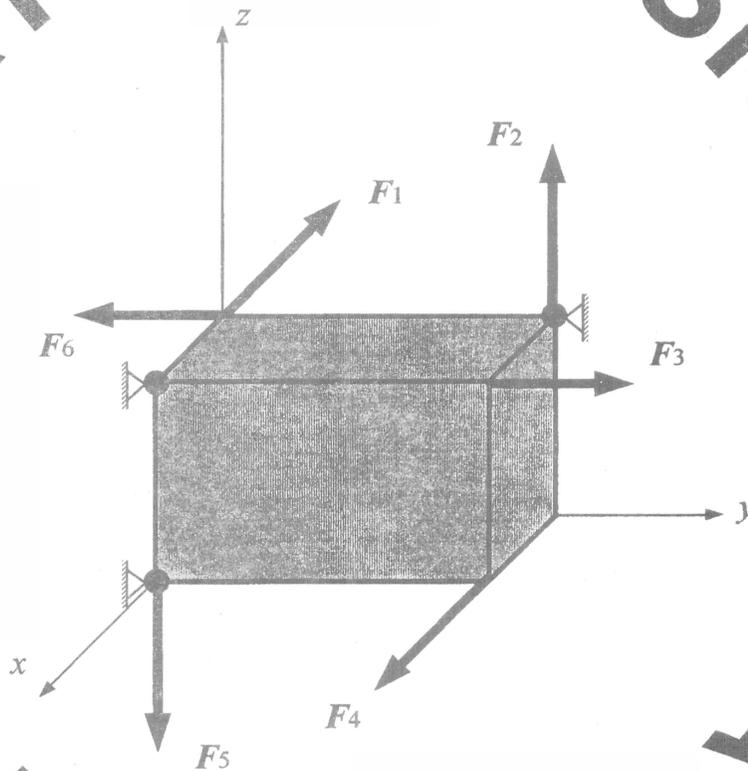




DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

# ESTÁTICA BÁSICA PARA INGENIEROS



PRIMERA VERSIÓN

JAIME MARTÍNEZ

JORGE SOLAR

**ESTÁTICA BÁSICA PARA INGENIEROS**

JAIME MARTÍNEZ MARTÍNEZ

Y

JORGE SOLAR GONZÁLEZ.

PROFESORES DE TIEMPO COMPLETO,  
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA,  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS,  
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM.

PRIMERA VERSIÓN  
ABRIL DE 1999



SECRETARIA  
DE  
EDUCACION PUBLICA

## INSTITUTO NACIONAL DEL DERECHO DE AUTOR REGISTRO PUBLICO DEL DERECHO DE AUTOR

### C E R T I F I C A D O

Para los efectos de los artículos 13 fracción XIV, 162, 163 fracción I, 168, 169, 209 fracción III y demás relativos de la Ley Federal del Derecho de Autor, se hace constar que la **COMPILACION** cuyas especificaciones aparecen a continuación, ha quedado inscrita en el Registro Público del Derecho de Autor, para efecto de su protección en aquello que por razón de la selección y disposición del contenido constituya la creación de carácter intelectual:

**AUTORES:** MARTINEZ MARTINEZ JAIME  
SOLAR GONZALEZ JORGE

**TITULO:** ESTATICA BASICA PARA INGENIEROS

**RAMA:** COMPILACION DE DATOS

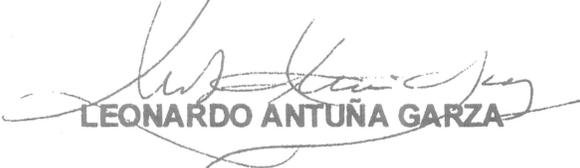
**TITULARES:** MARTINEZ MARTINEZ JAIME  
SOLAR GONZALEZ JORGE

---

NUMERO DE REGISTRO: 03-1999-120811034300-01

---

México D.F., a 9 de diciembre de 1999  
SUFRAGIO EFECTIVO. NO REELECCION  
EL SUBDIRECTOR DE REGISTRO DE OBRAS Y CONTRATOS

  
LEONARDO ANTUÑA GARZA



FACULTAD DE INGENIERIA

Caja 74

FACULTAD DE INGENIERIA



\*612722\*

G.- 612722

G- 612722

## PRESENTACIÓN

La Facultad de Ingeniería ha decidido realizar una serie ediciones provisionales de obras recientemente elaboradas por académicos de la institución, como material de apoyo para sus clases, de manera que puedan ser aprovechadas de inmediato por alumnos y profesores. Tal es el caso de *Estática básica para ingenieros*, elaborada por Jaime Martínez y Jorge Solar.

Se invita a los estudiantes y profesores a que comuniquen a los autores las observaciones y sugerencias que mejoren el contenido de la obra, con el fin de que se incorporen en una futura edición definitiva.

## PRÓLOGO

Con la intención fundamental de coadyuvar a la enseñanza y al aprendizaje de los conceptos de estática que todo ingeniero debe poseer y saber aplicar, los que esto suscribimos nos dimos a la tarea de elaborar un texto que, además de cubrir suficientemente el programa vigente de la asignatura Estática, que se imparte a todos los estudiantes de ingeniería de la División de Ciencias Básicas, de la Facultad de Ingeniería, UNAM, presentara algunos elementos que facilitarían la comprensión y/o el tratamiento de los mencionados conceptos de estática.

Así pues, como parte esencial, esta obra comprende los temas de la asignatura mencionada, misma que no incluye actualmente en su programa el tema Sistema de Unidades, ya que dicho tema está incluido en el programa de Física Experimental, que corresponde al primer semestre de las licenciaturas que a la fecha se cursan en nuestra Facultad; Estática corresponde al segundo semestre.

Con carácter complementario, como consideramos que buena parte de lo correspondiente a los sistemas de unidades está íntimamente ligado con los conceptos de estática que aquí desarrollamos, en el apéndice A de este texto, presentamos diversas partes relacionadas con dichos sistemas.

Con ese mismo carácter, en el apéndice B, presentamos algo esencial acerca de componentes vectoriales y escalares, algunas definiciones y propiedades importantes del álgebra vectorial de  $E^3$ , definiciones de los productos escalar y vectorial, así como algunos ejemplos donde estos productos se ejemplifican y/o requieren, pues los elementos citados en este párrafo intervienen de manera imprescindible en el actual tratamiento de la mecánica clásica.

Al elaborar esta obra, tratamos en todo momento de presentar definiciones, conceptos y desarrollos desde un punto de vista muy personal; sin embargo esto no siempre fue posible, ya que para diversos casos se tienen definiciones, conceptos y desarrollos tan claros, tanto de personajes de la mecánica como de otros autores, que resultaría pretencioso el intentar presentarlos de otro modo.

Adicionalmente a lo anterior citaremos que, los ejercicios que aquí presentamos han sido diseñados y resueltos por alguno de los que esto suscribimos, o por los dos. Sin embargo, dada la cantidad de problemas que han sido presentados por autores de otras obras sobre la misma temática, no dudamos que algunos de ellos guarden cierta semejanza con otros.

Algunos de los ejercicios aquí presentados han sido resueltos empleando sólo ecuaciones escalares, otros utilizando solamente ecuaciones vectoriales, y otros aplicando tanto ecuaciones

escalares como vectoriales, ya que consideramos conveniente mostrar diversas maneras de resolver problemas de mecánica clásica.

Consideramos que esa variedad en la resolución de los ejercicios, que presentamos, también debe coadyuvar a que el lector tenga conciencia de que, antes de resolver un determinado problema, debe analizar si hay varias opciones para llevar a cabo la resolución correspondiente y, de ser el caso, adopte la que considere idónea.

Hemos de mencionar que, con la finalidad de simplificar la notación, exceptuando los casos en que el símbolo suma sea imprescindible, utilizaremos los símbolos  $F$ ,  $F_x$ ,  $M_O$ ,  $M_A$ ,  $M_{zz}$ , en vez de  $\sum F$ ,  $\sum F_x$ ,  $\sum M_O$ ,  $\sum M_A$ ,  $\sum M_{zz}$ . Con la misma finalidad, cada vez que sea necesario referirnos a un determinado diagrama de cuerpo libre, emplearemos las siglas d.c.l.

Asimismo, las cantidades vectoriales las indicaremos con “negritas”, en tanto que las escalares no; por ejemplo, en la igualdad  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ :  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  son cantidades vectoriales, en tanto que  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  son cantidades escalares.

Dedicamos este material a nuestras familias, de quienes hemos recibido tanto la comprensión como el apoyo necesarios para elaborarlo, ya que en muchas ocasiones nos cedieron tiempo que les correspondía compartir con nosotros.

Agradecemos, en todo lo que vale, tanto el gusto como la dedicación que mostraron César Báez Rojano y Claudia Juárez Ugalde, en la elaboración –mediante computadora– de una gran parte del texto y de los gráficos, respectivamente, de esta obra. Asimismo, se agradece a Raúl Escalante Rosas su asesoría acerca de la paquetería de cómputo aquí empleada.

De antemano damos las gracias a los lectores por los comentarios y observaciones que nos hagan llegar, encaminadas al complemento y mejora de este material, que esperamos sea del agrado de quien lo lea, y que deseamos contribuya a la formación y al desarrollo de ingenieros competitivos, así como con reconocimiento tanto a nivel nacional como internacional.

Atentamente

Jaime Martínez Martínez  
Jorge Solar González

Abril 30 de 1999

# ÍNDICE

PRÓLOGO .....	I, II
ÍNDICE .....	III a VIII
<b>I. FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CLÁSICA .....</b>	<b>1 a 40</b>
I.1 RESUMEN HISTÓRICO DE LA MECÁNICA CLÁSICA; PERSONAJES PRINCIPALES Y APORTACIONES .....	1 a 21
I.2 DEFINICIONES DE MODELOS DE CUERPO, PARTÍCULA, CUERPO RÍGIDO Y CUERPO DEFORMABLE. ENUNCIADOS Y EXPLICACIÓN DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA LEYES DE NEWTON. ENUNCIADOS Y APLICACIONES SENCILLAS DE LA LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL .....	21 a 40
I.2.1 DEFINICIONES .....	21
I.2.2 TIPOS DE MECÁNICA .....	22
I.2.3 ESTADOS DE LA MATERIA .....	23
I.2.4 CONCEPTOS DE TIEMPO, LONGITUD, MASA Y FUERZA .....	24
I.2.5 DIVISIÓN DE LA MECÁNICA NEWTONIANA .....	25
I.2.6 CONCEPTO DE MODELO EN EL AMBITO DE LA FÍSICA. TIPOS DE MODELO .....	26
I.2.7 CONCEPTO DE CANTIDADES ESCALARES Y VECTORIALES .....	28
I.2.8 ENUNCIADOS Y EXPLICACIÓN DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA LEYES DE NEWTON .....	28
I.2.9 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL. APLICACIONES SENCILLAS .....	31
<b>II. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA .....</b>	<b>41 a 91</b>
II.1 DIVERSOS TIPOS DE FUERZAS: DESCRIPCIÓN; EFECTOS INTERNOS Y EXTERNOS PRODUCIDOS POR ELLAS. VECTOR REPRESENTATIVO DE UNA FUERZA. POSTULADO DE STEVIN. RESULTANTE DE UN CONJUNTO DE FUERZAS CONCURRENTES. ENUNCIADOS DE LOS PRINCIPIOS DE EQUILIBRIO, DE TRANSMISIBILIDAD Y DE SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS. PROCESOS DE COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS .....	41 a 69

II.1.1	DIVERSOS TIPOS DE FUERZAS Y SU DESCRIPCIÓN	41
II.1.2	EFFECTOS INTERNOS Y EXTERNOS PRODUCIDOS POR FUERZAS	42
II.1.3	VECTOR REPRESENTATIVO DE UNA FUERZA	42
II.1.4	POSTULADO DE STEVIN O REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO. RESULTANTE DE UN CONJUNTO DE FUERZAS CONCURRENTES	45
II.1.5	ENUNCIADOS DE LOS PRINCIPIOS DE SUPERPOSICIÓN DE CAUSA Y EFECTOS, DE EQUILIBRIO Y DE TRANSMISIBILIDAD	52
II.1.6	PROCESOS DE COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS	54
II.2	MOMENTOS DE UNA FUERZA, CON RESPECTO A UN PUNTO Y CON RESPECTO A UN EJE. PAR DE FUERZAS. MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS	70 a 91
II.2.1	MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO	70
II.2.2	MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE	71
II.2.3	PAR DE FUERZAS. MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS	85
<b>III.</b>	<b>ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS</b>	<b>92 a 170</b>
III.1	DEFINICIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA. ECUACIONES VECTORIAL Y ESCALAR DE LA LÍNEA DE ACCIÓN DE UNA FUERZA. OBTENCIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE FUERZAS CON DIFERENTES CARACTERÍSTICAS. TEOREMA DE VARIGNON. SISTEMA GENERAL DE FUERZAS: DEFINICIÓN; CASOS PARTICULARES MÁS IMPORTANTES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. COORDENADAS VECTORIALES CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES, COLINEALES, PARALELAS Y GENERALES, EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO	92 a 124
III.1.1	DEFINICIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA. ECUACIONES VECTORIAL Y ESCALAR DE LA LÍNEA DE ACCIÓN DE UNA FUERZA	92
III.1.2	OBTENCIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE FUERZAS CON DIFERENTES CARACTERÍSTICAS	95
III.1.3	TEOREMA DE VARIGNON	100
III.1.4	SISTEMA GENERAL DE FUERZAS: DEFINICIÓN; CASOS PARTICULARES MÁS IMPORTANTES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO	104
III.1.5	COORDENADAS VECTORIALES CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES, COLINEALES, PARALELAS Y GENERALES, EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO	107

III.2	DEFINICIÓN DE EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE FUERZAS. DEFINICIONES DE TRASLACIÓN DE UNA FUERZA Y DE PAR DE TRANSPORTE .....	125 a 135
III.2.1	DEFINICIÓN DE EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE FUERZAS .....	125
III.2.2	DEFINICIONES DE TRASLACIÓN DE UNA FUERZA Y DE PAR DE TRANSPORTE ....	132
III.3	DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS IRREDUCTIBLES. CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UNA SOLA FUERZA. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UNA SOLA FUERZA. CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UN PAR DE FUERZAS. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN PAR DE FUERZAS. EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE FUERZAS: DEFINICIÓN; ECUACIONES VECTORIALES Y ECUACIONES CARTESIANAS. CONDICIÓN PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS SEA REDUCTIBLE A UN MOTOR (FUERZA Y PAR NO COPLANARES; LLAVE DE TORSIÓN). MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN MOTOR .....	136 a 170
III.3.1	REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS. DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS IRREDUCTIBLES .....	136
III.3.2	CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UNA SOLA FUERZA. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UNA SOLA FUERZA .....	136
III.3.3	CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UN PAR DE FUERZAS. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN PAR DE FUERZAS .....	145
III.3.4	EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE FUERZAS: DEFINICIÓN; ECUACIONES VECTORIALES Y ECUACIONES CARTESIANAS .....	149
III.3.5	CONDICIÓN PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS SEA REDUCTIBLE A UN MOTOR (FUERZA Y PAR NO COPLANARES; LLAVE DE TORSIÓN). MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN MOTOR .....	152
IV.	DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE .....	171 a 198
IV.1	DEFINICIONES DE RESTRICCIONES AL GIRO Y AL DESPLAZAMIENTO DE UN CUERPO. DESCRIPCIÓN DE LOS APOYOS MÁS EMPLEADOS EN LA INGENIERÍA. DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL .....	171 a 177
IV.1.1	DEFINICIONES DE RESTRICCIONES AL GIRO Y AL DESPLAZAMIENTO DE UN CUERPO .....	171
IV.1.2	DESCRIPCIÓN DE LOS APOYOS MÁS EMPLEADOS EN LA INGENIERÍA .....	173
IV.1.3	DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL .....	176

IV.2 EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE: DEFINICIÓN; SU IMPORTANCIA Y SECUENCIA PARA OBTENERLO. ELABORACIÓN DE DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE DONDE INTERVIENEN DIVERSOS TIPOS DE FUERZAS Y/O PARES: PARA CUERPOS RÍGIDOS QUE ESTÁN EN CONTACTO CON OTROS, Y PARA CUERPOS RÍGIDOS CONECTADOS A SUS APOYOS, O CONECTADOS CON OTROS CUERPOS .....	177 a 196
IV.3 RECOMENDACIONES RELACIONADAS CON LOS DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE REQUERIDOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE EQUILIBRIO, O DE MOVIMIENTO .....	197 a 198
<b>V. FRICCIÓN .....</b>	<b>199 a 241</b>
V.I FUERZA DE FRICCIÓN: DEFINICIÓN GENERAL; CASOS EN QUE OCASIONA EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO, Y CASOS EN QUE SE OPONE A QUE SE MUEVA. DESCRIPCIÓN DE LAS FUERZAS DE FRICCIÓN ESTÁTICA, DINÁMICA, EN SECO Y FLUIDA. DEFINICIÓN DE FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE .....	199 a 208
V.1.1 ELEMENTOS RELACIONADOS CON EL FENÓMENO DE LA FRICCIÓN .....	199
V.1.2 DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO DE LA FRICCIÓN. CASOS EN QUE LA FRICCIÓN OCASIONA EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO Y CASOS EN QUE SE OPONE A QUE SE MUEVA .....	202
V.1.3 DESCRIPCIÓN DE LAS FUERZAS DE FRICCIÓN EN SECO, FLUIDA, ESTÁTICA Y DINÁMICA. DEFINICIÓN DE FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE .....	204
V.2 LEYES DE COULOMB-MORIN PARA FRICCIÓN EN SECO. DETERMINACIÓN DE FUERZAS DE FRICCIÓN EN CASOS DONDE INTERVIENEN DOS, Y CASOS DONDE SE ENCUENTRAN MÁS DE DOS, CUERPOS EN CONTACTO, CONTEMPLANDO SITUACIONES EN QUE LOS MÓDULOS DE DICHAS FUERZAS SON PROPORCIONALES A LAS MAGNITUDES DE LAS FUERZAS NORMALES, Y SITUACIONES EN QUE NO LO SON .....	208 a 241
V.2.1 LEYES DE COULOMB-MORIN PARA FRICCIÓN EN SECO .....	208
V.2.2 DETERMINACIÓN DE FUERZAS DE FRICCIÓN EN CASOS DONDE INTERVIENEN DOS, Y CASOS DONDE SE ENCUENTRAN MÁS DE DOS, CUERPOS EN CONTACTO, CONTEMPLANDO SITUACIONES EN QUE LOS MÓDULOS DE DICHAS FUERZAS SON PROPORCIONALES A LAS MAGNITUDES DE LAS FUERZAS NORMALES, Y SITUACIONES EN QUE NO LO SON .....	214
V.2.3 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICA. ALGUNAS TABLAS QUE INCLUYEN COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA Y DE FRICCIÓN CINÉTICA .....	234

**VI. PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES DE SUPERFICIES PLANAS ..... 242 a 266**

VI.1 PRIMEROS MOMENTOS DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS CON RESPECTO A DIVERSOS EJES. CENTROIDES DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS SIMPLES, DE CONFIGURACIÓN SENCILLA ..... 242 a 253

VI.2 CENTROS DE FUERZAS CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS DISTRIBUIDAS CONTINUAMENTE, PARA CASOS EN QUE LAS FUERZAS TIENEN MAGNITUD CONSTANTE, Y PARA CASOS EN QUE SU MAGNITUD VARIA LINEALMENTE. CENTROIDES DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS COMPUESTAS, DE CONFIGURACIÓN SENCILLA ..... 253 a 266

VI.2.1 CENTROS DE FUERZAS CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS DISTRIBUIDAS CONTINUAMENTE, PARA CASOS EN QUE LAS FUERZAS TIENEN MAGNITUD CONSTANTE, Y PARA CASOS EN QUE SU MAGNITUD VARIA LINEALMENTE ..... 253

VI.2.2 CENTROIDES DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS COMPUESTAS, DE CONFIGURACIÓN SENCILLA ..... 257

**VII. EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS Y DE CUERPOS ..... 267 a 324**

VII.1 DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EQUILIBRIO. ESTABLECIMIENTO DE LAS CONDICIONES VECTORIALES Y DE LAS CONDICIONES ESCALARES PARA EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL ESPACIO. OBTENCIÓN Y APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES ..... 267 a 284

VII.1.1 RESULTANTE Y MOMENTO DE UN SISTEMA DE FUERZAS. DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EQUILIBRIO ..... 267

VII.1.2 ESTABLECIMIENTO DE LAS CONDICIONES VECTORIALES Y DE LAS CONDICIONES ESCALARES PARA EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL ESPACIO ..... 268

VII.1.3 OBTENCIÓN Y APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES ..... 270

VII.1.4 APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EL ESPACIO ..... 279

VII.2 DEFINICIÓN DE CUERPO EN EQUILIBRIO. ESTADOS DE EQUILIBRIO ESTÁTICO Y DE EQUILIBRIO DINÁMICO: DEFINICIONES E IDENTIFICACIONES DE DICHS ESTADOS ... 285 a 287

VII.3 OBTENCIÓN DE REACCIONES EN LOS APOYOS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS TÍPICAS, ASÍ COMO EN SOPORTES DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS ..... 288 a 298

VII.4 APLICACIÓN DE CONDICIONES VECTORIALES Y ESCALARES, DE EQUILIBRIO, A CUERPOS RÍGIDOS EN ESTADO DE EQUILIBRIO ISOSTÁTICO, SUJETOS A CARGAS COPLANARES, Y A SISTEMAS GENERALES DE FUERZAS EN EL ESPACIO ..... 299 a 324

<b>APÉNDICE A. SISTEMAS DE UNIDADES</b> .....	<b>325 a 349</b>
A.1 UNIDADES DE MEDICIÓN .....	325
A.2 MEDICIÓN. EXACTITUD Y PRECISIÓN .....	326
A.3 INCERTIDUMBRE. DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE .....	327
A.4 VALOR EXPERIMENTAL .....	331
A.5 USO DE LA INCERTIDUMBRE .....	332
A.6 CONCEPTOS DE DIMENSIÓN Y UNIDAD. SISTEMAS DE UNIDADES. UNIDADES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS .....	333
A.7 SISTEMAS MKS, CGS Y FPS, TANTO ABSOLUTOS COMO GRAVITATORIOS. DESCRIPCIÓN DE SUS UNIDADES FUNDAMENTALES .....	334
A.8 DATOS HISTÓRICOS DE ALGUNOS SISTEMAS DE UNIDADES .....	336
A.9 EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI). DESCRIPCIÓN DE SUS UNIDADES DE BASE, SUPLEMENTARIAS Y DERIVADAS MÁS COMUNES .....	338

<b>APÉNDICE B. COMPONENTES VECTORIALES Y ESCALARES. PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. DOBLE PRODUCTO VECTORIAL</b> .....	<b>350 a 373</b>
B.1 COMPONENTES VECTORIALES Y ESCALARES .....	350
B.2 PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.	362
B.3 DERIVADAS DE SUMAS Y PRODUCTOS VECTORIALES Y ESCALARES (FÓRMULAS) .....	373

# **I. FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CLÁSICA.**

## **INTRODUCCIÓN.**

En este tema intentaremos presentar un resumen de la manera en que fue desarrollándose la mecánica clásica, como consecuencia de diversas aportaciones de personajes, que en algunos casos han merecido el calificativo de genios.

Unos de ellos enunciaron ciertas propiedades basados en su intuición, otros fueron más formales y lo que enunciaron lo soportaron debidamente, en tanto que otros demostraron formal y/o experimentalmente algunas cosas que otros mencionaron sin demostrar su validez, etc.

Después nos ocuparemos de definir diversos modelos, que son esenciales para el tratamiento de la mecánica citada y, para finalizar el desarrollo de este tema, nos ocuparemos de enunciar y explicar la primera, la segunda y la tercera leyes de Newton, así como de enunciar su ley de la gravitación universal y ver algunas aplicaciones sencillas de esta última.

## **I.1 RESUMEN HISTÓRICO DE LA MECÁNICA CLÁSICA: PERSONAJES PRINCIPALES Y APORTACIONES.**

### **I.1.1 RESUMEN HISTÓRICO DE LA MECÁNICA CLÁSICA.**

Aquí nos ocuparemos de una breve descripción de lo más significativo en el desarrollo histórico de la Mecánica Clásica. Después de ello proporcionaremos datos acerca de diversos personajes que, directa o indirectamente, contribuyeron al desarrollo citado y de algunos que han aportado algo relativo al estudio de movimientos no factibles de estudiar empleando la mecánica aludida.

Desde hace aproximadamente unos 500 años antes de Cristo (o tal vez un poco más) hubo griegos que percibieron, de algún modo, diversos conceptos de la mecánica, pues personajes como ANAXÁGORAS, ARISTÓTELES y ARISTARCO hablaban ya del movimiento de los planetas y/o de las posibles causas de tal movimiento.

Sin embargo, se considera a ARQUÍMEDES como el fundador de la mecánica por haber sido el primero en establecer principios y conceptos fundamentales para el desarrollo de esa ciencia; estas aportaciones fueron hechas poco menos de 300 años antes de Cristo. Aunque más adelante hablaremos

de ello en forma más amplia, por citar algo ahora, mencionaremos que sus principios sobre la palanca, la polea, y los cuerpos flotantes, son piedras angulares para el estudio de la estática y de la hidrostática.

Aunque después de Arquímedes hubo otros personajes que de alguna manera contribuyeron al desarrollo de la mecánica, se considera que esta ciencia tomó otro impulso significativo hasta que Leonardo Da Vinci (nacido en 1452) se dedicó a estudiar algunos problemas de equilibrio y a filosofar sobre el movimiento.

Puede decirse que, desde Leonardo Da Vinci ya no hubo discontinuidad en el avance de la mecánica, pues no pasaban más de unos cincuenta años sin que dicha ciencia contara con nuevas y valiosas aportaciones; además, de manera continua, se estudiaba y especializaba sobre los conceptos conocidos hasta entonces.

Por ejemplo, tanto Copérnico como Kepler (nacidos en 1473 y 1571, respectivamente ) contribuyeron enormemente al estudio del movimiento planetario. Con Stevin (nacido en 1548) la estática tuvo otro avance considerable.

Con Galileo (nacido en 1564) prácticamente nació la dinámica, pues con sus experimentos sentó las bases, tanto para el estudio analítico de los movimientos rectilíneos uniformes y rectilíneos uniformemente acelerados, como para el tratamiento de algunos movimientos combinados. Otra de sus aportaciones de gran valía es su principio de inercia. Recuerde que más adelante hablaremos particularmente sobre estos personajes.

De Newton (nacido en 1642, año en que murió Galileo) por el momento sólo mencionaremos que, en sus Principia, dejó formalmente sentadas las bases de la mecánica clásica, mediante el establecimiento de sus tres leyes del movimiento y de su ley de la gravitación universal. ¿Para qué mencionar ahora algunas otras de sus valiosísimas aportaciones (no sólo a la mecánica)?; con las cuatro leyes recién citadas, Newton puso al mundo (y a la humanidad) en su lugar.

Huyghens y Varignon, contemporáneos de Newton, hicieron también aportaciones valiosas al desarrollo de la mecánica; el primero con relación a diversas partes de la cinemática y de la dinámica, y el segundo principalmente con relación al tratamiento de los sistemas de fuerzas.

Así, a principios del siglo XVIII, prácticamente ya se encontraba cubierto el tratamiento de la estática, y el de la dinámica, de una o varias partículas.

Fue Euler (nacido en 1707) quien, partiendo de las leyes de Newton, estableció las ecuaciones generales para estudiar el movimiento de los cuerpos rígidos.

Coulomb (nacido en 1736), entre otras cosas, estableció las leyes para estudiar el fenómeno de la fricción en seco, tan importante en el análisis de muchísimos problemas.

Una gran aportación para estudiar parte de la cinemática y la dinámica se debe a Coriolis (nacido en 1792), pues fue quien descubrió la existencia de una aceleración complementaria, en diversos problemas de movimiento relativo.

Puede decirse entonces que, a partir del momento en que Coriolis detectó la existencia recién citada (a principios del siglo XIX), se completa el conjunto de expresiones necesarias para estudiar los problemas de equilibrio, o de movimiento, de cuerpos rígidos o de partículas, desde el punto de vista de la mecánica newtoniana (es decir, considerando a la masa de un cuerpo como invariante, siempre y cuando no pierda una de sus partes).

Claro que, para llegar a los modelos matemáticos actuales de la mecánica clásica, se ha echado mano de los adelantos que la matemática ha tenido. A la fecha de la primera edición de los Principia de Newton, pocos tenían idea del cálculo diferencial (por Newton llamado método de las fluxiones), o del cálculo integral (antes conocido como método de las fluxiones inversas); mucho menos se tenía conocimiento del cálculo vectorial, que empezó a desarrollarse en el siglo XIX y ha simplificado el análisis de diversas partes de la mecánica, y la resolución de muchos problemas.

Habiendo ya descrito, en forma breve, lo más significativo en el desarrollo histórico de la mecánica clásica, nos ocuparemos ahora de complementar esa descripción, hablando acerca de varios personajes que, en mayor o menor grado, han contribuido al desarrollo de tal parte de la física, y de algunos que se dedicaron, o aportaron algo, al análisis de movimientos que no es factible estudiar mediante la mecánica newtoniana.

A fin de que el lector pueda tener una noción, hasta cierto punto ordenada, de la época en que se hicieron ciertas afirmaciones, estudios, confirmaciones de hipótesis, etc., haremos mención de los diferentes personajes atendiendo al año, o siglo, en que nacieron o vivieron (aunque en diversos casos no se tienen referencias precisas, pues algunos historiadores dan unas fechas o épocas, y otros proporcionan datos diferentes).

Trataremos de citar las aportaciones más importantes de esos personajes, al campo de la mecánica, y en algunos casos daremos información complementaria sobre ellos, a fin de que pueda tenerse una imagen, al menos sencilla, de los mismos. No es pues nuestra intención dar biografías, ni enlistar todo lo relacionado con cada uno de los personajes; sin embargo, por razones obvias, hablaremos mucho más de algunos que de otros.

Esperamos que lo citado enseguida motive a los lectores de este texto, entre otras cosas, a profundizar acerca de la vida y de la obra de esos personajes. Les aseguramos que cada vez se torna más fascinante dar lectura a libros, tratados y enciclopedias que se refieren tanto a dichos personajes, como a la historia de la mecánica.

## **I.1.2 PERSONAJES PRINCIPALES Y APORTACIONES.**

**ANAXÁGORAS** de Clazomene (488-428 a.C.).

Astrónomo y filósofo griego quien fue el primero que por escrito explicó claramente la causa de las fases de la Luna; afirmó que, debido al movimiento del Sol y de la Luna, la superficie de ésta iluminada por el Sol cambia continuamente.

**ARISTÓTELES** de Estagira (384-322 a.C.).

Gran filósofo griego que destacó por sus tratados sobre lógica, psicología, y ciencias políticas y biológicas. Su capacidad de observación tuvo mucho éxito tratándose de biología, lo que le llevó a conclusiones muy valiosas.

Sin embargo, tal vez, por dedicar poco tiempo al estudio de los fenómenos físicos, sus aportaciones a la mecánica fueron escasas y algunas opiniones de plano equivocadas, como aquella donde afirmaba que los cuerpos más pesados caían más rápidamente que los más livianos, al soltarse desde cualquier punto. No obstante que tenía sus fallas, fue aparentemente el primero que intuyó que se requiere de una fuerza que llamó impulsora, para mantener en movimiento a los planetas alrededor de la Tierra (en ese entonces se pensaba que los planetas describían trayectorias con centro en la Tierra), sea como sea sus ideas influyeron en el pensamiento occidental y musulmán durante más de dos mil años.

**ARISTARCO** de Samos (310-230 a.C.).

Científico griego que, a partir de observaciones suyas, se dedicó a determinar los tamaños del Sol y de la Luna con relación a la Tierra, así como la distancia entre ellos y nuestro planeta. Los resultados que obtuvo son aceptables comparados con lo que se considera real. Después de analizar diversas teorías externó que (según él) los planetas, incluyendo la Tierra, se movían alrededor del Sol; es decir que, aunque no lo probó, dio a conocer la real disposición del sistema solar.

ARQUÍMEDES de Siracusa (287-212 a.C.).

Fué el más grande de los matemáticos griegos y se considera el fundador de la mecánica. Formuló leyes fundamentales de la estática y escribió tratados sobre los principios: a) de la polea (donde muestra que, mediante el empleo de dispositivos formados a base de poleas conectadas, disminuye la fuerza necesaria para elevar un objeto, en la medida que aumenta el número de poleas), y, b) de la palanca (donde prueba que dos cuerpos se equilibran a distancias inversamente proporcionales a sus pesos).

Determinó el peso por unidad de volumen de varios materiales, y mostró que el peso específico de un material es el que determina si dicho material debe flotar, o sumergirse, en un recipiente con agua. Enunció su ley sobre cuerpos flotantes, diciendo que todo cuerpo sólido sumergido en un líquido pierde el peso del líquido desplazado por él. Inventó un dispositivo para elevar el agua (tornillo de Arquímedes), y una combinación de rueda dentada y torno, catapulta, para botar grandes piedras desde navíos de guerra.

HERON de Alejandría (Siglo I a.C.).

Físico y matemático griego que escribió un libro titulado Mecánica donde, entre otras cosas, describe el funcionamiento y la utilidad de poleas compuestas, de engranajes, y de mecanismos con ruedas dentadas. Inventó una máquina de vapor y empleó la presión del vapor para transformar la energía química, de un combustible que arde, en energía de movimiento. También escribió un tratado de óptica y fue el inventor del primer instrumento universal de medición, llamado dioptra o pínula.

ERATÓSTENES de Cirene (276-195 a.C.).

Griego de vasta cultura que se aproximó mucho a las dimensiones reales de la Tierra: a partir de ciertas consideraciones y mediciones, dedujo que la circunferencia de nuestro planeta es de 252,000 estadios egipcios, es decir de unas 24,650 millas (cantidad muy cercana a las 24,875 millas que se considera como medida correcta).

Claudio TOLOMEO (Siglo II d. C.).

Astrónomo griego nacido en Egipto. Vivió en Alejandría, autor de una célebre composición matemática y de una geometría que fue considerada con gran autoridad durante toda la edad media.

De los sistemas ideados para la simplificación del antiguo modelo griego, el que obtuvo mayor éxito fue el de su teoría geocéntrica, la cual suponía que los planetas se movían en círculos cuyos centros giraban alrededor de la Tierra. Además de ser un modelo más sencillo que el primitivo de los griegos, logró un mejor ajuste a los movimientos que se observan en el cielo.

Debido a la precisión de las previsiones que se hacían con su sistema, y como su teoría (suponía a la Tierra el centro del Universo), se adaptó bien a las creencias religiosas que se practicaban en la Edad Media; sus ideas perduraron por más de 1300 años, y su teoría fue sustituida siglos más tarde por el sistema heliocéntrico de Copérnico.

Roger BACON (1214-1294).

Hombre de ciencia, inglés, que habiendo comprendido los fenómenos de reflexión y refracción, de la luz, explicó cómo debían colocarse y estructurarse diversos lentes para elaborar ciertos aparatos, que funcionaban como los telescopios y anteojos actuales. Insistió en que sólo vía experimentación podían adquirirse los conocimientos científicos y, además de ello, explicó cómo construir diversos aparatos que se movieran mecánicamente, tales como carruajes y algunas máquinas que volaban, los que a su vez puede decirse que fueron perfeccionados hasta transformarse en los automóviles y aviones de hoy en día.

Leonardo DA VINCI (1452-1519).

Célebre artista y hombre de ciencia, italiano, quién aseveró que los cuerpos pesan en la dirección en que se mueven, y que los cuerpos que caen aumentan su velocidad conforme continúan cayendo; o sea que intuía el hecho de que las fuerzas producen lo que conocemos como aceleración. Antes que Newton, y sin probarlo o demostrarlo, mencionó que el universo se comporta según leyes mecánicas inalterables.

También indicó que las ciencias deben desarrollarse con base en observaciones, en el análisis de éstas, y en experimentos mediante los cuales se llegue a ciertas conclusiones, o se pruebe algo.

Contribuyó al desarrollo de la hidráulica con su obra sobre el movimiento del agua y las obras fluviales. Aunque su fama se debe mayormente a sus pinturas (La Gioconda, La última cena, etc.), también fue notable como escultor, escritor, músico, ingeniero, físico y arquitecto.

Nicolás COPERNICO (1473-1543).

Hombre de ciencia, polaco, quien dijo que todo cambio de posición de un objeto obedece al movimiento: a) del objeto observado, b) de quien lo observa, o, c) de ambos. Sostuvo que, como el resto de los planetas, la Tierra se mueve alrededor del Sol, describiendo trayectorias circulares.

También afirmó que, a la vez que se mueve en el espacio, nuestro planeta efectúa un movimiento de rotación diario sobre su eje, acompañado por el aire en este movimiento.

Niccolo Fontana (TARTAGLIA), (1499-1557).

Matemático italiano que fue el primero en aplicar las matemáticas a la artillería; en su obra *Quesiti e Inventioni Diverse* (1546) afirmó que la trayectoria descrita por un proyectil, despedido por un cañón, es siempre curva debido a la influencia de la gravedad durante todo el movimiento.

Tenía la concepción del centro de la Tierra como centro de atracción gravitatoria ejercida sobre los cuerpos localizados en nuestro planeta. En su obra *Nova Scintia* (de 1550) opinó que, de existir un túnel que atravesara la Tierra de lado a lado, después de soltar un cuerpo en un extremo (del túnel) dicho cuerpo se movería hacia el otro extremo, pasando con cierta velocidad por el centro y deteniéndose posteriormente, para regresar hacia el extremo desde donde se le soltó (sobrepasando de nuevo el centro de nuestro planeta) y así sucesivamente, debido a una fuerza de atracción ejercida desde tal centro.

Tycho BRAHE (1546-1601).

Astrónomo danés nacido en Knudstrup (en aquél tiempo Dinamarca, actualmente Suecia). Prácticamente fue el último gran observador del cielo a simple vista; después llegaron los telescopios. Las observaciones de Brahe, minuciosamente realizadas y registradas, resultaron de trascendental importancia para científicos posteriores como Kepler. Observó con incansable continuidad los cometas, planetas, estrellas y eclipses, diseñando él mismo sus aparatos para la medición de ángulos y distancias. En honor a Brahe un cráter de la Luna lleva su nombre.

Simón STEVIN (1548-1620).

Ingeniero de origen flamenco que fue uno de los primeros técnicos en impulsar fuertemente el desarrollo de la mecánica, teniendo notables contribuciones, especialmente en el campo de la estática. Entre otras cosas se dió a la tarea de resolver el problema del equilibrio de cuerpos conectados entre sí (por ejemplo mediante un cable), que se sitúan sobre planos inclinados diferentes. Resolvió dicho problema analizando lo que sucedía a una cadena lo suficientemente larga para que quedara en equilibrio, colgando de un cuerpo fijo en forma de triángulo escaleno, con el lado mayor de éste ubicado en posición horizontal.

No obstante que se dedicó básicamente al estudio de la estática, una aportación suya muy importante la constituye un postulado fundamental para el estudio de la mecánica en general, postulado que permite sustituir la acción de dos fuerzas cualesquiera  $F_1$  y  $F_2$ , aplicadas en un punto cualquiera  $P$ , por la acción de una sola fuerza  $F$  aplicada en dicho punto. Para ilustrarlo se valió de un paralelogramo formado con segmentos dirigidos de direcciones y sentidos iguales a los de  $F_1$  y  $F_2$ , y magnitudes proporcionales a las de dichas fuerzas,  $F$  sale de  $P$  en la dirección de la diagonal del paralelogramo que

pasa por dicho punto, y su magnitud es proporcional a la de dicha diagonal, con la misma proporcionalidad que guardan los lados del paralelogramo con relación a las magnitudes de  $F_1$  y  $F_2$ .

Además probó experimentalmente que la presión total de un líquido, sobre el fondo del recipiente que lo contiene, depende únicamente del área de dicho fondo y de la distancia entre éste y la superficie del líquido.

GALILEO Galilei (1564-1642).

Brillantísimo científico italiano; puede considerarse, sin duda, que a él se debe el primer gran impulso al estudio de la mecánica. Fue el primero en hablar de velocidad media de un cuerpo; experimentalmente comprobó que la velocidad de los cuerpos que caen libremente es función del tiempo y, después de varios experimentos y mediciones, afirmó que las fuerzas cambian el estado de movimiento de los cuerpos y que, cuando sobre los cuerpos no actúan fuerzas, éstos se mueven con velocidad uniforme y en línea recta, o permanecen en reposo.

También de manera experimental demostró que las diferentes posiciones de un cuerpo, que se deja caer sobre un plano inclinado, son proporcionales a los cuadrados de los tiempos requeridos para ocupar dichas posiciones, pero no pudo establecer la relación matemática entre velocidad y posición, por carecer de elementos para ello. Sin embargo, puede decirse que fue quien realmente descubrió el comportamiento de los cuerpos que se mueven con velocidad constante, y de los cuerpos que realizan movimientos uniformemente acelerados.

Demóstró que en un medio carente de la resistencia del aire, un cuerpo lanzado en una dirección no vertical realizaba un movimiento compuesto, de trayectoria parabólica. Desde el punto de vista horizontal un movimiento uniforme, en tanto que, verticalmente un movimiento uniformemente acelerado.

Descubrió el movimiento pendular y, después de varias observaciones, descubrió que las oscilaciones pequeñas o grandes, de los péndulos, son periódicas, independientemente de las características de las masas oscilantes. Con base en esto, intuyó que debía ser factible construir algún dispositivo que midiera el tiempo de manera más precisa que como se hacía (entonces no se disponía de relojes mecánicos de dimensiones reducidas).

Experimentalmente comprobó, en forma definitiva, que un cuerpo flota o se hunde, en un fluido, dependiendo de la densidad del fluido en que se sumerja, y no debido a la forma del cuerpo.

Construyó de manera formal el primer telescopio, el cual le permitió agrandar el área de las superficies observadas en una proporción del orden de mil a uno, y reducir las distancias en una relación de treinta

a uno, aproximadamente . En uno de tantos estudios realizados por él, demostró que Venus no tenía luz propia sino que brillaba debido a la luz reflejada del Sol; esto lo mencionó junto con otras conclusiones suyas, en su obra Diálogos Sobre los Dos Grandes Sistemas del Mundo, publicada en 1632, donde también se ocupó de defender la teoría heliocéntrica de Copérnico.

En 1633 lo apresaron porque sus teorías iban más allá de lo que permitía la Santa Inquisición; fue enjuiciado y condenado a vivir confinado (en un lugar de Florencia) por el resto de sus días. En 1638 se publicó su última obra, conocida como Dos Nuevas Ciencias, donde expone las bases de la mecánica clásica. Murió en 1642, como coincidencia el año en que nació Isaac Newton.

Johannes KEPLER (1571-1630).

Astrónomo alemán que, con base en estudios propios y en observaciones hechas por él y por Tycho Brahe (danés que fué su maestro), enunció las tres leyes siguientes, para el movimiento planetario:

- I. Los planetas se mueven describiendo trayectorias elípticas, con uno de sus focos en el Sol.
- II. La línea que une al Sol con un planeta cualquiera barre áreas iguales, del área encerrada por la trayectoria elíptica, en tiempos iguales.
- III. Los cuadrados de los tiempos que tardan los planetas en recorrer sus órbitas son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

Las dos primeras leyes fueron dadas a conocer en 1609 y la tercera en 1619. Descubrió que la velocidad de los planetas, relativa al Sol, aumenta conforme se acerca a éste, y disminuye a medida que se aleja de él.

Inicialmente supuso que la fuerza que movía a los planetas era inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al Sol pero, como no pudo demostrar esto, posteriormente supuso que dicha fuerza era inversamente proporcional a la distancia citada. Esta situación quedó debidamente aclarada después de más de cien años, cuando Newton estableció su ley de la gravitación universal.

Renato DESCARTES (1596-1650).

Notable filósofo francés que destacó principalmente como matemático (fue uno de los creadores de la geometría analítica). En una de sus obras (en 1644) afirmó que los cuerpos, en reposo o en movimiento, tienen poder para continuar con el estado en que se encuentran. Así pues, intuitivamente, percibió lo que Newton estableció unos cuarenta años después, por medio de sus leyes I, II y III del movimiento.

Blaise PASCAL (1623-1662).

Matemático francés que estableció una ley, de la hidrostática, muy empleada para diseñar aparatos hidráulicos; dicha ley dice que todo fluido (líquido o gas) que se encuentre comprimido, en un recipiente cerrado, ejerce la misma presión (fuerza por unidad de área) en todas las superficies que toca. A él se deben, entre otras cosas, la prensa hidráulica y el gato hidráulico, así como las leyes de presión atmosférica y del equilibrio de los líquidos.

Robert BOYLE (1627-1691).

Este físico y químico irlandés enunció una de las leyes de los gases ideales, la cual establece que, a temperatura constante, el volumen de cualquier gas es inversamente proporcional a la presión a que se encuentra sometido.

Christian HUYGHENS (1629-1695).

Ilustre científico holandés que en una de sus obras, el *Horologium Oscillatorium* (1673), mencionó que si no existiera gravedad ni la atmósfera ofreciera resistencia al movimiento de los cuerpos, éstos mantendrían siempre un movimiento uniforme; afirmación que confirmó su validez trece años después con el establecimiento de las leyes del movimiento de Newton.

En esa obra, donde Huyghens empleó algunos principios de geometría diferencial, desarrolló un tratamiento original y muy completo sobre movimientos circulares y otros movimientos curvilíneos. En ella definió la fuerza centrípeta, demostró que siempre está dirigida al centro de la trayectoria de un cuerpo que realiza un movimiento circular, y que la magnitud de la misma es directamente proporcional al cuadrado de la rapidez con que se mueve el cuerpo, e inversamente proporcional al radio de la circunferencia descrita por el móvil.

Asimismo, en dicha obra, describió el reloj mecánico de péndulo; fue el primero en construir uno, patentándolo en 1657, y estableció una fórmula para determinar la duración de las oscilaciones de un péndulo, fórmula que condujo a una determinación precisa de la aceleración gravitatoria en la superficie terrestre. A él se debe la gestación del concepto de energía cinética (a la cantidad  $mv^2$  la consideró como una propiedad muy importante, de los cuerpos en el movimiento, y la llamó *vis viva*, es decir fuerza natural).

Publicó un trabajo relativo a sistemas de referencia, y tuvo ingerencia en la evolución de otras ciencias, especialmente en la óptica; muchos consideran que lo más importante de su obra fue su genial concepción de la teoría ondulatoria (acerca de la transmisión de la luz).

Robert HOOKE (1635-1703).

Filósofo y experimentador inglés que consideró que la trayectoria de un cuerpo celeste podría ser una elipse, o una circunferencia, si sobre él se ejerciera desde el centro de la órbita una fuerza de atracción. Luego de realizar diversos estudios comentó a Newton que, según él, después de ser lanzado desde la superficie de la Tierra y en caso de no regresar a ésta, un cuerpo describía una elipse, con uno de sus focos en el centro de nuestro planeta, debido a una fuerza de atracción de magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el cuerpo y la Tierra; realidad que (Hooke) nunca pudo probar, pero Newton sí (Principia: Libro tercero).

Isaac NEWTON (1642-1727).

Científico inglés a quien debe conceptuársele como un verdadero genio, en virtud de todo lo que legó a la humanidad. Nació el año en que murió Galileo. Aparentemente el hecho de ver caer una manzana fue lo que le llevó a intuir la existencia de la gravitación o atracción gravitatoria. Como curiosidad, a raíz de una pregunta que le formuló Robert Hooke, Newton encontró que la trayectoria descrita por un cuerpo sujeto a una atracción terrestre, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el cuerpo y la Tierra, debía ser una elipse con el centro de atracción en uno de los focos; es decir que, el movimiento del cuerpo relativo a la Tierra sería similar al movimiento realizado por los planetas alrededor del Sol, descrito éste por las leyes que había enunciado Kepler. Aunque esto ya le hizo intuir que habría una ley general de atracción entre cuerpos, Newton dejó, por un tiempo, el estudio de la mecánica.

Unos cuatro años más tarde, en 1684, motivado por un astrónomo amigo suyo, Edmund Halley, se dedicó de nuevo al estudio de la mecánica pero ya con tal profundidad que, aproximadamente dos años después, terminó de elaborar su obra denominada Principios Matemáticos de Filosofía Natural, publicada por vez primera en 1689 y conocida en forma abreviada como Principia, misma que se considera como la obra más grande y de mayor trascendencia, debida a un ser humano, hasta nuestros días.

En una parte de su primera ley se refiere a cuerpos en reposo, no obstante tener conciencia de que el reposo absoluto no existe; sin embargo, también tenía la certeza de que, en la realidad existen tantos estados de movimiento tan imperceptibles, prácticamente considerables como estados de reposo, que no podría conceptuarse como error el referirse a la existencia de cuerpos en reposo.

Fue el primero en distinguir entre peso y masa de un cuerpo; a ésta la consideró como un invariante y estableció que el peso de los cuerpos depende de la posición que ocupen sobre la Tierra, o bien en el espacio.

Antes de enunciar sus leyes, en su Principia dio las siguientes definiciones, aquí ya adaptadas a nuestra terminología.

- 1) Masa o cantidad de materia: volumen de un cuerpo multiplicado por la densidad de éste.
- 2) Cantidad de movimiento: masa de un cuerpo multiplicada por la velocidad del mismo.
- 3) Inercia o fuerza insita: medida de la capacidad, o poder, de un cuerpo para mantenerse en estado de reposo, o moviéndose uniformemente en línea recta.
- 4) Fuerza impresa: acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado, de reposo o de movimiento uniforme.
- 5) Fuerza centrípeta: la que ocasiona que los cuerpos sean atraídos hacia un punto o centro.
- 6) La cantidad absoluta de una fuerza centrípeta es una medida proporcional a la eficiencia de la causa que la propaga, desde el centro, por las regiones circundantes.
- 7) La cantidad acelerativa de una fuerza centrípeta es una medida proporcional a la velocidad que genera en un tiempo dado.
- 8) La cantidad motriz de una fuerza centrípeta es una medida proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado.

A continuación, adaptadas a nuestra terminología, se enuncian las leyes fundamentales del movimiento, que estableció en la parte inicial de sus Principia.

- I. Todo cuerpo se mantiene en reposo, o con movimiento rectilíneo uniforme, en tanto no se apliquen fuerzas que cambien dicho estado.
- II. El cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza que lo produce, y se efectúa en la dirección en que actúa dicha fuerza.
- III. A toda acción se opone siempre una reacción igual.

En el libro tercero (Sistema del Mundo) de los Principia, demostró que las fuerzas de atracción ejercidas por el Sol sobre los planetas, y la fuerza de gravedad, ejercida por la Tierra sobre los cuerpos, son de la misma especie, es decir que obedecen a una misma ley. Esta, conocida como ley de la gravitación universal establece que:

Todo cuerpo del universo atrae a otro con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

Obviamente, auxiliándose de la matemática, demostró que: al tener la fuerza de gravitación entre el Sol y los planetas las características recién descritas, cualquier planeta se mueve, con relación al Sol, cumpliendo con las leyes de Kepler.

Afirmó que algunos cometas tenían trayectorias elípticas muy alargadas, con relación al Sol, situación confirmada por los estudios que realizó Halley con relación a diversos cometas (éste predijo, con base en sus estudios, que un determinado cometa volvería a pasar después de 75 años y seis meses, por cierta posición donde un día se le localizó; cosa que ocurrió).

En el libro segundo (de sus Principia) Newton se ocupa del movimiento de los cuerpos en medios resistentes, de los movimientos pendulares, y de la estática y la dinámica de los fluidos. Además de su enorme legado por lo que a la mecánica se refiere, contribuyó notablemente al desarrollo de otras ciencias como la matemática y la óptica.

En un lapso de aproximadamente año y medio (dentro del cual cumplió 23 años de edad), descubrió cosas muy importantes, que fue desarrollando conforme lo consideró pertinente; por ejemplo, en el prefacio a la primera edición de los Principia externó: “Me he puesto a cultivar la matemática en la medida que se relaciona con el estudio de la naturaleza”.

A continuación se reproduce parte de un escrito muy probablemente elaborado por él en el año de 1716 (aproximadamente a los 73 años) y que está relacionado con lo que realizó en el lapso recién citado:

*“A principios de 1665 encontré el procedimiento para aproximar las series, y la regla (conocida ahora como teorema del binomio) para reducir a una serie cualquier potencia de cualquier binomio. El mes de mayo de ese año descubrí el método de las tangentes, y en noviembre el método directo de las fluxiones (ahora llamado cálculo diferencial); y en el año siguiente (1666), en enero, la teoría de los colores, y en mayo el método de las fluxiones inversas, (conocido actualmente como calculo integral).y en ese mismo año comencé a pensar en la gravedad extendiéndola a la órbita de la Luna, y de la regla de Kepler, sobre los tiempos periódicos de los planetas, deduje que las fuerzas que los mantienen en sus órbitas deben ser inversamente proporcionales a los cuadrados de sus distancias a los centros de donde son atraídos, y por ello comparé la fuerza requerida para mantener la Luna en su órbita con la fuerza de gravedad en la superficie de la Tierra, y encontré la respuesta casi de inmediato”.*

Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646-1716).

Filósofo considerado como un genio universal ya que fue un hombre versado en historia, teología, filosofía, leyes, ciencias políticas, minería, ingeniería, matemáticas, literatura, ciencias físicas y naturales e idiomas; dentro de cualquier tratado de filosofía, o de matemáticas, su nombre es uno de los más sobresalientes. Descubrió en forma prácticamente simultánea con Newton, el Cálculo Diferencial e Integral, debido a lo cual surgió entre ellos una fuerte polémica, con mutuas acusaciones de plagio.

Fue quien dio el nombre de Dinámica a la ciencia que se ocupa del movimiento de los cuerpos atendiendo a las causas que lo producen.

Externó que el efecto de una fuerza aplicada a un cuerpo, durante el movimiento de éste, era proporcional al cuadrado de la velocidad y definió como vis viva del cuerpo al producto  $mv^2$  (consecuencia de la aplicación de la fuerza).

Pierre VARIGNON (1654-1722).

Matemático francés que formuló claramente la ley del paralelogramo, casi al mismo tiempo que Newton. Su teorema, también conocido como teorema general de momentos, es fundamental en el tratamiento de sistemas de fuerzas concurrentes.

Johann BERNOULLI (1667-1748).

Físico suizo que enunció el principio de los desplazamientos virtuales, conocido ahora como principio del trabajo virtual, mismo que actualmente se enuncia así: para que un cuerpo esté en equilibrio, el trabajo total realizado por las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo, al sufrir éste un cambio virtual de posición, es nulo.

Descubrió el cálculo exponencial y el método para integrar las funciones racionales. Contribuyó al principio de la conservación de la energía. Resolvió el problema de la baristócrona y se le considera como uno de los fundadores de la Mecánica Analítica.

Daniel BERNOULLI (1700-1782).

Físico suizo que enunció una ley para fluidos en movimiento dentro de tubos de diámetro variable; dicha ley establece que, la presión que un líquido en movimiento ejerce sobre un recipiente con diámetro variable es mayor en una sección cualquiera  $S_1$  que en otra sección  $S_2$ , si el diámetro correspondiente a  $S_1$  es mayor que el de  $S_2$ .

En su tratado Hidrodinámica (1738), formuló la principal ley del movimiento de los líquidos, es decir la ecuación que relaciona la presión y la velocidad de un líquido, con la altura de éste; la misma se conoce como ecuación de Bernoulli. Escribió otras obras, tales como "Tratado de las mareas" y "Memorias sobre la inclinación de las órbitas planetarias".

Leonhard EULER (1707-1783).

Famoso científico suizo que, partiendo de las leyes de Newton, dedujo leyes generales para el estudio del movimiento de un cuerpo rígido, en función de la variación de seis cantidades escalares, conocidas como coordenadas generalizadas del cuerpo. Dichas ecuaciones sirvieron para describir, entre otros, los movimientos giroscópicos, así como los movimientos de precesión y nutación de la Tierra. Estableció las ecuaciones (diferenciales) generales del movimiento del líquido perfecto y la ecuación fundamental de trabajo para máquinas hidráulicas de paletas, además de sentar las bases de la teoría de flotación de naves, entre otras cosas, pues contribuyó mucho como matemático, físico y astrónomo.

Jean-Baptiste Le Rond D'ALEMBERT (1717-1783).

Físico, matemático y filósofo francés cuya principal obra es un tratado de dinámica (*Traité de dynamique*, 1743). Ahí enunció lo que hoy se conoce como Principio de D'Alembert, estableciendo que todos los cuerpos se encuentran en estado de equilibrio dinámico bajo el efecto de las fuerzas que sobre ellos actúan y de unas fuerzas ficticias (por él llamadas perdidas o muertas y conocidas ahora como fuerzas de inercia, o fuerzas de D'Alembert); de modo que, si  $m$  es la masa de un cuerpo, y  $a$  la aceleración que le produce la aplicación de un sistema de fuerzas (real) cuya resultante es  $F$ , se tendrá  $F + (-ma) = 0$ , donde  $-ma$  recibe el nombre de fuerza de inercia.

Así pues al plantearlos en esta forma, los problemas de dinámica se convierten en problemas que pueden resolverse como los pertenecientes a la estática, ya sea empleando ecuaciones de equilibrio o aplicando el principio del trabajo virtual. Sin embargo, por razones obvias, este principio no podrá aplicarse si se desconocen los conceptos y elementos fundamentales de la cinemática y la dinámica.

Elaboró y publicó varios libros, donde trata sobre mecánica (donde aplica su principio para resolver problemas de dinámica), física, literatura, astronomía, y algunas otras ciencias.

Henry CAVENDISH (1731-1810).

Gran científico experimental, inglés, que (en 1798) después de una serie de experimentos y mediciones fue el primero en determinar, empleando lo que conocemos como Balanza de Cavendish, el valor de la constante ( $G$ ) de la gravitación universal y posteriormente, como consecuencia de ello, la masa de Tierra. Es decir, primeramente, al plantear la Ley de la Gravitación Universal, haciendo intervenir a dos pequeños cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  distantes  $r_{12}$  y que se atraen con fuerzas de magnitudes  $F_{12}$ , obtuvo lo siguiente:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{(r_{12})^2}$$

de donde calculó el valor de  $G$ , pues los otros miembros de esta igualdad ya los conocía, con base en sus experimentos.

Posteriormente, aplicó la citada Ley en la forma:

$$W = G \frac{Mm}{R^2} \quad , \quad \text{o bien} \quad mg = G \frac{Mm}{R^2}$$

donde  $W$  es la magnitud de la fuerza ejercida por la Tierra sobre un determinado cuerpo de masa  $m$ , que dista  $R$  del centro de nuestro planeta,  $M$  la masa de éste, y  $g$  la magnitud de la aceleración de la gravedad terrestre. Como ya conocía todos los valores de esta igualdad excepto el de  $M$ , pudo estimar la masa de la Tierra.

Charles Augustin COULOMB (1736-1806).

Científico francés que valiéndose de un dispositivo conocido como balanza de torsión, creado por él, después de varios experimentos estableció una ley que dice: las fuerzas con que se repelen, o atraen, dos elementos cargados eléctricamente, son directamente proporcionales al producto de sus cargas, e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia que los separa. A dicha ley, en reconocimiento a este científico, se le designa como Ley de Coulomb; asimismo, a la unidad de carga eléctrica en el Sistema Internacional de Unidades (SI) se le llama Coulomb (de símbolo C).

Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813).

Astrónomo y matemático francés que transformó las ecuaciones obtenidas por Euler, para el movimiento de un sistema general de cuerpos. A él se debe que, primero en Francia y después por varias partes de Europa, se estableciera el sistema decimal de pesas y medidas, con el gramo y el metro como unidades de peso y longitud, respectivamente.

En su *Mécanique Analytique* (Mecánica Analítica de 1778) presentó y probó un principio, por él establecido (el principio de la acción mínima), mediante el cual reducía problemas de dinámica a problemas algebraicos.

James WATT (1736-1819).

Técnico escocés muy hábil y talentoso que en 1765 perfeccionó la máquina de vapor, contribuyendo enormemente al desarrollo industrial del siglo XIX, pues dicha máquina ya al estilo de Joule se empleaba en la construcción de los primeros barcos y locomotoras de vapor (entre otras cosas).

En su honor, la unidad de potencia en el Sistema Internacional de Unidades tiene el nombre de Watt (de símbolo W), y corresponde al trabajo de un Joule (de símbolo J) realizado en un segundo.

Pierre Simon de LAPLACE (1749-1827).

Gran matemático y astrónomo francés que elaboró una de las obras maestras de matemática y astronomía, titulada *Traité de Mécanique Celeste* (Mecánica Celeste, publicada en 1799). Por sus descubrimientos y aportaciones que han contribuido enormemente al progreso de la astronomía, desde hace tiempo se le ha llamado el Newton francés.

Gustave Gaspard de CORIOLIS (1792-1843).

Ingeniero y científico francés que en 1835 dio el nombre de trabajo al producto fuerza por distancia y definió como energía de un cuerpo al producto  $(\frac{1}{2})mv^2$ , al que en 1856 Lord Kelvin dio nombre de energía cinética, que es como se le conoce en la actualidad.

Estableció un teorema que dice: si el movimiento de una partícula P se refiere a un cuerpo (o sistema de referencia) móvil, la aceleración absoluta de P es la suma de la aceleración de arrastre, de la aceleración relativa, y de una aceleración complementaria.

A la aceleración complementaria se le conoce como aceleración de Coriolis, debido al estudio tan completo que desarrolló sobre dicha aceleración, por él descubierta.

Nicolás Léonard Sadi CARNOT (1796-1832).

Físico francés quien analizó las relaciones existentes entre el consumo de un combustible y el trabajo obtenido, así como las que existen entre el calor y el trabajo. Su obra "Reflexiones sobre la fuerza motriz del fuego" es la base de la termodinámica.

William Rowan HAMILTON (1805-1865).

Matemático y astrónomo irlandés que, de estudios realizados sobre lo escrito por Lagrange, principalmente, estableció lo que denominó ecuaciones canónicas, aplicables a todo tipo de sistemas de cuerpos en movimiento. Relacionó lo que llamó fuerza generalizada con la variación de lo que denominó momento (cantidad de movimiento) generalizado; para el caso del movimiento de una partícula, las leyes de Hamilton son congruentes con las de Newton. Además, fue el creador del cálculo vectorial y de los cuaternios.

James Prescott JOULE (1818-1889).

Físico inglés que mediante una serie de experimentos observó la relación entre trabajo y calor; definió la libra-pie como unidad de trabajo, y a una caloría como unidad de calor. Halló cómo se transforma energía cinética en energía potencial y viceversa, así como su equivalencia en forma de trabajo o de calor. Estableció que nada se pierde en transformaciones donde intervienen trabajo, energía y calor. Como reconocimiento a los estudios y experimentos que realizó, la unidad para medir el trabajo en el Sistema Internacional de Unidades tiene el nombre Joule (de símbolo J).

Hermann Ludwig Ferdinand von HELMHOLTZ (1821-1894).

Científico y filósofo alemán, conocido por sus trabajos acerca del principio de la conservación de la energía. Realizó también importantes descubrimientos en fisiología, óptica, electromagnetismo y meteorología.

Ludwig BOLTZMANN (1844-1906).

Físico austríaco nacido en Viena. Sus principales contribuciones fueron en el campo de lo que hoy se conoce como mecánica estadística, que consiste en aplicar las leyes de la mecánica a sistemas muy complejos, tomando elementos de la teoría de las probabilidades y de la estadística. En ese tiempo sus resultados fueron rechazados por grupos importantes de científicos; sin embargo el tiempo le dio la razón, ya que en la actualidad son cruciales en el estudio de sistemas muy complejos.

Albert A. MICHELSON (1852-1931).

Físico alemán nacionalizado más tarde norteamericano. Calculó con bastante precisión la magnitud de la rapidez de la luz (300 000 km/s, en el vacío), obteniendo un valor de 299 796 km/s. Ideó el interferómetro que lleva su nombre, para medir las distancias por medio de ondas de luz. Demostró en forma experimental que el movimiento absoluto de la Tierra es inmensurable, (punto de partida para la teoría de la relatividad). Midió por vez primera, entre otras cantidades astronómicas, diámetros estelares.

Fue, además, inventor de numerosos instrumentos ópticos y escribió la obra "Las ondas de luz y sus usos". Recibió el premio Nobel de física en 1907.

Max Karl Ernst Ludwig PLANCK (1858-1947).

Físico alemán que creó la teoría de los cuanta, para el estudio del movimiento de moléculas. Publicó que todo tipo de materia consistía en vibradores, con una frecuencia diferente  $\nu$  cada caso, que emitían radiaciones sólo en unidades (de radiación) completas; a dichas unidades les dió el nombre de quanta.

Explicó que la luz es emitida y absorbida en paquetes de energía,  $E$ , cuya magnitud viene dada por:

$$E = h \nu$$

donde  $\nu$  es la frecuencia del haz luminoso y  $h$  es una constante a la cual se le dió el nombre de constante de Planck, en virtud de que este físico estableció (empíricamente) dicha relación, la que dió a conocer en 1900, misma que posteriormente Einstein emplearía, de manera imprescindible, para interpretar correctamente el efecto fotoeléctrico.

Tal efecto se explica en la teoría fotónica donde se establece que, en cualquier haz luminoso de frecuencia  $\nu$ , cada fotón (partícula luminosa) transporta una energía dada por el producto  $h\nu$ . Es decir que, no obstante que un haz de luz sea más o menos intenso que otro (en la medida que posea una cantidad mayor o menor de fotones que éste, por unidad de tiempo): la energía cuántica (energía por fotón) es la misma para una determinada frecuencia (longitud de onda) de la luz. Años más tarde, en 1918, recibió el premio Nobel de física.

Hermann MINKOWSKY (1864-1909).

Matemático lituano considerado precursor de la teoría de la relatividad, por el establecimiento de la geometría de las cuatro dimensiones. Estableció que la descripción de los fenómenos de la naturaleza no debía referirse sólo a un espacio ordinario, de tres dimensiones, sino a un espacio cuatridimensional, al que llamó espacio-tiempo; de manera que toda partícula tendrá tres dimensiones en el espacio ordinario y una en el (espacio unidimensional) tiempo.

Así pues, las diferentes posiciones que vaya ocupando una partícula, en el espacio tridimensional, dependerían del tiempo; al lugar geométrico que pasa por las posiciones recién citadas le llamó línea cósmica, de la partícula.

Albert EINSTEIN (1879-1955).

Eminente físico alemán que enunció y desarrolló una teoría que se le conoce como Teoría de la Relatividad (que revolucionó los conceptos clásicos de espacio y tiempo), donde establece que no es posible que un observador determine la velocidad de un objeto en movimiento a través del espacio.

Demostro que la naturaleza nada tenia que ver con velocidades absolutas, sino con velocidades relativas.

Enunció que no existen marcos de referencia absolutos, y reprodujo el experimento de Michelson-Morley verificando que la rapidez de propagación de la luz en el vacío ( $c = 300,000 \text{ km/s}$ ) es constante, independiente del movimiento de la fuente o del observador. Mencionó que únicamente puede hablarse del movimiento de un cuerpo respecto a otro, éste nunca fijo (de manera absoluta), o de un sistema de referencia respecto a otro, que siempre estará en movimiento.

También, dentro de esta teoría, estableció la equivalencia entre la masa y la energía total de un cuerpo mediante la expresión:

$$E = mc^2 \quad \text{tal que} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2 / c^2)}}$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo en movimiento,  $m_0$  su masa en reposo, y  $v$  la rapidez con que se mueve dicho cuerpo; el valor de  $c$  ya lo dimos en el párrafo inmediato anterior.

Así pues, como las masas de los cuerpos que se mueven con velocidades no despreciables, con relación a la velocidad de la luz, difieren considerablemente de las correspondientes masas en reposo, habrá que aplicar la mecánica relativista al estudio del movimiento de cuerpos que se mueven con velocidades como las recién citadas, y descartar la mecánica newtoniana para tal estudio.

Predijo que en el efecto fotoeléctrico existía una relación entre la energía de un fotón (partícula luminosa) y la frecuencia de la luz (haz luminoso); predicción que fue confirmada.

En 1915, después de realizar ciertos estudios donde amplió el ámbito de los conceptos e ideas que dió a conocer en 1905, publicó su Teoría General de la Relatividad. Años más tarde, en 1921, recibió el premio Nobel de física.

Niels BOHR (1885-1962).

Físico danés, nacido en Copenhague, ciudad donde estudió hasta obtener el doctorado en física. Después de haber colaborado con Thomson y Rutherford, (creadores respectivamente de dos modelos del átomo muy importantes) formuló en 1913 su propio modelo atómico, en el que se incorporaban ideas de la entonces naciente mecánica cuántica. Por su modelo del átomo y otros trabajos, se le considera como uno de los fundadores de la física moderna. Se le otorgó el premio Nobel en 1922, por su estudios sobre la estructura del átomo y sus radiaciones.

Werner Karl HEISENBERG (1901-1976).

Físico alemán, nacido en Wurzburg; estudió en la Universidad de Munich. Realizó trabajos de investigación al lado de Niels Bohr. Se le considera uno de los fundadores de la mecánica cuántica. En 1927 formuló el principio de incertidumbre que lleva su nombre, que es uno de los principales resultados de su teoría. Por sus estudios sobre la mecánica cuántica recibió el premio Nobel de física en 1932.

## **I.2 DEFINICIONES DE MODELOS DE CUERPO, PARTÍCULA, CUERPO RÍGIDO Y CUERPO DEFORMABLE. ENUNCIADOS Y EXPLICACIÓN DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA LEYES DE NEWTON. ENUNCIADOS Y APLICACIONES SENCILLAS DE LA LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL.**

### **I.2.1 DEFINICIONES.**

Para iniciar el estudio de cualquier disciplina física, lo primero que debemos hacer es identificar el medio en el cual nos vamos a desenvolver, de manera que podamos ubicarnos en un lugar adecuado dentro del contexto de las ciencias.

Así pues, antes que todo debemos empezar por definir naturaleza, lo cual resulta tarea difícil, debido al carácter abstracto que encierra esta palabra; sin embargo, la definición que podemos tomar como una de la más adecuadas es la siguiente:

**Naturaleza:** conjunto, orden y disposición de lo que hay en el universo.

Para su estudio, las ciencias se han dividido en dos grandes grupos; a saber: *las ciencias sociales*, que se ocupan del hombre, su historia, su comportamiento, etc., y *las ciencias naturales*, que son las ramas del saber que estudian los fenómenos que ocurren en la naturaleza misma.

Dentro de las ciencias naturales podemos a su vez distinguir dos grupos: *las ciencias físicas*, cuyo campo de estudio no presenta cambio en su estructura y *las ciencias biológicas*, cuyo campo sí implica un cambio en la estructura de los cuerpos. Nuestro presente ámbito de estudio se encuentra dentro de las ciencias físicas.

Es innegable la aseveración de que estamos en una época principalmente científico-tecnológica, ya que gran parte de la prosperidad material y desarrollo de nuestra vida depende del desarrollo de la ciencia y de su aplicación tecnológica.

El estudio de la tecnología ha influenciado profundamente el pensamiento de los hombres y esto ha propiciado el desarrollo de infinidad de proyectos, indicándoles cual es el método de acercamiento que debe seguirse para efectuar el estudio de los fenómenos naturales y dar las conclusiones a partir de los hechos observados; esto es la física.

Entre otras definiciones, se tiene que la física se considera como la ciencia que tiene por objeto el estudio de la naturaleza y las interacciones entre materia y energía, a la vez que intenta explicar las reglas básicas que rigen el funcionamiento del mundo natural. Trata de los cuerpos y sus propiedades físicas; se basa en la experimentación y sus leyes sólo son aceptadas en cuanto son confirmadas a través del experimento. A Galileo y a Newton se les considera los fundadores de la mecánica clásica, antecedente obligado a la física moderna (la relativista y la cuántica), que antes sólo se consideraba como una rama de la filosofía (filosofía natural). Durante el siglo XIX se dio mucha importancia a la consecución de métodos de medida más precisos, con lo que la física pudo realizar la interacción de sus conocimientos.

Atendiendo a la función de las propiedades y de las acciones que estudia, la física, puede subdividirse en:

- **Mecánica.**
- **Movimiento Vibratorio y Sonido.**
- **Luz.**
- **Termodinámica.**
- **Electricidad y Magnetismo.**
- **Óptica.**

La astronomía y la física del átomo pueden considerarse como ramas liberadas de la física clásica o autónomas.

## **I.2.2 TIPOS DE MECÁNICA.**

Una parte fascinante de la física es la conocida con el nombre de mecánica. En general, según el ámbito de estudio, se puede hablar actualmente de tres tipos de mecánica, definidas a continuación.

- **Mecánica clásica:** es la que trata acerca de los cuerpos materiales que se mueven con velocidades muy inferiores a la velocidad de la luz.
- **Mecánica cuántica:** es la que se ocupa del movimiento de las partículas que tienen gran velocidad, y de las radiaciones captadas en forma discontinua o granular.

- **Mecánica relativista:** es la que estudia los cuerpos materiales que se mueven con velocidades de traslación semejantes a la de la luz. En este ámbito, el tiempo y el espacio no son absolutos y cada sistema referencial tiene su tiempo local.

La mecánica clásica tuvo su más importante colaborador en la persona de Isaac Newton, por lo que frecuentemente a dicha mecánica suele llamársele también mecánica de Newton, o mecánica newtoniana. Dentro de las consideraciones que hay que tener en cuenta, durante el tratamiento de la misma, está aquella en que Galileo ya tomaba en cuenta la fuerza, la aceleración y la masa. Sin embargo, no le fue posible explicar lo que era esta última; la consideraba y trabajaba con ella, pero sin definir lo que era. Newton fue el “encargado” de conceptualizar a la masa, como se verá más adelante.

### I.2.3 ESTADOS DE LA MATERIA.

La mecánica newtoniana estudia el movimiento de los cuerpos, así como también las fuerzas y las cantidades de movimiento implicadas en él, siendo su base principal las leyes de Newton. El campo de estudio de esta disciplina es tan grande que conviene efectuar una división de la misma, como la que se presenta un poco más adelante.

En virtud de que todo cuerpo se define como una porción de materia, se establece la siguiente clasificación de cuerpos, la cual origina en parte la división recién citada.

- **Sólido:** Presenta forma definida. Las moléculas que conforman el cuerpo están unidas debido a grandes fuerzas de cohesión. Esta manifestación de la materia es deformable y compresible.
- **Líquido:** No tiene forma definida. Las moléculas que lo conforman se mueven libremente y tienen escasa cohesión; adopta la forma del recipiente que lo contiene, además de ponerse siempre a nivel. Esta manifestación de la materia es indeformable e incompresible.
- **Gaseoso:** No tiene forma ni volumen definidos. Las moléculas que lo conforman tienen escasa cohesión. Esta manifestación de la materia es compresible.
- **Plasma:** Esta manifestación de la materia aparece sólo a temperaturas muy elevadas, donde se está consumiendo materia. Se presentan disociaciones de iones y electrones.

Estas definiciones nos ayudan para ubicarnos en el ámbito de nuestra actual área de estudio.

En nuestra área actual de estudio, las cantidades que emplearemos con relación al proceso de medición son: el tiempo, la longitud, la masa y la fuerza.

#### 1.2.4 CONCEPTOS DE TIEMPO, LONGITUD, MASA Y FUERZA.

- **Tiempo:** nos causa sobresalto cuando intentamos definirlo, sin embargo hay que considerar que realmente no tiene definición. Es inherente a nosotros y hasta lo “sentimos” distinto; cada quien en diferentes circunstancias, de aquí que para poder medirlo tuvo que inventarse el reloj.

No obstante, debemos considerar cómo se conceptualiza para nosotros, teniendo en cuenta los acontecimientos cotidianos; así: el tiempo es el concepto que permite establecer la secuencia de los eventos (que en la mecánica clásica es considerada como una cantidad absoluta); es decir, establece la noción de cuándo ocurren y cuánto duran los eventos; fija los conceptos de simultaneidad y sucesividad.

Cabe mencionar que existe una relación muy estrecha entre tiempo y espacio; aunque, en el tiempo, el orden en que han sucedido los fenómenos es de carácter irreversible. El tiempo y el espacio, constituyen unidos el continente en el que acontecen todos los fenómenos del universo. Al tiempo pertenecen los fenómenos de sucesión y cambio, mientras que al espacio corresponden los aspectos y las formas de los cuerpos, así como sus relaciones de posición y coexistencia.

La mecánica clásica considera al tiempo como homogéneo, es decir que no existen instantes privilegiados; todos ellos tienen las mismas características.

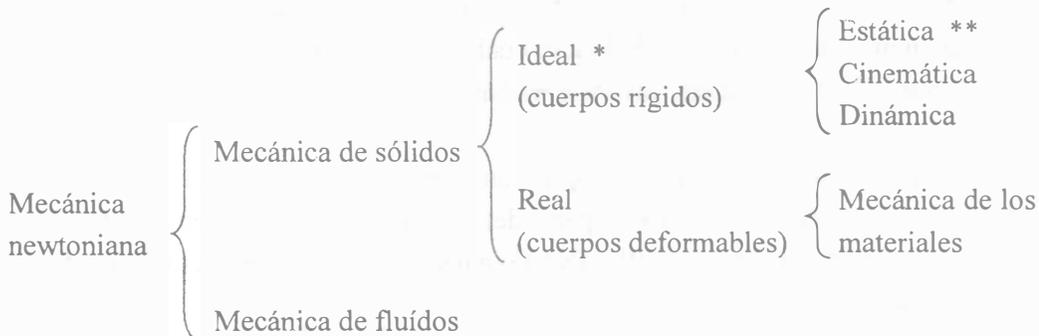
Al espacio no sólo lo considera homogéneo sino también isótropo. Homogéneo, ya que no existen puntos privilegiados; esto es, si trasladamos un cuerpo a través del espacio, todos los puntos por los que pasa en su movimiento tienen las mismas características. Isótropo, puesto que no existen direcciones privilegiadas; es decir, si hacemos girar a un cuerpo, todos los segmentos rectilíneos que lo constituyen tienen las mismas características en cuanto a giro.

- **Longitud:** nos permite describir cuantitativamente el tamaño de un objeto. A este concepto asociamos el de dimensión, considerado como todo aquello susceptible de ser medido; por ello, se dice que un objeto o un fenómeno es cuantificable cuando es dimensionable.
- **Masa:** al igual que el tiempo, la masa de un cuerpo no podríamos definirla, ya que no tiene nada que ver con su color, la forma, el volumen, ni siquiera con su constitución química; esto último puede demostrarse experimentalmente, por lo que no hay que confundirlo con el concepto de materia. La masa es una propiedad escalar de los cuerpos involucrados en todas sus interacciones mecánicas. Se considera la medida de su inercia, entendida como la tendencia de un cuerpo a permanecer en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.
- **Fuerza:** acción de un cuerpo sobre otro, ya sea por contacto o a distancia; en consecuencia no puede aparecer por sí sola. Así pues, las fuerzas realmente aparecen por parejas.

## I.2.5 DIVISIÓN DE LA MECÁNICA NEWTONIANA.

Nuestra actual área de estudio es la parte de la mecánica newtoniana que se refiere al estudio del movimiento de los cuerpos; en otras palabras, es el estudio de las posiciones relativas de los mismos, en el espacio, al transcurrir el tiempo.

Para ubicar cuál es esa parte, realizaremos el siguiente esquema:



Con un asterisco indicamos el área general en que se va ubicar nuestro estudio y con dos asteriscos el área particular que se abordará en este texto.

Ahora procederemos a definir cada una de las divisiones del área general.

**Estática.** Es la parte de la mecánica que estudia los cuerpos que se encuentran inmóviles bajo la acción de sistemas de fuerzas. Se refiere al estudio de los sistemas de fuerzas, considerando el caso particular del reposo, y de las condiciones para establecer el equilibrio de los sistemas de fuerzas.

**Cinemática.** Es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, independientemente de las causas que lo producen. Es decir, trata el movimiento desde el punto de vista de sus características externas, sin considerar las causas que lo producen o lo modifican.

Específicamente establece las condiciones y relaciones entre los conceptos de trayectoria, desplazamiento, velocidad y aceleración; por ello también se le conoce como una geometría del movimiento, que incluye el concepto de tiempo.

**Dinámica.** Es la parte de la mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos, teniendo en cuenta las causas que lo producen.

Debido a que las áreas de conocimiento toman como objeto de estudio a los cuerpos rígidos, hablaremos ahora de modelos.

## I.2.6 CONCEPTO DE MODELO EN EL ÁMBITO DE LA FÍSICA. TIPOS DE MODELOS.

Para manejar determinados elementos se requiere idealizarlos mediante interpretaciones, lo cual muchas veces es factible lograr a través de los llamados MODELOS. Así las ciencias se ocupan de la elaboración de modelos representativos de fenómenos de la naturaleza, ya que la finalidad de las mismas consisten en realizar investigaciones y en obtener conocimientos para que se puedan entender, y en algunas ocasiones controlar, partes del universo que nos rodea.

Entendemos que los fenómenos naturales, en algunos casos, son demasiados complejos para que puedan comprenderse y estudiarse en todos sus aspectos, por lo que en consecuencia no podríamos generar modelos que los abarcaran en su totalidad, debido a lo cual se efectúan abstracciones y a la vez se singularizan determinadas variables para estudiar diversos fenómenos.

Al efectuarse esta abstracción hacemos, desde el principio, un modelo idealizado del objetivo o fenómeno en estudio; de otra manera; debe sustituirse la parte del universo que se está estudiando por un modelo de estructura similar a éste, pero más sencillo. Debido a lo anterior puede aseverarse que los hechos científicos son representaciones de los reales.

Una posible clasificación de los modelos, según su prioridad de abstracción, es la siguiente:

- MODELOS TEÓRICOS O FORMALES.
- MODELOS MATERIALES O REALES.

Los modelos teóricos o formales son expresiones simbólicas (de forma matemática), en términos de una estructura idealizada, que se supone análoga a la de un sistema real.

Los modelos materiales o reales son representaciones de sistemas reales por otros distintos, a los cuales se les asignan algunas propiedades semejantes a las que desean estudiarse en el sistema original.

Cualquier ley o cualquier teoría es un modelo formal que, en el caso de la física, trata de explicar el comportamiento de ciertos fenómenos. Conviene hacer notar que la adopción de un modelo real, para un fenómeno dado, implica la construcción previa de un modelo formal, el cual puede ser poco o muy preciso.

En efecto, la afirmación de que un proceso real  $B$  puede servir para determinados propósitos, como modelo adecuado para el estudio de un proceso  $A$ , implica el reconocimiento de lo que tienen y no en común, estos procesos.

Lo que tienen en común estos procesos lo llamaremos modelo formal. La nomenclatura y la construcción de los modelos requiere del conocimiento, de las características y de las propiedades de dichos procesos.

Los modelos materiales pueden ser útiles si permiten:

1. La realización de experimentos en condiciones más favorables que las que rigen en el sistema original.
2. Cambiar favorablemente las escalas de espacio o del tiempo.
3. Trasladar problemas de un campo complicado, con muchas incógnitas, a otro más familiar.

La mecánica newtoniana toma como modelos y base de su estudio los siguientes.

- **Partícula:** Porción de materia de dimensiones despreciables, comparadas con las de su marco de referencia.
- **Cuerpo:** Porción de materia de dimensiones apreciables, en cuanto a las de su marco de referencia.

En particular, los modelos que se emplean en el estudio de la estática son las que se mencionan en seguida.

- **Punto masa** (también conocido como partícula material o simplemente partícula): representación de un cuerpo por medio de un punto geométrico, al que se le asocia la masa del cuerpo.
- **Cuerpo rígido:** medio continuo que no acepta deformaciones perceptibles; es decir, todas las partículas del cuerpo conservan sus posiciones relativas entre sí, bajo cualquier condición de carga. Si el cuerpo no cumple estas características se le considera deformable.

Debemos tener conciencia de que en la realidad todos los cuerpos son deformables y que, como ya se comentó, el cuerpo rígido es sólo una idealización; es decir, un modelo.

Cabe señalar que las acciones también se modelan, tales como la fuerza aplicada en un punto, la fuerza por unidad de longitud y la fuerza por unidad de área; estos conceptos se tratarán más adelante.

En síntesis, un modelo se considera como la representación matemática y/o física de un fenómeno de la naturaleza. Debido a que ésta es demasiado compleja para que puedan comprenderse y manejarse todos los aspectos de un fenómeno físico, es necesario realizar abstracciones y singularizaciones de determinadas variables para estudiar dicho fenómeno; en consecuencia, lo que se crea es un modelo. La Mecánica en general se auxilia de dos tipos de modelos: los formales y los reales.

### 1.2.7 CONCEPTOS DE CANTIDADES ESCALAR Y VECTORIAL.

Para establecer una relación entre la causa y el efecto que se produce en un cuerpo, es necesario entender el significado de esa relación causa-efecto; por ello hay que definir una medida cuantitativa de los conceptos empleados en tal relación. Todas las mediciones físicas, ya sea que se realicen con los instrumentos más sencillos o con los aparatos más complicados, dan lugar a medidas que pueden expresarse mediante *cantidades escalares o vectoriales*, según el caso.

**Las cantidades escalares** son aquellas que para cualquier sistema de referencia permanecen invariantes, o que simplemente requieren de un escalar para quedar perfectamente determinadas. Algunos ejemplos de este tipo de cantidades son: masa, trabajo, temperatura, volumen y área.

**Las cantidades vectoriales** son aquellas de las cuales se requiere conocer su magnitud, su dirección y su sentido, para quedar definidas completamente. Algunos ejemplos de este tipo de cantidades son: fuerza, velocidad, aceleración, impulso y momento.

A las cantidades vectoriales puede representársele en forma matemática por medio de una terna ordenada de números reales. Dichas cantidades pueden clasificarse según las características de los conceptos a los que se asocian; entre otras, se tienen:

- **Vector libre:** Éste representa una cantidad de la que no interesa conocer su ubicación en el espacio; en consecuencia sólo se expresa en términos de su magnitud, dirección y sentido.
- **Vector deslizante:** Éste identifica una cantidad de la que se requiere precisar el lugar geométrico en que se ubica (línea de acción). A este tipo de vector se le asocia una expresión matemática que define dicho lugar geométrico.
- **Vector fijo:** Éste simboliza una cantidad que, para identificarse plenamente, además de magnitud, dirección y sentido, debe indicarse el punto en que se aplica. En consecuencia, a este tipo de vector debe asociársele un punto definido del espacio.

### 1.2.8 ENUNCIADOS Y EXPLICACIÓN DE LA PRIMERA, SEGUNDA Y TERCERA LEYES DE NEWTON.

En esta parte trataremos de estas leyes de Newton, consideradas como los axiomas de su mecánica. Para desarrollar una breve explicación de cómo deben entenderse estas leyes procederemos a dar algunas definiciones que consideramos importantes, relacionadas con la concepción filosófica de la naturaleza.

Habiendo ya mencionado lo que se entiende por naturaleza, aquí transcribiremos definiciones acerca del principio de causalidad, y de lo que es una ley de la naturaleza.

Principio de causalidad: todo proceso natural está absoluta y cuantitativamente determinado al menos por la totalidad de las circunstancias, o condiciones físicas, que acompañan su aparición.

Ley de la naturaleza: regularidad establecida con seguridad bastante, de los fenómenos observados en el acontecer natural, siempre y cuando se le considere necesaria en el sentido del principio de causalidad.

La teoría del movimiento expuesta por Newton, se sostiene por el principio de causalidad y por dos ideas propias:

Primera: el problema central de la mecánica es el cambio de estado de movimiento,

Segunda: el cambio de estado de movimiento sólo puede producirse por la acción recíproca de dos objetos, y en dicho proceso se alteran las cantidades de movimiento, o al menos la de alguno de ellos.

Para el tratamiento cuantitativo Newton necesitó de tres cantidades, siendo las que conocemos ahora como: aceleración, fuerza y masa.

La aceleración ya había sido conceptualizada por Galileo, como la medida cuantitativa de la variación del movimiento.

La fuerza se concebía como la medida del poder del agente que causa el cambio.

La masa, que según muchos científicos e historiadores fue descubrimiento de Newton, fue concebida como una medida de la resistencia que tiene un cuerpo a cambiar su estado de movimiento.

Para cuantificar la masa, Newton se apoyó en los experimentos de Galileo, los cuales lo llevaron a atribuir a todos los cuerpos una propiedad llamada inercia, la cual ya ha sido definida en este texto.

Teniendo en cuenta lo anterior puede plantearse lo siguiente:

– cuando un cuerpo actúa sobre otro, es decir cuando un cuerpo está sujeto a la acción de una fuerza, ¿que es lo que se puede percibir?

A esto podemos contestar lo siguiente:

– que el cuerpo al ser sometido a la acción de la fuerza, permanezca sin alterar su estado de movimiento (que puede ser el reposo relativo) o bien que se altere dicho estado.

Con base en lo anterior, la primera ley de Newton, conocida como ley de la inercia, puede enunciarse como sigue: *“un cuerpo permanece en estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, en tanto no exista fuerza alguna que altere dicho estado”*.

Se dice que esta ley es cualitativa por que enuncia la cualidad que tienen los cuerpos de no poder, por sí solos, alterar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, cualidad que se conoce con el nombre de inercia.

Recordando que las fuerzas no pueden aparecer por sí solas, sino que aparecen por parejas, se tiene que la fuerza a la cual se refiere la ley anterior, en realidad debe ser la resultante de un sistema de fuerzas, a la que de aquí en adelante representaremos mediante  $F$ .

Cuando la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo no es nula, se le conoce como fuerza desequilibrante, debido a que modificará el estado mecánico inicial del cuerpo sobre el que está actuando.

En consecuencia se puede ahora enunciar la ley de MOVIMIENTO, es decir la segunda ley de Newton, de la siguiente forma: *“si a un cuerpo se le aplica una fuerza desequilibrante, dicha partícula o cuerpo adquirirá una aceleración con la dirección y el sentido de la fuerza, y una magnitud directamente proporcional al módulo de ésta, e inversamente proporcional a la masa del cuerpo”*.

Se dice que esta ley es cuantitativa porque cuantifica el efecto que una fuerza produce al actuar sobre un cuerpo, pues dicha ley sostiene que el cambio de la cantidad de movimiento experimentado por una partícula, o un cuerpo, es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él.

Con base en lo anterior puede establecerse que el modelo matemático de la segunda ley de Newton es:

$$F = \frac{d}{dt} (mv),$$

donde  $mv$  es la cantidad de movimiento del cuerpo.

Además, para casos en que la masa sea una cantidad escalar constante, la expresión inmediata anterior queda:

$$F = m \frac{d}{dt} (v) .$$

El término  $\frac{d}{dt}(v)$  nos proporciona el concepto aceleración, que en lo sucesivo representaremos por medio de  $a$ ; por ello, para  $m=\text{constante}$ , el modelo matemático de la segunda ley de Newton generalmente se expresa simplemente como  $F = ma$ .

Teniendo en cuenta lo expuesto en los párrafos más recientes:

- puede decirse que un cambio de estado de movimiento requerirá la influencia mutua de dos o más cuerpos (concepto de fuerza),
- puede pensarse que, al efectuarse la interacción entre cuerpos, éstos pueden o no ser afectados de igual forma; aquí se abre la cuestión ¿por qué?

En general pensamos que el más afectado puede ser el más ligero. Pero las fuerzas han quedado definidas como la consecuencia de una interacción entre participantes, en los cuales no puede establecerse una distinción cualitativa; en consecuencia, las fuerzas de acción y reacción serán agentes imprescindibles de una interacción.

Basados en lo anterior podemos ahora enunciar la ley de la ACCIÓN Y REACCIÓN, o sea la tercera ley de Newton, como sigue: *“a toda acción corresponde una reacción de igual magnitud, colineal y con sentido contrario”*.

Al incluirse en esta ley el caso de que la acción de un cuerpo, sobre otro, implica necesariamente la presencia de una pareja de fuerzas, permite afirmar que esta ley es explicativa.

### **I.2.9 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL. APLICACIONES SENCILLAS.**

Ahora bien, al estudiar el movimiento de los planetas apoyándose en los trabajos realizados por Kepler, Newton estableció que los planetas, al describir órbitas alrededor del Sol, debían estar sujetos a una fuerza denominada centrípeta, ya que de lo contrario no describirían tales trayectorias; es decir, no serían curvas.

Al razonar de esta manera, Newton estaba descubriendo que sus leyes, a las cuales se les conoce en forma general como leyes de movimiento, también eran válidas para los cuerpos celestes. Este punto de vista estaba en contra de la filosofía Aristotélica, en la cual se establecía que el movimiento de los cuerpos celestes estaba regido por leyes místicas.

Newton consideró que la fuerza centrípeta que mantiene a un planeta, en su órbita, se debe a la atracción que el Sol ejerce sobre él. Apoyándose en sus leyes de movimiento, así como en los estudios

de Kepler, logró establecer el modelo matemático que relaciona la fuerza de atracción,  $F$ , entre el Sol y un planeta, llegando a las conclusiones siguientes, donde  $F$  representa la magnitud de  $F$  :

- la magnitud, de dicha fuerza, es directamente proporcional a la masa del planeta; es decir,  $F = k_1 m$ , con  $k_1 = \text{cte}$ .
- la magnitud, de esa fuerza es directamente proporcional a la masa del Sol; o sea,  $F = k_2 M$ , donde  $k_2 = \text{cte}$ .
- la magnitud, de tal fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia ( $r$ ) entre el centro del Sol y el centro del planeta; es decir,  $F = \frac{k_3}{r^2}$ , con  $k_3 = \text{cte}$ .

Con base en estas conclusiones pudo establecer que:

$$F = k \frac{Mm}{r^2},$$

donde  $k$  es una constante.

El valor de esa constante de proporcionalidad no pudo ser calculado por Newton. Unos cien años después el físico inglés Henry Cavendish fue quien calculó el valor de dicha constante, a la que se conoce como constante de gravitación universal y que usualmente se le simboliza por  $G$ , misma que en el Sistema Internacional se expresa:

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \quad \text{o bien} \quad 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Así pues, la expresión anterior a ésta en la actualidad se presenta como:

$$F = G \frac{Mm}{r^2},$$

en donde:  $F$  es el módulo de la fuerza de atracción,  
 $G$  es la constante de gravitación universal,  
 $M$  es la masa del Sol,  
 $m$  es la masa del planeta, y,  
 $r$  es la distancia entre el centro del Sol y el del planeta.

De esta expresión puede concluirse que: “*el módulo de la fuerza de atracción del Sol sobre un planeta es proporcional al producto de las masas de ambos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hay entre los centros de ellos*”.

Al analizar el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, Newton se dió cuenta de que debía existir una fuerza de atracción de la Tierra sobre la Luna, análoga a aquélla con la que el Sol atrae a los planetas.

Reuniendo todas estas ideas, llegó a la conclusión de que la atracción observada debía ser un fenómeno universal, que se manifestara entre dos objetos cualesquiera.

De esta forma surge la idea de la gravitación universal: dos cuerpos cualesquiera se atraen mutuamente con fuerzas, cuya magnitud está dada por la misma expresión matemática para la fuerza entre el Sol y un planeta, y cuya dirección es colineal con la recta que pasa por los centros de dicho cuerpo.

De tal manera, siendo  $m_1$  y  $m_2$  las masas de los cuerpos, separados una distancia  $r$  entre sus centros, habrá fuerzas mutuas de atracción, cuya magnitud estará dada por  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ , de modo que el modelo matemático correspondiente a dichas fuerzas está dado por:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} e,$$

donde  $e$  es un vector unitario cuya línea de acción pasa por los centros  $C_1$  y  $C_2$ , de los cuerpos; dicho vector tendrá el sentido de  $C_1$  hacia  $C_2$ , en el caso de la fuerza ejercida por el cuerpo 2 sobre el 1, en tanto que su sentido será de  $C_2$  hacia  $C_1$ , para el caso de la fuerza ejercida por 1 sobre 2.

Lo inmediato anterior permite enunciar la ley de la gravitación universal, de Newton, como sigue: “*dos cuerpos cualesquiera se atraen mutuamente con fuerzas directamente proporcionales al producto de sus masas, e inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre sus centros*”.

### Ejemplo 1.1

En términos generales se define a la magnitud de la aceleración gravitatoria, medida a  $45^\circ$  de latitud Norte y a nivel del mar, como la magnitud de la aceleración gravitatoria estándar; simbolizándose como  $g_s$  y de valor igual a  $9.81 \text{ m/s}^2$ .

También se define como peso de un cuerpo a la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre dicho cuerpo, así que cuando se dice que un cuerpo pesa, se tiene que ese cuerpo gravita.

Como resultado de la definición anterior tenemos que, la definición de  $1 \text{ kg}_f$  es la fuerza con que es atraído un cuerpo de masa igual a  $1 \text{ kg}$ , hacia el centro de la Tierra.

Con las definiciones anteriores y con los modelos matemáticos correspondientes a la segunda ley de Newton y a la ley de gravitación universal, encuentre otro modelo que permita calcular la magnitud de aceleración gravitatoria que provoca la atracción de la Tierra, sobre un objeto, a cualquier distancia sobre la superficie terrestre.

Resolución.

Consideremos primero el caso para cuando un cuerpo de masa  $m$ , se encuentra sobre la superficie terrestre, tal como se ilustra en la figura I.1 .

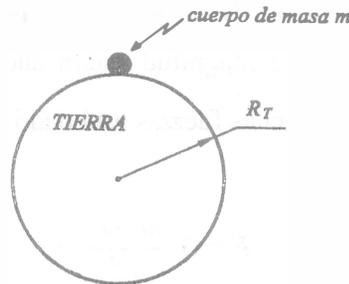


Figura I.1

Con base en la segunda ley de Newton, se tiene que:

$$W = mg_s \quad \dots (1),$$

donde  $W$  es la magnitud del peso del cuerpo,  $m$  es la masa de dicho cuerpo y  $g_s$  es la magnitud de la aceleración gravitatoria terrestre.

Por otro lado, considerando la ley de la gravitación universal, resulta:

$$W = G \frac{Mm}{(R_T)^2} \quad \dots (2),$$

donde  $W$  es la magnitud de la fuerza de atracción que ejerce la tierra sobre el cuerpo,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa de la tierra,  $m$  es la masa del cuerpo y  $R_T$  el radio promedio de la tierra.

Considerando la definición de peso de un cuerpo, se tiene que las expresiones (1) y (2) miden lo mismo, por lo que:

$$mg_s = G \frac{Mm}{(R_T)^2} \quad \dots (3),$$

de donde, al despejar  $g_s$  se obtiene:

$$g_s = \frac{GM}{(R_T)^2} \quad \dots (4),$$

modelo que permite calcular la magnitud de la aceleración terrestre.

Ahora consideremos el caso en que el cuerpo se encuentra a una distancia  $H$  considerable, sobre la superficie terrestre, según se ilustra en la figura I.2 .

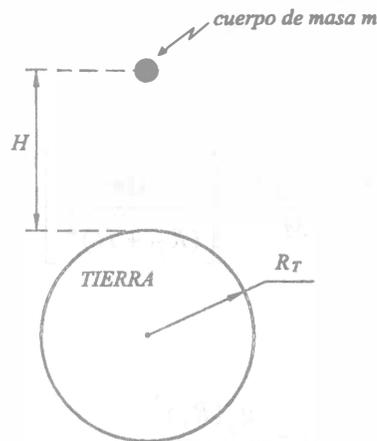


Figura I.2

Como el cuerpo ahora no se encuentra en la superficie terrestre, en este caso la magnitud de la aceleración que produce la Tierra al cuerpo no es  $g_s$ , sino otra a la que llamaremos  $a$ .

De acuerdo con la segunda ley de Newton se tiene que:

$$F = ma \quad \dots (5),$$

donde  $F$  es la magnitud de la fuerza de atracción,  $m$  es la masa del cuerpo y  $a$  es la magnitud de la aceleración recién definida.

Por otro lado, si consideramos la ley de la gravitación universal resulta:

$$F = G \frac{Mm}{(R_T + H)^2} \quad \dots (6),$$

donde  $F$  es la magnitud de la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre el cuerpo,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $M$  es la masa de la Tierra,  $m$  es la masa del cuerpo,  $R_T$  es el radio promedio de la Tierra y  $H$  es la altura donde se ubica el cuerpo, medida con relación a la superficie terrestre.

Considerando que las expresiones (5) y (6) miden lo mismo, se tiene:

$$ma = G \frac{Mm}{(R_T + H)^2} \quad \dots (7).$$

De la expresión (4) despejamos a  $G$  obteniéndose:

$$G = \frac{g_s (R_T)^2}{M} \quad \dots (8);$$

al sustituir (8) en (7), se tiene:

$$ma = \left[ \frac{g_s (R_T)^2}{M} \right] \left[ \frac{Mm}{(R_T + H)^2} \right],$$

y despejando  $a$ , resulta:

$$a = \frac{g_s (R_T)^2}{(R_T + H)^2},$$

lo que puede escribirse en la forma:

$$a = \left[ \frac{R_T}{R_T + H} \right]^2 g_s \quad \dots (9),$$

modelo que permite calcular la magnitud de la aceleración  $a$  producida por la Tierra sobre un cuerpo que se ubica a una distancia  $H$ , medida con relación a la superficie terrestre.

### Ejemplo I.2

Considerando que el radio promedio de la Tierra es 6376 km, y que la masa  $m$  de un cuerpo es 5000 kg, calcule a qué distancia, medida sobre la superficie terrestre, deberá ubicarse dicho cuerpo para que la magnitud de la fuerza  $P$  de atracción gravitatoria, terrestre, se reduzca a un valor de 9810 N.

Resolución.

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$P = ma ;$$

de esta expresión despejamos a la magnitud de la aceleración, resultando:

$$a = \frac{P}{m} ,$$

y sustituyendo los valores para  $P$  y  $m$  se obtiene:

$$a = \frac{9810}{5000} ,$$

por lo que (para el valor de  $P$  considerado) la magnitud de la aceleración  $a$  es igual a  $1.962 \text{ m/s}^2$  .

Como este valor es menor que el de la magnitud de la aceleración gravitatoria estándar, debemos considerar que el cuerpo no se encontrará en la superficie terrestre; esto es, deberá estar a una altura  $H$  sobre ella, la cual debemos calcular.

Ahora bien, considerando que la magnitud de la aceleración gravitatoria a cualquier altura  $H$ , medida con relación a la superficie terrestre, según (9) está dada por:

$$a = \left[ \frac{R_T}{R_T + H} \right]^2 g_s ,$$

de esta expresión, despejando  $H$  se tiene:

$$H = \sqrt{\frac{g_s}{a} (R_T)^2 - (R_T)} ;$$

sustituyendo aquí los valores correspondientes a  $g_s$ ,  $a$  y  $R_T$  obtenemos:

$$H = \sqrt{\frac{9.81}{1.962}(6376) - (6376)} ,$$

de donde, al realizar operaciones resulta  $H = 7881.17 \text{ km}$ , que es la distancia solicitada.

### Ejemplo I.3 .

Considerando que la distancia  $d$  promedio entre los centros de los planetas Mercurio y Venus es  $5.85 \times 10^{10} \text{ m}$ , y que las masas respectivas son  $m_M = 3.38 \times 10^{23} \text{ kg}$  y  $m_V = 48.3 \times 10^{23} \text{ kg}$ , ignorando la presencia de otros planetas y satélites, determine:

- la posición a la que debe estar un cuerpo, de masa  $m$ , entre los planetas mencionados, a fin de que dicho cuerpo pueda considerarse en equilibrio, y,
- la magnitud de la aceleración gravitatoria ( $g_M$ ) en Mercurio, si su radio promedio es  $2.57 \times 10^6 \text{ m}$ .

### Resolución.

- Efectuemos la construcción de un gráfico (el de la figura I.3), que permita tener una visualización del problema:

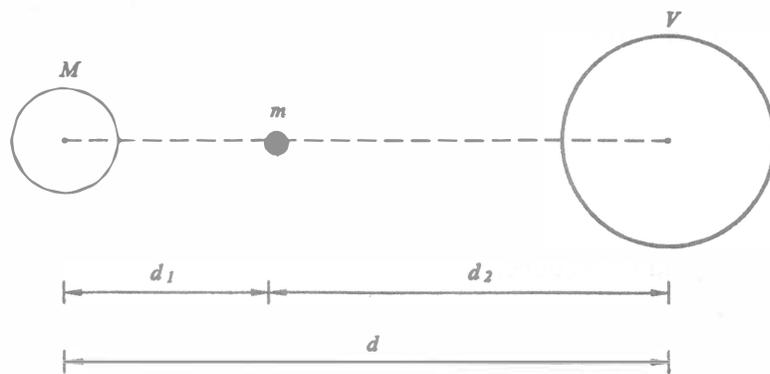


Figura I.3

Al aplicar la ley de la gravitación universal para el planeta Mercurio y el cuerpo, y luego para Venus y dicho cuerpo, resultan respectivamente:

$$F_1 = G \frac{m_M m}{(d_1)^2} \quad \text{y} \quad F_2 = G \frac{m_V m}{(d_2)^2}$$

Como hemos considerado que el cuerpo se mantiene en equilibrio, atraído por los dos planetas, con fuerzas de igual magnitud, podemos escribir:

$$G \frac{m_M m}{(d_1)^2} = G \frac{m_V m}{(d_2)^2} ;$$

realizando simplificaciones obtenemos:

$$\sqrt{\frac{m_M}{m_V}} = \frac{d_1}{d_2}$$

como  $d = d_1 + d_2$ , al despejar  $d_1$  resulta:

$$d_1 = d - d_2$$

Sustituyendo esta última expresión en la inmediata anterior, se tiene:

$$\sqrt{\frac{m_M}{m_V}} = \frac{d - d_2}{d_2}$$

por lo que, al despejar  $d_2$  resulta:

$$d_2 = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_V}}}$$

modelo matemático que permite calcular  $d_2$ ; así sustituyendo los datos obtenemos:

$$d_2 = \frac{5.85 \times 10^{10}}{1 + \sqrt{\frac{3.28 \times 10^{23}}{48.3 \times 10^{23}}}}$$

realizando operaciones se tiene que:  $d_2 = 4.640671 \times 10^{10}$  m y  $d_1 = 1.20933 \times 10^{10}$  m, que serían las distancias del cuerpo a los centros de Venus y Mercurio, respectivamente.

b) Para calcular la magnitud de la aceleración gravitatoria en Mercurio, aplicamos el modelo matemático de la ley de gravitación universal; entonces:

$$g_{\text{mercurio}} = G \frac{m_M}{(R_M)^2}$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$g_{\text{mercurio}} = 6.673 \times 10^{-11} \left[ \frac{3.26 \times 10^{23}}{(2.57 \times 10^6)^2} \right]$$

de donde, realizando operaciones, obtenemos finalmente:

$$g_{\text{mercurio}} = 3.314 \text{ m/s}^2$$

que es la magnitud de la aceleración solicitada.

## II. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA ESTÁTICA.

Aquí nos ocuparemos de presentar los elementos indispensables para poder abordar plenamente el tratamiento de los sistemas de fuerzas, parte fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de la estática.

Entre otras cosas, nos ocuparemos de mostrar cómo obtener el vector representativo de una fuerza cualquiera así como definir el momento de ésta, tanto respecto a un punto como respecto a un eje, además de presentar el Postulado de Stevin y principios tan importantes como el de equilibrio, el de transmisibilidad, y el de superposición de causas y efectos, después de los cual describiremos y ejemplificaremos los procesos de composición y descomposición de fuerzas.

Aunque pudiera pensarse que fuera innecesario, recomendamos al lector que, antes de continuar con la lectura del tema que desarrollamos enseguida, lea lo que sobre componentes vectoriales y escalares le presentamos en el Apéndice B de esta obra.

### II.1 DIVERSOS TIPOS DE FUERZAS: DESCRIPCIÓN; EFECTOS INTERNOS Y EXTERNOS PRODUCIDOS POR ELLAS. VECTOR REPRESENTATIVO DE UNA FUERZA. POSTULADO DE STEVIN. RESULTANTE DE UN CONJUNTO DE FUERZAS CONCURRENTES. ENUNCIADOS DE LOS PRINCIPIOS DE EQUILIBRIO, DE TRANSMISIBILIDAD Y DE SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS. PROCESOS DE COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS.

#### II.1.1 DIVERSOS TIPOS DE FUERZAS Y SU DESCRIPCIÓN.

En términos generales las fuerzas pueden clasificarse según su naturaleza, a saber; ya sea por contacto o a distancia.

Las fuerzas por contacto son aquellas que se producen cuando los cuerpos entran en contacto. Aquí podemos hablar de otras dos posibles formas; concentradas y distribuidas.

Las fuerzas concentradas son aquellas cuya posibilidad de representación se da cuando el área en donde actúa es mínima, comparada con el área total del cuerpo en donde actúa. En estas condiciones se considera el modelo de la fuerza puntual; es decir, una fuerza aplicada en un punto.

Las fuerzas distribuidas se pueden subdividir a su vez en: distribuidas por unidad de longitud y distribuidas por unidad de área.

Las fuerzas por unidad de longitud constituyen un modelo que permite considerar a las fuerzas actuando sobre un eje.

Las fuerzas por unidad de área constituyen otro modelo; el que permite considerar a las fuerzas actuando sobre una superficie.

Las fuerzas a distancia son aquellas que se producen cuando los cuerpos no se encuentran en contacto. Entre este tipo de fuerzas están las gravitacionales, las eléctricas y las magnéticas.

### II.1.2 EFECTOS INTERNOS Y EXTERNOS PRODUCIDOS POR FUERZAS.

La acción de un cuerpo sobre otro produce efectos, los cuales pueden considerarse de dos tipos; a saber: los internos y externos.

Estos efectos en general modifican el estado inicial del cuerpo, ya sea en su estado de movimiento o en su forma. Así, los efectos externos se producen cuando existe un cambio en el estado de reposo o de movimiento del cuerpo, mientras que los efectos internos se dan a través de deformaciones de dicho cuerpo, independientemente de que esté en reposo o en movimiento.

Para nuestro ámbito de estudio, al considerar sólo los efectos externos, consideramos a los cuerpos como cuerpos rígidos.

