

# CAPITULO II.

## Marco teórico de Referencia

### **II.1 Introducción**

Para fines sismológicos, es posible caracterizar la estructura interna de la tierra sólida conociendo la distribución de algunas de sus propiedades físicas, son estas propiedades las afectan de forma mas significativa la propagación de una onda sísmica en un medio.

Un medio cuyas propiedades físicas varían únicamente con la profundidad es llamado *medio lateralmente homogéneo o estratificado*.

En este trabajo, el tratado físico y matemático que se le dará a la propagación de una onda sísmica será el mismo que se le daría a un modelo lateralmente homogéneo, una ventaja de considerarlo de esta manera es que la solución de la ecuación de movimiento es aplicable de manera exacta a un medio con estas características; se dan a conocer las bases para entender y describir la propagación de ondas sísmicas en la tierra, específicamente, utilizando la Teoría de Rayos; el análisis de trazado de rayos es útil para *conocer el tiempo de viaje de una onda resolviendo la ecuación de rayo entre dos puntos para un modelo de la Tierra conocido* y es aplicable cuando las trayectorias de los rayos desde el hipocentro (fuente) y una estación (receptor) son lo suficientemente cortas como para que la curvatura de la tierra sea despreciable (pocos cientos de kilómetros); tal es el caso de análisis relacionados con el estudio de la corteza y manto superior.

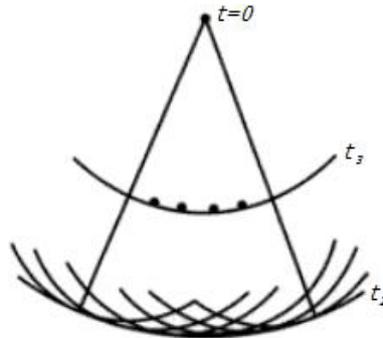
Los algoritmos de trazado de rayos son procesos iterativos que construyen la trayectoria del rayo paso a paso usando incrementos de segmentos lineales. Por lo tanto la trayectoria del rayo es un conjunto de puntos discretizados con información como el ángulo de incidencia, la geometría del medio y el número de rayos que cruzan un elemento del medio.

Cuando una onda sísmica encuentra cambios en el material a través del cual esta viajando, puede ser transmitida, reflejada o refractada; estos fenómenos así como la propagación la misma pueden ser explicados por la Ley de Snell, el Principio de Huygens y el Principio de Fermat.

## II.2 Conceptos básicos

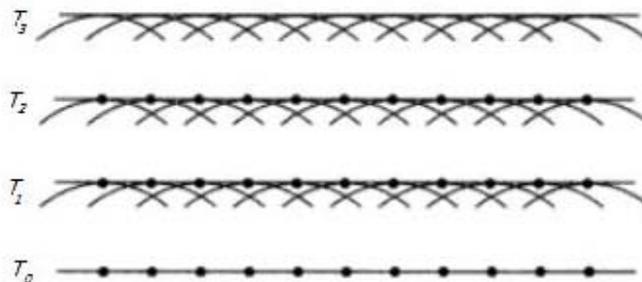
### II.2.1. Principio de Huygens

Este principio establece que cada punto que pertenece a un frente de onda se considera como un nuevo punto generador de ondas (o fuente de Huygens), lo que permite la propagación de nuevos frentes circulares de onda a los que llamaremos ondículas.



**Figura 2.1.** Análisis que muestra como se pueden generar los frentes de onda circulares a partir de un frente de onda inicial (Stein, 2003).

Para un tiempo  $t$  cualquiera, cada ondícula tendrá un radio  $ct$ , y la envolvente de cada una de esas ondículas formará una nueva superficie, la cual, de acuerdo al Principio de Huygens es el frente de onda resultante al tiempo  $t$ .



**Figura 2.2.** Demostración del Principio de Huygens para la propagación de un frente de onda plano. Los frentes de onda sucesivos se generan dibujando un frente de onda circular desde cada punto del frente de onda previo y entonces se dibuja una línea tangente a los círculos. Los frentes de onda circulares interfieren destructivamente en cualquier otra posición (Stein 2003).

