



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA - CONTROL

CONTROL INTEGRAL DE SISTEMAS HOMOGÉNEOS

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
JOSÉ ÁNGEL MERCADO URIBE

TUTOR PRINCIPAL:
Dr. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ
INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F., JULIO 2017

JURADO ASIGNADO

Presidente: Dr. Arteaga Pérez Marco Antonio

Secretario: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

1^{er}. Vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

2^{do}. Vocal: Dr. Castaños Luna Fernando

3^{er}. Vocal: Dr. Fridman Leonid

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, Ciudad de México,

Tutor de Tesis:

Jaime Alberto Moreno Pérez

FIRMA

Agradecimientos

Principalmente a mi familia, que me ha dado todo el apoyo necesario para cumplir mis metas y objetivos. Siendo mi motivación principal para mi superación personal y profesional.

A mi mejor amigo, quien me ha soportado todo este tiempo. Así como a mi novia, que llego cuando menos la esperaba y se ha convertido en alguien muy importante para mí.

A mis profesores de licenciatura y maestría, quienes me han dado las bases necesarias para realizar la tesis. Dando un agradecimiento especial a mi asesor de tesis el Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez por su apoyo en el desarrollo de la tesis y su paciencia durante la misma. Así como al Dr. Leonid Fridman, por los consejos que me brindó a lo largo de los seminarios de maestría.

Al programa de posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México que me ha permitido realizar mis estudios de maestría y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) con el número de proyecto IN113617.

Finalmente un agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico durante mis estudios de maestría, bajo el CVU 705765.

Resumen

En este trabajo se introducirá la acción integral a un controlador por retroalimentación de estados, con la cual será posible lidiar con perturbaciones en el canal de la señal de control. Permitiendo así mantener la estabilidad en tiempo finito, aún en la presencia de perturbaciones no desvanecientes.

En un caso especial trabajaremos con la acción integral discontinua, que nos permite lidiar con perturbaciones Lipschitz con una señal de control continua. Conservando la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema para ganancias adecuadas del controlador.

Finalmente, se aplicará el controlador para un sistema mecánico clásico, mediante simulación en Matlab.

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Motivación	3
1.2. Estado del Arte	5
1.3. Objetivos	6
1.3.1. Objetivo General	6
1.3.2. Objetivos Particulares	6
1.4. Aportaciones	6
1.5. Estructura de la Tesis	7
2. Preliminares	9
2.1. Estabilidad en el Sentido de Lyapunov	9
2.1.1. Estabilidad de Inclusiones Diferenciales	10
2.1.2. Estabilidad en Tiempo Finito	11
2.2. Homogeneidad	12
2.2.1. Homogeneidad Clásica	12
2.2.2. Homogeneidad Ponderada	12
2.2.3. Sistemas Homogéneos y Función de Lyapunov Homogénea	13
2.3. Desigualdades Importantes - Homogeneidad	14
3. Controlador Integral para Sistemas Homogéneos	17
3.1. Planteamiento del Problema	17
3.2. Ley de Control Estabilizante	19
3.2.1. Función de Lyapunov	19
3.2.2. Sistema en Lazo Cerrado	20
3.3. Acción Integral	21
3.4. Ley de Control Integral	22
3.5. Propiedades del Algoritmo	23
3.6. Construcción de la Función de Lyapunov	24
3.6.1. Sistema en Lazo Cerrado	24
3.6.2. Idea General	24
3.6.3. Controlador Integral - Orden 2	26
3.6.4. Controlador Integral - Orden 3	29
3.6.5. Controlador Integral - Orden n	33

4. Discusión del Controlador Integral	39
4.1. Cálculo de Ganancias	39
4.2. Rechazo de Perturbaciones	41
4.2.1. Sistema de Orden 2	41
4.2.2. Sistema de orden 3	47
4.3. Discusión del Efecto del Grado de Homogeneidad en el Control Integral	51
4.3.1. Convergencia	51
4.3.2. Precisión	52
4.4. Control por Retroalimentación de Salida	55
4.4.1. Sistema de Orden 2	55
4.4.2. Sistema de Orden 3	56
5. Ejemplo de Simulación - Levitador Magnético	59
5.1. Modelo del Sistema	59
5.2. Ley de Control	60
5.3. Simulación	61
6. Conclusiones	63
Bibliografía	67

Notación

La notación a lo largo del trabajo será la siguiente.

- \exists - “Existe”.
- \forall - “Para todo”.
- $<$ - “Menor que”, \leq - “Menor o igual que”, $>$ - “Mayor que”, \geq - “Mayor o igual que”.
- $A \Rightarrow B$ - La afirmación A implica B .
- $A \Leftrightarrow B$ - Las afirmaciones A y B son equivalentes.
- $a \in A$ - El elemento a pertenece al conjunto A .
- $A \subset B$ - El conjunto A es un subconjunto de B .
- $A \setminus B$ - El conjunto de A fuera de B .
- $f : A \rightarrow B$ - f es un mapeo del conjunto A al B .
- R - Conjunto de los números reales.
- R_+ - Conjunto de los números reales positivos.
- N - Conjunto de los números naturales.
- $\|\cdot\|$ - Norma Euclideana de un vector.
- $|\cdot|$ - Valor absoluto de una función.
- Sea $x \in R^n$, \dot{x} representa la primer derivada de x respecto al tiempo y para derivadas de orden superior se tiene $x^{(n)}$, donde n indica el orden de la derivada.
- máx y mín - Valor máximo y mínimo de una función.
- Sea una matriz $M \in R^{n \times m}$. M^T - transpuesta de M . Siendo $m = n$, M^{-1} - inversa.
- Para un campo vectorial f , $\frac{\partial f}{\partial x}$ es su matriz Jacobiana.

- $\prod_{i=i_o}^{i_f} F_i$ - Producto de la función F_i , desde el valor $i = i_o$ hasta i_f , siendo $i \in N$.
- \triangle - Fin de definición, teorema y proposición.
- \blacksquare - Fin de prueba.
- Finalmente, se añade una nueva función. Para una variable real $x \in R$ y un número real $p \in R$, el símbolo $[x]^p = |x|^p \text{sign}(x)$, lo que corresponde a la potencia signada de x a la p . Donde es fácil notar que cuando $p = 0$ se tiene el signo de x .

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los modelos matemáticos permiten estudiar el comportamiento de un sistema físico, siendo de gran importancia las ecuaciones diferenciales. De esta forma se puede escribir el modelo de un sistema en variables de estado como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden [11]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $x \in R^n$ representa los estados del sistema, $u \in R^p$ es la señal de entrada al sistema, $y \in R^q$ es la señal de salida del sistema. Asimismo $f(x, t)$ es la dinámica interna del sistema, $g(x, u, t)$ es el canal de la señal de entrada y finalmente $h(x)$ es una función continua de los estados del sistema.

En teoría de control, el sistema (1.1) es actor principal. Entre las tareas de la teoría de control se encuentran la regulación y el seguimiento. En el caso de la regulación, se lleva al sistema a algún punto de operación, mientras que en el seguimiento la señal de salida tiene un comportamiento deseado.

Para lograr dichas tareas se diseña una ley de control con la cual el sistema se comporte de forma deseada. Sin embargo, la ley de control se realiza a partir del modelo matemático y en ocasiones es difícil o hasta imposible contemplar todos elementos presentes en el modelo físico (incertidumbres), asimismo pueden existir algunos elementos exógenos (perturbaciones) que afectan a nuestro sistema físico y los cuales no están considerados en el matemático. De esta forma, el sistema (1.1) se puede plantear como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t) + g(u + \rho(t)) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $\rho(t)$ es una perturbación en el sistema y entra en el mismo canal que la entrada u . Así, se busca diseñar controladores robustos ante perturbaciones en el sistema.

En el control integral clásico, se consideran sistemas del tipo

$$\dot{x} = f(x, u + w)\tag{1.3}$$

donde w representa una perturbación constante en el sistema. El problema para estabilizar el origen del sistema (1.3) presenta leyes de control del tipo

$$\begin{aligned} u &= \phi(x) + z, \\ \dot{z} &= \psi(x), \end{aligned}$$

y su diseño se divide en dos partes. La primera consiste en diseñar de una ley de control estática $\phi(x)$ que permita estabilizar el origen del sistema (1.3) nominal, es decir en ausencia de la perturbación y la segunda en una ley de control dinámica z , correspondiente a la acción integral, la cual debe lidiar con la perturbación w sin afectar la estabilidad del origen del sistema en lazo cerrado. Así, es posible diseñar una ley de control dinámica que permite rechazar perturbaciones constantes en el sistema.

Por otro lado el control por modos deslizantes, considera sistemas del tipo

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_a(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= f_b(\eta, \xi) + u + \delta(t, x, u), \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde η corresponde a la dinámica cero del sistema. Aquí se busca diseñar una superficie deslizante $s = \xi - \phi(\eta) = 0$, escogiendo $\phi(\eta)$, tal que la dinámica cero del sistema (1.4) tenga un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen. Siendo así que el control debe mantener a las trayectorias del sistema en la superficie. Mediante esta técnica de control, se obtienen leyes de control del tipo [18], [26]

$$u = -k \operatorname{sign}(s),$$

con las cuales es posible estabilizar el origen del sistema (1.4), aún ante la presencia perturbaciones acotadas. Sin embargo, debido a la discontinuidad de la ley de control, se presenta el efecto indeseado conocido como “chattering”. El cual puede ocasionar un desgaste continuo en el actuador y causar vibraciones en el sistema. Además de que no es posible implementarlo adecuadamente, ya que la respuesta de cualquier actuador no es suficientemente rápida.

Basado en estas dos ideas, se propone un controlador integral discontinuo con el cual se logra una robustez ante perturbaciones con pendiente acotada, es decir Lipschitz. De esta forma se logra compensar perturbaciones, no solo constantes sino Lipschitz por el efecto de la acción integral, la señal de control es continua y por ende no se presenta el efecto “chattering”.

Por otro lado, se sabe de [11] que si un sistema tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces existe una función de Lyapunov que lo asegura. Por lo que es posible utilizar la función de Lyapunov del sistema no perturbado (modificada) [20], como función candidata de Lyapunov y diseñar la nueva ley de control integral.

En los últimos años los sistemas homogéneos han tomado gran importancia debido a importantes propiedades [2], entre las cuales se puede mencionar que la estabilidad local de un punto de equilibrio implica estabilidad global y el grado de homogeneidad del sistema nos indica el tipo de convergencia. La estabilidad en tiempo finito, que es una característica deseable para el origen de un sistema, se presenta si el grado de homogeneidad de un sistema homogéneo es negativo, como se muestra en trabajos [2], [5], [24], [25].

Cabe mencionar que un sistema lineal satisface la propiedad de homogeneidad y superposición, por lo que es fácil notar que la homogeneidad es una parte de la linealidad. De esta forma, se ha buscado desarrollar teoría similar a la bien establecida teoría lineal. Así, al igual que una linealización es posible aproximar un sistema no lineal a uno homogéneo como se realiza en [1], sin embargo en este caso es necesario realizar aproximaciones cerca del origen y en el infinito, permitiendo determinar la estabilidad del origen del sistema no lineal a partir de sus aproximaciones homogéneas. Por lo anterior, es fácil notar que los sistemas homogéneos permiten trabajar con sistemas no lineales como se muestra en [3].

Es importante mencionar que en general un sistema homogéneo no se puede linealizar por serie de Taylor, por esta razón una aproximación homogénea nos permite analizar una mayor cantidad de sistemas no lineales. Por ello, estudiar la estabilidad del origen de un sistema homogéneo permite extenderlo para otros sistemas no lineales.

Asimismo, teniendo el concepto de homogeneidad, es posible diseñar una familia de integradores homogéneos, los cuales estabilicen el origen del sistema (1.2), ante algún tipo de perturbación. Donde la homogeneidad nos permite el trabajo armónico entre la ley de control estabilizante y la acción integral.

1.2. Estado del Arte

Una de las herramientas más valiosas para mostrar la estabilidad de sistemas no lineales ha sido el segundo método de Lyapunov, el cual consiste en la construcción de funciones de Lyapunov, por lo que en muchos trabajos [24], [17] se presentan métodos de construcción de funciones de Lyapunov para sistemas Homogéneos. De esta manera, utilizando funciones candidatas de Lyapunov es posible diseñar leyes de control que estabilicen el origen de un sistema. En [6] se diseña una ley de control homogénea que estabiliza el origen de una cadena de integradores de orden arbitrario. En este trabajo se presenta la construcción de una función de Lyapunov que lo asegura.

Por otro lado, en los sistemas siempre existen perturbaciones, ya sea exógenas o intrínsecas debido al modelado. Esto ha sido estudiado por mucho tiempo y una de las principales teorías es el diseño de controlador por modos deslizantes. Los conceptos básicos de la teoría son descritos en [11] y se muestra que el controlador por modos deslizantes es capaz de compensar perturbaciones acotadas, sin embargo se ha avanzado a controladores por modos deslizantes de orden superior. En [13] se propone un controlador por retroalimentación de salida que permite estabilizar el origen de un sistema en tiempo finito. En ese trabajo se muestra que el controlador por modos deslizantes de alto orden permite estabilizar un sistema suave, utilizando únicamente la salida y sus derivadas, el cual se siguió trabajando en [14].

El principal problema que se presenta en el control por modos deslizantes como se desarrolla en [8] es el indeseable efecto del “chattering”. Esto es debido a la discontinuidad del controlador. Una de las soluciones para afrontar este problema ha sido utilizar controladores Quasi-continuos como se realiza en [15], [7], con los cuales se reduce el efecto del chattering, pero no se elimina la discontinuidad de la variable de control.

Por lo anterior se ha buscado diseñar leyes control continuas que sean robustas ante perturbaciones. Una de las principales propuestas ha sido la acción integral discontinua, como se muestra

en [27], en el cual se propone de forma general un controlador continuo utilizando la acción integral discontinua. La idea de utilizar la acción integral para lidiar con perturbaciones se ha presentado con anterioridad, basados en el control clásico PID. En [21] se presenta una idea del controlador, donde se utiliza una ley de control PI para el control de robots manipuladores y cuyo trabajo fue continuado en [22].

El principal problema de los trabajos anteriores, es que no se comenta la estrategia de diseño del controlador integral, pero en [20] se presenta un controlador integral discontinuo que permite estabilizar una cadena de integradores de orden 2, la idea que se presenta es utilizar la función de Lyapunov del controlador estabilizante para diseñar una acción integral que permita lidiar con la perturbación. En este se muestra que el controlador integral puede lidiar con perturbaciones Lipschitz.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Diseñar una ley de control integral que permita estabilizar el origen en tiempo finito de una cadena de integradores de orden n , aún en la presencia de perturbaciones Lipschitz acopladas.

1.3.2. Objetivos Particulares

- 1) Diseñar una ley de control por retroalimentación de estados continua y homogénea que estabilice el origen de la cadena de integradores, basada en función de Lyapunov.
- 2) Adicionar la acción integral homogénea y usar una función de Lyapunov homogénea para probar que el sistema en lazo cerrado tiene un punto de equilibrio estable para pequeñas ganancias del integrador
- 3) Probar
 - El método de diseño para una cadena de integradores de orden 2.
 - El método de diseño para una cadena de integradores de orden 3.
 - El método de diseño para una cadena de integradores de orden n .

1.4. Aportaciones

En el presente trabajo, se busca extender el resultado obtenido en [20], para una cadena de integradores de orden arbitrario. Se mostrará que es posible añadir la acción integral a la ley de control estabilizante presentada en [6].

Se observará la construcción de la función de Lyapunov para el controlador integral y la participación de las ganancias dentro de la misma. Asimismo, se tendrá que las ganancias del controlador

estabilizante casi no se verán afectadas y por ende, será posible utilizar un controlador estabilizante ya implementado y añadir la acción integral de forma independientes, donde la ganancia de la acción integral debe ser suficientemente pequeña.

1.5. Estructura de la Tesis

En el Capítulo 2, se explicarán algunos elementos importantes para entender el resultado principal de la tesis. En este capítulo se dará un breve introducción sobre los sistemas autónomos y la estabilidad en el sentido de Lyapunov, presentando una extensión para el caso de sistema discontinuos (inclusiones diferenciales). Posteriormente presentará la idea del control por retroalimentación, donde nuestro principal interés será la retroalimentación de estados. Se explicarán conceptos básicos respecto al control por modos deslizantes de primer orden, mostrando su robustez ante perturbaciones acotadas. Asimismo, una parte importante durante todo el trabajo de este capítulo será la homogeneidad, dando definiciones importantes y analizando esta propiedad para sistemas homogéneos y sus respectivas funciones de Lyapunov homogéneas, siendo que la homogeneidad es parte clave a lo largo del desarrollo de la tesis. Finalmente se dará algunos lemas necesarios para las pruebas realizadas en el trabajo.

En el Capítulo 3, se presentará la descripción del problema, dando a conocer las suposiciones sobre el sistema. Para poder así presentar el resultado principal de la tesis con sus respectivas pruebas. Asimismo, se presentará el controlador por retroalimentación de estados que permite estabilizar el origen de la cadena de integradores y posteriormente se añadirá la acción integral que nos permitirá rechazar algunas perturbaciones en el sistema, el cual corresponde al resultado principal del trabajo. Este se dividirá en tres partes, la primera al igual que en [20], se mostrará que el control integral es admisible para una cadena de integradores de orden 2, después se extenderá para una cadena de integradores de orden 3 y finalmente se mostrará que este resultado es válido para una cadena de integradores de orden n . Finalmente se resaltarán algunas propiedades del método empleado para el diseño del controlador integral.

En el Capítulo 4, se realizarán diversas simulaciones con el controlador integral, mostrando sus propiedades y su capacidad para rechazar perturbaciones. Asimismo, se mostrará como influye el grado de homogeneidad del controlador integral para la estimación de la perturbación y la precisión, teniendo como casos extremos el controlador integral lineal y el discontinuo. Finalmente, se realizarán simulaciones con el sistema por retroalimentación de salida, donde se utilizarán dos observadores presentes en la literatura.

En el Capítulo 5, se utilizará la ley control diseñada para estabilizar un sistema físico (levitador magnético), el cual nuevamente se dividirá en tres partes. Primero se diseñará la ley de control que permitirá estabilizar el origen del sistema, considerando tanto la parte estática como la dinámica. Posteriormente se realizarán las simulaciones pertinentes en Simulink de Matlab, donde se mostrará en esencia la robustez del controlador ante ciertas perturbaciones.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se escribirán conceptos y herramientas útiles para el desarrollo del trabajo. Se presenta la estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas continuos (ecuaciones diferenciales), así como sistemas discontinuos (inclusiones diferenciales). Asimismo, se dará una breve introducción a la estabilidad en tiempo finito.

Se introducen los conceptos principales de la homogeneidad, siendo un tema importante para el desarrollo de la tesis. De igual forma, se tienen algunos lemas importantes debidos a la homogeneidad.