### II.1.3 VECTOR REPRESENTATIVO DE UNA FUERZA.

Como ya mencionamos, un vector tiene tres características básicas: magnitud, dirección y sentido. En general, cuando hablemos del vector representativo de una fuerza, nos referiremos a la expresión de esa magnitud vectorial mediante sus componentes ortogonales.

Para poder efectuar dicha representación, se consideran los vectores unitarios  $i, j, k$ , asociados a los ejes ortogonales  $x, y, z$ , respectivamente. Cabe mencionar que dichos vectores siempre se asocian a las direcciones y sentidos positivos de los ejes coordenados (ver figura II.1).

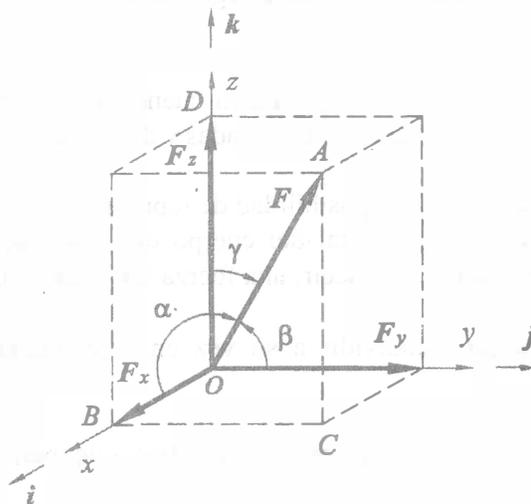


Figura II.1

Así, considerando el diagrama de la figura II.1, donde  $F$  es una fuerza cualquiera, se tiene:

$$F = F_x + F_y + F_z ,$$

tomando también la forma:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k ,$$

donde  $F_x i$ ,  $F_y j$  y  $F_z k$  son las proyecciones de  $F$ , tales que:

$$F_x = F_x i = |F| (\cos \alpha) i = (x_A - x_O) i ,$$

$$F_y = F_y j = |F| (\cos \beta) j = (y_A - y_O) j , y ,$$

$$F_z = F_z k = |F| (\cos \gamma) k = (z_A - z_O) k .$$

Así,

$$F = |F| [(\cos \alpha) i + (\cos \beta) j + (\cos \gamma) k] ;$$

donde:

$$[(\cos \alpha) i + (\cos \beta) j + (\cos \gamma) k] \text{ es "su" vector unitario.}$$

Los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , de la figura II.1, se conocen como ángulos directores, los cuales son medidos siempre desde la dirección positiva del eje considerado hacia la línea de acción de la fuerza

Los cosenos de dichos ángulos, se denominan cosenos directores, los cuales es usual simbolizarlos así:

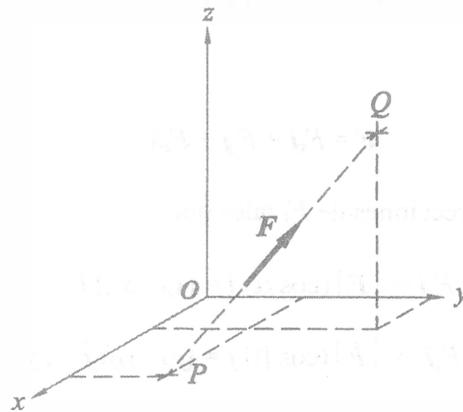
$$l = \cos \alpha , \quad m = \cos \beta , \quad y , \quad n = \cos \gamma$$

mismos que serán negativos para ángulos directores mayores de  $90^\circ$ , hasta  $180^\circ$  inclusive.

Los cosenos directores pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{|F|} , \quad \cos \beta = \frac{F_y}{|F|} , \quad y , \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{|F|}$$

Ejemplo II.1 La fuerza de la figura II.2 tiene una magnitud de 260 N , su soporte pasa por  $P$  y por  $Q$ , y tiene un sentido igual a  $\vec{PQ}$ .



$$P(5, 3, 0) \text{ m}$$

$$Q(2, 7, 12) \text{ m}$$

Figura II.2

Con base en ello, determine el vector unitario con la dirección y el sentido de  $F$ ; además, correspondientes a dicha fuerza: sus cosenos directores, sus componentes, sus proyecciones y su expresión vectorial (vector representativo).

Resolución.

a) Se tienen:

$$\vec{PQ} = (2-5)\mathbf{i} + (7-3)\mathbf{j} + (12-0)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}, \text{ y,}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (12)^2} = 13,$$

debido a lo cual, el vector unitario pedido resulta:

$$e_F = \left[ \frac{1}{|\vec{PQ}|} \right] \left( \vec{PQ} \right),$$

$$e_F = \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13},$$

$$e_F = -\frac{3}{13}\mathbf{i} + \frac{4}{13}\mathbf{j} + \frac{12}{13}\mathbf{k}.$$

b) Teniendo en cuenta lo anterior, los cosenos directores resultan:

$$l = \frac{-3}{13} ; \quad m = \frac{4}{13} \quad , \quad y \quad , \quad n = \frac{12}{13}$$

c) Las componentes rectangulares vienen siendo:

$$F_x = 260 \left( \frac{-3}{13} \right) = -60 \text{ N}$$

$$F_y = 260 \left( \frac{4}{13} \right) = 80 \text{ N}$$

$$F_z = 260 \left( \frac{12}{13} \right) = 240 \text{ N}$$

d) A las componentes del inciso anterior les corresponden las proyecciones rectangulares:

$$\mathbf{F}_x = -60 \mathbf{i} \text{ [N]} \quad , \quad \mathbf{F}_y = 80 \mathbf{j} \text{ [N]} \quad , \quad y \quad , \quad \mathbf{F}_z = 240 \mathbf{k} \text{ [N]} \quad .$$

e) Con base en las proyecciones recién citadas, puede decirse que la expresión vectorial de  $\mathbf{F}$  es:

$$\mathbf{F} = -60 \mathbf{i} + 80 \mathbf{j} + 240 \mathbf{k} \quad , \text{ [N]} \quad .$$

## II.1.4 POSTULADO DE STEVIN O REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO. RESULTANTE DE UN CONJUNTO DE FUERZAS CONCURRENTES.

### II.1.4.1 POSTULADO DE STEVIN O REGLA GENERALIZADA DEL PARALELOGRAMO.

Simón Stevin, nació en Brujas actual Bélgica (entonces países bajos españoles) en 1548, murió en Rotterdam en 1620, estudió en Leyden y en la Universidad Complutense de Madrid (Alcalá de Henares) de España. Viajó por Italia, conoció a Giordano Bruno y a Galileo cuando éste era joven, regreso a Brujas y fue nombrado ingeniero y encargado de canales por el Príncipe Guillermo de Orange. Su principal misión fue la de construir y mantener canales para la navegación, así como establecer el tránsito de entrada y salida de los puertos interiores destinados a la de estiba y el comercio.

Para resolver el problema de arrastre de embarcaciones, ideó la construcción de caminos paralelos a las márgenes del canal, sobre los que se movían carretas tiradas por animales produciendo un movimiento paralelo al movimiento de las aguas de dicho canal (ver figura II.3).

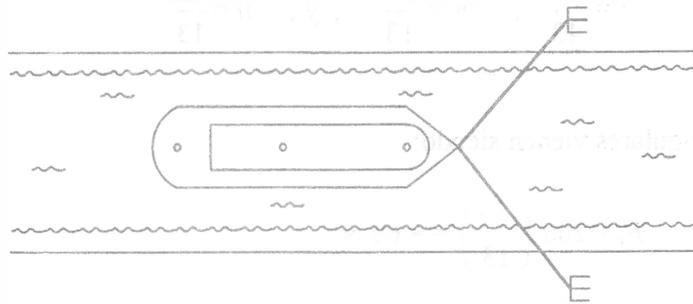


Figura II.3

De estas experiencias intuyó el principio del paralelogramo que denominó “Suma Geométrica”. El nombre de la ley del paralelogramo le fue dada hasta el siglo XVIII por D’Alambert y al generalizarla se estableció como Postulado de Stevin. Así:  $R = F_1 + F_2$ , donde la resultante está dada por la diagonal del paralelogramo formado por las dos fuerzas, según se ilustra en la figura II.4.

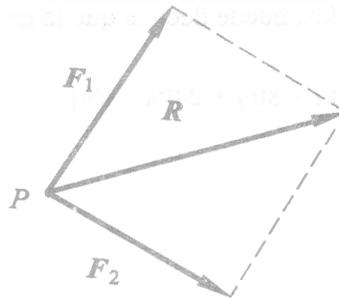


Figura II.4

Considérese un conjunto de  $n$  fuerzas conformado por  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , todas ellas concurrentes en un mismo punto. La resultante del conjunto descrito es  $F$  tal que  $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$ , según puede demostrarse con base en el Postulado de Stevin recién descrito, mismo que actualmente se le conoce como regla generalizada del paralelogramo y que en forma vectorial se enuncia de la siguiente manera: “Todo sistema de fuerzas que actúa en un punto masa, puede sustituirse, sin que se modifiquen sus efectos externos, por una sola fuerza igual a la suma vectorial de todas las que forman el conjunto, llamada Fuerza Resultante, que esté actuando en dicho punto masa”.

### II.1.4.2 RESULTANTE DE UN CONJUNTO DE FUERZAS CONCURRENTES.

Teniendo en cuenta lo recién mencionado puede decirse que, tratándose de un conjunto de tres fuerzas concurrentes cualesquiera, para poder obtener la resultante de dicho conjunto, de acuerdo con la regla generalizada del paralelogramo, se presentan dos posibilidades:

a) en forma gráfica (según puede apreciarse en la figura II.5), y,

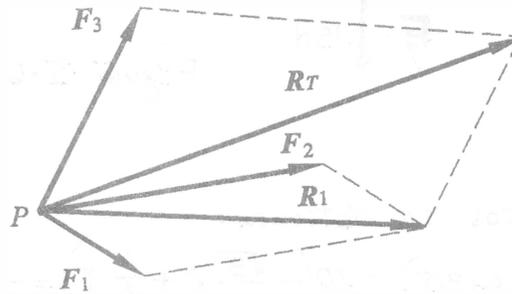


Figura II.5

b) en forma vectorial, es decir:

$$R_T = F_1 + F_2 + F_3 \quad ,$$

o bien,

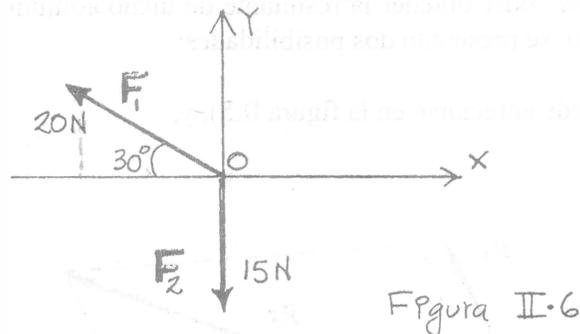
$$R_T = R_1 + F_3 \quad ;$$

debido a ello, para el sistema de  $n$  fuerzas concurrentes, se tiene que:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad \dots [1].$$

### Ejemplo II-2

Determine de dos maneras diferentes la magnitud de la resultante de las dos fuerzas coplanares mostradas en la figura II-6



Resolución.

Con base en los datos se obtienen:

$$\mathbf{F}_1 = 20(-\mathbf{i}\cos 30^\circ + \mathbf{j}\sin 30^\circ) = 20\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = -10\sqrt{3}\mathbf{i} + 10\mathbf{j}, \text{ N, y,}$$

$\mathbf{F}_2 = -15\mathbf{j}$ , debido a lo cual la resultante de las fuerzas dadas es:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -10\sqrt{3}\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \text{ N,}$$

fuerza cuya magnitud es:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(-10\sqrt{3})^2 + (-5)^2} = \sqrt{300 + 25} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13} \text{ N.} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

A continuación valdremos dicha magnitud en función de los módulos de las fuerzas dadas, así como del ángulo ( $\phi = 120^\circ$ ) formado entre ellas.

$$\begin{aligned} |\mathbf{R}| &= \sqrt{|\mathbf{F}_1|^2 + |\mathbf{F}_2|^2 + 2|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2|\cos\phi} = \\ &= \sqrt{(20)^2 + (15)^2 + 2(20)(15)\cos 120^\circ} = \\ &= \sqrt{400 + 225 + 600(-0.5)} = \sqrt{625 - 300} = \sqrt{325}, \end{aligned}$$

O sea que:

$$|\mathbf{R}| = 5\sqrt{13} \text{ N,}$$

Valor que coincide con el dado por  $\textcircled{1}$ .

### Ejemplo II.3

Sobre una partícula localizada en el origen del sistema de referencia mostrado en la figura II.7 actúan las cinco fuerzas mostradas, de modo que  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  son colineales respectivamente con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , en tanto que los soportes de  $F_4$  y  $F_5$  pasan por  $A$  y  $B$ , respectivamente, además de pasar por  $O$ .

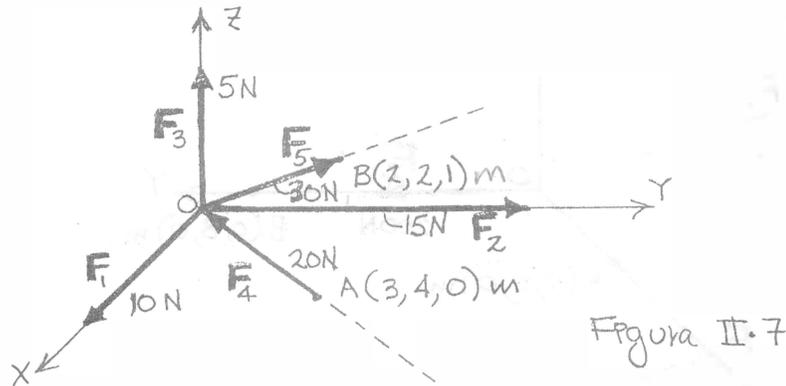


Figura II.7

Para tales condiciones, obtenga la fuerza que produzca los mismos efectos, sobre la partícula, que las cinco fuerzas descritas.

Resolución.

Se tienen:

$$F_1 = 10\mathbf{i}, \quad F_2 = 15\mathbf{j}, \quad F_3 = 5\mathbf{k},$$

$$F_4 = 20 \mathbf{e}_{\vec{OA}} = 20 \left[ \frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} \right] = -12\mathbf{i} - 16\mathbf{j},$$

$$F_5 = 30 \mathbf{e}_{\vec{OB}} = 30 \left[ \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3} \right] = 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k},$$

debido a lo cual, la resultante del conjunto de estas cinco fuerzas es:

$$\mathbf{R} = (10\mathbf{i}) + (15\mathbf{j}) + (5\mathbf{k}) + (-12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}) + (20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}),$$

es decir:

$$\mathbf{R} = 18\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 15\mathbf{k}, \text{ N,}$$

que es la fuerza pedida.

### Ejemplo II.4

Las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  mostradas en la figura II.8 tienen módulos de 150, 200 y 450 N, y, además de pasar por el origen del sistema de referencia, sus líneas de acción pasan por A, B y C respectivamente. Obtenga de dos maneras diferentes la resultante del conjunto formado por esas tres fuerzas, así como su módulo.

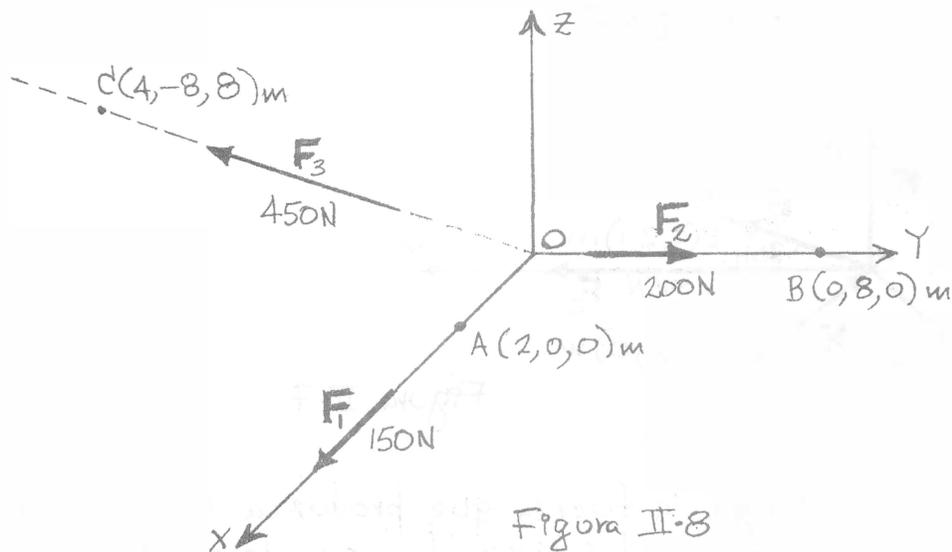


Figura II.8

Resolución.

1ª manera.- Con base en los datos, se obtienen:

$$F_1 = 150i, N; F_2 = 200j, N, \text{ y } F_3 = 450 e_{OC} = 450 \left[ \frac{4i - 8j + 8k}{12} \right] = 150i - 300j + 300k, N,$$

por lo que, la resultante del conjunto dado, obtenida como  $F_1 + F_2 + F_3$ ,

$$\text{es: } R = 300i - 100j + 300k, N, \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{cuyo módulo resulta: } |R| = 100\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = 100\sqrt{19} N \quad \text{--- (2)}$$

2ª manera.- Teniendo en cuenta los valores de  $F_1$  y  $F_2$ , al llamar  $F_n$  a la resultante del conjunto formado por las dos fuerzas recién citadas, se tiene  $F_n = F_1 + F_2 = 150i + 200j, N$ , y,  $|F_n| = 250 N$ ;

con base en ello, la resultante de las tres fuerzas dadas ahora la obtenemos mediante  $R = F_n + F_3 = (150i + 200j) + (150i - 300j + 300k) = 300i - 100j + 300k, N$ ,

valor que coincide con el valor dado por (1),  $\cos \phi = \frac{F_n \cdot F_3}{|F_n||F_3|} = \frac{-37,500}{(250)(450)} = -\frac{1}{3}$  y,

$$|R| = \sqrt{|F_n|^2 + |F_3|^2 + 2|F_n||F_3|\cos \phi} = \sqrt{(250)^2 + (450)^2 + 2(250)(450)\left(-\frac{1}{3}\right)} = 100\sqrt{19} N, \text{ valor dado por (2)}$$

## Ejemplo II.4 (CONTINUACIÓN) (2/2)

Como complemento para este ejemplo (II.4), en la figura II.9 presentamos un gráfico que permite apreciar, con otro enfoque, las dos maneras diferentes como obtuvimos la resultante del conjunto de las tres fuerzas dadas.

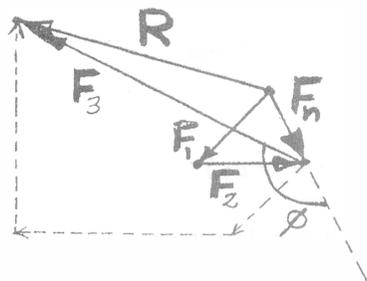


Figura II.9

La primera manera queda ahora sustentada en que dicha resultante ( $R$ ) tiene su parte inicial en el principio, y su parte final donde termina, el polígono de fuerzas que se forma al ubicar a  $F_2$  a continuación de  $F_1$  (es decir a partir del final de ésta), y ubicando a  $F_3$  a continuación de  $F_2$ , todo esto de acuerdo con la ley generalizada del paralelogramo; o sea que, en este caso, no se obtienen resultantes parciales antes de obtener la resultante del conjunto.

La otra manera comprende dos fases de composición de fuerzas; la primera donde se obtiene la resultante de  $F_1$  y  $F_2$ , identificable como  $F_n$  (verla en la figura II.9; fuerza que va del principio de  $F_1$  al final de  $F_2$ ) y la segunda donde se obtiene la resultante del conjunto (de las tres fuerzas dadas) como la suma vectorial de  $F_n$  y  $F_3$ , es decir la fuerza que va del principio de  $F_n$  al final de  $F_3$ .

Obsérvese en la figura II.9 el ángulo  $\phi$ , que forman  $F_n$  y  $F_3$ , mismo que intervino en una de las maneras que se emplearon para obtener el módulo de la resultante de las tres fuerzas dadas.

## II.1.5 ENUNCIADOS DE LOS PRINCIPIOS DE SUPERPOSICIÓN DE CAUSAS Y EFECTOS, DEL EQUILIBRIO Y DE TRANSMISIBILIDAD.

Si la acción aislada, de cada una de las fuerzas que actúan sobre un punto  $P$  de masa  $m$  (como el de la figura II.5), le produce aceleraciones parciales, con base en la Ley de Movimiento de Newton obtenemos las siguientes expresiones:

$$F_1 = ma_1, \quad F_2 = ma_2 \quad \text{y} \quad F_3 = ma_3,$$

debido a lo cual:

$$F_1 + F_2 + F_3 = m (a_1 + a_2 + a_3).$$

Entonces, considerando como constante a  $m$ , para un sistema de  $n$  fuerzas actuando sobre  $P$ , podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m \sum_{i=1}^n a_i, \quad \dots [2],$$

expresión que puede considerarse como el modelo matemático del **Principio de Superposición de Causas y Efectos** para una partícula, modelo que permite enunciar dicho principio de la siguiente forma: la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un punto masa, llamada fuerza resultante, produce a dicho punto una aceleración igual a la suma vectorial de las aceleraciones producidas por cada una de las fuerzas componentes; o sea que, la suma de las fuerzas (causas) que actúan sobre un punto, es decir la fuerza resultante, produce sobre el punto un efecto (aceleración) igual a la suma de los efectos (aceleraciones) producidos por cada una de las fuerzas.

De manera similar se enuncia el principio de superposición de causas y efectos para cuerpos, sólo que en este caso debe hacerse referencia a efectos externos.

**Principio de Equilibrio.** Este principio establece que dos fuerzas están en equilibrio cuando su suma vectorial es nula, lo cual se cumplirá siempre y cuando dichas fuerzas tengan igual magnitud, sean colineales y posean sentidos contrarios. Para ver lo que esto implica, tomaremos como modelo una partícula  $P$  en donde actúan las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  que cumplen las condiciones citadas (ver figura II.10).



Figura II.10

Según este principio  $F_1 = -F_2$ , así que  $R = \sum_{i=1}^n F_i = F_2 + F_1 = F_2 + (-F_2) = O$ , y en consecuencia  $F_1$  y  $F_2$  forman un sistema de fuerzas en equilibrio. De la segunda Ley de Newton se tiene que  $R = ma$  y si  $m \neq 0$ , entonces necesariamente  $a = O$ , lo que significa que la partícula  $P$  no ha sufrido modificación alguna en su estado de movimiento, es decir no se le ha producido aceleración alguna, que es lo que caracteriza al equilibrio.

Por lo anterior podemos afirmar que, un conjunto de fuerzas concurrentes está en equilibrio si la suma vectorial de las fuerzas que lo constituyen es nula, es decir si:

$$\sum_{i=1}^n F_i = O.$$

En general, los efectos externos provocados por un sistema de fuerzas que actúa sobre una partícula, o un cuerpo rígido, no se alteran si al sistema de fuerzas original se le adiciona, o se le quita, un conjunto de fuerzas en equilibrio.

Como ya mencionó las fuerzas se presentan en parejas, por lo que las acciones mutuas entre los cuerpos constituyen sistemas de fuerzas en equilibrio.

**Principio de Transmisibilidad.** Este principio establece que los efectos externos que la fuerza produce, son independientes del punto de aplicación de la misma, siempre y cuando el punto se encuentre sobre la línea de acción de dicha fuerza. Considérese un cuerpo como el de las figuras II.11, II.12 y II.13, de modo que en la II.11 tiene aplicada una fuerza  $F$  en el punto  $P$ , y en la figura II.12 se le adiciona en  $Q$  una pareja de fuerzas en equilibrio, colineales con  $F$ .

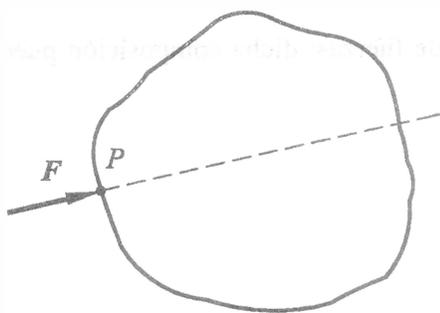


Figura II.11

Fuerza aplicada en el punto  $P$

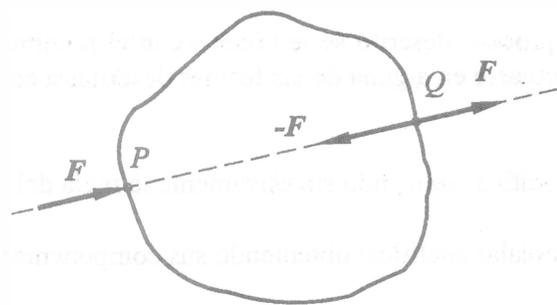


Figura II.12

Adición de un sistema de fuerzas en equilibrio en el punto  $Q$ .

Teniendo en cuenta que  $F$  aplicada en  $P$  y  $-F$  actuando en  $Q$  están en equilibrio, para efectos externos del cuerpo, al realizar la suma vectorial de las tres fuerzas de la figura II.12, puede decirse que dicha suma corresponde a una sola fuerza ( $F$ ) aplicada en  $Q$ ; con base en ello (ver figura II.13) es factible establecer que una fuerza puede trasladarse sobre su línea de acción, sin que se alteren los efectos externos del cuerpo en el que actúa.

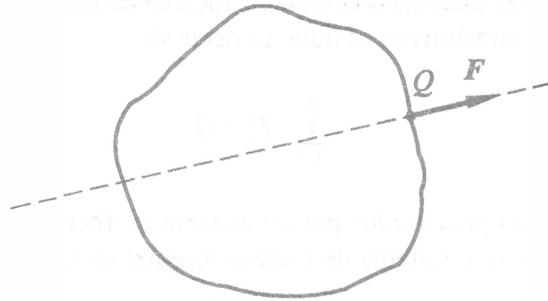


Figura II.13

## II.1.6 PROCESOS DE COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN DE FUERZAS.

Frecuentemente, en la resolución de problemas, donde actúa un conjunto de fuerzas en una partícula o en un cuerpo rígido, es necesario sustituir dicho conjunto por una sola fuerza, llamada fuerza resultante, que como ya lo mencionamos producirá los mismos efectos externos (de traslación).

Al proceso descrito se le conoce con el nombre de composición de fuerzas; dicha composición puede efectuarse en alguna de las formas descritas a continuación:

- a) gráfica: aplicando sucesivamente la regla del paralelogramo,
- b) escalar analítica: obteniendo sus componentes ortogonales,  $x$  y  $y$ ,
- c) vectorial: obteniendo las expresiones (vectoriales) de las proyecciones y después efectuando la suma (vectorial) de dichas proyecciones.

Al igual que puede sustituirse un sistema de fuerzas por su resultante, una fuerza puede sustituirse por un sistema tal que esta fuerza fuera la resultante de dicho sistema. Sin embargo, este último proceso está limitado ya que una fuerza podrá descomponerse en un máximo de tres proyecciones.

La sustitución de una fuerza puede realizarse mediante proyecciones de tipo ortogonal (proyecciones con direcciones paralelas a los ejes cartesianos) o en proyecciones oblicuas, donde a su vez cada proyección tendrá componentes ortogonales.

A continuación se muestran los procesos de composición [ver figuras II.14(a) y II.15(a)] y descomposición [ver figuras II.14(b) y II.15(b)], rectangulares, en dos y tres dimensiones respectivamente.

A) Composición y descomposición en dos dimensiones:

A.1) Composición:  
 $F_x + F_y = R$

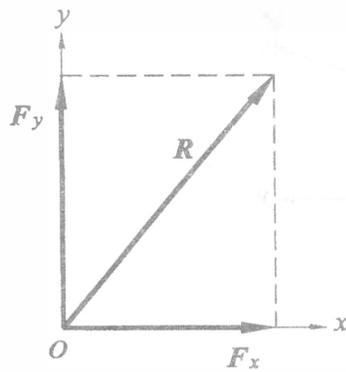


Figura II.14 (a)

A.2) Descomposición:  
 $R = R_x + R_y$

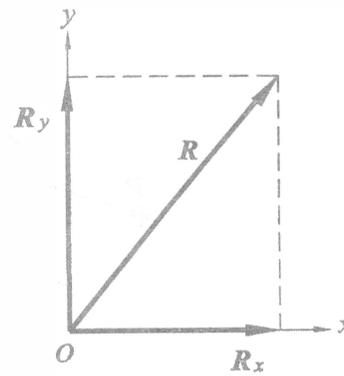


Figura II.14 (b)

B) Composición y descomposición en tres dimensiones:

B.1) Composición:  
 $F_x + F_y + F_z = R$

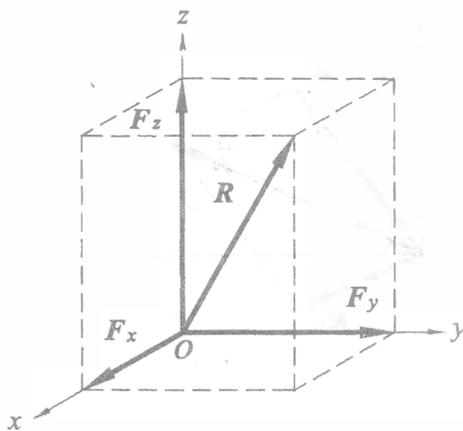


Figura II. 15 (a)

B.2) Descomposición:  
 $R = R_x + R_y + R_z$

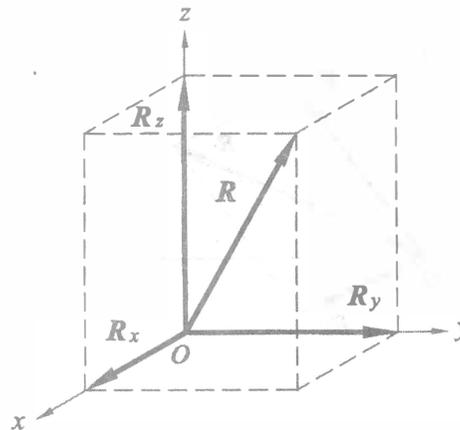


Figura II.15 (b)

Para proyecciones oblicuas en una, dos y tres direcciones, se tiene lo expuesto en las partes C), D) y E) siguientes.

C) En una dirección se tiene:

$$[F \text{ proyectada en } \vec{PQ}] = F_{PQ} = (F \cdot e_{PQ}) e_{PQ} ; \text{ ver figura II.16 .}$$

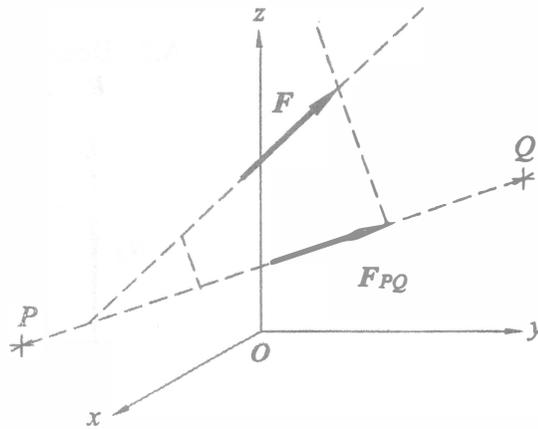


Figura II. 16

D) Composición y descomposición oblicuas en dos direcciones [ver figuras II.17(a) y II.17(b)]:

D.1) Composición:

$$F_1 e_{F_1} + F_2 e_{F_2} = R$$

D.2) Descomposición:

$$R = R_1 e_{R_1} + R_2 e_{R_2}$$

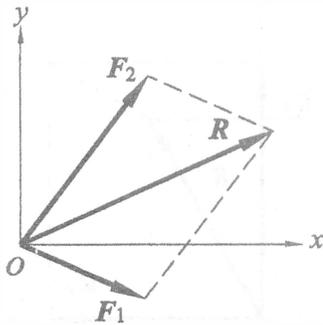


Figura II.17 (a)

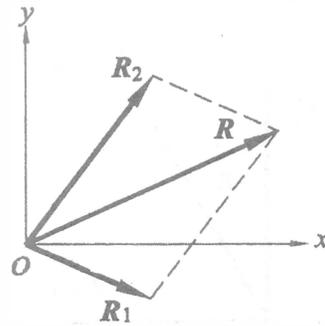


Figura II.17 (b)

E) Composición y descomposición oblicuas en tres direcciones [ver figuras II.18(a) y II.18(b)]:

E.1) Composición:

$$F_1 e_{F_1} + F_2 e_{F_2} + F_3 e_{F_3} = R$$

E.2) Descomposición:

$$R = R_1 e_{R_1} + R_2 e_{R_2} + R_3 e_{R_3}$$

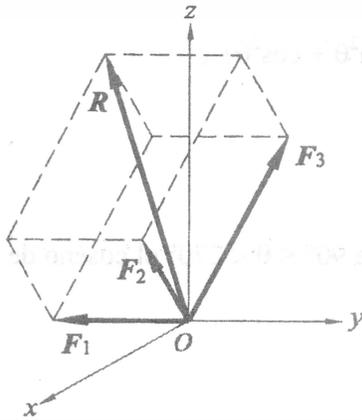


Figura II.18 (a)

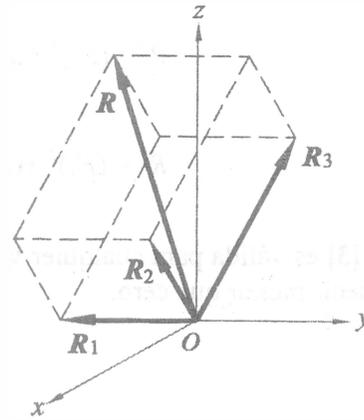


Figura II.18 (b)

**Composición aplicando la ley de los cosenos.** Esto vamos a hacerlo con base en lo mostrado en las figuras II.19(a) y II.19(b).

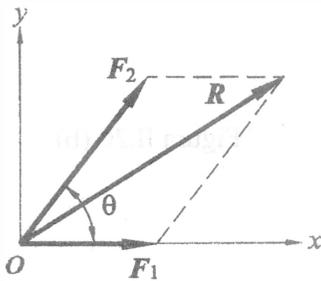


Figura II.19 (a)

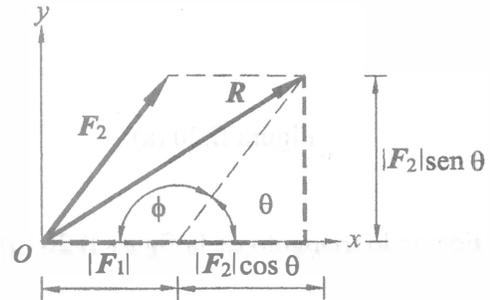


Figura II.19 (b)

Teniendo en cuenta las figuras recién citadas, y haciendo  $|F_1| = F_1$  así como  $|F_2| = F_2$ , obtenemos:

$$R^2 = (F_1 + F_2 \cos \theta)^2 + (F_2 \operatorname{sen} \theta)^2,$$

$$R^2 = (F_1)^2 + 2 F_1 F_2 \cos \theta + (F_2)^2 \cos^2 \theta + (F_2)^2 \operatorname{sen}^2 \theta,$$

$$R^2 = (F_1)^2 + 2 F_1 F_2 \cos \theta + (F_2)^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta),$$

y,

$$R^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + 2 F_1 F_2 \cos \theta \quad \dots [3].$$

La expresión [3] es válida para cualquier valor de  $\theta$ , sólo que para  $90^\circ < \theta < 270^\circ$  el coseno de  $\theta$  resulta negativo, es decir menor que cero.

**Composición aplicando la Ley de los senos** [ver figuras II.20(a) y II.20(b)].

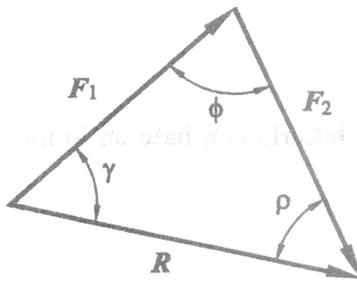


Figura II.20 (a)

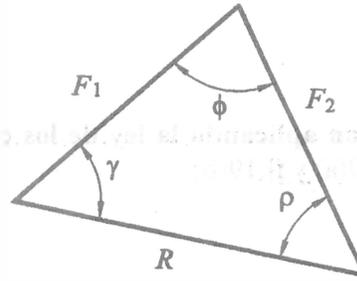


Figura II.20 (b)

Considerando triángulo de la figura II.20 (b), resulta:

$$\frac{R}{\operatorname{sen} \phi} = \frac{F_1}{\operatorname{sen} \rho} = \frac{F_2}{\operatorname{sen} \gamma}$$

### Ejemplo II.5

Efectúe la composición de las dos fuerzas coplanares de la figura II.21

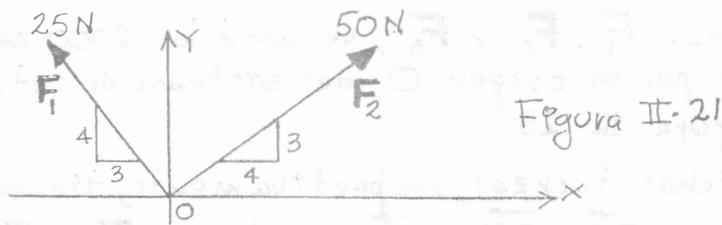


Figura II.21

Resolución.

Con base en los datos, se tienen:

$$\mathbf{F}_1 = 25 \mathbf{e}_{F_1} = 25 \left[ \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right] = -15\mathbf{i} + 20\mathbf{j}, \text{ N, } Y,$$

$$\mathbf{F}_2 = 50 \mathbf{e}_{F_2} = 50 \left[ \frac{4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{5} \right] = 40\mathbf{i} + 30\mathbf{j}, \text{ N,}$$

debido a lo cual, estas fuerzas se componen en:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 25\mathbf{i} + 50\mathbf{j}, \text{ N.}$$

### Ejemplo II.6

Efectúe la composición de las dos fuerzas coplanares de la figura II.22

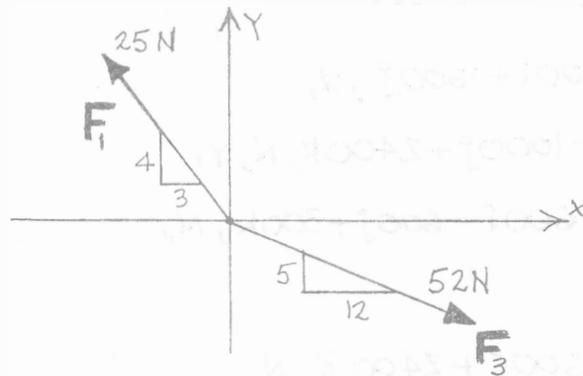


Figura II.22

Resolución.

En este caso se tiene:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3 = 25 \left[ \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right] + 52 \left[ \frac{12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}}{13} \right] = (-15\mathbf{i} + 20\mathbf{j}) + (48\mathbf{i} - 20\mathbf{j}), \text{ N,}$$

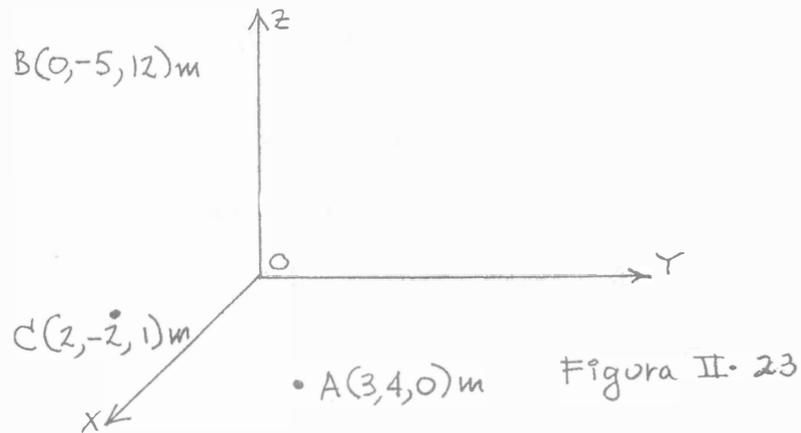
por lo que, las fuerzas de este problema se componen en:

$$\mathbf{R} = 33\mathbf{i}, \text{ N.}$$

### Ejemplo II.7

Se tienen tres fuerzas:  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$ , de módulos 2000, 2600 y 900N, cuyos soportes pasan por el origen O, del sistema de referencia mostrado en la figura II.23

Considerando que dichas fuerzas, respectivamente, tienen la dirección y el sentido de  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  y  $\vec{OC}$ , componga  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$  en una fuerza a la que denominaremos como  $\mathbf{F}_4$  y, después de ello, obtenga la resultante de  $\mathbf{F}_4$  y  $\mathbf{F}_3$ .



Resolución.

Con base en los datos, se obtienen:

$$\mathbf{F}_1 = 2000 \left[ \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right] = 1200\mathbf{i} + 1600\mathbf{j}, \text{ N,}$$

$$\mathbf{F}_2 = 2600 \left[ \frac{-5\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13} \right] = -1000\mathbf{j} + 2400\mathbf{k}, \text{ N, y,}$$

$$\mathbf{F}_3 = 900 \left[ \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3} \right] = 600\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 300\mathbf{k}, \text{ N,}$$

por lo que:

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 1200\mathbf{i} + 600\mathbf{j} + 2400\mathbf{k}, \text{ N,}$$

debido a lo cual, la resultante de  $\mathbf{F}_4$  y  $\mathbf{F}_3$  está dada por:

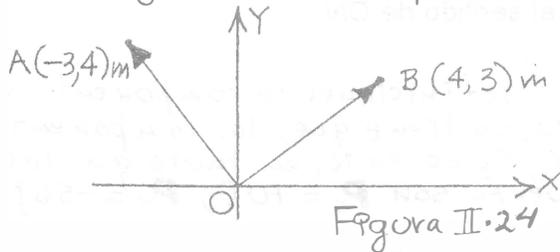
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_3 = 1800\mathbf{i} + 2700\mathbf{k}, \text{ N.}$$

### Ejemplo II.8

Considerando los elementos mostrados en la figura II.24, descomponga la fuerza  $\mathbf{F} = 25\mathbf{i} + 50\mathbf{j}$ , N, en dos fuerzas,  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ , de modo que estas tengan las direcciones y los sentidos de  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$  respectivamente. Después de ello:

a) obtenga el ángulo formado por  $\mathbf{F}_1$  y  $\mathbf{F}_2$ , y,

b) compruebe que  $|\mathbf{F}|^2 = |\mathbf{F}_1|^2 + |\mathbf{F}_2|^2 + 2|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2|\cos\phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo formado por estas dos fuerzas.



Resolución.

Con base en los datos, debe tenerse:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad 25\mathbf{i} + 50\mathbf{j} = F_1 \left( \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right) + F_2 \left( \frac{4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{5} \right), \text{ o sea que:}$$

$$25\mathbf{i} + 50\mathbf{j} = \left[ \frac{4F_2 - 3F_1}{5} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{4F_1 + 3F_2}{5} \right] \mathbf{j}, \text{ igualdad vectorial que da lugar a:}$$

$$\frac{4F_2 - 3F_1}{5} = 25 \quad \text{--- (1)}, \quad \text{y,} \quad \frac{4F_1 + 3F_2}{5} = 50 \quad \text{--- (2)}$$

como el sistema de ecuaciones formado por (1) y (2) tiene como solución  $F_1 = 25$  y  $F_2 = 50$ , las fuerzas pedidas resultan:

$$\mathbf{F}_1 = 25 \left( \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right) = -15\mathbf{i} + 20\mathbf{j}, \text{ N, y, } \mathbf{F}_2 = 50 \left( \frac{4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}}{5} \right) = 40\mathbf{i} + 30\mathbf{j}, \text{ N.}$$

a) Teniendo en cuenta estos valores se obtiene que:

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2 = -600 + 600 = 0 \text{ por lo que } \mathbf{F}_1 \text{ y } \mathbf{F}_2 \text{ son perpendiculares (} \cos\phi = 0 \text{)}.$$

b) Considerando los valores hasta aquí obtenidos, tenemos que:

$$|\mathbf{F}|^2 = (25)^2 + (50)^2 = 625 + 2500 = 3125 \quad \text{--- (3)}, \text{ y,}$$

$$|\mathbf{F}_1|^2 + |\mathbf{F}_2|^2 + 2|\mathbf{F}_1||\mathbf{F}_2|\cos\phi = [25]^2 + [50]^2 + 2(25)(50)(0) = 625 + 2500 + 0 = 3125 \quad \text{--- (4)}$$

entonces, por (3) y (4) se comprueba lo pedido.

## EJEMPLO II.9

Considere un sistema de referencia cartesiano  $Oxy$  con respecto al cual, en metros, se define la posición de los puntos  $M(3, -4)$  y  $N(5, 12)$ , además de la fuerza  $\mathbf{P}$  que pasa por el origen del sistema citado,  $O$ , tal que  $\mathbf{P} = 70\mathbf{i} - 56\mathbf{j}$ , N.

Teniendo en cuenta lo anterior:

- proporcione las componentes y las proyecciones cartesianas de  $\mathbf{P}$ ,
- determine las componentes de  $\mathbf{P}$  con relación a dos ejes rectos que pasan por el origen, del sistema de referencia, tales que uno de ellos tiene la dirección y el sentido de  $\overrightarrow{OM}$ , en tanto que el otro tiene la dirección y el sentido de  $\overrightarrow{ON}$ .
- descomponga  $\mathbf{P}$  en dos fuerzas que pasen por el origen,  $\mathbf{F}_U$  y  $\mathbf{F}_W$ , de modo que  $\mathbf{F}_U$  tenga la dirección y el sentido de  $\overrightarrow{OM}$ , en tanto que  $\mathbf{F}_W$  posea la dirección y el sentido de  $\overrightarrow{ON}$ .

Resolución. -a) Con base en las definiciones de componente y de proyección cartesianas de un fuerza, se tiene que, las componentes cartesianas de  $\mathbf{P}$  son  $P_x = 70$ ,  $P_y = -56$ ,  $P_z = 0$  en N, en tanto que las proyecciones cartesianas de dicha fuerza son  $P_x = 70$ ,  $P_y = -56$ ,  $P_z = 0$ , en N

b) Teniendo en cuenta los datos, tenemos:

$$\overrightarrow{OM} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \quad |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5\text{N}, \quad \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{OM}} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j});$$

$$\overrightarrow{ON} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}, \quad |\overrightarrow{ON}| = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13\text{N}, \quad \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{ON}} = \frac{1}{13}(5\mathbf{i} + 12\mathbf{j});$$

entonces, las componentes pedidas resultan ser, con relación al eje  $\overrightarrow{OM}$ :

$$\mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{OM}} = (70\mathbf{i} - 56\mathbf{j}) \cdot \left[ \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \right] = \frac{1}{5}(210 + 224) = \frac{434}{5}, \text{N},$$

en tanto que, con relación al eje  $\overrightarrow{ON}$ :

$$\mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{ON}} = (70\mathbf{i} - 56\mathbf{j}) \cdot \left[ \frac{1}{13}(5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \right] = \frac{1}{13}(350 - 672) = -\frac{322}{13}, \text{N}.$$

c) Para descomponer a  $\mathbf{P}$  en  $\mathbf{F}_U$  y  $\mathbf{F}_W$ , según las condiciones, debe cumplirse:

$$\mathbf{P} = F_U \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{OM}} + F_W \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{ON}}, \text{ es decir } 70\mathbf{i} - 56\mathbf{j} = F_U \left[ \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \right] + F_W \left[ \frac{1}{13}(5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \right];$$

así pues, por igualdad de vectores, debe tenerse:

$$70 = \frac{3}{5}F_U + \frac{5}{13}F_W \quad \text{--- ①}, \quad \text{y,} \quad -56 = -\frac{4}{5}F_U + \frac{12}{13}F_W \quad \text{--- ②},$$

sistema de ecuaciones que se cumple para  $F_U = 100\text{N}$  y  $F_W = 26\text{N}$ , debido a lo cual se tienen:

$$\mathbf{F}_U = F_U \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{OM}} = 100 \left[ \frac{1}{5}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \right] = 60\mathbf{i} - 80\mathbf{j}, \text{N, y,}$$

$$\mathbf{F}_W = F_W \overline{\mathbf{e}}_{\overrightarrow{ON}} = 26 \left[ \frac{1}{13}(5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \right] = 10\mathbf{i} + 24\mathbf{j}, \text{N,}$$

que son las fuerzas solicitadas.

### Ejemplo II.10

Considerando los elementos de la figura II.25, descomponga la fuerza  $\mathbf{F} = 33\mathbf{i}$ , N, en dos fuerzas  $\mathbf{F}_{OA}$  y  $\mathbf{F}_{OC}$  de modo que éstas tengan las direcciones y los sentidos de  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OC}$ , respectivamente. Después de ello: a) obtenga el ángulo formado por  $\mathbf{F}_{OA}$  y  $\mathbf{F}_{OC}$ , y, b) compruebe que  $|\mathbf{F}|^2 = |\mathbf{F}_{OA}|^2 + |\mathbf{F}_{OC}|^2 + 2|\mathbf{F}_{OA}||\mathbf{F}_{OC}|\cos\phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo formado entre estas dos fuerzas.

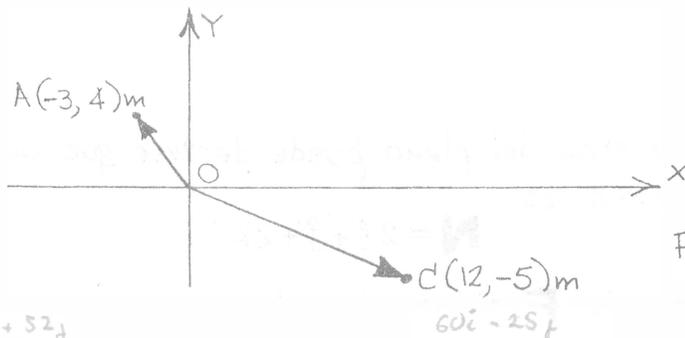


Figura II. 25

Resolución:  $33\mathbf{i} = 52\mathbf{j}$

$$\mathbf{F}_{OA} = F_{OA} \left( \frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right) \quad \text{--- (1)}, \quad \mathbf{F}_{OC} = F_{OC} \left( \frac{12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}}{13} \right) \quad \text{--- (2)}, \text{ con lo que:}$$

$$\mathbf{F}_{OA} + \mathbf{F}_{OC} = \left[ \frac{60F_{OC} - 39F_{OA}}{65} \right] \mathbf{i} + \left[ \frac{52F_{OA} - 25F_{OC}}{65} \right] \mathbf{j},$$

y como esta suma debe ser igual a  $\mathbf{F}$ , es decir a  $33\mathbf{i}$ , N, se tienen

$$\frac{60F_{OC} - 39F_{OA}}{65} = 33 \quad \text{--- (3)}, \quad \text{y}, \quad \frac{52F_{OA} - 25F_{OC}}{65} = 0 \quad \text{--- (4)};$$

como la solución del sistema formado por (3) y (4) es  $F_{OA} = 25$ ,  $F_{OC} = 52$ , al llevar estos valores a (1) y (2) resultan:  $\mathbf{F}_{OA} = -15\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ , N, y,  $\mathbf{F}_{OC} = 48\mathbf{i} - 20\mathbf{j}$ , N.

a) El producto escalar entre las dos fuerzas recién obtenidas vale  $-720 - 400$ ; es decir  $-1120$ ; debido a lo cual el ángulo formado por ellas resulta:  $\phi = \arccos \frac{\mathbf{F}_{OA} \cdot \mathbf{F}_{OC}}{|\mathbf{F}_{OA}||\mathbf{F}_{OC}|} = \arccos \frac{-1120}{(25)(52)} = \arccos \frac{-56}{65} = 149.49^\circ$

b) Con base en los datos y en lo obtenido hasta aquí, se tiene:

$$|\mathbf{F}|^2 = (33)^2 = 1089 \quad \text{--- (5)}, \text{ y,}$$

$$|\mathbf{F}_{OA}|^2 + |\mathbf{F}_{OC}|^2 + 2|\mathbf{F}_{OA}||\mathbf{F}_{OC}|\cos\phi = (25)^2 + (52)^2 + 2(25)(52)\left(-\frac{56}{65}\right) = 625 + 2704 - 2240 = 1089 \quad \text{--- (6)};$$

entonces, por (5) y (6) se comprueba lo pedido.

### Ejemplo II-11

Dado el plano de ecuación  $2x+y+2z-5=0$  y la fuerza  $\mathbf{F}=36\mathbf{i}-15\mathbf{k}$ , N, aplicada en el punto  $Q(1,1,1)$  m, descomponga la fuerza dada en dos proyecciones ortogonales: una en dirección perpendicular al plano, y una contenida en dicho plano. Después de ello, determine las magnitudes de tales proyecciones y compruebe que la suma de los cuadrados de esas magnitudes es igual al cuadrado del módulo de  $\mathbf{F}$ .

### Resolución.

Con base en la ecuación del plano puede decirse que un vector perpendicular a dicho plano es

$$\mathbf{N} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

y que la proyección de  $\mathbf{F}$  sobre el vector recién especificado es:

$$\mathbf{F}_N = \left[ \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}}{|\mathbf{N}|^2} \right] \mathbf{N} = \left[ \frac{72-30}{(3)^2} \right] (2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{28}{3}\mathbf{i} + \frac{14}{3}\mathbf{j} + \frac{28}{3}\mathbf{k}, \text{ N, } \dots \text{---} \textcircled{1}$$

que es una de las proyecciones pedidas.

Llamando  $\mathbf{F}_\pi$  a la proyección de  $\mathbf{F}$  contenida en el plano, debe cumplirse:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_\pi$ , debido a lo cual resulta:

$$\mathbf{F}_\pi = \mathbf{F} - \mathbf{F}_N = 36\mathbf{i} - 15\mathbf{k} - \left( \frac{28}{3}\mathbf{i} + \frac{14}{3}\mathbf{j} + \frac{28}{3}\mathbf{k} \right) = \frac{80}{3}\mathbf{i} - \frac{14}{3}\mathbf{j} - \frac{73}{3}\mathbf{k}, \text{ N, } \dots \text{---} \textcircled{2}$$

que es la otra proyección pedida.

Por otro lado, teniendo en cuenta  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$  obtenemos:

$$|\mathbf{F}_N|^2 + |\mathbf{F}_\pi|^2 = \frac{1}{9} [(28)^2 + (14)^2 + (28)^2] + \frac{1}{9} [(80)^2 + (-14)^2 + (-73)^2] = \frac{1764}{9} + \frac{11925}{9} = 1521 \dots \textcircled{3}$$

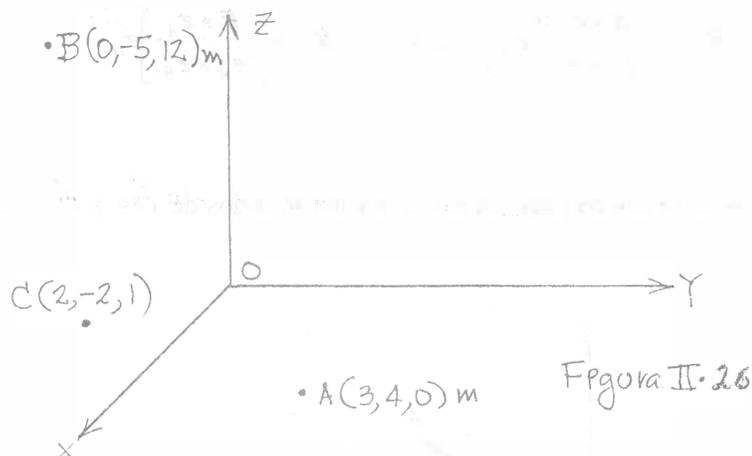
y considerando los datos:

$$|\mathbf{F}|^2 = (36)^2 + (-15)^2 = 1296 + 225 = 1521 \dots \textcircled{4};$$

con base en  $\textcircled{3}$  y  $\textcircled{4}$  queda comprobado lo que se pidió.

### Ejemplo II.12

Considerando los elementos de la figura II.26, descomponga la fuerza  $\mathbf{F} = 1800\mathbf{i} + 2700\mathbf{k}$ , N, en tres fuerzas  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$ , de modo que éstas tengan las direcciones y los sentidos de  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  y  $\vec{OC}$ , respectivamente.



Resolución.

Considerando los datos, debe cumplirse que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = F_1 \mathbf{e}_{OA} + F_2 \mathbf{e}_{OB} + F_3 \mathbf{e}_{OC}, \text{ o sea que:}$$

$$1800\mathbf{i} + 2700\mathbf{k} = F_1 \left[ \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right] + F_2 \left[ \frac{-5\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13} \right] + F_3 \left[ \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3} \right],$$

es decir:

$$1800\mathbf{i} + 2700\mathbf{k} = \frac{117F_1\mathbf{i} + 156F_1\mathbf{j} - 75F_2\mathbf{j} + 180F_2\mathbf{k} + 130F_3\mathbf{i} - 130F_3\mathbf{j} + 65F_3\mathbf{k}}{195},$$

igualdad vectorial que da lugar a las igualdades escalares:

$$\frac{117F_1 + 130F_3}{195} = 1800 \dots (1), \quad \frac{156F_1 - 75F_2 - 130F_3}{195} = 0 \dots (2), \quad \frac{180F_2 + 65F_3}{195} = 2700 \dots (3);$$

como estas tres igualdades se satisfacen para  $F_1 = 2000$ ,  $F_2 = 2600$  y  $F_3 = 900$ , las fuerzas pedidas resultan ser:

$$\mathbf{F}_1 = 2000 \left[ \frac{3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}}{5} \right] = 1200\mathbf{i} + 1600\mathbf{j}, \text{ N,}$$

$$\mathbf{F}_2 = 2600 \left[ \frac{-5\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13} \right] = -1000\mathbf{j} + 2400\mathbf{k}, \text{ N, y,}$$

$$\mathbf{F}_3 = 900 \left[ \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3} \right] = 600\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 300\mathbf{k}, \text{ N.}$$

Ejemplo II.13 Dada la fuerza  $\mathbf{R}$  de la figura II.27, comprobar que dicha fuerza se puede descomponer en dos proyecciones oblicuas dadas por:

$$\mathbf{R}_A = \left[ \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{e}_B}{\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B} \right] \mathbf{e}_A \quad , \quad \mathbf{R}_B = \left[ \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{e}_A}{\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B} \right] \mathbf{e}_B$$

donde  $\mathbf{e}_A$  y  $\mathbf{e}_B$  son vectores unitarios con las direcciones y los sentidos de  $\vec{OA}$  y  $\vec{OB}$ , respectivamente.

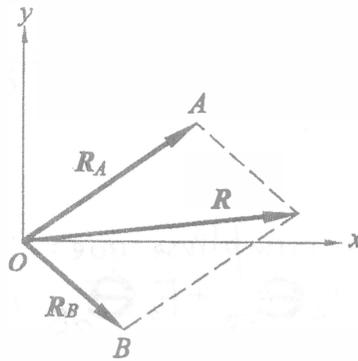


Figura II.27

Resolución.

Con base en el postulado de Stevin se tiene que;  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B$ , debido a lo cual:

$$\mathbf{R} = R_A \mathbf{e}_A + R_B \mathbf{e}_B \quad \dots (1).$$

Primeramente expresamos los vectores unitarios de las direcciones oblicuas, en función de los cosenos directores correspondientes:

$$\mathbf{e}_A = \cos \alpha_A \mathbf{i} + \cos \beta_A \mathbf{j} \quad \dots (2),$$

y ,

$$\mathbf{e}_B = \cos \alpha_B \mathbf{i} + \cos \beta_B \mathbf{j} \quad \dots (3).$$

Considerando (1), (2) y (3), resulta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B = R_A(\cos \alpha_A \mathbf{i} + \cos \beta_A \mathbf{j}) + R_B(\cos \alpha_B \mathbf{i} + \cos \beta_B \mathbf{j}) ,$$

de donde se obtiene:

$$\mathbf{R} = (R_A \cos \alpha_A + R_B \cos \alpha_B) \mathbf{i} + (R_A \cos \beta_A + R_B \cos \beta_B) \mathbf{j} ,$$

por lo que las componentes cartesianas rectangulares de  $\mathbf{R}$  con relación a  $x$  e  $y$ , respectivamente, son:

$$R_x = R_A \cos \alpha_A + R_B \cos \alpha_B \quad \dots (4),$$

y,

$$R_y = R_A \cos \beta_A + R_B \cos \beta_B \quad \dots (5).$$

Al escribir (4) y (5), respectivamente, como :

$$(\cos \alpha_A)R_A + (\cos \alpha_B)R_B = R_x \quad \dots (6),$$

y,

$$(\cos \beta_A)R_A + (\cos \beta_B)R_B = R_y \quad \dots (7)$$

se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $R_A$  y  $R_B$ ), sistema que resolveremos empleando la regla de Kramer.

El determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \alpha_A & \cos \alpha_B \\ \cos \beta_A & \cos \beta_B \end{vmatrix} , \text{ cuyo desarrollo también corresponde a: } |\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B| ,$$

mientras que los determinantes para  $R_A$  y para  $R_B$  son:

$$\Delta R_A = \begin{vmatrix} R_x & \cos \alpha_B \\ R_y & \cos \beta_B \end{vmatrix} , \text{ cuyo desarrollo también corresponde a: } |\mathbf{R} \times \mathbf{e}_B| , \quad y ,$$

$$\Delta R_B = \begin{vmatrix} \cos \alpha_A & R_x \\ \cos \beta_A & R_y \end{vmatrix} , \text{ cuyo desarrollo también corresponde a: } |\mathbf{R} \times \mathbf{e}_A| .$$

Con base en lo anterior, resultan:

$$R_A = \frac{R \times e_B}{e_A \times e_B}, \quad y, \quad R_B = \frac{R \times e_A}{e_A \times e_B},$$

debido a lo cual puede afirmarse que:

$$R_A = \left[ \frac{R \times e_B}{e_A \times e_B} \right] e_A, \quad y, \quad R_B = \left[ \frac{R \times e_A}{e_A \times e_B} \right] e_B,$$

con lo cual hemos concluido la comprobación pedida.

**Otra forma de comprobar lo pedido** consiste en mostrar que  $R_A$  y  $R_B$  se componen en  $R$ , o sea que ésta es su resultante.

Con base en el enunciado se tiene que:

$$F_A + F_B = \left[ \frac{F \times e_B}{e_A \times e_B} \right] e_A + \left[ \frac{F \times e_A}{e_A \times e_B} \right] e_B \quad \dots (1),$$

$$|F \times e_B| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix} = |k(-F_x \sin \beta - F_y \cos \beta)| = F_x \sin \beta + F_y \cos \beta \quad \dots (2),$$

$$|F \times e_A| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} = |k(F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha)| = F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha \quad \dots (3),$$

y,

$$|e_A \times e_B| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \beta & -\sin \beta & 0 \end{vmatrix} = |(-\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta)k| = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta \quad \dots (4);$$

basados en (2) y (3) obtenemos:

$$|\mathbf{F} \times \mathbf{e}_B|_{\mathbf{e}_A} = (F_x \operatorname{sen} \beta + F_y \operatorname{cos} \beta)(\mathbf{i} \operatorname{cos} \alpha + \mathbf{j} \operatorname{sen} \alpha) \quad \dots (5),$$

$$|\mathbf{F} \times \mathbf{e}_A|_{\mathbf{e}_B} = (F_x \operatorname{sen} \alpha - F_y \operatorname{cos} \alpha)(\mathbf{i} \operatorname{cos} \beta - \mathbf{j} \operatorname{sen} \beta) \quad \dots (6),$$

y,

$$\begin{aligned} |\mathbf{F} \times \mathbf{e}_B|_{\mathbf{e}_A} + |\mathbf{F} \times \mathbf{e}_A|_{\mathbf{e}_B} &= \mathbf{i}(F_x \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha + F_y \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos} \alpha + F_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - F_y \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta) + \\ &\quad \mathbf{j}(F_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + F_y \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - F_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + F_y \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha) = \\ &= F_x (\operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta) \mathbf{i} + F_y (\operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta) \mathbf{j} \quad \dots (7), \end{aligned}$$

entonces, por (7) y (4) se tiene que:

$$\frac{|\mathbf{F} \times \mathbf{e}_B|_{\mathbf{e}_A} + |\mathbf{F} \times \mathbf{e}_A|_{\mathbf{e}_B}}{[\mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_B]} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} = \mathbf{F} \quad \dots (8);$$

al llevar (8) a (1) resulta :

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{F} \quad ,$$

lo que completa la comprobación pedida.

## II.2 MOMENTO DE UNA FUERZA, CON RESPECTO A UN PUNTO Y CON RESPECTO A UN EJE. PAR DE FUERZAS. MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS.

Para el estudio de la reducción de sistemas de fuerzas es necesario saber obtener la suma de momentos con respecto a un eje, y con respecto a un punto, de los elementos (fuerzas y/o pares), que actúan sobre un cuerpo; por ello, definiremos a cada uno de esos momentos y resolveremos algunos ejercicios, donde intervienen los conceptos de componentes vectoriales y escalares que definimos y ejemplificamos en el Apéndice B.

### II.2.1 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO.

Antes de definirlo, diremos que una fuerza tiene o produce momento con respecto a un punto, cuando tiende a girar en torno a éste.

Sea  $F$  una fuerza y  $P$  un punto, ambos cualesquiera, del espacio; siendo  $r$  un vector, al que llamaremos brazo, que va de  $P$  a un punto cualquiera de la línea de acción de  $F$ , definimos como momento de  $F$ , con respecto a  $P$ , al vector  $M_P$  tal que:

$$M_P = r \times F \quad \dots [4]$$

el cual, de acuerdo con las propiedades del producto vectorial, es perpendicular al plano formado por  $r$  y  $F$ , y tiene un módulo igual al producto de la magnitud de  $F$  por la distancia entre  $P$  y la línea de acción de  $F$ , medida sobre una perpendicular a dicha línea.

Para demostrar lo mencionado acerca del módulo nos basaremos en la figura II.28, dibujada en el plano que contiene a  $F$  y a  $P$ .

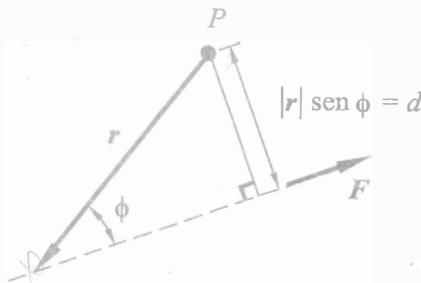


Figura II.28

De acuerdo con dicha figura, para cualquier valor de  $\phi$  :

$$|\mathbf{r}| |\mathbf{F}| (\sin \phi) = |\mathbf{F}| (|\mathbf{r}| \sin \phi) = |\mathbf{F}| (d) \quad \dots (1),$$

y como una de las propiedades del producto vectorial nos dice que:

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| (\sin \phi) \quad \dots (2),$$

por [4], (2) y (1), obtenemos:

$$|\mathbf{M}_p| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{F}| (d),$$

que concuerda con lo mencionado al definir a  $\mathbf{M}_p$ .

## II.2.2 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE.

Antes de definirlo, diremos que una fuerza produce o tiene momento con respecto a un eje, cuando tiende a girar en torno a éste.

Definiremos al momento de  $\mathbf{F}$  con respecto a un eje  $u$  como la proyección (componente vectorial), sobre  $u$ , del momento que tiene esa fuerza con respecto a cualquier punto de dicho eje.

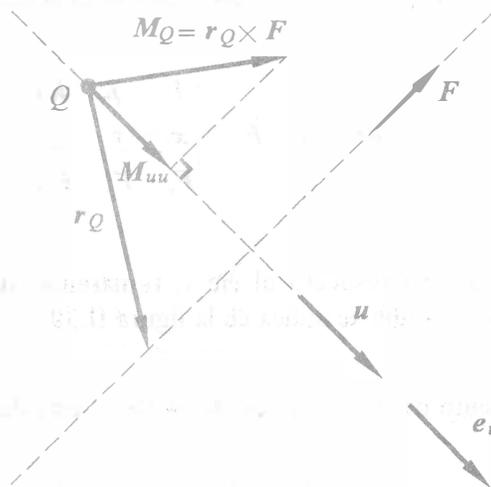


Figura II.29

Sea  $F$  una fuerza cualquiera,  $u$  un eje también cualquiera, y  $r_Q$  un vector llamado brazo, que va de un punto cualquiera de  $u$  a un punto cualquiera de la línea de acción de  $F$ , como se muestra en la figura II.29, donde  $e_u$  es un vector unitario que tiene la dirección y el sentido de  $u$ . De acuerdo con lo anterior, y llamando  $M_{uu}$  al momento de  $F$  con respecto a  $u$ , se tiene:

$$M_{uu} = [ (r_Q \times F) \cdot e_u ] e_u \quad \dots [5].$$

Consideremos ahora una fuerza cualquiera  $F$ , dada por  $F = F_x i + F_y j + F_z k$ , cuya línea de acción pasa por un punto cualquiera  $P(x, y, z)$ , como se muestra en la figura II.30

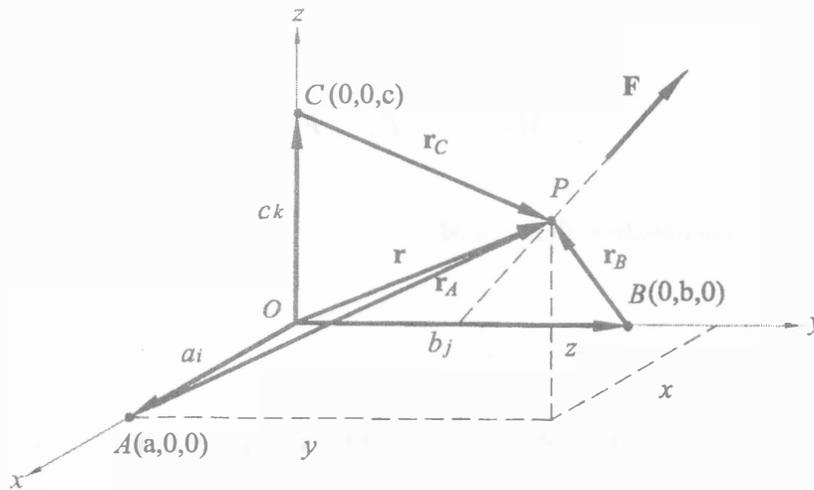


Figura II.30

Basados en las componentes de los vectores  $r$  y  $F$  de dicha figura, y en la expresión [4], podemos afirmar que el momento de  $F$  con respecto al origen o del sistema dado, es:

$$M_O = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \dots (A)$$

Para valuar el momento de  $F$  con respecto al eje  $x$ , tomaremos un brazo  $r_A$  que va de un punto  $A$  cualquiera de ese eje al punto  $P$ , como se indica en la figura II.30.

En tales condiciones, el momento de  $F$  con respecto al eje  $x$  está dado por:

$$M_{xx} = [ (r_A \times F) \cdot i ] i \quad \dots (a);$$

teniendo en cuenta la figura II.30 , obtenemos:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r} - a\mathbf{i} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} - a\mathbf{i} = (x - a)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} ,$$

con lo que:

$$(\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-a & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} = \left[ \mathbf{i} \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x-a & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x-a & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \right] \cdot \mathbf{i}$$

es decir:

$$(\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \dots (b);$$

luego de sustituir (b) en (a) se obtiene:

$$M_{xx} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i} \quad \dots (B);$$

análogamente se obtiene, como momento de  $\mathbf{F}$  con respecto al eje  $y$ :

$$M_{yy} = - \begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} \mathbf{j} \quad \dots (C);$$

y, como momento de  $\mathbf{F}$  con respecto al eje  $z$ :

$$M_{zz} = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad \dots (D);$$

sumando miembro a miembro (B), (C) y (D), obtenemos:

$$M_{xx} + M_{yy} + M_{zz} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

o sea que:

$$M_{xx} + M_{yy} + M_{zz} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \dots (E);$$

de (A) y (E) obtenemos:

$$M_O = M_{xx} + M_{yy} + M_{zz} \quad \dots [6];$$

o sea que, el momento de una fuerza con respecto al origen, de un sistema de referencia cartesiano, iguala la suma de los momentos de la misma con respecto a cada uno de los ejes que forman el sistema mencionado.

Como la igualdad inmediata anterior también se expresa mediante:

$$M_O = M_{xx}i + M_{yy}j + M_{zz}k \quad \dots [7],$$

diremos que la componente de  $M_O$  sobre un eje coordenado cualquiera, es igual a la componente del momento de  $F$  con respecto a dicho eje.

Analicemos ahora el caso particular del momento de una fuerza  $F$  con respecto a un eje, cuando ella está contenida en un plano perpendicular a dicho eje.

Para estudiar este caso emplearemos un sistema de referencia ortogonal formado por tres ejes,  $u$ ,  $v$  y  $w$ , llamado dextrógiro o derecho de  $u$ ,  $v$ , y  $w$ , como se indica en la figura II.31, donde  $e_u$ ,  $e_v$ ,  $e_w$  son vectores unitarios que tienen la dirección y el sentido de los ejes mencionados, vectores que cumplen con las igualdades:  $e_u \times e_v = e_w$ ,  $e_v \times e_w = e_u$ , y  $e_w \times e_u = e_v$ .

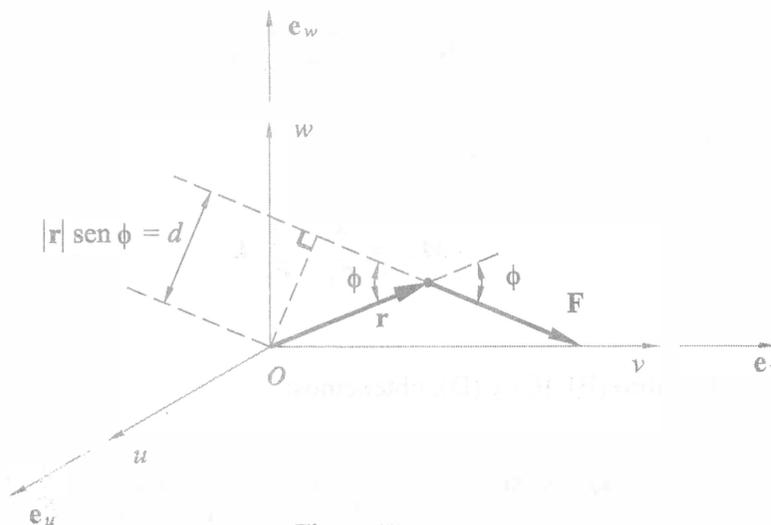


Figura II.31

Si dicho sistema lo ubicamos de manera tal que hacemos coincidir al plano  $vw$  con un plano que contiene a la fuerza  $F$ : para obtener el momento de  $F$  con respecto al eje  $u$ , tomaremos como brazo al vector  $r$ , coplanar con  $F$  y el origen, que forma un ángulo  $\phi$  con dicha fuerza como se indica en la figura II.31. De acuerdo con esto, escribiremos a  $r$  y a  $F$ , en función de sus componentes, como:

$$r = r_v e_v + r_w e_w \quad y \quad F = F_v e_v + F_w e_w .$$

En tales condiciones, teniendo en cuenta la definición de momento de una fuerza con respecto a un eje, obtendremos el momento de  $\mathbf{F}$  con respecto a  $u$ , mediante:

$$M_{uu} = [(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_u] \mathbf{e}_u \quad \dots (1),$$

donde, tomando en cuenta las propiedades del producto vectorial:

$$\begin{aligned} [(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_u] &= [(r_v \mathbf{e}_v + r_w \mathbf{e}_w) \times (F_v \mathbf{e}_v + F_w \mathbf{e}_w)] \cdot \mathbf{e}_u = \\ &= [(r_v F_w \mathbf{e}_u - r_w F_v \mathbf{e}_u)] \cdot \mathbf{e}_u = r_v F_w - r_w F_v \quad \dots (2); \end{aligned}$$

sustituyendo (2) en (1) se tiene:

$$M_{uu} = [r_v F_w - r_w F_v] \mathbf{e}_u = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_v & \mathbf{e}_w & \mathbf{e}_u \\ r_v & r_w & 0 \\ F_v & F_w & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \dots (F);$$

obtenemos el módulo de este vector, teniendo en cuenta una de las propiedades del producto vectorial, y la figura II.31 :

$$|M_{uu}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}| \sin \phi = |\mathbf{F}| [|\mathbf{r}| \sin \phi] = |\mathbf{F}| (d) \quad \dots (G).$$

Para determinar el signo de la componente de  $M_{uu}$  (sobre  $u$ ), haciendo  $|\mathbf{r}| = r$  y  $|\mathbf{F}| = F$  analizaremos varios casos; dos de ellos, que se presentan cuando  $\mathbf{F}$  tiende a girar en el sentido horario con respecto al eje  $u$ , son:

$$M_{uu} = (r \mathbf{e}_w) \times (F \mathbf{e}_v) = -r F \mathbf{e}_u \quad ,$$

y ,

$$M_{uu} = (r \mathbf{e}_v) \times (-F \mathbf{e}_w) = -r F \mathbf{e}_u \quad ,$$

en tanto que otros dos de ellos, que se presentan cuando  $\mathbf{F}$  tiende a girar en el sentido antihorario con respecto al eje  $u$ , son:

$$M_{uu} = (r \mathbf{e}_w) \times (F \mathbf{e}_v) = -r F \mathbf{e}_u \quad ,$$

y

$$M_{uu} = (r \mathbf{e}_v) \times (-F \mathbf{e}_w) = -r F \mathbf{e}_u \quad .$$

Entonces, considerando el análisis de estos casos, así como (F) y (G), diremos que:

El momento de una fuerza  $F$  con respecto a un eje  $u$ , cuando  $F$  está alojada en un plano perpendicular a  $u$ , es el vector  $M_{uu}$  dado por:

$$M_{uu} = r \times F = M_{uu} e_u \quad \dots [5 \text{ part}],$$

de módulo igual al producto de la magnitud de  $F$  por la distancia perpendicular entre el eje ( $u$ ) y la línea de acción de  $F$ , cuya componente  $M_{uu}$  es positiva cuando  $F$  tiende a girar en el sentido antihorario con respecto a  $u$ , y negativa cuando  $F$  tiende a girar en el sentido horario, con respecto a dicho eje.

Esta expresión que acabamos de obtener es fundamental pues, en muchos casos, de ella nos valdremos para obtener las sumas de los momentos, con respecto a diferentes ejes, de las fuerzas que actúen en planos perpendiculares a dichos ejes.

#### Ejemplo II.14

Dada  $F = 4i - 3j - 2k$  en newtons, considerando que dicha fuerza pasa por el punto  $P(-1, 0, -2)$ , cuyas coordenadas están dadas en metros, obtenga:

- El momento de  $F$  con respecto al origen.
- El momento de  $F$  con respecto a cada uno de los ejes coordenados.
- La componente de cada uno de los momentos solicitados en el inciso b.

Resolución.

- Empleando la expresión [4], obtenemos:

$$M_o = r \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = i(0-6) - j(2+8) + k(3-0) = -6i - 10j + 3k, \text{ N}\cdot\text{m}$$

- Teniendo en cuenta la expresión [7], así como el resultado del inciso inmediato anterior, diremos que

b<sub>x</sub>. El momento de  $F$  con respecto al eje  $x$ , o sea la proyección de  $M_o$  sobre dicho eje, es:

$$M_{xx} = -6i, \text{ N}\cdot\text{m}$$

b<sub>y</sub>. El momento de  $F$  con respecto al eje  $y$ , o sea la proyección de  $M_o$  sobre dicho eje, es:

$$M_{yy} = -10j, \text{ N}\cdot\text{m}$$

b<sub>z</sub>. El momento de  $F$  con respecto al eje  $z$ , o sea la proyección de  $M_0$  sobre dicho eje, es:

$$M_{zz} = 3k, \text{ N}\cdot\text{m} .$$

c) De acuerdo con lo obtenido en el inciso b diremos que, las componentes de  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$ , y  $M_{zz}$  sobre los ejes coordenados, son:

$$M_{xx} = -6 \text{ N}\cdot\text{m} , \quad M_{yy} = -10 \text{ N}\cdot\text{m} , \quad \text{y} , \quad M_{zz} = 3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

### Ejemplo II-15

Para las fuerzas verticales de la figura II-32, tomando el brazo más sencillo en cada caso, obtenga sus momentos con respecto a los ejes coordenados mostrados, así como su momento con respecto al origen. Las fuerzas están en contacto con el plano (horizontal)  $xz$ , en tanto que las acotaciones están en metros.

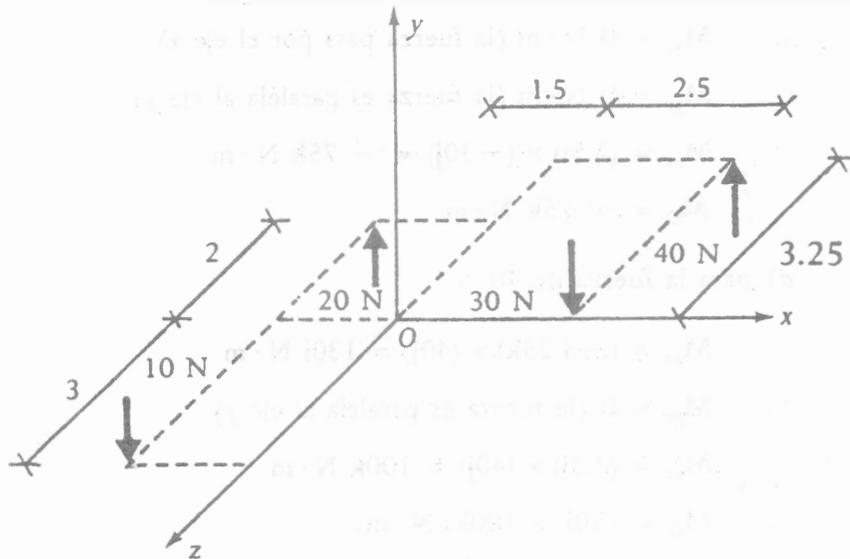


Figura II-32

### Resolución

De acuerdo con las expresiones [ 5 part] y [ 6], se obtienen:

a) para la fuerza de 10 N

$$M_{xx} = (3k) \times (-10j) = 30i \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{yy} = 0 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (la fuerza es paralela al eje } y)$$

$$M_{zz} = (-1.5i) \times (-10j) = 15k \text{ N} \cdot \text{m}$$

y

$$M_O = M_{xx} + M_{yy} + M_{zz} = 30i + 15k, \text{ N} \cdot \text{m}$$

b) para la fuerza de 20 N

$$M_{xx} = (-2k) \times (20j) = 40i \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{yy} = 0 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (la fuerza es paralela al eje } y)$$

$$M_{zz} = (-1.5i) \times (20j) = -30k \text{ N} \cdot \text{m}$$

y

$$M_O = 40i - 30k, \text{ N} \cdot \text{m}$$

c) para la fuerza de 30 N

$$M_{xx} = 0 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (la fuerza pasa por el eje } x)$$

$$M_{yy} = 0 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ (la fuerza es paralela al eje } y)$$

$$M_{zz} = (2.5i) \times (-30j) = -75k \text{ N} \cdot \text{m}$$

y

$$M_O = -75k \text{ N} \cdot \text{m}$$

d) para la fuerza de 40 N

$$M_{xx} = (-3.25k) \times (40j) = 130i \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{yy} = 0 \text{ (la fuerza es paralela al eje } y)$$

$$M_{zz} = (2.5i) \times (40j) = 100k \text{ N} \cdot \text{m}$$

y

$$M_O = 130i + 100k, \text{ N} \cdot \text{m}.$$

### Ejemplo II.16

II.33

Si la fuerza y el disco delgado de la figura están en el plano  $xy$ , y la fuerza se aplica al disco en una dirección tangente al mismo, determine su momento con respecto al eje  $z$ :

- sin emplear producto vectorial, y,
- empleando el producto vectorial.

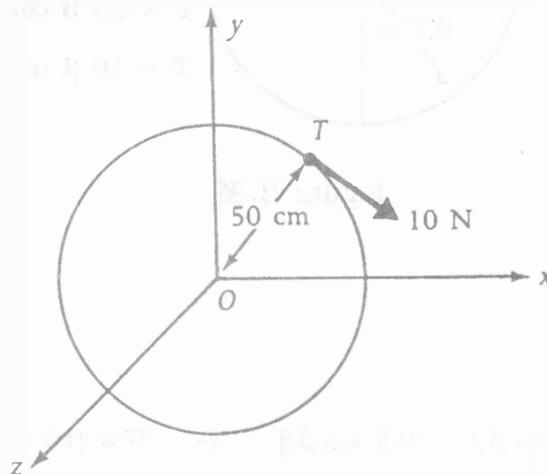


Figura II.33

G-612722

#### Resolución

- Como en este caso se conoce la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el eje  $z$ , es decir 50 cm, el módulo del momento buscado es:

$$|M_{zz}| = (10 \text{ N})(0.5 \text{ m}) = 5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y como la fuerza dada tiende a producir un giro (con respecto al eje  $z$ ) en el sentido horario, lo que implica componente negativa de  $M_{zz}$ , el momento pedido es

$$M_{zz} = -5 \text{ k N} \cdot \text{m}.$$

- Para obtener el momento pedido mediante el producto vectorial nos basaremos en la figura II.34, dibujada en el plano  $xy$ , y en los elementos que, obtenidos de dicha figura, se encuentran anotados a un lado de la misma.

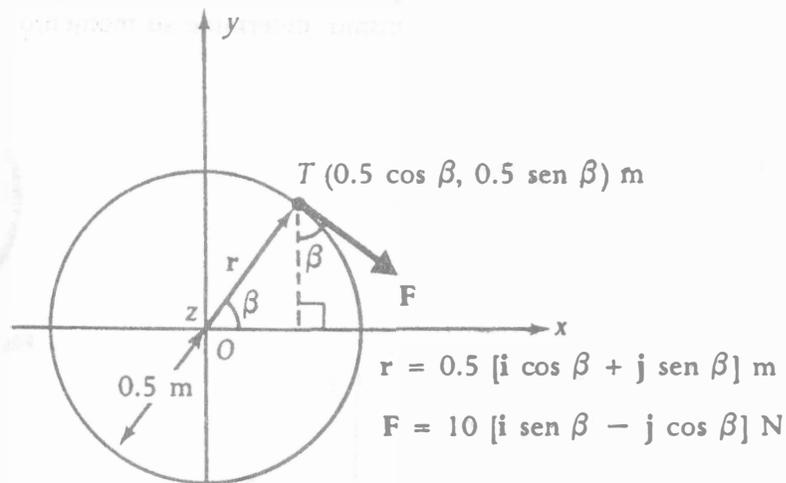


Figura II.34

Se tienen

$$\mathbf{r} = (0.5 \cos \beta)\mathbf{i} + (0.5 \sin \beta)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} = (10 \sin \beta)\mathbf{i} - (10 \cos \beta)\mathbf{j}$$

por lo que, aplicando [ 5part], obtenemos

$$\mathbf{M}_{zz} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.5 \cos \beta & 0.5 \sin \beta & 0 \\ 10 \sin \beta & -10 \cos \beta & 0 \end{vmatrix} = (-5 \cos^2 \beta - 5 \sin^2 \beta)\mathbf{k}$$

de donde

$$\mathbf{M}_{zz} = -5(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)\mathbf{k} = -5\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Obsérvese que, en este ejemplo llegamos más rápido al resultado sin emplear producto vectorial, pero esto no sucede siempre, como puede apreciarse en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo II.17

Si, la fuerza de la figura II.35 se aplica en el punto  $P$ , cuyas coordenadas se dan en metros, obtenga su momento con respecto al eje  $z$ :

- sin emplear producto vectorial, y,
- empleando el producto vectorial.

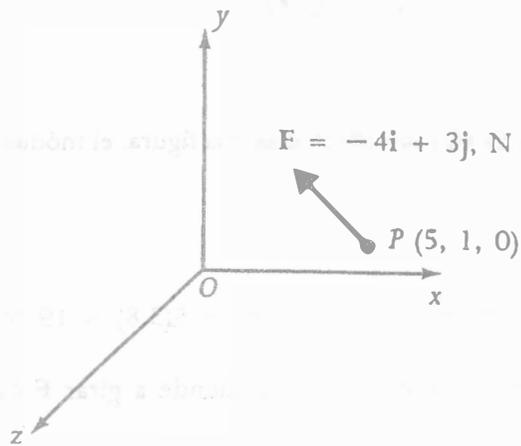


Figura II.35

### Resolución

- Como en este caso no conocemos la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el eje  $z$ , la calcularemos con base en la figura II.36 (dibujada en el plano  $xy$ ), y en los elementos que, obtenidos de dicha figura, se encuentran anotados a un lado de la misma.

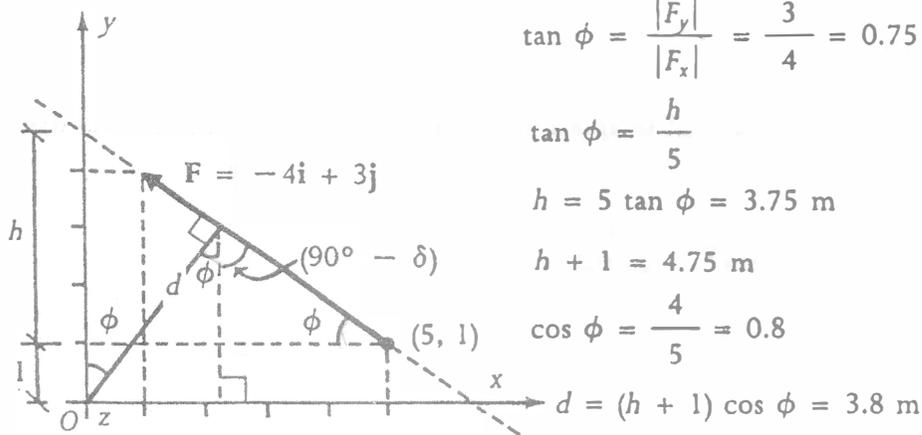


Figura II-36

De acuerdo con los datos y lo obtenido de esa figura, el módulo del momento buscado es:

$$|M_{zz}| = |\mathbf{F}|d = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} (3.8) = 5(3.8) = 19 \text{ N} \cdot \text{m}$$

lo que implica, según el sentido en que tiende a girar  $\mathbf{F}$  con respecto a  $z$ :

$$M_{zz} = 19\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

que es el momento pedido.

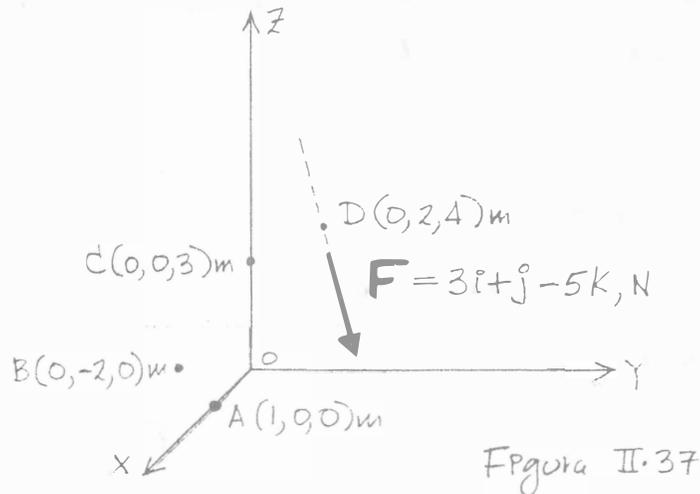
- b) Si se tienen en cuenta los datos, empleando  $\mathbf{r} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ , y aplicando [ 5part], obtenemos:

$$M_{zz} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (15 + 4)\mathbf{k} = 19\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Nótese que en este ejemplo obtuvimos más rápidamente la respuesta empleando el producto vectorial; pero esto no sucede siempre, como puede observarse en el ejemplo inmediato anterior.

### Ejemplo II.18

Considere los puntos A, B, C y D de la figura II.37, así como la fuerza  $\mathbf{F}$  ahí mostrada, cuyo soporte pasa por D. Haciendo intervenir a A, B y C, obtenga los momentos de la fuerza respecto a los ejes coordenados y, después de ello, compruebe que el momento de dicha fuerza respecto al origen es igual a la suma de los momentos de esa fuerza, respecto a los ejes coordenados.



### Resolución.

Con base en la expresión [5] y teniendo en cuenta lo citado en el enunciado, los momentos de la fuerza respecto a los ejes x, y, z, respectivamente, resultan:

$$\mathbf{M}_{xx} = [(\vec{AD} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} = [(-4\mathbf{j} + 7\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i}] \mathbf{i} = -14\mathbf{i}, \text{N}\cdot\text{m} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_{yy} = [(\vec{BD} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} = [(-24\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 12\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j}] \mathbf{j} = 12\mathbf{j}, \text{N}\cdot\text{m} \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_{zz} = [(\vec{CD} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}] \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} = [(-11\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}] \mathbf{k} = -6\mathbf{k}, \text{N}\cdot\text{m} \quad (3)$$

Por otro lado, el momento de la fuerza con respecto al origen es:

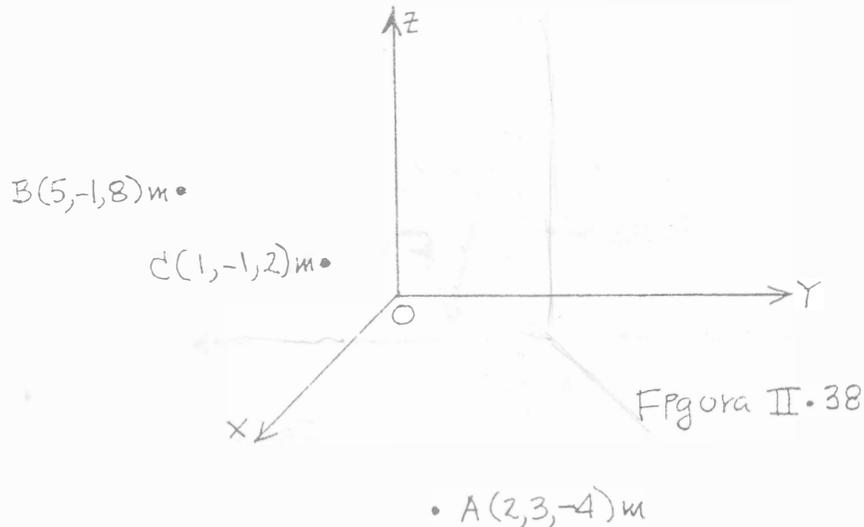
$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -14\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \quad (4)$$

Como el valor dado por (4) es igual a la suma de los valores dados por (1), (2) y (3), queda comprobado lo que se pidió.

### Ejemplo II.19

Considerando la fuerza  $\mathbf{F} = 12\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ , N, cuya línea de acción pasa por  $C(1, -1, 2)$  m, así como los puntos A y B de la figura II.38:

- Obtenga el momento de la fuerza respecto a un eje recto orientado de A hacia B, tomando como base el momento de la misma respecto a B, y,
- Calcule el momento de la fuerza respecto a un eje recto orientado de B hacia A, tomando como base el momento de ella respecto a A.



Resolución.

- El momento de la fuerza respecto a B es:

$$\mathbf{M}_B = \vec{BC} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 0 & -6 \\ 12 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - 104\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -104\mathbf{j},$$

debido a lo cual, el momento que se nos pidió obtener en este inciso es:

$$\mathbf{M}_{AB} = [\mathbf{M}_B \cdot \mathbf{e}_{AB}] \mathbf{e}_{AB} = [(-104\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{13}\right)] \mathbf{e}_{AB} = \frac{416}{13} \mathbf{e}_{AB} = 32 \mathbf{e}_{AB},$$

es decir:  $\mathbf{M}_{AB} = \frac{32}{13} (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ , N·m.

- El momento de  $\mathbf{F}$  respecto a A es:

$$\mathbf{M}_A = \vec{AC} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -4 & 6 \\ 12 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 32\mathbf{i} + 64\mathbf{j} + 48\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

por lo que, el momento que se nos pidió calcular en este inciso es:

$$\mathbf{M}_{BA} = [\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{e}_{BA}] \mathbf{e}_{BA} = \left[ (32\mathbf{i} + 64\mathbf{j} + 48\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}}{13}\right) \right] \mathbf{e}_{BA} = -32 \mathbf{e}_{BA}, \text{ o sea:}$$

$\mathbf{M}_{BA} = \frac{32}{13} (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$  N·m (obsérvese que este resultado es igual al del inciso a); sin embargo, apréciense que la componente es positiva en el inciso a) y negativa en el b))

## PAR DE FUERZAS. MOMENTO DE UN PAR DE FUERZAS.

Definiremos como par de fuerzas al conjunto formado por dos fuerzas no colineales,  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  para cualquier tipo de fuerza  $\mathbf{F}$ , tales que  $\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ . Esta condición implica que  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  sean paralelas, de igual magnitud y de sentidos contrarios.

No obstante que  $\mathbf{F} + (-\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ , el conjunto mencionado produce un momento, conocido como momento del par de fuerzas, cuyo valor es independiente del punto del espacio con respecto al cual se valúen los momentos de  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$ , como veremos a continuación. A dicho punto suele llamársele centro de momentos, y no necesariamente debe coincidir con el sistema de referencia dado o adoptado.

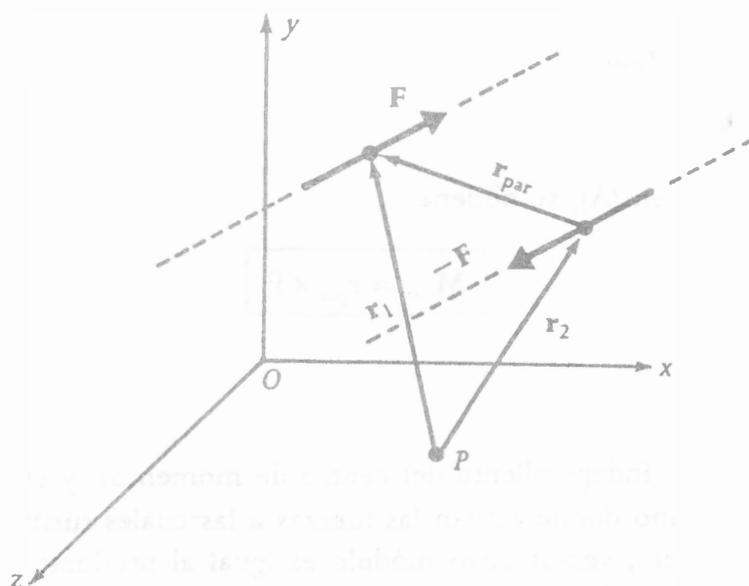


Figura II.39

Para valuar  $\mathbf{M}_{\text{par}}$  que es el momento a que acabamos de referirnos, tomaremos en cuenta la figura II.39, donde  $\mathbf{r}_{\text{par}}$  es el brazo que va de un punto cualquiera de la línea de acción de  $-\mathbf{F}$  a un punto cualquiera de la correspondiente a  $\mathbf{F}$ . Con base en la expresión [ 4] y considerando a  $\mathbf{M}_{\text{par}}$  como la suma de los momentos de  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  con respecto a  $P$ , que es un punto cualquiera del espacio, obtenemos

$$\mathbf{M}_{\text{par}} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} - (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F})$$

o sea

$$\mathbf{M}_{\text{par}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}; \quad (\text{A})$$

también de acuerdo con la figura , se tiene

$$\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_{\text{par}} = \mathbf{r}_1$$

de donde

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{\text{par}}; \quad (\text{B})$$

sustituyendo (B) en (A), se obtiene

$$\boxed{\mathbf{M}_{\text{par}} = \mathbf{r}_{\text{par}} \times \mathbf{F}} \quad [8]$$

Así pues,  $\mathbf{M}_{\text{par}}$  es independiente del centro de momentos, y es un vector perpendicular al plano donde actúan las fuerzas a las cuales sustituirá en caso de que así se requiera; vector cuyo módulo es igual al producto de la magnitud de cualquiera de las fuerzas por la distancia perpendicular entre éstas. Es muy importante considerar que  $\mathbf{r}_{\text{par}}$  es un vector que va de un punto de la línea de acción de  $-\mathbf{F}$  a un punto de la línea de acción de  $\mathbf{F}$ , ya que el producto vectorial no es conmutativo.

Al analizar lo anterior podemos afirmar que, en todo caso  $\mathbf{M}_{\text{par}}$  resulta igual al momento de  $\mathbf{F}$  con respecto a cualquier punto de la línea de acción de  $-\mathbf{F}$ , o viceversa.

### Ejemplo II. 20

Determine el momento del par de fuerzas formado por  $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ , y  $\mathbf{F}_2 = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ , sabiendo que  $\mathbf{F}_1$  pasa por  $P_1(4, 0, -1)$  y  $\mathbf{F}_2$  pasa por  $P_2(-3, 2, 0)$ .

#### Resolución

Si se toma a  $\mathbf{F}_1$  como  $\mathbf{F}$ , el brazo  $\mathbf{r}_{\text{par}}$  será el vector  $\overrightarrow{P_2P_1}$ ; en estas condiciones, al aplicar [ 8 ], obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{par}} &= \overrightarrow{P_2P_1} \times \mathbf{F}_1 = (7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 17\mathbf{k} \end{aligned}$$

que es el momento de  $\mathbf{F}_1$  con respecto a un punto de la línea de acción de  $\mathbf{F}_2$ .

Obsérvese que, hubiéramos llegado al mismo resultado tomando a  $\mathbf{F}_2$  como  $\mathbf{F}$  y como brazo  $\mathbf{r}_{\text{par}}$  al vector  $\overrightarrow{P_1P_2}$ , pues así se tendría

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{par}} &= \overrightarrow{P_1P_2} \times \mathbf{F}_2 = (-7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 17\mathbf{k} \end{aligned}$$

que es el momento de  $\mathbf{F}_2$  con respecto a un punto de la línea de acción de  $\mathbf{F}_1$ .

### Ejemplo II.21

Las fuerzas  $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ , N, aplicada en  $A(-2, 5, -4)$  m. y  $-\mathbf{P}$  cuyo soporte pasa por  $Q(-1, 3, -2)$  m forman un par. Con base en ello:

- Obtenga el momento de dicho par mediante un sólo producto vectorial,
- Calcule el módulo del par citado,
- Calcule los momentos de las fuerzas mencionadas, respecto al origen, y compruebe que la suma de estos momentos es igual al momento del par,
- Determine la distancia entre los soportes de las fuerzas, y,
- Compruebe que el producto del módulo de cualquiera de las fuerzas, del par dado, por la distancia entre sus soportes es igual al módulo del momento de dicho par.

### Resolución.

- a) Con base en los datos, se obtiene:

$$\vec{QA} = (-1, 2, -2), \quad \vec{QA} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \dots \quad (1), \text{ y}$$

$$\mathbf{M}_{\text{par}} = \mathbf{r}_{\text{par}} \times \mathbf{P} = \vec{QA} \times \mathbf{P} = 16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \dots \quad (2).$$

- b) Como consecuencia de lo proporcionado por (2) se tiene que:

$$|\mathbf{M}_{\text{par}}| = \sqrt{(16)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{256 + 36 + 4} = \sqrt{296} = 2\sqrt{74} \text{ N}\cdot\text{m} \quad \dots \quad (3).$$

- c) Los momentos de las fuerzas dadas, respecto al origen, son:

$$(\mathbf{M}_o)_{\mathbf{P}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 44\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m}, \text{ y}$$

$$(\mathbf{M}_o)_{-\mathbf{P}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -12 \end{vmatrix} = -28\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m}$$

por lo que, la suma de dichos momentos resulta  $16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ , N·m; es decir, el valor dado por (2), lo que comprueba lo que se nos pidió.

Ejemplo II.71 (continuación) (2/2)

- d) Para determinar la distancia entre los soportes de las fuerzas, nos apoyaremos en elementos de la figura II.39, donde C es la proyección ortogonal de A sobre la línea de acción de  $-\mathbf{P}$ , en tanto que  $\phi$  es el ángulo formado por  $\vec{QA}$  y la fuerza recién citada.

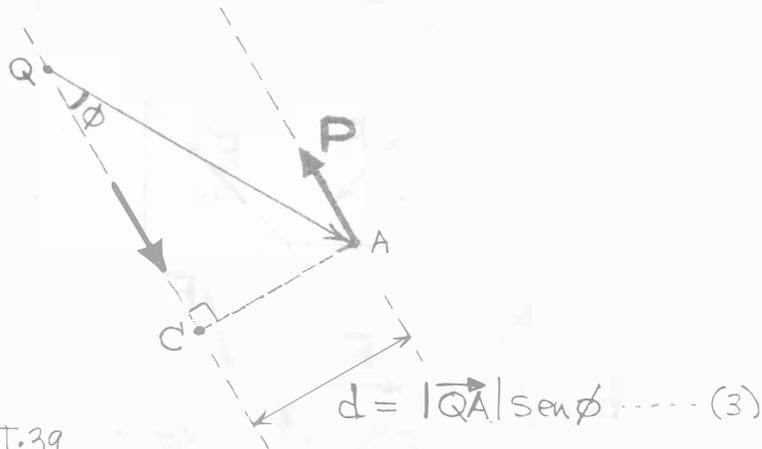


Figura II.39

Con base en una de las propiedades del producto vectorial puede establecerse que:

$$|\vec{QA} \times \mathbf{P}| = |\vec{QA}| |\mathbf{P}| \operatorname{sen} \phi,$$

lo que teniendo en cuenta (3) puede escribirse como:

$$|\vec{QA} \times \mathbf{P}| = [|\mathbf{P}|] (d),$$

de donde teniendo en cuenta (1) resulta:

$$d = \frac{|\vec{QA} \times \mathbf{P}|}{|\mathbf{P}|} = \frac{|16\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}|}{13} = \frac{\sqrt{296}}{13} = \frac{2}{13} \sqrt{74} \text{ m} \dots (4)$$

que es la distancia que se nos pidió determinar.

- e) Teniendo en cuenta que  $|\mathbf{P}| = |-\mathbf{P}| = 13 \text{ N}$ , así como el valor dado por (4), puede decirse que el producto del módulo de cualquiera de las fuerzas, del par dado, por la distancia que existe entre sus soportes, vale:

$$(13) \left[ \frac{2}{13} \sqrt{74} \right] = 2 \sqrt{74} \text{ m},$$

valor que coincide con el dado por (2), debido a lo cual queda comprobado lo que se pidió.

### Ejemplo II.22

Sea un sistema de fuerzas constituido por las fuerzas  $F_1$  a  $F_{10}$  de la figura II.40; considerando que  $F_1$  a  $F_4$  están alojadas en diagonales del paralelepípedo mostrado, en tanto que  $F_5$  a  $F_{10}$  tienen líneas de acción colineales con aristas de tal paralelepípedo, obtenga de dos maneras diferentes el momento del sistema citado, con respecto al origen.

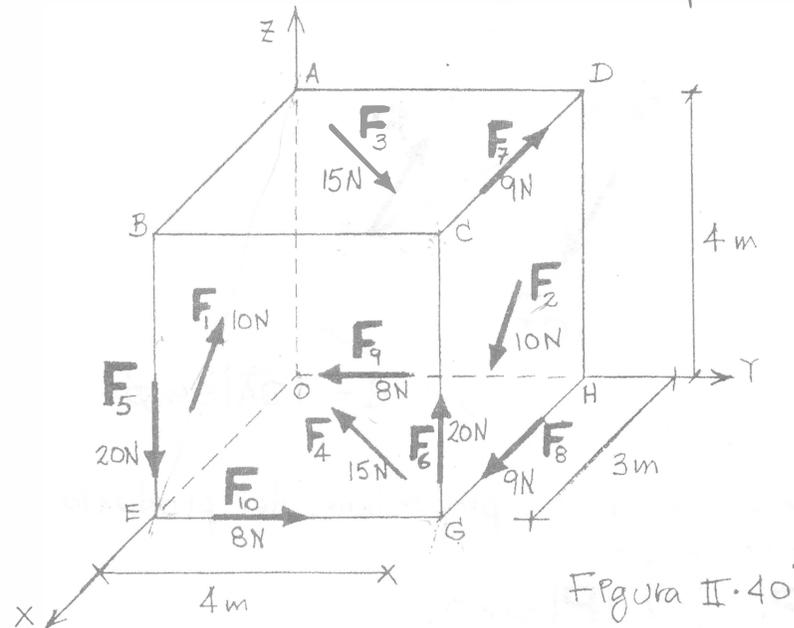


Figura II.40

Resolución.

Con base en los datos se obtiene que:

$$F_1 = 10 \left[ \frac{-3i + 4k}{5} \right] = -6i + 8k, N, \quad F_2 = -F_1 = 6i - 8k, N,$$

$$F_3 = 15 \left[ \frac{3i + 4j}{5} \right] = 9i + 12j, N, \quad F_4 = -F_3 = -9i - 12j, N,$$

$$F_5 = -20k, \quad F_6 = -F_5 = 20k, \quad F_7 = -9i, \quad F_8 = -F_7 = 9i, \quad F_9 = -8j, \quad F_{10} = -F_9 = 8j,$$

todas estas fuerzas también en N; entonces,

a) Valuando el momento pedido como la suma de los momentos de las fuerzas (que constituyen el sistema) con respecto al origen, se tiene:

$$M_o = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 9 & 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & -12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 4 \\ -9 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Ejemplo II.22 (continuación) (2/2).

o sea que:

$$\mathbf{M}_O = \left[ \begin{aligned} &(-24\mathbf{j}) + (-32\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 24\mathbf{k}) + (-48\mathbf{i} + 36\mathbf{j}) + \mathbf{0} + (60\mathbf{j}) + \\ &+ (80\mathbf{i} - 60\mathbf{j}) + (-36\mathbf{j} + 36\mathbf{k}) + (-36\mathbf{k}) + \mathbf{0} + (24\mathbf{k}) \end{aligned} \right] = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \dots (1).$$

b) Al valorar el momento pedido como la suma de los momentos de los cinco pares que se forman (con las diez fuerzas del sistema dado) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \vec{GE} \times \mathbf{F}_1 + \vec{CG} \times \mathbf{F}_4 + \vec{EG} \times \mathbf{F}_6 + \vec{HD} \times \mathbf{F}_7 + \vec{GH} \times \mathbf{F}_9 = \\ &= (-4\mathbf{j}) \times (-6\mathbf{i} + 8\mathbf{k}) + (-4\mathbf{k}) \times (-9\mathbf{i} - 12\mathbf{j}) + (4\mathbf{j}) \times (20\mathbf{k}) + (4\mathbf{k}) \times (9\mathbf{i}) + (-3\mathbf{i}) \times (-8\mathbf{j}) = \\ &= (-24\mathbf{k} - 32\mathbf{i}) + (36\mathbf{j} - 48\mathbf{i}) + (80\mathbf{i}) + (-36\mathbf{j}) + (24\mathbf{k}); \text{ es decir que:} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_O = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

valor que, obviamente, coincide con el dado por (1).

