



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – INGENIERÍA SÍSMICA

**OPTIMACIÓN DEL MÉTODO INDIRECTO DE ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA APLICACIONES EN INGENIERÍA SISMOLÓGICA Y GEOTÉCNICA**

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:
MARCIAL ALBERTO CONTRERAS ZAZUETA

TUTOR PRINCIPAL
FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

AMADO GUSTAVO AYALA MILIÁN,	INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
EDUARDO REINOSO ANGULO,	INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE,	INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM
LEONARDO RAMÍREZ GUZMÁN,	INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO DE 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: DR. AMADO GUSTAVO AYALA MILIÁN
Secretario: DR. EDUARDO REINOSO ANGULO
Vocal: DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA
1 er. Suplente: DR. JUAN JOSÉ PÉREZ GAVILÁN ESCALANTE
2 do. Suplente: DR. LEONARDO RAMÍREZ GUZMÁN

CIUDAD DE MÉXICO

TUTOR DE TESIS:

DR. FRANCISCO JOSÉ SÁNCHEZ SESMA

FIRMA

Resumen

El último tramo en el trayecto de las ondas sísmicas entre la fuente y los edificios se caracteriza por los efectos de sitio y la interacción suelo-estructura. Para contribuir en su análisis, propongo mejoras en un método numérico que permite modelar la difracción de ondas elásticas en medios estratificados con inclusiones de material homogéneo o estratificado y geometría irregular. En particular, la formulación indirecta del método de elementos de contorno incorpora funciones de Green para el semiespacio con capas planas y para el espacio completo con cavidades circulares, respectivamente obtenidas de desarrollos en el número de onda con el método de matriz global y series de funciones de onda. El algoritmo de cálculo permite la solución simultánea de grupos de funciones de Green con términos comunes (profundidad o distancia relativas), con lo que se vuelve posible analizar el campo de ondas alrededor de estructuras y en valles aluviales en modelos que no eran asequibles con la formulación original. Aplicamos el método para el análisis de la concentración dinámica de esfuerzos en el revestimiento de túneles y encontramos que los lentes de material rígido tienen efecto importante en todas las frecuencias revisadas. También se describió la difracción de ondas superficiales en el borde de un valle somero. La interacción de la onda de Rayleigh con el fondo del valle produce ondas de cuerpo que eventualmente construyen la onda de Rayleigh difractada. Por último en un modelo de valle tridimensional con la estratificación y dimensiones de un sitio instrumentado, comparamos la amplificación del movimiento que indican los cocientes espectrales estándar (SSR) y el cociente del movimiento horizontal al vertical (HVSR). En baja frecuencia la distribución espacial del SSR es invariable respecto a la orientación y tipo de incidencia, mientras que el HVSR es afectado por los efectos de borde. Los máximos locales de HVSR en frecuencias más altas que el modo fundamental que no aparecen en los registros de microtemores, podrían deberse a ondas de superficie originadas en los bordes del valle en las que participan modos superiores.

Prólogo

Siempre he tenido fascinación por entender cómo funcionan las cosas y por diseñar *cosas* que funcionen. El proceso de búsqueda me llena de gusto y quisiera hacerles ver como lo percibo contando mis vivencias, pero no podría hacerlo con mejores palabras que las del relato siguiente:

... En alguna ocasión hicimos un experimento cuyos detalles no recuerdo pero que estaba relacionado con la circulación sanguínea intra-hepática, y los resultados nos parecieron clarísimos de que existía algún tipo de regulación nerviosa. Excitados ante la posibilidad de haber hecho un descubrimiento, esa noche caminamos más que de costumbre, imaginándonos cientos de experimentos y posibilidades, y yo saboreando, por primera vez, la intoxicación de haber encontrado algo nuevo. Cuando Raúl y yo nos despedimos y cada quien se fue a su casa, yo caminé un rato solo, incapaz de irme a dormir con aquél tesoro emocional dentro; me sentía como iluminado, poseedor de un secreto de gran importancia que, de no ser por mí, permanecería ignorado por muchos años (quizá para siempre) por todo el mundo. Yo podía decidir cómo y cuándo revelarlo, y me veía generoso entregando aquella joya y recibiendo, con la modestia característica de los grandes sabios, el homenaje de mis colegas y del público en general. Si fuera necesario señalar con exactitud el momento en que decidí dedicarme a la investigación científica, yo escogería ese paseo noctámbulo y solitario en que por primera vez experimenté el placer del descubrimiento.

Pero dos días después nos dimos cuenta de que las cosas no eran como habíamos pensado y que en realidad no habíamos descubierto nada; de la intoxicación del triunfo pasamos casi repentinamente a la desesperación del fracaso. Planeamos un nuevo experimento y esta vez, mientras esperábamos a que se durmiera el gato, sentí también por primera vez la angustia de la incertidumbre, ... ahora sólo quiero señalar que quie-

nes caracterizan el laboratorio de investigación científica como un refugio tranquilo donde los sabios meditan en calma sobre profundos problemas, ignoran uno de los componentes más importantes de esta actividad humana. La angustia posee un perverso atractivo, como la altura o el cráter de un volcán, ... Aquella semana yo aprendí lo que es la angustia de querer saber, y con esto quedó sellada mi decisión.

Fragmentos de "Diez razones para ser científico" por Ruy Pérez Tamayo.

Agradecimientos

La oportunidad de desarrollar este trabajo se la debo a la gente que ha influido en mi con su ejemplo y trabajo. Agradezco a mi director de tesis, el doctor Francisco José Sánchez Sesma por su objetividad, optimismo e inventiva. Al doctor Mathieu Perton por su asesoría técnica y orientación profesional. A los doctores Eduardo Reinoso, Juan José Pérez Gavilán, Leonardo Ramírez y Javier Avilés sus comentarios y orientación en la elaboración de este trabajo. He tratado de contribuir a entender los interrogantes que me plantearon. De forma especial quiero agradecer al doctor Gustavo Ayala que siempre ofreció críticas francas y constructivas que me ayudaron a dirigir los objetivos de este trabajo.

Tuve la fortuna de compartir este tiempo en el Instituto de Ingeniería con excelentes compañeros: el ahora doctor Juan Camilo Molina, Marcela Baena, José Piña, Julio César Pardo, Nayeli Chávez y Hugo Sánchez.

Agradezco profundamente a mis padres Carolina y Marcial, que se sometieron a privaciones e incomodidades para proveernos de excelente educación a Abril y a mí. A mis abuelos Nina y Carlos, cuyo apoyo me permitió asistir a los primeros congresos y tener mi primer *laptop*. Su ayuda nos dio la libertad de perseguir nuestros intereses. Agradezco profundamente a mi esposa Dulce su paciencia y optimismo durante los últimos años, ha sido muy grato compartir esta experiencia con ella y nuestra hija Sofía.

Reconozco y recuerdo con mucha gratitud a los profesores que me expusieron al mundo de la ingeniería e investigación: Mi maestro de física en la secundaria, el ahora Doctor Mauricio Bastián organizó un club de astronomía y nos hizo ver lo fascinante que es la ciencia a muy temprana edad. Durante la preparatoria en INEDIB, el ingeniero Valencia Aguilar nos impartió cursos extra como preparación para la olimpiada de física. En la facultad en UAEM, los profesores Raúl y Fernando Vera, Diana Guzmán, Jaime de la Colina, Alejandro Escamilla, David de León y en especial el doctor Jesús Valdés¹, nos impartieron cursos extracurriculares y otras actividades

¹Jesús Valdés me introdujo a las funciones de Green.

formativas solo por el gusto de enseñar. Sus enseñanzas técnicas y personales han sido especialmente valiosas. Durante la maestría en UNAM los doctores Eduardo Reinoso y Miguel Jaimes fueron muy generosos conmigo, me dieron la libertad de desarrollar temas divertidísimos, y la oportunidad de transitar a los temas que trato en este trabajo. Estoy profundamente agradecido con todos ellos.

El financiamiento para la elaboración de este trabajo provino del programa de becas para estudios de posgrado del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y del programa de becas del Instituto de Ingeniería en la Universidad Nacional Autónoma de México. Se agradecen las facilidades otorgadas por la Unidad de Servicios de Información y el Área de Sistemas Linux y SuperComputo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Avances recientes en propagación de ondas	5
2.1. ¿Métodos de Dominio o de Frontera?	5
2.2. Revisión bibliográfica	7
3. IBEM-DWN para medios estratificados	13
3.1. Introducción	13
3.2. Método híbrido IBEM-DWN	14
3.3. Formulación	16
3.4. Función de Green en semiespacio estratificado	20
3.4.1. Solución para 2 y 3 dimensiones	20
3.4.2. Optimación de G_{ij} para numerosas fuentes y receptores	29
3.4.3. Verificación	37
3.5. Convergencia y Complejidad de IBEM-DWN	38
4. Mejoras en la solución numérica de IBEM	45
4.1. Geometría tridimensional adaptable	45
4.2. Campo cercano de una fuerza distribuida	47
4.2.1. 2D: Segmento recto en un medio estratificado	47
4.2.2. 3D: Equivalencia entre fuerza distribuida y puntual	48
4.3. Reciprocidad de funciones de Green en IBEM	49
4.4. Truncamiento de la solución	52
4.5. Sintéticos y la técnica <i>zero-padding</i>	54
5. Verificación	57
5.1. Cañón semicircular	57
5.2. Modelos con simetría axial en 3D	59
5.3. Valle aluvial 3D con geometría irregular	61

6. Túnel en medio estratificado usando IBEM-DWN-WFE	67
6.1. Introducción	67
6.2. Método IBEM-DWN-WFE	71
6.3. Función de Green para la cavidad	72
6.4. Caso de estudio	78
6.5. Conclusiones del capítulo	86
7. Borde del valle estratificado	91
7.1. Introducción	91
7.2. Modelos de análisis	93
7.3. Campo libre	95
7.4. Análisis de la difracción cerca del borde de un valle somero	95
7.5. Discusión	104
8. HVSR de sismos y ruido e invariabilidad de SSR	109
8.1. Introducción	109
8.2. Evidencia experimental	112
8.3. Efecto de los estratos suaves en HVSR	114
8.4. Comparación de SSR y HVSR	120
8.5. Modos de ondas superficiales	127
8.6. Conclusiones del capítulo	132
Conclusiones	137
A. Integración de G_{ij} en un segmento recto	141
A.1. Introducción	141
A.2. Metodología	142
A.3. Caso P-SV	145
A.4. Resultados numéricos	146
B. Estrato líquido sobre semiespacio sólido	149
B.1. Introducción	149
B.2. Campo de presión y desplazamiento en un medio acústico	149
B.3. Campo de desplazamiento en un medio elástico	151
B.4. Condiciones de frontera	152
B.5. Ejemplo de aplicación	153

C. Interpretación de G_{ij} obtenido con método WFE	155
C.1. Introducción	155
C.2. Cumplimiento de la condición de frontera	156
C.3. Análisis del campo de ondas	156
D. Descomposición en ondas planas del HVSR	161
E. Efecto de la estratificación en un valle 3D	167
E.1. Modelo de análisis	167
E.2. Resultados numéricos	168
F. Anexo al Capítulo 8	175
F.1. Mapas de cocientes espectrales	175
F.2. Curvas de dispersión en y entre arreglos	176
G. Artículo publicado en revista arbitrada	181

Capítulo 1

Introducción

En el último siglo hemos dejado atrás la superstición y el diseño empírico, en favor de teorías que se pueden verificar y procedimientos que han salvado vidas y provisto a las ciudades -por vez primera en la historia- de resiliencia ante sismos fuertes. Ya no somos espectadores ante los embates de la naturaleza.

Los modelos matemáticos de propagación de ondas permiten estimar la amplificación dinámica del movimiento en depósitos lacustres como los del valle de México. Para estos problemas existen pocas soluciones analíticas limitadas a geometrías simples y casos ideales. Para problemas realistas se recurre a métodos numéricos de los cuales existen dos grandes grupos: los métodos de dominio y los de frontera. Los primeros discretizan todo el espacio y resuelven la propagación entre puntos contiguos. Los métodos de frontera sólo discretizan el borde de las regiones y utilizan funciones de Green que representan la propagación de ondas dentro del medio. Una función de Green es la respuesta impulsiva de una ecuación diferencial lineal inhomogénea, en este caso la ecuación de Navier para el movimiento de un sólido homogéneo isótropo y elástico, cuando la excitación es un pulso de Dirac. La interpretación física de la función de Green le ha valido vasta aplicación en los modelos matemáticos usados en física e ingeniería.

La formulación de los métodos de elementos de frontera (BEM por las siglas en inglés) parte de la representación de Somigliana para el problema interior. En este trabajo uso la formulación indirecta del método de elementos de contorno (IBEM por las siglas en inglés) [Sánchez-Sesma & Campillo, 1991, Sánchez-Sesma & Luzón, 1995], la cual surge del siguiente razonamiento. Si a todo lo largo de una superficie cerrada Γ establecemos que existe continuidad entre el campo de ondas de las regiones exterior e interior a la frontera, y que el material a ambos lados de Γ es igual, se llega a una representación del campo interior que depende de fuerzas emitidas en

la frontera. Desde luego es posible aprovechar esta representación para resolver la propagación de ondas entre regiones con materiales distintos, incluso si éstas son gobernadas por funciones de Green con distinta formulación, lo cual es el eje de mi trabajo. En contraste con la formulación *directa*, la formulación *indirecta* del BEM implica dos etapas: Primero se resuelve la magnitud de las fuerzas que verifican las condiciones de frontera y en una segunda etapa se construye el campo de ondas en los receptores a partir de dichas fuerzas y las funciones de Green entre los puntos de la frontera y receptores. Mi propuesta es usar funciones de Green que permiten reducir el costo numérico de la solución lo cual es válido en ambas formulaciones.

Es posible establecer distintas condiciones de frontera en la superficie de un medio. Por ejemplo, tracciones nulas, continuidad de desplazamientos y tracciones, continuidad sólo de tracciones, continuidad de tracciones y sólo una porción del desplazamiento, entre otras.¹ Las condiciones de frontera se establecen en puntos a lo largo de los bordes, formando un sistema de ecuaciones. Es usual que las matrices sean densas y grandes, lo que limita el tamaño del modelo y la frecuencia máxima (longitud de onda mínima) que pueden resolverse.

Es deseable que los modelos numéricos sean lo más representativos de la realidad como sea posible. No obstante, el método que propongo se limita a modelar la propagación de ondas elásticas en medios de geometría arbitraria que pueden tener estratos planos de materiales homogéneos e isótropos. La solución se obtiene en el dominio de la frecuencia pero el historial de la respuesta ante fuentes transitorias se resuelve con la transformada de Fourier. Mi trabajo permite resolver algunos problemas realistas y verificar la implementación de otros métodos más versátiles.

Contribuciones

El trabajo que presento apuesta a mejorar una de las tantas técnicas para estimar el movimiento del suelo en la última porción del trayecto entre el foco sísmico y los edificios. Utilizo un método de elementos de contorno con funciones de Green para desplazamiento y esfuerzo que ya consideran parte de las condiciones de frontera del problema, de tal modo que el tamaño de la superficie considerada en el BEM se reduce y es posible resolver problemas con geometría más extensa o a más alta frecuencia (menor longitud de onda implica una discretización más fina).

Adapté dos tipos de funciones de Green, ambas basadas en expansiones de funciones de onda. Para modelar el campo en un semiespacio con estratos planos utilizamos

¹Estas condiciones respectivamente se usan para modelar: la superficie de un cuerpo (suelo-aire), dos sólidos unidos que se mueven juntos (suelo-cimentación), la interfaz sólido-líquido y la interfaz imperfecta entre dos sólidos (modelo de resorte).

desarrollos de ondas planas en el número de onda horizontal o radial, y para modelar la difracción alrededor de un túnel usamos desarrollos de ondas cilíndricas. Estas funciones son numéricamente más costosas que su contraparte analítica para el espacio completo, pero en la mayoría de los casos el método propuesto es ventajoso debido a la reducción de la superficie considerada en el BEM.

El planteamiento es similar a la descomposición de dominios o algunas formas de plantear métodos híbridos que involucran el BEM (ver sección 2.2). En otros trabajos las funciones de Green se resuelven una a la vez lo que puede resultar muy costoso. Nosotros expresamos las funciones de Green como representaciones en el número de onda y aprovechamos que algunos términos son válidos para varios argumentos. Por ejemplo, el término para fase vertical sólo depende de la diferencia en profundidad entre fuentes y receptores. El algoritmo que desarrollamos está optimizado para resolver a la vez funciones de Green entre numerosas combinaciones de fuentes y receptores (ver capítulo 4), tal como son necesarias en IBEM. En problemas sencillos nuestros resultados tienen excelente ajuste con los de otros autores (capítulo 5) y nuestro método puede evitar efectos espurios presentes en otras formulaciones (sección 6.1).

El método que propongo y la versión optimada de la función de Green que lo hace posible se presentan en la primera parte de este trabajo. La segunda mitad de este trabajo se dedica a aplicaciones del método desarrollado que son de interés para ingeniería sísmica y geofísica. Estudié el efecto de la estratificación del suelo en el campo de ondas. En particular: 1) las acciones por sismo en túneles someros con revestimiento delgado y, 2) la difracción de ondas de superficie en el borde de un valle somero. Además 3), estudiamos lo que puede o no observar un indicador del periodo de vibrar dominante en el suelo (HVSr) en el interior de un valle tridimensional de geometría irregular y estratos suaves. Otras posibles aplicaciones y mejoras se discuten en un apartado de las conclusiones (sección 8.6).

Nota sobre las siglas en inglés y términos usados

Adoptamos las siglas del nombre en inglés de métodos numéricos bien establecidos en sismología cuantitativa y demás literatura técnica; creemos que así serán mejor reconocidos, p. ej. DWN por *Discrete Wave Number* en lugar de NOD por *Número de Onda Discreto*.

Los términos región, medio y dominio **no** son intercambiables. Las diferencias en definición son sutiles pero muy importantes. *Región* tiene connotación geométrica y se refiere a la porción del espacio acotada por una superficie. *Medio*, se refiere a las características mecánicas del material (*e.g.* el medio es homogéneo e isótropo).

Un *dominio* es el espacio matemático donde es válida una función. Por ejemplo, la incidencia directa sólo está presente en el dominio de la fuente, esto es la región acotada por los estratos superior e inferior incluso si el medio adyacente es de las mismas propiedades.

Capítulo 2

Avances recientes en métodos de propagación de ondas

2.1. ¿Métodos de Dominio o de Frontera?

Las comunidades científicas, y en última instancia la sociedad, se benefician del permanente avance en los métodos numéricos para simular la propagación de energía mecánica. Excluyendo las aproximaciones basadas en teoría de rayos -que suelen ser la única alternativa para resolver en alta frecuencia- y las soluciones basadas en series de funciones de onda, es fácil notar que la cantidad de trabajos de investigación relacionados con métodos de dominio es mayor que los enteramente basados en elementos de contorno (DM y BEM por sus siglas en inglés, respectivamente). No obstante, en repetidas ocasiones aparecen simulaciones numéricas en la literatura resueltas con DM que serían más eficientes con BEM o algún procedimiento híbrido. Quizá, alguna de las siguientes razones explique el por qué.

- Los BEM sólo se enseñan en cursos optativos de posgrado, a pesar de que la formación necesaria para su desarrollo si forma parte de un programa promedio de licenciatura en ingeniería o ciencias.
- El interés por los modelos con materiales elásticos homogéneos migró a los heterogéneos e inelásticos. Algunos modelos lineales equivalentes reproducen la disminución en el módulo de cortante y el incremento en amortiguamiento hysterético, pero solo en un rango limitado. La opinión generalizada es que el método de diferencias finitas es el más versátil, mientras que los basados en elementos finitos son los más robustos y escalables. Los DM permiten abordar fenómenos lineales y no lineales tan variados como el mecanismo de ruptura en

la fuente, la acumulación de daño en elementos estructurales, la inestabilidad en edificios o laderas, la consolidación de suelos y demás fenómenos de deformación plástica.

- Hay gran cantidad de programas comerciales y códigos basados en métodos de dominio, mientras que los BEM comerciales son módulos opcionales a los DM y en la academia se usan de forma casi artesanal, a partir de códigos poco amigables (y rango de aplicación limitado) que requieren de conocimiento profundo del método y el código.
- Con excepción del FM-BEM¹ los DM son más propicios para el cómputo paralelo. Los grandes modelos de propagación de ondas sísmicas pueden resolverse en miles de procesos casi independientes. En contraste, los BEM se resuelven como un sistema en el que cada elemento requiere la información no sólo de sus vecinos, sino de todos los elementos del dominio. Esto implica mayor transmisión de información entre procesos y consecuente menor eficiencia.

Los métodos de contorno tienen ventajas sobre los DM que les ha valido mantener su relevancia por más de 40 años en investigaciones relacionadas con fenómenos de difusión, transferencia de calor, acústica y difracción de ondas elásticas. Las ventajas más significativas son:

- Reducción de la dimensión del problema (a sólo las superficies).
- Irradiación al infinito implícita (no requiere fronteras absorbentes y los *efectos de borde*² pueden reducirse).
- En algunas formulaciones, la incidencia aparece sólo en el término independiente de un sistema lineal, lo que habilita resolver varios casos con mínimo costo. En la formulación indirecta, los resultados parciales pueden reutilizarse para resolver en receptores adicionales.

¹FM-BEM: Método de elementos de contorno y multipolos rápido. Aprovecha los teoremas de adición de las funciones de Bessel para resolver la función de Green de un conjunto de fuentes a un punto (polo) cercano, luego traslada la solución desde un polo a otro y expande la solución a un conjunto de receptores.

²Los efectos de borde son difracciones espurias en las superficies truncadas. Algunas medidas de mitigación son: 1- Alejar el borde de la región de interés lo suficiente para que las ondas espurias tengan amplitud despreciable. 2- Amortiguar artificialmente la emisión desde los bordes de la superficie. 3- Utilizar una función de Green que reproduzca el efecto de la superficie que debiera truncarse. Por ejemplo una función de Green para medio estratificado.

- Las soluciones obtenidas con BEM son usadas para verificar otros métodos numéricos por dos razones. En BEM se establece que la solución cumple condiciones de frontera en los puntos de interés y la constante de convergencia en BEM es menor que con DM (ver sección 3.5).

2.2. Revisión bibliográfica

Los métodos de elementos de contorno son regularmente sujeto de mejoras. Las revisiones de Luzón et al. [2002], Cheng & Cheng [2005] y Manolis & Dineva [2015] ofrecen un panorama amplio del estado de esta familia de métodos pero vale la pena retomar algunos trabajos importantes.

En modelos bi-dimensionales, cuando el análisis se restringe a desplazamiento anti-plano (ondas SH) es posible usar el método de imágenes. Así lo hicieron Wong & Jennings [1975] y Chiu & Huey-Chu [1992] en el análisis de presas. Wong [1982] resolvió la difracción de ondas P y SV en un cañón semi-elíptico aprovechando la solución de referencia para el semiespacio y satisfaciendo las condiciones de frontera con mínimos cuadrados. Sánchez-Sesma & Campillo [1991], Sánchez-Sesma & Luzón [1995] de nuevo usan una solución de referencia para el campo incidente. Para resolver el campo difractado propusieron el IBEM (*Indirect Boundary Element Method*), con la virtud de que la representación integral de la fuente distribuida en la frontera no es singular cuando fuente y receptor coinciden por efecto de la integración numérica. A partir de este trabajo, para el análisis de efectos topográficos Yokoi & Sánchez-Sesma [1998] utilizó la solución de referencia del semiespacio para reducir los efectos de borde. Rodríguez-Castellanos et al. [2011] propusieron refinar en exceso la integral a lo largo de la frontera libre, luego condensar las contribuciones de los segmentos en el semiespacio lejos de la irregularidad topográfica y resolver un sistema equivalente más pequeño y sobre-determinado. También en dos dimensiones, Pertou & Sánchez-Sesma [2015] propusieron un algoritmo para automatizar el proceso de reconocer los contornos de integración y establecer condiciones de frontera. El método que propongo en dos y tres dimensiones requiere que se indiquen de antemano los contornos y la condición de frontera para cada superficie, pero retoma la estrategia de Pertou & Sánchez-Sesma [2015] para interpretar dichas condiciones de frontera en el llenado de la matriz de IBEM.

En modelos tridimensionales, Reinoso et al. [1997] usaron BEM con elementos de integración triangulares para estudiar irregularidades topográficas. Sánchez-Sesma & Luzón [1995] implementaron en 3D el IBEM con segmentos circulares que facilitan la integración de la fuerza distribuida en el segmento cuando el receptor es cercano. Resolvieron un valle cilíndrico y uno irregular cuya geometría se popularizó con

los nombres de *moon valley* y *croissant* (ver la Figura 5.5). Ortiz-Alemán et al. [1998] propusieron despreciar de antemano las contribuciones de fuentes lejanas. Con ello obtuvieron una matriz porosa que invirtieron con el método de gradiente bi-conjugado en menor tiempo que el problema completo. Las estrategias que propongo son compatibles con este procedimiento (ver la sección 4.4). Bu et al. [2014] usaron BEM donde las integrales singulares se evalúan con cuadratura en el campo cercano y por un desarrollo en series para el campo lejano. En este trabajo retomo la cuadratura en elementos triangulares para evaluar la función de Green en el campo cercano (ver la sección 4.2). Finalmente cabe mencionar el método de multipolos rápidos (FMM) [Fujiwara, 2000] que Chaillat & Bonnet [2013] revisaron recientemente. Esta estrategia se sirve de los teoremas de adición de las funciones de Bessel para factorizar términos y reducir el número de operaciones necesarias para llenar y resolver el sistema lineal del BEM.

El trabajo que presento hace uso de funciones de Green de desplazamiento y esfuerzo en medios estratificados. Existen distintas técnicas para resolver la propagación de ondas en semiespacios con estratos planos y corrugados, todas se basan en representaciones integrales en el número de onda horizontal o radial. Haskell [1951] sistematizó y extendió la formulación matricial de Thomson [1950]. Matrices independientes representan la propagación en un estrato plano. La multiplicación de matrices propagadoras y la incidencia resuelven el desplazamiento total en la superficie. Wang [1999] encontró que cuando los estratos tienen gran espesor respecto a la longitud de onda, los términos exponenciales (de la fase vertical) son responsables de inestabilidad numérica. Para resolverlo propuso construir las bases de vectores a cada profundidad y replantearlas como bases ortonormales. Recientemente Liu [2010] propuso que las matrices propagadoras se usen para determinar la rigidez en las interfaces, con lo que consigue remover los términos exponenciales crecientes. Con el mismo propósito Ke et al. [2011] propusieron normalizaciones que remedian la inestabilidad numérica en alta frecuencia.

Una estrategia distinta es la de Knopoff [1964]. Él estableció condiciones de continuidad entre el campo difractado por los estratos y la fuente. Los coeficientes del sistema lineal resultante son la amplitud de ondas planas emitidas desde las interfaces. El tamaño del sistema depende del número de estratos, la matriz es bandeada y la fuente aparece en el término independiente. Estas características hacen que el Método de Matriz Global sea atractivo para resolver ante numerosas fuentes. En la sección 3.4.2 propongo aprovechar términos que son comunes cuando fuentes o receptores coinciden en algún componente de la posición en coordenadas cilíndricas.

El formalismo de expresar la fuente con una representación discreta en el número de onda horizontal (DWN) desarrollado por Bouchon & Aki [1977] ha sido usado en

numerosas ocasiones [Bouchon, 2003]. DWN interpreta el efecto de truncar la integral numérica de la expansión en el número de onda, como si la fuente tuviera periodicidad espacial conocida y por tanto, arribos espurios que pueden atenuarse artificialmente. Para ello propone sumar a la frecuencia un valor imaginario pequeño, constante y negativo. El efecto de dicha atenuación también aparece en la respuesta con sentido físico pero se remueve de la señal en el tiempo. Mi estrategia para predefinir el límite de integración se describe en la sección 3.4.2, donde también propongo aprovechar la simetría del campo en el caso bi-dimensional.

Otro método para modelar la propagación de ondas en medios estratificados es el basado en reflexión y transmisión (R/T) [Apsel & Luco, 1983, Kennett & Kerry, 1979, Luco & Apsel, 1983]. Este procedimiento recursivo establece coeficientes de reflexión y transmisión entre estratos adyacentes y acumula la contribución de las ondas planas emitidas desde la fuente y sus múltiples. Se dice que el método converge cuando la amplitud de los múltiples estimados en la última iteración son insignificantes. De este procedimiento destaca el código Axitra contra cuyos resultados hice la verificación presentada en la sección 3.4.3. El método R/T original no converge cuando fuente y receptor están a la misma profundidad. Hisada [1994, 1995] corrigió esto usando aproximaciones asintóticas. Con el mismo propósito Pak & Guzina [2002] propusieron usar operadores de R/T independientes para ondas P y S.

El procedimiento que ha recibido mayor atención en años recientes es método del estrato delgado (TLM por sus siglas en inglés) [Kausel, 1999]. El modelo de suelo unidimensional se subdivide en numerosos estratos artificiales de los cuales se plantean matrices de rigidez. La base del modelo tiene movimiento prescrito y la propagación de ondas se resuelve de forma similar al método de elemento finito. Sun et al. [2013] propuso replantear el TLM para mejorar su eficiencia. Sun aproxima la matriz de rigideces exacta con una serie de Taylor truncada en el cuarto orden. Gracias a esto es posible usar estratos artificiales de mayor espesor (menos estratos en total). Ai & Li [2014], Ai et al. [2014] acondicionaron el TLM para estudiar la respuesta en medios estratificados transversalmente isótropos.

La familia de desarrollos basados en el método de Aki & Larner [1970] permiten considerar corrugaciones en las fronteras de los estratos. Su método asume un arreglo de posiciones a lo largo de las interfaces, donde se establecen condiciones de continuidad. La representación integral del campo en términos de fuentes puntuales en la frontera conlleva la formación de un sistema lineal en función de la amplitud de las fuentes, que se resuelve para cada número de onda. Este procedimiento puede ser costoso, Bouchon et al. [1995], Takenaka et al. [1996] y otros propusieron métodos que retoman ideas de este trabajo seminal pero con mejoras en la eficiencia. No obstante Cao et al. [2004] hizo un estudio comparativo entre el método de Aki-Larner, refle-

xi3n/transmisi3n y BE-DWN (se discute m3s adelante). Cao asegura que el m3todo de Aki-Larner es el m3s eficiente pero est3 limitado por la hip3tesis de Rayleigh, no obstante S3nchez-Sesma [1989] ya hab3a demostrado que el error reportado en la literatura es atribuible a deficiencias en la integraci3n num3rica y que de incluir ondas evanescentes, la soluci3n es exacta.

La mayor3a de los trabajos que siguieron al de Aki-Larner se consideran h3bridos entre la ecuaci3n de elementos de contorno y las funciones de Green en el n3mero de onda discreto. El m3todo que propongo tambi3n es parte de este grupo. Wuttke et al. [2011] hizo una revisi3n amplia de los m3todos h3bridos y discute sus ventajas. A continuaci3n revisamos los m3s sobresalientes.

Kawase [1988], Kawase & Aki [1989] presentaron el m3todo DW-BEM (M3todo del n3mero de onda discreto - elementos de contorno). La formulaci3n directa del m3todo de elementos de contorno utiliza una funci3n de Green en el n3mero de onda discreto para un semiespacio homog3neo. Destaca que la funci3n de Green carece de singularidades porque cuando fuente y receptor coinciden la integraci3n es anal3tica a lo largo del elemento cargado. La frontera de integraci3n se reduce a la porci3n corrugada. El m3todo propuesto en esta tesis est3 inspirado en estos trabajos pero opera en tres dimensiones. Bouchon et al. [1995] usaron DW-BEM para resolver la propagaci3n de ondas en un medio estratificado con variaci3n lateral. Redujeron el costo num3rico despreciando los t3rminos con poca amplitud en el sistema de ecuaciones del BEM. La matriz porosa resultante se resolvi3 por gradiente conjugado. Poco despu3s, Ortiz-Alem3n et al. [1998] retomaron esta idea pero propusieron una regla para no calcular los elementos que ser3n despreciados. La regla se basa en la distancia fuente-receptor y la longitud de onda. El alto costo num3rico es la principal restricci3n de DW-BEM, para remediarlo Zhou & Chen [2006, 2008, 2009a,b] propusieron el loBIE-DWN (m3todo de ecuaci3n de contorno localizado - n3mero de onda discreto). La parte corrugada de la interfaz entre estratos se trata como en BEM y la parte plana de la interfaz con DWN. La representaci3n del campo difractado en la parte plana se usa en la representaci3n integral de la parte corrugada. En consecuencia s3lo se requieren puntos de integraci3n en la parte corrugada y el tiempo de c3lculo se reduce significativamente respecto a DW-BEM.

Existen numerosos trabajos que incorporan elementos de frontera y elementos finitos [Auersch, 2007, 2011, 2014, Auersch et al., 2014, Barros, 2003, Fran3ois et al., 2010, Kamalian et al., 2006], donde los elementos finitos se usan para representar estructuras o irregularidades y los elementos de contorno para regiones amplias o semi-infinitas.

Para modelar la propagaci3n de ondas en un medio estratificado con interfaces irregulares, Vai et al. [1999] utiliz3 IBEM con funciones de Green para el espacio com-

pleto. En este trabajo los efectos de borde se mitigaron extendiendo las superficies lejos de la zona de interés, lo que redundó en modelos poco eficientes. Yokoi [2002] usó IBEM para formular operadores de reflexión/transmisión para estratos irregulares que se incorporaron al método R/T. En este caso, las densidades de fuerza desconocidas en IBEM juegan el papel de los vectores de coeficientes de R/T.

Diversos procedimientos han sido reportados en años recientes. Las matrices jerárquicas son una herramienta algebraica equiparable al FMM. Coulier et al. [2014a, 2013, 2014b] las utilizan para aproximar la matriz del BEM con otra en la que a priori se agrupan términos se sabe son similares entre sí. En estos trabajos las funciones de Green agrupadas son soluciones del semiespacio estratificado. El método de multipolos rápidos con funciones de Green para el semiespacio homogéneo (FM-BEM) fue desarrollado por Chaillat & Bonnet [2014] en coordenadas cartesianas (números de onda k_x y k_y por separado). Liu et al. [2016] propusieron usar un procedimiento similar al método de soluciones fundamentales (colocación con fuentes separadas de la frontera) y funciones de Green para el semiespacio con estratos planos que formulan a partir de matrices de rigidez dinámica.

Los métodos híbridos basados en la formulación indirecta del método de elementos de contorno también reportan mayor eficiencia que los basados sólo en IBEM. Gil-Zepeda et al. [2003] propusieron una versión de IBEM-DWN para resolver la difracción en un valle estratificado ante incidencia de ondas SH. La función de Green fue obtenida con matrices propagadoras de Thomson-Haskell. Ba & Yin [2016] también para incidencia de ondas SH usaron matrices de rigidez para obtener las funciones de Green. La versión tridimensional de IBEM-DWN que presento en este trabajo usa funciones de Green para el semiespacio estratificado similares a las formuladas por Knopoff [1964] pero en coordenadas cilíndricas. La formulación y resultados para difractors con simetría axial se presentaron en Perton et al. [2016] que está incluido en el Anexo G.

Capítulo 3

Medios estratificados con inclusiones homogéneas y estratificadas

3.1. Introducción

Los métodos de elementos de contorno (BEM por sus siglas en inglés) están basados en el teorema de representación de Somigliana. En el BEM el campo de desplazamiento y esfuerzo producido por una fuente dentro de una región con frontera S , se puede expresar con una representación integral de la ecuación de onda, la cual es una ecuación diferencial lineal inhomogénea. Cuando el término inhomogéneo es unitario (una Delta de Dirac), se dice que el núcleo de la integral es una función de Green, en honor al matemático británico George Green que desarrolló el concepto en la década de 1830. La función de Green se interpreta como la respuesta impulsiva del sistema representado por la ecuación diferencial. Los BEMs colocan fuentes sobre o cerca de la superficie de un medio y establecen que el campo de ondas producido por dicho arreglo de fuentes debe cumplir condiciones de frontera en esa misma superficie.

La formulación indirecta del método de elementos de contorno (IBEM por sus siglas en inglés) [Sánchez-Sesma & Campillo, 1991, Sánchez-Sesma & Luzón, 1995] incluye un paso intermedio en el cual se calcula una densidad de fuerzas auxiliares distribuidas en la frontera que verifican las condiciones de borde, *i.e.* tracciones nulas en la superficie libre y continuidad de tracciones y desplazamientos a lo largo de la interfaz entre medios. El campo difractado es efectivamente construido por las fuentes auxiliares cuya amplitud debe determinarse. El campo total es la suma de éste y el campo incidente.

La amplitud de las fuerzas auxiliares se resuelve al establecer condiciones de frontera en un arreglo de puntos a lo largo del contorno, que se denominan puntos de

colocación. El campo difractado en cada posición se construye con la representación integral de las fuerzas en el contorno, lo que resulta en un sistema lineal determinado cuyo tamaño depende de la cantidad de puntos de colocación, dimensión y tipo de condiciones de frontera.

Tal que como otros métodos, el IBEM está limitado para frecuencias altas o superficies grandes, ya que el tamaño del sistema lineal puede ir más allá de las capacidad de incluso los grandes laboratorios de cómputo. No obstante, para un amplio número de aplicaciones, un modelo razonable está compuesto de inclusiones elásticas en un semiespacio con estratos planos horizontales. **La formulación existente del IBEM puede ser adaptada para usar una función de Green que contenga la difracción por efectos de la frontera libre y los estratos.** Así, la superficie de integración se limita a las fronteras irregulares.

La función de Green para el semiespacio estratificado usada en este trabajo permite resolver simultáneamente la respuesta para numerosos pares fuente-receptor. La función es un desarrollo en el número de onda discreto cuyos términos de fase vertical, radial y azimutal se calculan una vez pero se asignan a grupos de funciones de Green que comparten algún componente de posición relativa. En la mayoría de los casos evaluados, encontramos que el método IBEM-DWN es ventajoso en especial para modelos tridimensionales y permite resolver problemas no asequibles con IBEM.

El IBEM-DWN se fundamenta en el cálculo eficiente de la función de Green para el medio estratificado. En los siguientes apartados de este capítulo se adapta para nuestros propósitos la formulación de la función de Green en DWN para medio estratificado presentada en Sánchez-Sesma et al. [2011a]. Los resultados obtenidos con esta representación se verifican. Y se exploran varias estrategias de optimización para el problema plano y en tres dimensiones.

3.2. Método híbrido IBEM-DWN

El método híbrido que aquí llamamos IBEM-DWN permite resolver la difracción de ondas elásticas en cualquier combinación de medios homogéneos y estratificados e.g: (1) inclusiones homogéneas embebidas en un medio estratificado, (2) inclusiones estratificadas embebidas en un medio homogéneo y (3) dos o más regiones estratificadas conectadas a lo largo de una superficie. Estas configuraciones comparten la base teórica descrita en este capítulo, las diferencias residen en la elección de condiciones de frontera. La formulación está hecha para ondas elásticas pero el problema acústico puede ser considerado al especializar las condiciones de frontera. Considere por ejemplo la configuración geométrica bidimensional presentada en la Figura 3.1(a).

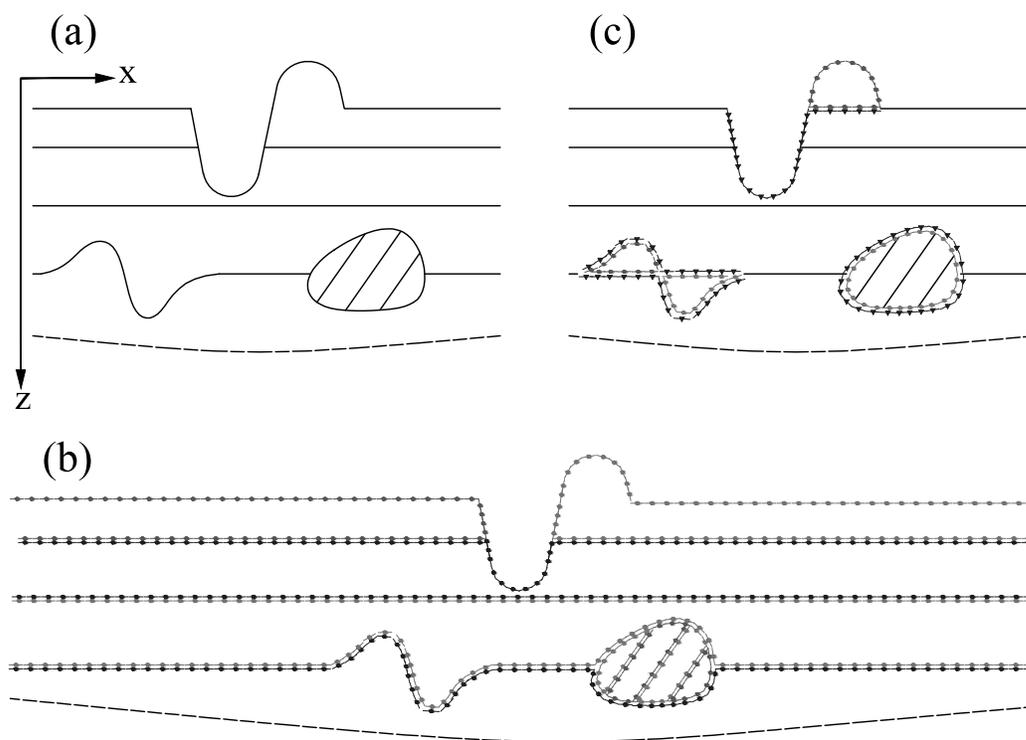


Figura 3.1: (a) Ejemplo de la geometría y arreglo de puntos de colocación para resolver la propagación de ondas en un medio estratificado con irregularidades. (b) Fronteras consideradas en el caso de resolver con un método integral con funciones de Green para espacio completo homogéneo. Los puntos sobre la superficie indican puntos de colocación. (c) Fronteras consideradas en el caso de aceptar una función de Green que de antemano considere la difracción en la región estratificada.

Se trata de un semiespacio con tres estratos planos, una anomalía topográfica en superficie y corrugación en la interfaz con el semiespacio subyacente. Además, el modelo tiene una inclusión elástica que a su vez está estratificada. Con la formulación homogénea del método IBEM un arreglo de puntos de colocación es distribuido a lo largo de todas las superficies. Una posible distribución sería la ilustrada en la Figura 3.1(b). La superficie de los estratos se extiende para evitar el arribo de ondas difractadas en el truncamiento de la frontera. A estos defectos se les llama efectos de borde. Una estrategia de mitigación sería atenuar artificialmente la emisión de los puntos de colocación en los extremos de la superficie trunca. Yokoi & Sánchez-Sesma [1998] utilizan una solución de referencia para el semiespacio homogéneo lo que les permite reducir la longitud de la frontera plana alrededor de una irregularidad topográfica y minimizar los efectos de borde. Zhou & Chen [2006, 2008, 2009a] presenta el llamado lo-DWN para tratar un medio estratificado con corrugación mediante integración en el número de onda horizontal donde el kernel distingue la contribución de las corrugaciones y la parte plana. La tendencia en la literatura apunta a utilizar métodos híbridos que aprovechen el mejor método para cada región. Planteamientos similares fueron hechos por Atak et al. [2014], Ba & Yin [2016], Coulier et al. [2013], Gil-Zepeda et al. [2003], Wuttke et al. [2011].

En contraste, el IBEM-DWN involucra menos regiones y superficies de menor tamaño para el mismo modelo, la Figura 3.1(c) ilustra una posible distribución de puntos de colocación. En este método, la propagación dentro de las regiones estratificadas es agrupada en una función de Green que ya considera la estratificación y la frontera libre. El método fue presentado en Pertou et al. [2016], a continuación se ofrece una glosa de la formulación.

3.3. Formulación de IBEM-DWN

Las ecuaciones gobernantes de la formulación clásica del IBEM son fácilmente reconocibles en la siguiente descripción del acoplamiento IBEM-DWN. El planteamiento es válido en dos y tres dimensiones pero se hace énfasis en este último. Considere la posición $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dentro de una región homogénea V con superficie suave S . El campo de desplazamiento total $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$ debido a una fuente en la posición $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s, z_s)$, es la superposición de la incidencia directa $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$ en ausencia de la frontera S y el así llamado campo difractado por la irregularidad, $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$. La dependencia de la frecuencia circular ω y la posición de la fuente son omitidas en el resto del documento. El desplazamiento total es,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^d(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

donde el término del campo incidente \mathbf{u}^0 existe sólo cuando \mathbf{x}_s está en V (*i.e.* \mathbf{x}_s y \mathbf{x} están en la misma región).

El campo difractado por la irregularidad $\mathbf{u}^d(\mathbf{x})$, se construye usando IBEM, como la contribución de fuentes auxiliares de amplitud desconocida dispuestas a lo largo de la superficie S discretizada. La representación integral tiene la forma:

$$\mathbf{u}^d(\mathbf{x})_i \approx \sum_{l=1}^N \mathbf{g}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^l) \phi_j(\boldsymbol{\xi}^l) \Delta S_{\xi^l}, \quad (3.2)$$

donde $l = 1 \dots N$ son segmentos planos que discretizan la superficie S , $\mathbf{g}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^l)$ es el desplazamiento medio (o la tracción media) en dirección i en el punto \mathbf{x} de la superficie, generado por una fuerza unitaria en dirección j distribuida uniformemente en el segmento plano l con tamaño ΔS_{ξ^l} y centroide en $\boldsymbol{\xi}^l$. El vector $\phi_j(\boldsymbol{\xi}^l)$ contiene la densidad de fuerza auxiliar desconocida (el producto $\phi_j(\boldsymbol{\xi}^l) \Delta S_{\xi^l}$ son j fuerzas distribuidas en ξ que verifican las condiciones de frontera globales).

En un medio homogéneo la función de Green media $\mathbf{g}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^l)$ es obtenida por integración analítica cuando el receptor coincide con la fuente o es cercano (< 0.1 el diámetro equivalente, ver sección 4.1). Para distancias mayores se obtiene numéricamente como,

$$\mathbf{g}_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}^l) = \frac{1}{\Delta S_{\xi^l}} \int_{\Delta S_{\xi^l}} G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_{\xi}, \quad (3.3)$$

donde $G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ es la función de Green dada una fuente puntual, es decir el desplazamiento (o tracción) en dirección i en el punto \mathbf{x} dada una fuerza puntual unitaria en la dirección j aplicada en la posición $\boldsymbol{\xi}$. Por conveniencia para el lector, las expresiones de Sánchez-Sesma & Luzón [1995] para el caso tridimensional se reproducen a continuación. Las funciones de Green para desplazamiento y tracción respectivamente son,

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = [f_2 \delta_{ij} + (f_1 - f_2) \gamma_i \gamma_j] / 4\pi \mu r, \quad (3.4)$$

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = [(g_1 - g_2 - 2g_3) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k + g_3 \gamma_i n_j + g_2 \gamma_j n_i + g_3 \gamma_k n_k \delta_{ij}] / 4\pi r^2, \quad (3.5)$$

donde $\gamma_j = (x_j - \xi_j) / r$, r es la distancia entre fuente y receptor, $\mu = \rho \beta^2$, $\lambda + 2\mu = \rho \alpha^2$, λ, μ son constantes de Lamé, ρ es la densidad de masa, δ_{ij} es la delta de Kronecker, $k = \omega / \beta$ y $q = \omega / \alpha$ los números de onda de las ondas S y P, respectivamente con

Cuadro 3.1: Coeficientes de g_j

j	1	2	3
A_{1j}	0	0	$-i$
A_{2j}	$-i\beta/\alpha$	$i(2(\beta/\alpha)^3 - \beta/\alpha)$	0
B_{1j}	4	-2	-3
B_{2j}	$-4(\beta/\alpha)^2 - 1$	$4(\beta/\alpha)^2 - 1$	$2(\beta/\alpha)^2$
C_{1j}	$-12i$	$6i$	$6i$
C_{2j}	$12i\beta/\alpha$	$-6i\beta/\alpha$	$-6i\beta/\alpha$
D_{1j}	-12	6	6
D_{2j}	12	-6	-6

velocidades β y α , además,

$$f_1 = (\beta/\alpha)^2 [1 - 2i/(qr) - 2/(qr)^2] \exp(-iqr) + [2i/(kr) + 2/(kr)^2] \exp(-ikr), \quad (3.6)$$

$$f_2 = (\beta/\alpha)^2 [i/(qr) + 1/(qr)^2] \exp(-iqr) + [1 - i/(kr) - 1/(kr)^2] \exp(-ikr), \quad (3.7)$$

$$g_j = [krA_{1j} + B_{1j} + C_{1j}/(kr) + D_{1j}/(kr)^2] \exp(-ikr) + [krA_{2j} + B_{2j} + C_{2j}/(kr) + D_{2j}/(kr)^2] \exp(-iqr), \quad (3.8)$$

donde los coeficientes se toman del Cuadro 3.1.

El efecto de la fuente distribuida disminuye con la distancia por lo que en receptores lejanos suponemos que su efecto es el de una fuerza puntual, *i.e.* la distancia de Rayleigh, o como se analiza en la sección 4.2.2 para un área triangular.

Una función de Green para el semiespacio estratificado con capas planas y paralelas se presenta en la sección 3.4.1. Esta función ha sido optimizada para resolver numerosos pares fuente-receptor.

Despejando (3.1) las condiciones de frontera son

$$\begin{aligned} t_E(x)^d &= -t(x)^0, \\ & \text{y} \\ u_E(x)^d - u_R(x)^d &= -u(x)^0, \\ t_E(x)^d - t_R(x)^d &= -t(x)^0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

para frontera libre y continuidad respectivamente, donde $t(x)$, $u(x)$ es un componente de tracción, desplazamiento en la superficie con normal conocida apuntando hacia afuera de E y el índice identifica que la función actúa desde la región exterior E donde se encuentra la fuente o la interior R . En presencia de más de dos regiones numeradas 1, 2, ... n , el signo en la ecuación anterior se define por la siguiente regla que hemos simplificado de Perton & Sánchez-Sesma [2015],

$$s(i, i, j) = \delta(i, \min(i, j)) - \delta(i, \max(i, j)), \quad (3.10)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Esta expresión nos permite cambiar la notación de (3.9) a una forma generalizada para dos medios i y j en contacto:

$$\begin{aligned} s(i, i, j)u_i(x)^d + s(j, i, j)u_j(x)^d &= -s(i, i, j)u_i(x)^0, \\ s(i, i, j)t_i(x)^d + s(j, i, j)t_j(x)^d &= -s(i, i, j)t_i(x)^0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde los índices no deben confundirse con la notación para componentes.

La representación integral del campo difractado en (3.2) se inserta en la condiciones de frontera (3.9) o (3.11) para formar un sistema lineal de la forma $[\mathbf{M}]\phi = [\mathbf{B}]$ donde la matriz $[\mathbf{M}]$ depende de las propiedades del material y la geometría de la superficie. El vector de densidad de fuerza desconocido ϕ es único para la incidencia aplicada y el campo incidente está representado en $[\mathbf{B}]$ [Sánchez-Sesma & Campillo, 1991, Sánchez-Sesma & Luzón, 1995].

En ocasiones, el sistema es propenso a inestabilidad numérica por: deficiencia de rango (frecuencias espurias), superficies no suaves, cuando dos fronteras están demasiado cerca (por ejemplo cuando la superficie tiene aristas). En tal caso es conveniente colocar fuerzas adicionales (construir más renglones en la matriz $[\mathbf{M}]$) de forma que el sistema es sobredeterminado y se resuelve por mínimos cuadrados. La solución es entonces el conjunto de densidades de fuerza que minimiza el error en los puntos de colocación.

Las funciones de Green para el medio estratificado resueltas con el método DWN se calculan con frecuencia compleja [Bouchon, 2003] y por consistencia, también en las funciones analíticas. Note que la amplitud de la parte imaginaria de la frecuencia $-i\omega$ es típicamente pequeña y no es significativa en los resultados en frecuencia (*i.e.* las validaciones mostradas en las secciones 3.4.3 y 5). El amortiguamiento impuesto por $-i\omega$ debe removerse analíticamente de la señal en tiempo.

3.4. Función de Green en semiespacio estratificado

3.4.1. Solución para 2 y 3 dimensiones

Representación integral de la fuente

El campo de desplazamiento difractado por la estratificación se construye a partir de la representación de la fuente en el número de onda horizontal o radial para dos o tres dimensiones, respectivamente. La representación integral de la fuente se acopla con un sistema de ondas planas con polarización P, SV y SH emitidas desde las interfaces de los estratos planos. El método de matriz global que usamos es similar a los desarrollos de Knopoff [1964] y Aki & Larner [1970] para el caso escalar. A continuación retomamos la función de Green presentada por Sánchez-Sesma et al. [2011a] para la solución en tres dimensiones de la propagación de ondas en un semiespacio estratificado, dadas fuentes y receptores en las interfaces de los estratos. El presente desarrollo propone que las fuentes y los receptores pueden estar en el interior de los estratos.

La naturaleza unidimensional (1D) de la geometría de los estratos permite resolver el caso tridimensional a partir del acoplamiento de la solución en el plano (ondas P y SV) y fuera del plano (SH) moduladas por el ángulo azimutal θ entre la dirección del componente horizontal de la fuente y la posición del receptor.

El álgebra que aparece en el apéndice de Sánchez-Sesma et al. [2011a] se replantea para hacer énfasis en la separación de términos de fase horizontal y vertical, lo que habilita la optimización del cálculo de la función de Green en el contexto del IBEM-DWN. La especialización para el caso 2D se discute al final.

Considere el sistema de N estratos planos horizontales sobre un semiespacio ilustrado en la Figura 3.2. Los materiales son elásticos isótropos y homogéneos. En un estrato l definido en $z_l \leq z \leq z_{l+1}$, el campo de desplazamiento ($\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$) y tracciones ($\mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega)$) en el punto \mathbf{x} y frecuencia ω , dada una fuerza puntual unitaria en $\boldsymbol{\xi}$ es respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) &= \mathbf{u}^{(0)}(\mathbf{x}, \omega)\delta(l, l_\xi) + \mathbf{u}^{(l)}(\mathbf{x}, \omega), \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}, \omega) &= \mathbf{t}^{(0)}(\mathbf{x}, \omega)\delta(l, l_\xi) + \mathbf{t}^{(l)}(\mathbf{x}, \omega),\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde los términos con superíndice (0) corresponden a la incidencia directa de la fuente y los términos con superíndice (l) corresponden al campo refractado en las interfaces del estrato. δ es la delta de Kronecker que opera en los índices del estrato

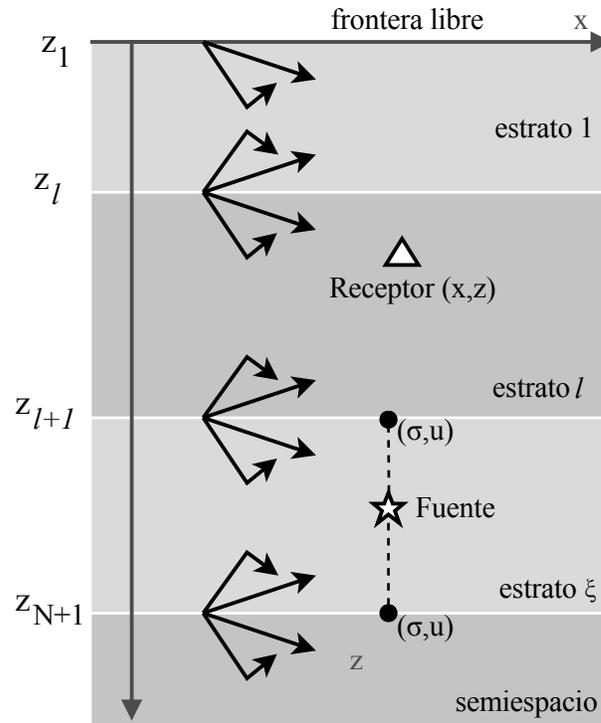


Figura 3.2: Semiespacio estratificado con N estratos planos y paralelos. Fuente y receptor son indicados con estrella y triángulo respectivamente. La representación del campo difractado por la estratificación utiliza un arreglo de ondas planas en cada número de onda horizontal. Las flechas en cada interfaz z_l señalan la dirección, polarización y origen de la fase vertical, de ondas planas P con flecha recta y ondas S con flecha quebrada.

l y el índice del estrato de la fuente l_ξ . La tracción se calcula en la superficie de los estratos con normal \mathbf{n} convenida vertical hacia arriba.

El desplazamiento y esfuerzo en $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dada una fuerza puntual en $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ admite una representación integral en el número de onda radial k con dominio $[0, \infty)$ en un sistema coordenado cilíndrico (r, θ, z) centrado en $\boldsymbol{\xi}$. Es importante hacer notar que a diferencia de la representación en coordenadas cartesianas, donde la integración sería en los números de onda horizontales k_x y k_y con dominio $(-\infty, \infty)$, la formulación que usamos considera el plano θ constante, el azimut entre fuente y receptor, y resuelve la deformación plana y anti-plana como sistemas desacoplados. El campo total es la superposición modulada por senos y cosenos.

Las expresiones mostradas a continuación son válidas en el contexto del número de onda, note que omitimos escribir la integral y el término de propagación radial $\exp(-ikr)$.

Para el una fuerza vertical el desplazamiento solo existe en el plano (r, z) y toma la forma,

$$\begin{bmatrix} -iu_z^{(0)} \\ ku_r^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{k}{4\pi\rho\omega^2} \mathbf{H}_v(r) \mathbf{A}_v(z), \quad (3.13)$$

y para el caso de fuerza horizontal,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -iu_z^{(0)} \\ ku_r^{(0)} \end{bmatrix} &= \frac{k}{4\pi\rho\omega^2} (\mathbf{H}_h(r) \mathbf{A}_h(z) + \mathbf{H}_s(r) \mathbf{A}_s(z)), \\ ku_\theta^{(0)} &= \frac{\mu k}{4\pi\rho\omega^2} (\mathbf{H}_h^\theta(r) \mathbf{U} \mathbf{A}_h(z) + \mathbf{H}_s^\theta(r) \mathbf{A}_s^\theta(z)), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde ρ es la densidad de masa, ω es la frecuencia circular (con valor complejo). Ver

la sección 4.5.), $i^2 = -1$ y los términos restantes son,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_v(r) &= \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & k J_1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_v(z) &= \begin{bmatrix} -\gamma & -(k^2/\nu) \\ -\text{sgn}(z) k & \text{sgn}(z) k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma|z|} \\ e^{-i\nu|z|} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_h(r) &= \begin{bmatrix} k J_1 & 0 \\ 0 & -k(J_0 - J_1/kr) \end{bmatrix} \cos \theta, \\
\mathbf{A}_h(z) &= \begin{bmatrix} i \text{sgn}(z) & -i \text{sgn}(z) \\ ik^2/\gamma & i\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma|z|} \\ e^{-i\nu|z|} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_s(r) &= \begin{bmatrix} 0 \\ J_1/r \end{bmatrix} \cos \theta, \\
\mathbf{A}_s(z) &= -i(\omega^2/\nu\beta^2) e^{-i\nu|z|}, \\
\mathbf{H}_h^\theta(r) &= (J_1/r) \sin \theta, \\
\mathbf{U} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{H}_s^\theta(r) &= k(J_0 - J_1/kr) \sin \theta, \\
\mathbf{A}_s^\theta(z) &= -\mathbf{A}_s(z),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $\gamma^2 = \omega^2/\alpha^2 - k^2$, $\text{Im}(\gamma) \leq 0$ y $\nu^2 = \omega^2/\beta^2 - k^2$, $\text{Im}(\nu) \leq 0$ son los números de onda radiales de las ondas P y S respectivamente, α y β son la velocidad de propagación de las ondas P y S respectivamente, $r^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2$, $\tan \theta = (x_2 - \xi_2)/(x_1 - \xi_1)$, $z = x_3 - \xi_3$, sgn es la función signo y $J_n = J_n(kr)$ es la función de Bessel de primera especie y orden n .

En tanto a esfuerzos, tenemos que para el caso de fuerza vertical,

$$\begin{bmatrix} k\sigma_{zz}^{(0)} \\ ik\sigma_{zr}^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{\mu k}{4\pi\rho\omega^2} \mathbf{Q}_v(r) \mathbf{B}_v(z), \tag{3.16}$$

y para fuerza horizontal,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} k\sigma_{zz}^{(0)} \\ ik\sigma_{zr}^{(0)} \end{bmatrix} &= \frac{\mu k}{4\pi\rho\omega^2} (\mathbf{H}_h(r) \mathbf{B}_h(z) + \mathbf{H}_s(r) \mathbf{B}_s(z)), \\
ik\sigma_{z\theta}^{(0)} &= \frac{\mu k}{4\pi\rho\omega^2} (\mathbf{H}_h^\theta(r) \mathbf{U} \mathbf{B}_h(z) + \mathbf{H}_s^\theta(r) \mathbf{B}_s^\theta(z)),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

donde $\mu = \rho\beta^2$, $\eta = k^2 - \nu^2$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_v(r) &= \begin{bmatrix} kJ_0 & 0 \\ 0 & kJ_1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_v(z) &= \begin{bmatrix} \text{sgn}(z)\eta & -\text{sgn}(z)2k^2 \\ -2\gamma k & -k\eta/\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma|z|} \\ e^{-i\nu|z|} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_h(z) &= \begin{bmatrix} -ik\eta/\gamma & -2ik\nu \\ i\text{sgn}(z)2k^2 & -i\text{sgn}(z)\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\gamma|z|} \\ e^{-i\nu|z|} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}_s(z) &= -i\text{sgn}(z)(\omega/\beta)^2 e^{-i\nu|z|}, \\
\mathbf{B}_s^\theta(z) &= -\mathbf{B}_s(z)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Con las expresiones anteriores se puede representar el efecto de la fuente en cada z_l , la profundidad de la interfaz entre estratos, donde z_1 es la superficie libre y z_{N+1} es la interfaz con el semiespacio. Siguiendo las condiciones de continuidad de desplazamientos y tracciones entre estratos y de frontera libre, el campo incidente descrito en este apartado se igualará al campo difractado.

Representación del campo difractado

El campo de desplazamiento difractado por la estratificación puede expresarse en términos de potenciales para las ondas de dilatación y cortante [Aki & Richards, 2002, Knopoff, 1964], lo que permite una representación integral en el número de onda radial. A partir de Sánchez-Sesma et al. [2011a] y de nuevo omitiendo escribir el término de propagación radial, el campo difractado por los estratos o la superficie libre en el estrato l para el caso de fuerza vertical se construye con,

$$\begin{bmatrix} -iu_z^{(l)} \\ ku_r^{(l)} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_v(r) \mathbf{F}^{(l)}(z) \mathbf{X}, \tag{3.19}$$

y para el caso de fuerza horizontal con,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -iu_z^{(l)} \\ ku_r^{(l)} \end{bmatrix} &= \mathbf{H}_h(r) \mathbf{F}^{(l)}(z) \mathbf{X} + \mathbf{H}_s(r) \mathbf{C}^{(l)}(z) \mathbf{Y}, \\
ku_\theta^{(l)} &= \mathbf{H}_h^\theta(r) \mathbf{U} \mathbf{F}^{(l)}(z) \mathbf{X} - \mathbf{H}_s^\theta(r) \mathbf{C}^{(l)}(z) \mathbf{Y},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(l)}(z) &= \begin{bmatrix} -\gamma & -k & +\gamma & -k \\ -k & \nu & -k & -\nu \end{bmatrix} \mathbf{D}, \\ \mathbf{D} &= \text{diag} \begin{pmatrix} \exp(-i\gamma(z - z_l)) \\ \exp(-i\nu(z - z_l)) \\ \exp(+i\gamma(z - z_{l+1})) \\ \exp(+i\nu(z - z_{l+1})) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}^{(l)}(z) &= \begin{bmatrix} k & k \end{bmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} e^{-i\nu(z-z_l)} \\ e^{i\nu(z-z_{l+1})} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $\text{diag}(\cdot)$ denota una matriz diagonal y los coeficientes desconocidos son,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left[\dot{P}, ik\dot{V}, \dot{P}, ik\dot{V} \right]^T, \\ \mathbf{Y} &= \left[\dot{T}, \dot{T} \right]^T, \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde P, V, T son la amplitud de ondas planas P, SV y SH respectivamente cuyos acentos indican la dirección de propagación, hacia arriba \dot{A} y abajo \dot{A} .

En el estrato (l) , las ondas planas con propagación hacia arriba tienen origen en la interfaz $l+1$ mientras que las ondas planas con propagación hacia abajo tienen origen en la interfaz l . La representación cumple con la condición de irradiación al infinito de Sommerfeld ya que el campo difractado en el semiespacio sólo está compuesto de ondas que se propagan desde la interfaz con los estratos.

La función de Green de tracciones en una superficie horizontal dada una fuerza vertical es,

$$\begin{bmatrix} k\sigma_{zz}^{(l)} \\ ik\sigma_{zr}^{(l)} \end{bmatrix} = \mu \mathbf{Q}_v(r) \mathbf{S}^{(l)}(z) \mathbf{X}, \quad (3.23)$$

y para una fuerza horizontal se tiene,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} k\sigma_{zz}^{(l)} \\ ik\sigma_{zr}^{(l)} \end{bmatrix} &= \mu \left(\mathbf{H}_h(r) \mathbf{S}^{(l)}(z) \mathbf{X} + \mathbf{H}_s(r) \mathbf{E}^{(l)}(z) \mathbf{Y} \right), \\ ik\sigma_{z\theta}^{(l)} &= \mu \left(\mathbf{H}_h^\theta(r) \mathbf{U} \mathbf{S}^{(l)}(z) \mathbf{X} - \mathbf{H}_s^\theta(r) \mathbf{E}^{(l)}(z) \mathbf{Y} \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(l)}(z) &= \begin{bmatrix} \eta & -2k\nu & \eta & 2k\nu \\ -2k\gamma & -\eta & 2k\gamma & -\eta \end{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{E}^{(l)}(z) &= [\nu k \quad \nu k] \text{diag} \left(\begin{matrix} e^{-i\nu(z-z_l)} \\ e^{i\nu(z-z_{l+1})} \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (3.25)$$

Los términos \mathbf{H} y \mathbf{Q} dependen del azimut entre fuente y receptor (θ constante) y r . El resto de los términos en negritas dependen de la profundidad relativa. Ésta y otras cualidades permiten la optimización discutida en la sección 3.4.2.

Note que el problema plano y el anti-plano están desacoplados. Por ejemplo, la deformación en el plano azimutal entre fuente y receptor (θ constante) representada en los términos $\mathbf{H}_h(r)$ y $\mathbf{A}_h(z)$ es independiente de la propagación antiplana en los términos $\mathbf{H}_s(r)$ y $\mathbf{A}_s(z)$. A su vez, los términos $\mathbf{H}(r)$ dependen sólo de la distancia horizontal r y el azimut, mientras que los términos $\mathbf{A}(z)$ sólo de la distancia vertical z .

Ensamble de matriz global

El semiespacio con N estratos ilustrado en la Figura 3.2 se ensambla estableciendo tracción nula en $z_1 = 0$, la superficie libre, y continuidad de desplazamiento y tracción en cada z_j la profundidad de la interfaz entre estratos. En general,

$$\begin{aligned} \sum \sigma^{(1)}(z_1) &= 0, \\ \sum \sigma^{(j-1)}(z_j) - \sum \sigma^{(j)}(z_j) &= 0, \\ \sum u^{(j-1)}(z_j) - \sum u^{(j)}(z_j) &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

para $j = 2, \dots, N + 1$. Note que el campo difractado para deformación el plano es independiente del campo antiplano y pueden separarse. En ambos casos es posible factorizar los términos \mathbf{H} de forma que la solución sea independiente de la fase horizontal.

Para deformación plana las ecuaciones (3.19, 3.23) para el caso de fuerza vertical y (3.20, 3.24) para el caso de fuerza horizontal permiten formar una matriz de tamaño $(4N + 2) \times (4N + 2)$ que sólo depende del espesor de los estratos y las propiedades de

Caso en dos dimensiones

El álgebra del caso tridimensional puede especializarse al caso en dos dimensiones. Sólo debe tomarse en cuenta que,

- a) La variable de integración en el número de onda radial será ahora el número de onda horizontal. Para enfatizar esta diferencia a esté último se le denota k_x
- b) El límite de integración en el número de onda radial es $[0, \infty)$. En el número de onda horizontal es $(-\infty, \infty)$.
- c) El azimut colapsa a $\theta = 0$.
- d) La matriz global es similar a \mathbf{M}_{PV} y \mathbf{M}_{SH} pero el vector solución \mathbf{a} en (3.29) no está modulado como en (3.22) sino por,

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= [\dot{P}, \dot{V}, \dot{P}, \dot{V}]^T, \\ \mathbf{Y} &= [\dot{T}, \dot{T}]^T,\end{aligned}\tag{3.30}$$

- e) El campo difractado de desplazamiento se construye con,

$$\begin{bmatrix} u_z^{(l)} \\ u_x^{(l)} \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -\gamma & -k_x & +\gamma & -k_x \\ -k_x & \nu & -k_x & -\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P} \exp(-i\gamma(z - z_l)) \\ \dot{V} \exp(-i\nu(z - z_l)) \\ \dot{P} \exp(+i\gamma(z - z_{l+1})) \\ \dot{V} \exp(+i\nu(z - z_{l+1})) \end{bmatrix} \exp(-ikx),\tag{3.31}$$

$$u_y^{(l)} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} \dot{T} \exp(-i\nu(z - z_l)) \\ \dot{T} \exp(+i\nu(z - z_{l+1})) \end{bmatrix} \exp(-ikx),\tag{3.32}$$

y para los esfuerzos con,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zz}^{(l)} \\ \sigma_{zx}^{(l)} \\ \sigma_{xx}^{(l)} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \xi & -2k_x\nu & \xi & 2k_x\nu \\ -2k_x\gamma & -\xi & 2k_x\gamma & -\xi \\ \eta & 2k_x\nu & \eta & 2k_x\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{P} \exp(-i\gamma(z - z_l)) \\ \dot{V} \exp(-i\nu(z - z_l)) \\ \dot{P} \exp(+i\gamma(z - z_{l+1})) \\ \dot{V} \exp(+i\nu(z - z_{l+1})) \end{bmatrix} \exp(-ikx),\tag{3.33}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{zy}^{(l)} \\ \sigma_{xy}^{(l)} \end{bmatrix} = \mu i \begin{bmatrix} -\nu & \nu \\ -k_x & -k_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{T} \exp(-i\nu(z - z_l)) \\ \dot{T} \exp(+i\nu(z - z_{l+1})) \end{bmatrix} \exp(-ikx).\tag{3.34}$$

En el Apéndice A se desarrolla la integración analítica de la fuerza distribuida en un segmento de línea. En el Apéndice B se presenta un ejercicio en el que las condiciones de frontera entre los estratos se especializan para considerar un estrato líquido sobre un semiespacio sólido.

3.4.2. Optimización del cálculo de la función de Green para numerosas fuentes y receptores

Los métodos numéricos basados en representaciones integrales necesariamente requieren integrar numéricamente en algún espacio, sea el número de onda o la frecuencia. La formulación basada en la matriz global \mathbf{M} , es idónea para problemas en los que hay numerosas fuentes y receptores, en caso contrario es preferible el método R/T (reflexión-transmisión), por ejemplo el código AXITRA [Coutant, 1991]. En los siguientes párrafos se discute la que en nuestra opinión es la forma más robusta y rápida de resolver las integrales de este capítulo. Se incluye el como aprovechar la simetría en los kernels y como agrupar la solución para múltiples fuentes y receptores.

Paso de integración constante o variable

Se evaluaron los resultados obtenidos haciendo el paso de integración (en el número de onda) variable y se comparó contra los resueltos con paso constante dado por $dk = 2\pi/L$ donde L es la periodicidad de la fuente de acuerdo con el método DWN [Bouchon, 2003].

