac{1}{c^2} (s^2 + 2Q_0\mu s)$ es el parámetro de propagación.

2.3.1. Matriz de transferencia para un ducto

La solución del conjunto (2.38) puede obtenerse para cualquier coordenada espacial $x_2 \in [0, L]$ con respecto a una coordenada $x_1 \in [0, L]$, tal que $x_2 > x_1$. Esto permite escribir la relación entrada salida como una matriz de transferencia; para mayores detalles consultar Chaudhry (2013) pag. 268 capítulo 8. Por lo tanto el modelo para el sistema (2.34) en forma matricial y sin fuga en el ducto se reduce a

$$\begin{bmatrix} q(x_2, s) \\ h(x_2, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma\Delta) & -\frac{\sinh(\gamma\Delta)}{Z} \\ -Z \sinh(\gamma\Delta) & \cosh(\gamma\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(x_1, s) \\ h(x_1, s) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

donde $Z = \sqrt{\frac{c}{gA} + 2Q_0\mu}$ es la impedancia característica de la línea de transmisión del fluido y $\Delta = x_2 - x_1$, el esquema hidráulico se muestra en la Fig. 2.8

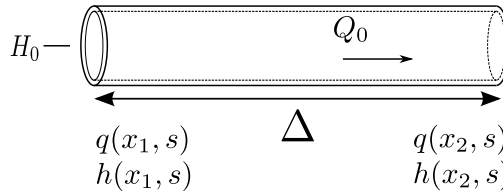


Figura 2.8: Diagrama del ducto en el dominio de Laplace

2.3.2. Matriz de transferencia para una fuga

De acuerdo a la configuración que se desea estudiar en una red de ductos, es necesario obtener las matrices de transferencia de los componentes que la conforman e

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

interconectarlos para obtener una matriz de transferencia general que involucra todos los elementos que conforman la red. En el caso de este trabajo se deben entonces considerar las fugas como componentes del ducto.

Debido a que se requiere estudiar el sistema de la Fig. 2.3, se necesita una matriz de transferencia que modele el fenómeno hidráulico puntual asociado a la fuga, a esta matriz se le asocian flujos y presiones en sus extremos, a la izquierda y a la derecha de un punto espacial del ducto en x y alrededor de un punto de operación; es decir

$$\begin{bmatrix} q(x^+, s) \\ h(x^+, s) \end{bmatrix} = M_F(x, s) \begin{bmatrix} q(x^-, s) \\ h(x^-, s) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

donde, $M_F(x, s)$ es la matriz de transferencia asociada a la fuga, x^+ y x^- son los extremos del componente. De esta manera se puede utilizar el álgebra de bloques matricial para determinar el modelo completo. Cuando hay dos fugas, el esquema aumenta y en consecuencia la multiplicación de las matrices para el modelado también.

2.3.3. Matriz de transferencia para el sistema con una fuga

Considere el esquema de la Fig. 2.9 en donde las componentes del sistema son: tanque, interconectado al primer ducto en el punto cero (extremo aguas arriba del ducto); fuga en el punto x interconectada con dos ductos (aguas arriba y aguas abajo) y una válvula interconectada al segundo ducto aguas abajo.

Las matrices de transferencia que corresponden a cada sistema global son:

- El cuadripolo definido por el ducto conectado del tanque al punto x^- está dado por

$$\begin{bmatrix} q(x^-, s) \\ h(x^-, s) \end{bmatrix} = F_{0-x} \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

donde

$$F_{0-x} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma x) & -\frac{\sinh(\gamma x)}{Z} \\ -Z \sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

es la matriz de transferencia para el ducto de longitud x ecuación (2.39).

- El cuadripolo que describe a la fuga en el punto x está dado por

$$\begin{bmatrix} q(x^+, s) \\ h(x^+, s) \end{bmatrix} = P_x \begin{bmatrix} q(x^-, s) \\ h(x^-, s) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

donde

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & -\xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

es la matriz de transferencia para una fuga y $\xi = Q_{f_0}/(2H_{f_0})$.

- El cuadripolo definido por el ducto conectado del punto x^+ a la válvula está dado por

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = F_{x-L} \begin{bmatrix} q(x^+, s) \\ h(x^+, s) \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

donde

$$F_{x-L} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma(L-x)) & -\frac{\sinh(\gamma(L-x))}{Z} \\ -Z \sinh(\gamma(L-x)) & \cosh(\gamma(L-x)) \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

es la matriz de transferencia del ducto de Longitud $L-x$.

Al interconectar las matrices de cada uno de los componentes en el ducto, mediante algebra de bloques, se obtiene la matriz general con fuga. De esta forma el producto de las matrices (2.42), (2.44) y (2.46) permite obtener la matriz $M_1(s)$

$$M_1(s) = F_{x-L} P_x F_{0-x} \quad (2.47)$$

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

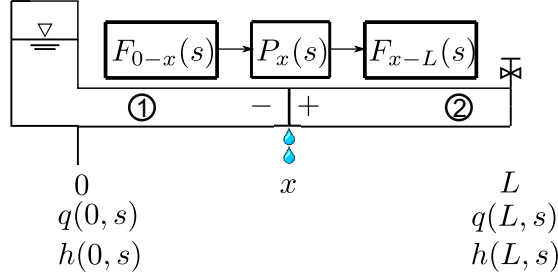


Figura 2.9: Diagrama de bloques de un ducto con una fuga en x

donde sus elementos

$$\begin{aligned}
 M_1^{11}(s) &= \cosh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x)), \\
 M_1^{12}(s) &= \frac{-\sinh(\gamma L)}{Z} - Z \cosh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x)), \\
 M_1^{21}(s) &= -Z \sinh(\gamma L) - Z^2 \xi \sinh(\gamma x) \sinh(\gamma(L-x)), \\
 M_1^{22}(s) &= \cosh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma(L-x)) \cosh(\gamma x).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Así el modelo de un ducto en el dominio de Laplace con fuga y con condiciones de frontera en los extremos del ducto se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Debido a que la configuración física considerada en este trabajo es un ducto con un tanque aguas arriba y una válvula aguas abajo, es necesario como condición de frontera reformular el modelo (2.49) para asignar condiciones adecuadas. Así la matriz de transferencia del cuadripolo se reescribe como

$$\begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = U_1(s) \begin{bmatrix} h(0, s) \\ -q(L, s) \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

donde los elementos de la matriz $U_1(s)$ están dados por

$$U_1^{11}(s) = \frac{1}{Z} \frac{\sinh(\gamma L) + \xi \cosh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x))}{\cosh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x))} \quad (2.51)$$

$$U_1^{12}(s) = -\frac{1}{\cosh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x))} \quad (2.52)$$

$$U_1^{21}(s) = \frac{1}{\cosh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x))} \quad (2.53)$$

$$U_1^{22}(s) = Z \frac{\sinh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma x) \sinh(\gamma(L-x))}{\cosh(\gamma L) + Z\xi \sinh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x))}, \quad (2.54)$$

2.3.4. Matriz de transferencia para el sistema con dos fugas

Para obtener un modelo del ducto considerando dos fugas se utiliza el esquema de la Fig. 2.10, cada bloque representa una matriz de transferencia de los elementos que lo conforman,

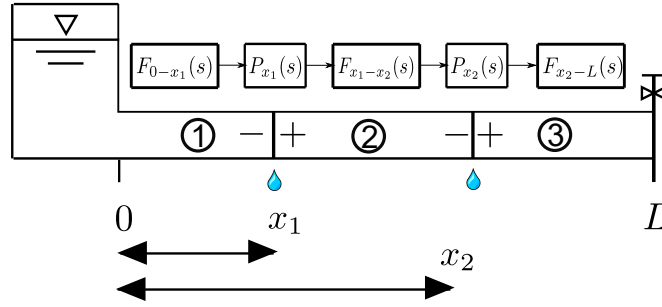


Figura 2.10: Esquema con dos fugas

donde la relación entre posiciones de las fugas y tramos del ducto se describe por

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \\ x_2 - x_1 &= l_2 \\ L - x_2 &= l_3 \\ L &= l_1 + l_2 + l_3 \end{aligned} \quad (2.55)$$

con $x_1 < x_2$, y las entradas correspondientes en los extremos del ducto $h(0, s) = 0$ para el tanque y $q(L, s) = -\frac{Q_0}{s}$ para la válvula.

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

- El cuadripolo definido para el tramo de longitud l_1 conectado del tanque (punto cero) al punto izquierdo de la fuga x_1^- está dado por

$$\begin{bmatrix} q(x_1^-, s) \\ h(x_1^-, s) \end{bmatrix} = F_{0-x_1} \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

donde

$$F_{0-x_1} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l_1) & -\sinh(\gamma l_1) \\ -Z \sinh(\gamma l_1) & \cosh(\gamma l_1) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

es la matriz de transferencia de la sección 1 del ducto.

- El cuadripolo que describe a la fuga en el punto x_1 está dado por

$$\begin{bmatrix} q(x_1^+, s) \\ h(x_1^+, s) \end{bmatrix} = P_{x_1} \begin{bmatrix} q(x_1^-, s) \\ h(x_1^-, s) \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

donde

$$P_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

es la matriz de transferencia de la fuga donde $\xi_1 = Q_{1f_0}/(2H_{1f_0})$, Q_{1f_0} y H_{1f_0} representan el flujo y presión de la primera fuga en estado estacionario.

