UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CIVIL

EJEMPLOS DE ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

(SOLUCIONES)

ING. LUIS HERREJÓN DE LA TORRE.

G-600993

Las soluciones aquí presentadas, fueron elaboradas y revisadas por los profesores de Estructuras Isotáticas de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., durante los años de 1969 a 1976. Esperamos que en el futuro, estas series se sigan revisando y mejorando en beneficio de los cursos que se imparten al respecto.

L. Herrejón

1).- Las fuerzas que una viga transmite a sus apoyos; las presiones que las llantas de un automóvil ejercen sobre el pavimento; las cargas que actúan sobre las losas de entrepiso de un edificio; las acciones y reacciones que tienen lugar entre los engranes de un reloj; la fuerza de fricción que ocurre entre una banda transportadora y los rodillos de transmisión, entre otros ejemplos.

2).- Las fuerzas gravitatorias que privan entre la Luna y la Tierra; la atracción que un imán ejerce sobre una porción de acero colocado a cierta distancia; el peso de un cuerpo; las fuerzas de inercia que actúan en las masas de un regulador Porter.

3).- Son fuerzas de contacto distribuidas continuamente en el techo,

y son variables con el tiempo, pues cambian al derretirse la nieve.

4).- Son fuerzas por contacto producidas por las ruedas de la locomotora sobre los rieles. Estas fuerzas son tangentes a la superficie de rodamiento, en el sentido del movimiento y por ello provocan al puente un empuje longitudinal.

5).- Las fuerzas inducidas en los rieles pueden considerarse distribuidas continuamente en su volumen. Estas fuerzas se transmiten a través de los durmientes hasta el balasto, el cual impide la deformación desarrollando fuerzas de fricción.

6).- El principio de Arquímedes se refiere a fuerzas distribuidas continuamente sobre las superficies del cuerpo sumergido.

7).- Son fuerzas variables, pues su magnitud cambia con las condiciones de vuelo y por tanto, con el tiempo.

8).- Si, y es una fuerza a distancia valuable utilizando la Ley de la Gravitación Universal.

9).- No, es una fuerza generada por el contacto directo entre viento y anuncio.

10).- Si, porque ocurre aunque el ser humano no se encuentra en contacto directo con la superficie terrestre.

11).- El mismo peso que tengo en la Tierra, ya que la atracción del planeta sobre mi persona es de igual magnitud que la de la reacción de mi cuerpo sobre la Tierra, de acuerdo con la tercera ley de Newton.

12).- No, son movimientos terrestres que al actuar sobre cualquier cuerpo apoyado en la superficie de la Tierra, le comunican aceleraciones.

13).- Es por contacto, dada la disposición del cuerpo y del platillo de la balanza.

14).- Puede considerarse concentrada para efectos prácticos, pues las áreas de contacto son muy pequeñas.

15).- Conviene contestar aludiendo las siguientes fuerzas:

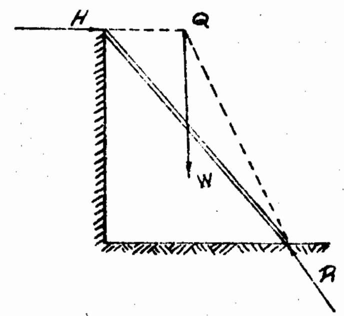
a).- El peso de la persona, que es una fuerza a distancia.

b).- Las tensiones provocadas por los tirantes del paracaídas, fuerzas éstas por contacto.

c).- El empuje por contacto que el viento puede ejercer sobre la persona.

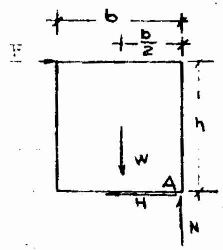
16).- No es posible, en virtud de la tercera Ley de Newton.

17).- La superficie horizontal debe ser rugosa para que produzca la reacción total R concentrada en Q, punto de intersección de los soportes del peso involucrado y la reacción horizontal H.



18).- Si, existen durante el fenómeno fuerzas de fricción viscosa entre el aire y dicho cuerpo.

19).- Bajo la solicitación descrita, el cuerpo está a punto de voltear, cuando entre magnitudes:



Momento de volteo = Momento resistente

$$2Fh = Wb ,$$

esto es, cuando la fuerza resultante de F y W pasa por A.

Ahora bien, si no voltea bajo el empuje F:

$$h \leq \frac{Wb}{2F} \quad \ldots\ldots (1)$$

y si en estas condiciones sólo desliza:

$$F > H ;$$

donde H es la fuerza de fricción límite. Por tales razones, si el cuerpo desliza sin voltear necesariamente su altura debe satisfacer (1) como mera restricción.

20).- La fricción es deseable en:

a).- Una cortina de gravedad, entre el suelo y el muro de contención.

b).- Un freno, entre el tambor y la balata.

c).- El andado de una persona, entre los zapatos y el piso.

d).- Una banda de transmisión, entre ésta y los rodillos que la impulsan.

e).- Una nave espacial, entrando en la atmósfera terrestre, entre la superficie externa del vehículo y el aire, si se considera la necesidad de garantizar amarizajes suaves.

La fricción es indeseable en:

a).- Un motor de combustión interna, entre cilindros y pistones.

b).- una tubería distribuidora de agua, entre el líquido y las paredes interiores del tubo.

c).- Las partes en contacto de un sistema mecánico de transmisión de energía cinética.

d).- El acto de empujar, a efecto de deslizar un objeto pesado sobre el piso.

21).- Es fricción viscosa entre las superficies húmedas.

22).- Si, porque ambos son fluídos.

23).- No, por hipótesis.

24).- Estas leyes son semi-empíricas; se deducen por medio de experimentación directa; no son rigurosamente ciertos; se aceptan en los casos de fricción estática y dinámica que tipifica el contacto de cuerpos sólidos, y fueron estudiadas por Coulomb (1781) y Morin (1831). Sus enunciados son:

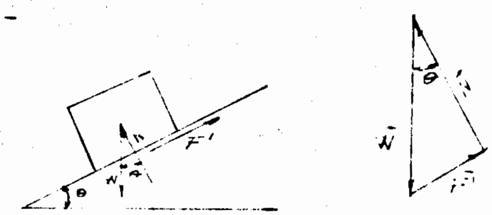
1).- La fuerza de fricción límite es independiente del tamaño de las superficies en contacto donde se produzca, y sólo es función de la naturaleza de las mismas.

2).- La fuerza de fricción límite es directamente proporcional a la fuerza normal entre las superficies en contacto.

3).- La máxima fuerza de fricción estática, es mayor que la desarrollada cuando ha empezado el movimiento de las superficies en contacto.

24).- La fuerza de fricción dinámica es independiente del tamaño de las superficies en contacto y de la rapidez relativa entre éstas.

25).-



Por definición de coeficiente de fricción, y si F' es la fuerza de fricción límite, entre magnitudes:

$$F' = 0.8N \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Del triángulo de fuerzas mostrado en la figura:

$$\tan\theta = \frac{F'}{N} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

sustituyendo (2) en (1):

$$\tan\theta = \frac{0.8N}{N} = 0.8$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.8$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 38^\circ\, 40'}$$

26).- El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra parece atraerlo hacia su centro.

27).- El peso de un cuerpo está dirigido hacia el centro de masa de la Tierra, por ello y para fines prácticos es normal a la superficie del Planeta.

28) y 29).- Los apoyos usuales, en relación con la sustentación de cuerpos rígidos son los siguientes:

Apoyos planos:

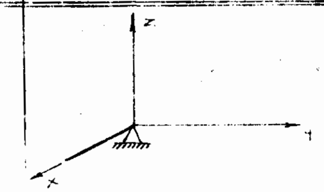
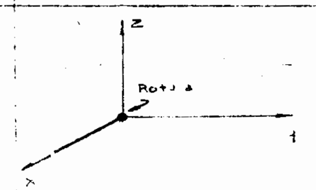
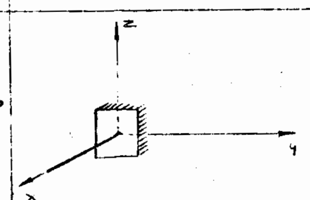
Nombre	Esquema	Restricciones*
Apoyo libre	y, x	$\xi \neq 0$ $\eta = 0$ $\varphi \neq 0$
Articulación fija	y, x	$\xi = 0$ $\eta = 0$ $\varphi \neq 0$
Empotramiento	y, x	$\xi = 0$ $\eta = 0$ $\varphi = 0$

* Grados de libertad:

ξ Denota desplazamientos lineales respecto a $x'x$.

η Denota desplazamientos lineales respecto a $y'y$.

φ Denota giros en el plano xoy.

Nombre	Esquema	Restricciones*
Apoyo libre		$\xi \neq 0$; $\varphi_{xy} \neq 0$ $\eta \neq 0$; $\varphi_{xz} \neq 0$ $\zeta = 0$; $\varphi_{yz} \neq 0$
Articulación fija		$\xi = 0$ $\varphi_{xy} \neq 0$ $\eta = 0$ $\varphi_{xz} \neq 0$ $\zeta = 0$ $\varphi_{yz} \neq 0$
Empotramiento		$\xi = 0$ $\varphi_{xy} = 0$ $\eta = 0$ $\varphi_{xz} = 0$ $\zeta = 0$ $\varphi_{yz} = 0$

* Grados de libertad:

ξ Denota desplazamientos lineales paralelos a $x'x$.

η Denota desplazamientos lineales paralelos a $y'y$.

ζ Denota desplazamientos lineales paralelos a $z'z$.

φ_{xy} Denota giros en el plano xoy.

φ_{xz} Denota giros en el plano xoz.

φ_{yz} Denota giros en el plano yoz.

30).- Se define como "Diagrama de Cuerpo Libre de un Cuerpo", a un esquema donde se representan las dimensiones del cuerpo y se consignan a su vez, la totalidad de las fuerzas externas que actúan en el mismo. El objeto primordial de esta noción es instituir un sustracto, o elemento por medio del cual sea factible aplicar la_

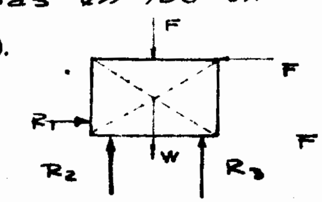
Mecánica Racional, como ciencia, al movimiento de los cuerpos.

31).- La flexibilidad del concepto radica en el conjunto de aplicaciones tan diversas que tiene y que se establecen con igual facilidad en términos de porciones de cuerpos en función de los cuerpos mismos y aún en relación con los sistemas de éstos.

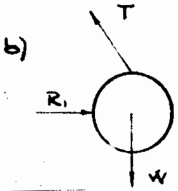
La noción brinda acceso al análisis del movimiento, sin limitaciones, del campo de acción que pudiera derivarse de la configuración de los cuerpos ó sus sistemas.

32).- En los diagramas de cuerpo libre especificados a continuación, no se presentan fuerzas de fricción, debido a que las superficies en contacto se asuman lisas en los enunciados respectivos.

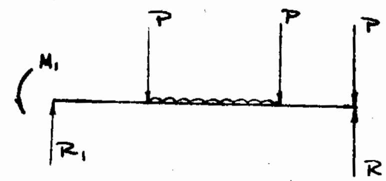
a).



b)

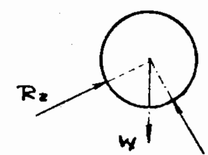


c)



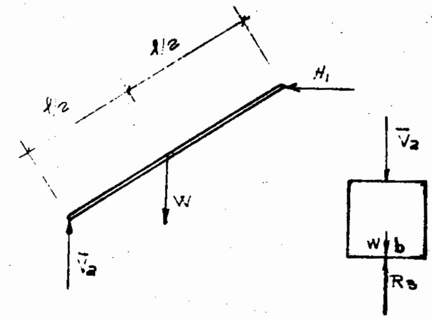
* Nota: $R_2 \neq 0$, sólo si el resorte se deforma.

d)

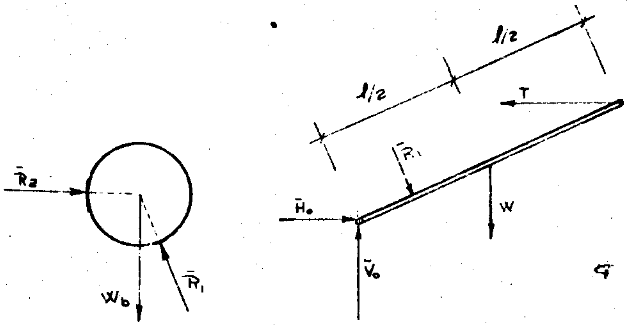


* Nota: $R_2 \neq 0$, sólo si el resorte se deforma.

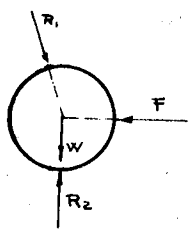
e)



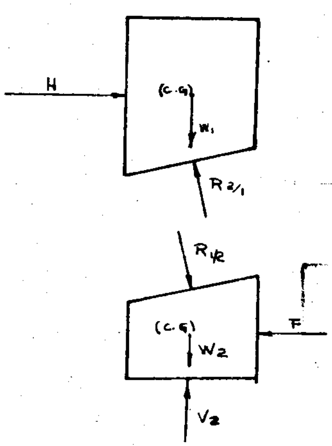
f)


R2
W
Wb
R1
l/2
l/2
T
R1
H0
W
V0

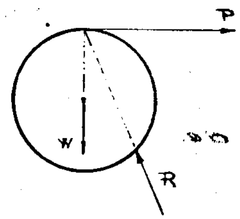
g)


R1
F
W
R2

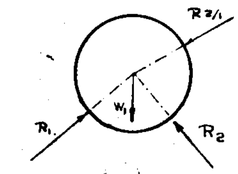
h)

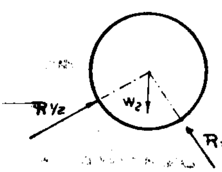

H
(c.g)
W1
R 2/1
R 1/2
(c.g)
W2
F
V2

i)


P
W
R

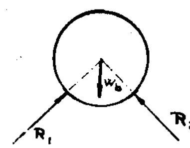
j)


R 2/1
W1
R1
R2

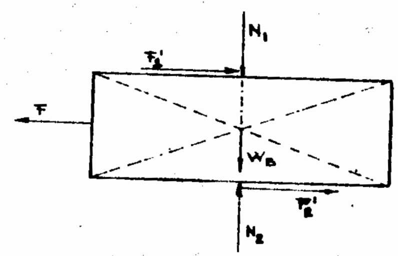

R 1/2
W2
R3

33).-

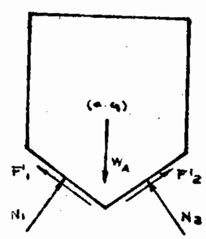
a)


Wb
R1
R2

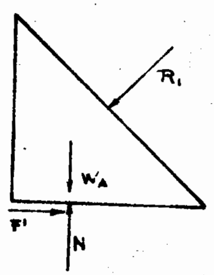
b)


N1
F'1
F
WB
F'2
N2

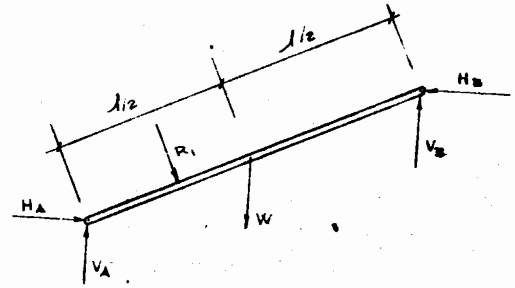
c)


(a.q)
WA
F'1
F'2
N1
N2

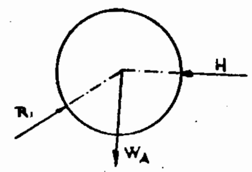
d)


R1
WA
F'
N

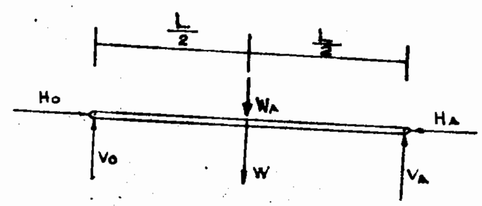
e)


l/2
l/2
HB
R1
VB
HA
W
VA

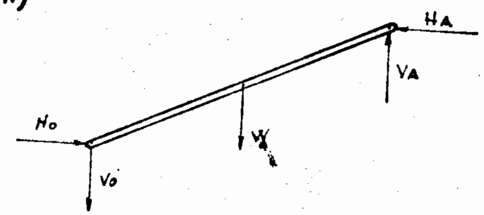
f)


H
R1
WA

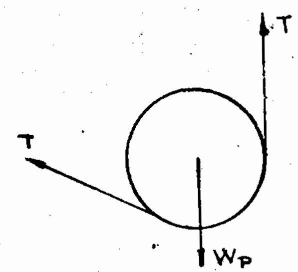
g)


L/2
L/2
Ho
WA
HA
Vo
W
VA

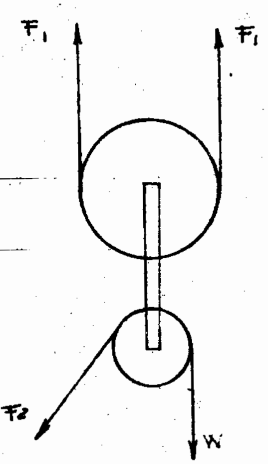
h)


HA
VA
Ho
W
Vo

i)



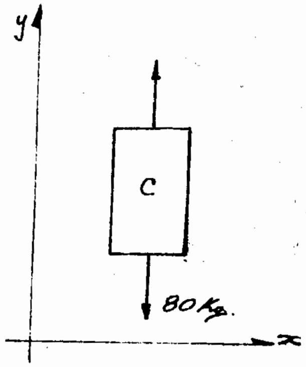
j)



SERIE 2

EQUILIBRIO DE LA PARTICULA
(Soluciones)

1) Haciendo el diagrama de cuerpo libre del cuerpo C, se obtiene la tensión del cable.

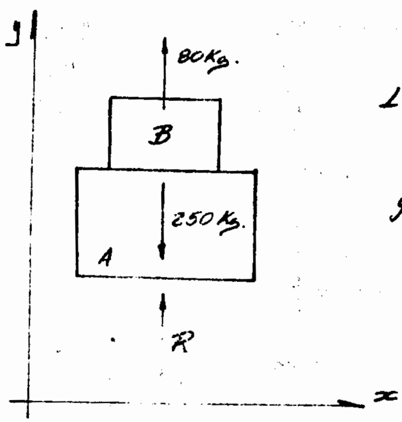


En efecto: $\sum F_y = 0$

y: $T = 80$ Kg.

D.C.L. de C.

Considerando dicho cable inextensible y sin peso, y puesto que la reacción pedida es una fuerza externa al conjunto de los cuerpos A y B, se tiene:



D.C.L. de A y B.

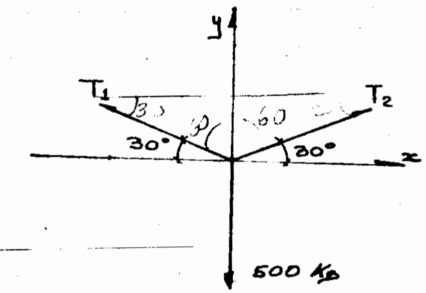
$\sum F_y = 0$

Luego:

$R - 250 + 80 = 0$

y: $R = 170$ Kg

2) Aislando el nudo A:



D.C.L. de A.

$\sum F_x = 0$

$\Longrightarrow T_1 = T_2$ ----- (1)

Además:

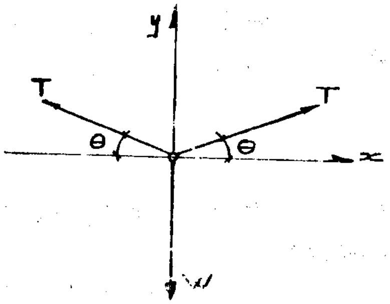
$\sum F_y = 0$

$\Longrightarrow \frac{1}{2} T_1 + \frac{1}{2} T_2 - 500 = 0$

Tomando en cuenta (1):

$T_1 = T_2 = 500$ Kg.

3) Análogamente al caso anterior las tensiones en los cables son iguales; por tanto, basta desarrollar:



D.C.L de P

$$\sum F_y = 0$$

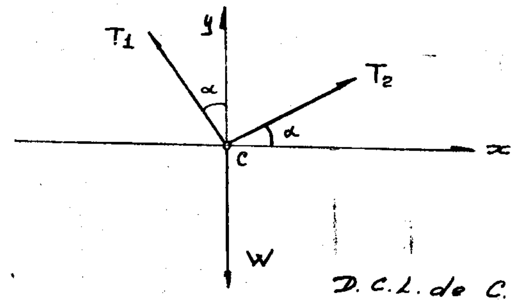
Para obtener:

$$2T \operatorname{sen}\theta - W = 0$$

Despejando:

$$T = \frac{W}{2}\csc\theta$$

4) Para valuarlas, aíslese el nudo C suponiéndolo en equilibrio.



D.C.L. de C.

Puesto que:

$$\sum F_x = 0$$

$$\Longrightarrow T_1 \operatorname{sen}\alpha = T_2 \cos\alpha$$

y: $\quad T_2 = T_1 \tan\alpha$ ------------ (1)

Además:

$$\sum F_y = 0$$

$$\Longrightarrow T_1 \cos\alpha + T_2 \operatorname{sen}\alpha = W \text{----}(2)$$

Sustituyendo (1) en (2): $\quad T_1 \cos\alpha + T_1 \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = W$

$$T_1\left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = W\cdot\frac{1}{\cos\alpha} \quad ; \quad \text{como } 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

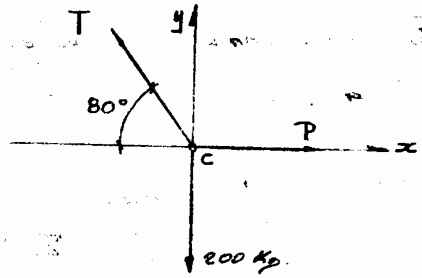
Simplificando:

$$T_1 \sec^2\alpha = W \sec\alpha$$

y: $\quad T_1 = W\cos\alpha$

Así: $\quad T_2 = W \operatorname{sen}\alpha$

5) Para determinar la fuerza en cuestión, hagamos el diagrama de cuerpo libre del punto C.



D.C.L. de C.

Se tiene:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Rightarrow T\cos 80° = P \quad \text{------------ (1)}$$

y:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Rightarrow T\,sen\ 80° = 200 \quad \text{------------ (2)}$$

Entonces:

$$T = \frac{200}{0.984} = 203.08 \text{ Kg.}$$

Sustituyendo en (1):

$$P = 203.08 \cos 80°$$

$$P = 35.26 \text{ Kg.}$$

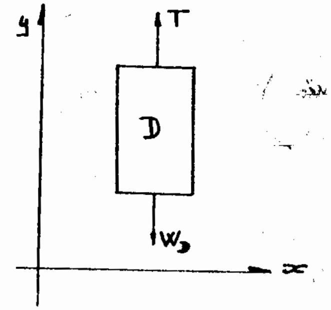
Lo cual puede probarse dividiendo (2) entre (1); pues:

$$\tan 80° = \frac{200}{P}$$

y:

$$P = \frac{200}{5.6713} = 35.26 \text{ Kg.}$$

6) Para determinar la tensión en el cable $\overline{CD}$, considérese el D.C.L. de la figura:



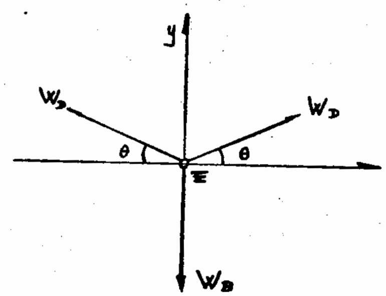
D.C.L de D.

$$\Sigma F_y = 0$$

Luego:

$$T = W_D$$

Ahora bien, como los cables son inextensibles y no pesan, al aislar en equilibrio el punto E, se tiene:



D.C.L de E.

$$\Sigma F_y = 0$$

y:

$$2W_D\ sen\ \theta = W_B$$

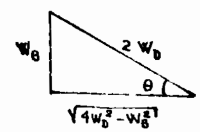
Así:

$$Sen\ \theta = \frac{W_B}{2W_D}$$

Como la flecha f pedida vale:

$$f = \frac{L}{2} \cdot \tan\theta$$

del Δ de fuerzas:



$\Longrightarrow$

Es:

$$f = \frac{L}{2}\frac{W_B}{\sqrt{4W_D^2 - W_B^2}}$$

En fin:

$$f = \frac{L}{2\sqrt{4\left(\frac{W_D}{W_B}\right)^2 - 1}}$$

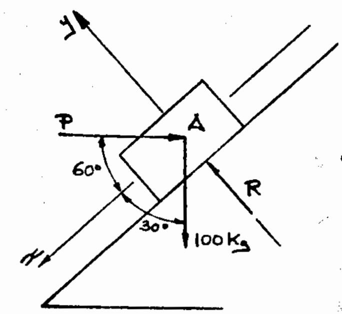
resuelve el problema. Nótese que f existe sólo si:

$$4\left(\frac{W_D}{W_B}\right)^2 - 1 > 0 \; ; \; \left(\frac{W_D}{W_B}\right)^2 > \frac{1}{4} \; ; \; \frac{W_D}{W_B} > \pm\frac{1}{2}$$

$$\therefore \; W_D > \frac{W_B}{2}$$

de lo contrario el equilibrio del dispositivo es imposible.

7) Para encontrar P, consideremos el D.C.L de A, entendiendo a éste como partícula material.



D.C.L de A.

Como:

$$\sum Fx = 0$$

Es:

$$100 \cos 30° = P \cos 60°$$

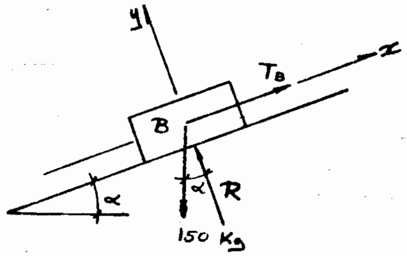
y:

$$P = 100 \operatorname{ctg} 30° = 173.20 \text{ Kg}$$

$$P = 173.20 \text{ Kg}.$$

Puesto que las superficies en contacto son lisas, si P < 173.20 Kg. el cuerpo desliza hacia abajo y, si por el contrario, P > 173.2 Kg lo hace hacia arriba; sin embargo, en ambos casos no aparece fuerza de fricción alguna que pudiera asignarse al estado incipiente de movimiento.

8) Puesto que la polea es ideal, la tensión en el cable es única y:



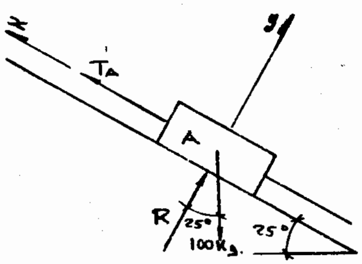
D.C.L. de B.

$$\sum F_x = 0$$

Conduce a:

$$T_B = 150 \operatorname{sen} \alpha \text{ --- } (1)$$

Por otra parte al aislar A:



D.C.L. de A.

$$\sum F_x = 0 \text{ ----- } (2)$$

Implica:

$$T_A = 100 \operatorname{sen} 25°$$

Esto es:

$$T_A = 42.26 \text{ Kg}$$

Como:

$$T_A = T_B \text{ ----- } (3)$$

Se tiene en (1):

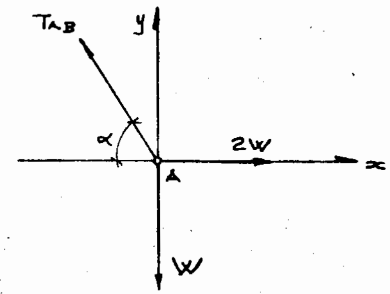
$$42.26 = 150 \operatorname{sen} \alpha$$

Despejando:

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1} 0.2817$$

$$\alpha = 16° 22'$$

9) El problema involucra un conjunto de puntos materiales en equilibrio. Aislando A como el primero de ellos:



$$\sum F_x = 0$$

$$T_{AB} \cos \alpha = 2W \text{ --- } (1)$$

Además:

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{AB} \operatorname{sen} \alpha = W \text{ --- } (2)$$

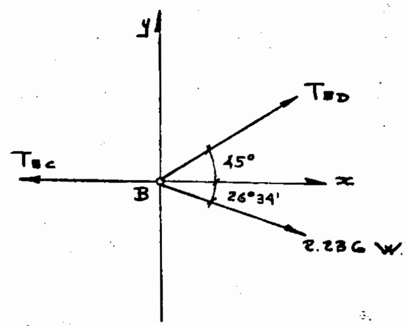
Por tanto:

$$\alpha = \tan^{-1} 0.50 = 26° 34'$$

y:

$$T_{AB} = 2.236 \text{ W}.$$

Considerando el punto B:



D.C.L de B.

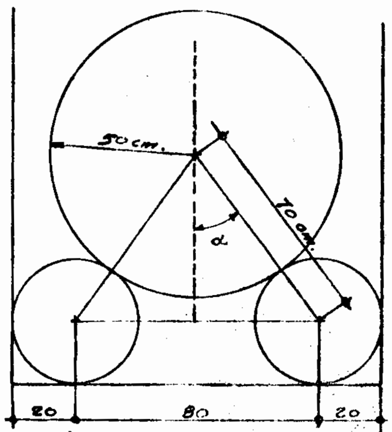
$$\sum F_y = 0$$

$$0.7071\, T_{BD} - W = 0$$

y:

$$T_{BD} = 1.414 \text{ W}$$

10) Las dimensiones de los cilindros conducen a:



$$Sen\ \alpha = \frac{40}{70} = 0.5714$$

y:

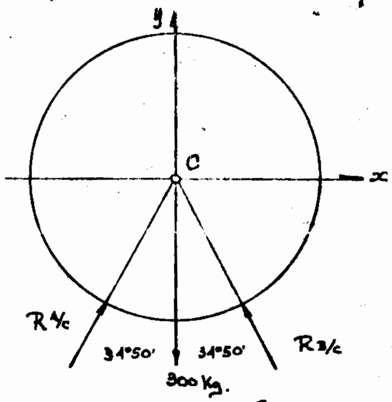
$$\alpha = 34° 50'$$

Considerando a C en equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$

implica:

$$R_{A/c} = R_{B/c}$$



D.C.L de C

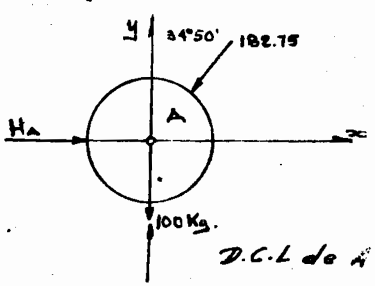
Además:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$2 \times 0.8208\ R_{A/c} = 300$$

y:

$$R_{A/c} = R_{B/c} = 182.75 Kg.$$



D.C.L de A

En estas condiciones y debido a la simetría, aislemos uno cualquiera de los cilindros menores, por ejemplo el A, se tiene:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$H_A - 182.75 \times 0.571 = 0$$

$$H_A - 104.42 = 0$$

$$H_A = 104.42 \text{ kg.}$$

y.

$$H_A = H_B = 104.42 \text{ kg.}$$

como.

$$\Sigma F_y = 0$$

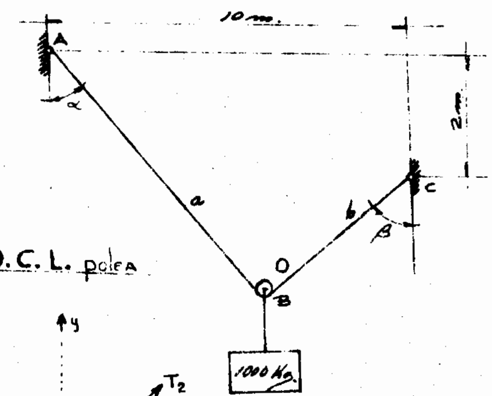
$$V_A - 100 - 182.75 \times 0.8208 = 0$$

por lo tanto

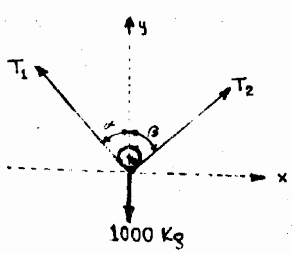
$$V_A = 250 \text{ kg.}$$

Como comprobación se puede verificar que la suma de las reacciones verticales es igual al peso del sistema

11) Al hacer el diagrama de cuerpo libre de la polea en la posición de equilibrio, esto es, cuando las dos fuerzas de tensión y la de .... 1000 Kg. son concurrentes, en virtud de



D.C.L. polea



$\Sigma M_O F = 0$

$T_1 = T_2 = T$

Además:

$\Sigma F_x = 0$

$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$

Por lo que:

$\alpha = \beta$

Y: $\Sigma F_y = 0$

$T(\cos\alpha + \cos\beta) = 1000$

$2T\cos\alpha = 1000$

Por geometría:

$a \operatorname{sen}\alpha + b \operatorname{sen}\beta = 10$

$(a+b)\operatorname{sen}\alpha = 10$

$10\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha = 10$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\beta$

Luego:

$\sqrt{2}\, T = 1000$

y: $T = 500\sqrt{2} = 707.16$ Kg.

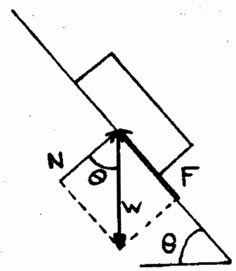
En resumen:

$\alpha = 45°$

$\beta = 45°$

$T = 707.16$ Kg.

2) Para determinar el valor máximo de W, analizaremos el D.C.L. de la figura.



$\mu = 0.25$

D.C.L. Como:

$F = \mu N$

$\therefore F = 0.25 N$ ------ (1)

Pero $N = W \cos\theta$ ------ (2)

y $F = W \operatorname{sen}\theta$ ------ (3)

así de (2) y (3) en (1) Tenemos:

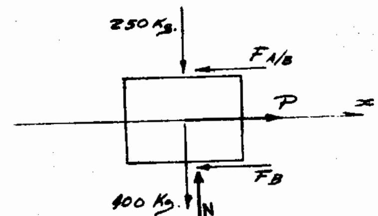
$W \operatorname{sen}\theta = 0.25\, W\cos\theta$; $\dfrac{W \operatorname{sen}\theta}{W\cos\theta} = 0.25$

$\therefore \tan\theta = 0.25$ entonces:

$\boxed{\theta = 14^{\circ}}$

13) Como:

$\sum F_x = 0$



D.C.L de B.

Es: $F_{A/B} + F_B = P$ ------ (1)

pero: $F_{A/B} = \mu W_A$

Así: $F_{A/B} = 50$ Kg. $\Rightarrow$ por $\Sigma F_y = 0$; $N = 650$ kg $\uparrow$

y: $F_B = \mu N$

$F_B = \mu(250 + 400) = 130$ Kg

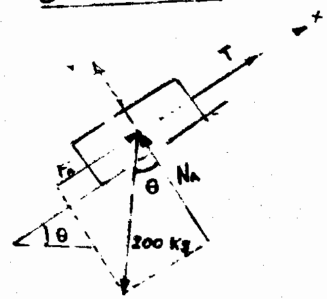
por lo tanto:

$P = 50 + 130$

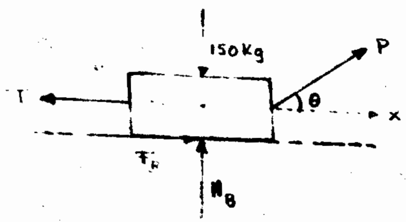
y: $P = 180$ Kg.

14) Estudiando los cuerpos A y B por separado y sabiendo que la tensión en el cable que los une es la misma; desarrollaremos:

D.C.L de A



D.C.L. de B



$\Sigma F_x = 0$

$T = 200 \text{ Sen } \theta - F_A$ --- (1)

$\Sigma F_y = 0$

$N_A = 200 \cos \theta$

Ademas: $F_A = 0.35 N_A$

$\therefore F_A = 70 \cos \theta$ --- (3)

Subst. en (1) tenemos:

$T = 200 \text{ sen } \theta - 70 \cos \theta$ --- (5)

$\Sigma F_x = 0$

$P \cos \theta = T - F_B$ o sea:

$P \cos \theta = 200 \text{ sen } \theta - 70 \cos \theta - F_B$ --- (4)

$\Sigma F_y = 0$

$P \text{ Sen } \theta = 150 - N_B$

$N_B = 150 - P \text{ Sen } \theta$

como $F_B = 0.35 N_B$

entonces:

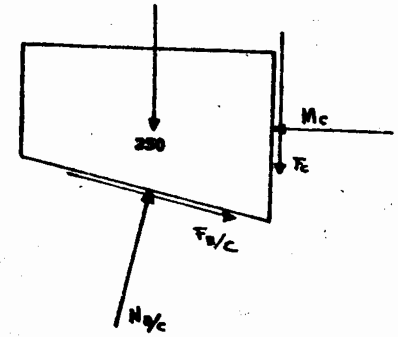
$F_B = 52.5 - 0.35 P \text{ sen } \theta$ --- (5)

luego de (5) en (4) tenemos:

$P \cos \theta - 0.35 P \text{ sen } \theta = 200 \text{ Sen } \theta - 70 \cos \theta - 52.5$

$$\therefore P_{min} = \frac{200 \text{ Sen } \theta - 70 \cos \theta - 52.5}{\cos \theta - 0.35 \text{ Sen } \theta}$$

15) El mínimo de P resultará de analizar separadamente los cuerpos que intervienen en el dispositivo mostrado.



D.C.L. de C

$F_C = 0.3 N_C$

$F_{B/C} = 0.3 N_{B/C}$

$\Sigma F_y = 0$

$0 = -250 - F_C + N_{B/C} \cos 10^\circ - 0.3 N_{B/C} \text{ Sen } 10^\circ$

$\therefore F_C = N_{B/C} (0.986 - 0.522) - 250$ ---- (1)

$\Sigma F_x = 0$

$0 = -N_C + N_{B/C} \text{ Sen } 10^\circ + 0.3 N_{B/C} \cos 10^\circ$

$F_C = 0.3 N_{B/C} \left(\frac{0.174 + 0.2958}{0.4698} \right)$

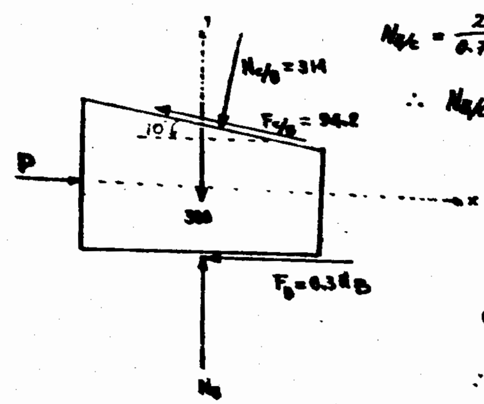
$\therefore F_C = 0.1409 N_{B/C}$ ----- (2)

igualando (1) y (2) tenemos:

$0.1409 N_{B/C} = 0.9338 N_{B/C} - 250$

$N_{B/C} = \frac{250}{0.7929} = 314$

$\therefore N_{B/C} = 314 \text{ Kg}$ $\quad \therefore F_{B/C} = 94.2 \text{ Kg}$



D.C.L. cuerpo B

$\Sigma F_y = 0$

$0 = -314 \times 0.986 + 94.2 \times 0.174 - 300 + N_B$

$\therefore N_B = 310 - 16.4 + 300$

$N_B = 593.6 \text{ Kg}$

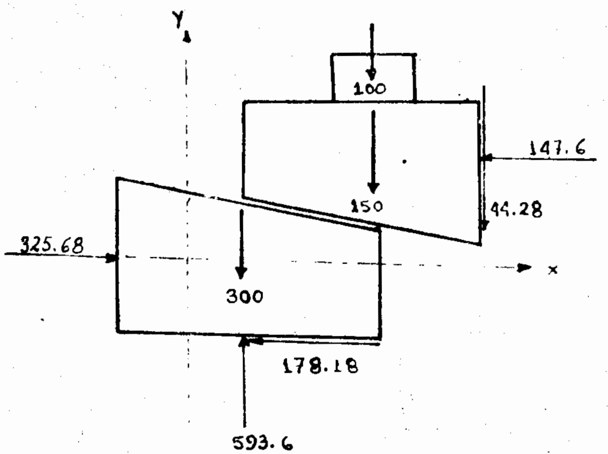
$\Sigma F_x = 0$

$P = 0.3 \times 593.6 + 94.2 \times 0.986 + 314 \times 0.174$

$P = 178.08 + 93 + 54.6$

$\therefore P = 325.68$ kg

Comprobación:



D.C.L. del conjunto

$F_C = 0.1409 \times 314 = 44.28$ Kg

$N_C = 3.33 \times 44.3 = 147.6$ Kg

$F_B = 0.3 \times 593.6 = 178.18$ Kg

$\Sigma F_x = 0$

$325.68 - 178.18 - 147.6 = 0$

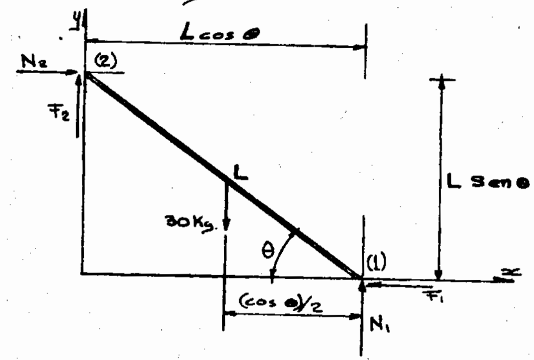
$0 = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$593.6 - 300 - 150 - 100 - 44.28 = 0$

$0 = 0$

16) Para obtener el valor de θ consideremos el D.C.L de la figura.



Primeramente:

$F_2 = \frac{1}{3} N_2$

$F_1 = \frac{1}{5} N_1$

como: $\Sigma F_x = 0$

así: $N_2 = F_1$

luego: $N_2 = \frac{1}{5} N_1$ ----- (1)

Además: $\Sigma F_y = 0$,

queda: $F_2 + N_1 = 30$,

y: $\frac{1}{3} N_2 + N_1 = 30$ ----(2)

Sustituyendo (1) en (2):

$\frac{1}{3}\frac{1}{5} N_1 + N_1 = 30$

$\Longrightarrow \frac{16}{15} N_1 = 30$

$\Longrightarrow N_1 = 28.125$ Kg

Teniéndose:

$$N_2 = \frac{28.125}{5}$$

$$N_2 = 5.625\ Kg.$$

y por consiguiente:

$$F_2 = 1.875\ Kg.$$

Tomando ahora momentos respecto a (1) y considerando $L=1$: $\sum M_{①} F = 0$,

Así:

$$N_2 \operatorname{sen}\theta + F_2 \cos\theta = 30\ \frac{\cos\theta}{2},$$

entonces:

$$5.625 \operatorname{sen}\theta + 1.875 \cos\theta = 15 \cos\theta$$

Dividiendo entre $\cos\theta$:

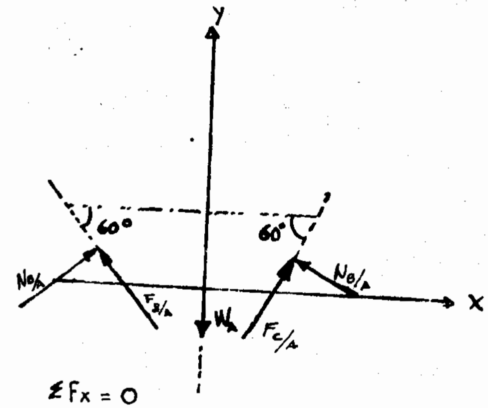
$$5.625 \tan\theta = 13.125$$

de manera que:

$$\tan\theta = \frac{13.125}{5.625} = 2.3333,$$

y: $$\theta_{min} = 66°50'$$

17). Para determinar el peso máximo de A, aislaremos este cuerpo en equilibrio.



Por definición para que (A) esté a punto de deslizar:

$$F_{B/A} = 0.35\ N_{B/A} \quad \text{---} ①$$

$$F_{C/A} = 0.35\ N_{C/A} \quad \text{---} ②$$

$\sum F_x = 0$

$$N_{B/A} \cos 30° - 0.35 N_{B/A} \cos 60° - N_{C/A} \cos 30° + 0.35 N_{C/A} \cos 60° = 0$$

$$N_{B/A}(\cos 30° - 0.35 \cos 60°) = N_{C/A}(\cos 30° - 0.35 \cos 60°)$$

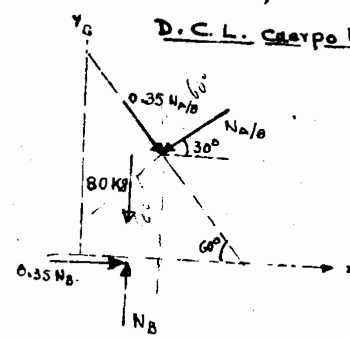
$$\therefore\ N_{B/A} = N_{C/A} \quad \text{---} ③$$

$\sum F_y = 0 \qquad 2N_{B/A}(\operatorname{Sen} 30° + 0.35 \operatorname{Sen} 60°) = W_A$

$$\therefore\ W_A = 1.606\ N_{B/A} \quad \text{---} ④$$

Como la figura es simétrica bastará con estudiar uno de los dos cuerpos de apoyo

D.C.L. Cuerpo B:



$\sum F_x = 0$

$$N_{A/B}(0.35 \cos 60° - \cos 30°) + 0.35 N_B = 0$$

$$\therefore\ N_B = \frac{0.691}{0.35} N_{A/B} \quad \text{---} ⑤$$

$\sum F_y = 0$

$$N_B - 80 - N_{A/B}(\operatorname{sen} 30° + 0.35 \operatorname{sen} 60°) = 0$$

$$\therefore\ N_B = 80 + 0.803\ N_{A/B} \quad \text{---} ⑥$$

como ⑤ = ⑥ tenemos:

$$\frac{0.691}{0.35} N_{A/B} = 80 + 0.803\ N_{A/B}$$

$$1.171\ N_{A/B} = 80 \quad \therefore\ N_{A/B} = 68.32 \quad \text{---} ⑦$$

de ⑦ en ④ tenemos: $$W_A = 109.72\ Kg.$$

Por simetría: $N_B = 0.5 W_A + W_B$

∴ $N_B = 0.5 W_A + 80$

y por ende:

$F_B = 0.35(0.1969 W_A + 80)$

Puesto que:

$\sum F_x = 0$

Es:

$0.07 W_A + 28 = W_A \cos 30° + 0.35 W_A \operatorname{sen} 30°$

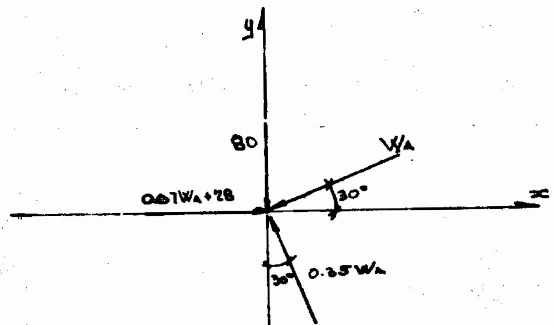
$= 0.866 W_A + 0.175 W_A$

Agrupando:

$28 = 0.971 W_A$

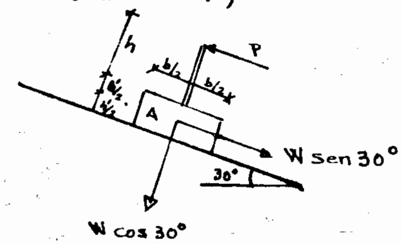
y: $W_A = \frac{28}{0.971}$,

$W_A = 28.835$ Kg. es el máximo pedido



D.C.L de B.

18) Suponiendo que el cuerpo esté a punto de voltear sobre la arista A, debe tenerse:

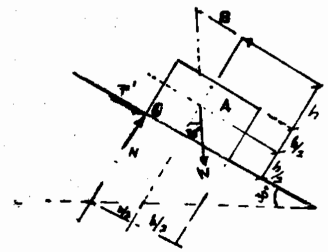


$\sum M_A F = 0$

Los datos son: b, h_1, P y W

o sea: $-P(h-h_1) + \frac{Wb}{2}\cos 30° + \frac{Wh_1}{2}\operatorname{sen} 30° = 0$

así: $P = \frac{0.433\, Wb + 0.25\, Wh_1}{(h+h_1)}$ ....(1)



D.C.L. del dispositivo

como la barra B se considera de masa despreciable, el peso (W) pasará por el centro geométrico del bloque (A)

∴ tomando momentos respecto a ① tenemos:

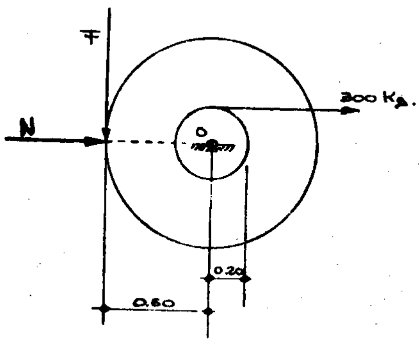
$\sum M_1 F = 0$

$0 = W\frac{b}{2}\cos 30° + W\frac{h_1}{2}\operatorname{sen} 30° - P(h+h_1)$

∴ $Ph = \frac{Wb}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{Wh_1}{2}\frac{1}{2} - Ph_1$

∴ $h = \frac{W}{P}(0.433\, b + 0.25\, h_1) - h_1$

19) Para determinar P, es necesario obtener el valor de la fuerza de fricción en el punto A.



se tienes

$\sum M_o F = 0$

Entonces:

$(300)(0.20) = 0.50\,F$

y:

$F = \frac{60}{0.5} = 120$ Kg.

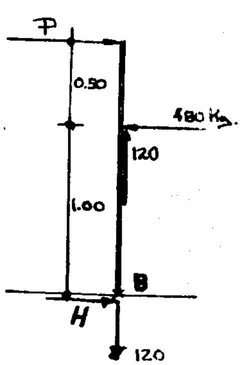
Ahora bien, como F es una fuerza de fricción y sabemos que:

$F = \mu N$

Es:

$N = \frac{F}{\mu} = \frac{120}{0.25} = 480$ Kg.

Para conocer P aislaremos la barra de la figura.



Se debe tener que:

$\sum M_B F = 0$

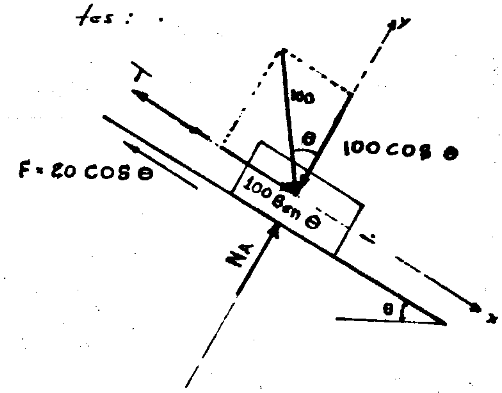
Entonces:

$1.50\,P = (480)(1.00)$

$P = \frac{480}{1.5} = 320$ Kg.

que es el valor mínimo pedido.

20) Considerando el cable inextensible y sin peso, el valor del ángulo θ resultará al estudiar los cuerpos A y B por separado, igualando las tensiones correspondientes:



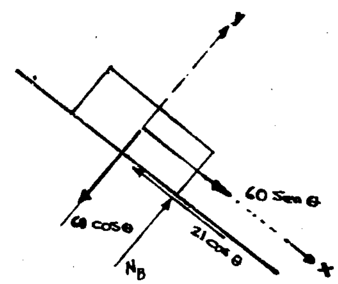
D.C.L de A

Como:

$\Sigma F_x = 0$

tenemos:

$T = 100\,\text{Sen}\,\theta - 20\cos\theta$ --- ①



D.C.L. de B

$\Sigma F_x = 0$

Desarrollando:

$T + 60\,\text{Sen}\,\theta = 21\cos\theta$

Substituyendo T por su valor

$100\,\text{Sen}\,\theta - 20\cos\theta + 60\,\text{Sen}\,\theta =$

$= 21\cos\theta$

$160\,\text{sen}\,\theta - 41\cos\theta = 0$

entonces:

$\tan\theta = \frac{41}{160} = 0.2562$

de la cual se tiene:

$\theta = 14°\,20'$

Finalmente en ① tenemos:

$T = 100 \times 0.248 - 20 \times 0.97 = 5.4$

$\therefore\ T = 5.4$ Kg

21) En primer término, determinemos los cosenos directores que corresponden a cada fuerza:

i) Para F_1:

$$\cos\alpha_1 = \cos\beta_1 = \cos\gamma_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774$$

ii) Para F_2:

$$\cos\alpha_2 = \cos\gamma_2 = \frac{2}{3} = 0.6667$$

y $$\cos\beta_2 = \frac{1}{3} = 0.3333$$

iii) Para F_3:

$$\cos\alpha_3 = \frac{2\sqrt{29}}{29} = 0.3714$$

$$\cos\beta_3 = \frac{3\sqrt{29}}{29} = 0.5571$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{4\sqrt{29}}{29} = 0.7428$$

iv) En cuanto a F_4:

$$\cos\alpha_4 = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0.4472$$

$$\cos\beta_4 = 0.0000$$

$$\cos\gamma_4 = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.8944$$

En estas condiciones apliquemos:

$$R_x = \sum F_x$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$R_z = \sum F_z$$

a través de la planilla de cálculo:

FUERZA	MAGNITUD (ton.)	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i$	$\cos\gamma_i$	F_x^i	F_y^i	F_z^i
F_1	100	0.5774	0.5774	0.5774	+57.74	+57.74	+57.74
F_2	250	0.6667	0.3333	0.6667	+166.67	+83.33	+166.67
F_3	50	0.3714	0.5571	0.7428	+18.57	+27.855	+37.14
F_4	25	0.4472	0.0000	0.8944	+11.18	0.00	+22.36
Σ	—	—	—	—	+254.16	+168.925	+283.91

Entonces:

$$|R| = \sqrt{(254.16)^2 + (168.925)^2 + (283.91)^2}$$

$$\Longrightarrow |R| = 416.70 \text{ ton}$$

y la dirección de tal resultante es la dada por:

$$\cos\alpha_R = \frac{254.16}{416.70} = 0.6099$$

$$\cos\beta_R = \frac{168.925}{416.70} = 0.4054$$

$$\cos\gamma_R = \frac{283.91}{416.70} = 0.6813$$

siendo obviamente su posición, la del punto de concurso que se define para el sistema.

22) La fuerza R que mantenga al punto C en equilibrio, será tal que sus proyecciones en los ejes cumplan:

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

Desarrollando cada una de estas ecuaciones:

$$80 + (0.7071)(150+60) - F_x = 0$$
$$50 + (0.7071)(60) \qquad - F_y = 0$$
y
$$100 + (0.7071)(150) \qquad - F_z = 0$$

Despejando:

$F_x = 178.49$ dina

$F_y = 92.42$ dina

$F_z = 206.06$ dina

Así, la fuerza equilibrante tiene por magnitud:

$$|F| = \sqrt{(178.49)^2 + (92.42)^2 + (206.06)^2} =$$
$$\Rightarrow |F| = 287.86 \text{ dina}$$

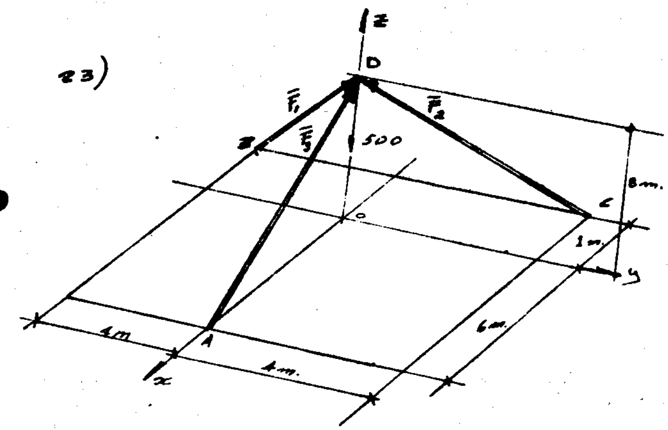
y por dirección:

$$\cos \alpha_R = \frac{178.49}{287.86} = 0.6200$$

$$\cos \beta_R = \frac{92.42}{287.86} = 0.3211$$

$$\cos \gamma_R = \frac{206.06}{287.86} = 0.7158$$

23)



$$|\overline{DC}| = |\overline{BD}| = \sqrt{(8)^2 + (1)^2 + (4)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 1 + 16}$$
$$= \sqrt{81}$$
$$|\overline{DC}| = |\overline{BD}| = 9 \text{ m.}$$
$$|\overline{AD}| = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64}$$
$$|\overline{AD}| = \sqrt{100} = 10 \text{ m.}$$

Recta $\overline{BD} = \vec{F_1}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{9} = 0.11$$

$$\cos\beta = \frac{4}{9} = 0.445$$

$$\cos\gamma = \frac{8}{9} = 0.89$$

Recta $\overline{CD} = \vec{F_2}$

$\cos\alpha = -\frac{1}{9} = 0.110$

$\cos\beta = \frac{-4}{9} = -0.445$

$\cos\gamma = \frac{8}{9} = 0.890$

Recta $\overline{AD} = \vec{F_3}$

$\cos\alpha = \frac{-6}{10} = -0.6$

$\cos\beta = 0$

$\cos\gamma = \frac{8}{10} = 0.8$

Recta $\overline{DO} = \vec{P}$

$\cos\alpha = 0$

$\cos\beta = 0$

$\cos\gamma = -1$

$$\bar{F_1} = \overline{BD}\,(0.11i + 0.445j + 0.89k)$$

$$\bar{F_2} = \overline{CD}\,(0.11i - 0.445j + 0.89k)$$

$$\bar{F_3} = \overline{AD}\,(-0.60i \qquad + 0.80k)$$

$$\bar{P} = \qquad -500k$$

$\therefore \Sigma F_x = 0$

$0.11\,\overline{BA} + 0.11\,\overline{CD} - 0.60\,\overline{AD} = 0 \quad \ldots (1)$

$\Sigma F_y = 0$

$0.445\,\overline{BD} - 0.445\,\overline{CD} = 0 \quad \therefore \quad \overline{BD} = \overline{CD} \quad \ldots (2)$

$\Sigma F_z = 0$

$0.89\,\overline{BD} + 0.89\,\overline{CD} + 0.80\,\overline{AD} - 500 = 0 \quad \ldots (3)$

(2) en (1) tenemos:

$0.22\,\overline{BD} = 0.60\,\overline{AD}$

$\therefore \overline{AD} = \frac{0.22\,\overline{BD}}{0.60} = 0.37\,\overline{BD}$

$\therefore \overline{AD} = 0.37\,\overline{BD}$

de (4) y (2) en (3)

$1.78\,\overline{BD} + 0.80 \times 0.37\,\overline{BD} = 500$

$1.78\,\overline{BD} + 0.296\,\overline{BD} = 500$

$\overline{BD} = \frac{500}{2.076} = 240.85\,Kg$

$\therefore \boxed{\overline{BD} = 240.85\,Kg}$

como $\overline{BD} = \overline{CD} = 240.85\,Kg$

substituyendo el valor de $\overline{BD}$ en (4) tenemos

$\overline{AD} = 0.37 \times 240.85 = 89.11\,Kg$

$\therefore \overline{AD} = 89.11\,Kg$

$$K_2 = \frac{500}{5.62} = 88.5$$

$$K_2 = 88.5 \ Kg.$$

Sustituyendo este valor en (3')

$$K_1 = 2.73 \ K_2 = 2.73 \, (88.5)$$

$$K_1 = 241.5 \ Kg.$$

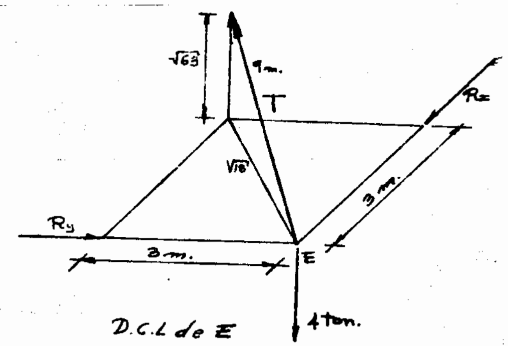
Finalmente tenemos como soluciones:

$\vec{C_{BD}} = 241.5 \, [-0.11, -0.445, 0.89]$ $\quad |\vec{C_{BD}}| = 241.5 \ Kg$

$\vec{C_{CD}} = 241.5 \, [-0.11, 0.445, 0.89]$ $\quad |\vec{C_{CD}}| = 241.5 \ Kg$

$\vec{C_{DA}} = 88.5 \, [0.60, 0, 0.80]$ $\quad |\vec{C_{DA}}| = 88.5 \ Kg$

24) Como la esfera se halla en equilibrio, a partir de su D.C.L. se tiene:



D.C.L de E

$$\sum F_z = 0$$

así:

$$T \frac{z}{9} = 4$$

como:

$$z = \sqrt{81 - 18} = \sqrt{63}$$

y:

$$T = 4.54 \ ton,$$

por otra parte:

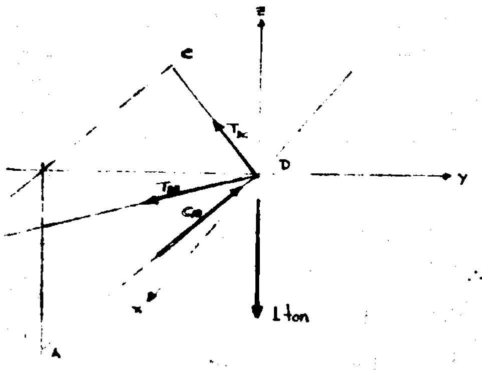
$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad T \frac{\sqrt{18}}{9} \frac{3}{\sqrt{18}} = R_x = R_y$$

y:

$$R_x = R_y = 1.51 \ ton$$

25) *Para determinar las fuerzas del dispositivo, aislaremos el punto D en equilibrio, considerando los números directores*



Números directores

$\overline{AD}\,[0,10,8]$; K_{AD} $\sqrt{100+64} = \sqrt{164} = 12.8$

$\overline{DB}\,[5,-10,0]$; $K_{DB} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 11.2$

$\overline{DC}\,[-4,-10,0]$; $K_{DC} = \sqrt{100+16} = \sqrt{116} = 10.8$

$\therefore\ \overline{C}_{AD} = C_{AD}(\quad 0.78j + 0.625k)$

$\overline{T}_{DB} = T_{DB}(0.446i - 0.892j \quad)$

$\overline{T}_{DC} = T_{DC}(-0.371i - 0.928j \quad)$

$\overline{W} = (\quad -k)$

$\Sigma F_x = 0$

$0.446\,T_{DB} - 0.371\,T_{DC} = 0 \qquad T_{DB} = \dfrac{0.371\,T_{DC}}{0.446} = 0.83\,T_{DC}$

$\therefore\ T_{DB} = 0.83\,T_{DC}$ ---- ①

$\Sigma F_y = 0$

$0.78\,C_{AD} - 0.892\,T_{DB} - 0.928\,T_{DC} = 0$

$0.78\,C_{AD} = T_{DC}(0.928 + 0.892 \times 0.83)$

$C_{AD} = 2.14\,T_{DC}$ ----- ②

$\Sigma F_z = 0$

$0.625\,C_{AD} \quad = 0 \quad \therefore \boxed{C_{AD} = 1.6\ \text{ton (c)}}$

En ②

$T_{DC} = 0.748$ ton (T)

de ③ en ①

$T_{DB} = 0.62$ ton (T)

26) *Procediendo de igual forma tendremos:*

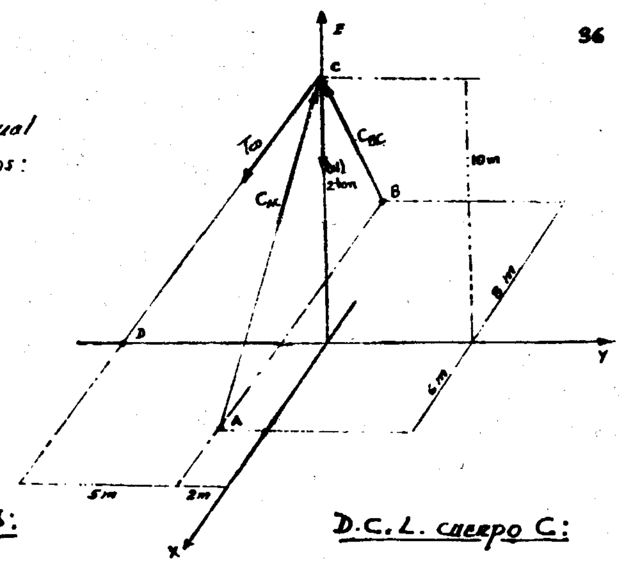
COORDENADAS

A(6, -2, 0)

B(-8, -2, 0)

C(0, 0, 10)

D(0, -7, 0)



Números Directores:

D.C.L. cuerpo C:

$\overline{AC}\,[-6,2,10]$ — $K_{\overline{AC}} = \sqrt{140} = 11.83$

$\overline{BC}\,[8,2,10]$ — $K_{\overline{BC}} = \sqrt{168} = 12.96$

$\overline{CD}\,[0,-7,-10]$ — $K_{\overline{CD}} = \sqrt{149} = 12.21$

$W\,[0,0,-1]$

$\Sigma F_x = 0$

$-\dfrac{6}{11.83}C_{AC} + \dfrac{8}{12.96}C_{BC} = 0 \quad ; \qquad 0.507\,C_{AC} = 0.617\,C_{BC}$

$C_{AC} = 1.217\,C_{BC}$ ---- ①

$\Sigma F_y = 0$

$\dfrac{2}{11.83}C_{AC} + \dfrac{2}{12.96}C_{BC} - \dfrac{7}{12.21}T_{CD} = 0$ tomando en cuenta ①

$0.169 \times 1.217\,C_{BC} + 0.154\,C_{BC} = 0.573\,T_{CD}$

$0.206\,C_{BC} + 0.154\,C_{BC} = 0.573\,T_{CD}$

$\therefore\ T_{CD} = 0.628\,C_{BC}$ ---- ②

$\Sigma F_z = 0$

$$\frac{10}{11.83} C_{AC} + \frac{10}{12.96} C_{BC} - \frac{10}{12.21} T_{CD} - 2 = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

de (1) y (2) en (3) tenemos:

$$C_{BC}(0.845 \times 1.217 + 0.772 - 0.819 \times 0.628) = 2$$

$$\therefore \quad 1.286\, C_{BC} = 2 \qquad \boxed{C_{BC} = 1.565 \text{ ton}} \ (C)$$

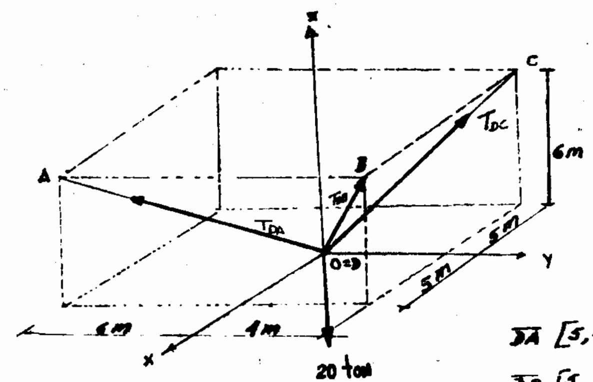
entonces:

$C_{AC} = 1.892$ ton (c)

$C_{BC} = 1.555$ ton (c)

$T_{CD} = 0.977$ ton (T)

27) Conviene aislar al punto D en equilibrio y tomarlo como origen, para determinar los números directores de las fuerzas del dispositivo. Como números directores aparecen:



A (5, -6, 6)

B (5, 4, 6)

C (-5, 4, 6)

Números directores:

$\overline{DA}\ [5, -6, 6]\ ;\ K_{DA} = \sqrt{97} = 9.87$

$\overline{DB}\ [5, 4, 6]\ ;\ K_{DB} = \sqrt{77} = 8.79$

$\overline{DC}\ [-5, 4, 6]\ ;\ K_{DC} = \sqrt{77} = 8.79$

$\Sigma F_x = 0$

$$\frac{5}{9.87} T_{DA} + \frac{5}{8.79} T_{DB} - \frac{5}{8.79} T_{DC} = 0$$

$$0.507\, T_{DA} + 0.569\, T_{DB} - 0.569\, T_{DC} = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

$\Sigma F_y = 0$

$$-\frac{6}{9.87} T_{DA} + \frac{4}{8.79} T_{DB} + \frac{4}{8.79} T_{DC} = 0$$

$$-0.608\, T_{DA} + 0.455\, T_{DB} + 0.455\, T_{DC} = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

$\Sigma F_z = 0$

$$\frac{6}{9.87} T_{DA} + \frac{6}{8.79} T_{DB} + \frac{6}{8.79} T_{DC} - 20 = 0$$

$$0.608\, T_{DA} + 0.683\, T_{DB} + 0.683\, T_{DC} - 20 = 0 \quad \cdots\cdots (3)$$

de ② tenemos:

$T_{DA} = 0.748 T_{DB} + 0.748 T_{DC}$ ---- ④

de ④ en ①

$0.378 T_{DB} + 0.378 T_{DC} + 0.569 T_{DB} - 0.569 T_{DC} = 0$

$0.947 T_{DB} = 0.191 T_{DC}$

$\therefore T_{DB} = 0.202 T_{DC}$ ---- ⑤

de ⑤ en ④ tenemos:

$T_{DA} = 0.151 T_{DC} + 0.748 T_{DC}$

$\therefore T_{DA} = 0.899 T_{DC}$ --- ⑥

de ⑤ y ⑥ en ③ obtenemos:

$T_{DC}(0.547 + 0.138 + 0.685) = 20$

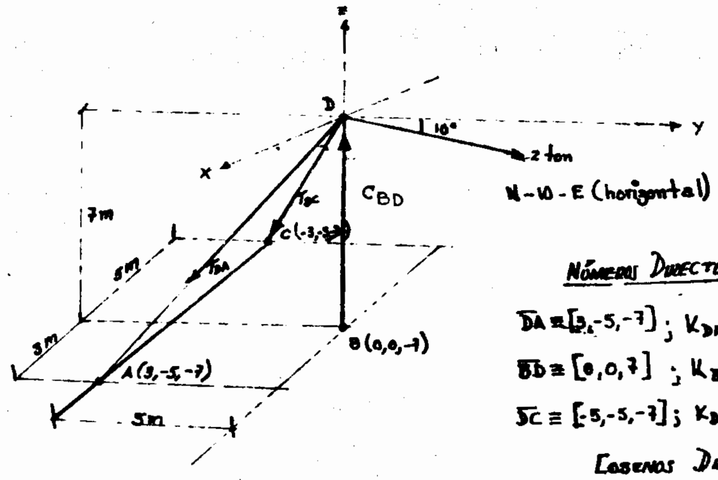
$\therefore T_{DC} = 14.62$ ton (T)

así también tenemos que:

$T_{DA} = 13.15$ ton (T)

y $T_{DB} = 2.95$ ton (T)

28)



Números Directores:

$\overline{DA} \equiv [3,-5,-7]$; $K_{DA} = \sqrt{83} = 9.11$

$\overline{BD} \equiv [0,0,7]$; $K_{BD} = \sqrt{49} = 7$

$\overline{DC} \equiv [-5,-5,-7]$; $K_{DC} = \sqrt{99} = 9.95$

Cosenos Directores

$\bar{e}_{DA} \equiv [0.329, -0.549, -0.768]$

$\bar{e}_{BD} \equiv [0, 0, 1]$

$\bar{e}_{DC} \equiv [-0.503, -0.503, -0.704]$

$\bar{e}_2 \equiv [0.174, 0.985, 0]$

$\Sigma F_x = 0$

$0.329 T_{DA} - 0.503 T_{DC} + 0.174 \times 2 = 0$

$\therefore T_{DA} = 1.529 T_{DC} - 1.058$ --- ①

$\Sigma F_y = 0$

$-0.549 T_{DA} - 0.503 T_{DC} + 0.985 \times 2 = 0$

$\therefore T_{DA} = 3.588 - 0.916 T_{DC}$ --- ②

$\Sigma F_z = 0$

$-0.768 T_{DA} + C_{BD} - 0.704 T_{DC} = 0$ tomando en cuenta ①

$C_{BD} = 0.704 T_{DC} + 0.768(1.529 T_{DC} - 1.058)$

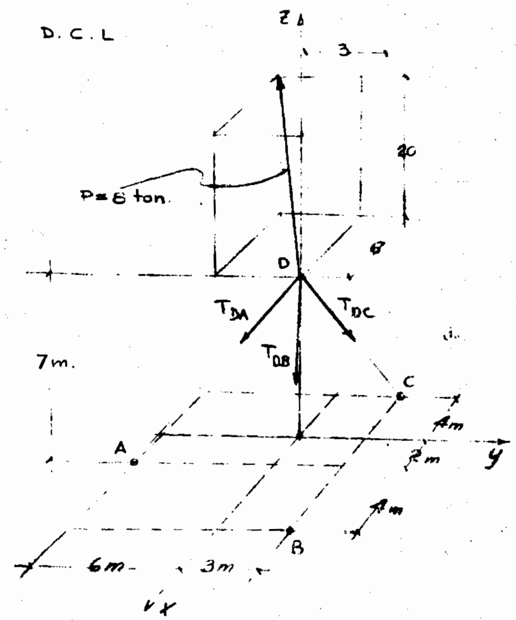
$\therefore C_{BD} = 1.878 T_{DC} - 0.813$ ---- ③

de ① en ② $2.445 T_{DC} = 4.646$; $T_{DC} = 1.900$ ton (T)

en ① $T_{DA} = 1.847$ ton (T)

en ③ $C_{BD} = 2.755$ ton (C)

29) D.C.L



Coordenadas:

A(2,-6,0)
B(6,3,0)
C(-4,3,0)
D(0,0,7)

Números Directores

$\overline{DA} = [2,-6,-7]$

$k_{DA} = \sqrt{89} = 9.43$

$\overline{DB} = [6,3,-7]$

$k_{DB} = \sqrt{94} = 9.70$

$\overline{DC} = [-4,3,-7]$

$k_{DC} = \sqrt{74} = 8.60$

$P = [-6,-3,20]$

$k_P = \sqrt{445} = 21.10$

Cosenos Directores

$\bar{e}_{DA} = [0.212, -0.636; -0.742]$

$\bar{e}_{DB} = [0.619,\ 0.309,\ 0.722]$

$\bar{e}_{DC} = [-0.465,\ 0.349, -0.819]$

$\bar{e}_{P} = [-0.284, -0.142,\ 0.948]$

$\Sigma F_x = 0$

$0.212\ T_{DA} + 0.619\ T_{DB} - 0.465\ T_{DC} - 0.284 \cdot 8 = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0$

$-0.636\ T_{DA} + 0.309\ T_{DB} + 0.349\ T_{DC} - 0.142 \cdot 8 = 0$ (2)

$\Sigma F_z = 0$

$-0.742\ T_{DA} - 0.722\ T_{DB} - 0.814\ T_{DC} + 0.948 \cdot 8 = 0$ ——— (3)

De (1)

$T_{DA} = 2.19\ T_{DC} + 10.72 - 2.93\ T_{DB}$ ——— (4)

De (2)

$T_{DA} = 0.486\ T_{DB} + 0.549\ T_{DC} - 1.786$ ——— (5)

De (3)

$T_{DA} = 10.22 - 0.973\ T_{DB} - 1.097\ T_{DC}$ ——— (6)

(4) = (5)

$2.19\ T_{DC} + 10.72 - 2.93\ T_{DB} = 0.486\ T_{DB} + 0.549\ T_{DC} - 1.786$

$1.641\ T_{DC} = 3.416\ T_{DB} - 12.506$

$T_{DC} = 2.082\ T_{DB} - 7.621$ ——— (7)

De (1)

$T_{DC} = 0.456\ T_{DA} + 1.331\ T_{DB} - 4.886$ ——— (8)

(8) en (2)

$-0.636\ T_{DA} + 0.309\ T_{DB} + 0.349(0.456\ T_{DA} + 1.331\ T_{DB} - 4.886) - 1.336 = 0$

$-0.477\ T_{DA} + 0.774\ T_{DB} - 2.841 = 0$ ——— (9)

(8) en (3)

$-0.742\ T_{DA} - 0.722\ T_{DB} - 0.814(0.456\ T_{DA} + 1.331\ T_{DB} - 4.886) + 7.584 = 0$

$-1.113\ T_{DA} - 1.805\ T_{DB} + 11.561 = 0$

$\therefore\ T_{DA} = 10.387 - 1.622\ T_{DB}$ ——— (10)

(10) en (9)

$-0.477(10.387 - 1.622\ T_{DB}) + 0.774\ T_{DB} - 2.841 = 0$

$-4.955 + 0.774\ T_{DB} + 0.774\ T_{DB} - 2.841 = 0$

$1.548\ T_{DB} = 7.796$

$\therefore\ \boxed{T_{DB} = 5.036 \text{ ton}}$

en (10)

$T_{DA} = 10.387 - 1.622 \cdot 5.036$

$= 10.387 - 8.168 \quad \therefore\ T_{DA} = 2.219 \text{ ton.}$

en (8)

$$T_{DC} = 0.456 \times 2.219 + 1.331 \times 5.036 - 4.886$$

$$= 1.012 + 6.703 - 4.886 \quad \therefore \quad \boxed{T_{DC} = 2.829 \text{ ton}}$$

Comprobación

(4) = (6)

$$2.19\,T_{DC} + 10.72 - 2.930\,T_{DB} = 10.22 - 0.973\,T_{DB} - 1.097\,T_{DC}$$

$$3.287\,T_{DC} + 0.50 - 1.957\,T_{DB} = 0 \quad \text{------} \quad (11)$$

(7) en (11)

$$6.844\,T_{DB} - 25.05 + 0.50 - 1.957\,T_{DB} = 0$$

$$4.887\,T_{DB} = 24.55$$

$$\therefore \boxed{T_{DB} = 5.02 \text{ ton.}}$$

en (7)

$$T_{DC} = 10.451 - 7.621 \quad \boxed{T_{DC} = 2.83 \text{ ton}}$$

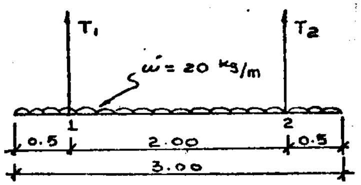
en (4)

$$T_{DA} = 6.198 + 10.72 - 14.70 \quad \therefore \quad \boxed{T_{DA} = 2.22 \text{ ton.}}$$

SERIE 3

EQUILIBRIO DEL CUERPO RIGIDO
(Soluciones)

1) Diagrama de cuerpo libre de la lámpara:



Estableciendo las ecuaciones de equilibrio, se obtienen las tensiones.