La metodología de integración a paso variable propone un paso inicialmente amplio, examina el integrando y suministra más puntos de integración dentro de los intervalos donde se observa mayor variación en la función, cambios de signo o máximos. Debe recordarse que por efecto del amortiguamiento (frecuencia con una fracción imaginaria), no hay singularidades a lo largo del contorno de integración. El intervalo de integración Δk se ajusta de acuerdo con los puntos adyacentes y la periodicidad de las fuentes corresponde al menor Δk . Este procedimiento arroja resultados satisfactorios en receptores dentro del semiespacio, pero se encontraron discrepancias cuando los receptores están en la superficie. Se sabe que es más costoso lograr el mismo nivel de convergencia en la superficie libre que en el interior, porque los exponenciales involucrados en la fase vertical decaen con lentitud. Una interpretación es que la respuesta en la superficie contiene la máxima proporción de ondas de superficie, que son difíciles de integrar. Mientras que en el interior la energía tiende a repartirse entre ondas de superficie y de cuerpo. El error se reduce por tanteos suministrando más puntos de integración, no obstante preferimos mantener el paso de integración

constante y apegarnos a la definición formal del método DWN porque es más robusto y fácil de comunicar. El tiempo de ejecución en el que ambas alternativas convergen a la solución (definido por la cantidad de números de onda discretos a partir del cual considerar términos adicionales modifica el valor calculado en una medida menor a la precisión de la variable) fue mayor al usar paso de integración variable. Esto se corroboró en distintos ejercicios típicos.

Límite de integración preestablecido

Las expresiones en la sección 3.4.1 son representaciones integrales en el número de onda radial u horizontal con dominios de integración $[0, \infty)$ o $(-\infty, \infty)$ respectivamente. La solución numérica es una suma finita que implica asumir un paso de integración y truncar el límite infinito en k_{max} . Bouchon [2003], Coutant [1991] entre otros, adoptan un criterio de convergencia similar a ejecutar

$$f(\omega) = f(\omega) + f(k_i)dk,$$

para un nuevo k_i hasta que $f(k_i)$ es insignificante en varias iteraciones subsecuentes. Por razones prácticas al usar el método de matriz global resulta conveniente fijar k_{max} , ya que la solución se obtiene en etapas segregadas pero operando en todos los números de onda (ver discusión de la estrategia para resolver con numerosas fuentes y receptores, en este capítulo). Además es más eficiente prever el tamaño en memoria.

Considere la expansión de la función de Green. Conforme el número de onda aumenta se encuentra la contribución de las ondas de cuerpo, los modos superiores y por último el polo de las ondas de Rayleigh. En números de onda mayores la energía decae hasta ser despreciable. La velocidad de las ondas de Rayleigh en un semiespacio homogéneo es aproximadamente 0.95β . Es fácil verificar que el polo de Rayleigh se describe con la recta,

$$k_R(f) = \frac{2\pi f}{0.95\beta_{min}}, \quad (3.35)$$

donde β_{min} la mínima velocidad de las ondas S en el semiespacio estratificado. Una regla empírica para el límite de integración en k podría ser:

$$k_{max}(f) = \frac{2\pi(\bar{f} + 0.25f_{max})}{0.95\beta_{min}}, \quad \bar{f} = \max(f, 0.25f_{max}), \quad (3.36)$$

donde f_{max} es la frecuencia máxima. El uso de esta regla se ilustra con el ejemplo de la Figura 3.3. La función de Green de desplazamiento plano en un estrato

($\beta_{min} = 10\text{m/s}$) sobre un semiespacio, se muestra para cada número de onda hasta la frecuencia $f_{max} = 15\text{Hertz}$. Se ha calculado también el módulo de G_{ij} el cual se traza normalizado por una función de compresión del tipo

$$|f|^* = \text{Re} \left(\frac{\log(1 + \exp(p)|f|)}{\log(\exp(p) + 1)} \right),$$

con factor de nitidez $p = 27$. La recta (3.35) se indica con línea punteada y la regla en las ecuaciones (3.36) se indica con línea blanca.

Simetría respecto al número de onda horizontal

En el caso de deformación plana la expansión en el número de onda horizontal es una integral infinita en ambos límites. Una forma de proceder es aprovechar que el campo de desplazamiento para fuentes puntuales (vertical y horizontal) es simétrico o antisimétrico en el eje horizontal, p. ej. dada una fuerza vertical y receptores a lo largo de x , el desplazamiento vertical es función par, mientras que el desplazamiento horizontal es función impar. Esta relación subsiste en el dominio de los números de onda, de forma que puede resolverse sólo para los números de onda positivos y luego completar los números de onda negativos que son función par o impar en cada elemento mecánico.

El procedimiento descrito es adecuado sólo para fuentes puntuales. Las fuentes distribuidas a lo largo de un segmento plano con orientación arbitraria como se describe en la sección 4.2.1, producen un campo de deformación que no es simétrico o antisimétrico a lo largo de la coordenada horizontal (a lo largo de la cual hacemos la descomposición), por lo tanto la integración se vuelve obligatoria en todos los números de onda. No obstante, la matriz global $\mathbf{M}(k_x)$ en (3.29) puede tan solo construir e invertirse en los números de onda positivos y luego completar los números de onda negativos como funciones pares o impares término a término de $\mathbf{M}^{-1}(k_x)$ con la siguiente regla:

Los términos en la matriz $\mathbf{M}^{-1}(k_x)$ son función par en el número de onda horizontal en dos grupos de términos, los que corresponden a ondas P dada una fuerza vertical y los que corresponden a ondas S dada una fuerza horizontal. El resto de los términos es impar.

Ofrecemos una interpretación: Considere un estrato sobre un semiespacio y deformación en el plano. El campo difractado por la estratificación se construye con ondas planas P y S emitidas en cada interfaz. En total son seis ondas, cuatro en el estrato y dos en el semiespacio. Al invertir $\mathbf{M}(k_x)$ la función de transferencia para la amplitud de cada onda dada una fuente, se encuentran por renglones en $\mathbf{M}^{-1}(k_x)$.

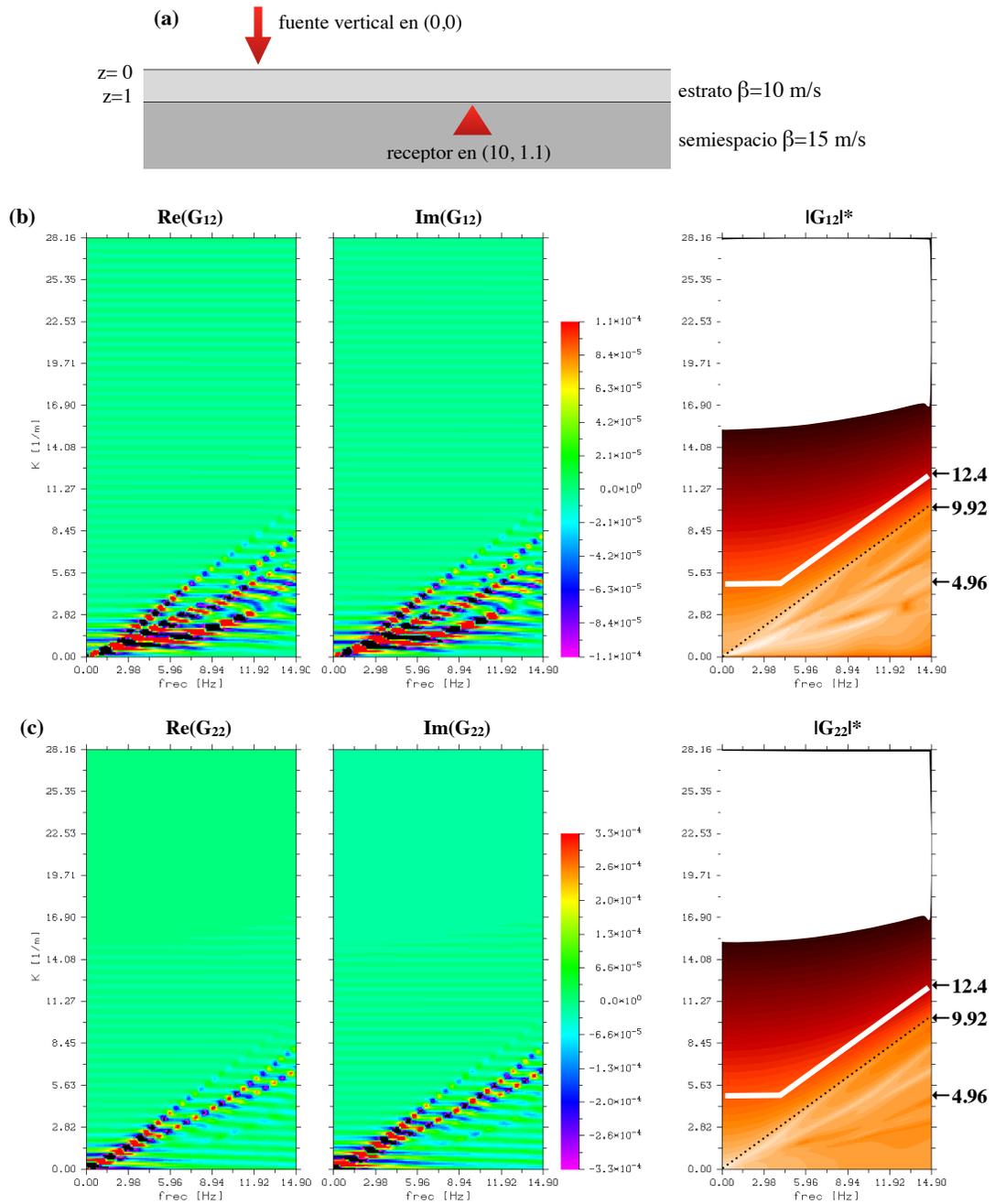


Figura 3.3: Función de Green 2D en un semiespacio con un estrato de espesor 1m. El contraste de impedancia es 1.5 y $\nu = 1/3$. (a) Geometría del modelo en metros. (b) Componente horizontal de desplazamiento, G_{12} y (c) componente vertical del desplazamiento, G_{22} . Se muestra la parte real, imaginara y la amplitud normalizada y comprimida del integrando en el número de onda horizontal y la frecuencia. Se muestran sólo frecuencia y número de onda positivos. La línea punteada señala el polo de la onda de Rayleigh y la línea blanca la regla empírica para acotar la integración.

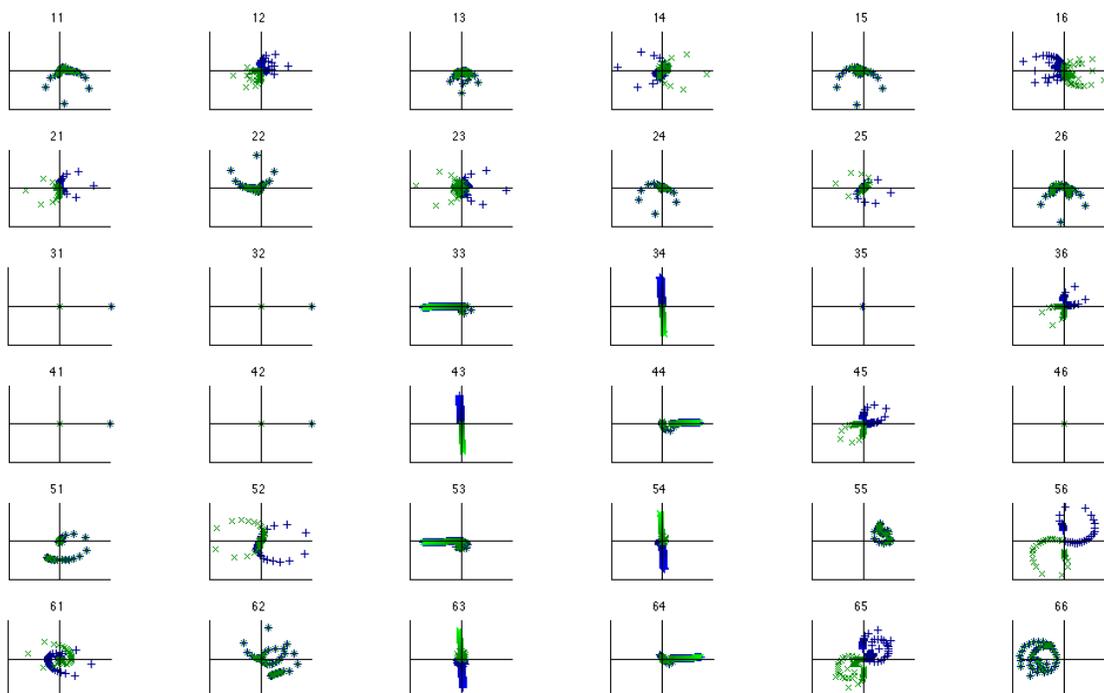


Figura 3.4: Valores complejos de cada término de $\text{inv}(\mathbf{M}(k_x))$ para la deformación en el plano en un estrato sobre un semiespacio. En color azul con marca (+) valores para k_x positivo y en color verde con marca (x) valores para k_x negativo. Los valores cercanos a cero tienen color más intenso.

Es decir, en los primeros dos renglones se encuentran las funciones de transferencia de las ondas P y S emitidas desde la superficie libre, en los renglones tres y cuatro las correspondientes a ondas P y S emitidas hacia el estrato desde la interfaz con el semiespacio, finalmente en los renglones cinco y seis las correspondientes a ondas P y S emitidas hacia el semiespacio desde la interfaz. A su vez, cada columna de $\mathbf{M}^{-1}(k_x)$ corresponde a un componente de la fuente en la interfaz. P. ej. [FV0, FH0, DV1, DH1, FV1, FH1] donde F indica fuerza, D desplazamiento, V vertical, H horizontal, 0 la frontera libre y 1 la interfaz del estrato con el semiespacio. La Figura 3.4 muestra los valores complejos de cada término de $\mathbf{M}^{-1}(k_x)$ para números de onda positivos y negativos. Los términos pares e impares respecto al signo de k se identifican claramente.

Agrupar la solución para un gran número de fuentes

*Beware of bugs in the above code;
I have only proved it correct,
not tried it.*

Donald Knuth

El campo difractado por la estratificación obtenido con la formulación de matriz global consiste en establecer condiciones de continuidad en la interfaz entre estratos y construir el sistema en (3.29). Donde la información sobre la fuente sólo aparece en \mathbf{T} . La alternativa más estable para calcular \mathbf{a} es hacer la descomposición $\mathbf{LU} = \mathbf{M}$ y -sin obtener explícitamente la matriz inversa- encontrar la solución de $\mathbf{LUa} = \mathbf{T}$ resolviendo dos sistemas lineales triviales por eliminación Gaussiana:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}y &= \mathbf{T}, \\ \mathbf{Ua} &= y.\end{aligned}$$

Cuando se resuelve para numerosas incidencias, resulta conveniente invertir \mathbf{M} una sola vez y obtener el valor de los coeficientes como

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{T} \tag{3.37}$$

para cada vector de fuente. Es fácil probar que el tiempo de cálculo es notablemente menor en el segundo caso siempre que se resuelva para varias fuentes en \mathbf{T} .

La formulación basada en matriz global es poco sofisticada y parte de trabajos de más de 50 años de antigüedad, por lo que es notable que sea numéricamente estable y el sistema esté bien condicionado incluso en números de onda relacionados con ondas

evanescentes y estratos de gran espesor. Atribuimos esta estabilidad a la elección del origen de la fase vertical tal que los términos exponenciales son decrecientes. No obstante, el método de matriz global requiere incrementar el número de puntos de integración cuando a) el contraste de impedancia es fuerte y b) los estratos son muy delgados¹. A pesar de ello, en todos los casos evaluados la solución calculada con nuestra implementación es excelente para desplazamientos y esfuerzos.

Agrupar la solución para numerosos receptores

Ahora considere que \mathbf{M}^{-1} se conoce para todos los números de onda incluidos en la integración. Se busca la función de Green en el semiespacio estratificado para todas las combinaciones de un gran número de fuentes y receptores aprovechando que a) algunos términos de las expresiones son comunes y b) para receptores muy cercanos (en medida de la longitud de onda) la solución de campo lejano es casi idéntica. El algoritmo de solución se presenta en el Cuadro 3.2 donde el nivel del índice refleja los ciclos en el algoritmo. P. ej. 1.1.2.1 es la primera actividad dentro de tres ciclos anidados.

Cuadro 3.2: Algoritmo de cálculo agrupado de la función de Green para numerosos pares fuente-receptor en un semiespacio estratificado

Índice	Actividad
1	En cada profundidad agrupada donde hay fuentes se resuelve (3.37) para las tres direcciones de la fuerza. En cada caso se obtiene \mathbf{a} la amplitud de las ondas planas que construyen el campo difractado en todos los números de onda. Éstas sólo dependen de la orientación y posición vertical de la fuente.
1.1	Para cada profundidad agrupada de los receptores,
1.1.1	se construyen los factores de propagación vertical \mathbf{D} en (3.21) y se multiplican por las amplitudes \mathbf{a} correspondientes al estrato del receptor,
1.1.2	agrupar distancias horizontales r entre pares fuente-receptor actuales para los ciclos [1] y [1.1].
1.1.3	Para cada grupo de distancia horizontal r , en [1.1.2],
1.1.3.1	calcular las funciones de Bessel en (3.15) y (3.18) para r promedio,

¹Así mismo cuando los elementos mecánicos se calculan cerca de una interfaz y a profundidad cercana a la de la fuente. Hisada [1994, 1995] atendió este caso separando el comportamiento asintótico de los términos respecto al número de onda. La manipulación del término restante resulta en funciones que requieren menos términos de integración para converger a la solución.

Índice	Actividad
1.1.3.2	agrupar en intervalos el azimut θ del grupo actual en [1.1.3].
1.1.3.3	Para cada intervalo de azimut en [1.1.3.2],
1.1.3.3.1	calcular los elementos mecánicos del campo difractado por la estratificación en función de los factores $[\mathbf{D}][\mathbf{a}]$ en [1.1], además r y θ actuales en los ciclos [1.1.3] y [1.1.3.3].
1.1.3.3.2	Identificar los índices de fuente y receptor que cumplen las condiciones de los ciclos [1.1.3] y [1.1.3.3]. Se asigna el campo difractado.
1.1.3.3.3	Sumar la incidencia directa de la fuente cuando fuente y receptor están en el mismo estrato. Para campo cercano se resuelve como en la sección 4.2, para campo lejano como si la fuente es puntual.

Este procedimiento se usa para calcular los elementos de la matriz del método IBEM-DWN y para construir el campo difractado por la irregularidad una vez que ya se conocen la densidad de fuerza auxiliar.

En los pasos 1, 1.1, 1.1.2 y 1.1.3.2 del Cuadro 3.2 una variable se distribuye en grupos de valores casi iguales. El procedimiento usado es similar a la función *unique* en Matlab, pero se admite que los valores guarden una distancia $\bar{\lambda}$ entre si. Para agrupar la coordenada vertical y la distancia horizontal usamos $\bar{\lambda} = \lambda/50$, donde λ es la longitud de onda más pequeña en el material. Para agrupar el azimut usamos intervalos en los que la longitud de arco es $\bar{\lambda}/r/50$ y hay simetría entre los cuadrantes del plano horizontal.

El campo difractado por la estratificación se resuelve sólo en la mitad de los pares fuente-receptor cuando el medio es homogéneo y en alrededor de 1/4 de los pares cuando el medio es estratificado. El resto de los elementos se asigna con base en el teorema de reciprocidad. La sección 4.3 está dedicada a ello. En el paso 1.1.3.3.3 el campo cercano por incidencia directa se resuelve como es descrito en la sección 4.2.

Las funciones de Bessel de primera especie utilizadas en el paso 1.1.3.1 tienen argumento del tipo $J_\nu(kr)$ y orden $\nu = 0$ y 1, donde el número de onda k corre entre 0 y k_{max} y r es la distancia horizontal entre fuente y receptor. En el contexto del método de elementos de contorno esta función se resolverá para una gran cantidad de distancias r y podría inferirse que es ventajoso utilizar los teoremas de adición o el teorema de multiplicación de las funciones de Bessel. Con este último $J_\nu(kr)$ se aproxima con una serie que depende de $J_{\hat{\nu}}(k)$, estos últimos resueltos sólo una vez para $\hat{\nu}$ entre 0 y ν_{Max} . Ver 9.1.74 y subsecuentes en Abramowitz & Stegun [1964]. ν_{Max} se define con un criterio de convergencia. Se probó esta alternativa y en todos los casos es por lo menos cuatro veces más costoso utilizar el teorema de multiplicación

Cuadro 3.3: Criterios de validación de G y T en medio estratificado.

No.		2D	3D
1	Compatibilidad de G y T alrededor de interfaces	x	x
2	Esfuerzos nulos en la superficie libre	x	x
3	<i>vs.</i> solución construida por imágenes (sólo SH)	x	
4	<i>vs.</i> solución analítica para una exploración (sólo G) ²	x	
5	<i>vs.</i> solución construida con un método integral	x	x
6	<i>vs.</i> solución obtenida con Galerkin Discontinuo (sólo T)		x
7	<i>vs.</i> solución obtenida con Reflexión-Transmisión ³ (sólo G)		x

que obtener las funciones cada vez. Con los teoremas de adición la serie involucra más términos por lo que se espera aún más costo.

***Snapshots* en 2D**

Cuando se requiere conocer la función de Green bidimensional en una malla de receptores rectangular en el plano xz de un medio estratificado, es conveniente colocar una línea vertical de receptores, obtener el campo difractado por la estratificación hasta antes de agregar la fase horizontal y aplicar la transformada inversa de Fourier (en el espacio) el factor de escala en este caso es $1/dx$. El resultado puede reordenarse (*cshift* o *fftshift*) y truncarse. El desplazamiento por incidencia directa de la fuente se agrega para cada punto en el mismo estrato, pero es posible incluir un estrato transparente que contenga la fuente. La reducción en tiempo de cálculo es valiosa sólo cuando se busca obtener instantáneas del campo de desplazamiento.

3.4.3. Verificación

La función de Green para desplazamiento y esfuerzo en un semiespacio con estratos planos se obtiene con el algoritmo del Cuadro 3.2 y las estrategias de optimización descritas anteriormente. Para validar el procedimiento se hicieron las pruebas indicadas en el Cuadro 3.3. El material anexo en la versión digital de este trabajo incluye un apartado con *benchmarks* para reproducir los ejercicios de validación y el resto de los resultados en este trabajo. A continuación se presentan sólo los dos últimos casos del Cuadro 3.3.

²Garvin [1956], Iturrarán-Viveros et al. [2013]

³Resuelto con Axitra v3.0 [Coutant, 1991]

En un semiespacio homogéneo con densidad 2.6 g/cm^3 y velocidades de propagación 5.72 km/s y 3.3 km/s para las onda P y S respectivamente, se aplican fuerzas puntuales en los vértices y centroide de un arreglo rectangular de 40 km de lado en la superficie del semiespacio. Los tensores de desplazamiento y esfuerzo se registran en la posición \mathbf{x} a 15 km bajo el receptor central hasta 8 Hertz , y se obtiene la respuesta temporal para un pulso Gaussiano con tiempo de ascenso (*raise time*) de 0.5 segundos y retraso de 1.0 segundo . Las posiciones de la fuentes y receptor se señalan en el diagrama de la Figura 3.5 y los resultados en el tiempo obtenidos con el método de matriz global en el número de onda radial (DWN) se comparan con los desplazamientos calculados con Reflexión-Transmisión (RT) y los esfuerzos calculados con el método de Galerkin Discontinuo⁴ (DG).

Los resultados del método Reflexión-Transmisión se calcularon con AXITRA v3.0 [Coutant, 1991]. Para el caso de la fuerza en la posición 1 (alineada con el receptor) los resultados obtenidos con RT son erróneos para fuerzas horizontales pero se puede estimar la solución desplazando el punto de aplicación de la fuerza. Para el caso de fuerza en la dirección x en la posición 2, los tres componentes de desplazamiento en el receptor se presentan en la Figura 3.6 con excelente ajuste a los resultados de DWN.

En la Figura 3.7 se comparan los resultados para el esfuerzo σ_{xx} dadas fuerzas en dirección x en las cinco posiciones del diagrama de la Figura 3.5 y en la Figura 3.8 para el esfuerzo σ_{xz} dadas fuerzas en dirección z .

En los sismogramas producidos por ambos métodos se observa el arribo de los frentes asociados a la onda P alrededor de los 5.3 segundos y la onda S junto con la onda S difractada por la incidencia de P en la superficie alrededor de los 8.5 segundos . El ajuste entre los juegos de resultados se considera aceptable para los casos de las posiciones de 2 y 4 de la fuente. Las posiciones 1,3,5 de la fuente en dirección x están en el plano nodal de desplazamiento máximo en dirección x y esfuerzo σ_{xx} nulo como se ilustra en la Figura 3.9. Los resultados obtenidos con DWN reproducen mejor esta cualidad.

3.5. Convergencia y Complejidad de IBEM-DWN

Evaluamos la convergencia del método IBEM-DWN en un problema tridimensional con solución conocida para los desplazamientos y ofrecemos una estimación de la complejidad del algoritmo.

⁴Los resultados del método DG fueron obtenidos por Hugo Samuel Sánchez Reyes a quien se agradece la colaboración.

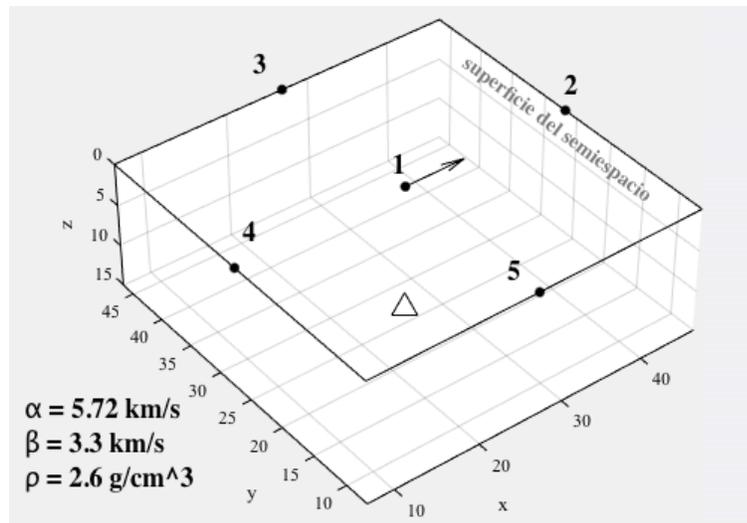


Figura 3.5: Posición de fuentes en un arreglo rectangular de 40 km de lado en la superficie de un semiespacio (puntos) y receptor (triángulo) a 15 km bajo la posición 1 de la fuente. La flecha señala la dirección de aplicación x de la fuente en 1.

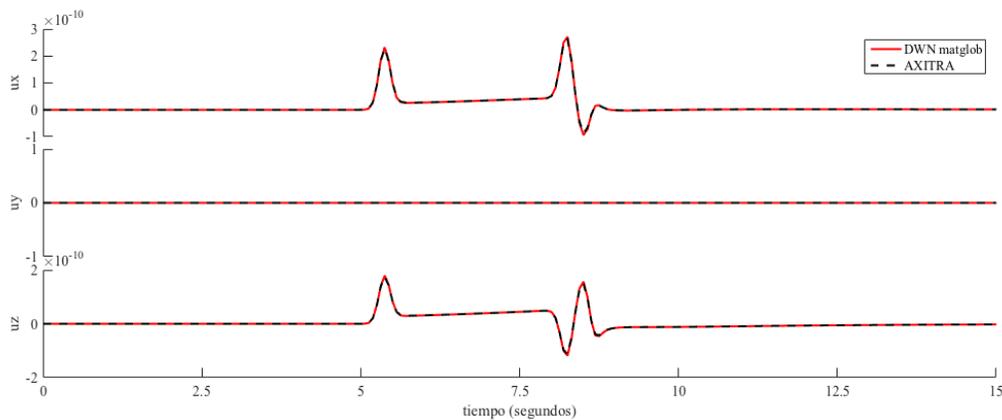


Figura 3.6: Sismogramas sintéticos de los tres componentes de desplazamiento en el receptor dada una fuerza en la posición 2 en dirección x . El ajuste entre los resultados obtenidos con DWN (matriz global) en línea continua y Reflexión-Transmisión (RT) con línea interrumpida es excelente.

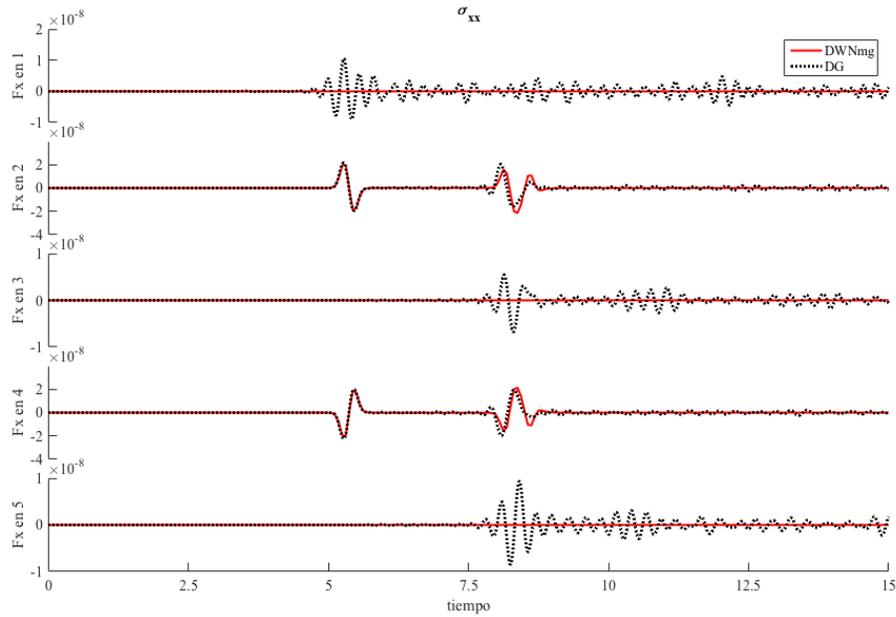


Figura 3.7: Sismogramas sintéticos del esfuerzo σ_{xx} en el receptor \mathbf{x} dada una fuerza en dirección x en las cinco posiciones indicadas en la Figura 3.5. Con línea continua color negro se trazan los resultados obtenidos con el método de Galerkin Discontinuo (DG) y en línea interrumpida color rojo los resultados obtenidos con la formulación de matriz global en el número de onda radial (DWN).

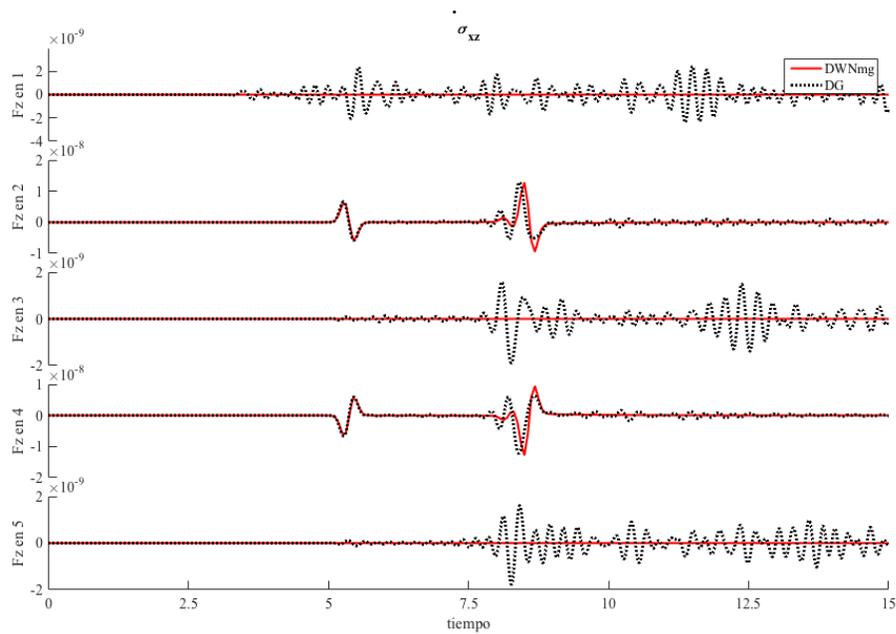


Figura 3.8: Igual que la Figura 3.7 para el esfuerzo σ_{xz} dada una fuerza en dirección z en las cinco posiciones indicadas en la Figura 3.5.

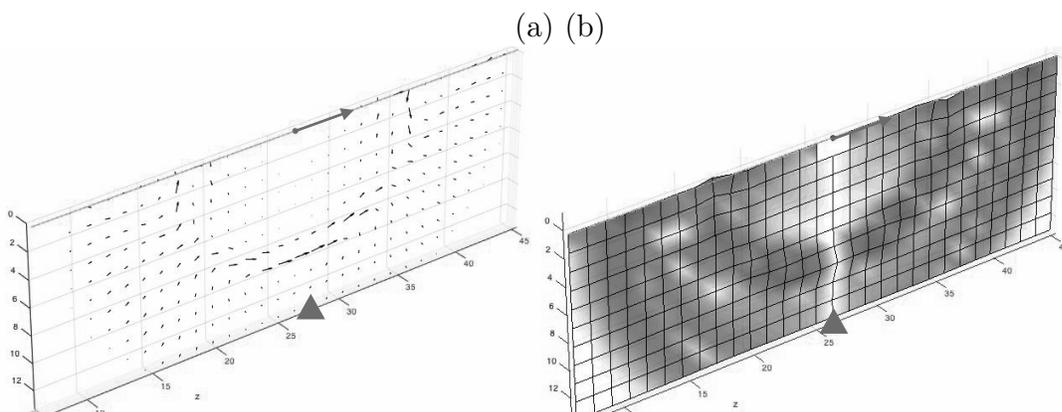


Figura 3.9: Resultados para el instante $t = 3.8$ segundos para (a) el campo de desplazamiento y (b) magnitud del esfuerzo axial en σ_{xx} . La fuerza está en la posición 1 de la Figura 3.5 en dirección x indicada con una flecha. El receptor discutido en las Figuras 3.7 y 3.8 se señala con el triángulo. Se observa que éste está en el plano nodal de desplazamiento máximo en dirección u_x y esfuerzo σ_{xx} nulo. La amplitud en ambos casos se presenta normalizada.

Considere un valle semiesférico de material homogéneo y radio a , ante incidencia vertical de ondas P en una frecuencia normalizada $\eta_q = 0.5$. Los pormenores del modelo se describen en la página 61. La difracción de ondas puede resolverse con IBEM e IBEM-DWN considerando el medio exterior e interior con la función de Green para semiespacio o sólo uno de ellos (en este ejemplo el medio exterior). En el capítulo 5 se comparan los resultados respecto a la solución en series de [Sánchez-Sesma et al., 1985] para este problema. Es oportuno comentar que las tres estrategias producen resultados cercanos a la solución basada en series, pero con algo de error cerca del borde del valle, lo cual es esperado. Para $x/a \geq 2$ la solución basada en DWN podría ser la correcta.

Analizamos la convergencia del desplazamiento horizontal y vertical con la norma L_2 de 50 receptores sobre $0 \leq x/a \leq 3$ para modelos con distinto número de puntos de colocación. La relación de puntos por longitud de onda (N_{pplo}) varía entre 6 y 14.5 pero la cantidad total de ecuaciones varía porque IBEM-DWN la superficie libre puede estar incluida. En la Figura 3.10 comparamos la convergencia de la solución al usar IBEM (círculos grandes), IBEM-DWN usando DWN en el medio exterior (triángulos) e IBEM-DWN usando DWN en ambos medios (círculos pequeños). El límite inferior para describir la semiesfera se fija en 159 puntos o $N_{pplo} = 6$ y el límite superior lo marca la capacidad de cómputo en una *laptop* de gama media.

Observamos que el rango de valores de la norma L_2 es corto, lo que significa que

los modelos producen resultados similares. Es claro que la solución se vuelve estable en los tres modelos. Note la convergencia de IBEM-DWN se alcanza con menor cantidad de puntos de colocación ($N_{ppto} = 10$), esto no significa menor tiempo de cálculo; IBEM-DWN sólo es preferible cuando se considerarán estratos de suelo.

La complejidad del algoritmo se discute en el artículo incluido en el Apéndice G de donde retomamos que para IBEM usando funciones de Green para el espacio completo la complejidad es $O(N_1^3)$ mientras que para IBEM-DWN puede expresarse como $O(n_k N_2^2)$, donde n_k es la cantidad de términos en la integración en el número de onda (usualmente un valor grande), N_i son la cantidad de puntos de colocación en cada modelo, donde N_2 puede ser mucho menor que N_1 para el mismo problema. En conclusión el método puede ser muy eficiente para algunos problemas. En el capítulo siguiente se describen estrategias de optimización no consideradas por los estimados de la complejidad.

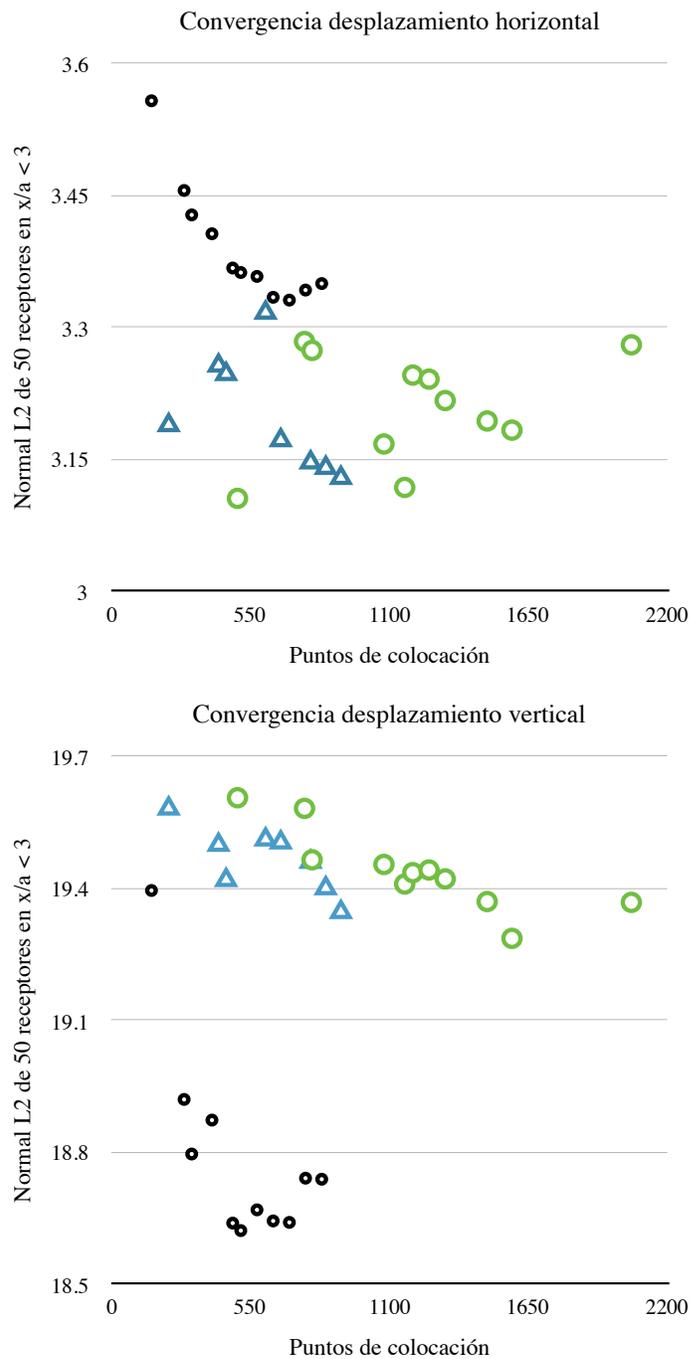


Figura 3.10: Análisis de convergencia de desplazamientos horizontal y vertical para el valle semiesférico ante incidencia vertical de onda P mostrado en la Figura 5.4. Modelos resueltos con IBEM (círculos grandes), IBEM-DWN usando DWN sólo en el medio exterior (triángulos) e IBEM-DWN usando DWN en ambos medios (círculos pequeños).

Capítulo 4

Mejoras en la solución numérica de IBEM

En este capítulo discutimos la estrategia para definir los puntos de colocación conforme aumenta la frecuencia. Luego comparamos los resultados de cargar un segmento triangular y resolver con distintos órdenes de integración; así elegimos un orden fijo de cuadratura para la obtención del campo cercano y definimos la distancia a partir de la cual el campo cercano obtenido por integración es equivalente al campo producido por una fuerza puntual (como se calcula el campo lejano).

También proponemos aprovechar la reciprocidad de las funciones de Green para rellenar rápidamente la matriz de coeficientes en BEM, IBEM e DWN-IBEM. Finalmente discutimos las estrategias de truncamiento de la solución y la obtención correcta de señales en el tiempo con un *Deltat* artificialmente pequeño.

4.1. Geometría tridimensional adaptable

La geometría en tres dimensiones se discretiza con una malla de segmentos triangulares planos o *trimesh* almacenada en archivos de formato estándar de triángulos o *stl*. Estos pueden producirse y editarse con la mayoría de los programas de dibujo y es fácil generarlos como archivos de texto plano. La agilidad de este formato permite generar superficies con tamaño de elementos variable (pequeños cerca del borde) o subdividirlos automáticamente. En nuestro código se aprovechan ambas estrategias. La geometría se indica con una lista de archivos *stl* cada uno con menor tamaño de

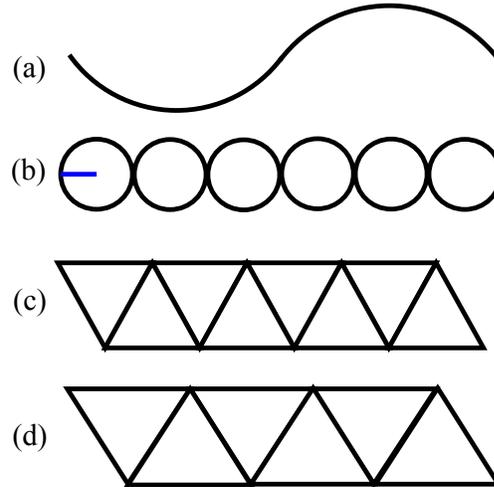


Figura 4.1: (a) Una longitud de onda, (b) discretización de la superficie con círculos sin traslape, el radio se indica con línea azul, (c) discretización de la superficie con triángulos de igual área que los círculos, (d) discretización con seis triángulos (casi alineados) por longitud de onda.

elementos, y de ser necesario algunos elementos se subdividen hasta cumplir

$$2r_{obj} = \lambda / N_{pplo}, \quad (4.1)$$

$$r \leq r_{obj}, \quad (4.2)$$

donde r es el radio de un círculo de igual área que el segmento triangular -el cual se postula poco alargado-, λ es la longitud de onda más pequeña a ambos lados de la superficie y N_{pplo} es el número de segmentos por longitud de onda, que puede ser $5.5 \leq N_{pplo} \leq 6$ de acuerdo al siguiente razonamiento. Cuando se usan segmentos circulares se asume que una longitud de onda será representada como en la Figura 4.1b, con la regla (4.2) la discretización produce ocho segmentos triangulares, 4.1c. Una manera de producir seis segmentos casi alineados por longitud de onda es aceptar $N_{pplo} = 5.5$ como en 4.1d. El valor podrá elegirse para ajustar a la geometría del modelo.

Un segmento triangular se subdivide si el radio equivalente r , es mayor que r_{obj} :

- Si $r > 4r_{obj}$ se divide en cuatro partes como en la Figura 4.2a hasta que ésta condición no se cumple, después
- se revisa si $r > 2r_{obj}$ entonces se divide en dos como en la Figura 4.2b.

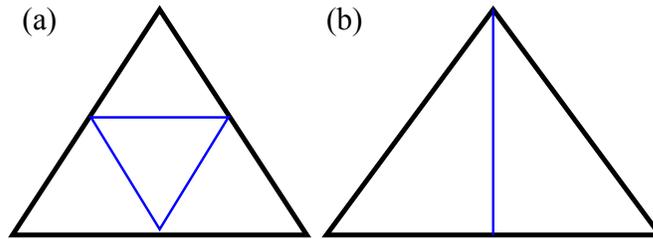


Figura 4.2: Estrategias de dividir los segmentos de integración. (a) División en cuatro, (b) división en dos desde el centro del lado más largo o de índice menor si son todos iguales.

Este procedimiento tiene la virtud de mantener la regularidad de los triángulos. Otras estrategias automáticas (comando *subdivide* o *smooth* en los programas Blender o Meshlab) o basadas en tres o cinco cortes producen triángulos alargados.

4.2. Campo cercano de una fuerza distribuida

4.2.1. 2D: Segmento recto en un medio estratificado

La expansión en número de onda horizontal k_x de la función de Green en dos dimensiones considera límites de integración infinitos (negativo a positivo). Es posible resolver sólo en números de onda positivos y aprovechar la simetría de los elementos mecánicos o de los términos de la matriz global invertida como se discutió en la sección 3.4.2.

Cuando la fuerza se distribuye uniformemente a lo largo de un segmento y el receptor es cercano, el campo de onda debe integrarse a lo largo del elemento. Si el segmento es recto podemos hacer integración numérica por cuadratura de Gauss-Legendre. El procedimiento es evaluar la función de Green con Ξ en posiciones prescritas a lo largo del elemento, luego la integral es la suma ponderada por pesos conocidos.

Esto puede ser demasiado costosa en el contexto de IBEM-DWN, una alternativa es integrar analíticamente la fuerza en el segmento. Con segmentos horizontales la integración de una fuerza uniforme es equivalente a la convolución de una función caja de amplitud unitaria y la función de Green para fuerza puntual, $G(\omega, x)$. En el dominio de los números de onda esta operación se transforma en una multiplicación de una función seno cardinal modulada por el ancho del segmento y la expansión $G(\omega, k)$. Si la orientación del elemento no es horizontal el campo es asimétrico y la integración

debe hacerse en todos los números de onda (negativos y positivos). En el Apéndice A se desarrolla la integración en un segmento recto-oblicuo. Se ofrecen expresiones para el caso en que el receptor está a una profundidad distinta a la fuerza distribuida y este resultado se usa para construir la solución cuando segmento y receptores están a la misma profundidad. El efecto de la fuerza distribuida se representa con un coeficiente, de modo que el costo numérico es equivalente al de $G(\omega, k)$. Se obtuvieron sismogramas sintéticos y se ofrece una interpretación en el campo cercano. Para receptores cerca del centro del segmento, la mayor parte del campo de desplazamiento se explica como el de una onda plana, en cambio en la proximidad de los bordes el campo es semejante al producido por una fuerza concentrada.

4.2.2. 3D: Equivalencia entre fuerza distribuida y puntual

Proponemos un criterio para determinar la distancia desde una fuerza distribuida en triángulo a partir de la cual la función de Green converge al valor producido por una fuerza puntual.

La superficie de integración en los métodos IBEM e IBEM-DWN en tres dimensiones se discretiza con segmentos triangulares. En el contexto de estos métodos se evalúa el campo de desplazamiento y tracción dada una fuerza unitaria aplicada uniformemente en el área de un segmento. Sánchez-Sesma & Luzón [1995] consideran segmentos circulares planos y resuelven analíticamente para el receptor en el centro o sobre el círculo. Yokoi & Sánchez-Sesma [1998] obtuvieron expresiones analíticas para la fuerza distribuida en un segmento triangular y receptor en el centroide del triángulo. Ellos dividieron el triángulo desde el centroide a los vértices e integraron cada parte en coordenadas locales. Ambos trabajos consideran un medio homogéneo e infinito, si el medio es un semiespacio estratificado o si el campo de ondas se busca en la proximidad del segmento, es conveniente integrar la fuerza con cuadratura de Gauss.

En Perton et al. [2016] resolvimos ejercicios con simetría axial (ver Anexo G). El área de los segmentos se estimó como si fueran superficies de revolución pero se despreció el efecto del campo cercano. Ahora usamos una cuadratura con puntos en el interior del segmento triangular y pesos positivos [Dunavant, 1985]. El grado mínimo suficiente de la cuadratura se eligió al comparar entre si los resultados de esquemas con $n = 4, 6, 7, 12$ y 16 puntos, bajo la hipótesis de que los resultados correctos serán similares entre sí y el número de puntos óptimo es el menor. En un medio sólido de Poisson se posiciona un segmento triangular cargado uniformemente y un arreglo lineal de 20 receptores en dirección normal, distribuidos entre el centroide del triángulo y el punto $z = 5r$. Definimos r como el radio de un círculo de igual área que

el segmento triangular (al igual que en la ecuación (4.2)), en este caso $r \approx 0.4$ para el triángulo de lados $1 \times 1 \times \sqrt{2}$. Se obtuvieron desplazamientos y esfuerzos en una frecuencia tal que $2r \approx 1/6$ la longitud de onda de las ondas de corte. Los resultados con cinco esquemas de cuadratura se trazan con líneas continuas en las Figuras 4.3 y 4.4, respectivamente para desplazamiento y esfuerzos cuando la fuerza es en dirección x . Los resultados son consistentes en todos los elementos del tensor excepto con $n = 4$, por lo que usaremos cuando menos $n = 6$. Las diferencias entre resultados son más pronunciadas en el campo cercano ($z/r < 0.5$). El esquema de cuadratura no incluye un punto en el centroide del triángulo por lo que puede resolverse para $x = \xi$.

Se explora ahora la distancia fuente-receptor para que la fuerza unitaria distribuida en la sección triangular sea equivalente a la fuerza puntual. Este problema guarda similitudes con la llamada distancia de Rayleigh para difracción a través de una apertura pequeña. Las Figuras 4.3 y 4.4 incluyen la solución para fuente puntual con línea segmentada. Con estos resultados y los correspondientes a esfuerzo cuando la fuerza se aplica en dirección y ó z (no mostrados aquí) se infiere que cuando $z/r \geq 2$ es suficiente considerar la fuerza concentrada. Para evaluar esta regla cuando los receptores está en otras posiciones se revisó el cociente entre los resultados con cuadratura de siete puntos y fuerza puntual en una malla de receptores entre $-2 \leq x/r \leq 2$ y $0 \leq z/r \leq 2$. La amplitud del cociente se traza con curvas de nivel en la Figura 4.5. Se observa que a $1.5r$ de la fuente los campos son muy similares y que en $2r$ son prácticamente iguales. Note que el tamaño del segmento triangular cargado se controla con la longitud de onda.

Cuando el segmento de integración es circular la distancia puede ser $1r$, no obstante los ejercicios publicados colocan los segmentos circulares con traslape de modo que la interacción entre segmentos adyacentes se resuelva considerando la fuerza distribuida (igual que si los segmentos son triangulares), pero las expresiones disponibles para evaluar esta contribución asumen que el receptor está muy cerca del plano del círculo, en consecuencia la superficie debe ser suave. Con segmentos triangulares no existe esta restricción y el campo cercano se evaluará adecuadamente en superficies con aristas.

4.3. Reciprocidad de funciones de Green en IBEM

Siendo las funciones de Green de desplazamiento $G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ y esfuerzo $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ el componente en i de la respuesta en el punto \mathbf{x} dada una fuerza puntual de amplitud unitaria en dirección j en el punto $\boldsymbol{\xi}$. El teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti [Aki & Richards, 2002] relaciona los elementos mecánicos al intercambiar las posi-

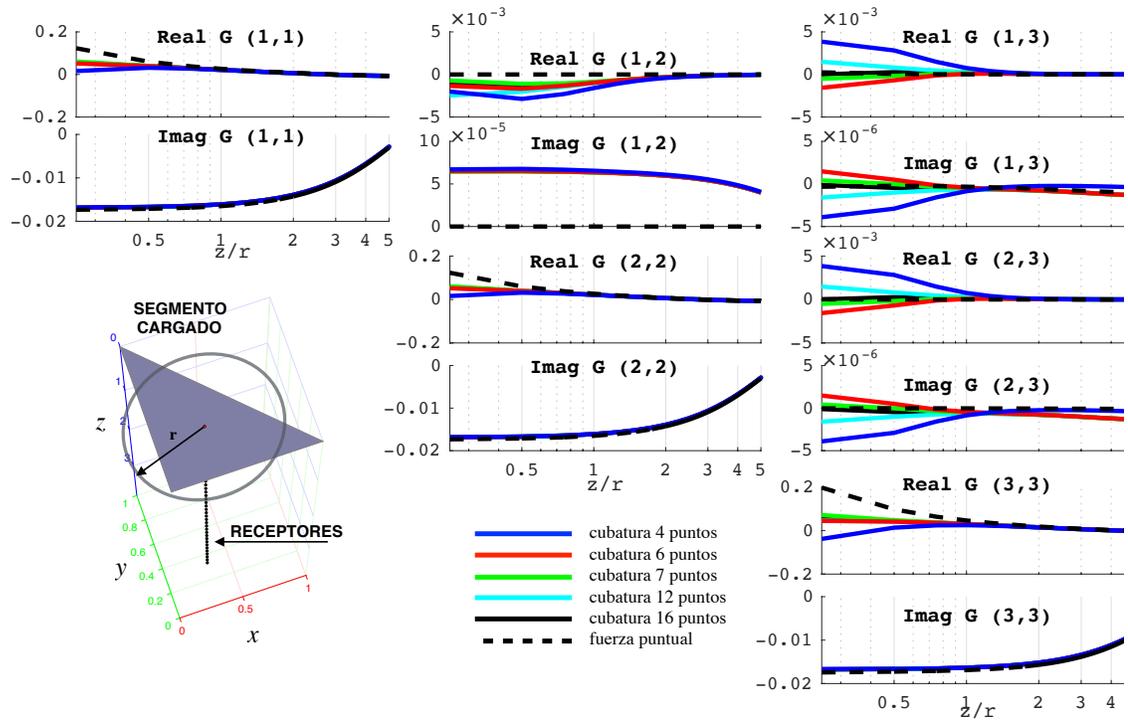


Figura 4.3: Parte real e imaginaria de los elementos del tensor G_{ij} en una línea de receptores ante un segmento triangular cargado uniformemente. Resultados normalizados para diferentes esquemas de cuadratura de Gauss (con línea continua) y considerando la fuerza puntual (línea segmentada). El diagrama muestra la posición del segmento, receptores y radio equivalente r .

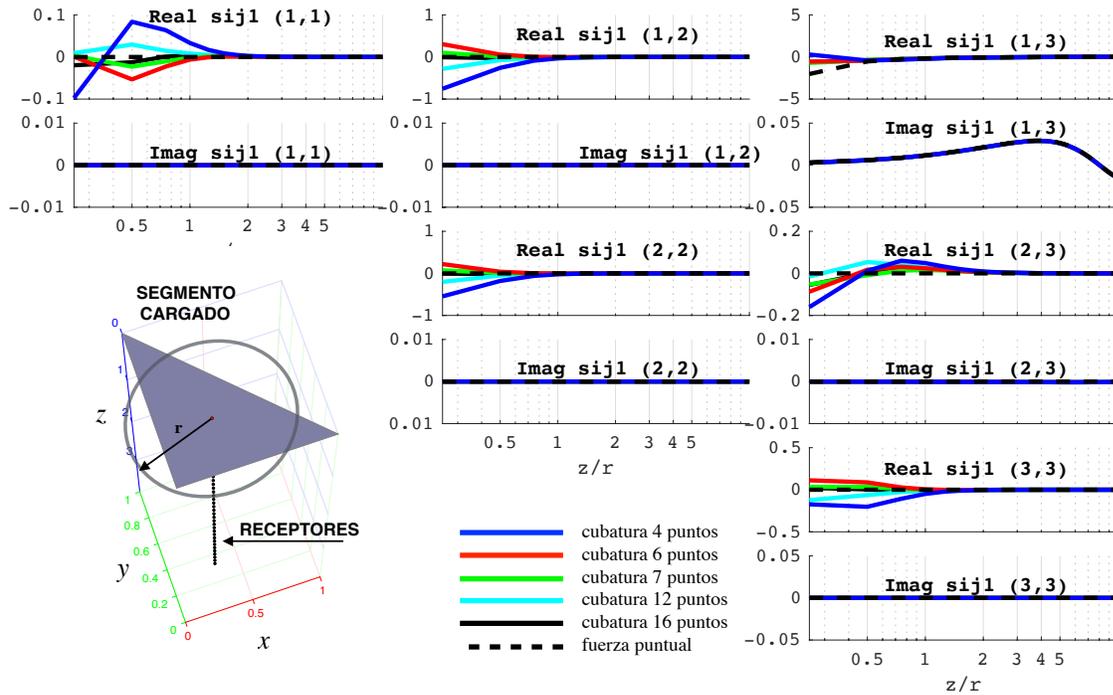


Figura 4.4: Igual que en la Figura 4.3 para el tensor de esfuerzos cuando la fuerza es en dirección x .

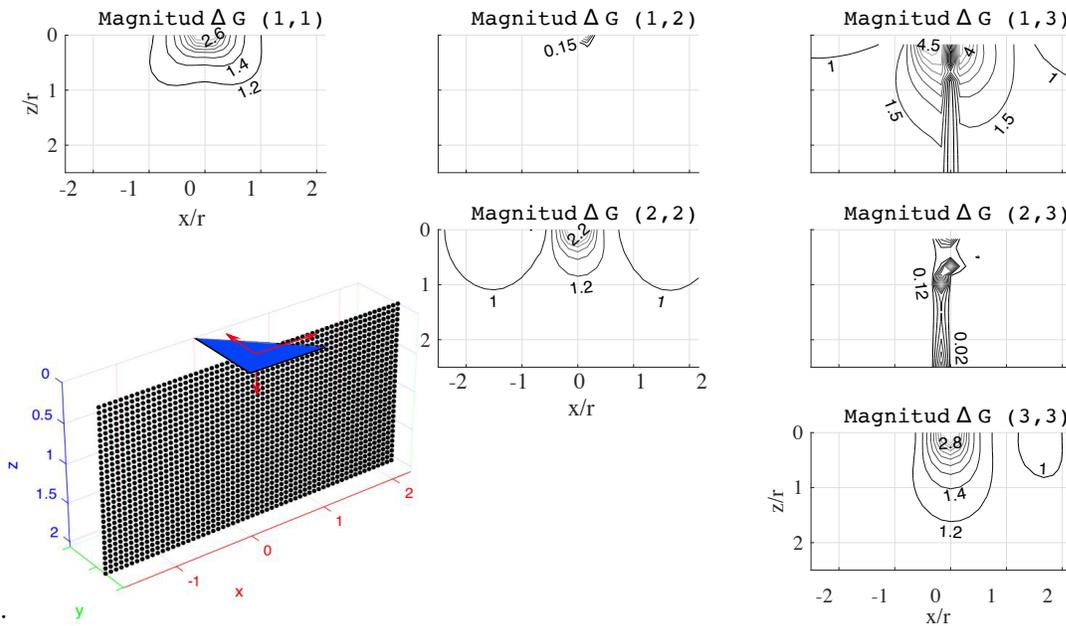


Figura 4.5: Amplitud del cociente entre fuerza distribuida en un segmento triangular y fuerza puntual. Resultados en el arreglo de receptores indicado con puntos en el diagrama de la geometría. La magnitud de los elementos fuera de la diagonal es del orden 1/1000 los de la diagonal

ciones de fuente y receptor. En un medio homogéneo infinito,

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_{ji}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \quad (4.3)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}), \quad (4.4)$$

permiten calcular casi la mitad de los términos en el sistema de ecuaciones de los métodos de elementos de contorno directo e indirecto. Creemos que esto es un procedimiento novedoso ya que no encontramos registro de que otras implementaciones basadas en BE aprovechen las implicaciones de este teorema. Note que, en la integral de superficie, la contribución de los segmentos cercanos se calcula aún con el procedimiento de integración numérica discutida en la sección 4.2.

Cuando el medio es un semiespacio estratificado u homogéneo, (4.3) es válida pero (4.4) solo se verifica cuando fuente y receptor están a la misma profundidad. Para evadir esta restricción, en el algoritmo del Cuadro 3.2 se propone que la profundidad de puntos de colocación y receptores se redondee hacia un valor común.

En la Figura 4.6 ilustramos el uso del teorema de reciprocidad de las funciones de Green en los métodos IBEM e IBEM-DWN. El mismo problema se ilustra para cada método, en la parte superior un diagrama de las fronteras donde δ_1 y δ_2 indican la condición de frontera libre y de continuidad de tracciones (T) y desplazamientos (G) respectivamente entre las regiones interior R y exterior E. Abajo a la izquierda se ilustran los términos distintos de cero en la matriz plateada por el método, donde cada renglón es un desarrollo de la condición de frontera donde cada término es un segmento de la frontera (columna). La matriz se colorea por bloques para ilustrar la porción de la matriz que debe calcularse con IBEM-DWN. A la derecha se ilustra de nuevo la matriz de condiciones de frontera pero esta vez se colorea con rojo los elementos que pueden obtenerse como el recíproco de las funciones de Green en los términos en azul. Note que con IBEM-DWN la reciprocidad en las tracciones puede aprovecharse sólo entre términos a la misma profundidad.

4.4. Truncamiento de la solución

El campo difractado calculado con métodos BEM e IBEM, puede aproximarse despreciando términos que contribuyen poco a la solución [Bouchon et al., 1995, Ortiz-Alemán et al., 1998]. Este último propone despreciar de antemano los términos más alejados que $\pi\eta/\epsilon N_b$, donde η es la frecuencia normalizada, ϵ es una fracción pequeña (0.01 a 0.05) de N_b la cantidad de elementos en la matriz. Esta regla puede aplicarse en el paso 1.1.2 del Cuadro 3.2 pero con ϵ más pequeño. En los resultados presentados en esta trabajo no se trunca la solución, pero se reconoce que para aplicaciones prácticas éste es un procedimiento imprescindible.

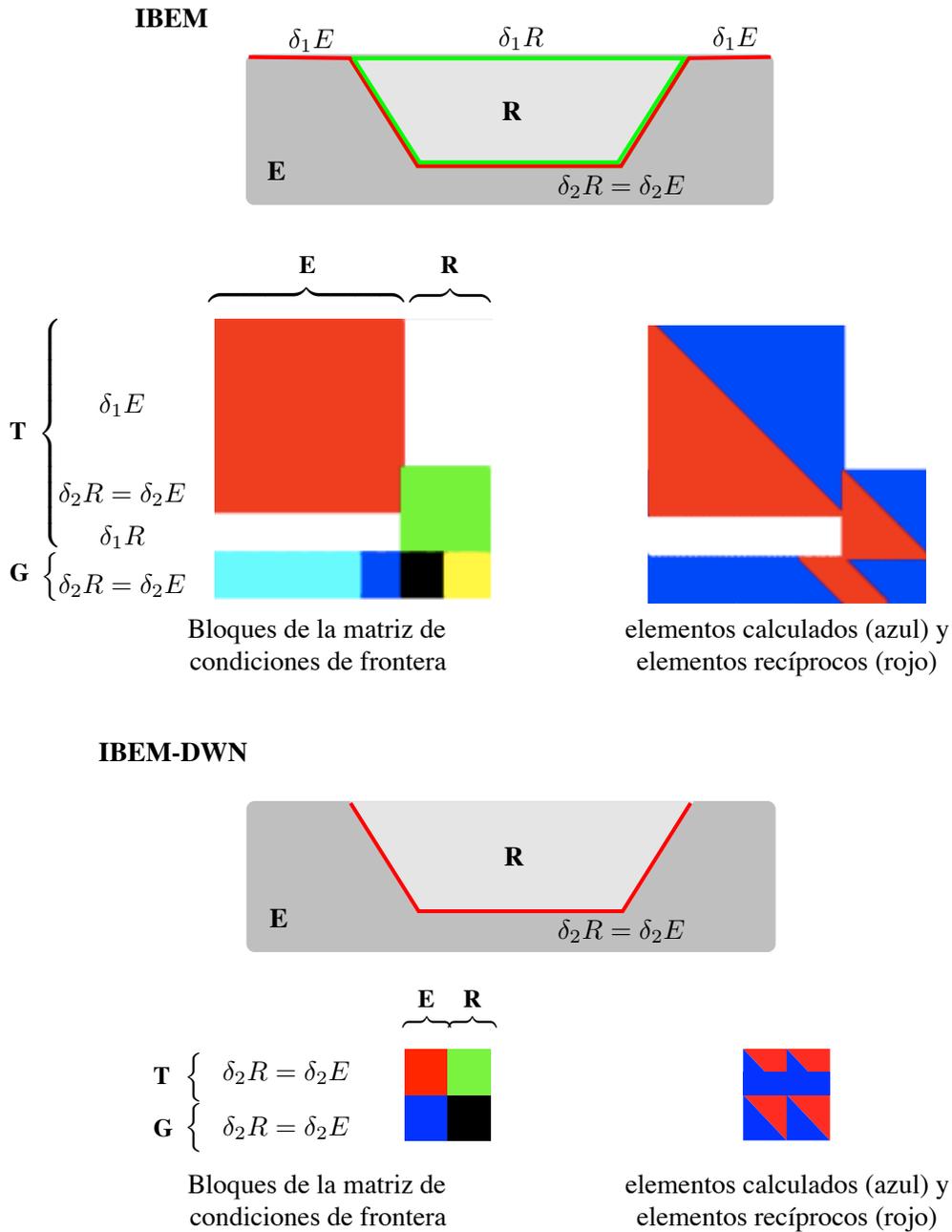


Figura 4.6: Uso del teorema de reciprocidad de las funciones de Green en el método IBEM e IBEM-DWN. El mismo problema se ilustra para cada método, en la parte superior un diagrama de las fronteras de cada modelo. Abajo a la izquierda se ilustran los términos distintos de cero en la matriz de condiciones de frontera. La matriz se colorea por bloques para ilustrar la porción de la frontera considerada con IBEM-DWN. A la derecha se ilustra de nuevo la matriz de condiciones de frontera pero esta vez se colorea con rojo los elementos que pueden obtenerse como el recíproco de las funciones de Green en los términos en azul.

4.5. Sintéticos y la técnica *zero-padding*

La transformación de las representaciones en el número de onda al dominio del espacio sigue las consideraciones del método DWN [Bouchon, 2003]. El paso de integración en el número de onda $dk = 2 * \pi/L$ depende de L , la periodicidad prescrita de las fuentes. La parte imaginaria de la frecuencia es $-\omega_i = -1.0 * \pi/t_{max}$ donde la ventana de tiempo de interés se hace coincidir con la duración de la señal en tiempo dado por $t_{max} = N_{frec}/f_{max}$.

Los sismogramas sintéticos se obtienen con transformada de Fourier y la técnica *zero-padding* para producir la señal en tiempo en N_Z muestras, con N_Z más grande que N_{frec} la cantidad de frecuencias calculadas. Esta técnica es de uso generalizado en el ámbito del procesamiento de señales pero el factor de escala de la transformación es raramente presentado en la literatura. Se propone un factor de escala para corregir la amplitud de los sintéticos, de forma que la amplitud sea independiente de N_Z . El procedimiento es:

- Con paso en frecuencia $df = f_{max}/(N_{frec} + 1)$, calcular $f(\omega)$ en $N_{frec} + 1$ frecuencias, incluida la frecuencia cero¹. Por ejemplo, $f(\omega) = P(\omega)G_{ij}(\omega, \mathbf{x})$ con P la función de amplitud.
- En un vector $f_Z(\omega)$ de longitud N_Z , los primeros $N_{frec} + 1$ elementos son $f(\omega)$ y los últimos $N_{frec} - 2$ son $f^*(\omega)$, donde el asterisco denota el complejo conjugado y ω se ordena en dirección descendente desde la posición N_{frec} a la posición 2. Los demás elementos de $f_Z(\omega)$ son cero. El tamaño del vector usado en este trabajo es $N_Z = 2 \times 10^{14}$.
- El paso en tiempo sin considerar *zero-padding* es $dt = 1/df/(2N_{frec} - 1)$. Se define el paso en tiempo de la señal con N_Z muestras como $dt_Z = 1/df/N_Z$ y el factor de escala por *zero-padding* como,

$$C_Z = dt * N_Z / (2N_{frec})^2, \quad (4.5)$$

donde N_Z juega el papel de factor de escala para el algoritmo iFFT.

- La señal en tiempo se obtiene con transformada inversa de Fourier de $f_Z(\omega)$, después se multiplica por C_Z .
- En el contexto del método DWN, la señal en tiempo se multiplica por $\exp(\omega_i t)$.

¹La frecuencia cero describe la respuesta estática. Por consideraciones numéricas estimamos el valor límite como $0.01df$

La técnica *zero-padding* incrementa artificialmente la frecuencia máxima considerada en la transformación al tiempo sin agregar información en el proceso. Las señales resultantes son muy suaves, pero pueden esconder los efectos de muestreo deficiente en la frecuencia. La frecuencia máxima y la cantidad de frecuencias son prescritas, por lo que siempre deben revisarse la respuesta en frecuencia antes de generar historiales en el tiempo sintéticos. La amplitud de los sintéticos corregidos por (4.5) es independiente de la cantidad de muestras de la señal en tiempo.

Capítulo 5

Verificación

Se verifican los resultados obtenidos con IBEM-DWN contra soluciones publicadas por otros autores. Los casos presentados en esta sección complementan los incluidos en Perton et al. [2016] que está disponible en el Anexo G.

5.1. Cañón semicircular

Varios ángulos de incidencia en semiespacio homogéneo

La difracción de ondas P, SV y de Rayleigh por una irregularidad topográfica semicircular en deformación plana en un semiespacio homogéneo e isótropo ha sido estudiada por Kawase [1988], Sánchez-Sesma & Campillo [1991], Wong [1982] entre otros. En la Figura 5.1 comparamos la respuesta obtenida con IBEM-DWN -en donde la función de Green incluye el efecto de la superficie libre del semiespacio- y los resultados obtenidos con la formulación de IBEM para medio homogéneo. Se resuelve dada incidencia de ondas P y SV en la frecuencia normalizada $\eta = \omega a / \pi \beta = 0.5$, donde a es el radio del cañón. El ángulo de incidencia es $\gamma = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ y 60° .

El ajuste es excelente en la mayoría de los puntos. En la porción vertical de la frontera se observan discrepancias que sugieren deficiencias de la sumatoria en el número de onda. A propósito, Sánchez-Sesma [1989] discute la hipótesis de Rayleigh y la exactitud de la representación integral. Por otra parte, la solución en el medio homogéneo mejora de reducirse el tamaño de los segmentos donde la superficie no es suave y la densidad de fuerzas (ϕ en (3.2)) varía con rapidez.

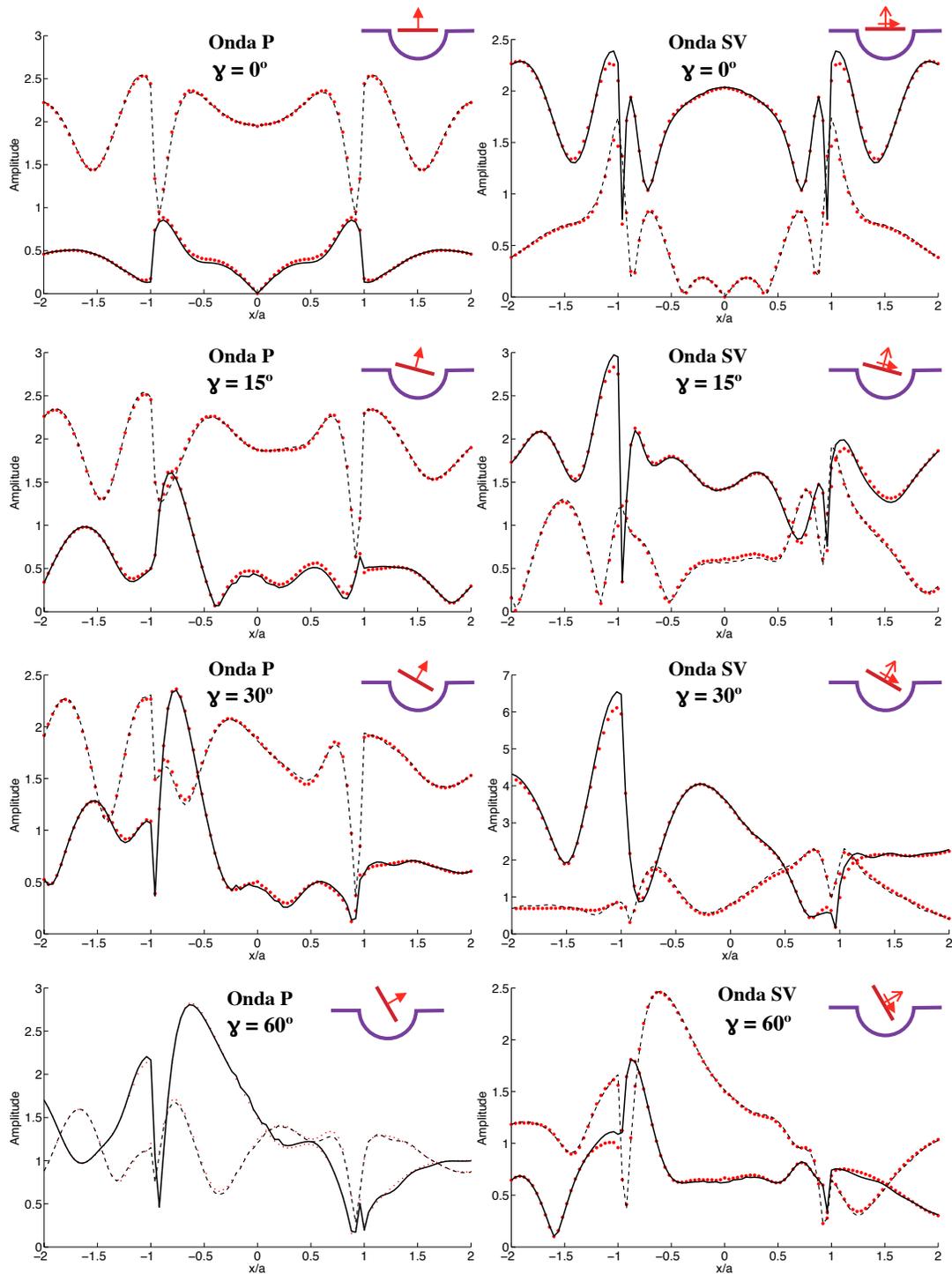


Figura 5.1: Desplazamiento en la superficie de un cañón semicircular ante incidencia de ondas P y SV obtenidos con IBEM-DWN. La relación de Poisson es $\nu = 1/3$ y la frecuencia normalizada $\eta = 0.5$. Las líneas sólidas y segmentadas corresponden al desplazamiento horizontal y vertical respectivamente. Con línea punteada se indican los resultados de la formulación homogénea de IBEM.

