



**FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.  
DIVISION DE EDUCACION CONTINUA**

**A LOS ASISTENTES A LOS CURSOS**

**Las autoridades de la Facultad de Ingeniería, por conducto del jefe de la División de Educación Continua, otorgan una constancia de asistencia a quienes cumplan con los requisitos establecidos para cada curso.**

**El control de asistencia se llevará a cabo a través de la persona que le entregó las notas. Las inasistencias serán computadas por las autoridades de la División, con el fin de entregarle constancia solamente a los alumnos que tengan un mínimo de 80% de asistencias.**

**Pedimos a los asistentes recoger su constancia el día de la clausura. Estas se retendrán por el periodo de un año, pasado este tiempo la DECFI no se hará responsable de este documento.**

**Se recomienda a los asistentes participar activamente con sus ideas y experiencias, pues los cursos que ofrece la División están planeados para que los profesores expongan una tesis, pero sobre todo, para que coordinen las opiniones de todos los interesados, constituyendo verdaderos seminarios.**

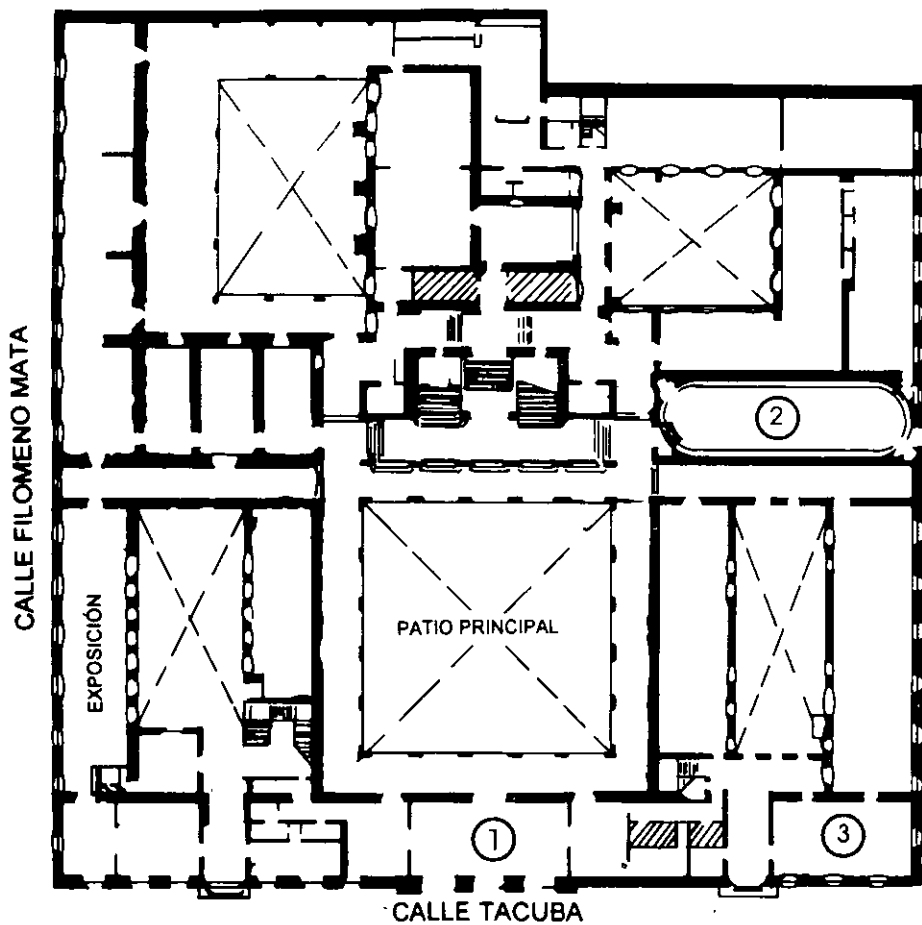
**Es muy importante que todos los asistentes llenen y entreguen su hoja de inscripción al inicio del curso, información que servirá para integrar un directorio de asistentes, que se entregará oportunamente.**

**Con el objeto de mejorar los servicios que la División de Educación Continua ofrece, al final del curso deberán entregar la evaluación a través de un cuestionario diseñado para emitir juicios anónimos.**

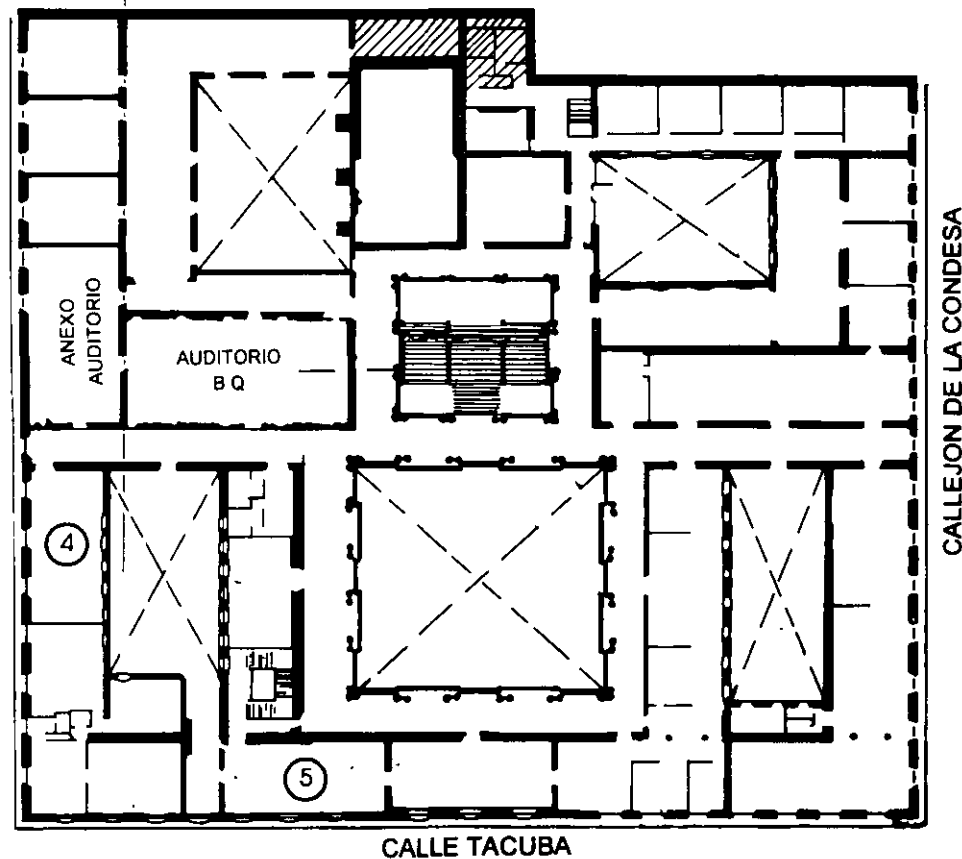
**Se recomienda llenar dicha evaluación conforme los profesores impartan sus clases, a efecto de no llenar en la última sesión las evaluaciones y con esto sean más fehacientes sus apreciaciones.**

**Atentamente  
División de Educación Continua.**

# PALACIO DE MINERIA

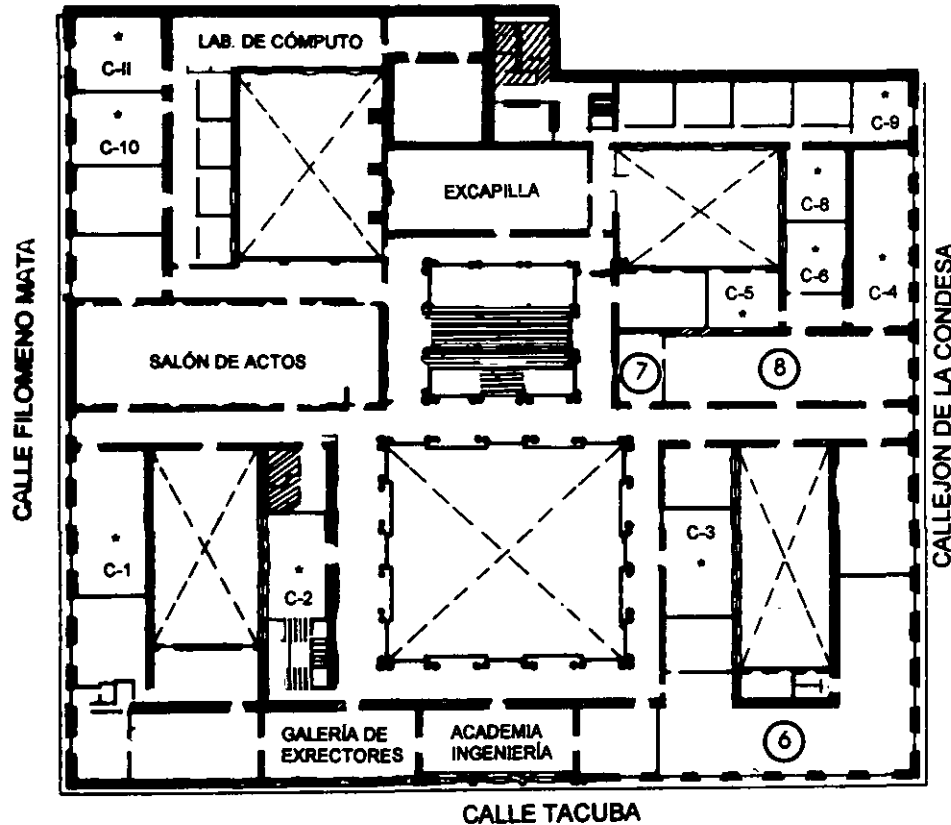


**PLANTA BAJA**



**MEZZANINNE**

# PALACIO DE MINERÍA



## GUÍA DE LOCALIZACIÓN

1. ACCESO
  2. BIBLIOTECA HISTÓRICA
  3. LIBRERÍA UNAM
  4. CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN  
"ING. BRUNO MASCANZONI"
  5. PROGRAMA DE APOYO A LA TITULACIÓN
  6. OFICINAS GENERALES
  7. ENTREGA DE MATERIAL Y CONTROL DE ASISTENCIA
  8. SALA DE DESCANSO
- SANITARIOS
- \* AULAS

**1er. PISO**



DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.A.M.  
CURSOS ABIERTOS

DIVISIÓN DE EDUCACION CONTINUA





**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN TELECOMUNICACIONES**

## **MODULO I: TELECOMUNICACIONES VÍA MICROONDAS**

**TEMA**

**PROPAGACIÓN ELECTROMAGNÉTICA**

**EXPOSITOR: M. EN I. JORGE RODRÍGUEZ CUEVAS  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO 2001**

# INDICE

## ELECTROMAGNETISMO

CAMPO ELÉCTRICO.....	1
Líneas de Fuerza .....	2
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a una Distribución Discreta de Cargas.....	3
Campo Eléctrico Debido a una Distribución Continua de Carga.....	3
Campo Eléctrico Debido a una Distribución Lineal de Carga.....	3
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a una Superficie de Carga .....	4
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a un Volúmen de Carga .....	4
Flujo Eléctrico.....	4
Densidad de Flujo Eléctrico "D" .....	5
LEY DE GAUSS .....	5
Resultados Prácticos de la Evaluación de la Ley de Gauss .....	6
Aplicaciones de la Ley de Gauss .....	6
Divergencia.....	6
Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial o Voltaje.....	7
Potencial Absoluto de un Punto Dado, Debido a una Carga Q.....	7
Potencial $V_p$ Debido a Distribución de Carga.....	8
Gradiente de Potencial V.....	8
Líneas y Superficies Equipotenciales .....	8
Propiedades de los Campos Eléctricos, Mapas de Campo y Voltaje .....	9
Capacitor o Condensador .....	9
Corriente Eléctrica y Densidad de Corriente .....	9
Resistencia Eléctrica y Ley de Ohm.....	10
Ley de Ohm en un Punto .....	11
CAMPOS MAGNÉTICOS ESTACIONARIOS .....	13
Fuerza de un Campo "B" sobre un Conductor.....	13
Permeabilidad .....	13
Ley de Biot-Savart .....	14
Flujo Magnético y Densidad de Flujo Magnético .....	14
Fuerza de Lorentz.....	14
Ley de Ampere.....	15
Para Campos Variantes en el Tiempo .....	16
LEY DE FARADAY.....	16
Ley de Lenz .....	17
El Rotacional del Campo H.....	18
Forma Diferencial de la Ley de Faraday .....	18
Condición Necesaria pero no Suficiente para que exista Rotacional .....	18
Ley de Continuidad de Flujo Magnético .....	19
Corriente de Desplazamiento.....	20
Ecuaciones de Maxwell en Forma Integral.....	24
Ecuaciones de Maxwell en Forma Diferencial .....	25

## ONDAS

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS .....	26
Ecuaciones de Onda Electromagnética Transversal (T.E.M.) en Dielectricos .....	26
Impedancia Intrínseca .....	30
Impedancia Característica .....	30
Impedancia de Onda .....	31
O.E.M. en Medios Conductores .....	31
Clasificación Arbitraria de los Medios .....	33
Resumen de Constantes en los Medios .....	35
Potencia y Vector de Poynting .....	36
Polarización .....	40
Polarización Lineal .....	41
Polarización Circular .....	43
Polarización Elíptica .....	44
Incidencia Normal .....	46
Onda Estacionaria .....	46
Impedancia de Entrada entre Medios .....	50
BIBLIOGRAFÍA .....	54

## CAMPO ELÉCTRICO

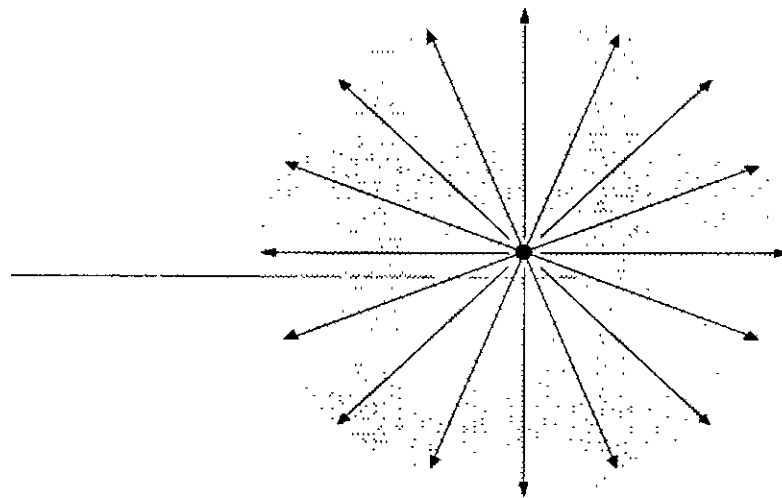
Si tenemos una carga puntual  $+Q$  y colocamos en cualquier punto cercano una carga de prueba  $+q$ , por la ley de Coulomb sabemos que existe una fuerza de repulsión sobre la carga  $+q$  debida a la carga  $+Q$ , esto es,  $(F_{qQ})$ . Si ahora movemos en cualquier sentido la carga  $+q$ , y de nuevo dibujamos la fuerza sobre  $+q$ , y si continuamos así, vamos obteniendo varios vectores, los cuales generan una gráfica de las líneas de fuerza que actuarían sobre  $+q$ . Este dibujo o gráfico es una herramienta que sirve para visualizar el campo de acción debido a la carga  $+Q$ .

El campo Eléctrico se define como el limite de la fuerza eléctrica sobre una carga testigo colocada en un punto. También, se define como la fuerza por unidad de carga en un punto cercano a una carga dada en dicho punto. La carga  $q \rightarrow 0$ , ya que su presencia no debe de afectar la distribución de campo eléctrico producida por una carga  $Q$ .

$$\vec{E} \triangleq \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}$$

ó

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}_e}{q}$$



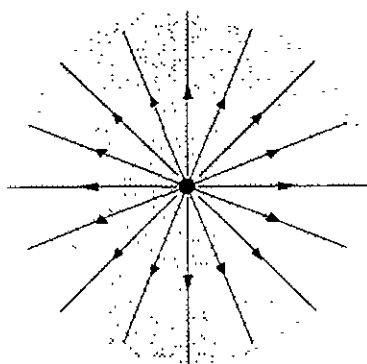
### Líneas de Fuerza.

Son líneas imaginarias trazadas de tal forma, que su dirección y sentido en cualquier punto sirven para representar o modelar un campo vectorial o mapa de campo.

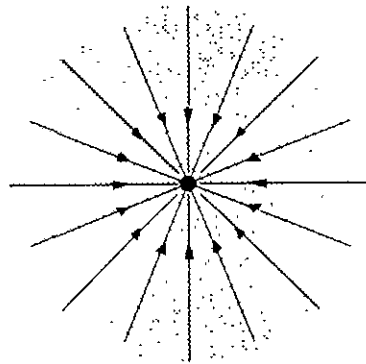
Características de las líneas de campo eléctrico:

1. En una carga positiva se dibujan saliendo (se tiene una fuente), en una carga negativa se dibujan entrando (se tiene un sumidero).
2. Toda tangente a una de las líneas es la dirección del campo.

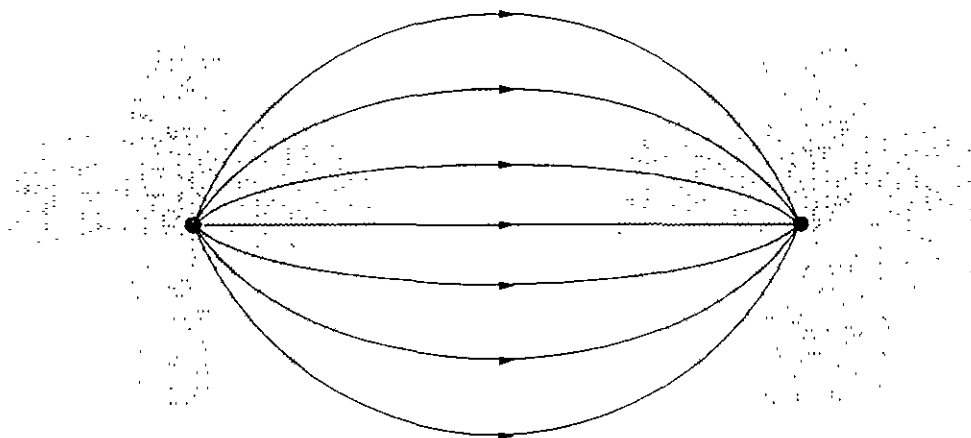
- 3. El número de líneas que se dibuja es proporcional a la magnitud del campo, es decir, son más cercanas entre sí en las regiones donde el campo es más intenso.
- 4. No se cruzan entre sí.



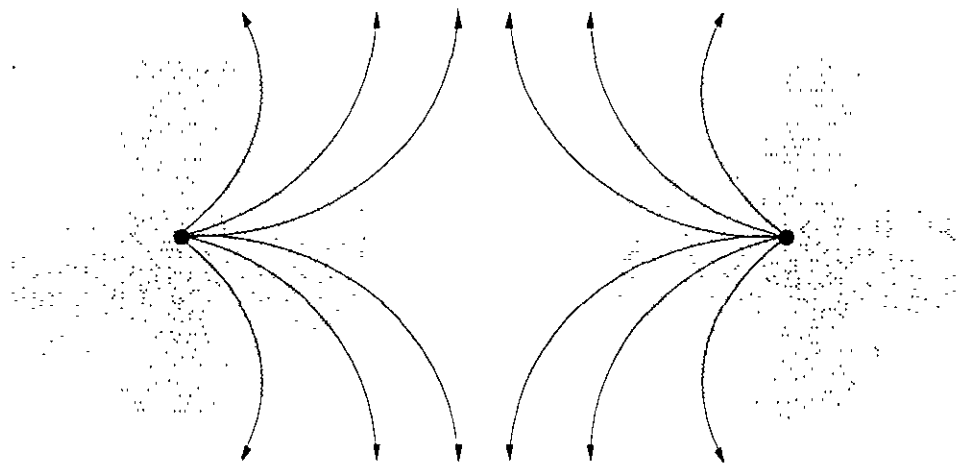
Campo eléctrico de una carga positiva individual.



Campo eléctrico de una carga negativa individual



Campo eléctrico entre dos cargas eléctricas diferentes:



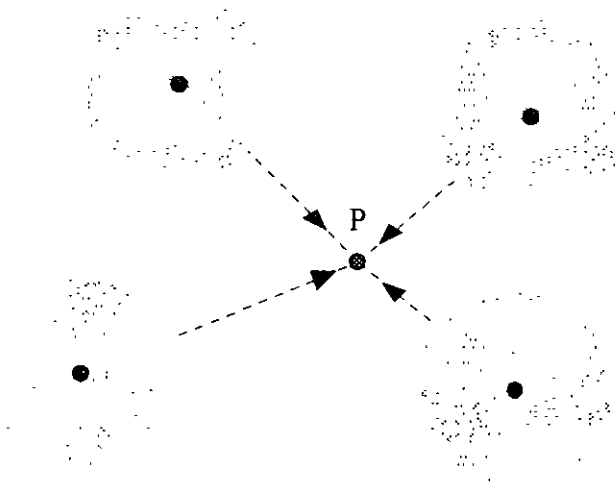
Campo eléctrico entre dos cargas eléctricas iguales.



Una pequeña carga de prueba situada en cualquier punto dentro del campo y que esté libre para moverse, se acelerará en la dirección de la línea de fuerza que pasa por el punto. Una similitud ocurre en el flujo de un fluido con un campo que corresponde a la distribución de velocidades, si se coloca una pequeña partícula con masa ideal, ésta se movería describiendo el comportamiento de las líneas de fuerza.

**Campo eléctrico en un punto "P" debido a una distribución discreta de cargas.**

El campo que actúa sobre un punto es la resultante de la acción que ejerce el campo eléctrico de cada carga sobre ese punto, luego se efectúa la suma vectorial para encontrar la resultante. El campo generado por una carga no afecta a la partícula misma.



$$\vec{E}_p = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{a}_{r_i}$$

**Campo eléctrico debido a una distribución continua de carga.**

En este caso la carga eléctrica se encuentra uniformemente distribuida en la región correspondiente.

**Campo eléctrico debido a una distribución lineal de carga.**

El campo eléctrico en el punto P está dado por la suma de los efectos del campo diferencial de cada diferencial de carga.

$$\vec{E}_p = \sum \Delta\vec{E}_p$$

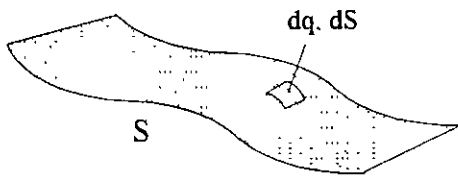
en el límite se tiene que:

$$\Delta\vec{E}_p = d\vec{E}_p$$



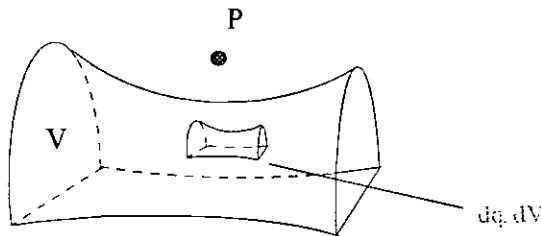
$$\vec{E}_p = \int_{\ell} d\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\rho_{\ell}}{r_i^2} d\ell \hat{a}_{r_i}$$

**Campo eléctrico en un punto "P" debido a una superficie de carga.**



$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s}{r_i^2} dS \hat{a}_r$$

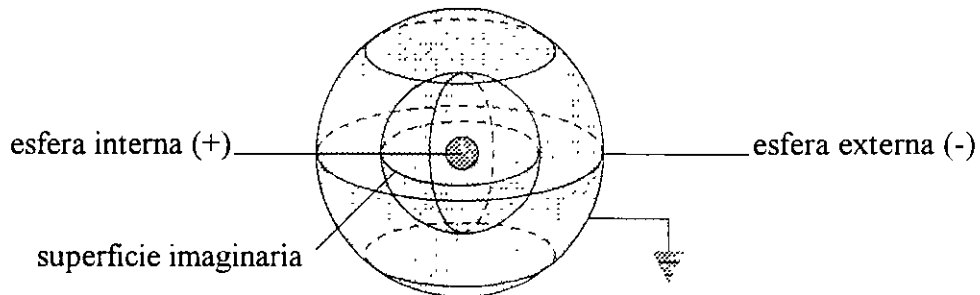
**Campo eléctrico en un punto "P" debido a un volumen de carga.**



$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho}{r_i^2} dV \hat{a}_r$$

**Flujo Eléctrico.**

Faraday concluyó que al colocar dos esferas concéntricas, cargando positivamente (+) la esfera interna, existe un flujo de cargas de la esfera interior a la exterior, el cual es independiente del medio y sólo depende de la carga Q, es decir, la esfera exterior adquiere carga negativa (-). Por definición, el flujo eléctrico se origina en las cargas positivas y termina en las cargas negativas y es igual a la magnitud de carga que los produce, por lo que el flujo eléctrico es igual a la Carga. El flujo es una propiedad de cualquier campo vectorial, y atraviesa una superficie hipotética, la cual puede ser abierta o cerrada. En un campo eléctrico E, el flujo eléctrico se mide por el número de líneas de fuerza que pasa a través de una superficie hipotética seleccionada convenientemente.



**Densidad de flujo eléctrico "D".**

Si alrededor de un punto P, las líneas de flujo tienen la dirección de un vector unitario  $\hat{a}_n$  y si la cantidad de flujo  $d\psi$  cruza el área diferencial  $ds$ , la densidad de flujo eléctrico en P queda definida por:

$$\bar{D} = \frac{d\psi}{dS} \hat{a}_n \quad \text{ó} \quad \bar{D} = \frac{\psi}{A} = \frac{Q}{A} \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Para una esfera, se tiene:

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \left[ \frac{C}{m^2} \right]$$

Nótese que si "D" no depende del medio, entonces "D" se relaciona con "E" por  $D = \epsilon_0 E$  para el caso del espacio libre; esto es válido únicamente en los medios isotrópicos, lineales y homogéneos. "D" es la misma que la densidad superficial de carga sobre la esfera, como si la carga Q estuviese distribuida uniformemente sobre la esfera

**LEY DE GAUSS**

Esta expresa que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie.

$$Q = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

"Q" es la carga total encerrada por la superficie "S".

La Ley de Gauss facilita la solución de problemas que involucran campo eléctrico. Para aplicarla se debe usar superficies "simétricas" al campo, es decir:

1.  $\bar{E} \perp d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$
2.  $\bar{E} \parallel d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}| |d\bar{S}| \cos(0^\circ) = |\bar{E}| |d\bar{S}|$
3.  $\bar{E} \angle 180^\circ d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}| |d\bar{S}| \cos(180^\circ) = -|\bar{E}| |d\bar{S}|$

En las expresiones (2) y (3) E generalmente es constante en todo el ds.

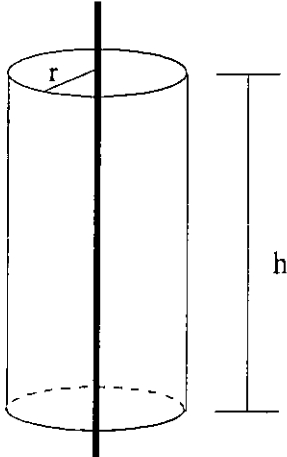
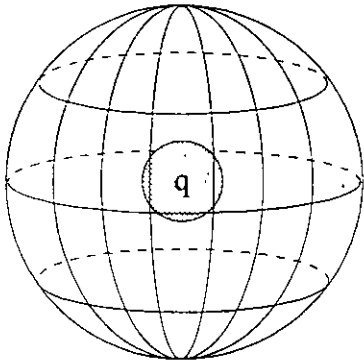
Para campos estáticos la Ley de Gauss permite comprobar que la carga total Q en un conductor se distribuye en toda la superficie.

**Resultados prácticos de la evaluación de la Ley de Gauss**

1. Facilidad de evaluar el campo eléctrico  $\vec{E}$  en superficies cerradas, buscando una superficie lo más simétrica al campo  $\vec{E}$  para que  $\vec{E} \parallel d\vec{S} = ES$ , y  $\vec{E} \perp d\vec{S} = 0$ .
2. La carga neta de un conductor residen en la superficie

El campo  $\vec{E}$  dentro de la superficie del conductor se anula, es decir, que el único lugar donde puede estar la carga es en la superficie del conductor. En un conductor, los portadores de carga tienen la libertad de moverse respondiendo a campos eléctricos infinitesimales, los electrones se mueven hasta que hallen posiciones en las que no experimenten fuerza neta. En reposo, el interior del conductor debe ser una región desprovista de campo eléctrico. En condiciones estáticas el campo eléctrico en el interior de un conductor se anula.

**Aplicaciones de la Ley de Gauss**

$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$ $\epsilon_0 E (2\pi r h) = \lambda h$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$			$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = q$ $\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q$ $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$
Línea de Carga		Esfera de Carga	

**Divergencia.**

Para que un campo tenga divergencia, es condición necesaria pero no suficiente que el campo varíe en magnitud a lo largo de una línea que tenga la misma dirección de dicho campo. Se puede comprobar que el campo eléctrico tiene divergencia:

de la definición de densidad de carga

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow q = \int_V \rho dV$$

por ley de Gauss

$$q_{\text{encerrada}} = \int_V \rho \, dV = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

por el teorema de la divergencia

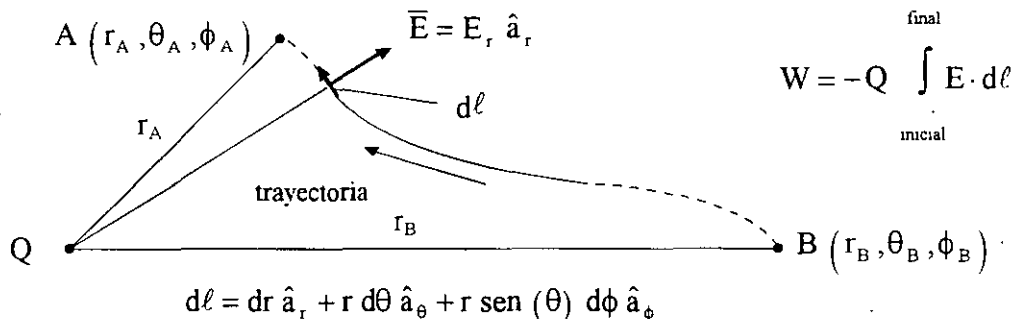
$$\int_V \rho \, dV = \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{D} \, dV = \epsilon_0 \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{E} \, dV$$

entonces, para un volumen arbitrario

$$\rho = \bar{\nabla} \cdot \bar{D} = \bar{\nabla} \cdot \epsilon_0 \bar{E}$$

**Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial o Voltaje.**

Si el rotacional de un vector se anula, quiere decir que el vector puede expresarse como el gradiente de un escalar. Para mover una carga eléctrica dentro de un campo eléctrico E se requiere una fuerza, la cual va ejercer un trabajo sobre la carga:



El potencial eléctrico, se define entonces, como el trabajo por unidad de carga que hay que realizar sobre una carga puntual para moverla en un campo eléctrico

**Diferencia de Potencial:** es el trabajo o energía por unidad de carga que se requiere para transportar una carga de prueba de B a A en el campo donde  $V_A > V_B$ .

**Potencial absoluto de un punto dado, debido a una carga Q.**

Cuando se realiza la integral de línea no importa la trayectoria de integración, esto quiere decir que la diferencia de potencial está determinada únicamente por la diferencia de potencial entre los puntos en consideración.

Para dos puntos en una superficie equipotencial la diferencia de potencial es cero, es decir que el campo es conservativo, ésta es una propiedad del campo electrostático. El signo (-) de la integral significa que el aumento de potencial es siempre en dirección opuesta al campo E.

Por el principio de conservación de energía se cumple:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0$$

### Potencial $V_p$ debido a distribuciones de carga.

Para "n" cargas puntuales discretas: el potencial en un punto "P" es igual a la suma algebraica de los potenciales absolutos de cada carga en el punto P debidos a cada carga

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

Para una línea de carga.

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\ell} \frac{\rho_{\ell}}{r} d\ell$$

Para una superficie de carga:

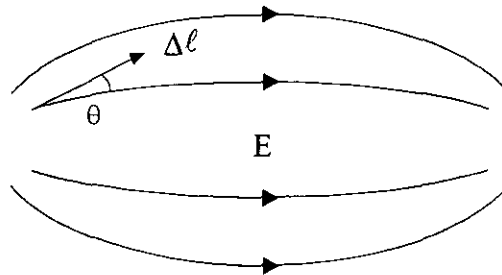
$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\rho_s}{r} dS$$

Para un volumen de carga:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho}{r} dV'$$

### Gradiente de Potencial V.

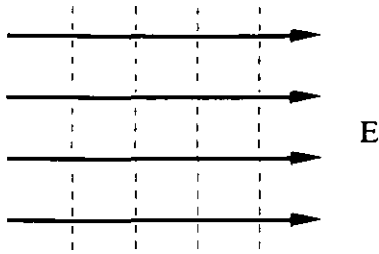
La dirección del gradiente es opuesta al campo E, es decir, ocurre un aumento de potencial cuando se mueve una carga "q" en contra del campo E



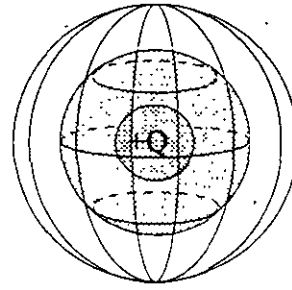
$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

### Líneas y Superficies Equipotenciales.

Las líneas y superficies equipotenciales son el lugar geométrico de todos aquellos puntos que tienen el mismo potencial eléctrico, es decir, el potencial se mantiene constante. El trabajo sobre una carga "q" para desplazarla sobre una superficie equipotencial es cero.



líneas equipotenciales



superficies equipotenciales

### Propiedades de los Campos Eléctricos, Mapas de Campo y Voltaje.

1. Las líneas de  $E$  y de potencial se intersecan en ángulos de  $90^\circ$ , excepto en puntos singulares, como una esquina.
2. La superficie de un conductor es una superficie equipotencial  $V = \text{cte}$ .
3. El campo corta perpendicularmente una superficie conductora o equipotencial.
4. En un campo uniforme el potencial varía linealmente con la distancia
5. Un tubo de flujo es paralelo al campo  $E$  (línea de campo) y el punto de flujo eléctrico es constante en cualquier sección transversal de un tubo de flujo.
6. Un tubo de flujo inicia en  $+Q$  y termina en  $-Q$ .

### Capacitor o Condensador.

Es un dispositivo eléctrico que almacena energía. Por definición, la capacitancia está dada por la carga entre la unidad de voltaje

$$C = \frac{Q}{V}$$

Esto implica que se requiere un trabajo para cargar desde carga cero hasta una carga  $Q$  a un condensador. La energía se almacena en el volumen de las placas que almacena el campo  $E$ , sin embargo, no es necesario que exista un medio material para que la energía quede almacenada por el campo  $E$ , por lo que existe energía aun en el vacío, si se coloca un dieléctrico la energía aumenta en proporción a la permitividad del material

### Corriente Eléctrica y Densidad de Corriente.

Si en una superficie cerrada " $S$ " se encuentra una carga " $Q$ " que disminuye con el tiempo, esta disminución estará relacionada con la existencia de una corriente que fluye desde el volumen acotado por la superficie.

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

Donde la corriente está relacionada a la densidad de corriente como  $\mathbf{J} = I/A$ , por lo que se puede llegar a la "ecuación de continuidad":

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si la densidad de carga no varía con el tiempo, la integral de superficie es igual a cero, lo que determina el carácter cerrado de las líneas de densidad de corriente.

En un campo eléctrico, toda carga "q" experimentará una fuerza  $F = qE$ , que implica una aceleración  $a = F/m$  y una velocidad  $v = at$ , entonces se obtiene:

$$v = \frac{F}{m} t = \frac{qE}{m} t$$

El resultado anterior implica que la velocidad aumentará indefinidamente conforme transcurra el tiempo, sin embargo, las cargas cuando se mueven experimentan choques arbitrarios perdiendo parte de su energía y ocasionando cambios aleatorios en la dirección de su movimiento. En un medio homogéneo el efecto neto de los choques es limitar a la partícula cargada a una velocidad promedio constante que se llama "velocidad de arrastre o velocidad de deriva" ( $v_d$ ), que tiene la misma dirección del campo  $E$ , y se relaciona con éste por una constante llamada "movilidad del electrón"  $\mu_e$ , esto implica que:

$$v_d = \mu_e E \left[ \frac{m}{s} \right]$$

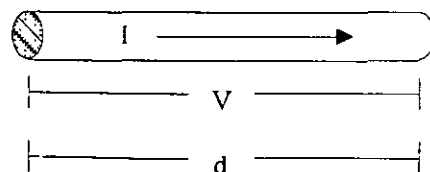
donde  $I = v_d \cdot \rho$  y  $A = \frac{Q}{s}$ , entonces  $\mathbf{J} = \frac{I}{A} = v_d \cdot \rho$ .

**Resistencia Eléctrica y Ley de Ohm.**

En 1826, Georg Simon Ohm realizó experimentos con las relaciones entre la tensión o voltaje  $V$  sobre un conductor y la corriente  $I$  que pasa por él, en términos de un parámetro característico del conductor, este parámetro se denomina resistencia  $R$ , que se define como la razón de la tensión o voltaje  $V$  aplicado al conductor a la corriente  $I$  que pasa por él.

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{ó} \quad V = RI$$

$R$  depende de las dimensiones del conductor y del material del mismo.

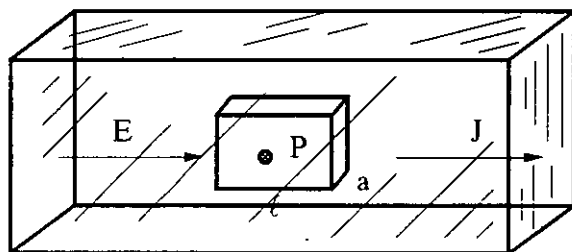




Se supone que la resistencia  $R$  es independiente de la corriente  $I$ ; es decir, la resistencia  $R$  es una constante. Recíprocamente, se dice que una resistencia así, obedece la ley de Ohm. Existen, sin embargo, elementos de circuito, como los rectificadores, cuya resistencia no es una constante. Se dice que tales elementos son no lineales y se requiere un diagrama  $V$  contra  $I$  para determinar su comportamiento. Aún, se define la resistencia  $R$  por medio de la ecuación anterior, pero no es independiente de la corriente  $I$  y la resistencia no obedece la ley de Ohm.

### Ley de Ohm en un punto.

Considérese un bloque de material conductor y constrúyase una pequeña celda cúbica imaginaria de longitud  $\ell$  y sección transversal "a" alrededor de un punto  $P$  en el interior del bloque siendo  $a$  normal a  $J$ , como se indica en la siguiente figura.



Entonces, al aplicar la ley de Ohm a esta celda se tiene  $V = RI$  donde  $V$  es la diferencia de potencial entre los extremos de la celda. Pero  $V = E\ell$  e  $I = J \cdot a$ ; así que  $E\ell = J \cdot a \cdot R$ , de lo que se obtiene:

$$J = \frac{\ell}{aR} E$$

Haciendo que la celda sea tan pequeña como se quiera, se puede aplicar esta relación en el punto  $P$ , y se escribe:

$$J = \sigma E$$

Esta ecuación es la ley de Ohm en un punto y relaciona la densidad de corriente "J" en un punto con el campo total "E" en el punto y la conductividad  $\sigma$  del material.

En este análisis se ha supuesto que el material conductor es homogéneo (el mismo material en todo el volumen), es isotrópico (la resistencia entre las caras opuestas del cubo es independiente del par de caras que se escoja), y que es lineal (la resistencia es independiente de la corriente).

De la expresión anterior se tiene que la conductividad es la relación de la densidad de corriente  $J$  al campo aplicado  $E$ .

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad \left( \frac{\text{mhos}}{\text{m}} \right)$$

Pero, anteriormente se vio que la densidad de corriente es el producto de la velocidad de deriva o de arrastre  $v_d$  y la densidad de carga  $\rho$ .

$$J = \rho \cdot v_d$$

Entonces, la conductividad queda expresada como:

$$\sigma = \rho \frac{v_d}{E} = \rho \cdot \mu_e \quad \left[ \frac{\text{mhos}}{\text{m}} \right]$$

$\rho$  = densidad de carga,  $\text{C m}^{-3}$

$\mu_e$  = movilidad,  $\text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$

### Relaciones de Frontera para Campos Eléctricos Estáticos

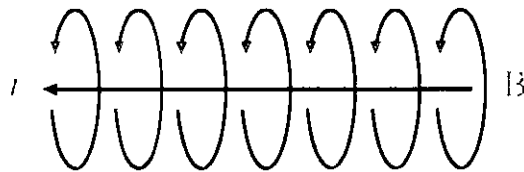
	Componente de Campo	Condiciones de Frontera	Condición
(1)	Tangencial	$E_{t_1} = E_{t_2}$	Dos medios cualesquiera.
(2)	Tangencial	$E_{t_1} = 0$	El medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 es un conductor
(3)	Normal	$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s$	Dos medios cualesquiera con carga en la frontera
(4)	Normal	$D_{n_1} = D_{n_2}$	Dos medios cualesquiera sin carga en la frontera
(5)	Normal	$D_{n_1} = \rho_s$	El medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 es un conductor con cargas superficial.

Las relaciones (1), (3) y (4) se aplican en la presencia de corrientes y también para campos que varían con el tiempo

Las relaciones (2) y (5) también se aplican para situaciones que cambian con el tiempo puesto que  $\sigma_2 \rightarrow 0$

## CAMPOS MAGNÉTICOS ESTACIONARIOS

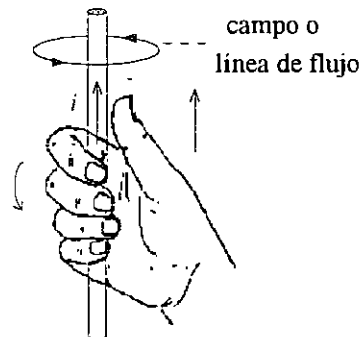
Una carga móvil constituye una corriente eléctrica  $I$ , donde  $I$  genera un Campo Magnético  $B$ , que forma espiras circulares concéntricas y cerradas al rededor del conductor, la dirección del campo  $B$  está dada por la ley de la mano derecha. Las líneas de campo magnético siempre son cerradas, por lo que no existen polos magnéticos positivos o negativos independientes.



### Fuerza de un Campo "B" sobre un conductor.

Un conductor eléctrico con una corriente  $I$ , en un campo magnético  $B$ , experimenta una fuerza magnética  $F_m$  dada por la siguiente expresión:

$$F_m = \ell i \times B$$



$\ell$  = longitudde lconductor , m

$i$  = corriente en el conductor, A

$B$  = densidad de flujo magnético, Teslas ó Web/m<sup>2</sup>

La fuerza magnética ( $F_m$ ) describe el principio básico de funcionamiento de los motores eléctricos.

### Permeabilidad.

Es una constante que relaciona la densidad de flujo magnético "B" con la intensidad de campo magnético "H".

$$B = \mu H$$

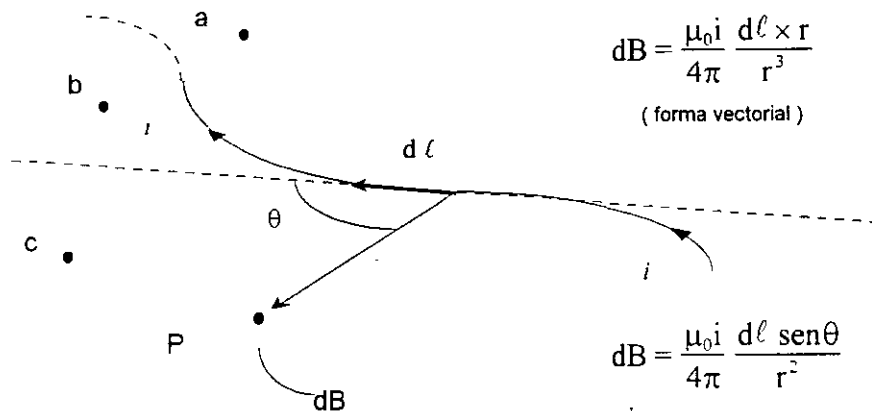
Para el vacío se tiene:

$$B = \mu_0 H$$

donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[ \frac{H}{m} \right]$

**Ley de Biot-Savart.**

Considere la siguiente figura Si se tiene un elemento diferencial de corriente  $i \cdot d\ell$ , para calcular el campo magnético diferencial  $dB$  en un punto P asociado al elemento de corriente se tiene:



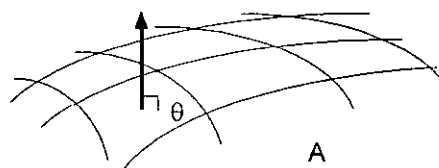
donde la dirección del elemento diferencial de densidad de campo magnético ( $dB$ ) está dada por el producto cruz  $d\ell \times r$ . Esta ley sirve para el cálculo de  $B$  en cualquier distribución arbitraria de corriente.

**Flujo Magnético y Densidad de Flujo Magnético.**

Considerando la siguiente figura, se tiene un flujo continuo, es decir, no existen fuentes ni sumideros, y las líneas de flujo magnético son perpendiculares al área  $A$ . Entonces, el flujo magnético es:

$$B = \frac{\phi}{A}$$

$$\phi = |A||B| \cos(90^\circ) = A \cdot B$$



**Fuerza de Lorentz.**

La fuerza sobre una partícula en movimiento debida a campos eléctricos y magnéticos combinados se obtienen fácilmente por superposición:

$$F = q (E + v \times B)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de la fuerza de Lorentz, que junto con la segunda ley de Newton es básica para la determinación de los cálculos del movimiento de partículas aceleradas en un Tubo de Rayos Catódicos CRT, las órbitas del electrón en el magnetrón, las trayectorias del protón en el ciclotrón, las características del plasma en el generador magnetohidrodinámico (MHD) o en general, en el movimiento de la partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos combinados.

### Ley de Ampère.

La densidad de flujo B a una distancia R a lo largo de un conductor recto está dada por:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi R}$$

Donde I es la corriente en el conductor y  $\mu$  es la permeabilidad del medio.

Si B es integrado alrededor de una trayectoria cerrada de radio R encerrando un conductor, entonces se tiene

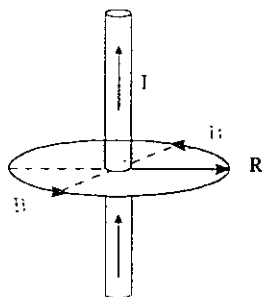
$$\oint B \cdot d\ell = \frac{\mu I}{2\pi R} \oint d\ell = \frac{\mu I}{2\pi R} 2\pi R = \mu I$$

$$\text{si se define } H = \frac{B}{\mu} \text{ entonces } \oint H \cdot d\ell = I$$

Esta ecuación es conocida como ley de Ampère o ley circuital de Ampère, y expresada en palabras dice:

"La integral de línea de H sobre cualquier trayectoria cerrada es igual a la corriente constante encerrada por dicha trayectoria"

Es obvio que los vectores H y B tienen la misma dirección, esto es verdad para todo medio isotrópico. Esta integral puede ser independiente del medio.



**Para campos Variantes en el Tiempo.**

a) En forma integral se tiene.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

La curva C encierra a la superficie S.

b) Forma diferencial aplicando el Teorema de Stokes.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\ell = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

por ser la superficie S arbitraria (pero estática), y factorizando del lado derecho de la igualdad, o aplicando la linealidad de la integral, entonces se tiene en ambos lados de la ecuación una integral de superficie, por lo que se deduce que las funciones a integrar son las mismas.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Nótese que las fuentes para H son las siguientes.

Corriente de conducción (Ley de Ohm en forma puntual):

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad \left[ \frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

Corriente de desplazamiento.

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \left[ \frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

**LEY DE FARADAY**

Un campo magnético que varía con el tiempo produce una fuerza electromotriz (fem) que puede producir una corriente en un circuito cerrado. Una fem no es otra cosa que un voltaje procedente de los conductores que se mueven en un campo magnético o campos magnéticos variables, entonces:

$$\text{fem} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{volts} \quad (1)$$

Esta ecuación implica una trayectoria cerrada (aunque no necesariamente una trayectoria conductora cerrada), por ejemplo, la trayectoria cerrada podría incluir un capacitor o podría ser una línea puramente imaginaria en el espacio. El flujo magnético es el flujo que cruza a través de cualquier superficie cuyo perímetro sea una trayectoria cerrada y  $d\Psi/dt$  es la variación del flujo con respecto al tiempo. Un valor diferente de cero de  $d\Psi/dt$  puede ser el resultado de cualquiera de las siguientes situaciones

- a) Un flujo que cambia con el tiempo circundando una trayectoria cerrada fija.
- b) El movimiento relativo entre un flujo estable y una trayectoria cerrada
- c) Una combinación de los dos casos anteriores.

El signo menos indica que la fem tiene una dirección tal que produce una corriente, cuyo flujo, si se suma al flujo original, reduciría la magnitud de la fem. Este enunciado que establece que el voltaje inducido actúa para producir un flujo opuesto es conocido como la ley de Lenz. Si la trayectoria cerrada es un filamento conductor enrollado de  $N$  vueltas, generalmente es suficientemente preciso considerar las  $N$  vueltas como coincidentes y establecer entonces.

$$fem = -N \frac{d\Psi}{dt}$$

$\Psi$  es el flujo que pasa a través de cualquiera de las  $N$  trayectorias coincidentes.

La fem es un escalar y se define como el voltaje a lo largo de una trayectoria cerrada específica, esto es:

$$V = fem = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Al sustituir  $\Psi$  en (1) por la integral de superficie de  $B$ , se tiene.

$$fem = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Los dedos de la mano derecha indican la dirección de la trayectoria cerrada y el pulgar la dirección  $ds$ . Una densidad de flujo  $B$  en la dirección de  $ds$  que aumenta con el tiempo produce un valor promedio de  $E$  que es opuesto a la dirección positiva en que se recorre la trayectoria cerrada.

### Ley de Lenz.

Expresa el principio de conservación de la energía, y dice que el voltaje inducido por un flujo de campo  $B$  variable tiene una polaridad tal que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da

lugar a un flujo que se opone al cambio del flujo del campo B. En un conductor que se mueve a través de un campo estacionario B, la polaridad de la Ley de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento.

### El Rotacional del Campo H.

Es una relación puntual que puede considerarse como una extensión de la ley de Ampère aplicada en un punto. Integrando en la periferia de un área A se tiene:

$$(\text{rot H})_N = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S_N}$$

expresando en forma de determinante:

$$\text{rot H} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

y en términos del operador vectorial se expresa como  $\text{rot H} = \nabla \times \mathbf{H}$ .

### Forma diferencial de la Ley de Faraday.

Partiendo de la forma integral

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

entonces, para una superficie fija

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

si S es arbitraria y por igualdad de integrales

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

### Condición necesaria pero no suficiente para que exista rotacional.

El campo debe de variar en magnitud a lo largo de una línea normal a la dirección del campo.



La divergencia del rotacional de una función vectorial es cero si la divergencia de la función vectorial es cero, entonces la función vectorial debe de ser el rotacional de alguna otra función vectorial.

El rotacional del gradiente de una función escalar es cero cuando cualquier función vectorial que sea el gradiente de una función escalar no tiene rotacional.

### Ley de Continuidad de Flujo Magnético.

#### a) Forma integral.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La ecuación expresa lo siguiente:

"las líneas de flujo magnético entran y salen en igual número a una superficie cerrada".

A diferencia de las líneas de campo  $\mathbf{D}$ , que terminan en cargas eléctricas, las del campo  $\mathbf{B}$  son continuas y forman curvas cerradas.

#### b) Forma diferencial aplicando el teorema de la divergencia.

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0$$

y como  $V$  es arbitrario:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esto indica que el flujo magnético que entra en un punto es igual al que sale de él, es decir, el flujo magnético es continuo y no existen fuentes ni sumideros, desde el punto de vista de la divergencia.

De las ecuaciones de Maxwell, se deduce la ecuación de la continuidad:

De la Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

De la Ley de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c$$

Ya que la divergencia del rotacional es cero, se concluye que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

o bien:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{V_r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{S_r} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

La ecuación de continuidad manifiesta que.

"El cambio en la densidad de carga es igual al flujo neto de corriente".

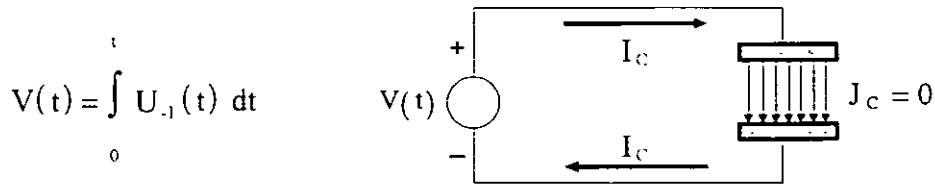
Es decir, la corriente que sale de un pequeño volumen por unidad de volumen es igual a la razón de cambio de la carga que decrece con el tiempo por unidad de volumen en cada punto.

Nota: Cuando se procede en forma rigurosa, primero se da la demostración matemática de los Teoremas de Gauss y Stokes, y luego su interpretación física.

Si bien  $-\partial \mathbf{B} / \partial t$  es una fuente para el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  es una fuente para el campo  $\mathbf{H}$ , las fuentes primarias de los campos electromagnéticos son  $\mathbf{J}$  y  $\rho$ . Para campos que varían con el tiempo es posible derivar todos los campos electromagnéticos que varían con el tiempo exclusivamente a partir del conocimiento de  $\mathbf{J}$ , ya que la ecuación de continuidad relaciona a  $\rho$  y  $\mathbf{J}$ .

### Corriente de Desplazamiento.

Al suministrar corriente alterna a las placas de un condensador, por el circuito del condensador pasará una corriente que creará un campo magnético de la misma manera que una corriente de conducción. Este fue uno de los grandes méritos de Maxwell de haber introducido este concepto además de la corriente de conducción. La corriente de desplazamiento permite mantener la noción de que la corriente es continua en las placas de un capacitor, la corriente de conducción no es continua a través de la separación de las placas debido a que no existe transporte de carga a través de ellas, esto implica que existe una corriente  $I_d = I$  en ese espacio del dieléctrico para que se satisfaga el principio de continuidad. Es imposible imaginarse la corriente continua sin un campo  $\mathbf{H}$ . La corriente de desplazamiento en el dieléctrico aparece como resultado del proceso de polarización, es decir, que al agregar un dieléctrico entre las placas de un condensador, en éste aparecerá una corriente de desplazamiento capaz de crear un campo magnético. Experimentalmente se demuestra que el campo  $\mathbf{B}$  también se genera en el caso que entre las placas exista el vacío, en este caso la corriente  $I_d$  la crean los fotones. Considere una fuente de voltaje que genera una rampa que se aplica a un capacitor de placas paralelas.

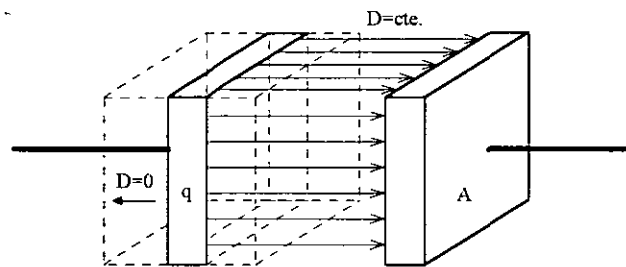


$I_c$  es la corriente de conducción y es nula en el capacitor, por lo que al aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff no se cumpliría.

La corriente de conducción es  $I_c = \frac{dq}{dt}$

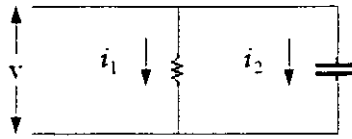
La corriente de desplazamiento es  $I_d = \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{q}{A} \right) A = I_c$

Esto es, en el aislante la corriente de conducción se continua con la corriente de desplazamiento, y así no se viola la Ley de Kirchhoff. Se obtuvo  $D$  aplicando la Ley de Gauss con una superficie que encierra a una de las placas del capacitor.



La Corriente de Desplazamiento es una de las grandes contribuciones de Maxwell a la Teoría Electromagnética. Ésta nos describe que la circulación de la intensidad de campo magnético  $H$  por un contorno arbitrario  $\ell$  es igual a la corriente total que pasa por cualquier superficie que se apoya en dicho contorno. La corriente de desplazamiento permite tener la noción de continuidad de la corriente, con lo cual la validez de ley de corrientes de Kirchhoff no se altera. El concepto de corriente de desplazamiento o densidad de corriente de desplazamiento fue introducido por James Clerk Maxwell para explicar la producción de campos magnéticos en el espacio vacío, en el que la corriente de conducción es cero y los campos magnéticos se deben exclusivamente a corrientes de desplazamiento.

**Ejemplo.** Considere la siguiente figura en la que se aplica una tensión a un resistor y a un capacitor en paralelo.



La naturaleza del flujo de corriente a través del resistor es diferente del flujo del capacitor. Si se tiene una tensión constante, se tendrá una corriente constante a través del resistor, y sólo se tendrá corriente a través del capacitor si se tiene una tensión que esté cambiando. Para los elementos de la figura se tiene.

$$\begin{array}{l} \text{corriente para el resistor} \quad i_1 = \frac{V}{R} \quad \text{corriente para el capacitor} \\ i_2 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \end{array}$$

La carga instantánea  $Q$  en el capacitor está dada por  $Q = CV$ .

La corriente a través del resistor es una *corriente de conducción*, mientras que la corriente "entre terminales" del capacitor puede llamarse *corriente de desplazamiento*. Aunque la corriente no fluye por el capacitor, el efecto hacia el exterior es como si lo hiciese, puesto que la misma corriente que sale por una de las placas es la misma que fluye hacia adentro por la otra placa.

Dentro de cada elemento el campo eléctrico  $E$  es igual a la tensión  $V$  entre terminales del elemento, dividido entre su longitud  $d$ , es decir,  $E = V/d$ . De acuerdo a la ley de Ohm en un punto

( $J = \sigma E$ ) la densidad de corriente  $J_1$  en el interior del resistor es igual al producto del campo eléctrico y la conductividad  $\sigma$  del medio dentro del elemento resistor, que también es igual a  $i_1$  dividida entre el área de la sección transversal  $A$ , esto es.

$$J_1 = E\sigma = \frac{i_1}{A} \quad \text{dimensionalmente} \quad \frac{\text{Amperes}}{\text{metros}^2} = \frac{\text{volts}}{\text{metro}} \times \frac{\text{mhos}}{\text{metro}}$$

Para el capacitor se tiene que su capacitancia es  $C = \epsilon A/d$ , donde  $A$  es el área de las placas y  $d$  es el espaciamiento entre ellas. Sustituyendo este valor para  $C$ , y  $V = Ed$  en  $i_2$  se tiene:

$$i_2 = \frac{\epsilon A d}{d} \frac{dE}{dt} = \epsilon A \frac{dE}{dt}$$

Al dividir entre el área  $A$  se tiene la relación en que la densidad de corriente  $J_2$ , dentro del capacitor, es igual a la permitividad del medio no conductor que llena el elemento capacitor multiplicada por la rapidez de cambio del campo eléctrico, esto es:

$$\frac{i_2}{A} = \epsilon \frac{dE}{dt} = J_2 \quad \text{dimensionalmente} \quad \frac{\text{Amperes}}{\text{metros}^2} = \frac{\text{farads}}{\text{metro}} \times \frac{\text{volt / metro}}{\text{segundo}}$$

Recordando que  $D = \epsilon E$  la expresión anterior queda  $J_2 = \frac{dD}{dt}$

Para este ejemplo, se tiene que  $J_1$  es una densidad de corriente de conducción  $J_{\text{cond}}$ , mientras que  $J_2$  es una densidad de corriente de desplazamiento  $J_{\text{desp}}$ ; como la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , el desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  y la intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  realmente son vectores espaciales con la misma dirección en medios isotrópicos, entonces  $J_1$  y  $J_2$  pueden expresarse en forma más general, como se indica a continuación.

$$\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{y} \quad \mathbf{J}_{\text{desp}} = \epsilon \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$$

Si en vez de tenerse dos elementos separados en paralelo, se tiene un solo elemento con resistencia y capacitancia, se tiene entonces un capacitor con un dieléctrico conductor, de modo que se presenta tanto corriente de conducción como corriente de desplazamiento; se tiene entonces que la corriente total está dada por:

$$\mathbf{J}_{\text{total}} = \mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{desp}}$$

## ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL.

Caso	Ley De Ampère	Ley De Faraday	Ley De Gauss	
	fmm, [A]	fem, [V]	Flujo eléctrico, [C]	Flujo magnético, [Wb]
General	$fmm = \oint H \cdot d\ell = \int_s \left( J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS = I_{total}$	$fem = \oint E \cdot d\ell = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Espacio Libre	$fmm = \oint H \cdot d\ell = \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = I_{desp}$	$fem = \oint E \cdot d\ell = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = 0$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Variación Armónica	$fmm = \oint H \cdot d\ell = (\sigma + j\omega\epsilon) \int_s E \cdot dS = I_{total}$	$fem = \oint E \cdot d\ell = -j\omega\mu \int_s H \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Estacionario	$fmm = \oint H \cdot d\ell = \int_s J \cdot dS = I_{cond}$	$V = \oint E \cdot d\ell = 0$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Estático	$U = \oint H \cdot d\ell = 0$	$V = \oint E \cdot d\ell = 0$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$

## ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL.

Caso	Ley De Ampère	Ley De Faraday	Ley De Gauss	
	Corriente Eléctrica / Área	Potencial Eléctrico / Área	Flujo Eléctrico / Volumen	Flujo Magnético / Volumen
General	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Espacio Libre	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Variación Armónica	$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Estacionario	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Estático	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### Ecuaciones de la Onda Electromagnética Transversal (T.E.M.) en Dieléctricos.

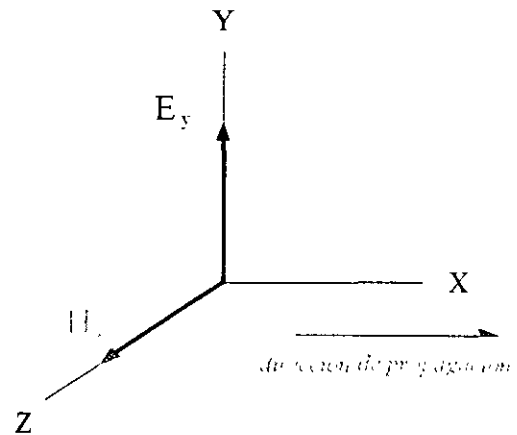
Para una onda plana uniforme E y H están en un mismo plano y tienen los mismos valores en todas partes del plano, por lo tanto los campos E y H son transversales a la dirección de propagación. Supóngase que se tiene una onda viajera en la dirección del eje X, el campo E tiene sólo componente  $E_y$  y H sólo tiene componente  $H_z$ , entonces la onda está polarizada en la dirección Y, y la densidad de corriente de conducción es  $J_c = 0$ , para un medio no conductor. Las ecuaciones de Maxwell que describen el comportamiento (movimiento) de las O.E.M. en el espacio libre pueden escribirse en términos de los campos E y H únicamente, de la siguiente manera.

$$\nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot H = 0$$



onda en el espacio libre

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell y del diagrama anterior se deducen las ecuaciones de onda para  $D = \epsilon E$  y  $B = \mu H$ , y considerando también  $E = 0\hat{i} + E_y\hat{j} + 0\hat{k}$  y  $H = 0\hat{i} + 0\hat{j} + H_z\hat{k}$ .

La 1ª Ecuación de D'Alembert o Ecuación de Onda del Campo H

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

La 2ª ecuación de D'Alembert o Ecuación de Onda del Campo E.

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$



Estas son la ecuaciones de D'Alembert para un medio donde  $\sigma = 0$  (el vacío), que relaciona la variación en el espacio y el tiempo de una magnitud escalar  $H_z$  ó  $E_y$ , también es la forma más simple de la ecuación de onda escalar.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad \text{ecuación de onda en } H_z$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \text{ecuación de onda en } E_y$$

$E_y$  representa la magnitud escalar de la intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección X.

$$\text{En general si } v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8 \left[ \frac{m}{s} \right]$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{\text{volt}}{m \cdot s^2} \right] = v^2 \left[ \frac{\text{volt}}{m \cdot m^2} \right] \quad \Leftrightarrow \quad v = \left[ \frac{m}{s} \right]$$

Al encontrar  $E_y$  para la ecuación anterior se puede considerar la solución siguiente:

$$E_y = \text{sen } \beta(x + kt)$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación o constante de fase, y además si se tiene que.

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde:  $\lambda$  es la longitud de onda,  $t$  es el tiempo,  $k$  es una constante por determinar,  $\beta$  es el número de radianes que recorre la onda por unidad de longitud, y si se sabe que:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

y recordando

$$V = C = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

entonces

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

y se llega a que el valor buscado de la constante sea  $k = \pm c = \pm v$  una solución más general es:

$$E_y = \text{sen } \beta(x + kt) + \text{sen } \beta(x - kt)$$

donde cada término separado es una solución para la ecuación de D'Alembert. Si consideramos la afirmación anterior:

$$E_y = \text{sen} (\beta x + \beta vt) + \text{sen} (\beta x - \beta vt)$$

sabemos que

$$V = f \lambda \text{ y } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

entonces

$$\beta V = \frac{2\pi}{\lambda} f \lambda = 2\pi f = \omega$$

de donde

$$E_y = \text{sen} (\beta x + \omega t) + \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

En esta última ecuación de onda se observa que el primer término representa una onda viajera en la dirección negativa del eje "x" y el segundo término representa una onda viajera en el sentido positivo del eje "x". Empleando esta ecuación se puede comprobar que  $\beta = \omega/c$  al obtener la segunda derivada parcial con respecto al tiempo y con respecto al desplazamiento, tal y como se muestra.

$$E(x, t) = E_y = \text{sen} (\beta x - \omega t) + \text{sen} (\beta x + \omega t)$$

donde se puede considerar sólo un término:

$$E_y = \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

derivando:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \omega^2 \text{sen} (\beta x - \omega t) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \beta^2 \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

ecuación (a) ecuación (b)

empleando la segunda ecuación de D'Alembert se iguala (a) y (b).

$$\omega^2 \text{sen} (\beta x - \omega t) = \frac{1}{\mu \epsilon} \beta^2 \text{sen} (\beta x - \omega t)$$

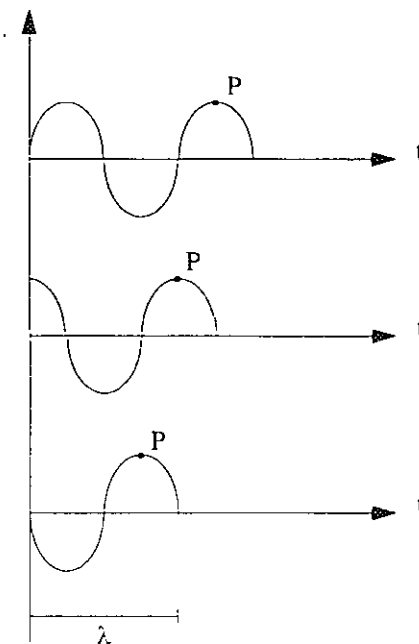
$$\omega^2 = \frac{\beta^2}{\mu \epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$$

Verificando el viaje de la onda, se gráfica  $E_y = \text{sen} (\beta (x + vt))$  manteniendo "x" constante y dando valores para "t", tal y como se muestra a continuación.

$$t = 0 \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f(0) \Rightarrow E_y = \text{sen}(\beta x)$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f\left(\frac{T}{4}\right) \Rightarrow E_y = \text{sen}\left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow E_y = \text{sen}(\beta x + \pi)$$



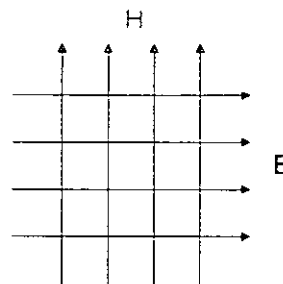
Conforme transcurre el tiempo, la perturbación correspondiente y el punto "P" se mueve a la izquierda, es decir, la onda  $E_y = \text{sen}(\beta(x + vt))$  se desplaza hacia la izquierda en la dirección negativa del eje "x". Por lo tanto, un punto "P" de fase constante se caracteriza por la siguiente condición:

$$\omega t + \beta x = \text{cte.} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t + \beta x) = 0 \Rightarrow \omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = -v$$

$dx/dt$  es la rapidez de cambio de la distancia respecto al tiempo o velocidad de un punto de fase constante, conocida como velocidad de fase o velocidad con que se mueven los planos de fase constante de la O.E.M.

*Frente de onda, viéndose de frente el eje de propagación.*

*Para una fase constante se tiene una O.E.M. de un plano de magnitud constante.*



Para  $E_y = \text{sen}(\beta(x - vt))$  se tiene que  $dx/dt = v$ , es decir, que la O.E.M. se desplaza en la dirección positiva del eje "x". Entonces en la constante  $(\beta \pm \omega t)$  el signo está asociado con el sentido en que viaja la onda. Otras formas equivalentes de la ecuación de onda son:

$$E_y = \text{sen}(\beta x \pm \omega t) \quad E_y = \cos(\beta x \pm \omega t) \quad E_y = \text{sen}(\omega t \pm \beta x) \quad E_y = \cos(\omega t \pm \beta x)$$

para una amplitud máxima  $E_0$  se tiene, por ejemplo:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t \pm \beta x) + E_0 \cos(\omega t \mp \beta x)$$

en forma exponencial:

$$E_y = E_0 e^{j(\omega t \pm \beta x)}$$

#### IMPEDANCIA INTRÍNSECA.

Es la razón de los campos fasoriales  $E$  y  $H$ , para una onda plana electromagnética transversal (TEM) en un medio no limitado.

Para un medio con  $\mu$  y  $\epsilon$  complejas:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\omega\mu'' + j\omega\mu'}{\sigma + j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')}} \quad [\Omega]$$

Para un medio conductor con  $\mu$  y  $\epsilon$  reales:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad [\Omega]$$

Para un medio no conductor con  $\mu$  y  $\epsilon$  reales:

$$Z_d = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega]$$

Para el espacio libre:

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \quad [\Omega]$$

Para un buen conductor ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ):

$$Z_d = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} \angle 45^\circ \quad [\Omega]$$

#### IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA.

Ésta es la razón del fasor de tensión o voltaje  $V$ , al fasor de corriente  $I$  en una línea de transmisión infinita de dos conductores, siendo la tensión  $V$  igual a la integral del campo eléctrico  $E$  a lo largo de una trayectoria o camino entre conductores, mientras que la corriente  $I$  es igual a la integral del campo  $H$  alrededor de uno de los conductores (Ley de Ampère) Para una celda de línea de transmisión la impedancia característica  $V/I$  es igual a la impedancia intrínseca  $E/H$ . La

impedancia característica de una línea de dos conductores también puede expresarse en términos de su resistencia serie  $R$ , de su inductancia serie  $L$ , su conductancia  $G$  en derivación y su capacitancia  $C$  en paralelo. Para una línea de dos conductores se tiene:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\int \mathbf{E} \cdot d\ell}{\int \mathbf{H} \cdot d\ell} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega]$$

#### IMPEDANCIA DE ONDA.

Es la razón de una componente de campo eléctrico  $E$  a una componente de campo magnético  $H$  en el mismo punto de la onda. Para una onda electromagnética transversal (TEM) la impedancia de onda es la misma que la impedancia intrínseca, pero para modos de orden superior, como en una guía de onda hueca de un solo conductor puede haber tantas impedancias de onda como componentes haya de campos eléctricos y campos magnéticos. Para un modo TE en una guía de onda rectangular con componentes transversales a la dirección "x" de propagación de la onda ( $E_y$  y  $H_z$ ), se tiene que la impedancia de onda transversal es:

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} \quad [\Omega]$$

En una guía de onda cilíndrica la impedancia de onda transversal es igual a:  $Z_{r\phi} = \frac{E_r}{H_\phi} \quad [\Omega]$

La impedancia de onda transversal de una guía de onda es una función de la impedancia intrínseca del medio que llena la guía y de las dimensiones de la misma guía. Conforme las dimensiones transversales se hacen muy grandes en comparación con la longitud de onda, la impedancia de onda transversal de la guía tiende a ser la impedancia intrínseca del medio.

**NOTA:** Mientras que la impedancia característica es básicamente una cantidad de circuito ( $V/I$ ), la impedancia intrínseca y la impedancia de onda son cantidades de campo o cantidades de onda que incluyen las razones de campos eléctricos a magnéticos.

#### O.E.M. EN MEDIOS CONDUCTORES.

Los medios conductores poseen una elevada conductividad  $\sigma$ , esto implica que en las ecuaciones de Maxwell el término  $J_c = \sigma E$  no se anula, es decir, hay grandes corrientes de conducción. Entonces, la onda en el conductor va a sufrir un amortiguamiento (la ecuación de onda presenta un término de amortiguamiento) implicando que en la ecuación de onda existe un término de primer orden. Un buen conductor, llamado simplemente conductor, es un medio

con pérdidas ( $\sigma$  es finita) ya que la presencia del campo  $E$  en el conductor provoca una pérdida de energía por efecto Joule.

Ecuación de Onda en un Medio Conductor:

$$\nabla^2 E = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

similarmente se encuentra:

$$\nabla^2 H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Estas son las ecuaciones de onda para un medio conductor y son conocidas como ecuaciones de Helmholtz. Éstas se pueden expresar en forma fasorial, lo que conduce a que los campos pueden ser expresados en una magnitud por un factor exponencial complejo en función del tiempo o la frecuencia, además, sabemos que la primera derivada parcial de cualquier cantidad de campo con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar el fasor correspondiente por el factor  $j\omega$ , y la segunda derivada parcial con respecto al tiempo equivale a multiplicar el fasor correspondiente por el factor  $(j\omega)^2$ . Entonces:

$$E(x, t) = \dot{E} e^{j\omega t} \quad H(x, t) = \dot{H} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x, t) = j\omega \dot{E} e^{j\omega t} \quad \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) = j\omega \dot{H} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x, t) = -\omega^2 \dot{E} e^{j\omega t} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(x, t) = -\omega^2 \dot{H} e^{j\omega t}$$

al sustituir en las ecuaciones de Helmholtz:

$$\nabla^2 \dot{E} e^{j\omega t} = j\omega\mu\sigma \dot{E} e^{j\omega t} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{E} e^{j\omega t} \quad \nabla^2 \dot{H} e^{j\omega t} = j\omega\mu\sigma \dot{H} e^{j\omega t} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{H} e^{j\omega t}$$

$$\nabla^2 \dot{E} = j\omega\mu\sigma \dot{E} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = j\omega\mu\sigma \dot{H} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{H}$$

$$\nabla^2 \dot{E} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon) \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon) \dot{H}$$

sabemos que:

$$\gamma^2 = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon)$$

entonces:

$$\nabla^2 \dot{E} = \gamma^2 \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = \gamma^2 \dot{H}$$

Por otra parte, al desarrollar la siguiente expresión:

$$\gamma^2 = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon) \equiv (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2$$

se obtienen los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \quad 2j\alpha\beta = j\omega\mu\sigma \Leftrightarrow 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$

haciendo simultáneas estas ecuaciones:

$$\alpha^2 - \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}\right)^2 + \omega^2\mu\varepsilon = 0$$

$$\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\beta}\right)^2 - \beta^2 + \omega^2\mu\varepsilon = 0$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

El desarrollo de estas ecuaciones se deja al lector como ejercicio, para lo cual se recomienda consultar el tema de raíces de números complejos en cualquier texto de Álgebra Superior.

Para medios muy buenos conductores se tiene que  $\sigma/\omega\varepsilon \gg 100$ , esto implica que  $(\sigma/\omega\varepsilon)^2 \gg 1$ . Por lo tanto, las ecuaciones anteriores se simplifican y quedan de la siguiente forma:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Las unidades de  $\alpha$  y  $\beta$  son  $[m^{-1}]$ , sin embargo, los términos artificiales y dimensionales de neper y radian son empleados para hacer hincapié en su significado de atenuación y fase, respectivamente.

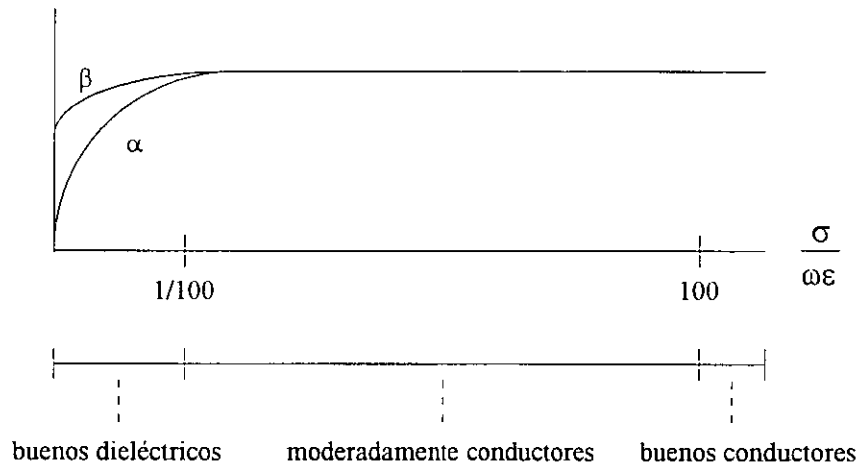
#### CLASIFICACIÓN ARBITRARIA DE LOS MEDIOS.

Con base a la relación entre la densidad de corriente de desplazamiento y densidad de corriente de conducción, se hace la siguiente clasificación.

Dieléctrico  $0 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < \frac{1}{100} \Rightarrow \sigma \ll \omega\epsilon \Rightarrow J_d > J_c$

Cuasi Conductor  $\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100 \Rightarrow \sigma \approx \omega\epsilon \Rightarrow J_d \approx J_c$

Conductor  $100 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \Rightarrow \sigma \gg \omega\epsilon \Rightarrow J_d < J_c$





## RESUMEN DE CONSTANTES EN LOS MEDIOS.

Para todos los medios se tienen constantes primarias:  $(\mu, \epsilon, \sigma)$  y constantes secundarias  $(\alpha, \beta, \eta)$ .

Para medios no magnéticos:

$$\mu_r = 1 \text{ y } \epsilon_r \neq 1$$

Para el espacio libre (vacío):

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = \text{ y } \sigma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377$$

Dieléctrico perfecto:

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = \text{ y } \sigma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dieléctricos disipativos:

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = \text{ y } \sigma \neq 0$$

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ 1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right]$$

Medios conductores:

$$\mu_r \neq 1, \epsilon_r \neq 1 \text{ y } \sigma \neq 0$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}} \right]$$

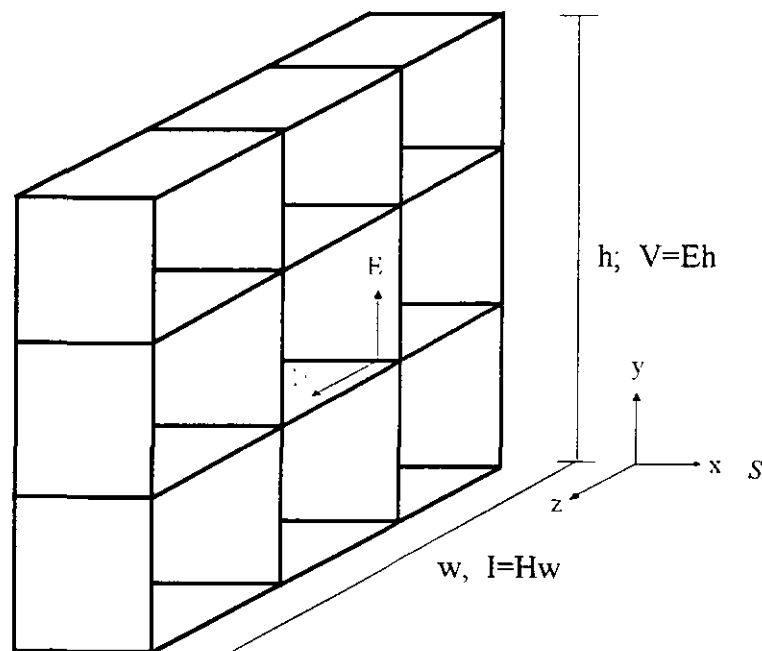
La frecuencia es un factor importante para determinar si un medio actúa como dieléctrico o como conductor. Las propiedades de los dieléctricos se dan en general por la tangente de pérdida que es un factor de disipación de energía.

## POTENCIA Y VECTOR DE POYNTING.

Considérese en el espacio una región de celdas de campo, de altura  $h$  y ancho  $w$ , y una onda plana que viaja en la dirección  $+x$  con componentes  $E_y$  y  $H_z$ . Entonces, por medio de un análisis dimensional se encuentra la tensión total y la corriente total para ésta región. Si  $h$  y  $w$  tienen unidades de longitud (m),  $E$  tiene unidades de potencial por unidad de longitud (V/m) y  $H$  tiene unidades de corriente por unidad de longitud (A/m), entonces, la potencia entregada es  $P = VI = (Eh) (Hw) = EH(hw) = EHA$  ( $A$  es el área de este arreglo de celdas). De esto se obtiene la densidad superficial de potencia llamada vector de Poynting, y da el flujo de potencia a través de cualquier superficie en una región ocupada por una O.E.M. que se obtiene integrando en la superficie la cantidad instantánea  $S = E \times H$ .

$$S = \frac{P}{A} = E H \left[ \frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right]$$

El flujo de potencia es perpendicular a  $E$  y  $H$ , lo que implica la posibilidad de demostrar que  $S = E \times H$ , como se hará más adelante.



Con el propósito de encontrar la potencia de una onda plana uniforme, fue necesario desarrollar un teorema de potencia para el campo electromagnético conocido como teorema de Poynting. Éste fue postulado originalmente por el físico inglés John H. Poynting.

aplicando el teorema de la divergencia se tiene:

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{vol} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{vol} \left( \frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) dv$$

Suponiendo que no existen fuentes dentro del volumen, entonces, la primera integral de la derecha es la potencia óhmica total (e instantánea) disipada dentro del volumen. Si hay fuentes dentro del volumen, entonces, el resultado de la integral sobre el volumen de la fuente será positivo si la potencia está siendo suministrada a la fuente, pero será negativa si la potencia es suministrada por la fuente.

La integral en el segundo término de la derecha es la energía total almacenada en los campos eléctrico y magnético, y las derivadas parciales con respecto al tiempo provocan que este término sea la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía (velocidad de energía) almacenada dentro de ese volumen, o sea, la potencia instantánea que hará que la energía almacenada dentro de este volumen aumente.

Por lo tanto, la suma de las dos integrales de la derecha debe ser la potencia total que fluye hacia el volumen, en consecuencia, la potencia total que fluye fuera del volumen es:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

La integral es sobre la superficie cerrada que rodea el volumen.

El producto  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$  es conocido como el vector de Poynting:

$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

que se interpreta como una densidad de potencia instantánea medida en watts por metro cuadrado ( $\text{W}/\text{m}^2$ ). Esta interpretación está sujeta a las mismas consideraciones filosóficas como en el caso de  $\mathbf{W} / \text{m}^2$  ó  $(1/2) \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = (1/2) \mu \mathbf{H}^2$  como densidades de energía.

En un dieléctrico perfecto ( $\sigma=0, \mathbf{J}_c=0$ ), estos campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  están dados por:

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta x) \qquad H_z = \frac{E_{y0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta x)$$

y por tanto:

$$\mathcal{P}_x = \frac{E_{y0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x)$$

Para encontrar la densidad de potencia promedio en el tiempo, se integra sobre un ciclo y se divide entre el periodo  $T=1/f$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{x \text{ prom}} &= f \int_0^{1/f} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x) dt \\ \mathcal{P}_{x \text{ prom}} &= \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \int_0^{1/f} [1 - \cos(2\omega t - 2\beta x)] dt \\ \mathcal{P}_{x \text{ prom}} &= \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \left[ t - \frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t - 2\beta x) \right] \Bigg|_0^{1/f} \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \left[ \frac{w}{m^2} \right]$$

Si se usan valores de raíz cuadrática media (R.M.S.) en lugar de amplitudes pico, podría no aparecer el término  $\frac{1}{2}$ . Finalmente, la potencia promedio que fluye a través de cualquier área  $S$  normal al eje  $x$  es:

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} S \quad [w]$$

En el caso de un dieléctrico disipativo  $E_y$  y  $H_z$  no están en fase, se tiene:

$$E_y = E_{y0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x)$$

si,

$$\eta = \eta_m \angle \theta_\eta$$

entonces, se puede escribir la intensidad de campo magnético como:

$$H_z = \frac{E_{y0}}{\eta_m} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \theta_\eta)$$

entonces:

$$\mathcal{P}_x = E_y H_z = \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \cos(\omega t - \beta x - \theta_\eta)$$

usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B)$$

se tiene que:

$$\mathcal{P}_x = E_y H_z = \frac{E_y^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \left[ \cos(2\omega t - 2\beta x - \theta_\eta) \cos(\theta_\eta) \right]$$

Se encuentra que la densidad de potencia tiene sólo una componente de segunda armónica y una componente de CD. Puesto que el primer término tiene un valor promedio cero sobre un número entero de periodos, el valor promedio en tiempo del vector de Poynting es:

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_y^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \cos(\theta_\eta)$$

Obsérvese que la densidad de potencia se atenúa con un factor  $e^{-2\alpha x}$ , mientras que  $E_y$  y  $H_z$  decaen con un factor  $e^{-\alpha x}$ .

La densidad de energía eléctrica y la densidad de energía magnética en un punto, son respectivamente:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad W_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

para un medio sin pérdidas:

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

se comprueba que  $W_e \equiv W_m$ :

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon (\eta H)^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mu}{\epsilon} H^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 = W_m$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{E}{\eta} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{\epsilon}{\mu} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = W_e$$

$$W_e \equiv W_m$$

Se concluye que la densidad de energía magnética y la densidad de energía eléctrica en una onda viajera plana son iguales, esto implica que la densidad de energía total es:

$$W_{\text{total}} = W_e + W_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \epsilon E^2 = \mu H^2$$

Considerando un medio dieléctrico perfecto ( $\sigma = 0$ ,  $J = 0$ ) se tiene:

$$\left| \oint_S \mathcal{P} \cdot dS \right| = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right] dv$$

como las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales se tiene que:

$$W_e + W_m = 2W_e = 2W_m = W$$

entonces, dividiendo el vector de Poynting entre la densidad total de energía se obtiene la velocidad de energía:

$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \left[ \begin{array}{c} \text{watt} \\ \frac{\text{m}^2}{\text{joule}} \\ \text{m}^3 \end{array} \right] = \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

en un medio sin pérdidas:

$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \frac{EH}{\mu H^2} = \frac{1}{\mu} \frac{E}{H} = \frac{1}{\mu} \eta = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

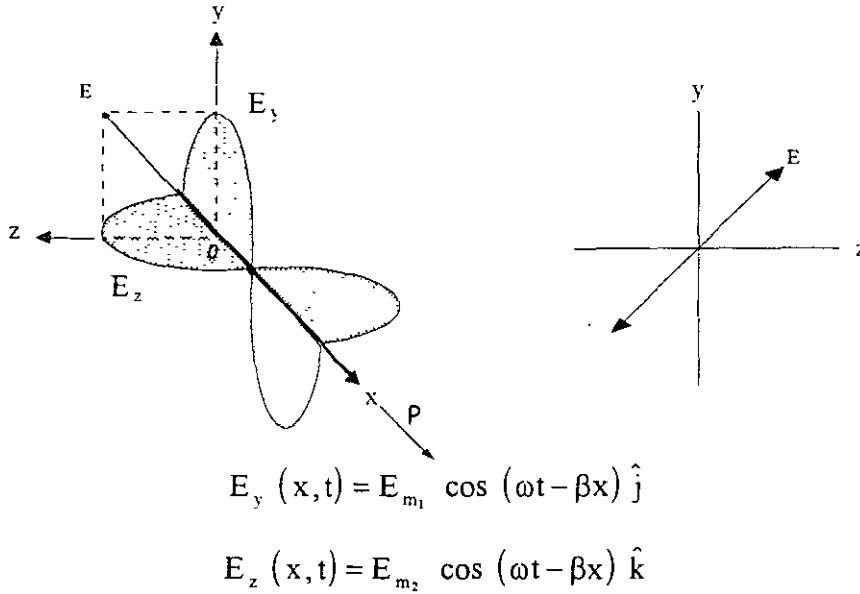
$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \frac{EH}{\epsilon E^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{H}{E} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

de esto se concluye que la velocidad de energía es igual a la velocidad de fase.

## POLARIZACIÓN.

La polarización de una onda electromagnética es el lugar geométrico que describe la punta del vector de campo eléctrico (E) al ser proyectado en un plano de fase constante. En otras palabras, es el comportamiento del vector intensidad de campo eléctrico E, con respecto al tiempo en un plano de fase constante y fijo del espacio.

El campo eléctrico es considerado como la perturbación óptica y reside en lo que se conoce como plano de vibración, éste plano de vibración contiene tanto al vector de campo E como al vector de propagación P (vector de Poynting en la dirección de movimiento).



En el plano YZ el campo E se ve como una recta con pendiente "m" en el origen, entonces:

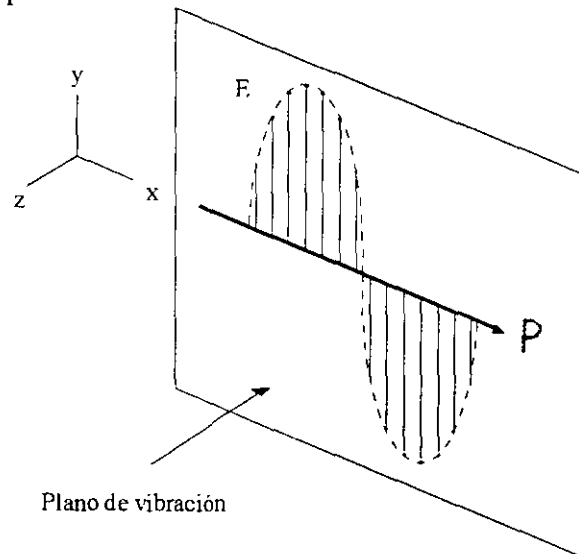
$$m = \frac{E_y}{E_z} = \frac{E_{m_1} \cos(\omega t - \beta x)}{E_{m_2} \cos(\omega t - \beta x)}$$

de donde:

$$E_y = \frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z = m E_z$$

**POLARIZACIÓN LINEAL.**

Para una onda plana polarizada linealmente las vibraciones del vector E son paralelas entre sí en todos los puntos de la onda. En cualquier punto el vector E y la dirección de propagación forman un plano llamado plano de vibración.



En general, dos perturbaciones ópticas o de campo  $E$  ortogonales entre sí de la forma:

$$E_y(x, t) = E_{m_1} \cos(\omega t + \beta x + \xi) \hat{j} \quad E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{k}$$

donde  $\xi$  es la diferencia de fase relativa entre las ondas, ambas viajando en la dirección  $x$ , entonces, la perturbación resultante es simplemente:

$$E(x, t) = E_y(x, t) + E_z(x, t)$$

Si  $\xi$  es cero o un entero múltiplo de  $\pm 2\pi$ , se dice que las ondas están en fase, y las ecuaciones anteriores quedan:

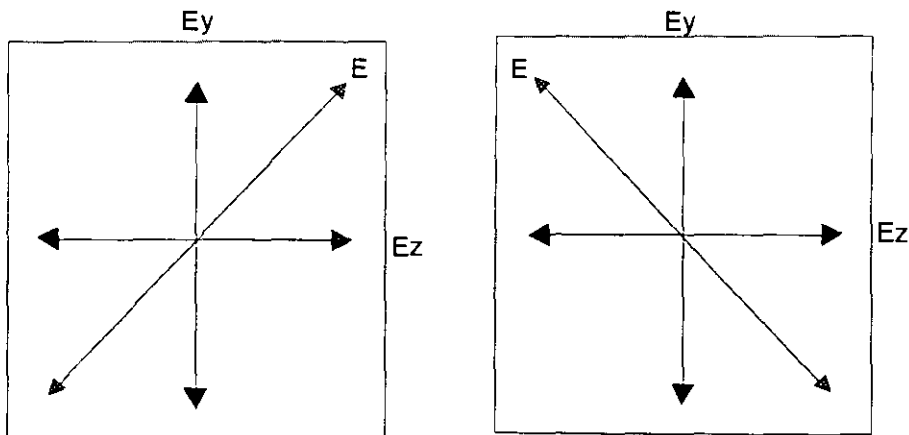
$$E = (E_{m_1} \hat{j} + E_{m_2} \hat{k}) \cos(\omega t + \beta x)$$

Ésta es una onda linealmente polarizada. Este proceso se puede llevar igualmente a cabo a la inversa, es decir, podemos resolver cualquier onda linealmente polarizada en dos componentes ortogonales.