- El cuadripolo definido para el tramo de longitud l_2 conectado a la derecha de la fuga en el punto x_1^+ y a la izquierda del punto x_2^- está dado por

$$\begin{bmatrix} q(x_2^-, s) \\ h(x_2^-, s) \end{bmatrix} = F_{x_1-x_2} \begin{bmatrix} q(x_1^+, s) \\ h(x_1^+, s) \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

donde

$$F_{x_1-x_2} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l_2) & -\sinh(\gamma l_2) \\ -Z \sinh(\gamma l_2) & \cosh(\gamma l_2) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

es la matriz de transferencia de la sección 2 del ducto.

- El cuadripolo que describe a la fuga en el punto x_2 está dado por

$$\begin{bmatrix} q(x_2^+, s) \\ h(x_2^+, s) \end{bmatrix} = P_{x_2} \begin{bmatrix} q(x_2^-, s) \\ h(x_2^-, s) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

donde

$$P_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

es la matriz de transferencia de la fuga donde $\xi_2 = Q_{2f_0}/(2H_{2f_0})$, Q_{2f_0} y H_{2f_0} representan el flujo y presión de la segunda fuga en estado estacionario.

- El cuadripolo definido para el tramo de longitud l_3 conectado a la derecha de la fuga x_2^+ y a la izquierda de la válvula está dado por

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = F_{x_2-L} \begin{bmatrix} q(x_2^+, s) \\ h(x_2^+, s) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

donde

$$F_{x_2-L} = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l_3) & -\sinh(\gamma l_3) \\ -Z \sinh(\gamma l_3) & \cosh(\gamma l_3) \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

es la matriz de transferencia de la sección 3, donde $F_{l_3} = F_{x_2-L}$, $F_{l_2} = F_{x_1-x_2}$ y $F_{l_1} = F_{0-x_1}$.

Si se quiere expresar, la matriz de transferencia de un ducto con dos fugas en las posiciones x_1 y x_2 , es necesario multiplicar a las matrices antes presentadas. Por tanto la relación de gasto y presión es de la siguiente forma:

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = M_2(s) \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

donde $M_2(s) = F_{l_3} P_{x_2} F_{l_2} P_{x_1} F_{l_1}$, y se puede definir en términos de las submatrices como

$$M_2(s) = \begin{bmatrix} M^{11}(s) & M^{12}(s) \\ M^{21}(s) & M^{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

en donde se ha considerado $\sinh \Rightarrow \sigma$ y $\cosh \Rightarrow \bar{\sigma}$, los elementos de la matriz $M_2(s)$ están dados por

$$\begin{aligned} M_2^{11}(s) = & \bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_1 Z \sigma(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_2 Z \sigma(\gamma L) - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_2)) \\ & - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_1)) - \frac{1}{2}\xi_1 Z \sigma(\gamma(L - 2x_1)) - \frac{1}{2}\xi_2 Z \sigma(\gamma(L - 2x_2)) \\ & - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L + 2x_1 - 2x_2)), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} M_2^{12}(s) = & -\frac{\sigma(\gamma L)}{Z} - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z \sigma(\gamma L) - \frac{1}{2}\xi_1 \bar{\sigma}(\gamma L) - \frac{1}{2}\xi_2 \bar{\sigma}(\gamma L) - \frac{1}{2}\xi_1 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_1)) \\ & - \frac{1}{2}\xi_2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_2)) - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z \sigma(\gamma(L - 2x_1)) + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z \sigma(\gamma(L - 2x_2)) \\ & + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z \sigma(\gamma(L + 2x_1 - 2x_2)), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} M_2^{21}(s) = & -Z \sigma(\gamma L) - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^3 \sigma(\gamma L) - \frac{1}{2}\xi_1 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma L) - \frac{1}{2}\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_1 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_1)) \\ & + \frac{1}{2}\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_2)) + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^3 \sigma(\gamma(L - 2x_1)) - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^3 \sigma(\gamma(L - 2x_2)) \\ & + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^3 \sigma(\gamma(L + 2x_1 - 2x_2)) \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} M_2^{22}(s) = & \bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_1 Z \sigma(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_2 Z \sigma(\gamma L) + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_1)) \\ & - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L - 2x_2)) + \frac{1}{2}\xi_1 Z \sigma(\gamma(L - 2x_1)) + \frac{1}{2}\xi_2 Z \sigma(\gamma(L - 2x_2)) \\ & - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2 Z^2 \bar{\sigma}(\gamma(L + 2x_1 - 2x_2)) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Para obtener la matriz de transferencia con las condiciones de frontera adecuadas que permita generar una respuesta transitoria de la presión aguas abajo, se considera una combinación de presión en el inicio del ducto y gasto en el extremo aguas abajo. Por esta razón, igual que en el caso de una fuga, se utiliza la segunda forma híbrida causal (2.72) definida por el cuadripolo

$$\begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = U_2(s) \begin{bmatrix} h(0, s) \\ -q(L, s) \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

donde los elementos de la matriz $U_2(s)$ están dados por el reordenamiento de los elementos de la matriz de transferencia general con fugas

$$U_2^{11}(s) = -\frac{M_2^{12}}{M_2^{11}} \quad (2.73)$$

$$U_2^{12}(s) = -\frac{1}{M_2^{11}} \quad (2.74)$$

$$U_2^{21}(s) = -\frac{M_2^{21}}{M_2^{11}} M_2^{12} + M_2^{22} \quad (2.75)$$

$$U_2^{22}(s) = -\frac{M_2^{21}}{M_2^{11}}, \quad (2.76)$$

2.3.5. Matriz de transferencia para el sistema con múltiples fugas

Para generalizar la obtención del modelo en el dominio de Laplace en un ducto con múltiples fugas, se emplea el esquema de la Fig. 2.11 y mediante álgebra de bloques matricial se obtiene la matriz de transferencia $M_{nf}(s)$ del punto 0 al punto L la cual se reduce a

$$M_{nf}(s) = F_{l_{nf}+1} P_{x_{nf}} F_{l_{nf}} \dots P_{x_2} F_{l_2} P_{x_1} F_{l_1} \quad (2.77)$$

con el cuadripolo

$$\begin{bmatrix} q(L, s) \\ h(L, s) \end{bmatrix} = M_{nf}(s) \begin{bmatrix} q(0, s) \\ h(0, s) \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

2. MODELO DE UN DUCTO HIDRÁULICO

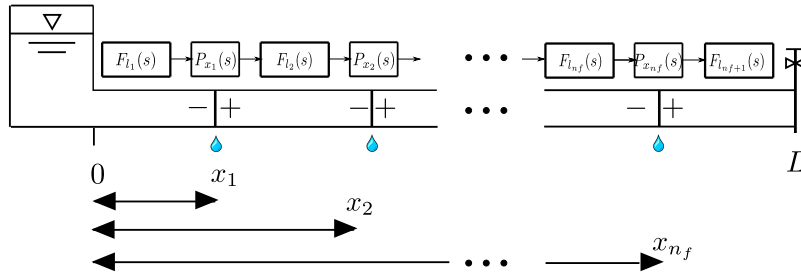


Figura 2.11: Esquema general para múltiples fugas

En estas condiciones, la relación entre posiciones de las fugas y los tramos están dadas por

$$\begin{aligned}
 x_1 &= l_1 \\
 x_2 - x_1 &= l_2 \\
 &\vdots \\
 L - x_{n_f} &= l_{n_f+1}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_{n_f} + l_{n_f+1}.$$

donde $x_1 < x_2 < \dots < x_{n_f}$, n_f es el número de fugas en el ducto. Cabe resaltar que la matriz en el punto donde se encuentra la fuga j toma la forma general

$$\begin{bmatrix} q(x_j^+, s) \\ h(x_j^+, s) \end{bmatrix} = P_{x_j} \begin{bmatrix} q(x_j^-, s) \\ h(x_j^-, s) \end{bmatrix} \tag{2.80}$$

donde

$$P_{x_j} = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.81}$$

donde $\xi_j = Q_{j f_0} / (2H_{j f_0})$, $Q_{j f_0}$ y $H_{j f_0}$ representan el flujo y presión de la fuga en estado estacionario.

2.3.6. Presión del fluido ante una perturbación aguas abajo

La expresión general de la presión transitoria en el extremo aguas abajo del ducto se obtiene considerando las entradas de excitación como son: el nivel del tanque constante a la entrada del ducto $h(0, s) = 0$, la perturbación o cierre brusco en la válvula aguas abajo en el dominio de Laplace $q(L, s) = -\frac{Q_0}{s}$

Así la respuesta transitoria de la presión aguas abajo, se describe de la siguiente forma

$$h(L, s) = -\frac{M_{nf}^{21}}{M_{nf}^{11}}(q(L, s)) \quad (2.82)$$

Por tanto, en general dependiendo del tipo de maniobra o perturbación $q(L, s)$ en el extremo aguas abajo se obtiene la función $h(L, s)$ que deberá ser transformada al tiempo para analizar la respuesta transitoria de la presión.