Semiespacio con 1 a 40 estratos de iguales propiedades

El semiespacio se considera estratificado hasta la profundidad $z = a/2$ como en la Figura 5.2a. Los materiales son iguales de forma que puede compararse con la solución en el semiespacio homogéneo obtenida con IBEM. La cantidad de estratos varía entre 1 y 40. El desplazamiento en la superficie se resolvió en la frecuencia normalizada $\eta = 0.5$ ante incidencia vertical de ondas P. Los resultados para todos los casos se sobreponen en la Figura 5.2b. El ajuste de todas las trazas es aceptable. El error se concentra en la parte plana y los vértices, lo que sugiere que está relacionado con la integración en el número de onda.

El tiempo de ejecución para resolver cada modelo se muestra en el gráfico de la Figura 5.2c. El tiempo reportado incluye la operación de mallado de la superficie. Se observa que resolver el caso con 30 estratos requiere alrededor del triple de tiempo que para un estrato.

5.2. Modelos con simetría axial en 3D

La difracción de una onda plana P que incide verticalmente en un semiespacio con una colina descrita por una campana de Gauss fue resuelto por Sánchez-Sesma [1983] usando un método de colocación que emplea series de funciones de onda. El modelo considera coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ y se resolvió en la frecuencia normalizada $\eta_q = 0.5$, es decir con ondas P de longitud de onda igual a dos veces el diámetro en la base. El modelo para IBEM-DWN se vale del semiespacio construido con la representación integral en el número de onda y una inclusión superficial de material homogéneo. La extensión de la colina se trunca y el área de contacto entre ambos medios -donde se establecen condiciones de continuidad- se proyecta bajo la superficie del semiespacio, de forma que la inclusión tenga bordes suaves. Lo cual de hecho es un supuesto de la representación integral en IBEM.

Un buen indicador de que la superficie es suficientemente suave y el resultado es correcto, se encuentra en la amplitud relativa de las densidades de fuerza. ϕ cerca de aristas demasiado pronunciadas tiene amplitud significativamente más grande que en el resto de la superficie. La discretización del modelo puede proponerse de distinta forma y producir resultados consistentes siempre y cuando la geometría sea suave y tenga suficiente densidad de puntos.

La geometría se muestra en la Figura 5.3 junto con una comparación de los componentes de desplazamiento no nulos en una línea de receptores superficial. El acuerdo del desplazamiento vertical es adecuado en todos los puntos, pero es mejor en los receptores sobre la inclusión (colina). En cambio, el desplazamiento horizontal

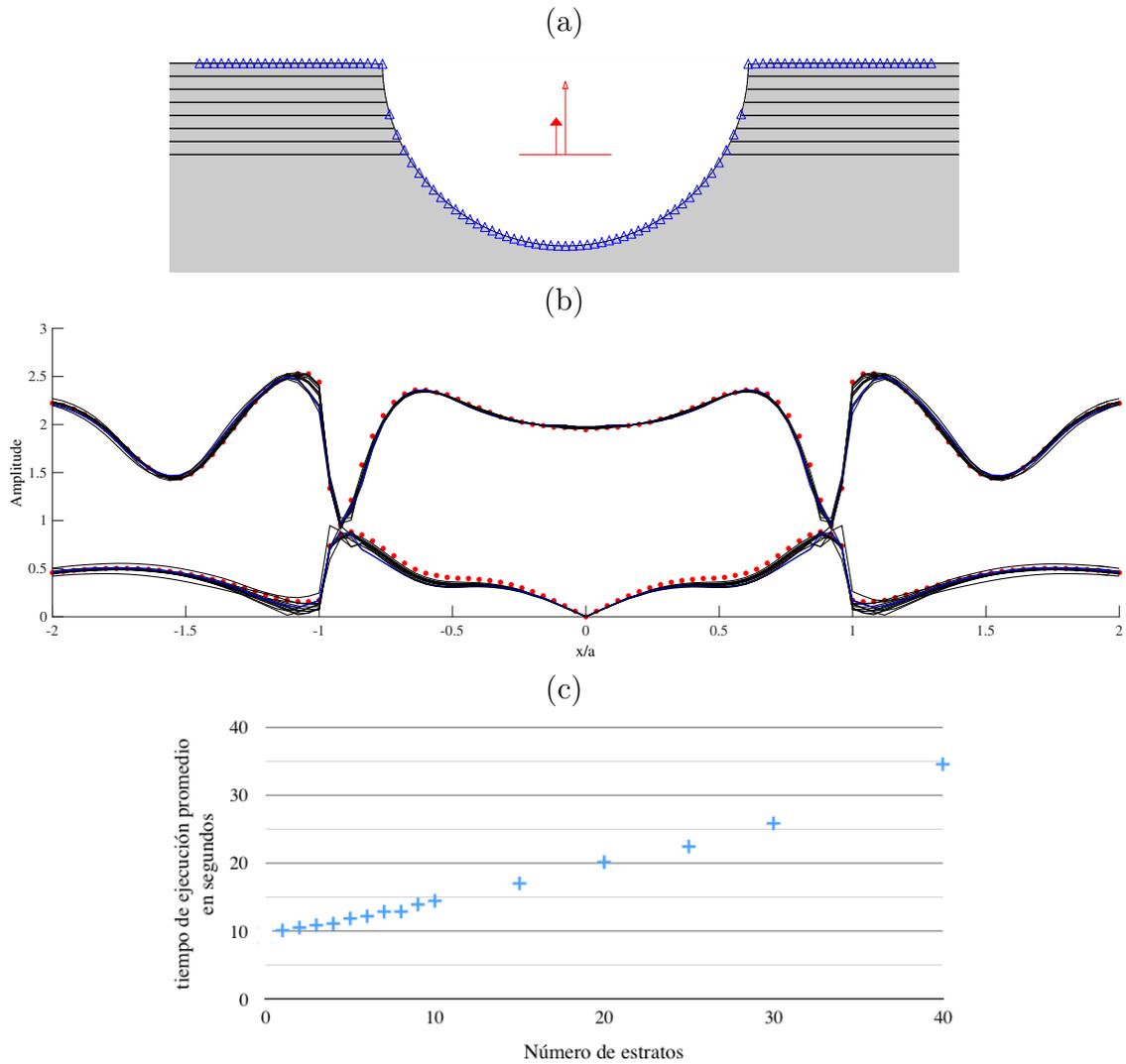


Figura 5.2: (a) Cañón semicircular de radio a ante incidencia vertical de ondas P. El semiespacio es estratificado hasta $z = a/2$. Las propiedades de los estratos son iguales a las del semiespacio. La posición de los receptores se indica con triángulos azules. (b) Desplazamiento calculado con IBEM-DWN. Con línea continua los resultados para 1 a 7, 15, 20, 25, 30, 40 estratos entre $z = 0$ y $z = a/2$. Con línea punteada los resultados para semiespacio homogéneo obtenidos con IBEM. Las trazas con ordenadas mayores corresponde al desplazamiento vertical, las trazas con ordenadas menores a desplazamiento horizontal. (c) Tiempo de ejecución para cada modelo.

es aproximado burdamente en todos.

Ahora considere el valle aluvial semiesférico estudiado también por Sánchez-Sesma [1983]. El coeficiente de Poisson en el medio exterior (E) es $\nu_E = 0.25$, en el medio interior (R) es $\nu_R = 0.3$, el cociente del módulo de cortante es $\mu_R/\mu_E = 0.3$ y la densidad de masa $\rho_R/\rho_E = 0.6$ IBEM-DWN admite que los medios exterior e interior se representen como material homogéneo con condiciones de frontera libre impuestas por puntos de colocación o como un semiespacio representado con el método DWN En la Figura 5.4 se comparan los resultados de la solución con series y las cuatro combinaciones de material homogéneo (homog) y semiespacio (dwn). La discretización soporta hasta 10 puntos por longitud de onda, con menos elementos no se representa bien la semiesfera. Los resultados de IBEM (puntos rojos) aproximan la solución de series excepto en la interfaz y en $x/a > 2.0$ Los tres casos de IBEM-DWN reproducen la mayoría de la física del problema excepto en la interfaz. El mayor error dentro del valle lo da E-homogéneo R-dwn, que a su vez da el menor error en la interfaz. E-dwn R-homogéneo y E-dwn R-dwn producen los mejores resultados en general. Ambos casos son de interés para aplicaciones en interacción suelo estructura e interpretación geofísica.

5.3. Valle aluvial 3D con geometría irregular

La interfaz entre valle y semiespacio del modelo con geometría irregular estudiado por Sánchez-Sesma & Luzón [1995] también llamado *croissant* o *moon-valley* se describe por

$$z(x, y) = h(R^2 - b^2) \left[1 - \frac{2a(a - x)}{R^2} \right], \quad (5.1)$$

$$R = \sqrt{(x - a)^2 + y^2},$$

cuando $\sqrt{x^2 + y^2} \leq a$, donde $a = 4$ km es el radio exterior, $b = 0.7a$, $h = 0.4/a$. Las propiedades mecánicas se indican en el Cuadro 5.1. Comparamos los resultados originales de Sánchez-Sesma & Luzón [1995] e IBEM-DWN donde la solución fundamental en el valle y semiespacio incluye la superficie libre. La discretización de la interfaz del valle soporta hasta 6 puntos por longitud de onda. La posición de interfaz y dos líneas de receptores se muestran en la Figura 5.5. En las Figuras 5.6 y 5.7 se traza el módulo de la amplitud del desplazamiento ante incidencia de ondas planas P a 30 grados de la vertical y azimuth cero. Se resolvió en las frecuencias normalizadas $\eta = \omega a / \pi \beta_E = 1$ y 2 respectivamente, donde β_E es la velocidad de las ondas S en el

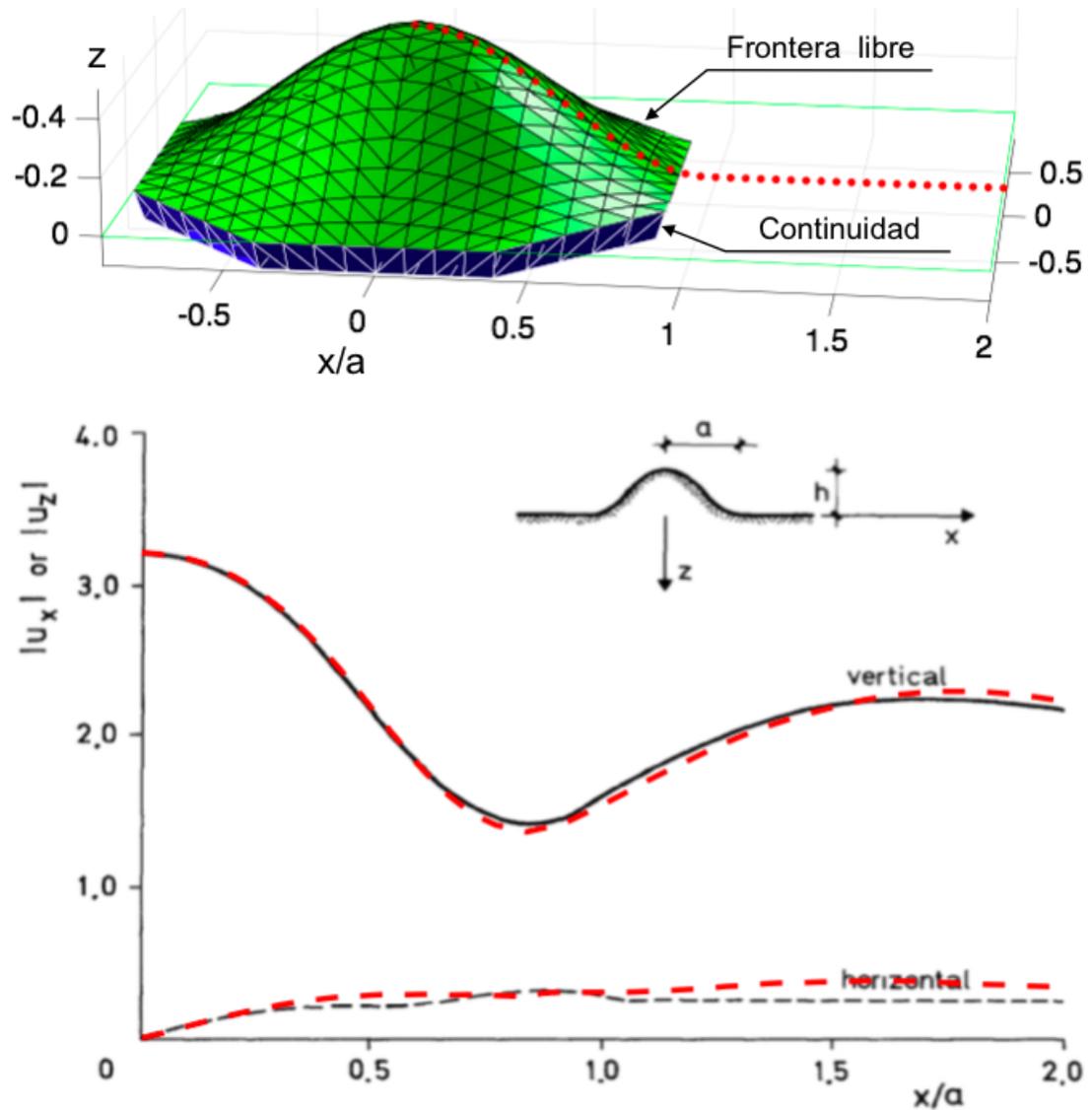


Figura 5.3: Colina axisimétrica modelada como una inclusión hecha de dos superficies. En color azul la frontera donde se establece continuidad con un semiespacio y en color verde la frontera libre. Los receptores están indicados con puntos rojos. En la gráfica, la comparación del desplazamiento horizontal y vertical ante incidencia vertical de onda plana P para la frecuencia normalizada $\eta_q = 0.5$. Resultados de Sánchez-Sesma [1983] en líneas color negro y IBEM-DWN con líneas rojas segmentadas.

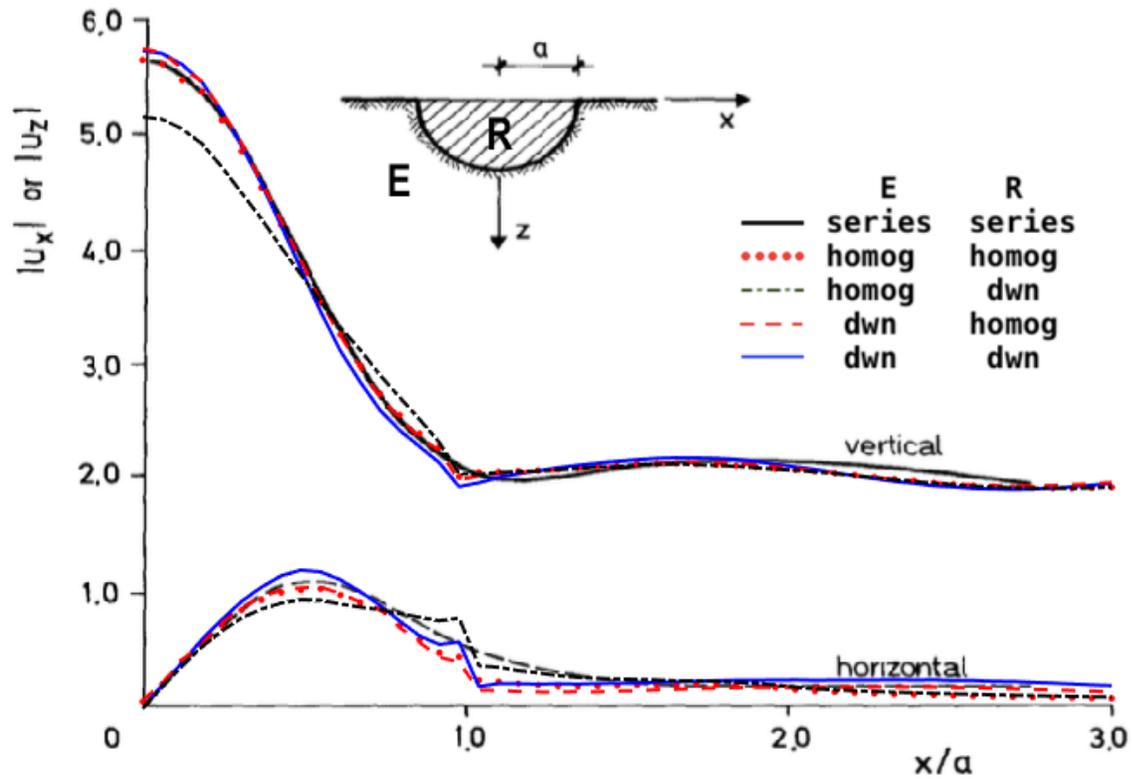


Figura 5.4: Valle semiesférico ante incidencia vertical de onda P estudiado por Sánchez-Sesma [1983] con series de funciones de onda para la frecuencia normalizada $\eta_q = 0.5$. Se sobreponen resultados obtenidos con IBEM (puntos) e IBEM-DWN si medio exterior (E) e interior (R) son de material homogéneo y frontera libre impuesta por colocación (homog) o un un semiespacio representado con el método DWN.

Cuadro 5.1: Propiedades mecánicas de los materiales

	Valle	Semiespacio
α km/s	2.08	3.46
β km/s	1	2
ν	0.35	0.25
ρ ton/m ³	0.8	1
Q	100	1000

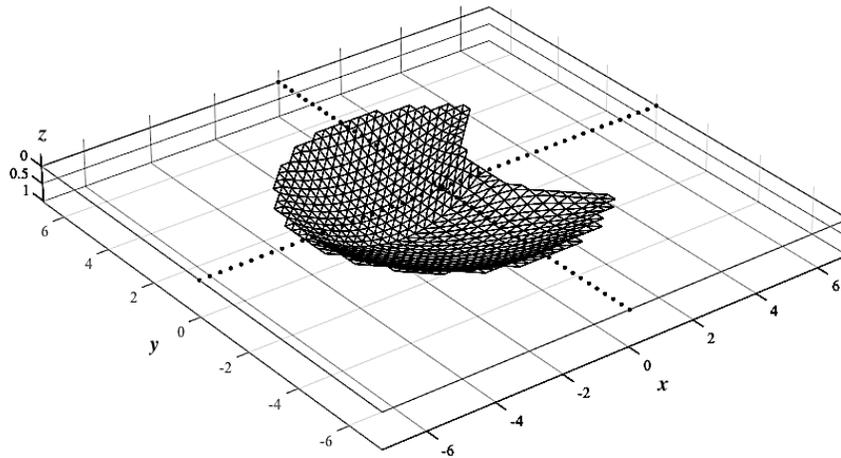


Figura 5.5: Geometría de la interfaz de un valle aluvial irregular descrito por (5.1). Se muestran los segmentos de integración triangulares y con puntos se indican dos líneas de receptores en la superficie entre $-1.82a$ y $1.7a$.

semiespacio. La longitud de onda de las ondas S dentro del valle es a y $a/2$ respectivamente. El tiempo de cálculo entre estos dos modelos se incremento x10 dado que la cantidad de elementos de contorno se duplica. En ambas frecuencias se observa clara similitud entre resultados de IBEM e IBEM-DWN, excepto en la proximidad de la interfaz. En esta región IBEM-DWN aproxima mejor la continuidad de los elementos mecánicos a cada lado de la frontera. En la práctica esta discontinuidad se toma como el promedio de los puntos a cada lado.

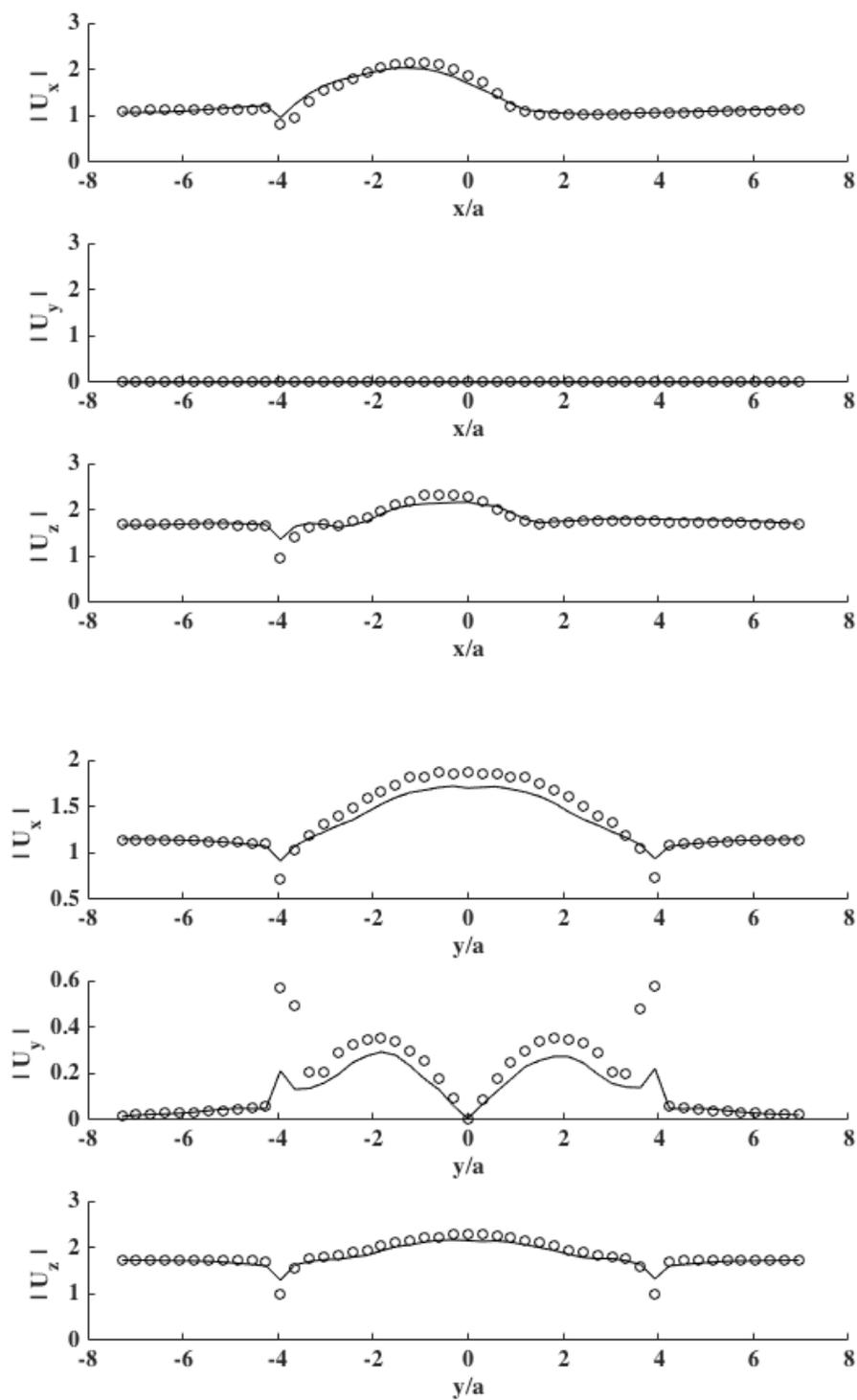


Figura 5.6: Desplazamiento en la superficie de valle con geometría irregular ante onda plana P a 30° en la frecuencia normalizada $\eta a = 1.0$ Resultados de Sánchez-Sesma & Luzón [1995] con círculos y de IBEM-DWN con líneas.

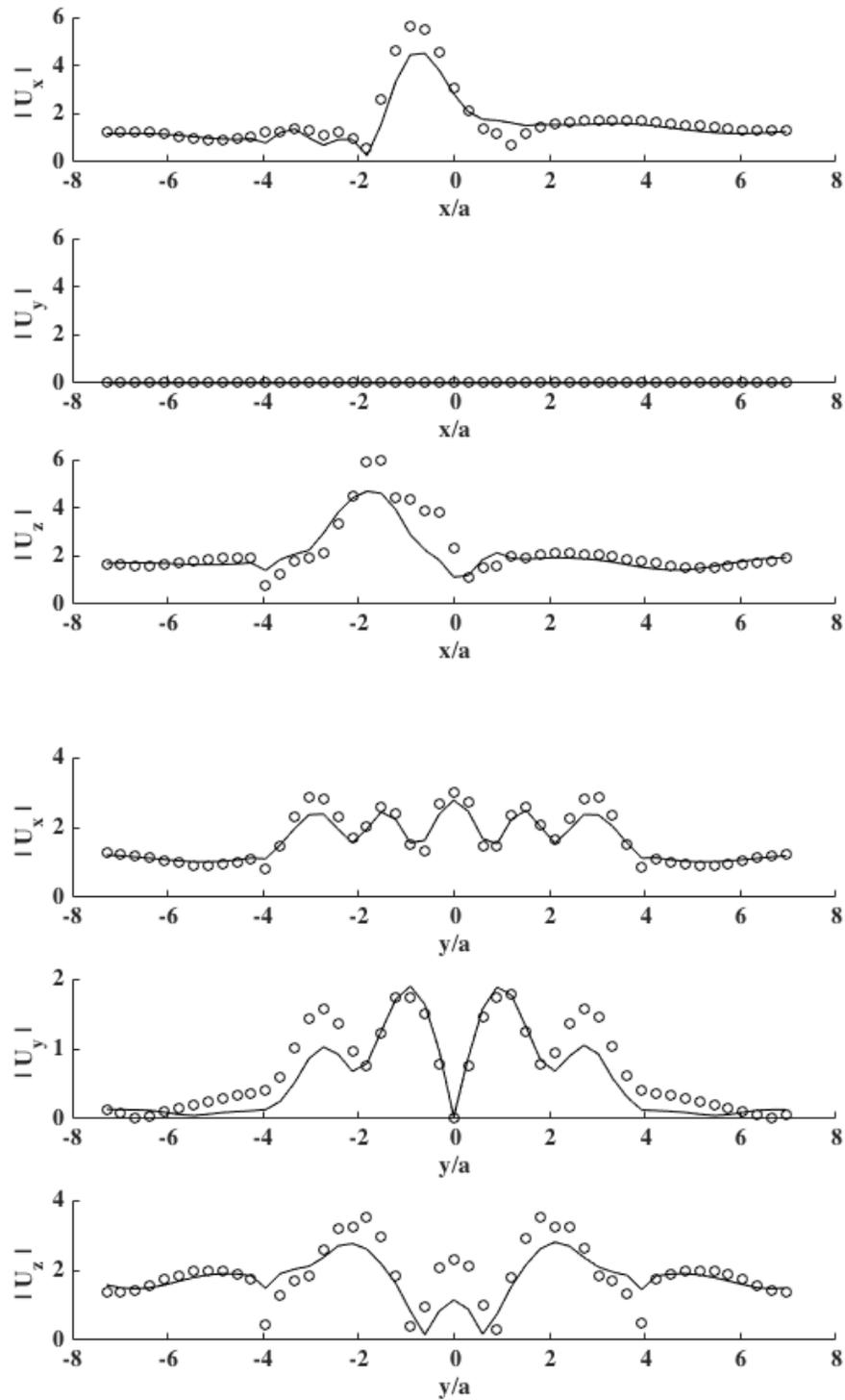


Figura 5.7: Desplazamiento en la superficie de valle con geometría irregular ante onda plana P a 30° en la frecuencia normalizada $\eta a = 2.0$ Resultados de Sánchez-Sesma & Luzón [1995] con círculos y de IBEM-DWN con líneas.

Capítulo 6

Efecto de la estratificación del suelo en túneles con revestimiento delgado usando un método IBEM-DWN-WFE

6.1. Introducción

Se estudia la interacción suelo-estructura de un túnel somero de geometría circular con revestimiento de espesor constante, en un semiespacio estratificado, ante la incidencia de ondas P y SV en un modelo bidimensional. El túnel puede cruzar los estratos, lo que permite analizar la concentración de esfuerzos en el revestimiento y en el suelo adyacente. Para modelar la difracción de ondas utilizamos elementos de contorno en la frontera suelo-túnel, para unir un dominio exterior donde la función de Green ya considera la difracción por los estratos, y el dominio interior donde la función de Green ya considera la cavidad del túnel. Respectivamente las funciones son representaciones integrales de la fuente en el número de onda horizontal y como series de funciones de onda cilíndricas.

Los túneles someros son un componente esencial de la infraestructura en ciudades y minas. Por lo general las previsiones por sismo no dominan el diseño final de túneles con revestimiento¹, en comparación con las estructuras superficiales los efectos inerciales son pequeños, en cambio el amortiguamiento es alto por la irradiación de energía al medio circundante. Cuando el túnel es rígido y el suelo suave, el

¹No así en túneles sin revestimiento excavados en roca o con revestimiento en contacto imperfecto con la roca Yi et al. [2014].

comportamiento estructural claramente depende de la interacción entre estos. Así lo sugieren modelos numéricos [Hashash et al., 2001] y las deformaciones unitarias en revestimiento y suelo observadas por Hashash et al. [1998], cuyas amplitudes fueron raramente iguales. La demanda en el túnel puede amplificarse por el efecto de la superficie libre y estratos suaves, a pesar de que las longitudes de onda dominantes suelen ser decenas de veces mayores que el diámetro del túnel. Konagai et al. [2005] y Uenishi [2012] atribuyen los daños observados en tramos del túnel a poca distancia del epicentro, a la difracción de ondas sísmicas de cuerpo. Este último sugiere que ondas P de alta frecuencia y poca amplitud explican las fallas por tensión en la junta de losa inferior (cubeta), que no se observan en la clave de un túnel tipo NATM (*New Austrian Tunneling Method*). Uenishi & Sakurai [2000] atribuyen la falla de columnas en una estación del subterráneo a la resonancia en una banda de frecuencia estrecha. Sánchez-Merino et al. [2009] modelaron el comportamiento longitudinal de túneles ante la incidencia de ondas de superficie y dedujeron expresiones para los elementos mecánicos.

Los túneles circulares con revestimiento primario a base de dovelas prefabricadas utilizan juntas de material elástico. La posición de las juntas se traslapa entre secciones consecutivas para evitar articulaciones [Aguilar Pérez et al., 2011, Blom, 2002, Lutikholt, 2007]. Se espera que el suelo circundante ofrezca apoyo al revestimiento del túnel y éste trabaje siempre en compresión. Subestimar el apoyo podría derivar en deformaciones desfavorables en las juntas. Además, superado un umbral de deformación límite, no existe mecanismo para recuperar la forma original. Los casos de carga reportados en la literatura son estáticos y se concentran en la etapa de perforación con máquina tuneladora; la distribución de cargas laterales es uniforme ya que se desprecia cualquier efecto de la curvatura del frente de onda² y la estratificación.

El efecto del paso de ondas sísmicas en túneles con revestimiento fue estudiado por Mow & Pao [1971], Pao & Mow [1973] con expansiones de funciones de ondas, todavía usadas en investigaciones recientes: Akhlaghi & Nikkar [2014], Uenishi [2012], Xu et al. [2014], Yi et al. [2014]. Este último también resolvió con diferencias finitas para estudiar la distorsión no lineal dada la incidencia vertical de ondas SV, de los resultados concluye que el método analítico (elástico) sobrestima la respuesta. Kourtzis et al. [2014] describen como permitir deslizamiento entre túnel y revestimiento reduce significativamente la demanda por ondas sísmicas SV. El parámetro de interés para evaluar la concentración de esfuerzo es el esfuerzo toroidal o circunferencial³

²La curvatura del frente de onda es relevante en los análisis que consideran la interacción entre túneles paralelos Moore & Guan [1996] y ante vibraciones por explosión Mow & Pao [1971], Yi et al. [2010].

³Referido como *hoop stress* en la literatura en inglés.

que conduce a flexo compresión en el revestimiento. La opinión aceptada es que en túneles con y sin revestimiento las ondas SV producen amplificaciones de esfuerzo significativas, cuando las relaciones entre longitud de onda y diámetro (λ_β/d) son bajas (frecuencias altas); para relaciones λ_α/d grandes (frecuencias bajas) las onda P producen mayores concentraciones de esfuerzo. La incidencia realista por sismo conlleva este último caso.

Stamos & Beskos [1996] utilizaron BEM para estudiar las respuesta elástica de un túnel de sección constante en un semiespacio ante incidencia oblicua de ondas de cuerpo y superficie. Su formulación puede interpretarse como un modelo 2.5D. Hatzigeorgiou & Beskos [2010] utilizaron un modelo inelástico, tridimensional, dinámico, de elementos finitos del que concluyen que el efecto del revestimiento es despreciable en túneles en roca. Katebi et al. [2015] utilizaron un modelo similar pero considerando estratos poroelásticos y sobrecarga estática. Encontraron que de considerar estratos suaves las cargas en el revestimiento aumentan pero el efecto es menos significativo si el túnel es profundo.

Para considerar la presencia de agua en las formulaciones visco-elásticas se asigna módulo de Poisson $\nu \approx 0.499$ a suelos saturados (es decir que la relación entre las ondas de presión y de cortante es amplísima), pero para algunas aplicaciones geotécnicas (como el diseño de la subestructura de trenes de alta velocidad o el aislamiento de vibración en carreteras y maquinarias) es importante que el modelo reproduzca la presión tomada por la fase líquida y la fricción entre esqueleto y líquido. Los efectos más notorios de esta interacción son amortiguamiento fuerte cerca de la fuente y aparición de una onda P secundaria. Para modelar medios poroelásticos, los trabajos basados en elementos finitos suministran elementos tipo presión de poro (*poro pressure elements*) pero los trabajos basados en métodos de elementos de contorno estaban limitados a la función de Green para medios poroelásticos bidimensional o en semiespacio homogéneo. Recientemente Zheng et al. [2013] y otros, han propuesto funciones de Green en tres dimensiones para el semiespacio con estratos planos poroelásticos. Estas formulaciones podrían acoplarse al IBEM-DWN o FE-BEM, no obstante los ejemplos que presento se limitan a casos en los que el nivel de aguas freáticas es más profundo que la estructura o bien para el fenómeno de interés es válido representarlos con un coeficiente de Poisson alto.

Una suposición recurrente en el análisis sísmico de túneles es que el túnel es profundo y los efectos de la superficie pueden despreciarse. Para túneles someros la mayoría de los modelos se resuelven con métodos de dominio y en algunos casos con soluciones basadas en la superposición de ondas planas. El método que proponemos está basado en elementos de frontera y puede considerar que el túnel es somero, cruza los estratos y el revestimiento es delgado. Aunque no lo revisamos aquí, la

formulación también admite que la excitación provenga de vehículos en el túnel y que el medio exterior contenga difractores como edificios, otros túneles e irregularidades topográficas.

Es práctica común incrementar el espesor del revestimiento y suministrar una zona de mejoramiento por inyección de material cementante en el suelo próximo a un cambio de rigidez en la estructura, p. ej. en la conexión túnel-estación o túnel-lumbrera, también cuando dos túneles son cercanos. La transición entre dos tipos de suelo a lo largo del túnel podría requerir precauciones similares. Pero se sabe poco del efecto que puede tener esto en el comportamiento dinámico de túneles flexibles. Si la transición es brusca surgen dos escenarios de interés: Concentración de esfuerzo cortante en las paredes en contacto con un estrato suave e incremento en momentos flexionantes a lo largo del tramo en suelo blando. En este trabajo investigamos estas dos configuraciones.

Un método de análisis robusto para este problema es la formulación indirecta del método de elementos de frontera (IBEM) donde las funciones que gobiernan el comportamiento a cada lado de las fronteras se proveen tales que el costo numérico se minimice (formulación IBEM-DWN para considerar un semiespacio estratificado con inclusiones homogéneas en este caso el revestimiento del túnel). No obstante el espesor del revestimiento -relativamente delgado- y la cavidad misma asoman dos problemas:

1) Las funciones de Green usadas en la representación integral del campo difractado (IBEM) se resuelven para fuentes y receptores demasiado cercanos para que el esquema de integración numérica de la fuente sea preciso. En consecuencia las funciones son singulares en especial en frecuencias bajas que si son de interés para la respuesta total.

2) En elementos de contorno los modelos con un hueco (el llamado problema exterior) están acoplados con la solución para el sólido que llenaría dicho hueco (el llamado problema interior). Esto en parte porque la representación integral del campo difractado es similar entre ambos casos. Como consecuencia, la respuesta en el medio exterior incluye las resonancias del problema interior. La identificación y mitigación de frecuencias espurias es particular importancia en alta frecuencia. En la banda de interés para obras civiles también pueden aparecer frecuencias espurias pero se pueden a) retirar manualmente, b) o bien mitigarse al repartir espacialmente el error que producen ⁴.

⁴Para ello la representación integral de la fuente se replantea para incluir más puntos de colocación que fuentes, tal que el sistema de ecuaciones resultante esté sobredeterminado. La solución por mínimos cuadrados es el conjunto de densidades de fuerza que minimiza el error del modelo al valor en los puntos de colocación

Una alternativa para evitar ambas complicaciones es incorporar una función de Green que ya considere el efecto de una cavidad pero sin padecer de frecuencias espurias. Para ello utilizamos el método de expansión de funciones de onda que se describe a continuación.

6.2. Método IBEM-DWN-WFE

Los métodos de elementos de contorno son idóneos para desarrollar formulaciones híbridas multidominio. El IBEM es después de todo un método de colocación donde las regiones unidas pueden ser homogéneas o heterogéneas (formulación IBEM-DWN) con tan solo modificar la función de Green. Ahora incorporamos una solución analítica que considera la presencia de una cavidad circular. La solución se construye con el método de expansión de funciones de onda al cual nos referimos como WFE por sus siglas en inglés. El estudio de la difracción por cuerpos circulares puede rastrearse a las investigaciones de Lamb y Mie en 1900 y 1908 respectivamente, sobre la absorción de la luz en gases y medios traslúcidos, pero fueron Mow y Pao quienes en la década de 1960 lo popularizaron en ingeniería sísmica y geotecnia al estudiar la concentración dinámica de esfuerzos alrededor de difractores circulares, elípticos, parabólicos y esféricos. Sus investigaciones fueron de particular importancia en el análisis de las acciones por explosión en el revestimiento de instalaciones subterráneas. La representación en coordenadas cilíndricas o esféricas permite aplicar las condiciones de fronteras con facilidad y la expansión en serie del campo de ondas es análoga a la que usamos en el método del número de onda discreto (DWN), excepto que en lugar de sumar ondas planas con distintos ángulos, en WFE se suman frentes de onda curvos con distintas modulaciones ($n=0$ es un círculo, $n=1$ tiene dos lóbulos, $n=2$ tiene tres ...). Los procedimientos del WFE son comunes en el modelado de los patrones de irradiación de antenas y en el estudio del comportamiento de materiales a escala nanométrica.

Para resolver la difracción de ondas en un medio estratificado con un túnel circular con revestimiento de espesor constante el procedimiento que proponemos es:

- Establecer que existe continuidad de desplazamientos y tracciones entre el suelo y la pared exterior del túnel. A esta frontera denominamos Γ . El campo difractado se construye con la representación integral de las fuentes a cada lado de Γ considerando que,

el medio exterior es un semiespacio con estratos planos que puede resolverse con una representación integral en el número de onda horizontal, aquí llamada $G_{ij}^{(DWN)}$,

el medio interior a Γ adopta la función de Green para un espacio completo con una cavidad circular, $G_{ij}^{(WFE)}$. Esta función se calcula con el método WFE. El espacio entre Γ y la cavidad es el revestimiento del túnel.

- Incorporar la fuente a la condición de continuidad y encontrar la densidad de fuerza a cada lado de Γ que verifica las condiciones de frontera (método IBEM).
- El campo total en el receptor es la superposición de la incidencia de la fuente y el campo difractado construido a partir de las densidades de fuerza.

Note que Γ puede cruzar los estratos y adoptar cualquier forma, aquí asumimos que es circular de forma que el revestimiento es de espesor constante.

El llamado método IBEM-DWN-WFE consiste en aprovechar funciones de Green apropiadas para cada medio. Esta estrategia en algunos casos puede redundar en problemas de estabilidad numérica o implicar tareas adicionales que en total no significan reducción en el tiempo de cálculo. En nuestro caso el sistema de ecuaciones que resulta de las condiciones de frontera tiene diagonal pesada. Además, dado que la cara interna del revestimiento es implícita, (1) no hay aparición de frecuencias espurias por acoplamiento con el problema interior y (2) el revestimiento puede ser delgado. Con métodos puramente de colocación, el espesor del revestimiento está limitado a la distancia en que la solución se torna inestable para la fuerza distribuida en una de las caras y el punto de colocación más cercano en la cara opuesta.

Si la fuente está en el exterior, con la formulación indirecta del método de elementos de contorno [Sánchez-Sesma & Luzón, 1995], el campo de desplazamientos en el suelo es de la forma,

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})^{(i)} + \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{(DWN)} \phi(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_{\xi}, \quad (6.1)$$

y en el revestimiento,

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{(WFE)} \phi(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_{\xi}, \quad (6.2)$$

donde $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{(DWN)}$ se obtiene como se indica en la sección 3.4.1 y $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{(WFE)}$ con el procedimiento descrito a continuación.

6.3. Función de Green para la cavidad usando el método WFE

El problema de deformación plana dada una fuerza concentrada en un espacio completo de material elástico e isótropo con una cavidad circular fue abordado por

Cheng & Jahanshahi [1967] y luego por Mow & Pao [1971], Pao & Mow [1973]⁵ usando el método de expansión de funciones de onda (WFE por sus siglas en inglés). Ellos estudiaron la concentración dinámica de esfuerzos en la pared de túneles con y sin revestimiento, ante la incidencia de frentes de onda curvos (SH) y planos. Avilés (1981, 1985), Pérez-Ruiz et al. [2008] y [Xu et al., 2014, Yi et al., 2010, 2014] entre otros, han utilizado teoremas de adición para trasladar el origen del punto de aplicación de la fuente al centro del difractor. Siguiendo este procedimiento (en particular de Yi et al. [2014]) expresamos el campo de ondas como la superposición del campo incidente desde la fuente y las ondas difractadas por la cavidad.

A continuación se desarrolla el campo incidente y difractado, se establecen condiciones de frontera y se resuelve el campo total que constituye $G_{ij}^{(WFE)}$. Como verificación ofrecemos el análisis del campo de ondas del Apéndice C.

Campo incidente

En coordenadas $(\bar{r}, \bar{\theta})$ desde \bar{O} el campo de desplazamiento dada una fuerza puntual de amplitud armónica y dirección Θ de acuerdo a la Figura 6.1 es [Kausel, 2006],

$$\begin{aligned} U_{\bar{r}\Theta} &= \frac{1}{\mu}(\Psi + \chi) \cos(\bar{\theta} - \Theta), \\ U_{\bar{\theta}\Theta} &= \frac{1}{\mu}\Psi(-\sin(\bar{\theta} - \Theta)), \\ \Psi &= \frac{i}{4} \left[\frac{H_1^{(2)}(k\bar{r})}{k\bar{r}} - H_0^{(2)}(k\bar{r}) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{H_1^{(2)}(q\bar{r})}{q\bar{r}} \right] \\ \chi &= \frac{i}{4} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 H_2^{(2)}(q\bar{r}) - H_2^{(2)}(k\bar{r}) \right], \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde $i = \sqrt{-1}$, μ es el módulo de cortante, α , β , $q = \omega/\alpha$, $k = \omega/\beta$ son las velocidades de propagación y números de onda para presión y cortante. $H_\nu^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de segunda especie en orden ν .

⁵Mow & Pao [1971] discuten brevemente este problema y proponen potenciales de desplazamiento para el campo incidente, pero creemos que estas expresiones contienen un error tipográfico que no logramos corregir.

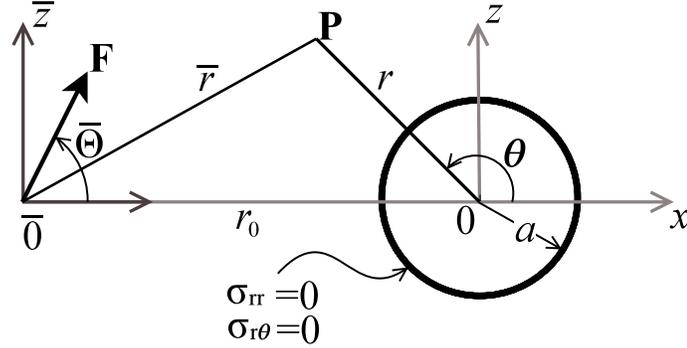


Figura 6.1: Cavidad circular de radio a centrada en O y fuerza puntual de amplitud armónica $F \exp(-i\omega t)$ aplicada en $\bar{O} = (r_0, \pi)$ en dirección con ángulo Θ desde el eje x . Receptor en $P = (r, \theta)$.

Un juego de potenciales de desplazamiento que satisface (6.3) es,

$$\phi^{(i)}(\bar{r}, \bar{\theta}) = \frac{-i}{4\rho\omega\alpha} H_1^{(2)}(q\bar{r}) \mathbf{t}(\bar{\theta}) e^{-i\omega t}, \quad (6.4)$$

$$\psi^{(i)}(\bar{r}, \bar{\theta}) = \frac{-i}{4\rho\omega\beta} H_1^{(2)}(k\bar{r}) \mathbf{t}(\bar{\theta}) e^{-i\omega t}, \quad (6.5)$$

para las ondas P y S respectivamente, donde ω es la frecuencia circular y \mathbf{t} depende de la dirección de la fuerza:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } \Theta = 0 & \text{Si } \Theta = \pi/2 \\ \mathbf{t} = \begin{cases} \cos(\cdot) & \text{en } \phi, \\ \sin(\cdot) & \text{en } \psi, \end{cases} & \mathbf{t} = \begin{cases} \sin(\cdot) & \text{en } \phi, \\ -\cos(\cdot) & \text{en } \psi. \end{cases} \end{array}$$

Para obtener el campo de desplazamiento total es necesario transformar las coordenadas de la incidencia desde \bar{O} a O . Los sistemas están separados r_0 como se muestra en la Figura 6.1. El teorema Graf para la adición de las funciones de Bessel se aplica en dos casos [Abramowitz & Stegun, 1964]:

$$H_\nu^{(2)}(\kappa\bar{r})_{\sin}^{\cos}(\nu\bar{\theta}) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\nu+n}^{(2)}(\kappa r) J_n(\kappa r_0)_{\sin}^{\cos}(n\theta) & \text{si } r \geq |r_0 \exp(\pm i\theta)| \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{\nu+n}^{(2)}(\kappa r_0) J_n(\kappa r)_{\sin}^{\cos}(n\theta) & \text{si } r_0 \geq |r \exp(\pm i\theta)| \end{cases} \quad (6.6)$$

donde $J_n(\cdot)$ son funciones de Bessel de primera especie en orden n y κ es un número de onda.

El primer caso de (6.6) es adecuado para receptores lejanos a O . El segundo caso de (6.6) es adecuado para receptores en la vecindad de la cavidad y para establecer condiciones de frontera. Así que (6.4) y (6.5) pueden escribirse como,

$$\phi^{(i)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C^{(\phi)} J_n(qr) \mathbf{t}(n\theta) e^{-i\omega t}, \quad (6.7)$$

$$\psi^{(i)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C^{(\psi)} J_n(kr) \mathbf{t}(n\theta) e^{-i\omega t}, \quad (6.8)$$

con,

$$C^{(\phi)} = \frac{-i}{4\rho\omega\alpha} \left(\frac{\epsilon_n}{2} \right) \left(H_{1+n}^{(2)}(qr_0) \pm (-1)^n H_{1-n}^{(2)}(qr_0) \right), \quad (6.9)$$

$$C^{(\psi)} = \frac{-i}{4\rho\omega\beta} \left(\frac{\epsilon_n}{2} \right) \left(H_{1+n}^{(2)}(kr_0) \pm (-1)^n H_{1-n}^{(2)}(kr_0) \right), \quad (6.10)$$

donde el coeficiente de Newmann es $\epsilon_0 = 1$ y $\epsilon_n = 2$ para $n \geq 1$. El signo del segundo término es $+$ o $-$ si $\mathbf{t}(\cdot)$ es $\cos(\cdot)$ o $\sin(\cdot)$ respectivamente.

Campo difractado

Las dos ondas difractadas por una frontera circular en coordenadas (r, θ) respecto al punto O son,

$$\phi^{(d)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n^{(2)}(qr) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (n\theta) e^{-i\omega t}, \quad (6.11)$$

$$\psi^{(d)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(2)}(kr) \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} (n\theta) e^{-i\omega t}, \quad (6.12)$$

donde A_n y B_n son los coeficientes de la expansión de funciones de onda y $H_n^{(2)}(\kappa r)$ es una función de Hankel de segunda especie en orden n . En este contexto, la función de segunda especie modela propagación hacia afuera. La función circular corresponde al caso de incidencia por fuerza horizontal y vertical resp.

Campo total

El campo total es la superposición del campo incidente en (6.7) y (6.8) y el campo difractado (6.11), (6.12) orientado tal que las funciones circulares empatan.

En general:

$$\begin{aligned}\phi &= \phi^{(i)} + \phi^{(d)}, \\ \psi &= \psi^{(i)} + \psi^{(d)}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

La relación entre potenciales de desplazamiento y el desplazamiento y esfuerzo es:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right]; \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \right]; \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left[2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] \right]; \\ u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r},\end{aligned}$$

donde el operador de Laplace en coordenadas polares,

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2},$$

es la dilatación. Los esfuerzos en el medio (espacio completo) que representa el revestimiento del túnel son:

$$\sigma_{rr} = 2\mu/r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[C^{(\phi)} \mathbf{e}_{11}^{(1)} + C^{(\psi)} \mathbf{e}_{12}^{(1)} + A_n \mathbf{e}_{11}^{(4)} + B_n \mathbf{e}_{12}^{(4)} \right] *_{\sin}^{\cos} (n\theta),\tag{6.14}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\mu/r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[C^{(\phi)} \mathbf{e}_{21}^{(1)} + C^{(\psi)} \mathbf{e}_{22}^{(1)} + A_n \mathbf{e}_{21}^{(4)} + B_n \mathbf{e}_{22}^{(4)} \right] *_{\sin}^{\cos} (n\theta),\tag{6.15}$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu/r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[C^{(\phi)} \mathbf{e}_{41}^{(1)} + C^{(\psi)} \mathbf{e}_{42}^{(1)} + A_n \mathbf{e}_{41}^{(4)} + B_n \mathbf{e}_{42}^{(4)} \right] *_{\cos}^{\sin} (n\theta).\tag{6.16}$$

Los desplazamientos son:

$$u_r = 1/r \sum_{n=0}^{\infty} \left[C^{(\phi)} \mathbf{e}_{71}^{(1)} + C^{(\psi)} \mathbf{e}_{72}^{(1)} + A_n \mathbf{e}_{71}^{(4)} + B_n \mathbf{e}_{72}^{(4)} \right] *_{\sin}^{\cos} (n\theta),\tag{6.17}$$

$$u_\theta = 1/r \sum_{n=0}^{\infty} \left[C^{(\phi)} \mathbf{e}_{81}^{(1)} + C^{(\psi)} \mathbf{e}_{82}^{(1)} + A_n \mathbf{e}_{81}^{(4)} + B_n \mathbf{e}_{82}^{(4)} \right] *_{\cos}^{\sin} (n\theta).\tag{6.18}$$

Aquí $e_{ij}^{(k)} = f(r, \kappa, n)$ son la contribución en cada elemento mecánico (índice i) por ondas P ($j = 1$, argumento $\kappa = q$) y ondas S ($j = 2$, argumento $\kappa = k$). En e , (k) indica funciones de Bessel de primera especie con $(k) = 1$, y Hankel de segunda especie, $(k) = 4$. Las expresiones aparecieron primero en el texto clásico de Mow & Pao [1971] y han sido reproducidas en otras publicaciones, por ejemplo Pérez-Ruiz et al. [2008], Yi et al. [2014].

Solución de los coeficientes de la expansión

Usando (6.14) y (6.16) se establecen tracciones nulas en la superficie de la cavidad. En coordenadas cilíndricas simplemente:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0|_{r=a}, \quad (6.19)$$

donde a es el radio de la cavidad. Estas condiciones plantean un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, A_n y B_n , para cada término de la serie, excepto cuando $n = 0$ donde sólo se resuelve A_n .

Por último las funciones radiales se calculan para $\mathbf{P} = (r, \theta)$ y los elementos mecánicos se resuelven con (6.14) a (6.18) en los receptores. La serie infinita en el número de onda se trunca cuando 1) el sistema de ecuaciones se torna mal condicionado y ya no puede resolverse el campo difractado, 2) el campo incidente en las series (6.7) y (6.8) convergen a la solución analítica (tolerancia prescrita usualmente a 1/100). La diferencia entre estos límites se acentúa en frecuencias muy bajas y en receptores cercanos a la fuente. Por lo que usamos expresiones analíticas para el campo incidente en el receptor, por ejemplo (6.3) o las presentadas por Sánchez-Sesma & Campillo [1991].

Note que el transporte provisto por los teoremas de adición de las funciones de Bessel puede interpretarse como un corrimiento en la fase del número de onda radial, porque los términos $(-1)^n$ y $J_n(kr)$ son parte de la función generadora de $\exp(kr)$.

Incorporación al método de elementos de frontera

Al asumir Θ para las dos orientaciones principales, la solución $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})^{(WFE)}$ se ha obtenido en coordenadas locales de la fuente para direcciones radial y tangencial. La transformación de coordenadas a una orientación arbitraria es trivial. Esto permite reutilizar los resultados de una fuente a todos los puntos de colocación, en el resto de las funciones de Green en (6.2).

6.4. Caso de estudio

Descripción del modelo de túnel y semiespacio estratificado

La estación Juárez de la línea 2 del Metro de Monterrey se encuentra en zona de meseta del Valle de Monterrey en el norte de México. La Figura 6.2(a) de Tamez González et al. [1997] muestra el perfil estratigráfico y la profundidad del túnel y la estación. Algunas propiedades de los materiales se describen en el Cuadro 6.1 donde el espesor medio del estrato H , la densidad ρ y el módulo de Poisson ν son tomados de dicha referencia. Con estos datos, el módulo de elasticidad (no mostrado aquí) y las expresiones,

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}},$$

donde μ es el módulo de cortante. Se estimaron α y β las velocidades de propagación ondas P y S respectivamente. Las propiedades del semiespacio y el revestimiento se proponen y se asume que no hay amortiguamiento histerético (factor de calidad $Q = 1000$). Note que el contraste de impedancia entre el revestimiento y el medio circundante es amplísimo.

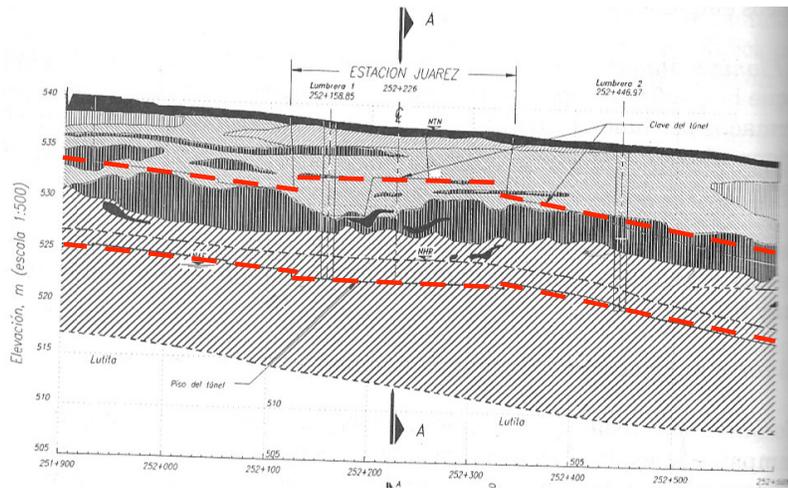
Cuadro 6.1: Propiedades del medio estratificado

Estrato	H (m)	Material	α (m/s)	β (m/s)	ρ (t/m ³)	ν
E1	8.2	Limo carbonatado	32.6	17.4	1.9	0.3
E2	2.3	Conglomerado	98	52.4	2.1	0.3
E3	9.5	Gravas y boleos	33.5	17.9	1.8	0.3
HS	-	Lutita	300	150	2.0	0.33
	-	Concreto	5500	2250	2.4	0.4

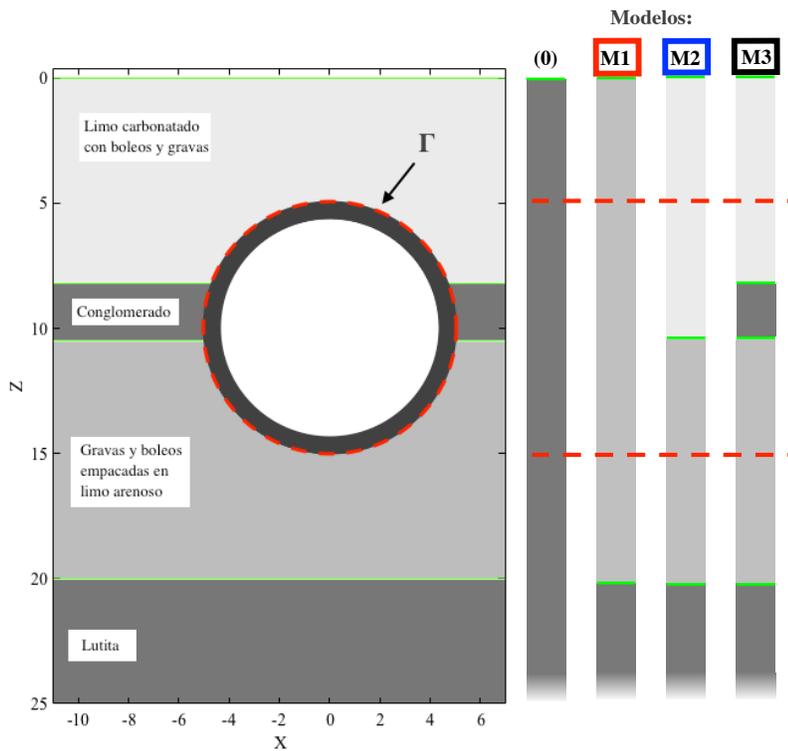
Cuando un túnel es relativamente largo y la incidencia de ondas es perpendicular al eje del trazo, el problema se reduce a uno de deformaciones planas. Katebi et al. [2015] reporta que en comparación con modelos 3D, los modelos 2D sobrestiman la demanda en el revestimiento por efecto de la sobrecarga por edificios, pero coinciden en caso de campo libre. Limitamos nuestro análisis a ésta condición.

La sección transversal del túnel de estación es tipo NATM⁶ de 16.6m de ancho, 10m de altura y 5m de cobertura. Por simplicidad suponemos que el túnel es de sección circular, de forma que la variación en los esfuerzos no dependa del espesor de

⁶Nuevo método de tunelación austríaco por sus siglas en inglés.



(a) Perfil estratigráfico



(b) Modelos simplificados de túnel y estratificación

Figura 6.2: (a) Perfil estratigráfico en la estación Juárez del Metro de Monterrey. Se resalta el nivel de la clave y piso del túnel. Tomado de Tamez González et al. [1997]. (b) Modelo bidimensional de túnel con sección circular de espesor constante en un medio estratificado. Se señala la frontera Γ con línea segmentada roja. Se muestran los modelos de estratigrafía ensayados. Los materiales se describen en el Cuadro 6.1

revestimiento. El diámetro exterior es 10m, el revestimiento tiene 0.6m de espesor y la cobertura se conserva en 5m. La geometría se muestra en la Figura 6.2(b).

El diseño del revestimiento aprovechó el soporte lateral que ofrece el estrato de conglomerado. El método propuesto nos permite analizar la variación de la concentración dinámica de esfuerzos en el revestimiento al considerar diferentes configuraciones de los estratos. En particular analizamos las siguientes variaciones al modelo de la Tabla 6.1:

- **(0)** Semiespacio homogéneo de Lutita.
- **(M1)** Estrato sobre semiespacio: Estratos E1 y E2 con el material del estrato E3.
- **(M2)** Dos estratos sobre semiespacio: Despreciar el estrato E2 y sustituirlo con material del estrato E1.
- **(M3)** Tres estratos sobre semiespacio: Tal como en la Tabla 6.1.

Efecto de la frecuencia incidente

Investigamos el efecto de la frecuencia incidente en los modelos que usamos como referencia para los factores de amplificación dinámica (ver siguiente sección).

Obtuvimos resultados en frecuencias normalizadas tales que la relación entre longitud de la onda incidente y el diámetro del túnel es $\lambda_c/d = [6, 9, 12, 15, 18, 21]$ donde c es la velocidad de la onda incidente y $d = 10m$. El esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}$) a la mitad del revestimiento para el túnel en el modelo de suelo **(0)** (semiespacio homogéneo) se trazan en la Figura 6.3 para incidencia vertical de ondas P, SV y de Rayleigh en dirección $+x$ ⁷. Este último se muestra también para el túnel en el modelo de suelo **(M1)** (un estrato sobre semiespacio). Se observa que para las tres incidencias en el modelo de suelo **(0)** la distribución de $\sigma_{\theta\theta}$ es proporcional entre frecuencias. La amplitud del esfuerzo crece con la frecuencia (disminuye con la longitud de onda) y el incremento es mayor en la mitad de arriba del túnel. La diferencia entre la mitad de arriba y abajo del túnel disminuye conforme aumenta la profundidad de enterramiento. Ante ondas de Rayleigh en un estrato sobre semiespacio (modelo **(M1)**) el esfuerzo en el revestimiento también aumenta con la frecuencia -en promedio-, pero su distribución cambia significativamente entre frecuencias. Por tal motivo decidimos

⁷La incidencia de ondas de superficie se genera aplicando una fuerza vertical en la superficie del semiespacio a distancia considerable. En el caso de un semiespacio verificamos que la el campo producido por la fuerza puntual aproximara correctamente la solución analítica, es decir que el campo de ondas en la zona de interés contuviera pocas ondas de cuerpo.

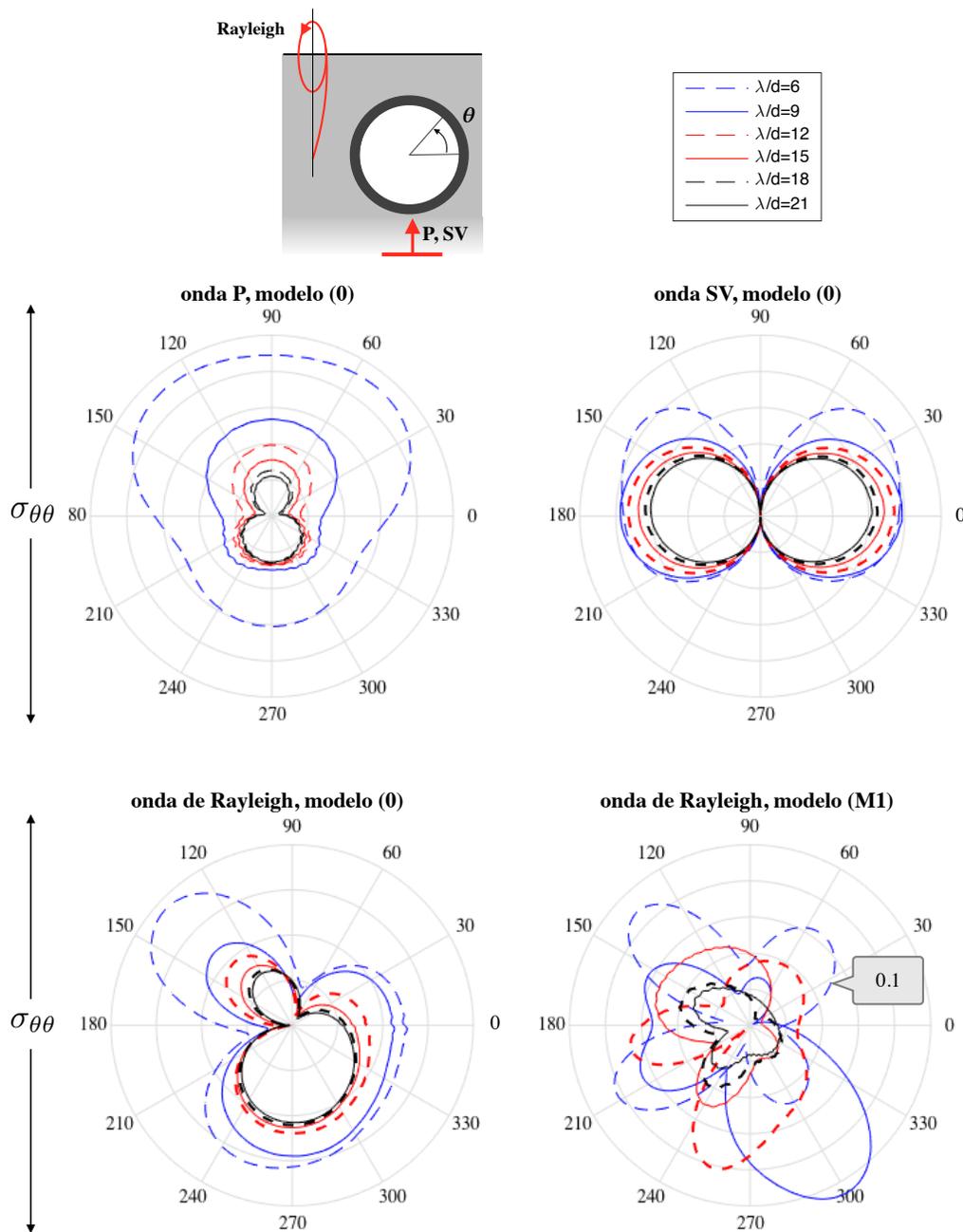


Figura 6.3: Estados de referencia para los factores de amplificación dinámica. Se muestra la distribución de amplitud del esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}$) en el revestimiento de un túnel en un semiespacio homogéneo (modelo **(0)**) y en un estrato sobre semiespacio (modelo **(M1)**). Consideramos incidencia vertical de ondas planas P, SV y de Rayleigh en 6 relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro del túnel (λ/d). La escala de amplitud no es importante ahora. En un caso real, la amplitud del movimiento incidente se definiría de un estudio de peligro sísmico.

utilizar el modelo **(M1)** como caso de referencia para el análisis de la amplificación dinámica ante esta incidencia.

Amplificación de la demanda de desplazamiento

El factor de amplificación dinámica es el cociente de las amplitudes del campo en el modelo de interés y un estado de referencia, usualmente el campo incidente. En nuestro análisis definimos el factor de amplificación dinámica del desplazamiento radial por efecto de la estratificación como,

$$U_r^* = |U_r((\mathbf{Mi}))|/|U_r((\mathbf{M1}))|$$

donde **(Mi)** son los modelos **(M2)** y **(M3)**. De modo que mostramos la amplificación del desplazamiento en el túnel, de considerar modelos estratigráficos más refinados. Nos enfocamos en el componente radial porque el componente angular muestra poca variación.

En las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 mostramos el factor de amplificación U_r^* para incidencia de ondas P, SV y de Rayleigh respectivamente, en las relaciones $\lambda_c/d = [6, 9, 18, 21]$. Para incidencia de ondas planas la amplificación es moderada. El efecto de considerar más estratos puede apreciarse en la distribución de U_r^* de la siguiente forma: Para onda P y SV el modelo **(M2)** (dos estratos similares sobre semiespacio) produce casi la misma respuesta que el caso de referencia (un estrato sobre semiespacio). La similitud se reduce conforme aumenta la frecuencia. En cambio, el modelo con el lente rígido **(M3)** produce amplificaciones de hasta 3 veces respecto a no considerarlo. Destaca que la amplificación no está concentrada alrededor de las interfaces de E2, sino en toda la circunferencia. Esto sugiere que en los estratos suaves (E1 y E3) los múltiples pueden atraparse y aumentar la excitación. Para el caso de incidencia de onda superficial la amplificación es menor a 1.5 veces el campo de referencia cuando λ_β/d es grande pero cuando λ_β/d es pequeño puede llegar a 3. Nuestros cálculos indican que de considerar una estratificación más refinada se espera amplificación en la demanda de desplazamiento en la mayoría de los casos.

Amplificación en esfuerzo de considerar los estratos

El factor de amplificación dinámica para el esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}^*$) es el cociente de las amplitudes del campo en el modelo de interés y un estado de referencia. Para nuestro análisis el estado de referencia es **(0)** para incidencia de ondas de cuerpo y **(M1)** para onda de Rayleigh.

Para incidencia vertical de onda plana P los factores de amplificación dinámica del esfuerzo circunferencial en los modelos **(M1)**, **(M2)**, **(M3)** se muestra en la Figura

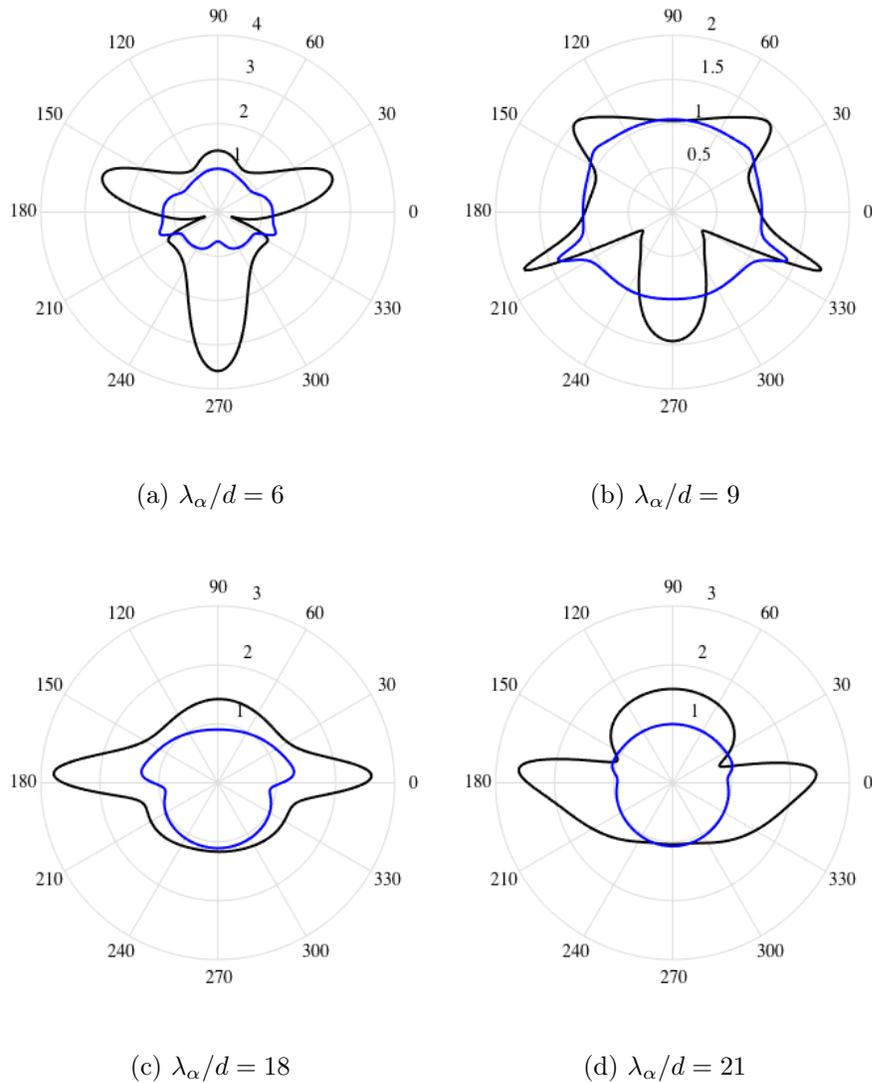


Figura 6.4: Factores de amplificación dinámica del desplazamiento radial (U_r^*) respecto al modelo (**M1**), para incidencia vertical de onda plana P en los modelos (**M2**) (azul) y (**M3**) (negro). Resultados para cuatro distintas relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro.