2.1. Estabilidad en el Sentido de Lyapunov

Considere el sistema autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

donde x son los estados del sistema y $f : D \rightarrow R^n$ es un mapeo continuo en un dominio $D \subset R^n$. Suponga que $\bar{x} \in D$ es un punto de equilibrio de (2.1), es decir $f(\bar{x}) = 0$. Asimismo, sin pérdida de generalidad considérese que el punto de equilibrio es el origen, $\bar{x} = 0$. Así, de [11] tenemos la siguiente definición

Definición 1. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (2.1) es*

- *estable en sentido de Lyapunov si, para cada $\epsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0,$$

- *Inestable so no es estable,*
- *Asintóticamente estable si es estable y δ puede ser elegido, tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

La definición anterior nos dice, que un punto de equilibrio es estable en el sentido de Lyapunov, si toda solución empieza en una vecindad cercana al origen ($\|x(0)\| < \delta$) permanece cerca, de otra forma es inestable. Asimismo si toda trayectoria que empieza cerca y converge al punto de equilibrio es asintóticamente estable.

Por otro lado, demostrar el tipo de estabilidad del origen de (2.1) por medio de la definición, por lo general no es posible. Siendo que encontrar las constantes ϵ y δ para toda trayectoria no siempre es posible. Por ello es una herramienta útil para definir la estabilidad viene escrita en el siguiente teorema [11]

Teorema 1. *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (2.1) y $D \subset R^n$ un dominio que contiene a $x = 0$. Sea $V : D \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable, tal que*

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \text{ en } D \setminus \{0\}, \quad (2.2)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \text{ en } D, \quad (2.3)$$

entonces $x = 0$ es estable. Además si

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ en } D \setminus \{0\} \quad (2.4)$$

entonces $x = 0$ es asintóticamente estable. \triangle

En el Teorema 1, la función $V(x)$ es conocida como función de Lyapunov cuya existencia asegura la estabilidad de $x = 0$ para el sistema (2.1). Asimismo, una función $V(x)$ que satisface las condiciones de (2.2) es conocida como Función Candidata de Lyapunov. Por lo general es relativamente fácil proponer una función candidata de Lyapunov, sin embargo encontrar una función de Lyapunov que asegure la estabilidad de $x = 0$ es más difícil. Asimismo, el teorema 1 está basado en cuestiones energéticas, considerando $V(x)$ como una función de energía fácilmente podemos que si su derivada a lo largo de las trayectorias de (2.1) satisface la condición (2.3), implica que el sistema no genera energía y cumple con la definición 1, ya que las trayectorias permanecerán permanecerá acotadas por una curva de nivel energético y por ende cerca del punto de equilibrio $x = 0$. Más aún, cuando $\dot{V}(x)$ satisface la condición 2.4 implica que el sistema (2.1) convergerá a su punto de nivel energético más bajo, es decir a $x = 0$, el cual será un punto de equilibrio asintóticamente estable.

2.1.1. Estabilidad de Inclusiones Diferenciales

Considere la inclusión diferencial [5]

$$\dot{x} \in F(x), \quad (2.5)$$

donde $x \in R^n$. F es una función multivaluada cuyos valores son subconjuntos de R^n . Donde se asume que F es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de R^n para cada $x \in R^n$ y es una función semicontinua por arriba. De esta forma, el sistema (2.5) tiene solución, al menos localmente.

A pesar de que se pueden emplear las mismas nociones que para sistemas continuos, en el caso de sistemas discontinuos no se tiene unicidad de soluciones y por ello, se tienen dos nociones de estabilidad [5], la estabilidad débil donde la propiedad de estabilidad solo la cumple una solución y la estabilidad fuerte donde todas las soluciones poseen la propiedad de estabilidad.

Lema 1. [5] *F es fuerte y asintóticamente estable si y sólo si las soluciones existen globalmente y existe una función $\beta \in \mathcal{KL}$, tal que para cada solución $x(t, x_0)$ de (2.5) se cumple $\|x(t, x_0)\| \leq \beta(t, \|x_0\|)$.*

Definición 2. [5] *La pareja de funciones continuas (V, W) sobre R^n , con $V \in C^\infty(R^n)$ y $W \in C^\infty(R^n \setminus \{0\})$, constituyen un par de Lyapunov fuerte, y además suave, para F si las siguientes condiciones se cumplen*

1. $V(x) > 0$ y $W(x) > 0$ son positivas definidas, y $V(x)$ es propia,
2. *Decrecimiento infinitesimal fuerte*

$$\max_{y \in F(x)} \langle \nabla V(x), y \rangle \leq -W(x), \quad \forall x \in R^n \setminus \{0\} \quad \Delta$$

En esta definición, podemos ver la similitud con una función de Lyapunov para sistemas continuos. Así, se tiene el siguiente teorema para sistemas discontinuos.

Teorema 2. [5] *El origen del sistema (2.5) es fuerte y asintóticamente estable si y sólo si existe un par de Lyapunov Fuerte (V, W) . Δ*

2.1.2. Estabilidad en Tiempo Finito

Definición 3. [25] *El origen del sistema (2.1) se dice ser un punto de equilibrio estable en tiempo finito, si existe una vecindad abierta N del origen y una función $T : N \rightarrow [0, \infty)$, llamada la función de establecimiento de tiempo, tal que se cumple que*

- $T(0) = 0$ y $T(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$,
- para cada $x \in N \setminus \{0\}$, $\psi_t(x) \in N \setminus \{0\}$, $t \in [0, T(x))$ y $\psi_t(x) = 0$ para toda $t \geq T(x)$.
- para cada conjunto abierto U_ϵ tal que $0 \in U_\epsilon \subseteq N$, existe un conjunto abierto U_δ de N conteniendo 0, tal que para cada $x \in U_\delta \setminus \{0\}$, $\psi_t(x) \in U_\epsilon$, $t \geq 0$. Δ

En la definición anterior, si $N = R^n$ el origen del sistema (2.1) se dice ser un punto de equilibrio globalmente estable en tiempo finito.

Teorema 3. [25] *Suponga que existe una vecindad abierta $N \in R^n$ del origen, una función C^1 positiva definida $V : N \rightarrow R$ y números reales $k > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$, tal que $\dot{V} + kV^\alpha$ es negativa semidefinida en N , donde $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$. Entonces el origen de (2.1) es un punto de equilibrio estable en tiempo finito. Además, si T es la función de establecimiento de tiempo, entonces $T(x) \leq \frac{1}{k(1-\alpha)} V(x)^{1-\alpha}$ para toda x en alguna vecindad abierta del origen. Δ*

2.2. Homogeneidad

2.2.1. Homogeneidad Clásica

La función $f : R^n \rightarrow R$ se dice homogénea de grado m si para toda $\epsilon > 0$ se cumple que

$$f(\epsilon x) = \epsilon^m f(x), \quad \forall x,$$

siendo la propiedad de homogeneidad un escalamiento de la función. Por lo anterior es fácil concluir la homogeneidad es una restricción intrínseca de la función $f(x)$, y por lo tanto es posible determinar un conjunto de valores a partir de un punto.

Una propiedad interesante de las funciones homogéneas es la formula de Euler

$$\nabla f(x) \cdot x = m f(x).$$

2.2.2. Homogeneidad Ponderada

La homogeneidad clásica puede extenderse a funciones y campos vectoriales, mediante la homogeneidad ponderada. Así, se tienen las siguientes definiciones de [2]

Definición 4. Sea un conjunto de coordenadas (x_1, \dots, x_n) en R^n . Sea $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ el vector de pesos de las coordenadas, donde $r_i \in R_+$

- El vector de dilatación $(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}})_{\epsilon > 0}$ está definido por

$$\delta_\epsilon^{\mathbf{r}}(x) = (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n), \quad \forall x \in R^n, \forall \epsilon > 0$$

- Una función $V : R^n \rightarrow R$ se dice $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado $m \in R$ si

$$V(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}}(x)) = \epsilon^m V(x) \quad \forall x \in R^n, \forall \epsilon > 0.$$

- Un campo vectorial $f = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$ se dice $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado k si la componente f_i es $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado $k + r_i$, $\forall i$, es decir

$$f_i(\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n) = \epsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad \forall x \in R^n, \forall \epsilon > 0, i = 1, \dots, n,$$

o equivalentemente

$$f(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^k \delta_\epsilon^{\mathbf{r}} f(x), \quad \forall x \in R^n$$

- Un campo vectorial multivaluado $F(x) \in R^n$ se dice $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado k si

$$F(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}} x) = \epsilon^k \delta_\epsilon^{\mathbf{r}} F(x), \quad \forall x \in R^n, \forall \epsilon > 0 \quad \triangle$$

En la definición podemos ver que se conserva la esencia de la homogeneidad clásica, siendo que nuevamente se tiene un factor de escalamiento, sin embargo este varía con las coordenadas. Así, nuevamente es posible determinar valores de la función a partir de coordenadas conocidas.

Asimismo, se puede extender la fórmula de Euler para homogeneidad ponderada. Para ello se define al campo vectorial generalizado de Euler con la familia de dilatación $(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}})_{\epsilon>0}$ como [2]

$$e = [r_1x_1, \dots, r_nx_n]^T$$

Proposición 1. [2] Sea $(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}})_{\epsilon>0}$ y el campo vectorial generalizado de Euler e . Sea V (respectivamente, f un campo vectorial) de clase $C^1 \in R^n$, y sea $m, k \in R$. Entonces

1. V es $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado m si y sólo si $e \cdot V = mV$;
2. f es $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado k si y sólo si $[e, f] = kf$ \triangle

Corolario 1. [2] Sea $(\delta_\epsilon^{\mathbf{r}})_{\epsilon>0}$ cualquier familia de dilatación en R^n y sean V_1, V_2 (f_1, f_2) funciones (campos vectoriales) $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneas de grado m_1, m_2 (k_1, k_2). Entonces V_1V_2 (respectivamente $V_1f_1, [f_1, f_2]$) es $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneo de grado $m_1 + m_2$ (respectivamente $m_1 + k_1, k_1 + k_2$). \triangle

Por otro lado, al trabajar con $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogeneidad se definen normas $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogéneas

Definición 5. [2] Una norma $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogénea es un mapa $x \rightarrow \|x\|_{\mathbf{r},p}$, donde para cualquier $p \geq 1$

$$\|x\|_{\mathbf{r},p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{p/r_i} \right)^{\frac{1}{p}}$$

el conjunto $S_{\mathbf{r},p} = \{x : \|x\|_{\mathbf{r},p} = 1\}$ es la esfera unitaria. \triangle

2.2.3. Sistemas Homogéneos y Función de Lyapunov Homogénea

Note que un sistema lineal, puede verse como un sistema δ^1 -homogéneo de grado 1, siendo que la homogeneidad es una parte de un sistema lineal. De esta forma, basado en un sistema lineal asintóticamente estable, el cual posee una función de Lyapunov estricta cuadrática (es decir, una función δ^1 -homogénea de grado 2), entonces cualquier sistema homogéneo asintóticamente estable admite una función de Lyapunov homogénea [2]. Teniendo así el siguiente resultado

Teorema 4. [2] Sea f un campo vectorial en R^n , tal que el origen es un punto de equilibrio local y asintóticamente estable. Suponiendo que f es $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogénea de grado k para algún $\mathbf{r} \in R_+^n$. Entonces, para cualquier $p \in N^*$ y cualquier $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$, existe una función de Lyapunov estricta V para (2.1), el cual es $\delta^{\mathbf{r}}$ -homogénea de grado m y de clase C^p . \triangle

Una propiedad interesante en los sistemas homogéneos, es que el grado de homogeneidad nos permite caracterizar la razón de convergencia de las trayectorias.

Corolario 2. [2], [24] Considere el sistema (2.1) con f continua y homogénea de grado k para algún vector de pesos \mathbf{r} . Asuma que su origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, entonces

- si $k > 0$, $x = 0$ es racionalmente estable,
- si $k = 0$, $x = 0$ es exponencialmente estable,
- si $k < 0$, $x = 0$ es estable en tiempo finito. \triangle

Teorema 5. [15] Sea $\dot{x} \in F(x)$ un inclusión diferencial de Fillippov homogénea de grado negativo $l < 0$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $x = 0$ es global, uniforme y asintóticamente estable,
- $x = 0$ es global y uniformemente estable en tiempo finito,
- la inclusión diferencial es contractiva. \triangle

2.3. Desigualdades Importantes - Homogeneidad

Adicionalmente es importante mencionar algunos lemas clave, necesarios para el desarrollo en la Sección 3.4.

El primer lema, es un lema muy conocido, el cual corresponde a la desigualdad de Young.

Lema 2. [9] Para cualesquiera números reales $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 1$ y $q > 1$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, la siguiente desigualdad siempre se cumple

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q} \quad \triangle$$

El segundo lema, es una propiedad muy conocida de las funciones homogéneas continuas y será un lema clave para las pruebas realizadas.

Lema 3. [1], [20] Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ dos funciones homogéneas continuas, con mismos pesos $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ y grado m , y sea $\gamma(x) \geq 0$, tal que se cumple

$$\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\},$$

entonces, existe un número real λ^* tal que, para toda $\lambda > \lambda^*$, para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y para algún $c > 0$, se cumple que

$$\eta(x) - \lambda\gamma(x) < -c \|x\|_{\mathbf{r}, p}^m. \quad \triangle$$

El Lema 3 supone una función homogénea continua, sin embargo se sabe que este resultado se puede extender para una función discontinua. Lo anterior corresponde a

Lema 4. [6] Sean $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones homogéneas semicontinuas por abajo (o por arriba) uni-valuadas, con mismos pesos $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ y grado m . Suponga que $\gamma(x) \geq 0$ ($\gamma(x) \leq 0$) en \mathbb{R}^n . Si $\eta(x) > 0$ ($\eta(x) < 0$) para toda $x \neq 0$, tal que $\gamma(x) = 0$, entonces existe un número real λ^* tal que, para toda $\lambda > \lambda^*$, para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y para algún $c > 0$, se cumple que

$$\begin{aligned} \eta(x) + \lambda\gamma(x) &< c \|x\|_{\mathbf{r},p}^m \\ (\eta(x) + \lambda\gamma(x) < -c \|x\|_{\mathbf{r},p}^m). \quad \triangle \end{aligned}$$

Por último se añade un lema que permitirá mostrar que la adición de la acción integral no inestabiliza al controlador estabilizante y más aún, permite lidiar con algunas perturbaciones en el sistema.

Lema 5. Sean las variables reales $x, y \in \mathbb{R}$, siempre se cumple que

$$\text{sign} \left([x + y]^\beta - [x]^\beta \right) = \text{sign} (y), \quad \beta > 0$$

Demostración. Para demostrar el Lema 5, supóngase que

$$[x + y]^\beta - [y]^\beta = 0,$$

esto implica que

$$[x + y]^\beta = [y]^\beta,$$

ya que β es mayor a cero, entonces la función es monótona y por lo tanto

$$[x + y]^\beta = [y]^\beta \Leftrightarrow x + y = y \Leftrightarrow x = 0,$$

así

$$[x + y]^\beta - [y]^\beta = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

De forma análoga

$$[x + y]^\beta - [y]^\beta > 0 \Leftrightarrow [x + y]^\beta > [y]^\beta \Leftrightarrow x + y > y \Leftrightarrow x > 0,$$

y

$$[x + y]^\beta - [y]^\beta < 0 \Leftrightarrow [x + y]^\beta < [y]^\beta \Leftrightarrow x + y < y \Leftrightarrow x < 0,$$

por lo tanto, se cumple que

$$\text{sign} \left([x + y]^\beta - [x]^\beta \right) = \text{sign} (y), \quad \beta > 0 \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Controlador Integral para Sistemas Homogéneos

En este capítulo se presentará el resultado principal, el cual corresponde al controlador integral homogéneo. Para ello, se introduce el planteamiento del problema, donde se describirá brevemente cual es la tarea de control y en que sistemas funcionará el controlador integral.

Posteriormente se dividirá el diseño del controlador en dos partes. La primera es una ley de control estática, la cual se encargará de estabilizar el origen del sistema y la segunda parte, corresponde a la adición de la acción integral, con la cual se logrará rechazar perturbaciones presentes en el sistema.

Finalmente se presentará la construcción de la función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado.

3.1. Planteamiento del Problema

Sea el sistema y entrada afin con perturbación acoplada

$$\dot{z} = F(z) + G(z)(u + \mu(t)), \quad (3.1)$$

donde $z \in R^{n_z}$ son los estados del sistema, $u \in R$ es la variable de control, las funciones $F(z)$ y $G(z)$ son suficientemente suaves, y siendo $\rho(t) \in R$ alguna perturbación en el sistema. Asimismo, suponga que el sistema (3.1) tiene una salida $y = x_1$ de grado relativo n y sea el difeomorfismo $T : D \rightarrow R^{n_z}$ que transforma el sistema (3.1) a su forma normal [10]

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, x) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= f(\eta, x) + g(\eta, x)(u + \mu(t)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde la dinámica $f(\eta, x)$ es la dinámica conocida, $g(\eta, x)$ es una función conocida y no singular para toda $\eta, x \in R^{n_z}$ y $f_0(\eta, x)$ es la dinámica cero del sistema (3.1). Asimismo, la salida x_1 es tal

que la dinámica cero $\dot{\eta} = f_0(\eta, x)$ tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en η^* y es entrada estado estable con respecto a x .

Por lo tanto, es posible trabajar con el sistema reducido

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, r-1 \\ \dot{x}_n &= f(\eta, x) + g(\eta, x)(u + \mu(t)).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Ya que $f(\eta, x), g(\eta, x)$ son funciones conocidas, entonces la variable de control puede compensarla, eligiendo u como

$$u = \frac{1}{g(\eta, x)}(v - f(\eta, x)),$$

donde $v \in R$ se convierte en la nueva variable de control y el sistema en lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= v + \rho(t).\end{aligned}\tag{3.4}$$

De esta forma, el sistema (3.3) se convierte en una cadena de integradores pura en (3.4) con $\rho(t) = 0$, donde v es la dinámica del último estado. Note que no es posible compensar la perturbación $\rho(t)$ de la misma manera, ya que es una variable desconocida.

Para trabajar en un contexto más general, supóngase que el problema que se busca resolver es un problema de seguimiento para el sistema (3.4), teniendo el siguiente vector de la referencia con sus derivadas

$$X_d = [x_d, \dot{x}_d, \dots, x_d^{(n)}],$$

donde el error de seguimiento definido por $e = x - x_d$, tiene la siguiente dinámica

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= v + \rho(t) + x_d^{(n)}.\end{aligned}$$

Nótese que la n -ésima derivada de la referencia aparece en la dinámica del último estado e_n , la cual siendo que la referencia es conocida puede ser compensada por la entrada de control v , sin embargo dado que es una función que depende del tiempo, es posible considerarla como parte de la perturbación $\rho_d(t) = \rho(t) + x_d^{(n)}$, resultando en

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= e_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{e}_n &= v + \rho_d(t),\end{aligned}\tag{3.5}$$

lo que permite un diseño general para la ley de control, sin importar estructuralmente la señal de referencia. Por lo que es posible diseñar una ley de control para estabilizar el origen del sistema (3.4) y extender el resultado para el sistema (3.5) con sus respectivas variables.