En efecto:

$\Sigma M_1 F = 0$ .... (1)

$\Sigma M_2 F = 0$ .... (2)

De (1)

$20(3)(1) - T_2(2) = 0$

$60 - 2T_2 = 0$

$\Longrightarrow T_2 = 30$ kg

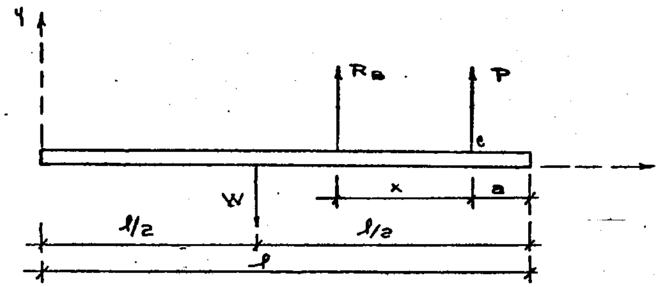
De (2)

$20(3)(1) - T_1(2) = 0$

$60 - 2T_1 = 0$

$\Longrightarrow T_1 = 30$ kg

2) Haciendo el diagrama de cuerpo libre de la viga:



De las condiciones de equilibrio:

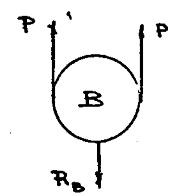
$\Sigma F_y = 0$

$R_B + P - W = 0$ ...... (1)

$\Sigma M_e F = 0$

$W(l/2 - a) - R_B(x) = 0$ .... (2)

Tomando en cuenta el diagrama de cuerpo libre de la polea B Tenemos:



De $\Sigma F_y = 0$

$\Longrightarrow R_B = 2P$

Sustituyendo el valor de R_B en las ecuaciones (1) . (2) tenemos:

$$2P + P - W = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\Longrightarrow P = \frac{W}{3}$$

$$W(l/2 - a) - 2P(x) = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$W(l/2 - a) - \frac{2}{3} W x = 0$$

$$x = (l/2 - a)\frac{3}{2}$$

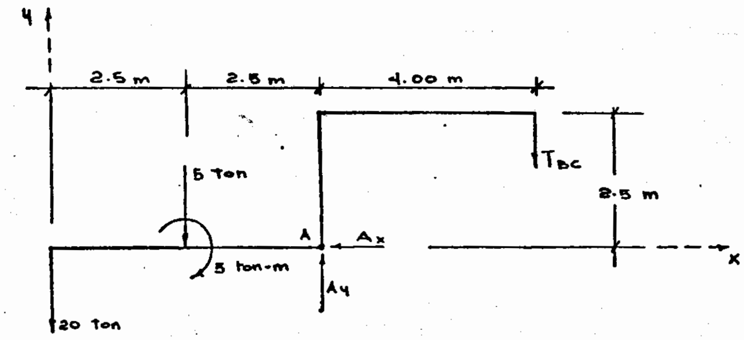
$$\Longrightarrow x = \frac{3}{4} l - \frac{3}{2} a$$

En resúmen :

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \frac{W}{3} \\ x &= \frac{3}{4} l - \frac{3}{2} a \end{aligned}}$$

Observación.- La fuerza P se transmite íntegra a través del eje del cable que pasa por las poleas.

3) Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



De las condiciones de equilibrio:

$\circlearrowright\ \sum M_A F = 0$

$$-20(5) - 5(2.5) + 5 + T_{BC}(4) = 0$$

$$-100 - 12.5 + 5 + 4T_{BC} = 0$$

$$T_{BC} = \frac{112.5 - 5}{4}$$

$$\Longrightarrow T_{BC} = 26.875 \text{ Ton}$$

De $\sum F_y = 0$

$$-20 - 5 + A_y - 26.875 = 0$$

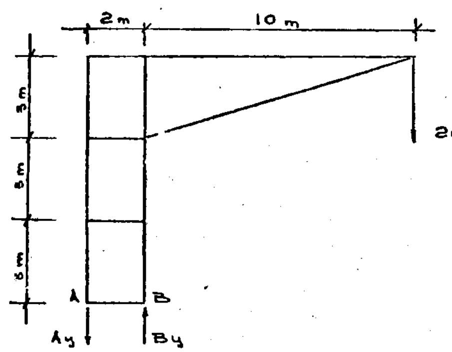
$$\Longrightarrow A_y = 51.875 \text{ ton.}$$

De $\sum F_y = 0$

$$\Longrightarrow A_x = 0$$

Obsérvese que el punto A se comporta como apoyo libre.

4) Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



De las condiciones de equilibrio:

$\circlearrowleft$ $\Sigma M_A F = 0$

$2 B_y - 20(12) = 0$

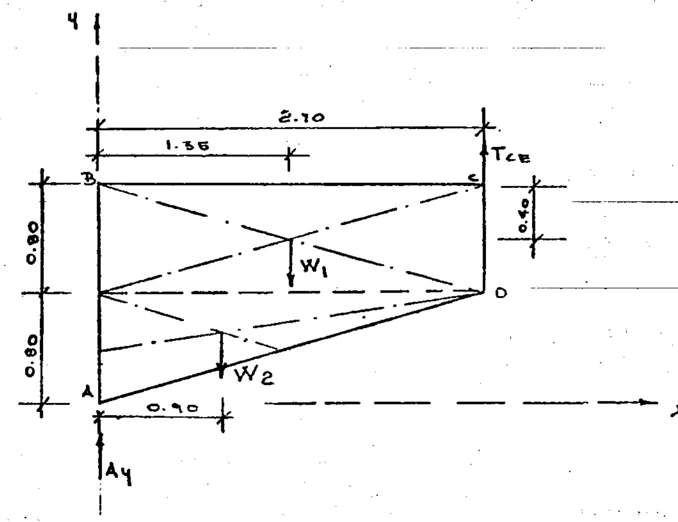
$\Longrightarrow B_y = 120$ ton.

$\circlearrowleft$ $\Sigma M_B F = 0$

$2 A_y - 20(10) = 0$

$\Longrightarrow A_y = 100$ ton.

5) Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Las magnitudes de W_1 y W_2 se obtienen multiplicando el peso uniformememente distribuído en el area por el area de cada una de las figuras elementales.

$W_1 = 500 \times 0.80 \times 2.70 = 1080$ kg

$W_2 = 500 \times \dfrac{0.80 \times 2.70}{2} = 540$ kg

De las condiciones de equilibrio:

$\circlearrowleft$ $\Sigma M_A F = 0$

$2.70\ T_{CE} - 1.35\ (1080) - 540\ (0.90) = 0$

$$T_{CE} = \frac{1458 + 486}{2.70}$$

$$\Longrightarrow T_{CE} = 720 \text{ kg}$$

$$\Sigma M_{CF} = 0$$

$$-A_y(2.70) + W_1(1.35) + W_2(1.80) = 0$$

$$A_y = \frac{1080(1.35) + 540(1.80)}{2.70}$$

$$A_y = \frac{2431}{2.70}$$

$$\Longrightarrow A_y = 900 \text{ kg}$$

Comprobación:

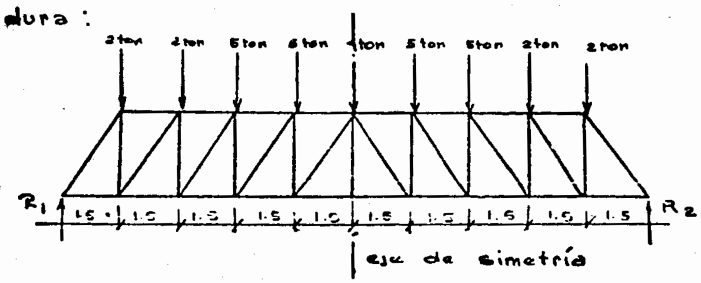
$$\Sigma F_y = 0$$

$$720 + 900 - 1080 - 540 = 0$$

$$1620 - 1620 = 0$$

Nota.- El sistema de fuerzas que se presenta, es de componentes paralelas en el plano.

16) Diagrama de cuerpo libre de la Armadura:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$-2-2-5-5-4-5-5-2-2 + R_1 + R_2 = 0$$

$$R_1 + R_2 = 32 \text{ ton} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\Sigma M_{1F} = 0$$

$$2(1.5) + 2(3) + 5(4.5) + 5(6) + 4(7.5) + 5(9) + 5(10.5) +$$

$$+ 2(12) + 2(13.5) - R_2(15) = 0$$

$$R_2 = \frac{240}{15}$$

$$\Longrightarrow R_2 = 16 \text{ ton.}$$

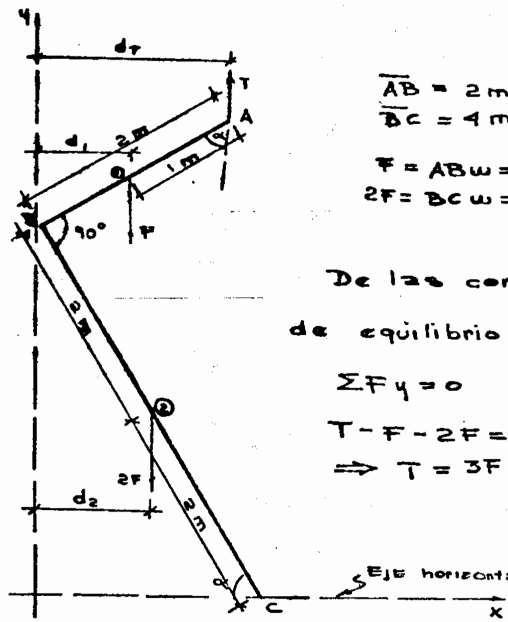
Sustituyendo el valor de R_2 en la ecuación (1)

$$R_1 + 16 = 32$$

$$\Longrightarrow R_1 = 16 \text{ ton.}$$

Nota.- No debe existir reacción horizontal en el apoyo (1) por tratarse de un sistema de fuerzas paralelas al eje "y"

7) Diagrama de cuerpo libre:



$\overline{AB} = 2m = l$
$\overline{BC} = 4m = 2l$

$F = AB\,w = 2 \times 250 = 500\,kg$
$2F = BC\,w = 4 \times 250 = 1000\,kg$

De las condiciones de equilibrio:

$\Sigma F_y = 0$

$T - F - 2F = 0$

$\Rightarrow T = 3F = 1500\ kg$

Aplicando el teorema de Varignion y tomando el punto B como centro de momentos:

$$T d_T = F d_1 + 2F d_2$$

como:

$d_T = 2 \operatorname{sen} \alpha$

$d_1 = 1 \operatorname{sen} \alpha$

$d_2 = 2 \cos \alpha$

$3F(2 \operatorname{sen} \alpha) = F \operatorname{sen} \alpha + 2F(2 \cos \alpha)$

$6F \operatorname{sen} \alpha = F \operatorname{sen} \alpha + 4F \cos \alpha$

$5F \operatorname{sen} \alpha = 4F \cos \alpha$

$5 \tan \alpha = 4$

$\tan \alpha = 0.8$

$\Rightarrow \alpha = 38.7^\circ = 38^\circ 42'$

Y en resumen:

$$\boxed{\begin{aligned} T &= 1500\ kg \uparrow \\ \alpha &= 38^\circ\ 42' \end{aligned}}$$

Comprobación:

$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} 38^\circ 42' = 0.625$

$\cos \alpha = \cos 38^\circ 42' = 0.780$

$\Rightarrow d_T = 2(0.625) = 1.250$

$d_1 = 0.625$

$d_2 = 2(0.780) = 1.560$

$F(0.625) + 2F(1.560) = 3.745\,F$

$3F(1.125) = 3.745\,F$

$3.745\,F \equiv 3.745\,F$

8) De los datos geométricos de la figura:

$\overline{AB} = 5 \text{ m}$

Del Triángulo ADB

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2}$$

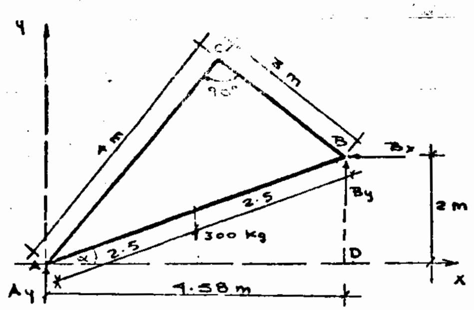
$$\overline{AD} = (25.00 - 4.00)^{1/2}$$

$$\overline{AD} = 21^{1/2}$$

$$\overline{AD} = 4.58 \text{ m}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{4.58}{5.00} = 0.917$$

Considerando el diagrama de cuerpo libre del conjunto y aplicando las condiciones de equilibrio:



$$\circlearrowleft \quad \Sigma M_B F = 0$$

$$-4.58\, A_y + (2.5)(0.917)(300) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = \frac{750\,(0.917)}{4.85} = 150 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Rightarrow B_x = 0$$

$$\circlearrowleft \quad \Sigma M_A F = 0$$

$$4.58\, B_y - (2.5)(0.917)(300) = 0$$

$$\Rightarrow B_y = 1500 \text{ kg}$$

Y en resumen:

$$\boxed{\begin{aligned} A_y &= 150 \text{ kg} \\ B_y &= 150 \text{ kg} \\ B_x &= 0 \end{aligned}}$$

Comprobación:

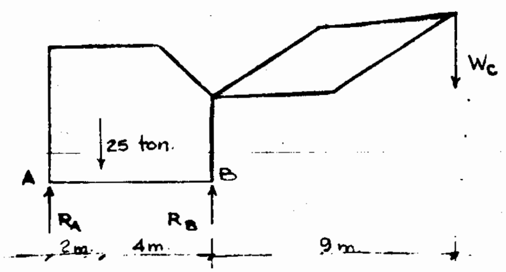
$$150 + 150 = +300$$

$$-300 = -300$$

$$0 \equiv 0$$

Nota.- Las reacciones se pueden obtener por la regla práctica del problema 6, debido a que el sistema de fuerzas que se tiene es de componentes paralelas.

a) Considerando el diagrama de cuerpo libre del conjunto en equilibrio:



El sistema de fuerzas que se presenta es un sistema cuyas componentes son paralelas, para el cual, la estática nos proporciona 2 ecuaciones escalares, existiendo una ecuación adicional para

$R_{B\,máx}$ · 30 ton.

$\Sigma M_A F = 0$ . . . . . (1)

$\Sigma F_y = 0$ . . . . . (2)

$R_{B\,max} = 30$ ton . . . . (3)

De (1) y (3) tenemos

$\Sigma M_A F = 2 \cdot 25 - 6 \times 30 + 15 W_c = 0$

$\therefore \; W_c = \frac{130}{15} = 8.67$ ton.

Substituyendo W_c en (2) tenemos:

$-25 - W_c + R_A + R_B = 0$

$R_A = 25 + 8.67 - 30.$

$R_A = 3.67$ ton.

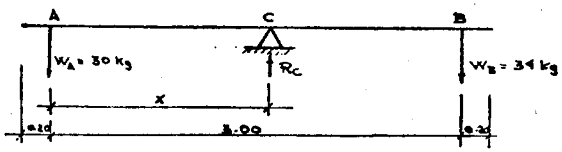
En resumen tenemos:

$R_A = 3.67$ ton

$R_B = 30.00$ ton

$W_c = 8.67$ ton.

10) Diagrama de cuerpo libre :



El sistema de fuerzas que se presenta es de componentes paralelas, por lo tanto :

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-30 - 34 + R_C = 0$$

$$\Rightarrow R_C = 64 \text{ kg}$$

$$\circlearrowleft \; \Sigma M_A F = 0$$

$$-34(3) + R_C(\quad) = 0$$

$$-102 + 64x = 0$$

$$x = \frac{102}{64}$$

$$\Rightarrow x = 1.595 \text{ m.}$$

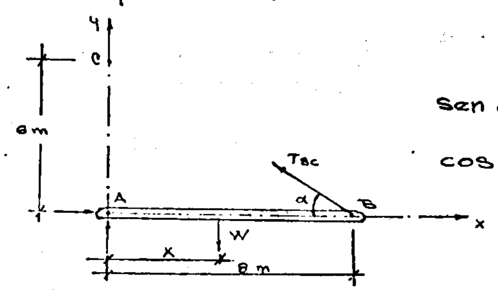
Y en resúmen :

$R_C = 64$ kg ↑
$X = 1.595$ m (medidos hacia la derecha de "A")

El par equilibrado puede ser girado en su plano, sin que se altere el efecto externo que produce en el subibaja, por lo cual no es necesario la posición horizontal para que continúe el equilibrio.

Sin embargo, debe aclararse que es necesario que en el apoyo "C" se genere una fuerza de fricción suficiente para evitar el deslizamiento producido por las componentes tangenciales a $\overline{AB}$ que provocarían el deslizamiento de la misma. Este mismo efecto se logra articulando el apoyo "C".

11) Diagrama de cuerpo libre de la pieza AB :



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

De $\Sigma F_x = 0$ tenemos:

$$H_A - T_{BC} \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow H_A = \frac{4}{5} T_{BC} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

También:

$$\circlearrowleft \Sigma M_A F = 0$$

$$8 T_{BC} \operatorname{sen}\alpha - W x = 0$$

$$8 T_{BC} \left(\frac{3}{5}\right) - W x = 0$$

$$\frac{24}{5} T_{BC} = W x$$

$$\Rightarrow T_{BC} = \frac{5 W x}{24} \quad \ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$H_A = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{24}\right) W x$$

$$\Rightarrow H_A = \frac{1}{6} W x$$

Y de: $\Sigma F_y = 0$

$$V_A - W + \frac{3}{5} T_{BC} = 0$$

$$V_A = W - \frac{3}{5} T_{BC} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Sustituyendo (2) en (3)

$$V_A = W - \frac{3}{5}\left(\frac{5}{24}\right) W x$$

$$V_A = W - \frac{1}{8} W x$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{W}{8}(8 - x)$$

Resúmen de resultados:

$V_A = \frac{W}{8}(8 - x) \uparrow$
$H_A = \frac{1}{6} W x \rightarrow$
$T_{BC} = \frac{5}{24} W x$

Los valores numéricos para $W = 10$ ton son:

$$V_A = \frac{10}{8}(8 - x)$$

$$H_A = \frac{10}{6} x$$

$$T_{BC} = \frac{50}{24} x$$

Dentro del intervalo $0 \leq x \leq 8$:

Para $x = 0$

$$V_A = 10 \text{ ton}$$

$$H_A = 0$$

$$T_{BC} = 0$$

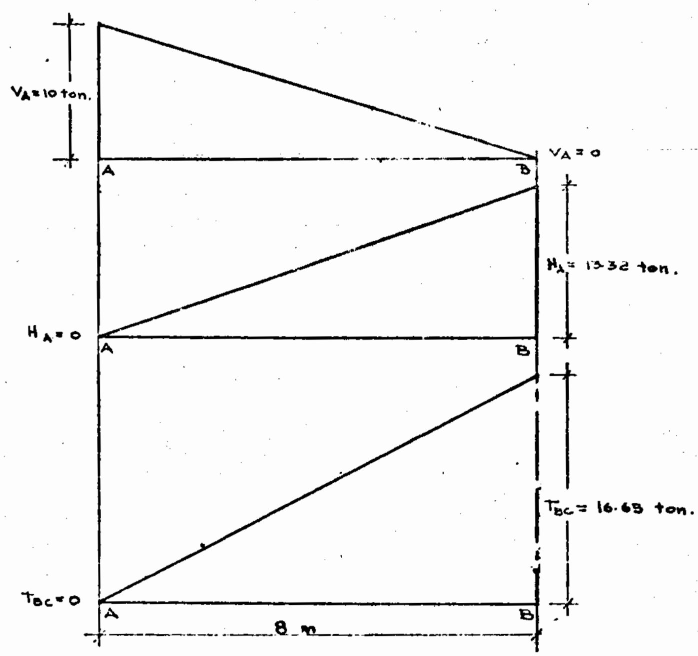
Para $x = 8$:

$V_A = 0$

$H_A = 13.32$ ton.

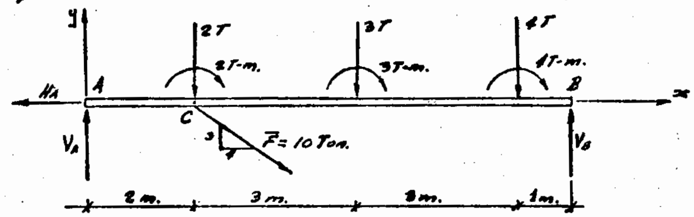
$T_{BC} = 16.65$ ton.

Los módulos de las reacciones son funciones lineales de la posición de la carga externa, y pueden representarse gráficamente como se indica a continuación :



Estas gráficas nos dan las magnitudes de las reacciones para cualquier posición de la carga y reciben el nombre de "Líneas de influencia".

12) Diagrama de cuerpo libre de la pieza AB



Tomando en cuenta :

$$\circlearrowleft + \sum M_A F = 0$$

y desarrollando :

$$9V_B - 4 - 2 - \frac{3}{5}\,10(2) - 3(5) - 3 - 4(8) - 4 = 0$$

$$9V_B - 4 - 2 - 12 - 15 - 3 - 32 - 4 = 0$$

$$9V_B = 72$$

$$V_B = \frac{72}{9} \quad \Longrightarrow \quad V_B = 8 \text{ ton.}$$

A su vez, de :

$$\circlearrowleft + \sum M_B F = 0$$

Tenemos :

$$-9V_A + 2(7) - 2 + 6(7) + 3(4) - 3 - 4 + 4 = 0$$

$$9V_A = 2(7) - 2 + 42 + 12 - 3 - 4 + 4$$

$$9V_A = 63$$

$$V_A = \frac{63}{9} \implies V_A = 7 \text{ ton.}$$

Y en fin, de:

$$\sum F_x = 0$$

obtenemos:

$$-H_A + 10\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$H_A = 8 \text{ ton}$$

Y en resúmen:

$\uparrow V_A = 7$ ton.

$\leftarrow H_A = 8$ ton.

$\uparrow V_B = 8$ ton.

Comprobación.

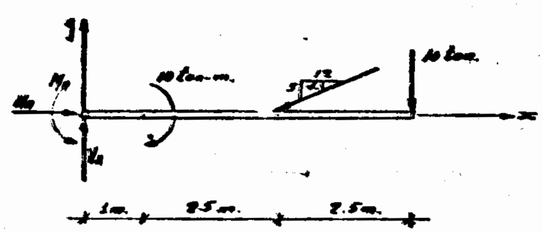
$$\circlearrowleft + \sum M_B F = 0$$

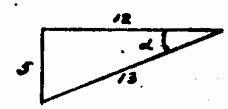
$$-2-3-4-2(7)-3(3)-6(4)+8(7)=0$$

$$-2-3-4-14-9-24+56=0$$

$$0 \equiv 0$$

13) Diagrama de cuerpo libre de la viga:





$$\operatorname{Sen} \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\operatorname{Cos} \alpha = \frac{12}{13}$$

Aplicando la condición de equilibrio:

$$\circlearrowleft + \sum M_A F = 0$$

$$M_A - 10 - 13\left(\frac{5}{13}\right)(3.5) - 10(6) = 0$$

$$M_A = 10 + 17.5 + 60 = 87.5 \text{ ton-m.}$$

$$\implies M_A = 87.5 \text{ ton-m.}$$

Asimismo:

$$\uparrow + \sum F_y = 0$$

proporciona:

$$V_A - 10 - 13\left(\frac{5}{13}\right) = 0$$

$$V_A = 10 + 5 = 15 \text{ ton}$$

$$\implies V_A = 15 \text{ ton.}$$

y:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0$$

da:

$$H_A - 13\left(\frac{12}{13}\right) = 0$$

$$\implies H_A = 12 \text{ ton}$$

Y en resúmen:

$\rightarrow H_A = 12$ ton.

$\uparrow V_A = 15$ ton.

$\circlearrowleft M_A = 87.5$ ton-m.

Para comprobar, veamos si se verifica:

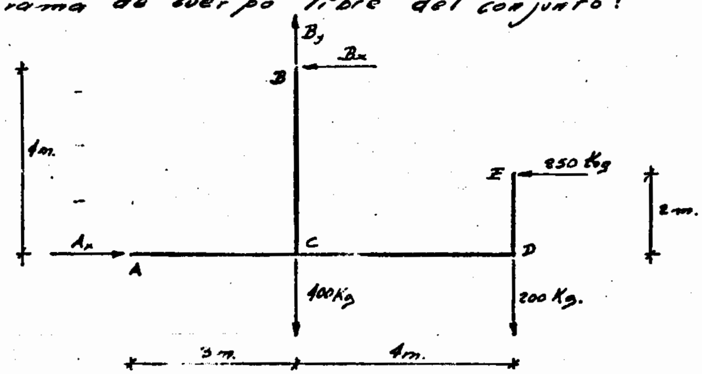
$$\sum M_c F = 0,$$

en donde C es el punto de aplicación de la carga indicada. Tenemos:

$$87.5 - 10 - 52.5 - 25 = 0$$

y: $$35 - 35 \equiv 0$$

14) Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Aplicando:

$$\circlearrowleft + \sum M_A F = 0$$

tenemos:

$$3B_y + 4B_x - 400(3) - 200(7) + 250(2) = 0$$

$$3B_y + 4B_x - 1200 - 1400 + 500 = 0$$

$$3B_y + 4B_x - 2600 + 500 = 0$$

$$3B_y + 4B_x - 2100 = 0 \quad \text{--------------} (1)$$

Análogamente de:

$$\circlearrowleft + \sum M_B F = 0$$

resulta:

$$4A_x - 200(4) - 250(2) = 0$$

$$4A_x - 800 - 500 = 0$$

$$4A_x - 1300 = 0$$

$$\Longrightarrow A_x = 325 \text{ Kg.}$$

Y de:

$$\sum F_y = 0$$

queda:

$$B_y - 400 - 200 = 0$$

$$\Longrightarrow B_y = 600 \text{ Kg.}$$

sustituyendo el valor de B_y en la ecuación (1)

$$3(600) + 4B_x - 2100 = 0$$

$$1800 + 4B_x - 2100 = 0$$

$$4B_x - 300 = 0$$

$$B_x = \frac{300}{4}$$

y: $$B_x = 75 \text{ Kg.}$$

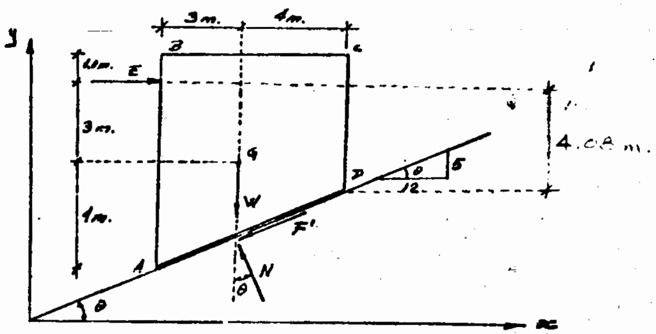
Resúmen de resultados:

$\rightarrow A_x = 325$ Kg

$\leftarrow B_x = 75$ Kg

$\uparrow B_y = 600$ Kg

15) Diagrama de cuerpo libre del bloque:



En el caso:

$\text{sen}\ \theta = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{12}{13}$

$\mu = 0.3$

y: $W = 10$ ton.

De: $\Sigma F_x = 0$

tenem :

$$E - F'\cos\theta - N\ \text{sen}\ \theta = 0 \ \ldots\ldots\ (1)$$

Análogamente, tomando en cuenta:

$\Sigma F_y = 0$

obtenemos:

$$-W + N\cos\theta - F'\text{sen}\ \theta = 0 \ \ldots\ldots\ (2)$$

y en fin, aplicando

$+\!\circlearrowleft\ \Sigma M_D F = 0$

Queda:

$$4.08\,E - W(4) = 0 \ \ldots\ldots\ (3)$$

pues cuando el bloque está a punto de voltear la reacción total del plano de sustentación pasa por D, por lo que F' y N no tienen momentos respecto a este punto.

Por otra parte tenemos la siguiente ecuación de fricción:

$F' = \mu N$

$$F' = 0.3\,N \ \ldots\ldots\ (4)$$

sustituyendo (4) en (1)

$E - 0.3N\cos\theta - N\ \text{sen}\ \theta = 0$

$E = N(0.3\cos\theta + \text{sen}\ \theta)$

$E = N(0.3\ \frac{12}{13} + \frac{5}{13})$

$E = \frac{N}{13}(3.6 + 5)$

$$E = \frac{N}{13}(8.6) \ \ldots\ldots\ (5)$$

De (2) y (4)

$-W + N\cos\theta - 0.3\,N\ \text{sen}\ \theta = 0$

$N(\cos\theta - 0.3\ \text{sen}\ \theta) = W$

$N = \frac{W}{\cos\theta - 0.3\ \text{sen}\ \theta}$

$N = \frac{13\,W}{12 - 1.5} = \frac{13}{10.6}\,W$

$N = 12.38$ ton.

Sustituyendo N en (5)

$$E = \frac{12.38}{13}(8.6)$$

$$E = 8.19 \text{ ton} \longrightarrow$$

De la ecuación (3)

$$E = \frac{4}{1.08} W$$

$$E = \frac{10}{1.08}$$

$$E = 9.8 \text{ ton}$$

Para que el cuerpo esté a punto de deslizar se tiene que aplicar una fuerza de magnitud igual a 8.19 ton.

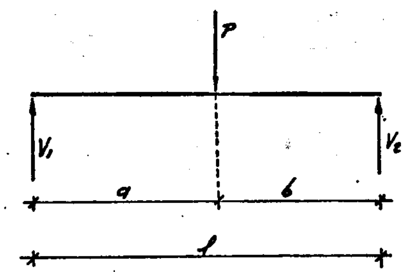
Para que el mismo cuerpo esté a punto de voltear se requiere una fuerza de magnitud 9.8 ton.; como 9.8 ton. > 8.19 ton., si E se aplica gradualmente acontece en primer término el deslizamiento.

Resúmen de resultados:

i) $E = 8.19$ ton $\longrightarrow$

ii) $E = 9.80$ ton $\longrightarrow$

16) 1



De: $\sum M_1 F = 0$

tenemos:

$$-Pa + V_2 l = 0$$

$$V_2 = \frac{Pa}{l}$$

Asimismo para:

$$\sum M_2 F = 0$$

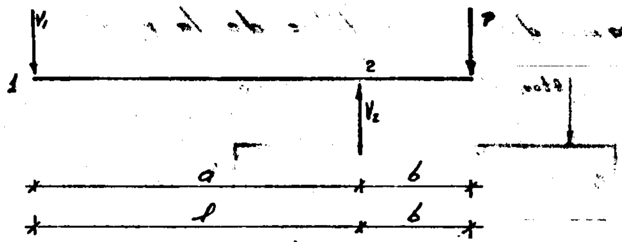
debe cumplirse:

$$-V_1 l + Pb = 0$$

$$V_1 = \frac{Pb}{l}$$

Obsérvese que la reacción en una viga, simplemente apoyada, es igual al producto de la carga por la distancia de ésta al apoyo no contiguo entre el claro de la pieza.

En cuanto a la existencia de voladizos la ecuación:



$\sum M_2 F = 0$

lleva a:

$$aV_1 - Pb = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{Pb}{l}$$

y la propia:

$\sum M_1 F = 0$,

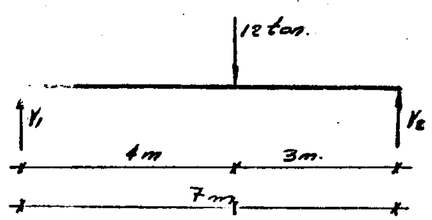
conduce a:

$$aV_2 - P(a+b) \Rightarrow V_2 = \frac{P(a+b)}{l}$$

y la regla se cumple para la condición $l = a$.

17)

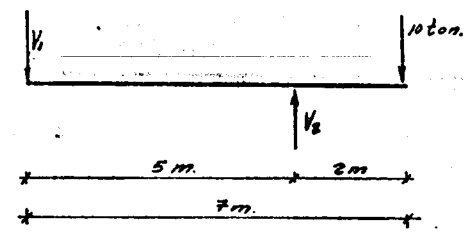
a)



$$V_1 = \frac{12 \times 3}{7} = \frac{36}{7} \Rightarrow V_1 = 5.14 \uparrow$$

$$V_2 = \frac{12 \times 4}{7} = \frac{48}{7} \Rightarrow V_2 = 6.86 \uparrow$$

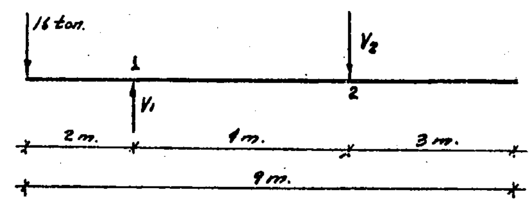
b)



$$V_1 = \frac{10 \times 2}{5} = \frac{20}{5} \Rightarrow V_1 = 4 \text{ ton} \downarrow$$

$$V_2 = \frac{10 \times 7}{5} = \frac{70}{5} \Rightarrow V_2 = 14 \text{ ton} \uparrow$$

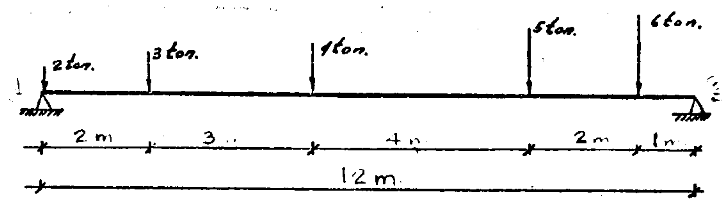
c)



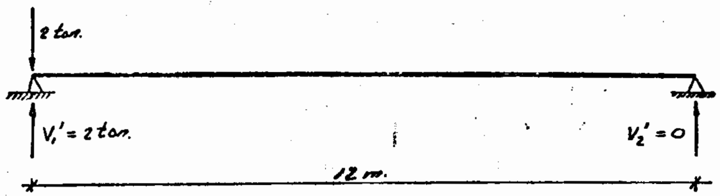
$$V_1 = \frac{3 \times 16}{2} = \frac{48}{2} \Rightarrow V_1 = 24 \text{ ton} \uparrow$$

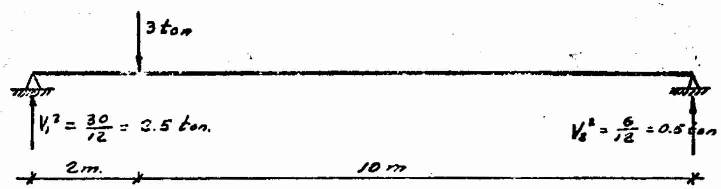
$$V_2 = \frac{16 \times 2}{4} = \frac{32}{4} \Rightarrow V_2 = 8 \text{ ton} \downarrow$$

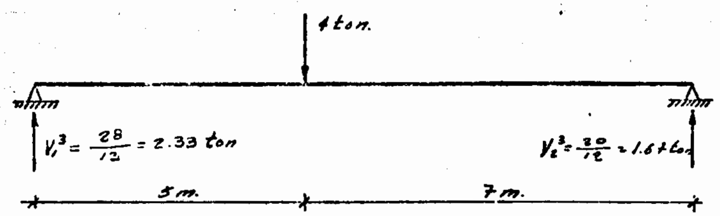
18)

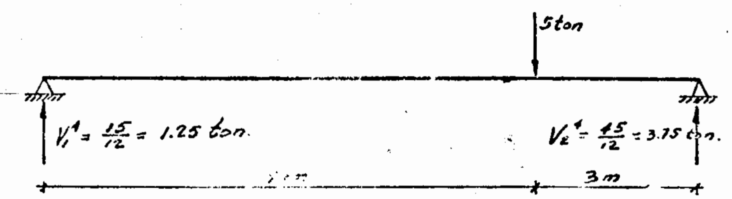


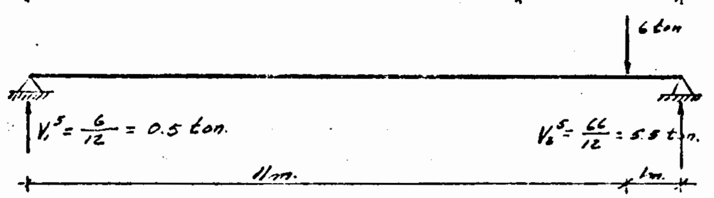
Efectuando el planteo siguiente:









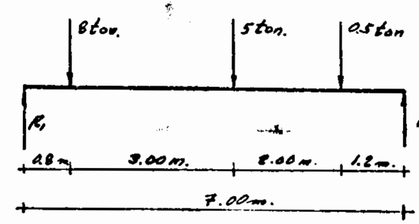


Las reacciones totales:

$V_1 = 2 + 2.5 + 2.33 + 1.25 + 0.5 = 8.58$ ton ↑

$V_2 = 0 + 0.5 + 1.67 + 3.75 + 5.5 = 11.42$ ton ↑

19) a) Diagrama de cuerpo libre de la viga



De las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$\circlearrowright\; \sum M_1 F = 0$

$$-7R_2 + 8 \times 0.8 + 5 \times 3.8 + 0.5 \times 5.8 = 0$$

$$\Longrightarrow R_2 = \frac{28.3}{7} = 4.04 \text{ ton.}$$

$\circlearrowright\; \sum M_2 F = 0$

$$7R_1 - 0.5 \times 1.2 - 5 \times 3.2 - 8 \times 6.2 = 0$$

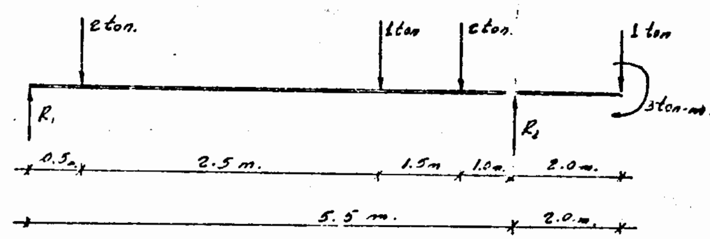
$$\Longrightarrow R_1 = \frac{66.2}{7} = 9.46 \text{ ton}$$

Y en resúmen:

$R_1 = 9.46$ ton. ↑

$R_2 = 4.04$ ton. ↑

b) Diagrama de cuerpo libre de la viga



Aplicando las condiciones de equilibrio:

$+\circlearrowright \sum M_1 F = 0$

Desarrollando:

$$0.5 \times 2 + 3 \times 1 + 4.5 \times 2 - 6.5 R_2 + 7.5 \times 1 + 3 = 0$$

$$R_2 = \frac{23.5}{5.5} = 4.27$$

$$\Longrightarrow R_2 = 4.27 \text{ ton-m.}$$

A su vez:

$+\circlearrowright \sum M_2 F = 0$

permite establecer:

$$5.5 R_1 + 2 \times 1 + 3 - 2 \times 1 - 2.5 \times 1 - 5 \times 2 = 0$$

$$R_1 = \frac{9.5}{5.5} = 1.73$$

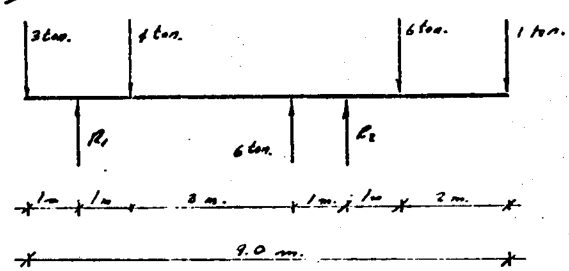
$$\Longrightarrow R_1 = 1.73 \text{ ton.}$$

y en resúmen:

$R_1 = 1.73$ ton ↑

$R_2 = 4.?7$ ton ↑

c) Diagrama de cuerpo libre de la viga:



$+\circlearrowright \sum M_1 F = 0$

tenemos:

$$-3 \times 1 + 4 \times 1 - 6 \times 4 - 6 R_2 + 6 \times 6 + 8 \times 1 = 0$$

$$R_2 = \frac{21}{5} = 4.2 \text{ ton}$$

$$\Longrightarrow R_2 = 4.2 \text{ ton}$$

Y aplicando:

$+\circlearrowright \sum M_2 F = 0,$

señalamos:

$$-3 \times 6 + 5 R_1 - 4 \times 4 + 6 \times 1 + 6 \times 1 + 3 \times 1 = 0$$

$$R_1 = \frac{19}{5} = 3.8 \text{ ton}$$

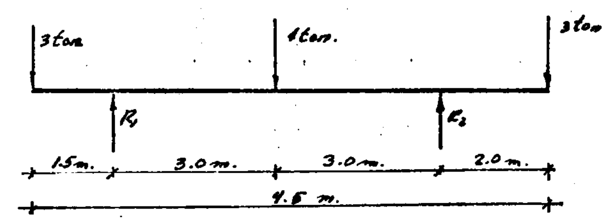
$$\Longrightarrow R_1 = 3.8 \text{ ton.}$$

En resúmen:

$R_1 = 3.8$ ton ↑

$R_2 = 4.2$ ton ↑

d) Diagrama de cuerpo libre de la viga:



Como:

$+\circlearrowright \sum M_1 F = 0$

Es:

$$-3 \times 1.5 + 4 \times 3 - 6 R_2 + 8 \times 3 = 0$$

$R_2 = \frac{31.5}{6} = 5.25$

$\Rightarrow R_2 = 5.25$ ton.

Y puesto que:

$\circlearrowright \sum M_2 F = 0$

obviamente:

$-3 \times 7.5 + 6R_1 - 4 \times 3 + 3 \times 2 = 0$

$R_1 = \frac{28.5}{6} = 4.75$

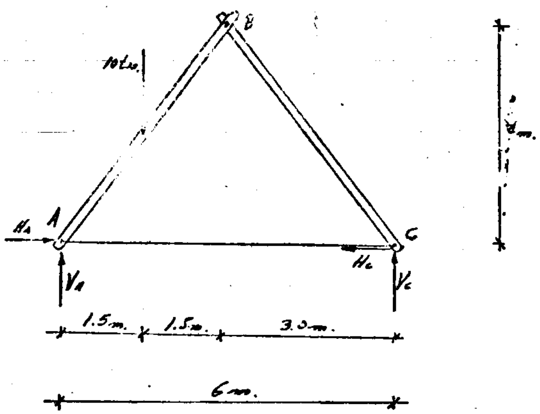
$\Rightarrow R_1 = 4.75$ ton

Así en resúmen.

$R_1 = 4.75$ ton ↑

$R_2 = 5.25$ ton ↑

2o) Considerando el diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Si analizámos el conjunto estructural, prescindiendo del cable:

$\circlearrowright \sum M_A F = 0$

$10 \times 1.5 - V_c 6 = 0$

$V_c = \frac{15}{6} = 2.5$ ton

$\circlearrowright \sum M_c F = 0$

$6V_A - 10 \times 4.5 = 0$

$V_A = \frac{45}{6} = 7.5$ ton

y:

$\sum F_x = 0$

$-H_A + H_c = 0$

$H_A = H_c$ .... (1)

Analizando por separado la barra $\overline{AB}$:

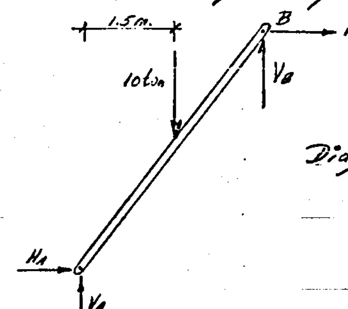


Diagrama de cuerpo libre de $\overline{AB}$

$\circlearrowright \sum M_B F = 0$

$3V_A - 10 \times 1.5 - 4H_A = 0$

$3(7.5) - 15 - 4H_A = 0$

$H_A = \frac{22.5 - 15}{4} = \frac{7.5}{4} = 1.875$ ton.

Y en Resúmen:

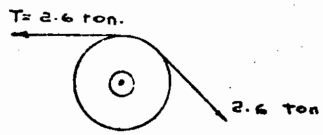
$V_A = 7.5$ ton ↑

$V_c = 2.5$ ton ↑

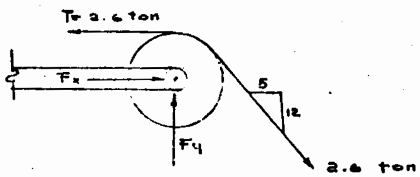
Siendo la tensión en el cable: $H_A = H_c = 1.875$ ton.

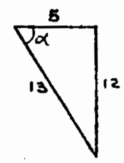
21) Equilibrio del cable:

Considerando el cable inextensible y la fricción nula en la polea, tenemos:



Del equilibrio de la polea tenemos:





$\cos\alpha = \frac{5}{13}$

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$

Aplicando las condiciones de equilibrio tenemos:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_y - 2.6 \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_y = 2.4 \text{ ton}$$

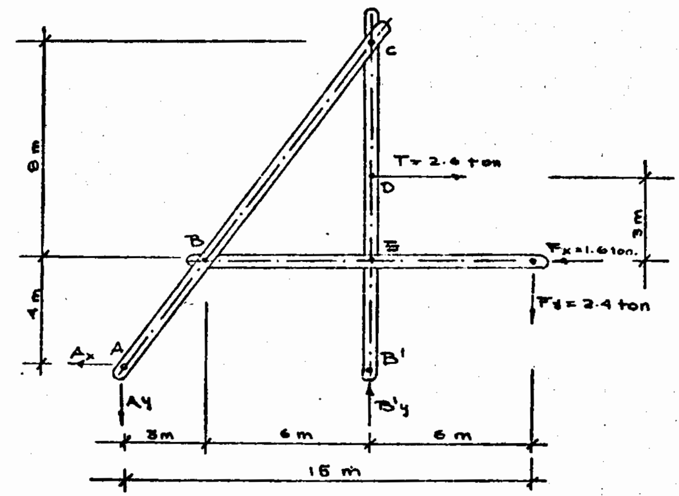
$$\Sigma F_x = 0$$

$$-T + F_x + 2.6 \cos\alpha = 0$$

$$F_x = 2.6 - 2.6 \left(\frac{5}{13}\right)$$

$$\Rightarrow F_x = 1.6 \text{ ton.}$$

Considerando el equilibrio de todo el conjunto, tenemos el siguiente diagrama de cuerpo libre:



Este dispositivo es solicitado por un sistema general plano, el problema es isostático.

De $\Sigma M_A F = 0 \Rightarrow$

$$-2.6(7) + 1.6(4) - 2.4(15) + B'_y(9) = 0$$

$$9B'_y = 18.2 - 6.4 + 36.0$$

$\Rightarrow B'y = 5.31$ ton

De $\Sigma Fy = 0$

$-Ay + B'y - Fy = 0$

$Ay = 5.31 - 2.40$

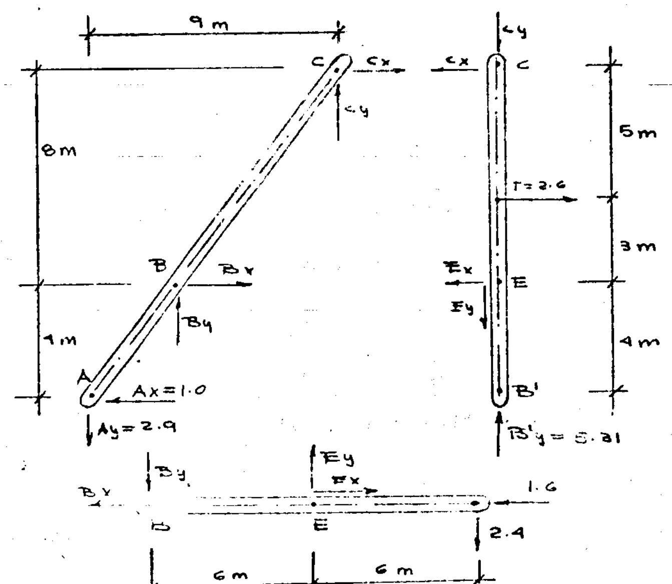
$\Rightarrow Ay = 2.91$ ton.

De $\Sigma Fx = 0$

$2.6 - 1.6 - Ax = 0$

$\Rightarrow Ax = 1.0$ ton.

considerando el equilibrio de las tres barras aisladamente, tenemos:



Del diagrama de la barra horizontal $\overline{BF}$, Tenemos:

$\Sigma M_B F = 0$

$-2.4(12) + Ey(6) = 0$

$\Rightarrow Ey = 4.8$ ton.

$\Sigma Fy = 0$

$-By + Ey - 2.4 = 0$

$By = 4.8 - 2.4$

$\Rightarrow By = 2.4$ ton.

Analizando la barra vertical $\overline{BC}$, Tenemos:

$\Sigma M_c F = 0$

$-Ex(8.0) + 2.6(5.0) = 0$

$$Ex = \frac{13.0}{8.0}$$

$\Rightarrow Ex = 1.63$ ton

Volviendo al diagrama de la barra horizontal tenemos:

$\Sigma F_x = 0$

$-B_x + E_x - 1.6 = 0$

$B_x = E_x - 1.6$

$B_x = 1.63 - 1.6$

$\Rightarrow B_x = 0.03$ ton.

Comprobando, al calcular $\overline{Cx}$ en la barra $\overline{AB}$ y $\overline{B'C}$, Tenemos :

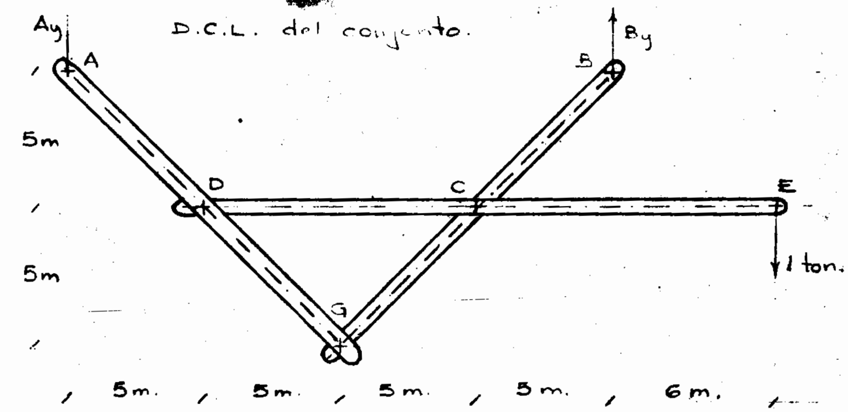
De $\Sigma F_x = 0$, En la barra $\overline{AC}$:

$C_x = 1.00 - 0.03 = 0.97$ ton.

De $\Sigma F_x = 9$ en la barra $\overline{B'C}$:

$C_x = 2.6 - 1.63 = 0.97$ ton.

22. D.C.L. del conjunto.

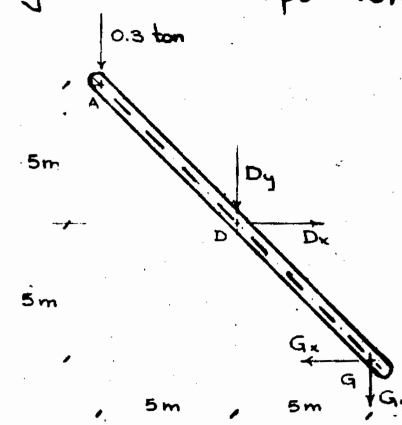


De $\Sigma F_x = 0$; no hay fuerza horizontal alguna $\therefore B_x = 0$

$\Sigma M_B F = 0$; $20 A_y - 6 \times 1 = 0$ $\therefore$ $\boxed{A_y = 0.3 \text{ ton.} \uparrow}$

$\Sigma F_y = 0$; $-0.3 - 1.0 + B_y = 0$ $\therefore$ $\boxed{B_y = 1.3 \text{ ton} \uparrow}$

Diagrama de cuerpo Libre de la barra $\overline{ADG}$:

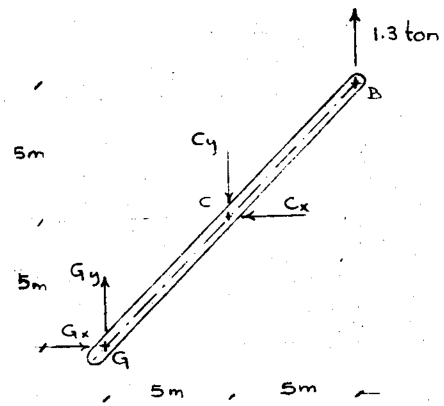


$\Sigma M_D F = 0$; $-0.3 \times 5 + 5 G_x + 5 G_y = 0$ $\therefore$ $G_x + G_y = 0.3$ — (1)

$\Sigma M_G F = 0$; $-5 D_y + 5 D_x - 0.3 \times 10 = 0$ $\therefore$ $D_x - D_y = 0.6$ — (2)

$\Sigma F_x = 0$; $G_x = D_x$ (3)

Diagrama de cuerpo libre de la barra $\overline{BCG}$:



$\Sigma M_C F = 0$; $-1.3\times5 - 5G_x + 5G_y = 0 \therefore G_y - G_x = 1.3$ — (4)

$\Sigma F_x = 0$; $C_x = G_x$ — (5)

$\Sigma F_y = 0$; $C_y = G_y + 1.3$ — (6)

De (4) $G_y = G_x + 1.3$ — (7)

(7) en (1) $G_x + G_x + 1.3 = 0.3$

$2G_x = -1.0$

$\boxed{G_x = -0.5 \text{ ton}}$

$G_y = -0.\ + 1.3 = 0.8$

$\boxed{G_y = -0.8 \text{ ton}}$

Así:

$C_x = D_x = -0.5$ ton

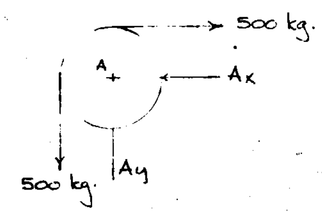
De (2) $D_y = -0.6 - 0.5 = \boxed{-1.1 \text{ ton}}$

En 6 $C_y = 0.8 + 1.3 = 2.1$ ton

En resumen.

$$\boxed{\begin{array}{l} B_x = 0 \ ; \ B_y = 1.3 \text{ ton} \\ C_x = -0.5 \text{ ton} ; \ C_y = 2.1 \text{ ton} \\ G_x = -0.5 \text{ ton} , \ G_y = 0.8 \text{ ton} \end{array}}$$

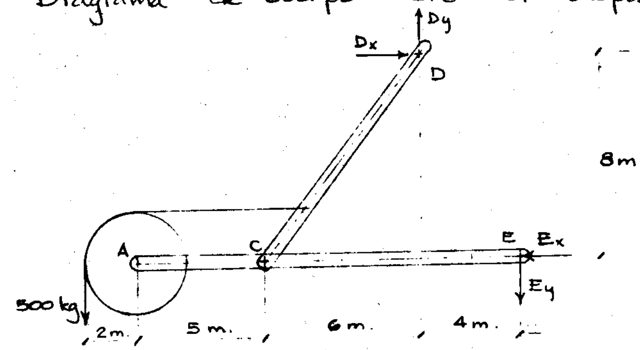
23. Diagrama de cuerpo libre de la polea:



$\Sigma F_x = 0$ $\quad$ $A_x = 500$ kg

$\Sigma F_y = 0$ $\quad$ $A_y = 500$ kg

Diagrama de cuerpo libre del dispositivo:



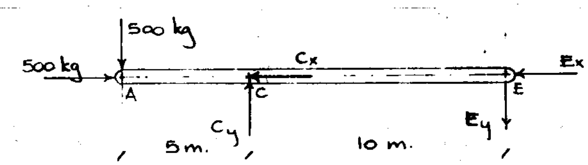
$\Sigma F_x = 0$; $E_x = D_x$ — (1)

$\Sigma F_y = 0$; $D_y = 500 + E_y$ — (2)

(+) $\Sigma M_D F = 0$; $4E_y + 8E_x - 6500 = 0$

$E_y + 2E_x = 1625$ — (3)

Diagrama de cuerpo libre de la barra $\overline{ACE}$.



$\circlearrowleft +$ $\sum M_E F = 0$; $-500 \times 15 + 10\, C_y = 0$ ∴ $C_y = 750$ kg.

$\sum F_y = 0$; $E_y = 750 - 500 = 250$. $E_y = 250$ kg

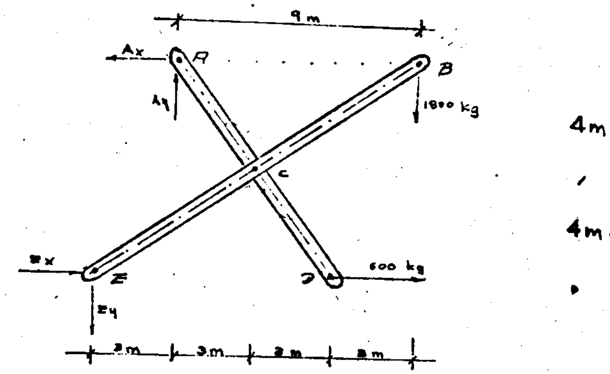
Llevando el valor de E_y a ② queda → $D_y = 750$ kg

en ③ → $2E_x = 1625 - 250 = 687.5$ | $E_x = 687.50$ kg

por ① → $D_x = 687.50$ kg

$\sum F_x = 0$; $500 - C_x - E_x = 0$ $C_x = -187.50$ kg

24) Diagrama de cuerpo libre del conjunto.



Se trata de un sistema coplanar general de fuerzas, la estática nos proporciona las sig. ecuaciones de equilibrio:

$\sum M_A F = 0$ . . . . (1)

$\sum M_E F = 0$ . . . . (2)

$\sum M_D F = 0$ . . . . (3)

De (1) tenemos:

$\circlearrowleft +$

$8E_x + 3E_y + 8(600) - 9(1800) = 0$

De (2) tenemos:

$\circlearrowleft +$

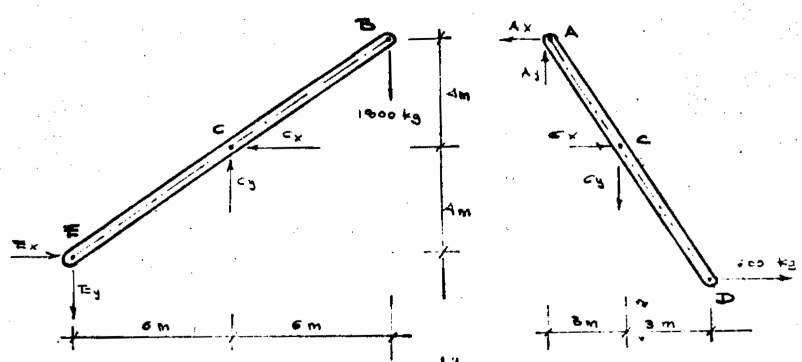
$8A_x + 3A_y - 12(1800) = 0$

$\Rightarrow A_x = \dfrac{12(1800) - 3A_y}{8}$

De (3) tenemos:

$$\circlearrowleft^{+} \quad 8A_x - 6A_y - 5400 + 9E_y = 0$$

Estudiando los diagramas de cuerpo libre de las barras $\overline{EB}$ y $\overline{AD}$.