Análisis de la onda de presión en presencia de fugas

Existen diversas maniobras que permiten generar una onda de presión en un ducto. Estas maniobras corresponden con perturbaciones provocadas en el sistema (2.72). Casos estudiados son por ejemplo el cierre de una válvula o el apagado de una bomba que generan una onda de presión (Brunone 1999).

En particular, si se considera el escenario de un nivel constante en el tanque de la Fig. 2.3, es decir $h(0, s) = 0$, y que la válvula del extremo aguas abajo se cierra bruscamente, equivale en el modelo a tener $q(L, s) = -Q_0/s$. Entonces sin la presencia de una fuga de la ec. (2.72) la presión aguas abajo se reduce a

$$h(L, s) = \frac{Q_0 Z}{s} \frac{\sinh(\gamma L)}{\cosh(\gamma L)} = \frac{Q_0 Z}{s} \tanh(\gamma L) \quad (3.1)$$

Considerando que la impedancia característica es constante en la línea de transmisión y la fricción es nula se tiene $Z = \frac{c}{gA}$ y $\gamma = \frac{s}{c}$, y la transformada inversa de (3.1) se puede obtener directamente de tablas, ver Apéndice A.2. Así se obtiene la respuesta en el tiempo mostrada en la Fig. 3.1. El tiempo que tarda en propagarse la onda desde la válvula hacia el tanque es de $\frac{2L}{c}$, y después esta onda se refleja hacia la válvula tardando nuevamente un tiempo $\frac{2L}{c}$. En este caso el transitorio tiene un comportamiento oscilatorio permanente dado que no hay fugas y la fricción es cero.

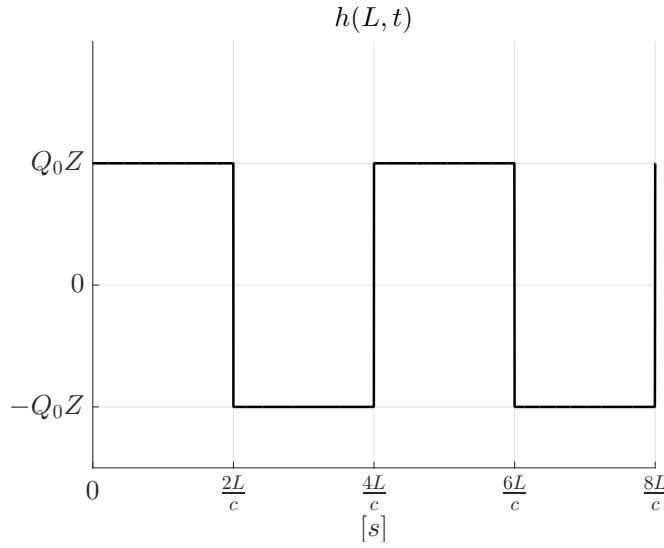


Figura 3.1: Evolución de la presión aguas abajo sin fuga

3.1. Onda de presión ante la presencia de una fuga

En el escenario de una fuga en el punto x la presión transitoria en el extremo aguas abajo se reduce a

$$h(L, s) = \frac{Q_0Z \sinh(\gamma L) + \xi Z \sinh(\gamma x) \sinh(\gamma(L-x))}{s \cosh(\gamma L) + \xi Z \sinh(\gamma x) \cosh(\gamma(L-x))} \quad (3.2)$$

Para obtener la expresión de la presión en el tiempo se sustituyen en (3.2) las funciones hiperbólicas por su equivalente en exponenciales y se expresa en términos de sumas de residuos con términos exponenciales negativos. Considerando las relaciones de Euler

$$\sinh(\gamma L) = \frac{1}{2}(e^{L\gamma} - e^{-L\gamma}), \quad \cosh(\gamma L) = \frac{1}{2}(e^{L\gamma} + e^{-L\gamma}), \quad (3.3)$$

la ecuación (3.2) se reduce a

$$h(L, s) = \frac{Q_0Z (e^{L\gamma} - e^{-L\gamma}) + \xi Z \frac{1}{2}(e^{x\gamma} - e^{-x\gamma})(e^{\gamma(L-x)} - e^{-\gamma(L-x)})}{s (e^{L\gamma} + e^{-L\gamma}) + \xi Z \frac{1}{2}(e^{x\gamma} - e^{-x\gamma})(e^{\gamma(L-x)} + e^{-\gamma(L-x)})},$$

o equivalentemente

$$h(L, s) = \frac{Q_0 Z e^{\gamma L} - e^{-L\gamma} + \frac{1}{2} \xi Z (e^{\gamma L} + e^{-L\gamma} - e^{\gamma L - 2\gamma x} - e^{-(\gamma L - 2\gamma x)})}{s e^{\gamma L} + e^{-L\gamma} + \frac{1}{2} \xi Z (e^{\gamma L} - e^{-L\gamma} - e^{\gamma L - 2\gamma x} + e^{-(\gamma L - 2\gamma x)})}.$$

Así, al multiplicar el denominador y el numerador de este racional por $\frac{e^{-L\gamma}}{e^{-L\gamma}}$, se obtiene

$$h(L, s) = \frac{Q_0 Z 1 - e^{-2\gamma L} + \frac{\xi Z}{2} (1 + e^{-2\gamma L} - e^{-2\gamma x} - e^{-(2\gamma L - 2\gamma x)})}{s 1 + e^{-2\gamma L} + \frac{\xi Z}{2} (1 - e^{-2\gamma L} - e^{-2\gamma x} + e^{-(2\gamma L - 2\gamma x)})} \quad (3.4)$$

definiendo $\beta = \frac{\xi Z}{2}$, la expresión de $h(L, s)$ se puede escribir como

$$h(L, s) = \frac{Q_0 Z}{s} g(s), \quad (3.5)$$

donde la función racional $g(s)$ puede expandirse en términos de sus residuos como

$$\begin{aligned} g(s) = & 1 - \frac{2e^{\frac{2s(-L+x)}{c}} \beta}{1 + \beta} + \frac{2e^{\frac{4s(-L+x)}{c}} \beta^2}{(1 + \beta)^2} - \frac{2e^{-\frac{2Ls}{c}}}{(1 + \beta)^2} \\ & + \frac{4e^{\frac{2s(-2L+x)}{c}} \beta}{(1 + \beta)^3} - \frac{2e^{-\frac{2s(L+x)}{c}} \beta}{(1 + \beta)^3} - \frac{2e^{-\frac{2s(L+x)}{c}} \beta}{(1 + \beta)^3} \\ & - \frac{2e^{\frac{2s(L-2x)}{c}} \beta^2}{(1 + \beta)^4} + \frac{4e^{-\frac{4Ls}{c}} \beta^2}{(1 + \beta)^4} + \frac{2e^{-\frac{4Ls}{c}} 4e^{-\frac{2s(2L+x)}{c}} \beta^3}{(1 + \beta)^4 (1 + \beta)^5} \\ & + \frac{4e^{-\frac{2s(2L+x)}{c}} \beta}{(1 + \beta)^5} + \frac{4e^{-\frac{4s(L+x)}{c}} \beta^4}{(1 + \beta)^6} + \frac{6e^{-\frac{4s(L+x)}{c}} \beta^2}{(1 + \beta)^6} + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

En consecuencia, transformando cada término de la sumatoria al dominio del tiempo, la presión se reduce a una sumatoria de funciones escalón ponderadas y con corri-

mientos de tiempo que puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 h_L(t) = Q_0 Z \left[\right. & \mathcal{U}(t) - \frac{2\beta\mathcal{U}\left(t + \frac{2(-L+x)}{c}\right)}{1 + \beta} - \frac{2\mathcal{U}\left(t - \frac{2L}{c}\right)}{(1 + \beta)^2} \\
 & + \frac{2\beta^2\mathcal{U}\left(t + \frac{4(-L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^2} - \frac{2\beta\mathcal{U}\left(t - \frac{2(L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^3} \\
 & + \frac{4\beta\mathcal{U}\left(t + \frac{2(-2L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^3} + \frac{2(1 + 2\beta^2)\mathcal{U}\left(-\frac{4L}{c} + t\right)}{(1 + \beta)^4} \\
 & - \frac{2\beta^2\mathcal{U}\left(t + \frac{2(L-2x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^4} + \frac{4\beta\mathcal{U}\left(t - \frac{2(2L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^5} \\
 & + \frac{4\beta^3\mathcal{U}\left(t - \frac{2(2L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^5} + \frac{6\beta^2\mathcal{U}\left(t - \frac{4(L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^6} \\
 & \left. + \frac{4\beta^4\mathcal{U}\left(t - \frac{4(L+x)}{c}\right)}{(1 + \beta)^6} + \dots \right], \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

donde $\mathcal{U}(\cdot)$ denota la función escalón.

NOTA: En trabajos previos se han propuesto otras funciones para representar el comportamiento de la presión transitoria. Wang et al. (2002) expresa $h_L(t)$ como una serie de Fourier. El principal inconveniente de la representación en Fourier es la gran cantidad de términos que se requieren para representar cada frente de onda cuadrada, presentándose el fenómeno de Gibbs, el cual ocurre en las aproximaciones de una función periódica continuamente diferenciable a trozos mostrándose rizados cerca de las discontinuidades. Si se analiza la función reconstruida Fig. 3.2 se observa que en torno a los puntos de discontinuidad aparece un comportamiento semejante al de una sobreoscilación, dando como resultado una diferencia entre los valores de la función $f(t)$ y su representación $f_r(t)$, siendo T el periodo. Sin embargo, como se observa de (3.7) la respuesta teórica no presenta dichas oscilaciones sin fuga.