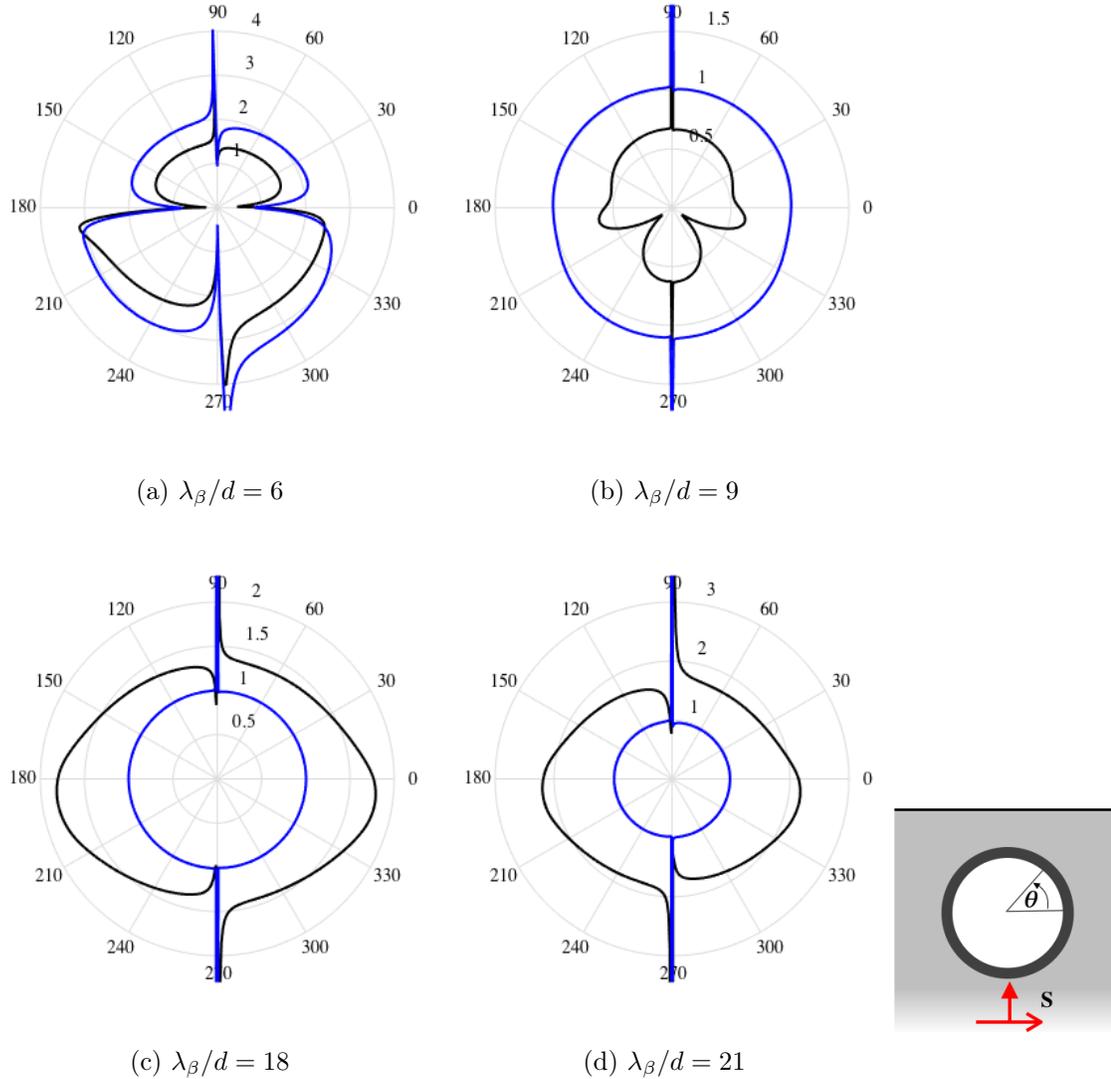


Figura 6.5: Factores de amplificación dinámica del desplazamiento radial (U_r^*) respecto al modelo (M1), para incidencia vertical de onda plana SV en los modelos (M2) (azul) y (M3) (negro). Resultados para cuatro distintas relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro. Las asíntotas en 90° y 270° se debe a ceros en el modelo de referencia (Figura 6.3).

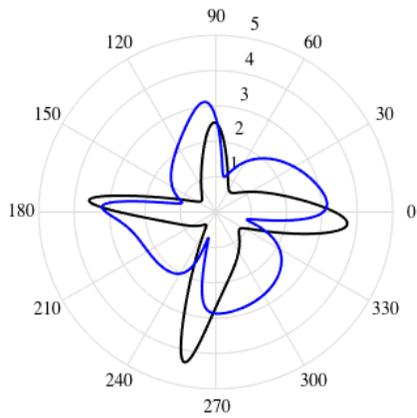
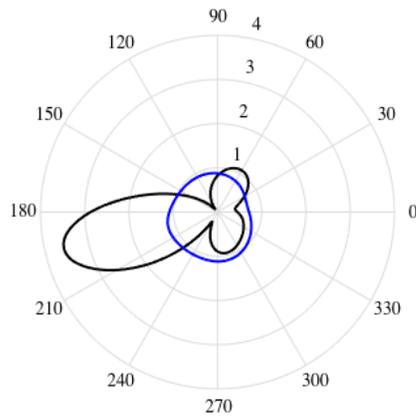
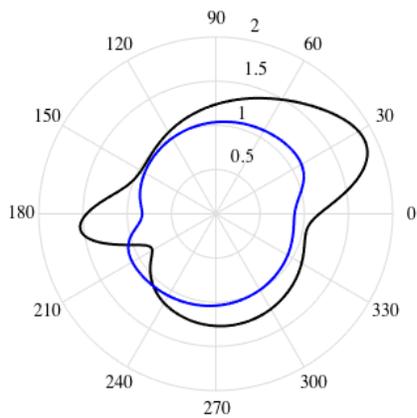
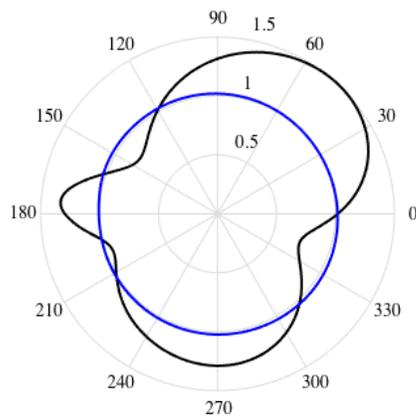
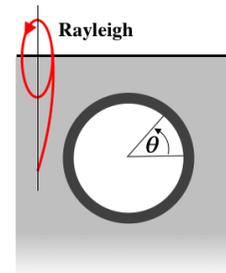
(a) $\lambda_\beta/d = 6$ (b) $\lambda_\beta/d = 9$ (c) $\lambda_\beta/d = 18$ (d) $\lambda_\beta/d = 21$ 

Figura 6.6: Factores de amplificación dinámica del desplazamiento radial (U_r^*) respecto al modelo (**M1**), para incidencia de onda de Rayleigh en los modelos (**M2**) (azul) y (**M3**) (negro). Resultados para cuatro distintas relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro.

6.7 para distintas relaciones λ_α/d . Nuestros cálculos para el modelo **(M1)** cuando $\lambda_\alpha/d = 15$ indican amplificaciones muy grandes (entre 10 y 30 veces) respecto al modelo de túnel en semiespacio. Este fenómeno se estudiará después.

En general, el considerar estratos reduce el tamaño de los esfuerzos en la parte superior e inferior del túnel ($\sigma_{\theta\theta}^* \leq 1$). Los modelos **(M1)** y **(M2)** que desprecian el estrato E2 arrojan resultados similares en todos los casos. En contraste con el modelo **(M3)** el esfuerzo en los laterales puede duplicarse en frecuencias bajas (λ_α/d grande). En frecuencia alta la respuesta en el túnel es similar en los tres modelos de estratificación.

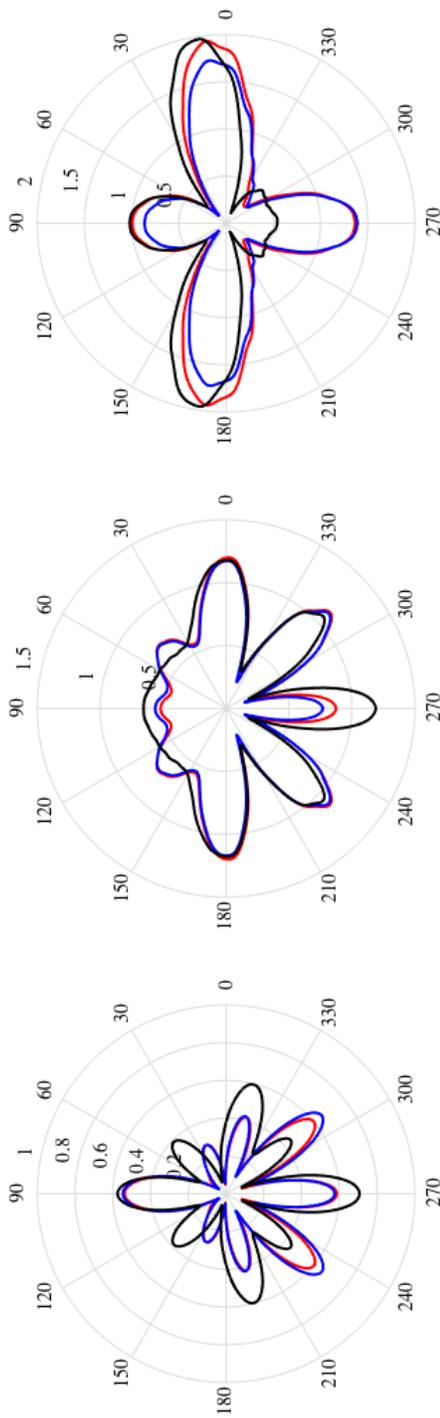
Para el caso de incidencia vertical de ondas SV omitimos los factores de amplificación alrededor de $\pi/2$ y $3\pi/2$ porque la magnitud del esfuerzo en el caso de referencia tiende a cero (ver Figura 6.3). De nuestros resultados destaca que en las 4 relaciones λ_β/d mayores (frecuencias bajas), el considerar estratos reduce la magnitud del esfuerzo (entre 0.3 y 0.8 de la respuesta en el caso de referencia). En estos casos la reducción es menor de considerarse el estrato E2. Para relaciones λ_β/d pequeñas (frecuencia alta) observamos amplificación en los esfuerzos de hasta 15 veces.

Por último analizamos el caso de incidencia desde $+x$ de ondas de Rayleigh. Recordemos que el caso de referencia es **(M1)**. Los factores de amplificación en los modelos **(M2)** y **(M3)** se muestran en la Figura 6.9 para distintas relaciones λ_β/d . En baja frecuencia (caso relevante para acciones por sismo) el modelo **(M2)** exhibe poca amplificación ($\sigma_{\theta\theta}^* \approx 1$) pero el modelo **(M3)** -que incluye el estrato E2- tiene amplificación en factor 2 a 3. La concentración de esfuerzos es significativa conforme aumenta la frecuencia de la onda incidente, con $\lambda_\beta/d = 9$ (1.67 Hertz) $\sigma_{\theta\theta}^*$ alcanza 36.8 porque el modelo de referencia es casi cero en ese punto del túnel, pero en el resto de la circunferencia y con $\lambda_\beta/d = 6$ el factor de amplificación puede alcanzar 5.

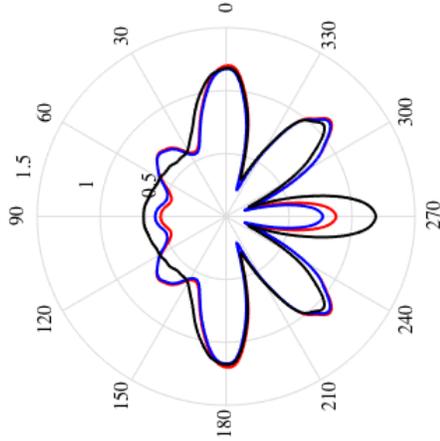
6.5. Conclusiones del capítulo

Analizamos la concentración dinámica de esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}$) y el desplazamiento radial (u_r) en el revestimiento de un túnel somero en un medio estratificado donde el túnel cruza uno o dos estratos. Hicimos análisis dinámicos en el dominio de la frecuencia (elásticos) ante incidencia de ondas de cuerpo y de superficie en frecuencias tales que el cociente entre la longitud de onda incidente y diámetro del túnel está entre 6 y 21.

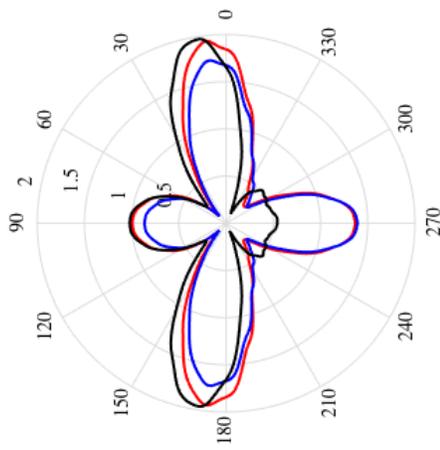
Para efectuar el análisis sin las limitaciones actuales en métodos de dominio y de frontera, desarrollamos un método doblemente híbrido basado en representaciones integrales de la función de Green a cada lado de la frontera suelo-revestimiento, donde



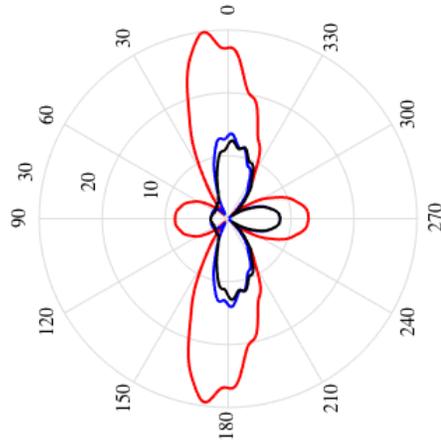
(a) $\lambda_\alpha/d = 6$



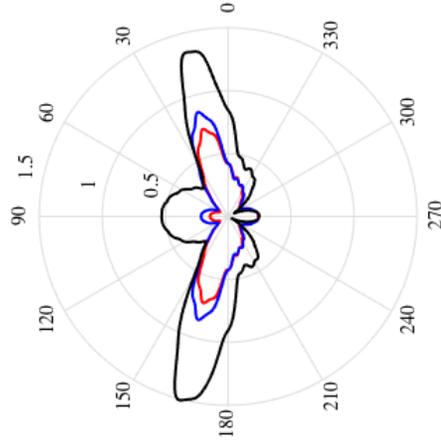
(b) $\lambda_\alpha/d = 9$



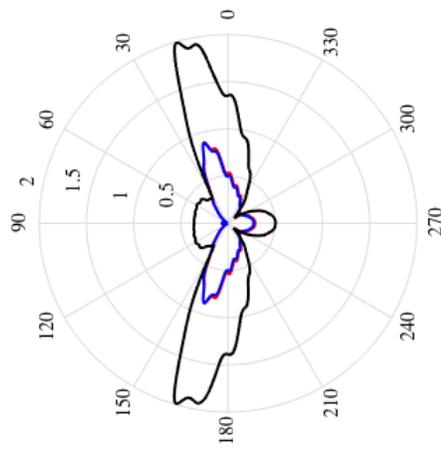
(c) $\lambda_\alpha/d = 12$



(d) $\lambda_\alpha/d = 15$



(e) $\lambda_\alpha/d = 18$



(f) $\lambda_\alpha/d = 21$

Figura 6.7: Factores de amplificación dinámica del esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}^*$) respecto al modelo **(0)**, para incidencia vertical de onda plana **P** en los modelos **(M1)** (rojo), **(M2)** (azul) y **(M3)** (negro). Resultados para seis distintas relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro.

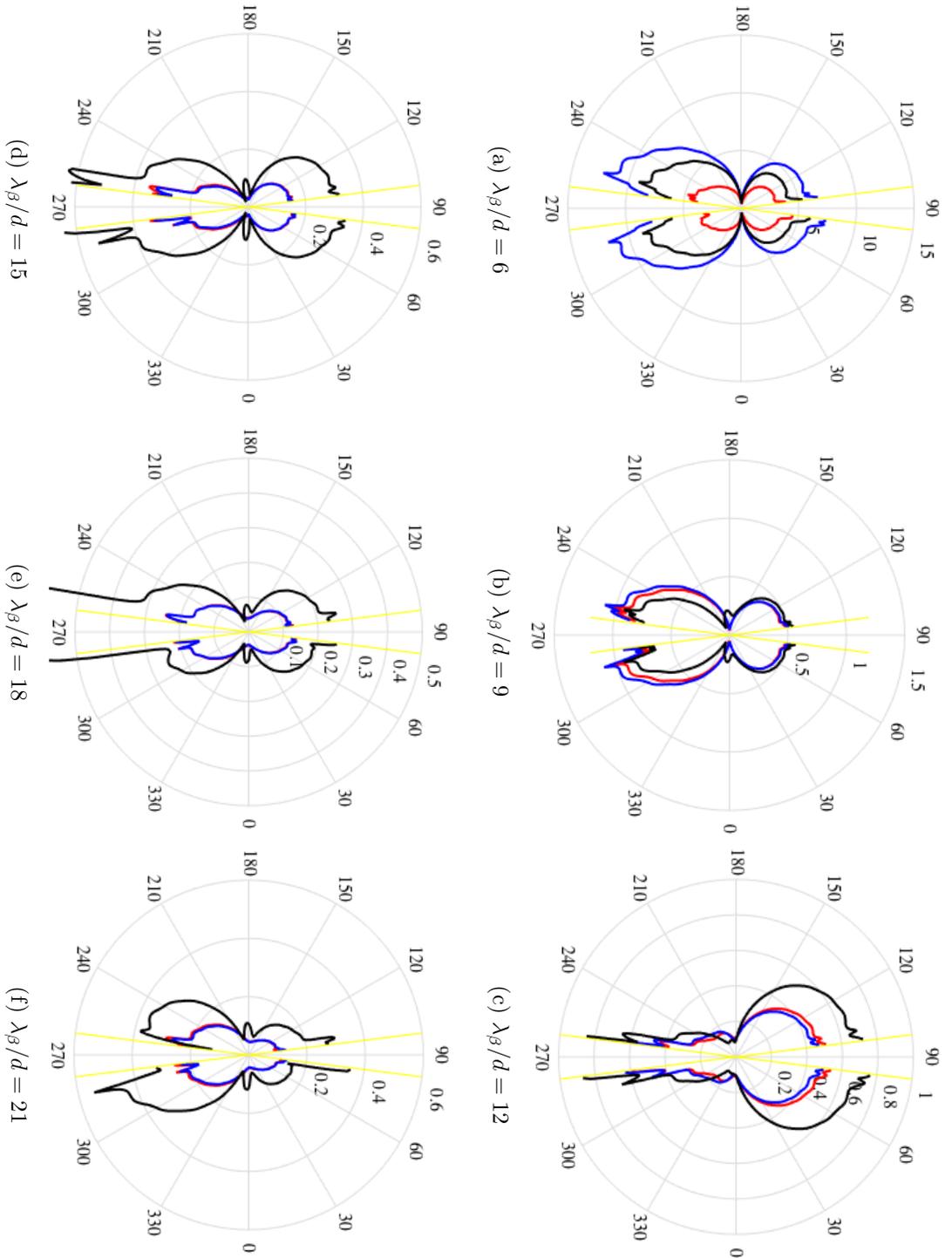


Figura 6.8: Factores de amplificación dinámica del esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}^*$) respecto al modelo (0), para incidencia vertical de onda plana SV en los modelos (M1) (rojo), (M2) (azul) y (M3) (negro). Resultados para seis distintas relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro.

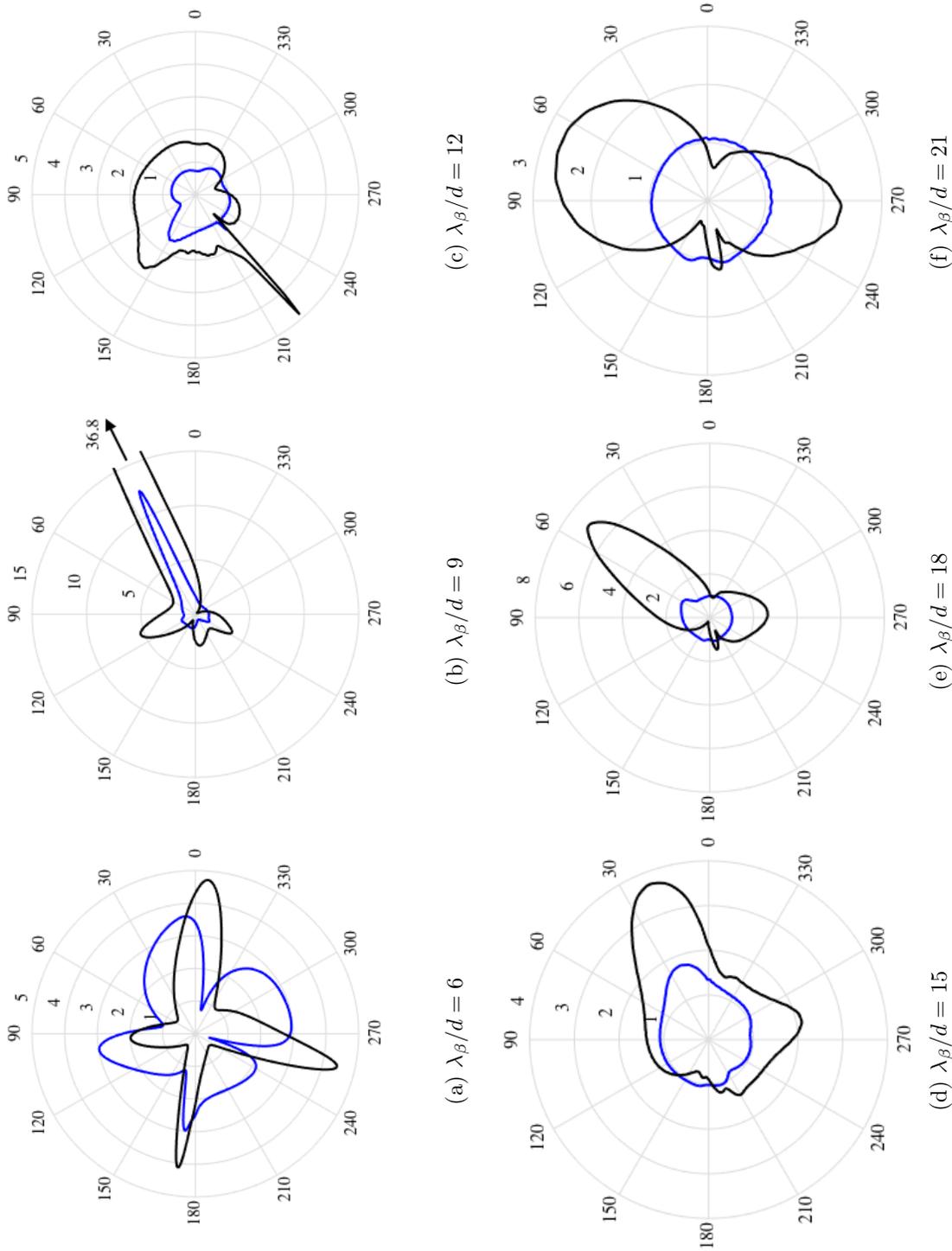


Figura 6.9: Factores de amplificación dinámica del esfuerzo circunferencial ($\sigma_{\theta\theta}^*$) respecto al modelo M1, para incidencia de onda de Rayleigh en los modelos (M2) (azul) y (M3) (negro). Resultados para distintas relaciones de la longitud de onda incidente al diámetro.

establecemos condiciones de continuidad con un método de elementos de frontera. El medio exterior se representa con una expansión de ondas planas en el número de onda horizontal; el medio interior utiliza una función de Green que considera la cavidad del túnel como un desarrollo de ondas cilíndricas. Esta función ofrece dos ventajas: El espesor de revestimiento puede ser más delgado que si usamos un método de colocación en la frontera libre, en el que si los puntos de colocación son cercanos a las fuentes auxiliares (distancia d') la solución fundamental y el sistema de ecuaciones son inestables. Con la función que proponemos d' está controlada por la cantidad de puntos por longitud de onda y la curvatura de la superficie.

Propusimos un juego de modelos basados en un túnel de estación real y mostramos resultados numéricos como factores de amplificación dinámica del desplazamiento radial y el esfuerzo circunferencial. Los factores de amplificación obtenidos exhiben el efecto de considerar o no la presencia de estratos de propiedades muy similares y lentes rígidos, modelos M2 y M3 respectivamente. Ambos casos suelen simplificarse en el análisis sísmico. Con M2 encontramos que la amplificación es significativa en frecuencias bajas (de interés para análisis sísmico) pero poca o nula cuando la frecuencia crece (de interés para el análisis de interacción vehículo-estructura-suelo). Con M3 en todas las frecuencias encontramos amplificaciones y en algunos casos reducciones. De los desplazamientos inferimos que los momentos flexionantes en el revestimiento crecen alrededor del lente rígido. Es difícil extraer otras conclusiones generales y reconocemos que los factores de amplificación deben calcularse para cada caso de estudio. Afortunadamente el procedimiento de cálculo es ágil, así que recomendamos incorporar análisis similares al aquí presentado, en la estimación de acciones de diseño por sismo para túneles someros en condiciones de estratificación similares.

En trabajos futuros estudiaremos varios problemas, por ejemplo: 1) El efecto de adhesión imperfecta en la frontera suelo-revestimiento. 2) La interacción con cimentaciones cercanas tridimensionales (la formulación presentada se puede extender a 2.5D). Y 3) la presión hidrodinámica por sismo en túneles de drenaje (considerando un medio acústico en el interior).

Capítulo 7

Análisis de la difracción de ondas en el borde de un valle estratificado

7.1. Introducción

El movimiento del terreno durante sismos fuertes es difícil de interpretar cerca del borde de un valle aluvial. Cuando las ondas inciden desde fuera, se generan ondas superficiales en los bordes que pueden resonar con el borde opuesto si el valle es pequeño. Desde el interior, la eficiencia de la difracción depende de la pendiente de la cuenca. Cuando el borde es abrupto, en la región adyacente puede ocurrir interferencia constructiva entre las ondas de cuerpo directas y ondas difractadas de superficie y de cuerpo (en particular SV). Esta es la explicación aceptada para el cinturón de daño observado tras el terremoto de Kobe M6.9 1995 [Kawase, 1996]. El fenómeno también ha sido estudiado para explicar la diferencia entre los cocientes espectrales respecto a una región de referencia (terreno firme), u/u_r , y estimaciones unidimensionales como el H/V. Cornou et al. [2003] propusieron que en baja frecuencia la diferencia se debe a las ondas inducidas-por-el-valle que se propagan lateralmente. Ellos utilizaron un procedimiento basado en la coherencia de los registros para clasificar los arribos de ondas registrados en el valle de Grenoble en los Alpes franceses; concluyen que el azimut de la fuente influye poco en la respuesta. A pesar de que el valle de Grenoble tiene forma de Y, es profundo, angosto y rodeado por topografía escarpada.

Si el lecho rocoso es somero y con poca pendiente en el borde del valle, el modelo unidimensional predice poca amplificación del movimiento porque los depósitos suaves son delgados. En la ciudad de México, cuando ocurrieron los últimos sismos catastróficos, contábamos con pocas estaciones sismológicas en el borde del valle,

así que los mapas de amplificación del movimiento no son tan precisos ahí como lo son en el centro de la ciudad. En esta región los cocientes espectrales u/u_r tienen forma irregular, tal vez por el comportamiento bi y tridimensional [Reinoso & Ordaz, 1999]. Esto volvió necesario utilizar modelos matemáticos para ensayar los mecanismos que podrían explicar las observaciones. Los *macro* modelos de propagación de ondas modernos estiman amplificaciones interesantes alrededor de todo el borde del valle [Cruz-Atienza et al., 2016], a pesar de que -como hemos comentado antes- el borde de la cuenca no es abrupto.

Con esta motivación nos proponemos describir el mecanismo que incrementa la amplitud y duración del movimiento en el borde de un valle aluvial si el borde tiene poca pendiente (5/100). Describimos la evolución del campo incidente con la reducción de profundidad del lecho rocoso y la conversión a ondas de cuerpo difractadas, que rápidamente forman ondas de superficie.

Para el análisis consideramos que un modelo geométrico plano es representativo de una porción inmediata al borde de un valle tridimensional grande. Por simplicidad consideramos el caso de deformación plana y dejamos los análisis tridimensionales para el Capítulo 8 donde haremos observaciones complementarias a lo aquí descrito. Creemos que con un modelo de estas características es más fácil transferir lo aprendido a la interpretación del fenómeno real. Aceptamos que dentro del valle los estratos son planos y horizontales. El material es homogéneo e isótropo dentro de cada estrato.

Explícitamente elegimos modelos de estratigrafía que no son susceptibles de reducirse a modelos homogéneos equivalentes. Tal simplificación se discute en el Apéndice E, donde en un modelo de valle con estratos y en otro con un medio homogéneo equivalente, comparamos la respuesta tridimensional ante incidencia de ondas de cuerpo en varias frecuencias. Con ello encontramos que simplificar la estratificación puede subestimar la amplitud del movimiento en puntos de todo el valle y afectar significativamente la distribución espacial del movimiento conforme aumenta la frecuencia de excitación.

Obtuvimos resultados numéricos con elementos de frontera y funciones de Green para el semiespacio estratificado. Analizamos la respuesta en frecuencia y los sintéticos del desplazamiento en la superficie. Encontramos que las ondas superficiales producen ondas de cuerpo al interactuar con el lecho rocoso de profundidad variable. Cuando el espesor de los depósitos es cercano a 1/4 de la longitud de onda dominante, solo observamos onda planas que reverberan con el lecho rocoso e incrementan la amplitud y duración del movimiento en la vecindad del borde del valle. Nuestras observaciones refuerzan la explicación de Kawase [1996] para los cinturones de daño y la extiende a casos en que la pendiente del lecho rocoso es reducida.

En este capítulo mostraremos los resultados que nos hacen llegar a la descripción anterior. Primero describimos los modelos de análisis y el caso de campo libre que nos sirve de referencia. Después analizamos la difracción en el borde del valle en frecuencia, con una medida de la dispersión de ondas de superficie y con sintéticos del desplazamiento. Finalmente extraemos el campo difractado sólo por el borde del valle y discutimos los resultados en conjunto.

7.2. Modelos de análisis

Considere el borde de un valle aluvial cuya pendiente es constante (5/100), el contraste de impedancia entre el material del exterior y el valle aproxima el efecto de una base rígida (para ondas de corte $\beta_E/\beta_R \geq 12.5$). Dos modelos de estratigrafía basados en Sánchez-Sesma et al. [2011a] y Malischewsky et al. [2010] se describen en el Cuadro 7.1. El fuerte contraste de impedancias con el medio exterior es realista y permite modelar efectos que no aparecen cuando el contraste es poco *e.g.* Dravinski & Mossessian [1987].

Cuadro 7.1: Propiedades mecánicas de los materiales en modelos de uno y dos capas sobre semiespacio

Modelo.Estrato	h (m)	α (m/s)	β (m/s)	ρ (g/cm ³)	Q	ν
SS.1	40	400	70	1.2	100	0.484
SS.2	∞	2000	1000	2.5	100	0.333
M.1	20	255.69	34	1.1	100	0.491
M.2	20	594.1	79	1.5	500	0.491
M.3	∞	2000	1000	2.5	100	0.333

Donde el espesor es h , α y β la velocidad de ondas P y S, ρ densidad de masa, Q factor de calidad y ν coeficiente de Poisson. Adaptados de Sánchez-Sesma et al. [2011a] y Malischewsky et al. [2010]. El material afuera del valle es el del último estrato.

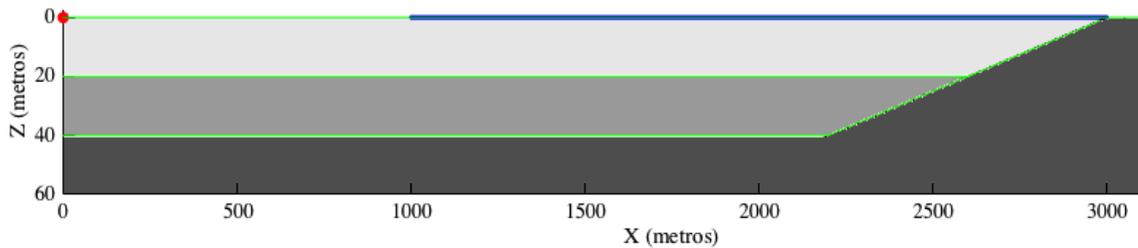


Figura 7.1: Modelo del borde de un valle aluvial con estratos planos de material suave. La pendiente del borde es $5/100$ y la profundidad del lecho rocoso en la parta plana es 40m. La fuente está en el origen y situamos 2048 receptores en la superficie (puntos de color rojo y azul respectivamente).

La incidencia de ondas de superficie se genera con una fuerza puntual en el origen. El campo de ondas se obtuvo cerca del borde del valle en 2048 receptores superficiales. La Figura 7.1 muestra la geometría del ejercicio con la estratigrafía del modelo M (dos estratos).

En este momento nos concentramos en la difracción de ondas dentro del valle, para aislar este comportamiento el medio exterior se ha provisto de amortiguamiento ($Q = 100$), con el propósito de reducir la influencia de las ondas que viajan por el semiespacio subyacente y se difractan con los vértices en $(x, z) = (2200, 40)$ y $(3000, 0)$.

A continuación se analiza y comenta sobre la respuesta en ambos modelos, con énfasis en el modelo con dos estratos.

7.3. Campo libre

Primero revisamos el campo de ondas sin la presencia del borde en el modelo de dos capas porque tiene un medio con menor velocidad. Se calcularon 301 frecuencias hasta 2 Hertz con el método discutido en la sección 3.4.1, para una periodicidad de la fuente de 20 kilómetros y frecuencia compleja con parte imaginaria $\omega_I = -0.1i\pi/T_{max}$, donde $T_{max} = 150$ segundos es la duración de los sintéticos. El factor 0.1 significa que la ventana de interés es 10 veces la duración del sismograma [Bouchon, 2003]. En la Figura 7.2 vemos sintéticos del desplazamiento y la función de amplitud que elegimos para no perder información en una banda de interés. La función de amplitud es la combinación de una parte plana hasta 1 Hertz y la transformada de Fourier de un pulso Gaussiano con tiempo de asenso (*raise time*) de 2.5 segundos, esto en $f \geq 1$ Hertz.

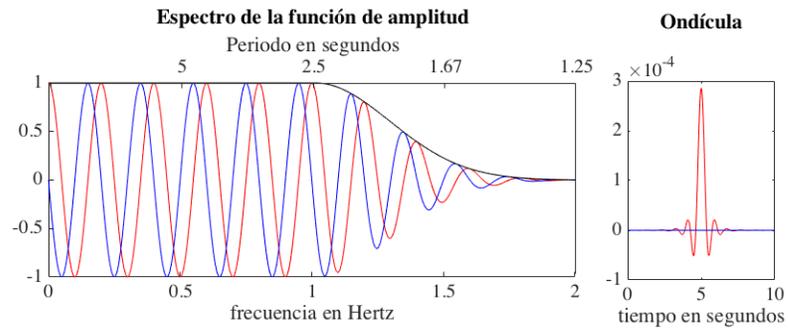
Se distingue claramente la onda de Rayleigh seguida de difracciones múltiples en los estratos, a lo largo de 2 Km de receptores. El problema se diseñó para que el arribo de la onda de superficie en el último receptor ocurra a la mitad de la duración de los sintéticos en el modelo de dos capas. Sobre las trazas del componente vertical se señala un abanico de difracciones múltiples de ondas de cuerpo. Por su poca amplitud se distinguen mejor en la versión digital de este texto. Destaca la ausencia de efectos espurios y que la señal transitoria no se trunca.

7.4. Análisis de la difracción cerca del borde de un valle somero

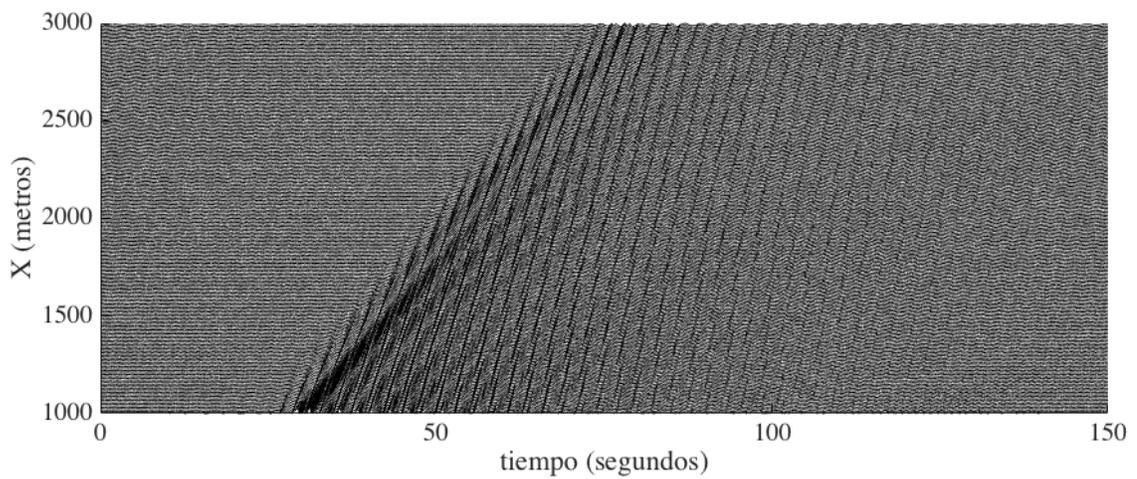
Para resolver la difracción del campo incidente con el borde del valle, usamos el método de elementos de contorno con funciones de Green para semiespacio estratificado que presentamos en el capítulo 3. Con este planteamiento el medio de fondo es el modelo de campo libre, y el borde del valle se inserta como una inclusión homogénea. La configuración de este modelo permite reducir la extensión de la frontera, a sólo las caras donde puede incidir un rayo desde la fuente.

Variación de la respuesta en frecuencia con la distancia al borde

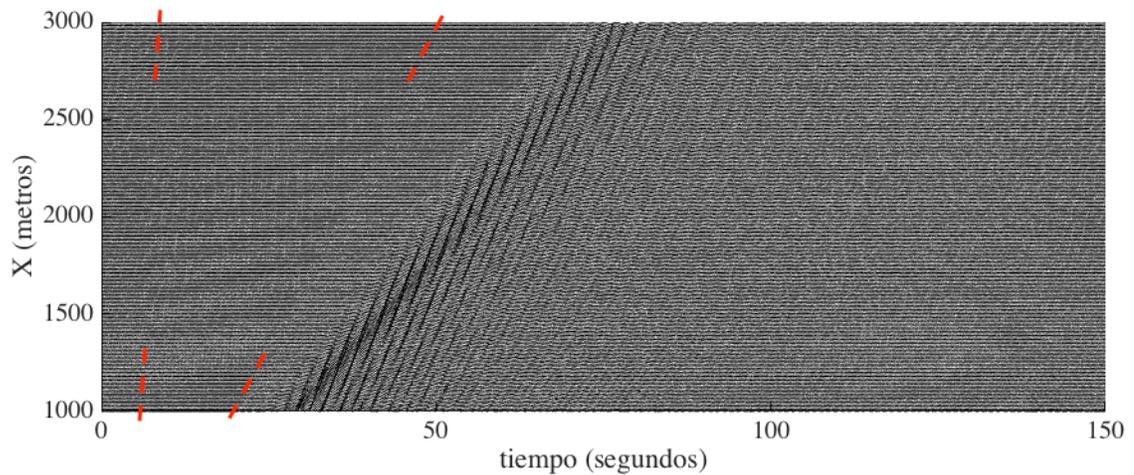
Obtuvimos la densidad espectral promedio ($S_{xx}(f)$) y su variación, en 16 tramos de 125 metros desde $x = 1000$ m, hasta $x = 3000$ m donde termina el valle. En la Figura 7.3 se muestra con líneas grises la $S_{xx}(f)$ para cada receptor, con rojo la media (\bar{x}) y con líneas negras punteadas $\bar{x} \pm \sigma$. Lejos del borde los espectros tienen poca variación a lo largo del tramo de posiciones, incluso cerca de 2 Hertz. En esta



(a) Función de amplitud



(b) Desplazamiento horizontal



(c) Desplazamiento vertical

Figura 7.2: Función de amplitud (a) y componentes del desplazamiento horizontal (b) y vertical (c) en **campo libre** (sin el borde del valle) para el **modelo M** del Cuadro 7.1. La fuente es una fuerza vertical en el origen y los receptores están distribuidos en $1000 \leq x \leq 3000$. En estas trazas con escala común, el desplazamiento horizontal tiene mayor amplitud.

región se reconoce concentración de energía entre 0.25 y 0.75 Hertz, y de nueva cuenta entre 1.00 y 1.50 Hertz. La varianza de la densidad espectral a lo largo de un tramo de receptores aumenta con la proximidad al borde, a su vez la cantidad de energía es menor. Es posible seguir la evolución del contenido de frecuencias en toda la banda explorada a lo largo de toda la sección sísmica; excepto en el último tramo antes del borde, donde sólo hasta 0.5 Hertz es posible reconocer alguna similitud con el tramo anterior. En el modelo homogéneo el comportamiento es equivalente.

Curvas de dispersión de velocidad de fase de las ondas de Rayleigh

Con los registros de respuesta en frecuencia obtuvimos curvas de dispersión de la velocidad de fase con el método SASW ¹[II et al., 1994] en tramos de 250 metros (ver Figura 7.4). Lejos del borde del valle no encontramos variación significativa entre tramos consecutivos. En ésta región la respuesta está dominada por el modo fundamental de las ondas de Rayleigh. Conforme se reduce la distancia al borde cobran importancia los primeros tres modos superiores. En los últimos 500 metros las ondas de cuerpo tienen mayor participación que las ondas de superficie. En los últimos 250 metros no se identifica comportamiento dispersivo.

En las curvas de dispersión reconocemos dos límites de velocidad (en el modo fundamental y el primer modo superior) característicos del modelo unidimensional de dos estratos sobre semiespacio. La velocidad de fase mínima es $p \approx 50\text{m/s}$, mayor que la velocidad de propagación de las ondas de corte en el estrato superior, $\beta = 34\text{m/s}$; esto debido al reducido espesor del estrato.

Sintéticos del desplazamiento

Obtuvimos sintéticos del desplazamiento considerando el borde del valle y la estratigrafía de los modelos SS (valle homogéneo) y M (dos capas) en las Figuras 7.5 y 7.6. Hasta 35 y 60 segundos respectivamente observamos sólo el campo incidente. A partir de entonces arriban ondas reflejadas en el borde del valle y múltiples de la difracción en los estratos.

El campo de ondas no rebasa la marca de $x = 2500\text{m}$ y $x = 2700\text{m}$ en los modelos SS y M respectivamente. Alrededor de estos puntos observamos ondas SV en incidencia casi vertical, atrapadas donde la profundidad del material duro promedia

¹El *Spectral Analysis of Surface Waves* obtiene la distribución de velocidades de fase en cada frecuencia como el cociente de la distancia entre estaciones y el tiempo de viaje de las ondas en una frecuencia dada. El tiempo de viaje es el cociente de la diferencia de fase (espectro cruzado) y la frecuencia circular. También puede consultarse en Kramer [1996] y en los estándares ASTM D6758-02 o ACI 228.2R

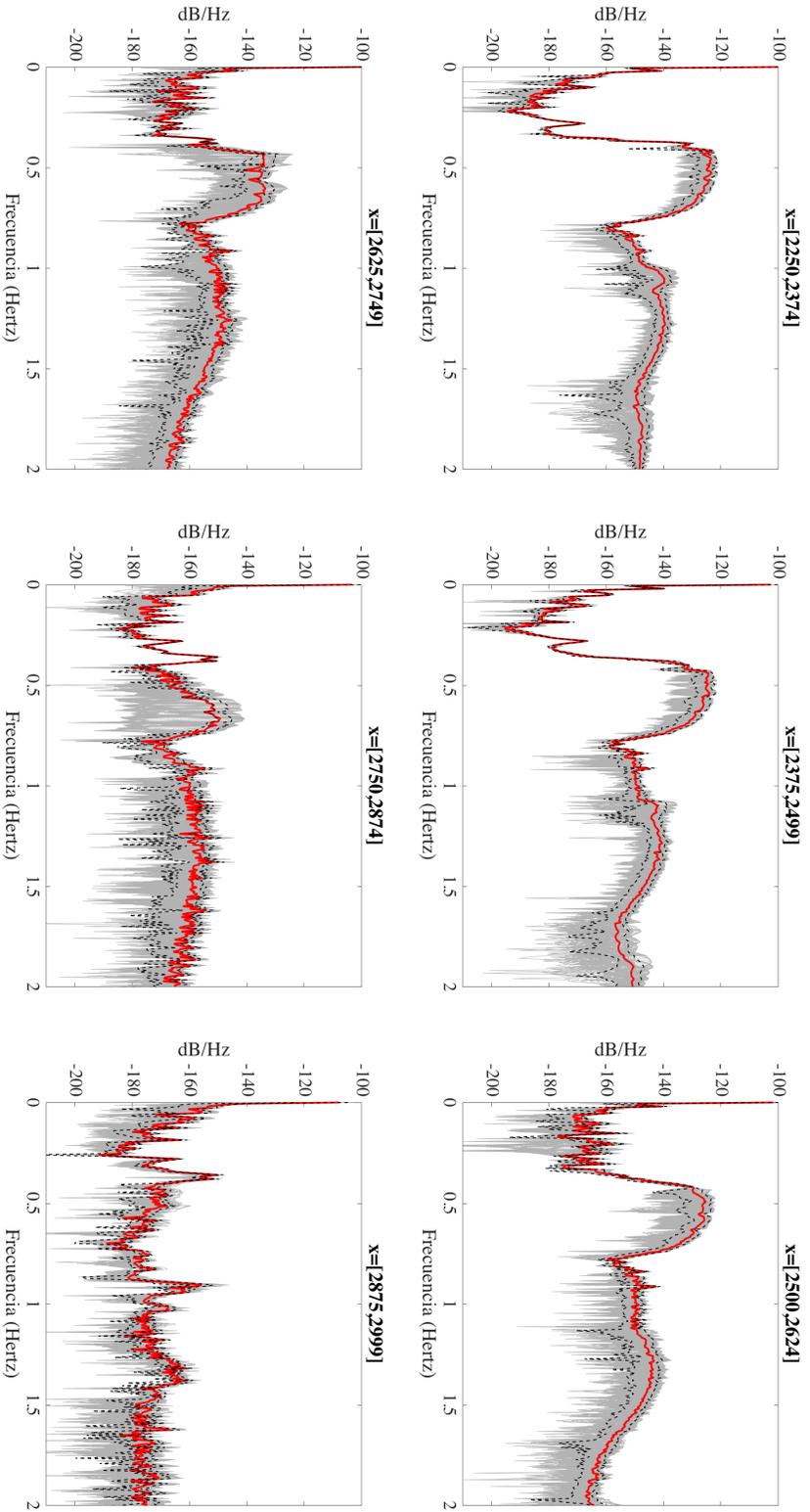


Figura 7.3: Densidad espectral del desplazamiento vertical en la proximidad del borde del modelo de valle con dos estratos (modelo M). Se muestran resultados para seis tramos de 125 metros entre $x = 2000\text{m}$ y 3000m (done termina el valle). Con línea roja se muestra el promedio en el tramo y con líneas negras punteadas la media mas y menos una desviación estándar.

7.4. ANÁLISIS DE LA DIFRACCIÓN CERCA DEL BORDE DE UN VALLE SOMERO99

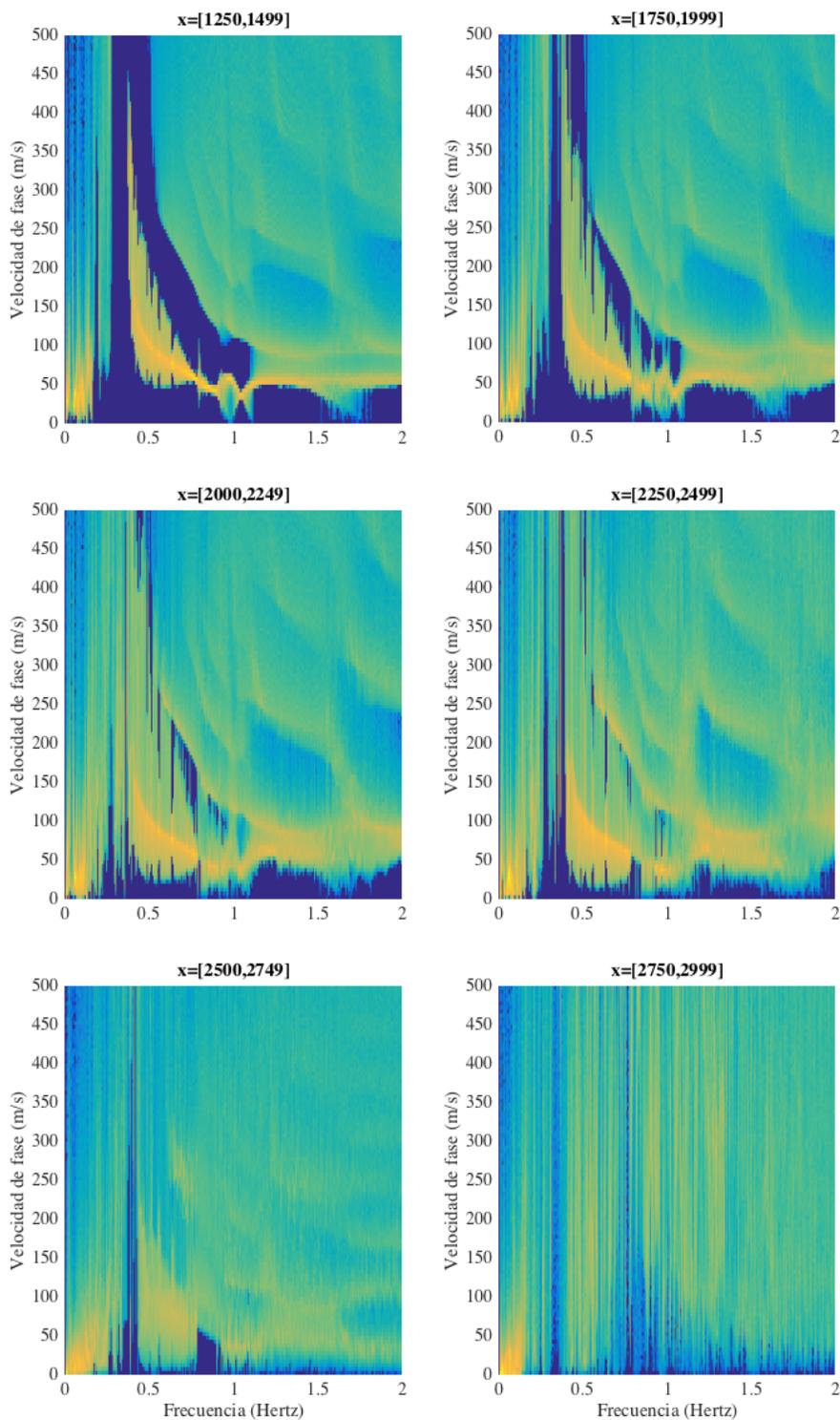


Figura 7.4: Curvas de dispersión de la velocidad de fase de las ondas de Rayleigh, en el modelo con dos estratos (modelo M) y fuente en el origen. Se muestran resultados en seis tramos de 250 metros entre $x = 1250\text{m}$ y 3000m (done termina el valle).

25m y 15m. El efecto es más notorio en el modelo SS. Note que la longitud de onda es 70m y 34m en cada modelo, para la frecuencia de esquina de la función de amplitud. Además, en el modelo M sólo está presente el material del primer estrato desde $x = 2600\text{m}$.

Reconocemos varios grupos de ondas difractadas. Los componentes horizontal y vertical en ambos modelos señalan la existencia de una onda de Rayleigh con menor amplitud que la incidente. Enseguida arriban difracciones múltiples de ondas de cuerpo. La velocidad aparente de éstas (v_a) es menor que en las ondas de Rayleigh ($v_a = 35.5\text{m/s}$ en el modelo M) pero crece con la distancia al borde del valle (en el mismo modelo reconocemos alrededor de $v_a = 11\text{m/s}$ en el grupo más cercano al borde y $v_a = 13, 16, 20$ y 24m/s en los grupos subsecuentes). En la Figura 7.6 el inserto en miniatura trazamos marcas color verde sobre el frente de onda incidente, de color rojo sobre el frente de la onda difractada y, con color amarillo se trazan líneas sobre varios grupos de múltiples (la pendiente de cada línea corresponde a la velocidad de grupo).

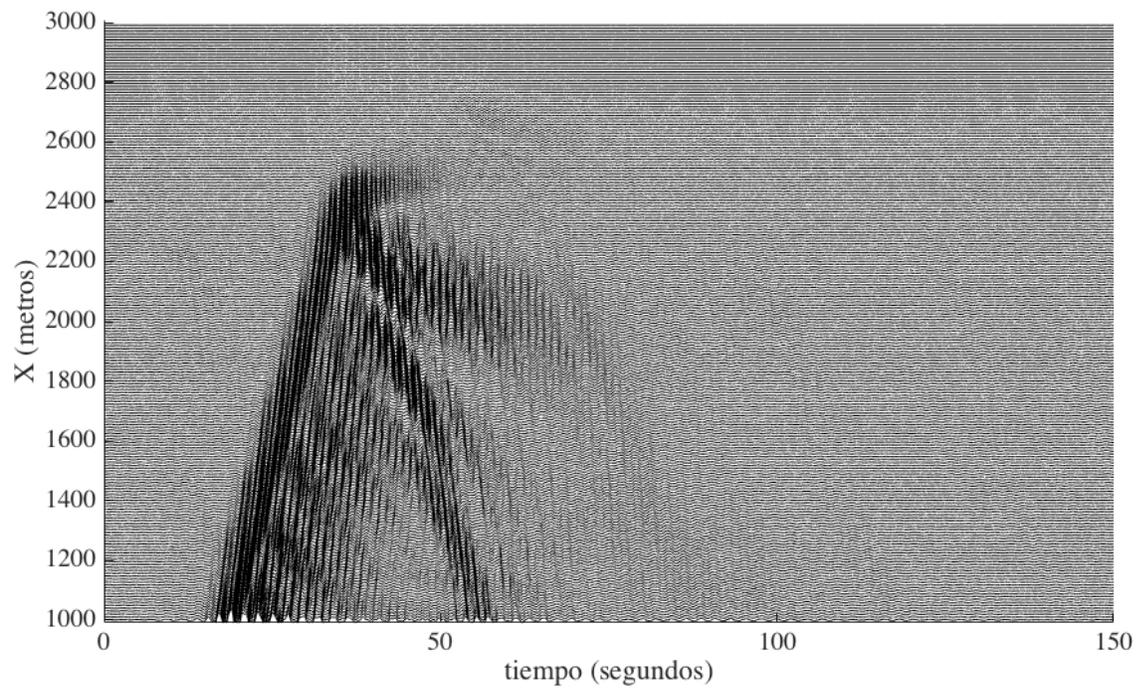
La amplitud y duración del movimiento crecen por la superposición de los primeros arribos del campo incidente y el campo difractado. A su vez, la reducción de profundidad contribuye a la amplificación porque existe menor dispersión geométrica (se discute más adelante). Las ondas de cuerpo del campo difractado son responsables de la mayor porción de la duración del movimiento, pero sólo existen cerca del borde del valle. Esta observación coincide con Sánchez-Sesma & Luzón [1996] donde identificaron que sólo las ondas de superficie pueden transportar energía a gran distancia en un valle somero².

Hasta ahora encontramos los mismos fenómenos en ambos modelos aunque con distinta amplitud y distribución. Para análisis subsecuentes nos enfocamos en el modelo de dos capas.

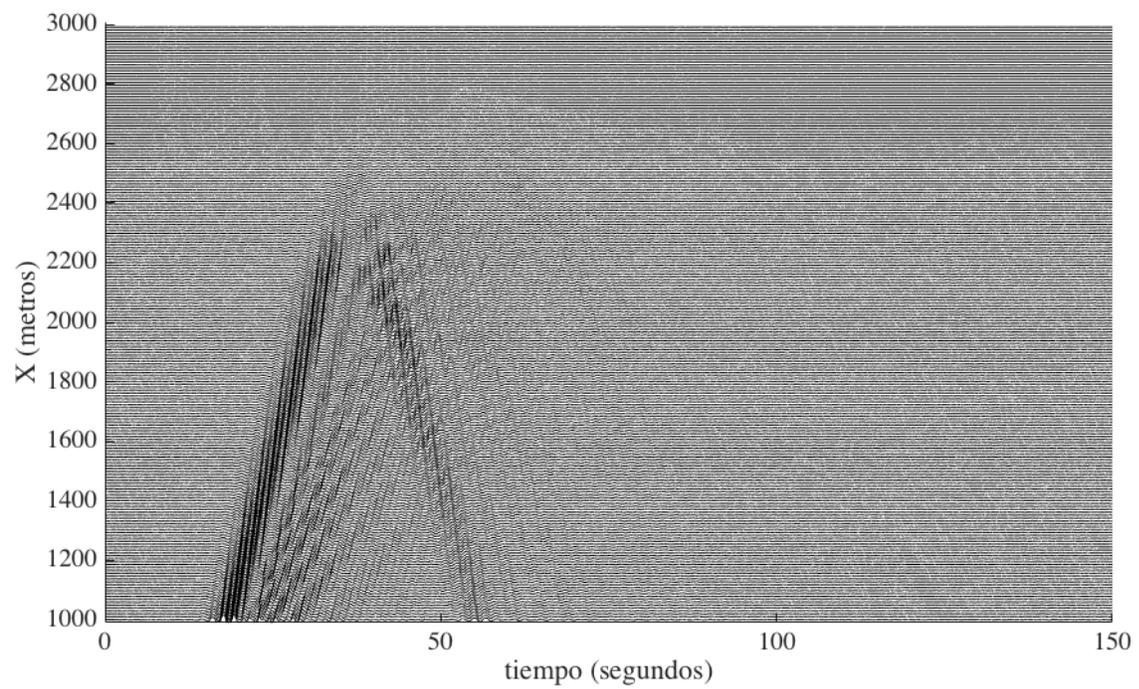
El movimiento de partícula en el modelo de dos estratos (M) permite apreciar la evolución de las ondas de superficie (ver Figura 7.7). En esta gráfica todas las ondas de superficie conllevan movimiento de partícula retrógrado, la onda difractada aparenta movimiento prógrado porque se propaga en dirección opuesta ($-x$). Observamos que la onda incidente se disuelve alrededor de $x = 2600\text{m}$. Respecto al campo difractado, sólo en $x \leq 2300\text{m}$ reconocemos con claridad el movimiento elíptico característico, pero notamos oscilaciones verticales de amplitud significativa que suponemos son precursoras de la formación de la onda de superficie.

²Ellos buscaron refutar que la resonancia de ondas P podría explicar la larga duración del movimiento en el valle de México durante sismos fuertes [Mateos et al., 1993].

7.4. ANÁLISIS DE LA DIFRACCIÓN CERCA DEL BORDE DE UN VALLE SOMERO101

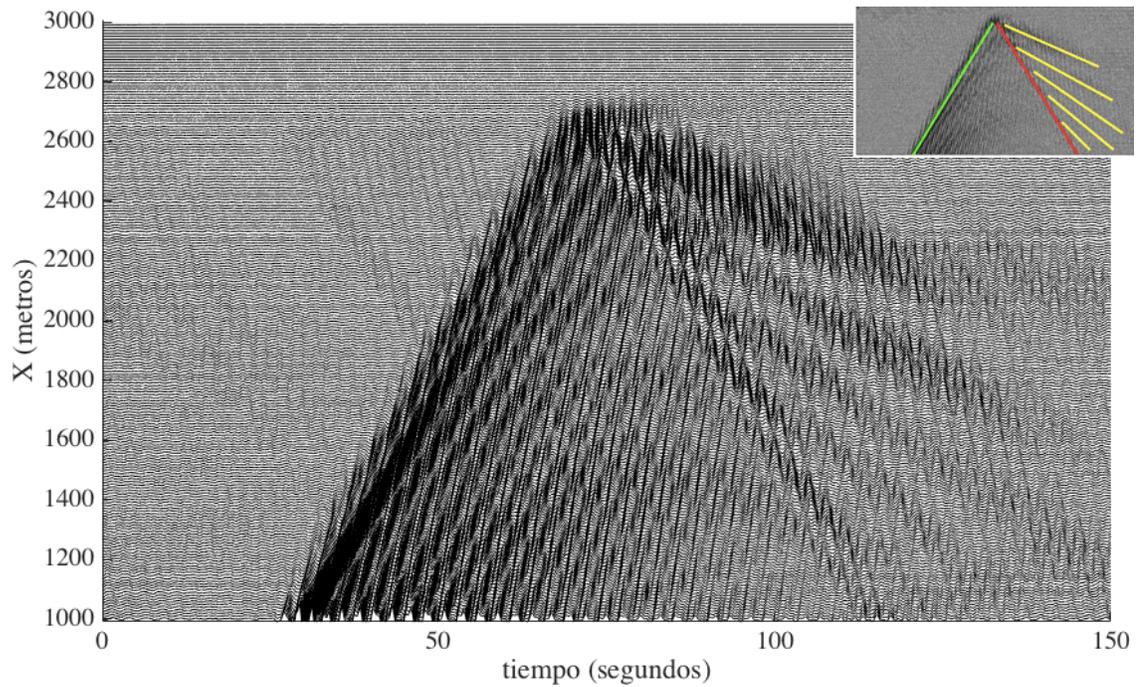


(a) Desplazamiento horizontal

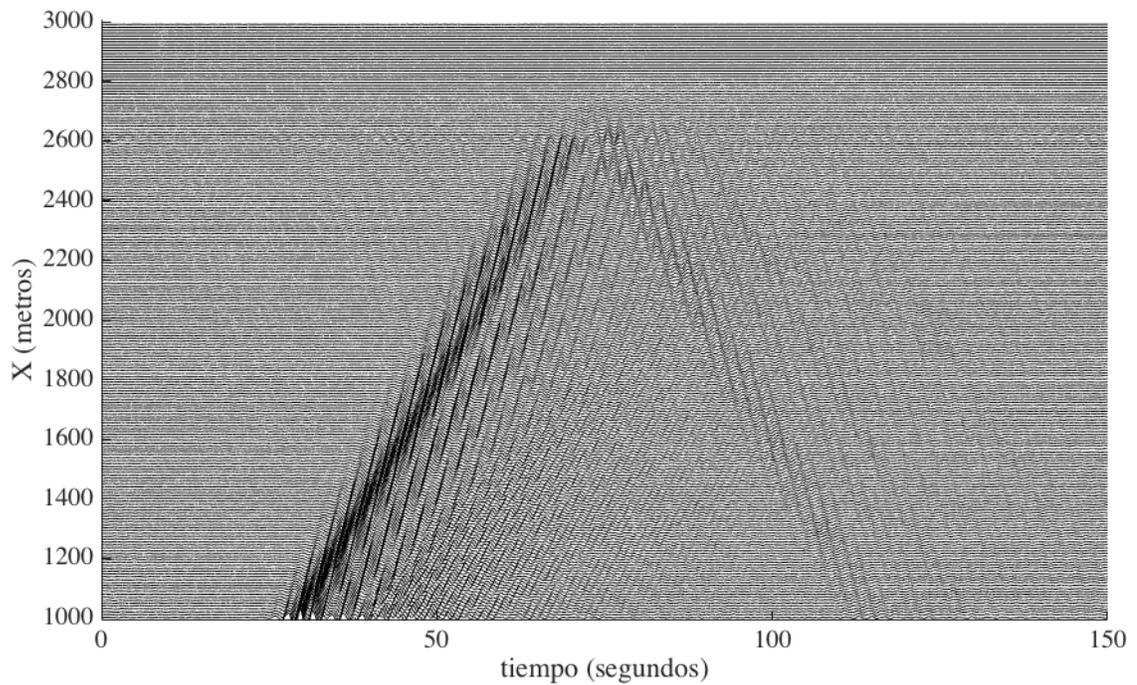


(b) Desplazamiento vertical

Figura 7.5: Componentes del desplazamiento horizontal (a) y vertical (b) en el borde del valle con la estratificación **SS** del Cuadro 7.1 (valle homogéneo).



(a) Desplazamiento horizontal y miniatura con marcas



(b) Desplazamiento vertical

Figura 7.6: Componentes del desplazamiento horizontal (a) y vertical (b) en el borde del valle con la estratificación **M** del Cuadro 7.1 (dos estratos). La inserción es una vista en miniatura de (a) donde se marcan los frentes de onda incidente (color verde), reflejado (rojo) y con líneas amarillas se marcan los grupos de múltiples con baja velocidad aparente.

Variación de la respuesta en tiempo-frecuencia-distancia al borde

Analizamos la respuesta en el dominio de la frecuencia en tramos de los sísmogramas sintéticos, seleccionados con ventanas móviles de forma Gausiana cuyo ancho depende de la frecuencia. Para ello utilizamos la transformada S; también pudimos usar análisis de ondículas (*wavelet transform*). Los espectrogramas (tiempo-frecuencia-amplitud) del desplazamiento horizontal en siete receptores distribuidos entre $x = 2100\text{m}$ y $x = 2700\text{m}$ se muestran en la Figura 7.8. Las crestas a poco menos de 0.5 Hertz están relacionadas con el modo fundamental de las onda de Rayleigh (ver curvas de dispersión). Este modo está presente durante todo el movimiento. Si comparamos contra los sintéticos mostrados antes, reconocemos que la distribución de energía no es uniforme durante el movimiento transitorio. Con el arribo de ondas difractadas y en la coda del movimiento, se asoman frecuencias más altas que podemos asociar con la participación de modos superiores. En $x = 2700\text{m}$ la energía está entre 0.5 y 1.0 Hertz. En ese punto no hay ondas de superficie (ver curvas de dispersión y odogramas).

Extracción del campo difractado por el borde

Si aislamos la participación del campo difractado por el borde del valle, restando el campo libre del campo total, obtenemos sintéticos como los de la Figura 7.9 para el modelo M (dos estratos). Donde se aprecia que la difracción en el borde del valle comienza alrededor de $x = 2400\text{m}$ (lecho de roca a 30m de profundidad). Al comparar con el campo total en la Figura 7.6 notamos que los paquetes de ondas con baja velocidad aparente, son en realidad producto de la interferencia entre campos incidente y difractado. Los odogramas del campo difractado mostrados en 7.9(c) permiten reconocer movimiento elíptico por la onda de Rayleigh en $x \leq 2400\text{m}$. En posiciones más cerca del borde no vemos el movimiento de partícula elíptico que se propague en sentido $-x$. Nosotros interpretamos que en esa región la onda superficial difractada está por formarse. La distribución de energía observada en los espectrogramas y las curvas de dispersión mostrados antes, indican que en esa región la energía está concentrada en la banda de frecuencia asociada con el modo fundamental de las ondas de Rayleigh, a pesar de que solo observamos ondas de cuerpo y el movimiento de partícula no es elíptico. La interacción de dichas ondas aparentemente construye una nueva onda de superficie que nosotros reconocemos como la onda difractada.

7.5. Discusión

Se presentaron resultados de deformación plana para modelos del borde de un valle aluvial con material homogéneo y con estratos. Estos modelos aunque claramente distintos, incurren en mecanismos equiparables para la generación de ondas difractadas. Dichos modelos se retoman en el Capítulo 8, donde compararemos indicadores de la elipticidad de las ondas de Rayleigh.

Encontramos que en el problema de cuña (espesor variable), las ondas incidentes penetran incluso si el espesor del estrato suave es sólo una fracción de la longitud de onda dominante ($1/4$ en el modelo M). Por difracción con el lecho rocoso se generan múltiples ondas de cuerpo, al tiempo que la onda de superficie incidente pierde energía (ver densidad espectral). Cuando la onda superficial no puede ser soportada en el estrato, se convierte en ondas de cuerpo que quedan atrapadas en la cuña. Esto incrementa la duración del movimiento en la zona adyacente al borde del valle. Todas las ondas difractadas por el borde del valle, son ondas de cuerpo que a su vez se difractan en la cuña. Tras pocos múltiples el movimiento es coherente entre receptores cercanos, la energía persiste en una banda cercana al modo fundamental de las ondas de superficie y se forma una onda de Rayleigh.

Este mecanismo de aumento de la duración y amplitud del movimiento en el borde del valle es complementario a las teorías existentes para explicar este fenómeno en el valle de México durante sismos fuertes ³.

³Esbozamos el panorama de las teorías sobre la gran duración del movimiento que lo atribuyen en parte a características del sitio: Kawase & Aki [1989] lo adjudican a la difracción múltiple entre estratos, pero no logran explicar la coda de los registros. Sánchez-Sesma & Luzón [1996] mostraron que las ondas superficiales pueden resonar dentro de un valle somero. Shapiro et al. [2001] observaron predominancia de modos superiores de las ondas de superficie en registros de pozo en la zona del lago. Chávez-García [2002] investigaron la resonancia en la interacción entre el movimiento incidente y las condiciones locales del valle. Cruz-Atienza et al. [2016] usaron simulaciones realistas que logran reproducir la participación de modos superiores. Concluyeron que si bien el movimiento del terreno se atenúa fuertemente en los estratos superficiales, los depósitos profundos permiten la propagación de ondas a lo largo de grandes distancias para luego emerger y aumentar la intensidad y duración del movimiento en la superficie.