Supóngase ahora que  $\xi$  es un entero impar, múltiplo de  $\pm\pi$ ; se dice que las dos ondas están  $180^\circ$  fuera de fase y

$$E = (-E_{m_1} \hat{j} + E_{m_2} \hat{k}) \cos(\omega t + \beta x)$$

Esta onda está de nuevo linealmente polarizada pero el plano de vibración ha sido rotado  $45^\circ$ . Nótese que la onda puede descomponerse en componentes que no sean ortogonales.





**POLARIZACIÓN CIRCULAR.**

Otro caso especial de particular interés aparece cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud, es decir:

$$E_{m_1} = E_{m_2} = E_0$$

y además, su diferencia de fase relativa es:

$$\xi = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$$

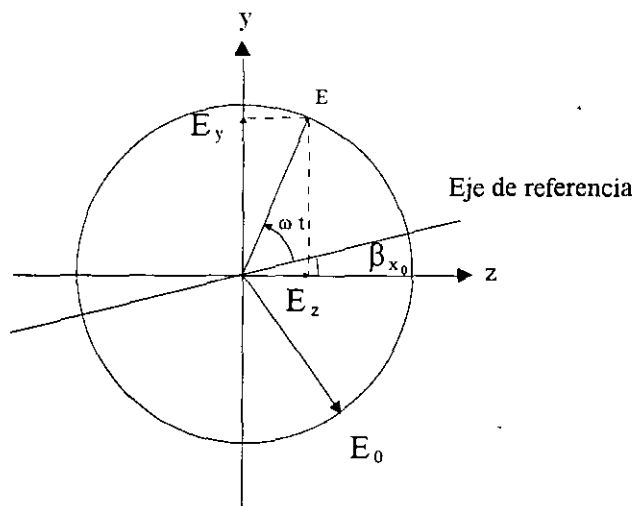
donde  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

por lo tanto:  $E_y(x,t) = E_{m_1} \sin(\omega t + \beta x) \hat{j}$        $E_z(x,t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{k}$

la onda queda:  $E = E_0 [ \sin(\omega t + \beta x) \hat{j} + \cos(\omega t + \beta x) \hat{k} ]$

Obsérvese que en este caso la amplitud escalar de "E", la cual es igual a  $E_0$ , es una constante. Pero la dirección de "E" es variable con el tiempo y no está restringida como antes a un solo plano.

La figura siguiente muestra lo que está sucediendo en algún punto arbitrario  $X_0$  en el eje. En  $t=0$  "E" cae a lo largo del eje de referencia en la figura, y así:



$$E_y = \hat{j} E_0 \sin(\beta x_0) \quad E_z = \hat{k} E_0 \cos(\beta x_0)$$

Un tiempo  $t = ((2\pi - \beta x_0) / \omega)$  más tarde,  $E_y = 0$ ,  $E_z = E_0 \hat{k}$  y "E" están a lo largo del eje "z". El vector campo eléctrico resultante E está rotando en la dirección opuesta de las manecillas del

reloj con una frecuencia  $\omega$  visto por un observador hacia quien la onda se está moviendo (es decir, viendo hacia la fuente). Tal onda tiene polarización circular izquierda y se hace referencia a ella simplemente como luz circular izquierda. El vector  $E$  hace una rotación completa cuando la onda avanza una longitud de onda. En comparación, si  $\xi = -\pi/2, -5\pi/2, -9\pi/2, \text{ etc.}$ , es decir,  $\xi = (-\pi/2) + (2m\pi)$  donde  $m = 0, \pm 2, \pm 3, \dots$ , entonces

$$E = E_0 \left[ -\text{sen} (\omega t + \beta x) \hat{j} + \text{cos} (\omega t + \beta x) \hat{k} \right]$$

La amplitud no se ve afectada, pero ahora  $E$  gira en el sentido de las manecillas del reloj y la onda tiene polarización circular derecha.

Una onda linealmente polarizada se puede sintetizar con dos ondas con polarización circular opuesta de igual amplitud. En particular si usamos las ondas circulares descritas anteriormente, se tiene:

$$E = 2 E_0 \hat{k} \cos (\omega t + \beta x_0)$$

el cual es un vector de amplitud constante  $2 E_0 \hat{k}$ , donde el vector  $\hat{k}$  indica que se encuentra en un solo plano (en este caso en el "YZ"), y por lo tanto es linealmente polarizado.

#### POLARIZACIÓN ELÍPTICA.

En cuanto a la descripción matemática se refiere, tanto una onda electromagnética polarizada linealmente como una onda electromagnética polarizada circularmente se pueden considerar como casos especiales de una onda electromagnética polarizada elípticamente. Entonces, el vector campo eléctrico resultante rotará y cambiará su magnitud. En tales casos el extremo  $E$  trazará una elipse en un plano fijo perpendicular a " $\hat{i}$ ", cuando la onda avanza. Por medio de una expresión matemática para la curva trazada por la punta  $E$ . Recordando que:

$$E_y (x, t) = E_{m_1} \cos (\omega t + \beta x + \xi) \hat{j} \quad E_z (x, t) = E_{m_2} \cos (\omega t + \beta x) \hat{k}$$

La ecuación de polarización que se busca no debe depender de la posición ni del tiempo, es decir, se debe eliminar la dependencia de  $(\omega t + \beta x)$ .

La ecuación general de polarización de una O.E.M.:

$$\left( \frac{E_y}{E_{m_1}} \right)^2 + \left( \frac{E_z}{E_{m_2}} \right)^2 - 2 \frac{E_y E_z}{E_{m_1} E_{m_2}} \cos (\xi) = \text{sen}^2 (\xi)$$

La última expresión es la ecuación de una elipse que hace un ángulo  $\alpha$  con el sistema coordinado

$(E_y, E_z)$ , tal que:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{m_1} E_{m_2} \cos(\xi)}{E_{m_2}^2 - E_{m_1}^2}$$

Si los ejes de la elipse se alinean con los ejes coordinados, es decir,  $\alpha=0$  o equivalentemente  $\xi = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$ , entonces se tiene:

$$\left(\frac{E_y}{E_{m_1}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{m_2}}\right)^2 = 1$$

si  $E_{m_1} = E_{m_2} = E_0$ , entonces:

$$E_y^2 + E_z^2 = 1$$

que de acuerdo a resultados anteriores, es un círculo. Si  $\xi$  es un múltiplo par de  $\pi$ , la ecuación que resulta es:

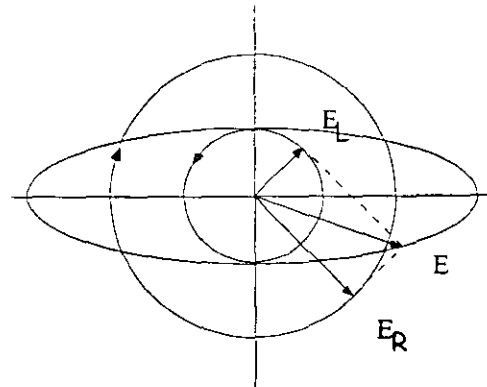
$$E_y = \frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z$$

similarmente, para múltiplos impares:

$$E_y = -\frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z$$

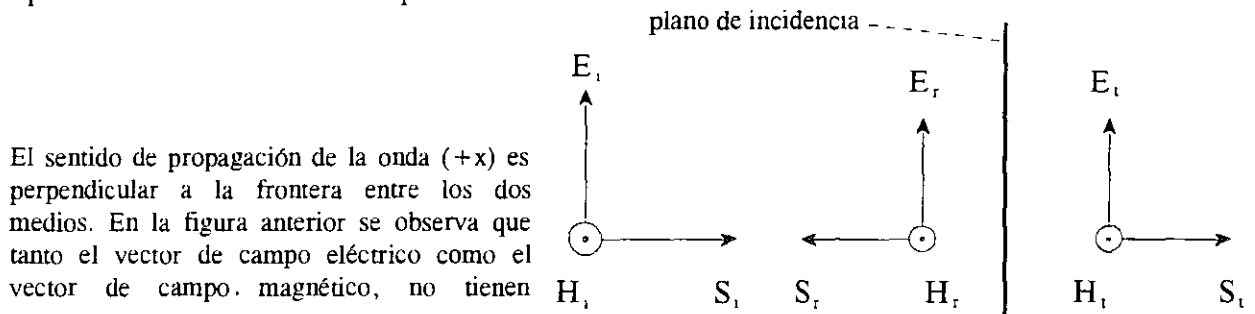
Ambas son líneas rectas, es decir, se tiene polarización lineal en este punto.

En algunos textos de óptica se hace referencia a una onda de luz particular en términos de su estado específico de polarización. Se dice que la luz lineal o polarizada en un plano tiene un estado P, mientras que la luz circular derecha o izquierda está en un estado R o L (según corresponda), y para la condición de polarización elíptica se dice que está en un estado E. Se ha demostrado que un estado P se puede representar como una superposición de estados R y L, y lo mismo se cumple para un estado E. En este caso se ve en la figura como las amplitudes de las dos ondas circulares son diferentes.



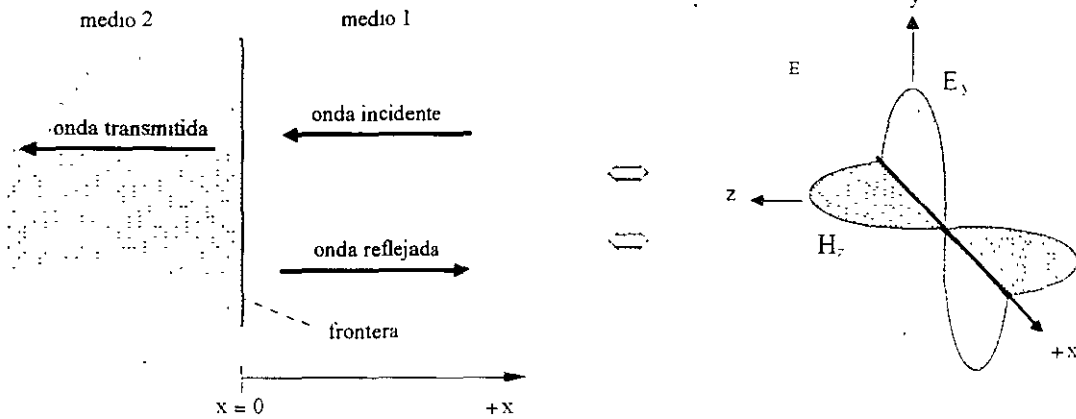
INCIDENCIA NORMAL.

Una O.E.M. presenta incidencia normal cuando choca de un medio 1 a un medio 2 en forma perpendicular a la frontera o superficie de incidencia.



ONDA ESTACIONARIA.

Al pasar una onda de un medio a otro, puede o no presentarse un fenómeno de reflexión en la frontera de los dos medios, es decir, parte la onda viajera incidente es absorbida hacia el nuevo medio y parte es rechazada. Hasta el momento se ha realizado el análisis de una sola onda viajera, ya sea en sentido positivo o negativo. Para hacer el estudio de la onda estacionaria, se debe considerar el caso de dos ondas que viajan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos. Supóngase el caso de dos ondas son de la misma frecuencia y de forma senoidal; este par de condiciones se satisface si una de las ondas es la reflexión de la otra, es decir, permanecen en el mismo medio.



De la figura anterior se puede establecer fácilmente la ecuación de la onda incidente ( $E_{y0}$ ) y la de la onda reflejada ( $E_{y1}$ ):

$$E_{y0}(x, t) = E_0 e^{j(\omega t + \beta x)} \qquad E_{y1}(x, t) = E_1 e^{j(\omega t - \beta x + \delta)}$$

$E_0$  y  $E_1$  son las amplitudes de la onda incidente y de la onda reflejada, respectivamente;  $\delta$  es el adelanto de fase en el tiempo de ( $E_{y1}$ ) respecto a ( $E_{y0}$ ) en  $x = 0$ , es decir,  $\delta$  es el corrimiento de fase en el punto de reflexión. El campo eléctrico total está dado por:

$$E_y = E_{y0} + E_{y1}$$

El valor instantáneo se obtiene considerando la parte real o la parte imaginaria, por ejemplo, considerando la parte imaginaria:

$$E_y = E_0 \text{sen}(\omega t + \beta x) + E_1 \text{sen}(\omega t - \beta x + \delta)$$

Si  $\delta = 0$  ó  $180^\circ$  y recordando la identidad trigonométrica  $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a) \cos(b) \pm \cos(a) \text{sen}(b)$  la ecuación anterior puede desarrollarse de la siguiente forma:

$$E_y = E_0 \text{sen}(\omega t) \cos(\beta x) + E_0 \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x) + E_1 \text{sen}(\omega t) \cos(\beta x) - E_1 \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x)$$

$$E_y = (E_0 + E_1) \text{sen}(\omega t) \cos(\beta x) + (E_0 - E_1) \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x)$$

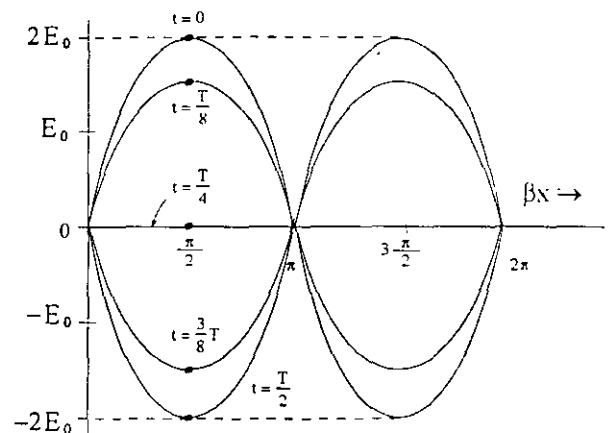
Si el medio 2 es un conductor perfecto, la onda reflejada es igual en magnitud a la onda incidente. En  $x = 0$  se considera la relación de frontera para la componente tangencial de campo E, entonces  $E_y = 0$  lo que implica que  $E_1 = -E_0$  cuando  $\delta = 180^\circ$ . Finalmente se tiene que:

$$E_y = 2E_0 \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x)$$

Esta ecuación es la representación matemática de una onda estacionaria en el espacio. Obsérvese cuidadosamente que los valores de  $E_y$  en un instante particular son una función coseno de "x", mientras que los valores instantáneos en un punto particular son función cosenoidal de "t", el valor pico de la onda es la suma de los valores pico de la onda reflejada y de la onda incidente. Una onda estacionaria de este tipo se le denomina onda estacionaria pura y se caracteriza porque  $|E_1| = |E_0|$ .

En la figura se muestran las variaciones de  $E_y$  en el espacio y en el tiempo para una onda estacionaria pura. Obsérvese que un punto de fase constante como el punto P, no se mueve en la dirección de "x", permanece en una posición fija conforme transcurre el tiempo.

¿Qué sucede cuando la onda reflejada es menor que la onda incidente?



Por ejemplo, si la onda reflejada fuera la mitad de la onda incidente, entonces  $E_1 = -0.5E_0$ . Al evaluar  $E_y$  para cuatro instantes del tiempo se obtienen las curvas de la siguiente figura que muestran los valores de  $E_y$  en función de  $\beta x$ .

Los valores pico en función de "x" en un intervalo de tiempo mayor a un ciclo corresponden a la envolvente, ésta permanece estacionaria, pero el interés está en el punto "P" de fase constante. Obsérvese que la onda instantánea total viaja hacia la izquierda y que la velocidad con la que se mueve el punto "P" no es constante.

La velocidad promedio del punto de fase constante es la misma que para la onda viajera pura, pero su magnitud instantánea varía.

Entonces se tienen dos ondas  $E_y$  que viajen en sentidos opuestos en la dirección de "x", la que viaja en sentido positivo tiene la mitad de la amplitud de la que viaja a la izquierda, estas dos ondas se refuerzan mutuamente en algunos puntos y en otros se anulan entre sí, la onda resultante viaja en el sentido positivo de "x".

En cualquier posición  $\beta x$  es valor máximo del campo en algún momento durante el ciclo es igual al valor de la ordenada de la envolvente. Ahora se determina el valor de la envolvente de la onda estacionaria.

Partiendo  $E_y$ :

$$E_y = (E_0 + E_1) \sin(\omega t) \cos(\beta x) + (E_0 - E_1) \cos(\omega t) \sin(\beta x)$$

se hace:

$$A = (E_0 + E_1) \cos(\beta x) \quad B = (E_0 - E_1) \sin(\beta x)$$

que conduce a:

$$E_y = \sin(\omega t + \beta x) \sqrt{A^2 + B^2}$$

sustituyendo A y B:

$$E_y = \sin(\omega t + \beta x) \sqrt{(E_0 + E_1)^2 \cos^2(\beta x) + (E_0 - E_1)^2 \sin^2(\beta x)}$$

Cuando  $\sin(\omega t + \beta x) = 1$  se alcanza el valor máximo de  $E_y$  en alguna posición  $\beta x$  dentro de un intervalo de al menos un periodo; entonces:

$$E_{y \text{ má x}} = \sqrt{(E_0 + E_1)^2 \cos^2(\beta x) + (E_0 - E_1)^2 \sin^2(\beta x)}$$

La forma de la envolvente de la onda estacionaria no es de mucho interés, pero la razón de los valores mínimo al máximo de ésta sí, ya que proporciona más información.

A este cociente se le conoce como *relación o razón de onda estacionaria* (ROE) en inglés *standing wave ratio* (SWR). La tensión o potencial a cualquier distancia "x" será proporcional al campo, en ese caso la ROE se puede manejar como *razón de onda estacionaria de tensión* (ROET) cuyas siglas en inglés son VSWR. El valor máximo de la envolvente corresponde a  $(E_0 + E_1)$  y el mínimo a  $(E_0 - E_1)$ , esta información permite determinar la porción de onda reflejada y transmitida, también permite determinar las condiciones del punto de reflexión.

$$\text{ROET } \text{ ó } \text{ VSWR} = \frac{E_{\text{má x}}}{E_{\text{mín}}} = \frac{E_0 + E_1}{E_0 - E_1}$$

De la ecuación es claro que si no existe onda reflejada ( $E_1 = 0$ ) entonces la relación de onda estacionaria será igual a la unidad ( $\text{VSWR} = 1$ ), pero si  $E_1 = E_0$  entonces la razón de onda

estacionaria será infinita ( $VSWR \rightarrow \infty$ ). por lo tanto, todos los valores intermedios de la ROET se encuentran en el intervalo de uno a infinito  $[1, \infty)$ .

En la frontera o punto de reflexión ( $x = 0$ ) y en el instante  $t = 0$  el coeficiente de reflexión está dado por la razón de la onda reflejada a la onda incidente:

$$\rho = \frac{E_{y1}}{E_{y0}} = \frac{E_1 e^{j\delta}}{E_0} = \frac{E_1 \angle \delta}{E_0} = \rho \angle \delta$$

La magnitud de  $\rho$  va de 0 a 1 con ángulos de fase entre  $0^\circ$  y  $\pm 180^\circ$ .

Con estas consideraciones se puede expresar el VSWR en función de  $\rho$ :

$$VSWR = \frac{1 + \frac{E_1}{E_0}}{1 - \frac{E_1}{E_0}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

También se puede tener a  $\rho$  expresado en términos del VSWR:

$$|\rho| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1}$$

Todo lo que se ha explicado del VSWR no sólo es aplicable a ondas sino también a ondas en líneas de transmisión, sólo siendo necesario reemplazar el campo E por la tensión de la línea de transmisión V.

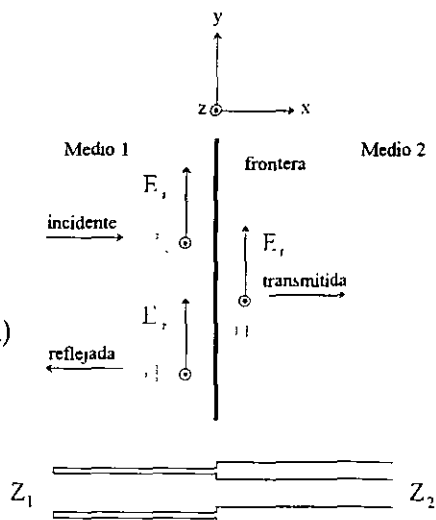
### IMPEDANCIA DE ENTRADA ENTRE MEDIOS.

La figura muestra una onda plana que incide perpendicularmente en la frontera de dos medios y una línea de transmisión análoga.

Por la continuidad de las componentes tangenciales de campo en la frontera, se tiene:

$$E_i + E_r = E_t \qquad H_i + H_r = H_t \qquad (a)$$

Por medio de la impedancia intrínseca se pueden relacionar los campos eléctrico y magnético:





$$Z_1 = \frac{E_i}{H_i} \quad -Z_1 = \frac{E_r}{H_r} \quad Z_2 = \frac{E_t}{H_t} \quad (b)$$

La impedancia de la onda reflejada se toma como negativa por viajar en sentido negativo de las "x":

$$H_t = \frac{E_t}{Z_2} = \frac{E_i}{Z_1} - \frac{E_r}{Z_1} \quad E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i - \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (c)$$

Multiplicando la expresión para el campo eléctrico de la ecuación (a) por  $Z_2/Z_1$ , se tiene:

$$\frac{Z_2}{Z_1} (E_i + E_r) = \frac{Z_2}{Z_1} E_t \quad \Rightarrow \quad \frac{Z_2}{Z_1} E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (d)$$

Sumando (c) y (d):

$$E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i - \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad \left] + \left[ \frac{Z_2}{Z_1} E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r \right] = \quad (e)$$

$$E_t \left( 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_i \quad (f)$$

$$E_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_i = TE_i \quad (g)$$

"T" es el coeficiente de transmisión, esto se verifica fácilmente:

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (h)$$

Restando (c) de (d), se tiene:

$$E_t \left( \frac{Z_2}{Z_1} - 1 \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (i)$$

Si se sustituye  $E_t$  de la ecuación (g) en la ecuación (i), y despejando  $E_r$ , se tiene:

$$E_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} E_i = RE_i \quad (j)$$

"R" es el coeficiente de reflexión, y se verifica fácilmente:

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (k)$$

De lo anterior se obtiene fácilmente que  $T = R + 1$ , esto se deja al lector como ejercicio.

**Caso 1.** Suponiendo que el medio 1 es el aire y el medio 2 es un conductor, de modo que  $Z_1 \gg Z_2$ , de la ecuación (g) se tiene la relación aproximada:

$$E_t \approx 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_i$$

Pero de la ecuación (b) se tiene que:

$$H_t Z_2 \approx 2 \frac{Z_2}{Z_1} H_i Z_1 \quad \Rightarrow \quad H_t \approx 2 H_i$$

Se concluye entonces que cuando una onda plana en el aire que incide perpendicularmente en un medio conductor, se obtiene en la frontera un campo magnético casi del doble en intensidad. También se encuentra que  $H_r \approx H_i$ , de manera que a la izquierda de la frontera existe una onda estacionaria casi pura.

**Caso 2.** Suponiendo que el medio 1 es el conductor y el medio 2 es el aire, de modo que ahora  $Z_1 \ll Z_2$ , de la ecuación (g) se tiene la relación aproximada:

$$E_t \approx 2 E_i$$

De esto se concluye que para una onda plana que deja un conductor, el campo eléctrico casi se duplica en la frontera. Se obtiene que  $E_r \approx E_i$ , de manera que existe una onda estacionaria casi pura ( $ROET = \infty$ ) en el medio 1). No obstante, debido a la atenuación de las ondas en el medio 1 la ROET disminuye rápidamente al alejarse de la frontera (hacia la izquierda).

**Caso 3.** Suponiendo  $Z_1 \gg Z_2$  y considerando el medio 1 el aire, y el medio 2 es un conductor perfecto ( $Z_2 = 0$ ), en consecuencia de la expresión (k)  $R = -1$  y por la expresión  $T = R + 1$  el coeficiente de transmisión es cero  $T = 0$ . Por lo tanto, la onda es totalmente reflejada y no se transmite campo al segundo medio, por lo que el campo en la frontera se duplica exactamente al alejarse de la frontera ( $E_r = -E_i$  y  $H_r = H_i$ ), esto es análogo a una línea de transmisión en corto circuito.

**Caso 4.** Suponiendo  $Z_1 \ll Z_2$  y considerando que  $Z_2$  es infinita, de la ecuación (k)  $R = +1$  y por la expresión  $T = R + 1$  el coeficiente de transmisión es cero  $T = 2$ . Por lo tanto, hay reflexión total de la onda, pero  $E_r = +E_i$ , esto indica que en la frontera la intensidad de campo eléctrico se duplica exactamente, esto es análogo a una línea de transmisión en circuito abierto.

**Caso 5.** Suponiendo que los dos medios son dieléctricos ferromagnéticos sin pérdidas ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ), de las ecuaciones (k) y (h) se deduce, respectivamente:

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} - 1}{\sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2} + 1} \qquad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}}$$

**Caso 6.** Si  $Z_1 = Z_2$ , entonces  $R = 0$  y  $T = 1$  lo que indica que la onda se propaga en el medio 2 sin reflejarse, esto es semejante a una línea de transmisión continua con una impedancia característica uniforme.

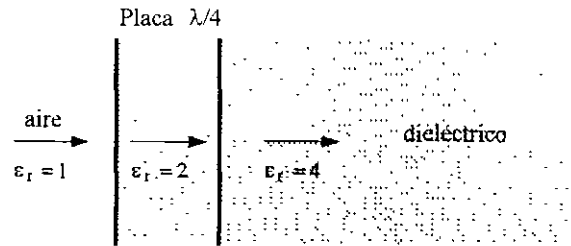
**Placa  $\lambda/4$ .** Es una capa que elimina reflejos en lentes y prismas en cámaras, binoculares, telescopios y otros dispositivos ópticos para mejorar su eficiencia.

La impedancia intrínseca de la placa está dad por:

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2}$$

$Z_0$  es la impedancia intrínseca del aire.

$Z_2$  es la impedancia intrínseca del dieléctrico.



En el presente caso:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2} = 266 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{376.7}{\sqrt{4}} = 188$$

$$\epsilon_r = \frac{Z_0}{Z_2} = 2$$

## BIBLIOGRAFIA

1. EDMINISTER, J.A. *Electromagnetismo*. Shaum's Mc Graw-Hill
2. BALANIS, Constantine A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. Ed John Wiley & Sons
3. CHENG, David K. *Field and Wave electromagnetics*. Ed. Addison-Wesley Publishing Company
4. CHIPMAN R. *Lineas de Transmisión*. Shaum's McGraw-Hill.
5. ESCOBAR S., L. *Apuntes de Teoria Electromagnética*. 1996 (inédito)
6. FIÓDOROV, N.N. *Fundamentos de Electrodinámica*. Ed. Mir Moscú, 1982.
7. HAYT, William H. *Engineering Electromagnetics. International Student Edition*. Ed Mc Graw Hill Novaro
8. JOHNSON C. *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*. Ed. John Wiley & Sons U.S.A 1988.
9. KRAUSS, John D. *Electromagnetics*. Ed. Mc. Graw Hill, México 1998
10. MARSHALL, DUBROFF & SKITEK *Electromagnetismo, Conceptos y Aplicaciones*. Ed. Prentice-Hall.
11. NIKOLSKI, V.V. *Electrodinámica y Propagación de Ondas de Radio*. Ed. Mir Moscú, 1985.
12. REITZ, John R.; MILFORD, F.J. y ROBERT W. CHRISTY, R.W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
13. REYES GUERRA, Bernardo. *El fenómeno Electromagnético. Introducción al Estudio de la Transmisión de Información*. Ed. Noriega Editores
14. SADIKU M. *Elementos de Electromagnetismo*. Editorial CECSA, 2ª. Ed., México 1998
15. SERWAY, R.A. *Física*. Ed. Mc. Graw Hill
16. SOSÁ PEDROZA, Jorge y ORTEGA LARA, Lizbeth *Lineas de Transmisión y Guías de Onda*. Ed. Limusa.
17. WYLIE, C.R. *Matemáticas Superiores para Ingeniería*. Mc Graw-Hill. México 1994.



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA  
"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN TELECOMUNICACIONES**

## **MODULO I: TELECOMUNICACIONES VÍA MICROONDAS**

**TEMA**

**LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y GUÍAS DE ONDA**

**EXPOSITOR: M. EN I. LARRY HIPÓLITO ESCOBAR SALGUERO  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO 2001**

# Líneas de Transmisión

En muchas formas las líneas de transmisión son el enlace entre el análisis de campo y la teoría básica de circuitos, de esta manera representan una excelente herramienta para el análisis de redes de microondas. El fenómeno de propagación de onda en las líneas de transmisión puede ser aproximado ya sea de la extensión de la teoría de circuitos o de una especialización de las ecuaciones de Maxwell.

La diferencia principal entre la teoría básica de circuitos y la teoría de líneas de transmisión es el tamaño eléctrico. El análisis de circuitos asume que las dimensiones físicas de la red son mucho más pequeñas que la longitud de onda eléctrica, mientras que las líneas de transmisión pueden ser una fracción considerable de una longitud de onda o muchas longitudes de onda, en tamaño. Por lo que una línea de transmisión debe ser considerada como una red de parámetros distribuidos, donde los voltajes y corrientes pueden variar en magnitud y fase a lo largo de la longitud.

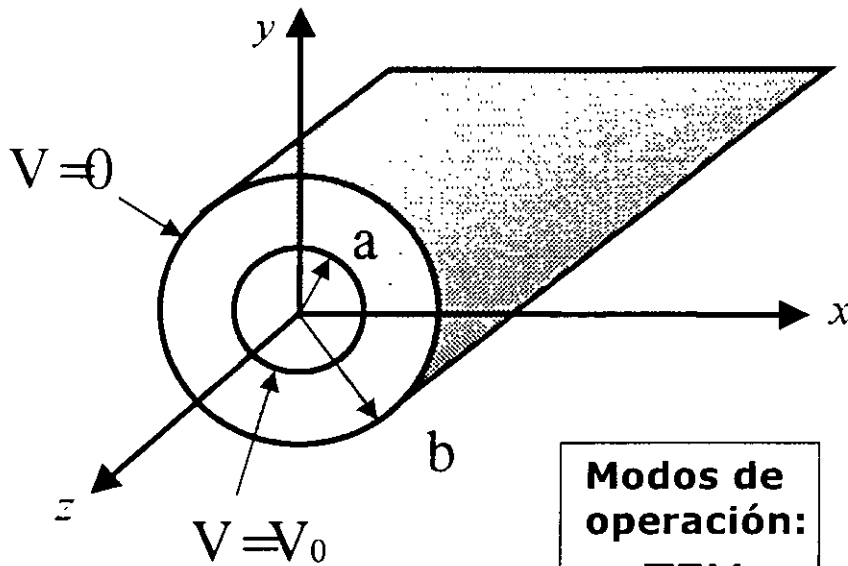
Una línea de transmisión a menudo es representada esquemáticamente como una línea de dos alambres, ya que las líneas de transmisión (para onda de propagación TEM) tienen al menos dos conductores. Un pedazo de línea de longitud  $\Delta z$  figura 1a, puede ser modelada como un circuito de parámetros concentrados como se muestra en la figura 1b.

La inductancia serie **L** representa la autoinductancia total de los dos conductores, y la capacitancia en derivación **C** es debida a la proximidad de los dos conductores. La resistencia serie **R** representa la resistencia debida a la conductividad finita de los conductores, y la conductancia en derivación **G** es debida a las pérdidas del dielectrico del material entre los dos conductores. Por lo que tanto **R** como **G** representan pérdidas.

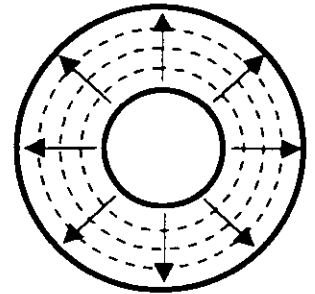
Una línea de longitud finita puede ser vista como una sección en cascada de circuitos como los mostrados en la figura 1b.

# Tipos de Líneas de Transmisión

## Línea Coaxial



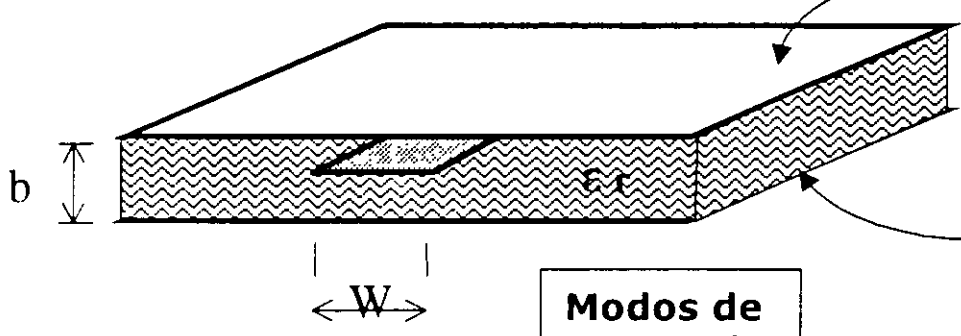
Distribución de campos eléctrico y magnético



**Modos de operación:**  
 TEM  
 TE  
 TM

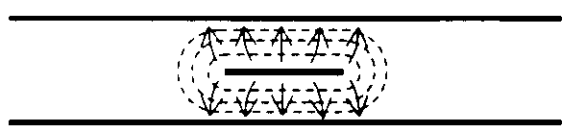
E  $\longrightarrow$   
 H  $\cdots\cdots\cdots$

## Línea Cinta



Planos de Tierra

Distribución de campos eléctrico y magnético



**Modos de operación:**  
 TEM  
 TE  
 TM

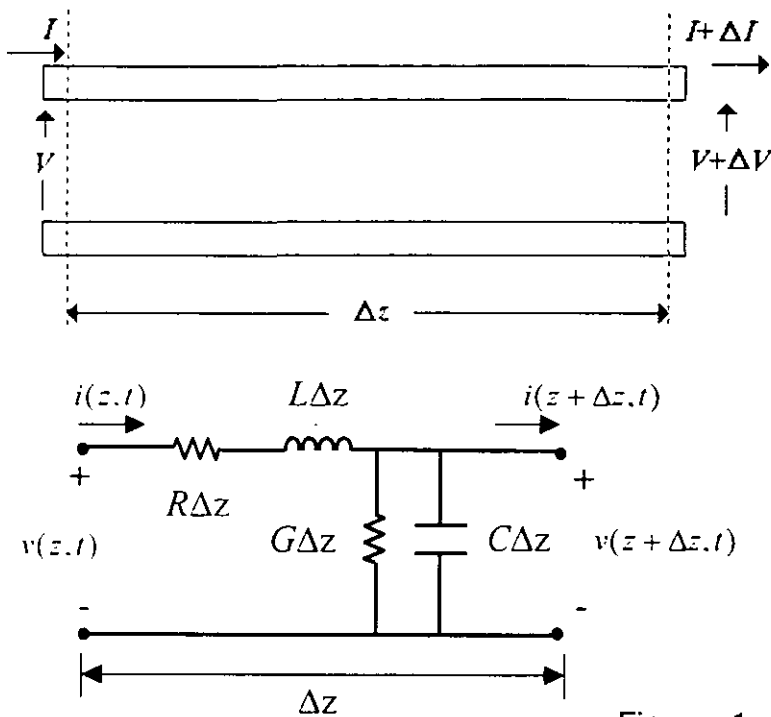
$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{b}{W_e + 0.441b}$$

Donde:

$$\frac{W_e}{b} = \frac{W}{b} \begin{cases} 0 & \text{para } \frac{W}{b} \geq 0.35 \\ (0.35 - W/b)^2 & \text{para } \frac{W}{b} < 0.35 \end{cases}$$

E  $\longrightarrow$   
 H  $\cdots\cdots\cdots$

# Líneas de Transmisión



**R**, Resistencia en serie por unidad de longitud, para ambos conductores, en  $\Omega/m$

**L**, Inductancia en serie por unidad de longitud, para ambos conductores, en  $H/m$

**G**, Conductancia en derivación por unidad de longitud en  $S/m$

**C**, Capacitancia en derivación por unidad de longitud en  $F/m$

Figura 1

Aplicando leyes de Kirchoff,

$$v(z,t) - R \Delta z i(z,t) - L \Delta z \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - v(z + \Delta z, t) = 0 \quad (1)$$

$$i(z,t) - G \Delta z v(z + \Delta z, t) - C \Delta z \frac{\partial v(z + \Delta z, t)}{\partial t} - i(z + \Delta z, t) = 0$$

Dividiendo ambas ecuaciones por  $\Delta z$  y tomando el límite cuando  $\Delta z$  tiende a 0, se tiene:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -R i(z,t) - L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -G v(z,t) - C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t}$$

Para la condición sinusoidal de estado estable:

$$\frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) \quad (3a)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) \quad (3b)$$



# Propagación de onda

Tomando la derivada de la ecuación (3a) y sustituyendo en la ecuación (3b) se tiene:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L) \frac{dI(z)}{dz}$$

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = -(R + j\omega L) [-(G + j\omega C) V(z)] \quad 4(a)$$

De manera similar para la ecuación (3b) se tiene:

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} = (G + j\omega C)(R + j\omega L) I(z) \quad 4(b)$$

Arreglando las ecuaciones 4(a) y 4(b) para  $V(z)$  e  $I(z)$ , tenemos:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} - \gamma^2 V(z) = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - \gamma^2 I(z) = 0 \quad (5b)$$

**Donde  $\gamma$  es la constante compleja de propagación y está dada por:**

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (6)$$

# Propagación de onda

La constante de atenuación  $\alpha$  está dada en nepers por unidad de longitud y la constante de fase  $\beta$  en radianes por unidad de longitud.

Para la solución de las ecuaciones (5), se propone la ecuación característica

$$P^2 - \gamma^2 P^0 = 0, \Rightarrow P_{1,2} = \pm \gamma$$

Por lo que las soluciones generales a las ecuaciones anteriores son:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \quad (7a)$$

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{\gamma z} \quad (7b)$$

donde los términos  $e^{-\gamma z}$  y  $e^{\gamma z}$  representan la propagación de la ondas en la dirección  $+z$  y  $-z$ , respectivamente.

Convirtiendo al dominio del tiempo, por ejemplo la forma de onda del voltaje puede ser expresado como:

$$v(z, t) = \text{Re} \left( V(z) e^{j\omega t} \right)$$

Osea

$$v(z, t) = V_0^+ \cos(\omega t - \beta z + \phi^+) e^{-\alpha z} + V_0^- \cos(\omega t + \beta z + \phi^-) e^{\alpha z}$$

Donde  $\phi^{\pm}$  Es el ángulo de fase del voltaje complejo  $V_0^{\pm}$

# Impedancia característica

Aplicando las ecuaciones (3a) a la ecuación de voltaje (7a), obtenemos la corriente de la línea, la cual está dada por:

$$I(z) = \frac{\gamma}{R + j\omega L} \left[ V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z} \right] \quad (8)$$

De donde

$$\frac{V^+(z)}{I^+(z)} = \frac{V_0^+(z) e^{-\gamma z}}{\frac{\gamma}{R + j\omega L} V_0^+ e^{-\gamma z}}$$

Finalmente la impedancia característica de la línea de transmisión está dada por:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = - \frac{V_0^-}{I_0^-}$$

O bien:

$$Z_0 = \frac{R + j\omega L}{\gamma} = \frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \quad (9)$$

Rescribiendo la ecuación de la corriente:

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{\gamma z} \quad (10)$$

La longitud de onda está dada por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

y la velocidad de fase es:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

# La línea de Transmisión sin Pérdidas

Haciendo  $R = G = 0$  se tiene:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC}$$

por lo que la constante de fase es:

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

y la constante de atenuación:

$$\alpha = 0$$

La impedancia característica se reduce a:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Las soluciones generales para el voltaje y la corriente de una línea sin pérdidas pueden escribirse como:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

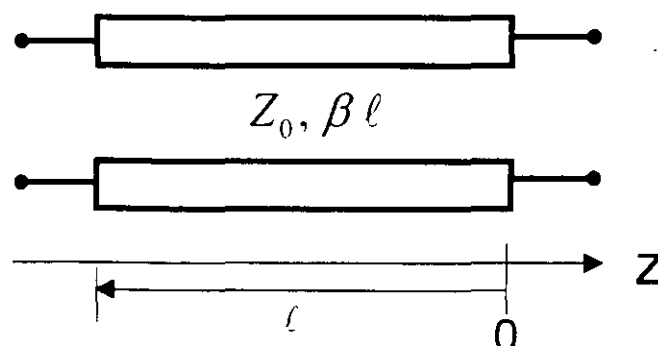
La longitud de onda está dada por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$

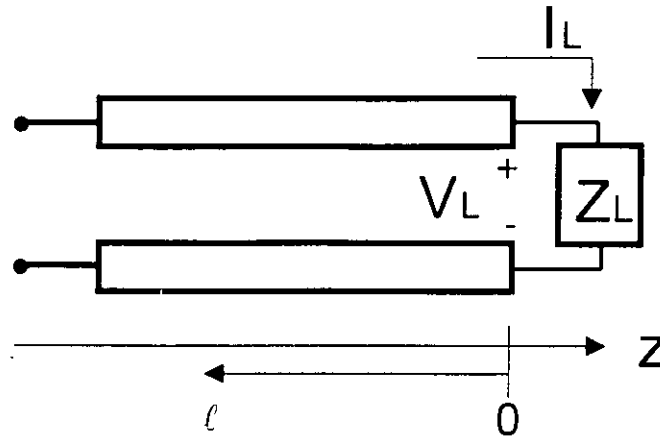
y la velocidad de fase por:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Esquemáticamente podemos representar la línea sin pérdidas como:



# Línea de Transmisión sin pérdidas con carga



En el punto  $z=0$  debe de cumplirse que:

$$Z_L = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_0^+ + V_0^-}{V_0^+ - V_0^-} Z_0$$

Resolviendo para  $V_0^-$  se tiene:

$$V_0^- = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} V_0^+$$

## Coefficiente de Reflexión $\Gamma$

La relación entre las ondas de voltaje reflejada e incidente es definida como el coeficiente de reflexión  $\Gamma$ .

$$\Gamma = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

En el caso general:

$$\Gamma = \Gamma e^{j\theta}$$

por lo que:

$$0 \leq \Gamma \leq 1$$

para obtener la condición de acoplamiento:

$$Z_L = Z_0$$

$$\Gamma = 0$$

# Ondas Estacionarias

Reescribiendo el voltaje en términos de  $\Gamma$ :

$$V(z) = V_0^+ [e^{-j\beta z} + \Gamma e^{j\beta z}]$$

Obteniendo su valor absoluto:

$$|V(z)| = V_0^+ |1 + \Gamma e^{j2\beta z}|$$

Sustituyendo la expresión de  $\Gamma$  en términos de su magnitud y fase:

$$|V(z)| = V_0^+ |1 + \Gamma e^{(\theta - j2\beta z)}|$$

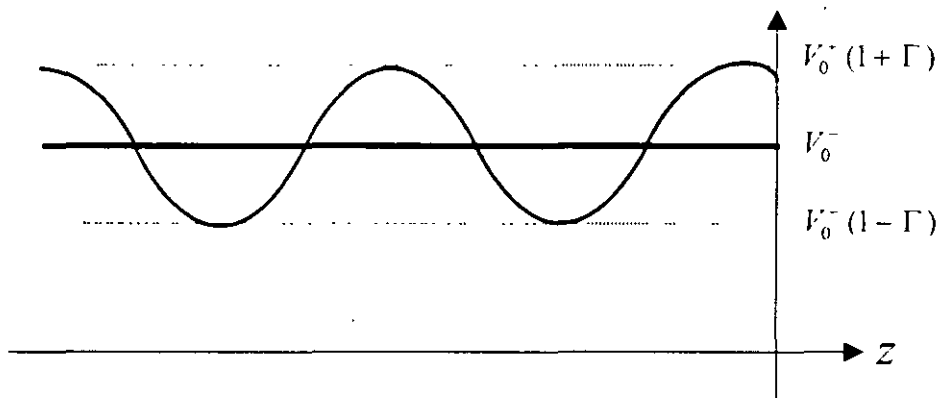
Donde  $l = -z$  es la distancia medida desde la carga en  $z=0$

Los valores máximo y mínimo ocurren cuando los términos de fase son, respectivamente:

$$e^{(\theta - 2\beta l)} = 1 \quad V_{\max} = V_0^+ (1 + |\Gamma|)$$

y

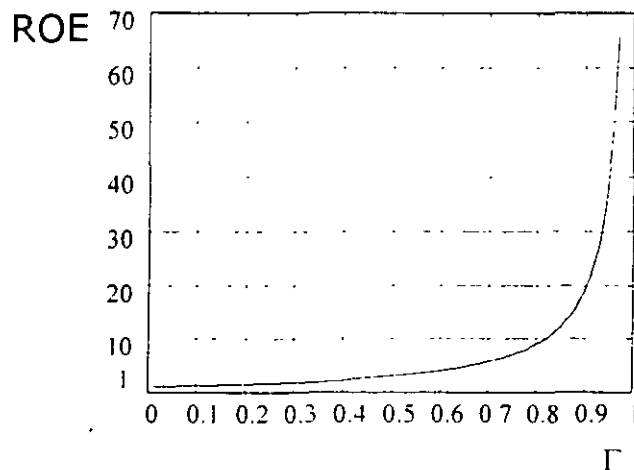
$$e^{(\theta - 2\beta l)} = -1 \quad V_{\min} = V_0^+ (1 - |\Gamma|)$$



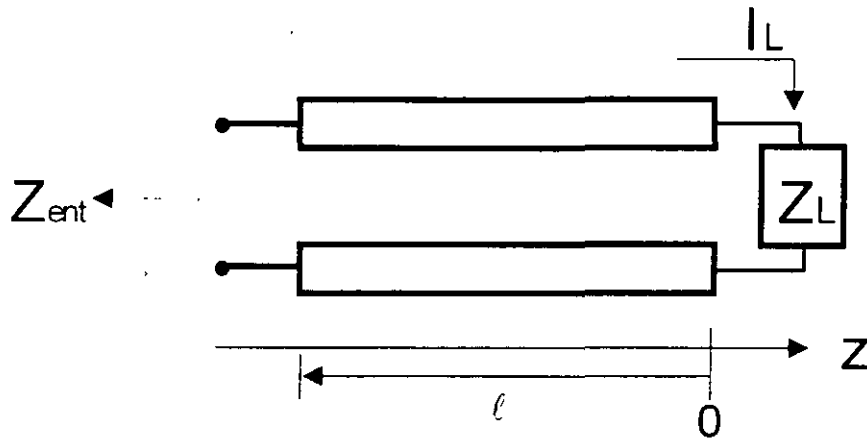
## Relación de Onda Estacionaria (ROE)

$$ROE = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$$1 \leq ROE < \infty$$



# Impedancia de entrada en una Línea de Transmisión



Puede encontrarse el valor de  $\Gamma$  en cualquier punto de la línea:

$$\Gamma(\ell) = \frac{V_0^- e^{-j\beta\ell}}{V_0^+ e^{j\beta\ell}} = \Gamma(0) e^{-2j\beta\ell}$$

y el valor de la impedancia de entrada:

$$Z_{ent} = \frac{V(-\ell)}{I(-\ell)} = \frac{1 + \Gamma e^{-2j\beta\ell}}{1 - \Gamma e^{-2j\beta\ell}} Z_0$$

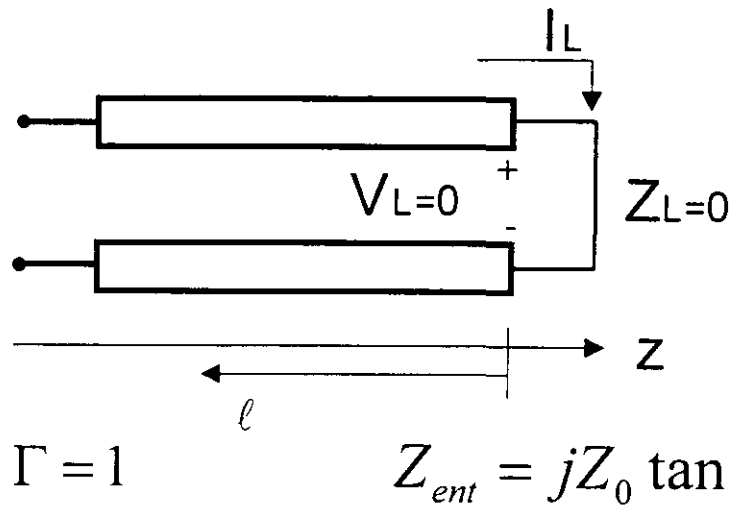
Otra forma muy útil de la ecuación de impedancia de entrada es:

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta \ell}$$

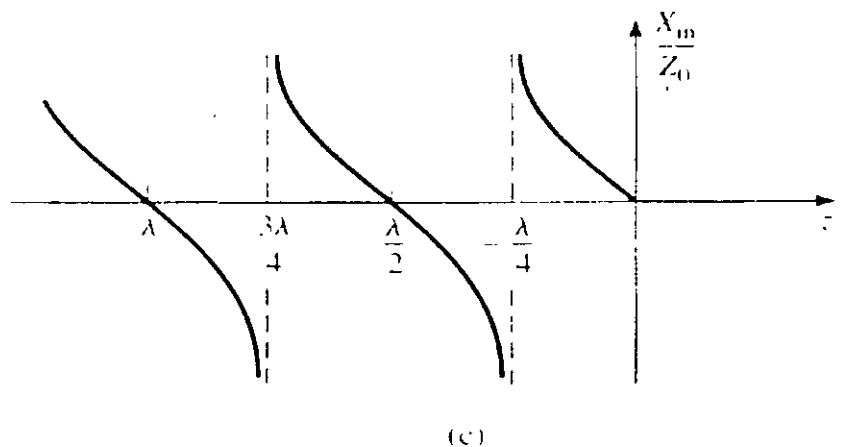
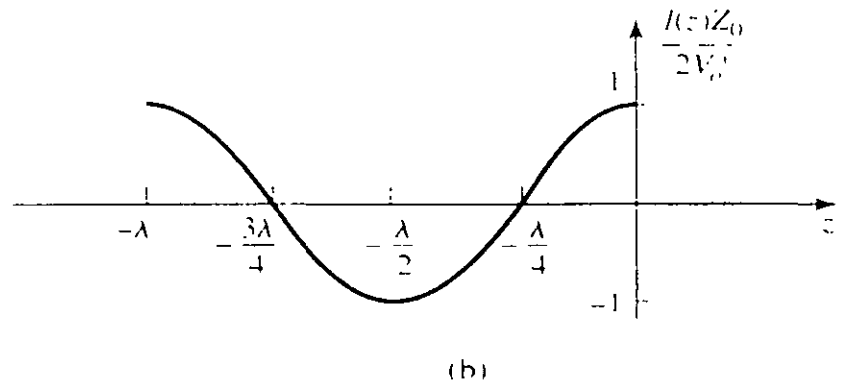
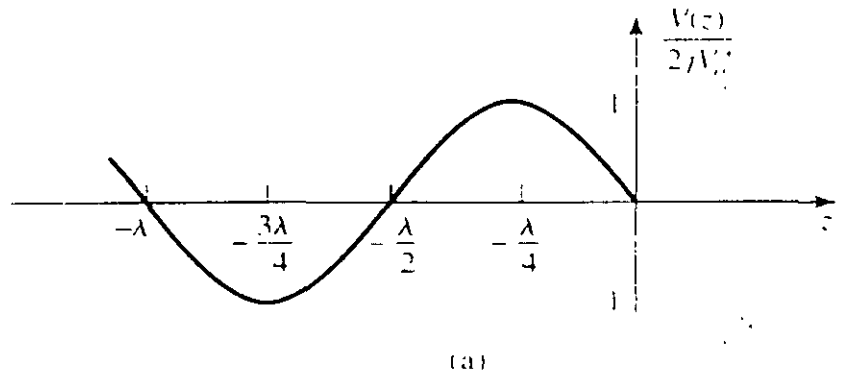
## Casos especiales de terminación

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_L = 0 \\ Z_L = \infty \end{array} \right.$$

# Terminación en Corto Circuito



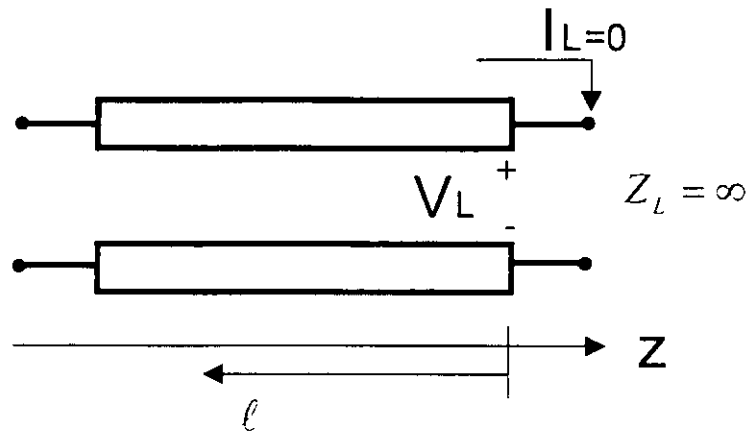
**Variaciones a lo largo de la línea terminada en corto circuito, del voltaje (a); de la corriente (b) y de la impedancia (c).**



Stub Cerrado

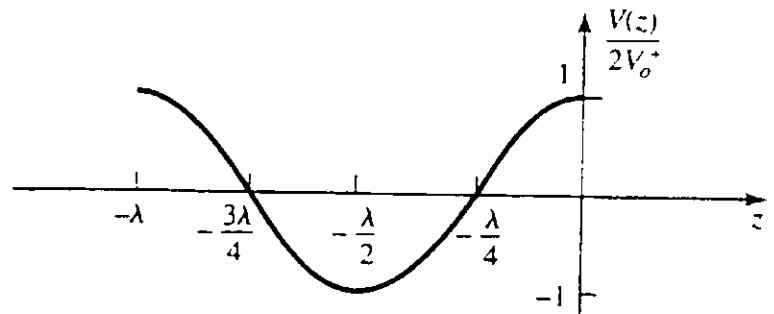


# Terminación en Circuito Abierto

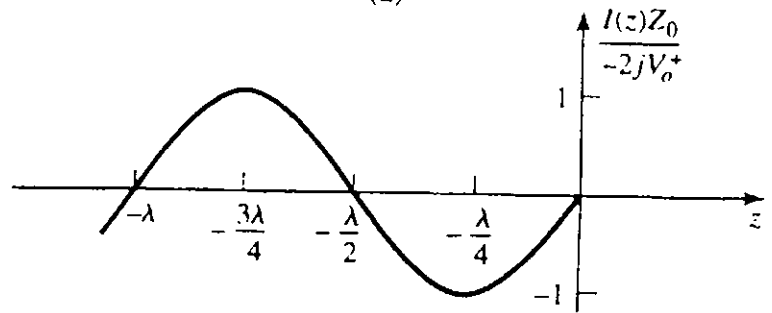


$$\Gamma = -1$$

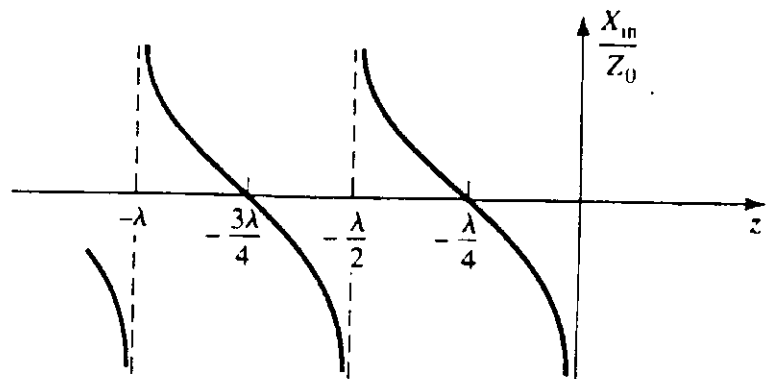
$$Z_{ent} = -jZ_0 \cot \beta \ell$$



(a)



(b)

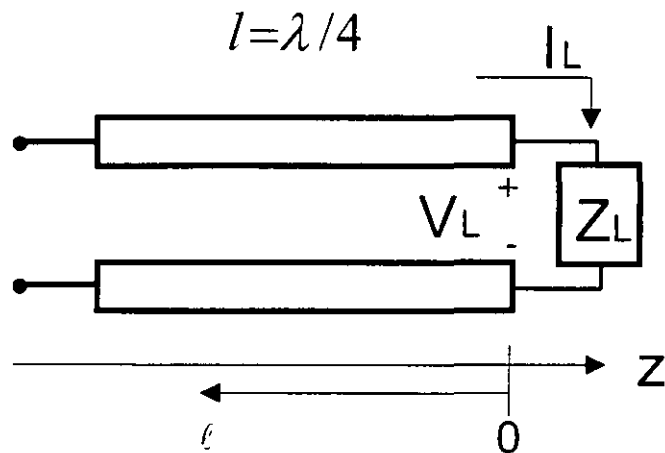


(c)

Variaciones a lo largo de la línea terminada en circuito abierto, del voltaje (a); de la corriente (b) y de la impedancia (c).

Stub Abierto

# Transformador de longitud $\lambda/4$



Como:

$$\beta l = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \left( \frac{\lambda}{4} \right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$$

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + j Z_L \tan \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

# Transformador de longitud $\lambda/2$

En este caso  $l = \lambda/2$  y  $\beta l = \pi$

Por lo que  $\tan \pi \rightarrow 0$

finalmente

$$Z_{ent} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \frac{\pi}{2}}{Z_0 + j Z_L \tan \frac{\pi}{2}} = Z_L$$

# Carta Smith

La Carta Smith es una ayuda gráfica la cual es muy utilizada en problemas de líneas de transmisión. Aunque existen otras cartas de impedancia y de coeficientes de reflexión, la Carta Smith es probablemente la más conocida y la más ampliamente utilizada. Esta fue desarrollada en 1939 por P. Smith en los Laboratorios Bell.

A primera vista, la Carta Smith puede parecer demasiado compleja, sin embargo la clave para entenderla es verla como una gráfica polar del coeficiente de reflexión,  $\Gamma$ .

Si expresamos el coeficiente de reflexión en forma polar, se tiene:  $\Gamma = \Gamma e^{j\theta}$ , entonces la magnitud del coeficiente es graficada como un radio del centro de la carta ( $\Gamma \leq 1$ ) y el ángulo  $\theta$  ( $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) será medido del lado a mano derecho del diámetro horizontal.

La utilidad real de la Carta Smith, radica en el hecho de que esta puede ser utilizada para convertir el coeficiente de reflexión a una impedancia normalizada (o admitancia), y viceversa utilizando los círculos de impedancia (o admitancia) en la carta.

Cuando se trabaja con la Carta Smith normalmente se utilizan cantidades normalizadas, las cuales se denotan con letras minúsculas. La constante de normalización usualmente es la impedancia característica de la línea, por lo que  $z = Z/Z_0$  representa la versión normalizada de la impedancia  $Z$ .

Si una línea sin pérdidas con impedancia característica  $Z_0$  es terminada con una impedancia de carga  $Z_L$ , el coeficiente de reflexión en la carga puede ser escrito como

$$\Gamma = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = \Gamma e^{j\theta}$$

Resolviendo para  $z_L$ , se tiene:

$$z_L = \frac{1 + \Gamma e^{j\theta}}{1 - \Gamma e^{j\theta}}$$

Como se trata de una expresión compleja, podemos representarla tomando en cuenta que:

$$z_L = r_L + jx_L \quad \Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$$

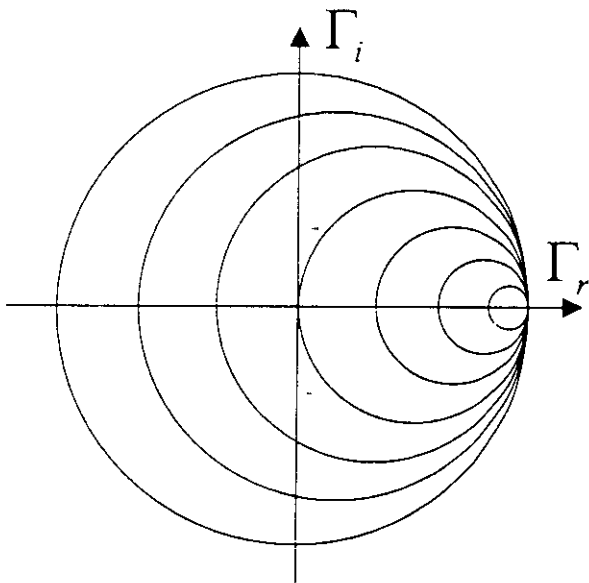
# Carta Smith

Por lo que:  $r_L + jx_L = \frac{(1 + \Gamma_r) + j\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r) - j\Gamma_i}$  De donde

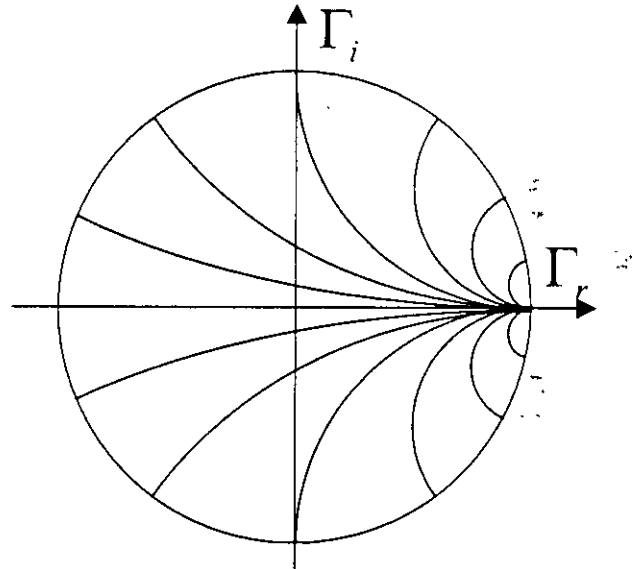
$$r_L = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2} \quad \text{y} \quad x_L = \frac{2\Gamma_i}{(1 - \Gamma_r)^2 + \Gamma_i^2}$$

$$\left( \Gamma_r - \frac{r_L}{1+r_L} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left( \frac{1}{1+r_L} \right)^2$$

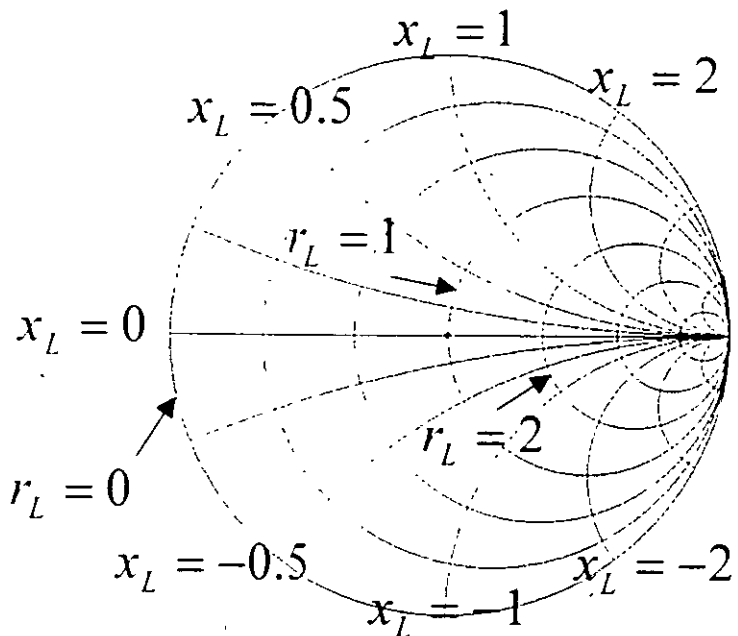
$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left( \Gamma_i - \frac{1}{x_L} \right)^2 = \left( \frac{1}{x_L} \right)^2$$



Círculos de Resistencia constante



Círculos de Reactancia constante



# Carta Smith

## Ejemplos

Los siguientes ejemplos, son para demostrar la utilidad de la Carta Smith, en problemas de líneas de transmisión, su solución se encontrara en las siguientes páginas.

Ejemplo 1. Sea una línea de transmisión terminada en carga, con  $Z_0 = 100 \Omega$ , el coeficiente de reflexión en el punto de carga es de  $0.56 + j0.214$ . ¿Determinar Cual es la carga?.

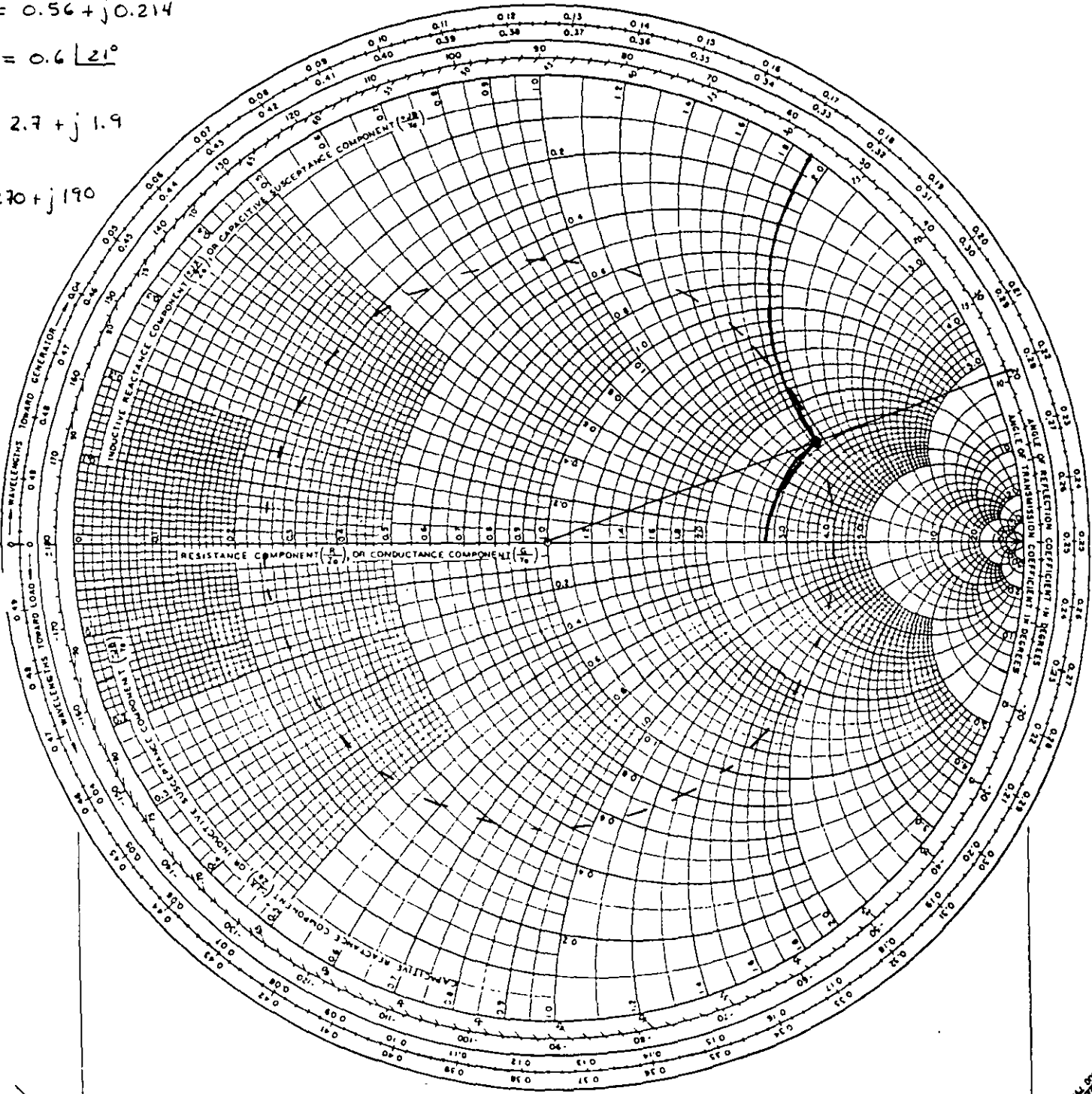
Ejemplo 2. La línea de transmisión tiene una impedancia característica de  $50 \Omega$ , la carga es de  $80 - j40 \Omega$ . ¿ Determinar tanto el coeficiente de reflexión como la relación de onda estacionaria ROE?.

Ejemplo 3. Se tiene una línea de transmisión coaxial con las siguientes características:  $Z_0 = 75 \Omega$ , una longitud de 2 cm, la permitividad del dieléctrico es de 2.56, la frecuencia de operación es de 3 GHz y la impedancia de carga es de  $Z_c = 37.5 + j75 \Omega$ , ¿Determinar la impedancia  $Z_{in}$  y ROE.

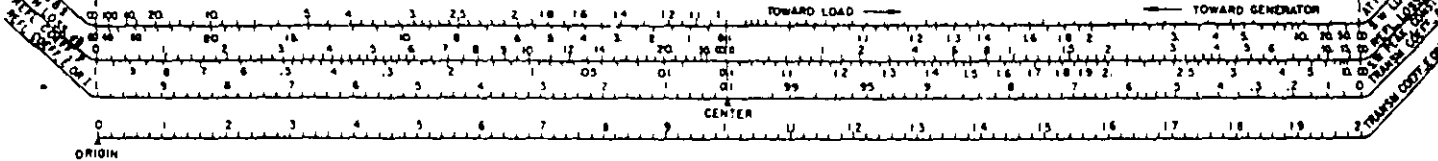
NAME	TITLE <i>Ejemplo 1.</i>	DWG. NO
SMITH CHART FORM B2-BSPR(9-66)	ANALOG INSTRUMENTS COMPANY, NEW PROVIDENCE, N.J. 07974	DATE

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

$z = 0.56 + j0.214$   
 $= 0.6 \angle 21^\circ$   
 $y = 2.7 + j1.9$   
 $= 2.70 + j1.90$



RADIALLY SCALED PARAMETERS

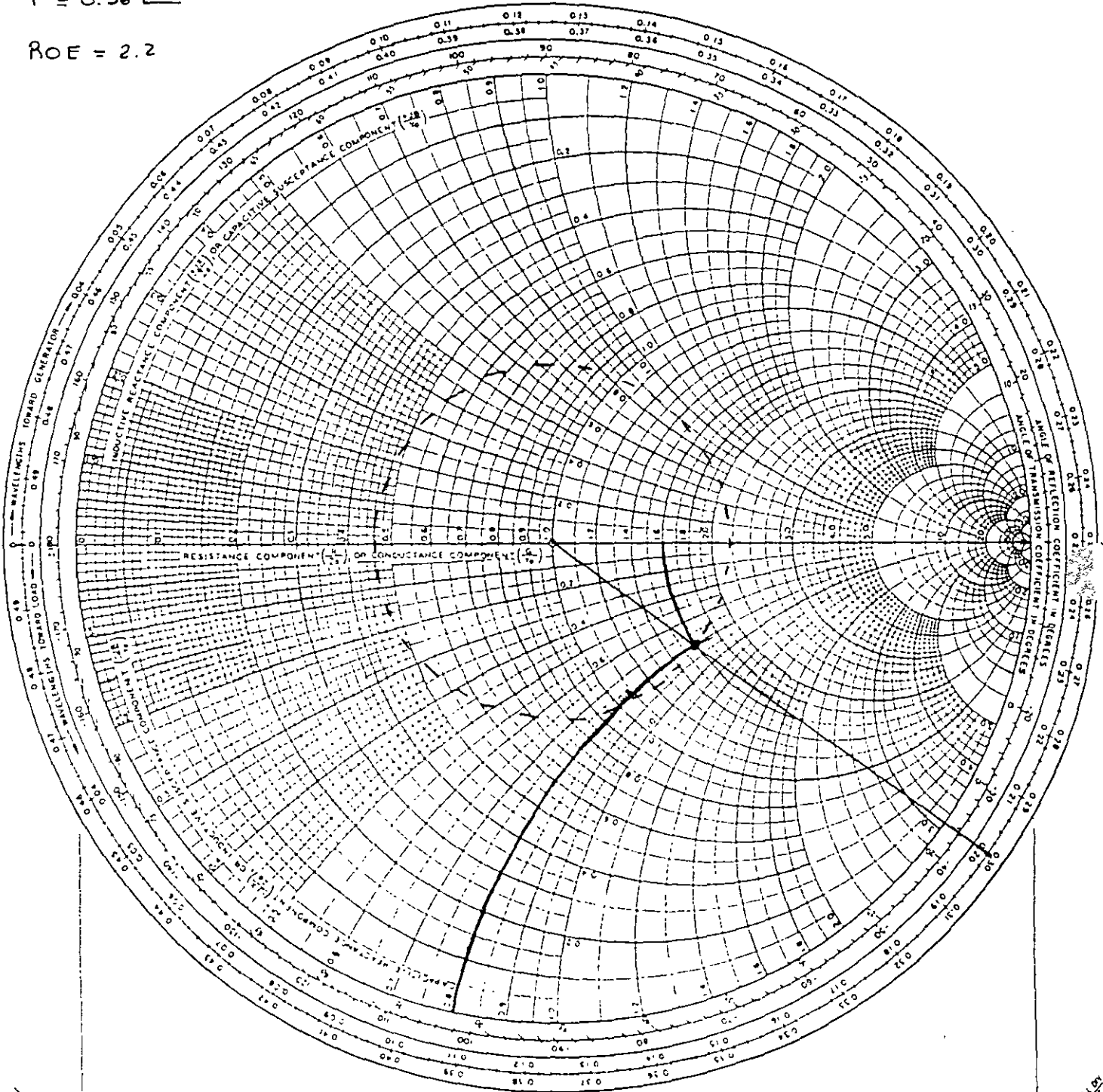


NAME	TITLE <i>Ejemplo 2</i>	DWG. NO
SMITH CHART FORM 82-BSPR (9-66)	ANALOG INSTRUMENTS COMPANY, NEW PROVIDENCE, N.J. 07974	DATE

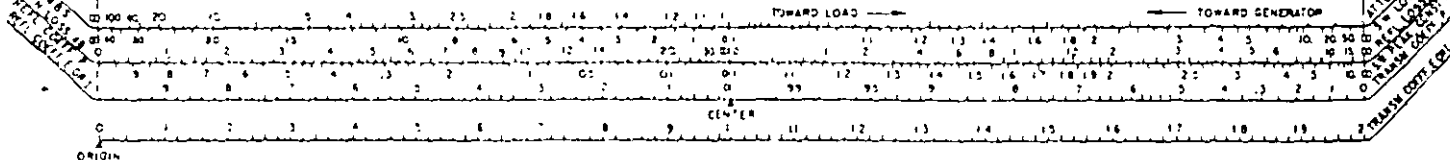
IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

$\Gamma = 0.36 \angle -36^\circ$

ROE = 2.2



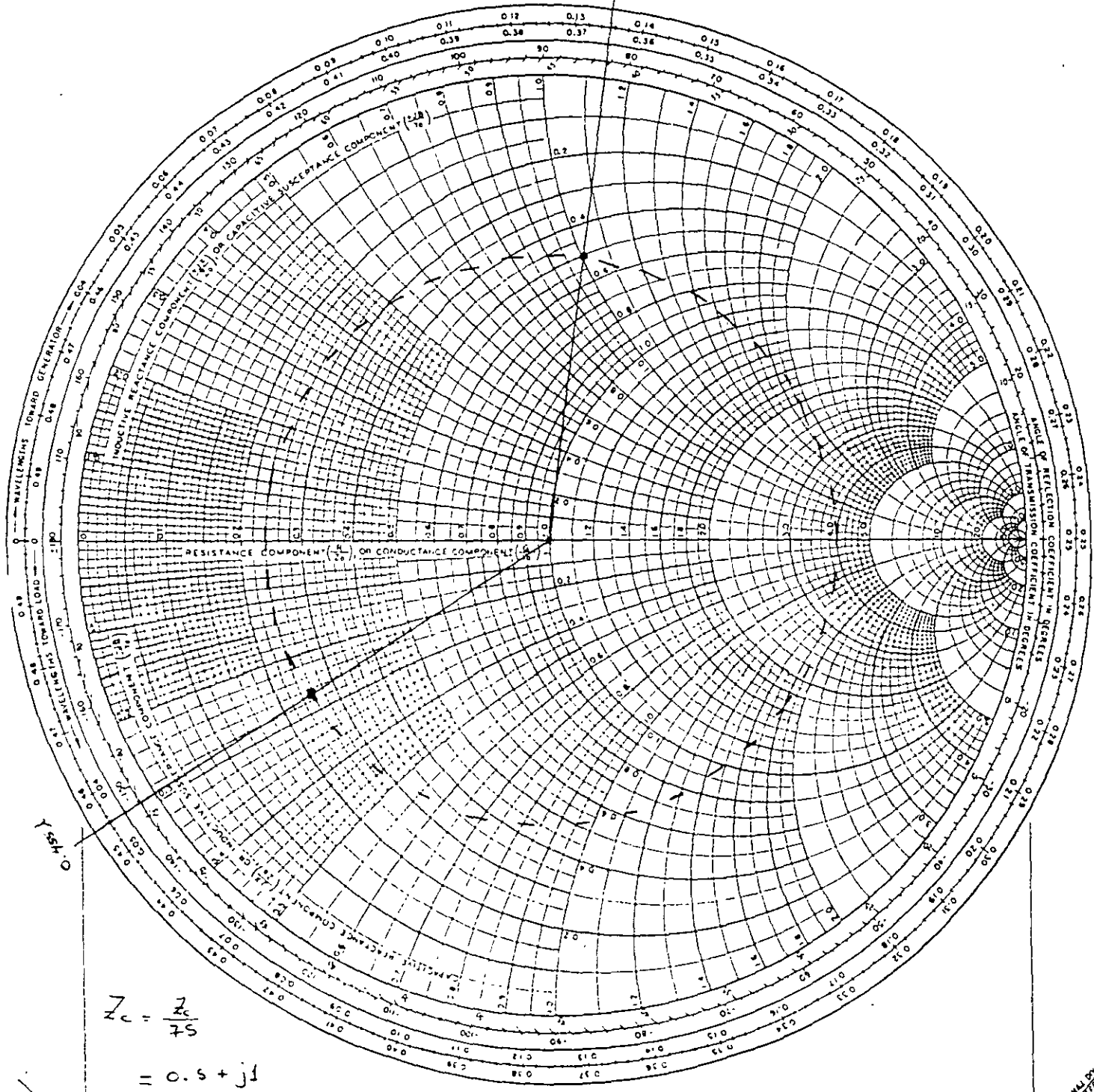
RADIALLY SCALED PARAMETERS



NAME	TITLE <b>Ejemplo 3</b>	DWG. NO
SMITH CHART FORM 82-BSPR (9-66)	ANALOG INSTRUMENTS COMPANY, NEW PROVIDENCE, N.J. 07974	DATE

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES

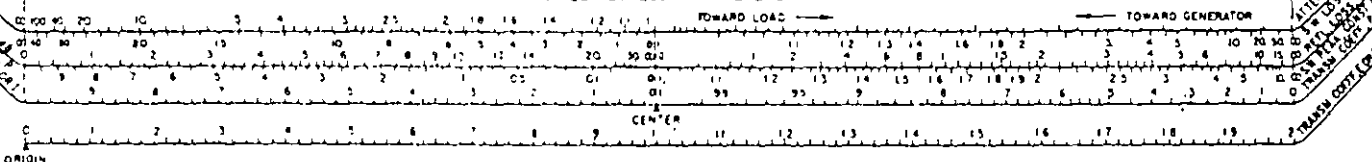
0.135λ



$$Z_c = \frac{Z_c}{75}$$

$$= 0.5 + j1$$

RADIALLY SCALED PARAMETERS



$$Z_{in} = 18.75 - j21$$

$$ROE = 4.2$$



# Líneas de transmisión y Guías de onda

## SOLUCIÓN GENERAL PARA ONDAS TEM, TE Y TM

En esta sección se encontrará la solución general a las ecuaciones de Maxwell para casos específicos de propagación de onda TEM, TE y TM en líneas de transmisión o guías de onda, como la mostrada en la siguiente figura:

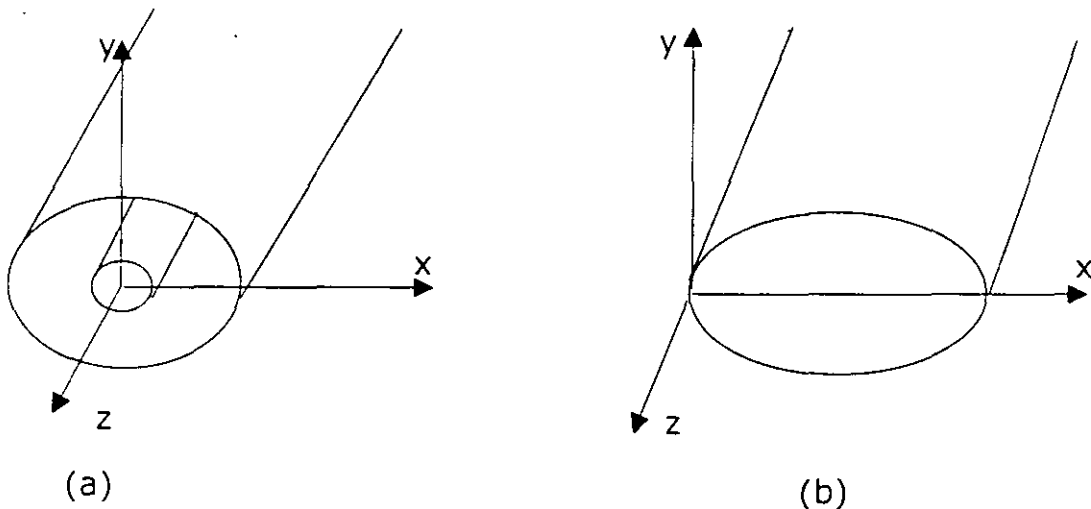


Figura 1. (a) línea de transmisión y (b) guía de onda cerrada

La estructura de la figura 1, se asume que es uniforme en la dirección "z" e infinitamente larga

Además se asume que la variación armónica de los campos es de la forma  $e^{j\omega t}$  y que la propagación de onda es en la dirección de "z". Por lo que los campos pueden ser representados por las siguientes expresiones:

$$\vec{E}(x, y, z) = (\vec{e}_{\perp} + \vec{e}_z) e^{-j\beta z} \quad (2.1a)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = (\vec{h}_{\perp} + \vec{h}_z) e^{-j\beta z} \quad (2.1b)$$

Donde

$\vec{e}_{\perp}$  y  $\vec{h}_{\perp}$  son las componentes transversales de los campos,

y  $\vec{e}_z$  y  $\vec{h}_z$  representan las componentes longitudinales

# Líneas y Guías de onda

y  $\beta$ : Es la constante de propagación

Que en el caso en que existan pérdidas en el conductor o en el dieléctrico, esta constante será una constante de propagación compleja y el término  $j\beta$  debe ser reemplazado por  $\gamma = \alpha + j\beta$

Asumiendo que la región de la línea o de la guía de onda está libre de cargas, las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas como:

$$\nabla \times E = -j\omega \mu H \quad \text{y} \quad \nabla \times H = j\omega \epsilon E \quad (2.2)$$

Considerando la dependencia con respecto a "z"  $e^{-j\beta z}$ , y desarrollando el rotacional de cada una de las ecuaciones anteriores, las tres componentes de cada una de las ecuaciones vectoriales se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y &= -j\omega \mu H_x, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x &= j\omega \mu H_y, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu H_z,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = j\omega \epsilon E_x,$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + j\beta H_x = -j\omega \epsilon E_y, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega \epsilon E_z$$

Estas seis ecuaciones pueden resolverse para las cuatro componentes transversales de los campos, en términos de las componentes longitudinales  $E_z$  y  $H_z$ . Quedando de la siguiente manera

# Líneas y Guías de onda

$$\begin{aligned}
 H_x &= \frac{j}{k^2 - \beta^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 H_y &= \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\
 E_x &= \frac{-j}{k^2 - \beta^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \\
 E_y &= \frac{j}{k^2 - \beta^2} \left( -\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

donde

$$k_c^2 = k^2 - \beta^2 \quad \text{Que ha sido definido como el número de onda de corte} \tag{2.6}$$

$$\text{y} \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{El número de onda del material de relleno de la LT o GO} \tag{2.7}$$

Las ecuaciones (2.5), representan resultados muy útiles que pueden ser aplicados a una gran variedad de tipos de líneas de transmisión o de guías de onda. Ahora aplicaremos estos resultados para casos específicos de tipos de onda.

## Ondas TEM

Las ondas transversales electromagnéticas (TEM) se caracterizan porque  $E_z = H_z = 0$ . Las ecuaciones (2.5) serían igual a cero a menos que  $k_c^2 = 0$  en cuyo caso se tendría una indeterminación, y en consecuencia

$$k = \beta \Rightarrow v_f = \frac{3 \times 10^8}{\epsilon_r \mu_r} \tag{2.8}$$

# Líneas y Guías de onda

Ahora la ecuación de onda de Helmholtz para el campo  $E_x$  es:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0 \quad (2.9)$$

Como existe una dependencia con respecto de "z" de la forma  $e^{-j\beta z}$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = -\beta^2 E_x = k^2 E_x$$

Por lo que

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_x = 0 \quad (2.10)$$

La cual nos muestra que el campo eléctrico transversal de una onda TEM satisface la ecuación de Laplace. De manera similar se puede demostrar que el campo magnético transversal también satisface la ecuación de Laplace.

En el caso electrostático se sabe que el campo eléctrico puede ser expresado como el gradiente de un potencial escalar, y este a su vez satisface la ecuación de Laplace, esto es:

$$e(x, y) = -\nabla_i \Phi(x, y) \quad (2.11)$$

$$\nabla_i^2 \Phi(x, y) = 0 \quad (2.12)$$

De esta manera podemos observar que los campos transversales de una onda TEM son similares a los campos estáticos que pueden existir entre dos conductores. Por lo que se concluye que las ondas TEM pueden existir solo cuando dos o más conductores están presentes.

La impedancia de onda del modo TEM, se puede encontrar como la relación de los campos transversales eléctrico y magnético, esto es:

$$Z_{TEM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (2.13)$$

Combinando resultados, también se tiene la siguiente expresión general para los campos transversales

$$\vec{h}_\perp(x, y) = \frac{1}{Z_{TEM}} \hat{z} \times \vec{e}_\perp(x, y) \quad (2.14)$$

# Líneas y Guías de onda

Por lo tanto un procedimiento para analizar líneas TEM puede resumirse como sigue:

1. Resolver la ecuación de Laplace, (2.12) para  $\Phi(x, y)$ . La solución puede contener varias constantes desconocidas
2. Encontrar las constantes aplicando condiciones de frontera para voltajes conocidos en los conductores.
3. Obtener  $e$  y  $E$  de (2.11) y (2.1a). Y  $h$  y  $H$  de (2.14) y (2.1b).
4. Con los campos se puede obtener  $V$  e  $I$  y con estos la impedancia característica.

## Ondas TE

Las ondas transversal eléctrica (TE), (también conocidas como ondas H). Se caracterizan porque  $E_z = 0$  y  $H_z \neq 0$ . Por lo que las ecuaciones (2.5) se reducen a:

$$\begin{aligned}H_x &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\H_y &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\E_x &= \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\E_y &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.15}$$

En este caso  $k_c \neq 0$ , y la constante de propagación  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  es generalmente una función de la frecuencia y de la geometría de la línea o de la guía. Para aplicar (2.15), debemos primero encontrar  $H_z$  de la ecuación de onda de Helmholtz,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) H_z = 0\tag{2.16}$$

# Líneas y Guías de onda

Como existe una dependencia con respecto de "z" de la forma  $e^{-j\beta z}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_z = -\beta^2 H_z \quad (2.17)$$

Por lo que

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) H_z = 0 \quad (2.18)$$

Esta ecuación debe ser resuelta sujeta a condiciones de frontera respecto de la geometría de una línea o guía específica.

Se debe observar que como  $\beta^2 = k^2 - k_c^2$

para  $k^2 > k_c^2 \Rightarrow \beta \text{ real} \Rightarrow \text{propagación}$

$k^2 < k_c^2 \Rightarrow \beta \text{ imaginaria} \Rightarrow \text{no hay propagación}$

La impedancia de la onda TE puede ser encontrada como:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega \mu}{\beta} = \frac{k \eta}{\beta} \quad (2.19)$$

y

$$h_z(x, y) = \frac{1}{Z_{TE}} \hat{z} \times e_{\perp}(x, y) \quad (2.20)$$

La onda TE se dice ser más universal ya que puede existir en un conductor cerrado o abierto, con dos o más conductores, pero hay que tener en cuenta su número de onda de corte.

## Ondas TM

Las ondas transversal magnética (TM), (también conocidas como ondas E). Se caracterizan porque  $E_z \neq 0$  y  $H_z = 0$ . Por lo que las ecuaciones (2.5) se reducen a:

# Líneas y Guías de onda

$$\begin{aligned}H_x &= \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\H_y &= -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\E_x &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\E_y &= \frac{-j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.21}$$

En este caso  $k_c \neq 0$ , y la constante de propagación  $\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  es generalmente una función de la frecuencia y de la geometría de la línea o de la guía. Para aplicar (2.21), debemos primero encontrar  $E_z$  de la ecuación de onda de Helmholtz,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0\tag{2.22}$$

Tomando en cuenta la dependencia con respecto de "z", se tiene:

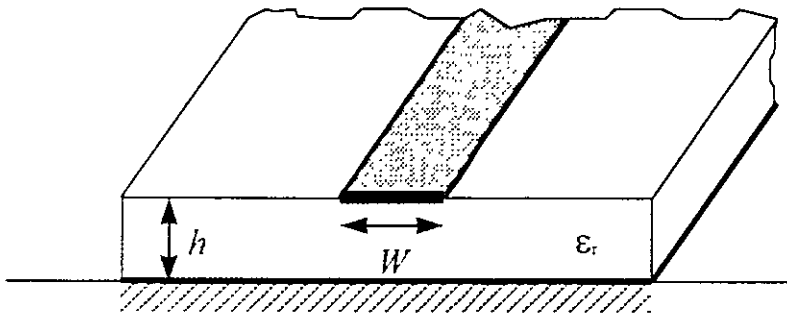
$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2 \right) E_z = 0\tag{2.23}$$

Esta ecuación debe ser resuelta sujeta a condiciones de frontera respecto de la geometría de una línea o guía específica.