De esta manera, el problema de control se convierte en estabilizar el origen del sistema (3.4), rechazando perturbaciones. Para ello, se busca hacer que el sistema en lazo cerrado sea homogéneo, ya que se tienen muchas propiedades útiles [2]. Recordando el Capítulo 2, se define $d \in R$ como el grado de homogeneidad del sistema y $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_n]^T$ como el vector de pesos, donde $r_i = r_{i-1} + d$, para $i = 1, \dots, n+2$. Sin pérdida de generalidad, se considera $r_1 = 1$.

Así, tomando las consideraciones anteriores se procede al diseño del controlador integral para estabilizar el sistema (3.4), el cual se divide en dos partes. La primera consiste en el diseño de una ley de control que estabilice el origen de (3.4) y la segunda en el diseño de la acción integral que permita compensar la perturbación $\rho(t)$.

3.2. Ley de Control Estabilizante

Para el diseño del control estabilizante, se considera el sistema (3.4) sin perturbación, el cual se convierte en la siguiente cadena de integradores

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= v.\end{aligned}\tag{3.6}$$

De [6] se sabe que la ley de control estática

$$\begin{aligned}v &= -k_n \left[|x_n|^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_{n-1} |x_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \bar{k}_2 |x_2|^{\frac{1}{1+d}} + \bar{k}_1 x_1 \right]^{1+nd}, \\ \bar{k}_i &= \prod_{j=i}^{n-1} k_j^{\frac{1}{1+jd}}\end{aligned}\tag{3.7}$$

estabiliza el origen del sistema (3.6) con grado de homogeneidad $d \in [-\frac{1}{n}, 0]$, para valores adecuados de k_j . Es fácil notar que para $d = 0$, tenemos una ley de control lineal. Sin embargo como se vio en el Capítulo 2, el controlador lineal solo nos permitirá estabilidad exponencial, mientras que para $d < 0$ el controlador nos brindará estabilidad en tiempo finito para el origen del sistema (3.6). Asimismo, se tiene control por modos deslizantes de alto orden, para $d = -\frac{1}{n}$, el cual es capaz de rechazar perturbaciones acotadas.

3.2.1. Función de Lyapunov

En [6] se presenta la función de Lyapunov que asegura la estabilidad del origen del sistema (3.6) en lazo cerrado con la ley de control (3.7), la cual se construye a partir de los siguientes elementos

$$\begin{aligned}V_i(\bar{x}_i) &= \gamma_{i-1} V_{i-1}(\bar{x}_{i-1}) + W_i(\bar{x}_i), \\ W_i(\bar{x}_i) &= \frac{1 + (i-1)d}{m} |x_i|^{\frac{m}{1+(i-1)d}} - [\nu_{i-1}]^{\frac{m-(1+(i-1)d)}{1+(i-1)d}} x_i + \left(1 - \frac{1 + (i-1)d}{m}\right) |\nu_{i-1}|^{\frac{m}{1+(i-1)d}}, \\ \nu_i(\bar{x}_i) &= -k_i [\sigma_i]^{1+id}, \\ \sigma_i(\bar{x}_i) &= |x_i|^{\frac{1}{1+(i-1)d}} - [\nu_{i-1}]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} = |x_i|^{\frac{1}{1+(i-1)d}} + k_{i-1}^{\frac{1}{1+(i-1)d}} \sigma_{i-1},\end{aligned}\tag{3.8}$$

donde

$$\begin{aligned}V_1(x_1) &= \frac{1}{m} |x_1|^m, \quad \nu_1(x_1) = -k_1 [x_1]^{1+d}, \quad \sigma_i = x_1, \\ \bar{x}_i &= [x_1, \dots, x_i]^T, \quad i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

y de acuerdo con el Teorema 4, es posible concluir que se debe cumplir $m \geq r_1 + r_2 = 2 + d$. Siendo $r_1 = 1$ y $r_2 = 1 + d$ los pesos de homogeneidad con mayor magnitud, ya que d es negativo.

Siendo que la demostración principal en [5] se realiza mediante backstepping, suponiendo que cada estado funciona como una ley de control virtual para una cadena de integradores de menor orden. No es sorprendente que la función de Lyapunov se construya de forma recursiva. De esta forma, es posible ver que en (3.8) la función de Lyapunov se va construyendo recursivamente con funciones de Lyapunov para sistemas de orden inferior y controladores con la estructura de (3.7), donde $\nu_i(\bar{x}_i)$ corresponde a la ley de control para un sistema de orden i y la función $W_i(\bar{x}_i)$ permite relacionar el estado x_i con la variable ν_{i-1} , es decir con la ley de control para un sistema de orden menor, con ello se logra mostrar que la ley de control (3.7) lleva al penúltimo estado de la cadena (3.6) a un subespacio que corresponde a la ley de control de un orden menor. Haciendo así, que los estados (x_2, \dots, x_{n-1}) se comporten como variables de control virtual y estabilicen el origen del sistema (3.6).

Con lo anterior, es posible reescribir ν_i como

$$\begin{aligned} \nu_2 &= -k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+2d} \\ \nu_i &= -k_i \left[[x_i]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} + [\nu_{i-1}]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} \right]^{1+id}, \quad i = 3, \dots, n \end{aligned} \quad (3.9)$$

siendo más fácil notar que ν_i en (3.9) representa el controlador estabilizante (3.7) de orden reducido, es decir estabiliza el origen del sistema (3.6) con $n = i$. Siendo ν_n la ley de control (3.7) que estabiliza el origen del sistema (3.6).

3.2.2. Sistema en Lazo Cerrado

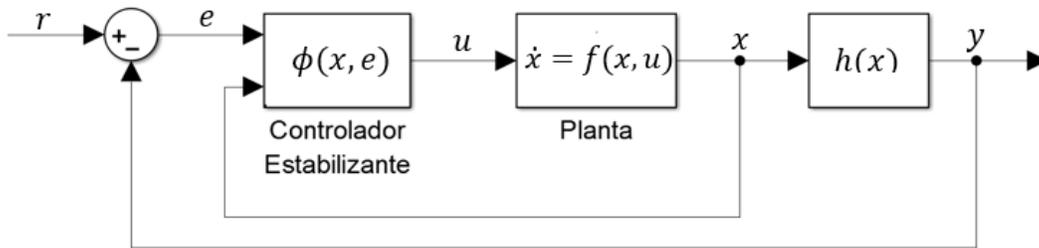


Figura 3.1: Sistema Retroalimentado

Utilizando la ley de control (3.9), el sistema (3.6) en lazo cerrado correspondiente a la Figura 3.1 se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - [\nu_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+nd}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

siendo $d \in [-\frac{1}{n}, 0]$.

Se sabe de [6] que el sistema (3.10) es estable en tiempo finito y tiene la función de Lyapunov propuesta en (3.8). Recordando la función de Lyapunov, se tiene

$$V_n(x) = \gamma_{n-1} V_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) + \frac{1 + (n-1)d}{m} |x_n|^{\frac{m}{1+(n-1)d}} - [\nu_{n-1}]^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} x_n + \left(1 - \frac{1 + (n-1)d}{m}\right) |\nu_{n-1}|^{\frac{m}{1+(n-1)d}},$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.10) es

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(x) = & \gamma_{n-1} \dot{V}_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) - \\ & k_n \left[|x_n|^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - |\nu_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+nd} \left[|x_n|^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} - |\nu_{n-1}|^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \right] - \\ & \frac{m - (1 + (n-1)d)}{1 + (n-1)d} (x_n - \nu_{n-1}) |\nu_{n-1}|^{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \dot{\nu}_{n-1}, \end{aligned}$$

donde es importante notar que aunque ν_{n-1} no es diferenciable, los términos $|\nu_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-1)d}}$ y $|\nu_{n-1}|^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}}$ si lo son. Sin embargo, por simplicidad sus derivadas se escriben en términos de $\dot{\nu}_{n-1}$. Así, es posible notar que el segundo término es negativo semidefinido y la región donde este se hace cero es en $S = \{x_n = \nu_{n-1}\}$, se tiene

$$\dot{V}_n(x) = \gamma_{n-1} \dot{V}_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) |_{\dot{x}_{n-1} = \dot{x}_n = \dot{\nu}_{n-1}}$$

la cual, por construcción es negativa. Por lo tanto, de acuerdo al Lema 3 es posible hacer $\dot{V} < -c \|x\|_r^{m+d}$, para valores suficientemente grandes de k_n .

3.3. Acción Integral

Basado en la ley de control estabilizante (3.7), se añade la ley de control dinámica correspondiente a la acción integral como se observa en la Figura 3.2.

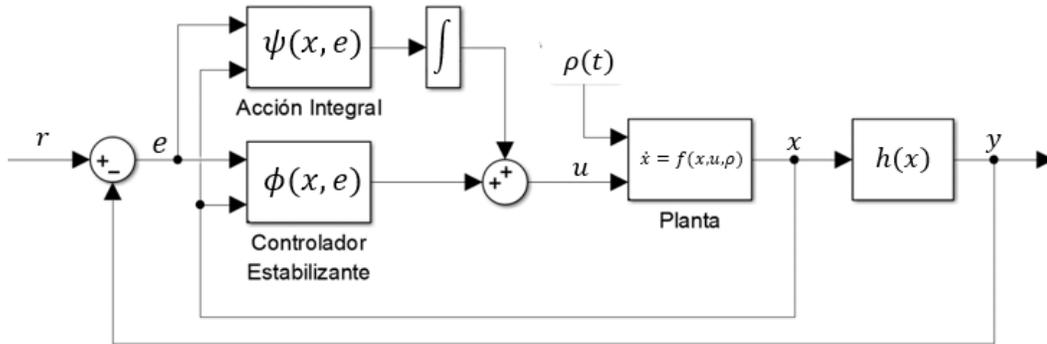


Figura 3.2: Sistema Retroalimentado con Acción Integral

La acción integral que se considera tiene la siguiente estructura

$$\dot{z} = -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+(n+1)d}, \quad (3.11)$$

la cual se escribe de tal forma que se conserva la homogeneidad del sistema y por lo mismo se añade una nueva cota para d , siendo que la potencia no puede ser negativa, se tiene que $d \geq -\frac{1}{n+1}$. Nótese que se tiene el caso del control integral discontinuo cuando $d = -\frac{1}{n+1}$ y el caso del control integral continuo para $d \in (-\frac{1}{n+1}, 0]$.

Es importante mencionar que la forma de la acción integral puede tener cualquier estructura, siempre y cuando la acción integral satisfaga

$$\begin{aligned} \dot{z}(x) &= k_{I1} \phi_z(x), \quad \phi_z : R^n \rightarrow R \text{ y homogénea de grado } 1 + (n+1)d, \\ \phi_z(x_1, 0, \dots, 0) &= -\psi_z(x_1), \quad x_1 \psi_z(x_1) > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cabe mencionar que la condición (3.12) es una condición natural, ya que en estado de equilibrio el único estado del sistema (3.4) diferente de cero es x_1 y la ganancia k_{I1} nos limita la acción integral como se haría en un controlador integral clásico.

3.4. Ley de Control Integral

De esta manera, es posible formular el siguiente teorema para $d \leq 0$.

Teorema 6. *Sea el sistema (3.4) y elijase el grado de homogeneidad $d \in [-\frac{1}{n+1}, 0]$. Entonces la ley de control*

$$\begin{aligned} v &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_{n-1} [x_{n-1}]^{\frac{1}{r_{1+(n-2)d}}} + \dots + \bar{k}_2 [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + \bar{k}_1 x_1 \right]^{r_{1+nd}} + z, \\ \bar{k}_i &= \prod_{j=i}^{n-1} k_j^{\frac{1}{r_{j+1}}}, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\dot{z} = k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+(n+1)d},$$

estabiliza el origen del sistema (3.4) exponencialmente, para valores adecuados de k_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, k_{I1} , cualesquiera valores de k_{Ij} , $j \in \{2, \dots, n\}$ y perturbaciones constantes.

Además, si el grado de homogeneidad d es negativo, la ley de control (3.13) estabiliza el origen del sistema (3.4) en tiempo finito.

Más aún si el grado de homogeneidad es $d = -\frac{1}{n+1}$, es posible elegir k_{I1} tal que el controlador (3.13) estabiliza el origen del sistema (3.4) en tiempo finito, rechazando perturbaciones Lipschitz con una constante Lipschitz $L < k_{I1}$. \triangle

En el Teorema 6 es importante notar que la ganancia más influyente en la acción integral es k_{I1} y que las demás ganancias k_{I2} , ..., k_{In} podrían tomar cualquier valor, inclusive cero. Esto se debe

a que la acción integral funciona como un compensador de la perturbación y al ser una cadena de integradores, el único estado diferente de cero en un punto de equilibrio es x_1 . Por lo que es posible realizar la acción integral únicamente con el primer estado del sistema, lo que resulta conveniente, ya que este estado es común encontrarlo como salida de un sistema y no es necesario estimarlo, por lo que no se introduce ruido adicional en la acción integral.

Asimismo, las ganancias del controlador no se ven afectadas por la adición de la acción integral, salvo la ganancia del último estado. Esto se debe principalmente a que la acción integral tiene su propio parámetro k_{I1} y este puede ser suficientemente pequeño, de tal manera no influya en la estabilidad del origen del sistema (3.14). Sin embargo, en el caso discontinuo como se menciona en el Teorema 6, la constante Lipschitz de las perturbaciones que puede rechazar el controlador (3.13) debe ser menor que la ganancia k_{I1} .

Por otro lado, es importante notar que cuando $1 + (n + 1) = 0$, es decir, el lado derecho del control integral es discontinuo, la única restricción que se tiene para la perturbación se encuentra en su derivada, por lo que la perturbación puede no estar acotada, satisfaciendo las condiciones del Teorema 6. Con lo anterior, es fácil ver que el controlador integral discontinuo es capaz de rechazar perturbaciones crecientes y variantes en el tiempo, en contraste con el control integral continuo, que solo puede compensar perturbaciones constantes.

Vale la pena mencionar que por la propiedad de escalamiento en la homogeneidad, es posible mostrar que si las ganancias $k_{i=1,\dots,n}$ y $k_{I\{1,\dots,n\}}$ estabilizan el origen del sistema (3.4) en lazo cerrado para una constante Lipschitz L , entonces las ganancias $\lambda^{\frac{1}{r_{i=1,\dots,n}}} k_{i=1,\dots,n}$ y $\lambda^{\frac{1}{r_{i=1,\dots,n}}} k_{I\{1,\dots,n\}}$ estabilizarán el origen del sistema (3.4) en lazo cerrado para una constante Lipschitz λL , para cualquier $\lambda > 0$.

3.5. Propiedades del Algoritmo

Del desarrollo de la prueba que se mostrará en la Sección 3.6, es posible destacar las siguientes propiedades del método:

- El controlador integral resultante utiliza como base la ley de control estabilizante para el sistema sin perturbación y la función de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado.
- Las ganancias del controlador estabilizante no se ven afectadas por la adición de la acción integral con ganancia pequeña.
- El estado aumentado nos permite llevar al primer estado a la trayectoria deseada, rechazando perturbaciones.
- El grado de homogeneidad del sistema nos indica el tipo de perturbación que se puede soportar, de forma especial un controlador integral discontinuo puede soportar perturbaciones Lipschitz.
- La n -ésima derivada de la referencia puede ser considerada como parte de las perturbación.

3.6. Construcción de la Función de Lyapunov

3.6.1. Sistema en Lazo Cerrado

En esta Sección se mostrará que la adición de la acción integral, además de no inestabilizar al controlador estático, permite lidiar con perturbaciones cuyas derivadas están acotadas.

De esta manera, se sustituye la ley de control (3.13) en el sistema (3.4). Asimismo, como la compensación de la perturbación se realiza en la parte integral, se define la variable $x_{n+1} = \rho(t) + z$ y se reescribe el sistema en términos de la derivada de $\rho(t)$. Por lo tanto el sistema (3.4) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{r_n}} + \bar{k}_{n-1} [x_{n-1}]^{\frac{1}{r_{n-1}}} + \dots + \bar{k}_2 [x_2]^{\frac{1}{r_2}} + \bar{k}_1 x_1 \right]^{r_{n+1}} + x_{n+1}, \\ \dot{x}_{n+1} &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{r_2}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{r_n}} \right]^{r_{n+2}} + \dot{\rho}(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.6.2. Idea General

El desarrollo de las pruebas realizadas a continuación tiene una ideal general base. Esta idea no es posible generalizarla a cualquier controlador por el momento, pero puede ser aplicado a varios controladores con sus respectivas restricciones.

Primero, se supone que se tiene un sistema como una cadena de integradores, es decir un sistema en la forma de (3.4). Asimismo, se asume que existe una ley de control por retroalimentación de estados estática y homogénea de grado $r_u = r_{n+1} = 1 + nd$

$$v = \phi(x), \quad \phi : R^n \rightarrow R \quad (3.15)$$

que estabiliza el origen del sistema (3.4) en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi(x) + \rho(t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

en ausencia de la perturbación $\rho(t)$ y existe una función de Lyapunov homogénea $W(x)$ de grado $m \geq r_1 + r_2 = 2 + d$ que lo asegura. Siendo el origen del sistema (3.16) sin perturbación un punto de equilibrio estable en tiempo finito.

Por otro lado, se considera la acción integral homogénea de grado $r_z = r_{n+2} = 1 + (n+1)d$, con la siguiente estructura

$$\dot{z} = k_{I1} \phi_z(x), \quad \phi_z : R^n \rightarrow R, \quad (3.17)$$

y la cual cumple las condiciones en (3.12), es decir

$$\phi_z(x_1, 0, \dots, 0) = -\psi_z(x_1), \quad x_1 \psi_z(x_1) > 0. \quad (3.18)$$

De esta manera, uniendo la ley de control estática (3.15) y la acción integral (3.17), se tiene

$$\begin{aligned} u &= \phi(x) + z, \\ \dot{z} &= k_{I1}\phi_z(x), \end{aligned} \quad (3.19)$$

el cual corresponde al controlador integral homogéneo, siendo un caso particular el controlador (3.13).

Es importante mencionar que las funciones $\phi(x)$ y $\phi_z(x)$ deben ser continuas y por ende no pueden tener grado de homogeneidad negativo, por ello el grado del sistema resultante se ve restringido por el grado de homogeneidad de $\phi_z(x)$, es decir por r_{n+2} y por lo tanto el grado de homogeneidad debe ser mayor o igual a $-\frac{1}{n+1}$. Así, el grado de homogeneidad del sistema en lazo cerrado es $d \in [-\frac{1}{n+1}, 0]$, teniendo el caso de un controlador integral lineal cuando $d = 0$, un controlador integral discontinuo cuando $d = -\frac{1}{n+1}$ y un controladores integrales continuos con estabilidad en tiempo finito del origen, para grado de homogeneidad $d \in (-\frac{1}{n+1}, 0)$.