El principio de Huygens proporciona un método geométrico para encontrar la forma de un frente de onda en un instante cualquiera, partiendo de la forma de un frente de onda en otro instante cualquiera, el nuevo frente de onda se obtiene como una superficie tangente a las ondas secundarias (Figura 2.2), mediante la envolvente de las mismas. Cada onda esférica satisface la ecuación

$$(z - z_0)^2 + (y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = v^2(t - t_0)^2 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

donde  $(x_0, y_0, z_0)$  es el origen de las ondas esféricas y  $t_0$  es el tiempo de inicio. Si el medio es homogéneo los radios de las ondas son finitos e idénticos, por tanto los rayos son líneas rectas, no así en un medio heterogéneo (Scales, 1997).

### II.2.2 Principio de Fermat

El comportamiento de las trayectorias de rayos sísmicos en una interfase puede explicarse por el principio de Fermat. Formulado en el siglo XVII por el físico matemático francés Pierre Fermat.

Establece que de todas las trayectorias posibles entre dos puntos A (fuente) y B (receptor), un rayo sísmico sigue la trayectoria de menor tiempo entre estos puntos. Si  $ds$  es una diferencial de distancia a lo largo de la trayectoria (P) del rayo y  $c$  es la velocidad de la onda en ese medio, entonces el tiempo de viaje  $t$  entre A y B debe ser mínimo, es decir:

$$t = \int_A^B \frac{ds}{c} = \text{mínimo} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

Por otro lado, si consideramos a  $\tau^*$  como la trayectoria de tiempo mínimo, es posible expresar al principio de Fermat como:

$$\tau^* = \min \tau^P \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

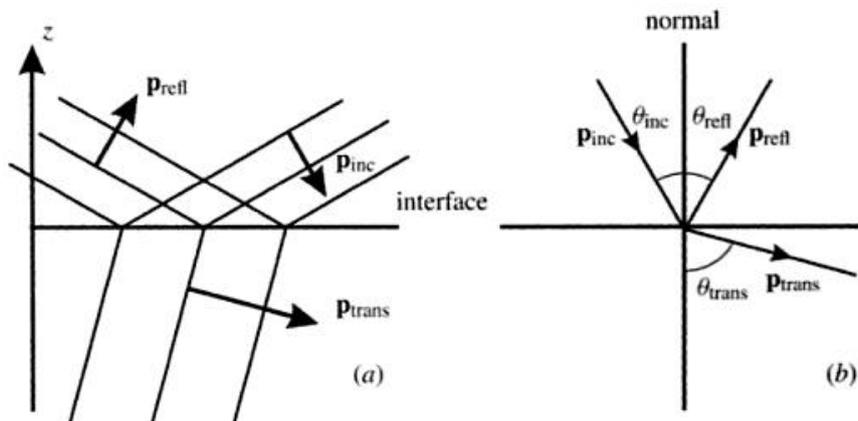
donde P denota al conjunto de trayectorias que conectan a la fuente con el receptor. La relación anterior puede expresarse en términos de la trayectoria particular de tiempo mínimo  $P^*$  como:

$$\tau^* = \int_{P^*} p(x) ds \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

en donde  $p(x) = 1/c$ . Para cualquier medio heterogéneo la trayectoria de los rayos sísmicos dependerá de la distribución de las velocidades en el medio.

### II.2.3. Ley de Snell

La ley de Snell establece una relación entre los ángulos de incidencia, reflexión y refracción de una onda, con la velocidad del medio a través del cual se propagan.



**Figura 2.3.** Ondas planas incidentes, reflejadas y transmitidas en una interfase plana entre dos semiespacios homogéneos. En la figura se ilustra el caso en que la velocidad del medio 2 ( $c_2$ ) es mayor que la velocidad del medio 1 ( $c_1$ ), esto es  $c_2 > c_1$ . En (a) se observan los frentes de onda y en (b) los vectores lentitud (Chapman 2004).

El módulo del vector lentitud es  $|\mathbf{p}| = 1/c$  y el vector lentitud es

$$p_{inc} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ -(c_1^{-2} - p_x^2)^{1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1} \begin{pmatrix} \text{sen}\theta_{inc} \\ 0 \\ -\text{cos}\theta_{inc} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.5)$$

La parte negativa de la raíz cuadrada de  $p_z$  corresponde a la onda incidente propagándose en la dirección negativa de  $z$  (Figura 2.3).