De la barra $\overline{EB}$:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-E_y + C_y - 1800 = 0$$

$$\Rightarrow E_y = C_y - 1800 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$E_x - C_x = 0$$

$$\Rightarrow E_x = C_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\Sigma M_E F = 0 \qquad \circlearrowleft^{+}$$

$$4C_x + 6C_y - 12(1800) = 0$$

$$C_x + 1.5C_y - 3(1800) = 0$$

$$\Rightarrow C_x = 5400 - 1.5C_y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

De la barra $\overline{AD}$:

$$\Sigma M_A F = 0 \qquad \circlearrowleft^{+}$$

$$4C_x - 3C_y + 8(600) = 0$$

$$\Rightarrow C_x = 0.75\,C_y - 1200 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-A_x + C_x + 600 = 0$$

$$\Rightarrow A_x = C_x + 600 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y - C_y = 0$$

$$\Rightarrow A_y = C_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Igualando (6) con (7)

$$5400 - 1.5C_y = 0.75\,C_y - 1200$$

$$-1.5C_y - 0.75C_y = -5400 - 1200$$

$$-2.25C_y = -6600$$

$$\Rightarrow C_y = 2930 \text{ kg}$$

Sustituyendo el valor de C_y en la ecuación (6), tenemos:

$$C_x = 5400 - 1.5\,(2930)$$

$$C_x = 6400 - 4400$$

$$\Rightarrow C_x = 1000 \text{ kg.}$$

De la ecuación (5), tenemos:

$$E_x = C_x$$

$$\Rightarrow E_x = 1000 \text{ kg}$$

Sustituyendo el valor de C_y en (4), tenemos:

$$E_y = 2930 - 1800$$

$$\Rightarrow E_y = 1130 \text{ kg.}$$

De la ecuación (9)

$$A_y = 2930$$

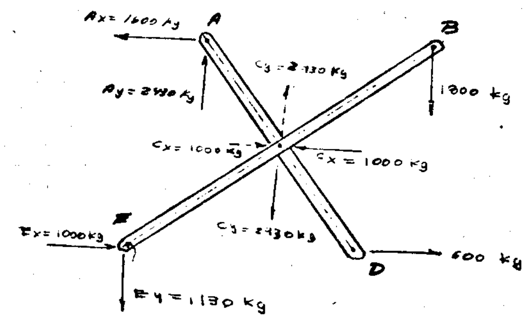
Sustituyendo A_y en (2)

$$A_x = \frac{1}{8}\left[21600 - 3(2930)\right]$$

$$A_x = \frac{1}{8}\,12810$$

$$\Rightarrow A_x = 1600 \text{ kg.}$$

Resúmen de resultados:



Comprobación:

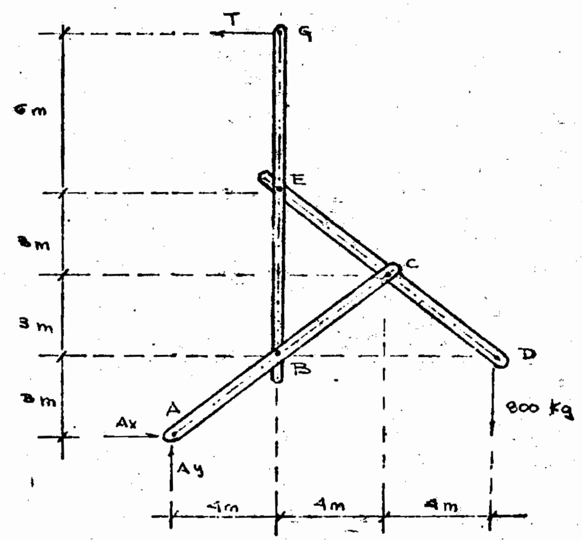
Sustituyendo los valores numéricos de A_x, A_y y E_y en la ecuación (3):

$$8\,(1600) - 6\,(2930) - 6400 + 9\,(1130) = 0$$

$$12800 - 17580 - 5400 + 10180 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

25) Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Del equilibrio del conjunto, tenemos:

$\Sigma M_A F = 0$

$800(12) - T(15) = 0$

$T = \frac{9600}{15}$

$\Longrightarrow T = 640$ kg.

$\Sigma F_x = 0$

$A_x - T = 0$

$A_x = T$

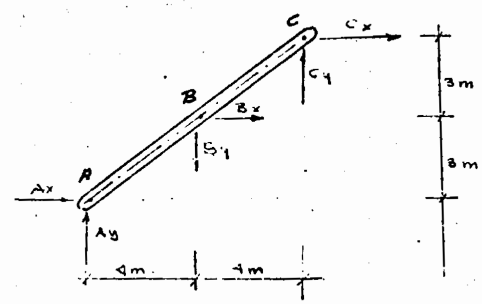
$\Longrightarrow A_x = 640$ kg.

$\Sigma F_y = 0$

$A_y - 800 = 0$

$\Rightarrow A_y = 800$ Kg.

Analizando la barra $\overline{AC}$, tenemos:



$\Sigma M_C F = 0$

$8A_y - 6A_x - 4B_y - 3B_x = 0$

$6400 - 3840 - 4B_y - 3B_x = 0$

$4B_y + 3B_x = 2560$ . . . . (1)

$\Sigma F_x = 0$

$A_x + B_x + C_x = 0$

$640 + B_x + C_x = 0$

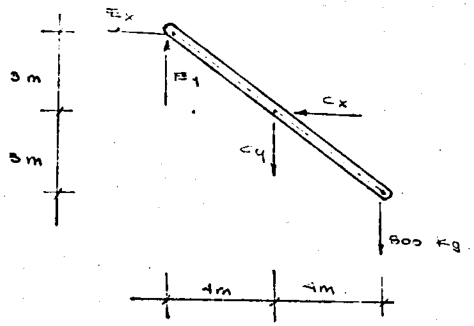
$B_x = -C_x - 640$ . . . . (2)

$\Sigma F_y = 0$

$A_y - B_y + C_y = 0$

$B_y = C_y + 800$ . . . . (3)

Analizando la barra $\overline{DE}$, obtenemos :



$$\Sigma M_E F = 0 \quad \circlearrowleft$$

$$3C_x + 4C_y + 8(800) = 0$$

$$3C_x + 4C_y + 6400 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-E_x - C_x = 0$$

$$-E_x = C_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$E_y - C_y - 800 = 0$$

$$E_y = C_y + 800 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$$4(C_y + 800) + 3(-C_x - 640) = 2560$$

$$4C_y - 3C_x + 3200 - 1920 = 2560$$

$$4C_y - 3C_x = 1280$$

$$3C_x = 4C_y - 1280 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Sustituyendo (7) en (4) :

$$4C_y - 1280 + 4C_y + 6400 = 0$$

$$8C_y + 5120 = 0$$

$$\Rightarrow C_y = -640 \text{ Kg.}$$

De la ecuación (7), tenemos :

$$3C_x = 4(-640) - 1280$$

$$3C_x = -2560 - 1280$$

$$C_x = -\frac{3840}{3}$$

$$\Rightarrow C_x = -1280 \text{ Kg}$$

Sustituyendo los valores de C_x y C_y en las ecuaciones (2),(3),(5) y (6), tenemos :

De (2)

$$B_x = -(-1280) - 640$$

$$\Rightarrow B_x = 640 \text{ Kg.}$$

De (3)

$$B_y = C_y + 800$$

$$\Rightarrow B_y = -640 + 800 = 160 \text{ Kg.}$$

De (5)

$$-E_x = C_x$$

$$-E_x = -1280$$

$$\Rightarrow \quad E_x = 1280 \ kg.$$

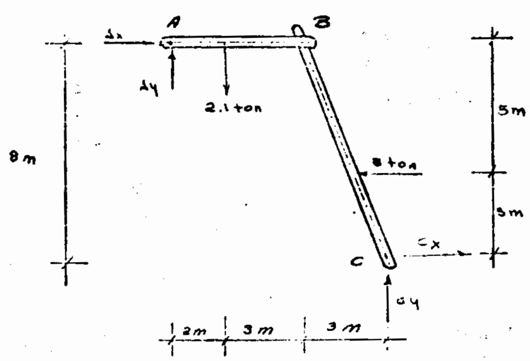
De (6)

$$E_y = C_y + 800$$

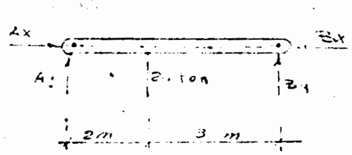
$$E_y = -640 + 800$$

$$\Rightarrow \quad E_y = 160 \ kg.$$

26) Diagrama de cuerpo libre del conjunto



Analizando la barra $\overline{AB}$, obtenemos:



$$\Sigma M_A F = 0 \quad \circlearrowleft +$$

$$-2.1(2) + 5 B_y = 0$$

$$-4.2 + 5 B_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_y = 0.84 \ ton.$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$A_y - 2.1 + B_y = 0$$

$$A_y - 2.1 + 0.84 = 0$$

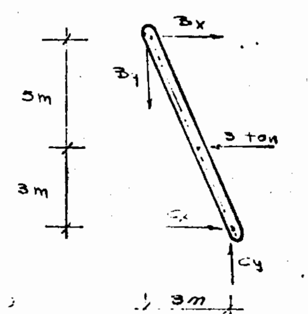
$$\Rightarrow \quad A_y = 1.26 \ ton$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$A_x - B_x = 0$$

$$A_x = B_x$$

Analizando la barra $\overline{BC}$, tenemos:



$$\Sigma M_c F = 0 \quad \circlearrowleft +$$

$$-3B_x + 3B_y + 3(8) = 0$$

$B_x = \dfrac{9 \times 2.52}{8}$

$\Rightarrow B_x = 1.44$ ton.

$\therefore A_x = 1.44$ ton.

$\Sigma F_y = 0$

$-B_y + C_y = 0$

$C_y = B_y$

$\Rightarrow C_y = 0.84$ ton.

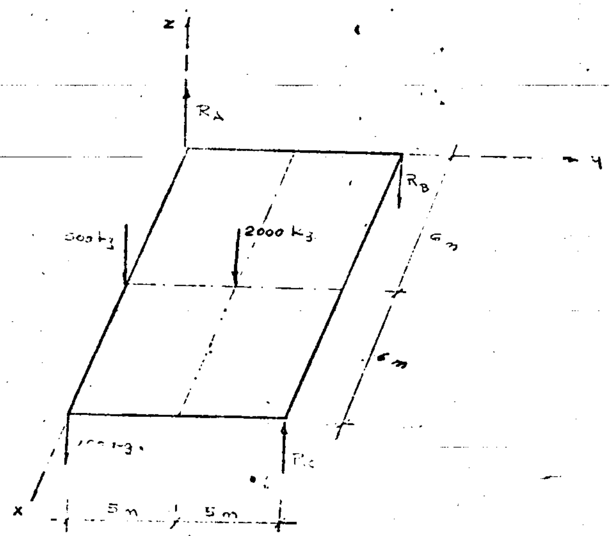
$\Sigma F_x = 0$

$B_x + C_x - 3 = 0$

$\therefore C_x = 3 - 1.44$

$\Rightarrow C_x = 1.56$ ton.

27) Diagrama de cuerpo libre del conjunto:



Aplicando las condiciones de equilibrio:

$$\Sigma M_y \bar{F}^z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\Sigma M_x \bar{F}^z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\Sigma F^z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

De (1) : $\circlearrowleft +$

$500(6) + 2000(6) + 700(12) - 12 R_C = 0$

$6(2500) + 8400 - 12 R_C = 0$

$15000 + 8400 - 12 R_C = 0$

$\Rightarrow R_C = \dfrac{23400}{12} = 1950$ kg.

De (2) : $\circlearrowright$

$2000(5) - \dfrac{23400}{12}(10) + 10 R_B = 0$

$10000 - 19500 + 10 R_B = 0$

$\Rightarrow R_B = 950$ kg.

De (3) : $\uparrow +$

$R_A - 950 - 500 - 2000 - 700 + 1950 = 0$

$R_A = 4150 - 1950$

$\Rightarrow R_A = 2200$ kg.

Y en resúmen :

$R_A = 2200$ kg	$\uparrow$
$R_B = 950$ kg	$\downarrow$
$R_C = 1950$ kg	$\uparrow$

Evidentemente, el sistema de fuerzas que se presenta, es un sistema de fuerzas paralelas en el espacio.

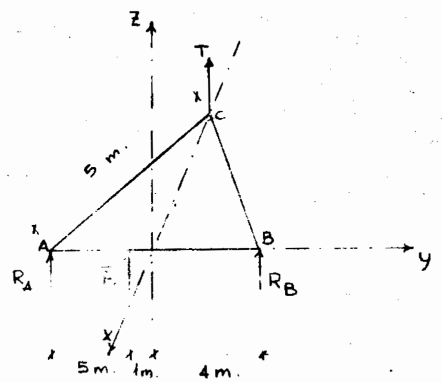
Las condiciones vectoriales de equilibrio son:

$$\Sigma \bar{F} = 0$$
$$\Sigma (\bar{r} \times \bar{F}) = 0$$

que implican las siguientes ecuaciones escalares de equilibrio para este caso:

$$\Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma M_x = 0$$
$$\Sigma M_y = 0$$

Diagrama de cuerpo libre de la placa:



$\Sigma M_y F = 0$; $1 \times 600 - 3T = 0$ ∴ $\boxed{T = 200 \text{ kg} \uparrow}$

$\Sigma M_x F = 0$; $4R_A - 1 \times 120 - 4R_B = 0$ (1)

$\Sigma F_z = 0$; $R_A + R_B + 200 - 720 = 0$ ∴ $R_A = 520 - R_B$ — (2)

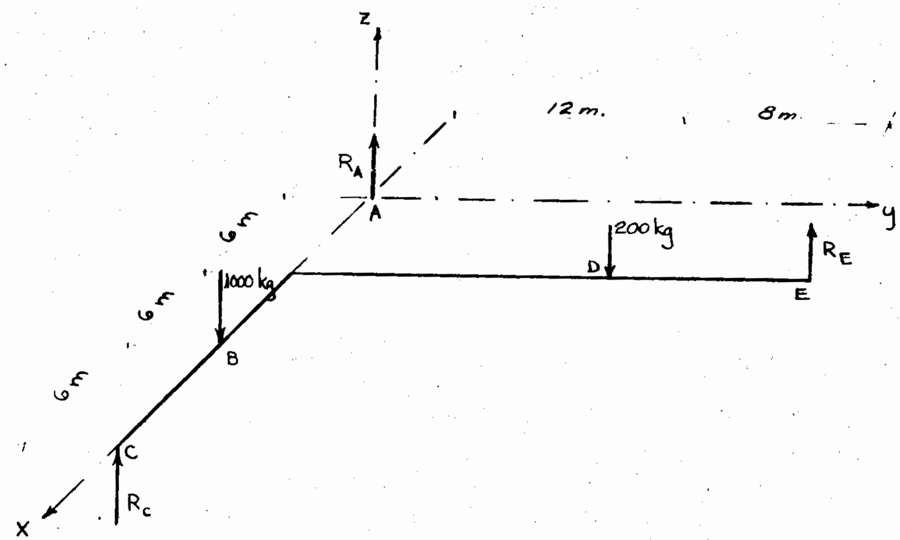
(2) en (1)

$2080 - 4R_B - 120 - 4R_B = 0$ ∴ $\boxed{R_B = 245 \text{ kg} \uparrow}$

De (2)

29) El sistema de fuerzas que actua sobre el marco rígido es un sistema de fuerzas paralelas en el espacio.

Diagrama de cuerpo libre del marco:



Del D.C.L. del marco rígido

$\Sigma M_x F = 0$; $-12 \times 200 + 20 R_E = 0$ ∴ $\boxed{R_E = 120 \text{ kg} \uparrow}$

$\Sigma M_y F = 0$; $(-200 + 120) \times 6 - 1000 \times 12 + 20 R_c = 0$

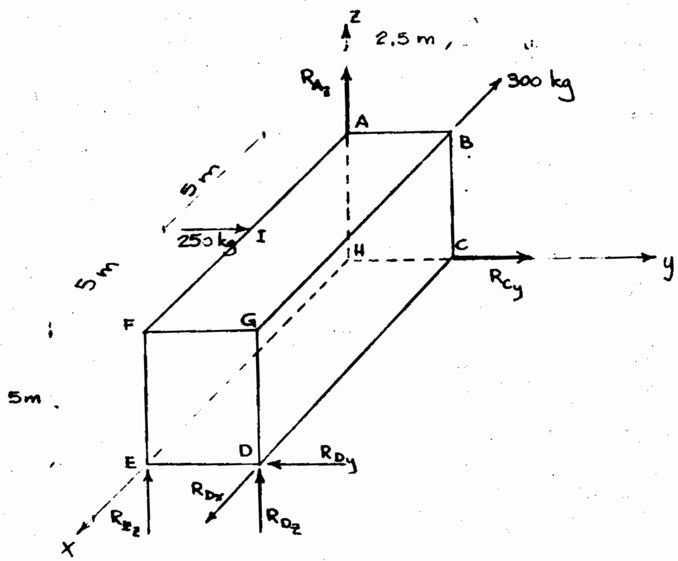
$R_c = \frac{1}{20}(12000 + 480)$

∴ $\boxed{R_c = 624 \text{ kg} \uparrow}$

$\Sigma F_z = 0$; $R_A = 1000 - 624 - 120$ ∴ $\boxed{R_A = 456 \text{ kg} \uparrow}$

30) El sólido rígido esquematizado está sujeto a un sistema de fuerzas cualesquiera en el espacio.

Diagrama de cuerpo libre tomando como origen del marco de referencia el punto H:



Del D.C.L. del sólido propuesto:

$\Sigma F_x = 0$; $R_{D_x} - 263 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{R_{D_x} = 263}$ — (1)

$\Sigma F_y = 0$; $R_{C_y} - R_{D_y} + 250 - 65.8 = 0$

$R_{C_y} = R_{D_y} - 315.8$ — (2)

$\Sigma F_z = 0$; $R_{A_z} + R_{E_z} + R_{D_z} + 131.2 = 0$

$R_{A_z} + R_{E_z} + R_{D_z} = -131.2$ — (3)

$\Sigma M_x F = 0$; $+2.5\,R_{D_z} - 250 \times 5 + 131.2 \times 2.5 - 65.6 \times 5 = 0$

$R_{D_z} - 500 + 131.2 - 131.6 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{R_{D_z} \doteq 500}$ (4)

$\Sigma M_y F = 0$; $-263 \times 5 - 10\,R_{E_z} - 10\,R_{D_z} = 0$

$R_{E_z} + R_{D_z} = -131.5$ — (5)

$\Sigma M_z F = 0$; $250 \times 5 - 2.5\,R_{D_x} - 10\,R_{D_y} + 263 \times 2.5 = 0$

$500 - R_{D_x} - 4\,R_{D_y} + 263 = 0$

$R_{D_y} = \frac{1}{4}(763 - R_{D_x})$ — (6)

(1) en (6):

$R_{D_y} = \frac{1}{4}(763 - 263) \quad \therefore \quad \boxed{R_{D_y} = 125 \text{ kg}}$ — (7)

(7) en (2):

$R_{C_y} = 125 - 315.8 \quad \therefore \quad \boxed{R_{C_y} = -190.8 \text{ kg}}$ — (8)

De (4) y (5):

$R_{E_z} = -131.5 - 500 \quad \therefore \quad \boxed{R_{E_z} = -631.5 \text{ kg}}$ — (9)

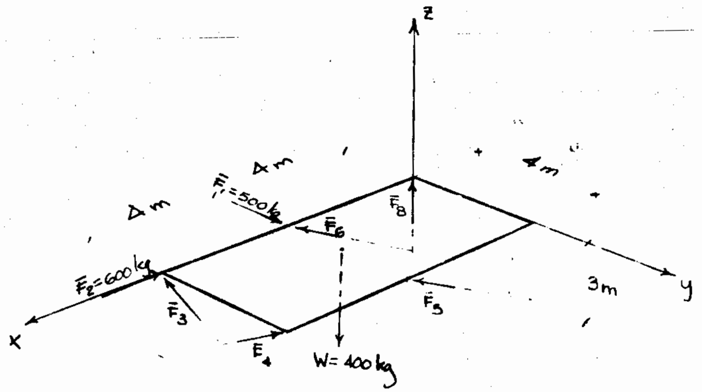
De (3), (4) y (9):

$R_{A_z} = -131.2 - (-631.5) - 500 \quad \therefore \quad \boxed{R_{A_z} = 0}$

En resumen

$$\boxed{\begin{aligned} R_{A_z} &= 0 \\ R_{C_y} &= -190.8 \text{ kg} \\ R_{D_x} &= 263.0 \text{ kg} \\ R_{D_y} &= 125.0 \text{ kg} \\ R_{D_z} &= 500.0 \text{ kg} \\ R_{E_z} &= -631.5 \text{ kg} \end{aligned}}$$

31) Diagrama de cuerpo libre de la placa:



$\Sigma F_x = 0$; $-600 + 0.8\,F_5 + 0.8\,F_6 = 0$ —— (1)

$\Sigma F_y = 0$; $500 - 0.8\,F_3 + 0.8\,F_4 = 0$ —— (2)

$\Sigma F_z = 0$; $-400 + 0.6\,F_3 + 0.6F_4 + 0.6F_5 + 0.6\,F_6 + F_7 + F_8 = 0$ —— (3)

$\Sigma M_x F = 0$; $-800 + 2.4F_4 + 2.4\,F_5 + 4F_7 = 0$ —— (4)

$\Sigma M_y F = 0$; $1600 - 4.8F_3 - 4.8F_4 - 2.4\,F_5 - 2.4\,F_6 = 0$ —— (5)

$\Sigma M_z F = 0$; $2000 - 6.4\,F_3 + 6.4\,F_4 - 3.2\,F_5 = 0$ —— (6)

De (1) : $F_5 = 750 - F_6$ —— (7)

De (2) : $F_3 = 625 + F_4$ —— (8)

(7) en (4) :

$-800 + 2.4\,F_4 + 2.4(750 - F_6) + 4\,F_7 = 0$

$-800 + 2.4\,F_4 + 1800 - 2.4\,F_6 + 4\,F_7 = 0$

$1000 + 2.4\,F_4 - 2.4\,F_6 + 4\,F_7 = 0$

$F_7 = 0.6\,F_6 - 0.6\,F_4 - 250$ —— (9)

(7) y (8) en (5):

$1600 - 4.8(625 + F_4) - 4.8\,F_4 - 2.4\,(750 - F_6) - 2.4\,F_6 = 0$

$1600 - 3000 - 4.8F_4 - 4.8F_4 - 1800 + 2.4\,F_6 - 2.4\,F_6 = 0$

$-3200 - 9.6\,F_4 = 0$ $\therefore$ $\boxed{F_4 = -333.33 \text{ kg}}$

En (8). $\boxed{F_3 = 291.67 \text{ kg}}$

En (6). $2000 - 1665 - 2135 - 3.2\,F_5 = 0$

$3.2\,F_5 = -2000$ $\therefore$ $\boxed{F_5 = -625 \text{ kg}}$

En (7). $\boxed{F_6 = 1375 \text{ kg}}$

En (9): $F_7 = 825 + 200 - 250$ $\therefore$ $\boxed{F_7 = 775 \text{ kg}}$

En (3): $F_8 = 400 - 0.6\,F_3 - 0.6\,F_4 - 0.6\,F_5 - 0.6\,F_6 - F_7$

$F_8 = 400 - 0.6\,(291.67 - 333.33 - 625 + 1375) - 775$

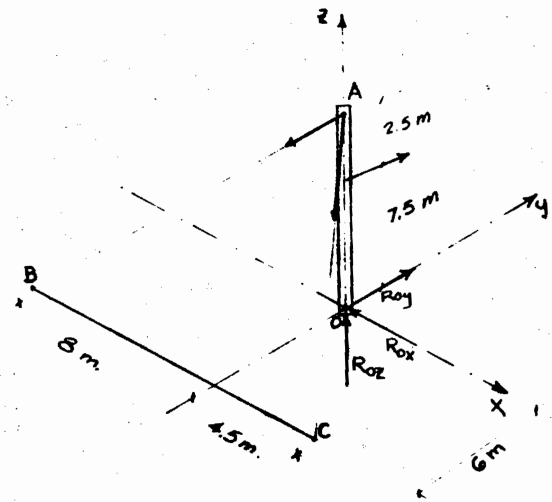
$F_8 = -375 - 0.6 \times 708.34$

$\boxed{F_8 = -800 \text{ kg}}$

RESUMEN

$F_3 =$ 291.67	kg
$F_4 =$ −333.33	✓
$F_5 =$ −625.00	✓
$F_6 =$ 1375.00	✓
$F_7 =$ 775.00	✓
$F_8 =$ −800.00	

32. Diagrama de cuerpo libre del conjunto



Coordenadas: [m]

A(0,0,10)

B(-8,-6,0)

C(4.5,-6,0)

$$\overline{AB} = (-8-0)i + (-6-0)j + (0-10)k$$

$$\overline{AB} = -8i - 6j - 10k$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{64+36+100} = \sqrt{200} = 14.14$$

$$\overline{AC} = (4.5-0)i + (-6-0)j + (0-10)k$$

$$\overline{AC} = 4.5i - 6j - 10k$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{20.25 + \quad + 100} = \sqrt{156.25} = 12.5$$

$$\overline{R} = R_x i + R_y j + R_z k$$

$$\overline{T}_{AB} = \frac{T_{AB}}{14.14}(-8i - 6j - 10k) = T_{AB}(-0.566i - 0.424j - 0.707k)$$

$$\overline{T}_{AC} = \frac{T_{AC}}{12.50}(4.5i - 6j - 10k) = T_{AC}(0.36i - 0.48j - 0.80k)$$

$$\overline{F} = 300i + 400j$$

FUERZA	COMPONENTES			POSICION			MOMENTOS		
	F_{xi}	F_{yi}	F_{zi}	x_i	y_i	z_i	F_ox_i	F_oy_i	F_oz_i
F	300	400	0	0	0	7.5	3000	2250	0
R	R_x	R_y	R_z	0	0	0	0	0	0
T_{AB}	$-.566\,T_{AB}$	$-.424\,T_{AB}$	$-.707\,T_{AB}$	0	0	10.0	$-4.24\,T_{AB}$	$-5.66\,T_{AB}$	0
T_{AC}	$.36\,T_{AC}$	$-.480\,T_{AC}$	$-.800\,T_{AC}$	0	0	10.0	$-4.80\,T_{AC}$	$+3.60\,T_{AC}$	0

Las escalares resultantes son:

$\Sigma F_x = 0$

$$300 + R_x - 0.566\,T_{AB} + 0.36\,T_{AC} = 0 \quad \text{——— } (1)$$

$\Sigma F_y = 0$

$$400 + R_y - 0.424\,T_{AB} - 0.48\,T_{AC} = 0 \quad \text{——— } (2)$$

$\Sigma F_z = 0$

$$R_z - 0.707\,T_{AB} - 0.80\,T_{AC} = 0 \quad \text{——— } (3)$$

$\Sigma M_x F = 0$

$$3000 - 4.24\,T_{AB} - 4.80\,T_{AC} = 0 \quad \text{——— } (4)$$

$\Sigma M_y F = 0$

$$2250 - 5.66\,T_{AB} + 3.60\,T_{AC} = 0 \quad \text{——— } (5)$$

De (4)

$$T_{AB} = 707.55 - 1.13\,T_{AC} \quad \text{——— } (6)$$

(6) en (5)

$$2250 - 5.66(707.55 - 1.13\,T_{AC}) + 3.60\,T_{AC} = 0$$

$$2250 - 4004.73 + 6.40\,T_{AC} + 3.60\,T_{AC} = 0$$

$$T_{AC} = 175.47 \text{ kg.}$$

en (6)

$$T_{AB} = 707.55 - 1.13 \times 175.47$$

$$\therefore\ T_{AB} = 509.27 \text{ kg}$$

en (1) $300 + R_x - 0.566(509.27) + 0.36(175.47) = 0$

$\therefore \quad R_x = -74.92 \text{ kg}$

en (2) $400 + R_y - 0.424(509.27) - 0.48(175.47) = 0$

$\therefore \quad R_y = -99.84 \text{ kg}$

en (3) $R_z - 0.707(509.27) - 0.80(175.47) = 0$

$R_z = 500.43 \text{ kg}$

en Resumen:

$\bar{R} = -74.92i - 99.84j + 500.43k$

$R = 100\sqrt{0.561 + 0.997 + 25.043}$

$R = 515.80 \text{ kg}$

$\bar{T}_{AB} = -288.25i - 215.93j - 360.05k$

$T_{AB} = 100\sqrt{8.309 + 4.663 + 12.964}$

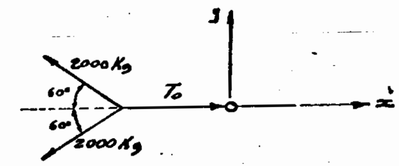
$T_{AB} = 509.3 \text{ kg}$

$\bar{T}_{AC} = 63.17i - 84.23j - 140.38k$

$T_{AC} = 100\sqrt{.399 + .709 + 1.971}$

$T_{AC} = 175.5 \text{ kg}$

33) Del diagrama de cuerpo libre del cable:



y de la condición de equilibrio:

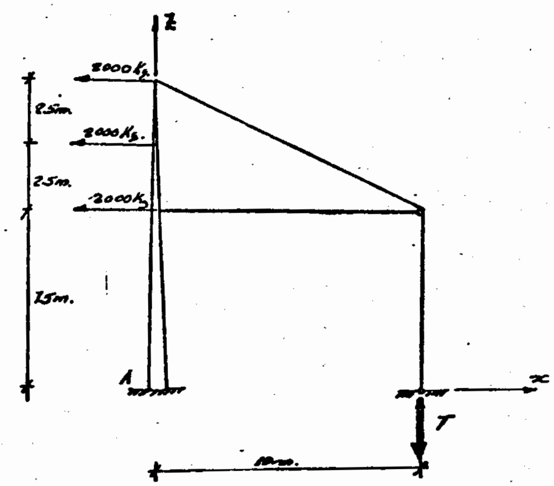
$\sum F_x = 0$

$-2000 \cos 60° - 2000 \cos 60° + T_o = 0$

$-1000 - 1000 + T_o = 0$

$\Rightarrow T_o = 2000 \text{ Kg.}$

Del diagrama de cuerpo libre del conjunto:



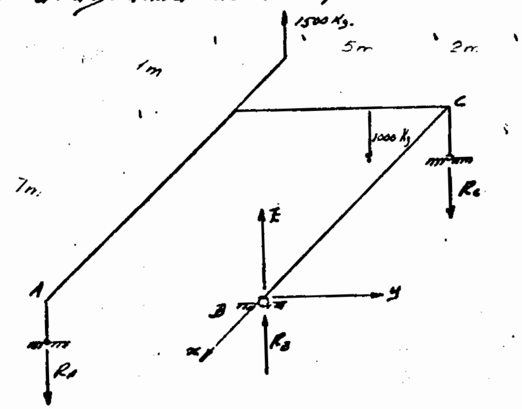
De la condición de equilibrio:

$+\circlearrowleft \sum M_A F = 0$

$10T - (12.5 + 10.0 + 7.5)\,2000 = 0$

$T = \frac{30}{10}\,2000 \Rightarrow T = 6000 \text{ Kg.}$

34) Del diagrama de cuerpo libre:



Aplicando las condiciones de equilibrio

$+\circlearrowright \sum M_{y'y} = 0$

$7R_c + 7\times 1000 - 8\times 1500 = 0$

$7R_c + 7000 - 12000 = 0$

$R_c = \dfrac{5000}{7} = 714.30\ Kg.$

$\Rightarrow R_c = 714.30\ Kg.$

$+\circlearrowright \sum M_{x'x} = 0$

$-7R_A - 2\times 1000 + 7\times 1500 = 0$

$R_A = \dfrac{10500 - 2000}{7} = \dfrac{8500}{7} = 1214.30$

$\Rightarrow R_A = 1214.30$

$\sum F_z = 0$

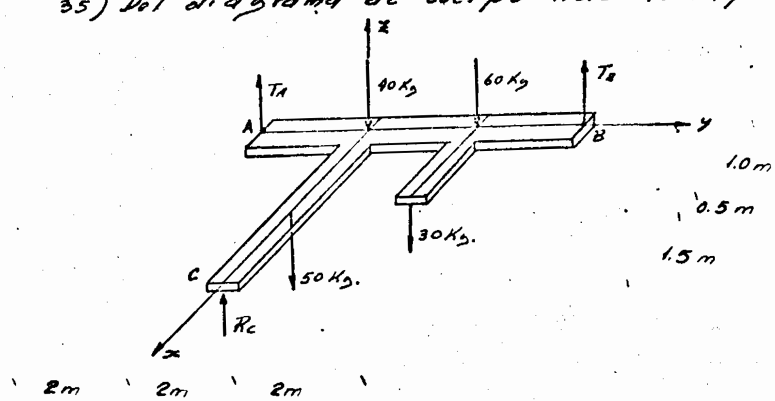
$1500 - 1000 - R_c - R_A + R_B = 0$

$1500 - 1000 - 714.30 - 1214.30 + R_B = 0$

$\Rightarrow R_B = 1428.60\ Kg.$

Nota: El marco sí está fijo al sistema tierra, pues el problema resulta isostático.

35) Del diagrama de cuerpo libre de la pieza:



$\circlearrowleft + \sum M_{y'y} = 0$

$50\times 1.5 + 30\times 1.0 - R_c \times 3 = 0$

$75 + 30 - 3R_c = 0$

$R_c = \dfrac{105}{3.0} = 35\ Kg$ ------- (1)

$\circlearrowleft + \sum M_{x'x} = 0$

$-2T_A + 4T_B - 30\times 2 - 60\times 2 = 0$

$-2T_A + 4T_B - 180 = 0$

$2T_B - T_A = 90$ ----------- (2)

$\sum F_z = 0$

$T_A + T_B + R - 40 - 60 - 30 - 50 = 0$

$T_A + T_B + R_c = 180$ --------- (3)

Sustituyendo (1) en (5):

$T_A + T_B + 35 = 180$

$T_A + T_B = 145$ ------------ (4)

Haciendo simultáneas (2) y (4):

$$-T_A + 2T_B = 90$$
$$T_A + T_B = 145$$
$$3T_B = 235$$
$$T_B = 78.33\ kg$$
$$T_A = 145 - 78.33 = 66.67\ kg$$

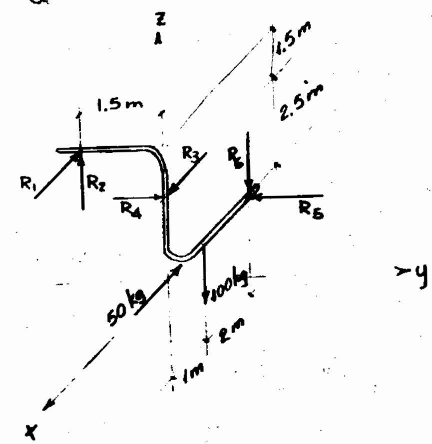
En resumen:

$R_C = 35\ kg$ ↑

$T_A = 66.67\ kg$ ↑

$T_B = 78.33\ kg$ ↑

36. Diagrama de cuerpo libre:



$$\Sigma F_x = 0$$
$$-R_1 + R_3 - 50 = 0$$
$$R_3 - R_1 = 50 \cdots\cdots (1)$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$R_4 - R_5 = 0$$
$$R_4 = R_5 \text{ - - - - - } (2)$$
$$\Sigma F_z = 0$$
$$-R_2 - R_6 - 100 = 0$$
$$R_2 - R_6 = 100 \text{ --- } (3)$$

$$\Sigma M_x F = 0$$
$$-1.5R_2 - 2.5R_4 = 0$$
$$R_2 = -\frac{5}{3} R_4 \text{ ———— } (4)$$

$$\Sigma M_y F = 0$$
$$-4R_1 + 2.5R_3 - 100 \times 1 - 3R_6 = 0 \text{ ——— } (5)$$

$$\Sigma M_z F = 0$$
$$-1.5R_1 + 3R_5 = 0$$
$$R_1 = 2R_5 \text{ ———— } (6)$$

(6) en (1)
$$R_3 - 2R_5 = 50$$
$$R_3 = 50 + 2R_5 \text{ ———— } (7)$$

(4) y (2) en (3)
$$-\frac{5}{3}R_5 - R_6 = 100 \text{ ———— } (8)$$

(3) y (7) en (5)

$$-8R_5 + \frac{5}{2}(50 + 2R_5) - 100 - 3R_6 = 0$$

$$-8R_5 + 125 + 5R_5 - 100 - 3R_6 = 0$$

$$3R_5 + 3R_6 = 25 \qquad (9)$$

De (8)

$$R_6 = -\frac{5}{3}R_5 - 100 \qquad (10)$$

(10) en (9)

$$3R_5 - 5R_5 - 300 = 25$$

$$-2R_5 = 325 \quad \therefore \quad R_5 = -162.5 \text{ kg}$$

en (10)

$$R_6 = 270.83 - 100 = 170.83$$

$$R_6 = 170.83 \text{ kg}$$

en (7)

$$R_3 = 50 + (-325) = -275 \text{ kg}$$

$$R_3 = -275.0 \text{ kg}$$

en (6)

$$R_1 = -325.0 \text{ kg}$$

en (2)

$$R_4 = -162.5 \text{ kg}$$

en (4)

$$R_2 = 270.83 \text{ kg}$$

Resumen.

$R_1 = -325.0$ kg

$R_2 = 270.83$ kg

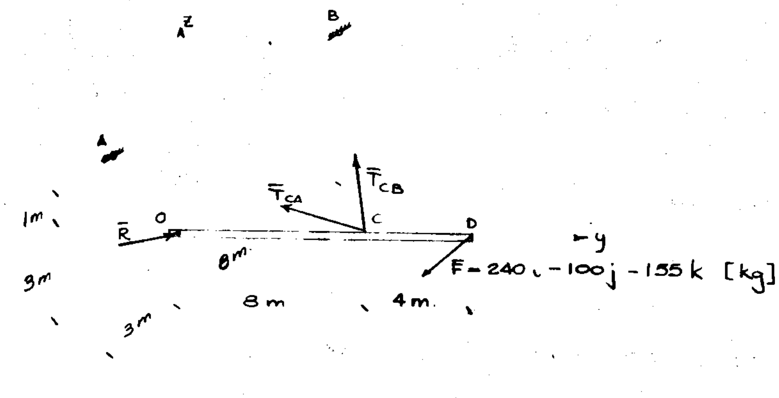
$R_3 = -275.0$ kg

$R_4 = -162.5$ kg

$R_5 = -162.5$ kg

$R_6 = 170.83$ kg

37. Diagrama de cuerpo libre de la barra OCD:



Coordenadas: [m]

A (3, 0, 4)

B (-8, 0, 3)

C (0, 8, 0)

D (0, 12, 0)

$$\bar{CA} = (3-0)i + (0-8)j + (4-0)k$$

$$\bar{CA} = 3i - 8j + 4k$$

$$|CA| = \sqrt{9 + 64 + 16} = 9.42$$

$$\bar{CB} = -8i - 8j + 3k$$

$$|CB| = \sqrt{64 + 64 + 9} = 11.70$$

$$\bar{R} = R_x i + R_y j + R_z k$$

$$\bar{T}_{CA} = \frac{T_{CA}}{9.42}(3i - 8j + 4k) = T_{CA}(0.318i - 0.850j + 0.425k)$$

$$\bar{T}_{CB} = \frac{T_{CB}}{11.70}(-8i - 8j + 3k) = T_{CB}(-0.682i - 0.682j + 0.256k)$$

$$\bar{F} = 240i - 100j - 155k$$

FUERZA	COMPONENTES F_{x_i}	F_{y_i}	F_{z_i}	POSICION x_i	y_i	z_i	MOMENTOS F_{ox_i}	F_{oy_i}	F_{oz_i}
F	240	-100	-155	0	12	0	-1860	0	-2880
R	R_x	R_y	R_z	0	0	0	0	0	0
T_{CA}	$+0.318 T_{CA}$	$-.850 T_{CA}$	$+.425 T_{CA}$	0	8	0	$3.39 T_{CA}$	0	$-2.54 T_{CA}$
T_{CB}	$-0.682 T_{CB}$	$-.682 T_{CB}$	$+.256 T_{CB}$	0	8	0	$2.05 T_{CB}$	0	$5.48 T_{CB}$

Las escalares resultantes son:

$\Sigma F_x = 0$; $240 + R_x + 0.318\, T_{CA} - 0.682\, T_{CB} = 0$

$$R_x = 0.682\, T_{CB} - 0.318\, T_{CA} - 240 \quad \text{--- (1)}$$

$\Sigma F_y = 0$; $-100 + R_y - 0.850\, T_{CA} - 0.682\, T_{CB} = 0$

$$R_y = 0.850\, T_{CA} + 0.682\, T_{CB} + 100 \quad \text{--- (2)}$$

$\Sigma F_z = 0$; $-155 + R_z + 0.425\, T_{CA} + 0.256\, T_{CB} = 0$

$$R_z = 155 - 0.425\, T_{CA} - 0.256\, T_{CB} \quad \text{--- (3)}$$

$\Sigma M_x F = 0$; $-1860 + 3.39\, T_{CA} + 2.05\, T_{CB} = 0$

$$T_{CA} = 548 - 0.603\, T_{CB} \quad \text{--- (4)}$$

$\Sigma M_z F = 0$; $-2880 - 2.54\, T_{CA} + 5.48\, T_{CB} = 0$

$$T_{CA} = 2.15\, T_{CB} - 1135 \quad \text{--- (5)}$$

De (4) y (5)

$$548 - 0.603\, T_{CB} = 2.15\, T_{CB} - 1135$$

$$2.753\, T_{CB} = 1683 \qquad \therefore \quad T_{CB} = 611 \text{ kg}$$

En (5)

$$T_{CA} = 1315 - 1135 \qquad \therefore \quad T_{CA} = 180 \text{ kg}$$

En (1)

$$R_x = 416 - 57.2 - 240 \qquad \therefore \quad R_x = 118.8 \text{ kg}$$

En (2)

$$R_y = 153 + 416 + 100 \qquad R_y = 669 \text{ kg}$$

En (3)

$$R_z = 155 - 76.5 - 157 \qquad R_z = -78.5 \text{ kg}$$

$$R = 100\sqrt{1.41 + 44.7 + 0.62}$$

$$R = 683 \text{ kg}.$$

RESUMEN

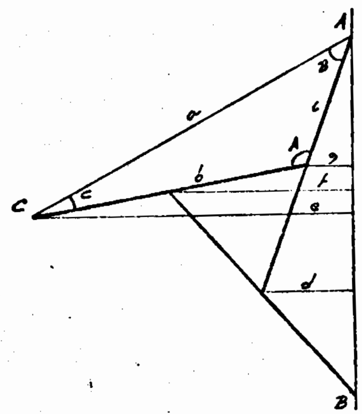
$R = 683$ kg $\qquad \bar{R} = 118.8i + 669j - 78.5k$

$T_{CA} = 180$ kg, $\qquad \bar{T}_{CA} = 57.3i - 153j + 76.5k$

$T_{CB} = 611$ kg, $\qquad \bar{T}_{CB} = -417i + 417j + 156.5k$

38. El sistema propuesto no puede estar en equilibrio. Es inestable.

39) Por conocimientos elementales de Algebra se obtendrán las longitudes de los puntos de aplicación de las fuerzas a la recta AB, como se indica en el siguiente diagrama.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$a^2 = (5)^2 + (2.5)^2 - 2(5)(2.5)\cos 120°$

$a^2 = 43.75 \Rightarrow a = 6.6$

$\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$

$\text{Sen } B = \frac{5}{6.6} \text{ sen } 120 = 0.66$

$\Rightarrow B = 41°$

$\text{Sen } C = \frac{2.5}{6.6} \text{ Sen } 120 = 0.328$

$\Rightarrow C = 19°$

$d = 2.5 \text{ sen } 41° = 1.64$

$e = 6.6 \text{ sen } 60° = 5.70$

$f = 5 \text{ sen } 41° = 3.28$

$g = 2.5 \text{ sen } 19° = 0.82$

De las condiciones de equilibrio:

$\Sigma M_{\overline{AB}} = 0$

$5.7 R_C - 200 \times 3.28 - 100 \times 0.82 - 300 \times 1.64 = 0$

$R_C = \frac{656 + 82 + 492}{5.7} = \frac{1230}{5.7} = 216$

$\Sigma M_{\overline{BC}} = 0$

$5.7 R_A - 100 \times 3.28 - 300 \times 0.82 - 200 \times 1.64 = 0$

$R_A = \frac{328 + 246 + 328}{5.7} = \frac{902}{5.7} = 154 \text{ kg}$

$\Sigma M_{\overline{CA}} = 0$

$5.7 R_B - 300 \times 3.28 - 200 \times 0.82 - 100\, 1.64 = 0$

$R_B = \frac{984 + 164 + 164}{5.7} = \frac{1312}{5.7} = 230 \text{ kg}$

Resumen:

$R_A = 154$ kg

$R_B = 230$ kg

$R_C = 216$ kg

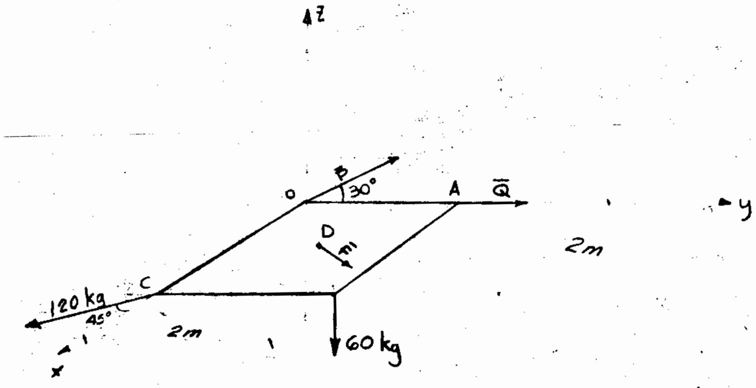
Comprobación

$\Sigma F_z = 0$

$-200 - 100 - 300 + 216 + 154 + 230 = 0$

$-600 + 600 = 0$

~~10.~~ Diagrama de cuerpo libre de la placa.



Los vectores fuerza actuantes son: Sus posiciones:

$\bar{P} = P(0.866j + 0.50k)$; O (0, 0, 0)

$\bar{Q} = Qj$, A (0, 2, 0)

$\bar{F}_B = -60k$, B (2, 2, 0)

$\bar{F}_c = 60\sqrt{2}(i - j)$, C (2, 0, 0)

$\bar{F} = F_x i + F_y j + F_z k$, D (1, 1, 0)

Así las incógnitas escalares resultan ser:

P, Q, F_x, F_y, y F_z $\therefore$ $I = 5$

Entonces:

$$G = I - E = 5 - 6 = -1$$

$\therefore$ La placa es inestable

SERIE 4

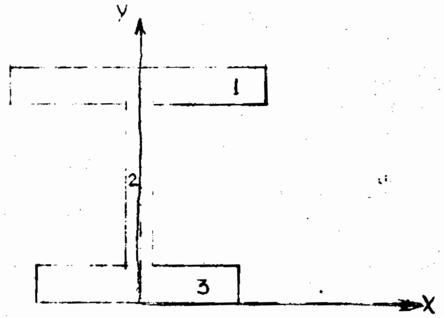
MOMENTOS ESTATICOS Y CENTROIDES, MOMENTOS DE INERCIA Y EJES PRINCIPALES DE AREAS PLANAS

(Soluciones)

1

2

1\.



$A_1 = 1800 \text{ cm}^2$

$A_2 = 600 \text{ cm}^2$

$A_3 = 700 \text{ cm}^2$

$$A\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Substituyendo valores:

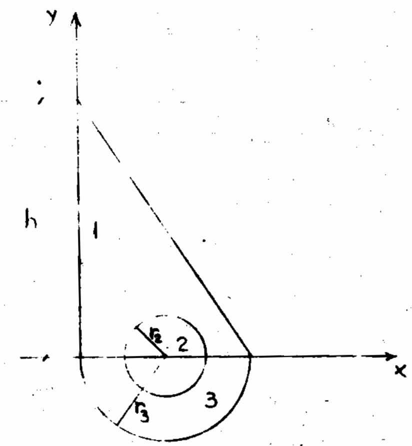
$$\bar{y} = \frac{1800 \cdot 83 + 600 \cdot 44 + 700 \cdot 7}{1800 + 600 + 700} = 58.29$$

Por ser y un eje de simetría $\bar{X} = 0$

$$\therefore \quad \bar{X} = 0.00 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = 58.29 \text{ cm}$$

2\.



$$A_1 = \frac{2 r_3 h}{2} = 3h$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = 3.1416$$

$$A_3 = \frac{\pi r_3^2}{2} = \frac{3.1416 \times 3^2}{2}$$

$$A_3 = 14.1372$$

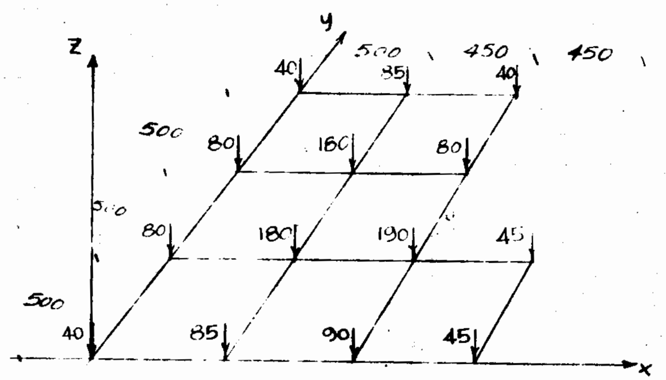
$$A\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{h}{3}(3h) + 0(-3.1416) - \frac{4 r_3}{3\pi}(14.1372)}{3h - 3.1416 + 14.1372} = \frac{h^2 - 18}{3h - 3.1416 + 14.1372}$$

como $\bar{y} = 0$

$h^2 = 18 \quad \therefore \quad h = 4.243 \text{ cm.}$

3.



$\Sigma F_z = 0 \quad ; \quad R = 1260$ ton.

$$R\bar{y} = \sum_{i=1}^{14} P_i y_i$$

Substituyendo valores:

$$\bar{y} = \frac{(40+85+40)1500 + (80+180+80)1000 + (80+180+190+45)500}{1260}$$

$\bar{y} = 662.698$ cm.

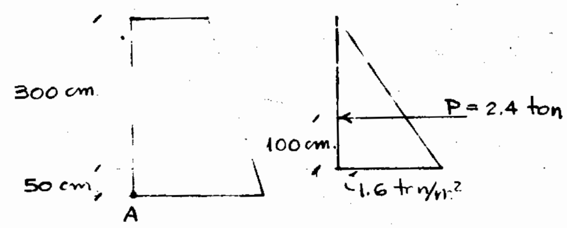
$$R\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

Substituyendo valores:

$$\bar{x} = \frac{(45+45)1400 + (40+80+190+90)950 + (85+180+180+85)500}{1260}$$

$\bar{X} = 611.905$ cm.

4.

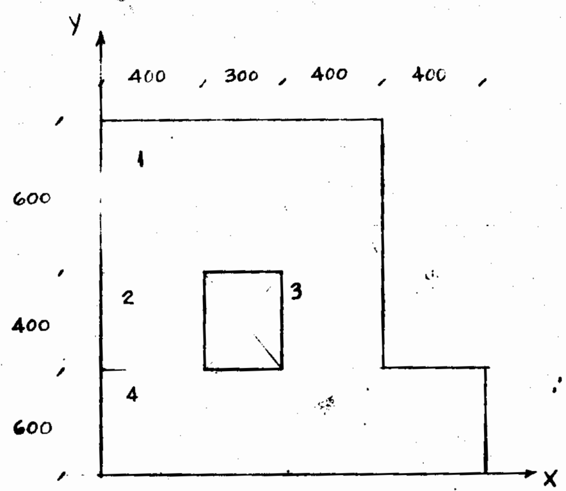


$M_A = P \cdot 1.5$

$M_A = 2.4 \cdot 1.5$

$M_A = 3.6$ ton-m.

5.



$W = 700\ kg/m^2$

$A_1 = 6 \cdot 11 = 66\ m^2$

$A_2 = 4 \cdot 4 = 16\ m^2$

$A_3 = 4 \cdot 4 = 16\ m^2$

$A_4 = 15 \times 4 = 60\ m^2$

$\therefore\ A_T = 158\ m^2$

$$\text{Peso} = WA = 700 \times 158 = 110\,600\ kg.$$

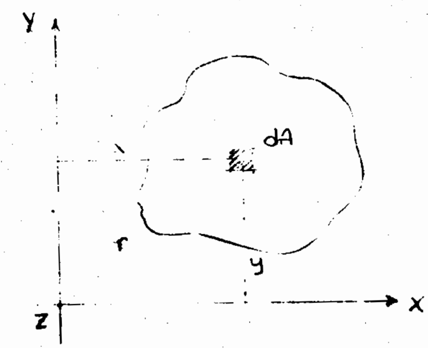
Peso = 110.6 ton.

$$A\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i = 66 \times 5.5 + 16 \cdot 2 + 16 \times 9 + 60 \times 7.5 = 989$$

$$\bar{x} = \frac{989}{158} = 6.2595\ m.$$

$$A\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i = 66 \times 11 + 16 \times 6 + 16 \times 6 + 60 \times 4 = 1038$$

$$\bar{y} = \frac{1038}{158} = 6.5696\ m.$$



$$I_x = \int y^2\, dA$$

$$I_y = \int x^2\, dA$$

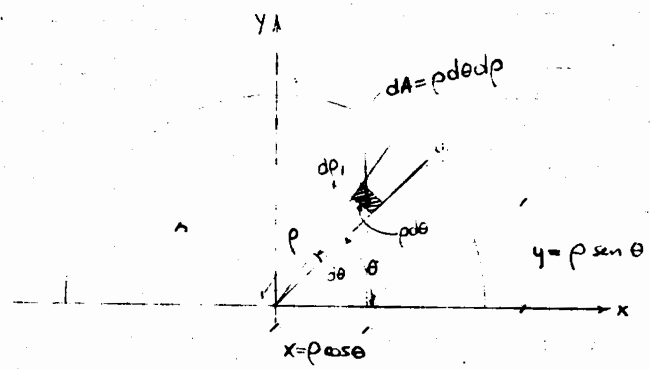
$$I_p = \int r^2\, dA$$

Como: $r^2 = x^2 + y^2$

$$I_p = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2\, dA + \int y^2\, dA$$

$$\therefore\ I_p = I_x + I_y$$

7.



$$I_x = \int y^2\,dA \quad ; \quad dA = \rho\, d\theta\, d\rho \quad ; \quad y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$I_x = \int \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta\,(\rho\, d\theta\, d\rho) = \int \rho^3 d\rho \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$I_x = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^\pi$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_y = \int x^2\, dA = \int \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\, d\theta\, d\rho$$

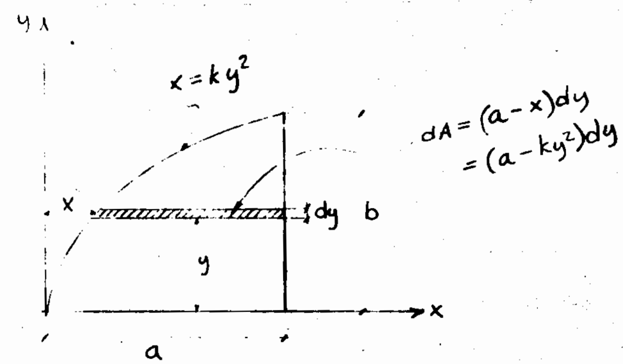
$$I_y = \int \rho^3 \cos^2\theta\, d\rho\, d\theta = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^\pi \cos^2\theta\, d\theta$$

$$I_y = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right]_0^\pi$$

$$I_y = \frac{r^4}{4}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

7.



$$dA = (a - ky^2)\,dy$$

$$I_x = \int_0^b y^2\, dA = \int_0^b y^2 (a - ky^2)\, dy$$

para $x = a$, $y = b$ $\therefore$ $k = \frac{a}{b^2}$

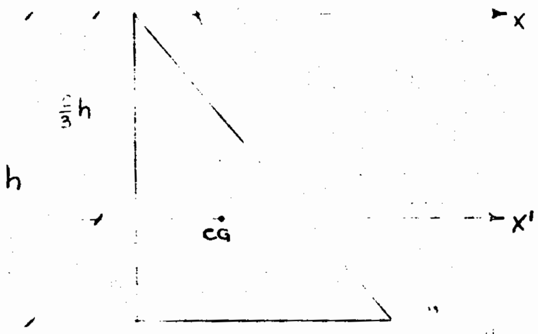
$$I_x = \int_0^b y^2 \left(a - \frac{a}{b^2} y^2\right) dy$$

$$I_x = \int_0^b a y^2\, dy - \int_0^b \frac{a}{b^2} y^4\, dy$$

$$I_x = \frac{ab^3}{3} - \frac{ab^3}{5} = \frac{2}{15}\, ab^3$$

$$I_x = \frac{2}{15}\, ab^3$$

9.



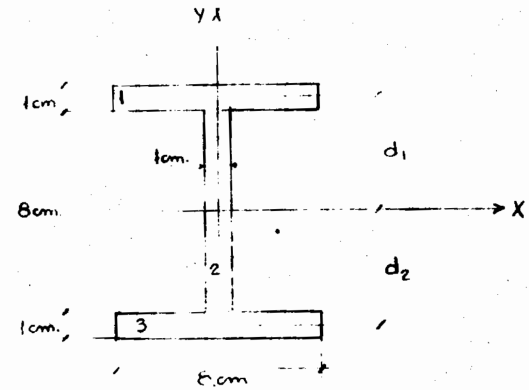
$$I_{x'} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_x = I_{x'} + Ad^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{2}{3}h\right)^2$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} + \frac{8bh^3}{36} = \frac{bh^3}{4}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{4}$$



Momentos de Inercia Centroidales:

$$I_{x_1} = \frac{8 \cdot 1^3}{12} = 0.6667$$

$$I_{x_2} = \frac{1 \cdot 8^3}{12} = 42.6667$$

$$I_{x_3} = \frac{8 \cdot 1^3}{12} = 0.6667$$

Aplicando el teorema de los ejes paralelos:

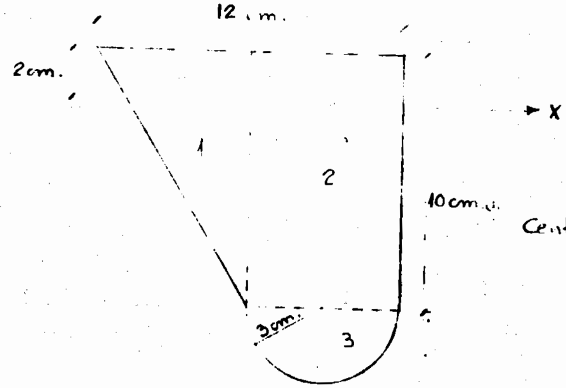
$$I_x = (I_{x_1} + A_1 d_1^2) + (I_{x_2} + A_2 d_2^2) + (I_{x_3} + A_3 d_3^2)$$

$$I_x = 0.6667 + 8 \times 4.5^2 + 42.6667 \times 8 \times 0^2 + 0.6667 + 8 \times 4.5^2$$

$$I_x = 0.6667 + 162 + 42.6667 + 0.6667 + 162 = 368$$

$$I_x = 368 \text{ cm}^4$$

11.



Centroide Semicírculo

$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

Momentos de Inercia Centroidales:

$$I_{x_1} = \frac{6\cdot 10^3}{36} = 166.6667 \ cm^4$$

$$I_{x_2} = \frac{6\cdot 10^3}{12} = 500.0 \ cm^4$$

$$I_{x_3} \doteq 0.11\,(3)^4 = 8.91 \ cm^4$$

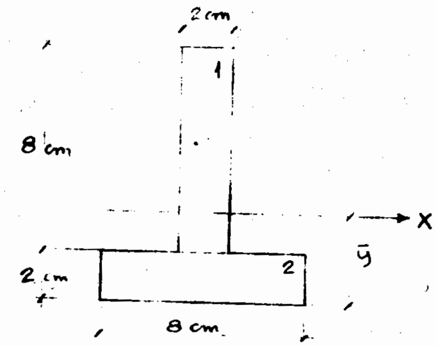
$$I_x = (I_{x_1} + A_1 d_1^2) + (I_{x_2} + A_2 d_2^2) + (I_{x_3} + A_3 d_3^2)\ldots$$

$$= \left[166.6667 + \tfrac{1}{2}(6)(10)\left(\tfrac{10}{3} - 2\right)^2\right] + \left[500 + 6(10)\left(\tfrac{10}{2} - 2\right)^2\right]$$

$$+ \left[8.91 + \tfrac{1}{2}(3.1416)(3)^2\left(8 + \tfrac{4\cdot 3}{3\cdot 3.1416}\right)^2\right] = 166.667 + 53.332 + 500 + 540 + 140$$

$$I_x = 1400 \ cm^4$$

12.



$$A_1 = 16 \ cm^2$$

$$A_2 = 16 \ cm^2$$

Determinación de $\bar{y}$:

$$\bar{y} A = \sum_{n=1}^{2} y_n A_n$$

$$\bar{y} = \frac{6\cdot 16 + 1\cdot 16}{16+16} = 3.5 \ cm.$$

Momentos de Inercia Centroidales:

$$I_{x_1} = \frac{8\cdot 2^3}{12} = 5.333 \ cm^4$$

$$I_{x_2} = \frac{2\cdot 8^3}{12} = 85.333 \ cm^4$$

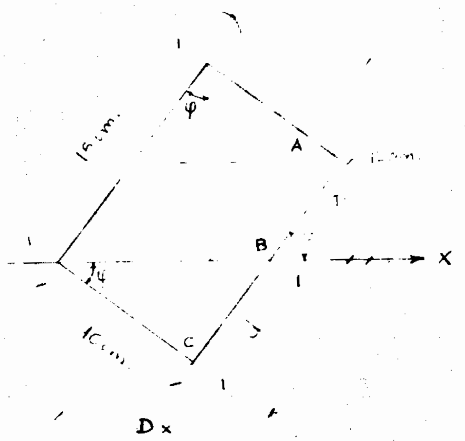
Por el Teorema de los ejes paralelos:

$$I_x = (I_{x_1} + A_1 d_1^2) + (I_{x_2} + A_2 d_2^2)$$

$$I_x = 5.333 + 16(2.5)^2 + 85.333 + 16(2.5)^2$$

$$I_x = 290.666 \ cm^4$$

13.



$\tan \varphi = \frac{3}{4}$

$\cos \varphi = \frac{4}{5} = \frac{10}{D_x}$

$D_x = 12.5$ cm

$\operatorname{sen} \varphi = \frac{3}{5} = \frac{d}{D_x}$

$d = 12.5 \cdot 0.6 = 7.5\,cm.$

$D_y = (15-d)\operatorname{sen}\theta = (15-d)\frac{4}{5} = (15-7.5)\,0.8 = 6\,cm.$

Momentos de Inercia Centroidales:

$\bar{I}_{x_A} = \frac{12.5 \cdot 6^3}{36} = 75 = \bar{I}_{x_C}$

$\bar{I}_{x_B} = \frac{12.5 \times 6^3}{12} = 225\ cm^4$

$A_A = A_C = \frac{12.5 \cdot 6}{2} = 37.5\ cm^2$

$A_B = 12.5 \times 6 = 75\ cm^2$

Luego:

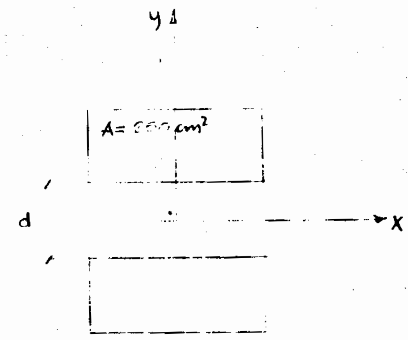
$I_x = (\bar{I}_{x_A} + A_A d_A^2) + (\bar{I}_{x_B} + A_B d_B^2) + (\bar{I}_{x_C} + A_C d_C^2)$

$I_x = 75 + 37.5(8)^2 + 225 + 75(3)^2 + 75 + 37.5(2)^2$

$I_x = 75 + 2400 + 225 + 675 + 75 + 150 = 3600\ cm^4$

$I_x = 3600\ cm^4$

14.



Por ser simétrico tomemos sólo un rectángulo

Momento centroidal: $\bar{I}_x = \frac{25(10)^3}{12} = 2083.33$

Por el teorema de los ejes paralelos.

$I_x = \bar{I}_x + A\left(\frac{d}{2}+5\right)^2$

$I_x = 2083.33 + 250\left(\frac{d}{2}+5\right)^2$

$I_x = 62.5d^2 + 1250d + 8333.333$

$I_y = \frac{10(25)^3}{12} = 13020.833$

Como $I_x = I_y$

Luego

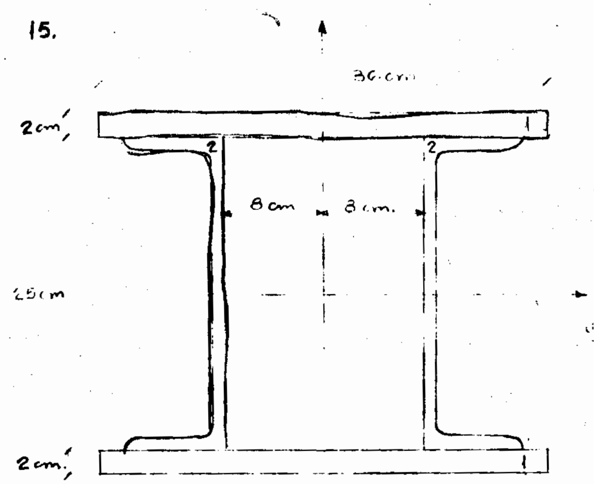
$62.5d^2 + 1250d + 8333.333 = 13020.333$

$d^2 + 20d - 75 = 0$

$d = \frac{-20 \pm 26.4575}{2}$

$\therefore\ d = 3.228\ cm.$

15.



$A_1 = 36 \times 2 = 72 \text{ cm}^2$

$A_2 = 28.7 \text{ cm}^2$

Momentos de Inercia Centroidales.

$I_{x_1} = \dfrac{36 \times 2^3}{12} = 24$

$I_{x_2} = \bar{I}_{xx}$

$I_{y_1} = \dfrac{2 \times 36^3}{12} = 7776$

$I_{y_2} = \bar{I}_{yy}$

Luego:

$I_x = 2\left[I_{x_2} + (I_{x_1} + A_1 d_1^2)\right] = 2\left[2784 + (24 + 72(13.5)^2)\right]$

$= 2\left[2784 + 24 + 13122\right] = 31\,860 \text{ cm}^4$

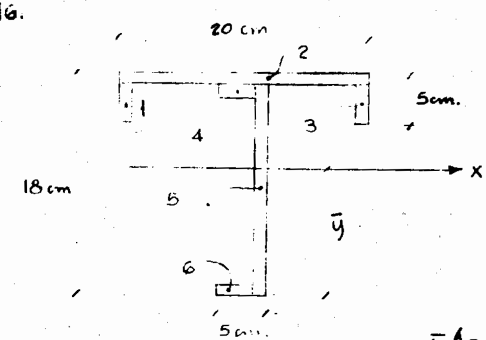
$I_y = 2\left[(I_{y_2} + A_2 d_2^2) + I_{y_1}\right] = 2\left[(96 + 28.7(9.52)^2) + 7776\right]$

$= 2\left[96 + 2624.2637 + 7776\right] = 21\,392.5274 \text{ cm}^4$

$I_x = 31\,860 \text{ cm}^4$

$I_y = 21\,392.527 \text{ cm}^4$

16.



Determinación de $\bar{y}$

$\bar{y} A = \sum_{n=1}^{6} y_n A_n$

$\bar{y}A = 15A_1 + 17.5A_2 + 15A_3 + 16.5A_4 + 8.5A_5 + 0.5A_6$

$\bar{y}A = 15 \times 4 + 17.5 \times 20 + 15 \times 4 + 16.5 \times 4 + 8.5 \times 17 + 0.5 \times 4$

$\bar{y} = \dfrac{682.5}{53} = 12.8774 \text{ cm.}$

Momentos de Inercia Centroidales:

$I_{x_1} = I_{x_3} = \dfrac{1 \times 4^3}{12} = 5.333 \text{ cm}^4$

$I_{x_2} = \dfrac{20 \times 1^3}{12} = 1.6667$

$I_{x_4} = \dfrac{4 \times 1^3}{12} = 0.333 = I_{x_6}$

$I_{x_5} = \dfrac{1 \times 17^3}{12} = 409.4167$

Luego:

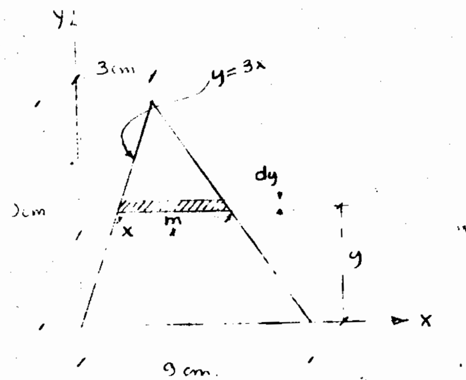
$I_x = I_{x_1} + A_1 d_1^2 + I_{x_2} + A_2 d_2^2 + I_{x_3} + A_3 d_3^2 + I_{x_4} + A_4 d_4^2 + I_{x_5} + A_5 d_5^2 + I_{x_6} + A_6 d_6^2$

$I_x = 5.333 + 4(2.1226)^2 + 1.6667 + 20(4.6226)^2 + 5.333 + 4(2.1226)^2 + 0.333 + 4(3.6226)^2 + 409.4167 + 17(4.3774)^2 + 0.333 + 4(12.3774)^2$

$I_x = 23.355 + 429.0353 + 23.355 + 52.8262 + 735.1644 + 613.1334$

$I_x = 1876.8693 \text{ cm}^4$

17.



