



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

GEOESTADÍSTICA.

DR. JUAN MANUEL BERLANGA GUTIERREZ.

ING. JUAN JOSÉ OBREGON ANDRIA.

G-601115

APUNTE 90

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



601115

G- 601115

G E O E S T A D I S T I C A

1981

Autores :

DR. JUAN MANUEL BERLANGA GUTIERREZ

ING. JUAN JOSE OBREGON ANDRIA

Derechos de Autor Reservados
conforme a la Ley .

N°. Registro Derechos de Autor
32 / 81

G-601115

Independientemente de la técnica de cálculo -
utilizada , los resultados generados siempre -
dependerán de la calidad , cantidad y correcta
localización de la información básica . Ningún
método de cálculo por exacto que sea , logrará
obtener resultados confiables y congruentes , -
empleando datos inexactos .

INDICE

<u>CAPITULO</u>	<u>Páginas</u>
I - RESERVAS DE MINERAL	1 - 28
II - ESTADISTICA	29 - 43
III - GEOESTADISTICA	44 - 56
IV - ANALISIS ESTRUCTURAL	57 - 79
V - VARIANZA DE ESTIMACION	80 - 97
VI - EL KRIGEAGE	98 - 115
VII - ESTIMACION DE RESERVAS	116 - 140
VIII - SIMULACION DE YACIMIENTOS	141 - 154
BIBLIOGRAFIA	155 - 156
EJERCICIOS	E-1 - E-20

RESERVAS DE MINERAL

INTRODUCCION

Como primera parte de este curso se hará referencia al llamado Cálculo de Reservas de Mineral, la cual ~~para un mejor entendimiento~~ ha sido subdividida en varias secciones. En cada sección se hará mención de los puntos más importantes a considerar, aunque se debe de aclarar que no serán tratados en toda su amplitud, ya que ello llevaría demasiado espacio y tiempo. Sin embargo se considera que con lo que sea expuesto podrá adquirirse un conocimiento suficiente y adecuado de cada una de las secciones.

Debe de añadirse que el desarrollo está hecho ASUMIENDO que una Evaluación Geológica ya ha sido efectuada y que basados en los datos preliminares obtenidos, se tomó una decisión respecto a la conveniencia de seguir adelante con la evaluación del Depósito objeto de estudio.

SISTEMA DE CALCULO DE RESERVAS

Dentro de los varios métodos de cálculo que se utilizan, podemos hacer la separación en tres distintos tipos:

- 1° Los Geométricos
- 2° Los Estadísticos
- 3° Los Geoestadísticos

En esta primera parte nos referiremos únicamente a los Métodos Geométricos, pero antes de ello trataremos de bosquejar las bases esenciales sobre las cuales están apoyados los diferentes métodos de cálculo, así como algunas de las consideraciones que hay que tener en cuenta antes de proceder a cualquier cálculo, describiendo en

forma concisa las principales de ellas.

Primero que todo hay que decir que el cálculo de las reservas de mineral es un trabajo técnico consistente de varias operaciones. Así mismo es conveniente enfatizar la importancia de seguir un procedimiento lógico y definido además de adecuadamente seleccionado para el tipo de cuerpo en estudio, pues hay que recordar que muchas veces un método adecuadamente seleccionado facilitará todos los cálculos posteriores y puede llegar a darnos el mismo grado de exactitud que pueda obtenerse con métodos más complicados y sofisticados.

La selección de un método de cálculo dependerá de la geología del depósito, tipo de mineralización presente en el mismo, método de exploración, disponibilidad y confiabilidad de los datos, propósito del cálculo y por supuesto, el grado de exactitud o confiabilidad que se desee. También diremos que el método escogido debe de ser (hasta donde sea posible) simple, rápido, confiable, consistente con el tipo de depósito y con los datos disponibles y que además sea apropiado para ser checado si así se desea.

Podemos decir entonces que a grandes rasgos el orden seguido en dichas operaciones es el siguiente: evaluación geológica, exploración y muestreo, evaluación de los datos de exploración, delineación del cuerpo mineralizado y selección del método apropiado de cálculo. Es muy conveniente que el orden anterior se ajuste a un sistema que sea dinámico, en forma tal que exista un flujo constante de actualización.

Del mismo modo diremos que para el cálculo de las reservas el cuerpo mineralizado es delineado primeramente y después subdividido en varios bloques, la construcción de los cuales dependerá tanto del método seleccionado de cálculo como de diversas consideraciones de tipo geológicas, mineras, tecnológicas y económicas, en forma tal que dichos bloques puedan expresar uno o varios grados de confiabilidad. Aparte de ello, dicha división es hecha de manera que cada bloque pueda relacionarse directamente a uno o más datos de la exploración.

Así pues las reservas del cuerpo entero se determinan computando áreas y volúmenes para cada bloque formado, transformando volúmenes a tonelajes y calculando las leyes promedio por bloque, para finalmente tabular los resultados de los bloques de la misma categoría o confiabilidad y los del cuerpo o depósito entero.

Aparte de lo anterior, en todos los métodos se tienen que tomar ciertas presunciones básicas, independientemente del tipo de método que hayamos seleccionado.

La principal presunción es que los elementos básicos de un cuerpo detectado u observado en cualquier punto, cambian o se extienden a una área adyacente de acuerdo a un adecuado principio de interpretación de los datos. También se asume que las observaciones son hechas de acuerdo con la naturaleza del yacimiento y que el muestreo fue efectuado en todas las partes del cuerpo siguiendo los mismos principios y con la misma confiabilidad y que sus resultados son representativos de la parte estudiada del depósito o del yacimiento entero.

Otro punto importante es que se presume que el cuerpo ha sido explorado por un procedimiento apropiado y que la serie de trabajos efectuados prueban una cierta continuidad del mismo. Finalmente se supone que para efectos de cálculo la verdadera -y a veces compleja- forma del depósito puede ser representada dentro de ciertos rangos de exactitud por un cuerpo "hipotético" con una superficie (o variaciones) proyectada sobre una planta o sobre una sección (ya sea transversal o longitudinal) o una combinación de ambas. Así mismo, tal cuerpo "idealizado" puede cubrir el depósito entero o puede estar compuesto de varios bloques, cada uno de ellos caracterizado por uno o varios datos.

PRINCIPIOS DE INTERPRETACION

Ya hemos hablado de que una de las principales presunciones básicas era aquella que se refiere a que los elementos básicos de un cuerpo se extienden a áreas adyacentes de puntos observados, de acuerdo a

ciertos "principios de interpretación" de datos.

Diremos que entre otros dichos principios pueden ser analíticos o intrínsecos y que de acuerdo al tipo escogido haremos la construcción de nuestros bloques y también de ello dependerá la exactitud de nuestros cálculos.

Entre los principios analíticos podemos mencionar los siguientes: el del "cambio gradual" y el de "semidistancia" o de "igual influencia". Entre los principios intrínsecos mencionaremos a los de "inferencia geológica y minera".

Principio del Cambio Gradual.- De acuerdo a esta regla o ley de función lineal, todos aquellos parámetros de un depósito que pueden ser expresados numéricamente varían gradual y continuamente entre una línea recta imaginaria que conecte a dos puntos conocidos. Este principio puede aplicarse a elementos de cálculo tales como anchos, leyes, áreas, volúmenes, tonelajes, etc. También puede ser aplicado para tratar de determinar un valor dado en un punto no-conocido que quede localizado entre puntos conocidos (o sea, para hacer interpolaciones).

Principio de Semidistancia o de Igual Influencia.- De acuerdo a este principio, llamado también de "igual área de influencia", el valor conocido en cualesquier punto permanece constante hasta la mitad de la distancia que lo separe de otro punto conocido, lugar en el que súbitamente cambia y toma el valor correspondiente al segundo punto, o sea que el valor para cada punto se extiende hasta el punto medio con respecto a los adyacentes. Este principio se utiliza ampliamente para asignarle esferas o áreas de influencia a trabajos individuales (los que pueden ser barrenos, frentes, contrapozos, etc.).

Principios de Inferencia Geológica y Minera.- Estos son utilizados principalmente cuando en la construcción de nuestros blo-

que hay que tomar en cuenta consideraciones de tipo geológicas, mineras o económicas, de entre las que podríamos mencionar: caracteres estructurales (fallas, cambios de echado o de rumbo), cambios en el tipo de mineralización (óxidos, sulfuros, zonas de alta y baja ley; zonas altas en plomo, cobre o zinc, etc.), propiedades físicas diferentes en el mineral o en la roca encajonante (competentes o incompetentes), zonas con agua de alta presión, profundidad del mineral, relación de mineral a tepepate (relación de descapote), etc.

PESOS DE INFLUENCIA

Cuando hablamos de pesos de influencia nos estamos refiriendo a la operación mediante la cual se le asignan ciertos factores a cada una de las observaciones (o conjunto de ellas) de forma tal que reflejen su importancia o valor relativo cuando se comparan o se promedian con observaciones del mismo tipo o naturaleza similar.

Tal asignación de pesos de influencia, o simplemente pesos, puede ser hecha de acuerdo a unidades de longitud, área, volumen, tonelaje, o en números abstractos, de acuerdo a ciertos principios de interpretación, a factores subjetivos (tales como el criterio y la experiencia de la persona que calcula) y otra serie de consideraciones. Además, el uso de dichos pesos dependerá en cada caso particular del análisis que se haga de los datos de que se disponga.

A continuación trataremos de dar una somera explicación de cada uno de los sistemas o métodos de cálculo mencionados, así como de los tipos más utilizados en cada uno de ellos. Se hace la aclaración de que no son los únicos métodos que se pueden utilizar y que se describirán en forma generalizada, ya que comúnmente cada compañía o institución tiene métodos modificados de tal modo que se ajusten a los casos específicos que trata cada una de ellas.

MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Podemos decir que dependiendo del criterio que se haya seguido para

expresar las características del cuerpo mineralizado (i.e. tamaño, forma, distribución de las variables, etc.) mediante bloques auxiliares, los métodos geométricos o convencionales pueden ser clasificados en tres grandes grupos:

- 1.- Método de Bloques Minables
- 2.- Método de Secciones Transversales
- 3.- Métodos Analíticos (Triangular, Poligonal)

Método de Bloques Minables

a) Principios y Requerimientos:

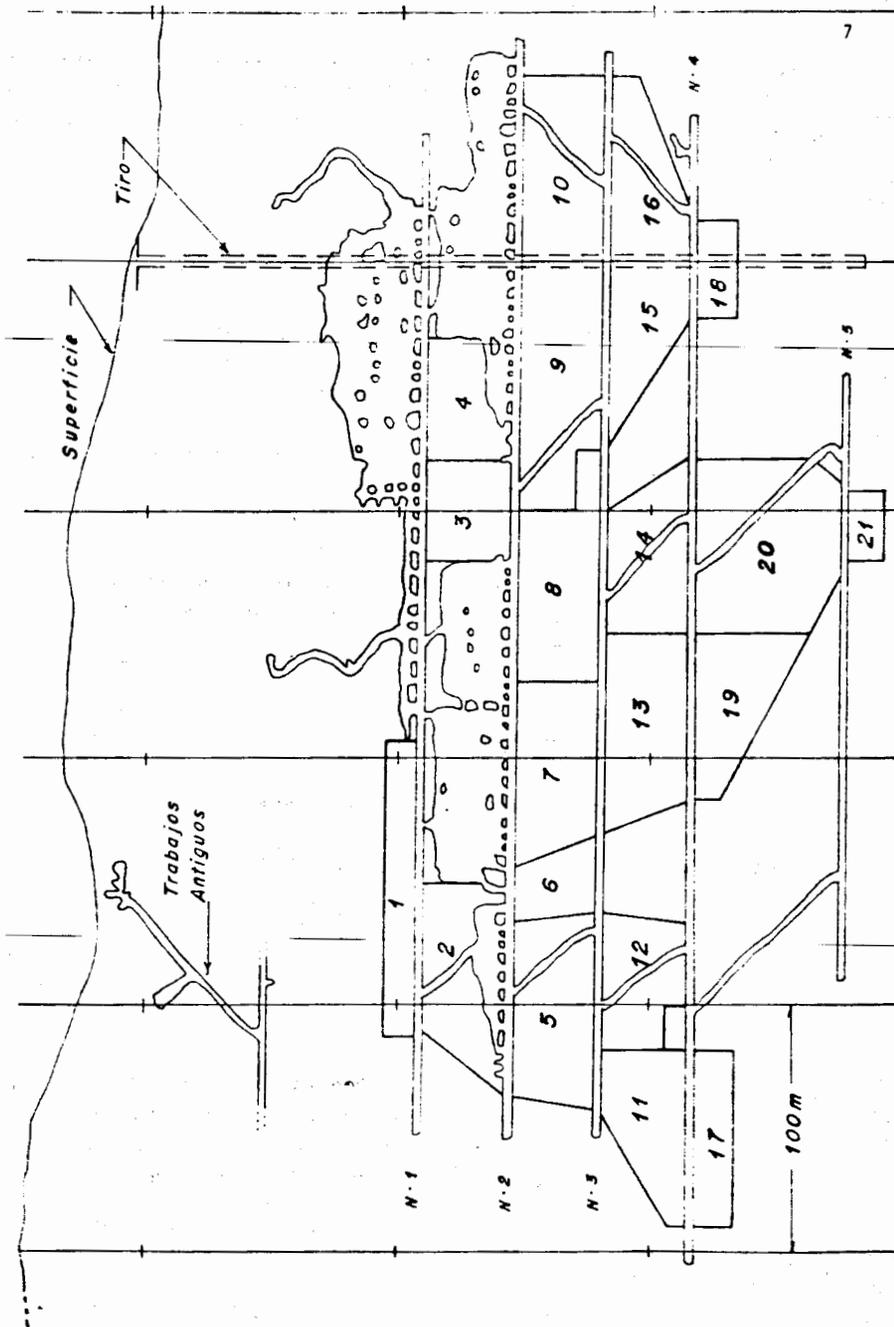
Este método es también conocido como el de "Secciones Longitudinales", "de Explotación Minera" o de "Extracción Minera". La delimitación de los bloques (forma y tamaño) es realizada de acuerdo a las obras mineras existentes (frentes, contrapozos, etc.), así como a rasgos geológicos y factores de tipo técnico-económicos (zonas de alta y baja ley, ancho del cuerpo, tipo de mineral, método de explotación a seguir, etc.).

El caso más común es el de bloques de forma rectangular, forma que puede variar de acuerdo a la explotación que se llegue a efectuar en los bloques (ver fig. 1.1), o a la disposición de las obras mineras efectuadas, habiendo bloques que estarán delimitados o expuestos por cuatro, tres, dos o un solo lado, o por combinaciones de obras mineras y barrenación a diamante.

De la misma manera los bloques pueden ser subdivididos de acuerdo a la confiabilidad de los datos (categorías), ancho del mineral, grado de alteración del mineral o zoneamiento del mismo, o también por el número de datos (observaciones) de que se disponga.