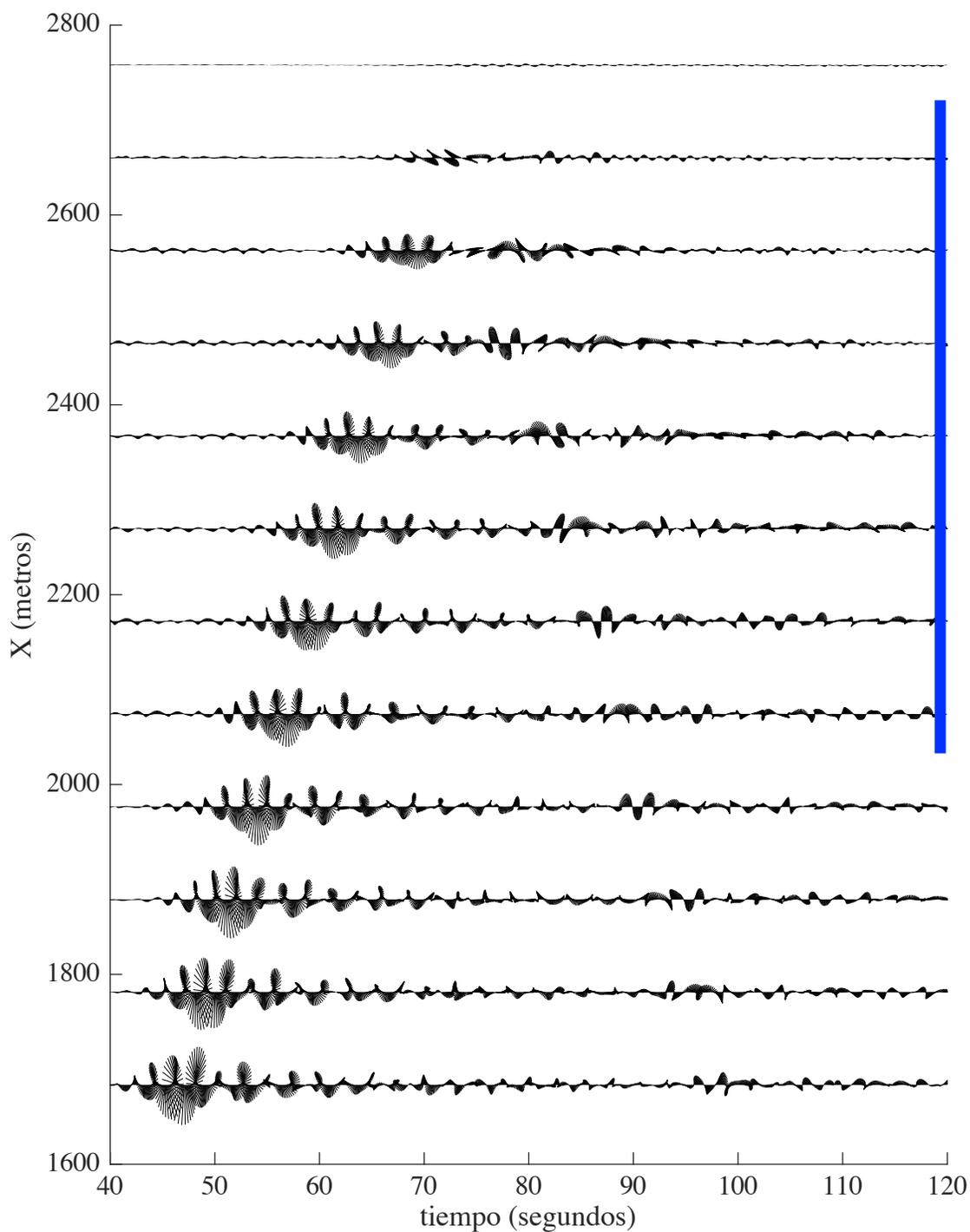


Figura 7.7: Odogramas (movimiento de partícula en el tiempo) cerca del borde del valle en el modelo M. Se aprecia la evolución de las ondas de superficie incidente y difractada. La marca azul señala la región común con la Figura 7.8.

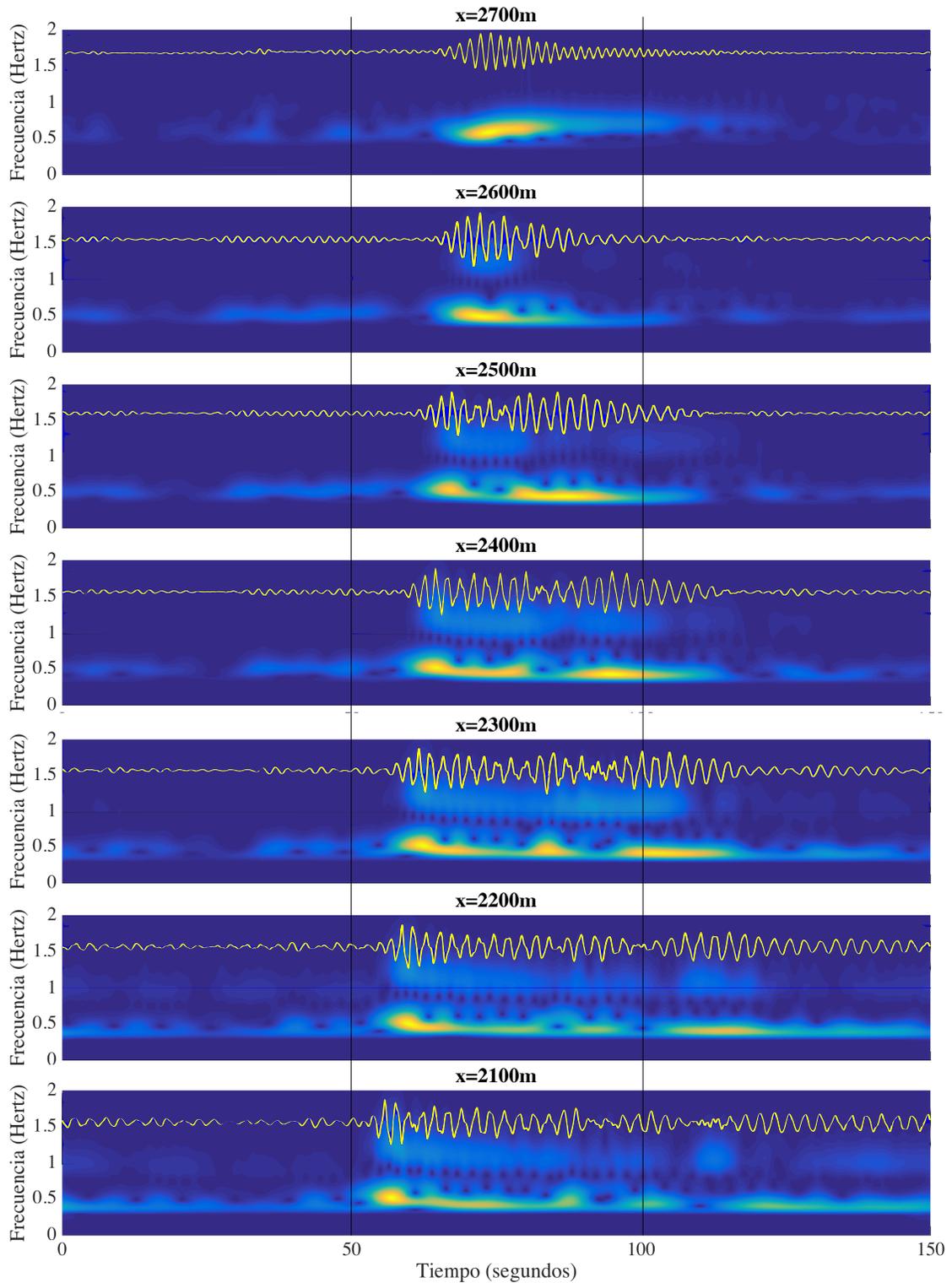
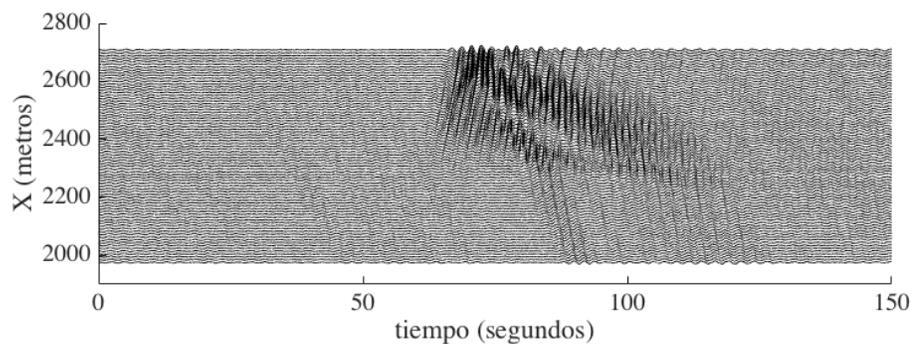
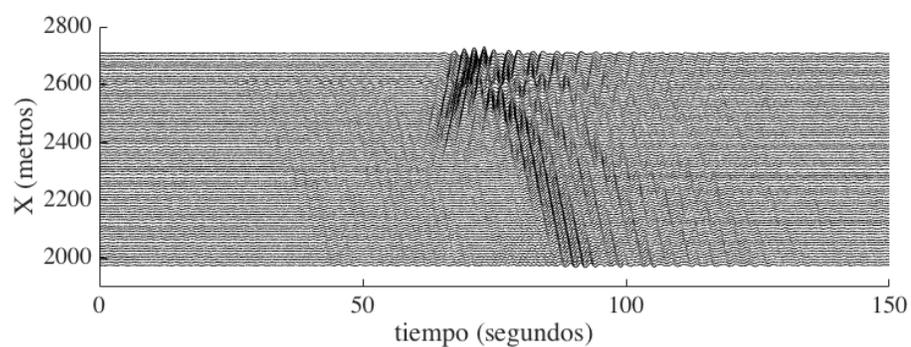


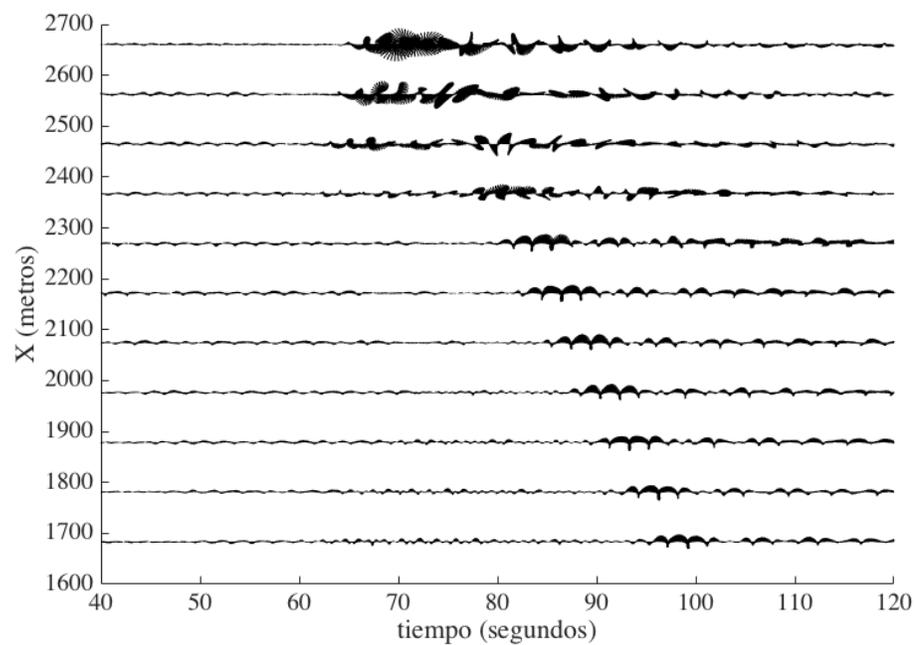
Figura 7.8: Distribución del movimiento horizontal en tiempo frecuencia amplitud (sin escala) y espacio: Siete receptores ($2100 \leq x \leq 2700$)m, en el modelo M. Fuente en el origen y borde del valle en $x=3000$ m. A los espectrogramas se sobreponen los sintéticos de desplazamiento (sin escala) con línea amarilla.



(a) Desplazamiento horizontal sólo del campo difractado



(b) Desplazamiento vertical sólo del campo difractado



(c) Odogramas sólo del campo difractado

Figura 7.9: Componentes del desplazamiento horizontal (a), vertical (b) y odogramas (c) en el borde del valle con la estratificación \mathbf{M} (dos estratos), correspondientes sólo al campo difractado.

Capítulo 8

La discrepancia entre HVSR de sismos y microtremores se debe a la difracción en el borde del valle y SSR es invariable por efecto de los estratos suaves

8.1. Introducción

Los efectos de sitio en valles aluviales, en particular cambio del periodo dominante y la amplificación del movimiento, pueden estimarse a partir de (1) cocientes espectrales respecto a terreno firme o SSR por las siglas en inglés de *cociente espectral estándar* (también SRSS), (2) métodos basados en arreglos de estaciones y (3) indicadores de una sola estación por ejemplo el cociente espectral de los desplazamientos horizontales y vertical, H/V o HVSR por sus siglas en inglés [Nakamura, 1989]. Este último goza de popularidad por su bajo costo. En este trabajo abordamos la diferencia en HVSR de usar registros de sismos o microtremores. Para entender la causa calculamos el campo de ondas en un modelo numérico de valle aluvial con dos casos de estratificación (con y sin estratos de baja velocidad) y distintas incidencias. Obtuvimos SSR y HVSR con dos métodos: El de Nakamura y bajo la hipótesis de campos difusos. Comparamos los resultados y evaluamos la participación de modos superiores. Encontramos que las crestas en la curva de HVSR con sismos que no aparecen al usar microtremores, se deben a ondas de superficie originadas en los bordes del valle y que en mayoría se explican por modos superiores. Con los mismos

resultados hallamos que la aparente invariabilidad de SSR respecto al origen de la fuente observada en el Valle de México puede deberse a la conjunción de tres efectos: (1) Los estratos de baja velocidad en la superficie propician un periodo dominante largo, en baja frecuencia (2) los efectos tridimensionales por irregularidad geométrica se observan sólo en los bordes del valle y (3) la distribución de amplificación de SSR depende sólo de la profundidad.

En el Valle de México la mayoría de los cocientes espectrales experimentales son de sismos de subducción. Para conocer el efecto de otras fuentes sísmicas se puede recurrir a modelos matemáticos de propagación de ondas [Reinoso, 2007], como el que usamos aquí. La excitación puede provenir de sismos o ruido ambiental también llamada *microtremores*¹ en sismología.

En las primeras dos décadas desde su concepción, el HVSR se asumió como un símil de la elipticidad de las ondas de Rayleigh y se usó para estimar el periodo fundamental en estructuras simples con alto contraste de impedancias [Horike, 1996, Konno & Ohmachi, 1998, Nogoshi & Igarashi, 1971, Tokimatsu, 1997]). Nakamura [1989] postuló que los microtremores consisten en ondas de cuerpo. Aunque criticada, esta hipótesis es igual de exitosa que suponer los microtremores como ondas superficiales [Fäh et al., 2001]. Recientemente, Sánchez-Sesma et al. [2011a] propusieron una teoría para explicar el HVSR bajo las hipótesis de que el campo es difuso y existe equipartición de energía en todos los componentes del movimiento.

El HVSR es una función de transferencia donde el máximo local a menor frecuencia está asociado con el pico de la elipticidad de las ondas de Rayleigh en el modo fundamental (algunos autores utilizan Z/H, vertical sobre horizontal, para que el máximo de la curva corresponda a la elipticidad de las ondas de Rayleigh *e.g.* [Li et al., 2016]), el cual a su vez está asociado con el contraste de impedancia que produce resonancia a menor frecuencia (usualmente el contraste más fuerte y somero), mientras que otros máximos locales identifican -con reservas- otros contrastes de impedancia [Bard, 1999]. Por ejemplo, [Malischewsky et al., 2010] obtuvieron el HVSR de registros de sismos, e interpretan que los picos señalan frecuencias resonantes de la primer capa y de estratos inferiores respectivamente. Anteriormente se creía que HVSR de microtremores no puede identificar modos superiores [Lermo & Chávez-García, 1994]. La técnica también es útil para restringir la inversión conjunta de perfiles de velocidad. Recientemente Dal Moro et al. [2016] compararon tres

¹Los métodos pasivos no requieren de excitaciones externas como golpes, detonaciones o sismos. La excitación de los microtremores la proveen las fuentes de ruido naturales y antropogénicas típicamente de baja amplitud, distribución aleatoria y frecuencia menor a 1 Hertz aunque en algunos sitios este umbral puede variar. El consenso es que la iluminación aproxime ruido blanco desde cualquier orientación.

procedimientos de inversión conjunta.

El HVSR es ampliamente usado por economía y aparente eficacia al estimar el periodo dominante en un sitio a partir de registros en una estación (a diferencia de los métodos basados en correlaciones que requieren un arreglo de estaciones). En algunos casos la irregularidad lateral suave puede recuperarse de la interpolación de varios modelos 1D [Matsushima et al., 2011, Uebayashi et al., 2012] y existen reportes donde el daño observado coincide con la zona donde HVSR sugiere amplificación del movimiento importante. Pero no en estructuras heterogéneas, en particular cuencas volcánicas pequeñas, cuando el espesor de los depósitos es muy delgado, o la topografía no puede representarse con estratos planos [Chávez-García et al., 2007, Chávez-García & Kang, 2014, Chávez-García et al., 2014]. Por ejemplo, recientemente con HVSR de microtremores Kawase et al. [2017] estimaron la frecuencia fundamental entre 1 y 4 Hertz en puntos separados decenas de metros. Esto en una localidad cercana a la falla que produjo el sismo, donde hubo concentración de daño alarmante y deformación residual amplia (*flip-step effect*). Tal vez, lo mejor es usar HVSR junto con otras técnicas. Chávez-García & Raptakis [2017] recientemente compararon los resultados obtenidos con SSR y HVSR con sismos y ruido en un sitio bien instrumentado con geología difícil. Con sismos, la alta relación ruido/señal impidió que SSR fuera exitosa, al contrario, HVSR aprovechó esta condición para identificar dos fronteras profundas. Los resultados de usar ruido señalaron efectos geométricos que no se explican por el modelo unidimensional.

Cálculo del HVSR en el modelo numérico

El cociente espectral de la media cuadrática de los componentes horizontales y el vertical es [Nakamura, 1989]:

$$H/V(\omega) = \frac{\sqrt{|u(\omega)|^2 + |v(\omega)|^2}}{\sqrt{2}|w(\omega)|}, \quad (8.1)$$

el cual puede usarse con registros de sismo o de ruido ambiental, en simulaciones o con datos. Simular ruido ambiental en un modelo matemático puede ser oneroso, pero si aceptamos que el campo es difuso el HVSR para microtremores se expresan como la relación entre densidades de energía direccional [Sánchez-Sesma et al., 2011a]:

$$H/V(\omega) = \sqrt{\frac{\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)] + \text{Im}[G_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]}{\text{Im}[G_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]}}, \quad (8.2)$$

donde $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]$ es la parte imaginaria de los componentes en la diagonal del tensor de desplazamientos cuando fuente y receptor coinciden.

La función de Green para desplazamiento en un semiespacio estratificado que se introdujo en la sección 3.4.1 puede especializarse para resolver $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \omega)]$ en cualquier punto del semiespacio². El HVSR de microtemores que obtenemos de simulaciones no se suaviza. En la práctica los datos se filtran (*e.g.* con la técnica logarítmica de Konno & Ohmachi [1998]) y usualmente se presenta el promedio de varios registros.

Casos de incidencia

En la práctica es usual considerar el HVSR o SSR de sismos como el promedio de incidencias del mismo azimut o de la misma provincia sismogénica (*e.g.* todos sismos de subducción en la costa de Guerrero). La simulación de sismos reales no está en los alcances de este trabajo.

Consideramos cinco casos de **incidencia canónica**³ desde el medio exterior: Incidencia vertical de ondas planas P y S, estas últimas en dos polaridades ortogonales. Ondas de superficie producidas por fuerzas en la superficie a tres radios del valle, también desde dos orientaciones -x, -y.

También usamos **fuentes aleatorias** para simular un campo de ondas difuso, como la respuesta promedio a 45 fuerzas puntuales en la superficie del valle: Con dirección x, y, z en 15 puntos. Procuramos que las fuentes estén separadas entre sí y del receptor.

8.2. Evidencia experimental de la discrepancia entre HVSR de sismos y microtemores

Entre 1998-2004 una estación permanente registró ruido ambiental y temblores en un sitio de terreno suave alejado de los bordes del valle en el ex lago de Texcoco. Esto en la ciudad de México. En base a registros de ruido ambiental y sismos fuertes lejanos Sánchez-Sesma et al. [2011a] y Malischewsky et al. [2010] respectivamente propusieron los modelos de una y dos capas sobre semiespacio mostrados en el Cuadro 8.1. Ambos trabajos proponen modelos de estratigrafía con los que varias formulaciones teóricas reproducen parte de la dinámica observada. Incluimos un

²Sánchez-Sesma et al. [2011a] aplicaron las fuentes como un diferencial de esfuerzo en las condiciones de continuidad en la interfaz entre estratos. Nosotros expresamos la fuente en el interior del estrato sobre las interfaces adyacentes.

³Controlados, ideales, fáciles de interpretar y reproducir. En inglés coloquial los calificaríamos de *textbook*.

Cuadro 8.1: Propiedades mecánicas de los materiales

Modelo.Estrato	h (m)	α (m/s)	β (m/s)	ρ (g/cm ³)	Q	ν
SS.1	40	400	70	1.2	100	0.484
SS.2	∞	2000	1000	2.5	10000	0.333
M.1	20	255.69	34	1.1	10000	0.491
M.2	22	594.1	79	1.5	10000	0.491
M.3	∞	1809.6	475	2.6	10000	0.463
CA.1	30	800	50	2.0	15	0.498
CA.2	20	1200	100	2.0	30	0.497
CA.3	250	2000	400	2.05	40	0.479
CA.4	250	2500	800	2.05	80	0.443
CA.5	∞	2700	1560	2.2	156	0.249

Donde: h espesor, α y β velocidad de la ondas de presión y cortante respectivamente, ρ densidad de masa, Q factor de calidad y ν coeficiente de Poisson. Q en el modelo de Malischewsky et al. [2010] se propone. En los modelos de cuenca h de los estratos acomoda el borde del valle y el semiespacio es el medio exterior.

modelo de cuatro estratos adaptado de Cruz-Atienza et al. [2016]. Los identificados como SS, M y CA en el resto del trabajo.

Comparación de indicadores 1D con registros de ruido y de sismo

El HVSR de microtemores y de sismos es necesariamente distinto. Este último depende del trayecto, azimut y efectos tridimensionales en la cuenca, mientras que la excitación por ruido es un proceso estacionario que idealmente tiene igual potencia en todas las frecuencias.

La información publicada para el modelo SS (un estrato sobre semiespacio) se reproduce en la Figura 8.1(a)[Sánchez-Sesma et al., 2011a] donde el HVSR calculado con registros de **vibración ambiental** se trazó con línea segmentada; con la ecuación (8.2) con y sin amortiguamiento (líneas gris y negra resp.); con modos generalizados [Margerin, 2009] (puntos negros) y nuestros resultados para un modelo con y sin amortiguamiento (línea roja segmentada y línea roja continua resp.). Nuestro resultado no tiene la amplitud reportada por el método que aplica las fuerzas como un diferencial de esfuerzo en la superficie (trabajo SS), en cambio, nuestro resultado sin amortiguamiento aproxima muy bien la amplitud del HVSR experimental (ver Figura 8.1(c)). El ajuste es bueno en el resto de la curva, incluidas frecuencias altas.

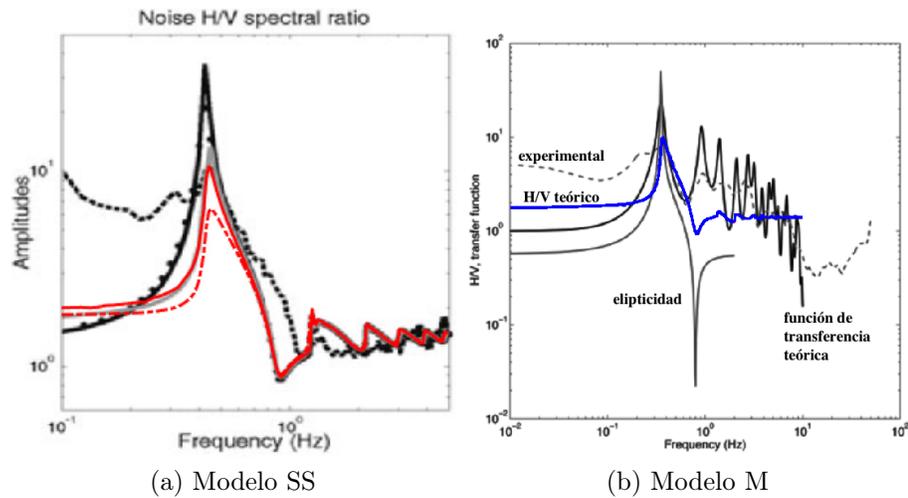
Se observa que de despreciar la atenuación en el estrato sólo se produce cambio en la amplitud del primer máximo.

Ahora comparamos con el modelo M (dos capas sobre un semiespacio). En la Figura 8.1(b)[Malischewsky et al., 2010] Con línea segmentada vemos el HVSR experimental para **ocho sismos** fuertes lejanos en ventanas de tiempo que se extienden 80 segundos después del arribo de las ondas S. Con línea roja sobreponemos el HVSR de microtemores calculado con la ecuación (8.2). La figura incluye la función de transferencia teórica y la curva de elipticidad de las ondas de Rayleigh para el modo fundamental. Nuestro resultado (basado en la teoría de campos difusos) identifica correctamente la frecuencia del primer modo y elipticidad (máximo y mínimo), pero no reproduce la amplitud del HVSR experimental arriba de 1 Hertz.

Observamos que la amplitud y frecuencia fundamental señalada por HVSR experimental con sismos es distinta del correspondiente a vibración ambiental. En la Figura 8.1(c) comparamos los cocientes espectrales reportados por Sánchez-Sesma et al. [2011a] y Malischewsky et al. [2010] mostrados anteriormente y nuestros resultados para modelos de una, dos y cuatro capas sobre semiespacio (modelos SS, M y CA) sin considerar amortiguamiento. La diferencia entre HVSR experimental de microtemores y por sismos es importante en frecuencias más altas que donde encontramos el mínimo de la curva de elipticidad (indicado también por HVSR) y hasta 3 Hertz. Es probable que los picos en esta banda corresponden a modos superiores de ondas de superficie en concordancia con observaciones de Shapiro et al. [2001] en el valle de México. Esto además coincidiría con la postura de Cruz-Atienza et al. [2016] sobre el papel de los modos superiores en la duración del movimiento. Las ondas superficiales dominadas por modos superiores no son afectadas por el amortiguamiento de los estratos superficiales y logran transportar energía -por debajo- a grandes distancias. Además si esto es cierto, podríamos esperar que por excitación de sismo observemos el efecto de estructuras geológicas lejanas, lo cual no ocurriría con microtemores. En lo que sigue hacemos un experimento para estimar el papel de los estratos superficiales y la participación de armónicos y los mecanismos que propician su aparición.

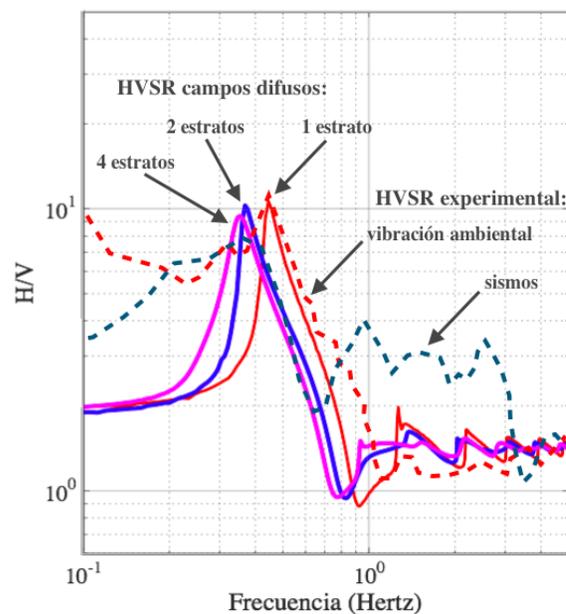
8.3. Efecto de los estratos de baja velocidad en la estimación del periodo fundamental con HVSR

Partiendo de la teoría de Sánchez-Sesma et al. [2011a] para el HVSR de microtemores (aquí llamado HVSRcd por estar bajo la hipótesis de que el campo es difuso) analizamos la proporción de ondas planas P, SV, SH, que componen la parte imagina-



(a) Modelo SS

(b) Modelo M



(c) Comparación modelos SS, M, CA y datos

Figura 8.1: Ajuste de modelos unidimensionales al HVSR de microtremores y sismos. **(a)** (Modelo de 1 estrato sobre semiespacio) HVSR de registros de vibración ambiental (línea segmentada) y otros indicadores descritos en el texto principal. Reproducido de Sánchez-Sesma et al. [2011a]. Los resultados usando la ecuación (8.2) con y sin amortiguamiento se sobrepone con línea roja segmentada y continua resp. **(b)** (Modelo de 2 estratos sobre semiespacio) HVSR promedio de ocho sismos fuertes lejanos (línea segmentada), función de transferencia teórica y elipticidad de las ondas de Rayleigh para el modo fundamental. Reproducido de [Malischewsky et al., 2010]. Con línea azul se sobrepone el HVSR calculado con la ecuación (8.2). **(c)** Comparación de los resultados anteriores y el modelo CA de cuatro estratos sobre un semiespacio. Se observa discrepancia entre los modelos basados en ruido y la amplificación correspondiente a sismos.

ria de la función de Green en la fuente (Apéndice D) y describimos la combinación de ondas que reproduce el movimiento de partícula esperado cuando ocurre el máximo y mínimo de la curva de elipticidad, $f(\mathcal{X}_M)$ y $f(\mathcal{X}_m)$ respectivamente. Observamos que conforme aumenta la frecuencia la proporción entre ondas oscila con un patrón regular y es improbable que HVSRcd en un modelo 1D tenga picos como los observados en HVSR de sismos cuando $f \geq f(\mathcal{X}_m)$. La diferencia sólo puede deberse a la difracción en el fondo y borde del valle, al menos en el modelo matemático.

Del análisis también interpretamos a HVSRcd como un fador del sistema estratosfuerza que sólo contiene información del campo difractado. La distancia desde donde pueden recibirse ondas difractadas (recuerde que fuente y receptor coinciden) depende de la atenuación geométrica y del material. Si la teoría es correcta, el HVSR de microtremores en un valle aluvial con estratos suaves -como el valle de México- registrará en gran mayoría ondas difractadas en los estratos superficiales⁴, tal vez de ahí el acierto de esta técnica al estimar el periodo dominante pero no lo que inferimos son ondas difractadas desde el borde.

La reverberación entre estratos puede producir otros máximos locales pero siempre a menor frecuencia que $f(\mathcal{X}_m)$ para el primer modo. Cuando no hay estratos suaves o éstos son muy profundos, el HVSR de microtremores registraría el campo difractado en el siguiente contraste de impedancia fuerte, el fondo y borde del valle.

Para evaluar estas hipótesis usamos dos modelos en los que sabemos se generan ondas difractadas en los bordes del valle. El tamaño del modelo se restringe a las capacidades de cálculo disponibles. Proponemos un valle aluvial de 2 Km de diámetro en la superficie, simétrico al eje x pero no al eje y . Las curvas de nivel circulares son concéntricas al origen en $z = 0$ y a $\mathbf{x} = (250, 0)$ en $z = 450\text{m}$. En la Figura 8.2 mostramos la planta y un corte en el plano $y = 0$ para dos casos de estratificación. La forma proviene de una función Gaussiana $f(x, y_0)$, que luego se reclina con $y = y_0 + 250/450z$. Los estratos son planos y el material es homogéneo e isótropo dentro de cada capa. Aprovechamos los perfiles del Cuadro 8.1 en dos configuraciones:

- **Caso A:** La región interior con los estratos CA.1 al CA.4 y el exterior con CA.5.
- **Caso B:** La región interior con los estratos CA.3 y CA.4. El exterior con CA.5.

Los casos A y B no son equivalentes. El efecto de simplificar la estratificación en favor de medios homogéneos equivalentes se exploró en el Apéndice E.

Con el caso B pretendemos observar el comportamiento tridimensional que era atenuado, refractado y filtrado por los estratos suaves. A continuación discutimos

⁴En la superficie las ondas inciden casi verticalmente por el contraste de impedancia con el medio subyacente, la amplitud del movimiento crece, la longitud de onda disminuye y hay difracción múltiple dentro de la capa suave.

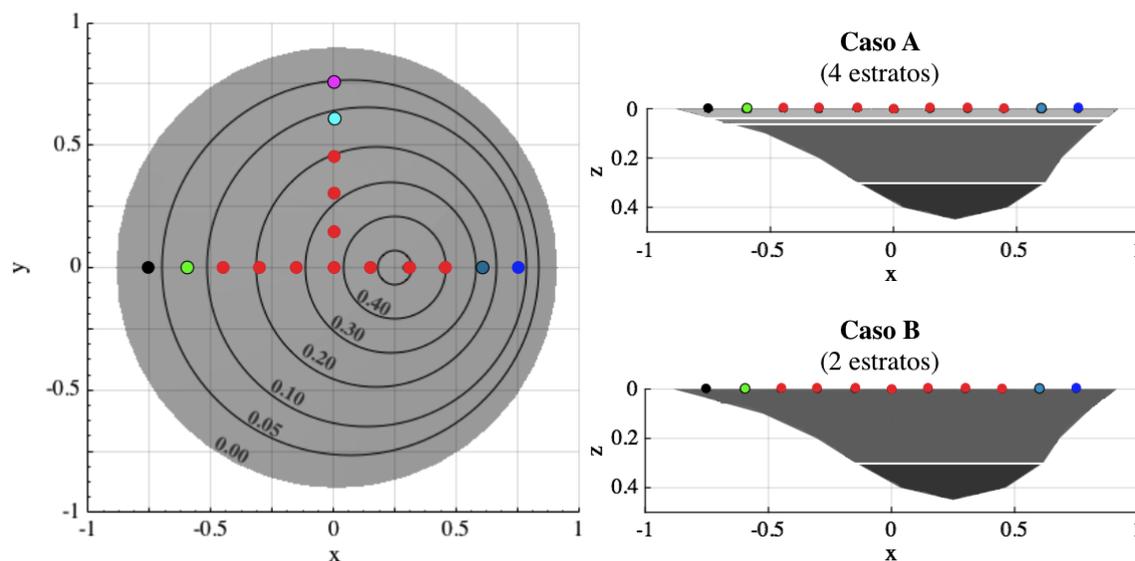


Figura 8.2: Geometría del modelo de valle con dos casos de estratificación: Caso **A** con cuatro estratos, y Caso **B** con dos estratos. Los puntos de colores indican dos líneas de receptores referidos en el texto principal. Unidades en Kilómetros.

los resultados. Note que el muestreo en frecuencia sigue una regla logarítmica para resolver menos frecuencias altas (más costosas). Y la frecuencia resonante de los modelos unidimensionales se obtiene como $f = \bar{\beta}/(4H)$, la velocidad promedio de ondas S hasta el contraste de impedancia en $z = H$.

Caso A: 4 estratos, incluidos 2 de baja velocidad

Obtuvimos el HVSR con el método de Nakamura (ecuación (8.1)) usando incidencias canónicas desde fuera del valle y fuentes aleatorias dentro del valle (ver descripción en la introducción del capítulo). Los resultados son similares así que sólo presentamos lo obtenido con fuentes aleatorias (HVSRnk). También resolvemos H/V bajo la hipótesis de campos difusos con la ecuación (8.2) (HVSRcd). En la Figura 8.3 mostramos los resultados para 6 estaciones cercanas al borde de valle y 10 en el interior. El color de las líneas coincide con los puntos en la Figura 8.2.

Con ambos métodos los resultados en el interior del valle (color rojo) son muy similares entre sí y pueden explicarse por el modelo unidimensional (línea gris gruesa). El modo fundamental de las ondas de Rayleigh se identifica ≈ 0.35 Hertz. Este valor depende del contraste de impedancia entre los estratos CA.2 y CA.3 ($z = 50$ m).

En los tres receptores más próximos al borde del valle, el HVSR no se explica

del todo por el modelo 1D. En el punto **negro**, $\mathbf{x} = (-0.75, 0.00)$, el lecho rocoso es somero ($z=30\text{m}$) y el modelo 1D resonaría en 0.41 Hertz, pero el primer máximo (≈ 0.3 Hertz) tiene poca amplitud y podría corresponder a efectos del borde. El segundo máximo (≈ 0.5 Hertz) tiene mayor amplitud pero tampoco corresponde al modelo 1D. Los puntos **azul** y **rosa** están sobre depósitos de 50 y 120 metros de espesor. En ambos se identifica el periodo de fundamenta asociado al contraste de impedancia en $z = 50\text{m}$. Los segundos máximos locales de HVSRnk son ≈ 0.6 y 1.0 Hertz respectivamente. En estas frecuencias se puede esperar que los modos superiores de las ondas de superficie participen en la respuesta (las curvas de dispersión teóricas están en el Apéndice F). También es posible que el borde del valle induzca ondas difractadas de cuerpo y superficie (ver Capítulo 7) pero no podemos discernir sólo con HVSR.

En ambos grupos de estaciones, los resultados de HVSRcd son más consistentes entre si que con HVSRnk. Esto no necesariamente es mejor, porque la profundidad del lecho rocoso es distinta en cada receptor. Cerca del borde la frecuencia fundamental con HVSRnk es ligeramente más alta en las estaciones someras (línea continua) que en las más profundas (línea punteada); en cambio HVSRcd sólo lo señala en las dos estaciones con depósitos más y menos profundos.

Caso B sin estratos superficiales suaves

Si despreciamos los estratos suaves someros (caso **B**) la respuesta en superficie exhibe efectos de la geometría tridimensional de la cuenca, incluso en la parte media del valle. Repetimos el ejercicio anterior con este modelo y mostramos los resultados para HVSRnk y HVSRcd en la Figura 8.4. En $\mathbf{x} = (0.25, 0.00)$ HVSRcd del modelo unidimensional responde al contraste de impedancia con el medio exterior ($f_0 \approx 0.28$ Hz) (línea gris gruesa). Si el contraste de impedancia entre CA.3 y CA.4 fuera mayor se produciría un máximo local en $f_0 = 0.33\text{Hz}$, pero en el caso que reportamos esta frontera no es perceptible. En la zona interior del modelo tridimensional (puntos y líneas color **rojo**), HVSR con ambos métodos identifica la frecuencia fundamental $f_0 \approx 0.46$ Hz y en seguida la reverberación del estrato CA.3 en ≈ 0.52 Hz. De acuerdo a la curva de dispersión teórica en esta frecuencia pueden participar modos superiores (se discute después). Con HVSRcd el segundo máximo entre 0.9 y 1.0 Hertz, tiene amplitud equivalente al primer máximo. Ninguna frecuencia identificada se explica por el modelo unidimensional. Creemos que podrían deberse a efectos del borde no contemplados en la teoría de ambos métodos, por ejemplo, note que en el receptor $\mathbf{x} = (0.75, 0.00)$ del caso **A** (el más próximo al borde abrupto) el segundo máximo también tiene amplitud grande.

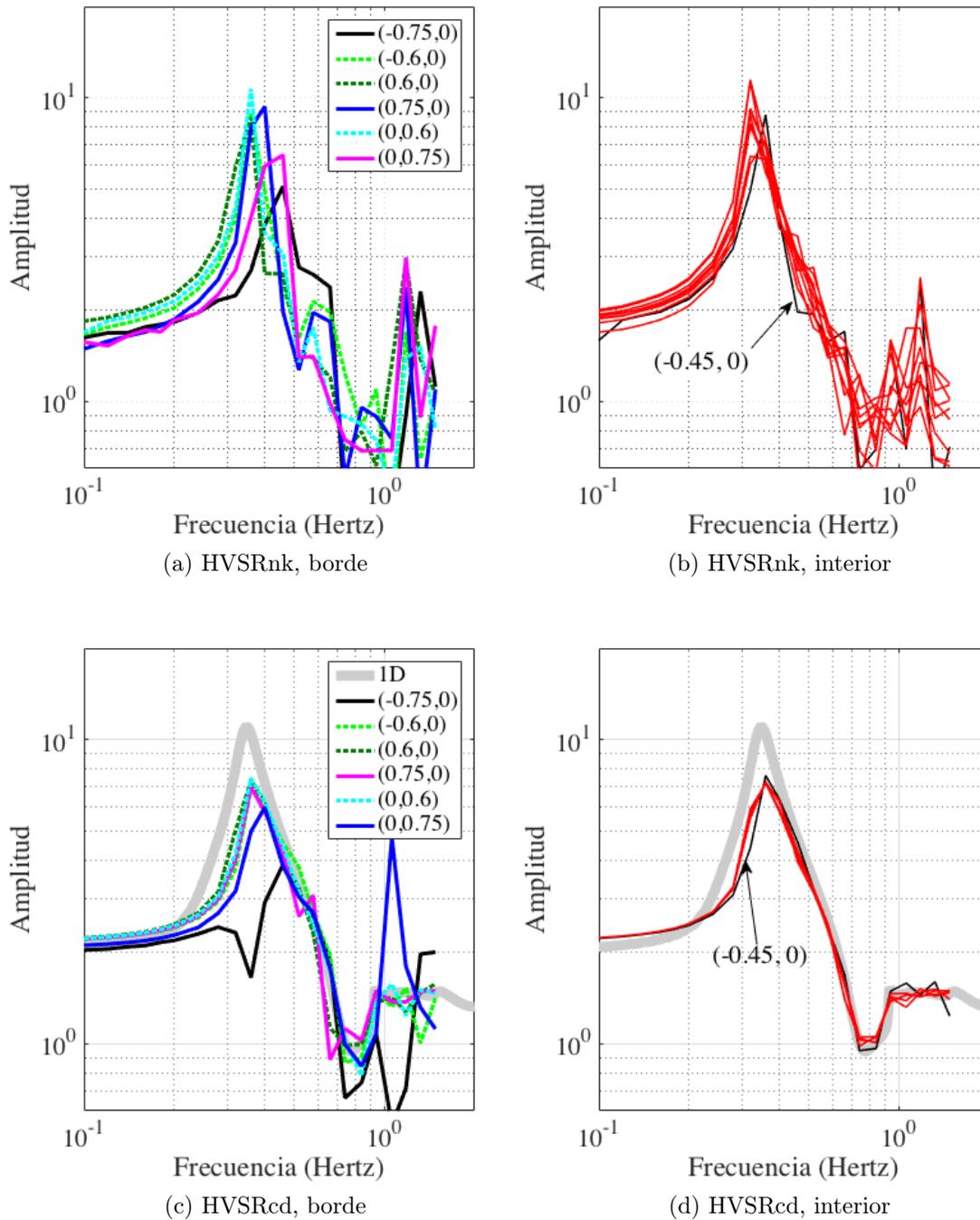


Figura 8.3: HVSR de microtremores en el **caso A** (4 estratos). **HVSRnk**: Promedio de 45 incidencias con método de Nakamura (ecuación (8.1)) en 6 estaciones cerca del borde (a) y 10 en la parte media del valle (b). **HVSRcd**: Bajo la hipótesis de campos difusos (ecuación (8.2)) cerca del borde (c) y en el interior del valle (d) en las mismas estaciones. Con línea gris el HVSRcd 1D con el perfil estratigráfico en $\mathbf{x} = (0.25, 0)$

En puntos cercanos al borde del valle, con HVSRnk observamos un pico en ≈ 0.8 Hz que también aparece en el interior del valle pero no logramos interpretar. Con HVSRcd sólo $\mathbf{x} = (0.60, 0.00)$ (donde los depósitos son más profundos) tiene un máximo local que coincide con la frecuencia fundamental en el centro del valle, en el resto HVSR falla en identificar una frecuencia dominante en la banda que revisamos.

En la siguiente sección obtenemos cocientes espectrales estándar y comparamos las frecuencias dominantes con las aquí indicadas.

8.4. Comparación de SSR y HVSR

Se estudia la relación entre las frecuencias identificadas con el HVSR de microtremores usando la técnica de Nakamura, y cocientes espectrales estándar (SSR) respecto a una estación de referencia en terreno firme. Los SSR predicen la amplificación del movimiento en zonas de terreno suave donde se espera que los efectos de sitio sean significativos por ejemplo los mapas de amplificación en el valle de México de Reinoso & Ordaz [1999].

SSR en dos líneas de receptores

Los SSRs se obtuvieron en las estaciones de la Figura 8.3 para los casos **A** y **B**. En la Figura 8.5 mostramos el SSR para algunas incidencias y componentes de desplazamiento horizontal. La frecuencia fundamental identificada en casi todos los casos coincide con la obtenida de HVSR; ≈ 0.3 Hz en el caso **A** y ≈ 0.5 Hz en **B**. La excepción fue el caso **B** ante onda de superficie desde la orientación $+y$ (ver Figura 8.5(h)).

En general los resultados de SSRs incluyen el primer armónico identificado con HVSR. Cuando $f \geq 0.8$ Hertz observamos picos que después mostraremos se trata de modos superiores en ambos casos de estratigrafía. Note que aparecen incluso en la parte media del valle en el caso **A** (con estratos suaves) lo cual no pasa con HVSR. En el caso **B** la amplificación en todo el espectro es consistente entre receptores y sólo cambia la amplitud, mientras que en el caso **A** la variabilidad es notoria. Además, SSR permite reconocer que la amplificación en el caso con estratos suaves es hasta un orden de magnitud mayor que en el caso sin estratos.

La amplitud de SSR en $f \geq 0.8$ Hertz es mayor que para el fundamental porque en terreno firme la participación de modos superiores es mínima. A continuación revisamos la distribución de SSR en toda la superficie del valle.

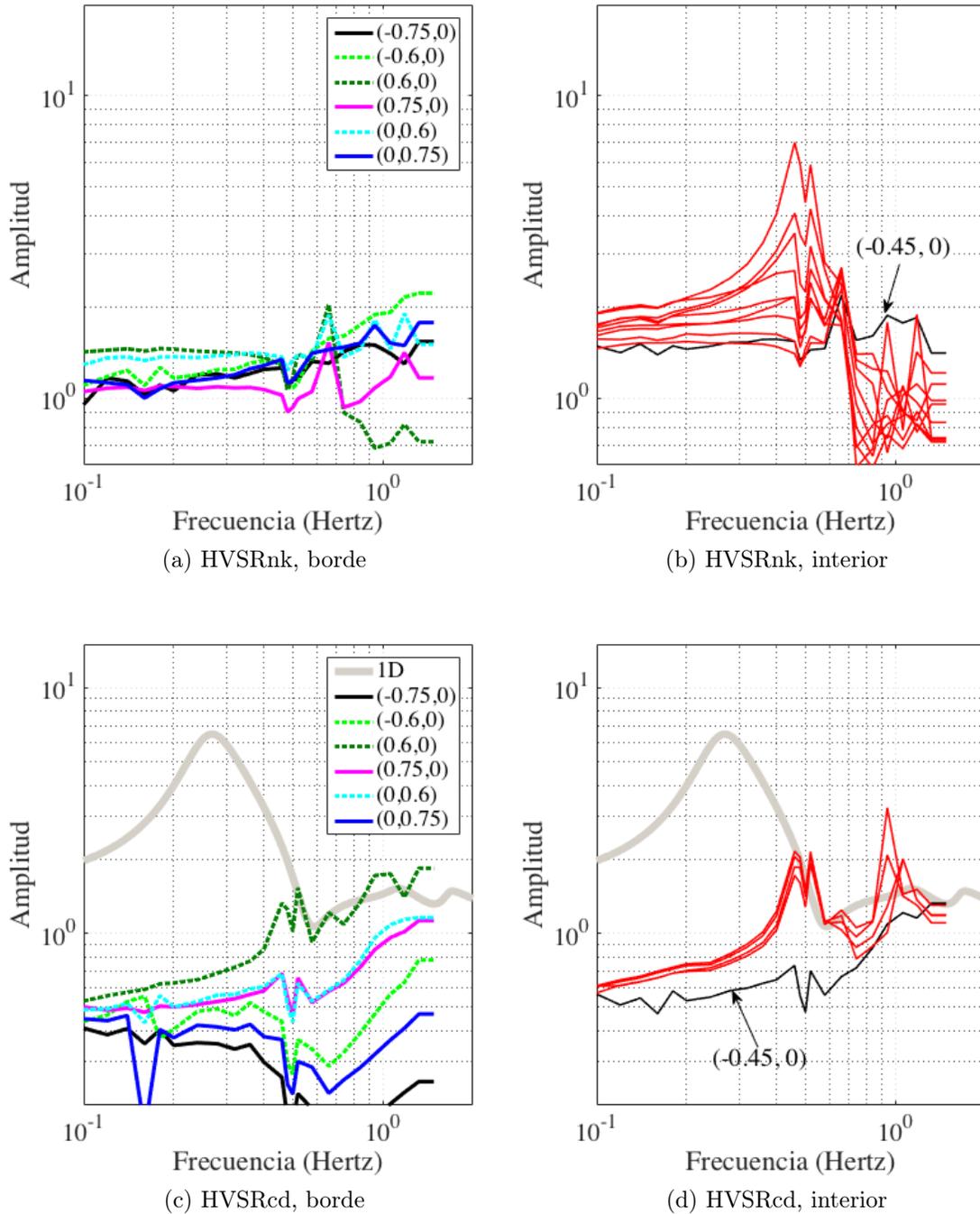


Figura 8.4: HVSR de microtremores en el **caso B** (2 estratos). **HVSRnk**: Promedio de 45 incidencias con método de Nakamura (ecuación (8.1)) en 6 estaciones cerca del borde (a) y 10 en la parte media del valle (b). **HVSRcd**: Bajo la hipótesis de campos difusos (ecuación (8.2)) cerca del borde (c) y en el interior del valle (d) en las mismas estaciones. Con línea gris el HVSRcd 1D con el perfil estratigráfico en $\mathbf{x} = (0.25, 0)$

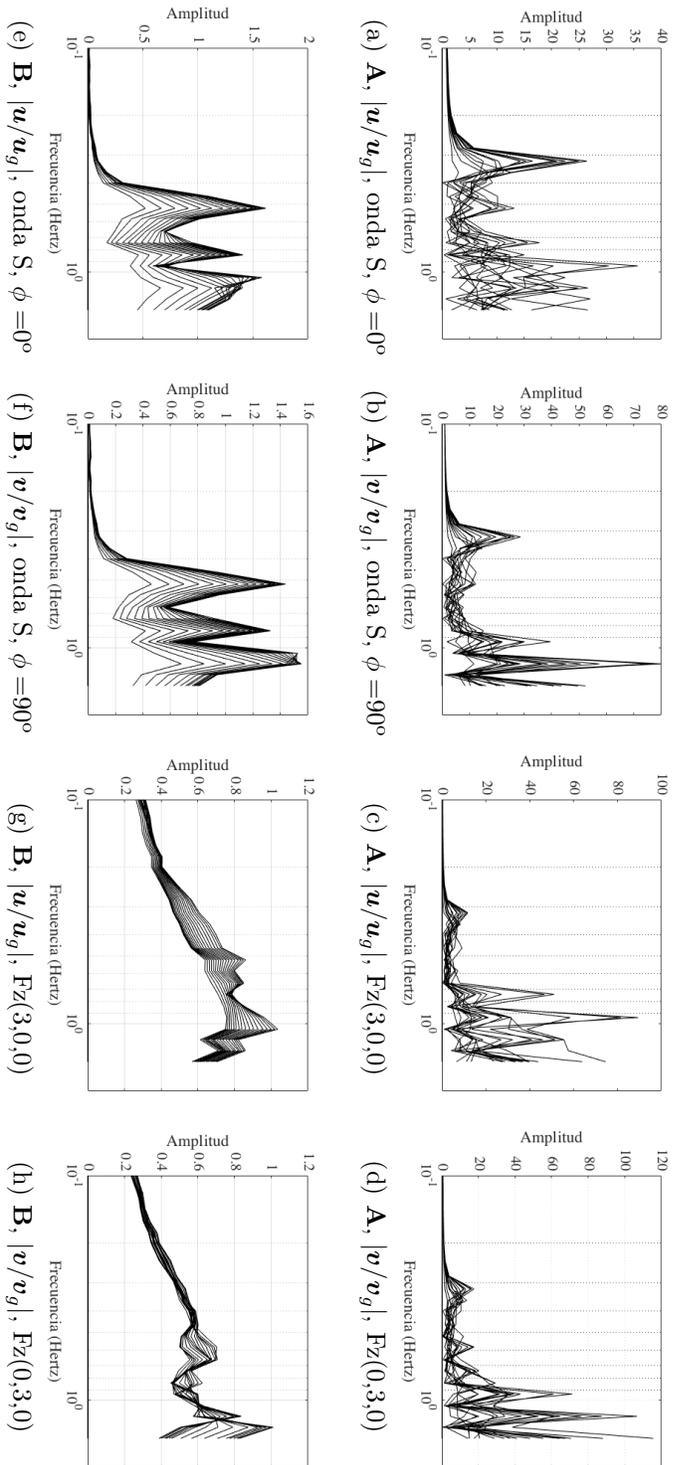


Figura 8.5: **SSR**: Cocientes espectrales respecto a una estación en terreno firme, $x_g = (1, 0, 0)$ en el **Caso A**, arriba y **Caso B**, abajo. Resultados para distintas incidencias (columnas) y posiciones en el valle (trazas sobrepuestas). Los modos fundamentales en ≈ 0.3 Hz en el caso **A** y ≈ 0.5 Hz en **B** coinciden con lo identificado con HVSR. En ambos modelos cuando $f \gtrsim 0.8$ Hz observamos modos superiores.

Mapas de amplitud de SSR y HVSR

Elaboramos mapas de la distribución de amplitudes de HVSR y SSR en distintas frecuencias y casos de incidencia. Evaluar HVSRcd puede ser muy costoso cuando se trata de mapas; por cada estación (\mathbf{x}) se requiere la respuesta a 3 incidencias ($G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ para $i = 1, 2, 3$), así que preferimos el método de Nakamura (HVSRnk). En lo que sigue la referimos tan sólo como HVSR. A modo de excitación esta vez no usamos la incidencia de fuentes aleatorias dentro del valle, porque es difícil garantizar la separación entre fuentes y receptores. En su lugar resolvemos casos canónicos de incidencia desde el medio exterior (descritos en la introducción). Obtuvimos abundantes resultados que pueden consultarse en el Apéndice F.1, aquí sólo discutimos algunos.

Primero revisemos la evolución de SSR y HVSR alrededor del modo fundamental. Obtuvimos el azimut del movimiento de partícula; SSR del desplazamiento horizontal total, $|H/Hg|$, donde $H = \sqrt{u^2 + v^2}$ y Hg se evalúa afuera del valle; y HVSR con el método de Nakamura (ecuación (8.1)). La Figura 8.6 corresponde al caso **A** (con estratos suaves) ante una fuerza vertical en $\mathbf{x} = (3, 0, 0)$. Seleccionamos cinco frecuencias alrededor de 0.3 Hertz. Los mapas se muestran con la misma escala lineal de amplitud. En ambos cocientes hacemos saturar la escala en 20 para mitigar los valores singulares cerca de los bordes (SSR) y donde el componente vertical tiende a cero (HVSR).

Azimut: Observamos que donde hay poca amplificación del movimiento, la orientación del desplazamiento horizontal corresponde a la polarización de la incidencia (0°) y que donde la amplificación es significativa la orientación es $-\pi^-$ y $-\pi^+$. El componente v es pequeño excepto donde esperamos ondas de Love.

SSR: El mapa de amplificación del movimiento horizontal se explica por la profundidad del lecho rocoso sólo hasta el modo fundamental ($f_0 \approx 0.32\text{Hz}$). Además, destaca que en $f \leq f_0$ la distribución de amplificación de los cocientes espectrales es casi independiente de las características de la fuente (Figura 8.7). Esta observación coincide con reportes en el valle de México para sismos de distinto origen [Reinoso & Ordaz, 1999]. En nuestro modelo la frecuencia fundamental es la de resonancia en los estratos superficiales, para esa y menores frecuencias el desplazamiento horizontal y vertical es más amplio donde la onda de Rayleigh puede ser más profunda.

En la Figura 8.7 también en $f \leq f_0$ del modelo **A** incluimos los resultados para el caso B (sin los estratos suaves y $f_0 \approx 0.5\text{Hz}$). Los mapas de SSR son equiparables a los del caso con estratos pero con aproximadamente $1/20$ la amplitud en todas las incidencias; por consiguiente es posible incorporar en **B** el efecto de las capas suaves por medio de una función de transferencia unidimensional (por ejemplo un propagador de Haskell). Esta idea fue discutida en cartas no publicadas entre Sánchez

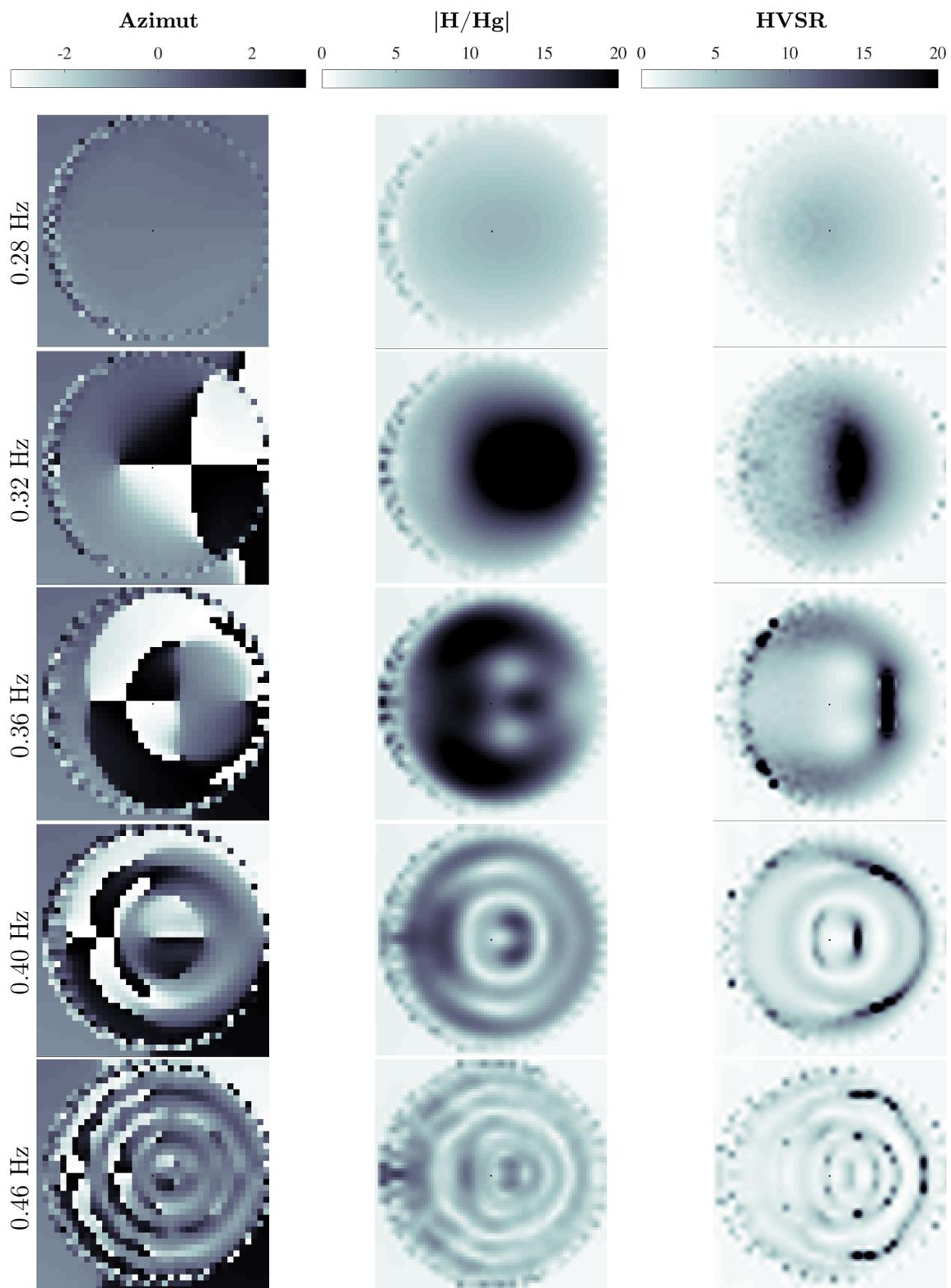


Figura 8.6: Mapa del azimut en radianes, SSR del desplazamiento horizontal total ($|H/H_g|$) y HVSR. Incidencia de **ondas de superficie** desde $-x$ en el caso (A).

Sesma y Arciniega Ceballos de nuestra universidad, pero no conocemos de trabajos que lo exploren numéricamente. De nuestro análisis suponemos que sería factible en frecuencias y posiciones donde los efectos geométricos de la cuenca no son significativos. La misma observación aplicaría para un procedimiento relacionado⁵ que ha sido usado para acelerar la tomografía de la estructura subyacente a los estratos suaves [Graw et al., 2017, Langston, 2011].

Regresando a la Figura 8.6, en frecuencias mayores a f_0 la distribución de amplificación en el mapa sigue la geometría superficial del valle, afirmamos esto porque al menos en baja frecuencia nuestro modelo es simple y podemos discernir entre (1) ondas difractadas en el borde (concéntricas a $\mathbf{x} = (0, 0)$) y (2) las que se explican por el espesor de los depósitos (concéntricas al punto más profundo en $\mathbf{x} = (0.25, 0)$). Esto es evidente en la Figura 8.6 y ocurre para las cinco incidencias.

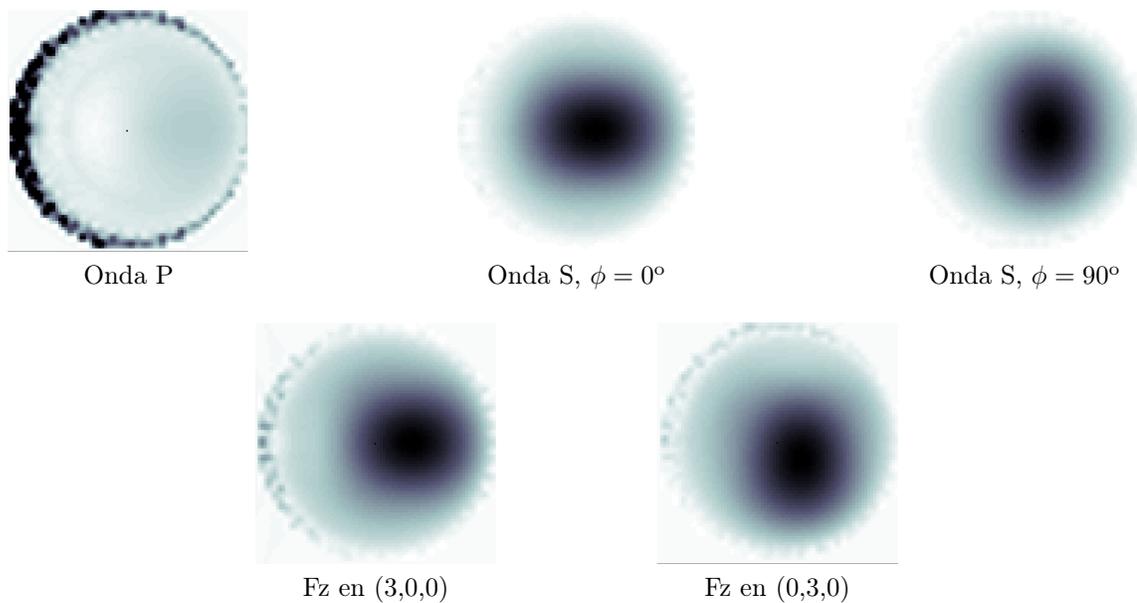
HVSR: El mapa de HVSR contiene información complementaria a SSR. Estos se correlacionan mejor conforme aumenta la frecuencia. La distribución de HVSR no indica la profundidad del lecho rocoso pero sí señala donde la elipticidad es más prominente. Si aceptamos que la amplitud de HVSR es proporcional a la amplitud de las ondas superficiales, lo que observamos conforme aumenta la frecuencia son efectos-de-borde (ondas generadas en los bordes) en las regiones donde la pendiente del lecho rocoso es mayor.

En todas las frecuencias (incluso las mostradas en el apéndice) encontramos amplificación del movimiento en la franja de receptores cercanos al borde del valle. Sabemos que el error de cálculo en esta zona se reduce conforme crece la frecuencia (a menor longitud de onda) (ver Figura 5.4), por lo que desconfiamos de los resultados en esta franja cuando la frecuencia es baja. Para $f \geq 0.6$ la franja es imperceptible (Apéndice F.1). En el resto del plano la distribución de amplitud se torna complicada con ambos métodos.

Ahora revisamos el caso **B** (sin los estratos suaves) para la misma incidencia: Fuerza vertical en $\mathbf{x} = (3, 0, 0)$. En este caso la amplitud de ambos indicadores aumenta gradualmente (ver Figura 8.5(c), (g)) y es interesante describir este comportamiento. Seleccionamos diez frecuencias en la banda $0.46 \leq f \leq 1.32$ Hertz y obtuvimos SSR del desplazamiento horizontal total ($|H/H_g|$) y HVSR. La figura 8.8 presenta algunos resultados, el resto puede consultarse en el Apéndice F.1. Las primeras dos columnas son para ($|H/H_g|$) con la escala indicada a un costado, las columnas tres y cuatro son

⁵Cuando los depósitos en la superficie son de muy baja velocidad, la reverberación de ondas en este estrato opacan los efectos de la estructura geológica subyacente. Para tomografía con telesismos en un sitio en el ártico con poca heterogeneidad lateral, fue posible remover estas reverberaciones y mejorar el proceso de inversión de funciones-de-receptor de ondas P, al hacer la deconvolución de los efectos del estrato superficial de hielo modelado con un propagador unidimensional.

$|H/H_g|$, caso **A** (cuatro estratos incluidos dos de baja velocidad)



$|H/H_g|$, caso **B** (excluye los estratos suaves del caso A)

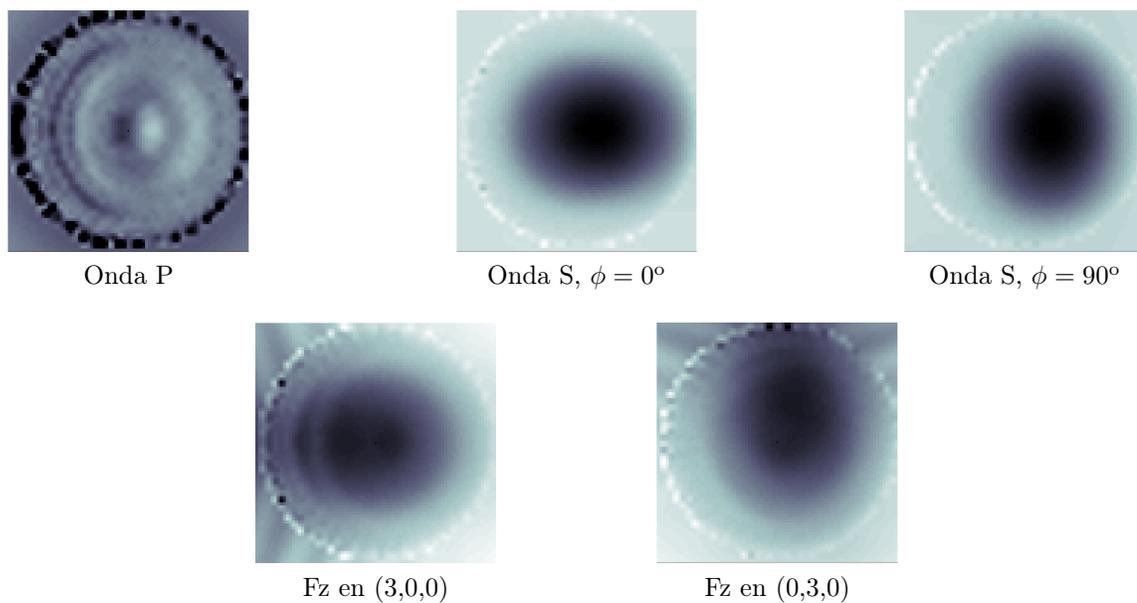


Figura 8.7: Mapas de amplificación del desplazamiento horizontal total $|H/H_g|$ en $f_0 = 0.32$ Hertz, la frecuencia fundamental en el caso **A**. Resultados para cinco incidencias canónicas con escala de amplitud común ($0 \leq |H/H_g| \leq 35$) en el caso **A** y ($0 \leq |H/H_g| \leq 1.8$) en el caso **B** (donde $f_0 \approx 0.5$ Hz no mostrado aquí). Para ondas planas $\gamma = 0^\circ$ y ϕ es el azimut.

para HVSR con escala lineal entre en $[0,5]$. Cuando $f \leq 0.46\text{Hz}$, con ambos métodos la amplitud es pequeña pero la distribución espacial corresponde a la profundidad del lecho rocoso al igual que el caso **A**.

En frecuencias mayores a f_0 para el caso **B**, la amplitud siempre crece y la distribución recuerda los patrones geométricos de Chladni (líneas nodales en cimática), aunque asimétricos por la variación de espesor en los depósitos. Note que en contraste con el caso **A**, para $f \geq 1.0\text{Hz}$ se aprecian patrones concéntricos a $\mathbf{x} = (0.25, 0)$, donde los depósitos son más profundos. En este modelo la respuesta en superficie *percibe* mejor la geometría del fondo del valle, además la franja de efectos de borde es insignificante. Con HVSR de nuevo observamos picos de gran amplitud que corresponden a mínimos en el componente vertical.

8.5. Modos de ondas superficiales

El HVSR está relacionado con la curva de elipticidad de las ondas de Rayleigh, donde los máximos locales señalan el modo fundamental y las frecuencias de resonancia en los estratos. El mínimo en la elipticidad corresponde al desvanecimiento del componente horizontal. Se cree que en frecuencias más altas a donde ocurre éste, los máximos locales se deben a armónicos de las ondas de superficie [Bard, 1999]. Los resultados de nuestras simulaciones coinciden con esta hipótesis. En conjunto, los mapas de amplificación y HVSR, nos permiten asociar los modos superiores a las ondas difractadas en los bordes del valle. A su vez, en todo el espectro esperamos ondas de cuerpo por efecto de la difracción en los bordes.

El procedimiento más simple para conocer si los armónicos de las ondas superficiales participan en la respuesta, es revisar el desplazamiento horizontal en la profundidad (registros de pozo virtuales) y comparar contra formas modales típicas. También obtuvimos curvas de dispersión en y entre arreglos de estaciones en la superficie del valle. Una alternativa podría ser usar técnicas de clasificación de ondas (e.g MUSIC, MUSIQUE en arreglos de estaciones; analizando la correlación en tiempo y frecuencia de una señal; filtrando espectrogramas alrededor de ondas con el mismo azimut [Meza-Fajardo et al., 2016]).