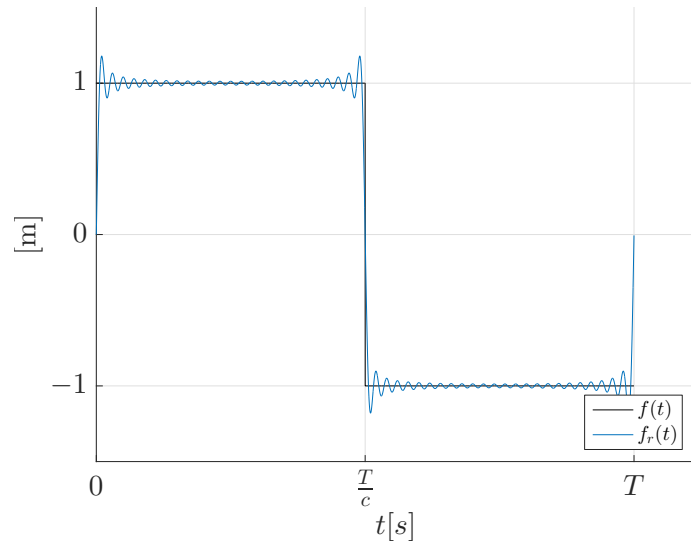


Figura 3.2: Fenómeno de Gibbs en la onda cuadrada $f_{50}(t)$

3.1.1. Propiedades de la onda de presión

Una ventaja de la forma de (3.7) es la de permitir un análisis en términos de funciones escalón en distintos intervalos de tiempo, atenuadas de acuerdo con sus coeficientes. Por lo tanto, si se considera el tiempo durante el primer periodo de la onda de presión sólo se necesitan algunos términos de la sumatoria para caracterizar la fuga.

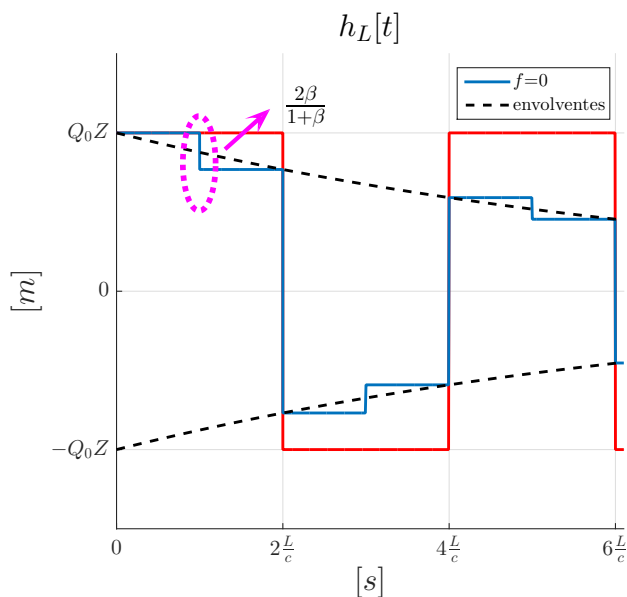


Figura 3.3: Onda de presión $h(L, t)$ con fuga a la mitad del ducto y en condición nominal

La Fig. 3.3 presenta la onda de presión provocada por una fuga localizada a la mitad de la tubería, es decir cuando $x = L/2$, en donde se han considerado solamente los primeros cuatro términos de la serie (3.7). Del comportamiento de la señal se pueden afirmar lo siguiente:

Hecho 1 La amplitud de la onda de presión generada por el cierre de la válvula corresponde con el término Q_0Z .

Hecho 2 La amplitud de la primera discontinuidad en la onda de presión ($-2\beta/(1+\beta)$) no depende de la posición de la fuga, es decir sólo depende de la impedancia Z y el tamaño de la fuga. Por lo tanto se puede obtener esta información por medio de la amplitud de la discontinuidad, en la evolución de la presión.

Hecho 3 La discontinuidad aparece en la onda de presión en el instante de tiempo $[t_L = -2(-L + x)/c]$ y por consiguiente, la posición de la fuga puede estimarse de $x = L - (t_L c)/2$.

Hecho 4 El gasto de fuga asociada con el parámetro β caracteriza el amortiguamiento

del tren de pulsos, o equivalentemente los pesos de las funciones en la sumatoria. Considerando la ec. (3.7) para $x = \frac{L}{2}$, ésta se reduce a

$$\begin{aligned} h_{L/2}(t) = & \mathcal{U}(t) + \alpha_1 \mathcal{U}(t-1) + \alpha_2 \mathcal{U}(t-2) + \alpha_3 \mathcal{U}(t-3) + \\ & \alpha_4 \mathcal{U}(t-4) + \alpha_5 \mathcal{U}(t-5) + \\ & \alpha_6 \mathcal{U}(t-6) + \alpha_7 \mathcal{U}(t-7) + \alpha_8 \mathcal{U}(t-8) \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde los coeficientes de las funciones escalón están dados por:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \left(-\frac{2\beta}{1+\beta} \right), \quad \alpha_2 = -\frac{2(1-\beta)}{1+\beta}, \quad \alpha_3 = \frac{2(1-\beta)\beta}{(1+\beta)^2}, \\ \alpha_4 = & -\frac{2(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2}, \quad \alpha_5 = \frac{2(1-\beta)^2\beta}{(1+\beta)^3}, \quad \alpha_6 = \frac{-2+6\beta^2-6\beta^4}{(1+\beta)^6}, \\ \alpha_7 = & \frac{2\beta-6\beta^3-6\beta^5}{(1+\beta)^7}, \quad \alpha_8 = -\frac{2(-1+4\beta^2+9\beta^4+2\beta^6)}{(1+\beta)^8} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Así que, se puede estimar la función envolvente $e^{(Rt)}$ que acota el tren de pulsos considerando $h_{L/2}(t)$ en los instantes $t_n = 2nL/c$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, se puede buscar el valor de la constante R tal que

$$e^{(Rt_n)} = h(t_n) \quad \forall t_n = 2nL/c$$

Si se consideran por simplicidad las dos primeras discontinuidades

$$h_L(0) = 1, \quad h_L(2L/c) = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad (3.10)$$

se obtiene la expresión

$$R = \frac{c}{2L} \ln(h_L(2L/c)) = \frac{c}{2L} \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \quad (3.11)$$

En la práctica dado que la presión tiene ruido es necesario considerar varios puntos de la discontinuidad y minimizar el criterio

$$J(B, z_f) = \sum_{n=1}^N (e^{(-Rt_n)} - h(t_n))^2 \quad (3.12)$$

3. ANÁLISIS DE LA ONDA DE PRESIÓN EN PRESENCIA DE FUGAS

La Fig. 3.4 presenta tres gráficas: la onda de presión sin fuga; el tren de pulsos atenuado con nuevas discontinuidades provocadas por la fuga localizada a la mitad del ducto y la función exponencial $e^{Rt} = e^{-2.3497t}$ que minimiza (3.12).

Cabe hacer notar que (3.12) no pudo verificarse para fugas en una posición diferente a $x = L/2$. Esta problemática es abordada en la siguiente sección con otras relaciones para el cálculo de la envolvente.

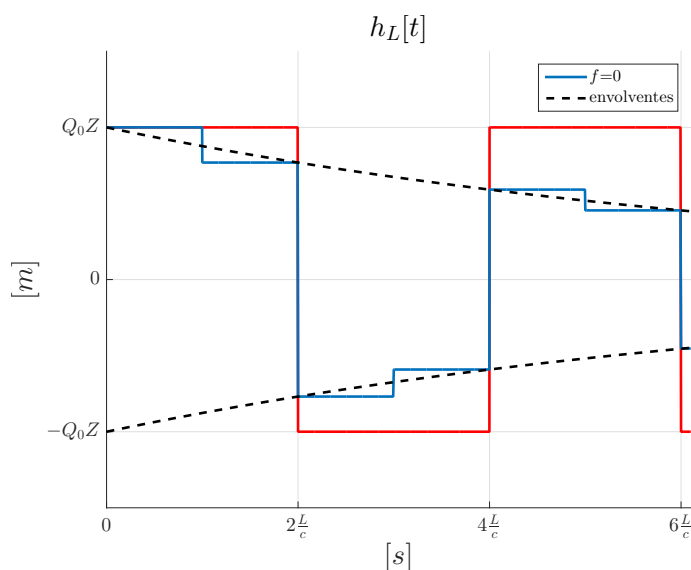
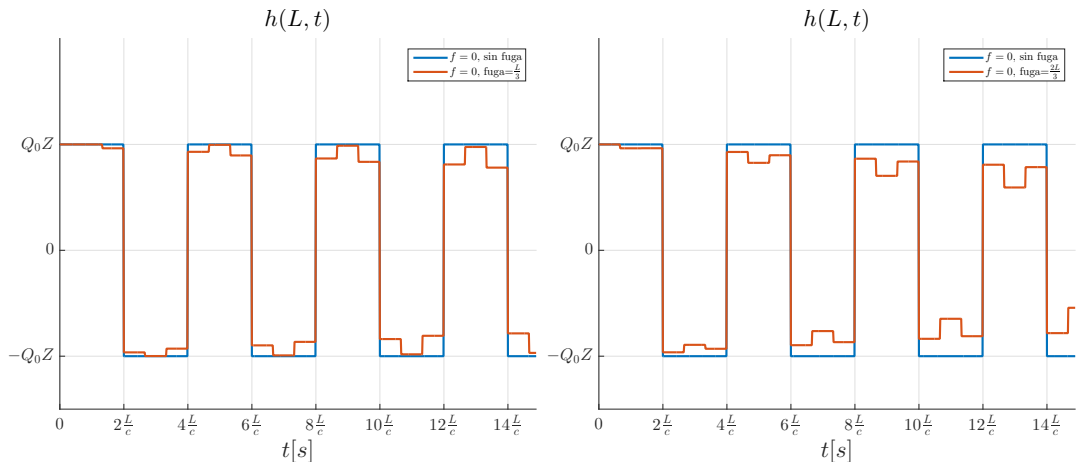