NOTA.- Se sugiere al lector verificar este valor, calculándolo también como la suma de los momentos de los cinco pares que se forman (con las diez fuerzas del sistema dado), pero obteniendo dicha suma mediante:

$$\vec{AG} \times \mathbf{F}_2 + \vec{GA} \times \mathbf{F}_3 + \vec{CE} \times \mathbf{F}_5 + \vec{CH} \times \mathbf{F}_8 + \vec{HE} \times \mathbf{F}_{10}$$

### III. ESTUDIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS.

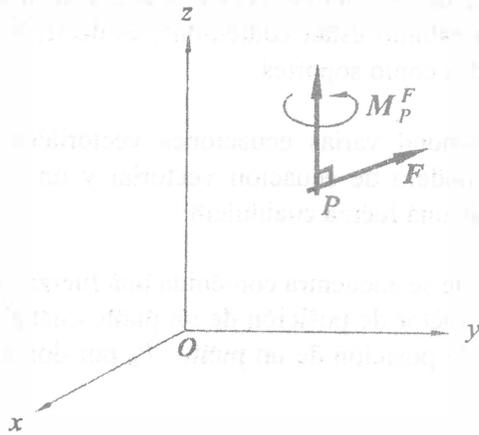
Habiendo ya presentado los considerados como principios básicos de la estática, ahora nos ocuparemos de estudiar los sistemas de fuerzas, con la finalidad de detectar si un sistema de fuerzas dado es reductible, o no, a un sistema equivalente más simple y, en caso de serlo, llevar a cabo dicha reducción pues, cuando es factible efectuar ese proceso, puede tenerse una concepción muy rápida del sistema de sistema de fuerzas requerido para equilibrar la acción de un cierto sistema de fuerzas dado.

Así pues, a continuación veremos lo relacionado con elementos requeridos para alcanzar la finalidad recién mencionada, como es el caso de la definición de coordenadas vectoriales de una fuerza y obtención de alguna de ellas; de la definición de línea de acción de una fuerza, así como la obtención de ecuaciones vectoriales y escalares de la misma; el enunciado del Teorema de Varignon y aplicación del mismo; las coordenadas vectoriales de diversos sistemas de fuerzas; lo que es un par de fuerzas y el momento de éste; la definición de equivalencia de sistemas de fuerzas; la definición y las ecuaciones del eje central de un sistema de fuerzas, así como las condiciones para un sistema de fuerzas sea reductible a una fuerza, a un par, a lo que se denomina motor, o bien al equilibrio, si es factible reducirlo a alguno de los casos mencionados.

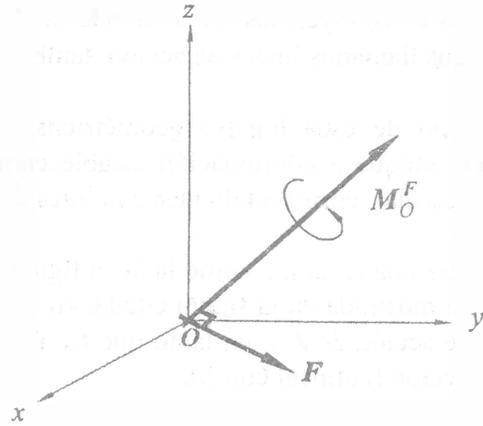
#### III.1 DEFINICIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA. ECUACIONES VECTORIAL Y ESCALAR DE LA LÍNEA DE ACCIÓN DE UNA FUERZA. OBTENCIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE FUERZAS CON DIFERENTES CARACTERÍSTICAS. TEOREMA DE VARIGNON. SISTEMA GENERAL DE FUERZAS: DEFINICIÓN; CASOS PARTICULARES MÁS IMPORTANTES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO. COORDENADAS VECTORIALES CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS COLINEALES, CONCURRENTES, PARALELAS Y GENERALES, EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

##### III.1.1 DEFINICIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE UNA FUERZA. ECUACIONES VECTORIAL Y ESCALAR DE LA LÍNEA DE ACCIÓN DE UNA FUERZA.

A la pareja ordenada formada por el vector fuerza  $\mathbf{F}$  y el vector momento  $\mathbf{M}_P^F$  que produce dicha fuerza, con respecto a un punto  $P$ , se le denomina Coordenadas Vectoriales de la fuerza  $\mathbf{F}$ ; ver figura III.1(a). Cuando el punto  $P$  coincide con el origen  $O$  del sistema de referencia, dicha pareja recibe el nombre de Coordenadas Vectoriales Canónicas; ver figura III.1(b), representándose por la pareja ordenada  $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_O^F)$ , misma que permite estimar los posibles efectos externos que produce la fuerza.



(a) Coordenadas Vectoriales



(b) Coordenadas Vectoriales Canónicas

Figura III.1

Una vez habiendo definido ya las coordenadas vectoriales de una fuerza cualquiera  $F$  diremos que ésta, en función de dichas coordenadas, se expresa de la siguiente manera:

$$F = (F, M)$$

donde  $M$  puede ser  $M_O^F$ ,  $M_P^F$ , etc., según el caso.

Si a un cuerpo le aplicamos una fuerza  $F$  tal que  $F \neq 0$ , al cuerpo se le producirá una aceleración lineal (generalmente simbolizada mediante  $a$ ) en tanto que, si  $M_P^F$  no es nulo, a dicho cuerpo se le producirá una aceleración angular (a la que usualmente se le simboliza por medio de  $\alpha$ ).

El nombre de Coordenadas Vectoriales, o el de Coordenadas Vectoriales Canónicas, no es frecuente encontrarlo en otros textos relacionados con el tema, donde generalmente se les llama: Vector fuerza (o simplemente fuerza) y Vector Momento (o momento de la fuerza).

La determinación del momento de una fuerza es fundamental para el caso de la identificación de fuerzas consideradas iguales. Por ejemplo, al tenerse dos fuerzas paralelas de igual magnitud y sentido (cuyo vector representativo es el mismo), podremos diferenciarlas cuando los momentos que produzcan con respecto al origen del sistema de referencia, u otro punto cualquiera, sean diferentes.

Lo anterior implica que dos fuerzas,  $F_1$  y  $F_2$ , sean iguales sí y sólo sí tienen las mismas coordenadas vectoriales (respecto al mismo punto); es decir que:

$$F_1 = F_2 \quad \Leftrightarrow \quad (F_1, M_O^{F_1}) = (F_2, M_O^{F_2})$$

Una característica muy importante de las Coordenadas Vectoriales de una Fuerza es que, el vector fuerza y el correspondiente vector momento son mutuamente perpendiculares, según lo visto cuando se analiza la naturaleza del vector que representa al momento de una fuerza.

Elementos fundamentales para resolver gran cantidad de problemas relacionados con sistemas de fuerzas los constituyen las rectas donde las fuerzas en estudio están contenidas; es decir, los lugares geométricos llamados líneas de acción, también conocidos como soportes.

A cada uno de esos lugares geométricos le corresponden varias ecuaciones vectoriales y varias escalares; aunque a continuación estableceremos un modelo de ecuación vectorial y un modelo de ecuación escalar, correspondientes a la línea de acción de una fuerza cualquiera.

Considérese una recta  $L$ , como la de la figura III.2, donde se encuentra contenida una fuerza cualquiera  $F$  como la mostrada en la figura citada; en ésta,  $r$  es el vector de posición de un punto cualquiera  $P$  de la línea de acción de  $F$ , en tanto que  $r_0$  es el vector de posición de un punto  $P_0$  por donde pasa tal línea de acción (colineal con  $L$ ).

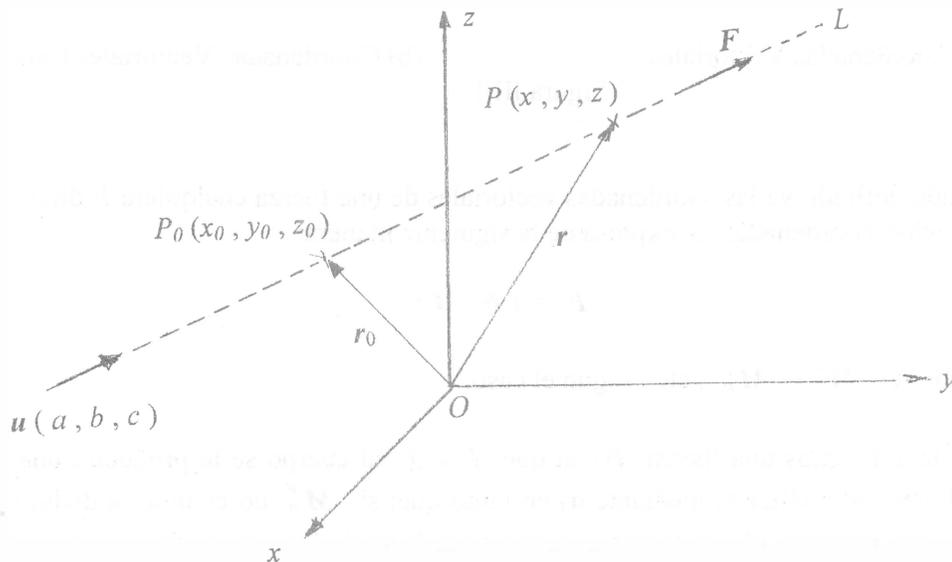


Figura III.2

Si el vector  $u$  mostrado en la figura III.2 es colineal con  $F$ , y tiene el sentido de ésta, podemos escribir:

$$\overrightarrow{P_0P} = t u \quad \dots (A)$$

donde  $t$  es un escalar llamado parámetro.

Con base en los elementos de la figura recién citada, podemos establecer que:

$$r = r_0 + \overrightarrow{P_0P},$$

y, teniendo en cuenta (A):

$$r = r_0 + t u \quad \dots [9]$$

modelo conocido como ecuación vectorial de la línea de acción de una fuerza.

Si en [ 9 ] escribimos en función de sus componentes a los vectores que ahí intervienen, se obtiene:

$$xi + yj + zk = x_0i + y_0j + z_0k + t(ai + bj + ck),$$

lo que puede escribirse en la forma:

$$xi + yj + zk = (x_0 + ta)i + (y_0 + tb)j + (z_0 + tc)k ,$$

igualdad vectorial que da lugar a:

$$x = x_0 + ta \quad \dots (1),$$

$$y = y_0 + tb \quad \dots (2),$$

y,

$$z = z_0 + tc \quad \dots (3),$$

terna de ecuaciones escalares conocidas como ecuaciones paramétricas del soporte de  $F$ .

Siempre y cuando  $a$ ,  $b$  y  $c$  no sean nulas, de (1), (2) y (3) se obtienen, respectivamente:

$$t = \frac{x - x_0}{a} \quad , \quad t = \frac{y - y_0}{b} \quad , \quad t = \frac{z - z_0}{c}$$

lo que, para cualquier valor de  $t$  implica:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \dots [10],$$

modelo conocido como ecuación escalar de la línea de acción de una fuerza, aunque en realidad es lo que se conoce como forma simétrica de la ecuación de una recta (en este caso del soporte de la fuerza).

### III.1.2 OBTENCIÓN DE COORDENADAS VECTORIALES DE FUERZAS CON DIFERENTES CARACTERÍSTICAS.

Con base en lo anterior, en los ejemplos III.1 a III.3 se ilustra la obtención motivo de este subtema.

### Ejemplo III.1

Dada  $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + k$ , N, aplicada en  $Q(4, -5, 0)$  m, exprésela en función de sus coordenadas vectoriales, considerando su momento respecto: a) al origen, b) al punto  $A(-1, 2, 4)$  m, y, c) al punto  $B(0, -5, -1)$  m.

Resolución.

a) El momento de la fuerza respecto al origen es:

$$\mathbf{M}_O^F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

por lo que, para este caso:

$$\mathbf{F} = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + k, -5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \text{ N}, \text{N}\cdot\text{m} \text{ (coordenadas canónicas)}$$

b) El momento de la fuerza respecto a A es:

$$\mathbf{M}_A^F = \overrightarrow{AQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -7 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

debido a lo cual, en este caso:

$$\mathbf{F} = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + k, -15\mathbf{i} - 17\mathbf{j} + 11\mathbf{k}) \text{ N}, \text{N}\cdot\text{m}$$

c) El momento de la fuerza respecto a B es:

$$\mathbf{M}_B^F = \overrightarrow{BQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m};$$

entonces, para este caso:

$$\mathbf{F} = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + k, 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \text{ N}, \text{N}\cdot\text{m}$$

### Ejemplo III.2

Una fuerza de magnitud 6N tiene una línea de acción que pasa por  $A(3, -1, 2)m$  y  $B(1, 1, 3)m$ , así como un sentido igual al de  $\vec{AB}$ . Teniendo eso en cuenta, determine los valores de "c" y "d" de modo que dicha fuerza, en función de sus coordenadas vectoriales respecto a  $P(c, -2, d)m$ , quede expresada mediante:

$$\mathbf{F} = (F, 14\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \text{ N, N}\cdot\text{m}$$

Después de ello, verifique el valor de  $\mathbf{M}_P^F$  calculándolo de manera diferente a la empleada en la resolución.

#### Resolución:

Con base en los datos, se obtienen:

$$\mathbf{F} = 6\mathbf{e}_{AB} = 6 \left[ \frac{-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3} \right] = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \text{ N, y,}$$

valuando el momento de la fuerza respecto a P como  $\vec{PA} \times \mathbf{F}$ :

$$\mathbf{M}_P^F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3-c & 1 & 2-d \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (4d-6)\mathbf{i} + (4d+2c-14)\mathbf{j} + (16-4c)\mathbf{k}$$

Y como esto (de acuerdo con el enunciado) debe ser igual a  $14\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ , deben cumplirse:  $-4d-6=14 \dots (1)$ ,  $4d+2c-14=14 \dots (2)$ , y,  $16-4c=0 \dots (3)$ ;

de (1) obtenemos  $d=5$ , en tanto que de (3) se obtiene  $c=4$  y como (2) se cumple para los valores de c y d obtenidos, dichos valores constituyen la solución al problema, teniéndose así  $P(4, -2, 5)m$ .

Realicemos la verificación pedida: Calculando ahora el valor de  $\mathbf{M}_P^F$  como  $\vec{PB} \times \mathbf{F}$ , tenemos:

$$\mathbf{M}_P^F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ +3 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m};$$

es decir, el dato proporcionado, con lo que concluye la verificación.

### Ejemplo III.3

Una fuerza  $\mathbf{P}$  tiene magnitud de 45 N, así como la dirección y el sentido del segmento dirigido  $\overline{AB}$ , donde  $A(2, 2, 0)\text{m}$  y  $B(4, 0, -1)\text{m}$ . Considerando que la línea de acción de esa fuerza pasa por los puntos A y B estádos:

- Obtenga una ecuación vectorial y una escalar del soporte de  $\mathbf{P}$ ,
- determine las coordenadas del punto C donde dicho soporte corta al plano YZ,
- obtenga de tres maneras diferentes el momento de  $\mathbf{P}$  respecto al origen, y
- exprese dicha fuerza en función de sus coordenadas vectoriales canónicas.

### Resolución.

a) Con base en los datos se obtiene

$$\overline{AB} = (4-2, 0-2, -1-0) = (2, -2, -1)$$

por lo que, tomando  $\overline{AB}$  como  $\mathbf{u}$  (vector colineal con el soporte)

y como  $P_0$  a B, lo cual implica  $\mathbf{r}_0 = (4, 0, -1)$ , por [9] se tiene:

$$\mathbf{r} = (4, 0, -1) + t(2, -2, -1) \quad (1),$$

es decir una ecuación vectorial del soporte de  $\mathbf{P}$ , ecuación que también puede escribirse en la forma:

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (4+2t)\mathbf{i} + (0-2t)\mathbf{j} + (-1-t)\mathbf{k} \quad (2),$$

igualdad que da lugar a:

$$x = 4 + 2t \quad (3), \quad y = -2t \quad (4), \quad z = -1 - t \quad (5),$$

ecuaciones paramétricas del soporte de  $\mathbf{P}$ , de donde se obtienen

$$t = \frac{x-4}{2}, \quad t = -\frac{y}{2}, \quad t = \frac{z+1}{-1},$$

lo que da lugar a:

$$\frac{x-4}{2} = -\frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} \quad (6),$$

que es una ecuación escalar del soporte de  $\mathbf{P}$ .

### Ejemplo III.3 (continuación) (2/2)

b) Como C es el punto donde el soporte de nuestra fuerza corta al plano YZ, la abscisa de dicho punto es nula y habrá que determinar tanto su ordenada como su cota, para lo cual hay dos caminos diferentes.

b<sub>1</sub>) Si en (3) hacemos  $x=0$  se obtienen:

$$0 = 4 + 2t, \quad \text{y} \quad t = -2;$$

Llevando este valor a (4) y (5) se obtienen, respectivamente:

$$Y = -2(-2) = 4, \quad \text{y} \quad Z = -1 - (-2) = 1,$$

que son la ordenada y la cota de C; es decir que  $C(0, 4, 1)$ .

b<sub>2</sub>) Al hacer  $x=0$  en (6) se obtiene:

$$\frac{0-4}{2} = \frac{Y}{-2} = \frac{Z+1}{-1},$$

doble igualdad de donde se obtienen:

$$\frac{Y}{-2} = -2, \quad \text{y} \quad \frac{Z+1}{-1} = -2,$$

de donde resultan:

$$Y = 4, \quad Z = 1, \quad \text{valores ya obtenidos en b<sub>1</sub>) como ordenada}$$

y como cota de C, respectivamente.

c) Como A, B y C son puntos de la línea de acción de  $\mathbf{P}$ , además de que  $\mathbf{P} = 45 \mathbf{e}_{AB} = 45 \left[ \frac{2\mathbf{p} - 2\mathbf{p} - \mathbf{k}}{3} \right] = 30\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$ , N, el momento de

dicha fuerza respecto al origen puede calcularse como  $\vec{OA} \times \mathbf{P}$ ,  $\vec{OB} \times \mathbf{P}$ , y,  $\vec{OC} \times \mathbf{P}$ ; en efecto:

$$\vec{OA} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 30 & -30 & -15 \end{vmatrix} = -30\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 120\mathbf{k}; \quad \vec{OB} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ 30 & -30 & -15 \end{vmatrix} = -30\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 120\mathbf{k},$$

$$\vec{OC} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 1 \\ 30 & -30 & -15 \end{vmatrix} = [-30\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 120\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m}] = \mathbf{M}_O^{\mathbf{P}}, \quad \text{(obtenido de tres maneras diferentes)}$$

d) Teniendo en cuenta el inciso anterior, en función de sus coordenadas vectoriales canónicas se tiene:

$$\mathbf{F} = (30\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 15\mathbf{k}, -30\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 120\mathbf{k}) \quad \text{N, N}\cdot\text{m}$$

### III.1.3 TEOREMA DE VARIGNON.

Como ya se ha visto la obtención de la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes se obtiene sencillamente al aplicar el teorema generalizado del paralelogramo o Principio de Stevin.

Pero, cuando se requiere calcular el momento resultante del sistema de fuerzas concurrentes, con respecto a un punto que no es el de la intersección de los soportes de las fuerzas que constituyen el sistema citado, se requiere calcular la suma de los momentos que producen todas y cada una de las fuerzas del sistema, respecto al punto mencionado.

Este problema fue tratado por primera vez en 1687 (año en que Newton publicó sus Principios de la Filosofía Natural) por el físico y matemático Varignon, como una aplicación de su teorema al teorema del paralelogramo. Basado en sus observaciones en cuanto a que las fuerzas son proporcionales a los movimientos que ellas producen en tiempos iguales (composición de los movimientos) también dedujo la composición de las fuerzas.

Al componer dos fuerzas  $P$  y  $Q$  en una sola fuerza  $R$ , según se muestra en la figura III.3(a), se puede construir un paralelogramo, el de la figura III.3(b), donde  $P = |\vec{P}|$  y  $Q = |\vec{Q}|$  representan los lados del paralelogramo, y  $R = |\vec{R}|$  la magnitud de su diagonal.



Figura III.3

Ahora, si desde un punto cierto  $D$  contenido en el plano del paralelogramo se trazan segmentos rectilíneos ortogonales a las direcciones de los lados de magnitudes  $P$ ,  $Q$  y  $R$ , respectivamente, de modo que el punto  $D$  se localice sobre una perpendicular a  $OC$ , que pase por  $O$ , además de ubicarse sobre la recta que pasa por  $B$  y  $C$ , resulta lo mostrado en la figura III.4.

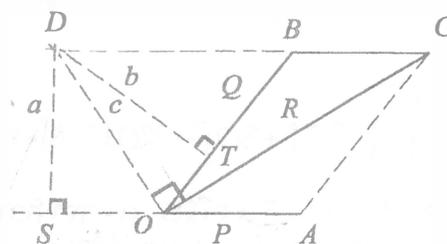


Figura III.4

Desde un punto de vista geométrico, con base en dicha figura tenemos que:

$$\text{área } \triangle OBC + \text{área } \triangle OBD = \text{área } \triangle OCD \quad \dots (1),$$

y como  $\text{área } \triangle OBC = \text{área } \triangle OAC$ , la igualdad anterior nos permite expresar:

$$\text{área } \triangle OAC + \text{área } \triangle OBD = \text{área } \triangle OCD ,$$

lo cual da lugar a:

$$\frac{(\overline{OA}) (\overline{SD})}{2} + \frac{(\overline{OB}) (\overline{TD})}{2} = \frac{(\overline{OC}) (\overline{OD})}{2} \quad \dots (2);$$

y como:

$$\overline{OA} = P, \quad \overline{SD} = a, \quad \overline{OB} = Q, \quad \overline{TD} = b, \quad \overline{OC} = R, \quad \text{y}, \quad \overline{OD} = c,$$

tenemos que:

$$\frac{Pa}{2} + \frac{Qb}{2} = \frac{Rc}{2} \quad \dots (3),$$

de donde resulta la igualdad:

$$Pa + Qb = Rc ,$$

cuyos sumandos concuerdan con el modelo  $F$  multiplicado por  $d$  (módulo de fuerza multiplicado por la distancia entre un punto y la línea de acción de la fuerza), que representa el modulo  $M$  del momento de una fuerza con respecto a un punto, en función de  $F$  y de  $d$ .

De esta forma, el problema mecánico Varignon lo resuelve en forma geométrica; enunciándolo de la siguiente manera: el momento de una fuerza respecto a un punto, es igual a la suma de los momentos de sus componentes con respecto a ese punto.

Se deja al lector comprobar que  $Pa = Qb$  cuando  $D$  esta sobre la línea de acción de  $R$ .

Lo anterior permite generalizar y enunciar el Teorema de Varignon en la siguiente forma: ***tratándose de un sistema de fuerzas concurrentes, el momento de la resultante del sistema con respecto a cierto punto es igual a la suma de los momentos de las fuerzas, de dicho sistema, respecto al citado punto.***

Nota.- Se sugiere al lector comprobar la validez de este teorema, empleando herramienta vectorial, para un sistema de  $n$  fuerzas concurrentes.

Ejemplo III-4.- Se tiene un sistema de fuerzas conformado por  $\mathbf{F}_1 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{F}_2 = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{F}_3 = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ , en newtons, cuyos soportes pasan respectivamente por  $P_1(5, 1, -9)$ ,  $P_2(0, 4, 2)$  y  $P_3(9, 1, -1)$  donde las coordenadas están en metros. Con base en ello:

- obtenga la suma de los momentos de las fuerzas del sistema, respecto al origen,
- compruebe que los soportes de dichas fuerzas se intersecan en  $P_4(2, 5, 3)$  m, y,
- verifique el cumplimiento del teorema de Varignon.

Resolución.

a) Teniendo en cuenta los datos, obtenemos:

$$\sum \mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O^1 + \mathbf{M}_O^2 + \mathbf{M}_O^3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 1 & -9 \\ 3 & -4 & -12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 1 & -1 \\ -7 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

o sea que:

$$\sum \mathbf{M}_O = (-48\mathbf{i} + 33\mathbf{j} - 23\mathbf{k}) + (-4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) + (8\mathbf{i} - 29\mathbf{j} + 43\mathbf{k}) = -44\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 36\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \textcircled{a}$$

b) Con base en los datos puede decirse que, las ecuaciones vectoriales de los soportes (líneas de acción) de  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$  son, respectivamente:

$$\mathbf{r} = (5, 1, -9) + t_1(3, -4, -12), \quad t_1 \in \mathbb{R}, \quad \textcircled{1}$$

$$\mathbf{r} = (0, 4, 2) + t_2(-4, -2, -2), \quad t_2 \in \mathbb{R}, \quad \textcircled{2}, \text{ y}$$

$$\mathbf{r} = (9, 1, -1) + t_3(-7, 4, 4), \quad t_3 \in \mathbb{R}, \quad \textcircled{3}$$

de donde, para  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = -1/2$ , y  $t_3 = 1$ , se obtienen:

$$\mathbf{r} = (5, 1, -9) + (-3, 4, 12) = (2, 5, 3),$$

$$\mathbf{r} = (0, 4, 2) + (2, 1, 1) = (2, 5, 3), \text{ y}$$

$$\mathbf{r} = (9, 1, -1) + (-7, 4, 4) = (2, 5, 3),$$

(CONTINUA ejemplo III-4)(2/2)

debido a lo cual los soportes de las tres fuerzas pasan por  $P_4(2,5,3)$ , o sea que dichos soportes se intersecan en dicho punto, por lo que el sistema dado está conformado por tres fuerzas concurrentes (en  $P_4$ ).

c) Como las fuerzas del sistema dado concurren en  $P_4(2,5,3)m$ , la línea de acción de la resultante (del sistema) pasa por dicho punto.

Así pues, al tenerse:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 10\mathbf{k}, \text{ N,}$$

el momento de dicha resultante está dado por:

$$\mathbf{M}_0^R = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 5 & 3 \\ -8 & -2 & -10 \end{vmatrix} = -44\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 36\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m,} \quad \text{--- (b)}$$

al ser idénticos los valores dados por (a) y (b), queda verificado el teorema de Varignon, con relación al sistema dado.

NOTA.- Se recomienda al lector obtener ecuaciones escalares para los soportes de las fuerzas del sistema dado, y verificar que las coordenadas de  $P_4$  cumplen dichas ecuaciones, para así comprobar lo que se pide en el inciso b), de manera diferente a como aquí se hizo.

### III.1.4. SISTEMA GENERAL DE FUERZAS: DEFINICIÓN, CASOS PARTICULARES MÁS IMPORTANTES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

Concepto de sistema general de fuerzas. *Un sistema general de fuerzas es un conjunto (de fuerzas) que está conformado por más de una fuerza, de modo que sus elementos no poseen ninguna cualidad común, excepto la de ser fuerzas.*

A continuación se presenta una clasificación de sistemas de fuerzas, que tiene en cuenta tanto al sistema de referencia requerido para su estudio, como a la posición relativa entre las fuerzas.

#### SISTEMAS DE FUERZAS Y SISTEMAS DE REFERENCIA REQUERIDOS PARA SU ESTUDIO.

1. Colineales. Se requiere de un solo eje de referencia, debidamente ubicado.
2. Coplanares. Se requiere de un sistema con dos ejes de referencia ortogonales entre sí, debidamente ubicado.
3. Espaciales. Se requiere de un sistema con tres ejes de referencia ortogonales entre sí.

#### POSICIÓN RELATIVA DE LAS FUERZAS (CUALIDAD COMÚN).

1. Colineales.
2. a) Concurrentes  
b) Paralelas  
c) Generales contenidas en un mismo plano; de direcciones cualesquiera pero no colineales, ni concurrentes, ni paralelas.
3. a) Concurrentes  
b) Paralelas  
c) Generales cualesquiera; es decir no colineales, ni concurrentes, ni paralelas, ni coplanares.

Los sistemas identificados como 1, 2 en sus casos a), b) y c), así como 3 en sus casos a) y b) son casos particulares de lo que definimos como sistema general de fuerzas, mismo al que se le identifica como 3, caso c).

**Sistemas de fuerzas concurrentes.** Son sistemas donde las líneas de acción, de las fuerzas que los conforman, se intersecan en un punto; ver figura III.5 . Pueden tenerse sistemas de este tipo tanto en un plano como en el espacio tridimensional.

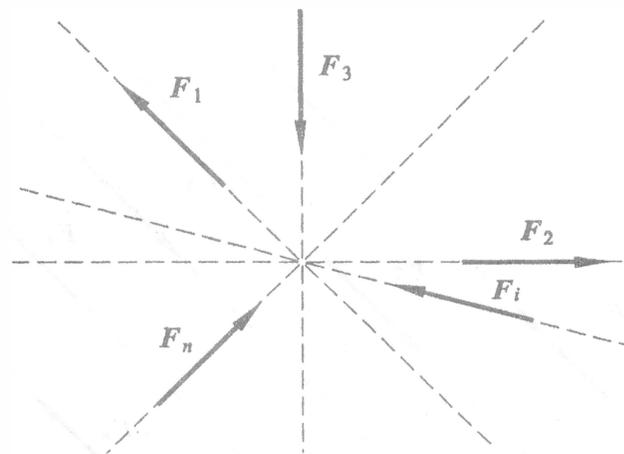


Figura III.5

Características de estos sistemas de fuerzas son:

- Pueden aplicarse tanto a partículas como a cuerpos.
- La línea de acción de la fuerza resultante de cada uno de ellos (en caso de existir) pasará por el punto donde las fuerzas del sistema se intersecan.
- En algunos casos, estos sistemas pueden reducirse a una fuerza, o bien al equilibrio.

**Sistemas de fuerzas colineales.** Son sistemas cuyos elementos (fuerzas) tienen soportes colineales, aunque pueden tener diferentes sentidos, según se muestra en la figura III.6 . Obviamente, dichos sistemas pueden considerarse como un caso particular de los sistemas de fuerzas concurrentes.



Figura III.6

Características de estos sistemas de fuerzas son:

- Pueden aplicarse tanto a partículas como a cuerpos.
- La línea de acción de la fuerza resultante (en caso de existir ésta) es colineal con la de cualquier elemento del sistema.
- En algunos casos, estos sistemas pueden reducirse a una fuerza, o bien al equilibrio.

**Sistemas de fuerzas paralelas.** Son sistemas donde las líneas de acción de las fuerzas que los conforman tienen la misma dirección, pero no son colineales; ver figura III.7. Sistemas de este tipo pueden tenerse tanto coplanares como espaciales.

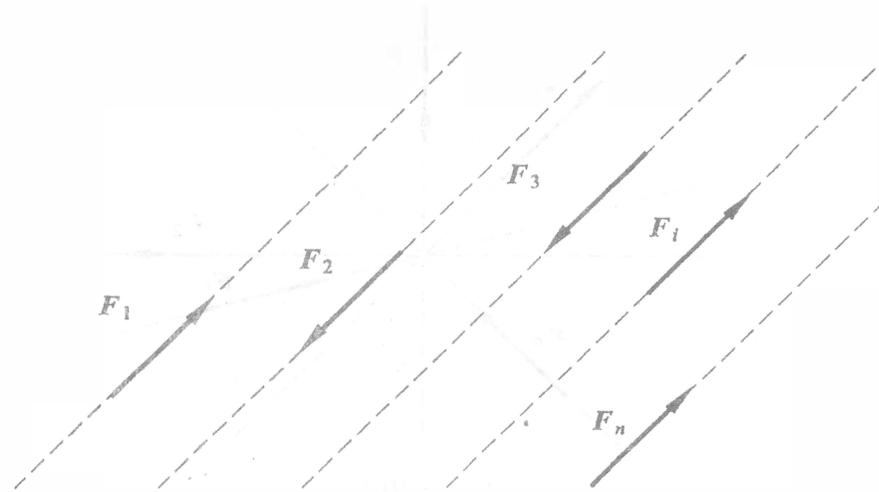


Figura III.7

Características de estos sistemas de fuerzas son:

- Pueden aplicarse a un cuerpo, pero nunca a una partícula.
- Las fuerzas resultantes (cuando existen), tienen su línea de acción paralela a las líneas de acción de las fuerzas que los conforman, pudiendo en algunos casos ser (dicha línea) colineal con el soporte de una fuerza del sistema.
- Cuando no exista fuerza resultante, como representativa del sistema, puede existir un sólo par de fuerzas (conformado por dos fuerzas cuyas magnitudes sean iguales, pero su sentido sea contrario) de modo que el par citado produzca los mismos efectos externos, al cuerpo, que el sistema de fuerzas paralelas aplicado al mismo.
- En algunos casos, estos sistemas pueden reducirse a una fuerza única o a un par de fuerzas (nunca a ambos casos), o bien al equilibrio.

**Sistemas de fuerzas generales.** Son sistemas donde las líneas de acción, de las fuerzas que los conforman, son tales que ni todas se intersecan, ni todas tienen la misma dirección; es decir, fuerzas como las mostradas en la figura III.8. Sistemas de este tipo pueden tenerse tanto espaciales (sistemas generales de fuerzas) como coplanares (sistemas generales de fuerzas coplanares).

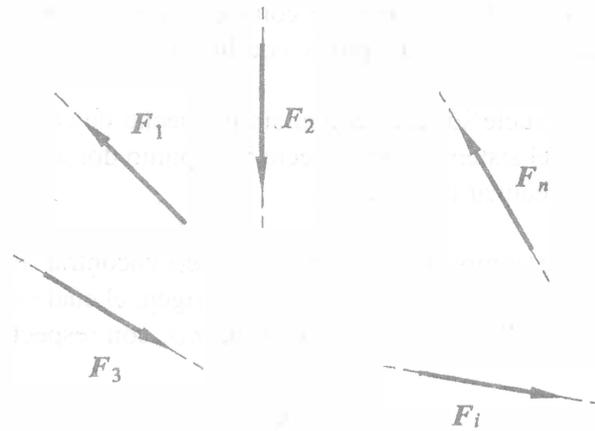


Figura III.8

Características de estos sistemas de fuerzas son:

- Pueden aplicarse a un cuerpo, pero nunca a una partícula.
- Pueden reducirse a una sola fuerza, a un par de fuerzas, a un motor, o bien al equilibrio. A lo que puedan reducirse (una sola de las opciones citadas) dependerá de las coordenadas vectoriales correspondientes, según se verá en el siguiente subtema.

### III.1.5 COORDENADAS VECTORIALES CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS CONCURRENTES, COLINEALES, PARALELAS Y GENERALES, EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

#### Concepto de coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas.

Cuando se tiene un sistema de fuerzas es posible, mediante el proceso de composición, obtener una única fuerza representativa del sistema a la que llamamos resultante del sistema y simbolizaremos como  $R$ , la cual se calcula a través de:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad \dots [11].$$

Obviamente, para que exista dicha fuerza como representativa del sistema, deberá no ser nula la sumatoria de las fuerzas que conforman dicho sistema.

Para los casos de sistemas de fuerzas colineales y concurrentes, ya sean coplanares o no coplanares, la composición es inmediata aplicando la expresión anterior, obteniendo fácilmente la fuerza equivalente del sistema dado.

Cuando el sistema de fuerzas no cumple la condición de concurrencia, se tendrá que emplear un elemento con el fin de contar con fuerzas concurrentes, a las cuales poder aplicar el principio generalizado del paralelogramo.

Este elemento, como lo veremos más adelante, se conoce con el nombre de par de transporte, mismo que emplearemos teniendo en cuenta el principio de equilibrio.

El empleo de este elemento se suele sustituir con el simple hecho de calcular los momentos de todas y cada una de las componentes del sistema, con respecto a un punto donde se pretenda transportar a todas y cada una de las fuerzas para realizar la reducción.

Este proceso es similar al de la composición de fuerzas, para encontrar así un único vector momento,  $M_O$ , que se define como momento del sistema respecto al origen, el cual es equivalente a la suma de los momentos de las fuerzas que conforman el sistema de fuerzas, con respecto al origen  $O$  del sistema de referencia; es decir:

$$M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i \quad \dots [12].$$

A la pareja ordenada de vectores  $(R, M_O)$  se le denomina Coordenadas Vectoriales Canónicas del Sistema de Fuerzas.

Así, las expresiones:

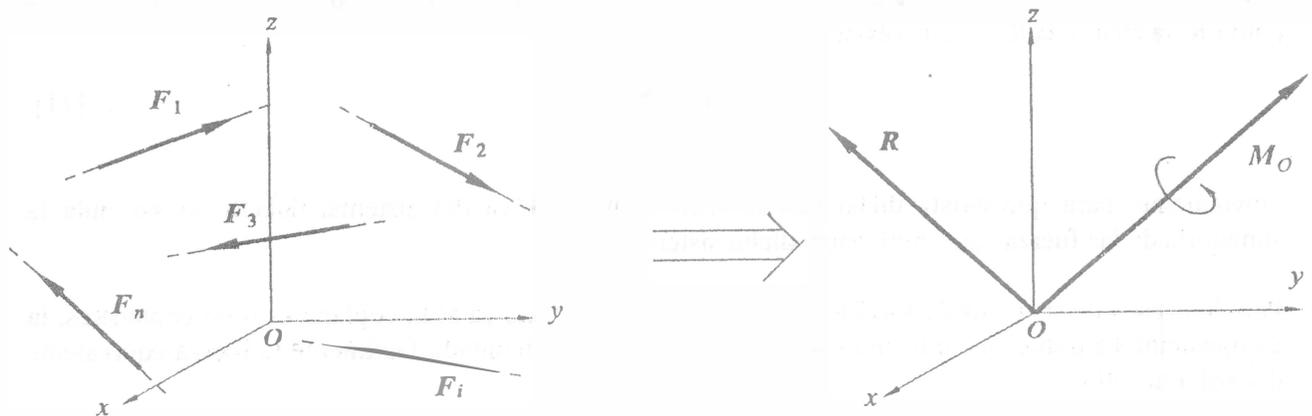
$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad \dots [11],$$

y,

$$M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i \quad \dots [12],$$

*conforman la pareja de vectores que nos indica los efectos externos que producirá en un cuerpo el sistema de fuerzas que se le aplique.*

Las expresiones [11] y [12] pueden englobarse gráficamente según se muestra en la figura III.9.



Es importante mencionar que los vectores que conforman las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas no siempre son mutuamente perpendiculares, según podrá apreciarse más adelante.

**Coordenadas vectoriales correspondientes a sistemas de fuerzas concurrentes.**

Como ya se mencionó, en estos sistemas las líneas de acción de todas y cada una de las fuerzas, que componen el sistema, se intersecan en un punto; ver figura III.10 .

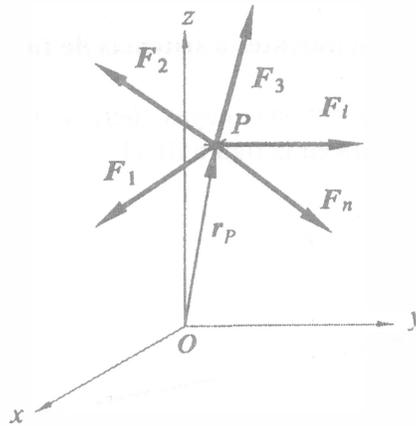


Figura III.10

Así pues, para este tipo de sistemas se tienen:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad \dots (1),$$

y,

$$M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i = r_P \times F_1 + r_P \times F_2 + \dots + r_P \times F_i + \dots + r_P \times F_n = r_P \times \left[ \sum_{i=1}^n F_i \right] \quad \dots (2),$$

esto teniendo en cuenta el teorema de Varignon.

En este tipo de sistemas se cumple la siguiente relación entre sus coordenadas vectoriales:

$$R \cdot M_O = 0 \quad \dots (3),$$

propiedad que podemos verificar de la siguiente forma.

Sustituyendo (1) en (2) se tiene:

$$M_O = r_p \times R,$$

debido a lo cual:

$$R \cdot M_O = R \cdot (r_p \times R),$$

producto nulo pues  $r_p \times R$  es perpendicular tanto a  $r_p$  como a  $R$ , razón por la que se verifica el cumplimiento de (3).

### Coordenadas vectoriales correspondientes a sistemas de fuerzas colineales.

Según ya se mencionó, estos son sistemas cuyas fuerzas tienen soportes colineales, pudiendo tener diferentes sentidos, como se muestra en la figura III.11.

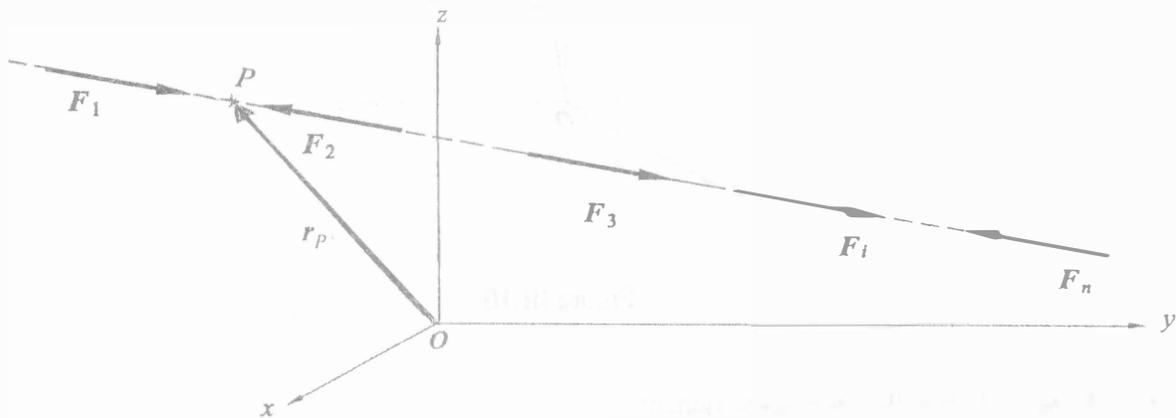


Figura III.11

Con base en los elementos de la figura III.11 puede decirse que las coordenadas vectoriales de este tipo de sistemas son:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \quad \dots (1),$$

y,

$$M_O = r_p \times \left[ \sum_{i=1}^n F_i \right] \quad \dots (2),$$

esto teniendo en cuenta el teorema de Varignon; de manera similar a lo que vimos para sistemas de fuerzas concurrentes.

Para este tipo de sistemas también cumple la relación:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0 \quad \dots (3).$$

Esto se puede comprobar de la manera como lo hicimos al verificar que dicha relación se cumple entre las coordenadas vectoriales de sistemas de fuerzas concurrentes.

### Coordenadas vectoriales correspondientes a sistemas de fuerzas paralelas.

Como ya mencionamos, en estos sistemas las líneas de acción de las fuerzas, que los componen, tienen la misma dirección aún cuando pueden tener diferentes sentidos, según se ilustra en la figura III.12.

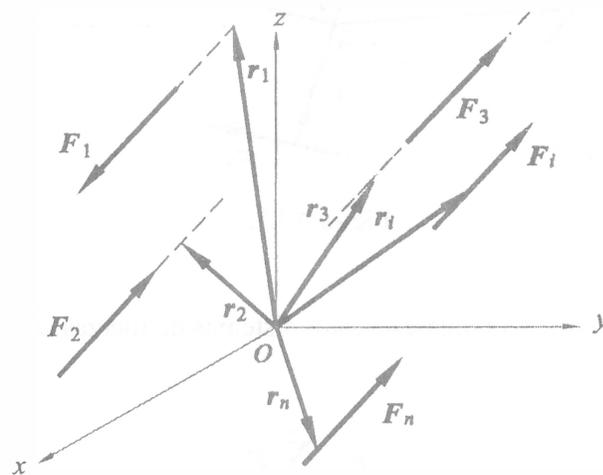


Figura III.12

Así pues, para estos sistemas de fuerzas:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \dots (1),$$

y,

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n \quad \dots (2).$$

En este tipo de sistemas puede presentarse alguna de las siguientes situaciones:

a) cuando las fuerzas del sistema están contenidas en un plano; casos en que  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$ ,

y,

b) cuando las fuerzas que constituyen al sistema no son coplanares, casos en los cuales  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$ .

### Coordenadas vectoriales correspondientes a sistemas generales de fuerzas.

Según ya se mencionó, en estos sistemas las líneas de acción de las fuerzas, que los conforman, ni todas se intersectan, ni todas tienen la misma dirección, como se muestra en la figura III.13 .

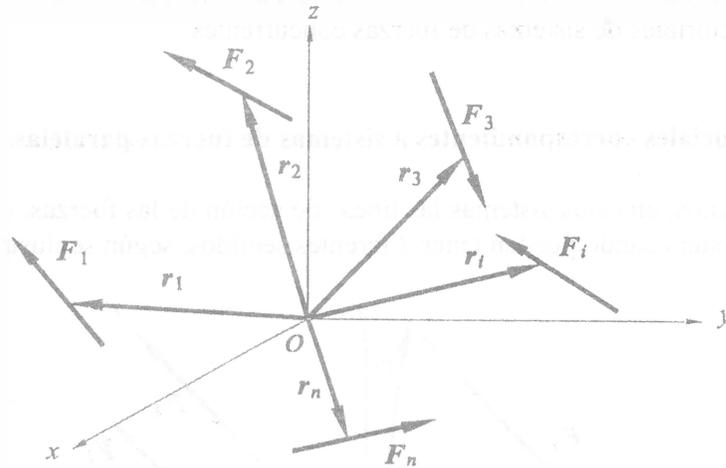


Figura III.13

Las coordenadas vectoriales correspondientes a estos sistemas de fuerzas son:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \dots (1),$$

y,

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n \quad \dots (2).$$

En este tipo de sistemas puede presentarse una de las siguientes situaciones:

- a) cuando las fuerzas que conforman al sistema están contenidas en un plano, casos en que  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$  (se recomienda al lector justificar el por qué de ello),

y,

- b) cuando las fuerzas del sistema no son coplanares, casos en que se tiene  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$  .

Ejemplo III-5.- Considérese un sistema con formado por las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  descritas a continuación:

$F_1$  tiene un soporte que pasa por  $A(2, 3, -4)m$  y por  $B(5, -1, 8)m$ , su magnitud es  $39N$ , y su dirección y sentido son los de  $\overline{AB}$ ;

$F_2$  tiene una línea de acción que pasa por  $C(8, 1, 2)m$ , su módulo es  $7N$ , es paralela al vector  $U = (3, -2, 6)$  y tiene el sentido de éste;

$F_3$  tiene un soporte que pasa por  $D(-1, 7, 0)$ , su dirección es la del eje  $Z$  y su sentido contrario al de dicho eje, en tanto que su magnitud es  $42N$ .

Con base en lo anterior:

- obteuga las coordenadas vectoriales <sup>canónicas</sup> de cada una de esas fuerzas,
- determine las coordenadas vectoriales canónicas del sistema descrito, y obtenga el producto escalar entre estas coordenadas,
- demuestre que el sistema dado es un sistema de fuerzas concurrentes, y,
- verifique el cumplimiento del teorema de Varignon, con relación al citado sistema.

Resolución.

a) Teniendo en cuenta los datos, obtenemos:

$$F_1 = 39 e_{AB} = 39 \left[ \frac{1}{13} (3i - 4j + 12k) \right] = 9i - 12j + 36k, N, \quad \text{--- (1)}$$

$$F_2 = 7 e_U = 7 \left[ \frac{1}{7} (3i - 2j + 6k) \right] = 3i - 2j + 6k, N, \quad \text{--- (2)}$$

$$F_3 = -42k, N \quad \text{--- (3)}$$

$$M'_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 9 & -12 & 36 \end{vmatrix} = 60i - 108j - 51k, N \cdot m, \quad \text{--- (4)}$$

$$M''_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 10i - 42j - 19k, N \cdot m, \quad \text{--- (5)}$$

(contenía ejemplo III.5) (2/3)

$$\mathbf{M}_0^3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -42 \end{vmatrix} = -294\mathbf{i} - 42\mathbf{j}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (6)}$$

donde ① y ④ proporcionan las coordenadas vectoriales canónicas de  $\mathbf{F}_1$ , ② y ⑤ las propias de  $\mathbf{F}_2$ , en tanto que ③ y ⑥ las correspondientes a  $\mathbf{F}_3$ .

b) Considerando los valores dados por ①, ② y ③, así como los proporcionados por ④, ⑤ y ⑥ se obtienen, respectivamente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 12\mathbf{i} - 14\mathbf{j}, \text{ N} \quad \text{--- (7)}$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_0^1 + \mathbf{M}_0^2 + \mathbf{M}_0^3 = -224\mathbf{i} - 192\mathbf{j} - 70\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (8)}$$

es decir las coordenadas vectoriales canónicas del sistema dado; al efectuar el producto escalar entre dichas coordenadas resulta:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_0 = (12)(-224) + (-14)(-192) = 2688 - 2688 = 0$$

debido a lo cual el sistema dado puede reducirse a una sola fuerza.

c) Basados en los datos y lo obtenido hasta aquí, puede decirse que las ecuaciones vectoriales de los soportes de las fuerzas del sistema son,

$$\text{de } \mathbf{F}_1: \mathbf{r} = (2, 3, -4) + t_1(3, -4, 12) \quad \text{--- (9)}$$

$$\text{de } \mathbf{F}_2: \mathbf{r} = (8, 1, 2) + t_2(3, -2, 6) \quad \text{--- (10)}$$

$$\text{de } \mathbf{F}_3: \mathbf{r} = (-1, 7, 0) + t_3(0, 0, -1) \quad \text{--- (11)}$$

El punto de intersección entre los soportes de  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$ ,

con base en ⑩ y en ⑪ lo obtendremos a partir de la igualdad:

(continuación ejemplo III.5) (3/3)

$$(8+3t_2, 1-2t_2, 2+6t_2) = (-1, 7, -t_3)$$

la cual se cumple sí y sólo si:

$$8+3t_2 = -1 \quad \text{--- (12)}, \quad 1-2t_2 = 7 \quad \text{--- (13)}, \quad \text{y}, \quad 2+6t_2 = -t_3 \quad \text{--- (14)},$$

sistema de tres ecuaciones que sólo se cumple para  $t_2 = -3$  y  $t_3 = 16$ , valores que llevados a (10) y (11) dan lugar, respectivamente, a:

$$\mathbf{r} = (8, 1, 2) + (-9, 6, -18) = (-1, 7, -16), \text{ y},$$

$$\mathbf{r} = (-1, 7, 0) + (0, 0, -16) = (-1, 7, -16),$$

debido a lo cual  $I(-1, 7, 16)$  es el punto donde se intersecan los soportes de  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$ ; veamos si este punto también pertenece al soporte de  $\mathbf{F}_1$ .

Para  $t = -1$ , de (9) se obtiene:

$\mathbf{r} = (2, 3, -4) + (-3, 4, -12) = (-1, 7, -16)$ , o sea el vector de posición de  $I$ . Entonces, queda demostrado que el sistema dado es un sistema de fuerzas concurrentes (pues todas las líneas de acción de las fuerzas del sistema pasan por  $I$ ).

f) Teniendo en cuenta las coordenadas de  $I$ , así como el valor dado por (7), el momento de la resultante respecto al origen es:

$$\mathbf{M}_0^R = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 7 & -16 \\ 12 & -14 & 0 \end{vmatrix} = -224\mathbf{i} - 192\mathbf{j} - 70\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (15)};$$

como los valores dados por (15) y (8) son idénticos, podemos afirmar que, para el sistema de fuerzas de este ejemplo, se cumple el teorema de Varignon.

### Ejemplo III-6

Se tiene un sistema de fuerzas colineales, formado por las fuerzas  $F_1$  a  $F_4$  de la figura III.14; los soportes de ellas son paralelos al eje  $z$  y pasan por  $A(3,5,2)$ . Considerando que las magnitudes de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$  son, respectivamente 20, 30, 15 y 40 N, obtenga las coordenadas vectoriales canónicas del sistema descrito.

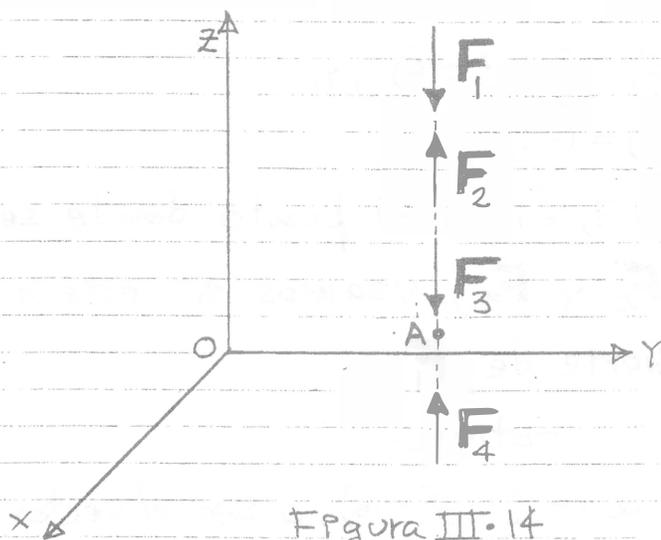


Figura III.14

Resolución.

Teniendo en cuenta los datos puede escribirse que:

$F_1 = -20K$ ,  $F_2 = 30K$ ,  $F_3 = -15K$ , y,  $F_4 = 40K$ , todas en N, fuerzas paralelas al eje  $z$ , con un soporte común que pasa por A, debido a lo cual:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 35K, N. \quad \text{--- ①, y}$$

$$M_o = r_A \times F_1 + r_A \times F_2 + r_A \times F_3 + r_A \times F_4 = r_A \times (F_1 + F_2 + F_3 + F_4),$$

$$\text{o sea: } M_o = r_A \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = 175\hat{i} - 105\hat{j}, N \cdot m \quad \text{--- ②,}$$

donde ① y ② corresponden a las coordenadas vectoriales canónicas del sistema dado.

Ejemplo III.7.- Se tiene un sistema de fuerzas paralelas conformado por  $\mathbf{F}_1 = -20\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{F}_2 = 30\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{F}_3 = -15\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{F}_4 = 40\mathbf{k}$ , todas ellas en newtons, de modo que los soportes de ellas pasan respectivamente por  $P_1(0, 5, -2)$ ,  $P_2(-1, 2, 0)$ ,  $P_3(4, -1, 3)$ , y  $P_4(-3, 0, 1)$  donde las coordenadas están en metros.

Con base en ello, determine las coordenadas vectoriales canónicas del sistema dado.

Resolución.

Se tiene:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = (-20\mathbf{k}) + (30\mathbf{k}) + (-15\mathbf{k}) + (40\mathbf{k}) = 35\mathbf{k}, \text{ N} \quad \text{--- (1)}$$

además:

$$\mathbf{M}_0 = \overrightarrow{OP_1} \times \mathbf{F}_1 + \overrightarrow{OP_2} \times \mathbf{F}_2 + \overrightarrow{OP_3} \times \mathbf{F}_3 + \overrightarrow{OP_4} \times \mathbf{F}_4 =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} =$$

$$= (-100\mathbf{i}) + (60\mathbf{i} + 30\mathbf{j}) + (15\mathbf{i} + 60\mathbf{j}) + (120\mathbf{j}),$$

es decir:

$$\mathbf{M}_0 = -25\mathbf{i} + 210\mathbf{j}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (2)}$$

así pues, (1) y (2) nos proporcionan las coordenadas vectoriales canónicas del sistema dado.

Obsérvese que en este caso  $\mathbf{M}_0$  no pudo obtenerse como un sólo producto vectorial (como fue el caso del problema anterior, donde se tuvo un sistema de fuerzas colineales); ahora lo obtuvimos como la suma de los momentos de las fuerzas

ya que no se pudo factorizar a  $\overrightarrow{OP_1}$ , ni a  $\overrightarrow{OP_2}$ , ni a  $\overrightarrow{OP_3}$ , ni a  $\overrightarrow{OP_4}$  por tratarse de segmentos dirigidos diferentes entre sí.

### Ejemplo III.8

Considere un sistema de fuerzas paralelas formado por las fuerzas  $F_1$  a  $F_4$  mostradas en la figura III.15, mismas que, además de tener las magnitudes indicadas, están alojadas en aristas del paralelepípedo ilustrado.

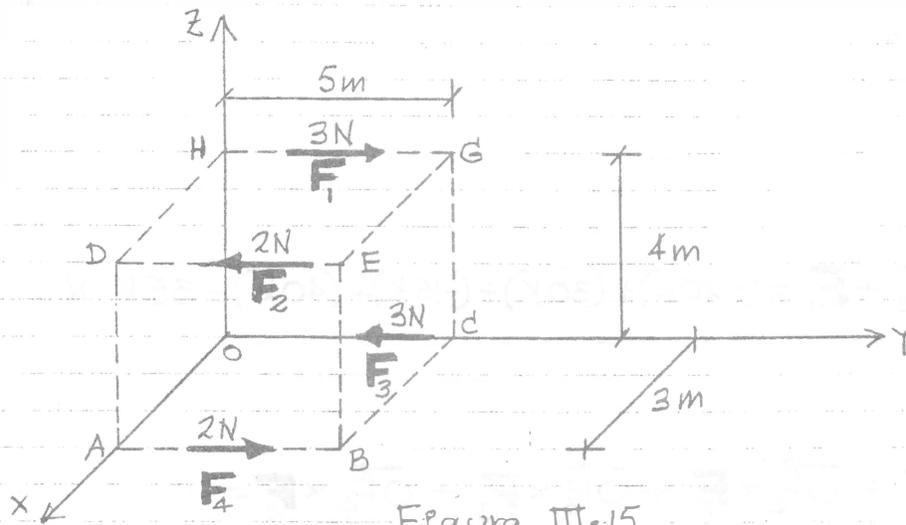


Figura III.15

Procediendo de dos maneras diferentes, obtenga el momento del sistema dado, respecto al origen.

Resolución.

a) Primeramente obtendremos el momento pedido como la suma de los momentos de cada una de las fuerzas, respecto al origen; entonces:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O^1 + \mathbf{M}_O^2 + \mathbf{M}_O^3 + \mathbf{M}_O^4 = \vec{OH} \times \mathbf{F}_1 + \vec{OD} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{0} + \vec{OA} \times \mathbf{F}_4$$

o sea que:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} + (8\mathbf{i} - 6\mathbf{k}) + \mathbf{0} + (6\mathbf{k}) = -4\mathbf{i}, \text{N}\cdot\text{m}$$

(ejemplo III.8, continuación) (2/2)

b) ahora obtendremos el momento pedido como la suma de los momentos de las fuerzas que conforman el sistema dado, sólo que adoptando el enfoque de que dicho momento puede obtenerse como la suma de los momentos de los pares de fuerza formados con base a  $F_1$  y  $F_3$ , por un lado, y con base a  $F_2$  y  $F_4$  por otro.

El momento del par formado por  $F_1$  y  $F_3$  lo calculamos ahora como el momento de  $F_1$  con respecto a un punto de la línea de acción de  $F_3$ , es decir:

$$M_{13} = \vec{OB} \times \mathbf{F}_1 = \vec{CB} \times \mathbf{F}_1 = (4\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j}) = -12\mathbf{i} \quad \text{--- ①}$$

en tanto que el momento del par formado por  $F_2$  y  $F_4$  aquí lo calculamos como el momento de  $F_4$  con respecto a un punto de la línea de acción de  $F_2$ , o sea:

$$M_{24} = \vec{DA} \times \mathbf{F}_4 = \vec{EB} \times \mathbf{F}_4 = (-4\mathbf{k}) \times (2\mathbf{j}) = 8\mathbf{i} \quad \text{--- ②}$$

entonces, con base en los valores dados por ① y ②, el momento pedido resulta:

$$M_0 = M_{13} + M_{24} = (-12\mathbf{i}) + (8\mathbf{i}) = -4\mathbf{i}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

valor idéntico al que obtuvimos en el inciso a) de esta resolución.

NOTA.- Se recomienda al lector obtener  $M_{13}$  como el momento de  $F_3$  con respecto a un punto del soporte de  $F_1$ , y calcular  $M_{24}$  como el momento de  $F_2$  respecto a un punto del soporte de  $F_4$ .



Ejemplo III.10.- Un sistema de fuerzas está compuesto por  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ , de modo que  $F_1$  tiene una magnitud de 26 N, así como la dirección y el sentido de  $\vec{AB}$ ,  $F_2$  tiene un módulo de  $34\sqrt{2}$  N y tanto la dirección como el sentido de  $\vec{BC}$ , y  $F_3$  que tiene una magnitud de 26 N, así como la dirección y el sentido de  $\vec{CA}$ , donde A, B, C son los puntos de intersección del plano de ecuación  $12x+12y+5z-60=0$ , con los ejes coordenados, según se ilustra en la figura III.16.

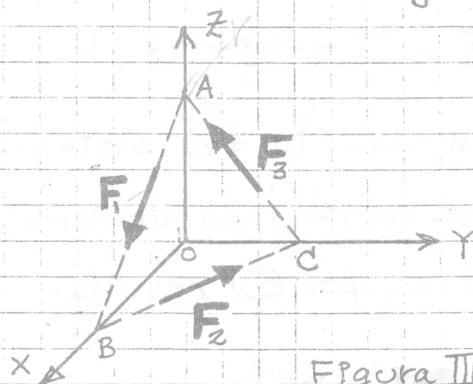


Figura III.16

Considerando que  $F_4$  está aplicada en C y que tiene un módulo igual a  $2\sqrt{13}$  N, así como una dirección y un sentido iguales a los de un vector  $N$  perpendicular al plano dado, y de componentes positivas, obtenga las coordenadas vectoriales canónicas del sistema descrito.

Resolución.

Con base en los datos se obtienen:

$$A(0,0,12), B(5,0,0), C(0,5,0), \vec{AB}=(5,0,-12), \vec{BC}=(-5,5,0), \vec{CA}=(0,-5,12),$$

$$F_1 = 26 \mathbf{e}_{AB} = 26 \left[ \frac{1}{13} (5\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \right] = 10\mathbf{i} - 24\mathbf{k}, \text{ N,} \quad \text{--- (1)}$$

$$F_2 = 34\sqrt{2} \mathbf{e}_{BC} = 34\sqrt{2} \left[ \frac{1}{5\sqrt{2}} (-5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \right] = -34\mathbf{i} + 34\mathbf{j}, \text{ N,} \quad \text{--- (2)}$$

(continuación ejemplo III-10)(2/2)

$$\mathbf{F}_3 = 26 \mathbf{e}_{CA} = 26 \left[ \frac{1}{13} (-5\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \right] = -10\mathbf{j} + 24\mathbf{k} \quad \text{--- (3)}$$

$$\mathbf{N} = 12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

$$\mathbf{F}_4 = 2\sqrt{313} \mathbf{e}_N = 2\sqrt{313} \left[ \frac{1}{\sqrt{313}} (12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \right] = 24\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \quad \text{--- (4)}$$

Con base en los valores dados por (1), (2), (3) y (4) puede decirse que la resultante del sistema de este ejemplo está dada por:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = 0\mathbf{i} + 48\mathbf{j} + 10\mathbf{k}, \text{ N} \quad \text{--- (5)}$$

en tanto que, el momento del sistema dado, con respecto al origen (segunda coordenada vectorial canónica del sistema; la primera está dada por (5)) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \mathbf{M}_0^1 + \mathbf{M}_0^2 + \mathbf{M}_0^3 + \mathbf{M}_0^4 = \\ &= \vec{OB} \times \mathbf{F}_1 + \vec{OB} \times \mathbf{F}_2 + \vec{OA} \times \mathbf{F}_3 + \vec{OC} \times \mathbf{F}_4 = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & -24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ -34 & 34 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & -10 & 24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 24 & 24 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (120\mathbf{j}) + (170\mathbf{k}) + (120\mathbf{i}) + (50\mathbf{i} - 120\mathbf{k}),$$

es decir:

$$\mathbf{M}_0 = 170\mathbf{i} + 120\mathbf{j} + 50\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (6)}$$

O sea que, si  $\mathbf{S}$  es el sistema dado, dicho sistema en función de sus coordenadas vectoriales canónicas se expresa:

$$\mathbf{S} = (48\mathbf{j} + 10\mathbf{k}, \text{ N}; 170\mathbf{i} + 120\mathbf{j} + 50\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m})$$

Ejemplo III-11 - Un sistema de fuerzas está compuesto por las fuerzas  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  y  $\mathbf{F}_3$  del ejemplo anterior (III-10), y por la fuerza  $\mathbf{F}_5 = 24\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ , N, de modo que la línea de acción de ésta pasa por  $P_5(0, 0, -5)$ . Con base en ello, obtenga las coordenadas vectoriales canónicas del sistema de este ejemplo.

Resolución.

Teniendo en cuenta algunos de los resultados del ejemplo anterior, así como datos de este problema, se obtienen:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) + \mathbf{F}_5 = (-24\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) + (24\mathbf{i} - 24\mathbf{j}) = \mathbf{0}, \text{ N,} \quad \text{--- (I)}$$

$$\mathbf{M}_O = (\mathbf{M}_O^1 + \mathbf{M}_O^2 + \mathbf{M}_O^3) + \mathbf{M}_O^5 = 120\mathbf{i} + 120\mathbf{j} + 170\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -5 \\ 24 & -24 & 0 \end{vmatrix}$$

o sea que:

$$\mathbf{M}_O = 120\mathbf{i} + 120\mathbf{j} + 170\mathbf{k} + (-120\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 170\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (II)}$$

(I) y (II) nos proporcionan las coordenadas vectoriales pedidas.

Entonces, llamando  $\mathbf{S}$  al sistema de este ejemplo, en función de sus coordenadas vectoriales, dicho sistema se expresa:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{0} \text{ N}; 170\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m})$$

lo cual hace ver que el sistema dado tiene una pareja de coordenadas vectoriales del tipo de un sistema (de fuerzas) constituido por uno o varios pares de fuerzas.

Ejemplo III-12.- Un sistema de fuerzas está constituido por las fuerzas  $F_1$  a  $F_6$  descritas a continuación.

Fuerza:

So soporte pasa por:

$$F_1 = 10i - 24k, N$$

$$A(0, 0, 12) m$$

$$F_2 = -34i + 34j, N$$

$$B(5, 0, 0) m$$

$$F_3 = -10j + 24k, N$$

$$C(0, 5, 0) m$$

$$F_4 = 20k, N$$

$$G(6, 0, 0) m$$

$$F_5 = 10i, N$$

$$H(0, 17, 0) m$$

$$F_6 = 20j, N$$

$$I(0, 0, 6) m$$

Determine las coordenadas vectoriales <sup>canónicas</sup> del sistema descrito.

Resolución.

Ahora tenemos:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = -14i + 44j + 20k, N, \quad \text{--- (1)}$$

$$M_0 = M_0^1 + M_0^2 + M_0^3 + M_0^4 + M_0^5 + M_0^6$$

$$M_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 12 \\ 10 & 0 & -24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 0 \\ -34 & 34 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 24 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 17 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}, y,$$

$$M_0 = (120j) + (170k) + (120i) + (-120j) + (-170k) + (-120i) = 0, N \cdot m. \quad \text{--- (2)}$$

donde (1) y (2) nos proporcionan las coordenadas pedidas, similares a las de una fuerza que pasa por el origen.

### III.2 DEFINICIÓN DE EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE FUERZAS. DEFINICIONES DE TRASLACIÓN DE UNA FUERZA Y DE PAR DE TRANSPORTE.

#### III.2.1 DEFINICIÓN DE EQUIVALENCIA DE SISTEMAS DE FUERZAS.

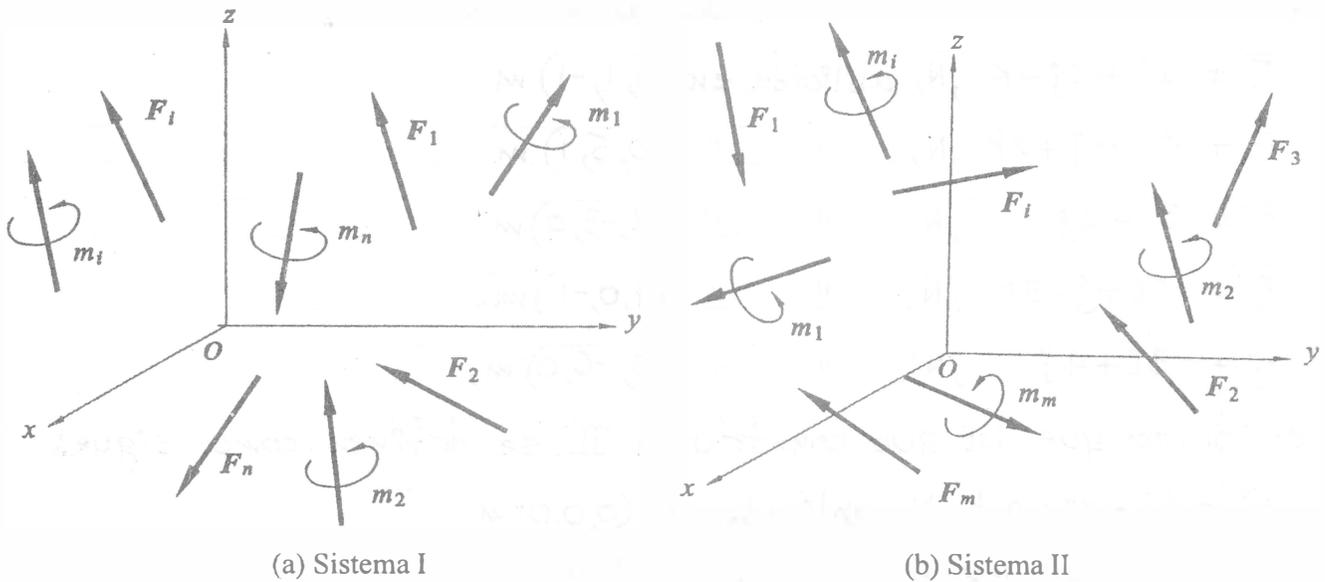


Figura III.17

Dos sistemas de fuerzas son equivalentes sí, y solo sí, las coordenadas vectoriales de ambos sistemas son iguales; así, considerando los sistemas I y II mostrados en la figura III.17, se tendrá que el sistema I es equivalente al sistema II, sí y solo sí:

$$\left[ \sum_{i=1}^n F_i \right]_{\text{I}} = \left[ \sum_{i=1}^n F_i \right]_{\text{II}},$$

y,

$$\left[ \sum_{i=1}^n r_i \times F_i + \sum_{i=1}^n m_i \right]_{\text{I}} = \left[ \sum_{i=1}^n r_i \times F_i + \sum_{i=1}^n m_i \right]_{\text{II}};$$

es decir, sí y solo sí tienen las mismas coordenadas vectoriales.

Cabe mencionar que, el número de elementos de un sistema no necesariamente debe ser igual al número de elementos de otro sistema, para que los dos sistemas citados sean equivalentes. Aunque parezca obvio, también mencionaremos que, para todos aquellos sistemas conformados sólo por fuerzas

se tiene que  $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ , pues tales sistemas no tienen pares de fuerzas (de momento  $m$ ) como los mostrados en la figura III.17.

### EJEMPLO III-13

Sean I y II dos sistemas de fuerzas, tales que las fuerzas que constituyen I se definen mediante:

$$\vec{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}, \text{ N, aplicada en } (1, 1, -1) \text{ m}$$

$$\vec{F}_2 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \text{ N, " " } (0, 5, 1) \text{ m}$$

$$\vec{F}_3 = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \text{ N, " " } (2, -3, 0) \text{ m}$$

$$\vec{F}_4 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \text{ N, " " } (4, 0, -1) \text{ m}$$

$$\vec{F}_5 = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \text{ N, " " } (3, -6, 0) \text{ m,}$$

en tanto que, las que constituyen II se definen como sigue:

$$\vec{F}_6 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + a\mathbf{k}, \text{ N, aplicada en } (0, 0, 0) \text{ m}$$

$$\vec{F}_7 = 2\mathbf{i} + b\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \text{ N, " " } (6, 0, 2) \text{ m}$$

$$\vec{F}_8 = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \text{ N, " " } (3, c, -10) \text{ m;}$$

obtenga los valores de  $a, b$  y  $c$  para que dichos sistemas (I y II) sean equivalentes.

Resolución.

La resultante del sistema I es:

$$(\vec{F})_1 = \sum_{i=1}^5 \vec{F}_i = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \text{ N} \quad \text{--- (A)}$$

y la del sistema II:

$$(\vec{F})_2 = \sum_{i=6}^8 \vec{F}_i = \mathbf{i} + b\mathbf{j} + (a+4)\mathbf{k}, \text{ N} \quad \text{--- (B);}$$

la suma de los momentos de las fuerzas del sistema I, con respecto al origen es:

$$(\vec{M}_0)_I = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -6 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (11\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 20\mathbf{k}) + (\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (-6\mathbf{k}),$$

$$\text{es decir: } (\vec{M}_0)_I = 14\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 20\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (C),}$$

Ejemplo III.13 (continuación)

en tanto que, la suma de los momentos de las fuerzas del sistema II, con respecto al origen, es:

$$(\vec{M}_0)_{II} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & b & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & c & -10 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2b\hat{i} - 20\hat{j} + 6b\hat{k}) + [20\hat{i} + 40\hat{j} + (6+4c)\hat{k}],$$

que se reduce a:  $(\vec{M}_0)_{II} = (20-2b)\hat{i} + 20\hat{j} + (6b+6+4c)\hat{k}$ , N·m... (D).

Como, para que los sistemas I y II sean equivalentes, debe cumplirse:

$$(\vec{F})_I = (\vec{F})_{II} \quad \text{y} \quad (\vec{M}_0)_I = (\vec{M}_0)_{II},$$

tomando en cuenta (A), (B), (C) y (D), por igualdad de vectores se obtiene:

$$3=b \quad \text{--- (E)}, \quad -2=a+4 \quad \text{--- (F)}, \quad 14=20-2b \quad \text{--- (G)}, \quad -20=6b+6+4c \quad \text{--- (H)};$$

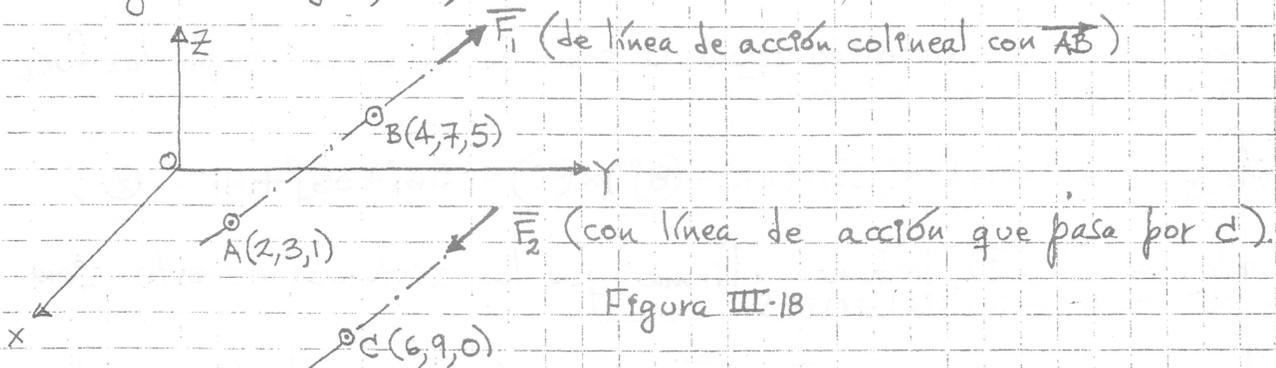
de (E) (y también de (G)) obtenemos:  $b=3$ ,

valor que sustituido en (H) da lugar a:  $c=-11$ ,

y como de (F) se obtiene  $a=-6$ , el problema se da por terminado.

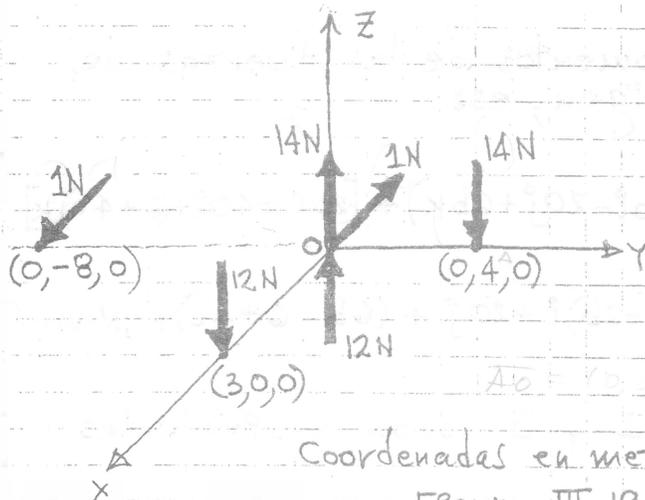
EJEMPLO III.14

Sean los puntos A, B y C, y el sistema de fuerzas I formado por las fuerzas paralelas y de la misma magnitud (12 N) de la siguiente figura, III.18, donde las coordenadas están en metros.



Considere ahora un sistema de fuerzas, II, formado por las fuerzas que se muestran en la figura III.19.

Ejemplo III.14 (continuación)



Las fuerzas que tienen una magnitud de 14N actúan en el plano YZ, las de 12N en el XZ, y las de 1N en el XY, con líneas de acción paralelas (o colineales) con el eje Z las cuatro primeras, y con el eje X las dos últimas.

$$A_0 = (0, 0, -12, 0, 0)$$

Coordenadas en metros.

Figura III-19

Tomando en cuenta lo anterior, determine si los sistemas I y II son, o no, equivalentes. De no serlo, qué se requeriría para que lo fueran?

Resolución

Como en ambos sistemas se tiene una suma de fuerzas nula, dichos sistemas serán equivalentes si  $(\vec{M}_0)_I = (\vec{M}_0)_II$ .

Cálculo de  $(\vec{M}_0)_I$ : Con base en los datos, obtenemos:

$$\vec{F}_1 = 12 \vec{e}_{AB} = 12 \left[ \frac{1}{|AB|} (\vec{AB}) \right] = 12 \left[ \frac{1}{6} (2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}) \right] = 4\vec{i} + 8\vec{j} + 8\vec{k}, \text{ N}$$

y como  $\vec{CA} = (-4, -6, 1)$ , se tiene:

$$(\vec{M}_0)_I = \vec{CA} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -6 & 1 \\ 4 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \vec{i}(-48-8) - \vec{j}(-32-4) + \vec{k}(-32+24) = -56\vec{i} + 36\vec{j} - 8\vec{k} \quad \text{--- (1)}$$

Cálculo de  $(\vec{M}_0)_II$ , obtenido como la suma de los momentos de las fuerzas que forman el sistema II:

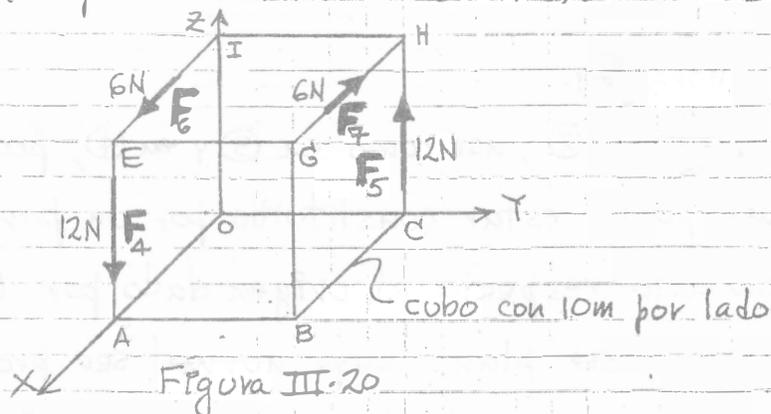
$$(\vec{M}_0)_II = (-4\vec{j}) \times (14\vec{k}) + (-3\vec{i}) \times (12\vec{k}) + (8\vec{j}) \times (-\vec{i}) = -56\vec{i} + 36\vec{j} + 8\vec{k} \quad \text{--- (2)}$$

basados en (1) y (2) podemos afirmar que los sistemas de este ejemplo NO SON EQUIVALENTES.

Nótese que los sistemas I y II si serían equivalentes en el caso de que las fuerzas con magnitud igual a 1 N (del sistema II) tuvieran sentidos opuestos a los dados.

### Ejemplo III-15

Sea  $S_I$  un sistema de fuerzas conformado por  $F_1 = -10i - 10j + 40k$ , N,  $F_2 = 30i - 30j$ , N, y  $F_3 = -20i + 40j - 40k$ , N, que pasan respectivamente por  $B(0, 1, 0)$  m,  $C(-1, 0, 4)$  m y  $A(2, -3, 4)$  m. Además se tiene un sistema,  $S_{II}$ , constituido por los dos pares de fuerzas que se muestran en la figura III-20, de modo que las cuatro fuerzas ahí mostradas tienen soportes colineales con aristas del cubo ilustrado.



Determine si esos dos sistemas son equivalentes o no lo son, y, en caso de que lo sean, obtenga un sistema  $S_{III}$  (perfectamente definido) que sea equivalente a los dos sistemas citados.

Resolución.

Con base en los datos se obtienen:

$$R_I = F_1 + F_2 + F_3 = 0i + 0j + 0k \quad \text{--- (1)}$$

$$R_{II} = F_4 + F_5 + F_6 + F_7 = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$(M_O)_I = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ -10 & -10 & 40 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ 30 & -30 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ -20 & 40 & -40 \end{vmatrix} =$$

$$= (40i + 10k) + (120i + 120j + 30k) + (-40i + 20k) = 120i + 120j + 60k, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (3)}$$

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{M}_O)_{II} &= \vec{GE} \times \mathbf{F}_6 + \vec{AC} \times \mathbf{F}_5 = (-10\hat{j}) \times (6\hat{k}) + (-10\hat{i} + 10\hat{j}) \times (12\hat{k}) = \\
 &= (60\hat{k}) + (120\hat{j} + 120\hat{i}) = 120\hat{i} + 120\hat{j} + 60\hat{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (4)};
 \end{aligned}$$

por ① y ②, así como por ③ y ④, podemos respectivamente establecer que  $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}_{II}$  y,  $(\mathbf{M}_O)_I = (\mathbf{M}_O)_{II}$ , debido a lo cual podemos afirmar que  $\mathbf{S}_I$  y  $\mathbf{S}_{II}$  son sistemas equivalentes.

Obtenemos ahora  $\mathbf{S}_{III}$ .

Basados en ① y en ②, así como en ③ y en ④, podemos decir que este sistema podrá estar constituido por un par de fuerzas con un momento respecto al origen dado por ③ (ó por ④), alojado en cualquier plano cuya normal sea proporcional a  $120\hat{i} + 120\hat{j} + 60\hat{k}$ , y, por lo tanto, proporcional a  $\mathbf{N} = (2, 2, 1)$ ; debido a ello, nuestro par (cuya magnitud debe ser igual  $180 \text{ N}\cdot\text{m}$ ) podemos ubicarlo en el plano de ecuación  $2x + 2y + z = 0$  --- (π), que pasa por el origen.

Considerando dicha ubicación existen tantas soluciones como se desee a nuestro problema, siempre y cuando cumplan ① y ② (o el equivalente, que son ③ y ④); nosotros adoptaremos aquella donde una de las fuerzas del par,  $\mathbf{P}_1$ , la ubicaremos en el plano XY en tanto que la otra quedará ubicada en un plano paralelo al XY (no pueden alojarse ambas en el plano XY porque el momento del par que formarían tendría la dirección del eje Z, y nunca podría ser igual al valor dado por ③, ó por ④).

Entonces, a  $\mathbf{P}_1$  la tendremos sobre la recta donde el plano de

Ejemplo III.15 (continuación) (3/3)

ecuación  $\textcircled{\text{II}}$  corta al plano  $XY$ , es decir sobre la recta de ecuación  $2X+2Y=0$  que, además de pasar por el origen, entre otros puntos pasa por  $Q(1,-1,0)$  m.

Así pues, se tiene:

$$\mathbf{P}_1 = P_1 \mathbf{e}_{OQ} = P_1 \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \right],$$

y, dando a  $P_1$  el valor  $10\sqrt{2}$ , tenemos:

$$\mathbf{P}_1 = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}, \text{ N} \quad \textcircled{5}$$

llamando  $T$  a un punto de abscisa cero (no coincidente con el origen) por donde pase la otra fuerza del par buscado, a la que llamaremos  $\mathbf{P}_2$ , debido a  $\textcircled{\text{II}}$  dicho punto será tal que  $T(0, Y, -2Y)$ , con lo cual  $\vec{OT} = (0, -Y, 2Y)$  en tanto que el momento del par buscado, calculado como el momento de  $\mathbf{P}_1$  con respecto a un punto del soporte de  $\mathbf{F}_2$ , resulta:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -Y & -2Y \\ 10 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (20Y)\mathbf{i} + (20Y)\mathbf{j} + (10Z)\mathbf{k} \quad \textcircled{6}$$

como los valores dados por  $\textcircled{4}$  y  $\textcircled{6}$  sólo serán iguales para  $Y=6$ , la respuesta a nuestro problema es:

El sistema  $\mathbf{S}_{\text{III}}$ , equivalente a  $\mathbf{S}_I$  y a  $\mathbf{S}_{\text{II}}$ , está conformado por un par de fuerzas constituido por  $\mathbf{P}_1 = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ , N, que pasa por el origen, y por  $\mathbf{P}_2 = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$ , N, cuya línea de acción pasa por  $T(0, 6, -12)$

Nota.- Se sugiere al lector comprobar que tanto  $\vec{OT} \times \mathbf{P}_2$  como  $\vec{OQ} \times \mathbf{P}_2$  resultan iguales al momento del sistema, respecto al origen.

### III.2.2 DEFINICIONES DE TRASLACIÓN DE UNA FUERZA Y PAR DE TRANSPORTE.

Como ya se mencionó al describir el vector representativo de una fuerza, ésta no queda totalmente definida si no cuenta con las siguientes características: magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación; así, el efecto que produce una fuerza aplicada a un cuerpo depende del punto de aplicación, de la misma.

Por ejemplo, si cambiáramos el punto de aplicación de una fuerza, sin modificar su dirección ni su sentido, parecería que se tratara de la misma fuerza; sin embargo, acorde con lo mencionado al tratar las coordenadas vectoriales de una fuerza, el cambio mencionado traería como consecuencia la modificación de los efectos externos producidos sobre el cuerpo en el que actuara. Lo anterior se ilustra en la figura III.21 y se describe en los párrafos siguientes.

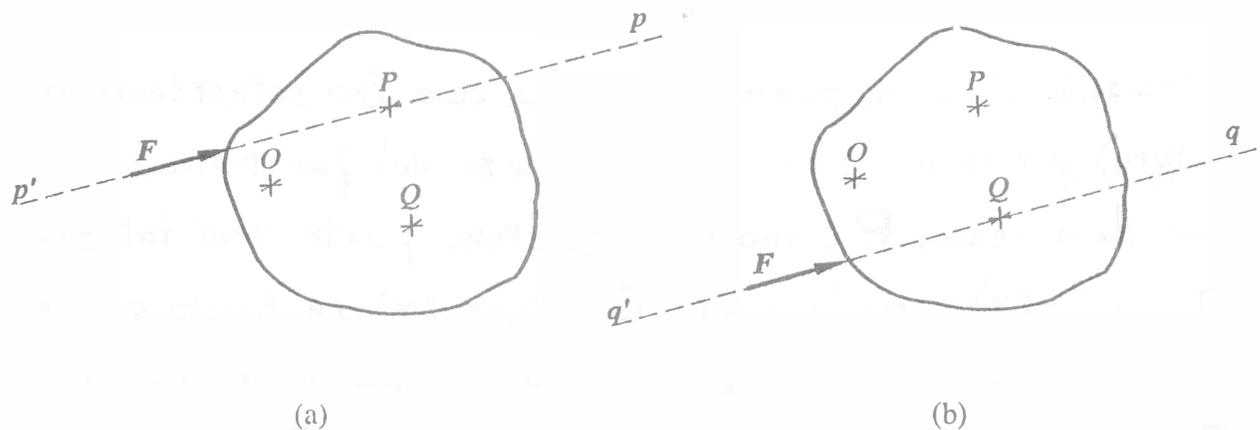


Figura III.21

En términos generales los efectos lineales serían los mismos, pero los efectos angulares no lo serían, como puede concluirse analizando partes de la figura recién citada.

En efecto, el transportar una fuerza, que actúa sobre un cuerpo, de una determinada posición a otra, trae como consecuencia la modificación de la tendencia al giro respecto a un punto cualquiera. Por ejemplo, la aplicación de  $F$  mostrada en la figura III.21(a) tiende a hacer girar al cuerpo en el sentido horario alrededor de  $O$ , en tanto que, aplicándola como se ilustra en la figura III.21(b) tendería a hacer girar al cuerpo en sentido antihorario, alrededor de  $O$ .

A continuación veremos cómo puede transportarse una fuerza de una posición a otra paralela, sin alterar los efectos externos que produce al cuerpo sobre el cual actúa. Ello puede efectuarse al aplicar un elemento llamado par de transporte, el cual va a formarse después de adicionar dos fuerzas colineales en equilibrio (aplicación del principio del equilibrio) con direcciones iguales a la de la fuerza que desea transportarse, cuyo soporte pase por el punto donde quiere trasladarse la fuerza original, lo que se esquematiza en la figura III.22(b); en este caso se trataría de transportar  $F$  de modo que su soporte pasara por  $Q$ .

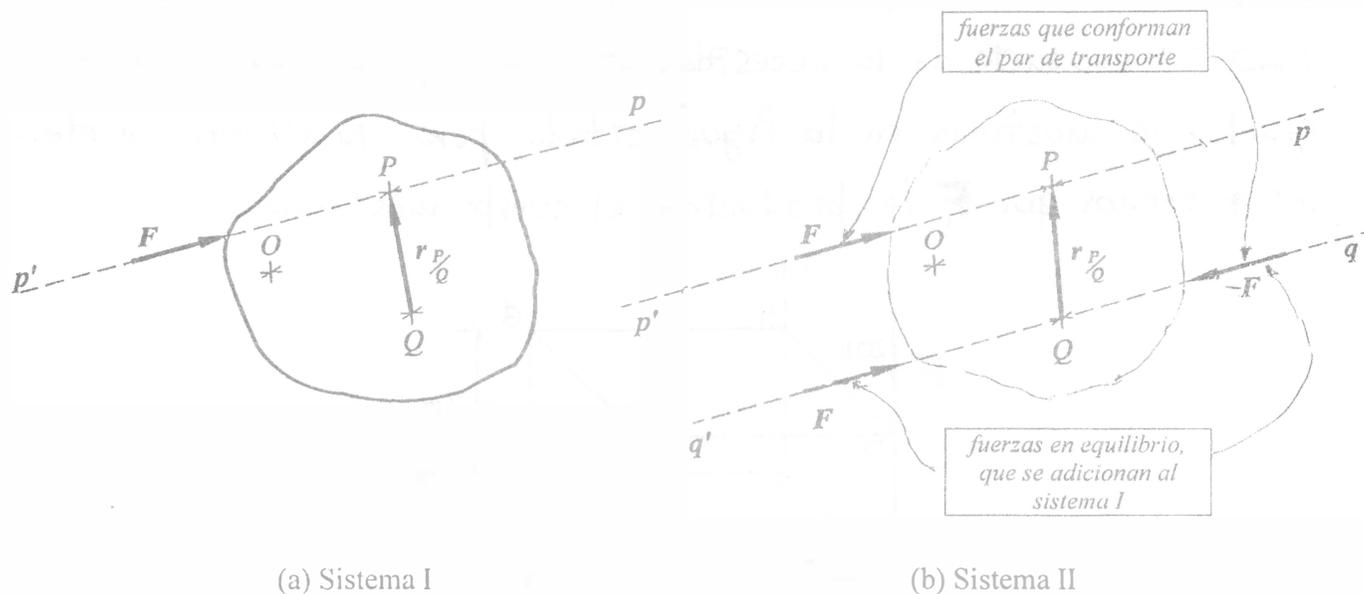


Figura III.22

Al adicionar un sistema en equilibrio con fuerzas cuyo soporte pasa por el punto  $Q$  (compárense las figuras III.22(a) y III.22(b)), los efectos externos no se alteran, lo que significa que ambos sistemas (I, II) son equivalentes. Sin embargo, el sistema II resulta formado por una fuerza  $F$  aplicada en  $Q$ , más un par conformado por fuerzas de magnitud  $F$  y sentidos contrarios; precisamente éste es el que se denomina par de transporte.

Al obtener las coordenadas vectoriales del sistema I con respecto a  $Q$  se tiene que:  $R = F$ , y,  $M_Q^F = r_{P/Q} \times F$ , mientras que al resolver el sistema II se tiene que  $R = F$  además de un par de fuerzas, cuyo momento ( $m_T$ ) puede obtenerse mediante  $r_{P/Q} \times F$ ; a este momento se le denomina momento del par de transporte; así:

$$m_T = r_{P/Q} \times F$$

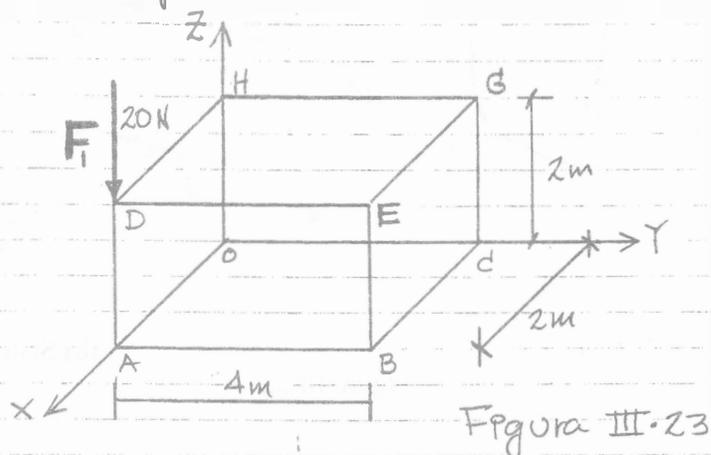
Como la dirección  $\overline{P_1P_2}$  y  $r_{P/Q}$  determinan un plano (ver figura III.22(b)), se tiene que  $m_T$  es perpendicular tanto al vector  $r_{P/Q}$ , como a la fuerza  $F$  que es colineal con la dirección  $P_1P_2$ ; entonces:

$$m_T \cdot F = 0 \quad ,$$

y,

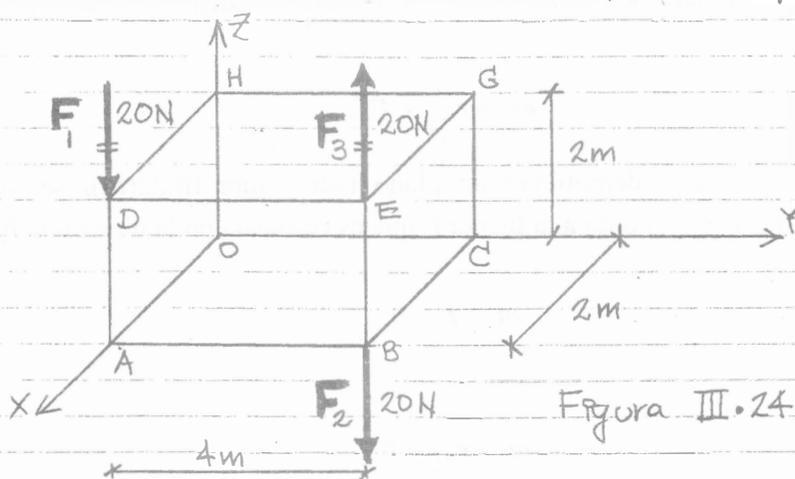
$$m_T \cdot r_{P/Q} = 0 \quad .$$

Ejemplo III-16.- Considere la fuerza  $F_1$  de la figura III-23 y determine el par de transporte que se genera, así como su momento, como consecuencia de la necesidad de tener aplicada en B una fuerza igual a la mostrada en la figura citada, pero sin alterar los efectos externos que  $F_1$  le produciría al cuerpo mostrado.



Resolución.

Al adicionar el sistema en equilibrio formado por las fuerzas  $F_2$  y  $F_3$  mostradas en la figura III-24, ya sobre el cuerpo actúan  $F_2$  y el par formado por  $F_1$  y  $F_3$ , sistema que produce al cuerpo los mismos efectos externos que la aplicación de  $F_1$ .



El par recién mencionado es el par de transporte formado para lograr tener aplicada en B una fuerza igual a  $F_1$ , sin alterar

Ejemplo III.16 (continúa) (2/2)

los efectos; así pues, el momento de dicho par es:

$$\mathbf{m}_T = \overrightarrow{DE} \times \mathbf{F}_3 = (4\mathbf{j}) \times (20\mathbf{k}) = 80\mathbf{i}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- ①}$$

en tanto que, el momento de  $\mathbf{F}_2$  con respecto al origen resulta:

$$\mathbf{M}_0^2 = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times (-20\mathbf{k}) = 40\mathbf{j} - 80\mathbf{i}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \text{--- ②};$$

teniendo en cuenta que el sistema de fuerzas de la figura III.24 tiene por resultante a  $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (20\mathbf{k}) + (20\mathbf{k}) + (20\mathbf{k}) = 60\mathbf{k}, \text{ N}$ ,

y por momento con respecto al origen a la suma de los valores

dados por ① y ②, es decir  $\mathbf{M}_0 = (80\mathbf{i}) + (40\mathbf{j} - 80\mathbf{i}) = 40\mathbf{j}, \text{ N}\cdot\text{m}$ ,

como el momento de  $\mathbf{F}_1$  respecto al origen vale:

$$\mathbf{M}_0^1 = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}_1 = (2\mathbf{i}) \times (-20\mathbf{k}) = 40\mathbf{j},$$

podemos decir que los sistemas de fuerzas de las figuras III.23

y III.24 tienen las mismas coordenadas vectoriales canónicas,

debido a lo cual puede decirse que son sistemas equivalentes.

Ya teniendo aplicada en B una fuerza igual a  $\mathbf{F}_1$ , así como el par de transporte, dejando ahí dicha fuerza, siempre y cuando el momento del par que deseemos aplicar al cuerpo valga lo dado

por ① (es decir  $80\mathbf{i}, \text{ N}\cdot\text{m}$ ), podemos aplicar el par que esté acorde con nuestras necesidades y/o gustos. Así por ejemplo, aplicando

las fuerzas de 40N además de la de 20N, de la figura III.25, los efectos

externos que este sistema produce al cuerpo son los mismos que los

que producen los sistemas de las figuras III.23 y III.24; se recomienda verificar esto.

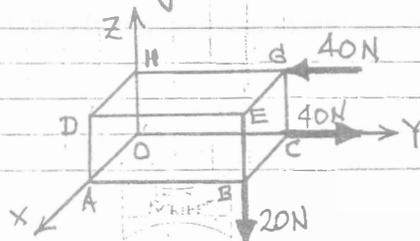


Figura III.25

**III.3 DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS IRREDUCTIBLES. CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UNA SOLA FUERZA. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UNA SOLA FUERZA. CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UN PAR DE FUERZAS. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN PAR DE FUERZAS. EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE FUERZAS: DEFINICIÓN; ECUACIONES VECTORIALES Y ECUACIONES CARTESIANAS. CONDICIÓN PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS SEA REDUCTIBLE A UN MOTOR (FUERZA Y PAR NO COPLANARES; LLAVE DE TORSIÓN). MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN MOTOR.**

**III.3.1 REDUCCIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS. DESCRIPCIÓN DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS IRREDUCTIBLES.**

Definiremos como reducción de un sistema de fuerzas al proceso que consiste en obtener, de un sistema de fuerzas cualquiera, un sistema equivalente que se considera irreductible (mínimo en sus componentes) que produzca los mismos efectos externos que el sistema original.

Los sistemas irreductibles son: a) el constituido por una sola fuerza, b) el conformado por un par de fuerzas, c) el constituido por una fuerza y un par no coplanares (también conocido como motor, o llave de torsión), y, d) un sistema de fuerzas en equilibrio.

Así, al obtener un sistema de fuerzas considerado irreductible y equivalente a un sistema dado, hemos efectuado y concluido la reducción de éste.

**III.3.2 CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UNA SOLA FUERZA. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UNA SOLA FUERZA**

Siempre y cuando cumplan con las condiciones correspondientes, los sistemas de fuerzas que pueden reducirse a una sola fuerza son los: colineales, concurrentes (coplanares y espaciales), paralelos y generales en el plano.

En este tipo de reducción se consideran dos posibilidades:

A) la reducción consiste en una fuerza que pasa por el origen del sistema de referencia,

y,

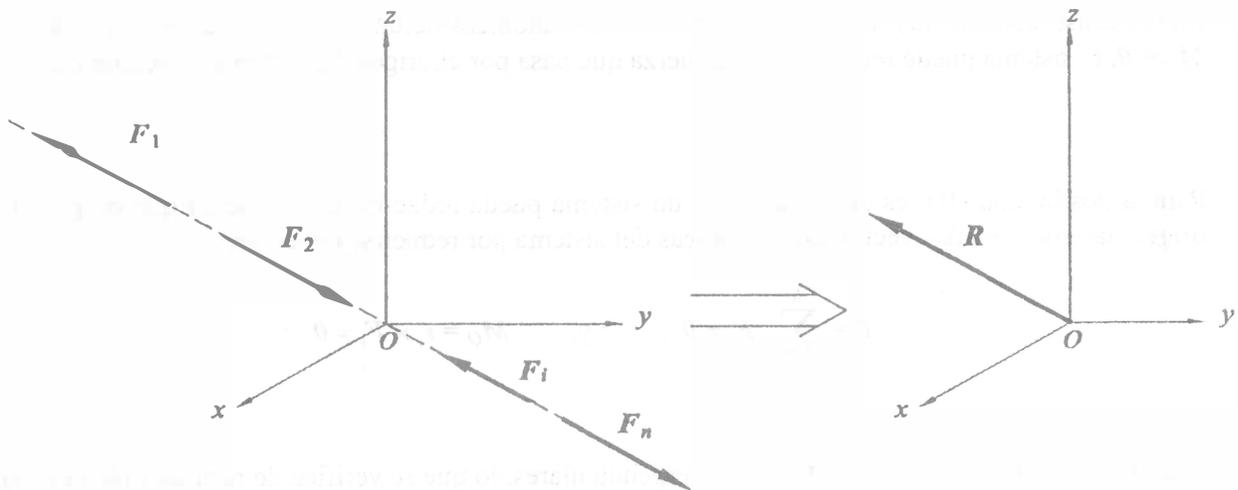
B) la reducción consiste en una fuerza cuyo soporte no pasa por el origen del sistema de referencia.

Para la posibilidad (A) las coordenadas vectoriales canónicas del sistema por reducirse deben ser:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \neq 0 \quad \text{y} \quad M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i = 0 .$$

Lo anterior se presenta, por ejemplo, en cada uno de los dos casos mencionados a continuación. Se sugiere al lector identificar otros casos en los cuales se presenten las coordenadas vectoriales recién citadas.

- 1) cuando el origen del sistema de referencia esté sobre la línea de acción de un sistema de fuerzas colineales, según se ilustra en la figura III.26

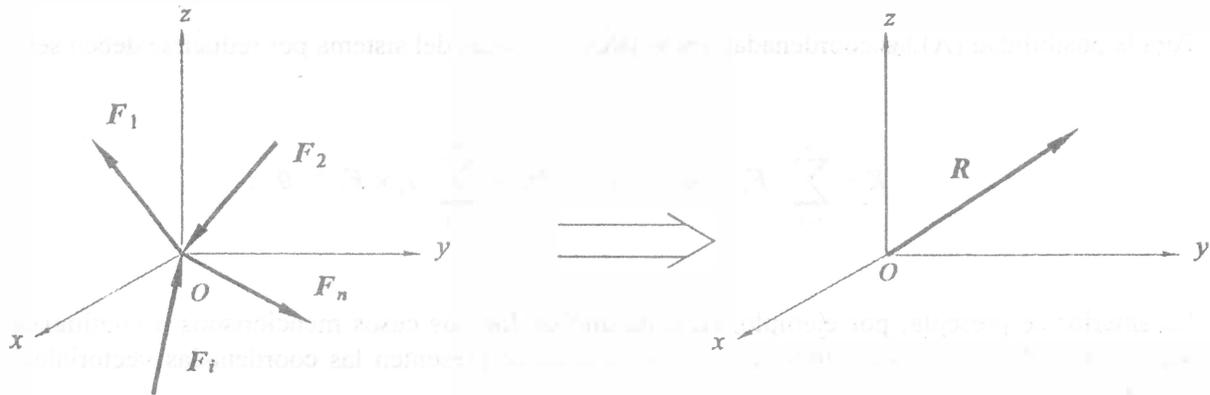


(a) Sistema de fuerzas colineales cuyas línea de acción pasan por el origen (O).

(b) Sistema equivalente, consistente en una fuerza que pasa por el origen (O)

Figura III.26

- 2) cuando el origen del sistema de referencia coincide con el punto de intersección de un sistema de fuerzas concurrentes, como se muestra en la figura III.27 .



(a) Sistema de fuerzas concurrentes en el origen (O) .

(b) Sistema equivalente, consistente en una fuerza que pasa por el origen (O) .

Figura III.27

En síntesis, cuando las coordenadas vectoriales canónicas de un sistema de fuerzas son  $R \neq 0$  y  $M_O = 0$ , el sistema puede reducirse a una fuerza que pasa por el origen del sistema de referencia.

Para la posibilidad (B); es decir, para que un sistema pueda reducirse a una fuerza que no pasa por el origen, las coordenadas vectoriales canónicas del sistema por reducirse deben ser:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i \neq 0, \quad \text{y,} \quad M_O = r_i \times F_i \neq 0 ;$$

además deberá tenerse que  $R$  y  $M_O$  sean perpendiculares, lo que se verifica de resultar nulo el producto escalar entre las coordenadas vectoriales citadas, esto es:

$$R \cdot M_O = 0 .$$

Lo anterior se puede presentar para los sistemas de fuerzas mencionados en el párrafo inicial de este subtema (III.3.2); así pues, cuando ello ocurra, el sistema mínimo equivalente (irreductible) será una fuerza cuya línea de acción no pasa por el origen.

Metodología para efectuar la reducción, de un sistema de fuerzas, a partir de sus coordenadas vectoriales canónicas, cuando estas son, como las ilustradas en la figura III.28; es decir, perpendiculares entre si.

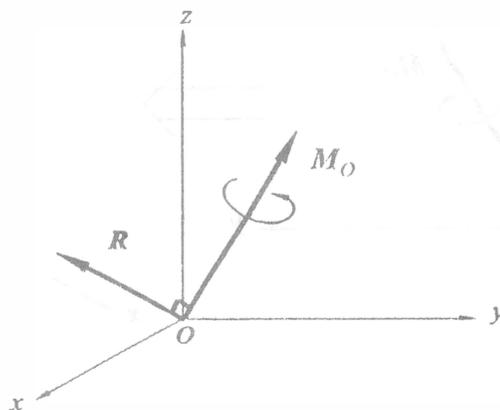


Figura III.28

Pasando por un punto  $P$  (cuya manera de determinar se verá más adelante) ubicamos dos fuerzas en equilibrio, de magnitudes iguales a la de la resultante  $R$ , cuyas direcciones sean paralelas a la de tal resultante, según se muestra en la figura III.29.

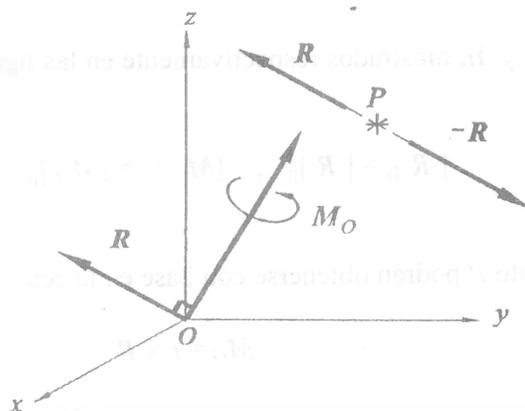
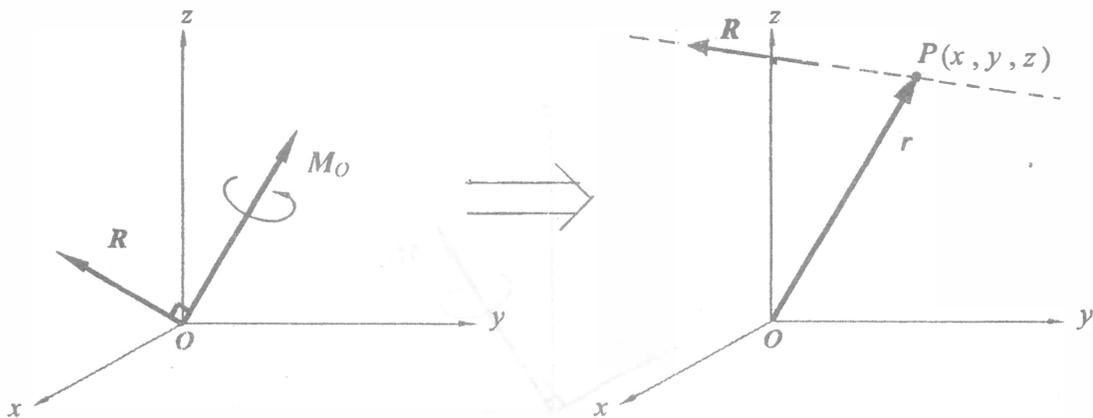


Figura III.29

Este nuevo sistema (el de la figura III.29) es equivalente al anterior; en él se crea un par de transporte de tal forma que su momento iguale a  $M_O$ ; esto se logra ubicando al punto  $P$  conforme se indica más adelante.

Al efectuar la reducción de este nuevo sistema, obtenemos otro más simple (irreducible).

Así, cualquiera de los sistemas de fuerzas considerados, de coordenadas vectoriales canónicas  $R \neq 0$  y  $M_O \neq 0$ , con  $R \cdot M_O = 0$ , tendrá una reducción a una sola fuerza, dada por  $R$ , ubicada fuera del origen según se ilustra en la figura III.30(b), donde  $r$  es el vector de posición de  $P$ .



(a) Coordenadas vectoriales canónicas del sistema que puede reducirse a una fuerza que pasa por  $O$ .

(b) Sistema irreducible, constituido por una sola fuerza que no pasa por el origen del sistema de referencia.