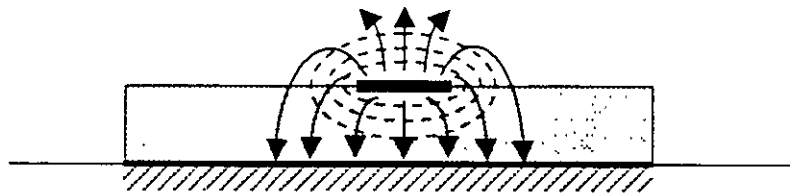
Finalmente, de manera similar, la impedancia de la onda TE puede ser encontrada como:

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta\eta}{k}\tag{2.24}$$

# Línea Microcinta



Cuasi TEM  
TE  
TM

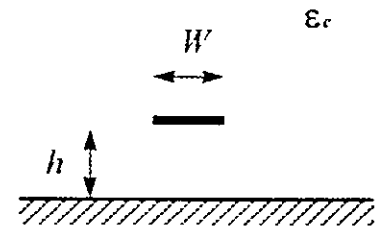


E →  
H →

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_e}}$$

$$1 < \epsilon_e < \epsilon_r$$

$$\beta_0 = k_0 \sqrt{\epsilon_e} \quad \epsilon_e = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 12h/W}}$$



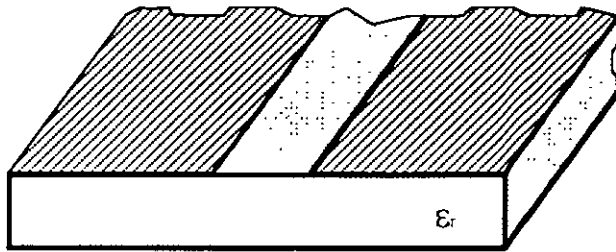
$$Z_0 = \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\epsilon_e}} \ln\left(\frac{8h}{W} + \frac{4h}{W}\right) & \text{para } W/h \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_e} [W/h + 1393 + 0.667 \ln(W/h + 1444)]} & \text{para } W/h > 1 \end{cases}$$

para  $W/h \leq 1$

para  $W/h > 1$

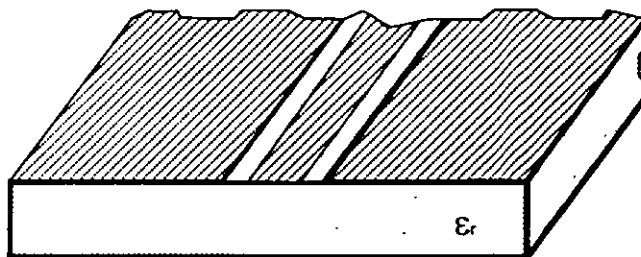


## Línea ranurada



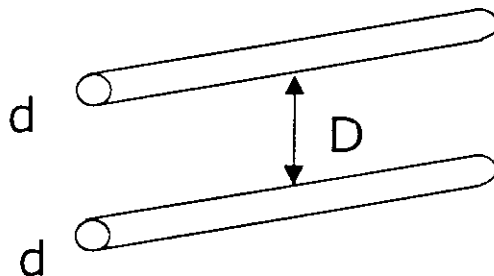
$$Z_0 = 75 \dots 200 \ \Omega$$

## Línea coplanar



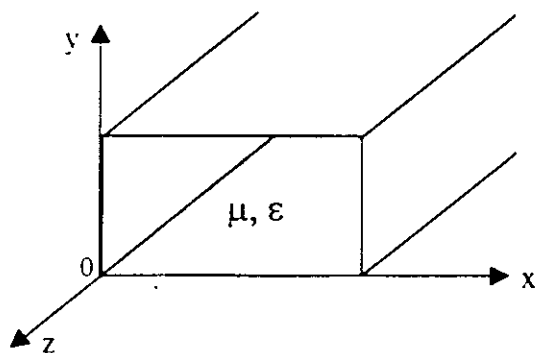
$$Z_0 = 50 \dots 150 \ \Omega$$

## Línea de dos conductores

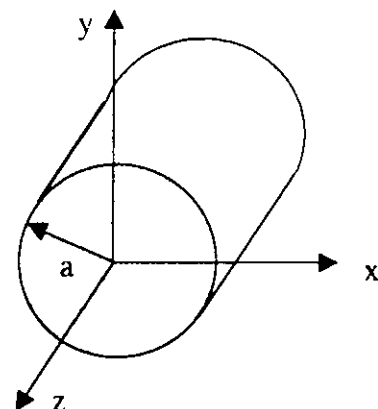


$$Z_0 = 200 \dots 600 \ \Omega$$

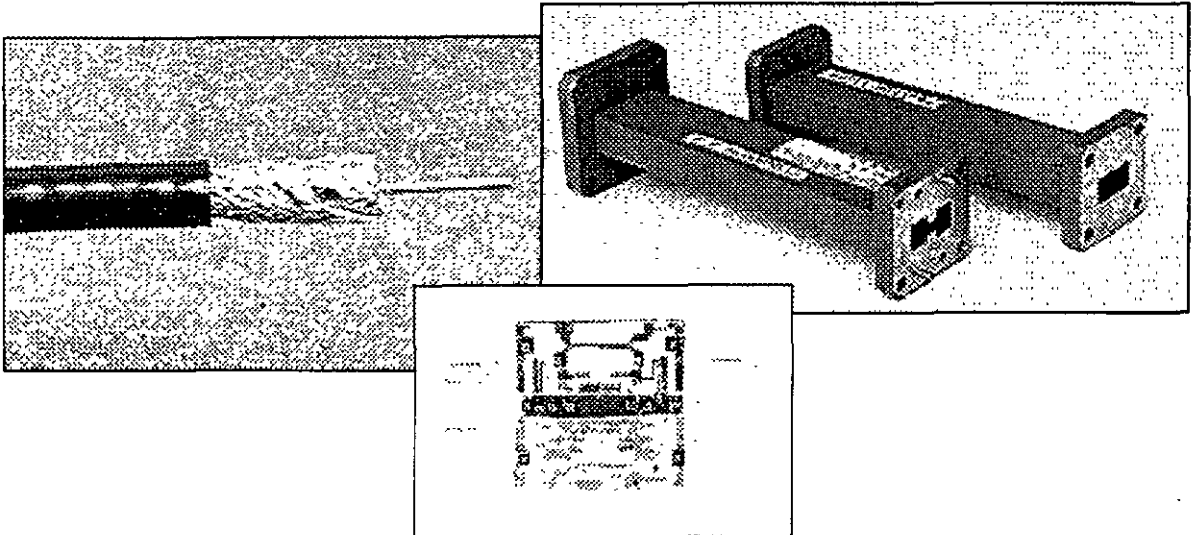
## Guías de onda Rectangular y Circular



Modos de operación:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{TE} \\ \text{TM} \end{array} \right.$



# Comparación entre distintos tipos de Líneas de Transmisión y Guías de Onda



Característica	Coaxial	Guía de Onda	Cinta	Microcinta
Modo dominante	TEM	TE <sub>10</sub> (rectangular) TE <sub>11</sub> (circular)	TEM	Cuasi TEM
Modos secundarios	TE, TM	TE, TM	TE, TM	TE, TM (Híbridos)
Dispersión	No	Media	No	Baja
Ancho de banda	Alta	Baja	Alta	Alta
Pérdidas	Media	Baja	Alta	Alta
Capacidad de potencia	Media	Alta	Baja	Baja
Tamaño físico	Grande	Grande	Medio	Pequeño
Facilidad de fabricación	Media	Media	Alta	Alta
Integración con otros componentes	Difícil	Difícil	Prome- dio	Fácil



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN TELECOMUNICACIONES**

## **MODULO I: TELECOMUNICACIONES VÍA MICROONDAS**

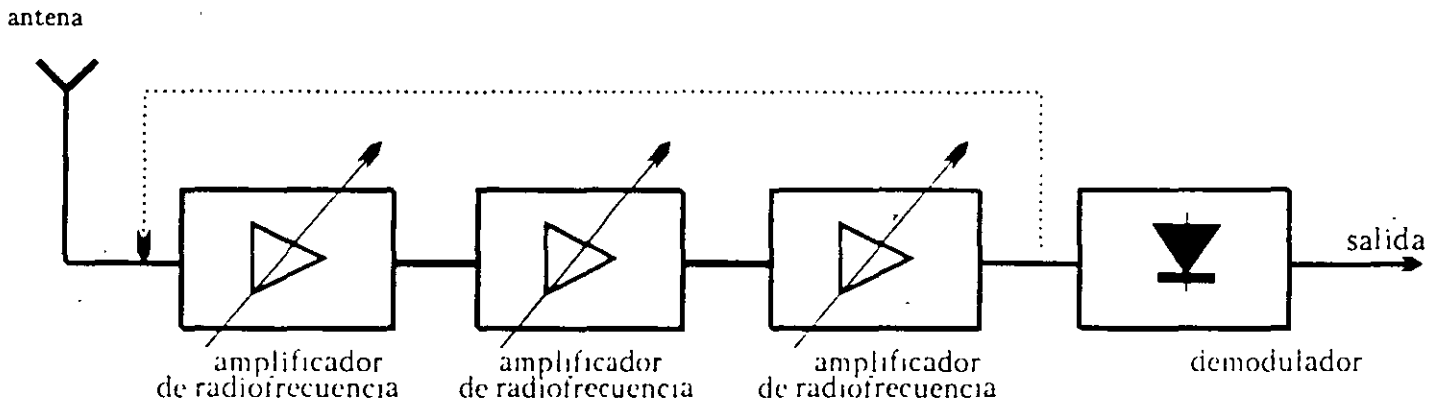
**TEMA**

**CIRCUITOS DE MICROONDAS**

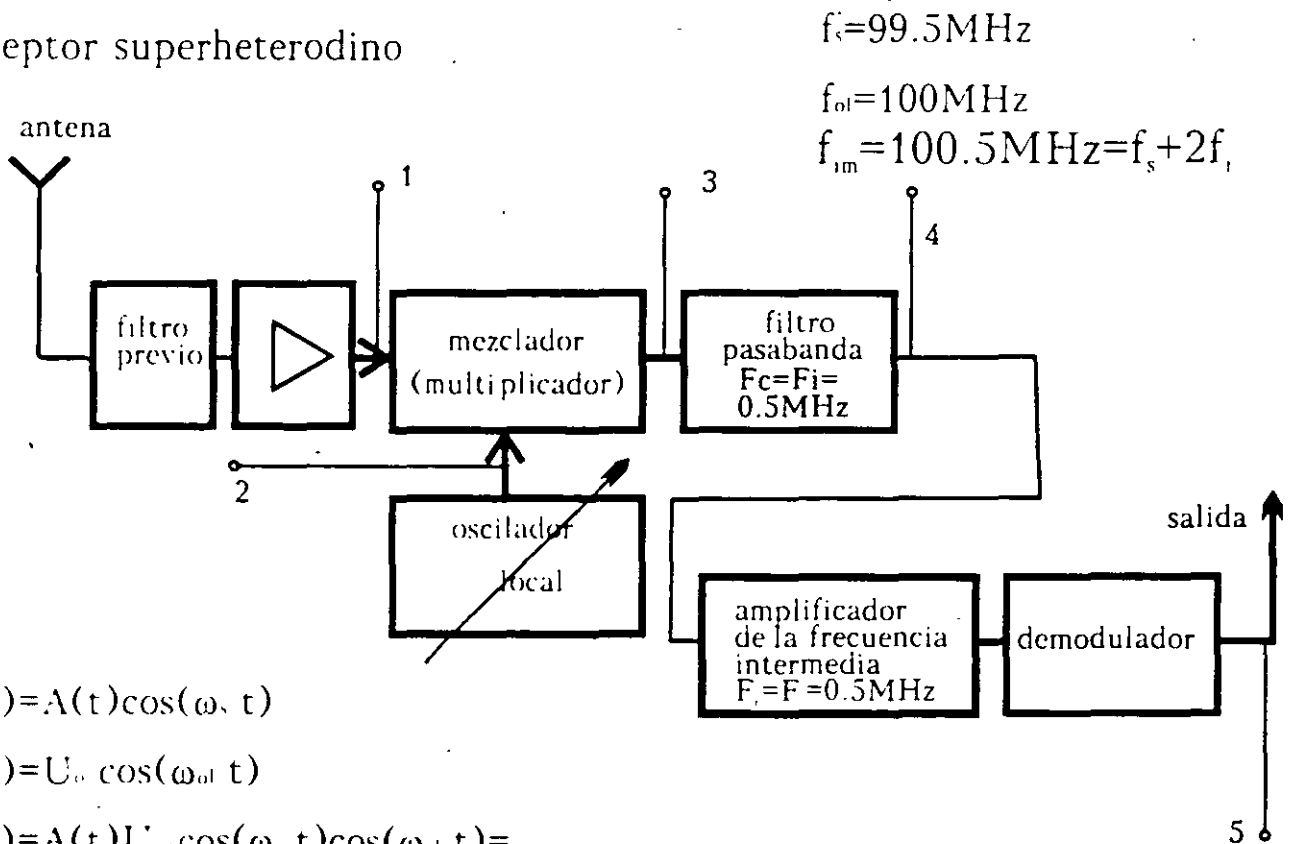
**EXPOSITOR: M. EN I. JOSE ISMAEL MARTINEZ LOPEZ  
PALACIO DE MINERÍA  
MAYO 2001**

# Receptores modernos

## a) receptor de sintonizacion directa



## b) receptor superheterodino



1.  $U(t) = A(t) \cos(\omega_s t)$

2.  $U(t) = U_o \cos(\omega_{oi} t)$

3.  $U(t) = A(t) U_o \cos(\omega_s t) \cos(\omega_{oi} t) =$

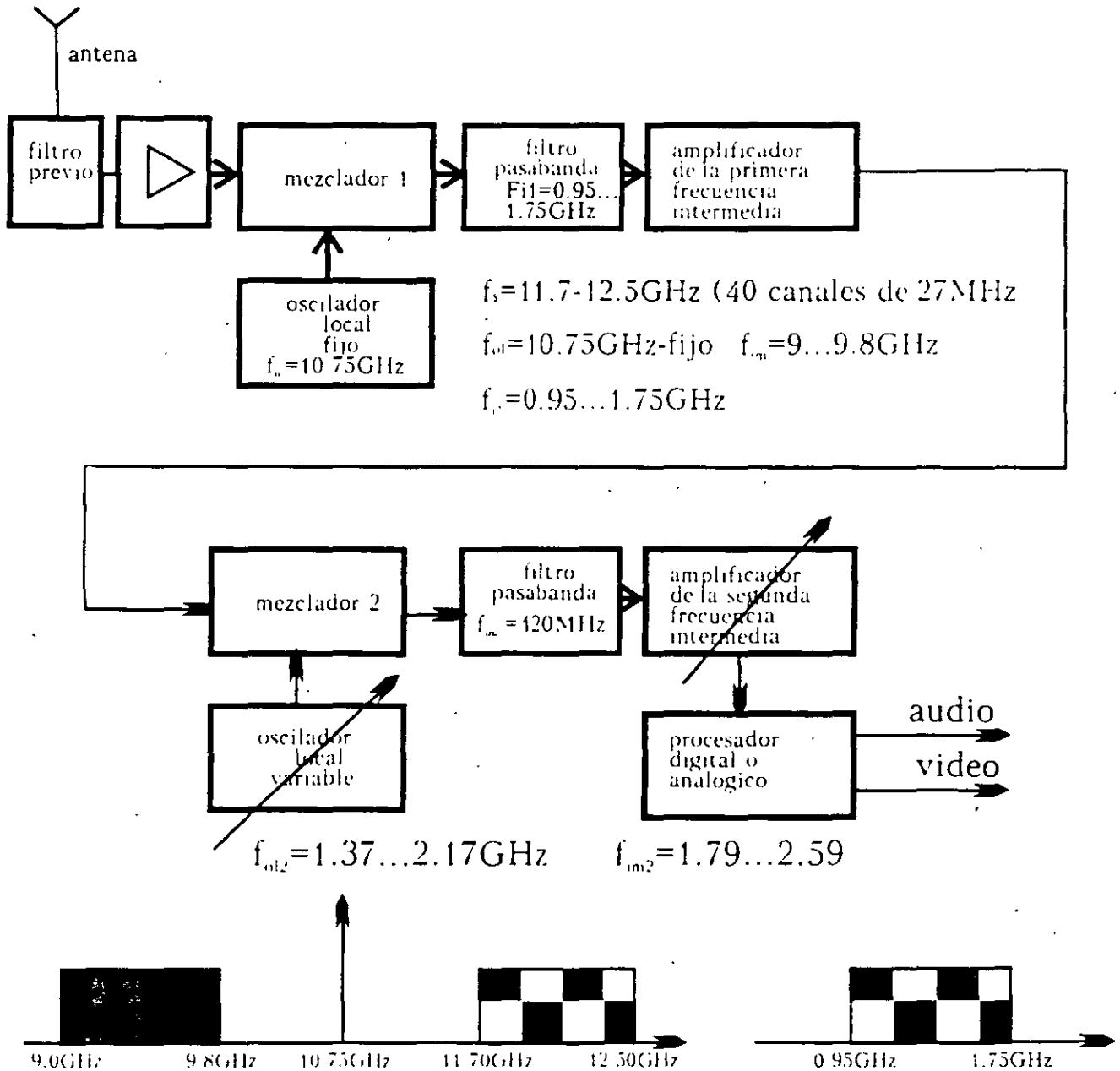
$$= 0.5 A(t) U_o \cos((\omega_s - \omega_{oi})t) + 0.5 A(t) U_o \cos((\omega_s + \omega_{oi})t)$$

4.  $U(t) = 0.5 A(t) U_o \cos((\omega_s - \omega_{oi})t)$

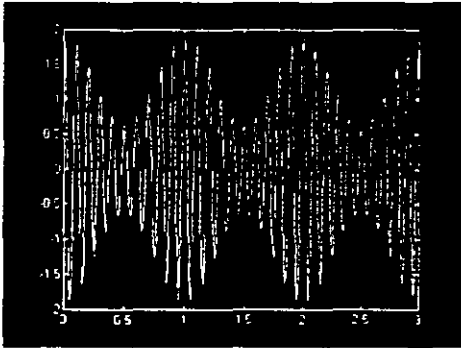
5.  $U(t) = 0.5 A(t) U_o$

# Tipos de receptores modernos

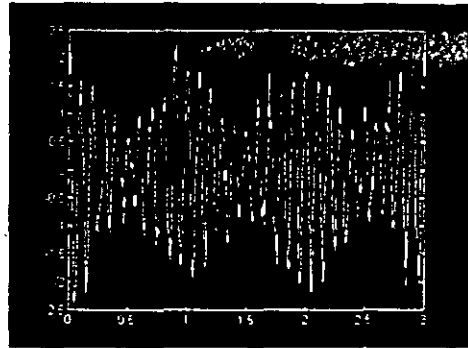
c) receptor superheterodino con dos conversiones de frecuencia



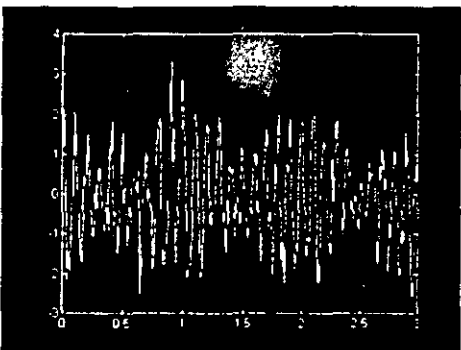
# RUIDO



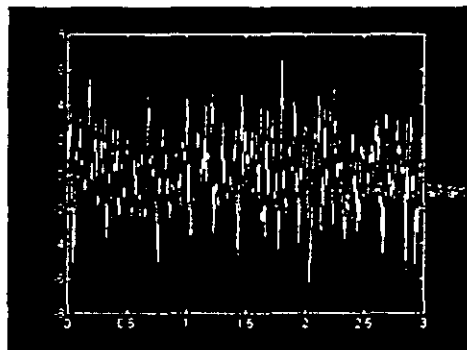
S/R=10000



S/R=10



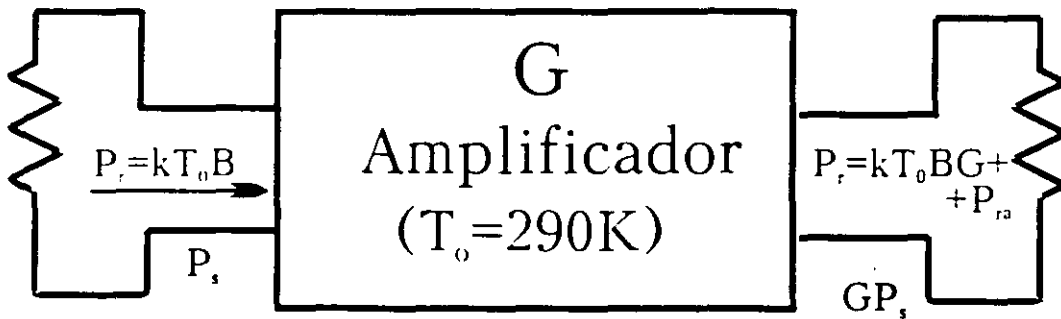
S/R=3



S/R=0.3

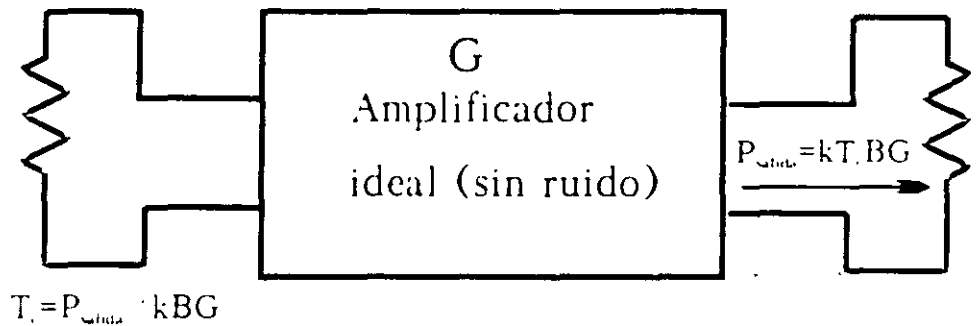
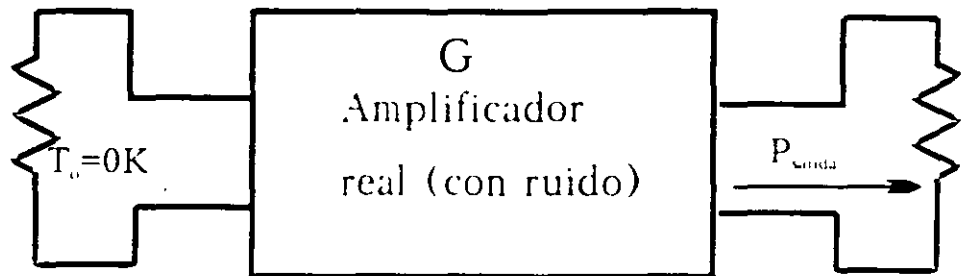
## Caracterizacion del ruido

$T_0=290K$

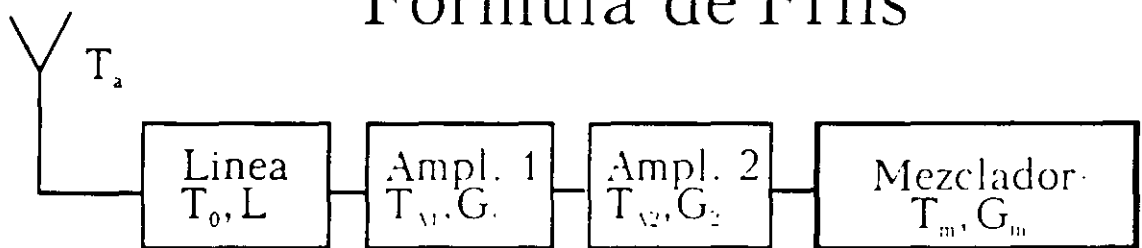


$$F = \frac{(S/R)_e}{(S/R)_s}$$

# Caracterización del ruido



## Formula de Friis



$$T_s = T_a + T_0(L-1) + T_{A1}L + T_{A2}L/G_1 + T_mL / (G_1G_2)$$

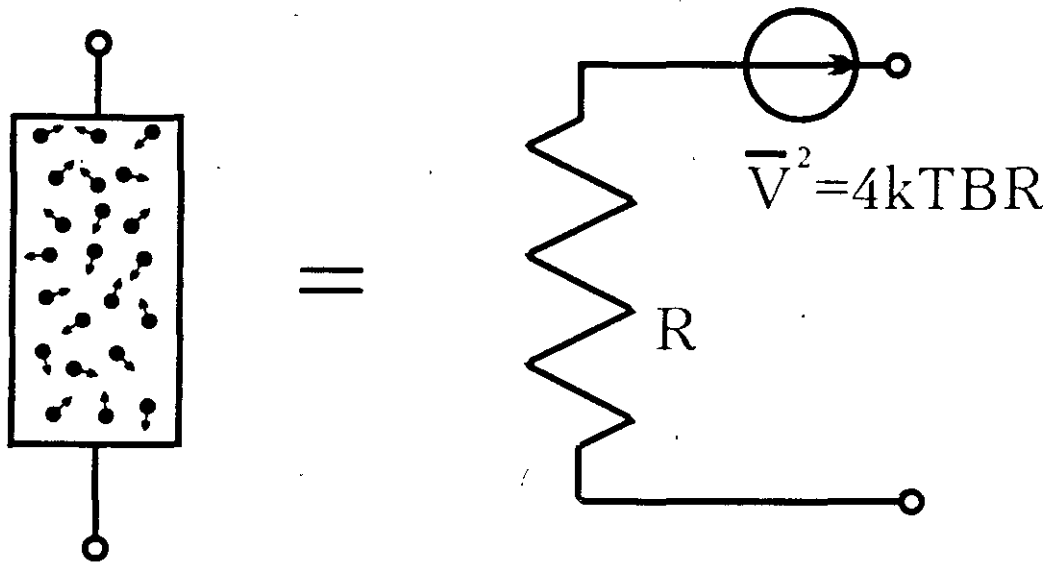
Para  $T_a = 30K$ ,  $T_0 = 300K$ ,  $T_{A1} = T_{A2} = 150K$ ,  $G_1 = G_2 = 20$ ,  $T_m = 700K$

$$T_s = 235K \quad (L=1.1);$$

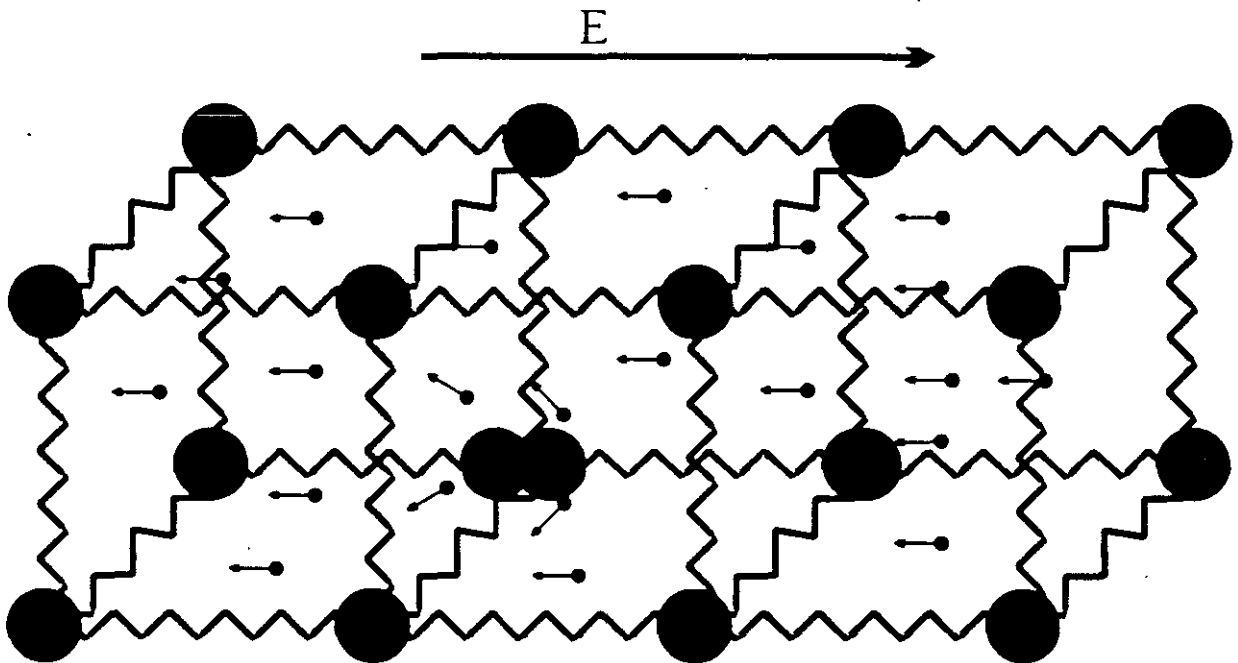
$$T_s = 650K \quad (L=2);$$

# Fuentes de ruido

a) resistor



b) semiconductor



$\mu = v/E$  - movilidad de los electrones

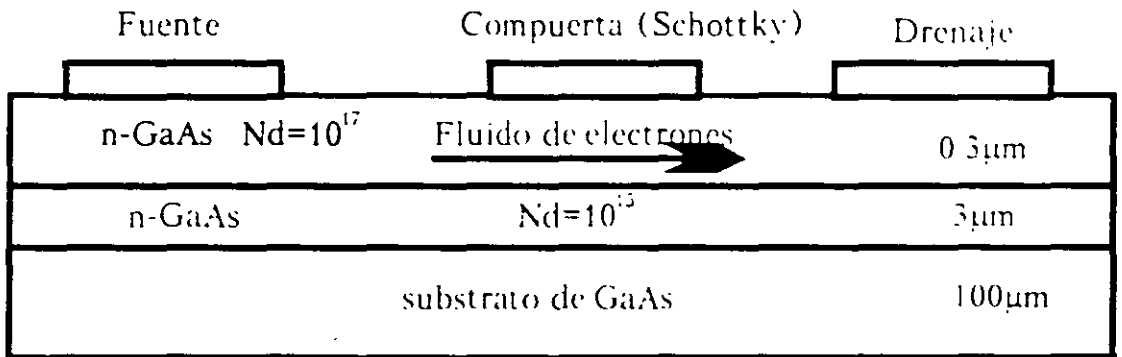


# DISPOSITIVOS DE BAJO RUIDO

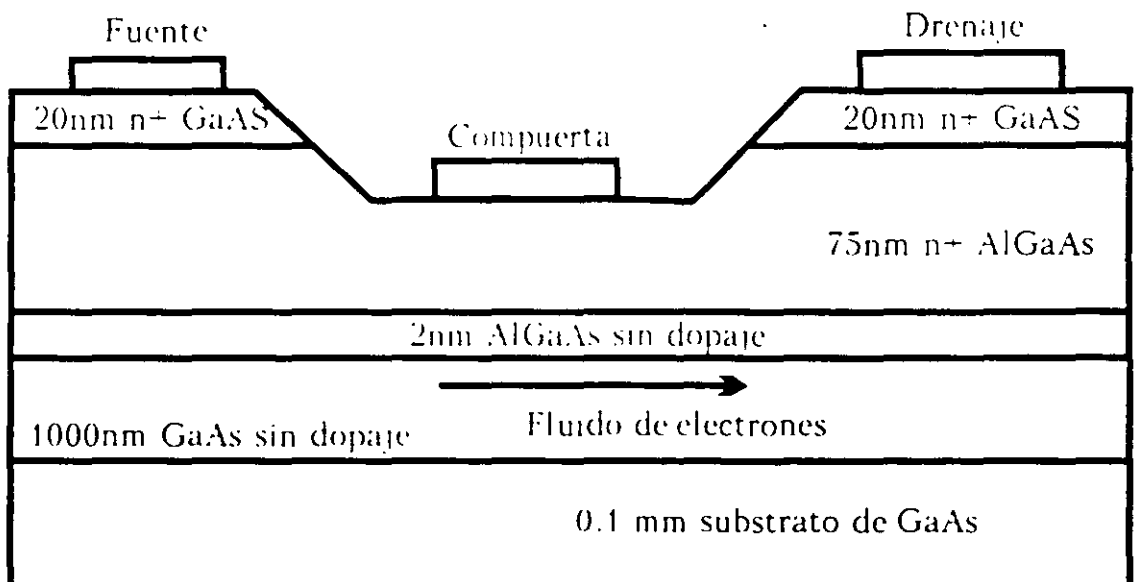
## *Movilidad de los electrones en diferentes materiales*

Material	Masa atomica	Dopaje ( $\text{cm}^{-3}$ )	Movilidad de los electrones ( $\text{cm}^2/\text{V/s}$ ) (T=300K)	Movilidad de los electrones ( $\text{cm}^2/\text{V/s}$ ) (T=70K)
Si	28.08	$10^{16}$ (n-)	1300	
Ge	72.5	$10^{16}$ (n-)	3800	
GaAs	Ga-69, As-75	$10^{16}$ (n-)	6000	
GaAs	Ga-69, As-75	0	9000	200000
InAs	In-115, As-75	$10^{16}$ (n-)	30000	120000
InAs	In-115, As-75	0	40000	
InSb	In-115, Sb-122	$10^{16}$ (n-)	70000	
InSb	In-115, Sb-122	0	80000	1200000

## GaAs MESFET

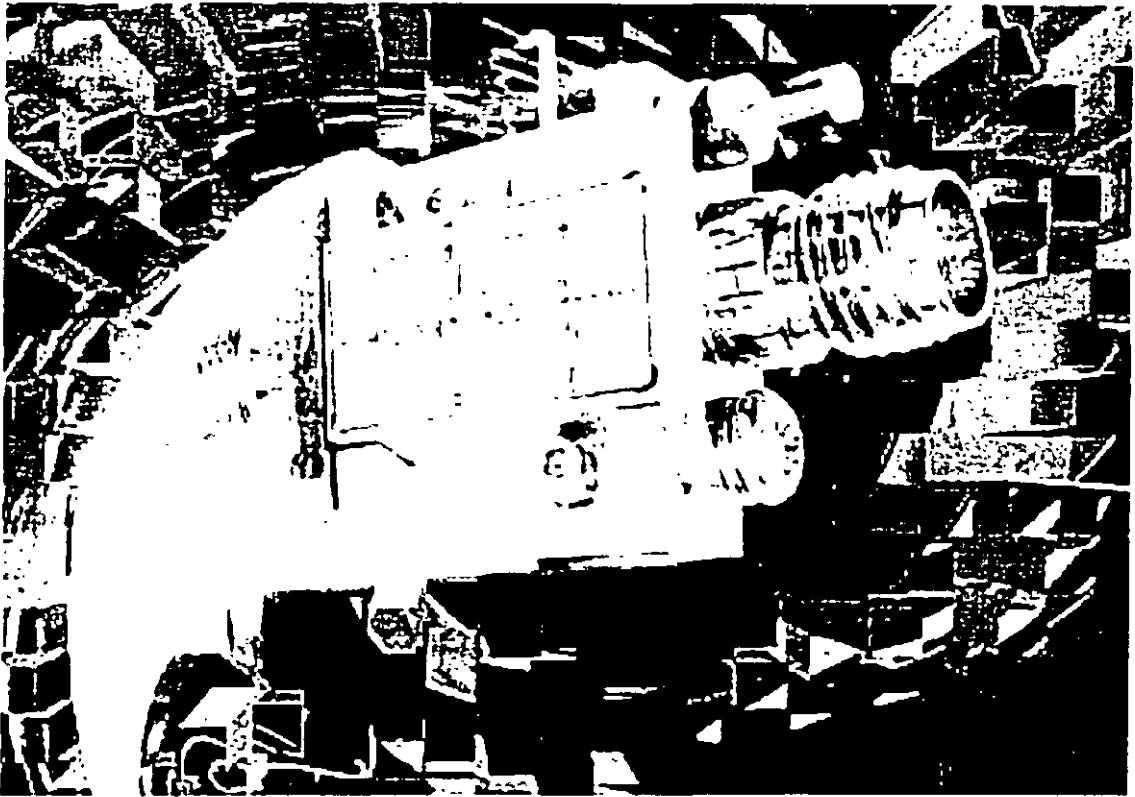


## GaAs HEMT



# Diseño de Amplificadores para Microondas

---



José Ismael  
Martínez López

# **Objetivo**

Ofrecer los elementos de análisis y diseño electrónico de alta frecuencia, así como la introducción al uso de herramientas computacionales para el desarrollo de amplificadores para microondas.

## **Estructura del curso**

Introducción

Parte I

*Generalidades y teoría de los amplificadores para microondas*

Parte II

*Metodologías de diseño de amplificadores para microondas*

# Características de las Microondas

- Alta ganancia de la antena

Resistencia de Radiación  $R_{\Sigma} \sim \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$

- Alta capacidad de información

1 % de Ancho de Banda a 600 MHz

1 % de Ancho de Banda a 60 GHz

6 MHz

600 MHz

- Alta directividad de la antena

Coeficiente de Directividad

$$D \sim \frac{\ell}{\lambda}$$

Ancho de Haz

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{\ell}$$

- Propagación a través de la ionosfera
- Inmunidad al ruido producido por el hombre
- Longitud de onda proporcional al objetivo
- Resonancias moleculares, atómicas y nucleares

# Microondas

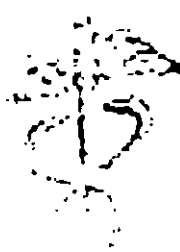
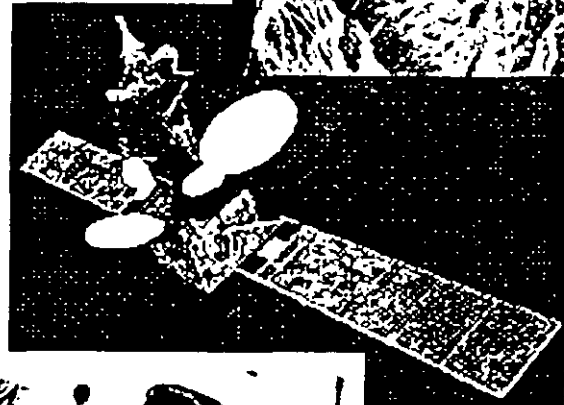
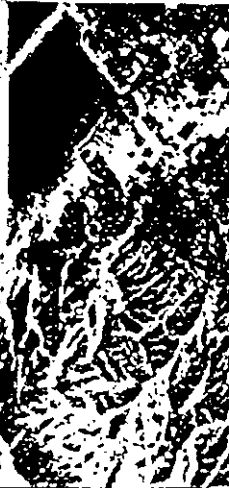
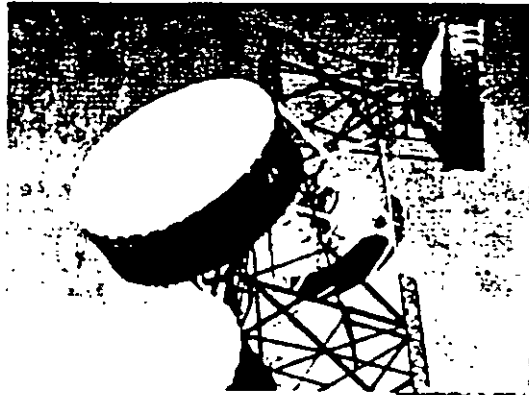
## Aplicaciones:

### •Radar

- Localización de objetivos en aire, tierra y mar.
- Control de tráfico aéreo.
- Seguimiento de misiles.
- Sistemas de anticollisión.
- Predicción del clima.
- Radiometría.

### •Comunicaciones

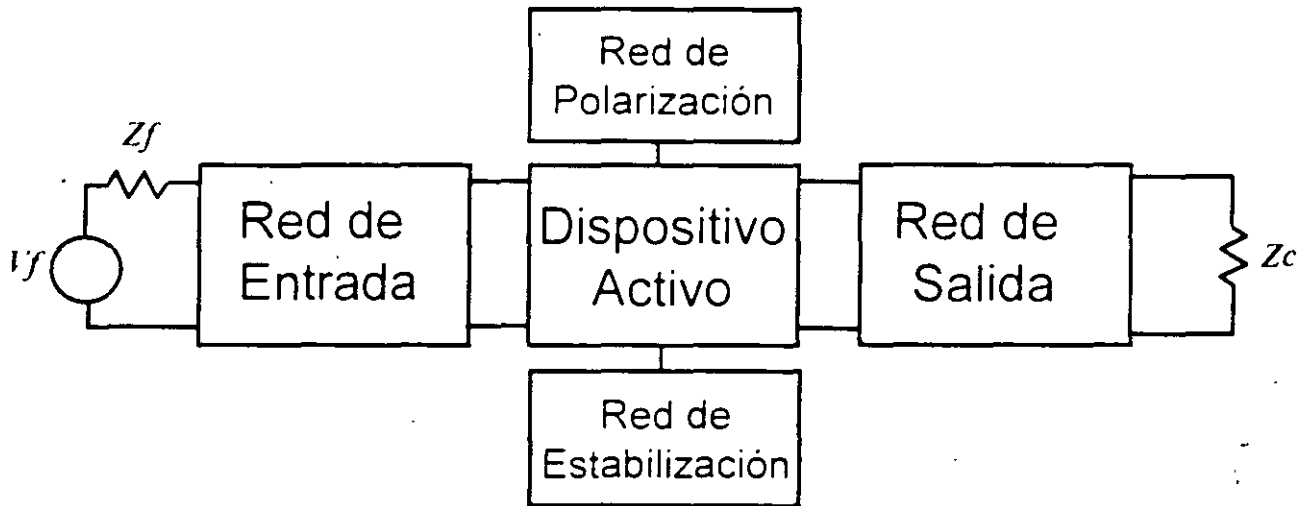
- Transmisión de larga distancia y transcontinental.
- Televisión y sistemas de tv satelital directa (DBS).
- Sistemas de Comunicación Personal (PCSs).
- Redes de Computadoras locales inalámbricas (WLANS).
- Sistemas de Posicionamiento Global (GPS).



### •Otras

- Sensado Remoto.
- Espectrografía.
- Tratamiento y Diagnóstico Médico.
- Calentamiento.
- Transferencia de Potencia.

# Herramientas para el Análisis y Diseño de Amplificadores para Microondas



## 1. Conceptos teóricos en:

- Líneas de Transmisión
- Acoplamiento de Impedancias y Carta Smith
- Bipuertos
- Ruido
- Dispositivos para Microondas

## 2. Metodologías de Diseño

- Máxima Ganancia
- Bajo Ruido
- Especificaciones determinadas

## 3. Simulación Numérica

- Diseño Electrónico Asistido por Computadora
- Plataforma de Programación

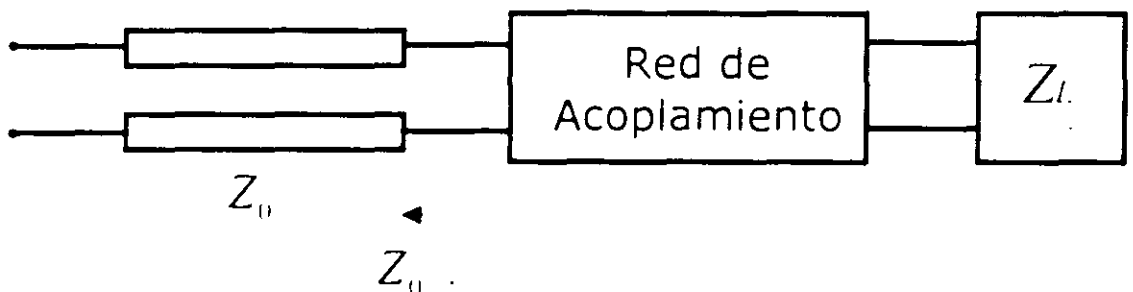
# Acoplamiento de Impedancias

## Beneficios

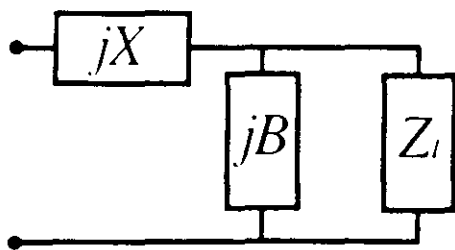
- Máxima transferencia de potencia
- Mayor relación señal a ruido
- Reducción de errores de amplitud y fase

## Consideraciones

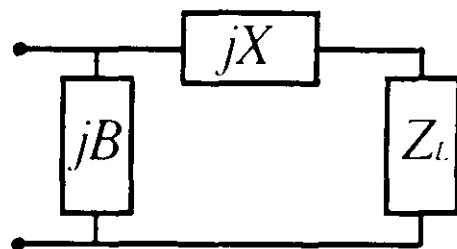
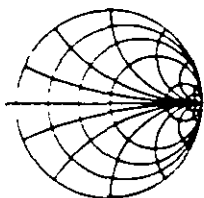
- Complejidad
- Ancho de banda
- Implementación
- Ajustabilidad



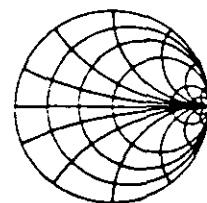
Acoplamiento con elementos de parámetros concentrados (secciones L)



a) Cuando  $Z_L$  normalizada cae dentro del círculo  $1+jx$



b) Cuando  $Z_L$  normalizada cae fuera del círculo  $1+jx$



# Acoplamiento con sección L

1. Diseñar una sección L para acoplar una carga  $Z_L = 150 - j100 \Omega$  a una línea de impedancia característica de  $100 \Omega$  a la frecuencia de  $500 \text{ GHz}$ .

La impedancia normalizada es:  $z_L = 2 - j1$

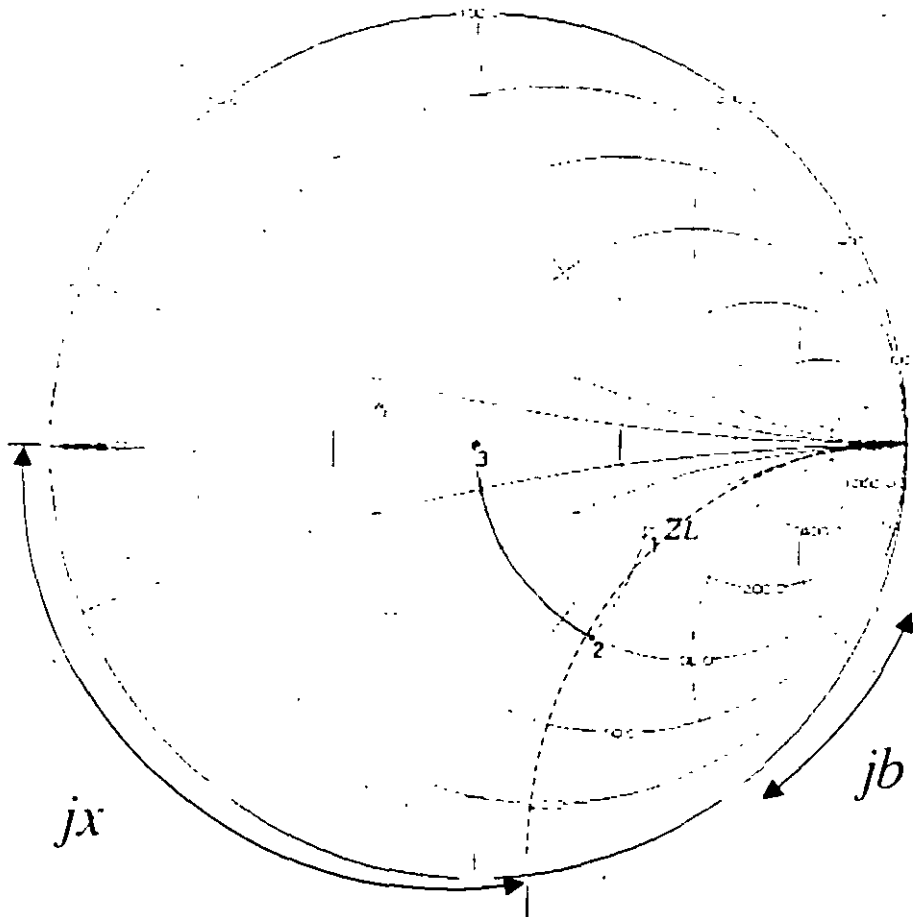
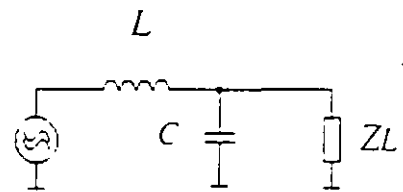
Como se encuentra dentro del círculo  $1 + jx$  entonces se selecciona el circuito a).

Encontrando el valor de la susceptancia en derivación para llegar al círculo  $1 + jx$  se obtiene  $jb = 0.3$  y el valor de la reactancia en serie para llegar al origen es  $jx = 1.2$

Los valores de los elementos corresponden a un capacitor y a un inductor cuyos valores se calculan como:

$$C = \frac{b}{2\pi f Z_0} = 0.92 \text{ pF}$$

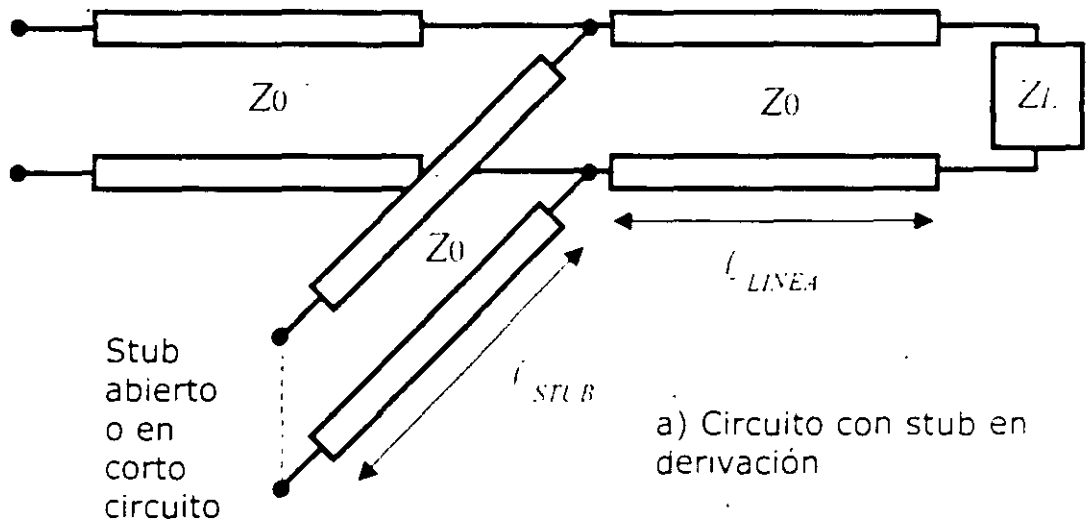
$$L = \frac{x Z_0}{2\pi f} = 38.8 \text{ nH}$$



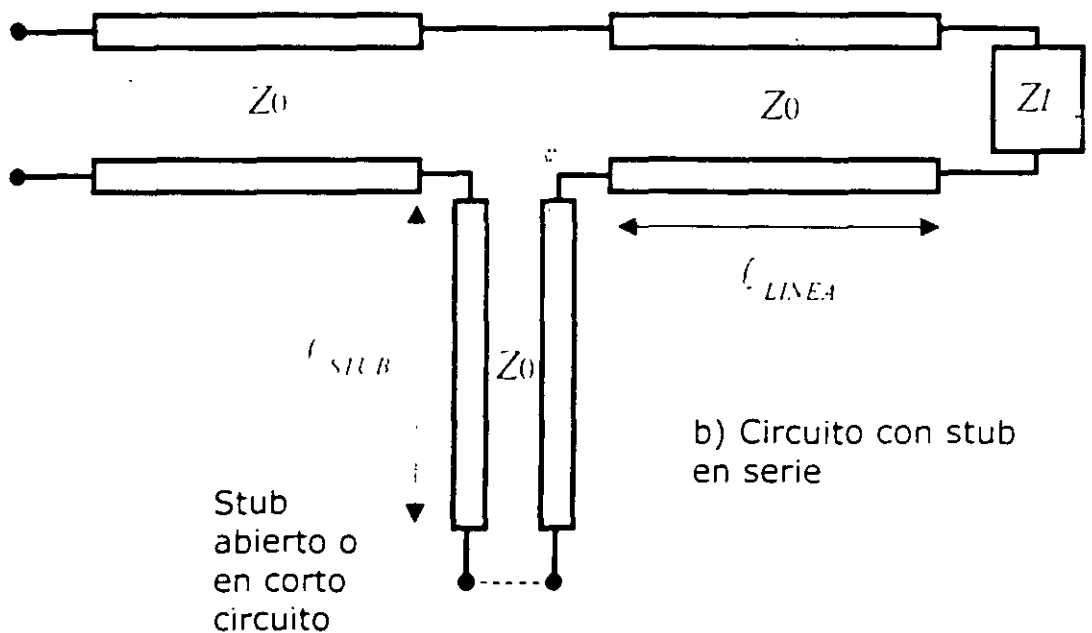


# Acoplamiento con Stub y Línea

En derivación



En serie



# Acoplamiento con Stub y Línea

2. Acoplar una carga de  $Z_L = 15 + 10 \Omega$  a una línea de  $50 \Omega$  utilizando una red de stub en derivación y línea. La frecuencia central es de 2 GHz.

Solución:

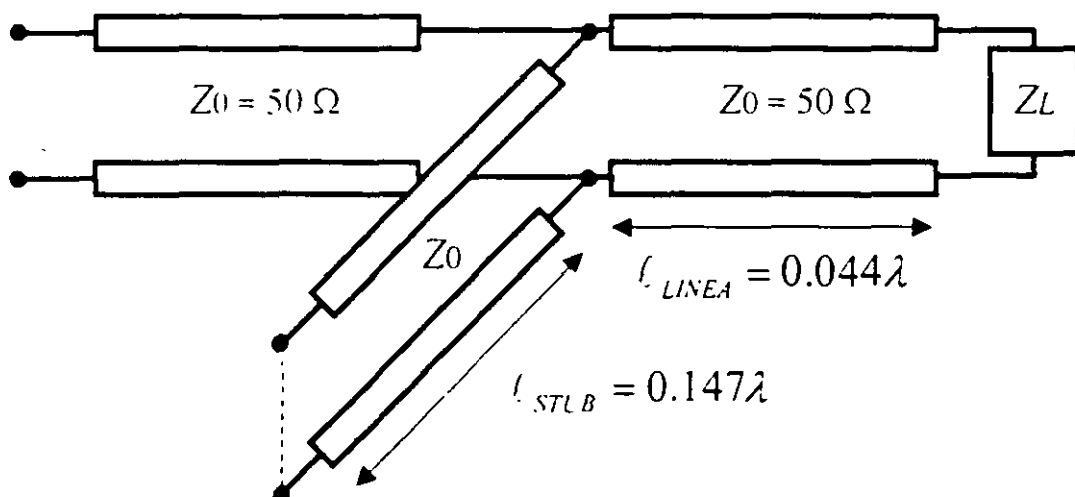
Normalizando  $Z_L$   $z_L = 0.3 + j0.2$

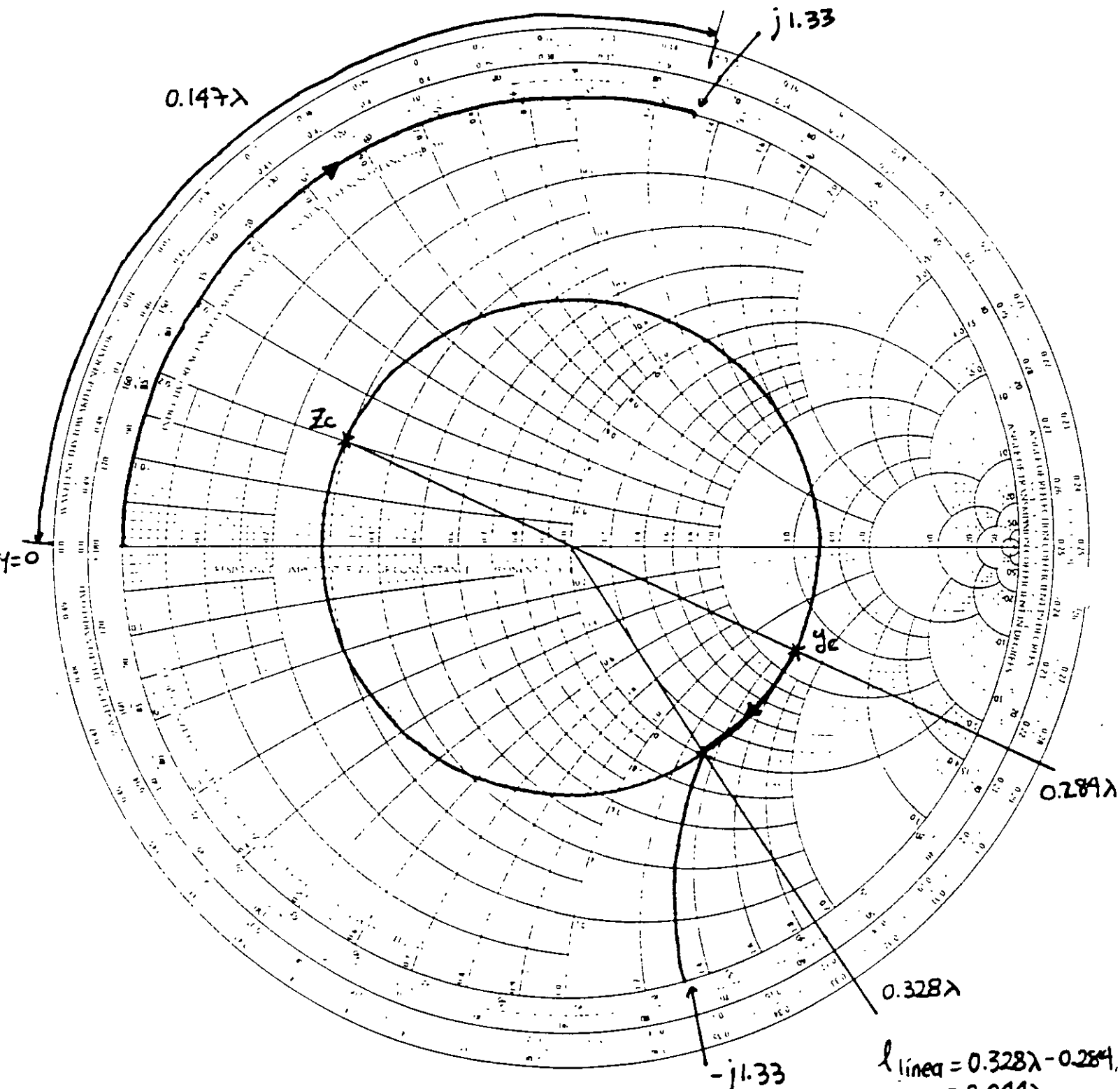
Introduciendo este valor en la carta Smith y moviéndonos sobre una línea  $180^\circ$  para encontrar el valor de la admitancia normalizada. Ahora estamos en carta de admitancias y necesitamos movernos en la dirección del generador hasta interceptar el círculo  $1 + jb$ . Puede verse que existen dos puntos de intercepción por lo que tendremos dos soluciones.

El primer punto de intercepción equivale a un desplazamiento de  $0.044 \lambda$ . Moviéndonos ahora hacia el centro de la carta se observa que se requiere una susceptancia de  $j1.33$ . La longitud del stub abierto en derivación que proporciona esta susceptancia puede ser encontrado en la carta Smith al colocarse en  $y=0$  (Condición de circuito abierto) y desplazarse hacia el generador hasta llegar al punto de  $j1.33$ . La longitud en función de  $\lambda$  puede leerse en el círculo exterior de la carta.

Las dos soluciones se muestran a continuación:

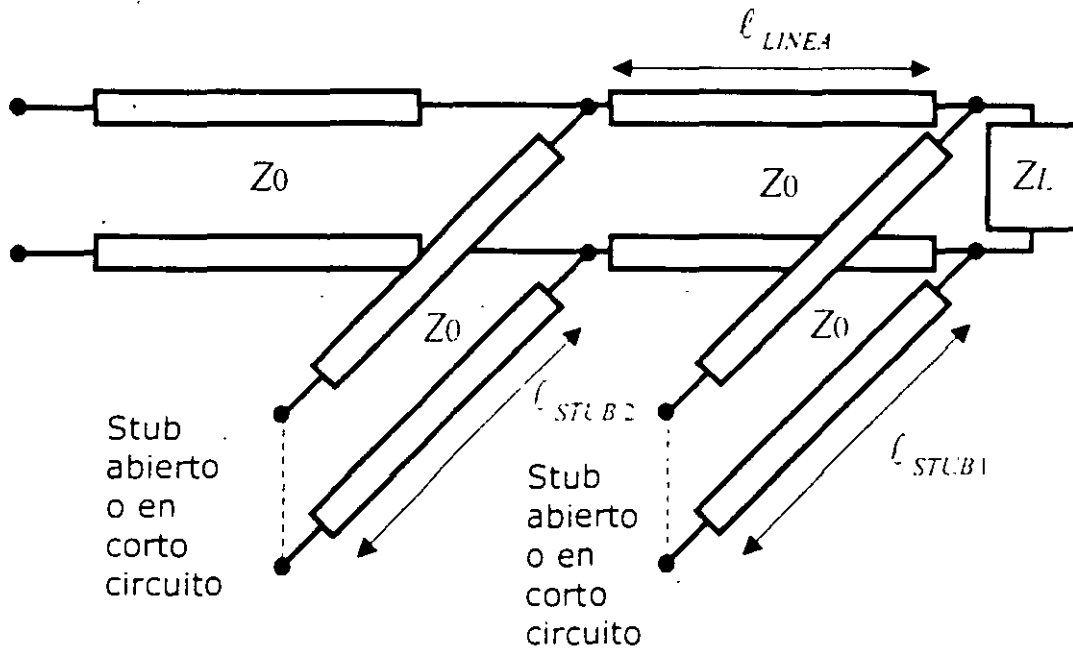
Solución 1



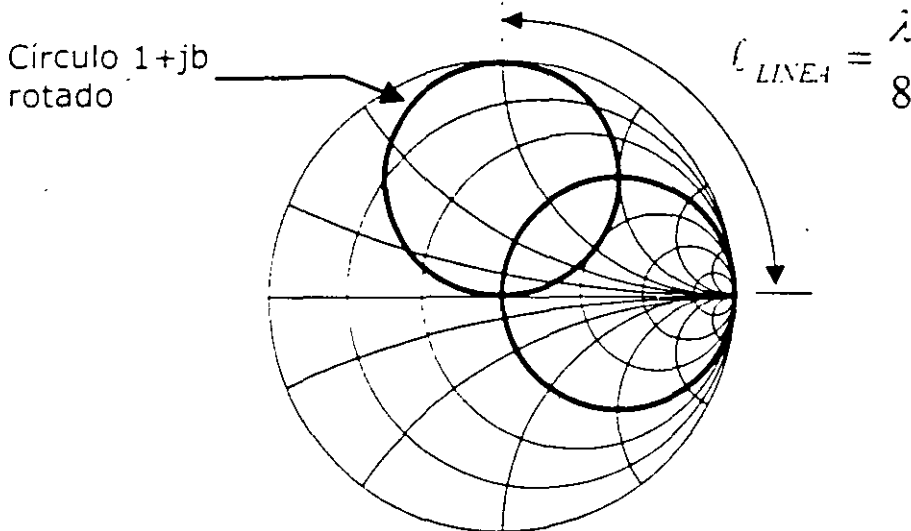


SWR		Reflection Coefficient		Transmission Loss		Return Loss	
SWR	Reflection Coefficient	Transmission Loss	Return Loss	SWR	Reflection Coefficient	Transmission Loss	Return Loss
1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
1.10	0.05	0.01	1.00	1.10	0.05	0.01	1.00
1.20	0.07	0.02	1.00	1.20	0.07	0.02	1.00
1.30	0.09	0.03	1.00	1.30	0.09	0.03	1.00
1.40	0.11	0.04	1.00	1.40	0.11	0.04	1.00
1.50	0.13	0.05	1.00	1.50	0.13	0.05	1.00
1.60	0.15	0.06	1.00	1.60	0.15	0.06	1.00
1.70	0.17	0.07	1.00	1.70	0.17	0.07	1.00
1.80	0.19	0.08	1.00	1.80	0.19	0.08	1.00
1.90	0.21	0.09	1.00	1.90	0.21	0.09	1.00
2.00	0.22	0.10	1.00	2.00	0.22	0.10	1.00
2.50	0.28	0.13	1.00	2.50	0.28	0.13	1.00
3.00	0.33	0.16	1.00	3.00	0.33	0.16	1.00
4.00	0.40	0.20	1.00	4.00	0.40	0.20	1.00
5.00	0.45	0.23	1.00	5.00	0.45	0.23	1.00
6.00	0.50	0.26	1.00	6.00	0.50	0.26	1.00
7.00	0.54	0.28	1.00	7.00	0.54	0.28	1.00
8.00	0.58	0.30	1.00	8.00	0.58	0.30	1.00
9.00	0.61	0.31	1.00	9.00	0.61	0.31	1.00
10.00	0.63	0.32	1.00	10.00	0.63	0.32	1.00

# Acoplamiento con doble stub y línea



$$\frac{\lambda}{8} < l_{LINEA} < \frac{3\lambda}{8}$$



- 1) Se llega con un stub al círculo  $1+jb$  rotado.
- 2) Con una línea de longitud  $\lambda/8$  se intercepta el círculo  $1+jb$ .
- 3) Con un stub se alcanza el centro de la carta Smith.

3. Acoplar una carga de  $Z_L = 60 - j80 \Omega$  a una línea de  $50 \Omega$  utilizando una red de doble stub en derivación y línea. La frecuencia central es de 2 GHz y los stubs son cerrados.

Solución:

Obteniendo y normalizando  $Y_L$   $y_L = 0.3 - j0.4$

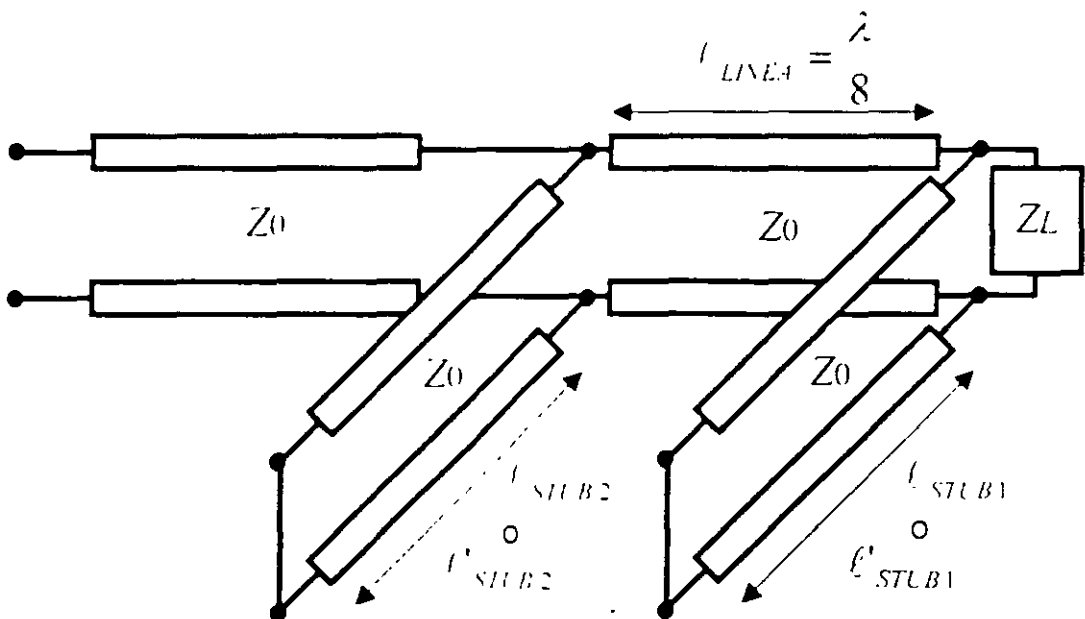
Para interceptar el círculo rotado se requiere una susceptancia  $b_1 = 1.314$ , o bien con la segunda solución se necesita  $b_1' = -0.114$ . (ver figura)

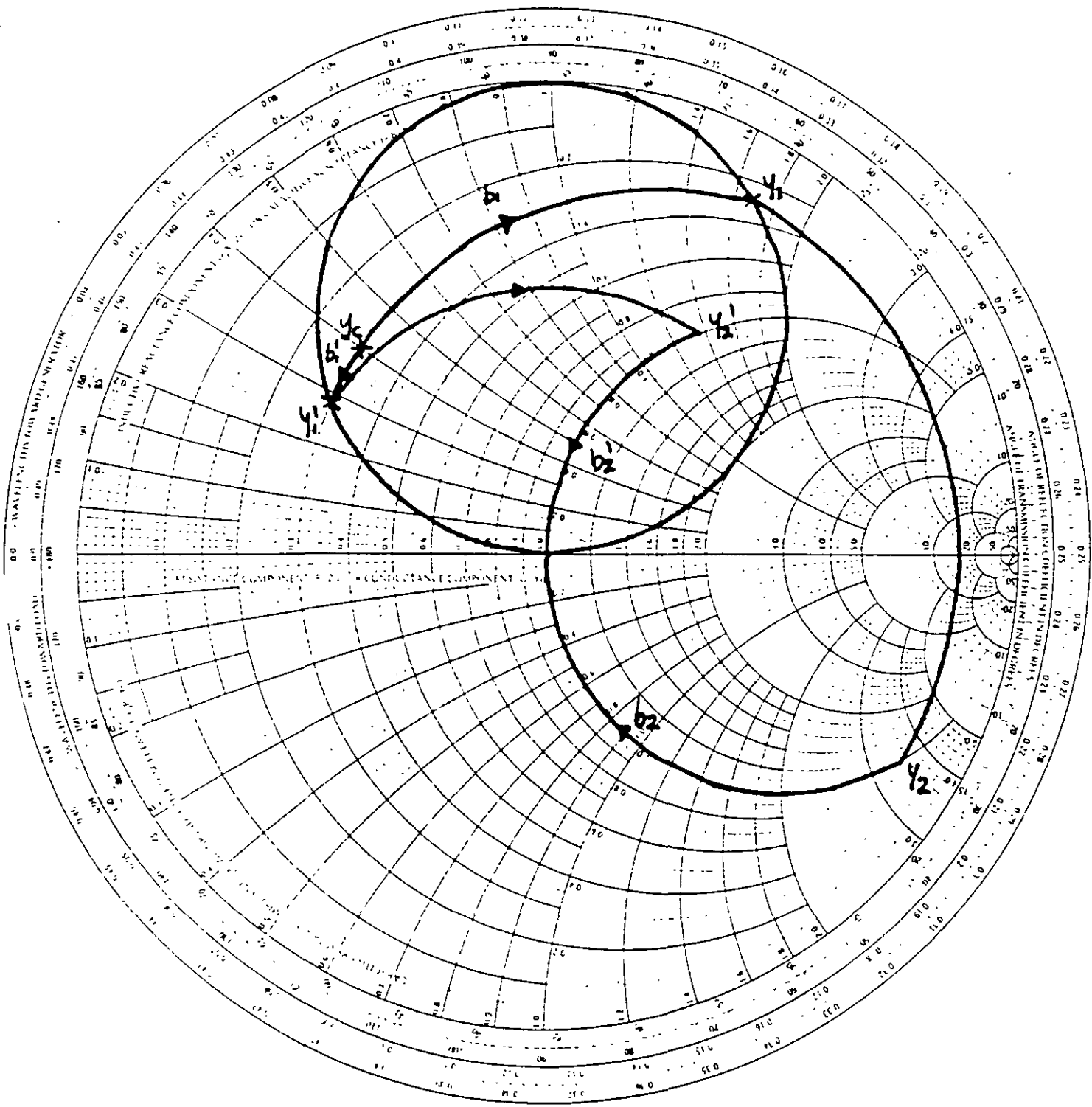
Moviéndose a través de la línea se llega a los puntos  $y_2 = 1 - j3.38$  y  $y_2' = 1 + j1.38$ .

Por lo que la susceptancia del segundo stub debe ser  $b_2 = 3.38$  y  $b_2' = -1.38$  para la primera y segunda solución, respectivamente.

Las longitudes de los stubs en corto circuito son:

$$\begin{aligned} \ell_{STUB1} &= 0.396\lambda, & \ell_{STUB2} &= 0.454\lambda \\ \ell'_{STUB1} &= 0.232\lambda, & \ell'_{STUB2} &= 0.100\lambda \end{aligned}$$





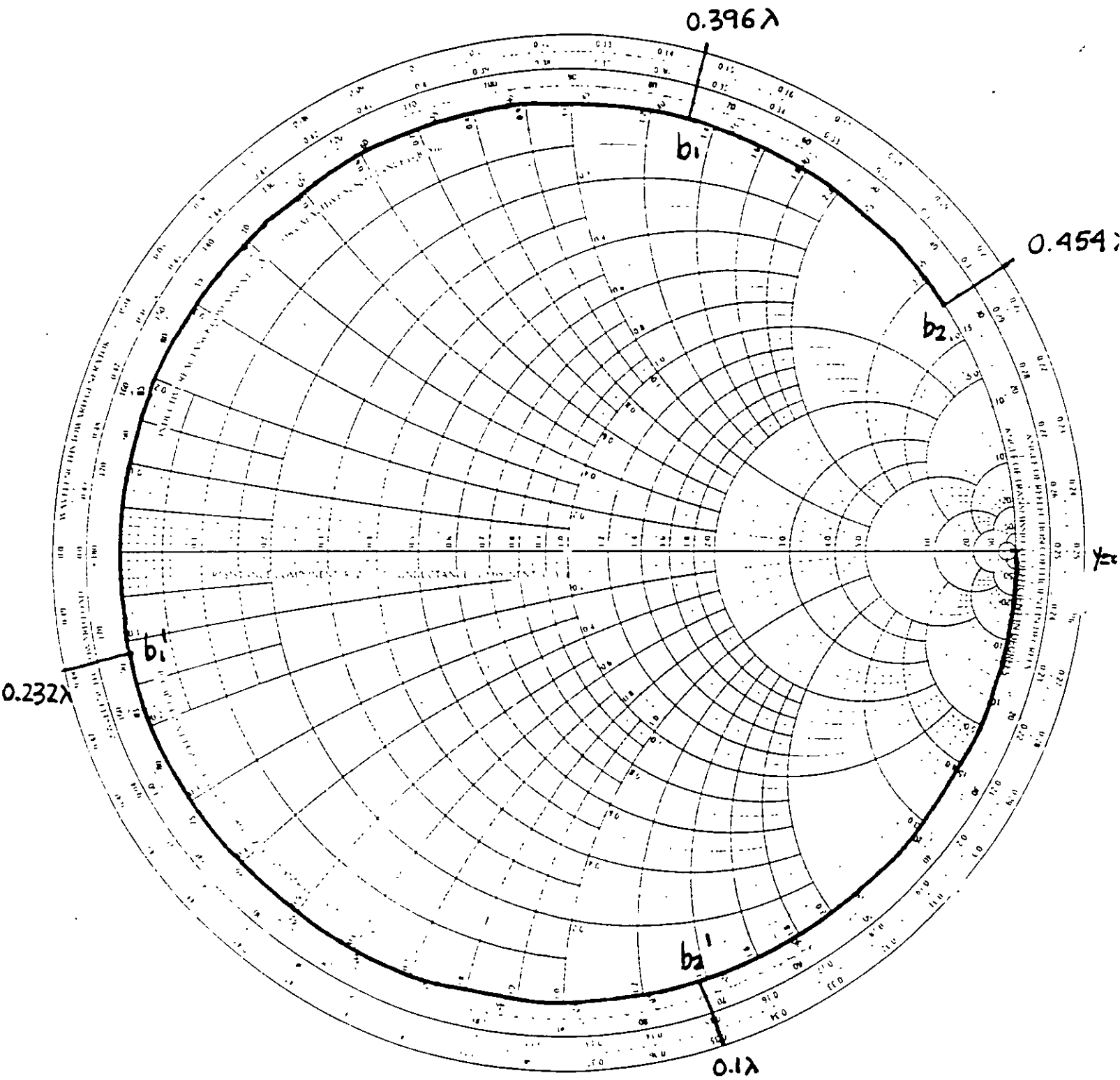
RADIALLY SCALED PARAMETERS

TOWARD LOAD										TOWARD GENERATOR									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.4  
 1.5  
 1.6  
 1.7  
 1.8  
 1.9  
 2.0  
 2.1  
 2.2  
 2.3  
 2.4  
 2.5  
 2.6  
 2.7  
 2.8  
 2.9  
 3.0  
 3.1  
 3.2  
 3.3  
 3.4  
 3.5  
 3.6  
 3.7  
 3.8  
 3.9  
 4.0  
 4.1  
 4.2  
 4.3  
 4.4  
 4.5  
 4.6  
 4.7  
 4.8  
 4.9  
 5.0  
 5.1  
 5.2  
 5.3  
 5.4  
 5.5  
 5.6  
 5.7  
 5.8  
 5.9  
 6.0  
 6.1  
 6.2  
 6.3  
 6.4  
 6.5  
 6.6  
 6.7  
 6.8  
 6.9  
 7.0  
 7.1  
 7.2  
 7.3  
 7.4  
 7.5  
 7.6  
 7.7  
 7.8  
 7.9  
 8.0  
 8.1  
 8.2  
 8.3  
 8.4  
 8.5  
 8.6  
 8.7  
 8.8  
 8.9  
 9.0  
 9.1  
 9.2  
 9.3  
 9.4  
 9.5  
 9.6  
 9.7  
 9.8  
 9.9  
 10.0

$$b_1 = 1.314 \quad b_2 = 3.38$$

$$b_1' = -0.14 \quad b_2' = -1.38$$



RADIALLY WAVELENGTHS

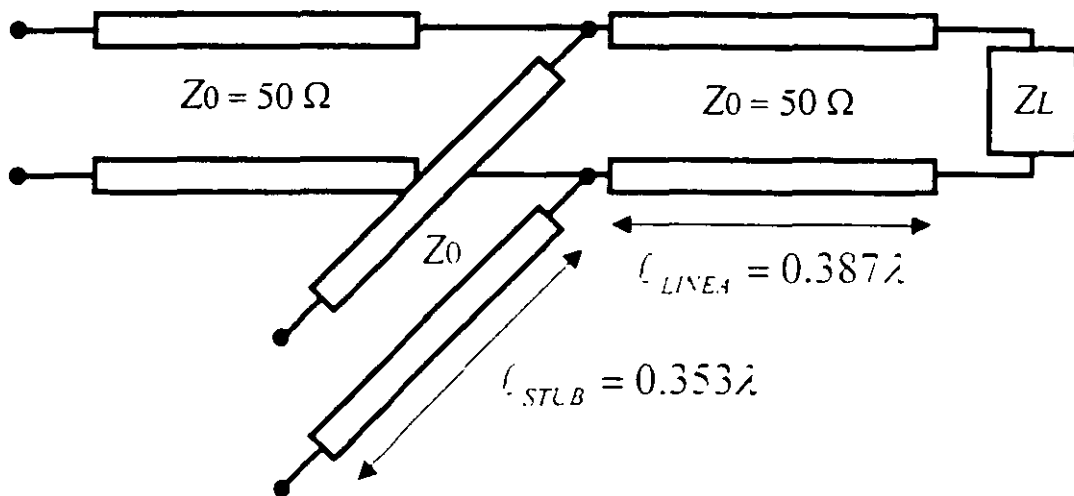
TOWARD LOAD →

← TOWARD GENERATOR

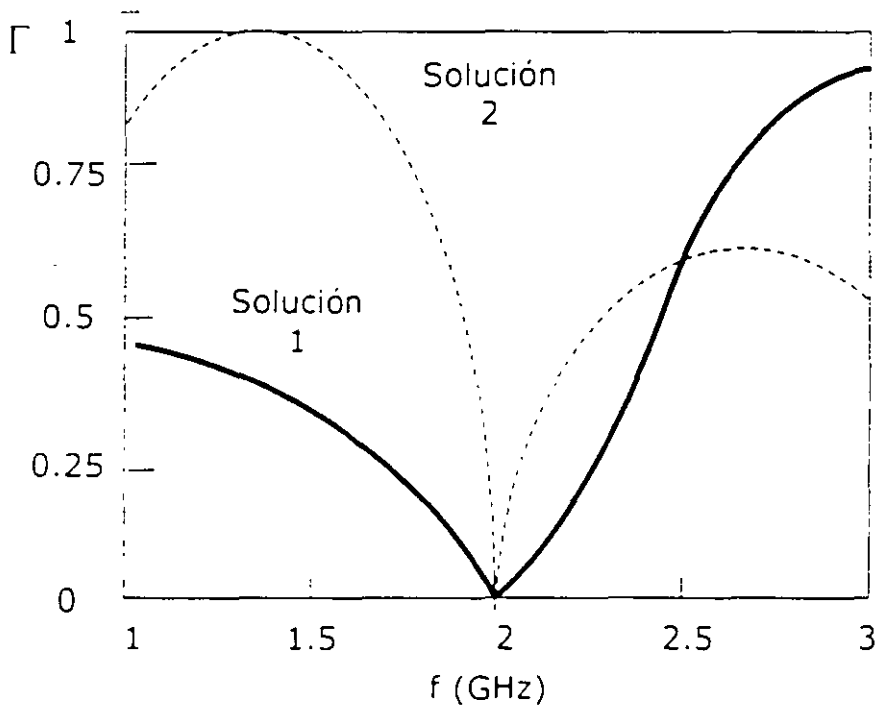
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0

ATTN: JIM  
 101 JONES BLVD  
 MILWAUKEE, WI 53201  
 TEL: 414-224-1000

## Solución 2



Los coeficientes de reflexión de los dos circuitos anteriores se presentan en la siguiente gráfica:

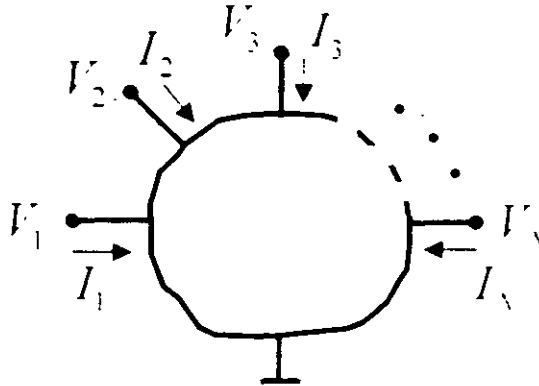


Aunque ambos circuitos acoplan para la frecuencia de diseño tienen diferente respuesta en la frecuencia.



# Representación de Redes

Red de N puertos



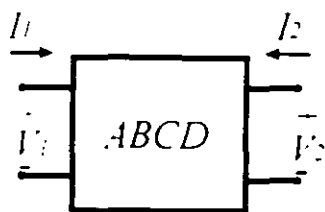
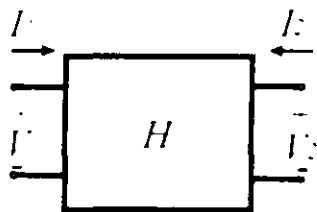
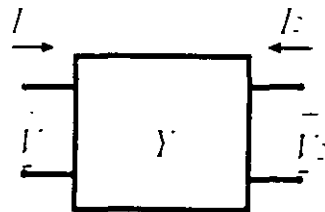
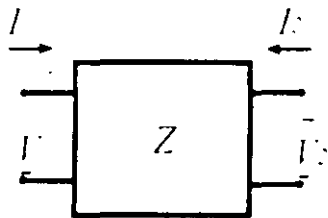
Red de 2 puertos



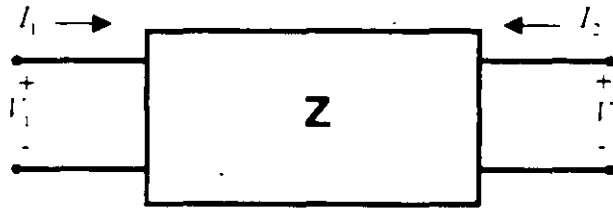
$$u_1 = R_{11}w_1 + R_{12}w_2$$

$$u_2 = R_{21}w_1 + R_{22}w_2$$

Donde  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w_1$  y  $w_2$  pueden ser cualquiera de las variables  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ , y los términos  $R_{ij}$  son los parámetros del bipuerto.