Por triangulos semejantes

$$\frac{m}{9} = \frac{9-y}{9} \quad , \quad m = 9-y$$

De la figura

$$x = \frac{y}{3} - \frac{m}{2}$$

$$x = \frac{y}{3} + \frac{9}{2} - \frac{y}{2} = \frac{9}{2} - \frac{y}{6}$$

$$I_{xy} = \int xy\,dA \quad ; \quad dA = m\,dy$$

$$I_{xy} = \int_0^9 x\,y\,m\,dy$$

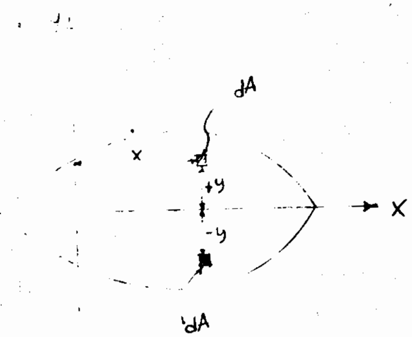
$$I_{xy} = \int_0^9 \left(4.5 - \frac{y}{6}\right) y (9-y)\,dy = \int_0^9 \left[4.5y(9-y) - \frac{y^2}{6}(9-y)\right] dy$$

$$I_{xy} = \int_0^9 \left(\frac{y^3}{6} - 6y^2 + 40.5y\right) dy = \left[\frac{y^4}{24} - \frac{6}{3}y^3 + \frac{40.5}{2}y^2\right]_0^9$$

$$I_{xy} = \frac{9^4}{24} - 2(9)^3 + 20.25(9)^2 = 273.375 - 1458 + 1640.25$$

$$I_{xy} = 455.625\ \text{cm}^4$$

18.



$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

El signo del producto de inercia puede resultar positivo, negativo o nulo según la posición relativa del area respecto a los ejes x y y.

Si uno de los ejes es de simetría, como sucede con el eje x de la figura, la suma de los términos

$$x(-y)\,dA$$

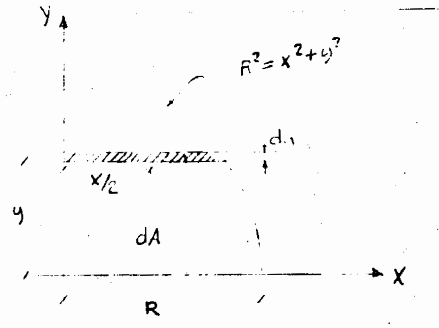
y

$$x(y)\,dA$$

debidas a elementos simetricamente colocados con respecto al eje se anulan y por lo tanto el producto de inercia de toda el area resulta cero.

$$I_{xy} = 0$$

19.



$I_{xy} = \int \frac{x}{2} y \, dA$

$dA = x\,dy \quad ; \quad x = \sqrt{R^2 - y^2}$

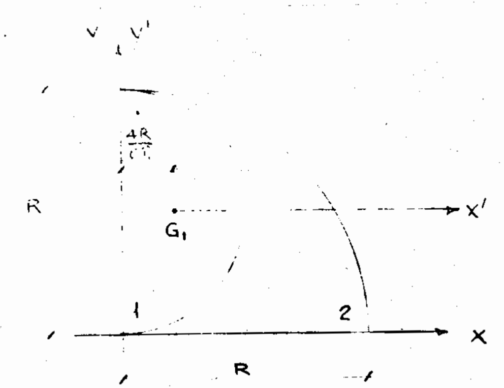
$\therefore \; dA = \sqrt{R^2 - y^2}\, dy$

$$I_{xy} = \int_0^R \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - y^2}\, y \sqrt{R^2 - y^2}\, dy$$

$$I_{xy} = \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - y^2)\, y\, dy = \int_0^R \frac{1}{2} R^2 y\, dy - \int_0^R \frac{1}{2} y^3 dy$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} R^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^R - \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{4} R^2 R^2 - \frac{1}{8} R^4$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{8}$$



$I_{x'y'_1} = 0$ puesto que x' es un eje de simetría

$$I_{xy_1} = I_{x'y'_1} + \bar{x}\bar{y} A_1$$

$$I_{xy_1} = 0 + \left(\frac{2}{3}\frac{R}{\pi}\right)\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{\pi (R/2)^2}{2}\right)$$

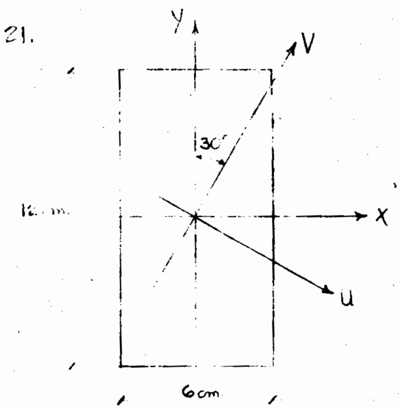
$$I_{xy_1} = \frac{R^2}{3\pi}\left(\frac{R^2 \pi}{8}\right) = \frac{R^4}{24}$$

$$I_{xy} = I_{xy_2} - I_{xy_1}$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{8} - \frac{R^4}{24} = \frac{R^4}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{R^4}{12}$$

21.



$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y)\,\text{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{6(12)^3}{12} = 864 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{12(6)^3}{12} = 216 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = 0$$

$$\theta = -30°$$

$$I_u = \frac{1}{2}(864+216) + \frac{1}{2}(864-216)\cos(-60°) = 540 + 324(0.5) = 702 \text{ cm}^4$$

$$I_v = \frac{1}{2}(864+216) - \frac{1}{2}(864-216)\cos(-60°) = 540 - 324(0.5) = 378 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(864-216)\,\text{sen}(-60°) = -324(0.866) = -280.58 \text{ cm}^4$$

$$I_u = 702 \text{ cm}^4$$

$$I_v = 378 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = -280.58 \text{ cm}^4$$

22.

$$I_x = 100 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 60 \text{ cm}^4$$

$$P_{xy} = 15 \text{ cm}^4$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{máx} = \frac{1}{2}(100+60) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(100-60)\right]^2 + (15)^2}$$

$$I_{máx} = 80 + \sqrt{400 + 225} = 80 + 25 = 105 \text{ cm}^4$$

$$I_{mín} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

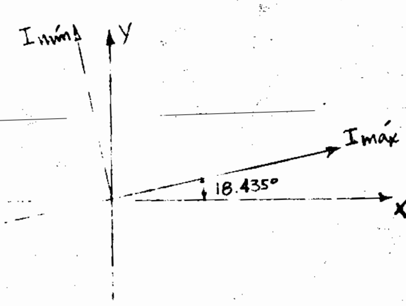
$$I_{mín} = 80 - 25 = 55 \text{ cm}^4$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{15}{20} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}(36.8695) = 18.435°$$

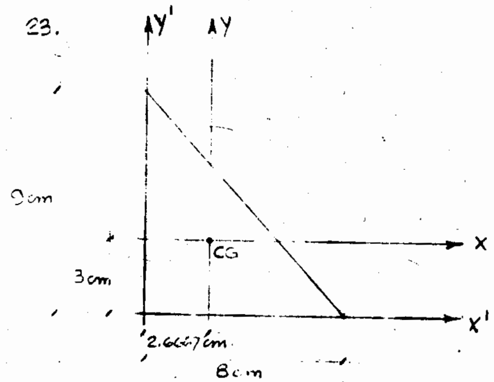
$$I_{max} = 105 \text{ cm}^4$$

$$I_{mín} = 55 \text{ cm}^4$$

$$\theta = 18.435°$$



23.



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_x = \frac{8(9)^3}{36}$$

$$I_x = 162\ cm^4$$

$$I_y = \frac{9(8)^3}{36} = 128$$

$$I_y = 128\ cm^4$$

$$I_{x'y'} = I_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} - \bar{x}\bar{y}A = \frac{b^2h^2}{24} - (2.6667)(3)\left(\frac{8\times 9}{2}\right)$$

$$I_{xy} = \frac{(8)^2(9)^2}{24} - (2.6667)(3)\left(\frac{72}{2}\right) = 216 - 288 = -72\ cm^4$$

$$I_{xy} = 72\ cm^4$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(162+128) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(162-128)\right]^2 + (-72)^2}$$

$$I_{max} = 145 + \sqrt{289 + 5184} = 145 + 73.98$$

$$I_{max} = 218.98\ cm^4$$

$$I_{min} = 145 - 73.98 = 71.02$$

$$I_{min} = 71.02\ cm^4$$

24.

$$I_x = 40\ cm^4$$

$$I_y = 100\ cm^4$$

$$I_{xy} = 40\ cm^4$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(I_x - I_y)\right]^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{max} = \frac{1}{2}(140) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(-60)\right]^2 + (40)^2}$$

$$I_{max} = 70 + \sqrt{900 + 1600} = 70 + \sqrt{2500}$$

$$I_{max} = 70 + 50 = 120\ cm^4$$

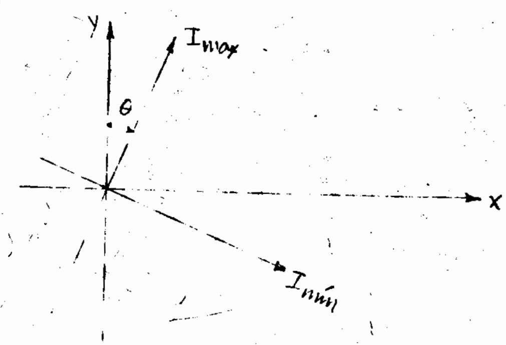
$$I_{min} = 70 - 50 = 20\ cm^4$$

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{40}{30} = \frac{1}{2}(53.13) = 26.565°$$

$$I_{max} = 120\ cm^4$$

$$I_{min} = 20\ cm^4$$

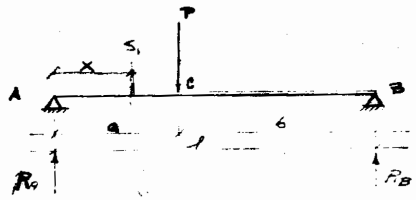
$$\theta = 26.565°$$



SERIE 5

ELEMENTOS MECANICOS EN VIGAS
(Soluciones)

1).-



Cálculo de reacciones:

De $\Sigma M_A = 0$ $\circlearrowright +$

$R_B\, l - P a = 0$

$\Rightarrow R_B = \frac{Pa}{l}$

De $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow +$

$R_A - P + R_B = 0$

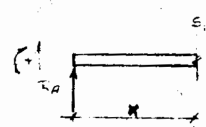
$R_A - P + \frac{Pa}{l} = 0$

$\Rightarrow R_A = \frac{Pb}{l}$

Obtención de los diagramas de Momento flexionante y de fuerza cortante:

Tramo AC

$0 \leq x \leq a$



Momento flexionante:

$M_x = R_A x$ ..... (1) — Por estar X a la primera potencia la variación será lineal.

Para $x = 0$:

$M_A = R_A (0) = 0$

Para $x = a$

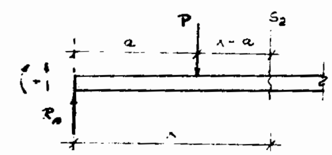
$\Rightarrow M_C = R_A (a) = \frac{Pab}{l}$

Fuerza cortante:

$\Rightarrow V = R_A$ ..... (2) Constante a lo largo de todo el tramo.

Tramo CB

$a \leq x \leq l$



$M_x = R_A (x) - P (x - a)$ ..... (3)

Para $x = a$

$\Rightarrow M_C = R_A (a) - P (a - a) = \frac{Pab}{l}$

Para $x = l$

$M_B = R_A (l) - P (l - a)$

$M_B = \frac{Pb}{l}\, l - Pb = Pb - Pb = 0$

$\Rightarrow M_B = 0$

Fuerza cortante:

$V = R_A - P = \frac{Pb}{l} - P$ constante a todo lo largo del tramo.

Diagrama de fuerza cortante:

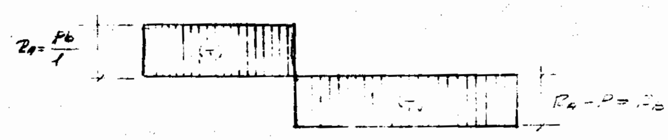
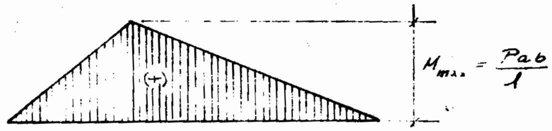
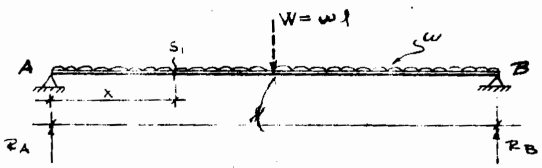


Diagrama de momento flexionante :



2).-



Cálculo de reacciones :

$\Sigma M_A F = 0$ ↺+

$R_B\,(l) - W\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$R_B\,(l) - \frac{w\,l^2}{2} = 0$

$\Rightarrow R_B = \frac{w\,l}{2}$

$\Sigma F_y = 0$ ↑+

$R_A - W + R_B = 0$

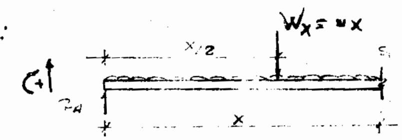
$R_A = W - R_B = w\,l - \frac{w\,l}{2}$

$\Rightarrow R_A = \frac{w\,l}{2}$

Análisis de la viga :

/ tramo A B

$0 \leq x \leq l$



Momento flexionante :

$M_x = R_A\,x - W_x\,\frac{x}{2}$

$M_x = \frac{w\,l}{2}\,x - \frac{w\,x^2}{2}$ ..... (1)

La ecuación (1) es del tipo $y = k\,(x) - k'\,(x^2)$, que es la representación matemática de una parábola de eje vertical.

Fuerza cortante :

$V = R_A - W_x$

$V = \frac{w\,l}{2} - w\,x$ ..... (2) Ecuación de una línea recta.

Para $x = 0$

$\Rightarrow M_A = \frac{w\,l}{2}\,(0) - \frac{w\,(0)^2}{2} = 0$

Para $x = l$

$M_B = \frac{w\,l}{2}\,(l) - \frac{w\,(l)^2}{2}$

$\Rightarrow M_B = 0$

Para $x = 0$

$V_A = \frac{w\,l}{2} - w\,(0)$

$\Rightarrow V_A = \frac{w\,l}{2}$

Para $x = l$

$V_B = \frac{w\,l}{2} - w\,(l)$

$\Rightarrow V_B = -\frac{w\,l}{2}$

Cálculo del momento flexionante máximo.

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d\left(\frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}\right)}{dx} = \frac{wl}{2} - wx = 0$$

$$\frac{wl}{2} = wx$$

$$\Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

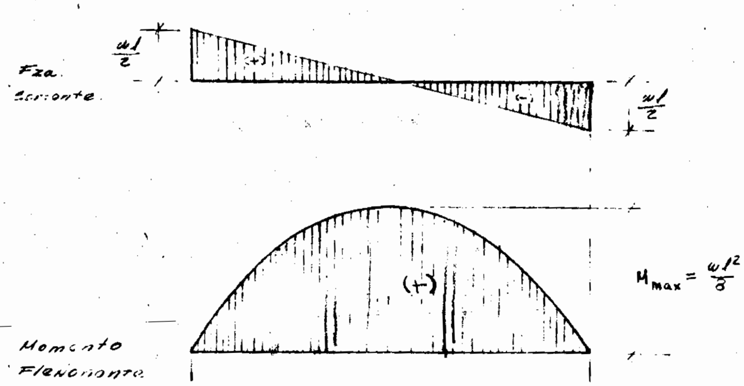
Sustituyendo el valor de x en la ecuación (1):

$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{wl}{2}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{w\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}$$

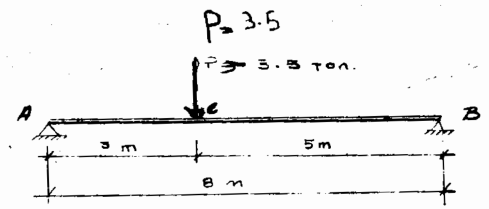
$$M_{\frac{l}{2}} = \frac{wl^2}{4} - \frac{wl^2}{8}$$

$$\Rightarrow M_{max.} = \frac{wl^2}{8}$$

Diagramas:



3).-



Cálculo de reacciones:

$$R_A = \frac{Pb}{l} = \frac{3.5 \times 5}{8}$$

$$\Rightarrow R_A = 2.2 \text{ ton.}$$

$$R_B = \frac{Pa}{l} = \frac{3.5 \times 3}{8}$$

$$\Rightarrow R_B = 1.3 \text{ ton.}$$

Análisis

tramo A-C $\quad 0 \leq x \leq 3$

$$M_x = R_A\, x = 2.2\,(x)$$

Para $x = 0$

$$M_A = 0$$

Para $x = 3$

$$M_C = 2.2 \times 3$$

$$M_C = 6.6 \text{ ton-m}$$

$$V = R_A = 2.2 \text{ ton.}$$

tramo C-B $\quad 3 \leq x \leq 8$

$$M_x = 2.2\,x - 3.5\,(x-3)$$

Para $x = 3$

$M_x = M_c = 2.2(3) - 3.5(0) = 6.6$ ton-m

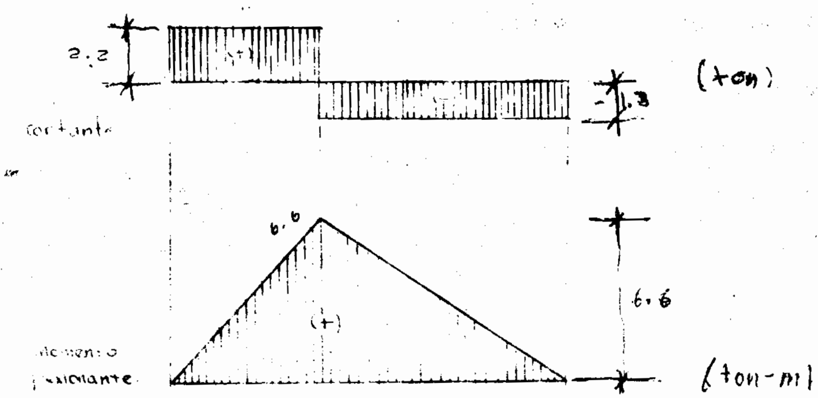
Para $x = 8$

$M_x = M_B = 2.2(8) - 3.5(8-3)$

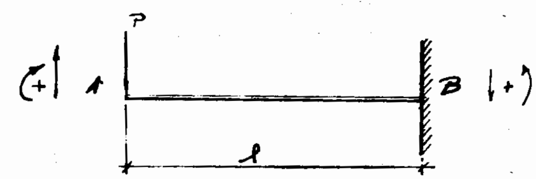
$M_B = 17.6 - 17.5 \doteq 0$

$V = 2.2 - 3.5 = -1.3$ ton.

Diagramas:



4).-

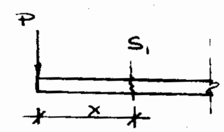


A).- Solución analizando la viga de izquierda a derecha.

1) Convención de signos para momento flexionante y fuerza cortante, indicada en el extremo A de la viga.

2) Análisis:

Tramo A-B $0 \le x \le l$



Momento flexionante

$M_x = -Px$ ..... Ecuación que nos representa una línea recta del tipo $y = k(a)$

Para $x = 0$

$M_A = -P(0)$

$\Rightarrow M_A = 0$

Para $x = l$

$M_B = -P(l)$

$\Rightarrow M_B = -Pl$

Fuerza Cortante :

$V = -P$

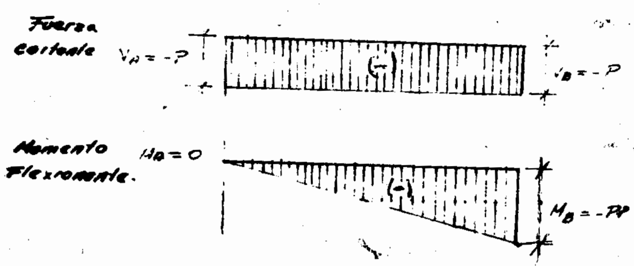
Para $x = 0$

$\Rightarrow V_A = -P$

para $x = l$

$V_B = -P$

3) Diagramas :



B).- Analizando la viga de derecha a izquierda.

1).- Convención de signos indicada en el extremo B de la viga.

2).- Reacciones :

$\Sigma M_B F = 0$

$-Pl + M_B = 0$

$\Rightarrow M_B = Pl$

$\Sigma F_y = 0$

$-P + R_B = 0$

$\Rightarrow R_B = P$

3) Análisis :

Tramo B-A $\quad 0 \leq x \leq l$

Momento flexionante :

$M_x = -M_B + R_B x$

$M_x = -Pl + Px$

Para $x = 0$

$M_B = -Pl + P(0)$

$\Rightarrow M_B = -Pl$

Para $x = l$

$M_A = -Pl + P(l)$

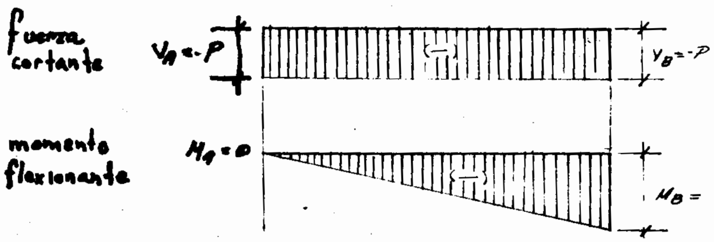
$\Rightarrow M_A = 0$

Fuerza Cortante :

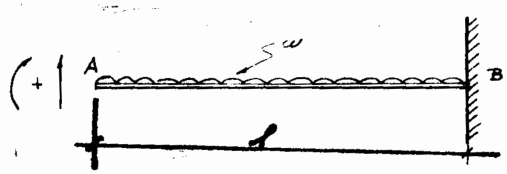
$V = -R_B$

$\Rightarrow V = -P$ .... cortante.

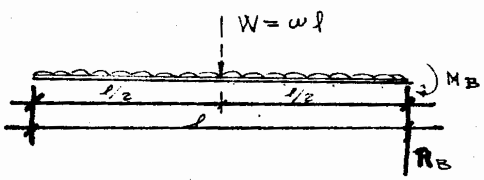
4) Diagramas:



5)



a).- Diagrama de cuerpo libre:



b).- Reacciones:

$$\Sigma M_B F = 0 \quad \circlearrowleft$$

$$M_B - W\frac{l}{2} = 0$$

$$M_B = W\frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{wl^2}{2}$$

$$\Sigma F y = 0$$

$$R_B - W = 0$$

$$R_B - wl = 0$$

$$\Rightarrow R_B = wl$$

c).- Análisis de la viga

Tramo B-A $\qquad 0 \le x \le l$

Fuerza cortante:

$$V = R_B + wx$$

si $x = 0$

$$V_B = -R_B = -wl$$

si $x = l$

$$V_A = -R_B + wl$$

$$V_A = -wl + wl = 0$$

Momento flexionante:

$$M_x = R_B x - M_B - \frac{wx^2}{2}$$

si $x = 0$

$$M_B = R_B(0) - M_B - \frac{w(0)^2}{2}$$

$$M_B = -M_B = -\frac{wl^2}{2}$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{wl^2}{2}$$

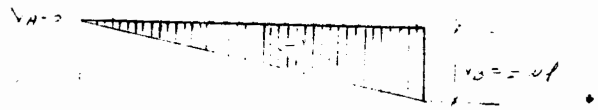
si $x = l$

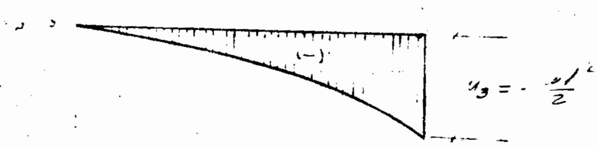
$$M_A = R_B(l) - \frac{wl^2}{2} - \frac{wl^2}{2}$$

$$M_A = wl^2 - wl^2$$

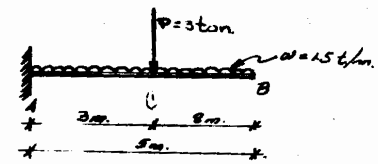
$$\Rightarrow M_A = 0$$

d).- Diagramas

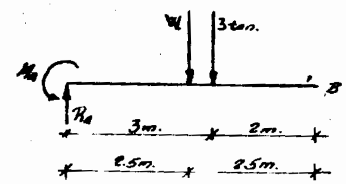




e)



a) Reacciones:



$$W = wl = 1.5\ \text{ton/m} \times 5\ \text{m} = 7.5\ \text{ton.}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A F = 0$$

$$M_A - 7.5 \times 2.5 - 3 \times 3 = 0$$

$$M_A - 18.75 - 9 = 0$$

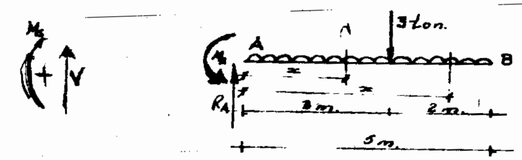
$$M_A = 27.75\ \text{ton-m.}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_A - 7.5 - 3 = 0$$

$$R_A = 10.5\ \text{ton}$$

b) Análisis de la viga:



Tramo AC; $0 \le x \le 3$

Fuerza cortante: $V_x = R_A - \omega x$

Si $x = 0$ $\quad V_A = 10.5 - 1.5(0)$

$V_A = 10.5$ ton.

Si $x = 3$ m $\quad V_C = 10.5 - 1.5(3) = 10.5 - 4.5$

$V_C = 6$ ton.

Momento flexionante: $M_x = -M_A + R_A x - \frac{\omega x^2}{2}$

Si $x = 0$ $\quad M_A = -M_A + R_A(0) - \frac{\omega(0)^2}{2}$

$M_A = -M_A = -27.75$

$M_A = -27.75$ ton-m.

Si $x = 3$ $\quad M_C = -27.75 + 10.5(3) - \frac{1.5(3)^2}{2}$

$M_C = -27.75 + 31.5 - 6.75$

$M_C = -3.00$ ton-m.

Tramo CB; $3 \le x \le 5$

Fuerza cortante: $V_x = R_A - \omega x - 3$

Si $x = 3$ $\quad V_C = R_A - 1.5(3) - 3 = 10.5 - 4.5 - 3 = 3$

$V_C = 3$ ton.

Si $x = 5$ $\quad V_B = 10.5 - 1.5(5) - 3 = 10.5 - 7.5 - 3 = 0$

$V_B = 0$

Momento flexionante: $M_x = -M_A + R_A x - \frac{\omega x^2}{2} - 3(x-3)$

Si $x = 3$ $\quad M_C = -27.75 + 10.5(3) - \frac{1.5(3)^2}{2} - 3(0)$

$M_C = -27.75 + 31.5 - 6.75 - 0$

$M_C = -3.00$ ton-m

Si $x = 5$ $\quad M_B = -27.75 + 10.5(5) - \frac{1.5(5)^2}{2} - 3(x-3)$

$M_B = -27.75 + 52.5 - 18.75 - 6$

$M_B = 0.0$ ton-m.

c) Diagramas

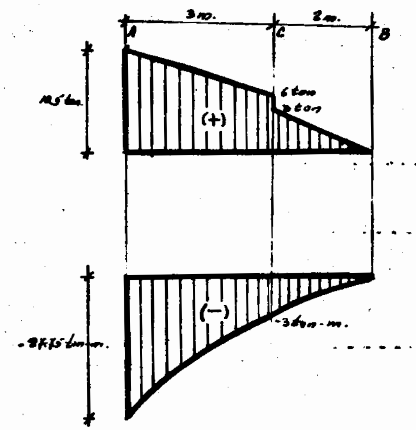
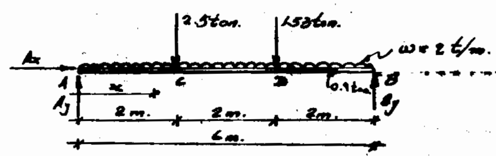


Diagrama de fuerza cortante

Diagrama de momento flexionante.

7)



a) Descomposición de $P_2 = 1.8$ ton en sus componentes ortogonales:

$P_{2x} = 1.8 \cos 60° = 1.8 \times 0.5 = 0.9$ ton.

$P_{2y} = 1.8 \sin 60° = 1.8 \times 0.866 = 1.53$ ton

b) Reacciones:

$\sum F_x = 0;$ $A_x - 0.9 = 0$

$A_x = 0.9$ ton

$\circlearrowleft + \sum M_A F = 0;$ $6B_y - 1.53 \times 4 - 2.5 \times 2 - 12 \times 3 = 0$

$6B_y - 6.12 - 5 - 36 = 0$

$B_y = \frac{47.12}{6} = 7.85$

$B_y = 7.85$ ton

$\sum F_y = 0;$ $A_y - 12 - 2.5 - 1.53 + 7.85 = 0$

$A_y = 8.18$ ton.

c) Análisis de la viga:

Tramo AC; $0 \leq x \leq 2$

Fuerza cortante; $V = 8.18 - 2x$

si $x = 0$ $V_A = 8.18$ ton

si $x = 2$ $V_C = 8.18 - 2 \times 2 = 8.18 - 4$

$V_C = 4.18$ ton

Momento flexionante; $M_x = 8.18x - \frac{2x^2}{2}$

si $x = 0$ $M_A = 0$

si $x = 2$ $M_C = 8.18 \times 2 - \frac{2 \times 2^2}{2} = 16.36 - 4$

$M_C = 12.36$ ton-m.

Tramo CD; $2 \leq x \leq 4$

Fuerza cortante; $V = 8.18 - 2x - 2.5$

si $x = 2$ $V_C = 8.18 - 2(2) - 2.5 = 8.18 - 4 - 2.5$

$V_C = 1.68$ ton.

si $x = 4$ $V_D = 8.18 - 8 - 2.5$

$V_D = -2.32$ ton

Momento flexionante; $M = 8.18x - \frac{2x^2}{2} - 2.5(x-2)$

si $x = 2$ $M_C = 8.18 \times 2 - 4 - 0 = 16.36 - 4$

$M_C = 12.36$ ton-m.

si $x = 4$ $M_D = 8.18 \times 4 - 16 - 5 = 32.72 - 21$

$M_D = 11.72$ ton-m.

Tramo BD; $0 \leq x \leq 2$

Fuerza Cortante $V = -7.85 + 2x$

si $x = 0$ $V_B = -7.85$ ton.

si $x = 2$ $V_D = -7.85 + 4$

$V_D = -3.85$ ton

Momento flexionante; $M_x = 7.85x - \frac{2x^2}{2}$

si $x = 0$ $M_B = 0$

si $x = 2$ $M_D = 7.85 \times 2 - 4 = 15.70 - 4$

$M_D = 11.70$ ton-m.

Tramo DC; $2 \leq x \leq 4$

Fuerza cortante; $V = -7.85 + 2x + 1.53$

si $x = 2$ $V_D = -7.85 + 4 + 1.53$

$V_D = -2.32$ ton.

Momento flexionante; $M_x = 7.85x - \frac{2x^2}{2} - 1.53(x-2)$

si $x = 2$ $M_D = 7.85 \times 2 - 4 - 0 = 15.70 - 4$

$M_D = 11.70$ ton-m.

Fuerza Normal:

de $\Sigma F_x = 0$

Fuerza de compresión = 0.9 ton.

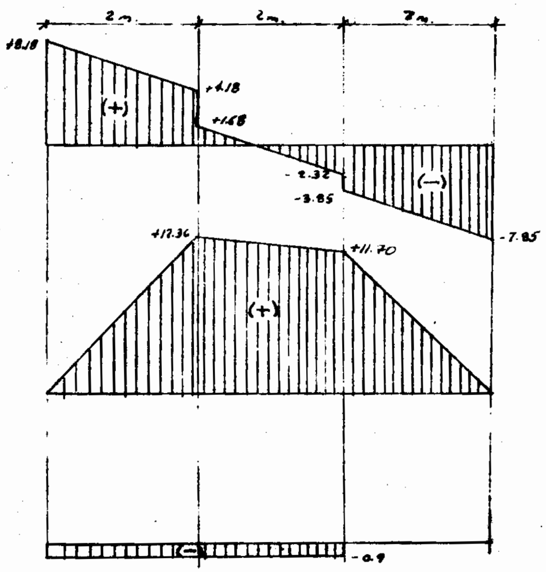
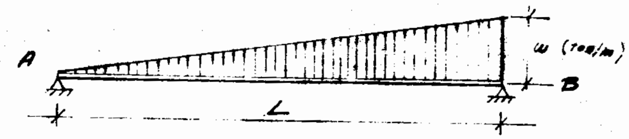


Diagrama de fuerza Cortante

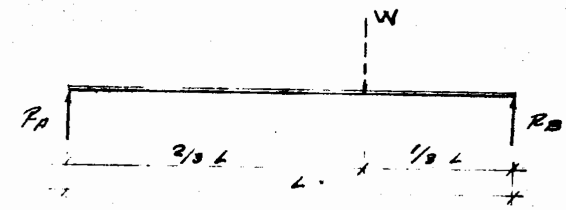
Diagrama de momento flexionante

Diagrama de fuerza normal (t-m)

8).-



1) Reacciones:



$$W = \frac{1}{2} \omega L$$

$$\Sigma M_A F = 0 \qquad \circlearrowleft +$$

$$R_B L - \frac{2}{3} L W = 0$$

$$R_B = \frac{2}{3} \frac{L W}{L}$$

$$R_B = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \omega L$$

$$\Rightarrow R_B = \frac{\omega L}{3}$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \uparrow +$$

$$R_A - W + R_B = 0$$

$$R_A - W + \frac{\omega L}{3} = 0$$

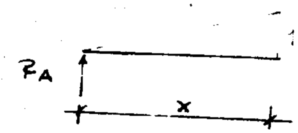
$$R_A = W - \frac{\omega L}{3}$$

$$R_A = \frac{\omega L}{2} - \frac{\omega L}{3}$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{\omega L}{6}$$

2) Análisis de la viga

Tramo A-B $\quad 0 \leq x \leq L$



$$\frac{w}{L} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad y = \frac{w x}{L}$$

Fuerza Cortante :

$$V = R_A - \frac{1}{2} y x$$

$$V = \frac{wL}{6} - \frac{1}{2}\frac{w x^2}{L}$$

si $x = 0$

$$V_A = \frac{wL}{6}$$

si $x = L$

$$V_B = \frac{wL}{6} - \frac{1}{2}\frac{wL^2}{L}$$

$$V_B = \frac{wL}{6} - \frac{wL}{2}$$

$$V_B = -\frac{wL}{3}$$

Momento Flexionante :

$$M = R_A x - \frac{1}{2} y x \frac{1}{3} x$$

$$M = \frac{wL}{6} x - \frac{w x^3}{6L}$$

si $x = 0$

$$M_A = 0$$

si $x = L$

$$M_B = \frac{wL^2}{6} - \frac{wL^3}{6L}$$

$$M_B = \frac{wL^2}{6} - \frac{wL^2}{6}$$

$$M_B = 0$$

3) Cálculo del momento flexionante máximo :

a) Posición :

$$V = \frac{wL}{6} - \frac{1}{2}\frac{w x^2}{L} = 0$$

por tanto :

$$\frac{w x^2}{2L} = \frac{wL}{6}$$

$$x^2 = \frac{wL}{6}\frac{2L}{w}$$

$$x^2 = \frac{2L^2}{6} = \frac{1}{3}L^2$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}L^2}$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1}{1.735}\,L$$

$$x = 0.575\,L$$

5) *Valor del momento:*

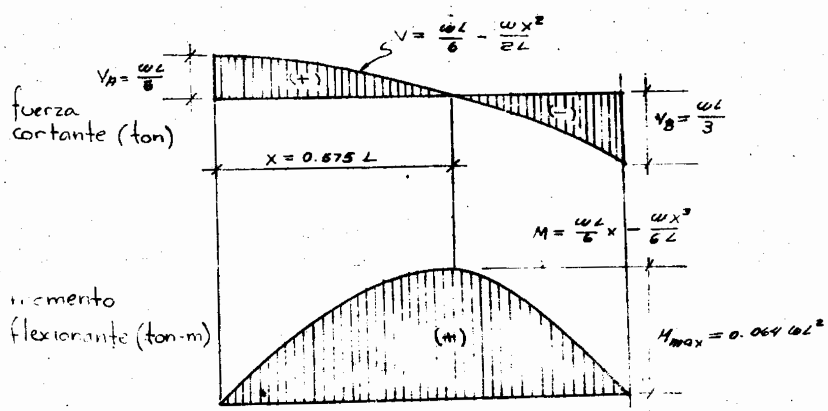
$$M_{máx} = \frac{wL}{6}\,\frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{w}{6L}\,\frac{L^3}{(3)^{3/2}}$$

$$M_{máx} = \frac{wL}{6} \times 0.575L - \frac{w}{6L}\,(0.575L)^3$$

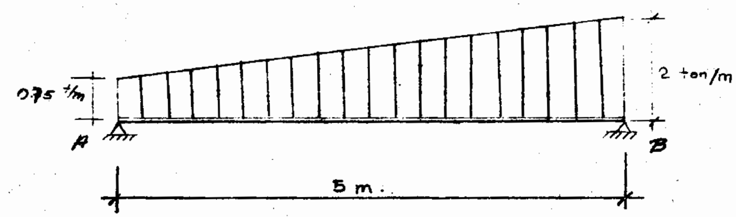
$$M_{máx.} = 0.096\,wL^2 - 0.032\,wL^2$$

$$M_{máx} = 0.064\,wL^2$$

4) *Diagramas:*

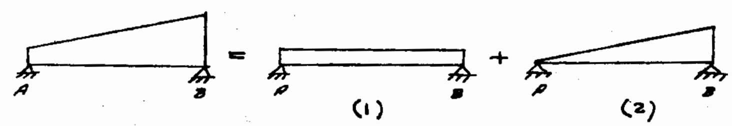


9)

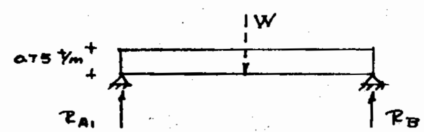


c) *Reacciones*

Simplificación:



Para (1)



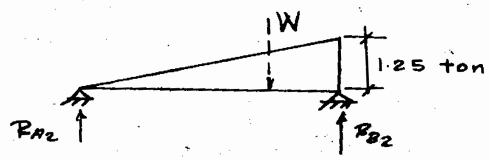
$$W = 5 \times 0.75 = 3.75 \text{ ton.}$$

$$R_{A1} = R_{B1} = \frac{W}{2} = \frac{3.75}{2}$$

$$R_{A1} = 1.875 \text{ ton.}$$

$$R_{B1} = 1.875 \text{ ton.}$$

Para (2)



$$W = \frac{1}{2}\,5 \times 1.25 = 3.125 \text{ ton} \doteq 3.13 \text{ ton.}$$

$$R_{A2} = \frac{3.125 \times 1.67}{5} = 1.043 \text{ ton.}$$

$$R_{B2} = \frac{3.125 \times 3.33}{5} = 2.081 \text{ ton.}$$

Reacciones totales:

$$R_A = 1.875 + 1.043$$

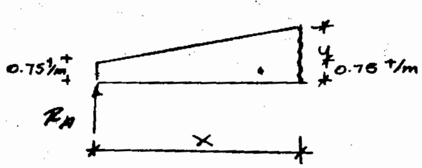
$$\Rightarrow R_A = 2.918 \text{ ton.}$$

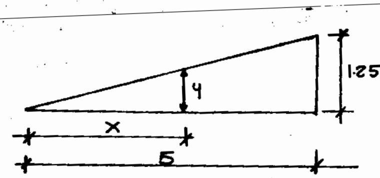
$$R_B = 1.875 + 2.081$$

$$\Rightarrow R_B = 3.956 \text{ ton.}$$

b) Análisis de la viga:

tramo A-B $\quad 0 \le x \le 5$





$$\frac{y}{x} = \frac{1.25}{5}$$

$$y = \frac{1.25}{5}\,x$$

$$y = 0.25\,x$$

Fuerza Cortante:

$$V = 2.917 - 0.75x - \frac{1}{2}(xy)$$

$$V = 2.917 - 0.75x - \frac{0.25}{2}x^2$$

$$V = 2.917 - 0.75x - 0.125x^2$$

si $x = 0$

$$\Rightarrow V_A = 2.917 \text{ ton.}$$

si $x = 5$

$$V_B = 2.917 - 0.75(5) - 0.125(5)^2$$

$$V_B = 2.917 - 3.75 - 3.125$$

$$\Rightarrow V_B = -3.958 \text{ ton.}$$

Momento flexionante:

$$M = 2.917x - \frac{0.75x^2}{2} - \frac{1}{2}(xy)\frac{1}{3}x$$

$$M = 2.917x - \frac{0.75x^2}{2} - \frac{1}{2}x(0.25x)\frac{x}{3}$$

$$M = 2.917x - \frac{0.75x^2}{2} - \frac{0.25x^3}{6}$$

si $x = 0$

$$\Rightarrow M_A = 0$$

Si $x = 5$

$$M_B = 2.917(5) - \frac{0.75(5)^2}{2} - \frac{0.25}{2}(5)^3$$

$$M_B = 14.6 - 9.4 - 5.2$$

$$\Rightarrow M_B = 0$$

3) Valor del momento máximo y su localización:

$$V = 2.917 - 0.75x - 0.125x^2 = 0$$

$$0.125x^2 + 0.75x - 2.917 = 0$$

$$x^2 + 6x - 23.344 = 0$$

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 + 23.344}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{32.344} = -3 \pm 5.60$$

$$x = 2.60 \text{ m.}$$

$$M_{max} = 2.917(2.60) - \frac{0.75(2.60)^2}{2} - \frac{0.25}{6}(2.60)^3$$

$$M_{max} = 7.584 - 2.545 - 0.7323$$

$$\Rightarrow M_{max} = 4.3069 \text{ ton-m.}$$

4) Diagramas:

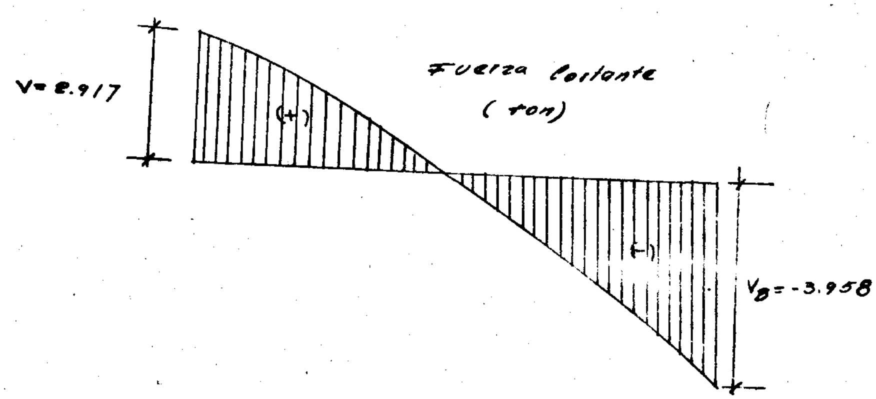
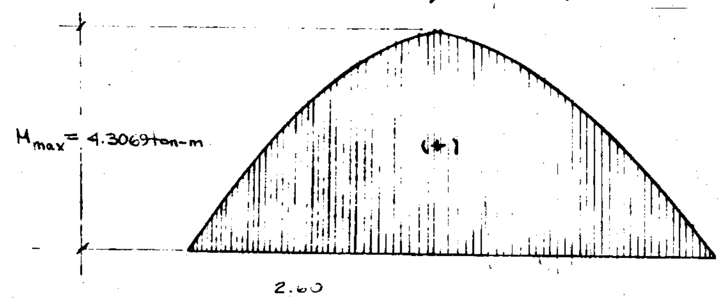
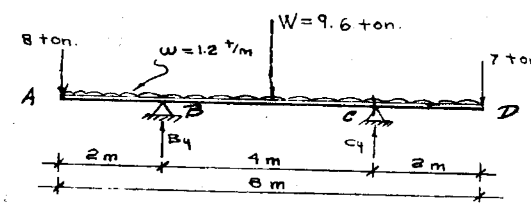


Diagrama de Momento flexionante.



10)



1) Reacciones:

$$W = 1.2 \times 8 = 9.6 \text{ ton.}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \circlearrowleft +$$

$$4C_y - 7(6) - 9.6(2) + 8(2) = 0$$

$$4C_y - 42 - 19.2 + 16 = 0$$

$$4C_y - 45.2 = 0$$

$$C_y = \frac{45.2}{4}$$

$$\Rightarrow C_y = 11.3 \text{ ton.}$$

ΣF_y

$$-8 - 9.6 - 7 + 11.3 + B_y = 0$$

$-13.3 + B_y = 0$

$\rightarrow B_y = 13.3$ ton.

2) Análisis de la viga:

Tramo A-B $\quad 0 \leq x \leq 2$

Fuerza Cortante:

$V = -8 - 1.2x$

si $x = 0$

$V_A = -8$ ton

si $x = 2$

$V_B = -8 - 1.2(2)$

$V_B = -10.4$ ton.

Momento flexionante:

$$M = -8x - \frac{1.2x^2}{2}$$

si $x = 0$

$M_A = 0$

si $x = 2$

$M_B = -8(2) - 0.6(2)^2$

$M_B = -18.4$ ton-m.

Tramo B-C $\quad 0 \leq x \leq 4$

Fuerza Cortante:

$V = -10.4 + 13.3 - 1.2x$

si $x = 0$

$V_B = -10.4 + 13.3$

$V_B = +2.90$ ton.

si $x = 4$

$V_C = -10.4 + 13.3 - 1.2(4)$

$V_C = -10.4 + 13.3 - 4.8$

$V_C = -1.90$ ton.

Momento flexionante.

$$M = -18.4 + 2.9x - \frac{1.2x^2}{2}$$

si $x = 0$

$M_B = -18.4$ ton-m.

si $x = 4$

$$M_C = -18.4 + 2.9(4) - \frac{1.2(4)^2}{2}$$

$M_C = -18.4 + 11.6 - 9.6$

$M_C = -16.4$ ton-m.

Tramo D-C $\quad 0 \leq x \leq 2$

Fuerza cortante:

$V = 7 + 1.2x$

si $x = 0$

$V_D = 7$ ton.

si $x = 2$

$V_C = 7 + 1.2 \times 2 = 7 + 2.4$

$V_C = 9.6$ ton
9.4

Momento flexionante :

$M = -7x - \frac{1.2x^2}{2}$

si $x = 0$

$M_D = 0$

si $x = 2$

$M_C = -7(2) - \frac{1.2(2)^2}{2}$

$M_C = -14 - 2.4$

$M_C = -16.4$ ton-m.

3) Momento máximo entre el tramo B-C

$V = 2.9 - 1.2x = 0$

$x = \frac{2.9}{1.2}$

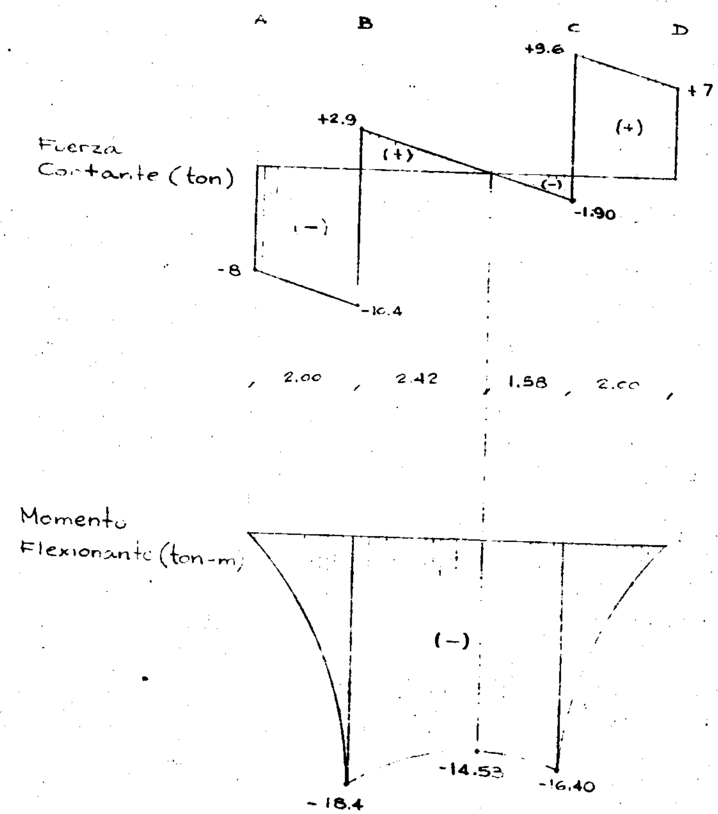
$x = 2.42$

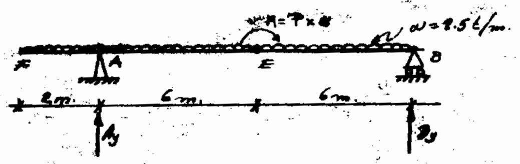
$M_{máx} = -18.4 + 2.9x - \frac{1.2(x)^2}{2}$

$M_{máx} = -18.4 + 2.9(2.42) - \frac{1.2(2.42)^2}{2}$

$M_{máx} = -14.53$ ton-m.

4. Diagramas :





a) Reacciones:

$M = P \times e = 200 \times 1.5 = 300\ Kg\text{-}m = 0.3\ ton\text{-}m.$

$W = 14 \times 2.5 = 35\ ton.$

$\circlearrowleft + \Sigma M_A F = 0$

$-0.2 \times 6 + 12 B_y - 35 \times 5 - 0.3 = 0$

$-1.2 + 12 B_y - 175 - 0.3 = 0$

$B_y = \frac{176.5}{12} = 14.708$

$B_y = 14.708\ ton.$

$\Sigma F_y = 0$

$-0.2 + A_y - 35 + 14.708 = 0$

$A_y = 20.492\ ton.$

b) Análisis de la viga:

Tramo FA; $0 \leq x \leq 2$

Fuerza Cortante; $V = -2.5x$

si $x = 0$ $\quad V_F = 0$

si $x = 2$ $\quad V_A = -2.5(2) = -5.0$

$V_A = -5.0\ ton.$

Tramo AE; $2 \leq x \leq 8$

Fuerza cortante; $V = -2.5x + 20.492$

si $x = 2$ $\quad V_A = -2.5(2) + 20.492 = -5 + 20.492$

$V_A = 15.492\ ton.$

si $x = 8$

$V_E = -2.5(8) + 20.492 = -20 + 20.492$

$V_E = 0.492$

Tramo EB; $8 \leq x \leq 14$

si $x = 8$ $\quad V_E = -2.5(8) + 20.492 - 0.20$

$V_E = 0.292$

si $x = 14$ $\quad V_B = -14.708$

Para la obtención del momento flexionante se analiza la viga por tramos:

Tramo F-A

$M_x = -\frac{\omega x^2}{2}$

si $x = 0$ $\quad M_F = 0$

si $x = 2$ $\quad M_A = -5.0\ ton\text{-}m.$

Tramo AE

$M_x = -\frac{\omega x^2}{2} + A_y(x-2)$

si $x = 8$ $\quad M_E = -\frac{2.5(8)^2}{2} + 20.492(6) = -80.0 - 122.952$

$M_E = +42.952\ ton\text{-}m.$

Efecto del momento concentrado.

$M'_E = 42.952 + 0.3 = 43.252\ ton\text{-}m.$

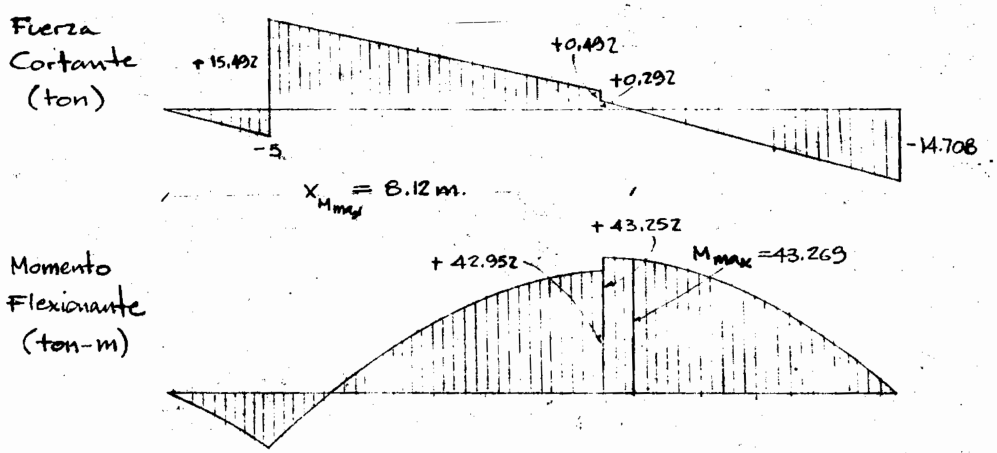
Tramo EB

$M_x = -\frac{\omega x^2}{2} + A_y(x-2) - 0.2(x-8) + 0.3$

si $x = 8$ $\quad M_E = +43.252\ ton\text{-}m.$

si $x = 0$ $\quad M_B = 0$

Diagramas.

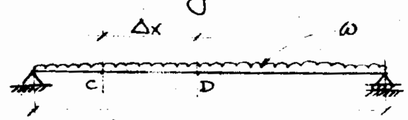


Momento maximo en tramo EB:

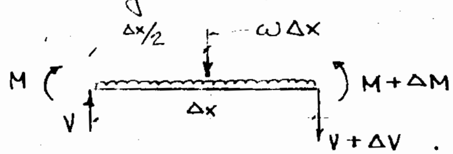
$$0 = -2.5x_{M_{max}} + 20.292 \quad \therefore \quad x_{M_{max}} = 8.12 \text{ m.}$$

$$\therefore \quad M_{máx} = -82.418 + 164.771 - 39.084 \quad \therefore \quad M_{max} = +43.369 \text{ ton-m.}$$

12) Considerando la viga:



Efectuemos los cortes en C y D para estudiar el cuerpo libre de longitud Δx:



De la ecuación de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$V - (V + \Delta V) - \omega \Delta x = 0$$

$$V - V - \Delta V - \omega \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta x} = -\omega$$

Llevando al límite, cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\omega \quad \text{---------} \quad (1)$$

Integrando la ecuación (1) entre los extremos C y D:

$$\int_{x_C}^{x_D} \frac{dV}{dx} \cdot dx = -\int_{x_C}^{x_D} \omega \, dx$$

$$V_{x_D} - V_{x_C} = -\int_{x_C}^{x_D} \omega \, dx \quad \text{----} \quad (2)$$

Del mismo diagrama de cuerpo libre anterior se tiene:

$$\Sigma M_D F = 0$$

$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x - (\omega \Delta x)\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x - \frac{1}{2}\omega(\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{1}{2}\omega \Delta x$$

Llevando al límite ambos miembros de esta última ecuación, cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = V + 0 = \frac{dM}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx} = V \quad \text{-----------} \quad (3)$$

Integrando entre los extremos C y D, llegamos a la siguiente ecuación:

$$M_{x_D} - M_{x_C} = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx \quad ----- \quad (4)$$

Las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) resuelven este problema.

13) La interpretación de cada una de las cuatro ecuaciones deducidas en el problema anterior es:

De (1) $\quad -\omega = \dfrac{dV}{dx}$

"La ordenada del diagrama de carga $(-\omega)$, es igual a la pendiente del diagrama de fuerza cortante".

De (2) $\quad V_{x_D} - V_{x_C} = -\int_{x_C}^{x_D} \omega\,dx$

"La diferencia de fuerza cortante entre dos puntos consecutivos de la viga, es igual al area bajo la curva del diagrama de carga".

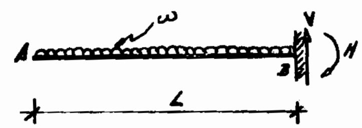
De (3) $\quad \dfrac{dM}{dx} = V$

"La pendiente de la curva del diagrama de momento flexionante en un punto cualquiera de la viga, es igual al valor de la fuerza cortante en dicho punto".

De (4). $\quad M_{x_D} - M_{x_C} = \int_{x_C}^{x_D} V\,dx$

"La diferencia entre la magnitud de los momentos flexionantes en dos puntos consecutivos de una viga, es igual al area bajo la curva del diagrama de fuerza cortante entre esos dos puntos de la viga".

14) Diagrama de cuerpo libre:



De la ecuación (1) del problema 12

$$\frac{dV}{dx} = -\omega = K$$

La pendiente del diagrama de fuerza cortante es negativa y constante.

De la ecuación (2) del problema 12 y considerando los puntos C y D como A y B respectivamente:

$$V_B - V_A = -\int_0^L \omega\,dx$$

pero como $V_A = 0$

$$V_B = -\omega\,[x]_0^L = -\omega L$$

De las dos conclusiones anteriores se traza el siguiente diagrama:

Para obtener el diagrama de momentos flexionantes de la expresión (1) del problema 12.

$$\frac{dV}{dx} = -\omega \quad \therefore \quad V = \int -\omega dx' = -\omega x + c$$

Para este caso, si $x=0$: $V=0$ $\therefore c=0$

$$\therefore \; V = -\omega x \quad \text{— — (A)}$$

De la expresión (4) del problema (12)

$$M_{x_B} - M_{x_A} = \int_0^L V dx \quad \text{— — (B)}$$

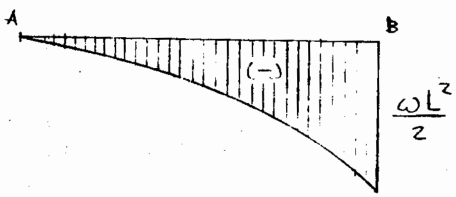
(A) en (B)

$$M_{x_B} - M_{x_A} = \int_0^L (-\omega x) dx = -\frac{\omega x^2}{2}\Bigg]_0^L$$

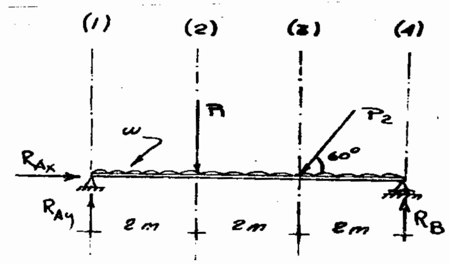
Para $x=0$. $M = M_{x_A} = 0$

$$\therefore \; M_{x_B} = -\frac{\omega L^2}{2}$$

De lo anterior se obtiene el siguiente diagrama de momentos flexionantes:



15).-



Cálculo de reacciones:

$$R_{Ax} = \frac{1}{2} P_2$$

$$R_{Ay} = \frac{6\omega}{2} + \frac{4}{6} P_1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} P_2 \frac{1}{6}$$

$$R_{Ay} = 3\omega + \frac{2}{3} P_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} P_2$$

$$R_B = \frac{6\omega}{2} + \frac{2}{6} P_1 + 4\frac{\sqrt{3}}{2} P_2 \frac{1}{6}$$

$$R_B = 3\omega + \frac{1}{3} P_1 + \frac{\sqrt{3}}{3} P_2$$

Análisis de la viga:

$$\frac{dV}{dx} = -\omega$$

$$V_2 - V_1 = -\int_{x_1}^{x_2} \omega \, dx$$

sección (1 (2)

$$V_2 - V_1 = - \omega \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$V_1 = R_A$$

$$V_2 = V_1 - [\omega x]_0^2$$

$$V_2 = V_1 - 2\omega$$

$$V_2' = V_1 - 2\omega - P_1$$

sección (2) - (3)

$$V_3 - V_2 = -\int_{x_2}^{x_3} \omega\, dx$$

$$V_3 = V_2' - [\omega x]_0^4$$

$$V_3 = V_1 - 2\omega - P_1 - [\omega x]_2^4$$

$$V_3 = V_1 - 2\omega - P_1 - 2\omega$$

$$V_3 = V_1 - 4\omega - P_1$$

$$V_3' = V_1 - 4\omega - P_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2$$

sección (3)-(4)

$$V_4 - V_3' = [-\omega x]_4^6$$

$$V_4 = V_3' - 2\omega$$

$$V_4 = V_1 - 4\omega - P_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2 - 2\omega$$

$$V_4 = V_1 - 6\omega - P_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2$$

$$V_4 = 3\omega + \frac{2}{3} P_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} P_2 - 6\omega - P_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} P_2$$

$$V_4 = -3\omega - \frac{1}{3} P_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} P_2 = -R_A$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Por condición de apoyo en las secciones (1) y (4) el momento flexionante vale cero.

$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V\, dx \quad \ldots\ldots \text{ en la sección } (1)-(2)$$

$$M_2 = M_1 + \int_0^2 (V_1 - \omega x)\, dx$$

$$M_2 = \left[V_1 x - \frac{\omega x^2}{2}\right]_0^2$$

$$M_2 = 2V_1 - 2\omega$$

sección (2) - (3)

$$M_3 - M_2 = \int_{x_2}^{x_3} V\, dx$$

$$M_3 = M_2 + \int_{x_2}^{x_3} (V_1 - \omega x - P_1)\, dx$$

$$M_3 = 2V_1 - 2\omega + \left[V_1 x - \frac{\omega x^2}{2} - P_1 x\right]_2^4$$

$$M_3 = 2V_1 - 2\omega + 4V_1 - 8\omega - 4P_1 - 2V_1 + 2\omega + 2P_1$$

$$M_3 = 2V_1 - 2\omega + 2V_1 - 6\omega - 2P_1$$

$$M_3 = 4V_1 - 8\omega - 2P_1$$

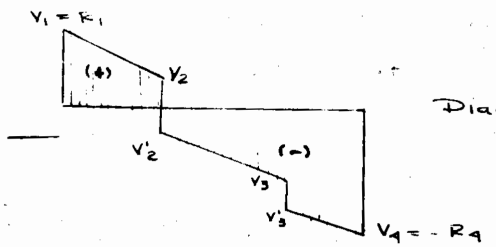


Diagrama de fuerza Cortante
(U_F)

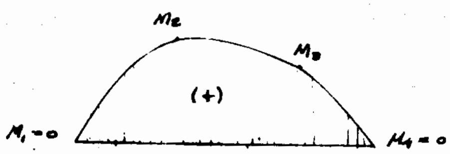


Diagrama de Momento Flexionante
$(U_F - m)$

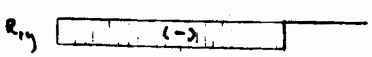
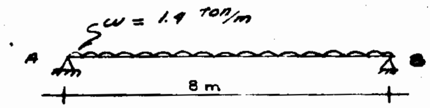


Diagrama de Fuerza Normal. (U_F)

(6).-



Reacciones :

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$$

De (1) :

$$\frac{dV}{dx} = -w = k \quad \ldots\ldots\ (a)$$

∴ El diagrama de V tiene una pendiente constante.

De (2) :

$$V_c - V_a = -wL$$

Para $V_A = \dfrac{wL}{2}$

$$\therefore \quad V_c = -wL + \frac{wL}{2} \quad \ldots\ldots\ (b)$$

∴ Con las condiciones (a) y (b) se traza el diagrama de fuerza cortante.

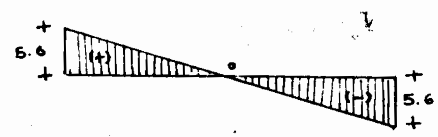
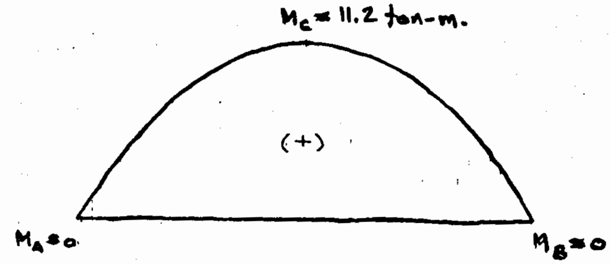


Diagrama de momentos flexionantes.



De la ecuación (3):

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{wL}{2} - wx$$

Integrando:

$$\int \frac{dM}{dx} = \int \left(\frac{wL}{2} - wx \right) dx$$

$$\int_{M_A}^{M_C} dM = \int_0^{L/2} \frac{wL}{2} dx - \int_0^{L/2} wx\, dx$$

$$M_C - M_A = \left[\frac{wL}{2} x - \frac{wx^2}{2} \right]_0^{L/2}$$ .... Ecuación que representa una parábola.

Para $x = 0$; $M_A = 0$

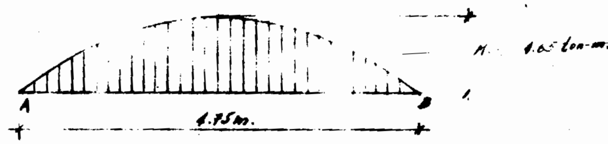
Para $x = L$; $M_B = 0$

Para $x = \frac{L}{2}$; $M_C = \frac{wL^2}{8}$

sust. valores:

$$M_C = \frac{1.4\,(8)^2}{8}$$

$M_C = 11.2$ ton-m.



El momento flexionante máximo para una viga libremente apoyada y con carga uniformemente distribuida en toda su longitud es:

$$M_{max} = \frac{w l^2}{8} \quad ---- (1)$$

Datos:

$M_{max} = 4.65$ ton-m

$l = 4.75$ m.

w es la incógnita

De (1) despejamos w:

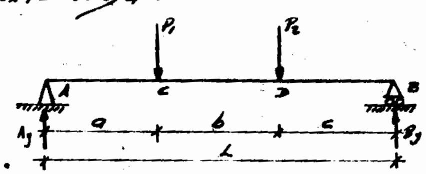
$$w = \frac{8 M_{max}}{l^2}$$

Sustituyendo los datos:

$$w = \frac{8 \times 4.65}{(4.75)^2} = \frac{8 \times 4.65}{22.6} = 1.649$$

$$w = 1.649 \text{ ton/m.}$$

18) De acuerdo al enunciado del problema, se tendrá la siguiente viga:



a) Reacciones:

$G^{+} \sum M_A F = 0$

$B_y L - P_1 a - P_2(a+b) = 0$

$$B_y = \frac{P_1 a + P_2(a+b)}{L} \quad \text{..............} (1)$$

$\sum F_y = 0$

$A_y - P_1 - P_2 + B_y = 0$

$A_y = P_1 + P_2 - B_y$ .... (2)

b) Análisis de la viga:

Tramo AC; $0 \leq x \leq a$

Momento flexionante; $M = A_y x$

si $x = 0$ $\quad M_A = 0$

si $x = a$ $\quad M_C = A_y a$ .... (3)

Tramo BD; $0 \leq x \leq c$

Momento flexionante; $M = B_y x$

si $x = 0$ $\quad M_B = 0$

si $x = c$ $\quad M_D = B_y c$ .... (4)

c) Valores de P_1 y P_2:

Para P_1; $M_C = 8.58$ ton-m.

de la expresión: $M_C = A_y a$

$8.58 = (P_1 + P_2 - B_y) a$

$8.58 = P_1 a + P_2 a - B_y a$

res[illegible] B_y de la ecuacion (1):

$$[illegible] P_1 a + [illegible] - \left[\frac{P_1 a}{L} + \frac{P_2(a+b)}{L}\right] a$$

Si $a = 2.[illegible]$ y $b = 3.0 m.$; $L = 7.0 m.$

$$8.58 = 2.5 P_1 + 2.5 P_2 - \left[\frac{2.5}{7} P_1 + \frac{P_2(2.5+3)}{7}\right] 2.5$$

$$8.58 = 2.5 P_1 + 2.5 P_2 - (0.357 P_1 + 0.786 P_2) 2.5$$

$$8.58 = 2.5 P_1 + 2.5 P_2 - 0.89 P_1 - 1.96 P_2$$

$$8.58 = 1.61 P_1 + 0.54 P_2 \text{ ---------------- } (5)$$

De la expresión (4):

$$M_D = B_y C$$

$$9.86 = \left(\frac{P_1 a}{L} + \frac{P_2(a+b)}{L}\right) c$$

si $c = 1.5 m$; $9.86 = (0.357 P_1 + 0.786 P_2) 1.5$

$$9.86 = 0.53 P_1 + 1.18 P_2 \text{ ---------------- } (6)$$

Despejando P_1 de (6):

$$P_1 = \frac{9.86 - 1.18 P_2}{0.53} \text{ ---------------------- } (7)$$

Sustituyendo (7) en (5):

$$8.58 = 1.61\left(\frac{9.86}{0.53} - \frac{1.18}{0.53} P_2\right) + 0.54 P_2$$

$$8.58 = 29.95 - 3.58 P_2 + 0.54 P_2$$

$$8.58 - 29.95 = -3.04 P_2$$

$$P_2 = \frac{21.37}{3.04} = 7.03 \text{ ton}$$

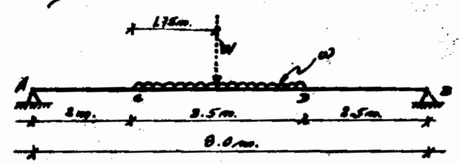
$\Longrightarrow P_2 = 7.03$ ton

Sustituyendo en (7) este último valor:

$$P_1 = \frac{9.86}{0.53} - \frac{1.18 \times 7.03}{0.53} = 18.6 - 15.63 = 2.97$$

$\longrightarrow P_1 = 2.97$ ton

19) De acuerdo al enunciado del problema se tendra la siguiente viga:



a) Reacciones:

$$W = 3.5 \omega$$

$$\circlearrowleft + \sum M_A F = 0$$

$$8 R_B - 3.5 \omega (3.75) = 0$$

$$R_B = 1.64 \omega$$

$$\sum F_y = 0$$

$$R_A - 3.5\omega + 1.64\omega = 0$$

$$R_A = 1.86 \omega$$

b) Análisis de la viga:

Tramo AC ; $0 \le x \le 2$

Fuerza cortante; $V = R_A$ (constante)

para dicho tramo; $V_c = R_A$

si $V_c = 2.8$ ton; y como $R_A = 1.86 \omega$.

$2.8 = 1.86\,\omega$

$\Longrightarrow \omega = 1.5$ ton/m.

