



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – INGENIERÍA SÍSMICA

MÉTODO MODAL ESPECTRAL BASADO EN LA REGLA DE COMBINACIÓN  
C-SRSS (COMPLETE SQUARE ROOT OF SUM OF SQUARES)

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ELOISA GARCÍA SAINZ

TUTOR PRINCIPAL  
DR. Ernesto Alfonso Hredia Zavoni  
Instituto Mexicano del Petróleo

COMITÉ TUTOR  
Dr. Luis Esteva Maraboto, Instituto de Ingeniería Estructural  
DRA. Sonia Elda Ruíz Gómez, Instituto de Ingeniería Estructural  
DR. Eduardo Reinoso Angulo, Instituto de Ingeniería Estructural  
DR. Francisco Leonel Silva González, Instituto Mexicano del Petróleo

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, agosto 2017

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	3
1.1 Introducción	3
1.2 Antecedentes: La regla de combinación modal: c-SRSS	4
1.3 Objetivos y Alcances	8
1.4 Organización del documento	9
2. FORMULACIÓN DE MODELOS PARA LA APLICACIÓN DE LA REGLA c-SRSS	10
2.1 Respuesta de un oscilador a ruido blanco filtrado	10
2.2 Aproximación empírica con base en superficies de respuesta	11
2.3 Estimación basada en una formulación alternativa de la regla c-SRSS	18
2.4 Estimación basada en espectros de aceleración	27
3. CASO DE ESTUDIO	29
4. CONCLUSIONES	33
5. BIBLIOGRAFÍA	34

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1 Introducción

Un procedimiento ampliamente establecido para el análisis sísmico de estructuras lineales de múltiples grados de libertad consiste en descomponer el sistema de ecuaciones de movimiento y transformarlo en un conjunto de ecuaciones de sistemas simples de un grado de libertad cuyas respuestas máximas pueden ser obtenidas con mayor facilidad utilizando espectros de respuesta. La respuesta máxima de la estructura puede estimarse en función de las respuestas máximas de los sistemas simples de un grado de libertad usando reglas de combinación modal. La regla de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (SRSS, del inglés *Square Root of Sum of Squares*) es la más conocida y utilizada. Fue propuesta por Rosenblueth (1951) y consiste en estimar la respuesta estructural máxima como la raíz cuadrada de la suma total de los cuadrados de las respuestas modales. La regla se basa en que la varianza de la respuesta total se puede expresar como la suma de las varianzas de las respuestas modales, suponiendo que la contribución de las covarianzas entre dichas respuestas es despreciable. Esta es una hipótesis adecuada cuando la diferencia entre frecuencias modales no es pequeña y el sistema está sometido a excitaciones de banda ancha. Una formulación mejorada fue planteada por Rosenblueth y Elorduy (1969) con la intención de tomar en cuenta efectos de interacción entre contribuciones modales cruzadas. La regla CQC (conocida así por las siglas en inglés *Complete Quadratic Combination*) fue propuesta por Der Kiureghian (1981) y permite calcular el coeficiente de correlación lineal entre respuestas modales mediante expresiones analíticas sencillas que dependen de las frecuencias y amortiguamientos modales. Estas expresiones fueron deducidas suponiendo que la fase intensa de la aceleración sísmica del suelo es un proceso aleatorio tipo ruido blanco. Esta suposición funciona muy bien cuando el movimiento sísmico del suelo es de banda ancha y el espectro de potencia varía suavemente en un amplio intervalo de la frecuencia que contenga las frecuencias modales más significativas de la estructura. Sin embargo, en el caso de excitaciones de banda angosta la aplicación de esta regla puede no ser apropiada.

Heredia (2010) propuso la regla completa de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados (c-SRSS, del inglés *complete Square Root of Sum of Squares*), la cual permite expresar rigurosamente la respuesta estructural en términos de las respuestas de sistemas de un grado de libertad desacoplados, pero tomado en cuenta la contribución de las varianzas y

covarianzas entres respuestas modales. En esta formulación, los momentos espectrales de la respuesta estructural están expresados en términos de los momentos espectrales de respuestas modales, y de unos parámetros de respuesta que dependen de las frecuencias y amortiguamientos modales. La regla c-SRSS no supone un tipo de excitación en particular ni requiere del cálculo de coeficientes de correlación lineal entre respuestas modales. Uno de los parámetros involucrados en la regla c-SRSS es la frecuencia característica del desplazamiento modal, es decir del desplazamiento relativo de un oscilador simple, cuya frecuencia natural y amortiguamiento son iguales a la frecuencia y amortiguamiento de un modo de vibrar del sistema estructural, y que está sometido a la excitación sísmica. El propósito de este trabajo es proponer modelos que permitan calcular de una manera práctica la frecuencia característica modal, de tal manera que se facilite la aplicación de la regla c-SRSS en el análisis y diseño estructural. En virtud de ello, a continuación se presentan los principales aspectos de la formulación matemática de la regla c-SRSS.

## 1.2 Antecedentes: La regla de combinación modal c-SRSS

Consideremos la ecuación de movimiento de un sistema de un grado de libertad sujeto a una aceleración del suelo  $a(t)$ , de la siguiente manera:

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{z}_i + \omega_i^2z_i = -\Gamma_i a(t) \quad (1.1)$$

donde  $\omega_i$  y  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son la frecuencia y amortiguamiento modales, respectivamente, del sistema estructural de  $n$  grados de libertad y  $\Gamma_i = \varphi_i^T M I$  son los factores de participación modal,  $\varphi_i$  las formas modales,  $M$  la matriz de masa, e  $I$  el vector que relaciona los desplazamientos de la estructura con un desplazamiento unitario de su base. Una respuesta estructural de interés, tal como la fuerza interna en un componente o el desplazamiento de un nodo, se puede expresar en general como,

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n Q^T \varphi_i z_i(t) \quad (1.2)$$

donde el vector de transferencia de la respuesta,  $Q$ , depende de la geometría y la rigidez de la estructura. Si la aceleración del suelo se modela como un proceso aleatorio estacionario, de media cero, se puede demostrar que la función de densidad espectral de un solo lado (o de frecuencias positivas) de la respuesta está dada por

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i^2 |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_i c_j \operatorname{Re}[H_i(\omega) H_j(-\omega)] G_0(\omega) \quad (1.3)$$

En (1.3),  $c_i = Q^T \varphi_i \Gamma_i$ ,  $G_0(\omega)$  es la función de densidad espectral de un solo lado de la aceleración del suelo,  $\operatorname{Re}[\ ]$  denota la parte real, y  $H_i(\omega)$  es la función de transferencia modal,

$$H_i(\omega) = -\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i \omega_i \omega} \quad (1.4)$$

La varianza de la respuesta está dada por,

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \int_0^\infty |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_i c_j \int_0^\infty \operatorname{Re}[H_i(\omega) H_j(-\omega)] G_0(\omega) d\omega \quad (1.5)$$

El primer término en el lado derecho de la ec. (1.5) representa la contribución de las varianzas modales, mientras que el segundo el de las covarianzas. Si se descarta la contribución las covarianzas se obtiene,

$$\sigma_Y^2 \approx \sum_{i=1}^n c_i^2 \int_0^\infty |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega \quad (1.6)$$

que es la formulación en la que se basa la regla SRSS propuesta por Rosenblueth (1951). Usando la técnica de fracciones parciales, Heredia (2010) demostró que

$$Re[H_i(\omega)H_j(-\omega)] = A_{ij}|H_i(\omega)|^2 + B_{ij}\frac{\omega^2}{\omega_i^2}|H_i(\omega)|^2 + D_{ij}|H_i(\omega)|^2 + E_{ij}\frac{\omega^2}{\omega_i^2}|H_i(\omega)|^2 \quad (1.7)$$

y los factores  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  y  $E_{ij}$  dependen solamente de la relación de frecuencias modales  $q = \omega_i/\omega_j$  y de los amortiguamientos modales  $\xi_i$  y  $\xi_j$ , como sigue

$$E_{ij} = \frac{[4\xi_i q(\xi_i - \xi_j q) + q^2 - 1](1 - q^4) - 2q^2(1 - q^2)[q^2(1 - 2\xi_j^2) - (1 - 2\xi_i^2)]}{4q^2[(1 - 2\xi_i^2)q^2 - (1 - 2\xi_j^2)][(1 - 2\xi_j^2)q^2 - (1 - 2\xi_i^2)] - (1 - q^4)^2} \quad (1.8)$$

$$B_{ij} = -q^2 E_{ij} \quad (1.9)$$

$$D_{ij} = \frac{4\xi_i \xi_j q - q^2 - 1 + 2q^2(1 - 2\xi_j^2) - (q^4 - 1)E_{ij}}{2q^2[q^2(1 - 2\xi_j^2) - (1 - 2\xi_i^2)]} \quad (1.10)$$

$$A_{ij} = q^2 - q^4 D_{ij} \quad (1.11)$$

Si se definen los parámetros,

$$\alpha_i = c_i^2 + 2c_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j A_{ij} \quad (1.12)$$

$$\beta_i = 2c_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j B_{ij} \quad (1.13)$$

la descomposición con fracciones parciales permite expresar la densidad espectral de la respuesta como,

$$G(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) + \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\omega^2}{\omega_i^2} |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) \quad (1.14)$$

La varianza de la respuesta estructural está dada por,

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{di}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sigma_{vi}^2 \quad (1.15)$$

donde  $\sigma_{di}^2$  y  $\sigma_{vi}^2$  son las varianzas del desplazamiento y velocidad modal,

$$\sigma_{di}^2 = \int_0^{\infty} |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega \quad (1.16)$$

$$\sigma_{vi}^2 = \int_0^{\infty} \omega^2 |H_i(\omega)|^2 G_0(\omega) d\omega \quad (1.17)$$