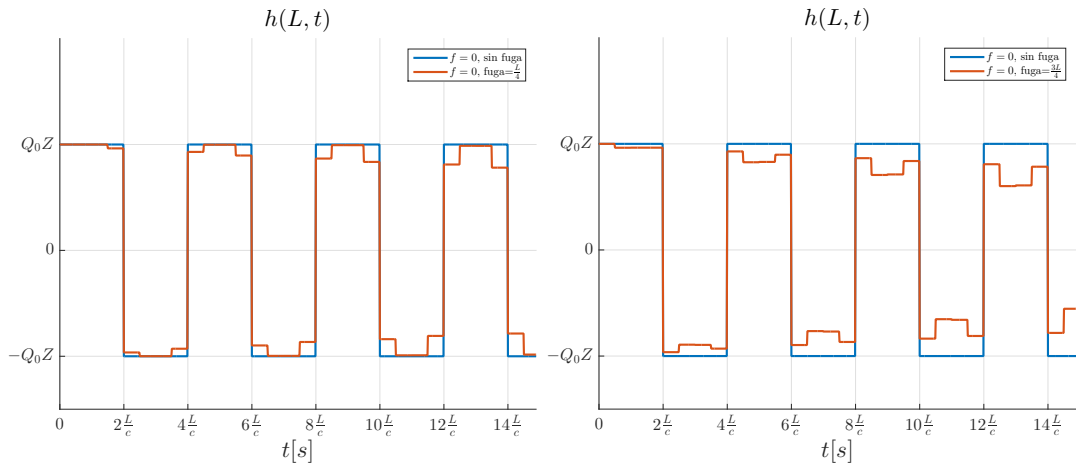
Figura 3.4: Evolución de la envolvente de la onda de presión $h(L, t)$ en condición de fuga obtenida con (3.11) y $Q_{f_0} = 0.5Q_0$

Hecho 5 Para caracterizar los frentes de las discontinuidades provocadas por una fuga en una posición x diferente de la mitad del ducto se simuló diversos escenarios. Las Figs. 3.5, 3.6 y 3.7 muestran la onda de presión generada cuando se provoca una fuga ubicada en la posición $x = L/3$ y su complemento $x = 2L/3$, $x = L/4$ y su complemento $x = 3L/4$, y $L/6$ y su complemento $5L/6$, respectivamente. Se observa de éstas que los frentes de las discontinuidades en los instantes de tiempo $t = (2L/c)n + x$, $\forall n$ impar $\in \mathbb{Z}^+$ son positivos y $\forall n$ par $\in \mathbb{Z}^+$ son negativos.



(a) *Transitorio con una fuga en $x = L/3$* (b) *Transitorio con una fuga en $x = 2L/3$*

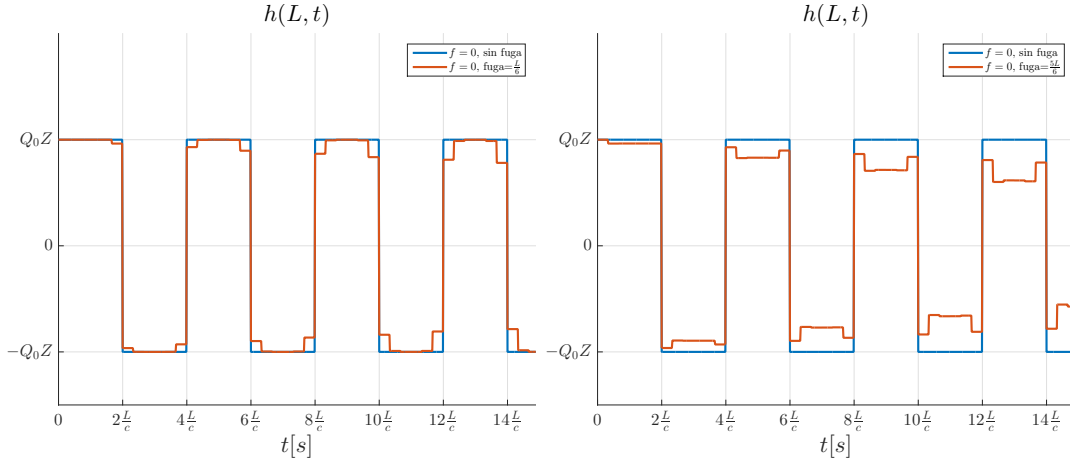
Figura 3.5: Fuga en la posición $x = L/3$ y su complemento con $Q_{f0} = 0.1Q_0 [m^3/s]$



(a) *Transitorio con una fuga en $x = L/4$* (b) *Transitorio con una fuga en $x = 3L/4$*

Figura 3.6: Fuga en la posición $x = L/4$ y su complemento con $Q_{f0} = 0.1Q_0 [m^3/s]$

3. ANÁLISIS DE LA ONDA DE PRESIÓN EN PRESENCIA DE FUGAS



(a) *Transitorio con una fuga en $x = L/6$* (b) *Transitorio con una fuga en $x = 5L/6$*

Figura 3.7: Fuga en la posición $x = L/6$ y su complemento con $Q_{f0} = 0.1Q_0$ [m^3/s]

3.1.2. Envolvente de la onda de presión

Debido a que no fue posible obtener una expresión general para la envolvente de la onda de presión con (3.11) se utilizaron las expresiones reportadas en Wang et al. (2002) para la envolvente positiva $E^+(t)$ y la negativa $E^-(t)$ dadas por

$$E^+(t) = Q_0Z \sum_{j=1}^N \frac{e^{-(R+R_x)t^*}}{N} \quad (3.13)$$

$$E^-(t) = -Q_0Z \sum_{j=1}^N \frac{e^{-(R+R_x)t^*}}{N}, \quad (3.14)$$

donde $t^* = t/(L/c)$, $R = fLQ_0/(2cDA)$, $R_x = F_L \sin^2 j\pi x$ y $F_L = BZ$ respectivamente.

Estas envolventes están asociadas al término de amortiguamiento producido por la posición de la fuga y al flujo de fuga. Se puede apreciar de R_x que entre más cerca esté la fuga de la válvula el valor de R_x es mayor y por tanto el amortiguamiento de la onda de presión es mayor. La Fig. 3.8 generada con una fuga en $x = 5L/6$ tiene un mayor amortiguamiento que las ondas de presión previamente presentadas con distancias menores al tanque.

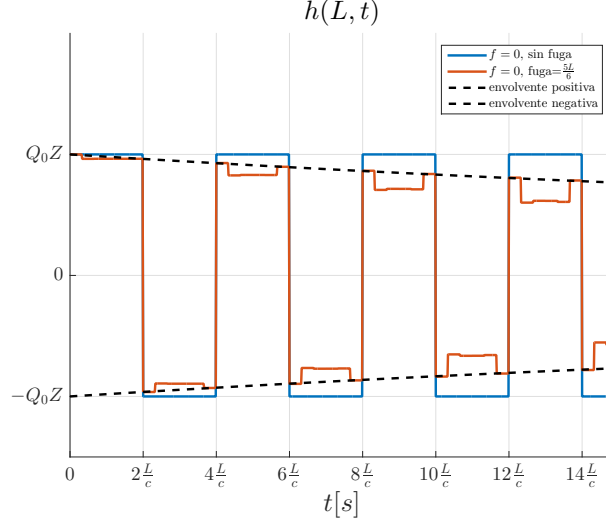


Figura 3.8: Transitorio con una fuga en $x = 5L/6$ y $Q_{f0} = 0.1Q_0$ [m^3/s]

En conclusión, con base en el análisis antes presentado se puede afirmar que en caso de poder perturbar el fluido en condición de fuga y tener al menos un periodo completo de la onda de presión, es factible identificar los parámetros asociados a la fuga, es decir posición y flujo de fuga.