Comprobación:

Tramo BD; $0 \leq x \leq 2.5$

Fuerza cortante; $V = -R_B$ (constante)

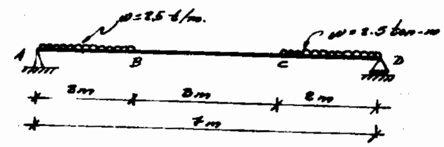
por tanto $V_D = -R_B$

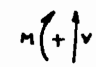
$2.5 = 1.64\,\omega$

$\omega = \frac{2.5}{1.64} = 1.52$ ton/m.

$\Longrightarrow \omega = 1.52$ ton/m.

20)





a) Reacciones:

$R_{Ay} = R_{Dy} = 2.5 \times 2 = 5$ ton.

b) Análisis de la viga:

Tramo AB $\quad 0 \leq x \leq 2$

Fuerza cortante: $V = 5 - 2.5x$

Si $x = 0$ $\quad V_A = 5 - 2.5(0)$

$V_A = 5$ ton

Si $x = 2$ $\quad V_B = 5 - 2.5(2) = 5 - 5$

$V_B = 0$ ton

Momento flexionante: $M = 5x - \frac{2.5x^2}{2} = 5x - 1.25x^2$

Si $x = 0$ $\quad M_A = 5(0) - 1.25(0)^2$

$M_A = 0$ ton-m.

Si $x = 2$ $\quad M_B = 5(2) - 1.25(2)^2 = 10 - 5$

$M_B = 5$ ton-m.

Tramo BC ; $2 \leq x \leq 5$

Fuerza cortante : $V = 5 - 2.5(2)$

$V = 5 - 5 = 0$

$V_B = 0$ ton

$V_C = 0$ ton

Momento flexionante: $M = 5x - 2.5(2)(x-1) = 5x - 5(x-1)$

si $x = 2$ $\qquad M_B = 5(2) - 5(2-1) = 10-5$

$M_B = 5$ ton-m.

si $x = 5$ $\qquad M_C = 5(5) - 5(5-1) = 25-20$

$M_C = 5$ ton-m.

Tramo DC ; $\quad 0 \leq x \leq 2$

Fuerza cortante $\qquad V = -5 + 2.5(x)$

si $x = 0$ $\qquad V_D = -5 + 2.5(0)$

$V_D = -5$ ton.

si $x = 2$ $\qquad V_C = -5 + 2.5(2)$

$V_C = 0$ ton

Momento flexionante: $M = 5x - \frac{2.5x^2}{2}$

si $x = 0$ $\qquad M_D = 5(0) - \frac{2.5(0)^2}{2}$

$M_D = 0$ ton-m

si $x = 2$ $\qquad M_C = 10 - 1.25(2)^2 = 10-5$

$M_C = 5$ ton-m.

c) Diagramas:

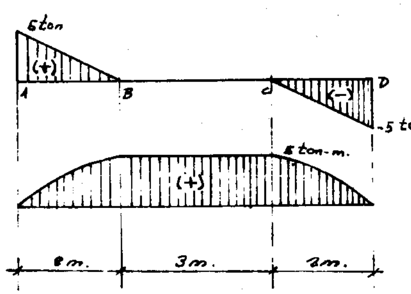


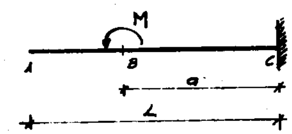
Diagrama de fuerza cortante

Ev ; 1cm = 5 ton
Eh ; 1:100

Diagrama de momento flexionante.

Ev ; 1cm = 5 ton-m.
Eh ; 1:100

21)



a) Análisis de la viga:

Tramo AB ; $0 \leq x \leq (L-a)$

Fuerza cortante $V = 0$

Momento flexionante $M = 0$

Tramo BC ; $(L-a) \leq x \leq L$

Fuerza cortante $V = 0$

Momento flexionante $M = -M$ (constante)

b) Diagramas:

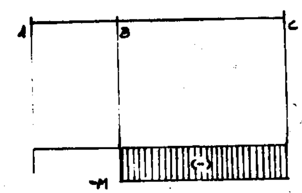
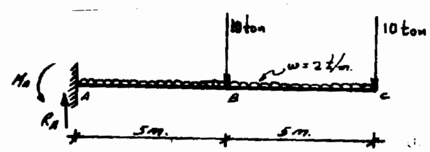


Diagrama de fuerza cortante. (U_F)

Diagrama de momento flexionante. ($U_F \cdot U_L$)

22)



a) Reacciones:

$\sum F_y = 0$; $\quad -2(10) - 10 - 10 + R_A = 0$

$-20 - 10 - 10 + R_A = 0$

$R_A = 40$ ton

$\sum M_A F = 0 \quad -20(5) - 10(5) - 10(10) + M_A = 0$

$-100 - 50 - 100 + M_A = 0$

$M_A = 250$ ton-m.

b) Análisis de la viga:

Tramo CB $\quad 0 \leq x \leq 5$

Fuerza Cortante; $V = 10 + 2x$

si $x = 0 \quad V_C = 10$ ton

si $x = 5 \quad V_B = 10 + 2(5) = 10 + 10$

$V_B = 20$ ton

Momento flexionante; $M = -10x - x^2$

si $x = 0 \quad M_C = -10(0) - (0)^2 = 0$ ton-m.

si $x = 5 \quad M_B = -10(5) - (5)^2 = -50 - 25$

$M_B = -75$ ton-m.

Tramo CA; $\quad 5 \leq x \leq 10$

Fuerza Cortante $\quad V = 10 + 10 + 2x$

si $x = 5 \quad V_B = 10 + 10 + 2(5) = 20 + 10$

$V_B = 30$ ton

si $x = 10 \quad V_A = 10 + 10 + 2(10) = 20 + 20$

$V_A = 40$ ton

Momento flexionante: $M = -10x - 10(x-5) - x^2$

si $x = 5 \quad M_B = -10(5) - 10(5-5) - (5)^2 = -50 - 0 - 25$

$M_B = -75$ ton-m.

si $x = 10 \quad M_A = -10(10) - 10(10-5) - (10)^2 = -100 - 50 - 100$

$M_A = -250$ ton-m.

NOTA: El valor del cortante en la reacción A, es igual al valor de la reacción en A; es decir:

$R_A = V_A = 40$ ton.

Para el momento se encuentra que:

$M_A = M_A^R = -250.$ ton-m.

c) Diagramas:

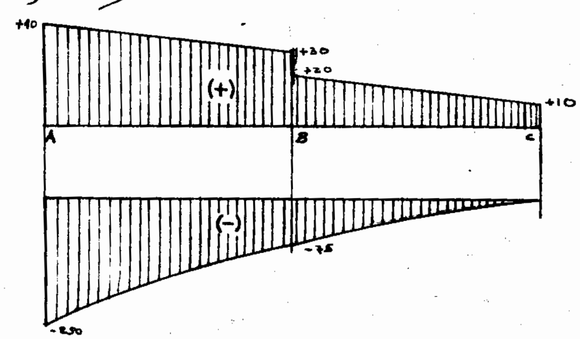


Diagrama de fuerza cortante. (ton)

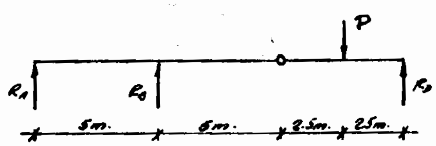
Ev; 1cm = 20 ton.
Eh; 1:100

Diagrama de mom. flexionante (ton-m)

Ev; 1cm = 100 ton-m

Eh; 1:100

23) Diagrama de cuerpo libre de la viga, considerando la articulación "c" interna y haciendo $L = 5m$.



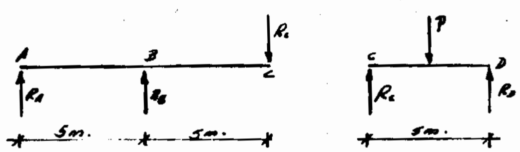
$\circlearrowleft + \Sigma M_A F = 0$

$$5R_B - 12.5P + 15R_D = 0 \ldots\ldots (1)$$

$\circlearrowleft + \Sigma M_D F = 0$

$$15R_A + 10R_B - 2.5P = 0 \ldots\ldots (2)$$

Separando la viga en la articulación interna "C" en dos partes $\overline{ABC}$ y $\overline{CD}$, tenemos los diagramas de cuerpo libre en equilibrio interno como lo muestran los siguientes esquemas:



Del estudio del diagrama de cuerpo libre $\overline{CD}$, tenemos:

$$R_C = \frac{P}{2} \quad y \quad R_D = \frac{P}{2}$$

valores que llevados a (1) y (2) nos dan:

$$R_B = 2.5P - 3\left(\frac{P}{2}\right) = P \Rightarrow R_B = P$$

$$R_A = \frac{-10P + 2.5P}{15} = \frac{-7.5P}{15} = -\frac{P}{2}$$

Comprobación:

Σ reacciones

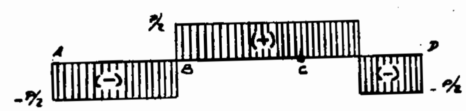
$$-\frac{P}{2} + P + \frac{P}{2} = P \qquad P \equiv P$$

Diagrama de fuerza cortante:

$$V_x^{(A)} = -\frac{P}{2} \qquad 0 \le x \le L$$

$$V_x^{(B)} = \frac{P}{2} \qquad 0 \le x \le \frac{3L}{2}$$

$$V_x^{(C)} = -\frac{P}{2} \qquad \frac{L}{2} \le x \le L$$



(V_x)

Observese que la articulación interna no afecta para nada el diagrama de fuerza cortante.

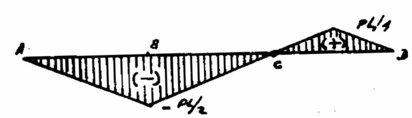
Diagrama de momento flexionante:

$$M_x = -(P/2)x \qquad 0 \le x \le L$$

$$M_x = -(P/2)x + P(x-L) \qquad L \le x \le \frac{5L}{2}$$

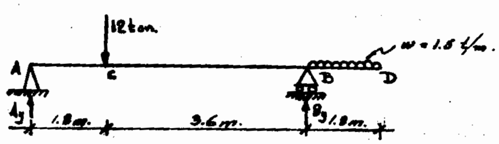
$$M_x = -(P/2)x + P(x-L) - P\left(x - \frac{5L}{2}\right) \qquad \frac{5L}{2} \le x \le 3L$$

$$\therefore M_x^B = -\frac{PL}{2} \quad M_x^C = 0 \quad M_x^D = 0 \quad M_x^E = \frac{PL}{4}$$



$(M_F - m)$

21)



a) Reacciones:

$\circlearrowleft + \sum M_B F = 0$ wl

$5.4A_y - 12(3.6) + 2.7(0.9) = 0$

$5.4A_y - 43.2 + 2.43 = 0$

$A_y = \frac{40.77}{5.4} = 7.55$ ton

$\sum F_y = 0;$

$7.55 - 12 + B_y - 2.7 = 0$

$B_y = 7.15$ ton.

b) Análisis de la viga:

Tramo AC ; $0 \le x \le 1.8$

Fuerza cortante $V = 7.55$ ton (constante)

Momento flexionante ; $M = 7.55x$

si $x = 0$ $M_A = 0$

si $x = 1.8$ $M_C = 7.55 \times 1.8 = 13.59$

$M_C = 13.59$ ton-m.

Tramo CB ; $1.8 \le x \le 5.4$

Fuerza cortante $V = 7.55 - 12 = -4.45$

$V = -4.45$ ton (constante)

Momento flexionante: $M = 7.55x - 12(x - 1.8)$

si $x = 1.8$ $M_C = 7.55 \times 1.8 - 12(1.8 - 1.8) = 13.59 - 0$

$M_C = 13.59$ ton-m.

si $x = 5.4$ $M_B = 7.55 \times 5.4 - 12(5.4 - 1.8) = 40.77 - 43.2$

$M_B = -2.4$ ton-m.

Tramo DB ; $0 \le x \le 1.8$

Fuerza cortante : $V = 1.5x$

si $x = 0$ $V_D = 0$

si $x = 1.8$ $V_B = 1.5 \times 1.8 = 2.7$

$V_B = 2.7$ ton

Momento flexionante: $M = -\frac{1.5x^2}{2} = 0.75x^2$

si $x = 0$ $M_D = 0$

si $x = 1.8$ $M_B = -0.75(1.8)^2 = -2.43$

$M_B = -2.43$ ton-m.

c) Diagramas:

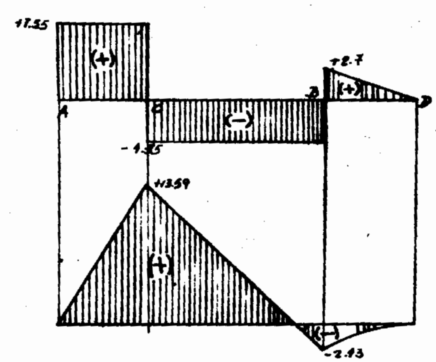


Diagrama de fuerza cortante. (ton)

Ev ; 1cm = 5 ton

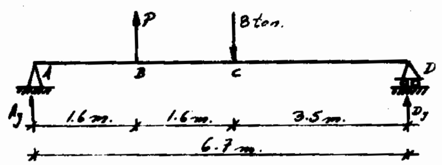
Eh ; 1:100

Diagrama de momento flexionante. (ton-m)

Ev ; 1cm = 5 ton-m.

Eh ; 1:100

25)



a) Reacciones:

$\circlearrowleft + \sum M_A F = 0$:

$6.7D_y - 8(3.2) + 1.6P = 0$

$6.7D_y - 25.6 + 1.6P = 0$

$D_y = \frac{25.6 - 1.6P}{6.7}$

$D_y = 3.82 - 0.24P$

$\sum F_y = 0$

$A_y + P - 8 + D_y = 0$

$A_y + P - 8 + 3.82 + (-0.24P) = 0$

$A_y + 0.76P - 4.18 = 0$

$A_y = 4.18 - 0.76P$

b) Análisis de la viga:

Tramo AB $\quad 0 \le x \le 1.6$

Momento flexionante; $M = A_y x$

si $x = 0 \qquad M_A = 0$

si $x = 1.6 \qquad M_B = (4.18 - 0.76P)1.6 = 6.7 - 1.22P$

$M_B = 6.7 - 1.22P$

Tramo DC; $\quad 0 \le x \le 3.5$

Momento flexionante; $M = D_y x$

si $x = 0 \qquad M_D = 0$

si $x = 3.5 \qquad M_C = (3.82 - 0.24P)3.5 = 13.4 - 0.84P$

$M_C = 13.4 - 0.84P$

Igualando los valores absolutos de M_C y M_B se tendrá:

$|M_B| = |M_C|$

$(M_B)^2 = (M_C)^2$

$(6.7 - 1.22P)^2 = (13.4 - 0.84P)^2$

$45 - 16.4P + 1.49P^2 = 180 - 22.5P + 0.71P^2$

$1.49P^2 - 0.71P^2 - 16.4P + 22.5P + 45 - 180 = 0$

$0.78P^2 + 6.1P - 135 = 0$

$P^2 + 7.8P - 173 = 0$

Resolviendo la anterior ecuación y tomando el valor positivo de P, tendremos:

$P = 9.8$ ton (hacia arriba)

y para este valor:

$M_B = 6.7 - 1.22P = 6.7 - 1.22 \times 9.8 = 6.7 - 12 = -5.3$

$M_B = -5.3$ ton-m.

$M_C = 13.4 - 0.84P = 13.4 - 0.84 \times 9.8 = 13.4 - 8.3$

$M_C = 5.1$ ton-m.

c) Diagrama:

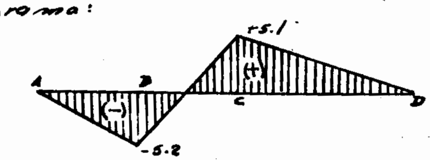
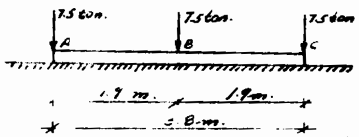


Diagrama de momento flexionante (ton-m)

Ev; 1cm = 5 ton-m

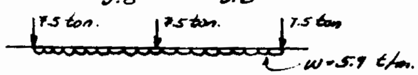
Eh; 1:100

26)



a) Reacción del apoyo sobre la viga

$$w = \frac{3(7.5)}{3.8} = \frac{22.5}{3.8} = 5.9 \text{ ton/m}$$



b) Análisis de la viga:

Tramo AB $\quad 0 \leq x \leq 1.9$

Fuerza cortante: $V = -7.5 + 5.9x$

si $x = 0$ $\quad V_A = -7.5$ ton

si $x = 1.9$ $\quad V_B = -7.5 + 5.9 \times 1.9 = -7.5 + 11.2$

$V_B = 3.7$ ton.

Momento flexionante: $M = -7.5x + \frac{5.9x^2}{2}$

si $x = 0$ $\quad M_A = 0$

si $x = 1.9$ $\quad M_B = -7.5 \times 1.9 + \frac{5.9(1.9)^2}{2} = -14.25 + 10.4$

$M_B = -3.85$ ton-m.

Por simetría de cargas y geometría, el valor de los cortantes y momentos en los puntos B y C son iguales a los calculados en B y A respectivamente.

c) Momento máximo en el tramo AB

$V = -7.5 + 5.9x = 0$

$x = \frac{7.5}{5.9} = 1.27$ m.

$M_{max} = -7.5(1.27) + 2.95(1.27)^2 = -9.52 + 4.75$

$M_{max} = -4.77$ ton-m.

d) Diagramas:

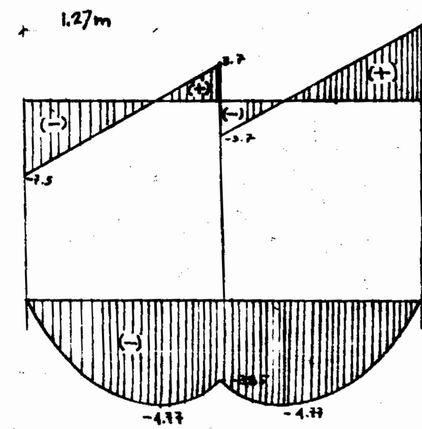


Diagrama de fuerza cortante (ton)

Ev; 1cm = 5 ton

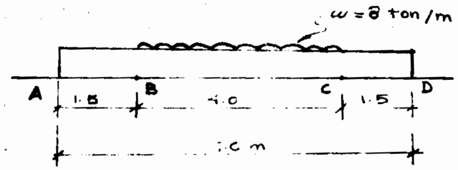
Eh; 1:50

Diagrama de momento flexionante (ton-m)

Ev; 1cm = 2.5 ton-m

Eh; 1:50

27).-



1).- Reacción en el apoyo:

$$w_R = \frac{8\times 4}{7} = 4.57 \text{ ton/m}$$

2) Análisis de la viga:

a) Fuerza cortante:

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad ; \quad dV = -w\,dx$$

integrando, tenemos:

$$\int_A^B dV = \int_A^B -w\,dx$$

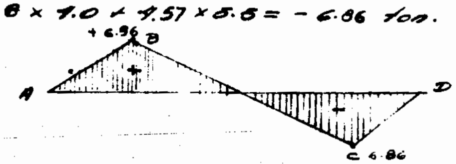
$$V_B - V_A = \int_A^B -w\,dx$$

La diferencia de fuerza cortante entre dos puntos consecutivos de una viga es igual al area bajo la curva del diagrama de carga de la viga.

$V_A = 0$

$V_B = 4.57 \times 1.5 = 6.86$ ton.

$V_C = -8 \times 4.0 + 4.57 \times 5.5 = -6.86$ ton.



D.F.C.
(ton)

b) Momento flexionante:

$$\frac{dM}{dx} = V \quad ; \quad dM = V\,dx$$

$$\int_A^B dM = \int_A^B V\,dx$$

$$M_B - M_A = \int_A^B V\,dx$$

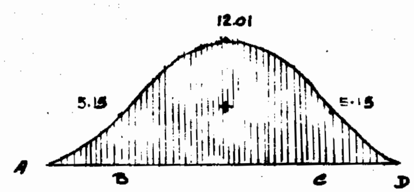
La diferencia consecutivas entre dos secciones consecutivas de una viga es igual al area bajo la curva del diagrama de fuerza cortante.

$M_B = 5.15$ ton-m.

Momento en el centro del claro entre B y C

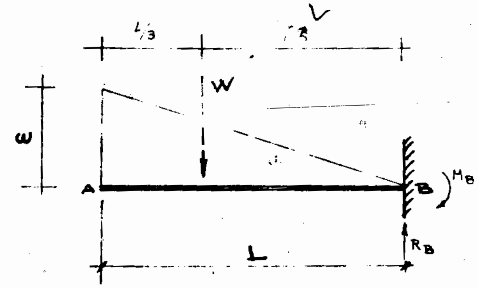
$M_E = 5.15 + 6.86 = 12.01$ ton-m.

Nota:- Por simetría de cargas y de geometría el momento flexionante en C es igual al de B.



D.M.F
(ton-m)

28)



1) Reacciones:

$W = \frac{1}{2} \omega L$

$\Sigma M_B F = 0$

$M_B - \frac{\omega L}{2} \, \frac{2}{3} L = 0$

$M_B = \frac{\omega L^2}{3}$

$\Sigma F_y = 0$

$-W + R_B = 0$

$R_B = W = \frac{\omega L}{2}$

$R_B = \frac{\omega L}{2}$

2) Análisis de la viga:

tramo A-B $\quad 0 \leq x \leq L$

$\frac{\omega}{L} = \frac{y}{x} \;;\; y = \frac{\omega x}{L}$

$W_1 = \frac{1}{2} x y = \frac{1}{2} x \frac{\omega x}{L} = \frac{1}{2} \frac{\omega x^2}{L}$

Fuerza cortante:

$V = W_1 - R_B = \frac{1}{2} \frac{\omega x^2}{L} - \frac{\omega L}{2}$

si $x = 0$ $\quad V_B = -\frac{\omega L}{2}$

si $x = L$ $\quad V_A = \frac{\omega L^2}{2L} - \frac{\omega L}{2} = 0$

Momento flexionante:

$M = -\frac{\omega L^2}{3} - \frac{\omega x^2}{2L} \frac{1}{3} x + \frac{\omega L x}{2}$

$M = -\frac{\omega L^2}{3} - \frac{\omega x^3}{6L} + \frac{\omega L x}{2}$

si $x = 0$; $M_B = -\frac{\omega L^2}{3}$

si $x = L$; $M_A = -\frac{\omega L^2}{3} - \frac{\omega L^3}{6L} + \frac{\omega L^2}{2}$

$M_A = 0$

Diagrama de fuerza cortante (U_F)

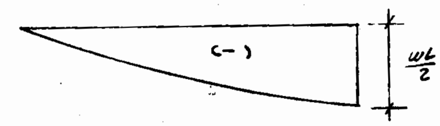
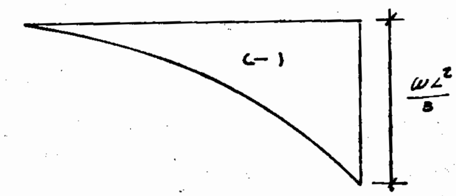


Diagrama de Momento flexionante. ($U_F = U_L$)



29).-

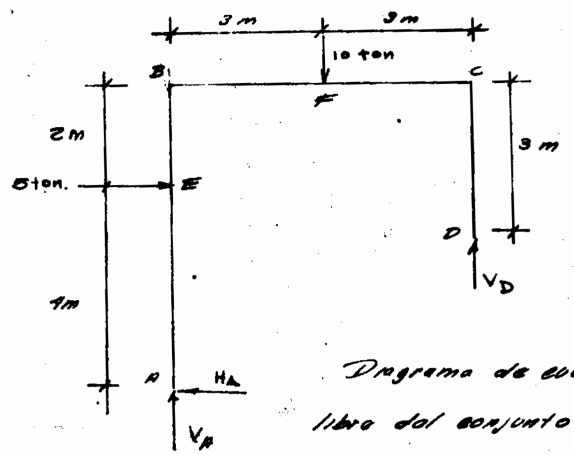


Diagrama de cuerpo libre del conjunto.

Cálculo de reacciones :

$\Sigma M_A F = 0$ $G+$

$-5(4) - 3(10) + 6V_D = 0$

$V_D = \frac{50}{6}$ ton.

$\Sigma F_x = 0$

$5 - H_A = 0$

$H_A = 5$ ton.

$\Sigma F_y = 0$

$V_A + \frac{50}{6} - 10 = 0$

$V_A = -\frac{50}{6} - 10$

$V_A = \frac{10}{6}$

Análisis del conjunto :

Tramo A-E $\quad 0 \leq x \leq 4$

$V = 5$ ton.

$N = -\frac{10}{6}$ ton

$M = 5x$ ton-m.

Si $x = 0$

$M = 0$

Si $x = 4$

$M = 20$ ton-m.

Tramo E-B $\quad 4 \leq x \leq 6.$

$V = 0$

$N = -\frac{10}{6}$ ton.

$M = 5x - 5(x-4)$; $M = 20$

Si $x = 6$ $\quad M = 20$ ton-m.

Tramo B-F $\quad 0 \leq x \leq 3$

$V = \frac{10}{6}$ ton.

$N = 0$

$M = 20 + \frac{10}{6}x$

Si $x = 0$; $M = 20$ ton-m.

Si $x = 3$; $M = 26$ ton-m.

Tramo F-C $\quad 3 \leq x \leq 6$

$V = -\frac{50}{6}$

$N = 0$

$M = 20 + \frac{10}{6}x - 10(x-3)$

$M = 50 - \frac{50}{6}x$

Si $x = 3$

$M = 25$ ton-m.

Si $x = 6$

$M = 0$ ton-m

Tramo C-D $\quad 0 \leq x \leq 3$

$V = 0$ ton.

$N = \frac{50}{6}$ ton

$M = 0$ ton-m

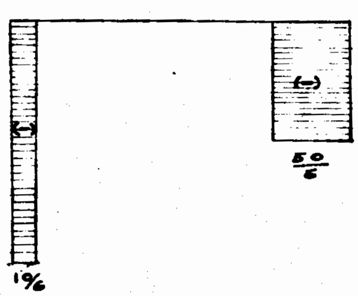


Diagrama de fuerza Normal. (ton)

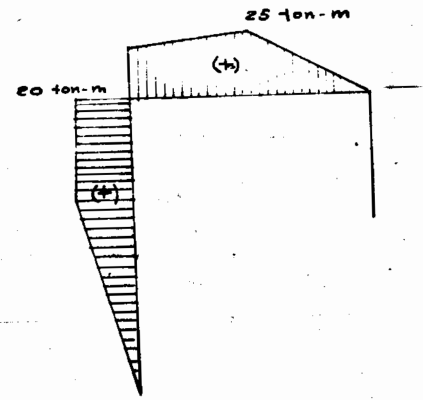


Diagrama de Momento flexionante (ton-m)

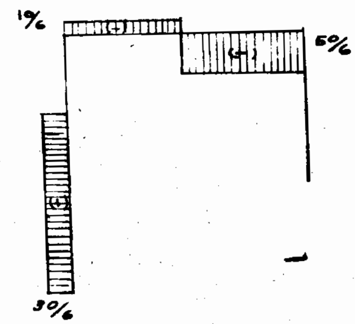


Diagrama de fuerza cortante. (ton)

30)

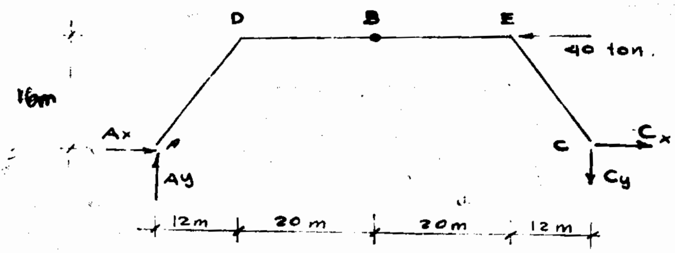


Diagrama de cuerpo libre del conjunto.

Cálculo de reacciones:

$\Sigma M_A F = 0 \quad \circlearrowleft +$

$40(16) - 64\ C_y = 0$

$C_y = \dfrac{40 \times 16}{64}$

$C_y = 10$ ton.

$\Sigma M_E F = 0 \quad \circlearrowleft +$

$40(16) - 64\ A_y = 0$

$A_y = \dfrac{40 \times 16}{64}$

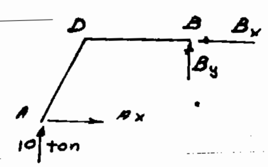
$A_y = 10$ ton.

$\Sigma F_x = 0$

$A_x + C_x - 40 = 0$

$C_x = 40 - A_x$

Analizando el tramo A-DB- del conjunto, tenemos:



$\Sigma M_B F = 0 \quad \circlearrowleft +$

$16\ A_x - 32(10) = 0$

$A_x = 20$ ton.

$\therefore\ C_x = 20$ ton.

Análisis:

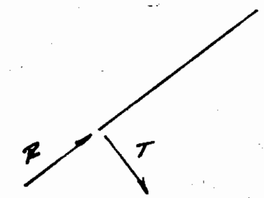
tramo A-D $\qquad 0 \leq x \leq 20$

$R = 10 \times \frac{16}{20} + 20\ \frac{12}{20}$

$R = 8 + 12 = 20$ ton.

$T = -10 \times \frac{12}{20} + 20\ \frac{16}{20}$

$T = -6 + 16 = 10$ ton.



$V = -10$ ton.

$N = 20$ ton

$M = -10\ x$

si $x = 0$; $M = 0$

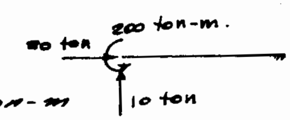
si $x = 20$; $M = -200$ ton-m.

Tramo D-E $\qquad 0 \leq x \leq 20$

$N = 20$ ton.

$V = 10$ ton

$M = 10\ x - 200$ ton-m



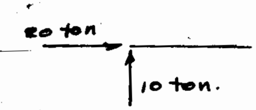
si $x = 0$; $M = -200$ ton-m

si $x = 20$: $M = 0$

Tramo C-E $\qquad 0 \leq x \leq 20$

$N = 20$ ton

$V = 10$ ton



$M = 10\ x$

si $x = 0$; $M = 0$

si $x = 20$; $M = 200$ ton-m.

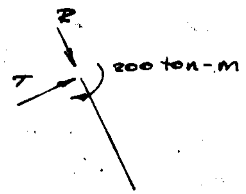
Tramo E - C $\quad 0 \le x \le 20$

$R = -20 \frac{12}{20} - 10 \frac{16}{20}$

$R = -20$ ton.

$T = -20 \frac{16}{20} + 10 \frac{12}{20}$

$T = -10$ ton.



$N = -20$ ton.

$V = -10$ ton.

$M = -10x + 200$ ton-m

si $x = 0$; $M = 200$ ton-m.

si $x = 20$; $M = 0$

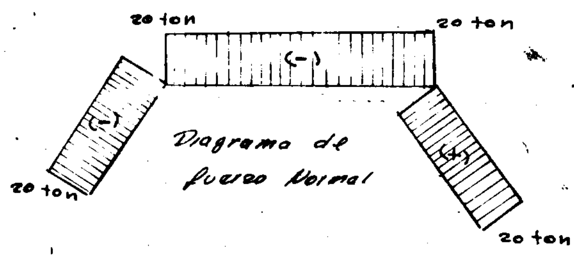


Diagrama de fuerza Normal

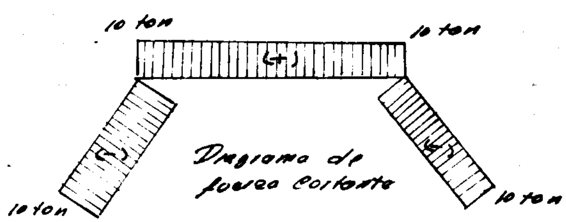
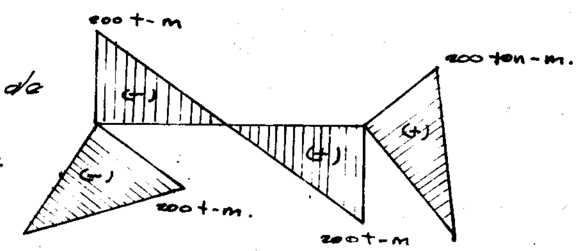
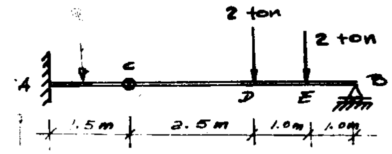


Diagrama de fuerza Cortante

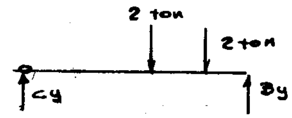
Diagrama de Momento flexionante.



31)



Reacciones tramo CB



$\Sigma M_c F = 0 \quad$ ↺+

$4.5\, By - 2(2.5) - 2(3.5) = 0$

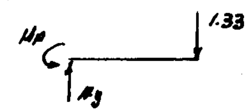
$By = \frac{12}{4.5}$

$By = 2.67$ ton.

$\Sigma Fy = 0$

$Cy = 1.33$ ton

Tramo AC



$\Sigma Fy = 0$

$-1.33 + Ay = 0$

$Ay = 1.33$ ton

$\Sigma M_A F = 0 \quad$ ↺+

$M_A - 1.33(1.5) = 0$

$M_A = 2$ ton-m.

Análisis de la viga :

Tramo AC $\quad 0 \le x \le 1.5$

$V = 1.33$ ton.

$V = 0$

$M = 1.33\ x\ - 2$

si $x = 0$; $M = -2$ ton-m

si $x = 1.5$; $M = 0$

Tramo C-D $\qquad 0 \leq x \leq 2.5$

$V = 1.33$ ton

$M = 1.33\ x$

si $x = 0$; $M_c = 0$

si $x = 2.5$; $M_D = 3.33$ ton-m.

Tramo D-E $\qquad 2.5 \leq x \leq 3.5$

$V = 1.33 - 2 = -0.67$ ton.

$M = 1.33\ x - 2\ (x - 2.5)$

si $x = 2.5$

$M_D = 3.33$ ton-m.

si $x = 3.5$

$M_E = 2.67$ ton-m

Tramo E-B $\qquad 3.5 \leq x \leq 4.5$

$V = -2.67$ ton

$M = 1.33\ x - 2\ (x - 2.5) - 2\ (x - 3.5)$

si $x = 3.5$; $M_E = 2.67$ ton-m

si $x = 4.5$; $M_B = 0$

Diagrama de fuerza cortante. (ton)

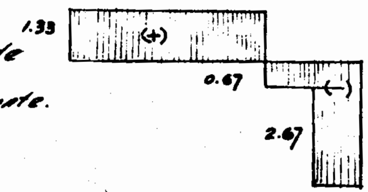
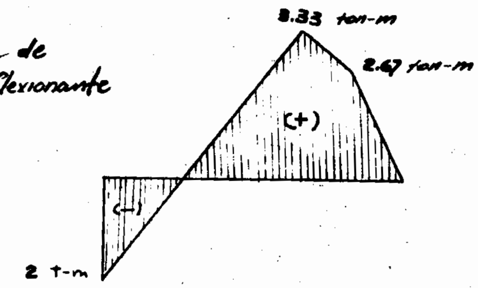
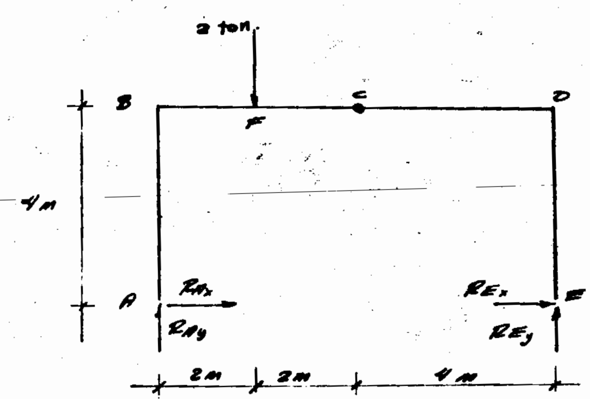


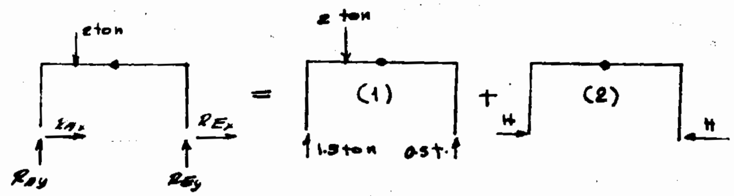
Diagrama de momento flexionante (ton-m)



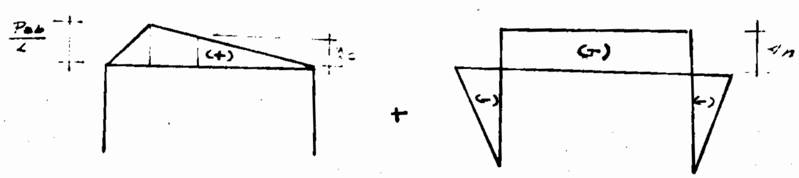
32).-



Suponemos que la estructura original es idéntica a la suma de dos marcos simples mostrados a continuación :



En el marco (1) actúan las cargas externas del marco real, y en el (2) sólo consideramos que está solicitado por las fuerzas horizontales H, en equilibrio, de magnitud desconocida. En forma inmediata podemos dibujar los diagramas de momento flexionante de los marcos (1) y (2)



$$\frac{Pab}{L} = \frac{2(2)(6)}{8} = 3$$

$$y_c = 4 \times \frac{3}{6} = 2$$

$$M_c = y_c - 4H$$

Pero :

$$M_c = 0$$

$$H = \frac{y_c}{4} = 0.5 \text{ ton}$$

Conocidas las reacciones podemos dibujar los diagramas finales de momento flexionante, fuerzas cortante y normal.

Comprobación : $\Sigma M_B = 0 \quad \curvearrowleft -$

$$-0.5(4) + 2(2) + 0.5(4) - 8(0.5) = 0$$

$$4 - 4 = 0 \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Análisis :

Tramo AB $\quad 0 \le x \le 4$

$N = 1.5$ ton.

$V = -0.5$ ton

$M = -0.5\,x$

si $x = 0 \quad M_A = 0$

si $x = 4 \quad M_B = -2$ ton-m.

Tramo BF $\quad 0 \le x \le 2$

$N = 0.5$ ton

$V = 1.5$ ton

$M = 1.5x - 2$ ton-m

si $x = 2 \quad M_F = 1$ ton-m

si $x = 0 \quad M_B = -2$ ton-m.

Tramo F-C $\quad 2 \le x \le 4$

$N = 0.5$ ton.

$V = -0.5$ ton

$M = 1.5x - 2(x-2) - 2$

si $x = 2$; $M_F = 1$ ton-m

si $x = 4$; $M_B = 0$

Tramo C-D $\quad 4 \leq x \leq 8$

$N = 0.5$ ton

$V = -0.5$ ton

$M = -0.5x + 2$

si $x = 4$; $M_C = 0$

si $x = 8$; $M_D = -2$ ton-m.

Tramo D-E $\quad 0 \leq x \leq 4$

$N = 0.5$ ton.

$V = 0.5$ ton.

$M = 0.5x - 2$.

si $x = 0$; $M_D = -2$ ton-m

si $x = 4$; $M_E = 0$

(continuación # 32)

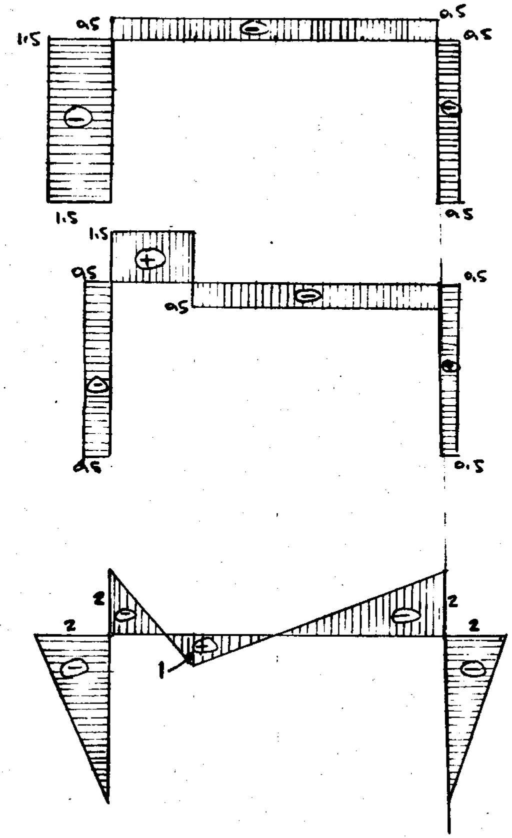


Diagrama de fuerza normal. (ton)

Diagrama de fuerza cortante (ton)

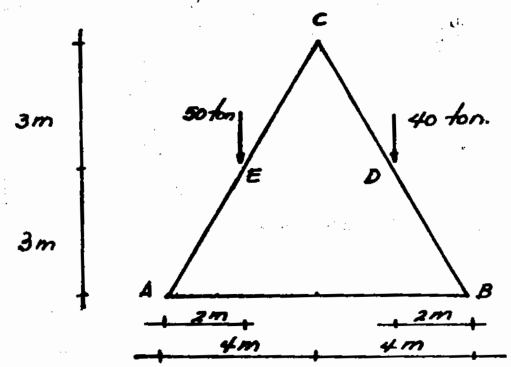
Diagrama de momento flexionante (ton-m)

SERIE 6

ELEMENTOS MECANICOS EN MARCOS Y ARCOS

(Soluciones)

1.1) Consideremos en primer término, al equilibrio del conjunto estructural.



Se puede establecer:

$$\Sigma M_A F = 0$$

así:

$$100 + 240 - 8R_B = 0$$

y: $R_B = \frac{340}{8} = 42.5$ ton.

además:

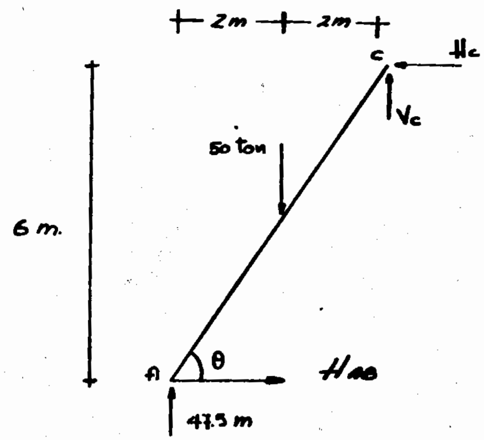
$$\Sigma M_B F = 0$$

Luego:

$$80 + 300 - 8R_A = 0$$

entonces: $R_A = \frac{380}{8} = 47.5$ ton.

aislando la porción AC, se tiene:



$$\Sigma M_C F = 0$$

$$190 - 100 - 6H_{AB} = 0$$

$$H_{AB} = \frac{90}{6} = 15 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_h = 0$$

$$H_{AB} = H_C = 15 \text{ ton}$$

$$\Sigma F_v = 0$$

$$47.5 - 50 + V_c = 0$$

$$V_c = 2.5 \text{ ton}$$

La verificación de los resultados obtenidos se puede hacer a través de:

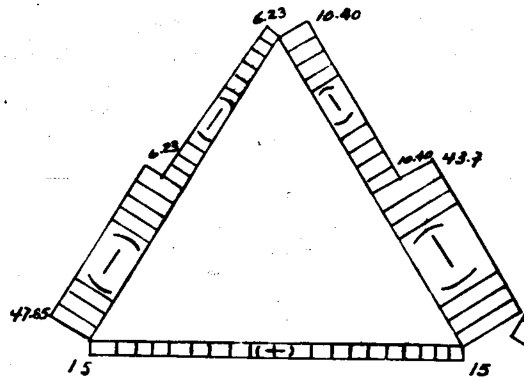
$\Sigma M_E F = 0$ (del D.C.L. del dispositivo)

$$95 + 160 - 255 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

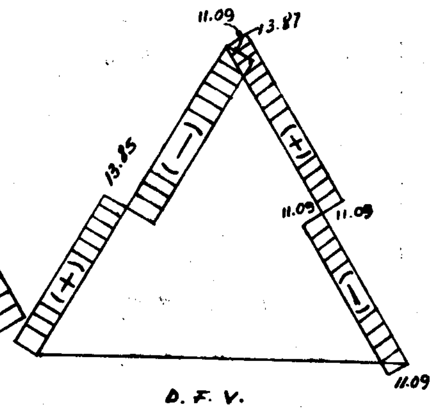
Con los resultados anteriores se pueden trazar los diagramas

1.2)



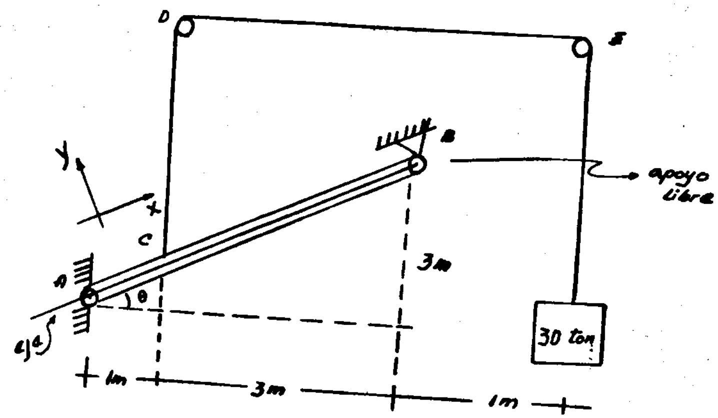
D. F. N.

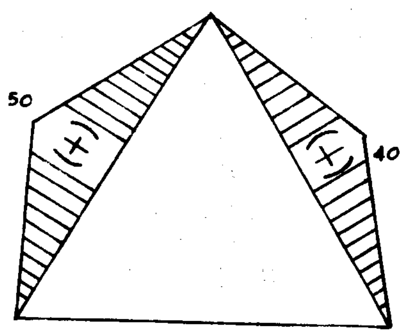
(ton)



D. F. V.

(ton)





D. M. F.

(ton- m.)

De la figura:

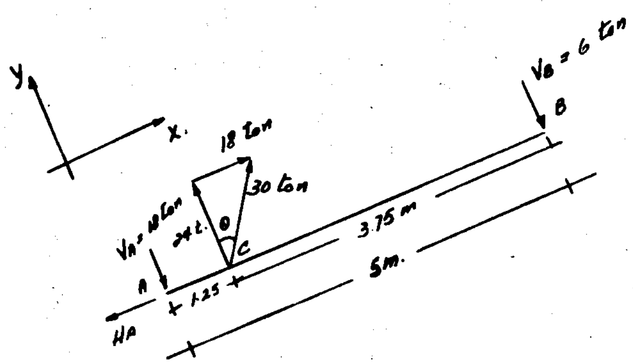
$$\operatorname{Sen} \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

asi: $\overline{AC} = \frac{5}{4} = 1.25\,m.$

y $\overline{CB} = 3.75\ m$

por tratarse de un cable inextensible y sin peso, la carga de 30 ton se transmite hasta el punto C de la barra AB. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la barra:



De las condiciones de equilibrio :

$$\Sigma M_A F = 0$$

$$24(1.25) - 5V_B = 0$$

luego: $V_B = 24\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = 6$ ton

entonces $V_B = 6$ ton

además: $\Sigma M_C F = 0$

y $\frac{5}{4} V_A - \frac{15}{4}(6) = 0$

$$V_A = \frac{15}{4}(6)\left(\frac{4}{5}\right) = 18 \text{ ton}$$

$V_A = 18$ ton

Aplicando $\Sigma F_x = 0$

$$18 - H_A = 0$$

$$H_A = 18 \text{ ton}$$

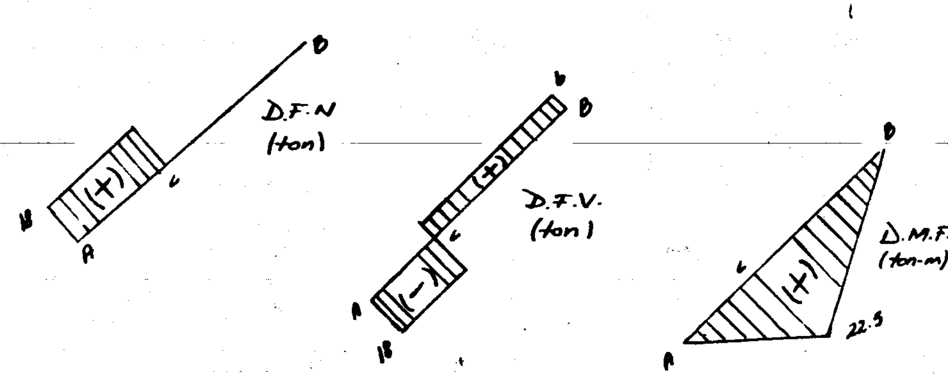
Revisemos los resultados obtenidos aplicando :

$$\Sigma F_y = 0$$

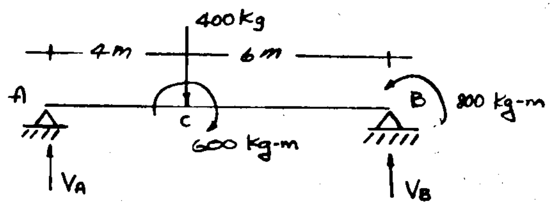
$$-18 + 24 - 6 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Conocido el sistema externo de solicitaciones que soporta la barra $\overline{AB}$, se pueden trazar, directamente, los diagramas que denotan las variaciones de los elementos mecánicos.



13) Sea el diagrama de cuerpo libre del tramo AB



considerando el equilibrio se tiene:

$$\underline{\sum M_{AF} = 0}$$

$$400 \times 4 + 600 - 10\,V_B - 800 = 0$$

$$V_B = 140 \text{ kg}$$

además:

$$\underline{\sum M_{BF} = 0}$$

y $$-10\,V_A - 600 + 2400 + 800 = 0$$

$$V_A = 260 \text{ kg}$$

Los resultados obtenidos se pueden verificar, a través de:

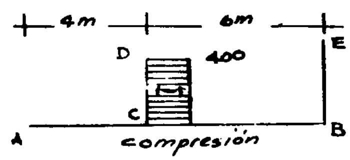
$$\underline{\sum F_y = 0}$$

$$140 - 400 + 260 = 0$$

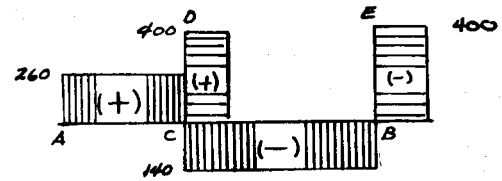
$$0 \equiv 0$$

Así los diagramas son:

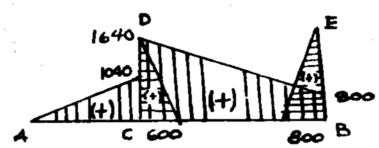
D.F.N. (kg).



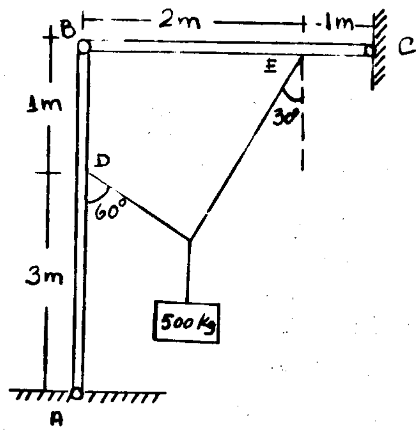
D.F.C. (kg).



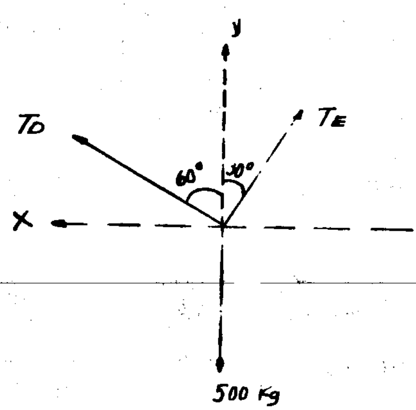
D.M.F. (kg-m).



1.7)



Considerando en primer término el equilibrio del punto "O":



Se tiene:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} T_D - \frac{1}{2} T_E = 0$$

$$T_D = \frac{\sqrt{3}}{3} T_E \quad \text{—— (1)}$$

Además:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\frac{1}{2} T_D + \frac{\sqrt{3}}{2} T_E - 500 = 0 \quad \text{—— (2)}$$

Sustituyendo el valor de T_D obtenido en (1):

$$\frac{\sqrt{3}}{6} T_E + \frac{\sqrt{3}}{2} T_E = 500$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{6} T_E = 500$$

$$\Longrightarrow \quad T_E = \frac{750\sqrt{3}}{3}$$

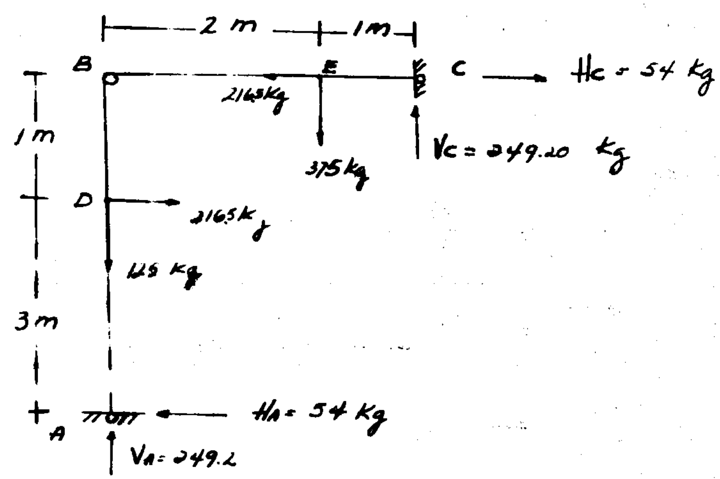
$$T_E = 433 \text{ kg.} \quad (\text{tensión})$$

Luego:

$$T_D = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) 250\ \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$T_D = 250\ kg \quad (\text{tensión})$$

Considerando el diagrama de cuerpo libre del conjunto estructural.



De esta suerte:

$$\underline{\Sigma M_A F = 0}$$

$$806 - 649.5 - 750 + 3V_c - 4H_c = 0$$

$$3V_c - 4H_c = 533.5 \text{ — (1)}$$

Aplicando $\underline{\Sigma M_c F = 0}$

$$375 + 216.5 + 375 - 4H_A - 3V_A = 0$$

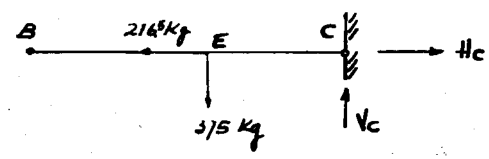
$$4H_A + 3V_A = 966.5 \text{ — (2)}$$

$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$216.5 - 216.5\ H_A + H_c = 0$$

$$\Rightarrow H_A = H_c \text{ — (3)}$$

Aislando la porción $\overline{BC}$:



$$\underline{\Sigma M_B F = 0}$$

$$-750 + 3V_c = 0$$

$$\Rightarrow V_c = 250.00 \uparrow$$

De (1):

$$750 - 4H_C = 533.5$$

$$H_C = 54.125\ kg \rightarrow$$

Por ende:

$$H_A = 54.125\ kg \leftarrow$$

Y por (2):

$$2165 + 3V_A = 966.5$$

$$\therefore \Rightarrow V_A = 250\ kg.$$

Los resultados obtenidos se pueden verificar:

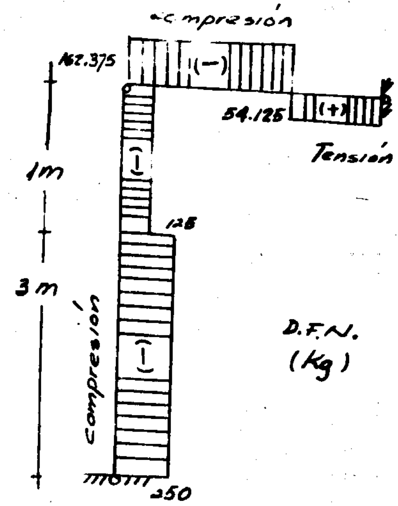
$$\Sigma F_y = 0$$

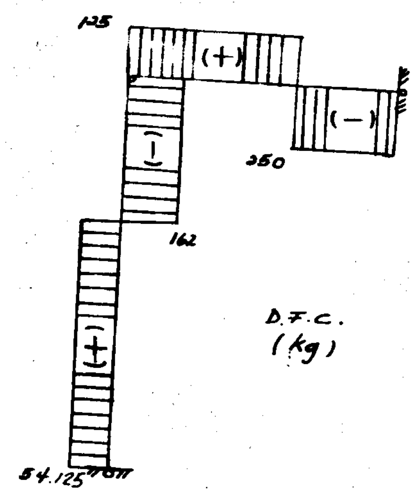
$$250.00 - 125 - 375 + 250.00 = 0$$

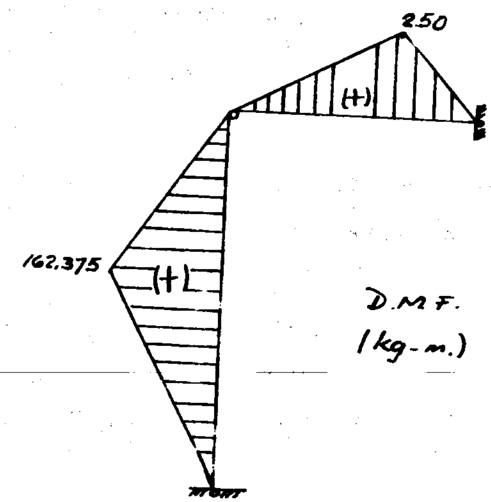
$$0.0 \doteq 0$$

Que comprueba los resultados

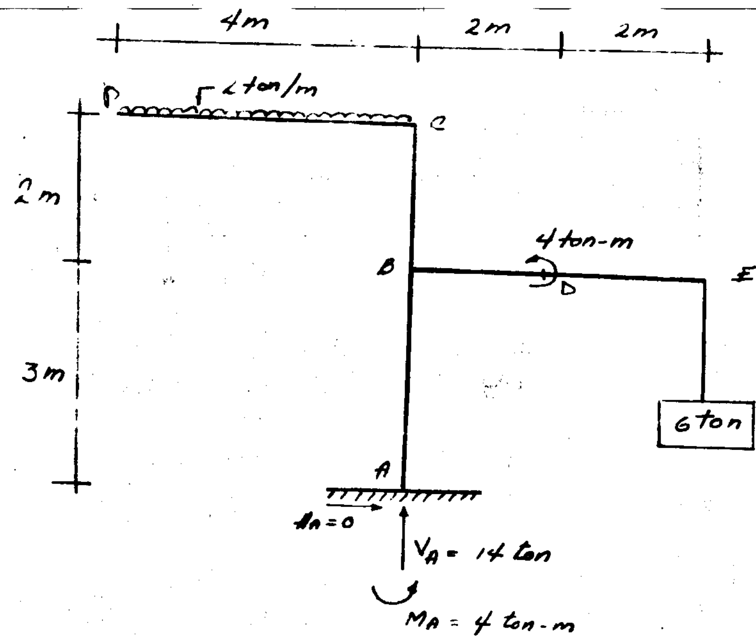
En esa virtud se pueden establecer los diagramas de elementos mecánicos.







15)



Considerando en equilibrio el conjunto estructural se puede establecer:

$$\underline{\Sigma M_A F = 0}$$

$$16 + 4 - 24 + M_A = 0$$

$$\Rightarrow M_A = 4 \text{ ton-m}$$

Haciendo por otra parte:

$$\underline{\Sigma M_B F = 0}$$

$$16 + 4 + 4 - 24 + 3 H_A = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0$$

Además:

$$\underline{\Sigma F_V = 0}$$

$$-8 - 6 - V_A = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 14 \text{ ton} \uparrow$$

Se pueden comprobar los resultados obtenidos a través de:

$$\underline{\Sigma M_D F = 0}$$

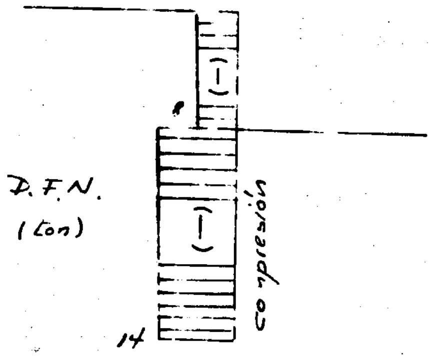
$$32 - 28 + 4 + 4 - 12 = 0$$

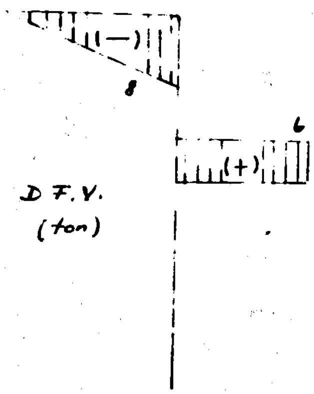
$$40 - 40 = 0$$

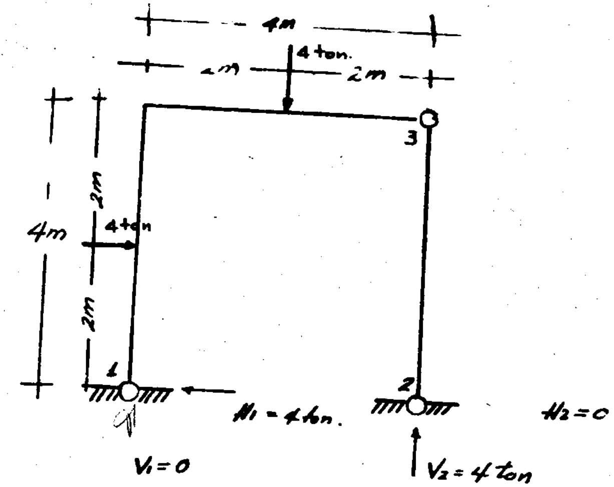
$$0 \equiv 0$$

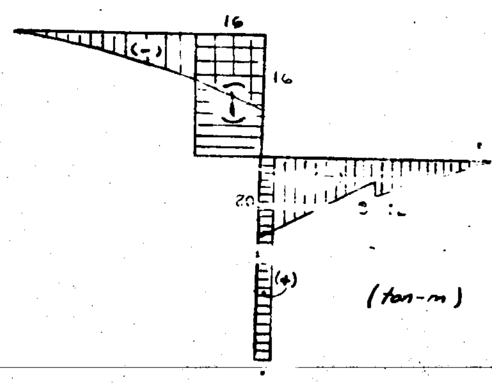
En estas condiciones pasemos a trazar los diagramas de elementos mecánicos.

2.11 Considerando el equilibrio del conjunto:









$\underline{\Sigma M_1 F = 0}$

$-8-8+4V_2=0$

$\Rightarrow V_2 = 4 \text{ ton} \uparrow$

Además:

$\underline{\Sigma M_2 F = 0}$

$-4V_1 - 8 + 8 = 0$

$\Rightarrow V_1 = 0$

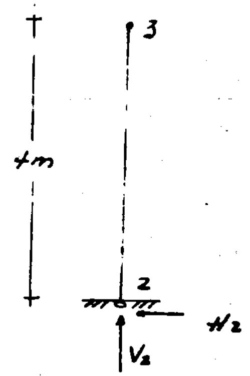
Igualmente:

$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$-H_1 - H_2 + 4 = 0$$

$$H_1 + H_2 = 4$$

Aislando el pie derecho, se tiene:



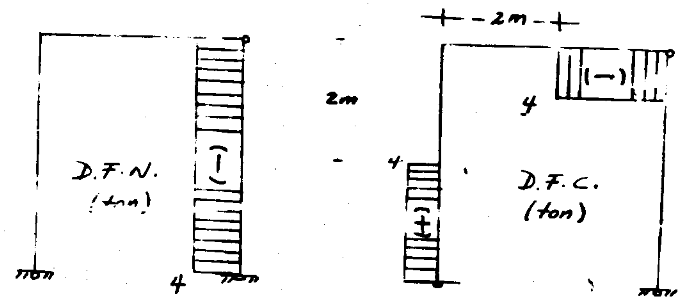
$$\underline{\Sigma M_3 F = 0}$$

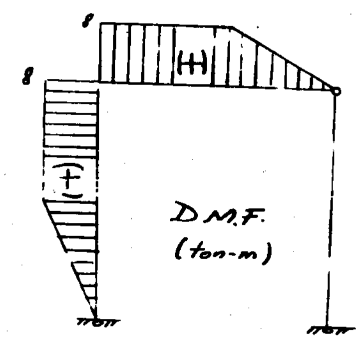
$$\Rightarrow H_2 = 0$$

Luego:

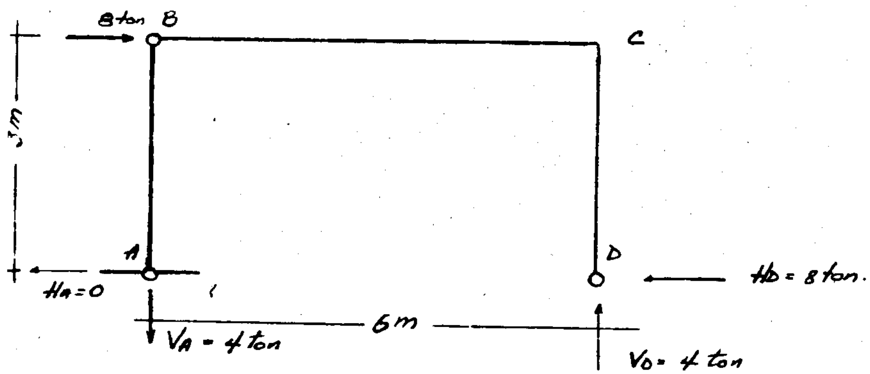
$$H_1 = 4 \text{ ton}$$

En estas condiciones se pueden trazar los diagramas de elementos mecánicos.





2.2) Consideremos el equilibrio del conjunto:



$$\underline{\Sigma M_A F = 0}$$

$$-24 + 6V_D = 0$$

$$\Rightarrow V_D = 4 \text{ ton} \uparrow$$

Además:

$$\underline{\Sigma M_D F = 0}$$

$$-24 + 6V_A = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 4 \text{ ton} \downarrow$$

Por otra parte:

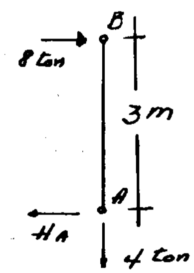
$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$-H_D - H_A + 8 = 0$$

de donde:

$$H_D + H_A = 8 \quad \text{—— (1)}$$

Aislando el pie derecho $\overline{AB}$:



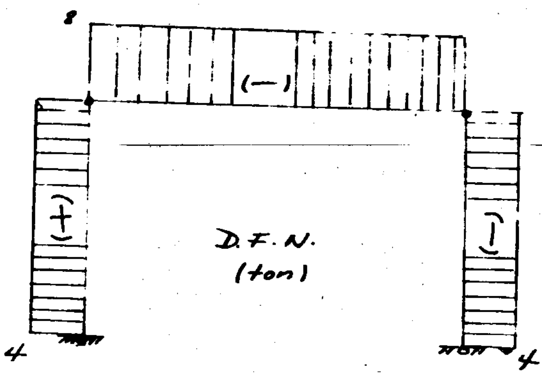
$$\underline{\Sigma M_B F = 0}$$

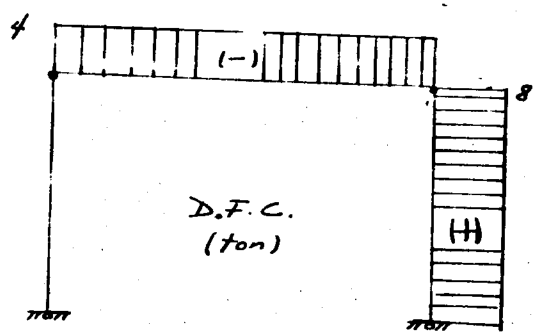
$$\Rightarrow H_A = 0$$

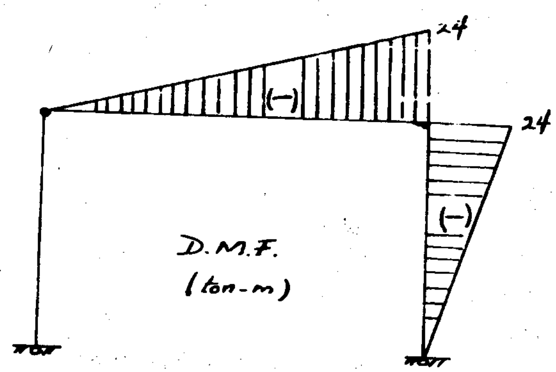
Luego:

$$H_D = 8 \text{ ton} \leftarrow$$

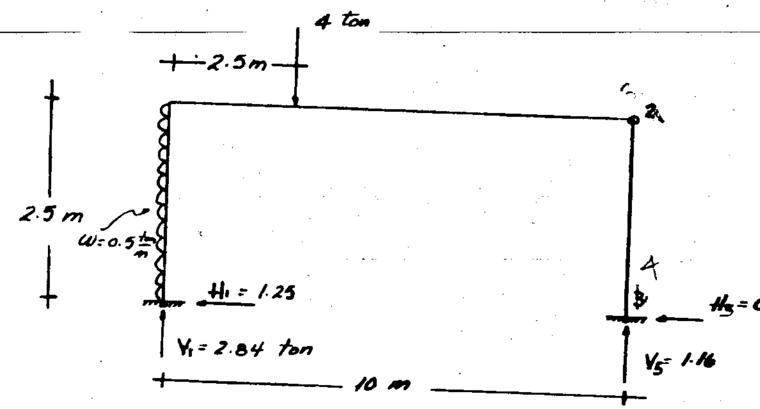
Conocidas las acciones y reacciones, se pueden trazar los diagramas de elementos mecánicos.