El ángulo  $\theta_{inc}$  es el ángulo que forman el vector lentitud y el vector normal a la interfase y es tal que  $0 \leq \theta_{inc} \leq \pi/2$ . Los vectores lentitud de la onda reflejada y de la transmitida son:

$$p_{refl} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ (c_1^{-2} - p_x^2)^{1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1} \begin{pmatrix} \text{sen}\theta_{refl} \\ 0 \\ \text{cos}\theta_{refl} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$p_{trans} = \begin{pmatrix} p_x \\ 0 \\ -(c_2^{-2} - p_x^2)^{1/2} \end{pmatrix} = \frac{1}{c_2} \begin{pmatrix} \text{sen}\theta_{trans} \\ 0 \\ -\text{cos}\theta_{trans} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.7)$$

donde los ángulos  $\theta_{refl}$  y  $\theta_{trans}$  se definen de la misma forma.

En las ecuaciones 2.6 y 2.7 es claro que las componentes  $p_x$  para los dos vectores son similares, lo que da origen a la ley de reflexión:

$$\theta_{inc} = \theta_{refl}$$

y a la de refracción o Ley de Snell:

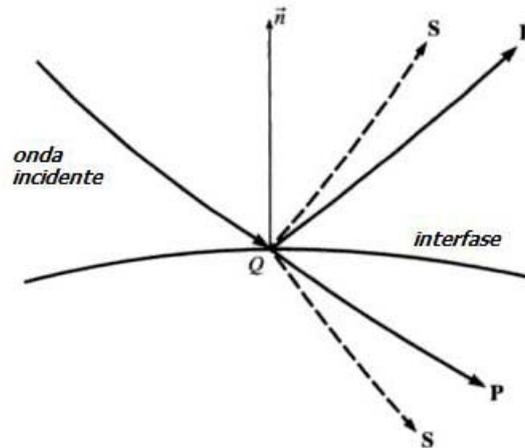
$$\frac{\text{sen}\theta_{inc}}{c_1} = \frac{\text{sen}\theta_{trans}}{c_2} \dots\dots\dots (2.8)$$

por lo tanto la onda transmitida satisface (Chapman 2004):

$$\text{sen}\theta_{trans} = (c_2/c_1) \cdot \text{sen}\theta_{inc} \dots\dots\dots (2.9)$$

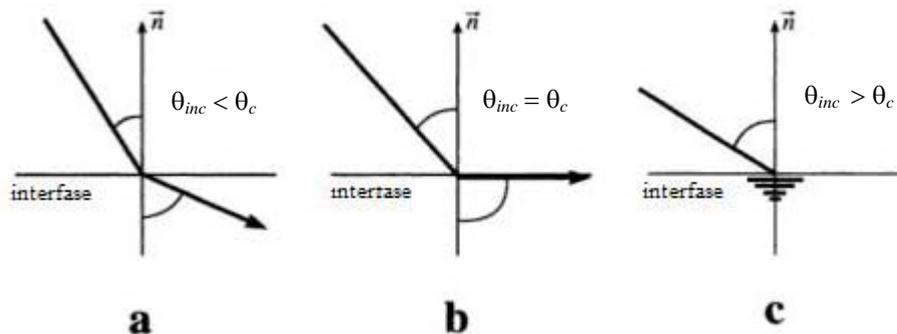
### II.2.4. Ángulo crítico

Cada onda de cuerpo que incide en cualquier punto de una interfase que divide a dos medios, puede generar cuatro tipos básicos de ondas (Figura 2.4), dos ondas reflejadas (P y S) y dos ondas transmitidas (P y S).



**Figura 2.4.** Reflexión y transmisión de una onda de cuerpo en una interfase, particularmente en una interfase curva. Al incidir la onda, se generan cuatro tipos de ondas, dos reflejadas (P y S) y dos transmitidas (P y S). Modificado de Cervený 2001.

analizando la ecuación 2.9 es posible observar que a medida que  $c_2 > c_1$  tenemos que  $\theta_{trans} > \theta_{inc}$ . De igual manera, si el ángulo de incidencia aumenta, el rayo transmitido se acerca a la interfase horizontal (Figura 2.5).