Utilizando la ley de control integral (3.17) en (3.4) y definiendo un estado aumentado $x_{n+1} = z + \rho(t)$, se obtiene el siguiente sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= \phi(x) + x_{n+1}, \\ \dot{x}_{n+1} &= k_{I1}\phi_z(x) + \dot{\rho}(t), \end{aligned} \quad (3.20)$$

en el cual, para $x_{n+1} = 0$ se tiene el sistema en lazo cerrado del control estabilizante (3.16). Por esta razón, es posible pensar que la función de Lyapunov $W(x)$ que asegura estabilidad del origen del sistema (3.16), es útil para el sistema aumentado. Puede notarse que el sistema (3.14), tiene la estructura presente en el sistema (3.20)

Ahora se analiza el punto de equilibrio para el sistema aumentado, para ello se hace la dinámica cero y se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 0 &= \phi(x) + x_{n+1}, \end{aligned}$$

donde es posible ver que los estados x_2, \dots, x_n son cero y el valor de x_1 es dependiente del estado x_{n+1} , dado por la siguiente función

$$x_1 = \phi_{x_1}^{-1}(x_{n+1}), \quad (3.21)$$

donde ϕ_{x_1} representa la función donde únicamente participa x_1 , siendo que los demás estados son idénticamente cero.

Así, es posible definir una variable auxiliar, la cual relaciona el estado x_1 con su valor en estado de equilibrio (3.21). Por lo tanto, se tiene

$$\xi_1 = x_1 - \phi_{x_1}^{-1}(x_{n+1}), \quad (3.22)$$

cuya derivada es

$$\dot{\xi}_1 = x_2 - \frac{\partial \phi_{x_1}^{-1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} \dot{x}_{n+1}, \quad (3.23)$$

donde es importante notar que $\phi_{x_1}^{-1}(x_{n+1})$ no es diferenciable y por tanto $\frac{\partial \phi_{x_1}^{-1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}$ no es continua si el grado de homogeneidad del sistema fuese positivo. Por lo anterior, el grado de homogeneidad del sistema (3.20) debe ser $d \leq 0$.

De esta manera, se construye una nueva función de Lyapunov, basada en la función de Lyapunov del sistema (3.16) sin perturbación. Para ello, se sustituye el estado x_1 por la nueva variable ξ_1 en la función de Lyapunov $W(x)$ para el sistema nominal y se añade un término homogéneo del estado aumento x_{n+1} . Teniendo el resultado siguiente

$$V(x) = W(\xi_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{1 + nd}{m} |x_{n+1}|^{\frac{m}{1+nd}} \quad (3.24)$$

De esta manera, se tiene una función de Lyapunov que asegura la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema (3.16), para alguna clase de perturbaciones.

En las siguientes tres secciones, se mostrará el procedimiento para nuestro caso en particular. Recordando que esta idea no se puede aplicar de forma general. Para facilitar la lectura se presentarán los casos de orden $n = 2$ y $n = 3$, y finalmente el caso de orden arbitrario, aunque estrictamente sería suficiente sólo el último caso.

3.6.3. Controlador Integral - Orden 2

Para comenzar, la prueba básica se realiza con el controlador de orden 2, análogamente a [20] se mostrará que el controlador integral es capaz de estabilizar el origen de una cadena de integradores de orden 2.

De esta manera, el sistema (3.14) para orden 2 se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \left[|x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+2d} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_{I1} \left[|x_1 + k_{I2} |x_2|^{\frac{1}{1+d}} \right]^{1+3d} + \dot{\rho}(t), \end{aligned} \quad (3.25)$$

y de acuerdo a (3.8), se construye la función de Lyapunov nominal para el controlador estabilizante, resultando en

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \gamma_1 V_1(x_1) + W_2(x_1, x_2) \\ &= \frac{\gamma_1}{m} |x_1|^m + \frac{1+d}{m} |x_2|^{\frac{m}{1+d}} + k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} |x_1|^{m-(1+d)} x_2 + \left(1 - \frac{1+d}{m}\right) k_1^{\frac{m}{1+d}} |x_1|^m, \end{aligned}$$

con $\gamma_1 > 0$.

Así, se utilizará la función de Lyapunov para el sistema aumentado, sin embargo la acción integral busca compensar la perturbación en el punto de equilibrio de los estados del sistema (3.4). Por lo tanto, haciendo la dinámica cero se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -k_2 \left[|x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+2d} + x_3, \end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} x_1 &= k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

A partir del punto de equilibrio (3.26), se define la siguiente variable

$$\xi_1 = x_1 - k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}},$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= x_2 + \frac{1}{1+2d} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_3|^{\frac{-2d}{1+2d}} \left[k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} \right]^{1+3d} - \dot{\rho}(t) \right] \\ &= x_2 + \frac{1}{1+2d} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_3|^{\frac{-2d}{1+2d}} \left[k_{I1} \left[\xi_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+3d} - \dot{\rho}(t) \right]. \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo x_1 por la nueva variable ξ_1 en la función de Lyapunov nominal y añadiendo un término homogéneo de x_3 que nos permita asegurar que la nueva función candidata de Lyapunov sea positiva definida, se tiene

$$V_2(x) = \frac{\gamma_1}{m} |\xi_1|^m + \frac{1+d}{m} |x_2|^{\frac{m}{1+d}} + k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} [\xi_1]^{m-(1+d)} x_2 + \left(1 - \frac{1+d}{m}\right) k_1^{\frac{m}{1+d}} |\xi_1|^m + \frac{1+2d}{m} |x_3|^{\frac{m}{1+2d}},$$

donde es fácil mostrar que es positiva definida mediante el Lema 2, en el cual se puede ver que los términos cruzados (de signo indefinido) son dominados por los términos positivos.

Derivando la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (3.25), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(x) &= \left(\left(\gamma_1 + (m - (1+d)) k_1^{\frac{m}{1+d}} \right) [\xi_1]^{m-1} + (m - (1+d)) k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} |\xi_1|^{m-(2+d)} x_2 \right) \dot{\xi}_1 - \\ &\quad \left([x_2]^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} + k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} [\xi_1]^{m-(1+d)} \right) \left(k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 + k_2^{\frac{-1}{1+2d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+2d} - x_3 \right) - \\ &\quad [x_3]^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left[k_{I1} \left[\xi_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+3d} - \dot{\rho}(t) \right], \end{aligned}$$

la cual, es posible escribirla como

$$\dot{V}_2(x) = F_1(x) + F_2(x, \dot{\rho}(t)),$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \left(\left(\gamma_1 + (m - (1 + d))k_1^{\frac{m}{1+d}} \right) [\xi_1]^{m-1} + (m - (1 + d))k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} |\xi_1|^{m-(2+d)} x_2 \right) x_2 - \\
&\quad k_2 \left([x_2]^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} + k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} [\xi_1]^{m-(1+d)} \right) \alpha_1(x) \\
\alpha_1(x) &= \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 + k_2^{\frac{-1}{1+2d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+2d} - k_2^{-1} x_3 \\
F_2(x, \dot{\rho}(t)) &= -k_{I1} \alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) \\
\alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) &= \left[-\frac{1}{1+2d} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} \left(\left(\gamma_1 + (m - (1 + d))k_1^{\frac{m}{1+d}} \right) [\xi_1]^{m-1} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (m - (1 + d))k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} |\xi_1|^{m-(2+d)} x_2 \right) |x_3|^{\frac{-2d}{1+2d}} + [x_3]^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \right] \times \\
&\quad \left[\left[\xi_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+3d} - \frac{1}{k_{I1}} \dot{\rho}(t) \right]
\end{aligned}$$

Es importante notar que en el caso discontinuo, es posible acotar $\dot{V}_2(x)$ de la siguiente manera

$$\dot{V}_2(x) \leq F_1(x) + \text{máx } F_2(x, L),$$

siendo $\text{máx } F_2(x, L)$ y $F_1(x)$ funciones homogéneas uni-valuadas semicontinuas por arriba.

Analizando el segundo término de la función $F_1(x)$, se tiene la función $\alpha_1(x)$

$$\alpha_1(x) = \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 + k_2^{\frac{-1}{1+2d}} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+2d} - k_2^{-1} x_3,$$

recordando el Lema 5, se tiene que

$$\text{sign}(\alpha_1(x)) = \text{sign} \left([x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right),$$

anulándose sólo cuando

$$[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 = 0.$$

Por lo tanto, el segundo término de $F_1(x)$ tiene signo negativo y en la región donde este se desvanece, es decir cuando $[x_2]^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} + k_1^{\frac{m-(1+d)}{1+d}} [\xi_1]^{m-(1+d)} = 0$ o bien $S_1 = \{x_2 = -k_1 [\xi_1]^{1+d}\}$, la función se convierte en

$$\begin{aligned}
F_1|_{S_1} &= -k_1 \left(\gamma_1 + (m - (1 + d))k_1^{\frac{m}{1+d}} \right) |\xi_1|^{m-d} + (m - (1 + d))k_1^{\frac{m+1+d}{1+d}} [\xi_1]^{m+d} \\
&\leq -k_1 \gamma_1 |\xi_1|^{m+d}
\end{aligned}$$

la cual es negativa para $k_1 > 0$. Utilizando el Lema 3 (o 4), se tiene $F_1 < -c \|(\xi_1, x_2)\|_{r,p}^{m+d}$ para k_2 suficientemente grande.

Nótese que $F_1(x) = 0$ solo en el conjunto $S_2 = \{(\xi_1, x_2) = 0\}$, teniendo el siguiente valor de F_2 en el conjunto S_2

$$F_2|_{S_2} = -k_{I1}k_2^{-\frac{1+3d}{1+2d}}k_1^{-\frac{1+3d}{1+d}}|x_3|^{\frac{m+d}{1+2d}} + [x_3]^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}}\dot{\rho}(t),$$

la cual es negativa para perturbaciones cuyas derivadas se encuentran acotadas por

$$|\dot{\rho}(t)| < k_{I1}k_2^{-\frac{1+3d}{1+2d}}k_1^{-\frac{1+3d}{1+d}}|x_3|^{\frac{1+3d}{1+2d}}. \quad (3.27)$$

Por lo tanto, utilizando el Lema 3 (o 4) es posible asegurar que $\dot{V}_2(x)$ es negativa definida para k_{I1} suficientemente pequeño. Y por ende se tiene estabilidad en tiempo finito del origen del sistema (3.25), para perturbaciones que satisfagan (3.27). Note que una perturbación constante siempre lo satisface.

Por otro lado, se tiene el controlador integral discontinuo para $d = -\frac{1}{3}$. Sustituyendo en (3.27) se tiene

$$|\dot{\rho}(t)| < k_{I1},$$

el cual nos lleva a un controlador capaz de soportar perturbaciones Lipschitz, con una constante Lipschitz menor a k_{I1} .

Es importante notar que las restricciones que se tienen, únicamente se encuentran en la derivada de la perturbación, siendo de esta manera que el control integral puede soportar inclusive perturbaciones no acotadas.

3.6.4. Controlador Integral - Orden 3

Análogo al caso de orden 2, se realizará la prueba para el caso de orden 3, donde el sistema (3.14) para orden 3 se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3 \left[[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+3d} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_{I3} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+4d} + \dot{\rho}(t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

nuevamente, se construye la función de Lyapunov nominal para el controlador estabilizante, utilizando (3.8). Obteniendo

$$\begin{aligned} V_3(x) &= \gamma_2 V_2(x) + W_3(x) \\ &= \gamma_2 V_2(x) + \frac{1+2d}{m} |x_3|^{\frac{m}{1+2d}} + k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{m-(1+2d)} x_3 + \\ &\quad \left(1 - \frac{1+2d}{m} \right) k_2^{\frac{m}{1+2d}} \left| [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right|^m, \end{aligned}$$

la cual contiene la función de Lyapunov para el sistema de orden 2 y añade términos que relaciona el nuevo estado x_3 con los estados del sistema de orden 2.

Nuevamente se busca, encontrar el punto de equilibrio de los estados del sistema nominal. Por lo tanto, se hace cero su dinámica

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= x_3 \\ 0 &= -k_3 \left[|x_3|^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} |x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+3d} + x_4, \end{aligned}$$

obteniendo

$$\begin{aligned} x_1 &= k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_4|^{\frac{1}{1+3d}} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Fácilmente podemos ver, que tanto en (3.26) y (3.29) el único estado diferente de cero es x_1 . Así, se define nuevamente la variable

$$\xi_1 = x_1 - k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_4|^{\frac{1}{1+3d}},$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= x_2 + \frac{1}{1+3d} k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_4|^{\frac{-3d}{1+3d}} \left[k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} |x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_{I3} |x_3|^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+4d} - \dot{\rho}(t) \right] \\ &= x_2 + \frac{1}{1+3d} k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_4|^{\frac{-3d}{1+3d}} \left[k_{I1} \left[\xi_1 + k_{I2} |x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_{I3} |x_3|^{\frac{1}{1+2d}} + k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_4|^{\frac{1}{1+3d}} \right]^{1+4d} - \dot{\rho}(t) \right] \end{aligned}$$

Nuevamente, se sustituye x_1 por la nueva variable ξ_1 en la función de Lyapunov nominal y se añade un término homogéneo de x_4 que permita asegurar que la nueva función candidata de Lyapunov sea positiva definida, por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} V_3(x) &= \gamma_2 V_2(\xi_1, x_2) + \frac{1+2d}{m} |x_3|^{\frac{m}{1+2d}} + k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left[|x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{m-(1+2d)} x_3 + \\ &\quad \left(1 - \frac{1+2d}{m} \right) k_2^{\frac{m}{1+2d}} \left[|x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^m + \frac{1+3d}{m} |x_4|^{\frac{m}{1+3d}}, \end{aligned}$$

para la cual, se puede mostrar que es positiva definida por el Lema 2.

Derivando la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (3.28),

se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(x) = & \gamma_2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} V_2(\xi_1, x_2) \dot{\xi}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2(\xi_1, x_2) x_3 \right) + (m - (1 + 2d)) k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left| [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right|^{m-(2+2d)} \times \\ & \left(\frac{1}{1+d} |x_2|^{-\frac{d}{1+d}} x_3 + k_1^{\frac{1}{1+d}} \dot{\xi}_1 \right) \left(x_3 + k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{1+2d} \right) - \\ & \left([x_3]^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} + k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{m-(1+2d)} \right) \times \\ & \left(k_3 \left[[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 + k_3^{\frac{-1}{1+3d}} [x_4]^{\frac{1}{1+3d}} \right]^{1+3d} - x_4 \right) - \\ & \left[x_4 \right]^{\frac{m-(1+3d)}{1+3d}} \left[k_{I1} \left[\xi_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_{I3} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_4]^{\frac{1}{1+3d}} \right]^{1+4d} - \dot{\rho}(t) \right], \end{aligned}$$

la cual, es posible escribirla como

$$\dot{V}_2(x) = F_1(x) + F_2(x, \dot{\rho}(t)),$$

donde

$$\begin{aligned} F_1(x) = & \gamma_2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} V_2(\xi_1, x_2) x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2(\xi_1, x_2) x_3 \right) + \\ & (m - (1 + 2d)) k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left| [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right|^{m-(2+2d)} \times \\ & \left(\frac{1}{1+d} |x_2|^{-\frac{d}{1+d}} x_3 + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_2 \right) \left(x_3 + k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{1+2d} \right) - \\ & k_3 \left([x_3]^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} + k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{m-(1+2d)} \right) \alpha_1(x) \\ \alpha_1(x) = & \left[[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 + k_3^{\frac{-1}{1+3d}} [x_4]^{\frac{1}{1+3d}} \right]^{1+3d} - k_3^{-1} x_4 \\ F_2(x, \dot{\rho}(t)) = & -k_{I1} \alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) \\ \alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) = & \left[-\frac{1}{1+3d} k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} |x_4|^{\frac{-3d}{1+3d}} \left(\gamma_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} V_2(\xi_1, x_2) + (m - (1 + 2d)) k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} \times \right. \right. \\ & \left. \left| [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right|^{m-(2+2d)} \left(x_3 + k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{1+2d} \right) \right) + [x_4]^{\frac{m-(1+3d)}{1+3d}} \right] \times \\ & \left[\left[\xi_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_{I3} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_3^{\frac{-1}{1+3d}} k_2^{\frac{-1}{1+2d}} k_1^{\frac{-1}{1+d}} [x_4]^{\frac{1}{1+3d}} \right]^{1+4d} - \frac{1}{k_{I1}} \dot{\rho}(t) \right], \end{aligned}$$

Nuevamente en el caso discontinuo, es posible acotarla por

$$\dot{V}_3(x) \leq F_1(x) + \text{máx } F_2(x, L),$$

siendo máx $F_2(x, L)$ y $F_1(x)$ funciones homogéneas uni-valuadas semicontinuas por arriba.

Nuevamente, para $F_1(x)$ se tiene la función $\alpha_1(x)$

$$\alpha_1(x) = \left[[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 + k_3^{\frac{-1}{1+3d}} [x_4]^{\frac{1}{1+3d}} \right]^{1+3d} - k_3^{-1} x_4$$

la cual, mediante el Lema 5 es posible demostrar que satisface

$$\text{sign}(\alpha_1(x)) = \text{sign} \left([x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right),$$

anulándose sólo cuando

$$[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 = 0.$$

De tal manera, el último término en $F_1(x)$ es negativo. En la región donde este se desvanece, es decir cuando $[x_3]^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} + k_2^{\frac{m-(1+2d)}{1+2d}} \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{m-(1+2d)} = 0$ o bien $S_1 = \{x_3 = -k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{1+2d}\}$, se tiene

$$F_1|_{S_1} = \gamma_2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} V_2(\xi_1, x_2) x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} V_2(\xi_1, x_2) x_3 \right) \Big|_{x_3 = -k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{1+2d}},$$

donde es fácil ver, que en la región en donde se desvanece, x_3 se convierte en el controlador para el sistema de orden 2 y siendo que la función que no se ha desvanecido corresponde a la derivada de la función de Lyapunov de orden 2 ($\dot{V}_2(x)$) y de acuerdo al Lema 3 (o 4), la función se puede acotar por $F_1 < -c \|(\xi_1, x_2, x_3)\|_{r,p}^{m+d}$ para valores de k_3 y k_2 suficientemente grandes. Nótese que el valor de la ganancia k_2 no se ve afectado, por lo que puede ser el mismo que en el caso nominal.