2.3) Considerando el equilibrio del conjunto:



$$\underline{\Sigma M_1 F = 0}$$

$$-1.5625 - 10 + 10\,V_3 = 0$$

$$\Longrightarrow V_3 = 1.16 \text{ ton}\uparrow$$

y:

$$\underline{\Sigma M_3 F = 0}$$

$$-1.5625 + 30 - 10\,V_1 = 0$$

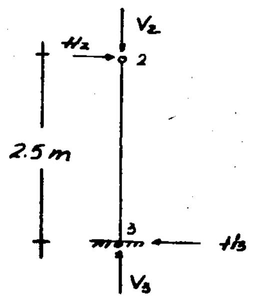
$$\Longrightarrow V_1 = 2.84 \text{ ton}\uparrow$$

Además :

$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$H_1 + H_3 = 1.25$$

Aislando la porción $\overline{2-3}$



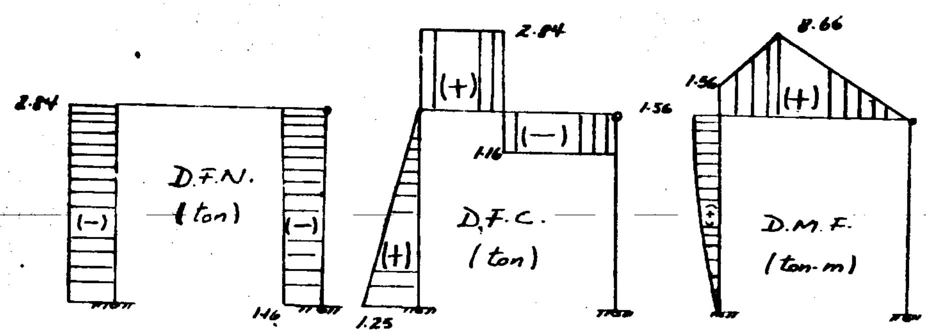
$\Sigma M_2 F = 0$

$\Rightarrow H_3 = 0$

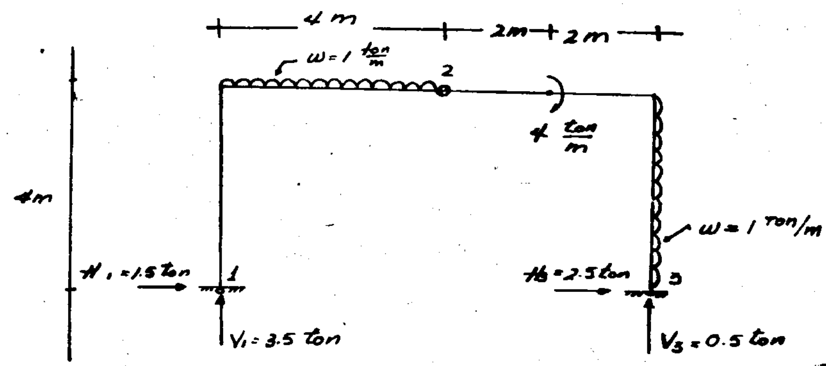
y

$H_1 = 1.25 \text{ ton} \leftarrow$

Los diagramas pedidos son:



2.4) Considerando el equilibrio del conjunto:



$\Sigma M_1 F = 0$

$-8 - 4 + 8 + 8V_3 = 0$

$\Rightarrow V_3 = 0.5 \text{ ton} \uparrow$

También:

$\Sigma M_3 F = 0$

$-8V_1 + 24 - 4 + 8 = 0$

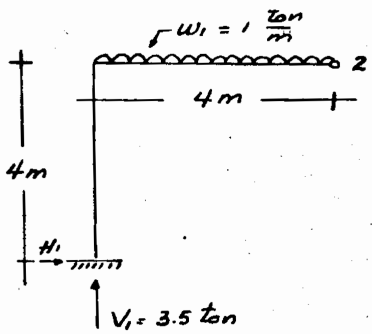
$\Rightarrow V_1 = 3.5 \text{ ton} \uparrow$

Además :

$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$H_1 + H_3 = 4 \quad —— (1)$$

Aislando la escuadra $\overline{1.2}$:



Apliquemos :

$$\underline{\Sigma M_2 F = 0}$$

$$8 - 14 + 4H_1 = 0$$

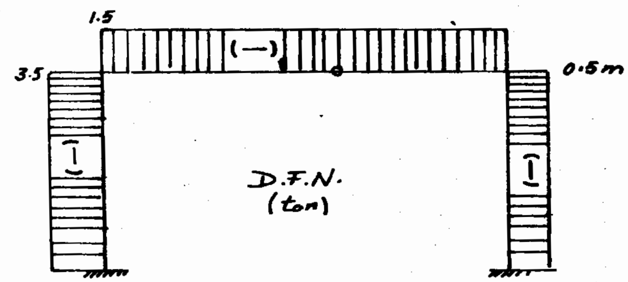
$$\Rightarrow H_1 = 1.5 \text{ ton} \longrightarrow$$

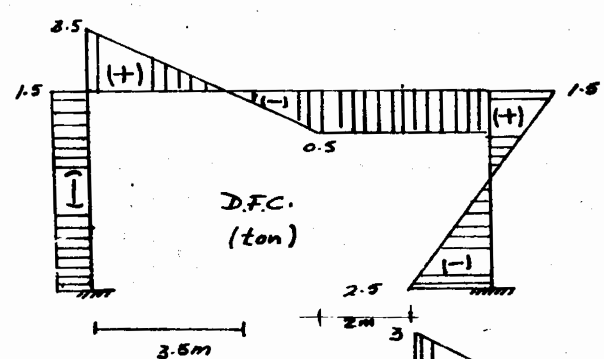
Finalmente :

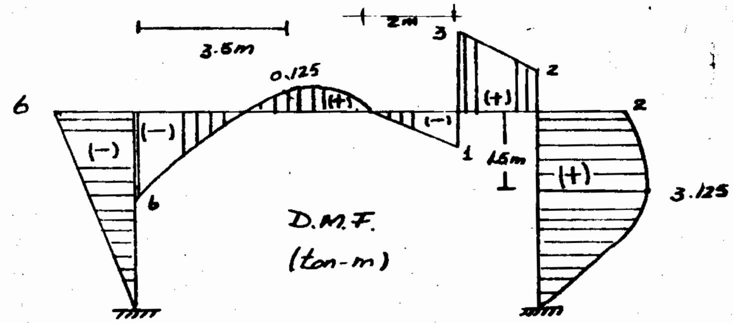
$$1.5 + H_3 = 4$$

$$H_3 = 2.5 \text{ ton} \longrightarrow$$

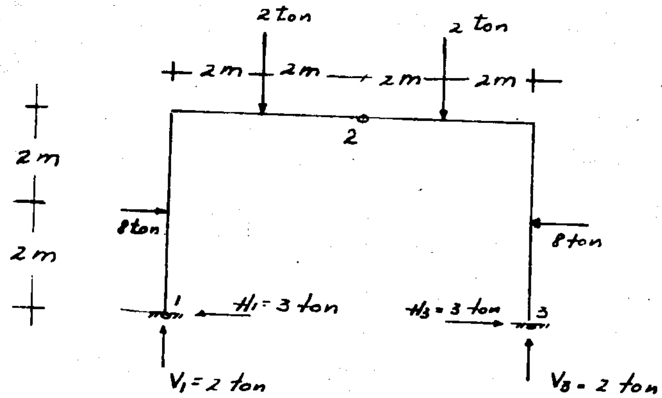
Así los diagramas de los elementos mecánicos son :







2.5) Considerando el equilibrio del conjunto:



$$\underline{\Sigma M_1 F = 0}$$

$$-16-4-12+16+8V_3 = 0$$

$$\Longrightarrow V_3 = 2 \text{ ton} \uparrow$$

Asimismo:

$$\underline{\Sigma M_3 F = 0}$$

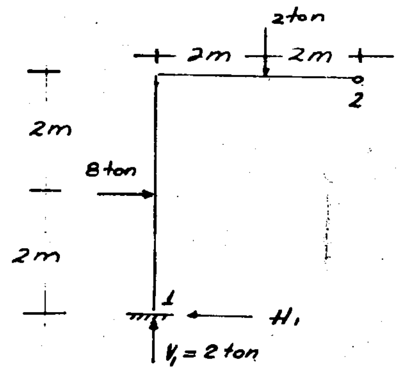
$$\Longrightarrow V_1 = 2 \text{ ton} \uparrow$$

también:

$$\underline{\Sigma F_x = 0}$$

$$\Longrightarrow H_1 = H_3 \quad \text{---} (1)$$

Hagamos el diagrama de cuerpo libre de la escuadra 1-2:



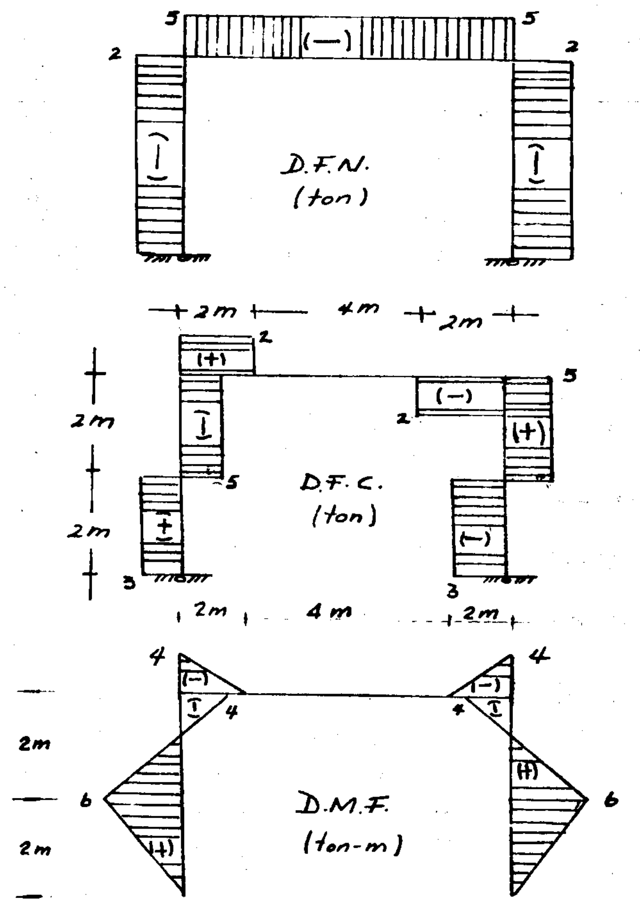
$$\underline{\Sigma M_2 F = 0}$$

$$4+16-8-4H_1 = 0$$

$$\Longrightarrow H_1 = 3 \text{ ton} \longleftarrow$$

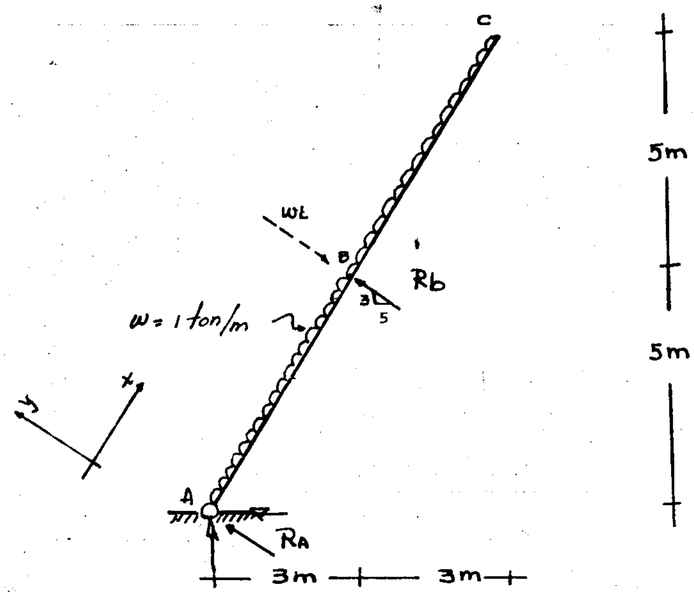
y $\quad H_3 = 3$ ton $\longrightarrow$

Luego los diagramas de elementos mecánicos.

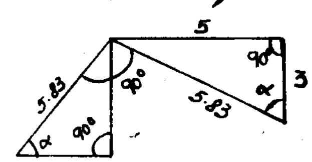


2.6) Cálculo de las reacciones.

El diagrama de cuerpo libre del tramo ABC, se muestra en la figura siguiente.



Observese que la reacción R_B es normal a la linea ABC, en efecto:



$\perp = \sqrt{6^2+10^2} = \sqrt{136}$

$\perp = 11.66$ m

$wL \quad , \times 2.0 \times 5.83 = 11.66$ ton.

$$\Sigma M_A = 11.66 \times 5.83 - 5.83 R_B = 0$$

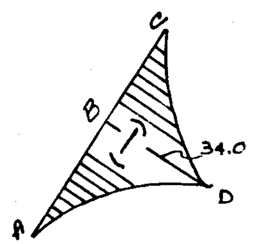
$$\therefore \; R_B = 11.66 \text{ ton.}$$

Luego:

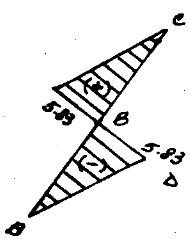
$$\Sigma F_y = 11.66 - 11.66 + R_A = 0$$

$$\Longrightarrow R_A = 0$$

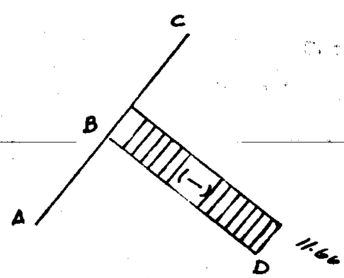
Conocidos los valores de las reacciones, podemos trazar los diagramas de los elementos mecánicos solicitados.



D.M.F.
(ton-m)



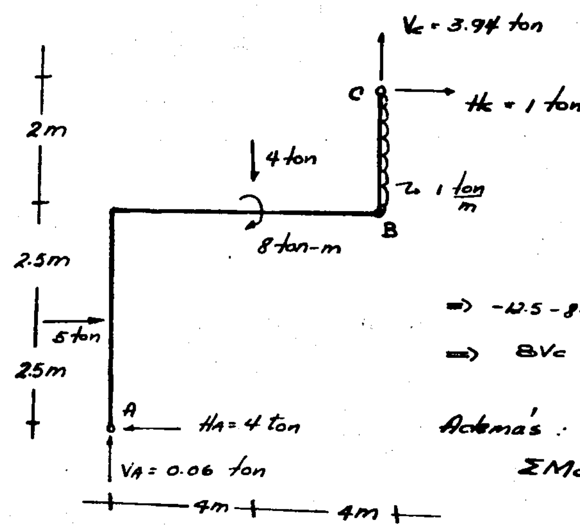
D.F.V.
(ton)



D.F.N.
(ton)

2.7) Considerando en primer término el equilibrio del conjunto estructural, se tiene:

$$\Sigma M_A F = 0$$



$$\Longrightarrow -12.5 - 8 - 16 + 12 - 7H_c + 8V_c = 0$$

$$\Longrightarrow 8V_c - 7H_c = 24.5 \quad \text{— (1)}$$

Además:

$$\Sigma M_c F = 0$$

$$\Longrightarrow -8V_A - 7H_A + 22.5 - 8 + 16 - 2 = 0$$

$$\Longrightarrow 8V_A + 7H_A = 28.5 \quad \text{— (2)}$$

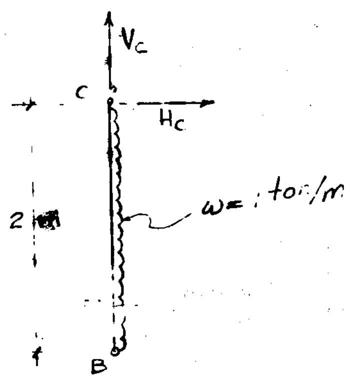
Aplicando:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$V_A + V_c = 4 \quad \text{— (3)}$$

Aislemos ahora la porción $\overline{BC}$

D.C.L.



En estas condiciones

$$\Sigma M_B F = 0$$

$$2 H_c = 2$$

$$\therefore H_c = 1 \text{ ton.} \rightarrow$$

sustituyendo este resultado en (1):

$$8V_c - 7 = 24.5$$

$$\Longrightarrow V_c = 3.94 \text{ ton} \uparrow$$

llevando este valor a (3)

$$V_A = 4 - 3.94$$

$$V_A = 0.06 \text{ ton} \uparrow$$

finalmente:

$$7 H_A = 28.5 - 0.48$$

$$\Longrightarrow H_A = 4.0 \text{ ton} \leftarrow$$

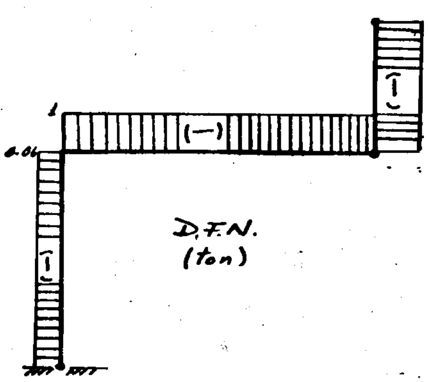
Corroboremos los resultados obtenidos aplicando:

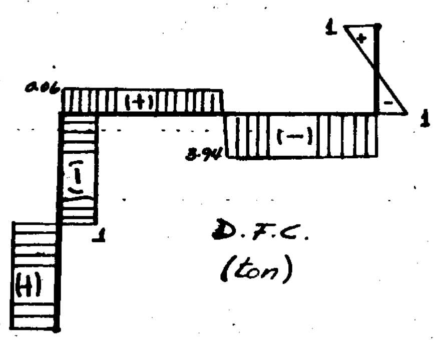
$$\Sigma F_x = 0$$

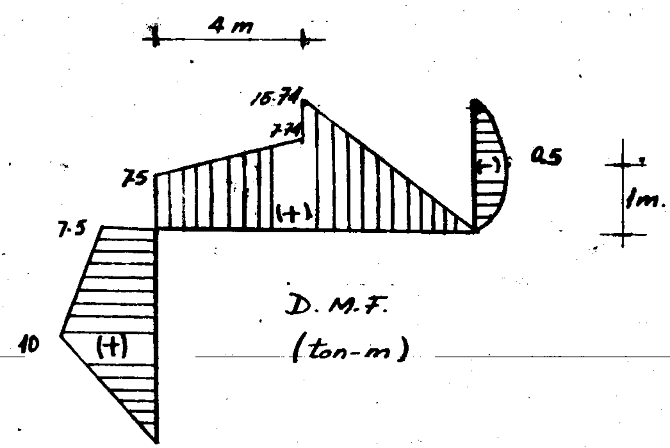
$$-4 + 5 - 2 + 1 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

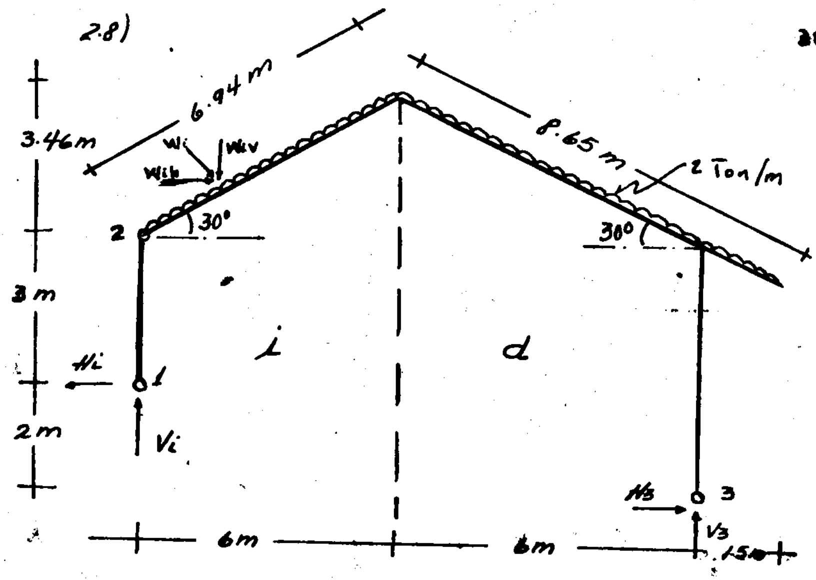
En estas condiciones pasemos a trazar directamente los diagramas,







28)



Para el cálculo de las reacciones, trabajamos con las componentes ortogonales de la carga uniformemente repartida.

$Wi = 6.94 \times 2 = 13.88$ ton

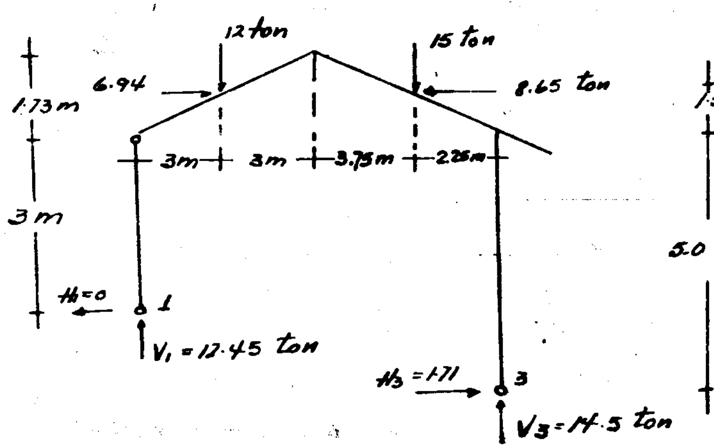
$Wih = 13.88 \cos 60° = 6.94$ ton

$Wiv = 13.88 \cos 30° = 12.0$ ton

$Wd = 8.65 \times 2 = 17.30$ ton.

$Wdh = 17.30 \cos 60° = 8.65$ ton

$Wdv = 17.30 \cos 30° = 15.00$ ton



Imponiendo las condiciones de equilibrio al todo estructural:

$$\circlearrowleft^{+} \ \Sigma M_3 F = 0$$

$$2H_1 - 12V_1 + 9(12) + 15(2.25) + 8.65(6.30) - 6.94(6.73) = 0$$

$$2H_1 - 12V_1 + 108 + 33.75 + 54.5 - 46.7 = 0$$

$$2H_1 - 12V_1 + 149.55 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad H_1 - 6V_1 = -74.78 \qquad (1)$$

Aplicando:

$$\circlearrowleft^{+} \ \Sigma M_1 F = 0$$

$$2H_3 + 12V_3 - 4.73(6.94) - 3(12) - 9.75(15) + 4.3(8.65) = 0$$

$$2H_3 + 12V_3 - 32.8 - 36.0 - 146.4 + 37.2 = 0$$

$$2H_3 + 12V_3 - 178 = 0$$

$$H_3 + 6V_3 = 89 \qquad (2)$$

Además:

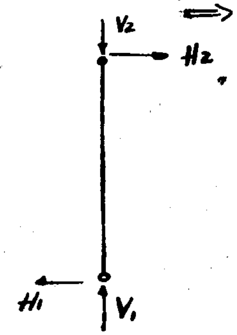
$$\underline{\Sigma F_h = 0}$$

$$H_3 - H_1 - 1.71 = 0 \quad \text{—— (3)}$$

aislando la porción $\overline{1\text{-}2}$, se tiene:

$$\Sigma M_2 F = 0$$

$$\Longrightarrow \quad H_1 = 0$$



en (3):

$$H_3 = 1.71 \text{ ton}$$

sustituyendo H_3 en (2)

$$V_3 = \frac{89 - 1.71}{6} = \frac{87.29}{6} = 14.55$$

$$\Longrightarrow \quad V_3 = 14.55 \text{ ton}$$

de (1) $\Longrightarrow \quad V_1 = \dfrac{74.80}{6} = 12.45$ ton

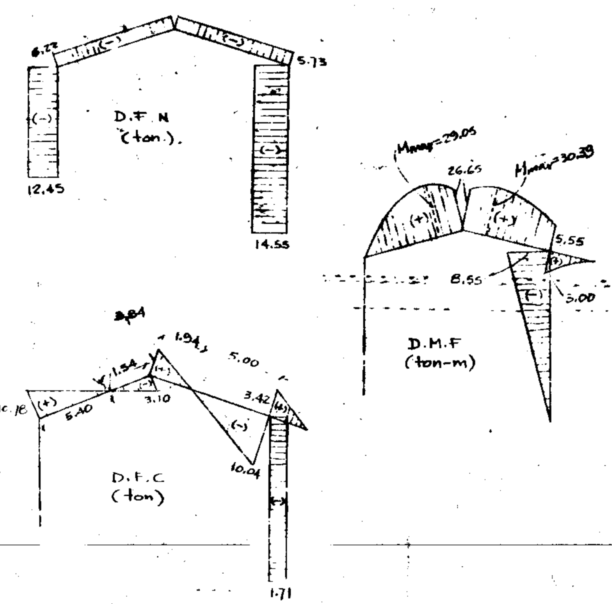
Fijemos los resultados obtenidos, aplicando:

$$\Sigma F_v = 0$$

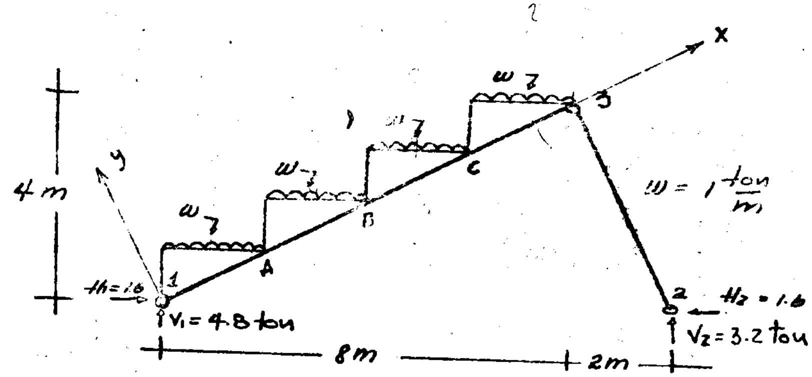
$$12.45 + 14.55 - 12 - 15 = 0$$

$$0 \equiv 0 \quad \text{y checa.}$$

Con los valores de las reacciones, determinamos anteriormente, hacemos los diagramas de elementos mecánicos correspondientes.



2.9) Considerando el equilibrio del conjunto:



$$\Sigma M_1 F = 0$$

$$-32 + 10 V_2 = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = 3.2 \text{ ton} \uparrow$$

Además

$$\Sigma M_2 F = 0$$

$$-48 + 10 V_1 = 0$$

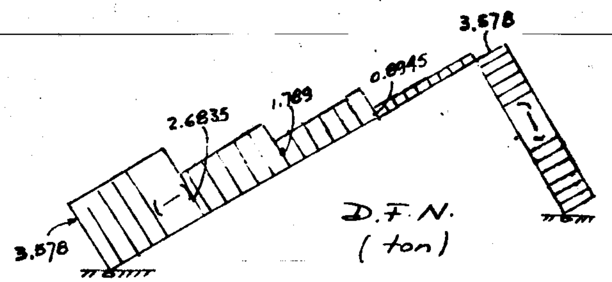
$$\Rightarrow V_1 = 4.8 \text{ ton} \uparrow$$

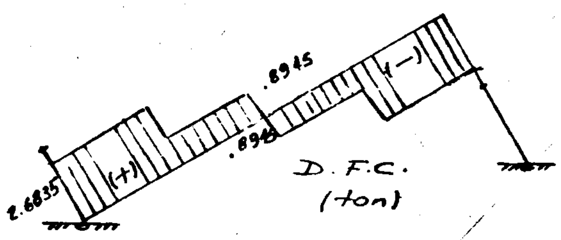
también

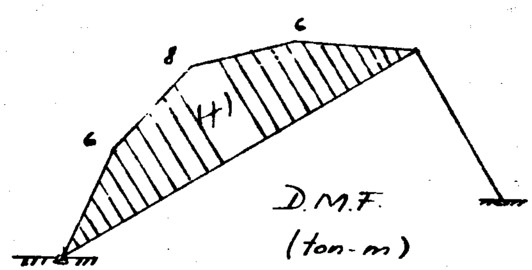
$$\Sigma F_x = 0$$

$$H_1 - H_2 = 0$$

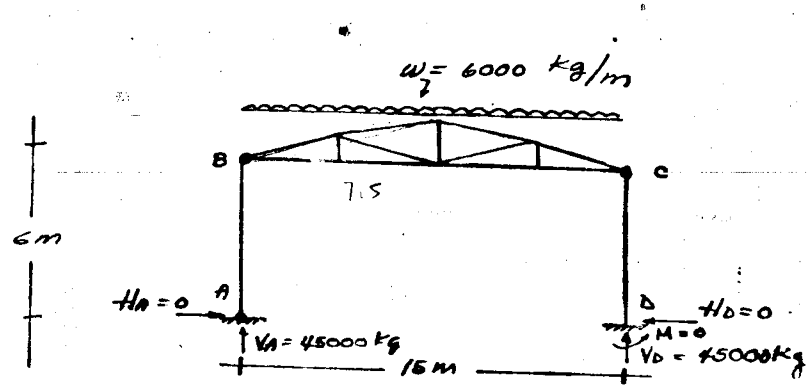
$$H_1 = H_2$$





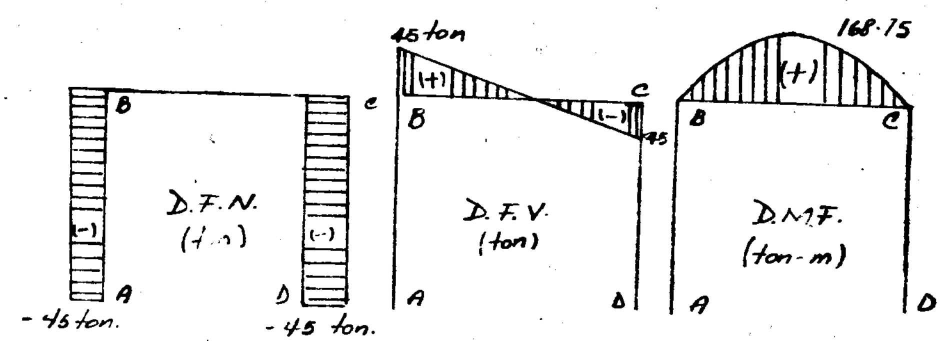


2.10) Considerando el equilibrio del conjunto estructural:

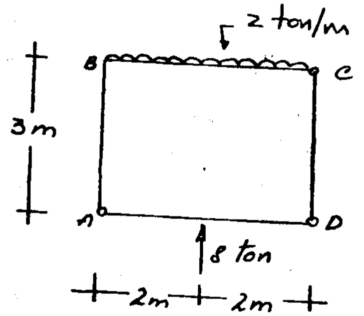


Evidentemente, el valor de las reacciones se determina apriori.

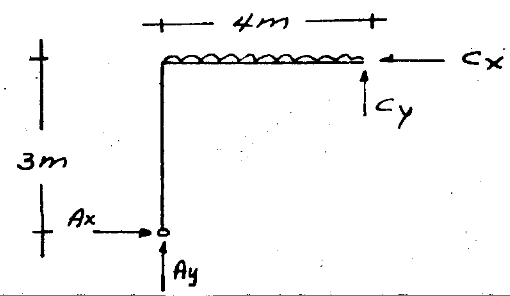
En estas condiciones tracemos a continuación los diagramas.



2.11) De la figura siguiente:



Se observa que el sistema externo de cargas, que está actuando en el anillo, está en equilibrio, lo cual permite aislar la porción ABC



Así: $\Sigma M_C F = 0$

$3Ax - 4Ay + 16 = 0$ — (1)

Además:

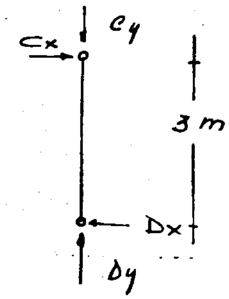
$\Sigma M_A F = 0$

$-3Cx - 4Cy + 16 = 0$ — (2)

Aplicando $\Sigma F_x = 0$

$Ax - Cx = 0$

$\Rightarrow Ax = Cx$ — (3)



De la porción $\overline{CD}$:

aplicando $\Sigma F_y = 0$

$Dy - Cy = 0$

$\Rightarrow Dy = Cy$ — (4)

Además:

$\Sigma F_x = 0$

$\Rightarrow Cx = Dx$ — (4)

Así:

$\Sigma M_D F = 0$

$3Cx = 0$

$\Rightarrow Cx = 0$ — (6)

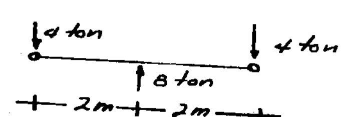
Valor que llevado a (3) $\Rightarrow Ax = 0$

y sustituido en (2) $\Rightarrow Cy = 4$ ton ↑

Ahora reemplazando $Ax = 0$ en (1)

$\Rightarrow Ay = 4$ ton ↑

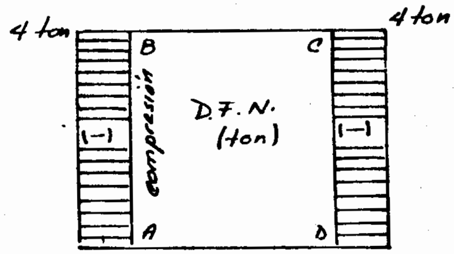
Finalmente aislando la porción AD

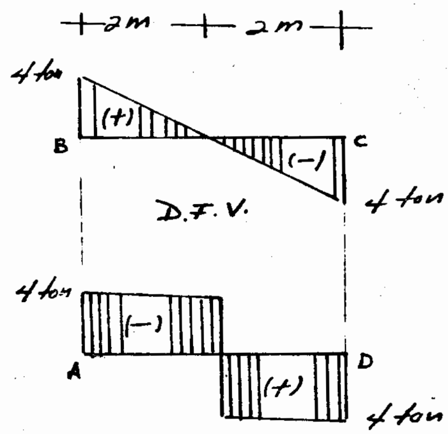


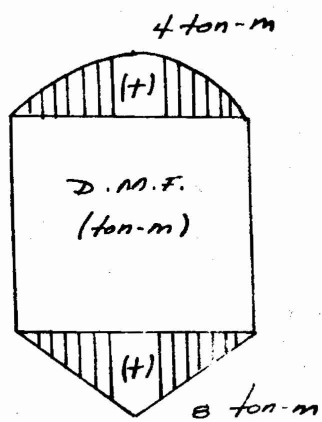
Así:

$$\Sigma F_y = 0$$
$$-4+8-4=0$$
$$0 \equiv 0$$

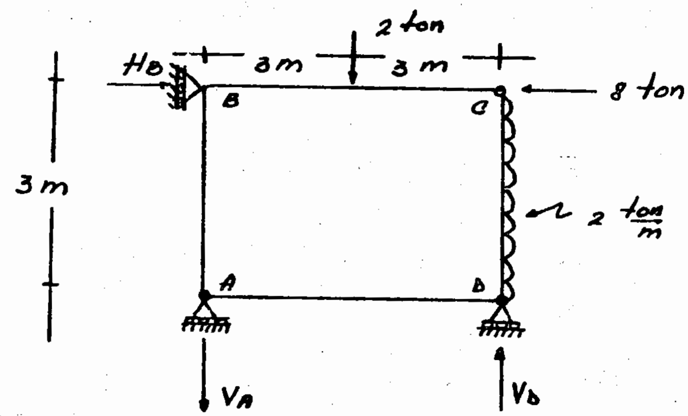
Conocidas las fuerzas internas, pasemos a trazar los diagramas de elementos mecánicos.







2.12) Analizando el conjunto estructural, en la siguiente figura:



Así: $\Sigma M_B F = 0$

$$-6-9+6V_D=0$$
$$\Rightarrow V_D = \frac{15}{6} = 2.5 \text{ ton}$$

Además:

$$\Sigma M_C F = 0$$
$$6-9+6V_A=0$$
$$\Rightarrow V_A = 3/6 = 0.5 \text{ ton.}$$

Aplicando:

$$\Sigma M_D F = 0$$
$$3H_B+6+24+9+3=0$$
$$\Rightarrow H_B = \frac{42}{3} = 14 \text{ ton}$$

La verificación de los resultados obtenidos se hace a través de:

$\Sigma F_x = 0$

$14 - 8 - 2(3) = 0$

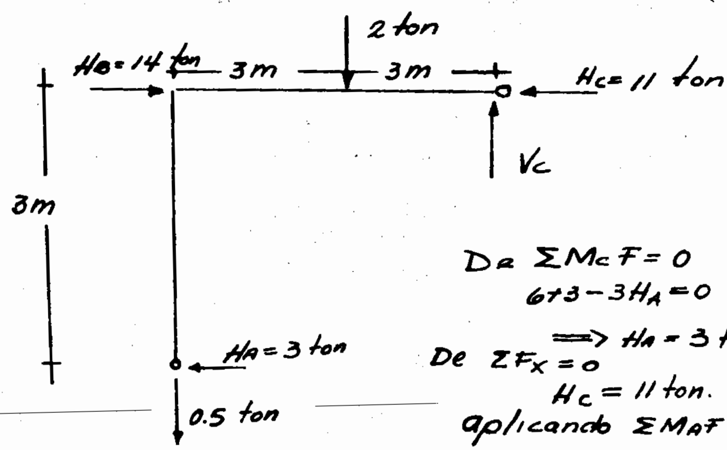
$0 \equiv 0$

$\Sigma F_y = 0$

$-0.5 - 2.0 + 2.5 = 0$

$0 \equiv 0$

Aislemos la escuadra ABC:



De $\Sigma M_{cF} = 0$

$6 + 3 - 3H_A = 0$

$\Longrightarrow H_A = 3$ ton.

De $\Sigma F_x = 0$

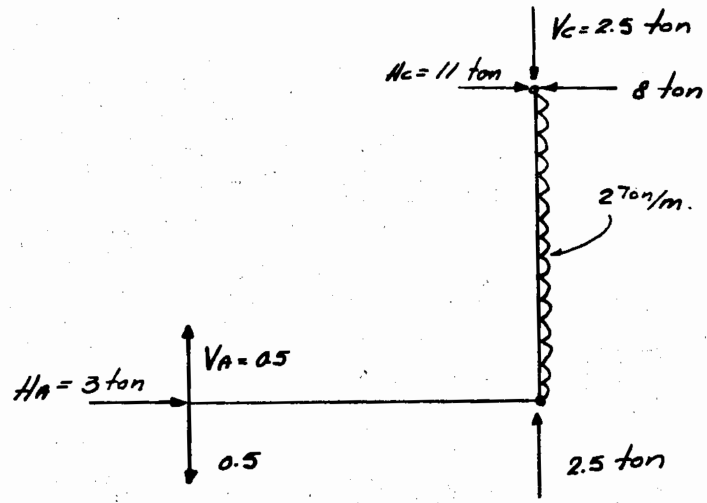
$H_C = 11$ ton.

aplicando $\Sigma M_{AF} = 0$

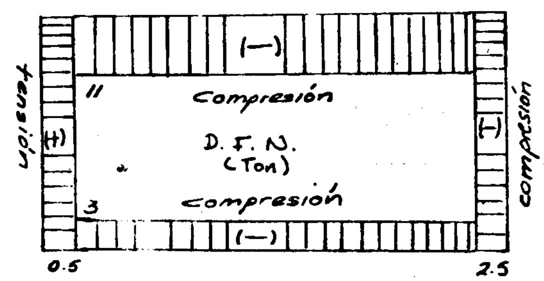
$9 + 6 - 6V_C = 0$

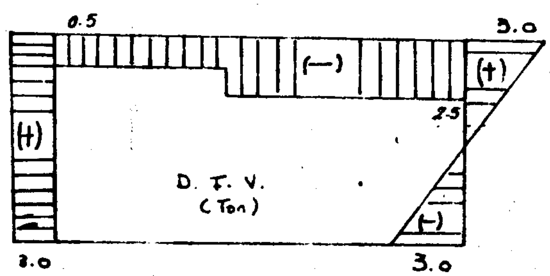
$\Longrightarrow V_C = 2.5$ ton

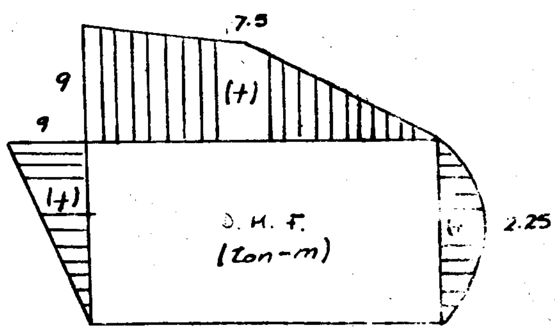
y en forma análoga el D.C.L. de la escuadra ADC:



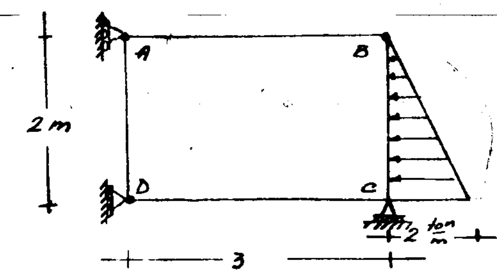
DIAGRAMAS DE ELEMENTOS MECANICOS



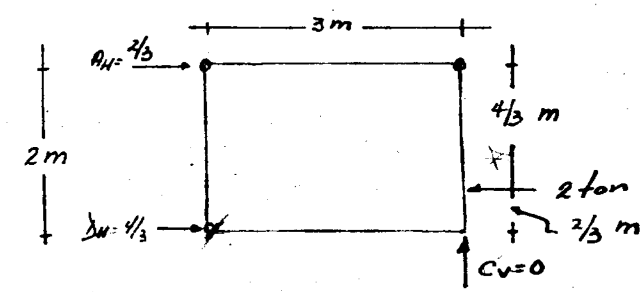




2.13)



Considerando el diagrama de cuerpo libre del añillo ABCD, en la siguiente figura:



Aplicando $\Sigma M_{DF} = 0$

$$2A_H - 4/3 - 3C_V = 0$$

$$2A_H - 3C_V = 4/3 \quad \text{---(1)}$$

Así:

$\Sigma M_A F = 0$

$2 D_H + 3 C_V = \frac{8}{3}$ —— (2)

Además:

$\Sigma M_C F = 0$

$2 A_H = \frac{4}{3}$

$\underline{A_H = \frac{2}{3} \text{ Ton}}$

Sustituyendo el valor de A_H en (1)

$\frac{4}{3} - 3 C_V = \frac{4}{3}$

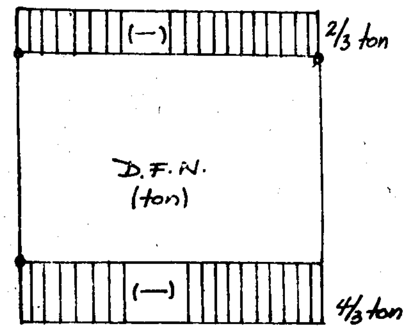
$\therefore \underline{C_V = 0}$

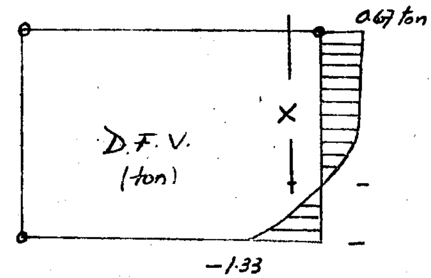
Valor que llevado a (2)

$2 D_H = \frac{8}{3}$

$\therefore \underline{D_H = \frac{4}{3} \text{ Ton}}$

En estas condiciones pasemos a trazar los diagramas de elementos mecánicos.





$V = \frac{2}{3} - \frac{x^2}{2}$

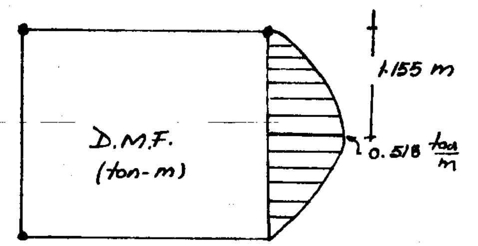
para $V = 0$

$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1.155$

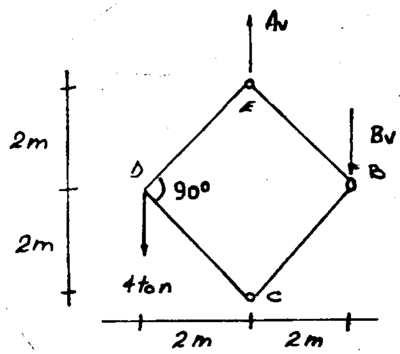
$M = \frac{2}{3}x - \left(\frac{x^3}{6}\right)$

$M_{máx} = 0.774 - 0.256$

$M_{máx} = 0.518$ ton-m



2.14) Considerando el diagrama de cuerpo libre, del anillo, se tiene:



Así: $\Sigma M_E F = 0$

$8 - 2Bv = 0$

$\Rightarrow Bv = 4\ ton$

Además: $\Sigma M_B F = 0$

$16 - 2Av = 0$

$\Rightarrow Av = 8\ ton$

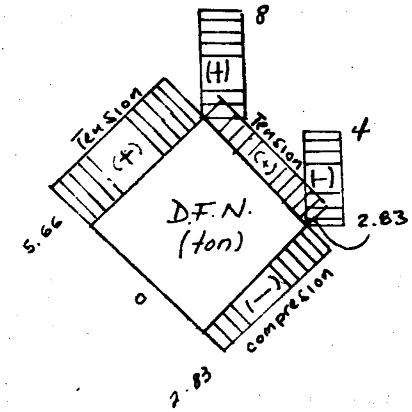
Corroborando los resultados obtenidos:

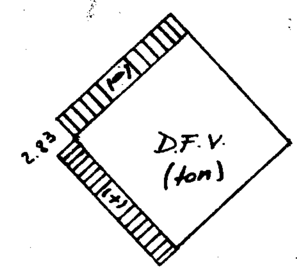
$\Sigma Fv = 0$

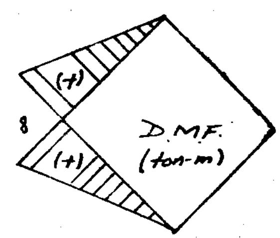
$8 - 4 - 4 = 0$

$0 = 0$

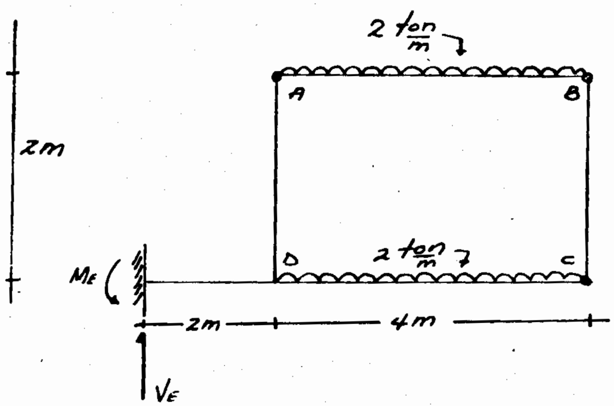
Con los valores obtenidos, pasemos a trazar los diagramas de los elementos mecánicos pedidos:







2.15) Analizando el conjunto :



Así: $\Sigma M_E = 0$

$M_E - 16(4) = 0$

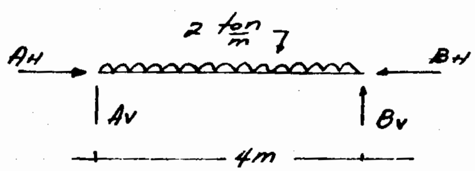
$\Rightarrow M_E = 64$ ton-m.

Además: $\Sigma F_V = 0$

$V_E - 4(4) = 0$

$\Rightarrow V_E = 16$ ton

Aislemos la porción $\overline{AB}$:



Aplicando :

$\Sigma M_B F = 0$

$4A_V - 16 = 0$

$\Rightarrow A_V = 4$ ton

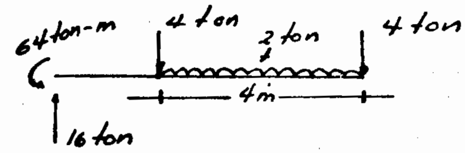
Además :

$\Sigma M_A F = 0$

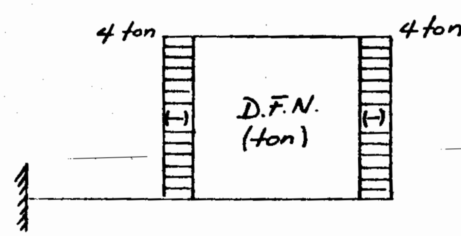
$4B_V - 16 = 0$

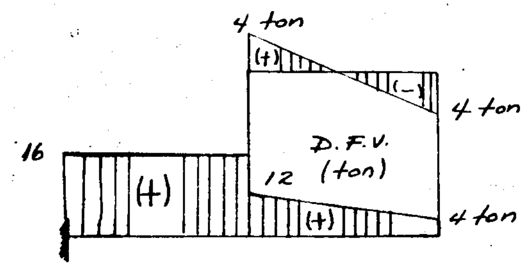
$\Rightarrow B_V = 4$ ton.

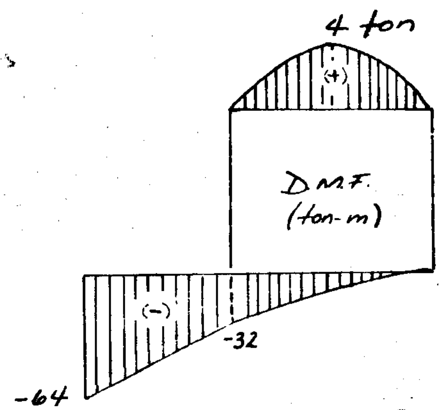
Ahora aislando la barra $\overline{EBC}$:



En estas condiciones podemos trazar los diagramas de elementos mecánicos:




4 ton
(+)
(−)
4 ton
16
(+)
12
D. F. V.
(ton)
(+)
4 ton


4 ton
(+)
D.M.F.
(ton-m)
(−)
-32
-64

SERIE 7

ARMADURAS ISOSTATICAS
(Soluciones)

1

1) Las armaduras planas son estructuras muy usadas en las construcción de techos, pantallas, puertas, etc.; y su gran mayoría pueden analizarse por medio de la estática.

Consisten de combinaciones de barras esbeltas unidas en sus extremos (nudos, juntas o anillos), y se les sujeta para el análisis de efectos internos primarios a las siguientes condiciones:

A) Geométricas:

A1) Serán rígidas geométricamente hablando.

A2) Los ejes centroidales de todas sus barras estarán contenidas en un plano, denominado plano de la armadura.

A3) Los ejes centroidales de las barras concurren en puntos que se denominan nudos o juntas.

2

2).

B) Mecánicas:

B1) Todas las fuerzas externas actuarán en el plano de la armadura.

B2) Todas las acciones externas obrarán en los nudos de la extructura.

B3) Las barras integrantes serán de peso despreciable en comparación con las fuerzas que son capaces de absorver.

B4) Las conexiones que se suministran a las barras para formar los nudos serán articulaciones perfectas.

En estas condiciones las barras de la armadura son miembros en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas iguales, colineales y de sentido contrario.

3)

7.1)	$n=5$	; $m=4$	; $2(4)-3=5$
7.2)	$n=5$	; $m=4$	; $2(4)-3=5$
7.3)	$n=13$	; $m=8$	; $2(8)-3=13$
7.4)	$n=7$	; $m=5$	; $2(5)-3=7$
7.5).	$n=5$	; $m=4$	; $2(4)-3=5$
7.6)	$n=9$	; $m=6$	; $2(6)-3=9$

4).-

El significado de la condición de rigidez, mencionada como A1 en el problema 1 de esta serie, radica en la indeformabilidad de la armadura que se deriva de componerla a base de redes simples de triángulos, bajo el supuesto de que los lados de éstos se comportan como cuerpos rígidos.

En tal virtud si "n" es el número de barras, y "m" el propio de nudos, existe la función:

$$n = n(m)$$

Para determinar esta relación procedamos como sigue:

i) Aceptemos que la armadura consista en una red de triángulos.

ii) Fijemos una cualquiera de sus barras y, por tanto, sus dos nudos extremos.

iii) Situemos los $(m-2)$ nudos restantes con las $(n-1)$ barras disponibles.

Forzosamente:

$$2(m-2)=n-1$$

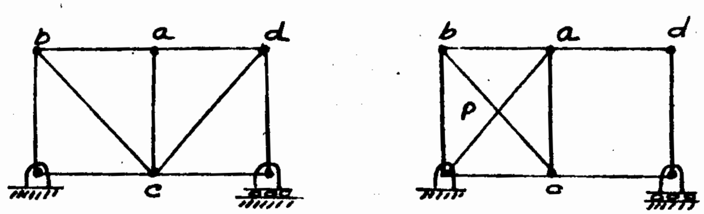
pues cada nudo se fija con dos barras. Asi:

$$n=2m-3$$

que es la condición necesaria de rigidez geométrica de la estructura.

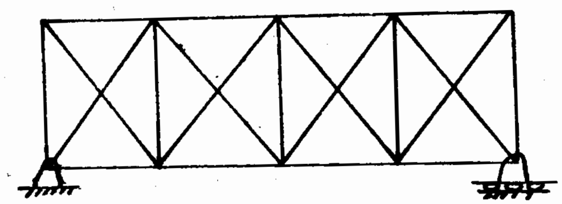
La condición que hemos deducido sólo es necesaria, con ello quiere decirse que de cumplirse la expresión anterior no se sigue que la estructura sea rígida.

Para demostrarlo simplemente observamos las armaduras de la figura.



La de la derecha se ha formulado cambiando la barra cd de tablero de suerte tal que no se interconecte con P. ambas cumplen la relación $n=2m-3$, y la primera es rígida y la segunda no.

Se pueden plantear armaduras sobre rigidizadas como las de la siguiente figura:



$n=21$ $\quad$ $21 = 2(10)-3$

$m=10$ $\quad$ $21 \neq 17$

que no cumple la condición $n=2m-3$. Tales armaduras son hiperestáticas.

De lo anterior observamos que la condición propuesta en el enunciado de éste problema, no es suficiente, sino solo necesaria.

5) El análisis de las armaduras planas isostáticas se lleva a cabo usualmente con dos tipos de métodos: los analíticos y los gráficos.

Entre los métodos analíticos están:

i) El método racional o de las juntas, que consiste en tratar nudo por nudo de la extructura, considerandola en equilibrio bajo las acciones internas de las barras correspondientes y tomando en cuenta las cargas externas que obren en él, formando una secuencia de nudos que permita tales razonamientos de solución individual.

ii) El método de las secciones o de Ritter, basado en el planteo de cortes que intersecten como máximo tres barras de la extructura, por la limitación que la estática impone a los problemas de librio planteados en términos d temas

de fuerzas planas, generales.

Entre los métodos gráficos de solución se distinguen el de CREMONA - MAXWELL, que consiste, propiamente, en una traducción hecha de términos de los métodos de la estática gráfica del método analítico racional. Y el método de CULMANN, que propiamente aborda el problema de Ritter.

6) De acuerdo a las condiciones impuestas a las armaduras, las barras que las forman sólo pueden trabajar a fuerzas axiales de tensión o de compresión.

El problema se nos presenta con "n" incógnitas internas correspondientes a las fuerzas en las barras, y 3 más externas que serán las reacciones, siendo isostática exteriormente.

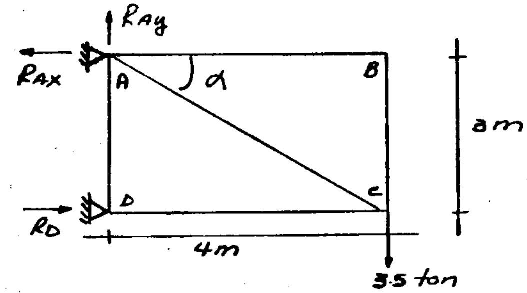
Puesto que para su solución contamos con dos ecuaciones de equilibrio por cada nudo, en total disponemos de 2 m ecuaciones independientes.

Por lo que la armadura será isostática interiormente si:

$$n + 3 = 2m$$

$$\boxed{n = 2m - 3}$$

7.1)



$sen\,\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Obtención de reacciones:

$\curvearrowleft \Sigma M_A F = 0$

$4(3.5) - 3R_D = 0$

$14 - 3R_D = 0$

$R_D = \underline{4.66\ ton}$

$\Sigma F_X = 0$

$R_D = R_{Ax} = \underline{4.66\ ton}$

Resúmen de reacciones

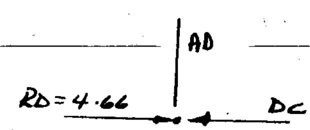
$\leftarrow$ $R_{Ax} = 4.66$ ton

$\uparrow$ $R_{Ay} = 3.5$ ton

$\rightarrow$ $R_D = 4.66$ ton

Análisis de fuerzas internas

Nudo "D"



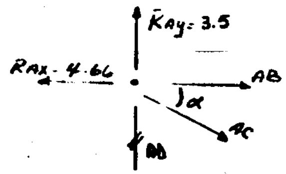
$\Sigma F_X = 0$

$R_D - D_C = 0$

$D_C = \underline{4.66\ ton}$ (c)

AD no trabaja.

Nudo "A"



$\Sigma F_y = 0$

$R_{Ay} = AC \operatorname{sen} \alpha$

$3.5 = AC\left(\frac{3}{5}\right)$

$\therefore\ AC = \frac{17.5}{3}$

$AC = 5.83$ ton (tensión)

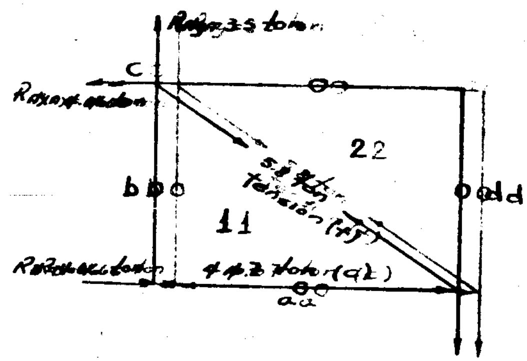
$\Sigma F_x = 0$

$R_{Ax} = AB + AC \cos\alpha$

$4.66 = AB + 5.83\left(\frac{4}{5}\right) = AB + 4.66$

$\therefore\ AB = 4.66 - 4.66 = 0$ (no trabaja)

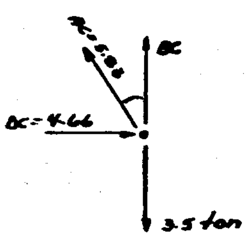
Comprobación gráfica



$E_F = 1 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$

$E_L = 1 \frac{\text{mm}}{\text{cm}}$

Nudo "c"



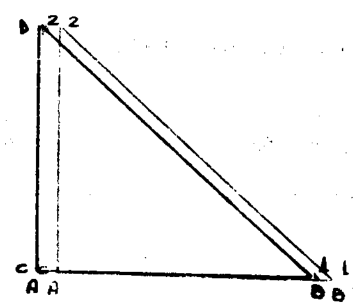
$\Sigma F_y = 0$

$AC \operatorname{sen}\alpha + BC = 3.5$

$5.83\left(\frac{3}{5}\right) + BC = 3.5$

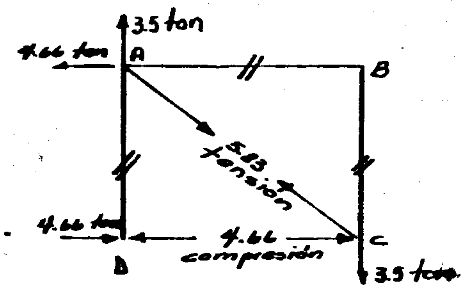
$3.5 + BC = 3.5$

$\therefore\ BC = 0$ (no trabaja)

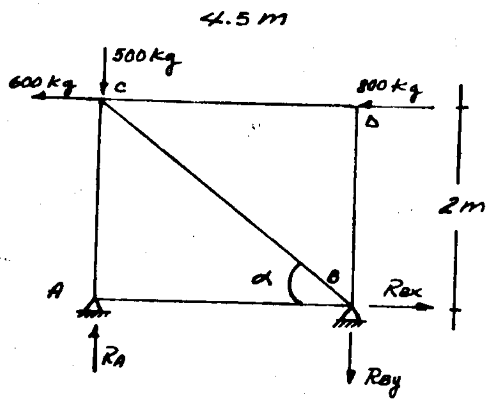


a1	4.667 c
b1	0
d1	0
12	5.83 t

Resumen:



7.2)



Obtención de las reaciones

$\Sigma M_B F = 0$

$4.5 R_A - 600(2) - 800(2) - 500(4.5) = 0$

$4.5 R_A = 1200 + 1600 \; 2250$

$R_A = \dfrac{5050}{4.5} = \underline{1122.5 \text{ kg}}$

$\underline{\Sigma F_y = 0}$

$500 + R_{By} - R_A = 0$

$R_{By} = -500 + 1122.5$

$\underline{R_{By} = 622.5}$

$\underline{\Sigma F_x = 0}$

$600 + 800 = R_{Bx}$

$\underline{R_{Bx} = 1400}$

Resumen de las reacciones

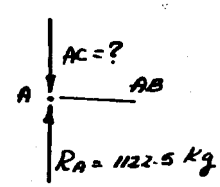
$\uparrow R_A = 1122.5$ kg

$\downarrow R_{By} = 622.5$ kg

$\rightarrow R_{Bx} = 1400$ kg

Análisis de fuerzas internas

Nudo "A"

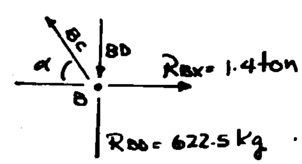


$\Sigma F_y = 0$

$AC = R_A = 1122.5$ kg (comp.)