**Figura 2.5.** Ángulos de incidencia (a) subcrítico, (b) crítico y (c) postcrítico. Tomado de Cervený 2001.

Un ángulo crítico se define como aquel ángulo que provoca que una onda se transmita con un ángulo  $\theta_{trans} = 90^\circ$ . Una vez que el ángulo de incidencia excede el ángulo crítico, se le llama incidencia postcrítica, lo que implica que no existen ondas planas transmitidas al segundo medio. A este fenómeno se le llama *reflexión interna total*; se generan ondas inhomogéneas o evanescentes, que existen físicamente pero que no pueden ser calculadas por métodos estándares de rayos (Cervený 2001).

### II.2.5. Ecuación de onda

Los terremotos y otras perturbaciones en la tierra generan ondas sísmicas, las cuales proporcionan información a cerca de la fuente que las generó y la trayectoria a través de la cual viajaron.

La propagación de ondas sísmicas en la tierra sólida provoca el desplazamiento de partículas en función del espacio y del tiempo, este desplazamiento puede ser separado en un potencial escalar que corresponde a las ondas P y un potencial vectorial que corresponde a las ondas S.

La ecuación escalar de onda plana es una ecuación que describe la forma en que el potencial escalar  $\phi(\mathbf{x}, t)$  se propaga en el espacio tridimensional. La forma más simple de la ecuación escalar de onda en el espacio tridimensional es la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

la ecuación 2.10 es valida estrictamente en un medio homogéneo debido a que fue obtenida partiendo de que las derivadas de todas las constantes elásticas son cero. La solución de esta ecuación, conocida como *onda plana armónica* está dada por (Stein 2003):

$$\phi = Ae^{i(\omega t \pm k \cdot x)} = A \cos(\omega t \pm kx) + iA \sin(\omega t \pm kx) \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

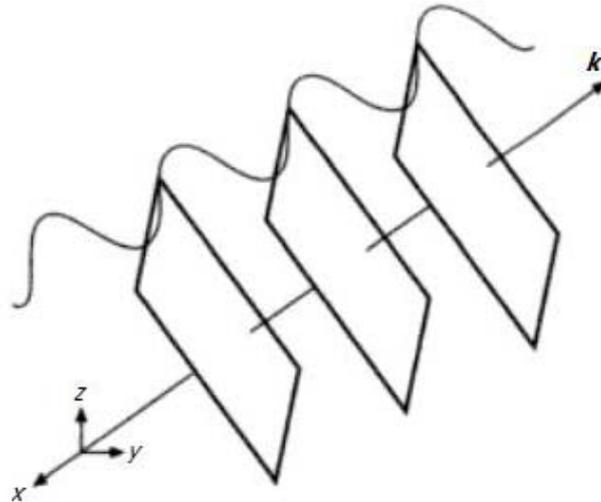
$$\phi = Ae^{i\omega(p \cdot x \pm t)} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

en donde:

Símbolo	Nombre	Unidades
$\phi(\mathbf{x}, t)$	Campo escalar, componente del campo de desplazamientos	
A	amplitud	
t	tiempo	[T]
$\mathbf{x}$	vector de posición	[L]
$\omega$	frecuencia angular	[T <sup>-1</sup> ]
$\mathbf{k}$	vector número de onda ( $k_i$ )	[L <sup>-1</sup> ]
k	=  k , número de onda	[L <sup>-1</sup> ]
c	= $\omega/k$ , velocidad de la onda	[LT <sup>-1</sup> ]
$\lambda$	$2\pi/ k  = c/v$ , longitud de onda	[L]
p	= $k/\omega$ , vector lentitud o vector número de onda	[L <sup>-1</sup> T]
p	= $1/c$ , lentitud o parámetro de rayo	[L <sup>-1</sup> T]
$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$	fase	[0]

**Tabla 2.1.** Símbolos, nombres y unidades utilizadas para describir ondas planas. Adaptado de Chapman

Las soluciones 2.11 y 2.12 describen una onda plana propagándose en una dirección arbitraria determinada por el vector número de onda  $k$  (Stein, 2003). Por otro lado, es posible demostrar que el vector número de onda refiere dos aspectos importantes de una onda propagándose, (1) su magnitud proporciona el número de onda y la frecuencia espacial y (2) su dirección determina la dirección de propagación de la onda. Los frentes de onda, que son superficies de fase constante ( $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ ) y por lo tanto, valores constantes de  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , son planos perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (Figura 2.6).