3.2. Onda de presión ante la presencia de dos fugas

La expresión de la onda de presión para dos fugas se obtiene de (2.82) considerando la maniobra discontinua del cierre de la válvula como en el caso de una fuga. La expresión en el dominio de la Laplace contiene productos de funciones hiperbólicas que dependen de los parámetros de las dos fugas y se puede llevar a la forma

$$h(L, s) = \frac{Q_0Z \sinh(\gamma L) + \phi}{s \cosh(\gamma L) + \varphi} \quad (3.15)$$

donde ϕ es el producto de funciones hiperbólicas dependientes de ambas fugas, que

3. ANÁLISIS DE LA ONDA DE PRESIÓN EN PRESENCIA DE FUGAS

toma la forma

$$\begin{aligned}
\phi = & \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\sigma(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_1Z\bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_2Z\bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_1Z\bar{\sigma}(\gamma(L-2x_1)) \\
& - \frac{1}{2}\xi_2Z\bar{\sigma}(\gamma(L-2x_2)) - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\sigma(\gamma(L-2x_1)) + \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\sigma(\gamma(L-2x_2)) \\
& - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\sigma(\gamma(L+2x_1-2x_2))
\end{aligned} \tag{3.16}$$

y la función φ es el producto de funciones hiperbólicas que dependen de ambas fugas, dado por:

$$\begin{aligned}
\varphi = & \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\bar{\sigma}(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_1Z\sigma(\gamma L) + \frac{1}{2}\xi_2Z\sigma(\gamma L) - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\bar{\sigma}(\gamma(L-2x_2)) \\
& - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\bar{\sigma}(\gamma(L-2x_1)) - \frac{1}{2}\xi_1Z\sigma(\gamma(L-2x_1)) - \frac{1}{2}\xi_2Z\sigma(\gamma(L-2x_2)) \\
& - \frac{1}{4}\xi_1\xi_2Z^2\bar{\sigma}(\gamma(L+2x_1-2x_2)),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Para obtener la evolución de la onda de presión (3.15) en el dominio del tiempo, como en el caso de una fuga, las funciones hiperbólicas se sustituyen por las relaciones de Euler. De esta manera al manipularlas se obtiene la siguiente forma simplificada de la onda de presión en el dominio de s

$$h(L, s) = \frac{Q_0 Z \text{ num}}{s \text{ den}} \tag{3.18}$$

con

$$\text{num} = 1 + \alpha_1 e^{-2\gamma L} + \alpha_2 e^{-2\gamma x_1} - \alpha_3 e^{\gamma(2x_1-2L)} - \alpha_4 e^{\gamma(2x_2-2L)} + \alpha_5 e^{-2\gamma x_2} \tag{3.19}$$

$$+ \alpha_6 e^{\gamma(2x_1-2x_2)} - \alpha_7 e^{\gamma(-2L-2x_1+2x_2)}, \tag{3.20}$$

y

$$\text{den} = + \alpha_1 e^{-2\gamma L} + \alpha_2 e^{-2\gamma x_1} + \alpha_3 e^{\gamma(2x_1-2L)} + \alpha_4 e^{\gamma(2x_2-2L)} + \alpha_5 e^{-2\gamma x_2} \tag{3.21}$$

$$+ \alpha_6 e^{\gamma(2x_1-2x_2)} + \alpha_7 e^{\gamma(-2L-2x_1+2x_2)}, \tag{3.22}$$

Las expresiones de las constantes de $\alpha_1 - \alpha_7$ se pueden consultar en el Apéndice A.3. De la misma manera que en el caso de una fuga la función racional se puede expandir en términos de sus residuos, dicha expansión resulta en una suma de funciones escalón corridos en el tiempo

$$\begin{aligned}
h_L(t) = & Q_0 Z \left[1 - 2\alpha_3 \mathcal{U} \left(\frac{-2L + ct + 2x_1}{c} \right) - 2\alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-2L + ct + 2x_2}{c} \right) + \right. \\
& + 2\alpha_2 \alpha_3 \mathcal{U} \left(t - \frac{2L}{c} \right) + 6\alpha_1 \alpha_2^2 \alpha_3 \mathcal{U} \left(\frac{-4L + ct - 2x_1}{c} \right) \\
& - 2\alpha_2^2 \alpha_3 \mathcal{U} \left(\frac{-2L + ct - 2x_1}{c} \right) - 4\alpha_2 \alpha_3^2 \mathcal{U} \left(\frac{-4L + ct + 2x_1}{c} \right) \\
& - 4\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \mathcal{U} \left(t - \frac{4L}{c} \right) - 2\alpha_1^2 \alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-6L + ct + 2x_2}{c} \right) \\
& + 2\alpha_1 \alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-4L + ct + 2x_2}{c} \right) - 2\alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-2L + ct + 2x_2}{c} \right) \\
& + 6\alpha_1^2 \alpha_2 \alpha_3 \mathcal{U} \left(t - \frac{6L}{c} \right) - 12\alpha_2^2 \alpha_3^3 \mathcal{U} \left(\frac{-6L + ct + 2x_1}{c} \right) \\
& + 10\alpha_2^2 \alpha_3^4 \mathcal{U} \left(\frac{-8L + ct + 4x_1}{c} \right) + 4\alpha_3 \alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-4L + ct + 2(x_1 + x_2)}{c} \right) \\
& \left. + 12\alpha_1^2 \alpha_3 \alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-8L + ct + 2(x_1 + x_2)}{c} \right) - 8\alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \mathcal{U} \left(\frac{-6L + ct + 2(x_1 + x_2)}{c} \right) \dots \right] \tag{3.23}
\end{aligned}$$

La primera discontinuidad que aparece tiene como amplitud $2\alpha_3$ y aparece en la suma con el término $\mathcal{U} \left(\frac{-2L + ct + 2x_1}{c} \right)$, con la segunda discontinuidad de fuga con amplitud $2\alpha_4$ y aparece en la suma con el término $\mathcal{U} \left(\frac{-2L + ct + 2x_2}{c} \right)$

3. ANÁLISIS DE LA ONDA DE PRESIÓN EN PRESENCIA DE FUGAS

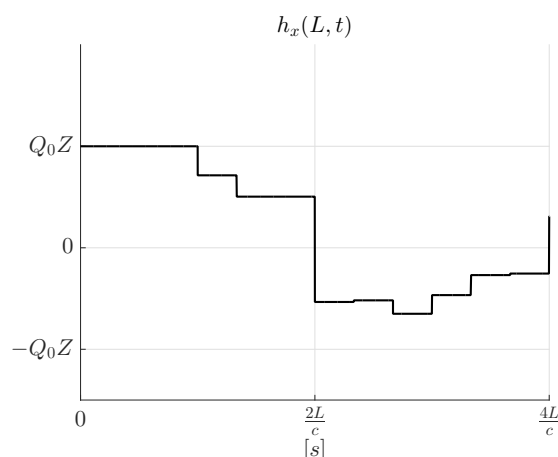


Figura 3.9: Transitorio de la presión aguas abajo con fugas en: $x_1 = L/2$ y $x_2 = L/3$ con $Q_{1f_0} = 0.3Q_0$ y $Q_{2f_0} = 0.3Q_0$ respectivamente

En la Fig. 3.9 se presenta la onda de presión para las fugas ubicadas en $x = L/2$ y $x = L/3$ y se aprecia en el primer semiciclo que la onda tiene dos discontinuidades. En el intervalo comprendido de $2L/c$ a $4L/c$ se observan un mayor número de discontinuidades. Esto puede deberse al número reducido de escalones que se han transformado. Por tanto se sugiere sólo considerar el intervalo de tiempo $[0 - 2L/c]$ para determinar las posiciones de las fugas.

3.3. Análisis numérico de la onda de presión

Una ventaja del MC es que permite analizar el comportamiento no lineal de las variables del ducto con configuraciones y escenarios más complejos. Tal es el caso de un ducto con fricción diferente de cero, ya que la expresión (3.15) no puede transformarse fácilmente al dominio del tiempo.

Usando el MC para el caso del ducto con los parámetros de la tabla ?? con un valor de fricción $f = 0.018$ sin fuga y provocando un cierre de la válvula se obtiene la onda de presión con línea continua en la Fig. 3.10. Se observa de la evolución de los pulsos que estos tienen una atenuación pero son de la misma frecuencia que el tren sin fricción, como se reporta en la literatura. Además, se puede decir que la atenuación del tren es pequeña por lo que este hecho justifica el uso del análisis de la función de transferencia sin fricción para determinar los efectos.