Figura III.30

Para que los sistemas I y II, mostrados respectivamente en las figuras 30(a) y 30(b), sean equivalentes deberá cumplirse que:

$$[R]_I = [R]_{II} ; [M_O]_I = [M_O]_{II} = r \times R$$

Las coordenadas del punto  $P$  podrán obtenerse con base en la ecuación vectorial,

$$M_O = r \times R \quad \dots [13],$$

o basados en la ecuación cartesiana de la recta que es factible obtener partiendo de las tres ecuaciones escalares que se generan a partir de esa ecuación vectorial.

Como  $P$  será cualquier punto de la línea de acción de la resultante del sistema reducido,  $P$  podrá ser cualquier punto con cuyas coordenadas se cumpla la ecuación vectorial recién citada, o la ecuación cartesiana mencionada en el párrafo anterior.

Resumiendo, cuando las coordenadas vectoriales canónicas de un sistema de fuerzas son diferentes de cero, y además como vectores son perpendiculares entre sí, es posible reducir el sistema original a una sola fuerza que no pasa por el origen del sistema de referencia, cuya representación vectorial es la misma que la correspondiente a la fuerza  $R$ , según se muestra en la figura III.30(b).

Ejemplo III.17- Sea un sistema conformado por las fuerzas  $F_1 = 3j$ ,  $F_2 = -2j$ ,  $F_3 = -3j$ ,  $F_4 = 2j$ , y  $F_5 = 0.8k$ , en newtons, cuyas líneas de acción pasan respectivamente por  $H(0,0,4)$ ,  $D(3,0,4)$ ,  $O(0,0,0)$ ,  $A(3,0,0)$  y  $C(0,5,0)$ , puntos cuyas coordenadas están en metros. Efectúe la reducción de ese sistema y después de ello determine el punto de la línea de acción de la resultante del sistema equivalente más simple (es decir el sistema que resultó del proceso de reducción, cuya cota sea igual a cuatro metros).

Resolución.

Con base en los datos, obtenemos:

$$R = (3j) + (-2j) + (-3j) + (2j) + (0.8k) = 0.8k, N \quad \textcircled{1}, N$$

$$M_o = (4k) \times (3j) + (3i + 4k) \times (-2j) + 0 \times (-3j) + (3i) \times (2j) + (5j) \times (0.8k)$$

o sea que  $M_o = (-12i) + (-6k + 8i) + 0 + (6k) + (4i) = 0, N \cdot m \quad \textcircled{2};$

entonces, con base en los valores dados por  $\textcircled{1}$  y  $\textcircled{2}$ , puede decirse que el sistema dado es reductible a una fuerza que pasa por el origen.

Como dicha fuerza (es decir la resultante del sistema equivalente más simple al sistema dado) es  $0.8k$ , para que su línea de acción pase por el origen debe ser colineal con el eje  $z$ , debido a lo cual la ordenada y la abscisa del punto pedido, al que llamaremos  $P$ , son nulas.

Así pues, el punto que se pidió determinar es  $P(0,0,4)m$

Ejemplo III.18

Sea  $S_I$  un sistema constituido por las fuerzas  $F_1 = 3i - 2j + 6k, N$ ,  $F_2 = 9i - 12j + 36k, N$ , y  $F_3 = -42k, N$ , cuyas líneas de acción pasan, respectivamente, por  $A(8, 1, 2)m$ ,  $B(2, 3, -4)m$ , y  $C(-1, 7, 0)m$ . Con base en ello, determine si  $S_I$  es reductible o no a una sola fuerza; en caso afirmativo, determine la ecuación del soporte de dicha fuerza.

Resolución.- Teniendo en cuenta los datos obtenemos que:

a) la resultante de  $S_I$  es:  $R = F_1 + F_2 + F_3 = 12i - 14j + 0k, N$ , y,

b) el momento del sistema dado, respecto al origen, es:

$$M_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 9 & -12 & 36 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -42 \end{vmatrix}, \text{ o sea que}$$

$$M_0 = (10i - 42j - 19k) + (60i - 108j - 51k) + (-294i - 42j) = -224i - 192j - 70k, N \cdot m;$$

entonces, para  $S_I$ :  $R \cdot M_0 = (12)(-224) + (-14)(-192) + (0)(-70) = 2688 - 2688 = 0$ ,

debido a lo cual  $S_I$  sí es reductible a una sola fuerza ( $R = 12i - 14j$ ) cuyo momento respecto al origen sea igual al  $M_0$  de  $S_I$ ;

por ello, considerando que  $P(x, y, z)$  es un punto cualquiera del soporte de  $R$ , se tiene que:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 12 & -14 & 0 \end{vmatrix} = -224i - 192j - 70k, \text{ igualdad de donde se obtienen:}$$

$$+14z = -224 \quad \text{--- ①}, \quad 12z = -192 \quad \text{--- ②}, \quad -14x - 12y = -70 \quad \text{--- ③};$$

$$\text{de donde resultan: } z = -16, \quad x = \frac{35 - 6y}{7},$$

por lo que la ecuación escalar de la línea de acción de  $R$  es:

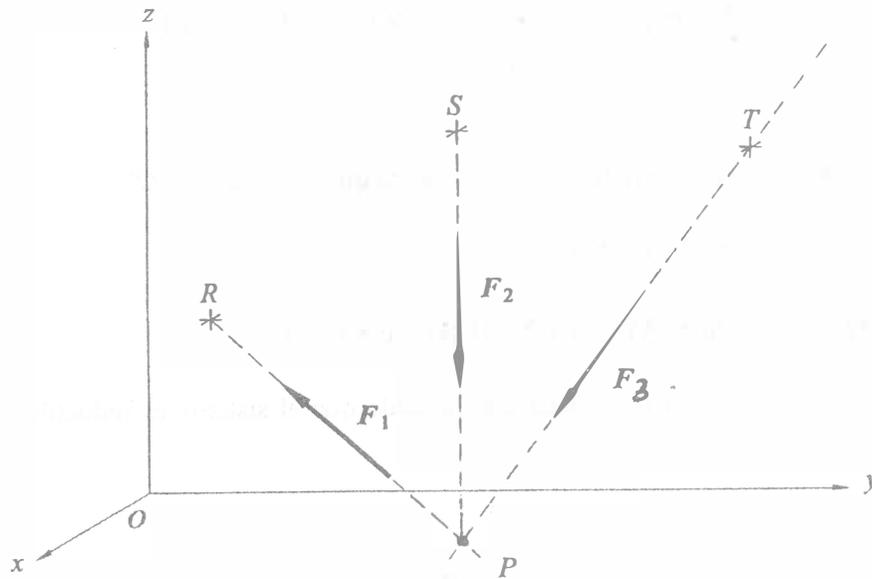
$$x = \frac{y - \frac{35}{6}}{-7/6}, \quad z = -16.$$

Adicional.- como para  $y=0$  se tiene  $x=5$ , la línea de acción de  $R$  (entre otros puntos) pasa por  $T(5, 0, -16)$ ; debido a esto, una ecuación vectorial de esa línea de acción es:

$$r = (5, 0, -16) + t(1, -7/6, 0)$$

Ejemplo III.19

Teniendo en cuenta que  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  (además de pasar por  $P$ ) pasan por  $R$ ,  $S$  y  $T$ , además de tener magnitudes de 39, 26 y 13 newtons, respectivamente, determine las coordenadas vectoriales canónicas del sistema de fuerzas concurrentes mostrado en la figura III.31. Después de ello: a) compruebe que el sistema conformado por  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  puede reducirse a una fuerza que no pasa por el origen, y, b) obtenga las coordenadas del punto  $Q$ , situado sobre la línea de acción de la resultante, que está a la mínima distancia del origen del sistema de referencia.



$R (6,12,12) \text{ m}$

$S (0,12,12) \text{ m}$

$T (0,20,12) \text{ m}$

$P (3,16,0) \text{ m}$

Figura III.31

Resolución.

Las expresiones vectoriales de cada fuerza resultan:

$$F_1 = 39 \left[ \frac{\vec{PR}}{|\vec{PR}|} \right] = 39 \left[ \frac{3i - 4j + 12k}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} \right] = 9i - 12j + 36k \text{ [N]}$$

$$F_2 = 26 \left[ \frac{\vec{SP}}{|\vec{SP}|} \right] = 26 \left[ \frac{3i + 4j - 12k}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} \right] = 6i + 8j - 24k \text{ [N]}$$

$$F_3 = 13 \left[ \frac{\vec{TP}}{|\vec{TP}|} \right] = 13 \left[ \frac{3i - 4j - 12k}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} \right] = 3i - 4j - 12k \text{ [N]}$$

por lo que las coordenadas vectoriales canónicas, del sistema de fuerzas concurrentes dado, son:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 18\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \text{ [N]} \quad \dots (1),$$

y,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_p \times \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 16 & 0 \\ 18 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 312\mathbf{k} \text{ [N}\cdot\text{m]} \quad \dots (2).$$

Comprobación de que el sistema dado puede reducirse a una fuerza que no pasa por "O".

Con base en los valores dados por (1) y (2), se obtiene:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = (18\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 312\mathbf{k}) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

y como también se tiene  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ , queda comprobado que el sistema es reductible a una fuerza que no pasa por "O".

Ahora determinaremos el punto  $Q$ , de la línea de acción de  $\mathbf{R}$ , situado a la mínima distancia del origen del sistema de referencia; se tiene:

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{18^2 + 8^2} = \sqrt{388},$$

y,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 18 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -312 \end{vmatrix} = (2496 - 0)\mathbf{i} + (5616 - 0)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k},$$

debido a lo cual el vector de posición de  $Q$  viene siendo:

$$\mathbf{r}_m = \frac{2496\mathbf{i} + 5616\mathbf{j} + 0\mathbf{k}}{(\sqrt{388})^2} = 6.43\mathbf{i} + 14.47\mathbf{j} + 0\mathbf{k};$$

entonces, las coordenadas pedidas son 6.43, 14.47 y 0 (en metros); es decir que  $Q(6.43, 14.47, 0)$  m.

Nota.- Se recomienda al lector comprobar esto siguiendo un procedimiento diferente al que empleamos aquí.

### III.3.3 CONDICIONES PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS PUEDA REDUCIRSE A UN PAR DE FUERZAS. MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN PAR DE FUERZAS.

Los sistemas de fuerzas que pueden reducirse a un par de fuerzas son los: conformados por fuerzas paralelas, y los generales, tanto en el plano como en el espacio, siempre y cuando sus coordenadas vectoriales canónicas sean:

$$R = \sum_{i=1}^n F_i = 0 \quad , \quad y, \quad M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i \neq 0 \quad .$$

Esto implica que el único efecto externo que los sistemas mencionados pueden ocasionar a cuerpos, sobre los que se apliquen, sea una tendencia al giro.

Hay que indicar que las fuerzas del par (que conforman el sistema irreductible) están indeterminadas pues, aunque con base en  $M_O$  podemos determinar planos donde pueden ubicarse ambas, no podemos saber su magnitud, dirección y puntos de aplicación, en tanto no se disponga de datos suficientes para obtener las características recién citadas.

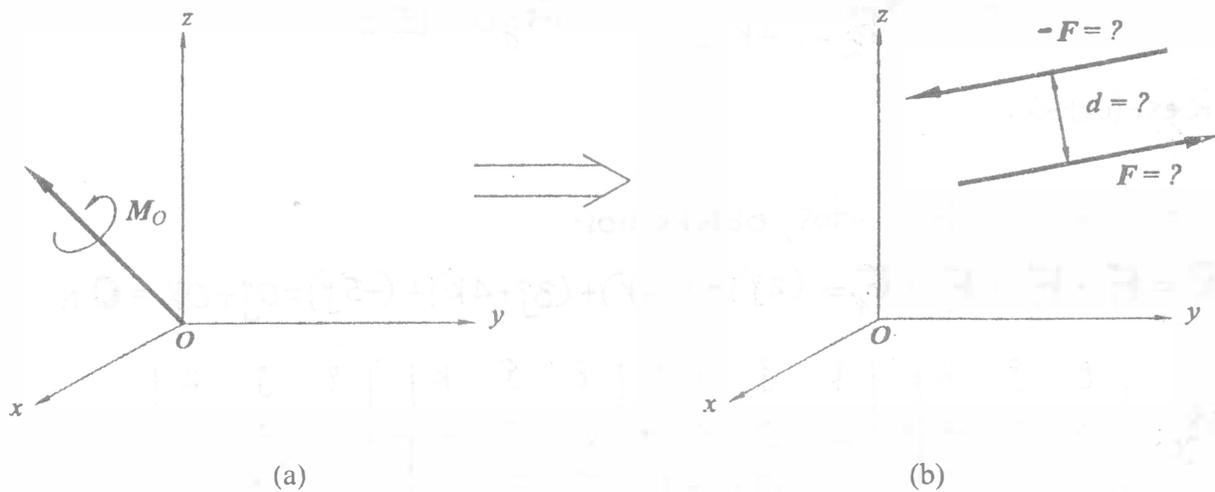


Figura III.32

En síntesis, cuando las coordenadas vectoriales de un sistema de fuerzas resultan  $R = 0$  y  $M_O \neq 0$ , dicho sistema tiene como sistema equivalente a un irreductible formado por un par de fuerzas, conociendo de éste únicamente su efecto; es decir su momento, que serviría para determinar las fuerzas del par, teniendo en cuenta las propiedades de los pares de fuerzas. Lo recién mencionado se ilustra en la figura III.32.

Acorde con lo hasta aquí mencionado, el proceso de reducción a un par de fuerzas (cuando procede) consistirá en determinar (considerando lo que se especifique) las fuerzas del par citado, quienes necesariamente deberán ser tales que las coordenadas canónicas, del sistema reducido, sean idénticas a las del sistema original. Se recomienda ver el ejemplo III.20 para apreciar el proceso recién descrito.

Ejemplo III.20.- Demuestre que el sistema de fuerzas aplicado al cuerpo de la figura III.33 puede reducirse a un par de fuerzas. Después de ello y considerando que el par de fuerzas, citado, ha de conformarse de modo que una de sus fuerzas debe tener una magnitud igual a  $3\sqrt{5}$  N y estar ubicada en el plano YZ, determine las dos fuerzas que conforman el par.

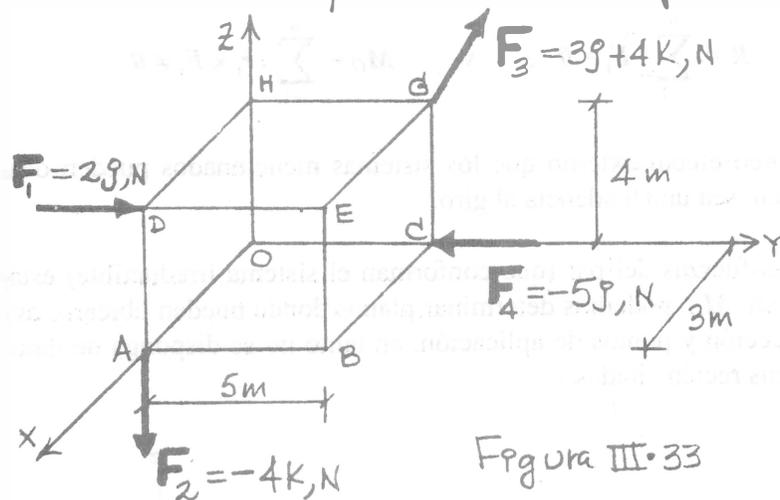


Figura III.33

Resolución.

Considerando los datos, obtenemos:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = (2\mathbf{j}) + (-4\mathbf{k}) + (3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (-5\mathbf{j}) = 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{N} \quad \text{--- (1),}$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{M}_0 = (-8\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + (12\mathbf{j}) + (8\mathbf{i}) + \mathbf{0} = 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{--- (2);}$$

al tenerse, por (1) y (2) respectivamente, que  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_0 \neq \mathbf{0}$  queda demostrado que el sistema dado puede reducirse a un par de fuerzas, cuyo momento deberá igualar al dado por (2).

Con base en (2) puede decirse que el par buscado debe estar

Ejemplo III.20 (continuación) (2/3)

alojado en uno de los planos de la familia que tengan por vector normal a  $\mathbf{N} = 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ , o a uno proporcional; esto es, el par puede quedar alojado en cualquiera de los planos de la familia de ecuación  $2Y + Z + D_1 = 0$ , donde  $D_1$  es una constante. Por facilidad ubicaremos al par en el plano de ecuación  $2Y + Z = 0 \dots \textcircled{\Pi}$ ; es decir, el plano de la familia citada, que pasa por el origen.

Así, una de las fuerzas del par, la que llamaremos  $\mathbf{P}_1$  la haremos pasar por el origen y por un punto del plano  $XY$  que pertenezca a  $\textcircled{\Pi}$ , como  $Q_1(0, -1, 2)$ , teniéndonos, acorde con el enunciado:

$$\mathbf{P}_1 = 3\sqrt{5} \mathbf{e}_{\vec{Q_1O}} = (3\sqrt{5}) \left[ \frac{\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{5}} \right] = 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}, \text{ N} \quad \textcircled{3}$$

lo cual implica que la otra de las fuerzas del par sea  $\mathbf{P}_2 = -3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \text{ N}$ .

Considerando que uno de los puntos de la línea de acción de  $\mathbf{P}_2$  es  $Q_2$ , como dicho punto también debe cumplir  $\textcircled{\Pi}$ , habremos de considerar  $Q_2(x, Y, -2Y)$  para evaluar el momento, del sistema reducido, como el momento de  $\mathbf{P}_1$  con respecto a un punto de la línea de acción de  $\mathbf{P}_2$  mediante:

$$\vec{Q_2O} \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -x & -Y & 2Y \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = (6Y - 6Y)\mathbf{i} + (-6x)\mathbf{j} + (-3x)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} - 6x\mathbf{j} - 3x\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m} \quad \textcircled{4}$$

como, por razones obvias, el valor dado por  $\textcircled{4}$  debe igualar al proporcionado por  $\textcircled{2}$ , deberán cumplirse las igualdades:  $12 = -6x$ ,  $Y, 6 = -3x$ ; al cumplirse ambas para  $x = -2$ , tenemos que  $Q_2(-2, Y, -2Y)$  para cualquier valor de  $Y$  sea un punto con el

### Ejemplo III.20 (continuación) (3/3)

cual el momento del par, del sistema reducido, sea igual al momento del sistema de fuerzas dado, respecto al origen; por facilidad de cálculos tomaremos el punto  $Q_2$  que corresponde a  $Y=0$ , es decir  $Q_2(-2, 0, 0)$ .

Así, finalizaremos esta resolución diciendo que las fuerzas que conforman el par (a que puede reducirse el sistema de fuerzas dado), acorde con lo especificado, son:

$\mathbf{P}_1 = 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ , N, cuyo soporte pasa por el origen y por  $Q_1(0, -1, 2)$ , y,  
 $\mathbf{P}_2 = -3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ , cuya línea de acción pasa por  $Q_2(-2, 0, 0)$ .

Ya con esto, verifiquemos que  $\mathbf{M}_0$  corresponde también al momento de  $\mathbf{P}_2$ , con respecto a un punto de la acción de  $\mathbf{P}_1$ , pudiendo considerar éste como el origen o como  $Q_1$  (pues ambos son puntos de la citada línea de acción). Así pues, el momento recién citado podemos valorarlo mediante  $\overrightarrow{OQ_2} \times \mathbf{P}_2$ , o por medio de  $\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathbf{P}_2$ , productos que enseguida se obtienen:

$$\overrightarrow{OQ_2} \times \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \quad (5) \text{ y}$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \quad (6);$$

en efecto, los valores proporcionados por (5) y (6) igualan el valor de  $\mathbf{M}_0$ , dado por (2).

### III.3.4 EJE CENTRAL DE UN SISTEMA DE FUERZAS: DEFINICIÓN, ECUACIONES VECTORIALES Y ECUACIONES CARTESIANAS.

Al efectuar la reducción de un sistema general de fuerzas, en ocasiones nos encontramos que es posible reducirlo a un sistema mínimo equivalente (irreductible) formado por la resultante  $\mathbf{R}$  del sistema y un par de fuerzas cuyo momento, que llamaremos  $\mathbf{m}_{\parallel}$ , además de ser colineal con la fuerza  $\mathbf{R}$  tiene magnitud mínima.

Es en esas condiciones cuando el sistema dado es reductible a lo que se conoce como motor (llamado también llave de torsión), formado por una fuerza ( $\mathbf{R}$ ) y un par no coplanares, siendo  $\mathbf{m}_{\parallel}$  (el momento de dicho par) colineal con  $\mathbf{R}$  (resultante del sistema dado).

Si  $\mathbf{M}_O$  es el momento (respecto al origen) del sistema dado, el mismo podrá descomponerse en dos direcciones: su proyección sobre la resultante (precisamente  $\mathbf{m}_{\parallel}$ ) y su proyección en la dirección perpendicular a  $\mathbf{R}$  cuyo valor será precisamente  $\mathbf{r} \times \mathbf{R}$  es decir el momento que toma la resultante, o sea que:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{m}_{\parallel}$$

Con base en lo anterior puede decirse que  $\mathbf{m}_{\parallel}$  es tal que:

$$\mathbf{m}_{\parallel} = [\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_R] \mathbf{e}_R,$$

donde  $\mathbf{e}_R$  es un vector unitario con la dirección y el sentido de  $\mathbf{R}$ , o bien que:

$$\mathbf{m}_{\parallel} = \left[ \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} \right] \mathbf{R}$$

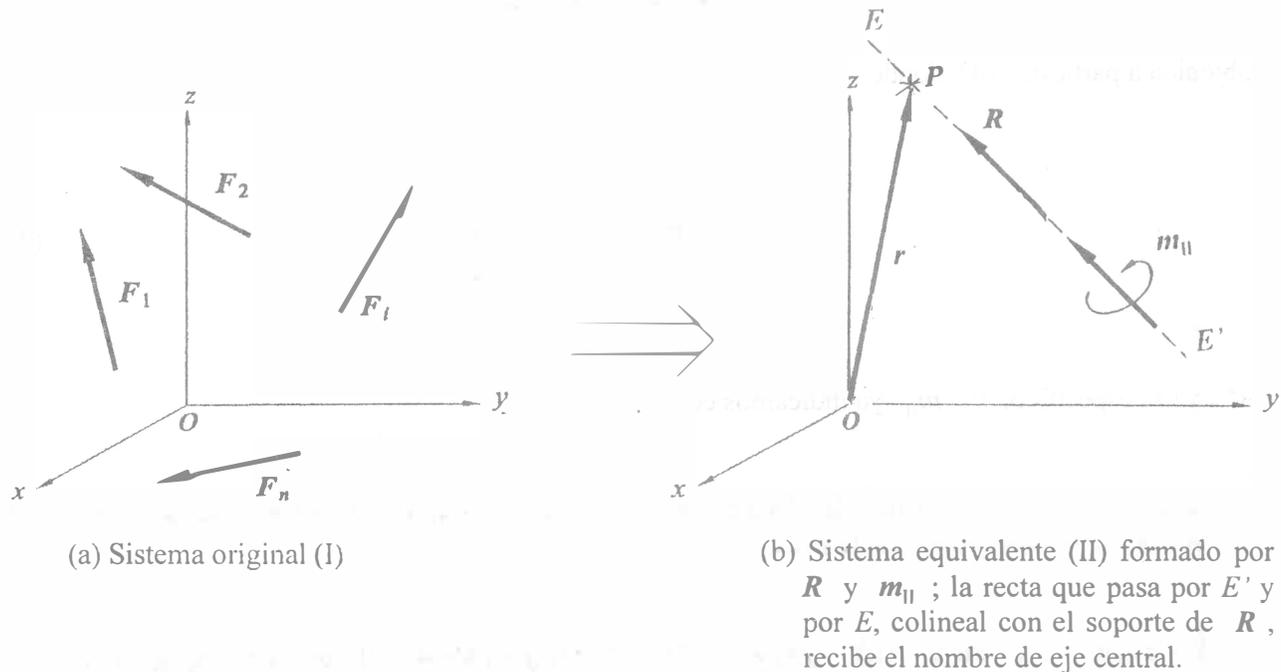


Figura III.34

Entonces, con referencia a los sistemas I y II mostrados en la figura III.34, tenemos que:

$$\left[ \mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right]_I = [\mathbf{R}]_{II} \quad , \quad y, \quad \mathbf{M}_O = \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \right]_I = \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{m}_{II}$$

La recta colineal con el soporte de  $\mathbf{R}$  se conoce como eje central, mismo que se define como el lugar geométrico de todos los puntos P, del espacio, con respecto a los cuales el momento del sistema es de módulo mínimo. Ver línea  $E'E$  en la figura III.34(b).

*A la expresión*

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{m}_{II} \quad \dots [14],$$

extraída de la doble igualdad vectorial recién citada, *se le conoce como ecuación vectorial del eje central.*

Obsérvese que [13] puede considerarse como caso particular de [14], correspondiente a la situación en que  $\mathbf{m}_{II} = \mathbf{0}$ ; es decir, cuando el sistema reducido consiste en una sola fuerza.

Para obtener la ecuación cartesiana del eje central nos valdremos de la expresión:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O - \mathbf{m}_{II} \quad \dots (1),$$

obtenida a partir de [14], donde

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \quad \dots (2),$$

$\mathbf{M}_O$  ya se especificó, y  $\mathbf{m}_{II}$  ya indicamos como obtenerlo.

Teniendo en cuenta el desarrollo del determinante de (2), al escribir a los elementos de la expresión (1) en función de sus componentes, tenemos:

$$(yR_z - zR_y)\mathbf{i} + (zR_x - xR_z)\mathbf{j} + (xR_y - yR_x)\mathbf{k} = (M_{Ox})\mathbf{i} + (M_{Oy})\mathbf{j} + (M_{Oz})\mathbf{k} - [(m_{IIx})\mathbf{i} + (m_{IIy})\mathbf{j} + (m_{IIz})\mathbf{k}]$$

de donde, por igualdad de vectores, se obtienen las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$yR_z - zR_y = M_{Ox} - m_{\parallel x} \quad \dots (3),$$

$$zR_x - xR_z = M_{Oy} - m_{\parallel y} \quad \dots (4),$$

y,

$$xR_y - yR_x = M_{Oz} - m_{\parallel z} \quad \dots (5),$$

misma que pueden escribirse en la forma:

$$yR_z - zR_y = C_x, \text{ con } C_x = \text{cte} \quad \dots (3'),$$

$$zR_x - xR_z = C_y, \text{ con } C_y = \text{cte} \quad \dots (4'),$$

y,

$$xR_y - yR_x = C_z, \text{ con } C_z = \text{cte} \quad \dots (5'),$$

Ya habiendo llegado aquí, la ecuación cartesiana del eje central podremos obtenerla con base en (3') y (4'), basados en (3') y (5'), o bien en (4') y (5'); sin embargo, una vez obtenida dicha ecuación (con base en alguna de estas parejas), es aconsejable verificar que un punto que cumpla tal ecuación también cumpla la (ecuación) que no formó parte de la pareja que la originaron.

Por ejemplo, si para obtener la ecuación del eje central nos basamos en (3') y (4'); como de (3') se obtiene:

$$z = \frac{yR_z - C_x}{R_y} \quad \dots (7),$$

y de (4') obtenemos:

$$z = \frac{xR_x + C_y}{R_x} \quad \dots (8),$$

al combinar (8) y (7) resulta:

$$\frac{xR_x + C_y}{R_x} = \frac{yR_z - C_x}{R_y} = z,$$

*que es una ecuación cartesiana del eje central, misma que puede presentarse en otras formas, después de realizar operaciones algebraicas válidas.* Se sugiere ver el ejemplo III.21, donde (entre otras cosas) se determinó la ecuación del eje central (en forma simétrica) del sistema dado, con base en ecuaciones como las (3') y (5') (recién planteadas) al resolver el inciso d) de dicho ejemplo, y posteriormente (después de la resolución del problema) dicha ecuación se obtuvo haciendo intervenir a ecuaciones como (4') y (5').

### III.3.5 CONDICIÓN PARA QUE UN SISTEMA DE FUERZAS SEA REDUCTIBLE A UN MOTOR (FUERZA Y PAR NO COPLANARES; LLAVE DE TORSIÓN). MÉTODO PARA REDUCIR SISTEMAS DE FUERZAS REDUCTIBLES A UN MOTOR.

Los sistemas de fuerzas que pueden reducirse a una fuerza y un par no coplanares son los sistemas generales en el espacio, siempre y cuando no sean reducibles a una fuerza, a un par de fuerzas o al equilibrio, situación que se presenta cuando las coordenadas vectoriales canónicas del sistema resultan:

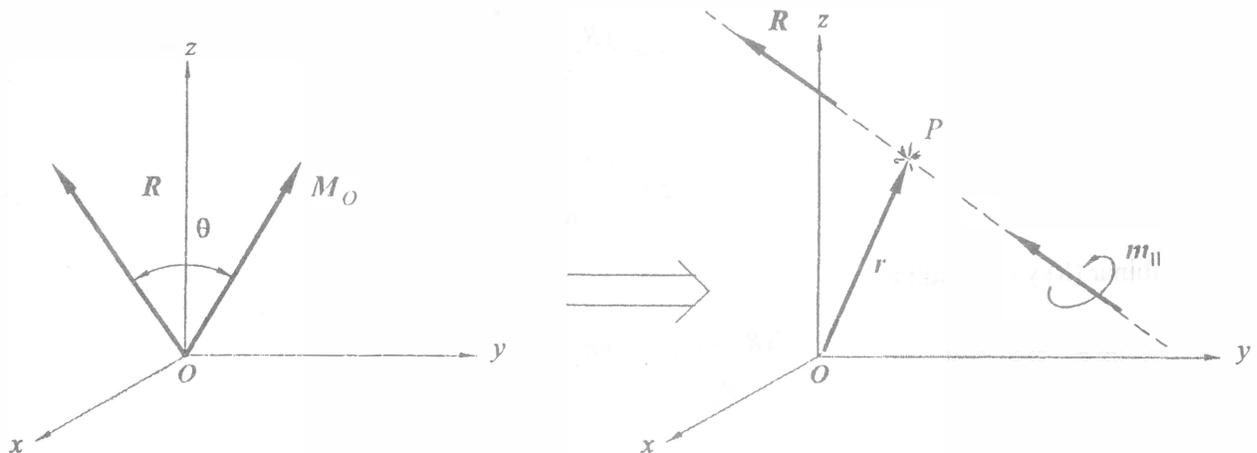
$$R = \sum_{i=1}^n F_i \neq 0 ,$$

y,

$$M_O = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i \neq 0 ,$$

y además se cumple que  $R \cdot M_O \neq 0$ ; es decir que sus coordenadas vectoriales canónicas no son perpendiculares. Ver figura III.35(a).

Esto indica que, los efectos que producirá el sistema de fuerzas original serán una traslación y una tendencia al giro, los cuales también serán producidos por un nuevo sistema equivalente, irreducible, conformado por una fuerza  $R$  y un par de momento  $m_{\parallel}$  (de magnitud mínima) con la dirección de la fuerza resultante, según se ilustra en la figura III.35.



(a) Coordenadas vectoriales del sistema original, donde  $\theta \neq 90^\circ$ .

(b) Sistema irreducible, constituido por una fuerza y un par no coplanares; es decir, por un motor.

Figura III.35

En síntesis, cuando las coordenadas vectoriales canónicas de un sistema de fuerzas resultan  $R \neq 0$  y  $M_O \neq 0$ , con  $R \cdot M_O \neq 0$ , el sistema original tiene como sistema equivalente al irreducible formado por una fuerza y un par no coplanares; dicho sistema irreducible recibe el nombre de motor, o bien el de llave de torsión.

Teniendo en cuenta lo visto en los desarrollos de este subtema y del anterior (III.3.4), enunciaremos los pasos a seguir para reducir un sistema de fuerzas a un motor (siempre y cuando esto sea factible); es decir, los que hay que llevar a cabo para definir completamente los elementos del motor al que puede reducirse un sistema.

- a) Con base en las coordenadas vectoriales canónicas del sistema dado, hay que calcular el momento del motor ( $m_{II}$ ); recuerde que:

$$m_{II} = [M_O \cdot e_R] e_R,$$

equivalente a

$$\begin{bmatrix} M_O \cdot R \\ R \cdot R \end{bmatrix} R;$$

ya a estas alturas conocemos las expresiones vectoriales de los dos elementos básicos del motor,  $m_{II}$  y  $R$  (fuerza resultante, tanto del sistema original como del reducido); para definir completamente dicho motor, sólo faltaría determinar la ecuación del eje central (a fin de conocer la ubicación de  $R$ ), así como las fuerzas que habrán de constituir el par cuyo momento valga precisamente  $m_{II}$ .

- b) Obtener las ecuaciones vectoriales y escalares del eje central, para lo cual deberá procederse como se indicó al estar desarrollando el subtema anterior (III.3.4).
- c) Determinar las fuerzas que constituyan el par del motor; para esto hay que atender cuidadosamente a las especificaciones que las definan, así como tener siempre en mente que el momento producido por ellas debe igualar a  $m_{II}$ .

Se sugiere ver el ejemplo III.21, donde se lleva a cabo el proceso recién descrito, e incluso la obtención de cuatro diferentes pares de fuerzas correspondientes a un mismo par motor.

Ejemplo III.21.- Sea  $\mathbf{S}$  un sistema conformado por las cuatro fuerzas dadas a continuación.

$$\mathbf{F}_1 = 20\mathbf{i} - 15\mathbf{k}, \text{ N,} \quad \text{cuyo soporte pasa por } A(4, 0, 0) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_2 = -20\mathbf{i} + 15\mathbf{j}, \text{ N,} \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad B(0, 3, 0) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_3 = -15\mathbf{j} + 15\mathbf{k}, \text{ N,} \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad C(0, 0, 3) \text{ m, y,}$$

$$\mathbf{F}_4 = 12\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 16\mathbf{k}, \text{ N,} \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad D(3, 4, 7) \text{ m.}$$

Con base en ello:

- Obtenga las coordenadas vectoriales canónicas de  $\mathbf{S}$ ,
- compruebe que  $\mathbf{S}$  puede reducirse a un motor,
- obtenga el momento del par del motor a que puede reducirse  $\mathbf{S}$ , y verifique que  $\mathbf{R} \times \mathbf{m}_{II} = \mathbf{0}$ ,
- determine la ecuación cartesiana del eje central donde se ubica la resultante del motor a que es factible reducir  $\mathbf{S}$ , así como las coordenadas de los puntos  $P_{XY}, P_{XZ}, P_{YZ}$  donde dicho eje corta, respectivamente, a los planos  $XY, XZ, YZ$ ,
- Obtenga cuatro pares de fuerzas diferentes, de modo que cada uno de ellos pueda considerarse como par del motor a que pueda reducirse  $\mathbf{S}$ ; en cada uno de estos casos verifique el que: el momento del par obtenido, adicionado del momento de la resultante con respecto al origen, da como resultado un valor igual a  $\mathbf{M}_0$ ; es decir, igual al momento del sistema dado, respecto al origen.

Resolución.

- Teniendo en cuenta los datos, obtenemos:

Ejemplo III.21 (continuación) (2/12)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = 12\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 16\mathbf{k} \quad \text{①, y,}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O^1 + \mathbf{M}_O^2 + \mathbf{M}_O^3 + \mathbf{M}_O^4 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & 0 \\ -20 & 15 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -15 & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 7 \\ 12 & 16 & 16 \end{vmatrix},$$

es decir:

$$\mathbf{M}_O = (60\mathbf{j}) + (+60\mathbf{k}) + (45\mathbf{i}) + (-48\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = -3\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m.} \quad \text{②,}$$

donde ① y ② proporcionan los valores de las coordenadas solicitadas.

b) Con base en los valores recién citados, se obtiene:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = (12\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) = -36 + 1536 + 960 = 2460 \dots \text{③};$$

entonces, como para el sistema dado se tiene  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$ , y,  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$ , podemos afirmar que dicho sistema puede reducirse a un motor.

c) Considerando los valores dados por ① y ③, resulta:

$$\mathbf{m}_{II} = \left[ \frac{\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} \right] \mathbf{R} = \left[ \frac{2460}{(12)^2 + (16)^2 + (16)^2} \right] (12\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) = 45\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 60\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m.} \quad \text{④}$$

que es el momento pedido para este proceso, con el cual obtenemos:

$$\mathbf{R} \times \mathbf{m}_{II} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 12 & 16 & 16 \\ 45 & 60 & 60 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

que es lo que se nos pidió verificar en este proceso.

d) Al tomar  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  como el vector de posición de un punto cualquiera del eje central, considerando el valor dado por ①, el momento de la resultante respecto al origen es:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 12 & 16 & 16 \end{vmatrix} = (16y - 16z)\mathbf{i} + (12z - 16x)\mathbf{j} + (16x - 12y)\mathbf{k} \dots \text{⑤};$$

### Ejemplo III.21 (continuación) (3/12)

llevando los valores dados por (2), (5) y (4) a la expresión [EC] es decir a la ecuación vectorial del eje central; resulta:  
 $-3\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k} = (16Y - 16Z)\mathbf{i} + (12Z - 16X)\mathbf{j} + (16X - 12Y)\mathbf{k} + 45\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$ ,  
igualdad (vectorial) que da lugar a las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$16Y - 16Z = -3 - 45, \quad 12Z - 16X = 96 - 60, \quad \text{y}, \quad 16X - 12Y = 60 - 60,$$

equivalentes respectivamente a:

$$Y - Z = -3 \quad \text{--- (6)}, \quad 3Z - 4X = 9 \quad \text{--- (7)}, \quad \text{y}, \quad 4X - 3Y = 0 \quad \text{(8)};$$

de (8) se obtiene:  $\frac{4}{3}X = Y$  --- (9)

en tanto que, de (6) obtenemos:  $Y = Z - 3$  --- (10);

combinando (9) y (10) resulta:

$$\frac{4}{3}X = Y = Z - 3 \quad \text{--- (11)}$$

ecuación escalar que corresponde al eje central, con la cual éste queda perfectamente definido; sin embargo, a partir de ella, enseguida obtendremos la ecuación cartesiana del eje citado, pero en su forma simétrica.

Al dividir entre  $\frac{4}{3}$  cada uno de los tres miembros de (11) se obtiene:  $X = \frac{Y}{4/3} = \frac{Z-3}{4/3}$  (12),

que es la forma simétrica de la ecuación (cartesiana) del eje central correspondiente al motor de este ejemplo.

A esta misma ecuación debe llegarse con base en las ecuaciones (6) y (7), o bien basadas en (7) y (8); obsérvese que aquí la obtuvimos partiendo de (8) y (6).

### Ejemplo III.21 (continuación) (4/12)

De (12), para  $x=0$  se obtienen:  $y=0, z=3 \Rightarrow P_{yz}(0,0,3)$ ,

para  $y=0$  se obtienen:  $x=0, z=3 \Rightarrow P_{xz}(0,0,3)$

para  $z=0$  se obtienen:  $x=-\frac{9}{4}, y=-3 \Rightarrow P_{xy}(-2.25, -3, 0)$

obsérvese que lo anterior implica que el eje central corte al plano  $xy$  en el punto  $P_{xy}$ , en tanto que a los planos  $yz, xz$  los corta en un mismo punto, pues las coordenadas de  $P_{yz}$  son las mismas que las de  $P_{xz}$ , que corresponden precisamente al punto del eje  $z$  cuya cota es igual a 3, punto que corresponde a los dos planos recién citados.

e) Teniendo en cuenta (4) podemos decir que el momento de los pares, que se nos pidió obtener, debe ser igual a  $45i + 60j + 60k$ , N·m, debido a lo cual dichos pares deberán estar alojados en uno o en varios planos de una familia <sup>que</sup> sea perpendicular al vector recién citado, es decir una familia de planos del tipo  $3x + 4y + 4z + D = 0$ .

Veamos casos en donde pares (de fuerzas) se ubiquen en el plano  $3x + 4y + 4z = 0$  el cual, de los correspondientes a la familia especificada, es el que pasa por el origen; la identificación de este plano la haremos llamando (13) a su ecuación.

A continuación trabajaremos con la idea de que una de las fuerzas (de uno de los pares pedidos) esté alojada en la recta donde el plano de ecuación (13) corta al plano  $xy$ ; es decir en la recta de ecuación  $3x + 4y = 0$ , razón por la cual la fuerza recién men-

### Ejemplo III.21 (continuación) (5/12)

ciudad, a la que llamaremos  $\mathbf{T}_1$ , pasará por el origen y por otro de los puntos de la recta cuya ecuación acabamos de proporcionar, como es el caso del punto  $M(4, -3, 0)$ ; así se tiene:

$$\mathbf{T}_1 = |\mathbf{T}_1| \mathbf{e}_{\overrightarrow{OM}} = |\mathbf{T}_1| \left[ \frac{1}{5} (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \right] = \frac{4}{5} T_1 \mathbf{i} - \frac{3}{5} T_1 \mathbf{j} \quad (14)$$

donde  $T_1 = |\mathbf{T}_1|$

Obviamente, la otra fuerza del par ahora buscado a la que llamaremos  $\mathbf{T}_2$  debe ser tal que  $\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$ . Considerando que  $P_2(0, Y, Z)$  es el punto donde el soporte de  $\mathbf{T}_2$  corta al plano  $YZ$ , como las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (13), es decir  $3x + 4y + 4z = 0$ , dicho punto podemos tomarlo como  $P_2(0, Y, -Y)$ .

Así pues,  $\mathbf{m}_{II}$  debe resultar el momento de  $\mathbf{T}_2$  respecto a un punto del soporte de  $\mathbf{T}_1$  (ya sea el origen, o el punto  $M$ ), o bien el momento de  $\mathbf{T}_1$  respecto a un punto de la línea de acción de  $\mathbf{T}_2$  que en este caso puede ser el punto  $P_2(0, Y, -Y)$  recién definido; entonces, dicho momento, calculado de la primera forma mencionada, resulta:

$$\mathbf{m}_{II} = \overrightarrow{OP_2} \times \mathbf{T}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & Y & -Y \\ -\frac{4}{5}T_1 & \frac{3}{5}T_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5}T_1 Y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{5}T_1 Y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{4}{5}T_1 Y\right)\mathbf{k} \quad (15)$$

y calculado de la segunda forma descrita:

$$\mathbf{m}_{II} = \overrightarrow{P_2O} \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -Y & Y \\ \frac{4}{5}T_1 & -\frac{3}{5}T_1 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{5}T_1 Y\right)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{5}T_1 Y\right)\mathbf{j} + \left(\frac{4}{5}T_1 Y\right)\mathbf{k},$$

que iguala al valor dado por (15);

Ejemplo III-21 (continuación) (6/12)

entonces, como el valor dado por (15) debe igualar  $45i + 60j + 60k$ , N·m, (es decir el valor proporcionado por (4)), debe cumplirse

$$\left(\frac{3}{5} T_1 Y\right) i + \left(\frac{4}{5} T_1 Y\right) j + \left(\frac{4}{5} T_1 Y\right) k = 45i + 60j + 60k$$

igualdad vectorial que da lugar a las siguientes igualdades escalares:  $\frac{3}{5} T_1 Y = 45$ ,  $\frac{4}{5} T_1 Y = 60$ , y,  $\frac{4}{5} T_1 Y = 60$ ,

ecuaciones equivalentes de donde resulta

$$T_1 Y = 75 \quad (16)$$

o bien, para  $Y \neq 0$ :  $T_1 = \frac{75}{Y}$  (17), Y,

para  $T_1 \neq 0$ :  $Y = \frac{75}{T_1}$  (18).

Según esto habrá tantas soluciones como deseemos, para cada una de las cuales habrá que partir de dar un valor a "Y" para obtener el correspondiente de  $T_1$ , considerando (17), o bien partir de asignar un valor a  $T_1$  para obtener el que corresponda a "Y", empleando (18). A continuación estableceremos soluciones observando lo recién descrito.

SOLUCIÓN 1.- Para  $Y = 5$ , de (17) se obtiene  $T_1 = \frac{75}{5} = 15$ , lo que teniendo en cuenta (4) ocasiona que:

$$\mathbf{T}_1 = 15 \left[ \frac{1}{5} (4i - 3j) \right] = 12i - 9j, \text{ N, con un soporte que pasa por el origen,}$$

para lo cual:

$$\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -12i + 9j, \text{ N, con una línea de acción que pasa por } P_2(0, 5, -5).$$

Para este caso se tiene que, el momento del par formado por

### Ejemplo III.21 (continuación) (7/12)

$\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ , adicionado del momento de la resultante respecto al origen, da por resultado:

$$\overrightarrow{OP_2} \times \mathbf{T}_2 + \overrightarrow{OP_{YZ}} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 5 & -5 \\ -12 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= (45\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) + (-48\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = -3\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

o sea el valor que tiene el momento del sistema dado, con respecto al origen (vea ② en la pág. 155), cosa que se nos podrá verificar.

SOLUCIÓN 2.- Para  $T_1 = 25$ , de ⑧ obtenemos  $Y = \frac{75}{25} = 3$ , valores que teniendo en cuenta ⑭ dan lugar a:

$\mathbf{T}_1 = 25 \left[ \frac{1}{5}(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \right] = 20\mathbf{i} - 15\mathbf{j}, \text{ N}$ , con una línea de acción que pasa por el origen, a lo cual corresponde:

$\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1 = -20\mathbf{i} + 15\mathbf{j}, \text{ N}$ , con un soporte que pasa por  $P_2(0, 3, -3)$ .

En este caso tenemos que, el momento del par formado por  $\mathbf{T}_1$  y  $\mathbf{T}_2$ , adicionado del momento de la resultante respecto al origen, da por resultado:

$$\overrightarrow{P_2O} \times \mathbf{T}_1 + \overrightarrow{OP_{YZ}} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & 3 \\ 20 & -15 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= (45\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) + (-48\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = -3\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

es decir el valor del momento del sistema dado, respecto al origen, hecho que se nos podrá verificar.

### Ejemplo III-21 (continuación)(8/12)

A continuación presentamos una solución que sigue teniendo en cuenta la idea expuesta al especificar a  $T_1$ , es decir a una de las fuerzas del par pedido.

SOLUCIÓN 3.- Esta la obtendremos bajo la condición de que la distancia entre las fuerzas del par solicitado tenga un determinado valor, que en este caso tomaremos como  $2\sqrt{41}$  m.

Con base en (4) puede decirse que el módulo del momento del par buscado resulta:

$$|m_{II}| = \sqrt{(45)^2 + (60)^2 + (60)^2} = \sqrt{9225} = 15\sqrt{41}$$

y como dicho módulo debe igualar a la magnitud de cualquiera de las fuerzas, del par, multiplicado por la distancia entre los soportes de las fuerzas citadas, podemos establecer que:

$$15\sqrt{41} = (T_1)(2\sqrt{41}),$$

de donde se obtiene  $T_1 = 7.5$  N, valor que llevado a (8) da lugar a  $y = \frac{7.5}{7.5} = 10$  m, lo que ocasiona que:

$$T_1 = 7.5 \left[ \frac{1}{5}(4\mathbf{e} - 3\mathbf{j}) \right] = 6\mathbf{e} - 4.5\mathbf{j}, \text{ N, con un soporte que pasa por el origen, para lo cual:}$$

$$T_2 = -T_1 = -6\mathbf{e} + 4.5\mathbf{j}, \text{ N, con una línea de acción que pasa por } P_2(0, 10, -10)$$

Para este caso se tiene que, el momento del par formado por  $T_1$  y  $T_2$ , adicionado del momento de la resultante, con respecto al origen, da por resultado:

Ejemplo III.21 (continuación) (9/12)

$$\vec{OP}_2 \times \mathbf{T}_2 + \vec{OP}_{xy} \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 10 & -10 \\ -6 & 4.5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2.25 & -3 & 0 \\ 12 & 16 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= (45\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 60\mathbf{k}) + (-48\mathbf{i} + 36\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = -3\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 60\mathbf{k}, \text{ N}\cdot\text{m},$$

o sea el valor que tiene el momento del sistema dado, con respecto al origen, lo cual se nos solicitó verificar.

Enseguida presentamos una solución (la cuarta) donde  $\mathbf{T}_1$  la especificamos de manera diferente a la que correspondió de manera común para cada una de las primeras tres soluciones.

SOLUCIÓN 4.- Como es condición que las fuerzas del par buscado estén contenidas en el plano de ecuación  $3x + 4y + 4z = 0$  -- (13) (o en uno paralelo a éste), al pertenecer tanto el origen como  $Q(4, -2, -1)$  al plano citado, podemos establecer que  $\mathbf{T}_1$  pase por estos dos puntos, es decir que tenga la dirección <sup>de  $\vec{OQ}$</sup> , por lo cual tendremos que:

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \mathbf{e}_{OQ} = T_1 \left[ \frac{1}{\sqrt{21}} (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \right] \quad - (19)$$

o sea que  $\mathbf{T}_1$  no quedará alojada en ninguno de los planos coordenados, ni en plano alguno paralelo a ellos.

A cada valor de  $T_1$  le corresponderá una solución; nosotros, para facilitar cálculos, adoptaremos  $T_1 = \sqrt{21} \text{ N}$ , para el cual tenemos:

$$\mathbf{T}_1 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \text{ N, cuyo soporte pasa por } O \text{ y por } Q.$$

Ejemplo III.21 (continuación) (10/12)

Estableciendo que  $Q_2(x_2, y_2, z_2)$  es un punto de la línea de acción de  $T_2$  (que, obviamente, es igual a  $-T_1$ ), el momento de  $T_1$  respecto a un punto del soporte de  $T_2$  (tomado en este caso como  $Q_2$ ), resulta:

$$\vec{Q_2O} \times \mathbf{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (y_2 - 2z_2)\mathbf{i} + (-4z_2 - x_2)\mathbf{j} + (2x_2 + 4y_2)\mathbf{k},$$

y como esto debe ser igual al valor de  $m_{II}$ , dado por (4), deberá cumplirse:

$$(y_2 - 2z_2)\mathbf{i} + (-4z_2 - x_2)\mathbf{j} + (2x_2 + 4y_2)\mathbf{k} = 45\mathbf{i} + 60\mathbf{j} + 60\mathbf{k},$$

igualdad vectorial de donde se obtienen las siguientes tres ecuaciones escalares:  $y_2 - 2z_2 = 45 \dots (20)$ ,  $-4z_2 - x_2 = 60 \dots (21)$ , y  $2x_2 + 4y_2 = 60 \dots (22)$ ;

la igualdad (20) puede escribirse en la forma  $8z_2 - 4y_2 = -180$ ,

misma que sumada miembro a miembro con (22) da lugar a

$$2x_2 + 8z_2 = -120, \text{ igualdad equivalente a } -4z_2 - x_2 = 60,$$

es decir a (21), razón por la cual aparentemente requeríamos

de otra ecuación que relacionara a  $x_2, y_2, z_2$ , sin embargo

no es así, ya que  $Q_2$  puede ser cualquiera de los puntos del soporte de  $T_2$ ; nosotros tomaremos el  $Q_2$  correspondiente

al punto donde el soporte recién citado corta al plano  $XY$ ,

o sea el  $Q_2$  para el cual  $z_2 = 0$ , valor que llevado a (20) y

a (21) dan por resultado, respectivamente,  $y_2 = 45$ ,  $x_2 = -60$ ,

valores que (cual debía ser) cumplen la ecuación (22), que no

se empleó para determinarlos. Entonces aquí tenemos  $Q_2(-60, 45, 0)$ .

Así como elegimos  $Q_2$  (con  $z_2 = 0$ ), podríamos haberlo elegido como

el punto del soporte de  $T_2$  corta al plano  $YZ$ , es decir al

Ejemplo III-21 (continuación) (11/12)

punto para el cual  $x_2=0$ , valor al cual según (21) y (22) le corresponden los valores  $y_2=15$ ,  $z_2=-15$ ; mismos que (como debe ser) cumplen la ecuación (20), que no se utilizó para determinarlos: Es decir que, para esto último se tendría  $Q_2(0,15,-15)$ .

Resumiendo, el par de esta (cuarta) solución está conformado por:

$T_1 = 4i - 2j - k, N$ , con un soporte que pasa por el origen y por  $Q(4,2,-1)$ ,

y por:

$T_2 = -T_1 = -4i + 2j + k, N$ , con una línea de acción que pasa por  $Q_2(-6,9,5,0)$ .

Entonces, para este caso se tiene que, el momento del formado por

$T_1$  y  $T_2$ , adoplado del momento de la resultante, con respecto

al origen, da por resultado:

$$\vec{OQ_2} \times T_2 + \vec{OP_{yz}} \times R = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6 & 9 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 3 \\ 12 & 16 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= (45i + 60j + 60k) + (-48i + 36j + 0k) = -3i + 96j + 60k, N \cdot m,$$

es decir el valor que tiene el momento del sistema dado, con respecto al origen, lo cual se nos pidió verificar.

NOTA.- Según puede apreciarse en el desarrollo de esta resolución,

obtuvimos la ecuación cartesiana del eje central, en su forma

simétrica, haciendo intervenir las ecuaciones identificadas como

(6) y (8); se recomienda al lector obtener dicha ecuación, precisamente

en la forma citada, haciendo intervenir a (6) y (7); a continuación

lo haremos a partir de:

Ejemplo III-21 (continuación) (12/12).

$$3z - 4x = 9 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (7),$$

$$Y, \quad 4x - 3Y = 0 \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (8).$$

De (8) obtenemos:

$$x = \frac{3Y}{4} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (8'),$$

en tanto que, de (7) se obtiene:

$$x = \frac{3z - 9}{4} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (7');$$

con base en (8') y (7') puede escribirse que:

$$x = \frac{3Y}{4} = \frac{3z - 9}{4};$$

dividiendo entre 3 tanto el numerador como el denominador de cada uno de los cocientes de esta doble igualdad obtenemos:

$$x = \frac{Y}{4/3} = \frac{z - 3}{4/3}$$

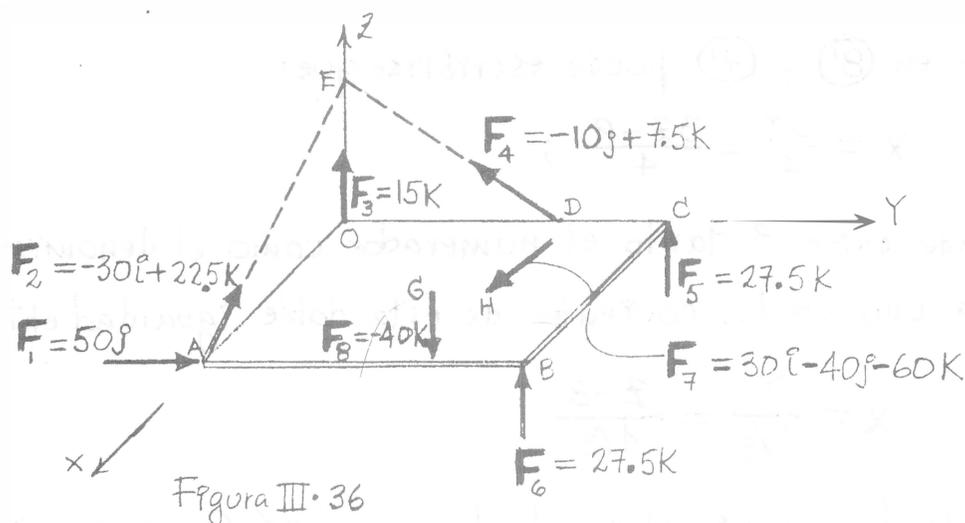
que es la forma simétrica de la ecuación (cartesiana) del eje central correspondiente al motor de este ejemplo, misma que obtuvimos como (12) al resolver el inciso d) de este problema, con base en las ecuaciones identificadas como (6) y (8).

No deje pues, lector, de obtener esta ecuación haciendo intervenir a (6) y a (7).

### Ejemplo III.22

La placa de la figura III.36 se encuentra sujeta al sistema mostrado, constituido por las fuerzas  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$  y  $F_8$ , todas ellas en newtons, cuyos soportes pasan respectivamente por  $A(4,0,0), E(0,0,3), O(0,0,0), D(0,4,0), C(0,6,0), B(4,6,0), H(2,4,0)$  y  $G(2,3,0)$ , puntos cuyas coordenadas están dadas en metros. Con base en ello:

- obtenga las coordenadas vectoriales canónicas del sistema descrito, y,
- determine cuál es el sistema equivalente más simple a que puede reducirse el sistema dado; ¿qué concluye de esto?



Resolución.

- Con base en los datos, se obtienen:

$$\mathbf{R} = \sum_{n=1}^8 \mathbf{F}_n = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_O = (4\mathbf{i}) \times (50\mathbf{j}) + (3\mathbf{k}) \times (-30\mathbf{i} + 22.5\mathbf{k}) + \mathbf{0} + (4\mathbf{j}) \times (-10\mathbf{j} + 7.5\mathbf{k}) + (6\mathbf{j}) \times (27.5\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \times (27.5\mathbf{k}) + (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \times (30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 60\mathbf{k}) + (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-40\mathbf{k}), \text{ es decir que}$$

$$\mathbf{M}_O = (200\mathbf{k}) + (-90\mathbf{j}) + \mathbf{0} + (30\mathbf{i}) + (165\mathbf{i}) + (-110\mathbf{j} + 165\mathbf{i}) + (-80\mathbf{k} + 120\mathbf{j} - 120\mathbf{k} - 240\mathbf{i}) + (80\mathbf{j} - 120\mathbf{i}) = \mathbf{0} \dots (2)$$

- Como, acorde con (1) y (2) se tienen  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , el sistema equivalente más simple a que puede reducirse el sistema dado es el equilibrio, se concluye que la placa de este ejemplo se encuentra en equilibrio, sujeta al sistema de fuerzas dado.

### Ejemplo III-23

El paralelepípedo de la figura III.37 es homogéneo, pesa 500 N y se encuentra sujeto a la acción de las fuerzas mostradas, cuyas líneas de acción son, en todos los casos, colineales con las aristas del cuerpo.

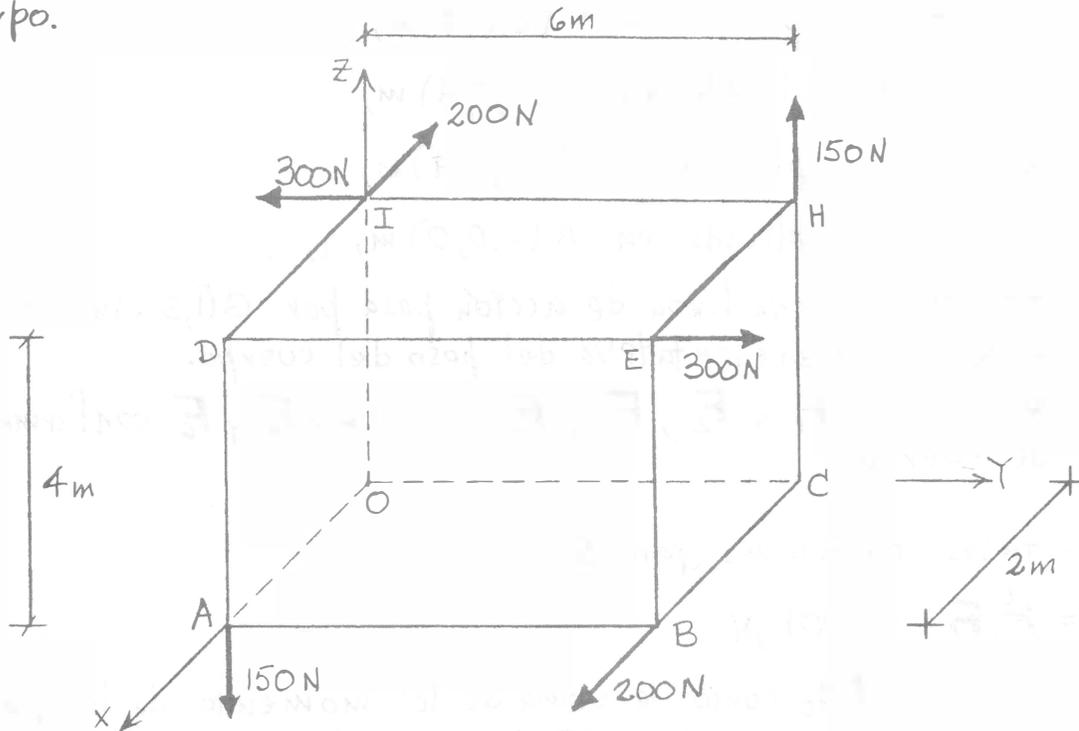


Figura III.37

Considerando que el plano  $XY$  es horizontal:

- determine cuál es el sistema más simple,  $S_2$ , a que puede reducirse el sistema  $S_1$ , conformado por el peso del cuerpo y las seis fuerzas mostradas en la figura III.37,
- represente gráficamente a  $S_2$ , y,
- determine dos opciones diferentes de sistemas de fuerzas capaces de equilibrar a  $S_1$ , y muestre como actuarían, sobre el paralelepípedo, las fuerzas conformadoras de cada una de esas opciones.

Resolución.

- Con base en los datos puede decirse que las fuerzas que conforman a  $S_1$  son las siguientes:

Ejemplo III-23 (continuación) (2/4)

$F_1 = 200\hat{i}$ , N, aplicada en B (2, 0, 0) m,

$F_2 = -200\hat{i}$ , N, aplicada en I (0, 0, 4) m,

$F_3 = 300\hat{j}$ , N, aplicada en E (2, 6, 4) m,

$F_4 = -300\hat{j}$ , N, aplicada en I (0, 0, 4) m,

$F_5 = 150\hat{k}$ , N, aplicada en H (0, 6, 4) m,

$F_6 = -150\hat{k}$ , N, aplicada en A (2, 0, 0) m, y,

$F_7 = -500\hat{k}$ , N, cuya línea de acción pasa por G (1, 3, 2) m, siendo esta fuerza la representativa del peso del cuerpo.

Nótese que  $F_1$  y  $F_2$ ,  $F_3$  y  $F_4$ , así como  $F_5$  y  $F_6$  conforman pares de fuerzas.

En tales condiciones (para  $S_1$ ) se tiene:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^7 \mathbf{F}_i = -500\hat{k}, \text{N} \quad \text{--- (1)}$$

y, calculando  $\mathbf{M}_0$  como la suma de los momentos de los pares recién citados, más el momento de  $F_7$  (con respecto al origen), tenemos:

$$\mathbf{M}_0 = (-4\hat{k} + 6\hat{j}) \times (200\hat{i}) + (2\hat{i}) \times (300\hat{j}) + (6\hat{j} - 2\hat{i}) \times (150\hat{k}) + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix},$$

es decir:

$$\mathbf{M}_0 = -800\hat{j} - 1200\hat{k} + 600\hat{k} + 900\hat{i} + 300\hat{j} - 1500\hat{i} + 500\hat{j} = -600\hat{i} - 600\hat{k}, \text{N}\cdot\text{m} \quad \text{--- (2)}$$

además, con base en (1) y (2) resulta:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_0 = (-500\hat{k}) \cdot (-600\hat{i} - 600\hat{k}) = 300,000 \text{ N}^2\cdot\text{m} \quad \text{--- (3)}$$

Entonces como por (1), (2) y (3) podemos decir que para  $S_1$  se tienen  $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M}_0 \neq \mathbf{0}$ , y,  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_0 \neq 0$ , debido a esto se concluye que el sistema más simple a que puede reducirse  $S_1$ , es decir  $S_2$ , es un motor.

Ejemplo III.23 (continuación) (3/4)

b) Como de  $S_2$  ya conocemos su resultante (también dada por ①), para representar gráficamente a dicho sistema (que es un motor) necesitamos de conocer su momento ( $m_{II}$ ); calculemoslo. Teniendo en cuenta ③ y ① resulta:

$$m_{II} = \left[ \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_0}{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}} \right] \mathbf{R} = \left[ \frac{300,000}{(-500\text{K}) \cdot (-500\text{K})} \right] (-500\text{K}) = -600\text{K}, \text{N} \cdot \text{m} \dots \text{④}.$$

Ade más de lo anterior requerimos de conocer al menos un punto de la línea de acción de la resultante, que es perpendicular al plano  $xy$  (recuerde que  $\mathbf{R} = -500\text{K}, \text{N}$ ).

Con base en la expresión [14] y con los valores dados por ② (momento tanto de  $S_1$  como de  $S_2$ , respecto al origen), y por ④ (momento del motor), se tiene:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_0 - m_{II} = (-600\mathbf{i} - 600\text{K}) - (-600\text{K}) = -600\mathbf{i}, \text{N} \cdot \text{m},$$

es decir:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} = -600\mathbf{i}$$

lo que, una vez desarrollado el determinante, da lugar a:

$$(-500y)\mathbf{i} + (500x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -600\mathbf{i},$$

igualdad que, independientemente de los valores que tome  $z$ , se cumple para  $y = 1.2$ ,  $x = 0$ , o sea que la línea de acción de la resultante está formada por todos los puntos de  $E_3$  cuya abscisa sea cero y cuya ordenada valga 1.2, como es el caso de  $Q(0, 1.2, 0)$ , razón por la cual  $S_2$  podemos representarlo gráficamente como en la figura III.38.

Ejemplo III.23 (continuación) (4/4)

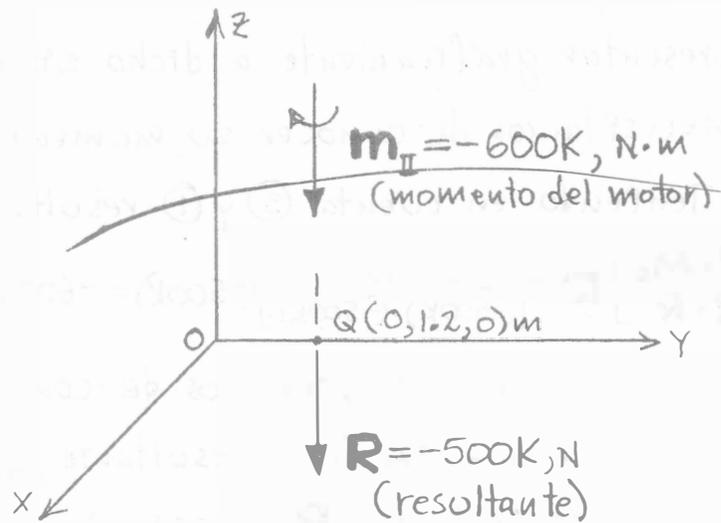


Figura III.38

c) Para que las dos opciones solicitadas cumplan con lo especificado (es decir equilibrar a  $\mathbf{S}_1$ ) deberán equilibrar a  $\mathbf{S}_2$  debido a lo cual ambas opciones deberán estar constituidas por una fuerza dada por  $500\mathbf{K}, \text{N}$ , cuya línea de acción pase por  $Q$ , así como por un par de fuerzas cuyo momento valga  $600\mathbf{K}, \text{N}\cdot\text{m}$ ; así las cosas, los sistemas de fuerzas mostrados en las figuras III.39 y III.40 constituyen las dos opciones citadas.

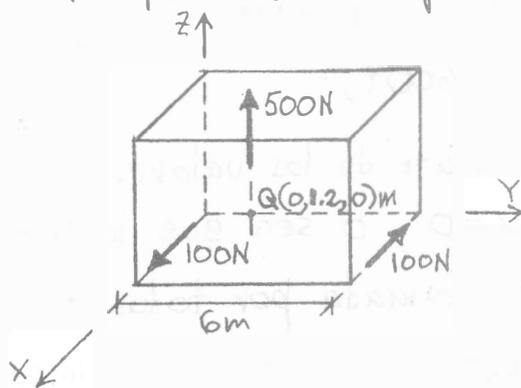


Figura III.39

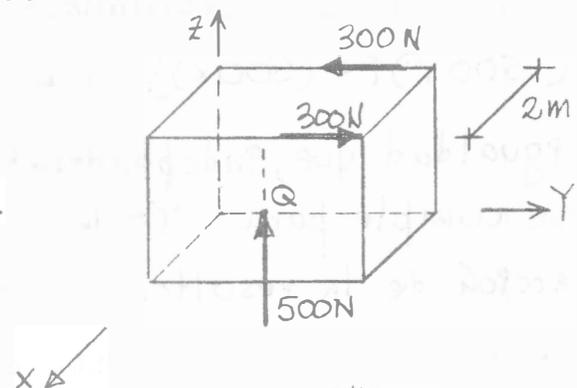


Figura III.40

## **IV. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE.**

Como una de las cosas más importantes en el estudio del equilibrio o del movimiento de un cuerpo, es el diagrama de cuerpo libre de éste, a continuación trataremos acerca del mismo y daremos algunas definiciones con él relacionadas.

No obstante su importancia, hemos de mencionar que el diagrama de cuerpo libre, al que abreviadamente llamaremos d.c.l. (según mencionamos en el prólogo de esta obra), no es más que un croquis de dicho cuerpo, donde se indican clara y suficientemente los elementos (fuerzas y/o pares) que actúan sobre el mismo.

Así pues, para que un d.c.l. se considere correctamente elaborado, deberá mostrar claramente la magnitud, la dirección, el sentido y la parte donde se aplica cada uno de los elementos que actúa sobre el cuerpo. Por ello, un d.c.l. no necesariamente deberá elaborarse a escala.

No obstante que casi la totalidad de los d.c.l. , que en este texto presentamos, están relacionados con problemas de lo que se definirá más adelante como equilibrio estático, recomendamos al lector que tenga en cuenta que el estudio del movimiento de los cuerpos, en general, no es factible llevarlo a cabo de manera confiable si no se elaboran correctamente los d.c.l. de los mismos.

### **IV.1 DEFINICIONES DE RESTRICCIONES AL GIRO Y AL DESPLAZAMIENTO DE UN CUERPO. DESCRIPCIÓN DE LOS APOYOS MÁS EMPLEADOS EN LA INGENIERÍA. DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL.**

#### **IV.1.1 DEFINICIONES DE RESTRICCIONES AL GIRO Y AL DESPLAZAMIENTO DE UN CUERPO.**

En ingeniería son comunes los elementos mecánicos que están sustentados por otros elementos, los que a su vez se conocen con el nombre generalizado de apoyos.

Estos apoyos, según condiciones, restringen ciertos movimientos a los que se les asocia el concepto de grado de libertad.

Este concepto se asocia a los modelos de partícula y de cuerpo, siendo variable el número de posibilidades de desplazamientos independientes que tiene, ya sean angulares o lineales.

La función de los apoyos es restringir alguno o todos los posibles desplazamientos, de los cuerpos que están en contacto con ellos; en otras palabras, restringir los grados de libertad de los cuerpos, por lo que conviene conocer cuántos grados de libertad están asociados a los apoyos, ya sea que éstos respondan a la acción de sistemas de fuerzas colineales o coplanares (en  $E_2$ ), o bien sistemas generales de fuerzas (en  $E_3$ ).

En  $E_2$  podemos tener los grados de libertad mostrados en la figura IV.1, donde  $\Delta_x$  y  $\Delta_y$  son desplazamientos lineales, en tanto que los  $\Delta\theta_z$  son desplazamientos angulares.

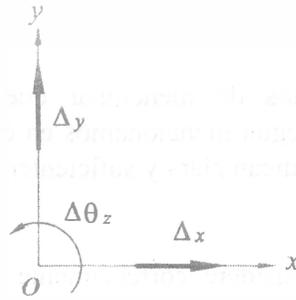


Figura IV.1

En  $E_3$  se tienen los grados de libertad presentados en la figura IV.2 ; ahí  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  y  $\Delta_z$  se consideran desplazamientos lineales, mientras que  $\Delta\theta_x$ ,  $\Delta\theta_y$  y  $\Delta\theta_z$  se consideran desplazamientos angulares.

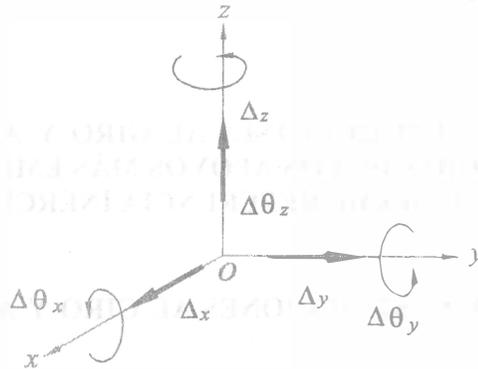


Figura IV.2

Así pues, acorde con lo recién descrito, en términos generales, un cuerpo ubicado en  $E_2$  tiene tres posibilidades de desplazamientos independientes; esto es, posee tres grados de libertad, en tanto que, si se ubica en  $E_3$  tiene seis posibilidades de desplazamientos independientes; esto es, posee seis grados de libertad.

Es claro que, para poder presentarse todos los grados de libertad, los cuerpos debieran estar libres, y como esto no siempre es posible o deseable, se deben impedir o se tienen impedidos ciertos movimientos.

A un impedimento también se le conoce como restricción, que puede ser tanto al giro como al desplazamiento. Cada restricción angular deberá estar proporcionada por un momento restrictivo, así como cada restricción lineal deberá estar proporcionada por una fuerza restrictiva.

Es usual llamar momento reactivo al momento restrictivo, y fuerza reactiva a la fuerza restrictiva. Cabe aclarar que el término reactivo no tiene nada que ver con la tercera ley de Newton; solamente es un adjetivo.

## IV.1.2 DESCRIPCIÓN DE LOS APOYOS MÁS EMPLEADOS EN LA INGENIERÍA.

El número y tipo de restricciones son consecuencia del tipo de apoyo(s) que se utilice(n) para unir al elemento mecánico al sistema tierra (que es considerado un sistema fijo), mismos que describimos a continuación.

Se utilizan ciertas figuras y símbolos para diferenciar los apoyos. En general se tienen tres tipos de apoyos muy empleados: el de rodillos o apoyo libre, la articulación o apoyo fijo, y el empotramiento.

**Apoyo de rodillos.** Éste se representa gráficamente como se ilustra en las diversas partes de la figura IV.3 .

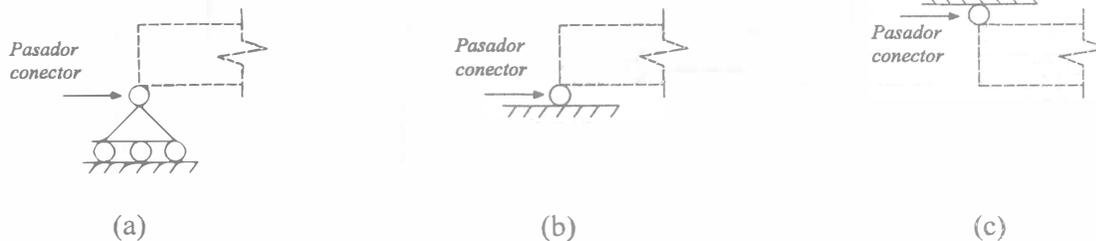


Figura IV.3

En este tipo de apoyo, la única restricción actúa en dirección normal a las superficies en contacto, a través del pasador conector.

Cabe mencionar que este tipo de apoyo no es capaz de restringir tendencias al giro (generadas por momentos), ni un desplazamiento lateral (provocado por alguna fuerza en esa dirección).

**Apoyo articulado.** Éste se representa comúnmente en algunas de las formas mostradas en la figura IV.4 .

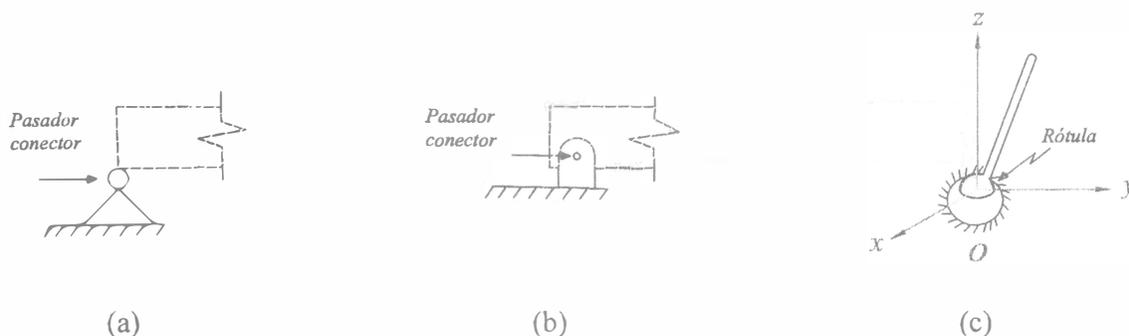


Figura IV.4

En este tipo de apoyo las restricciones que se presentan son al desplazamiento lineal en cualquier dirección; nunca proporciona restricción (es) al giro.

Dependiendo de si el cuerpo conectado es empujado o jalado en una determinada dirección, la fuerza de restricción puede actuar sobre la superficie de apoyo o hacia ella, precisamente en la dirección analizada.

Por ejemplo, considerando la viga de la figura IV.5(a), articulada en  $A$ , las fuerzas restrictivas que se presentan en dicho apoyo, debido a las condiciones de carga, son una de magnitud  $H_A$  con la dirección del eje  $x$ , pero de sentido contrario al de éste, y una magnitud  $V_A$  con la dirección y el sentido del eje  $y$ , según se muestra en la figura IV.5(b). Como dicha viga está simplemente apoyada en  $B$ , sólo se presenta una fuerza restrictiva en tal apoyo; fuerza de magnitud  $V_B$ , con la dirección y el sentido del eje  $y$ , según se muestra.

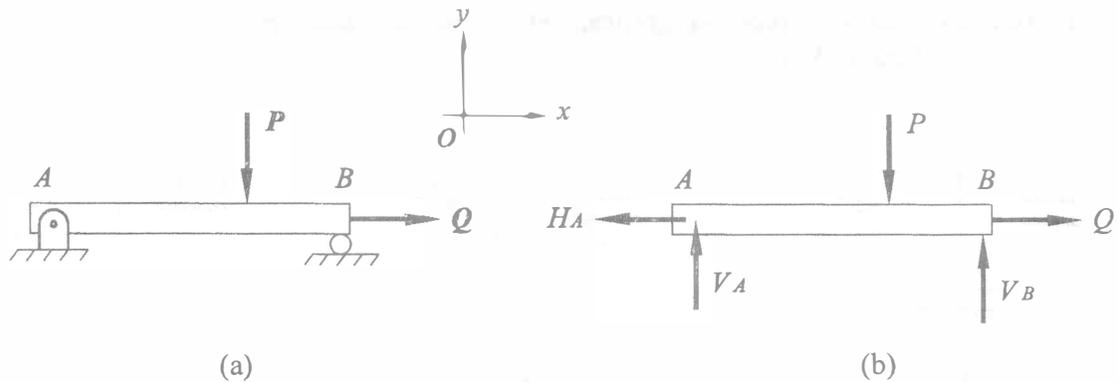


Figura IV.5

Es importante tener presente que el apoyo articulado no es capaz de restringir tendencias al giro (generadas por momentos).

**Empotramiento.** Este tipo de apoyo se representa gráficamente según se ilustra en la figura IV.6.



Figura IV.6

En dicho apoyo las restricciones que se presentan son, tanto a desplazamientos angulares como a desplazamientos lineales, en cualquier dirección. Así pues, en este tipo de apoyo se restringen todos los grados de libertad.

En la tabla IV.1 se muestran algunos casos de restricciones que pueden proporcionar diversos apoyos. Los tipos de restricciones que se indican son para casos generales; el que se presenten, o no, todas las restricciones indicadas dependerá del tipo de sistema de fuerzas aplicado al cuerpo, conectado a los apoyos que tenga.

ALGUNOS CASOS DE RESTRICCIONES PROPORCIONABLES POR APOYOS

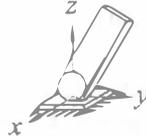
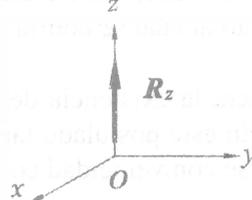
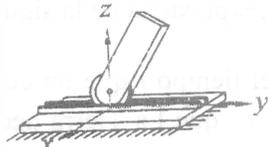
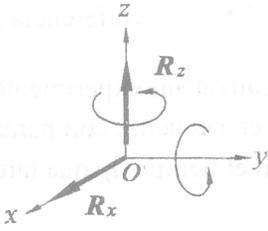
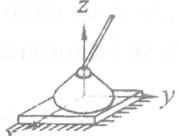
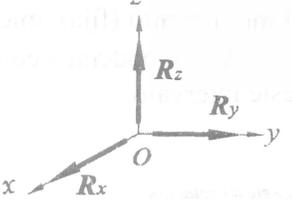
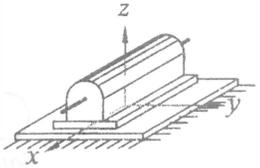
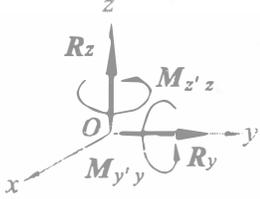
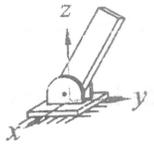
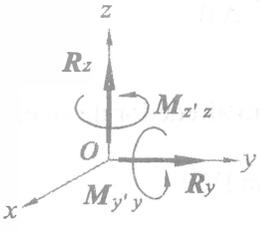
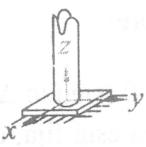
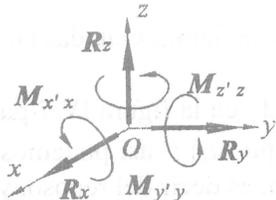
APOYO	RESTRICCIONES (casos generales)	CANTIDAD Y TIPO
 <p>Libre: superficie lisa, fija, sobre la cual se mueve un rodillo</p>		Una de desplazamiento lineal.
 <p>Guiado: superficie lisa y fija, confinada lateralmente, sobre la cual se mueve un rodillo o una rodaja.</p>		Dos de desplazamiento lineal. Dos de desplazamiento angular.
 <p>Articulación lisa y fija, que puede girar libremente.</p>		Tres de desplazamiento lineal.
 <p>Articulación fija, de eje liso, denominada chumacera</p>		Dos de desplazamiento lineal. Dos de desplazamiento angular.
 <p>Articulación lisa y fija, que sólo permite giro alrededor de un eje.</p>		Dos de desplazamiento lineal. Dos de desplazamiento angular.
 <p>Empotramiento</p>		Tres de desplazamiento lineal. Tres de desplazamiento angular.

Tabla IV.1

### IV.1.3 DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL

Podemos definir sistema de referencia inercial como aquel que se considere fijo, o que tiene movimiento rectilíneo uniforme, en el cual se cumple la Ley Segunda de Newton.

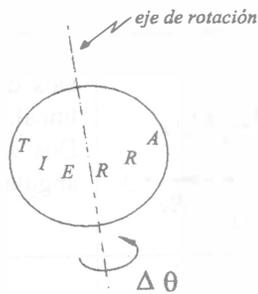
Isaac Newton enunció un postulado que involucra la existencia tanto de un espacio absoluto, como de cuerpos considerados inmóviles, estableciendo de esta forma un sistema de referencia inmóvil (considerado fijo), respecto al cual se podría definir la posición de los cuerpos en equilibrio.

El enunciado que involucra la existencia de un sistema inmóvil corresponde a lo conocido como Ley Primera o de la inercia. En este postulado también se involucra la existencia de un sistema móvil, pero con la cualidad de moverse con velocidad constante y rectilíneamente.

Estas características del sistema de referencia podemos tratar de explicarlas de la siguiente forma.

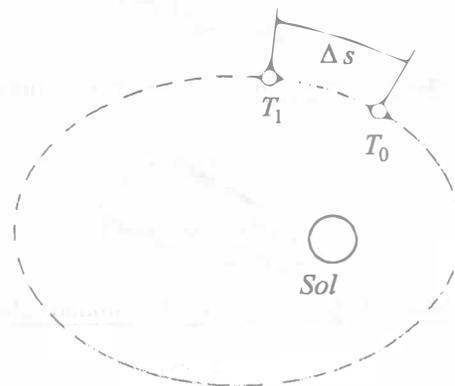
Consideremos que, al realizar un experimento de caída libre, el tiempo  $t$  que un cuerpo necesita para recorrer una distancia  $h$  es pequeño, comparado con el tiempo  $t_r$  que La Tierra necesita para dar una vuelta sobre su eje, o con el tiempo  $t_l$  que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol.

Al comparar, si  $t$  es muy pequeño con relación a  $t_r$ , tenemos  $t = \Delta t_r$ , y en este tiempo podemos considerar a la tierra sin movimiento (fija), mientras que si resulta que  $t$  es también muy pequeño con relación a  $t_l$ , se tiene  $t = \Delta t_l$  y podemos considerar que La Tierra se ha movido rectilíneamente con velocidad constante en este intervalo.



Rotación de La Tierra alrededor de su eje.

Figura IV.7



Movimiento de La Tierra con relación al Sol.

Figura IV.8

Teniendo en cuenta las condiciones citadas en los dos párrafos anteriores:

- respecto a lo mostrado en la figura IV.7 puede decirse que  $\Delta\theta \rightarrow 0$  (siendo  $\Delta\theta$  el ángulo girado por La Tierra en el tiempo  $\Delta t_r$ ); así podemos considerar que la tierra está fija, que es la característica del movimiento nulo, es decir del reposo, y,

- b) el arco  $\Delta s$  de la figura IV.8 (recorrido por nuestro planeta al pasar de la posición  $T_0$  a la posición  $T_1$ , en el tiempo  $\Delta t_i$ ) se considera recto, y la velocidad (de nuestro planeta) en la posición  $T_0$  es prácticamente la misma que en la posición  $T_1$ , por lo que dicha velocidad se considera constante, que son las características del movimiento rectilíneo uniforme. Tanto en reposo ( $v=0$ ), como en movimiento rectilíneo uniforme ( $v=cte$ ), la magnitud de la aceleración es nula.

#### **IV.2 EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE: DEFINICIÓN; SU IMPORTANCIA Y SECUENCIA PARA OBTENERLO. ELABORACIÓN DE DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE DONDE INTERVIENEN DIVERSOS TIPOS DE FUERZAS Y/O PARES: PARA CUERPOS RÍGIDOS QUE ESTÁN EN CONTACTO CON OTROS, Y PARA CUERPOS RÍGIDOS CONECTADOS A SUS APOYOS, O CONECTADOS CON OTROS CUERPOS.**

Como parte fundamental del estudio de la Estática y de la Dinámica nos encontramos al diagrama de cuerpo libre, ya que ambas ramas de la Mecánica Clásica están íntimamente ligadas con fuerzas, y/o pares de fuerzas, elementos que a su vez constituyen una parte muy importante de dicho diagrama.

Definiremos al diagrama de cuerpo libre como un croquis o dibujo del cuerpo (o partícula) en estudio, donde se indican los elementos (fuerzas y/o pares) que actúan sobre el mismo, claramente ubicados con relación a éste.

Así pues, para obtener buenos diagramas de cuerpo libre, a los que en lo sucesivo y abreviadamente designaremos con las siglas d.c.l., sugerimos proceder como a continuación se indica:

- a) Hacer un croquis con un tamaño aceptable donde se muestre al cuerpo (o partícula), acotando en él las dimensiones de tal cuerpo, así como las posiciones donde actúan las fuerzas y/o pares, a que se encuentra sujeto; sobre dicho croquis hay que realizar lo mencionado en los siguientes incisos.
- b) Tratándose de fuerzas, dibujar segmentos dirigidos en las diferentes partes donde ellas actúan, anotando al lado de cada uno de ellos la magnitud de la fuerza que representa; entonces, esos segmentos dirigidos no tienen por qué dibujarse a escala, pero sí deberán tener la dirección y el sentido de las fuerzas que representan.
- c) Tratándose de pares (de fuerzas), dibujar arcos de círculo alrededor de los ejes sobre los cuales se aplican dichos pares, indicando en cada uno de esos arcos, mediante una flechita, el sentido del par que representan, y anotando a un lado la magnitud del par correspondiente.

Deberá tenerse mucho cuidado en que las unidades de las fuerzas y de los pares, así como las de longitud empleadas para acotar el croquis, sean congruentes. Por ejemplo, si como unidad de longitud empleamos el metro (m) y como unidad de fuerza empleamos el newton (N) la unidad de los pares que aparezcan en el diagrama deberá ser N·m.

### Ejemplo IV.1

Despreciando el peso propio de la viga de la figura IV.9 , dibuje su d.c.l. considerando que, sobre ella, actúa el sistema de fuerzas coplanares mostrado.

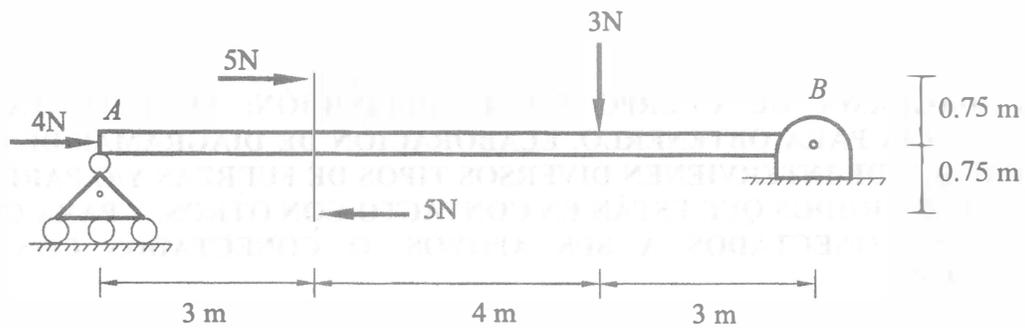


Figura IV.9

### Resolución

1. El croquis acotado, correspondiente a la viga, es el que se muestra en la figura IV.9(a) .

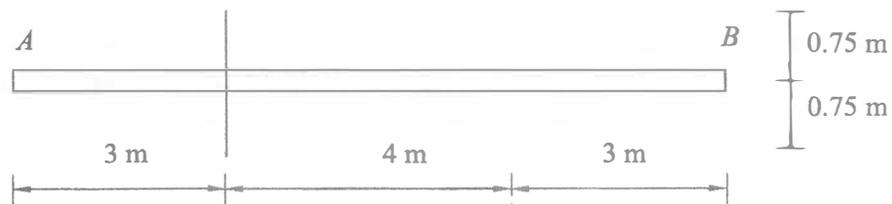


Figura IV.9(a)

2. Sustituyendo a las fuerzas de 5 N por el par de 7.50 N·m equivalente y tomando en cuenta que, por el tipo de apoyos que existen, sólo  $B$  es capaz de ofrecer una reacción que tenga componente vectorial horizontal, a la que le supondremos sentido hacia la izquierda, si además suponemos que la reacción en  $A$  (vectorial por el tipo de apoyo) tiene un sentido hacia arriba, y que la componente vectorial de la reacción en  $B$  también tiene sentido hacia arriba, luego de dibujar sobre el croquis anterior los segmentos que representan a los elementos que actúan sobre la viga dada, se obtiene el croquis de la figura IV.9(b) .

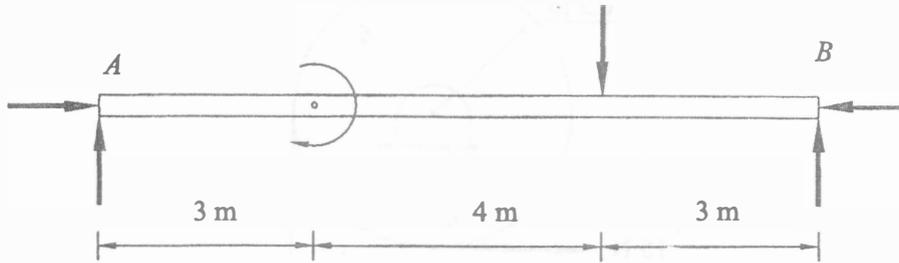


Figura IV.9(b)

3. Si sobre él, y a un lado de cada uno de los segmentos dirigidos y arcos de círculo que contiene, anotamos las magnitudes de los elementos que representan, obtenemos finalmente el d.c.l. solicitado; es decir, el mostrado en la figura IV.9(c) .

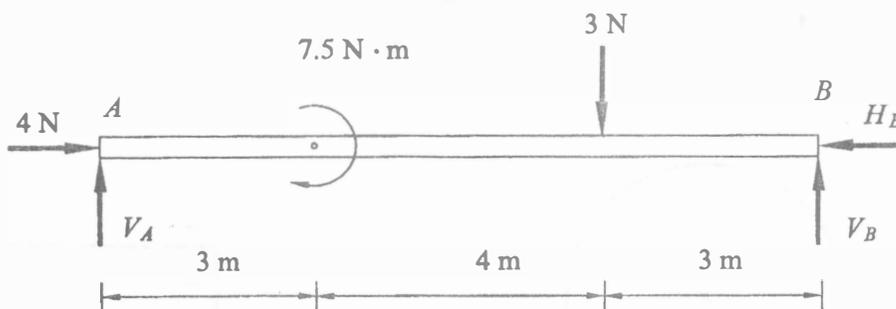


Figura IV.9(c)

### Ejemplo IV.2

El sistema de la figura IV.10 está formado por un disco  $A$  que tiene una cuerda flexible, inextensible y de peso despreciable, enrollada en su periferia, de donde cuelga el bloque  $B$  mostrado. Si se le suelta en esa posición,  $A$  pesa  $10\text{ N}$ ,  $B$  pesa  $20\text{ N}$ , y la fricción entre el disco y el eje fijo, que lo soporta, está dada por un par de magnitud constante e igual a  $8\text{ N}\cdot\text{m}$ , dibuje los d.c.l. de  $A$  y de  $B$  para un instante cualquiera del movimiento.

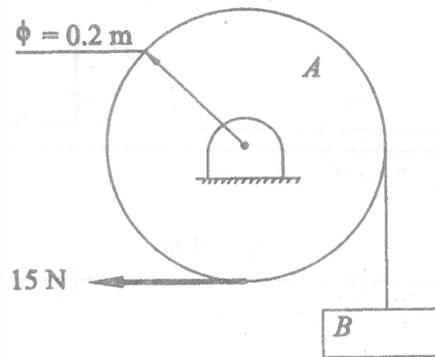
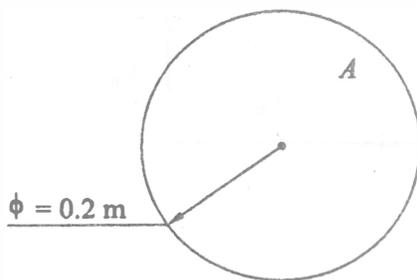


Figura IV.10

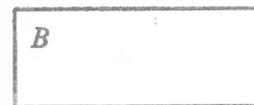
### Resolución

Con el fin de emplear unidades congruentes, como la correspondiente al par dado es  $\text{N}\cdot\text{m}$ , la unidad de longitud que emplearemos será metro, aunque pudiera haber sido centímetro, ya que cuesta el mismo trabajo transformar a metros la única medida proporcionada en este problema, que transformar a  $\text{N}\cdot\text{cm}$  el módulo del par mencionado, puesto que esto también representaría un solo cambio. Así pues:

- 1) Los croquis correspondientes al disco y al bloque, teniendo sólo acotado el del disco, ya que del bloque no se dan dimensiones, son los mostrados en la figura IV.10(a).



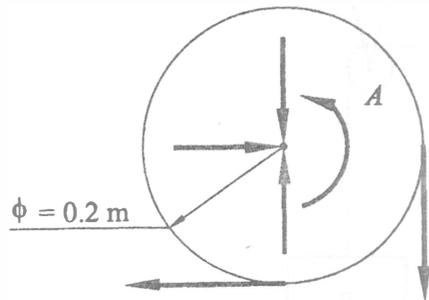
(a.1)



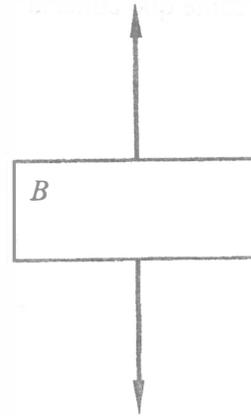
(a.2)

Figura IV.10(a)

2) Dibujando (sobre los croquis del inciso 1) los segmentos rectilíneos dirigidos y el arco de círculo que representan a los elementos que actúan sobre los cuerpos de este ejemplo, obtenemos los croquis de la figura IV.10(b).



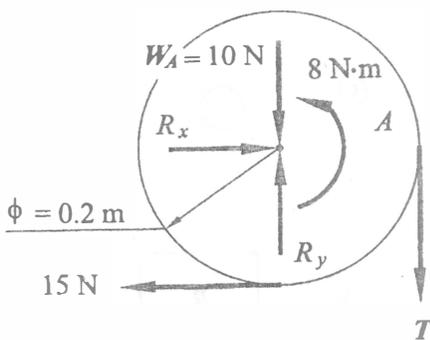
(b.1)



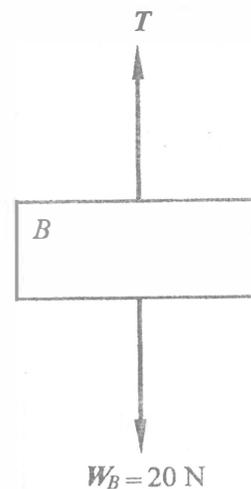
(b.2)

Figura IV.10(b)

3) Si sobre ellos, y al lado de cada uno de los elementos que contienen, anotamos las magnitudes de las fuerzas, y del par consecuencia de la fricción en el apoyo del disco, obtenemos los d.c.l. solicitados; o sea, los de la figura IV.10(c).



(c.1)



(c.2)

Figura IV.10(c)

### Ejemplo IV.3

El sistema de cuerpos de la figura IV.11 se suelta en la posición mostrada. Elabore, para dicha posición, los diagramas de cuerpo libre de los bloques  $A$ ,  $B$  y  $C$ , así como el de la polea, considerando que ésta no pesa, y que el cable que conecta  $C$  con  $B$  es de masa despreciable.

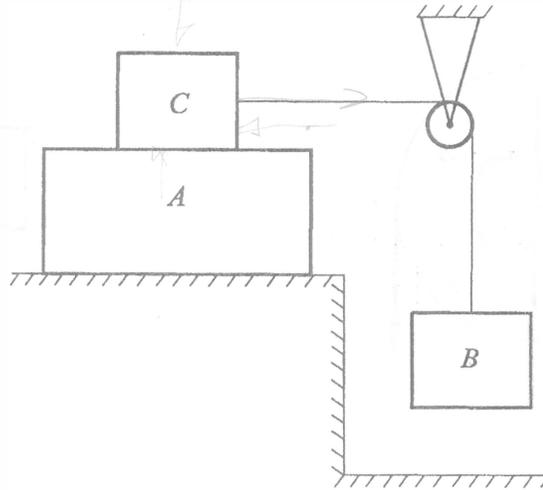


Figura IV.11

### Resolución

1) Los croquis correspondientes a los bloques  $C$ ,  $A$  y  $B$ , así como el que corresponde a la polea, son los mostrados (respectivamente) en las partes (a), (b), (d) y (c) de la figura IV.12; dichos croquis no contienen acotaciones pues no se proporcionaron dimensiones.

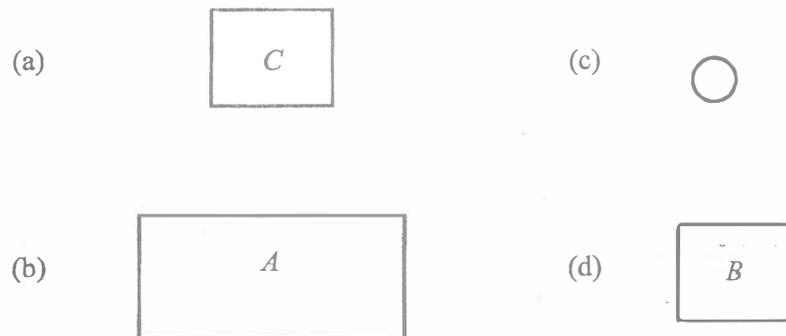


Figura IV.12

2) Al dibujar, sobre los croquis de la figura VI.12 , los segmentos rectilíneos dirigidos que emplearemos para representar a las fuerzas que actúan sobre los elementos de interés, se obtienen los croquis de la figura IV.13 ; parte de esas fuerzas son consecuencia de la tendencia de  $B$  a descender (única posibilidad de movimiento de  $B$ ), lo cual ocasiona que  $C$  tienda a moverse hacia la derecha, y que  $A$  también tienda a moverse hacia la derecha, "arrastrado" por  $C$ .

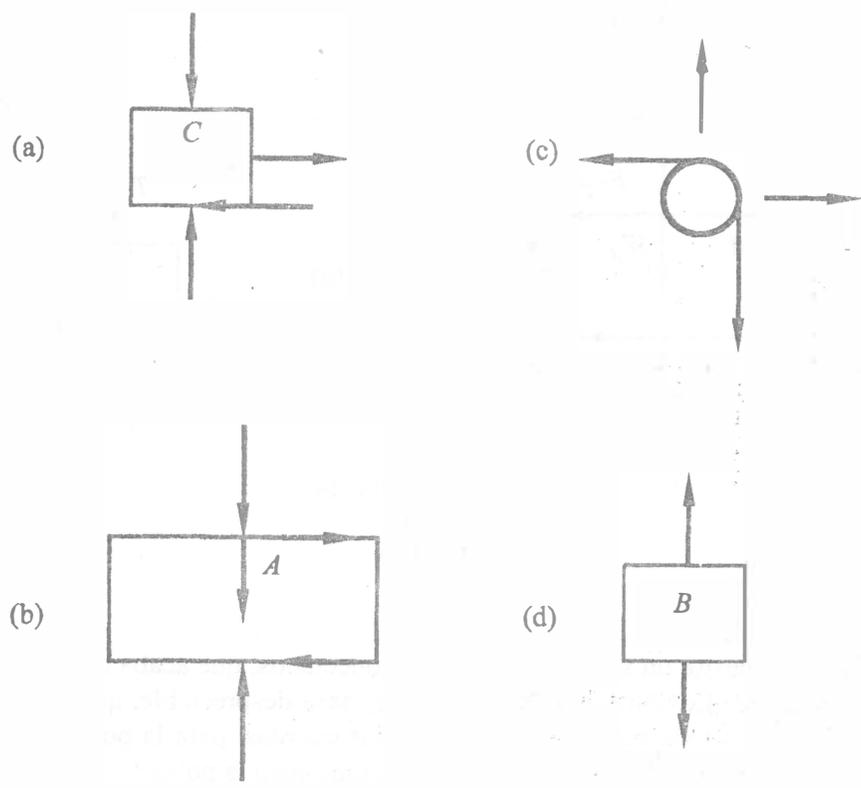


Figura IV.13

3) Al anotar al lado de cada uno de los segmentos dirigidos, de los croquis de la figura IV.13 , las magnitudes de las fuerzas que representan, se obtienen los diagramas de cuerpo libre que se pidió elaborar, es decir los de la figura IV.14 . En dicha figura:  $W_C$  ,  $W_A$  y  $W_B$  son las magnitudes de los pesos de  $C$  ,  $A$  y  $B$  respectivamente;  $T$  representa el módulo de la tensión en cualquier punto de la cuerda que conecta  $B$  con  $C$  ;  $Fr_C$  corresponde a la magnitud de las fuerzas de fricción (que se generan debido a la interacción) entre  $C$  y  $A$  ;  $N_C$  es el módulo de las fuerzas normales ( que se generan como consecuencia de la interacción) entre  $C$  y  $A$  ;  $Fr_A$  es la magnitud de la fuerza de fricción que sobre  $A$  ejerce la superficie que lo soporta;  $N_A$  es el módulo de la fuerza normal que sobre  $A$  ejerce la superficie citada, mientras que  $H$  y  $V$  corresponden a las magnitudes de las proyecciones horizontal y vertical de la fuerza que la articulación ejerce sobre la polea.

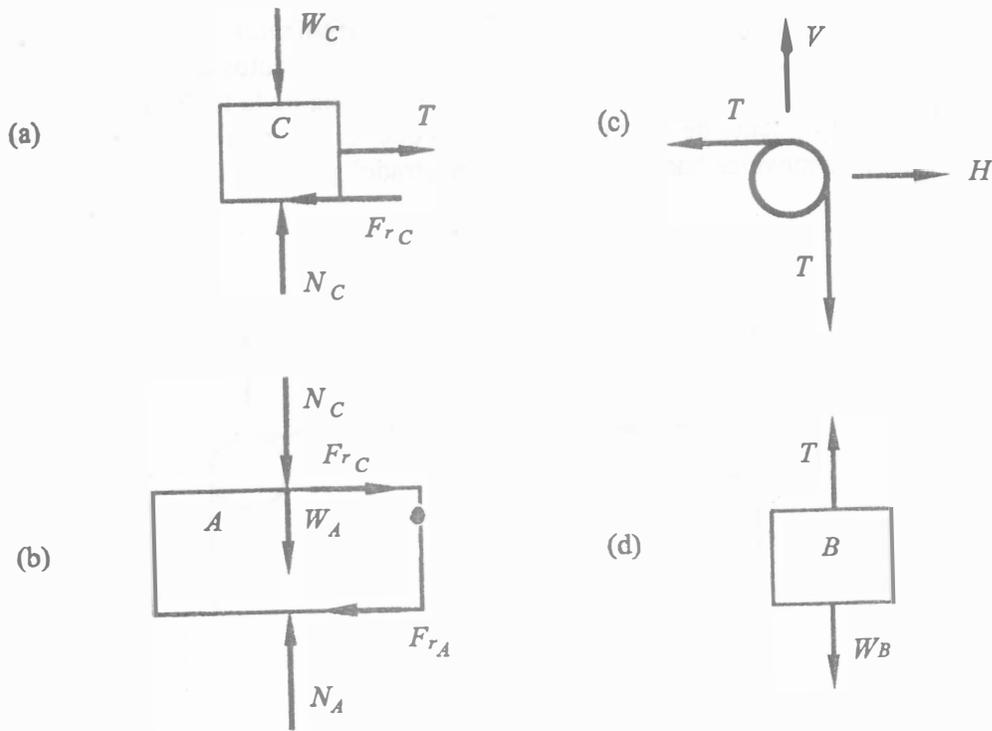


Figura IV.14

Ejemplo IV.4

En la figura IV.15 se muestra un sistema de cuerpos conectados, que acaba de soltarse. Asumiendo que las cuerdas mostradas son flexibles, inextensibles y de masa despreciable, que es prácticamente nulo el peso de las poleas, y nula toda fricción entre éstas y las cuerdas: para la posición indicada elabore los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos  $A$  y  $B$ , así como para la polea  $C$ , considerando que el cuerpo  $B$  se mueve hacia abajo.

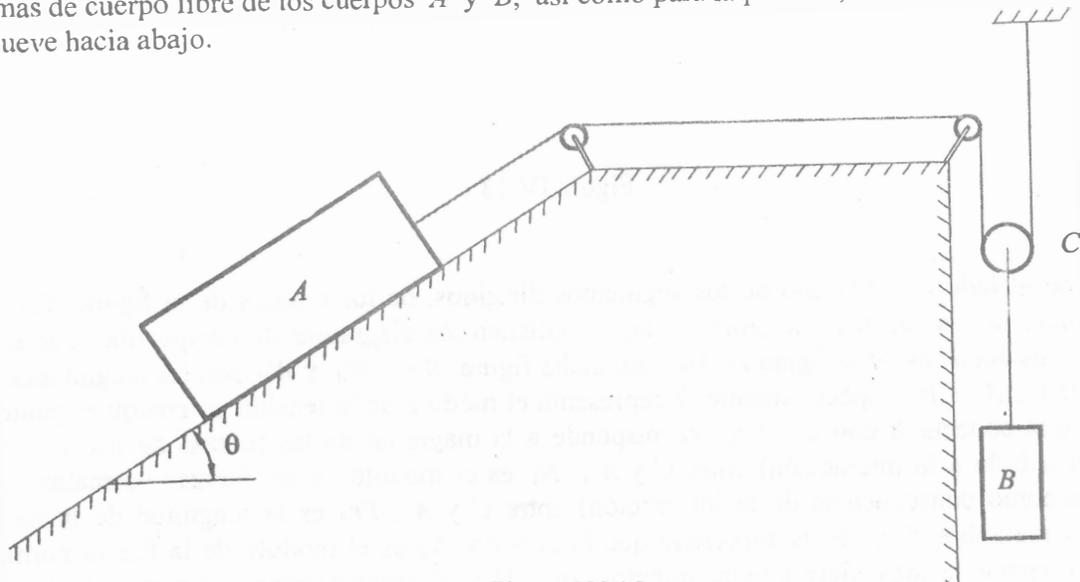


Figura IV.15

## Resolución

- 1) Los croquis de los bloques  $A$  y  $B$ , así como el de la polea  $C$ , son los que se muestran (respectivamente) en las partes (a), (d) y (c) de la figura IV.16; esos croquis no contienen acotaciones ya que no se proporcionaron dimensiones.

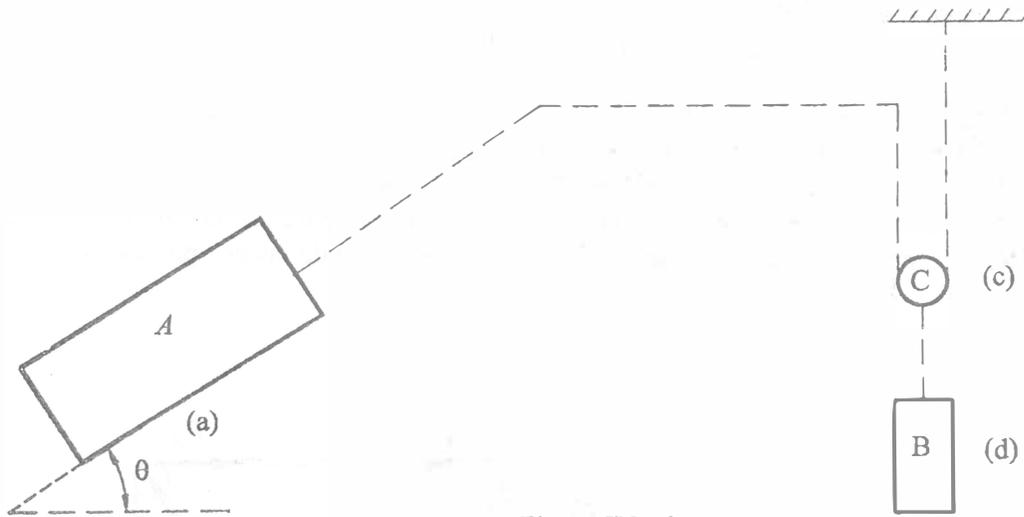


Figura IV.16

- 2) Al dibujar, en los croquis de la figura IV.16, los segmentos rectilíneos dirigidos que utilizamos para representar a las fuerzas que actúan sobre los elementos que nos interesan, obtenemos los croquis de la figura IV.17; algunas de esas fuerzas son consecuencia del movimiento realizado por  $B$ , el cual ocasiona que  $A$  se mueva soportando la acción de una fuerza de fricción (dinámica) que sobre él ejerce el plano inclinado.