**Figura 2.6.** Frentes de onda de una onda plana viajando en la dirección indicada por el vector  $\mathbf{k}$ . La longitud de onda es  $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ . Stein 2003.

Observar que todos los puntos contenidos en un plano perpendicular al vector numero de onda tienen el mismo valor  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ , debido a que este producto escalar es la proyección de  $\mathbf{k}$  en  $\mathbf{x}$ . La fase es periódica en la dirección de propagación, el periodo es igual a la longitud de onda,  $2\pi/|\mathbf{k}|$  (Stein, 2003).

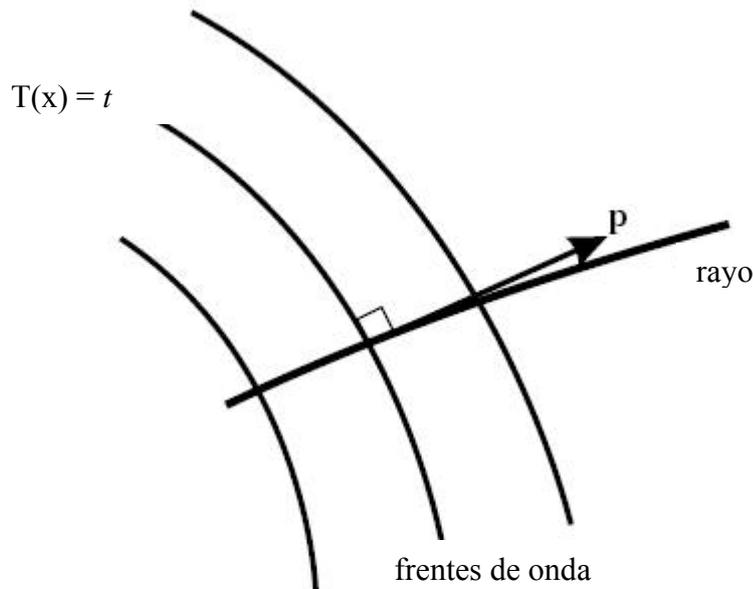
### II.3. Ecuaciones cinemáticas de la trayectoria del rayo sísmico

Es posible conocer el comportamiento de una onda sísmica considerando la trayectoria a través de la cual viajó. Esta aproximación, el estudio de la propagación de una onda usando la trayectoria del rayo, es llamada *teoría geométrica de rayos*. La Teoría Geométrica de Rayos es una buena aproximación a las soluciones de la ecuación elástica de movimiento, la cuál describe la generación y la propagación de la energía sísmica (Stein, 2003). En la teoría sísmica de rayos se define a un rayo como característica de la ecuación Eikonal; dicha ecuación es una expresión simple para calcular el tiempo de viaje  $T$ . La teoría de rayos en un medio continuo consta de tres partes: *teoría cinemática de rayos* que describe la geometría y tiempo de viaje de los rayos sísmicos y de los frentes de onda; *teoría dinámica de rayos* que describe la dispersión esférica de los rayos y la magnitud del desplazamiento; y la *teoría de polarización* que describe la dirección del desplazamiento. El trazado de rayos utiliza la teoría cinemática de rayos para obtener las ecuaciones cinemáticas de la trayectoria del rayo sísmico.

Consideremos una solución particular del campo  $\phi(x, t)$  de la ecuación 2.10, en el dominio del tiempo (Chapman 2004):

$$\phi = \phi[W(x_1, x_2, x_3) - v_0 t] \dots\dots\dots (2.13)$$

en donde  $W$  representa un frente de onda moviéndose en el medio (Figura 2.7) y  $v_0$  es una velocidad constante de referencia.



**Figura 2.7.** Trayectoria de un rayo en la dirección del vector lentitud,  $\mathbf{p}$ , con frentes de onda ortogonales,  $W(x_1, y_2, z_3) = t$ . Adaptado de Chapman 2004.

