

3
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Método del elemento finito. Análisis lineal

**DIVISIÓN DE INGENIERÍA CIVIL,
TOPOGRÁFICA Y GEODÉSICA**

DEPARTAMENTO DE GEOTECNIA

AGUSTÍN DEMÉNEGHI COLINA



FACULTAD DE INGENIERIA



MET.EL.FIN
55

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



G.- 906163

En este artículo se presentan los fundamentos teóricos del método del elemento finito. En él se utilizan los conceptos de esfuerzo, deformación y elasticidad lineal, estudiados en la asignatura *Mecánica del medio continuo*, por lo que el método del elemento finito se puede considerar como una aplicación de dicha asignatura.

El método del elemento finito es una herramienta que se aplica al análisis de obras de ingeniería como presas, edificios, carreteras, etcétera.

Marzo de 2000

Método del elemento finito. Análisis lineal

1. Introducción

Para resolver un problema de ingeniería se puede utilizar una solución analítica o una solución numérica; cuando se emplea la primera, se cuenta con una fórmula explícita que permite considerar las variables significativas que intervienen en el problema. En ingeniería civil se dispone de un cierto número de soluciones analíticas, la mayoría de las cuales están basadas en la teoría de la elasticidad lineal. Un ejemplo de una solución analítica es la fórmula de Boussinesq para la determinación del esfuerzo normal vertical en un medio seminfinito, homogéneo, isótropo y linealmente elástico, la que se emplea para el análisis de cimentaciones superficiales en mecánica de suelos.

Sin embargo, no se dispone de soluciones analíticas para todos los problemas de ingeniería, o si existen, pueden no ser satisfactorias. Se puede recurrir a una solución numérica para resolver el problema, la cual consiste en discretizar el medio en estudio y aplicar los principios de la mecánica a cada elemento resultante de la división, para que después, integrando las soluciones particulares en todo el medio, se calcule la solución general. Entre los métodos numéricos que se emplean con frecuencia en ingeniería civil se encuentra el *método de diferencias finitas* y el *método del elemento finito* (MEF). Así, estos métodos numéricos se aplican al análisis de presas de tierra y enrocamiento, túneles, cimentaciones profundas, etc.

En este trabajo exponemos los principios básicos del MEF de una manera accesible al estudiante y al profesional de la ingeniería civil, dada la poca literatura que existe en nuestro país sobre el tema. Considerando un comportamiento elástico lineal de los materiales, empleamos el principio de que la energía interna de deformación es igual al trabajo externo entregado al sistema (despreciando las pérdidas de energía), lo que conduce al establecimiento de las ecuaciones del MEF. Como dijimos, se exponen los conceptos en forma sencilla; para esto, al final de cada tema se incluye un ejemplo con el propósito de ilustrar la aplicación de los conceptos básicos estudiados.

No obstante que se supone un comportamiento elástico lineal del medio, la aplicación del MEF para este caso es muy amplia en la ingeniería civil, sobre todo si se trabaja con módulos secantes de deformación (o módulos secantes de rigidez o elasticidad) en las curvas esfuerzo-deformación de los materiales.

En el inciso 2 presentamos el método del elemento finito y la deducción de sus ecuaciones matriciales para un medio isótropo. Un caso práctico de interés es el de medios heterogéneos y anisótropos (por ejemplo rocas o suelos estratificados), este tema se expone en el inciso 3.

En el inciso 4 se analiza el método del elemento finito dinámico. Es importante conocerlo para el análisis de obras de ingeniería en regiones sísmicas o para la cimentación de maquinaria.

Cabe aclarar que la aplicación de método del elemento finito requiere del auxilio de las computadoras electrónicas, dada la gran cantidad de operaciones numéricas que se realizan. Por tanto, a partir de los principios básicos y de las ecuaciones matriciales obtenidas, se necesitan elaborar programas de computadora que permitan resolver los problemas planteados en forma relativamente sencilla y expedita.

2. Método del elemento finito

El método del elemento finito es un procedimiento que sirve para conocer el estado de esfuerzo y deformación (y por ende los desplazamientos) en un medio continuo que puede ser heterogéneo y anisótropo. Básicamente consiste en discretizar el medio mediante elementos y a partir de éstos, estudiar el comportamiento de ellos en forma individual, para después acoplarlos y conocer con ello las condiciones generales en el medio.

Para ilustrar lo anterior, consideremos un medio continuo y dividámoslo en triángulos como se indica en la figura 1. Al aplicar un sistema de fuerzas externas en los vértices (o nudos) de los triángulos ocasionamos que el medio se deforme y se presenten desplazamientos en dichos vértices. Las ecuaciones del método del elemento finito se obtienen valuando el trabajo de las fuerzas externas y el trabajo acumulado debido a los esfuerzos internos (o energía interna de deformación). Para el caso elástico lineal ambos trabajos se igualan, dado que se desprecian las pérdidas de energía, lo que conduce a un sistema de ecuaciones lineales en el que las fuerzas en los vértices de los triángulos quedan en función de los desplazamientos en dichos vértices. La resolución de este sistema permite conocer los desplazamientos en los nudos (o vértices de los triángulos), lo que a su vez determina los esfuerzos dentro de los triángulos en los que se dividió el medio.

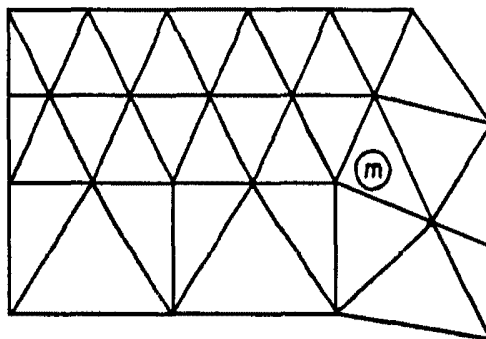


FIGURA 1. Medio continuo dividido en triángulos

Detallemos el procedimiento anterior considerando un triángulo cualquiera dentro del medio y si suponemos que se conocen los desplazamientos en los vértices después de la deformación (figura 2), obtendremos los desplazamientos, las deformaciones unitarias y los esfuerzos dentro del triángulo en función de los desplazamientos en los nudos del mismo, ya que son relaciones que se necesitarán para valuar el trabajo interno de deformación.

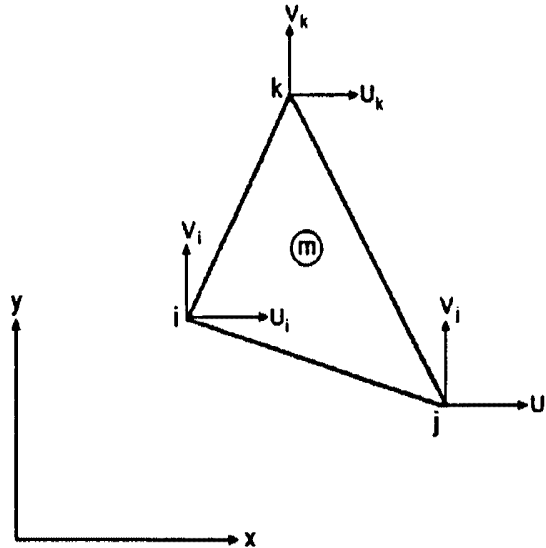


FIGURA 2. Desplazamientos en nudos de un triángulo

Encontremos primeramente los desplazamientos u y v en cualquier punto dentro del triángulo en función de los desplazamientos en los nudos (Zienkiewicz 1977). Supongamos que u y v son funciones lineales de las coordenadas x y y :

$$u = \alpha_{11} + \alpha_{12} x + \alpha_{13} y \quad (1)$$

$$v = \alpha_{21} + \alpha_{22} x + \alpha_{23} y \quad (2)$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas de los nudos de los triángulos en la ecuación (1)

$$u_i = \alpha_{11} + \alpha_{12} x_i + \alpha_{13} y_i$$

$$u_j = \alpha_{11} + \alpha_{12} x_j + \alpha_{13} y_j$$

$$u_k = \alpha_{11} + \alpha_{12} x_k + \alpha_{13} y_k$$

Es decir

$$\begin{aligned}\alpha_{11} + \alpha_{12} x_i + \alpha_{13} y_i &= u_i \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} x_j + \alpha_{13} y_j &= u_j \\ \alpha_{11} + \alpha_{12} x_k + \alpha_{13} y_k &= u_k\end{aligned}\tag{3}$$

Despejemos los valores de α_{11} , α_{12} y α_{13} de las ecuaciones (3). Empecemos con α_{11} ; utilizando la regla de Cramer:

$$\alpha_{11} = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}}$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2A} \left[u_i (x_j y_k - x_k y_j) - x_i (u_j y_k - u_k y_j) + y_i (u_j x_k - u_k x_j) \right]\tag{4}$$

en donde:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}\tag{5}$$

y A = área del triángulo.