Observemos que la varianza de la respuesta estructural se puede también expresar de la siguiente manera

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \alpha_i + \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \frac{\sigma_{vi}^2}{\sigma_{di}^2} \right) \sigma_{di}^2 \quad (1.18)$$

donde  $\sigma_{vi}^2/\sigma_{di}^2 = \Omega_{2,i}$  es la frecuencia característica modal, que determina la tasa media con la que el desplazamiento modal cruza el eje cero en el caso de excitación estacionaria Gaussiana. Si definimos un coeficiente de respuesta modal como

$$\mu_i = \alpha_i + \beta_i \frac{\Omega_{2,i}^2}{\omega_i^2} \quad (1.19)$$

Entonces la varianza de la respuesta de la estructura se obtiene de

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \mu_i \sigma_{di}^2 \quad (1.20)$$

La expresión en (1.20) es la base de la regla de combinación c-SRSS y demuestra que la varianza de la respuesta se puede escribir como la suma de términos que involucran

solamente las varianzas de los desplazamientos modales. Cabe hacer notar que cuando se desprecia la contribución de las covarianzas entre respuestas modales,  $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j A_{ij} = 0$ ,

$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_j B_{ij} = 0$ , y entonces  $\alpha_i = c_i^2$ ,  $\beta_i = 0$  y  $\mu_i = c_i^2$ , por lo que en tal caso

$$\sigma_Y^2 \approx \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_{di}^2 \quad (1.21)$$

que es la formulación de la regla clásica SRSS de Rosenbluth (1951). Con base en la regla c-SRSS, Heredia (2010) planteó un método de análisis con base en espectros de respuesta en el que la respuesta estructural máxima se obtiene de

$$Y_{max} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i (S_{di})^2} \quad (1.22)$$

donde  $S_{di} = S_d(\omega_i, \xi_i)$  es la ordenada del espectro de desplazamiento para una frecuencia natural  $\omega_i$  y amortiguamiento  $\xi_i$ . La aproximación se debe a que se supone que el cociente del factor pico de la respuesta entre el factor pico de un desplazamiento modal es igual a uno.

### 1.3 Objetivos y Alcances

En este trabajo se propone contribuir al desarrollo del método modal espectral basado en la regla de combinación c-SRSS. Para ello se considera necesario proponer formas prácticas de calcular la frecuencia característica modal, parámetro requerido en la formulación para estimar la respuesta estructural máxima. La tesis tiene por lo tanto los siguientes objetivos:

1. Proponer modelos prácticos para estimar la frecuencia característica modal requerida para la aplicación de la regla c-SRSS
2. Evaluar la precisión de los modelos propuestos en el cálculo de la varianza de la respuesta estructural usando la regla c-SRSS.

La tesis se desarrolla con los siguientes alcances:

1. Se aplicará teoría de vibraciones aleatorias para sistemas lineales.
2. Se considerarán modelos de aceleración del suelo de Kanai-Tajimi para representar excitaciones de banda ancha y banda angosta.
3. La precisión de los modelos se evaluará mediante un caso de estudio de un sistema estructural sencillo; para ello se usará como referencia comparativa los resultados de Heredia (2010) y la precisión de las reglas SRSS y CQC.

#### 1.4 Organización del documento

En el capítulo 2 se presentan a detalle el desarrollo y estimación de los modelos propuestos para su aplicación en la regla c-SRSS. La evaluación de los modelos en términos de su precisión para estimar la respuesta mediante un caso de estudio se presenta en el capítulo 3. El capítulo 4 contiene los comentarios finales y conclusiones del estudio.

## 2. FORMULACIÓN DE MODELOS PARA APLICACIÓN DE LA REGLA c-SRSS

Se presentan modelos para una estimación práctica de la frecuencia característica que se emplea en la regla de combinación modal c-SRSS. Se desarrolla una formulación alternativa de la regla c-SRSS y se analizan los modelos requeridos para su aplicación. Adicionalmente se deduce una formulación en términos de espectros de aceleración.

### 2.1 Respuesta de un oscilador a ruido blanco filtrado

Der Kiureghian (1980) planteó expresiones analíticas para los momentos espectrales del desplazamiento de un oscilador sometido a un proceso de ruido blanco filtrado cuya densidad espectral está dada por,

$$G_0(\omega) = \frac{\omega_f^4 + 4\xi_f^2\omega_f^2\omega^2}{(\omega_f^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_f^2\omega_f^2\omega^2} G_0 \quad (2.1)$$

Este modelo se ha utilizado ampliamente para representar la aceleración en la superficie libre de un estrato de suelo con frecuencia natural  $\omega_f$  y amortiguamiento  $\xi_f$  excitado en su base por ruido blanco de intensidad  $G_0$ , y se le conoce como el modelo de Kanai-Tajimi (Kanai, 1967; Tajimi 1960). Dependiendo de los parámetros del modelo se pueden representar una variedad de excitaciones, por ejemplo de banda ancha para suelos firmes y de banda angosta para suelos blandos. Los momentos espectrales de la respuesta planteados por Der Kiureghian se expresan como sigue,

$$\lambda_{0,i} = \frac{\pi G_0 A}{4\xi_i\omega_i^3 F} + \frac{\pi G_0 B}{4\xi_f\omega_f^3 F} \quad (2.2)$$

$$\lambda_{2,i} = \frac{\pi G_0 A''}{4\xi_i\omega_i F} + \frac{\pi G_0 E}{4\xi_f\omega_f F} \quad (2.3)$$

donde los parámetros  $A$ ,  $A''$ ,  $B$ ,  $E$  y  $F$  se determinan en función de la relación de frecuencias modales  $r = \omega_i/\omega_f$ , del amortiguamiento modal,  $\xi_i$ , y del suelo,  $\xi_f$ . La frecuencia característica se puede expresar entonces como,

$$\Omega_{2,i}^2 = \omega_i^2 \frac{\left[ \frac{A''}{\xi_i} + \frac{E}{\xi_f} r \right]}{\left[ \frac{A}{\xi_i} + \frac{B}{\xi_f} r^3 \right]} \quad (2.4)$$

donde

$$A = A_0 + 4\xi_i^2 r^2 [2 - 4\xi_f^2 - (3 - 4\xi_i^2)r^2 - 4\xi_f^2 r^4] \quad (2.5a)$$

$$A' = A_0 + 4\xi_i^2 r^2 [1 - 4\xi_f^2 - 2(1 - \xi_i^2)r^2 - 2\xi_f^2 r^4] \quad (2.5b)$$

$$B = 1 - 8\xi_f^2 - 2(1 - \xi_i^2)r^2 + (1 - 4\xi_f^2)r^4 \quad (2.5c)$$

$$E = 1 - 2(1 - \xi_i^2 + 4\xi_f^2 - 8\xi_i^2 \xi_f^2)r^2 + (1 + 4\xi_f^2 - 16\xi_f^4)r^4 \quad (2.5d)$$

$$A_0 = 1 - 2(1 - 4\xi_f^2)r^2 + (1 + 4\xi_f^2)r^4 \quad (2.5e)$$

## 2.2 Aproximación empírica con base en superficies de respuesta

En el campo de la estadística, el método de superficies de respuesta se utiliza para explorar la relación entre un conjunto de variables inciertas de entrada y una o más variables que caractericen una cierta respuesta de interés. Conceptualmente es un método sencillo, el cual se basa en diseñar una secuencia de experimentos aleatorios con las variables de entrada para obtener valores de dicha respuesta. Los resultados se usan para estimar los modelos que relacionan las variables usando, típicamente, polinomios de segundo grado. En este estudio, el problema es más sencillo pues no se considera la incertidumbre en las variables de entrada, tales como las frecuencias y amortiguamientos del sistema estructural, o las del modelo de excitación. Por lo tanto, el procedimiento consistió en generar respuestas de interés, digamos  $Y$ , para un amplio espectro de combinaciones de valores significativos de las variables de entrada, digamos  $x_i$ , y estimar el modelo que las relaciona. Se consideraron modelos de superficie de respuesta utilizando polinomios de segundo grado del tipo (Cornell 1990)

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} x_i x_j \quad (2.6)$$

donde  $\beta_i$  son los coeficientes para los términos de primer orden,  $\beta_{ii}$  los coeficientes para los términos cuadráticos,  $\beta_{ij}$  los coeficientes para los términos cruzados y  $\beta_0$  es un término constante.