Las superficies donde  $T(x_i) = t$ , son llamadas frentes de onda, los vectores normales a estos definen la dirección de propagación y son llamados *rayos* (Figura 2.7). El vector lentitud  $\mathbf{p}$  es perpendicular a los frentes de onda. Si sustituimos la solución para  $\phi$  descrita en 2.13 en la ecuación de Helmholtz, obtenemos la ecuación independiente del tiempo conocida como *ecuación eikonal*:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_3}\right)^2 = v_0^2 / v^2 = n^2 \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

donde  $x_i$  son las coordenadas espaciales del vector  $x$ ,  $v$  es el campo de velocidades.

De 2.14 definimos al índice de refracción como  $n = v_0 / v$ . La ecuación eikonal nos conduce directamente al concepto de rayo. Esta ecuación es especialmente útil en la solución de problemas para medios heterogéneos en donde la velocidad es función de las coordenadas espaciales.

La ecuación eikonal, es una ecuación diferencial parcial de primer orden cuyas soluciones:

$$W(x_i) = \text{constante}$$

representan superficies en el espacio tridimensional. Para determinado valor de  $W$  y un instante de tiempo  $t_1$ , todos los puntos a lo largo de la superficie estarán en fase aunque no necesariamente serán de la misma amplitud.

En dicha superficie la fase de la onda viajante es la misma. Para un tiempo  $t_2$  posterior, el movimiento a lo largo de la superficie se encontrará en una diferente fase de movimiento. Por lo tanto, la propagación de ondas puede ser descrita por frentes de onda sucesivos.

La ecuación de los vectores normales al frente de onda es:

$$\frac{dx_1}{\partial W/\partial x_1} = \frac{dx_2}{\partial W/\partial x_2} = \frac{dx_3}{\partial W/\partial x_3} \dots\dots\dots(2.15)$$

donde los denominadores son los números directores de los vectores normales. Debido a que los cosenos directores son proporcionales a los números directores, podemos escribir:

$$dx_i/ds = k(\partial W / \partial x_i) \dots\dots\dots (2.16)$$

donde k es una constante y ds es un elemento de la trayectoria del rayo. La suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a uno, i.e.,

$$(dx_1/ds)^2 + (dx_2/ds)^2 + (dx_3/ds)^2 = 1 \dots\dots\dots (2.17)$$

Si elevamos al cuadrado y sumamos las tres ecuaciones que resultan de la expresión 2.16, y utilizando la ecuación eikonal 2.14, obtenemos:

$$1 = k^2 \left[ (\partial W/\partial x_1)^2 + (\partial W/\partial x_2)^2 + (\partial W/\partial x_3)^2 \right] = k^2 n^2 \dots\dots\dots (2.18)$$

por lo tanto:

$$k = 1/n \dots\dots\dots(2.19)$$

y la ecuación 2.16 resulta:

$$n(dx_i/ds) = \partial W/\partial x_i \dots\dots\dots (2.20)$$

derivando con respecto a ds a lo largo de la trayectoria de cualquier miembro de 2.20, resultan ecuaciones de la forma:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_1}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial W(x_i)}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial W}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial W}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \right) \dots\dots (2.21)$$

usando las expresiones 2.20 y la identidad 2.17, el lado derecho de la ecuación 2.21 se reduce a  $\partial n/\partial x$ .

Si se repite este procedimiento con cada una de las ecuaciones de 2.20, se obtiene:

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_1}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x_1} \quad , \quad \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_2}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x_2} \quad , \quad \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx_3}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial x_3} \quad \dots\dots \quad (2.22)$$

este conjunto de ecuaciones representa los tres miembros de la *ecuación de rayo* en la cual, el índice de refracción  $n$  caracteriza el medio, además  $ds$  se define como  $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ . La velocidad es función del vector de posición  $\mathbf{x}$  y  $s$  es la variable independiente que representa la longitud de la trayectoria a lo largo del rayo. El sistema de ecuaciones ordinarias de segundo orden 2.22 puede ser reducido a un sistema de ecuaciones de primer orden mediante la definición de lentitud  $\mathbf{p}(s)$ :

$$\mathbf{p} = (p_i) = (1/v)(dx/ds) \quad \dots\dots\dots \quad (2.23)$$

entonces:

$$\frac{dx}{ds} = v(x_i)p \quad \dots\dots\dots (2.24)$$

$$\frac{dp}{ds} = \nabla \left( \frac{1}{v(x_i)} \right)$$

La velocidad  $v(x_i)$  para el caso de ondas P, se determina:

$$\alpha(x_i) = \sqrt{\frac{\lambda(x_i) + 2\mu(x_i)}{\rho(x_i)}} \quad \dots\dots\dots (2.25)$$

y para las ondas S, la velocidad se obtiene mediante:

$$\beta(x_i) = \sqrt{\frac{\mu(x_i)}{\rho(x_i)}} \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

en donde  $\lambda(x_i)$  es el módulo volumétrico o compresibilidad,  $\mu(x_i)$  es la rigidez y  $\rho(x_i)$  es la densidad del medio.