De manera análoga

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2A} \left[(u_j y_k - u_k y_j) - u_i (y_k - y_j) + y_i (u_k - u_j) \right]\tag{6}$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2A} \left[(x_j u_k - x_k u_j) - x_i (u_k - u_j) + u_i (x_k - x_j) \right]\tag{7}$$

Al sustituir los valores de α_{11} , α_{12} y α_{13} en la ecuación (1):

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{2A} & \left\{ u_i \left[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y \right] \right. \\
 & + u_j \left[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i) x + (x_i - x_k) y \right] \\
 & \left. + u_k \left[(x_i y_j - y_i x_j) + (y_i - y_k) x + (x_j - x_i) y \right] \right\} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned}
 x_k - x_j = x_{kj} \quad , \quad x_i - x_k = x_{ik} \quad , \quad x_j - x_i = x_{ji} \\
 y_j - y_k = y_{jk} \quad , \quad y_k - y_i = y_{ki} \quad , \quad y_i - y_k = y_{ik} \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k$$

$$a_k = x_i y_j - y_i x_j$$

(10)

y sustituyendo en la ecuación (8)

$$\begin{aligned}
 u = \frac{1}{2A} & \left[u_i (a_i + y_{jk} x + x_{kj} y) + u_j (a_j + y_{ki} x + x_{ik} y) \right. \\
 & \left. + u_k (a_k + y_{ik} x + x_{ji} y) \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

Al proceder de forma similar para el desplazamiento vertical ν :

$$\begin{aligned}
 \nu = \frac{1}{2A} & \left[\nu_i (a_i + y_{jk} x + x_{kj} y) + \nu_j (a_j + y_{ki} x + x_{ik} y) \right. \\
 & \left. + \nu_k (a_k + y_{ik} x + x_{ji} y) \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ij}y + x_{ji}y & 0 \\ 0 & a_i + y_{ik}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ij}x + x_{ji}y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Si llamamos

$$\bar{u}_{xy} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\underline{u}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{N} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ij}x + x_{ji}y & 0 \\ 0 & a_i + y_{jk}x + x_{kj}y & 0 & a_j + y_{ki}x + x_{ik}y & 0 & a_k + y_{ij}x + x_{ji}y \end{bmatrix} \quad (16)$$

queda

$$\underline{U}_{xy} = \underline{N} \underline{u}^e \quad (17)$$

a \underline{N} se le denomina matriz de forma.

Determinemos a continuación las deformaciones unitarias dentro del elemento en función de los desplazamientos en sus nudos.

De acuerdo con la teoría de la deformación sabemos que la deformación lineal unitaria ε_x vale

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

la deformación lineal unitaria

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

y la deformación angular unitaria

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Empleando las ecuaciones (11) y (12):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2A} (u_i y_{jk} + u_j y_{ki} + u_k y_{ij})$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2A} (v_i x_{kj} + v_j x_{ik} + v_k x_{ji})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2A} (u_i x_{kj} + u_j x_{ik} + u_k x_{ji} + v_i y_{jk} + v_j y_{ki} + v_k y_{ij})$$

En forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Denominando

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

y

$$\underline{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{jk} & 0 & y_{ki} & 0 & y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{kj} & 0 & x_{ik} & 0 & x_{ji} \\ x_{kj} & y_{jk} & x_{ik} & y_{ki} & x_{ji} & y_{ij} \end{bmatrix} \quad (20)$$

queda

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u}^e \quad (21)$$

Determinemos a continuación los esfuerzos dentro del triángulo en función de los desplazamientos en sus nudos.

Sabemos que, por la teoría de la elasticidad lineal:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

donde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

En un problema bidimensional debemos distinguir entre un estado de esfuerzo plano y un estado de deformación plana.

Para el caso de esfuerzo plano $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, por tanto

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

es decir

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Despejemos σ_x , σ_y y τ_{xy} de esta ecuación matricial, empleando la regla de Cramer:

$$\sigma_x = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_x & -\nu/E & 0 \\ \varepsilon_y & 1/E & 0 \\ \gamma_{xy} & 0 & 2(1+\nu)/E \end{vmatrix}}{\frac{1}{E^3} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix}} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

De manera similar

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

Pero

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

Es decir

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

al denominar

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

y

$$\underline{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

queda

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (25)$$

Al sustituir la ecuación (21) en la ecuación (25):

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad (26)$$

Se puede demostrar en forma similar que la matriz \underline{D} para una condición de deformación plana vale:

$$D = \frac{E (1 - \nu)}{(1 + \nu) (1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu / (1 - \nu) & 0 \\ \nu / (1 - \nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu) / 2 (1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Con las expresiones anteriores estamos ya en condiciones de obtener las ecuaciones del elemento finito, para lo cual valuaremos el trabajo de las fuerzas externas y el trabajo interno de deformación acumulado, para después igualarlos.

El trabajo de las fuerzas externas vale (figuras 2 y 3)

$$W_e = \frac{1}{2} P_i u_i + \frac{1}{2} Q_i v_i + \frac{1}{2} P_j u_j + \frac{1}{2} Q_j v_j + \frac{1}{2} P_k u_k + \frac{1}{2} Q_k v_k$$

es decir

$$W_e = \frac{1}{2} (\underline{u}^e)^T \underline{P}^e \quad (28)$$

siendo

$$\underline{P}^e = \begin{Bmatrix} P_i \\ Q_i \\ P_j \\ Q_j \\ P_k \\ Q_k \end{Bmatrix} \quad (29)$$

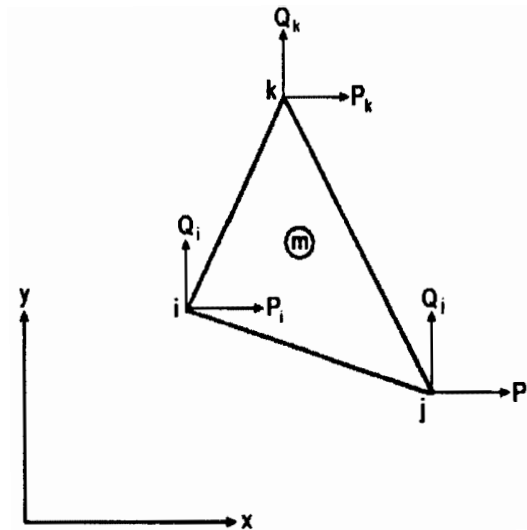


FIGURA 3. Cargas en los nudos de un triángulo

El trabajo interno acumulado dentro del triángulo, por unidad de volumen, vale:

$$W'_i = \frac{1}{2} \varepsilon_x \sigma_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \sigma_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \tau_{xy} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma}$$

El trabajo interno en todo el volumen del triángulo vale:

$$W_i = \int_{Vol} W'_i dVol = \int_{Vol} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dVol \quad (30)$$

Igualando las ecuaciones (28) y (29):

$$W_e = W_i$$

$$\frac{1}{2} (\underline{u}^e)^T \underline{P}^e = \int_{Vol} \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dVol$$

Pero, por las ecuaciones (21) y (17)

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u}^e$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e$$

Por tanto

$$(\underline{u}^e)^T \underline{P}^e = \int_{Vol} (\underline{B} \underline{u}^e)^T \underline{\sigma} dVol$$

$$= \int_{Vol} (\underline{u}^e)^T \underline{B}^T \underline{\sigma} dVol$$

$$(\underline{u}^e)^T \underline{P}^e = (\underline{u}^e)^T \int_{Vol} \underline{B}^T \underline{\sigma} dVol$$

es decir

$$\underline{P}^e = \int_{Vol} \underline{B}^T \underline{\sigma} dVol$$

Pero

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \tag{26}$$

Por tanto

$$\underline{P}^e = \int_{Vol} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e dVol$$

$$\underline{P}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{U}^e \int_{Vol} dVol$$

Si el espesor t del triángulo es constante:

$$\underline{P}^e = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad A t = A t \quad \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}^e \quad (31)$$

en donde A es el área del triángulo.