AB no trabaja

Nudo "B"



$\Sigma F_x = 0$

$BC \cos\alpha = R_{Bx} = 1.4$ ton

$BC = \dfrac{4.95 \times 1.4}{4.5}$

$BC = 1545$ kg (Tensión)

$\Sigma F_y = 0$

$-BD + BC \operatorname{sen}\alpha - R_{By} = 0$

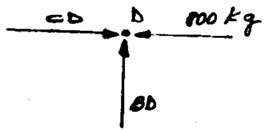
$BD = 1545 \left(\dfrac{2}{4.95}\right) - 622.5$

$BD = 0$ (no trabaja)

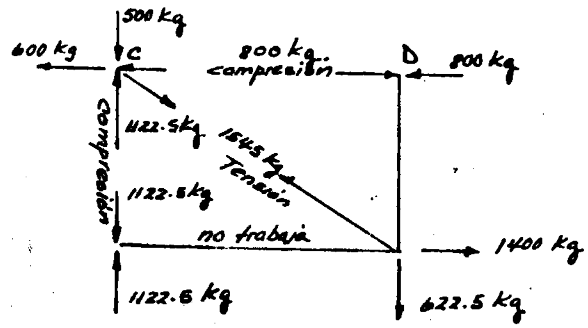
Nudo "D"

$\Sigma F_X = 0$

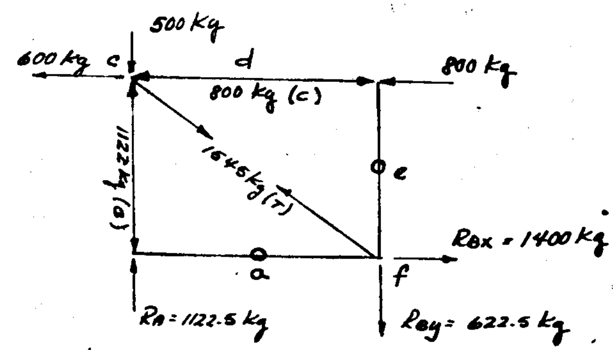
$OD = 800\ kg$



RESUMEN

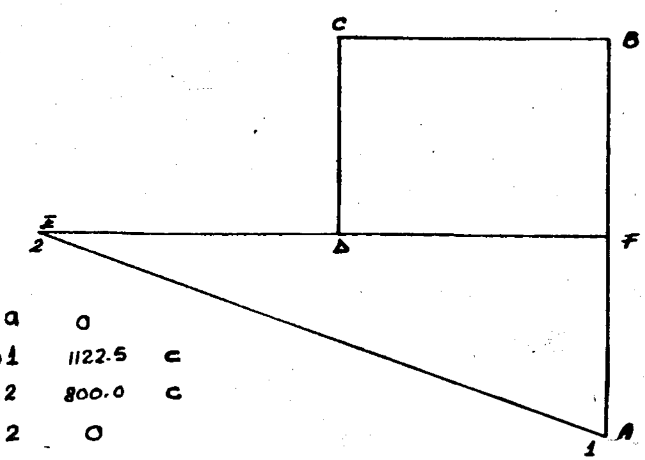


Comprobación gráfica:



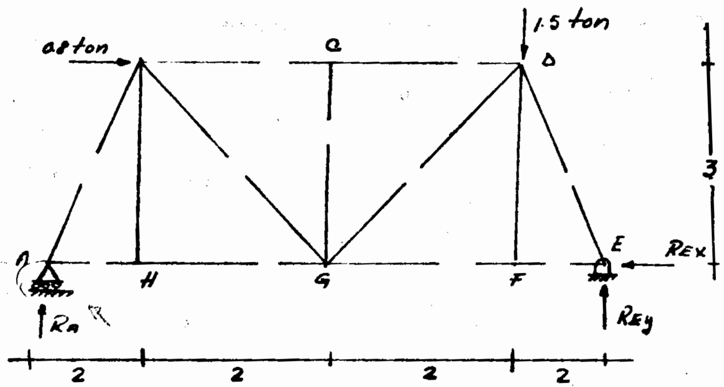
$E_F = 100\ \frac{kg}{cm}$

$E_L = 1\ \frac{m}{cm}$



1a	0	
b1	1122.5	c
d2	800.0	c
e2	0	
12	1535.0	T

7.3)



obtención de las reacciones

① $\Sigma M_{EF} = 0$

$8R_A + 0.8(3) - 1.5(2) = 0$

$8R_A + 2.4 - 3 = 0$

$R_A = \frac{.6}{8} = \underline{75\ kg}$

$\Sigma F_x = 0$

$R_{EX} = 0.8\ ton = 800\ kg \implies R_{EX} = 800\ kg$

$\Sigma F_y = 0$

$R_A + R_{EY} - 1500 = 0$

$75 + R_{EY} - 1500 = 0$

$\implies R_{EY} = \underline{1425\ kg}$

Resúmen de Reacciones

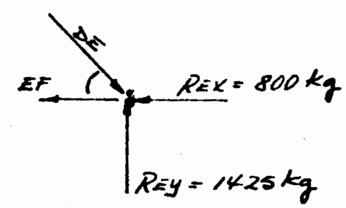
$R_A = 75\ kg$

$R_{EX} = 800\ kg$

$R_{EY} = 1425\ kg$

Análisis de las fuerzas internas

Nudo "E"



$\Sigma F_y = 0$

$DE \operatorname{sen} \alpha = R_{EY}$

$DE\left(\frac{3}{3.6}\right) = 1425$

$DE = \underline{1710\ kg}\ \underline{(C)}$

$\Sigma F_x = 0$

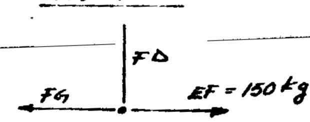
$DE \cos\alpha = EF + R_{EX}$

$1710\left(\frac{2}{3.6}\right) - R_{EX} = EF$

$950 - 800 = EF = 150\ kg$

$EF = \underline{150\ kg}\ \underline{(T)}$

Nudo "F"

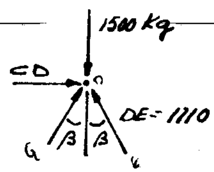


$\Sigma F_x = 0$

$EF = FG = \underline{150\ kg}$

$FD =$ no trabaja

Nudo "D"



$\Sigma Fy = 0$

$DG \cos\alpha + DE \cos\alpha = 1500$

$DG\left(\frac{3}{3.6}\right) + 1710\left(\frac{3}{3.6}\right) = 1510$

$DG = \frac{75 \times 3.6}{3}$

$DG = 90$ kg (compresión)

$\Sigma Fx = 0$

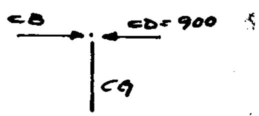
$DG \operatorname{sen}\alpha + CD = DE \operatorname{sen}\alpha$

$90\left(\frac{2}{3.6}\right) + CD = 1710\left(\frac{2}{3.6}\right)$

$\frac{180}{3.6} + CD = 950$

$CD = 900$ kg (compresión)

Nudo "C"



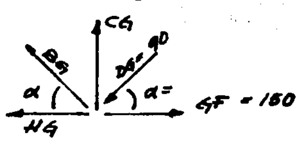
$\Sigma Fx = 0$

$CB = CD = 900$ kg

$\Sigma Fy = 0$

CG no trabaja

Nudo "G"



$\Sigma Fy = 0$

$DG \operatorname{sen}\alpha = BG \operatorname{sen}\alpha$

$DG = BG = 90$ kg

$\Sigma Fx = 0$

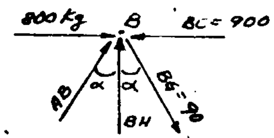
$BG \cos\alpha + DG \cos\alpha + HG = GF$

$2(90)\left(\frac{2}{3.6}\right) + HG = 150$

HG = 50 kg (Tensión)

$\Longrightarrow BG = 90$ kg (c)

Nudo "B"



$\Sigma Fx = 0$

$800 + AB \operatorname{sen}\alpha + BG \operatorname{sen}\alpha - BC = 0$

$800 + AB\left(\frac{2}{3.6}\right) + 90\left(\frac{2}{3.6}\right) - 900 = 0$

$AB = \frac{50 \times 3.6}{2} = 90$

AB = 90 kg (compresión)

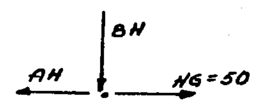
$\Sigma Fy = 0$

$AB \cos\alpha + BH = BG \cos\alpha$

$90\left(\frac{3}{3.6}\right) + BH = 90\left(\frac{3}{3.6}\right)$

$BH = 0$ (no trabaja)

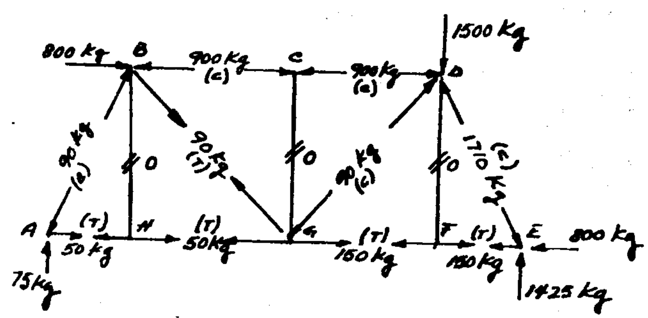
Nudo "H"



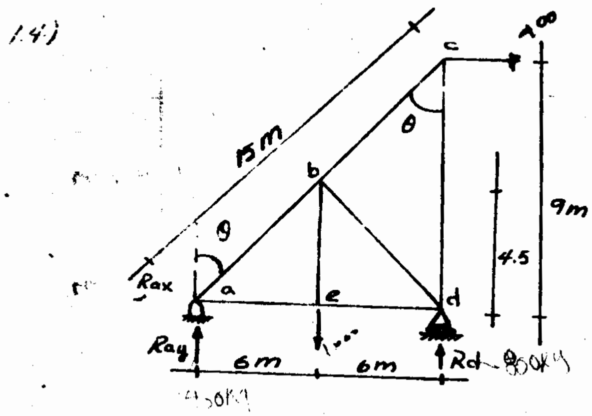
$\Sigma Fx = 0$

HG = AH = 50 kg (tensión)

Resumen



1.4)



Obtención de reacciones

1) $\Sigma M_aF = 0$

$6(1000) - 12Rd + 9(400) = 0$

$6000 - 12Rd + 3600 = 0$

$Rd = 800$ kg

$\Sigma F_y = 0$

$Ray = 400$ kg

$\Sigma F_x = 0$

$1000 - Rd - Rax = 0$

$1000 - 800 - Rax = 0$

$Rax = 200$ kg

Resúmen de reacciones

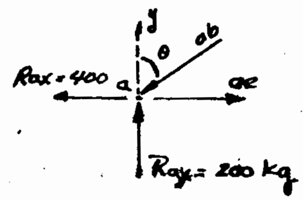
↑ $Rd = 800$ kg

↑ $Ray = 200$ kg

← $Rax = 400$ kg

Análisis de fuerzas internas

Nudo "a"



$\Sigma F_y = 0$

$200 - ab\cos\theta = 0$

$200 - ab\,\frac{4.5}{7.5} = 0$

$ab = 333$ kg (compresión)

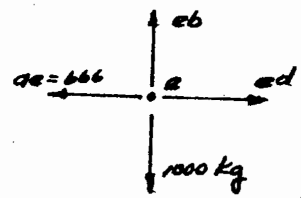
$\Sigma F_x = 0$

$ae - ab\,sen\,\theta - 400 = 0$

$ae - 333\left(\frac{6}{7.5}\right) - 400 = 0$

$ae = 666$ kg (tensión)

Nudo "e"



$\Sigma F_x = 0$

$bd\cos\alpha - ed = 0$

$bd\left(\frac{6}{7.5}\right) - 666 = 0$

$bd = 833$ kg (compresión)

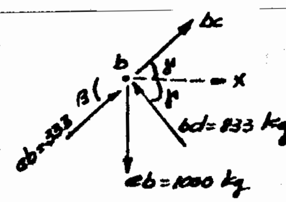
$\Sigma F_y = 0$

$Rd - cd - bd\,sen\,\alpha = 0$

$800 - cd - 833\left(\frac{4.5}{7.5}\right) = 0$

$cd = 300$ kg (compresión)

Nudo "b"



$\Sigma F_x = 0$

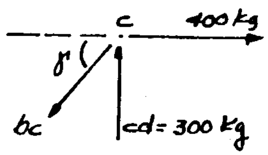
$bc\cos\gamma + ab\cos\beta - bd\cos\gamma = 0$

$bc\left(\frac{6}{7.5}\right) + 333\left(\frac{6}{7.5}\right) - 833\left(\frac{6}{7.5}\right) = 0$

$bc = 500$ kg (tensión)

Para verificar nuestros resultados, analicemos el último nudo:

Nudo "C"



$\Sigma Fx = 0$

$400 = bc \cos \gamma$

$400 = bc \left(\frac{6}{7.5}\right)$

$bc = 500\ kg$

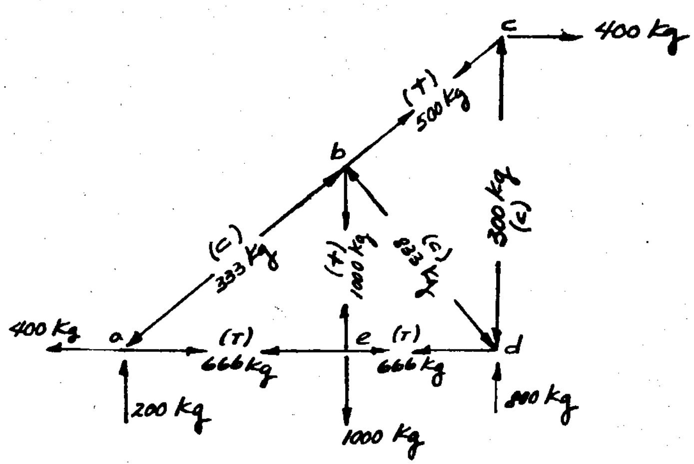
$\Sigma Fy = 0$

$cd = bc \operatorname{sen} \gamma$

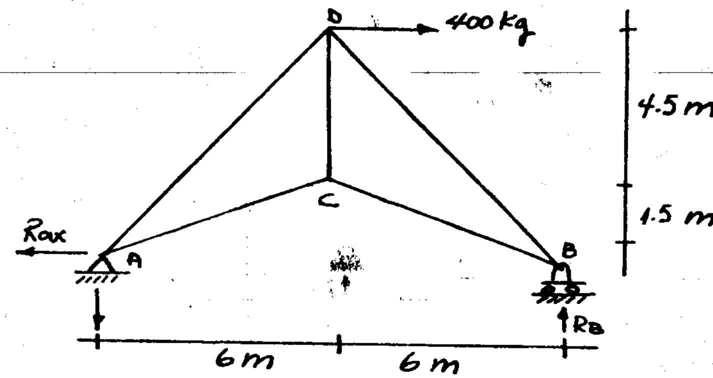
$300 = bc \left(\frac{4.5}{7.5}\right)$

$bc = 500\ kg$

Resúmen:



7.5)



obtención de reacciones

$\Sigma M_A F = 0$

$-12 R_B + 6(400) = 0$

$R_B = 200\ kg$

$\Sigma Fx = 0$

$R_{AX} = 400\ kg$

$\Sigma Fy = 0$

$R_{Ay} = 200\ kg$

Resúmen de reacciones

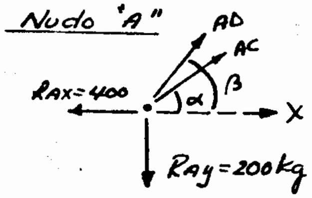
$R_{AX} = 400\ kg$

$R_{Ay} = 200\ kg$

$R_B = 200\ kg$

Análisis de fuerzas internas

Nudo "A"



$sen\,\alpha = \frac{1.5}{6.1}$ $\quad cos\,\alpha = \frac{6}{6.18}$

$sen\,\beta = \frac{6}{8.5}$ $\quad cos\,\beta = \frac{6}{8.5}$

$\Sigma Fx = 0$

$AD\ sen\beta + AC\ sen\alpha = Ray$

$AD\ (.7071) + AC(.243) = 200 \quad (I)$

$\Sigma Fy = 0$

$AD\ cos\beta + AC\ cos\alpha = RAx$

$AD\ (.7071) + AC(.97) = 400 \quad (II)$

(II)-(I)

$.7071\ AD + .97\ AD = 400$

$-.7071\ AD - .243 AC = -200$

$0.727\ AC = 200$

$AC = 275\ kg\ (T) \quad (III)$

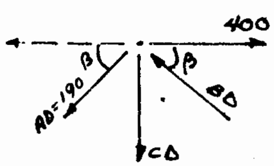
(III) en (I)

$0.7071 AD + 0.97(275) = 400$

$.7071 AD + 266 = 400$

$AD = \frac{134}{0.707} = 190 kg\ (T)$

Nudo "D"



$\Sigma Fx = 0$

$AD\ cos\beta + BD\ cos\beta - 400 = 0$

$190\ (.7071) + BD\ (.7071) = 400$

$BD = \frac{266}{.7071}$

$= 371\ kg\ (c)$

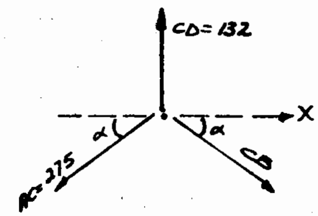
$\Sigma Fy = 0$

$AD\ sen\beta + CD - BD\ sen\beta = 0$

$134 + CD - 266 = 0$

$CD = 132\ kg\ (T)$

Nudo "C"



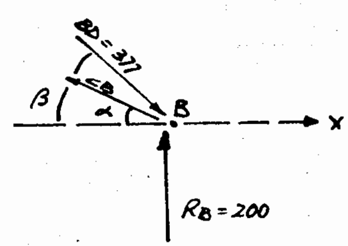
$\Sigma Fx = 0$

$AC\ cos\alpha = CB\ cos\alpha$

$AC = CB = 275\ kg$

Como comprobación analicemos el nudo "B":

Nudo "B"



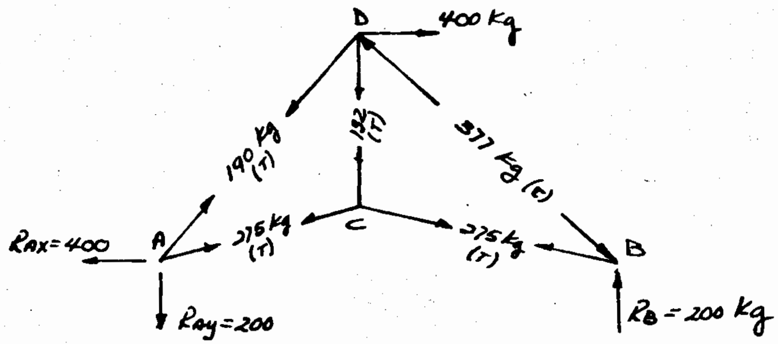
$\Sigma Fx = 0$

$BD\ cos\beta - CB\ cos\alpha = 0$

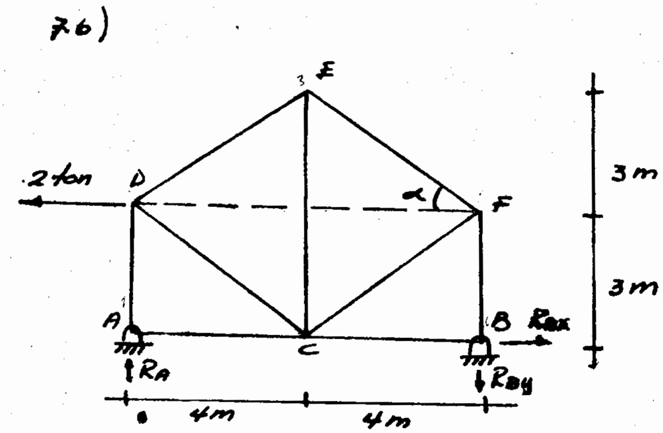
$371\ (.7071) - CB\ (.97) = 0$

$CB = 275\ kg\ (T)$

Resúmen:



76)



obtención de reacciones

$+\circlearrowleft \sum M_B F = 0$

$-20(3) + 8R_A = 0$

$R_A = \frac{60}{8} = 7.5 \text{ ton}$

$\sum F_x = 0$

$R_{Bx} = 20 \text{ ton}$

$\sum F_y = 0$

$R_A = R_{By} = 7.5 \text{ ton}$

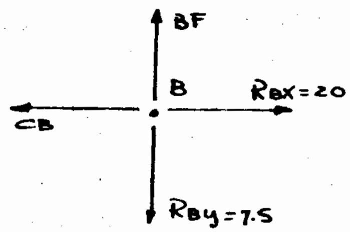
Resúmen de reacciones

$|\bar{R}_A| = |\bar{R}_{By}| = 7.5 \text{ ton}$

$\longrightarrow R_{Bx} = 20 \text{ ton}$

Análisis de fuerzas internas

analicemos primero el nudo "B"



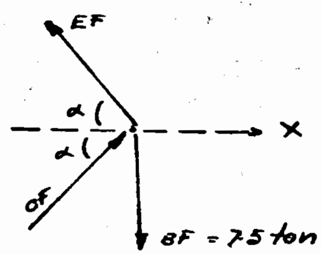
$\Sigma F_x = 0$

$CB = R_{Bx} = 20 \text{ ton } (T)$

$\Sigma F_y = 0$

$BF = R_{By} = 7.5 \text{ ton } (T)$

Pasemos al nudo "F"



$\overline{EF} \rightarrow (T)$

$\overline{CF} \leftarrow (C)$

$\Sigma F_x = 0$

$-EF\cos\alpha + CF\cos\alpha = 0$

$\therefore\ EF = CF$

$\Sigma F_y = 0$

$CF\,\text{sen}\,\alpha + EF\,\text{sen}\,\alpha - BF = 0$

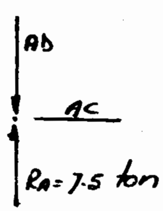
como $CF = EF$

$2CF\,\text{Sen}\,\alpha - BF = 0$

$2CF\left(\frac{3}{5}\right) = 7.5$

$CF = 6.25 \text{ ton}$

Analicemos al nudo "A"

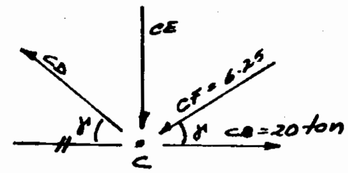


$\Sigma F_y = 0$

$R_A = AD = 7.5 \text{ ton } (C)$

AC (no trabaja)

Nudo "C"



$\Sigma F_x = 0$

$CD\cos\gamma + CF\cos\gamma = 20 \text{ ton}$

$CD\left(\frac{4}{5}\right) + 6.25\left(\frac{4}{5}\right) = 20 \text{ ton}$

$CD = 18.75 \text{ ton } (T)$

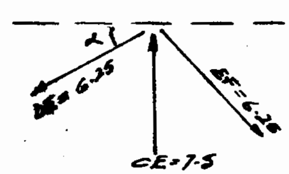
$\Sigma F_y = 0$

$CD\,\text{sen}\,\gamma - CE - CF\,\text{sen}\,\gamma = 0$

$18.75\left(\frac{3}{5}\right) - CE - 6.25\left(\frac{3}{5}\right) = 0$

$CE = 7.50 \text{ ton } (C)$

Nudo "D"

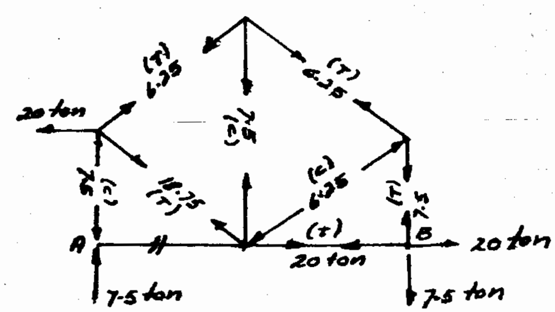


$\Sigma F_x = 0$

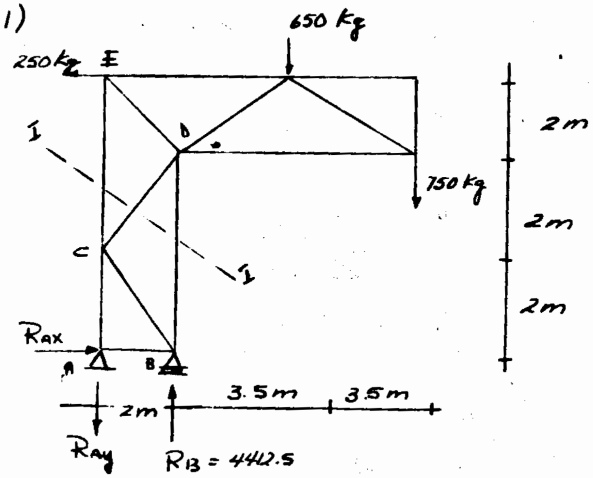
$DE\cos\alpha - EF\cos\alpha = 0$

$0 \equiv 0$

Resúmen:



8.1)



Obtención de reacciones

$\Sigma M_{AF} = 0$

$250(6) + 2R_B - 650(5.5) - 750(9) = 0$

$1500 - 3575 - 6750 + 2R_B = 0$

$R_B = \frac{8825}{2} = \underline{4412.5}$ kg

$\Sigma F_x = 0$

$-250 + R_{Ax} = 0$

$R_{Ax} = \underline{250 \text{ kg}}$

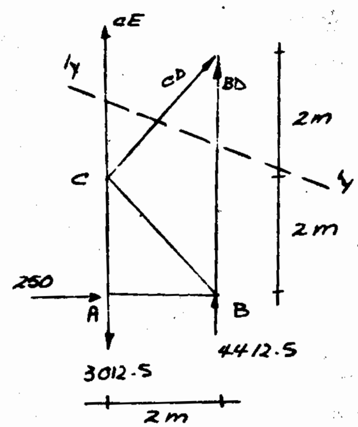
$\Sigma F_y = 0$

$4412.5 - R_{Ay} - 650 - 750 = 0$

$R_{Ay} = \underline{3012.5 \text{ kg}}$

Análisis de fuerzas internas.

sección I-I



$\Sigma M_D = 0$

$3012.5(2) + 250(4) - 2CE = 0$

$CE = \frac{6025 + 1000}{2} = \underline{3512.5 \ (T)}$

$\Sigma M_C = 0$

$2BD + (2)4412.5 + 250(2) = 0$

$BD = \underline{-4662.5 \ (c)}$

$\Sigma F_x = 0$

$250 + CD \frac{2}{2\sqrt{2}} = 0$

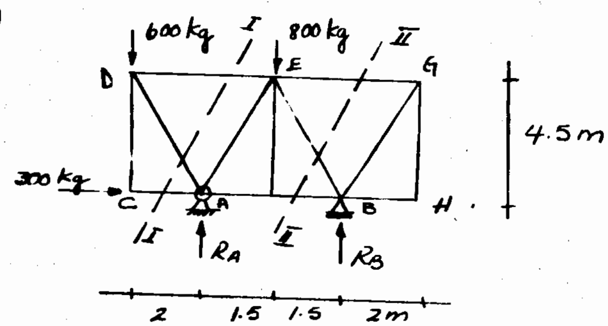
$.707\, CD = -250$

$CD = \underline{-353.6 \ (c)}$

Resumen

CE = 3512.5 kg (Tensión)
BD = 4662.5 kg (compresión)
CD = 353.6 kg (compresión)

8.2)



Obtención de reacciones

$\Sigma M_A = 0$

$600(2) - 800(1.5) + 3R_B = 0$

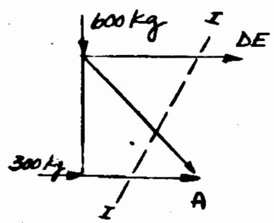
$1200 - 1200 + 3R_B = 0$

$\underline{R_B = 0}$

$\Sigma F_y = 0$

$\underline{R_A = 1400 \text{ kg}}$

Sección I-I



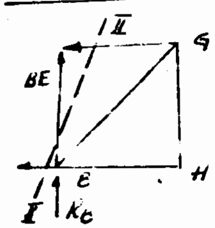
$\Sigma M_A = 0$

$600(2) - DE(4.5) = 0$

$DE = \frac{1200}{4.5}$

$DE = \underline{266.7 \ (T)}$

Sección II-II



$BE = 0$

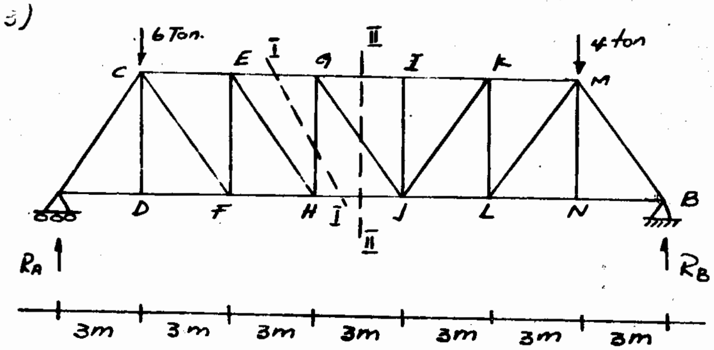
como la parte aislada no soporta ninguna carga, tenemos que ninguna de sus barras trabaja.

RESUMEN

DE = 266.7 Kg (T)

BE = 0

8.3)



obtención DE reacciones:

$\Sigma M_B = 0$

$6(18) + 4(3) - 21R_A = 0$

$R_A = \frac{108+12}{21} = \underline{5.71 \text{ Ton}}$

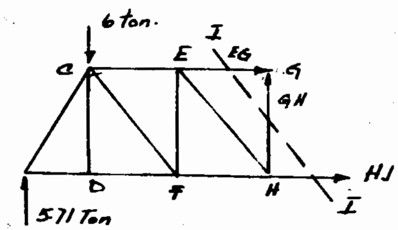
$\Sigma F_y = 0$

$R_B + 5.71 - 6 - 4 = 0$

$R_B = \underline{4.29 \text{ ton.}}$

Análisis de fuerzas internas.

Sección I-I



$\Sigma M_G = 0$

$6HJ + 6(6) - 5.71(9) = 0$

$6HJ + 36 - 51.39 = 0$

$HJ = \underline{2.57 \text{ ton } (T)}$

$\Sigma F_y = 0$

$5.71 - 6 + GH = 0$

$GH = \underline{0.29 \text{ ton } (T)}$

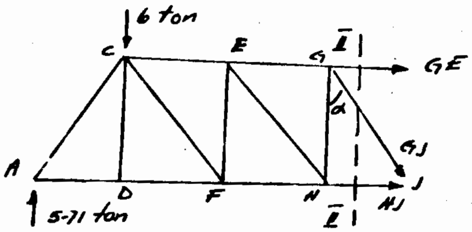
$\circlearrowleft \sum M_H = 0$

$-5.71(9) + 6(6) - 6EG = 0$

$-51.39 + 36 - 6EG = 0$

$EG = \underline{2.57 \text{ ton } (c)}$

Sección II-II



$sen\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$cos\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\circlearrowleft \sum M_J = 0$

$-5.71(12) + 6(9) - 6GI = 0$

$-68.52 + 54 - 6GI = 0$

$GI = \underline{2.42 \text{ ton } (c)}$

$\sum F_y = 0$

$5.71 - 6 - \frac{2}{\sqrt{5}} GJ = 0$

$GJ = \frac{-0.29\sqrt{5}}{2}$

$GJ = \underline{0.325 \text{ ton } (c)}$

Resúmen

HJ = 2.57 ton (Tensión)

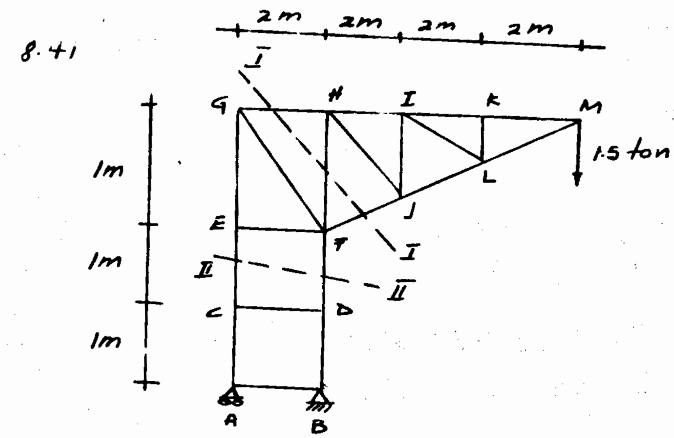
GH = 0.29 ton ✓

EG = 2.57 ton (compresión)

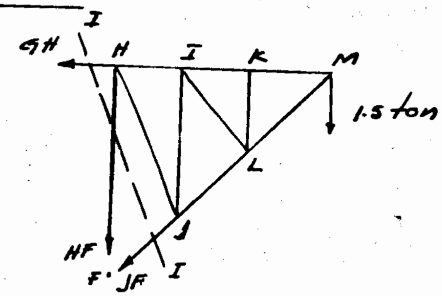
GI = 2.42 ton ✓

GJ = 0.325 ton ✓

8.41



Sección I-I



$\circlearrowleft \sum M_F = 0$

$-1.5(6) + GH = 0$

$GH = \underline{9 \text{ ton } (T)}$

$\sum F_x = 0$

$-9 - \frac{6}{\sqrt{37}} FJ = 0$

$FJ = \underline{-9.13 \text{ ton } (c)}$

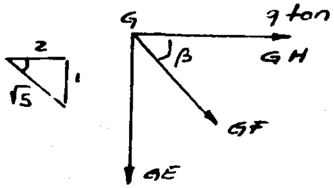
$\sum F_y = 0$

$\frac{1}{\sqrt{5}} FJ - HF - 1.5 = 0$

$HF = \frac{9.13}{\sqrt{37}} - 1.5$

$\underline{HF = 0}$

Nudo "G"



$\Sigma Fy = 0$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{9\sqrt{5}}{2} - GF = 0$

$GF = \underline{4.5 \text{ ton } (T)}$

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

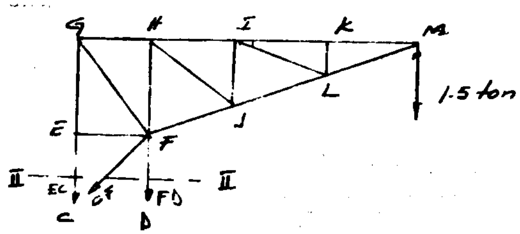
$\Sigma Fx = 0$

$9 + \frac{2}{\sqrt{5}} GF = 0$

$GF = -\frac{9\sqrt{5}}{2}$

$GF = \underline{10.1 \text{ ton } (T)}$

Sección II-II



$\Sigma M_F = 0$

$-1.5(6) + 2(CE) = 0$

$CE = \frac{9}{2}$

$CE = \underline{4.5 \text{ ton } (T)}$

Resúmen

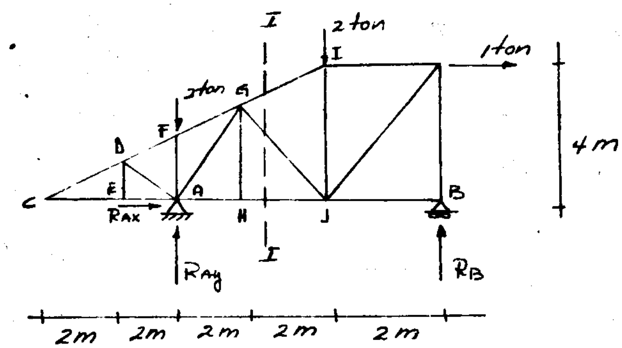
$GF = 1.01$ ton (compresión)

$HF = 0$

$GE = 4.5$ ton (Tensión)

$CE = 4.5$ ton ✓

8.5)



Obtención de reacciones

$\Sigma M_A = 0$

$6R_B - 2(4) - 1(4) = 0$

$R_B = \frac{12}{6} = \underline{2 \text{ ton} \uparrow}$

$\Sigma F_y = 0$

$R_{Ay} - 2 - 2 + 2 = 0$

$R_{Ay} = \underline{2 \text{ ton} \uparrow}$

$\Sigma Fx = 0$

$R_{Ax} + 1 = 0$

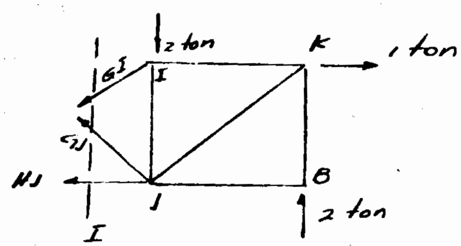
$R_{Ax} = \underline{-1 \text{ ton} \leftarrow}$

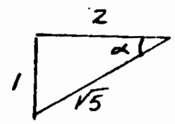
Puesto que en el nudo "C" no actuán cargas

$\underline{CD = 0}$

$\underline{CE = 0}$

Sección I-I





$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\circlearrowright \Sigma M_I = 0$

$$2(2) - 1(4) + \frac{2}{\sqrt{5}} GI(4) = 0$$

$\underline{GI = 0}$

$\Sigma F_y = 0$

$\underline{GJ = 0}$

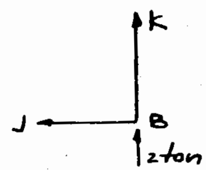
$\Sigma F_x = 0$

$\underline{HJ = 0}$

En el nudo B puede observarse que :

$KB = RB = 2\ ton\ (c)$

Nudo "B"



$\Sigma F_y = 0$

$2 + BK = 0$

$BK = -2\ ton$

$BK = \underline{2\ ton\ (c)}$

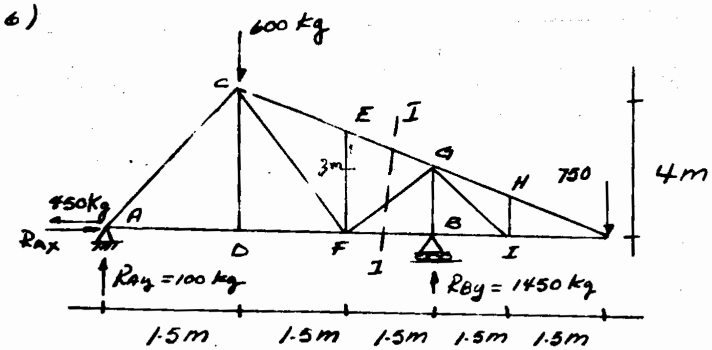
por $\Sigma F_x = 0$

$\underline{BJ = 0}$

Resúmen

$CD = 0$	$GJ = 0$
$CE = 0$	$KB = 2\ ton$ (compresión)

8.6)



Obtención de reacciones

$\circlearrowright \Sigma M_A = 0$

$$-600(1.5) - 750(7.5) + R_{By}(4.5) = 0$$

$$-900 - 5625 + R_{By}(4.5) = 0$$

$$R_{By} = \frac{6525}{4.5} = 1450$$

$R_{By} = \underline{1450\ kg}$

$\Sigma F_y = 0$

$1450 - 600 - 750 + R_{Ay} = 0$

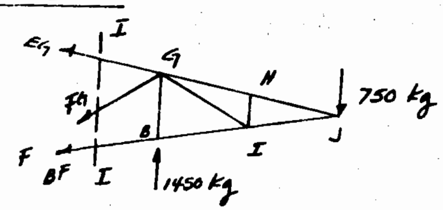
$R_{Ay} = \underline{-100\ kg} \downarrow$

$\Sigma F_x = 0$

$-450 + R_{Ax} = 0$

$R_{Ax} = \underline{450}\ kg$

Sección I-I



$\circlearrowright \Sigma M_F = 0$

$$1450(1.5) - 750(4.5) + \frac{3}{\sqrt{13}} EG(2) + \frac{2}{\sqrt{13}} EG(1.5) = 0$$

$$2175 - 3375 + \frac{3}{\sqrt{13}} EG(2) + \frac{2}{\sqrt{13}} EG(1.5) = 0$$

$$\frac{6}{\sqrt{13}} EG + \frac{3}{\sqrt{13}} EG = 1200$$

$$EG = \underline{480 \ kg} \ \underline{(T)}$$

$\Sigma F_y = 0$

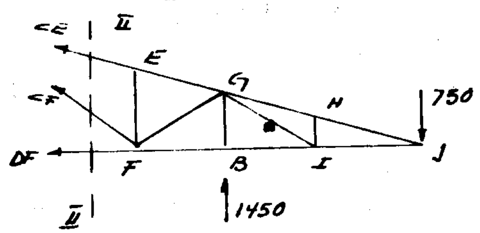
$$1450 - 750 + \frac{2}{\sqrt{13}} 480 - \frac{2}{\sqrt{6.25}} FG = 0$$

$$1450 - 750 + 266.6 - \frac{2}{\sqrt{6.25}} FG = 0$$

$$FG = \frac{966.6\sqrt{6.25}}{2}$$

$$FG = \underline{1208.32 \ kg} \ \underline{(T)}$$

Sección II-II



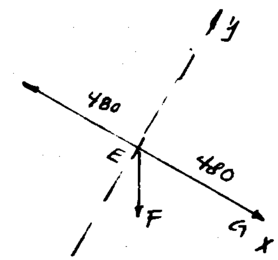
$\circlearrowright \Sigma M_F = 0$

$$1450(1.5) - 750(4.5) + \frac{3}{\sqrt{13}} CE(3) = 0$$

$$2175 - 3375 + \frac{3}{\sqrt{13}} CE(3) = 0$$

$$CE = \underline{480 \ kg} \ \underline{(T)}$$

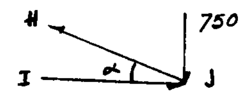
Nudo "E"



$\Sigma F_y = 0$

$\underline{EF = 0}$

Nudo "J"



$sen\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$; $cos\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\Sigma F_y = 0$

$$\frac{2}{\sqrt{13}} HJ - 750 = 0$$

$$HJ = \frac{750\sqrt{13}}{2} = 1350 \ kg$$

$$HJ = \underline{1350 \ kg} \ \underline{(T)}$$

$\Sigma F_x = 0$

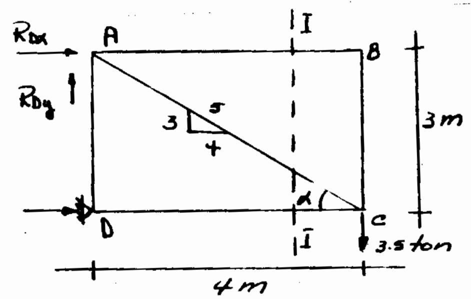
$$1350 \frac{3}{\sqrt{13}} - IJ = 0$$

$$IJ = \underline{1125 \ kg} \ \underline{(c)}$$

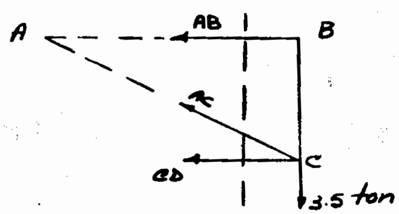
Resumen

EF = 0
FG = 1208 kg (Tensión)
HJ = 1350 kg ✓
IJ = 1125 kg (compresión)

9.1)



Sección I-I Aislando la parte derecha



obtención de la fuerza en la barra CD.

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$

$-3.5(4) - 3CD = 0$

$CD = -4.66$ ton (c)

RESUMEN

$AB = 0$

$AC = 5.83$ ton (T)

$CD = -4.66$ ton (c)

obtención de la fuerza en la barra AC

$\Sigma F_y = 0$

$AC \operatorname{sen}\alpha - 3.5 = 0$

$AC = \dfrac{3.5 \times 5}{3}$

$AC = 5.83$ ton (T)

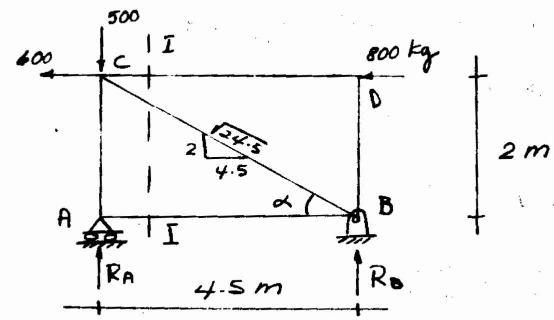
obtención de la fuerza en la barra AB

$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0$

$3AB = 0$

$AB = 0$

9.2)



obtención de la reacción en A

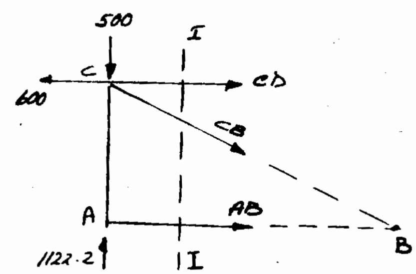
$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$

$600(2) + 500(4.5) + 800(2) - 4.5R_A = 0$

$1200 + 2250 + 1600 - 4.5R_A = 0$

$R_A = \dfrac{5050}{4.5} = 1122.2$

Sección I-I separando la parte izquierda



obtención de la fuerza en la barra CB

$\Sigma F_y = 0$

$1122.2 - 500 - \operatorname{Sen}\alpha\, CB = 0$

$1122.2 - 500 - CB \dfrac{2}{\sqrt{24.2}} = 0$

$CB = 1532.21$ kg (T)

obtención de la fuerza en la barra CD

$\curvearrowright \Sigma M_B = 0$

$$600(2)+500(4.5)-1122.2(4.5)-CD(2)=0$$

$$1200+2250-5050-2CD=0$$

$$CD = 800\ kg\ (C)$$

obtención de la fuerza en la barra AB

$\curvearrowright \Sigma M_C = 0$

$2AB = 0$ $\qquad$ $\underline{AB=0}$

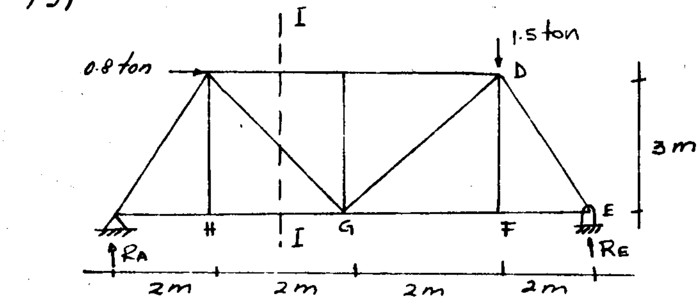
Resumen

$AB=0$

$CB = 1532.21\ kg\ (T)$

$CD = 800\ kg\ (C)$

9.3)



obtención de la reacción en A.

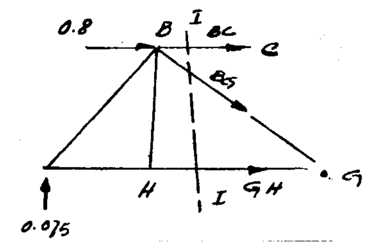
$\curvearrowright \Sigma M_E = 0$

$$1.5(2) - 0.8(3) - 8R_A = 0$$

$$3 - 2.4 - 8R_A = 0$$

$$R_A = 0.075\ ton$$

Sección I-I aislando la parte izquierda



obtención de la fuerza en la barra BG.

$\Sigma F_y = 0$

$$0.075 - BG\frac{3}{\sqrt{13}} = 0$$

$$BG = 0.025\sqrt{13}$$

$$BG = \underline{0.09\ ton\ (T)}$$

obtención de la fuerza en la barra GH

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$

$$3GH - 0.075(2) = 0$$

$$GH = \underline{0.050 \text{ ton } (T)}$$

obtención de la fuerza en la barra BC

$\circlearrowleft \Sigma M_G = 0$

$$-0.075(4) - 0.8(3) - 3BC = 0$$

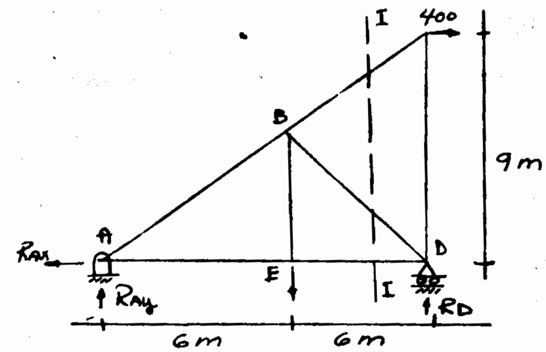
$$-0.3 - 2.4 - 3BC = 0$$

$$BC = \underline{0.9 \text{ ton } (C)}$$

Resúmen

BC = 0.9 ton (C)
BG = 0.09 ton (T)
GH = 0.05 ton (T)

9.4)



obtención de la reacción en D

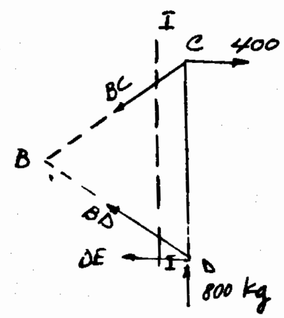
$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$

$$12R_D - 1000(6) - 400(9) = 0$$

$$12R_D - 6000 - 3600 = 0$$

$$R_D = \frac{9600}{12} = 800 \text{ kg}$$

sección I-I aislando la parte derecha



obtención de la fuerza en la barra DE.

$\circlearrowleft \Sigma M_B = 0$

$$800(6) - 4.5DE - 400(4.5) = 0$$

$$4800 - 1800 - 4.5DE = 0$$

$$DE = \underline{666 \text{ kg } (T)}$$

obtención de la fuerza en la barra BC

$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$

$$(9)\frac{6}{7.5}BC - 400(9) = 0$$

$$BC = \frac{400(7.5)}{6} = 500$$

$$BC = \underline{500\,kg}\ \underline{(T)}$$

Obtención da la fuerza en la barra BD

$\Sigma F_X = 0$

$$-666 - BD\frac{6}{7.5} - \frac{6}{7.5}(500) + 400 = 0$$

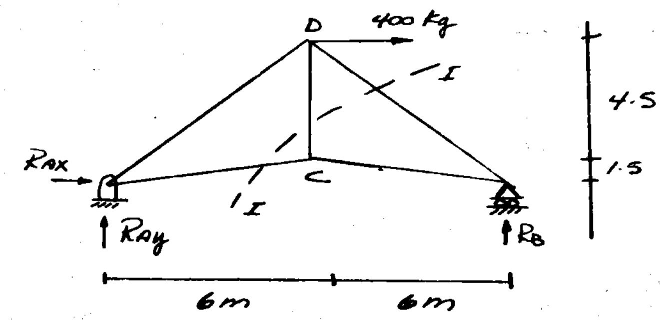
$$-666 + 400 - 400 - BD\frac{6}{7.5} = 0$$

$$BD = \underline{832.5\ kg}\ \underline{(c)}$$

Resúmen

BC = 500 kg (T)
BD = 832.5 kg (c)
DE = 666 kg (T)

9.5)

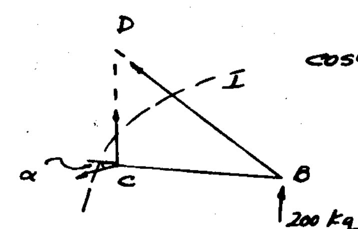


Obtención de la reacción R_B.

$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$

$$12R_B - 400(6) = 0$$

$$R_B = \underline{200\ kg}$$



$$\cos\alpha = \frac{6}{6.185}$$

obtención de la fuerza en la barra AC

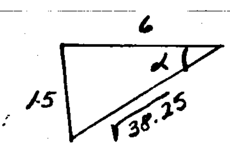
$\circlearrowleft \Sigma M_D = 0$

$$200(6) - AC(4.5)\cos\alpha = 0$$

$$AC = \frac{1200\sqrt{38.2}}{6(4.5)}$$

$$AC = \underline{274.9}\ kg\ \underline{(T)}$$

Obtención de la fuerza en la barra BD.



$\Sigma F_X = 0$

$$-\frac{1200\sqrt{38.2}}{6(4.5)}\,\frac{6}{\sqrt{38.2}} - BD\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$BD = \underline{+376\ kg}\ \underline{(c)}$$

Obtención de la fuerza en la barra CD

$\Sigma F_y = 0$

$$200 - AC\ sen\alpha - BD\ sen\beta + CD = 0$$

$$200 - \frac{1200\sqrt{38.2}}{6(4.5)}\,\frac{1.5}{\sqrt{38.2}} - \frac{1200\sqrt{2}}{4.5}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + CD = 0$$

$$CD = \frac{300}{4.5} + \frac{1200}{4.5} - 200$$

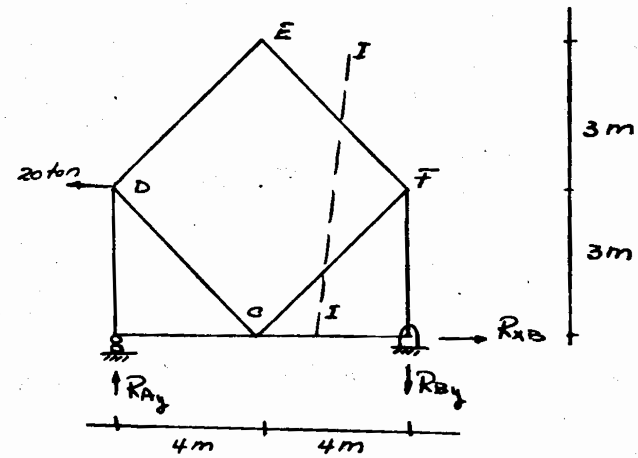
$$CD = 66.6 + 266.6 - 200$$

$$CD = \underline{133.3\ kg\ (T)}$$

Resúmen:

AC = 274.9 kg (T)
BD = 376 kg (C)
CD = 133.3 kg (T)

9.6)



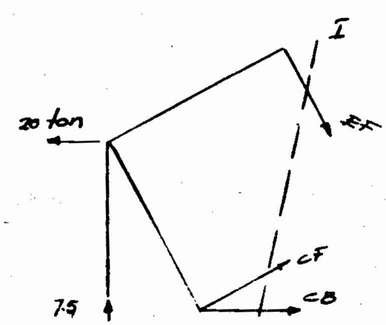
Obtención de la reacción R_A

$\circlearrowright \Sigma M_B = 0$

$$20(3) - 8R_A = 0$$

$$R_A = \underline{7.5\ ton}$$

Sección I-I Aislando la parte izquierda



Obtención de la fuerza en la barra EF

$\circlearrowright \Sigma M_L = 0$

$20(3) - 7.5(4) - 6\frac{4}{5}EF = 0$

$60 - 30 - 6\frac{4}{5}EF = 0$

$EF = \underline{6.25 \text{ ton } (T)}$

Obtención de la fuerza en la barra CF

$\Sigma F_y = 0$

$7.5 - \frac{25}{4}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{5}CF = 0$

$CF = -\frac{3.75 \times 5}{3}$

$CF = \underline{6.25 \text{ ton } (c)}$

Obtención de la fuerza en la barra BC

$\Sigma F_x = 0$

$EF\cos\alpha - CF\cos\alpha - 20 + BC = 0$

$\frac{25}{4}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3.75\cdot 5}{3}\cdot\frac{4}{5} - 20 + BC = 0$

$BC = \underline{20 \text{ ton } (T)}$

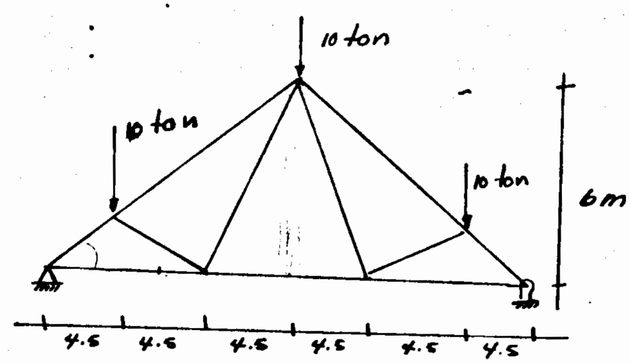
Resúmen

$BC = 20$ ton (T)

$CF = 6.25$ ton (c)

$EF = 6.25$ ton (T)

10.1)



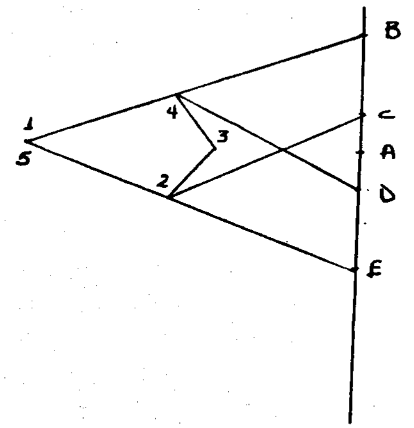
Reacciones

$R_A = R_B = 15$ ton ↑

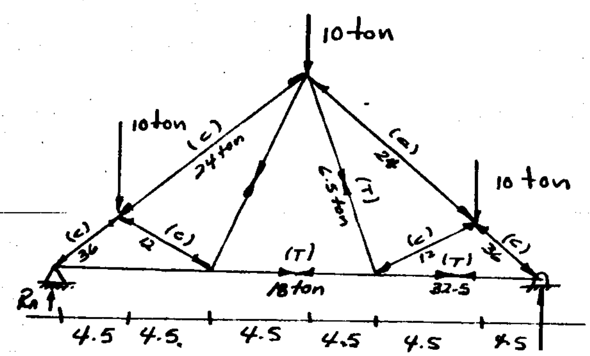
Resolución gráfica

$E_F = 5 \frac{\text{ton}}{\text{cm}}$

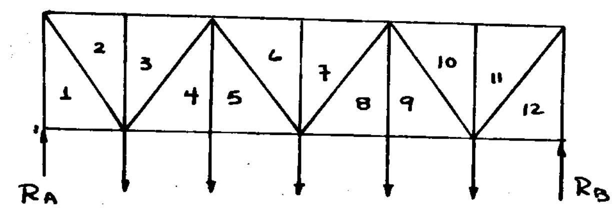
$E_L = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{cm}}$



Resumen



10.2)

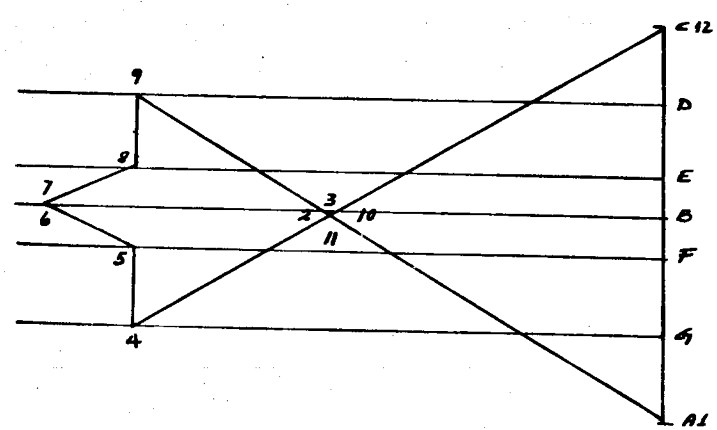


Reacciones

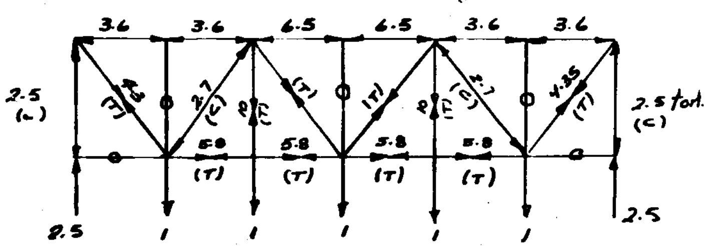
por simetría $R_A = R_B = 2.5$ ton ↑

Resolución gráfica

$E_F = 0.5 \frac{ton}{cm}$ $E_L = 3 \frac{m}{cm}$

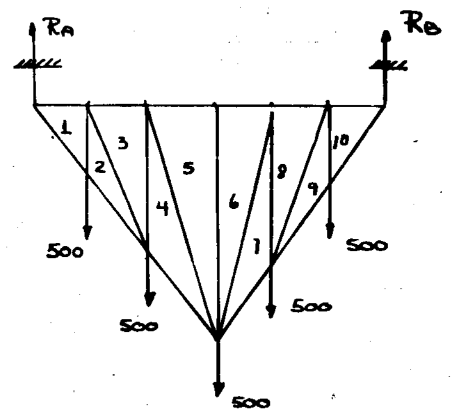


Resúmen



Nota: todos los valores están en toneladas

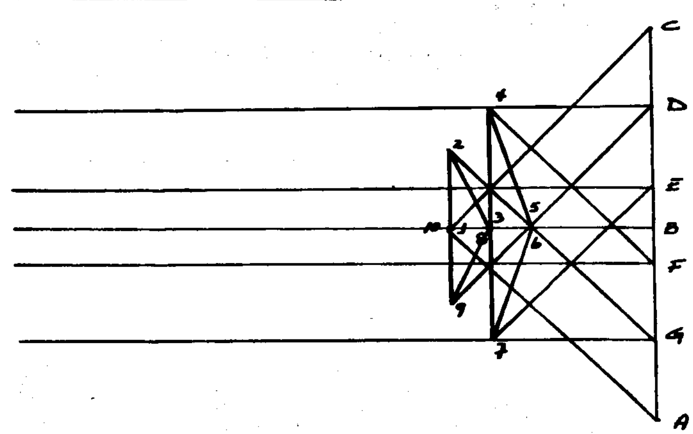
10.3)



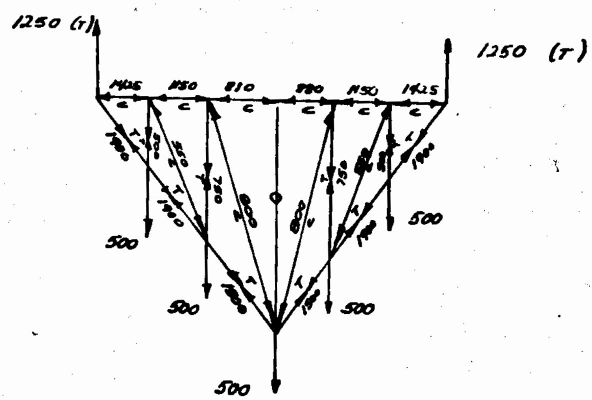
Reacciones: $R_A = R_B = 1250$ kg

$E_F = 300 \frac{kg}{cm}$ $E_L = 2.5 \frac{m}{cm}$

Resolución Gráfica

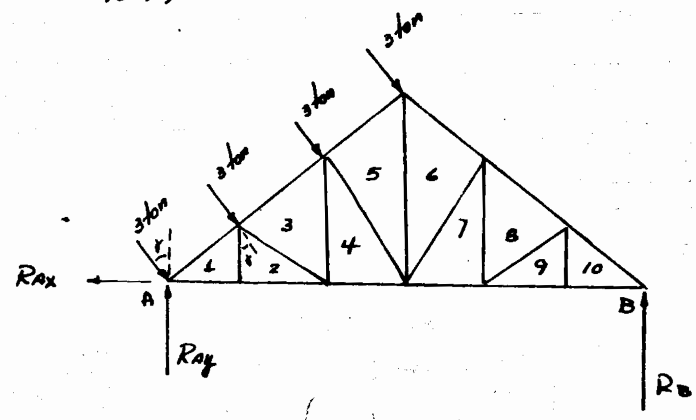


Resúmen



Nota: todas las cantidades están en kg

10.4)



$\operatorname{sen} \alpha = 0.4059$

$\cos \alpha = 0.9133$

Reacciones

$\Sigma M_A = 0$

$-4.927(3) - 9.854(3) - 14.78(3) + 27 R_B = 0$

$R_B = \dfrac{3(4.92 + 985 + 14.78)}{27}$

$R_B = \underline{3.28 \text{ ton.}}$

$\Sigma F_y = 0$

$-4(3)(0.9133) + 3.28 + R_{Ay} = 0$

$\underline{R_{Ay} = 7.68 \text{ ton.}}$

$\Sigma F_x = 0$

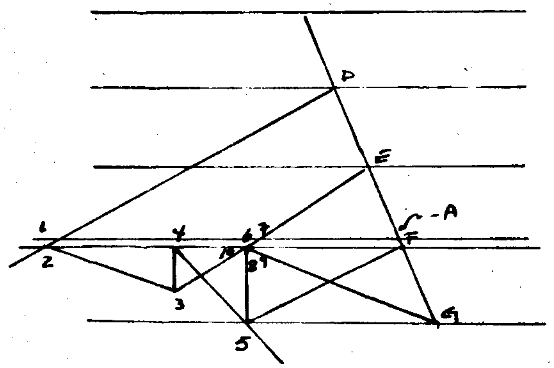
$-R_{Ax} + 4(3)(.4059) = 0$

$\underline{R_{Ax} = 4.87 \text{ ton.}}$

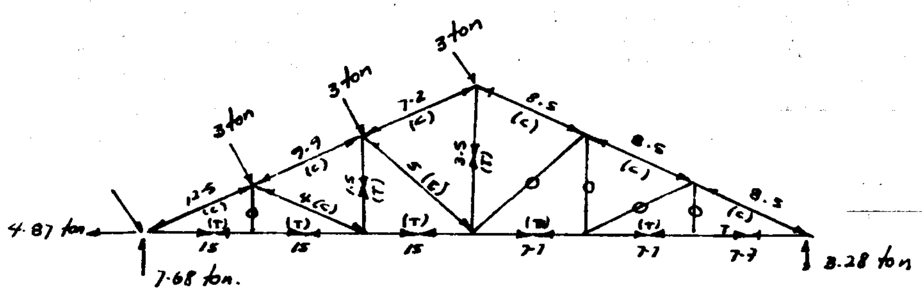
Resolucion grafica

$E_F = 2 \frac{ton}{cm}$

$E_L = 2 \frac{m}{cm}$



Resúmen



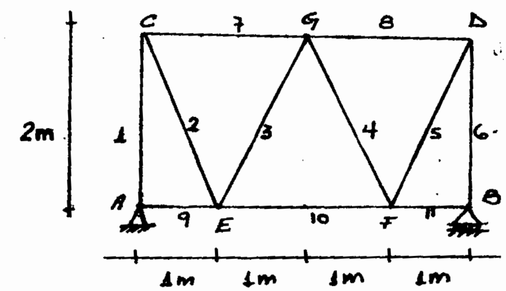
II) Para formar la matríz de fuerzas internas, se analiza la armadura por cualquiera de los métodos conocidos (analíticos o gráficos), considerandose en cada nudo, primero una carga unitaria en la dirección vertical y luego en dirección horizontal, tantas veces como nudos cargables tenga ésta.

Los valores de las fuerzas internas en las barras, así obtenidos, se escriben en columnas.

El arreglo formado tiene tantos renglones como barras la armadura, y un número de columnas igual al doble de nudos cargables.

En tal virtud, la matríz de fuerzas internas: Aij que nos ocupa en éste problema tiene once renglones y diez columnas.

11) Nomenclatura.

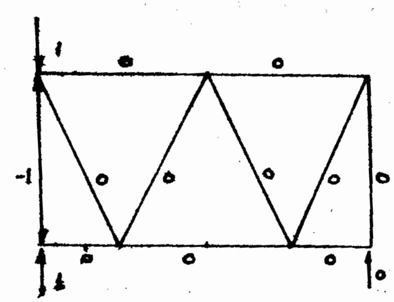


convenciones

cargas hacia abajo (+)	hacia la derecha (+)
" " arriba (-)	" " izquierda (-)
Tensión (+)	Compresión (-)

Fuerzas internas

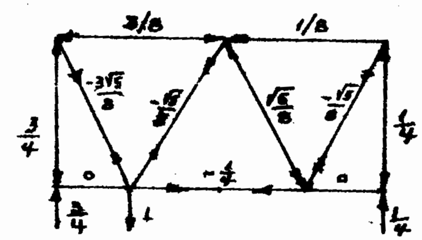
— por carga vertical unitaria en C.



$F_{v1C} = -1$	$F_{v5C} = 0$	$F_{v9C} = 0$
$F_{v2C} = 0$	$F_{v6C} = 0$	$F_{v10C} = 0$
$F_{v3C} = 0$	$F_{v7C} = 0$	$F_{v11C} = 0$
$F_{v4C} = 0$	$F_{v8C} = 0$	

Fuerzas internas

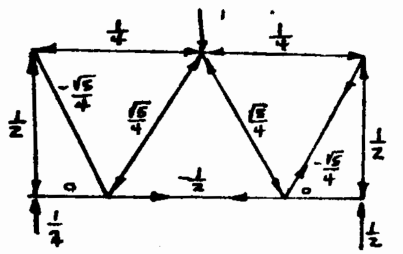
— por carga vertical unitaria en E.



$F_{v1E} = -\frac{3}{4}$	$F_{v5E} = \frac{1}{8}\sqrt{5}$	$F_{v9E} = 0$
$F_{v2E} = \frac{3}{8}\sqrt{5}$	$F_{v6E} = -\frac{1}{4}$	$F_{v10E} = \frac{1}{4}$
$F_{v3E} = \frac{1}{8}\sqrt{5}$	$F_{v7E} = -\frac{3}{8}$	$F_{v11E} = 0$
$F_{v4E} = -\frac{1}{8}\sqrt{5}$	$F_{v8E} = -\frac{1}{8}$	

Fuerzas internas

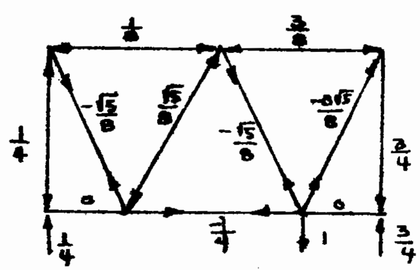
— por carga vertical unitaria en G.



$F_{V1G} = -\frac{1}{2}$	$F_{V5G} = \frac{\sqrt{5}}{4}$	$F_{V9G} = 0$
$F_{V2G} = \frac{\sqrt{5}}{4}$	$F_{V6G} = -\frac{1}{2}$	$F_{V10G} = \frac{1}{2}$
$F_{V3G} = -\frac{\sqrt{5}}{4}$	$F_{V7G} = -\frac{1}{4}$	$F_{V11G} = 0$
$F_{V4G} = \frac{\sqrt{5}}{4}$	$F_{V8G} = 0$	

Fuerzas internas

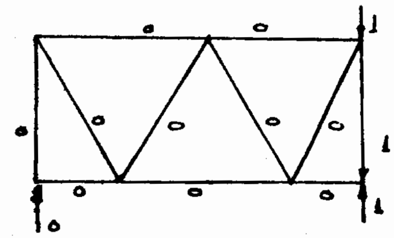
por carga vertical unitaria en F



$F_{V1F} = -\frac{1}{4}$	$F_{V5F} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$	$F_{V9F} = 0$
$F_{V2F} = \frac{\sqrt{5}}{8}$	$F_{V6F} = -\frac{3}{4}$	$F_{V10F} = \frac{1}{4}$
$F_{V3F} = -\frac{\sqrt{5}}{8}$	$F_{V7F} = -\frac{1}{8}$	$F_{V11F} = 0$
$F_{V4F} = \frac{\sqrt{5}}{8}$	$F_{V8F} = -\frac{3}{8}$	

Fuerzas internas

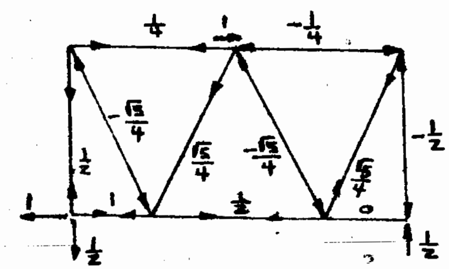
por carga vertical unitaria en D



$F_{V1D} = 0$	$F_{V5D} = 0$	$F_{V9D} = 0$
$F_{V2D} = 0$	$F_{V6D} = -1$	$F_{V10D} = 0$
$F_{V3D} = 0$	$F_{V7D} = 0$	$F_{V11D} = 0$
$F_{V4D} = 0$	$F_{V8D} = 0$	

Fuerzas internas

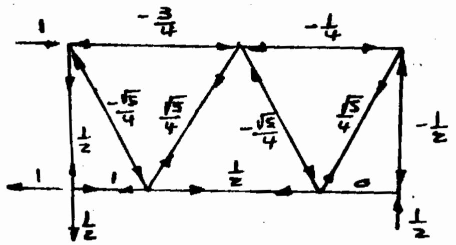
por carga horizontal unitaria en G



$F_{1HC} = \frac{1}{2}$	$F_{4HD} = -\frac{1}{4}\sqrt{5}$	$F_{7HD} = \frac{1}{4}$	$F_{10HD} = \frac{1}{2}$
$F_{2HC} = -\frac{1}{4}\sqrt{5}$	$F_{5HD} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$	$F_{8HD} = -\frac{1}{4}$	$F_{11HD} = 0$
$F_{3HC} = \frac{1}{4}\sqrt{5}$	$F_{6HD} = -\frac{1}{2}$	$F_{9HD} = \frac{1}{2}$	

Fuerzas internas

por carga horizontal unitaria en C



$F_{H1}C = \frac{1}{2}$

$F_{H2}C = -\frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H3}C = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H4}C = -\frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H5}C = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H6}C = -\frac{1}{2}$

$F_{H7}C = -\frac{3}{4}$

$F_{H8}C = -\frac{1}{4}$

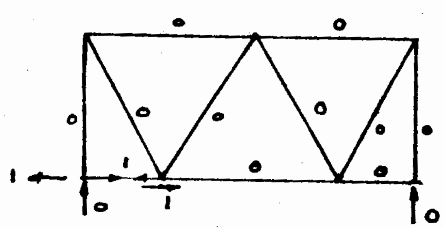
$F_{H9}C = 1$

$F_{H10}C = \frac{1}{2}$

$F_{H11}C = 0$

Fuerzas internas

por carga horizontal unitaria en E.



$F_{H1}E = 0$

$F_{H2}E = 0$

$F_{H3}H = 0$

$F_{H4}E = 0$

$F_{H5}E = 0$

$F_{H6}E = 0$

$F_{H7}E = 0$

$F_{H8}E = 0$

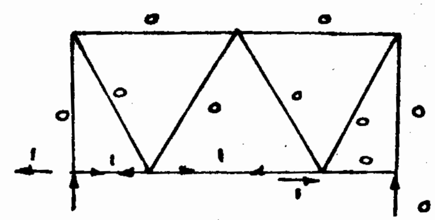
$F_{H9}E = 1$

$F_{H10}E = 0$

$F_{H11}E = 0$

Fuerzas internas

por carga horizontal unitaria en F



$F_{H1}F = 0$

$F_{H2}F = 0$

$F_{H3}F = 0$

$F_{H4}F = 0$

$F_{H5}F = 0$

$F_{H6}F = 0$

$F_{H7}F = 0$

$F_{H8}F = 0$

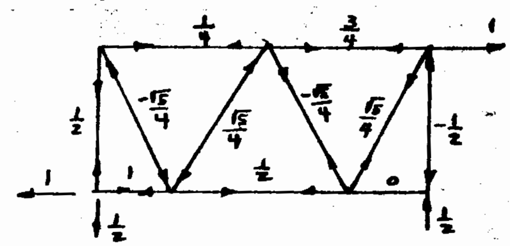
$F_{H9}F = 1$

$F_{H10}F = 1$

$F_{H11}F = 0$

Fuerzas internas

por carga horizontal unitaria en D



$F_{H1}D = \frac{1}{2}$

$F_{H2}D = -\frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H3}D = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H4}D = -\frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H5}D = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$F_{H6}D = -\frac{1}{2}$

$F_{H7}D = \frac{1}{4}$

$F_{H8}D = \frac{3}{4}$

$F_{H9}D = 1$

$F_{H10}D = \frac{1}{2}$

$F_{H11}D = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{H1C} & F_{H1E} & F_{H1G} & F_{H1F} & F_{H1D} & F_{V1C} & F_{V1E} & F_{V1G} & F_{V1F} & F_{V1D} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ F_{H11C} & F_{H11E} & F_{H11G} & F_{H11F} & F_{H11D} & F_{V11C} & F_{V11E} & F_{V11G} & F_{V11F} & F_{V11D} \end{bmatrix}}_{A} \times \underbrace{\begin{Bmatrix} F_{HC} \\ F_{HE} \\ F_{HG} \\ F_{HF} \\ F_{HD} \\ F_{VC} \\ F_{VE} \\ F_{VG} \\ F_{VF} \\ F_{VD} \end{Bmatrix}}_{F_E} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \end{Bmatrix}}_{F_I}$$

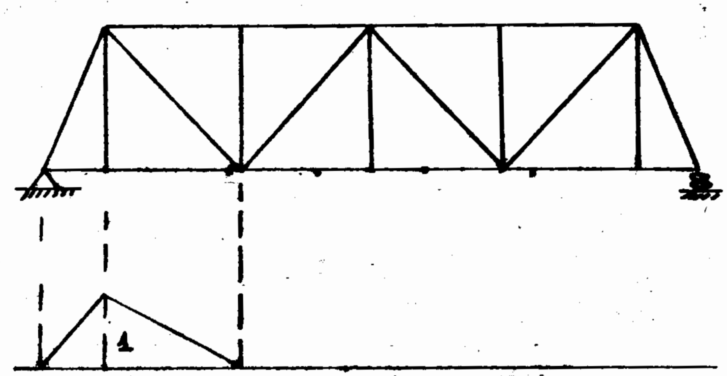
A – Matríz de fuerzas internas

F_E – Fuerzas externas

F_I – " internas

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{8}\sqrt{5} & \frac{1}{4}\sqrt{5} & \frac{1}{8}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{8}\sqrt{5} & -\frac{1}{4}\sqrt{5} & -\frac{1}{8}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{8}\sqrt{5} & -\frac{1}{4}\sqrt{5} & \frac{1}{8}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{8}\sqrt{5} & \frac{1}{4}\sqrt{5} & \frac{3}{8}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{5} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12) Puesto que el cordón inferior es normal al montante, puede verse facilmente que dicho solo trabajará cuando la carga se aplique directamente en el nudo al que éste concurre, por lo que la línea de influencia correspondiente, es la indicada a continuación:



13) Ventajas:

Los cálculos con regla de cálculo, normalmente son más aproximados a lo exacto que las mediciones gráficas con escalímetro, lo cual es relativo, pues ésto también depende de la persona que aplique uno u otro método, y en la Ingeniería practica no tienen importancia los errores muy pequeños cometidos por ésta razón.