Las fórmulas para los cálculos pueden variar desde las más simples hasta llegar a una combinación de varios factores complejos. Sin embargo, el procedimiento de utilizar promedios aritméticos es el más simple y rápido, la exactitud del cual dependerá de la calidad, can

Fig. 1.1-Formación de Bloques - Método de Bloques Minables



tividad y distribución de los datos, así como de la génesis del depósito y del tamaño de los bloques formados.

b) Aplicabilidad:

Este método es muy flexible y puede ser aplicado en cualquier tipo de yacimiento; sin embargo ciertos tipos de yacimientos se prestan particularmente al uso del mismo, tales como cuerpos tabulares cuyo echado sea bastante fuerte y que su ancho no sea muy grande (vetas, cuerpos sedimentarios, etc.), en los cuales sus características determinantes (ancho y leyes) varían gradualmente y en el que los rasgos geológicos y mineros pueden ser considerados como similares a los de los bloques ya minados.

c) Fórmulas de Cálculo:

En este punto trataremos tanto el caso más simple, en el que los anchos y leyes son computados de acuerdo al número de observaciones exclusivamente, hasta el un poco más complicado cuando son tomados en cuenta pesos de influencia para cada observación o grupo de observaciones.

Caso 1: De acuerdo al número de observaciones.

$$\text{Ancho Promedio } (A_p) = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}{n} \quad (1.1)$$

$$\text{Ley Promedio } (L_p) = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n}{n} \quad (1.2)$$

n = número de observaciones.

Caso 2: De acuerdo al ancho de cada observación.

$$\text{Ancho Promedio} = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}{n} \quad (1.1)$$

$$\text{Ley Promedio} = \frac{L_1 A_1 + L_2 A_2 + L_3 A_3 + \dots + L_n A_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n} \quad (1.3)$$

Caso 3: Utilizando pesos de influencia.

$$\text{Ancho Promedio} = \frac{P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3 + \dots + P_n A_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n} \quad (1.4)$$

$$\text{Ley Promedio} = \frac{L_1 (P_1 A_1) + L_2 (P_2 A_2) + L_3 (P_3 A_3) + \dots + L_n (P_n A_n)}{P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3 + \dots + P_n A_n} \quad (1.5)$$

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ = pesos de influencia

$P_1 A_1, P_2 A_2, \text{etc.}$ = anchos "pesados"

En todos los casos anteriores:

Area (S) = determinada de acuerdo a la figura del bloque por fórmulas geométricas sencillas o con ayuda de un planímetro.

$$\text{Volumen (V)} = S \times A_p \quad (1.6)$$

$$\text{Tonelaje (T)} = V \times \delta \quad (1.7)$$

δ = densidad del mineral

d) Ventajas y Desventajas:

En general el procedimiento a seguir es flexible y adaptable a la mayoría de los depósitos y en cualquier etapa de desarrollo y/o explotación de los mismos; en adición a ello, no se necesitan construir planos especiales y todas las variables pueden ser determinadas por un mínimo de cálculos utilizando fórmulas simples.

Los cálculos pueden ser hechos para bloques individuales, por niveles o secciones, o para el cuerpo entero; debido a ello, cambios en las reservas a raíz de más exploración y/o explotación pueden ser hechos fácilmente, añadiendo o restando áreas a los bloques ya determinados u obteniendo áreas nuevas o corregidas (lo mismo aplica

a las leyes).

La exactitud que se obtiene en este método depende en gran parte -- del tipo genético del yacimiento, de la densidad y distribución de los datos disponibles. En el caso de cuerpos uniformes tanto en rasgos estructurales como en leyes y los cuales son calculados en base a un número suficiente de datos, el error que se comete es mínimo; por el contrario, al aplicar este método a depósitos con poco echado, o a cuerpos erráticos, o en los que los valores estén distribuidos de una manera no-uniforme, el error relativo que se comete puede ser excesivo.

Método de Secciones Transversales

a) Principios y Requerimientos:

El primer paso para la aplicación de este método es el de dividir el cuerpo mediante la construcción de secciones geológicas localizadas a intervalos que dependen de la cantidad y localización de los datos de exploración, naturaleza del yacimiento y propósito del cálculo.

La secuencia que comúnmente se sigue en este método es la siguiente:

- (1) Construcción de las secciones y vaciado de datos.
- (2) Cálculo de las áreas de todas las secciones.
- (3) Cálculo de factores promedio para cada sección.
- (4) Cómputo de volúmenes y tonelajes para cada bloque.
- (5) Sumarización de resultados para todos los bloques (y categorías) a fin de obtener los resultados promedio para el cuerpo.

Hay que decir que para obtener los mejores resultados con el método de secciones transversales se requiere entre otras cosas que:

- (a) Haya un mínimo suficiente de trabajos cruzando completamente el cuerpo mineralizado.
- (b) Exista un número adecuado de datos en cada sección.
- (c) Que los trabajos y/o datos se localicen en o cerca de las secciones.
- (d) Que los trabajos y/o datos estén distribuidos más o menos uniformemente.

Ahora bien, dependiendo de la manera en que hayan sido construídos los bloques y de acuerdo al principio de interpretación seguido, -- existen tres modificaciones o variantes del método de secciones -- transversales:

- i) - Método Estándar
- ii) - Método Lineal
- iii) - Método de Isolíneas

i) Método Estándar.- Este método está basado en el principio de los cambios graduales y en el mismo cada bloque interno -- (o sub-bloque) está limitado por dos secciones y cada bloque exterior (o bloque final) por una sola sección; las secciones construídas pueden ser paralelas, no-paralelas, verticales, horizontales o inclinadas.

ii) Método Lineal.- Este método se basa en el principio de la semi distancia, de tal modo que cada sección extiende su influencia hasta la mitad de la distancia que la separa de la sección contigua.

iii) Método de Isolíneas.- Este método está basado en la hipótesis de que los valores de las variables, entre un punto y otro, varían continua e ininterrumpidamente de acuerdo al principio de los cambios graduales. Para construir dichas isolíneas, los valores intermedios se determinan por medio de -

interpolaciones entre puntos conocidos. Ejemplos comunes de isolíneas (o isovalores) los tenemos en las isopacas (anchos), isobaras (presiones), isotermas (temperaturas), isogradas (leyes), etc., etc.

b) Aplicabilidad:

Este método es utilizado para calcular cuerpos largos y bien definidos que son aproximadamente uniformes en ancho y leyes o que tienen valores que cambian gradualmente. También puede ser utilizado en cuerpos con poco echado (mantos), en depósitos de placer o en depósitos asociados a intrusivos -depósitos de "stock"- (ver figs. 1.2 y 1.3).

Las secciones que se utilizan pueden ser verticales, inclinadas y horizontales y hay ocasiones en que hay que utilizar dos juegos de secciones, construídas a ángulos rectos uno del otro, con el objeto de obtener resultados correctos. También es común que se calculen las reservas separándolas por niveles o diferenciándolas por metal. Sin embargo hay que tener en esos casos la precaución de que la suma de dichos cálculos concuerde exactamente con el total de las reservas del bloque o de los bloques en cuestión.

c) Fórmulas de Cálculo:

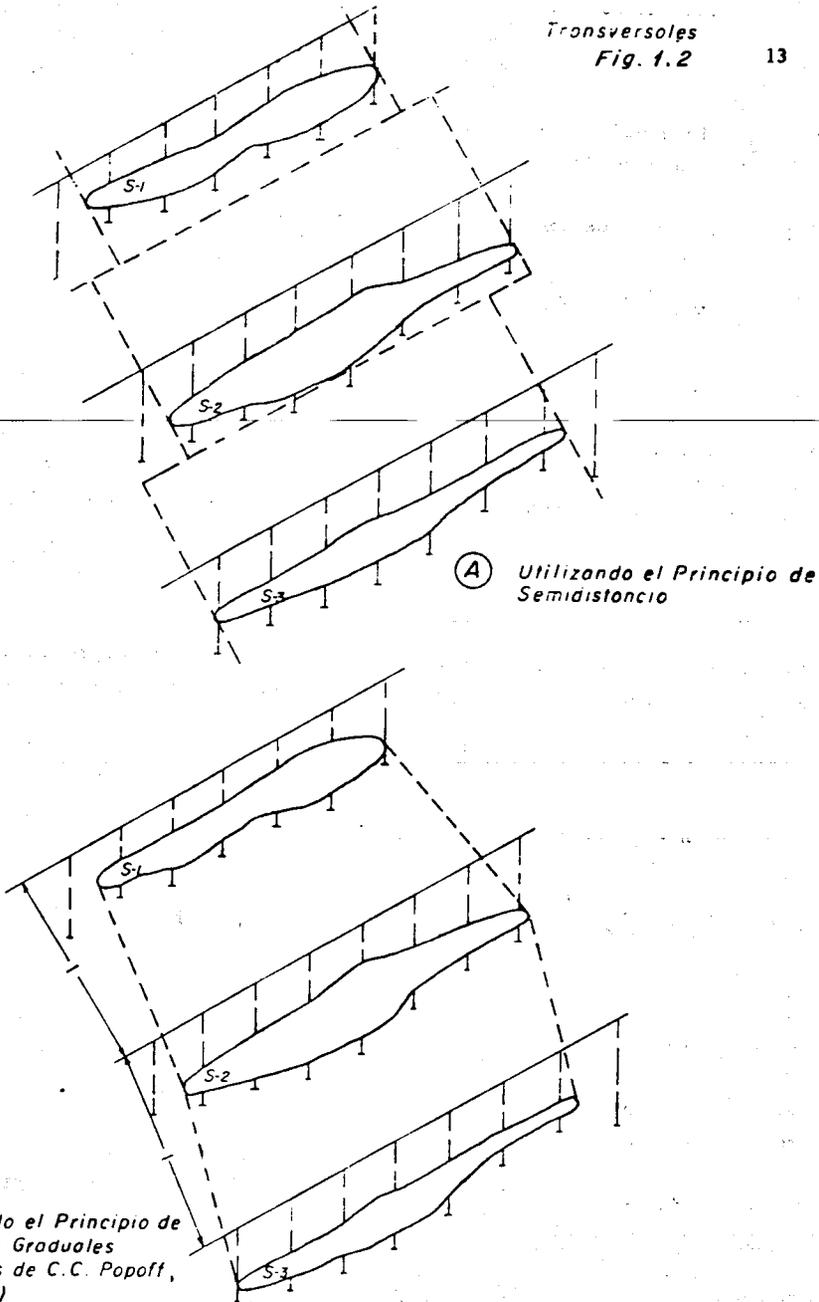
Como se expresó con anterioridad, en este método tenemos que calcular tanto las áreas como los factores promedio para cada sección, como los volúmenes y tonelajes (así como las leyes) para cada bloque. Debido a ello veremos primero cómo se determinan tales parámetros de cálculo "por sección" y luego cómo se combinan para obtener los "por bloque".

1° Cálculos por Sección.

Area (S) = determinada de acuerdo a la figura del cuerpo en la sección ya sea por fórmulas geométricas sencillas o con ayuda de planímetro.

Transversales
Fig. 1.2

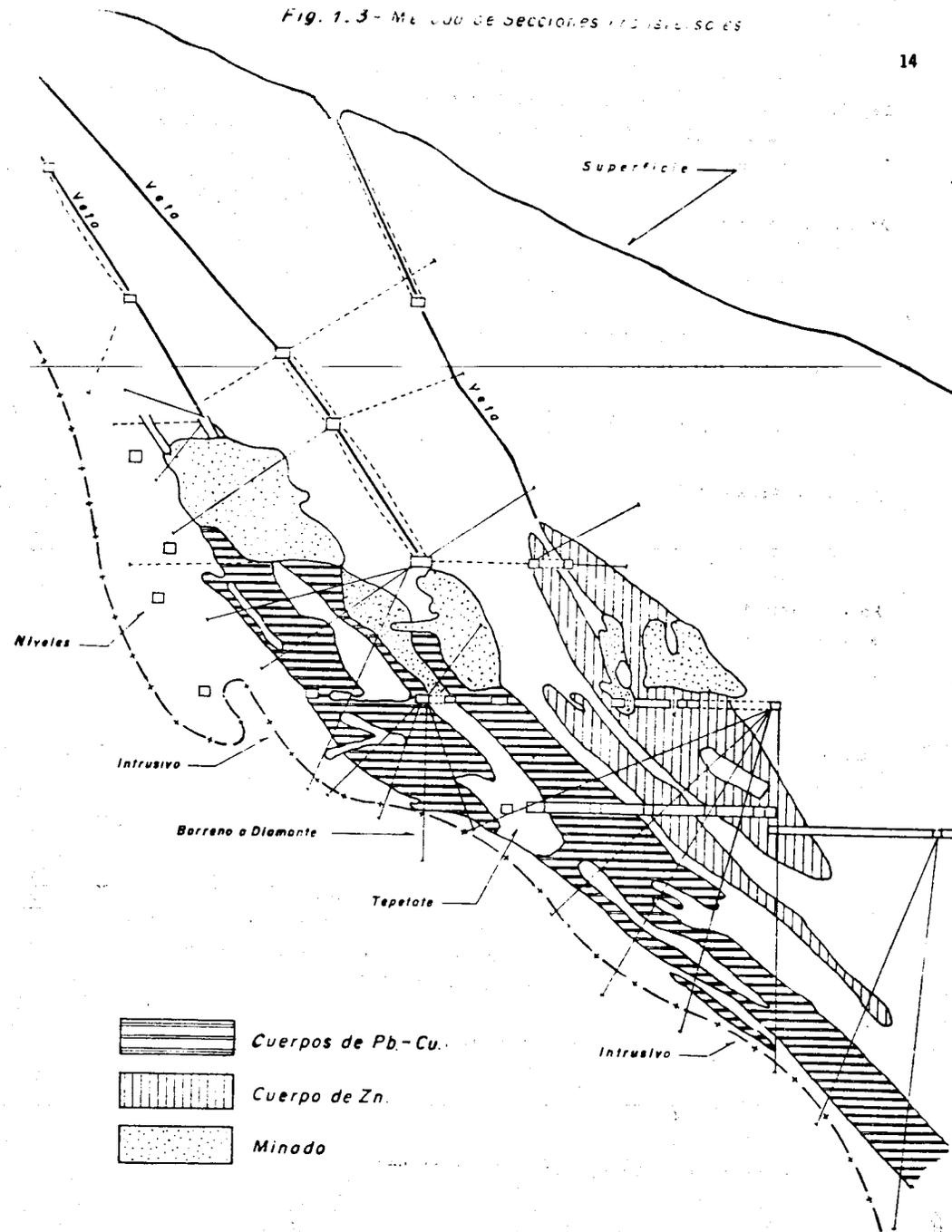
13



Siguiendo el Principio de Cambios Graduales (después de C.C. Popoff, 1966)

Fig. 1.3 - Método de Secciones Transversales

14



Ley Promedio (L) = utilizando cualquiera de las fórmulas números - (1.2), (1.3) ó (1.5) vistas anteriormente de acuerdo al caso de que se trate.