Llamando

$$\underline{K}^e = A t \quad \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \quad (32)$$

Siendo \underline{K}^e la matriz de rigidez del elemento, queda

$$\underline{P}^e = \underline{K}^e \underline{u}^e \quad (33)$$

$$\underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{P}^e \quad (34)$$

La ecuación (34) es válida para un elemento dentro del medio. La podemos aplicar entonces para todos los elementos (triángulos) de la región en estudio. Si llamamos \underline{K} a la suma de las matrices de rigidez de todos los triángulos, \underline{u} al vector de desplazamientos de todo el medio y \underline{P} al vector de cargas en todos los nudos del medio, entonces la ecuación (34), válida para un triángulo, se puede escribir de la siguiente forma para todo el medio:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{P} \quad (35)$$

donde \underline{K} se denomina matriz de rigidez en todo el medio.

La ecuación (35) da lugar a un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son los desplazamientos en los nudos de los elementos. La resolución de este sistema permite determinar estos desplazamientos. Para hallar las deformaciones unitarias y los esfuerzos de cada elemento se emplean las ecuaciones (21) y (26) de cada triángulo.

Ejemplo 1. Determine los desplazamientos de los puntos 1 y 2 del medio isótropo mostrado en la figura siguiente. Considere un estado de deformación plana.

$$E = 65 \text{ ton/m}^2 ,$$

$$\nu = 0.15$$

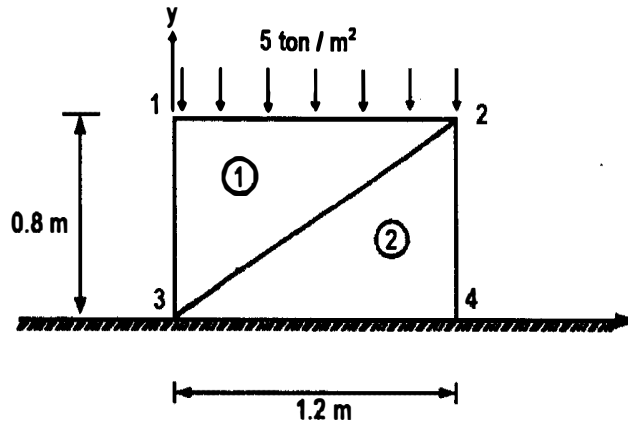


FIGURA 4. Ejemplo 1. Medio isótropo

Solución

Triángulo	u_i	v_i	u_j	v_j	u_k	v_k	
1	u_1	v_1	u_3	v_3	u_2	v_2	(sentido antihorario)
2	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4	(sentido antihorario)

Fórmulas

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{P} \tag{35}$$

$$\underline{K}^e \underline{u}^e = \underline{P}^e \tag{33}$$

$$\underline{K} = \sum_{i=1}^{n_e} \underline{K}_i^e \quad n_e$$

n_e = número de elementos = 2

$$\underline{K}^e = A t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \tag{32}$$

Determinación de las matrices \underline{B} y \underline{D}

Triángulo 1

$$A = = \frac{1}{2} \det \underline{A}$$

$$\det \underline{A} = 2 A = x_i y_{jk} + x_j y_{ki} + x_k y_{ij} \tag{5}$$

Aplicando la ecuación (5)

$$2A = 0.96 \text{ m}^2$$

$$A = 0.48 \text{ m}^2$$

Al emplear la ecuación (20)

$$\underline{B}_1 = \begin{matrix} & u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ \begin{bmatrix} -0.8333 & 0 & 0 & 0 & 0.8333 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & -1.25 & 0 & 0 \\ 1.25 & -0.8333 & -1.25 & 0 & 0 & 0.8333 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Empleando la ecuación (27)

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 68.634 & 12.112 & 0 \\ 12.112 & 68.364 & 0 \\ 0 & 0 & 28.261 \end{bmatrix} \text{ ton/m}^2, \text{ deformación plana}$$

Triángulo 2

$$2A = 0.96 \text{ m}^2 \text{ (ecuación 5)}$$

$$\underline{B}_2 = \begin{matrix} & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.8333 & 0 & 0.8333 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & -1.25 \\ 1.25 & 0 & 0 & -0.8333 & -1.25 & 0.8333 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (20)$$

$$\underline{D}_2 = \begin{bmatrix} 68.634 & 12.112 & 0 \\ 12.112 & 68.634 & 0 \\ 0 & 0 & 28.261 \end{bmatrix} \text{ ton/m}^2 \quad (27)$$

Determinación de las matrices de rigidez \underline{K}_i^e de cada elemento.

Triángulo 1. Utilizando la ecuación (32)

$$\underline{K}^e = \underline{A}^t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 44.072 & -20.186 & -21.196 & 6.056 & -22.876 & 14.130 \\ -20.185 & 60.693 & 14.130 & -51.273 & 6.056 & -9.420 \\ -21.196 & 14.130 & 21.196 & 0 & 0 & -14.130 \\ 6.056 & -51.273 & 0 & 51.273 & -6.056 & 0 \\ -22.876 & 6.056 & 0 & -6.056 & 22.876 & 0 \\ 14.130 & -9.420 & -14.130 & 0 & 0 & 9.420 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

Triángulo 2. Utilizando la ecuación (32)

$$\underline{K}^e = \underline{A}^t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 21.196 & 0 & 0 & -14.130 & -21.196 & -14.130 \\ 0 & 51.476 & -6.056 & 0 & 6.056 & -51.476 \\ 0 & -6.056 & 22.876 & 0 & -22.876 & 6.056 \\ -14.130 & 0 & 0 & 9.420 & 14.130 & -9.420 \\ -21.196 & 6.056 & -22.876 & 14.130 & 44.072 & -20.186 \\ 14.130 & -51.476 & 6.056 & -9.420 & -20.186 & 60.895 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

Pero

$$u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = 0$$

por tanto

$$\underline{K} = \underline{K}_1^e + \underline{K}_2^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ 44.042 & -20.186 & -22.876 & 14.130 \\ -20.186 & 60.693 & 6.056 & -9.420 \\ -22.876 & 6.056 & 44.072 & 0 \\ 14.130 & -9.420 & 0 & 60.896 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

El vector \underline{u} está dado por

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

El vector \underline{P} vale

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

De las figuras 3 y 4

$$P_1 = P_2 = 0$$

$$Q_1 = \frac{-5 \times 1.2}{5} = -3 \text{ ton}$$

Por tanto

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

$$Q_2 = -3 \text{ ton}$$

La ecuación (35) queda

$$\begin{bmatrix} 44.072 & -20.186 & -22.876 & 14.130 \\ -20.186 & 60.693 & 6.056 & -9.420 \\ -22.876 & 6.056 & 44.072 & 0 \\ 14.130 & -9.420 & 0 & 60.896 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones

$$u_1 = -0.007362 \text{ m} \quad v_1 = -0.06119 \text{ m}$$

$$u_2 = 0.004586 \text{ m} \quad v_2 = -0.05702 \text{ m}$$

3. Medio anisótropo

El método del elemento finito también se aplica a un medio anisótropo. Obtengamos las expresiones correspondientes a esta condición, para lo cual consideremos el elemento de la figura 5(a). Las propiedades E_1 y ν_1 corresponden a la deformación en la dirección de los planos de estratificación (dirección x') y E_2 , G_2 y ν_2 a la dirección normal a los planos de estratificación (dirección y').