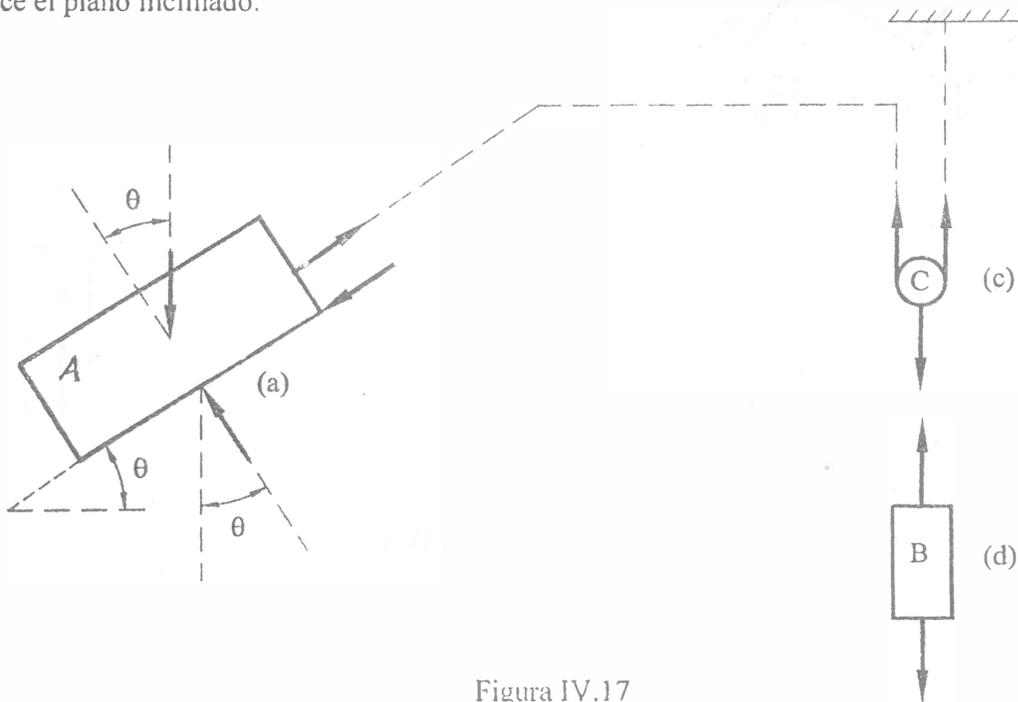


Figura IV.17

3) Una vez habiendo anotado al lado de cada uno de los segmentos dirigidos, de los croquis de la figura IV.17, los módulos de las fuerzas que representan, resultan los diagramas que se pidió elaborar; es decir, los que se muestran en las partes (a), (d) y (c) de la figura IV.18. En esa figura:  $W_A$  y  $W_B$  son los módulos de los pesos de  $A$  y  $B$  respectivamente;  $F_{rK}$  es la magnitud de la fuerza de fricción (dinámica) que el plano inclinado ejerce sobre  $A$ ;  $N_A$  corresponde al módulo de la fuerza normal que dicho plano ejerce sobre  $A$ ;  $T_A$  y  $T_B$  representan las magnitudes de las tensiones en cualquier punto de la cuerda que conecta  $C$  con  $A$ , y de la que conecta  $C$  con  $B$ , respectivamente.

No obstante que la parte (b) de la figura IV.18 no corresponde a un diagrama de cuerpo libre, se dibujó la misma con la finalidad de hacer ver que el paso de una cuerda (considerada de masa despreciable) por una polea, lisa, cambia la dirección de la fuerza de tensión ejercida por dicha cuerda, pero no la magnitud de la fuerza recién citada. Apréciense ahí las direcciones de la tensión, en la cuerda, antes y después de estar en contacto con cada una de las dos poleas ahí mostradas.

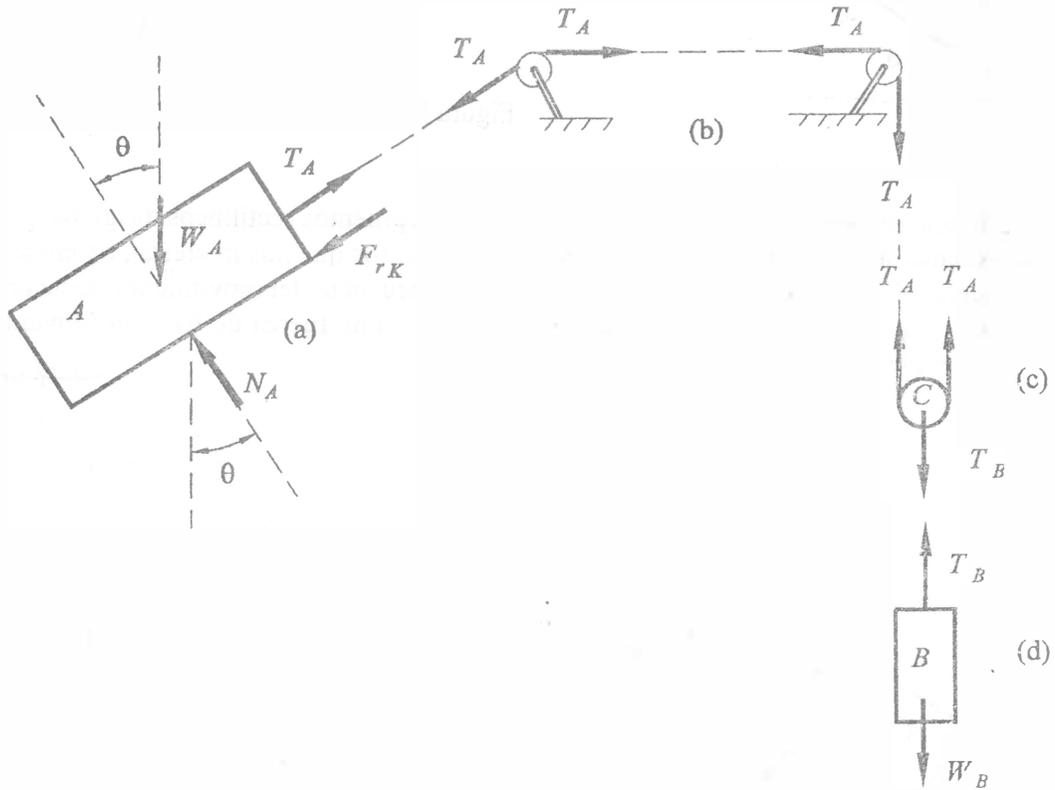


Figura IV.18

### Ejemplo IV.5

La barra de la figura IV.19 es homogénea, pesa 20 N y se encuentra sujeta a la fuerza de 40 N que se muestra, aplicada en dirección perpendicular a la barra. Con base en ello, elabore su diagrama de cuerpo de cuerpo libre.

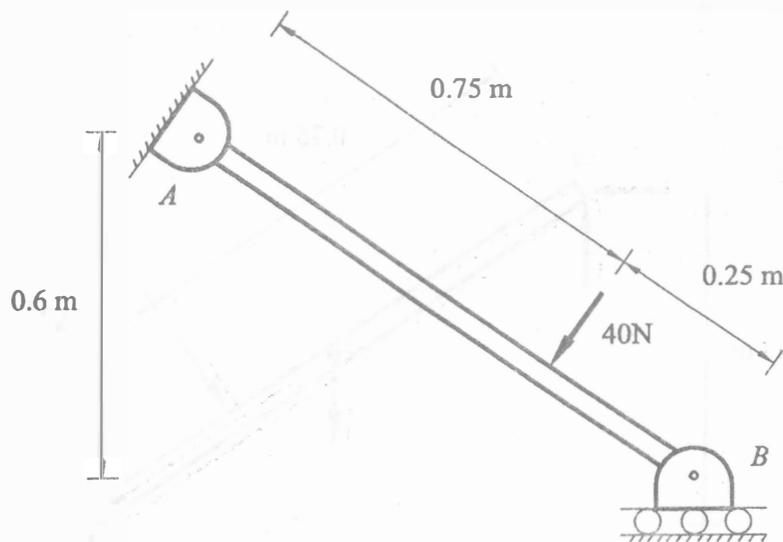


Figura IV.19

### Resolución

1) El croquis acotado de la viga, base del d.c.l. solicitado, es el que se muestra en la figura IV.20 .

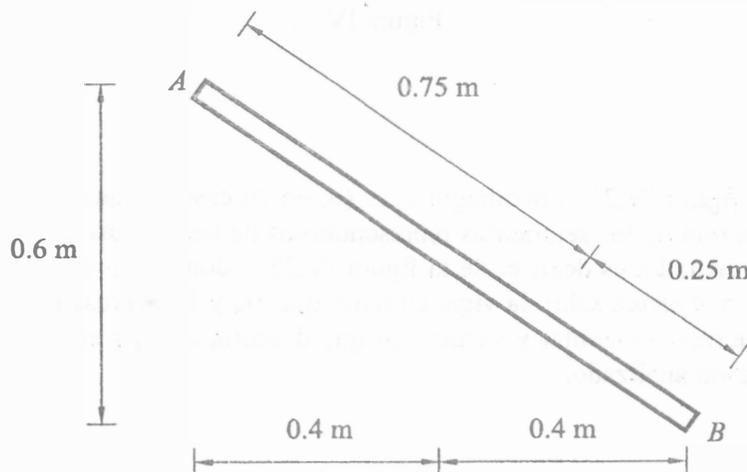


Figura IV.20

- 2) Considerando que la reacción en (la articulación)  $A$  la descomponemos en una fuerza horizontal y una vertical, al dibujar sobre el croquis de la figura IV.20 a los segmentos dirigidos representativos de las fuerzas, que actúan sobre la barra, se obtiene al croquis de la figura IV.21 :

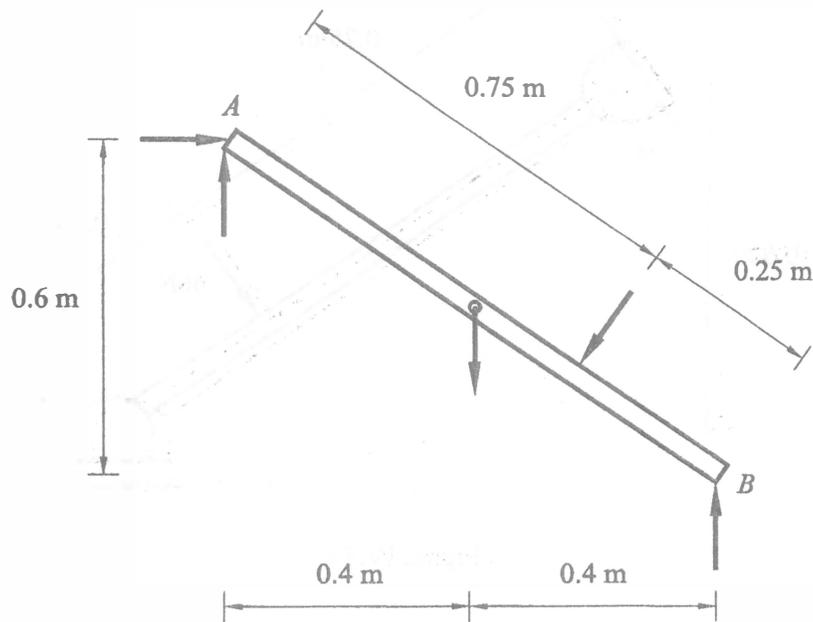


Figura IV.21

- 3) Agregando, en la figura IV.21 , las magnitudes (o, en su caso, lo que se anota representando a la magnitud) de cada uno de los segmentos representativos de las fuerzas que actúan, sobre la viga, se obtiene el d.c.l. solicitado; es decir el de la figura IV.22 , donde  $R_B$  representa a la magnitud de la fuerza que el apoyo  $B$  ejerce sobre la viga, en tanto que  $H_A$  y  $V_A$  representan, respectivamente, a los módulos de las fuerzas horizontal y vertical en que descompusimos a la fuerza que la articulación ejerce sobre el cuerpo analizado.

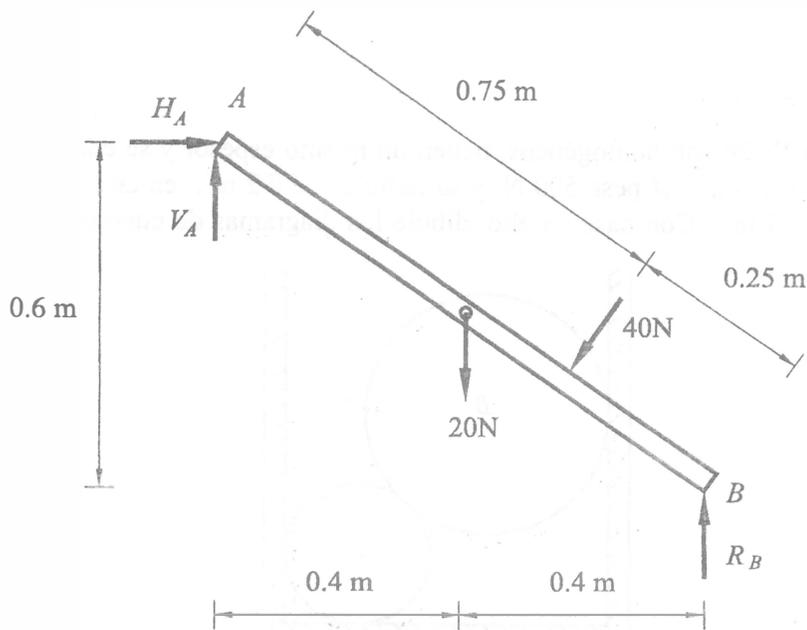


Figura IV.22

De haber decidido descomponer a la fuerza, recién citada, en una fuerza colineal con el eje de la barra y en otra perpendicular a ésta, el d.c.l. resultaría el mostrado en la figura IV.23, donde  $A_C$  y  $A_P$  representan (respectivamente) a las magnitudes de las dos fuerzas recién descritas.

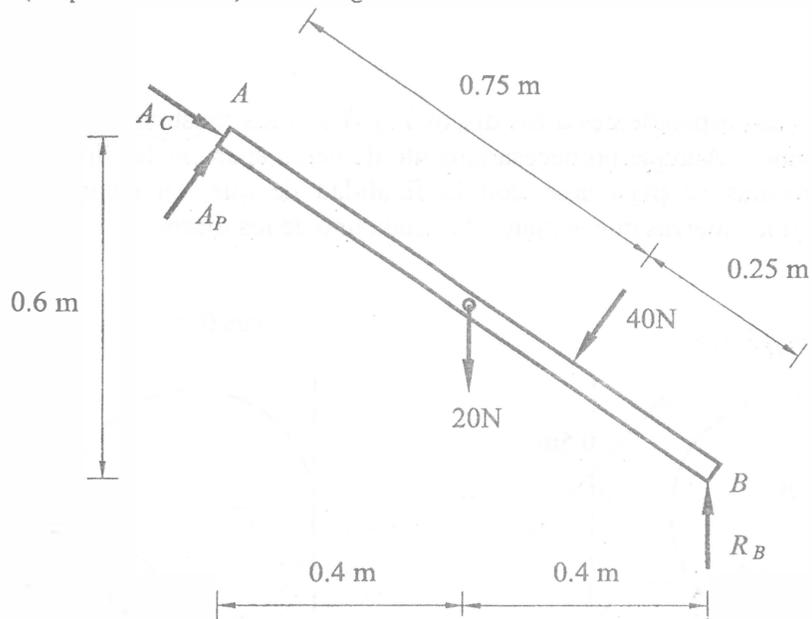


Figura IV.23

Nota.- Tan correcto es el d.c.l. de la figura IV.22, como el de la IV.23; sin embargo, si el d.c.l. de la viga va a emplearse para la determinación de las fuerzas que los apoyos ejercen sobre la viga, resulta más ventajoso el de la figura IV.22 pues, para efectuar la determinación mencionada, si se emplea un sistema de referencia con su eje horizontal y vertical, nos encontraremos con que sólo la fuerza de  $40\text{N}$  tiene dos componentes, en tanto que, sea cual fuere el tipo de sistema de referencia empleado, al menos dos fuerzas de las que conforman la figura IV.23 tendrán dos componentes.

### Ejemplo IV.6

Los discos de la figura IV.24 son homogéneos, tienen un mismo espesor y se encuentran en equilibrio en la posición mostrada; el disco *A* pesa 500 N y su radio es de 0.2 m , en tanto que *B* pesa 900 N y tiene un radio igual a 0.3 m . Con base en ello, dibuje los diagramas de cuerpo libre de cada uno de esos discos.

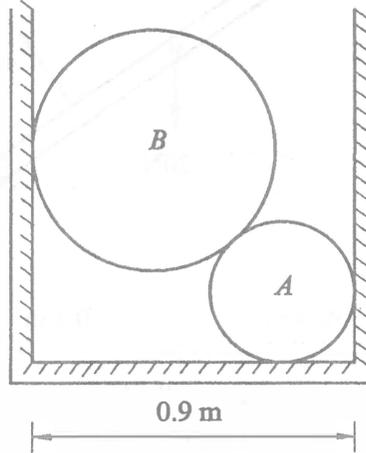


Figura IV.24

### Resolución

1) Los croquis acotados correspondientes a los discos *B* y *A* son los mostrados en las figuras IV.25 y IV.26 , respectivamente. Aunque no necesariamente debieran aparecer las líneas discontinuas que ahí aparecen, las mismas se plasmaron con la finalidad de que, en siguientes pasos de esta resolución, se ubiquen las fuerzas que actúan sobre cada uno de los discos.

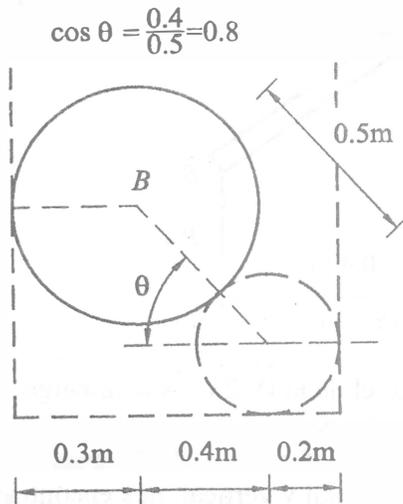


Figura IV.25

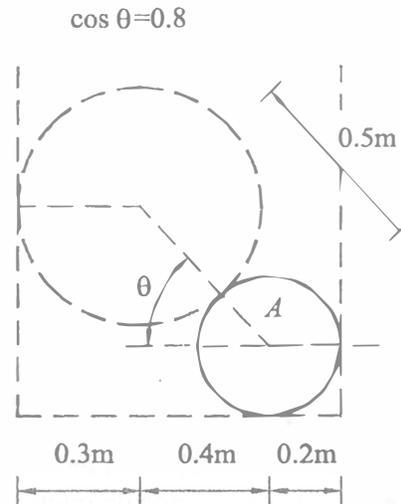


Figura IV.26

Por ejemplo, las fuerzas ejercidas por las paredes y por el piso deben ser perpendiculares a dichos elementos, debido a lo cual sus líneas de acción deben pasar por los centros de los discos. Las fuerzas de interacción generadas por el contacto entre los discos deben ser perpendiculares a las periferias de ellos y pasar por el punto donde los mismos se tocan, debido a lo cual los soportes de estas fuerzas deben estar alojados en la recta que pasa por los centros de los cuerpos en estudio.

- 2) Teniendo en cuenta lo anterior, una vez habiendo dibujado (sobre los croquis de las figuras IV.25 y IV.26) los segmentos dirigidos que representan las fuerzas que actúan sobre los discos, se tienen los croquis de las figuras IV.27 y IV.28 .

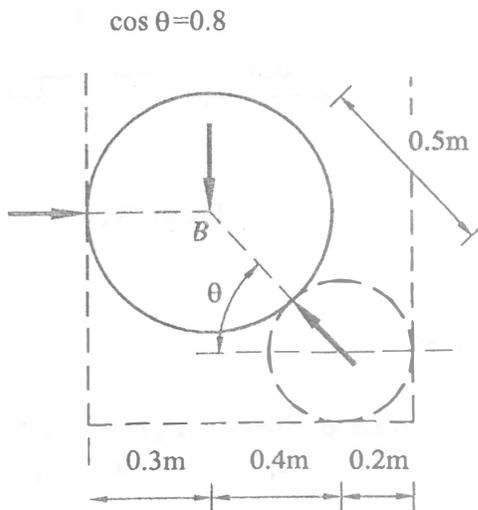


Figura IV.27

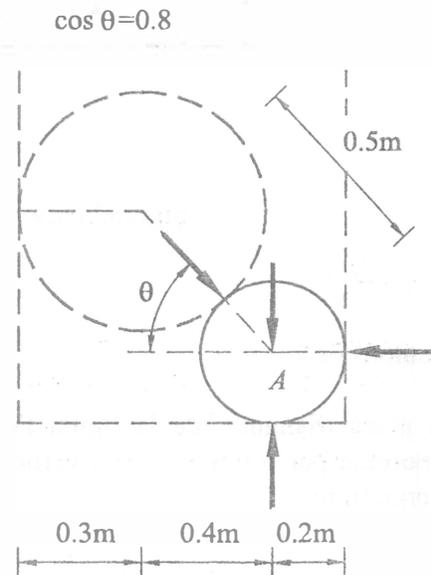


Figura IV.28

- 3) Al agregar (en las figuras IV.27 y IV.28) los módulos (o, en su caso, lo que se anota representando al módulo) de cada uno de los segmentos representativos de las fuerzas que actúan sobre cada disco, se obtienen los diagramas de cuerpo libre que se pidió elaborar, mismos que se muestran en las figuras IV.29 y IV.30, donde  $R_B$  representa la magnitud de la fuerza ejercida por la pared sobre B ;  $P$  corresponde al módulo de las fuerzas de interacción debidas al contacto entre los discos;  $V$  y  $H$  representan (respectivamente) a los módulos de las fuerzas que sobre A ejercen el piso y la pared.

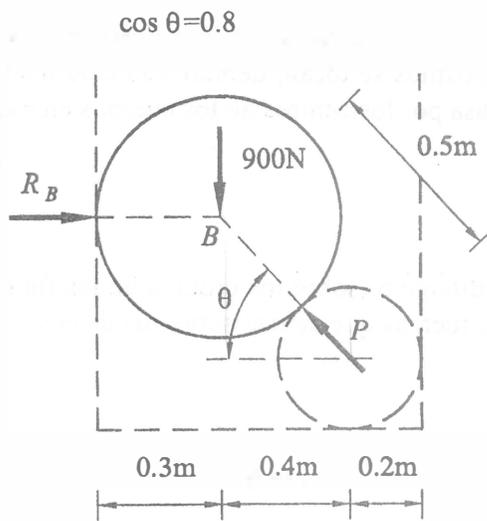


Figura IV.29

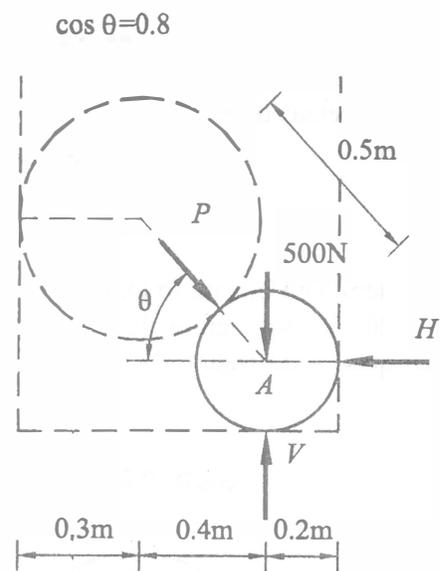
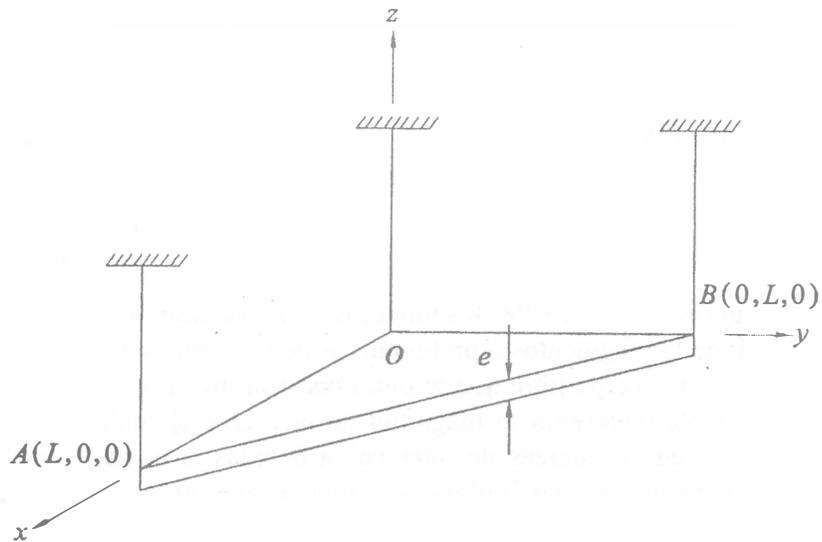


Figura IV.30

Ejemplo IV.7

La placa triangular de la figura IV.31 es homogénea y tiene espesor constante,  $e$ , pesa  $W$  y está soportada por los tres cables verticales que se muestran. Con base en ello, elabore su diagrama de cuerpo libre.



## Resolución

Antes de iniciar la elaboración del d.c.l. mencionaremos que, por las condiciones especificadas para la placa, que entre otras cosas implica un peso de la misma completamente uniforme por unidad de área (de la placa), el peso total de dicha placa estará dado por  $-Wk$ , fuerza cuya línea de acción (paralela al eje  $z$ ) pasa por el punto  $C \left( \frac{L}{3}, \frac{L}{3}, -\frac{e}{2} \right)$ , aunque también por  $C' \left( \frac{L}{3}, \frac{L}{3}, 0 \right)$ , que puede apreciarse en el croquis de la placa mostrado en la figura IV.32.

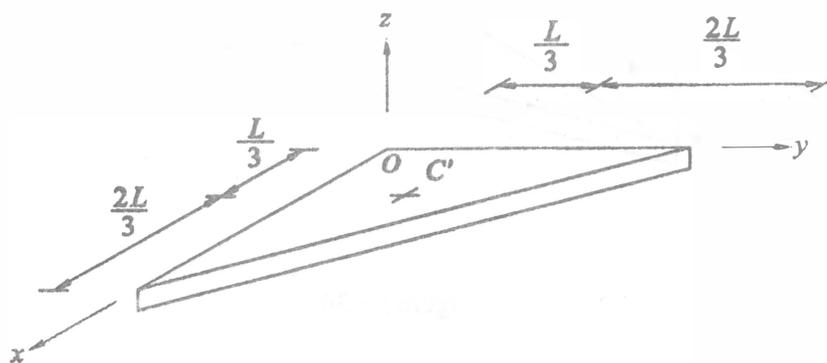


Figura IV.32

El croquis recién mencionado, una vez adicionado de los segmentos dirigidos representativos de las fuerzas que actúan sobre la placa, presenta ahora las condiciones mostradas en la figura IV.33.

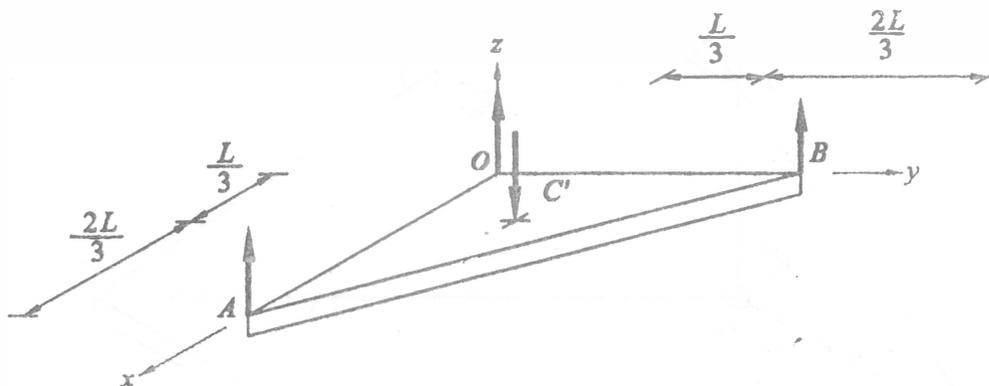


Figura IV.33

Entonces, el croquis de la figura IV.33 , ya contando con elementos indicativos de las magnitudes de las fuerzas, que actúan sobre la placa, viene siendo ya el d.c.l. solicitado; es decir, el de la figura IV.34 , donde  $T_A$ ,  $T_B$  y  $T_O$  representan a las magnitudes de las tensiones en las cuerdas que soportan a la placa en  $A$ ,  $B$  y  $O$ , respectivamente.

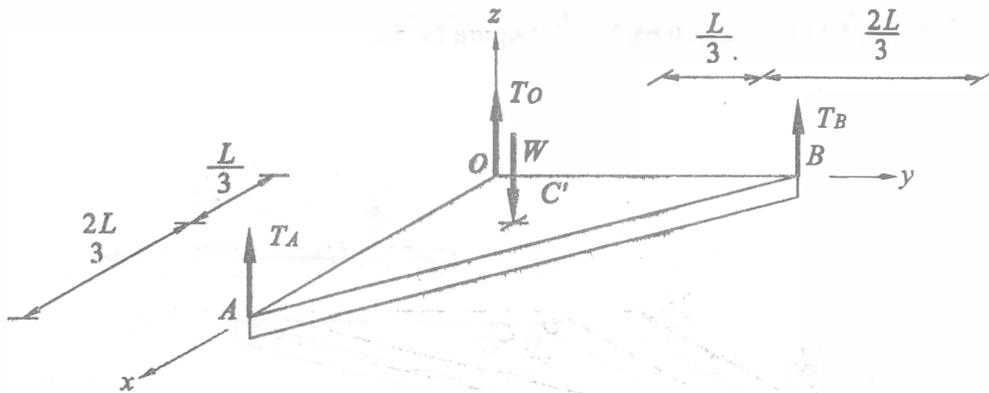


Figura IV.34

Ejemplo IV.8

La placa rectangular de la figura IV.35 es homogénea y tiene un espesor constante, pesa 42 N y se encuentra articulada en  $O$ . Además, está simplemente apoyada en  $A$  (de modo que dicho apoyo ejerce una fuerza cuyo soporte pasa por  $A$  y  $B$ ), y está soportada en posición horizontal por medio de dos cables: uno que tira de ella en la esquina  $A$  y está articulado en  $D$ , y otro que jala de la esquina  $C$  y se encuentra articulado en  $E$ . Con base en ello, dibuje el d.c.l. de la placa.

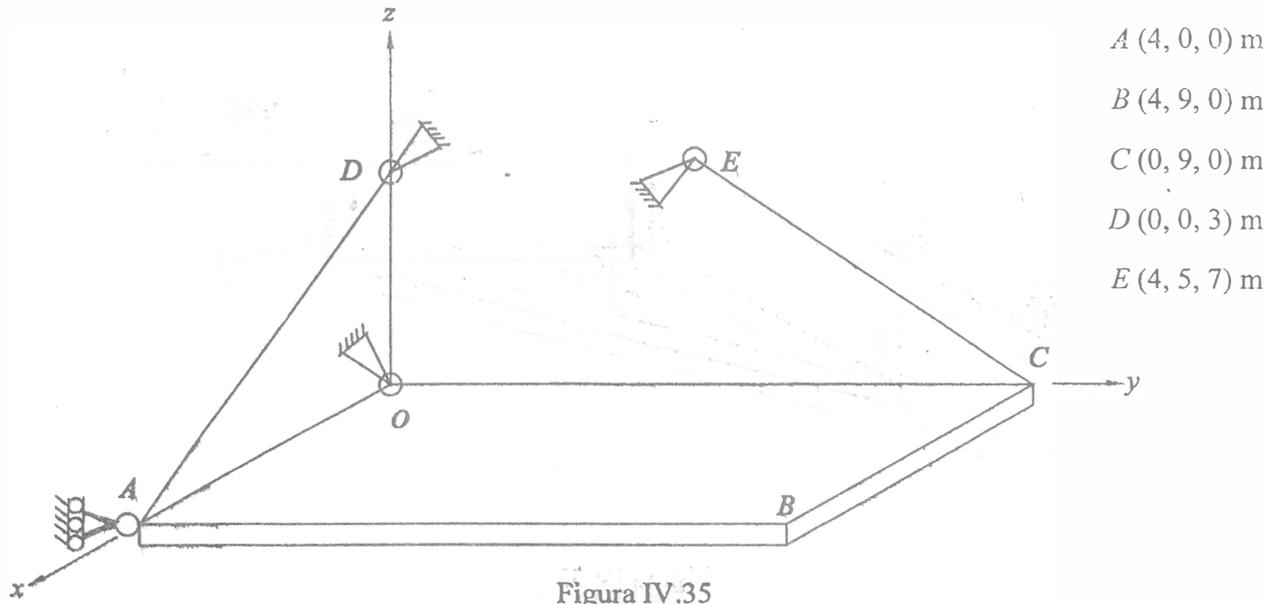


Figura IV.35

## Resolución

Antes de iniciar la elaboración del d.c.l. pedido, y teniendo en cuenta que la placa se encuentra sujeta a un sistema general de fuerzas no coplanares, habremos de precisar que la fuerza de tensión a que se encuentra sujeto el cable que jala a la placa en  $A$  tiene la dirección de la recta que pasa por  $A$  y por  $D$ , en tanto que, la fuerza de tensión a que está sujeto el cable que jala la placa en  $C$  tiene la dirección de la recta que pasa por  $C$  y por  $E$ .

A continuación presentamos dos opciones para el d.c.l. solicitado.

Primera opción.- Aquí haremos intervenir a las fuerzas que actúan (sobre la placa) sin descomponerlas, lo que conlleva la dificultad de acotar todas las distancias necesarias para ubicar tales fuerzas, ya que éstas constituyen un sistema general de fuerzas no coplanares. Combinaremos pues algunas acotaciones con las coordenadas de los puntos  $D$  y  $E$ , con la finalidad de precisar dónde y cómo actúan las fuerzas ejercidas sobre la placa.

En tales condiciones, el d.c.l. solicitado resulta el de la figura IV.36, donde  $T_A$  representa la magnitud de la fuerza ejercida por el cable que jala a la placa en  $A$ ;  $T_C$  es el módulo de la fuerza con que jala el cable que soporta a la placa en  $C$ ;  $R_A$  representa la magnitud de la fuerza (colineal con la recta que pasa por  $A$  y  $B$ ) que ejerce el apoyo, sobre la placa, en  $A$ ;  $R_O$  es el módulo de la reacción en  $O$ , cuya dirección se desconoce.

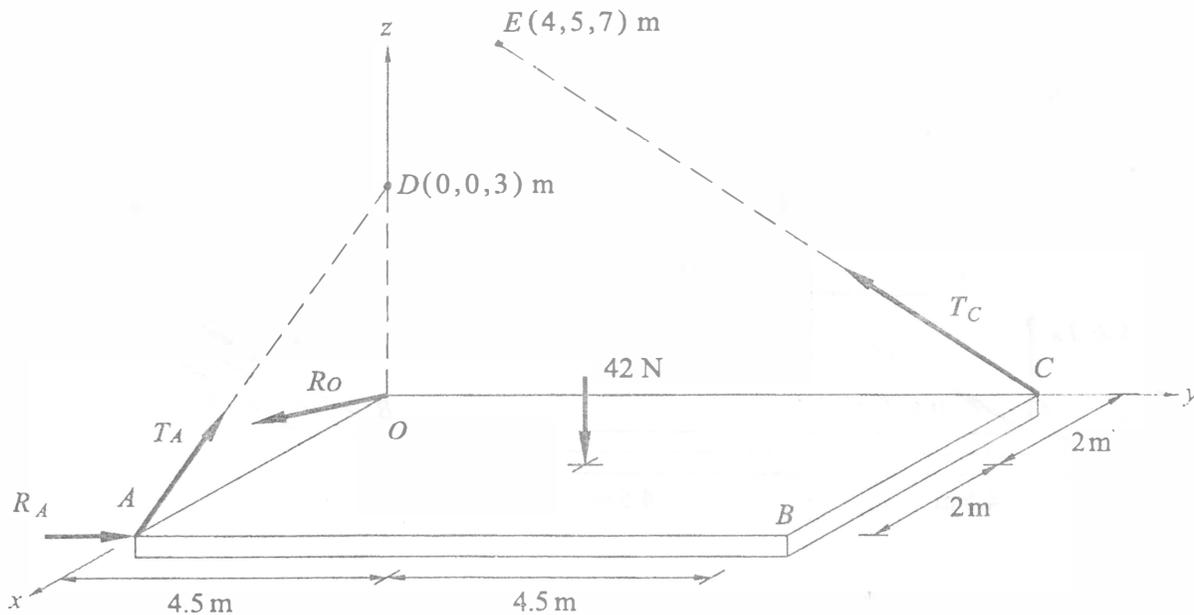


Figura IV.36

Segunda opción.- En ésta hemos de descomponer, en direcciones colineales con los ejes cartesianos, a las tensiones en los cables, así como considerar que la fuerza ejercida por la articulación en  $O$  se descompone a lo largo de las tres direcciones citadas, para presentar un d.c.l. que sólo contenga segmentos dirigidos representando fuerzas, y a un lado de ellos los módulos de éstas o lo que los represente, además de acotaciones.

Teniendo en cuenta los datos se obtiene que, las fuerzas ejercidas por los cables que sustentan a la placa en  $A$  y  $C$  están dadas, respectivamente, por:

$$T_A = -0.8 T_A i + 0.6 T_A k, \text{ donde } T_A = |T_A|, \text{ y,}$$

$$T_C = \frac{4}{9} T_C i - \frac{4}{9} T_C j + \frac{7}{9} T_C k, \text{ donde } T_C = |T_C|;$$

entonces, si además de lo especificado para  $T_A$  y  $T_C$ , consideramos que  $R_A$  representa la magnitud de la fuerza (colineal con la recta que pasa por  $A$  y  $B$ ) que ejerce el apoyo en  $A$ , sobre la placa, en tanto que  $H_1$ ,  $H_2$  y  $V$  representan respectivamente a las magnitudes de las fuerzas colineales con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , en que se descompone la fuerza ejercida por la articulación en  $O$ , el d.c.l. pedido que se muestra en la figura IV.37.

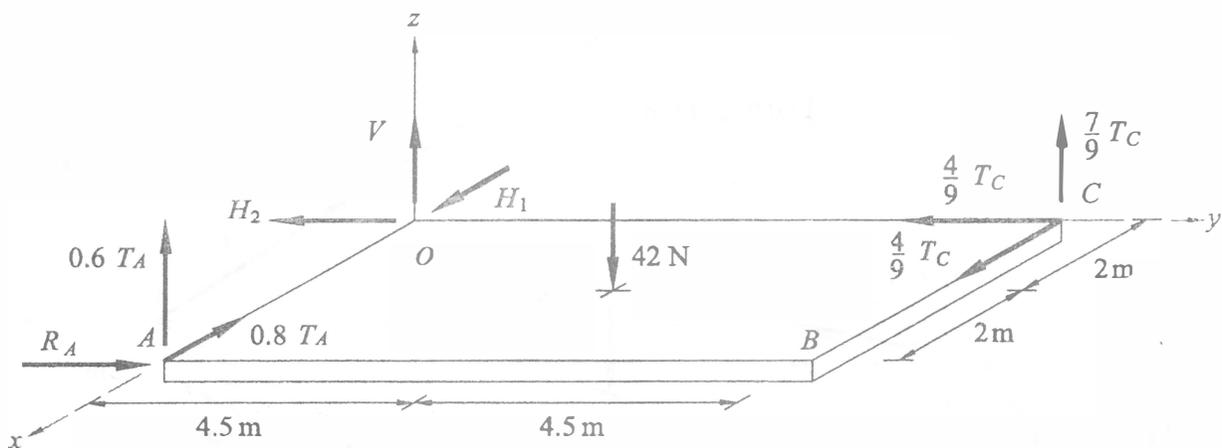


Figura IV.37

### IV.3 RECOMENDACIONES RELACIONADAS CON LOS DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE REQUERIDOS PARA RESOLVER PROBLEMAS DE EQUILIBRIO, O DE MOVIMIENTO.

Con el fin de evitar errores por distracción, se recomienda que antes de aplicar al cuerpo, o partícula en estudio, las ecuaciones de equilibrio o de movimiento, según sea el caso, junto al d.c.l. respectivo se muestre el sistema de referencia que va a emplearse durante la resolución del problema, ya sea el dado en el enunciado correspondiente o el que más nos convenga para que, de acuerdo con las características del sistema por emplear, se den los signos que les correspondan a las componentes de los vectores que intervengan en el problema. De no coincidir el sistema elegido con el dado en el problema por resolverse, habrá que expresar los resultados obtenidos en función del sistema dado.

Consideremos un sistema de referencia formado por ejes  $u$ ,  $v$  y  $w$ , ortogonales entre sí, como el que se muestra en la figura IV.38, donde  $e_u$ ,  $e_v$ , y  $e_w$  son vectores unitarios que tienen, respectivamente, la dirección y el sentido de los ejes mencionados.

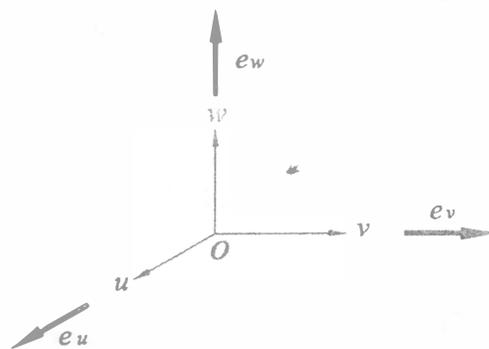


Figura IV.38

Diremos que, en tanto no cambien las posiciones que guardan entre sí los ejes del mismo, éste recibe el nombre de sistema derecho, o dextrógiro, de  $u$ ,  $v$  y  $w$ . Entre las propiedades de este tipo de sistemas se tienen las siguientes:

$$e_u \times e_v = e_w, \text{ que implica } e_v \times e_u = -e_w$$

$$e_v \times e_w = e_u, \text{ que implica } e_w \times e_v = -e_u$$

$$e_w \times e_u = e_v, \text{ que implica } e_u \times e_w = -e_v$$

En estas condiciones los momentos con respecto al eje  $u$ , debidos a fuerzas alojadas en el plano  $vw$  (o en uno paralelo a éste), llevarán la dirección y sentido de  $e_u$  cuando ellas tienden a girar en el sentido antihorario con relación al eje mencionado. Si las fuerzas tienden a girar en sentido horario con relación al eje  $u$ , sus momentos con respecto a dicho eje tendrán la dirección de  $e_u$  pero el sentido contrario a éste. Análogamente se puede hablar de los momentos con respecto a los ejes  $v$  y  $w$ , correspondientes a fuerzas alojadas en planos perpendiculares a dichos ejes.

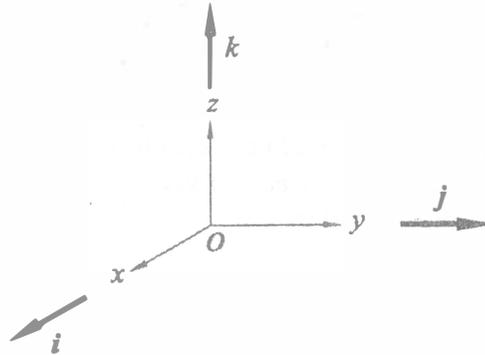


Figura IV.39

El sistema de referencia cartesiano que emplearemos regularmente en este texto será un sistema derecho de  $xyz$ , es decir como el que se ilustra en la figura IV.39. Debido a las propiedades mencionadas de los sistemas derecho, al emplear el sistema  $Oxyz$  de esta figura, tendremos:

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \quad j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

además de que, toda fuerza alojada en el plano  $xy$  (o en un plano paralelo a éste), que tienda a girar en el sentido antihorario con respecto al eje  $z$ , producirá un momento con respecto al mismo con la dirección y el sentido de dicho eje, expresado por  $M_{zz} = M_{zz} k$ , donde  $M_{zz} > 0$ ; es decir que, en estos casos, el momento mencionado tiene una componente positiva.

Si la fuerza tiende a girar en el sentido horario con respecto al eje  $z$ , el momento con respecto a dicho eje, debido a ella, estará dado por  $M_{zz} = M_{zz} k$ , donde  $M_{zz} < 0$ ; o sea que, en estos casos, el momento mencionado tiene una componente negativa.

## V. FRICCIÓN

Al desarrollar este tema nos ocuparemos básicamente de tratar lo relacionado con lo que se conoce como fricción en seco, después de haber explicado en qué consiste en general el fenómeno de la fricción, y de hacer ver que (en contraposición de lo que muchas personas afirman) las fuerzas de fricción no siempre se oponen al movimiento de los cuerpos, sino que en muchas ocasiones son quienes producen el movimiento de los mismos.

Enunciaremos las Leyes de Coulomb-Morin para fricción en seco y resolveremos ejercicios de diversos casos donde están presentes fuerzas de fricción.

Los casos en que prácticamente se tiene  $\mu_s = \mu_k$  (es decir en que los coeficientes de fricción estática y dinámica son prácticamente iguales) no son tan ideales como pudiera pensarse ya que, en muchas ocasiones y debido a las características de los elementos en contacto, las magnitudes de las fuerzas de fricción cinéticas son prácticamente iguales a las propias correspondientes fuerzas de fricción estáticas.

### V.1 FUERZA DE FRICCIÓN: DEFINICIÓN GENERAL; CASOS EN QUE OCASIONA EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO, Y CASOS EN QUE SE OPONE A QUE SE MUEVA. DESCRIPCIÓN DE LAS FUERZAS DE FRICCIÓN ESTÁTICA, DINÁMICA, EN SECO Y FLUIDA. DEFINICIÓN DE FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE.

#### V.1.1 ELEMENTOS RELACIONADOS CON EL FENÓMENO DE LA FRICCIÓN.

Antes de entrar de lleno al desarrollo de este subcapítulo haremos énfasis en algunas cosas con relación a los diagramas de cuerpo libre y a las componentes de una fuerza, elementos que intervienen de manera muy importante en el análisis y en la resolución de muy diversos problemas del ámbito de la mecánica clásica incluidos aquellos donde se presenta el fenómeno de la fricción.

1) En cualquier diagrama de cuerpo libre (d.c.l.), las fuerzas que actúen sobre el elemento en estudio deberán representarse mediante segmentos dirigidos (cuyas direcciones y sentidos sean los de dichas fuerzas) al lado de los cuales deberá anotarse la expresión matemática que proporcione su magnitud (una cantidad escalar mayor que cero, es decir un número real positivo, en caso de fuerzas de módulo constante).

Así pues, para una partícula como la de la figura V.1, sobre la cual actúan su peso y una fuerza de sentido contrario al del movimiento (debida a la fricción del aire), cuya magnitud es directamente proporcional a la rapidez del móvil, cuando después de ser lanzada verticalmente se mueve hacia arriba (lo que implica  $V = \dot{x}\mathbf{i}$  con  $\dot{x} > 0$  y  $V = \dot{z}\mathbf{k}$  con  $\dot{z} < 0$ , con relación a los ejes  $x, z$ , mostrados), sus d.c.l. vienen siendo los mostrados en la figura recién citada, mismos que contemplan las diferentes expresiones correspondientes a la magnitud de la fuerza de fricción, donde  $c > 0$  es una constante de proporcionalidad.



Figura V.1

De seguir considerando los ejes  $x, z$  recién empleados, los d.c.l. de bajada correspondientes a la etapa de movimiento hacia abajo (lo que implica  $V = \dot{x}i$  con  $x < 0$  y  $V = \dot{z}k$  con  $z > 0$ ) son los indicados en la figura V.2 (donde  $-c\dot{x}$  y  $c\dot{z}$  representan la magnitud de la fuerza de fricción ejercida por el aire).

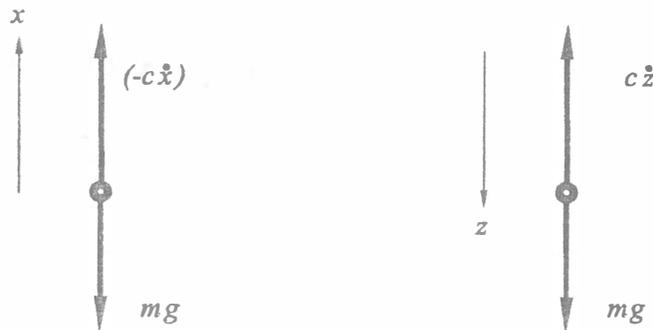


Figura V.2

- 2) El signo de la componente escalar de una fuerza determina el sentido de la proyección (también llamada componente vectorial), de dicha fuerza, sobre el eje de referencia (o el vector) con relación al cual se esté proyectando; recuerde que, *a las componentes escalares simplemente les llamamos componentes.*

Así pues, si  $Q_u$  es la proyección de una fuerza  $Q$  sobre un determinado eje  $u$ , de modo que  $Q_u = Q_u e_u$ , donde  $Q_u$  es la componente de  $Q$  sobre  $u$ , en tanto que  $e_u$  es un vector unitario con la dirección y el sentido de  $u$ : a) se tendrá  $Q_u > 0$  cuando  $Q_u$  tenga el sentido de  $u$ , y, b) tendremos  $Q_u < 0$  cuando  $Q_u$  tenga sentido contrario al de  $u$ .

Ejemplo V.1 .- Al proyectar ortogonalmente la fuerza  $P$  (de la figura V.3) sobre el eje  $x$  se obtiene el vector  $P_x = P_x \mathbf{i}$ , que tiene el sentido de dicho eje; en tanto que, al proyectarlo sobre el eje  $y$  obtenemos el vector  $P_y = P_y \mathbf{j}$ , que tiene sentido contrario al del eje recién citado.

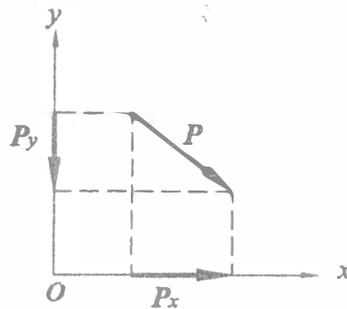


Figura V.3

De acuerdo con lo anterior se tienen  $P_x > 0$  y  $P_y < 0$ , donde  $P_x$  y  $P_y$  son las componentes de  $P$  con relación a los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Ejemplo V.2 .- Con relación a lo mostrado en la figura V.4, al proyectar ortogonalmente al vector  $a$  sobre el vector  $e_t$  se obtiene  $a_t$ , que tiene sentido contrario al de  $e_t$ , en tanto que, al proyectar  $a$  sobre  $e_n$  obtenemos  $a_n$ , cuyo sentido es igual al de  $e_n$ .

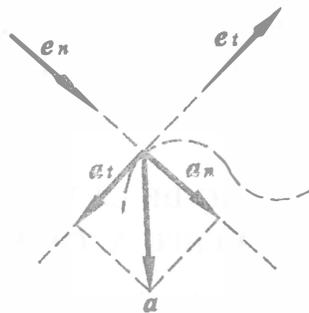


Figura V.4

Como consecuencia de ello, resultan  $a_n > 0$  y  $a_t < 0$ , donde  $a_n$  y  $a_t$  son las componentes de  $a$  con relación a  $e_n$  y  $e_t$ , respectivamente, para este caso.

Conforme a lo establecido, si una partícula realiza un movimiento rectilíneo no uniforme, describiendo una trayectoria colineal o paralela con relación al eje de referencia, la componente  $a$  de la aceleración  $a$ , con que se mueve, será positiva si  $a$  tiene el sentido del eje citado, pero  $a$  será negativa si  $a$  posee sentido contrario al de dicho eje.

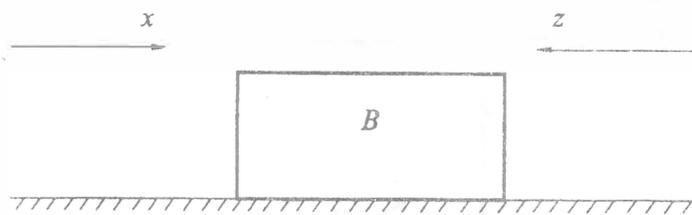


Figura V.5

Así pues, para el pequeño bloque de la figura V.5, que se mueve hacia la derecha, con una aceleración  $a$  también dirigida hacia la derecha, de magnitud igual a  $4 \text{ m/s}^2$ , considerando los ejes  $x$  y  $z$  ahí mostrados, se tienen:

$$a = a_x = \ddot{x} \mathbf{i} = 4\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad , \quad \text{y} \quad , \quad a = a_z = \ddot{z} \mathbf{k} = -4\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$

Por ello, el que una partícula se mueva con una aceleración de componente positiva no implica que su rapidez vaya incrementándose, ni el que su aceleración tenga componente negativa implica que su rapidez vaya decreciendo.

Por ejemplo, la rapidez del bloque  $B$  (de la figura V.5) va aumentando, no obstante que  $a = a_z = -4\mathbf{k} \text{ m/s}^2$ , pues lo que esto indica es que  $B$  tiene una aceleración de módulo igual a  $4 \text{ m/s}^2$  y un sentido contrario al del eje  $z$ , es decir dirigida hacia la derecha.

### V.1.2 DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO DE LA FRICCIÓN. CASOS EN QUE OCASIONA EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO Y CASOS EN QUE SE OPONE A QUE SE MUEVA.

Diremos que, el *fenómeno de la fricción se presenta cuando tiende a haber, o hay, desplazamiento relativo entre dos elementos en contacto* (dos cuerpos; un cuerpo y una determinada superficie; un cuerpo y un medio viscoso; etc.) *siempre y cuando uno de ellos, o los dos, no sea(n) prácticamente liso(s)*. Así pues, cuando tiende a haber, o hay, desplazamiento relativo entre los dos elementos citados, se generan fuerzas de interacción de modo que la fuerza de fricción que ejerce el elemento  $A$ , sobre el  $B$ , tiene la misma magnitud y la misma dirección que los propios de la fuerza que ejerce  $B$ , sobre  $A$ , pero tiene sentido contrario al de esta fuerza.

A continuación citaremos dos afirmaciones erróneas que muy comúnmente se escuchan entre los alumnos.

I. Las fuerzas de fricción **siempre** se oponen al movimiento.

II. Las fuerzas de fricción **siempre** tienen una magnitud igual a  $\mu N$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto, en tanto que  $N$  es la magnitud de la *fuerza normal* ejercida sobre la partícula o cuerpo en estudio.

Tan no es correcta la afirmación de que las fuerzas de fricción **siempre** se oponen al movimiento que, en muchos casos, son las fuerzas de fricción las que producen el movimiento de determinados objetos, como es el caso del cuerpo *A* de la figura V.6, que habrá de moverse debido a las fuerzas de fricción que sobre él ejercerán las partículas del cuerpo *B*, que se encuentren en contacto con *A*, generadas por el movimiento que realice *B* como consecuencia de la aplicación de la fuerza *P* sobre éste.

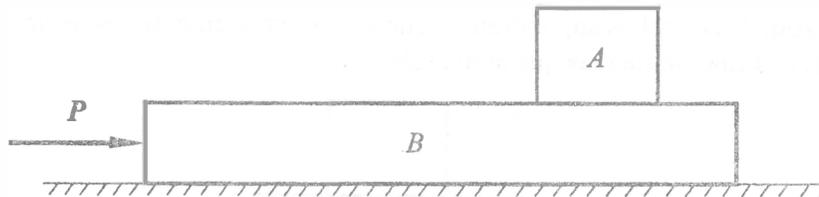


Figura V.6

Otro caso que mencionaremos aquí, para apreciar lo incorrecto de la afirmación de que las fuerzas de fricción **siempre** se oponen al movimiento, es el siguiente: considérense los discos *D* y *E* de la figura V.7, de modo que *D* es rugoso y puede subir y bajar, estando en contacto con el pasador mostrado, en tanto que *E* es prácticamente liso y no puede girar por estar fijo.

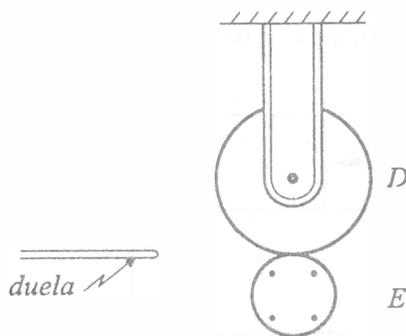


Figura V.7

En las condiciones descritas, si entre ellos se introduce una duela rugosa, que al moverse esté en contacto al menos con  $D$ , éste se moverá debido precisamente a la fuerza de fricción ejercida por la duela, sobre él; aunque ya después, por ejemplo, si súbitamente dejara de moverse la duela, dicho disco giraría con una rapidez cada vez menor (debido a la fricción).

### V.1.3 DESCRIPCIÓN DE LAS FUERZAS DE FRICCIÓN EN SECO, FLUIDA, ESTÁTICA Y DINÁMICA. DEFINICIÓN DE FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE.

Atendiendo al medio en que se generan, las fuerzas de fricción pueden subdividirse en: a) fuerzas en seco, y, b) fuerzas fluidas (viscosas).

Independientemente del medio en que se presenten, diremos que las fuerzas de fricción estática se generan cuando no hay desplazamiento relativo entre las superficies en contacto, en tanto que, las de fricción dinámica se generan cuando existe desplazamiento relativo entre las superficies (en contacto).

Para mostrar diferentes tipos de fuerzas de fricción, analizaremos dos casos relacionados con el modelo de la figura V.8, formado por un cuerpo  $A$  sobrepuesto en otro  $B$ , como se indica, donde la superficie mostrada es horizontal; en ambos supondremos que no hay volcamiento, es decir que ningún cuerpo se voltea, sea cual sea el tipo de fuerzas que actúa sobre él.

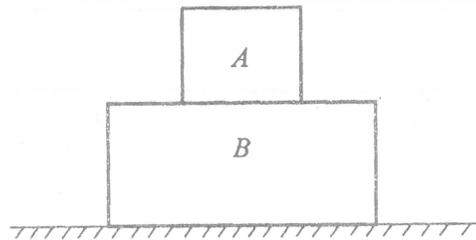


Figura V.8

CASO I) Cuando  $B$  está fijo al piso y, como se indica en la figura V.9, sobre  $A$  se ejerce una fuerza horizontal  $P$ , cuya magnitud aumenta gradualmente a partir del instante en que empieza a aplicarse. En este caso, entre  $A$  y  $B$  se generan fuerzas horizontales de interacción cuya magnitud crecerá en tanto que  $A$  no se mueva, y que (se considera) permanecerán constantes a partir del instante en que  $A$  empiece a moverse.

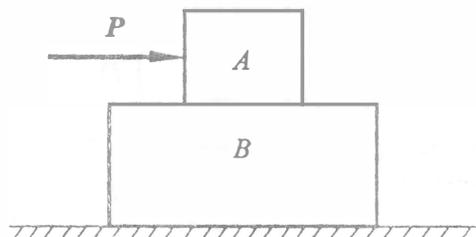


Figura V.9

La fuerza de interacción que actúa en cada uno de los cuerpos, en tanto no existe movimiento relativo entre ellos, recibe el nombre de *fuerza de fricción estática* y la representaremos mediante  $(F_r)_s$ ; a partir de que  $A$  empieza a moverse recibe el nombre de *fuerza de fricción dinámica* (o *cinética*), a la que simbolizaremos por medio de  $(F_r)_k$ .

En tales condiciones, el diagrama de cuerpo libre de  $A$  antes de iniciarse el movimiento es el de la figura V.10, mientras que, moviéndose y en tanto no se suprima la acción de  $P$ , el d.c.l. de  $A$ , es el de la figura V.11.

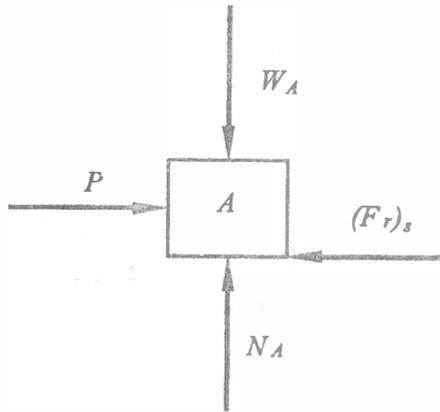


Figura V.10

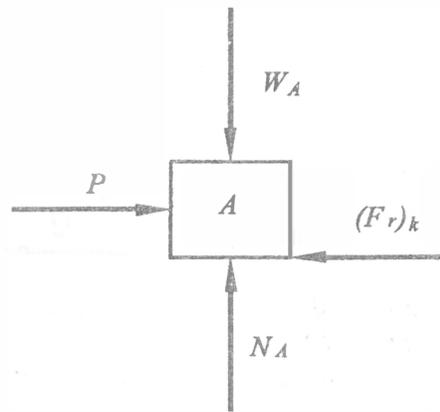


Figura V.11

Se ha observado experimentalmente que, el valor máximo que puede alcanzar la magnitud de la fuerza de fricción, que actúa sobre cada una de las dos superficies en contacto, es directamente proporcional al módulo  $N_0$  de la resultante de las fuerzas de interacción, que actúan perpendicularmente con relación a cada una de esas superficies, como consecuencia de la presión (normal) que se ejerce entre ellas; así pues, dicha proporcionalidad está regida por la igualdad

$$|(F_r)_s \text{ máx}| = \mu_s N_0 \quad \dots [15],$$

donde  $(F_r)_s \text{ máx}$  recibe el nombre de *fuerza de fricción estática límite* y  $\mu_s$  es una constante llamada coeficiente de fricción estática, cuyo valor, que depende del tipo de los materiales correspondientes a las superficies en contacto, se ha determinado para diversos casos, principalmente en laboratorios, como también se ha determinado (para diferentes tipos de superficies en contacto) el llamado coeficiente de fricción cinética, al cual comúnmente se le representa como  $\mu_k$ .

También experimentalmente se ha observado que, una vez que  $P$  logra superar a la resistencia al movimiento, debida a la fricción límite, o sea para  $P > \mu_s N_0$ , el bloque  $A$  entra en movimiento, actuando sobre él lo que se conoce como *fuerza de fricción cinética límite*,  $(F_r)_k$ , de magnitud dada (aproximadamente, ya que no permanece realmente constante) por:

$$|(F_r)_k \text{ máx}| = \mu_k N_0 \quad [16],$$

fuerza que estará actuando sobre  $A$  en tanto no deje de moverse, sobre  $B$ , aunque se suprima la acción de  $P$ .

CASO II) Cuando  $B$  está simplemente colocado sobre la superficie mostrada en la figura V.12, además de que  $A$  sólo está sobrepuesto en  $B$ , y a éste se le aplica una fuerza horizontal  $Q$  como se indica en dicha figura. En este caso pueden presentarse dos tipos de movimiento, una vez que  $Q$  logre superar a la fuerza de fricción límite que ejerza sobre  $B$  la superficie en la cual descansa este cuerpo. Los tipos de movimiento a que se ha hecho referencia son los descritos en los incisos II.a y II.b siguientes.

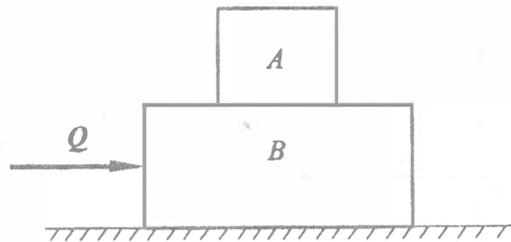


Figura V.12

II.a) Si  $A$  y  $B$  se mueven juntos. En este caso las fuerzas de fricción estática generadas entre ellos tienen una magnitud  $F_r$ , menor o igual que el valor dado por el producto  $\mu_s N_A$  (donde  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática entre  $A$  y  $B$ , en tanto que  $N_A$  es el módulo de la fuerza normal, de interacción, que se ejerce entre  $B$  y  $A$ ); a este caso le corresponden los d.c.l. de la figura V.13 para un instante cualquiera del movimiento, donde  $N_B$  es el módulo de la fuerza normal, de interacción, ejercida entre  $B$  y la superficie que lo soporta, mientras que  $(\mu T)_k N_B$  es el módulo de la fuerza de fricción cinética ejercida sobre  $B$  por la superficie mencionada.

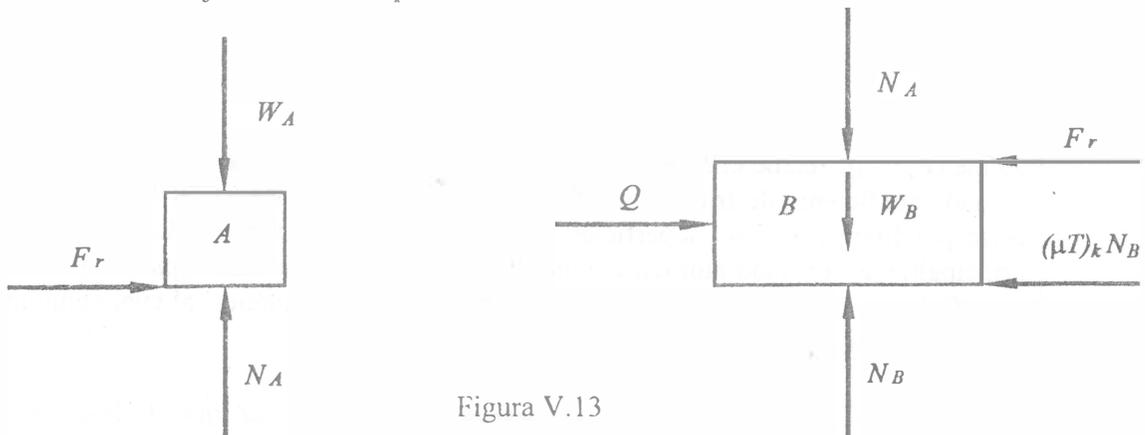


Figura V.13

II.b) Si  $A$  y  $B$  no se mueven juntos. En este caso las fuerzas de fricción (cinética) generadas entre ellos tienen un módulo igual a  $\mu_k N_A$ , donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética entre  $A$  y  $B$ ; a este caso le corresponden los d.c.l. de la figura V.14 para un instante cualquiera del movimiento.

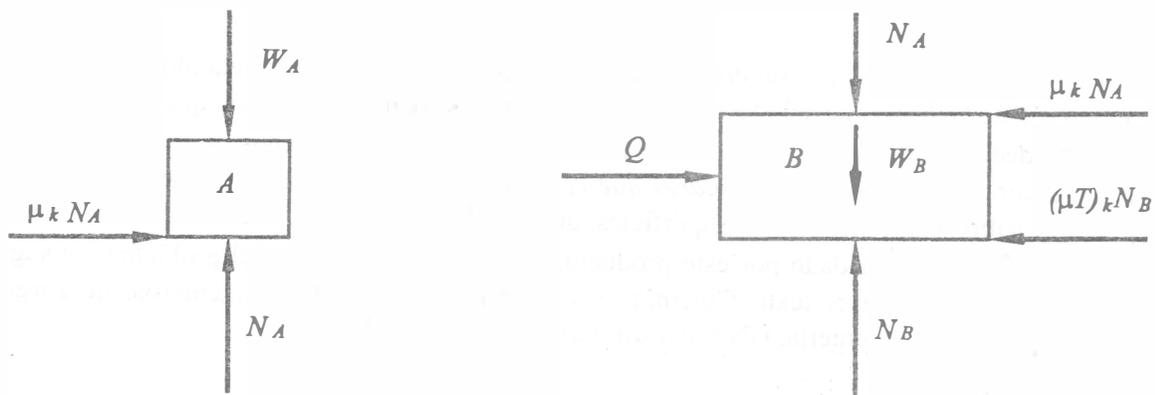


Figura V.14

En la mayoría de los casos se tiene  $\mu_k < \mu_s$  y en algunos  $\mu_k = \mu_s$ , pero nunca  $\mu_k > \mu_s$ . En los casos en que no se mencione, o no pueda intuirse, que exista diferencia entre coeficiente de fricción cinética y coeficiente de fricción estática, simplemente se considerará que dichos coeficientes son iguales; es decir que  $\mu_k = \mu_s = \mu$ .

Podría pensarse que sólo sobre cuerpos en equilibrio actúan fuerzas de fricción estática pero no es así, ya que dichas fuerzas pueden presentarse entre dos cuerpos que se muevan, siempre y cuando no exista movimiento de uno con respecto al otro. Para ilustrar esto consideraremos el modelo de la figura V.15, formado por una escuadra articulada y un bloque  $D$  colocado sobre ella, como se muestra.

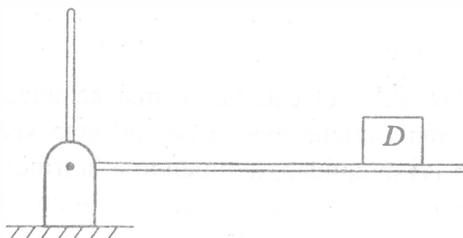


Figura V.15

Si a la escuadra se le sujeta inicialmente en la posición mostrada y después se le hace girar, lentamente y en el sentido antihorario, sobre  $D$  estará actuando una fuerza de fricción estática de magnitud creciente, en tanto no empiece a deslizar sobre la escuadra; dicha magnitud aumentará desde cero (que es el valor que le corresponde en tanto se mantenga fija a la escuadra, en posición horizontal) hasta un valor límite dado por  $\mu_s N_0$ , donde  $N_0$  será en este caso el módulo de la fuerza normal ejercida por la escuadra sobre  $D$ , cuando éste se encuentra a punto de deslizar sobre ella. Una vez que  $D$  entre en movimiento con relación a la escuadra, actuará sobre él una fuerza de fricción cinética, que sólo permanecerá constante en caso de que ya no se continúe haciendo girar a la escuadra.

Si existe rozamiento entre las superficies de contacto, no obstante que tratándose de partículas en movimiento o de cuerpos que sólo se trasladen al moverse, la fuerza de fricción que actúa sobre ellos es la límite; es decir, de magnitud  $\mu_k N_0$ . Al estudiar la dinámica de los cuerpos rígidos y específicamente en lo correspondiente a *cuerpos circulares que ruedan sin deslizar*, podrá apreciarse que la fuerza de fricción que sobre éstos ejercen las superficies que los soportan puede tener un módulo menor que  $\mu_k N_0$ , o igual que el valor dado por este producto, según las condiciones del problema; se sugiere ver esto, en su momento, en el texto *Cinemática y Dinámica Básica para Ingenieros*, de Jorge Solar, coedición Facultad de Ingeniería, UNAM-Editorial Trillas, 1998

## **V.2 LEYES DE COULOMB-MORIN PARA FRICCIÓN EN SECO. DETERMINACIÓN DE FUERZAS DE FRICCIÓN EN CASOS DONDE INTERVIENEN DOS, Y CASOS DONDE SE ENCUENTRAN MÁS DE DOS, CUERPOS EN CONTACTO, CONTEMPLANDO SITUACIONES EN QUE LOS MÓDULOS DE DICHAS FUERZAS SON PROPORCIONALES A LAS MAGNITUDES DE LAS FUERZAS NORMALES, Y SITUACIONES EN QUE NO LO SON.**

### **V.2.1 LEYES DE COULOMB-MORIN PARA FRICCIÓN EN SECO.**

El estudio del fenómeno de la fricción ha dado como resultado la creación de una ciencia reciente, denominada tribología (del griego tribos que significa fricción y logos que significa tratado).

Esta nueva ciencia se ocupa de la descripción del fenómeno de la fricción, mientras que una rama derivada de la tribología, la tribotécnica, se ocupa de la aplicación de los resultados obtenidos del estudio de dicho fenómeno.

Según Wladyslaw Roman Powlak\* , el estudio formal se inicia en 1966, cuando el Ministerio de Enseñanza y Ciencia de la Gran Bretaña evalúa por primera vez el efecto , desde el punto de vista económico, de lubricación en las máquinas; definiendo a la tribología como “la ciencia y la técnica de las superficies lubricadas que tienen rozamiento durante movimientos relativos, así como los problemas prácticos relacionados con estos procesos”.

Así se estableció que los campos de la aplicación del estudio de la tribología podrían ser:

- La física, la química y la ciencia de los materiales en las superficies que entran en contacto durante el movimiento relativo.
- La lubricación fluida, como la utilizada en hidrodinámica y aerodinámica.
- La fricción en los cuerpos sólidos.
- La lubricación durante condiciones especiales.
- Los fenómenos y procesos existentes en microregiones de fricción en máquinas.

---

\* La Tribología : Ciencia y Técnica del Estudio de la Fricción. Nota Científica México 1976.

- Los cambios de las capas exteriores de elementos mecánicos durante su operación.
- Los cambios y procesos en las sustancias lubricantes.
- Las investigaciones sobre las propiedades y aplicaciones de sustancias lubricantes.
- El almacenamiento de los lubricantes.

En la actualidad la tribología se ha extendido al estudio de los fenómenos naturales.

Actualmente la tribología se define como: “la ciencia sobre la fricción y los procesos que la acompañan: el desgaste como resultado del rozamiento, la lubricación como forma de disminuir la resistencia a la fricción”.

Al no existir una teoría completa de la fricción en seco que pueda explicar todos los fenómenos que aparecen durante el proceso, deberán seguir aplicándose los modelos que consideran su dependencia del coeficiente de fricción, los cuales son útiles para calcular la fricción sólo en ciertas condiciones.

Para su estudio, la fricción puede clasificarse en tres grupos:

- mecánica,
- molecular, y
- molecular mecánica.

La fricción mecánica, trata el problema considerando la existencia de ciertos fenómenos mecánicos macroscópicos y sólo toma en cuenta los procesos de carácter mecánico.

A este grupo pertenece el antiguo modelo de Amontons (donde la magnitud de la fuerza de fricción máxima está dada por:  $T = \mu N$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre ambos materiales y  $N$  es la magnitud de la fuerza normal del elemento), utilizado hasta la fecha, en ingeniería.

Este último modelo aunque práctico, rara vez se aplica a problemas de investigación ya que no considera la calidad de las superficies en contacto.

A este grupo también pertenece el modelo de Coulumb-Morin:  $F = A + \mu N$  y  $\mu = (F - A)/N$ , que sí considera las fuerzas de tracción existentes entre las superficies en contacto ( $A$ ), aunque su forma práctica se asemeja a la forma de Amontons.

Otro es el modelo de Bowden, que considera el problema del razonamiento con base en la existencia de esfuerzos cortantes en acoplamiento metálicos durante el deslizamiento de un elemento sobre otro y de las rugosidades en las superficies.

El segundo grupo considera aún más la estructura atómica de los materiales y las fuerzas moleculares que actúan entre las partículas, durante el contacto de dos o más elementos. Su aplicación es más frecuente en investigación.

En cuanto al tercer grupo, el modelo que relaciona los fenómenos mecánicos con los moleculares, durante la presencia del fenómeno de fricción, es el del profesor Krageleski; el cual se presenta de la siguiente forma :

$$\mu = \alpha \frac{S}{N_0} + \beta \quad , \quad \text{donde si } \mu \text{ toma la forma; } \mu = \frac{T}{N_0} \quad ,$$

se tiene:

$$T = \alpha S + \beta N_0 \quad ,$$

donde  $S$  es la superficie real de contacto;  $N_0$  la magnitud de la fuerza normal;  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes de correlación que dependen de las propiedades moleculares y mecánicas de los materiales en contacto, y  $T$  la magnitud de las fuerzas de fricción.

Ninguno de los grupos mencionados trata el coeficiente de fricción en forma general, ya que únicamente considera la fricción en seco (de deslizamiento); sin embargo, consideramos importante distinguir entre la fricción teórica y fricción en seco (de deslizamiento), ya que se observan diferencias entre los coeficientes de fricción teóricos y los prácticos.

Las diferencias se dan debido a que la fricción teórica se considera cuando se realizan los experimentos en el vacío, mientras que la fricción en seco (de deslizamiento), considera algunas capas atómicas de aire, que comúnmente se encuentran en el ambiente.

Al realizar algunos experimentos se ha observado que una pequeña capa atómica de aire puede reducir el coeficiente de fricción entre seis o siete veces.

En este texto se tomará el modelo correspondiente a Coulumb-Morin aplicado al campo de la fricción en los cuerpos sólidos, debido a que es la única teoría que lo formaliza a través de sus leyes de fricción en seco.

Después de un número de experimentos suficiente, para poder inferir algunos principios aplicables al fenómeno de la fricción en seco, Carlos Coulumb enuncia sus Leyes la Fricción en 1781, las cuales fueron comprobadas por A. J. Morin en sus experimentos realizados 50 años después , en 1831.

Antes de enunciar las leyes conocidas como de Coulomb-Morin, y que como complemento a lo expuesto en el subcapítulo V.1.3 , expondremos lo siguiente.

Consideremos a un cuerpo como el  $C$  de la figura V.16 , colocado sobre una superficie horizontal, sobre el cual actúan las siguientes fuerzas: su peso ( $W$ ), una fuerza horizontal ( $P(t)$ ), la fuerza normal ( $N$ ) que es la resultante de las fuerzas que la superficie ejerce sobre dicho cuerpo, y la fuerza de fricción ( $Fr$ ) que tal superficie ejerce sobre el citado cuerpo.

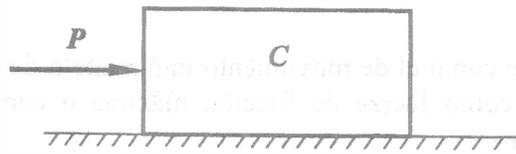


Figura V.16

Con base en lo establecido, el d.c.l. correspondiente al cuerpo descrito es el mostrado en la figura V.17.

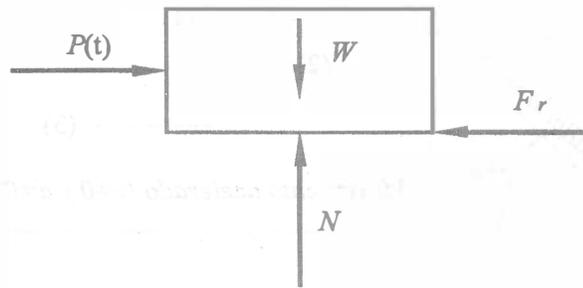


Figura V.17

De ser rugosas la superficies en contacto, al incrementarse  $P(t)$  conforme transcurre el tiempo, la magnitud de la fuerza de fricción va incrementando su valor, según se muestra en la figura V.18.

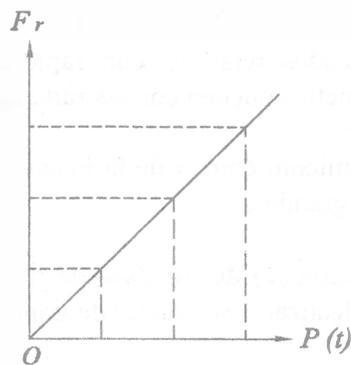


Figura V.18

Tal comportamiento se dará en tanto el cuerpo no inicie su movimiento. La experiencia ha mostrado que existe un instante en el cual el cuerpo está a punto de iniciar su movimiento; sin embargo, el estado anterior, correspondiente al instante recién citado (conocido como límite) no es posible observarlo con precisión.

Dicho estado también se conoce como el de movimiento inminente o de inestabilidad; es aquí cuando se presenta lo que se conoce como fuerza de fricción máxima o como fuerza de fricción límite, simbolizándolo con  $F_{r\text{máx}}$  o  $F_r^?$ .

Después de ese instante el cuerpo comenzará a moverse pudiéndose presentar los siguientes comportamientos.

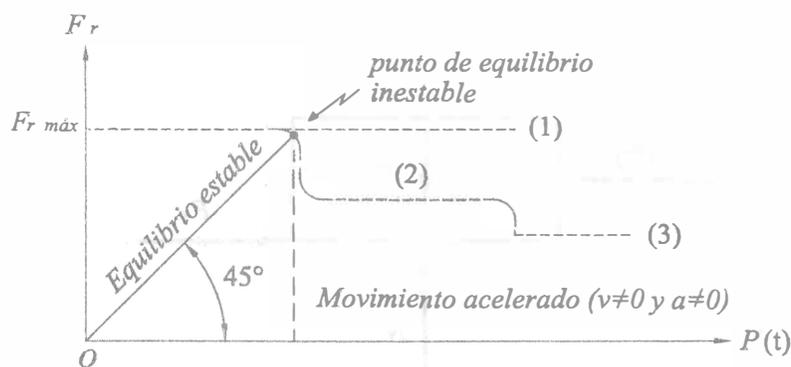


Figura V.19

En la figura V.19 se muestran el estado de equilibrio estable y el denominado punto de equilibrio inestable, así como el estado de movimiento acelerado.

La etapa (1), que se presenta al término del estado de equilibrio estable, representa el valor del módulo de la fuerza de fricción cuando el cuerpo inicia su movimiento, casi imperceptible al observador; esto se presenta en movimientos acelerados relativos con rapidez muy pequeñas, de modo que los coeficientes de fricción estática y cinética pueden considerarse iguales.

La parte (2) representa el comportamiento común de la magnitud de la fuerza de fricción, en cuanto a movimientos con rapidez no muy grandes.

La parte (3) representa el comportamiento del módulo de la fuerza de fricción cuando el cuerpo se mueve cada vez más rápido, hasta alcanzar velocidades de gran magnitud.

Después de comprobar lo establecido por Coulomb y con el apoyo de la gráfica representada en la figura V.19, Morín reafirma lo siguiente en cuanto a las leyes de fricción.

1ª Ley: El módulo de la fuerza de fricción máxima que puede expresarse es proporcional a la magnitud fuerza normal ejercida entre las superficies de contacto; esto es:  $F_{r_{\text{máx}}} \approx N$ , expresándose también  $F_{r_{\text{máx}}} = \mu_s N$ , donde  $\mu_s$  es el coeficiente de proporcionalidad,  $F_{r_{\text{máx}}} = |F_{r_{\text{máx}}}|$ , y,  $N = |N|$ .

2ª Ley: La magnitud de la fuerza de fricción máxima que puede generarse es independiente del área de las superficies en contacto, entre los cuerpos correspondientes.

3ª Ley: La magnitud de la fuerza de fricción límite es mayor que el módulo de la fuerza de fricción cinética.

4ª Ley: La magnitud de la fuerza de fricción cinética es independiente de la velocidad relativa de los cuerpos que se encuentran en contacto: esto es  $F_{r_k} = \mu_k N$ , donde  $F_{r_k} = |F_{r_k}|$ .

La segunda de estas leyes puede causar extrañeza o confusión, sin embargo, gracias a esta ley es posible realizar el estudio de la dinámica de partículas.

La cuarta de estas leyes no es del todo cierta, ya que la magnitud a que hace referencia puede alterarse si la rapidez del movimiento de una superficie, con respecto a la otra, varía considerablemente.

Así, y de acuerdo con los experimentos más recientes, se tienen las siguientes leyes complementarias para el fenómeno de la fricción:

- I. Cuando dos cuerpos en contacto se encuentran sometidos a presiones muy bajas o muy altas que pueden producir deformaciones, el valor del coeficiente de fricción estática aumenta considerablemente.
- II. Cuando un cuerpo en contacto con otro, comienza a desplazarse a una rapidez muy baja, el valor del coeficiente de fricción cinética prácticamente es igual al valor del coeficiente de fricción estática.
- III. Cuando un cuerpo en contacto con otro, se mueve con gran rapidez, el coeficiente de fricción cinética disminuye sensiblemente.
- IV. Los cambios de temperatura considerados ordinarios, no producen alteraciones al valor del coeficiente de fricción.

En recientes investigaciones se ha observado que los coeficientes de fricción varían cuando los cambios de temperatura son grandes.

En general decimos que los problemas en donde intervienen fuerzas de fricción se pueden clasificar en dos grupos:

- I. Cuando no se conoce el estado dinámico del cuerpo, es decir que no se sabe si el cuerpo está en movimiento, en reposo o se encuentra a punto de comenzar a moverse.
- II. Cuando se conoce el estado dinámico del cuerpo.

**V.2. 2 DETERMINACIÓN DE FUERZAS DE FRICCIÓN EN CASOS DONDE INTERVIENEN DOS, Y CASOS DONDE SE ENCUENTRAN MÁS DE DOS, CUERPOS EN CONTACTO, CONTEMPLANDO SITUACIONES EN QUE LOS MÓDULOS DE DICHAS FUERZAS SON PROPORCIONALES A LAS MAGNITUDES DE LAS FUERZAS NORMALES, Y SITUACIONES EN QUE NO LO SON.**

Habiendo ya descrito el fenómeno de la fricción, así como los diversos tipos de fricción y el concepto de fricción límite, además de aplicar (donde corresponda) a las leyes de Coulomb-Morin, a continuación determinaremos fuerzas de fricción, acorde con el nombre de este subcapítulo.

Antes de presentar los siguientes ejemplos mencionaremos que, acorde con la Segunda Ley de Newton, tratándose de partículas que realicen movimientos rectilíneos, o de cuerpos que sólo se trasladen de manera tal que sus puntos describan trayectorias rectas durante su movimiento, la suma de las componentes de las fuerzas actuantes, con relación a cualquier eje perpendicular a las trayectorias mencionadas, es igual a cero.

**Ejemplo V.3 .**

Los bloques *A* y *B* de la figura V.20 pesan 5 y 15 N, respectivamente, y se encuentran en reposo en la posición mostrada, estando *A* simplemente colocado sobre *B*, y éste a su vez sobre la superficie horizontal indicada. Teniendo en cuenta que el coeficiente de fricción estática entre *A* y *B* es 0.4 , en tanto que los coeficientes de fricción estática y cinética entre *B* y la superficie que lo soporta son, respectivamente, 0.30 y 0.25, y considerando que se aplica constantemente sobre *B* una fuerza dada por  $1.5P_{\text{máx}}$  , donde  $P_{\text{máx}}$  es la mayor fuerza horizontal aplicable a *B* sin que éste se mueva, obtenga los diagramas de cuerpo libre en movimiento:

- a) para el caso en que *A* y *B* se muevan juntos.
- b) para el caso en que *A* y *B* no se muevan juntos, y 0.05 sea el coeficiente de fricción cinética entre ellos.

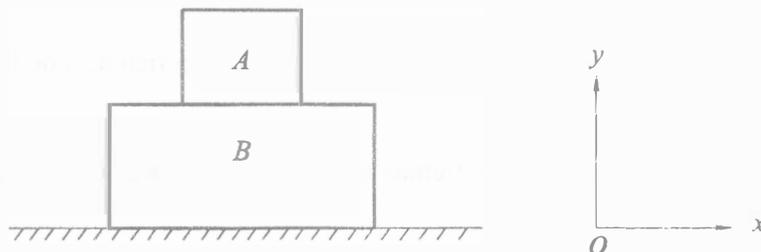


Figura V.20

Resolución.

a) Primeramente calcularemos  $P_{\text{máx}}$ , para lo cual emplearemos los d.c.l. de la figura V.21, mismos que corresponden a la última condición de reposo de los bloques.

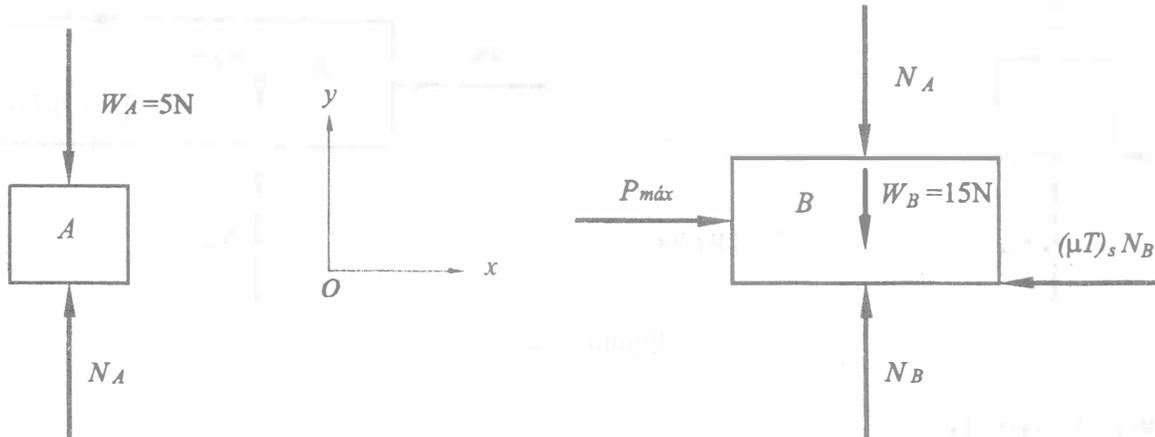


Figura V.21

Basados en estos d.c.l., donde  $P_{\text{máx}}$  representa la magnitud  $P_{\text{máx}}$ :

De  $F_y = 0$ , para el bloque  $A$ , obtenemos  $N_A - 5 = 0$ , luego

$$N_A = 5\text{N} \quad \dots (1).$$

De  $F_y = 0$ , para el bloque  $B$ , teniendo en cuenta el valor de  $N_A$ , se obtiene  $N_B - 5 - 15 = 0$ , de donde:

$$N_B = 20\text{N} \quad \dots (2),$$

con lo que:

$$(\mu T)_s N_B = (0.3)(20) = 6\text{N} \quad \dots (3);$$

teniendo en cuenta este valor, para  $B$ , de  $F_x = 0$ , se obtiene:

$$P_{\text{máx}} - 6 = 0,$$

igualdad que se cumple para:

$$P_{\text{máx}} = 6\text{N},$$

o sea para:

$$P_{\text{máx}} = 6i \text{ N}.$$

De acuerdo con esto y con el enunciado del problema, sobre  $B$  estará aplicada en forma constante una fuerza dada por  $9i \text{ N}$ , que mantendrá en movimiento tanto a  $B$  como a  $A$  en tanto éste no caiga, si es que llega a caer; entonces los d.c.l. en caso de que  $A$  y  $B$  se muevan juntos, son los mostrados en la figura V.22.

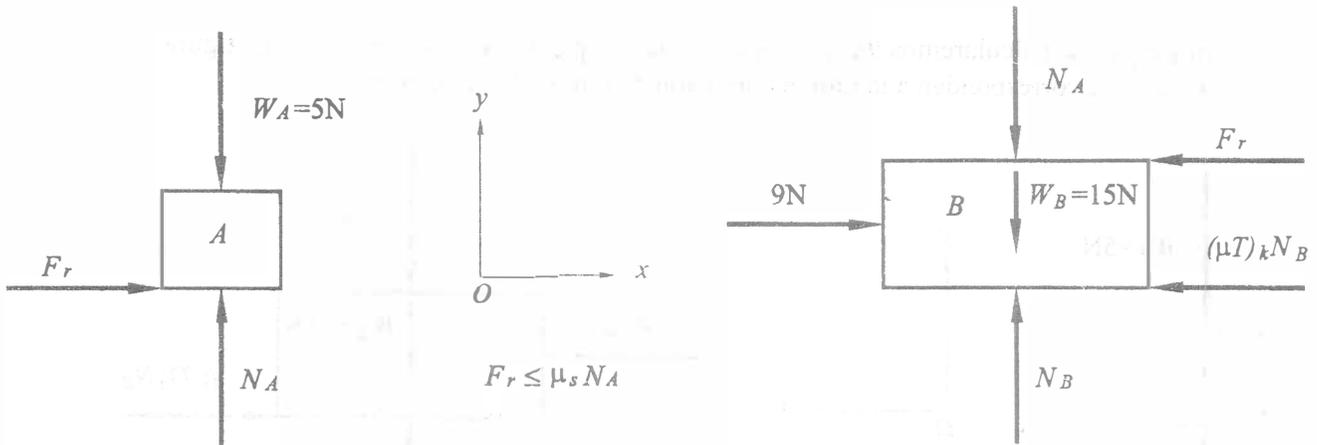


Figura V.22

Con base en dichos d.c.l.:

1) De  $F_y = 0$ , para  $A$ , se obtiene  $N_A - 5 = 0$ , que implica:

$$N_A = 5N, \quad \mu_s N_A = (0.4)(5) = 2N, \quad \text{y}, \quad F_r \leq 2N.$$

2) De  $F_y = 0$ , para  $B$ , tomando en cuenta el valor de  $N_A$ , obtenemos  $N_B - 5 - 15 = 0$ , de donde:

$$N_B = 20N,$$

con lo que:

$$(\mu T)_k N_B = (0.25)(20) = 5N.$$

b) Debido a las condiciones de este problema, así como lo especificado para este caso, se tiene:

$$\mu_k N_A = (0.05)(5) = 0.25N;$$

por ello, los d.c.l. de  $A$  y  $B$ , en caso de que no se muevan juntos son los de la figura V.23; es decir, los últimos diagramas que se pidió obtener.

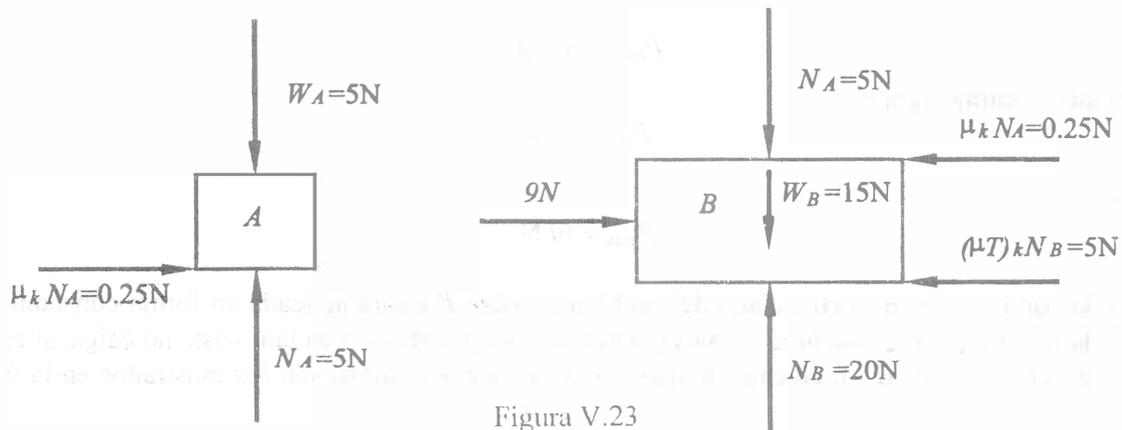


Figura V.23

Ejemplo V.4 .

Obtenga el módulo de la fuerza de fricción que actúa sobre el pequeño bloque de la figura V.24, cuyo peso es  $W$ . Considere que el coeficiente de fricción tanto estática como dinámica es 0.85 , y que el bloque se suelta en la posición mostrada.

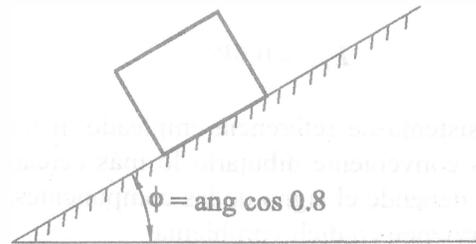


Figura V.24

Resolución.

El diagrama de cuerpo libre del bloque, después de soltarlo, es el de la figura V.25.

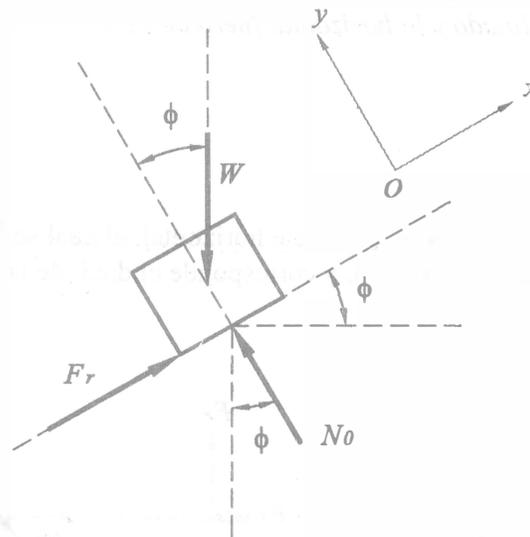


Figura V.25

Basados en dicho d.c.l., de  $F_y = 0$  obtenemos:

$$N_0 - W \cos \phi = 0 , \quad \text{luego:} \quad N_0 = W (0.8) = 0.8W ,$$

con lo que:

$$\mu N_0 = 0.85 (0.8W) = 0.68W ;$$

suponiendo que el bloque no se mueve después de soltarlo, deberá tenerse  $F_x = 0$  , o sea:

$$-W \sin \phi + F_r = 0 ,$$

lo que se cumple para:

$$F_r = W(0.6) = 0.6W,$$

como el módulo de la fuerza de fricción necesaria para que el bloque no se mueva luego de soltarlo, o sea  $0.6W$ , es menor que  $\mu N_0$ , la respuesta al ejercicio es:

$$|F_r| = 0.6W.$$

Recuerde que, no obstante que el sistema de referencia empleado al resolver cualquier problema no forma parte del d.c.l. respectivo, es conveniente dibujarlo lo más cercano posible a éste, pues de los sentidos de los ejes (que lo forman) depende el signo de las componentes, tanto de las fuerzas como de los momentos de los pares, que intervienen en dicho problema.

Se sugiere determinar cuál hubiera sido la respuesta de este ejercicio del ejemplo (V.4), si:

- a) Conservando idéntica la figura correspondiente,  $\mu = 0.6$ .
- b) Conservando idéntico el enunciado, el ángulo formado entre el plano inclinado y la horizontal fuera de  $15^\circ$ .

Ejemplo V.5.

Considere un cuerpo ubicado sobre una superficie horizontal, al cual se le aplica una fuerza paralela a la superficie citada, de magnitud dada por  $f(t)$ , y corresponde el d.c.l. de la figura V.26.

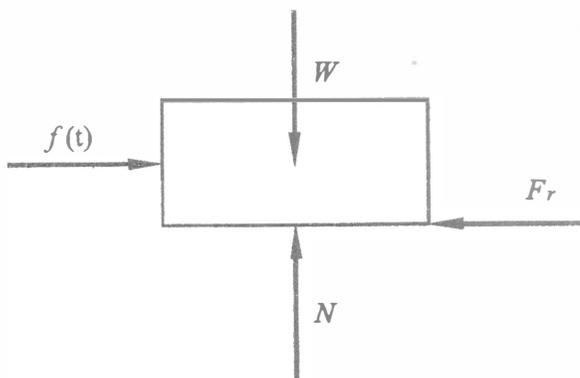


Figura V.26

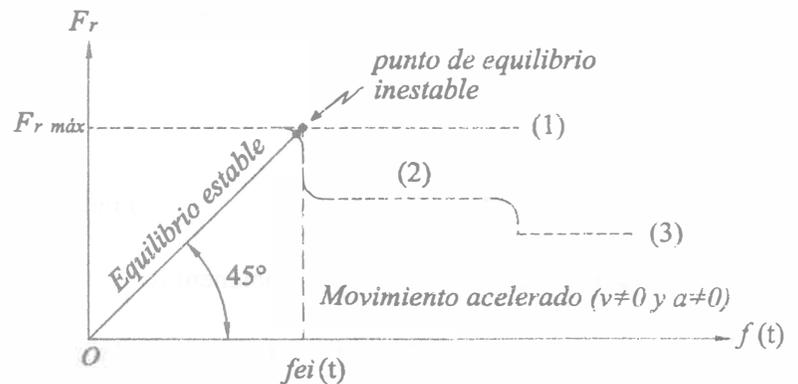


Figura V.27

De acuerdo con la gráfica indicada en la figura V.27 (donde se muestra el comportamiento de la magnitud de la fuerza de fricción de la figura V.26), se tiene:

- a) cuando  $f(t) = 0$  , la magnitud de la fuerza de fricción,  $F_r$  , también es igual a cero,
- b) cuando  $f(t)$  comienza a incrementarse, la magnitud de la fuerza de fricción también se incrementa, de tal forma que sus magnitudes son iguales (zona de equilibrio estable),
- c) en cierto instante, para el valor  $f(t) = f_{ei}$  , la fuerza de fricción es la límite ( $F_{r \text{ máx}}$  ), y,
- d) después de haber alcanzado el punto de equilibrio inestable, el cuerpo comenzará a moverse, presentándose la fuerza de fricción cinética ( $F_{rk}$ ).

Ejemplo V.6 .

Si sobre el bloque de la figura V.28 actúa una fuerza horizontal de magnitud  $P$  dada por  $P=3t$ , donde  $P$  está en newtons para  $t$  en segundos, determine para qué valor de  $t$  el bloque estaba a punto de moverse, así como la magnitud de la fuerza de fricción para  $t = 2$  y  $t = 10$  segundos.

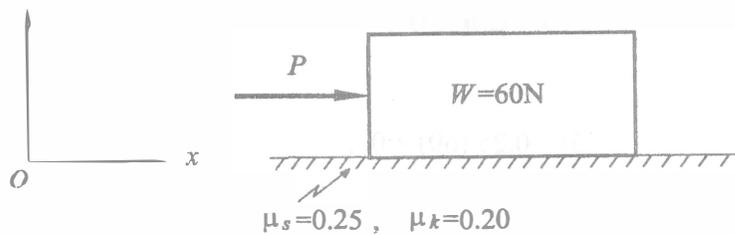


Figura V.28

Resolución.

Con base en los datos, el diagrama de cuerpo libre correspondiente a cualquier instante es el mostrado en la figura V.29 , mismo que formará parte importante de esta resolución.

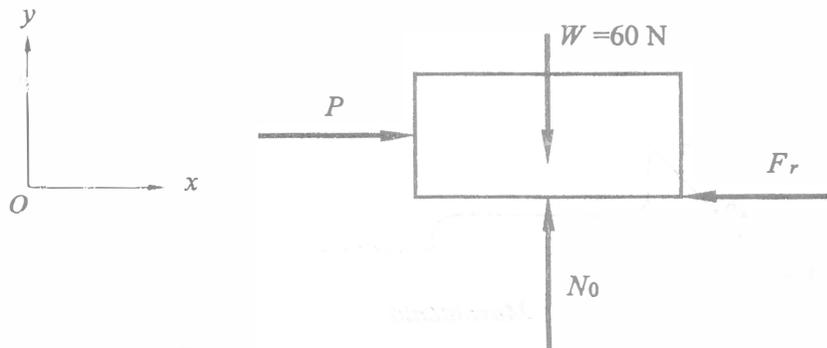


Figura V.29

a) Considerando que el bloque esta a punto de iniciar su movimiento la fuerza de fricción que actúa es la límite, y la resultante del sistema actuante es nula, es decir  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , por lo que:

$$3t \mathbf{i} - Fr \mathbf{i} - W \mathbf{j} + N \mathbf{j} = 0 \quad \dots (1),$$

lo que factorizando puede escribirse:

$$(3t - Fr) \mathbf{i} + (-W + N) \mathbf{j} = 0 \quad \dots (2);$$

sustituyendo a  $Fr$  por  $Fr_{\text{máx}} = \mu_s N_0$ , y considerando la igualdad vectorial resultan:

$$3t - \mu_s N_0 = 0 \quad \dots (3),$$

$$-W + N_0 = 0, \quad \dots (4).$$

De la ecuación (4) resulta:

$$N_0 = W = 60 \text{ N} \quad \dots (5),$$

Al llevar (5) a (3) se obtiene:

$$3t - \mu_s W = 0, \quad \dots (6).$$

es decir:

$$3t - 0.25 (60) = 0,$$

de donde resulta:

$$t = 5 \text{ s},$$

es decir que, para este valor de  $t$  el bloque estaba a punto de moverse.

b) Ahora calculamos la fuerza de fricción para  $t = 2 \text{ s}$ .

De acuerdo con lo anterior, el comportamiento de la magnitud de la fuerza de fricción, que actúa sobre el bloque de este ejemplo, se muestra en la figura V.30, donde  $Fr = 3t$  para  $0 \leq t \leq 5 \text{ s}$ , en tanto que (teóricamente) para  $t > 5 \text{ s}$ ,  $Fr$  permanecería constante, con un módulo menor que 15 N.



Figura V.30

Como a los dos segundos no se ha iniciado el movimiento, la magnitud de la fuerza de fricción para dicho instante es igual a la magnitud de la fuerza  $P$ , es decir :

$$Fr = 3t = 3(2) = 6 \text{ N} .$$

- c) Considerando la gráfica de la figura V.30 , se observa que a los 10 segundos el bloque ya se encuentra en movimiento, por lo que, de acuerdo a la 4ª. Ley de Coulomb Morin.  $Fr = \mu_k N$  y teniendo en cuenta el valor proporcionado del coeficiente de fricción cinética, así como el valor dado por (5), resulta:

$$Fr_k = 0.20 (60) = 12 \text{ N} .$$

#### Ejemplo V.7 .

Determine el módulo  $P$  de la fuerza horizontal aplicada al cuerpo de la figura V.31, cuyo peso es 750 N, de modo que esté a punto de iniciar un movimiento ascendente sobre el plano inclinado ( $\theta = 30^\circ$ , con respecto a la horizontal). Considere que el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es  $\mu_s = 0.2$  .

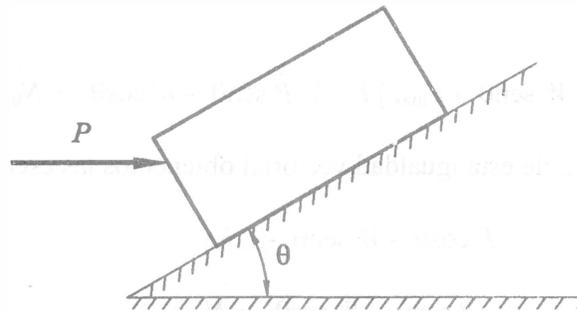


Figura V.31

#### Resolución.

Con base en los datos, el d.c.l. del cuerpo a punto de iniciarse el movimiento descrito es el que se muestra en la figura V.32 .

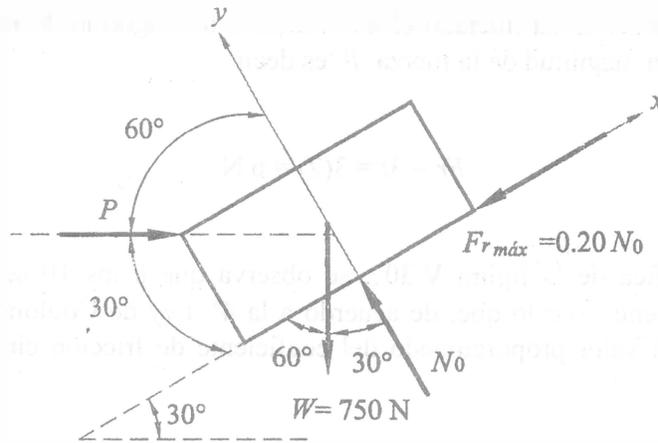


Figura V.32

En el instante citado la resultante del sistema de fuerzas actuante es nula, es decir  $R = 0$ , por lo que:

$$P + N + W + F_r = 0 \quad \dots (1),$$

condición que teniendo en cuenta lo mostrado en el d.c.l. de la figura V.32, puede escribirse como:

$$(P \cos \theta) i - (P \sin \theta) j - (W \sin \theta) i - (W \cos \theta) j + N_0 j - F_{\text{máx}} i = 0 \quad \dots (2),$$

y al factorizar:

$$[ P \cos \theta - W \sin \theta - F_{\text{máx}} ] i + [ -P \sin \theta - W \cos \theta + N_0 ] j = 0 \quad \dots (3);$$

sustituyendo  $F_{\text{máx}}$  por  $\mu_s N_0$ , de esta igualdad vectorial obtenemos las escalares:

$$P \cos \theta - W \sin \theta - \mu_s N_0 = 0 \quad \dots (4),$$

$$-P \sin \theta - W \cos \theta + N_0 = 0 \quad \dots (5).$$

Ahora, despejando a  $N_0$  de (5), se tiene:

$$N_0 = P \sin \theta + W \cos \theta \quad \dots (6),$$

valor que llevado a (4) da lugar a:

$$P \cos \theta - W \sin \theta - \mu_s P \sin \theta - \mu_s W \cos \theta = 0 \quad \dots (7);$$

factorizando a  $P$  y a  $W$  se tiene:

$$P (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) - W (\sin \theta + \mu_s \cos \theta) = 0 \quad \dots (8),$$

de donde obtenemos:

$$P = \frac{W(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{(\cos \theta - \mu_s \sin \theta)} \dots (9),$$

es decir, lo que corresponde al módulo de la fuerza  $P$  para cualquier valor de  $W$  y de  $\theta$ .

Entonces, el valor de  $P$  solicitado es:

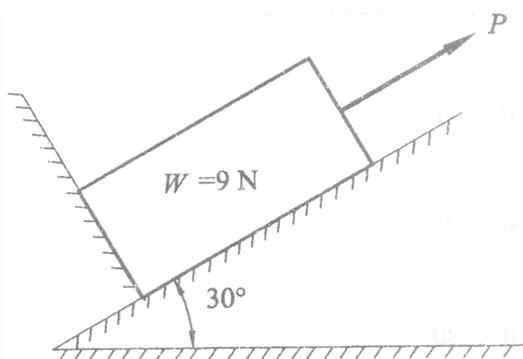
$$P = \frac{750[\sin 30^\circ - 0.2(\cos 30^\circ)]}{\cos 30^\circ - 0.2(\sin 30^\circ)} = 659 \text{ N}$$

NOTA.- Se sugiere al lector investigar cuál es el valor de  $P$  requerido para que el bloque estuviera a punto de descender sobre el plano, conservando idénticos el peso del bloque, el coeficiente de fricción y el ángulo de  $30^\circ$ .

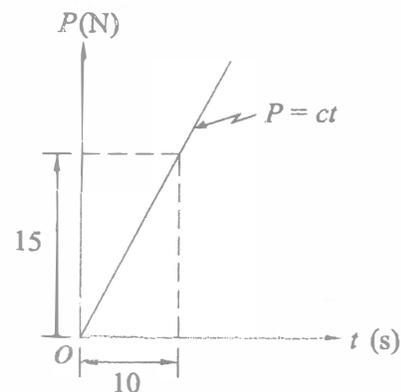
### Ejemplo V.8 .

El pequeño bloque de la figura V.33(a) se moverá como consecuencia de la acción ejercida por la fuerza mostrada, paralela al plano, cuya magnitud varía con el tiempo como se muestra en la figura V.33(b).