2° Cálculos por Bloques.

a) Volúmenes.

La más simple de las fórmulas es la que calcula el volumen entre -- dos secciones paralelas:

$$V = (S_1 + S_2) \frac{D}{2} \quad (1.8)$$

S_1, S_2 = áreas del cuerpo en las secciones.

D = distancia entre secciones

En el caso de que haya más de dos secciones paralelas uniformemente espaciadas:

$$V = (S_1 + 2S_2 + 2S_3 + \dots + S_n) \frac{D}{2} \quad (1.9)$$

Cuando las secciones son paralelas pero no están uniformemente espaciadas.

$$V = (S_1 + S_2) \frac{D_1}{2} + (S_2 + S_3) \frac{D_2}{2} \dots + (S_{n-1} + S_n) \frac{D_{n-1}}{2} \quad (1.10)$$

En el caso de que nuestras secciones no sean paralelas entre sí - debido principalmente a cambios en el rumbo del cuerpo mineralizado - se han propuesto dos casos: cuando el ángulo de secciones es menor de 10° y cuando dicho ángulo es mayor de 10°.

Cuando el ángulo de intersección es menor de 10°.

$$V = \frac{S_1 + S_2}{2} \frac{(h_1 + h_2)}{2} \quad (1.11)$$

S_1, S_2 = áreas del cuerpo en las secciones.

h_1, h_2 = longitud de las perpendiculares trazadas por el centro de gravedad de una sección a otra.

Cuando el ángulo de intersección es mayor de 10°.

$$V = \frac{(S_1 + S_2)}{2} \frac{(h_1 + h_2)}{2} \frac{a}{\text{sen } \alpha} \quad (1.12)$$

α = ángulo de intersección.

Sin embargo no hay una opinión generalizada acerca de la exactitud que se obtiene al usar las fórmulas (1.11) y (1.12), por lo que muchas personas prefieren seguir utilizando alguna de las fórmulas (1.8) a (1.10)

b) Leyes.

Generalmente es sólo una variación de las fórmulas ya expresadas, únicamente añadiendo la ley promedio para cada sección, es decir:

$$L = (S_1 L_1 + S_2 L_2) \frac{D}{2} / V \quad (1.13)$$

$$L = (S_1 L_1 + 2S_2 L_2 + \dots + S_n L_n) \frac{D}{2} / V \quad (1.14)$$

$$L = (S_1 L_1 + S_2 L_2) \frac{D_1}{2} + (S_2 L_2 + S_3 L_3) \frac{D_2}{2} + \dots + (S_{n-1} L_{n-1} + S_n L_n) \frac{D_{n-1}}{2} / V \quad (1.15)$$

c) Tonelajes.

Al igual que para el método de los bloques minables, se utiliza la fórmula número (1.7):

$$T = V \times \delta \quad (1.7)$$

d) Ventajas y Desventajas.

La principal ventaja es que el uso de las secciones transversales lleva consigo el vaciar la geología del depósito en cada una de las secciones; además de ello dos o más cuerpos mineralizados -de existir- pueden ser calculados en la misma sección.

Aunque el procedimiento general puede ser simple y rápido, para obtener mayor precisión en los cálculos a veces es necesario el uso de secciones auxiliares y, por ende, un número mayor de cálculos.

De ello resulta que para incrementar la exactitud del método el número de secciones debe ser tan grande como sea posible, o lo que es lo mismo, deben de estar las secciones lo suficientemente cerca unas de otras. También debemos de decir que muchas de las desventajas encontradas en este método pueden ser evitadas mediante una exploración bien planeada y ejecutada, pues a veces las imprecisiones que se obtienen al emplear este método provienen de la falta de datos suficientes en cada una de las secciones.

Métodos Analíticos

Esta clase de métodos puede ser subdividida en dos tipos, aunque estrictamente podrían considerarse como uno solo, ya que las dificultades encontradas en uno de ellos guiaron hacia el desarrollo del otro. Para efectos del desarrollo de nuestro tema haremos una descripción por separado de cada uno de ellos, tratando de seguir el mismo orden que en los anteriores. Los dos tipos a los que hicimos referencia son:

- 1.- Método Triangular
- 2.- Método Poligonal

Método Triangular

a) Principios y Requerimientos:

Este método está basado en el principio del cambio gradual y gene-

ralmente los datos disponibles son aquellos que se han obtenida por medio de barrenación.

De ahí que una de las primeras fases en la aplicación de este método consiste en elaborar una planta -o sección longitudinal- mostrando tanto al cuerpo mineral entero, como a la totalidad de los trabajos efectuados. Una vez hecho lo anterior el paso siguiente consiste en dividir gráficamente el cuerpo en una serie de triángulos que se obtienen al unir con líneas rectas cada uno de los barrenos.

Para llegar a cálculos exactos el cuerpo debe de ser dividido en el mayor número posible de triángulos, evitando que alguna línea cruce a otra y tratando de obtener los llamados triángulos "ideales": -- aquellos equiláteros; sin embargo, la práctica común es la de tomar la diagonal más corta al formar nuestra red de triángulos (ver fig.1.4).

En este método se le asignan pesos iguales a cada uno de los barrenos que forman un triángulo, aunque esto sólo sea correcto cuando se tiene una base equilateral; debido a ello es que algunas personas prefieren asignar los pesos en base al ancho de cada barreno, o a los ángulos del triángulo, o a la longitud de cada lado, etc.

b) Aplicabilidad.

Debido a que los cambios de las variables en una forma gradual y uniforme sólo se encuentran en pocos yacimientos minerales, especialmente en depósitos sedimentarios, éste método es particularmente aplicable a dichos depósitos.

Sin embargo, cuerpos sedimentarios largos o grandes cuerpos diseminados que hayan sido explorados por una red de barrenos regularmente espaciados, pueden ser calculados por este método.

c) Fórmulas de Cálculo.

De igual manera que para los anteriores métodos veremos desde el caso más simple hasta el caso en que se empleen pesos de influencia.

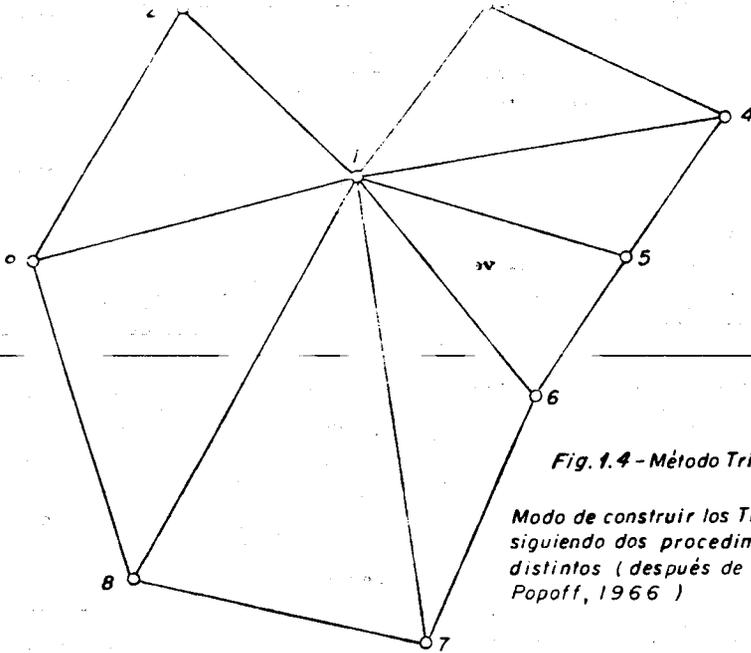
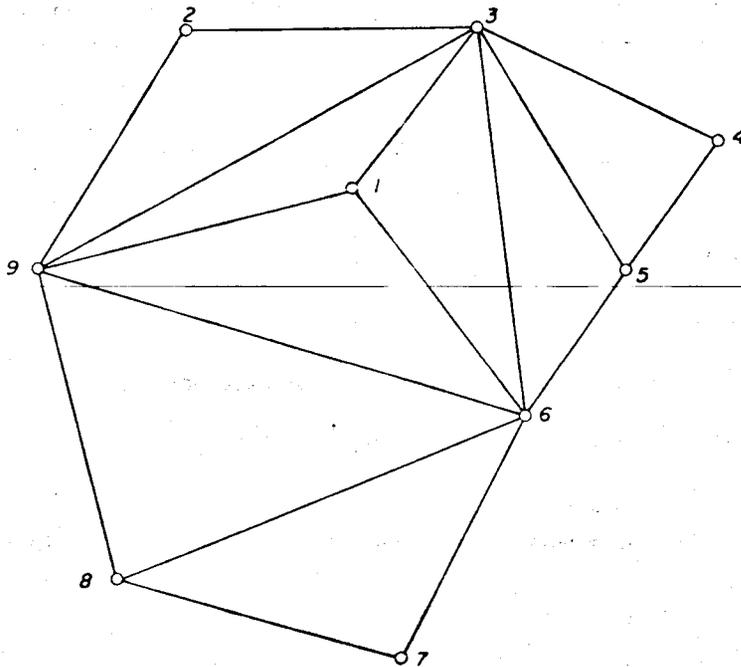


Fig. 1.4 - Método Triang.

Modo de construir los Triángulos siguiendo dos procedimientos - distintos (después de C.C. Popoff, 1966)



Caso 1: Anchos o Espesores Idénticos.

$$\text{Ancho Promedio } (A_p) = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \quad (1.16)$$

$$\text{Ley Promedio } (L_p) = L_1 + L_2 + L_3 \quad (1.17)$$

Caso 2: Anchos o Espesores Diferentes.

Ancho Promedio - como en la fórmula (1.16)

$$\text{Ley Promedio} = \frac{A_1 L_1 + A_2 L_2 + A_3 L_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (1.18)$$

Caso 3: Utilizando Pesos de Influencia.

$$\text{Ancho Promedio} = \frac{P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3}{P_1 + P_2 + P_3} \quad (1.19)$$

$$\text{Ley Promedio} = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3}{P_1 + P_2 + P_3} \quad (1.20)$$

$$\text{o también } L_p = \frac{P_1 A_1 L_1 + P_2 A_2 L_2 + P_3 A_3 L_3}{P_1 A_1 + P_2 A_2 + P_3 A_3} \quad (1.21)$$

P_1, P_2, P_3 = pesos de influencia.

En todos los casos anteriores:

Area (S) = determinada de acuerdo a las fórmulas de trigonometría, en concordancia con el tipo de triángulo formado.

Volumen = como en la fórmula (1.6)

Tonelaje = como en la fórmula (1.7)

d) Ventajas y Desventajas:

El procedimiento de cálculo de reservas que se sigue al aplicar este método puede ser relativamente simple como ya vimos, pero se requiere la construcción de un número mayor de bloques, lo cual viene a resultar en un mayor número de cálculos y empleo de tiempo.

Otro problema común al usar este método radica en que no es fácil - tomar en cuenta consideraciones de tipo geológico -mineras, por lo que puede uno encontrarse con conflictos al tratar de tener en cuenta los límites físicos del depósito mineralizado. Además de ello, - el error relativo que se comete al aplicar este método depende en mucho de la manera en que se haya dividido el cuerpo en triángulos, así como de la forma y número de ellos.

Por esta misma razón, la manera en que se haga tal subdivisión puede no ser constante y puede variar de una persona a otra, o de una zona a otra en el mismo cuerpo; por lo ya dicho puede resultar que el uso e influencia general que se le asigne a los datos no sea constante (ver fig. 1.4).

Dichas dificultades y algunas otras encontradas al aplicar este método condujeron a varios autores hacia modificaciones del mismo y al desarrollo del método poligonal.

Método Poligonal

a) Principios y Requerimientos:

Este método, llamado también el de "prismas poligonales", o de "igual área de influencia", está basado en el principio de semidistancia, - formando áreas de influencia alrededor de cada dato o punto conocido. Al igual que en el método triangular una de las primeras fases consiste en elaborar una planta o sección longitudinal que muestre tanto al cuerpo mineral como a todos y cada uno de los datos conocidos.

Una vez vaciados todos los datos se comienzan a formar los polígonos,

extendiendo la influencia de cada punto hasta la semidistancia con respecto a puntos a su alrededor. Las áreas de influencia pueden ser formadas de dos formas: por medio de líneas bisectoras perpendiculares o por medio de bisectrices angulares (ver fig. 1.5 y 1.6), siendo correcto el primer caso.

Así pues, los pasos usuales que se siguen en este método son:

- 1° Elaboración de planos y vaciado de los datos disponibles.
- 2° Construcción de los polígonos siguiendo un orden definido; un rasgo distintivo de un polígono construido correctamente es que cada uno de los ángulos internos del mismo siempre será menor de 180°.
- 3° Cálculos de las reservas de cada bloque o prisma; se presume que a cada bloque se le van a asignar los datos relativos a ancho, densidad y leyes del punto conocido en el polígono.
- 4° Agrupamiento de los bloques de acuerdo a anchos, leyes, confiabilidad, etc., y clasificando y sumando las reservas de acuerdo a categorías.