Se utilizó el modelo de Kanai-Tajimi para la densidad espectral de la aceleración del suelo, escrito de la siguiente forma,

$$G_0(\omega) = \frac{1 + 4\xi_f^2(\omega/\omega_f)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_f)^2\right]^2 + 4\xi_f^2(\omega/\omega_f)^2} \quad (2.7)$$

Considerando la función de transferencia en (1.4) la varianza de desplazamiento (ver Eq. (1.16)) es igual a

$$\sigma_{di}^2 = \int_0^\infty \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i)^2\omega^2} \frac{1 + 4\xi_f^2(\omega/\omega_f)^2}{\left[1 - (\omega/\omega_f)^2\right]^2 + 4\xi_f^2(\omega/\omega_f)^2} d\omega \quad (2.8)$$

Sean  $x = \omega/\omega_i$  y  $r_i = \omega_i/\omega_f$  la relación entre la frecuencia modal y la frecuencia dominante de la excitación; la integral en (2.8) se puede parametrizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sigma_{di}^2 &= \frac{1}{\omega_i^3} \int_0^\infty \frac{1}{(1-x^2)^2 + 4(\xi_i x)^2} \frac{1 + 4(\xi_f r_i x)^2}{\left[1 - (rx)^2\right]^2 + 4(\xi_f r_i x)^2} dx \\ &= \frac{1}{\omega_i^3} g(r_i; \xi_i; \xi_f) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde  $g(r_i; \xi_i; \xi_f)$  es una función de la relación de frecuencias,  $r_i$ , y de los coeficientes del amortiguamiento modal y del suelo. De manera similar la varianza de la velocidad se puede escribir como,

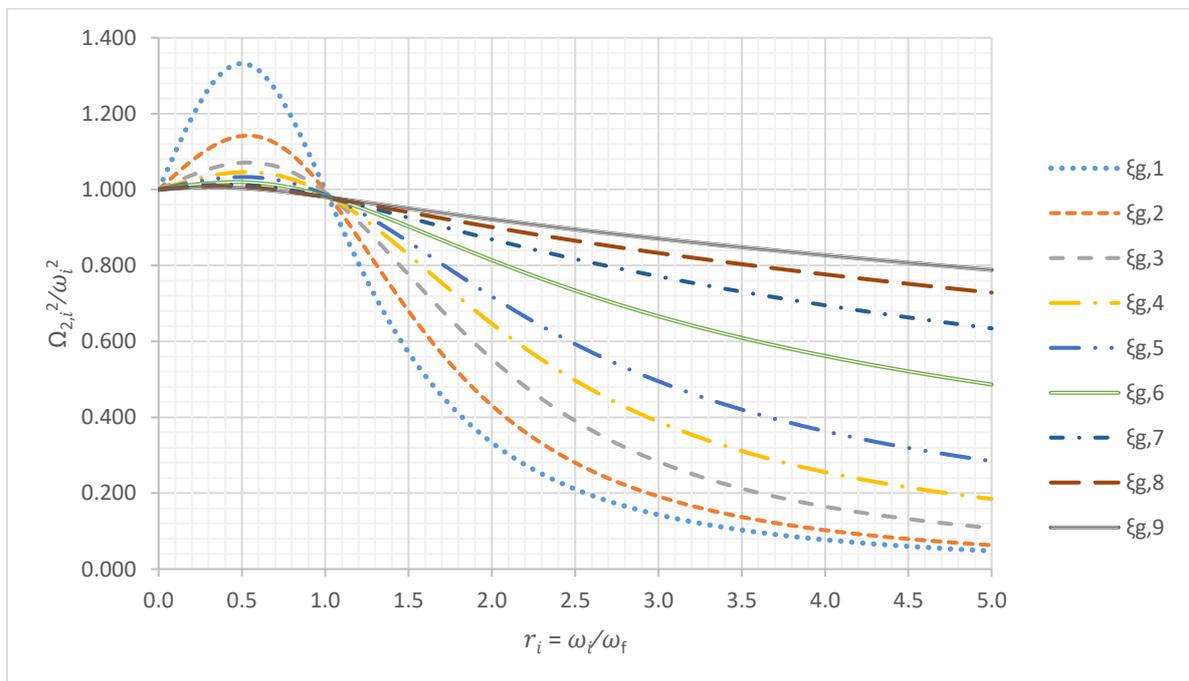
$$\sigma_{vi}^2 = \frac{1}{\omega_i} \int_0^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2 + 4(\xi_i x)^2} \frac{1 + 4(\xi_f r_i x)^2}{\left[1 - (rx)^2\right]^2 + 4(\xi_f r_i x)^2} dx \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{\omega_i} h(r_i; \xi_i; \xi_f)$$

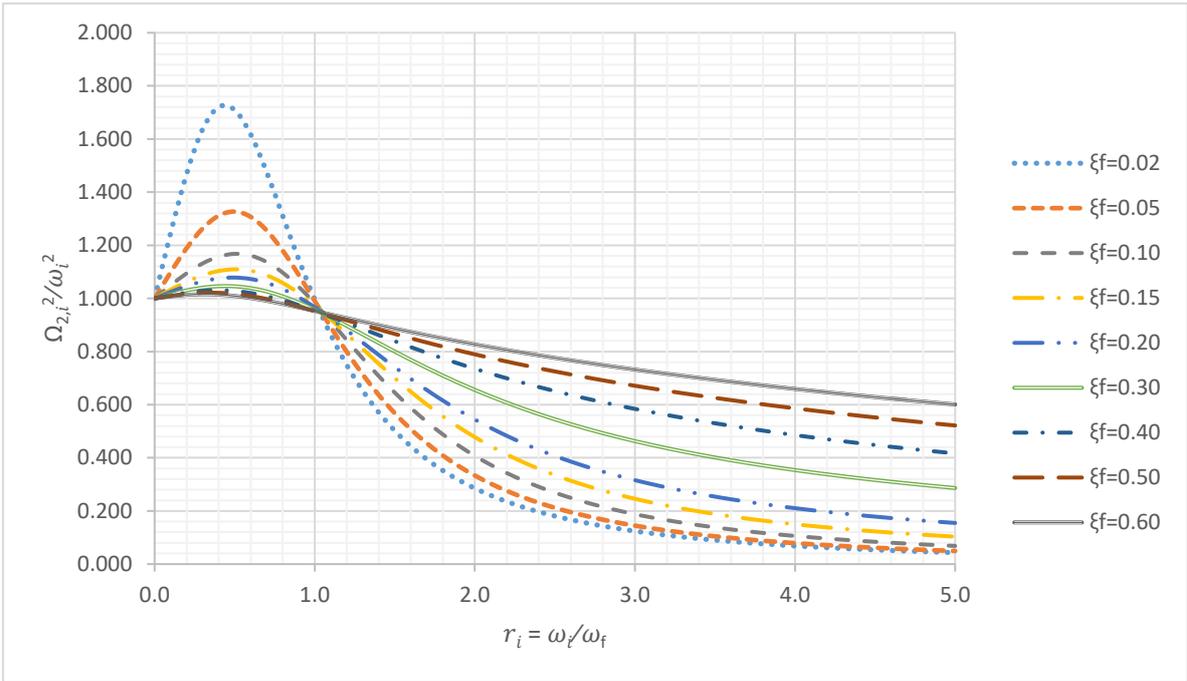
y  $h(r_i; \xi_i; \xi_f)$  es también una función de la relación de frecuencias,  $r_i$ , y de los coeficientes de amortiguamiento modal y del suelo. Se calcularon los valores del cuadrado de la frecuencia característica normalizada respecto a la frecuencia modal

$$\Omega_{2,i}^2 / \omega_i^2 = \frac{h(r_i; \xi_i; \xi_f)}{g(r_i; \xi_i; \xi_f)} \quad (2.11)$$

utilizando valores de: (1)  $r_i$  en el intervalo de 0.1 a 5; (2) amortiguamiento  $\xi_f$  iguales a 2%, 5%, 10%, 15%, 20%, 30%, 40%, 50% y 60%, característicos de modelos de excitación desde suelos blandos hasta suelos con espectros tipo banda ancha; y (3) amortiguamiento modal iguales a 1%, 2%, 5% y 10%. Los coeficientes del modelo polinomial de segundo grado de la ec. 2.6, se estimaron mediante el método de mínimos cuadrados.

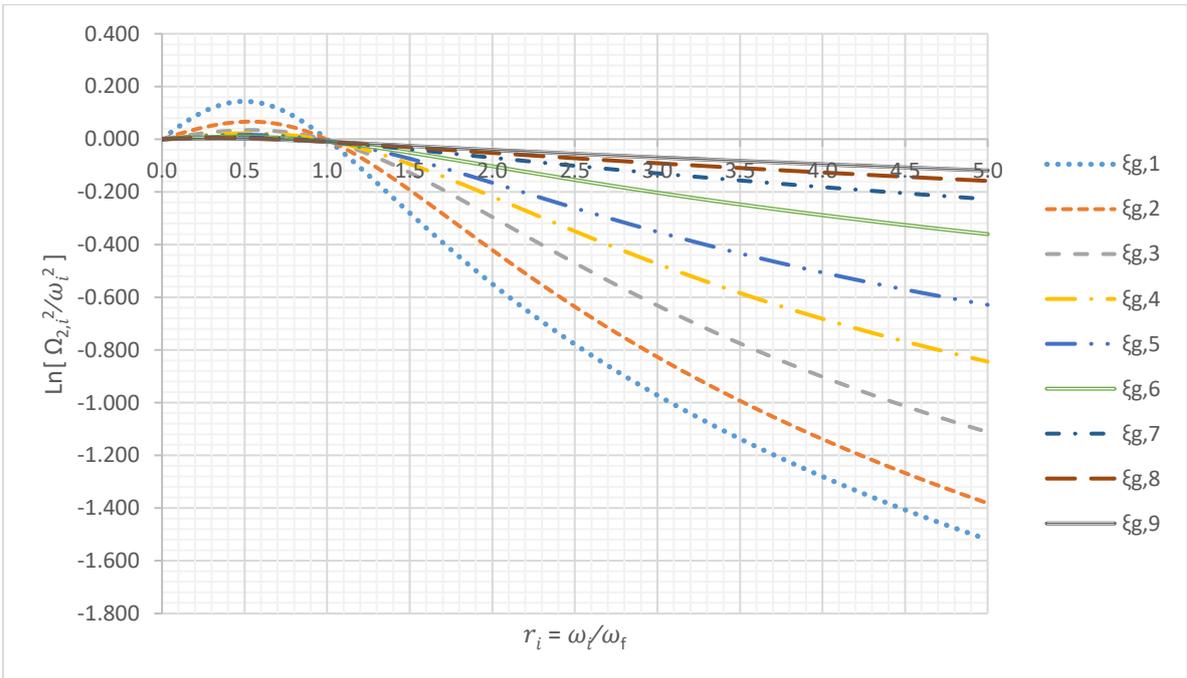


a)  $\xi_i = 0.02$ .