Considerando que el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto vale 0.5 en cualquier condición, determine para qué valor de  $t$  está a punto de moverse el bloque, así como la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre él en dicho instante. Después de ello, elabore gráficas donde se muestre con relación al tiempo, desde  $t = 0$  hasta el valor de  $t$  que recién se nos pidió determinar, cómo se comporta el módulo: a) de la fuerza que jala al bloque, b) de la fuerza de fricción, c) de la proyección del peso sobre el plano inclinado, y, d) de la fuerza que la pared ejerce sobre el bloque.



(a)



(b)

Figura V.33

Resolución.

En la figura V.34 mostramos el d.c.l. correspondiente al instante en que el bloque está a punto de iniciar el movimiento.

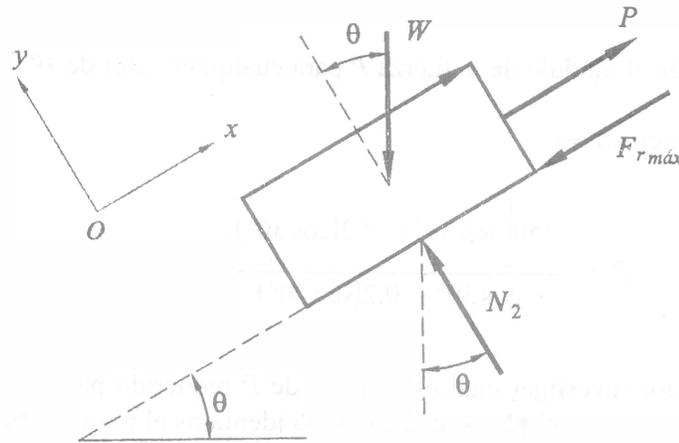


Figura V.34

En dicho estado, donde sobre el bloque actúa la fuerza de fricción límite, también se tiene que la resultante del sistema de fuerzas actuante es nula, es decir  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , debido a lo cual este modelo matemático toma la forma:

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_r + \mathbf{W} + \mathbf{N}_2 = \mathbf{0} \quad \dots (1),$$

Por (1), teniendo en cuenta los elementos de la figura V.34, se tiene:

$$P \mathbf{i} - F_{r_{\max}} \mathbf{i} - (W \operatorname{sen} \theta) \mathbf{i} + N_2 \mathbf{j} - (W \operatorname{cos} \theta) \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \dots (2),$$

expresión que puede escribirse en la forma::

$$[ P - F_{r_{\max}} - W \operatorname{sen} \theta ] \mathbf{i} + [ N_2 - W \operatorname{cos} \theta ] \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \dots (3).$$

Al ser  $F_{r_{\max}} = \mu_s N_2$ , de (3) se obtienen las siguientes dos ecuaciones escalares:

$$P - \mu_s N_2 - W \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \dots (4),$$

y,

$$N_2 - W \operatorname{cos} \theta = 0 \quad \dots (5).$$

De (5) resulta:

$$N_2 = W \operatorname{cos} \theta \quad \dots (6);$$

sustituyendo (6) en (4) se obtiene:

$$P - \mu_s W \operatorname{cos} \theta - W \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \dots (7).$$

y sustituyendo en (7) los datos del problema, obtenemos:

$$1.5 t - (0.5)(9)(\cos 30^\circ) - (9)(\sin 30^\circ) = 0 \quad , y, \quad 1.5 t = 8.397;$$

de donde resulta:

$$t = 5.598 \text{ s} \quad \dots (8).$$

Teniendo en cuenta (6) y el valor dado para  $\mu_s$ , en el instante analizado la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque es:

$$\mu_s N_2 = 0.5W \cos 30^\circ = (0.5)(9)(\cos 30^\circ) = 3.897 \text{ N}, \quad \dots (9),$$

valor que se nos pidió determinar.

Para elaborar las gráficas solicitadas, habrá que analizar las siguientes etapas:

- 1) desde  $t = 0$  hasta justo el instante, que llamaremos  $t_1$ , en que la pared que está en contacto con el bloque deja de ejercer fuerza alguna sobre dicho cuerpo; en esta etapa el bloque no tiende a moverse, debido a lo cual no se generan fuerzas de fricción.
- 2) desde el instante  $t_1$ , último instante en que no se generó fricción, hasta el instante en que el bloque está a punto de iniciar su movimiento; es decir hasta  $t = 5.598 \text{ s}$ , valor dado por (8).

El d.c.l. para cualquier instante de la primera de las dos etapas citadas se muestra en la figura V.35, donde  $Q$  representa la magnitud de la fuerza que la pared ejerce sobre el bloque. En esta etapa el bloque se encuentra en equilibrio bajo la acción de la fuerza de magnitud dada por  $3t$  (N para  $t$  en s), la fuerza de módulo  $Q$  (recién definida); el peso del cuerpo, y la resultante de las fuerzas normales ejercidas por el plano inclinado, sobre el cuerpo.

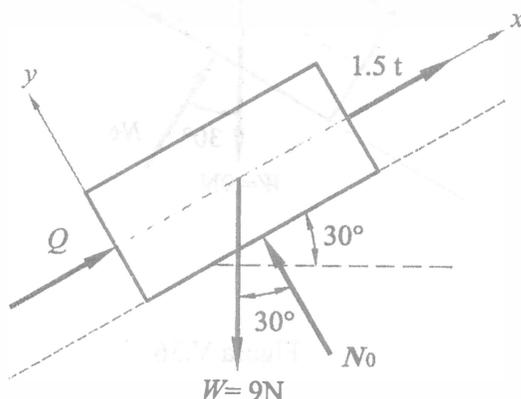


Figura V.35

Considerando los elementos del d.c.l. de la figura V.35 , al aplicar  $F_x = 0$  se obtiene:

$$Q + 1.5t - 9 \operatorname{sen}30^\circ = 0 ,$$

de donde:

$$Q = 4.5 - 1.5t \quad \dots (10),$$

debido a lo cual , esta etapa finalizará cuando:

$$0 = 4.5 - 1.5t ,$$

o sea, cuando:

$$t = 3 \text{ s}$$

(instante para el cual  $1.5t = 4.5$  equilibra a la magnitud de la proyección del peso sobre el plano inclinado, es decir a  $9 \operatorname{sen}30^\circ = 4.5 \text{ N}$ )

El d.c.l. correspondiente a cualquier instante de la segunda de las dos etapas, recién citadas, es el que presentamos en la figura V.36 , donde  $F_r$  representa la magnitud de la fuerza de fricción que el plano inclinado ejerce sobre el bloque. Obviamente, correspondiente a esta etapa, el valor inicial correspondiente a  $F_r$  es cero, y el valor final de dicha magnitud es el dado por (9) , que nosotros obtuvimos al considerar el estado en que el bloque estaba a punto de moverse.

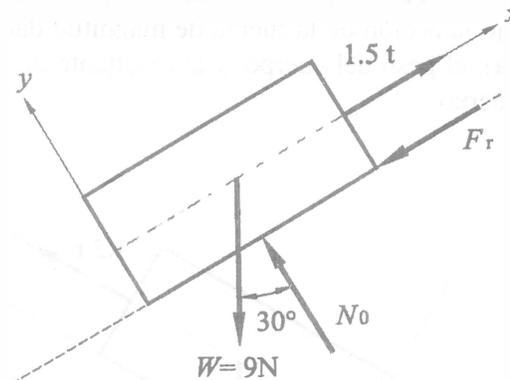


Figura V.36

Teniendo en cuenta los elementos del d.c.l. de la figura V.36 , aplicar  $F_x = 0$  obtenemos:

$$1.5t - 9 \text{sen}30^\circ - Fr = 0 ,$$

de donde resulta:

$$Fr = 1.5t - 4.5 \quad \dots (11);$$

entonces, correspondiendo a  $Fr$  una variación lineal, el valor de  $Fr$  para el primer instante de esta etapa ( $t = 1.5\text{s}$ ) se tiene:

$$Fr = 1.5(3) - 4.5 = 4.5 - 4.5 = 0 \text{ (obvio)},$$

en tanto que, para el último instante de dicha etapa:

$$Fr = 1.5 (5.598) - 4.5 = 8.397 - 4.5 = 3.897 = \mu_s N_0 ,$$

pues en este instante está a punto de iniciarse el movimiento.

Así pues con base en lo hasta aquí obtenido, las gráficas pedidas resultan las mostradas en las figuras V.37, V.38, V.39 y V.40 .

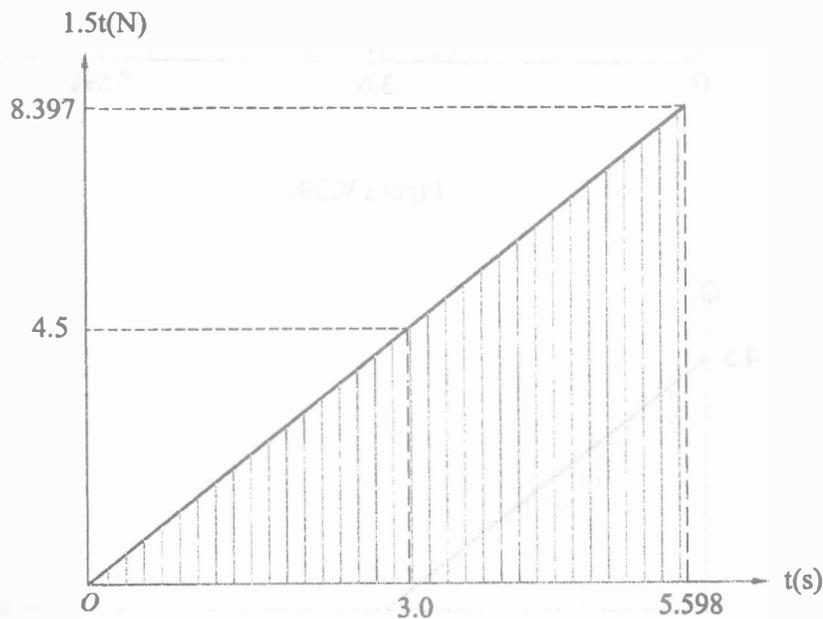


Figura V.37

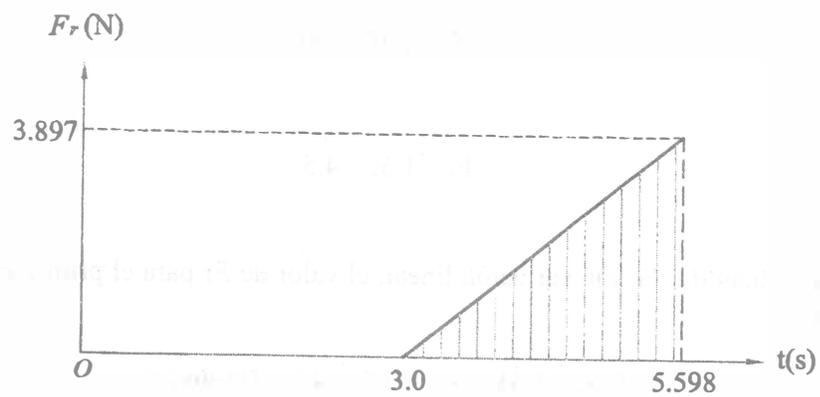


Figura V.38

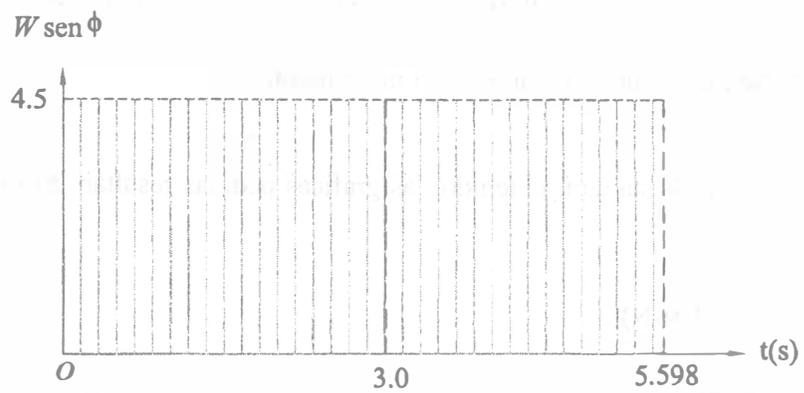


Figura V.39

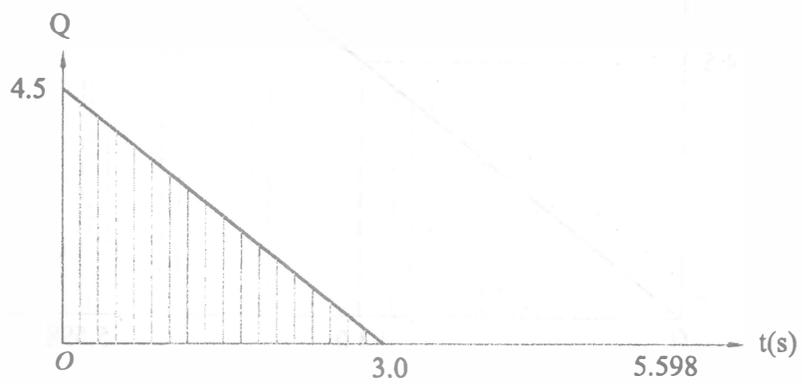


Figura V.40

Ejemplo V.9.

En la figura V.41 se muestra un sistema formado por dos cuerpos, donde el cuerpo  $A$  descansa sobre el cuerpo  $B$ . Considerando que  $A$  va a ser jalado por la fuerza horizontal  $P$  mostrada, determine cuáles serían los posibles estados de movimiento y sus condiciones.

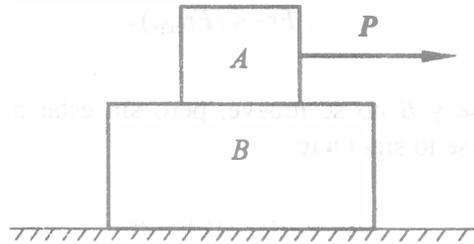


Figura V.41

Resolución.

Llamando  $P$  a la magnitud de  $P$ , los diagramas de cuerpo libre correspondientes a cada uno de los cuerpos  $A$  y  $B$  se muestran en la figura V.42.

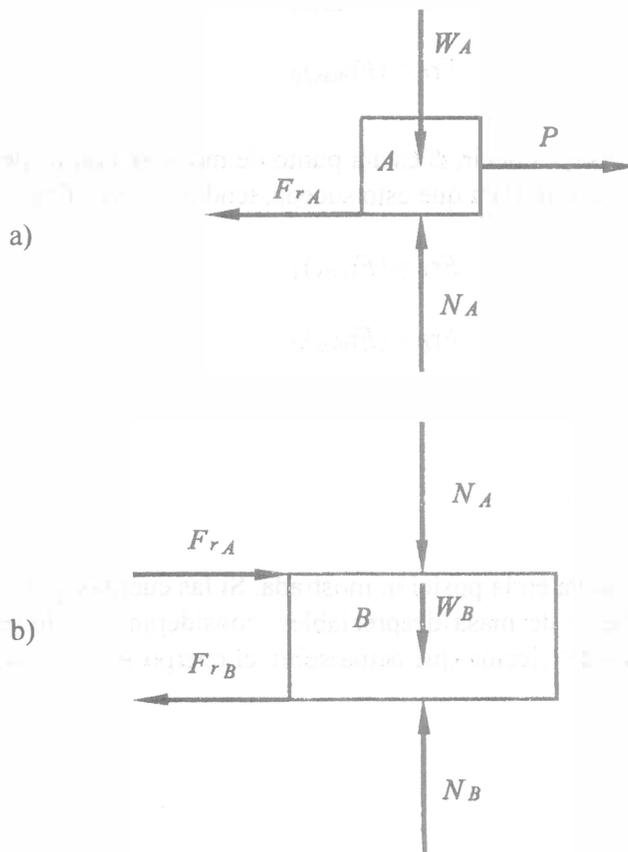


Figura V.42

Los estados posibles de movimientos son:

- 1)  $A$  y  $B$  no se mueven (movimiento nulo). Para que esto suceda, tendrá que verificarse lo siguiente:

$$Fr_A < (Fr_{\text{máx}})_A$$

$$Fr_B < (Fr_{\text{máx}})_B$$

- 2)  $A$  está a punto de moverse y  $B$  no se mueve, pero sin estar a punto de moverse. Para que esto suceda tendrá que verificarse lo siguiente:

$$Fr_A = (Fr_{\text{máx}})_A$$

$$Fr_B < (Fr_{\text{máx}})_B$$

- 3)  $A$  y  $B$  están a punto de moverse juntos. En este estado no existe movimiento relativo entre  $A$  y  $B$ , además el cuerpo  $B$  no está a punto de moverse. Para que esto suceda, tendrá que verificarse lo siguiente:

$$Fr_A < (Fr_{\text{máx}})_A$$

$$Fr_B = (Fr_{\text{máx}})_B$$

- 4)  $A$  y  $B$  están a punto de moverse; es decir,  $B$  está a punto de moverse con respecto al piso y  $A$  está a punto de moverse con respecto a  $B$ . Para que esto suceda, tendrá que verificarse lo siguiente:

$$Fr_A = (Fr_{\text{máx}})_A$$

$$Fr_B = (Fr_{\text{máx}})_B$$

Ejemplo V.10 .

El sistema de la figura V.43 se suelta en la posición mostrada. Si las cuerdas que conectan a los cuerpos son lisas, flexibles, inextensibles y de masa despreciables, considerando nulo el peso de las poleas, obtenga la magnitud de la fuerza de fricción que actúa sobre el cuerpo  $A$ , para los casos en que el peso de  $B$  sea:

- a) 550 N ,
- b) 600 N , y,
- c) 800 N .

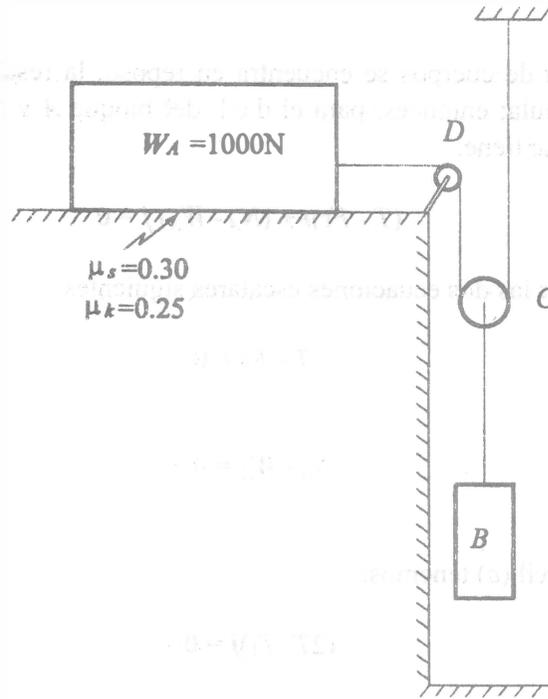


Figura V.43

Resolución.

Los diagramas de cuerpo libre correspondientes a los elementos que intervienen en la resolución de este problema son los mostrados en la figura V.44, donde también aparece el sistema de referencia por emplear.

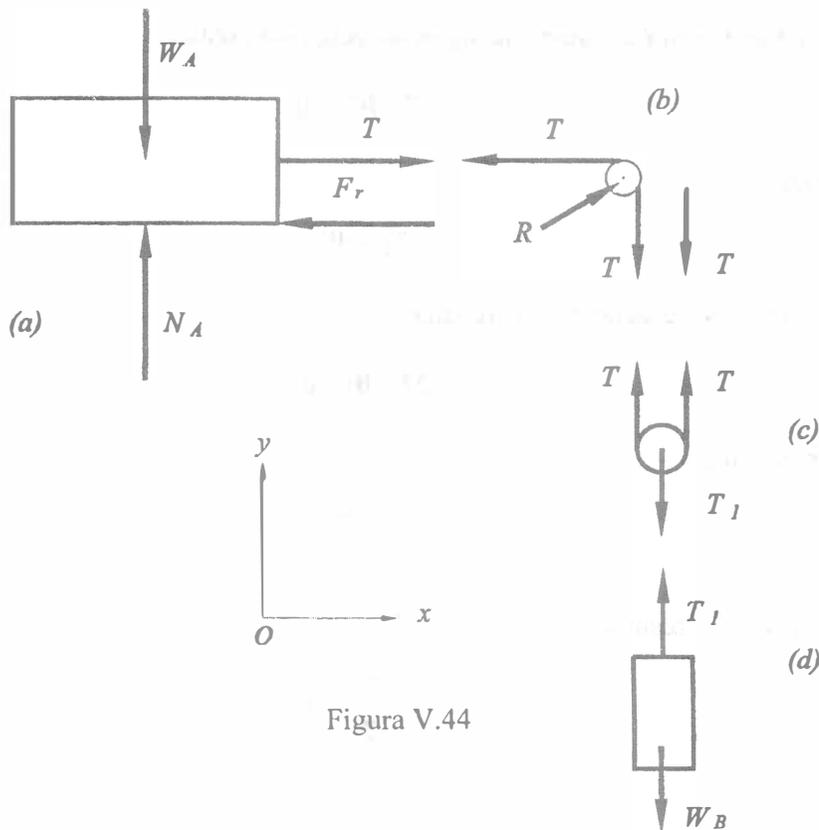


Figura V.44

Considerando que el sistema de cuerpos se encuentra en reposo, la resultante del sistema de fuerzas actuante en cada cuerpo es nula; entonces, para el d.c.l. del bloque  $A$  y de acuerdo con el sistema de referencia de la figura V.44, se tiene:

$$(T - Fr)\mathbf{i} + (N_A - W_A)\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \dots (1),$$

ecuación que permite plantear las dos ecuaciones escalares siguientes:

$$T - Fr = 0 \quad \dots (2),$$

y,

$$N_A - W_A = 0 \quad \dots (3).$$

Para el d. c. l. de la polea móvil (c) tenemos:

$$(2T - T_1)\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \dots (4),$$

ecuación vectorial que permite plantear la siguiente ecuación escalar:

$$2T - T_1 = 0 \quad \dots (5).$$

Para el d.c.l. del cuerpo B y de acuerdo con el sistema de referencia mostrado en la figura V.44(d) , se tiene:

$$(T_1 - W_B)\mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \dots (6).$$

ecuación vectorial que permite plantear la siguiente ecuación escalar:

$$T_1 - W_B = 0 \quad \dots (7),$$

De (8) obtenemos:

$$T_1 = W_B \quad \dots (8);$$

sustituyendo (8) en (5) y despejando a  $T$ , resulta:

$$2T - W = 0 \quad \dots (9);$$

ahora, de (9) obtenemos:

$$T = \frac{W_B}{2} \quad \dots (10).$$

Sustituyendo (10) en (2), resulta:

$$\frac{W_B}{2} - Fr = 0 \quad \dots (2').$$

Estos dos modelos son los que permiten calcular la  $F_r$  y compararla con la  $F_{r_{\text{máx}}}$  y con la  $(Fr)_k$ , para poder contestar los incisos del problema.

De (3) se obtiene:

$$N_A = W_A \quad \dots (11),$$

y tomando los datos del problema, resulta:

$$N_A = 1000 \text{ N}.$$

La magnitud de la fuerza de fricción máxima  $F_{r_{\text{máx}}}$  toma el valor:  $F_{r_{\text{máx}}} = \mu_s N_A$  y al sustituir datos resulta:

$$F_{r_{\text{máx}}} = 0.30 (1000)$$

o sea:

$$F_{r_{\text{máx}}} = 300 \text{ N}, \quad \dots (12).$$

que es la magnitud de la fuerza de fricción que actuará sobre el cuerpo  $A$ , a punto de que éste entre en movimiento.

La magnitud de la fuerza de fricción cinética  $(Fr)_k$  toma el valor  $(Fr)_k = \mu_k N_A$  y al sustituir datos resulta:

$$(Fr)_k = 0.25 (1000)$$

por lo que:

$$(Fr)_k = 250 \text{ N} \quad \dots (13).$$

Para cuando  $W_B = 550 \text{ N}$ ; de la ecuación (2'), la magnitud de la fuerza de fricción tomaría el valor  $F_r = \frac{W_B}{2}$  que al sustituir datos resulta:

$$F_r = \frac{550}{2}$$

$$F_r = 275 \text{ N}.$$

Al comparar este resultado con la magnitud de la fuerza de fricción máxima, se tiene que  $F_r < F_{r_{\text{máx}}}$ , por lo que (cuando  $B$  pesa 550 N) la magnitud de la fuerza de fricción es:

$$F_r = 275 \text{ N}.$$

Para el caso en que  $W_B = 600 \text{ N}$ , debido a (2'), la magnitud de la fuerza de fricción  $F_r$  toma el valor  $F_r = \frac{W_B}{2}$  y al sustituir datos resulta:

$$F_r = \frac{600}{2} = 300 \text{ N}$$

Ahora al comparar este resultado con la magnitud de la fuerza de fricción máxima se tiene que,  $F_r = F_{r_{\text{máx}}}$ , por lo que (cuando  $B$  pesa  $600 \text{ N}$ ) la magnitud de la fuerza de fricción es:

$$F_{r_{\text{máx}}} = 300 \text{ N} .$$

Para cuando  $W_B = 800 \text{ N}$ , con base en (2') podríamos afirmar que la magnitud de la fuerza de fricción tomaría el valor  $F_r = \frac{W_B}{2}$ ; al sustituir datos resulta:

$$F_r = \frac{800}{2} = 400 \text{ N} .$$

Al comparar este resultado con la magnitud de la fuerza de fricción máxima, se tiene que  $F_r > F_{r_{\text{máx}}}$ , por lo que (cuando  $B$  pesa  $800 \text{ N}$ ) la fuerza de fricción que actúa sobre  $A$  es una fuerza de fricción cinética, cuya magnitud está dada por (13); es decir:

$$(F_r)_k = 250 \text{ N} .$$

Esta conclusión pudo haberse emitido desde que se concluyó el análisis para  $W_B = 600 \text{ N}$ ; ya que, si en este caso estaba a punto de iniciarse el movimiento del sistema, para  $W_B = 800 \text{ N}$  ya existiría movimiento, debido a lo cual (para este caso) sobre  $A$  actúa una fuerza de fricción dinámica.

### V.2.3 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICA. ALGUNAS TABLAS QUE INCLUYEN COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA Y DE FRICCIÓN CINÉTICA.

Acorde con el título de este subcapítulo y con el fin de complementar lo relativo a este tema (FRICCIÓN), aquí haremos referencia de cómo se determina experimentalmente el coeficiente de fricción estática, y presentamos algunos coeficientes tanto de fricción estática como cinética.

Consideremos un cuerpo como el de la figura V.45, colocado sobre una placa articulada, que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal.

- 1) Cuando  $\theta = 0^\circ$ , la magnitud de la fuerza normal ( $N_0$ ) es igual a la magnitud del peso ( $W$ ) del bloque. En este estado no se genera ninguna fuerza de fricción.

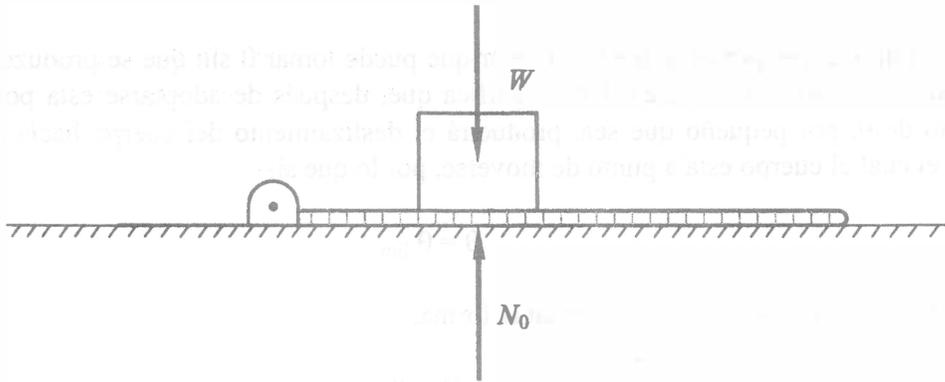


Figura V.45

- 2) Al hacer girar lentamente la placa, e irla haciendo adoptar posiciones donde  $\theta > 0^\circ$  (ver figura V.46), y considerando que no existe movimiento relativo del cuerpo con relación a la placa, se tiene que:

$$F_r = W \operatorname{sen} \theta \quad \dots (1),$$

y,

$$N_0 = W \operatorname{cos} \theta \quad \dots (2).$$

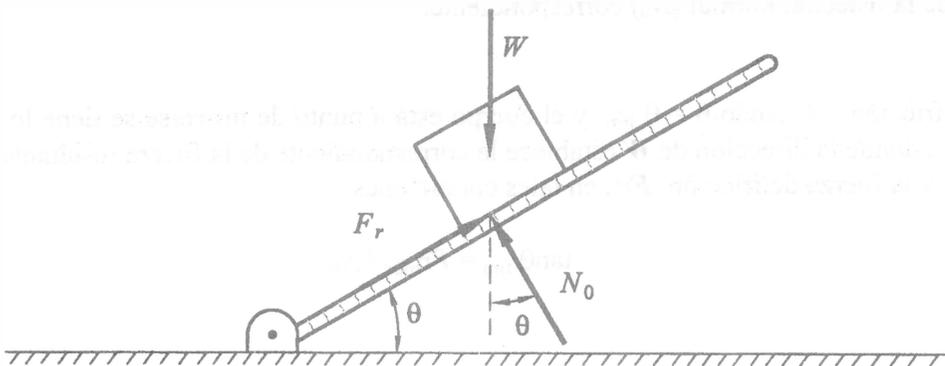


Figura V. 46

- 3) Cuando  $\theta$  alcanza el valor  $\theta$  límite (es decir cuando prácticamente está por iniciarse el movimiento del bloque sobre la placa), se alcanza también el valor máximo de la magnitud de la fuerza de fricción (fricción límite o máxima).

Es decir,  $\theta$  límite corresponde al máximo valor que puede tomar  $\theta$  sin que se produzca el movimiento del cuerpo con relación a la placa. Esto significa que, después de adoptarse esta posición, cualquier incremento de  $\theta$ , por pequeño que sea, producirá el deslizamiento del cuerpo hacia abajo. Este es el estado en el cual el cuerpo está a punto de moverse, por lo que si:

$$\theta = \theta_{\text{lím}}$$

entonces  $Fr = Fr_{\text{máx}}$  ; así , (1) y (2) toman la forma:

$$Fr_{\text{máx}} = W \text{sen} \theta_{\text{lím}} \quad \dots (1'),$$

y,

$$N_0 = W \text{cos} \theta_{\text{lím}} \quad \dots (2').$$

Dividiendo (1') entre (2') obtenemos:

$$Fr_{\text{máx}} / N_0 = \tan \theta_{\text{lím}} \quad \dots (3).$$

Combinando esta última expresión con el modelo matemático experimental de Coulomb – Morin,  $Fr_{\text{máx}} = \mu N_0$  , se obtiene que  $\tan \theta_{\text{lím}} = \mu$  .

Esto permite establecer que, con relación al proceso descrito, el coeficiente de fricción estática (entre las superficies en contacto) está definido por la magnitud de la fuerza de fricción límite ( $Fr_{\text{máx}}$ ), y por el módulo de la reacción normal ( $N_0$ ) correspondiente.

Ángulo de fricción. Cuando  $\theta = \theta_{\text{lím}}$  y el cuerpo está a punto de moverse se tiene lo mostrado en la figura V.47 , donde la dirección de  $W$  establece la correspondiente de la fuerza resultante entre la fuerza normal  $N_0$  y la fuerza de fricción  $Fr$  ; en tales condiciones:

$$\tan \theta_{\text{lím}} = Fr_{\text{máx}} / N_0$$

y,

$$\mu = Fr_{\text{máx}} / N_0 .$$

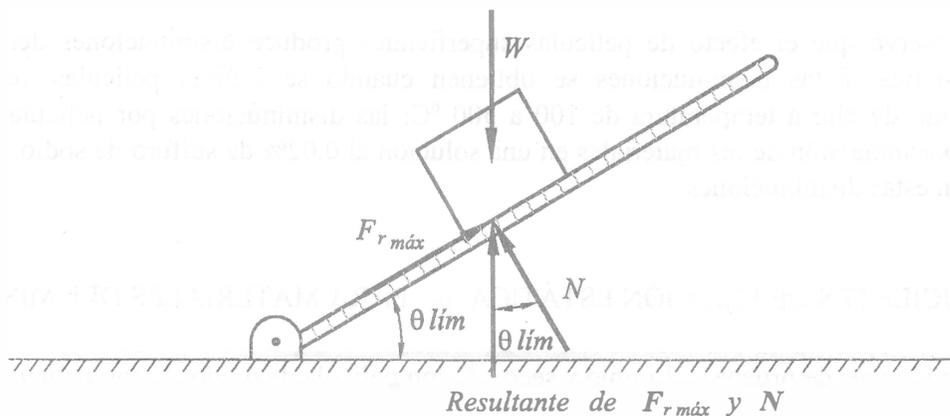


Figura V. 47

El ángulo  $\theta_{\text{lím}}$  correspondiente también al formado entre la fuerza normal  $N$  y la resultante de  $N$  y la fuerza de fricción que actúa sobre el bloque, cuando está actuando la fricción límite, se denomina ángulo de fricción. Como ya se vio, la tangente de este ángulo es igual al coeficiente de fricción estática entre las superficies consideradas.

Los coeficientes de fricción para superficies secas dependen de los materiales y de las condiciones de acabado de dichas superficies. Estos coeficientes se ven afectados por condiciones atmosféricas tales como la temperatura, la vibración, polvo, humedad, oxidación y de la contaminación de las superficies en contacto.

### EFFECTO DE LA CONTAMINACIÓN DE LAS SUPERFICIES.

En la tabla V.1 se proporcionan valores para coeficientes de fricción estática entre acero y acero, los cuales dependen del grado de contaminación de las muestras.

#### COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA PARA ACERO SOBRE ACERO.

Condiciones de prueba	$\mu_s$
Desgasificado a elevada temperatura en alto vacío (soldado por contacto) (1)	$\infty$
Libre de grasa al vacío (2)	0.78
Libre de grasa de aire (3)	0.39
Limpio y recubierto con ácido oleico (4)	0.11
Limpio y cubierto con una solución de ácido esteárico (5)	0.013

- Referencias: (1) Bowden y Young. Proc. Roy. Soc. 1951.  
 (2) Campbell. Trans ASME. 1939.  
 (3) Tomlimson. Phil. Mag. 1929  
 (4) Hardy y Doubleday. Proc. Roy. Soc. 1923.

Tabla V.1

## EFFECTO DE PELÍCULAS SUPERFICIALES.

Campell observó que el efecto de películas superficiales produce disminuciones del coeficiente de fricción estática. Estas disminuciones se obtienen cuando se forman películas de óxido por el calentamiento de aire a temperatura de 100 a 500 °C; las disminuciones por películas de sulfuro se producen por inmersión de los materiales en una solución al 0.02% de sulfuro de sodio. En la tabla V.2 se muestran estas disminuciones.

COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA  $\mu_s$  PARA MATERIALES DEL MISMO TIPO.

Condiciones de prueba	Limpio y seco	con película de oxido	con película de sulfuro
Material			
Acero sobre acero	0.78	0.27	

En la tabla V.4 se presentan coeficientes de fricción estática y de fricción cinética para casos especiales, poco frecuentes algunos de éstos.

**COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA Y CINÉTICA EN CASOS ESPECIALES.**

Material	$\mu_s$	$\mu_k$
Acero sobre hielo	0.027	
Bronce sobre hierro fundido	0.16	
Bronce sobre hierro	0.19	
Mampostería seca sobre ladrillo	0.6 a 0.7	
Madera sobre piedra pulida	0.4	
Hierro sobre piedra	0.3 a 0.7	
Mampostería sobre arcilla seca	0.51	
Mampostería sobre arcilla mojada	0.33	
Madera sobre madera	0.7	0.4
Madera sobre cuero	0.5	0.4
Madera sobre madera (lubricada con cebo, estearina y jabón blanco)		0.036 a 0.19
Madera sobre madera (lubricada con jabón blando y baja presión)		0.0385
Madera de roble sobre madera de roble	0.54 a 0.62	
Cuero sobre hierro (superficies secas)	0.56	0.28
Cuero sobre hierro (superficies engrasadas)	0.23	0.12
Correa de cuero sobre hierro fundido	0.28	
Asbesto (balata) sobre hierro colado (tambor de freno)		0.35 a 0.40

Tabla V.4

Uno de los casos más especiales y de gran aplicación es la determinación del coeficiente de fricción cinética entre llantas de hule y el pavimento de tipo asfáltico (ver tabla V.5).

**COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA Y DE FRICCIÓN CINÉTICA PARA LLANTAS DE HULE SOBRE PAVIMENTO ASFÁLTICO.**

Condiciones de prueba	Para asfalto seco	para asfalto blando o resbaloso
Material	$\mu_k$	$\mu_k$
Llantas sobre pavimento asfáltico	0.71	0.17 a 0.66

Tabla V.5

Teniendo en cuenta la presión de inflado, en la tabla V.6 se proporcionan los siguientes coeficientes de fricción para llantas sobre pavimento de tipo asfáltico.

Presión de inflado lb/in <sup>2</sup>	Pavimento Seco		Pavimento Húmedo	
	$\mu_s$	$\mu_k$	$\mu_s$	$\mu_k$
40	0.90	0.85	0.74	0.69
50	0.88	0.84	0.64	0.58
60	0.80	0.76	0.63	0.56

Tabla V.6

En la actualidad se han realizado experimentos bajo diferentes condiciones de prueba. Las pruebas fueron realizadas por la compañía Goodrich, utilizando pavimento construido con adoquines de concreto y llantas gruesas de diferente encordadura, dando los resultados mostrados en la tabla V.7.

Rapidez en millas/hora	Coeficientes de fricción			
	Estática (antes de patinar)		Cinética (después de patinar)	
	5	30	5	30
Tipo de llanta:				
llanta lisa	0.49	0.28	0.43	0.26
Estrías en circunferencia	0.58	0.42	0.52	0.36
Estrías angulares a 50°	0.75	0.55	0.70	0.39
Estrías angulares a 45°	0.77	0.55	0.68	0.44

Tabla V.7

En la tabla V.8, transcrita del manual ASME 1940-1951, se presentan coeficientes de fricción correspondientes a estados estáticos y de deslizamiento, tanto para condiciones secas como lubricadas.

## COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA Y DE DESLIZAMIENTO.

(Las letras de referencia indican los lubricantes usados, los números entre paréntesis dan las fuentes. Véanse las notas al pie de la tabla)

MATERIALES	ESTÁTICO		DE DESLIZAMIENTO	
	Seco	Grasoso	Seco	Grasoso
Acero duro sobre acero duro	0.78 (1)	0.11 (1,a) 0.23 (1,b) 0.15 (1,c) 0.11 (1,d) 0.0075 (18,p) 0.0052 (18,h)	0.42 (2)	0.029 (5,h) 0.081 (5,c) 0.080 (5,i) 0.058 (5,j) 0.084 (5,d) 0.105 (5,k) 0.096 (5,l) 0.108 (5,m) 0.12 (5,a) 0.09 (3,a) 0.19 (3,u)
Acero dulce sobre acero dulce	0.74 (19)		0.57 (3)	
Acero duro sobre grafito	0.21 (1)	0.09 (1,a)		
Acero duro sobre metal Babbit (ASTM N°1)	0.70 (11)	0.23 (1,b) 0.15 (1,c) 0.08 (1,d) 0.085 (1,e)	0.33 (6)	0.16 (1,b) 0.06 (1,e) 0.11 (1,d)
Acero duro sobre metal Babbit (ASTM N°8)	0.42 (11)	0.17 (1,b) 0.11 (1,c) 0.09 (1,d) 0.08 (1,e) 0.25 (1,b) 0.12 (1,c) 0.10 (1,d) 0.11 (1,e)	0.35 (11)	0.14 (1,b) 0.065 (1,c) 0.07 (1,d) 0.08 (11,h) 0.13 (1,b) 0.06 (1,e) 0.055 (1,d)
Acero dulce sobre cadmio-plata			0.34 (3)	0.097 (2,f) 0.173 (2,f)
Acero dulce sobre bronce fosforado				0.145 (2,f)
Acero dulce sobre cobre-plomo		0.183 (15,c)	0.23 (6)	0.133 (2,f)
Acero dulce sobre hierro fundido		0.5 (1,f)	0.95 (11)	0.3 (11,f)
Acero dulce sobre plomo	0.95 (11)		0.64 (3)	0.178 (3,x)
Niquel sobre acero dulce			0.47 (3)	
Aluminio sobre acero dulce	0.61 (8)		0.42 (3)	
Magnesio sobre acero dulce		0.08 (22,v)		
Magnesio sobre magnesio	0.6 (22)			0.04 (22,f)
Teflón sobre teflón	0.04 (22)			0.04 (22,f)
Teflón sobre acero	0.04 (22)			
Carburo de tungsteno sobre carburo de tungsteno	0.2 (22)	0.12 (22,a)		
Carburo de tungsteno sobre acero	0.5 (22)	0.08 (22,n)		
Carburo de tungsteno sobre cobre	0.35 (23)			
Carburo de tungsteno sobre hierro	0.8 (23)			
Carburo ligado sobre cobre	0.35 (23)			
Carburo ligado sobre hierro	0.8 (23)			
Cadmio sobre acero dulce			0.46 (3)	
Cobre sobre acero dulce	0.53 (8)		0.36 (3)	0.18 (17,a)
Niquel sobre niquel	1.10 (16)		0.53 (3)	0.12 (3,w)
Bronce sobre acero dulce	0.51 (8)		0.44 (6)	
Bronce sobre hierro fundido			0.30 (6)	
Zinc sobre hierro fundido	0.85 (16)		0.21 (7)	
Magnesio sobre hierro fundido			0.25 (7)	
Cobre sobre hierro fundido	1.05 (16)		0.29 (7)	
Estaño sobre hierro fundido			0.32 (7)	
Plomo sobre hierro fundido			0.43 (7)	
Aluminio sobre aluminio	1.05 (16)		1.4 (3)	
Vidrio sobre vidrio	0.94 (8)	0.01 (10,p) 0.005 (10,q)	0.40 (3)	0.09 (3,a) 0.116 (3,v)
Carbón sobre vidrio			0.18 (3)	
Granate sobre acero dulce			0.39 (3)	
Vidrio sobre Niquel	0.78 (8)		0.56 (3)	
Cobre sobre vidrio	0.68 (8)		0.53 (3)	
Hierro fundido sobre hierro fundido	1.10 (16)		0.15 (9)	0.070 (9,d) 0.064 (9,n)
Bronce sobre hierro fundido			0.22 (9)	0.077 (9,n)
Encino sobre encino (paralelo a la vena)	0.62 (9)		0.48 (9)	0.164 (9,r) 0.067 (9,s)
Encino sobre encino (perpendicular a la vena)	0.54 (9)		0.32 (9)	0.072 (9,s)
Piel sobre encino (paralelo)	0.61 (9)		0.52 (9)	
Hierro fundido sobre encino			0.49 (9)	0.075 (9,n)
Piel sobre hierro fundido			0.56 (9)	0.36 (9,t) 0.13 (9,n)
Plástico laminado sobre acero			0.35 (12)	0.05 (12,t)
Hule estriado sobre acero (cojinetes)				0.05 (13,t)

(1) Campbell, Trans. ASME, 1939; (2) Clarke, Lincoln and Sterrett, Proc. API, 1935; (3) Beare and Bowden, Phil. Trans. Roy. Soc., 1935; (4) Dokos, Trans. ASME, 1946; (5) Boyd and Robertson, Trans. ASME, 1945; (6) Sachs, Zeit. f. angew. Math. und Mech., 1924; (7) Honda and Yama la, Jour. Y of M., 1925; (8) Tomlinson, Phil. Mag., 1929; (9) Morin, Acad. Roy. des Sciences, 1838; (10) Claypoole, Trans. ASME, 1943; (11) Tabor, Jour. Applied Phys., 1945; (12) Eysen, General Discussion on Lubrication, ASME, 1937; (13) Brazier and Holland-Bowyer, General Discussion on Lubrication, ASME, 1937; (14) Burwell, Jour. SAE, 1942; (15) Stanton, "Friction", Longmans, (16) Ernst and Merchant, Conference on Friction and Surface Finish, M.I.T., 1940; (17) Gongwer, Conference on Friction and Surface Finish, M.I.T., 1940; (18) Hardy and Bircumshaw, Proc. Roy. Soc., 1925; (19) Hardy and Hardy, Phil. Mag., 1919; (20) Bowden and Young, Proc. Roy. Soc., 1951; (21) Hardy and Doubleday, Proc. Roy. Soc., 1923; (22) Bowden and Tabor, "The Friction and Lubrication of Solids" Oxford; (23) Shooter, Research, 4, 1951

(a) ácido oleico, (b) aceite para usos Atlantic (mineral ligero), (c) aceite de ricino, (d) aceite de sebo, (e) aceite Atlantic para usos más 2% de ácido oleico, (f) aceite mineral mediano, (g) aceite mineral mediano más 0.5% de ácido oleico, (h) ácido esteárico, (i) grasa a base de óxido de zinc, (j) grafito, (k) aceite de turbina más 1% de grafito, (l) aceite de turbina más 1% de ácido esteárico, (m) aceite de turbina (aceite mineral mediano), (n) aceite de olivo, (p) ácido palmítico, (q) ácido ricinoleico, (r) jabón seco, (t) agua, (u) aceite de colza, (v) aceite tres en uno, (w) alcohol octílico, (x) trioleína, (y) 1% de ácido láurico en aceite de parafina.

Tabla V.8

## VI. PRIMEROS MOMENTOS Y CENTROIDES DE SUPERFICIES PLANAS.

Al desarrollar esta parte veremos cómo se obtienen los primeros momentos y los centroides de áreas de superficies planas, ya que estos elementos son fundamentales para determinar los centros de fuerzas correspondientes a ciertos sistemas de fuerzas paralelas, distribuidas continuamente. También trataremos de dejar suficientemente claro que, aunque tradicionalmente se ha hablado de centro de gravedad de diversas superficies planas, más bien debe hablarse del centroide de las mismas, ya que el centro de gravedad es una propiedad de elementos que tienen espesor  $y$ , por lo tanto, volumen. Antes de iniciar el desarrollo de este tema hemos de mencionar que, a los primeros momentos recién citados también se les conoce como momentos estáticos de esas áreas.

### VI.1 PRIMEROS MOMENTOS DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS CON RESPECTO A DIVERSOS EJES. CENTROIDES DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS SIMPLES, DE CONFIGURACIÓN SENCILLA.

Considérese una pequeña superficie plana, de área igual a  $dA$  como se muestra en la figura VI.1, donde  $Oxy$  es un sistema de referencia,  $u$  un eje cualquiera, y  $v$  la distancia dirigida entre la superficie y el eje  $u$ .

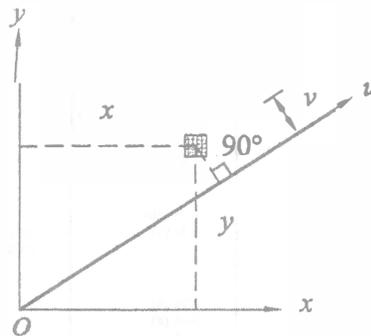


Figura VI.1

Definiremos como primer momento del área de dicha superficie, con respecto al eje  $u$  al producto  $v(dA)$ . Por ello, los primeros momentos de esa área con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente, están dados por los productos  $y dA$  y  $x dA$ , mismos que pueden ser positivos, negativos o nulos, dependiendo de la ubicación de esa superficie con relación al sistema de referencia.

Consideremos ahora una superficie plana cualquiera  $S$ , de área  $A$ , como la mostrada en la figura VI.2, donde  $v$  es la distancia dirigida de  $dA$  al eje  $u$ .

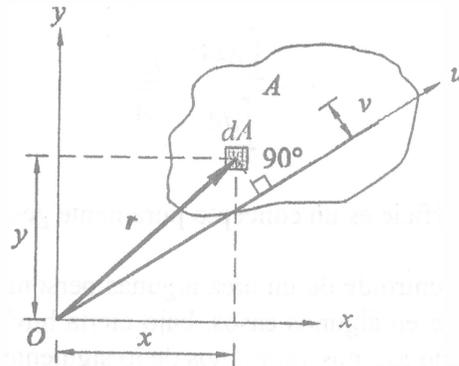


Figura VI.2

Definiremos como *primer momento del área A* de la superficie plana mostrada, *con respecto al eje u*, a la suma de los primeros momentos de las áreas de las pequeñas superficies que la forman, con respecto a dicho eje, lo anterior implica que, llamando  $Q_u$  a dicho primer momento, éste puede calcularse mediante la integral citada a continuación:

$$Q_u = \int_S v(dA) \quad [17].$$

De acuerdo con esta definición, los primeros momentos del área de una superficie plana cualquiera, con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , podrán obtenerse como.

$$Q_x = \int_S y(dA) \quad [17x],$$

y,

$$Q_y = \int_S x(dA) \quad [17y],$$

a los primeros momentos del área de una superficie plana también se les conoce como momentos estáticos, de la misma.

Como centroide del área de una superficie plana se define al punto  $C(\bar{x}, \bar{y})$ , tal que:

$$\bar{x} = \frac{\int_S x dA}{\int_S dA} = \frac{Q_y}{A} \quad [18x],$$

y,

$$\bar{y} = \frac{\int_S y dA}{\int_S dA} = \frac{Q_x}{A} \quad [18y],$$

así pues, el centroide de una superficie es un concepto puramente geométrico.

Vale la pena mencionar que, al centroide de un área algunas personas le llaman centro de gravedad de la misma. Para hacer ver que sólo en algunos casos, bajo cierta hipótesis y cumpliéndose determinada condición, tienen razón en llamarlo así, nos valdremos de lo siguiente.

En realidad, tiene sentido hablar de centro de gravedad de un cuerpo (pero no de una superficie), como el punto donde se localiza la resultante de las fuerzas representativas de los pesos de las partículas que lo conforman, pues es lógico asociar la idea de peso a elementos que tienen un cierto volumen (cualquier cuerpo), y no a superficies planas (que carecen de espesor).

Sin embargo, si consideramos que una superficie plana cualquiera, de área  $A$  (como la de la figura VI.3), tiene un determinado "peso" total  $W$ , y que dicho peso lo distribuimos uniformemente por unidad de área, el "peso" de un elemento diferencial cualquiera ( $dA$ ), de esa superficie, será:

$$w_i = \frac{W}{A}(dA) \quad \dots (1).$$

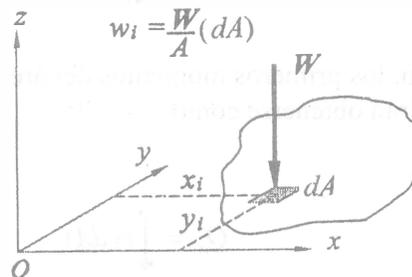


Figura VI.3

En tales condiciones, considerando un sistema de referencia  $Oyz$  como el de la figura VI.3, de modo que la superficie citada quede horizontal y ubicada en el plano  $xy$ , se tiene  $\mathbf{W} = -W\mathbf{k}$ , y;

$$w_i = -\frac{Wk}{A} (dA) = -w_i k \quad \dots (2),$$

debido a lo cual, la resultante del sistema de fuerzas paralelas  $w_i$  (es decir  $\mathbf{W}$ ) estará aplicada en un punto  $G$  (llamado centro de gravedad) cuya abcisa y ordenada podrán obtenerse, respectivamente, por medio de:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad y, \quad \dots (3),$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \dots (4),$$

donde

$$w_i = |w_i|. \quad \dots (5).$$

Considerándose (2), (5), (3) y (4), obtenemos:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{W}{A} dA\right) x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{W}{A} dA} = \frac{\frac{W}{A} \sum_{i=1}^n x_i dA}{\frac{W}{A} \sum_{i=1}^n dA} = \frac{\int_S x dA}{\int_S dA} \quad \dots (6),$$

y,

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{W}{A} dA\right) y_i}{\sum_{i=1}^n \frac{W}{A} dA} = \frac{\frac{W}{A} \sum_{i=1}^n y_i dA}{\frac{W}{A} \sum_{i=1}^n dA} = \frac{\int_S y dA}{\int_S dA} \quad \dots (7).$$

Como los cocientes (6) y (7), que proporcionan la abcisa y la ordenada del punto de aplicación del "peso" de una superficie plana, como la ahora analizada, resultaron idénticos a los que definen la abcisa y la ordenada del centroide de dicha superficie podría decirse que, bajo la hipótesis y condición aquí establecidas, el "centro de gravedad de un área" coincide con el centroide de la misma.

Sin embargo, no es aconsejable designar al centroide de una superficie plana como centro de gravedad de la misma pues, en aquellos casos en que diversas partes de una superficie plana “pesen” más (o menos) que otras, las coordenadas de los puntos mencionados ( $C$  y  $G$ ) no serán las mismas; es decir que, en muchos casos  $C$  y  $G$  no coincidirán.

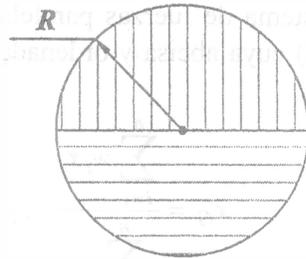


Figura VI.4

Para ilustrar esto diremos que, si la parte superior de la placa circular y de espesor constante de la figura VI.4 tiene un peso  $w_1$  por unidad de área, en tanto que la inferior pesa  $w_2$  (también por unidad de área), de modo que  $|w_2| > |w_1|$ , el centroide de dicha placa se encuentra en el centro (geométrico) de la misma, pero su centro de gravedad se localiza en un punto de la parte inferior.

Antes de proceder a resolver los ejemplos VI.1 y VI.2, donde intervienen primeros momentos y centroides, a continuación presentamos la tabla VI.1 donde pueden apreciarse los valores de las áreas y de las coordenadas del centroide de un triángulo rectángulo, de un rectángulo, de un cuarto de círculo y de un semicírculo, elementos útiles para determinar algunos centros de fuerzas.

ÁREAS Y CENTROIDES DE ALGUNAS FIGURAS PLANAS SIMPLES.

Figura	Triángulo rectángulo	Rectángulo	Cuarto de círculo	Semicírculo
Área	$\frac{ab}{2}$	$ab$	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
$\bar{x}$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	0
$\bar{y}$	$\frac{1}{3}b$	$\frac{b}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$

Tabla VI.1

Ejemplo VI.1

Determine los primeros momentos del área correspondiente al triángulo rectángulo de la figura VI.5 con respecto a los ejes cartesianos mostrados. Después de ello, obtenga las coordenadas del centroide del área de dicha superficie.

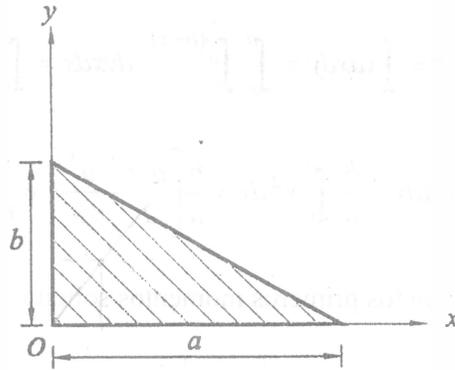


Figura VI.5

Resolución

Según se muestra en la figura VI.6 , tomaremos como  $dA$  a la diferencial de área elemental, es decir:

$$dA = dx dy \quad \dots (1).$$

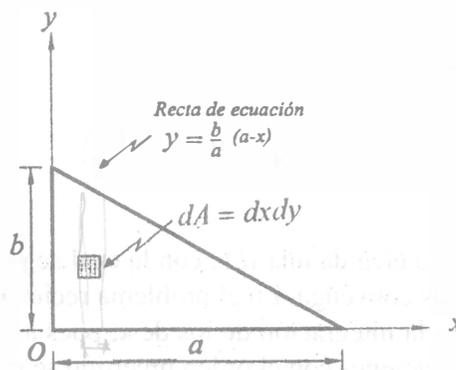


Figura VI.6

Teniendo en cuenta elementos de dicha figura, así como (1) y las expresiones [17x] y [17y], obtenemos:

$$Q_x = \int y dA = \int y dx dy = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} y dy dx = \int_0^a \left[ \frac{b^2}{2a^2} (a-x)^2 \right] dx$$

o sea:

$$Q_x = -\frac{b^2}{2a^2} \left[ \frac{(a-x)^3}{3} \right] \Big|_0^a = -\frac{b^2}{2a^2} \left[ -\frac{a^3}{3} \right] = \frac{1}{6} ab^2, \quad \dots (2),$$

y,

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_s x dA = \int_s x dx dy = \int_0^a \int_0^{b(a-x)} dy x dx = \int_0^a \left[ \frac{b}{a} (a-x) \right] x dx \\ &= \frac{b}{a} \int_0^a ax dx - \frac{b}{a} \int_0^a x^2 dx = \frac{b}{a} \left[ \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{1}{6} a^2 b; \quad \dots (3), \end{aligned}$$

los valores dados por (2) y (3) son los primeros momentos solicitados.

Sustituyendo (3) y (2) en  $[18x]$  y  $[18y]$ , respectivamente, como el área del triángulo dado es  $\frac{1}{2}ab$ , se obtienen:

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{6} a^2 b}{\frac{1}{2} ab} = \frac{1}{3} a, \quad \text{y}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{6} ab^2}{\frac{1}{2} ab} = \frac{1}{3} b,$$

que son las coordenadas pedidas.

Por eso, el centroide del triángulo dado es:

$$C \left( \frac{1}{3} a, \frac{1}{3} b \right).$$

Es importante mencionar que ya elegida una  $dA$ , con la cual se puedan valorar  $Q_x$  y  $Q_y$ , habrá que elegir el orden de integración que más convenga. En el problema recién resuelto se integraron inicialmente los términos en  $y$ , finalizando con la integración de los de  $x$ , pues así se tenía un proceso más sencillo que invirtiendo el orden. Las integraciones con el orden invertido se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_x y dA = \int_x y dx dy = \int_0^b \int_0^{a-by} dx dy = \int_0^b \left[ a - \frac{ay}{b} \right] y dy \\ &= a \int_0^b y dy - \frac{a}{b} \int_0^b y^2 dy = a \left[ \frac{b^2}{2} \right] - \frac{a}{b} \left[ \frac{b^3}{3} \right] \\ &= \frac{ab^2}{2} - \frac{ab^2}{3} = ab^2 \left[ \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right] = \frac{1}{6} ab^2, \end{aligned}$$

valor que coincide con el dado por (2) ; veamos ahora  $Q_y$  :

$$\begin{aligned}
 Q_y &= \int_S x dA = \int_S x dx dy = \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}(b-y)} x dx dy = \int_0^b \left[ \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{b} y + \frac{a^2 y^2}{2b^2} \right] dy \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^b dy - \frac{a^2}{b} \int_0^b y dy + \frac{a^2}{2b^2} \int_0^b y^2 dy = \frac{a^2}{2} (b) - \frac{a^2}{b} \left[ \frac{b^2}{2} \right] + \frac{a^2}{2b^2} \left[ \frac{b^3}{3} \right] \\
 &= \frac{a^2 b}{2} - \frac{a^2 b}{2} + \frac{a^2 b}{6} = \frac{1}{6} a^2 b,
 \end{aligned}$$

valor que iguala al dado por (3) .

También deberemos mencionar que, en algunas ocasiones podrán valuarse  $Q_x$  y  $Q_y$  mediante integrales simples, pero empleando distintas diferenciales de área para cada caso; para valuar  $Q_x$  (mediante una integral simple) puede tomarse una  $dA$  paralela al eje  $y$ , en tanto que, para obtener  $Q_y$  (también con una integral simple) podemos tomar una  $dA$  paralela al eje  $x$  .

Para el triángulo rectángulo del ejemplo VI.1 pudimos haber empleado las  $dA$  de la figura VI.7, siguiendo las indicaciones acabadas de dar.

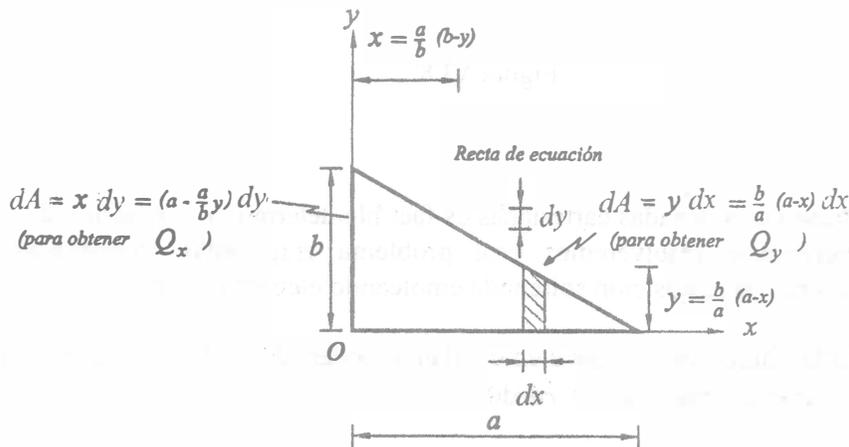


Figura VI.7

Teniendo en cuenta los elementos de la figura VI.7 , se obtiene:

$$Q_x = \int_S y dA = \int_0^b y \left( a - \frac{a}{b} y \right) dy = a \left[ \frac{b^2}{2} \right] - \frac{a}{b} \left[ \frac{b^3}{3} \right]$$

es decir :

$$Q_x = ab^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{6} ab^2,$$

valor que coincide con el dado por (2) , y,

$$Q_y = \int_s x dA = \int_0^a x \left[ \frac{b}{a} (a - x) dx \right] = \frac{b}{a} \left[ \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right] = \frac{1}{6} a^2 b,$$

valor que iguala al dado por (3) .

### Ejemplo VI.2

Determine la posición del centroide de la superficie plana de la figura VI.8 .

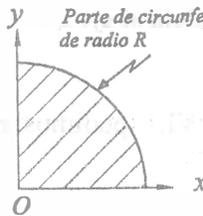


Figura VI.8

Resolución.

No obstante que empleando coordenadas cartesianas es factible determinar la posición del centroide de la figura dada, primeramente resolveremos este problema empleando coordenadas polares y, posteriormente determinaremos la posición solicitada empleando elementos cartesianos.

Tomaremos como  $dA$  a la diferencial de área elemental en coordenadas polares, es decir la mostrada en la figura VI.9 ; es decir, emplearemos  $dA = r dr d\theta$  .

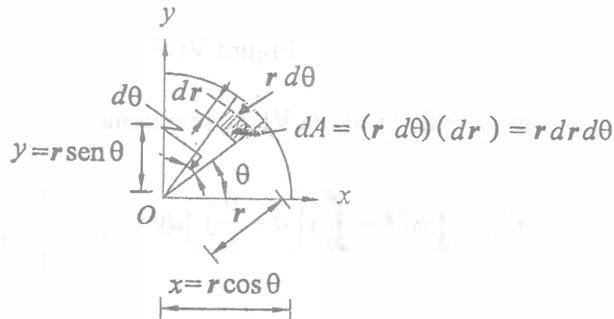


Figura VI.9

Con base en los elementos de la figura VI.9 se obtienen:

$$A = \int dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{R^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi R^2}{4} \quad \dots (1),$$

(lo cual debía obtenerse, ya que se trata de la cuarta parte del área de un círculo de radio R),

$$Q_x = \int y dA = \int (r \operatorname{sen} \theta)(r dr d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 dr \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta d\theta,$$

$$Q_x = \frac{R^3}{3} [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \quad \dots (2),$$

y,

$$Q_y = \int x dA = \int (r \operatorname{cos} \theta)(r dr d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 dr \operatorname{cos} \theta d\theta = \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cos} \theta d\theta = \frac{R^3}{3} \quad \dots (3);$$

entonces, considerando los valores dados por (3), (1) y (2), obtenemos:

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \dots (4),$$

y,

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \dots (5),$$

donde (4) y (5) proporcionan, respectivamente, la ordenada y la abscisa del centroide de la figura dada.

Ahora emplearemos las diferenciales de área que se muestran en la figura VI.10 para verificar los valores dados por (4) y (5).

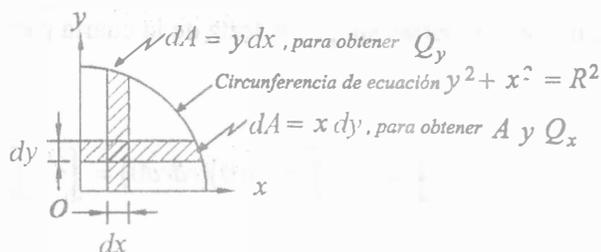


Figura VI.10

Basados en los elementos de la figura VI.10, ahora obtenemos:

$$A = \int_s dA = \int_s x dy = \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = \left[ \frac{y}{2} \sqrt{R^2 - y^2} + \frac{R^2}{2} \text{ang sen} \frac{y}{R} \right]_0^R = 0 + \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{4} \quad \dots (6),$$

valor ya proporcionado por (1);

$$Q_x = \int_s y dA = \int_s y(x dy) = \int_s xy dy = \int_0^R \sqrt{R^2 - y^2} y dy = \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = -\frac{1}{3} (-R^3) = \frac{R^3}{3} \quad \dots (7),$$

valor ya proporcionado por (2);

$$Q_y = \int_s x dA = \int_s x(y dx) = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x dx = \left[ -\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{R^3}{3} \quad \dots (8),$$

valor ya proporcionado por (3);

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \dots (9),$$

valor ya proporcionado por (4);

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{4}} = \frac{4R}{3\pi} \quad \dots (10);$$

valor ya proporcionado por (5);

así pues, (9) y (10) verifican los valores dados por (4) y (5), respectivamente, como ordenada y abcisa del centroide del área dada.

## **VI.2 CENTROS DE FUERZAS CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS DISTRIBUIDAS CONTINUAMENTE, PARA CASOS EN QUE LAS FUERZAS TIENEN MAGNITUD CONSTANTE, Y PARA CASOS EN QUE SU MAGNITUD VARIA LINEALMENTE. CENTROIDES DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS COMPUESTAS, DE CONFIGURACIÓN SENCILLA**

El tratamiento de este subtema lo haremos subdividiendo al mismo en lo que corresponde a centros de fuerzas, y en lo correspondiente a los centroides recién citados, según puede apreciarse a continuación.

### **VI.2.1 CENTROS DE FUERZAS CORRESPONDIENTES A SISTEMAS DE FUERZAS PARALELAS DISTRIBUIDAS CONTINUAMENTE, PARA CASOS EN QUE LAS FUERZAS TIENEN MAGNITUD CONSTANTE, Y PARA CASOS EN QUE SU MAGNITUD VARIA LINEALMENTE.**

En el estudio de la estática y en el análisis estructural, es muy común encontrarse con la necesidad de conocer dónde puede considerarse concentrada la resultante de un sistema de fuerzas coplanares distribuidas continuamente, tanto para casos en que las fuerzas tienen magnitud constante, como para casos en que dicha magnitud varía linealmente, ya sea creciendo o decreciendo. El centro de fuerzas del sistema se define como el punto donde actúa la resultante de dicho sistema.

Cuando se trata de un sistema de fuerzas coplanares de magnitud constante, la representación de tal sistema, como es el caso del aplicado sobre la viga  $AB$  de la figura VI.11, se haría ortodoxamente según se muestra en la figura recién citada.

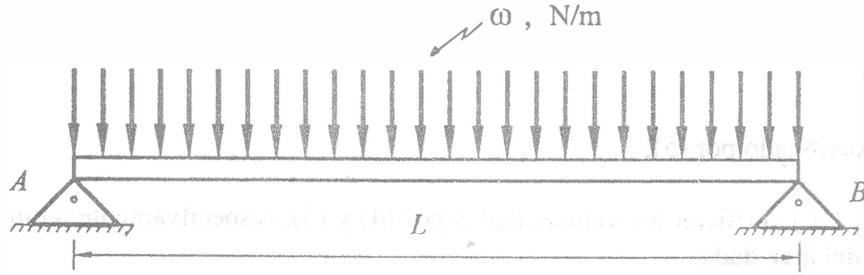


Figura VI.11

No obstante lo anterior, la representación más comúnmente empleada es la que mostramos en la figura VI.12 .

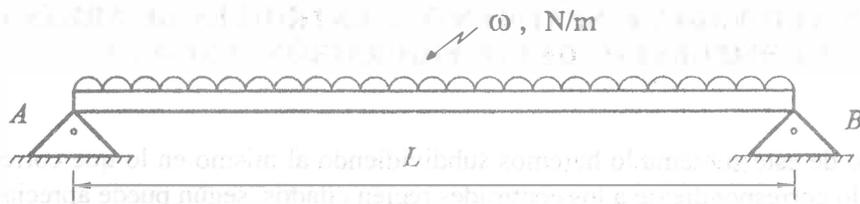


Figura VI.12

En virtud de que la distribución ahora analizada es tan continua como la distribución de área de un rectángulo de base  $L$  , se infiere que la resultante de la carga (de las figuras VI.11 y VI.12), cuya magnitud es  $\omega L$  , se encuentra exactamente a la misma distancia de  $A$  que de  $B$  ; en este caso  $L/2$  ; o sea que, para efecto de calcular las reacciones en los apoyos  $A$  y  $B$ , dicho cálculo lo haríamos con base en lo mostrado en la figura VI.13 ; es decir, considerando que el centro de fuerzas del sistema dado se encuentra a  $L/2$  tanto de  $A$  como de  $B$  .

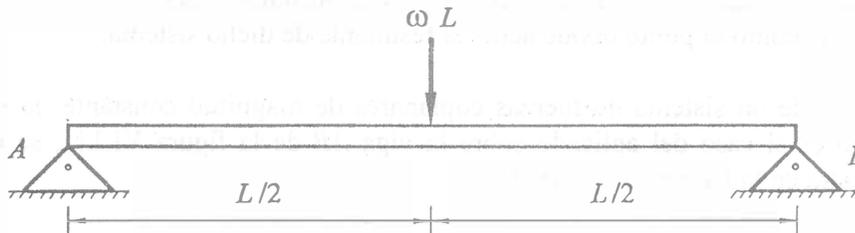


Figura VI.13

Consideramos ahora un sistema de fuerzas coplanares distribuidas continuamente; como el mostrado en la figura VI.14 , donde la magnitud de las fuerzas varía linealmente desde cero hasta un valor  $W$

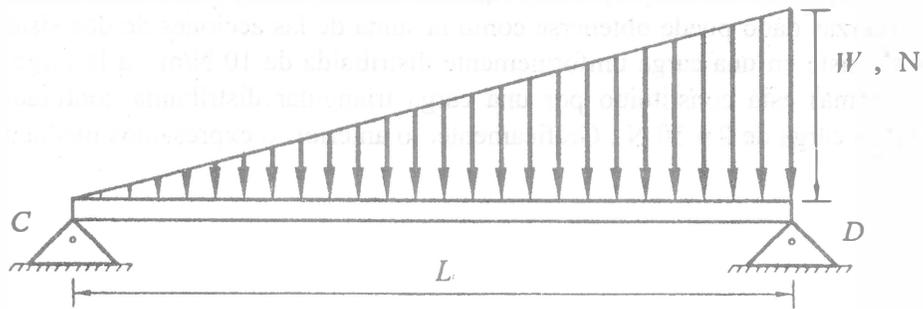


Figura VI.14

En este caso puede decirse que la distribución de las fuerzas es tan continua como la distribución de área en un triángulo rectángulo, cuyo centroide se encuentra a una tercera parte de la base. Por tal razón puede establecerse que la resultante del sistema de fuerzas de la figura VI.14 , cuyo módulo es  $WL/2$  , se localiza sobre una perpendicular a la viga  $CD$ , que dista  $L/3$  del apoyo  $D$  , o bien  $2L/3$  del apoyo  $C$  , según se muestra en la figura VI.15 .

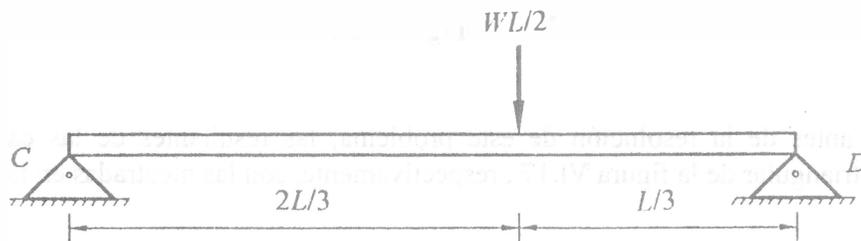


Figura VI.15

Ejemplo VI.3 .

Determine la posición de la resultante del sistema de fuerzas coplanares mostrado en la figura VI.16 .

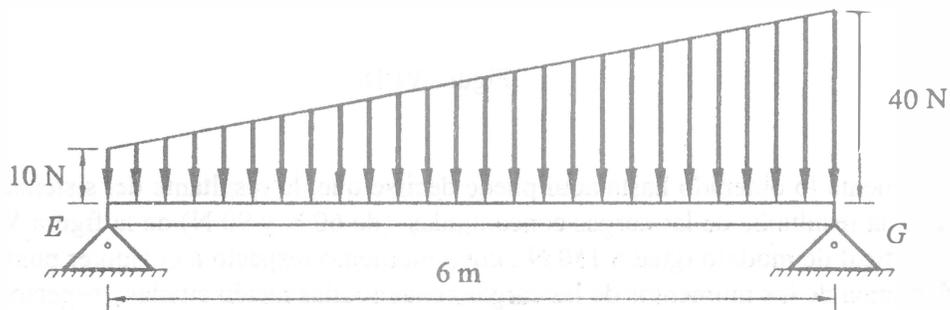


Figura VI.16

Resolución.

Con base en el principio de superposición de causas y efectos, podemos establecer que la acción del sistema de fuerzas dado puede obtenerse como la suma de las acciones de dos sistemas: el primero de los cuales consiste en una carga uniformemente distribuida de  $10 \text{ N/m}$ , a lo largo de toda la viga; el segundo (sistema) está constituido por una carga triangular distribuida continuamente, variando la magnitud de la carga de  $0$  a  $30 \text{ N}$ . Gráficamente, lo anterior lo expresamos mediante los elementos de la figura VI.17.

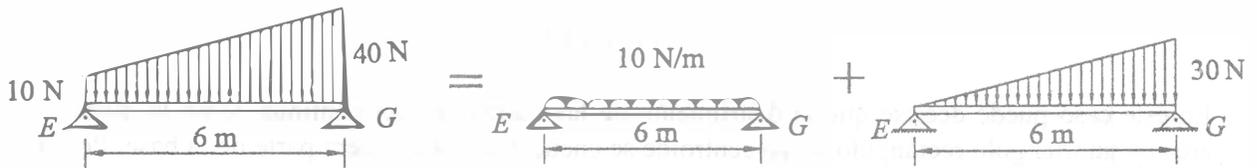


Figura VI.17

Por lo visto antes de la resolución de este problema, las resultantes de las cargas uniformemente distribuida y triangular de la figura VI.17, respectivamente, son las mostradas en la figura VI.18.



Figura VI.18

Teniendo en cuenta lo obtenido hasta aquí puede decirse que, la resultante del sistema de fuerzas dado corresponde a la resultante de las cargas concentradas (de  $60 \text{ N}$  y  $90 \text{ N}$ ) de la figura VI.18; es decir, a una fuerza vertical de módulo igual a  $150 \text{ N}$ , cuyo momento respecto a cualquier punto del plano debe ser igual a la suma de los momentos de las cargas concentradas recién citadas, respecto a dicho punto.

Entonces, llamando  $d$  a la distancia del soporte de tal resultante al apoyo  $E$ , debe cumplirse:

$$150d = (60)(3) + (90)(4)$$

igualdad que se cumple para  $d = 3.6\text{m}$ ,

o sea que, la resultante del sistema dado tiene un soporte vertical localizado 3.6m a la derecha del apoyo  $E$ ; es decir, 2.4m a la izquierda de  $G$ .

## VI.2.2 CENTROIDES DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS COMPUESTAS, DE CONFIGURACIÓN SENCILLA

Casi al inicio de este tema (VI), inmediatamente después de definir al primer momento del área de una superficie plana como la de la figura VI.2, mencionamos que dicho momento podía calcularse mediante la integral que aparece en la expresión [17], ya que por medio de ella era posible obtener la suma de los primeros momentos (con respecto al eje  $u$ ) de las áreas que conformaban esa superficie distribuida continuamente.

Análogamente se mencionó que los primeros momentos del área de dicha superficie, respecto a los ejes coordenados  $x$  y  $y$ , podían obtenerse mediante las integrales de las expresiones [17x], [17y], que al fin y al cabo son sumas.

Después definimos el centroide del área de una superficie plana mediante las expresiones [18x], [18y], con base en las cuales puede expresarse que, *siendo  $C_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  el centroide del área de una superficie plana cualquiera (i),  $A_i$  el área de dicha superficie,  $Q_{y_i}$  el primer momento de ella respecto al eje  $y$ , así como  $Q_{x_i}$  su primer momento respecto al eje  $x$ , se tienen:*

$$Q_{y_i} = A_i \bar{x}_i \quad \dots [19x],$$

y,

$$Q_{x_i} = A_i \bar{y}_i \quad \dots [19y],$$

expresiones que nos permiten calcular los primeros momentos recién citados, en función del área y de las coordenadas del centroide correspondiente.

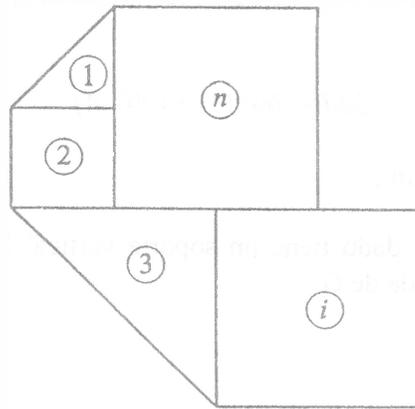


Figura VI.19

Esto nos es sumamente útil ya que, una vez conocidos los primeros momentos de las  $n$  áreas de configuración sencilla en que se puede subdividir una superficie plana a la que puede adjudicarse el calificativo de compuesta, como la de la figura VI.19, con base en la definición de primer momento del área de una superficie plana, podremos obtener los primeros momentos del área de la superficie compuesta mediante las expresiones:

$$Q_y = \sum_{i=1}^n Q_{y_i} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i \quad \dots [20x],$$

y,

$$Q_x = \sum_{i=1}^n Q_{x_i} = \sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i \quad \dots [20y],$$

en tanto que, las coordenadas del centroide (de la superficie plana compuesta) podremos obtenerlas mediante:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \dots [21x],$$

y,

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad \dots [21y],$$

en el entendido de que *las sumas aquí indicadas son algebraicas* (ver los ejemplos VI.4 y VI.5, para captar esto).

En virtud de lo anterior, para determinar la posición del centroide de áreas de superficies planas compuestas, se sugiere llenar la información que citamos en una tabla como la VI.2 después de haber subdividido, las superficies dadas, en la forma que se considere más conveniente.

Sub-superficie	Área ( $A_i$ )	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i \bar{x}_i$	$A_i \bar{y}_i$

Tabla VI.2

Ya con los elementos calculados en las tablas y al emplear las expresiones [21x] y [21y], podrán obtenerse las coordenadas de los centroides que buscamos.

Se aconseja consultar la tabla VI.1 para coordenadas de centroides de algunas superficies planas de configuración sencilla, que generalmente son empleadas al subdividir superficies compuestas.

Ejemplo VI.4.

Procediendo de dos maneras diferentes, determine las coordenadas del centroide de la superficie plana de la figura VI.20 , cuyas acotaciones están en centímetros.

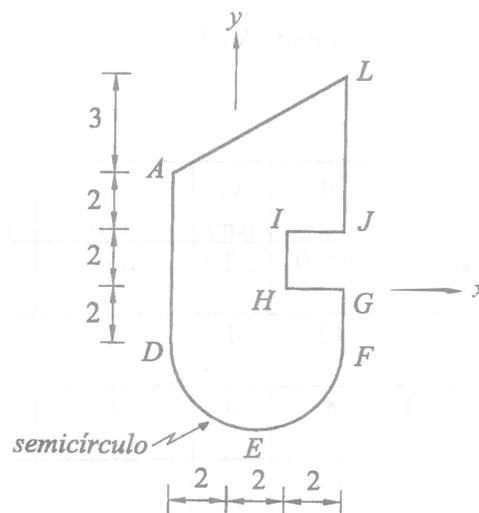


Figura VI.20

Resolución.

- a) La primera manera con que procederemos, para determinar lo solicitado, consiste en subdividir la superficie dada en una sub-superficie triangular, tres rectangulares y una semicircular (ver figura VI.21), de modo que la suma de las áreas de estas cinco sub-superficies sea igual al área de la superficie dada, razón por la cual los primeros momentos de ésta (respecto a los ejes  $x, y$ ) los obtendremos sumando los primeros momentos correspondientes a las cinco sub-superficies citadas, mismos que aparecen en las columnas  $A_i \bar{x}_i$  y  $A_i \bar{y}_i$  de la tabla VI.3, que emplearemos en esta resolución.

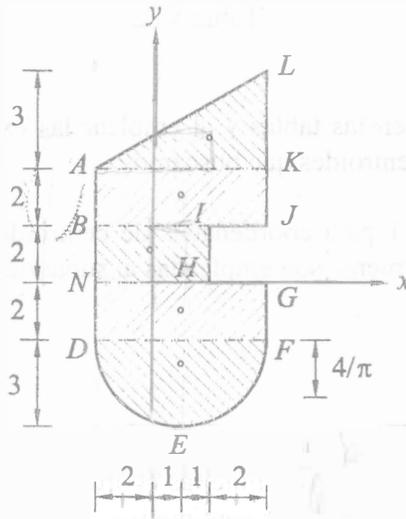


Figura VI.21

Sub-superficie	Área ( $A_i$ ) ( $\text{cm}^2$ )	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	$A_i \bar{x}_i$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_i \bar{y}_i$ ( $\text{cm}^3$ )
 $AKL$	$(1/2)(6)(3) = 9$	2	5	18	45
 $ABJK$	$(6)(2) = 12$	1	3	12	36
 $BNHI$	$(4)(2) = 8$	0	1	0	8
 $NDFG$	$(6)(2) = 12$	1	-1	12	-12
 $DEF$	$(\pi/2)(3^2) = 4.5\pi$	1	$-[2+(4/\pi)]$	$4.5\pi$	$-9\pi-18$

Tabla VI.3

Con base en lo establecido al inicio de esta resolución, así como en diversos elementos de la tabla VI.3, para la superficie dada se obtiene:

$$A = 9 + 12 + 8 + 12 + 4.5\pi = 41 + 4.5\pi = 55.1372 \text{ cm}^2 \quad \dots (1),$$

$$Q_y = \Sigma A_i \bar{x}_i = 18 + 12 + 0 + 12 + 4.5\pi = 42 + 4.5\pi = 56.1372 \text{ cm}^3 \quad \dots (2),$$

$$Q_x = \Sigma A_i \bar{y}_i = 45 + 36 + 8 + (-12) + (-9\pi - 18) = 59 - 9\pi = 30.7257 \text{ cm}^3 \quad \dots (3),$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = 1.018 \text{ cm} \quad \dots (4),$$

y,

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = 0.557 \text{ cm} \quad \dots (5),$$

o sea que  $C(1.018, 0.557)$  cm es el centroide del área de la superficie (compuesta) dada.

- b) La segunda manera con que procederemos, para determinar lo solicitado, consiste en considerar que la superficie dada puede obtenerse quitando al rectángulo  $MDFL$  (de la figura VI.22) tanto el triángulo  $MAL$  como el cuadrado  $IHGJ$ , y adicionando el semicírculo  $DEF$ , de modo que, al restar el área del triángulo ( $MAL$ ) y la del cuadrado ( $IHGJ$ ) a la del rectángulo ( $MDFL$ ), y adicionando el área del semicírculo ( $DEF$ ), se obtenga el área de la superficie dada.

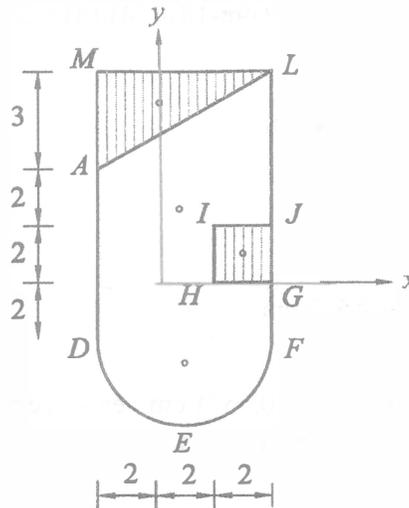


Figura VI.22

Obviamente, en este caso los primeros momentos, de la superficie dada, los obtendremos sumando los correspondientes al rectángulo (*MDFL*) y al semicírculo (*DEF*) y restando al resultado (de dicha operación) los que corresponden al triángulo (*MAL*) y al cuadrado (*IHGJ*), valores todos ellos que pueden apreciarse en la tabla VI.4, de esta resolución.

Sub-superficie	Área ( $A_i$ ) ( $\text{cm}^2$ )	$\bar{x}_i$ (cm)	$\bar{y}_i$ (cm)	$A_i \bar{x}_i$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_i \bar{y}_i$ ( $\text{cm}^3$ )
 <i>MDFL</i>	$(6)(9) = 54$	1	2.5	54	135
 <i>DEF</i>	$(\pi/2)(3^2) = 4.5\pi$	1	$-[2+(4/\pi)]$	$4.5\pi$	$-9\pi-18$
 <i>MAL</i>	$(1/2)(6)(3) = 9$	0	6	0	54
 <i>IHGJ</i>	$(2)(2) = 4$	3	1	12	4

Tabla VI. 4

Teniendo en cuenta lo mencionado en los dos párrafos anteriores, así como elementos de la tabla VI.4, aquí obtenemos para la superficie dada:

$$A = 54 + 4.5\pi - (9) - (4) = 41 + 4.5\pi = 55.1372 \text{ cm}^2 \quad \dots (6),$$

$$Q_y = \sum A_i \bar{x}_i = 54 + 4.5\pi - (0) - (12) = 42 + 4.5\pi = 56.1372 \text{ cm}^3 \quad \dots (7),$$

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i = 135 + (-9\pi - 18) - (54) - (4) = 59 - 9\pi = 30.7257 \text{ cm}^3 \quad \dots (8),$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = 1.018 \text{ cm} \quad \dots (9),$$

y,

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = 0.557 \text{ cm} \quad \dots (10),$$

lo que nos permite afirmar que  $C(1.018, 0.557) \text{ cm}$  es el centroide del área de la superficie dada, misma conclusión a que llegamos al desarrollar el inciso a) de la resolución del problema de este ejemplo.

Ejemplo VI.5

Procediendo de dos maneras diferentes, obtenga las coordenadas del centroide de la superficie plana mostrada en la figura VI.23 , donde las acotaciones están en centímetros.

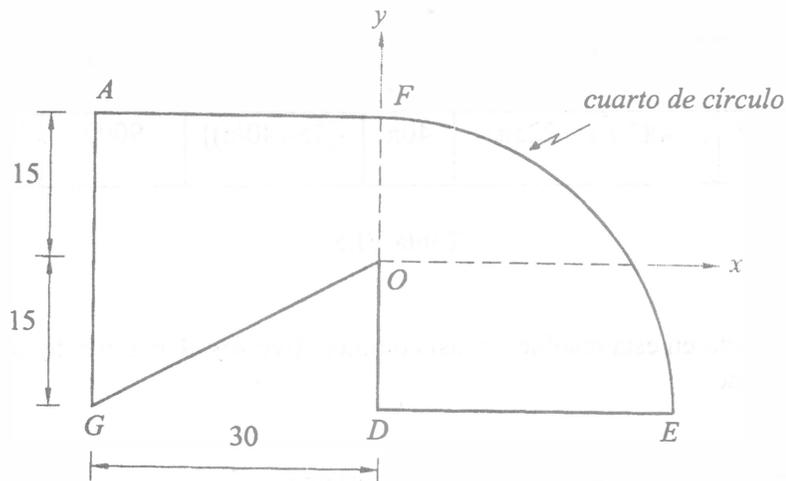


Figura VI.23

Resolución

a) La primera manera con que procederemos, para determinar lo solicitado, consiste en subdividir la superficie dada en una sub-superficie triangular, una rectangular y una correspondiente al cuarto de círculo (ver figura VI.24) de modo que la suma de las áreas de esas tres sub-superficies sea igual al área de la superficie dada, razón por la cual los primeros momentos de ésta ( respecto a los ejes  $x$ ,  $y$ ) los obtendremos sumando los primeros momentos correspondientes a las tres sub-superficies citadas, mismos que aparecen en las columnas  $A_i \bar{x}_i$  y  $A_i \bar{y}_i$  de la tabla VI.5 , que emplearemos en esta resolución.

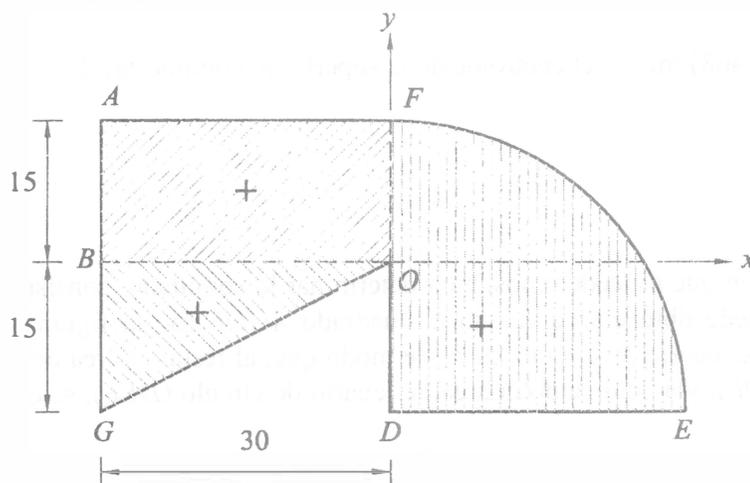


Figura VI.24

Sub-superficie	Área ( $A_i$ ) ( $\text{cm}^2$ )	$\bar{x}_i$ (cm)	$y_i$ (cm)	$A_i \bar{x}_i$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_i \bar{y}_i$ ( $\text{cm}^3$ )
 $BGO$	$(1/2)(30)(15) = 225$	-20	-5	-4500	-1125
 $ABOF$	$(30)(15) = 450$	-15	7.5	-6750	3375
 $DEF$	$(\pi/4)(30^2) = 225\pi$	$40\pi$	$-[15-(40/\pi)]$	9000	$9000-3375\pi$

Tabla VI.5

Con base en lo establecido en esta resolución, así como en diversos elementos de la tabla VI.5 , para la superficie dada se obtiene:

$$A = 225 + 450 + 225\pi = 675 + 225\pi = 1381.858 \text{ cm}^2 \quad \dots (1),$$

$$Q_y = \sum A_i \bar{x}_i = -4500 + (-6750) + 9000 = -2250 \text{ cm}^3 \quad \dots (2),$$

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i = -1125 + 3375 + (9000 - 3375\pi) = 11250 - 3375\pi = 647.125 \text{ cm}^3 \quad \dots (3),$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = -1.628 \text{ cm} \quad \dots (4),$$

y,

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = 0.468 \text{ cm} \quad \dots (5),$$

o sea que  $C(-1.628, 0.468)\text{cm}$  es el centroide de la superficie (compuesta) dada.

- b) La segunda manera con que procederemos, para determinar lo solicitado, consiste en considerar que la superficie dada puede obtenerse quitando al cuadrado  $AGDF$  (de la figura VI.25) el triángulo  $GDO$ , y adicionando el cuarto de círculo  $DEF$ , de modo que, al restar el área del triángulo ( $GDO$ ) a la del cuadrado ( $AGDF$ ), y adicionando el área del cuarto de círculo ( $DEF$ ), se obtenga el área de la superficie dada.

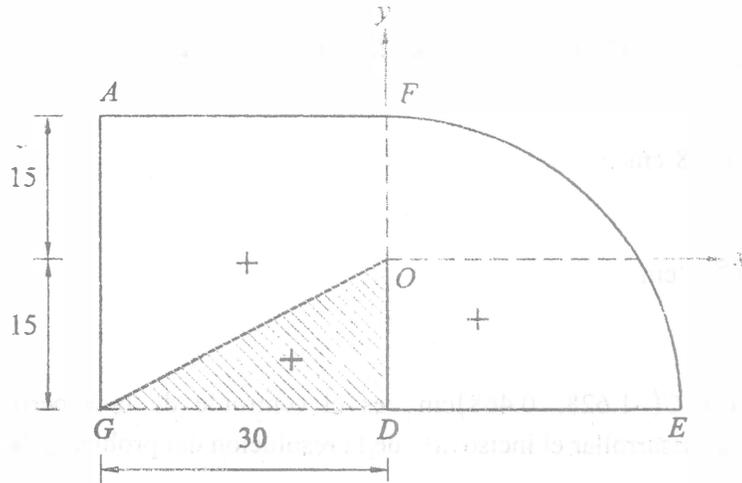


Figura VI.25

Obviamente, en este caso los primeros momentos, de la superficie dada, los obtendremos sumando los correspondientes al cuadrado ( $ACDF$ ) y al cuarto de círculo ( $DEF$ ), y restando al resultado (de dicha operación) los que corresponden al triángulo ( $CDO$ ).

Sub-superficie	Área ( $A_i$ ) ( $\text{cm}^2$ )	$x_i$ (cm)	$y_i$ (cm)	$A_i x_i$ ( $\text{cm}^3$ )	$A_i \bar{y}_i$ ( $\text{cm}^3$ )
 $AGDF$	$(30)^2 = 900$	-15	0	-13500	0
 $DEF$	$(\pi/4)(30^2) = 225\pi$	$40\pi$	$-[15-(40/\pi)]$	9000	$9000-3375\pi$
 $GDO$	$(1/2)(30)(15) = 225$	-10	-10	-2250	-2250

Tabla VI.6

Teniendo en cuenta lo mencionado en los dos párrafos anteriores, así como elementos de la tabla VI.6, aquí obtenemos para la superficie dada:

$$A = 900 + 225\pi - (225) = 675 + 225\pi = 1381.858 \text{ cm}^2 \quad \dots (6),$$

$$Q_y = \sum A_i x_i = -13500 + 9000 - (-2250) = -2250 \text{ cm}^3 \quad \dots (7),$$

$$Q_x = \sum A_i \bar{y}_i = 0 + (9000 - 3375\pi) - (-2250) = 11250 - 3375\pi = 647.125 \text{ cm}^3 \quad \dots (8),$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = -1.628 \text{ cm} \quad \dots (9),$$

y,

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = 0.468 \text{ cm} \quad \dots (10),$$

lo que permite afirmar que  $C(-1.628, 0.468)$  cm es el centroide de la superficie dada, misma conclusión a que llegamos al desarrollar el inciso a) de la resolución del problema de este ejemplo.

## VII. EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS Y DE CUERPOS.

En este tema, último que desarrollaremos en este texto, aplicaremos prácticamente lo visto en los temas anteriores, ya que en dicho desarrollo buscaremos coadyuvar, a quienes hagan uso de este material, a analizar y resolver problemas de equilibrio isostático, de cuerpos rígidos sujetos a fuerzas cualesquiera.

Dentro de tal desarrollo, obviamente, hemos de definir lo que es un sistema de fuerzas en equilibrio, y de establecer las condiciones para que un sistema esté en equilibrio. Asimismo, definiremos lo que es un cuerpo en equilibrio, y mencionaremos los estados de equilibrio estático y dinámico. También obtendremos reacciones en los apoyos de ciertas estructuras isostáticas, y cerraremos analizando así como resolviendo problemas de equilibrio isostático de cuerpos rígidos.

En el desarrollo de este tema, además de definir equilibrio e indicar las condiciones que deben cumplirse para el mismo, resolveremos problemas donde vamos a obtener sumas de componentes vectoriales y escalares, tanto de fuerzas como de momentos, después de dibujar d.c.l. (diagramas de cuerpo libre) de los cuerpos en estudio.

Aunque en esta ocasión tanto los d.c.l., como las sumas de componentes mencionadas, corresponderán a problemas de equilibrio estático, es muy importante verlos ya que también se emplearán para resolver problemas de Dinámica.

### VII.1 DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EQUILIBRIO. ESTABLECIMIENTO DE LAS CONDICIONES VECTORIALES Y DE LAS CONDICIONES ESCALARES PARA EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL ESPACIO. OBTENCIÓN Y APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES.

#### VII.1.1 RESULTANTE Y MOMENTO DE UN SISTEMA DE FUERZAS. SISTEMAS DE FUERZAS EN EQUILIBRIO.

Sea un sistema constituido por  $n$  fuerzas cualesquiera; definiremos como *resultante del sistema* al vector  $\mathbf{F}$  tal que:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \dots [22],$$

y como *momento del sistema* con respecto a un punto cualquiera  $P$ , del espacio, al vector  $\mathbf{M}_P$  tal que:

$$\mathbf{M}_P = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) \quad \dots [23],$$

donde el vector  $r_i$  va de  $P$  a un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza  $F_i$  en cuestión; o sea que  $M_P$  es la suma de los momentos de las fuerzas del sistema, con respecto a  $P$ .

Entonces, para un sistema constituido por  $n$  fuerzas, si  $h$  de ellas forman uno o varios pares de fuerzas, y sustituimos éstos por los vectores momento equivalentes:

$M_P$  lo obtendremos como la suma de esos vectores momento, adicionada de la suma de los momentos, con respecto a  $P$ , de las  $(n-h)$  fuerzas que no formaron parte de alguno de los pares mencionados.

Esto quiere decir que, dado un sistema de elementos vectoriales formado por  $\alpha$  fuerzas y  $\beta$  pares (de fuerzas), el momento de este sistema con respecto a un punto  $P$  cualquiera, del espacio, se obtendrá como la suma de los  $\beta$  vectores momento (representativos de igual número de pares) adicionada de la suma de los momentos de las  $\alpha$  fuerzas, con respecto a  $P$ .

Definiremos como *sistema de fuerzas en equilibrio* a todo aquél que cumpla las condiciones:

$$F = 0 \quad \dots [24],$$

y,

$$M_P = 0 \quad \dots [25].$$

Por ello, entonces, para que un sistema de fuerzas concurrentes se encuentre en equilibrio, simplemente deberá cumplirse la ecuación [24].

Como [24] y [25] son condiciones que pueden cumplir sistemas de fuerzas actuantes sobre cuerpos (o partículas) que permanezcan estáticos, o bien moviéndose con las características cinemáticas que mencionaremos en el subcapítulo VII.2, diremos que existen dos tipos de equilibrio: el *estático* y el *dinámico*, mismos que describiremos en el subcapítulo mencionado.

## VII.1.2 ESTABLECIMIENTO DE LAS CONDICIONES VECTORIALES Y DE LAS CONDICIONES ESCALARES PARA EL EQUILIBRIO DE UN SISTEMA DE FUERZAS EN EL ESPACIO.

De acuerdo con definiciones dadas en este subcapítulo afirmaremos que, un sistema de fuerzas cualesquiera se encuentra en equilibrio si su resultante iguala al vector (fuerza) nulo, y si su momento con respecto a un punto cualquiera, del espacio, es igual al vector (momento) nulo, condiciones que expresamos como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \dots [24],$$

y,

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{0} \quad \dots [25],$$

donde  $P$  puede ser, inclusive, el origen del sistema de referencia empleado para analizar si el sistema de fuerzas dado se encuentra, o no, en equilibrio.

Empleando un sistema de referencia rectangular  $Oxyz$ , la ecuación [24] es equivalente a:

$$F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

y la ecuación [25] puede establecerse como:

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{0};$$

teniendo en cuenta estas dos igualdades y la expresión:

$$\mathbf{M}_o = M_{xx} \mathbf{i} + M_{yy} \mathbf{j} + M_{zz} \mathbf{k} \quad \dots [7],$$

establecida en el subcapítulo II.2, afirmaremos que:

$$\begin{aligned} F_x &= 0, & M_{xx} &= 0, \\ F_y &= 0, & M_{yy} &= 0, \\ F_z &= 0, & M_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad \dots [26],$$

son las seis ecuaciones que constituyen la condición escalar para que un sistema de fuerzas cualesquiera se encuentre en equilibrio.

Entonces, un sistema de fuerzas concurrentes estará en equilibrio si dicho sistema cumple con la ecuación [24], o bien con:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad \text{y} \quad F_z = 0 \quad \dots [27],$$

terna de ecuaciones que constituyen la condición escalar para dicho equilibrio.

### VII.1.3 OBTENCIÓN Y APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES.

Consideramos ahora el caso de tener un **sistema de fuerzas coplanares, contenidas en el plano  $xy$**  del sistema de referencia  $Oxyz$  empleado para establecer las condiciones de equilibrio en el espacio.

Para este sistema de fuerzas coplanares, como las líneas de acción de todas ellas cortan tanto al eje  $x$  como al eje  $y$ , no existe  $M_{xx}$ , ni  $M_{yy}$ ; sólo existirá  $M_{zz}$ , que será la suma de los momentos de dichas fuerzas con respecto a un eje perpendicular al plano  $xy$ , que pase por un punto  $P$  cualquiera de éste.

Empleando la expresión [5part], obtenida en el subcapítulo II.2, y llamando  $r_i$  al vector que va de  $P$  a un punto cualquiera de la línea de acción de una fuerza  $F_i$  del sistema mencionado, se tendría:

$$M_{zz} = \sum_{i=1}^n r_i \times F_i ;$$

como, de acuerdo con la expresión [4] también obtenida en el subcapítulo II.2, la sumatoria del lado derecho de esta igualdad equivale a la suma de los momentos de esas fuerzas con respecto al punto  $P$ , es decir a  $M_p$ , diremos que un sistema de fuerzas coplanares se encuentra en equilibrio si cumple con las condiciones:

$$F = 0 \quad \dots [24],$$

y,

$$M_p = 0 \quad \dots [25],$$

donde  $M_p$  es la suma de los momentos de las fuerzas del sistema, con respecto a un punto cualquiera del plano donde actúan.

Entonces, las tres ecuaciones que constituyen la condición escalar para que un sistema de fuerzas coplanares se encuentre en equilibrio, son:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0 \quad y \quad M_p = 0 \quad \dots [28].$$

Por lo anterior, diremos que un sistema de fuerzas coplanares y concurrentes está en equilibrio si cumple con la ecuación [24], o bien con:

$$F_x = 0 \quad y \quad F_y = 0 \quad \dots [29].$$

A continuación aplicaremos las condiciones de equilibrio para sistemas de fuerzas coplanares, en el entendido de que, la aplicación de dichas condiciones para obtener reacciones, en estructuras isostáticas y en soportes de elementos de máquinas, la ejemplificaremos en el subcapítulo VII.3 .

Ejemplo VII-1: Considere el sistema de fuerzas coplanares mostrado en la figura VII-1.

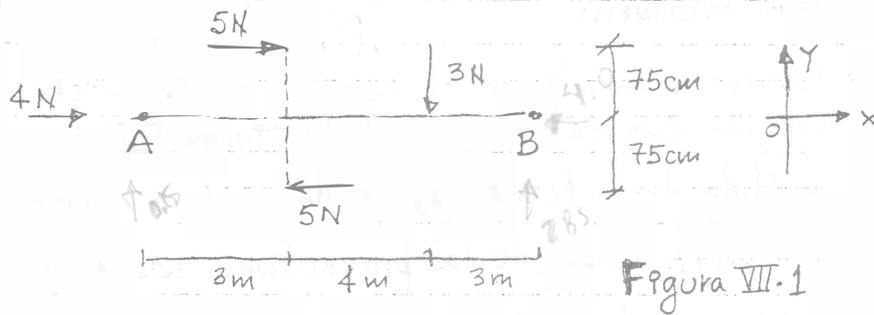


Figura VII-1

Se desea que dicho sistema, adicionado de una fuerza vertical en A así como de una fuerza en B, quede en equilibrio. Resuelva el problema:

- aplicando ecuaciones vectoriales, y,
- empleando ecuaciones escalares.

Resolución.

- Aplicando ecuaciones vectoriales.

En este caso, el sistema deberá quedar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas mostradas, de una fuerza  $\mathbf{F}_A = F_A \mathbf{j}$  aplicada en A, y de una fuerza  $\mathbf{F}_B = F_{Bx} \mathbf{i} + F_{By} \mathbf{j}$  actuando en B.

Aplicando  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  se tiene:

$$5\mathbf{i} - 5\mathbf{i} + 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + F_A \mathbf{j} + F_{Bx} \mathbf{i} + F_{By} \mathbf{j} = \mathbf{0}, \text{ de donde se obtiene}$$

$$(4 + F_{Bx})\mathbf{i} + (F_A + F_{By} - 3)\mathbf{j} = \mathbf{0}, \text{ igualdad que se cumple}$$

$$\text{siempre y cuando: } 4 + F_{Bx} = 0 \text{ --- (1), y}$$

$$F_A + F_{By} - 3 = 0 \text{ --- (2).}$$

al aplicar  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ , teniendo en cuenta que las fuerzas de 5 N forman un par, obtenemos:

$$(-1.5\mathbf{j}) \times (-5\mathbf{i}) + (10\mathbf{i}) \times (F_{Bx} \mathbf{i} + F_{By} \mathbf{j}) + (7\mathbf{i}) \times (-3\mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

$$\text{por lo que: } -7.5\mathbf{k} + 10F_{By} \mathbf{k} - 21\mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{ o sea que } 10F_{By} - 28.5 = 0 \text{ --- (3)}$$

de (1) resulta  $F_{Bx} = -4$ ; en tanto que de (3) se obtiene  $F_{By} = 2.85$

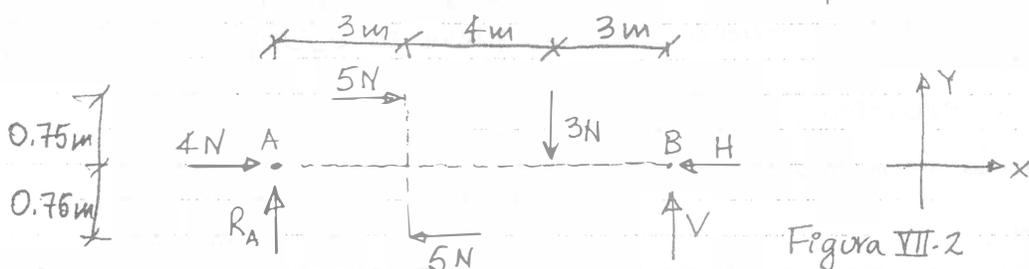
Valor que llevado a (2) da lugar a:  $F_A = 0.15$ ; entonces, el sistema ya adicionado quedará en equilibrio con una fuerza  $\mathbf{F}_A = 0.15\mathbf{j}$ , N, aplicada en A, además de una fuerza  $\mathbf{F}_B = -4\mathbf{i} + 2.85\mathbf{j}$ , N, actuando en B.

(continúa)

continuación del ejemplo VII.1. (2/2)

b) Empleando ecuaciones escalares.

Para hacer esto vamos a analizar el equilibrio del sistema ya adimensionado, mismo que se muestra en la figura VII.2, donde  $R_A$  es el módulo de la fuerza aplicada en A, en tanto que  $H$  y  $V$  son las magnitudes de las proyecciones sobre los ejes  $x, y$ , respectivamente, de la fuerza aplicada en B.



De  $F_x = 0$ :  $-H + 4 = 0$ , por lo que  $H = 4\text{ N}$ ;

de  $F_y = 0$ :  $R_A + V - 3 = 0$ , o sea que  $R_A + V = 3$  --- ④

de  $M_B = 0$ :

$$-[(5)(1.5)] + [(3)(3)] - [(R_A)(10)] = 0,$$

debido a lo cual:  $R_A = \frac{9 - 7.5}{10} = 0.15\text{ N}$ ,

valor que sustituido en ④ da lugar a:  $V = 2.85\text{ N}$ ;

entonces, la fuerza aplicada en A es

$$\mathbf{F}_A = R_A \mathbf{j} = 0.15 \mathbf{j}, \text{ N},$$

en tanto que, la aplicada en B es

$$\mathbf{F}_B = -H \mathbf{i} + V \mathbf{j} = -4 \mathbf{i} + 2.85 \mathbf{j}, \text{ N},$$

elementos que concuerden con los obtenidos al resolver este problema aplicando ecuaciones vectoriales.

Se recomienda al lector ver el ejemplo VII.9 donde intervienen las fuerzas del problema que acabamos de resolver, pero al aplicar las condiciones de equilibrio para determinar reacciones en apoyos.

EJEMPLO VII.2. - Sea el sistema de fuerzas coplanares mostrado en la figura VII.3

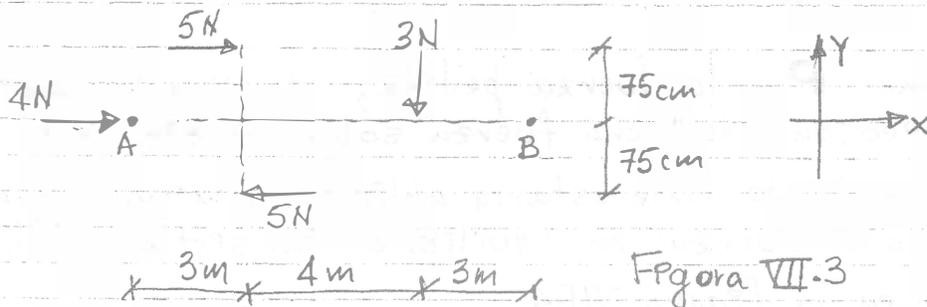


Figura VII.3

Obtenga una fuerza que, junto con el sistema dado, constituya un sistema de fuerzas en equilibrio. Además, determine el punto donde la línea de acción de dicha fuerza corta a la recta que pasa por los puntos A y B:

- empleando ecuaciones vectoriales, y,
- aplicando ecuaciones escalares.

Resolución:

a) Empleando ecuaciones vectoriales.

Si llamamos  $\mathbf{P}$  a la fuerza pedida, al aplicar  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  obtenemos:

$$\mathbf{P} + 5\mathbf{i} - 5\mathbf{i} + 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} = \mathbf{0}, \text{ por lo que:}$$

$$\mathbf{P} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \text{ N.}$$

Si llamamos C al punto donde la línea de acción de  $\mathbf{P}$  corta a la recta que pasa por A y B, al aplicar  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$  se obtiene:

$$(1.5\mathbf{j}) \times (5\mathbf{i}) + [(\overline{AC})\mathbf{i}] \times (-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (7\mathbf{i}) \times (-3\mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

por lo que:

$$-7.5\mathbf{k} + 3(\overline{AC})\mathbf{k} - 21\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad 3(\overline{AC}) = 28.5, \quad \overline{AC} = 9.5 \text{ m};$$

entonces, la línea de acción de la fuerza pedida corta a la recta que pasa por A y B en un punto localizado 9.5 m a la derecha de A.