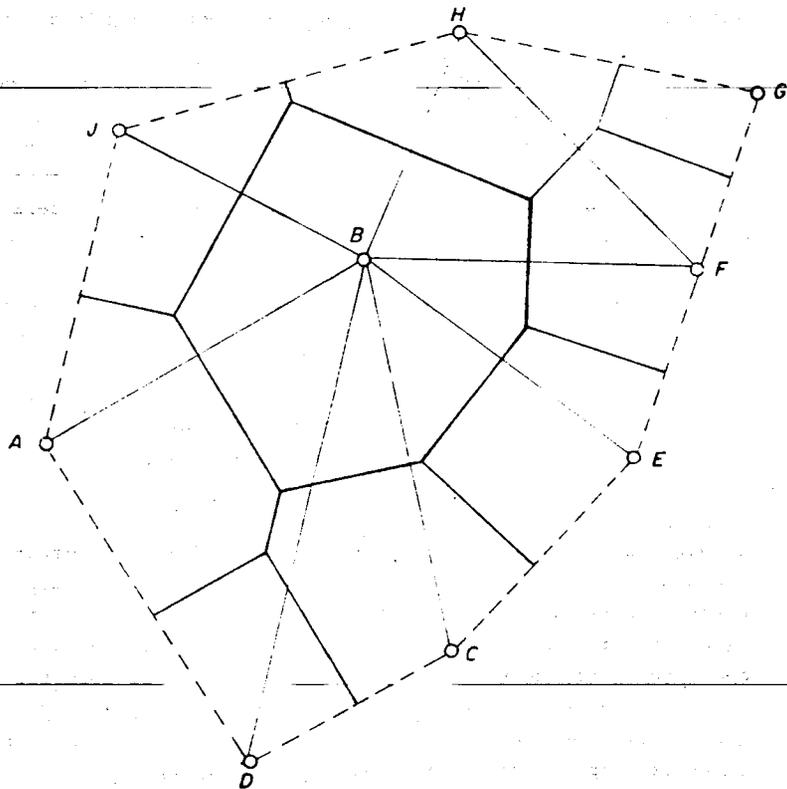
En algunas ocasiones, especialmente cuando los datos están muy alejados unos de otros de forma tal que no se pueda presumir confiablemente la continuidad de las variables entre un sitio y otro, se puede construir una área de influencia alrededor de cada dato conocido mediante el uso de un "círculo de influencia", el diámetro del cual va a ir de acuerdo a la naturaleza del depósito y a la distancia -- que se haya considerado como confiable. En tales casos el bloque -- tiene la forma de un cilindro en lugar de la de un prisma poligonal.

b) Aplicabilidad:

Este método es particularmente aplicable a cuerpos tabulares (mantos, vetas anchas), grandes cuerpos lenticulares y a depósitos diseminados, aunque puede ser utilizado en otro tipo de cuerpos. Entre

Fig. 1.5- Método Poligonal

23

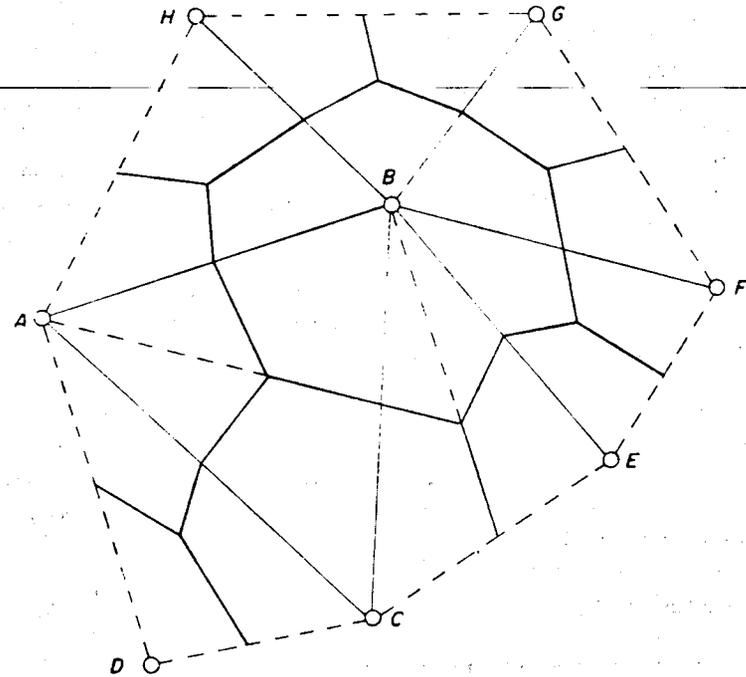


○ Barreno a Diamante

Modo correcto de construir un Polígono siguiendo el Método de Bisectoras Perpendiculares (después de - C.C. Popoff, 1966)

Fig. 1.6- Método Poligonal

24



○ Barreno a Diamante

Modo incorrecto de construir un Polígono siguiendo el Método de Bisectrices Angulares (después de C.C. Popoff, 1966)

mayor sea el número de bloques formados y más regularmente distribuidos estén los datos disponibles, más exactos serán los cálculos.

En el caso de cuerpos no-uniformes o de forma irregular también -- puede ser utilizado, pero con sus debidas precauciones. No es recomendable su uso cuando no pueda presumirse la continuidad de las variables entre puntos conocidos o cuando existan caballos de tepetate intermedios.

c) Fórmulas de Cálculo:

Anteriormente se dijo que para efectos de cálculo se presumía que a cada bloque se le iban a asignar los datos relativos a ancho, densidad y leyes del punto conocido en el polígono

Siendo así, realmente lo que resta es calcular los datos relativos al área y tonelaje por polígono y posteriormente sumar los datos de todos los polígonos (si están uniformemente formados y distribuidos) para obtener los totales del cuerpo.

Caso 1: Polígonos formados y distribuidos regularmente.

Area (S) = determinada de acuerdo a las fórmulas de geometría y según el tipo de polígono formado (pentágono, exágono, -- etc.).

Volumen = como en la fórmula (1.6).

Tonelaje = como en la fórmula (1.7).

$$\text{Tonelaje Total } (T_t) = \frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n}{n} \quad (1.22)$$

$T_1, T_2, T_3 \dots T_n$ = tonelajes de cada uno de los polígonos.

n = número de polígonos formados.

$$\text{Ley Total } (L_t) = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n}{n} \quad (1.23)$$

$L_1, L_2, L_3, \dots L_n$ = ley de cada uno de los polígonos.

Caso 2: Polígonos formados y distribuidos irregularmente.

Area, Volumen y Tonelaje por Polígono = de acuerdo a las fórmulas -- utilizadas en el caso anterior.

$$\text{Tonelaje Total} = \frac{P_1 T_1 + P_2 T_2 + P_3 T_3 + \dots + P_n T_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n} \quad (1.24)$$

$P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ = peso de influencia para cada polígono

$$\text{Ley Total} = \frac{P_1 L_1 + P_2 L_2 + P_3 L_3 + \dots + P_n L_n}{P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n} \quad (1.25)$$

d) Ventajas y Desventajas:

Debido a que en este método cada bloque o polígono es calculado en forma independiente sin que influyan los bloques adyacentes, considerando constantes las variables (anchos, leyes, etc.) en toda la extensión del bloque, conforme se van obteniendo nuevos datos con la exploración se pueden ir formando otros bloques sin que haya necesidad de hacer una revaluación completa de las reservas (recálculos).

Así mismo, cuando dichos trabajos de exploración van siguiendo un plan predeterminado y de acuerdo a una red de espaciamiento regular, todos los cálculos se simplifican. Por el contrario, cuando los trabajos están distribuidos irregularmente puede darse el caso de que algunos de los bloques se les asigne una influencia demasiado grande, lo cual puede afectar los resultados finales, sobre todo si dichos bloques muestran demasiada variación en sus datos (anchos, leyes, densidades, etc.) con respecto a los demás bloques.

Por otra parte es conveniente decir que este método también se basa en consideraciones más bien de tipo teóricas que geológicas o mineras por lo que la naturaleza de los yacimientos se ilustra deficientemente, aunque bajo un esquema de exploración apropiado puede llegarse a obtener una idea razonable de los mismos, especialmente en lo que se refiere a la localización de zonas de alta o baja ley de los depósitos.

También puede decirse que aunque la construcción correcta de los polígonos o bloques requiera de experiencia, sólo hay una manera de llevar a cabo dicha tarea por lo que los resultados no dependen tanto del criterio de la persona que la está realizando.

IMPORTANCIA ECONOMICA DEL CALCULO DE RESERVAS

Quizá este sea uno de los puntos más oscuros (para muchas personas) dentro del contexto general de la exploración y/o operación de un yacimiento mineral. La razón de lo anterior ha sido el producto de la falsa idea que se tiene (o se tenía) respecto a la utilidad de las reservas de mineral.

Por lo tanto, y en forma breve, haremos mención de la importancia que tiene para nosotros el contar con una evaluación correcta de las reservas mineras de un yacimiento. Entre otras muchas las reservas mineras nos sirven para obtener:

- 1.- Una indicación de la cantidad y calidad (tonelajes y leyes) potencial de un depósito, en sus varias clasificaciones.
- 2.- Las bases necesarias para elaborar el sistema de explotación y beneficio que requiera el mineral a explotar de acuerdo a las características, tanto físicas como químicas del mismo.
- 3.- Una idea acerca de la probable vida y posible productividad de la mina.
- 4.- Una idea preliminar sobre las posibilidades del mismo en el caso de una venta o compra de los intereses de un yacimiento.

- 5.- La cantidad y extensión de las obras necesarias de exploración, desarrollo y/o explotación.
- 6.- Una evaluación económica preliminar del mismo teniendo en cuenta los planes a corto y largo plazo de la empresa que lo está operando.
- 7.- Pronósticos de producción apegados a la realidad, tomando en consideración los sistemas de explotación y beneficio a utilizarse, así como tipos, cantidades y calidades del mineral con el cual se puede disponer en un momento dado.
- 8.- Una planeación minera detallada, de acuerdo a los objetivos trazados y a lo expuesto en los puntos antes mencionados.
- 9.- Para obtener los costos de producción unitarios de un producto final (mineral en bruto, concentrados, productos de fundición, etc.).
- 10.- Un análisis de la necesidad de efectuar inversiones de capital para poder obtener las metas fijadas.

Lo anterior viene a realzar la importancia que tiene para toda empresa minera el contar con unas reservas de mineral lo suficientemente realistas y confiables de modo tal que le permitan efectuar de una manera eficiente la programación y operación de los recursos de que dispone.

Dichas operaciones y cálculos son llevadas a cabo durante todas las etapas de la vida de una mina, desde su descubrimiento hasta la etapa de "robo" de pilares y cierre final. El cálculo de reservas es uno de los trabajos más importantes e irremplazables en la correcta evaluación de un yacimiento mineral. Sin unas reservas confiables es muy difícil llegar a obtener una operación eficiente y productiva de una mina.

CAPITULO II

E S T A D I S T I C A

CONCEPTOS IMPORTANTES EN ESTADISTICA.

A continuación se presentan una serie de definiciones de la estadística, los cuales nos servirán como punto de apoyo para el entendimiento formal de la teoría geoestadística. En esta sección se introducen los conceptos de variable aleatoria, función de distribución acumulativa y función de densidad, principalmente.

Una variable aleatoria (en adelante v.a.) denotada por $X(\cdot)$ o simplemente X , es una función con dominio en el espacio Ω y contradominio en la línea de los reales \mathbb{R} (ver figura 2.1).

Si pensáramos en términos de experimentos aleatorios, Ω estaría formada por la totalidad de los resultados obtenibles al realizar dichos experimentos. La función o variable aleatoria (v.a.) X asociaría un número real a cada uno de los resultados del experimento.

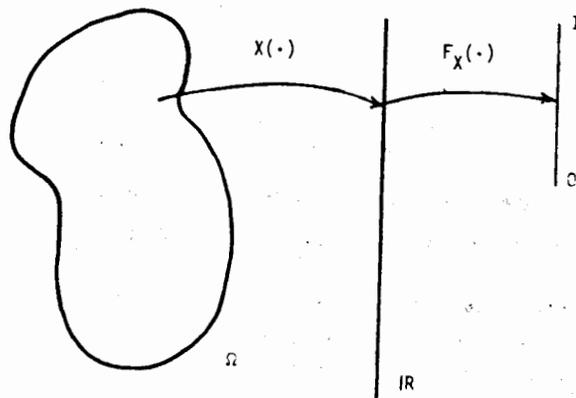


FIGURA 2.1

Consideremos, por ejemplo, el experimento de efectuar un "volado" -- con una moneda, en donde una variable aleatoria podría definirse de la siguiente manera:

Si $\Omega = \{ \omega_1 = \text{águila}, \omega_2 = \text{sol} \}$ conjunto total de resultados obtenibles.

entonces $X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 0$.

La v.a. X asocia un número real (0 ó 1) a cada resultado del experimento.

La función de distribución acumulativa (en adelante f.d.a.) de una v.a. X , denotada $F_X(\cdot)$ es una función con dominio en \mathbb{R} y contradominio en el intervalo $[0, 1]$ (ver figura 2.1), y que puede definirse como:

$$F_X(x) = \Pr\{X \leq x\} = \Pr\{\omega = X(\omega) \leq x\}, \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\Pr\{X \leq x\}$ representa la probabilidad de que la v.a. X adquiera todos los valores posibles menores o iguales a x .

El uso del término: "función de distribución acumulativa" en la definición de $F_X(\cdot)$, está totalmente justificado. $F_X(\cdot)$ es, primero que todo, una función; es una distribución ya que ella indica la forma en la cual los valores de la variable aleatoria x se encuentran distribuidos, y es acumulativa ya que ella presenta la distribución de los valores en forma acumulativa.

Nota: Los números reales asociados a cada resultado del experimento se presentan, generalmente, con letras minúsculas, ésto es, $X(\omega) = x$.

En el ejemplo de la moneda, si la v.a. X estuviese definida como el número de veces en que cae "águila", entonces $F_X(\cdot)$ sería igual a:

$$F_X(\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Gráficamente, $F_X(\cdot)$ tendría la siguiente forma:

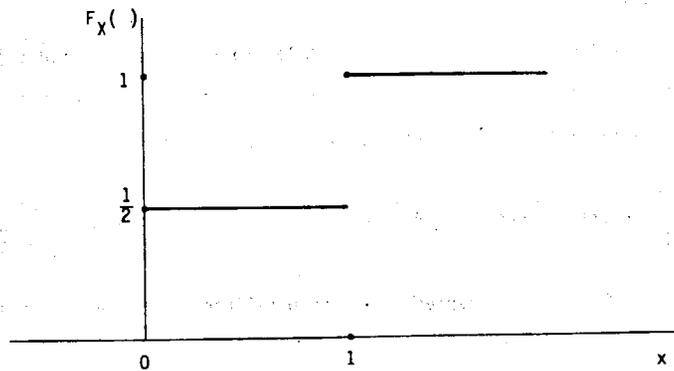


FIGURA 2.2

No cualquier función $F_X(\cdot)$ puede ser una función de distribución acumulativa; para serlo, ella debe de satisfacer las siguientes propiedades:

$$i) F_X(-\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$F_X(\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

ii) $F_X(\cdot)$ debe ser una función no-decreciente, es decir:

$$F_X(a) \leq F_X(b), \quad \forall a < b$$

iii) $F_X(\cdot)$ debe ser continua por la derecha, es decir:

$$\lim_{0 < h \rightarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x)$$

Las funciones de densidad (en adelante f.d.) permiten describir con mayor simplicidad la distribución de valores de las variables aleatorias. El significado de estas funciones depende del tipo de variables aleatorias (discretas o continuas) al que estén asociadas.

CASO A.- Variable aleatoria discreta

Una v.a. X será discreta si el rango de X es contable. Esto implica que su correspondiente f.d.a. $F_X(\cdot)$ esté definida como discreta (figura 2.2.)

Si X es una v.a. discreta con valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, entonces la función denotada por $f_X(\cdot)$ y definida como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \Pr\{X = x_j\} & \text{si } x = x_j, j = 1, 2, \dots, n, \dots \\ 0 & \text{si } x \neq x_j, j = 1, 2, \dots, n, \dots \end{cases}$$

se le conoce como "función discreta de densidad" de la v.a. X . $f_X(\cdot)$ es una función con dominio en \mathbb{R} y contradominio en el intervalo $[0, 1]$.

Nota: A cada variable aleatoria X le corresponde una y sólo una función de distribución acumulativa. Sin embargo, a diferentes variables aleatorias X, Y, Z, \dots les pueden corresponder la misma función de distribución.