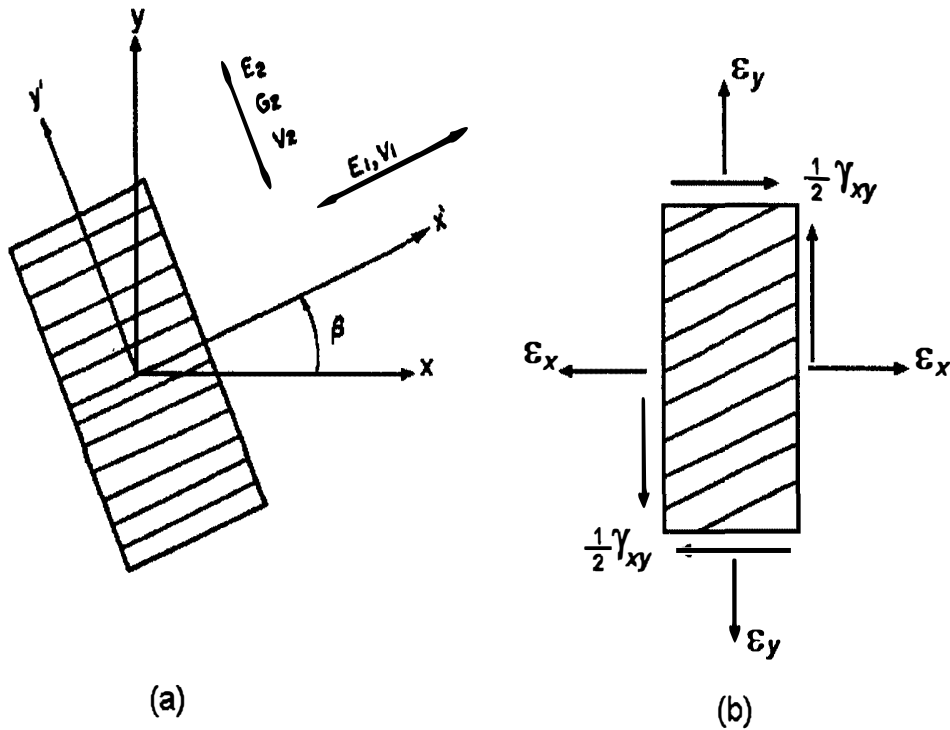


FIGURA 5. Medio anisótropo (estratificado). (a) Geometría y propiedades elásticas. (b) Estado de deformación en el sistema global x-y

Se puede demostrar (Zienkiewicz 1977, Lekhnitskii 1981) que las deformaciones para el caso tridimensional están dadas por

$$\epsilon'_x = \sigma'_x / E_1 - \nu_2 \sigma'_y / E_2 - \nu_1 \sigma'_z / E_1$$

$$\epsilon'_y = -\nu_2 \sigma'_x / E_2 + \sigma'_y / E_2 - \nu_2 \sigma'_z / E_2$$

$$\epsilon'_z = -\nu_1 \sigma'_x / E_1 - \nu_2 \sigma'_y / E_2 + \sigma'_z / E_1$$

$$\gamma'_{xz} = [2(1 + \nu_1) / E_1] \tau'_{xy}$$

$$\gamma'_{xy} = \frac{1}{G_2} \tau'_{xy}$$

$$\gamma'_{yz} = \frac{1}{G_2} \tau'_{yz}$$

La matriz \underline{D}' para esfuerzo plano ($\underline{\sigma}' = \underline{D}' \underline{\varepsilon}'$) vale

$$\underline{D}' = \frac{E_2}{1 - n \nu_2^2} \begin{bmatrix} n & n \nu_2 & 0 \\ n \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m (1 - n \nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (36)$$

siendo

$$n = \frac{E_1}{E_2} \quad (37)$$

$$m = \frac{G_2}{E_2} \quad (38)$$

Para deformación plana la matriz \underline{D}' está dado por

$$\underline{D}' = \frac{E_2}{(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1 - n \nu_2^2) & n \nu_2(1 + \nu_1) & 0 \\ n \nu_2(1 + \nu_1) & 1 - \nu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 + \nu_1)(1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (39)$$

La matriz \underline{D}' corresponde al sistema local $x' - y'$. Para encontrar la matriz \underline{D} correspondiente al sistema general $x - y$, obtengamos primero las deformaciones unitarias $\underline{\varepsilon}'$ en el sistema local en función de las deformaciones unitarias $\underline{\varepsilon}$ en el sistema general. De la figura 5(b) y utilizando la teoría de la deformación

$$\varepsilon'_x = \varepsilon_x \cos^2 \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta$$

$$\varepsilon'_y = \varepsilon_x \sin^2 \beta + \varepsilon_y \cos^2 \beta - \gamma_{xy} \sin \beta \cos \beta$$

$$\gamma'_{xy} = -2 \varepsilon_x \sin \beta \cos \beta + 2 \varepsilon_y \sin \beta \cos \beta + \gamma_{xy} (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$$

es decir

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \text{sen}^2 \beta & \text{sen } \beta \cos \beta \\ \text{sen}^2 \beta & \cos^2 \beta & -\text{sen } \beta \cos \beta \\ -2 \text{sen } \beta \cos \beta & 2 \text{sen } \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

donde

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{T}^T \underline{\varepsilon} \quad (40)$$

$$\underline{T}^T = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \text{sen}^2 \beta & \text{sen } \beta \cos \beta \\ \text{sen}^2 \beta & \cos^2 \beta & -\text{sen } \beta \cos \beta \\ -2 \text{sen } \beta \cos \beta & 2 \text{sen } \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \text{sen}^2 \beta & -2 \text{sen } \beta \cos \beta \\ \text{sen}^2 \beta & \cos^2 \beta & 2 \text{sen } \beta \cos \beta \\ \text{sen } \beta \cos \beta & -\text{sen } \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta \end{bmatrix} \quad (41)$$

Obtengamos a continuación la matriz \underline{D} del sistema general, para lo cual valuamos el trabajo de deformación en los sistemas local y general, y los igualamos (Zienkiewicz 1977):

$$\frac{1}{2} (\underline{\sigma}')^T \underline{\varepsilon}' = \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{\varepsilon}$$

pero

$$\underline{\sigma}' = \underline{D}' \underline{\varepsilon}' \quad ; \quad \underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (25)$$

Por tanto

$$(\underline{\varepsilon}')^T (\underline{D}')^T \underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon}^T \underline{D}^T \underline{\varepsilon}$$

pero $\underline{D}^T = \underline{D}$ por ser \underline{D} una matriz simétrica, por tanto

$$(\underline{\varepsilon}')^T \underline{D}' \underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon};$$

por la ecuación (40)

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{T}^T \underline{\varepsilon} \quad ; \quad (\underline{\varepsilon}')^T = \underline{\varepsilon}^T \underline{T}$$

por consiguiente

$$\underline{\varepsilon}^T \underline{T} \underline{D}' \underline{T}^T \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^T \underline{D} \underline{\varepsilon}$$

es decir

$$\underline{D} = \underline{T} \underline{D}' \underline{T}^T \quad (42)$$

Por lo demás, una vez obtenida \underline{D} para un elemento, el análisis es totalmente análogo al desarrollo para un medio isótropo (inciso 2).

Ejemplo 2. Determine los desplazamientos en los puntos 1 y 2 del medio anisótropo mostrado en la figura 6. Considere un estado de deformación plana. Las propiedades de los elementos son las siguientes:

Elemento	E_1 ton/m ²	ν_1	E_2 ton/m ²	G_2 ton/m ²	ν_2
1	205	0.26	180	82	0.25
2	80	0.16	65	30	0.15

E_1 y ν_1 son propiedades en dirección paralela a los planos de estratificación y E_2 , G_2 y ν_2 son propiedades en dirección normal a la estratificación.