Nuevamente se tiene que $F_1(x) = 0$ solo en el conjunto $S_2 = \{(\xi_1, x_2, x_3) = 0\}$, teniendo el valor de F_2 en ese conjunto

$$F_2|_{S_2} = -k_{I1} k_3^{-\frac{1+4d}{1+3d}} k_2^{-\frac{1+4d}{1+2d}} k_1^{-\frac{1+4d}{1+d}} |x_4|^{\frac{m+d}{1+3d}} + [x_4]^{\frac{m-(1+3d)}{1+3d}} \dot{\rho}(t),$$

la cual es negativa para perturbaciones cuyas derivadas se encuentran acotadas por

$$|\dot{\rho}(t)| < k_{I1} k_3^{-\frac{1+4d}{1+3d}} k_2^{-\frac{1+4d}{1+2d}} k_1^{-\frac{1+4d}{1+d}} |x_4|^{\frac{1+4d}{1+3d}}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, nuevamente utilizando el Lema 3 (o 4) es posible asegurar que $\dot{V}_3(x)$ es negativa para k_{I1} suficientemente pequeño. Y por ende se tiene estabilidad en tiempo finito del origen del sistema (3.28), para perturbaciones que satisfagan (3.30).

Nuevamente, se tiene el controlador integral discontinuo para $d = -\frac{1}{4}$. Sustituyendo en (3.30) se tiene

$$|\dot{\rho}(t)| < k_{I1},$$

el cual nuevamente soporta perturbaciones Lipschitz, con una constante Lipschitz menor a k_{I1} .

3.6.5. Controlador Integral - Orden n

Finalmente se realizará el procedimiento para el caso general, con el cual se podrá validar el Teorema 6. Como se ha observado en los casos anteriores, el procedimiento para las pruebas es el mismo. Para ello, se recuerda el sistema (3.14)

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_{n-1} [x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \bar{k}_1 x_1 \right]^{1+nd} + x_{n+1}, \\ \dot{x}_{n+1} &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+(n+1)d} + \dot{\rho}(t), \end{aligned} \quad (3.31)$$

En el caso de la función de Lyapunov para el sistema nominal, es importante que notar que el elemento crucial será el que relaciona la variable x_n con todas variables anteriores, es decir $W_n(x)$. Ya que como se vio en el caso de orden 3, la función de Lyapunov para el sistema (3.31) es constituida por este elemento y la función de Lyapunov sistema de orden reducido, es decir $V_{n-1}(x)$.

De la ecuación (3.8), es posible construir los siguientes elementos

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) &= [x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \tilde{k}_{n-2} [x_{n-2}]^{\frac{1}{1+(n-3)d}} + \dots + \tilde{k}_2 [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + \tilde{k}_1 x_1 \\ \tilde{k}_i &= \prod_{j=i}^{n-2} k_j^{\frac{1}{1+jd}}; \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \nu_{n-1} &= -k_{n-1} \left[[x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \tilde{k}_{n-2} [x_{n-2}]^{\frac{1}{1+(n-3)d}} + \dots + \tilde{k}_2 [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + \tilde{k}_1 x_1 \right]^{1+(n-1)d}, \end{aligned}$$

los cuales se reescribirán de forma más compacta

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) &= [x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \tilde{k}_1 x_1 \\ \tilde{k}_i &= \prod_{j=i}^{n-2} k_j^{\frac{1}{1+jd}}; \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \nu_{n-1} &= -k_{n-1} \left[[x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \tilde{k}_1 x_1 \right]^{1+(n-1)d}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

De esta manera, utilizando (3.8) y (3.32) es posible construir la función de Lyapunov del sistema nominal

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \gamma_{n-1} V_{n-1}(x) + W_n(x) \\ &= \gamma_{n-1} V_{n-1}(x) + \\ &\quad \frac{1 + (n-1)d}{m} |x_n|^{\frac{m}{1+(n-1)d}} + k_{n-1}^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \left[[x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \tilde{k}_1 x_1 \right]^{m-(1+(n-1)d)} x_n + \\ &\quad \left(1 - \frac{1 + (n-1)d}{m} \right) k_{n-1}^{\frac{m}{1+(n-1)d}} \left[[x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \tilde{k}_1 x_1 \right]^m, \end{aligned}$$

con la cual se asegura la estabilidad del origen del sistema (3.31), pero sin el estado x_{n+1} .

Por otro lado, recordando las ganancias \bar{k}_i del controlador (3.13) presentes en (3.31)

$$\bar{k}_i = \prod_{j=i}^{n-1} k_j^{\frac{1}{j+1}} = \prod_{j=i}^{n-1} k_j^{\frac{1}{1+jd}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

es posible notar la siguiente relación entre estas y las ganancias \tilde{k}_i presentes en la ecuación (3.32)

$$\bar{k}_i = k_{n-1}^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \tilde{k}_i. \quad (3.33)$$

Buscando nuevamente el punto de equilibrio, se tienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ 0 &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_{n-1} [x_{n-1}]^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \bar{k}_2 [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + \bar{k}_1 x_1 \right]^{1+nd} + x_{n+1}, \end{aligned}$$

de las cuales se tiene el punto de equilibrio

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]^{\frac{1}{1+nd}}, \\ x_i &= 0, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.34)$$

el cual, al igual que en los sistemas de orden 2 y 3, el único estado diferente de cero es x_1 . Y nuevamente se define la variable

$$\xi_1 = x_1 - \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]^{\frac{1}{1+nd}},$$

cuya derivada es

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= x_2 + \frac{1}{1+nd} \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} |x_{n+1}|^{-\frac{nd}{1+nd}} \left[k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+nd} - \dot{\rho}(t) \right], \\ &= x_2 + \frac{1}{1+nd} \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} |x_{n+1}|^{-\frac{nd}{1+nd}} \left[k_{I1} \left[\xi_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+(n+1)d} - \dot{\rho}(t) \right] \end{aligned}$$

Al igual que en los caso de orden 2 y 3, se sustituye x_1 por la nueva variable ξ_1 en la función de Lyapunov original y se añade un término homogéneo de la variable aumentada (x_{n+1}), de tal forma que la nueva función candidata de Lyapunov sea positiva definida. Para ello, análogo al control estabilizante en la Sección 3.2 se definen las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \nu_{\xi_2} &= -k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} \xi_1 \right]^{1+2d} \\ \nu_{\xi_i} &= -k_i \left[[x_i]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} + [\nu_{i-1}]^{\frac{1}{1+(i-1)d}} \right]^{1+id}, \quad i = 3, \dots, n \end{aligned} \quad (3.35)$$

las cuales conservan la estructura que se tenía en (3.9), pero sustituyendo x_1 por ξ_1 . De esta forma el sistema (3.31) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= -k_n \left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+nd} + x_{n+1}, \\ \dot{x}_{n+1} &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right]^{1+(n+1)d} + \dot{\rho}(t), \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde es posible ver que se tiene una estructura similar al sistema en lazo cerrado (3.10), pero con el estado aumentado x_{n+1} , el cual de ser cero nos regresa al sistema sistema nominal. De esta manera, de forma similar al caso de orden 2 y 3 se construye la función candidata de Lyapunov. Por lo tanto se sustituye x_1 por ξ_1 en la función de Lyapunov del sistema nominal (3.8) y se añade un término positivo en el estado aumentado x_{n+1} , obteniendo así

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \gamma_{n-1} V_{n-1}(\xi_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + \frac{1 + (n-1)d}{m} |x_n|^{\frac{m}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} x_n + \\ &\quad \left(1 - \frac{1 + (n-1)d}{m} \right) |\nu_{\xi(n-1)}|^{\frac{m}{1+(n-1)d}} + \frac{1 + nd}{m} |x_{n+1}|^{\frac{m}{1+nd}}, \end{aligned}$$

la cual fácilmente se puede mostrar que es positiva definida.

Derivando la función candidata de Lyapunov a lo largo de las trayectorias del sistema (3.31), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(x) &= \gamma_{n-1} \dot{V}_{n-1}(\xi_1, x_2, \dots, x_{n-1}) - k_n \left[[x_n]^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \right] \times \\ &\quad \left[\left[[x_n]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+nd} - k_n^{-1} x_{n+1} \right] - \\ &\quad \frac{m - (1 + (n-1)d)}{1 + (n-1)d} (x_n - \nu_{\xi(n-1)}) |\nu_{\xi(n-1)}|^{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \dot{\nu}_{\xi(n-1)} - \\ &\quad [x_{n+1}]^{\frac{m-(1+nd)}{1+nd}} \left[k_{I1} \left[\xi_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+(n+1)d} - \dot{\rho}(t) \right], \end{aligned}$$

la cual, tiene una estructura similar al caso nominal. Asimismo, análogo a los casos de orden 2 y 3 se puede descomponer en dos funciones y es posible escribirla como

$$\dot{V}_n = F_1(x) + F_2(x),$$

donde

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \gamma_{n-1} \left(\frac{\partial V_{n-1}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n-1}} x_n \right) - k_n \left[\lceil x_n \rceil^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} - \lceil \nu_{\xi(n-1)} \rceil^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \right] \alpha_1(x) + \\
&\quad \frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d} (x_n - \nu_{\xi(n-1)}) \left| \nu_{\xi(n-1)} \right|^{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \left(\frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial x_{n-1}} x_n \right), \\
\alpha_1(x) &= \left[\lceil x_n \rceil^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - \lceil \nu_{\xi(n-1)} \rceil^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} \lceil x_{n+1} \rceil^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+nd} - k_n^{-1} x_{n+1} \\
F_2(x, \dot{\rho}(t)) &= -k_{I1} \alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) \\
\alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) &= \left[\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d} (x_n - \nu_{\xi(n-1)}) \left| \nu_{\xi(n-1)} \right|^{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial \xi_1} - \lceil x_{n+1} \rceil^{\frac{m-(1+nd)}{1+nd}} \right] \times \\
&\quad \left[\left[\xi_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} \lceil x_{n+1} \rceil^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+(n+1)d} - \frac{1}{k_{I1}} \dot{\rho}(t) \right].
\end{aligned}$$

Análogo al caso de orden 2 y 3, en el caso discontinuo es posible acotarla por

$$\dot{V}_n(x) \leq F_1(x) + \text{máx } F_2(x, L),$$

siendo $\text{máx } F_2(x, L)$ y $F_1(x)$ funciones homogéneas uni-valuadas semicontinuas por arriba.

Donde nuevamente en la función $F_1(x)$, se analiza la función $\alpha_1(x)$

$$\alpha_1(x) = \left[\lceil x_n \rceil^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - \lceil \nu_{\xi(n-1)} \rceil^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} \lceil x_{n+1} \rceil^{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+nd} - k_n^{-1} x_{n+1},$$

la cual, mediante el Lema 5 satisface

$$\text{sign}(\alpha_1(x)) = \text{sign} \left(\lceil x_n \rceil^{\frac{1}{1+(n-1)d}} - \lceil \nu_{\xi(n-1)} \rceil^{\frac{1}{1+(n-1)d}} \right).$$

De esta manera, es fácil mostrar que el segundo término de $F_1(x)$ es negativo. El cual se hace cero en la región $S_1 = \{x_n = \nu_{\xi(n-1)}\}$, donde la $F_1(x)$ en esa región es

$$F_1|_{S_1} = \gamma_{n-1} \left(\frac{\partial V_{n-1}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n-1}} x_n \right) \Big|_{x_n = \nu_{\xi(n-1)}},$$

donde es fácil notar que se tiene lo mismo que en el caso nominal, por lo tanto $F_1|_{S_1}$ es negativa por construcción y de acuerdo al Lema 3 (o 4), la función puede acotarse por $F_1 < -c \|(\xi_1, x_2, \dots, x_n)\|_{r,p}^{m+d}$ para valores de k_i ($i = 2, \dots, n$) suficientemente grandes. Es importante notar que los valores de las ganancias k_i ($i = 2, \dots, n-1$) no se ven afectados por la adición de la acción integral y por tanto se pueden conservar como ganancias del controlador integral.

Nuevamente se tiene $F_1(x) = 0$ solo en el conjunto $S_2 = \{(\xi_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$, en este conjunto la función F_2 se convierte en

$$F_2(x) = -k_{I1} \bar{k}_1^{-(1+(n+1)d)} k_n^{-\frac{1+(n+1)d}{1+nd}} \lceil x_{n+1} \rceil^{\frac{m+d}{1+nd}} + \lceil x_{n+1} \rceil^{\frac{m-(1+nd)}{1+nd}} \dot{\rho}(t),$$

la cual es negativa para perturbaciones cuyas derivadas se encuentran acotadas por

$$|\dot{\rho}(t)| < k_{I1} \bar{k}_1^{-(1+(n+1)d)} k_n^{-\frac{1+(n+1)d}{1+nd}} |x_{n+1}|^{\frac{1+(n+1)d}{1+nd}}. \quad (3.37)$$

Por lo tanto, utilizando el Lema 3 (o 4) nuevamente es posible asegurar que $\dot{V}_n(x)$ es negativa para k_{I1} suficientemente pequeño. Y de igual forma la estabilidad en tiempo finito del origen del sistema (3.31) para perturbaciones que satisfagan (3.37).

Al igual que en los casos de orden inferior, se tiene en controlador integral discontinuo para $d = -\frac{1}{n+1}$. Sustituyendo en (3.37)

$$|\dot{\rho}(t)| < k_{I1},$$

lo que implica una robustez ante perturbaciones Lipschitz, con una constante Lipschitz menor a k_{I1} .

Con lo anterior se termina la prueba del Teorema 6. ■

Capítulo 4

Discusión del Controlador Integral

En este Capítulo se hará un análisis del sistema (3.4), el cual es

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= v + \rho(t),\end{aligned}\tag{4.1}$$

siendo el origen del sistema un punto de equilibrio inestable.

A continuación se mostrará la idea general para el cálculo de las ganancias, posteriormente se realizarán simulaciones del sistema en lazo abierto y en lazo cerrado, para sistemas de orden 2 y 3. Donde es posible mostrar que el controlador integral continuo puede compensar perturbaciones constantes y en un caso especial, el control integral discontinuo puede lidiar con perturbaciones Lipschitz. Posteriormente, se realizarán simulaciones con el controlador integral para las mismas ganancias, pero con diferente grado de homogeneidad y finalmente se trabajará el control por retroalimentación de salida, utilizando observadores presentes en la literatura.

4.1. Cálculo de Ganancias

El cálculo de las ganancias del control es basado en la función de Lyapunov, para ello es necesario recordar la función de Lyapunov del sistema en lazo cerrado para un sistema de orden n . Esta corresponde a

$$\begin{aligned}V_n(x) &= \gamma_{n-1}V_{n-1}(x) + W_n(x) \\ &= \gamma_{n-1}V_{n-1}(x) + \frac{1 + (n-1)d}{m} |x_n|^{\frac{m}{1+(n-1)d}} + k_{n-1}^{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \left[|x_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \tilde{k}_1 x_1 \right]^{m-(1+(n-1)d)} x_n + \\ &\quad \left(1 - \frac{1 + (n-1)d}{m} \right) k_{n-1}^{\frac{m}{1+(n-1)d}} \left[|x_{n-1}|^{\frac{1}{1+(n-2)d}} + \dots + \tilde{k}_1 x_1 \right]^m.\end{aligned}$$

Las ganancias serán aquellas que logren que la derivada de la función candidata de Lyapunov sea negativa definida, donde la derivada de la función del Lyapunov corresponde a

$$\dot{V}_n(x) = F_1(x) + F_2(x, \dot{\rho}(t)),$$

siendo

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \gamma_{n-1} \left(\frac{\partial V_{n-1}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n-1}} x_n \right) - k_n \left[[x_n]_{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]_{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \right] \alpha_1(x) + \\
&\quad \frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d} (x_n - \nu_{\xi(n-1)}) |\nu_{\xi(n-1)}|_{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \left(\frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial x_{n-1}} x_n \right), \\
\alpha_1(x) &= \left[[x_n]_{\frac{1}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]_{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]_{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+nd} - k_n^{-1} x_{n+1} \\
F_2(x, \dot{\rho}(t)) &= -k_{I1} \alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) \\
\alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) &= \left[\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d} (x_n - \nu_{\xi(n-1)}) |\nu_{\xi(n-1)}|_{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial \xi_1} - [x_{n+1}]_{\frac{m-(1+nd)}{1+nd}} \right] \times \\
&\quad \left[\left[\xi_1 + k_{I2} x_2^{\frac{1}{1+d}} + \dots + k_{In} x_n^{\frac{1}{1+(n-1)d}} + \bar{k}_1^{-1} k_n^{-\frac{1}{1+nd}} [x_{n+1}]_{\frac{1}{1+nd}} \right]^{1+(n+1)d} - \frac{1}{k_{I1}} \dot{\rho}(t) \right].
\end{aligned}$$

En la Sección 3.6, ya se mostró que es posible hacer que $\dot{V}_n(x)$ sea negativa definida para valores adecuados de $k_{\{i=1, \dots, n\}}$. Lo que implica que la función tiene un valor máximo y por ende las ganancias están restringidas por ese valor. Además, siendo las funciones homogéneas, el máximo de la función se buscará en la esfera unitaria $\|x\|_{r,p} \leq 1$.

De esta forma las ganancias del controlador se encuentran acotadas por

$$k_i > \max \left\{ \frac{f_n(x)}{f_d(x)} \right\},$$

donde

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \left[\gamma_{i-1} \left(\frac{\partial V_{i-1}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} x_i \right) + \frac{m-(1+(i-1)d)}{1+(i-1)d} (x_i - \nu_{\xi(i-1)}) \times \right. \\
&\quad \left. |\nu_{\xi(i-1)}|_{\frac{m-2(1+(i-1)d)}{1+(i-1)d}} \left(\frac{\partial \nu_{\xi(i-1)}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial \nu_{\xi(i-1)}}{\partial x_{i-1}} x_i \right) \right] \\
f_d(x) &= \left[[x_i]_{\frac{m-(1+(i-1)d)}{1+(i-1)d}} - [\nu_{\xi(i-1)}]_{\frac{m-(1+(i-1)d)}{1+(i-1)d}} \right] \left[[x_i]_{\frac{1}{1+(i-1)d}} - [\nu_{\xi(i-1)}]_{\frac{1}{1+(i-1)d}} \right]^{1+id}
\end{aligned}$$

para $i = 2, \dots, n-1$. Es importante notar que el cálculo de la ganancia k_i es necesario conocer la ganancia de un sistema anterior, es decir k_{i-1} y siendo $k_1 > 0$. Asimismo, el cálculo de la mayor ganancia se añade el término de x_{n+1} en el denominador, lo que equivale a

$$k_n > \max \left\{ \frac{g_n(x)}{g_d(x)} \right\},$$

donde

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \left[\gamma_{n-1} \left(\frac{\partial V_{n-1}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n-1}} x_n \right) + \frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d} (x_n - \nu_{\xi(n-1)}) \times \right. \\
&\quad \left. |\nu_{\xi(n-1)}|_{\frac{m-2(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \left(\frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial \xi_1} x_2 + \dots + \frac{\partial \nu_{\xi(n-1)}}{\partial x_{n-1}} x_n \right) - k_{I1} \alpha_2(x, \dot{\rho}(t)) \right] \\
g_d(x) &= \left[[x_n]_{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} - [\nu_{\xi(n-1)}]_{\frac{m-(1+(n-1)d)}{1+(n-1)d}} \right] \alpha_1(x)
\end{aligned}$$

Es importante mencionar que es posible encontrar el máximo, ya que cuando el denominador es igual a cero el numerador es negativo, como se mostró en la prueba de la Sección 3.6 y por lo tanto el cociente tiende a $-\infty$. Por lo tanto, es posible encontrar un mínimo finito para las ganancias del controlador.