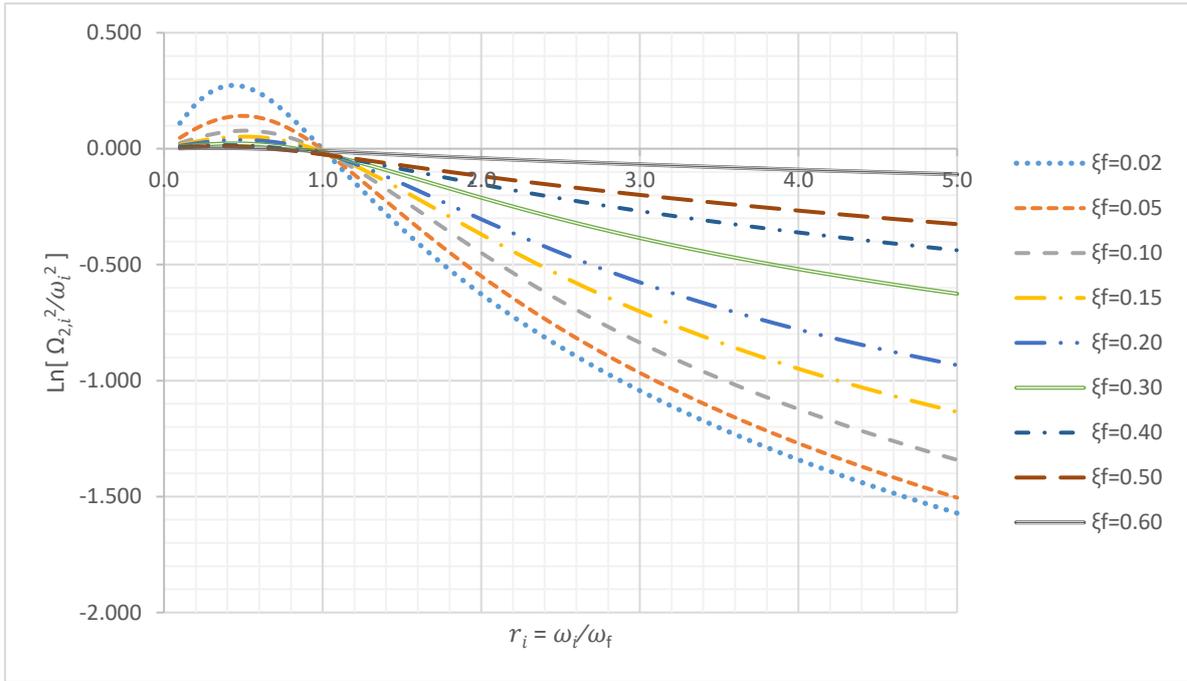


b)  $\xi_i = 0.05$ .

Figura 2.1 Frecuencia característica normalizada versus relación de frecuencias



a)  $\xi_i = 0.02$ .



b)  $\xi_i = 0.05$ .

Figura 2.2 Logaritmo natural de la frecuencia característica normalizada versus relación de frecuencias

La Fig. 2.1 muestra la variación de  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  en función de la relación de frecuencias,  $r_i$ , para 2% y 5% de amortiguamiento modal; la Fig. 2.2 muestra la variación del  $\ln[\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2]$ . Se consideró conveniente tomar en cuenta la influencia de la relación de frecuencias y de amortiguamiento del suelo para la estimación de los modelos. Se propusieron y estimaron los siguientes modelos:

- i. Superficie de respuesta de  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$  y  $\xi_f$ , para  $r_i \leq 1$  y  $r_i > 1$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = 0.2472r_i - 0.2355r_i^2 - 0.5616\xi_f + 0.8459\xi_f^2 + 3.0093\xi_i - 1.4157r_i\xi_i - 4.5660\xi_i\xi_f + 1.0287 \quad r_i \leq 1 \quad (2.12)$$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = -0.4377r_i + 0.0413r_i^2 + 1.6174\xi_f - 1.5113\xi_f^2 - 6.5169\xi_i + 46.6698\xi_i^2 + 0.1976r_i\xi_f - 0.1976r_i\xi_i - 6.1341\xi_i\xi_f + 1.2182 \quad r_i > 1 \quad (2.13)$$

- ii. Superficies de respuesta de  $\ln[\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2]$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$  y  $\xi_f$ , para  $r_i \leq 1$  y  $r_i > 1$

Para  $\xi_f \leq 0.2$

$$\ln[\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2] = 0.1972r_i - 0.2913r_i^2 + 1.4042\xi_f - 3.5027\xi_f^2 + 3.16\xi_i + 43.481\xi_i^2 + 0.8321r_i\xi_i - 1.3769r_i\xi_f - 41.657\xi_i\xi_f - 0.0525 \quad r \leq 1 \quad (2.14)$$

$$\ln[\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2] = -1.0402r_i + 0.0502r_i^2 + 0.9236\xi_f - 5.16\xi_f^2 - 10.9926\xi_i + 109.0591\xi_i^2 + 2.2438r_i\xi_f - 2.1946r_i\xi_i - 28.3912\xi_i\xi_f + 1.0803 \quad r > 1 \quad (2.15)$$

Para  $\xi_f > 0.2$

$$\ln[\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2] = 0.6994r_i - 0.3094r_i^2 + 1.4042\xi_f - 1.1212\xi_f^2 + 0.6024\xi_i - 6.1732\xi_i^2 - 0.7777r_i\xi_f - 1.6041r_i\xi_i + 2.5573\xi_i\xi_f - 0.492 \quad r \leq 1 \quad (2.16)$$

$$\ln[\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2] = -0.5381r_i + 0.0321r_i^2 + 0.9236\xi_f - 2.7785\xi_f^2 - 13.5502\xi_i + 59.4049\xi_i^2 + 0.634r_i\xi_f - 2.4217r_i\xi_i + 15.8231\xi_i\xi_f + 0.6408 \quad r > 1 \quad (2.17)$$

iii. Superficie de respuesta del valor promedio de  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  en función de  $r_i$ ,  $r_i \leq 1$  y  $r_i > 1$ , y valores específicos de amortiguamiento modal  $\xi_i$

Para  $\xi_i = 0.01$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = -0.0814r_i^2 + 0.0803r_i + 0.9987 \quad r \leq 1 \quad (2.18)$$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = 0.0145r_i^2 - 0.1804r_i + 1.1726 \quad r > 1 \quad (2.19)$$

Para  $\xi_i = 0.02$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = -0.1538r_i^2 + 0.1493r_i + 0.9984 \quad r \leq 1 \quad (2.20)$$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = 0.0219r_i^2 - 0.2394r_i + 1.2132 \quad r > 1 \quad (2.21)$$

Para  $\xi_i = 0.05$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = -0.3331r_i^2 + 0.3132r_i + 1.0004 \quad r \leq 1 \quad (2.22)$$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = 0.0317r_i^2 - 0.3148r_i + 1.2519 \quad r > 1 \quad (2.23)$$

Para  $\xi_i = 0.10$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = -0.5546r_i^2 + 0.5022r_i + 1.0084 \quad r \leq 1 \quad (2.24)$$

$$\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2 = 0.0382r_i^2 - 0.3624r_i + 1.2613 \quad r > 1 \quad (2.25)$$

### 2.3 Estimación basada en una formulación alternativa de la regla c-SRSS

De acuerdo con la Eq. (1.15), la varianza de la respuesta es,

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{0,i} + \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \lambda_{2,i} \quad (2.26)$$

donde  $\lambda_{0,i}$  y  $\lambda_{2,i}$  son la varianzas del desplazamiento y de la velocidad del i-ésimo modo:

$\sigma_{di}^2 = \lambda_{0,i}$  y  $\sigma_{vi}^2 = \lambda_{2,i}$ , entonces

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_{di}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \gamma_i \sigma_{di}^2 + \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sigma_{vi}^2 \right) \quad (2.27)$$

donde

$$\gamma_i = 2c_i c_j A_{ij} \quad (2.28)$$

De la ecuación modal de movimiento (1.1), podemos escribir

$$2\xi_i \dot{z}_i = - \left( \omega_i z_i + \frac{1}{\omega_i} \ddot{z}_i^T \right) \quad (2.29)$$

donde  $\ddot{z}_i^T$  es la aceleración modal total

$$\ddot{z}_i^T = \ddot{z}_i + a(t) \quad (2.30)$$

Como podemos observar, la velocidad relativa puede ser expresada en términos del desplazamiento relativo y de la aceleración total; la varianza de la velocidad modal  $\sigma_{vi}^2$  es entonces igual a

$$\sigma_{vi}^2 = \frac{1}{(2\xi_i)^2} \left( \omega_i^2 \sigma_{di}^2 + \frac{1}{\omega_i^2} \sigma_{Ai}^2 + 2\rho_i^{dA} \sigma_{di} \sigma_{Ai} \right) \quad (2.31)$$

En (2.31),  $\sigma_{Ai}^2$  es la varianza de la aceleración modal total y  $\rho_i^{dA}$  es el coeficiente de correlación lineal entre el desplazamiento (relativo) y la aceleración total del i-ésimo modo,

$$\rho_i^{dA} = \frac{1}{\sigma_{di}\sigma_{Ai}} \int_{-\infty}^{\infty} S_i^{dA}(\omega) d\omega \quad (2.32)$$

La función de densidad espectral cruzada entre la respuesta del desplazamiento relativo y la aceleración total,  $S_i^{dA}(\omega)$  está dada por

$$S_i^{dA} = [H_{di}(i\omega)H_{a,i}(-i\omega) + H_{di}(i\omega)]G_0(\omega) \quad (2.33)$$

donde  $H_{di}(i\omega)$  y  $H_{a,i}(i\omega)$  son las funciones de transferencia modal del desplazamiento relativo y de la aceleración relativa, respectivamente

$$H_{di}(i\omega) = -\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\omega} \quad (2.34)$$

$$H_{a,i}(i\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2i\xi_i\omega_i\omega} \quad (2.35)$$