Pozos virtuales

El comportamiento del valle es tridimensional pero la simetría del valle al eje y conlleva un plano nodal con sólo deformación plana cuando fuente y receptores están en $y = 0$. Por consiguiente podemos observar el campo completo sin necesidad de corregir el azimut. Propusimos un arreglo de pozos virtuales y las incidencias:

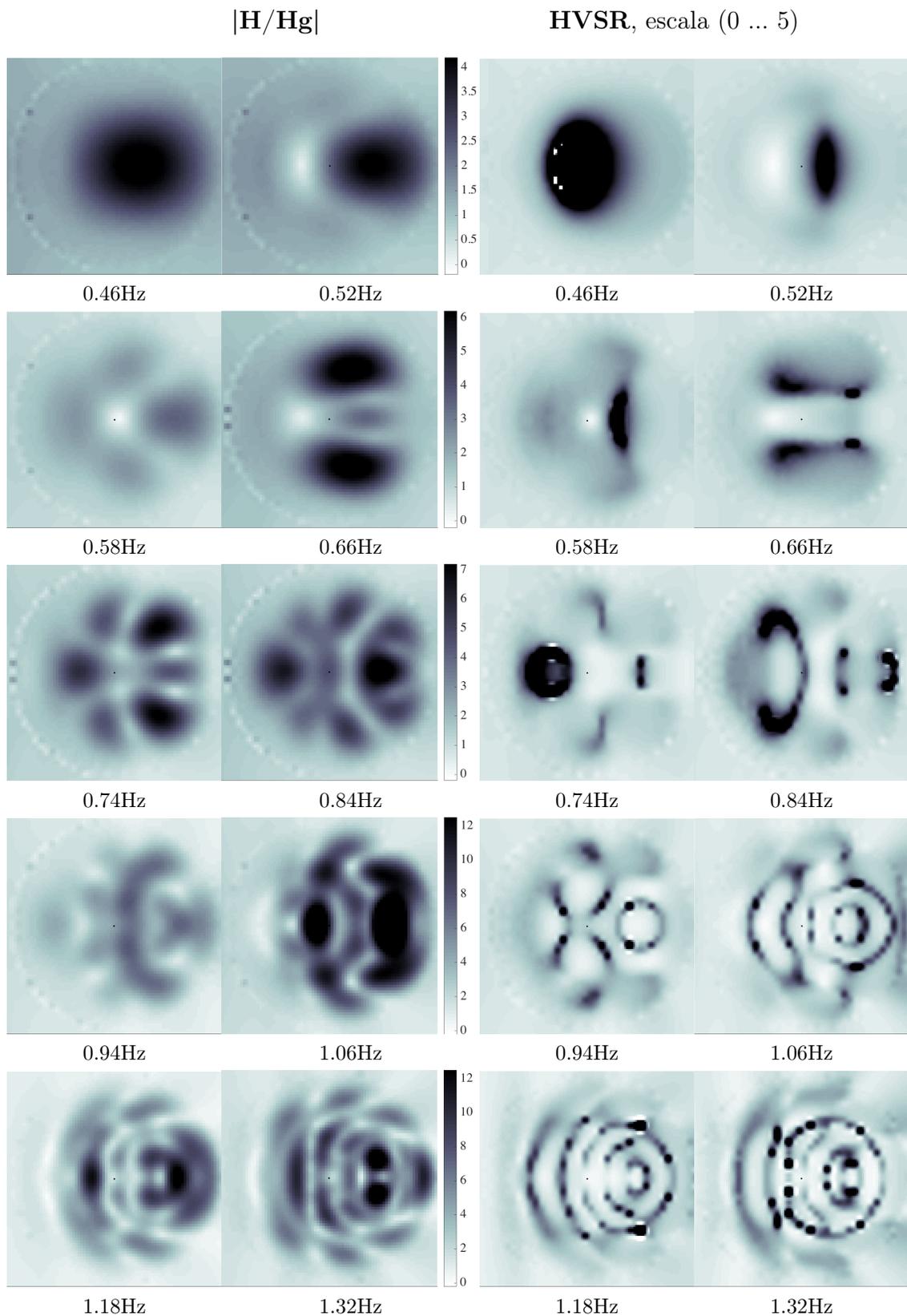


Figura 8.8: Mapa de SSR del desplazamiento horizontal total ($|H/H_g|$) y HVSR. Incidencia de **ondas de superficie** desde $x = (3, 0, 0)$ en el caso (B).

incidencia vertical de onda plana P, y onda plana S con $\phi=0^\circ$ e incidencia del campo producido por una fuerza puntual vertical en (3,0,0). En las Figuras 8.9 para el caso **A** y 8.10 para el caso **B**. Observamos que:

- En ambos modelos trazamos el desplazamiento horizontal ($u_x(f)$) con líneas negras cuando $f \leq 0.58$ Hertz. En esta banda el comportamiento se explica por el modo fundamental. Se observa que $|u_x(f)|$ es proporcional a la profundidad desde donde se desarrolla la distorsión del perfil de suelo: el lecho rocoso o la interfaz en $z = 30m$ en el centro del valle. El fenómeno es más notorio para incidencias con un componente horizontal.
- Cuando $f \geq 0.66$ Hertz trazamos $u_x(f)$ con colores. El comportamiento sigue la forma del modo fundamental cerca de los bordes del valle donde además tiene mayor amplitud; mientras que en la parte media del valle el movimiento puede explicarse por el modo fundamental y los primeros tres armónicos.
- La amplitud máxima siempre ocurre en el primer estrato pero en frecuencias altas $u_x(f)$ es significativo debajo de las capas suaves (estrato CA.3). Nuestros resultados en frecuencia respaldan los de Cruz-Atienza et al. [2016] en el dominio del tiempo.

Relación de dispersión

El procedimiento que seguimos fue promediar el desplazamiento por las cinco incidencias *canónicas* en la malla de receptores que usamos para generar mapas. Luego definimos arreglos rectangulares de 110 receptores (80 en los contiguos al borde del valle) que mostramos en la Figura 8.11. Obtuvimos la relación de dispersión de velocidad de fase (c) para ondas de Rayleigh (usando el componente vertical) y de Love (con el componente transversal) entre estaciones de cada arreglo y entre arreglos. Utilizamos el método SASW (ver nota al pie 1 en la página 97). SASW usualmente se usa en arreglos lineales, mientras que con arreglos bidimensionales se prefiere SPAC o MSPAC; por el momento nos interesa comparar la amplitud de la relación de dispersión entre los modos detectados, para complementar las observaciones de la sección anterior.

El acumulado de la relación de dispersión promedio de las cinco incidencias ($\Sigma\bar{c}$) nos da una amplitud en cuentas que en la práctica se usa para ajustar curvas de dispersión. Otra forma de verlo es que al comparar con curvas de dispersión conocidas, $\Sigma\bar{c}$ nos indica el tamaño de la participación de distintos modos del comportamiento.

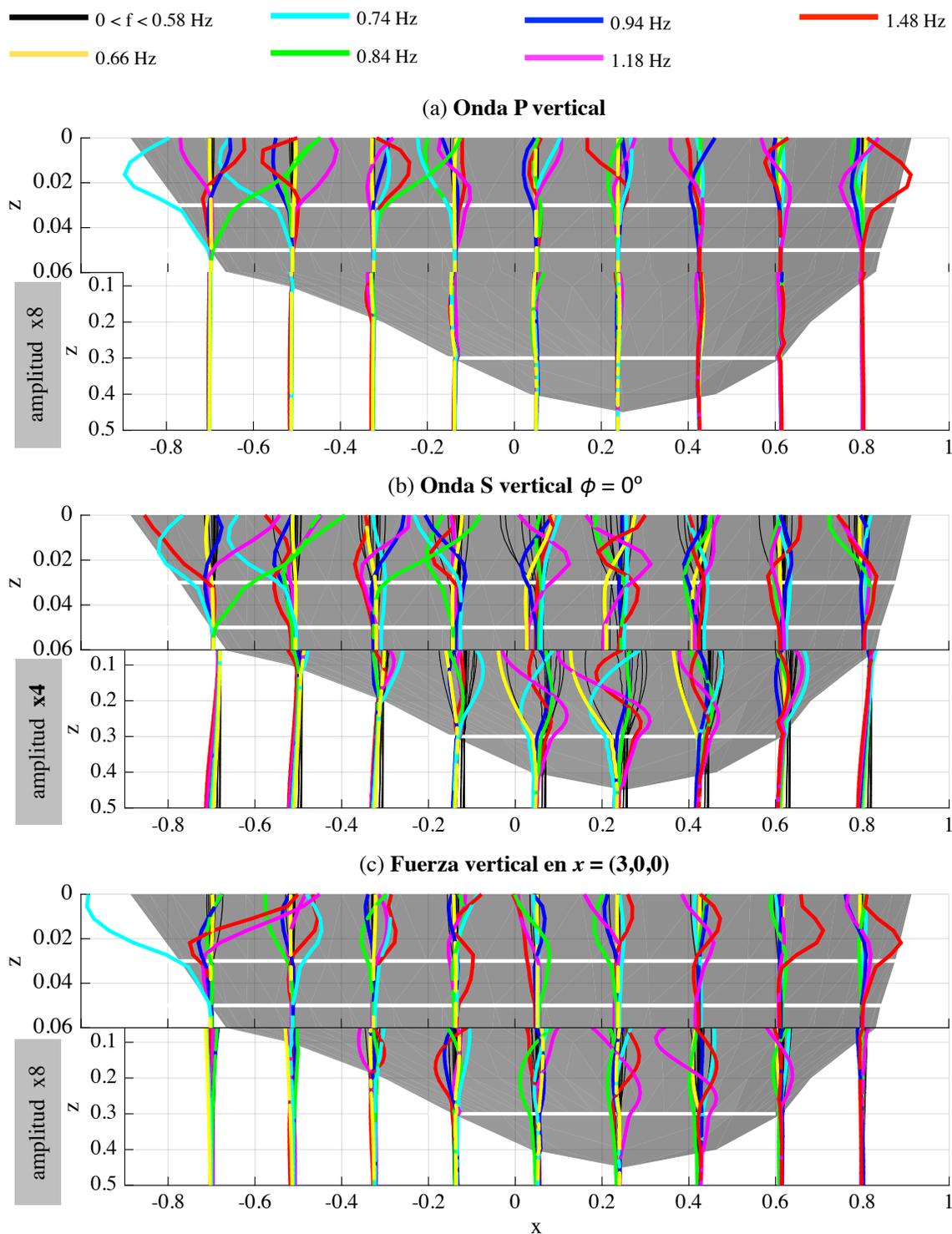


Figura 8.9: Desplazamiento horizontal en pozos virtuales para el caso **A** con cuatro estratos incluidos dos de baja velocidad ($f_0 \approx 0.32\text{Hz}$) ante tres incidencias. La escala vertical se exagera hasta los 60m, la escala de amplitud se exagera después de los 60m.

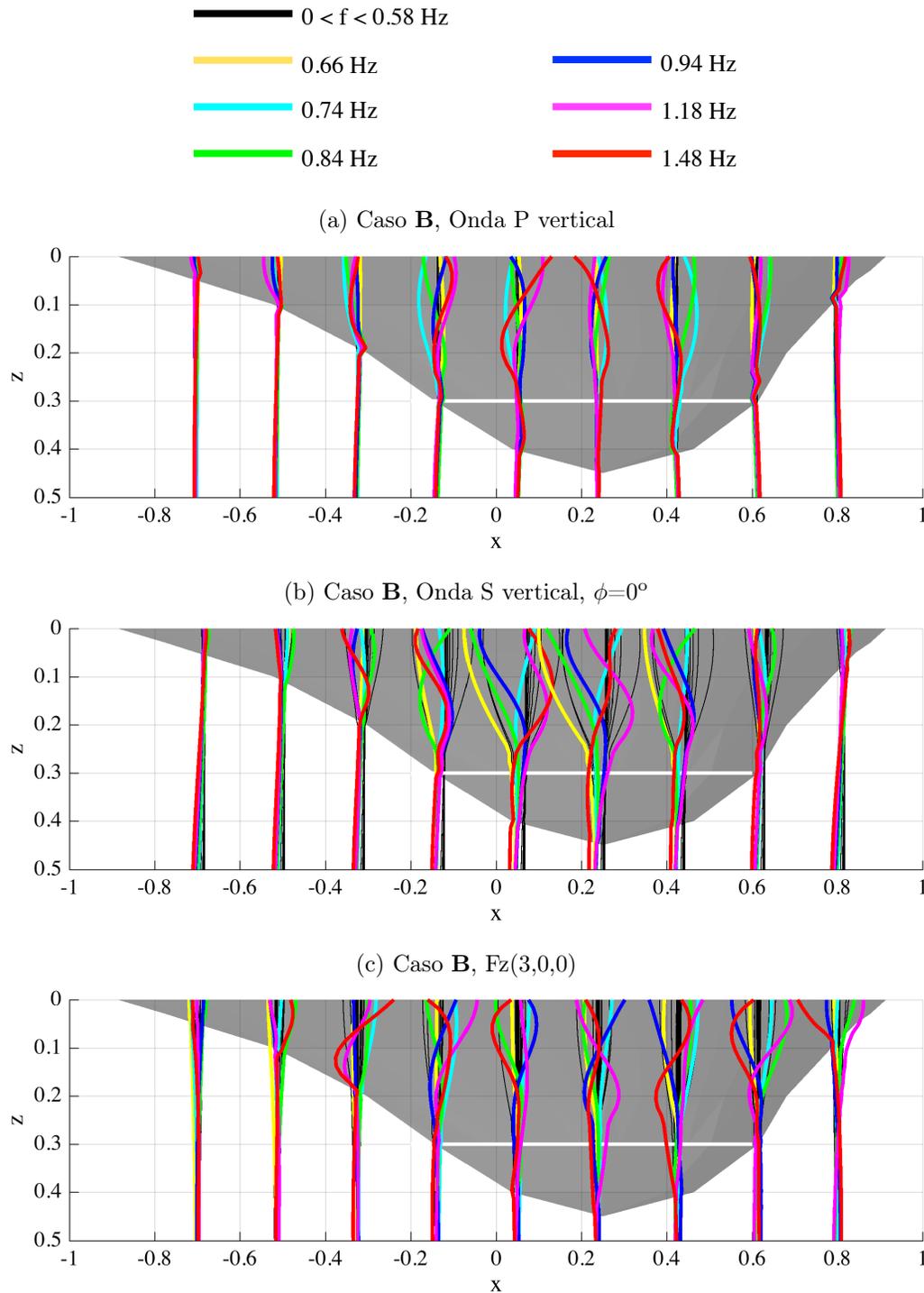


Figura 8.10: Desplazamiento horizontal en pozos virtuales para el caso **B** con dos estratos ($f_0 \approx 0.5$ Hz) ante tres incidencias.

En nuestros resultados la distancia entre estaciones limita la observabilidad de periodos largos, razón por la que nuestros gráficos no contienen información en frecuencias bajas y velocidades de fase altas.

La relación de dispersión de velocidad de fase de ondas de Rayleigh en el caso **A** se muestra en la Figura 8.11 donde representamos $\Sigma\bar{c}$ con la escala de color. La figura contiene gráficos para siete arreglos de receptores con la misma escala. La extensión y posición de los arreglos se indica en el diagrama incluido, así como las curvas de dispersión teóricas obtenidas con Geopsy [Wathelet et al., 2004]. La figura correspondiente para ondas de Love es F.4 en el Anexo F. Considerando ambos juegos de resultados (*Rl* y *Lv* respectivamente), observamos que en el arreglo (a), donde el lecho rocoso es más somero, en *Rl* predominan ondas de cuerpo y el modo fundamental (f_0), mientras que en *Lv* vemos f_0 y el primer armónico. Esto nos dice que las ondas de cuerpo difractadas en los bordes se propagan con orientación predominante hacia el centro del valle, pero las ondas de superficie aparecen en ambas direcciones. Recuerde que los resultados son el promedio de cinco incidencias por tanto lo que observamos es la respuesta generalizada.

En las estaciones de profundidad intermedia, con los arreglos (b), (g), (j) observamos ondas de cuerpo sólo en *Lv* y (j)*Rl*. Claramente vemos el modo fundamental en ambas ondas de superficie pero sólo en *Rl* el valor de $\Sigma\bar{c}$ es grande donde esperamos los modos superiores ($f \leq 0.5$ Hz y $100 \leq c \leq 400$ m/s, es decir en las capas CA.2 y CA.3).

Los arreglos (d), (f), (i) están en la parte profunda del valle. En ellos observamos ondas de cuerpo en *Lv* pero no *Rl*. En todos los arreglos y ambos tipos de ondas reconocemos participación de modos superiores; pero sólo en (d)*Rl*, (i)*Rl*, (f)*Lv*, (i)*Lv* el modo fundamental es notorio ($\Sigma\bar{c}$ grande). En los arreglos con depósitos más profundos en *Lv* domina la dispersión en modos superiores, mientras que en *Rl* los modos superiores son importantes sin dominar la respuesta.

También obtuvimos la dispersión entre arreglos (ver Figura F.4 del Anexo F para $\Sigma\bar{c}$ entre el arreglo (b) y el resto). Consideramos que este ejercicio complementa la dispersión en velocidades de fase altas, pero no revela nada nuevo.

8.6. Conclusiones del capítulo

En este trabajo estudiamos el campo de ondas en valles aluviales con estratos suaves y relacionamos el efecto de los estratos de baja velocidad con la causa de dos interrogantes en sismología: la diferencia en HVSR de usar registros de sismos o microtemores, y la invariabilidad de SSR en función de la dirección de la fuente.

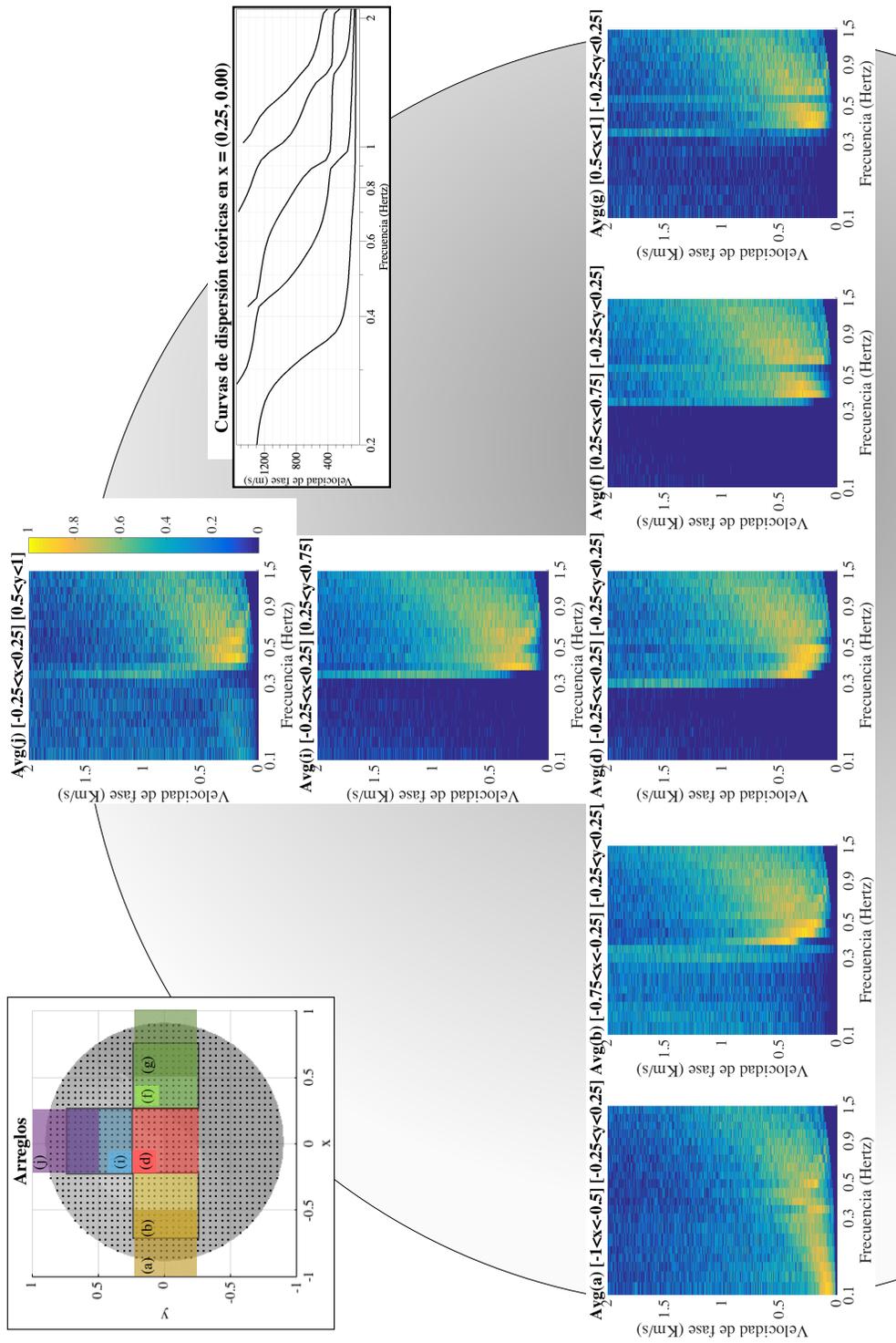


Figura 8.11: Relaciones de dispersión de velocidad de fase en arreglos rectangulares de receptores ilustrados en el diagrama. La escala de amplitud es común. También curvas de dispersión teóricas para el punto más profundo del valle. Reconocemos parte de la curva del modo fundamental

Para entender los efectos de la estratificación calculamos el campo de ondas en un modelo numérico de valle aluvial con dos casos de estratificación (con y sin estratos de baja velocidad) ante distintas incidencias. Obtuvimos SSR y HVSR con dos métodos los cuales comparamos: El de Nakamura y el de Sánchez-Sesma bajo la hipótesis de campos difusos. Con ambos es fácil identificar el periodo dominante y la amplificación de ondas superficiales cerca del borde del valle. Donde en estas últimas participan el modo fundamental y armónicos superiores. El método de Nakamura es más sensible a la variación de la profundidad del lecho rocoso.

Las frecuencia fundamental identificada con HVSR y SSR coincide. Y al menos en el borde del valle encontramos evidencia de ondas planas emitidas hacia el centro del borde y amplificación en una banda de frecuencias que asociamos a modos superiores. Afirmamos esto en base a la amplitud de SSR, el análisis de registros de pozos virtuales y la amplitud de la relación de dispersión de velocidad de fase. En la banda de frecuencia referida estos indicadores señalan respectivamente amplificación considerable, preponderancia las formas modales de armónicos superiores y energía en frecuencias y velocidades de fase que sólo pueden asociarse a modos superiores.

Obtuvimos mapas de la amplitud de ambos indicadores en la superficie y concluimos que en baja frecuencia la distribución de amplificación del movimiento horizontal es proporcional entre los modelos con y sin estratos. Conforme aumenta la frecuencia la respuesta se explica mejor por la difracción en el borde del valle, ya que las ondas son más cortas e interactúan con irregularidades geométricas. En los mapas de HVSR y pozos virtuales notamos la aparición de ondas de superficie en el borde más abrupto del valle.

La respuesta del modelo con estratos suaves asemeja la del modelo 1D en casi todo el valle, no así en el modelo sin estratos suaves donde se observan comportamientos que sólo se explican por la difracción en el fondo y borde del valle. Con las observaciones expuestas en el párrafo anterior y las aquí mencionadas afirmamos que las crestas en HVSR de sismos que no aparecen al usar microtremores se deben a ondas de superficie originadas en los bordes del valle y en la que participan modos superiores. Al usar microtremores la energía suministrada no es suficiente para excitar difractores lejanos.

Con los mismos resultados hallamos que la aparente invariabilidad de SSR respecto al origen de la fuente observada en el Valle de México puede deberse a la conjunción de tres efectos: (1) Los estratos de baja velocidad en la superficie propician que la frecuencia fundamental sea baja en todo el valle; ante tal condición (2) los efectos tridimensionales por irregularidad geométrica se observan sólo en los bordes del valle porque la reverberación en las capas suaves oculta el movimiento difractado en otras estructuras y (3) en baja frecuencia la distribución de amplificación de SSR

depende sólo de la profundidad desde donde se desarrolla la distorsión del perfil de suelo.

Observamos que la amplitud del movimiento debajo de las capas de baja velocidad se distribuye de acuerdo a la forma de modos superiores en particular en la parte profunda del valle.

Conclusiones

La contribución de este trabajo radica en el desarrollo de un modelo matemático para la difracción de ondas elásticas en regiones que pueden contener estratos planos, el cual se aplicó en tres casos de interés para geotecnia e ingeniería sísmológica. A continuación comentamos los principales logros de este trabajo y lo que aprendimos de los modelos analizados.

Las herramientas que desarrollamos son métodos numéricos híbridos basados en ecuaciones integrales y desarrollos en series, con los que es sencillo y eficiente modelar la propagación de ondas en regiones con estratos planos horizontales, inclusiones homogéneas y cavidades circulares. Nuestros métodos reproducen exitosamente los resultados de diversos modelos de verificación y permiten abordar problemas latentes que antes no podrían resolverse más que con supercomputadoras.

El método que llamamos IBEM-DWN utiliza la formulación indirecta del método de elementos de contorno y funciones de Green como desarrollos en el número de onda horizontal (en 2D) o radial (en 3D). El éxito de la implementación depende de la eficiencia con que se obtienen estas funciones, para lo que desarrollamos un algoritmo que aprovecha los términos comunes en el cálculo de la función para numerosas fuentes y receptores. Tal como es requerido por el método de elementos de contorno.

El método que llamamos IBEM-DWN-WFE extiende la formulación bidimensional del método anterior para considerar la difracción por cavidades circulares a partir de series de funciones de ondas cilíndricas. En conjunto, este método permite resolver el problema de túneles con revestimiento en un semiespacio estratificado, sin limitaciones en el espesor del revestimiento ni aparición de frecuencias espurias asociadas al problema interior. Además el método es muy eficiente.

Hicimos diversas mejoras en los métodos de frontera entre las que destacan dos: (1) Las condiciones de frontera junto con la representación integral de la fuente en la frontera derivan en un sistema de ecuaciones donde cada término es una función de Green. Nosotros implementamos un procedimiento para aprovechar los teoremas de reciprocidad de las funciones de Green de desplazamientos y esfuerzos para acelerar la representación de condiciones de frontera en medios de material homogéneo y es-

tratificado. En consecuencia la cantidad de términos que deben calcularse se reduce a casi la mitad en regiones homogéneas y a cerca de una cuarta parte en regiones estratificadas. (2) Desarrollamos un esquema para adaptar la geometría tridimensional irregular, respecto a la longitud de onda dominante.

Los temas de interés práctico que exploramos haciendo uso de los métodos propuestos son: (1) El túnel en medio estratificado descrito anteriormente, (2) la difracción de ondas de superficie en el borde interior de un valle aluvial estratificado con poca pendiente, donde encontramos que la difracción con el lecho rocoso produce ondas de cuerpo que alargan la duración del movimiento en una franja cercana al borde del valle. El comportamiento es relevante porque no se había descrito para bordes con poca pendiente (5/100) y lo aprendido es transferible a valles aluviales típicos. (3) Exploramos el efecto de los estratos superficiales de baja velocidad en el comportamiento de valles aluviales tridimensionales y encontramos explicaciones plausibles para dos interrogantes: La invariabilidad de los cocientes espectrales respecto a terreno firme en función de la orientación de la fuente y la discrepancia entre el cociente espectral del desplazamiento horizontal y vertical de usar registros de sismos o microtremores. En las conclusiones de cada capítulo se describen a fondo los mecanismos observados y los razonamientos que nos conducen a las explicaciones que ofrecemos en cada caso.

Trabajo a futuro

- Para estudiar la eficiencia de barreras de vibración con aplicación a excitaciones por vehículos, en especial trenes, es indispensable considerar el suelo como un material poroelástico. En la literatura reconocemos tres formulaciones para el semiespacio estratificado que podrían incorporarse a IBEM-DWN con un procedimiento similar al usado en este trabajo.
- En el mismo sentido, el IBEM-DWN podría incorporar el método lo-DWN para considerar con mayor eficiencia, la función de Green para medio estratificado con irregularidades localizadas en las interfaces. Otra alternativa es incorporar el método de refracción - transmisión.
- La interacción suelo estructura en edificios no considera explícitamente el efecto de las estructuras vecinas. Los trabajos dedicados al efecto ciudad sugieren que en las cuadras con alta densidad de edificios grandes, el movimiento baja en amplitud y se incrementa en duración. Para colaborar en esta línea de investigación el método IBEM-DWN podría incorporar elementos finitos para

modelar los edificios con mayor eficiencia.

- En el contexto de los métodos de frontera, en una superficie donde de continuidad entre dos medios con propiedades distintas, sería ventajoso discretizar la interfaz a paso distinto en cada medio (en proporción a la longitud de onda dominante) de tal forma que en el material más rápido se resuelven menos funciones de Green, las cuales por existir en espacio más suave, podrán interpolarse a los puntos de colocación coincidentes con el medio más lento.
- La formulación IBEM-DWN-WFE en dos dimensiones puede extenderse a 2.5D.
- De acoplar IBEM-DWN con elementos finitos o elementos espectrales podríamos contribuir a entender el efecto de las edificaciones vecinas en la interacción suelo estructura de edificios grandes e instalaciones subterráneas. Es posible que por efecto de los difractores cercanos se reduzca la amplitud del campo de ondas incidente a su vez que aumente la duración, tal como sucede en el llamado efecto-ciudad pero en menor escala.

Apéndice A

Integración de G_{ij} en un segmento recto

A.1. Introducción

El desplazamiento y esfuerzo en un receptor en \mathbf{x} dada una fuerza de amplitud unitaria aplicada uniformemente en un segmento recto, puede estimarse por integración numérica. Por ejemplo la cuadratura de Gauss, donde la función de Green se resuelve en algunos puntos y el resultado es la superposición modulada por pesos. En el contexto de los métodos de frontera este proceso es costoso cuando la función de Green es un desarrollo en el número de onda (método IBEM-DWN). En dos dimensiones, una alternativa es tomar la descomposición en el número de onda horizontal de la función de Green para una fuerza puntual ($G_{ij}(k, z, \omega)$) e integrar en la coordenada espacial a lo largo del segmento. La función de Green para el segmento uniformemente cargado es $G_{ij}(k, z, \omega) * f(L, \theta)$ donde el coeficiente f depende de la longitud y orientación del segmento. Cuando el segmento es horizontal f es la transformada de Fourier de una función rectangular.

La solución para fuente distribuida con integración analítica toma el mismo tiempo de cálculo que si la fuerza es puntual y el resultado es exacto si la longitud del segmento es menor que L^1 , la periodicidad de las fuentes en el contexto del método DWN. A continuación presentamos el desarrollo para el caso de deformación anti-plana y resultados para el caso en el plano.

La función de Green para desplazamiento $G_{ij}(\mathbf{x}, \xi)$, es el desplazamiento en el punto \mathbf{x} en dirección i dada una fuerza aplicada uniformemente en ξ en dirección j

¹La integración con cuadratura en n puntos es exacta cuando el integrando puede describirse con un polinomio de orden $2n - 1$.

con amplitud unitaria. Para desplazamiento anti-plano tenemos,

$$G_{22}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{4\mu i} H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right), \quad (\text{A.1})$$

donde $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ es la velocidad de las ondas de corte, ω es la frecuencia circular, r la distancia entre los puntos \mathbf{x} y ξ . ρ y μ son la densidad de masa y módulo de cortante respectivamente. $H_m^{(2)}(\cdot)$ es la función de Hankel de segunda especie y orden m que puede representarse como una suma infinita de ondas planas (Lamb, 1904),

$$H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{\beta}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-\xi)} e^{-i\nu|z|} \frac{dk}{\pi\nu}, \quad (\text{A.2})$$

aquí k es el número de onda horizontal, ν es el número de onda vertical asociado a las ondas de corte y es dado por $\nu = \sqrt{\omega^2/\beta^2 - k^2}$ condicionado a que $\text{Im } \nu < 0$ para representar ondas planas in-homogéneas. Con suficientes puntos de integración sobre k es posible representar exactamente la función de Hankel.

A.2. Procedimiento de integración, caso SH

En un espacio completo 2D, un segmento de recta de longitud $2a$ centrado en el origen, aplica una carga uniforme de amplitud armónica. Si el segmento es horizontal y la dirección de la fuerza es perpendicular al plano, el desplazamiento en el punto $\mathbf{x} = (x, z)$ es,

$$u_y = \int_{-a}^a G_{22}(\mathbf{x}, \xi) d\xi,$$

Substituyendo (A.1) y (A.2) en la anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{4\mu i\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-\xi)} e^{-i\nu|z|} dk d\xi, \\ &= \frac{1}{4\mu i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left(\int_{-a}^a e^{ik\xi} d\xi \right) e^{-ikx - i\nu|z|} dk, \\ &= \frac{1}{4\mu i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{\nu} \left(\frac{\sin(ka)}{ka} \right) e^{-ikx - i\nu|z|} dk. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La integral sobre ξ se encuentra en la Caja 1.

Caja 1: Integral sobre ξ

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-a}^a e^{ik\xi} d\xi = \int_{-a}^a e^u du / ik \\
 &= \frac{1}{ik} e^u = \frac{1}{ik} e^{ik\xi} \Big|_{\xi=-a}^{\xi=a} \\
 &= \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{ik} \\
 &= \frac{\cos(ka) + i \sin(ka) - (\cos(ka) - i \sin(ka))}{ik} \\
 &= \frac{2i \sin(ka)}{ik} \\
 &= 2a \frac{\sin(ka)}{ka}.
 \end{aligned}$$

El esfuerzo se obtiene con el mismo procedimiento. Para cortante anti-plano es

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zy} &= \mu \frac{\delta v}{\delta z}, \\
 &= \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2a \left(\frac{\sin(ka)}{ka} \right) e^{-ikx - i\nu|z|} dk.
 \end{aligned}$$

Note que el seno cardinal es la transformada de Fourier de una función rectángulo de ancho $2a$ sólo si el segmento es horizontal. Si el segmento está inclinado con ángulo θ desde la horizontal, a lo largo de ξ las coordenadas son $(\xi \cos \theta, \xi \sin \theta)$. El campo de desplazamiento en el caso SH es entonces,

$$u_y = \frac{2a}{4\mu i \pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x - \xi \cos \theta)} e^{-i\nu|z - \xi \sin \theta|} dk d\xi. \quad (\text{A.4})$$

El valor absoluto en el término de propagación vertical implica que sólo podemos resolver (A.4) para $z \geq a \sin \theta$ o bien para $z \leq -a \sin \theta$. Esto deriva en tres casos dependiendo de la profundidad z del receptor respecto a los extremos del segmento. Ver la Figura A.1.

Caso 1: Cuando $z \leq -a \sin \theta$ entonces $(\xi \sin \theta - z) > 0$. De la ecuación (A.4) tenemos que,

$$u_y = \frac{1}{4\mu i \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} U_{\beta} e^{-i\nu z} \right) e^{-ikx} dk,$$

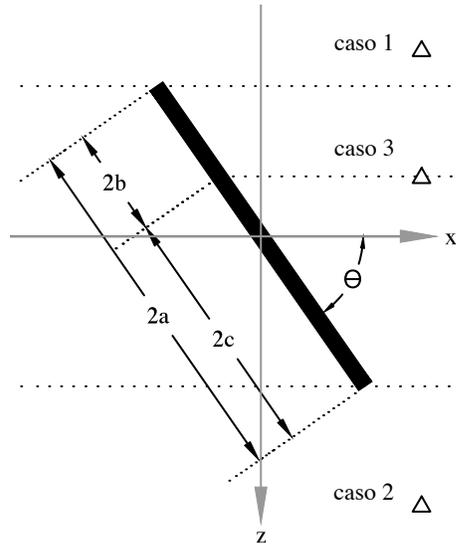


Figura A.1: Diagrama de un segmento recto de longitud $2a$ con inclinación θ desde la horizontal y los tres casos de profundidad z del receptor indicado con triángulos. Cuando el receptor está a la profundidad del segmento, este se divide en z en dos sub-segmentos de longitudes $2b$ y $2c$.

donde la integral sobre ξ se resuelve con el procedimiento en la Caja 1 y

$$U_{\beta} = 2a \left(\frac{\sin(ka \cos \theta - \nu a \sin \theta)}{ka \cos \theta - \nu a \sin \theta} \right).$$

Caso 2: Cuando $z \geq a \sin \theta$ entonces $(z - \xi \sin \theta) > 0$ y de la ecuación (A.4) se obtiene,

$$u_y = \frac{1}{4\mu i \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} D_{\beta} e^{-i\nu z} \right) e^{-ikx} dk, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$D_{\beta} = 2a \left(\frac{\sin(ka \cos \theta + \nu a \sin \theta)}{ka \cos \theta + \nu a \sin \theta} \right).$$

La integración en el segmento reduda en los factores D y U que dependen de la longitud e inclinación del segmento.

Caso 3: Cuando el receptor está a la profundidad $-a \sin \theta < z < a \sin \theta$, el campo de ondas es la superposición de los casos 1 y 2 tomando el segmento por tramos

como se muestra en la Figura A.1. El segmento inclinado de longitud $2a$ se divide en z la profundidad del receptor, produciendo dos sub-segmentos de longitudes $2b = a + z/\sin \theta$ y $2c = a - z/\sin \theta$ tal que $2a = 2b + 2c$. Note que el sub-segmento por arriba del receptor produce un campo que se propaga hacia abajo y viceversa. Además el efecto de borde de cada sub-segmento se cancela a la profundidad del receptor.

A.3. Caso P-SV

Para deformación plana, el componente j de desplazamiento en \mathbf{x} es u_{ij} dada fuerza distribuida uniformemente en ξ en dirección i :

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k^2}{\gamma} S_{\alpha} + \nu S_{\beta} \right) e^{-i\nu z} e^{-ikx} dk, \\ u_{33} &= \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k^2}{\nu} S_{\beta} + \gamma S_{\alpha} \right) e^{-i\nu z} e^{-ikx} dk, \\ u_{31} &= \frac{-i}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(z) k (S_{\alpha} - S_{\beta}) e^{-i\nu z} e^{-ikx} dk, \end{aligned}$$

donde S_{α} y S_{β} son U_{α} y U_{β} respectivamente cuando $z \leq -a \sin \theta$ (caso 1) o D_{α} y D_{β} cuando $z \geq a \sin \theta$ (caso 2). $\text{sgn}(\cdot)$ es la función signo y los factores de integración para las ondas P son

$$\begin{aligned} U_{\alpha} &= 2a \left(\frac{\sin(ka \cos \theta - \gamma a \sin \theta)}{ka \cos \theta - \gamma a \sin \theta} \right), \\ D_{\alpha} &= 2a \left(\frac{\sin(ka \cos \theta + \gamma a \sin \theta)}{ka \cos \theta + \gamma a \sin \theta} \right). \end{aligned}$$

De igual forma, el esfuerzo σ_{ij} dada fuerza distribuida uniformemente en ξ en dirección k es σ_{ijk} :

$$\begin{aligned} s_{331} &= \frac{-1}{4\pi\rho\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left((k\gamma(\lambda + 2\mu) + \lambda k^3/\gamma) S_{\alpha} - (2\mu k\nu) S_{\beta} \right) e^{-i\nu z} e^{-ikx} dk, \\ s_{131} &= \frac{-1}{4\pi\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left((2k^2) S_{\alpha} + (\nu^2 - k^2) S_{\beta} \right) e^{-i\nu z} e^{-ikx} dk, \\ s_{333} &= \frac{-1}{4\pi\rho\omega^2} \text{sgn}(z) \int_{-\infty}^{\infty} \left((\gamma^2(\lambda + 2\mu) + k^2\lambda) S_{\alpha} + (2\mu k^2) S_{\beta} \right) e^{-i\nu z} e^{-ikx} dk, \\ s_{313} &= \frac{-1}{4\pi\rho\omega^2} \mu \int_{-\infty}^{\infty} \left((2k\gamma) S_{\alpha} - (k/\nu(\nu^2 - k^2)) S_{\beta} e^{-i\nu z} \right) e^{-ikx} dk. \end{aligned}$$

A.4. Resultados numéricos

Las integrales en las expresiones anteriores se resuelven con el método de número de onda discreto (DWN por sus siglas en inglés) donde los límites de integración se definen con un criterio de convergencia. Los resultados en el dominio de la frecuencia se filtran con una función de amplitud y se obtienen sintéticos mediante síntesis de Fourier.

Se presentan el desplazamiento vertical y horizontal en la superficie de un semi-espacio ante dos casos de fuerza vertical distribuida en un segmento de recta. En la Figura A.2 se ilustra la posición del segmento y sismogramas sintéticos del desplazamiento. En la primera columna el elemento cargado es horizontal y está en la superficie, la función de amplitud es un pulso de Dirac. La columna de la derecha en la Figura A.2 muestra resultados para un segmento de recta inclinado y más profundo. Se ha propuesto que sea de mayor longitud que el caso anterior para que el efecto sea perceptible en las trazas. En este caso la función de amplitud es un pulso de Ricker de periodo largo.

Los receptores en la parte media del segmento registran varios arribos, el primero es la incidencia de la parte media del segmento. El frente de onda es casi plano para el desplazamiento paralelo a la dirección de la fuerza, mientras que el otro componente es casi nulo. La segunda y tercer ondas son efecto de la difracción en los bordes del segmento, las cuales son también registradas a la distancia. El efecto de la inclinación del elemento cargado se percibe en los tiempos de arribo, y la amplitud relativa entre los frentes producidos por la difracción en el borde del segmento. Como es de esperarse la amplitud es mayor donde el segmento de recta es más somero. Se observa también una cáustica donde las ondas de los bordes se superponen.

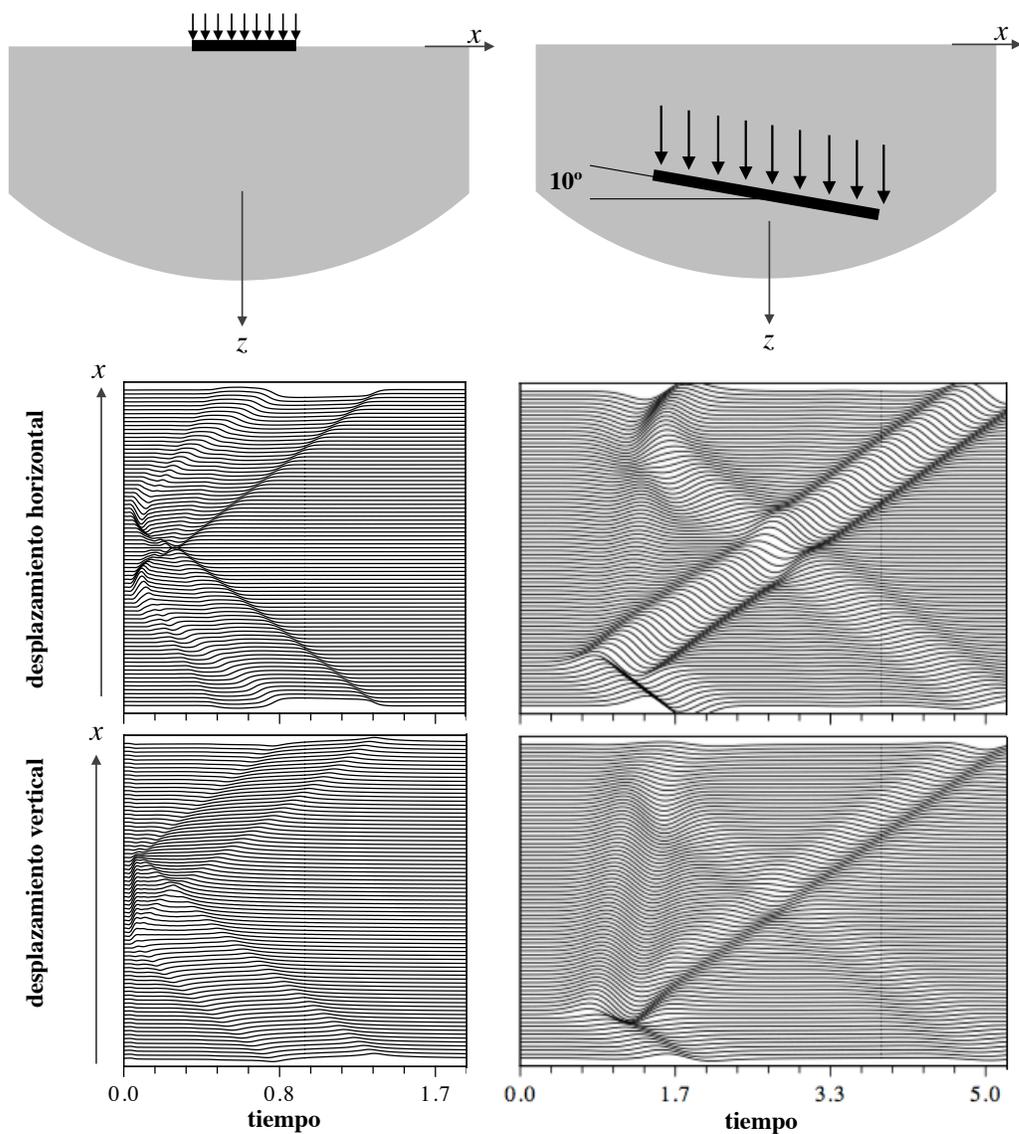


Figura A.2: Desplazamiento horizontal y vertical en la superficie de un semiespacio bidimensional ante dos casos de fuerza vertical distribuida en un segmento de recta ilustrado en el diagrama superior. En la columna de la izquierda el segmento es horizontal y la función de amplitud es un pulso de Dirac. En la columna de la derecha el segmento de recta está inclinado y la función de amplitud es un pulso de Ricker.

Apéndice B

Estrato líquido sobre semiespacio sólido

B.1. Introducción

Las condiciones de frontera entre estratos que se establecen para construir la función de Green en el medio estratificado en la sección 3.4.1 se pueden especializar para que uno de los estratos sea un medio acústico, es decir que no existe propagación de ondas de corte, sólo ondas de presión. Rossana Vai y Francisco Sánchez Sesma en un desarrollo no publicado estudiaron la difracción en la interfaz entre dos semiespacios, uno líquido y otro sólido. Retomando este trabajo, introducimos una frontera libre en el líquido y presentamos resultados para un estrato líquido sobre un semiespacio sólido. Por simplicidad el desarrollo se presenta para dos dimensiones, pero el procedimiento puede extenderse a tres dimensiones.

B.2. Campo de presión y desplazamiento en un medio acústico

La presión p en un medio fluido se modela con la ecuación de onda escalar,

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{\alpha_f^2} p = R \delta(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}, \quad (\text{B.1})$$

donde α_f es la velocidad de propagación de las ondas de presión acústica y R es una constante. Omitiendo el término de propagación en tiempo, y haciendo $R = \rho\omega^2$ la

función de Green para un monopolo acústico en el origen es,

$$G(r, \omega) = \frac{\rho\omega^2}{4i} H_0^{(2)} \left(\frac{\omega r}{\alpha_f} \right), \quad (\text{B.2})$$

donde $H_0^{(2)}$ es la función de Hankel de segunda especie y orden cero que admite la representación integral en forma discreta en el término entre paréntesis cuadrados,

$$G(\mathbf{x}, k) = \frac{\rho\omega^2}{4i} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k \right], \quad (\text{B.3})$$

donde η el número de onda horizontal en el fluido $\eta = \sqrt{(\omega/\alpha_f)^2 - k^2}$ dado $\text{Im}(\eta) < 0$. $\Delta k = 2\pi/L$ es el paso de integración del número de onda discreto y L la distancia entre fuentes virtuales producidas por el truncamiento de la integral (Aki y Larner, 1970; Bouchon y Aki, 1977). A su vez, la ecuación (B.3) describe de una onda cilíndrica hacia afuera, construida a partir de la suma infinita de ondas planas con ángulo de incidencia θ cuando el número de onda es $k = \omega \sin(\theta)/\alpha_f$.

El campo de presión en un estrato líquido es $p = p^0 + p^{FR}$ donde p^0 es el campo incidente descrito por $G(\mathbf{x}, k)$ y p^{FR} el campo difractado por la superficie libre en z_F y el campo refractado por una interfaz plana a la profundidad z_R dado por,

$$p^{FR} = \sum_{n=-N}^N [F_n e^{-ik_n x - i\eta_n(z-z_F)} + A_n e^{-ik_n x + i\eta_n(z-z_R)}], \quad (\text{B.4})$$

con F_n y A_n amplitudes desconocidas de ondas planas de presión emitidas desde la frontera libre y la interfaz con el sólido respectivamente. El campo total en el estrato líquido es entonces,

$$p = \frac{\rho\omega^2}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n |z|}}{\eta_n} \Delta k + \sum_{n=-N}^N [F_n e^{-i\eta_n(z-z_F)} + A_n e^{+i\eta_n(z-z_R)}] e^{-ik_n x}, \quad (\text{B.5})$$

El desplazamiento respecto a una superficie con normal n es $u_n^f = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial p}{\partial n}$, entonces el desplazamiento vertical y horizontal está dado por las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} u_z^f &= \sum_{n=-N}^N \left[\frac{-\text{sig}(z)}{4\pi} e^{-i\eta_n |z|} \Delta k + \frac{1}{\rho\omega^2} (iA_n \eta_n e^{+i\eta_n(z-z_R)} - iF_n \eta_n e^{-i\eta_n(z-z_F)}) \right] e^{-ik_n x}, \\ u_x^f &= - \sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{4\pi \eta_n} e^{-i\eta_n |z|} \Delta k + \frac{1}{\rho\omega^2} (iA_n e^{+i\eta_n(z-z_R)} + iF_n e^{-i\eta_n(z-z_F)}) \right] k_n e^{-ik_n x}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.3. Campo de desplazamiento en un medio elástico

Los potenciales solución de las ecuaciones de onda reducidas para ondas elásticas P y S son,

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{n=-N}^N B_n e^{-ik_n x - i\gamma_n(z-z_R)}, \\ \psi &= \sum_{n=-N}^N C_n e^{-ik_n x - i\nu_n(z-z_R)},\end{aligned}\tag{B.7}$$

donde $\gamma = \sqrt{(\omega/\alpha)^2 - k^2}$, $\text{Im}(\gamma) < 0$, $\nu = \sqrt{(\omega/\beta)^2 - k^2}$, $\text{Im}(\nu) < 0$ y los coeficientes B_n y C_n desconocidos.

Los desplazamientos vertical y horizontal en un medio elástico son,

$$\begin{aligned}u_z^s &= \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = \sum_{n=-N}^N [-i\gamma_n B_n e^{-i\gamma_n(z-z_R)} - ik_n C_n e^{-i\nu_n(z-z_R)}] e^{-ik_n x}, \\ u_x^s &= \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z} = \sum_{n=-N}^N [-ik_n B_n e^{-i\gamma_n(z-z_R)} + i\nu_n C_n e^{-i\nu_n(z-z_R)}] e^{-ik_n x},\end{aligned}\tag{B.8}$$

y los esfuerzos necesarios para calcular la tracción en superficies horizontales son,

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\epsilon_{ij}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\left(\frac{\partial u_x^s}{\partial x} + \frac{\partial u_z^s}{\partial z}\right) + 2\mu\frac{\partial u_z^s}{\partial z}, \\ \sigma_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u_x^s}{\partial z} + \frac{\partial u_z^s}{\partial x}\right).\end{aligned}$$

Sustituyendo los potenciales (B.7) los esfuerzos son,

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sum_{n=-N}^N (-\mu(\nu_n^2 - k_n^2)B_n e^{-i\gamma_n(z-z_R)} - 2\mu k_n \nu_n C_n e^{-i\nu_n(z-z_R)}) e^{-ik_n x}, \\ \sigma_{xz} &= \mu \sum_{n=-N}^N (-2k_n \gamma_n B_n e^{-i\gamma_n(z-z_R)} + (\nu_n^2 - k_n^2)C_n e^{-i\nu_n(z-z_R)}) e^{-ik_n x},\end{aligned}\tag{B.9}$$

además

$$\sigma_{xx} = \sum_{n=-N}^N ((-\lambda(k_n^2 + \gamma^2) - 2\mu k_n^2)B_n e^{-i\gamma_n(z-z_R)} + 2\mu k_n \nu_n C_n e^{-i\nu_n(z-z_R)}) e^{-ik_n x}.$$

B.4. Condiciones de frontera

Para un estrato líquido de espesor $h = z_R - z_F$ sobre un semiespacio sólido tenemos cuatro condiciones de frontera. En el medio acústico, la condición de frontera libre es $p = 0$ en $z = z_F$. Sustituyendo en (B.5),

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{\rho\omega^2}{4\pi i\eta_n} e^{-i\eta_n|z_F|} \Delta k + F_n + A_n e^{-i\eta_n h} \right] e^{-ik_n x} = 0, \quad (\text{B.10})$$

En la interfaz sólido-líquido hay continuidad de desplazamiento normal a la superficie. Para una interfaz plana $u_z^f = u_z^s$ en $z = z_R$ se tiene,

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{-\text{sig}(z_R)}{4\pi} e^{-i\eta_n|z_R|} \Delta k + \frac{1}{\rho\omega^2} (iA_n\eta_n - iF_n\eta_n e^{-i\eta_n h}) \right] e^{-ik_n x} = \sum_{n=-N}^N [-i\gamma_n B_n - ik_n C_n] e^{-ik_n x},$$

para nuestro planteamiento $\text{sig}(z_R) = +1$,

$$\sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{\rho\omega^2} (iA_n\eta_n - iF_n\eta_n e^{-i\eta_n h}) + (i\gamma_n B_n + ik_n C_n) \right] e^{-ik_n x} = \sum_{n=-N}^N \left[\frac{\Delta k}{4\pi} e^{-i\eta_n|z_R|} \right] e^{-ik_n x}. \quad (\text{B.11})$$

El componente normal de la tracción en el sólido iguala la presión en el líquido. En $z = z_R$ hacemos $\sigma_{zz} = -p$ para obtener,

$$\sum_{n=-N}^N [(-\lambda k_n^2 - \gamma_n^2(\lambda + 2\mu))B_n - 2\mu k_n \nu_n C_n] e^{-ik_n x} = -\frac{\rho\omega^2}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \frac{e^{-ik_n x - i\eta_n|z_R|}}{\eta_n} \Delta k - \sum_{n=-N}^N [F_n e^{-i\eta_n(z_R - z_F)} + A_n] e^{-ik_n x},$$

$$\sum_{n=-N}^N \left[+ (F_n e^{-i\eta_n(z_R - z_F)} + A_n) - \mu(\nu_n^2 - k_n^2)B_n - 2\mu k_n \nu_n C_n \right] e^{-ik_n x} = -\frac{\rho\omega^2}{4\pi i} \sum_{n=-N}^N \left[\frac{\Delta k}{\eta_n} e^{-i\eta_n |z_R|} \right] e^{-ik_n x}. \quad (\text{B.12})$$

El esfuerzo cortante es nulo en la interfaz. Hacemos $\sigma_{xz} = 0$ en $z = z_R$ y tenemos,

$$\sum_{n=-N}^N \left[-2\mu k_n \gamma_n B_n + \mu(\nu_n^2 - k_n^2)C_n \right] e^{-ik_n x} = 0. \quad (\text{B.13})$$

El sistema formado por las ecuaciones (B.10) - (B.13) en los coeficientes de las ondas planas es,

$$\begin{bmatrix} 1 & e^{-i\eta_n h} & 0 & 0 \\ \frac{-i\eta_n}{\rho\omega^2} e^{-i\eta_n h} & \frac{i\eta_n}{\rho\omega^2} & i\gamma_n & ik_n \\ e^{-i\eta_n h} & 1 & -\mu(\nu_n^2 - k_n^2) & -2\mu k_n \nu_n \\ 0 & 0 & -2\mu k_n \gamma_n & \mu(\nu_n^2 - k_n^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n \\ A_n \\ B_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho\omega^2 \Delta k}{4\pi i \eta_n} e^{-i\eta_n |z_F|} \\ \frac{\Delta k}{4\pi} e^{-i\eta_n |z_R|} \\ -\frac{\rho\omega^2 \Delta k}{4\pi i \eta_n} e^{-i\eta_n |z_R|} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

El sistema en (B.14) se resuelve en cada número de onda y los coeficientes encontrados se sustituyen en (B.5) y (B.6) para conocer el campo en el líquido y en (B.8) en el sólido.

B.5. Ejemplo de aplicación

Un estrato líquido de espesor $h = 2$ metros, velocidad de propagación $\alpha^f = 0.5$ m/s se encuentra sobre un semiespacio sólido con velocidades de propagación $\alpha = 2.0$ y $\beta = 1.0$ m/s. Ambos medios de densidad $\rho = 1.0$ ton/m³. Con la fuente en el medio líquido se obtienen los desplazamientos de las figuras anexas.

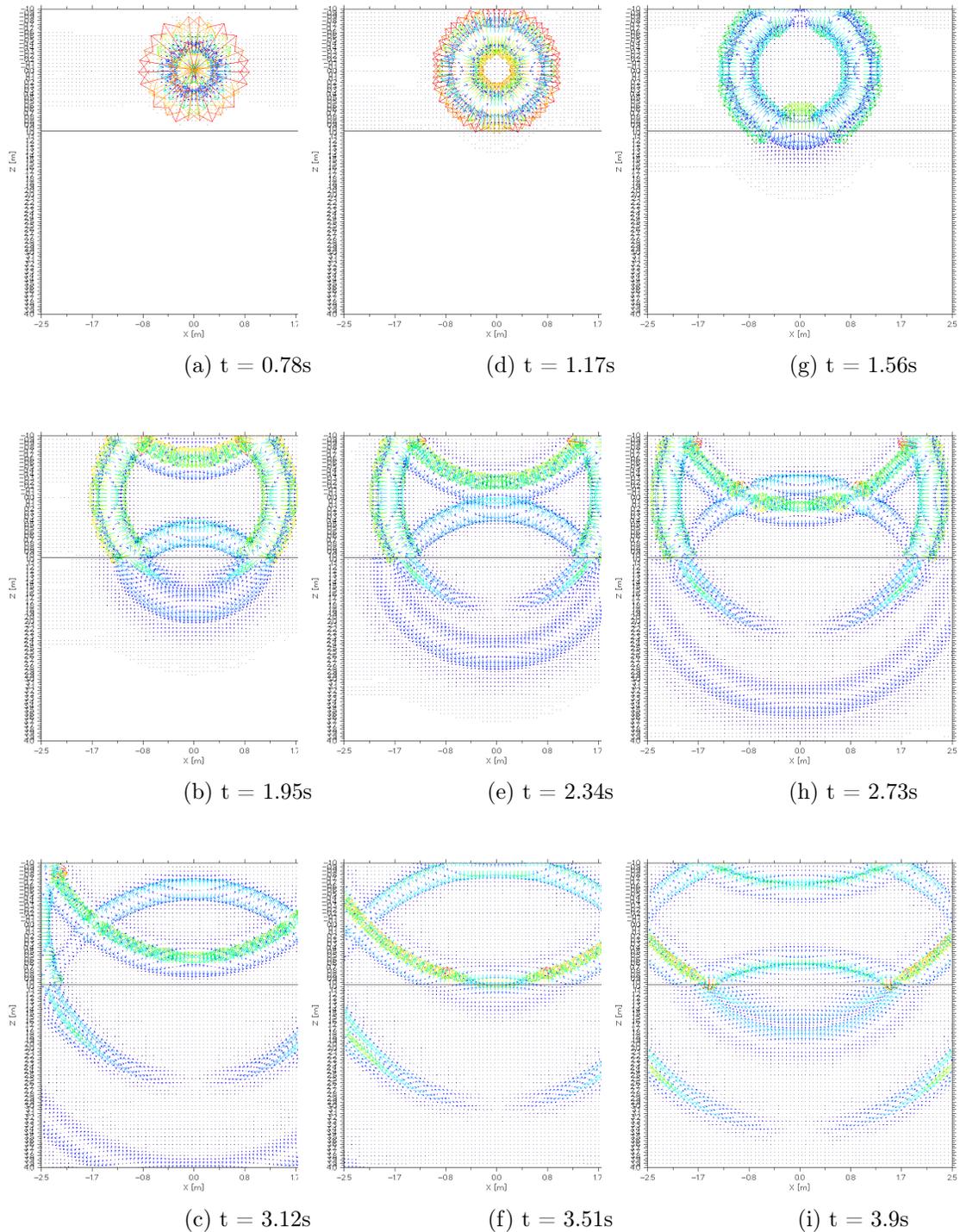


Figura B.1: Campo de desplazamiento por una explosión en un estrato líquido sobre un semiespacio sólido.

Apéndice C

Interpretación de la difracción alrededor de una cavidad circular resuelto con el método de WFE

C.1. Introducción

Interpretamos los resultados obtenidos con el método WFE descrito en la sección 6.3 para el cálculo de la difracción por una cavidad circular ante incidencia de fuerzas puntuales. La frecuencia máxima elegida impide que el problema pueda resolverse sin error con IBEM, pero el análisis del campo de ondas sugiere que la solución es correcta. Podrían obtenerse resultados de verificación con otras técnicas, por ejemplo diferencias finitas. La comparación se deja para un trabajo futuro.

El modelo es un sólido de Poisson con densidad $\rho = 2.0 \text{ Ton/m}^3$ y módulo de cortante $\mu = 12.5 \text{ Ton/m}^2 \text{ m/s}^2$, la cavidad en el origen tiene radio $a = 4m$. En $\xi = (-5, 0)$ se aplican fuerzas puntuales en dirección horizontal y vertical. La respuesta en frecuencia se obtuvo hasta 9 KHz en alrededor de 1 minuto de cálculo en una computadora de escritorio promedio (cuatrocientas frecuencias). Con transformada inversa de Fourier se obtienen sintéticos del desplazamiento y esfuerzo considerando un pulso de Ricker centrado en 0.3/1000 segundos. La razón entre el diámetro de la cavidad y la longitud de onda mínima de las ondas de corte es 14.4, la escala de este modelo es de interés para modelos de vibración inducida por vehículos, para ingeniería sísmica la frecuencia máxima de interés será mucho menor.

C.2. Cumplimiento de la condición de frontera

Nuestra solución cumple la condición de tracciones nulas en la superficie de la cavidad. En la Figura C.1 se trazan los esfuerzos del campo incidente y el campo total alrededor de la cavidad para el caso de fuerza vertical en ξ .

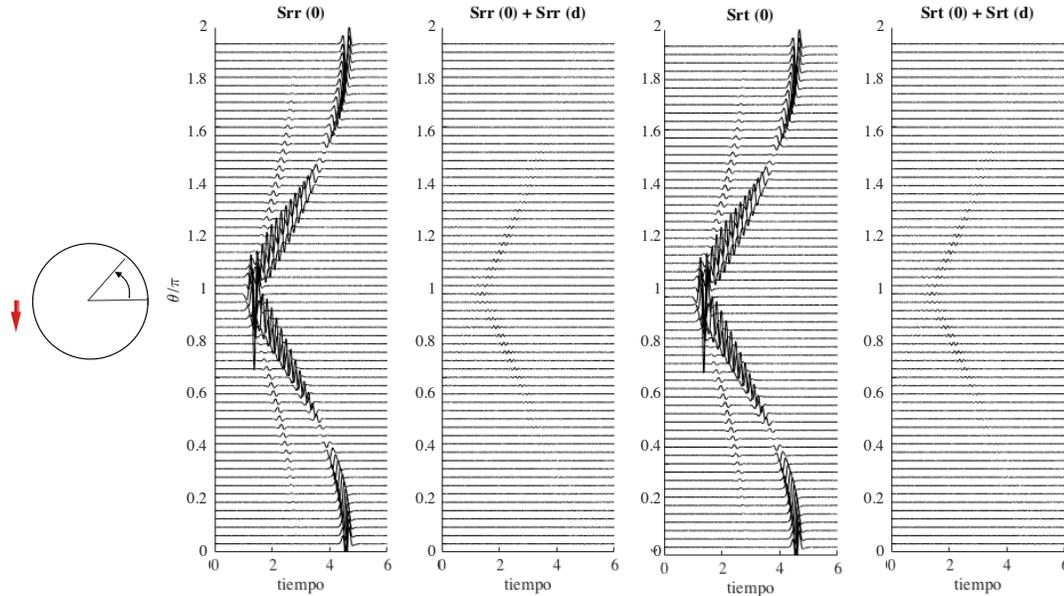


Figura C.1: Esfuerzos nulos en la frontera de una cavidad circular ante incidencia de fuerza vertical. Se indica la posición de los puntos de medición y de izquierda a derecha los esfuerzos: σ_{rr} incidente, σ_{rr} total, $\sigma_{r\theta}$ incidente y $\sigma_{r\theta}$ total. Las tracciones en el campo total son nulas para fines prácticos. Las trazas tienen la misma escala de amplitud.

El campo incidente en $\sigma_{rr}^{(0)}$ y $\sigma_{r\theta}^{(0)}$ es cancelado por la difracción tal que el campo total en $\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{rr}^{(d)}$ y $\sigma_{r\theta}^{(0)} + \sigma_{r\theta}^{(d)}$ es insignificante. Se obtienen resultados similares para el caso de fuerza vertical y para otras posiciones de la fuente.

C.3. Análisis del campo de ondas

Se registra el campo de desplazamiento en una línea de receptores en $x = (5, -10 \leq z \leq 10)$ y se presentan los sismogramas sintéticos en la Figura C.2. Se observa que las ondas correspondientes a la incidencia de la fuente tienen tiempos de arribo correctos

y las polaridades esperadas para la dirección de la fuerza aplicada. Se identifican las ondas P y S difractadas por cada frente incidente (de amplitud significativa) y se asignan etiquetas a cada frente usando nomenclatura estándar.

Para ayudar a la interpretación de los frentes se obtuvieron instantáneas del campo de desplazamiento en $(-10 \leq x \leq 10, -10 \leq z \leq 10)$ para el caso de fuerza horizontal en la Figura C.3 y para el caso de fuerza vertical en la Figura C.4. Se identifican los frentes de onda usando la convención estándar. *e.g.* PP: originalmente onda P difractada como onda P. PS: originalmente onda P difractada como onda S, etc. En la Figura C.3 se hacen dos notas. La nota 1 indica que la onda P incidente prácticamente *no ve* el difractor. La nota 2 señala la amplitud de la onda S amplificada en la superficie libre.

Los resultados representan la física del problema planteado de forma satisfactoria. Se reproducen tiempos de viaje, polaridad y conversiones de onda, además de las condiciones de frontera. Por lo que -a espera de una verificación formal- por ahora inferimos que la implementación del método y el potencial propuesto son correctos.

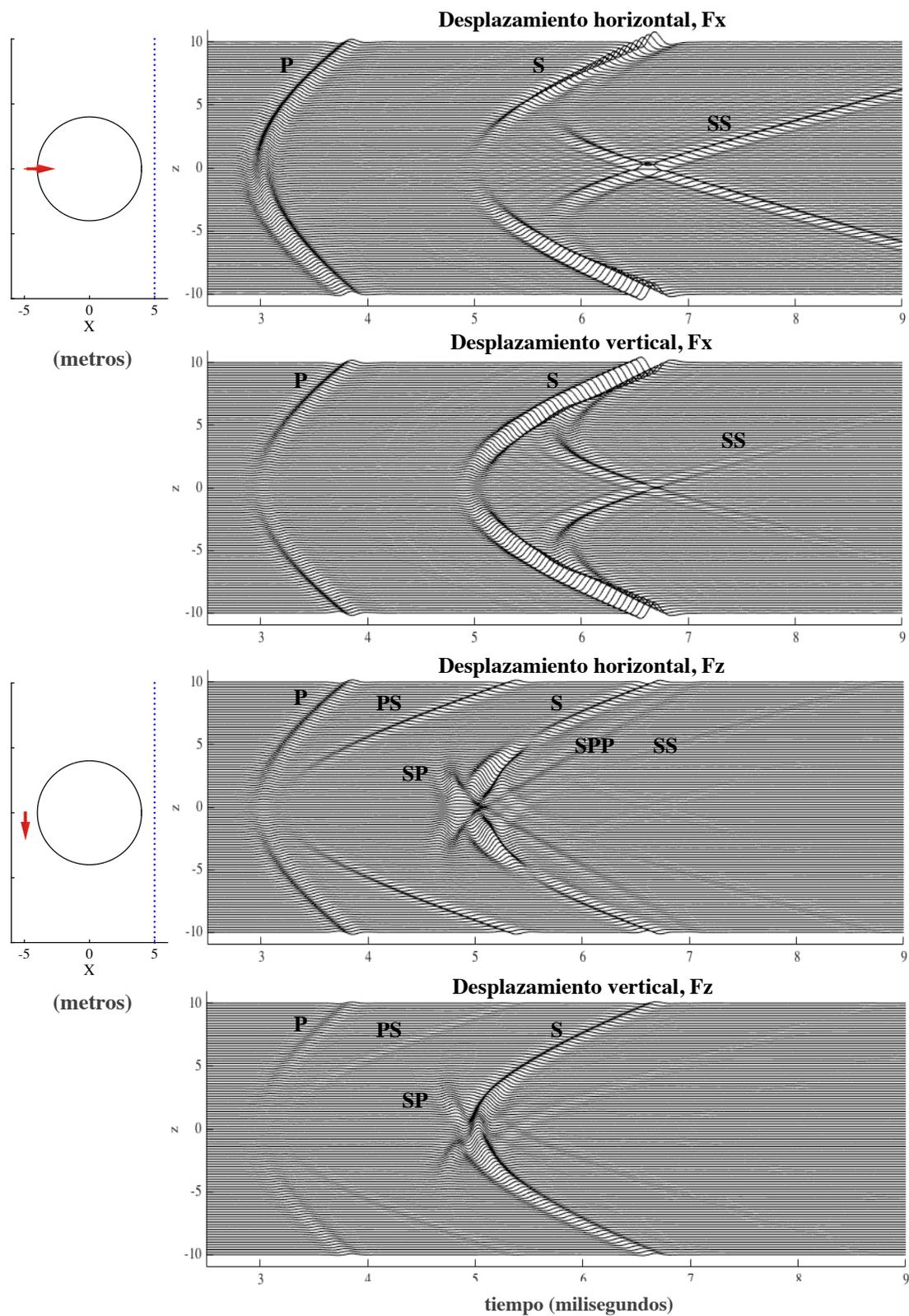


Figura C.2: Sintéticos de desplazamiento en medio completo con cavidad circular ante fuerzas puntuales. Posiciones y propiedades en texto principal.

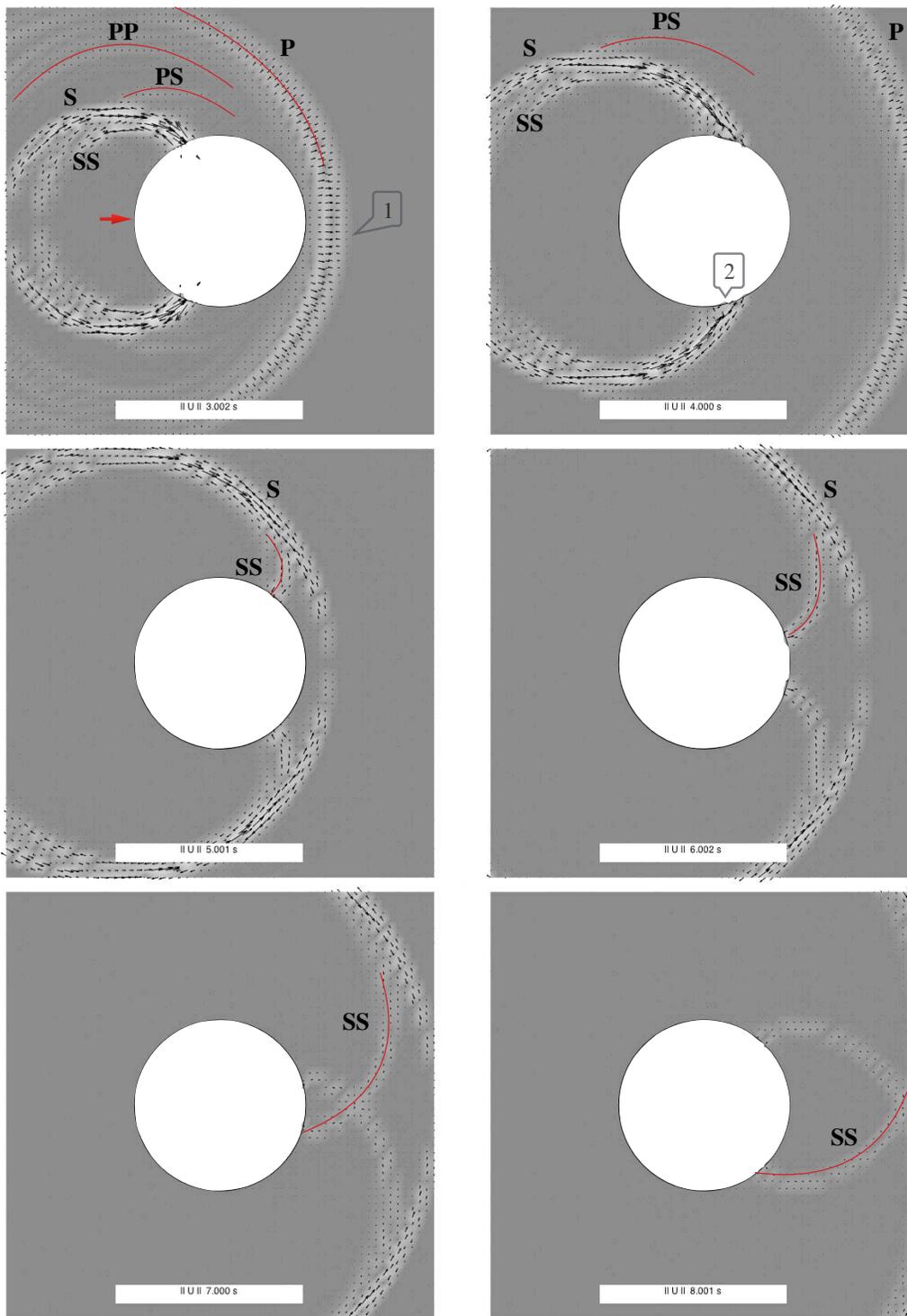


Figura C.3: Instantáneas del desplazamiento en medio completo con cavidad circular ante una fuerza horizontal (flecha roja). Las flechas indican la dirección del desplazamiento y la intensidad de color la magnitud relativa. Se señalan los frentes de onda. Escala de tiempo en milisegundos.