# Parámetros Z



$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

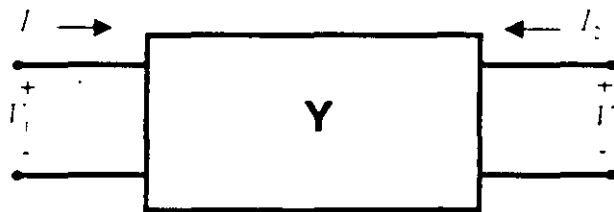
$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

# Parámetros Y



$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

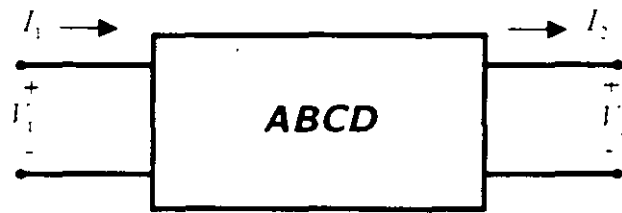
$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

# La Matriz de Transmisión ABCD



$$V_1 = AV_2 + BI_2$$

$$I_1 = CV_2 + DI_2$$

En forma matricial

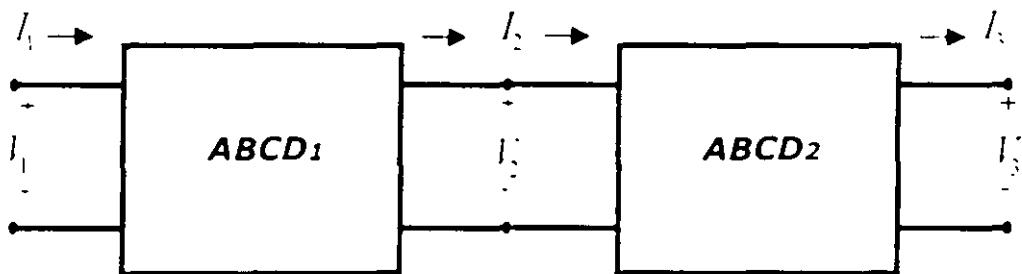
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$B = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$C = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$D = \frac{I_1}{I_2} \Big|_{I_2=0}$$



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

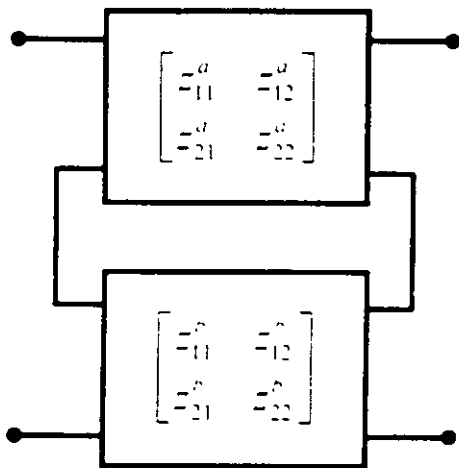
$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{eq} & B_{eq} \\ C_{eq} & D_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

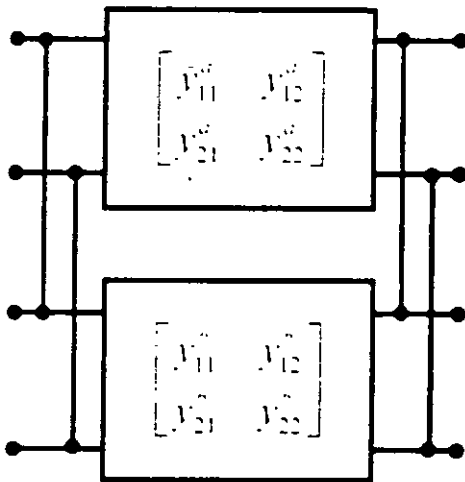
# Tipos de Conexiones

## Conexión en Serie



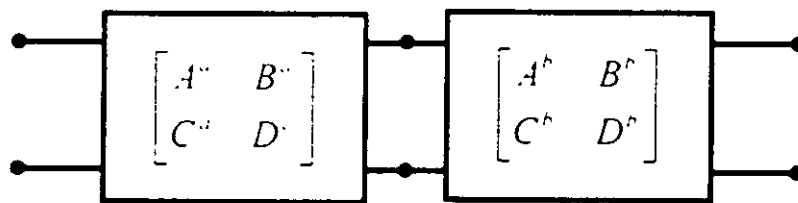
$$\begin{bmatrix} Z_{11}^T & Z_{12}^T \\ Z_{21}^T & Z_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^a + Z_{11}^b & Z_{12}^a + Z_{12}^b \\ Z_{21}^a + Z_{21}^b & Z_{22}^a + Z_{22}^b \end{bmatrix}$$

## Conexión en Derivación



$$\begin{bmatrix} Y_{11}^T & Y_{12}^T \\ Y_{21}^T & Y_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^a + Y_{11}^b & Y_{12}^a + Y_{12}^b \\ Y_{21}^a + Y_{21}^b & Y_{22}^a + Y_{22}^b \end{bmatrix}$$

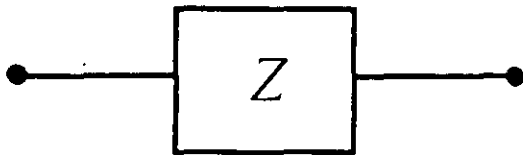
## Conexión en Cascada



$$\begin{bmatrix} A^T & B^T \\ C^T & D^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a & B^a \\ C^a & D^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^b & B^b \\ C^b & D^b \end{bmatrix}$$

# Representación de Elementos por Parámetros *ABCD*

Impedancia en serie

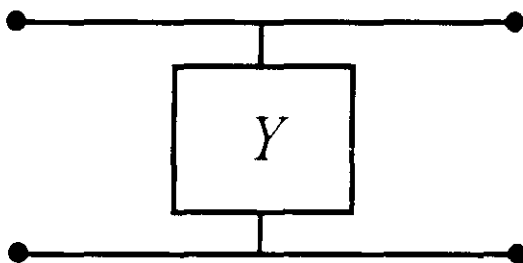


$$A = 1 \quad B = Z$$

$$C = 0 \quad D = 1$$



Admitancia en derivación



$$A = 1 \quad B = 0$$

$$C = Y \quad D = 1$$

Línea sin pérdidas en serie



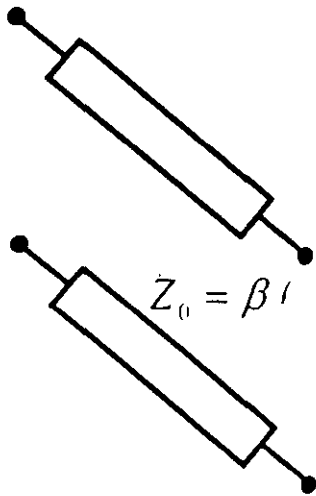
$$Z_0, \beta \ell$$



$$A = \cos \beta \ell \quad B = jZ_0 \sin \beta \ell$$

$$C = jY_0 \sin \beta \ell \quad D = \cos \beta \ell$$

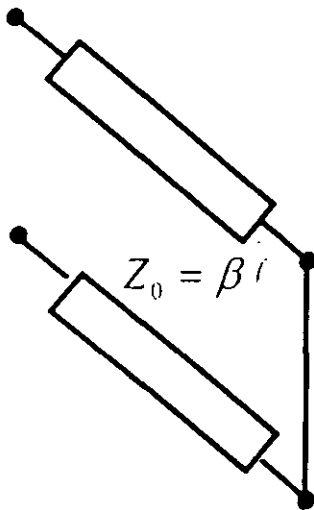
## Stub en derivación abierto



$$A = 1 \quad B = 0$$

$$C = jY_0 \tan \beta l \quad D = 1$$

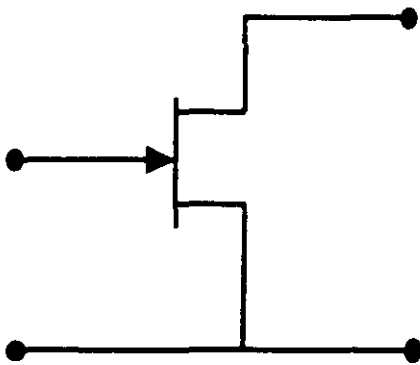
## Stub en derivación cerrado



$$A = 1 \quad B = 0$$

$$C = -jY_0 \cot \beta l \quad D = 1$$

## Transistor



$$ABCD_T = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}$$

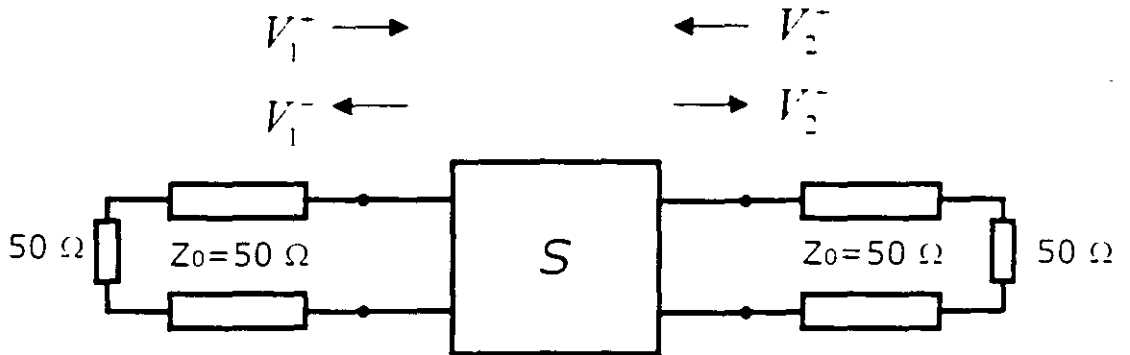
$$A_T = \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$$

$$B_T = Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$$

$$C_T = Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$$

$$D_T = \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$$

# Parámetros de Dispersión S



$$\begin{bmatrix} V_1^- \\ V_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^+ \\ V_2^+ \end{bmatrix}$$

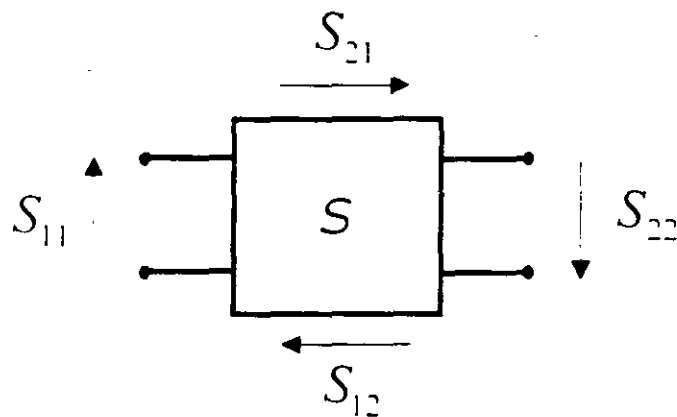
$$S_{ij} = \frac{V_i^-}{V_j^+} \quad \begin{matrix} V_k^+ = 0 \\ k \neq j \end{matrix}$$

$$S_{11} = \frac{V_1^-}{V_1^+} \quad V_2^+ = 0$$

$$S_{12} = \frac{V_1^-}{V_2^+} \quad V_1^+ = 0$$

$$S_{21} = \frac{V_2^-}{V_1^+} \quad V_2^+ = 0$$

$$S_{22} = \frac{V_2^-}{V_2^+} \quad V_1^+ = 0$$



- S<sub>11</sub>**, Coeficiente de Reflexión en el puerto 1
- S<sub>22</sub>**, Coeficiente de Reflexión en el puerto 2
- S<sub>21</sub>**, Coeficiente de Transmisión en Directa
- S<sub>12</sub>**, Coeficiente de Transmisión en Inversa

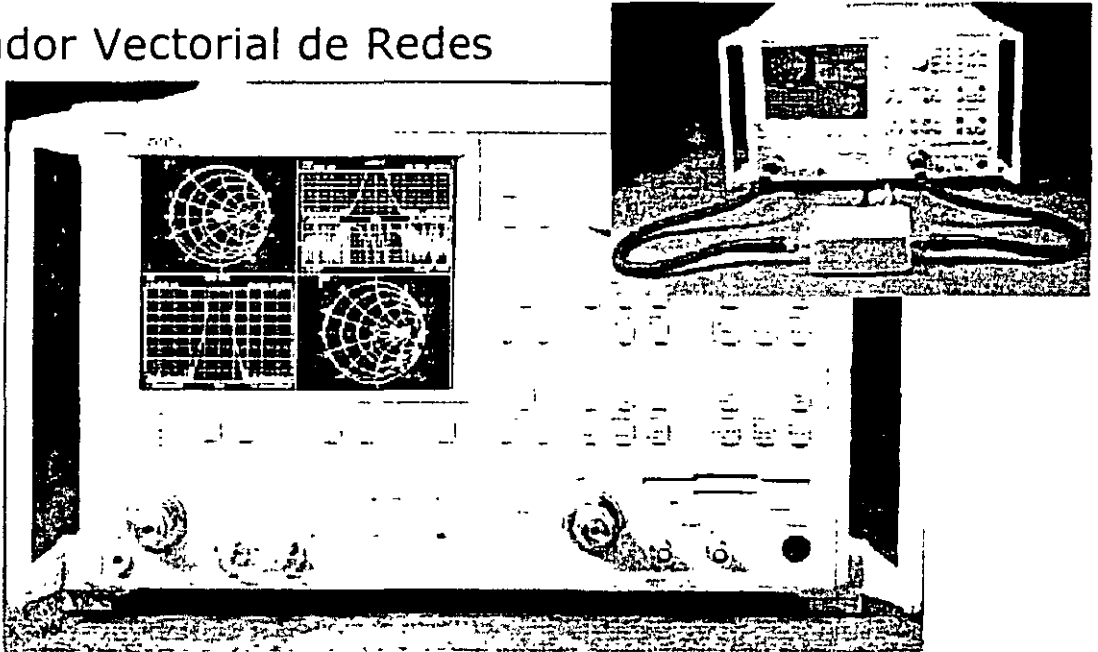
	$s$	$z$	$y$	$ABCD$
$S_{11}$	$S_{11}$	$(Z_{11} + Z_0)(Z_2 + Z_0) - Z_{12}Z_{21}$ $\Delta Z$	$(Y_0 + Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}$ $\Delta Y$	$\frac{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$
$S_{12}$	$S_{12}$	$\frac{2Z_{12}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{12}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2(AD - BC)}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$
$S_{21}$	$S_{21}$	$\frac{2Z_{21}Z_0}{\Delta Z}$	$\frac{-2Y_{21}Y_0}{\Delta Y}$	$\frac{2}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$
$S_{22}$	$S_{22}$	$(Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}$ $\Delta Z$	$(Y_0 + Y_{11})(Y_0 + Y_{22}) + Y_{12}Y_{21}$ $\Delta Y$	$\frac{-A + B/Z_0 - CZ_0 + D}{A + B/Z_0 + CZ_0 + D}$
$Z_{11}$	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{11}$	$\frac{Y_{22}}{ Y }$	$\frac{A}{C}$
$Z_{12}$	$Z_0 \frac{2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{12}$	$\frac{-Y_{12}}{ Y }$	$\frac{AD - BC}{C}$
$Z_{21}$	$Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{21}$	$\frac{-Y_{21}}{ Y }$	$\frac{1}{C}$
$Z_{22}$	$Z_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$Z_{22}$	$\frac{Y_{11}}{ Y }$	$\frac{D}{C}$
$Y_{11}$	$Y_0 \frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{ Z }$	$Y_{11}$	$\frac{D}{B}$
$Y_{12}$	$Y_0 \frac{-2S_{12}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{12}}{ Z }$	$Y_{12}$	$\frac{BC - AD}{B}$
$Y_{21}$	$Y_0 \frac{-2S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{-Z_{21}}{ Z }$	$Y_{21}$	$\frac{-1}{B}$
$Y_{22}$	$Y_0 \frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{ Z }$	$Y_{22}$	$\frac{A}{B}$
$A$	$\frac{(1 + S_{11})(1 - S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}}$	$A$
$B$	$Z_0 \frac{(1 + S_{11})(1 + S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{-1}{Y_{21}}$	$B$
$C$	$\frac{1}{Z_0} \frac{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{- Y }{Y_{21}}$	$C$
$D$	$\frac{(1 - S_{11})(1 + S_{22}) + S_{12}S_{21}}{2S_{21}}$	$\frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$D$

$|Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ ;  $|Y| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ ;  $\Delta Y = (Y_{11} + Y_0)(Y_{22} + Y_0) - Y_{12}Y_{21}$ ;  $\Delta Z = (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21}$ ;  $Y_0 = 1/Z_0$

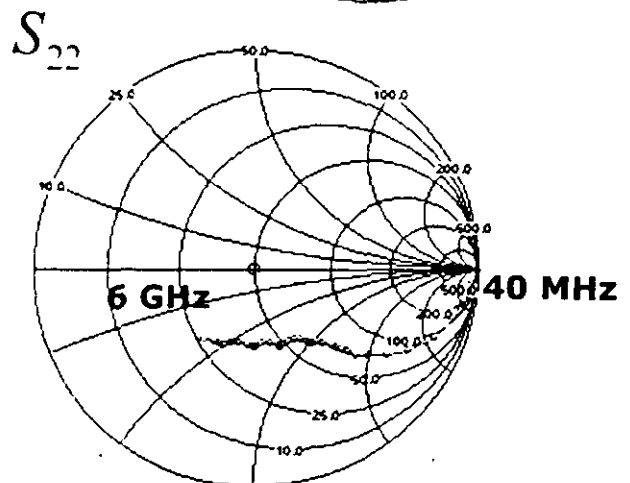
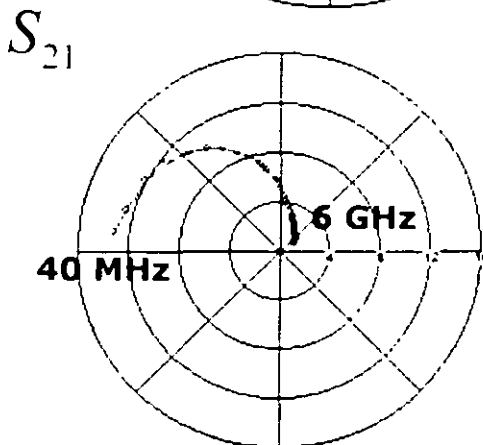
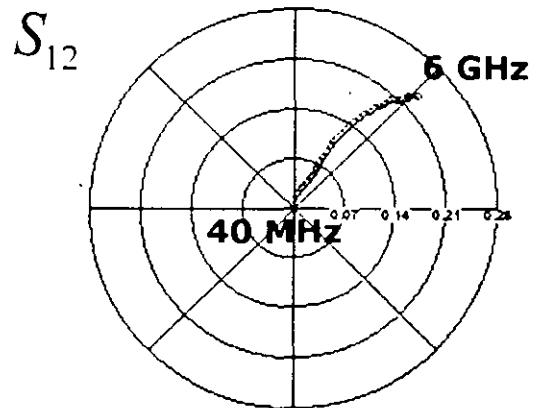
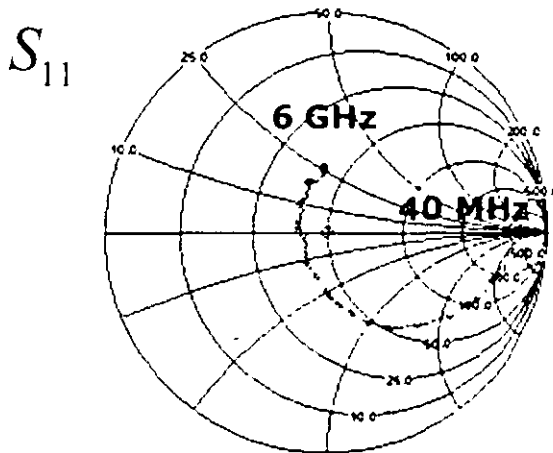


# Medición de los Parámetros de Dispersión S

Analizador Vectorial de Redes

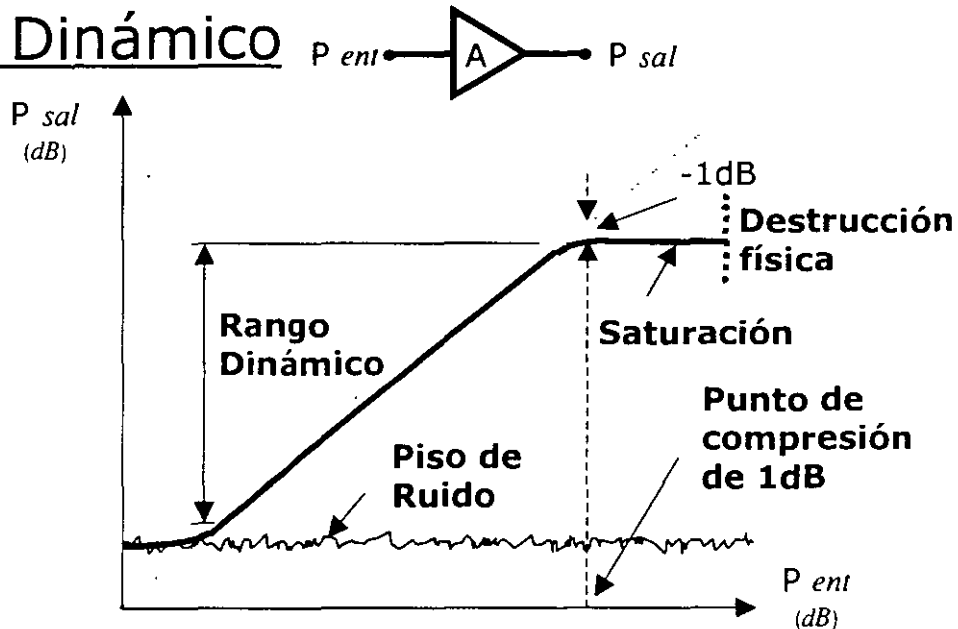


Parámetros de un transistor de 40 MHz a 6 GHz



# Ruido

## Rango Dinámico



## Tipos de Ruido

**Ruido Térmico.** Producido por las vibraciones térmicas aleatorias de los portadores de carga en un conductor cuando la temperatura se ubica por arriba del cero absoluto.

**Ruido de Disparo.** Resultado de los impulsos de corriente causados por el flujo de portadores de carga en una válvula electrónica o en un semiconductor.

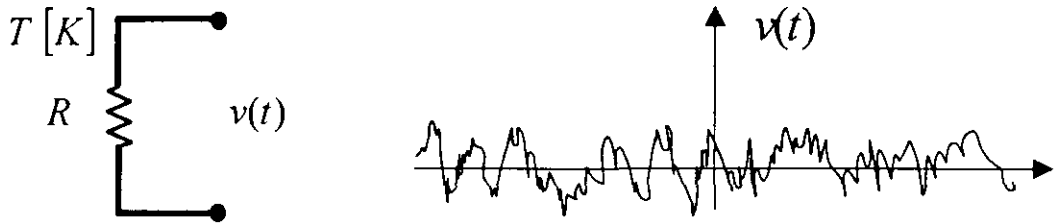
**Ruido Flicker o  $1/f$ .** Varía inversamente proporcional con la frecuencia. La generación y recombinación de portadores de carga en la superficie de los materiales semiconductores son factores importantes en su generación.

**Ruido Plasmático.** Es causado por el movimiento aleatorio de las cargas en un gas ionizado como el plasma o la ionosfera.

**Ruido Cuántico.** Es debido a la naturaleza cuántica de los portadores de carga y los fotones. Este ruido es relativamente insignificante en comparación con las otras fuentes de ruido.

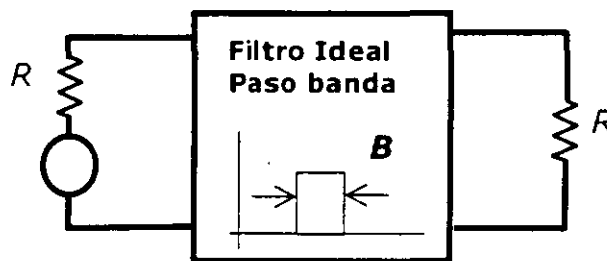
**Para frecuencias mayores a los 500 MHz la fuente de ruido dominante es el ruido térmico.**

# Potencia de Ruido



**Voltaje de Ruido**  $v_n = \sqrt{4kTBR}$

**Circuito equivalente de una resistencia con ruido entregando máxima potencia a una carga a través de un filtro paso banda ideal**



**Potencia de Ruido**  $P_n = kTB$

Donde:

$$k = 1.380 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

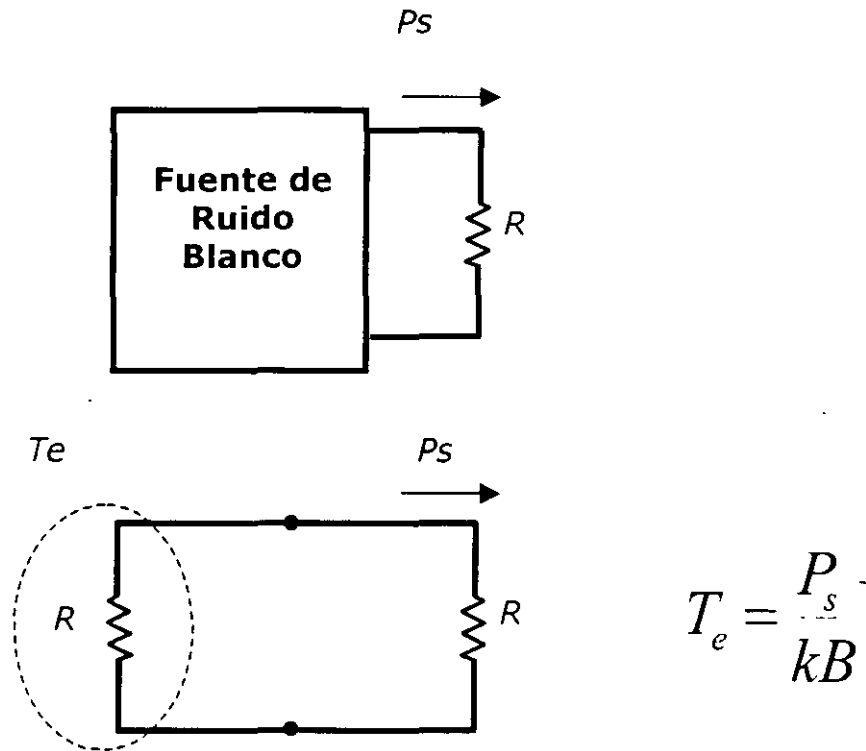
$T$  es la temperatura en grados Kelvin

$B$  es el ancho de banda del sistema en Hz

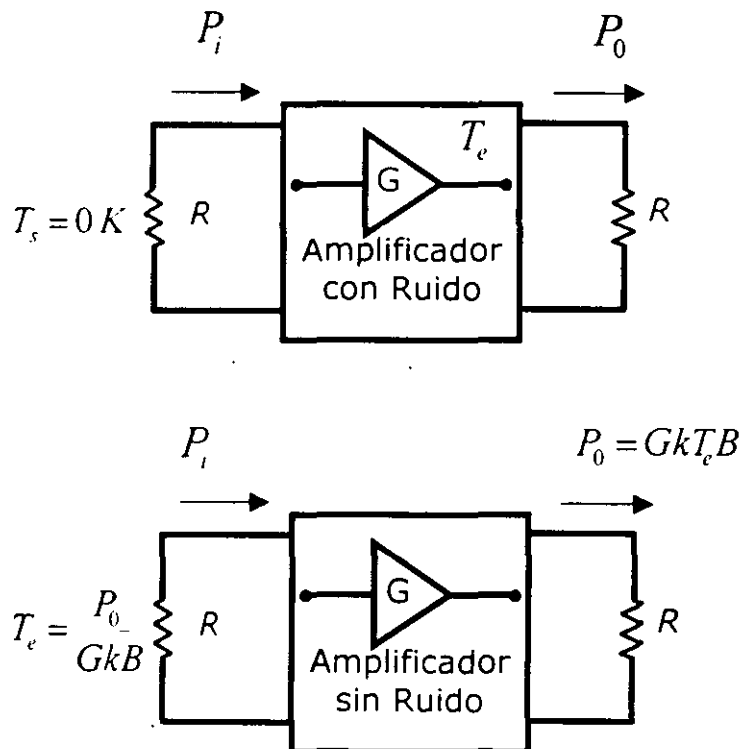
1. **Cuando  $B \rightarrow 0$ ,  $P_n \rightarrow 0$ . Sistemas con anchos de banda pequeños colectan menos ruido.**
2. **Cuando  $T \rightarrow 0$ ,  $P_n \rightarrow \infty$ . Sistemas y componentes enfriados generan menos potencia de ruido.**

# Temperatura Equivalente de Ruido

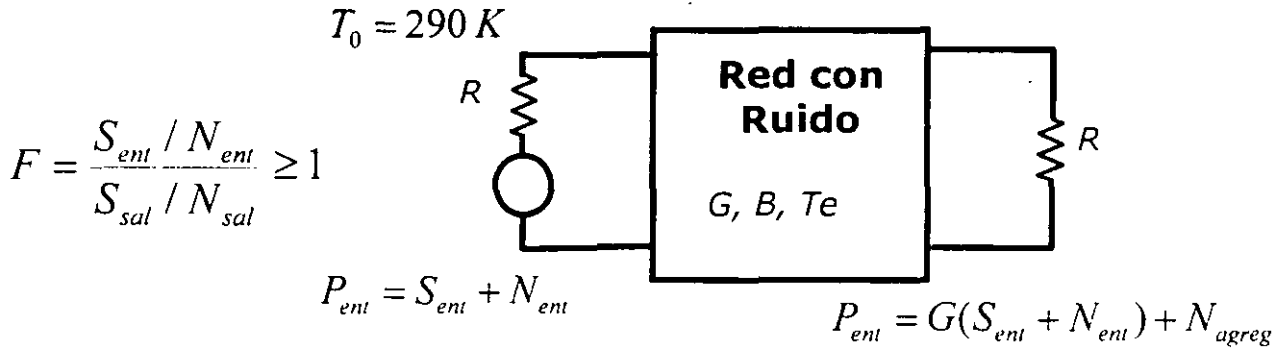
Temperatura equivalente de ruido ( $T_e$ ) de una fuente de ruido blanco.



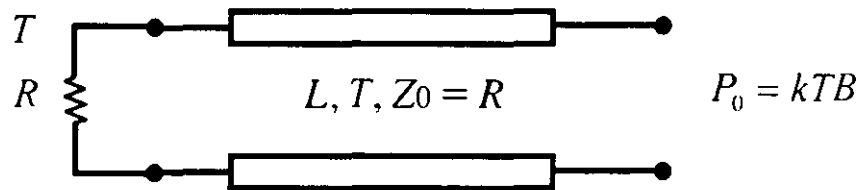
Temperatura equivalente de ruido ( $T_e$ ) de un amplificador.



# Figura de Ruido



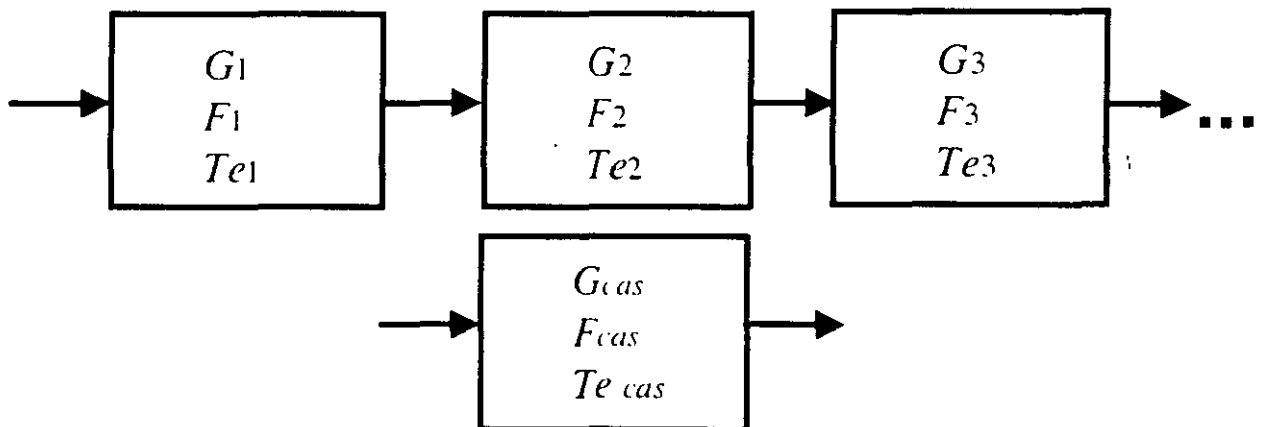
## Figura de Ruido de una Línea de Transmisión con Pérdidas



$$F = L$$

En donde  $L$  son las pérdidas

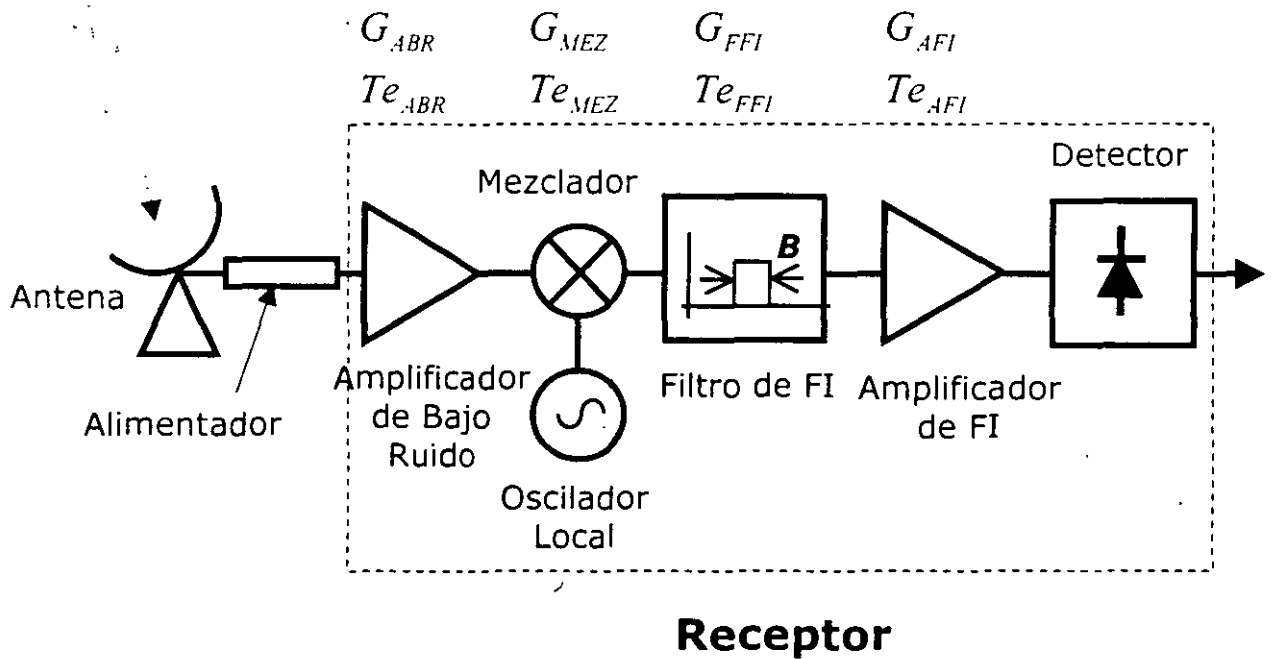
## Figura y Temperatura de Ruido de Redes en Cascada



$$T_{cas} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1 G_2} + \dots$$

$$F_{cas} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots$$

# Diagrama a bloques del Receptor



$$Te_{REC} = Te_{ABR} + \frac{Te_{MEZ}}{G_{ABR}} + \frac{Te_{FFI}}{G_{ABR}G_{MEZ}} + \frac{Te_{AFI}}{G_{ABR}G_{MEZ}G_{FFI}}$$

Para tener un receptor de alta sensibilidad, entonces se requiere:

- a) Antena de ganancia y directividad altas
- b) Temperatura de ruido baja

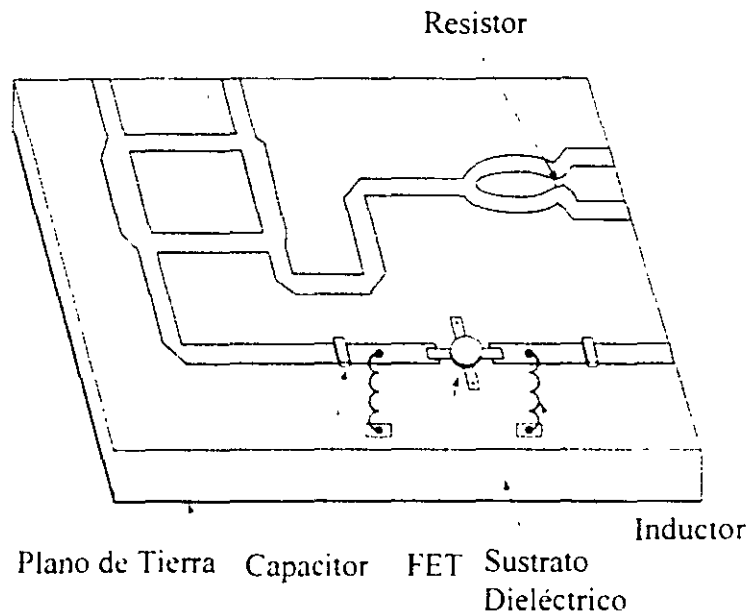
Consideraciones:

$$\text{\$ de antena} \sim d^2$$

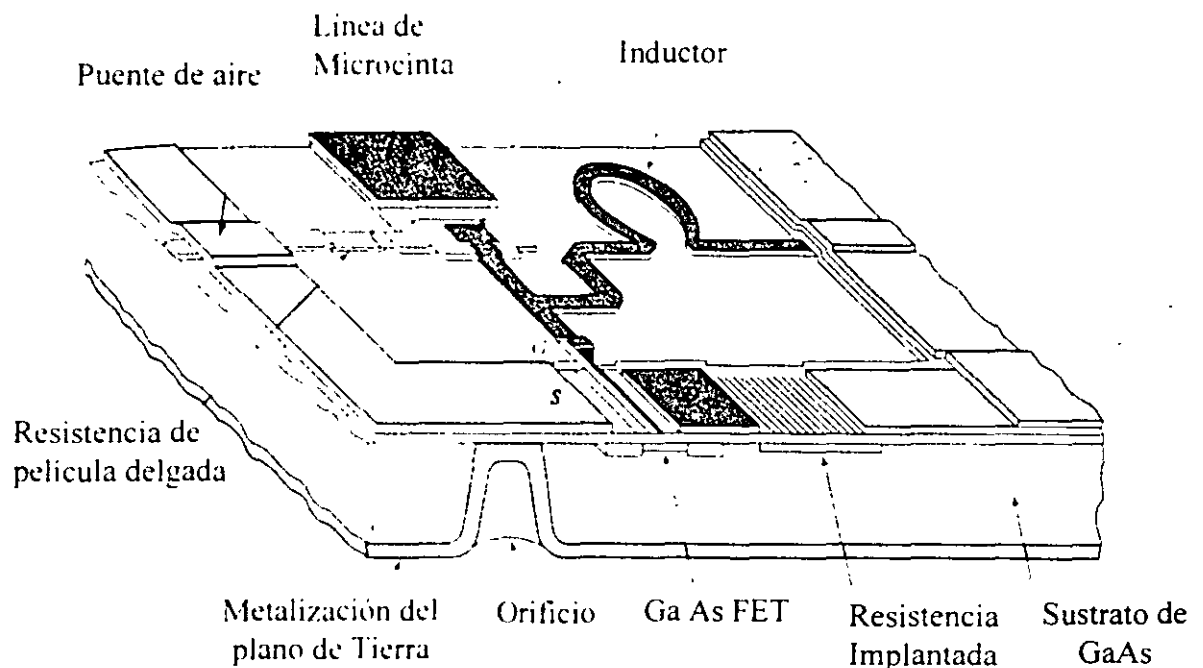
**Debido al avance en las tecnologías de semiconductores es posible obtener dispositivos con figuras de ruido muy bajas a un costo relativamente bajo**

# Tecnologías en la fabricación de amplificadores para microondas

## Tecnología Híbrida



## Tecnología Monolítica



# **Tipos de Amplificadores**

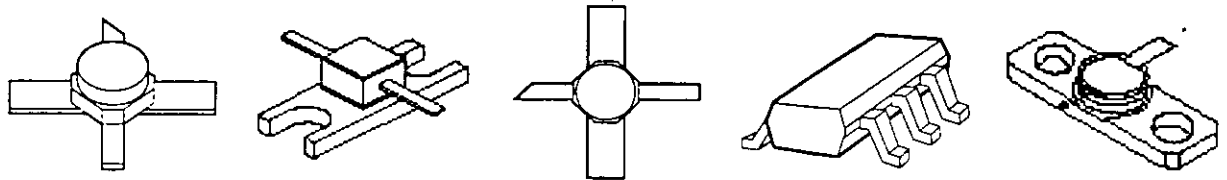
- Máxima Ganancia
- Ruido Mínimo
- Ganancia y Ruido Específicos
- Alta Potencia

# **Especificaciones de Diseño**

- Rango de Frecuencia
- Ganancia
- Variación de Ganancia
- Figura de Ruido
- Relaciones de Onda Estacionaria



# Transistores para Microondas



## Características

### •TBJ

- Bajo Costo
- Figura de Ruido Alta
- Estables
- Frecuencias de Operación hasta 10 GHz

### •HBT

- Figura de Ruido Media
- Alta Capacidad de Potencia
- Frecuencias de Operación hasta 60 GHz

### •FET

#### GaAS

- Baja Figura de Ruido
- Frecuencias de Operación hasta 20 GHz

#### HEMT

- Ultra Baja Figura de Ruido
- Condicionalmente Estables
- Frecuencias de Operación hasta 100 GHz

# 2-18 GHz Ultra Low Noise Pseudomorphic HEMT

## Technical Data

### Features

- PHEMT Technology
- Ultra-Low Noise Figure: 0.5 dB Typical at 12 GHz  
0.3 dB Typical at 4 GHz
- High Associated Gain: 12 dB Typical at 12 GHz  
17 dB Typical at 4 GHz
- Low Parasitic Ceramic Microstrip Package
- Tape-and-Reel Packing Option Available

### Applications

- 12 GHz DBS LNB (Low Noise Block)
- 4 GHz TVRO LNB (Low Noise Block)
- Ultra-Sensitive Low Noise Amplifiers

Note: 1. See Noise Parameter Table

### Description

Hewlett-Packard's ATF-36077 is an ultra-low-noise Pseudomorphic High Electron Mobility Transistor (PHEMT), packaged in a low parasitic, surface-mountable ceramic package. Properly matched, this transistor will provide typical 12 GHz noise figures of 0.5 dB, or typical 4 GHz noise figures of 0.3 dB. Additionally, the ATF-36077 has very low noise resistance, reducing the sensitivity of noise performance to variations in input impedance match, making the design of broadband low noise amplifiers much easier. The premium sensitivity of the ATF-36077 makes this device the ideal choice for use in the first stage of extremely low noise cascades.

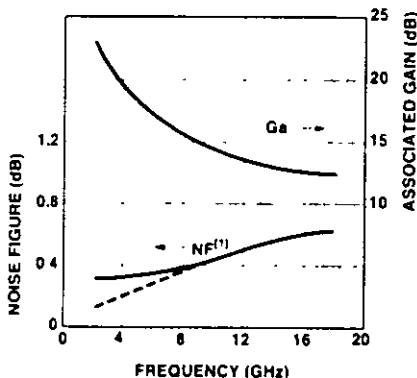
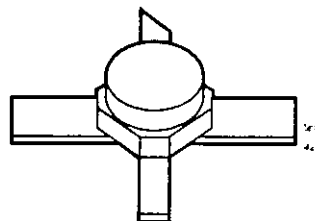


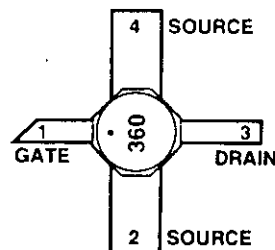
Figure 1. ATF-36077 Optimum Noise Figure and Associated Gain vs. Frequency for  $V_{DS} = 1.5$  V,  $I_D = 10$  mA.

### ATF-36077

### 77 Package



### Pin Configuration



The repeatable performance and consistency make it appropriate for use in Ku-band Direct Broadcast Satellite (DBS) Television systems, C-band Television Receive Only (TVRO) LNAs, or other low noise amplifiers operating in the 2-18 GHz frequency range.

This GaAs PHEMT device has a nominal 0.2 micron gate length with a total gate periphery (width) of 200 microns. Proven gold based metalization systems and nitride passivation assure rugged, reliable devices.

## ATF-36077 Absolute Maximum Ratings

Symbol	Parameter	Units	Absolute Maximum <sup>[1]</sup>
V <sub>DS</sub>	Drain - Source Voltage	V	+3
V <sub>GS</sub>	Gate - Source Voltage	V	-3
V <sub>GD</sub>	Gate-Drain Voltage	V	-3.5
I <sub>D</sub>	Drain Current	mA	I <sub>dss</sub>
P <sub>T</sub>	Total Power Dissipation <sup>[3]</sup>	mW	180
P <sub>in max</sub>	RF Input Power	dBm	+10
T <sub>ch</sub>	Channel Temperature	°C	150
T <sub>STG</sub>	Storage Temperature	°C	-65 to 150

### Thermal Resistance<sup>[2,3]</sup>:

$$\theta_{ch-c} = 60^{\circ}\text{C/W}$$

#### Notes:

1. Operation of this device above any one of these parameters may cause permanent damage.
2. Measured at P<sub>dss</sub> = 15 mW and T<sub>ch</sub> = 100°C.
3. Derate at 16.7 mW/°C for T<sub>C</sub> > 139°C.

## ATF-36077 Electrical Specifications,

T<sub>C</sub> = 25°C, Z<sub>O</sub> = 50 Ω, V<sub>ds</sub> = 1.5 V, I<sub>ds</sub> = 10 mA, (unless otherwise noted).

Symbol	Parameters and Test Conditions	Units	Min.	Typ.	Max.
NF	Noise Figure <sup>[1]</sup> f = 12.0 GHz	dB		0.5	0.6
G <sub>A</sub>	Gain at NF <sup>[1]</sup> f = 12.0 GHz	dB	11.0	12.0	
g <sub>m</sub>	Transconductance V <sub>DS</sub> = 1.5 V, V <sub>GS</sub> = 0 V	mS	50	55	
I <sub>dss</sub>	Saturated Drain Current V <sub>DS</sub> = 1.5 V, V <sub>GS</sub> = 0 V	mA	15	25	45
V <sub>p10%</sub>	Pinch-off Voltage V <sub>DS</sub> = 1.5 V, I <sub>DS</sub> = 10% of I <sub>dss</sub>	V	-1.0	-0.35	-0.15

#### Note:

1. Measured in a fixed tuned environment with Γ<sub>source</sub> = 0.54 at 156°, Γ<sub>load</sub> = 0.48 at 167°.

## ATF-36077 Characterization Information,

T<sub>C</sub> = 25°C, Z<sub>O</sub> = 50 Ω, V<sub>ds</sub> = 1.5 V, I<sub>ds</sub> = 10 mA, (unless otherwise noted).

Symbol	Parameters and Test Conditions	Units	Typ.	
NF	Noise Figure (Tuned Circuit)	f = 4 GHz	0.3 <sup>[2]</sup>	
		f = 12 GHz	0.5	
G <sub>A</sub>	Gain at Noise Figure (Tuned Circuit)	f = 4 GHz	17	
		f = 12 GHz	12	
S <sub>12 off</sub>	Reverse Isolation f = 12 GHz, V <sub>DS</sub> = 1.5 V, V <sub>GS</sub> = -2 V	dB	14	
P <sub>1dB</sub>	Output Power at 1 dB Gain Compression	f = 4 GHz	5	
		f = 12 GHz	5	
V <sub>GS 10mA</sub>	Gate to Source Voltage for I <sub>DS</sub> = 10 mA	V <sub>DS</sub> = 1.5 V	V	-0.2

#### Note:

- 2 See noise parameter table.

### ATF-36077 Typical Scattering Parameters,

Common Source,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $V_{DS} = 1.5 \text{ V}$ ,  $I_D = 10 \text{ mA}$

Freq. GHz	$S_{11}$		dB	$S_{21}$		dB	$S_{12}$		$S_{22}$	
	Mag.	Ang.		Mag.	Ang.		Mag.	Ang.	Mag.	Ang.
1.0	0.99	-17	14.00	5.010	163	-36.08	0.016	78	0.60	-14
2.0	0.97	-33	13.81	4.904	147	-30.33	0.030	66	0.59	-28
3.0	0.94	-49	13.53	4.745	132	-27.25	0.043	54	0.57	-41
4.0	0.90	-65	13.17	4.556	116	-25.32	0.054	43	0.55	-54
5.0	0.86	-79	12.78	4.357	102	-24.04	0.063	33	0.53	-66
6.0	0.82	-93	12.39	4.162	88	-23.17	0.069	24	0.50	-78
7.0	0.78	-107	12.00	3.981	75	-22.58	0.074	16	0.48	-89
8.0	0.75	-120	11.64	3.820	62	-22.17	0.078	8	0.46	-99
9.0	0.72	-133	11.32	3.682	49	-21.90	0.080	1	0.44	-109
10.0	0.69	-146	11.04	3.566	37	-21.71	0.082	-6	0.42	-119
11.0	0.66	-159	10.81	3.473	25	-21.57	0.083	-13	0.40	-129
12.0	0.63	-172	10.63	3.401	13	-21.44	0.085	-19	0.38	-139
13.0	0.61	-175	10.50	3.349	1	-21.32	0.086	-25	0.37	-149
14.0	0.60	-161	10.41	3.315	-12	-21.19	0.087	-32	0.35	-160
15.0	0.58	-147	10.36	3.296	-24	-21.04	0.089	-39	0.33	-171
16.0	0.57	-131	10.34	3.289	-37	-20.87	0.091	-47	0.31	-177
17.0	0.56	-114	10.34	3.289	-50	-20.69	0.092	-55	0.29	-164
18.0	0.57	-97	10.35	3.291	-64	-20.53	0.094	-65	0.26	-148

### ATF-36077 Typical "Off" Scattering Parameters,

Common Source,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $V_{DS} = 1.5 \text{ V}$ ,  $I_D = 0 \text{ mA}$ ,  $V_{GS} = -2 \text{ V}$

Freq. GHz	$S_{11}$		dB	$S_{21}$		dB	$S_{21}$		$S_{22}$	
	Mag.	Ang.		Mag.	Ang.		Mag.	Ang.	Mag.	Ang.
11.0	0.96	-139	-14.2	0.19	-43	-14.2	0.19	-43	0.97	-125
12.0	0.95	-152	-14.0	0.20	-56	-14.0	0.20	-56	0.97	-137
13.0	0.94	-166	-13.8	0.20	-69	-13.8	0.20	-68	0.96	-149

## ATF-36077 Typical Noise Parameters, Common Source, $Z_0 = 50 \Omega$ , $V_{DS} = 1.5 \text{ V}$ , $I_D = 10 \text{ mA}$

Freq. GHz	$F_{min}^{[1]}$ dB	$\Gamma_{opt}$		$R_n/Z_0$
		Mag.	Ang.	
1	0.30	0.95	12	0.40
2	0.30	0.90	25	0.20
4	0.30	0.81	51	0.17
6	0.30	0.73	76	0.13
8	0.37	0.66	102	0.09
10	0.44	0.60	129	0.05
12	0.50	0.54	156	0.03
14	0.56	0.48	-174	0.02
16	0.61	0.43	-139	0.05
18	0.65	0.39	-100	0.09

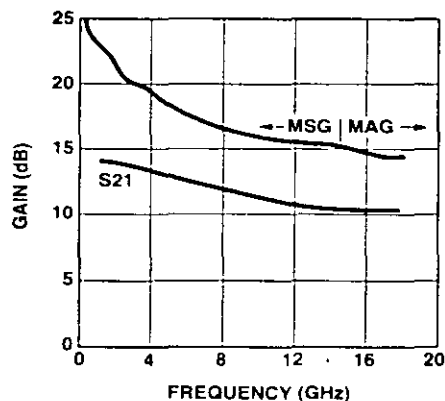


Figure 2. Maximum Available Gain, Maximum Stable Gain and Insertion Loss vs. Frequency.  $V_{DS} = 1.5 \text{ V}$ ,  $I_D = 10 \text{ mA}$ .

### Note:

- The  $F_{min}$  values at 2.4, and 6 GHz have been adjusted to reflect expected circuit losses that will be encountered when matching to the optimum reflection coefficient ( $\Gamma_{opt}$ ) at these frequencies. The theoretical  $F_{min}$  values for these frequencies are: 0.10 dB at 2 GHz, 0.20 dB at 4 GHz, and 0.29 dB at 6 GHz. Noise parameters are derived from associated s parameters, packaged device measurements at 12 GHz, and die level measurements from 6 to 18 GHz.

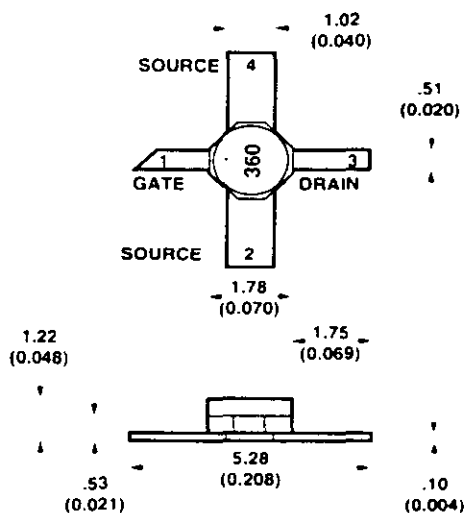
## 77 Package Dimensions

## Part Number Ordering Information

Part Number	No. of Devices	Container
ATF-36077-TR1 <sup>[2]</sup>	1000	7" Reel
ATF-36077-STR	10	strip

### Note:

- For more information, see "Tape and Reel Packaging for Semiconductor Devices," in "Communications Components" Designer's Catalog



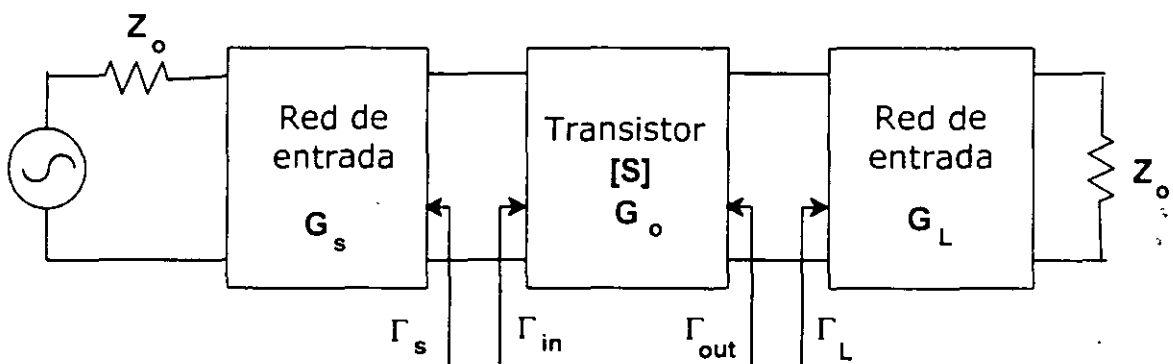
TYPICAL DIMENSIONS ARE IN MILLIMETERS (INCHES).

# Diseño de amplificadores para microondas

Parámetros S. (medidos físicamente o dados por el fabricante)

( $Z_0=50\Omega$ )

f GHz	S <sub>11</sub>	S <sub>21</sub>	S <sub>12</sub>	S <sub>22</sub>
3.0	0.80/-89°	2.86/99°	0.03/-56°	0.76/-41°
4.0	0.72/-116°	2.60/76°	0.03/-57°	0.73/-54°
5.0	0.66/-142°	2.39/54°	0.03/-62°	0.72/-68°



$\Gamma_s$ , coeficiente de reflexión a la salida de la red de entrada.

$\Gamma_L$ , coeficiente de reflexión a la entrada de la red de salida.

$\Gamma_{in}$ , coeficiente de reflexión a la entrada del transistor.

$\Gamma_{out}$ , Coeficiente de reflexión a la salida del transistor.

$$G_T = \frac{1 - \Gamma_s^2}{1 - \Gamma_{in}\Gamma_s} S_{21}^2 \frac{1 - \Gamma_L^2}{1 - S_{22}\Gamma_L}$$

$$G_T = G_S G_0 G_L$$

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad \Gamma_{out} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_S}{1 - S_{11}\Gamma_S}$$

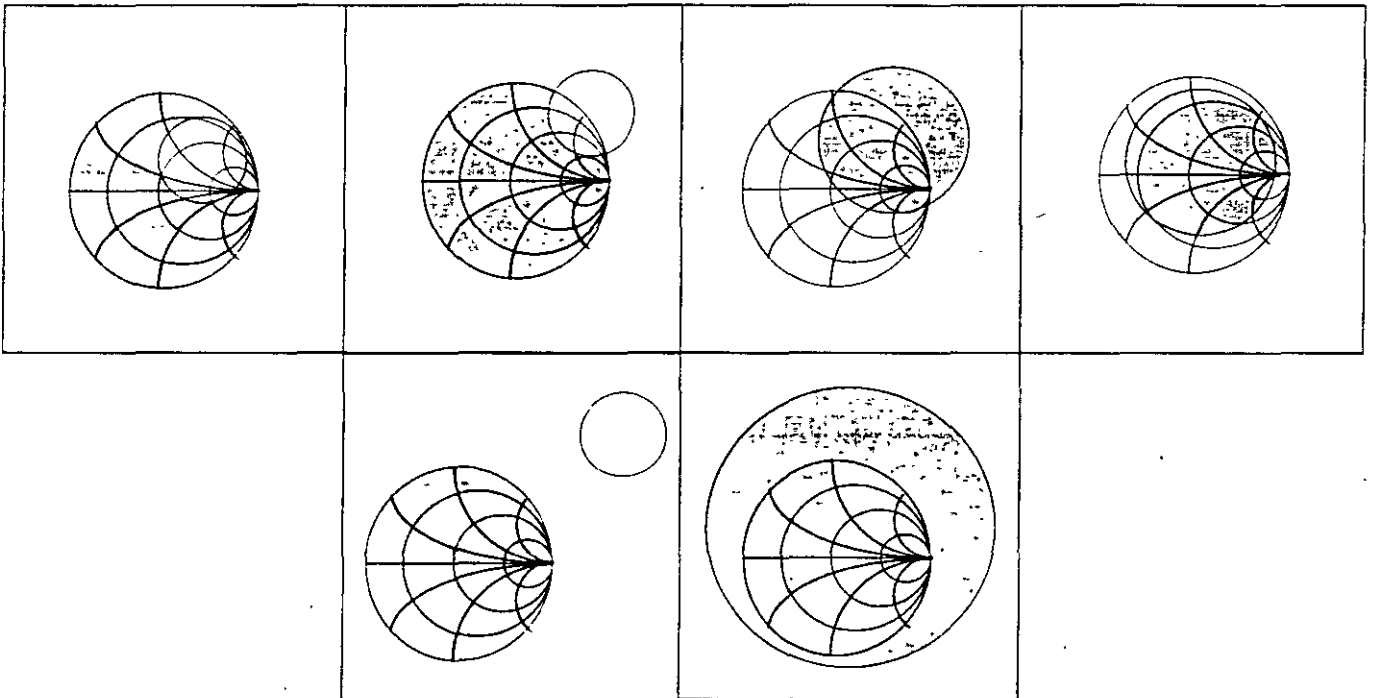
Quando el dispositivo es unilateral ( $S_{12}=0$ ) entonces

$$\Gamma_{in} = S_{11} \quad \Gamma_{out} = S_{22}$$

# Estabilidad

Cuando en una red activa el coeficiente de transmisión en inversa ( $S_{12}$ ) es diferente de cero, es posible que se presente realimentación positiva que provoque oscilaciones.

Con los parámetros de dispersión es posible graficar los círculos de estabilidad en la entrada y en la salida. En la siguiente figura la parte sombreada corresponde a la región estable. Estos círculos son dependientes de la frecuencia.



En los primeros cuatro casos se tiene estabilidad condicional, lo que quiere decir que para ciertas impedancias de fuente y carga el circuito es potencialmente inestable.

En los últimos dos casos se tiene estabilidad incondicional, lo que significa que el circuito será estable para cualquier impedancia de fuente y carga.

Las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad incondicional están dadas por el criterio de estabilidad de Rollet cuando:

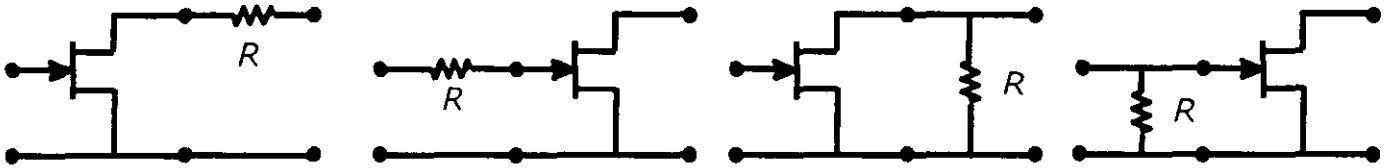
$$k = \frac{1 - S_{11}^2 - S_{22}^2 + \Delta^2}{2S_{12}S_{21}} > 1 \quad \vee \quad |\Delta| < 1$$

Donde 
$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$$

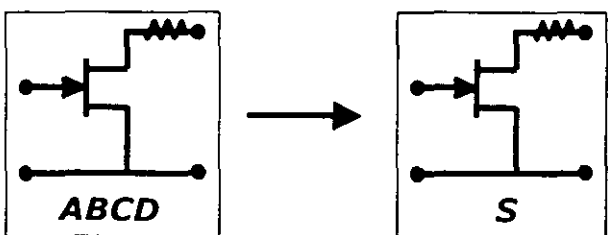
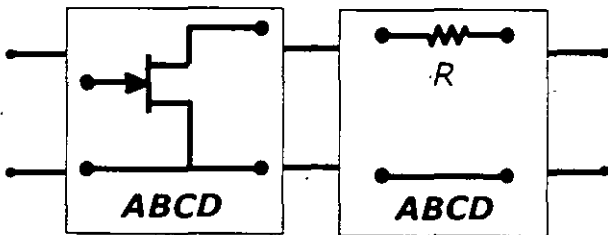
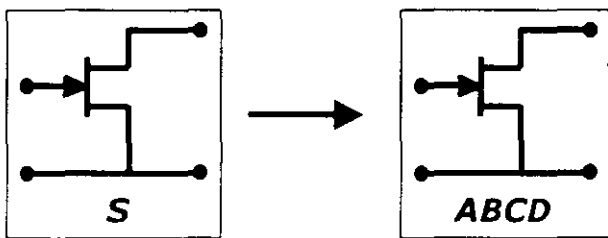
# Estabilización

Una técnica para estabilizar al transistor consiste en introducir un elemento pasivo que modifique las características de la red activa. De esta forma se obtienen nuevos parámetros de dispersión en donde las características de reflexión y transmisión han sido modificadas de tal forma que se cumpla con el criterio de estabilidad.

Algunas redes de estabilización son mostradas a continuación:



Se va a considerar que el elemento que se introduce formará parte ahora de la red activa. Por lo que para encontrar los parámetros de dispersión modificados y dado que los bipuertos están conectados en cascada se trabajará con los parámetros  $ABCD$ . Para esto se requiere convertir primero los parámetros  $S$  del transistor a parámetros  $ABCD$  y multiplicar según corresponda por la matriz  $ABCD$  del resistor, tomando en cuenta el orden en el que se encuentran conectados dado que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Después la matriz resultante se convierte a parámetros  $S$  y se evalúa nuevamente la estabilidad.



Matriz  $ABCD$  de red activa modificada

$$\begin{bmatrix} A^{EQ} & B^{EQ} \\ C^{EQ} & D^{EQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{TRANS} & B^{TRANS} \\ C^{TRANS} & D^{TRANS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{RES} & B^{RES} \\ C^{RES} & D^{RES} \end{bmatrix}$$

Matriz  $ABCD$  del Transistor

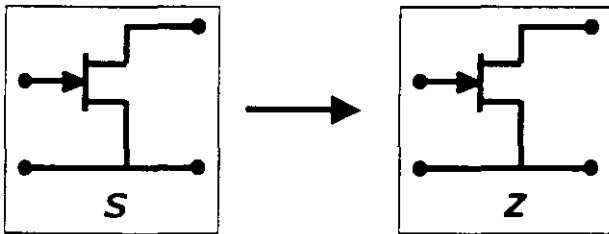
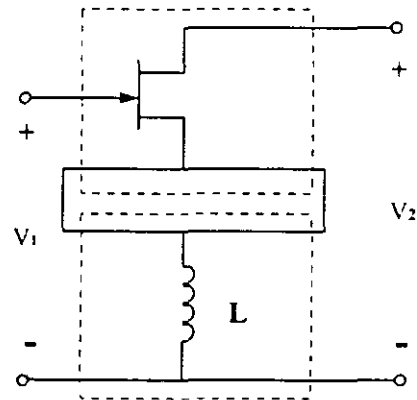
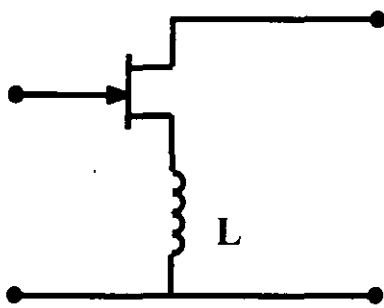
Matriz  $ABCD$  del Resistor



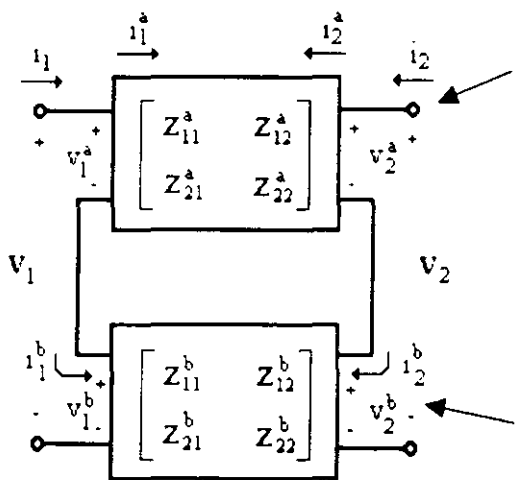
# Estabilización de Amplificadores de Bajo Ruido

Para amplificadores de bajo ruido se utiliza un inductor para estabilizar al transistor, dado que idealmente es un elemento sin pérdidas. Ahora la estabilización se lleva a cabo en dos etapas, primero se estabiliza dentro del ancho de banda del amplificador y después se estabiliza para todas las frecuencias de operación del transistor.

## a) Estabilización en banda



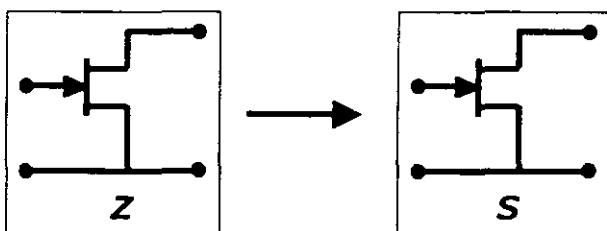
Conversión de Parámetros



Bipuerto del Transistor

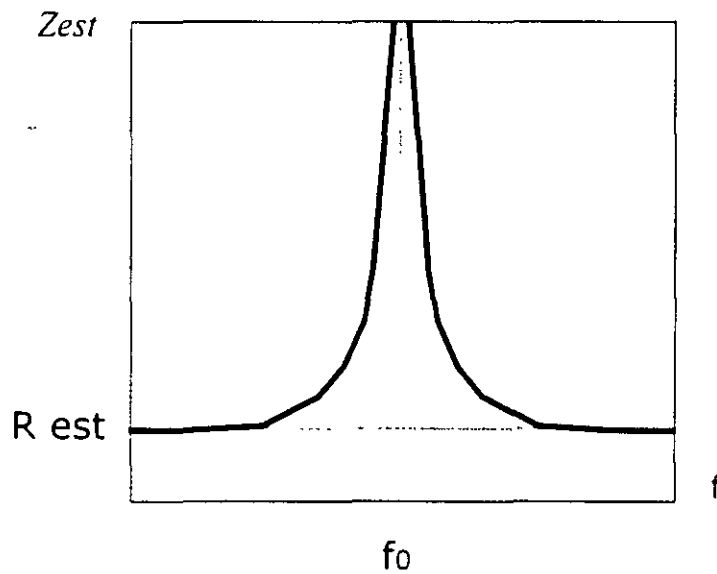
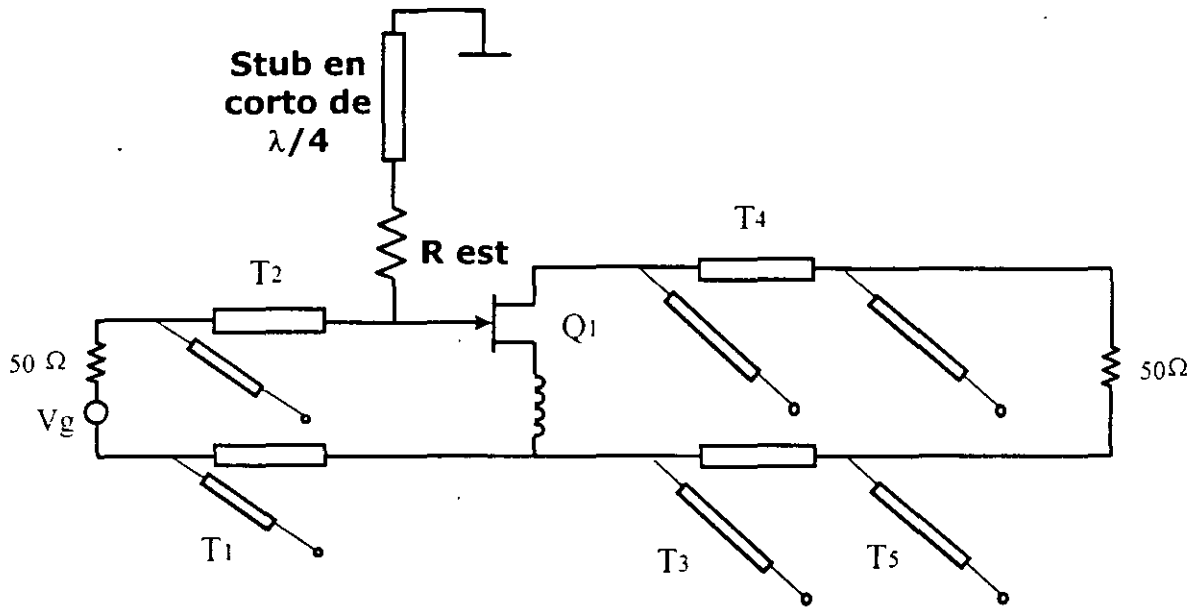
$$\begin{bmatrix} Z_{11}^{EQ} & Z_{12}^{EQ} \\ Z_{21}^{EQ} & Z_{22}^{EQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^{TRANS} + Z_{11}^{RES} & Z_{12}^{TRANS} + Z_{12}^{RES} \\ Z_{21}^{TRANS} + Z_{21}^{RES} & Z_{22}^{TRANS} + Z_{22}^{RES} \end{bmatrix}$$

Bipuerto del Inductor

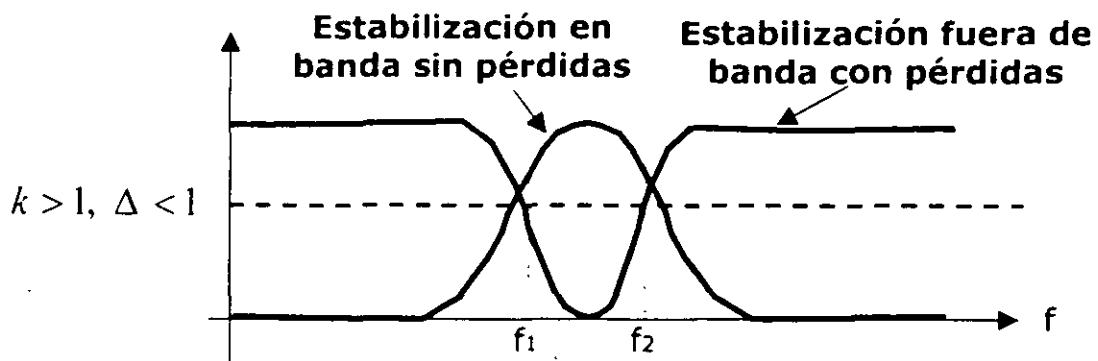


Conversión de Parámetros

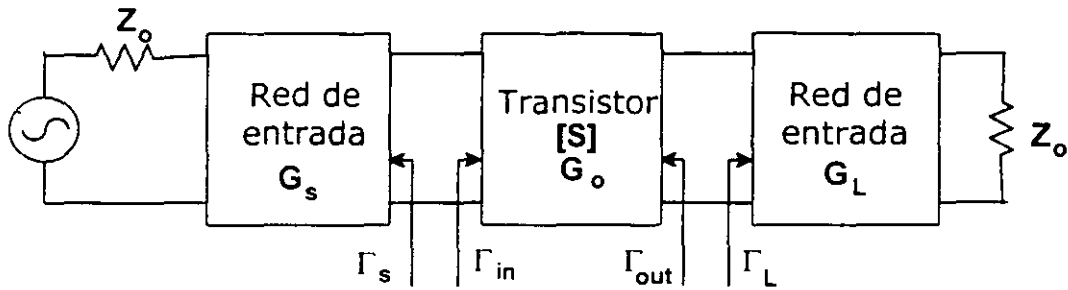
## b) Estabilización fuera de banda



El *stub* cerrado de longitud  $\lambda/4$  desconecta el resistor de estabilización dentro del ancho de banda para que no contribuya al incremento de ruido. De esta forma dicho resistor solo influye en las frecuencias fuera del ancho de banda para obtener la estabilización del dispositivo en esas bandas.



# Diseño para Máxima Ganancia



Las condiciones para máxima transferencia de potencia están dadas cuando

$$\Gamma_{in} = \Gamma_S^* \quad \text{y para} \quad \Gamma_{out} = \Gamma_L^*$$

Las soluciones para  $\Gamma_S$  y  $\Gamma_L$  están dadas por:

$$\Gamma_S = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4C_1^2}}{2C_1} \quad \text{y} \quad \Gamma_L = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4C_2^2}}{2C_2}$$

Donde

$$B_1 = 1 + S_{11}^2 - S_{22}^2 - \Delta^2$$

$$B_2 = 1 + S_{22}^2 - S_{11}^2 - \Delta^2$$

$$C_1 = S_{11} - \Delta S_{22}^*$$

$$C_2 = S_{22} - \Delta S_{11}^*$$

**Ejemplo:**

Diseñar las redes de entrada y salida de un amplificador de máxima ganancia a 4 GHz usando acoplamientos con stub y línea.

f GHz	S11	S21	S12	S22
3.0	0.80/-89°	2.86/99°	0.03/-56°	0.76/-41°
4.0	0.72/-116°	2.60/76°	0.03/-57°	0.73/-54°
5.0	0.66/-142°	2.39/54°	0.03/-62°	0.72/-68°

( $Z_0=50\Omega$ )

**Solución:**

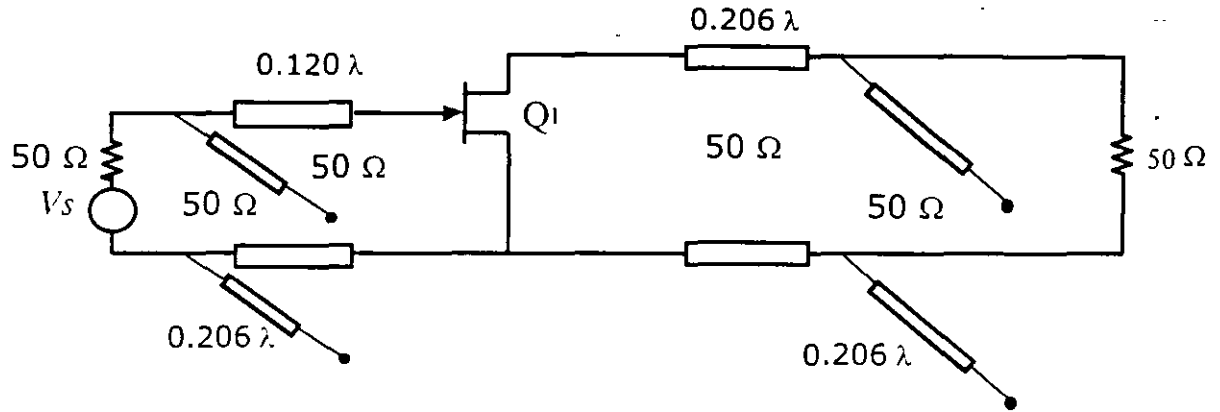
Calculando  $\Gamma_S$  y  $\Gamma_L$  se tiene:

$$\Gamma_S = 0.872 \angle 123^\circ$$

$$\Gamma_L = 0.876 \angle 61^\circ$$

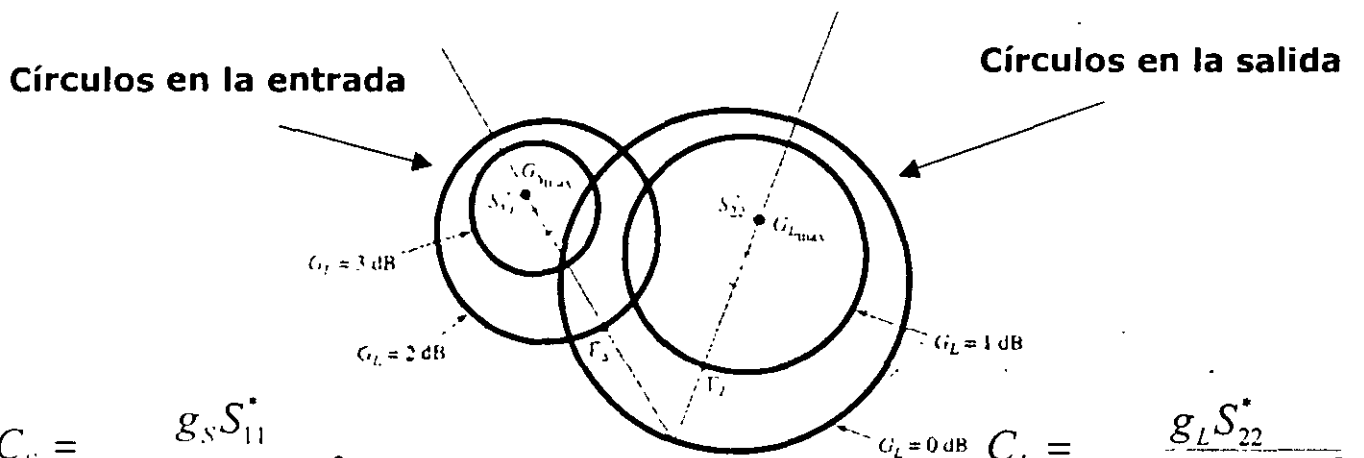
Las redes de acoplamiento pueden obtenerse usando la carta Smith.

El circuito para máxima ganancia se muestra a continuación:



## Círculos de Ganancia Constante

Es posible obtener los círculos en la carta Smith en donde se cumple la característica de ganancia constante. Dichos círculos permiten el diseño para cumplir con especificaciones establecidas por el diseñador.



$$C_S = \frac{g_S S_{11}^*}{1 - (1 - g_S) S_{11}^2}$$

$$R_S = \frac{1 - g_S (1 - |S_{11}|^2)}{1 - (1 - g_S) |S_{11}|^2}$$

Donde:

$$g_S = \frac{G_S}{G_{S_{max}}} \quad g_L = \frac{G_L}{G_{L_{max}}}$$

$$C_L = \frac{g_L S_{22}^*}{1 - (1 - g_L) |S_{22}|^2}$$

$$R_L = \frac{1 - g_L (1 - |S_{22}|^2)}{1 - (1 - g_L) |S_{22}|^2}$$

$$G_S = \frac{1 - \Gamma_S^2}{1 - |S_{11}| \Gamma_S^2}$$

$$G_{S_{max}} = \frac{1}{1 - |S_{11}|^2}$$

$$G_L = \frac{1 - \Gamma_L^2}{1 - |S_{22}| \Gamma_L^2}$$

$$G_{L_{max}} = \frac{1}{1 - |S_{22}|^2}$$

# Diseño a Bajo Ruido

La figura de ruido de un bipuerto puede expresarse como

$$F = F_{min} + \frac{R_N}{G_S} \cdot Y_S - Y_{opt}^2$$

$Y_S = G_S + jB_S$  Admitancia de fuente presentada al transistor

$Y_{opt}$  Admitancia de fuente óptima para obtener ruido mínimo

$F_{min}$  Figura de ruido mínima del transistor

$R_N$  Resistencia de ruido equivalente del transistor

$G_S$  Parte real de la admitancia de fuente

## ATF-36077 Typical Noise Parameters,

Common Source,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $V_{DS} = 1.5 V$ ,  $I_D = 10 mA$

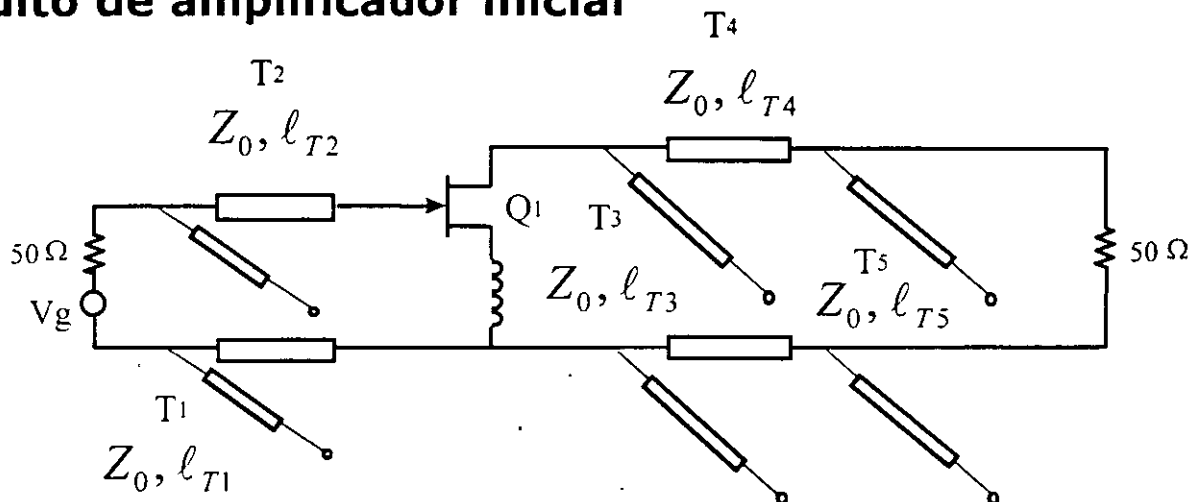
Freq. GHz	$F_{min}^{[1]}$ dB	$\Gamma_{opt}$		$R_n/Z_0$ -
		Mag.	Ang.	
1	0.30	0.95	12	0.40
2	0.30	0.90	25	0.20
4	0.30	0.81	51	0.17
6	0.30	0.73	76	0.13
8	0.37	0.66	102	0.09
10	0.44	0.60	129	0.05
12	0.50	0.54	156	0.03
14	0.56	0.48	-174	0.02

Para obtener el ruido mínimo

$$Y_S = Y_{opt}$$

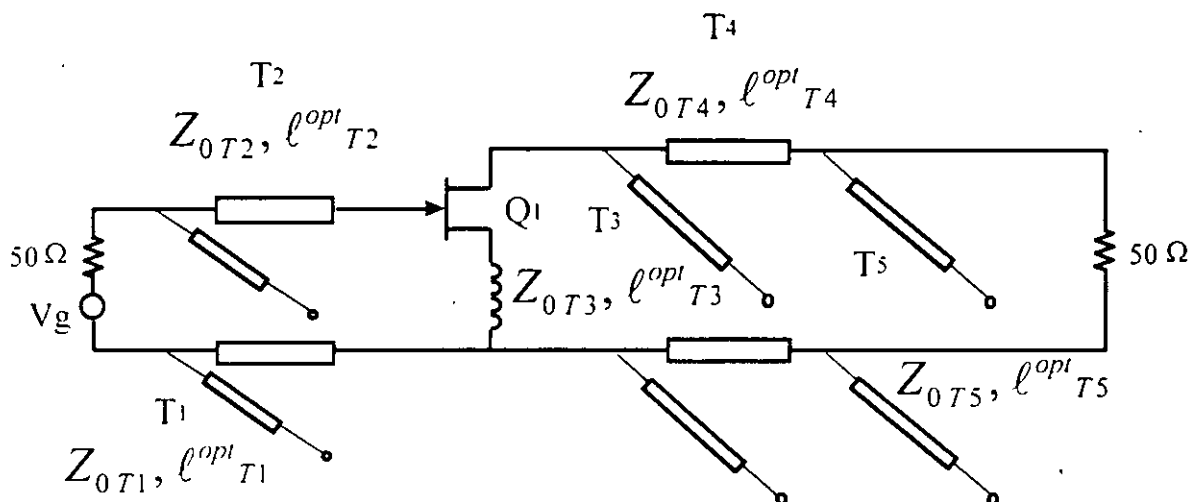
# Optimización del Amplificador

## Circuito de amplificador inicial



**Función de optimización**  $E = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

## Circuito de amplificador optimizado



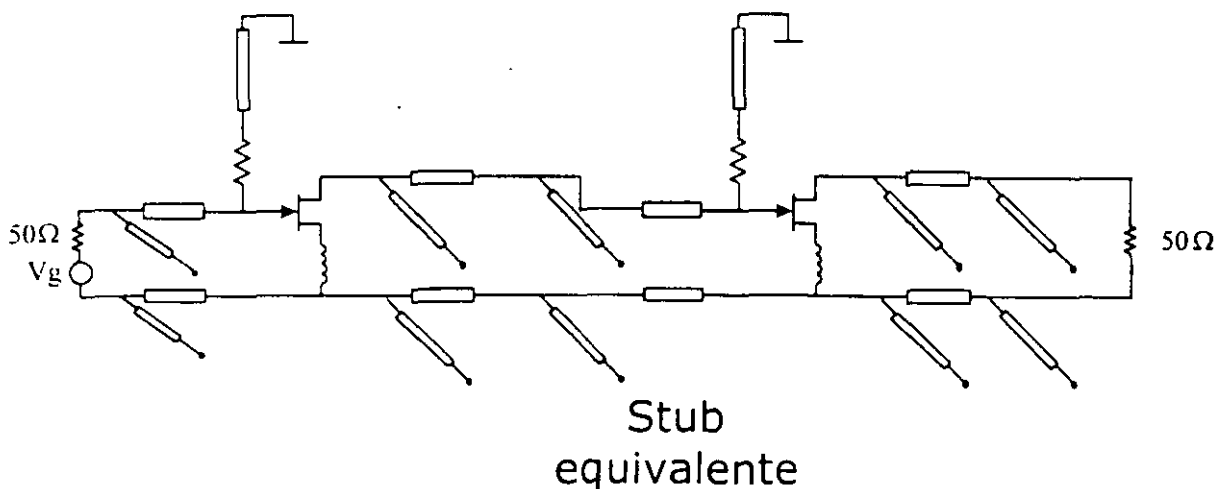
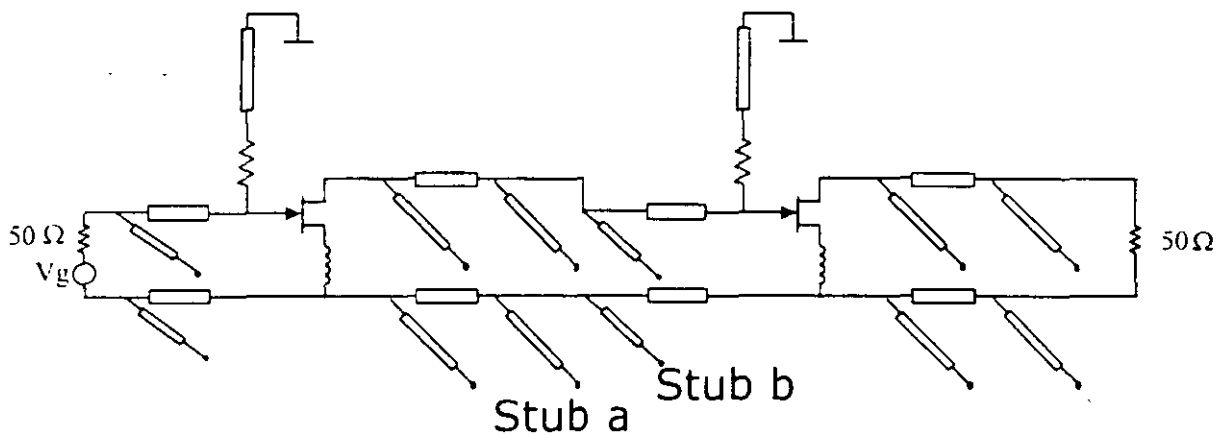
Antes de Optimizar		Después de Optimizar	
Impedancia característica	Longitud de Línea	Impedancia característica	Longitud de Línea
$Z_0$	$l_{T1}$	$Z_{0T1}$	$l^{opt}_{T1}$
$Z_0$	$l_{T2}$	$Z_{0T2}$	$l^{opt}_{T2}$
...	...	...	...
$Z_0$	$l_{Tn}$	$Z_{0Tn}$	$l^{opt}_{Tn}$

# Diseño Multietapa

Propósito:

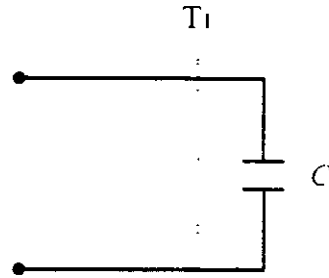
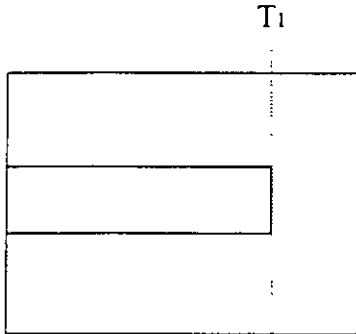
Sintetizar una red entre dos etapas de tal forma que:

- 1) En el caso del diseño de bajo ruido, la impedancia vista en la entrada del segundo transistor debe ser cercana a la impedancia óptima.
- 2) Debe de obtenerse la relación de onda estacionaria más baja posible en la entrada de la primera etapa.