Donde se considera que $\rho(t)$ es perturbación Lipschitz y por tanto únicamente bastaría trabajar con los límites de su derivada, es decir $\dot{\rho}(t) = \pm L$, donde L corresponde a su constante de Lipschitz. En el caso continuo, la constante de Lipschitz es $L = 0$. Asimismo, la ganancia integral k_{I1} se encuentra acotada por

$$k_{I1} > L.$$

Asimismo, la ganancia k_{I1} debe ser suficientemente pequeña para no afectar la estabilidad del origen del sistema, esto es

$$k_{I1}^{-1} > \max \left\{ \frac{-\alpha_2(x, \dot{\rho}(t))}{-F_1(x)} \right\},$$

Lo anterior es posible, ya que la función $F_1(x)$ es negativa semidefinida y cuando esta función es idénticamente cero, la función $\alpha_2(x, \dot{\rho}(t))$ es positiva, por lo tanto es puede encontrar un máximo positivo finito

4.2. Rechazo de Perturbaciones

En esta sección se realizarán simulaciones, donde se muestra que el controlador (3.13) es capaz de rechazar perturbaciones constantes para acción integral continua y perturbaciones Lipschitz con constante Lipschitz $L < k_{I1}$ para el caso discontinuo.

4.2.1. Sistema de Orden 2

En este caso, el sistema (4.1) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= v + \rho(t). \end{aligned}$$

el cual, se sabe que en lazo abierto tiene un punto de equilibrio inestable en el origen. Considerando una condición inicial $x_0 = [0, 1, 0, 1]^T$ y sin perturbación, se tiene el comportamiento de la Figura 4.1. Es posible observar que la velocidad x_2 permanece constante, pero la posición x_1 tiende a infinito.

El objetivo de la ley de control es hacer que el origen del sistema sea un punto de equilibrio estable. Utilizando la ley de control (3.13) para el caso de orden 2, el sistema en lazo cerrado se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \left[[x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+2d} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} \right]^{1+3d} + \dot{\rho}(t), \end{aligned} \tag{4.2}$$

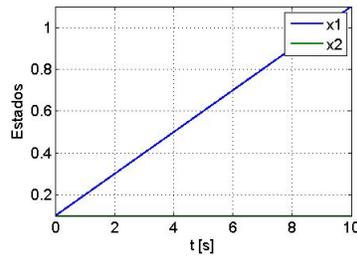
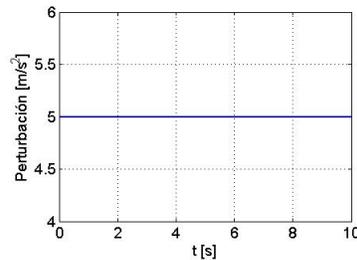


Figura 4.1: Sistema en Lazo Abierto

el cual se mostrará que tiene un punto de equilibrio estable en tiempo finito en el origen, mediante simulaciones. Para ello, se consideran las ganancias $k_1 = 2$, $k_2 = 9$, $k_{I1} = 0,2$ y $k_{I2} = 0$ a lo largo de la sección. Donde k_{I2} puede tomar cualquier valor.

Controlador Integral Continuo

Primero se utilizará el controlador integral continuo, para un grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{4}$, el cual es capaz de estabilizar el origen del sistema (4.2), aún ante perturbaciones constantes. Para ello, se considerará una perturbación constante de $\rho = 5$, la cual puede verse en la Figura 4.2.

Figura 4.2: Perturbación Constante ($\rho = 5$)

En la Figura 4.3, puede verse que los estados del sistema (4.2) convergen al origen. Teniendo así estabilidad del origen, a pesar de la perturbación constante en el sistema.

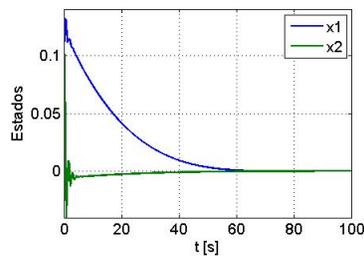


Figura 4.3: Controlador Integral Continuo - Estados

Por otro lado, en la Figura 4.4, puede verse que la variable integral converge al valor de la perturbación, logrando estimarla a los 80 segundos aproximadamente. Por lo tanto, el controlador puede compensar la perturbación y por ende estabilizar el origen del sistema.

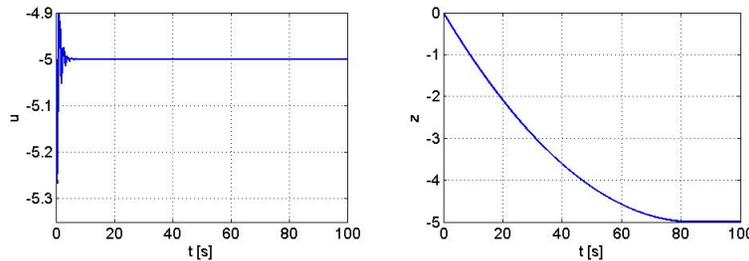


Figura 4.4: Controlador Integral Continuo - Entrada y Acción Integral

Del control integral clásico, se sabe que el controlador integral lineal también es capaz de lidiar con perturbaciones constantes. Por lo que se analizará la misma situación para un controlador lineal clásico. Por lo tanto, asumiendo grado de homogeneidad $d = 0$ y utilizando las mismas ganancias, se tiene el resultado de la Figura 4.5.

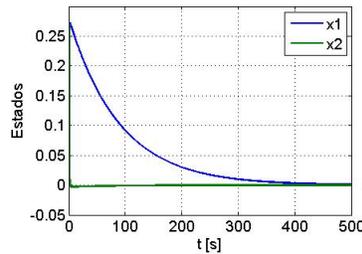


Figura 4.5: Controlador Integral Lineal - Estados

En la Figura 4.5, es posible ver que se logra estabilizar el origen del sistema (4.2), rechazando la perturbación constante. Sin embargo, el resultado obtenido con la acción integral clásica tiene una convergencia más lenta, siendo que tarda aproximadamente 8 veces más en converger comparado con la Figura 4.3.

En la Figura 4.6, se tiene el comportamiento de la señal de entrada la cual también converge al valor de la perturbación, de tal forma que es capaz de rechazarla. Asimismo, se tiene la variable integral, la cual aproxima la perturbación al igual que el controlador homogéneo continuo, sin embargo la razón de convergencia que se presenta es más lenta.

Por lo tanto es posible tener una mejora significativa con un controlador integral homogéneo, comparado con un controlador integral lineal. Ya que, aunque ambos controladores solo rechazan perturbaciones constantes, el control integral homogéneo tiene una velocidad de convergencia mayor. Siendo un resultado esperado, ya que como se mencionó en la Sección 3.2, el controlador homogéneo nos garantiza estabilidad en tiempo finito del origen, mientras que el controlador lineal solo estabilidad exponencial.

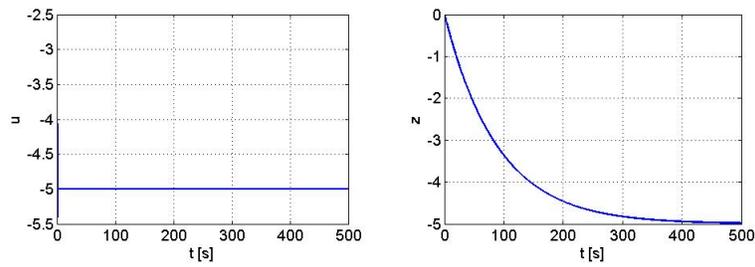


Figura 4.6: Controlador Integral Continuo - Entrada y Acción Integral

Controlador Integral Discontinuo

Ahora se utilizará el controlador integral discontinuo con grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{3}$, el cual estabiliza el origen del sistema (4.2), rechazando perturbaciones Lipschitz con constante Lipschitz $L < k_{I2}$. Por lo tanto, se considerará una perturbación creciente de la forma $\rho = 0,1t$, como se observa en la Figura 4.7. La cual tiene una constante Lipschitz $L = 0,1$ menor a la ganancia integral $k_{I1} = 0,2$.

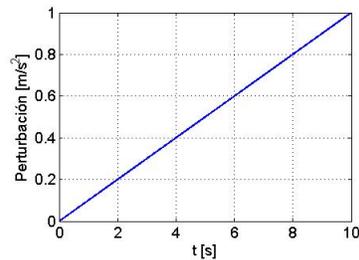


Figura 4.7: Perturbación ($\rho = 0,1t$)

En la Figura 4.8, se tiene que los estados del sistema (4.2) convergen al origen, aún en la presencia de la perturbación Lipschitz. Es importante notar que la convergencia es mucho más rápida que en el caso continuo, siendo que el controlador es de clase C^0 , por lo que puede tener una razón de cambio más alta.

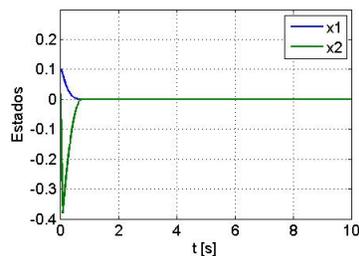


Figura 4.8: Controlador Integral Discontinuo - Estados

En la Figura 4.9, se puede observar que el controlador tiene un comportamiento continuo, pero

cambia de forma muy rápida lo que permite aumentar la velocidad de convergencia en los estados. Asimismo se tiene el estado integral, el cual a diferencia del controlador integral continuo converge a la perturbación en un segundo y la sigue adecuadamente.

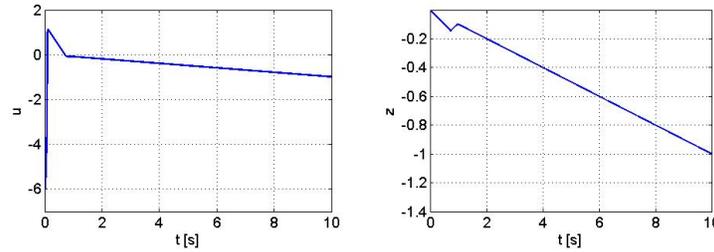


Figura 4.9: Controlador Integral Discontinuo - Entrada y Acción Integral

Es importante notar que hay mucha diferencia en la velocidad de estimación de la perturbación, entre el controlador integral continuo y discontinuo, por lo que es fácil ver que el controlador integral continuo difícilmente logrará compensar perturbaciones Lipschitz, sin embargo se tiene una ley de control más suave.

Como se mencionó en la Sección 3.2, se tiene un controlador por modos deslizantes de alto orden con la ley de control (3.7), el cual se escribe a continuación para el sistema de orden 2

$$v = -k_2 \left[[x_2]^{1/d} + k_1^{1/d} x_1 \right]^{1+2d} \quad (4.3)$$

considerando grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{2}$, el cual es capaz de rechazar la perturbación $\rho = 0,1t$ hasta un cierto valor de t , siendo este donde el tamaño de la perturbación es mayor que la ganancia $k_2 = 9$. De esta forma, tomando la ley de control 4.3, con grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{2}$ se tiene el comportamiento de la Figura 4.10 para el sistema en lazo cerrado con la ley de control (4.3). Nótese que la convergencia de los estados es ligeramente más rápida, sin embargo el último estado no llega a estabilizarse adecuadamente.

Asimismo, en la Figura 4.10 se tiene el comportamiento del controlador por modos deslizantes, en la cual se puede apreciar la presencia del efecto del “chattering”, situación que no se presenta en el controlador integral discontinuo.

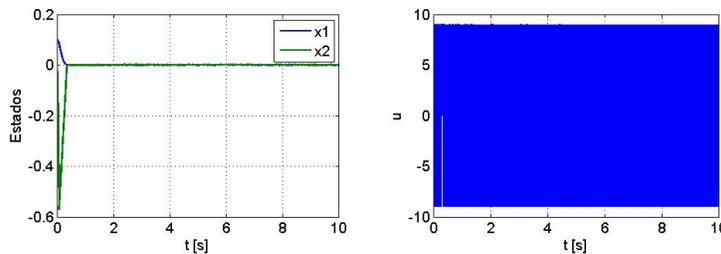


Figura 4.10: Controlador por Modos Deslizantes

Además de que el controlador por modos deslizantes no logrará compensar la perturbación una vez superado su límite, mientras que el controlador integral la compensará para todo tiempo $t > 0$. En la Figura 4.11 se puede ver que controlador por modos deslizantes no logra estabilizar el origen del sistema después de 90 segundos.

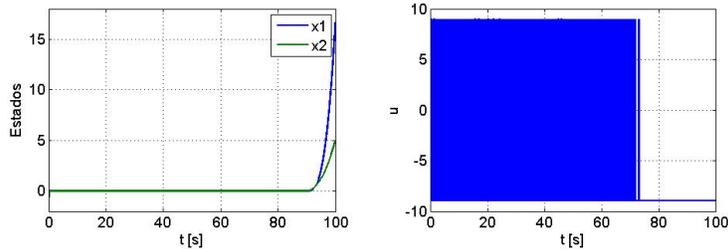


Figura 4.11: Controlador por Modos Deslizantes

Como se mencionó anteriormente, el controlador integral puede lidiar con perturbaciones cuya constante Lipschitz sea menor a la ganancia integral k_{I1} . De esta forma se considera la perturbación $\rho = t$, como se observa en la Figura 4.12. Siendo que tiene una constante Lipschitz mayor.

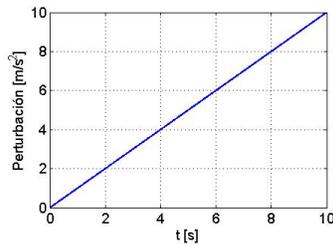


Figura 4.12: Perturbación ($\rho = t$)

Tomando esta perturbación, el sistema (4.2) tiene el comportamiento de la Figura 4.13. En ella es posible ver que las trayectorias del sistema no convergen al origen.

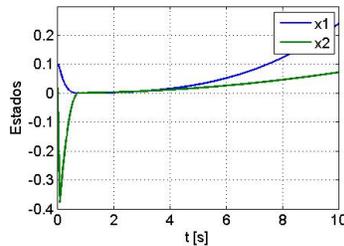


Figura 4.13: Controlador Integral Discontinuo - Estados

Asimismo, en la Figura 4.14 se puede ver que el estado integral no logra estimar la perturbación adecuadamente. Siendo que la razón de crecimiento de la perturbación es mayor que la velocidad de estimación de la variable. Por este motivo la entrada de control no logra estabilizar el origen del sistema (4.2) y por lo tanto las trayectorias divergen.

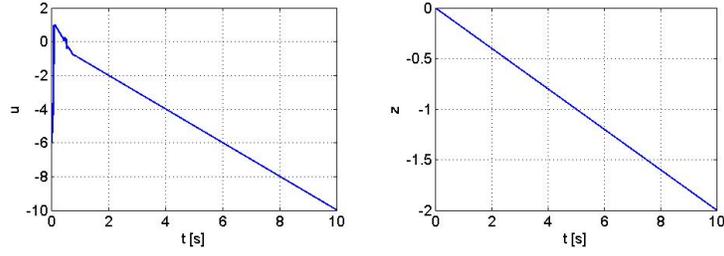


Figura 4.14: Controlador Integral Discontinuo - Entrada y Acción Integral

4.2.2. Sistema de orden 3

En este caso, el sistema (4.1) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= v + \rho(t).\end{aligned}$$

el cual, también se sabe que en lazo abierto tiene un punto de equilibrio inestable en el origen. Considerando una condición inicial $x_0 = [0, 1, 0, 1, 0, 1]^T$, se tiene el comportamiento de la Figura 4.15. Donde es posible observar que la x_3 permanece constante, pero los estados x_1 y x_2 tienden a infinito.

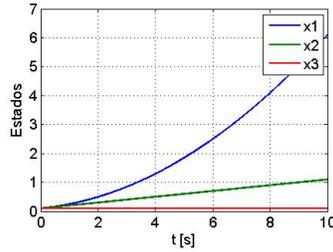


Figura 4.15: Sistema en Lazo Abierto

El objetivo de la ley de control es hacer que el origen del sistema sea un punto de equilibrio estable. Utilizando la ley de control (3.13) para el caso de orden 3, el sistema en lazo cerrado se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_3 \left[[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+3d} + x_4 \\ \dot{x}_4 &= -k_{I1} \left[x_1 + k_{I2} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_{I3} [x_3]^{\frac{1}{1+2d}} \right]^{1+4d} + \dot{\rho}(t),\end{aligned}\tag{4.4}$$

el cual también se mostrará que tiene un punto de equilibrio estable en tiempo finito en el origen, mediante simulaciones. Para ello, se consideran las ganancias $k_1 = 2$, $k_2 = 9$, $k_3 = 45$, $k_{I1} = 0,2$ y $k_{I2} = k_{I3} = 0$ a lo largo de la sección. Donde k_{I2} y k_{I3} pueden tomar cualquier valor.

Controlador Integral Continuo

Nuevamente se considera el controlador integral continuo, en este caso el grado de homogeneidad del sistema se considera como $d = -\frac{1}{5}$ y se considera la perturbación constante $\rho = 5$, siendo la presentada en la Figura 4.2.

De esta manera, en la Figura 4.16 es posible notar que las trayectorias convergen a una región cercana la origen de forma rápida, sin embargo tarda en llegar al origen.

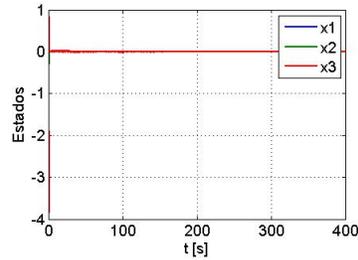


Figura 4.16: Controlador Integral Continuo - Estados

Esta convergencia se nota más en la Figura 4.17, donde la variable integral tarda en converger aproximadamente 350 segundos y la acción de control llega al valor correcto. Por esta razón, la convergencia de los estados no llega al origen antes de la estimación correcta de la perturbación.

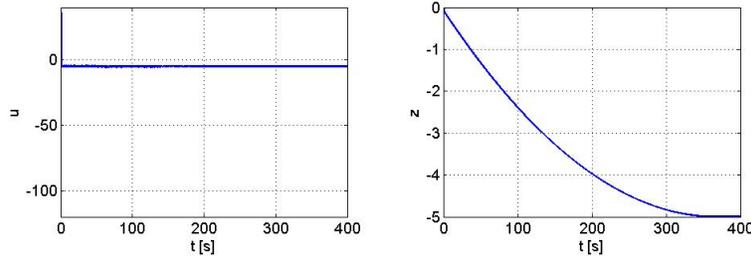


Figura 4.17: Controlador Integral Continuo - Entrada y Acción Integral

Así, el controlador puede mostrarse que también se tiene la estabilidad para el sistema de orden 3, sin embargo la convergencia es menor. Lo que era de esperarse, siendo que la acción de control entra como doble integrador. Es importante mencionar que en el caso lineal, también se logra la estabilidad del origen del sistema (4.4), sin embargo el tiempo de convergencia sería mucho más alto, como sucedió en el caso de orden 2.