Posiblemente se requieren más elementos para trabajar graficamente, tales como: papel especial, útiles de dibujo constructivo, y experiencia especial en los métodos gráficos, lo cual también es relativo, puesto que la diferencia práctica con la aplicación de los métodos analíticos también carece de importancia.

Desventajas:

La rapidez del análisis aplicando el método gráfico es mayor que en el analítico, principalmente en armaduras de geometría complicada.

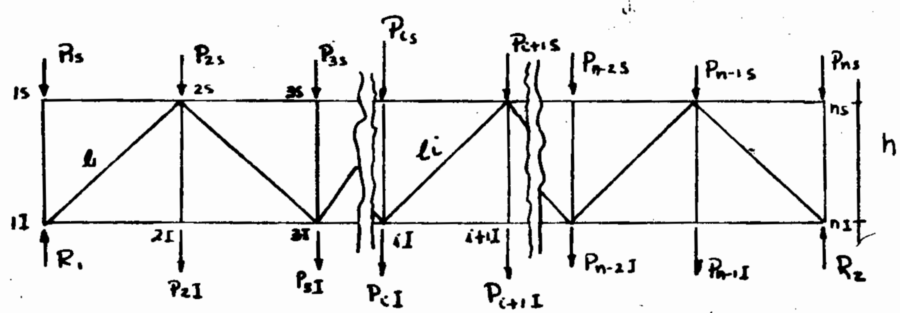
Aplicando los métodos gráficos no se

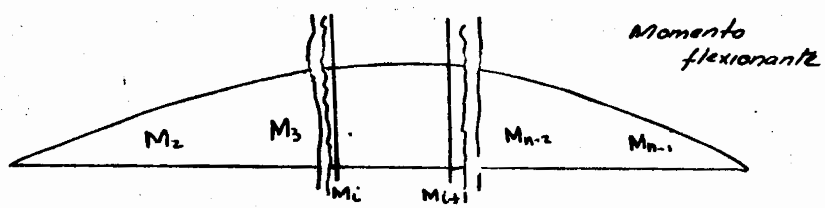
presentan complicaciones matemáticas, geométricas y trigonometricas como suele suceder con los analíticos.

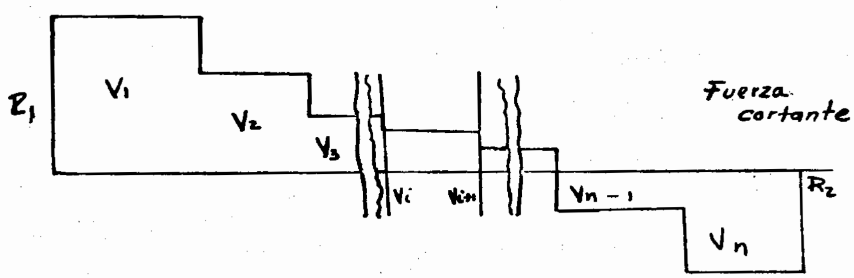
14) Por lo que respecta al método de los Nudos, éste tiene la ventaja de que siempre existe forma de hacer una comprobación, pero tiene la desventaja de tener que resolverse todos los nudos, desde los apoyos hasta llegar a los elementos que interesan.

El método de las secciones nos permite determinar la fuerza interna en cualquier elemento de la armadura independientemente del resto de los elementos.

15) Consideremos una armadura de cordones paralelos, ligados entre sí mediante diagonales y montantes de cualesquiera dimensiones y con un número cualquiera de tableros







Las fuerzas axiales en los montantes son las cargas aplicadas en ellos directamente, es decir:

$F_{is,iI} = P_{is}$ (compresión si la carga actúa hacia abajo)

$F_{i+1s,i+1I} = P_{i+1s}$ (Tensión si la carga actúa hacia abajo)

Por lo que respecta a las diagonales, éstos absorven la fuerza cortante, o sea:

$F_{iI,i+1s} = -\frac{1}{h} V_i l_i$ tensión (+)

$F_{is,i+1s} = \frac{1}{h} V_i l_i$ compresión (-)

Cordón superior.-

$F_{is,i+1s} = -\frac{M_i}{h}$ si la diagonal va de abajo hacia arriba

$= -\frac{M_{i+1}}{h}$ si la diagonal va de arriba hacia abajo.

cordón inferior.-

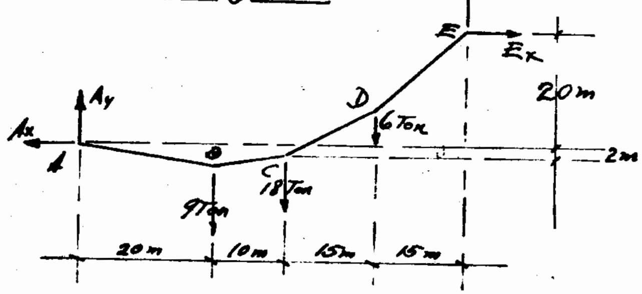
$F_{iI,i+1I} = \frac{M_i}{h}$ si la diagonal va de arriba hacia abajo

$= \frac{M_{i+1}}{h}$ si la diagonal va de abajo hacia arriba

SERIE 8

CABLES
(Soluciones)

1) Equilibrio del conjunto.

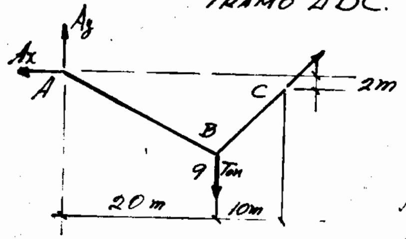


$$\Sigma M_E = 0$$

$$-20A_x - 60A_y + 9\times40 + 18\times30 + 6\times15 = 0$$

$$-20A_x - 60A_y + 990 = 0 \quad \text{.............} \quad (1)$$

TRAMO ABC.



$$\Sigma M_C = 0$$

$$2A_x - 30A_y + 9\times10 = 0$$

$$2A_x - 30A_y + 90 = 0 \quad \text{.....} \quad (2)$$

Resolviendo simultaneamente las ecuaciones (1) y (2), multiplicando (2)×10 y sumándola con (1):

$$-20A_x - 60A_y + 990 = 0 \quad \text{.....} \quad (1)$$

$$20A_x - 300A_y + 900 = 0 \quad \text{....} \quad (2)$$

$$-360A_y + 1890 = 0$$

$$A_y = \frac{1890}{360} = 5.25 \text{ Ton}$$

Substituyendo el valor de A_y en (1)

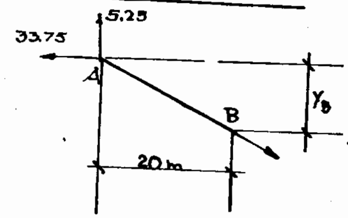
$$-20A_x - 60(5.25) + 990 = 0$$

$$-20A_x - 315 + 990 = 0$$

$$A_x = \frac{675}{20}$$

$$A_x = 33.75 \text{ Ton}$$

TRAMO AB.



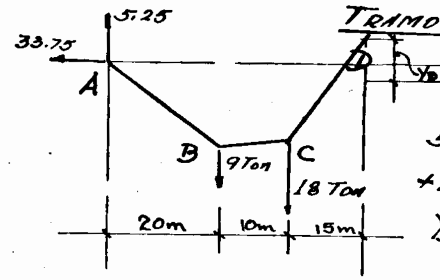
$$\Sigma M_B = 0$$

$$33.75\,Y_B - 5.25\times20 = 0$$

$$Y_B = \frac{105.00}{33.75}$$

$Y_B = 3.1$ m (posición del punto B)

TRAMO ABCD



$$\Sigma M_D = 0$$

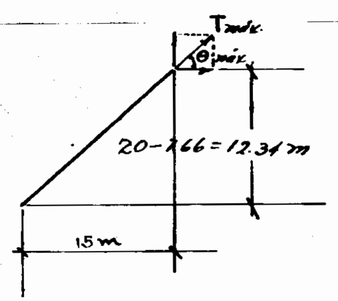
$$5.25\times45 + 33.75\,Y_D - 9\times25 - 18\times15 = 0$$

$$+236.25 + 33.75\,Y_D - 225 - 270 = 0$$

$$Y_D = \frac{258.75}{33.75}$$

$Y_D = 7.66$ m (posición del punto D)

Pendiente y Tensión Máximas – Tramo DE



$$\tan\theta_{máx} = \frac{12.34}{15} = 0.8226$$

$$\theta_{máx.} = 39°29'$$

$$H = 33.76 \text{ Ton}$$

$$T_{máx.} = \frac{33.75}{\cos 39°29'} = \frac{33.75}{0.7718}$$

$$T_{máx.} = 43.73 \text{ Ton.}$$

Resumen

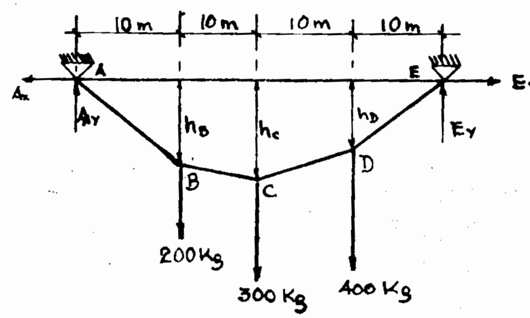
$Y_B = 3.1\ m$ (Por debajo de A)

$Y_D = 7.66\ m$ (Por arriba de A)

$\theta_{máx.} = 39°29'$ (en el tramo DE)

$T_{máx.} = 43.73\ Ton$ "

2) Equilibrio del conjunto.



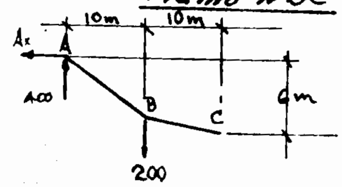
$$\Sigma M_E = 0$$

$$40 A_y - 200 \times 30 - 300 \times 20 - 400 \times 10 = 0$$

$$40 A_y = 6000 + 6000 + 4000$$

$$A_y = \frac{16000}{400} \quad ; \quad \underline{A_y = 400\ Kg}$$

Tramo ABC



$$\Sigma M_C = 0$$

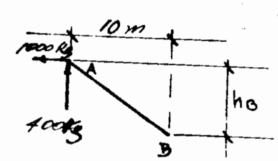
$$400 \times 20 - 200 \times 10 - 6 A_x = 0$$

$$6 A_x = 8000 - 2000$$

$$A_x = \frac{6000}{6}$$

$$\underline{A_x = 1000\ Kg}$$

Tramo AB



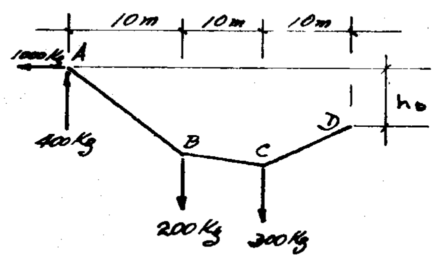
$$\Sigma M_B = 0$$

$$400 \times 10 - 1000\ h_B = 0$$

$$1000\ h_B = 4000$$

$$h_B = 4\ m$$

Tramo ABCD



$\Sigma M_D = 0$

$400 \times 30 - 200 \times 20 - 300 \times 10 - 1000\, h_D = 0$

$1000\, h_D = 12000 - 4000 - 3000 = 5000$

$h_D = 5\ m$

Resumen

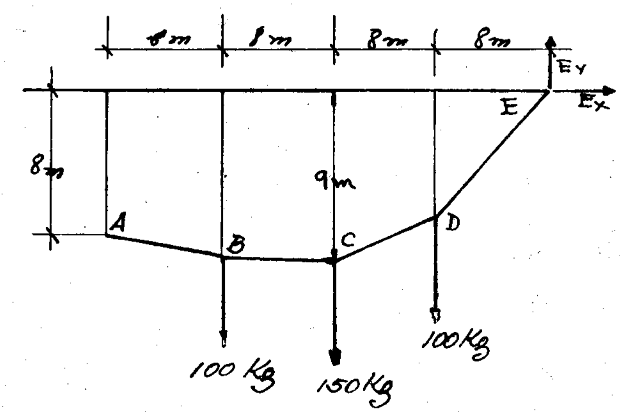
$A_x = 1000$ Kg

$A_y = 400$ Kg

$h_B = 4\ m.$

$h_D = 5\ m.$

3) Equilibrio del Conjunto



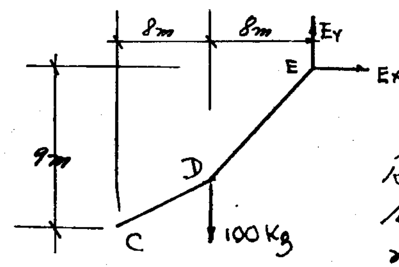
ΣM_A

$100 \times 8 + 150 \times 16 + 100 \times 24 + 8 E_x - 32 E_y = 0$

$800 + 2400 + 2400 = -8E_x + 32 E_y$

$-8E_x + 32 E_y = 5600$ ....(1)

TRAMO CDE.



$\Sigma M_C = 0$

$100 \times 8 + 9E_x - 16 E_y = 0$

$9E_x - 16 E_y = -800$ ....(2)

Resolviendo simultaneamente las ecuaciones (1) y (2), multiplicando (2) por 2 y sumándola con (1)

$$\begin{array}{r} -8E_x + 32 E_y = 5600 \\ 18E_x - 32 E_y = -1600 \\ \hline 10 E_x \quad = 4000 \end{array}$$

$$E_x = \frac{4000}{10}$$

$$\underline{E_x = 400 \text{ Kg}}$$

Substituyendo el valor de E_x en (1)

$$-3200 + 32\,E_y = 5600$$

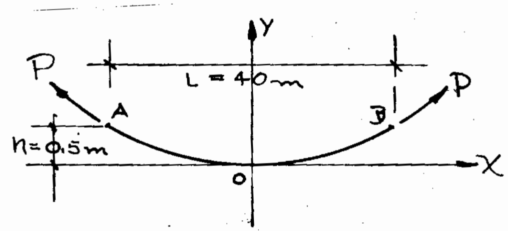
$$E_y = \frac{5600 + 3200}{32}$$

$$\underline{E_y = 275 \text{ Kg}}$$

<u>RESUMEN.</u>

$$E_x = 400 \text{ Kg}$$
$$E_y = 275 \text{ Kg}$$

4)



Aislemos el tramo AB del cable y consideremos los ejes coordenados en la forma que se indica en la figura.

Puesto que el cable se supone parabólico

$$Y = \frac{\omega X^2}{2T_0} \quad C_1) \qquad \tan\theta = \frac{\omega X}{T_0} \quad C_2)$$

y para los puntos A y B

$$Y = 0.5\,m \qquad x = 20\,m$$

Además, como el cable pesa 100 Kg, la carga ω por unidad de proyección horizontal es:

$$\omega = \frac{100}{40} = 2.5 \text{ Kg/m}.$$

por lo que, substituyendo valores en C_1)

$$0.5 = \frac{2.5\,(20)^2}{2T_0} = \frac{2.5 \times 400}{2T_0} = \frac{500}{T_0}$$

$$\therefore\ T_0 = \frac{500}{0.5} = 1000 \text{ Kg}$$

$$\underline{T_0 = 1000 \text{ Kg}}$$

Substituyendo valores para A y B

$$\tan\theta_B = -\tan\theta_A = \frac{2.5 \times 20}{1000} = 0.05$$

$$\tan\theta_B = -\tan\theta_A = 0.05$$

$$\theta_B = -\theta_A = 2^\circ\,52'$$

Además, para las condiciones del problema

$$T=\sqrt{T_0^2+\omega^2 x^2}$$

$$T_A=T_B=P=\sqrt{(1000)^2+(2.5)^2\,(20)^2}=\sqrt{(1000)^2+2500}$$

$$\underline{P=1001.25\ Kg}$$

La longitud del cable estará dada aproximadamente por

$$S=2x_B\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2\right]$$

$$S=40\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{0.5}{20}\right)^2\right]$$

$$S=40\left[1+0.000416\right]$$

$$\underline{S=40.016\ m}$$

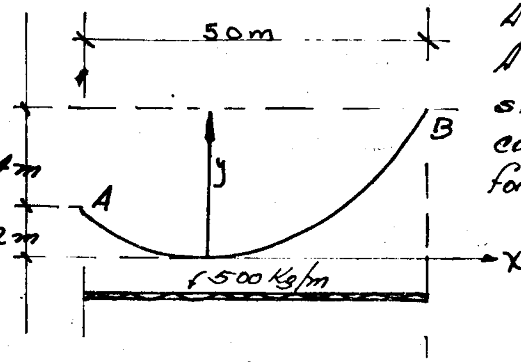
RESUMEN

$P=1001.25\ Kg$

$\theta_B=-\theta_A=2°52'$

$S=40.016\ m.$

5)



Aislemos el tramo AB de cable y consideremos los ejes coordenados en la forma que se indica en la figura adjunta.

En estas condiciones:

$y_A=2m\ ;\ y_B=6m$ ..... (1)

$x_A=x_B-50$ .... (2)

y como la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, la curva del cable es parabólica por lo que:

$$y=\frac{\omega x^2}{2T_0}$$

Substituyendo las coordenadas de A dadas en (1) y (2)

$$2=\frac{500\,x_A^2}{2T_0}=\frac{500\,(x_B-50)^2}{2T_0}$$

$\therefore\ T_0=125\,(x_B-50)^2$ .... (3)

Ahora, substituyendo las coordenadas de B

$$6=\frac{500\,x_B^2}{2T_0}$$

$T_0=41.7\,x_B^2$ .... (4)

De (3) y (4)

$$41.7\,x_B^2=125\,(x_B-50)^2$$

$$41.7\,x_B^2=125\,x_B^2-12500\,x_B+312500$$

$$83.3\,X_B^2 - 12\,500\,X_B + 312\,500 = 0$$

$$X_B^2 - 150\,X_B + 3750 = 0$$

$$X_B = 75 \pm \sqrt{(75)^2 - 3750}$$

$$X_B = 75 \pm 43$$

$$X_B = 32\ m$$

La otra raiz se descarta por ser mayor de 50 m.

Además:

$$X_A = -50+32$$

$$X_A = -18\ m$$

y la tensión mínima (horizontal) será

$$T_0 = 41.7\,(32)^2$$

$$\underline{T_0 = 42\,700\ Kg} = T_{mín}.$$

La pendiente y la tensión máxima se presentan en B

$$T_B = T_{máx.} = \sqrt{T_0^2 + \omega^2 X_B^2}$$

$$T_{máx} = \sqrt{(42\,700)^2 + (500 \times 32)^2}$$

$$= \sqrt{(42\,700)^2 + (16\,000)^2}$$

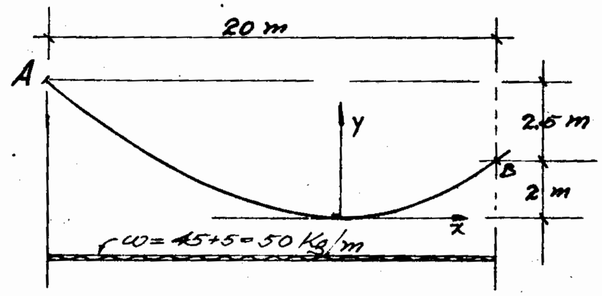
$$\underline{T_{máx.} = 45\,600\ Kg}$$

RESUMEN.

$T_{máx} = 45\,600$ Kg.

$T_{mín} = 42\,700$ Kg.

6) Aislemos el tramo AB del cable y consideremos los ejes coordenados en la forma que se indica en la siguiente figura:



En estas condiciones

$Y_A = 4.5\ m$; $Y_B = 2\ m$ - - - - - - - - (1)

$X_B = X_A + 20$ - - - - - - - - - - (2)

y como la carga actúa uniformemente distribuida en la horizontal, el cable es parabólico, por lo que

$$Y = \frac{\omega X^2}{2T_0}$$

Substituyendo las coordenadas de A

$$4.5 = \frac{50\,X_A^2}{2T_0}$$

$T_0 = 5.5\,X_A^2$ - - - - - - - - - - - (3)

Ahora substituyendo las coordenadas de B dadas en (1) y (2)

$$2 = \frac{50\,(X_A+20)^2}{2T_0}$$

$T_0 = 12.5\,(X_A+20)^2$ - - - - - - - - - (4)

De (3) y (4)

$$5.5\,X_A^2 = 12.5\,(X_A+20)^2$$

$$5.5\,X_A^2 = 12.5\,X_A^2 + 500\,X_A + 5000$$

$$7X_A^2 + 500\,X_A + 5000 = 0$$

$X_A^2 + 71.4 + 714 = 0$

$X_A = -35.7 \pm \sqrt{(35.7)^2 - 714}$

$X_A = -35.7 \pm 23.5$

$X_A = -12.2\ m$

No tiene sentido la raiz mayor a 20 en valor absoluto.

Substituyendo el valor de X_A en (3)

$T_o = 5.5\,(12.2)^2$

$\underline{T_o = 819\ Kg}$

La pendiente y la tensión máximas se presentan en A, por lo que

$T_A = T_{máx} = \sqrt{T_o^2 + \omega^2 X_A^2}$

$T_{máx} = \sqrt{(819)^2 + (50 \times 12.2)^2}$

$T_{máx} = \sqrt{(819)^2 + (610)^2}$

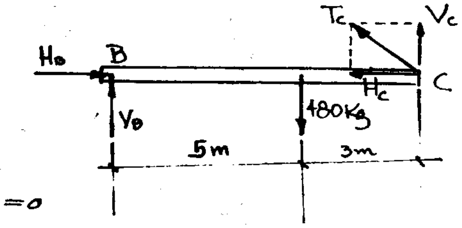
$\underline{T_{máx} = 1020\ Kg}$

RESUMEN

El punto más bajo se encuentra a 12.2 m del apoyo A

$T_{max} = 1020\ Kg$

7) Aislemos la barra BC y analicemos su equilibrio



$\Sigma M_C = 0$

$8 V_B - 480 \times 3 = 0$

$V_B = \frac{480 \times 3}{8}$

$\underline{V_B = 180\ Kg}$

$\Sigma F_y = 0$

$V_B + V_C = 480$

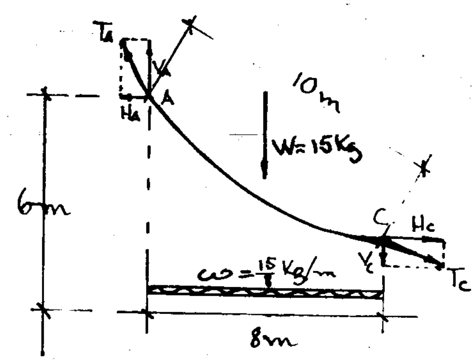
$V_C = 480 - V_B = 480 - 180$

$\underline{V_C = 300\ Kg}$

$\Sigma F_x = 0$

$\therefore\ H_B = H_C$ ---------- (1)

Ahora aislemos el tramo de cuerda entre los puntos A y C



$\Sigma F_y = 0$

$V_A = 15 + V_c = 15 + 300$

$V_A = 315 \text{ Kg}$

$\Sigma M_A = 0$

$4W + 8V_c - 6H_c = 0$

$$H_c = \frac{4W + 8V_c}{6} = \frac{4 \times 15 + 8 \times 300}{6}$$

$H_c = 410 \text{ Kg}$

$\Sigma F_x = 0$

$\therefore H_A = H_c = T_0 = 410 \text{ Kg}$ = constante en el cable

Además de (1)

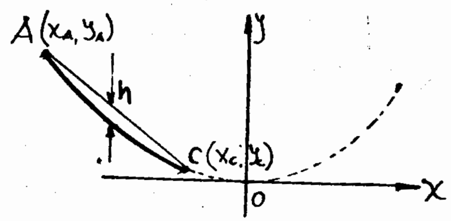
$H_B = H_c = 410 \text{ Kg}$

Por actuar la carga uniformemente distribuida en la horizontal, la cuerda adopta una curva parabólica y entonces

$$y = \frac{wx^2}{2T_0} = \frac{\frac{15}{8}x^2}{2 \times 410} = \frac{15}{6560}x^2$$

$$y = \frac{3}{1312}x^2 \text{ - - - - - - - - } (2)$$

Analizando la geometría de la curva parabólica que representa a la expresión (2)



De las condiciones del problema

$x_c - x_A = 8 \qquad \therefore x_A = x_c - 8$

$y_A - y_c = 6 \qquad \therefore y_A = y_c + 6$ } .... (3)

Siendo la ecuación de la recta que pasa por A y C

$$y = -\frac{6}{8}x + b$$

$$y = -\frac{3}{4}x + b \text{ - - - - - - - - - } (4)$$

substituyendo en (2) las coordenadas de A en términos de (3)

$$y_c + 6 = \frac{3}{1312}(x_c - 8)^2$$

$$y_c = \frac{3}{1312}(x_c - 8)^2 - 6 \text{ - - - - } (5)$$

y substituyendo en (2) las coordenadas de C

$$y_c = \frac{3}{1312}x_c^2 \text{ - - - - - - - - - } (6)$$

De (5) y (6)

$$\frac{3}{1312}x_c^2 = \frac{3}{1312}(x_c - 8)^2 - 6$$

$$= \frac{3}{1312}x_c^2 - \frac{48}{1312}x_c + \frac{192}{1312} - 6$$

$$x_c = -\left(\frac{7872 - 192}{48}\right) = -\frac{7680}{48}$$

$x_c = -160 \text{ m}$

De (3)

$X_A = -160 - 8$

$X_A = -168$

Substituyendo los valores de X_A y X_C en (2) obtenemos

$$y_A = \frac{3}{1312}(168)^2$$

$$\underline{y_A = 64.5}$$

$$y_C = \frac{3}{1312}(160)^2$$

$$\underline{y_C = 58.5\ m}$$

y de (4)

$$y_C = -\frac{3}{4}X_C + b$$

$$58.5 = -\frac{3}{4}(-160) + b$$

$$b = 58.5 - 120$$

$$\underline{b = -61.5\ m}$$

y la ecuación de la recta a través de A y C es

$$y = -\frac{3}{4}X - 61.5 \text{ ---------- } (4)$$

Así, de (2) y (4), la ecuación que nos da las flechas del cable respecto a la recta a través de A y C es:

$$h = \left(-\frac{3}{4}X - 61.5\right) - \frac{3}{1312}X^2$$

$$h = -\frac{3}{1312}X^2 - \frac{3}{4}X - 61.5 \text{ ----- } (7)$$

Para obtener el máximo de la flecha h derivamos respecto a X la expresión (7), igualamos a cero y entonces:

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{6}{1312}X - \frac{3}{4} = 0$$

$$X = -\frac{3 \times 1312}{6 \times 4} = -164$$

Por lo que

$$h_{máx} = -\frac{3}{1312}(164)^2 - \frac{3}{4}(-164) - 61.5$$

$$h_{máx} = -61.3 + 123 - 61.5$$

$$h_{máx} = 0.2\ m$$

Obtendremos ahora la reacción en el apoyo B

$$R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2} = \sqrt{180^2 + 410^2}$$

$$\underline{R_B = 450\ Kg}$$

Por lo que respecta a las tensiones en A y C, de acuerdo con los valores anteriormente obtenidos, tenemos:

$$T_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = \sqrt{315^2 + 410^2}$$

$$\underline{T_A = 520\ Kg}$$

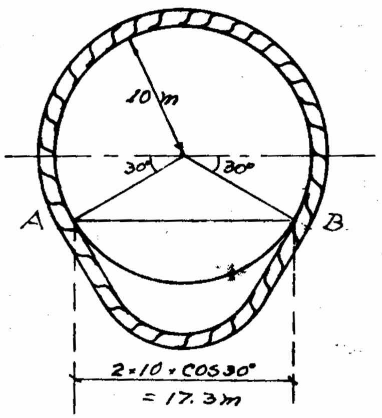
$$T_C = \sqrt{V_C^2 + H_C^2} = \sqrt{300^2 + 410^2}$$

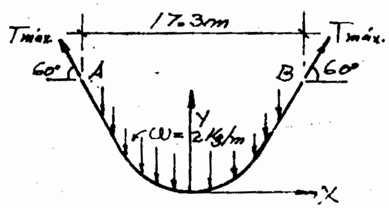
$$\underline{T_C = 510\ Kg}$$

RESUMEN

$T_A = 520\ Kg$
$T_C = 510\ Kg$
$R_B = 450\ Kg$
$h_{máx} = 0.20\ m.$

8) *Aislemos el diagrama de cuerpo libre del tramo AB de cable.*





Se sabe que en los puntos A y B de pendiente máxima se tiene la tensión máxima puesto que

$T\cos\theta = H = cte.$ $\qquad T = \frac{H}{\cos\theta}$

y si θ es máximo T lo es también

De la teoría de los cables sujetos a su propio peso uniformemente distribuido se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{H}s = \frac{2}{H}s$$

si $\frac{dy}{dx} = \tan 60° = 1.73$ $\qquad s = L/2$

en donde L es la longitud del tramo AB y por lo tanto

$$1.73 = \frac{2}{H}\,\frac{L}{2} = \frac{L}{H}$$

$$\therefore \quad H = \frac{L}{1.73} \text{ ------ (1)}$$

$$s = \int_0^x \cosh\frac{\omega}{H}x\,dx = \left[\frac{H}{\omega}\,\mathrm{senh}\,\frac{\omega}{H}x\right]_0^x =$$

$$= \left[\frac{H}{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{2}{H}x\right]_0^x$$

para $s = \frac{L}{2}$: $x = \frac{17.3}{2}$

$$\frac{L}{2} = \frac{H}{2}\left[\mathrm{senh}\,\frac{2}{H}x\right]_0^{\frac{17.3}{2}} = \frac{H}{2}\,\mathrm{senh}\,\frac{17.3}{H}$$

$$L = H\,\mathrm{senh}\,\frac{17.3}{H} \text{ ------ (2)}$$

Substituyendo (1) en

$$L = \frac{L}{1.73}\,\mathrm{senh}\,\frac{17.3}{L}\times 1.73$$

$$\mathrm{senh}\,\frac{30}{L} = 1.73$$

$$\frac{30}{L} = \mathrm{senh}^{-1}\,1.73$$

$$L = \frac{30}{\mathrm{senh}^{-1}x} = \frac{30}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}$$

$L = \frac{30}{1.3}$ $\qquad \underline{L = 22.78m}$

$$H = \frac{L}{1.73} = \frac{23}{1.73}$$

$\underline{H = 13.15 \text{ Kg}}$

$T_{máx.} = \frac{H}{\cos 60°} = \frac{H}{0.5}$; $\underline{T_{máx} = 26.3 \text{ Kg}}$

Revisión del equilibrio:

$\Sigma F_y = 2\,T_{máx}\,\mathrm{sen}\,60° - \omega L = 2\times 26.6\times 0.866 - 2\times 23 = 0$

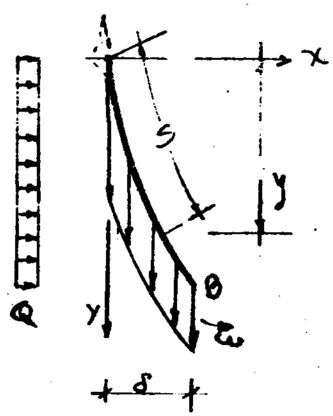
RESUMEN

$L = 23$ m

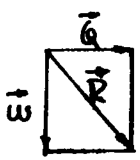
$H = 13.3$ kg.

9)

Aislemos el tramo AB del cable



Puesto que Q es pequeña en comparación con ω podemos considerar $s \doteq y$ con lo que resulta una carga total por unidad de longitud R en tal forma que



$$\vec{R} = Q\vec{i} + \omega\vec{j}$$

$$R = \sqrt{\omega^2 + Q^2}$$

Además, recordando que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\vec{R} \quad \text{(constante a lo largo del cable)}$$

$$\int_0^{T} d\vec{T} = -R\int_l^{y} ds$$

$$\vec{T} = \vec{R}\,(l-y)$$

o sea, puesto que la tensión siempre tiene la dirección de la carga variando

de 0 a su valor máximo en el soporte A la pendiente es constante y por lo tanto el cable adopta aproximadamente una línea en la dirección de la carga.

En estas condiciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{Q}$$

y la ecuación de la recta es:

$$y = \frac{\omega}{Q}x \quad \text{por lo que}$$

$$\boxed{\delta = \frac{Q}{\omega}L}$$

Como comprobación observemos que esta expresión no solo cumple con la condición de equilibrio de fuerzas que fue de donde se partió, sino también satisface la condición de equilibrio de momentos, es decir; tomando momentos respecto a A.

$$\Sigma M_A = \omega L\frac{\delta}{2} - QL\frac{L}{2}$$

y substituyendo el valor de δ obtenido antes

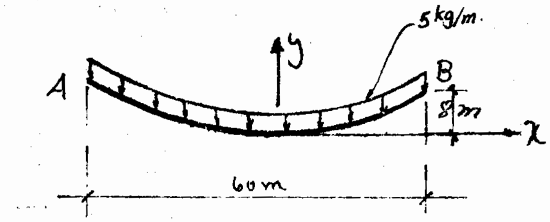
$$\Sigma M_A = \cancel{\omega}L\,\frac{QL}{2\cancel{\omega}} - \frac{QL^2}{2} = \frac{QL^2}{2} - \frac{QL^2}{2}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

RESUMEN

El cable adopta aproximadamente una línea recta en la dirección de la carga resultante.

10) Aulemos el tramo AB de cable de 60 m de claro que pesa 5 Kg/m



Puesto que la carga está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del cable, la curva que este adopta es una catenaria cuya ecuación es:

$$y = \frac{H}{\omega}\left(\cosh \frac{\omega x}{H} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Para el punto B
$x_B = 30$ m , $y_B = 8$ m y substituyendo valores en (1)

$$8 = \frac{H}{5}\left(\cosh \frac{5 \times 30}{H} - 1\right)$$

$$H = \frac{40}{\cosh \frac{150}{H} - 1}$$

El valor de H ó tensión mínima puede obtenerse por tanteos de acuerdo con la siguiente tabla:

H	$\cosh \frac{150}{H}$	$\cosh \frac{150}{H} - 1$	$H = \frac{40}{\cosh \frac{150}{H} - 1}$
100	2.3524	1.3524	29.58
150	1.5431	0.5431	73.65
200	1.2947	0.2947	135.73
280	1.1470	0.1470	272.11
288	1.1387	0.1387	288.36

Consideramos

$$\boxed{H = 288 \text{ Kg} = T_{min.}}$$

o sea de (1)

$$y = \frac{288}{5}\left(\cosh \frac{5x}{288} - 1\right)$$

$$y = 57.6\left(\cosh \frac{x}{57.6} - 1\right)$$

además

$$s = \frac{H}{\omega} \operatorname{senh} \frac{\omega x}{H}$$

$$s = 57.6 \operatorname{senh} \frac{x}{57.6}$$

Por lo que la longitud del cable será:

$$L = 2 \times 57.6 \operatorname{senh} \frac{30}{57.6}$$

$$L = 2 \times 57.6 \operatorname{senh} 0.5208$$

$$L = 2 \times 57.6 \times 0.5446$$

$$L = 2 \times 31.37$$

$$\boxed{L = 62.73 \text{ m}}$$

Puesto que

$$T = \sqrt{H^2 + \omega^2 s^2}$$

la tensión máxima en A ó B es:

$$T_{máx} = \sqrt{(288)^2 + (5 \times 31.37)^2} = \sqrt{(288)^2 + (156.85)^2}$$

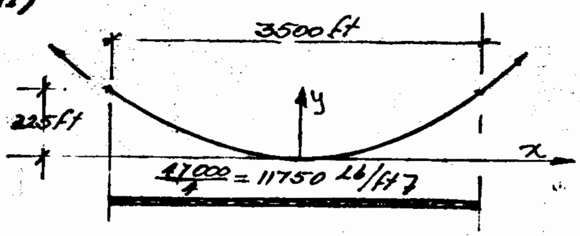
$$\boxed{T_{máx} = 327.94 \text{ Kg}}$$

RESUMEN

$T_{máx} = 327.94$ Kg
$T_{min} = 288$ Kg
$L = 62.73$ m.

Aislemos un solo cable

11)



Por el tipo de carga que es soportada por el cable, es parabólico.

$$y = \frac{w x^2}{2H} = \frac{11750\, x^2}{2H} = \frac{5875}{H} x^2$$

Si $x = \frac{3500}{2} = 1750$ ft , $y = 325$ ft

$$325 = \frac{5875}{H}(1750)^2$$

$$H = \frac{5875\,(1750)^2}{325}$$

$$H = 55\ 500\ 000 \text{ lb}$$

Tensiones extremas

$$T = \sqrt{H^2 + w^2 x^2}$$

$$= \sqrt{(55'500\ 000)^2 + (11750 \times 1750)^2}$$

$$= \sqrt{(55{,}500{,}000)^2 + (20'600{,}000)^2}$$

$$\boxed{T = 59 \times 10^6 \text{ lb}}$$

Longitud del cable

$$L \doteq 2 \times 1750\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{325}{1750}\right)^2\right] = 3500\,[1 + 0.02]$$

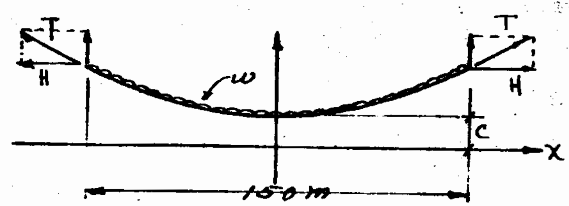
$$L = 3580.5 \text{ ft}$$

RESUMEN

$T = 59 \times 10^6$ lb

$L = 3580.5$ ft

12) Esquemáticamente cada cable se encuentra en las siguientes condiciones.



$H = 1000$ Kg

$w = 0.5$ Kg/m

$c = \frac{H}{w} = 2000$ m

Por tratarse de una carga distribuida uniformemente en la longitud del cable es aplicable la siguiente ecuación de la catenaria:

$$S = c \operatorname{senh} \frac{x}{c}$$

y la longitud del cable puede obtenerse en la siguiente forma:

$$L = 2 S_{máx} = 2c \operatorname{senh} \frac{x_{máx}}{c}$$

$$L = 2 \times 2000 \operatorname{senh} \frac{75}{2000}$$

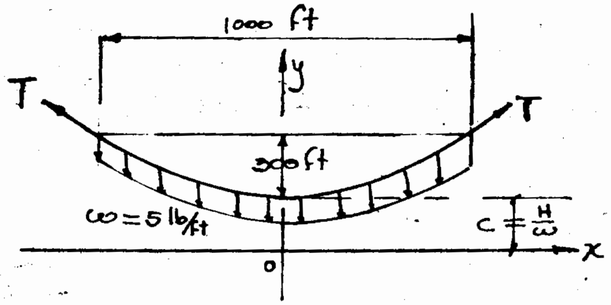
$$L = 4000 \operatorname{senh} 0.0375$$

$$L = 4000 \times 0.0377$$

$$\boxed{L = 150.80 \text{ m.}}$$

13)

También en este caso se trata de una catenaria en las siguientes condiciones:



para la cual son aplicables las siguientes ecuaciones:

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$T = \omega y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Puesto que si $x = 500$ ft, $y = c + 300$ ft.

de la expresión (2) tenemos

$$c + 300 = c \cosh \frac{500}{c}$$

$$c = \frac{c+300}{\cosh \frac{500}{c}}$$

Obtendremos el valor de c por tanteos de acuerdo con la siguiente tabla:

c	$c+300$	$\frac{500}{c}$	$\cosh \frac{500}{c}$	$c = \frac{c+300}{\cosh \frac{500}{c}}$
500	800	1.00	1.543	518
550	850	0.91	1.444	589
400	700	1.25	1.890	371
450	750	1.11	1.680	446

Tenemos $c = 450$

para obtener la longitud aplicamos (1)

$$L = 2 S_{máx}.$$

$$L = 2 \times 450 \operatorname{senh} \frac{500}{450}$$

$$L = 900 \operatorname{senh} 1.11$$

$$L = 900 \times 1.354$$

$$L = 1219 \text{ ft}$$

y para obtener la tensión en los apoyos aplicamos (3)

$$T_{máx} = \omega\, y_{máx} = 5(300+450)$$

$$T_{máx} = 5 \times 750$$

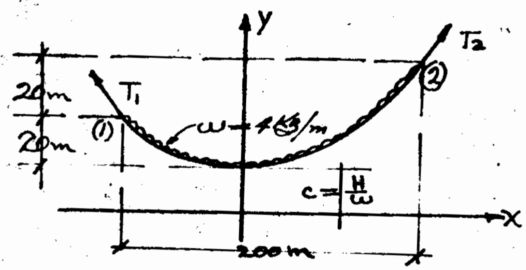
$$T_{max} = 3750 \text{ lb}$$

RESUMEN

$L = 1219$ ft

$T_{max} = 3750$ lb

14) El cable adopta la forma de una catenaria en las siguientes condiciones



Para la cual son aplicables las siguientes expresiones:

$$S = c\ \operatorname{senh}\frac{x}{c} \ \ldots\ldots\ (1)$$

$$y = c\ \cosh\frac{x}{c} \ \ldots\ldots\ (2)$$

$$T = \omega y \ \ldots\ldots\ (3)$$

Aplicando (2) para el punto (2) tenemos

$$40 + c = c\ \cosh\frac{x_2}{c}$$

$$\frac{40}{c} + 1 = \cosh\frac{x_2}{c}$$

$$\frac{x_2}{c} = \cosh^{-1}\left(\frac{40}{c} + 1\right)$$

$$x_2 = c\ \cosh^{-1}\left(\frac{40}{c} + 1\right) \ \ldots\ldots\ (4)$$

Ahora para el punto (1) tomando en cuenta que:

$$x_1 = x_2 - 200$$

y aplicando (2) para dicho punto

$$20 + c = c\ \cosh\frac{x_2 - 200}{c}$$

$$\frac{x_2 - 200}{c} = -\cosh^{-1}\left(\frac{20}{c} + 1\right)$$

$$x_2 = 200 - c\ \cosh^{-1}\left(\frac{20}{c} + 1\right) \ \ldots\ldots\ (5)$$

De (4) y (5)

$$c\left[\cosh^{-1}\left(\frac{40}{c} + 1\right) + \cosh^{-1}\left(\frac{20}{c} + 1\right)\right] = 200$$

expresión que se puede resolver por tanteos de acuerdo con la siguiente tabla

c	$\frac{40}{c}$	$\frac{20}{c}$	$\cosh^{-1}\left(\frac{40}{c}+1\right) = A$	$\cosh^{-1}\left(\frac{20}{c}+1\right) = B$	$A+B$	$c(A+B)$
80	0.500	0.250	0.9624	0.6931	1.6554	132
160	0.250	0.125	0.6931	0.4949	1.1880	190
200	0.200	0.100	0.6224	0.4436	1.066	213
175	0.228	0.114	0.6639	0.4737	1.1376	199
230	0.174	0.087	0.5816	0.4141	0.9957	229

Tomaremos $c = 230\ m$

$$\therefore\ H = c\omega = 230 \times 4$$

$$H = 920\ kg$$

y substituyendo en (4)

$$x_2 = 230\ \cosh^{-1}\left(\frac{40}{230} + 1\right)$$

$$= 230 \times 0.5816$$

$$x_2 = 133.77\ m$$

y por lo tanto

$$x_1 = 134 - 200$$

$$x_1 = -66\ m.$$

Para obtener la longitud del cable de (1) procedemos en la siguiente forma:

$$L = S_1 + S_2$$

$$L = c \, \operatorname{sen} h \frac{x_1}{c} + c \, \operatorname{sen} h \frac{x_2}{c}$$

$$L = c \left[\operatorname{sen} h \frac{x_1}{c} + \operatorname{sen} h \frac{x_2}{c} \right]$$

y substituyendo los valores de x_1, x_2 y c

$$L = 230 \left[\operatorname{sen} h \frac{66}{230} + \operatorname{sen} h \frac{134}{230} \right]$$

$$= 230 \left[\operatorname{sen} h (0.2870) + \operatorname{sen} h (0.5826) \right]$$

$$= 230 \, (0.2910 + 0.6161)$$

$$= 230 \times 0.9071$$

$$L = 209 \text{ m}$$

Y para obtener las tensiones en los apoyos aplicamos (3).

$$T_1 = \omega y_1 = 4 \, (20 + 230) = 4 \times 250$$

$$T_1 = 1000 \text{ kg}$$

$$T_2 = \omega y_2 = 4 \, (40 + 230) = 4 \times 270$$

$$T_2 = 1080 \text{ kg}$$

RESUMEN

$T_1 = 1000$ kg
$T_2 = 1080$ kg
$L = 209$ m.

15) El cable flexible es un cuerpo sólido cuya longitud es dominante en relación a sus otras dimensiones y es un cuerpo deformable que solo es capaz de trabajar a fuerzas axiales de tensión.

El equilibrio del cable flexible solo puede analizarse de acuerdo con la forma que adopte el sólido deformable en cada caso. Por esta razón es necesario convenir en una nueva proposición que amplíe el campo de aplicación, de lo estudiado en Estática del Cuerpo Rígido al cuerpo deformable, estableciendo el siguiente postulado:

"Un cuerpo deformable se encuentra en equilibrio si y si solamente si toda porción de él, considerada como rígida, se encuentra en equilibrio".

Lo anterior nos habilita para afirmar que si un cuerpo deformable está en equilibrio, cualquiera de sus partes integrantes adopta tal estado, y recíprocamente.

En esta virtud el teorema General del Equilibrio de sistemas de fuerzas se traduce en el siguiente para los sistemas deformables.

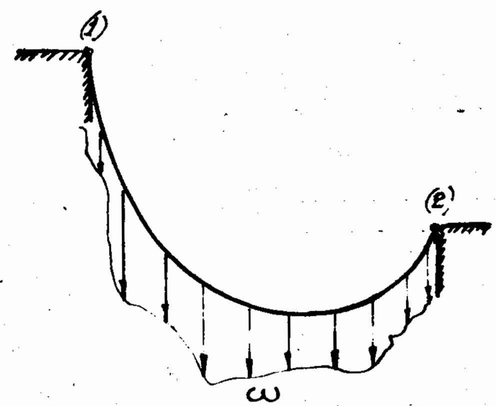
Un cuerpo deformable se encuentra en equilibrio cuando y solamente cuando aislada cualquier porción de él, las fuerzas externas correspondientes a ésta cumplen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{F}_i = 0$$

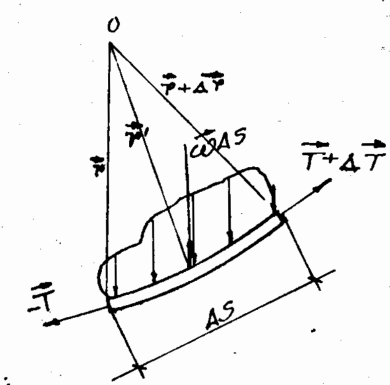
$$\sum_{i=1}^{i=n} M\vec{F}_i = 0 \quad \text{(momento de las fuerzas con respecto a "O")}$$

en donde O es un punto arbitrario

Sea un cable flexible (1) (2) unido al sistema tierra en sus extremos, y que soporta mediante algun dispositivo una carga ω distribuida continuamente.



Consideremos ahora una porción del cable.



Equilibrio de fuerzas:

$$\Sigma\vec{F} = 0 = (\vec{T}+\vec{\Delta T}) - \vec{T} + \vec{\omega}\Delta s = \vec{\Delta T} + \vec{\omega}\Delta s$$

$$\vec{\omega} = -\frac{d\vec{T}}{ds}, \qquad \frac{d\vec{T}}{ds} = -\vec{\omega} \quad \text{-----} \quad (1)$$

Equilibrio de momentos:

$$\Sigma\vec{M_0} = 0 = \vec{r}\times(-\vec{T}) + (\vec{r}+\Delta\vec{r})\times(\vec{T}+\vec{\Delta T}) + (\vec{\omega}\Delta s)\times\vec{r}'$$

$$= \vec{r}\times\vec{\Delta T} + \Delta\vec{r}\times\vec{T} + \Delta\vec{r}\times\vec{\Delta T} + (\vec{\omega}\times\vec{r}')\Delta S$$

si $\Delta S \to 0$, $\vec{\Delta r} \to 0$, $\vec{\Delta T} \to 0$, $\vec{r}' \to \vec{r}$

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{T}}{dS} + \frac{d\vec{r}}{dS}\times\vec{T} + \vec{\omega}\times\vec{r} = 0$$

substituyendo la expresión (1)

$$-\vec{r}\times\vec{\omega} + \frac{d\vec{r}}{ds}\times\vec{T} + \vec{\omega}\times\vec{r} = 0$$

$$\frac{d\vec{r}}{dS}\times\vec{T} = 0$$

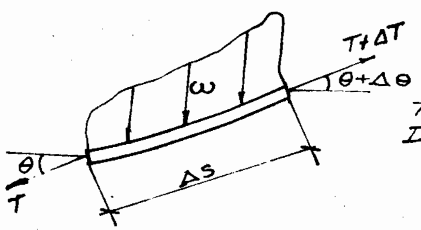
pero $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$ = vector tangente unitario

$\therefore \vec{t}\times\vec{T} = 0$

por lo que $\vec{T}$ actúa en la dirección de la tangente a la curva

Es decir, en virtud de las condiciones de flexibilidad del cable y la continuidad en la distribuición de la carga, la tensión en cualquier punto es tangente a la curva que adopta el eje centroidal.

En estas condiciones, para un cable sujeto a una carga vertical se tiene:



$$\Sigma F x = 0$$

$$(T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta = 0$$

$$T\cos(\theta+\Delta\theta) + \Delta T\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta = 0$$

Dividiendo entre Δs y si $\Delta s \to 0; \Delta\theta \to 0$

$$\frac{d}{ds} \cdot T\cos\theta = 0$$

$$T\cos\theta = cte = H \quad ..... \quad (2)$$

o sea, la componente horizontal de la tensión es constante para cualquier punto del cable que también suele indicarse por T_0

$$\Sigma F y = 0$$

$$(T+\Delta T)\,\text{sen}\,(\theta+\Delta\theta) - T\,\text{sen}\,\theta - \omega\Delta S = 0$$

si $\Delta s \to 0; \Delta\theta \to 0$ ∴ $dT\,\text{sen}\,\theta = \omega\, ds$

y considerando la expresión (2)

$$d\,\frac{H}{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta = \omega\, ds$$

$$H\tan\theta = \int_0^s \omega\, ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{H}\int_0^s \omega\, ds$$

si $\quad W = \int_0^s \omega\, ds$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}$$

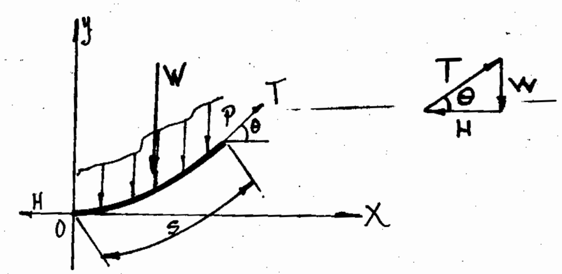
expresión conocida con el nombre de ecuación diferencial del cable flexible, y que pone de manifiesto que, la forma de este es determinante para su analisis desde el punto de vista de equilibrio

De la misma expresión se sigue que

$$\tan\theta = \frac{W}{H}$$

$$T = \sqrt{H^2+W^2} \quad \text{(ver figura al calce)}$$

que nos proporciona la pendiente y la tensión en cualquier punto del cable

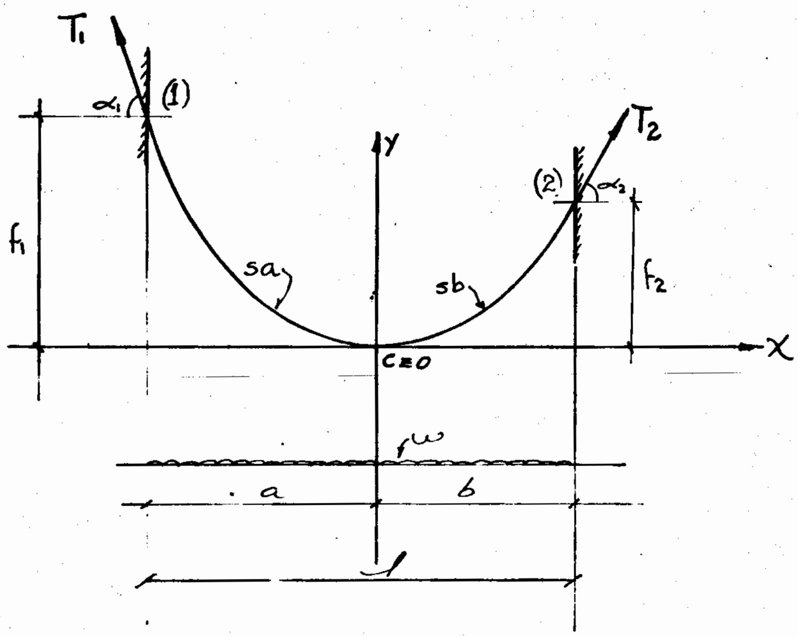


16)

Consideremos un cable (1), (2), suspendido en estos puntos del sistema tierra y sujeto al equilibrio bajo la acción de una carga ω uniforme, según el claro horizontal que aquel salva. Elegimos un sistema de ejes de referencia con su origen en el punto más bajo del cable.

Supuestas estas condiciones nos interesa conocer del cable

i) su forma.
ii) Dimensiones geométricas como "a", "b", "f_1", "f_2" y su longitud
iii) Las tensiones en los apoyos y sus direcciones.



Para lograrlo apliquemos la Ecuacion Diferencial del Cable Flexible, a sabiendas de que:

$$W = \omega x \text{ ------- } (1)$$

tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{H}$

integrando: $y = \frac{\omega x^2}{2H} + C$

para el origen del sistema de referencia $x=0$, $y=0$ y forzosamente $C=0$,

Luego $y = \frac{\omega x^2}{H}$ proporciona la forma que adopta el cable en su estado de equilibrio. La curva deducida es una parábola de segundo grado que da su nombre al cable.

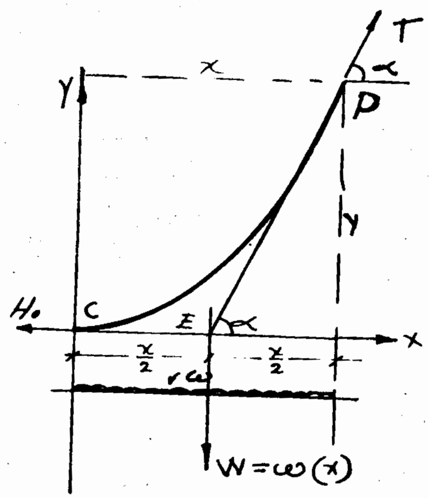
En estas condiciones:

$$f_1 = \frac{\omega a^2}{2H} \text{ ------- } (2)$$

$$f_2 = \frac{\omega b^2}{2H} \text{ ------- } (3)$$

$$a + b = l \text{ ------- } (4)$$

La ecuación de la parábola que adopta el cable flexible para la condición de carga dada, se puede deducir también, considerando una porción PC del cable en estudio.



Hemos tomado como origen del sistema de referencia, al punto más bajo y la tensión en este punto la designamos H. la tensión en un punto cualquiera como P, por T.

La porción PC del cable considerada como cuerpo libre, deberá estar en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas que son H, T, W; siendo W la carga que soporta el tramo PC del cable según la proyección del mismo, lo cual deberá estar de acuerdo en el punto E, punto medio de la proyección horizontal de PC

Para que estas tres fuerzas concurrentes estén en equilibrio, deberán ser paralelas o concurrentes.

Tomando en cuenta las direcciones de las fuerzas H y W que no son paralelas

para que dichas fuerzas estén en equilibrio, deberán ser por lo tanto concurrentes, es decir, la línea de acción de T, pasará por el punto E.

Apliquemos las ecuaciones de equilibrio que nos da la estática

así $\Sigma F_x = 0 = T\cos\alpha - H_o$

$$\rightarrow T = \frac{H}{\cos\alpha} \text{ - - - - - } (5)$$

además: $\Sigma F_y = 0 = T\operatorname{sen}\alpha - W$

$$\rightarrow T = \frac{W}{\operatorname{sen}\alpha} \text{ - - - - - - - } (6)$$

De (5) y (6) se tiene:

$$\frac{H}{\cos\alpha} = \frac{W}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\frac{W}{H} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{W}{H} = \tan\alpha \text{ - - - - - - - - } (7)$$

Por otra parte, de la figura anterior:

$$\tan\alpha = \frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{2y}{x} \text{ - - - - - - } (8)$$

igualando (7) y (8)

$$\frac{W}{H} = \frac{2y}{x}$$

$$y = \frac{xW}{2H_o}$$

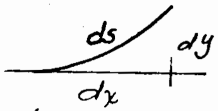
$$W = \omega(x)$$

$$\rightarrow \boxed{y = \frac{\omega x^2}{2H}}$$

que es la ecuación de una parábola, de eje vertical y concavidad hacia arriba.

17)

Como la parábola es una curva rectificable:



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2$$

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$

como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega x}{H}$$ por lo que:

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{\omega x}{H}\right)^2}\; dx$$

en cuanto a la longitud del cable, para determinarla usamos la expresión

$$s = s_a + s_b$$

$$s_a = \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{\omega x}{H}\right)^2}\; dx$$

Integral de la forma

$$\int \sqrt{a^2 \pm u^2}\, du$$

$$\int \sqrt{a^2 \pm u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2} L\left(u + \sqrt{a^2 \pm u^2}\right) + C$$

entonces

$$S_a = \frac{H}{\omega}\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{\omega x}{H}\right)^2}\; d\,\frac{\omega x}{H}$$

queda:

$$S_a = \frac{H}{\omega}\left[\frac{\omega x}{2H}\sqrt{1+\left(\frac{\omega x}{H}\right)^2} + \frac{1}{2}L\left(\frac{\omega x}{H} + \sqrt{1+\left(\frac{\omega x}{H}\right)^2}\right)\right]_{x=0}^{x=a}$$

así $S_a = \frac{a}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2} + \frac{H}{2\omega}L\left[\frac{\omega a}{H} + \sqrt{1+\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2}\right]$

análogamente

$$S_b = \frac{b}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega b}{H}\right)^2} + \frac{H}{2\omega}L\left[\frac{\omega b}{H} + \sqrt{1+\left(\frac{\omega b}{H}\right)^2}\right]$$

luego

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2} + \frac{H}{2\omega}L\left[\frac{\omega a}{H} + \sqrt{1+\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2}\right] + \frac{b}{a}\sqrt{1+\left(\frac{\omega b}{H}\right)^2}$$

$$+ \frac{H}{2\omega}L\left[\frac{\omega b}{H} + \sqrt{1+\left(\frac{\omega b}{H}\right)^2}\right]$$ nos da la longitud exacta del cable, expresión que resulta bastante oromosa para el cómputo manual.

Por lo que se acepta:

$$dL = \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2} dx$$

desarrollada esta expresión por el binomio de Newton

$$dL = dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \cdots\cdots\right]$$

los demás términos se desprecian por ser muy pequeños en comparación de los tres primeros.

$$y = \frac{\omega x^2}{H}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\omega x}{H}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{4\omega^2 x^2}{H^2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \frac{16\omega^4 x^4}{H^4}$$

$$dL = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4\omega^2 x^2}{H^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{16\omega^4 x^4}{H^4}\right) + \cdots\cdots + \right] dx$$

$$S_a = \int_0^a dL = \int_0^a \left[1 + \frac{2\omega^2 x^2}{H^2} - \frac{2\omega^4 x^4}{H^4} + \cdots\cdots + \right] dx$$

$$S_a = \left[x + \frac{2\omega^2 x^3}{3H^2} - \frac{2\omega^4 x^5}{5H^4} + \cdots\cdots\cdots + \right]_0^a$$

$$\boxed{S_a = a + \frac{2\omega^2 a^3}{3H^2} - \frac{2\omega^4 a^5}{5H^4} + \cdots\cdots +}$$

$$S_a = a + \frac{2a}{3}\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2 - \frac{2a}{5}\left(\frac{\omega a}{H}\right)^4$$

que es el desarrollo en serie de Maclaurin

$$S_a = a\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{\omega a}{H}\right)^4 + \cdots\right.$$

Análogamente

$$S_b = b\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\omega b}{H}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{\omega b}{H}\right)^4 + \cdots\right.$$

Estas expresiones son muy sencillas de manejar con la regla de cálculo y convergen rápidamente,

para $\frac{\omega a}{H} < 1$ y $\frac{\omega b}{H} < 1$

de manera que lo hacen para:

$$\frac{f_1}{a} < \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{f_2}{b} < \frac{1}{2}$$

Luego

$$S = a\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\omega a}{H}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{\omega a}{H}\right)^4 + \cdots\cdots\right] + $$
$$+ b\left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{\omega b}{H}\right)^2 - \frac{1}{40}\left(\frac{\omega b}{H}\right)^4 + \cdots\cdots\right]$$

Que es la expresión pedida.

18)

Sí puede aproximarse al cable parabólico análogo.

Cuando la flecha en éste sea pequeña, la curva adoptada por un cable suspendido de sus extremos y sujeto a la acción de su propio peso, puede considerarse con un error despreciable como parábola sujeta a carga uniformemente distribuida en la horizontal.

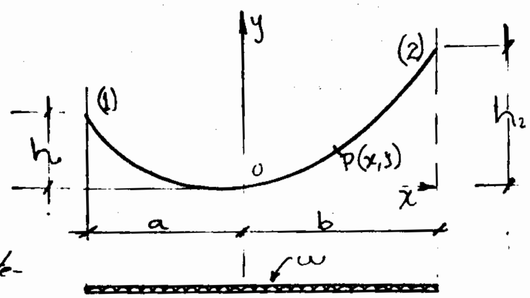
19) Habiamos establecido la ecuación y elementos del cable parabólico tomando un sistema de ejes cuyo origen era el punto más bajo, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$y = \frac{\omega x^2}{2H}$$

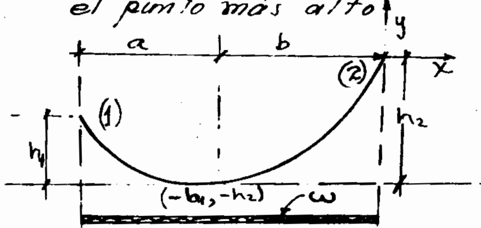
$$\tan\theta = \frac{\omega x}{H} = \frac{dy}{dx}$$

$$T = \sqrt{H^2 + \omega^2 x^2}$$

$$S = x\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \cdots\right]$$



Si elegimos el sistema de ejes de referencia en tal forma que su origen se encuentre en el punto más alto



En esta forma la ecuación de la parábola es:

$$(y + h_2) = \frac{\omega}{2H}(x+b)^2$$

$$\boxed{y = \frac{\omega}{2H}(x+b)^2 - h_2}$$

y la pendiente $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{H}(x+b) = \tan\theta}$

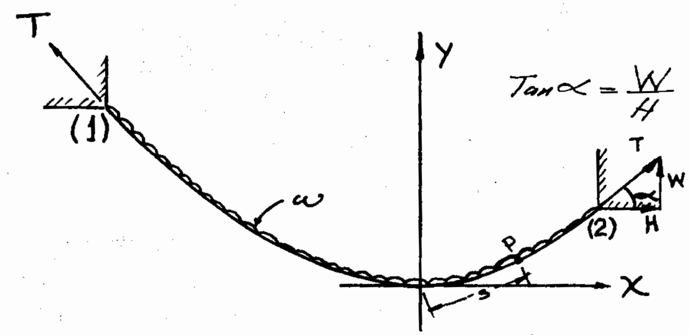
la tensión en cualquier punto será

$$\boxed{T = \sqrt{H^2 + \omega^2 (x+b)^2}}$$

y en cuanto a la longitud de la curva

$$S = (x+b)\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y+h_2}{x+b}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y+h_2}{x+b}\right)^4 + \cdots\right]$$

20) Consideremos ahora un cable flexible sujeto a una carga uniformemente repartida a lo largo de su longitud, estando suspendido en sus extremos (1) y (2) como se muestra en la siguiente figura



"S" es una variable que mide la magnitud de la longitud de arco de cable, entre el punto más bajo de él y un punto "P" cualquiera del mismo.

En virtud de lo anterior:

$$W = \omega s$$

y la ecuación diferencial del cable será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega s}{H} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

para resolver esta ecuación diferencial aprovechamos la propiedad de las curvas rectificables:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega s}{H}\right)^2}$$

y separando variables:

$$\frac{ds}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega s}{H}\right)^2}} = dx$$

integrando la expresión anterior

$$\int \frac{ds}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega s}{H}\right)^2}} = X + C$$

o sea

$$\frac{H}{\omega}\int \frac{d\frac{\omega s}{H}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega s}{H}\right)^2}} = X + C$$

$$\frac{H}{\omega} \cdot \operatorname{senh}^{-1} \frac{\omega s}{H} = X + C_1$$

estableciendo las condiciones de frontera

si $X = 0$, $S = 0$

por lo que

$$\frac{H}{\omega} \operatorname{senh}^{-1} 0 = 0 + C_1$$

$$\therefore \; C_1 = 0$$

Substituyendo

$$\frac{H}{\omega} \cdot \operatorname{senh}^{-1} \frac{\omega s}{H} = X$$

De lo cual se sigue:

$$S = \frac{H}{\omega} \cdot \operatorname{senh} \frac{\omega x}{H} \; \ldots\ldots \; (2)$$

llevando este valor a (1):

$$\frac{dy}{dX} = \operatorname{senh} \frac{\omega x}{H}$$

Integrando

$$y = \frac{H}{\omega} \cosh \frac{\omega x}{H} + C_2$$

si hacemos

$y = 0$ para $X = 0$ se sigue

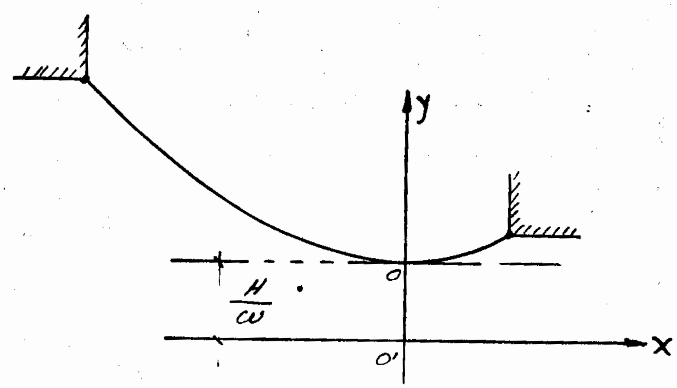
$$0 = \frac{H}{\omega} + C_2$$

y $C_2 = -\frac{H}{\omega}$

Luego $y = \frac{H}{\omega}\left(\cosh \frac{\omega x}{H} - 1\right) \; \ldots\ldots (3)$

Esto es, la ecuación del eje centroidal del cable, corresponde a una curva definida a través del coseno hiperbólico y que recibe el nombre de CATENARIA.

Si trasladásemos el sistema de referencia hasta el punto $O'\left(0, -\frac{H}{\omega}\right)$ tal y como se muestra en la siguiente figura



En el nuevo sistema de referencia la ecuación queda

$$y = \frac{H}{\omega} \cosh \frac{\omega x}{H} \; \text{------} \; (4)$$

En este sistema de referencia la expresión de la tensión del cable se simplifica.

En efecto

$$\vec{T} = \vec{H} + \vec{W}$$

$$T = \sqrt{H^2 + \omega^2 s^2}$$

queda: en virtud de la ecuación (2):

$$T = \sqrt{H^2 + \frac{H^2}{\omega^2}\, \omega^2 \operatorname{senh}^2 \frac{\omega x}{H}}$$

entonces $T = H \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 \frac{\omega x}{H}}$

$$T = H \cosh \frac{\omega x}{H}$$

y substituyendo (4) en esta última expresión

$$T = \omega y \text{ ......} (5)$$

expresión que permite afirmar desde luego que la tensión máxima ocurre en el punto más alto del cable.

La constante $c = \frac{H}{\omega}$, recibe el nombre de constante de la catenaria.

En términos de ella:

$$s = c \operatorname{senh} \frac{x}{c}$$

$$y = c \cos \frac{x}{c}$$

luego $y^2 - s^2 = c^2$ .... (6)

expresiones muy útiles de manejar.