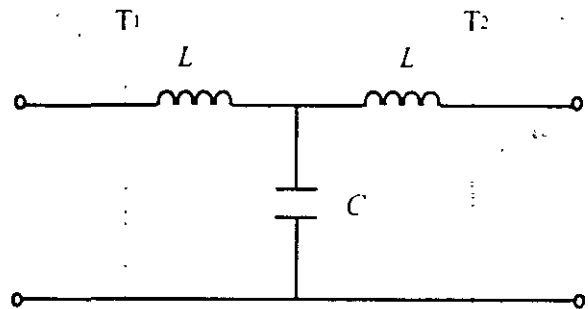
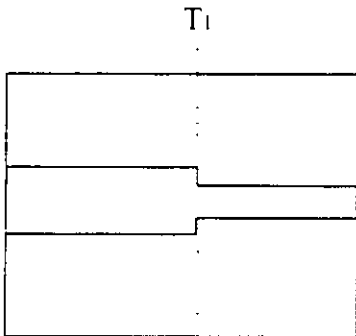


# Discontinuidades

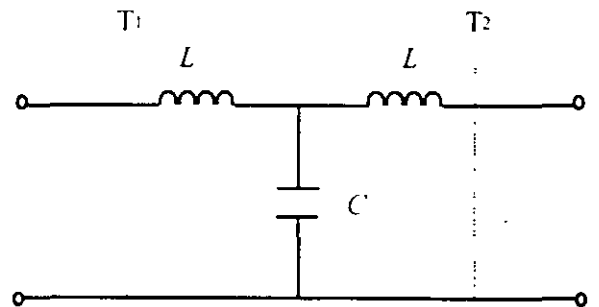
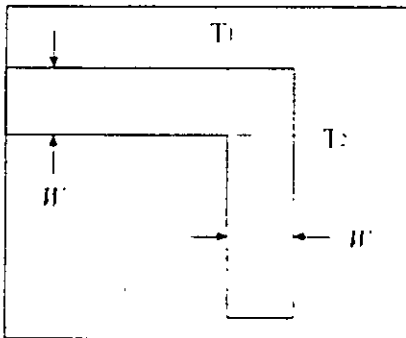
## Stub abierto



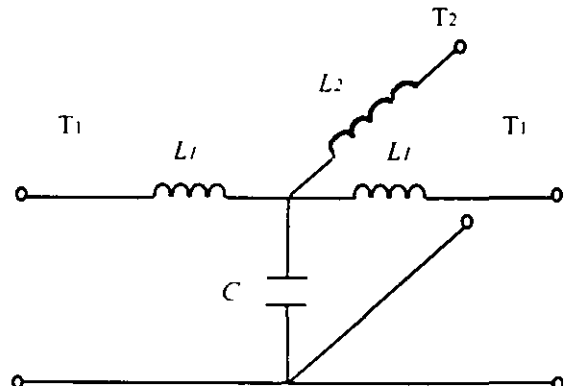
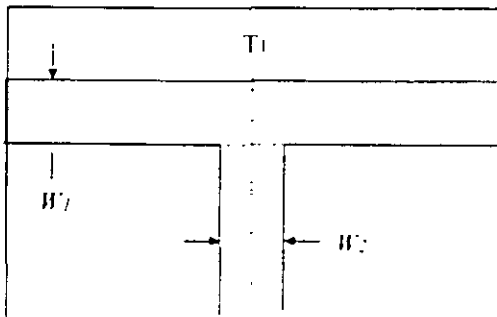
## Cambio de impedancia característica



## Angulo



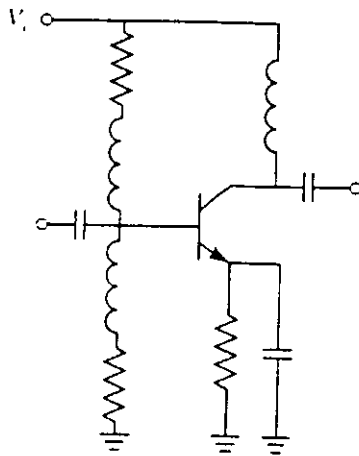
## T



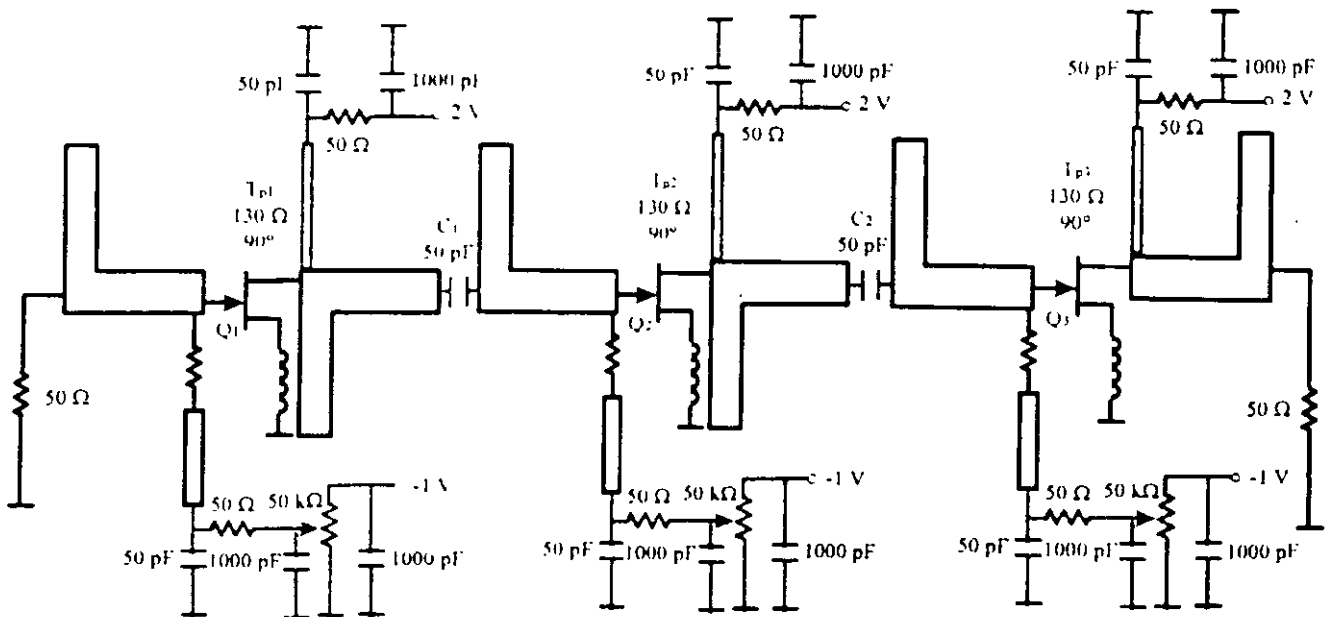
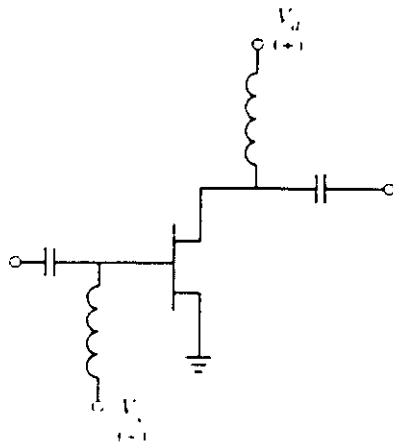


# Redes de Polarización

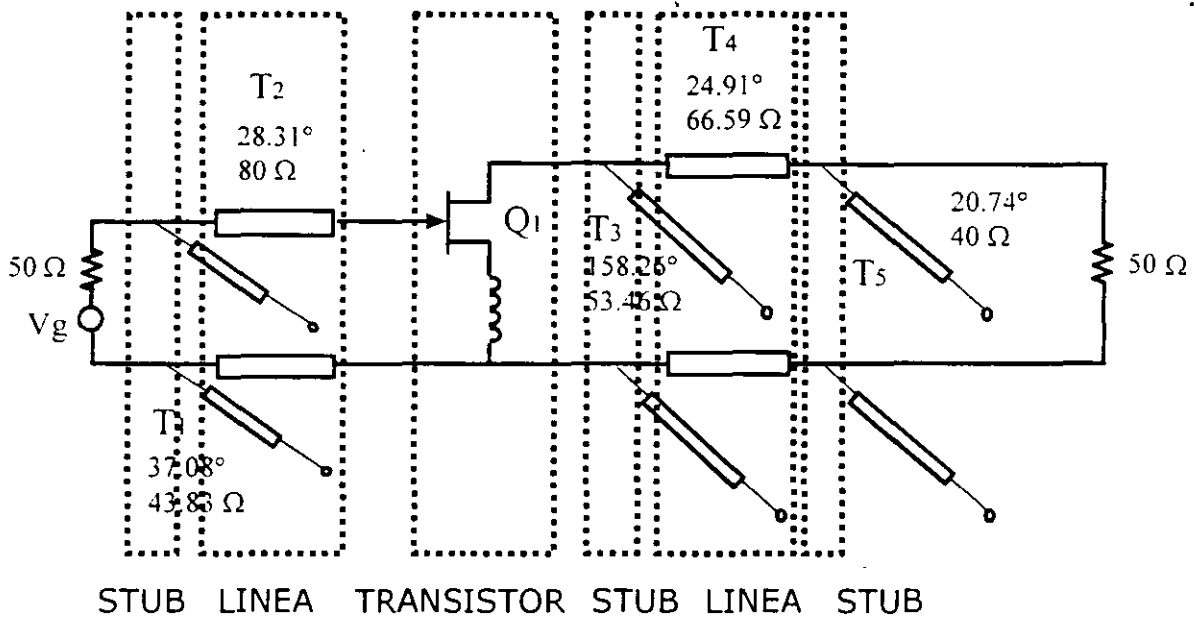
TBJ



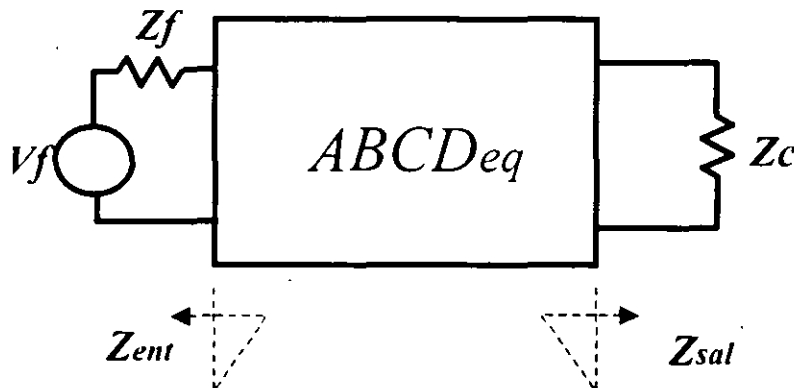
FET



# Simulación Numérica de Amplificadores para Microondas



$$ABCD_{eq} = \prod_{i=1}^n ABCD_i$$



Impedancias de entrada y de salida

$$Z_{ent} = \frac{AZ_c + B}{CZ_c + D}$$

$$Z_{sal} = \frac{DZ_f + B}{CZ_f + A}$$

## Coeficientes de Reflexión en la entrada y en la salida

$$\Gamma_{ent} = \frac{Z_{ent} - Z_f}{Z_{ent} + Z_f}$$

$$\Gamma_{sal} = \frac{Z_c - Z_{sal}}{Z_c + Z_{sal}}$$

Relaciones de Onda Estacionaria en la entrada y en la salida

$$ROE_{ent} = \frac{1 + \Gamma_{ent}}{1 - \Gamma_{ent}} \quad ROE_{sal} = \frac{1 + \Gamma_{sal}}{1 - \Gamma_{sal}}$$

Coeficiente de Ganancia

$$G = \frac{4Z_c \operatorname{Re}(Z_f)}{AZ_c + B + CZ_c Z_f + DZ_f^2}$$

Factores de Estabilidad

$$k = \frac{1 - S_{11}^2 - S_{22}^2 + \Delta^2}{2S_{12}S_{21}}$$

$$\Delta = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}$$

Figura de Ruido

$$F = F_{min} + \frac{R_N}{G_S} (Y_S - Y_{opt})^2$$

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots$$

# Resultados de la Simulación Numérica

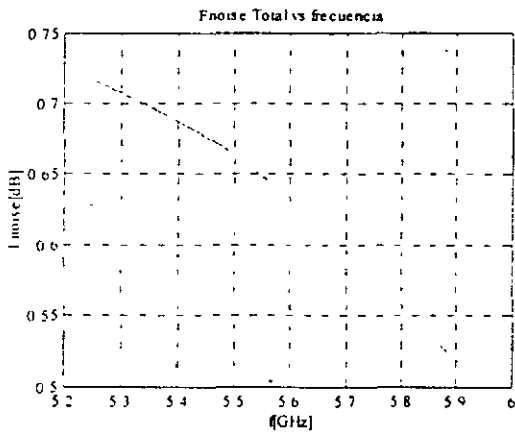
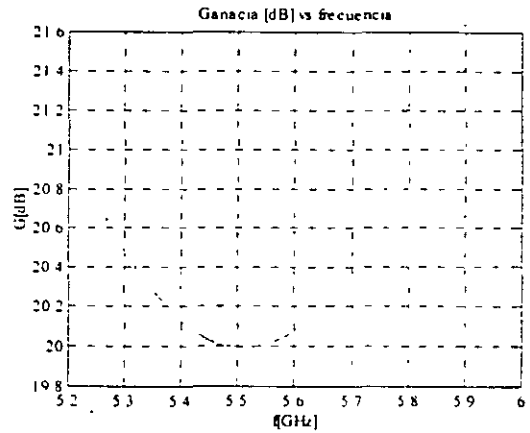
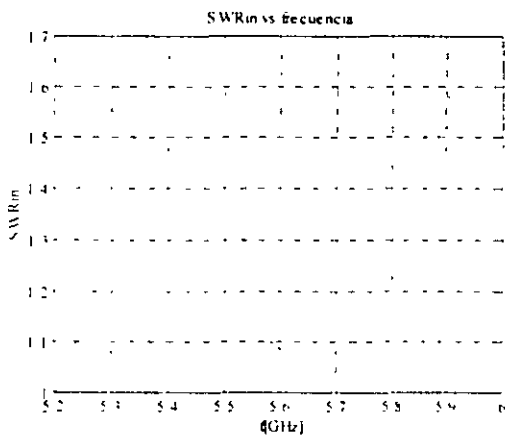


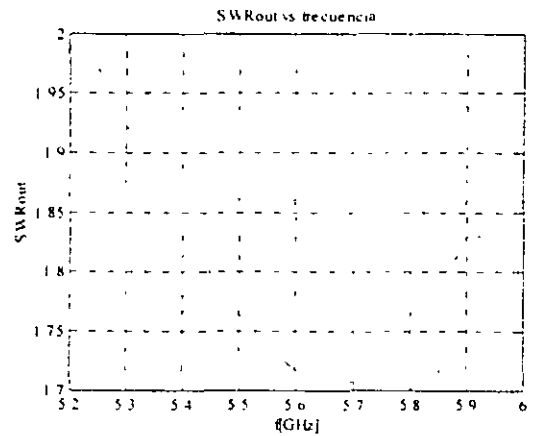
Figura de Ruido



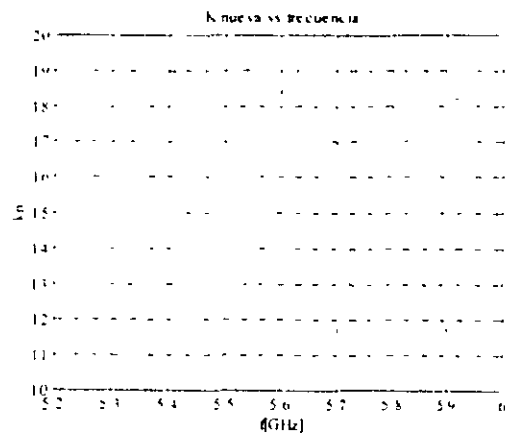
Coefficiente de Ganancia



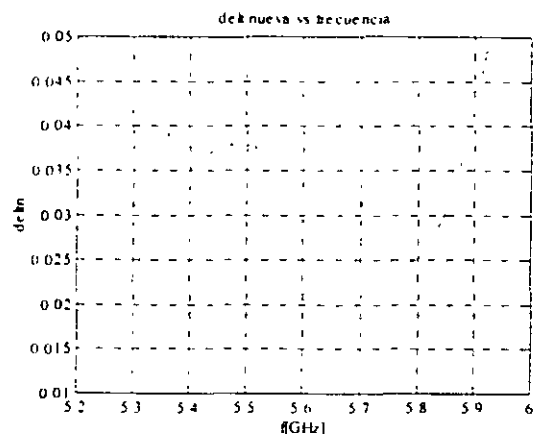
ROE en la entrada



ROE en la salida

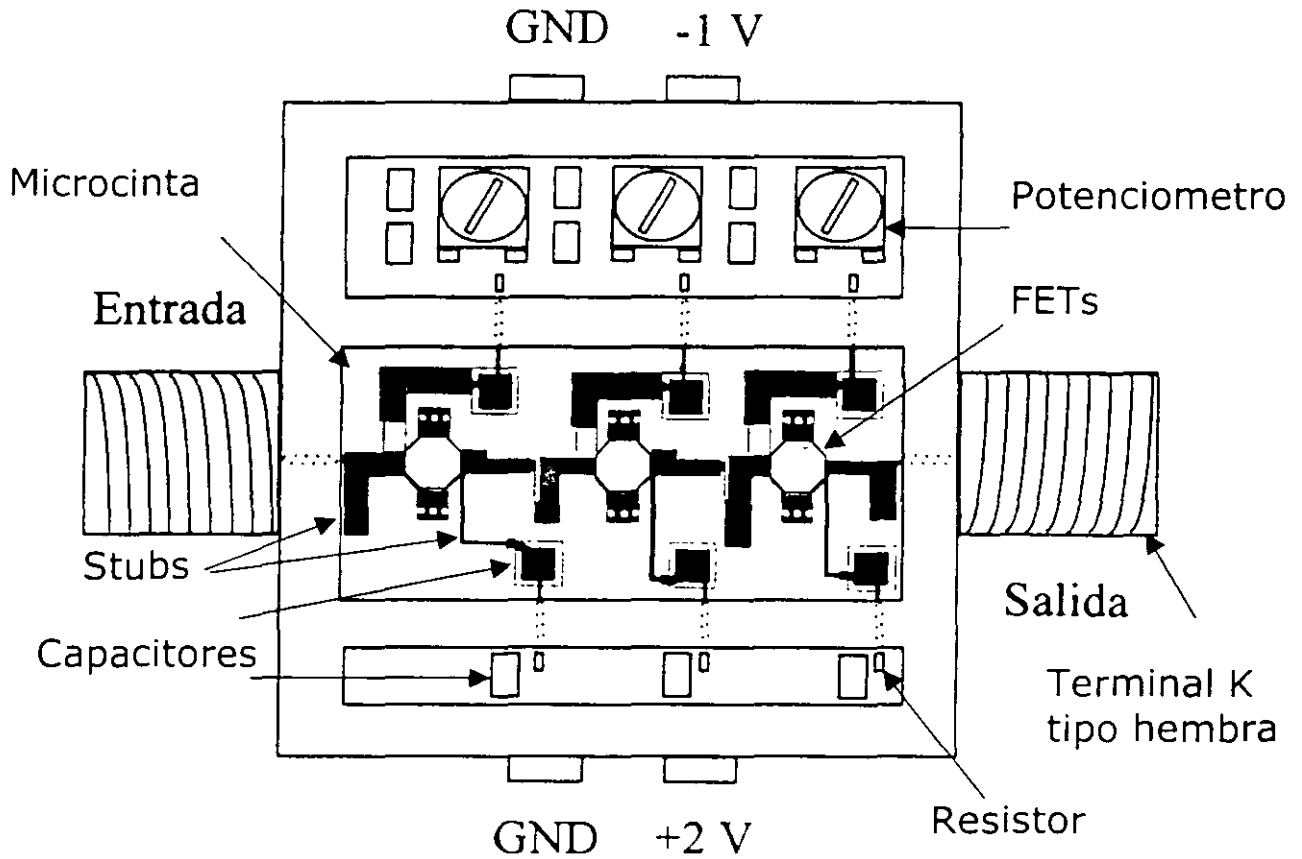


Factor de estabilidad k

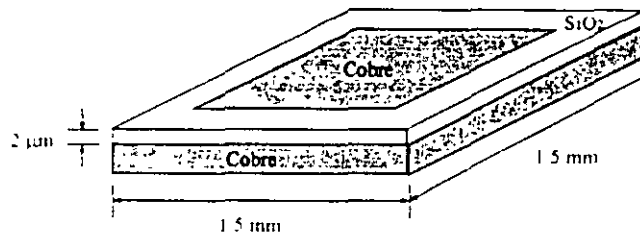


Factor de estabilidad Δ

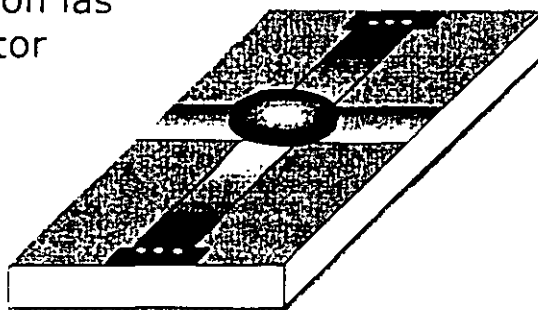
# Diseño del Circuito de Microcinta, Montaje y Desarrollo de Componentes Especiales

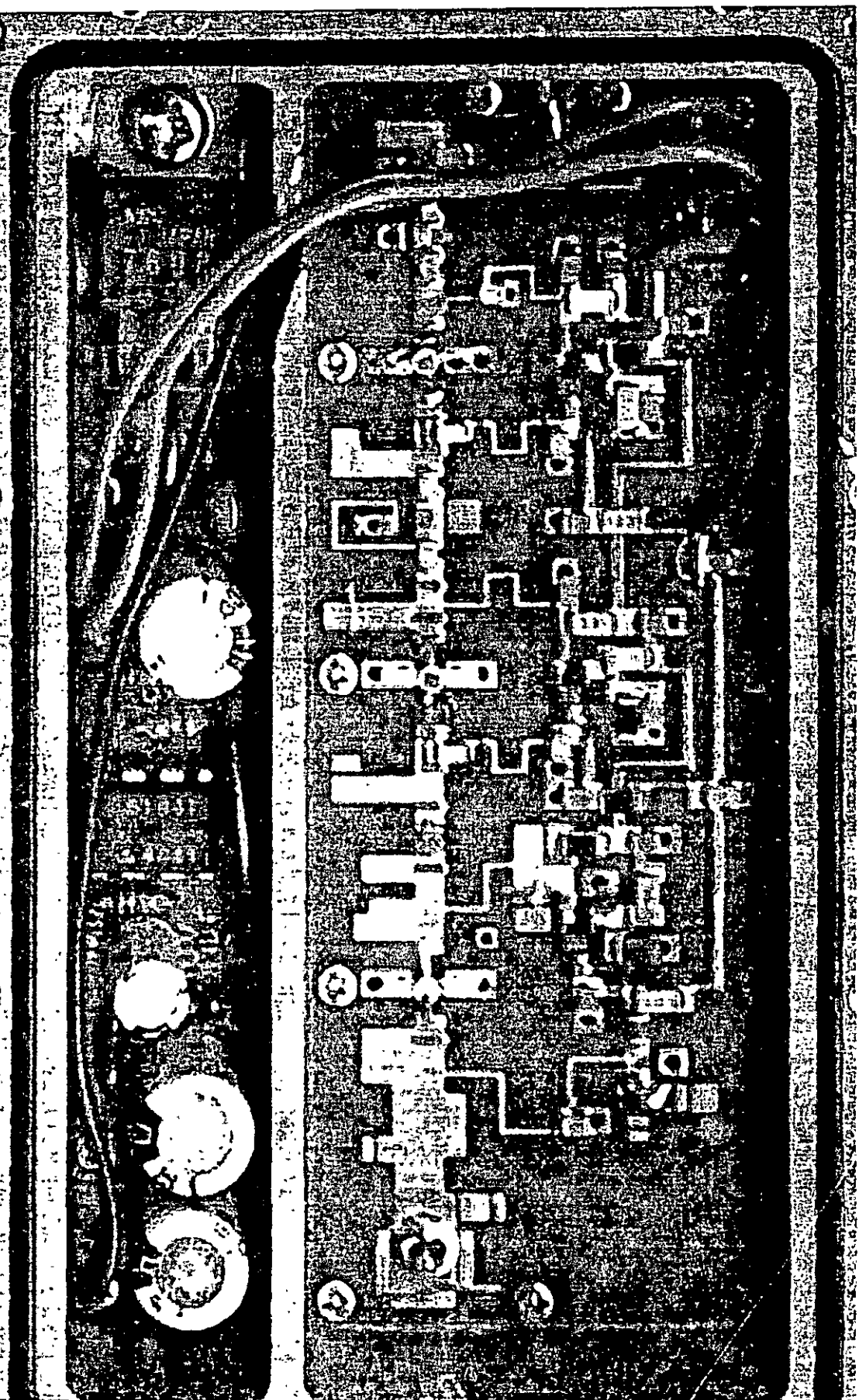


Capacitor



Inductor implantado con las terminales del transistor







**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN TELECOMUNICACIONES**

## **MODULO I: TELECOMUNICACIONES VÍA MICROONDAS**

**TEMA**

**MODULACIÓN POR CODIFICACIÓN DE PULSOS**

**EXPOSITOR: JORGE RODRIGUEZ CUEVAS  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO 2001**

# **Modulación por Codificación de Pulsos PCM**



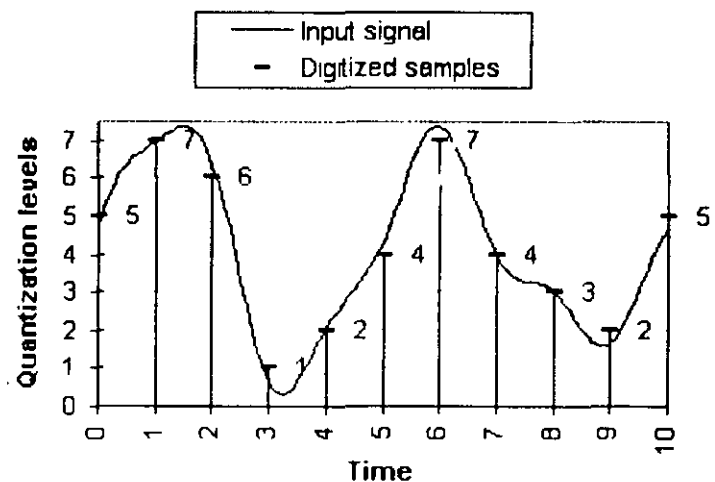
# Origen

- Es un método de digitalización de señales de voz empleado por las compañías telefónicas.
- Consiste básicamente de 3 pasos:
  - Muestreo
  - Cuantización
  - Codificación

# Muestreo

- Es la recopilación periódica de cantidades puntuales de información de una señal analógica.
- La frecuencia de muestreo es por lo menos el doble de la frecuencia más alta de la señal a procesar.
- Una señal de voz es muestreada a 8000 Hz.

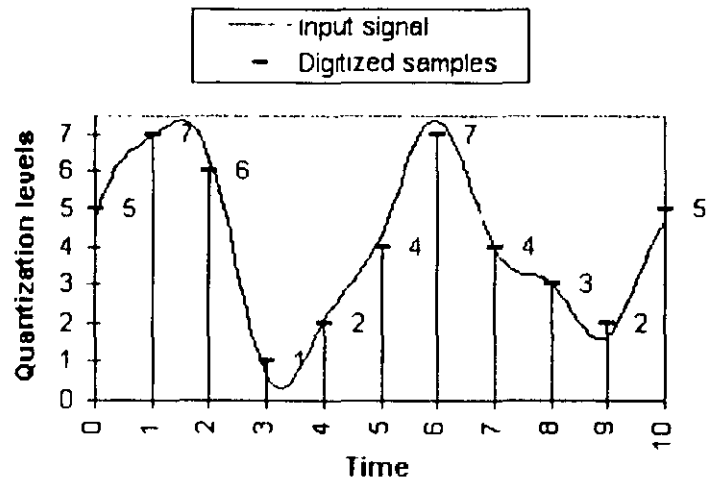
Quantizing and Digitizing a Signal



# Cuantización

- Una vez muestreada la señal, esta debe ser cuantizada en valores específicos como el sistema PAM.
- Existen sistemas que integran la cuantización y codificación al mismo tiempo como la codificación con la ley A (recomendación CCITT G.711)

Quantizing and Digitizing a Signal

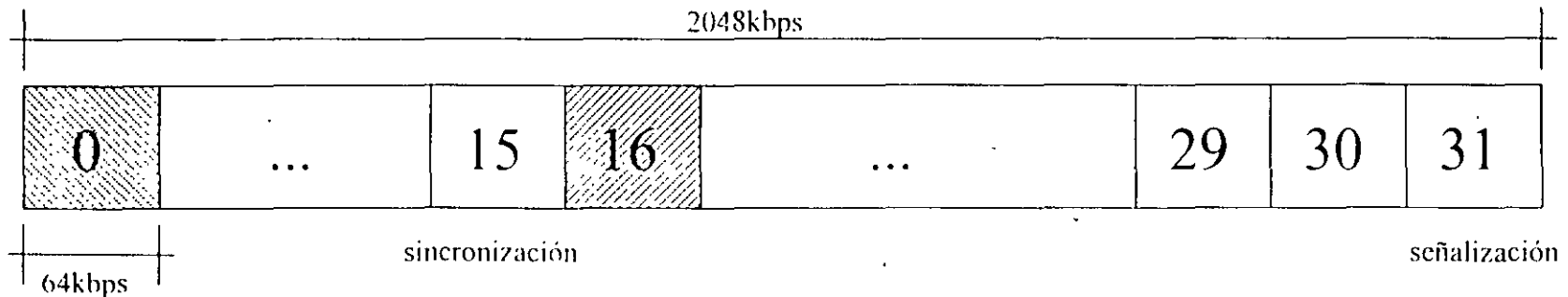


# Tipos de Sistemas de PCM

- Sistema de 24 canales desarrollado por Bell Laboratories, empleado en Estados Unidos, Canadá y Japón principalmente.
- Sistema de 32 canales especificado por la CCITT en su recomendación G.732 y es ampliamente utilizado.

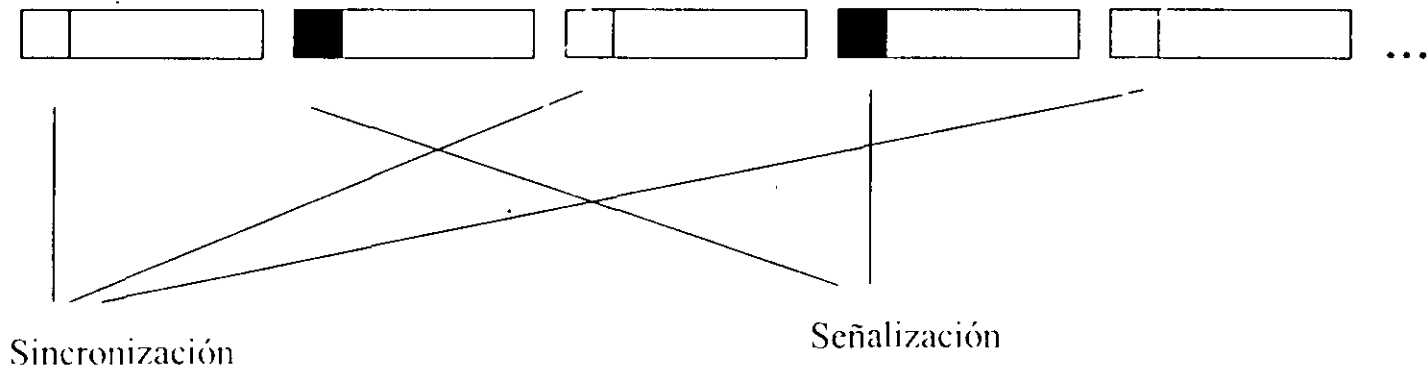
## Recomendación G.732

- Son soportados 30 canales telefónicos, 1 canal de sincronización y 1 canal de señalización, cada uno con una velocidad de 64 kbps.
- La velocidad total de transmisión de un sistema G.732 es de 2048 kbps
- Los 30 canales de voz están localizados en las ranuras de tiempo 1-15 y 17-31 de una trama.



# Canal de Sincronización

- La sincronización del sistema está situada en las tramas pares de las ranuras de tiempo 0. Las alarmas son transmitidas en las tramas nones de las mismas ranuras.



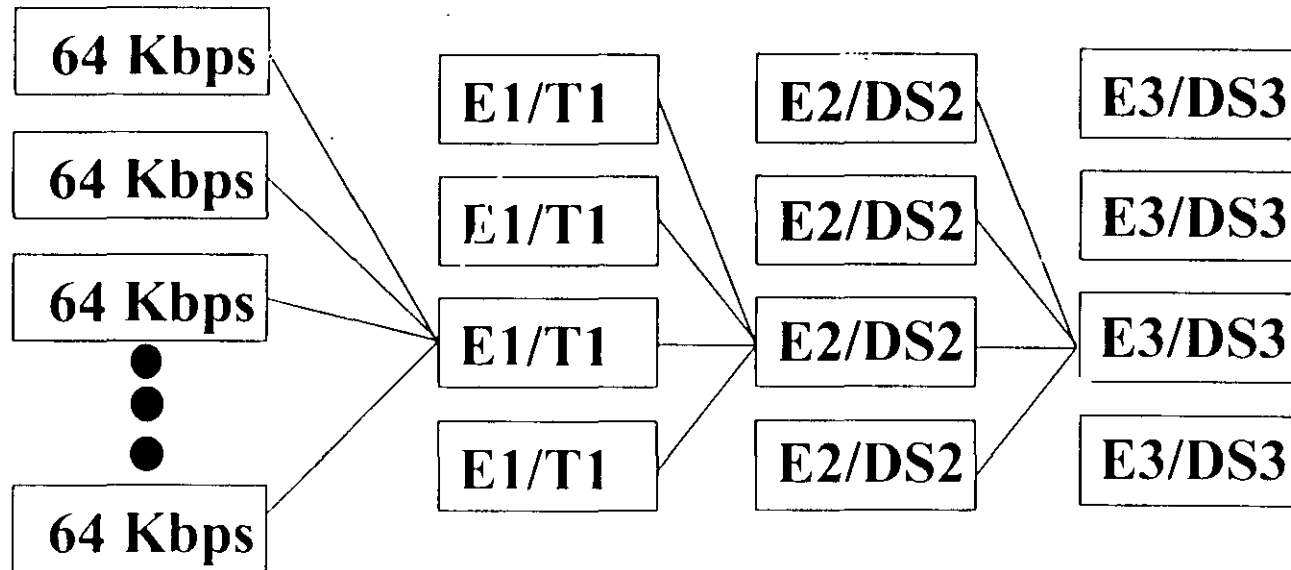
# Canal de Señalización

- Es empleado para transmitir información de control y supervisión de los canales telefónicos.
- La ranura de tiempo 16 es la asignada para tal función.
- El uso de la estructura multitrama (16 tramas) es empleado para la señalización de los 30 canales telefónicos.



# Sistemas PCM de Alto Orden

- Un sistema de orden mayor es construido de 4 de nivel inferior, las cuales son llamadas tributarias.





# **Jerarquía Digital Plesiócrons**

# Características

- Plesiócroma proviene del griego plesio (cerca de o próximo) y cronos (tiempo) .
- Sistema diseñado para ajustar la transmisión de datos entre los equipos de multiplexaje jerárquico con relojes independientes.
- La sincronización se lleva a cabo agregando bits de justificación a la trama.

## Características (continuación)

- Estos bits son reconocidos y descartados al momento de la demultiplexación.
- Existen 3 diferentes grupos de estándares de PDH empleados en el mundo:

<b>Estandar</b>	<b>origen</b>	<b>tamaño de trama</b>	<b>velocidad</b>	<b>señalización</b>
<b>T-n</b>	Norte Americano	193 bits/trama	1544kbps	1 bit por canal
<b>E-n</b>	Estandar Europeo	256 bits/trama	2048kbps	1 canal de 32
<b>J-n</b>	Estándar Japonés	193 bits/trama	1544kbps	* 1 bit por canal

## Restricciones del Sistema PDH

- El uso de bits de justificación a velocidades mayores a 140 Mbps resulta impráctico.
- El acceso de una línea de 2 Mbps a un sistema de mayor orden se realiza demultiplexando hasta los sistemas de 2 Mbps y nuevamente multiplexarlo.
- La administración de los circuitos resulta compleja en redes de Transmisión PDH extensas.

# **Jerarquía Digital Síncrona**

# Características

- SDH fué desarrollada para solucionar las limitantes que presentaba PDH.
- El estándar de este sistema se encuentra en las recomendaciones G.707, G.708 Y G.709 en el libro azul de 1989 de la CCITT.
- Actualmente es considerado como el estándar internacional de los sistemas jerárquicos de comunicación.

# Tasas de Transmisión en SDH

<b>Nombre</b>	<b>Tasa de transmisión</b>
<b>STM-1</b>	<b>155.520 MBPS</b>
<b>STM-3</b>	<b>466.560 MBPS</b>
<b>STM-4</b>	<b>622.080 MBPS</b>
<b>STM-16</b>	<b>2488.320 MBPS</b>

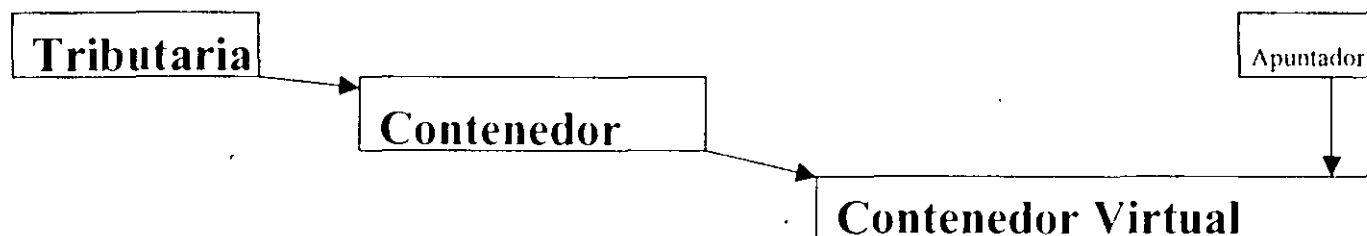
# Multiplexación Síncrona

- Todas las tasas de transmisión plesiócronas entre 1.5 Mbps y 140 Mbps pueden ser acomodadas en una señal STM.
- Para la sincronización de una red se cuenta con un reloj central.
- Se definen contenedores correspondientes a una tasa plesiócrona existente. En estos contenedores se prepara la información de estas señales para ser integrada a la señal STM.
- A cada contenedor se le agrega información de control conocida como path overhead.



# Multiplexación Síncrona

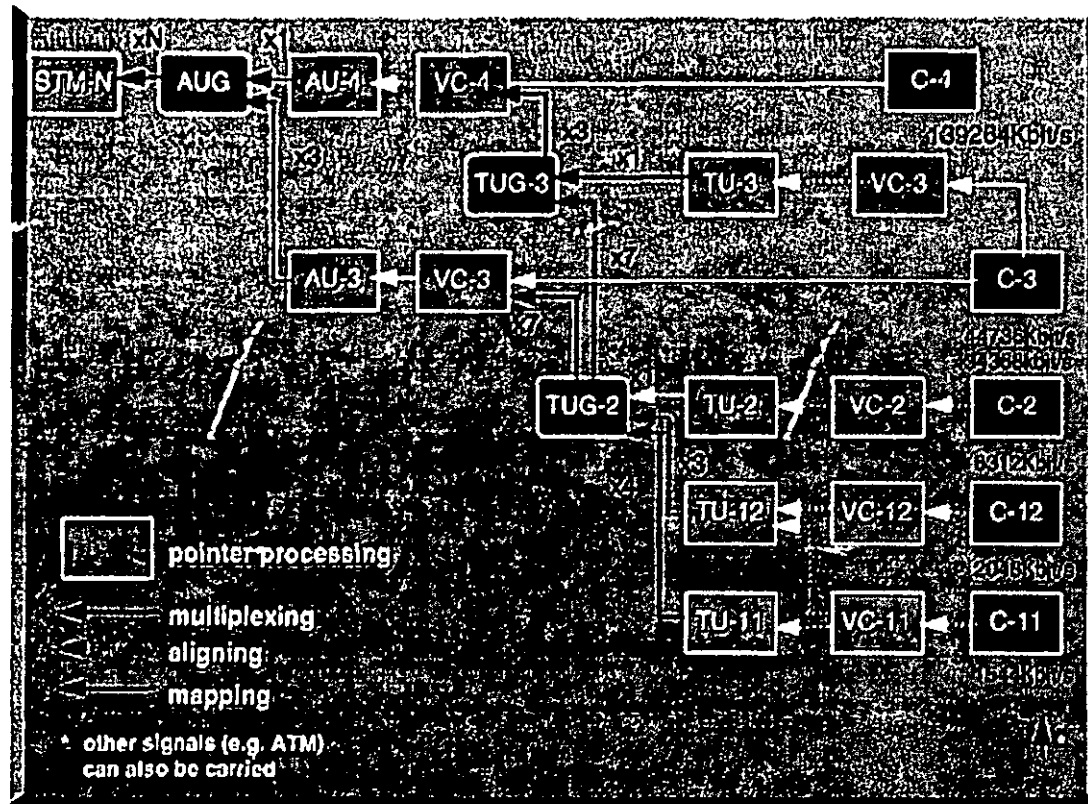
- La suma de un contenedor y la información de control forma un contenedor virtual.
- Las variaciones de sincronía son reconocidas asociando un apuntador en cada contenedor virtual que indica la posición de este en la trama STM.
- La suma del contenedor virtual con un apuntador forma una unidad tributaria.



# Multiplexación Síncrona

- El agrupamiento de varias unidades tributarias nos da como resultado un grupo de unidades tributarias.
- Si se agrega un apuntador a un contenedor virtual de orden 3 ó 4 se genera una unidad administrativa.
- Agrupando unidades administrativas se forma un grupo de unidades administrativas que formará la carga útil de una trama de STM.

# Esquema General de Multiplexación



# Ventajas del SDH

- Simplificación de la red al reducirse en número de equipos de transmisión.
- Costo bajo de operación.
- Inserción y extracción de canales en una red SDH.
- Al soportar transmisiones de alta velocidad, es posible soportar servicios de voz y video.

# Ventajas del SDH

- La topología de anillo de una red SDH hace factible un monitoreo total y proporciona redundancia en el servicio.
- la utilización de información de control en las tramas de SDH permiten una administración y monitoreo efectiva en comparación con PDH.

# Elementos de una Red SDH

- Equipo Terminal de Enlace.- Interfaz de la red SDH con las tasas de transmisión plesiócronas.
- Equipo Terminal de Línea.- Encargado del control, multiplexación y seguridad de la información.
- Regeneradores.- restauran las señales durante el trayecto de la información.

# Capas de una Red SDH

- Capa de trayectoria.- Adapta una señal PDH.
- Capa de línea.- realiza la multiplexación.
- Capa de sección.- Controla el buen estado de las señales mediante los regeneradores.
- Capa fotónica.- se encarga de la transmisión por el medio físico.

# SONET

- Estándar propuesto originalmente por Bellcore y normado por la ANSI en 1985.
- Basado en tasas de transmisión de 51.84 Mbps.
- La estructura y funcionamiento es similar a SHD, por lo que es considerado un subconjunto de este.



# Jerarquía de Transmisión

SDH Circuitos de datos	Tasa de Tx (Mbits/s)	Número de canales de 64,000 bits/s	SONet Circuitos de datos	
			Fibra òptica	Cobre
	51.84	672	OC-1	STS-1
STM-1	155.52	2,016	OC-3	STS-3
STM-2	311.04	4,032	OC-12	STS-12
STM-4	622.08	8,064	OC-48	STS-48
STM-16	2,488.32	32,256		

# Digital Subscriber Line, DSL

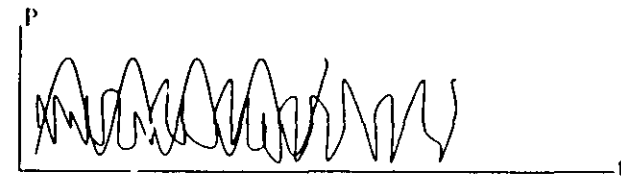
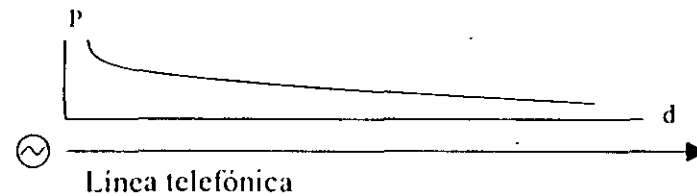
- En general, cualquier tecnología que transmita datos sobre par de cobre trenzado.
- Trabaja sobre la capa uno el modelo de referencia OSI.
- Usa la planta de cobre telefónico ya instalada para ofrecer servicios adicionales de alta velocidad.
- La diferencia básica entre las tecnologías DSL es la forma en que modulan los bits y los ponen sobre el par de cobre.

# Digital Subscriber Line, DSL

- En general, cualquier tecnología que transmita datos sobre par de cobre trenzado.
- Trabaja sobre la capa uno el modelo de referencia OSI.
- Usa la planta de cobre telefónico ya instalada para ofrecer servicios adicionales de alta velocidad.
- La diferencia básica entre las tecnologías DSL es la forma en que modulan los bits y los ponen sobre el par de cobre.

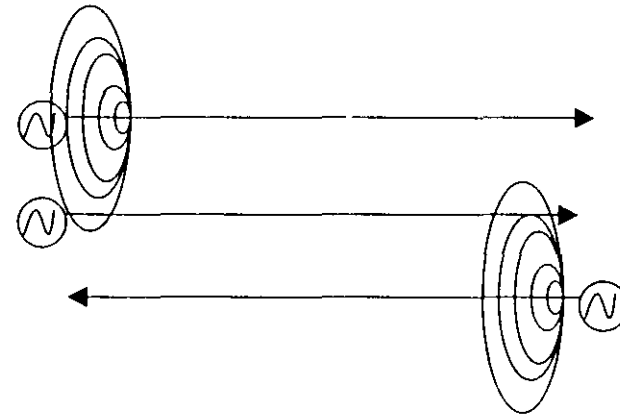
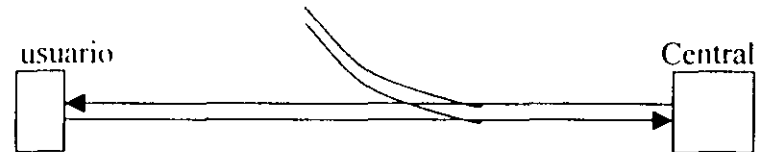
# Características de una Línea Telefónica

- La energía de una señal es disipada rápidamente.
- Existe un nivel bajo de relación señal a ruido.
- Empleo de dispositivos para modificar características eléctricas de líneas mayores a 5.6 Kms.



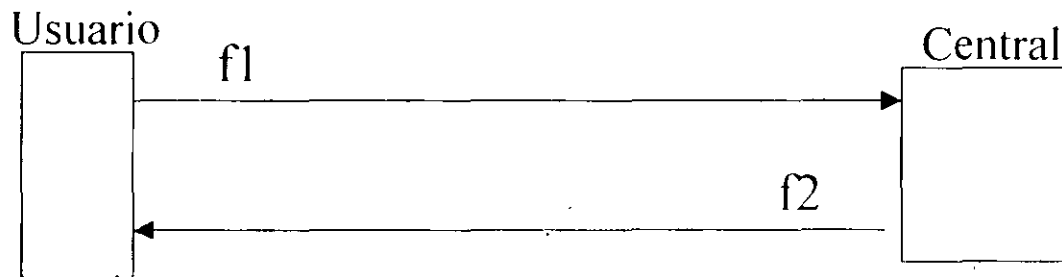
# Características de una Línea Telefónica

- Los circuitos abiertos que pueden presentarse en una línea telefónica originan señales reflejadas.
- Las interferencias conocidas como crosstalk son originadas por líneas vecinas de un mismo grupo de estas.



# Soluciones a las Limitantes de las Líneas Telefónicas

- Atenuación  
Empleo de diferentes técnicas de modulación como 2B1Q y CAP.
- Circuitos abiertos y crosstalk (NEXT y FEXT)  
Se reducen con el empleo de diferentes frecuencias para la transmisión y recepción de datos (FDM).

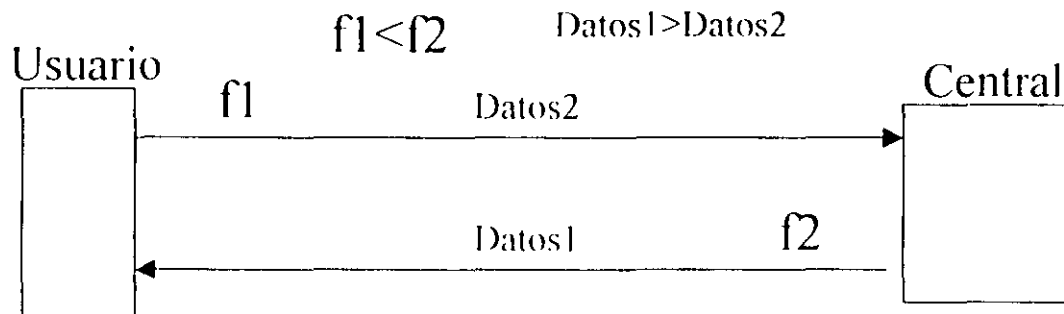


# Soluciones a las Limitantes de las Líneas Telefónicas

- Circuitos abiertos y crosstalk (NEXT y FEXT)

Los sistemas DSL pueden regenerar la señal si la interferencia es baja.

El empleo de técnicas asimétricas de transmisión.



# Tipos de DSL

- ADSL, DSL Asimétrico.- tiene altas velocidades de transmisión hacia el usuario, pero bajas hacia la red.
- DSL-Lite.- se tienen velocidades de 1 a 1.5 Mbps hacia el usuario y de 100 a 200 Kpbs hacia la red como máximo.
- DSLAM, Multiplexor de acceso de DSL.- Concentra las varias líneas de ADSL en una de ATM.



# Tipos de DSL

- HDSL, DSL de alta velocidad.- Con capacidades de transmisión de T1 y E1 full duplex.
- ISDL, DLS para ISDN.- Emplea la tecnología ISDN para tener una transmisión de 128Kbps hacia la red.
- RADSL, DSL de tasa ajustable.- Los modems verifican la línea y adaptan las velocidades de transmisión.

## Tipos de DSL

- SDLS, DSL Simétrico.- la cual tiene velocidades de transmisión iguales en ambos sentidos
- VDSL, DSL de alta velocidad.- Maneja tasas de transmisión de 12.9 a 52.8 Mbps.

# Comparativo de Variantes DSL

Tabla de referencia de DS		DMT ADSL	CAP RADSL	CAP S/HDSL	2B1Q S/HDSL	2B1Q IDSL	CAP SDSL	G.shdsl	ReachDSL
Aplicaciones simétricas (kbps)	128	X	X	X	X	X	X	X	X
	284	X	X	X	X		X	X	X
	512	X	X	X	X		X	X	X
	768		X	X	X		X	X	X
	1000		X	X	X		X	X	X
	T1 1544 E1 2048			X	X		X	X	
Recepción asimétrica		X	X						
POTS analógicos opcional		X	X	X					X
Selección de tasa de Tx		X	X	futura	futura		X	X	X
Selección automática de T		X	X				X	X	X
Cancelación de eco		Algunos		X	X	X	X	X	X
FDM		Algunos							
Distancia (24AWG) kft		18 (1.5Mbps)	18 (1.5Mbps)	14 (HDSL)	10	26	29 (128 kft)	14.5 (1.5Mbps)	18000 (512Kbps)
		6 (7kbps)	6 (7kbps)	12 (SDSL)			21 (768kbps)		
Distancia (.5mm) Km		5.5 (1.5Mbps)	5.5 (1.5Mbps)	4.3 (HDSL)	3	8	8.9 (128 kbps)	4.4 (1.5Mbps)	
		1.8 (7kbps)	1.8 (7kbps)	3.6 (SDSL)			6.4 (768kbps)		



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN TELECOMUNICACIONES**

## **MODULO I: TELECOMUNICACIONES VÍA MICROONDAS**

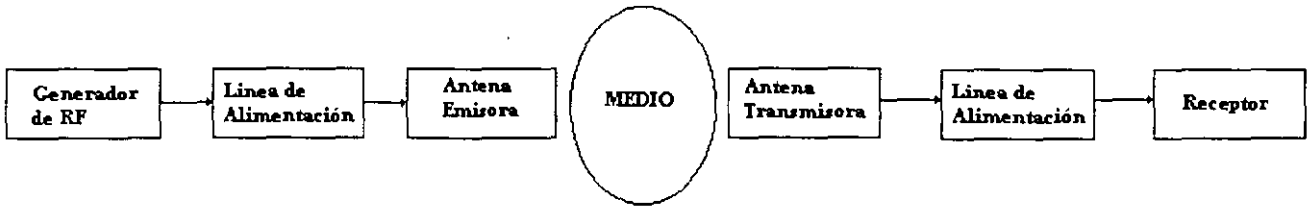
**TEMA**

**ANTENAS**

**EXPOSITOR: ING. ANGEL HILARIO GARCIA BOCHO  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO 2001**

# ANTENAS

## ESQUEMA CONVENCIONAL DE UN SISTEMA DE RF.



*La Antena Emisora o Transmisora* tiene como objetivo transformar las ondas electromagnéticas que se mueven desde el generador, por la línea de alimentación hacia la entrada de la antena, en ondas electromagnéticas que divergen en el espacio libre.

*La Antena Receptora* transforma las ondas libres que inciden en ella, en ondas dirigidas al alimentador, la cual suministra la potencia recibida a la entrada del receptor.

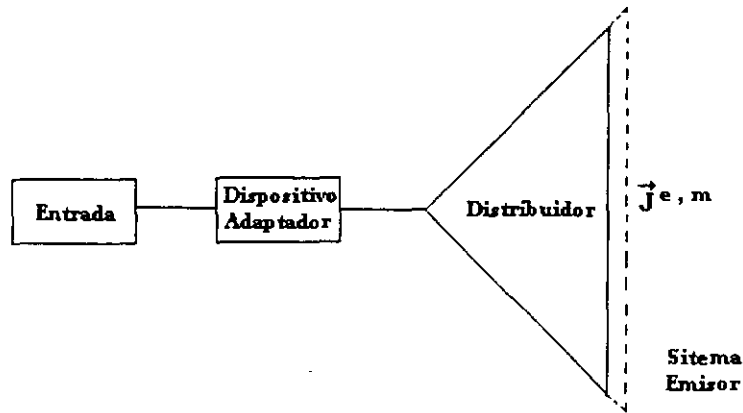
Gracias al principio de reciprocidad de las antenas, cualquier antena emisora puede utilizarse para la recepción de ondas electromagnéticas, y viceversa. O sea, que una misma antena (pasiva) cumple con las funciones de emisión y recepción de ondas electromagnéticas.

*Requisitos necesarios para el funcionamiento eficaz de las antenas:*

1. La antena debe distribuir la potencia electromagnética en el espacio (o reaccionar al campo electromagnético incidente) por una ley determinada. La antena debe de tener la característica de emisión dada.
2. La emisión o recepción de las ondas electromagnéticas no debe ir acompañada por el consumo inútil de energía de alta frecuencia en pérdidas ohmicas. La antena debe tener el más alto rendimiento posible.

*La línea de alimentación* canaliza la energía electromagnética y asegura la conexión entre la entrada y salida del transmisor y receptor.

## ESQUEMA ESTRUCTURAL DE LA ANTENA.



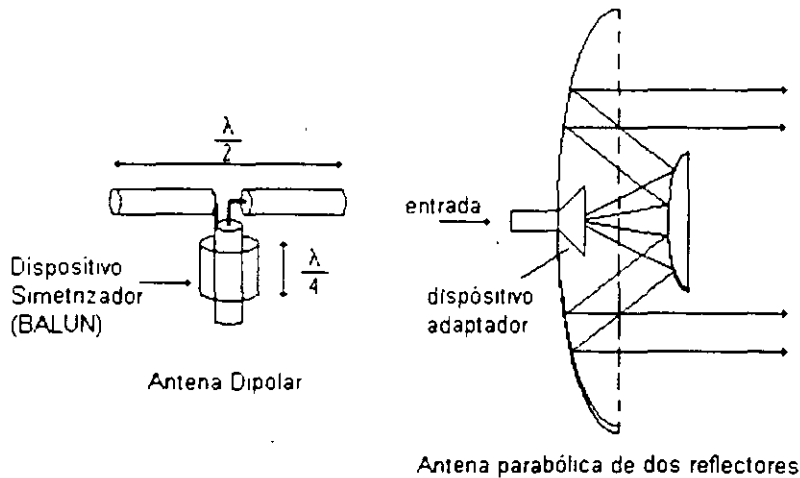
La *entrada* de la antena es la sección de cualquier línea de transmisión con un solo tipo de onda propagada.

El *Dispositivo de alimentación* asegura la distribución homogénea de la corriente en el distribuidor (dispositivo de simetrización) en toda la banda de frecuencia de trabajo de la antena.

El *distribuidor* de la antena es la construcción de conductores y dieléctricos, destinados a obtener la ley de distribución de corriente en los límites de la antena.

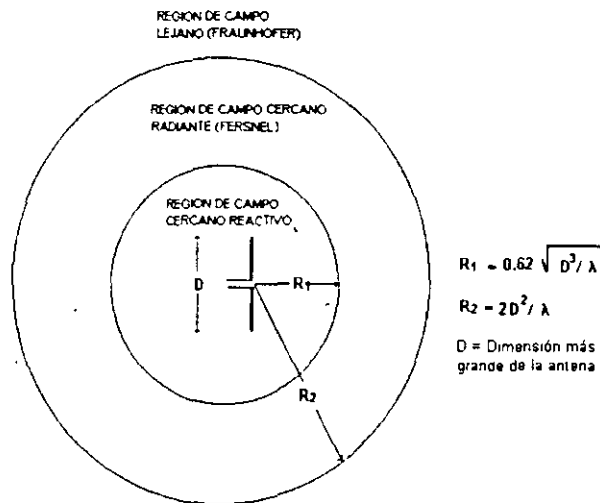
El *Sistema emisor* es la región en el espacio llena de corrientes que excitan las ondas electromagnéticas.

La separación espacial del distribuidor y del sistema emisor se debe a la concepción tradicional de dividir en dos partes el cálculo de la antena: "*el problema interior*", que consiste en hallar las funciones de distribución de las corrientes de alta frecuencia por el sistema emisor. Y "*el problema exterior*", una vez conocida la distribución de corriente se determina el campo electromagnético de radiación de la antena y también sus características numéricas como la anchura del haz, el nivel de los lóbulos laterales, la directividad, etc.



## REGIONES DE CAMPO.

El espacio que rodea una antena es usualmente subdividido dentro de tres regiones: (a) Campo cercano reactivo, (b) Campo cercano radiante (Fresnel) y (c) Campo lejano (Fraunhofer). Estas regiones son diseñadas para identificar la estructura de campo en cada una de ellas. Sin embargo los cambios más abruptos son notados en el cruce de las fronteras. Las fronteras que separan esas regiones no son únicas, sin embargo varios criterios han sido establecidos y son comúnmente usados para identificar las regiones.



## PARÁMETROS DE LAS ANTENAS.

Los sistemas de antenas se caracterizan por un gran número de diferentes parámetros, que permite estimar las antenas y compararlas entre sí. Los parámetros de las antenas pueden ser divididos en dos categorías: *parámetros primarios* y *parámetros secundarios*. Los parámetros primarios de las antenas son: Curva característica de emisión (diagrama direccional) vectorial compleja, la resistencia de radiación, el factor de reflexión de la entrada (o impedancia de entrada) y la potencia máxima. El papel de los parámetros secundarios se reduce a detallar las características particulares de las antenas. Entre ellos se encuentran la anchura del lóbulo principal del diagrama direccional, el nivel de los lóbulos secundarios, Directividad, etc.

## *Curva característica de emisión vectorial compleja de la antena*

Propiedades de Amplitud, polarización y fase del campo de radiación.

Uno de los parámetros más importantes de una antena, es su curva característica de emisión (diagrama direccional) vectorial compleja normalizada  $\vec{F}(\theta, \varphi)$ , que determina completamente la distribución angular, polarización y fase del campo electromagnético radiado en la zona lejana de la antena.

En el caso más general la curva característica de emisión vectorial compleja se compone del producto de tres factores:

$$\vec{F}(\theta, \varphi) = F(\theta, \varphi) \vec{p}(\theta, \varphi) \exp[j\Phi(\theta, \varphi)]$$

que define la estructuras de amplitud, polarización y fase respectivamente, del campo lejano de una antena.

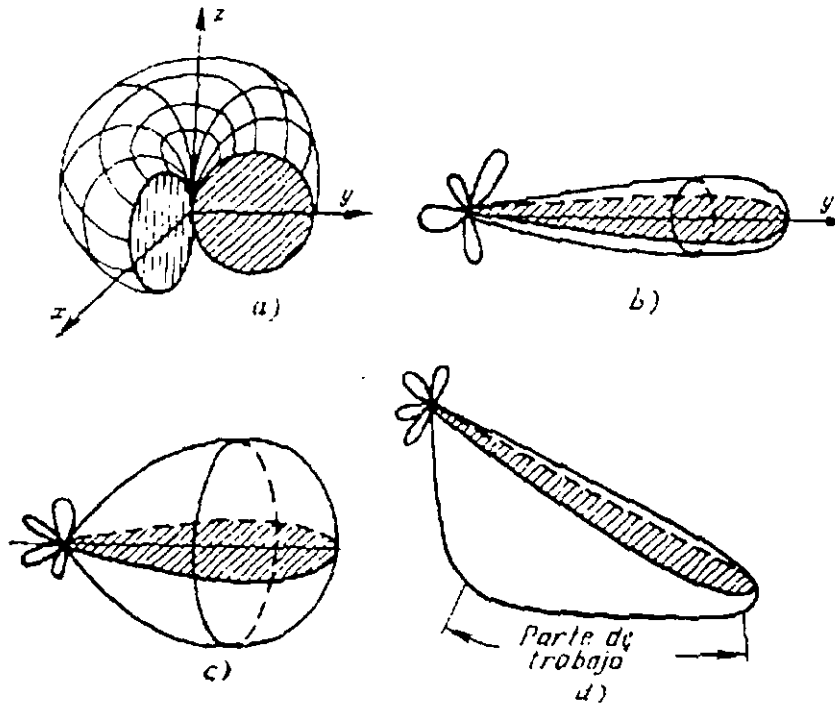
### *Característica de Magnitud (Patrón de Radiación).*

El factor positivo  $F(\theta, \varphi)$  es la curva característica de emisión (diagrama direccional) de magnitud del campo eléctrico normalizado, de tal manera que  $\text{máx.}[F(\theta, \varphi)] = 1$ . La función  $F(\theta, \varphi)$  describe la distribución angular normalizada del vector total del campo eléctrico en la zona lejana de la antena. Si elevamos al cuadrado la función  $F(\theta, \varphi)$ , se transforma automáticamente en la curva característica de emisión (diagrama direccional) normalizada por potencia (Intensidad de Radiación)  $F^2(\theta, \varphi)$ . La función  $F^2(\theta, \varphi)$ , describe la distribución angular normalizada del vector total de Poynting en la zona lejana de la antena.

Para la representación de la curva característica de emisión de amplitud se utilizan distintos métodos de construcción gráfica: frecuentemente se utilizan superficies que une los extremos de los vectores radiales, que salen del origen de coordenadas y que tienen en cada dirección una longitud igual a la magnitud de la función  $F(\theta, \varphi)$  en una escala dada.



Los diagramas direccionales que con mayor frecuencia se encuentran en la práctica son los toroidales (a), filiforme (b), haz en abanico (c) y cosecante (d).



*Toroidal:* La radiación es casi uniforme en el plano perpendicular al toroide. El campo de aplicación es la radiocomunicación, la radionavegación y radiodifusión.

*Filiforme (haz en forma de lápiz):* El lóbulo principal es bien expresado, casi de igual anchura en todos los planos que pasan por la dirección de máxima radiación.

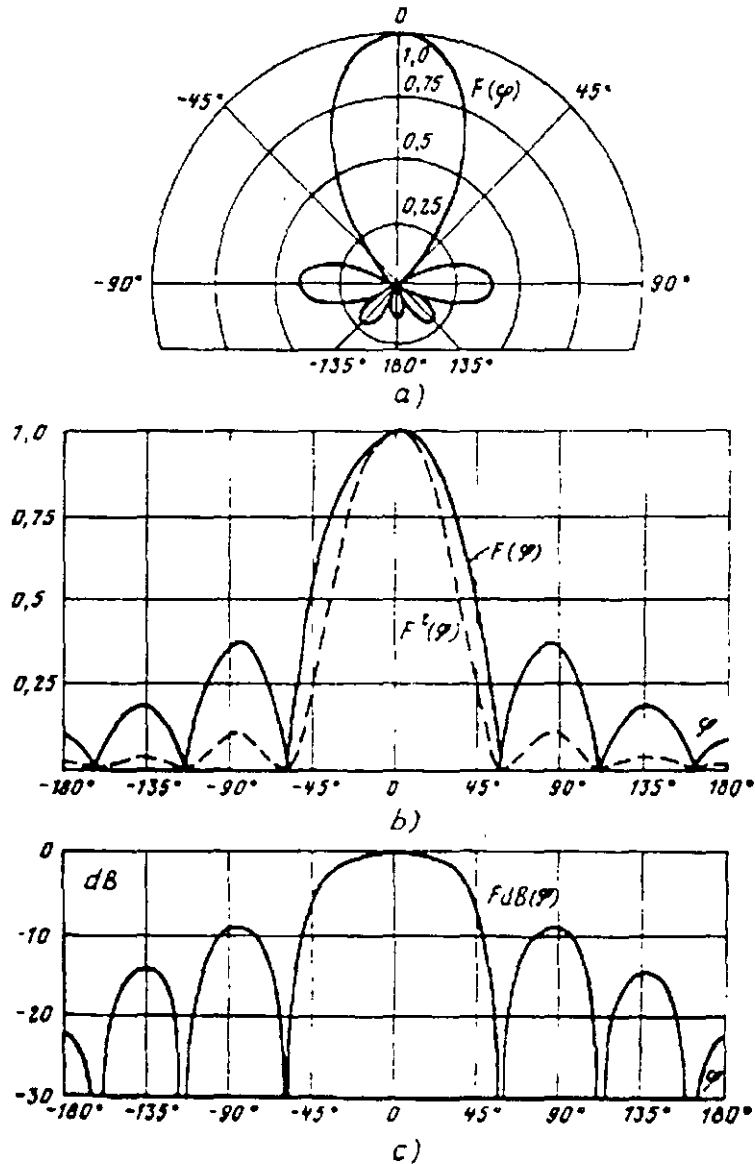
*Haz en abanico:* La anchura del haz en dos planos mutuamente perpendiculares se diferencia bruscamente entre sí. El campo de aplicación de diagramas filiforme y haz en abanico es el de los radares.

*Cosecante:* el haz tiene forma asimétrica. Su porción de trabajo en uno de dos planos (generalmente vertical) se determina por la ecuación  $F(\theta) = \csc\theta$ , mientras en el otro plano (horizontal) el haz es simétrico y tiene poca anchura. Su campo de aplicación son los radares aerotransportados para la observación de la superficie terrestre.

Sin embargo, esta forma de representación es bastante compleja. Por ello la forma del diagrama direccional se realiza por sus secciones en los planos escogidos.

Para las antenas débilmente dirigidas se utilizan las secciones principales del sistema de coordenadas esféricas: el plano ecuatorial y meridional. Para los diagramas de haz filiforme y de haz en abanico se utiliza frecuentemente pares de secciones perpendiculares, que pasan por el sentido de radiación máxima.

Para la presentación de las secciones de los diagramas direccionales se emplean las coordenadas polares o las cartesianas, así como las distintas escalas de amplitud: a) lineal (por campo), b) cuadrática (por potencia) y c) logarítmica (escala dB).



## POLARIZACION.

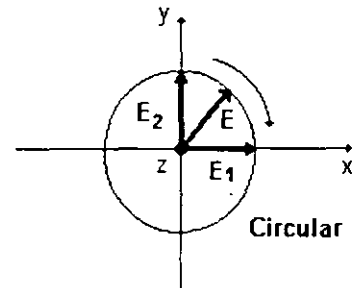
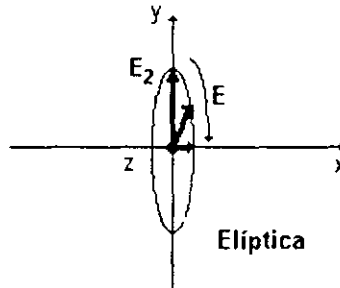
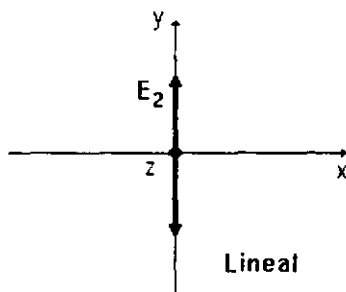
La polarización de una antena en una dirección dada es definida como la polarización de la onda radiada, cuando la antena es excitada y la máxima potencia es disponible en las terminales de la antena.

La polarización de una onda radiada es definida como esta propiedad de una onda electromagnética radiada que describe su dirección en el tiempo y la magnitud relativa del vector de campo eléctrico en un punto fijo en el espacio.

Por ejemplo, si la onda esta viajando en la direcci3n z positiva (saliendo de la p3gina), las componentes del campo el3ctrico en la direcci3n x y y son

$$E_x = E_1 \cos(\omega t - \beta z) \quad , \quad E_y = E_2 \cos(\omega t - \beta z + \delta)$$

donde  $E_1$  = amplitud de la onda de polarizaci3n lineal en la direcci3n x.  
 $E_2$  = amplitud de la onda de polarizaci3n lineal en la direcci3n y.  
 $\delta$  = 3ngulo de fase por el cual  $E_y$  esta adelantada a  $E_x$ .



$$\begin{aligned} \text{Polarizaci3n el3ptica } (E_1 \neq E_2 \neq 0) & \left\{ \begin{array}{l} \text{Derecha } \delta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Izquierda } \delta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \text{Polarizaci3n Circular } (E_1 = E_2 \neq 0) & \left\{ \begin{array}{l} \text{Derecha } \delta = -\frac{\pi}{2} \\ \text{Izquierda } \delta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \\ \text{Polarizaci3n lineal} & \left\{ \begin{array}{l} \text{vertical si } E_1 = 0 \\ \text{horizontal si } E_2 = 0 \\ \text{inclinada si } E_1 = E_2 \neq 0 \text{ y } \delta = 0^0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

*Propiedades de polarizaci3n.*

El factor vectorial  $\vec{p}(\theta, \varphi)$  es un vector unitario de polarizaci3n con dos componentes orientadas seg3n las direcciones de los vectores b3sicos del sistema de coordenadas esf3ricas

$\vec{i}_\theta$  y  $\vec{i}_\varphi$ :

$$\vec{p}(\theta, \varphi) = \vec{i}_\theta p_\theta(\theta, \varphi) + \vec{i}_\varphi p_\varphi(\theta, \varphi)$$

El módulo del vector  $\vec{p}$  siempre es igual a la unidad independientemente de las direcciones  $\theta$  y  $\varphi$ , es decir,

$$|p_{\theta}|^2 + |p_{\varphi}|^2 = 1$$

Las componentes  $p_{\theta}$  y  $p_{\varphi}$  indican el contenido relativo de las componentes azimutal y meridional del vector de intensidad del campo eléctrico en la zona lejana de la antena, para cada dirección  $\theta$ ,  $\varphi$ , así como del desfase entre ellas.

#### *Factor de pérdidas de polarización.*

En general, la polarización de la antena receptora podría no ser la misma polarización de la onda incidente. Esto es comúnmente establecido como "acoplamiento de polarización". La cantidad de la potencia extraída por la antena de la señal incidente podría no ser la máxima debido a las pérdidas de polarización. Suponiendo que el campo eléctrico de la onda incidente puede ser escrita como  $E_i = \hat{\rho}_i E_i$ , donde  $\hat{\rho}_i$  es el vector unitario de polarización de la onda y la polarización del campo eléctrico de la antena receptora puede ser expresado como  $E_a = \hat{\rho}_a E_a$ , donde  $\hat{\rho}_a$  es su vector unitario. Las pérdidas de polarización pueden ser introducidas como un *factor de pérdidas de polarización* (PLF). Esto es definido como

$$PLF = \hat{\rho}_i \cdot \hat{\rho}_a = \cos^2 \psi_p \quad (\text{adimensional})$$

donde  $\psi_p$  es el ángulo entre los dos vectores unitarios.

#### DIAGRAMA DIRECCIONAL DE FASES DE UNA ANTENA.

El exponente imaginario  $\Phi(\theta, \varphi)$  en el tercer factor de la fórmula, se llama diagrama (curva característica) direccional de fases de una antena de acuerdo a la polarización principal de radiación. La función  $\Phi(\theta, \varphi)$  caracteriza la variación del desfase en la componente de la polarización principal cuando el punto de observación se desplaza por la superficie de la esfera de radio  $R$  con respecto al sistema de coordenadas elegido (y por lo tanto depende esencialmente de la posición del origen de coordenadas).

#### DIRECTIVIDAD Y OTROS PARÁMETROS RELACIONADOS CON EL DIAGRAMA DIRECCIONAL DE MAGNITUD.

*Directividad.* Indica el grado de concentración de la potencia radiada en una dirección dada y puede ser definida como una relación de la magnitud del vector de Poynting en el punto de observación a la magnitud media del vector de Poynting en la superficie de una esfera, que abarca la antena y que pasa por el punto de observación. A esta definición le corresponde la siguiente fórmula:

$$D_{\max} = \frac{\vec{S}_{\max}}{\vec{S}_m} = \frac{\frac{|\vec{E}_{\max}|^2}{2Z_0}}{\frac{P_{\Sigma}}{4\pi R^2}} = \frac{|\vec{E}_{\max}|^2 2\pi R^2}{Z_0 P_{\Sigma}}$$

donde  $\vec{S}_{\max}$  es el módulo del vector de Poynting en el sentido de máxima radiación a la distancia R.  $\vec{S}_m$  es el módulo promedio del vector de Poynting a la distancia R,  $|\vec{E}_{\max}|$  es el módulo del vector total de intensidad de campo en el sentido de máxima radiación a la distancia R;  $P_{\Sigma}$  es la potencia radiada;  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  es la impedancia característica del medio.

Existe también otra definición de la directividad completamente equivalente a la primera. De acuerdo con esta definición la directividad de una antena, indica cuantas veces debe ser aumentada la potencia radiada al sustituir una antena direccional (dirigida) por una antena isotrópica absolutamente omnidireccional (no dirigida) hipotética, con la condición de mantener constante la magnitud del módulo del vector de Poynting en el punto de recepción. Por consiguiente, de aquí se recalca el hecho de que el aumento de la directividad es equivalente aparentemente al crecimiento de la potencia del transmisor. La potencia radiada por una antena direccional es proporcional al valor de la siguiente integral:

$$P_{\Sigma} = A \int_{\Omega=4\pi} F^2(\theta, \varphi) d\Omega$$

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

donde A es el coeficiente de proporcionalidad y se integra entre los límites del ángulo sólido total  $\Omega = 4\pi$ , es decir, desde 0 hasta  $2\pi$  respecto de  $\varphi$  y desde 0 hasta  $\pi$  respecto a  $\theta$ . Si la antena es un radiador isotrópico hipotético con diagrama de direccionalidad  $F^2(\theta, \varphi) = 1$ , su potencia de radiación será igual a:

$$P_{\Sigma_{\text{isotr}}} = A \int_{\Omega=4\pi} d\Omega = 4\pi A$$

Usando la segunda definición de la ganancia de antena dirigida, para el sentido de máxima radiación obtenemos:

$$D_{\max} = \frac{P_{\Sigma_{\text{isotr}}}}{P_{\Sigma}} = \frac{4\pi}{\int_{\Omega=4\pi} F^2(\theta, \varphi) d\Omega}$$

En adelante la directividad de la antena se determinará siempre para el sentido de máxima radiación y para abreviar la escritura eliminaremos el subíndice "max". Para todos los otros sentidos de radiación la magnitud de la directividad será igual a:

$$D(\theta, \varphi) = D_{\max} F^2(\theta, \varphi) = DF^2(\theta, \varphi)$$

### *Anchura de haz y nivel de los lóbulos laterales.*

Además de la directividad, las propiedades direccionales de una antena se estiman también por la magnitud de ángulo de apertura del lóbulo principal del diagrama direccional o curva característica de radiación en cualquier plano y en nivel dado de intensidad o potencia del campo. La magnitud de este ángulo se llama anchura del haz en el plano correspondiente. Con mucha frecuencia se determina la anchura del haz  $\Delta\theta$  en el nivel de la potencia promedio (nivel 0.707 por campo, o bien  $-3\text{dB}$ ) con respecto al máximo principal de radiación.

A parte de la anchura del haz, es muy importante el parámetro secundario conocido como el nivel de los lóbulos laterales de la antena. Este nivel caracteriza por magnitud del máximo del lóbulo lateral mayor en comparación con la magnitud del máximo principal (en escala logarítmica, lineal o cuadrática).

La anchura del haz y el nivel de los lóbulos laterales son parámetros que determinan el poder resolutivo y la protección contra los ruidos de los sistemas de radiofrecuencias. Por ello en los requisitos técnicos para la elaboración de las antenas a estos parámetros se les da gran importancia.

### *Directividad en función de la anchura del haz y del nivel de los lóbulos laterales.*

Para las antenas de haz filiforme o de haz en abanico en la práctica tiene amplia difusión la valoración aproximada de la directividad por la fórmula:

$$D = \frac{32000 \text{ a } 36000}{\Delta\theta^0 \Delta\varphi^0}$$

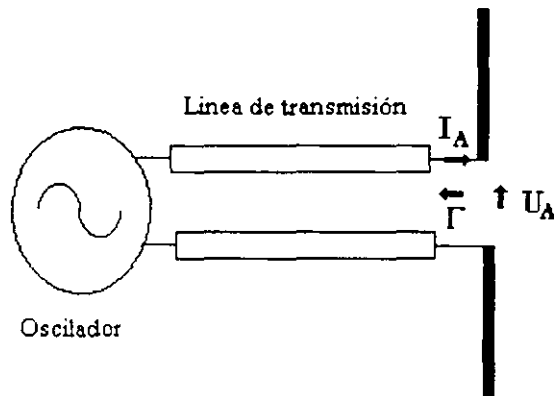
donde  $\Delta\theta^0$ ,  $\Delta\varphi^0$  son los valores de la anchura del lóbulo principal del diagrama direccional real en el nivel de potencia promedio.

### **Impedancia de entrada y resistencia de radiación.**

Una antena conectada a una línea de transmisión puede ser considerada como un dispositivo eléctrico con una entrada. Entonces, podemos definir la impedancia de entrada de la antena como:

$$Z_A = \frac{U_A}{I_A} = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = R_A + jX_A$$

donde  $U_A$ ,  $I_A$  es voltaje y corriente en la entrada de la antena,  $Z_0$  es la impedancia característica de la línea,  $\Gamma$  es el coeficiente de reflexión,  $R_A$  es la parte real de la impedancia de entrada de la antena,  $X_A$  es la parte imaginaria de la impedancia de entrada de la antena.



Ahora podemos calcular la potencia total consumida por la antena:

$$P_{tot} = \frac{1}{2} I_A^2 R_A$$

la parte de la potencia de alta frecuencia suministrada a la antena se pierde en el calentamiento de conductores y dieléctricos no ideales. El resto de la potencia suministrada se convierte en las ondas electromagnéticas progresivas en el espacio. Por lo tanto,

$$P_{tot} = P_{\Sigma} + P_p = \frac{1}{2} I_A^2 R_{\Sigma} + \frac{1}{2} I_A^2 R_p = \frac{1}{2} I_A^2 (R_{\Sigma} + R_p)$$

donde  $P_{\Sigma}$  es la potencia de radiación o potencia emitida y  $P_p$  es la potencia de pérdidas ohmicas en la antena. Por su parte,  $R_p$  es la resistencia de pérdidas y  $R_{\Sigma}$  es la *resistencia de radiación*.

La resistencia de radiación es una resistencia equivalente la cual consume la misma potencia emitida por la antena cuando la corriente que pasa por la resistencia mencionada es igual a la corriente en la entrada de la antena.

Podemos ver que la impedancia de entrada de la antena es igual a la suma de la resistencia de pérdidas y la resistencia de radiación.

La relación entre la potencia de radiación y la potencia suministrada a la antena se llama el rendimiento de la antena:

$$\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P_{tot}} = \frac{P_{\Sigma}}{P_{\Sigma} + P_p} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\Sigma} + R_p}$$

El producto de directividad por rendimiento se llama ganancia de la antena:

$$G = \eta D$$

La ganancia indica cuantas veces debe ser aumentada la potencia de entrada al sustituir una antena dirigida real con pérdidas por una antena isotrópica hipotética absolutamente no direccional sin pérdidas con la condición de mantener constante el vector de Poynting en el punto de observación.

### Eficiencia total.

La eficiencia total  $e_t$  es usada para tomar en cuenta las pérdidas en las terminales de entrada y dentro de la estructura de la antena. Dichas pérdidas pueden ser debido a las,

1. Reflexiones por el desacoplamiento entre la línea de transmisión y la antena.
2. pérdidas (conductivas y dieléctricas)  $I^2R$

En general la eficiencia puede escribirse como

$e_t = e_r e_c e_d$   
 donde

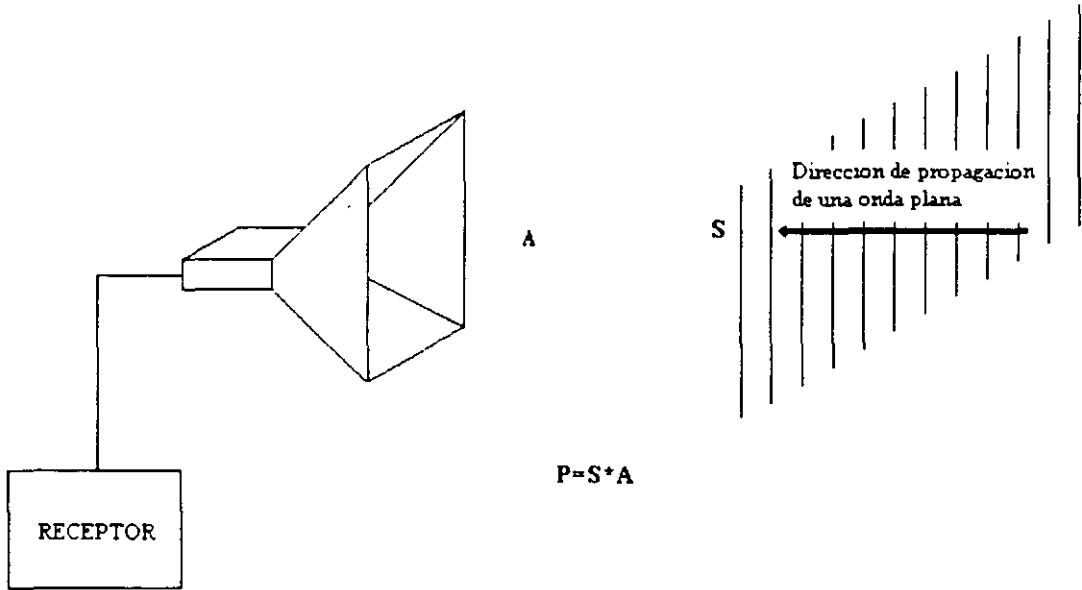
- $e_t$  = la eficiencia total (adimensional)
- $e_r$  = eficiencia de reflexión (acoplamiento) =  $(1 - |\Gamma|^2)$  (adimensional)
- $e_c$  = eficiencia de conducción ( $\eta$ ) (adimensional)
- $e_d$  = eficiencia dieléctrica (adimensional)

$\Gamma$  = coeficiente de reflexión en las terminales de entrada de la antena [ $\Gamma = \frac{Z_m - Z_0}{Z_m + Z_0}$  donde

$Z_{in}$  = impedancia de entrada de la antena,  $Z_0$  = impedancia característica de la línea de alimentación]

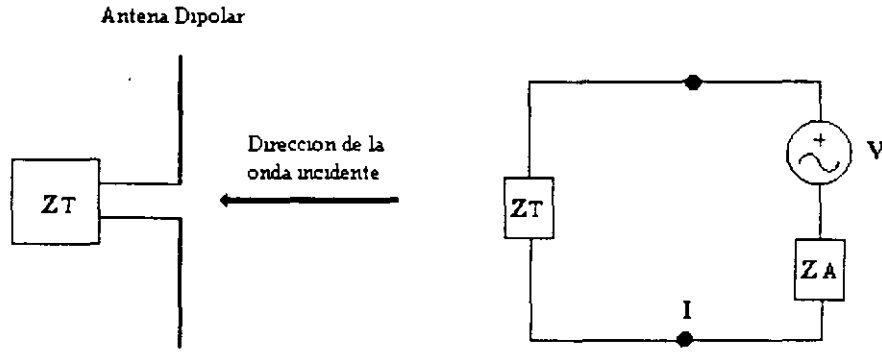
### Superficie efectiva y longitud efectiva.

Supongamos que la antena receptora (bocina) con área  $A$  esta sometida en el campo de una onda plana con densidad de flujo de la potencia electromagnética  $S$ , bien, módulo del vector de Poynting igual a  $\vec{S}$  watts por metro cuadrado. En el caso cuando la bocina extrae toda la potencia del área  $A$ , la potencia absorbida de la onda será:  $P = SA$ .





La antena receptora recoge potencia de la onda plana y entrega a la impedancia  $Z_T$ , conectada a la entrada de la antena. La antena en este caso puede ser sustituida por el generador de voltaje  $V$ , con impedancia interna  $Z_A$ . El voltaje  $V$  se induce debido a la existencia de la onda electromagnética y, por su parte esto produce una corriente  $I$ :



$$I = \frac{V}{Z_T + Z_A} = \frac{V}{R_l + R_p + R_c + j(X_A + X_T)}$$

La potencia entregada por la antena a la carga (impedancia  $Z_T$ ) será evaluada por la ecuación siguiente:

$$P = \frac{1}{2} I^2 R_l = \frac{1}{2} \frac{V^2 R_l}{(R_l + R_p + R_c)^2 + (X_A + X_l)^2} = AS$$

Supongamos que  $V$  es el voltaje inducido cuando la antena esta orientada para obtener máxima respuesta y la onda plana tiene la misma polarización como la antena, la expresión anterior ser escrita como sigue:

$$A = \frac{1}{2} \frac{V^2 R_l}{[(R_l + R_p + R_c)^2 + (X_A + X_l)^2]} S$$

En el caso cuando la impedancia de la carga sea el complejo conjugado de la impedancia de la antena, tenemos la máxima transferencia de la potencia a la carga:

$$A_c = \frac{V^2}{8S(R_c + R_p)}$$

$A_c$  es la superficie efectiva de la antena.

Si la antena es de bajas pérdidas ( $R_p = 0$ ), obtenemos la superficie efectiva máxima  $A_{cm}$  de la antena. Esto es

$$A_{cm} = \frac{V^2}{4SR_c}$$

Si dividimos  $A_e$  entre  $A_{em}$ , tenemos lo siguiente,

$$\eta = \frac{A_e}{A_{em}}$$

*Longitud efectiva.*

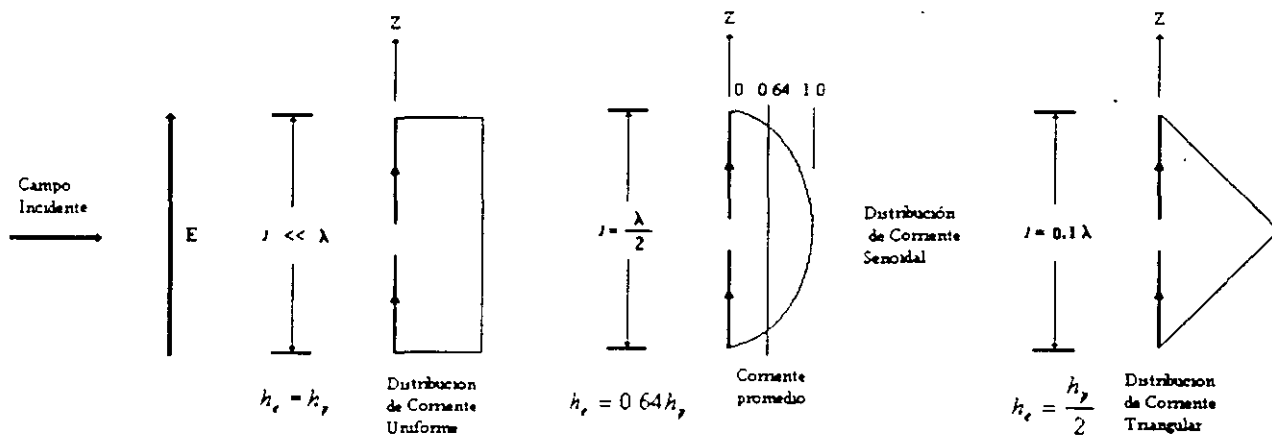
La longitud efectiva puede ser definida como la relación entre el voltaje inducido y la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$h_e = \frac{V}{\vec{E}}$$

La otra posibilidad de definir la longitud efectiva de la antena es tomar en consideración el caso de transmisión e igualar la longitud efectiva a la longitud física multiplicada por el valor promedio normalizado de la corriente:

$$h_e = \frac{1}{I_0} \int_0^{h_p} I(z) dz = \frac{I_{av}}{I_0} h_p$$

donde  $h_p$  es la longitud física,  $I_{av}$  es el valor promedio de la corriente.



Para una antena de resistencia de radiación  $R_\Sigma$  acoplada a su carga, la potencia entregada a la carga es igual a:

$$P_l = \frac{1}{4} \frac{V^2}{R_\Sigma} = \frac{h_e^2 E^2}{4 R_\Sigma}, \quad P_l = S A_e = \frac{E^2 A_e}{Z_0}$$

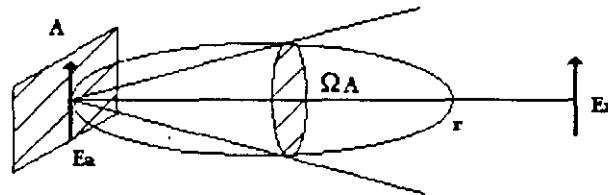
Igualando ambas ecuaciones, obtenemos la relación entre área y longitud efectiva es obtenida en función de la resistencia de radiación y la impedancia intrínseca del espacio ( $Z_0$ ):

$$h_e = 2 \frac{R_\Sigma A_e}{Z_0}, \quad A_e = \frac{h_e^2 Z_0}{4 R_\Sigma}$$

### Area Efectiva y Directividad.

Hay una importante relación entre área efectiva y directividad de todas las antenas como se muestra continuación.

Considere el campo eléctrico  $E_r$  a una distancia grande. Si la intensidad de campo en la apertura es constante e igual a  $E_a$  (volts por metro), la potencia de radiación es dada por



$$P_{\Sigma A} = \frac{E_a^2}{Z_0} A \quad (1)$$

donde:

A - área física

$Z_0$  - impedancia intrínseca

La potencia de radiación puede ser expresada en términos de la intensidad de campo  $E_r$  (volts por metro) a una distancia  $r$  por

$$P_{\Sigma r} = \frac{E_r^2}{Z_0} r^2 \Omega_A \quad (2)$$

donde:  $\Omega_A$  es el ángulo sólido de la antena [sr]

Las intensidades de campo  $E_r$  y  $E_a$  están relacionadas por

$$E_r = \frac{E_a A}{r \lambda} \quad (3)$$

donde:  $\lambda$  es la longitud de onda [m].

Sustituyendo (3) en (2), e igualando con (1), obtenemos:

$$\boxed{\lambda^2 = A \Omega_A}$$

si suponemos que no hay pérdidas ohmicas  $\Rightarrow A = A_{cm}$

Como  $D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$ , por lo tanto  $D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{cm}$

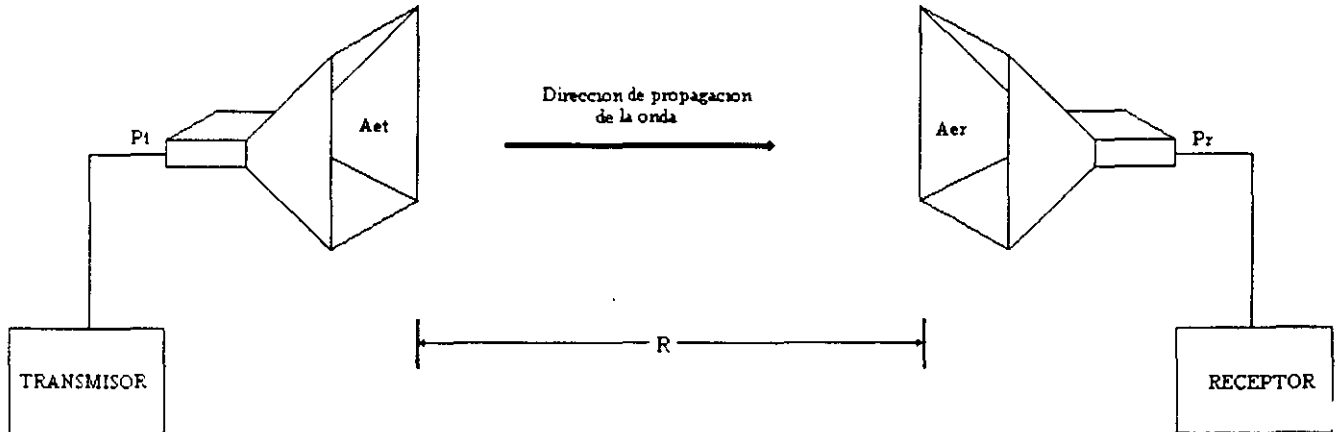
Además, dado que  $G = \eta D$

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_e$$

donde  $A_e = \eta A_{em}$

### Formula de transmisión de Friis.

La utilidad del concepto de apertura puede ser ilustrado, usando este para derivar la importante *fórmula de transmisión de Friis*. Esta fórmula da la potencia recibida sobre un circuito de radio comunicaciones.



Supongamos que la potencia del transmisor  $P_t$  es la que alimenta la antena transmisora de área efectiva  $A_{et}$ . A una distancia  $r$  una antena receptora de área efectiva  $A_{er}$  intercepta algo de la potencia radiada por la antena transmisora y la entrega al receptor. Si suponemos por un momento que la antena transmisora es isotrópica, la potencia por unidad de área en la antena receptora es:

$$S_r = \frac{P_t}{4\pi R^2}$$

Si la antena tiene ganancia  $G_t$ , la potencia por unidad de área en la antena receptora sería incrementada en proporción dada por:

$$S_r = \frac{P_t G_t}{4\pi R^2}$$

Ahora la potencia recolectada por la antena receptora de apertura efectiva  $A_{er}$  es

$$P_r = S_r A_{er} = \frac{P_t G_t A_{er}}{4\pi R^2} \quad (4)$$

Por otro lado, la ganancia de la antena transmisora puede ser expresada como

$$G_t = \frac{4\pi A_{et}}{\lambda^2}$$

Sustituyendo esto dentro de (4) obtenemos la *fórmula de transmisión de Friis*.

$$P_r = P_t \frac{A_{et} A_{er}}{R^2 \lambda^2}$$

donde:

$P_r$  – potencia recibida, en Watts.

$P_t$  – potencia transmitida en Watts.

$A_{et}$  – área efectiva de la antena transmisora, en  $m^2$ .

$A_{er}$  – área efectiva de la antena receptora, en  $m^2$ .

$r$  – distancia entre las antenas, en m.

$\lambda$  - longitud de onda, en m.

$$P_r = P_t \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 D_r D_t$$

Considerando pérdidas (conductivas y ohmicas), polarización, acoplamiento de impedancia (reflexión) y alineación de la antena, obtenemos la siguiente expresión que contempla todos estos factores.

$$P_r = P_t \left( \frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 e_c e_d (1 - \Gamma_t^2)(1 - \Gamma_r^2) D_t(\theta_t, \vartheta_t) D_r(\theta_r, \vartheta_r) \hat{p}_t \cdot \hat{p}_r^*$$

### **Banda de frecuencia de trabajo y Potencia máxima.**

La banda de trabajo de una antena se encuentra en cuyos límites los parámetros de la misma, no exceden los límites establecidos por los requisitos técnicos. Convencionalmente se consideran antenas de.

- Bandas estrechas  $< 10\% f_T$ .
- Banda ancha  $10\% - 50\% f_T$ .
- Antenas de sintonización múltiple varias octavas.
- Antenas independientes de la frecuencia relación del límite inferior y superior de  $f_T:5:1$

La *Potencia Máxima* es aquella que se puede aplicar a la entrada de la antena sin peligrar su deterioro o ruptura del medio ambiente y rigidez dieléctrica de la antena.

## DIPOLO DE HERTZ.

### Potenciales Vectoriales auxiliares.

En la práctica es común que en el análisis de problemas electromagnéticos para evaluar las condiciones en la frontera, usar auxiliares potenciales vectoriales como ayuda en la obtención de soluciones del campo eléctrico ( $\mathbf{E}$ ) y el campo magnético ( $\mathbf{H}$ ). Las funciones potenciales vectoriales más comunes son el potencial vectorial eléctrico  $\mathbf{A}$  y el potencial vectorial magnético  $\mathbf{F}$ . Estos son ampliamente usados en la solución de problemas de radiación en antenas.

Para densidades de corrientes  $\mathbf{J}$  (eléctricas) y  $\mathbf{M}$  (magnéticas), estos vectores se calculan de la siguiente forma:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V J(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad (5)$$

$$F(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V M(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv'$$

Si  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{M}$  representan densidades lineales, las ecuaciones anteriores se reducen a:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S J_s(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \quad (6)$$

$$F(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_S M_s(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds'$$

Para corrientes eléctricas y magnéticas  $I_e$  e  $I_m$  estas expresiones se reducen a:

$$A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{l'} I_e(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dl' \quad (7)$$

$$F(x, y, z) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{l'} I_m(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dl'$$

donde las primeras coordenadas representan la fuente y las segundas coordenadas ( $'$ ) representan el punto de observación y  $R$  representa la distancia de cualquier punto de la fuente al punto de observación.

Una vez encontrado estos potenciales auxiliares, el paso que sigue es encontrar los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , como sigue

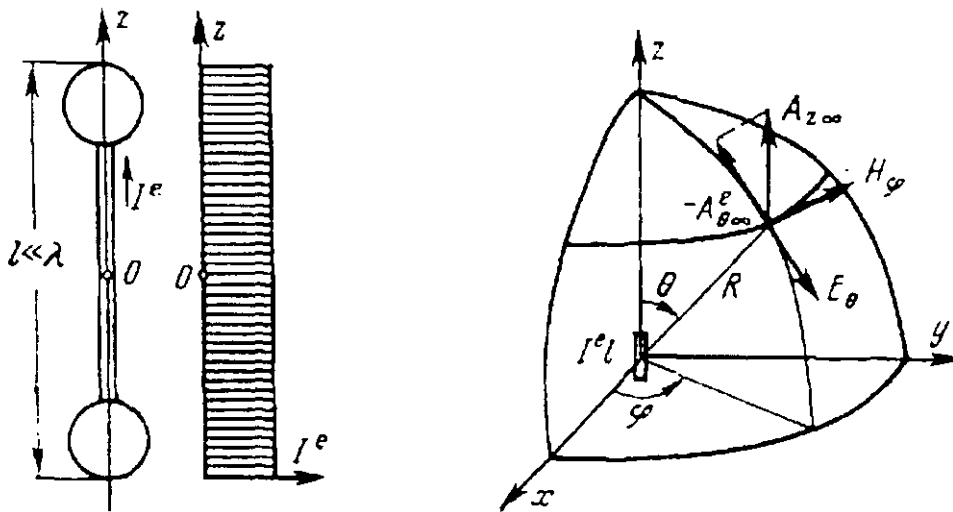
$$E = E_A + E_f = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times H_A - \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times F \quad (8)$$

$$H = H_A + H_f = \frac{1}{\mu} \nabla \times A - j\omega F - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot F)$$

### Dipolo de Hertz y sus parámetros.

El dipolo eléctrico de Hertz es un radiador elemental. Representa el modelo ideal de una antena real en forma de trozos de conductor de longitud  $\ell$ , pequeña en comparación con la longitud de onda, terminando en los extremos con esferas metálicas. Debido a la pequeñez de  $\ell$ , la distribución de la corriente eléctrica a lo largo del conductor se toma constante e igual a  $I_e$ . A pesar de que en la práctica no se utiliza esta antena, el estudio de sus propiedades resulta útil puesto que la mayoría de las antenas complejas de conductores puede ser representada por superposición de una serie de elementos cortos, cada uno de los cuales es un dipolo elemental.

Coloquemos el dipolo en el origen del sistema de coordenadas esféricas y calculemos su campo electromagnético radiado en la zona lejana por las fórmulas (7) y (8). Debido a la simetría, el campo electromagnético del dipolo de Hertz no depende de  $\varphi$ .



Dipolo de Hertz.

Sistema de coordenadas esféricas.