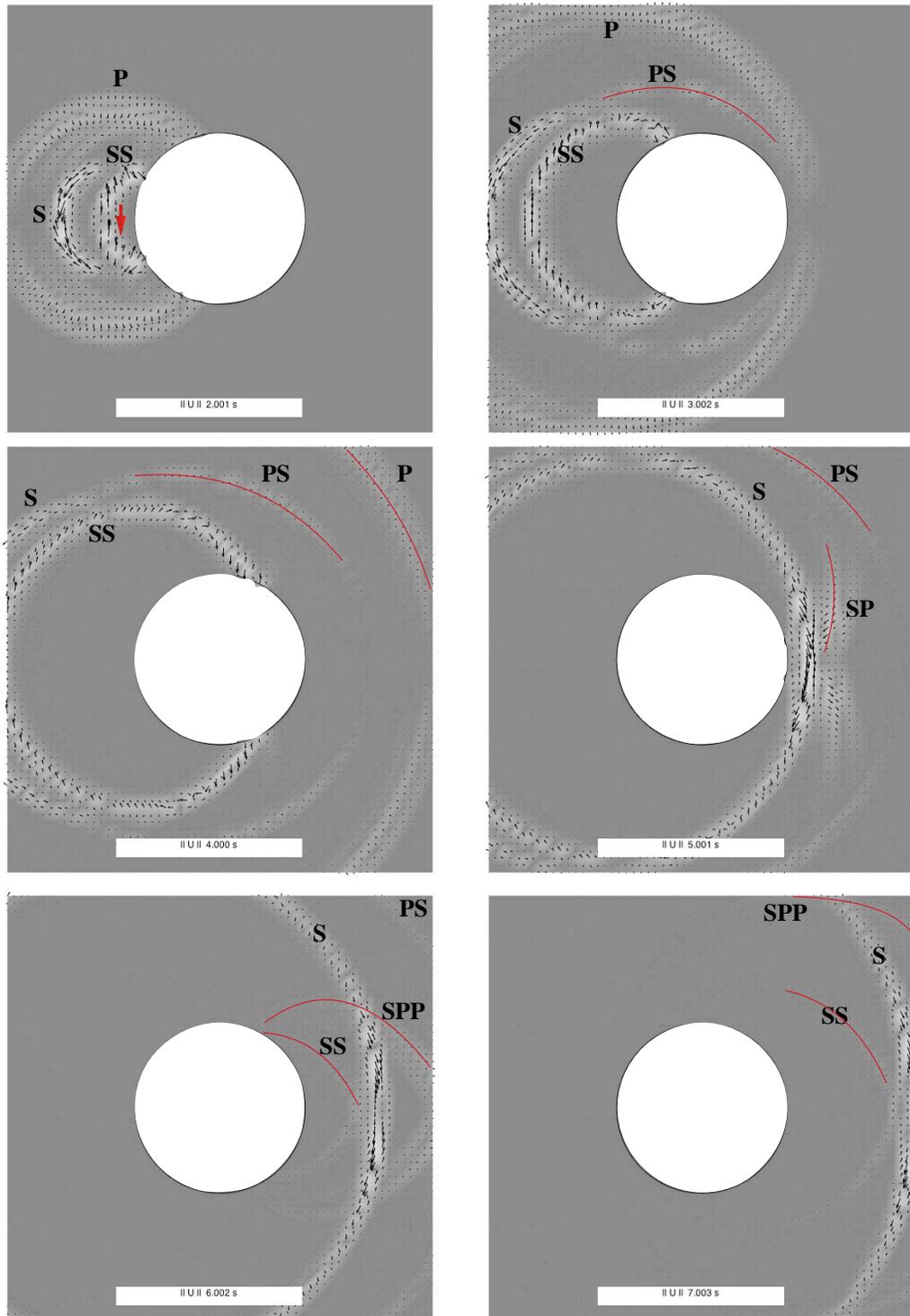


Figura C.4: Instantáneas del desplazamiento en medio completo con cavidad circular ante una fuerza vertical (flecha roja). Las flechas indican la dirección del desplazamiento y la intensidad de color la magnitud relativa. Se señalan los frentes de onda. Escala de tiempo en milisegundos.

Apéndice D

Descomposición en ondas planas del HVSR de microtremores bajo la hipótesis de campos difusos

En el Capítulo 8 hicimos uso del cociente espectral de las componentes horizontales y el vertical de microtremores (HVSR), bajo la hipótesis de campos difusos [Sánchez-Sesma et al., 2011a], como un símil de la elipticidad de las ondas de Rayleigh que identifica el periodo fundamental de las ondas de superficie y que puede responder a modos superiores si las condiciones del modelo lo permiten.

En este apartado analizamos el HVSR teórico de microtremores calculado con la ecuación (8.2) para el caso SS del Cuadro 8.1, como la superposición de ondas planas de distintas polarizaciones y direcciones de propagación. En la representación que usamos en la sección 3.4.1, una superposición de ondas planas construye el campo de desplazamiento en un semiespacio con estratos. Esta representación puede especializarse para resolver (8.2) para cada tipo de onda. El análisis que presentamos descompone $\text{Im}(G_{ii}(x, x))$ en onda planas y permite explicar cada cresta y valle del HVSR de microtremores bajo la teoría de campos difusos.

Nuestros resultados son parte de una investigación en curso para mejorar la inversión de perfiles estratigráficos a partir de suposiciones educadas sobre los datos observados, cuando el comportamiento no se representa con modelos unidimensionales.

En la Figura D.1 de Sánchez-Sesma et al. [2011a] sobreponemos en color rojo nuestros resultados para el modelo de un estrato sobre semiespacio. Al lado izquierdo se comparan la parte imaginaria de los componentes G_{ii} hasta 5 Hertz. En la derecha se compara el HVSR experimental que obtuvieron de registros de vibra-

ción ambiental (línea segmentada), y los que obtenemos con la ecuación (8.2) con y sin amortiguamiento (línea gris y negra resp.). Con modos generalizados (Margerin, 2009) (puntos negros) y nuestros resultados para un modelo con y sin amortiguamiento (línea roja segmentada y línea roja continua resp.) La amplitud del primer máximo es el cociente de dos cantidades pequeñas y de valor muy cercano (ver Figura D.1, panel (a)), nuestro resultado no tiene la amplitud reportada por el método que aplica la fuente como un diferencial de esfuerzo en la superficie (trabajo SS), en cambio, nuestro resultado sin amortiguamiento aproxima muy bien la amplitud del HVSR experimental (ver Figura 8.1). El ajuste es bueno en el resto del espectro. Se observa que de despreciar la atenuación en el estrato sólo se produce cambio en la amplitud del primer máximo.

Ahora analizamos $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]$ en base a las ondas que componen nuestra representación del campo de desplazamiento. En la sección 3.4.1 vimos que el campo total en un medio estratificado puede ser la superposición del campo incidente por la fuente como si estuviera en un espacio completo, y el campo difractado por la frontera libre y los estratos. Las llamamos $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^0]$ y $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ respectivamente. En la Figura D.2 se traza el campo total y los términos anteriores. Observamos que la incidencia directa de la fuente tiene pendiente constante ya que sólo depende de μ del primer estrato y la frecuencia, además es independiente de la dirección. Sánchez-Sesma et al. [2011b] obtuvo expresiones analíticas de este término para estudiar la partición de energía en un semiespacio. Las características notables en HVSR son provistas por la difracción y en particular por $\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$. A continuación analizamos dicho término.

El campo difractado se construye con una superposición de $k_{max}/dk + 1$ ondas P, SV y SH con ángulo de incidencia asociado al número de onda radial. Con números de onda grandes las ondas son inhomogéneas y la representación es exacta cuando $k_{max} \rightarrow \infty$ [Sánchez-Sesma, 1989]. En la Figura D.3 analizamos la contribución de los tres tipos de ondas en $\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ y en $\text{Im}[G_{33}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ trazados con línea negra segmentada. Se observa que debajo de 0.5 Hertz los componentes de movimiento en el plano tienen una asíntota en $\omega = 0$ pero la suma casi cancela su contribución y la mayoría de $\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ es producida por movimiento antiplano. Para que nuestro modelo reprodujera la amplitud de HVSR experimental en esta banda, el campo difractado por la estratificación debería tener menor amplitud. La preponderancia de ondas SH en esta banda sugiere que existe comportamiento anisotrópico a baja frecuencia. La prueba de esta hipótesis se deja para otra ocasión.

En las dos frecuencias asociadas con la elipticidad de las ondas de Rayleigh, aproximadamente 0.5 y 0.9 Hertz, la contribución de ondas P en $\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ es casi cero. En 0.5 Hz casi todo $\text{Im}[G_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ se debe a ondas SH (horizontales)

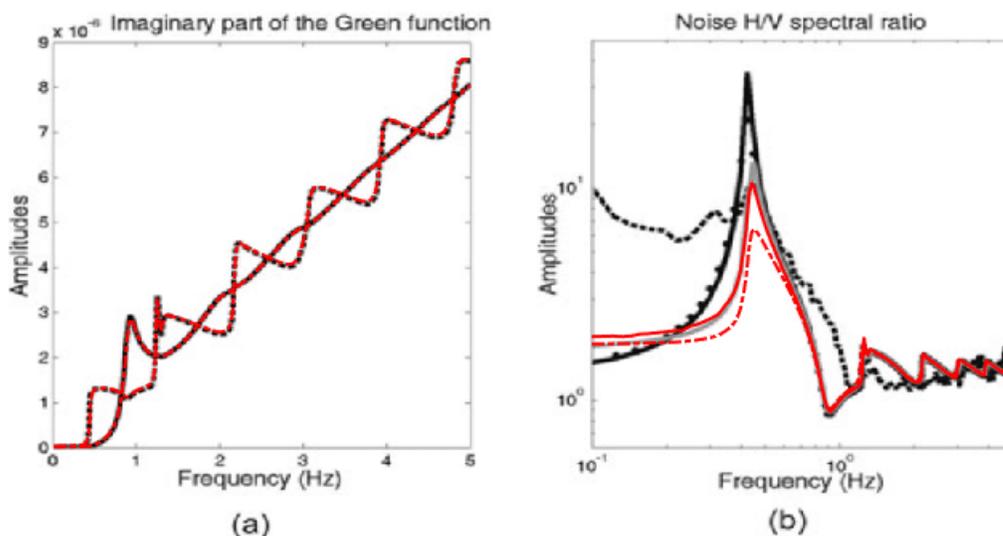


Figura D.1: Figura de [Sánchez-Sesma et al., 2011a] para el modelo de capa sobre semiespacio en Texcoco. En el panel (a) la amplitud de la parte imaginaria de la función de Green G_{11} y G_{33} con línea segmentada y continua respectivamente. Nuestros resultados se superponen en color rojo. En el panel (b) HVSR descrito en la Figura 8.1

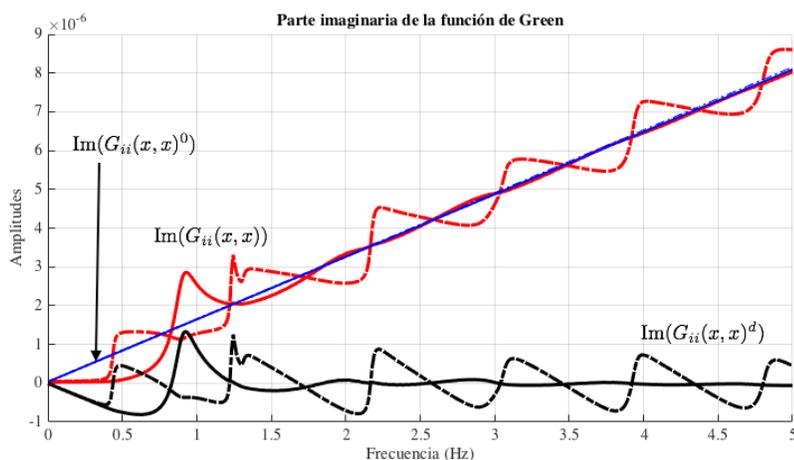


Figura D.2: Amplitud de $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x})]$ de la Figura D.1 con líneas rojas y los términos que la componen. Con línea azul la incidencia directa de la fuente como si estuviera en un espacio completo, con línea negra el campo difractado por la estratificación. Los horizontales se trazan con línea segmentada y los verticales con línea continua.

mientras que en 0.8 Hz se debe a ondas SV (verticales). Esta observación corrobora la interpretación predominante de HVSR como un símil de la elipticidad de las ondas de Rayleigh. En el resto del espectro las ondas de cortante tienen patrones similares excepto entre 1.00 - 1.50 Hertz, donde el desfase entre crestas permite explicar los dos picos en el primer armónico de HVSR teórico como la predominancia de cortante en orientaciones distintas. En la Figura D.3 también se muestra un juego de resultados para un modelo donde la velocidad de las ondas P es 800 m/s. Los resultados son similares y se trazan con línea delgada.

La representación permite también separar la dirección de propagación de las ondas planas que construyen el campo difractado por los estratos. Un análisis no mostrado aquí indica que las ondas P y SV con origen en la superficie y propagación hacia abajo tienen amplitud mayor que las ondas P y SV con origen en la interfaz con el semiespacio y propagación hacia arriba.

Conclusiones del análisis

La frecuencia mínima donde HVSR tiene un máximo local (frecuencia fundamental) depende de una relación delicada entre la amplitud de ondas SV y SH del movimiento horizontal y vertical, este último muy pequeño. En la frecuencia fundamental, las ondas P tienden a cero y las ondas S de los componentes horizontales cambian de signo.

Para la frecuencia mínima donde HVSR tiene un mínimo local, también asociada con la elipticidad de las ondas de Rayleigh, de nuevo las ondas P tienden a cero, pero en este caso cambian de signo las ondas S del componente vertical.

En frecuencias más altas la proporción entre ondas de distintos tipos oscila con patrones regulares y de amplitud creciente, no obstante en modelos donde hay dos o más contrastes de impedancia fuertes a distintas escalas es posible que HVSR tenga más de un máximo. En otro reporte se investigarán los modelos recopilados por Bard [1999] donde esta situación ocurre.

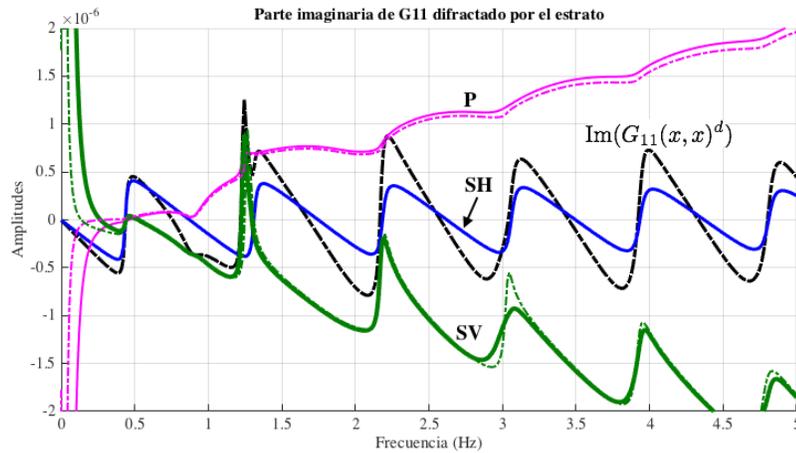
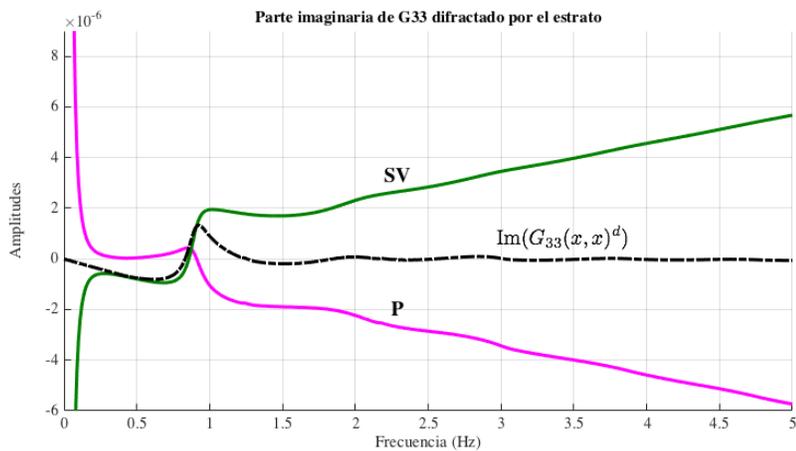
(a) Descomposición de $\text{Im}(G_{11})$ ó $\text{Im}(G_{22})$ difractado(b) Descomposición de $\text{Im}(G_{33})$ difractado

Figura D.3: Amplitud de $\text{Im}[G_{ii}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^d]$ para $i = 1, 2, 3$ de la Figura D.2 con línea negra segmentada y la porción de ondas planas P, SV y SH que la compone. Para el componente horizontal se muestran dos juegos de resultados casi iguales, con línea gruesa el caso cuando la velocidad de las ondas P es 400 m/s y con línea delgada para P igual a 800 m/s. Vea el texto para la discusión.

Apéndice E

Efecto de la estratificación en un valle 3D

Es común estimar el movimiento del suelo con modelos simplificados e incidencia vertical de ondas planas. En parte porque la información disponible no justifica generar modelos más refinados y se espera que un modelo **homogéneo-equivalente** sea suficiente.

Ahora estudiamos el efecto de sustituir un modelo de estratificación con varias capas, por otro homogéneo-equivalente. Comparamos el desplazamiento en la superficie de un valle aluvial con simetría axial ante la incidencia de ondas planas. Nuestros resultados sugieren que el modelo homogéneo-equivalente subestima la amplitud de los desplazamientos.

Para el análisis utilizamos el método de elementos de contorno con funciones de Green para semiespacio estratificado que presentamos en el capítulo 3. En este caso las regiones interior y exterior al borde del valle consideran la función de Green mencionada, de forma que no se requieren elementos de contorno para la superficie libre o la interfaz entre estratos.

E.1. Modelo de análisis

El modelo de valle es axisimétrico con laderas suaves y fondo plano, la interfaz entre el medio exterior (**E**) e interior (**R**) se describe por

$$z = h \quad r \leq a/2, \quad (\text{E.1})$$

$$z = 2h \left(1 - \frac{3r^2}{a^2} + \frac{2r^3}{a^3} \right) \quad a/2 \leq r \leq a, \quad (\text{E.2})$$

Cuadro E.1: Propiedades mecánicas de los materiales

Medio.Estrato	espesor	α	β	ρ	Q	ν
E.1	0.5	8.33	4	1	5000	0.35
E.2	∞	12	6	1	5000	0.33
R.1	0.01	1.08	0.5	0.8	100	0.36
R.2	0.025	2.45	1	0.8	300	0.40
R.3	0.015	4.89	2	0.8	500	0.40
Rq	0.05	2.91	1.2	0.8	300	0.39

Parámetros de los estratos en el modelo: h espesor, α y β velocidad de la ondas de presión y cortante respectivamente, ρ densidad de masa, Q factor de calidad y ν coeficiente de Poisson.

donde $h = 0.05$ es la profundidad del fondo, $a = 1.0$ es el radio en la superficie y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. La malla *inicial*¹ de elementos de contorno y el perfil de velocidades en el semiespacio y en el valle se ilustran en la Figura E.1. Dos líneas de receptores se indican con puntos en la misma figura. El Cuadro E.1 indica los valores del espesor, densidad ρ , factor de calidad Q (para considerar amortiguamiento histerético), constantes de Lamé λ , μ y módulo de Poisson ν . En el centro del valle, la velocidad de las ondas S se duplica en cada una de las primeras tres interfaces. En el borde del valle el contraste es de hasta 8x en velocidad y 50x en el factor de calidad. El modelo homogéneo equivalente en la región interior toma los valores promedio ponderados por el espesor de los estratos; en el exterior considera sólo el material en **E.1**.

E.2. Resultados numéricos

El desplazamiento entre $-0.75a$ y $0.75a$ se obtuvo en las frecuencias normalizadas $\eta = (\omega a)/(\pi\beta_{R.1}) = 4, 6, 8$ cuyo valor refiere la cantidad de longitudes de onda que caben de lado a lado en la superficie del valle. En algunos textos esta medida se denomina 'cantidad de tránsitos de onda'. En las Figuras E.2, E.3 y E.4 respectivamente se presenta la respuesta ante incidencia vertical de ondas planas P y S, ondas P a 30° desde la vertical y con el mismo ángulo para ondas SV. En cada gráfica se comparara el movimiento producido en el modelo estratificado (línea continua) y el homogéneo-equivalente (línea segmentada).

¹La discretización mínima para describir la geometría. Esta a su vez puede subdividirse para acomodar un mínimo de 6 puntos de colocación por longitud de onda en cada frecuencia.

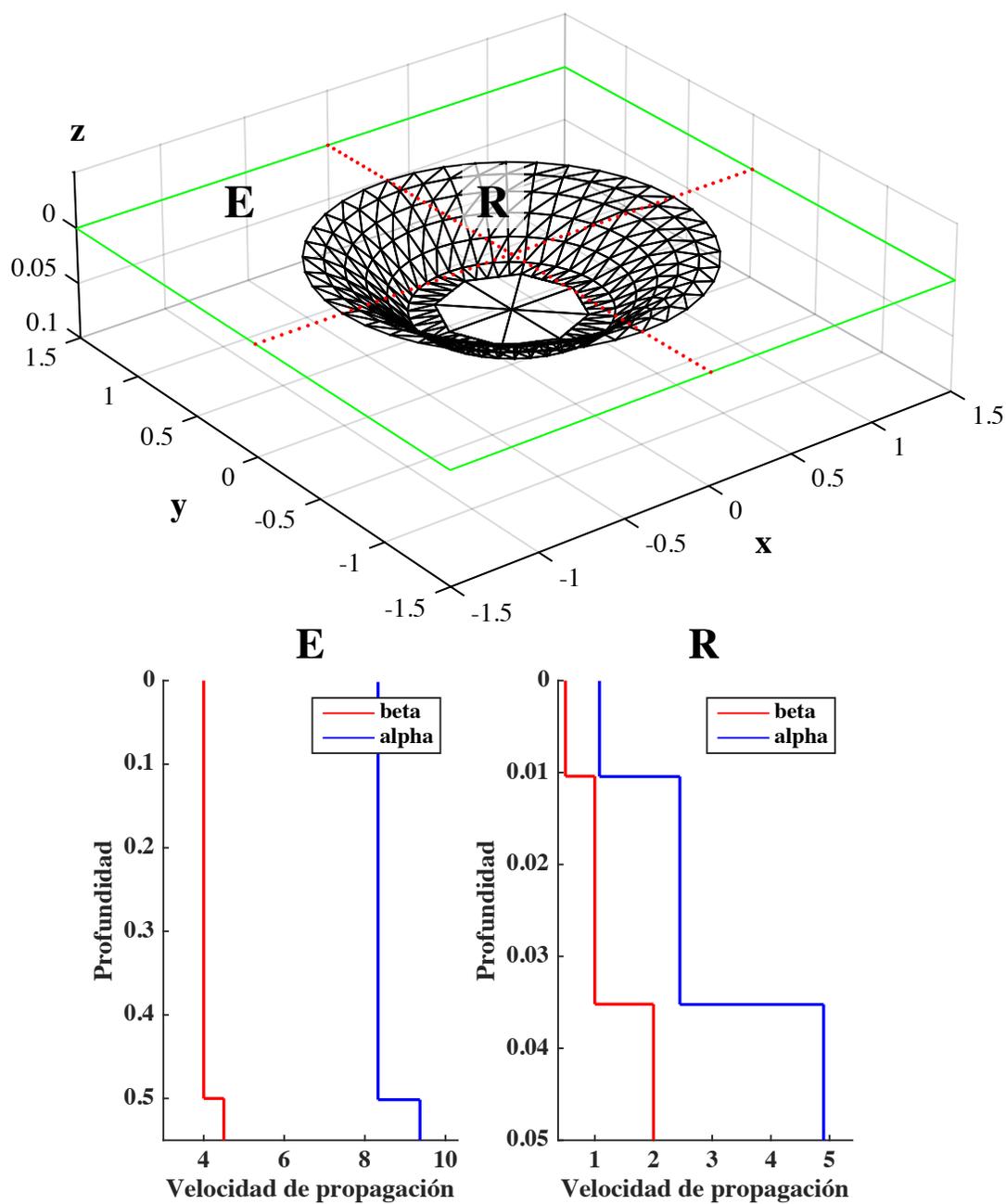


Figura E.1: Geometría de la interfaz descrita por E.2 entre un semiespacio (región E) y un valle aluvial (región R) de profundidad $h = 0.05$ y radio $a = 1.0$ en la superficie. Dos líneas de receptores se indican con puntos. Los medios E y R tienen estratos con el perfil de velocidades mostrado en la parte inferior de la figura.

Se observa que el movimiento difiere significativamente entre ambos modelos y que la mayor diferencia se encuentra en el centro del valle, donde es más profundo. Ahí se producen las mayores amplitudes en los cuatro casos de incidencia. El componente de desplazamiento transversal a la polarización de la onda incidente tiene entre 2 y 3 veces mayor amplitud que en el modelo homogéneo-equivalente. En cuanto al componente de desplazamiento alineado con la polarización de la onda incidente, la diferencia promedio de la amplitud crece con la frecuencia.

En el eje x la incidencia oblicua produce desplazamiento no simétrico respecto al origen en ambos modelos, pero como es de esperarse, la asimetría es más acentuada en el modelo homogéneo-equivalente (la refracción en estratos planos suaves rectifica hacia la vertical). Note que en baja frecuencia el modelo estratificado ante incidencia vertical y oblicua produce casi el mismo resultado en los componentes de desplazamiento alineados con la polarización de la incidencia.

En el modelo estratificado notamos oscilaciones cortas que sugieren la existencia de ondas de superficie. La transformada de Fourier de los desplazamientos entre $-0.75a$ y $0.75a$ en el eje x ante incidencia oblicua a 30° de onda plana SV (líneas continuas de la primera columna de la Figura E.5), muestra que en baja frecuencia la propagación del desplazamiento vertical predomina en la dirección $-x$. Conforme aumenta la frecuencia, $+x$ es la dirección de propagación predominante en ondas de cuerpo que imprimen desplazamiento horizontal.

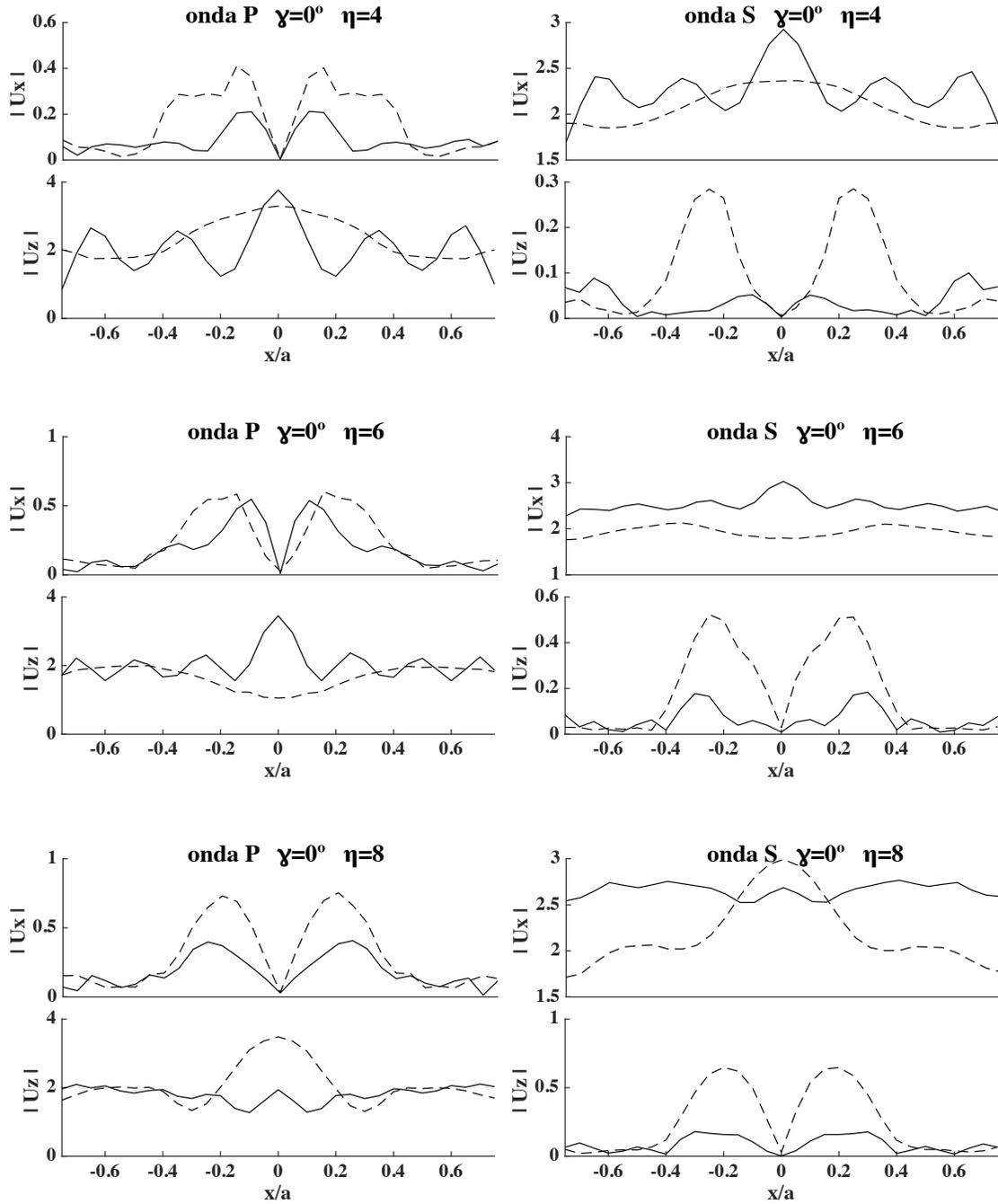


Figura E.2: Desplazamiento en una línea de receptores mostrada en la Figura E.1, en las frecuencias normalizadas $\eta = 4, 6, 8$. Resultados del modelo estratificado con línea continua y del modelo con material homogéneo equivalente con línea segmentada. Incidencia vertical de ondas planas P y S.

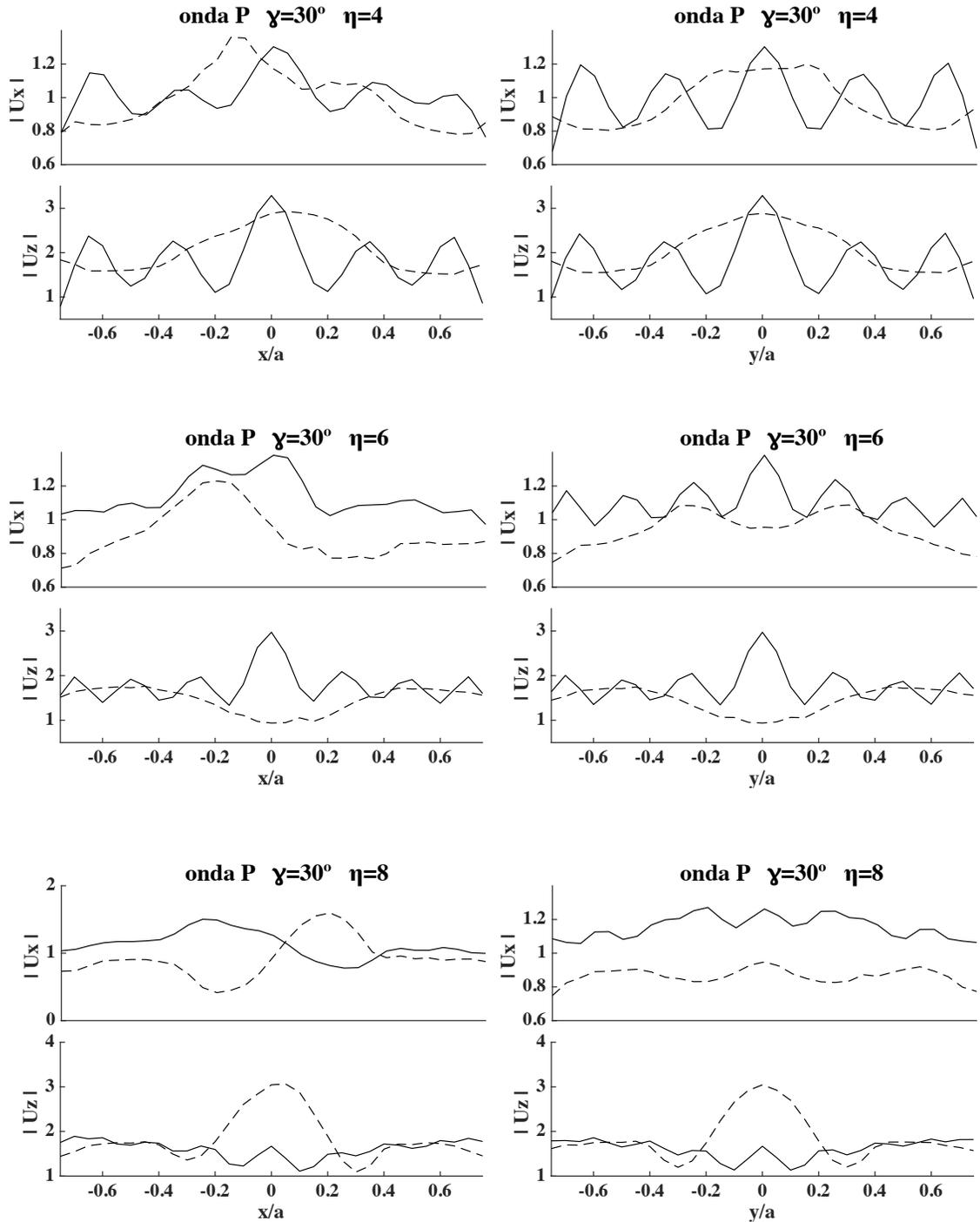


Figura E.3: Desplazamiento en dos líneas de receptores mostradas en la Figura E.1, en las frecuencias normalizadas $\eta = 4, 6, 8$. Resultados del modelo estratificado con línea continua y del modelo con material homogéneo equivalente con línea segmentada. Incidencia oblicua a $\gamma = 30^\circ$ desde la vertical, de onda plana P.

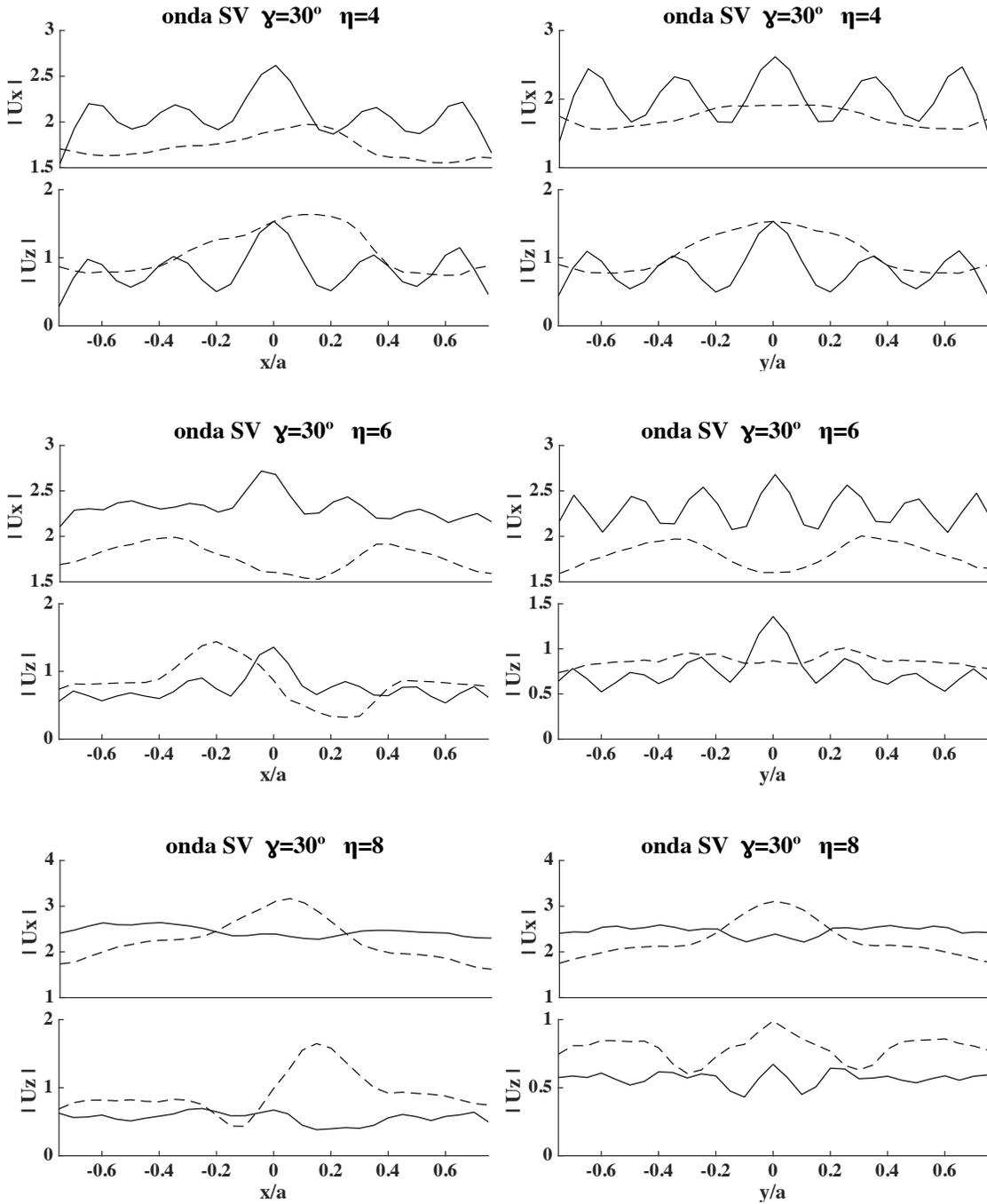


Figura E.4: Desplazamiento en dos líneas de receptores mostradas en la Figura E.1, en las frecuencias normalizadas $\eta = 4, 6, 8$. Resultados del modelo estratificado con línea continua y del modelo con material homogéneo equivalente con línea segmentada. Incidencia oblicua a $\gamma = 30^\circ$ desde la vertical, de onda plana SV.

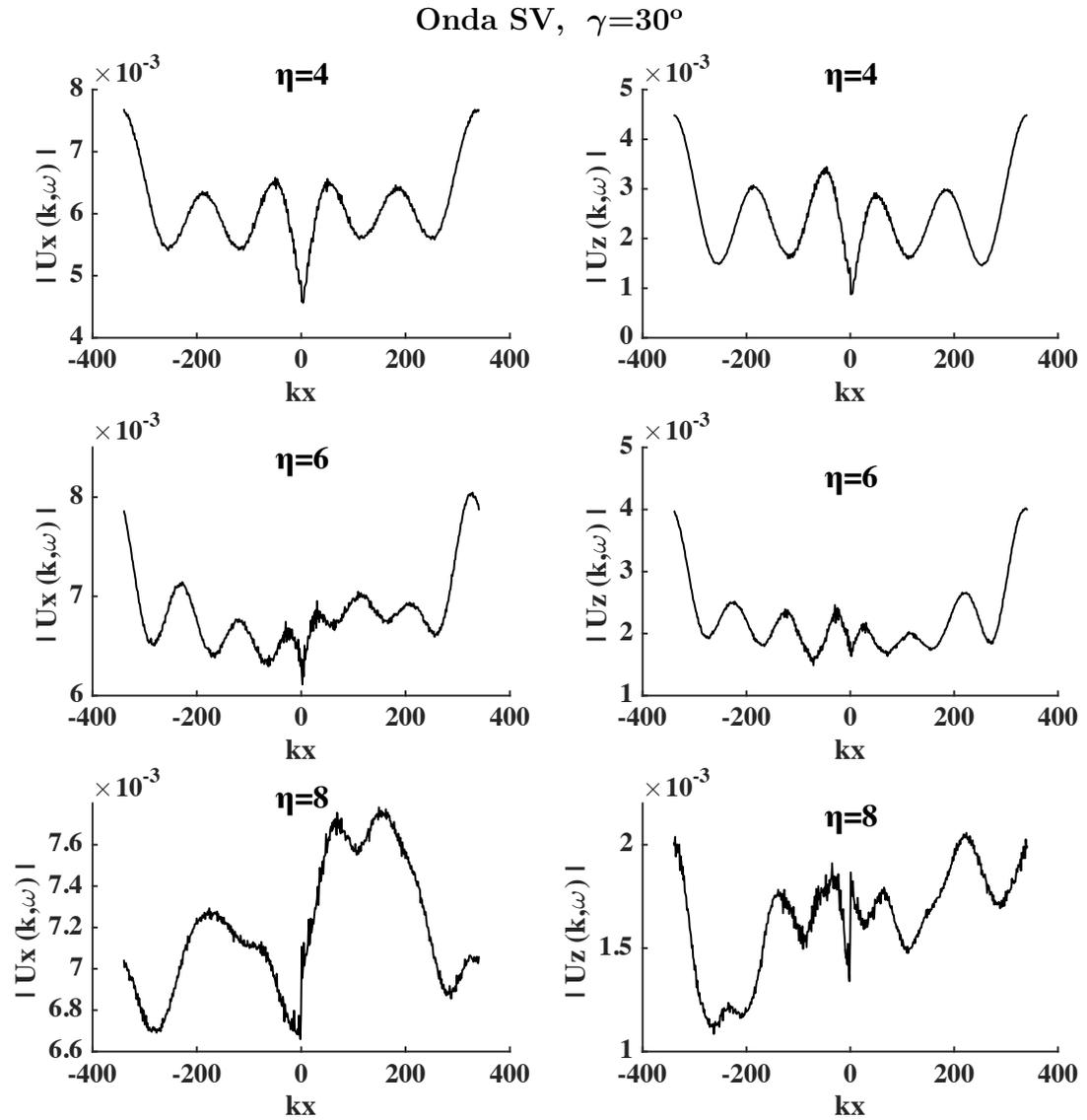


Figura E.5: Amplitud de la transformada de Fourier en el espacio de los desplazamientos horizontal y vertical en receptores en el eje x para el caso de incidencia a 30° de onda plana SV. La amplitud en el dominio del número de onda señala la proporción de energía propagándose en dirección del signo del número de onda kx .

Apéndice F

Anexo al Capítulo 8

F.1. Mapas de cocientes espectrales

Resolvimos la respuesta sísmica en un modelo de valle tridimensional irregular considerando dos casos de estratificación mostrados en la Figura 8.2. El caso **A** tiene cuatro capas incluidas dos de baja velocidad. El caso **B** es como el anterior pero sin los estratos suaves. Los materiales se describen en el Cuadro 8.1.

En los archivos incluidos en el disco (también pueden solicitarse por correo marcialcz@gmail.com) presentamos mapas del azimut del movimiento de partícula, cocientes espectrales respecto a una estación de referencia (SSR) para los tres componentes de desplazamiento ($u/u_g, v/v_g, w/w_g$) y para el desplazamiento horizontal total (HHg), también incluimos mapas del HVSR obtenido con la ecuación de Nakamura. Las incidencias son:

- 1: Onda P
- 2: Onda S (polarización x)
- 3: Onda S (polarización y)
- 4: Fuerza vertical en $\mathbf{x} = (3, 0, 0)$ (incidencia desde -x)
- 5: Fuerza vertical en $\mathbf{x} = (0, 3, 0)$ (incidencia desde -y)

Los archivos se organizan por carpetas para cada caso e incidencia.

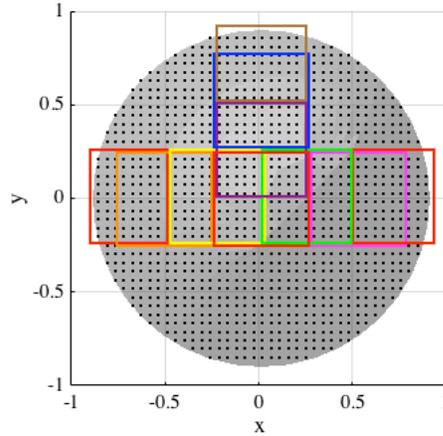


Figura F.1: Ilustración de los arreglos de estaciones

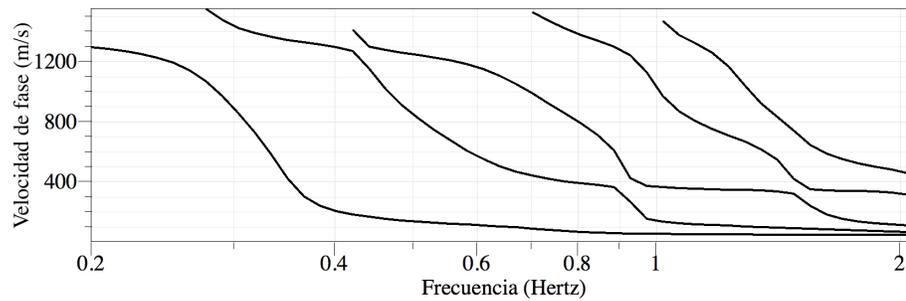
F.2. Curvas de dispersión en y entre arreglos

Para los arreglos de estaciones mostrados en la Figura F.1, obtuvimos la dispersión de velocidad de fase con el método SASW entre los puntos de cada arreglo y entre arreglos. Los archivos anexos están identificados de la siguiente manera:

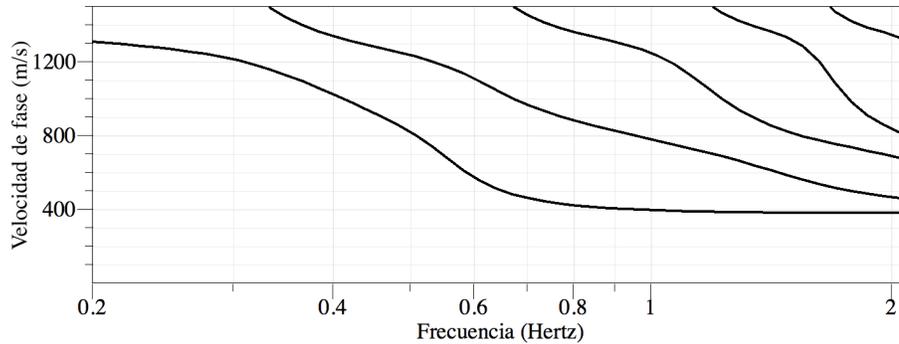
- (a) $[-1.00 \leq x \leq -0.50] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (b) $[-0.75 \leq x \leq -0.25] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (c) $[-0.50 \leq x \leq 0.00] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (d) $[-0.25 \leq x \leq 0.25] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (e) $[0.00 \leq x \leq 0.50] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (f) $[0.25 \leq x \leq 0.75] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (g) $[0.50 \leq x \leq 1.00] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (h) $[-0.25 \leq x \leq 0.25] [0.00 \leq y \leq 0.50]$
- (i) $[-0.25 \leq x \leq 0.25] [0.25 \leq y \leq 0.75]$
- (j) $[-0.25 \leq x \leq 0.25] [0.50 \leq y \leq 1.00]$

- (k) $[-1.00 \leq x \leq 1.00] [-0.25 \leq y \leq 0.25]$
- (l) $[-0.25 \leq x \leq 0.25] [-1.00 \leq y \leq 1.00]$

La relación de dispersión de velocidad de fase ondas de Rayleigh obtenida del promedio de cinco incidencias se mostró en la Figura 8.11 para siete arreglos de receptores. En la Figura F.3 compilamos las relaciones entre el arreglo (b) y otros arreglos. La dispersión que estimamos puede compararse con las curvas de dispersión teóricas para el perfil de suelo en el punto $(0.25,0)$, donde el lecho rocoso es más profundo. Para los casos **A** y **B** las curvas se muestran en la Figura F.2).



(a) Curvas de dispersión teóricas para el perfil estratigráfico del caso **A** en el punto más profundo del valle



(b) Curvas de dispersión teóricas para el perfil estratigráfico del caso **B** en el punto más profundo del valle

Figura F.2: Curva de dispersión teórica en $\mathbf{x} = (0.25, 0)$ con el perfil estratigráfico de los casos **A** y **B**. Cálculo con Geopsy [Wathelet et al., 2004].

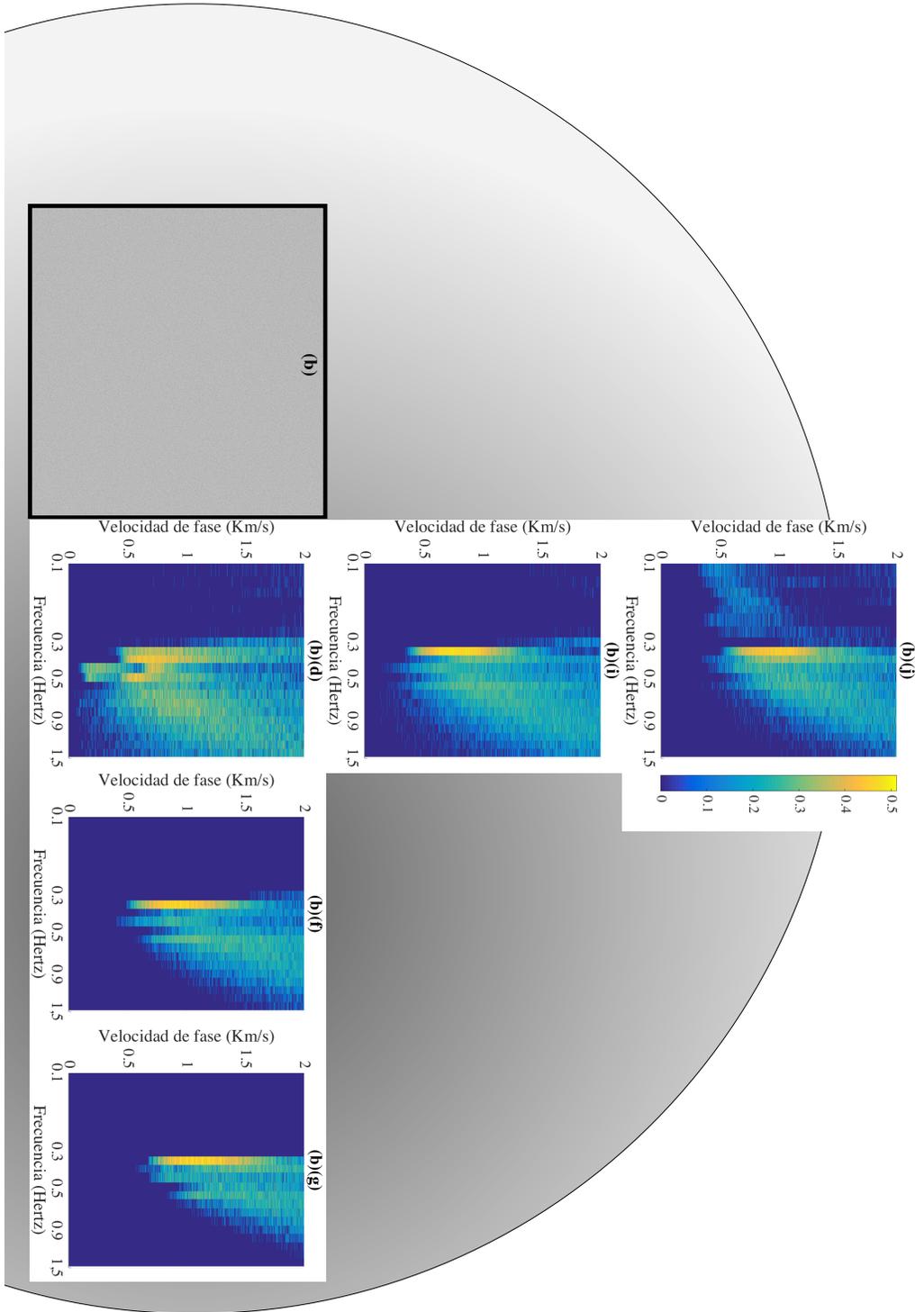


Figura F.3: Relaciones de dispersión de velocidad de fase de ondas de Rayleigh entre el arreglo (b) y otros arreglos rectangulares. La escala de amplitud es común.

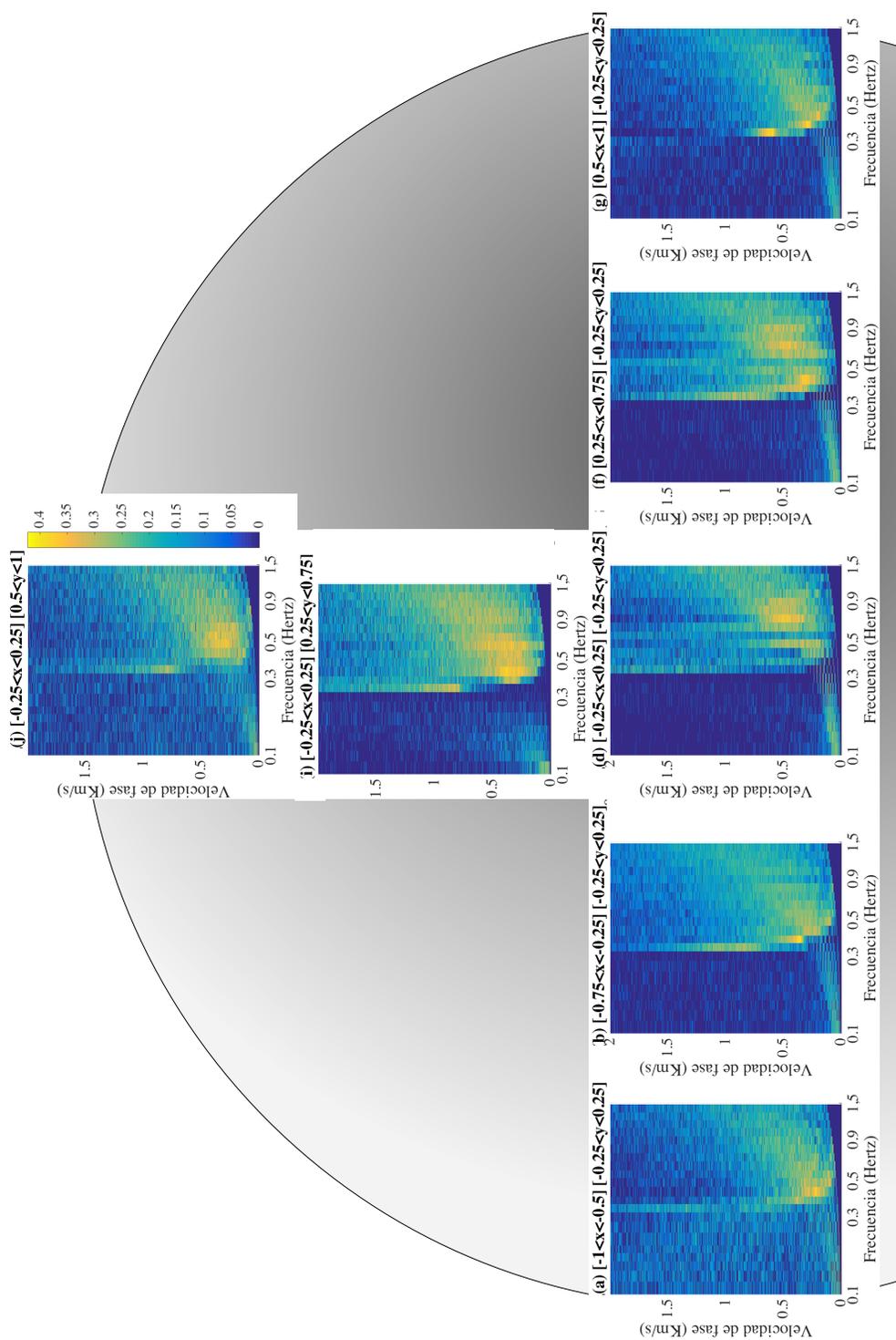


Figura F.4: Relaciones de dispersión de velocidad de fase de ondas de Love en arreglos rectangulares de receptores. La escala de amplitud es común.

Apéndice G

Artículo publicado en revista
arbitrada

Indirect boundary element method to simulate elastic wave propagation in piecewise irregular and flat regions

Mathieu Perton,^{*} Marcial A. Contreras-Zazueta and Francisco J. Sánchez-Sesma

Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Coyoacán 04510 D.F., Mexico. E-mail: mathieu.perton@gmail.com

Accepted 2016 March 29. Received 2016 March 25; in original form 2015 September 24

SUMMARY

A new implementation of indirect boundary element method allows simulating the elastic wave propagation in complex configurations made of embedded regions that are homogeneous with irregular boundaries or flat layers. In an older implementation, each layer of a flat layered region would have been treated as a separated homogeneous region without taking into account the flat boundary information. For both types of regions, the scattered field results from fictitious sources positioned along their boundaries. For the homogeneous regions, the fictitious sources emit as in a full-space and the wave field is given by analytical Green's functions. For flat layered regions, fictitious sources emit as in an unbounded flat layered region and the wave field is given by Green's functions obtained from the discrete wavenumber (DWN) method. The new implementation allows then reducing the length of the discretized boundaries but DWN Green's functions require much more computation time than the full-space Green's functions. Several optimization steps are then implemented and commented. Validations are presented for 2-D and 3-D problems. Higher efficiency is achieved in 3-D.

Key words: Numerical solutions; Wave scattering and diffraction; Wave propagation.

INTRODUCTION

Boundary element methods (BEM) may present computational limitations at high frequencies or for geometrical configuration with large boundaries due to the memory required for storing the linear system of equations and to solve it. Several efforts had already been made to reduce the quantity of unknowns in BEM as for example by increasing matrix sparsity through the use of threshold criteria (Ortiz-Alemán *et al.* 1998), by using static or least squares condensation (Gil-Zepeda *et al.* 2002; Rodríguez-Castellanos *et al.* 2011), Fast Multipole method (Fujiwara 2000; Nishimura 2002; Chaillat & Bonnet 2014) or domain decomposition method (Liu *et al.* 2008). Other efforts had been realized to adapt BEM to a large number of unknowns by solving the linear system of equations iteratively as for example in the reference (Bouchon 1985) or more implicitly by using conjugate gradient method (Ortiz-Alemán *et al.* 1998) or Generalized minimum residual method GMRES (Yu & Fu 2011; Chaillat & Bonnet 2013). Another limitation is due to the spurious wave reflection that appears from the edge of the discretization when infinite boundaries need to be truncated and when the full-space Green's function is used. Regarding this issue, some solutions

had also been proposed (Yokoi & Takenaka 1995; Fu & Wu 2000; Qian & Yamanaka 2012).

Geometrical configurations involving layered media are particular cases for which the quantity of unknowns increases dramatically with frequency. Since these configurations are of great interest in seismology, several other strategies had been advanced. Among them, one can mention the pioneering work of Aki-Larner method (Aki & Larner 1970) which then inspired the boundary integral equation-discrete wavenumber method, the so-called BIE-DWM (Bouchon 1985; Campillo 1987; Kawase 1988; Bouchon *et al.* 1989; Gaffet & Bouchon 1989; Bouchon 1996), and the global generalized R/T matrices (Chen 1990; Ge & Chen 2008). Consequences of the Rayleigh ansatz in the Aki-Larner method and its limitation to geometries with only smooth topography and interfaces had been discussed in several references (Bouchon 1985; Sánchez-Sesma *et al.* 1989; Cao *et al.* 2004). These limitations are partly overcome in the BIE-DWM. Several improvements have been implemented in order to consider interfaces with vertical steps (Bouchon 1996) and to improve the accuracy in near field by taking into account the contribution of the whole segment and not only of its centre (Kawase 1988). A clear advantage in the use of the DWN for computing Green's function was to eliminate the weak singularity associated with the full-space Green's function. However, for homogeneous region, the singularity is weak and can then be integrated along an element (Sánchez-Sesma & Campillo 1991). At first glance, the

^{*}Now at: CONACYT Research Fellow at Instituto de Geofísica - UNAM - Unidad Michoacán.

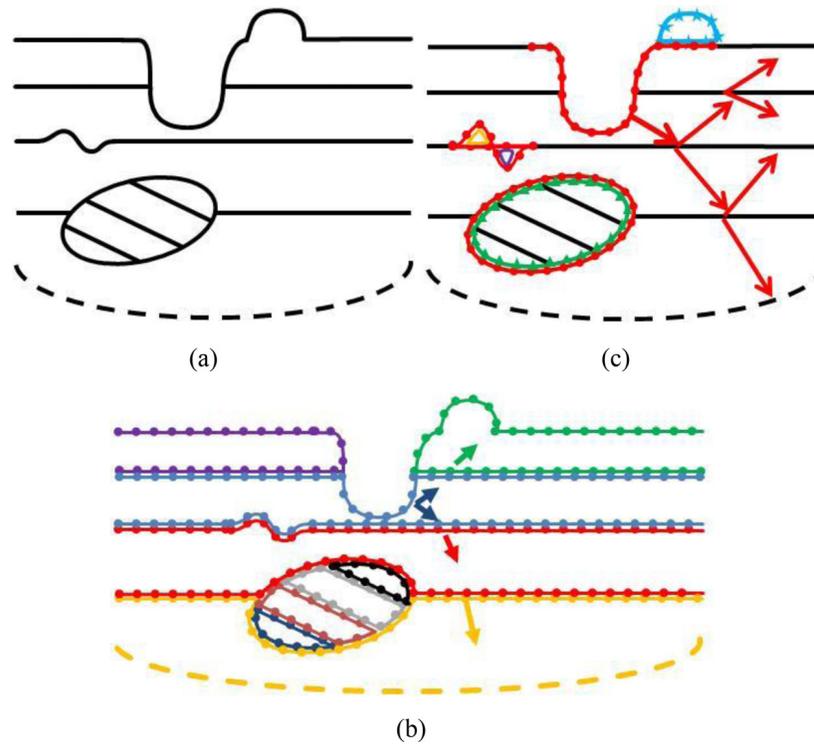


Figure 1. (a) Example of a geometry of layered medium with irregularities. (b) Boundaries considered in the case of the Multi-IBEM. All the boundaries are discretized and simulated using fictitious sources. Waves emitted from a source are transmitted inside the layered medium through the virtual sources which emit waves that only propagate inside the medium delimited by its boundary. (c) Boundaries considered in the case of the IBEM-DWN. Waves emitted from virtual sources that are positioned in the layered medium propagate through the whole layered medium without the irregularities (panels b and c are in colour in the web version of this paper).

use of the half-space Green's function obtained from the DWN computation might then become less interesting than the analytical full-space Green's function. Nonetheless, it avoids truncating infinite boundaries when dealing explicitly with a half-space. The efficiency of BIE-DWM had also been improved for some special geometrical cases. For example, in reference (Kawase 1988) the use of DWN for half-space domain helps to limit the unknowns within the irregular surface and flat free surface is automatically satisfied. It significantly reduces the number of unknowns. Similarly, Zhou and others (Zhou & Chen 2006; Zhou *et al.* 2010) proposed a local DWN method (loBIE-DWM) to only solve the unknowns along the irregular part only. The unknowns along flat surface are expressed in function of those on the irregular part. Contrary to its name, loBIE-DWM only invokes the simple and analytic full-space Green's function. This method is in fact quite similar to the work of (Yokoi & Takenaka 1995), which is intended to suppress the effect of infinite boundary truncation. Finally, in a more general case, the global generalized R/T matrices improve the efficiency of the BEM in modelling wave propagation in multilayered medium. However, it cannot consider the presence of general volume heterogeneities inside the layers.

In this work, some improvements of our recent indirect boundary element method (IBEM) implementation (Pertion & Sánchez-Sesma 2015) are presented to take into account layered media in an efficient manner. Originally, the implementation (referred here to as Multi-IBEM) only considers piecewise homogeneous domains arranged in complex geometries. Then layered media were described as a stack of several homogeneous media without taking advantage of the information that interfaces were flat and parallel. The resulting large linear system of equation might have been solved iteratively but this method is not efficient when the independent wave

propagation from several sources has to be simulated (Karabulut & Ferguson 2001) and traditional Gaussian elimination is preferred. Due to this choice, limitation at high frequencies had also been encountered. Here, this limitation is circumvented by simulating the wave propagation in flat layered region by locating the fictitious sources, employed in the IBEM to simulate the scattered field by following Huygens principle, only along the external and irregular boundaries of the flat layered media. The wave field generated by the fictitious sources is simulated by using the flat layered medium Green's function obtained from DWN. The full-space Green's function is still used for the other homogeneous media. It results then a hybrid method using conjointly the analytical Green's function for homogeneous media and the DWN Green's function for layered media.

The method, referred here to as the DWN-IBEM, is first described generally. The main equations of DWN method are then introduced in order to detail the implementation of the DWN within IBEM. Several optimization steps are also discussed. The resulting new implementation is validated against our previous implementation for simple geometries. To conclude, the efficiencies of both approaches are discussed.

DWN-IBEM

The coupling of the IBEM with the DWN method is first described mathematically in a general form, indistinctly for 2-D or 3-D. However, the schemes used for illustration are in 2-D in order to present the basic ideas. For example, a geometrical configuration is presented in Fig. 1(a) where a canyon is embedded in a layered medium that also presents a heterogeneity which itself is also layered.

Simulation of the wave propagation can then be performed in different manners. Each media boundaries can be discretized as shown in Fig. 1(b) when the Multi-IBEM is considered. In that case, a wave emitted by a source only propagates within the medium to which belongs the source. The transmission of that wave towards another medium is ensured by fictitious sources. The other discretization strategy, employed in the IBEM-DWN, is shown in Fig. 1(c). It differs considerably from the previous one. In that case, a wave emitted by a fictitious source positioned in a flat layered medium propagates through the whole flat layered medium considering all its transmissions and reflections. As a result, the length of the boundaries that needs to be considered in the IBEM is significantly lowered and this might results as a possible optimization of the IBEM. Also, when the layered region presents some interfaces with irregularities, such as the bump on the top free surface or the irregularity inside, these irregularities are separated from the flat layered medium and new regions are considered.

Although governing equations for the Multi-IBEM have been given in the previous paper, few equations are reminded here in order to better explain the coupling of the IBEM with DWN. The total displacement field $\mathbf{u}^{\text{tot}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$ at position \mathbf{x} within the volume V of a given medium of boundary surface S at the frequency $f = \omega/2\pi$ is the sum of the displacements imposed by an incident field $\mathbf{u}^{\text{inc}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$ due to an internal source at position \mathbf{x}_s and of the diffracted field $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$:

$$\mathbf{u}^{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{inc}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^d(\mathbf{x}). \tag{1}$$

The dependency on frequency ω and of \mathbf{x}_s is implicit and for clarity it is omitted here and generally hereafter. Note that displacement fields \mathbf{u} are vectors and so is the position \mathbf{x} and \mathbf{x}_s . Note that \mathbf{u}^{inc} is only considered if the source belongs to the same region of the receiver, that is, \mathbf{x} and \mathbf{x}_s belong to V .

In the case of a homogeneous medium with irregular shape (medium with star boundary in Fig. 1c), the incident field, noted by adding an H at the superscript $\mathbf{u}^{\text{incH}}(\mathbf{x})$, is the direct contribution of the real source (plane wave incidences or point sources might be considered). The diffracted field, noted in that case $\mathbf{u}^{\text{dH}}(\mathbf{x})$, is approximated using IBEM as the sum of the contribution of several fictitious sources located along the surface S :

$$u_i^{\text{dH}}(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^N \bar{G}_{ij}^{\text{FS}}(\mathbf{x}, \xi^l)_{\varphi_j}(\xi^l) \Delta S_{\xi^l}. \tag{2}$$

Here the medium surface is decomposed in N linear elements centred exactly at points ξ^l and of length ΔS_{ξ^l} . The vector force densities φ are unknowns to be solved and $\bar{G}_{ij}^{\text{FS}}(\mathbf{x}, \xi^l)$ corresponds to the mean displacement generated by a uniformly distributed force along the entire segment ΔS_{ξ^l} :

$$\bar{G}_{ij}^{\text{FS}}(\mathbf{x}, \xi^l) = \frac{1}{\Delta S_{\xi^l}} \int_{\Delta S_{\xi^l}} G_{ij}^{\text{FS}}(\mathbf{x}, \xi) dS_{\xi}. \tag{3}$$

Here $G_{ij}^{\text{FS}}(\mathbf{x}, \xi)$ is the displacement Green's function in direction i at point \mathbf{x} due to the application of a unit point force in direction j applied at point ξ in a full-space (FS). Analytical expressions exist in 2-D or in 3-D (see e.g. Sánchez-Sesma & Campillo 1991; Sánchez-Sesma & Luzón 1995).

In the case of a layered medium with mainly parallel and flat interfaces but also with irregular interfaces (see medium with dot contours in Fig. 1c), the incident field $\mathbf{u}^{\text{incLM}}$ is the field resulting from the real source in the flat layered medium, that is, obtained as if there was no irregular interfaces. It is obtained as the sum of the displacements imposed directly by the source $\mathbf{u}^{\text{FS}}(\mathbf{x})$ as in

full-space and of its reflected or transmitted consequences in the layered medium $\mathbf{u}^{\text{LM}}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}^{\text{incLM}}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{\text{FS}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^{\text{LM}}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Note that $\mathbf{u}^{\text{FS}}(\mathbf{x})$ only exists in the layer where the source is located. Then, the diffracted field $\mathbf{u}^{\text{dLM}}(\mathbf{x}, \omega)$ is approximated using the IBEM as previously, that is, as the contribution of several fictitious sources:

$$u_i^{\text{dLM}}(\mathbf{x}) \approx \sum_{l=1}^N \bar{G}_{ij}^{\text{LM}}(\mathbf{x}, \xi^l)_{\varphi_j}(\xi^l) \Delta S_{\xi^l}. \tag{5}$$

In that case, the Green's function $\bar{G}^{\text{LM}}(\mathbf{x}, \xi^l)$ corresponds to the mean displacement generated by a uniformly distributed force along the entire segment ΔS_{ξ^l} in a flat layered medium:

$$\bar{G}_{ij}^{\text{LM}}(\mathbf{x}, \xi^l) = \frac{1}{\Delta S_{\xi^l}} \int_{\Delta S_{\xi^l}} G_{ij}^{\text{LM}}(\mathbf{x}, \xi) dS_{\xi}. \tag{6}$$

Here, $G_{ij}^{\text{LM}}(\mathbf{x}, \xi)$ is the displacement Green's function in direction i at point \mathbf{x} due to the application of a unit point force in direction j applied at point ξ in a flat layered medium, i.e. without the irregularities. The expression of that Green's function and of $\mathbf{u}^{\text{incLM}}$ can be obtained by using the DWN method (Bouchon 2003) or by any other methods dealing with the wave propagation in flat layered medium as for example by the generalized ray theory (Helmerger 1968), by reflectivity method (Fuchs & Müller 1971) or by reflection and transmission matrices method (Kennett 1985). Note that $u_i^{\text{incLM}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$ is identical to $G_{ij}^{\text{LM}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$ when the source is a unit point force in direction. In the present example, since the diffracted field $\mathbf{u}^{\text{dLM}}(\mathbf{x}, \omega)$ is obtained through the use of Green's functions that already verify the boundary conditions of the flat layered medium, no collocation point is located on the free flat surface. Then collocation points are only located along the irregular interfaces (see interfaces with dot in Fig. 1c) or when the flat surfaces are bound to another media that differ from the flat layered medium (see interface with star boundary in Fig. 1c).

The unknown force densities φ are solved considering globally the boundary equations of all the media in contact, that is, zero traction at free surfaces or displacement and traction continuities for interfaces. The resulting linear system of equations considered $[A][\varphi] = [B]$ is then similar as the one presented in our previous paper (Pertón & Sánchez-Sesma 2015, eqs 10 and 11). However, some improvements had been carried out. When the interface bounds two solids, the fields are projected on a single Cartesian frame. When the interface bounds one solid with a fluid or two fluids, the fields are projected on a local frame that considers normal and tangential directions to the interface, so that tangential displacements are always imposed null and that the tangential tractions are imposed null in the case of fluid/fluid interface (Pointer *et al.* 1998). Displacement and traction solutions at a point \mathbf{x} are then obtained using eqs (1)–(6) in the frequency domain. The time signals are finally computed using the inverse fast Fourier transform of the spectra, previously multiplied by the source spectral signature.

DWN METHOD

In this section, the computation of the displacement Green's functions for layered medium G_{ij}^{LM} and \mathbf{u}^{LM} are discussed. First, the classical DWN method is quickly reviewed in order to introduce the equations that will then be used in the detailed of the ideas that allow a fast calculation of that Green's function.