Controlador Integral Discontinuo

Ahora se tomará el controlador integral discontinuo para el sistema de orden 3, donde el grado de homogeneidad del sistema es $d = -\frac{1}{4}$. El cual estabiliza el origen (4.4) rechaza perturbaciones Lipschitz como sucede en el caso de orden 2. Nuevamente se toma la perturbación creciente $\rho = 0,1t$, correspondiente a la Figura 4.7.

En la Figura 4.18 es posible ver que los estados del sistema convergen al origen, teniendo la estabilidad del origen aún en la presencia de la perturbación ρ .

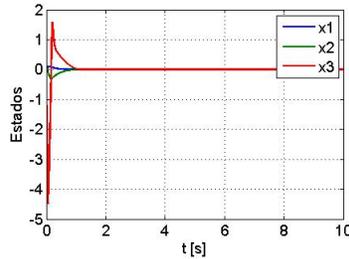


Figura 4.18: Controlador Integral Discontinuo - Estados Integral

En la Figura 4.19, se observa que el estado integral tiene un comportamiento cercano a la perturbación. Con lo que el control es capaz de compensar y lidiar la perturbación. Permitiendo así, la estabilidad del origen del sistema (4.4).

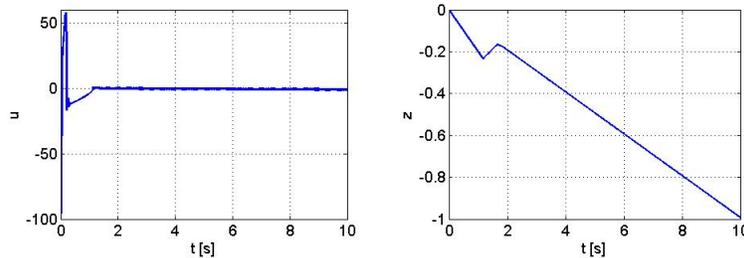


Figura 4.19: Controlador Integral Discontinuo - Entrada y Acción Integral

Nuevamente, se comparará el resultado anterior con el controlador por modos deslizantes de orden superior, el cual es

$$v = -k_3 \left[[x_3]^{\frac{1}{1+2d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} [x_2]^{\frac{1}{1+d}} + k_2^{\frac{1}{1+2d}} k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+3d} \quad (4.5)$$

considerando el grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{3}$. Así, el comportamiento del sistema de orden 3 en lazo cerrado con la ley de control (4.5) se presenta en la Figura 4.20, donde se tiene la estabilidad del origen de las trayectorias. Sin embargo, nuevamente se presenta el efecto del “chattering” en el controlador.

Asimismo, es importante mencionar que la cota máxima de la perturbación ahora es la ganancia $k_3 = 45$, la cual a pesar de ser alta, nuevamente tendrá un tiempo finito antes de que la perturbación

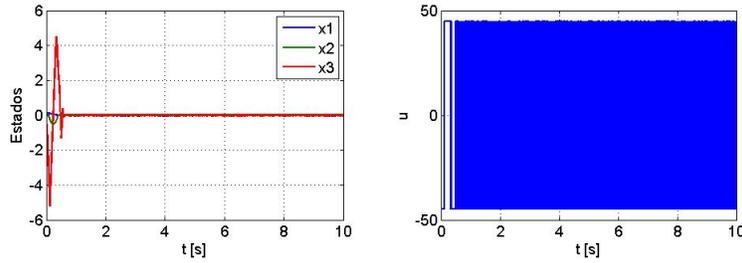


Figura 4.20: Controlador por Modos Deslizantes

creciente supere ese máximo, mientras que el controlador integral discontinuo logrará estabilizar las trayectorias para todo tiempo $t > 0$.

En caso de una perturbación con una constante Lipschitz mayor a la ganancia k_{I1} como lo es $\rho = t$, se presentará el mismo problema que se tuvo en el caso de orden 2. Donde el estado integral no logra estimar la perturbación de forma adecuada y por ende el controlador no la puede compensar, lo que se puede observar en la Figura 4.21, donde la variable integral se encuentra en un valor de 2, cuando debería estar en un valor de 10.

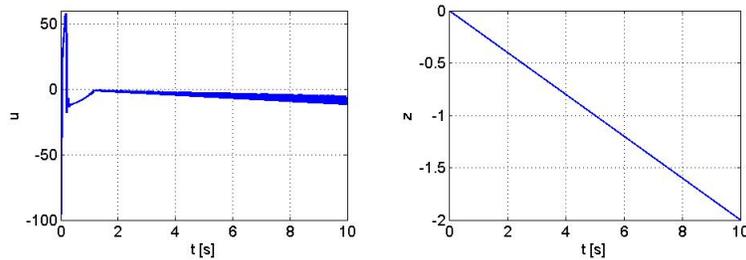


Figura 4.21: Controlador Integral Discontinuo - Entrada y Acción Integral

Lo anterior ocasiona que el origen del sistema en lazo cerrado (4.4) sea un punto de equilibrio inestable, siendo apreciable después de un cierto tiempo. Esto se puede ver en la Figura 4.22, donde las trayectorias comienzan a divergir a partir de los 9 segundos aproximadamente.

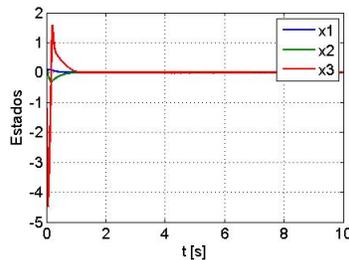


Figura 4.22: Controlador Integral Discontinuo - Estados

El resultado anterior es esperado, ya que la ganancia integral afecta en la velocidad de convergencia del estado aumentado z , por lo tanto si este converge más lentamente que la perturbación

a rechazar entonces no logrará rechazarla adecuadamente. Esto es debido a que la perturbación tiene una velocidad mayor que el estimador y por lo tanto no puede alcanzarla.

4.3. Discusión del Efecto del Grado de Homogeneidad en el Control Integral

En esta sección, se trabajará con el sistema de orden 2 en lazo cerrado (4.2), es decir

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \left[|x_2|^{\frac{1}{1+d}} + k_1^{\frac{1}{1+d}} x_1 \right]^{1+2d} + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -k_{I1} \left[|x_1 + k_{I2} |x_2|^{\frac{1}{1+d}} \right]^{1+3d} + \dot{\rho}(t).\end{aligned}$$

Se realizarán simulaciones variando el grado de homogeneidad del controlador. Se mostrará el comportamiento del sistema rechazando perturbaciones y se observará la precisión del controlador para el sistema nominal. De esta manera se podrán concluir características cualitativas del controlador dependiendo del grado de homogeneidad.

4.3.1. Convergencia

A continuación se realizarán simulaciones considerando leyes de control con diferentes grados de homogeneidad. Se utilizarán las mismas ganancias de controlador, las cuales son $k_2 = 9$, $k_1 = 2$, $k_{I1} = 0,2$ y $k_{I2} = 0$. Asimismo, se considerará la misma perturbación $\rho(t) = 0,1t$. Se tendrán como casos extremos la acción integral lineal correspondiente al grado de homogeneidad $d = 0$ y la acción integral discontinua con grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{3}$.

En cada Figura, se presentará el comportamiento de los estados del sistema en lazo cerrado y el error de estimación de la perturbación.

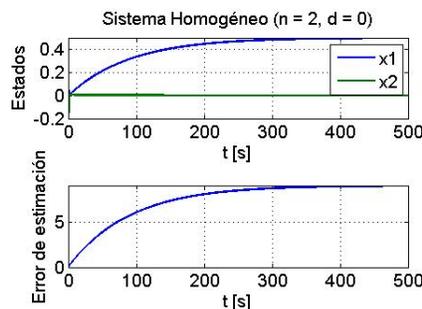


Figura 4.23: Controlador Integral Lineal $d = 0$

En la Figura 4.23 se presenta el comportamiento del sistema en lazo cerrado para el caso de la acción integral lineal. En ella es posible observar que los estado no convergen al origen, sin embargo

permanecen acotados. Lo mismo ocurre en la estimación de la perturbación, siendo que el error aunque no tiende a cero, si converge a un valor.

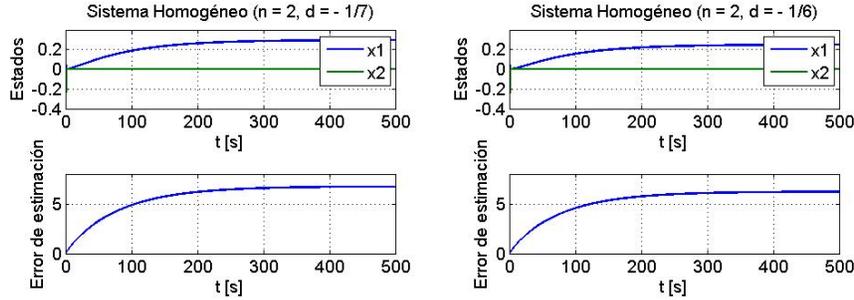


Figura 4.24: Controlador Integral $d = -\frac{1}{7}$ y $d = -\frac{1}{6}$

Asimismo, en la Figura 4.24 se presenta el comportamiento del sistema en lazo cerrado para dos grados de homogeneidad ($d = -\frac{1}{7}$ y $d = -\frac{1}{6}$). En ella es posible observar que ocurre algo similar que en el caso lineal, es decir el error de perturbación converge a un valor y los estados permanecen acotados, sin embargo es posible ver que el error de la perturbación es menor y la bola a la que convergen los estados también es de menor magnitud.

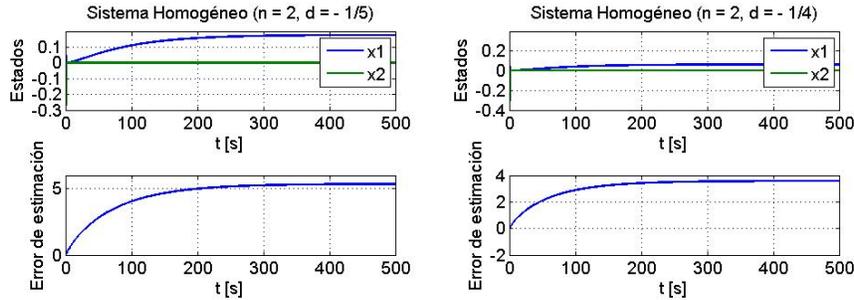


Figura 4.25: Controlador Integral $d = -\frac{1}{5}$ y $d = -\frac{1}{4}$

Posteriormente, en la Figura 4.25 se tiene otros dos controladores integrales con dos grados de homogeneidad distinta ($d = -\frac{1}{5}$ y $d = -\frac{1}{4}$), donde nuevamente se tiene que el error de estimación para la perturbación es menor que en los casos de la Figura 4.24.

Finalmente en la Figura 4.26 se tiene el caso de la acción integral discontinua, donde se observa que la perturbación es compensada perfectamente y los estados convergen al origen.

De esta manera, es puede notar que entre más se acerca el grado de homogeneidad al caso discontinuo, el error de perturbación va disminuyendo. Con lo que se tiene que el comportamiento del controlador integral varia continuamente con respecto al grado de homogeneidad.

4.3.2. Precisión

En control como en muchas áreas, no es posible lograr un beneficio sin tener un costo, por ello utilizando los controladores anteriores se realizarán simulaciones tomando el sistema nominal y se

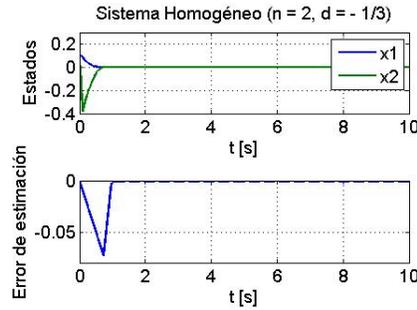


Figura 4.26: Controlador Integral Discontinuo $d = -\frac{1}{3}$

observará la precisión de cada uno de ellos. Es importante mencionar que se utilizará el mismo periodo de muestro, el cual será de 10^{-3} segundos.

En la Figura 4.27 se presenta el comportamiento del sistema en lazo cerrado para el caso del controlador integral lineal, es decir con grado de homogeneidad $d = 0$. En la Figura, es posible observar que la precisión que se logra es de 10^{-4} , es decir mantiene a los estados en un vecindad del origen con un orden de 10^{-4} .

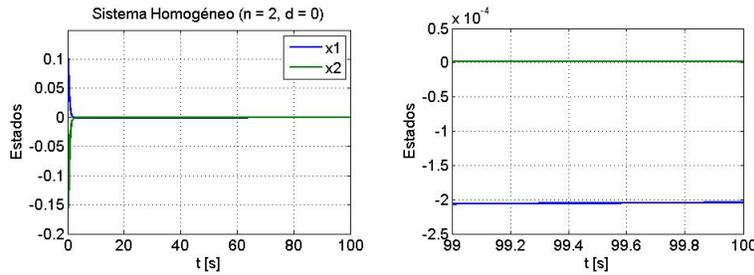


Figura 4.27: Controlador Integral Lineal $d = 0$

De igual forma, en la Figura 4.28 se presenta el comportamiento del sistema en lazo cerrado para el caso del controlador integral con grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{6}$. En la Figura es posible observar que se logra una precisión de 10^{-14} , la cual es 10 ordenes de magnitud mejor que en el caso lineal.

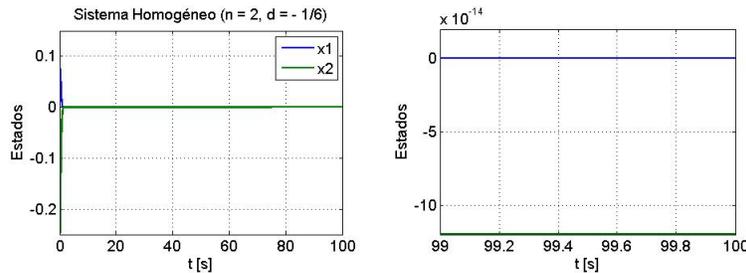


Figura 4.28: Controlador Integral Homogéneo $d = -\frac{1}{6}$

En la Figura 4.29 se tiene el caso del controlador integral con grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{5}$. En la Figura es posible observar que la precisión ha disminuido 2 ordenes de magnitud, pasando de 10^{-13} a 10^{-11} . Este resultado es un tanto esperado, ya que en el caso de convergencia el controlador con mayor magnitud en el grado de homogeneidad el resultado era mejor para el caso $d = -\frac{1}{5}$ que en el caso $d = -\frac{1}{6}$.

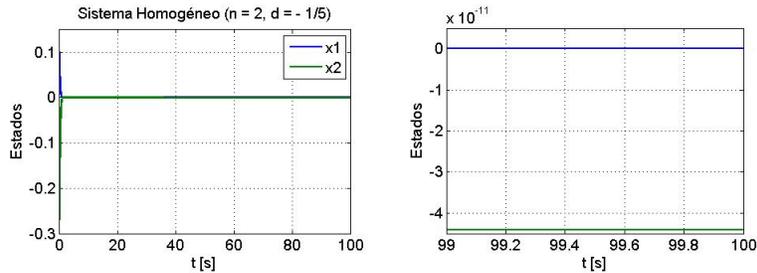


Figura 4.29: Controlador Integral Homogéneo $d = -\frac{1}{5}$

En la Figura 4.30 nuevamente se observa que la precisión final disminuye para el controlador integral con grado de homogeneidad $d = -\frac{1}{4}$. En la Figura es posible observar que la precisión es de 10^{-9} .

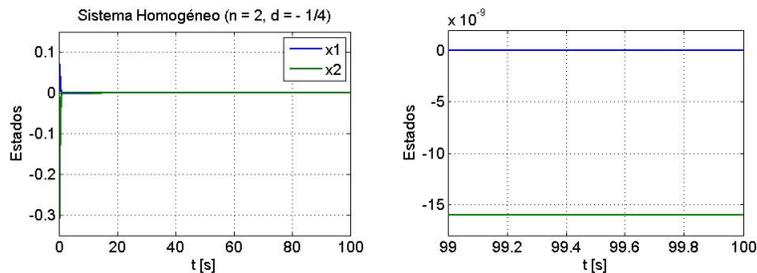


Figura 4.30: Controlador Integral Homogéneo $d = -\frac{1}{4}$

Finalmente, en la Figura 4.30 se tiene el controlador integral discontinuo, donde es posible ver que la precisión ha disminuido a 10^{-6} y además se tienen oscilaciones en el estado x_2 .

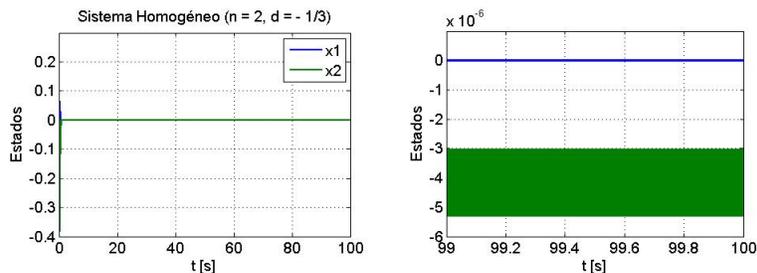


Figura 4.31: Controlador Integral Discontinuo $d = -\frac{1}{3}$

De esta manera, es posible concluir que entre más se acerca el grado de homogeneidad al caso discontinuo la precisión del controlador va disminuyendo, salvo en el caso lineal; sin embargo en este último solo se tiene convergencia exponencial por lo que no es de sorprenderse.

4.4. Control por Retroalimentación de Salida

En esta sección se simulará el comportamiento del sistema en lazo cerrado con una ley de control con observador. Para ello se considerarán dos diferentes observadores utilizados en otros artículos.

El primer observador para un sistema de orden 2, es presentado en [20] y corresponde a

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -L_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + \hat{x}_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -L_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} + u(x_1, \hat{x}_2),\end{aligned}\tag{4.6}$$

con el cual es posible estimar los estados de una cadena de integradores de orden 2. Es importante notar que el observador (4.6) es continuo.

El segundo observador es basado en modos deslizantes y es propuesto en [12], siendo el diferenciador de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -\lambda_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{2}} + z_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\lambda_2 [\hat{x}_1 - x_1]^0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

de igual forma se tiene el diferenciador de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -\lambda_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{2}{3}} + z_2 \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -\lambda_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\frac{1}{3}} + z_3 \\ \dot{\hat{x}}_3 &= -\lambda_3 [\hat{x}_1 - x_1]^0.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Este último ha sido trabajado en algunos artículos, donde se ha construido su función de Lyapunov como son [19], [23].