Sustituyendo (2.34) y (2.35) en (2.33) se obtiene

$$S_i^{dA}(\omega) = -\frac{\omega_i^2 - 2i\xi_i\omega_i\omega}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i\omega)^2} G_0(\omega) \quad (2.36)$$

La parte real y la parte imaginaria de  $S_i^{dA}(\omega)$  son una función simétrica y asimétrica de la frecuencia  $\omega$ , respectivamente, por lo que,

$$\begin{aligned} \rho_i^{dA} &= -\frac{\omega_i^2}{\sigma_{di}\sigma_{Ai}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_i\omega_i\omega)^2} G_0(\omega) d\omega \\ &= -\omega_i^2 \frac{\sigma_{di}}{\sigma_{Ai}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

De este manera,  $\sigma_{vi}^2$  en la ec. (2.31) se reduce a

$$\sigma_{vi}^2 = \frac{1}{(2\xi_i)^2} \left( \frac{1}{\omega_i^2} \sigma_{Ai}^2 - \omega_i^2 \sigma_{di}^2 \right) \quad (2.38)$$

lo cual demuestra que, para cada modo, la varianza de la velocidad depende de las varianzas de la aceleración total y del desplazamiento. La varianza de la respuesta de la estructura, ec. (2.27), puede entonces expresarse de la siguiente forma

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_{di}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \gamma_i - \frac{\beta_i}{(2\xi_i)^2} \right) \sigma_{di}^2 + \frac{\beta_i}{(2\omega_i^2 \xi_i)^2} \sigma_{Ai}^2 \quad (2.39)$$

Podemos observar en (2.39) que una parte de la contribución de las covarianzas está relacionada con la varianza del desplazamiento modal,  $\sigma_{di}^2$ , y la otra se explica en términos de la varianza de la aceleración modal total,  $\sigma_{Ai}^2$ . Nótese que al haber encontrado la expresión analítica para  $\rho_i^{dA}$  en (2.37), la varianza de la respuesta estructural en (2.39) no involucra el cálculo de ningún coeficiente de correlación entre respuestas modales. Una ventaja de la Eq. (2.39) es que la varianza de la aceleración total se puede relacionar con la de la pseudo-aceleración, la cual, a su vez, se obtiene de la varianza del desplazamiento:

$$\sigma_{Ai}^2 = \omega_i^4 \sigma_{di}^2 (1 + \varepsilon_i) \quad (2.40)$$

El error  $\varepsilon_i$  mide la diferencia entre las varianzas de la aceleración total y la pseudo-aceleración,  $\omega_i^4 \sigma_{di}^2$ . Como  $\sigma_{vi}^2 \geq 0$ , se deduce de (2.38) que  $\sigma_{Ai}^2 \geq \omega_i^4 \sigma_{di}^2$  y por lo tanto la varianza de la aceleración modal total es mayor o igual a la varianza de la pseudo-aceleración, así  $\varepsilon_i \geq 0$ . Si se substituye (2.40) en (2.39),

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \sigma_{di}^2 + \sum_{i=1}^n \left( \gamma_i - \frac{\beta_i}{(2\xi_i)^2} \varepsilon_i \right) \sigma_{di}^2, \quad \varepsilon_i \geq 0 \quad (2.41)$$

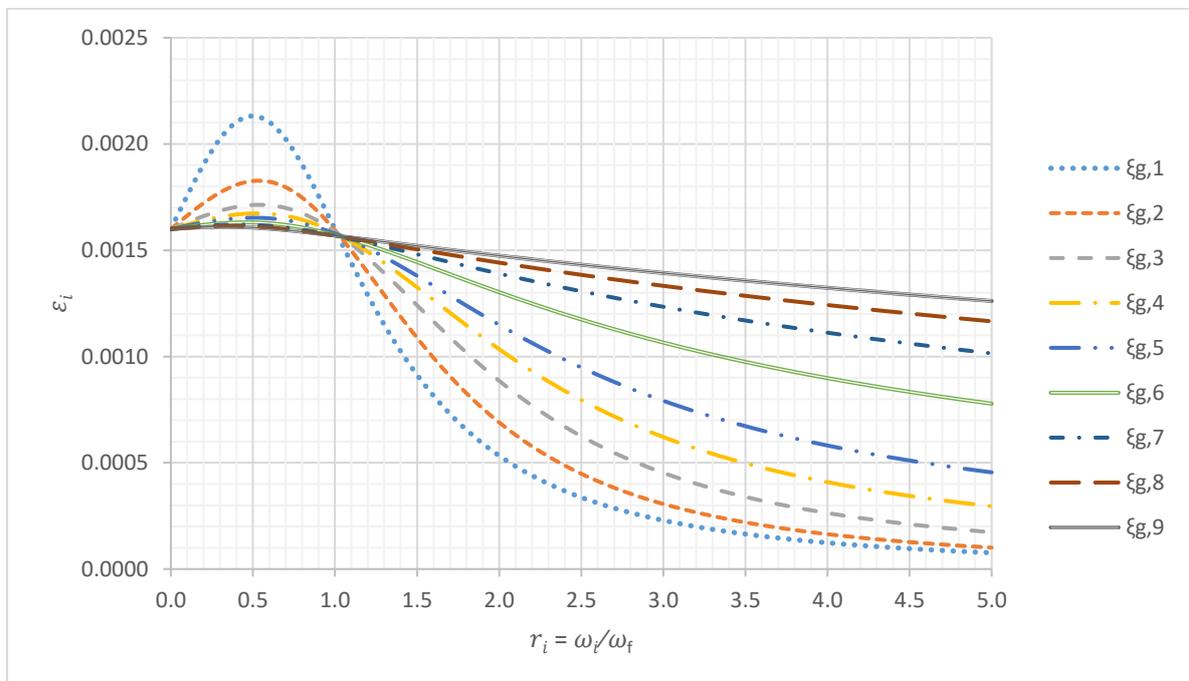
Se puede calcular el error  $\varepsilon_i$  utilizando la Eq. (2.40); otra forma de estimar  $\varepsilon_i$  se puede deducir de (2.38)

$$(2\xi_i)^2 \frac{\sigma_{vi}^2}{\sigma_{di}^2} = \omega_i^2 \left( \frac{\sigma_{Ai}^2}{\omega_i^4 \sigma_{di}^2} - 1 \right) \quad (2.42)$$

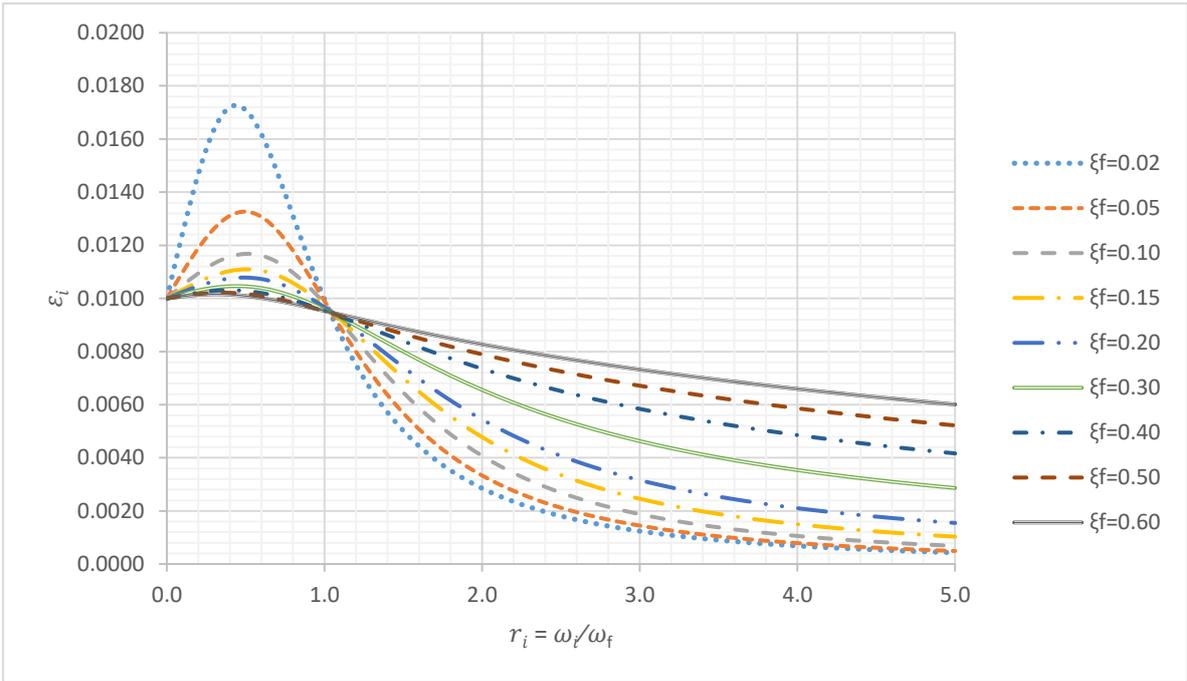
de donde se obtiene que,

$$\varepsilon_i = \frac{\Omega_i^2}{\omega_i^2} (2\xi_i)^2 \quad (2.43)$$

Utilizando los datos y resultados de la sección 2.2, se obtuvieron valores del error  $\varepsilon_i$ . La Fig. 2.3 muestra la variación de  $\varepsilon_i$  en función de la relación de frecuencias  $r_i$  para 2% y 5% de amortiguamiento modal; la Fig. 2.4 muestra la variación del  $\text{Ln}(\varepsilon_i)$ .