El potencial vectorial de las corrientes eléctricas del dipolo tendrá una única componente  $A_z$  e igual a

$$A_z = \frac{\mu I_e e^{-i\beta R}}{4\pi R} \int_{-l/2}^{l/2} dz' = \frac{\mu I_e \ell e^{-i\beta R}}{4\pi R}$$

Transformando el vector potencial  $A$  de coordenadas rectangulares a esféricas, obtenemos

$$A_r = A_z \cos \theta = \frac{\mu I_e \ell e^{-i\beta R}}{4\pi R} \cos \theta$$

$$A_\theta = -A_z \sin \theta = \frac{\mu I_e \ell e^{-i\beta R}}{4\pi R} \sin \theta$$

$$A_\varphi = 0$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (8) obtenemos,

$$H = H_{\phi} = \frac{1}{\mu r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Lo cual se reduce a,

$$\begin{aligned} H_{\theta} = H_r &= 0 \\ H_{\phi} &= j \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) e^{-j\beta R} \end{aligned} \quad (9)$$

El campo eléctrico puede ser encontrado usando la ecuación (8):

$$\begin{aligned} E_r &= \eta \frac{I_e \ell \cos \theta}{2\pi R^2} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} \right) e^{-j\beta R} \\ E_{\theta} &= j\eta \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} \left( 1 + \frac{1}{j\beta r} - \frac{1}{(\beta r)^2} \right) e^{-j\beta R} \\ E_{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Por las condiciones de campo lejano las ecuaciones (9) y (10), se reducen a

$$\begin{aligned} H_{\phi} &= j \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} = \frac{j I_e \ell}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda} \frac{e^{-j\beta R}}{R} \\ E_{\theta} &= j\eta \frac{\beta I_e \ell \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\beta R} = \frac{j I_e \eta \ell}{2} \frac{\sin \theta}{\lambda} \frac{e^{-j\beta R}}{R} \\ H_{\theta} = H_r &= 0 \\ E_r = E_{\phi} &= 0 \\ \text{donde } \beta &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \eta = 120\pi \end{aligned} \quad (11)$$

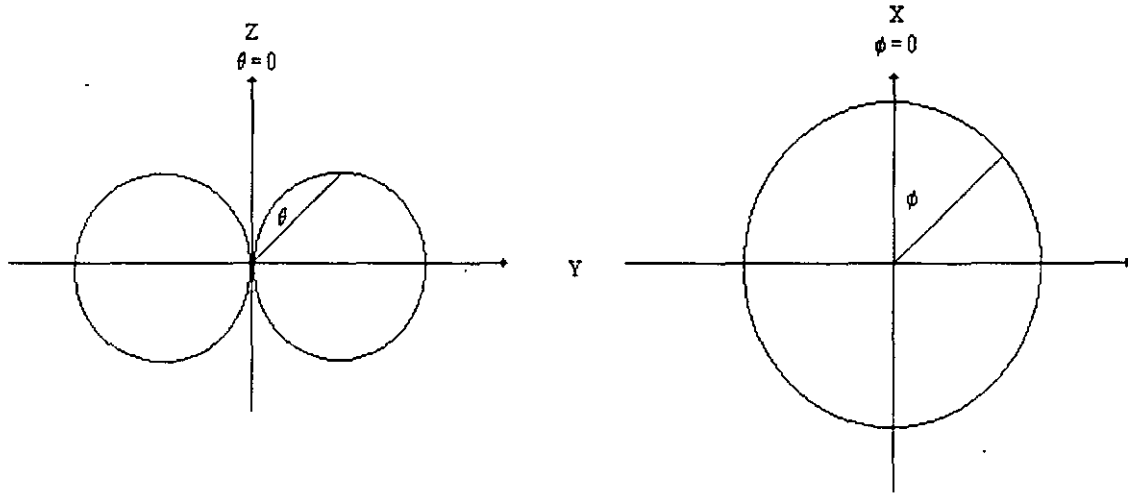
de la ecuación (11), podemos concluir que:

- 1) El dipolo de Hertz emite ondas progresivas, que se alejan al infinito a la velocidad de la luz.
- 2) El vector E se encuentra en el plano meridional, que pasa por el eje del dipolo, y el vector H en el plano azimutal. Por lo tanto, el dipolo emite ondas de polarización lineal.

Las magnitudes de la directividad de los campos eléctricos y magnéticos dependen del ángulo de observación  $\theta$ . Debido a la simetría axial el campo no depende del ángulo  $\phi$ . En el plano meridional el diagrama de radiación del dipolo es un "ocho". En el plano azimutal el diagrama de radiación del dipolo una circunferencia. Por lo tanto, el dipolo de Hertz radia el máximo de



energía en dirección perpendicular a su eje, en tanto que a lo largo del eje de la antena la radiación es igual a cero.



### Potencia y Resistencia de radiación.

La potencia emitida por el dipolo de Hertz se determina integrando el vector de Poynting por la superficie de una esfera arbitraria en la zona lejana:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \int_A [EXH] dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{E_{\theta}^2}{Z_0} \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 30\pi^2 I_e^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 40\pi^2 \cdot I_e^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

por otro lado

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} I_e^2 R_{\Sigma} \Rightarrow R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{I_e^2} = 80\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

### Rendimiento

$$\eta = \frac{P_{\Sigma}}{P_{\Sigma} + P_p} = \frac{R_{\Sigma}}{R_{\Sigma} + R_p} = \frac{\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 80\pi^2}{\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 80\pi^2 + R_p \ell}$$

donde:

$R_1$  = es la resistencia del alambre por unidad de longitud.

### Directividad

$$D_{\max} = \frac{S_{\max}}{S_{\text{med}}} \cdot S_{\text{med}} = \frac{P_{\Sigma}}{4\pi r^2} \cdot S_{\max} = \frac{E_{\max}^2}{240\pi} \Rightarrow D_{\max} = \frac{E_{\max}^2 r^2}{60\pi P_{\Sigma}}$$

sustituyendo,  $|E_{\max}| = \frac{60I_e \ell}{r \lambda}$

obtenemos;  $D_{\max} = 1.5$

Por definición:

$$D_{\max} = \frac{S_{\max}}{S_{\text{med}}} = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}, F^2(\theta, \varphi) = \text{sen}^2\theta$$

obtenemos el mismo resultado.

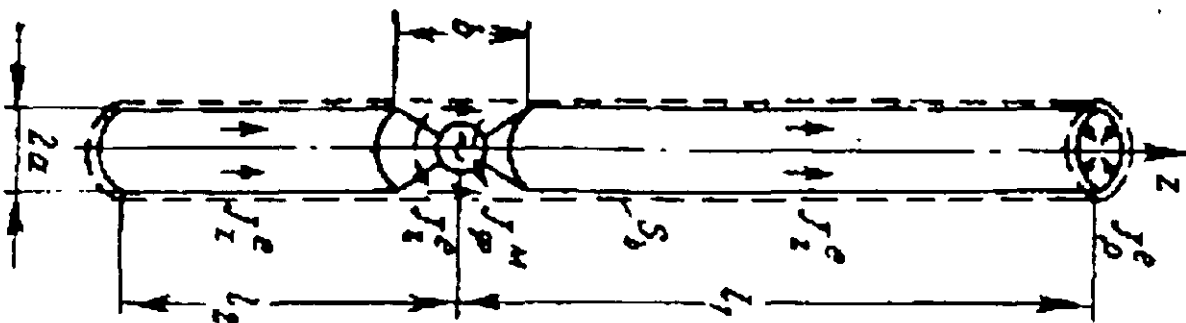
Por lo tanto, la directividad es realmente la medida de las propiedades direccionales y depende solo de la forma de su curva característica de radiación.

### Dipolo Eléctrico

El dipolo eléctrico es un conductor cilíndrico de longitud  $\ell_1 + \ell_2$  y de radio  $a$ , alimentado en los puntos de corte por los generadores de alta frecuencia. Cuando la longitud de los brazos son iguales,  $\ell_1 = \ell_2$ , el dipolo se llama simétrico. El generador se puede acoplar al dipolo por distintos métodos constructivos.

Bajo la acción del generador, en el dipolo aparecen corrientes eléctricas, que se distribuyen por su superficie de manera que el campo electromagnético excitado por ellas satisface las ecuaciones de Maxwell. Las condiciones en la frontera sobre la superficie del conductor y la condición de radiación al infinito.

Las funciones de distribución de las corrientes eléctricas no se conocen de antemano y deben ser previamente determinadas, esto consiste en el problema interior de la teoría del dipolo.



*Distribución de la corriente a lo largo del dipolo.*

Una primera aproximación de la distribución de corriente en un dipolo delgado, puede ser expresada por las siguientes fórmulas:

$$I_z(z) = I_0 \frac{\text{senk}(\ell_1 - z)}{\text{senk}\ell_1} \quad \text{para } z > 0$$
$$I_z(z) = I_0 \frac{\text{senk}(\ell_2 + z)}{\text{senk}\ell_2} \quad \text{para } z < 0$$

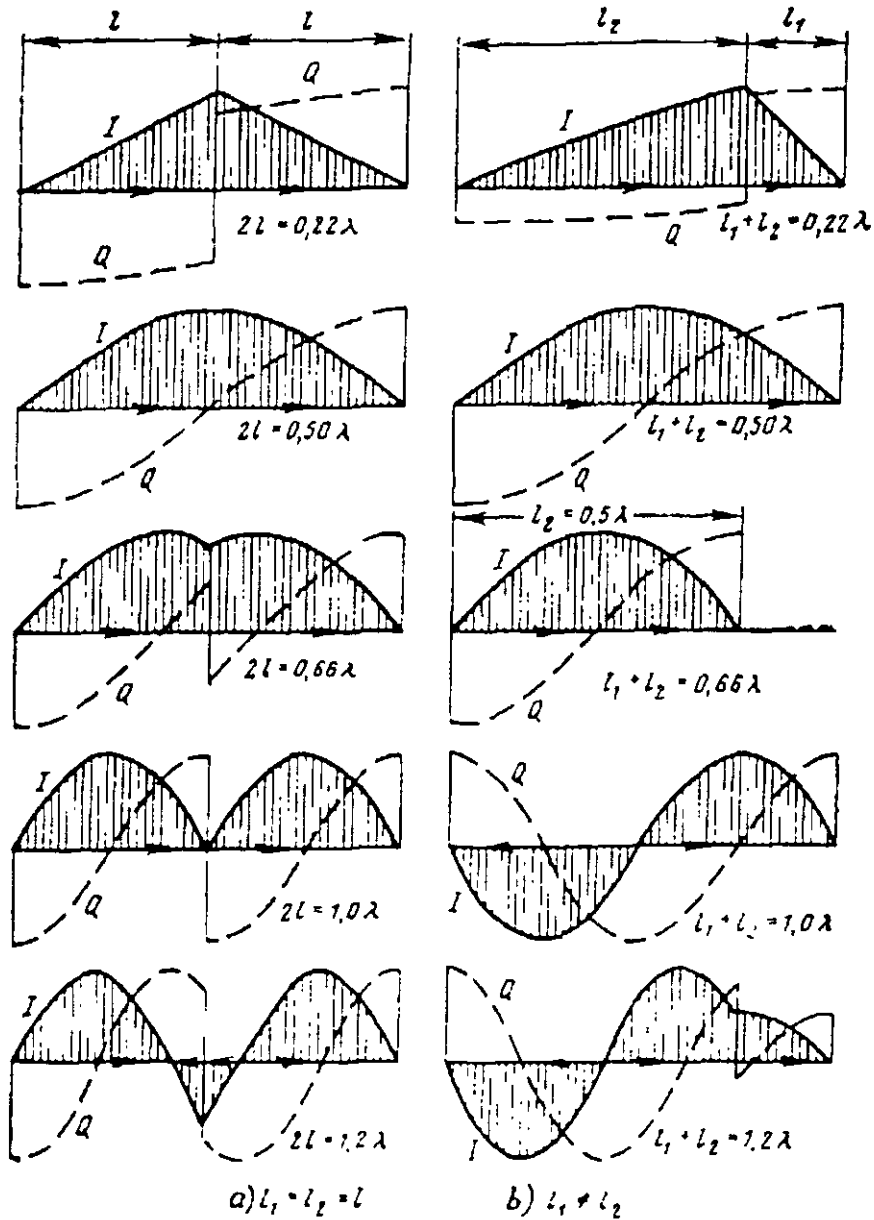
donde  $I_0$  es la magnitud de la corriente en el punto de alimentación.

Para el dipolo simétrico la distribución de corriente resulta simétrica con respecto al centro:

$$I_z(z) = I_0 \frac{\text{senk}(\ell - z)}{\text{senk}\ell}$$

Por consiguiente, en un dipolo delgado la corriente se distribuye aproximadamente por la ley del seno circular.

A continuación se muestran varios casos típicos de distribución de corriente a lo largo de los dipolos simétricos y no simétricos.



Distribución de corriente y carga en un dipolo eléctrico.

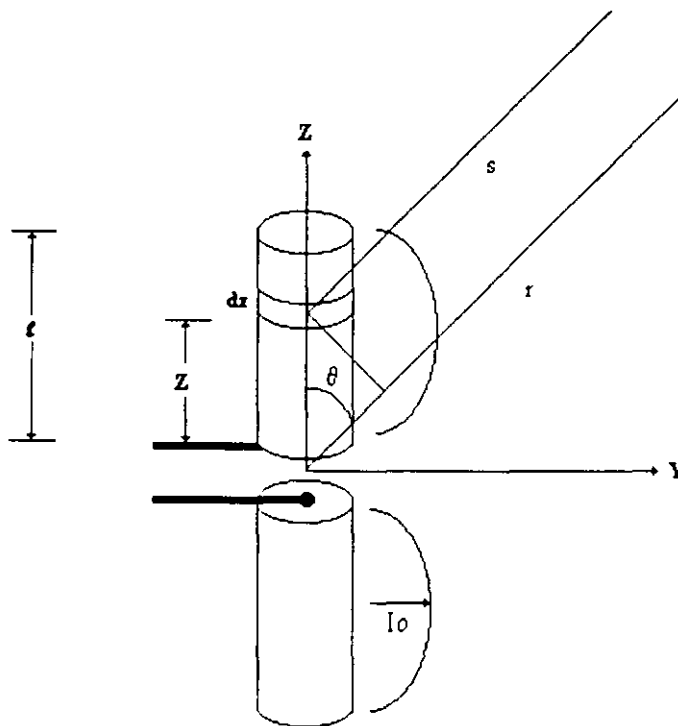
Aquí se presenta especial interés en el dipolo de media onda, que es el más difundido en la práctica, cuya longitud total es igual a  $\frac{\lambda}{2}$ . Su particularidad importante es que la función de distribución de corriente en él, no depende considerablemente del punto de conexión del generador. En todos los demás casos, la distribución de corriente depende considerablemente de la disposición del punto de alimentación a lo largo del dipolo.

Las Particularidades de la distribución de corriente en los dipolos delgados se pueden resumir en forma de las siguientes reglas prácticas:

- en los extremos del dipolo siempre se establecen nodos de corrientes.
- A la distancia de  $\frac{\lambda}{4}$  de los extremos del dipolo se forman máximos de corrientes.
- La fase de la corriente cambia a lo largo del dipolo a saltos de  $180^\circ$  al pasar por cero.
- En los puntos de alimentación del dipolo se establece un máximo, un nodo o un valor intermedio de la corriente según sea la relación entre la longitud del brazo dado y la longitud de onda.
- Para el dipolo los máximos de ambos brazos son idénticos.

*Diagrama de radiación, resistencia de radiación y directividad de un dipolo.*

Campos de una antena lineal delgada



El campo eléctrico lejano  $dE_\theta$  a una distancia  $s$  de el dipolo infinitesimal  $dz$  es:

$$dE_\theta = \frac{j60\pi I_0}{\lambda} \frac{\sin\theta}{s} e^{-jk s} dz$$

El valor del campo eléctrico para  $E_\theta$  para la antena total es la integral sobre la longitud de la antena. Esto es

$$E_\theta = \int_{-l}^l dE_\theta$$

Para distancias grandes, la diferencia entre  $s$  y  $r$  puede ser despreciado en sus efectos sobre la amplitud, sin embargo sus efectos sobre la fase debe ser considerado por sustituir  $s = r - z \cos \theta$ .

Tomando lo anterior en cuenta y sustituyendo el valor de  $E_\theta$  obtenemos,

$$E_\theta = \frac{j60I_0 \text{sen} \theta}{\lambda \text{sen} k\ell} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \left[ \int_0^\ell \text{sen} k(\ell - z) e^{jkz \cos \theta} dz + \int_{-\ell}^0 \text{sen} k(\ell + z) e^{jkz \cos \theta} dz \right]$$

la integrales son de la forma

$$\int \text{sen}(ax + b) e^{cx} dx = \frac{e^{cx}}{a^2 + b^2} [c \text{sen}(ax + b) - a \cos(ax + b)]$$

donde para la primera integral

$$a = jk \cos \theta$$

$$b = k$$

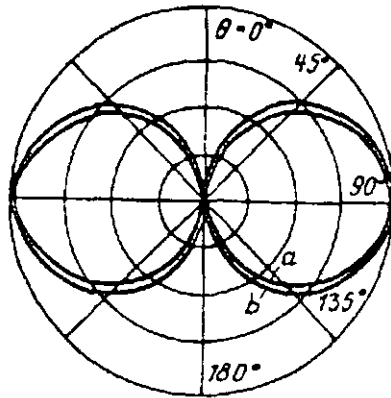
$$c = k\ell$$

Para la segunda integral  $a$  y  $c$  son las mismas como en la primera integral. Pero  $b = -k$ .

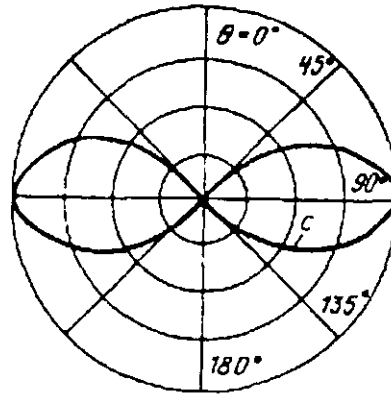
Resolviendo nos da

$$E_\theta = \frac{j60I_0}{\text{sen} k\ell} \frac{\cos(k\ell \cos \theta) - \cos k\ell}{\text{sen} \theta} \frac{e^{-jk r}}{r}$$

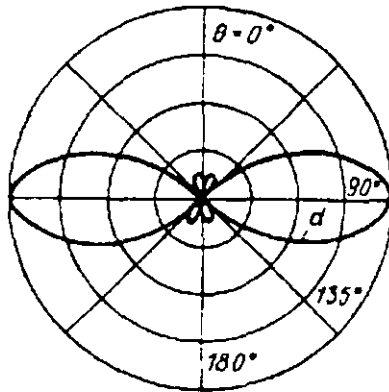
Algunos diagramas de radiación se muestran para diferentes longitudes.



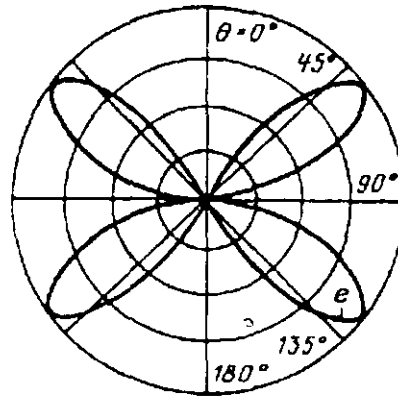
a)  $l = \lambda; \Delta\theta = 90^\circ$   
 b)  $l = 0,25\lambda; \Delta\theta = 80^\circ$



c)  $l = 0,5\lambda; \Delta\theta = 50^\circ$



d)  $l = 0,55\lambda; \Delta\theta = 44^\circ$



e)  $l = \lambda$

Diagramas direccionales de un dipolo simétrico.

Ahora calcularemos la potencia radiada por el dipolo. Para ello integramos el vector de Poynting sobre una esfera en cuyo centro se encuentra el dipolo. Si el dipolo está orientado a lo largo del eje z, la potencia total radiada será:

$$P_z = \frac{1}{2} \iint_4 [E \times H] \cdot dA = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{E_\theta^2}{Z_0} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

donde  $r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$  es la magnitud del área elemental de la superficie de la esfera de radio R. Sustituyendo  $E_\theta$ , llegamos a la siguiente relación

$$P_z = \frac{30 I_0^2}{4\pi \sin^2 kl} \int_0^\pi \frac{[\cos(kl \cos\theta) - \cos kl]^2}{\sin\theta} d\theta$$

Cabe hacer notar que la expresión de la potencia radiada mediante la magnitud de la corriente en los puntos de alimentación no es del todo acertada, pues en el caso en el que  $\sin kl = 0$ , esta magnitud resulta indefinida, dado que con la ley senoidal aproximada de distribución de corriente no se puede estimar el valor exacto de la corriente en los nodos. Por ello,

suele determinarse la resistencia de radiación del dipolo simétrico en la teoría de antenas con la relación:

$$R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{I_0^2}, \text{ donde } I_0 = \frac{I_0}{\text{sen}kl}$$

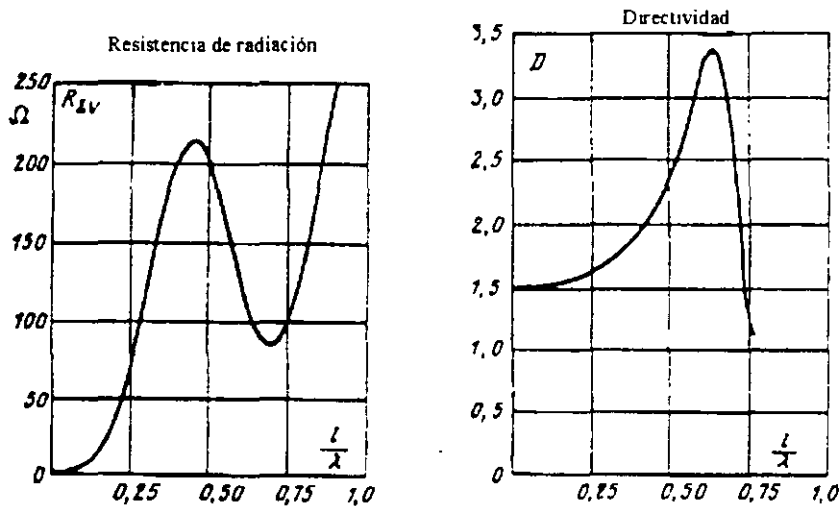
El cálculo de la integral, da lugar a la siguiente fórmula para la resistencia de radiación del dipolo:

$$R_{\Sigma} = \frac{Z_0}{4\pi} \{2[C + \ln 2kl - Ci2kl] + \cos 2kl[C + \ln kl + Ci4kl - 2Ci2kl] + \text{sen}2kl[Si4kl - 2Si2kl]\}$$

donde  $C = 0.5772...$  constante de Euler

$$Si x = \int_0^x \frac{\text{sen} u}{u} du = \text{seno integral}, Ci x = \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = \text{coseno integral}$$

Los resultados del cálculo de la resistencia de radiación se dan en la siguiente figura.



Conociendo la potencia de radiación, se puede determinar fácilmente la directividad del dipolo simétrico, esto es

$$D(\theta) = \frac{E_{\theta}(\theta)^2 2\pi R^2}{Z_0 P_{\Sigma}}$$

Para  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (cuando  $\frac{l}{\lambda} < 0.64$  este será el sentido de radiación máxima) la intensidad del campo eléctrico será

$$E_{\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{jI_0 Z_0}{2\pi \text{sen}kl} \frac{1 - \cos k\ell}{R} e^{-jkR}$$

La magnitud de la potencia radiada podemos expresarla como sigue:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} R_{\Sigma} I_0^2 = \frac{1}{2} R_{\Sigma} \frac{I_0^2}{\text{sen}^2 kl}$$



Con estas dos últimas ecuaciones obtenemos la expresión para la directividad:

$$D\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{Z_0}{\pi R_r} [1 - \cos k\ell]^2$$

La gráfica de arriba, muestra la curva de la variación de la directividad en función de la relación  $\frac{\ell}{\lambda}$ .

Conclusiones.

1. La directividad de un dipolo de media onda simétrico es igual a 1.64
2. La directividad de un dipolo de onda completa es igual a 2.41
3. para  $\frac{\ell}{\lambda} > 0.625$ , la directividad disminuye, debido a el crecimiento de los lóbulos secundarios.

**Cálculo aproximado de la impedancia de entrada de un dipolo por el método de los circuitos equivalentes.**

*Parámetros del circuito equivalente:*

- a) La longitud de la línea de transmisión.
- b) Impedancia característica  $Z_{0l}$ .
- c) Constante de propagación compleja  $\gamma = \alpha + j\beta$

Donde:

$$\beta = k k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} k_1, \text{ es el número de onda equivalente.}$$

$k_1$  = factor de corrección.

$$\alpha = \frac{R_1}{Z_{0l}}, \text{ factor de atenuación equivalente.}$$

$R_1$  = resistencia pura lineal del conductor.

*Condiciones de equivalencia.*

- 1) La longitud de la línea de transmisión se supone igual a la longitud del brazo del dipolo.
- 2) La potencia total del circuito equivalente de figura 1 y la potencia radiación del dipolo en todas las frecuencias se suponen iguales entre sí.
- 3) La impedancia característica de la línea equivalente de es igual a:

$$Z_{0l} = \frac{Z_0}{\pi} \left( \ln \frac{l}{a} - 1 \right)$$

donde  $a$  es el radio del dipolo

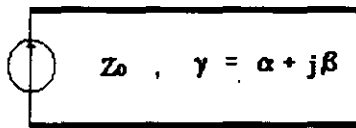


FIGURA 1

- 4) La constante de propagación equivalente  $\beta = k k_1$  se toma algo mayor que la constante de propagación  $k$  en el medio ambiente del dipolo en la magnitud del factor de corrección  $k_1$ , determinado por los datos experimentales de la figura 2.

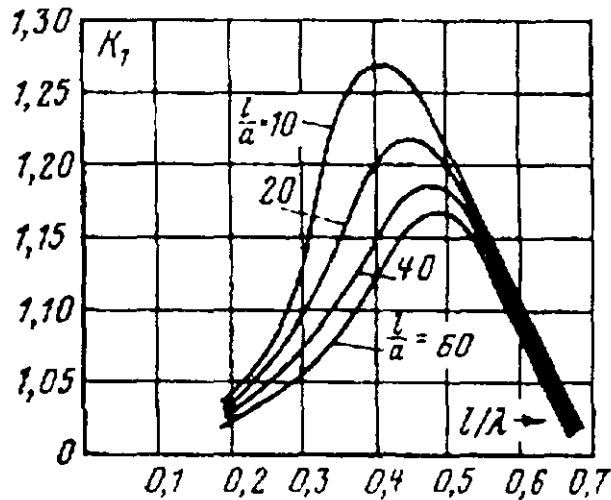


FIGURA 2 Factor de Corrección  $k_1$

Analizando la 2da. Condición de equivalencia, se puede escribir en la forma:

$$\frac{I_1^2 R_{21}}{2} = 2 \int_0^l \frac{I_z^2 R_1}{2} dz$$

2do. Término indica la potencia total disipada por la línea de transmisión por unidad de longitud.

Sustituyendo la distribución senoidal de corriente en el dipolo  $I_z = I_1 \text{sen} k_1 k (\ell - z)$ , obtenemos

$$R_{21} = 2 R_1 \int \text{sen}^2 [k_1 k (\ell - z)] dz$$

Integrando

$$R_1 = \left( \frac{R_{21}}{2 k_1 k \ell} \right)$$

por otro lado la impedancia característica de la línea de transmisión

$$Z'_{oi} = \sqrt{\frac{2R_1 + j\omega L_1}{j\omega C_1}} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \sqrt{1 - j\frac{2R_1}{\omega L_1}} \approx Z_{oi} \left(1 - j\frac{R_1}{\omega L_1}\right)$$

donde  $L_1$  y  $C_1$  son la inductancia y capacitancia por unidad de longitud de la línea equivalente.

Por otro lado

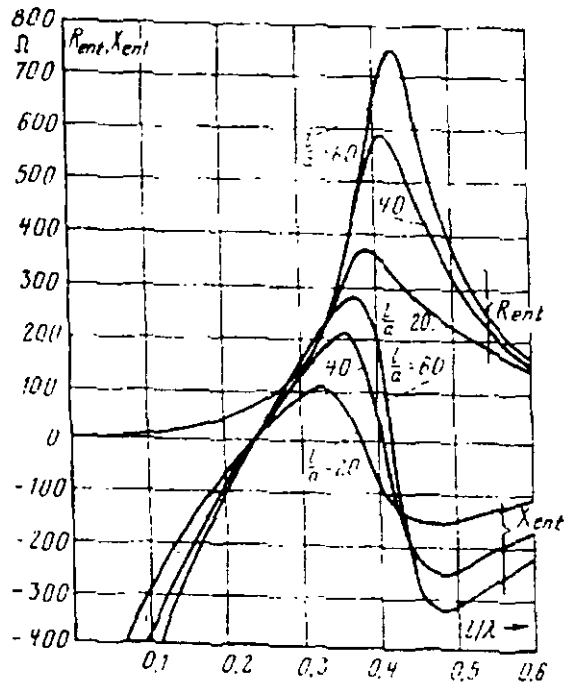
$$\frac{R_1}{\omega L_1} = \frac{\alpha Z_{oi}}{\omega L_1} = \frac{\alpha}{\omega \sqrt{L_1 C_1}} = \frac{\alpha}{k}$$

por lo tanto

$$Z'_{oi} \approx Z_{oi} \left(1 - j\frac{\alpha}{k}\right)$$

Si usamos las fórmulas de teoría de líneas de transmisión con pérdidas:

$$Z_m = Z_{oi} \left(1 - j\frac{\alpha}{k}\right) \operatorname{ctg}(\alpha l + j\beta l)$$



Impedancia de entrada del dipolo eléctrico.

## Conclusiones:

- 1) al variar la relación  $\frac{\ell}{\lambda}$  entre los límites de cero a 0.6 la impedancia de entrada del dipolo tiene dos secciones de resonancia. La primera resonancia en serie tiene lugar en la vecindad del valor  $\frac{\ell}{\lambda} \approx 0.25$  y la segunda resonancia en paralelo para valores de  $\frac{\ell}{\lambda}$  algo menores que 0.5. Cuando  $\frac{\ell}{\lambda} < 0.25$  la parte reactiva de la impedancia de entrada es negativa. Al engrosar el conductor del dipolo los valores de resonancia de la relación  $\frac{\ell}{\lambda}$  disminuyen, especialmente para la resonancia en paralelo.
- 2) La de la frecuencia de la impedancia de entrada del dipolo es tanto más débil, cuando más grueso es el dipolo. Por consiguiente al trabajar en una amplia gama de frecuencias conviene utilizar dipolos gruesos a fin de compensar las variaciones de la impedancia de entrada a distintas frecuencias.

## 9. Antenas ranuradas.

### 9.1. Dipolo magnético.

Supongamos que la corriente excitadora es un dipolo magnético de momento  $I^m \ell$ , situado en el origen de coordenadas y dirigido a lo largo del eje  $z$  (fig.9.1) El estudio del campo electromagnético de esta fuente tiene gran importancia para el análisis de las antenas ranuradas. El potencial vectorial del dipolo magnético tendrá la única componente  $A_{z\infty}^m$ , igual a

$$A_{z\infty}^m = \frac{I^m \exp(-jkR)}{4\pi R} \int_{-l/2}^{l/2} \exp(jkz' \cos\theta) dz' \approx \frac{I^m \ell \exp(-jkR)}{4\pi R} \quad (9.1)$$

El campo electromagnético correspondiente al (9.1) tiene dos componentes

$$E_\varphi = \frac{j2\pi}{\lambda} A_{0\infty}^m = -\frac{jI^m}{2} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right) \text{sen } \theta \frac{\exp(-jkR)}{R}$$

$$H_\theta = -\frac{E_\varphi}{Z_0} = \frac{jI^m}{2Z_0} \left(\frac{\ell}{\lambda}\right) \text{sen } \theta \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (9.2)$$

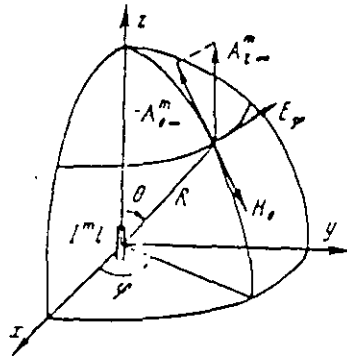


Fig. 9.1

Por consiguiente, el dipolo magnético, al igual que el eléctrico, emite ondas esféricas, que se alejan al infinito a la velocidad de la luz en el medio dado. El diagrama de radiación de un dipolo magnético coincide con el diagrama de radiación de un dipolo eléctrico. La radiación sigue siendo máxima en el plano ecuatorial, la ganancia de antena dirigida es igual a 1.5, y el dipolo magnético no irradia en dirección de su eje. Sin embargo, si en el caso del dipolo eléctrico en el plano meridional se hallan las líneas de energía, en el caso del dipolo magnético en este plano se encuentran las líneas de fuerza magnéticas.

La potencia de radiación (de emisión) de un dipolo magnético puede ser calculada por el método del vector de Poynting análogamente al cálculo de la potencia de radiación del dipolo eléctrico. Para estimar el poder emisor del dipolo magnético no conviene utilizar la resistencia de radiación, sino la conductancia de radiación de acuerdo con la definición de.

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} |I^m|^2 G_\Sigma \quad (9.3)$$

Realizando los cálculos similares a los cálculos realizados para el dipolo eléctrico, obtenemos:

$$G_{\Sigma d} = \frac{2\pi}{3Z_0} \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad (9.4)$$

Conociendo la resistencia de radiación del dipolo eléctrico, es posible determinar la conductancia de radiación del dipolo magnético, que tiene la misma longitud que el dipolo eléctrico

$$G_{\Sigma d} = \frac{R_{\Sigma d}}{Z_0^2} \quad (9.5)$$

Supongamos ahora que el dipolo magnético horizontal esta en el plano de conductor ideal. Usamos el método de imagen especular, de acuerdo con el cual el campo secundario en el semiespacio superior no se altera si se saca el plano conductor y en el punto especular se coloca una fuente con corriente, de igual magnitud de la corriente real, de sentido tal, que la componente tangencial del campo eléctrico total en la superficie del plano examinado sea igual a cero. Para el dipolo magnético horizontal la corriente en imagen especular tiene el mismo sentido que de la fuente real.

Cuando la altura  $h$  sobre el plano es igual a cero, los campos primario y secundario del dipolo magnético horizontal se hacen iguales entre si en magnitud y signo, de manera que el campo total se duplica con respecto al campo del dipolo magnético en el espacio libre. La conductancia de radiación se duplica debido a que la densidad de la potencia radiada en cada punto del espacio se cuadruplica, pero la potencia se radia solo al semiespacio superior.

Para la conductancia del dipolo magnético horizontal, dispuesto en el plano conductor, tiene lugar la formula.

$$G_{\Sigma d} = \frac{4\pi}{3Z_0} \left( \frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \quad (9.6)$$

La ganancia de antena dirigida del dipolo magnético dispuesto en el plano conductor se aumenta dos veces y en el sentido de radiación máxima es igual a 3.

El dipolo magnético horizontal, situado sobre la superficie de un plano conductor ideal ilimitado, en realidad es ranura emisora practicada en la pantalla conductora. Prácticamente esta ranura puede ser excitada mediante una guía de ondas rectangular, como se muestra en la fig. 9.2

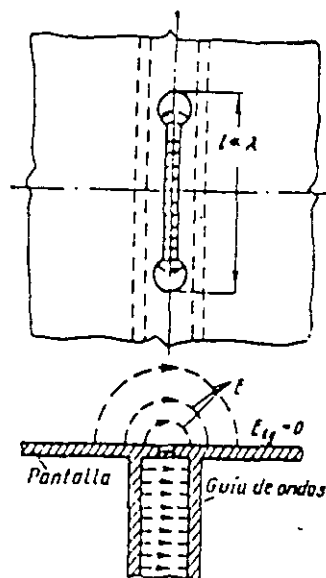


Fig. 9.2

La corriente magnética de estas antenas no es otra cosa que la diferencia de potencial entre los bordes de la ranura. La relación entre la potencia radiada por la ranura y el cuadrado del valor eficaz de la tensión en la ranura determina la conductancia de radiación de la antena ranurada elemental. Por consiguiente, la conductancia de radiación de la antena ranurada lineal con distribución uniforme del voltaje a lo largo de la ranura puede ser determinada por la fórmula (9.6).

La ranura practicada en la pantalla conductora también puede ser excitada mediante la línea coaxial (fig. 9.3). Esta antena ranurada emite a ambos semiespacios y se llama antena ranurada bilateral, mientras que la antena ranurada, representada en fig 9.2 se llama unilateral. Es evidente que la conductancia de radiación de la antena ranurada bilateral es dos veces menor que la conductancia de radiación de la correspondiente antena unilateral y la ganancia de antena dirigida de la antena ranurada bilateral es dos veces menor que la ganancia de antena dirigida de la correspondiente unilateral.

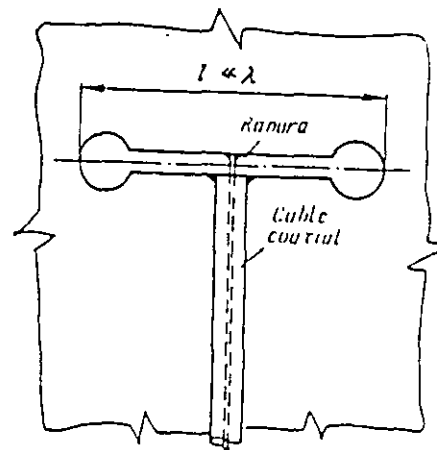


Fig. 9.3

## 9.2. Antenas ranuradas de frecuencias superelevadas.

### 9.2.1. Observaciones generales.

En la gama de frecuencias superelevadas las antenas ranuradas se usan como radiadores individuales y en forma de elementos de las redes de antenas de alta directividad. La posibilidad de producir las antenas ranuradas a nivel con la superficie metálica las hace extraordinariamente convenientes para el uso en aviones de alta velocidad y cohetes.

Si las ranuras radiantes se disponen sobre un plano conductor ideal infinito, sus características se hallan con relativa sencillez utilizando la aproximación de dipolo magnético y el método de la imagen especular. Se estableció, que en las ranuras resonantes (de media onda) la ley de distribución del voltaje prácticamente no depende del tipo de la excitación. Por lo tanto, la ley de distribución senoidal del voltaje es válida también para sus ranuras resonantes unilaterales, excitadas mediante una guía de ondas o un resonador de cavidad, y esto facilita hallar los diagramas direccionales y la condición de radiación de estas ranuras en una pantalla plana infinita

En condiciones reales las antenas ranuradas se disponen sobre superficies limitadas de forma irregular. En la mayoría de los casos no se logran obtener soluciones rigurosas del problema de radiación de estas ranuras y se hace necesario utilizar soluciones aproximadas, útiles para la práctica de ingeniería.

## 9.2.2. Antenas ranuradas de media onda.

Una antena ranurada de media onda elemental se dispone sobre un plano metálico de dimensiones finitas y se excita por un resonador en forma de sección  $\lambda_g/4$  cortocircuitada de una guía de ondas rectangular de onda  $H_{10}$  (fig.9.4).

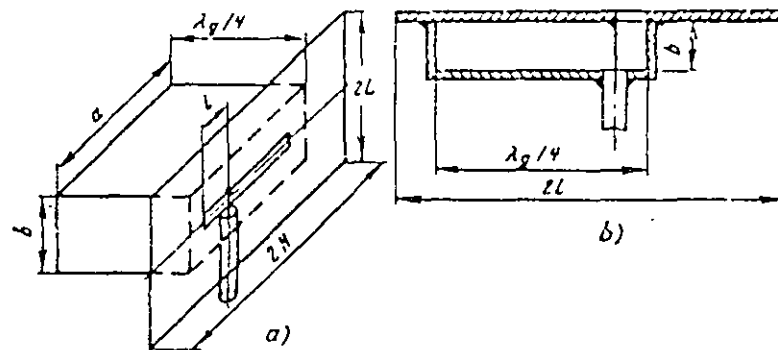


Fig. 9.4

El sistema emisor se alimenta por una línea de alimentación coaxial, cuyo conductor externo se conecta a un lado de la ranura, y el conductor interno, a otro lado de la ranura. El resonador hace las veces de aislador metálico, y su susceptancia compensa la susceptancia intrínseca de la ranura. La resistencia de entrada de la antena ranurada de media onda con resonador ajustado en la pantalla de grandes dimensiones eléctricas será igual en el centro de la ranura a  $R_r = Z_0^2 / 2R_\Sigma = 970\Omega$ . Para adaptar esta resistencia a la impedancia característica de la línea coaxial  $Z_c$ , hay que conectar la línea más cerca del extremo de la ranura, a la distancia  $\ell$  del extremo, determinada de la ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{2\pi\ell}{\lambda} = \frac{Z_c}{R_r} \quad (9.7)$$

Con respecto a los diagramas direccionales, desde luego, se diferencian de los diagramas direccionales para la ranura dispuesta en la pantalla infinita. Se puede afirmar que en el plano de la ranura (es decir, en el plano del vector  $\vec{H}$ ), donde la radiación a lo largo de la ranura es igual a cero, el fenómeno de dirección de las ondas en el extremo de la pantalla se manifiesta débilmente y el diagrama direccional depende poco de las dimensiones de la pantalla. En el semiespacio delantero éste coincide aproximadamente con el diagrama direccional de la ranura practicada en la pantalla infinita y en el semiespacio trasero se tiene un pequeño lóbulo. En el plano perpendicular a la ranura el diagrama direccional depende fuertemente de la medida de la pantalla  $2L$  y muy poco de la dimensión  $2H$  de la pantalla. En este plano está vivamente expresado el



fenómeno de difracción de las ondas en el extremo de la pantalla. En la radiación intrínseca de la ranura se superpone la radiación suplementaria, que aparece gracias a la excitación de los bordes de la pantalla, lo que, por un lado, origina un campo tras el lado sombrío de la pantalla y, por otro lado, da lugar a la distorsión del diagrama direccional en el semiespacio delantero. Debido a la interferencia de las ondas radiadas directamente por la ranura y emitidas durante la difracción en los bordes de la pantalla, surgen mínimos y máximos de radiación, cuya cantidad es tanto mayor, cuanto mayor es la dimensión  $2L$  de la pantalla en comparación con la longitud de onda. En la fig. 9.5, a-d con curvas de trazos se muestran los diagramas direccionales experimentales de una antena ranurada en el plano del vector  $\vec{E}$  en función de las dimensiones de la pantalla.

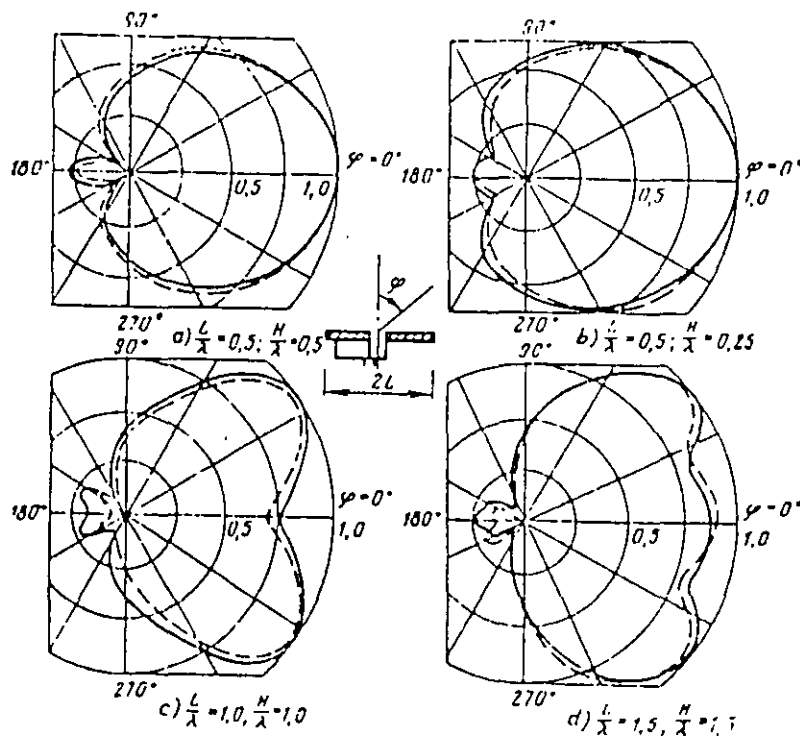


fig. 9.5

En la fig. 9.6 están trazados los diagramas direccionales teóricos en el plano del vector  $\vec{H}$

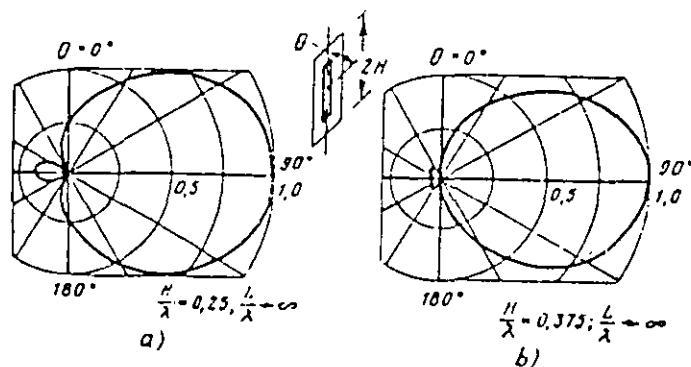


fig 9.6

En la practica se utilizan no solo las ranuras unilaterales, sino tambien las bilaterales, dispuestas sobre planos de dimensiones limitadas.

El dipolo de Braude (fig.9.7) también se puede considerar como una antena ranurada. Este dipolo es en la realidad una mitad de la antena ranurada bilateral. Se ha establecido, que la antena de banda ancha máxima se obtiene cuando la relación de las dimensiones de la pantalla es de  $a/\ell = 1.5$ .

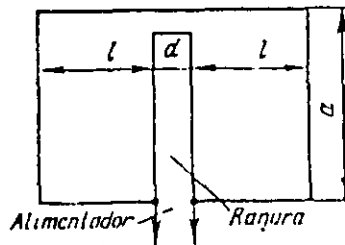


fig. 9.7

### 9.2.3. Antenas de guía de ondas de ranuras múltiples.

Las antenas de este tipo son redes de muchas ranuras radiantes, alimentadas por una guía de ondas común, y se utilizan preferentemente como antenas de haz filiforme.

Una ranura individual de una guía de ondas se excita cuando su lado ancho interseca las corrientes eléctricas que circulan por las superficies internas de las paredes de la guía de ondas. Al propagarse la onda  $H_{10}$  en la guía de ondas rectangular existen dos componentes del campo magnético:

$$H_x = H_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-j\beta_{10}z)$$

$$H_z = \frac{\pi H_0}{j\beta_{10}a} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-j\beta_{10}z) \quad (9.8)$$

donde  $\beta_{10} = k\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$  es la constante de propagación longitudinal de la onda  $H_{10}$ ,  $a$  —la dimensión lineal de la pared ancha de la guía de ondas rectangular.

De acuerdo con la conocida condición límite  $\vec{J} = \vec{H} \times \vec{n}$  a estas dos componentes del vector de campo magnético corresponden tres componentes del vector de densidad de corriente eléctrica superficial, dos transversales  $J_x$  y  $J_y$ , engendradas por la componente longitudinal  $H_z$ , y una longitudinal  $J_z$ , engendrada por la componente transversal  $H_x$ . La componente longitudinal existe solo en la pared ancha de la guía de ondas, y las componentes transversales, existen tanto en las paredes anchas, como en las estrechas de la guía de ondas.

En la fig.9.8 se muestran los diagramas de distribución de las amplitudes de distintas componentes de la densidad de corriente superficial. Teniendo en cuenta estos diagramas, es fácil representarse el cuadro físico de excitación de diferentes tipos de ranuras radiantes en la guía de ondas (fig. 9.9).

La ranura transversal I de la pared ancha se excita por las corrientes longitudinales, asimismo su intensidad de excitación disminuye cuando el centro de la ranura se desplaza del centro de la pared ancha.

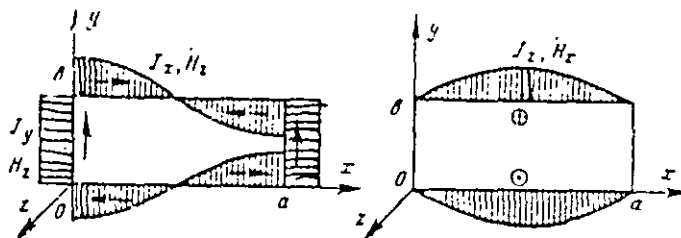


fig. 9.8

La ranura transversal II corta la corriente transversal, si que esta desplazada con respecto al centro de la pared ancha de la guía de ondas. Su radiación crece cuando la ranura se aproxima al extremo de la pared ancha y no existe completamente para  $x_0 = a/2$ . Disponiendo la ranura longitudinal a distinto lado de la línea axial de la guía de ondas, se puede variar la fase del campo radiado en  $180^\circ$  gracias al cambio de dirección de la corriente superficial.

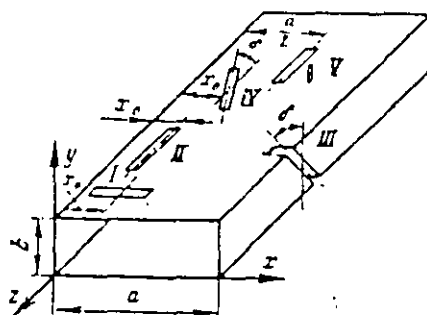


fig. 9.9

La ranura inclinada III en la pared estrecha se excita por la corriente transversal de magnitud constante. Por eso, su intensidad de excitación se regula eligiendo el ángulo de inclinación  $\delta$ . Para  $\delta = 0$  esta ranura no se excita, si  $\delta = 90^\circ$  la radiación es máxima. Por último, la ranura desplazada e inclinada IV en la pared ancha se interseca tanto por las corrientes longitudinales, como por las transversales. Por lo tanto, su intensidad de radiación (así como la fase del campo radiado) depende tanto de la coordenada del centro  $x_0$ , como del ángulo de inclinación  $\delta$ .

Todas las ranuras lineales examinadas radian un campo de polarización lineal de vector del campo eléctrico perpendicular al lado mayor de la ranura. Siendo necesario radiar ondas de polarización circular se utilizan las ranuras cruzadas, que se obtienen por superposición de los centros de las ranuras I y II. Las corrientes superficiales que excitan respectivamente las ranuras transversal y longitudinal, se encuentran entre si en cuadratura de fase, lo que asegura la primera condición de obtención del campo de polarización circular. Eligiendo la coordenada del centro de las ranuras se puede realizar la segunda condición, o sea, la igualdad de las amplitudes de excitación de las ranuras longitudinal y transversal.

Toda ranura radiante carga la guía de ondas y actúa sobre su régimen. Parte de la potencia que va por la guía de ondas se radia por la ranura, parte se refleja y parte sigue hacia adelante. Al analizar la reacción de la ranura a la guía de ondas, la última se sustituye por una línea de transmisión

bifilar equivalente de impedancia característica unitaria, y a cada ranura se pone en correspondencia el circuito equivalente en forma de cuadripolo con perdidas (las perdidas se deben a la radiación de la ranura). Este enfoque permite utilizar en los cálculos de las antenas de ranuras múltiples el aparato analítico de la teoría de los circuitos de frecuencias superelevadas.

La ranura transversal de la pared ancha de la guía de ondas corta las líneas de corrientes eléctricas superficiales longitudinales, y, por eso, a esta le corresponde más el circuito equivalente en forma de resistencia en serie localizada  $r$  en la línea equivalente (fig.9.10,a)

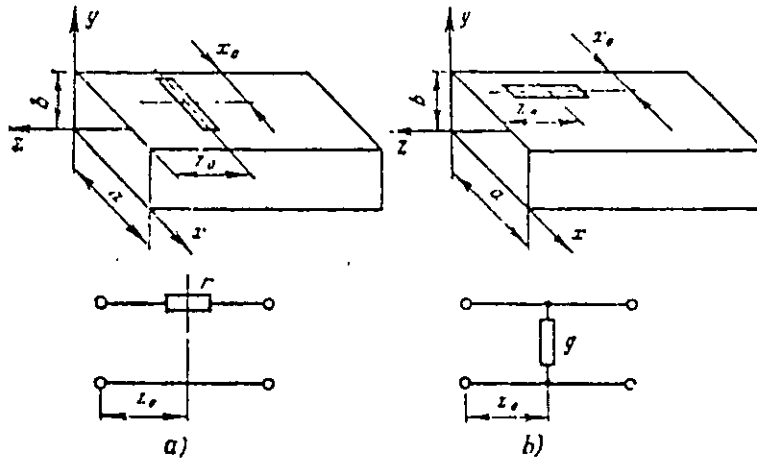


fig. 9.10

La magnitud de la resistencia normada se calcula por los métodos de electrodinámica. Como resultado se obtiene la fórmula aproximada:

$$r = 0.523 \left( \frac{\lambda_g}{\lambda} \right)^3 \frac{\lambda^2}{ab} \cos^2 \left( \frac{\pi \lambda}{4a} \right) \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\pi x_0}{a} \right) \quad (9.9)$$

donde  $x_0$  es la distancia del centro de la ranura al extremo de la pared ancha

Al cortocircuitar la guía de ondas con el pistón en esta se establece el régimen de onda estacionaria, y los máximos de distribución de la densidad de corriente eléctrica longitudinal se obtienen a las distancias del pistón múltiplos de  $\lambda_g/2$ . Precisamente en estos máximos deben disponerse las ranuras transversales en la guía de ondas cortocircuitada para su más intensa excitación.

La ranura longitudinal corta las líneas de las corrientes eléctricas superficiales transversales. Para la ranura resonante longitudinal el circuito equivalente tiene la forma de una conductancia normada  $g$  (fig.9.10,b) Para la magnitud de esta conductancia el cálculo electrodinámico da la siguiente fórmula aproximada:

$$g = 2.09 \frac{a}{b} \frac{\lambda_g}{\lambda} \cos^2 \left( \frac{\pi \lambda}{2\lambda_g} \right) \cos^2 \left( \frac{\pi x_0}{a} \right) \quad (9.10)$$

donde  $x_0$  es la distancia desde la ranura hasta el borde de la pared ancha.

En la guía de ondas cortocircuitada, los máximos de distribución de las corrientes superficiales transversales se obtienen a las distancias del pistón iguales a  $\frac{\lambda_g}{4} + m \frac{\lambda_g}{2}$ ,  $m=0,1,2,3,\dots$ , y precisamente en estas secciones deben disponerse las ranuras longitudinales para su excitación máxima.

**Redes de guías de ondas ranuradas resonantes.** Las redes de este tipo se construyen a base de la guía de ondas cortocircuitada en el extremo, con la particularidad de que la distancia entre ranuras contiguas se toma exactamente igual a  $\lambda_g$ , para las ranuras acopladas en cofase con el campo de la guía de ondas (fig.9.11,a), o bien exactamente igual a  $\lambda_g/2$  para el caso de las ranuras acopladas de fases variables (fig.9.11,b). En ambos casos las redes resonantes tienen excitación cofásica de todas las ranuras (teniendo en cuenta el desfase suplementario de  $180^\circ$  de las ranuras longitudinales contiguas debido a su disposición en distintos lados de la línea media de la pared ancha y, por lo tanto, el sentido de radiación máxima coincide con la normal al eje de la guía de ondas. La resistencia de entrada normada de la red al comienzo de la guía de ondas en el primer caso resulta igual a  $r_{ent} = Nr$ , y en el segundo caso  $r_{ent} = 1/Ng$ , donde  $N$  es el número de ranuras idénticas.

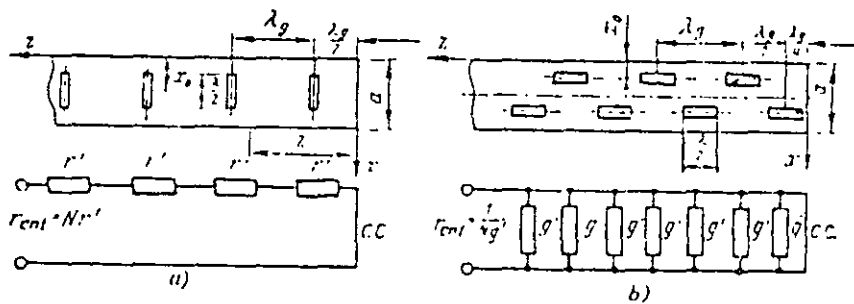


fig. 9.11

Aplicando las condiciones de acoplamiento de la entrada de la guía de ondas  $Nr = 1$  o bien  $Ng = 1$ , mediante las fórmulas (9.9), (9.10) se logra escoger los parámetros de las ranuras, para los cuales la relación de ondas estacionarias de entrada es igual a 1 a la frecuencia de resonancia de la red. Lamentablemente, el régimen de buena adaptación y la coincidencia de fases de excitación de las ranuras se mantienen en una banda de frecuencias relativamente estrecha, no mayor que unos tantos por ciento.

Cabe hacer notar que en la antena de ranuras transversales, debido a gran paso de la red, en la región de visibilidad aparecen máximos principales parásitos. Para eliminarlos se puede utilizar, por ejemplo, la disposición paralela de dos redes idénticas alimentadas de manera cofásica, asegurando el desplazamiento de todas las ranuras (y del pistón de cortocircuito) de una red en  $\lambda_g/2$  con respecto a las ranuras de la otra red. En consecuencia, se forma una red lineal equivalente con paso dos veces disminuido de los radiadores, y los máximos principales parásitos resultan desplazados a la región de ángulos imaginarios de observación.

**Redes de guiondas ranuradas no resonantes.** Su diferencia con respecto a las redes resonantes esta en que la guía de ondas se carga en el extremo con una carga adaptada, de manera que sin las ranuras en ella se establece la onda progresiva. Las ranuras se disponen a distancias  $d$  entre si, algo distintas de  $\lambda_g/2$  (para las ranuras transversales, distintas de  $\lambda_g$ ). En tal caso las ranuras se

excitan con desfase progresivo igual a  $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_g} d$  para las ranuras contiguas acopladas en

cofase, y  $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda_g} d \pm \pi$  para las ranuras contiguas acopladas en fase variable. En la fig 9.12

se muestra un ejemplo de red no resonante de ranuras inclinadas en la pared estrecha de la guía de ondas. Las ranuras se inclinan consecutivamente hacia distintos lados de la vertical, y esto asegura su excitación en fase variable.

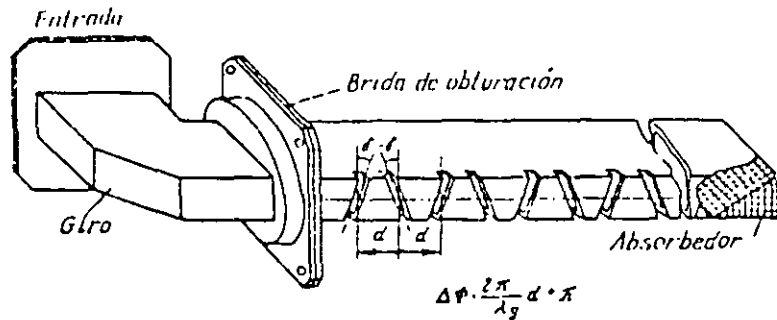


fig. 9.12

El acoplamiento de las ranuras con la guía de ondas se elige de manera que al absorbedor terminal llegue solamente de 5 al 20% de la potencia de entrada de la red y el rendimiento resulta igual a 80-95%.

Puesto que las distancias entre las ranuras de las redes no resonantes se diferencian de  $\lambda_g/2$ , las reflexiones de las ranuras individuales en medida considerable se compensan entre si y la ROE de entrada es próxima a la unidad en una banda de frecuencias bastante ancha.

Para conservar el régimen de onda progresiva a lo largo de la red de guiondas ranurada no resonante y librarse del haz "especular" indeseable, debido al movimiento de la onda progresiva reflejada hacia el generador, hay que utilizar el acoplamiento bastante débil de las ranuras con la guía de ondas. Esto se logra eligiendo el ángulo de inclinación de las ranuras de la pared estrecha de la guía de ondas o bien escogiendo las coordenadas de los centros de las ranuras de la pared ancha de la guía de ondas. Con la elección adecuada del acoplamiento de las distintas ranuras se puede formar también la ley descada de variación de la amplitud de excitación a lo largo de la antena.

En general, las redes de guiondas ranuradas resonantes y no resonantes se destacan por una gran variedad de métodos de excitación de las ranuras utilizados. Las ventajas fundamentales de estas antenas son: 1) inexistencia de partes salientes y la capacidad del sistema distribuidor de guía de ondas, lo que es especialmente importante al utilizar las antenas al bordo de aparatos volantes; 2) la posibilidad de realizar en la abertura con relativa facilidad, las distribuciones de amplitud necesarias del campo. Sin embargo, un inconveniente importante de las antenas de guiondas ranuradas es el carácter limitado de la banda de frecuencias de trabajo.

## 10. Antenas independientes de frecuencia.

### 10.1. Métodos de incremento de la banda de frecuencias de trabajo.

La banda de frecuencias de trabajo de una antena se determina por el grado de constancia de frecuencia de dos parámetros principales:

- 1) la forma del diagrama direccional;
- 2) el factor de reflexión de la entrada.

El método fundamental para resolver el problema de adaptación de la entrada de la antena es la creación de radiadores con impedancia de entrada poco variable en la banda de frecuencias necesaria.

El diseño de antenas independientes de frecuencia con diagramas direccionales prácticamente invariables y bueno acoplamiento en la banda de frecuencias cuyas limites se caracterizan por la relación 10:1 y mas, ha sido posible después de que se establecieron los principios generales de su construcción.

### 10.2. Principios de construcción de las antenas independientes de frecuencia.

En la concepción del funcionamiento de las antenas independientes de frecuencia modernas lo fundamental es el principio de semejanza electrodinamica. Este principio establece la identidad de las impedancias de entrada y de los diagramas direccionales de dos antenas diferentes sin perdidas a dos frecuencias distintas  $f_1$  y  $f_2$ , si la forma de estas antenas es idéntica (fig. 10.1), y las correspondientes dimensiones, por ejemplo,  $L_1$  y  $L_2$ , están alteradas de manera inversamente proporcional a la relación de las frecuencias  $L_1/L_2 = f_2/f_1$ .

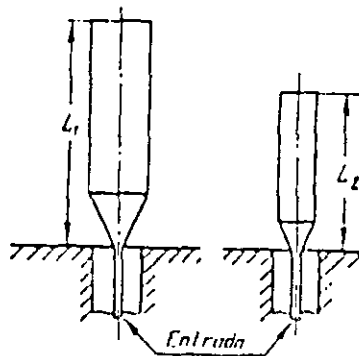


fig. 10.1

Para realizar el principio de semejanza al diseñar las antenas independientes de frecuencia hay que tratar de producir la antena de manera que ella permanezca semejante a si misma a todas las frecuencias. Por ejemplo, para las antenas, cuya forma se determina solo por las dimensiones angulares (en particular, para el dipolo cónico de longitud infinita), la modificación de la escala de distancias no da lugar a la variación de la antena. Por eso las antenas determinadas solo por las

dimensiones angulares, son, en principio, independientes de frecuencia. Es imposible construir antenas finitas determinadas por las dimensiones angulares. Sin embargo, existen tales formas de estructuras infinitas determinadas por las dimensiones angulares, en las cuales el comportamiento de la parte finita por sobre cierta frecuencia limite tiende asintóticamente al comportamiento de una estructura infinita tanto desde el punto de vista de la constancia de la impedancia de entrada, como desde el punto de vista de la constancia de los diagramas direccionales.

Con arreglo a las antenas planas, la clase de curvas que limitan las estructuras infinitas y vienen determinadas solo por las dimensiones angulares, puede destacarse del siguiente modo.

Introduzcamos el sistema de coordenadas polar  $\rho, \varphi$  y hagamos que la curva  $\rho(\varphi)$ , que limita la forma de la antena plana, pase a si misma al modificarse la escala por  $\rho$  y se diferencie de la inicial solo por el giro en un cierto ángulo  $\varphi = \gamma$ .

Matemáticamente esto se puede escribir en la forma:

$$K\rho(\varphi) = \rho(\varphi + \gamma) \quad (10.1)$$

donde  $K$  es el coeficiente de variación de la escala,  $\gamma$  es el ángulo de giro de toda la curva inicial, correspondiente a esta variación de la escala. Se comprende, que el ángulo  $\gamma$  debe depender de  $K$ , empero ni  $K$ , ni  $\gamma$  deben depender de  $\rho, \varphi$ .

Una curva como espiral logarítmica puede satisfacer las condiciones mencionadas. La ecuación de la espiral logarítmica es.

$$\rho(\varphi) = A \exp[a(\varphi + \varphi_0)] \quad (10.2)$$

En esta formula  $A$  y  $\varphi_0$  son magnitudes constantes, que determinan la escala por la coordenada  $\rho$  y el ángulo de giro inicial de la vuelta. El parámetro  $a$  es igual a cotangente del ángulo  $\vartheta$  entre el radio  $\rho$  y la tangente a la espiral.

Por consiguiente, la forma de las antenas infinitas planas independientes de frecuencia debe ser limitada por las espirales logarítmicas de parámetro  $a$  de igual magnitud. Lo ultimo es necesario para la inexistencia de superposición de partes individuales de la antena en el origen de coordenadas, donde debe producirse la excitación desde el generador. En la fig (10.2) se muestra un ejemplo de estructura equiangular infinita formada por un par de brazos de espiral

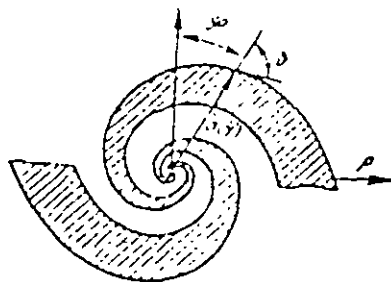


fig. 10.2

Una particularidad notable de las estructuras planas mencionadas es el "corte" automático de las corrientes radiantes. Este fenómeno consiste en que las amplitudes de las corrientes que se originan en los brazos de la espiral bajo la acción del generador, conectado al centro de la estructura, disminuyen bruscamente (100 veces y mas) después de pasar la vuelta de la espiral, cuyo perímetro es aproximadamente igual a la longitud de onda. La parte externa de la estructura



que queda sin excitar puede ser cortada, y esto casi no influye en la característica de radiación y la impedancia de entrada de la parte que queda.

Debido al corte de corrientes en la radiación de la estructura helicoidal equiangular de dimensiones finitas interviene solo la parte central de diámetro aproximadamente igual a un tercio de la longitud de onda (la llamada región activa). Al variar la frecuencia las dimensiones eléctricas de la región activa permanecen constantes y, por lo tanto, es posible diseñar antenas con impedancia de entrada bastante constante y de diagrama direccional casi invariable en una gama de frecuencias múltiplo de 20 e incluso mas. El limite inferior de la gama de funcionamiento se determina de la condición de igualdad de la longitud de onda al perímetro de la ultima vuelta de la estructura. El limite superior de la gama de funcionamiento se determina por la conmensurabilidad de la región de excitación de la antena con la longitud de onda donde la geometria de las lineas helicoidales resulta alterada debido a la existencia de la conexión con la línea de alimentación.

Al crear las estructuras equiangulares helicoidales planas tiene determinado significado una circunstancia vinculada con el principio de dualidad. El hecho esta en que la estructura plana determinada por las dimensiones angulares, puede interpretarse al mismo tiempo como sistema emisor eléctrico (dipolo), y como magnético (de ranura). Designemos la impedancia de entrada absoluta de la estructura por  $Z_1$  y señalemos que de acuerdo con el principio de dualidad, para la sustitución mutua de las partes metálica y de ranura de la estructura, su impedancia varia y toma el valor  $Z_2$ .

$$Z_2 = \frac{Z_0^2}{4Z_1} = \frac{(60\pi)^2}{Z_1} \quad (10.3)$$

Cuando coinciden las formas de las partes eléctrica y magnética suplementaria de la estructura tiene lugar la igualdad  $Z_1 = Z_2$  y la impedancia de entrada de la estructura resulta igual a  $Z_1 = Z_2 = Z_{ent} = 60\pi\Omega$  a cualquier frecuencia

Asi pues, se pueden formular los siguientes principios de creación de las antenas independientes de frecuencia:

- 1) en la antena debe cumplirse la condición de corte automático de las corrientes radiantes que garantiza la constancia de las dimensiones eléctricas de la parte radiante de la antena;
- 2) la forma de la antena debe determinarse fundamentalmente por las dimensiones angulares;
- 3) la forma de la parte ranurada de la antena plana debe coincidir con la forma de parte dipolo.

### 10.3. Antenas helicoidales independientes de frecuencia.

En la fig 10.3 se muestra una antena con sintonización múltiple plana elemental, cuyos brazos están limitados por cuatro espirales logaritmicas:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= A \exp(a\varphi); \quad \rho_2 = M\rho_1; \\ \rho_3 &= A \exp(a(\varphi - \pi)); \quad \rho_4 = M\rho_3 \end{aligned} \quad (10.4)$$

Esta antena cortada en una hoja metálica de grandes dimensiones, se alimenta mediante un cable coaxial flexible extendido a lo largo de uno de los brazos de la antena.

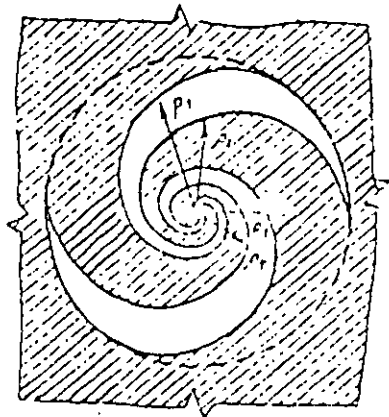


fig. 10.3

Cuando el número de vueltas es de 1.5 a 2, el diagrama direccional de la antena consta de dos lóbulos anchos, cuyos máximos son perpendiculares al plano de la antena. El campo radiado en las direcciones principales tiene la gama de frecuencias de trabajo 20:1 y polarización elíptica. Puesto que la variación de la frecuencia para esta antena es equivalente a su giro en el espacio alrededor del eje perpendicular al plano de la hoja, la anchura de los lóbulos por la semipotencia no permanece constante, sino varía periódicamente entre los límites de  $40^\circ$  a  $50^\circ$  en toda la gama de frecuencias de trabajo. La ROE en el alimentador, de resistencia característica de 50 Ohm, a todas las frecuencias de la gama de trabajo no es mayor que 2.0. La variación de los parámetros  $a$  y  $M$  no influye mucho en las propiedades de sintonización de la antena y da lugar solo a la variación del valor medio de la impedancia de entrada. Se ha establecido experimentalmente que se obtienen buenos resultados cuando  $a=0.3$  y  $M=0.62$ .

La notable fluctuación de los parámetros al variar la frecuencia de trabajo son determinados inconvenientes de las antenas helicoidales equiangulares. Estas desventajas están superadas en las antenas planas en espirales de Arquímedes construidos basándose en el principio de corte automático de la corriente. La forma de estas antenas es más simple y sus parámetros son más estables en la gama de frecuencias de trabajo. Aquí se examinarán las antenas más simples a base de espirales de Arquímedes de dos puestas, aunque en la práctica el número de puestas puede aumentarse hasta cuatro y más. La antena se produce en forma de dos conductores (fig 10.4).

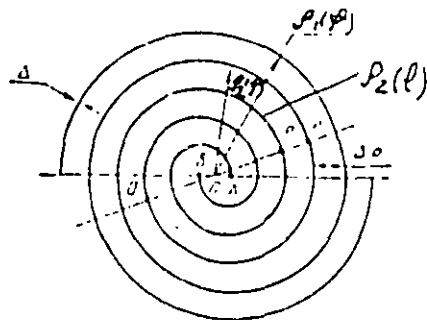


fig. 10.4

Los brazos de la espiral de Arquímedes de dos puestas se describen por las ecuaciones:

$$\rho_1(\varphi) = a\varphi + b; \quad \rho_2(\varphi) = a(\varphi - \pi) + b \quad (10.5)$$

donde  $\rho, \varphi$  son las coordenadas polares;  $a$  y  $b$  son magnitudes constantes. Son posibles dos regímenes de excitación de la antena: antifase y cofase. En régimen antifase (en oposición de fase) los puntos de origen de las espirales  $A$  y  $B$  se conectan al alimentador bifilar o bien se excitan por un cable coaxial, extendido a lo largo de uno de los brazos (fig.10.4).

En la fig. 10.5, a se muestran los sentidos de las corrientes en los puntos de origen de la espiral. En régimen de excitación cofasica los puntos de origen de las espirales  $A$  y  $B$  se cierran entre si y se conectan al conductor interno del cable coaxial(fig.10.5,b). El conductor externo de cable se conecta a la antena (contrapeso), que es una arandela metálica plana. En la fig. 10.5,b se muestran los sentidos de las corrientes en los puntos de origen de las espirales para la excitación cofasica.

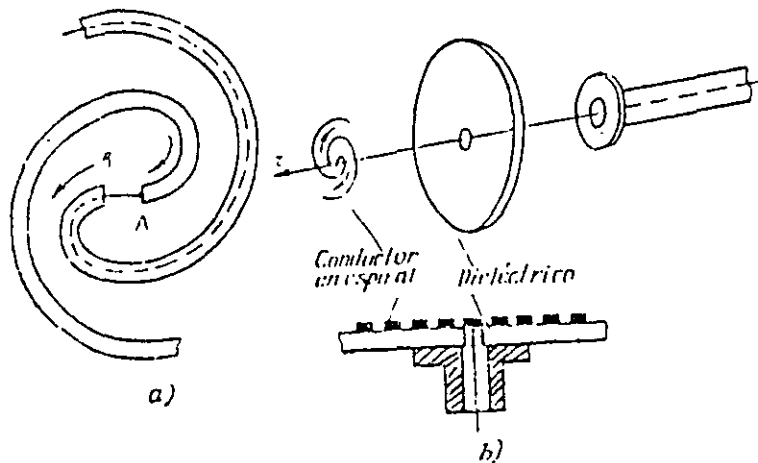


fig. 10.5

En primera aproximación la antena se puede considerar como una línea bifilar arrollada en espiral. Supongamos que en cada conductor de la espiral se tiene una onda de corriente; además, la distancia entre los conductores  $\Delta\rho$  es mucho menor que la longitud de onda  $\lambda$ .

**Excitación en antifase.** Supongamos que en los puntos de origen de espiral  $A$  y  $B$  (fig.10.4) las fases de las corrientes son iguales a  $\Phi_A = \pi, \Phi_B = 0$ . Tomemos dos puntos de la espiral dispuestos en diferentes ramas pero a iguales distancias  $\ell$  de los puntos  $A$  y  $B$ . El retardo de fase en estos puntos con respecto a  $A$  y  $B$  es idéntico y igual a  $k\ell$ , y, por lo tanto, las fases de las corrientes en los puntos  $P$  y  $Q$  serán las siguientes

$$\Phi_P = -k\ell + \pi, \quad \Phi_Q = -k\ell \quad (10.6)$$

donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $\ell$  es la longitud de conductor de la espiral entre los puntos  $A$  y  $P$  o bien  $B$  y  $Q$ . Supongamos que los puntos  $P$  y  $Q$  se encuentran en una circunferencia de radio  $\rho$ . Examinemos el punto  $P'$ , contiguo al punto  $P$  pero que se encuentra en el otro conductor de la espiral. El retardo suplementario de la fase en el punto  $P'$  con respecto al punto  $Q$  para  $\Delta\rho \ll \lambda$  será aproximadamente igual a  $-\pi k\rho$ , y, por lo tanto, la fase de la corriente en el punto  $P'$  resulta igual a  $\Phi_{P'} = -k\ell - \pi k\rho$ . La diferencia de fase de las corrientes  $\Delta\Phi$  en los conductores contiguos de la espiral en los puntos  $P'$  y  $P$  será igual a:

$$\Delta\Phi = \Phi_{P'} - \Phi_P = \pi k\rho + \pi \quad (10.7)$$

Halle los valores del radio  $\rho_n$  para los cuales  $\Delta\Phi = 2\pi n, n = 1, 2, \dots$  y las corrientes de los conductores contiguos en los puntos  $P'$  y  $P$  son cofásicas. La condición correspondiente tiene la forma:

$$2\pi\rho_n = (2n - 1)\lambda; n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.8)$$

Como se deduce de 10.8 en las circunferencias de perímetros iguales a un número impar de longitudes de ondas, las corrientes en los conductores contiguos de la espiral están en fase y pueden radiar intensamente ondas electromagnéticas. La radiación de las corrientes en la región de la circunferencia de radio  $\rho_{1a} = \lambda/2\pi$  tiene intensidad máxima, además, después de pasar las vueltas de tal radio las corrientes en los conductores de la línea en espiral disminuyen bruscamente. Las consiguientes vueltas de la espiral para las cuales la condición de coincidencia de fases se cumple cuando  $n=1, 2, 3, \dots$ , prácticamente resultan no excitadas y no influyen en el trabajo de la antena. Por consiguiente, la región activa de la antena plana en espiral de Arquímedes en régimen de excitación en oposición de fase convencionalmente puede ser sustituida por una vuelta con distribución de corriente eléctrica equivalente por la ley de la onda progresiva:

$$I_{\varphi a}^c(\varphi) = I_0 \exp(-jk\rho_{1a}\varphi) = I_0 \exp(-j\varphi) \quad (10.9)$$

El perímetro de esta vuelta equivalente es igual a la longitud de onda.

Puesto que los razonamientos expuestos son válidos para toda longitud de onda  $\lambda$ , la antena helicoidal antifase será independiente de frecuencia tanto por la impedancia de entrada, como por el diagrama direccional, con la condición que la frecuencia de trabajo supere cierto valor límite dependiente del diámetro exterior de la antena.

**Excitación cofásica.** Examinado de un modo análogo las correlaciones de fase de las corrientes en los conductores de la espiral para la excitación cofásica, se puede establecer fácilmente que las corrientes en las vueltas contiguas estarán en fase en las circunferencias de radios  $\rho_m$ , que satisfacen la condición

$$2\pi\rho_m = 2m\lambda, m = 1, 2, 3, \dots \quad (10.10)$$

Debido a la intensa radiación de las corrientes, en la región de la circunferencia de radio  $\rho_{1c} = \lambda/\pi$  tiene lugar el corte automático de las corrientes.

Por consiguiente, la región activa de la antena plana en espiral de Arquímedes en régimen de excitación cofásica convencionalmente puede ser sustituida por una vuelta de radio  $\rho_{1c} = \lambda/\pi$  con distribución de corriente eléctrica equivalente por la ley de onda progresiva:

$$I_{\varphi c}^c(\varphi) = I_0 \exp(-jk\rho_{1c}\varphi) = I_0 \exp(-j2\varphi) \quad (10.11)$$

Los límites de la gama de trabajo de la antena se determinan de las condiciones  $R_{ca} < \lambda/\pi < R_{ext}$ , donde  $R_{ext}$  es el radio exterior de la antena;  $R_{ca}$  es el radio de la contraantena metálica del dispositivo excitador.

Se pueden obtener las siguientes fórmulas para el cálculo de los diagramas direccionales:

$$\begin{aligned} E_0(\theta, \varphi) &= jA [J_{n-1}(n \operatorname{sen} \theta) + J_{n+1}(n \operatorname{sen} \theta)] \cos \theta \exp(-jn\varphi); \\ E_\varphi(\theta, \varphi) &= jA [J_{n-1}(n \operatorname{sen} \theta) - J_{n+1}(n \operatorname{sen} \theta)] \exp(-jn\varphi) \end{aligned} \quad (10.12)$$

En estas fórmulas  $A$  es la constante de amplitud,  $J_{n\pm 1}(x)$  es la función de Bessel, con la particularidad de que  $n=1$  corresponde al caso de excitación en oposición de fase de la espiral, y  $n=2$ , al caso de excitación cofásica de la espiral.

En la fig. 10.6 se muestran los diagramas direccionales calculados por las fórmulas (10.12). Dada la simetría de la antena los diagramas direccionales están trazados solo para el cuadrante superior. Cabe hacer notar que la componente del campo  $E_{\varphi}$  siempre es mayor que la componente  $E_{\theta}$ . La única excepción es el caso  $\theta = 0$  (o bien  $\pi$ ) para  $n=1$ , cuando estas componentes son iguales.

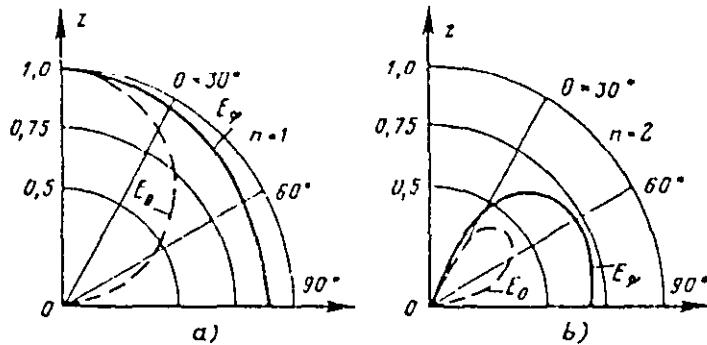


fig 10.6

Además, como se deduce de las fórmulas (10.12),  $E_{\varphi}$  y  $E_{\theta}$  siempre se encuentran en cuadratura de fase. Por eso el campo de radiación total de las antenas en espiral de Arquímedes tiene preferentemente polarización elíptica. Sin embargo, en el plano de la espiral, la componente meridional  $E_{\theta}$  siempre se hace cero y se obtiene un campo de polarización lineal. La polarización puramente circular surge en dirección axial  $\theta = 0$  (o bien  $\pi$ ) para la excitación en antifase de la espiral. Para la excitación cofásica de la espiral la radiación a lo largo del eje  $z$  no existe.

#### 10.4. Antenas universales de periodicidad logarítmica.

La idea del corte automático de las corrientes radiantes en el lugar determinado por la frecuencia del generador, encontró una representación más en las antenas de periodicidad logarítmica de los parámetros en función de la frecuencia. En la fig. 10.7 se muestra una de las primeras antenas de este tipo. Los brazos de la antena son estructuras originales de dipolos mutuamente alternantes en forma de salientes y cavidades.

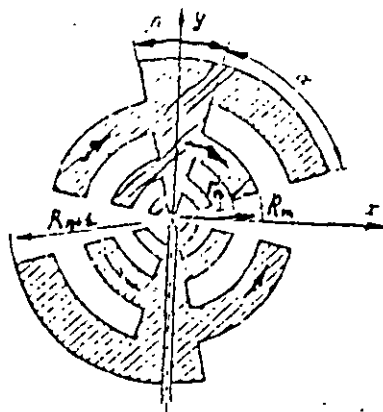


fig. 10.7

La geometría de estas estructuras se caracteriza por un periodo adimensional  $\tau = R_n / R_{n+1} = \text{const}$ , el factor de forma  $\sigma = r_n / R_n$  y los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ :

De ordinario se utilizan estructuras en las cuales se cumple la condición  $\sigma = \sqrt{\tau}$ . Los brazos de la antena, en el origen de coordenadas, están separados por un espacio, al que se aplica el voltaje de excitación. Como alimentador se puede utilizar un cable coaxial extendido a lo largo de un brazo de la antena. El conductor externo del cable se suelda a un brazo de la antena, y el conductor interno se conecta al origen del otro brazo de la antena. Se ha establecido experimentalmente que la magnitud de la corriente eléctrica en las salientes de la estructura crece al alejarse del centro, alcanzando el valor máximo donde se encuentran las salientes resonantes de un cuarto de longitud de onda, aproximadamente. Después de pasar las salientes resonantes las corrientes disminuyen bruscamente, es decir, tiene lugar su corte. Con la reducción de la frecuencia de las oscilaciones radiadas aparecen sucesivamente las resonancias de las salientes mas alejadas del centro. La relación de las dos frecuencias  $f_1 < f_2$ , a las cuales resuenan las salientes contiguas, es exactamente la magnitud  $\tau = f_1 / f_2$ . Por eso los diagramas direccionales y la impedancia de entrada de la antena resultan funciones periódicas del logaritmo de la frecuencia de oscilaciones. Eligiendo correctamente los parámetros de la estructura, la variación de las características de la antena en los límites de un periodo resulta pequeña. La exacta repetición de estas variaciones de un periodo a otro asegura el comportamiento satisfactorio de las características de la antena en una gama de frecuencias muy ancha. Los límites de la gama de trabajo se determinan en la primera aproximación por las frecuencias de resonancia de las salientes extremas, mas cercanas al centro de la antena y mas alejadas de el. Se puede alcanzar fácilmente la magnitud de la gama de frecuencias de trabajo 10:1 y mas

Los diagramas direccionales de la antena de periodicidad logarítmica son dos lóbulos anchos orientados perpendicularmente al plano de los brazos. La radiación en el plano de la antena es pequeña para todas las direcciones.

Al perfeccionar las antenas de periodicidad logarítmica fueron halladas formas de brazo mucho mas simples, mostradas en la fig 10.8 (detalladamente estan representadas solo las mitades superiores de las antenas, y las partes inferiores están designadas por líneas de trazos).

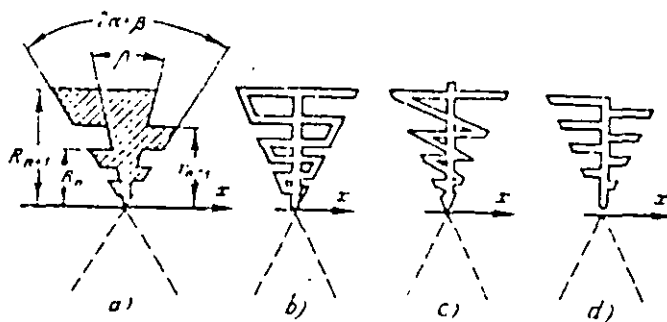


fig. 10.8

Además se encontró que el giro de una mitad de la antena un ángulo  $\psi < 90^\circ$  con respecto al eje x puede asegurar la radiación unidireccional hacia el vértice de la estructura. La forma de la antena obtenida en este caso se muestra en la fig 10.9,a, y el sentido del máximo de radiación coincide con la bisectriz del ángulo entre los brazos de la antena. En el caso límite de  $\psi = 0$  ambas

mitades de la antena coinciden y se forma una antena plana de periodicidad logarítmica, mostrada en la fig. 10.9,b.

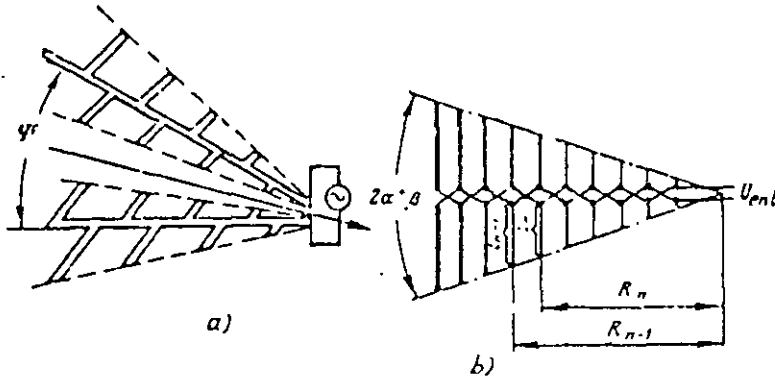


fig. 10.9

Esta antena plana conviene interpretarla como una red lineal de dipolos simétricos de longitud monótonamente variable, excitados por una línea de alimentación bifilar de conductores entrecruzados. El alimentador se excita de un generador del lado de los dipolos de menor longitud. En la fig. 10.10,a se muestra la realización constructiva cómoda de una antena plana, que no requiere un dispositivo de simetrización especial.

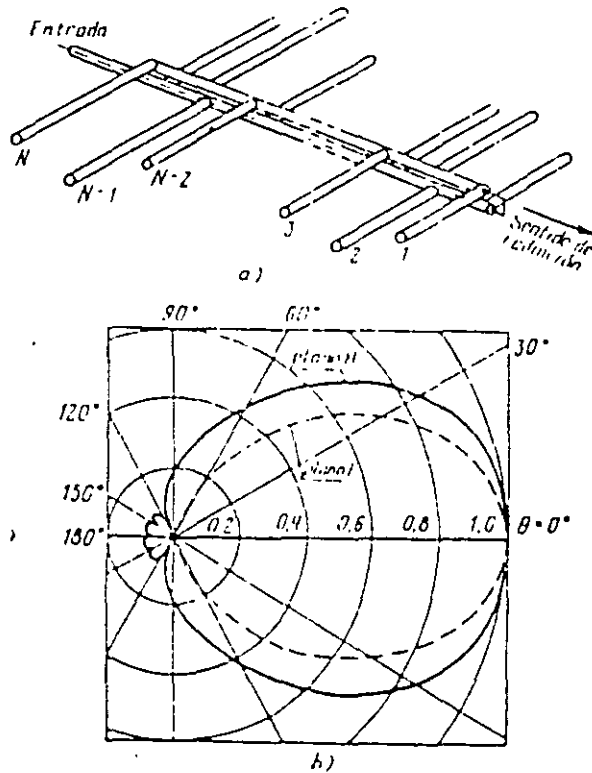


fig. 10.10

Para explicar el funcionamiento de una antena dipolo de periodicidad logarítmica a una frecuencia cualquiera dada, primero hay que destacar la región activa de corrientes radiantes máximas. En primera aproximación esta región incluye un dipolo de longitud de resonancia y un par de dipolos que lindan con el por dos lados. Debido al considerable desajuste los otros dipolos se excitan mas

débilmente, y su influencia sobre el campo radiante es pequeña. Las condiciones de excitación y la interacción de los dipolos de la región activa entre sí se combinan de tal modo que el dipolo más largo se comporta como un reflector, y la corriente en él adelanta la corriente del dipolo resonante. Por el contrario, la corriente del dipolo más corto se retarda de la corriente del dipolo resonante, y el dipolo corto hace las veces de director. La radiación conjunta de varios dipolos de la región activa se intensifica en dirección del vértice de la antena (es decir, del punto de alimentación) y se compensa en sentido inverso, o sea, hacia el lado donde se encuentran los dipolos más largos.

En la fig 10.10,b se muestra la forma del diagrama direccional medida en los planos E y H para uno de los modelos de la antena plana. En el plano E el diagrama direccional se obtiene más estrecho gracias a las propiedades de un dipolo en este plano.

La banda de frecuencias de trabajo de cualquier antena dipolo de periodicidad logarítmica se limita del lado inferior por las dimensiones admisibles de los dipolos más grandes, y del lado superior, por las dimensiones del más pequeño dipolo. Sin embargo, para conservar una directividad satisfactoria a las frecuencias extremas hay que tratar que el dipolo resonante a la onda más larga, tenga seguidamente uno o dos dipolos-reflectores más largos, y el dipolo, resonante a la onda más corta, tenga delante de sí, es decir, más cerca de los puntos de excitación, dos o tres dipolos directores más cortos. Prácticamente, en la gama de ondas decupla se logra obtener, mediante las antenas dipolos de periodicidad logarítmica, diagramas direccionales casi invariables, cuando el factor de reflexión en la entrada es menor que 0.2. Claro que este resultado se consigue eligiendo correctamente la resistencia característica del alimentador de distribución. El trozo de esta línea de alimentación entre el punto de excitación y el comienzo de la región activa actúa como línea de transmisión. Los dipolos cortos dispuestos en este sector poseen un gran reactancia y casi no cargan la línea, disminuyendo solamente algo su impedancia característica equivalente. La potencia que pasa por el alimentador de distribución, se radia intensamente por la región activa y, por eso, el trozo de alimentador de distribución (línea alimentadora de distribución) desde el vértice de la antena hasta el comienzo de la región activa trabaja en régimen de onda progresiva.

## 11. Aberturas emisoras planas y redes.

### 11.1 Definiciones fundamentales.

Los sistemas emisores lineales estudiados antes permiten la formación de la radiación de haz filiforme y la exploración solo en un plano que pasa por el eje de la antena lineal. Para estrechar el haz de la antena también en otro plano es necesario colocar el sistema emisor, por ejemplo, sobre una superficie plana, escogiendo sus dimensiones bastante grandes en comparación con longitud de onda. Por consiguiente, llegamos a la antena de haz filiforme en forma de distribución continua o discreta de las fuentes del campo electromagnético.

Cada elemento de la abertura lo caracterizaremos por el diagrama direccional (curva característica de radiación) complejo vectorial  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$  en su sistema de coordenadas esféricas propio local. El origen de este sistema de coordenadas está situado dentro del elemento, y el eje  $z$  es perpendicular al plano de abertura  $xy$ . El diagrama direccional  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$  de todos los elementos se supondrá invariable, lo que es equivalente a postular la ley idéntica de distribución de la densidad de corrientes de radiación dentro del elemento. Además del diagrama direccional de un radiador, también es importante el modo de disposición de los elementos en el plano (discreto o continuo) y la ley de distribución de las amplitudes complejas de excitación por los elementos (distribución de amplitud-fase).



De acuerdo con el teorema de multiplicación el campo electromagnético lejano de la abertura plana se puede representar en la forma:

$$\vec{E}(R, \theta, \varphi) = B \vec{F}_1(\theta, \varphi) F_\Sigma(\theta, \varphi) \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (11.1)$$

donde B es un factor de amplitud dependiente de la potencia suministrada a la antena;  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$ , el diagrama direccional de un elemento, que determina la estructura de polarización del campo radiado,  $F_\Sigma(\theta, \varphi)$ , el factor complejo de direccionalidad del sistema de radiadores isotropos, situados en los puntos de disposición de los centros de los elementos en los limites de la abertura.

Para un sistema discreto de  $N$  radiadores (Fig. 11.1), situados en los puntos  $(x_n, y_n)$  de la abertura plana, la formula del factor de direccionalidad se obtiene fácilmente:

$$F_\Sigma = \sum_{n=1}^N I_n \exp(jk[x_n \text{ sen } \theta \cos \varphi + y_n \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi]) \quad (11.2)$$

En la formula (11.2)  $I_n$  es la magnitud compleja del excitación del elemento numero  $n$ .