Es importante mencionar que en la sección se mostrará el comportamiento del sistema mediante simulaciones, no se realizará una prueba formal de su funcionamiento. Sin embargo, el caso del diferenciador de Levant es posible mostrarlo de forma simple, ya que es posible considerar la convergencia del observador y el sistema en lazo cerrado de forma independiente, similar al principio de separación para el caso de sistemas lineales.

Durante las simulaciones se considerará la misma perturbación que en las secciones anteriores, es decir $\rho(t) = 0,1t$.

4.4.1. Sistema de Orden 2

Para realizar las simulaciones, se consideran condiciones iniciales cero. El valor de las ganancias del observador para el sistema de orden 2 corresponden a $L_1 = \lambda_1 = 5$ y $L_2 = \lambda_2 = 40$. Asimismo, se define el error de estimación como $e_i = \hat{x}_i - x_i$, para $i = 1, 2, 3$.

En la Figura 4.32 se tiene el comportamiento del sistema en lazo cerrado, utilizando el observador continuo (4.6). Es posible ver que la tarea de estabilización se realiza adecuadamente y que el error de estimación de los estados converge a cero.

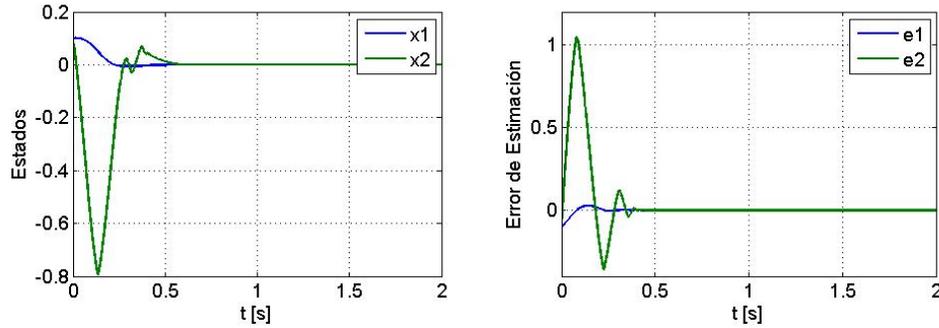


Figura 4.32: Control por Retroalimentación de Salida con el Observador (4.6)

Por otro lado, en la Figura 4.33 se presenta la simulación correspondiente al controlador por retroalimentación de salida utilizando el diferenciador de Levant de primer orden (4.7). En esta Figura, es posible ver que nuevamente se logra un error de estimación cero y se realiza la tarea de regulación.

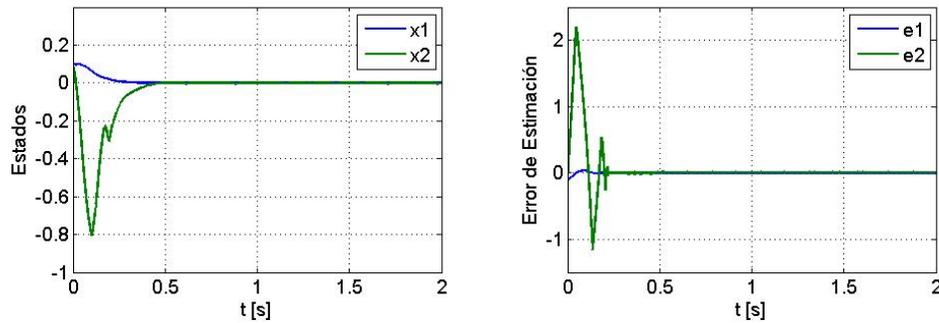


Figura 4.33: Control por Retroalimentación de Salida con el Observador (4.7)

Asimismo es posible ver en ambas figuras que el error de estimación converge primero y posteriormente los estados lo hacen.

4.4.2. Sistema de Orden 3

Para el caso del sistema de orden 3 se consideran las ganancias del observador como $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 80$ y $\lambda_3 = 160$.

En la Figura 4.34, se observa nuevamente que los estados convergen a cero al igual que error de estimación de los estados.

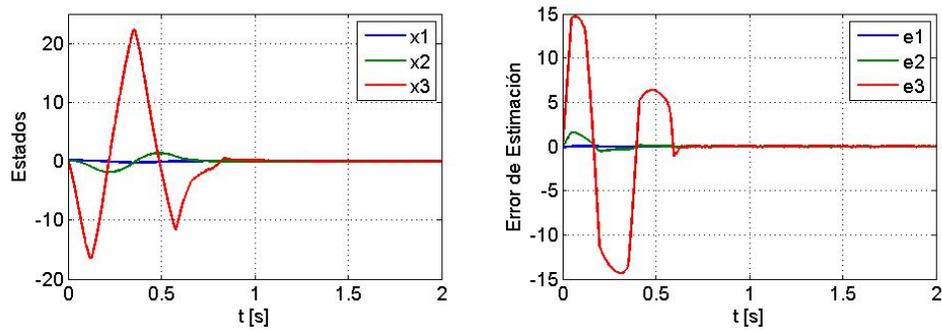


Figura 4.34: Control por Retroalimentación de Salida con el Observador (4.8)

Con lo anterior se tienen leyes de control por retroalimentación de salida, con las cuales es posible estabilizar el origen de una cadena de integradores y de igual forma se logra rechazar perturbaciones Lipschitz acopladas en el sistema.

Capítulo 5

Ejemplo de Simulación - Levitador Magnético

5.1. Modelo del Sistema

El diagrama del levitador magnético está compuesto por dos subsistemas. El primer subsistema es eléctrico conformado por una fuente de voltaje y un embobinado, el cual generará un campo electromagnético que dependerá del voltaje que se le suministre. El segundo subsistema es mecánico y únicamente consiste en un balón, el cual se mantendrá a una distancia deseada del núcleo del embobinado.

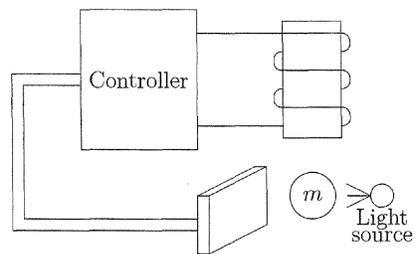


Figura 5.1: Levitador Magnético

El modelo matemático del levitador magnético es altamente no lineal, debido a la interconexión de los dos subsistemas. Siendo que la impedancia del embobinado y la fuerza electromagnética que ejerce el embobinado al balón se ven afectados por la distancia de la bola al núcleo, asimismo la señal de entrada influye indirectamente, a través de la corriente, haciendo el modelo aún más complejo.

De [11] se tiene el siguiente modelo para un levitador magnético

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{k_L}{2m} \frac{x_3^2}{(a+x_1)^2} + g \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left(-Rx_3 + k_L \frac{x_2 x_3}{(a+x_1)^2} + u \right)\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde $x_1 = y \in R_+$ es la distancia vertical del balón al núcleo del embobinado, $x_2 = \dot{y}$ es la velocidad, m es la masa de la bola, g es la aceleración de la gravedad, K es el coeficiente de fricción viscosa, $L(x_1) = L_1 + \frac{K_L}{a+x_1}$ es la inductancia del embobinado (donde k_L , L_1 y a son constantes positivas), $x_3 = i$ es la corriente eléctrica, R es la resistencia del embobinado la señal de control u es el voltaje aplicado. Note que el modelo es local.

5.2. Ley de Control

Considerando la entrada

$$u = Rx_3 - k_L \frac{x_2 x_3}{(a+x_1)^2} + L(x_1)v$$

se obtiene

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{k_L}{2m} \frac{x_3^2}{(a+x_1)^2} + g \\ \dot{x}_3 &= v\end{aligned}$$

Definiendo $h(x) = x_1$ la salida del sistema y el difeomorfismo

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ \dot{h}(x) \\ \ddot{h}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{k}{m}x_2 - \frac{k_L}{2m} \frac{x_3^2}{(a+x_1)^2} + g, \end{bmatrix}$$

y su transformación inversa es

$$x = T^{-1}(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \sqrt{\frac{2m}{k_L}} \left[g - \frac{k}{m}z_2 - z_3 \right]^{\frac{1}{2}} (a+z_1) \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema en las nuevas coordenadas es

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ -\frac{k}{m}z_3 + \frac{2z_2(g-\frac{k}{m}z_2-z_3)}{a+z_1} - \sqrt{\frac{2k_L}{m}} \frac{\left[g - \frac{k}{m}z_2 - z_3 \right]^{\frac{1}{2}}}{(a+z_1)} v \end{bmatrix}$$

Si se define la entrada

$$v = \sqrt{\frac{2m}{k_L}} z_2 \left[g - \frac{k}{m} z_2 - z_3 \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{m}{2k_L}} \frac{(a + z_1)}{\left[g - \frac{k}{m} z_2 - z_3 \right]^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{k}{m} z_3 + w \right)$$

el sistema obtenido es

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ w \end{bmatrix}$$

Así, se aplica el control integral al sistema en z . Utilizando la ley control integral del Teorema 6, lo que implica

$$w = -k_3 \left[[z_3]^2 + k_2^2 [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_2^2 k_1^{\frac{4}{3}} z_1 \right]^{\frac{1}{4}} + z_4$$

$$\dot{z}_4 = -k_{I1} \left[z_1 + k_{I2} [z_2]^{\frac{4}{3}} + k_{I3} [z_3]^2 \right]^0$$

5.3. Simulación

Considerando los siguientes valores de parámetros $m = 1[kg]$, $g = 9,815[\frac{m}{s^2}]$, $k = 0,1[\frac{N \cdot s}{m}]$, $L_1 = 0,1[H]$, $k_L = 10[mH \cdot m]$, $a = 0,05[m]$, $R = 10[\Omega]$, con una perturbación $\rho(t) = 0,1t$ y condiciones iniciales $x_1(0) = 0,01[m]$, $x_2 = 0[\frac{m}{s}]$ y $x_3 = 0,3[A]$ y las ganancias $k_1 = 2$, $k_2 = 9$, $k_3 = 45$, $k_{I1} = 0,2$, $k_{I2} = k_{I3} = 0$, mencionadas en el Capítulo 4. Se tiene los siguientes resultados.

La señal de referencia para la posición se muestra en la Figura 5.2, en la cual durante la primera parte la bola se mantenga en el origen (a una distancia a del núcleo), posteriormente se busca hacer regulación a una distancia de 10 cm y finalmente se tiene un seguimiento de una señal senoidal.

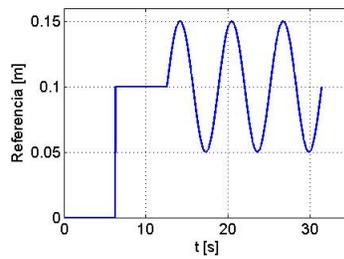
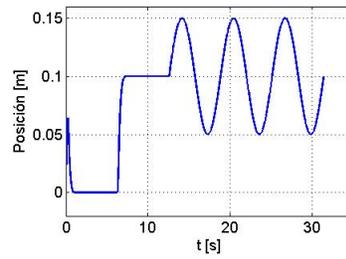
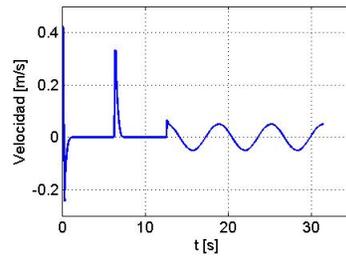


Figura 5.2: Referencia

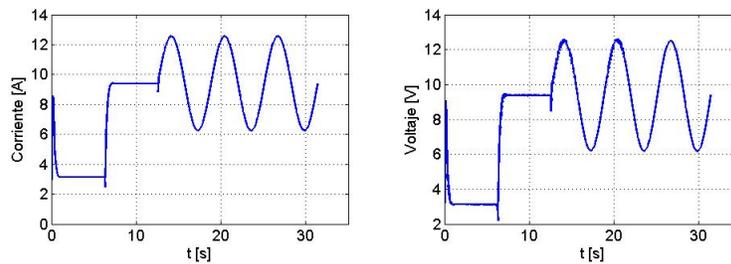
En la Figura 5.3 se tiene el comportamiento de la posición, donde es posible ver que la bola comienza en $x_1 = 0,20$ y posteriormente sigue la trayectoria correspondiente de la Figura 5.2.

De igual forma, en la Figura 5.4 se tiene el comportamiento de la velocidad de la bola, la cual se puede ver que converge rápidamente a cero cuando se tiene una tarea de regulación y se tiene

Figura 5.3: Posición de la bola - x_1 Figura 5.4: Velocidad de la bola - x_2

un comportamiento senoidal para la tarea de seguimiento, lo cual es el resultado esperado, ya que la derivada del seno es el coseno.

Finalmente en la Figura 5.5 se muestra el comportamiento de la corriente del embobinado y la señal de control. Es posible ver que el comportamiento de ambos es similar, siendo un resultado esperado, considerando que la dinámica eléctrica es más lenta que la mecánica y por ende se tenga una relación casi estática.

Figura 5.5: Corriente del embobinado y señal de control - x_3, u

Capítulo 6

Conclusiones

Una ley de control por retroalimentación de estados estática permite estabilizar el origen de un sistema, sin embargo no es capaz de rechazar perturbaciones no desvanecientes. Una posible solución para mantener la estabilidad del origen aún en presencia de las perturbaciones es utilizar leyes de control dinámicas como es la acción integral.

Una acción integral continua permite lidiar con perturbaciones constantes, teniendo una señal de control suave. Mientras que la acción integral discontinua resulta en una entrada de control menos suave, pero permite lidiar con perturbaciones Lipschitz.

La homogeneidad es una gran herramienta para la construcción de funciones de Lyapunov, ya que es posible aprovechar sus propiedades para mostrar que se cumplen las condiciones para que una función candidata de Lyapunov sea una función de Lyapunov. Asimismo, permite trabajar en leyes de control integral con diferente grado de homogeneidad, considerando como extremos el caso lineal y el discontinuo.

La velocidad de estimación de la perturbación está en función del grado de homogeneidad del sistema, entre más se acerca el controlador integral al caso discontinuo más rápido será la convergencia a la perturbación. Con lo anterior se observa que la convergencia a la perturbación con respecto al grado de homogeneidad se realiza de forma continua. Asimismo, el grado de homogeneidad afecta en la precisión del controlador, debido a la suavidad de la ley de control resultante.

Finalmente, es posible estabilizar el origen del sistema utilizando una ley de control por retroalimentación de salida mediante observadores.

Bibliografía

- [1] V. Andrieu, L. Praly, A. Astolfi, *Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback*, SIAM J. Control Optim. 2008, 47(4):1814-1850.
- [2] Bacciotti, A. and L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*, 2nd ed. New York. Springer-Verlag. 2005
- [3] Stefano Battilotti, *Stabilization via Generalized Homogeneous Approximations*, DOI 10.1109/TAC.20162614269, IEEE.
- [4] Emmanuel Cruz-Zavala, Jaime A. Moreno and Leonid Fridman, *Asymptotic Stabilization in Fixed Time via Sliding Mode Control*, 51st IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii, USA, December, 2012.
- [5] Emmanuel Cruz Zavala, *Funciones de Lyapunov de Control para el Diseño de Controladores Discontinuos*, Tesis de Doctorado, UNAM, México. Diciembre 2014.
- [6] Emmanuel Cruz-Zavala and Jaime A. Moreno, *Homogeneous High Order Sliding Mode Design: a Lyapunov Approach*, Automatica, Volume 80, 232-238, June 2017.
- [7] Antonio Estrada and Leonid M. Fridman, *Integral HOSM Semiglobal Controller for Finite-Time Exact Compensation of Unmatched Perturbations*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 55, No. 11, Noviembre 2010.
- [8] Fridman L. and A. Levant, *Sliding Mode in Control in Engineering*, Marcel Dekker, Inc. High Order Sliding Modes, 2002.
- [9] Hardy G. H., J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, London, Cambridge University Press. 1951.
- [10] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Third Edition, Springer, 1995.
- [11] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice-Hall, 2002.
- [12] Arie Levant, *Universal Single-Input-Single-Output (SISO) Sliding-Mode Controllers With Finite-Time Convergence*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, No. 9, Septiembre 2001.

- [13] A. Levant, *Higher Order Sliding Modes and Arbitrary-Order Exact Robust Differentiation*, European Control Conference, Septiembre 2001.
- [14] Levant A. *Higher Order Sliding Modes: Differentiation and Output Feedback Control*, Int. J. of Control, 76 (9-10):924-941, Noviembre 2003.
- [15] Arie Levant, *Quasi-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, No. 11, Noviembre 2005.
- [16] A. Levant, *Homogeneity Approach to High-Order Sliding Mode Design*, Automatica, 41(5):823-830, 2005.
- [17] Francisco Lopez-Ramirez, Tonametl Sanchez and Jaime A. Moreno, *Construction of Lyapunov Functions for Homogeneous Second-Order Systems*, 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Diciembre 2014.
- [18] Alexander G. Loukianov, José M. Cañedo, Leonid M. Fridman and Adolfo Soto-Cota, *High-Order Block Sliding-Mode Controller for a Synchronous Generator with an Exciter System*, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 58, January, 2011.
- [19] Jaime A. Moreno, *Lyapunov Function for Levant's Second Order Differentiator*, 51st IEEE Conference on Decision and Control, Diciembre 2012.
- [20] Jaime A. Moreno, *Discontinuous integral control for mechanical systems*, 2016. IEEE 978-1-4673-9787-2/16: 142-147
- [21] Hisakazu Nakamura, Naoki Nishida and Nami Nakamura, *High Precision Control of Robots Manipulators via Finite-Time P-PI Control*, 51st IEEE Conference on Decision and Control, Diciembre 2012.
- [22] Hisakazu Nakamura, *Homogeneous Integral Finite-Time Control and Its Application to Robot Control*, SICE, Nagoya University, Nagoya, Japón, September, 2013.
- [23] Fernando A. Ortiz-Ricardez, Tonámetl Sánchez and Jaime A. Moreno, *Smooth Lyapunov Function and Gain Design for a Second Order Differentiator*, 54th Annual Conference on Decision and Control, Diciembre 2015.
- [24] Tonámetl Sánchez Ramírez, *Construction of Lyapunov functions for continuous and discontinuous homogeneous systems*, Tesis de Doctorado, UNAM, México. Julio 2016.
- [25] Sanjay P. Bhat and Dennis S. Bernstein, *Finite-Time Stability of Homogeneous Systems*, AACC, Albuquerque, New Mexico, Junio 1997.
- [26] Yuri Shtessel, Christopher Edwards, Leonid Fridman, Arie Levant, *Sliding Mode Control and Observation*, Birkhäuser, Nueva York, 2014.
- [27] Shyam Kamal, Jaime A. Moreno, Asif Chalanga, Bijan Bandyopadhyay and Leonid M. Fridman, *Continuous Terminal Sliding-Mode Controller*, Automatica 69, 308-314, 2016.

- [28] Eduardo D. Sontag, *Mathematical Control Theory*, 2ⁿd ed. Springer. Piscataway, 1998
- [29] Utkin V. *Sliding Modes in Control and Optimización*, Springer Verlag.