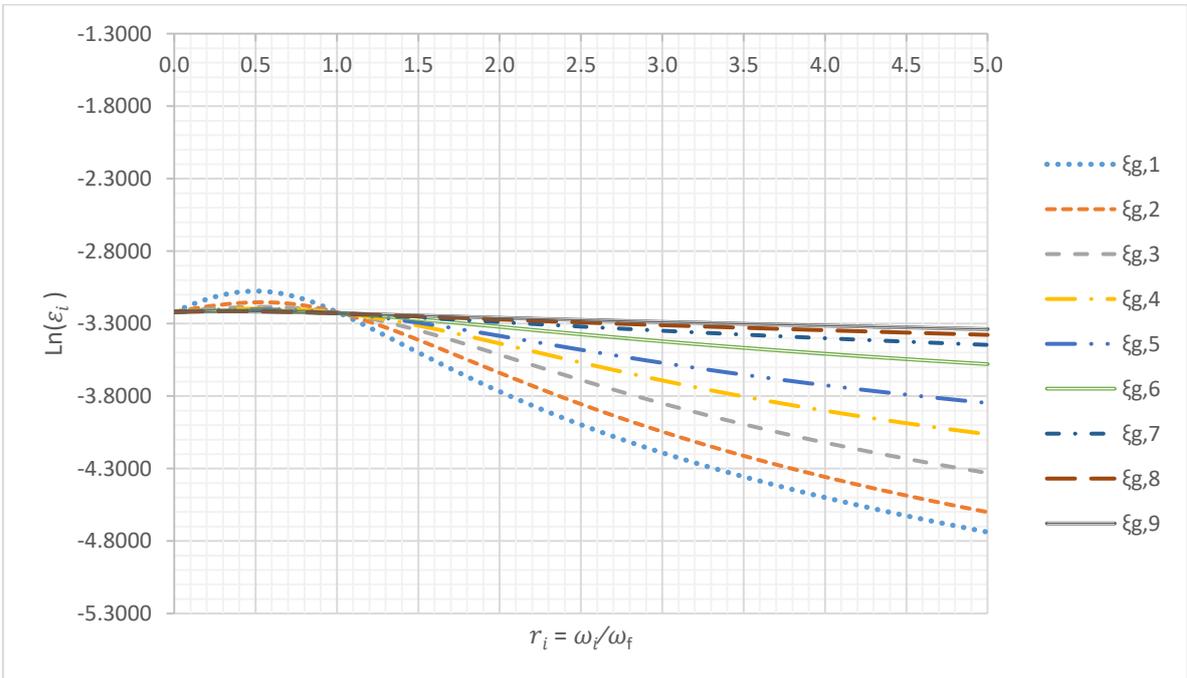


a)  $\xi_i = 0.02$ .

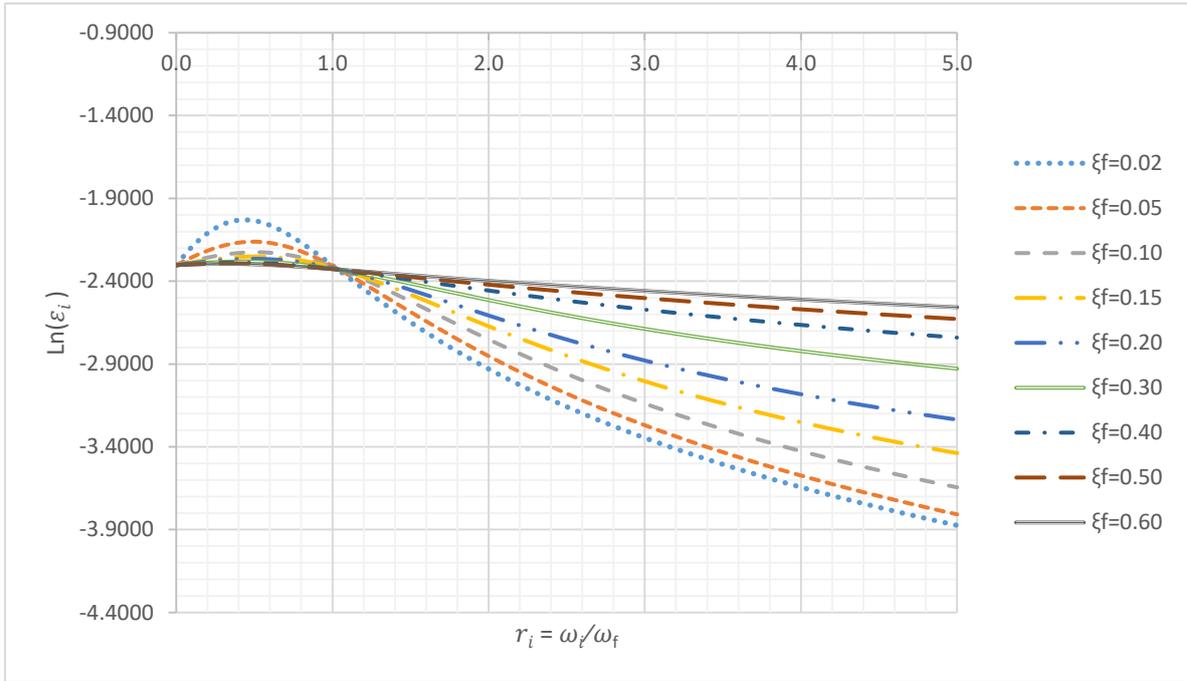


b)  $\xi_i = 0.05$ .

Figura 2. 3 Error  $\varepsilon_i$  versus relación de frecuencias



a)  $\xi_i = 0.02$ .



b) = 0.05.

Figura 2. 4 Logaritmo natural del error  $\varepsilon_i$  versus relación de frecuencias

Se consideró conveniente tomar en cuenta la influencia de la relación de frecuencias y del amortiguamiento del suelo para la estimación de los modelos. Se propusieron y estimaron los siguientes modelos:

- i. Superficie de respuesta de  $\text{Ln}(\varepsilon_i)$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$  y  $\xi_f$ , para para  $\xi_f \leq 2\%$  y  $\xi_f > 2\%$  y  $r_i \leq 1$ ,  $1 < r_i \leq 2$  y  $r_i > 1$ .

$\xi_i = 0.01$  y  $\xi_f \leq 0.20$

$$\begin{aligned}
 \ln[\varepsilon_i] &= -0.1585r_i^2 + 0.1655r_i + 3.4436\xi_f^2 - 1.1313\xi_f - 0.0175r_i\xi_f - 7.7502 & r_i \leq 1 \\
 \ln[\varepsilon_i] &= -0.1251r_i^2 - 0.497r_i - 13.1847\xi_f^2 - 1.1313\xi_f + 3.7809r_i\xi_f - 7.2733 & 1 < r_i \leq 2 \\
 \ln[\varepsilon_i] &= 0.0395r_i^2 - 0.9949r_i - 27.1296\xi_f^2 + 5.4774\xi_f + 2.4973r_i\xi_f - 7.1464 & r_i > 2
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\xi_i = 0.01 \text{ y } \xi_f > 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.0388r_i^2 + 0.0373r_i - 0.0087\xi_f - 0.0175r_i\xi_f - 7.820 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.0055r_i^2 - 0.1465r_i - 0.2626\xi_f^2 - 0.0087\xi_f + 0.2253r_i\xi_f - 7.7216 & 1 < r_i \leq 2 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0021r_i^2 - 0.1839r_i - 2.0307\xi_f^2 + 1.6136\xi_f + 0.2433r_i\xi_f - 8.0432 & r_i > 2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\xi_i = 0.02 \text{ y } \xi_f \leq 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.2997r_i^2 + 0.3088r_i + 6.4064\xi_f^2 - 2.0923\xi_f - 0.0364r_i\xi_f - 6.2994 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.1065r_i^2 - 0.7674r_i - 13.4372\xi_f^2 - 1.101\xi_f + 4.0571r_i\xi_f - 5.6683 & 1 < r_i \leq 2 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.058r_i^2 - 1.1228r_i - 12.9751\xi_f^2 + 3.8124\xi_f + 1.9475r_i\xi_f - 5.6942 & r_i > 2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\xi_i = 0.02 \text{ y } \xi_f > 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.079r_i^2 + 0.07571r_i + 0.0746\xi_f^2 - 0.0865\xi_f - 0.0364r_i\xi_f - 6.4145 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.0086r_i^2 - 0.2784r_i - 0.414\xi_f^2 - 0.0865\xi_f + 0.4189r_i\xi_f - 6.2285 & 1 < r_i \leq 2 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0057r_i^2 - 0.3053r_i - 3.1264\xi_f^2 + 2.588\xi_f + 0.3686r_i\xi_f - 6.8093 & r_i > 2 \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\xi_i = 0.05 \text{ y } \xi_f \leq 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.6698r_i^2 + 0.5889r_i + 11.423\xi_f^2 - 4.1701\xi_f + 0.5573r_i\xi_f - 4.2996 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.0113r_i^2 - 1.228r_i - 8.0376\xi_f^2 - 1.3352\xi_f + 3.3873r_i\xi_f - 3.4737 & 1 < r_i \leq 2 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0764r_i^2 - 1.2046r_i + 3.345\xi_f^2 + 1.0539\xi_f + 1.1521r_i\xi_f - 3.8411 & r_i > 2 \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\xi_i = 0.05 \text{ y } \xi_f > 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.1842r_i^2 + 0.1716r_i - 0.0406\xi_f - 0.0808r_i\xi_f - 4.5854 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.0023r_i^2 - 0.5987r_i - 0.7086\xi_f^2 - 0.2215\xi_f + 0.7982r_i\xi_f - 4.1546 & 1 < r_i \leq 2 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0158r_i^2 - 0.5142r_i - 4.3104\xi_f^2 + 3.8484\xi_f + 0.5139r_i\xi_f - 5.2081 & r_i > 2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\xi_i = 0.10 \text{ y } \xi_f \leq 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -1.11r_i^2 + 0.8771r_i + 13.2676\xi_f^2 - 5.6191\xi_f + 1.3204r_i\xi_f - 2.7479 & r_i \leq 1 \\ & & 1 < r_i \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.1042r_i^2 - 1.6499r_i - 3.4979\xi_f^2 - 1.5276\xi_f + 2.5188r_i\xi_f - 1.7536 & \leq 2 \\ & & r_i > 2 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0817r_i^2 - 1.2103r_i + 8.5778\xi_f^2 - 0.4209\xi_f + 0.7221r_i\xi_f - 2.4872 \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\xi_i = 0.10 \text{ y } \xi_f > 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.3509r_i^2 + 0.29r_i + 0.3559\xi_f^2 - 0.425\xi_f - 0.1008r_i\xi_f - 3.0979 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0243r_i^2 - 0.9623r_i - 0.8098\xi_f^2 - 0.425\xi_f + 1.0976r_i\xi_f - 2.4962 & 1 < r_i \\ \ln[\varepsilon_i] &= 0.0276r_i^2 - 0.6825r_i - 4.334\xi_f^2 + 4.1405\xi_f + 0.5639r_i\xi_f - 3.9058 & \leq 2 \\ & & r_i > 2 \end{aligned} \quad (2.51)$$