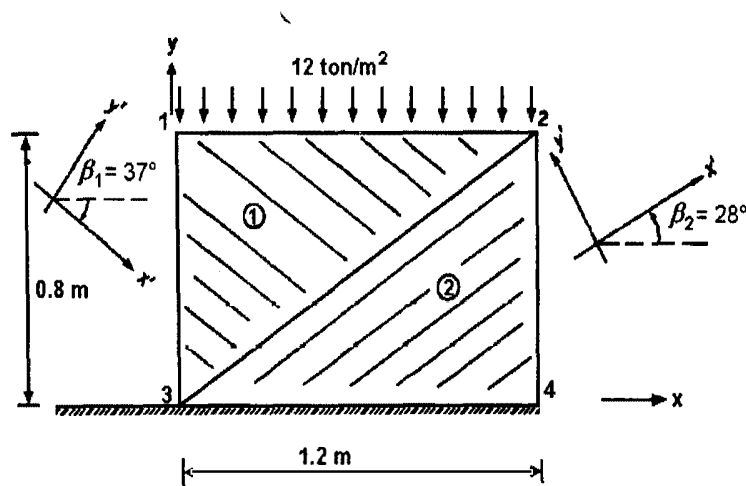


FIGURA 6. Ejemplo 2. Medio anisótropo

Solución

Cálculo de los valores de \underline{D}'

Elemento 1: $n = E_1/E_2 = 1.1389$, $m = G_2/E_2 = 0.4556$, ecuaciones (37) y (38)

Utilizando la ecuación (39)

$$\underline{D}'_1 = \begin{bmatrix} 252.861 & 85.745 & 0 \\ 85.745 & 222.884 & 0 \\ 0 & 0 & 82.016 \end{bmatrix}$$

Elemento 2: $n = 1.2308$, $m = 0.4615$

$$\underline{D}'_2 = \begin{bmatrix} 85.465 & 15.295 & 0 \\ 15.295 & 69.588 & 0 \\ 0 & 0 & 29.998 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los valores de \underline{T}

Elemento 1, $\beta_1 = -37^\circ$. Empleando la ecuación (41)

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 0.6378 & 0.3622 & 0.9613 \\ 0.3622 & 0.6378 & -0.9613 \\ -0.4806 & 0.4806 & 0.2756 \end{bmatrix}$$

Elemento 2, $\beta_2 = 28^\circ$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0.7796 & 0.2204 & -0.8290 \\ 0.2204 & 0.7796 & 0.8290 \\ 0.4145 & -0.4145 & 0.5592 \end{bmatrix}$$

Cálculo de los valores de $\underline{D} = \underline{T} \underline{D}' \underline{T}^T$

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 247.508 & 80.240 & -5.624 \\ 80.242 & 239.246 & -8.7829 \\ -5.622 & -8.7825 & 76.505 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_2 = \begin{bmatrix} 81.196 & 16.065 & 3.808 \\ 16.065 & 72.317 & 2.773 \\ 3.809 & 2.772 & 30.764 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de rigidez del medio.

Para cada elemento

$$\underline{K}^e = A t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$$

Las matrices \underline{B} son las mismas del ejemplo 1

$$A_1 = A_2 = 0.48 \text{ m}^2$$

$$\underline{K}_1^e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 145.497 & -86.831 & -60.190 & 46.705 & -85.307 & 40.128 \\ -86.831 & 213.716 & 44.838 & -183.826 & 41.994 & -29.893 \\ -60.190 & 44.838 & 57.379 & -6.587 & 2.811 & -38.254 \\ 46.706 & -183.826 & -6.587 & 179.435 & -40.120 & 4.391 \\ -85.308 & 41.993 & 2.812 & -40.120 & 82.496 & -1.874 \\ 40.125 & -29.891 & -38.251 & 4.391 & -1.874 & 25.501 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

$$\underline{K}_2^e = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 23.073 & 2.079 & -1.904 & -15.382 & -21.169 & 13.303 \\ 2.080 & 54.238 & -8.032 & -1.387 & 5.953 & -52.852 \\ -1.904 & -8.032 & 27.063 & 1.269 & -25.159 & 6.763 \\ -15.381 & -1.386 & 1.270 & 10.254 & 14.112 & -8.868 \\ -21.169 & 5.953 & -25.159 & 14.112 & 46.328 & -20.065 \\ 13.302 & -52.852 & 6.763 & -8.867 & -20.064 & 61.720 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix}$$

presentan las ecuaciones del elemento finito para el caso particular en el que se consideran desplazamientos horizontales

Como mencionamos, para comprender el comportamiento dinámico de un cuerpo, consideremos el caso sencillo de una masa de un grado de libertad sometida a las condiciones de movimiento ilustradas en la figura 7(a). El fenómeno físico consiste en una masa que se está desplazando hacia la derecha, pero con una aceleración \ddot{x} hacia la izquierda. Aun cuando \ddot{x} tiene signo positivo en la figura mostrada, el fenómeno que ocurre en la masa es una desaceleración de izquierda a derecha. La aceleración \ddot{x} , la velocidad \dot{x} , y el desplazamiento x se ponen con signo positivo para que haya consistencia algebraica en sus signos. x_0 representa el desplazamiento de la base y x el desplazamiento de la masa. A su vez u es el desplazamiento relativo entre la masa y la base.

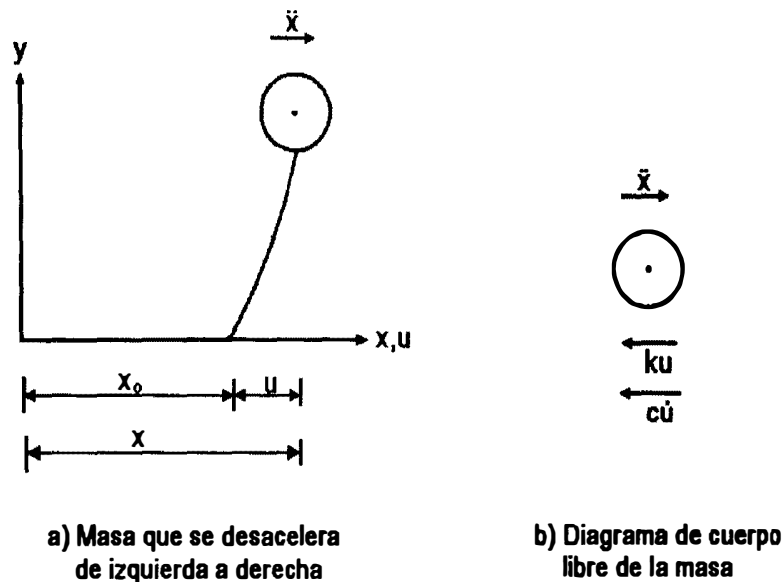


FIGURA 7. Movimiento de una masa de un grado de libertad. (a) Masa que se acelera de izquierda a derecha. (b) Diagrama de un cuerpo libre de la masa

Hagamos un diagrama de cuerpo libre de la masa figura 7(b); estableciendo la ecuación de equilibrio dinámico y utilizando el principio de D'Alembert, según el cual la fuerza dinámica se puede agregar al equilibrio dinámico como una fuerza igual a $m\ddot{x}$, pero con sentido contrario a la aceleración, se obtiene

$$k u + c \dot{u} + m \ddot{x} = 0 \quad (42)$$

pero

$$x = x_0 + u, \quad u = x - x_0, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \ddot{u};$$

sustituyendo en la ecuación (42)

$$\begin{aligned} m (\ddot{x}_0 + \ddot{u}) + c \dot{u} + k u &= 0 \\ m \ddot{u} + c \dot{u} + k u &= -m \ddot{x}_0 \end{aligned} \quad (43)$$

Resulta interesante notar en la ecuación (43) que el efecto de la aceleración de la base \ddot{x}_0 es equivalente a aplicar una fuerza dinámica de magnitud igual a $m\ddot{x}_0$ y sentido contrario a \ddot{x}_0 (Clough y Penzien 1975).

Para sistemas de varios grados de libertad, la ecuación (43) se debe cumplir en cada una de las masas del sistema. Cuando se emplea el método del elemento finito, también se debe satisfacer en cada uno de los nudos de los elementos; esta condición se puede poner en forma matricial de la siguiente forma

$$\underline{K} \underline{u} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{M} \ddot{\underline{u}} = -\underline{M} \ddot{\underline{x}}_0 \quad (44)$$

En la ecuación (44), \underline{K} es la matriz de rigidez, \underline{C} es la matriz de amortiguamiento y \underline{M} es la matriz de masa, todas ellas correspondientes al sistema global; \underline{u} es el vector de desplazamientos relativos entre los nudos de los elementos y la base del sistema ($\underline{u} = \underline{x} - \underline{x}_0$), $\ddot{\underline{x}}_0$ es el vector de aceleración de la base del sistema, el cual para una base rígida tiene todos sus elementos iguales a \ddot{x}_0 , siendo este valor igual a la magnitud de la aceleración de la base rígida del sistema.

La matriz de rigidez \underline{K} se forma como se vio en el inciso 2 de este tema. La matriz de amortiguamiento \underline{C} se puede construir como la suma de una fracción α de la matriz de rigidez y una fracción β de la matriz de masa, es decir

$$\underline{C} = \alpha \underline{K} + \beta \underline{M}$$

Este es el amortiguamiento de Rayleigh o amortiguamiento proporcional, en el cual \underline{C} es una matriz ortogonal (Cook 1981).