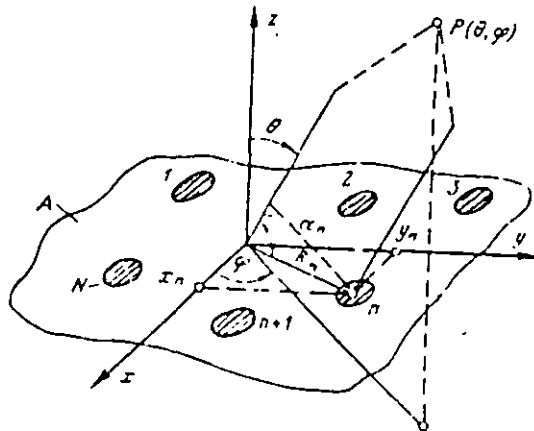


fig. 11.1

Cuando los radiadores llenan la abertura de manera continua, La suma de formula (11.2) se sustituye por la integración por el plano y la formula del factor de direccionalidad del sistema toma la forma

$$F_\Sigma(\theta, \varphi) = \int_A I(x, y) \exp(jk \text{ sen } \theta (x \cos \varphi + y \text{ sen } \varphi)) dx dy \quad (11.3)$$

donde  $A$  es el área de la abertura,  $I(x, y) = |I(x, y)| \exp[j\Phi(x, y)]$  es la función de la distribución de amplitud-fase.

Al introducir nuevas variables angulares

$$\begin{aligned} \chi_1 &= k \text{ sen } \theta \cos \varphi; \\ \chi_2 &= k \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi \end{aligned} \quad (11.4)$$

la formula (11.3) se reduce a la forma de una transformación de Fourier bidimensional de la función de excitación:

$$F_{\Sigma}(\chi_1, \chi_2) = \iint_{x=-\infty}^{\infty} \iint_{y=-\infty}^{\infty} I(x, y) \exp[j(\chi_1 x + \chi_2 y)] dx dy \quad (11.5)$$

## 8.2 Aplicación del teorema de la equivalencia al calculo de la radiación de antenas de abertura plana.

Volvamos al examen del campo electromagnético creado por una antena arbitraria en el espacio ilimitado. Supongamos que los vectores de la intensidad de los campos eléctrico y magnético  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son conocidos en cualquier punto de observación.

Por medio de una superficie cerrada arbitraria  $A_{\Sigma}$ , que abarca la antena, dividimos todo el espacio en dos regiones 1 y 2 (fig 11.2). Descomponemos los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en la superficie  $A_{\Sigma}$  en dos vectores componentes, es decir, tangencial y normal a la superficie  $\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n, \vec{H} = \vec{H}_t + \vec{H}_n$ . Utilizando la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, examinemos dos pares de vectores por separado: 1) el par de vectores  $\vec{H}_t$  y  $\vec{E}_n$ , suponiendo  $\vec{E}_t = 0$  y  $\vec{H}_n = 0$ ; 2) el par de vectores  $\vec{E}_t$  y  $\vec{H}_n$ , suponiendo  $\vec{H}_t = 0$  y  $\vec{E}_n = 0$ .

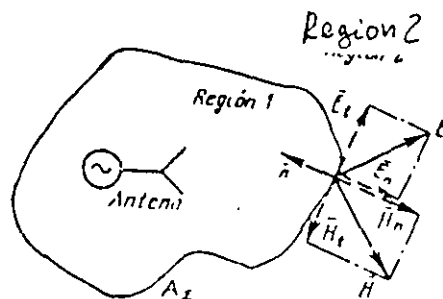


Fig. 11.2

En el primer caso la superficie  $A_{\Sigma}$  se representa como un conductor eléctrico ideal, puesto que en ella el vector del campo magnético tiene solamente componente tangencial, en tanto que el vector del campo eléctrico, solo componente normal. Por eso se puede suponer que la superficie  $A_{\Sigma}$  en este caso es envuelta por una corriente eléctrica superficial, cuya densidad se determina por la expresión

$$\vec{J}^e = \vec{H}_t \times \vec{n} = \vec{H} \times \vec{n} \quad (11.6)$$

donde  $\vec{n}$  es la normal a la superficie  $A_{\Sigma}$  externa con respecto a la región considerada (región 2). Mediante las fórmulas generales se puede calcular el potencial vectorial de esta corriente  $\vec{A}^e$  y hallar los respectivos vectores de intensidad de los campos eléctrico y magnético  $\vec{E}^e$  y  $\vec{H}^e$  en cualquier punto de la región 2.

En el segundo caso la superficie  $A_{\Sigma}$  se representa como un conductor magnético ideal, puesto que en ella el vector del campo eléctrico tiene solo componente tangencial, mientras que el vector del campo magnético, solamente componente normal. Por eso se puede suponer que la superficie

$A_{\Sigma}$  en el segundo caso es envuelta por una corriente magnética superficial, cuya densidad es igual numéricamente a la componente tangencial de intensidad del campo eléctrico y se determina por la fórmula:

$$\vec{J}^m = \vec{n} \times \vec{E}_t = \vec{n} \times \vec{E} \quad (11.7)$$

Mediante las fórmulas generales se puede calcular el potencial vectorial de esta corriente  $\vec{A}_m$ , y hallar los correspondientes vectores de intensidad de los campos eléctrico y magnético  $\vec{E}^m$  y  $\vec{H}^m$  en cualquier punto de la región 2.

Los vectores de intensidad de un campo electromagnético total en cualquier punto de observación  $P$  de la región 2 se determinaron por las sumas:

$$\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m; \quad \vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m \quad (11.8)$$

Por consiguiente, el campo en el región 2 libre de fuentes y limitada por la superficie  $A_{\Sigma}$ , puede ser considerado como un campo originado por las corrientes  $\vec{J}^e$  y  $\vec{J}^m$  sobre la superficie  $A_{\Sigma}$ . Con ello las fuentes reales del campo, que se encuentran en la región 1, resultan sustituidas por las corrientes "equivalentes" superficiales eléctricas y magnéticas.

La elección de la superficie  $A_{\Sigma}$ , que abarca las fuentes reales del campo, es completamente arbitraria. Por eso por conveniencia de la integración al calcular  $\vec{A}^{e,m}$  esta selección debe hacerse de manera que las corrientes superficiales equivalentes se concentran fundamentalmente sobre una cierta superficie plana, es decir, en la abertura  $A$ . La parte restante de la superficie  $A_{com} = A_{\Sigma} - A$ , que completa la abertura  $A$  la superficie total cerrada  $A_{\Sigma}$  conviene elegirla de manera que las corrientes equivalentes en esta superficie tengan valores despreciables en comparación con las corrientes en la abertura, y por lo tanto, se pudiese despreciar la aportación gracias a la integración por  $A_{com}$ .

Por ejemplo, en el caso de una antena en pirámide de cono invertido, conviene tomar como abertura  $A$  la parte del plano  $xy$  que coincide con el orificio de salida de la bocina (fig. 11.3).

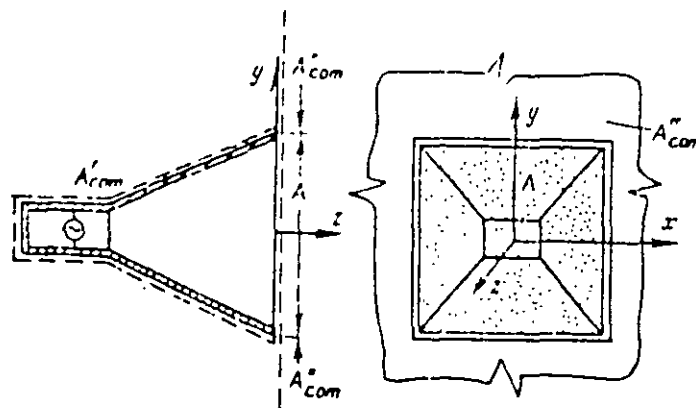


Fig. 11.3

Cabe hacer notar que el cálculo riguroso de la distribución de corrientes eléctricas y magnéticas superficiales equivalentes en la abertura de la antena, para una construcción dada del distribuidor, es irrealizable debido a lo complejo del cálculo exacto de las condiciones límites en todas las

superficies de separación. Por eso la distribución de corrientes equivalentes en la abertura de antena a menudo se calcula por métodos aproximados.

### 11.3. Fuente elemental de radiación unidireccional.

Examinemos el sistema emisor (radiador) representado en la Fig. 11.4. En el plano  $xy$  del espacio libre ilimitado se encuentran dos dipolos en el origen de coordenadas: el dipolo eléctrico con corriente  $I_x^e$  y longitud  $\ell$  orientado a lo largo del eje  $x$  y el dipolo magnético con momento de corriente  $I_y^m$  orientado a lo largo del eje  $y$ . Las longitudes de los dipolos las consideraremos idénticas.

Para el calculo del campo lejano escogemos el plano  $\varphi$  que pasa por el eje  $z$  y tomamos en el punto de observación alejado  $P(\theta, \varphi)$ .

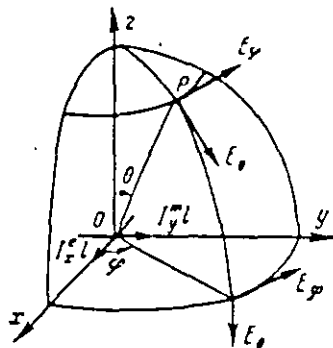


fig. 11.4

El campo eléctrico en este punto tendrá las componentes  $E_0$  y  $E_\varphi$ . Cada componente tiene la forma de dos sumandos independientes  $E_i = E_i^e + E_i^m$ , originados respectivamente por la radiación de los dipolos eléctrico y magnético. El sumando  $E_0^e$  se crea por la proyección del dipolo eléctrico sobre el plano  $\varphi$ , de magnitud igual a  $I_x^e \ell \cos\varphi$ , y se caracteriza en este plano por el diagrama de radiación  $-\cos\varphi$ . El sumando  $E_0^m$  se crea por la proyección del dipolo magnético sobre la normal al plano  $\varphi$ , igual a  $I_y^m \ell \cos\theta$ , y se caracteriza por el diagrama de radiación unitario uniforme en el plano  $\varphi$ . Por consiguiente, la componente total  $E_0$  de ambos dipolos será igual a.

$$E_0(\theta, \varphi) = E_0^e + E_0^m = -\frac{j\ell}{2\lambda} \left( Z_0 I_x^e \cos\theta + I_y^m \right) \cos\varphi \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (11.9)$$

A continuación calculamos la componente  $E_\varphi$ . Aquí el sumando  $E_\varphi^e$  se crea por la proyección del dipolo eléctrico sobre la normal al plano  $\varphi$ , igual a  $I_x^e \ell \sin\varphi$ , y se caracteriza por el diagrama de radiación uniforme en el plano  $\varphi$ . El sumando  $E_\varphi^m$  se originara por la proyección del

dipolo magnético sobre el plano  $\varphi$ , igual a  $I_y^m \ell \sin \varphi$ , y se caracteriza en este plano por el diagrama de radiación de la forma  $-\cos \theta$ . Sumando  $E_\varphi^e$  y  $E_\varphi^m$ , obtenemos:

$$E_\varphi(\theta, \varphi) = E_\varphi^e + E_\varphi^m = \frac{j\ell}{2\lambda} \left( Z_0 I_x^e + I_y^m \cos \theta \right) \sin \varphi \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (11.10)$$

Examinemos la magnitud del campo eléctrico total, creado por ambos dipolos para  $z > 0$  y  $z < 0$ . En ambos casos en el eje  $z$  el campo se caracterizara por la única componente  $E_0$ , respectivamente igual a:

$$E_0(\theta = 0, \varphi = 0) = \frac{-jI_y^m \ell}{2\lambda} (m + 1) \frac{\exp(-jkR)}{R};$$

$$E_0(\theta = \pi, \varphi = 0) = \frac{-jI_y^m \ell}{2\lambda} (-m + 1) \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (11.11)$$

donde  $m = \frac{Z_0 I_x^e}{I_y^m}$  tiene en cuenta la magnitud relativa de las amplitudes complejas de las

corrientes excitadas en los dipolos. Para  $m=1$  el campo electromagnético en dirección  $\theta = \pi$  se hace cero, y el campo electromagnético en dirección  $\theta = 0$  adquiere el doble valor máximo del campo creado por el dipolo magnético.

Así, pues, en el sistema emisor (radiador) de la Fig. 11.4 la correlación de las corrientes excitadoras  $m=1$  da lugar a la formación en el espacio de la radiación unidireccional en sentido positivo del eje  $z$ . Escribimos los diagramas de radiación normados según el campo para el sistema de la fig. 11.4 cuando  $m=1$ .

$$F_0(\theta, \varphi) = -j \frac{\cos \varphi (\cos \theta + 1)}{2};$$

$$F_\varphi(\theta, \varphi) = j \frac{\sin \varphi (1 + \cos \theta)}{2} \quad (11.12)$$

Sistema de fuentes examinado radia un campo de polarización lineal solamente.

Escribimos a continuación el diagrama de radiación normado por potencia

$$F^2(\theta, \varphi) = \frac{|F_0(\theta, \varphi)|^2 + |F_\varphi(\theta, \varphi)|^2}{\left[ |F_0(\theta, \varphi)|^2 + |F_\varphi(\theta, \varphi)|^2 \right]_{max}} = \left( \frac{\cos \theta + 1}{2} \right)^2 \quad (11.13)$$

La curva característica de radiación espacial por potencia no depende del ángulo  $\varphi$  y en cualquier sección, que pasa por el eje  $z$ , es el cuadrado de cardioide (fig. 11.5). Calculemos la magnitud de la ganancia de antena dirigida en dirección de la radiación máxima:

$$D_{max} = \frac{16\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos\theta + 1)^2 \sin\theta d\theta d\varphi} = 3 \quad (11.14)$$

Así pues, gracias a la adición cofásica de las radiaciones de cada dipolo en sentido positivo del eje  $Z$  la ganancia de antena dirigida resultante del sistema supera dos veces la ganancia de antena dirigida de cada radiador individual.

El sistema considerado puede ser aplicado en los métodos de cálculo de la teoría de antenas como elemento de Huygens, es decir, el radiador hipotético correspondiente a un elemento infinitamente pequeño de la superficie del frente de onda electromagnética plana de polarización lineal. El elemento de Huygens se introduce en la teoría de las antenas debido a la aplicación del principio de las corrientes superficiales equivalentes, análogo al principio de Huygens conocido en óptica.

### 11.4 Ganancia de antena dirigida y diagrama direccional de la abertura cofásica plana.

El estudio de las propiedades direccionales de una abertura plana conviene comenzar con el caso más simple de distribución cofásica de excitación. Consideremos al principio el campo de radiación de un elemento infinitamente pequeño de área  $dA$ . Supongamos que el vector de intensidad del campo eléctrico coincide en dirección con el eje  $x$ , y el vector de intensidad del campo magnético, con el eje  $y$ . De acuerdo con las fórmulas de teorema de equivalencia (11.6)

(11.7) se puede considerar que el elemento  $dA$  está envuelto por las corrientes superficiales eléctricas y magnéticas equivalentes:

$$J_y^m = -E_x; \quad J_x^e = -H_y = -\frac{E_x}{Z_0} \quad (11.15)$$

y es el elemento de Huygens de momentos equivalentes de corrientes eléctrica y magnética:

$$I_x^e \ell = -H_y dA = -\frac{E_x}{Z_0} dA; \quad I_y^m \ell = -E_x dA \quad (11.16)$$

En estas fórmulas  $Z_0$  es la impedancia característica local, es decir, la relación  $E_x/H_y$  en cada punto de la abertura. El campo de radiación del elemento del Huygens puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned} dE_0 &= \frac{j \cos\varphi}{2\lambda} (\cos\theta + 1) E_x \frac{\exp(-jkR)}{R} dA \\ dE_\varphi &= -\frac{j \sin\varphi}{2\lambda} (1 + \cos\theta) E_x \frac{\exp(-jkR)}{R} dA, \text{ o bien} \\ d\bar{E} &= (\bar{\theta}_0 \cos\varphi - \bar{\varphi}_0 \sin\varphi) j \frac{E_x}{2\lambda} (1 + \cos\theta) \frac{\exp(-jkR)}{R} dA \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$dE_0 = \frac{j \cos \varphi}{2\lambda} (\cos \theta + 1) E_x \frac{\exp(-jkR)}{R} dA$$

$$dE_\varphi = -\frac{j \sin \varphi}{2\lambda} (1 + \cos \theta) E_x \frac{\exp(-jkR)}{R} dA, \text{ o bien}$$

$$d\vec{E} = (\bar{\theta}_0 \cos \varphi - \bar{\varphi}_0 \sin \varphi) j \frac{E_x}{2\lambda} (1 + \cos \theta) \frac{\exp(-jkR)}{R} dA \quad (11.17)$$

Después de hallar la característica de radiación de un elemento de la abertura, se puede hallar el campo total de radiación de la abertura. Para esto hay que integrar  $d\vec{E}$  por toda la superficie de la abertura teniendo en cuenta la diferencia de recorrido espacial de los rayos al punto de observación desde el origen de coordenadas y desde el punto corriente de integración.

Utilizando (11.17), llegamos a la fórmula:

$$\vec{E} = (\bar{\theta}_0 \cos \varphi - \bar{\varphi}_0 \sin \varphi) \frac{j(1 + \cos \theta)}{2\lambda} \int_A E_x(x, y) \exp[jk \sin \theta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)] \frac{\exp(-jkR)}{R} dA \quad (11.18)$$

**Ganancia de antena dirigida de la abertura plana.** Si la abertura esta excitada de manera cofasica, la radiación máxima esta dirigida a lo largo del eje Z, donde la diferencia de recorrido de todos los elementos de la abertura es igual a cero. El modulo del vector de intensidad del campo eléctrico en la zona lejana en esta dirección es igual a:

$$|E_{max}| = \frac{1}{\lambda R} \int_A E_x(x, y) dA \quad (11.19)$$

Para determinar la ganancia de antena dirigida de la abertura también hay que hallar la potencia total de radiación  $P_\Sigma$ . La forma mas simple para hacerlo es calculando el flujo del vector de Poynting por la superficie de la abertura

$$P_\Sigma = \int_A \frac{\vec{E}_x \cdot \vec{H}_y^*}{2} dA = \int_A \frac{|E_x(x, y)|^2}{2Z_0} dA \quad (11.20)$$

Ahora podemos calcular el coeficiente de directividad:

$$D = \frac{|E_{max}|^2 2\pi R^2}{Z_0 P_\Sigma} = \frac{4\pi \left| \int_A E_x(x, y) dA \right|^2}{\lambda^2 \int_A |E_x(x, y)|^2 dA} \quad (11.21)$$

Para la distribución de amplitud uniforme  $E_x = \text{const}$ , las integrales de la (11.21) se calculan fácilmente, siendo el resultado igual a:

$$D_0 = \frac{4\pi A}{\lambda^2} \quad (11.22)$$

Entonces, la abertura plana cofasica con distribución uniforme de excitación tiene una superficie efectiva  $A_{ef}$  exactamente igual al área de la abertura  $A$ . Aumentando la relación  $A/\lambda^2$  la ganancia de antena dirigida de la abertura cofasica puede ser incrementada hasta valores muy grandes. Por ejemplo, incluso una abertura cuadrada relativamente pequeña de  $10\lambda \times 10\lambda$  puede tener una ganancia de antena dirigida igual a 1250.

Para una distribución de amplitud irregular la ganancia de antena dirigida de la abertura resulta menor que el valor máximo determinado por la fórmula 11.22. La disminución de la ganancia de antena dirigida cuando la distribución de amplitud es irregular se estima por el factor de abertura de utilización de la superficie (FUS):

$$FUS = \frac{A_{ef}}{A} = \frac{D}{D_0} = \frac{\left| \int_A E_x(x,y) dA \right|^2}{A \int_A |E_x(x,y)|^2 dA} \leq 1 \quad (11.23)$$

La magnitud del FUS no depende de la forma del diagrama direccional del elemento, y por eso en lugar de  $E_x$  se puede utilizar cualquier función de distribución de excitación  $I(x,y)$ .

**Factor de direccionalidad de la abertura rectangular.** Supongamos que una abertura plana tiene las dimensiones  $a \times b$ , y su centro coincide con el origen de coordenadas (fig. 11.6).

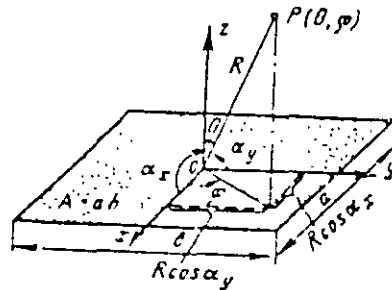


fig. 11.6

El caso más simple es en que la distribución de amplitud puede representarse en forma de producto de dos factores, dependientes solo de  $x$  y solo de  $y$ .

$$I(x, y) = I(x)I(y) \quad (11.24)$$

En tal caso el factor de direccionalidad también tiene la forma de producto:

$$F(\theta, \varphi) = |F_x(\theta, \varphi)F_y(\theta, \varphi)| = \left| \int_{-a/2}^{a/2} I(x) \exp(jkx \sin \theta \cos \varphi) dx \right| \times \left| \int_{-b/2}^{b/2} I(y) \exp(jky \sin \theta \sin \varphi) dy \right| \quad (11.25)$$



$$dE_0 = \frac{j \cos \varphi}{2\lambda} (\cos \theta + 1) E_x \frac{\exp(-jkR)}{R} dA$$

$$dE_\varphi = -\frac{j \operatorname{sen} \varphi}{2\lambda} (1 + \cos \theta) E_x \frac{\exp(-jkR)}{R} dA, \text{ obien}$$

$$d\bar{E} = (\bar{\theta}_0 \cos \varphi - \bar{\varphi}_0 \operatorname{sen} \varphi) j \frac{E_x}{2\lambda} (1 + \cos \theta) \frac{\exp(-jkR)}{R} dA \quad (11.17)$$

Después de hallar la característica de radiación de un elemento de la abertura, se puede hallar el campo total de radiación de la abertura. Para esto hay que integrar  $d\bar{E}$  por toda la superficie de la abertura teniendo en cuenta la diferencia de recorrido espacial de los rayos al punto de observación desde el origen de coordenadas y desde el punto corriente de integración.

Utilizando (11.17), llegamos a la formula:

$$\bar{E} = (\bar{\theta}_0 \cos \varphi - \bar{\varphi}_0 \operatorname{sen} \varphi) \frac{j(1 + \cos \theta)}{2\lambda} \int_A E_x(x, y) \exp[jk \operatorname{sen} \theta (x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi)] \frac{\exp(-jkR)}{R} dA \quad (11.18)$$

**Ganancia de antena dirigida de la abertura plana.** Si la abertura esta excitada de manera cofasica, la radiación máxima esta dirigida a lo largo del eje Z, donde la diferencia de recorrido de todos los elementos de la abertura es igual a cero. El modulo del vector de intensidad del campo eléctrico en la zona lejana en este dirección es igual a:

$$|E_{max}| = \frac{1}{\lambda R} \int_A E_x(x, y) dA \quad (11.19)$$

Para determinar la ganancia de antena dirigida de la abertura también hay que hallar la potencia total de radiación  $P_\Sigma$ . La forma mas simple para hacerlo es calculando el flujo del vector de Poynting por la superficie de la abertura:

$$P_\Sigma = \int_A \frac{E_x \cdot H_y^*}{2} dA = \int_A \frac{|E_x(x, y)|^2}{2Z_0} dA \quad (11.20)$$

Ahora podemos calcular el coeficiente de directividad:

$$D = \frac{|E_{max}|^2 2\pi R^2}{Z_0 P_\Sigma} = \frac{4\pi \left| \int_A E_x(x, y) dA \right|^2}{\lambda^2 \int_A |E_x(x, y)|^2 dA} \quad (11.21)$$

Para la distribución de amplitud uniforme  $E_x = \text{const}$ , las integrales de la (11.21) se calculan fácilmente, siendo el resultado igual a:

además, cada factor coincide con la característica de antena lineal, orientada en un caso por el eje  $x$ , y en otro caso, por el eje  $y$ .

Para la distribución de amplitud uniforme  $I(x) = I(y) = \text{const}$ , las integrales de la 11.25 se calculan fácilmente y el resultado tiene la forma:

$$F(\Psi_x, \Psi_y) = \left| \frac{\text{sen } \Psi_x}{\Psi_x} \frac{\text{sen } \Psi_y}{\Psi_y} \right| \quad (11.26)$$

donde

$$\Psi_x = \frac{ka}{2} \text{sen } \theta \cos \varphi; \quad \Psi_y = \frac{kb}{2} \text{sen } \theta \text{sen } \varphi$$

El relieve de la función bidimensional (11.26) en el plano de las variables angulares  $\Psi_x, \Psi_y$  se muestra en la fig 11.7, donde debido a la simetría está representado solo un cuadrante del plano. De igual modo que al analizar las antenas lineales, en el plano  $\Psi_x, \Psi_y$  se puede separar la región de visibilidad.

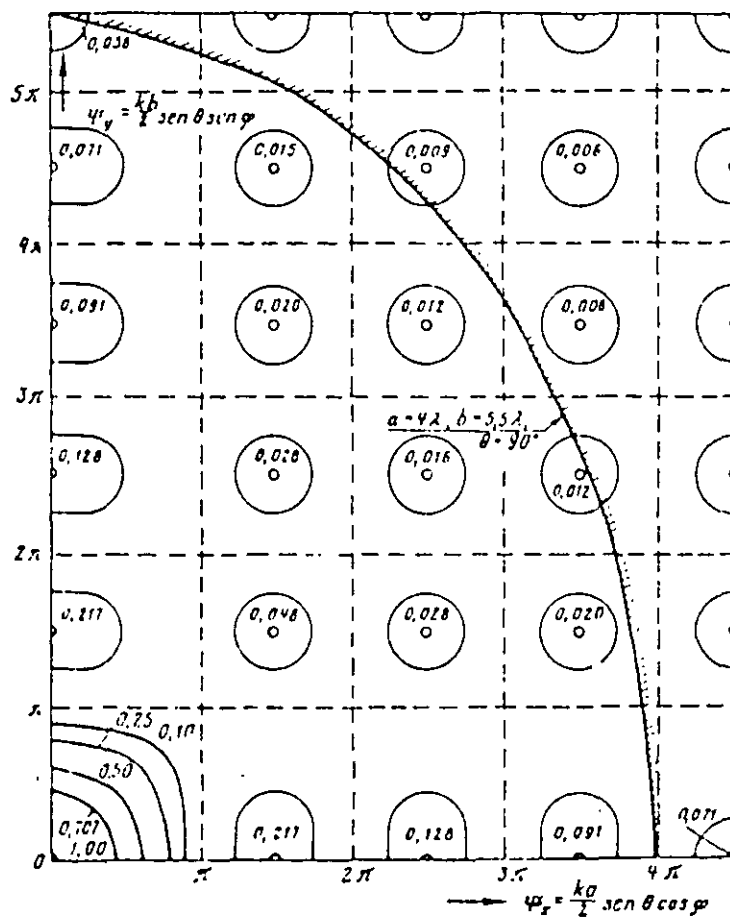


fig. 11.7

Se admite considerar como límite de la región de visibilidad todas las direcciones de observación que coinciden con el plano de abertura,  $\theta = \pi/2$  para  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . En el semiespacio  $\theta > \pi/2$  el campo no puede ser calculado correctamente por las fórmulas presentadas,

excluyéndose este semiespacio del examen. Puesto que las líneas del ángulo constante  $\theta$  en el plano  $\Psi_x, \Psi_y$  son elipses de ecuación:

$$\frac{\Psi_x^2}{\left(\frac{ka}{2}\right)^2} + \frac{\Psi_y^2}{\left(\frac{kb}{2}\right)^2} = \text{sen}^2 \theta \quad (11.27)$$

el límite de la región de visibilidad para  $\text{sen} \theta = 1$  se determina por las fórmulas

$$\frac{\Psi_{x\ell}^2}{(ka)^2} + \frac{\Psi_{y\ell}^2}{(kb)^2} = \frac{1}{4} \quad (11.28)$$

o bien

$$\Psi_{x\ell} = \frac{ka}{2} \cos \varphi; \quad \Psi_{y\ell} = \frac{kb}{2} \text{sen} \varphi \quad (11.29)$$

Como ejemplo en la fig. 11.7 se ha señalado con una línea rayada el límite de la región de visibilidad para  $a = 4\lambda$ ;  $b = 5.5\lambda$ . Aumentando las dimensiones de la abertura el límite de la región de visibilidad se aparta del origen de coordenadas y en la región de visibilidad cae un número cada vez mayor de lóbulos laterales.

En particular, la anchura del haz por la semipotencia para la distribución de amplitud uniforme resulta igual a  $\Delta\theta_x = 51^\circ \lambda/a$   $\Delta\theta_y = 51^\circ \lambda/b$ . Expresando de aquí  $a$  y  $b$  y sustituyendo sus valores en la fórmula para la ganancia de antena dirigida, obtenemos:

$$D_0 = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} = \frac{32700}{\Delta\theta_x \Delta\theta_y} \quad (11.30)$$

La ganancia de antena dirigida máxima de la abertura rectangular también se puede representar en forma de producto de tres factores.

$$D_0 = \frac{4\pi ab}{\lambda^2} = \pi \frac{2a}{\lambda} \frac{2b}{\lambda} = \pi D_x D_y \quad (11.31)$$

donde  $D_x, D_y$  son las ganancias de antena dirigida de las antenas lineales, y el factor  $\pi$  se puede considerar como la ganancia de antena dirigida equivalente de un elemento de abertura.

Para distribución de amplitud irregular pero repartida por las coordenadas  $x$  y  $y$ , la ganancia de antena dirigida de la abertura rectangular disminuye, además, el factor de utilización de la superficie (FUS) se puede estimar por la fórmula

$$FUS_a = FUS_x \cdot FUS_y \quad (11.32)$$

donde  $FUS_x$  y  $FUS_y$  son los valores del FUS de las antenas lineales equivalentes.

**Factor de direccionalidad de la abertura circular.** En este caso conviene utilizar en el plano de la abertura circular  $(x, y)$  las coordenadas esféricas del punto de integración  $R', \varphi', \theta' = \pi/2$  y la expresión para el elemento de superficie  $dxdy = R' dR' d\varphi'$ . La

diferencia de recorrido que se encuentra en la exponente de la expresión subintegral resulta igual a.

$$x \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + y \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi = R' \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \varphi')$$

y la formula para el factor de direccionalidad de la abertura circular de radio  $a$  toma la forma:

$$F(\theta, \varphi) = \int_0^{2\pi} \int_0^a I(R', \varphi') \exp[jkR' \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \varphi')] R' dR' d\varphi' \quad (11.33)$$

Supongamos que la distribución de amplitud normada de excitación no depende del ángulo azimutal  $\varphi'$  y es igual a:

$$I(R') = (1 - \Delta) + \Delta \left[ 1 - \left( \frac{R'}{a} \right)^2 \right]^n$$

(11.34)

donde  $(1 - \Delta)$  es el nivel del campo en el borde de la abertura, es decir, el pedestal.

En tal caso la integral por  $\varphi'$  de la (11.33) es coincidente con la formula integral para la función de Bessel de orden cero:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[jkR' \operatorname{sen} \theta \cos(\varphi - \varphi')] d\varphi' = J_0(kR' \operatorname{sen} \theta) \quad (11.35)$$

y no depende del ángulo de observación  $\varphi$ . La integral por  $R'$  que queda se expresa por las funciones lambda  $\Lambda_n(\theta)$

$$F(\theta) = 2\pi \int_0^a \left\{ (1 - \Delta) + \Delta \left[ 1 - \left( \frac{R'}{a} \right)^2 \right]^n \right\} \times J_0(kR' \operatorname{sen} \theta) R' dR' =$$

$$2\pi a \left[ (1 - \Delta) \Lambda_n(\Psi) + \frac{\Delta}{n+1} \Lambda_{n+1}(\Psi) \right]$$

(11.36)

donde  $\Psi = ka \operatorname{sen} \theta$  es una variable angular análoga a las variables angulares  $\Psi_x$  y  $\Psi_y$  utilizadas en la abertura cuadrada

Las funciones lambda están relacionadas simplemente con las funciones ordinarias de Bessel:

$$\Lambda_n(\Psi) = \frac{n!}{\left( \frac{\Psi}{2} \right)^n} J_n(\Psi) \quad (11.37)$$

Las funciones  $|\Lambda_1(\Psi)|$  y  $|\Lambda_2(\Psi)|$ , que son los factores de direccionalidad de la abertura circular para las distribuciones de amplitud  $I(R') = \text{const}$  e  $I(R') = 1 - (R'/a)^2$ , se muestran en la fig. 11.8. Recalquemos una vez mas que el factor de direccionalidad de la abertura

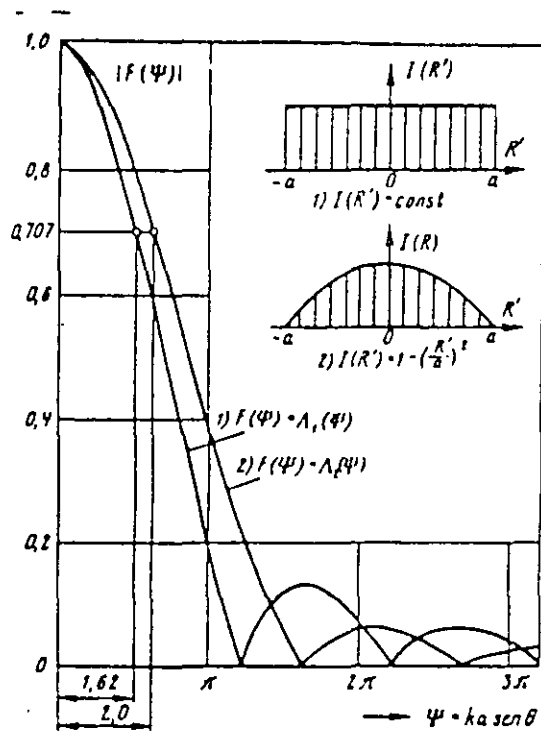
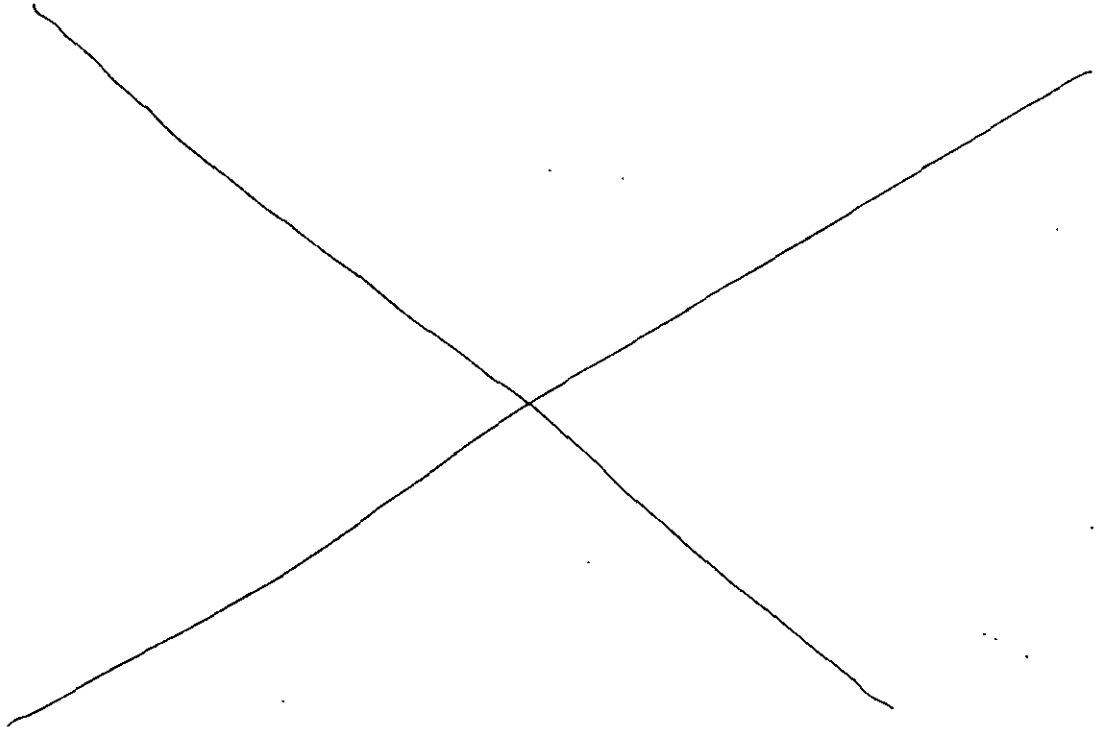


fig. 11.8

circular para distribuciones de amplitud del tipo (11.34) tiene simetría axial y no depende del ángulo  $\varphi$ . Por consiguiente, los relieves espaciales de la radiación lateral en las aberturas circular y rectangular resultan distintos en principio.

Precisemos la anchura del haz y el nivel de radiación lateral de la abertura circular.



Para la distribución de amplitud uniforme a la anchura total del haz por el nivel 0.707 (según la semipotencia) de acuerdo con la fig. 11.8 corresponde la magnitud  $\Delta\Psi = 2 \cdot 1.62 = 3.24$ . En escala de los ángulos reales de observación esto da lugar a la fórmula:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\Psi}{\left| \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right|_{\theta=0}} = \frac{3.24\lambda}{2\pi a} = 59^\circ \frac{\lambda}{2a} \quad (11.38)$$

El nivel del primer lóbulo lateral para una excitación de igual amplitud es de 0.132 (por campo), o bien -17.6dB. Para distribuciones de amplitud de tipo (11.34) decrecientes al borde de la abertura tiene lugar el ensachamiento del haz principal, en comparación con la valoración (11.38), y la reducción del nivel de radiación lateral. Los coeficientes de expansión del haz (CEH) y los niveles de radiación lateral para diferentes parámetros de distribución de amplitud se dan en la tabla 11.1. Aquí también se exponen los correspondientes valores del FUS.

Tabla 11.4

Abertura circular de radio  $a$

n	Nivel de lóbulos laterales (NLL), dB			CEH: $\Delta\theta = \frac{59^\circ\lambda}{2a}$ CEH		
	$\Delta$			$\Delta$		
	1,0	0,8	0,67	1,0	0,8	0,67
0	17,6	—	—	1,00	—	—
1	24,7	23,7	22,0	1,23	1,13	1,10
2	30,7	32,3	26,5	1,43	1,19	1,12
3	36,1	32,3	30,8	1,60	1,21	1,12

Continuación de la tabla 8-1

n	FUS <sub>a</sub> = D/D <sub>0</sub>			Coeficiente de dispersión		
	$\Delta$			$\Delta$		
	1,0	0,8	0,67	1,0	0,8	0,67
0	1,00	—	—	0,162	—	—
1	0,75	0,87	0,92	0,02	0,03	0,05
2	0,55	0,81	0,88	—	—	—
3	0,15	0,79	0,87	—	—	—

### 11.4. Desviación del haz en la abertura plana con distribución de fase lineal de excitación.

De igual modo que en el radiador lineal se puede controlar la posición del haz de la abertura plana creando la distribución de fase lineal de excitación. Demos en la abertura cuadrada plana una distribución de excitación en forma de superposición de dos ondas móviles (progresivas) a lo largo de los ejes  $x$  e  $y$ :

$$I(x, y) = I(x)I(y) = I_0 \exp(-jk\xi_x x) \exp(-jk\xi_y y) \quad (11.38)$$

donde  $|\xi_x| < 1$  y  $|\xi_y| < 1$  son coeficientes de deceleración de la velocidad de fase. La expresión para el factor de direccionalidad normado después de integrar tiene la forma:

$$F(\theta, \varphi) = \left| \frac{\text{sen} \left[ \frac{ka}{2} (\text{sen } \theta \cos \varphi - \xi_x) \right] \text{sen} \left[ \frac{kb}{2} (\text{sen } \theta \text{sen } \varphi - \xi_y) \right]}{\frac{ka}{2} (\text{sen } \theta \cos \varphi - \xi_x) \quad \frac{kb}{2} (\text{sen } \theta \text{sen } \varphi - \xi_y)} \right| \quad (11.39)$$

El sentido del máximo principal de radiación se determina de las igualdades:

$$\xi_x = \text{sen } \theta_0 \cos \varphi_0; \quad \xi_y = \text{sen } \theta_0 \text{sen } \varphi_0 \quad (11.40)$$

que son llamadas fórmulas de puesta en fase. Estas fórmulas permiten hallar los coeficientes de deceleración de la velocidad de fase necesarios  $\xi_x$  y  $\xi_y$ , para orientar el máximo principal de radiación en la dirección dada  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  y son validas para cualquier forma de abertura y para una distribución de amplitud arbitraria.

Las expresiones  $\text{sen } \theta \cos \varphi = \text{cos } \alpha_x$ ;  $\text{sen } \theta \text{sen } \varphi = \text{cos } \alpha_y$ , que entran en la formula (11.39) son cosenos directores de los ángulos  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ , formados por la dirección de observación  $\theta, \varphi$  con los ejes  $x$  y  $y$  de la abertura. Mediante los cosenos directores la expresión del factor de direccionalidad (11.39) se escribe en una forma mas simple:

$$F(\alpha_x, \beta_y) = \left| \frac{\text{sen} \left[ \frac{ka}{2} (\text{cos } \alpha_x - \xi_x) \right] \text{sen} \left[ \frac{kb}{2} (\text{cos } \alpha_y - \xi_y) \right]}{\frac{ka}{2} (\text{cos } \alpha_x - \xi_x) \quad \frac{kb}{2} (\text{cos } \alpha_y - \xi_y)} \right| \quad (11.41)$$

Debido al ensanchamiento del lóbulo principal, cuando el haz se desvía del eje  $Z$ , la ganancia de antena dirigida de la abertura disminuye por la ley

$$D = \frac{4\pi A_{ef}}{\lambda^2} \text{cos } \theta_0 \quad (11.42)$$

donde  $\theta_0$  es el ángulo de desviación del haz respecto de la normal a la superficie de la abertura,  $A_{ef}$  es la superficie efectiva de la abertura cofasica. La formula (11.42) es valida cuando la dirección del máximo principal no se aproxima al plano de abertura mas de dos o tres valores de la anchura angular del lóbulo principal.

## 11.5. Redes de antenas planas con elementos en fase.

### Disposición de radiadores por la abertura y condiciones de inexistencia de máximos principales secundarios.

La distribuciones de fase lineales de excitación en la abertura plana, que dan lugar al cambio de la posición del haz en el espacio, se producen mediante la división de la abertura en un gran numero de radiadores individuales con mando independiente de la fase de excitación de cada uno de ellos. En consecuencia se obtiene un sistema de antenas de exploración complejo, generalmente llamado red de antenas con elementos en fase (RAEF).

Una de las cuestiones fundamentales, que se resuelve al crear la RAEF, es la elección del modo de disposición de los elementos en la abertura. Entre los medios rectangulares de disposición de los elementos las mas difundidas son dos leyes: a) por los nudos de la red rectangular (fig. 11.8, a), b) por los nudos de la red rectangular (hexagonal) (fig. 11.8, b). Estas leyes se caracterizan por la disposición uniforme de los radiadores en el plano, es decir, a cada radiador de la RAEF le



corresponde igual parte de área de la abertura: el rectángulo de área  $A_{el} = d_x d_y$  para la red rectangular y el hexágono de área  $A_{el} = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$  para la red triangular.

Comparemos las redes rectangular y triangular desde el punto de vista del peligro de aparición de máximos principales parásitos durante la exploración.

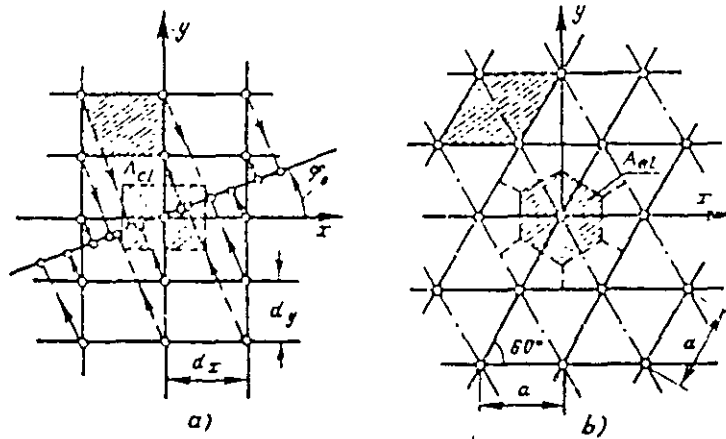


Fig. 11.9

**Red rectangular.** Aquí es suficiente considerar las direcciones desfavorables  $\varphi_0 = 0$ ;  $\varphi_0 = \pi/2$  y  $\varphi_0 = \arctg(d_y/d_x)$ . En estas direcciones las líneas de elementos equivalentes tendrán el máximo paso constante  $d_c = d_x$  cuando  $\varphi_0 = 0$ ,  $d_c = d_y$  para  $\varphi_0 = \pi/2$  y

$$d_c = \frac{1}{2} \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \text{ para } \varphi_0 = \arctg(d_y/d_x) \quad (11.43)$$

Todas las demás direcciones forman líneas equivalentes con una disposición mas tupida de radiadores, lo que disminuye la posibilidad de aparición de máximos principales parásitos. El requisito de la falta absoluta del máximo principal parásito en la región de visibilidad, cuando el haz se desvía el ángulo  $\theta_{max}$  respecto de la normal a la abertura, se escribe en la forma:

$$\frac{d_c}{\lambda} \leq \frac{N-1}{N-1 + |\xi_{max}|} = \frac{N-1}{N-1 + |\sin \theta_{max}|} \quad (11.44)$$

De donde para grandes  $N$  se deducen las desigualdades para elegir el paso de la red por los ejes  $x$  y  $y$ :

$$d_x < \frac{\lambda}{1 + \sin \theta_{xmax}}; \quad d_y < \frac{\lambda}{1 + \sin \theta_{ymax}} \quad (11.45)$$

donde  $\theta_{xmax}$  y  $\theta_{ymax}$  son los ángulos máximos de exploración en los planos  $zx$  y  $zy$ .

**Red triangular.** Aquí existen dos direcciones desfavorables:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, d_e = a \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 0, d_e = \frac{a}{2}$$

Para la red triangular al elegir el paso se puede guiar por la desigualdad:

$$a < \frac{2 \lambda}{\sqrt{3} (1 + \operatorname{sen} \theta_{max})} \quad (11.46)$$

Al utilizar la red triangular el número total de elementos de la RAEF puede disminuirse en un 13% con respecto al número de elementos de la red rectangular. Las dimensiones incrementadas de un elemento de la red triangular, además, facilitan la disposición constructiva de los generadores que se ponen en fase (y otros dispositivos de puesta en fase) cerca de los radiadores de la red.

## 12. Antenas de abertura.

### 12.1 Propiedades generales de las antenas de abertura

Corresponden a las antenas de abertura aquellas en las que de acuerdo con la teoría de equivalencia se puede destacar la superficie plana de la abertura  $A$ , que forma una radiación filiforme. Entre las antenas de abertura se encuentran las antenas más difundidas, como las de reflector (parabólicas), las de cono invertido y lentes.

La ganancia de antena dirigida de las antenas de abertura está relacionada con el área de la abertura  $A$  y la longitud de onda por la fórmula general:

$$D = \frac{4\pi A}{\lambda^2} FUS_{\Sigma} \quad (12.1)$$

donde  $FUS_{\Sigma} \leq 1$  es el factor de utilización de la superficie total, dependiente del tipo de distribución de amplitud-fase y una serie de otros factores.

La anchura del haz de las antenas de abertura en un plano cualquiera perpendicular a la superficie de la abertura, es inversamente proporcional a la dimensión lineal de la abertura  $L$  en este plano:

$$\Delta\theta = \frac{51^\circ \lambda}{L} CEH_{\Sigma} \quad (12.2)$$

donde  $CEH_{\Sigma} \geq 1$  es el coeficiente de expansión del haz, dependiente de la forma de la abertura y del tipo de distribución de amplitud-fase.

### 12.2. Antenas en cono invertido

En la gama de las ondas centimétricas se utilizan las antenas en cono invertido y, en particular, las antenas en forma de guía de ondas de extremo abierto rectangular o circular. Las antenas de este tipo se usan individualmente y como excitadores de antenas más complejas, por ejemplo, las antenas de lentes y de reflector.

Examinemos en primer lugar la radiación del extremo abierto de la guía de ondas rectangular (fig. 12.1). La onda  $TE_{10}$  que se propaga en la guía de ondas, originada por el excitador dipolo, al llegar hasta el extremo abierto parcialmente se refleja de vuelta y en parte se radia.

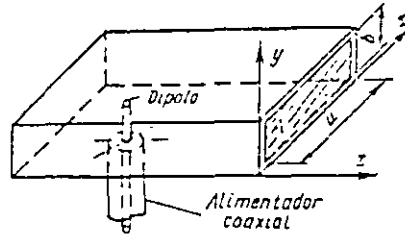


Fig. 12.1

El diagrama direccional en el plano  $yz$  (plano E) se escribe en la forma:

$$f_E(\theta) = \left[ 1 + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cos\theta \right] \frac{\text{sen}\left(\frac{kb}{2} \text{sen}\theta\right)}{\frac{kb}{2} \text{sen}\theta} \quad (12.3)$$

y en el plano  $xz$  (plano H):

$$f_H(\theta) = \left[ \cos\theta + \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \right] \frac{\cos\left(\frac{ka}{2} \text{sen}\theta\right)}{\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 - \text{sen}^2\theta} \quad (12.4)$$

En las fórmulas (12.3) y 12.4  $a$  y  $b$  son las dimensiones internas de las paredes ancha y estrecha de la guía de ondas;  $\lambda$  es la longitud de onda,  $\Gamma$  es el coeficiente de reflexión.

En la fig 12.2 se dan los diagramas direccionales por potencia en los planos E y H. Las curvas llenas son calculadas y los puntos corresponden a los valores medidos.

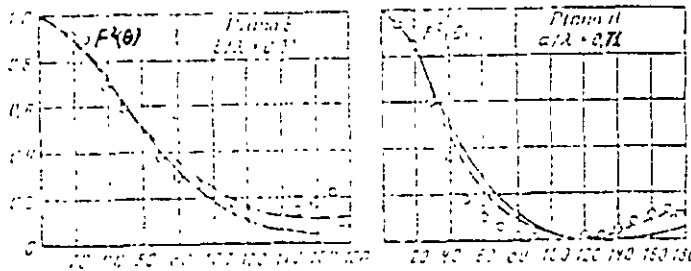


Fig. 12.2

Como se aprecia de la fig 12.2, las antenas en forma de extremo abierto de la guía de ondas tienen mala directividad. A menudo se utilizan como excitadores de las antenas de reflector, como elementos de las redes de antenas con elementos en fase.

Para aumentar la directividad y reducir la reflexión del extremo abierto de la guía de ondas se usan radiadores de bocina. En la fig. 12.3 se muestra una bocina sectorial  $H$ , que se ensancha en el plano del vector  $H$  con el incremento paulatino de la dimensión de  $a$ .

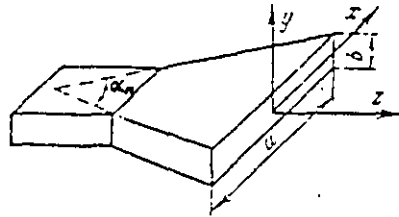


Fig. 12.3

En la bocina sectorial se origina una onda, semejante a la onda  $TE_{10}$  en la guía de ondas rectangular, y el cuadro del campo tiene la forma representada en la fig. 12.4.

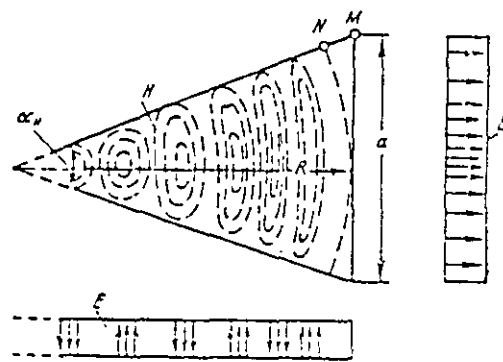


Fig. 12.4

La bocina sectorial se diferencia de la guía de ondas en que su frente de onda forma una superficie cilíndrica, la velocidad de fase es una magnitud variable, dependiente de la relación  $a/\lambda$ , a una gran distancia del cuello de la bocina el campo toma el carácter puramente de onda transversal.

Si el ángulo de abertura de la bocina  $\alpha$  es pequeño, el frente de onda en el orificio de salida resulta próximo al plano, y para el cálculo del diagrama direccional en el plano  $H$  se puede utilizar la fórmula (12.4), teniendo en cuenta que  $\Gamma = 0$ . El lóbulo principal del diagrama direccional se estrecha aproximadamente tantas veces, como veces aumenta la dimensión  $a$  de la abertura de la bocina en comparación con la mayor dimensión del orificio de salida de la guía de ondas rectangular.

Sin embargo, si el ángulo de abertura de la bocina  $\alpha$  no es pequeño, el frente de onda en la abertura se diferencia sensiblemente del plano, y esto provoca el ensanchamiento del lóbulo principal. La fase del campo en el extremo de la abertura, en relación a su valor en el centro de la abertura puede ser determinada por una fórmula aproximada:

$$\Phi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda} MN \approx -\frac{\pi a^2}{4\lambda R} = -\frac{\pi a}{a \lambda} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (12.5)$$

donde  $R$  es la longitud de la bocina. La distribución de la fase en el orificio de salida de la bocina obedece a la ley cuadrática. Como demuestran los cálculos, la ganancia de antena dirigida en cono invertido para valores fijos de la longitud de la bocina  $R$  tiene una dependencia característica de la dimensión de la abertura  $a/\lambda$ , mostrada en la fig 12.5.

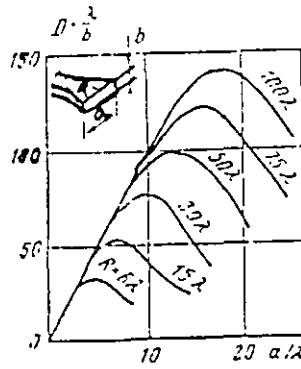


Fig. 12.5

La aparición del máximo se debe a que, al aumentar el ángulo de abertura de la bocina  $\alpha$ , por un lado, crece la dimensión relativa de la abertura  $a/\lambda$ , lo que da lugar al estrechamiento del diagrama direccional. Pero, por otro lado, de acuerdo con (12.5) aumenta rápidamente el error de fase cuadrático  $\Phi_2$ , que conduce al ensanchamiento del diagrama direccional. Por la acción de estos factores opuestos, para un valor determinado de  $(a/\lambda)_{opt}$ , tiene lugar la ganancia de antena dirigida máxima. Resulta que para cualquier  $R$  el máximo de la ganancia de antena dirigida se obtiene cuando la magnitud del error de fase cuadrático en el borde de la bocina es  $|\Phi_{2opt}| = 135^\circ$ . La bocina sectorial  $H$ , que satisface esta condición, se llama óptima. El factor de utilización de superficie (FUS) total de la bocina sectorial  $H$  óptima es igual aproximadamente a 0.64 (0.81, el FUS de abertura debido a la distribución de amplitud decreciente, y 0.79, el FUS debido al error de fase cuadrático).

Además de las bocinas sectoriales, que se ensanchan en el plano del vector  $H$ , pueden utilizarse también las bocinas sectoriales, que se ensanchan en el plano del vector  $E$ . (fig. 12.6)

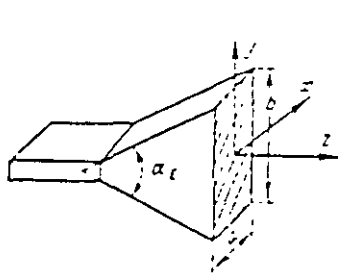


Fig. 12.6

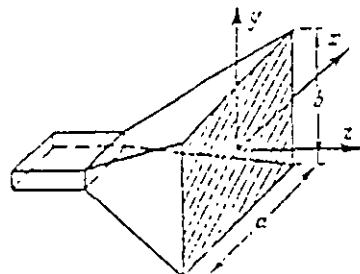


Fig. 12.7

la dimensión de  $b$ , si el ángulo de apertura  $\alpha$  se toma bastante pequeño. En la bocina sectorial  $E$  la distribución de amplitud del campo en la abertura es aproximadamente uniforme, y el error de fase cuadrático  $\Phi_2 \approx -\pi b^2 / 4\lambda R$  al borde de la abertura, correspondiente a la bocina óptima, es igual a  $-90^\circ$ .

Las bocinas piramidales de sección transversal rectangular se utilizan ampliamente (fig. 12.7). Estas bocinas permiten estrechar los diagramas direccionales tanto en el plano  $H$ , como en el plano  $E$ . En la bocina piramidal se forma la onda esférica, la velocidad de fase de la onda es variable y a medida que se mueve hacia el extremo abierto se aproxima a la velocidad de la luz.

Para disminuir la longitud de la bocina se tolera de ordinario una distorsión cuadrática de fase del campo, igual a  $|\Phi_2| = 135^\circ$  en el plano  $H$ , y  $|\Phi_2| = 90^\circ$  en el plano  $E$ . Esta bocina, como se indicó antes, se llama óptima, su FUS se estima aproximadamente por la fórmula  $FUS_\varepsilon = FUS_A \cdot (FUS_\Phi)^2 = 0.81 \cdot (0.8)^2 = 0.52$ , donde el primer factor tiene en cuenta la irregularidad de la distribución de amplitud en el plano  $H$ , y el segundo, la existencia de distorsiones de fase cuadráticas en los planos  $E$  y  $H$ .

Además de las bocinas de sección transversal rectangular se utilizan también las bocinas de sección circular, precisamente, las bocinas cónicas. Estas bocinas se forman por ensanchamiento del extremo abierto de la guía de ondas circular excitada por la onda  $H_{11}$ . La radiación de la bocina cónica es análoga a la radiación de la bocina piramidal, y esa también tiene dimensiones óptimas, que se pueden considerar como medias entre las dimensiones de las bocinas óptimas de plano  $E$  y de plano  $H$ .

### 12.3 Antenas a lente

En las antenas a lente de gama centimétrica se aplican las propiedades ópticas de las ondas electromagnéticas, puesto que las dimensiones geométricas y los radios de curvatura de la superficie de las antenas a lente de ordinario resultan mucho mayor que la longitud de onda. Las antenas a lente se caracterizan por el hecho de que en ellas el frente de onda cilíndrico o esférico se transforma en plano



Fig 12.8

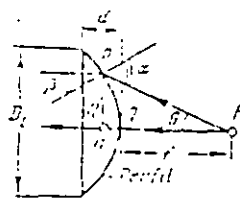


Fig 12.9

En la fig 12.8 se muestra la lente dielectrica, sobre la cual incide la onda esférica de longitud  $\lambda_0$  desde la fuente  $F$ . Gracias a la convexidad de la superficie iluminada de la lente el frente de onda esférico se transforma en la lente en plano de longitud de onda  $\lambda_{dl} = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon}$ . La superficie de

salida de la lente es plana, y al salir de la lente el frente de onda queda también plano. Puesto que las dimensiones de la superficie de salida de la lente son grandes en comparación con la longitud de onda, su radiación resulta de haz filiforme.

Veamos ahora la fig. 12.9 y determinemos el perfil de la lente. Supongamos que el haz (rayo) índice del punto  $F$  en el punto  $P$  de la superficie de la lente, y admitamos que  $\alpha$  es el ángulo de incidencia del haz, siendo  $\beta$  el ángulo de refracción. Así pues tendremos:

$$\operatorname{sen} \alpha = n \operatorname{sen} \beta \quad (12.6)$$

donde  $n = \sqrt{\epsilon}$  es el coeficiente de refracción del dielectrico.

La ecuación del perfil de la lente se determina de la condición de que la longitud del trayecto (camino) óptico (longitud eléctrica) desde la superficie a transformar hasta la transformada de fases iguales en toda dirección debe ser constante, es decir,  $FP = FQ + nQQ'$ . De aquí obtenemos.

$$\rho = f + n(\rho \cos \theta - f)$$

o bien

$$\rho = \frac{(n-1)f}{n \cos \theta - 1} \quad (12.8)$$

donde  $f$  es la distancia focal, es decir, la distancia desde el foco  $F$  hasta el vértice de la lente  $Q$ ;  $\theta$  es el ángulo entre el eje de la lente y el haz;  $\rho$  es la distancia desde el foco hasta el punto dado de la superficie de la lente.

La ecuación (12.8) es la ecuación de la hipérbola. Por consiguiente, la superficie convexa de la lente debe tener forma hiperbólica. El espesor de la lente  $d$  se determina por la trayectoria óptica y esta vinculado al diámetro de la lente  $D_1$  por la relación:

$$d = \frac{1}{n} \left( \frac{D_1}{2 \operatorname{sen} \theta_{max}} - f \right), \quad (12.9)$$

donde  $\theta_{max}$  es el ángulo entre el eje de la lente y la dirección del foco al punto extremo del perfil (ángulo  $2\theta_{max}$ , bajo el cual desde el foco se ve el borde de la lente, se llama a menudo ángulo de abertura)

Puesto que la superficie de salida de la lente es una superficie cofásica, ella pueda considerarse como una abertura radiante plana

Las lentes dielectricas son de banda ancha, ya que el coeficiente de refracción  $n$  en una gama ancha de frecuencias, hasta las mas altas, conserva practicamente un valor constante. Sin embargo, estas lentes se utilizan con relativa rareza debido a la gran masa y a las perdidas de potencia en el dielectrico y a la dificultad de su elaboración

Mas a menudo se utilizan las lentes de placas metálicas de elevada velocidad de fase. Estas lentes se componen de placas metálicas paralelas, dispuestas a la distancia  $a$  entre si y que forman una superficie cóncava (fig 12.10). El vector de intensidad del campo eléctrico  $E$  excitado por una superficie situada en el foco de lente, debe ser paralelo a las placas. En tal caso el espacio entre dos placas contiguas representa una guía de ondas, en la cual se excita la onda  $TE_{10}$  con velocidad

de fase  $v = c / \sqrt{1 - (\lambda / 2a)^2}$  Por consiguiente, se origina un medio con coeficiente de refracción efectivo menor que la unidad

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} < 1 \quad (12.10)$$

La distancia entre las placas  $a$  debe satisfacer la desigualdad  $\lambda/2 < a < \lambda$  para que entre las placas puede propagarse solamente un tipo de onda  $TE_{10}$ . Por lo tanto, el coeficiente de refracción de la lente aceleradora se encuentra entre  $0 < n < \sqrt{0.75}$ .

La ecuación del perfil de la lente se puede deducir mediante las construcciones mostradas en la fig. 12.11. El haz del foco  $F$  que incide en el punto  $P$  de la superficie iluminada de la lente se refracta por la ley de óptica geométrica  $\text{sen } \alpha = n \text{sen } \beta$ . La longitud óptica del trayecto  $FQ$  debe ser igual a la longitud óptica del trayecto  $FP'$ , es decir,  $FQ = FP + nPP'$ . Esta condición nos lleva nuevamente a la formula (12.9) para el perfil de la lente, empero cuando  $n < 1$  la formula ya es ecuación de la elipse. El espesor del perfil de la lente  $d$  se da por la formula:

$$d = \frac{1}{n} \left( f - \frac{D_f}{2 \text{sen } \theta_{\max}} \right) \quad (12.11)$$

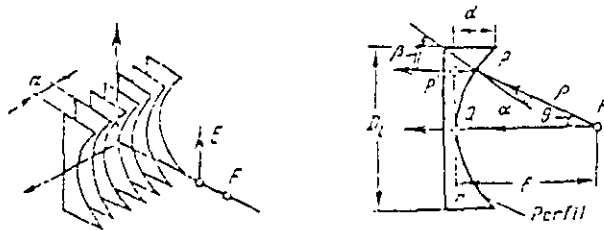


Fig. 12.10

Fig. 12.11

Las lentes de placas metálicas de dimensiones pequeñas y medias son de construcción elemental. El empleo de la lente de placa metálica en conjunto con una bocina permite reducir considerable su longitud. Así, para una bocina optima de abertura  $a = 20\lambda$ , la longitud debe ser  $R = 200\lambda$ . Si se utiliza una lente en el orificio de salida de la bocina, su longitud puede ser del mismo orden que el abertura.

Las lentes de placas metálicas son de bandas relativamente estrechas, ya que el coeficiente de refracción depende de la longitud de onda. La banda de frecuencias es inversamente proporcional al espesor de la lente  $d$  y cuando  $d \gg \lambda_0$  puede resultar muy estrecha.

Para reducir el espesor de la lente  $d$  y hacerla de banda mas ancha, así como mas constructiva, se recurre a la división en zonas (fig. 12.12). La parte iluminada de la lente se hace escalonada, además, los escalones se eligen de una profundidad  $t$  tal, que los haces refractados en las zonas contiguas de la lente, lleguen a la abertura con un desfasaje de  $2\pi$ .

Cada zona tiene su distancia local, y la ecuación del perfil de la  $m$ -ésima zona será

$$\rho_m = \frac{(1-n)f_m}{1-n \cos \theta} \quad (12.12)$$

donde  $f_m = f + (m-1)t$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$



La dimensión de  $t$  se elige de la condición de coincidencia de fases del campo en la abertura a la longitud de onda calculada  $k_0 t - k_0 n t = 2\pi$ , de donde obtenemos:

$$t = \frac{\lambda_0}{1 - n} \quad (12.13)$$

Debido a la división en zonas en la abertura de la lente aparecen sectores no excitados (regiones oscuras de la fig. 12.12)

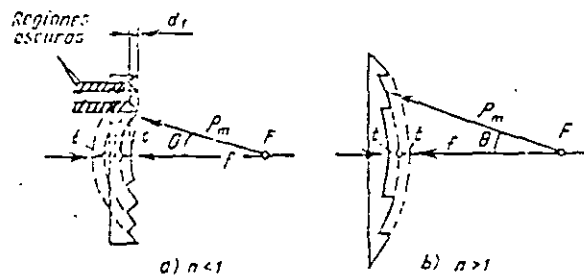


Fig. 12.12

Detengamos brevemente en las particularidades de la distribución de amplitud en la abertura de las antenas de lente. Tiene una importancia decisiva el diagrama direccional del excitador, de cuya forma depende la distribución de potencia por los haces parciales. En general, el diagrama direccional del excitador debe satisfacer bastante serios requisitos. En los límites del ángulo de abertura de la lente  $|\theta| < \theta_{max}$  la forma del diagrama direccional debe corregir las distorsiones de la distribución de amplitud, ocasionadas por la lente. Cuando los ángulos  $|\theta| > \theta_{max}$  la radiación del excitador debe ser mínima, para no crear un flujo de potencia que pasa cerca de la lente y aumenta la radiación latera (el llamado efecto de "transvase" de potencia del excitador fuera de los bordes de la abertura) Además, el excitador de la lente debe tener indefectiblemente centro de fase, coincidente con el foco de la lente, en caso contrario pueden surgir errores de fase en la abertura. En la fig. 12.13 se da cierta representación de la forma óptima del diagrama direccional del excitador, aquí se muestra rayada la parte del diagrama que no interviene en la formación de la distribución de amplitud y que condiciona el "transvase" de potencia.

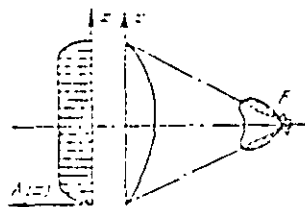


Fig. 12.13

además del transvase de potencia del excitador fuera de los bordes de la abertura, la disipación de la potencia del excitador se produce también por las reflexiones parásitas de potencia en las superficies de refracción de la lente. La disminución de estas reflexiones se consigue utilizando capas  $\lambda/4$  especiales "clarificadoras" con coeficiente de refracción igual a la raíz cuadrada del coeficiente de refracción de la lente, así como por algunos otros medios.

En las antenas a lente con excitador optimo la magnitud del FUS total resulta alta y puede ser de 0.8 a 0.85. Sin embargo, las construcciones de grandes antenas a lente resultan voluminosas en comparación con las antenas de reflector.

## 12.4 Antenas de reflector parabólicas

Las antenas de reflector son el tipo más difundido de antenas direccionales para gamas de ondas centimétricas, decimétricas y en parte métricas. El amplio uso de las antenas de reflector se debe a la sencillez de construcción, la posibilidad de obtener casi todo tipo de diagrama direccional utilizado en la práctica, al alto rendimiento, a la pequeña temperatura de ruidos, las buenas propiedades de gama, etc.

Las representantes clásicos de las antenas de reflector son las antenas parabólicas que pueden producirse en forma paraboloide de revolución, cilindro parabólico o cilindro parabólico limitado por planos conductores paralelos (fig. 12.14).

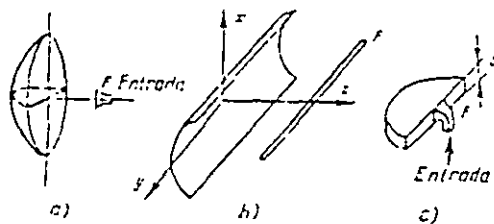


Fig. 12.14

El paraboloide de revolución se excita por un excitador débilmente dirigido (por ejemplo, una bocina) situado en el foco, y transforma el frente de onda esférico en plano. El cilindro parabólico se excita por una antena lineal colocada en la línea focal, y transforma el frente de onda cilíndrico en plano. En estas antenas, al igual que en las lentes, se utilizan las propiedades ópticas de las ondas electromagnéticas. Las propiedades geométricas de la parábola son tales que, los haces, que se dirigen del foco y se reflejan de la parábola, se hacen paralelos al eje de la parábola, de manera que la longitud del trayecto desde el foco hasta la parábola y, después, hasta la línea de abertura que pasa por los bordes de la parábola, es idéntica para cualquier ángulo  $\theta$  (fig. 12.15).

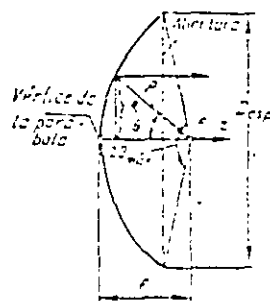


Fig. 12.15

Por consiguiente, en la abertura de la antena parabólica se forma una superficie cofásica y la radiación de la antena resulta de haz filiforme

En el sistema de coordenadas cartesianas el paraboloides de revolución se determina por la ecuación (el origen de coordenadas coincide con el vértice del paraboloides)  $x^2 + y^2 = 4fz$ , mientras que en el sistema de coordenadas esféricas (el origen de coordenadas coincide con el foco del paraboloides), por la ecuación:

$$\rho = \frac{2f}{1 + \cos \theta} \quad (12.14)$$

Se distinguen las antenas parabólicas de foco largo y de foco corto. En la antena de foco largo (de distancia focal larga) el foco se encuentra fuera de la antena ( $f > D_{esp}/4$ ) y el ángulo de apertura  $2\theta_{max}$ , bajo el cual los bordes del espejo se ven desde el foco, satisface la condición  $2\theta_{max} < \pi$ .

En la antena de foco corto (de corta distancia focal) el foco se encuentra dentro de la antena  $f < D_{esp}/4$  y  $2\theta_{max} > \pi$ . El caso  $f = D_{esp}/4$  es limite, cuando  $2\theta_{max} = \pi$  y el foco se encuentra en el plano de apertura.

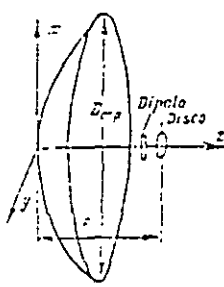


Fig. 12.16

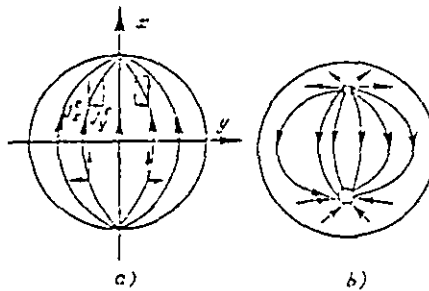


Fig. 12.17

Examinemos el cuadro de distribución de corrientes inducidas por el excitador en el lado iluminado del paraboloides de revolución. Supongamos que el excitador es un dipolo eléctrico, dirigido a lo largo del eje  $x$ , con contrareflector plano en forma de disco. El centro de fase del excitador, si se sustituye aproximadamente el contrareflector por la imagen especular del dipolo, se puede considerar coincidente con el centro del contrareflector, y, por eso, hay que hacer coincidir este punto con el foco del paraboloides (fig.12.16). El vector de intensidad del campo magnético estará situado en el plano  $yz$ , y su magnitud sobre la superficie del paraboloides será igual a

$$H(\theta, \varphi) = F(\theta, \varphi) \frac{\exp(-jk\rho)}{\rho} \quad (12.15)$$

donde  $F(\theta, \varphi)$  es el diagrama direccional del excitador en el sistema de coordenadas esféricas cuyo centro coincide con el foco del paraboloides. El vector de densidad de la corriente eléctrica superficial se determina por la fórmula  $\vec{J}^e = [\vec{H} \times \vec{n}]$ , y, puesto que el vector de la normal unitaria  $\vec{n}$  a la superficie del paraboloides tiene las tres componentes, también el vector de densidad superficial de corriente  $\vec{J}^e$  tendrá las componentes  $J_x^e, J_y^e, J_z^e$ . De acuerdo con esto el cuadro de distribución de la corriente eléctrica, proyectada sobre el plano  $xy$ , tendrá la forma

mostrada en la fig. 12.17. En el caso del espejo de foco largo (fig. 12.17,a) las componentes de corriente tienen el mismo sentido en los cuatro cuadrantes, mientras que las componentes de corriente  $J_y^e$  cambian de sentido de un cuadrante a otro. En el espejo de foco corto (fig. 12.17,b) existen nodos de corriente, que se encuentran en los puntos de intersección del eje del dipolo eléctrico del excitador con la superficie del espejo. Por eso en ciertas partes del reflector de foco corto la componente principal de corriente eléctrica  $J_x^e$  resulta en oposición de fase con respecto a la misma componente en la parte central del espejo.

En los dos planos principales:  $xz$  e  $yz$ , las características de radiación de la antena parabólica se determinan por las componentes de corriente  $J_x^e$ , y la radiación de las componentes  $J_y^e$  en estos planos se compensara mutuamente. La polarización del campo radiado es lineal. En otros planos, que pasan por el eje  $z$ , también tiene lugar la radiación determinada por las componentes de corriente  $J_y^e$ , y debido a esto surge la polarización transversal (con respecto a principal) del campo radiado. El campo total resulta de polarización elíptica. La polarización transversal, llamada polarización cruzada, es parásita, y su existencia reduce algo el FUS total de la antena. El nivel de la polarización cruzada es tanto menor, cuanto mayor es la relación  $f/D_{esp}$ , es decir, cuanto mas de "foco largo" es el paraboloide. En el paraboloide de foco corto con excitador dipolo, además de la polarización cruzada, se deja sentir la radiación parásita de las zonas de antifase del reflector. Las zonas de antifase disminuyen la radiación en la dirección principal y aumentan los lóbulos laterales. En fin de cuentas esto también da lugar a la reducción de la FUS de antena.

Veamos la sucesión del calculo de una antena parabólica por el método de abertura, suponiendo que el diagrama direccional del excitador  $F(\theta)$  es conocido (para simplificar consideraremos que este tiene simetría de rotación con respecto al eje del espejo). Como primer paso por el diagrama direccional del excitador se halla la distribución de amplitud en la abertura  $I(R)$  mediante las fórmulas

$$I(\theta) = \frac{F(\theta)}{\rho} = \frac{(1 + \cos\theta)f(\theta)}{2f}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{R}{\rho} = \frac{R(1 + \cos\theta)}{2f} \quad (12.16)$$

En estas fórmulas  $R \leq D_{esp}/2$  es la coordenada radial en el plano de la abertura;  $\theta \leq \theta_{max}$  es el ángulo entre el eje del paraboloide y la dirección del foco al punto dado de reflexión del paraboloide y  $F(\theta)$  es el diagrama direccional de amplitud del excitador

A continuación, la distribución de amplitud hallada mediante las fórmulas (12.16) se aproxima por la formula

$$I(R) = (1 - \Delta) + \Delta \left[ 1 - \left( \frac{2R}{D_{esp}} \right)^2 \right]^n \quad (12.17)$$

y después de esto por los valores conocidos de  $\Delta$  y  $n$ , mediante tabla 11.4 (pag:151), se determinan el  $FUS_a$ , así como el coeficiente de expansión del haz (CEH) y el nivel de los lóbulos laterales (NLL) Además, mediante una integración simple se puede determinar la eficacia del excitador, es decir, la fracción de su potencia de radiación, incidente en el espejo:

$$FUS_{exc} = \frac{\int_0^{\theta_{max}} F^2(\theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} F^2(\theta) \sin \theta d\theta} \leq 1 \quad (12.18)$$

La magnitud del  $FUS_{exc}$  considera la pérdida inútil de potencia del excitador debido al “rebose” de energía por los bordes del espejo.

Los valores hallados de los parámetros del sistema de antenas resultan dependientes de la distancia focal relativa  $f/D_{esp}$ , o bien, lo que es lo mismo, del ángulo de apertura del espejo  $2\theta_{max}$ . En la fig.12.18 se muestra la forma típica del  $FUS_a$  y  $FUS_{exc}$  en función de  $f/D_{esp}$  con línea de trazos, y con curva llena esta representada la dependencia de su producto, es decir, el  $FUS$  resultante. Se aprecia que para un excitador dado existe un valor óptimo de la distancia focal relativa  $(f/D_{esp})_{opt}$ , para el cual se alcanza el  $FUS$  resultante máximo.

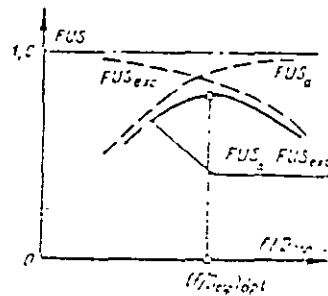


Fig. 12.18

Cuando  $f/D_{esp} < (f/D_{esp})_{opt}$  el  $FUS_{exc} \rightarrow 1$ , sin embargo, el diagrama direccional del excitador resulta estrecho en comparación con el ángulo de apertura  $2\theta_{max}$  y el  $FUS$  resultante decrece debido a la distribución de amplitud demasiado irregular (la excitación insuficiente de los bordes del espejo) Si  $f/D_{esp} > (f/D_{esp})_{opt}$ , la distribución de amplitud se iguala y el  $FUS_a$  crece, empero solo una parte de la potencia del excitador es captada por el espejo y utilizada como es debido, mientras que la potencia restante del excitador se gasta inútilmente y aumenta el coeficiente de dispersión de la antena

Por los cálculos se ha establecido que para el excitador en forma de dipolo de media onda con contrareflector  $(f/D_{esp})_{opt} = 0.38$ , además, el nivel de excitación en el borde de la apertura en el caso óptimo es aproximadamente de 0.33 (o bien -10dB) con respecto al centro de la

abertura. La magnitud de la FUS resultante en este caso es igual 0.83. Aproximadamente se puede considerar que en cualquier caso el nivel de excitación de los bordes del espejo debe ser alrededor de -10dB con respecto al centro de la abertura. En este caso la anchura del haz puede ser estimada por la formula:

$$\Delta\theta = \frac{(65 - 70)^\circ \lambda}{D_{esp}} \quad (12.19)$$

y el nivel del primer lóbulo lateral (secundario) es -(22~24)dB.

Enumeremos los factores mas importantes que influyen sobre el FUS total de una antena de reflector, así como en su temperatura de ruidos:

1. El tipo de distribución de amplitud en la abertura y su correspondiente FUS<sub>a</sub> de abertura (por ejemplo, véase el tabla 11.4, pag.151).
2. La eficacia del excitador de FUS<sub>exc</sub>, determinada por la formula de tipo (12.18).
3. El ensombrecimiento de una parte de la superficie de la abertura por el excitador y los elementos constructivos que le sostienen, que se encuentran en la trayectoria de los haces reflejados del espejo.
4. La derivación de las corrientes eléctricas a la superficie ensombrecida del espejo, que da lugar al crecimiento de los lóbulos laterales lejanos, es decir, al aumento de la temperatura de ruidos y la reducción del FUS.
5. La aparición de la polarización cruzada disminuye el FUS
6. Los errores de fase de la distribución de corrientes superficiales equivalentes en la abertura.
7. Las pérdidas óhmicas de la potencia, debidas a la conductancia finita de las superficies reflectoras, la existencia de dieléctricos imperfectos en el excitador. Estas pérdidas se consideran por la magnitud del rendimiento de antena.
8. La influencia del refugio transparente a las ondas de radio de la antena incluyendo los errores de fase suplementarios de la distribución de corrientes en la abertura, así como las pérdidas de inserción suplementarias al reflejarse y pasar las ondas por las capas transparentes a las ondas de radio de refugio

Así pues la calidad del trabajo de la antena de reflector depende de un gran número de factores, que interactúan de manera compleja. Por ejemplo, los intentos de mejorar la uniformidad de la distribución de amplitud y elevar la eficacia del excitador requieren el incremento de sus dimensiones eléctricas, sin embargo, esto da lugar al aumento indeseable del ensombrecimiento. Como regla, el FUS resultante de la antena parabólica se encuentra entre los límites de 0.45 a 0.65, alcanzando en los mejores casos la magnitud de 0.75.

Pasemos ahora a explicar la influencia de la exactitud de ejecución del espejo sobre las características de la antena parabólica. Designemos la magnitud de la desviación aleatoria del perfil del espejo respecto de la forma parabólica por  $\Delta$ . Supongamos que esta magnitud obedece a una ley normal de distribución con valor medio cero y dispersión  $\Delta^2$ . En este caso la desviación máxima del perfil del espejo respecto del valor calculado no es mayor que  $\Delta_{max} = 2.6\Delta$  con una probabilidad del 99%. La magnitud  $\Delta_{max}$  puede llamarse tolerancia de precisión de elaboración del espejo.

Teniendo en cuenta la variación casual de la longitud del camino de paso de la potencia radiada a la abertura (desde el excitador hasta el espejo y luego del espejo a la abertura), obtenemos el valor medio cuadrático aproximado del error de fase accidental en la abertura.

$$\Phi \approx 2k\Delta = \frac{4\pi}{\lambda} \Delta \quad (12.20)$$

La ganancia de antena dirigida de una antena parabólica, teniendo en cuenta los errores de fase accidentales, puede ser escrita en la forma:

$$GAD \approx \frac{4\pi A}{\lambda} g \exp(-\overline{\Phi}^2) = \left(\frac{\pi D_{esp}}{\lambda}\right)^2 g \exp\left[-\left(\frac{4\pi\Delta}{\lambda}\right)^2\right] \quad (12.21)$$

donde  $D_{esp}$  es el diámetro del espejo y  $g$  es el FUS resultante gracias a la influencia de todos los demás factores, que reducen la ganancia de antena dirigida de la antena.

Para la longitud de onda

$$\lambda_{min} = 4\pi\overline{\Delta} \quad (12.22)$$

la ganancia de antena dirigida, determinada por la fórmula (12.21), tiene un valor máximo igual a:

$$GAD_{max} = \frac{g}{16} \left(\frac{D_{esp}}{\Delta}\right)^2 \exp(-1) \quad (12.23)$$

En este caso la ganancia de antena dirigida se disminuye con el factor 0.37, o -4.34dB. Los errores accidentales de ejecución del perfil del espejo limitan la ganancia de antena dirigida de la antena parabólica y determinan la longitud de onda mínima aplicable.

El estudio del proceso de producción de los espejos parabólicos para diferentes tecnologías de elaboración permitió establecer que la relación entre el error medio cuadrático del perfil y el diámetro del espejo es una magnitud casi constante, que caracteriza un método elegido cualquiera de producción:  $\Delta/D \approx const.$

Para comparar las posibilidades potenciales respecto a la ganancia de antena dirigida de las antenas parabólicas circulares de diferentes diámetros en la fig. 12.19 estan trazadas las ganancias de antena dirigida en función de frecuencia de trabajo para distintas precisiones relativas

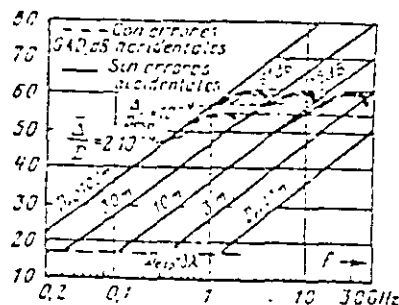


Fig. 12.19

## 12.5 Excitadores de las antenas de reflector

El excitador es un elemento importante de la antena de reflector que en gran parte determina las características generales de todo el sistema de antenas. El excitador debe satisfacer los siguientes requisitos:

1 El diagrama direccional de amplitud debe asegurar la correspondiente distribución de amplitud en la abertura y tener radiación mínima fuera del ángulo de abertura del espejo

2. El diagrama direccional de fase debe tener un centro de fase estable, coincidente con el foco del espejo.
3. Conviene que las dimensiones transversales del excitador sean mínimas para evitar el ensombrecimiento de la abertura.
4. La rigidez eléctrica del excitador debe ser suficiente para dejar pasar la potencia total del sistema de radio.
5. La banda de frecuencias de trabajo del excitador debe corresponder a la banda de frecuencias necesaria del sistema.
6. La construcción del excitador debe asegurar la estabilidad necesaria a la variación de las condiciones meteorológicas y permitir la posibilidad de hermetizar el canal de alimentación.

**Excitadores de dipolo.** Los excitadores de dipolo están compuestas de un dipolo activo y un contrarreflector en forma de disco de dipolo pasivo. En la fig. 12.20,a,b se muestran las dos construcciones más difundidas de excitadores de dipolo de alimentación coaxial y con contrarreflector de disco. La primera construcción tiene un dispositivo de simetrización en forma de vaso de un cuarto de onda, y en la segunda construcción se utiliza un dispositivo de simetrización ranurado. El centro de fase en ambos casos se encuentra entre el dipolo y el contrarreflector, además, el ángulo de abertura óptimo del espejo es de  $140^{\circ}$  a  $360^{\circ}$ .

Siendo necesario el trabajo simultáneo en dos polarizaciones ortogonales se pueden utilizar dipolos en cruz (mariposa) con alimentación independiente de dipolos individuales.

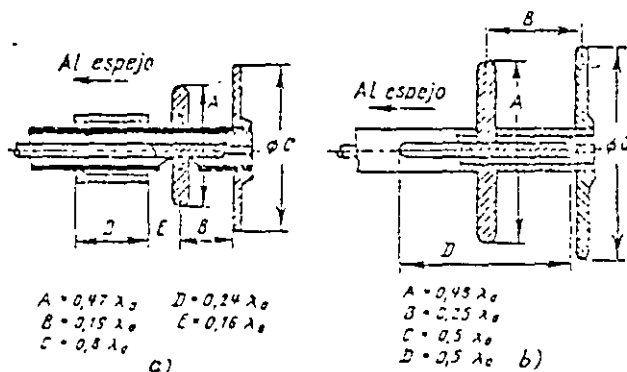


Fig. 12.20, a, b

**Excitadores de cono invertido (bocina) y guías de ondas.** Gracias a la sencilla construcción, la relativa facilidad de obtener la forma necesaria del diagrama direccional y la buena gama los excitadores de bocina y guía de ondas tienen la más amplia difusión en las antenas de reflector modernas. El uso de estos excitadores se complica algo por el hecho de que es necesario girar a  $180^{\circ}$  la guía de ondas a fin de dirigir el máximo de radiación al espejo. Para conservar la simetría de la distribución del campo en la abertura se utiliza el método mostrado en la fig. 12.21, con la particularidad de que por la guía de ondas superior, más exactamente, la barra de sostén, la potencia no se suministra al excitador y se emplea solo para aumentar la solidez de la construcción y asegurar la simetría. Las construcciones de los radiadores de bocina que se utilizan con mayor frecuencia son bocinas circulares de forma cónica. Las bocinas se excitan mediante uniones suaves o escalonadas de la guía de ondas rectangular a la circular de onda  $H_{11}$ . Las uniones se disponen en la inmediata cercanía al cuello de bocina.

Los excitadores de bocina de abertura rectangular permiten obtener distinta anchura del diagrama direccionales los planos perpendiculares. Por eso estas bocinas se utilizan para excitar el espejo de abertura alargada, que forman diagramas direccionales en abanico.



En los excitadores de bocina existe la posibilidad de regular la forma del diagrama direccional en los límites del ángulo de abertura del espejo

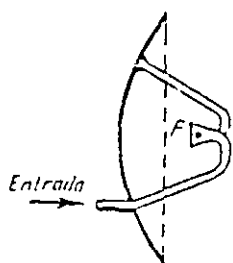


fig. 12.21

**Excitadores lineales.** Para las antenas de reflector en forma de cilindros parabólicos se necesitan excitadores que en si son antenas lineales de longitud igual a la longitud de la generatriz de espejo. En el plano  $xz$  el diagrama direccional de estos excitadores debe asegurar la distribución de amplitud necesaria en la abertura del cilindro parabólico. Además, en la abertura del excitador debe formarse una distribución de amplitud-fase especial a lo largo del eje  $y$ , que garantice la forma necesaria del diagrama direccional de toda la antena en el plano  $yz$ . Como excitadores lineales pueden utilizarse redes de guías de ondas de múltiples ranuras, así como bocinas sectoriales, redes de dipolo lineales, etc.

*Control del sentido de radiación de la antena de reflector mediante la salida del excitador del foco.*

Para los fines de un pequeño giro o la oscilación del diagrama direccional de la antena de reflector (con el espejo inmóvil) el excitador 2 puede ser sacado del foco 1 a una cierta distancia  $\Delta \ell$  como se muestra en la fig. 12.22. Los haces reflejados del paraboloide se desvían del eje de la antena hacia el lado opuesto y forman con el eje de la antena un ángulo  $\alpha$ , determinado

aproximadamente por la expresión  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \ell}{f}$ . El frente de onda en la abertura del espejo y el

sentido de máxima radiación también giran el ángulo  $\alpha$ . Además de la rotación del frente de onda aparecen distorsiones de fase cúbicas suplementarias en la abertura (coma), que da lugar al ensanche del haz y al crecimiento de los lóbulos laterales. Para un pequeño desplazamiento estas distorsiones son poco importantes, y por eso, el desplazamiento transversal del excitador puede utilizarse para la oscilación del haz en los límites de su doble o triple anchura.

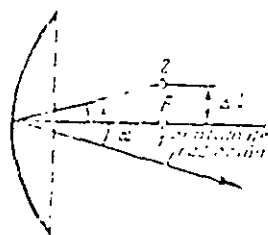


Fig. 12.22

La desviación del haz de la antena parabólica del eje del espejo se utiliza en los sistemas de radares de seguimiento automático angular de los blancos. Se utilizan principalmente dos métodos: el método de exploración cónica y el método de monoimpulso. En la exploración cónica el diagrama direccional de la antena gira alrededor del eje del espejo a una frecuencia del orden de varias decenas de hertz gracias a la rotación del excitador de centro de fase desplazado con respecto al foco del espejo. Durante la rotación sobre el eje del espejo se forma una línea equisignal. Cuando el blanco se desvía de la línea equisignal, la señal reflejada de ella resulta modulada en amplitud con frecuencia de rotación del excitador. Por la profundidad y fase de esta modulación se determinan la magnitud y la dirección de deriva del blanco y se produce la señal del error que pone en acción el sistema de seguimiento automático.

Para la localización del blanco en un plano (por ejemplo, por el azimut), en el sistema de monoimpulso elemental se utiliza un excitador complejo de dos bocinas alimentadas desde un puente doble en T (fig. 12.23)

Al excitar la entrada  $\Sigma$  ambas bocinas se excitan en fase por oscilaciones de igual amplitud y en el espacio se forma un campo radiado de diagrama direccional total, cuyo máximo está orientado a lo largo del eje del espejo. Al excitar la entrada  $\Delta$  ambas bocinas se excitan en oposición de fase y se forma un campo radiado de diagrama direccional diferencial. La irradiación del blanco se produce solo por el canal total, y la recepción de las señales reflejadas se realiza mediante dos receptores tanto por el canal total, como por el canal diferencial. Comparando las amplitudes y las fases de las señales reflejadas recibidas en las salidas de los amplificadores de frecuencia intermedia de los receptores se pueden determinar la magnitud y el sentido de deriva del blanco del eje de la antena. En principio, para esto es suficiente un impulso de interrogación del radar, de donde ha recibido su denominación el método.