(continúa)

Ejemplo VII.2 (continuación) (2/2)

b) Aplicando ecuaciones escalares.

Si llamamos  $\mathbf{P}$  a la fuerza pedida,  $H$  y  $V$  a las magnitudes de las proyecciones de dicha fuerza sobre los ejes  $x, y$ , así como  $C$  al punto donde estaría aplicada la misma, para tener un sistema de fuerzas en equilibrio, tal sistema sería el mostrado en la figura VII.4.

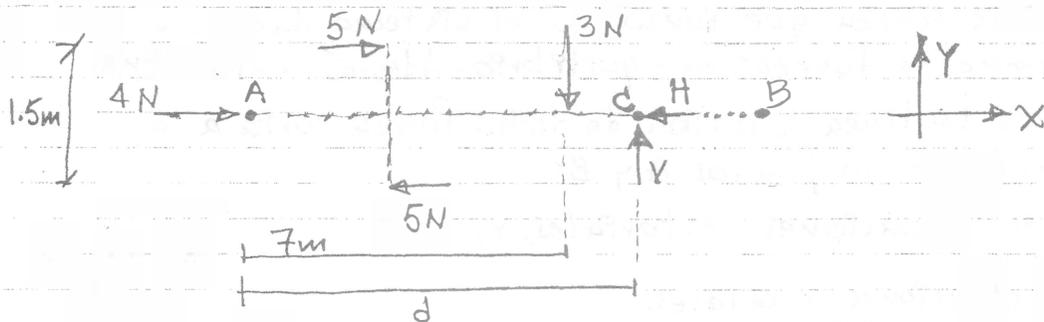


Figura VII.4

De  $F_x = 0$ :  $4 - H = 0$ , por lo que  $H = 4\text{ N}$ ;

de  $F_y = 0$ :  $-3 + V = 0$ , debido a lo cual  $V = 3\text{ N}$ ;

entonces, la fuerza solicitada es  $\mathbf{P} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ , N,

elemento que coincide con el obtenido al resolver el inciso a) de este problema.

Ahora, al aplicar  $M_A = 0$  se obtiene:

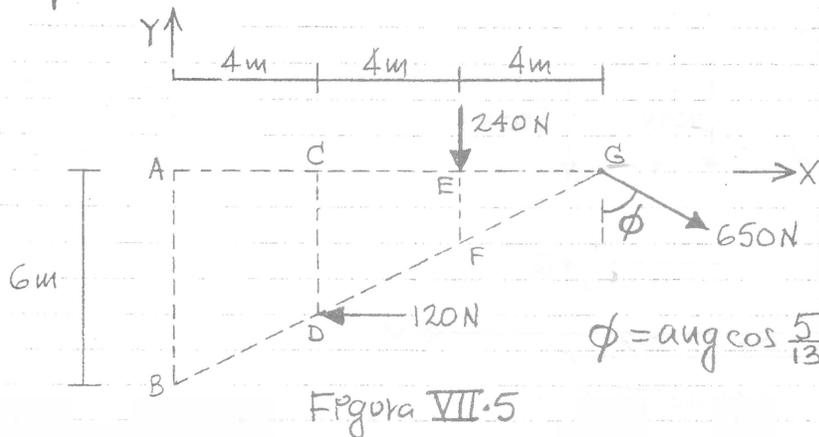
$$-[(5)(1.5)] - [(3)(7)] + [(V)(d)] = 0$$

debido a lo cual, teniendo en cuenta el valor que aquí obtuvimos para  $V$ , resulta:

$$d = \frac{28.5}{V} = \frac{28.5}{3} = 9.5\text{ m};$$

por ello, la línea de acción de la fuerza pedida corta a la recta que pasa por A y B en un punto localizado a 9.5 m a la derecha de A, situación a la que se llegó al resolver el inciso a) de este problema.

EJEMPLO VII.3.- Considere que las fuerzas de la figura VII.5 se encuentran en el plano  $xy$  de la misma, al cual también pertenecen los puntos A a G mostrados.



Teniendo en cuenta lo anterior, obtenga las fuerzas  $\mathbf{F}_A$  y  $\mathbf{F}_B$  (aplicadas en A y en B, respectivamente) de modo que, junto con las mostradas en la figura, formen un sistema en equilibrio siendo  $\mathbf{F}_B$  paralela al eje  $x$ .

Resolución.

Con base en lo enunciado, al hacer  $\mathbf{F}_B = F_B \mathbf{i}$  y aplicar  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ , obtenemos:  $(-6\mathbf{j}) \times (F_B \mathbf{i}) + (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (-120\mathbf{i}) + (8\mathbf{i}) \times (-240\mathbf{j}) + (12\mathbf{i}) \times (600\mathbf{i} - 250\mathbf{j}) = \mathbf{0}$ ,  
 $6F_B \mathbf{k} - 480\mathbf{k} - 1920\mathbf{k} - 3000\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ,  $6F_B = 5400$ , y,  $F_B = 900\text{N}$ ,  
 por lo que  $\mathbf{F}_B = 900\mathbf{i}$ , N.

Al aplicar ahora  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , teniendo en cuenta lo obtenido para  $\mathbf{F}_B$ , podemos escribir:  $\mathbf{F}_A + 900\mathbf{i} - 120\mathbf{i} + 600\mathbf{i} - 240\mathbf{j} - 250\mathbf{j} = \mathbf{0}$ ,  
 de donde se obtiene  $\mathbf{F}_A = -1380\mathbf{i} + 490\mathbf{j}$ , N,

valor con el cual concluimos la resolución de este problema, donde ejemplificamos la aplicación de condiciones de equilibrio para sistemas de fuerzas coplanares.

Recomendamos al lector ver el ejemplo VII.10, donde también intervienen las fuerzas del problema que acabamos de resolver, pero al aplicar las condiciones de equilibrio para determinar reacciones en apoyos.

EJEMPLO VII.4- Considere que las fuerzas mostradas en la figura VII.6 están en el plano  $xy$  de la misma, al cual pertenecen los puntos  $M$  y  $Q$ .

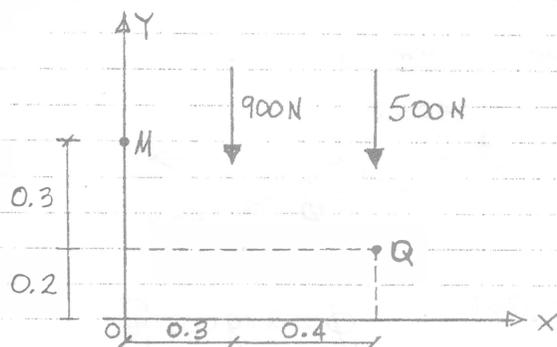


Figura VII-6

Para tales condiciones, determine las fuerzas  $\mathbf{F}_M$  y  $\mathbf{F}_Q$  que junto con las dos mostradas formen un sistema en equilibrio, teniendo en cuenta que  $\mathbf{F}_M$  debe ser paralela al eje  $x$ , con línea de acción que pasa por  $M$ , en tanto que  $\mathbf{F}_Q$  debe estar aplicada en  $Q$ .

Resolución.

Con base en lo establecido, tomar  $\mathbf{F}_M = F_M \mathbf{i}$  y aplicar  $\mathbf{M}_Q = \mathbf{0}$ , se obtienen:

$$(0.3\mathbf{j}) \times (F_M \mathbf{i}) + (-0.4\mathbf{i}) \times (-900\mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

$$-0.3F_M \mathbf{k} + 360\mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{ y, } F_M = \frac{360}{0.3} = 1200\text{ N},$$

por lo que  $\mathbf{F}_M = 1200\mathbf{i}, \text{ N}$  ①

Ahora, al aplicar  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  teniendo en cuenta ①, obtenemos:

$$-900\mathbf{j} - 500\mathbf{j} + 1200\mathbf{i} + \mathbf{F}_Q = \mathbf{0},$$

debido a lo cual resulta:  $\mathbf{F}_Q = -1200\mathbf{i} + 1400\mathbf{j}, \text{ N},$

es decir el valor con el que concluye la resolución de este problema, en el cual se ejemplifica la aplicación de condiciones de equilibrio para sistemas de fuerzas coplanares.

Se recomienda al lector ver el ejemplo VII.16, donde intervienen las fuerzas del problema que acabamos de resolver, pero al ejemplificar la aplicación de las condiciones para el equilibrio de cuerpos rígidos.

EJEMPLO VII.5- Las fuerzas de la figura VII.7, junto con una fuerza (que no se muestra) de magnitud  $P$  y paralela a  $F_r$  (cuyo módulo es  $F_r$ ), deben constituir un sistema de fuerzas en equilibrio.

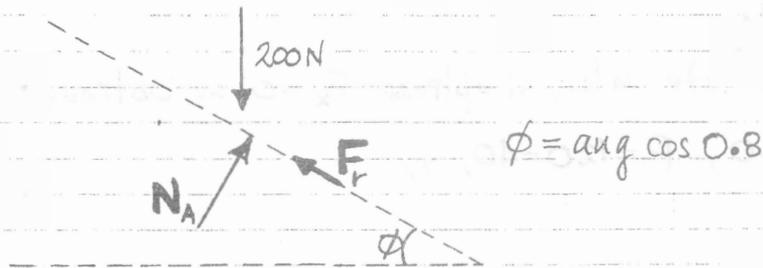


Figura VII.7

La fuerza de 200N es vertical, el soporte de  $F_r$  forma con la horizontal el ángulo  $\phi$  mostrado, y la línea de acción de  $N_A$  es perpendicular a la de  $F_r$ .

Considerando que  $F_r$  (magnitud de  $F_r$ ) es igual a  $0.25 N_A$  (donde  $N_A$  es el módulo de  $N_A$ ) y sin emplear ecuación de momentos, determine el valor de  $P$ .

Resolución.

Para resolver este problema emplearemos el sistema de referencia mostrado en la figura VII.8; es decir, con el eje  $X$  paralelo al soporte de  $F_r$ .

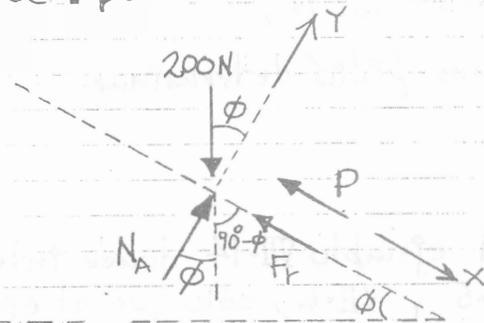


Figura VII.8

Al aplicar  $F_y = 0$  obtenemos:

### Ejemplo VII.5 (continuación) (2/2).

$$N_A - 200 \cos \phi = 0, \text{ y, } N_A = 200 \cos \phi = 160 \text{ N,}$$

debido a lo cual, por el enunciado del problema, resulta

$$F_r = 0.25 N_A = 40 \text{ N.}$$

Teniendo en cuenta este valor, al aplicar  $F_x = 0$  se obtienen:

$$200 \sin \phi - 40 - P = 0, \text{ } P = 120 - 40, \text{ y,}$$

$$P = 80 \text{ N,}$$

valor que se nos pide determinar.

**EJEMPLO VII.6.** - Resuelva el problema del ejemplo anterior (VII.5) para  $F_r$  de sentido contrario al mostrado en la figura de dicho ejemplo (es decir la VII.7), y todo lo demás igual.

**Resolución.**

Procediendo de manera idéntica a la seguida para resolver el ejemplo anterior (VII.5) resulta  $F_r = 40 \text{ N}$ , sólo que ahora

$F_r$  tiene sentido contrario al que tenía en el ejemplo citado.

Ahora, al aplicar  $F_x = 0$  obtenemos:

$$200 \sin \phi + 40 - P = 0, \text{ y, } P = 120 + 40 = 160 \text{ N,}$$

siendo éste el valor que se nos pide determinar.

Se sugiere al lector que vea el ejemplo VII.14, donde intervienen las fuerzas de los ejemplos VII.5 y VII.6, sólo que al exemplificar las condiciones de equilibrio para cuerpos rígidos en estado de equilibrio isostático.

## VII.1.4 APLICACIÓN DE LAS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EL ESPACIO.

Una vez que ya ejemplificamos la aplicación de las condiciones para el equilibrio de sistemas de fuerzas en el plano (en el subcapítulo anterior), a continuación presentaremos algunos problemas correspondientes a equilibrio de sistemas de fuerzas en el espacio, donde aplicaremos las condiciones que establecimos en el subcapítulo VII.1.2.

EJEMPLO VII.7.- Un sistema de fuerzas,  $S$ , está constituido por las fuerzas  $F_1$  a  $F_6$  descritas a continuación, teniendo todas ellas al newton (N) como unidad.

$F_1 = -12.5j - 350k$ , y su soporte pasa por  $A(2,0,0)m$ ,

$F_2 = 50i$ ,  $\checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$  B(2,6,0)m,

$F_3 = 62.5j$ ,  $\checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$  E(2,6,4)m,

$F_4 = 150k$ ,  $\checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$  H(0,6,4)m,

$F_5 = -450i - 450j$ ,  $\checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$  I(0,0,4)m, y,

$F_6 = -500k$ ,  $\checkmark \checkmark \checkmark \checkmark \checkmark$  G(1,3,2)m.

Con base en lo anterior:

- determine el sistema más simple equivalente a  $S$ ,
- adicione a  $S$  el o los elementos necesarios para que el sistema adicionado se encuentre en equilibrio, y,
- corrobore que el sistema ya adicionado se encuentre en equilibrio.

Resolución.

a) Las coordenadas vectoriales de  $S$  son  $R$  y  $M_0$  tales que:

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = -400i - 400j - 700k, N,$$

en tanto que:

Ejemplo VII.7 (continuación) (2/3)

$$\mathbf{M}_0 = (\mathbf{M}_0)_1 + (\mathbf{M}_0)_2 + (\mathbf{M}_0)_3 + (\mathbf{M}_0)_4 + (\mathbf{M}_0)_5 + (\mathbf{M}_0)_6 =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -12.5 & -350 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 0 \\ 50 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 62.5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ -450 & -450 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} =$$

$$= (700i - 25k) + (-300k) + (-250i + 125k) + (900i) + (1800i - 1800j) + (-1500i + 500j),$$

o sea que  $\mathbf{M}_0 = 950i - 600j - 200k$ , N.m,

debido a lo cual, para dicho sistema se tiene:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_0 = (-400)(950) + (-400)(-600) + (-700)(-200) = -380,000 + 240,000 + 140,000 = 0;$$

entonces, el sistema más simple equivalente a  $\mathbf{S}$  es una fuerza que no pasa por el origen del sistema de referencia.

b) Para efectuar la adición solicitada será necesario previamente reducir  $\mathbf{S}$  a la fuerza recién citada; efectuemos dicha reducción.

Obviamente, la fuerza mencionada es  $-400i - 400j - 700k$ , cuya línea de acción determinaremos con base en la igualdad

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ -400 & -400 & -700 \end{vmatrix} = 950i - 600j - 200k,$$

$$\text{equivalente a: } (-700y + 400z)i + (-400z + 700x)j + (-400x + 400y)k = 950i - 600j - 200k,$$

de donde, por igualdad de vectores, se obtienen las igualdades escalares:

$$-700y + 400z = 950, \quad -400z + 700x = -600, \quad -400x + 400y = -200,$$

las que a su vez dan lugar a:

$$4z - 7y = 9.5 \dots \textcircled{a}, \quad 4z - 7x = 6 \dots \textcircled{b}, \quad 4x - 4y = 2 \dots \textcircled{c};$$

de  $\textcircled{b}$  y  $\textcircled{c}$  se obtienen, respectivamente:

$$x = \frac{4z - 6}{7} \dots \textcircled{b'}, \quad x = \frac{4y + 2}{4} \dots \textcircled{c'},$$

con base en las cuales se obtiene:

$$x = \frac{4y + 2}{4} = \frac{4z - 6}{7},$$

Ejemplo VIII.7 (continuación) (3/3)

doble igualdad que puede escribirse en la forma:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y+0.5}{1} = \frac{z-1.5}{7/4},$$

o bien como:  $\frac{x-0}{4} = \frac{y+0.5}{4} = \frac{z-1.5}{7} \quad \textcircled{d}$

que es la ecuación (de una recta) que define la línea de acción de la resultante de  $\mathbf{S}$ , con base en la cual puede afirmarse que dicha línea de acción pasa por  $Q(0, -0.5, 1.5)\text{m}$ .

Entonces, al sistema  $\mathbf{S}$  habrá que adicionarle la fuerza dada por  $+400\mathbf{i} + 400\mathbf{j} + 700\mathbf{k}$ , N, aplicada en un punto cualquiera de la línea de acción definida por  $\textcircled{d}$ , como es el caso del punto  $Q$  recién citado, para que el sistema ya adicionado (al que llamaremos  $\mathbf{S}_a$ ) se encuentre en equilibrio.

c) Con base en lo anterior, podemos afirmar que las coordenadas vectoriales del sistema ya adicionado,  $\mathbf{S}_a$ , son  $\mathbf{R}_a$  y  $(\mathbf{M}_o)_a$  tales que:

$$\mathbf{R}_a = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6) + (400\mathbf{i} + 400\mathbf{j} + 700\mathbf{k}), \quad \text{y,}$$

$$(\mathbf{M}_o)_a = [(\mathbf{M}_o)_1 + (\mathbf{M}_o)_2 + (\mathbf{M}_o)_3 + (\mathbf{M}_o)_4 + (\mathbf{M}_o)_5 + (\mathbf{M}_o)_6] + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -0.5 & 1.5 \\ 400 & 400 & 700 \end{vmatrix}$$

es decir:

$$\mathbf{R}_a = (-400\mathbf{i} - 400\mathbf{j} - 400\mathbf{k}) + (400\mathbf{i} + 400\mathbf{j} + 400\mathbf{k}) = \mathbf{0}, \quad \text{y,}$$

$$(\mathbf{M}_o)_a = (950\mathbf{i} - 600\mathbf{j} - 200\mathbf{k}) + [(-350 - 600)\mathbf{i} + (600)\mathbf{j} + (200)\mathbf{k}] = \mathbf{0},$$

con lo cual se corrobora que el sistema ya adicionado,  $\mathbf{S}_a$ , se encuentra en equilibrio.

EXAMPLE VII.8: Un sistema de fuerzas,  $S_1$ , está formado por las fuerzas  $F_A$ ,  $F_B$ ,  $F_E$ ,  $F_H$ ,  $F_I$ , y  $F_G$  definidas a continuación, teniendo al newton (N) como unidad, cada una de ellas.

$$F_A = -150K, \text{ aplicada en } A(2,0,0)\text{ m,}$$

$$F_B = 200i, \quad \checkmark \quad \checkmark \quad B(2,6,0)\text{ m,}$$

$$F_E = 300j, \quad \checkmark \quad \checkmark \quad E(2,6,4)\text{ m,}$$

$$F_H = 150K, \quad \checkmark \quad \checkmark \quad H(0,6,4)\text{ m,}$$

$$F_I = -200i - 300j, \quad \checkmark \quad \checkmark \quad I(0,0,4)\text{ m, y,}$$

$$F_G = -500K, \quad \checkmark \quad \checkmark \quad G(1,3,2)\text{ m.}$$

Teniendo ello en cuenta:

- determine el sistema más simple equivalente a  $S_1$ ,
- adicione a  $S_1$  la o las fuerzas requeridas para que el sistema adicionado se encuentre en equilibrio, con una de sus fuerzas aplicada en el origen del sistema de referencia, y,
- verifique que el sistema ya adicionado esté en equilibrio.

Resolución.

a) Las coordenadas vectoriales de  $S_1$  son  $R_1$  y  $(M_0)_1$  tales que:

$$R_1 = F_A + F_B + F_E + F_H + F_I + F_G = -500K, \text{ N,}$$

en tanto que:

$$(M_0)_1 = (M_0)_A + (M_0)_B + (M_0)_E + (M_0)_H + (M_0)_I + (M_0)_G =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 300 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 150 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ -200 & -300 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} =$$

$$= (300j) + (-1200k) + (-1200i + 600k) + (900i) + (1200i - 800j) + (-1500i + 500j),$$

es decir que  $(M_0)_1 = -600i - 600k$ , N·m,

por lo que, para dicho sistema se tiene:

$$R \cdot M_0 = (-500)(-600) = 300,000 \neq 0,$$

Ejemplo VII.8 (continuación) (2/3)

debido a lo cual, el sistema más simple equivalente a  $S_1$  es un motor cuyo momento es:

$$M_L = \frac{M_0 \cdot R}{|R|} \left[ \frac{R}{|R|} \right] = \frac{300,000}{500} \left[ \frac{-500k}{500} \right] = -600k$$

b) Para efectuar la reducción pedida, será necesario previamente determinar la línea de acción de la fuerza del motor; es decir de  $-500k, N$ .

Como debe tenerse que  $M_0 = r \times R + M_L$ , en este caso:

$$r \times R = M_0 - M_L = (-600i - 600k) - (-600k) = -600i, N \cdot m;$$

razón por la cual, la recién citada línea de acción la determinaremos con base en la igualdad

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} = -600i,$$

$$\text{equivalente a: } (-500y)i + (500x)j = -600i,$$

de donde, por igualdad de vectores se obtienen:

$$-500y = -600 \quad \text{--- ①}, \quad y, \quad 500x = 0 \quad \text{--- ②},$$

igualdades que dan lugar, respectivamente, a:

$$y = 1.2 \text{ m}, \quad y, \quad x = 0 \text{ m};$$

entonces, la línea de acción de la fuerza del motor queda definida por:

$$x = 0, \quad y = 1.2, \quad z = \bar{z}, \quad \text{para cualquier valor de } \bar{z},$$

con base en lo cual podemos decir que dicha línea de acción es paralela al eje  $\bar{z}$ , de modo que pasa por  $Q(0, 1.2, 0)$  y por todos aquellos puntos cuya abscisa sea cero y cuya ordenada sea 1.2; así pues,

para realizar lo pedido en el inciso b) del enunciado del problema, habremos de adccionar, a  $S_1$ , una fuerza definida por  $500k$ , aplicada en  $Q(0, 1.2, 0)$ , y un par de fuerzas cuyo momento sea igual

### Ejemplo VII.8 (continuación) (3/3).

al inverso aditivo del momento del motor, de modo que una de las fuerzas de dicho par esté aplicada en el origen del sistema de referencia.

Entonces, el momento del par por adicionar debe ser igual a  $600\text{K}$ , además de que una de sus fuerzas debe estar aplicada en el origen, dicho par deberá estar contenido en el plano  $XY$  y la magnitud de su momento debe ser  $600\text{N}$ .

Como hay muchos pares de fuerzas que cumplen con las condiciones descritas, existen muchos pares que pueden presentarse como solución al problema que estamos resolviendo. Sin embargo, nos concretaremos a presentar sólo una solución:

adicionaremos un par cuyas fuerzas tengan la dirección del eje  $X$ , sean de magnitud igual a  $100\text{N}$  (por lo cual la separación entre ellas debe ser  $6\text{m}$ , a fin de que la magnitud del par sea  $600\text{N}\cdot\text{m}$ ), y una de ellas pase por el origen; así pues, adicionaremos el par de fuerzas formado por  $\mathbf{F}_0 = 100\mathbf{i}$  (aplicada en el origen) y por  $\mathbf{F}_C = -100\mathbf{i}$ , cuyo soporte pase por  $C(0,6,0)\text{m}$ .

c) Basados en lo anterior, puede afirmarse que las coordenadas vectoriales del sistema ya adicionado  $\mathbf{S}_2$ , son

$$\mathbf{R}_1 = (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_H + \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_G) + 500\mathbf{k} = (-500\mathbf{k}) + 500\mathbf{k} = \mathbf{0}, y,$$

$$(\mathbf{M}_0)_2 = [(\mathbf{M}_0)_A + (\mathbf{M}_0)_B + (\mathbf{M}_0)_E + (\mathbf{M}_0)_H + (\mathbf{M}_0)_I + (\mathbf{M}_0)_G] + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1.2 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{vmatrix} + (-6\mathbf{j}) \times (100\mathbf{i}),$$

es decir:

$$(\mathbf{M}_0)_2 = [-600\mathbf{i} - 600\mathbf{k}] + (600\mathbf{i}) + (600\mathbf{k}) = \mathbf{0},$$

pareja de elementos que verifican que el sistema ya adicionado está en equilibrio.

Se recomienda al lector ver el ejemplo VII.17, donde intervienen los elementos del problema que acabamos de resolver, pero al ejemplificar la aplicación de las condiciones para el equilibrio de cuerpos rígidos.

## VII.2 DEFINICIÓN DE CUERPO EN EQUILIBRIO. ESTADOS DE EQUILIBRIO ESTÁTICO Y DE EQUILIBRIO DINÁMICO: DEFINICIONES E IDENTIFICACIONES DE DICHS ESTADOS.

Definiremos como cuerpo en equilibrio a aquél sobre el cuál actúa un sistema de fuerzas en equilibrio. Dicho cuerpo puede presentar uno de los siguientes estados de equilibrio: el estático o el dinámico.

Decimos que un cuerpo rígido, o una partícula, se encuentra en *equilibrio estático* cuando permanece inmóvil con relación a un sistema de referencia fijo. Como casos de estado de equilibrio estático se tienen el equilibrio isostático (estado que puede resolverse aplicando las condiciones establecidas para el equilibrio), y el equilibrio hiperestático (estado que para resolverse requiere de ecuaciones adicionales a las de equilibrio, por lo cual se sale del ámbito del curso de Estática que se imparte dentro de las asignaturas básicas).

Trataremos de dejar una idea más clara de esto mencionado que:

a) **Se encuentran en estado de equilibrio hiperestático:**

- a.1) **la viga triplemente apoyada de la figura VII. 9** (sujeta a cargas coplanares),
- a.2) **el arco de dos articulaciones de la figura VII.10** (también sujeto a cargas coplanares). y,
- a.3) **el paralelepípedo triarticulado de la figura VII.11** (sujeto a cargas no coplanares),

pues no son suficientes las condiciones de equilibrio para determinar las reacciones en sus apoyos.

En efecto: la viga tiene tres componentes reactivas ( $A_y, B_y, C_y$ ) y sólo dos ecuaciones de la estática aplicables a su estado de equilibrio; el arco tiene cuatro componentes de reacción ( $P_x, P_y, Q_x, Q_y$ ) y solamente tres ecuaciones de la estática aplicables a su estado de equilibrio; el paralelepípedo tiene nueve componentes reactivas ( $A_x, A_y, A_z, C_x, C_y, C_z, D_x, D_y, D_z$ ) y sólo seis ecuaciones de la estática aplicables a su estado de equilibrio.

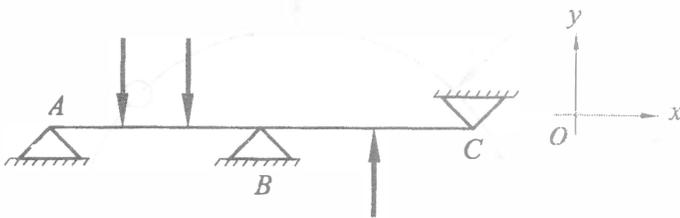


Figura VII.9

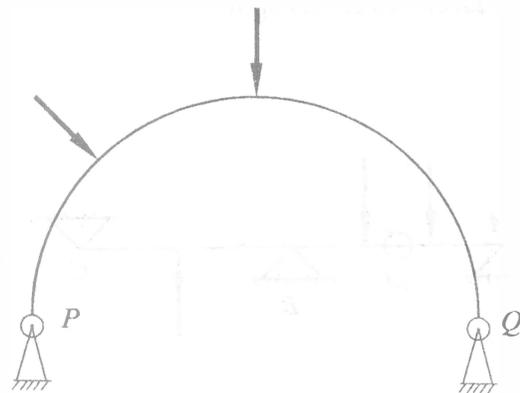


Figura VII.10

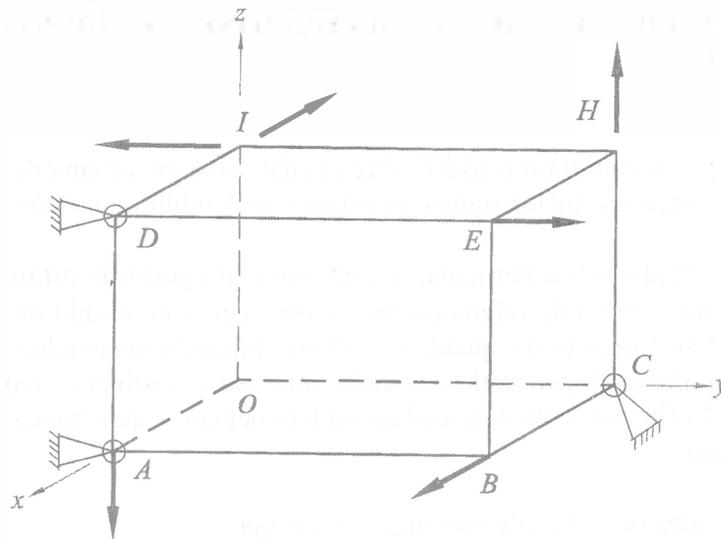


Figura VII.11

b) Se encuentran en estado de equilibrio isostático:

- b.1) *la viga* (llamada) **Gerber**, de la figura VII.12, cuya única diferencia con la de la figura VII.9 es que ahora está articulada en el punto medio entre  $A$  y  $B$ ,
- b.2) *el arco de tres articulaciones*, de la figura VII.13, cuya diferencia con relación al de la figura VII.10 consiste en que el de ahora también está articulado en  $T$ , y,
- b.3) *el paralelepípedo doblemente articulado*, de la figura VII.14, que difiere de la figura VII.11 en que el de ahora sólo está articulado en dos puntos, no en dos; se encuentra en tal estado, ya que bastan las condiciones de equilibrio para determinar las reacciones en sus apoyos.

Se encuentran en tal estado ya que bastan las ecuaciones de equilibrio, de la estática, para determinar las reacciones en sus apoyos.

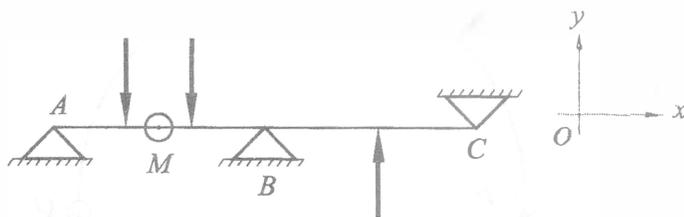


Figura VII.12

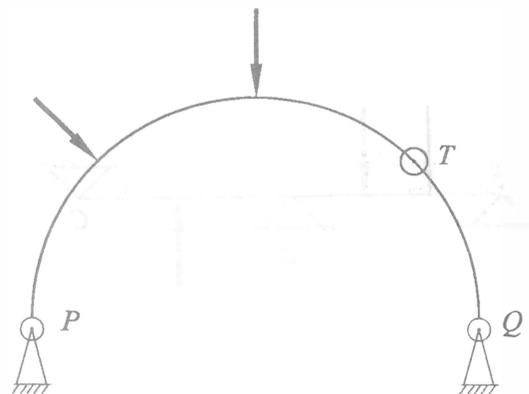


Figura VII.13

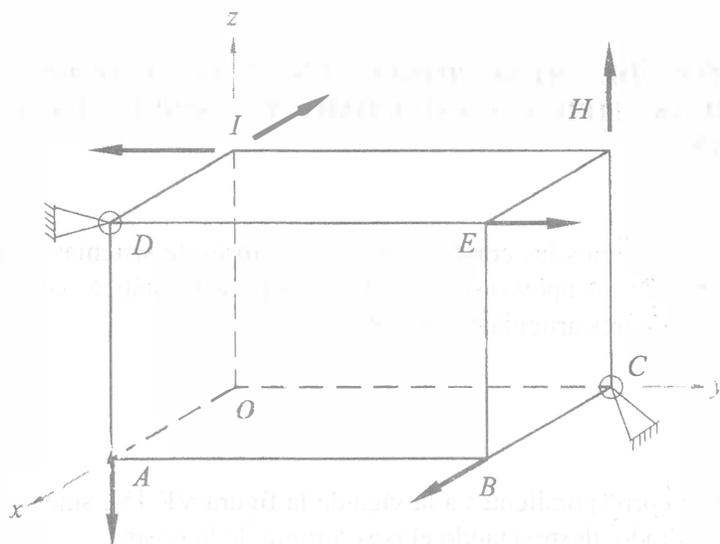


Figura VII.14

La viga de ahora, es decir la de la figura VII.12, ya se encuentra en estado de equilibrio isostático, pues teniendo tres incógnitas reactivas ( $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$ ), se le pueden aplicar dos ecuaciones escalares de la estática desde el punto de vista de toda la viga (donde intervengan  $A_y$ ,  $B_y$ ,  $C_y$ ), de modo que la determinación de estas incógnitas será factible empleando lo que resulte de aplicar las dos ecuaciones citadas, así como planteando el equilibrio de la parte  $AM$ , o bien de la parte  $AC'$ . Ver algo similar a esto en el ejemplo VII.11.

El arco (de tres articulaciones) de la figura VII.13 se encuentra en estado de equilibrio isostático ya que, teniendo cuatro incógnitas de reacción ( $P_x$ ,  $P_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ), al analizarlo completo pueden aplicársele tres ecuaciones escalares de la estática (donde intervengan las cuatro incógnitas citadas), de modo que la determinación de dichas incógnitas podrá lograrse empleando las tres ecuaciones citadas, así como analizando el equilibrio de la parte  $\widehat{PT}$  del arco, o bien el de la parte  $\widehat{TQ}$ . Una situación similar puede apreciarse en el ejemplo VII.12.

El paralelepípedo de la figura VII.14 también se encuentra en equilibrio isostático; esto porque ahora sólo está articulado en dos puntos, debido a lo cual solamente se tienen seis incógnitas reactivas ( $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $D_x$ ,  $D_y$ ,  $D_z$ ), las que podremos determinar aplicando las seis condiciones escalares para equilibrio de cuerpos rígidos en el espacio. Un caso parecido puede apreciarse en el ejemplo VII.17.

Para terminar este subcapítulo mencionaremos que, no obstante que para poder definir el equilibrio dinámico se requiere conocer los conceptos de velocidad y aceleración angulares, así como el concepto de centro de masa, conceptos que se tratan en las actuales asignaturas Cinemática y Dinámica, a continuación definiremos en qué consiste dicho tipo de equilibrio.

Decimos que un cuerpo se encuentra en *equilibrio dinámico* si se mueve de manera tal que su aceleración angular y la aceleración de su centro de masa son nulas, medidas con respecto a un sistema de referencia fijo, lo que a su vez implica que su velocidad angular y la velocidad de su centro de masa sean constantes, pudiendo ser nula alguna de éstas. Entonces, una partícula se encontrará en equilibrio dinámico si se mueve con velocidad constante, medida con respecto a un sistema fijo, ya que esto implica que su aceleración sea nula durante el movimiento.

### VII.3 OBTENCIÓN DE REACCIONES EN LOS APOYOS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS TÍPICAS, ASÍ COMO EN SOPORTES DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS.

En este subcapítulo aplicaremos las condiciones de equilibrio de sistemas de fuerzas coplanares, en la obtención de reacciones en los apoyos de algunas estructuras isostáticas como es el caso de dos vigas, una armadura y un arco de tres articulaciones.

Ejemplo VII.9 .

Obtenga las reacciones correspondientes a la viga de la figura VII.15 , sujeta a la acción del sistema de fuerzas coplanares mostrado, despreciando el peso propio de la misma.

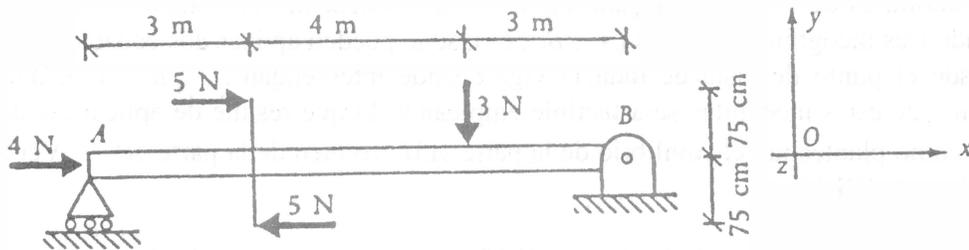


Figura VII.15

Resuelva el problema aplicando:

- Condiciones escalares para equilibrio.
- Condiciones vectoriales para equilibrio.

Resolución.

Por lo especificado en el enunciado del problema, el d.c.l. de la viga resulta el mostrado en la figura VII.16 , elemento fundamental de esta resolución.

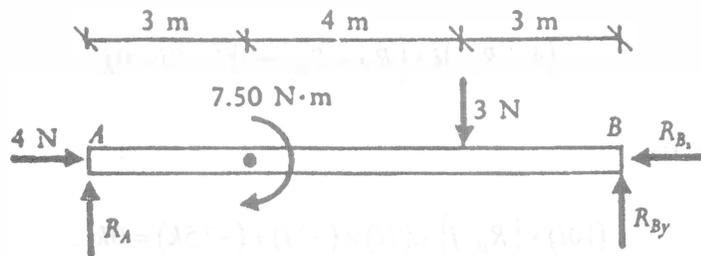


Figura VII.16

a) Aplicación de condiciones escalares.

De  $F_x = 0$ , se obtiene:

$$4 + (-R_{Bx}) = 0, \text{ de donde } R_{Bx} = 4 \text{ [N]} \quad \dots (1);$$

de  $M_A = 0$ , obtenemos:

$$10R_{By} + [-(3)(7)] + (-7.5) = 0,$$

igualdad que se cumple para:

$$R_{By} = \frac{28.5}{10} = 2.85 \text{ [N]} \quad \dots (2);$$

de  $F_y = 0$ , tomando en cuenta el valor obtenido para  $R_{By}$ , se obtiene:

$$R_A + (-3) + 2.85 = 0, \text{ luego } R_A = 0.15 \text{ [N]} \quad \dots (3);$$

considerando (1), (2) y (3), así como el sistema de referencia dado, escribiremos:

$$\mathbf{R}_A = R_A \mathbf{j} = 0.15 \mathbf{j} \text{ [N]},$$

y,

$$\mathbf{R}_B = -R_{Bx} \mathbf{i} + R_{By} \mathbf{j} = -4 \mathbf{i} + 2.85 \mathbf{j} \text{ [N]},$$

que son las reacciones pedidas.

b) Aplicación de condiciones vectoriales.

De  $F = 0$ , se obtiene:

$$(4 - R_{B_x})\mathbf{i} + (R_A + R_{B_y} - 3)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} \quad \dots (4);$$

de  $M_A = 0$ , obtenemos:

$$(10\mathbf{i}) \times (R_{B_y}\mathbf{j}) + (7\mathbf{i}) \times (-3\mathbf{j}) + (-7.5\mathbf{k}) = 0\mathbf{k},$$

de donde:

$$10R_{B_y}\mathbf{k} - 21\mathbf{k} - 7.5\mathbf{k} = 0 \quad \dots (5);$$

por igualdad de vectores, de (4), se tienen:

$$4 - R_{B_x} = 0 \quad \dots (6);$$

y

$$R_A + R_{B_y} - 3 = 0 \quad \dots (7);$$

en tanto que, de (5) se obtiene:

$$10R_{B_y} - 21 - 7.5 = 0 \quad \dots (8);$$

resolviendo (6) y el sistema de ecuaciones formado por (7) y (8), resultan:

$$R_{B_x} = 4, \quad R_{B_y} = 2.85 \quad \text{y}, \quad R_A = 0.15,$$

que implican:

$$\mathbf{R}_A = 0.15\mathbf{j} \text{ [N]},$$

y,

$$\mathbf{R}_B = -4\mathbf{i} + 2.85\mathbf{j}, \text{ [N]},$$

que son las reacciones pedidas, mismas que ya habían sido obtenidas al resolver el inciso a) de este ejemplo.

EJEMPLO VII.10 - La armadura de la figura VII.17 se encuentra sujeta a la acción de las fuerzas coplanarias ahí mostradas.

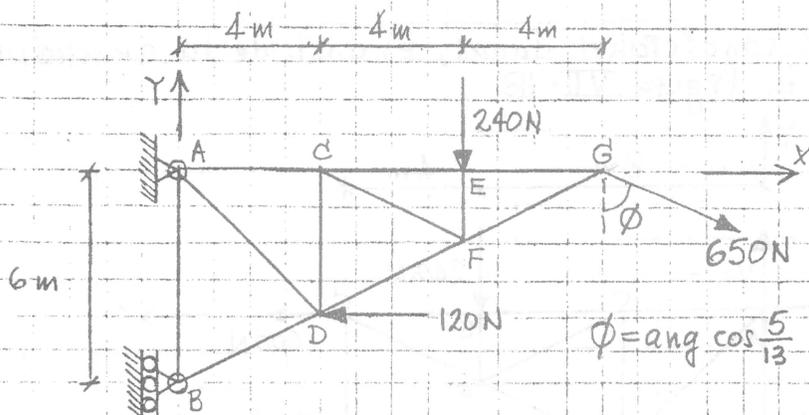


Figura VII.17

Despreciando el peso propio de dicha armadura, determine las reacciones en los apoyos A y B:

- empleando condiciones vectoriales de equilibrio,
- aplicando condiciones escalares de equilibrio.

Resolución.

- Empleando condiciones vectoriales de equilibrio.

Por el tipo de apoyo, la reacción que se tendrá en B será paralela al eje X debido a lo cual, al expresar esa reacción  $\mathbf{R}_B$  como  $R_B \mathbf{i}$ , de  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$  obtenemos:

$$(-6\mathbf{j}) \times (R_B \mathbf{i}) + (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \times (-120\mathbf{i}) + (8\mathbf{i}) \times (-240\mathbf{j}) + (12\mathbf{i}) \times (600\mathbf{i} - 250\mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

$$6R_B \mathbf{k} - 480\mathbf{k} - 1920\mathbf{k} - 3000\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad R_B = 900 \text{ N}, \quad \mathbf{R}_B = 900 \mathbf{i}, \text{ N.}$$

Llamando  $\mathbf{R}_A$  a la reacción en el apoyo A y teniendo en cuenta el valor que obtuvimos para  $\mathbf{R}_B$ , de  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  se obtiene:

$$\mathbf{R}_A + 900\mathbf{i} - 120\mathbf{i} - 240\mathbf{j} + (600\mathbf{i} - 250\mathbf{j}) = \mathbf{0},$$

$$\text{de donde resulta } \mathbf{R}_A = -1380\mathbf{i} + 490\mathbf{j}, \text{ N,}$$

con lo que concluimos la obtención de lo solicitado en el inciso a.

Ejemplo VII.10 (continuación) (2/2)

b) Aplicando condiciones escalares de equilibrio.

Con base en las condiciones dadas, el d.c.l. de la armadura es el mostrado en la figura VII.18.

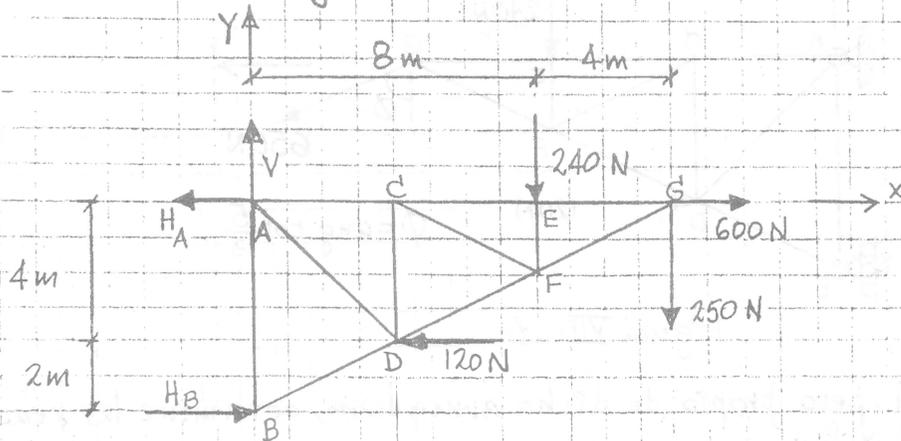


Figura VII.18

Al aplicar  $M_B = 0$  obtenemos:

$$6H_A + (2)(120) - (8)(240) - (6)(600) - 12(250) = 0,$$

$$6H_A = -240 + 1920 + 3600 + 3000 = 8280, \text{ y, } H_A = 1380 \text{ N} \text{ --- (1);}$$

teniendo en cuenta este valor, aplicando  $F_x = 0$  se obtiene:

$$-1380 + H_B - 120 + 600 = 0, \text{ por lo que: } H_B = 900 \text{ N} \text{ --- (2);}$$

al aplicar  $F_y = 0$  obtenemos:

$$V - 240 - 250 = 0, \text{ que da lugar a: } V = 490 \text{ N} \text{ --- (3).}$$

Entonces, teniendo en cuenta los valores dados por (1), (2) y (3), resultan:

$$\mathbf{R}_A = -H_A \mathbf{i} + V \mathbf{j} = -1380 \mathbf{i} + 490 \mathbf{j}, \text{ N,}$$

$$\mathbf{R}_B = H_B \mathbf{i} = 900 \mathbf{i}, \text{ N,}$$

Valores que ya obtuvimos al resolver este problema empleando condiciones vectoriales de equilibrio.

## Ejemplo VII.11

(VII.19)

La viga de la figura está sujeta al sistema de fuerzas coplanares mostrado, consistente en una carga triangular, una uniformemente repartida y una carga concentrada. Dicha viga, como puede apreciarse, está articulada en A (articulación fija) y en B (articulación móvil), así como sustentada en los apoyos deslizantes localizados en C y en D.

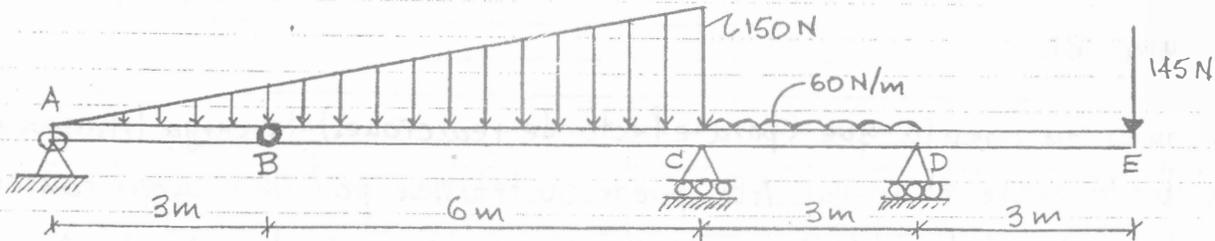


Figura VII.19

Con base en lo descrito y despreciando el peso propio (de la viga) determine las reacciones en los apoyos A, C y D.

Resolución.

Resolveremos este problema emplearemos condiciones escalares de equilibrio, así como un sistema cartesiano tridimensional.

Considerando principalmente el equilibrio de toda la viga, el d.c.l. de ésta es el mostrado en la figura VII.20, mismo que tiene en cuenta que (para efecto de reacciones) los efectos de las cargas triangular y uniformemente repartida equivalen, respectivamente, a las cargas concentradas de 675 N y 180 N aplicadas en G y H. Este diagrama supone que las reacciones (del todo verticales) en los apoyos A, C y D tienen sentido hacia arriba.

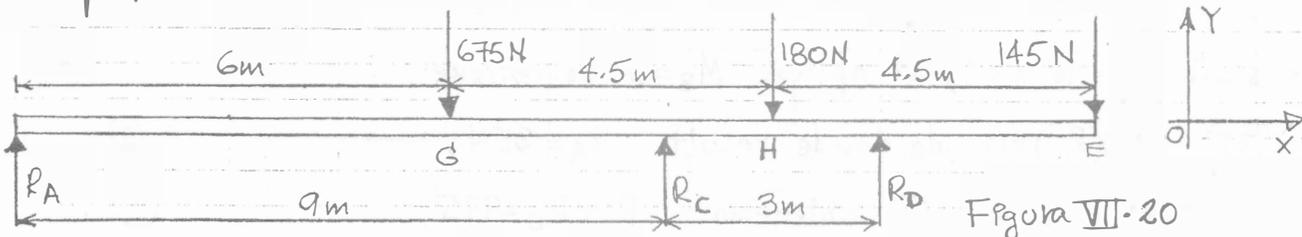


Figura VII.20

De  $F_y = 0$  obtenemos:  $R_A + R_C + R_D - 675 - 180 - 145 = 0,$

por lo que:  $R_A + R_C + R_D = 1000;$  ————— ①

al aplicar  $M_A = 0$  se obtiene:

$$9R_C + 12R_D - (675)(6) - (180)(10.5) - (145)(15) = 0$$

debido a lo cual:

$$9R_C + 12R_D = 8115,$$

o bien:

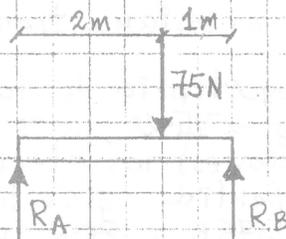
$$3R_C + 4R_D = 2705;$$
 ————— ②

### Ejemplo VII.11 (continuación) (3/4)

Como ① y ② constituyen un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, requerimos de otra ecuación (que contenga alguna de esas incógnitas, o las tres) para resolver el problema.

Esta ecuación la obtendremos analizando el equilibrio de la parte AB de la viga, por ser más fácil ese análisis que el correspondiente al tramo BE.

Teniendo en cuenta que (para efecto de reacciones) la carga triangular que actúa sobre el tramo AB puede sustituirse por una carga concentrada vertical de módulo 75 N, localizada 2 m a la derecha de A, el tramo mencionado deberá estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas mostradas en el d.c.l. de la figura VII.21, donde la fuerza vertical de magnitud  $R_B$  (que aparece en dicho d.c.l.) representa la acción del tramo BE sobre la parte AB.



Considerando este d.c.l., al aplicar  $M_B = 0$  se obtiene:

$$(1)(75) - (3)(R_A) = 0, \text{ de donde resulta } R_A = 25 \text{ N}; \quad \text{--- ③}$$

$$\text{Llevando este valor a ①, obtenemos: } R_C + R_D = 975; \quad \text{--- ①'}$$

al resolver el sistema formado por las ecuaciones ①' y ②, resultan:

$$R_C = 1195 \text{ N} \quad \text{--- ④}, \text{ y, } R_D = -220 \text{ N} \quad \text{--- ⑤}.$$

Entonces, con base en ③, ④ y ⑤, podemos decir que:

$$R_A = 25 \text{ J, N}; \quad R_C = 1195 \text{ J, N}; \quad R_D = -220 \text{ J, N}, \text{ o bien:}$$

$$R_A = 25 \text{ N} \uparrow, \quad R_C = 1195 \text{ N} \uparrow, \text{ y, } R_D = 220 \text{ N} \downarrow$$

### Ejemplo VII.11 (continuación) (3/4)

Tal vez valga la pena mencionar que, el tramo BE no ejerce momento alguno en el extremo B de la parte AB, puesto que ambos tramos se ligan mediante una articulación, en dicho extremo.

Por esa misma razón, el tramo AB no ejerce momento alguno en el extremo B de la parte BE.

A continuación verificaremos la validez de los valores que obtuvimos para las reacciones en los apoyos A, C y D, obteniendo la ecuación que se requería para resolver el problema (cuando ya se tenían ① y ②), analizando ahora el equilibrio de la parte BE de la viga.

Basados en que (para efecto de reacciones) la carga con variación lineal que actúa sobre el tramo BC puede sustituirse por una carga concentrada vertical, de magnitud 600 N y localizada 3.5 m a la derecha de B, en tanto que la carga uniformemente distribuida (que actúa sobre el tramo CD) puede ser sustituida por una carga concentrada de módulo 180 N, vertical y ubicada 1.5 m a la derecha de C, el tramo BE deberá estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas mostradas en el d.c.l. de la figura VII.22, donde la fuerza vertical de magnitud  $R_B$  (que aparece en ese diagrama) representa la acción del tramo AB sobre la parte BE.

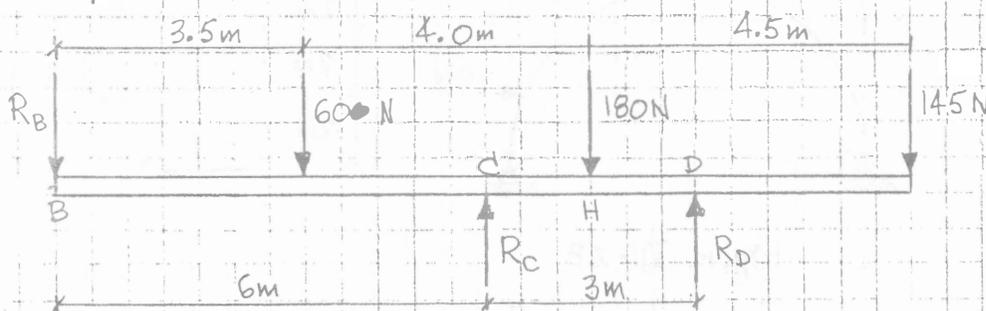


Figura VII.22

Al aplicar  $M_B = 0$  obtenemos:

$$6R_C + 9R_D - (3.5)(600) - (7.5)(180) - (12)(145) = 0,$$

$$\text{de donde: } 6R_C + 9R_D = 2100 + 1350 + 1740,$$

Ejemplo VII.11 (continuación) (4/4) e principio del ejemplo VII.12.

o sea que:  $2R_C + 3R_D = 1730$  — — — — — (4)

ecuación que con (1) y (2) forman un sistema de ecuaciones cuya solución es:

$$R_A = 25\text{ N}, \quad R_C = 1195\text{ N}, \quad \text{y}, \quad R_D = -220\text{ N},$$

valores que ya habíamos obtenido, pero más rápidamente, al analizar el equilibrio del tramo AB, para complementar las ecuaciones (1) y (2) que obtuvimos al analizar el equilibrio de toda la viga.

Con esto quedan verificados los valores que ya habíamos obtenido para las reacciones en los apoyos A, C y D, es decir:

$$R_A = 25\text{ N} \uparrow, \quad R_C = 1195\text{ N} \uparrow, \quad \text{y}, \quad R_D = 220\text{ N} \downarrow.$$

EJEMPLO VII.12. — El arco de tres articulaciones de la figura VII.23 está ubicado en el plano XY, donde también se encuentran las fuerzas de 30 y 40 N mostradas. Determine las reacciones en sus apoyos (A y B), así como las magnitudes de las fuerzas de interacción que se presentan en la articulación C.

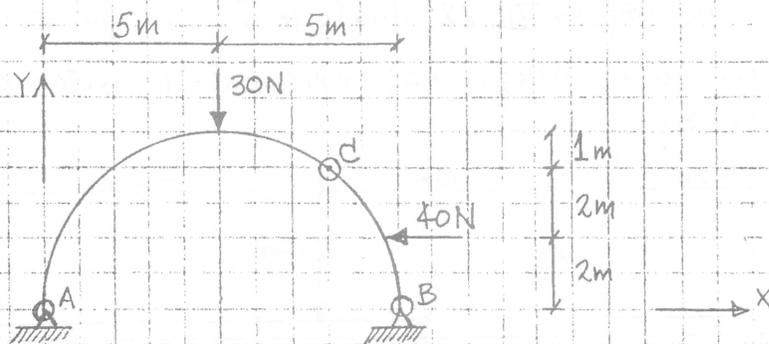


Figura VII.23

Resolución.

Primera mente analizaremos el equilibrio de todo el arco, apoyándonos en su d.c.l., que es el mostrado en la figura VII.24.

Ejemplo VII. 12 (continuación) (2/3)

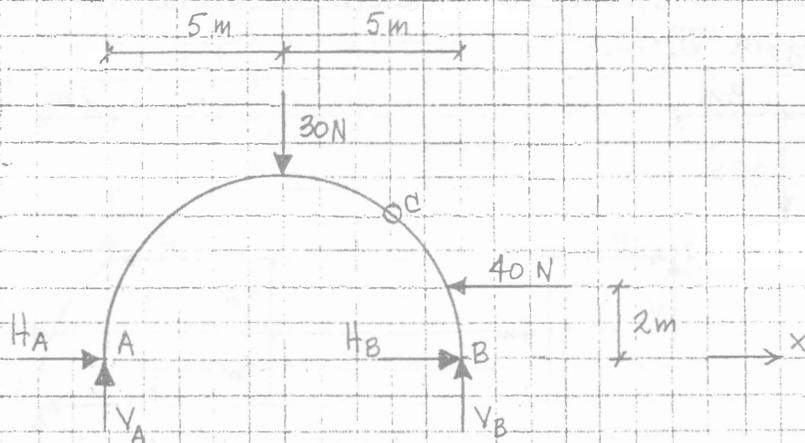


Figura VII. 24

Al aplicar  $F_x = 0$  se obtiene:

$$H_A + H_B - 40 = 0, \text{ de donde: } H_A + H_B = 40; \quad \text{--- ①}$$

aplicando  $F_y = 0$ :

$$V_A + V_B - 30 = 0, \text{ por lo que: } V_A + V_B = 30; \quad \text{--- ②}$$

de  $M_A = 0$  obtenemos:

$$10V_B + (2)(40) - 5(30) = 0, \quad 10V_B = 70, \text{ y, } V_B = 7N, \quad \text{--- ③}$$

valor que llevado a ② da lugar a:

$$V_A = 30 - V_B = 30 - 7 = 23N. \quad \text{--- ④}$$

No obstante que ya aplicamos las tres condiciones escalares de equilibrio, que proporciona la estática, todavía tenemos dos incógnitas de reacción las cuales están relacionadas por ①.

A fin de que conozcamos en su totalidad las reacciones en A y en B, así como las magnitudes de las fuerzas de interacción que se presentan en la articulación, habrá que analizar el equilibrio de la parte AC del arco, o bien del tramo BC.

Teniendo en cuenta los valores dados por ③ y ④, el tramo AC estará en equilibrio bajo la acción de las fuerzas mostradas en la figura VII. 25, en tanto que, el tramo BC estará en equilibrio bajo la acción de las

Ejemplo VII.12 (continuación) (3/3)

fuerzas que se muestran en el d.c.l. de dicho tramo; es decir, en el de la figura VII.26.

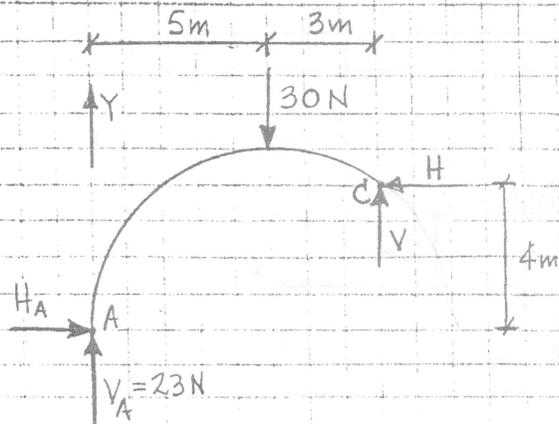


Figura VII.25

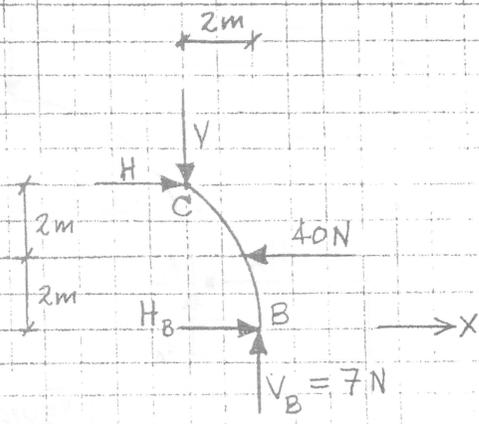


Figura VII.26

Analizaremos el equilibrio del tramo AC, para lo cual nos basaremos en su d.c.l.; es decir, el de la figura VII.25.

Al aplicar  $F_y = 0$  se obtiene:

$$23 - 30 + V = 0, \text{ de donde resulta: } V = 7 \text{ N; } \quad (5)$$

aplicando  $M_A = 0$ , teniendo en cuenta (5), obtenemos:

$$4H + (8)(7) - (5)(30) = 0, \quad 4H = 94, \text{ y } H = 23.5 \text{ N; } \quad (6)$$

de  $F_x = 0$ , al tener en cuenta (6), se obtienen

$$H_A - 23.5 = 0, \text{ y } H_A = 23.5 \text{ N} \quad (7)$$

valor que llevado a (1) da lugar a:  $H_B = 16.5 \text{ N} \quad (8)$

Entonces, las reacciones en los apoyos A y B, respectivamente, son

$$\mathbf{R}_A = 23.5\mathbf{i} + 23\mathbf{j}, \text{ N, } \quad \mathbf{R}_B = 16.5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \text{ N,}$$

en tanto que, las magnitudes de las fuerzas de interacción que se presentan en la articulación C son  $H = 23.5 \text{ N}$ , y,  $V = 7 \text{ N}$ .

De manera complementaria, teniendo en cuenta el d.c.l. del tramo BC, así como (5), (6) y (8), obtenemos:

$$F_x = H_B + H - 40 = 16.5 + 23.5 - 40 = 0, \quad F_y = 7 - V = 7 - 7 = 0, \text{ y,}$$

$$M_B = 2V_B + (2)(40) - 4H = 2(7) + 80 - 4(23.5) = 14 + 80 - 94 = 0,$$

lo que verifica el equilibrio del tramo BC para valores que obtuvimos durante la resolución de este problema, y permite afirmar que las reacciones y las magnitudes, que determinamos, son correctas.

#### VII.4 APLICACIÓN DE CONDICIONES VECTORIALES Y ESCALARES, DE EQUILIBRIO; A CUERPOS RÍGIDOS EN ESTADO DE EQUILIBRIO ISOSTÁTICO, SUJETOS A CARGAS COPLANARES, Y A SISTEMAS GENERALES DE FUERZAS EN EL ESPACIO.

En esta parte, acorde con el título de la misma, emplearemos las condiciones vectoriales y escalares de equilibrio en el espacio (que establecimos en la parte VII.1), aplicando dichas condiciones a cuerpos rígidos en estado de equilibrio isostático (estado que definimos en VII.2), sujetos unos a fuerzas coplanares y, otros, a sistemas generales de fuerzas en el espacio.

Ejemplo VII.13 .

Elabore el diagrama de cuerpo libre de la esfera homogénea y de peso  $W$ , de la figura VII.27 , suponiendo lisas las paredes mostradas. Después de elaborarlo, obtenga la reacción que ejerce cada pared sobre la esfera.

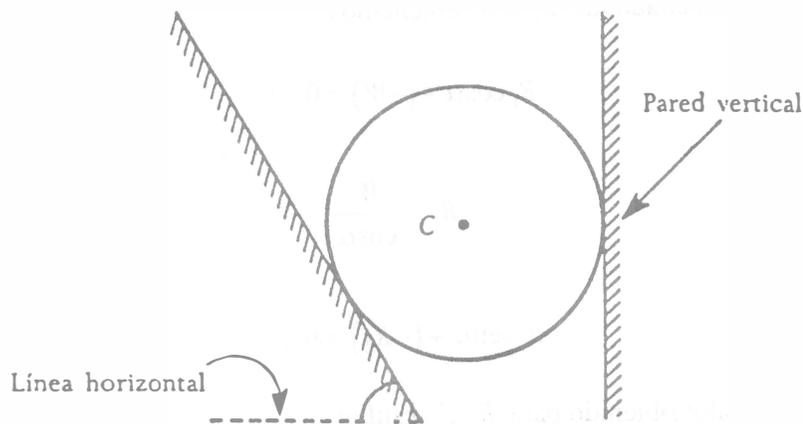


Figura VII.27

Resolución.

El diagrama de cuerpo libre de la esfera, considerando el peso de la misma concentrado en su centro de figura, es el mostrado en la figura VII.28 .

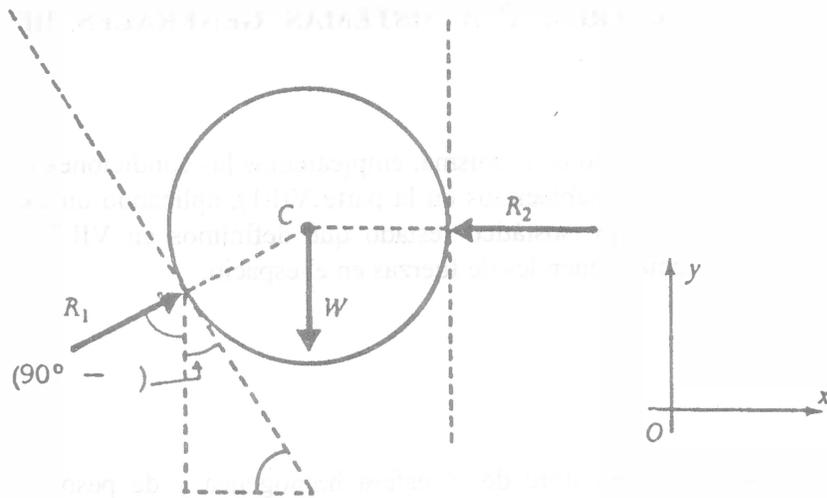


Figura VII.28

Considerando el d.c.l. recién citado, de  $F_y = 0$  obtenemos:

$$R_1 \cos \alpha + (-W) = 0 ,$$

luego:

$$R_1 = \frac{W}{\cos \alpha} \quad \dots (a);$$

de  $F_x = 0$  se obtiene:

$$R_1 \sin \alpha + (-R_2) = 0 ,$$

de donde, con base en el valor obtenido para  $R_1$  , resulta:

$$R_2 = R_1 \sin \alpha = \left[ \frac{W}{\cos \alpha} \right] \sin \alpha = W \tan \alpha \quad \dots (b);$$

entonces, teniendo en cuenta (a) y (b) podemos escribir:

$$\mathbf{R}_1 = R_1 (\mathbf{i} \sin \alpha + \mathbf{j} \cos \alpha) = (W \tan \alpha) \mathbf{i} + W \mathbf{j} , \quad \text{y} , \quad \mathbf{R}_2 = (-W \tan \alpha) \mathbf{i}$$

que son las reacciones pedidas, en función del enunciado del problema y del sistema de referencia que empleamos para aplicar las condiciones de equilibrio.

Dichas reacciones, también pueden expresarse mediante:

$$R_1 = \frac{W}{\cos \alpha} \quad \text{y} , \quad R_2 = W \tan \alpha$$

EJEMPLO VII.14.- El pequeño bloque de la figura VII.29 pesa 200 N y va a soltarse estando en contacto con el plano inclinado, que forma un ángulo  $\phi$  con la horizontal según se indica.

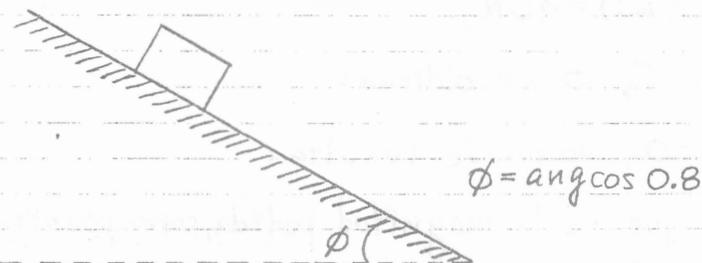


Figura VII.29

Considerando que el coeficiente de fricción estática entre las superficies en contacto es 0.25, determine la magnitud de una fuerza, paralela al plano inclinado, que habrá que aplicar al bloque para que, justo después de soltarlo:

- esté a punto de moverse hacia abajo, pero no se mueva, y,
- esté a punto de moverse hacia arriba, pero tampoco se mueva.

Resolución.

a) Llamando  $P$  a la magnitud pedida, el d.c.l. del bloque en la condición en que esté a punto de moverse hacia abajo (pero no se mueva) es el mostrado en la figura VII.30, donde también puede apreciarse el sistema de referencia que emplearemos para resolver este problema.

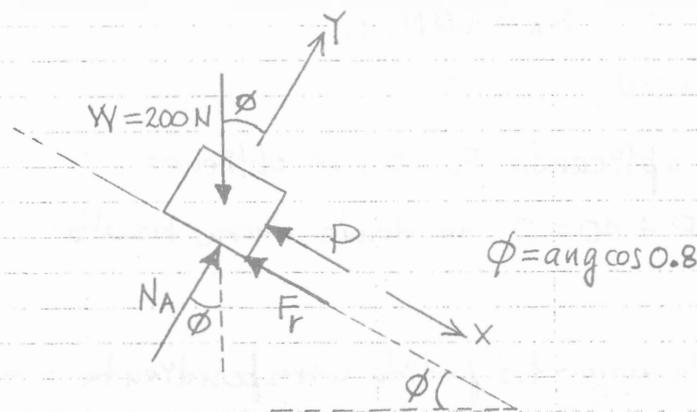


Figura VII.30

Ejemplo VII.4 (continuación) (2/2)

Al aplicar  $F_y = 0$  obtenemos:

$$N_A - 200 \cos \phi = 0, \quad N_A = 200 \cos \phi = 160 \text{ N},$$

por lo que, como el bloque está a punto de moverse:

$$F_r = \mu N_A = (0.25)(160) = 40 \text{ N};$$

entonces, al aplicar  $F_x = 0$  se obtiene:

$$200 \sin \phi - P - 40 = 0, \text{ de donde resulta:}$$

$$P = 120 - 40 = 80 \text{ N} \text{ que es la magnitud pedida, correspondiente a este inciso.}$$

b) El d.c.l. del bloque en la condición en que, después de soltarlo, esté a punto de moverse hacia arriba (pero no se mueva) es el que mostramos en la figura VII.31, donde  $P$  sigue representando a la magnitud de la fuerza que se aplica al bloque, justo al soltarse.

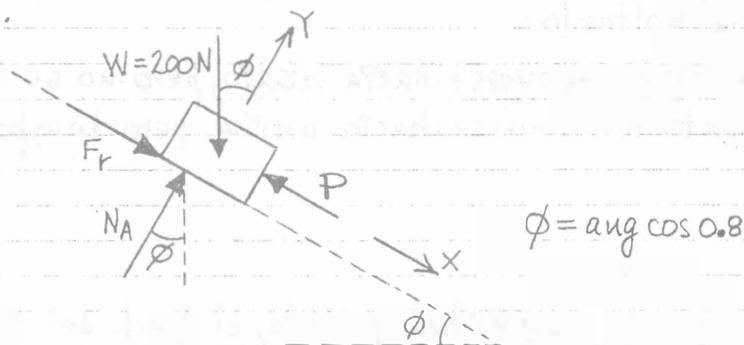


Figura. VII.31

En este caso, al aplicar  $F_y = 0$  también obtenemos:

$$N_A - 200 \cos \phi = 0, \quad N_A = 160 \text{ N},$$

$$F_r = \mu N_A = 40 \text{ N},$$

pero ahora, aplicando  $F_x = 0$ , se obtiene:

$$200 \sin \phi - P + 40 = 0, \text{ de donde ahora resulta:}$$

$$P = 120 + 40$$

o sea que, la magnitud pedida correspondiente a este inciso es 160 N.

**EJEMPLO VII-15** - El bloque de la figura VII-32 pesa 260N y se encuentra inmóvil después de soltarlo, estando en contacto con el plano inclinado mostrado, que forma con la horizontal el ángulo  $\delta$  indicado.

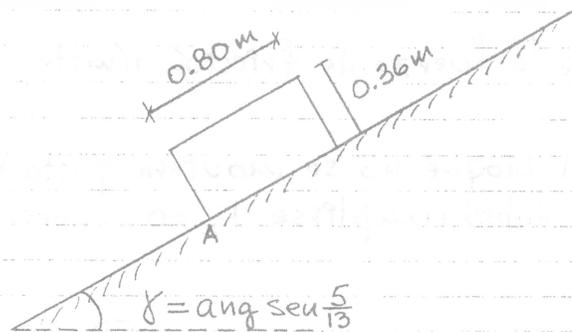


Figura VII-32

Considerando que el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es 0.6, obtenga la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque, así como la posición de la fuerza normal que actúa sobre dicho cuerpo, justo después de que se le soltó.

Además, si cierto tiempo después de soltarlo se requiriera de una fuerza paralela al plano y de módulo  $P$ , para que el bloque estuviera a punto de moverse hacia abajo del plano, determine la magnitud de la fuerza de fricción que actúe sobre el bloque, cuando a éste se le aplique una fuerza de módulo  $0.75P$ , paralela al plano, que trate de moverlo hacia abajo de éste.

Por último, si ya después de soltarlo se requiriera de una fuerza paralela al plano y de magnitud  $Q$ , para que el bloque estuviera a punto de moverse hacia arriba del plano, obtenga el módulo de la fuerza de fricción que actúe sobre el bloque, cuando a éste se le aplique una fuerza de magnitud igual a  $0.50Q$ , paralela al plano, con la intención de moverlo hacia arriba de éste.

### Resolución.

El d.c.l. del bloque justo después de habérselo soltado es el de la figura VII-33, donde también se encuentra el sistema de referencia que emplearemos durante la resolución del problema.

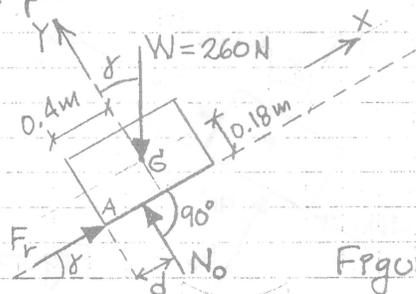


Figura VII-33

### Ejemplo VII.15 (continuación) (2/4)

Considerando este d.c.l., al aplicar  $F_y = 0$ , obtenemos:

$$N_0 - 260 \cos \gamma = 0, \text{ y } N_0 = 260 \cos \gamma = 260 \left( \frac{12}{13} \right) = 240 \text{ N}, \quad \text{--- ①}$$

$$\text{con lo que } M N_0 = (0.6)(240) = 144 \text{ N} \quad \text{--- ②}$$

resulta ser la magnitud de la fuerza de fricción límite correspondiente este problema.

Por otro lado, para que el bloque no se moviera justo después de soltarlo, en dicho instante debió cumplirse  $F_x = 0$ , es decir:

$$F_r - 260 \operatorname{sen} \gamma = 0,$$

$$\text{Igualdad que se cumple para } F_r = 260 \operatorname{sen} \gamma = 260 \left( \frac{5}{13} \right) = 100 \text{ N};$$

como en este caso la magnitud de la fuerza requerida para que el bloque no se moviera (100 N) es menor que el módulo de la fuerza de fricción límite (o sea 144 N, dado por ②), la magnitud pedida para este caso es 100 N.

Al aplicar  $M_d = 0$ , teniendo en cuenta el valor de  $F_r$  correspondiente a este caso, se obtienen:

$$0.18 F_r - (0.4 - d)(N_0) = 0, \quad 0.18(100) - (0.4 - d)(240) = 0,$$

$$18 = 96 - 240d, \quad 240d = 78, \text{ y } d = 0.325 \text{ m},$$

o sea que, en este caso, la fuerza normal que actúa sobre el bloque toca a éste en un punto localizado 32.5 cm a la derecha de la esquina A.

Ahora consideremos el d.c.l. del bloque cuando estuviera a punto de moverse hacia abajo del plano, como consecuencia de la aplicación de la fuerza de magnitud  $P$  mostrada en ese d.c.l., que es el de la figura VII.34.

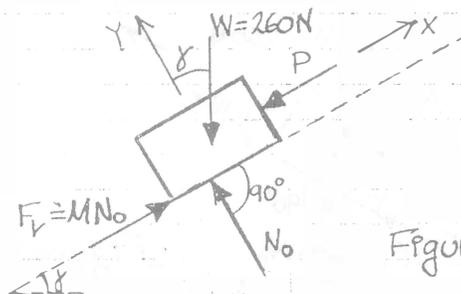


Figura VII.34

### Ejemplo VII.15 (continuación) (3/4)

Al aplicar  $F_y = 0$  también obtenemos:

$$N_0 - 260 \cos \gamma = 0, \gamma, N_0 = 240 \text{ N}, \text{ es decir el valor dado por } \textcircled{1}$$

y como en este caso, por estar a punto de moverse, se presenta la fricción límite, ahora tenemos:

$$F_r = \mu N_0 = (0.6)(240) = 144 \text{ N}; \quad \textcircled{2}$$

teniendo en cuenta este valor, al aplicar  $F_x = 0$  se obtiene:

$$-P - 260 \sin \gamma + 144 = 0, \text{ igualdad que se cumple para}$$

$$P = 144 - 260 \left( \frac{5}{13} \right) = 144 - 100 = 44 \text{ N}.$$

Entonces, cuando al bloque se le aplique una fuerza de módulo  $0.75P$  (es decir  $33 \text{ N}$ ), paralela al plano y que trate a moverlo hacia abajo de éste, el bloque se encontrará en equilibrio sujeto a las fuerzas mostradas en el d.c.l. de la figura VII.35.

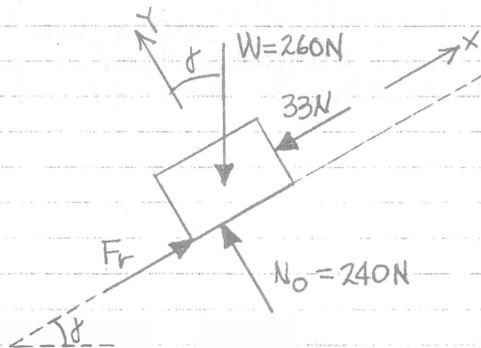


Figura VII.35

Así pues, para estas condiciones, de  $F_x = 0$  obtenemos:

$$-33 - 260 \sin \gamma + F_r = 0, \gamma, F_r = 33 + 100 = 133 \text{ N},$$

valor que se nos podría determinar (y que, obviamente, es menor que los  $144 \text{ N}$  que corresponden a la magnitud de la fuerza de fricción límite).

Atendiendo a lo último que se nos pidió, ahora consideraremos el d.c.l. del bloque cuando estuviera a punto de moverse hacia arriba del plano, debido a la aplicación de la fuerza de magnitud  $Q$  mostrada en

### Ejemplo VII.15 (continuación) (4/4)

dicho d.c.l., que es el de la figura VII.36

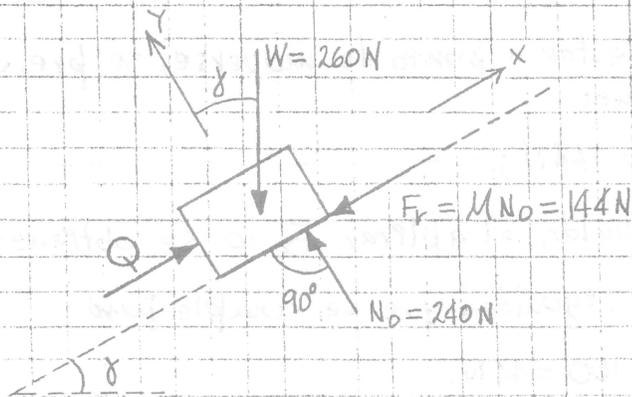


Figura VII.36

Considerando ahora este d.c.l., al aplicar  $F_x = 0$ , obtenemos:

$$Q - 144 - 260 \operatorname{sen} \delta = 0, \text{ y } Q = 144 + 100 = 244 \text{ N.}$$

Por ello, cuando al bloque se le aplique una fuerza de magnitud igual a  $0.5Q$  (o sea  $122 \text{ N}$ ), paralela al plano y con la intención de moverlo hacia arriba de éste, el bloque estará en equilibrio sujeto a la acción de las fuerzas mostradas en el d.c.l. de la figura VII.37.

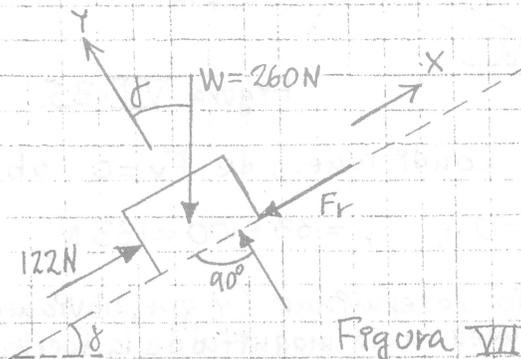


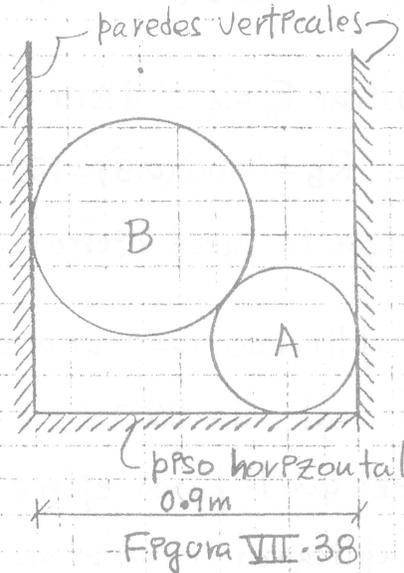
Figura VII.37

Entonces, para esta condición, de  $F_x = 0$  obtenemos:

$$122 - F_r - 260 \operatorname{sen} \delta = 0, \text{ y } F_r = 122 - 100 = 22 \text{ N,}$$

valor que se nos solicitó obtener (mismo que, obviamente, también es menor que los  $144 \text{ N}$  que corresponden al módulo de la fuerza de fricción límite).

**EJEMPLO VII.16.** - Los discos de la figura VII.38 son homogéneos, tienen un mismo espesor y se encuentran en equilibrio en la posición mostrada. El disco A pesa 500 N y su radio es de 0.2 m, en tanto que B pesa 900 N y tiene un radio igual a 0.3 m.



Con base en ello, determine la magnitud de la fuerza que la pared ejerce sobre B, el módulo de las fuerzas de interacción que se presentan en A y en B, y las magnitudes de las fuerzas que sobre A ejercen tanto el piso como la pared.

Resolución.

Al llamar P al módulo de las fuerzas de interacción debidas al contacto entre A y B,  $R_B$  a la magnitud de la fuerza que la pared ejerce sobre B, y representando con V y con H a las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre A, respectivamente, por el piso y la pared, los d.c.i. de A y de B son los de la figura VII.39.

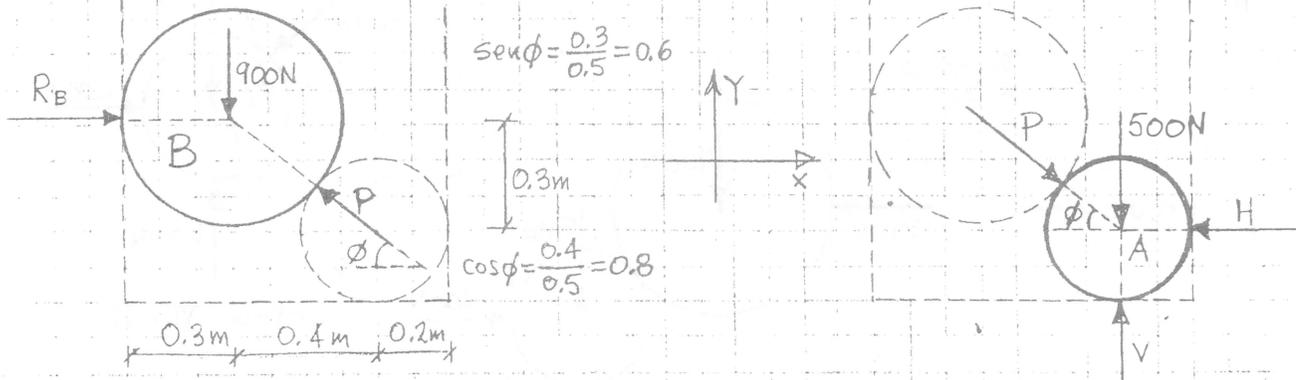


Figura VII.39

Ejemplo VII-16 (continuación) (2/2)

Al aplicar  $F_y = 0$  al disco B se obtiene:

$$P \sin \phi - 900 = 0, \text{ de donde resulta } P = \frac{900}{\sin \phi} = 1500 \text{ N}, \quad \text{--- (1)}$$

como módulo de las fuerzas de interacción debidas al contacto entre el disco A y el B.

Teniendo en cuenta (1), al aplicar  $F_x = 0$  al disco B, obtenemos:

$$R_B - 1500 \cos \phi = 0, \text{ por lo que } R_B = (1500)(0.8) = 1200 \text{ N}, \quad \text{--- (2)}$$

que es la magnitud de la fuerza que la pared ejerce sobre B.

Ahora, teniendo en cuenta (1), aplicando  $F_x = 0$  al disco A, se obtiene:

$$1500 \cos \phi - H = 0, \text{ debido a lo cual } H = 1200 \text{ N}, \quad \text{--- (3)}$$

que es la magnitud de la fuerza que la pared ejerce sobre A.

También teniendo en cuenta (1), aplicando  $F_y = 0$  al disco A obtenemos:

$$V - 500 - 1500 \sin \phi = 0, \text{ de donde resulta } V = 1400 \text{ N}, \quad \text{--- (4)}$$

como magnitud de la fuerza que el piso ejerce sobre A.

A continuación, en las figuras VII-40, VII-41 y VII-42, se muestran las fuerzas que actúan sobre B, sobre A, y sobre el conjunto formado por los discos B y A, para que se aprecien los estados de equilibrio correspondientes.

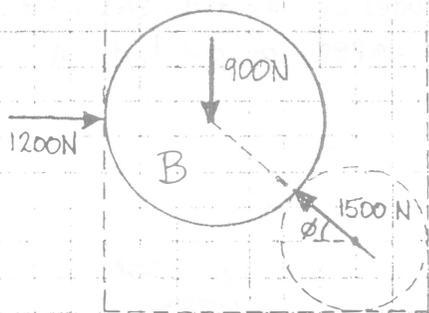


Figura VII-40

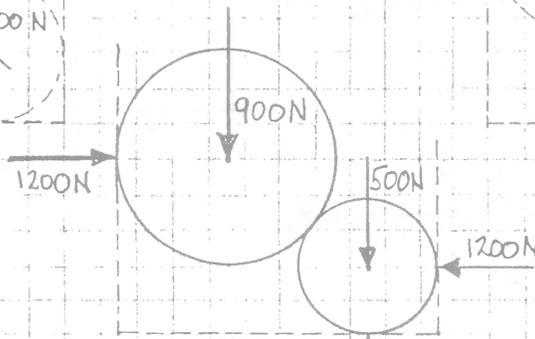


Figura VII-42

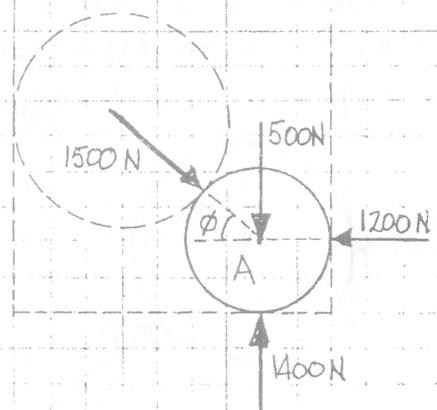


Figura VII-41

VII.43

EjemPlo VII.17. - El paralelepípedo de la figura es homogéneo, pesa 500N y se encuentra sujeto a la acción de las fuerzas mostradas, cuyas líneas de acción son, en todos los casos, colineales con las aristas del cuerpo.

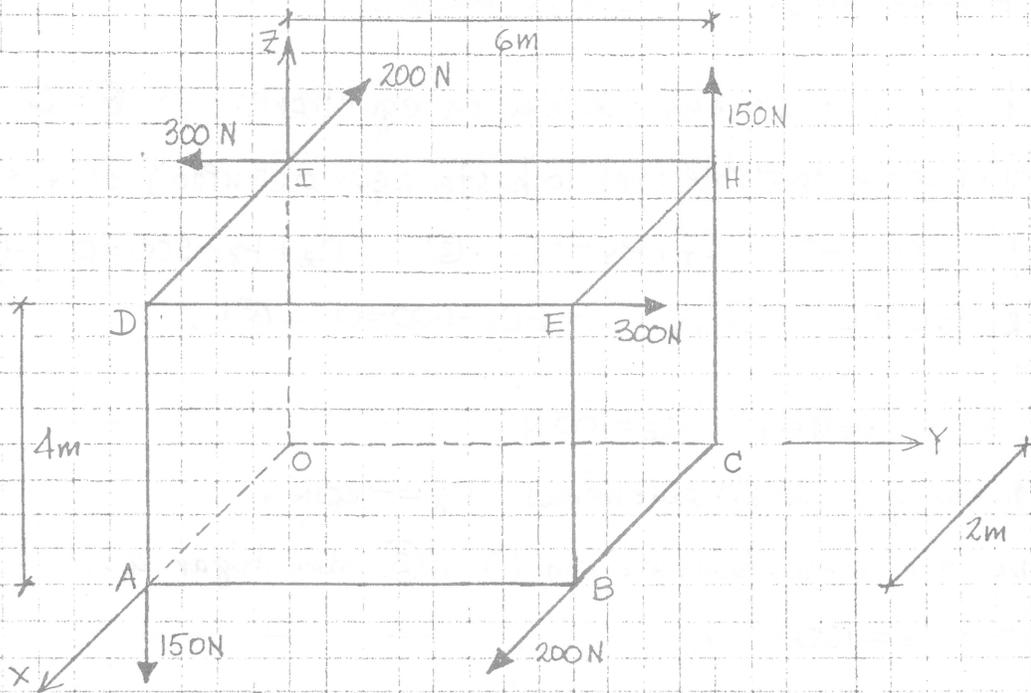


Figura VII.43

Considerando que el plano XY es horizontal, determine si dicho cuerpo puede quedar en equilibrio, actuando sobre él su peso y las seis fuerzas de la figura VII.43, así como otras dos fuerzas: una aplicada en la esquina O y la otra en la esquina C.

Resolución.

Teniendo en cuenta que sobre el cuerpo actúan su peso y las seis fuerzas citadas (que pueden considerarse éstas como tres pares de fuerzas), y que las fuerzas que actuarían en O y en C, respectivamente, para constituir un sistema en equilibrio, son

$$\mathbf{F}_O = P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}, \text{ y } \mathbf{F}_C = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k},$$

para el sistema descrito se tendrían:

$$\mathbf{F} = -500 \mathbf{k} + \mathbf{F}_O + \mathbf{F}_C = (C_x + P_x) \mathbf{i} + (C_y + P_y) \mathbf{j} + (C_z + P_z - 500) \mathbf{k}, \text{ y}$$

Ejemplo VII.17 (continuación) (2/5)

$$\mathbf{M}_O = (-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \times (150\mathbf{k}) + (-4\mathbf{k} + 6\mathbf{j}) \times (200\mathbf{i}) + (2\mathbf{i}) \times 300\mathbf{j} + (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \times (-500\mathbf{k}) + 6\mathbf{j} \times \mathbf{R}_C =$$

$$= 300\mathbf{j} + 900\mathbf{i} - 800\mathbf{j} - 1200\mathbf{k} + 600\mathbf{k} + 500\mathbf{j} - 1500\mathbf{i} - 6C_x\mathbf{k} + 6C_z\mathbf{i}, \text{ es decir,}$$

$$\mathbf{M}_O = (6C_z - 600)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (-6C_x - 600)\mathbf{k};$$

entonces, dicho sistema quedará en equilibrio si  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ , lo cual sería factible (por lo hasta aquí obtenido) sí y sólo si:

$$C_x + P_x = 0 \text{ --- (1), } C_y + P_y = 0 \text{ --- (2), } C_z + P_z - 500 = 0 \text{ --- (3),}$$

$$6C_z - 600 = 0 \text{ --- (4), y, } -6C_x - 600 = 0 \text{ --- (5).}$$

De (4) se obtiene  $C_z = 100 \text{ N,}$  --- (6)

en tanto que, de (5) obtenemos  $C_x = -100 \text{ N,}$  --- (7)

valores que, conjuntamente con (1) y (3) dan lugar a:

$$P_x = -C_x = 100 \text{ N, y,} \text{ --- (8)}$$

$$P_z = 500 - C_z = 400 \text{ N,} \text{ --- (9)}$$

entonces, como debido a (2) se tiene que  $P_y = -C_y,$  --- (10)

al cumplirse  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  para lo dado por (6), (7), (8), (9) y (10),

tenemos que:

$$\mathbf{F}_O = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k} = 100\mathbf{i} - C_y\mathbf{j} + 400\mathbf{k},$$

$$\mathbf{F}_C = C_x\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + C_z\mathbf{k} = -100\mathbf{i} + C_y\mathbf{j} + 100\mathbf{k};$$

entonces, habrá tantas soluciones como valores demos a  $C_y$ ; es decir, para las cuales el paralelepípedo quedará en equilibrio con una fuerza aplicada en O y otra aplicada en C.

Por ejemplo, con  $C_y = 200$  las fuerzas solicitadas son

$$\mathbf{F}_O = 100\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 400\mathbf{k}, \text{ N, y, } \mathbf{F}_C = -100\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 100\mathbf{k},$$

con lo cual se tiene:

$$\mathbf{F} = -500\mathbf{k} + \mathbf{F}_O + \mathbf{F}_C = -500\mathbf{k} + (100\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 400\mathbf{k}) + (-100\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 100\mathbf{k}) = \mathbf{0};$$

veamos ahora si también se cumple la condición de momentos para

### Ejemplo VII.17 (continuación) (3/5)

el equilibrio, sólo que tomando ahora momentos con respecto a C, teniendo en cuenta el valor  $\mathbf{F}_0 = 100\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 400\mathbf{k}$ , N, y recordando que el momento de un par es independiente del centro de momentos.

Como la suma de los momentos de los pares es  $900\mathbf{i} - 500\mathbf{j} - 600\mathbf{k}$  (según lo calculado cuando obtuvimos  $\mathbf{M}_0$  al principio de esta resolución), tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_C &= 900\mathbf{i} - 500\mathbf{j} - 600\mathbf{k} + (\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \times (-500\mathbf{k}) + (-6\mathbf{j}) \times (100\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 400\mathbf{k}) = \\ &= 900\mathbf{i} - 500\mathbf{j} - 600\mathbf{k} + 500\mathbf{j} + 1500\mathbf{i} + 600\mathbf{k} - 2400\mathbf{i} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

razón por la cual las fuerzas  $\mathbf{F}_0 = 100\mathbf{i} - 200\mathbf{j} + 400\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{F}_C = -100\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$  constituyen una solución al problema dado.

Veamos porqué el problema dado tiene solución.

El sistema de fuerzas (que llamaremos  $\mathbf{S}_1$ ) formado por las seis fuerzas mostradas en la figura del enunciado del problema (la VII.43) y por el peso del cuerpo ( $-500\mathbf{k}$ , N) aplicado en G (1, 3, 2) tiene por coordenadas vectoriales:

$$\mathbf{R}_1 = -500\mathbf{k}, \text{ N, y } (\mathbf{M}_0)_1 = -600\mathbf{i} - 600\mathbf{k}$$

(que son las obtenidas de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{M}_0$  sin considerar las aportaciones de  $\mathbf{F}_0$  y  $\mathbf{F}_C$ )

$$\text{con lo que } \mathbf{R}_1 \cdot (\mathbf{M}_0)_1 = (-500)(-600) = 300,000 \neq 0,$$

por lo cual  $\mathbf{S}_1$  puede reducirse a un motor, de modo que el momento de dicho motor es:

$$\mathbf{M}_\perp = \frac{(\mathbf{M}_0)_1 \cdot \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} \left[ \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} \right] = \frac{300,000}{500} [-\mathbf{k}] = -600\mathbf{k},$$

y para el cual:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R}_1 = (\mathbf{M}_0)_1 - \mathbf{M}_\perp = (-600\mathbf{i} - 600\mathbf{k}) - (-600\mathbf{k}) = -600\mathbf{i},$$

$$\text{con } \mathbf{r} \times \mathbf{R}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} = (-500y)\mathbf{i} + (500x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

### Ejemplo VII.17 (continuación) (4/5)

para lo cual deberá cumplirse:

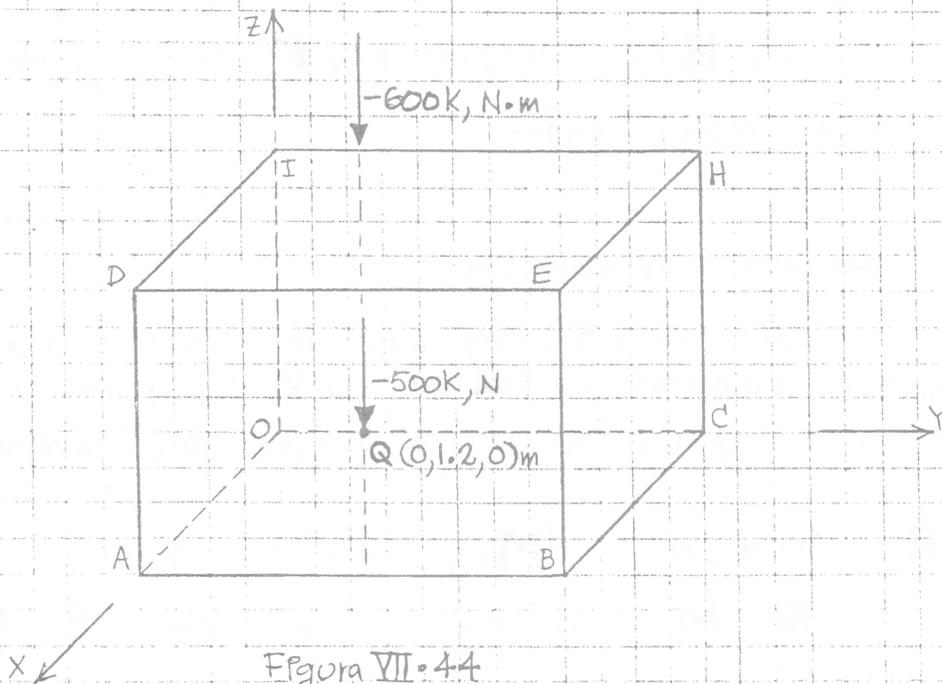
$$-500Y = -600, \quad 500X = 0, \quad \text{independientemente del valor de } Z,$$

o sea que su eje central está definido por

$$X = 0, \quad Y = 1.2, \quad Z = Z,$$

y uno de los puntos de dicho eje es  $Q(0, 1.2, 0)$ .

Así pues,  $S_1$  es un sistema reducible al motor mostrado en la figura VII.44.



Por ello, y teniendo en cuenta el principio de superposición de causas y efectos, el sistema  $S_1$  podrá equilibrarse con fuerzas aplicadas en  $O$  y en  $C$ , elementos obtenibles como las sumas de las fuerzas que (aplicadas en dichos puntos) equilibren: por una parte a la fuerza de  $-500K, N$ , y por otra al momento del par (es decir  $-600K, N \cdot m$ ).

Como el primero de los equilibrios recién descritos puede lograrse con las fuerzas  $400K, N$ , y  $100K, N$ , mostradas en la figura VII.45 (independientemente de la aplicación en  $O$  y en  $C$  de dos fuerzas colineales con el eje  $Y$  pero de sentidos opuestos y módulos iguales, como las de

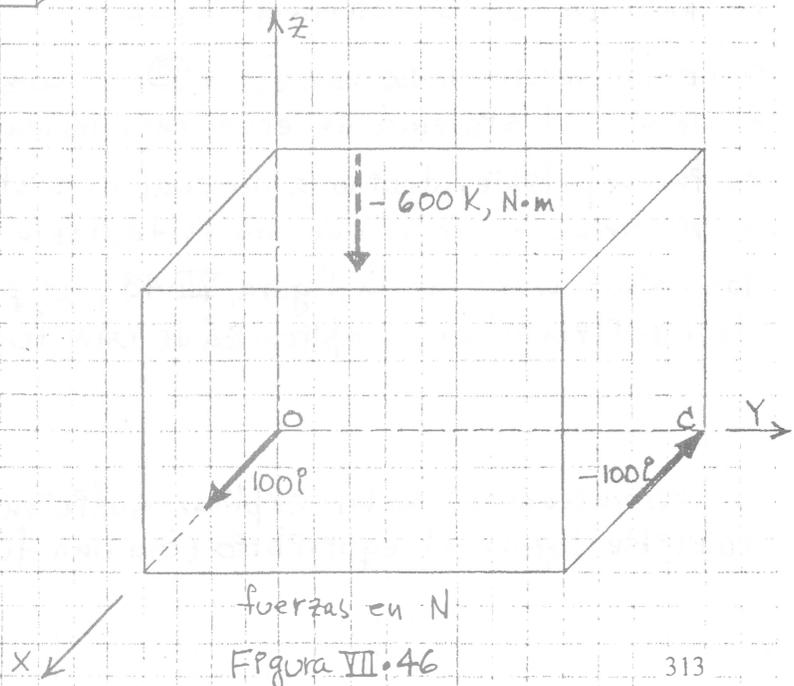
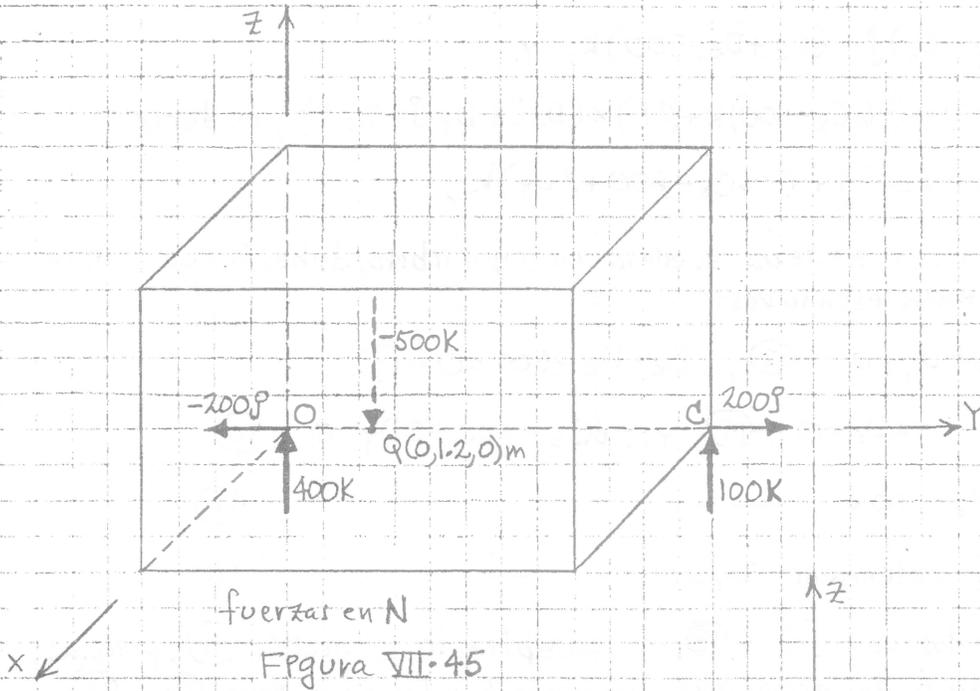
Ejemplo VII.17 (continuación) (5/5)

$200\hat{j}, N$ , y  $-200\hat{j}, N$ , que se muestran), en tanto que el segundo equilibrio mencionado puede tenerse con dos fuerzas paralelas aplicadas en  $O$  y en  $C$ , que formen un par cuyo momento sea  $600K, N \cdot m$  (es decir el perverso aditivo del momento del motor) como las mostradas en la figura VII.46, las fuerzas pedidas resultan ser:

$$\mathbf{F}_O = (-200\hat{j} + 400\hat{k}) + (100\hat{i}) = 100\hat{i} - 200\hat{j} + 400\hat{k}, N,$$

$$\mathbf{F}_C = (200\hat{j} + 100\hat{k}) + (-100\hat{i}) = -100\hat{i} + 200\hat{j} + 100\hat{k}, N;$$

es decir, las fuerzas que dimos como una de las soluciones al problema.



EJEMPLO VII.18. - Considerando las mismas condiciones de fuerzas actuantes sobre el paralelepípedo del problema anterior, determine ahora si dicho cuerpo puede quedar en equilibrio actuando las fuerzas recién citadas, así como otras dos fuerzas: una aplicada en D y otra en C.

Resolución.

Las coordenadas vectoriales para el sistema de fuerzas de este ejemplo (sistema al que llamaremos  $S$ ), considerando algunas partes del ejemplo anterior y siendo  $\mathbf{R}_D = D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}$  la fuerza actuante en D, resultan ser:

$$\mathbf{F} = (C_x + D_x) \mathbf{i} + (C_y + D_y) \mathbf{j} + (C_z + D_z - 500) \mathbf{k}, \text{ y}$$

$$\mathbf{M}_o = (6C_z - 600) \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} + (-6C_x - 600) \mathbf{k} + (2\mathbf{l}) \times (D_x \mathbf{i} + D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}), \text{ es decir:}$$

$$\mathbf{M}_o = (6C_z - 600) \mathbf{i} + (-2D_z) \mathbf{j} + (-6C_x - 600 + 2D_y) \mathbf{k};$$

entonces, para que dicho sistema quedara en equilibrio, deberían cumplirse las siguientes ecuaciones escalares:

$$C_x + D_x = 0 \text{ --- (11), } C_y + D_y = 0 \text{ --- (12), } C_z + D_z - 500 = 0 \text{ --- (13),}$$

$$6C_z - 600 = 0 \text{ --- (14), } -2D_z = 0 \text{ --- (15), y, } -6C_x - 600 + 2D_y = 0 \text{ --- (16),}$$

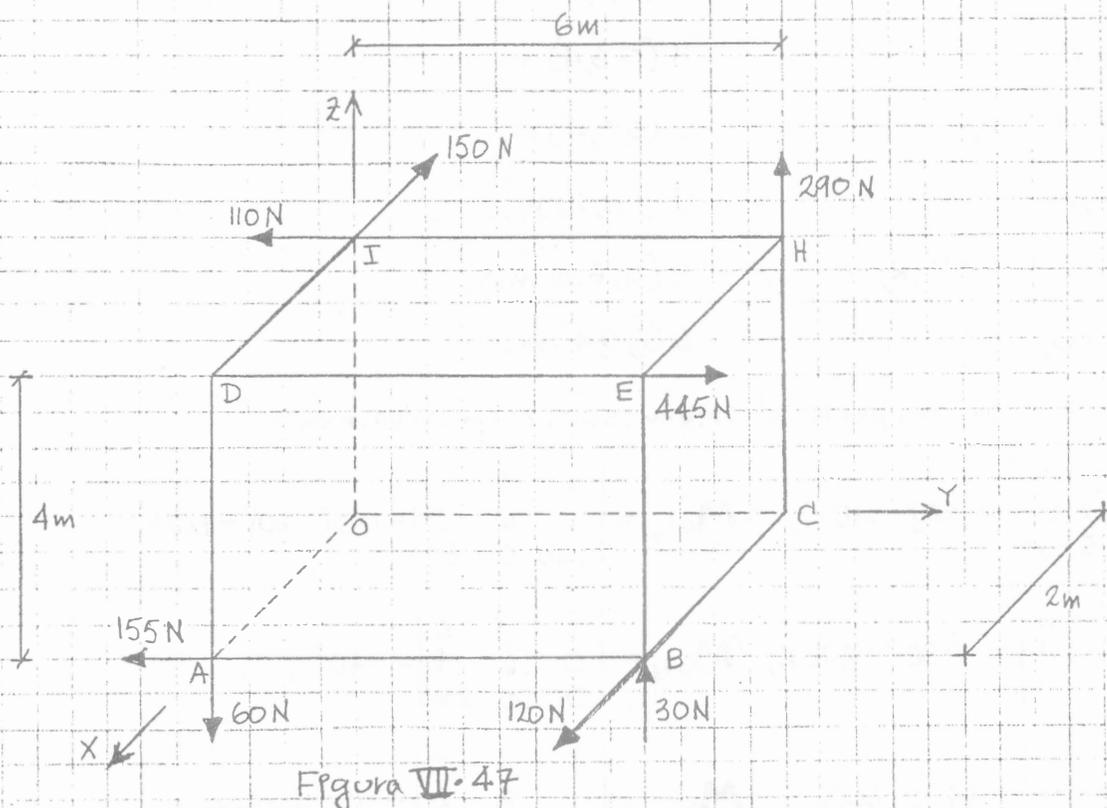
$$\text{De (14) se obtiene } C_z = 100 \text{ N, --- (17)}$$

$$\text{en tanto que, de (15) obtenemos: } D_z = 0 \text{ ; --- (18)}$$

como los valores dados por (17) y (18) no cumplen la ecuación (13), podemos decir que el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (11) a (16) es incompatible, debido a lo cual el sistema  $S$  no puede quedar en equilibrio; es decir que, no es factible que el sistema formado por las seis fuerzas de la figura VII.43 y el peso del paralelepípedo quede en equilibrio con la aplicación de una fuerza en C y otra en D.

Se recomienda al lector explicar, suficientemente, por qué no fue factible lograr el equilibrio (con una fuerza aplicada en C y otra en D).

EXAMPLE VII.19. - El paralelepípedo de la figura VII.47 es homogéneo, pesa 500N y se encuentra sujeto a la acción de las fuerzas mostradas, cuyas líneas de acción son, en todos los casos, colineales con las aristas del cuerpo.



Considerando que el plano XY es horizontal, determine si dicho cuerpo está en equilibrio con fuerzas aplicadas en C y en D, dadas respectivamente por:

- $-50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}, \text{ N}$ ,  $\gamma$ ,  $80\mathbf{i} - 80\mathbf{j} + 140\mathbf{k}, \text{ N}$ ,
- $-750\mathbf{j} + 200\mathbf{k}, \text{ N}$ ,  $\gamma$ ,  $30\mathbf{i} + 70\mathbf{j} + 40\mathbf{k}, \text{ N}$ ,  $\gamma$ ,
- $10\mathbf{i} - 180\mathbf{j}, \text{ N}$ ,  $\gamma$ ,  $20\mathbf{i} + 240\mathbf{k}, \text{ N}$ .

Resolución.

- En este caso, el sistema de fuerzas formado por todas las fuerzas que actúan sobre el paralelepípedo, es el constituido por las descritas enseguida.