La matriz \underline{M} es la matriz de masa del sistema y se forma sumando las matrices de masa de cada uno de los elementos; por ejemplo, para el elemento de la figura 2, la matriz de masa vale:

$$\underline{M}^e = \begin{bmatrix} & u_i & v_i & u_j & v_j & u_k & v_k \\ \left[\begin{array}{cccccc} \rho At/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho At/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho At/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho At/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho At/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho At/3 \end{array} \right] & \begin{array}{l} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{array} \end{bmatrix} \quad (45)$$

en donde

$$\rho = \text{masa específica del material} = \frac{\gamma}{g}$$

A = área del elemento

t = espesor del elemento

La ecuación (45) equivale a concentrar la masa del elemento en partes iguales en cada uno de los nudos. Esta ecuación se puede escribir también como

$$\underline{M}^e = \frac{\rho A t}{3} \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j & u_k & v_k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{matrix} \quad (46)$$

La solución numérica de la ecuación (44) se puede encontrar empleando un método explícito o un método implícito. Dentro del primero se cuenta con el procedimiento de diferencias centrales, en el cual la velocidad $\underline{\dot{u}}_t$ y la aceleración $\underline{\ddot{u}}_t$ para un tiempo t están dadas por

$$\underline{\dot{u}}_t = \frac{1}{2(\Delta t)} (\underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_{t-\Delta t}) \quad (47)$$

$$\underline{\ddot{u}}_t = \frac{1}{2(\Delta t)^2} (\underline{u}_{t+\Delta t} - 2\underline{u}_t + \underline{u}_{t-\Delta t}) \quad (48)$$

en donde Δt es el incremento de tiempo.

Sustituyendo las ecuaciones (47) y (48) en la ecuación (44) se obtiene

$$\left[\frac{\Delta t}{2} \underline{C} + \underline{M} \right] \underline{u}_{t+\Delta t} = -((\Delta t)^2 \underline{K} - 2\underline{M}) \underline{u}_t - \left[\underline{M} - \frac{\Delta t}{2} \underline{C} \right] \underline{u}_{t-\Delta t} - (\Delta t)^2 \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0 \quad (49)$$

la cual permite obtener la respuesta dinámica del sistema.

Las ecuaciones (47) y (48) se deducen de la siguiente forma: hagamos la expansión de dos funciones $f(t + \Delta t)$ y $f(t - \Delta t)$ por medio de series de Taylor.

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!} \Delta t + \frac{f''(t)}{2!} (\Delta t)^2 + \frac{f'''(t)}{3!} (\Delta t)^3 + \dots \quad (50)$$

$$f(t - \Delta t) = f(t) - \frac{f'(t)}{1!} \Delta t + \frac{f''(t)}{2!} (\Delta t)^2 - \frac{f'''(t)}{3!} (\Delta t)^3 + \dots \quad (51)$$

Restando las ecuaciones (50) y (51)

$$f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t) = 2f'(t) \Delta t + \dots$$

$$f'(t) \doteq \frac{f(t + \Delta t) - f(t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad (52)$$

Sumando las ecuaciones (50) y (51)

$$f(t + \Delta t) + f(t - \Delta t) = 2f(t) + f''(t) (\Delta t)^2 + \dots$$

$$f''(t) \doteq \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} \quad (53)$$

Las ecuaciones (52) y (53) puestas ahora para todos los grados de libertad de un sistema global se traducen en las ecuaciones (47) y (48).

Veamos a continuación cómo emplear la ecuación (49). Conocemos las condiciones iniciales \underline{u}_0 y $\dot{\underline{u}}_0$, si no se proporciona $\ddot{\underline{u}}_0$ lo calculamos con la ecuación (44). Enseguida se emplean las ecuaciones (47) y (48) para valorar $\underline{u}_{-\Delta t}$, dado que éste se requiere para iniciar los cálculos:

$$\underline{u}_{-\Delta t} = \underline{u}_0 - \Delta t \dot{\underline{u}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\underline{u}}_0 \quad (54)$$

Las ecuaciones (49), (47) y (48) se emplean repetitivamente: la (49) da \underline{u}_t , y las (47) y (48) dan $\underline{\dot{u}}_{\Delta t}$ y $\underline{\ddot{u}}_{\Delta t}$ (si éstas se requieren); de la ecuación (49) obtenemos ahora $\underline{u}_{2\Delta t}$ y así sucesivamente. La solución de esta ecuación es trivial si \underline{M} es diagonal y \underline{C} es diagonal o cero. El método de diferencias centrales x es condicionalmente estable (Cook 1981).

El método de Newmark está basado en las siguientes expresiones

$$\underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{u}_t + (\Delta t) \underline{\dot{u}}_t + (\Delta t)^2 \left[(1/2-\beta) \underline{\ddot{u}}_t + \beta \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t} \right] \quad (55)$$

$$\underline{\dot{u}}_{t+\Delta t} = \underline{\dot{u}}_t + (\Delta t) \left[(1-\gamma) \underline{\ddot{u}}_t + \gamma \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t} \right] \quad (56)$$

donde β y γ son parámetros que puede elegir a criterio el analista, los cuales se pretende aceleren la convergencia del procedimiento. La ecuación (55) se resuelve para $\underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t}$; sustituyendo este valor y las ecuaciones (55) y (56) en la (49), escrita para $t + \Delta t$, se llega a un método implícito, en el cual (Cook 1981)

$$\left[\underline{K} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{C} + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \underline{M} \right] \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{C} \left\{ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \underline{u}_t + \left[\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right] \underline{\dot{u}}_t + (\Delta t)^2 \left[\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right] \underline{\ddot{u}}_t \right\} \\ + \underline{M} \left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \underline{u}_t + \frac{1}{\beta \Delta t} \underline{\dot{u}}_t + \left[\frac{1}{2\beta} - 1 \right] \underline{\ddot{u}}_t \right\} - \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0 \quad (57)$$

Las ecuaciones (55) y (56) están basadas en una cierta variación de la aceleración; por ejemplo, suponiendo una aceleración promedio constante se obtiene, para un sistema de un grado de libertad

$$\underline{\dot{u}}_{t+\Delta t} = \underline{\dot{u}}_t + \frac{\underline{\ddot{u}}_t + \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t}}{2} (\Delta t) \quad (58)$$

$$\underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{u}_t + \underline{\dot{u}}_t \Delta t + \frac{\underline{\ddot{u}}_t + \underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t}}{4} (\Delta t)^2 \quad (59)$$

Las ecuaciones (55) y (56) (para varios grados de libertad), con $\beta = 1/4$ y $\gamma = 0.5$, son equivalentes a las ecuaciones (59) y (58) (para un grado de libertad), respectivamente.

Para resolver la ecuación (57) procedemos de la siguiente forma (Cook 1981): conociendo las condiciones iniciales \underline{u}_0 y $\dot{\underline{u}}_0$ calculamos el valor de $\ddot{\underline{u}}_0$ empleando la ecuación (44). La ecuación (57) se resuelve para determinar $\underline{u}_{\Delta t}$ y de las ecuaciones (55) y (56) se obtienen $\ddot{\underline{u}}_{\Delta t}$ y $\dot{\underline{u}}_{\Delta t}$, respectivamente. Luego con la ecuación (57) se obtiene $\underline{u}_{2\Delta t}$ y así sucesivamente. La solución de la ecuación (57) no es trivial, pero se requiere invertir la matriz una sola vez si el incremento de tiempo no varía.

El método de Newmark es incondicionalmente estable si $\gamma \geq 0.5$ y $\beta > (2\gamma + 1)^2/16$. Si introducimos un amortiguamiento artificial entonces $\gamma > 0.5$; si el amortiguamiento es negativo $\gamma < 0.5$. Si $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0$ el método de Newmark se reduce de diferencias centrales. La mejor combinación de parámetros para que un método implícito pueda ser incondicionalmente estable para problemas lineales, se establece cuando $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$, siendo un método de aceleración promedio constante (Cook 1981).

En ocasiones cuando se presentan estratos horizontales del suelo o roca, conviene trabajar únicamente con desplazamientos horizontales. En estas condiciones las matrices de forma \underline{B} , de elasticidad \underline{D} y de masa \underline{M} , para un elemento, estarán dadas por las expresiones que se presentan a continuación.