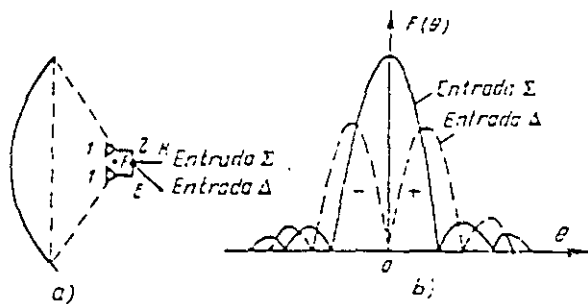


fig. 12.23

**Reacción del espejo al excitador.** Parte de la potencia, reflejada por el espejo parabólico, vuelve al excitador, ya que este se encuentra en el camino de los haces reflejados. Para eliminar la reacción del espejo al excitador en la banda de frecuencias ancha hay que tomar medidas especiales. El método más radical es retirar el excitador del campo de haces reflejados (fig. 12.24,a). Sin embargo, en este caso el espejo tiene una forma demasiado compleja de corte asimétrico del paraboloide de revolución, y, además, aumentan las dimensiones de la antena. Un otro método se reduce a crear una reflexión compensadora suplementaria del disco metálico plano 1, dispuesto cerca del vértice del espejo 2 (fig. 12.24,b). Eligiendo el diámetro del disco se logra librarse en grado considerable de la reacción del espejo al excitador. En la fig. 12.24,c se muestra un modo más de eliminar la reacción del espejo. Sobre el lado iluminado del espejo se realiza una red de placas metálicas de  $\lambda/4$  de anchura, que se disponen paralelamente con paso  $S \ll \lambda$ . Las placas forman con el vector  $\vec{E}_{inc}$  del campo incidente del excitador un ángulo de  $45^\circ$ . En el

campo reflejado del reflector el plano de polarización gira  $90^\circ$ , y, debido a esto, el campo reflejado no actúa sobre el excitador. La reacción del espejo al excitador falta también, al utilizar la polarización circular y un espejo liso, puesto que el campo reflejado del espejo tiene el vector  $\vec{E}$  con sentido inverso de rotación y no es percibido por el excitador.

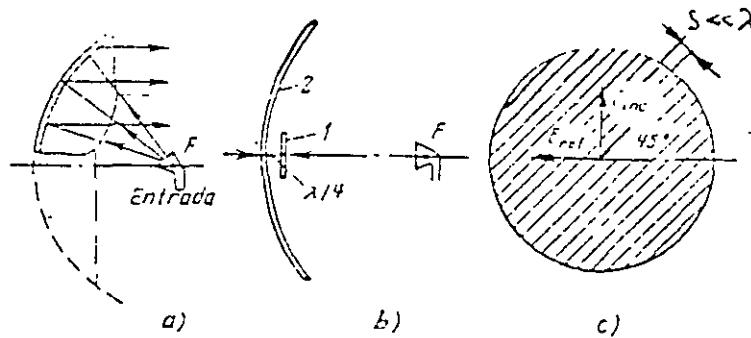


fig. 12.24

## 12.6 Variedades de antenas de reflector.

**Antenas de dos reflectores.** Para obtener la distribución cofásica del campo en la abertura en estas antenas se utilizan dos superficies reflectoras: el espejo parabólico principal (grande) cóncavo 1 y el espejo auxiliar (pequeño) convexo en forma de hiperboloide de revolución (fig.12.25). Esta antena se llama antena de Cassegrain.

Uno de los focos  $F_1$  del espejo hiperbólico auxiliar 2 se hace coincidir con el foco del espejo principal. En el segundo foco del espejo parabólico  $F_2$  se coloca el centro de fase del excitador 3, y, a causa de esto, los haces reflejados desde el espejo hiperbolico se pueden considerar como que parten de un "excitador virtual" dispuesto tras de él en el punto  $F_1$ . La imagen del "excitador virtual" 4 se construye por las reglas de la óptica geométrica y resulta disminuida.

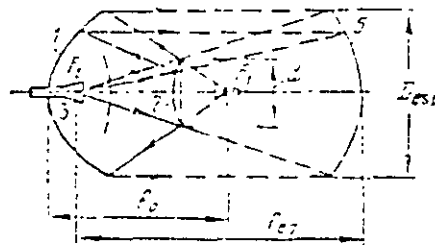


fig. 12.25

Al hallar la distribución de amplitud conviene sustituir el sistema de dos espejos por un paraboloide equivalente 5 de igual diámetro que el espejo principal, pero de distancia focal aumentada  $F_{eq}$ . Para un excitador dado existe la relación óptima  $f_{eq} D_{esp}$  para la cual se logra el máximo del factor del uso de la superficie resultante, es decir, el máximo del producto  $FUS_a \times FUS_{exc}$ .

La abertura del espejo principal en una antena de dos reflectores se ensombrece tanto por el espejo auxiliar (fig 12 26,a), como directamente por el excitador (fig.12 26,b) El ensombrecimiento mínimo de la abertura se obtiene a condición de igualdad de las regiones oscuras creadas por el excitador y el espejo auxiliar. Esta condición de ensombrecimiento mínimo, aclarada en la (fig.12 27), debe considerarse especialmente (a la par de la condición de máximo del producto  $FUS_a \times FUS_{exc}$ ) al elegir las dimensiones óptimas del espejo pequeño y del excitador, así como al escoger la distancia focal del espejo principal  $f_0$



**FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM  
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA**

**"Tres décadas de orgullosa excelencia" 1971 - 2001**

## **CURSOS ABIERTOS**

# **DIPLOMADO INTERNACIONAL EN TELECOMUNICACIONES**

## **MODULO I: TELECOMUNICACIONES VÍA MICROONDAS**

**TEMA**

**ANTENAS DE ARREGLO DE FASE**

**EXPOSITOR: DR. OLEKSANDR MARTYNYUK  
PALACIO DE MINERIA  
MAYO 2001**

# Antenas de arreglos de fase

## 1. Introducción

El uso de las antenas para determinar la dirección a la fuente de radiación y para investigar la distribución de muchas fuentes en el espacio circundante así como para la comunicación con los objetos móviles plantea el problema de control operativo de la forma del diagrama direccional y, en particular, el problema de exploración, es decir, el desplazamiento del haz de la antena en el espacio.

La exploración (desplazamiento del haz de la antena en el espacio) puede realizarse por tres métodos: 1) mecánico, 2) electromecánico y 3) eléctrico.

El primer método se realiza girando toda la antena y se caracteriza por la inercia máxima. Con el segundo método se desplazan mecánicamente uno o varios elementos de la antena mediante motores eléctricos, lo que da lugar a la inclinación de la superficie equifásica del campo en la abertura fija. Un ejemplo clásico es el mando de la posición del haz de la antena parabólica con el desplazamiento lateral del excitador. El segundo método es más rápido ya que los elementos móviles tienen pequeña masa en comparación con la masa de toda la antena. Sin embargo, ninguno de estos dos primeros métodos satisface las necesidades modernas de velocidad de exploración del espacio ni permite seguir simultáneamente los desplazamientos de varios objetos que se mueven rápidamente.

Solo el tercer método de exploración, el eléctrico, puede garantizar la velocidad máxima del desplazamiento del haz. Con este método la distribución de amplitud-fase de excitación en la abertura fija de antena se regula mediante dispositivos de mando electrónico; por ejemplo, mediante desfazadores o conmutadores de fase basados en semiconductores. La rapidez de exploración se limita en este caso por la inercia, vinculada con las constantes de tiempo de los circuitos eléctricos; siendo esta inercia varios ordenes menor que la inercia mecánica.

En la inmensa mayoría de los casos la exploración eléctrica se realiza en los sistemas de antenas de elementos múltiples; llamados antenas de arreglos de fase.

La existencia de elementos múltiples en los sistemas de antenas dio lugar al crecimiento sustancial de número de problemas a resolver por los sistemas radio electrónicos y motivo la aparición de una serie de nuevos principios en radiocomunicación, radiolocalización y radioastronomía. Enumeremos los problemas más importantes, cuya resolución ha sido posible debido al uso de las antenas de arreglos de fase.

1. La exploración eléctrica en un amplio sector de ángulos.
2. La obtención de diagramas direccionales de la forma deseada regulando las magnitudes y fases de excitación de los radiadores individuales.
3. La posibilidad de adición coherente en un haz de las potencias de muchos generadores (o amplificadores) de oscilaciones de frecuencias superelevadas, lo que permite obtener valores muy grandes de la potencia radiada, inalcanzables en las antenas ordinarias debido a la rigidez eléctrica limitada.
4. La posibilidad de adición cofásica de las señales, recibidas por el sistema de grandes antenas, lo que permite obtener una superficie efectiva muy grande durante la recepción.

5. La extracción mas completa de información de las ondas electromagnéticas que llegan a la antena debido a aplicación de métodos complejos de tratamiento conjunto y paralelo de las señales recibidas por los elementos individuales del sistema de antenas.
6. La elevación de fiabilidad del sistema debido a la acción paralela de muchos elementos.
7. Mediante las redes de antenas se puede controlar la superficie reflectora efectiva de distintos objetos.

Sin embargo, el funcionamiento normal de las antenas de arreglos de fase se complica por una serie de dificultades suplementarias. Entre los factores obstaculizadores se clasifican: la aparición de errores de fase en la abertura debido a la acción inexacta de los dispositivos de mando, a causa del carácter discreto de la puesta en fase, debido a la desadaptación e interrelación de los elementos durante la exploración; la aparición de pérdidas suplementarias de potencia de frecuencias superelevadas en los dispositivos de mando; y la relativa estrechez de banda.

### 1.1. Ejemplos del uso de las antenas de arreglos de fase en comunicaciones satelitales modernos

Sistemas satelitales de órbita baja de ordinario involucran un gran número de antenas de arreglos de fase. En Tabla I están presentados los datos acerca de los sistemas satelitales de órbita baja más conocidos: Globalstar y IRIDIUM:

Tabla I-I

Sistema	Frecuencia	Número de satélites por constelación	Número de módulos por antena	Número de módulos por constelación
IRIDIUM	1.6GHz	66	>100	>19800
Globalstar		48		
Régimen transmisión	2.5GHz		91	4368
Régimen recepción	1.GHz		61	2928

Ambos sistemas utilizan la tecnología de módulos recepción-transmisión basados en circuitos integrados monolíticos.

**LA constelación IRIDIUM** esta compuesta de 66 satélites ubicados en seis orbitas circulares de altura 700km. Cada satélite tiene tres antenas apuntadas hacia tierra para tiene una cobertura completa. Las antenas son arreglos de fase activos que están operando en la banda L. Cada antena esta compuesta de 100 módulos de recepción-transmisión. Los elementos radiadores son antenas de parche. Como resultado están usados 20000 módulos de recepción- transmisión por constelación. El usuario utiliza el teléfono muy parecido al teléfono celular. Este teléfono transmite la señal directamente a uno de los satélites. El satélite retransmite señal a otros satélites con el fin de bajar la hacia el otro usuario.

**La constelación Globalstar** esta utilizando aproximadamente 7300 módulos de recepción y transmisión.

**Sistema Teledesic** es un sistema de nueva generación que asegura alta velocidad de transmisión de los datos digitales (1Mbps) para comunicación de computadora a computadora o comunicación videoconferencia. Sistema Teledesic utiliza 840 satélites de órbita baja. En cada satélite estarán instalados 60 arreglos de fase como antenas

transmisoras operando en la frecuencia 20GHz y 60 arreglos de fase como antenas receptoras operando en la frecuencia 30GHz. Cada antena estará compuesta por 400 módulos recepción-transmisión.

## 2. Los bases teóricos para el diseño de las antenas de arreglos de fase

### 2.1. Dos dipolos idénticos como arreglo de fase elemental. Teorema de multiplicación

Supongamos que los dipolos tienen iguales dimensiones y están ubicados en el plano  $yz$  paralelamente al eje  $z$  a la distancia  $d$  uno del otro (fig.2.1) simétricamente con respecto al origen de coordenadas.

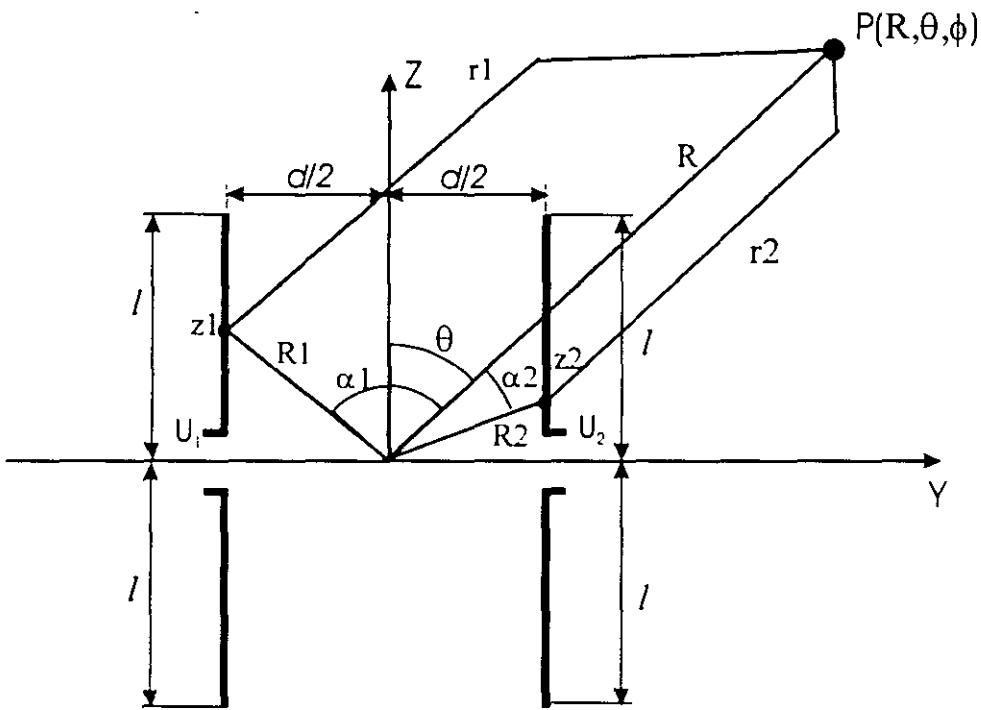


Fig.2.1. Dos dipolos- antena de arreglos de fase elemental

Aplicamos al primer dipolo el voltaje  $U_1$  de frecuencia  $\omega$  y al segundo dipolo, el voltaje  $U_2$  de igual frecuencia. En los dipolos se originan corrientes eléctricas, cuyas amplitudes complejas en los puntos de alimentación del primer dipolo se designa por  $I_{01}$ , y en los puntos de alimentación del segundo dipolo, por  $I_{02}$ . Se puede suponer que la corriente a lo largo del dipolo se distribuye de acuerdo con la ley senoidal:

$$I_{z1,2} = I_{0,1,2} \frac{\sin k(l - |z_{1,2}|)}{\sin kl} \quad (2.1)$$

Puesto que las corrientes circulan en los dipolos en dirección del eje  $z$ , potencial vectorial de las corrientes eléctricas tendrá solamente la componente  $z$ . El potencial vectorial total en la zona lejana es la suma de los potenciales vectoriales de las corrientes eléctricas, creados por cada dipolo:

$$A_{z\infty}^z = \frac{\exp(-jkR)}{R} \times \left[ \int_{-l}^l I_{01} \frac{\sin k(l-|z_1|)}{\sin kl} \exp(jkR_1 \cos \alpha_1) dz_1 + \int_{-l}^l I_{02} \frac{\sin k(l-|z_2|)}{\sin kl} \exp(jkR_2 \cos \alpha_2) dz_2 \right] \quad (2.2)$$

donde  $R_1 \cos \alpha_1$  y  $R_2 \cos \alpha_2$  son las diferencias de recorrido de los rayos desde los puntos dados de integración en los ejes de los dipolos primero y segundo al punto de observación  $P(R, \theta, \varphi)$ . Estos diferencias de recorrido son iguales a:

$$\begin{aligned} R_1 \cos \alpha_1 &= -\frac{d}{2} \sin \theta \sin \varphi + z_1 \cos \theta \\ R_2 \cos \alpha_2 &= -\frac{d}{2} \sin \theta \sin \varphi + z_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3) en la ecuación (2) y pasando del potencial vectorial de las corrientes eléctricas a la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}_z$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \left\{ \vec{\theta}_0 \frac{jI_{01} Z_0 \sin \theta \exp(-jkR)}{2\lambda \sin kl} \int_{-l}^l \frac{\sin k(l-|z|)}{\sin kl} \exp(jkz \cos \theta) dz \right\} \times \\ &\times \left[ \exp\left(\frac{-jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) + \frac{I_{02}}{I_{01}} \exp\left(\frac{jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{Z_0 I_{01}}{2\pi} \vec{f}_1(\theta) f_2(\theta, \varphi) \frac{\exp(-jkR)}{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $\vec{\theta}_0$  es un vector unitario del sistema de coordenadas esféricas en dirección  $\theta$ . Se establece fácilmente que el primer factor entre llaves de la expresión (4) representa la intensidad del campo de radiación del dipolo eléctrico aislado con distribución senoidal de corriente y su centro en el origen de coordenadas. En adelante llamaremos este factor característica de emisión del elemento del sistema.

El segundo factor de la expresión (4) entre corchetes:

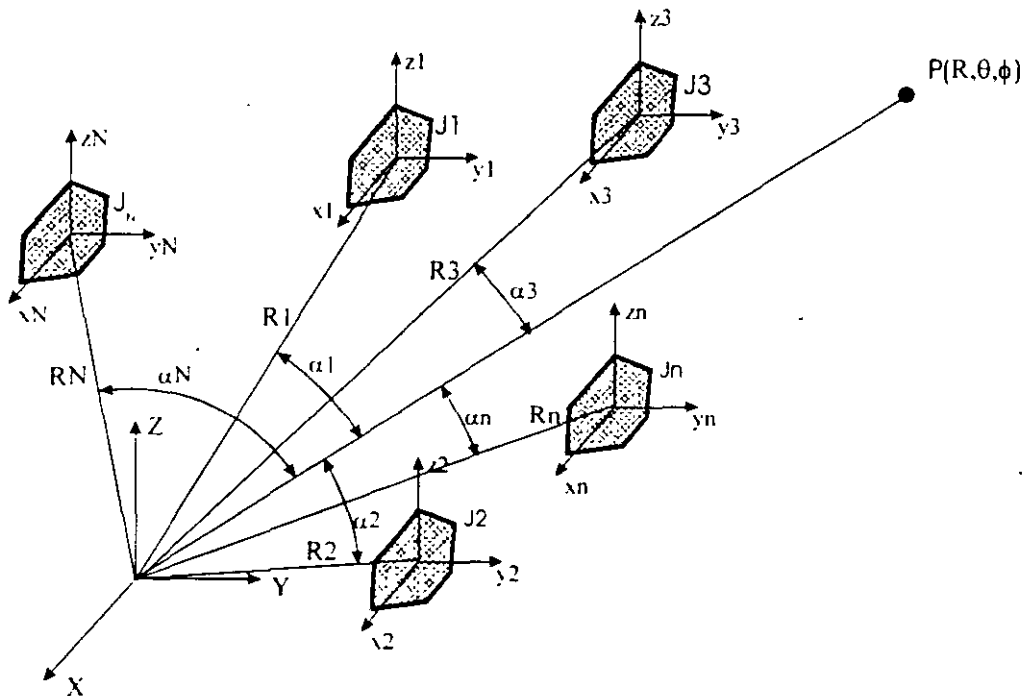
$$f_2(\theta, \varphi) = \exp\left(\frac{-jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) + \frac{I_{02}}{I_{01}} \exp\left(\frac{jkd \sin \theta \sin \varphi}{2}\right) \quad (2.5)$$



es una función escalar dependiente de las magnitudes complejas de las corrientes en las entradas de los dipolos y de la diferencia de recorrido  $kd \sin \theta \sin \phi$ , calculada con respecto a los centros de los dipolos. Este factor considera la interferencia de los campos en el sistema de dos dipolos y en realidad es la función del diagrama direccional de dos fuentes puntuales isótropas hipotéticas de radiación coherente, situados en los puntos  $\pm d/2$  sobre el eje  $y$ . La función  $f_{\Sigma}(\theta, \phi)$  la llamaremos factor de direccionalidad del sistema (algunos la llamen también factor de combinación, factor de interferencia o factor del a red). Así pues, el campo de radiación de un sistema de dos dipolos idénticos esta representado en forma de producto de la característica de emisión del elemento por el factor de direccionalidad del sistema.

Esta representación del campo total puede ser fácilmente generalizada a un sistema de cualquier numero de radiadores idénticos, situados en el espacio de manera ordenada, precisamente de tal modo que todo radiador puede coincidir con cualquier otro radiador solamente mediante un desplazamiento paralelo en el espacio sin rotación. Esta generalización se formula mediante el siguiente teorema de multiplicación.

En un sistema de  $N$  radiadores idénticos igualmente dirigidos con funciones coincidentes de distribución de corriente el campo electromagnético total de radiación es proporcional al producto de la característica vectorial de emisión de un elemento individual por el factor escalar de direccionalidad del sistema de  $N$  radiadores puntuales isótropos hipotéticos; además, el factor del sistema considera completamente tanto la disposición de los elementos en el espacio, como la distribución de las amplitudes complejas de las corrientes por sus entradas.



**Fig. 2.2. Sistema de fuentes de radiación idénticas**

Utilizando las designaciones de la **fig. 2.2.**, podemos obtener fácilmente la expresión general para el factor de direccionalidad del sistema:

$$f_z(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N I_{0n} \exp(jkR_n \cos \alpha_n) \quad (2.6)$$

donde  $R_n$  es un segmento que une el origen del sistema de coordenadas general  $x, y, z$  con el origen del sistema de coordenadas local  $x_n, y_n, z_n$  para el radiador numero  $n$ ;  $\alpha_n$  es el angulo entre la dirección al punto de observación y el segmento  $R_n$ , y, por ultimo,  $I_{0n}$  es la magnitud compleja de corriente en la entrada del  $n$ -esimo radiador.

## 2.2. Análisis del diagrama direccional de un sistema de dos dipolos

Analizaremos el diagrama de direccionalidad del sistema de dos dipolos en el plano  $xy$ . En este plano cada dipolo presenta radiación uniforme y el diagrama direccional total coincide con el factor de direccionalidad del sistema. De acuerdo con la (5) este factor tiene la forma:

$$f_z(\varphi) = \exp j \left( -\frac{kd \sin \varphi}{2} \right) + m \exp j \left( \frac{kd \sin \varphi}{2} + \Phi \right) \quad (2.7)$$

En la ecuación (7) la relación de las corrientes en las entradas de los radiadores esta presentada en forma compleja:

$$\frac{I_{02}}{I_{01}} = m \exp(j\Phi) \quad (2.8)$$

y se considera previamente dada. La magnitud  $m$  es la relación de las amplitudes de las corrientes y la magnitud  $\Phi$ , la diferencia de fase.

La formula (8) fácilmente puede ser presentada en siguiente forma:

$$f_z(\varphi) = \exp j \left( \frac{\Phi}{2} \right) \left\{ (1+m) \cos \frac{\Psi}{2} - j(1-m) \sin \frac{\Psi}{2} \right\} \quad (2.9)$$

En la ecuación (9) se ha introducido una nueva designación de la variable angular generalizada:

$$\Psi = kd \sin \varphi + \Phi$$

Para pequeños valores de la distancia entre los dipolos ( $d \leq \lambda$ ) el factor de direccionalidad del sistema de dos fuentes tiene una forma relativamente simple con un numero de lóbulos no mayor de cuatro. El caso típico que tiene lugar para las corrientes de igual magnitud se muestran en la **fig.2.3**. Para alimentación en cuadratura  $\Phi = \pi/2$  y  $d = \lambda/4$ , el diagrama direccional tiene la forma de una cardioide con el máximo dirigido hacia el primer dipolo.

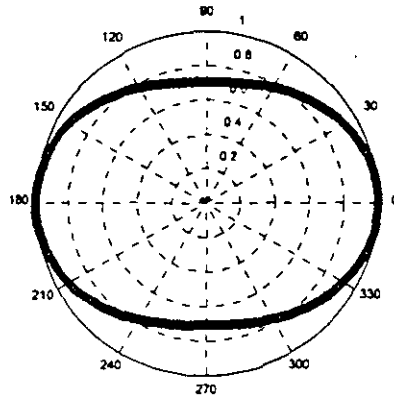


Fig. 2.3(a). Característica de magnitud del sistema de dos dipolos en el plano azimutal  
 $(d = \lambda/4, \Phi = 0)$

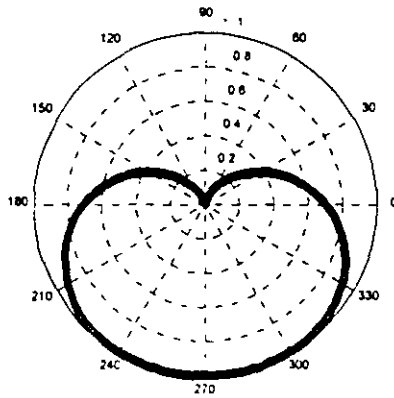


Fig. 2.3(b). Característica de magnitud del sistema de dos dipolos en el plano azimutal  
 $(d = \lambda/4, \Phi = \pi/2)$

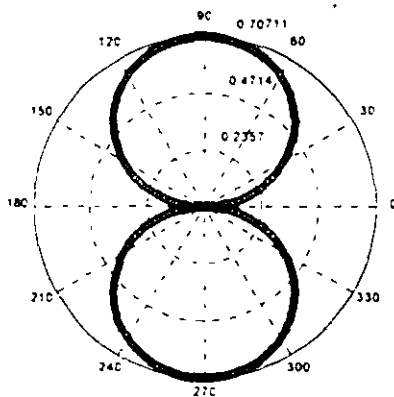


Fig. 2.3(c). Característica de magnitud del sistema de dos dipolos en el plano azimutal  
 $(d = \lambda/4, \Phi = \pi)$

En este caso el segundo dipolo, que refleja la energía hacia el primer dipolo, se llama reflector activo.

Analizando el sistema de dos dipolos, podemos llegar a una conclusión importante: podemos controlar característica de radiación cambiando la fase de excitación de los dipolos.

### 3. Sistema radiador lineal como modelo para las antenas de arreglos de fase

Por sistema radiador lineal entenderemos la distribución continua o discreta de fuentes idénticas de un campo electromagnético (llamados elementos) a lo largo de una dirección dada en el espacio. Como ejemplo de antena de sistema radiador lineal puede darse el conductor largo rectilíneo por el que circula la corriente eléctrica.

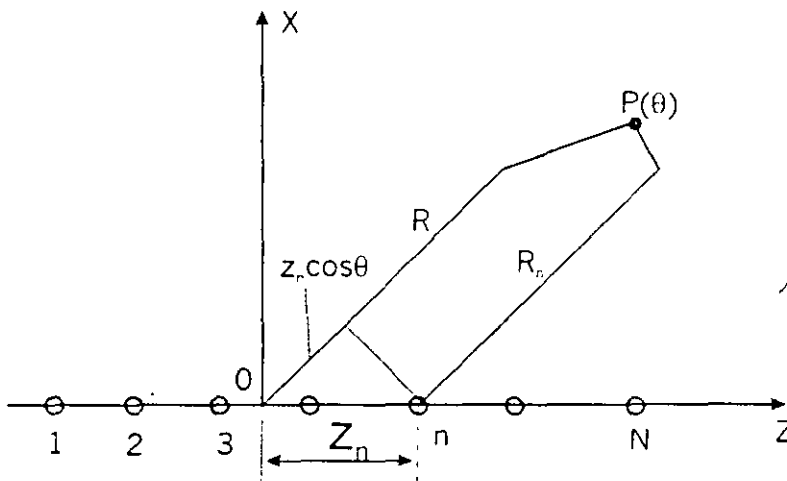


Fig.3.1 Radiador lineal discreto

La dimensión longitudinal de un sistema de radiador lineal puede ser arbitraria: en tanto que las dimensiones transversales son de ordinario pequeñas comparando con la longitud de onda. Vamos a suponer conocida la curva característica de radiación vectorial compleja de un elemento del sistema  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$  en su sistema de coordenadas esféricas locales propio cuyo eje coincide con el eje del sistema de radiador lineal y el centro se encuentra en un punto arbitrario dentro del elemento.

El propio sistema radiador lineal se determina completamente por la ley de disposición de los centros de los elementos a lo largo del eje y la ley de distribución de amplitudes complejas de excitación por los elementos individuales (la llamada distribución de amplitud-fase por longitud del sistema).

De acuerdo con el teorema de la multiplicación el campo electromagnético en la zona lejana para un sistema radiador lineal se puede presentar en forma de producto:

$$\vec{E}(R, \theta, \varphi) = A \vec{F}_1(\theta, \varphi) f_2(\theta, \varphi) \frac{\exp(-jkR)}{R} \quad (3.1)$$

donde  $A$  es un factor de amplitud dependiente de la potencia suministrada a la antena,  $\vec{F}_1(\theta, \varphi)$  es la característica compleja vectorial del elemento que determina la polarización de radiación, y  $f_z(\theta, \varphi)$  es un factor complejo escalar de direccionalidad del sistema de radiadores isótopos, situados en los puntos de disposición de los centros de los elementos a lo largo del eje del sistema.

Para un sistema discreto de radiadores ubicados en  $N$  puntos dados  $z_n$  sobre el eje  $z$ , es decir, para la red de antenas lineal (fig.3.1) el factor de direccionalidad puede ser escrito en la forma:

$$f_z(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^N I_n \exp(jkz_n \cos\theta) \quad (3.2)$$

donde  $I_n = |I_n| \exp(j\Phi_n)$  es la amplitud compleja de excitación de radiador con número  $n$ ;  $z_n \cos\theta$  es la diferencia de recorridos de los rayos al punto de observación  $P$ , trazados desde el origen del sistema de coordenadas común y desde el punto de ubicación del radiador número  $n$ .

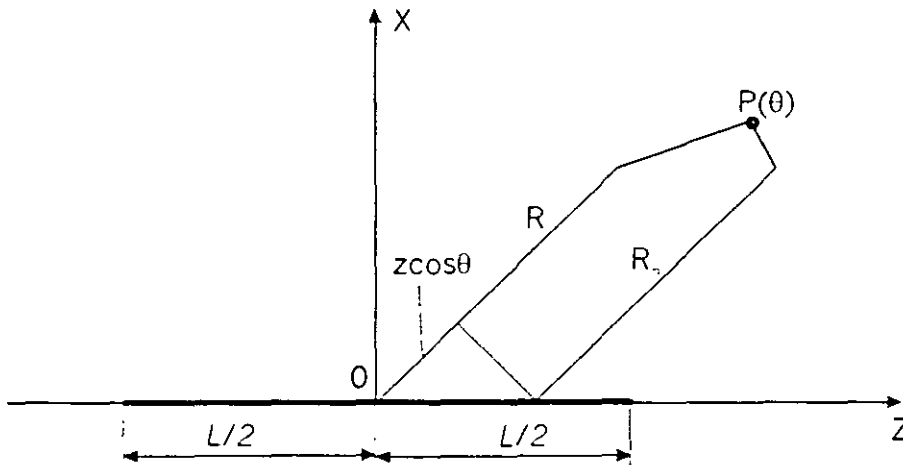


Fig.3.2 Radiador lineal ideal continuo

El sistema de radiador lineal continuo, o, simplemente el radiador lineal (fig.3.2) puede considerarse como un caso límite de la red de antenas lineal con un número de elementos, en el intervalo desde  $-L/2$  hasta  $L/2$ , tendiente al infinito. En tal caso la suma de (2) se sustituye por la integración y el factor de direccionalidad del radiador lineal adquiere la forma:

$$f(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp(jkz \cos\theta) dz \quad (3.3)$$

donde  $I(z) = |I(z)| \exp[j\Phi(z)]$  es la función de distribución de excitación por la longitud de radiador (distribución amplitud-fase), y  $z \cos\theta$ , la diferencia de recorrido de los rayos. Los

factores de direccionalidad de los sistemas radiadores discreto y continuo no dependen de la coordenada  $\varphi$ , y, por eso, los diagramas direccionales definidos por ellos tienen simetría de rotación alrededor del eje  $z$ .

### 3.1. Diagrama direccional del radiador lineal ideal. Regímenes de radiación. Anchura del haz.

La distribución de amplitud-fase elemental de excitación de un radiador lineal, que frecuentemente se encuentra en muchos tipos de antenas reales, tiene la forma:

$$\begin{cases} I_0 \exp(-jk\xi z) & -L/2 \leq z \leq L/2 \\ 0 & |z| > L/2 \end{cases} \quad (3.4)$$

De acuerdo con la ley (4), la magnitud de excitación en los límites de la longitud del radiador no depende de la coordenada  $z$  y es igual a la magnitud constante  $I_0$  (fig.3.3).

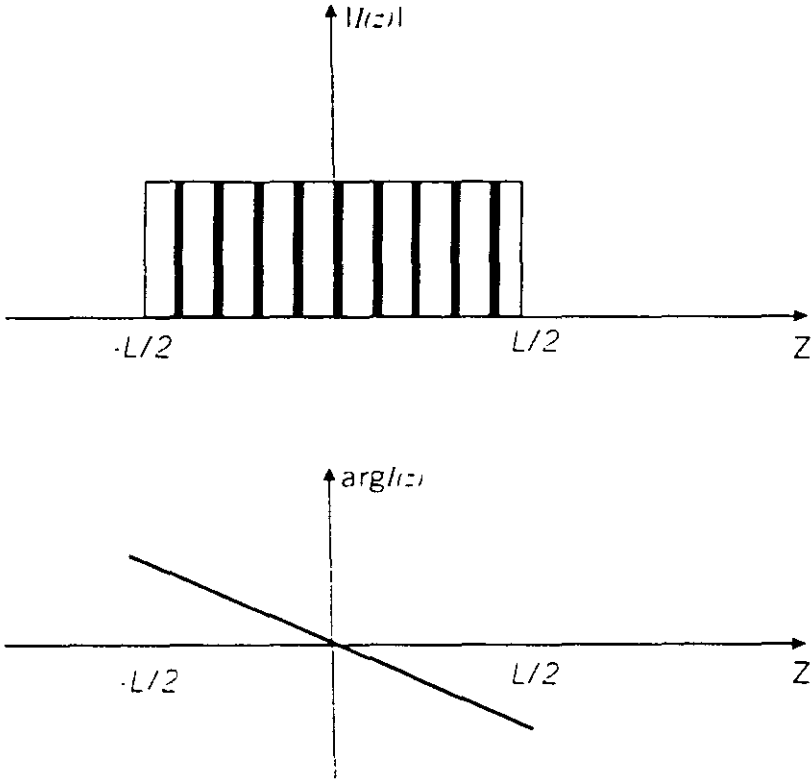


Fig. 3.3. Distribución uniforme de amplitud y distribución lineal de fase en un radiador lineal ideal

La fase de excitación varía a lo largo del radiador por una ley lineal (fig.3.3), característica para la onda progresiva (móvil), que se propaga en dirección de los valores positivos de la coordenada  $z$ . La magnitud adimensional  $\xi = c/v$  en (4) caracteriza la velocidad de fase de la onda de excitación y puede ser llamada coeficiente de deceleración. Cuando  $\xi = 0$  la

fase de excitación es constante a lo largo de la antena, lo que corresponde a la velocidad de propagación infinita de excitación, y tendremos el caso llamado radiador cofasico ideal. Para  $|\xi| < 1$  la velocidad de fase de excitación supera la velocidad de la luz en el espacio. Si  $|\xi| = 1$  la velocidad de fase de excitación es exactamente igual a la velocidad de fase de la luz, y, por ultimo, cuando  $|\xi| > 1$  tiene lugar el caso de excitación de la fuente lineal ideal por la onda progresiva decelerada.

El radiador lineal con distribución de la excitación por la ley (4) puede ser llamado radiador lineal ideal.

Calcularemos el factor de direccionalidad del radiador lineal ideal. Sustituyendo la (4) en la (3) e integrando, tendremos:

$$\begin{aligned}
 f_{\theta} &= I_0 \int_{-L/2}^{L/2} \exp[jkz(\cos\theta - \xi)] dz = I_0 \frac{\exp[jkz(\cos\theta - \xi)]^{L/2}}{jk(\cos\theta - \xi)} = \\
 &= I_0 L \frac{\sin \frac{kL}{2}(\cos\theta - \xi)}{\frac{kL}{2}(\cos\theta - \xi)} \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

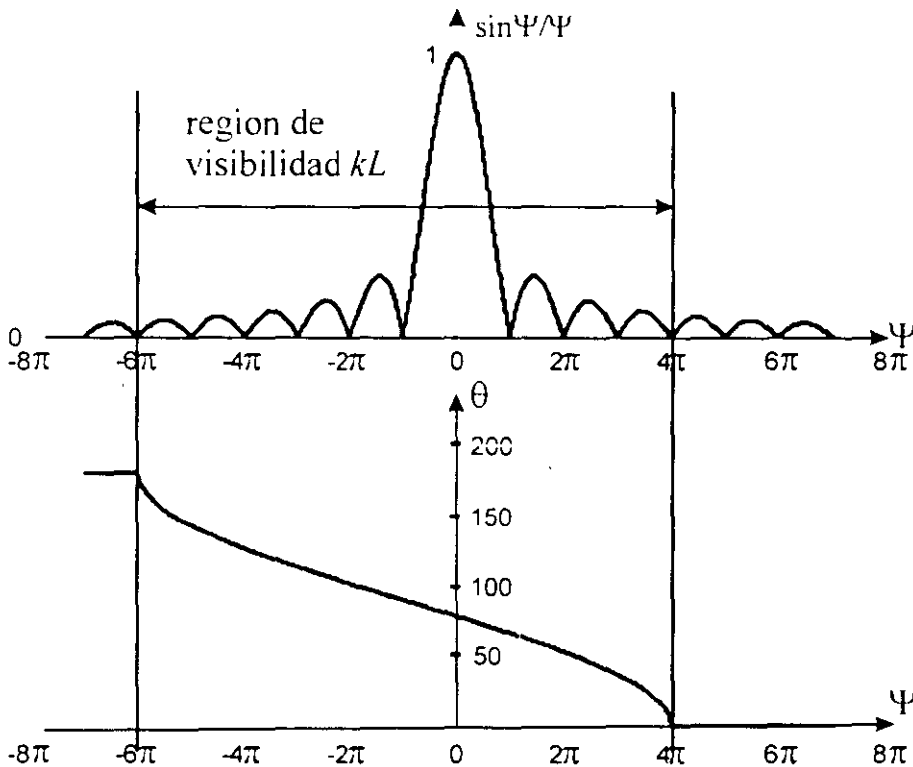


Fig. 3.4. Análisis del factor de direccionalidad

Por conveniencia del análisis, el resultado obtenido se representara en la forma:

$$f(\theta) = \frac{\sin \Psi}{\Psi} \quad (3.6)$$

donde se ha introducido una nueva variable angular generalizada:

$$\Psi = \frac{kL}{2}(\cos \theta - \xi) \quad (3.7)$$

Pasemos al análisis de la curva característica de amplitud del radiador lineal ideal. Para ello veamos la **fig.3.4**, en cuya mitad superior se ha trazado la grafica del modulo de la función  $\sin \Psi / \Psi$  en relación con la variable angular generalizada  $\Psi$ .

Esta función tiene un lóbulo principal de magnitud unitaria para  $\Psi = 0$  y una serie de lóbulos laterales (secundarios), dispuestos simétricamente a ambos lados del lóbulo principal. En escala de la variable el lóbulo principal ocupa la anchura por los ceros de  $2\pi$ , y cada lóbulo lateral tiene una anchura dos veces menor por los ceros, es decir,  $\pi$ . Los ceros de radiación se disponen por el eje  $\Psi$  exactamente en los puntos  $\Psi_{n_{min}} = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . El nivel del primer lóbulo lateral más grande es aproximadamente igual a 0.21.

Veamos ahora como se pasa de la variable generalizada  $\Psi$  al ángulo físico de observación  $\theta$ . Para ello en la mitad inferior de la **fig.3.4** se ha construido la curva de la magnitud  $\frac{kL}{2}(\cos \theta - \xi)$  en función del ángulo  $\theta$ , siendo fijados los valores de la longitud de la fuente  $L$  y del coeficiente de deceleración  $\xi$ .

Los valores máximo y mínimo de la función  $\Psi(\theta)$ , iguales respectivamente a  $\Psi_{max} = \frac{kL}{2}(1 - \xi)$  y  $\Psi_{min} = -\frac{kL}{2}(1 + \xi)$  limitan la porción de trabajo de la función  $|\sin \Psi / \Psi|$ , que influye en la formación del factor de direccionalidad. La extensión total de esta porción es igual a  $\Psi_{max} - \Psi_{min} = kL$  y se determina solo por la longitud física de la antena. Cuanto más larga la antena con respecto a la longitud de onda de las oscilaciones, tanto mas lóbulos de la función  $|\sin \Psi / \Psi|$  caen dentro de la porción de trabajo. La porción de trabajo del factor de direccionalidad sobre el eje de la variable  $\Psi$  se suele llamar región de ángulos de observación reales. Esta denominación se debe a que a los valores de  $\Psi$  fuera de la porción de trabajo deben corresponder los valores de  $\cos \theta$  mayores a uno, que se pueden interpretar como cósenos de ángulos "imaginarios".

### **Regímenes de radiación de una antena lineal**

La posición angular del máximo principal de radiación  $\theta_0$  se determinara de la condicion evidente:

$$\Psi_0 = \frac{kL}{2}(\cos \theta_0 - \xi) = 0 \quad (3.9)$$

que lleva a las formulas de calculo:

$$\cos \theta_0 = \xi \text{ o } \theta_0 = \arccos \xi, \quad |\xi| \leq 1 \quad (3.10)$$



Cuando  $\xi = 0$ , es decir, para la excitación cofásica, la posición angular del máximo principal  $\theta_0 = \pi/2$  es perpendicular al eje de la antena y tiene lugar el **régimen de radiación transversal**.

Para  $0 < \xi < 1$ , el lóbulo principal del factor de direccionalidad se desvía de la normal al eje de la antena hacia el lado del movimiento de la onda de excitación. Este es llamado **régimen de radiación inclinada**. El cambio de posición del lóbulo principal en el espacio se llama exploración. Por consiguiente, al variar el coeficiente de deceleración en los límites del intervalo de  $-1$  a  $1$  el lóbulo principal del diagrama de direccionalidad explora en los límites de  $180$  hasta  $0$  grados.

Cuando la magnitud  $|\xi|$  se aproxima a la unidad, el lóbulo principal comienza a "salir" del límite de la región de visibilidad y para  $|\xi| = 1$  el máximo principal resulta orientado exactamente en dirección del eje de la antena. Este es el régimen de radiación axial, observado para la velocidad de fase de excitación igual a la velocidad de la luz.

Si  $|\xi| > 1$ , el máximo principal resulta ya fuera de los límites de la región de ángulos reales.

Aquí para valores de  $|\xi|$  próximos a la unidad, al principio se conserva el régimen de radiación axial con velocidad de fase decelerada, mientras la parte del lóbulo principal que queda en la región de visibilidad supera en magnitud el nivel del primer lóbulo lateral. Con el aumento posterior de  $|\xi|$  en la región de ángulos reales quedan solo los lóbulos laterales.

**Anchura del haz de una antena lineal ideal.**

En el régimen de radiación inclinada para estimar la anchura del lóbulo principal por el nivel  $0.5$ :

$$\Delta\theta = \frac{51^\circ}{\sin\theta_0} \frac{\lambda}{L} \tag{3.11}$$

El lóbulo resulta tanto más estrecho, cuanto mayor es la longitud de antena  $L/\lambda$  y cuanto más próximo es el sentido de radiación a la posición ecuatorial.

De un modo análogo se puede apreciar la anchura de los lóbulos por ceros. Para el lóbulo principal:

$$\Delta\theta \approx \frac{114^\circ}{\sin\theta_0} \frac{\lambda}{L} \tag{3.12}$$

Las formulas (11) y (12) son aproximadas y se realizan con mejor precisión para grandes valores  $L/\lambda$  y para los sentidos de radiación no muy próximos al eje de la antena.

La anchura del haz de la antena lineal para la radiación axial es igual a:

$$|\Delta\theta|_{\xi=1} \approx 107^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{L}} \tag{3.13}$$

es decir, bastante más ancha, que para la radiación transversal. En la radiación axial el lóbulo principal se puede estrechar sensiblemente, si se pasa al régimen de deceleración con

$|\xi| > 1$ . En este caso la ganancia de antena dirigida al principio se aumenta debido a estrechamiento del lóbulo principal y después se disminuye debido al crecimiento de los lóbulos laterales.

### 3.2. Ganancia de antena dirigida de un radiador lineal ideal.

La expresión definitiva para la ganancia de antena dirigida de una antena ideal tiene la siguiente forma:

$$D = \frac{kL f^2(\theta_0)}{\left[ \frac{\sin^2 \Psi_{\min}}{\Psi_{\min}} \right] - \frac{\sin^2 \Psi_{\max}}{\Psi_{\max}} + \text{Si}(2\Psi_{\max}) - \text{Si}(2\Psi_{\min})}, \quad (3.14)$$

donde

$$\Psi_{\max} = \frac{kL}{2}(1 - \xi) \quad (3.15)$$

$$\Psi_{\min} = -\frac{kL}{2}(1 + \xi)$$

$$f^2(\theta_0) = \begin{cases} 1, & |\xi| < 1 \\ \frac{\sin^2 \Psi(\theta_0)}{\Psi^2(\theta_0)}, & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Examinemos más detenidamente la ganancia de antena dirigida en función de coeficiente de deceleración  $\xi$ . En régimen de radiación transversal o inclinada, cuando se satisface la condición  $\frac{kL}{2}(1 - |\xi|) \geq \pi$ , o bien, lo que es lo mismo:

$$|\xi| < 1 - \frac{\lambda}{L} \quad (3.17)$$

el lóbulo principal del factor de direccionalidad se sitúa totalmente en la región de visibilidad (**fig.3.4**) y está limitado por los valores de  $\Psi = \pm\pi$ . Sustituyendo estos valores de los límites del lóbulo principal en la fórmula (14), hallamos la ganancia de antena dirigida del radiador lineal:

$$D \approx \frac{2L}{\lambda} \quad (3.18)$$

Al aumentar el coeficiente de deceleración  $\xi$  desde el valor  $1 - \frac{\lambda}{L}$  dado por la fórmula (17) hasta la unidad, el lóbulo principal se acerca suavemente al eje de la antena y la ganancia de antena dirigida crece. Para  $|\xi| = 1$ , la valoración de la ganancia de antena dirigida resulta la siguiente:

$$D \approx \frac{4L}{\lambda} \quad (3.19)$$

Por consiguiente, en régimen de radiación axial con velocidad de fase de excitación igual a la velocidad de la luz, la ganancia de antena dirigida estándar de una antena lineal es dos veces mayor que la ganancia de antena dirigida en régimen de radiación inclinada.

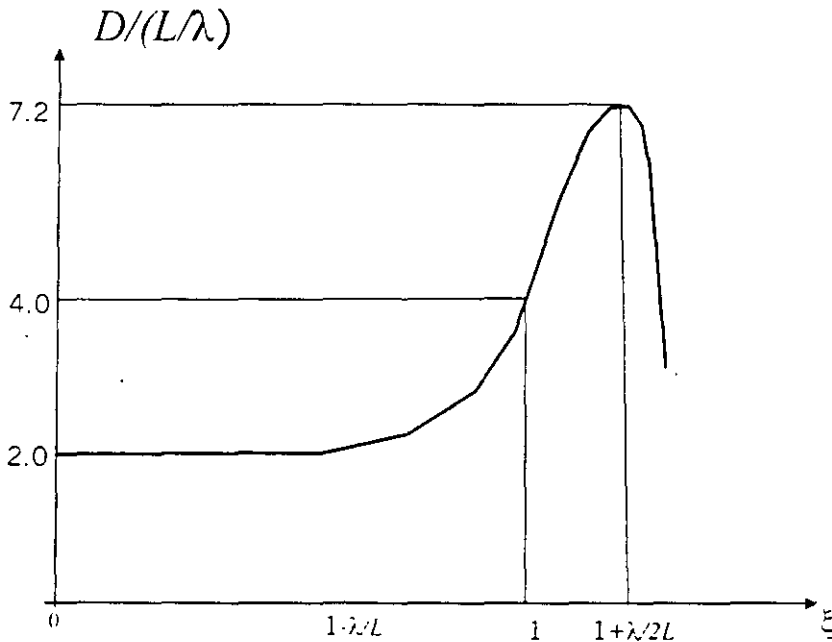


Fig. 3.5. Directividad de un radiador lineal ideal

Cuando el valor de  $|\xi|$  se hace mayor que la unidad, la ganancia de antena dirigida de una antena lineal al principio crece debido al estrechamiento del lóbulo principal. Sin embargo, al incrementar  $|\xi|$  aumenta el nivel de los lóbulos laterales, lo que da lugar a la saturación de la ganancia de antena dirigida y su posterior caída. En tal caso la fórmula de la ganancia de antena dirigida se reduce a la forma:

$$D_{\xi>1} = \frac{kL \left( \frac{\sin \Psi_{\max}}{\Psi_{\max}} \right)^2}{\left[ \frac{\pi}{2} + Si(2\Psi_{\max}) - \frac{\sin^2 \Psi_{\max}}{\Psi_{\max}} \right]} \quad (3.20)$$

La dependencia  $D(\xi)$  está trazada en la **fig.3.5**, veamos que al principio la ganancia de antena dirigida crece bruscamente gracias al estrechamiento del lóbulo principal; sin embargo este proceso va acompañado por el aumento de los lóbulos laterales. El resultado óptimo se logra cuando:

$$\xi = \xi_{opt} = 1 + \frac{\lambda}{2L} \quad (3.21)$$

En el punto óptimo la magnitud de la ganancia de antena dirigida total de una antena lineal es:

$$D_{opt} \approx 7.2 \frac{L}{\lambda}$$

Los resultados obtenidos corresponden a la antena de elementos omnidireccional. La directividad intrínseca del elemento puede alterar la magnitud de la ganancia de antena

dirigida. Por ejemplo, para la antena lineal de corrientes longitudinales eléctricas el cero de radiación del elemento esta orientado por el eje de la antena y el régimen de radiación axial en principio es imposible.

### 3.3. Influencia de la forma de la distribución de amplitud sobre los parámetros de una antena lineal.

Las antenas lineales de distribución de amplitud uniforme tienen un nivel suficientemente alto de lóbulos laterales, -13.2dB, a veces inadmisibles en la práctica. Resulta que la reducción del nivel de radiación lateral se puede conseguir utilizando una distribución de amplitud irregular, que decae hacia los extremos de la antena.

El paso a la distribución de amplitud decreciente da lugar a la reducción de la ganancia de antena dirigida, y por la disminución del nivel de los lóbulos laterales se hace necesario no solo retribuir con el ensanche del haz, sino también con determinada pérdida de la ganancia de antena dirigida. La magnitud de la disminución relativa de la ganancia de antena dirigida, en nuestro caso  $D/D_0$  ( $D_0$  es la ganancia de antena dirigida de un radiador ideal de gran longitud con distribución de amplitud uniforme) en la teoría de las antenas lleva el nombre de factor de utilización de la superficie.

Las antenas lineales de alimentación en fase con distribución de amplitud uniforme tienen una magnitud máxima de la ganancia de antena dirigida en comparación con cualquier otra distribución de amplitud. En la tabla III-I se dan para algunas de distribuciones de excitación las formulas del factor de direccionalidad y los valores característicos de los parámetros.

Tabla III-I

Distribución de amplitud $I(z)$	Formula para el diagrama de direccionalidad $f(\Psi), \Psi = \frac{kL}{2} \cos(\theta)$	$\Delta$	CEH	NLL	FUS
$(1 - \Delta) + \Delta \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$ "coseno extendido en pedestal"	$(1 - \Delta) \frac{\sin \Psi}{\Psi} + \Delta \frac{2 \cos \Psi}{\pi \left(1 - \frac{4\Psi^2}{\pi^2}\right)}$	0 0.33 1.0	1 1.12 1.35	-13.2 -20.5 -23.5	1 0.932 0.810
$1 - (1 - \Delta) \frac{4z^2}{L^2}$ "parábola en pedestal"	$\frac{\sin \Psi}{\Psi} + (1 - \Delta) \frac{d^2}{d\Psi^2} \left(\frac{\sin \Psi}{\Psi}\right)$	0.8 0.5 0	1.04 1.09 1.29	-15.8 -17.1 -20.5	0.994 0.97 0.833

CEH-coeficiente de expansión del haz  $CEH = \frac{\Delta \theta}{51 \frac{\lambda}{L}}$

NLL- nivel de los lóbulos laterales

FUS-factor de utilización de la superficie  $FUS = \frac{D}{D_0}$ , donde  $D_0$  es la directividad de la antena con distribución uniforme de la amplitud.

Asimismo, en la teoría de las antenas se conocen también distintos tipos de distribuciones de amplitud llamadas optimas y casi optimas, por ejemplo, que garantizan la anchura mínima del haz para un nivel dado de los lóbulos laterales o que condicionan la ley determinada de reducción de los lóbulos laterales al alejarse del máximo principal. Estas distribuciones se hallan por los métodos de la teoría de la síntesis de las antenas y se dan en las guías o manuales de diseño de las antenas.

### 3.4 Influencia de las distorsiones de fase sobre los parámetros de la antena lineal.

En la practica, debido a la imperfección de la construcción del distribuidor, así como por los errores de producción de elementos individuales del sistema de antenas la linealidad de la distribución de fase de excitación resulta alterada, lo que da lugar a la distorsión de la forma del diagrama direccional y la disminución de la ganancia de antena dirigida.

La distribución de los errores de fase determinados se representa en forma de una serie exponencial:

$$I(z) = |I(z)| \exp[j(\Phi(z) - \xi kz)]$$

$$\Phi(z) = \Phi_1 \left( \frac{2z}{L} \right) + \Phi_2 \left( \frac{2z}{L} \right)^2 + \Phi_3 \left( \frac{2z}{L} \right)^3 + \dots \quad (3.22)$$

donde  $|I(z)|$  es la distribución de amplitud;  $\exp(-jk\xi z)$ , es la distribución de fase dada previamente, que asegura la exploración;  $\Phi(z)$  es la distribución del error de fase de excitación.

Las magnitudes de  $\Phi_i, i = 1, 2, \dots$  son los valores máximos del error de fase de grado  $i$  en el extremo de la antena.

**Distorsiones de fase lineales.** La existencia de distorsiones de fase lineales no altera la ley lineal general de distribución de fase de excitación, sino solo varia la magnitud del coeficiente de deceleración. El desfase lineal parásito de la magnitud  $\Phi_1$  en el extremo de la antena da lugar al desplazamiento de la curva característica de radiación a lo largo del eje  $\Psi$  en la magnitud  $-\Phi_1$ . Entonces, tiene lugar la desviación del haz en el espacio en cierto ángulo  $\delta\theta$  (hacia el extremo de la antena que ha obtenido un retardo suplementario). Es conveniente medir una pequeña desviación parásita del máximo en las anchuras del haz por semipotencia:

$$\frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = -\frac{\Phi_1^0}{158^0} \quad (3.23)$$

**Distorsiones de fase cuadráticas.** Habiendo distorsiones de fase cuadráticas el factor de direccionalidad de una antena lineal puede ser calculado por la formula:

$$f(\theta) = \int_{-l/2}^{l/2} I(z) \exp j \left[ kz(\cos\theta - \xi) + \Phi_2 \left( \frac{2z}{L} \right)^2 \right] dz \quad (3.24)$$

Analicemos los resultados del calculo numérico realizados de acuerdo con la formula (24), mostrados en la fig.3.6.

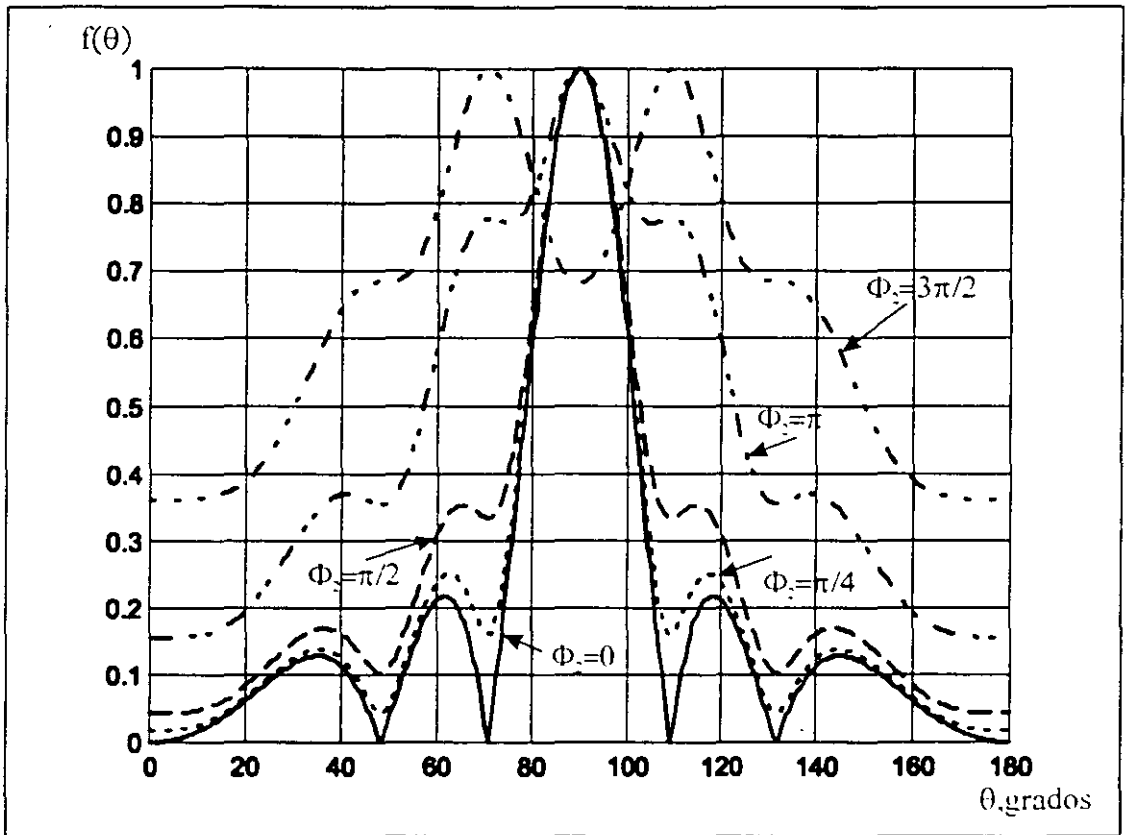


Fig.3.6. Influencia de los errores de fase cuadráticos

Como se aprecia de esta figura, las distorsiones de fase cuadráticas no provocan el desplazamiento del máximo del factor de direccionalidad, sin embargo, dan lugar a la expansión del lóbulo principal y al "cubrimiento" de los mínimos de radiación.

Las distorsiones de fase cuadráticas se manifiestan de manera mas fuerte en el caso de la distribución de amplitud uniforme.

Las distorsiones de fase cuadráticas se encuentran con mayor frecuencia en las antenas cortas en cono invertido y en las antenas de reflector parabólico para el desplazamiento axial del radiador del foco del paraboloide. Por eso estas distorsiones se llaman error de enfoque o simplemente desenfoque.

La alteración de la forma del diagrama direccional durante las distorsiones de fase cuadráticas da lugar a la pérdida de la ganancia de antena dirigida (directividad), es decir, a la disminución del factor de utilización de la superficie.

**Distorsiones de fase cúbicas.** El calculo de la integral para el diagrama direccional durante las distorsiones de fase cúbicas:

$$f(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) \exp j \left[ kz(\cos\theta - \xi) + \Phi_3 \left( \frac{2z}{L} \right)^3 \right] dz \quad (3.25)$$

en forma general es dificultoso y por eso hay que recurrir a su investigación numérica. Los resultados de los cálculos se muestran en la fig.3.7. Aquí hay que recalcar en primer lugar

el desplazamiento del máximo del diagrama direccional hacia el extremo de la antena con retardo suplementario de fase.

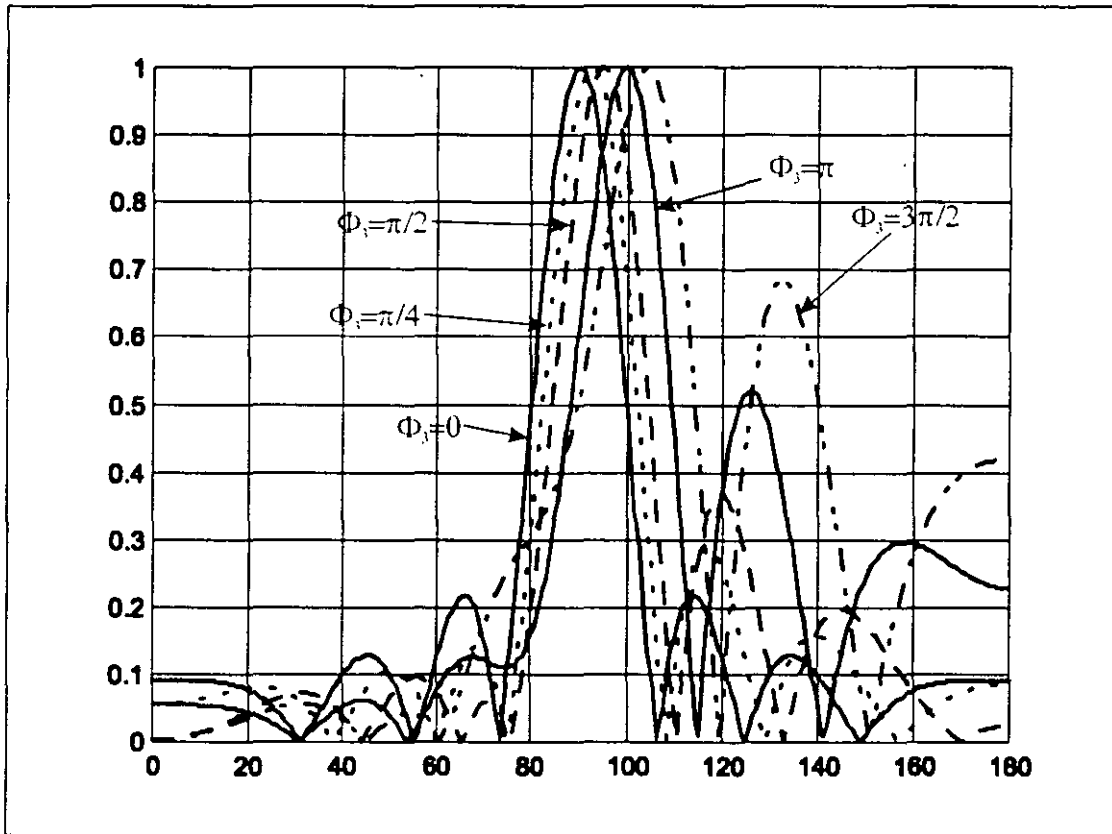


Fig.3.7. Influencia de los errores de fase cúbicas

Para pequeños  $\Phi_3$  la magnitud del desplazamiento del máximo de radiación con respecto a la anchura del haz del diagrama direccional no distorsionado se da por la fórmula:

$$\frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = -\frac{\Phi_3^0}{266^0} \quad (3.26)$$

La distorsión de la forma del diagrama direccional consiste en que el lóbulo principal se ensancha y se hace asimétrico, el nivel de los lóbulos laterales por un lado del lóbulo principal aumenta, y por el otro lado disminuye; además, se observan un crecimiento por aquel lado, hacia el cual se desplaza el máximo principal de radiación. Si en la antena se utiliza una distribución de amplitud decreciente hacia los extremos, la influencia del error de fase cúbico sobre la forma del diagrama direccional se disminuye bruscamente, ya que disminuye el aporte al campo radiado de las porciones extremas más desfasadas de la antena.

### 3.5 Curva característica de radiación de una red de antenas lineal uniforme. Máximos principales secundarios y métodos de su supresión.

Examinaremos las particularidades de radiación de ondas electromagnéticas por un sistema de fuentes discreto. Supongamos que el primer radiador de este sistema se encuentra en el punto  $z = 0$ , los radiadores siguientes se disponen a un paso constante  $d$  en los puntos  $z_n = (n-1)d$ , donde  $n$  es el número del radiador (fig.3.8)

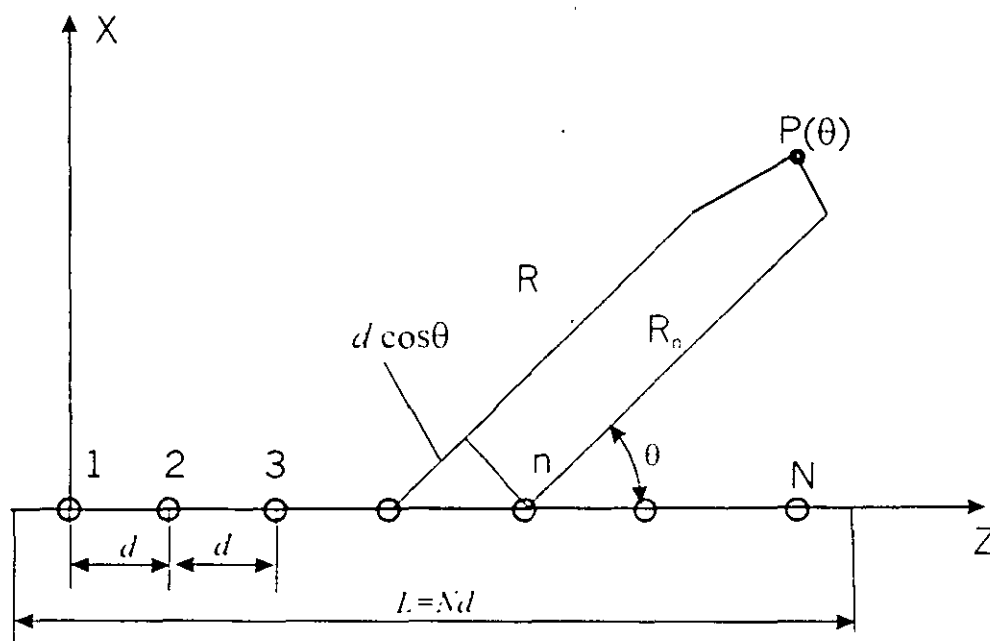


Fig.3.8. Red de antenas lineal uniforme

Supongamos también que los radiadores se excitan por las corrientes de igual amplitud con defasaje creciente linealmente a lo largo de la red:

$$I_n = I_0 \exp[-j(n-1)\Delta\Phi] \quad (3.27)$$

donde  $\Delta$  es la diferencia de fase entre los radiadores contiguos. Este sistema emisor tiene el nombre de red de antenas lineal uniforme o equidistante y es un análogo discreto del radiador lineal ideal.

El coeficiente de deceleración de la velocidad de fase de excitación en la red uniforme se determina por correlación evidente:

$$\xi = \frac{\Delta\Phi}{kd} \quad (3.28)$$

donde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .



De acuerdo con la formula (2) la expresión para el factor de direccionalidad de la red equidistante tiene la forma:

$$f_N(\theta) = \sum_{n=1}^N I_0 \exp[j(n-1)(kd \cos \theta - \Delta\Phi)] = I_0 \sum_{n=1}^N q^{n-1} \quad (3.29)$$

donde  $q = \exp[jkd(\cos \theta - \xi)]$ . Utilizando la formula de la suma de  $N$  términos de la progresión geométrica  $\sum_{n=1}^N q^{n-1} = \frac{1-q^N}{1-q}$ , se puede simplificar la ecuación (29) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f_N(\theta) &= I_0 \frac{1 - \exp[jNkd(\cos \theta - \xi)]}{1 - \exp[jkd(\cos \theta - \xi)]} = \\ &= I_0 \frac{\exp\left[j\frac{Nkd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]}{\exp\left[j\frac{kd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]} \times \frac{\exp\left[j\frac{kd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]}{\sin\left[\frac{kd}{2}(\cos \theta - \xi)\right]} \end{aligned} \quad (3.30)$$

El diagrama direccional de amplitud de una red lineal se da por el modulo del ultimo factor de la formula (30). Este factor conviene representarlo en forma de una función de variable angular generalizada:

$$\Psi = \frac{Nkd}{2}(\cos \theta - \xi) = \frac{kL}{2}(\cos \theta - \xi) \quad (3.31)$$

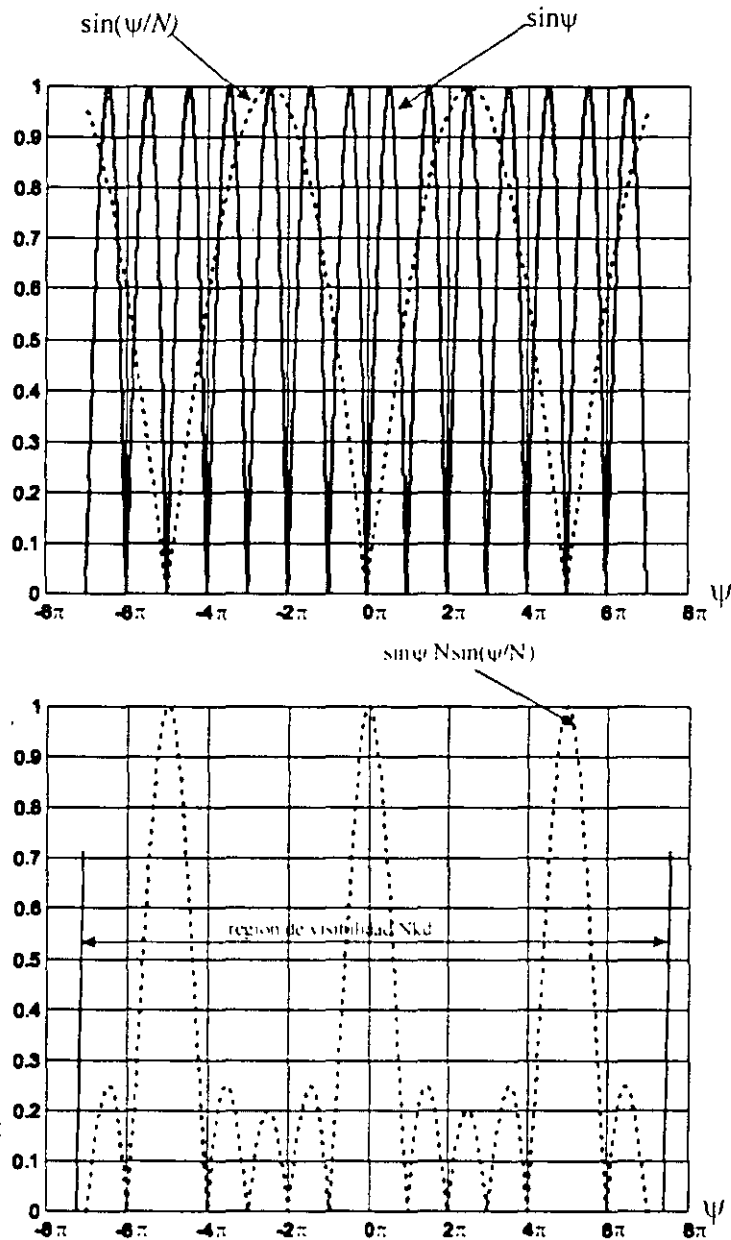
La variable (31) es completamente equivalente a la variable angular generalizada para el radiador lineal, y esto facilita el problema de comparar los diagramas direccionales del radiador continuo y de la red. Teniendo en cuenta (31) el diagrama direccional normado de la red de antenas uniforme de igual amplitud se reduce a la forma:

$$f_N(\Psi) = \left| \frac{\sin \Psi}{N \sin \frac{\Psi}{N}} \right| \quad (3.32)$$

La diferencia del comportamiento de las funciones  $f(\theta) = \frac{\sin \Psi}{\Psi}$  y  $f_N(\theta) = \frac{\sin \Psi}{N \sin \frac{\Psi}{N}}$  se

debe a que la segunda de estas funciones es periódica con el periodo  $N\pi$  y para los valores del argumento  $\Psi_M/N = M\pi, M = \pm 1, \pm 2, \dots$  que hacen el denominador igual a cero,  $f_N(\Psi_M)$  tiene máximos de nivel unitario. Esto significa que en el diagrama direccional de la red de antenas, además del lóbulo principal fundamental existen lóbulos principales

secundarios de orden  $M$  con máximos en los puntos  $\Psi_M = MN\pi$ . La formación de los lóbulos principales secundarios (llamados también máximos de difracción de orden  $M$ ) se aclara en la **fig.3.9**



**Fig.3.9. Esquema para el análisis del factor de direccionalidad de la red**

Nuevamente notamos la existencia de la región de ángulos reales (región de visibilidad) con los límites  $\Psi_{\max} = \frac{kL}{2}(1 - \xi)$  y  $\Psi_{\min} = -\frac{kL}{2}(1 + \xi)$ . La extensión total de la región de visibilidad  $\Psi_{\max} - \Psi_{\min} = kNd = kL$  depende solo de la longitud de la red, en tanto que la posición del centro de la región de visibilidad a lo largo del eje  $\Psi$  se puede regular por la magnitud del coeficiente de deceleración de la velocidad de fase de excitación  $\xi = \Delta\Phi/kd$ .

La dirección del máximo de radiación principal, como en el caso de una antena ideal, esta dada por la correlación evidente  $\cos\theta_0 = \xi$ .

En el caso de la **fig.3.9**, además del lóbulo principal de la función  $f_N(\theta)$  en la región de visibilidad caen dos máximos de difracción laterales mas de primer orden. En la practica esta situación de ordinario es intolerable, ya que debido a la distribución de la potencia radiada por varios lóbulos principales empeora la ganancia de antena dirigida, aparece la ambigüedad de localización del blanco y decrece la protección contra los ruidos del sistema de radio. Examinemos tres métodos posibles de supresión de los máximos principales secundarios:

- 1) limitación de la magnitud del paso de la red;
- 2) el uso de los elementos dirigidos;
- 3) el uso de una disposición no uniforme de los radiadores.

**Limitación del paso de la red  $d/\lambda$ .** Se puede escoger un intervalo de cambio de la variable angular generalizada

$$-(N-1)\pi \leq \Psi \leq (N-1)\pi \tag{3.33}$$

donde faltan los máximos principales secundarios y el nivel de los lóbulos laterales no es mayor que la magnitud del primer lóbulo lateral, más cercano al máximo principal.

Si los limites de la región de visibilidad para un numero de elementos  $N$  elegido no salen fuera de este intervalo, es decir, si

$$\begin{aligned} \Psi_{\min} &= \frac{Nkd}{2}(-1-\xi) > -(N-1)\pi \\ \Psi_{\max} &= \frac{Nkd}{2}(1-\xi) > (N-1)\pi \end{aligned} \tag{3.34}$$

la aparición de los lóbulos de difracción en la región de ángulos reales  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  es imposible. Las desigualdades (8.34) son equivalentes a una condición:

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{N-1}{N} \frac{1}{1+|\xi|} \tag{3.35}$$

De aquí, en régimen de radiación transversal cuando  $\xi = 0$  la distancia admisible entre radiadores contiguos resulta igual a  $d_{\max} = \frac{N-1}{N} \lambda$ , es decir, algo menor que la longitud de onda. Al explorar el sector de los ángulos desde  $\theta_0$  hasta  $\pi - \theta_0$ , el coeficiente de deceleración varia entre los limites de  $-\cos\theta_0 \leq \xi \leq \cos\theta_0$  y la distancia admisible entre radiadores se reduce hasta:

$$d_{\max} = \frac{N-1}{N} \frac{\lambda}{1+|\cos\theta_0|} \tag{3.36}$$

**Uso de elementos dirigidos.** La idea de este método de supresión de los máximos de difracción es simple. De acuerdo con el teorema de multiplicación la curva característica total de radiación de la red de antenas es el producto de la característica de radiación de un elemento por el factor de direccionalidad de la red. Por eso si un elemento tiene una radiación insignificante en dirección al máximo de difracción de la red, este ultimo resulta suprimido.

**Disposición no uniforme de radiadores.** La aparición de máximos principales secundarios en las redes con elementos uniformemente espaciados y dispuestos a gran distancia entre si,

desde el punto de vista físico se explica por el hecho de que la adición cofásica de las oscilaciones radiadas desde cualquier par de elementos contiguos es posible para una serie de direcciones.

Si se altera la constancia del paso de la red, pero se conserva invariable el valor de la velocidad de fase de excitación, la dirección del máximo principal para cualquier par de elementos se mantiene invariable, en tanto que las direcciones de los máximos de difracción secundarios resultan diferentes para distintos pares de elementos contiguos y tiene lugar el "esparcimiento" de los lóbulos de difracción de la red por una zona de ángulos bastante amplia. Por consiguiente surge la idea de la red de antenas de elementos desigualmente espaciados, en la cual las posiciones de los elementos individuales no obedecen a una ley periódica. El problema de determinar las posiciones óptimas de los elementos radiadores, que conducen a un "esparcimiento" óptimo de los máximos secundarios, resulta muy complejo y se resuelve de ordinario mediante algoritmos especiales de búsqueda en computadoras.

### 3.6. Ganancia de antena dirigida de una red de antenas lineal.

Basándonos en la equivalencia de la red lineal de radiadores isótropos y de la antena lineal continua, se puede valorar con la seguridad la ganancia de antena dirigida de las redes lineales por las correspondientes formulas de las antenas continuas mediante la sustitución de la longitud  $L$  por la magnitud equivalente  $Nd$ , donde  $N$  es el número de elementos, y  $d$  es el paso de la red. Podemos obtener las siguientes formulas para la ganancia de antena dirigida de las redes de antenas:

a) en régimen de radiación inclinada y transversal:

$$D \approx \frac{2L}{\lambda} = 2N \frac{d}{\lambda} ; |\xi| = \frac{|\Delta\Phi|}{kd} < 1 - \frac{\lambda}{Nd} \quad (3.37)$$

b) en régimen de radiación axial con velocidad de fase de excitación igual a la velocidad de la luz:

$$D \approx \frac{4L}{\lambda} = 4N \frac{d}{\lambda} ; |\xi| = 1 \quad (3.38)$$

c) en régimen de radiación axial con velocidad de fase de excitación óptimamente decelerada:

$$D \approx \frac{7.2L}{\lambda} = 7.2N \frac{d}{\lambda} ; |\xi_{opt}| = 1 + \frac{\lambda}{2Nd} \quad (3.39)$$

La condición evidente de aplicabilidad de las formulas 37-40 es el cumplimiento de la desigualdad (35) que garantiza la falta de máximos de difracción de orden superior en la región de visibilidad.

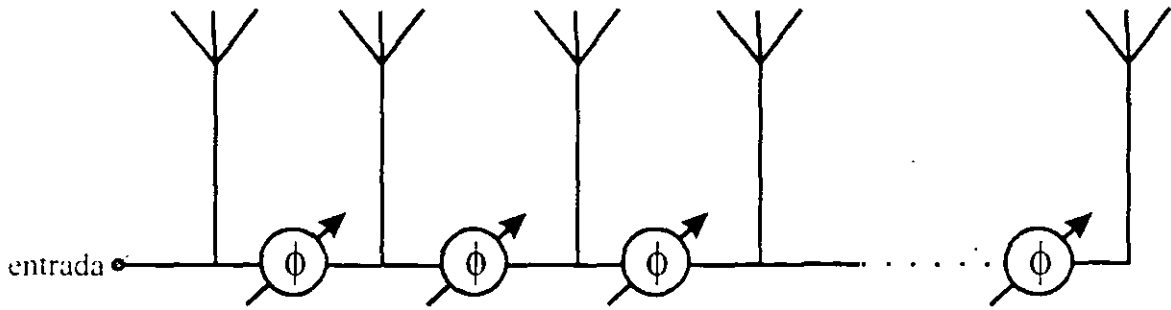
## 4. Antenas de arreglos de fase pasivas

Antenas de arreglos de fase pasivas se excitan por una fuente común mediante un distribuidor de potencia y un sistema de desfasadores.

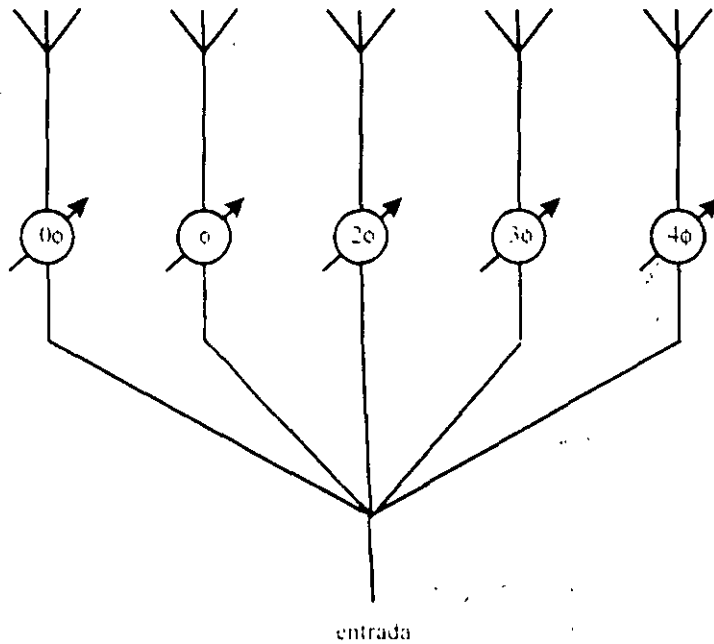
*Distribuidores de circuito cerrado.*

La distribución de la potencia de frecuencias superelevadas a los radiadores de red se realiza en los distribuidores de este tipo mediante múltiplos pasivos; compuestos de trozos de líneas de alimentación, uniones en T, puentes, acopladores direccionales. Se distinguen dos clases de circuitos: de alimentación en serie y en paralelo.

El circuito clásico de alimentación en serie de una red lineal con elementos uniformemente espaciados se muestra en la **fig.4.1**. La potencia se deriva paso a paso a cada radiador desde el alimentador general; y los desfasadores de paso idénticos de tipo analógico se conectan al alimentador general entre las derivaciones a los radiadores contiguos.



*Fig.4.1. Circuito de alimentación en serie de radiadores.*



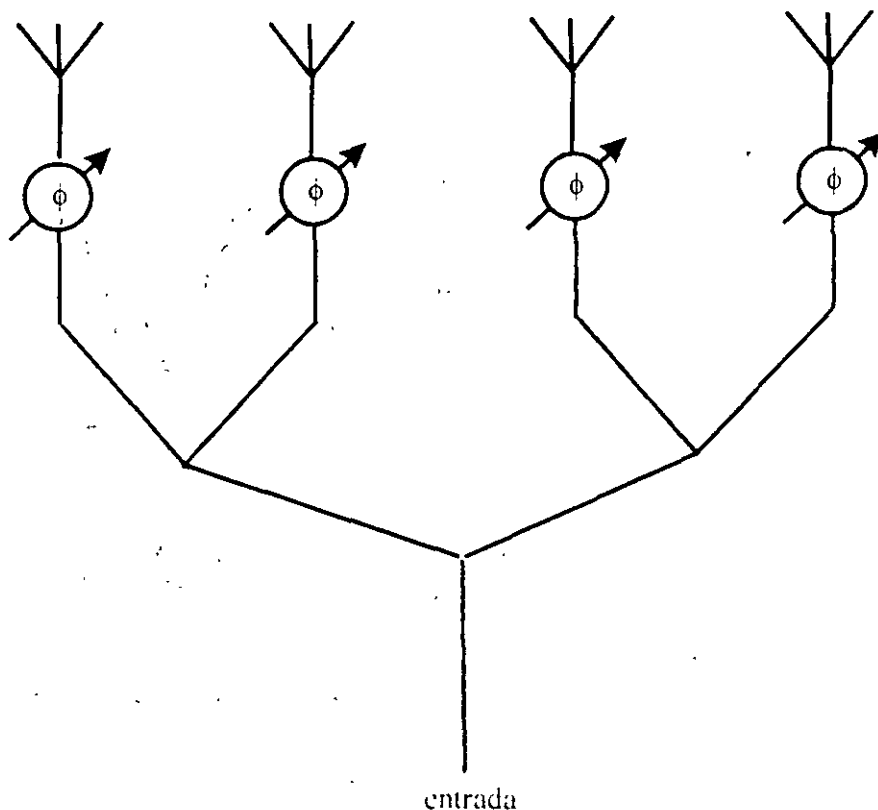
*Fig.4.1. Circuito de alimentación en paralelo de radiadores.*

El circuito se distingue por la compacidad, además, todos los desfasadores se controlan por una misma ley; ya que para desviar el haz en un ángulo determinado el desfase entre radiadores contiguos deba ser idéntico a lo largo de la red. Debido a esto se simplifica el sistema de mando de los desfasadores. Sin embargo, el circuito en serie tiene una serie de desventajas importantes. En primer lugar, en él se observa la acumulación y el crecimiento de los errores de fase y las pérdidas de inserción al final de la antena; debido a lo cual se admite solo el uso de desfasadores precisos con muy pequeñas pérdidas. En segundo lugar, por el desfasador giratorio cercano a la entrada pasa casi toda la potencia radiada, y, por

consiguiente, se necesitan desfasadores de elevada rigidez eléctrica. En tercer lugar las longitudes eléctricas de los trayectos de las señales desde la entrada común hasta cada radiador resultan bastante diferentes, y esto puede dar lugar a desfasaje indeseable de la red en los extremos de la banda de frecuencias de trabajo.

El circuito de alimentación en paralelo de la red de  $N$  elementos esta representado en la **fig.4.2**. Este circuito tiene una serie de importantes ventajas. En primer lugar, pueden utilizarse desfasadores de potencia relativamente pequeña, ya que por cada uno de ellos pasa solo  $1/N$  porción de la potencia radiada. En segundo lugar, las perdidas totales de potencia en los dispositivos de mando se determinan por la magnitud de las perdidas de inserción solo de un desfasador, y por eso pueden utilizarse desfasadores con una magnitud de perdidas bastante grande. Una ventaja importante del circuito en paralelo es la falta de acumulación de los errores de fase a lo largo de la abertura y la posibilidad de igualar las longitudes de los canales individuales para asegurar el funcionamiento en banda ancha.

La desventaja del circuito en paralelo es la complejidad del sistema de mando, ya que los desfasajes, en general, son distintos en cada desfasador. Además, existen dificultades en asegurar una buena adaptación de la entrada para la división simultanea de la potencia por gran numero de canales.

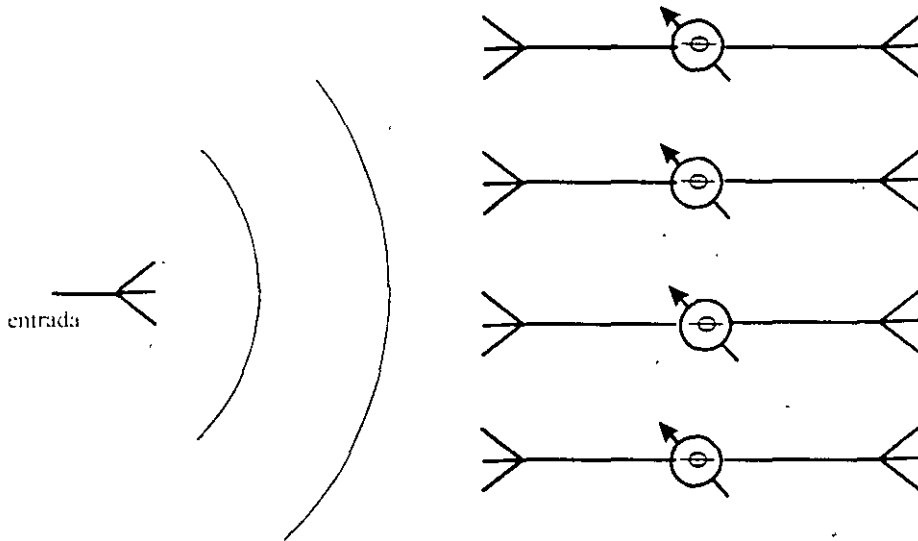


**Fig 4.3. Circuito-árbol de alimentación de los radiadores**

Un caso especial del circuito de alimentación en paralelo, mostrado en la **fig.4.3**, es el circuito de paso binario, de tipo "árbol", en cada nudo del cual tiene lugar la división en cascada de la potencia en dos partes. Una propiedad positiva del "árbol" es la igualdad de las longitudes eléctricas de todos los canales, siendo su desventaja la relativa voluminosidad. Al utilizar el "árbol" se puede simplificar el circuito de mando de la red, si se conectan desfasadores a cada piso del "árbol".

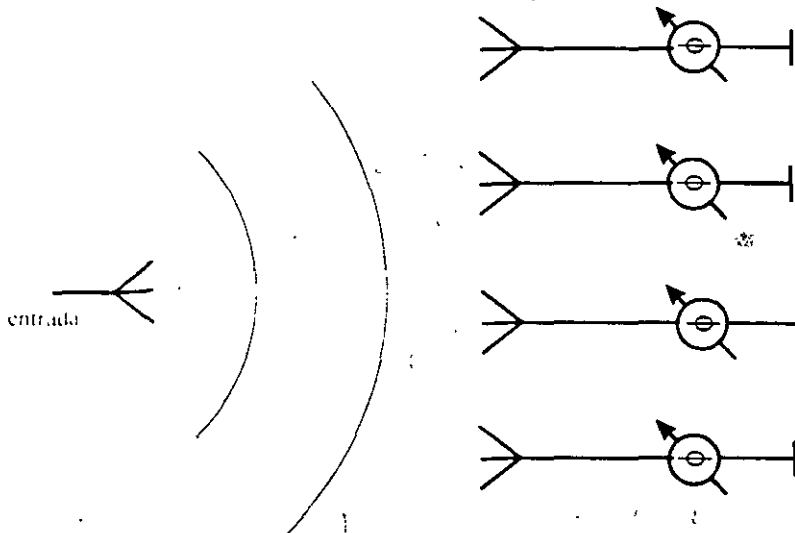
**Distribuidores del tipo óptico.** Existen dos variedades de circuitos de alimentación óptica de las redes: el circuito de tránsito y el circuito de reflexión.

En las antenas de arreglos de fase, producidos por el circuito de tránsito (fig.4.4), un excitador especial dirige la potencia radiada a la red de antenas colectora de elementos receptores. La potencia recibida pasa por el sistema de desfases de paso y después de la puesta en fase se radia en la dirección necesaria por otra red de elementos radiadores.



*Fig.4.4. Circuito de tránsito de alimentación óptica de los radiadores*

La antena de arreglo de fase, producida por el circuito de reflexión (fig.4.5), está compuesta de un excitador y de la red de emisión-recepción, cada elemento de la cual está provisto de un desfaseador de reflexión. En la antena de arreglos de fase de reflexión los radiadores de la red cumplen una doble función: 1) recoleccionan la potencia que va del excitador; 2) la vuelven a radiar en la dirección necesaria después de la puesta en fase.



*Fig.4.5. Circuito de reflexión de alimentación óptica de los radiadores*

Entre las ventajas de ambos circuitos de alimentación óptica podemos citar la relativa sencillez con un número grande de elementos de la red, la conveniente posibilidad de mando de la forma de distribución de amplitud en la abertura eligiéndola forma del

diagrama direccional del excitador. El inconveniente común de los circuitos de alimentación óptica es el aumento de las dimensiones en comparación con los de canal cerrado. Además, en los circuitos ópticos parte de la potencia del excitador no es interceptada por la red receptora, lo que da lugar al crecimiento de la radiación lateral.

Por razones constructivas la red reflectora tiene una serie de ventajas con respecto a la de tránsito: hay un acceso a cualquier desfasador de la parte de atrás de la red, lo que simplifica el montaje y la explotación, y, además los desfasadores de reflexión son del diseño más simple que los de tránsito.

Por otro lado, la red de tránsito tiene ventajas en cuanto a las características eléctricas, y precisamente: 1) es posible la optimización separada de las redes colectora y radiadora en el sentido del uso de los elementos de distinto tipo y disposición (por ejemplo, a fin de hacer una elección óptima de la distribución de amplitud, así como el debilitamiento de la influencia de la interconexión durante la explotación); 2) no hay ensombrecimiento de la abertura por el excitador y reacción de la red al excitador.

#### Literatura.

1 G.Markov, D.Sazonov "Antenas".editorial Mir,Moscu

2. RobertMailloux "Phazed array antenna handbook,"Artech House, Boston,London.