En el ejemplo de la moneda, la función de densidad asociada a la función de distribución acumulativa representada en la figura 2.2, tendrá la forma siguiente:

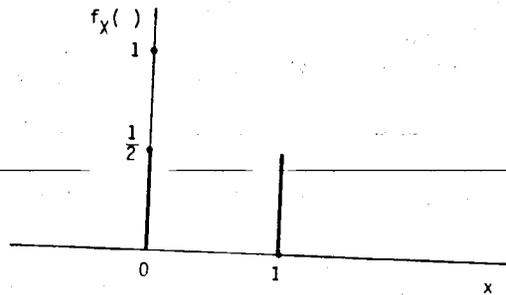


FIGURA 2.3

Si X es una v.a. discreta, las siguientes relaciones pueden derivarse fácilmente:

$$F_X(x) = \sum_{(j=x_j < x)} f_X(x_j)$$

$$f_X(x_j) = F_X(x_j) - \lim_{h \rightarrow 0} F_X(x_j - h)$$

Para que $f_X(\cdot)$ sea una función de densidad de una v.a. discreta X , ésta debe satisfacer las siguientes condiciones:

- i) $f_X(x_j) > 0$ $j = 1, 2, \dots, n, \dots$
- ii) $f_X(x) = 0$ $x \neq x_j, j = 1, 2, \dots, n, \dots$
- iii) $\sum_j f_X(x_j) = 1$ donde la suma se lleva a cabo sobre todos los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

CASO B.- Variable aleatoria continua.

Se dice que una v.a. X es continua si existe una función $f_X(\cdot)$ tal -- que $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$, $\forall x$.

La función de distribución acumulativa de una v.a. continua X , $F_X(x)$, es entonces absolutamente continua.

La función $f_X(\cdot)$ en la expresión anterior se denomina función probabilística de densidad o simplemente función de densidad. $f_X(\cdot)$ es una función con dominio en \mathbb{R} y contradominio en el intervalo $[0, \infty)$.

Si X es una v.a. continua, las siguientes relaciones se satisfacen:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

Si $f_X(\cdot)$ es una función de densidad, ella debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$i) f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1$$

Es importante hacer notar que las interpretaciones de las funciones de densidad en los casos discretos y continuo, no son las mismas, esto es, en el caso discreto $f_X(\cdot)$ representa una probabilidad ya que por definición:

$$f_X(x) = \Pr \{X = x\}$$

y en el caso continuo, habiéndose establecido la relación:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$\delta \quad 2\Delta x f_X(x) \approx F_X(x + \Delta x) - F_X(x - \Delta x) = \Pr \{ x - \Delta x < X \leq x + \Delta x \}$$

la probabilidad de que X esté en un "pequeño" intervalo $x - \Delta x < X \leq x + \Delta x$, --
conteniendo al valor x , es aproximadamente igual a $f_X(\cdot)$ multiplicado --
por la longitud del intervalo.

Dos conceptos sumamente importantes en la solución de problemas de va
riables aleatorias y funciones de densidad y de los cuales haremos cons--
tante uso en geoestadística son los conceptos de media y varianza.

Media .- La media de una v.a. X , denotada por $E[X]$, se define como:

$$E[X] = \sum_j x_j f_X(x_j) \quad \text{caso discreto}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad \text{caso continuo}$$

Varianza.- La varianza de una v.a. X , denotada $\text{Var}[X]$, se define como:

$$\text{Var}[X] = \sum_j (x_j - E[X])^2 f_X(x_j) \quad \text{caso discreto}$$

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx \quad \text{caso continuo}$$

El concepto de media de una v.a. X puede extenderse al de una función
de una variable aleatoria $g(X)$, es decir:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{g(X)}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

si $g(X) = X^r$ entonces $E[X^r]$ se denomina r -ésimo momento;

si $g(X) = (X - E[X])^r$ entonces $E[(X - E[X])^r]$ se denomina r -ésimo momen--
to central;

$$\text{si } g(X) = (X - E[X])^2 \text{ entonces } E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_X(x) dx = \text{Var}[X]$$

La varianza de la v.a. X puede escribirse también en términos del ope--
rador $E[\]$, es decir:

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

De acuerdo a lo anterior, $\text{Var}[X]$ es también el segundo momento cen--
tral de la v. a. X .

Los siguientes son ejemplos de las distribuciones paramétricas más co--
munmente empleadas en estadística.

A.- Variable aleatoria discreta

(1) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Bernoulli, $X \sim B(p)$,
si la función $f_X(\cdot)$ está dada por:

Nota: La media se interpreta como una medida de tendencia central y la va
rianza como una medida de dispersión.

$$f_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{para } x = 0 \text{ ó } 1 \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

donde p es un parámetro igual a $E[X]$.

(2) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Binomial, $X \sim B_1(n, p)$, si la función $f_X(\cdot)$ está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$$

donde p y n son dos parámetros, p satisface $0 \leq p \leq 1$ y $n = 0, 1, 2, \dots$ pertenece al conjunto de los enteros positivos.

$$E[X] = np, \quad \text{Var}[X] = np(1-p)$$

(3) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Poisson, $X \sim P(\lambda)$, si la función $f_X(\cdot)$ está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{para } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$$

donde el parámetro λ satisface $\lambda > 0$

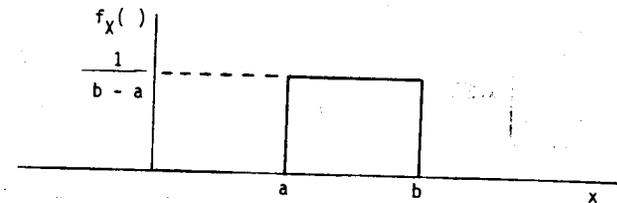
$$E[X] = \lambda, \quad \text{Var}[X] = \lambda$$

B. Variable aleatoria continua.

(1) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Uniforme $X \sim U(a, b)$,

si la función $f_X(\cdot)$ está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para } a < x < b, \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$$



donde

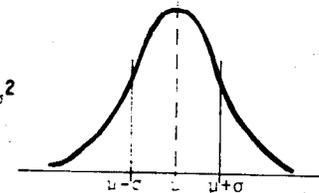
$$E[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(2) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si la función $f_X(\cdot)$ está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

donde los parámetros μ y σ satisfacen $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$.

$$E[X] = \mu \\ \text{Var}[X] = \sigma^2$$



si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se dice que la v.a. X tiene una distribución Gaussiana

o standard, es decir:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

(3) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Lognormal $X \sim \log(m, s^2)$, si la función $f_X(\cdot)$ se define como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln x - \mu)^2\right), & \forall x \in (0, \infty) \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$$



donde μ y σ son los parámetros de una v.a. Y con distribución normal.

$$E[X] = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad \text{Var}[X] = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

$$\text{Si } X = \log(m, s^2) + Y \Rightarrow \ln X = N(\mu, \sigma^2)$$

donde:

$$m = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad \text{y} \quad s^2 = m^2(e^{\sigma^2} - 1)$$

(4) Se dice que la v.a. X sigue una distribución Gamma $X \sim Y(\lambda, r)$

si la función $f_X(\cdot)$ es igual a:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (x)^{r-1} e^{-\lambda x}, & \forall x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{para otros valores de } x. \end{cases}$$

donde λ y r son dos parámetros que satisfacen $\lambda > 0, r > 0$.

$$E[X] = r/\lambda, \quad \text{Var}[X] = r/\lambda^2$$

En ciencias de la tierra, en general, se han analizado estadísticamente una gran cantidad de variables. Ejemplos de las distribuciones seguidas por las variables aleatorias más comunes, se muestran en la tabla 1.

Los conceptos anteriores pueden extenderse sin dificultad, de una variable aleatoria a varias variables aleatorias. Sean, por ejemplo X_1, X_2, \dots, X_k , k variables aleatorias todas ellas definidas en el mismo espacio Ω . La función acumulativa de distribución conjunta de X_1, \dots, X_k denotada por $F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k)$ sería igual a: $\Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_k \leq x_k\}$ para todos los valores x_1, \dots, x_k . Esta función conjunta tiene su dominio en el espacio euclidiano E^k y su contradominio en el intervalo $[0, 1]$.

Similarmente, la función de densidad conjunta de K v.a. estaría definida de la siguiente forma:

$$f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = \Pr\{X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k\}$$

Tanto $f_{X_1, \dots, X_k}(\cdot)$ como $F_{X_1, \dots, X_k}(\cdot)$ tendrían propiedades simila-

Table 1 Examples of geological population distributions

1. Normal distributions
Topographic relief
Firmness of beach sand
Pebble sphericity for fixed particle size
Pebble roundness for fixed pebble size
Water levels in well through time
Drainage density (miles of stream per square mile of drainage-basin area)
Specific gravity of rock specimens from a granite pluton
Packing density of grains in sandstone
Various dimensions (hinge length, etc.) of invertebrate fossils
Angle of slope on beach foreshores†
Angle of slope in valley walls†
Angle of dip of sandstone cross-beds†
Porosity of sandstones (expressed as percent void space)
Percentages of abundant minerals in rocks
Percentage of frosted grains in some dune sand
Percentage of moisture in sediments
Percentage of some chemical elements or oxides in rocks
Mean values based on n observations from normal or nonnormal densities
2. Lognormal distributions
Particle-size distributions (by weight or number frequency) of some sediments
Thickness of sedimentary beds
Length of first-order streams in drainage basins of given order
Permeability of sedimentary rocks (sandstone, limestone)
Concentrations of trace elements in rocks
Lengths of beach segments on some cliffed coasts
Areas of river placer deposits
3. Gamma distributions
Thickness of sedimentary beds
Sand-shale ratio and elastic ratio of some stratigraphic units
Percentage of rare components in some rocks (organic matter, trace elements, moisture, heavy minerals)
Particle sphericity over a large particle-size range
Particle roundness over a large particle-size range
4. Circular normal distributions <i>≈ normal distrib.</i>
Orientation of rock joints and fractures
Orientation of particle axes in sediments
Direction of dip in sandstone cross-beds
5. Binomial distributions
Abundant minerals in rocks expressed as number of grains in subsamples of fixed size
Abundant fossils in rocks in subsamples of fixed size
Occurrence of cross-beds in sandstone (0 = not present, 1 = present)
6. Poisson distributions
Rare minerals in rocks expressed as number of grains in subsamples of fixed size
Number of alpha particles emitted per unit time from radioactive sediments
Sizes of invertebrate fossils in a "death" population

† These items are normal approximations of circular distributions.

res a las descritas para los casos de una variable aleatoria.

Una propiedad muy importante en problemas de varias variables aleatorias es el concepto de independencia.

Se dice que las v.a. X_1, \dots, X_k son independientes si y sólo si $F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_k}(x_k)$, para todo valor x_1, \dots, x_k .

Y para el caso particular de dos v.a., X e Y , las siguientes definiciones nos serán útiles:

(i) Covarianza (X, Y) ó $\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

(ii) Correlación (X, Y) ó $\rho_{X, Y} = \text{Cov}(X, Y) / \sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}$

* $\text{Var}[X] > 0$ y $\text{Var}[Y] > 0$.

Diremos que dos v.a. X e Y guardan no-correlación entre ellas toda vez que $\text{Cov}(X, Y) = 0$ ó bien $\rho_{XY} = 0$

Por último, mencionaremos como ejemplo de densidades multivariadas a la distribución bi-normal. Dos v.a. X e Y siguen una distribución normal bivariable si su función de densidad conjunta es igual a:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}$$

donde

$-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ y $\sigma_x, \sigma_y, \mu_x, \mu_y$ y ρ son cinco parámetros

tales que: $\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$, $-\infty < \mu_x < \infty$ y $-\infty < \mu_y < \infty$.

CAPITULO III

GEOESTADÍSTICA

INTRODUCCION

Geoestadística, su Filosofía y Objetivos Fundamentales.

El objetivo principal de este capítulo es dar a conocer a aquellos profesionales de las ciencias de la tierra, los conceptos básicos de una nueva teoría denominada *Geoestadística*. Georges Matheron (1962) fué el primero en darle formalidad a esta teoría, la cual definió como: "la aplicación de las funciones aleatorias al reconocimiento y estimación de fenómenos naturales".

La premisa básica en geoestadística es considerar que las variables de fenómenos naturales son de carácter mixto, es decir, están compuestas por dos aspectos: uno espacial o estructural y otro aleatorio. La figura 3.1 ilustra una gráfica de mediciones de porcentaje de mineral efectuadas a lo largo de cierta dirección en un yacimiento minero. El eje vertical denota el porcentaje de mineral y el eje horizontal representa una cierta dirección, x . Dos características pueden apreciarse: una local, de comportamiento errático o aleatorio, y otra general, con cualidades estructurales.

Un proceso de mineralización, por ejemplo, puede presentar una estructura global y además seguir ciertas leyes que pueden ser geológicas, metalogenéticas, o bien, una combinación de ambas; en particular, existen zonas donde las leyes del mineral son altas, así como zonas de baja ley (Fig. 3.1), siendo ésto posible, únicamente, si la mineralización y las leyes del mineral poseen un cierto grado de continuidad. Dependiendo del

tipo de depósito, el grado de continuidad podrá ser más o menos aparente.

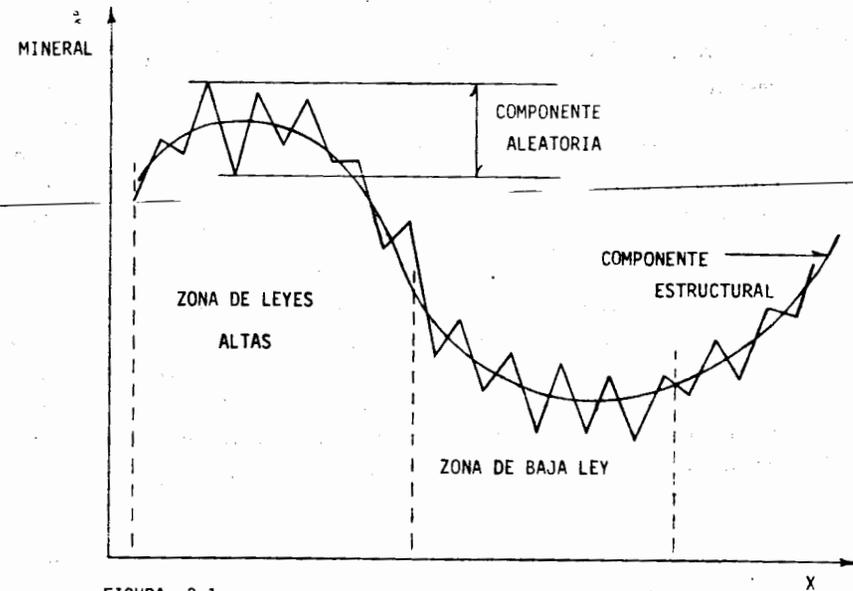


FIGURA 3.1

En efecto, si no fuese por la presencia de esta continuidad, cualquier estimación y consecuentemente cualquier selección serfa imposible de realizar. Sin embargo, en el proceso de los fenómenos naturales la mineralización no es tan caótica como para anular cualquier método de estimación, ni lo suficientemente regular como para permitir el empleo de métodos determinísticos. Es por ello, que toda estimación realista debe necesariamente tomar en cuenta ambos aspectos, el estructural y el aleatorio, el primero siendo observado primordialmente por geólogos y el segundo por estadísticos.