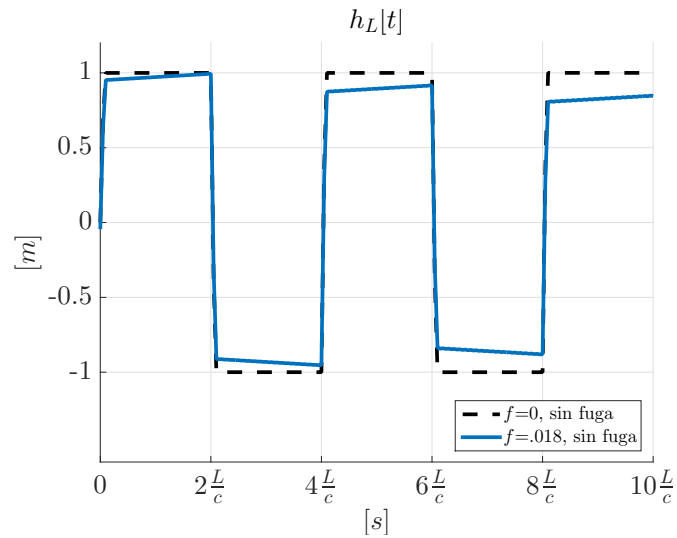


Figura 3.10: Presión aguas abajo de un ducto - Efectos de la fricción

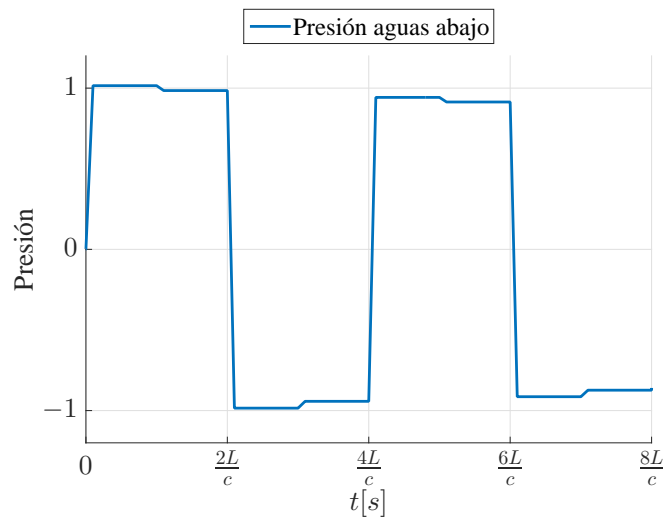


Figura 3.11: Presión aguas abajo de un ducto - considerando que existe una fuga en $x = L/2$

La Fig. 3.11 muestra la onda de presión simulada con MC cuando una fuga se encuentra a la mitad del ducto, obtenida a partir del modelo no lineal con un gasto del 10% del valor nominal. Se concluye que el MC permite obtener una descripción más completa de la presión comparándola con la obtenida con el método de matriz de transferencia.

Conclusiones

Partiendo del hecho de que cuando hay fuga en un ducto, se presenta una discontinuidad en la onda de presión, en este trabajo, se ha analizado la forma de la onda, producida por el cierre de una válvula en el dominio del tiempo. A diferencia de otros métodos previamente propuestos, el análisis presentado se basa en la respuesta transitoria obtenida analíticamente mediante el modelo de dimensión infinita de matriz de transferencia del ducto con fugas.

Se verificó que la respuesta transitoria de la onda de presión producida por una discontinuidad en presencia de fugas corresponde a una suma de funciones escalón con argumentos que dependen del tiempo, la longitud de la tubería, la velocidad de la onda y la ubicación de las fugas. Este hecho permite obtener, a partir de los argumentos y el factor de atenuación de los funciones escalón, la posición y magnitud de la fuga en el primer pulso de la onda de presión de manera teórica. El análisis es apto para fugas pequeñas dado que se considera un modelo linealizado en el análisis frecuencial.

Es importante recalcar que el primer frente de onda de presión es el más recomendado para caracterizar las fugas dado que es cuando los efectos de la perturbación están menos atenuados.

Una ventaja de la expresión de la onda de presión como funciones escalón desfasados es que se requiere un menor número de términos en la sumatoria que con la descripción de suma de señales senoidales.

Como trabajo futuro, se tiene la validación experimental de este resultado que consistirá en aplicar una maniobra práctica que permita el análisis de los transitorios generados.

También se pretende analizar el comportamiento transitorio de la presión en diferentes puntos del ducto, para obtener información de los efectos de la fuga cuando se propaga la onda en presencia de fuga.

Bibliografía

- Benkherouf, A. and Allidina, A. (1988). Leak detection and location in gas pipelines. In *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, volume 135, pages 142–148. IET. 3
- Brunone, B. (1999). Transient test-based technique for leak detection in outfall pipes. *Journal of water resources planning and management*, 125(5):302–306. 3, 33
- Brunone, B. and Ferrante, M. (2001). Detecting leaks in pressurised pipes by means of transients. *Journal of hydraulic research*, 39(5):539–547. 3
- Brunone, B. and Ferrante, M. (2004). Pressure waves as a tool for leak detection in closed conduits. *Urban Water Journal*, 1(2):145–155. 3
- Carmona, R. (2016). Notas, hidráulica de fluidos. Technical report, Facultad de Ingeniería. 10
- Chaudhry, M. H. (2013). *Applied Hydraulic Transients*. Springer Science & Business Media. 10, 11, 13, 21
- Colombo, A. F., Lee, P., and Karney, B. W. (2009). A selective literature review of transient-based leak detection methods. *Journal of Hydro-environment Research*, 2(4):212–227. 3, 4
- Covas, D., Ramos, H., and De Almeida, A. B. (2005). Standing wave difference method for leak detection in pipeline systems. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(12):1106–1116. 3
- Digernes, T. (1980). Real-time failure-detection and identification applied to supervision of oil transport in pipelines. *Modeling, identification and control*, 1(1):39. 3
- Isermann, R. (2011). *Fault-diagnosis applications: model-based condition monitoring: actuators, drives, machinery, plants, sensors, and fault-tolerant systems*. Springer Science & Business Media. 1

- Kapelan, Z., Savic, D., and Walters, G. (2004). Incorporation of prior information on parameters in inverse transient analysis for leak detection and roughness calibration. *Urban Water Journal*, 1(2):129–143. 3
- Kim, S. H. (2005). Extensive development of leak detection algorithm by impulse response method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(3):201–208. 5
- Lee, P. J., Vítkovský, J. P., Lambert, M. F., Simpson, A. R., and Liggett, J. A. (2005a). Frequency domain analysis for detecting pipeline leaks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(7):596–604. 3
- Lee, P. J., Vítkovský, J. P., Lambert, M. F., Simpson, A. R., and Liggett, J. A. (2005b). Leak location using the pattern of the frequency response diagram in pipelines: a numerical study. *Journal of Sound and Vibration*, 284(3):1051–1073. 3
- Liggett, J. A. and Chen, L.-C. (1994). Inverse transient analysis in pipe networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(8):934–955. 3
- Liou, C. P. (1993). Pipeline leak detection based on mass balance. In *Pipeline Infrastructure II*, pages 175–188. ASCE. 2
- Mpesha, W., Gassman, S. L., and Chaudhry, M. H. (2001). Leak detection in pipes by frequency response method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 127(2):134–147. 3
- Mpesha, W., Hanif Chaudhry, M., and Gassman, S. L. (2002). Leak detection in pipes by frequency response method using a step excitation. *Journal of hydraulic research*, 40(1):55–62. 5
- Muñoz, A., Verde, C., Torres, L., and CONACYT, C. (2015). Localización de múltiples fugas usando la onda de presión. In *Congreso Nacional de Control Automático*. 4, 5
- Pudar, R. S. and Liggett, J. A. (1992). Leaks in pipe networks. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(7):1031–1046. 3
- Suo, L. and Wylie, E. (1989). Impulse response method for frequency-dependent pipeline transients. *Journal of fluids engineering*, 111(4):478–483. 5
- Torres, L., Besançon, G., Navarro, A., Begovich, O., and Georges, D. (2011). Examples of pipeline monitoring with nonlinear observers and real-data validation. In *8th IEEE International Multi-Conf on Signals Systems and Devices, Sousse, Tunisia*. 2

- Torres, L., Verde, C., Besançon, G., and Gonzalez, O. (2014). High-gain observers for leak location in subterranean pipelines of liquefied petroleum gas. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6):1127–1141. 2
- Verde, C., Gentil, S., and Morales-Menéndez, R. (2013). *Monitoreo y diagnóstico automático de fallas en sistemas dinámicos*. Trillas. 2
- Verde, C., Molina, L., and Torres, L. (2014). Parameterized transient model of a pipeline for multiple leaks location. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 29:177–185. 3
- Verde, C., Torres, L., and González, O. (2016). Decentralized scheme for leaks' location in a branched pipeline. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 43:18–28. 2
- Vítkovský, J. P., Simpson, A. R., and Lambert, M. F. (1999). Leak detection and calibration of water distribution system using transient and genetic algorithms. In *Water Distribution System Conference, Division of Water Resource Planning and Management*. 3
- Wang, X.-J., Lambert, M. F., Simpson, A. R., Liggett, J. A., and Vítkovský, J. P. (2002). Leak detection in pipelines using the damping of fluid transients. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(7):697–711. 3, 5, 36, 42
- Wylie, E. B. (1993). *Fluid transients in systems*, volume 1. 11, 17

Apéndice A

Código/Tablas/Información Complementaria

A.1. Tabla de parámetros

Tabla A.1: Tabla de parámetros

Símbolo	Significado	Unidades
Q_0	Flujo en estado estacionario	$8.563 \times 10^{-4} [m^3/s]$
H_0	Columna de presión en estado estacionario	$20 [mca]$
q	Flujo w.r.t. (Q_0, H_0)	$[m^3/s]$
h	Presión w.r.t. (Q_0, H_0)	$[mca]$
c	Velocidad de onda	$1488 [m/s]$
D	Diámetro sección transversal	$0.105 [m]$
L	Longitud de ducto	$200 [m]$
f	Coefficiente de fricción	$0 [-]$
A	Área de sección transversal	$0.0087 [m^2]$
g	Aceleración de la gravedad	$9.8100 [m/s^2]$