De la ecuación (20) haciendo $v_i = v_j = v_k = 0$ y $\varepsilon_y = 0$

$$\underline{B} = \frac{1}{2A} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_i & u_j & u_k \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{bmatrix} & \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \end{matrix} \quad (60)$$

De la ecuación (27), haciendo $\varepsilon_y = 0$

$$\underline{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{matrix} & \begin{matrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 \\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \end{matrix} \quad (61)$$

De la ecuación (46), haciendo $v_i = v_j = v_k = 0$

$$M^e = \frac{\rho A t}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{matrix} \quad (62)$$

Las ecuaciones (60), (61) y (62) se emplean cuando se hace un análisis dinámico y se consideran desplazamientos verticales iguales a cero.

Ejemplo 3. Determine los desplazamientos horizontales en los puntos 1 y 2 para 0.1, 0.2 y 0.3 s, del medio mostrado en la figura 8, el cual está sometido a una aceleración de 0.2 g en su base. Las propiedades del medio son

$$E = 800 \text{ ton/m}^2, \quad \gamma = 1.8 \text{ ton/m}^3, \quad \nu = 0.30$$

Condiciones iniciales: para $t = 0$, $u_0 = 0$, $\dot{u}_0 = 0$

Considere un estado de deformación plana y únicamente desplazamientos horizontales.

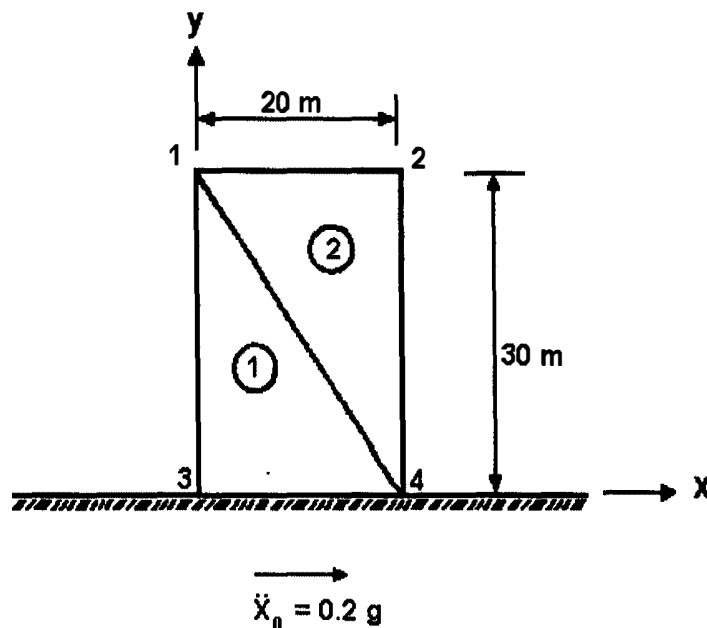


FIGURA 8. Ejemplo 3. Análisis dinámico

Solución

Número de nudos

Triángulo	u_i	u_j	u_k	(La numeración debe ser en sentido antihorario)
1	u_1	u_3	u_4	
2	u_1	u_4	u_2	

Determinación de las matrices \underline{B} y \underline{D}

Triángulo 1

Empleando la ecuación (5)

$$2A = x_i y_{jk} + x_j y_{ki} + x_k y_{ij} = 600 \text{ m}^2$$

$$A = 300 \text{ m}^2$$

Utilizando la ecuación (60)

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & -0.05 & 0.05 & \\ 0.03333 & -0.0333 & 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \quad \text{m}^{-1}$$

Aplicando la ecuación (61)

$$\underline{D}_1 = \begin{bmatrix} 1076.923 & 0 \\ 0 & 307.692 \end{bmatrix} \text{ ton/m}^2$$

Triángulo 2

Usando las ecuaciones (5), (60) y (61)

$$2 A = 600 \text{ m}^2$$

$$A = 300 \text{ m}^2$$

$$\underline{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.03333 & 0.03333 \end{bmatrix} \text{ m}^{-1}$$

$$\underline{D}_2 = \begin{bmatrix} 1076.923 & 0 \\ 0 & 307.692 \end{bmatrix} \text{ ton/m}^2$$

Determinación de la matriz de rigidez \underline{K} del medio.

Usando la ecuación (32)

$$\underline{K}^e = A t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} = \begin{bmatrix} & u_1 & & u_3 & & u_4 \\ 102.543 & & -102.543 & & 0 & \\ -102.543 & & 910.233 & & -807.690 & \\ -102.543 & & -807.690 & & -807.690 & \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

$$t = 1 \text{ m}, A = 300 \text{ m}^2$$

$$\underline{K}_2^e = A t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} = \begin{bmatrix} & u_1 & & u_4 & & u_2 \\ 807.690 & & 0 & & -807.690 & \\ 0 & & 102.540 & & -102.540 & \\ -807.690 & & -102.540 & & 910.230 & \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_4 \\ u_2 \end{matrix}$$

La matriz de rigidez de todo el medio vale

$$\underline{K} = \underline{K}_1^e + \underline{K}_2^e$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 910.23 & -807.69 & 102.54 & 0 \\ -807.69 & 910.23 & 0 & -102.54 \\ -102.54 & 0 & 910.23 & -807.69 \\ 0 & -102.54 & -807.69 & 910.23 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Pero $u_3 = u_4 = 0$, por tanto

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} & u_1 & u_2 \\ 910.23 & -807.69 \\ -807.69 & 910.23 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$$

Determinación de la matriz de masa concentrada \underline{M} del medio.

Utilizando la ecuación (62), con $\rho = \gamma/g = 1.8/9.8 = 0.1837 \text{ ton s}^2/\text{m}^4$

$$\underline{M}_1^e = \begin{bmatrix} & u_1 & u_3 & u_4 \\ 18.367 & 0 & 0 \\ 0 & 18.367 & 0 \\ 0 & 0 & 18.367 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

$$\underline{M}_2^e = \begin{bmatrix} & u_1 & u_4 & u_2 \\ 18.367 & 0 & 0 \\ 0 & 18.367 & 0 \\ 0 & 0 & 18.367 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_4 \\ u_2 \end{matrix}$$

$$\underline{M} = M_1^e + M_2^e = \begin{bmatrix} 36.735 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18.367 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18.367 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36.735 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

Pero $u_3 = u_4 = 0$, por tanto

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 36.735 & 0 \\ 0 & 18.367 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$$

La ecuación dinámica que rige el movimiento del sistema es la (44)

$$\underline{K} \underline{u} + \underline{C} \underline{\dot{u}} + \underline{M} \underline{\ddot{u}} = - \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0$$

Si se desprecia el efecto del amortiguamiento $\underline{C} = 0$, por tanto

$$\underline{K} \underline{u} + \underline{M} \underline{\ddot{u}} = - \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0 \quad (a)$$

La ecuación (a) se puede resolver utilizando el método explícito de diferencias centrales o el de Newmark.

a) Solución por medio del método explícito de diferencias centrales. Aplicando la ecuación (49) en

$$\underline{C} = 0$$

$$\underline{M} \underline{u}_{t+\Delta t} = - \left[(\Delta t)^2 \underline{K} - 2 \underline{M} \right] \underline{u}_t - \underline{M} \underline{u}_{t-\Delta t} - (\Delta t)^2 \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0 \quad (b)$$

Para $t = 0^+$ las condiciones iniciales son $\underline{u}_0 = \dot{\underline{u}}_0 = 0$; sustituyendo en la ecuación (a)

$$\underline{K} \underline{u}_0 + \underline{M} \ddot{\underline{u}}_0 = - \underline{M} \ddot{\underline{x}}_0$$

por tanto

$$\ddot{\underline{u}}_0 = - \ddot{\underline{x}}_0$$

Para aplicar la ecuación (b) se requiere calcular $\underline{u}_{-\Delta t}$ a partir de la ecuación (54), por tanto

$$\underline{u}_{-\Delta t} = \underline{u}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\underline{u}}_0$$

$$\ddot{\underline{x}}_0 = 0.2 \text{ g} = 0.2 (9.8) = 1.96 \text{ m/s}^2$$

El vector $\ddot{\underline{x}}_0$ vale

$$\ddot{\underline{x}}_0 = \begin{Bmatrix} 1.96 \\ 1.96 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2, \quad \ddot{\underline{u}}_0 = \begin{Bmatrix} -1.96 \\ -1.96 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Aplicando la ecuación (54), con $\Delta t = 0.1 \text{ s}$

$$\underline{u}_{-0.1} = \begin{Bmatrix} -0.0098 \\ -0.0098 \end{Bmatrix} \text{ m}$$