De aquí que, el nombre de Geoestadística -propuesto por Matheron-

defina al campo que sintetiza estos dos aspectos, y el cual ha abierto un camino hacia la solución de problemas de evaluación de depósitos minerales.

¿En qué consiste un estudio geoestadístico y qué problemas pretende resolver?. Todo estudio geoestadístico se inicia con un *análisis estructural*. Este consiste en el ajuste de una función -denominada variograma- a la variabilidad espacial (in-situ) de los parámetros estudiados. Como ejemplos de estos podríamos citar: la ley media del mineral en un cierto volumen de roca, el espesor de una formación geológica, la permeabilidad de una roca, etc.

¿Por qué hay que estudiar la variabilidad espacial de un fenómeno?.- Es obvio que un yacimiento mineral de cobre porfídico no puede ser estimado de la misma manera que un yacimiento de fosfatos sedimentarios. El procedimiento de estimación debe de tomar en cuenta la estructura de la variabilidad espacial de cada yacimiento, así como la manera particular con la cual el yacimiento es muestreado.

Tomando en cuenta estas peculiaridades, es posible asignar a cada valor estimado, un intervalo de confianza. El método de estimación denominado Kriging (en honor a Daniel G. Krige), toma en cuenta todos estos factores y permite, además, efectuar la estimación de reservas in-situ. El método del Kriging proporciona el *mejor estimador lineal imparcial posible* (en inglés: best linear unbiased estimator, BLUE) de las variables estudiadas. "Mejor" es entendido aquí, en el sentido de que minimiza la varianza (ó error) de estimación.

La evaluación de la proporción de reservas in-situ que pueden ser recuperadas dentro de un marco económico y tecnológico puede ser efectuada a través de la Geoestadística. La evaluación de reservas recuperables debe tomar en cuenta, entre otros, los métodos de selección, explotación y beneficio a ser empleados.

Finalmente, en geoestadística, es posible realizar simulaciones de yacimientos, o más concretamente, generar un modelo con las mismas características estructurales de la(s) variable(s) estudiada(s). Así mismo y dentro de ciertos límites, es posible examinar las consecuencias que implicaría el uso de diversas técnicas de extracción por medio de la simulación de éstas dentro del modelo.

La aceptación de la geoestadística, especialmente en ingeniería minera, se debe a la coherencia y efectividad de las soluciones que ella ha ofrecido a los diversos problemas encontrados en la práctica.

LA TEORIA DE LAS VARIABLES REGIONALIZADAS

Diferencias Básicas entre la Estadística y la Geoestadística.

Tradicionalmente, en el estudio de los fenómenos naturales se hace frecuente uso de conceptos básicos de la estadística. Se considera por ejemplo, a cada uno de los valores muestreados, dentro de una cierta región R y para un determinado fenómeno natural, como diferentes realizaciones independientes de una misma variable aleatoria Z. Más aún, se asume que todos los valores muestreados provienen de una misma distribución. La metodología aplicada consiste en inferir de los valores muestreados una distribución a partir de la cual, es posible por ejemplo, evaluar reservas. Estos métodos, por la simplicidad en las suposiciones, producen, sin embargo, resultados frecuentemente incoherentes. Además, en ellos no se toman en cuenta conceptos tan importantes como el de correlación entre valores muestreados.

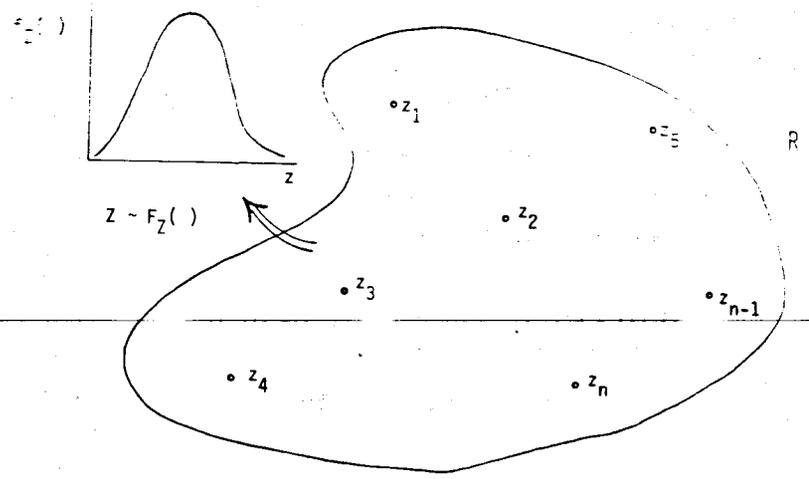
Actualmente, en geostatística, se considera que cada valor muestreado en un punto (o soporte) $x = (u, v, w)$ de una región R , representa únicamente una realización de una variable aleatoria $Z(x)$. Si n valores fueran muestreados, ellos representarían realizaciones de n diferentes variables aleatorias $Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)$, cada una de las cuales tendría asociada su propia función de distribución $F_{Z(x_1)}(\cdot), F_{Z(x_2)}(\cdot), \dots, F_{Z(x_n)}(\cdot)$.

Estas ideas se representan esquemáticamente en las figuras 3.2A y 3.2B.

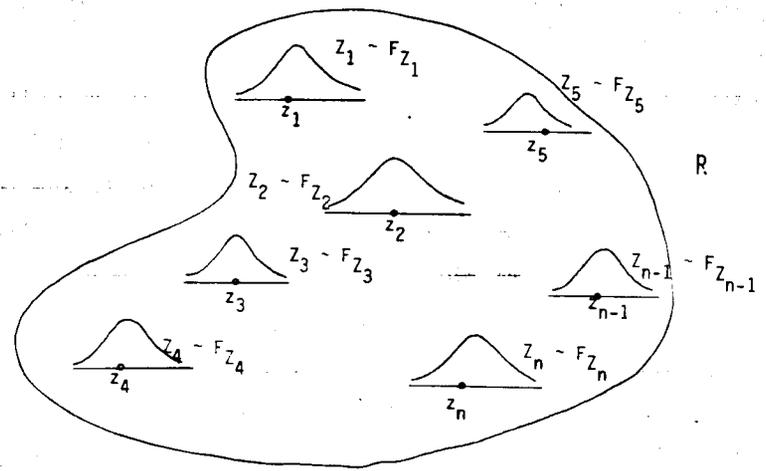
Variable Aleatoria Regionalizada

Las variables aleatorias $Z(x_1), \dots, Z(x_n)$ por estar distribuidas en el espacio, se les conoce con el nombre de *variables aleatorias regionalizadas* (en adelante v.a.r.), y al fenómeno representado por las variables aleatorias regionalizadas $Z(x_i)$ se le denomina *regionalización*, ejemplo de lo cual podríamos citar:

- (i) El precio del barril de petróleo, el cual puede ser visto como una variable distribuida en el tiempo (espacio de una dimensión).
- (ii) El espesor de un estrato, considerado como una variable distribuida en dos dimensiones.
- (iii) El porcentaje de mineral en un bloque de volumen V de un cierto depósito podría ser caracterizado por una distribución en tres dimensiones.



CONCEPTO TRADICIONAL
(A)



CONCEPTO GEOESTADISTICO
(B)

FIGURA 3.2 Fenómeno natural caracterizado por la distribución espacial de una variable aleatoria regionalizada.

Al conjunto de v.a.r. $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$, representado de ahora en adelante como $Z(x)$, se le conoce como *función aleatoria* (en adelante f.a.) y se distingue (como toda variable aleatoria) por tener asociada una función acumulativa de distribución conjunta. *

$$F_{Z(x)}(z) = F_{Z(x_1), \dots, Z(x_n)}(z(x_1), \dots, z(x_n)) = P_r \{Z(x_1) \leq z(x_1), \dots, Z(x_n) \leq z(x_n)\}$$

Características

Las v.a.r. presentan las siguientes características generales:

- (i) **Región:** referida a la extensión en la cual existe y se analiza un fenómeno natural.
- (ii) **Localización:** referida a la posición dentro de la cual una realización de una v.a.r. tiene lugar.
- (iii) **Soporte geométrico:** entendido como la determinación física de la realización de una v.a.r. siguiendo una misma técnica (mismo tamaño relativo, volumen, método de ensayo, etc.).

De la misma manera en que los operadores $E[\]$, $\text{Var}[\]$, etc., definidos en el capítulo II, se aplicaron a variables aleatorias, también pueden aplicarse a variables aleatorias regionalizadas. Consideremos la v.a.r. $Z(x_i)$, en el punto x_i de la región R:

* Nota: Ambos aspectos, el estructural y el aleatorio se encuentran implícitos en las funciones aleatorias.

Definición

(i) $E[Z(x_i)]$.- Si la función de distribución de $Z(x_i)$ tiene media (o esperanza), entonces esta media es una función de x_i y se escribe: $E[Z(x_i)] = m(x_i)$.

(ii) $\text{Var}[Z(x_i)]$.- Si la varianza de la v.a.r. $Z(x_i)$ existe, entonces ésta se define como el momento central de segundo orden, y se escribe:

$$\text{Var}[Z(x_i)] = E[\{Z(x_i) - m(x_i)\}^2]$$

Al igual que la media de $Z(x_i)$, la varianza es generalmente una función de x_i .

(iii) $\text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)]$.- Si las varianzas de las v.a.r. $Z(x_i)$ y $Z(x_j)$ existen, entonces la covarianza de las dos variables aleatorias también existe y es función de las dos localizaciones, x_i y x_j :

$$\text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = E[\{Z(x_i) - m(x_i)\} \{Z(x_j) - m(x_j)\}]$$

(iv) **Variograma** $2\gamma[Z(x_i), Z(x_j)]$.- La función *variograma* se define como la varianza del incremento de dos variables aleatorias regionalizadas, es decir:

$$2\gamma[Z(x_i), Z(x_j)] = 2\gamma(x_i, x_j) \equiv \text{Var}[Z(x_i) - Z(x_j)]$$

La función $\gamma(x_i, x_j)$ se denomina entonces, *semivariograma*. El variograma también puede definirse como aquella función que expresa la estructura de intercorrelación de una variable aleatoria regionalizada.

HIPOTESIS DE LA GEOESTADISTICA

Volvamos a la figura 3.2-B y pensemos por un momento si sería posible inferir estadísticamente la distribución $F_{Z(x_i)}(\cdot)$ de la v.a.r. $Z(x_i)$ en el punto x_i , contando únicamente con la realización $z(x_i)$. Obviamente, - esto no es posible como tampoco es posible determinar la distribución de la variable aleatoria, "resultado de echar un volado con una moneda", con sólo una realización. Inferir la forma de $F_{Z(x_i)}(\cdot)$ requeriría contar - con muchas realizaciones $z_1(x_i), z_2(x_i), \dots, z_m(x_i)$ de la v.a.r. $Z(x_i)$ en el punto x_i . Dado que en la práctica estamos limitados a contar con sólo una realización de la v.a.r. $Z(x_i)$, en el punto x_i , parece ser como si -- nos encontráramos en un camino sin salida, es entonces cuando resulta necesario adoptar ciertas hipótesis.

Cuatro diferentes hipótesis relacionadas con la función aleatoria $Z(x)$ pueden adoptarse.

- (i) **Estacionariedad estricta.** - Una f.a. $Z(x)$ se dice ser estacionaria, en el sentido estricto, si su función acumulativa de distribución conjunta $F_{Z(x)}(\cdot)$ permanece constante bajo efectos de traslación. En otras palabras, la función acumulativa de distribución conjunta $F_{Z(x)}(\cdot) = F_{Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)}(z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))$ de las v.a.r. $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$, será idéntica a la f.a.d.c. $F_{Z(x+h)} = F_{Z(x_1+h), \dots, Z(x_n+h)}(z(x_1+h), \dots, z(x_n+h))$ de las v.a.r. $\{Z(x_1+h), \dots, Z(x_n+h)\}$ para cualquier vector de traslación h . Esta hipótesis equivaldría a considerar como iguales a todos - los momentos de los conjuntos de v.a.r. $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$ y

$\{Z(x_1+h), \dots, Z(x_n+h)\}$, para cualquier valor h .

La hipótesis se ilustra gráficamente en las figuras 3.3-A y 3.3-B para el caso de dos variables aleatorias regionalizadas, $\{Z(x_1), Z(x_2)\}$

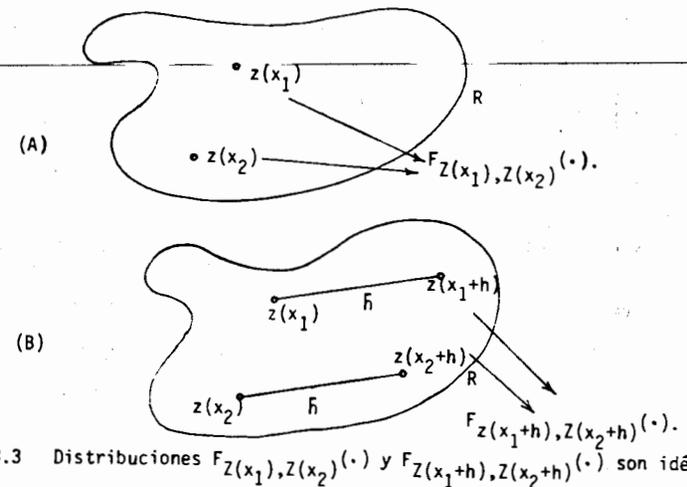


FIGURA 3.3 Distribuciones $F_{Z(x_1), Z(x_2)}(\cdot)$ y $F_{Z(x_1+h), Z(x_2+h)}(\cdot)$ son idénticas bajo efectos de traslación.