A.2. Transformada inversa de Laplace

Esta sección se presentan algunas transformadas de utilidad para llevar la respuesta de $h(L, s)$ en el dominio de Laplace al tiempo.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{A.1}$$

Tabla A.2: Tabla de transformadas de Laplace

	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$u(t - c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$
2	$f(t + T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$
3	$f(t) = 1 - 2u(t - T/2) + u(t - T)$	$\frac{1}{s} \tanh(Ts/4)$

La transformada de Laplace para una función periódica de la Fig. A.1 se describe a continuación:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq T/2 \\ -1 & \text{si } T/2 < t \leq T \end{cases} \tag{A.2}$$

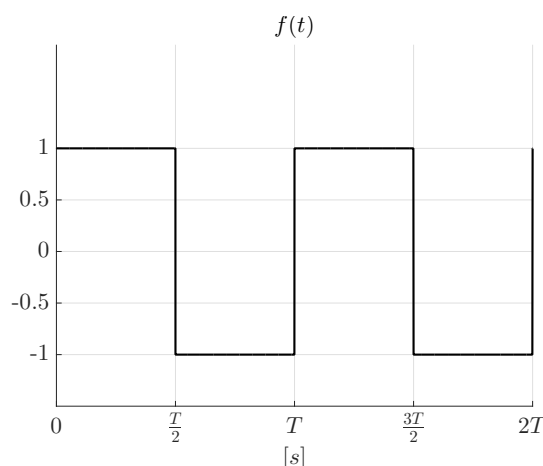


Figura A.1: Función periódica: tren de pulsos

Se deben de cumplir las propiedades de una función periódica cuando a intervalos iguales de tiempo pasa por valores iguales en $f(t)$. Matemáticamente se dice que una función $f(t)$ es periódica si para todo valor de t se verifica que:

$$f(t) = f(t + nT) \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.3})$$

siendo T el periodo.

Aplicando la transformada 2 de la Tabla ?? a la ec. (A.1), la integral toma dos valores en diferentes intervalos, para la integral evaluada de 0 a $T/2$ toma el valor positivo de la función $f(t)$ y para el valor negativo de la función $f(t)$ en $T/2$ a T , por tanto

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \left[\int_0^{T/2} e^{-st} (Q_0 Z) dt + \int_{T/2}^T e^{-st} (-Q_0 Z) dt \right]$$

resolviendo las integrales y simplificando términos se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = Q_0 Z \frac{1}{s} \frac{e^{Ts/4} - e^{-Ts/4}}{e^{Ts/4} + e^{-Ts/4}} = Q_0 Z \frac{1}{s} \tanh(Ts/4)$$

siendo el valor de $T = 4L/c$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = Q_0 Z \frac{1}{s} \tanh(\gamma s)$$

A.3. Expresiones de las constantes de la presión transitoria aguas abajo del ducto

En este apéndice se despliegan las constantes, las cuales dependen de los valores como la impedancia característica que se considera igual antes y después de la fuga, también dependen del flujo de salida de cada una de las fugas.

$$\alpha_1 \rightarrow \frac{\xi_1 \xi_2 Z^2 - 2\xi_1 Z - 2\xi_2 Z + 4}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.4})$$

$$\alpha_2 \rightarrow \frac{-\xi_1 \xi_2 Z^2 - 2\xi_1 Z}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.5})$$

$$\alpha_3 \rightarrow \frac{2\xi_1 Z - \xi_1 \xi_2 Z^2}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.6})$$

$$\alpha_4 \rightarrow \frac{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_2 Z}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha_5 \rightarrow \frac{\xi_1 \xi_2 Z^2 - 2\xi_2 Z}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha_6 \rightarrow -\frac{\xi_1 \xi_2 Z}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.9})$$

$$\alpha_7 \rightarrow -\frac{\xi_1 \xi_2 Z^2}{\xi_1 \xi_2 Z^2 + 2\xi_1 Z + 2\xi_2 Z + 4} \quad (\text{A.10})$$

A.4. Apéndice código

En esta sección se presenta el código para realizar las simulaciones con el método de las características, se despliega el valor que toman las constantes del ducto y el cálculo de las condiciones iniciales y se emplea código para seguir el diagrama de flujo del capítulo 2 y finalmente se despliegan los resultados en una arreglo donde guarda los valores de presiones y flujos en cada punto del ducto y en diferentes instantes de tiempo.

```

NS=N+1;
R=F*XL/(2*G*D^5*(pi/4)^2*N);
B=A/(G*(pi/4)*D^2);
DT=XL/(A*N); % incremento en el tiempo (paso)

% Flujo en estado estacionario y almacenamiento de variables iniciales

HO=HR/(1+(NS-1)*R*(CDA^2)*2*G); % HO es donde se encuentra la válvula en el extremo aguas abajo
HO=H(6), NS=6 porque está en la válvula
QO=sqrt(CDA^2*2*G*HO);
CVP=(QO*1)^2/(2*HO); % TAU vale 1 porque la válvula está completamente abierta
%H=[];
for I=1:NS
    H(I)=HR-(I-1)*R*QO^2;
    Q(I)=QO;
end

T=0; % s tiempo
K=0;
TG(1)=T; %vector de tiempo para graficar
TAU=1; % porcentaje de apertura de la válvula
m=1; %variable auxiliar para el contador de tiempo

%Condiciones iniciales para el priemer tubo
for I=1:6
    HA(I)=H(I);
    QA(I)=QO;
end
%Condiciones iniciales para el segundo tubo
for I=7:12
    HA(I)=H(I-1);
    QA(I)=QO;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% termina el cálculo del primer renglón

while T<TMAX

T=T+DT;
K=K+1;
m=m+1;
TG(m)=T;
% Cálculo de los puntos interiores del primer tubo
for I=2:5
    CP=HA(K,I-1)+QA(K,I-1)*(B-R*abs(QA(K,I-1)));
    CM=HA(K,I+1)-QA(K,I+1)*(B-R*abs(QA(K,I+1)));
    HP(K,I)=0.5*(CP+CM);
    QP(K,I)=(HP(K,I)-CM)/B;
end

```



```

% Cálculo de los puntos interiores del segundo tubo
for I=8:11
    CP=HA(K,I-1)+QA(K,I-1)*(B-R*abs(QA(K,I-1)));
    CM=HA(K,I+1)-QA(K,I+1)*(B-R*abs(QA(K,I+1)));
    HP(K,I)=0.5*(CP+CM);
    QP(K,I)=(HP(K,I)-CM)/B;
end

% Cálculo del punto de fuga
I=6;
J=I+1;
CF=QO*TAUF/(4*HA(1,I));
CP=HA(K,I-1)+QA(K,I-1)*(B-R*abs(QA(K,I-1)));
CM=HA(K,J+1)-QA(K,J+1)*(B-R*abs(QA(K,J+1)));
%HP(K,I)=0.5*(CP+CM)-QO*B*TAUF*.5;
%HP(K,I+1)=0.5*(CP+CM)-QO*B*TAUF*.5;
HP(K,I)=2*(CF*B)^2-2*sqrt((CF*B)^4+(CF*B)^2*(CP+CM)*.5)+(CP+CM)*.5;
HP(K,I+1)=2*(CF*B)^2-2*sqrt((CF*B)^4+(CF*B)^2*(CP+CM)*.5)+(CP+CM)*.5;
QP(K,I)=(CP-HP(K,I))/B;
QP(K,I+1)=(-CM+HP(K,I))/B;

% Condiciones de frontera en el extremo aguas arriba

HP(K,1)=HR; % extremo aguas arriba del ducto (depósito)
QP(K,1)=QA(K,2)+(HP(K,1)-HA(K,2)-R*QA(K,2)*abs(QA(K,2)))/B; % extremo aguas arriba del
ducto (depósito)

% Condiciones de frontera en el extremo aguas bajo
if T<TC+DT
    %TAU=(1-T/TC)^(EM);
    TAU=1;
    CV=TAU^2*CVP;
    CP1=HA(K,N+1)+QA(K,N+1)*(B-R*abs(QA(K,N+1)));
    QP(K,NS+1)=-CV*B+sqrt(CV^2*B^2+CV*CP1^2);
    HP(K,NS+1)=CP1-B*QP(K,NS+1);

end

if T>=TC+DT

    TAU=0;CV=0;
    %TAU=1;CV=TAU^2*CVP;
    CP1=HA(K,N+1)+QA(K,N+1)*(B-R*abs(QA(K,N+1)));
    QP(K,NS+1)=-CV*B+sqrt(CV^2*B^2+CV*CP1^2);
    HP(K,NS+1)=CP1-B*QP(K,NS+1);

end

% Se guardan las condiciones de todo el ducto para la siguiente iteración
% Guardo las condiciones para la siguiente iteración y todo meterlo en un while

```

```
for I=1:12 %Aquí debo de cambiar ese subíndice
    HA(K+1,I)=HP(K,I);
    QA(K+1,I)=QP(K,I);
end

end
TGHQ=[TG' real(HA(:,NS+1)) real(QA(:,1))];

real(HA);
real(QA);
```