As IBEM, the DWN method considers semi-analytical solutions in the frequency domain. In what follows it is illustrated in 2-D. The reflected-transmitted displacement field inside the layer n , $u_i^{LMn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$, results from the integration along the horizontal component of the wavenumber, k_x , of the contribution of plane waves with both longitudinal P and shear SV polarizations that go up (indicated by the superscript \nearrow) and down (indicated by the superscript \searrow):

$$u_i^{LMn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(S^{\nearrow Pn} u_i^{\nearrow Pn} e^{\mathbb{I}k_z^{Pn}(z-z_{bn})} + S^{\searrow Pn} u_i^{\searrow Pn} e^{-\mathbb{I}k_z^{Pn}(z-z_{tn})} \right) + \left(S^{\nearrow SVn} u_i^{\nearrow SVn} e^{\mathbb{I}k_z^{SVn}(z-z_{bn})} + S^{\searrow SVn} u_i^{\searrow SVn} e^{-\mathbb{I}k_z^{SVn}(z-z_{tn})} \right) \right) \times e^{-\mathbb{I}k_x(x-x_s)} dk_x. \quad (7)$$

For an extended description of the integrand, the interested reader can consult the textbook by Aki & Richards (2002). The horizontal axis is defined as parallel to the interfaces and the vertical axis is normal to that direction. When this frame differs from the IBEM Cartesian frame, a simple rotation of the resulting displacements and tractions is used. $k_z^{Pn} = \sqrt{k^{Pn^2} - k_x^2}$ (resp. $k_z^{SVn} = \sqrt{k^{SVn^2} - k_x^2}$) is the vertical component of the wavenumber $k^{Pn} = \omega/\alpha$ (resp. $k^{SVn} = \omega/\beta$) associated with the P (resp. SV) wave of the layer n with a negative sign of its imaginary part. Here α (resp. β) is the velocity of the P (resp. SV) wave. The vertical phase origins z_{bn} and z_{tn} are respectively the depths of the bottom and top interfaces of the layer n . This choice of distinct vertical phase origins avoids to numerically deal with very large or infinite numbers. The horizontal phase origin x_s corresponds to the horizontal position of the source. \mathbf{u}^{Pn} and \mathbf{u}^{SVn} are unitary vector of polarization of the waves. Because of symmetries, component u_i^{\nearrow} may differ from u_i^{\searrow} only by a sign. Tractions have similar symmetries since they derived from Cauchy's formulae and Hooke's law. Taking these symmetries into account allows diminishing the memory. The continuous integral in eq. (7) is approximated by a finite sum, that is, by discrete Fourier transform (DFT). Then, the wave amplitudes $S^{\nearrow Pn}$, $S^{\searrow Pn}$, $S^{\nearrow SVn}$ and $S^{\searrow SVn}$ are solved for each discretized values of k_x by considering the boundary equations: displacement and traction continuities, arranged under the matrix form:

$$[D_{ij}(t, u, n)] \left[S_j^{\nearrow, \searrow, P, S, n} \right] = [F_i(t, u, n)]. \quad (8)$$

The vector \mathbf{F} carries the value of traction and displacement of the incident field at the several interfaces with non-null values only at the interfaces of the layer where the source is located. In fact eq. (8) is solved only for positive value of k_x . The solutions for negative value of k_x are obtained from the latter by considering symmetries of the source vector, of the displacement polarization vector and of the traction vector. The displacement and traction at a point \mathbf{x} are then calculated using eqs (4) and (7) in the frequency domain. Finally, the Green's function in the layered medium can be expressed as $G_{ij}^{LM}(\mathbf{x}, \xi) = u_i^{LMn}(\mathbf{x}, \xi) + G_{ij}^{FS}(\mathbf{x}, \xi)$, where $u_i^{LMn}(\mathbf{x}, \xi)$ is the response to $G_{ij}^{FS}(\mathbf{x}, \xi)$.

An advantage of using DWN for Green's function calculation is that anisotropy can also be considered or that the mechanical equations can be coupled to other physical phenomena (Pertou 2006).

IMPLEMENTATION OF DWN WITH IBEM

In our previous communication (Pertou & Sánchez-Sesma 2015), the discretization had been implemented in an automatic way. The flat layered region has been added to the list of the several geometrical configurations already available and its consideration is not very different from implemented ones. Only the interfaces of the flat layered medium that are in contact with other geometries are considered as contours in the IBEM (see contours in Fig. 1c); the flat free surfaces and the interfaces between the layers are not. Since the layers present different velocities, the contours are split between several sub-contours that start and end at the layer intersections. The discretization, that is, the size of the elements, is then better adapted to the smallest wavelengths around the contours. In fact, the main difference in the process of the flat layered medium with the other geometries is to consider the Green's function of an unbounded flat layered medium, as discussed in the previous section.

In order to make the calculation faster, five main optimization steps have been developed. These points are presented succinctly here and commented with more detailed below:

- (1) The DWN matrix $[\mathbf{D}]$ is inverted only a single time for each calculation.
- (2) Discretization of the contours in IBEM is modified in order to reduce the number of virtual sources depths.
- (3) Several calculation steps for receivers having the same depth are gathered.
- (4) Segment contribution, that is, $\bar{G}_{ij}^{LM}(\mathbf{x}, \xi^l)$, is obtained by convolution.
- (5) The discrete sum over the horizontal wavenumber is made with a non-constant step Δk_x .

(1) Generally if the linear system $[\mathbf{D}][\mathbf{S}] = [\mathbf{F}]$ has to be solved for a small numbers of sources, the vector solution \mathbf{S} is solved using Gaussian elimination (generally from LU decomposition but without calculating the inverse matrix). However here, the number of sources is large since fictitious sources are also considered. It becomes then more advantageous to compute explicitly the inverse matrix \mathbf{D}^{-1} a single time and then to proceed to the multiplication $[\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{F}]$ for the several vectors $[\mathbf{F}]$. Even if the solutions \mathbf{S} have generally larger errors using this method, these latter are negligible comparing to those made in IBEM.

(2) When discretizing eq. (7), the Fourier transform implies a periodic distribution of the sources along the x -direction. However, the influence of this periodicity is limited in an appropriate time windows by the introduction of an imaginary part of the frequency pulsation $\omega = \omega_R + \mathbb{I}\omega_I$ (Bouchon 2003). Then, the layers can be assumed unbounded and the horizontal origin of a source can be arbitrary. Therefore, for several sources at the same depth, only the distance source-receiver has an influence in eq. (7), the amplitude solutions \mathbf{S} being the same. Moving the original fictitious sources to positions with the same depths improves then considerably the method efficiency. In the IBEM, boundaries are divided into small elements and fictitious source are positioned at their centre. The size of the element has only to be smaller than the local wavelengths, so that there is no limitation on slightly modifying their sizes in order to impose common depths of the centres. As a remark, the introduction of the imaginary part of the frequency is imposed everywhere in the implementation, that is, in the DWN and in IBEM implementations. The imaginary part has then its contribution in the temporal signal, as discussed by Bouchon (2003).

(3) Also, since the horizontal separation distance between the source and the receiver has an influence on the result only through the exponential term in eq. (7), all the operations in the parenthesis before that term can be grouped when receivers have the same depth and for a given source depth. Since fictitious sources are also fictitious receivers when constructing the IBEM matrix, considerable gain of time is achieved.

(4) However, these considerations are valid only when dealing with point sources. In IBEM, the sources are segments in 2-D or elements in 3-D. The amplitude of a spatially extended source is obtained by convolving the spatial profile of the source with the Green's function. In the wavenumber space, this convolution corresponds to a multiplication of the Fourier transform of the spatial profile of the source with the Fourier transform of the Green's function. Let's consider now the 2-D configuration for simple explanation. Results in 3-D are derived similarly. Since the amplitude of the vector force densities φ is constant along any segment, the source profile is taken as a rectangular function which Fourier transform is a cardinal sine function. Then, the displacement generated by a segment of constant force is in the wavenumber domain:

$$\bar{G}_{ij}^{LM}(k_x, k_z) = G_{ij}^{LM}(k_x, k_z) \operatorname{sinc}\left(\frac{-\Delta_x S_{\xi l} k_x - \Delta_z S_{\xi l} k_z}{2\pi}\right) \quad (9)$$

Here the function sinc is taken under its normalized version. Similar results were presented in the reference (Kawase 1988). The expression is given under general form but in the case of in-plane displacement, four correction terms have to be considered in the integrand in eq. (7) according to $k_z = \{k_z^{Pn}, -k_z^{Pn}, k_z^{SVn}, -k_z^{SVn}\}$. Because of these corrections, the previous optimization steps are compromised: the use of symmetries is no more possible and the calculus of the displacement for several fictitious segment sources at the same depth is only possible for the same length and orientation of the sources. However, when considering only the horizontal projection of the source $\Delta_x S_{\xi l}$, there is no more dependence on the vertical wavenumber and a single term $\operatorname{sinc}(\Delta_x S_{\xi l} k_x / 2\pi)$ is used in order to take into account the segment sizes. This term can then be added at the end of the operations, just with the exponential term discussed at point 3, and the previous optimization steps remain possible. The influence of the sources length is only important in the source near field and then mainly in the construction of the matrix [4]. We verified that, ignoring the vertical projection of the source for geometrical configurations where the external boundaries of the layered medium are mainly horizontal, gives similar results to the simulations that use the whole expression in eq. (9) without optimization. Some results are shown in the next section in order to prove this affirmation. It is also possible to reduce the element sizes in IBEM discretization to diminish the error due to the simplification but it would require more elements. Note that when dealing with steep geometries, no simplification can be made and the method considers eq. (9) with four terms without considering optimizations, so that there is no geometrical limitation.

(5) The wave vectors associated to surface waves correspond in fact to zeros of the determinant of matrix [D] when no attenuation is considered. Then the amplitudes associated to these wave numbers cannot be evaluated from eq. (8). The introduction of the complex frequency (see point 2) as the introduction of attenuation allows smoothing the integrands. Time signals are not sensitive to ω_l as long as its value is small (Bouchon 2003). Nevertheless, the precise integration of the smoothed poles requires still a fine discretization. In our implementation, the determinants of the matrices [D] are first calculated for a fine discretization and then the discretization

is modified by considering the gradient of the determinants inverse. When the gradient is small, the discretization is reduced by down sampling (then matrices [D] and determinant are conserved), but when the gradient is large the discretization is interpolated. This operation usually leads to reduce by a third the number of points originally considered, even with the interpolation. The error on the integral is straightforward when using a constant step. Here we have not a precise idea on the error but numerical experiments have shown that it is comparable to the case of a constant step close to the smallest step of the irregular discretization. Additionally to the size of the discretization, maximum k_x is another key parameter for the integration in DWN method. Here, it is fixed before the DWN-IBEM simulation by considering only the layered medium apart and visualizing the integrand in eq. (8) at all the frequencies for a source and a receiver superimposed on the interface of the slower layer. The absolute value of the integrand at maximum k_x must be smaller than a given value (generally 10^{-6}) of the maximum integrand absolute value. The choice of considering a source and a receiver superimposed on the interface of the slower layer is made in order to avoid attenuation of the waves and to increase the contribution of surface waves. In fact, the precise contribution of the pole may also be considered using other method (Aki & Richards 2002; García-Jerez *et al.* 2013; Perton & Sánchez-Sesma 2016).

VALIDATION OF DWN-IBEM

The DWN-IBEM implementation is validated for various cases by comparing simulated signals with the signals obtained with our Multi-IBEM implementation; this latter being already validated (Perton & Sánchez-Sesma 2015). In this paper, the validations have been conducted on very simple geometries in order to increase the sensibility to the discrepancies between the methods. Application to realistic examples will be presented elsewhere.

First, the *SH* case in 2-D was studied for its simplicity and because it offers several advantages as it will be shown. In Fig. 2(a), the case of a shallow inclusion in a half-space is shown. The traditional approach for IBEM is to discretize the boundaries by considering two contours with fictitious sources emitting in each medium, as shown in Fig. 2(b). Contours of a same interface have been moved out to help their recognition but are in fact superimposed as in Fig. 2(a). Since infinite interface cannot be modelled with this approach, the free surface has been truncated at a certain distance from the mount. Alternatively, in the special case of *SH* wave propagation in a half-space, the free surface can be also modelled by using the source image theorem. Then, the free surface in Fig. 2(a) can be modelled by introducing an image source for any fictitious sources along the boundary of medium m_1 and for the original source too. This approach is illustrated in Fig. 2(c). The buried boundary of the inclusion, from the side belonging to the half-space, is imaged symmetrically with respect to the free surface. Since the resulting Green's function modelled an unbounded free surface, the discretization of the free surface is not required anymore. Note that only sources are mirrored but collocation points where boundary conditions are verified are not imaged. In the last approach, these resulting Green's functions are alternatively obtained from the DWN method. This approach is illustrated in Fig. 2(d).

As it can be seen, the three approaches are completely equivalent since almost no difference is observable between the traces in Fig. 3. The anti-plane source (a line force perpendicular to the 2-D plane considered here) is represented by a star at (0.5,1) km and traces correspond to the displacements measured at the three

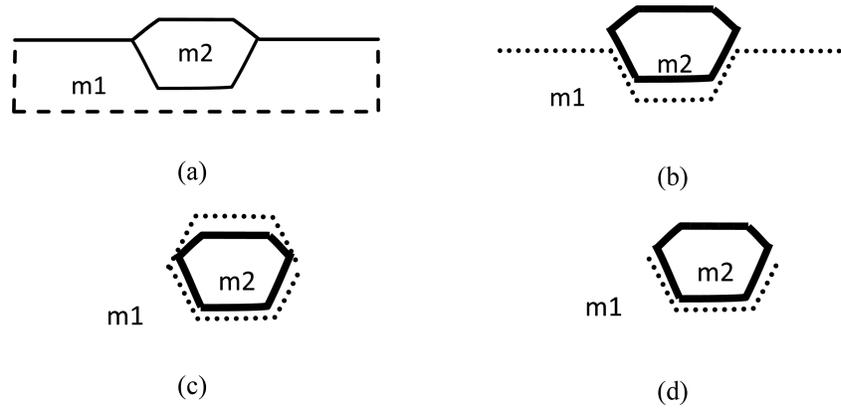


Figure 2. (a) Geometry considered for the validation of the DWN-IBEM in the 2-D *SH* case. It consists of a medium m_2 half buried in a half-space m_1 . Boundaries considered in the case of (b) the Multi-IBEM, (c) the Multi-IBEM with image sources and (d) with DWN-IBEM. The Green's functions used for the fictitious sources located along the boundary of the half-space in cases (a) and (b) are the one of the full-space. For case (c), the Green's functions correspond to the case of a half-space.

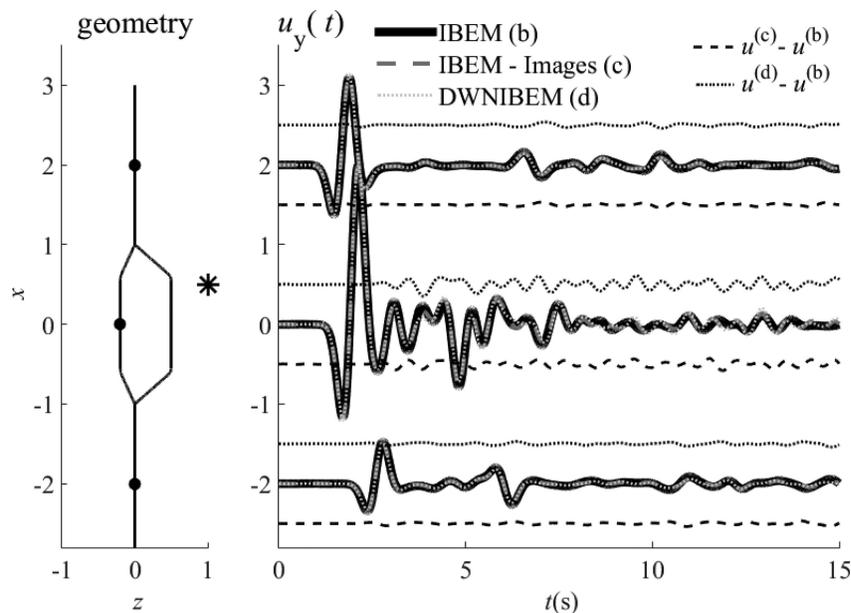


Figure 3. Left: geometry considered and positions of the anti-plane source (star) and of the receivers (points). Right: displacement signals for the three approaches described in Figs 2(b)–(d) and for the three receivers. The origins of the signals are positioned in front of the receiver positions along the x direction. The ordinate corresponds to the position and not to the amplitude. Amplitudes have been modified to allow a better visualization but relative amplitude is maintained. The differences of the displacement signals, considering IBEM curves as references, are presented as well on both sides of the displacement signals to emphasize the discrepancies.

receivers on the free surface at $x = \{-2, 0, 2\}$ km. The source is not vertically aligned with the centre of the inclusion in order to better explore the diffraction effects. The shear wave velocities of the media m_1 and m_2 are respectively $\beta_1 = 1 \text{ km s}^{-1}$ and $\beta_2 = 0.5 \text{ km s}^{-1}$. Here and in all the following examples, the mass densities are all the same, $\rho = 1 \text{ T m}^{-3}$. The inclusion is 0.2 km high above the free surface and 0.5 km deep. It is 2 km large, with bases of 1.2 km large. The displacements are convolved with a Ricker wavelet $R(t) = (1 - \omega_p^2 t^2/2) e^{(-\omega_p^2 t^2/4)}$ with $\omega_p = \pi$ (this value is considered for all the following examples except when different value is mentioned).

This geometrical configuration allowed a validation of DWN-IBEM with two other approaches but does not show a great interest since a faster approach using image method is available. In fact it was rather used as an intermediate step for the program development since the system $[A] [\varphi] = [B]$ obtained with the image approach

has to be numerically close to the one obtained with the DWN approach. Results for a layered medium with the same previous buried inclusion are now presented (Fig. 4). The shear wave velocity of the inclusion is $\beta = 1 \text{ km s}^{-1}$. The layered medium is composed of two layers ($\beta = 2 \text{ km s}^{-1}$, $h = 1 \text{ km}$, $\beta = 3 \text{ km s}^{-1}$, $h = 1.5 \text{ km}$) on top of a half-space ($\beta = 4 \text{ km s}^{-1}$). The anti-plane source is positioned at (0.5, 2) km and traces correspond to the displacements measured at the receivers located on the free surface from $x = -2.5 \text{ km}$ to $x = 2.5 \text{ km}$, separated by a step of $\Delta x = 0.2 \text{ km}$. Six points per smallest wavelength have been considered for IBEM discretization. The positive spectra were calculated using 101 points and for a maximum frequency of 3 Hz. Here also, the agreement between the signals obtained by the two methods is excellent.

Results for same geometry but for the in-plane displacement case (*P-SV*) are now presented in Fig. 5. The longitudinal wave velocities

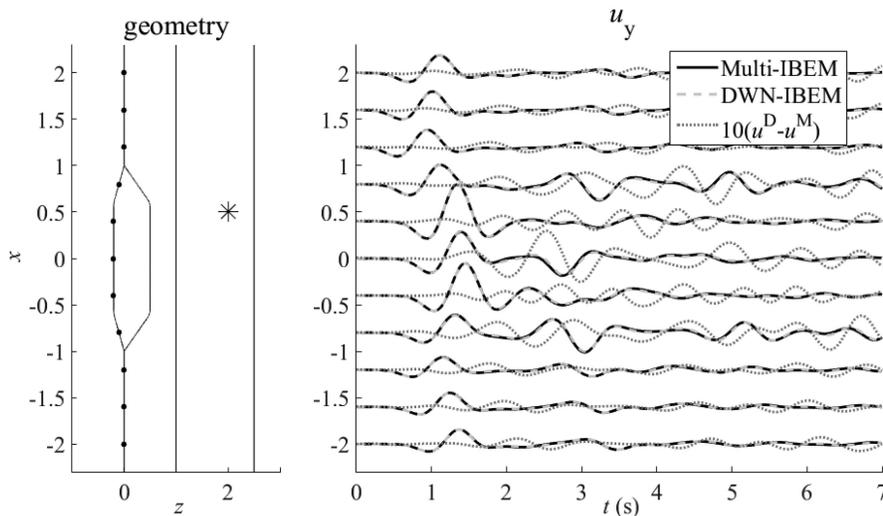


Figure 4. Left: geometry considered and positions of the antiplane source (star) and of the receivers (points). Right: displacement signals for the two approaches and for all the receivers. The origins of the signals are positioned in front of the receiver positions along the x direction. The ordinate corresponds to the position and not to the amplitude. Amplitudes have been modified to allow a better visualization but relative amplitude is maintained. The signals' differences, magnified ten times, are presented as well to emphasize the discrepancies. u^D (resp. u^M) stands for the displacement signals obtained from DWN-IBEM (resp. Multi-IBEM) method.

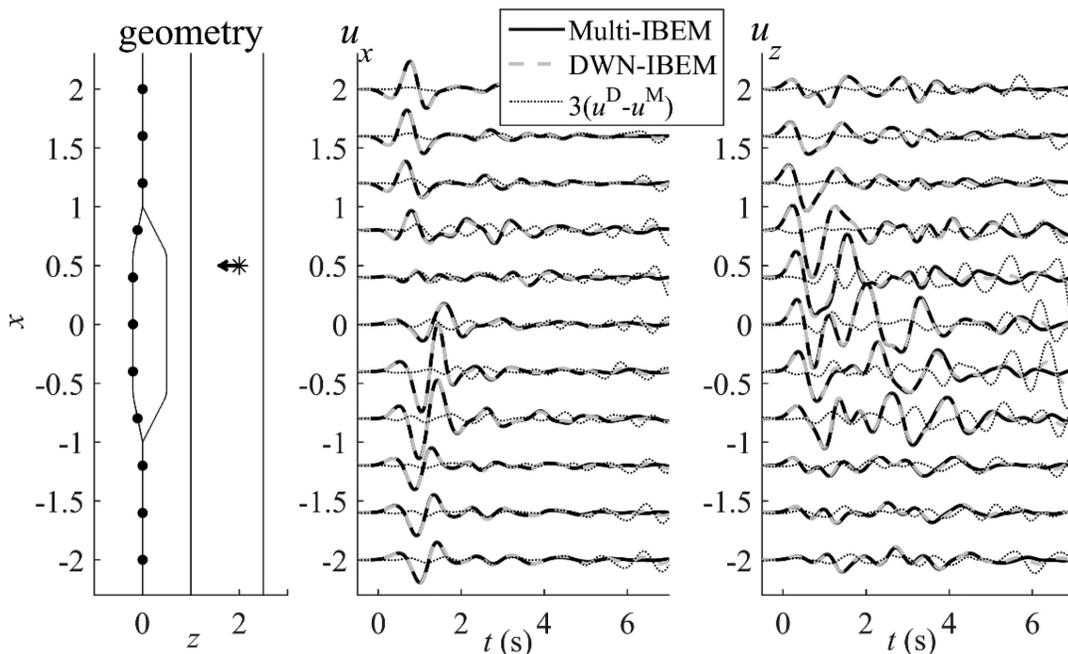


Figure 5. Left: geometry considered and positions of the source (a vertical point force represented by a star and an arrow) and of the receivers (points). Right: displacement signals for the two approaches and for all the receivers. The origins of the signals are positioned in front of the receiver positions along the x direction. The ordinate corresponds to the position and not to the amplitude. Amplitudes have been modified to allow a better visualization but relative amplitude is maintained in both components. The signals' differences, magnified three times, are presented as well to emphasize the discrepancies. u^D (resp. u^M) stands for the displacement signals obtained from DWN-IBEM (resp. Multi-IBEM) method.

are the double of the shear wave velocities. The source is a point force oriented vertically (parallel to z axis) towards the surface. Here also, the agreement between the signals obtained by the two methods is very good.

Results for the 3-D case are finally presented in Figs 6 and 7. In the first example, we present results for a spherical cavity in a half-space. The heterogeneity is empty (a cavity) in order to increase impedance contrast and then the diffraction effect with a low computational cost (there is no fictitious sources inside the cavity). Also, source and receiver are positioned on each side of the cavity

in order to avoid the predominance in the signal of the direct arrivals regarding to the diffracted waves. This configuration allows exploring the worst case, for which the method has to show its capability to simulate accurately the diffraction on irregular volume. The source is a vertical point force located at (0.25, 0, 0.5) km and oriented toward the surface. The receiver is located at (0.15, 0, 2) km. This choice of positions allows observing surface and body waves with similar amplitudes. Because of the axi-symmetry, the displacement component u_y is null. The P - and S -wave velocities for the half-space are respectively $\alpha = 4 \text{ km s}^{-1}$, $\beta = 2 \text{ km s}^{-1}$.

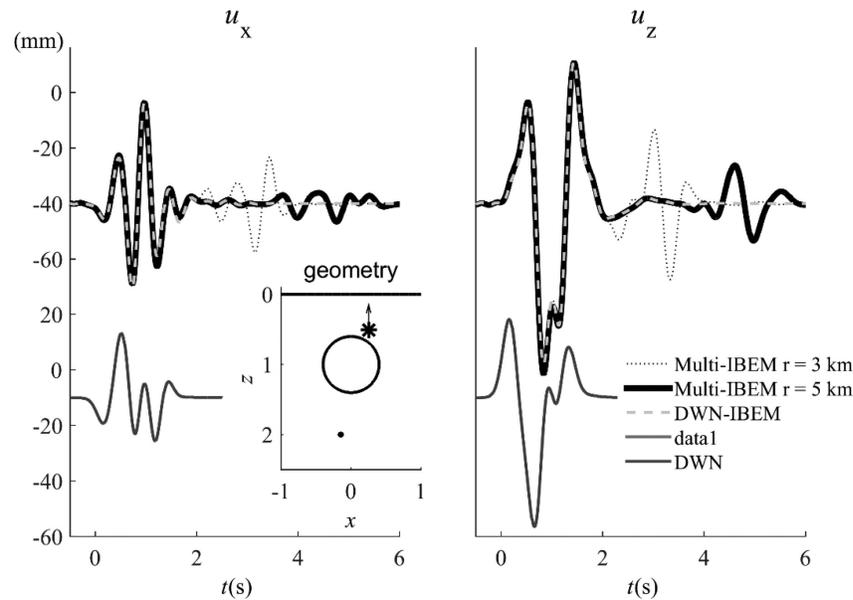


Figure 6. Signals for the two non-null displacement components u_x and u_z obtained using Multi-IBEM and DWN-IBEM. Two simulations have been realized for Multi-IBEM, one in which it was considered a half-space truncated after a radius of 3 km (Multi-IBEM) and the other after 5 km (Multi-IBEM2). This allows demonstrating that the pulse appearing after 2 s is due to reflection at the end of the half-space discretization. Additionally, signals considering only the half-space have been added to the figure to highlight the diffraction effect. Their amplitude origins have been moved to -35 mm. A section of the 3-D axisymmetric geometry appears in the middle of the figure. Star with the arrow is for the source and the point represents the receiver. The source is a point vector force oriented vertically towards free surface.

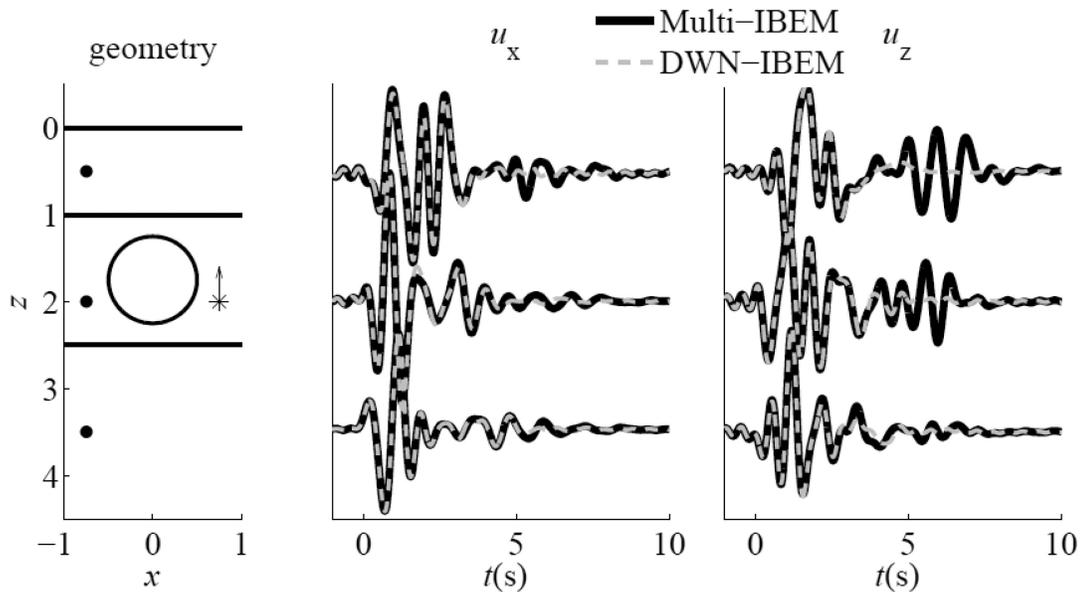


Figure 7. Left: section of the 3-D axisymmetric geometry considered. Star with the arrow is for the source and the point represents the receiver. The point force vector is oriented vertically towards free surface. Right: signals for the two no-null displacement components u_x and u_z obtained using Multi-IBEM and DWN-IBEM. The ordinate corresponds to the position and not to the amplitude. Amplitudes have been modified to allow a better visualization but relative amplitude is maintained in both components.

Two simulations have been performed for Multi-IBEM approach, one where it was considered a half-space truncated after a distance of 3 km from the axis of symmetry and the other after 5 km. Before 2 s, the signals are in perfect agreement with the signal obtained by DWN-IBEM. Additionally signals considering only the half-space have been added in the figure to show the effect of the diffraction due to the presence of the cavity. The spectra have been calculated until 4 Hz to better demonstrate this effect. A Ricker wavelet with $\omega_p = 4\pi/3$ has been considered here. The discrepancy of the two Multi-IBEM signals after 2 s is due to the reflection of the surface

waves on the edge of the half-space discretization. In fact, since the horizontal positions of the receiver and of the source are close from the centre of the discretized surface, the high amplitudes of the reflected waves are mainly due to their retro-focusing. These spurious reflections are a true problem in 3-D for Multi-IBEM. Computational times are reported in Table 1. It takes 10 times the CPU time for increasing the radius of the half-space discretization by a factor less than two and memory becomes a limitation for a personal computer. On the contrary, the DWN-IBEM shows a noticeable advantage when considering an unbounded

Table 1. Computational time for the several simulations.

	SH case		P-SV case	3-D case	
	Fig. 3 case	Fig. 4 case		Fig. 6	Fig. 7
Multi-IBEM	12 s	2 min, 01 s	6 min, 26 s	(1) 10 min (2) 1 h, 43 min	2 h, 21 min
DWN-IBEM	55 s	1 min, 20 s	4 min, 37 s	(3) 1 min	7 min

half-space (with appropriate choice of ω_I and Δk_x) regarding its accuracy, and its requirement of memory and CPU time.

The DWN-IBEM is still more interesting when considering several layers, as in the example of Fig. 7. The P and S wave velocities of the layered medium are respectively $\alpha = 4 \text{ km s}^{-1}$, $\beta = 2 \text{ km s}^{-1}$ for the half-space, $\alpha = 3 \text{ km s}^{-1}$, $\beta = 1.5 \text{ km s}^{-1}$ for the intermediate layer and $\alpha = 2 \text{ km s}^{-1}$, $\beta = 1 \text{ km s}^{-1}$ for the top layer. The source is a vertical point force located at (0.75, 0, 2) km and oriented toward the surface and the receivers are located at $x = 0.75 \text{ km}$, $y = 0 \text{ km}$, and $z = \{0.5, 2, 3.5\} \text{ km}$. Here also the spherical heterogeneity is void. Because of memory limitation for the Multi-IBEM, the highest frequency was reduced to 2 Hz but the radius of the void is slightly larger than previously to maintain diffraction effect. Contrary to all the previous simulations, high attenuation is considered for all the layers ($Q = 20$). It allows diminishing the effect of the spurious surface wave reflections in the Multi-IBEM simulation with a short radius of 3 km for the layers. In fact, considering a larger radius of 5 km, as previously, was even not possible for memory reason. The agreement is still perfect before the arrival of the spurious reflected surface waves which begins at 4 s. In depth, where surface wave amplitudes are reduced, the spurious reflections are negligible and the agreement is almost perfect for all the duration. The CPU times comparison (see Table 1) and the memory requirement shows that, in the case of several layers, the Multi-IBEM approach is not satisfactory and that the DWN-IBEM approach has a great potential. Also DWN Green's functions are calculated using the 3-D axisymmetric hypothesis. There are two decoupled matrices corresponding to the SH and P-SV case in 2-D (see appendix in Sánchez-Sesma *et al.* 2011). The computation is then similar to 2-D configuration and the efficiency of DWN-IBEM in 3-D is even more interesting than for 2-D configuration.

In our previous paper, we only presented a validation for the 2-D SH case. Although the implementation is similar in 2-D P-SV case and for 3-D, examples of validation for these cases have not been presented. Here, since the boundaries considered between the two methods Multi-IBEM and DWN-IBEM are very different from each other and that the comparisons between the signals are in so good agreement, the new as the previous implementations are validated for 2-D and 3-D. Additionally, we have internally validated the Multi-IBEM against DWN for multi-layer media.

As an application of the DWN-IBEM, the last geometrical configuration used for validation in 3-D has been also used to validate our programs for tomography. In that case, a regular mesh of coinciding sources and receivers located on the free surface had been considered. The high number of sources makes our approach of inverting a single time the matrix $[\mathbf{A}]$ consistent. Also the high number of sources and receivers having the same depth (in that case $z = 0$) make the optimization steps 2 and 3 of the previously section fully justified. Finally this application allowed also verifying that the presence of sources on the boundaries was correctly taken into account and does not cause numerical instabilities.

DISCUSSION ON THE EFFICIENCY OF THE TWO APPROACHES

On one side, Multi-IBEM requires the discretization of all the boundaries but uses analytical Green's function $G_{ij}^{FS}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, calculated quickly as a sum of few terms that involve cylindrical or spherical Bessel functions. On the other side, the DWN-IBEM reduces the length of the boundaries to be discretized. The matrix $[\mathbf{A}]$ and the source vector $[\mathbf{B}]$ are smaller. The linear system $[\mathbf{A}][\boldsymbol{\varphi}] = [\mathbf{B}]$ is then solved more rapidly. However, the computation of $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, and of the final solution by using eqs (1), (4) and (5) involves the computation of the Green's function for layered medium $G_{ij}^{LM}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ that is computationally more expensive than for $G_{ij}^{FS}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. It requires an integral (eq. 7), numerically approximated by a sum over n_k discrete values of k_x , and for each of these values, a linear system $[\mathbf{D}][\mathbf{S}] = [\mathbf{F}]$, with a size proportional to the number n of layers, has to be computed and inverted. Hopefully, the matrices $[\mathbf{D}]$ are sparse and present the same null components at every k_x . Same row reduction in the Gaussian elimination can then be applied and a vectorized resolution help improving the efficiency. The fast construction of a large matrix $[\mathbf{A}]$ and its significant inversion has then to be compared to a laborious establishment of a small matrix $[\mathbf{A}]$ and its rapid inversion.

Since the size of matrix $[\mathbf{A}]$ depends on the frequency, of the geometry and of the velocities of the problem, it is not straightforward to indicate which of the two methods is more appropriate for the entire spectrum calculation. However at a given frequency, some considerations can be advanced.

For Multi-IBEM and for N_1 points along the contours, the computational complexity is dominated by the system resolution when using Gaussian elimination and by considering the worst case of a full matrix: $O(N_1^3)$. In fact, it is generally sparse when there are several media (Pertón & Sánchez-Sesma 2015).

For DWN-IBEM, let N_2 be the number of points along the contours, with $N_2 \ll N_1$, and let consider the worst case where all the N_2 points belong to the layered medium (e.g. a single cavity crossing a layered medium). The whole computational complexity depends on two main operations: the construction of $[\mathbf{A}]$ and its inversion. The construction of $[\mathbf{A}]$ requires the computation of the Green's functions $G_{ij}^{LM}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. For that purpose, the matrix $[\mathbf{D}]$ is inverted a single time for every n_k horizontal component, regardless of the number of fictitious sources. The computational cost is $O(n^3 n_k)$. Then, the N_2^2 elements of the matrix $[\mathbf{A}]$ result from sums over n_k values. These values involve the calculation of the amplitude \mathbf{S} only in the layer where are located the collocation points (see eq. 7), so that few term of the product: $[\mathbf{S}] = [\mathbf{D}]^{-1}[\mathbf{F}]$ are required. This last product is thus without significance. The complexity is $O(n_k N_2^2)$. Lastly the cost for the inversion of $[\mathbf{A}]$ is $O(N_2^3)$. At the end, since the operations are independent from each other, the complexity for the DWN-IBEM is $O(n^3 n_k) + O(n_k N_2^2) + O(N_2^3)$. Obviously, this is a rough approximation that considers the worst case without any contemplation of the optimization previously discussed. The number of layers is generally insignificant comparing to the number of points along the contours: $n \ll N_2$ so that the complexity of DWN-IBEM

reduced to $O(n_k N_2^2) + O(N_2^3)$. Finally, at a given frequency, and since $N_2 \ll N_1$, the comparison between the complexities $O(n_k N_2^2)$ for DWN-IBEM and $O(N_1^3)$ for Multi-IBEM indicates the efficient method. It appears that the DWN-IBEM is mainly advantageous to uncouple the problems when a large number of points in the contours discretization are required: $N_2 > n_k$. This is then clearly the case in 3-D. These simple considerations also give all the sense to the fifth optimization step. Since Multi-IBEM may be more interesting for low frequencies than DWN-IBEM, the two methods can even be used sequentially according to the frequency.

CPU time obtained for the various validations previously shown are now presented in Table 1 in order to give a better idea of the efficiency of the two approaches. The program is written in Matlab and it is vectorized and parallelized. This required a huge amount of memory but operations are realized much faster. The use of memory being so different in Matlab compared to other compiled programs, we preferred not to speak about memory complexity. Simulations in 2-D for *SH* case were run on a simple computer and other simulations were run on a cluster with 12 CPU. When considering CPU times for various number of layers, the Multi-IBEM results more interesting when the number of layers (including the half-space) is smaller than two in 2-D. In 3-D, the wave reflections on the discretization edges make the Multi-IBEM not fully reliable.

CONCLUSIONS

In our previous paper, we presented an implementation of IBEM for simulating wave propagation in several homogeneous regions. This implementation had been enriched here by allowing the presence of flat multilayer media. Contrary to the other geometries where the fictitious sources emitted in a full-space, the wave propagation is here simulated taking into account the entire layered media by using appropriate Green's functions that result from the DWN method. The resulting DWN-IBEM implementation uses then a mix of Green's functions. The advantage is a significant reduction of the length of the boundaries. The drawback is an increase of time in the computation of the DWN Green's functions. In order to make the method efficient, several optimization steps have been implemented and commented. Validation of the DWN-IBEM has been conducted in 2-D for *SH* and *P-SV* cases and in 3-D against the previous implementation of Multi-IBEM. These validations had also been used to compare the efficiency of both methods. In this paper, the validations have been conducted on very simple geometries. Application to realistic examples will be presented elsewhere.

ACKNOWLEDGEMENTS

Thanks are given to the Area de Sistemas Unix/Linux and to G. Sánchez and her team of the Unidad de Servicios de Información (USI) of the Institute of Engineering – Universidad Nacional Autónoma de Mexico (UNAM) for locating useful references. This study has been partially supported by AXA Research Fund and by Dirección General de Asuntos del Personal Académico (DGAPA) – UNAM under Project IN104712.

REFERENCES

Aki, K. & Larner, K.L., 1970. Surface motion of a layered medium having an irregular interface due to incident plane *SH* waves, *J. geophys. Res.*, **75**(5), 933–954.

- Aki, K. & Richards, P., 2002. *Quantitative Seismology*, University Science Books.
- Bouchon, M., 1985. A simple, complete numerical solution to the problem of diffraction of *SH* waves by an irregular surface, *J. acoust. Soc. Am.*, **77**(1), 1–5.
- Bouchon, M., 1996. The discrete wave number formulation of boundary integral equations and boundary element methods: a review with applications to the simulation of seismic wave propagation in complex geological structures, *Pure appl. Geophys.*, **148**(1–2), 3–20.
- Bouchon, M., 2003. A review of the discrete wavenumber method, *Pure appl. Geophys.*, **160**(3–4), 445–465.
- Bouchon, M., Campillo, M. & Gaffet, S., 1989. A boundary integral equation-discrete wavenumber representation method to study wave propagation in multilayered media having irregular interfaces, *Geophysics*, **54**(9), 1134–1140.
- Campillo, M., 1987. Modeling of *SH*-wave propagation in an irregularly layered medium-application to seismic profiles near a dome, *Geophys. Prospect.*, **35**(3), 236–249.
- Cao, J., Ge, Z.-X., Zhang, J. & Chen, X.-F., 2004. A comparative study on seismic wave methods for multilayered media with irregular interfaces: irregular topography problem, *Chin. J. Geophys.*, **47**(3), 562–571.
- Chaillat, S. & Bonnet, M., 2013. Recent advances on the fast multipole accelerated boundary element method for 3D time-harmonic elastodynamics, *Wave Motion*, **50**(7), 1090–1104.
- Chaillat, S. & Bonnet, M., 2014. A new fast multipole formulation for the elastodynamic half-space Greens tensor, *J. Comput. Phys.*, **258**, 787–808.
- Chen, X., 1990. Seismogram synthesis for multi-layered media with irregular interfaces by global generalized reflection/transmission matrices method. I. Theory of two-dimensional *SH* case, *Bull. seism. Soc. Am.*, **80**(6A), 1696–1724.
- Fu, L.-Y. & Wu, R.-S., 2000. Infinite boundary element absorbing boundary for wave propagation simulations, *Geophysics*, **65**(2), 596–602.
- Fuchs, K. & Müller, G., 1971. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations, *Geophys. J. Int.*, **23**(4), 417–433.
- Fujiwara, H., 2000. The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems, *Geophys. J. Int.*, **140**(1), 198–210.
- Gaffet, S. & Bouchon, M., 1989. Effects of two-dimensional topographies using the discrete wavenumber-boundary integral equation method in *P-SV* case, *J. acoust. Soc. Am.*, **85**(6), 2277–2283.
- García-Jerez, A., Luzón, F., Sánchez-Sesma, F.J., Lunedei, E., Albarello, D., Santoyo, M.A. & Almendros, J., 2013. Diffuse elastic wavefield within a simple crustal model. Some consequences for low and high frequencies, *J. geophys. Res.*, **118**(10), 5577–5595.
- Ge, Z. & Chen, X., 2008. An efficient approach for simulating wave propagation with the boundary element method in multilayered media with irregular interfaces, *Bull. seism. Soc. Am.*, **98**(6), 3007–3016.
- Gil-Zepeda, S.A., Luzón, F., Aguirre, J., Morales, J., Sánchez-Sesma, F.J. & Ortiz-Alemán, C., 2002. 3D seismic response of the deep basement structure of the Granada basin (southern Spain), *Bull. seism. Soc. Am.*, **92**(6), 2163–2176.
- HelMBERGER, D.V., 1968. The crust-mantle transition in the Bering sea, *Bull. seism. Soc. Am.*, **58**(1), 179–214.
- Karabulut, H. & Ferguson, J.F., 2001. An analysis of the indirect boundary element method for seismic modelling, *Geophys. J. Int.*, **147**(1), 68–76.
- Kawase, H., 1988. Time-domain response of a semi-circular canyon for incident *SV*, *P*, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **78**(4), 1415–1437.
- Kennett, B., 1985. *Seismic Wave Propagation in Stratified Media*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge Univ. Press.
- Liu, E., Dobson, A., Pan, D.M. & Yang, D.H., 2008. The matrix formulation of boundary integral modeling of elastic wave propagation in 2D multilayered media with irregular interfaces, *J. Comput. Acoust.*, **16**(03), 381–396.
- Nishimura, N., 2002. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Appl. Mech. Rev.*, **55**(4), 299–324.

- Ortiz-Alemán, C., Sánchez-Sesma, F.J., Rodríguez-Zúñiga, J.L. & Luzón, F., 1998. Computing topographical 3D site effects using a fast IBEM/conjugate gradient approach, *Bull. seism. Soc. Am.*, **88**(2), 393–399.
- Perton, M., 2006. Ultrasounds radiated by a laser point source in transverse isotropic media. Applications to the stiffness tensor measurement of cylinders and thin layers, (Originally in French: ultrasons rayonnés par une source laser ponctuelle dans des milieux isotropes transverses et applications à la mesure du tenseur d'élasticité de cylindres et de couches minces), *PhD thesis*, Université de Bordeaux 1.
- Perton, M. & Sánchez-Sesma, F.J., 2015. The indirect boundary element method to simulate elastic wave propagation in a 2-D piecewise homogeneous domain, *Geophys. J. Int.*, **202**(3), 1760–1769.
- Perton, M. & Sánchez-Sesma, F.J. 2016. Fast Green's function calculation from equipartition theorem, *J. acoust. Soc. Am.*, in press.
- Pointer, T., Liu, E. & Hudson, J.A., 1998. Numerical modeling of seismic waves scattered by hydrofractures: application of the indirect boundary element method, *Geophys. J. Int.*, **135**(1), 289–303.
- Qian, Z.-H. & Yamanaka, H., 2012. An efficient approach for simulating seismoacoustic scattering due to an irregular fluid-solid interface in multilayered media, *Geophys. J. Int.*, **189**(1), 524–540.
- Rodríguez-Castellanos, A., Sánchez-Sesma, F., Ortiz-Alemán, C. & del Castillo, M.O., 2011. Least square approach to simulate wave propagation in irregular profiles using the indirect boundary element method, *Soil Dyn. Earthq. Eng.*, **31**(3), 385–390.
- Sánchez-Sesma, F.J. & Campillo, M., 1991. Diffraction of *P*, *SV*, and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation, *Bull. seism. Soc. Am.*, **81**(6), 2234–2253.
- Sánchez-Sesma, F.J. & Luzón, F., 1995. Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident *P*, *S*, and Rayleigh waves, *Bull. seism. Soc. Am.*, **85**(1), 269–284.
- Sánchez-Sesma, F.J., Campillo, M. & Irikura, K., 1989. A note on the Rayleigh hypothesis and the Aki-Larner method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **79**(6), 1995–1999.
- Sánchez-Sesma, F.J. *et al.*, 2011. A theory for microtremor H/V spectral ratio: application for a layered medium, *Geophys. J. Int.*, **186**(1), 221–225.
- Yokoi, T. & Takenaka, H., 1995. Treatment of an infinitely extended free surface for indirect formulation of the boundary element method, *J. Phys. Earth*, **43**(1), 79–103.
- Yu, G. & Fu, L., 2011. Iterative convergence of boundary-volume integral equation method, *Earthq. Sci.*, **24**(5), 391–400.
- Zhou, H. & Chen, X., 2006. A new approach to simulate scattering of *SH* waves by an irregular topography, *Geophys. J. Int.*, **164**(2), 449–459.
- Zhou, H., Chen, X. & Chang, Y., 2010. Review on localized boundary integral equation: discrete wavenumber method for 2D irregular layers, *Earthq. Sci.*, **23**(2), 129–137.

Bibliografía

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover Publications.
- Aguilar Pérez, O. S., Mendoza R., L., Tavera G., E. A., Alberto H., Y., & Morelos R., J. (2011). Prueba de carga en un modelo a escala real de un túnel de dovelas con revestimiento secundario. In *2011 Pan-Am CGS Geotechnical Conference*.
- Ai, Z. Y. & Li, Z. X. (2014). Time-harmonic response of transversely isotropic multilayered half-space in a cylindrical coordinate system. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 66, 69–77.
- Ai, Z. Y., Li, Z. X., & Cang, N. R. (2014). Analytical layer-element solution to axisymmetric dynamic response of transversely isotropic multilayered half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 60, 22–30.
- Akhlaghi, T. & Nikkar, A. (2014). Effect of vertically propagating shear waves on seismic behavior of circular tunnels. *The Scientific World Journal*.
- Aki, K. & Larner, K. L. (1970). Surface Motion of a Layered Medium Having an Irregular Interface Due to Incident Plane SH Waves. *Journal of Geophysical Research*, 75(5), 933–954.
- Aki, K. & Richards, P. G. (2002). *Quantitative Seismology*.
- Apsel, R. J. & Luco, J. E. (1983). On the Green's functions for a layered half-space Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(4), 909–929.
- Atak, O., Bergen, B., Huybrechs, D., Pluymers, B., & Desmet, W. (2014). Coupling of Boundary Element and Wave Based Methods for the efficient solution of complex multiple scattering problems. *Journal of Computational Physics*, 258, 165–184.

- Auersch, L. (2007). Simple and Advanced Boundary-Element Methods for. In *EC-COMAS Thematic conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering* (pp. 13–16).
- Auersch, L. (2011). High-speed railway tracks of a surface, bridge and tunnel line and some effects on the train-induced bridge and ground vibrations. In *Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*.
- Auersch, L. (2014). Amplification and reduction phenomena of soil-building interaction by finite-element boundary-element calculations and simplified methods. In *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURO-DYN 2014*, number July (pp. 591–598).
- Auersch, L., Romero, A., & Galvín, P. (2014). Respuesta dinámica de edificaciones producida por campos de ondas incidentes considerando la interacción suelo-estructura. *Revista Internacional de Metodos Numericos para Calculo y Diseno en Ingenieria*, 30(4), 256–263.
- Ba, Z. & Yin, X. (2016). Wave scattering of complex local site in a layered half-space by using a multidomain IBEM: incident plane SH waves. *Geophysical Journal International*, 205(3), 1382–1405.
- Bard, P. (1999). Microtremor measurement : a tool for site effect estimation? In K. Sasatami, I. K., K. H., & O. T. (Eds.), *The effects of surface geology on seismic motion* (pp. 1251–1279). Balkema, Róterdam.
- Barros, L. A. (2003). Dynamic axial response of single piles embedded in trasnversely isotropic soils. In *16th ASCE Engineering Mechanics Conference* (pp. 1–6).
- Blom, C. B. M. (2002). *Design philosophy of concrete linings for tunnels in soft soils*. PhD thesis, Delft University of Technology.
- Bouchon, M. (2003). A Review of the Discrete Wavenumber Method. *Pure and Applied Geophysics*, 160(3), 445–465.
- Bouchon, M. & Aki, K. (1977). Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 67(2), 259–277.
- Bouchon, M., Schultz, C. A., & Toksoz, M. N. (1995). A fast implementation of boundary integral equation methods to calculate the propagation of seismic waves

- in laterally varying layered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(6), 1679–1687.
- Bu, F., Lin, J., & Reitich, F. (2014). A fast and high-order method for the three-dimensional elastic wave scattering problem. *Journal of Computational Physics*, 258, 856–870.
- Cao, J., Ge, Z.-X., Zhang, J., & Chen, X.-F. (2004). A comparative study on seismic wave methods for multi-layered media with irregular interfaces: irregular topography problem. *Chinese Journal of Geophysics*, 47(3), 562–571.
- Chaillat, S. & Bonnet, M. (2013). Recent advances on the fast multipole accelerated boundary element method for 3D time-harmonic elastodynamics. *Wave Motion*, 50(7), 1090–1104.
- Chaillat, S. & Bonnet, M. (2014). A new fast multipole formulation for the elastodynamic half-space Green's tensor. *Journal of Computational Physics*, 258, 787–808.
- Chávez-García, F. J. (2002). Strong Motion in Central Mexico: A Model Based on Data Analysis and Simple Modeling. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(8), 3087–3101.
- Chávez-García, F. J., Domínguez, T., Rodríguez, M., & Pérez, F. (2007). Site effects in a volcanic environment: a comparison between HVSR and array techniques at Colima, Mexico. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 97, 591–604.
- Chávez-García, F. J. & Kang, T.-S. (2014). Lateral heterogeneities and microtremors: Limitations of HVSR and SPAC based studies for site response. *Engineering Geology*, 174, 1–10.
- Chávez-García, F. J., Manakou, M. V., & Raptakis, D. G. (2014). Subsoil structure and site effects: A comparison between results from SPAC and HVSR in sites of complex geology. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 57, 133–142.
- Chávez-García, F. J. & Raptakis, D. G. (2017). Local amplification and subsoil structure at a difficult site: Understanding site effects from different measurements. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 92(October 2016), 334–344.
- Cheng, A. H. D. & Cheng, D. T. (2005). Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3), 268–302.

- Cheng, S. L. & Jahanshahi, A. (1967). On Dynamic Stress Concentration Around a Discontinuity. *Journal of Applied Mechanics*, 34(2), 385.
- Chiu, H.-C. & Huey-Chu, H. (1992). Effects of the canyon topography on ground motions at the Feitsui damsite. *Bull. Seism. Soc. of America*, 82(4), 1646–1660.
- Cornou, C., Bard, P. Y., & Dietrich, M. (2003). Contribution of dense array analysis to the identification and quantification of basin-edge-induced waves, part I: Methodology. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 93(6), 2604–2623.
- Coulier, P., Dijckmans, A., François, S., Degrande, G., & Lombaert, G. (2014a). A spatial windowing technique to account for finite dimensions in 2.5D dynamic soil-structure interaction problems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 59, 51–67.
- Coulier, P., François, S., Lombaert, G., & Degrande, G. (2013). Application of hierarchical matrices to boundary element methods for elastodynamics based on Green's functions for a horizontally layered halfspace. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(12), 1745–1758.
- Coulier, P., François, S., Lombaert, G., & Degrande, G. (2014b). Coupled finite element - hierarchical boundary element methods for dynamic soil-structure interaction in the frequency domain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97, 505–530.
- Coutant, O. (1991). AXITRA.
- Cruz-Atienza, V. M., Tago, J., Sanabria-Gómez, J. D., Chaljub, E., Etienne, V., Virieux, J., & Quintanar, L. (2016). Long Duration of Ground Motion in the Paradigmatic Valley of Mexico. *Scientific Reports*, 6, 38807.
- Dal Moro, G., Keller, L., Al-Arifi, N., & Moustafa, S. (2016). Shear-wave velocity profiling according to three alternative approaches: A comparative case study. *Journal of Applied Geophysics*, 134, 112–124.
- Dravinski, M. & Mossessian, T. K. (1987). SCATTERING OF PLANE HARMONIC P, SV, AND RAYLEIGH WAVES BY DIPPING LAYERS OF ARBITRARY SHAPE. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 77(1), 212–235.
- Dunavant, D. (1985). High Degree Efficient Symmetrical Gaussian quadrature rules for the triangle. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 21(April 1984), 1129–1148.

- Fäh, D., Kind, F., & Giardini, D. (2001). A theoretical investigation of average H/V ratios. *Geophysical Journal International*, 145(2), 535–549.
- François, S., Schevenels, M., Galvín, P., Lombaert, G., & Degrande, G. (2010). A 2.5D coupled FE-BE methodology for the dynamic interaction between longitudinally invariant structures and a layered halfspace. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23-24), 1536–1548.
- Fujiwara, H. (2000). The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems. *Geophysical Journal International*, 140(1), 198–210.
- Garvin, W. (1956). Exact transient solution of the buried line source problem. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 528–541.
- Gil-Zepeda, S. A., Montalvo-Arrieta, J. C., Vai, R., & Sánchez-Sesma, F. J. (2003). A hybrid indirect boundary element - discrete wave number method applied to simulate the seismic response of stratified alluvial valleys. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 23(1), 77–86.
- Graw, J. H., Hansen, S. E., Langston, C. A., Young, B. A., Mostafanejad, A., & Park, Y. (2017). An Assessment of Crustal and Upper-Mantle Velocity Structure by Removing the Effect of an Ice Layer on the P -Wave Response: An Application to Antarctic Seismic Studies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 107(2), 639–651.
- Hashash, Y. M. A., Hook, J. J., Schmidt, B., & I-Chiang Yao, J. (2001). Seismic design and analysis of underground structures. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 16(4), 247–293.
- Hashash, Y. M. A., Tseng, W., & Kromotat, A. (1998). Seismic soil-structure interaction analysis for immersed tube tunnels retrofit. *Geotechnical Earthquake Engineering Soil Mechanics III 2, ASCE Geotechnical Special Publication*, 1(75), 1380–91.
- Haskell, N. (1951). The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, (pp. 17–34).
- Hatzigeorgiou, G. D. & Beskos, D. E. (2010). Soil-structure interaction effects on seismic inelastic analysis of 3-D tunnels. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30(9), 851–861.

- Hisada, Y. (1994). An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(5), 1456–1472.
- Hisada, Y. (1995). An efficient method for computing Green's functions for a layered half-space with sources and receivers at close depths (part 2). *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85(4), 1080–1093.
- Horike, M. (1996). Geophysical exploration using microtremor measurements. In *11th World Conf. Earthq. Eng.*
- II, K. H. S., Wright, S. G., Bay, J. A., & Roesset, J. M. (1994). Characterization of geotechnical sites by SASW method. *Geophysical characterization of sites*, (pp. 15–25).
- Iturrarán-Viveros, U., Sánchez-Sesma, F. J., & Kausel, E. (2013). Garvin's generalized problem revisited. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 47, 4–15.
- Kamalian, M., Jafari, M. K., Sohrabi-bidar, A., Razmkhah, A., & Gatmiri, B. (2006). Time-domain two-dimensional site response analysis of non-homogeneous topographic structures by a hybrid BE/FE method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26(8), 753–765.
- Katebi, H., Rezaei, A., Hajjalilue-Bonab, M., & Tarifard, A. (2015). Assessment the influence of ground stratification, tunnel and surface buildings specifications on shield tunnel lining loads (by FEM). *Tunnelling and Underground Space Technology*, 49, 67–78.
- Kausel, E. (1999). Dynamic point sources in laminated media via the thin-layer method. *International Journal of Solids and Structures*, 36, 4725–4742.
- Kausel, E. (2006). *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kawase, H. (1988). Time-domain response of a semi-circular canyon for incident SV, P, and Rayleigh waves calculated by the discrete wavenumber boundary element method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78(4), 1415–1437.
- Kawase, H. (1996). The Cause of the Damage Belt in Kobe: "The Basin-Edge Effect, Constructive Interference of the Direct S-Wave with the Basin-Induced Diffracted/Rayleigh Waves. *Seismological Research Letters*, 67(5), 25–34.

- Kawase, H. & Aki, K. (1989). A study on the response of a soft basin for incident S, P, and Rayleigh waves with special reference to the long duration observed in Mexico City. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 79(5), 1361–1382.
- Kawase, H., Matsushima, S., Nagashima, F., Baoyintu, & Nakano, K. (2017). The cause of heavy damage concentration in downtown Mashiki inferred from observed data and field survey of the 2016 Kumamoto earthquake. *Earth, Planets and Space*, 69(1), 3.
- Ke, G., Dong, H., Kristensen, A., & Thompson, M. (2011). Modified Thomson-Haskell matrix methods for surface-wave dispersion-curve calculation and their accelerated root-searching schemes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 101(4), 1692–1703.
- Kennett, B. L. N. & Kerry, N. J. (1979). Seismic waves in a stratified half space. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 57(3), 557–583.
- Knopoff, L. (1964). A Matrix Method for Elastic Wave Problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(1), 431–438.
- Konagai, K., Johansson, J., Zafeirakos, A., Numada, M., & Sadr, A. (2005). Damage to Tunnels in the October 23, 2004 Chuetsu Earthquake. *Journal of Earthquake Engineering*, 28, 1–8.
- Konno, K. & Ohmachi, T. (1998). Ground-motion characteristics estimated from spectral ratio between horizontal and vertical components of microtremor. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(1), 228–241.
- Kouretzis, G. P., Andrianopoulos, K. I., Sloan, S. W., & Carter, J. P. (2014). Analysis of circular tunnels due to seismic P-wave propagation, with emphasis on unreinforced concrete liners. *Computers and Geotechnics*, 55, 187–194.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical earthquake engineering*. Prentice-Hall INC.
- Langston, C. A. (2011). Wave-field continuation and decomposition for passive seismic imaging under deep unconsolidated sediments. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 101(5), 2176–2190.
- Lermo, J. & Chávez-García, F. J. (1994). Are Microtremors Useful in Site Response Evaluation? *Bulletin of the Seismological Society of America*, 84(5), 1350–1364.

- Li, G., Chen, H., Niu, F., Guo, Z., Yang, Y., & Xie, J. (2016). Measurement of Rayleigh wave ellipticity and its application to the joint inversion of high-resolution S wave velocity structure beneath northeast China. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 121(2), 864–880.
- Liu, T. (2010). Efficient reformulation of the thomson-haskell method for computation of surface waves in layered half-space. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 100(5 A), 2310–2316.
- Liu, Z., Liang, J., Huang, Y., & Liu, L. (2016). IBIEM modelling of the amplification of seismic waves by a three-dimensional layered alluvial basin. *Geophysical Journal International*, 204(2), 999–1023.
- Luco, J. E. & Apsel, R. J. (1983). On the Green's functions for a layered half-space Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(4), 909–929.
- Luttikholt, A. (2007). *Ultimate limit state analysis of a segmented tunnel lining: Results of full-scale tests compared to finite element analysis*. Technical report, Delft University of Technology, Delft.
- Luzón, F., Palencia, V., Morales, J., Sánchez-Sesma, F. J., & García, J. (2002). Física de la Tierra 2002, 14, 85-108. *Física de la Tierra*, 14, 183–214.
- Malischewsky, P. G., Zaslavsky, Y., Gorstein, M., Pinsky, V., Tran, T. T., Scherbaum, F., & Flores Estrella, H. (2010). Some new theoretical considerations about the ellipticity of Rayleigh waves in the light of site-effect studies in Israel and Mexico. *Geofísica Internacional*, 49(3), 141–152.
- Manolis, G. D. & Dineva, P. S. (2015). Elastic waves in continuous and discontinuous geological media by boundary integral equation methods: A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 70, 11–29.
- Margerin, L. (2009). Generalized eigenfunctions of layered elastic media and application to diffuse fields. *J. acoust. Soc. Am.*, 125(1), 164–174.
- Mateos, J. L., Flores, J., Novaro, O., Seligman, T. H., & Alvarez-Tostado, J. A. (1993). Resonant response models for the Valley of Mexico-II. The trapping of horizontal P waves. *Geophysical Journal International*, 113(2), 449–462.
- Matsushima, S., Hirokawa, T., Kawase, H., & Sánchez-Sesma, F. J. (2011). THE EFFECT OF LATERAL HETEROGENEITY ON H / V SPECTRAL RATIO OF

- MICROTREMORS CONFIRMED FROM OBSERVATION AND SYNTHETICS. In *4th IASPEI / IAEE International Symposium: Effects of Surface Geology on Seismic Motion* (pp. 1–10). Santa Barbara: University of California Santa Barbara.
- Meza-Fajardo, K. C., Semblat, J.-F., Chaillat, S., & Lenti, L. (2016). Seismic-Wave Amplification in 3D Alluvial Basins : 3D / 1D Amplification Ratios from Fast Multipole BEM Simulations. *Bull. Seism. Soc. of America*, 106(3), 1267–1281.
- Moore, I. & Guan, F. (1996). Three-Dimensional Dynamic Response of Lined. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 25, 357–369.
- Mow, C.-C. & Pao, Y.-H. (1971). *Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Technical Report R-482-PR, RAND Corporation, Santa Monica, CA.
- Nakamura, Y. (1989). A method for dynamic characteristics estimation of subsurface using microtremor on the ground surface. *Quarterly Report of the Railway Technical Research Institute*, 30, 25–33.
- Nogoshi, M. & Igarashi, T. (1971). On the Amplitude Characteristics of Microtremor (Part 2). *Jour. Seism. Soc. Japan*, 24(Part 2), 26–40.
- Ortiz-Alemán, C., Sánchez-Sesma, F. J., Rodríguez-Zúñiga, J. L., & Luzón, F. (1998). Computing topographical 3D site effects using a fast IBEM / conjugate gradient approach. *Bull. Seism. Soc. of America*, 88(2), 393–399.
- Pak, R. Y. S. & Guzina, B. B. (2002). Three-Dimensional Green's Functions for a Multilayered Half-Space in Displacement Potentials. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(April), 449–461.
- Pao, Y.-H. & Mow, C.-C. (1973). *The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*. New York: Crane-Russak.
- Pérez-Ruiz, J. A., Luzón, F., & Sánchez-Sesma, F. J. (2008). Retrieval of elastic green's tensor near a cylindrical inhomogeneity from vector correlations. *Communications in Computational Physics*, 3(1), 250–270.
- Perton, M., Contreras-Zazueta, M. A., & Sánchez-Sesma, F. J. (2016). Indirect boundary element method to simulate elastic wave propagation in piecewise irregular and flat regions. *Geophysical Journal International*, 205(3), 1832–1842.

- Perton, M. & Sánchez-Sesma, F. J. (2015). The indirect boundary element method to simulate elastic wave propagation in a 2-D piecewise homogeneous domain. *Geophysical Journal International*, 202(3), 1760–1769.
- Reinoso, E. (2007). Riesgo Sísmico en la Ciudad de México.
- Reinoso, E. & Ordaz, M. (1999). Spectral ratios for Mexico City from free-field recordings. *Earthquake Spectra*, 15(2), 273–295.
- Reinoso, E., Wrobel, L. C., & Power, H. (1997). Three-dimensional scattering of seismic waves from topographical structures. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 16(1), 41–61.
- Rodríguez-Castellanos, A., Sánchez-Sesma, F. J., Ortiz-Alemán, C., & Orozco-del Castillo, M. (2011). Least square approach to simulate wave propagation in irregular profiles using the indirect boundary element method. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31(3), 385–390.
- Sánchez-Merino, A. L., Fernández-Sáez, J., & Navarro, C. (2009). Simplified longitudinal seismic response of tunnels linings subjected to surface waves. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 29(3), 579–582.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1983). Diffraction of Elastic Waves by Three-Dimensional Surface Irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(6), 1621–1636.
- Sánchez-Sesma, F. J. (1989). A Note on the Rayleigh Hypothesis and the Aki-Larner Method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 79(6), 1995–1999.
- Sánchez-Sesma, F. J., Bravo, M. A., & Herrera, I. (1985). Surface motion of topographical irregularities of incident P, SV, and Rayleigh waves. *Bull. Seism. Soc. of America*, 75, 263–269.
- Sánchez-Sesma, F. J. & Campillo, M. (1991). Diffraction of P, SV, and Rayleigh waves by topographic features: A boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6), 2234–2253.
- Sánchez-Sesma, F. J. & Luzón, F. (1995). Seismic response of alluvial valleys for incident P, SV and Rayleigh waves. *Bull. Seism. Soc. of America*, 85(1), 269–284.
- Sánchez-Sesma, F. J. & Luzón, F. (1996). Can horizontal P waves be trapped and resonate in a shallow sedimentary basin? *Geophysical Journal International*, 124(1), 209–214.

- Sánchez-Sesma, F. J., Rodríguez, M., Iturrarán-Viveros, U., Luzón, F., Campillo, M., Ludovic, M., García-Jerez, A., Suarez, M., Santoyo, M. A., & Rodríguez-Castellanos, A. (2011a). A theory for microtremor H / V spectral ratio : application for a layered medium. *Geophysical Journal International*, 186, 221–225.
- Sánchez-Sesma, F. J., Weaver, R. L., Kawase, H., Matsushima, S., Luzón, F., & Campillo, M. (2011b). Energy Partitions among Elastic Waves for Dynamic Surface Loads in a Semi-Infinite Solid. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 101(4), 1704–1709.
- Shapiro, N. M., Singh, S. K., Almora, D., & Ayala, M. (2001). Evidence of the dominance of higher-mode surface waves in the lake-bed zone of the Valley of Mexico. *Geophysical Journal International*, 147(3), 517–527.
- Stamos, A. & Beskos, D. E. (1996). 3-D seismic response analysis of long lined tunnels in half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 15(2), 111–118.
- Sun, L., Pan, Y., & Gu, W. (2013). High-order thin layer method for viscoelastic wave propagation in stratified media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 257, 65–76.
- Takenaka, H., Ohori, M., Koketsu, K., & Kennett, B. L. N. (1996). An efficient approach to the seismogram synthesis for a basin structure using propagation invariants. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 86(2), 379–388.
- Tamez González, E., Rangel Núñez, J. L., & Holguín, E. (1997). *Diseño Geotécnico de Túneles*. Mexico, D.F.: TGC Geotecnia S.A. de C.V.
- Thomson, W. T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, 21, 89–93.
- Tokimatsu, K. (1997). Geotechnical site characterization using surface waves. In K. Ishihara (Ed.), *Proc. of the 1st International Conference Earthquake Geotechnical Engineering* (pp. Vol. 3, 1333–1368).
- Uebayashi, H., Kawabe, H., & Kamae, K. (2012). Reproduction of microseism H/V spectral features using a three-dimensional complex topographical model of the sediment-bedrock interface in the Osaka sedimentary basin. *Geophysical Journal International*, 189(2), 1060–1074.
- Uenishi, K. (2012). Elastodynamic Analysis of Underground Structural Failures Induced by Seismic Body Waves. *Journal of Applied Mechanics*, 79(3), 031014.

- Uenishi, K. & Sakurai, S. (2000). Characteristic of the vertical seismic waves associated with the 1995 Hyogo-ken Nanbu (Kobe), Japan earthquake estimated from the failure of the Daikai Underground Station. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 29(6), 813–821.
- Vai, R., Castillo-Covarrubias, J. M., Sánchez-Sesma, F. J., Komatitsch, D., Vilotte, J. P., Sánchez-Sesma, F. J., Komatitsch, D., & Vilotte, J. P. (1999). Elastic wave propagation in an irregularly layered medium. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 18(1), 11–18.
- Wang, R. (1999). A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 89(3), 733–741.
- Wathelet, M., Jongmans, D., & Ohrnberger, M. (2004). Surface-wave inversion using a direct search algorithm and its application to ambient vibration measurements. *Near Surface Geophysics*, 2(4), 211–221.
- Wong, H. L. (1982). Effect of surface topography on the diffraction of P, SV, and Rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 72(4), 1167–1183.
- Wong, H. L. & Jennings, P. C. (1975). Effects of canyon topography on strong ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 65(5), 1239–1257.
- Wuttke, F., Dineva, P. S., & Schanz, T. (2011). Seismic wave propagation in laterally inhomogeneous geological region via a new hybrid approach. *Journal of Sound and Vibration*, 330(4), 664–684.
- Xu, H., Li, T., Xu, J., & Wang, Y. (2014). Dynamic response of underground circular lining tunnels subjected to incident P waves. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014.
- Yi, C. P., Lu, W. B., Feng, L., & Wang, G. (2010). Dynamical Response of Circular Tunnel with Steel Lining under the Action of Blasting Vibration. *Advanced Materials Research*, 163-167, 4037–4042.
- Yi, C. P., Zhang, P., Johansson, D., & Nyberg, U. (2014). Dynamic response of a circular lined tunnel with an imperfect interface subjected to cylindrical P-waves. *Computers and Geotechnics*, 55, 165–171.

- Yokoi, T. (2002). Reflection and transmission operator for irregular interfaces derived from the indirect boundary element method. *Geophysical Journal International*, 148, 88–102.
- Yokoi, T. & Sánchez-Sesma, F. J. (1998). A hybrid calculation technique of the Indirect Boundary Element Method and the analytical solutions for three-dimensional problems of topography. *Geophysical Journal International*, 133, 121–139.
- Zheng, P., Ding, B., Zhao, S. X., & Ding, D. (2013). 3D dynamic Green's functions in a multilayered poroelastic half-space. *Applied Mathematical Modelling*, 37(24), 10203–10219.
- Zhou, H. & Chen, X.-F. (2006). A new approach to simulate scattering of SH waves by an irregular topography. *Geophysical Journal International*, 164(2), 449–459.
- Zhou, H. & Chen, X.-F. (2008). The localized boundary integral equation-discrete wavenumber method for simulating P-SV wave scattering by an irregular topography. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(1), 265–279.
- Zhou, H. & Chen, X.-F. (2009a). Localized Boundary Integral Equation-Discrete Wavenumber Method for Simulating Wave Propagation in Irregular Multiple Layers, Part I: Theory. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(3), 1984–1994.
- Zhou, H. & Chen, X.-F. (2009b). Localized boundary integral equation-discrete wavenumber method for simulating wave propagation in irregular multiple layers, Part II: Validation and application. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 99(3), 1995–2011.