- ii. Superficies de respuesta de  $\ln(\varepsilon_i)$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$ , y  $\xi_f$ , para  $\xi_i < 5\%$  y  $\xi_i \geq 5\%$ ,  $\xi_f \leq 2\%$  y  $\xi_f > 0.2$ , y  $r_i \leq 1$  y  $r_i > 1$ .

$$\xi_i < 0.05 \text{ y } \xi_f \leq 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= 0.2662r_i - 0.2835r_i^2 + 1.9242\xi_f - 6.637\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - 832.5059\xi_i^2 + 0.7367r_i\xi_f - 4.0399r_i\xi_i - 11.4132\xi_f\xi_i - 9.3727 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.883r_i + 0.0386r_i^2 + 1.2539\xi_f - 7.9188\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - 861.6069\xi_i^2 + 2.2121r_i\xi_f - 6.3814r_i\xi_i - 1.5136\xi_f\xi_i - 8.5476 & r_i > 1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\xi_i < 0.05 \text{ y } \xi_f > 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= 0.8089r_i - 0.3037r_i^2 + 1.9242\xi_f - 1.8559\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - 881.6131\xi_i^2 - 0.9247r_i\xi_f - 4.4577r_i\xi_i + 26.3724\xi_f\xi_i - 10.0197 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -0.3403r_i + 0.0185r_i^2 + 1.2539\xi_f - 3.1377\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - 910.7141\xi_i^2 + 0.5506r_i\xi_f - 6.7992r_i\xi_i + 36.272\xi_f\xi_i - 9.1945 & r_i > 1 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\xi_i \geq 0.05 \text{ y } \xi_f \leq 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] &= -0.0597r_i - 0.2635r_i^2 + 1.9242\xi_f - 6.7114\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - 861.6069\xi_i^2 + 0.8668r_i\xi_f + 1.3695r_i\xi_i - 38.3641\xi_f\xi_i - 10.2174 & r_i \leq 1 \\ \ln[\varepsilon_i] &= -1.2089r_i + 0.0586r_i^2 + 1.2539\xi_f - 7.4533\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - 861.6069\xi_i^2 + 2.3422r_i\xi_f - 0.9719r_i\xi_i - 28.4645\xi_f\xi_i - 9.3922 & r_i > 1 \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\xi_i \geq 0.05 \text{ y } \xi_f > 0.20$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] = & 0.483r_i - 0.2837r_i^2 + 1.9242\xi_f - 1.3904\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - & r_i \leq 1 \\ & 881.6131\xi_i^2 - 0.7946r_i\xi_f + 0.9517r_i\xi_i - 0.5785\xi_f\xi_i - 10.8643 & (2.55) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln[\varepsilon_i] = & -0.6662r_i + 0.0384r_i^2 + 1.2539\xi_f - 2.6722\xi_f^2 + 158.8227\xi_i - & r_i > 1 \\ & 910.7141\xi_i^2 + 0.6807r_i\xi_f - 1.3897r_i\xi_i + 9.3211\xi_f\xi_i - 10.0392 \end{aligned}$$

## 2.4 Estimación basada en espectros de aceleración

En términos de la varianza de la pseudo-aceleración modal,  $\sigma_{ai}^2 = \omega_i^4 \sigma_{ai}^2$ , tenemos de la Eq. (2.40)

$$\sigma_{Ai}^2 = \sigma_{ai}^2(1 + \varepsilon_i) \quad (2.56)$$

Por lo tanto,

$$\frac{S_{Ai}^2}{p_{Ai}^2} = \frac{S_{ai}^2}{p_{ai}^2}(1 + \varepsilon_i) \quad (2.57)$$

En (2.57)  $S_{Ai} = S_A(\omega_i, \xi_i)$  es el espectro medio de la aceleración total,  $S_{ai} = S_a(\omega_i, \xi_i)$  es el espectro medio de la pseudo-aceleración, y  $p_{Ai}$ ,  $p_{ai}$  son los factores pico respectivos:  $S_{Ai} = p_{Ai}\sigma_{Ai}$  y  $S_{ai} = p_{ai}\sigma_{ai}$ . Un modelo para  $\varepsilon_i$  puede obtenerse de

$$\varepsilon_i = \frac{p_{ai}^2 S_{Ai}^2}{p_{Ai}^2 S_{ai}^2} - 1 \quad (2.58)$$

En una primera aproximación se podría suponer que  $p_{ai}^2/p_{Ai}^2 \approx 1$ , y entonces

$$\varepsilon_i \approx \frac{S_{Ai}^2}{S_{ai}^2} - 1 \quad (2.59)$$

El error  $\varepsilon_i$  queda entonces expresado en función de la relación entre el espectro de aceleración total y el de pseudo-aceleración. Usando 72 registros de componentes horizontales de sismos en la región occidental de Estados Unidos, Sadek et al. (1999) estimaron el siguiente modelo,

$$S_{Ai} = (1 + a_a T^{ba}) S_{ai} \quad (2.60)$$

donde  $a_a = 2.43\xi^{1.895}$ ,  $b_a = 0.628 + 0.205\xi$ ,  $T = 2\pi/\omega$  y  $\xi$  son el periodo natural y amortiguamiento de la estructura, respectivamente. Usando el modelo en (2.60),  $\varepsilon_i$  se podría estimar de

$$\varepsilon_i \approx (1 + a_a T^{b_a})^2 - 1 \quad (2.61)$$

### 3. CASO DE ESTUDIO

Consideremos el modelo de sistema estructural de dos grados de libertad (desplazamientos laterales de cada nivel) que se muestra en la Figura 3.1. Sean  $m_1$ ,  $k_1$  y  $m_2$ ,  $k_2$  la masa y rigidez lateral del primer y segundo entrepiso, respectivamente. Supongamos, además que  $k_1/k_2 = m_1/m_2 = \alpha$ . Cuando  $\alpha = 1$  el modelo representa un marco estructural de dos pisos con una distribución uniforme de la rigidez y las masas a lo alto de la estructura; para  $\alpha = 10$  se modela un marco con una gran diferencia de rigidez y masa entre ambos pisos. Los casos de  $\alpha = 100$  y  $\alpha = 200$  modelan el caso de un sistema de un grado de libertad con un apéndice. La Tabla 3.1 muestra las frecuencias modales  $\omega_1$  y  $\omega_2$  del sistema estructural. A medida que el valor de  $\alpha$  se incrementa de 1 a 200, la diferencia entre los valores de las frecuencias modales disminuye y  $\omega_1/\omega_2 \rightarrow 1$ . Este modelo es igual al empleado por Heredia (2010) para mostrar la aplicación de la regla c-SRSS y comparar los resultados de análisis de respuesta con otras reglas de combinación modal.

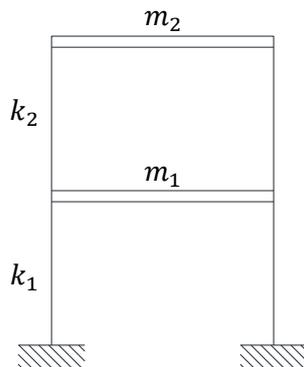


Figura 3.1 Sistema estructural como ejemplo para aplicación de modelos.