- (ii) **Estacionariedad de segundo orden.** - Una f.a. $Z(x)$ se dice ser estacionaria de segundo orden cuando:
- (a) $E[Z(x_i)]$ existe y no depende del punto o soporte x_i
- $$E[Z(x_i)] = m \text{ (constante), } \forall x_i$$
- (b) Para cada par de v.a.r. $\{Z(x_i), Z(x_i+h)\}$ la covarianza existe y sólo depende del vector de traslación h .
- $$C(h) = \text{Cov}[Z(x_i), Z(x_i+h)] = E\{[Z(x_i) - E[Z(x_i)]]\{Z(x_i+h) - E[Z(x_i+h)]\}\} = E\{[Z(x_i) - m]\{Z(x_i+h) - m\}\} = C(h) = E[Z(x_i) \cdot Z(x_i+h)] - m^2, \forall x_i$$

La estacionariedad de la covarianza implica estacionariedad de la varianza y del variograma.

$$\text{Var} [Z(x_i)] = E [(Z(x_i) - m)^2] = C(0), \forall x_i$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E [(Z(x_i) - m) - (Z(x_i+h) - m)]^2$$

$$= \frac{1}{2} E [Z^2(x_i) - 2Z(x_i)Z(x_i+h) + Z^2(x_i+h)]$$

$$= \frac{1}{2} E [Z^2(x_i)] - E [Z(x_i)Z(x_i+h)] + \frac{1}{2} E [Z^2(x_i+h)]$$

$$\gamma(h) = C(0) - C(h), \forall x_i$$

Como se observa en la última expresión, $\gamma(h)$ y $C(h)$, son dos herramientas que permiten expresar la correlación entre las dos v.a.r., $Z(x_i)$ y $Z(x_i+h)$, separadas por el vector h . Estacionariedad equivale a considerar, por ejemplo, una mineralización *homogénea*, donde la correlación entre los datos $z(x_i)$ y $z(x_i')$ no depende de su posición particular, sino de la distancia que los separa.*

(iii) *Hipótesis intrínseca*.- Una f.a. $Z(x)$ se dice intrínseca si:

(a) Su media *existe* y no depende del punto x_i .

$$E [Z(x_i)] = m, \forall x_i$$

(b) Para todo vector h , el incremento $Z(x_i) - Z(x_i+h)$ tiene varianza finita (o existe) y no depende del punto x_i .

$$\text{Var} [Z(x_i) - Z(x_i+h)] = E [(Z(x_i) - Z(x_i+h))^2] =$$

$$= 2 \gamma(h), \forall x_i.$$

* Nota: Esta hipótesis asume la existencia de la covarianza $C(h)$ y por lo tanto de la varianza $\text{Var} [Z(x_i)] = C(0) < \infty$.

La existencia de la función variograma representa una hipótesis más fácil de satisfacer que la existencia de la covarianza. Muchos fenómenos físicos presentan una capacidad infinita de dispersión, donde ambas la varianza y la covarianza no existen, pero para las cuales es posible definir una función variograma.

Por lo tanto, la estacionariedad de segundo orden implica la hipótesis intrínseca, pero no lo contrario. La función variograma -- puede expresarse en términos de la covarianza, y no así esta última en función del variograma.

$$\gamma(h) = C(0) - C(h)$$

$$C(h) \neq f(\gamma(h))$$

(iv) *Quasi-estacionariedad*.- Esta es la limitación de la hipótesis de estacionariedad de segundo orden a distancias $[h] \leq b$ (o de la hipótesis intrínseca, si sólo la función $\gamma(h)$ es asumida). En la práctica, el límite b puede representar la extensión de una zona homogénea, o el diámetro de la zona considerada para propósitos de estimación (Figura 3.4).

NOTA.- Es conveniente hacer notar que parte de los conceptos introducidos en este capítulo han sido presentados como una extensión natural de nociones básicas de la estadística. Estos conceptos constituyen el lenguaje de la Geoestadística. En lo que resta de este curso se asumirá la hipótesis de estacionariedad de segundo orden en todas las funciones aleatorias, $Z(x)$.

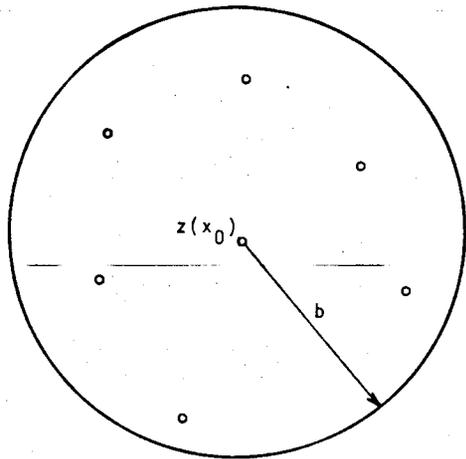
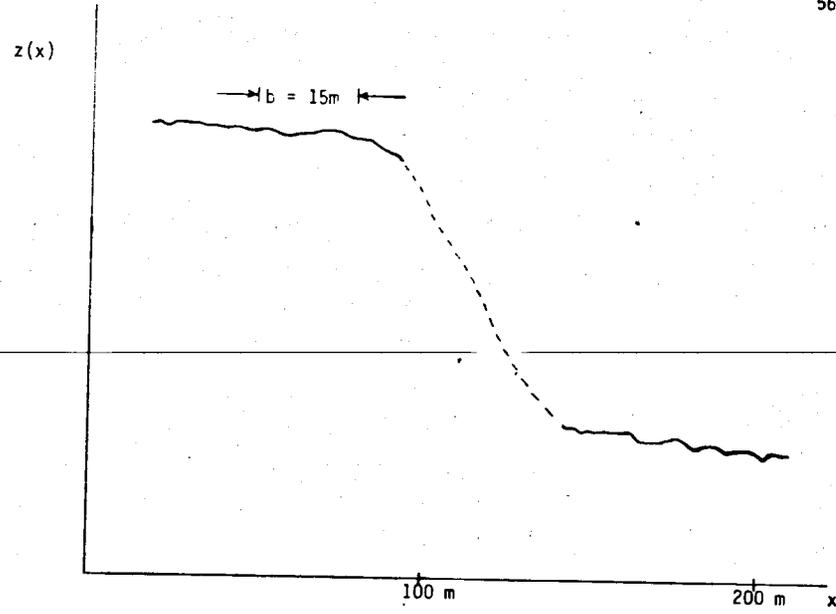


FIGURA 3.4 Vecindades de quasi-estacionariedad.

CAPITULO IV

ANALISIS ESTRUCTURAL

En este capítulo se define el proceso del análisis estructural de un fenómeno regionalizado en sus diversas etapas, desde el análisis de la información básica, hasta el ajuste de un modelo teórico al semivariograma experimental.

EL ANALISIS ESTRUCTURAL Y SU PRACTICA.

Antes de iniciar un estudio geoestadístico es recomendable familiarizarse con ambos, la naturaleza del fenómeno que se estudia (geología, petrografía, metalogenia, técnicas de operación, etc.) y con los datos disponibles. Esta fase preliminar es esencial tanto en el análisis estructural como en la formulación correcta del problema. Por tal motivo, siempre es deseable poder llevar a cabo un análisis estadístico elemental de la información. Histogramas y diagramas de correlación, entre otras muchas técnicas, ayudan en la detección de datos erróneamente muestreados. Esto es de especial importancia ya que cualquier error en los datos se reflejaría sistemáticamente en cada etapa del análisis geoestadístico.

Una parte fundamental del análisis estructural lo constituye la formulación del problema y el análisis crítico de la variable aleatoria regionalizada, lo que comprende, entre otros, los aspectos siguientes:

- Representatividad y ejecución correcta del muestreo.
- Propósito del estudio.
- Significado y Homogeneidad de los datos o de la variable que se estudia.

- Soporte o volumen en el cual la variable está definida. Para un ingeniero petrolero, el soporte sería por ejemplo un núcleo de roca al cual se le ha determinado sus características petrofísicas (porosidad, permeabilidad, etc.) Para un ingeniero minero, el soporte sería el volumen de roca donde el porcentaje medio de un mineral se desea estimar.
- Extensión o dominio del campo sobre el cual la distribución espacial de la variable se definirá. Esta extensión puede cubrir una cuenca geológica, un yacimiento petrolero o una zona de mineralización.

El Semivariograma Experimental.

Analizados los datos y definida la variable procedemos al cálculo del semivariograma. Recordemos que el variograma ha sido definido como la varianza de la diferencia de dos variables aleatorias regionalizadas,

$$2\gamma(h) = \text{Var} [Z(x+h) - Z(x)] \quad (4.1)$$

estando distanciadas una de la otra, un vector h . Un semivariograma calculado a partir de datos experimentales, $\gamma^*(h)$, está dado por la fórmula:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N'} \sum_{i=1}^{N'} [z(x_i+h) - z(x_i)]^2 \quad (4.2)$$

donde N' representa el número de pares de datos separados por el vector h , $z(x_i)$ es el valor de la variable en la posición x_i , y $z(x_i+h)$ es el valor de la variable en la posición x_i+h .

En la práctica, sabemos que los datos pueden estar distribuidos en 1, 2 y 3 dimensiones, y que además pueden presentarse regular o irregularmente espaciados. También sabemos que la confiabilidad en el semivariograma como función estructural será mayor cuanto mayor sea el número de datos disponibles. No es sorprendente, en algunos casos, emplear datos del orden de los cientos o de los miles, lo cual de no ser por las computadoras, haría del análisis estructural una técnica totalmente impráctica. Por estos motivos, el cálculo de los semivariogramas experimentales, generalmente, se efectúa empleando programas de cómputo.

Es conveniente antes de entrar en detalle, mencionar algunos de los aspectos más relevantes contenidos en los semivariogramas, estos son:

- 1.- Representa el grado de continuidad de los valores de las v.a.r.; $\gamma(h)$ es una función creciente, es decir, que entre más alejada se encuentre una v.a.r. de otra, sus valores tenderán a ser más diferentes.
- 2.- Responde a la tradicional noción de *zona de influencia* entre v.a.r.. El grado de crecimiento de un semivariograma representa el grado de decrecimiento de la influencia de una v.a.r. sobre su vecindad.
- 3.- *Anisotropías* en los valores de la v.a.r. pueden ser reveladas a través de distintos comportamientos de los semivariogramas constructuados a lo largo de diferentes direcciones dentro del dominio de la v.a.r.
- 4.- Continuidad y regularidad de los valores están representadas por el mayor o menor comportamiento regular del semivariograma cerca del origen.

5.- Importantes caracteres estructurales del fenómeno en estudio pueden ser obtenidos de los rasgos del semivariograma. Arriba de una distancia llamada *alcance*, *rango de correlación*, o simplemente *rango*, las v.a.r. prácticamente no presentan correlación. El valor de $\gamma(h)$ para distancias h mayores al rango, nombrado meseta, representa la varianza máxima entre las v.a.r.

6.- Desde el momento en que se efectúa un muestreo discontinuo, se obtiene una imagen imperfecta de la ley de dispersión teórica de los valores de la v.a.r., por lo que únicamente los puntos cercanos al origen son considerados como significativos.

7.- $\gamma(h)$ no representa en su totalidad los detalles locales del fenómeno, sólo expresa, en forma sintética, sus caracteres esenciales.

Anatomía del Semivariograma

La definición del semivariograma como un medio de la varianza de la diferencia de dos variables aleatorias regionalizadas sugiere las siguientes propiedades:

$\gamma(0) = 0$ el semivariograma es por definición igual a cero en el origen.

$\gamma(h) = \gamma(-h)$ el semivariograma es una función par.

Con el objeto de entender el comportamiento de la función $\gamma(h)$ es necesario observar primero el comportamiento de la función $C(h)$. Intuitivamente sabemos que el grado de correlación entre las variables $Z(x_i)$ y $Z(x_i + h)$ generalmente decrece a medida que la distancia que las separa se incrementa. De acuerdo con esto, y observando la relación

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (4.4)$$

podemos deducir que la función $\gamma(h)$ debe de incrementarse con h (ver figura 4.1).

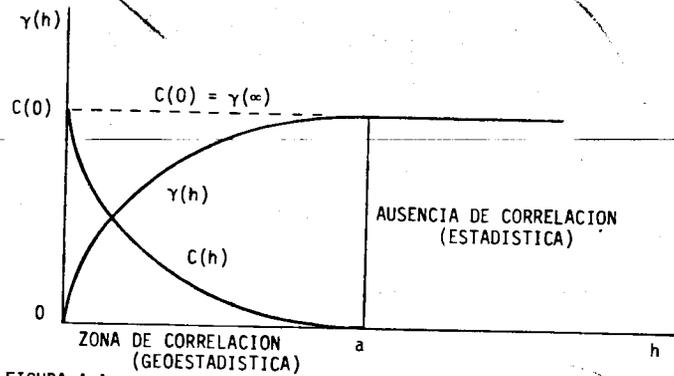


FIGURA 4.1

La distancia a a partir de la cual $C(h)$ resulta prácticamente igual a cero, se denomina *rango* y representa el punto de transición entre el estado en el cual existe correlación (o zona de influencia), $|h| \leq a$, y el estado en el cual hay ausencia de correlación, $|h| > a$.

A medida que h crece, la función $\gamma(h)$ resulta, generalmente, más o menos estable alrededor de un límite llamado *meseta* (o *sill*, en inglés), el cual es simplemente la varianza de la v.a.r. $Z(x_i)$

$$\gamma(\infty) = \text{Var} [Z(x_i)] = C(0) - C(\infty) \quad (4.5)$$

Aquellos semivariogramas caracterizados por un rango a y una meseta $C(0)$ se les conoce como *modelos de transición*, ya que permiten identificar las zonas de transición definidas anteriormente.

Estrictamente hablando, y dado que h representa un vector, la función

$\gamma(h)$ denota al conjunto de semivariogramas $\gamma(h, \alpha)$, obtenidos al hacer variar el ángulo dirección α . Estudiando $\gamma(h)$ en varias direcciones α , se puede determinar la existencia de posibles *anisotropías*, tales como el cambio de rango $a(\alpha)$ con la dirección α . Consideremos el ejemplo de las lentes mineralizadas de la figura 4.2 donde:

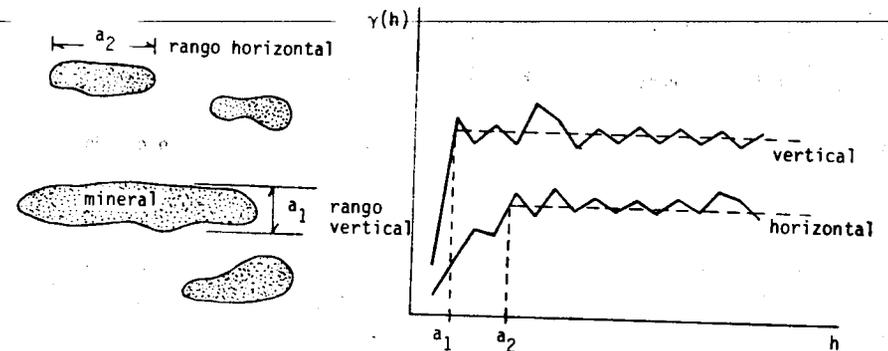


FIGURA 4.2 El semivariograma como herramienta estructural.

el semivariograma calculado en la dirección vertical muestra un rango a_1 , menor al rango a_2 del semivariograma calculado en la dirección horizontal. Los rangos a_1 y a_2 pueden interpretarse como el valor medio del ancho y el valor medio del largo de los lentes mineralizados, respectivamente. El rango del semivariograma representa, en promedio, características morfológicas de lentes mineralizados.

Comportamiento del semivariograma al origen.

El comportamiento del semivariograma cerca del origen está relacionado con la continuidad y la regularización de la f.a. $Z(x)$. Cuatro dife-

rentes comportamientos pueden observarse (ver figura 4.3).

(i) *Parabólico* - $\gamma(h) \sim A |h|^2$, comportamiento característico de variabilidades espaciales sumamente regulares.