Utilizando la ecuación (b), con

$$t = 0, \quad \Delta t = 0.1 \text{ s}, \quad t + \Delta t = 0.1 \text{ s}$$

$$\underline{M} \underline{u}_{0.1} = - \left[(0.1)^2 \underline{K} - 2 \underline{M} \right] \underline{u}_0 - \underline{M} \underline{u}_{-0.1} - (0.1)^2 \underline{M} \ddot{\underline{x}}_0$$

$$\begin{bmatrix} 36.735 & 0 \\ 0 & 18.367 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = 0 - \begin{bmatrix} 36.735 & 0 \\ 0 & 18.367 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0098 \\ -0.0098 \end{Bmatrix}$$

$$-(0.1)^2 \begin{bmatrix} 36.735 & 0 \\ 0 & 18.367 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.96 \\ 1.96 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.36 \\ -0.18 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{0.1} = \begin{Bmatrix} -0.0098 \\ -0.0098 \end{Bmatrix}$$

Para $t = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $t + \Delta t = 0.2$ s, $t - \Delta t = 0$, sustituyendo en la ecuación (b)

$$\underline{M} \underline{u}_{0.2} = - [(\Delta t)^2 \underline{K} - 2 \underline{M}] \underline{u}_{0.1} - \underline{M} \underline{u}_0 - (\Delta t)^2 \underline{M} \ddot{x}_0$$

$$\underline{u}_{0.2} = \begin{Bmatrix} -0.03893 \\ -0.03866 \end{Bmatrix}$$

Para $t = 0.2$, $\Delta t = 0.1$, $t + \Delta t = 0.3$, $t - \Delta t = 0.1$ s, sustituyendo en la ecuación (b)

$$\underline{M} \underline{u}_{0.3} = - [(\Delta t)^2 \underline{K} - 2 \underline{M}] \underline{u}_{0.2} - \underline{M} \underline{u}_{0.1} - (\Delta t)^2 \underline{M} \ddot{x}_0$$

$$\underline{u}_{0.3} = \begin{Bmatrix} -0.08651 \\ -0.08508 \end{Bmatrix}$$

Es decir, los desplazamientos horizontales de los puntos 1 y 2 para diferentes tiempos valen

t [s]	u_1 [m]	u_2 [m]
0.1	- 0.00980	- 0.00980
0.2	- 0.03893	- 0.03866
0.3	- 0.08651	- 0.08508

b) Solución utilizando el método explícito de Newmark. De la ecuación (57), con $\underline{C} = 0$, $\gamma = 0.5$ y $\beta = 0.25$.

$$\left[\underline{K} + \frac{4}{(\Delta t)^2} \underline{M} \right] \underline{u}_{t+\Delta t} = \underline{M} \left\{ \frac{4}{(\Delta t)^2} \underline{u}_t + \frac{4}{\Delta t} \underline{\dot{u}}_t + \underline{\ddot{u}}_t \right\} - \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0 \quad (c)$$

Con las condiciones iniciales $\underline{u}_0 = \underline{\dot{u}}_0 = 0$ y de la ecuación (a), para $t = 0^+$

$$\underline{K} \underline{u}_0 + \underline{M} \underline{\ddot{u}}_0 = - \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0 \quad \text{y} \quad \underline{\ddot{u}}_0 = - \underline{\ddot{x}}_0 = \begin{Bmatrix} -1.96 \\ -1.96 \end{Bmatrix} \text{ m/s}^2$$

Aplicando la ecuación (c), con $t = 0$, $\Delta t = 0.1$ s, $t + \Delta t = 0.1$ s

$$\left[\underline{K} + \frac{4}{(\Delta t)^2} \underline{M} \right] \underline{u}_{0.1} = \underline{M} \left\{ \frac{4}{(\Delta t)^2} \underline{u}_0 + \frac{4}{\Delta t} \underline{\dot{u}}_0 + \underline{\ddot{u}}_0 \right\} - \underline{M} \underline{\ddot{x}}_0$$

$$\underline{u}_{0.1} = \begin{Bmatrix} -0.009729 \\ -0.0096715 \end{Bmatrix}$$

Para conocer $\underline{\ddot{u}}_{0.1}$ y $\underline{\dot{u}}_{0.1}$ se emplean las ecuaciones (55) y (56). Despejando $\underline{\dot{u}}_{t+\Delta t}$ de la ecuación (55)

$$\underline{\ddot{u}}_{t+\Delta t} = \frac{4}{(\Delta t)^2} \left\{ \underline{u}_{t+\Delta t} - \underline{u}_t \right\} - \frac{4}{\Delta t} \underline{\dot{u}}_t - \underline{\ddot{u}}_t \quad (d)$$

Haciendo $\gamma = 0.5$ en la ecuación (56)

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + 0.5 (\Delta t) \left\{ \ddot{u}_t + \ddot{u}_{t+\Delta t} \right\}$$



(e)

Empleando la ecuación (d) con $t = 0$, $\Delta t = 0.1$ y $t + \Delta t = 0.1$ s

$$\ddot{u}_{0.1} = \frac{4}{(0.1)^2} \left\{ u_{0.1} - u_0 \right\} - \frac{4}{0.1} \dot{u}_0 - \ddot{u}_0 = \begin{Bmatrix} -1.9316 \\ -1.9086 \end{Bmatrix}$$

Al sustituir en la ecuación (e)

$$\dot{u}_{0.1} = \dot{u}_0 + 0.5 (0.1) \ddot{u}_0 + \dot{u}_{0.1} = \begin{Bmatrix} -0.1946 \\ -0.1934 \end{Bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (c) con $t = 0.1$, $\Delta t = 0.1$, $t + \Delta t = 0.2$ s

G.- 906163

$$\left[\frac{K}{M} + \frac{4}{(\Delta t)^2} \right] u_{0.2} = \left\{ \frac{4}{(\Delta t)^2} u_{0.1} + \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_{0.1} + \ddot{u}_{0.1} \right\} - \ddot{x}_0$$

$$u_{0.2} = \begin{Bmatrix} -0.03773 \\ -0.03820 \end{Bmatrix}$$

Al sustituir en la ecuación (d)

$$\ddot{u}_{0.2} = \begin{Bmatrix} -1.4848 \\ -1.7652 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (e)

$$\underline{\dot{u}}_{0.2} = \begin{Bmatrix} -0.3654 \\ -0.3771 \end{Bmatrix}$$

Utilizando la ecuación (c) con $t = 0.2$, $\Delta t = 0.1$, $t + \Delta t = 0.3$ s, se obtiene el valor de $\underline{u}_{0.3}$, que vale

$$\underline{u}_{0.3} = \begin{Bmatrix} -0.08355 \\ -0.08441 \end{Bmatrix}$$

Es decir, los desplazamientos horizontales de los puntos 1 y 2 para diferentes tiempos valen

t [s]	u_1 [m]	u_2 [m]
0.1	- 0.00973	- 0.00967
0.2	- 0.03773	- 0.03820
0.3	- 0.08355	- 0.08441

Finalmente comparamos los resultados obtenidos con los métodos de diferencias centrales y de Newmark.

t [s]	Diferencias centrales		Newmark	
	u_1 [m]	u_2 [m]	u_1 [m]	u_2 [m]
0.1	- 0.00980	- 0.00980	- 0.00973	- 0.00967
0.2	- 0.03893	- 0.03866	- 0.03773	- 0.03820
0.3	- 0.08651	- 0.08508	- 0.08355	- 0.08441

BIBLIOGRAFÍA

Clough R. W. y J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Mc Graw-Hill, 1975.

Cook R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2a. ed., Wiley, 1981.

Lekhnitskii S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, 1981.

Zienkiewicz O. C., *The Finite Element Method*, 3a. ed., Mc Graw-Hill, 1977.

Esta obra se terminó de imprimir
en abril de 2000
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 250 ejemplares
más sobrantes de reposición.