Las ecuaciones 2.22 y 2.24 son conocidas como las *ecuaciones cinemáticas del rayo*, algunos autores las denominan sistema de ecuaciones de trazado de rayos, las cuales tienen soluciones tanto analíticas como numéricas (Stein 2003).

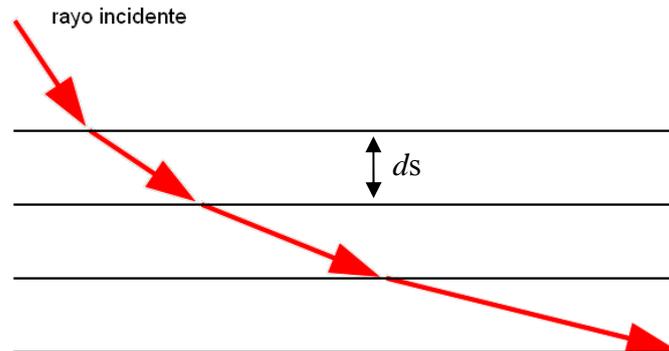
*Soluciones numéricas de la ecuación de rayo*

Con la finalidad de estudiar heterogénea de la Tierra, se han desarrollado numerosas y diferentes técnicas para trazar rayos en el espacio tridimensional. Algunos autores han formulado técnicas de trazado de rayos sísmicos como un problema de valor inicial, mientras que otros lo han formulado como un problema de valores en la frontera.

### II.3.1 Trazado de rayos por trayectorias de tiempo mínimo

El programa Ray3D (Valdés, 1988) resuelve las ecuaciones cinemáticas del rayo utilizando el método de trayectorias de tiempo mínimo.

El trazado de rayos consiste en calcular la trayectoria de una onda propagándose a través de un medio, es un problema que se resuelve asumiendo que una onda puede ser modelada como una serie de frentes de onda unidos (rayo) y que existe una distancia muy pequeña ( $ds$ ) sobre la cual la trayectoria de ese rayo se considera recta, entonces se obtiene una derivada local para calcular la nueva dirección del rayo (Figura 3.4).



**Figura 3.4.** Método de las trayectorias de tiempo mínimo para la solución del trazado de rayos sísmicos.

Existen dos tipos principales de trazado de rayos, a) trazado de rayos con valor inicial y b) trazado de rayos con valores de frontera. En el problema de valor inicial la dirección del rayo es conocida en un punto determinado y la trayectoria del rayo puede ser calculada con la precisión requerida utilizando diversos métodos. En el trazado de rayos con valores de frontera la dirección del rayo es conocida en cualquier punto por lo que se puede hablar de trazado de rayos entre dos puntos.

El problema de trazado de rayos en el programa Ray3D está formulado como un problema de valor inicial (Lee y Steward, 1981 y modificaciones de Comer) el cual encuentra solución numérica utilizando la subrutina propuesta por Shampine y Gordon en 1975, como una solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Se introduce el vector de posición  $\mathbf{r}$  definido por (Lee y Steward, 1981):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

y se define a la lentitud  $u$  como el recíproco de la velocidad  $v$ :

$$u(x) = 1/v(x)$$

si se sustituye en las ecuaciones 2.24 del Capítulo II (ecuaciones cinemáticas del rayo) se obtiene:

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{d}{ds} \left( u(\mathbf{x}) \left( \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) \right) = \nabla u \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

donde  $\nabla u$  es el gradiente de  $u$ :

$$\mathbf{V}u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

desarrollando y simplificando se obtiene (Lee y Stewart, 1981):