Tabla 3.1 Frecuencias modales del sistema estructural

$\alpha$	$\omega_1$ (rad/s)	$\omega_2$ (rad/s)	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$
1	4.944	12.944	0.3820
10	6.834	9.364	0.7298
100	7.610	8.410	0.9049
200	7.722	8.288	0.9317

Se utilizó el modelo de espectro de potencia de Kanai-Tajimi con  $\omega_f = 15 \text{ rad/s}$  y  $\xi_f = 0.6$  para representar excitaciones de banda ancha, y  $\omega_f = \pi$  y  $\xi_f = 0.2$  para el caso de excitaciones de banda angosta (Der Kiureghian y Neuenhofer, 1991). Se supuso un amortiguamiento modal del 5% y que  $\sqrt{\omega_1/\omega_2} = 8 \text{ rad/s}$ , igual que Heredia (2010) para efectos de comparación de resultados. Se aplicaron las formulaciones en la Eq. (1.20) planteada originalmente en la c-SRSS, la cual es función explícita de la frecuencia característica  $\Omega_{2,i}$ , y la formulación en la ecuación (2.41) escrita en términos del factor  $\varepsilon_i$  para calcular la varianza de la respuesta. Se seleccionó como respuesta de interés el desplazamiento relativo del segundo entrepiso. Se calculó la varianza de la respuesta utilizando los siguientes modelos:

- Modelo [1]. Superficies de respuesta de  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$ , y  $\xi_f$ : ecs. (2.12) y (2.13)
- Modelo [2]. Superficies de respuesta de  $\text{Ln } \Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$ , y  $\xi_f$ : ecs. (2.14) a (2.17)
- Modelo [3]. Superficies de respuesta de  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  en función de  $r_i$  para valores de  $\xi_i$ : ecs. (2.22) y (2.23)
- Modelo [4]. Modelo de Der Kiureghian (1980): ec. (2.4)
- Modelo [5]. Superficies de respuesta de  $\text{Ln}(\varepsilon_i)$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$ , y  $\xi_f$ : ecs. (2.48) y (2.49)
- Modelo [6]. Superficies de respuesta  $\text{Ln}(\varepsilon_i)$  en función de  $r_i$ ,  $\xi_i$ , y  $\xi_f$ , para  $\xi_i < 5\%$  y  $\xi_i \geq 5\%$ : ecs. (2.54) y (2.55)
- Modelo [7]. Modelo de Sadek: ec. (2.61)

En la Tabla 3.2 se muestran los resultados para una excitación de banda ancha. Se obtuvieron resultados óptimos con los modelos [1], [4] y [5], en los que la respuesta es prácticamente igual a la respuesta exacta. Los modelos [2] y [3] arrojaron muy buenos resultados, con errores menores al 3% en comparación con la respuesta exacta. El modelo [6] introduce errores aceptables, aunque ligeramente mayores, del orden de 5%. Se puede

observar que cuando  $\alpha = 1$  y las frecuencias modales son muy diferentes, el error de los modelos tiende a ser menor, puesto que la contribución de las covarianzas entre respuestas modales es despreciable. Caso contrario ocurre cuando el valor de  $\alpha$  aumenta, particularmente cuando  $\alpha = 100$  y  $200$ . En el caso del modelo [7] los errores son significativamente mayores, del orden de 30 a 50%.

Tabla 3.2 Análisis de la respuesta para una excitación del suelo tipo banda ancha  $\omega_f = 15 \text{ rad/s}$  y  $\xi_f = 0.6$

$\alpha$	$r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_f}$	$r_2 = \frac{\omega_2}{\omega_f}$	$\sigma_Y^2$ "Exacta"	$\sigma_Y^2$ [1]	$\sigma_Y^2$ [2]	$\sigma_Y^2$ [3]	$\sigma_Y^2$ [4]	$\sigma_Y^2$ [5]	$\sigma_Y^2$ [6]	$\sigma_Y^2$ [7]
1	0.330	0.863	0.068	0.068	0.070	0.070	0.068	0.068	0.070	0.086
10	0.456	0.624	0.452	0.452	0.466	0.468	0.450	0.452	0.478	0.672
100	0.507	0.561	2.378	2.394	2.458	2.466	2.376	2.380	2.526	3.618
200	0.515	0.553	3.164	3.184	3.270	3.281	3.160	3.166	3.360	4.820

Los resultados para excitación de banda angosta se muestran en la Tabla 3.3. Examinemos primero los modelos [1], [4] y [5] que produjeron los mejores resultados para excitación de banda ancha. Sólo cuando  $\alpha = 1$  estos modelos calculan la respuesta con errores menores al 1% en el caso de banda angosta. Dependiendo del valor de  $\alpha$  se observa que el error en el cálculo de la respuesta puede variar ahora de 5% a 13% para el modelo [1], y de 10% a 20% para los modelos [4] y [5]. El modelo [3] arrojó muy buenos resultados con errores de 5% a 10%. El modelo [2] estimó la respuesta exacta con errores del orden de 13% a 23%, y el modelo [6], de 10% a 15%. Los errores son mayores cuando  $\alpha = 100$  y  $200$ . Si bien la estimación de la respuesta es de menor precisión en el caso de la excitación de banda angosta, es bastante buena aún en comparación con el error que se introduce con la aplicación de otras reglas de combinación modal. La regla clásica SRSS resulta en errores muy grandes de estimación de la desviación estándar de la respuesta del orden de 45% a 195% cuando  $\alpha$  varía entre 10 y 200; en el caso de la regla CQC, los errores correspondientes son del orden de 40% a 70% (Heredia, 2010). La estimación con el modelo [7] no fue buena, obteniéndose errores mayores al 300%.

Tomando en cuenta los resultados de las Tablas 3.2 y 3.3, los estimados con menor error para ambos tipos de excitación se obtuvieron con el modelo [1]. Este es un modelo sencillo del cociente  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  expresado con una función cuadrática de las tres variables

de entrada: la relación de frecuencias de  $r_i = \omega_i/\omega_f$ , y los valores de amortiguamiento modal y del suelo,  $\xi_i$  y  $\xi_f$ , respectivamente. El modelo reconoce el comportamiento claramente distinto de  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  cuando  $r_i \leq 1$  y  $r_i > 1$ . El modelo [3] produjo muy buenos resultados y es un modelo muy sencillo en el que  $\Omega_{2,i}^2/\omega_i^2$  se expresa solamente como una función cuadrática de la relación de frecuencias de  $r_i = \omega_i/\omega_f$  distinguiendo cuando  $r_i \leq 1$  y  $r_i > 1$ ; sin embargo, se requiere de dichas expresiones para cada valor de amortiguamiento modal  $\xi_i$ . El modelo [6] produjo resultados con mayor error que los anteriores, pero aun así son resultados bastante buenos comparativamente. Este modelo expresa el  $\text{Ln}(\varepsilon_i)$  como una función cuadrática de  $r_i$ ,  $\xi_i$ , y  $\xi_f$ , para las siguientes combinaciones:  $\xi_i \leq 5\%$  y  $\xi_i < 5\%$ ,  $\xi_f \leq 0.2$  y  $\xi_f < 0.2$ , y  $r_i \leq 1$  y  $r_i < 1$ ; por tal razón el número de expresiones que conforman el modelo [6] es el cuádruple de las del modelo [1].

Tabla 3.3 Análisis de la respuesta para una excitación del suelo tipo banda angosta  $\omega_f = \pi \text{ rad/s}$  y  $\xi_f = 0.2$

$\alpha$	$r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_f}$	$r_2 = \frac{\omega_2}{\omega_f}$	$\sigma_Y^2$ "Exacta"	$\sigma_Y^2$ [1]	$\sigma_Y^2$ [2]	$\sigma_Y^2$ [3]	$\sigma_Y^2$ [4]	$\sigma_Y^2$ [5]	$\sigma_Y^2$ [6]	$\sigma_Y^2$ [7]
1	1.574	4.120	0.044	0.043	0.043	0.044	0.044	0.044	0.043	0.064
10	2.176	2.981	0.044	0.045	0.038	0.045	0.040	0.048	0.039	0.162
100	2.422	2.677	0.124	0.140	0.097	0.137	0.102	0.148	0.105	0.749
200	2.458	2.638	0.158	0.179	0.122	0.174	0.128	0.189	0.132	0.988

#### 4. CONCLUSIONES

En base a la regla de combinación modal c-SRSS (Complete Square Root of Sum of Squares), presentada por el dr. Ernesto Heredia Zavoni, se obtienen varias soluciones analíticas para estimar la frecuencia característica  $\Omega_{2,i}$  y el factor que mide la diferencia entre la varianza de la aceleración total y la de la pseudo-aceleración  $\varepsilon_i$ , para poder aplicar una formulación práctica. Se verificó que los ajustes funcionaran y arrojaran valores similares a los exactos, tanto para aceleraciones del suelo tipo banda ancha como para las de banda angosta. Los resultados se compararon con algunos ajustes publicados anteriormente por Der Kiureghian y Fahim Sadek. Como se observó los resultados del ajuste de Der Kiureghian dan muy similares a los exactos, solo que están por debajo; los de Sadek dieron errores muy grandes. Cuando se le agregó el valor de los factores pico mejoró, pero no fue una mejoría considerable, por lo que es correcto asumir que el cociente de los factores pico sea igual a 1, pero también se realizó un ajuste para obtener el valor de los factores pico de la varianza de aceleración total y la pseudo-aceleración.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- Chopra, Anil K., *Dinámica de Estructuras*, 4ta edición, Pearson Educación, México 2014, pp. 513-540, 562-579, 595-603.
- Der Kiureghian, Armen, *A Response Spectrum Method for Random Vibrations*, University of California, Berkley, California, 1980.
- Der Kiureghian, Armen, et. al, *A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis*, University of California, Berkley, California, 1981.
- Heredia Zavoni, Ernesto A., *The complete SRSS modal combination rule*, Instituto Mexicano del Petróleo, México, 2010.
- Heredia Zavoni, Ernesto A., *Limitaciones y Mejoras del Análisis Dinámico de Edificios*, Colegio de Ingenieros del Perú, 2011. [.ppt]
- Rosenblueth E., *A Basis for Aseismic Design*, PhD Thesis, University of Illinois, 1951.
- Sadek, Fahim et. al, *Linear Procedures for Structures with Velocity-Dependent Dampers*, Journal of Structural Engineering, August 2000.
- Chopra, Anil K., *Errors caused by peak factor assumptions in response-spectrum-based analyses*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics Journal, June 2014.
- Der Kiureghian y Neuenhofer, 1991, *A response spectrum method for multi-support seismic excitations*. Report No. EERC 91/08, University of California, Berkeley.