Ejemplo VII.19 (continuación) (2/3)

$$\mathbf{F}_1 = -155\mathbf{j} - 60\mathbf{k}, \text{ N, aplicada en A } (2, 0, 0) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_2 = 120\mathbf{i} + 30\mathbf{k}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{B } (2, 6, 0) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_3 = 445\mathbf{j}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{E } (2, 6, 4) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_4 = 290\mathbf{k}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{H } (0, 6, 4) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_5 = -150\mathbf{i} - 110\mathbf{j}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{I } (0, 0, 4) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_6 = -500\mathbf{k}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{G } (1, 3, 2) \text{ m,}$$

$$\mathbf{F}_C = -50\mathbf{i} - 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{C } (0, 6, 0) \text{ m, y,}$$

$$\mathbf{F}_D = 80\mathbf{i} - 80\mathbf{j} + 140\mathbf{k}, \text{ N, } \checkmark \quad \checkmark \quad \text{D } (2, 0, 4) \text{ m,}$$

cuyos momentos con respecto al origen son, respectivamente:

$$(\mathbf{M}_0)_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -155 & -60 \end{vmatrix} = 120\mathbf{j} - 310\mathbf{k}, \quad (\mathbf{M}_0)_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 6 & 0 \\ 120 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 180\mathbf{i} - 60\mathbf{j} - 720\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{M}_0)_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 445 & 0 \end{vmatrix} = -1780\mathbf{i} + 890\mathbf{k}, \quad (\mathbf{M}_0)_4 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 290 \end{vmatrix} = 1740\mathbf{i},$$

$$(\mathbf{M}_0)_5 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 4 \\ -150 & -110 & 0 \end{vmatrix} = 440\mathbf{i} - 600\mathbf{j}, \quad (\mathbf{M}_0)_6 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -500 \end{vmatrix} = -1500\mathbf{i} + 500\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{M}_0)_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -50 & -100 & 100 \end{vmatrix} = 600\mathbf{i} + 300\mathbf{k}, \quad (\mathbf{M}_0)_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 80 & -80 & 140 \end{vmatrix} = 320\mathbf{i} + 40\mathbf{j} - 160\mathbf{k}$$

debido a lo cual, dicho sistema tiene por coordenadas vectoriales a:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6) + (\mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D) = (-30\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 240\mathbf{k}) + (30\mathbf{i} - 180\mathbf{j} + 240\mathbf{k}) = \mathbf{0}, \text{ y}$$

$$\mathbf{M}_0 = [(\mathbf{M}_0)_1 + (\mathbf{M}_0)_2 + (\mathbf{M}_0)_3 + (\mathbf{M}_0)_4 + (\mathbf{M}_0)_5 + (\mathbf{M}_0)_6] + [(\mathbf{M}_0)_C + (\mathbf{M}_0)_D], \text{ es decir}$$

$$\mathbf{M}_0 = (-920\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 140\mathbf{k}) + (920\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 140\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

por lo que, en este caso, el paralelepípedo se encuentra en equilibrio.

b) Ahora, el paralelepípedo se encuentra sujeto a la acción del sistema (que llamaremos  $\mathbf{S}_B$ ) formado por las fuerzas  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_6$  respectivamente-

### Ejemplo VII. 19 (continuación) (3/3)

cratas, así como a las fuerzas  $\mathbf{F}_c = -250\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$ , y  $\mathbf{F}_D = 30\mathbf{i} + 70\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$ , por lo que las coordenadas vectoriales de dicho sistema resultan:

$$\mathbf{F} = (-30\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 240\mathbf{k}) + (-250\mathbf{j} + 200\mathbf{k}) + (30\mathbf{i} + 70\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}, \text{ y}$$

$$\mathbf{M}_O = (-920\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 140\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -250 & 200 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 30 & 70 & 40 \end{vmatrix}, \text{ o sea que}$$

$$\mathbf{M}_O = (-920\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 140\mathbf{k}) + 1200\mathbf{i} - 280\mathbf{j} + 40\mathbf{j} + 140\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

debido a lo cual, con las fuerzas  $\mathbf{F}_c$  y  $\mathbf{F}_D$  correspondientes a este punto, el paralelepípedo también se encuentra en equilibrio.

c) En este caso, el cuerpo se encuentra sujeto a la acción del sistema (que llamaremos  $S_c$ ) constituido por las fuerzas  $\mathbf{F}_1$  a  $\mathbf{F}_6$ , que también han intervenido en los dos casos anteriores, y por las fuerzas

$\mathbf{F}_c = 10\mathbf{i} - 180\mathbf{j}$ , y  $\mathbf{F}_D = 20\mathbf{i} + 240\mathbf{k}$ , debido a lo cual las coordenadas vectoriales de  $S_c$  son:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_6) + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_D = (-30\mathbf{i} + 180\mathbf{j} - 240\mathbf{k}) + (10\mathbf{i} - 180\mathbf{j}) + (20\mathbf{i} + 240\mathbf{k}) = \mathbf{0}, \text{ y}$$

$$\mathbf{M}_O = [(\mathbf{M}_O)_1 + \dots + (\mathbf{M}_O)_6] + (\mathbf{M}_O)_c + (\mathbf{M}_O)_D =$$

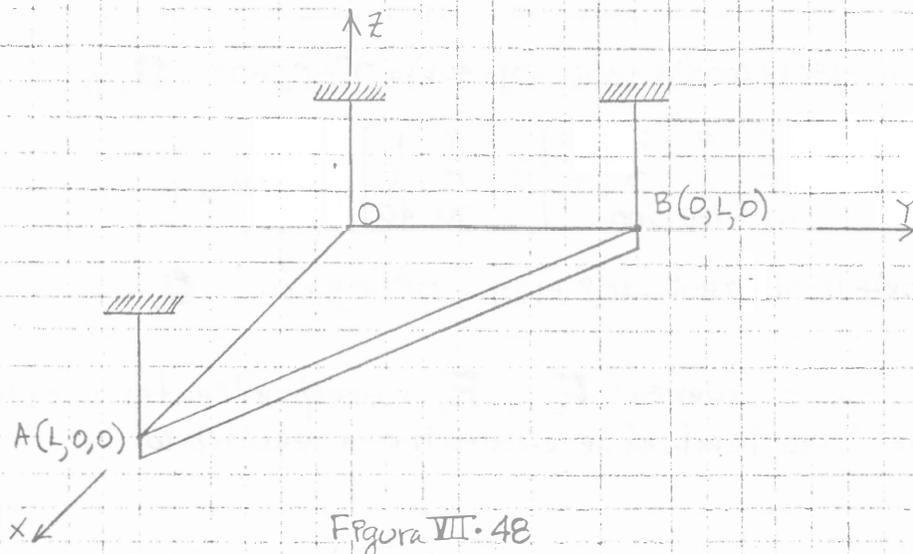
$$= [-920\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 140\mathbf{k}] + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 10 & -180 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 20 & 0 & 240 \end{vmatrix}, \text{ es decir que}$$

$$\mathbf{M}_O = -920\mathbf{i} - 40\mathbf{j} - 140\mathbf{k} + (-60\mathbf{k}) + (-400\mathbf{j}) = -920\mathbf{i} - 440\mathbf{j} - 200\mathbf{k},$$

o sea que  $\mathbf{M}_O \neq \mathbf{0}$  para  $S_c$ ,

razón por la cual, con las fuerzas  $\mathbf{F}_c$  y  $\mathbf{F}_D$  correspondientes a este punto, el paralelepípedo no se encuentra en equilibrio (no obstante que  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  para el sistema aquí analizado).

EXAMPLE VII.20. - La placa de la figura VII.48 es homogénea y tiene espesor constante, pesa  $W$  y está soportada por los tres cables verticales que se muestran.



- Determine la magnitud de la tensión en cada cable aplicando:
- condiciones vectoriales de equilibrio, y;
  - condiciones escalares de equilibrio.

Resolución.

a) Como la placa es homogénea y de espesor constante, su peso estará dado por  $-Wk$  y su línea de acción pasará por  $G(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}, 0)$ , debido a lo cual el sistema formado por dicha fuerza y por  $T_A = T_A k$  (aplicada en A),  $T_B = T_B k$  (aplicada en B) y  $T_O$  (aplicada en O), deberá estar en equilibrio.

Al aplicar  $F = 0$  se obtiene

$$T_A k + T_B k + T_O k - W k = 0,$$

$$\text{por lo que } T_A + T_B + T_O = W; \quad (1)$$

aplicando  $M_O = 0$  obtenemos:

$$(L i) + (T_A k) + (L j) \times (T_B k) + (\frac{L}{3} i + \frac{L}{3} j) \times (-W k) = 0,$$

$$-L T_A j + L T_B i + \frac{WL}{3} j - \frac{WL}{3} i = 0, \quad \text{y,}$$

Ejemplo VII.20 (continuación) (2/3)

$$(T_B - \frac{W}{3})i + (\frac{W}{3} - T_A)j = 0i + 0j,$$

Igualdad vectorial de donde se obtienen las ecuaciones escalares:

$$T_B - \frac{W}{3} = 0, \text{ y, } \frac{W}{3} - T_A = 0,$$

de donde resultan:  $T_B = \frac{W}{3}$ , y; (2)

$$T_A = \frac{W}{3} \text{ --- (3)}$$

valores que llevados a (1) dan lugar a:

$$\frac{W}{3} + \frac{W}{3} + T_0 = W, \text{ por lo que: } T_0 = \frac{W}{3}, \text{ --- (4)}$$

o sea que, en cada uno de los cables se ejerce una tensión de magnitud igual a  $\frac{W}{3}$ .

b) Teniendo en cuenta las condiciones del problema, el d.c.l. de la placa es el mostrado en la figura VII.49.

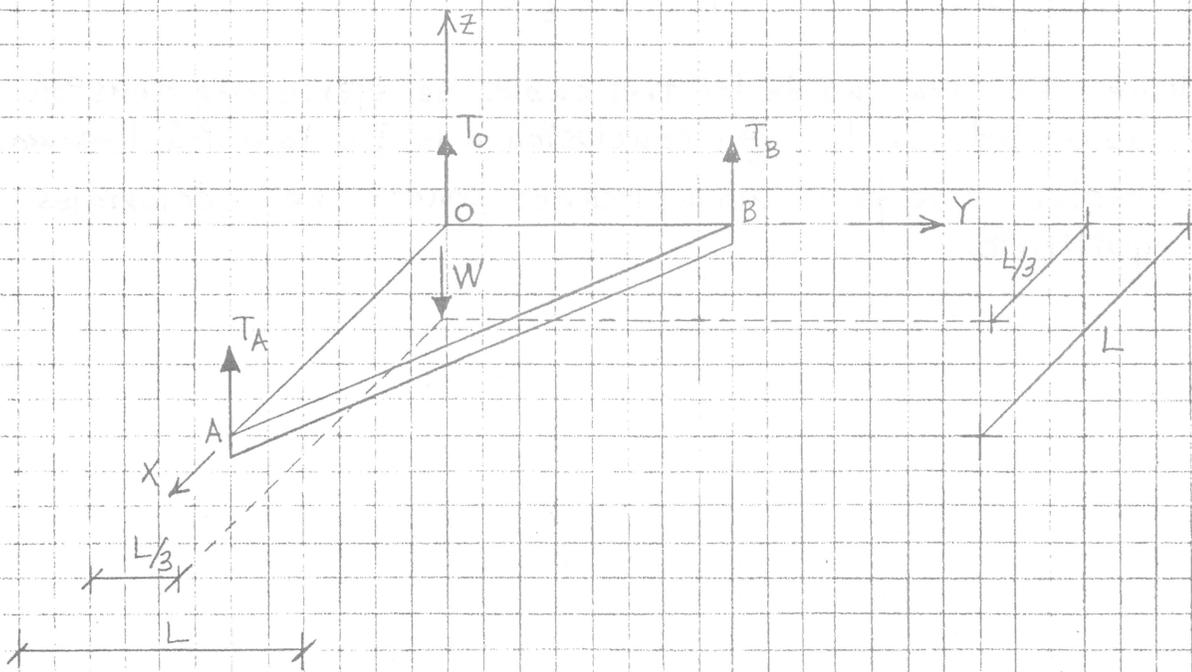


Figura VII.49

### Ejemplo VII.20 (continuación) (3/3)

Con base en dicho diagrama,

al aplicar  $M_{xx} = 0$  se obtiene:

$$-\left(\frac{L}{3}\right)(W) + (L)(T_B) = 0, \text{ por lo que:}$$

$$T_B = \frac{W}{3};$$

aplicando  $M_{yy} = 0$  obtenemos:

$$\left(\frac{L}{3}\right)(W) - (L)(T_A) = 0, \text{ debido a lo cual:}$$

$$T_A = \frac{W}{3};$$

al aplicar  $F_z = 0$  se obtiene:

$$T_A + T_B + T_0 - W = 0,$$

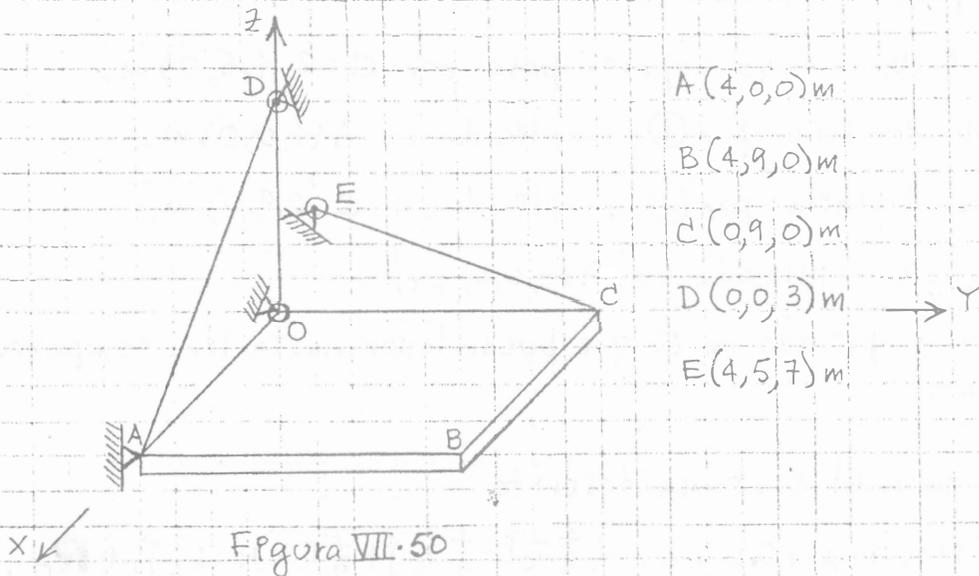
$$T_0 = W - T_A - T_B, \text{ y,}$$

teniendo en cuenta los valores recién obtenidos para  $T_A$  y  $T_B$ :

$$T_0 = W - \frac{W}{3} - \frac{W}{3}, \text{ es decir que } T_0 = \frac{W}{3};$$

entonces, en cada uno de los tres cables se ejerce una tensión de magnitud igual a  $\frac{W}{3}$ , conclusión a la que también llegamos al resolver este problema aplicando condiciones vectoriales de equilibrio.

**EJEMPLO VII. 21.** - La tabla rectangular de la figura VII. 50 es homogénea y tiene un espesor constante, pesa  $42\text{ N}$  y se encuentra articulada en  $O$ . Además, está simplemente apoyada en  $A$  (de modo que dicho apoyo ejerce una fuerza cuyo soporte pasa por  $A$  y  $B$ ), y está soportada en posición horizontal por medio de dos cables, uno que tira de ella en la esquina  $A$  y está articulado en  $D$ , y otro que lajala de la esquina  $C$  y se encuentra articulado en  $E$ .



$$A(4, 0, 0)\text{ m}$$

$$B(4, 9, 0)\text{ m}$$

$$C(0, 9, 0)\text{ m}$$

$$D(0, 0, 3)\text{ m}$$

$$E(4, 5, 7)\text{ m}$$

→ Y

Con base en ello, determine las reacciones en  $O$  y en  $A$ , así como las magnitudes de las tensiones en los cables:

- aplicando condiciones vectoriales de equilibrio, y,
- aplicando condiciones escalares de equilibrio.

Resolución.

Independientemente de que se empleen las condiciones vectoriales o las escalares, de equilibrio, tenemos que la fuerza de tensión (en  $A$ ) del cable que tira de la placa en  $A$  debe tener la dirección y el sentido de  $\vec{AD}$ , en tanto que, la fuerza de tensión (en  $C$ ) del cable quejala la placa en  $C$  debe tener la dirección y el sentido de  $\vec{CE}$ , por lo que:

Ejemplo VII. 21 (continuación) (2/4)

$$\mathbf{T}_A = T_A \mathbf{e}_{\overline{AB}} = T_A \left[ \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) \right] = -0.8T_A\mathbf{i} + 0.6T_A\mathbf{k}, \quad \text{--- (1)}$$

$$\mathbf{T}_C = T_C \mathbf{e}_{\overline{CE}} = T_C \left[ \frac{1}{9}(4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \right] = \frac{4}{9}T_C\mathbf{i} - \frac{4}{9}T_C\mathbf{j} + \frac{7}{9}T_C\mathbf{k}. \quad \text{--- (2)}$$

a) Teniendo en cuenta lo anterior, puede decirse que la tabla se encuentra en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas formado por:

$\mathbf{W} = -42\mathbf{k}$ , N, cuyo soporte pasa por  $G(2, 4.5, 0)$  m,

$\mathbf{T}_A$ , en N, definida por (1) y aplicada en  $A(4, 0, 0)$  m,

$\mathbf{T}_C$ , en N, definida por (2) y aplicada en  $C(0, 9, 0)$  m,

$\mathbf{R}_A = R_A\mathbf{j}$ , N, aplicada en  $A(4, 0, 0)$ , y,

$\mathbf{R}_O$ , en N y aplicada en  $O$ , que puede tener hasta tres componentes no nulas.

Entonces, para el sistema descrito:

$$\mathbf{F} = -42\mathbf{k} + (-0.8T_A\mathbf{i} + 0.6T_A\mathbf{k}) + \left(\frac{4}{9}T_C\mathbf{i} - \frac{4}{9}T_C\mathbf{j} + \frac{7}{9}T_C\mathbf{k}\right) + (R_A\mathbf{j}) + \mathbf{R}_O,$$

$$\text{es decir } \mathbf{F} = \mathbf{R}_O + (-0.8T_A + \frac{4}{9}T_C)\mathbf{i} + (\frac{4}{9}T_C + R_A)\mathbf{j} + (-42 + 0.6T_A + \frac{7}{9}T_C)\mathbf{k}; \quad \text{--- (3)}$$

además de

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OA} \times (\mathbf{T}_A + \mathbf{R}_A) + \overrightarrow{OG} \times \mathbf{W} + \overrightarrow{OC} \times \mathbf{T}_C =$$

$$= (4\mathbf{i}) \times (-0.8T_A\mathbf{i} + R_A\mathbf{j} + 0.6T_A\mathbf{k}) + (2\mathbf{i} + 4.5\mathbf{j}) \times (-42\mathbf{k}) + (9\mathbf{j}) \times \left(\frac{4}{9}T_C\mathbf{i} - \frac{4}{9}T_C\mathbf{j} + \frac{7}{9}T_C\mathbf{k}\right) =$$

$$= 4R_A\mathbf{k} - 2.4T_A\mathbf{j} + 84\mathbf{j} - 189\mathbf{i} - 4T_C\mathbf{k} + 7T_C\mathbf{i}, \text{ es decir}$$

$$\mathbf{M}_O = (7T_C - 189)\mathbf{i} + (84 - 2.4T_A)\mathbf{j} + (4R_A - 4T_C)\mathbf{k};$$

al aplicar  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  se obtiene:

$$\mathbf{R}_O + \left(\frac{4}{9}T_C - 0.8T_A\right)\mathbf{i} + \left(R_A - \frac{4}{9}T_C\right)\mathbf{j} + \left(0.6T_A + \frac{7}{9}T_C - 42\right)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\text{por lo que } \mathbf{R}_O = (0.8T_A - \frac{4}{9}T_C)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{9}T_C - R_A\right)\mathbf{j} + \left(42 - 0.6T_A - \frac{7}{9}T_C\right)\mathbf{k}; \quad \text{--- (4)}$$

aplicando  $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$  obtenemos:

Ejemplo VII.21 (continuación) (3/4)

$$(7T_C - 189)\mathbf{i} + (84 - 2.4T_A)\mathbf{j} + (4R_A - 4T_C)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Igualdad vectorial que da lugar a las ecuaciones escalares:

$$7T_C - 189 = 0 \dots \textcircled{5}, \quad 84 - 2.4T_A = 0 \dots \textcircled{6}, \quad \text{y}, \quad 4R_A - 4T_C = 0 \dots \textcircled{7}$$

de  $\textcircled{5}$  se obtiene:  $T_C = 27\text{N}$   $\dots \textcircled{8}$

de  $\textcircled{6}$  obtenemos:  $T_A = 35\text{N}$ , y,  $\dots \textcircled{9}$

de  $\textcircled{7}$ , teniendo en cuenta  $\textcircled{8}$ , resulta:  $R_A = 27\text{N}$ .  $\dots \textcircled{10}$

Al sustituir en  $\textcircled{4}$  los valores dados por  $\textcircled{8}$ ,  $\textcircled{9}$  y  $\textcircled{10}$ , obtenemos:

$$\mathbf{R}_O = (28 - 12)\mathbf{i} + (12 - 27)\mathbf{j} + (42 - 21 - 21)\mathbf{k}$$

debido a lo cual:  $\mathbf{R}_O = 16\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \text{N}$ ;  $\dots \textcircled{11}$

por otro lado, al tener en cuenta el valor dado por  $\textcircled{10}$  tenemos que  $\mathbf{R}_A = 27\mathbf{j}, \text{N}$ .  $\dots \textcircled{12}$

Aquí concluye la resolución aplicando condiciones vectoriales de equilibrio, pues  $\textcircled{11}$ ,  $\textcircled{12}$ ,  $\textcircled{8}$  y  $\textcircled{9}$  proporcionan los valores que se nos pidió determinar.

b) Teniendo en cuenta los datos del problema, y lo obtenido antes de iniciar la resolución del mismo aplicando condiciones vectoriales de equilibrio, puede decirse que el d.c.l. de la placa es el mostrado en la figura VII.51, con base en el cual aplicaremos las condiciones escalares de equilibrio.

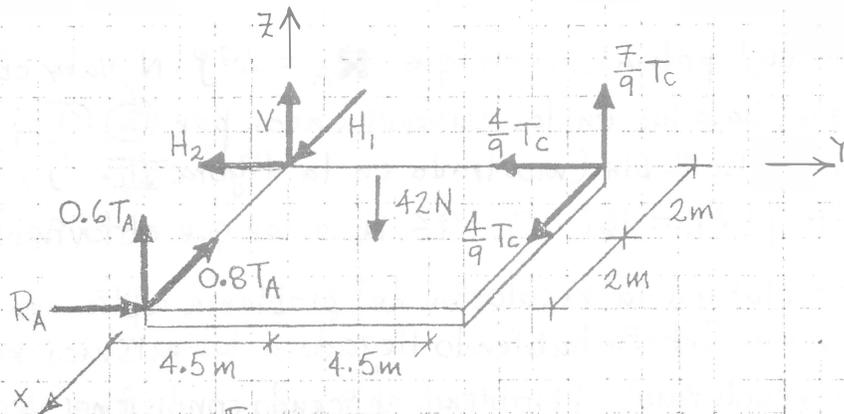


Figura VII.51

Ejemplo VII.21 (continuación) (4/4)

Al aplicar  $M_{xx} = 0$  se obtiene:

$$9\left(\frac{7T_c}{9}\right) - (4.5)(42) = 0, \text{ por lo que:}$$

$$7T_c - 189 = 0, \text{ y, } T_c = 27 \text{ N, que tenemos como } \textcircled{8};$$

al aplicar  $M_{yy} = 0$  obtenemos:

$$2(42) - 4(0.6T_A) = 0, \text{ debido a lo cual:}$$

$$84 - 2.4T_A = 0, \text{ y, } T_A = 35 \text{ N, que tenemos como } \textcircled{9};$$

aplicando  $M_{zz} = 0$  se obtiene:

$$4(R_A) - 9\left(\frac{4T_c}{9}\right) = 0, \text{ por lo que:}$$

$$4R_A - 4T_c = 0, \text{ y, } R_A = T_c,$$

lo que teniendo en cuenta  $\textcircled{8}$  da lugar a:  $R_A = 27 \text{ N, que tenemos como } \textcircled{10}.$

De  $F_x = 0$  obtenemos:  $H_1 - 0.8T_A + \frac{4}{9}T_c = 0,$   
debido a lo cual, por  $\textcircled{8}$  y  $\textcircled{9}$  resulta:

$$H_1 = 0.8T_A - \frac{4}{9}T_c = 28 - 12, \text{ o sea que } H_1 = 16 \text{ N; } \textcircled{13}$$

De  $F_y = 0$  se obtiene:  $R_A - H_2 - \frac{4}{9}T_c = 0,$

por lo que, considerando  $\textcircled{10}$  y  $\textcircled{8}$ , tenemos:

$$H_2 = R_A - \frac{4}{9}T_c = 27 - 12, \text{ es decir que } H_2 = 15 \text{ N; } \textcircled{14}$$

De  $F_z = 0$  obtenemos:  $V + 0.6T_A + \frac{7}{9}T_c - 42 = 0,$

de donde, teniendo en cuenta  $\textcircled{9}$  y  $\textcircled{8}$ , resulta:

$$V = 42 - 0.6T_A - \frac{7}{9}T_c = 42 - 21 - 21, \text{ que implica } V = 0; \textcircled{15}$$

con base en  $\textcircled{10}$  podemos decir que  $\mathbf{R}_A = 27\mathbf{j}$ , N, valor obtenido como  $\textcircled{12}$   
en tanto que, basados en los valores dados por  $\textcircled{13}$ ,  $\textcircled{14}$  y  $\textcircled{15}$ , así como  
en el d.c.l. de la tabla (mostrado en la figura VII. ), resulta:

$$\mathbf{R}_O = H_1\mathbf{i} - H_2\mathbf{j} + V\mathbf{k} = 16\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 0\mathbf{k}, \text{ N, valor que obtuvimos como } \textcircled{11}.$$

Con esto concluimos la resolución del problema aplicando condiciones  
escalares de equilibrio, habiendo llegado a los mismos resultados  
que cuando resolvimos el problema aplicando condiciones vectoriales  
(tal como era de esperarse).

# APÉNDICE A

## SISTEMAS DE UNIDADES

En el prólogo de esta obra mencionamos que, no obstante que el tema Sistema de Unidades actualmente no forma parte del programa de la asignatura Estática (cuya cobertura es lo que fundamentalmente enfocamos aquí), presentamos este apéndice con la finalidad de que el lector pueda consultar acerca de diversas partes relacionadas con dicho tema, si lo requiere, pues éste está íntimamente ligado a los elementos de estática que aquí desarrollamos.

### A.1 UNIDADES DE MEDICIÓN

*Importancia de la medición en la Física.*

Cuando viajamos en automóvil, bien conduciéndolo o como pasajeros, solemos escuchar expresiones como éstas:

- faltan como 50 km. para llegar,
- no corras tanto, que rebasas el límite de velocidad y nos pueden multar,
- ese automóvil que nos rebasó va muy acelerado, etc.

También, por ejemplo, cuando vamos a comprar un vidrio, ¿qué puede suceder?

- quedó chico,
- quedó grande, y en ocasiones no se especifica siquiera de qué lado.

Pudiéramos presentar un sin número de cosas y frases consecuentes, que nos permiten expresar conceptos del mundo físico, que sin meditar en ellas manejamos continuamente.

Por tal motivo, es de gran importancia el saber qué es medir y cómo hacerlo en la Física.

Comencemos por definir algunos conceptos:

- Medir: determinar una cantidad comparándola con la unidad.
- Medición: acción y efecto de medir.
- Medida: estimación comparativa de una cantidad.
- Dimensión: todo aquello susceptible de ser medido físicamente en forma cuantitativa.
- Magnitud: tamaño de una dimensión.
- Cantidad: parte o porción de la magnitud.
- Unidad: toda magnitud de la misma especie que otra, a la que sirve como medida cuando se compara con ella.

## A.2 MEDICIÓN. EXACTITUD Y PRECISIÓN.

Cuando se realiza un experimento, generalmente, los resultados que se obtienen son entidades cuantificables, es decir que el resultado obtenido es una propiedad natural, a la que puede asignársele un valor numérico.

De esta forma, las observaciones realizadas a través del desarrollo experimental culminan con mediciones, representando éstas a propiedades de los sistemas físicos.

Cuando se realiza una medición, esencialmente se está ejecutando una acción comparativa, la cual permite hacer distinciones ordenadas en las propiedades de los sistemas bajo observaciones. Es de notar que, el resultado de un experimento es, en general, consecuencia del número finito de mediciones que el procedimiento experimental requiera.

Dado que al efectuar la medición se realiza una acción comparativa, es necesario la creación de patrones unidad, elegidos arbitrariamente, pero que deben cumplir ciertos requisitos como son: facilidad de reproducción que no cambien con el tiempo y que sean fáciles de utilizar.

Con las unidades establecidas, es posible generar entonces una escala ordenada que es representable, matemáticamente, como una línea infinita, sobre la cual las unidades y sus divisiones se suceden indefinidamente.

El paso anterior es importante, ya que permite relacionar matemáticamente las diferentes propiedades de los sistemas físicos. Así, una vez establecida la unidad y la escala, se puede determinar una magnitud representativa de la propiedad que se mide. Por lo tanto, cuando se realiza una medición se establece una función que relaciona un conjunto ordenado de números, con un conjunto de propiedades y conceptos.

Las mediciones realizadas serán más confiables en tanto más cumplan con dos características, EXACTITUD Y PRECISIÓN.

La exactitud es casi una imposibilidad física que el hombre tiene en la realización de una medición. La exactitud se logra únicamente cuando se realiza un conteo; es decir, una asignación numérica que se relaciona únicamente con algún conjunto de eventos o cosas; así el decir, en un salón de clases hay 40 alumnos, es exacto.

En el caso de realizar una medición, también se asocia un valor numérico a una propiedad, pero éste no puede determinarse unívocamente; los factores que intervienen en una medición son muy variables, comenzando por el aparato de medida, los eventos estocásticos, etc., factores que imposibilitan físicamente el obtener una medición exacta.

*Lo que puede obtenerse de una medida, es el grado de confiabilidad que pueda tenerse en ella; esto es, la PRECISIÓN de la medición.* El tomar en cuenta los factores perturbadores así como la utilización de un aparato de medición con una mejor resolución (un aparato que permita dar más cifras significativas, por ejemplo un calibrador vernier, en lugar de una regla en mm), es lo que determina el grado de precisión.

### **A.3 INCERTIDUMBRE. DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE.**

A partir de lo anterior se desprende que, dado que no se puede garantizar la exactitud, el valor obtenido bajo la acción de medición debe encontrarse dentro de un intervalo, donde el tamaño de tal intervalo sí puede especificarse, ya que depende de los aparatos de medición que hayan sido utilizados, o bien del muestreo estadístico sobre el número de veces que la medición haya sido repetida, cuando la técnica de medición así lo requiera. Este intervalo depende de la incertidumbre absoluta de la medición.

*Debido a lo anterior la INCERTIDUMBRE puede considerarse como el intervalo de valores dentro del cual se puede asegurar que se encuentre el valor real.*

Al efectuar una medición existen gran cantidad de factores que perturban el sistema, causando que no se está totalmente seguro del valor medido, por lo cuál se tendrá una incertidumbre.

Regresemos al ejemplo de la ventana; no se piense que se trata de una situación exagerada, de hecho es común que al hacer una medición o un experimento, se encuentren valores diferentes cada vez que se repita.

Después de hacer una serie de mediciones, en ocasiones se formulan dos preguntas: ¿cuál es el valor representativo de un conjunto de valores, obtenidos en las mismas condiciones? y, asociada a ésta tenemos, ¿cuál es la incertidumbre en esos casos?

Para contestar la primera pregunta, es necesario considerar los fines para los que se requiere el valor representativo, y cuáles pueden ser las causas por las que difieren las medidas; si se quiere encontrar el tamaño mínimo del diámetro de la broca que se necesita para colocar cierta cantidad de remaches, basta medir el diámetro de éstos y escoger el diámetro mayor de ellos, como la medida que buscamos. Si lo que se desea es caracterizar el grupo de remaches para su venta, entonces el valor representativo será el valor del diámetro medio o promedio; se supone en forma implícita que las causas de error originan desviaciones pequeñas al rededor del promedio, y que tales desviaciones pueden ser positivas o negativas con igual probabilidad; en otras palabras, el número de remaches con diámetros mayores que el valor medio, es igual al número de remaches con diámetro menor que el valor medio.

Respecto a la segunda pregunta, acerca de cuál es la incertidumbre en este tipo de medidas, puede interpretarse de dos maneras: una de ellas se basa en la teoría de probabilidades, que nos dirá qué tanto se alejan los diámetros medidos, del valor medio, la cual se estudiará en la asignatura **PROBABILIDAD**.

La otra interpretación, que analizamos ahora, utiliza una definición consistente con la que se hizo al escoger la mitad de la mínima división de escala, que garantiza que el valor “real” del objeto medido está dentro del intervalo reportado. Para ello, se repite una medida varias veces para tener un número suficiente de lecturas; así el intervalo de incertidumbre o de error estará delimitado para las lecturas máxima y mínima.

Ahora bien, además de lo señalado, existen otras causas, que son relacionadas con el observador y su procedimiento experimental; ello quiere decir que es posible que la persona tenga tendencia a leer valores altos o bajos en forma sistemática o ser más o menos cuidadosa. Las lecturas también pueden afectarse por factores externos como humedad, temperatura, presencia de luz, etc., que no se esperaba que influyeran en las medidas.

Lo anterior nos conduce a establecer que la incertidumbre de una medición depende de:

1. El objeto o fenómeno a medir. Sus características determinan la respetabilidad en las medidas o en un conjunto de valores; es decir, si al repetir varias veces una medición, se obtienen resultados iguales o diferentes.
2. El instrumento de medida. Su buen o mal funcionamiento así como su precisión y sensibilidad contribuirán en menor o mayor grado en la determinación de la incertidumbre.
3. El observador. Quien manipula los instrumentos y decide el procedimiento experimental.

Estos tres factores se pueden resumir en:

- La incertidumbre en una medida depende de lo que se mide, con qué se mide y quién lo mide.

## DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE .

Veamos ahora como se determina la incertidumbre o error en una medida.

Para poder obtener en forma cuantitativa la incertidumbre o error es necesario tener en cuenta lo siguiente.

- Error en una variable: representa la discrepancia que existe entre el resultado de la medida y el valor verdadero de dicha variable.



En general, se considera que existen dos tipos principales de errores, las equivocaciones y los errores inherentes. Los primeros son imputables a descuido o negligencia del experimentador y los segundos son los que no dependen directamente de él.

Los errores inherentes pueden clasificarse a su vez en errores experimentales y errores analíticos. Los errores experimentales se cometen al utilizar aparatos o instrumentos para medir y pueden clasificarse en aleatorios y sistemáticos.

Los errores aleatorios se deben a las fluctuaciones de las variables del sistema en el que se hace la medición, cambios en sus alrededores o pequeñas variaciones en los instrumentos de medida, y se manifiestan en discrepancias entre mediciones de la misma variable en condiciones supuestamente iguales. Este tipo de errores se analiza estadísticamente.

Los errores sistemáticos son desviaciones constantes de los valores verdaderos y se dividen en tres tipos: de juicio, de reproductividad y de escala.

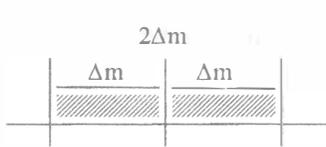
Los errores de juicio son causados por las técnicas personales de cada observador. Los errores de reproductividad son propios de los instrumentos de medición, al operarse en variedad de condiciones sin hacer los ajustes pertinentes. Los errores de escala son producidos por haber escogido una escala inadecuada.

Los errores analíticos, pueden deberse a dos causas fundamentales: al redondeo o truncamiento de cifras, y al cálculo de cantidades físicas que no se pueden medir directamente, a través de operaciones entre cantidades que sí se miden directamente y que llevan error (combinación de errores).

La estimación del error de redondeo es la mitad de la unidad que se sigue a la última cifra considerada.

#### A.4 VALOR EXPERIMENTAL .

Dado que todo valor experimental es incierto, una medición debe incluir un valor representativo y un intervalo de incertidumbre que contenga el valor “real”, es decir una magnitud experimental  $M$  se expresa como:



$$M = m \pm \Delta m$$

donde:

$m$  es el valor representativo

$\Delta m$  es la incertidumbre

En la mayoría de los casos se escoge como valor representativo al promedio aritmético y  $\Delta m$  se determina según la respetabilidad de la medida, en la forma siguiente.

a) Si la medida se repite, el intervalo de incertidumbre o error será.

$$\Delta m = \frac{\text{mínima división de escala}}{2}$$

2

b) Si la medida no se repite, el ancho total del intervalo de incertidumbre o error  $2\Delta m$  será:

$$2\Delta m = \text{lectura máxima} - \text{lectura mínima}$$

Esta determinación supone que el valor representativo o promedio quedó centrado en el intervalo; de no ser así se darán límites según se use el signo (+) o el signo (-).

Dada la simplicidad de estas determinaciones, se usa una sola cifra significativa para expresar la incertidumbre, que para el ejemplo del vidrio de la ventana podría ser:

largo 97.3 - 0.05 cm

ancho 33.2 - 0.05 cm

Se debe puntualizar que, este error (que no es una equivocación) es la incertidumbre en la magnitud de la medida, introducida en el proceso de comparación. Como toda medida tiene un error, cualquier otra cantidad derivada de ella, también lo tendrá.

Este error se puede expresar en FORMA ABSOLUTA en las mismas unidades, o en FORMA RELATIVA como porcentaje de la magnitud medida.

Por ejemplo. El largo del vidrio se puede dar como:

$$l = l \pm \Delta l \quad ; \quad l = 97.3 \pm 0.05 \text{ cm ( Forma absoluta )}$$

$$l = l \pm \frac{\Delta l}{l} (100\%) \quad ; \quad l = 97.3 \text{ cm} \pm .05\% \text{ ( Forma relativa )}$$

Cuando se conoce una aproximación de  $m$ , valor de la variable (obtenida experimentalmente por ejemplo), y el valor teórico exacto  $M$ , se puede calcular el porcentaje de error mediante la expresión:

$$\%e = \left[ \frac{|m - M|}{M} \right] (100)$$

#### A.5 USO DE LA INCERTIDUMBRE .

Una vez que se conoce cómo calcular la incertidumbre, el siguiente paso es saber cómo usarla; para ello, a continuación se dan algunos ejemplos:

1. Si se requiere calcular la cantidad de pintura necesaria para pintar una habitación, bastará medir las dimensiones de las paredes con una precisión de decenas de centímetros, ya que en las latas de pintura se estima (el rendimiento) en metros cuadrados la superficie que puede cubrir.
2. Si se trata de instalar muebles de baño, será necesario medir con una precisión de milímetros para asegurar que las tuberías encajen en los orificios adecuados y no correr el riesgo de hacer hoyos más grandes o forzar la tubería.
3. Cuando hay que decidir si los cilindros de un coche requieren ser rectificadas, deberán medirse con una precisión de milésimas de pulgada, ya que desgastes de ese orden de magnitud reducen la potencia del motor.
4. Si se trata de comprar dos modelos que estiman el periodo de un oscilador armónico, y la diferencia de la estimación es de 0.003 s, se requiere que la medida tenga una incertidumbre inferior a 0.001 s

De los ejemplos anteriores, se concluye que la incertidumbre de una medición deberá estar acorde con el uso que se le vaya a dar, por lo que: antes de medir, se deberá saber para qué se mide. En otras palabras, el simple hecho de medir requiere consideraciones previas, determinadas fundamentalmente por el propósito de la medición; por ello, sólo después de saber cómo y para qué se usarán los valores numéricos obtenidos, se podrán escoger los instrumentos y el proceso de la medición.

## **A.6 CONCEPTOS DE DIMENSIÓN Y UNIDAD . SISTEMAS DE UNIDADES . UNIDADES FUNDAMENTALES Y DERIVADAS .**

Para iniciar el estudio de los sistemas de unidades, comenzaremos por definir el concepto de dimensión, siendo esta la característica de los cuerpos que los distingue entre sí.

Dimensión se define como todo aquello susceptible de ser medido físicamente en forma cuantitativa.

Para distinguir cantidades de la misma especie, es necesario medirlas; para efectuar tal medición necesitamos definir previamente el patrón que servirá de base, el cual se denomina unidad.

Unidad se define como toda magnitud de la misma especie, que otra, a la que sirve como base cuando se le compara con ella.

En diversos países y/o zonas geográficas, teniendo en cuenta que una sola unidad no puede efectuar la medición de todas las dimensiones, fue necesario adoptar un conjunto de éstas, conocido como SISTEMA DE UNIDADES, con el cual se pueden medir varias clases de magnitudes físicas de los mismos tipos que las unidades del sistema; es decir, cada unidad del sistema sirve para medir una magnitud física de su misma clase. Así, por ejemplo, la unidad de masa sólo sirve para medir magnitudes de masa.

En todos los sistemas de unidades, se distinguen dos clases de unidades que lo forman:

- Unidades fundamentales. Son aquéllas que se eligen en forma arbitraria. Como veremos más adelante solo bastaron tres para establecer los sistemas absolutos y gravitatorios; en cambio para establecer el Sistema Internacional se necesitaron siete
- Unidades derivadas. Son aquéllas que ya no tienen que elegirse arbitrariamente como las anteriores, sino que se deducen de las fundamentales, según ciertas leyes conocidas.

## A.7 SISTEMAS MKS, CGS Y FPS, TANTO ABSOLUTOS COMO GRAVITATORIOS . DESCRIPCIÓN DE SUS UNIDADES FUNDAMENTALES

Según las dimensiones que los constituyen, los sistemas de unidades pueden ser:

- Sistemas absolutos, en los que las dimensiones fundamentales son:  
LONGITUD, MASA y TIEMPO.
- Sistemas gravitatorios, en los que las dimensiones fundamentales son:  
LONGITUD, FUERZA y TIEMPO.

Es obvio que los sistemas absolutos también tienen unidades de fuerza y que los sistemas gravitatorios también tienen unidades de masa, sólo que en tales casos dichas unidades no son elegidas arbitrariamente, sino que se derivan de las fundamentales del sistema correspondiente.

### SISTEMAS ABSOLUTOS

SISTEMA	DIMENSIONES FUNDAMENTALES	UNIDAD DE MEDIDA	SÍMBOLO
M K S	Longitud	metro	m
	Masa	kilogramo masa	kg
	Tiempo	segundo	s
C G S	Longitud	centímetro	cm
	Masa	gramo masa	gr
	Tiempo	segundo	s
F P S	Longitud	pie	ft
	Masa	libra masa	lb
	Tiempo	segundo	s

- **libra masa:** masa correspondiente a un cilindro de platino iridiado que se guarda en la Torre de Londres, Inglaterra.
- **segundo:** tiempo correspondiente a  $1/86400$  del día solar medio, o sea del promedio de la duración de los días solares verdaderos.
- **kilogramo fuerza:** peso absoluto del kilogramo masa, o sea la fuerza con que la Tierra atrae al kilogramo masa.
- **gramo fuerza:** milésima parte del kilogramo fuerza.
- **libra fuerza:** peso absoluto de la libra masa, o sea la fuerza con que la Tierra atrae a la libra masa.

Así pues, para que un sistema se considere absoluto, entre sus dimensiones fundamentales deberá estar la de masa, mientras que para considerarlo gravitatorio deberá estar presente la de fuerza.

## **A.8 DATOS HISTÓRICOS DE ALGUNOS SISTEMAS DE UNIDADES .**

### **Sistema CGS absoluto.**

El sistema tiene como unidades fundamentales el centímetro, el gramo masa y el segundo de tiempo medio. Fue propuesto en 1795 y adoptado por Francia el 10 de diciembre de 1799. Su unidad de longitud está referida al metro patrón, siendo igual a la centésima parte del mismo. La unidad de masa está también referida a la masa prototipo del kilogramo, y es igual a la milésima parte de dicha masa. La unidad de tiempo es en este sistema, y en todos los demás, el segundo de tiempo solar medio. Tal sistema fue adoptado y recomendado por la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia en 1863. Tuvo gran aceptación internacionalmente; desde entonces se le utilizó mucho en todas las ramas de la ciencia. Las objeciones que se hacían eran que los patrones correspondían a múltiplos de las unidades y no a las unidades mismas; que las unidades derivadas para la fuerza y la energía eran demasiado pequeñas para los fines prácticos y que no se podían hacer corresponder con las unidades eléctricas prácticas, para formar un sistema de unidades completo.

## SISTEMAS GRAVITATORIOS

SISTEMA	DIMENSIONES FUNDAMENTALES	UNIDAD DE MEDIDA	SÍMBOLO
M K S	Longitud	metro	m
	Fuerza	kilogramo fuerza	kg <sub>f</sub>
	Tiempo	segundo	s
C G S	Longitud	centímetro	cm
	Fuerza	gramo fuerza	gr <sub>f</sub>
	Tiempo	segundo	s
F P S	Longitud	pie	ft
	Fuerza	libra fuerza	lb <sub>f</sub>
	Tiempo	segundo	s

### DESCRIPCIÓN DE LAS UNIDADES FUNDAMENTALES DE LOS SISTEMAS MKS, CGS Y FPS, TANTO DE LOS ABSOLUTOS COMO DE LOS GRAVITATORIOS .

- **metro:** longitud entre las marcas extremas de una barra de platino iridiado que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas Medidas en Sevres, Francia, y cuyo nombre es metro patrón.
- **centímetro:** centésima parte de la longitud correspondiente al metro patrón.
- **pie:** longitud correspondiente a las marcas extremas del pie patrón, barra también de platino iridiado que se guarda en la Torre de Londres, Inglaterra.
- **kilogramo masa:** masa correspondiente a un cilindro de platino iridiado que se guarda en Sevres, y cuyo nombre es kilogramo masa patrón. Mediante balanzas especiales de gran precisión es posible comparar el kilogramo patrón, con sus copias, con una incertidumbre del orden de 0.01 mg.
- **gramo masa:** milésima parte de la masa del kilogramo masa patrón.

## **A.9 EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI) . DESCRIPCIÓN DE SUS UNIDADES DE BASE , SUPLEMENTARIAS Y DERIVADAS MÁS COMUNES .**

El Sistema Internacional de Unidades (SI), versión moderna del Sistema Métrico Decimal, fue adoptado en 1960 por la Conferencia General de Pesas y Medidas de la cual nuestro país es miembro. Esta es una organización Internacional establecida por la Convención del Metro en 1875.

El SI es el primer sistema científico de unidades compatible, esencialmente completo y armonizado internacionalmente; se fundamenta en siete unidades básicas, lo cual permite a todas las naciones industriales modernas asegurar la compatibilidad de sus sistemas metroológicos a los más altos niveles de precisión a través de las unidades del SI, de sus patrones y métodos de intercomparación.

En comparación con otros sistemas de unidades, tiene diversas ventajas entre las cuales se tienen las siguientes:

- los patrones básicos pueden ser reproducidos en forma objetiva,
- es fácil de aprender, recordar y entender,
- conduce a simplificar los cálculos técnicos,
- permite optimizar los diseños, eliminando tamaños y tipos innecesarios,
- facilita las operaciones comerciales a niveles nacionales e internacionales.

Con fundamento en diferentes artículos de la Ley General de Normas y de Pesas y de Medidas, publicada en el Diario Oficial de la Federación con fecha de 7 de abril de 1961, la Secretaría de Patrimonio y Fomento Industrial estableció con carácter de obligatoria, de orden público y jurisdicción federal, por regir el Sistema General de Medidas, la Norma Oficial Mexicana: Sistema General de Unidades de Medida. Sistema Internacional de Unidades (SI) .

El Sistema Internacional está integrado por tres clases de unidades: unidades de base, unidades suplementarias y unidades derivadas; las cuales, en su conjunto, forman un sistema coherente. También utiliza los prefijos para la formación de los múltiplos y submúltiplos decimales de estas unidades.

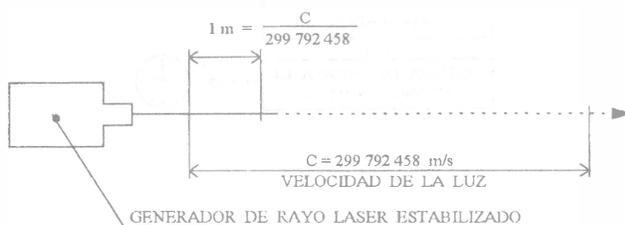
## UNIDADES DE BASE , SUPLEMENTARIAS Y DERIVADAS MÁS COMUNES .

Son las unidades con las cuales se fundamenta la estructura del sistema. Son siete, correspondiendo a las magnitudes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, intensidad luminosa y cantidad de sustancia, cuyos nombres son respectivamente: metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol.

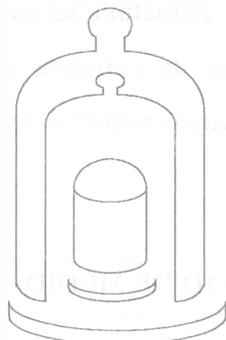
MAGNITUD	UNIDAD DE MEDIDA	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinámica	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Las unidades citadas son definidas de la siguiente manera:

- **METRO (m)**. Es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío, durante un lapso de  $1 / 299\,792\,458$  de segundo. (17a.CGPM-1983).

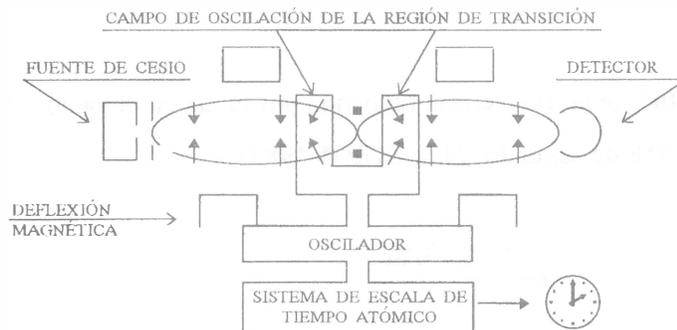


- **KILOGRAMO (kg)**. Es la masa correspondiente a la del prototipo internacional del kilogramo.  
(1a. CGPM-1889 , 3a. CGPM-1901)

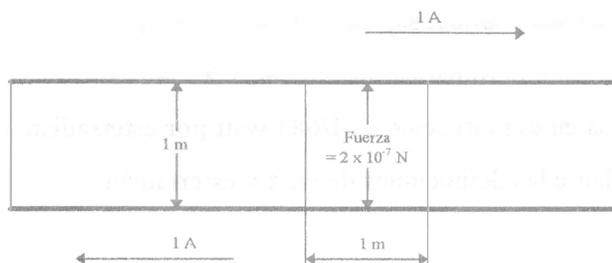


La masa del prototipo internacional es una aleación de platino e iridio (90% de platino y 10% de iridio), sancionado por la Conferencia General de Pesas y Medidas que se efectuó en París en 1889 y que se conserva en una bóveda en el pabellón de Breteuil, en Sevres, Francia, bajo la custodia de la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Este prototipo es un cilindro de aproximadamente 38 milímetros de altura y 38 milímetros de diámetro, y existen duplicados del mismo en todos los laboratorios de normas importantes del mundo.

- **SEGUNDO (s)**. Es la duración de 9 192 631 770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles hiperfinos del átomo de Cesio-133. (13a. CGPM-1967)



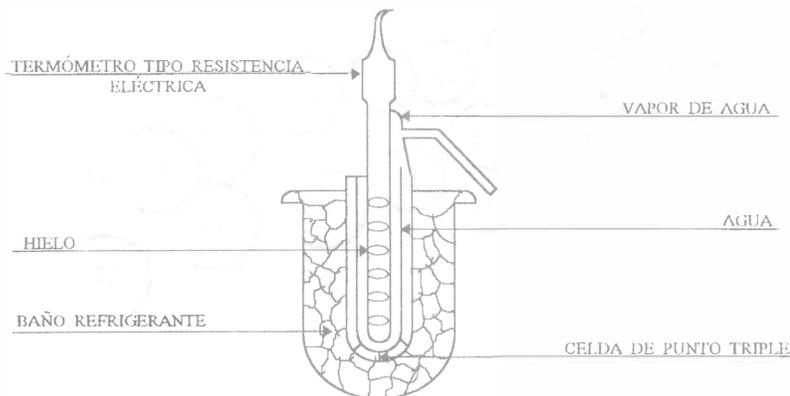
- **AMPERE (A)** . Es la intensidad de una corriente constante que, mantenida en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita y de sección circular despreciable, y colocados en el vacío a una distancia un metro uno del otro, producirá entre estos dos conductores una fuerza de magnitud igual a  $2 \times 10^{-7}$  newtons por metro de longitud. (9a. CGPM-1948). Ver más adelante la definición de la unidad Newton.



La fuerza producida se debe a los campos magnéticos de los conductores.

Esta unidad fue denominada así en honor del físico francés André Marie Ampere (1775-1836), quien midió y analizó en 1820 los efectos magnéticos más importantes producidos por el paso de corrientes eléctricas uniformes a través de conductores.

- **KELVIN (K)**. Es la fracción  $1/273.16$  de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. (13a. CGPM-1967)



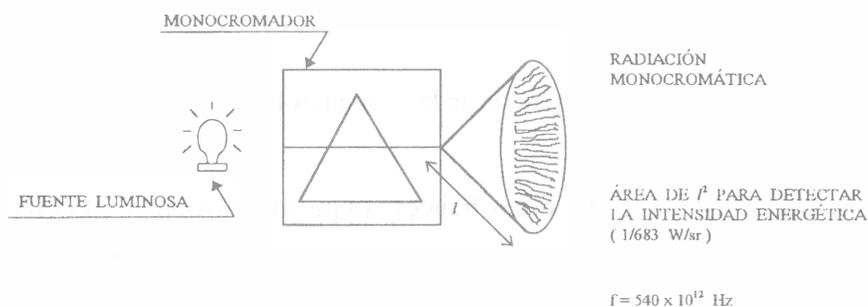
Se enfría el agua de la celda hasta que se comienza a formar hielo. A la temperatura resultante, en la que existen simultáneamente el hielo, el agua y el vapor de agua se le llama punto triple del agua y es igual a

273,16 grados kelvin, por definición. Este punto triple es igual a  $0.01^{\circ}\text{C}$ , por lo que la temperatura de  $0^{\circ}\text{C}$  es de 273.15 kelvin.

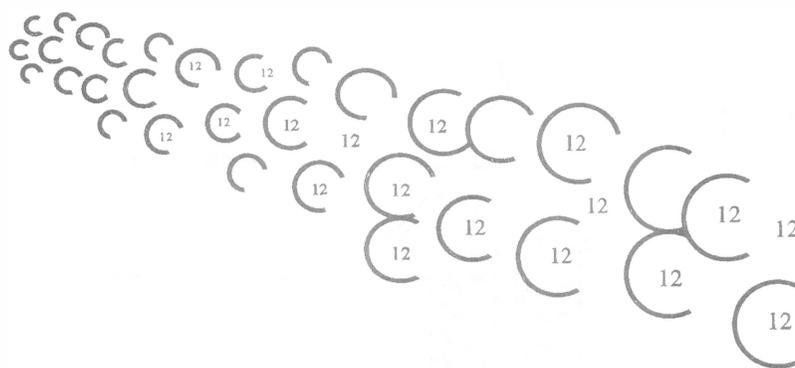
Se dio el nombre a esta unidad en honor del barón Willian Thomson Kelvin (1824-1907).

A la temperatura de  $0^{\circ}\text{K}$  se le denomina “punto absoluto”.

- **CANDELA (cd).** Es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia  $540 \times 10^{12}$  hertz y cuya intensidad energética en esa dirección es  $1/683$  watt por esterradián. (16a. CGPM-1979). Ver más adelante las definiciones de watt y esterradián.



- **MOL (mol).** Es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales como existen átomos en 0.012 kilogramos de carbono 12. (14a. CGPM-1971)

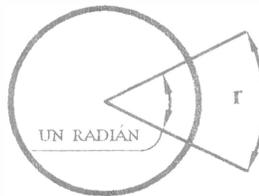


Al usar el mol se deben especificar las entidades elementales, que pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o grupos específicos de tales partículas.

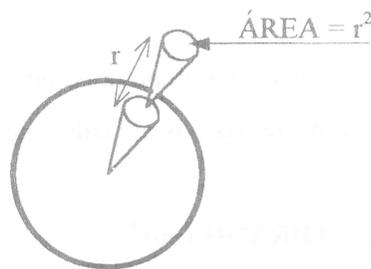
## UNIDADES SUPLEMENTARIAS .

Son las unidades con las cuales no se ha tomado una decisión de si pertenecen a las unidades de base, o a las unidades derivadas; corresponden a las magnitudes de ángulo plano y de ángulo sólido, cuyos nombres son, respectivamente: radián y esterradián.

- **RADIÁN (rad)**. Es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que intersecan, sobre la circunferencia de dicho círculo, un arco de longitud igual a la del radio.



- **ESTERRADIÁN (sr)**. Es el ángulo sólido que teniendo su vértice en el centro de una esfera, corta sobre dicha esfera una superficie de área igual a la de un cuadrado que tiene por lado el radio de la esfera.



## **UNIDADES DERIVADAS MAS COMUNES Y QUE TIENEN UN NOMBRE ESPECIAL .**

Son las unidades que se forman combinando las unidades de base, o bien éstas y las suplementarias, según expresiones algebraicas que relacionan las magnitudes correspondientes. Muchas de estas expresiones algebraicas pueden ser reemplazadas por nombre y símbolo especiales, los cuales pueden ser utilizados para la formación de otras unidades derivadas.

Las unidades derivadas de las fundamentales consideradas en la norma técnica se clasifican en unidades: geométricas, de masa, de tiempo, mecánicas, eléctricas, magnéticas, caloríficas, ópticas, y de radiactividad.

A continuación enlistaremos algunas de ellas:

### **- METRO CUADRADO ( $m^2$ )**

**Unidad de área**

Un metro cuadrado es el área de un cuadrado de un metro por lado. Esta unidad se deriva de la unidad fundamental metro.

### **- METRO CUBICO ( $m^3$ )**

**Unidad de volumen**

Un metro cúbico es el volumen de un cubo de un metro por lado. Esta unidad se deriva de la unidad fundamental metro.

### **- METRO POR SEGUNDO ( $m/s$ )**

**Unidad de velocidad lineal**

Un metro por segundo es la velocidad que tiene un cuerpo en movimiento que recorre un metro cada segundo. Esta unidad se deriva de las dos unidades fundamentales, metro y segundo.

### **- METRO POR SEGUNDO AL CUADRADO ( $m/s^2$ )**

**Unidad de aceleración lineal**

Un metro por segundo al cuadrado es la aceleración que experimenta un cuerpo con movimiento acelerado, cuando cada segundo aumenta o disminuye la magnitud de su velocidad en un metro por segundo.

**- RADIAN POR SEGUNDO (rad/s)**

**Unidad de velocidad angular**

Un radián por segundo es la velocidad angular que tiene un cuerpo animado de un movimiento de rotación, de tal forma que efectúa en un segundo una rotación de un radián alrededor de un eje.

**- RADIAN POR SEGUNDO AL CUADRADO (rad/s<sup>2</sup>)**

**Unidad de aceleración angular**

Un radián por segundo al cuadrado es la aceleración angular que experimenta un cuerpo animado de movimiento de rotación acelerado cuya velocidad angular varía cada segundo en un radián por segundo.

**- NEWTON (N)**

**Unidad de fuerza**

Un newton es la magnitud de una fuerza que, al ser aplicada a un cuerpo de masa igual a un kilogramo, produce una aceleración lineal igual a un metro por segundo al cuadrado. [  $N = kg \cdot m/s^2$  ].

Esta unidad se deriva de tres unidades fundamentales, el kilogramo, el metro, y el segundo. Recibió el nombre en honor del célebre físico inglés Sir Issac Newton (1643-1727) cuyas investigaciones le llevaron a efectuar importantes descubrimientos, así como realizar aportaciones muy valiosas, en diversas partes de la ciencia.

**-PASCAL (Pa)**

**Unidad de presión y de esfuerzo**

Un pascal es la presión uniforme que ejerce una fuerza de un newton, al actuar perpendicularmente en una superficie plana de área igual a un metro cuadrado. [  $Pa = N/m^2$  ].

Esta unidad se deriva de una unidad fundamental (el metro) y de una unidad derivada (el newton). Su nombre proviene del físico y matemático francés Blas Pascal (1623-1662), a quien se considera fundador de la hidrodinámica.

**- JOULE (J)**

**Unidad de energía, de trabajo y de cantidad de calor**

Un joule es el trabajo que se realiza cuando se desplaza el punto de aplicación de una fuerza, cuya magnitud es igual a un newton, una distancia de un metro en la dirección de la fuerza. [  $J = Nm$  ]

Esta unidad deriva su nombre del físico inglés James Prescott Joule (1818-1889), cuyas investigaciones lo condujeron a establecer la ley de la conservación de la energía.

**-WATT (W)****Unidad de potencia y de flujo de calor**

Un watt es la potencia que da origen a la producción de energía a razón de un joule por segundo.

$$[W = J/s].$$

Esta unidad fue desarrollada por Wilhelm Siemens en 1882. Se deriva de la unidad fundamental segundo y la unidad derivada joule, y recibió su nombre en honor de James Watt (1736-1819), quien desarrolló la unidad conocida como caballo de fuerza.

**-VOLT (V)****Unidad de potencial eléctrico y de fuerza electromotriz**

Un volt es la diferencia de potencial eléctrico que existe entre dos puntos de un conductor, por el que pasa una corriente de un ampere, cuando la potencia que se disipa entre esos dos puntos es igual a un watt.  $[V = W/A]$ .

Esta unidad se deriva de la fundamental ampere y de la unidad derivada watt. Se le dio el nombre en honor del Conde Alessandro Giuseppe Volta (1745-1872), físico italiano que construyó la primera pila voltaica.

**- OHM ( $\Omega$ )****Unidad de resistencia eléctrica**

Un ohm es la resistencia eléctrica que hay entre dos puntos de un conductor cuando, al aplicar una diferencia de potencial constante de un volt entre los mismos puntos, se produce en el conductor una corriente de un ampere, no siendo el conductor fuente de fuerza electromotriz.

$$[\Omega = V/A].$$

Esta unidad se deriva de la unidad fundamental ampere y la unidad derivada volt. El nombre se le dio en honor al profesor Georg Simon Ohm (1787-1854), quien en sus clases en la Escuela Superior de Colonia, Alemania, efectuó las mediciones que establecieron la ley de Ohm.

**- SIEMENS (S)****Unidad de conductancia eléctrica**

Un siemens es el recíproco de la resistencia de un ohm.  $[S = 1/\Omega]$ .

Esta unidad se deriva de la unidad fundamental ampere y la unidad derivada volt, y es la inversa del ohm. Se le dio el nombre en honor de Karl Wilhem Siemens (1823-1883), ingeniero alemán que posteriormente adoptó la nacionalidad inglesa y que realizó varios inventos, entre ellos un proceso de depositación electrolítica, un gobernador cromométrico o diferencial para máquinas de vapor, y el dínamo o generador de corriente alterna.

#### **- COULOMB (C)**

#### **Unidad de carga eléctrica**

Un coulomb es la cantidad de electricidad que transporta, en un segundo, una corriente de un ampere. [  $C = A \text{ s}$  ].

Esta unidad se deriva de las dos unidades fundamentales ampere y segundo. Su nombre se le dio en honor del físico francés Charles Augustin Coulomb (1736-1806), uno de los primeros investigadores de la electricidad y el magnetismo.

#### **- HENRY (H)**

#### **Unidad de inductancia eléctrica**

Un henry es la inductancia de un circuito cerrado en el cual se produce una fuerza electromotriz de un volt, cuando la corriente eléctrica que pasa por el circuito varía uniformemente a razón de un ampere por segundo. [  $H = V \text{ s/A}$  ].

Esta unidad se deriva de dos unidades fundamentales, el ampere y el segundo, así como de una unidad derivada, el volt. Recibió su nombre en honor de Joseph Henry (1797-1878), físico estadounidense que descubrió los principios de la inducción eléctrica.

#### **- FARAD (F)**

#### **Unidad de capacitancia eléctrica**

Un farad es la capacidad de un capacitor o condensador entre cuyas placas se origina una diferencia de potencial de un volt, cuando se le carga con una cantidad de electricidad igual a un coulomb. [  $F = C/V$  ], [  $F = A \text{ s/V}$  ].

Esta unidad se deriva de dos unidades fundamentales, el ampere y el segundo, así como de la unidad derivada volt. Su nombre proviene del físico inglés Michael Faraday (1791-1867) cuyas investigaciones hicieron posible la creación del transformador eléctrico.

#### **- WEBER (Wb)**

#### **Unidad de flujo magnético**

Un weber es el flujo magnético que, ligando un circuito de una vuelta, produce en éste una fuerza electromotriz de un volt al reducirse a cero, a régimen uniforme, en un segundo. [  $Wb = Vs$  ].

Esta unidad se deriva de la unidad fundamental segundo y de la unidad derivada volt. Recibió su nombre en honor del físico alemán Wilhelm Weber (1804-1891), quien descubrió la relación entre la electricidad y el magnetismo.

**- HERTZ (Hz)**

**Unidad de frecuencia**

Un hertz es la frecuencia de un fenómeno periódico, cuyo periodo es un segundo. Un hertz representa un ciclo o evento completo de un fenómeno repetitivo por segundo. [ Hz = 1/s ].

Esta unidad se deriva de la unidad fundamental segundo, y su nombre proviene del físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), notable investigador en el campo de las ondas electromagnéticas.

**- LUMEN (lm)**

**Unidad de flujo luminoso**

Un lumen es el flujo luminoso emitido en un ángulo sólido, de un esterradián, por una fuente uniforme de punto de intensidad de una candela situada en el vértice del ángulo sólido.

[ lm = cd sr ].

Esta unidad se deriva de una unidad fundamental el segundo y de otra suplementaria el esterradián.

**- LUX (lx)**

**Unidad de iluminación**

Un lux es la iluminación uniforme que produce un flujo luminoso de un lumen, en una superficie que tiene un área igual a un metro cuadrado. [ lux = lm/m<sup>2</sup> ], [ lux = cd sr/m<sup>2</sup> ].

Esta unidad se deriva de una fundamental (la candela), de una derivada (el metro cuadrado) y de una suplementaria (el esterradián).

**- GRADO CELSIUS (°C)**

**Unidad de temperatura de la escala Celsius**

Un grado Celsius (al que tradicionalmente se ha denominado como grado centígrado) es un grado de la escala de Celsius de temperaturas, en la cual la temperatura de congelación del agua es 0° y la de ebullición es 100°C.

El cero absoluto en esta escala es -273.16°C. [ t<sub>°C</sub> = t<sub>°K</sub> - 273.16 ]

Esta unidad se deriva de una unidad fundamental, el kelvin, y su nombre proviene del astrónomo sueco Anders Celsius (1701-1744), primero que describió el termómetro centígrado ante la Academia Sueca de Ciencia en 1742.

Cabe mencionar que la energía se mide de la misma manera en sistemas mecánicos, eléctricos y magnéticos; como consecuencia la potencia se mide de la misma forma. Esto es posible, con base en la introducción de dos constantes, que tomadas aisladamente no tienen significado físico alguno.

Estas constantes son la permitividad del vacío ( $\epsilon_0$ ) y la permeabilidad del vacío ( $\mu_0$ ) las cuales se relacionan mediante la expresión:

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$$

De esta manera:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ [F/m]}, \text{ y,}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ [H/m]}.$$

Adicionalmente, cabe señalar que el campo electromagnético se describe mediante cuatro vectores:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ . De tal manera que:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

## APÉNDICE B

### COMPONENTES VECTORIALES Y ESCALARES. PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. DOBLE PRODUCTO VECTORIAL.

Presentamos este apéndice porque los elementos que se citan, en su título, intervienen de manera imprescindible en el actual tratamiento de la mecánica clásica, según mencionamos en el prólogo de esta obra.

#### B.1 COMPONENTES VECTORIALES Y ESCALARES.

Trataremos aquí de dejar bien claros los conceptos relacionados con las componentes de un vector ya que, entre otros ejemplos que pueden citarse, es muy frecuente escuchar personas que cometen el error de decir que “las fuerzas de fricción siempre tienen componentes negativas porque se oponen al movimiento”.

Lo anterior es erróneo ya que el signo de las componentes escalares, de las fuerzas de estudio, dependerá del sistema de referencia empleado.

En efecto, siendo  $\mathbf{v}$  un vector colineal con un cierto eje  $u$ , su componente escalar será positiva si  $\mathbf{v}$  tiene el sentido del eje  $u$ , en tanto que será negativa si tiene sentido contrario al de dicho eje.

Para ilustrar esto diremos que, si el pequeño cuerpo de la figura B.1 es lanzado hacia la derecha con una rapidez  $v_0$  como se indica: en tanto no se detenga y empleando al eje  $x$  ahí mostrado para estudiar el movimiento, su velocidad tiene una componente positiva y la fuerza de fricción una negativa pues, siendo  $v$  y  $F_r$  las magnitudes de los vectores mencionados, los mismos quedan expresados mediante:

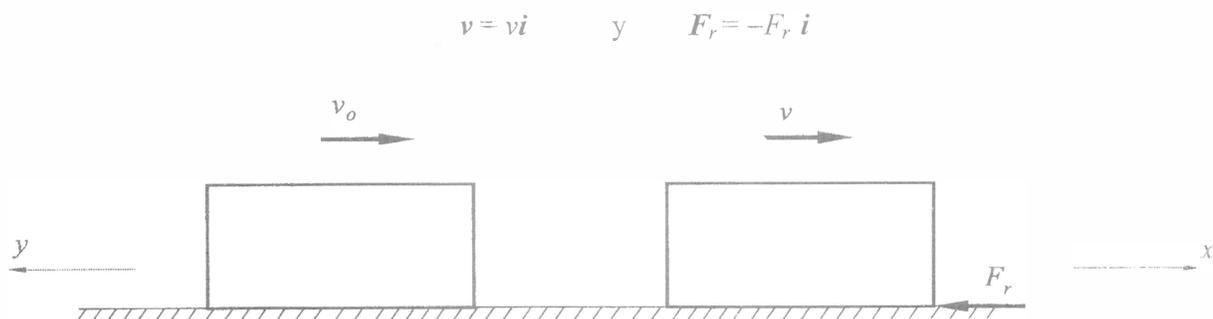


Figura B.1

Empleando el eje  $y$  (de la figura B.1), la velocidad tiene una componente negativa en tanto que la fuerza de fricción la tiene positiva, pues ahora los vectores mencionados están dados por:

$$v = -v_j \quad \text{y} \quad F_r = F_r j$$

Veamos enseguida cómo se definen y se obtienen las componentes escalares y vectoriales, de un vector sobre otro, de manera general.

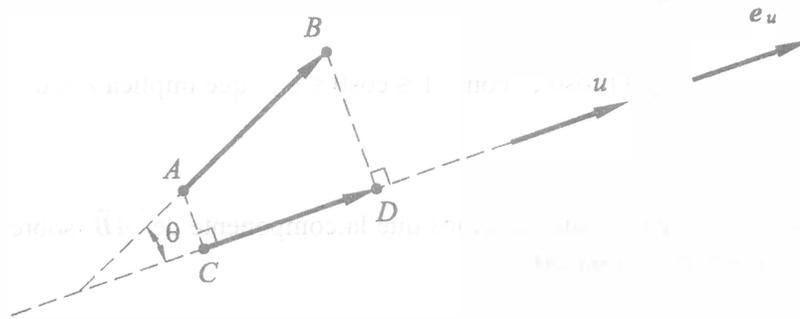


Figura B.2

Sea  $\vec{AB}$  un vector cualquiera del espacio, que deseamos proyectar sobre el eje  $u$  de la figura B.2, donde  $e_u$  es un vector unitario que tiene tanto la dirección como el sentido del eje mencionado.

Siendo  $C$  y  $D$  las proyecciones ortogonales respectivas de  $A$  y  $B$  sobre  $u$ , llamaremos componente vectorial de  $\vec{AB}$  (sobre  $u$ ), que simbolizaremos mediante  $(\vec{AB})_u$ , al vector  $\vec{CD}$ , y componente escalar de  $\vec{AB}$  (también sobre  $u$ ) al número real  $\lambda$  cuyo valor absoluto es igual a la magnitud de la componente vectorial correspondiente, y cuyo signo indica el sentido de ésta; entonces,  $\lambda$  será positivo si la correspondiente componente vectorial tiene el sentido del eje sobre el cual se está proyectando (como es el caso del vector  $\vec{CD}$  de la figura B.2), pero será negativo en caso contrario.

Acorde con lo mencionado:

$$(\vec{AB})_u = \vec{CD} = \lambda e_u = \text{componente vectorial de } \vec{AB} \text{ sobre } u,$$

donde  $\lambda = (AB)_u$  es la componente escalar de  $\vec{AB}$  sobre  $u$ , y es tal que,  $|\lambda| = |\vec{CD}|$ , teniéndose  $\lambda > 0$  si  $\vec{CD}$  tiene el sentido de  $u$ , en tanto que  $\lambda < 0$  si el sentido de  $\vec{CD}$  es contrario al de  $u$ .

De aquí en adelante, a las *componentes escalares* simplemente les llamaremos *componentes*; así mismo, a las *componentes vectoriales* se les llamará *proyecciones*.

De acuerdo con lo anterior, si  $\vec{AB}$  y  $\vec{CD}$  forman entre sí un ángulo  $\theta$ , medido entre las partes de los vectores que contienen a las flechas indicadoras de los sentidos de los mismos, como se indica en la figura B.2, pueden presentarse los siguientes dos casos.

a) Cuando  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ , donde:

$$\lambda = |\vec{AB}| \cos \theta, \text{ con } 0 \leq \cos \theta \leq 1, \text{ que implica } \lambda \geq 0.$$

b) Cuando  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ , donde:

$$\lambda = |\vec{AB}| \cos \theta, \text{ con } -1 \leq \cos \theta \leq 0, \text{ que implica } \lambda \leq 0.$$

Resumiendo los dos casos mencionados diremos que la componente de  $\vec{AB}$  sobre  $\vec{CD}$  está dada por  $|\vec{AB}| \cos \theta$ , lo que nos permite escribir:

$$\lambda = |\vec{AB}| \cos \theta = [|\vec{AB}| \cos \theta] \left[ \frac{|\vec{CD}|}{|\vec{CD}|} \right] = \frac{(|\vec{AB}|)(|\vec{CD}|) \cos \theta}{|\vec{CD}|}$$

o sea que:

$$\lambda = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CD}|} = \vec{AB} \cdot \left[ \frac{\vec{CD}}{|\vec{CD}|} \right];$$

resumiendo, para la componente de  $\vec{AB}$  sobre  $u$ , se tiene:

$$\lambda = \vec{AB} \cdot e_u \quad \dots (1),$$

en tanto que para la proyección, también de  $\vec{AB}$  sobre  $u$ , tenemos:

$$(\vec{AB})_u = \lambda e_u = (\vec{AB} \cdot e_u) \cdot e_u \quad \dots (2);$$

entonces, si  $V_1$  y  $V_2$  son dos vectores cualesquiera, la componente de  $V_1$  sobre  $V_2$  puede obtenerse mediante:

$$\lambda = \frac{V_1 \cdot V_2}{|V_2|} \quad \dots (3),$$

en tanto que, la proyección de  $V_1$  sobre  $V_2$  podemos obtenerla por medio de:

$$(V_1)_2 = \lambda \left[ \frac{V_2}{|V_2|} \right],$$

es decir:

$$(V_1)_2 = \left[ \frac{V_1 \cdot V_2}{|V_2|} \right] e_2 \quad \dots (4),$$

donde  $e_2$  es un vector unitario con la dirección y el sentido de  $V_2$ .

Consideremos ahora un vector  $V$ , de proyecciones  $V_x i$ ,  $V_y j$ ,  $V_z k$ , como el mostrado en la figura B.3

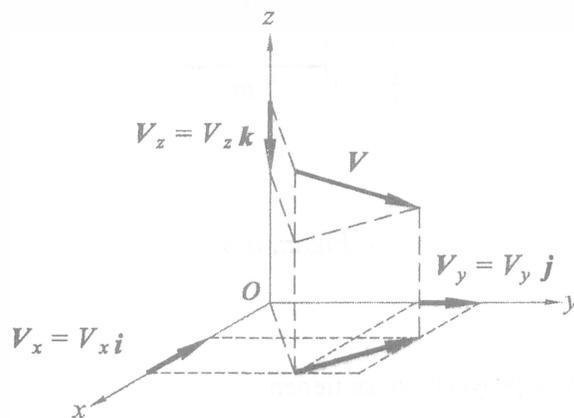


Figura B.3

De acuerdo con lo anterior, expresamos:

$$V = V_x i + V_y j + V_z k ,$$

donde  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  son las componentes de  $V$  sobre los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente, mismas que, de acuerdo con los sentidos de las proyecciones correspondientes, son tales que:

$$V_x < 0, \quad V_y > 0, \quad V_z < 0 .$$

Ejemplo B.1 .

Considere los vectores y el sistema de referencia mostrados en la figura B.4 , donde los 5 m y los 3 m se miden sobre direcciones paralelas a los ejes coordenados mostrados. Si  $U_2$  es paralelo al eje  $y$ , y  $V_2$  es paralelo al eje  $x$  , determine la componente y la proyección:

- a) de  $U_1$  sobre  $U_2$  , y,
- b) de  $V_1$  sobre  $V_2$  .

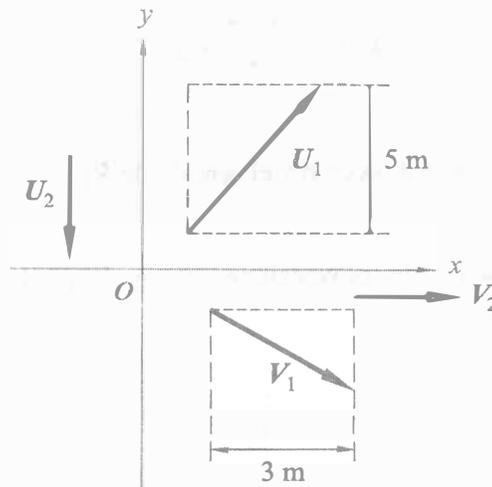


Figura B.4

Resolución.

Por definición de componente y proyección, se tienen:

- a) Componente de  $U_1$  sobre  $U_2$  :

$$(U_1)_{U_2} = -5 ,$$

proyección de  $U_1$  sobre  $U_2$  :

$$(U_1)_{U_2} = (-5)(-j) = 5j$$

- b) Componente de  $V_1$  sobre  $V_2$  :

$$(V_1)_{V_2} = 3 ,$$

proyección de  $V_1$  sobre  $V_2$  :

$$(V_1)_{V_2} = (3)(i) = 3i .$$

Ejemplo B.2 .

Para los vectores  $V_1$  y  $V_2$  mostrados en la figura B.5 , si la magnitud de  $V_1$  es 10 N, obtenga la componente de dicho vector, sobre  $V_2$ , empleando un procedimiento: a) escalar , y , b) vectorial.

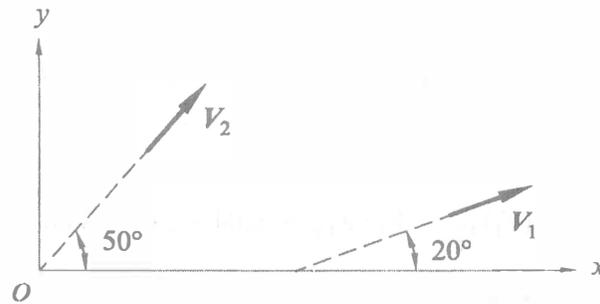


Figura B.5

a) Resolución escalar.

Al trasladar a  $V_2$  paralelamente a su posición original, hasta que su inicio coincida con el de  $V_1$  se obtienen los elementos de la figura B.6 , con base en los cuales obtenemos:

$$(V_1)_{V_2} = (10)\cos 30^\circ = 8.66 \text{ N} .$$

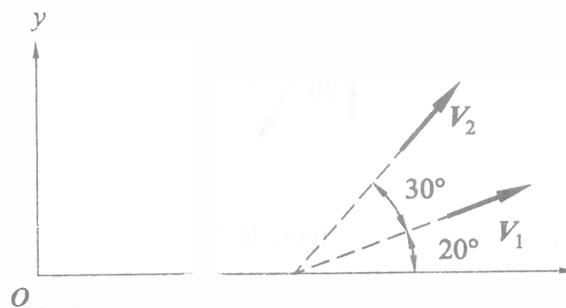


Figura B.6

b) Resolución vectorial.

Sin necesidad de requerir de otra figura además de la B.5 , obtenemos:

$$(V_1)_{v_2} = V_1 \cdot e_{v_2} = 10[(\cos 20^\circ)\mathbf{i} + (\sin 20^\circ)\mathbf{j}] \cdot [(\cos 50^\circ)\mathbf{i} + (\sin 50^\circ)\mathbf{j}] ,$$

por lo que:

$$(V_1)_{v_2} = V_1 \cdot e_{v_2} = (9.397\mathbf{i} + 3.420\mathbf{j}) \cdot (0.643\mathbf{i} + 0.766\mathbf{j}) ,$$

resultando:

$$(V_1)_{v_2} = V_1 \cdot e_{v_2} = 6.04 + 2.62 = 8.66 \text{ N} ,$$

valor que coincide con el obtenido en la resolución escalar.

Ejemplo B.3 .

Considere las fuerzas  $F_1$  (de magnitud 20 N) y  $F_2$  (cuyo módulo es 30 N). así como los vectores  $e_n$  y  $e_t$  y el sistema  $Oxy$  , de la figura B.7 .

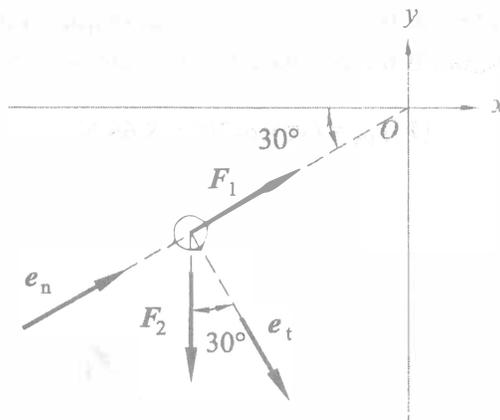


Figura B.7

Teniendo en cuenta que  $e_n$  y  $e_t$  son perpendiculares, obtenga la suma de las componentes de  $F_1$  y  $F_2$  sobre:

- el eje  $x$  ,
- el eje  $y$  ,
- $e_n$  ,  $y$  ,
- $e_t$

Resolución.

- a)  $F_x = (20)\cos 30^\circ = 17.32 \text{ N}$
- b)  $F_y = (20)\sin 30^\circ - 30 = 10 - 30 = -20 \text{ N}$
- c)  $F_n = 20 \cdot (30)\sin 30^\circ = 20 - 15 = 5 \text{ N}$
- d)  $F_t = (30)\cos 30^\circ = 25.98 \text{ N}$

Ejemplo B.4 .

Dada la fuerza  $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ , obtenga:

- a) las componentes de  $\mathbf{F}$  sobre los ejes coordenados,
- b) las componentes de  $\mathbf{F}$  sobre el vector  $\mathbf{P}$  dado por  $\mathbf{P} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ , y sobre el vector  $\mathbf{Q} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ; ¿qué concluye de los valores obtenidos? , y,
- c) las proyecciones de  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathbf{P}$  y sobre  $\mathbf{Q}$ .

Resolución.

- a) No obstante que directamente de la expresión de  $\mathbf{F}$  podemos dar sus componentes sobre los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , encontraremos las mismas proyectando, respectivamente, sobre los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ ; esto es:

$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i} = (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = 4 ,$$

$$F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = -2 , \text{ y.}$$

$$F_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = -4 .$$

b) De acuerdo con los datos, se tiene:

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{(-8)^2 + (6)^2} = 10, \quad \text{y}, \quad |\mathbf{Q}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-2)^2} = 3,$$

por lo que, la componente de  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathbf{P}$  resulta:

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} = \frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j})}{10} = \frac{-32 - 12}{10} = -4.4,$$

en tanto que, su componente sobre  $\mathbf{Q}$  es:

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|} = \frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})}{3} = \frac{4 - 4 + 8}{3} = \frac{8}{3};$$

de estos valores se concluye que la componente vectorial de  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathbf{P}$  tiene sentido contrario al de éste y una magnitud igual a 4.4, en tanto que la proyección de  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathbf{Q}$  tiene el sentido de éste y una magnitud igual a  $8/3$ .

c) Teniendo en cuenta lo anterior, la proyección de  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathbf{P}$  resulta:

$$-4.4 \left[ \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \right] = -4.4 \left[ \frac{-8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}}{10} \right] = 3.52\mathbf{i} - 2.64\mathbf{j},$$

en tanto que, su proyección sobre  $\mathbf{Q}$  viene siendo:

$$\frac{8}{3} \left[ \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|} \right] = \frac{8}{3} \left[ \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{3} \right] = \frac{8}{9}\mathbf{i} + \frac{16}{9}\mathbf{j} - \frac{16}{9}\mathbf{k} = 0.88\mathbf{i} + 1.76\mathbf{j} - 1.76\mathbf{k}.$$

Ejemplo B.5 .

Sean  $A(4, 1, 3)$  y  $B(2, 7, 6)$  dos puntos de  $E_3$ ; con base en ello:

- obtenga las componentes del segmento dirigido  $\vec{AB}$  sobre cada uno de los ejes coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,
- exprese a  $\vec{AB}$  en función de sus proyecciones (sobre cada uno de los ejes coordenados) y muestre dichas proyecciones en una gráfica donde también aparezca el segmento mencionado. y,
- cerciórese de que los signos y los valores absolutos de las componentes obtenidas sean congruentes con las proyecciones correspondientes.

Resolución.

- Con base en los datos se obtienen:

$$(\vec{AB})_x = x_B - x_A = -2, \quad (\vec{AB})_y = y_B - y_A = 6, \quad (\vec{AB})_z = z_B - z_A = 3.$$

- Teniendo en cuenta las componentes recién obtenidas, se tiene que:

$$\vec{AB} = (\vec{AB})_x \mathbf{i} + (\vec{AB})_y \mathbf{j} + (\vec{AB})_z \mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k};$$

así resultan los elementos pedidos para este inciso, o sea los mostrados en la figura B.8 .

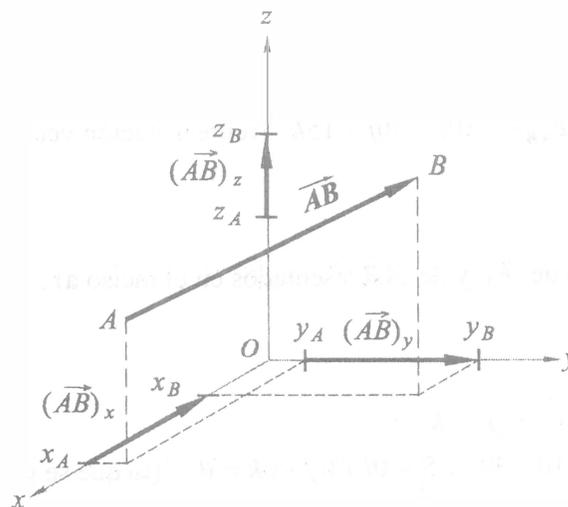


Figura B.8

- Nótese que las magnitudes y los sentidos de las proyecciones mostradas son congruentes con las componentes obtenidas.

Ejemplo B.6 .

Si  $F_1$  es una fuerza con la dirección y el sentido iguales a los del segmento dirigido  $\vec{AB}$  del ejemplo B.5 , además de tener una magnitud igual a 35 N :

a) obtenga el vector representativo de  $F_1$  , y,

b) compruebe que  $F_1 \times \vec{AB} = \mathbf{0}$  .

Resolución

a) Del ejemplo B.5 se tiene:

$$\vec{AB} = -2i + 6j + 3k ,$$

con lo que obtenemos:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7 ,$$

$$e_{AB} = \frac{1}{7}(-2i + 6j + 3k) ,$$

y,

$$F_1 = 35 e_{AB} = -10i + 30j + 15k \quad (\text{representación vectorial pedida}).$$

b) Considerando los valores de  $F_1$  y de  $\vec{AB}$  asentados en el inciso a) , se obtiene:

$$F_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 30 & 15 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 0k = \mathbf{0} \quad (\text{lo que se pidió comprobar}).$$

Ejemplo B.7.

Considérense los puntos  $C(0, -1, 2)$  y  $D(3, 11, -2)$ . Si  $F_2$  es una fuerza con la dirección y el sentido de  $\vec{DC}$ , y  $F_1$  es la fuerza descrita en el ejemplo B.6 :

- a) obtenga la componente de  $F_1$  sobre  $F_2$ , y,
- b) obtenga la componente y la proyección de  $F_2$  sobre  $F_1$ , tomando en cuenta que la magnitud  $F_2$  es 91 N.

Resolución.

Teniendo en cuenta los datos, obtenemos:

a)  $\vec{DC} = (0 - 3)\mathbf{i} + (-1 - 11)\mathbf{j} + (2 + 2)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ,

y,

$$(F_1)_{F_2} = (F_1)_{DC} = \frac{\mathbf{F}_1 \cdot \vec{DC}}{|\vec{DC}|} = \frac{(-10, 30, 5) \cdot (-3, -12, 4)}{\sqrt{9+144+16}} = \frac{30-360+60}{13} = -\frac{270}{13},$$

que es la componente pedida.

- b) Considerando la magnitud dada, así como el valor de  $DC$  obtenido al resolver el inciso a), resultan:

$$\mathbf{F}_2 = 91e_{DC} = 91 \left[ \frac{1}{|\vec{DC}|} \vec{DC} \right] = 91 \left[ \frac{1}{13} (-3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \right] = -21\mathbf{i} - 84\mathbf{j} + 28\mathbf{k},$$

$$(F_2)_{F_1} = \frac{\mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1}{|\mathbf{F}_1|} = \frac{(-21, -84, 28) \cdot (-10, 30, 15)}{35} = \frac{210 - 2520 + 420}{35} = -54,$$

es decir la componente solicitada, y,

$$(F_2)_{F_1} = [(F_2)_{F_1}] \mathbf{e}_{F_1} = [(F_2)_{F_1}] \mathbf{e}_{AB} = (-54) \left[ -\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k} \right] = 15.43\mathbf{i} - 46.29\mathbf{j} - 23.14\mathbf{k},$$

que es la proyección pedida.

## B.2. PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y MIXTO. DOBLE PRODUCTO VECTORIAL

Aquí definiremos cada uno de estos productos y mencionaremos sus propiedades más importantes; pero, antes de ello, enunciaremos las definiciones y propiedades de mayor importancia del álgebra vectorial, para vectores de  $E_3$ .

$$D1) \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 \quad \forall \mathbf{V}_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad y \quad \mathbf{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

si y sólo si  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  y  $z_1 = z_2$ .

$$D2) \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3, z_1 + z_2 + z_3),$$

$$\forall \mathbf{V}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{V}_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad y \quad \mathbf{V}_3 = (x_3, y_3, z_3).$$

$$D3) |\mathbf{V}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \forall \mathbf{V} = (x, y, z). \text{ A } |\mathbf{V}| \text{ se le conoce como } \\ \textit{módulo} \text{ (magnitud, tamaño o norma) de } \mathbf{V}.$$

$$D4) \lambda \mathbf{V} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \forall \mathbf{V} = (x, y, z), \text{ donde } \lambda \text{ es un número real cual-} \\ \text{quiera. Esto implica, entre otras cosas, que } \lambda \mathbf{V} \text{ tenga el sentido de } \mathbf{V} \text{ cuando } \\ \lambda > 0, \text{ y sentido contrario al de } \mathbf{V} \text{ para } \lambda < 0.$$

$$P1) \mathbf{V}_1 + (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3,$$

$$\forall \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \text{ y } \mathbf{V}_3.$$

$$P2) \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1, \quad \forall \mathbf{V}_1 \text{ y } \mathbf{V}_2.$$

$$P3) \mathbf{V} + (-\mathbf{V}) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{V} = (x, y, z), \text{ donde } -\mathbf{V} = (-x, -y, -z).$$

A  $\mathbf{0}$  se le denomina *vector nulo*, por las características de sus componentes.

$$P4) \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + (-\mathbf{V}_2), \quad \forall \mathbf{V}_1 \text{ y } \mathbf{V}_2.$$

$$P5) \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = -(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1), \quad \forall \mathbf{V}_1 \text{ y } \mathbf{V}_2.$$

$$P6) |\lambda \mathbf{V}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{V}|, \quad \forall \mathbf{V}, \lambda.$$

### Ejemplo B.8

Dados  $A(-1, 4, 3)$ ,  $B(1, 2, 4)$  y  $C(11, -8, -1)$ , y considerando que  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  son tales que  $\mathbf{V}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{V}_2 = \overrightarrow{BC}$  y  $\mathbf{V}_3 = \overrightarrow{CA}$ :

a) Expresar analíticamente  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$

b) Compruebe que  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{0}$

c) Demuestre que  $|-3\mathbf{V}_1| = 3|\mathbf{V}_1|$  y  $|\frac{1}{5}\mathbf{V}_2| = \frac{1}{5}|\mathbf{V}_2|$

### Resolución

a) Considerando los datos obtenemos:

$$\mathbf{V}_1 = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (2, -2, 1)$$

$$\mathbf{V}_2 = (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B) = (10, -10, -5)$$

y

$$\mathbf{V}_3 = (x_A - x_C, y_A - y_C, z_A - z_C) = (-12, 12, 4)$$

b) Con base en la definición D2, y en los resultados del inciso a, resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 &= (2, -2, 1) + (10, -10, -5) + (-12, 12, 4) \\ &= (0, 0, 0) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

c) De acuerdo con los resultados del inciso a, y la definición D4, se obtienen

$$-3\mathbf{V}_1 = (-6, 6, -3) \quad \text{y} \quad \frac{1}{5}\mathbf{V}_2 = (2, -2, -1)$$

por lo que, considerando la definición D3:

$$|-3\mathbf{V}_1| = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = 9 \quad (1)$$

y

$$|\frac{1}{5}\mathbf{V}_2| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3 \quad (2)$$

Además, también basados en los resultados del inciso a, y en la definición D3, obtenemos:

$$3|\mathbf{V}_1| = 3\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = 3(3) = 9 \quad (3)$$

y

$$\frac{1}{5}|\mathbf{V}_2| = \frac{1}{5}\sqrt{(10)^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = \frac{1}{5}(15) = 3 \quad (4)$$

Entonces, con base en (1) y (3) así como en (2) y (4), respectivamente, queda demostrado que

$$|-3\mathbf{V}_1| = 3|\mathbf{V}_1| \quad \text{y} \quad |\frac{1}{5}\mathbf{V}_2| = \frac{1}{5}|\mathbf{V}_2|$$

## Producto escalar

Sean  $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  y  $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  dos vectores cualesquiera de  $E_3$ ; definiremos como *producto escalar* entre  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  al escalar  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$  tal que

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \quad [30]$$

es decir, que

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) &= (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) \\ &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Son propiedades del producto escalar:

- 1)  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = |\mathbf{V}_1| \cdot |\mathbf{V}_2| \cos \phi$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ , donde  $\phi$  se define como el ángulo formado por  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ .
- 2)  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = 0$ , con  $\mathbf{V}_1 \neq \mathbf{0}$  y  $\mathbf{V}_2 \neq \mathbf{0}$ , si y sólo si  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  son perpendiculares.
- 3)  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = V^2$ , donde  $V = |\mathbf{V}|$ ,  $\forall \mathbf{V}$ .
- 4)  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_1$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ ; o sea que, *el producto escalar es conmutativo*.
- 5)  $\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3$ ,  $\forall \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$ .
- 6)  $(\lambda_1 \mathbf{V}_1) \cdot (\lambda_2 \mathbf{V}_2) = \lambda_1 \lambda_2 (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son números reales cualesquiera.
- 7)  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ ,  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$  y  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$ .

### Ejemplo B.9

Dados  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{C} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$  y  $\mathbf{D} = \mathbf{i} - 2n\mathbf{j} + 3n\mathbf{k}$ :

- a) determine el valor o valores de  $n$  de modo que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  resulte perpendicular a  $\mathbf{C} - \mathbf{D}$ , y,
- b) compruebe que el valor o valores obtenidos, al resolver el inciso a, cumplen la condición ahí mencionada.

### Resolución

a) Según los datos se obtiene

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) + (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

así como

$$\begin{aligned}\mathbf{C} - \mathbf{D} &= (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - 2n\mathbf{j} + 3n\mathbf{k}) \\ &= 4\mathbf{i} + (-4 + 2n)\mathbf{j} + (3 - 3n)\mathbf{k},\end{aligned}$$

y tomando en cuenta la definición de producto escalar

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D}) &= (3)(4) + (1)(-4 + 2n) + (n)(3 - 3n) \\ &= 12 - 4 + 2n + 3n - 3n^2\end{aligned}$$

es decir

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D}) = 8 + 5n - 3n^2;$$

entonces, para que  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  resulte perpendicular a  $\mathbf{C} - \mathbf{D}$ , por la propiedad 2 del producto escalar, debe tenerse

$$8 + 5n - 3n^2 = 0,$$

resolviendo esta ecuación se obtienen

$$n = -1 \quad \text{y} \quad n = \frac{8}{3}$$

que son los valores pedidos.

b) Para  $n = -1$  resultan

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) + (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{D} = (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \text{ y}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D}) = (3)(4) + (1)(-6) + (-1)(6) = 0,$$

con esto se comprueba que  $n = -1$  cumple la condición del problema.

Para  $n = \frac{8}{3}$  obtenemos

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) + (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \frac{8}{3}\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{8}{3}\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C} - \mathbf{D} &= (5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \frac{16}{3}\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) \\ &= 4\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \text{ y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{D}) &= (3)(4) + (1)(\frac{4}{3}) + (\frac{8}{3})(-5) \\ &= 12 + \frac{4}{3} - \frac{40}{3} = 0,\end{aligned}$$

comprobándose así que, también  $n = \frac{8}{3}$  cumple la condición del problema.

### Producto vectorial

Sean  $\mathbf{V}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$  y  $\mathbf{V}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$  dos vectores cualesquiera de  $E_3$ ; se define como *producto vectorial* entre  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  al vector  $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$  tal que

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\mathbf{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} \quad [31]$$

que también suele expresarse como

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1).$$

Seguramente al lector le será más sencillo recordar que puede obtener el producto vectorial, entre dos vectores cualesquiera, por medio del determinante:

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad [31_D]$$

expresión equivalente a la [31].

Sin embargo, para obtener productos vectoriales entre vectores que sólo tienen una componente, se aconseja efectuar las operaciones correspondientes en forma directa, considerando las propiedades 6, 7 y 8 de las presentadas a continuación, en lugar de hacer uso del determinante; es decir de  $[31_D]$  (obsérvese el ejemplo **B.11**).

Son propiedades del producto vectorial, para vectores de  $E_3$ :

- 1)  $|\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2| = |\mathbf{V}_1| \cdot |\mathbf{V}_2| \operatorname{sen} \phi$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ , donde  $\phi$  se define como el ángulo entre  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ .
- 2)  $(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{V}_1 = 0$  y  $(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \cdot \mathbf{V}_2 = 0$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ ; es decir que,  $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$  es perpendicular tanto a  $\mathbf{V}_1$  como a  $\mathbf{V}_2$ .
- 3)  $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = -(\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1)$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ ; por ello, se puede afirmar que, *el producto vectorial no es conmutativo*.
- 4)  $\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$  si y sólo si  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$  son paralelos, colineales, o iguales; esto último implica  $\mathbf{V} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{V}$ .
- 5)  $\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3) = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_3$ ,  $\forall \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$ .
- 6)  $(\lambda_1 \mathbf{V}_1) \times (\lambda_2 \mathbf{V}_2) = \lambda_1 \lambda_2 (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2)$ ,  $\forall \mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son números reales cualesquiera.
- 7)  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ .
- 8)  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ ,  
 $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ .

A fin de no tener que memorizar los productos de esta propiedad 8, se recomienda anotar los vectores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  alrededor de un arco de círculo con sentido antihorario, como se muestra en la figura **B.9**.

Cuando el producto vectorial entre dos de los tres vectores unitarios mencionados se realice en el sentido indicado, el resultado corresponderá simplemente al tercer vector; es decir al que no interviene en dicho producto. Las veces que el producto se efectúe en el sentido horario, el resultado será el inverso aditivo del vector que no forma parte de dicho producto.

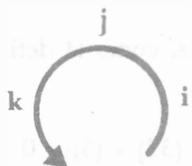


Figura **B.9**

Así se obtienen:  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$  y  $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ , que son dos de las igualdades la propiedad 8. Se sugiere comprobar el resto de dichas igualdades.

### Ejemplo B.10

Dados  $\mathbf{V}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ , considerando que  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2$ :

- obtenga  $\mathbf{V}$  mediante la expresión [31<sub>D</sub>],
- determine  $\mathbf{V}$  aplicando propiedades del producto vectorial, y,
- compruebe que  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_1 = 0$  y  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_2 = 0$ .

### Resolución

- Según [31<sub>D</sub>] y los datos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-15 - 4) - \mathbf{j}(10 + 1) + \mathbf{k}(8 - 3) = \\ &= -19\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1)$$

- Con base en los datos y en las propiedades 5, 6, 7 y 8 del producto vectorial, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= (2\mathbf{i}) \times (-\mathbf{i}) + (2\mathbf{i}) \times (4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i}) \times (5\mathbf{k}) + (-3\mathbf{j}) \times (-\mathbf{i}) + (-3\mathbf{j}) \times (4\mathbf{j}) + \\ &\quad + (-3\mathbf{j}) \times (5\mathbf{k}) + (\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i}) + (\mathbf{k}) \times (4\mathbf{j}) + (\mathbf{k}) \times (5\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{0} + 8\mathbf{k} - 10\mathbf{j} - 3\mathbf{k} + \mathbf{0} - 15\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{i} + \mathbf{0} \end{aligned}$$

es decir

$$\mathbf{V} = -19\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k},$$

resultado idéntico al obtenido en el inciso *a*, sólo que ahí se obtuvo más rápidamente.

- Si se tienen en cuenta (1), los valores de  $\mathbf{V}_1$  y  $\mathbf{V}_2$ , así como la definición de producto escalar, resultan:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_1 &= (-19, -11, 5) \cdot (2, -3, 1) = (-38) + (33) + (5) = 0 \\ \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_2 &= (-19, -11, 5) \cdot (-1, 4, 5) = (19) + (-44) + (25) = 0 \end{aligned}$$

es decir, lo que se pidió comprobar.

### Ejemplo B.11

Considerando los vectores  $\mathbf{A} = 4\mathbf{j}$  y  $\mathbf{B} = -5\mathbf{i}$ , obtenga de dos maneras diferentes el producto  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ .

#### Resolución

Al efectuar el producto en forma directa, considerando las propiedades 6 y 8 del producto vectorial, se obtiene

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (4\mathbf{j}) \times (-5\mathbf{i}) = 20\mathbf{k};$$

empleando [3.10] obtenemos ahora

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 20\mathbf{k} = 20\mathbf{k}$$

resultado que coincide con el recién obtenido.

Obsérvese que, en este caso, el producto se obtuvo más rápidamente en forma directa, que mediante el determinante; lo cual no ocurrió en el ejemplo B.10.

### Producto mixto

Sean  $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  y  $\mathbf{V}_3 = (x_3, y_3, z_3)$  vectores cualesquiera de  $E_3$ . La operación  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3$ , que llamaremos *producto mixto* entre esos tres vectores, aparentemente podría obtenerse de las dos siguientes formas:

$$\mathbf{V}_1 \cdot (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3) \quad \text{y} \quad (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2) \times \mathbf{V}_3.$$

Como la segunda de estas expresiones no tiene sentido (pues no está definido el producto vectorial entre un escalar y un vector; como lo son  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$ , respectivamente, en dicha expresión), el producto mixto entre  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$ , que simplemente indicaremos como  $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3$  o mediante  $[\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2 \ \mathbf{V}_3]$ , equivale a

$$(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

o bien

$$x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

es decir, al desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

que corresponde a un número real.

Entonces, se tiene

$$\boxed{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \quad [32]$$

y como consecuencia de ello

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3] &= [\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_3 \mathbf{V}_1] = [\mathbf{V}_3 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2] = -[\mathbf{V}_3 \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1] = -[\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_3] = \\ &= -[\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_3 \mathbf{V}_2]. \end{aligned}$$

Puede demostrarse que, si  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  son vectores cualesquiera de  $E_3$ , tales que sus orígenes coinciden, el volumen del paralelepípedo rectangular que tiene alojados en sus aristas a dichos vectores, está dado por  $|\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3|$ .

Con base en lo anterior podemos decir que, la condición para que tres vectores (cuyos orígenes coinciden) sean coplanares es *que su producto mixto resulte nulo*.

### Ejemplo B.12

Dados los puntos  $A(0, 0, 2)$ ,  $B(0, -6, 0)$ ,  $C(-3, 0, 0)$  y  $D(3, 3, 5)$ : considerando que  $\mathbf{V}_1 = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{V}_2 = \overrightarrow{AC}$  y  $\mathbf{V}_3 = \overrightarrow{AD}$ , determine si  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  son coplanares o no.

### Resolución

Como  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  tienen un punto común, que es  $A$ , dichos vectores serán coplanares si su producto mixto resulta nulo. Con base en los datos, se obtienen

$$\mathbf{V}_1 = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{V}_2 = (x_C - x_A)\mathbf{i} + (y_C - y_A)\mathbf{j} + (z_C - z_A)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{V}_3 = (x_D - x_A)\mathbf{i} + (y_D - y_A)\mathbf{j} + (z_D - z_A)\mathbf{k} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

por lo que, aplicando [5] obtenemos

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3 = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0(6) + 6(-3) + (-2)(-9) = 0;$$

entonces, podemos afirmar que  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  son coplanares.

### Doble producto vectorial

Sean  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$  y  $\mathbf{V}_3$  vectores cualesquiera de  $E_3$ , entre los cuales es factible efectuar varios dobles productos vectoriales, o productos vectoriales dobles, como  $\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3)$  y  $(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \times \mathbf{V}_3$  que en general arrojan diferentes resultados, pues puede demostrarse que

$$\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_3) = (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3)\mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)\mathbf{V}_3 \quad [33]$$

$$(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \times \mathbf{V}_3 = (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3)\mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3)\mathbf{V}_1 \quad [34]$$

$$\mathbf{V}_1 \times (\mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}_1) = V_1^2 \mathbf{V}_2, \text{ donde } V_1 = |\mathbf{V}_1|, \text{ sí y sólo sí } \mathbf{V}_2 \text{ y } \mathbf{V}_1 \text{ son perpendiculares.} \quad [35]$$

### Ejemplo B.13

Verifique el cumplimiento de la expresión [34] para los vectores  $\mathbf{V}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{V}_2 = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$  y  $\mathbf{V}_3 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ .

### Resolución

De acuerdo con los datos, obtenemos:

$$\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -19\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

y

$$(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) \times \mathbf{V}_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -19 & -11 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 22\mathbf{i} - 23\mathbf{j} + 33\mathbf{k}, \quad (1)$$

además de

$$\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3 = (2, -3, 1) \cdot (3, 0, -2) = 6 - 0 - 2 = 4$$

$$\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3 = (-1, 4, 5) \cdot (3, 0, -2) = -3 + 0 - 10 = -13, \text{ y}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_3)\mathbf{V}_2 - (\mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3)\mathbf{V}_1 &= -4\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 20\mathbf{k} - (-26\mathbf{i} + 39\mathbf{j} - 13\mathbf{k}) \\ &= 22\mathbf{i} - 23\mathbf{j} + 33\mathbf{k}; \end{aligned} \quad (2)$$

con (1) y (2) se verifica el cumplimiento de [34], para los vectores dados.

### Ejemplo B.14

Considerando  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$  y  $\mathbf{B} = -19\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ .

- determine si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares o no, y,
- si  $\mathbf{A}$  resulta ser perpendicular a  $\mathbf{B}$ , verifique el cumplimiento de la expresión [35] haciendo intervenir dichos vectores.

### Resolución

a) De acuerdo con los datos, se obtiene

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-19\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = -38 + 33 + 5 = 0$$

por lo que se puede afirmar que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares.

b) Ahora debemos verificar que  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = A^2\mathbf{B}$ , donde  $A = |\mathbf{A}|$ , para lo cual obtenemos:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -19 & -11 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} + 29\mathbf{j} + 79\mathbf{k}.$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 29 & 79 \end{vmatrix} = -266\mathbf{i} - 154\mathbf{j} + 70\mathbf{k} \quad (1)$$

y

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{B} &= [(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2]\mathbf{B} = 14(-19\mathbf{i} - 11\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \\ &= -266\mathbf{i} - 154\mathbf{j} + 70\mathbf{k}; \end{aligned} \quad (2)$$

entonces, con los valores dados por (1) y (2) queda verificado el cumplimiento de la expresión [34], haciendo intervenir los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  dados en este problema.

### B.3. DERIVADAS DE SUMAS Y PRODUCTOS VECTORIALES Y ESCALARES

A continuación se muestran algunas fórmulas aplicables a la derivación de sumas y productos vectoriales y escalares. Donde se tenga un punto sobre un vector o un escalar (según el caso), deberá interpretarse a dicho punto como la primera derivada de ese vector, o de ese escalar, con respecto al tiempo.

No olvide que *el producto vectorial no es conmutativo y el producto escalar sí lo es.*

En dichas fórmulas,  $U$ ,  $V$  y  $W$  son funciones escalares del tiempo en tanto que,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son funciones vectoriales de dicha variable.

$$\frac{d}{dt}(U + V + W) = \dot{U} + \dot{V} + \dot{W} \quad [36]$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) = \dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}} + \dot{\mathbf{C}} \quad [37]$$

$$\frac{d}{dt}(UV) = \dot{U}V + U\dot{V} \quad [38]$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{B}} \quad [39]$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \dot{\mathbf{B}} \quad [40]$$

Esta obra se terminó de imprimir  
en julio de 2002  
en el taller de imprenta del  
Departamento de Publicaciones  
de la Facultad de Ingeniería,  
Ciudad Universitaria, México, D.F.  
C.P. 04510

**Secretaría de Servicios Académicos**

El tiraje consta de 500 ejemplares  
más sobrantes de reposición.