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} = \left( \frac{1}{u} \right) \left( \mathbf{V}u - \frac{dx du}{ds ds} \right) \dots \dots \dots (3.2)$$

llamando  $G$  a  $du/ds$ :

$$G = \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial s} \dots \dots \dots (3.3)$$

$$G = u_{x_1} x_1'$$

el punto denota diferenciación respecto a  $s$  y  $u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$

De esta forma la ecuación 3.2 puede ser escrita como un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (Lee y Stewart, 1981):

$$\begin{aligned} x_1'' &= v(u_{x_1} - Gx_1') \\ x_2'' &= v(u_{x_2} - Gx_2') \\ x_3'' &= v(u_{x_3} - Gx_3') \end{aligned} \dots \dots \dots (3.4)$$

Llamemos  $\omega$  a un vector auxiliar cuyas componentes son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_1 & \omega_3 &= x_2 & \omega_5 &= x_3 \\ \omega_2 &= x_1' & \omega_4 &= x_2' & \omega_6 &= x_3' \end{aligned} \dots \dots \dots (3.5)$$

Entonces la ecuación 3.4 es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2 \\ \dot{\omega}_3 &= \omega_4 \\ \dot{\omega}_5 &= \omega_6 \\ \dot{\omega}_2 &= v(u_{x_1} - G\omega_2) \\ \dot{\omega}_4 &= v(u_{x_2} - G\omega_4) \\ \dot{\omega}_6 &= v(u_{x_3} - G\omega_6) \end{aligned} \dots \dots \dots (3.6)$$

si se sustituye lo anterior en 3.3 resulta:

$$G = u_{x_1} \omega_2 + u_{x_2} \omega_4 + u_{x_3} \omega_6$$

Se requiere calcular el tiempo de viaje entre un punto A y un punto B, para ello se busca resolver:

$$T = \int_B^A u ds$$

Si se introduce una variable adicional  $\omega_7$  para representar el tiempo parcial de viaje  $\tau$  a lo largo de un segmento de la trayectoria del rayo desde el punto A.

$$\omega_7 = \tau$$

El tiempo total de viaje está dado por:

$$T = \int_B^A u ds = \tau_B = \omega_7(S)$$

en donde S es la longitud de la trayectoria completa a la que llamamos  $\omega_8 = S$  y su derivada  $\dot{\omega}_8 = 0$ . Para fines computacionales es conveniente normalizar la longitud del arco s de tal forma que su tome valores entre 0 y 1. Entonces introducimos una nueva variable de la siguiente forma:

$$t = \frac{s}{S}$$

el símbolo ( ' ) se utiliza para denotar diferenciación con respecto a t.

Resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales de primer orden (Lee y Stewart, 1981):

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_8 \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_8 \omega_4 \\ \dot{\omega}_3 &= \omega_8 \omega_6 \\ \dot{\omega}_7 &= \omega_8 u \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_8 v (u_{x_1} - G \omega_2) \\ \dot{\omega}_4 &= \omega_8 v (u_{x_2} - G \omega_4) \\ \dot{\omega}_6 &= \omega_8 v (u_{x_3} - G \omega_6) \\ \dot{\omega}_8 &= 0 \end{aligned}$$

$$t \in [0,1]$$

las variables que corresponden a la solución del sistema de ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_1 & \omega_2 &= \frac{dx_1}{ds} \\ \omega_2 &= x_2 & \omega_4 &= \frac{dx_2}{ds} \\ \omega_3 &= x_3 & \omega_6 &= \frac{dx_3}{ds} \\ \omega_7 &= \tau & & \\ \omega_8 &= S & & \end{aligned} \dots\dots\dots (3.7)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{array}{lll}
 \omega_1(0) = x_{1A} & \omega_2(0) = x_{2A} & \omega_3(0) = x_{3A} \\
 \omega_1(1) = x_{1B} & \omega_2(1) = x_{2B} & \omega_3(1) = x_{3B} \\
 \omega_4(0) = 0 & \omega_4^2(0) + \omega_5^2(0) + \omega_6^2(0) = 1 & 
 \end{array}$$

En donde  $(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A})$  y  $(x_{1B}, x_{2B}, x_{3B})$  son las coordenadas de los puntos A y B respectivamente (Lee y Steward, 1981).

Pereyra *et. al.* (1980) describen a detalle cómo resolver un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden sujetos a condiciones de frontera.