(ii) *Lineal* - $\gamma(h) \sim A |h|$

(iii) *Discontinuo al Origen* - $\gamma(h)$ no tiende hacia cero cuando $h \rightarrow 0$, aunque por definición $\gamma(0) = 0$. La variabilidad entre dos valores $z(x)$ y $z(x+h)$, muy cercanos, uno del otro, puede ser muy alta e incrementarse con el grado de discontinuidad en el origen de $\gamma(h)$. Esta discontinuidad en el origen de la función $\gamma(h)$ se denomina *efecto pepita* (o *nugget effect* en inglés) y puede deberse a mediciones erróneas y/o microvariabilidades.

(iv) *Efecto Pepita Puro* - Este es el caso donde $\gamma(h)$ aparece exclusivamente como una discontinuidad en el origen,

$$\gamma(0) = 0 \text{ y } \gamma(h) = C_0, \text{ para } h > \epsilon.$$

Este efecto corresponde, exclusivamente, al estado total de ausencia de correlación.

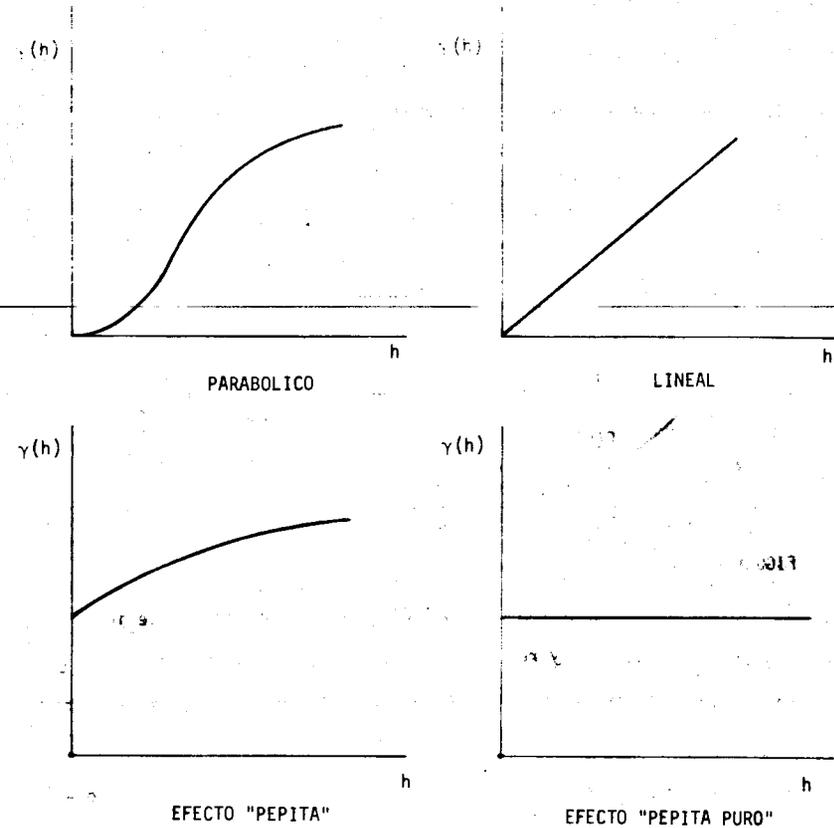


FIGURA 4.3

Orígenes de Variabilidad.

La variabilidad entre las v.a.r. $Z(x_i)$ y $Z(x_i+h)$, representada por el semivariograma, tiene diversos orígenes los cuales están íntimamente ligados a las diversas escalas de medida, por ejemplo:

(i) A nivel de punto ($h=0$) existe una variabilidad causada por errores en los muestreos mismos.

- (ii) A nivel petrográfico ($|h| < 1 \text{ cm}$) una segunda variabilidad puede existir producida por transición de un elemento a otro.
- (iii) A nivel de estratos o lentes mineralizados ($|h| < 100 \text{ m}$) una tercera variabilidad puede aparecer debida a alternancias de los estratos o de los lentes mineralizados con material estéril.
- (iv) A nivel de cuenca geológica o de provincia metalífera ($|h| < 100 \text{ km}$) una cuarta variabilidad puede surgir como consecuencia de la distribución de los yacimientos a partir de la orogénesis de la provincia.
- Todas estas fuentes o estructuras de variabilidad, y posiblemente muchas más, actúan *simultáneamente* y para cualquier distancia h , y por ello se les llama *estructuras anidadas*.

Observar simultáneamente todas estas variabilidades requeriría contar con una gran cantidad de información cubriendo todos los rangos de variabilidad, desde 1μ hasta 100 km ., lo cual en la práctica, nunca ocurre.

Bajo la hipótesis de estacionaridad de segundo orden, las estructuras anidadas pueden ser representadas como la suma de un cierto número de semivariogramas (o de covarianzas), cada uno caracterizando una variabilidad a una cierta escala (ver figura 4.4).

$$\gamma(h) = \gamma_0(h) + \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_n(h) \quad (4.6)$$

Modelos de Semivariogramas.

A continuación se presentan las principales funciones empleadas en la

representación de variogramas. No cualquier función $f(h)$ puede ser una función semivariograma. Únicamente aquellas funciones *definidas positivamente y condicionalmente* (Matheron, 1971) pueden emplearse como semivariogramas.

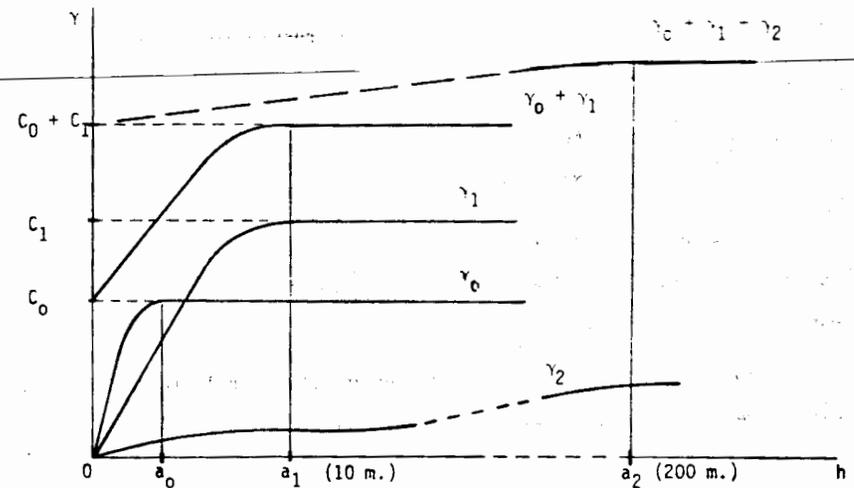


FIGURA 4.4 Estructuras anidadas.

Como se mencionó anteriormente, las dos características principales del semivariograma $\gamma(h)$ son su comportamiento al origen (parabólico, lineal y efecto nugget) y la presencia o ausencia de una meseta o sill para valores de $|h| \geq a$. Atendiendo a estas características, los modelos teóricos más comúnmente empleados pueden clasificarse como:

- (i) Modelos con meseta (o modelos de transición) y comportamiento lineal al origen:

(a) Modelo Esférico

(b) Modelo Exponencial

o comportamiento parabólico al origen:

(c) Modelo Gaussiano

(ii) Modelos súbmeseta (la función aleatoria correspondiente será intrínseca donde ni la varianza, ni la covarianza existen).

(a) Modelos de forma $|h|^\theta$, con $\theta \in (0, 2)$

(b) Modelo Logarítmico

Por el momento consideraremos únicamente modelos *isotrópicos*, esto es, aquéllos cuyas funciones aleatorias $Z(x)$ presentan la misma variabilidad espacial en toda dirección.

Los modelos que a continuación se presentan están normalizados, es decir, corresponden a f.a. $Z(x)$ con varianza $\text{Var} [Z(x)] = 1$. Para obtener modelos con sill $C(0) = C \neq 1$ bastará multiplicar las expresiones dadas en $\gamma(h)$ por C .

Modelo Esférico:

$$\gamma(r) = \begin{cases} 3/2 (r/a) - 1/2 (r/a)^3, & \forall r \in [0, a] \\ 1 = \text{sill}, & \forall r \geq a \end{cases} \quad (4.7)$$

Modelo Exponencial:

$$\gamma(r) = 1 - e^{-r/a} \quad (4.8)$$

Estos dos modelos de semivariogramas con comportamiento lineal al origen son los más frecuentemente encontrados en la práctica. (Fig. 4.5)

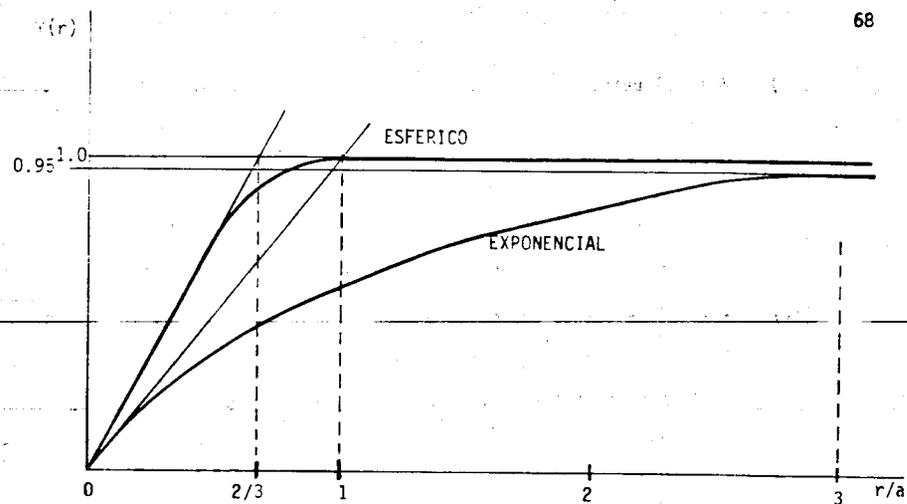


FIGURA 4.5 Modelos esférico y exponencial.

La diferencia entre los modelos esférico y exponencial es la distancia (r) a la cual sus tangentes al origen intersecan el sill $C(0)$: $r = \frac{2a}{3}$, dos tercios del rango a , para el modelo esférico; $r = \frac{a}{3} = a$ un tercio del rango práctico a' , para el modelo exponencial. Estos modelos presentan frecuentemente *efecto nugget*.

Modelo Gaussiano:

$$\gamma(r) = 1 - e^{-(r/a)^2} \quad (4.9)$$

Este modelo de comportamiento parabólico cerca del origen es raramente encontrado en aplicaciones prácticas.

Los siguientes modelos corresponden a f.a. $Z(x)$ con capacidad ilimitada de dispersión, esto es, $Z(x)$ es intrínseco.

Modelo del tipo r^θ :

$$\gamma(r) = r^\theta, \theta \in (0, 2) \quad (4.10)$$

Modelo Logarítmico:

$$\gamma(r) = \log r. \quad (4.11)$$

El modelo logarítmico o *modelo De Wijs* fue aplicado extensamente durante los años 60's. Sus características analíticas así como el hecho de que las primeras aplicaciones de la geoestadística a diferentes yacimientos minerales (de oro y uranio principalmente) produjeron variogramas sin sill, lo hicieron "popular".

Modelo con efecto de agujero:

Un semivariograma presenta el *efecto de agujero* cuando su crecimiento no es monótono. Este efecto puede aparecer en modelos con o sin sill (Figura 4.6). Un modelo con efecto de agujero, con sill y con comportamiento parabólico al origen tendría la siguiente forma:

$$\gamma(r) = 1 - \frac{\sin r}{r} \quad (4.12)$$

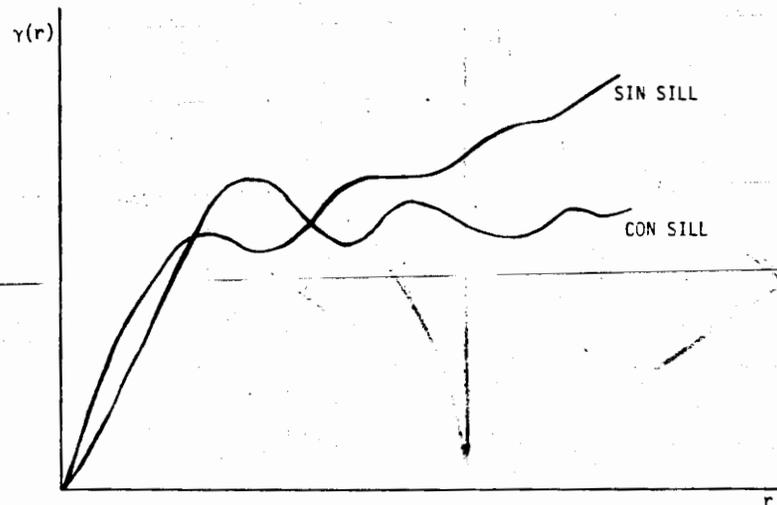


FIGURA 4.6 Semivariogramas con efecto de agujero .

Este comportamiento se ha observado frecuentemente en aquellos depósitos mineros donde existe una sucesión de zonas ricas y pobres.

Fenómenos anisotrópicos

Un fenómeno *anisotrópico* se caracteriza por presentar diversas variabilidades en cada dirección α . La función estructural $\gamma(h) = \gamma(|h|, \alpha)$ depende entonces de la dirección α y del módulo $|h|$. Cuando la función $\gamma(|h|, \alpha)$ depende únicamente del módulo $|h|$ el fenómeno se nombra *isotrópico*.

En la práctica, el carácter anisotrópico de la función $\gamma(h)$ se manifiesta por la existencia de direcciones preferenciales al momento de la génesis del fenómeno estudiado. Estas direcciones preferenciales son conocidas generalmente, de antemano, como por ejemplo, la dirección vertical en un depósito formado por depositación deltáica, o las direcciones horizontales en un depósito de aluvión.

Los modelos isotrópicos presentados anteriormente, dependen exclusivamente del módulo $r = |h|$ del vector h . En esta versión, los modelos anisotrópicos serán presentados empleando el método de "reducción" al caso isotrópico. Para el caso de *anisotropía geométrica*, la reducción se hará por medio de una transformación lineal y para el caso de *anisotropía zonal*, la reducción se hará por separación de cada variabilidad direccional.

(i) Anisotropía Geométrica.

Un semivariograma $\gamma(h) = \gamma(h_u, h_v)$ presenta anisotropía geométrica, cuando la anisotropía puede ser reducida a isotropía aplicando una transformación lineal a las coordenadas:

$$\gamma(h_u, h_v) = \gamma'(h'_u, h'_v) = \gamma'(|h'|) \quad (4.13)$$

anisotrópico *isotrópico*

donde $h'_u = a_{11} h_u + a_{12} h_v$

$h'_v = a_{21} h_u + a_{22} h_v$

o en forma matricial $h' = Ah$ donde A representa la matriz de transformación.

Como ejemplo consideremos los semivariogramas γ_{α_1} y γ_{α_2} de la figura 4.7, calculados en las direcciones α_1 y α_2 en el espacio de dos dimensiones. Los dos semivariogramas han sido representados por modelos esféricos con sill igual a 1 y rangos iguales a a_{α_1} y a_{α_2} ; dado que $\gamma_{\alpha_1} \neq \gamma_{\alpha_2}$ el fenómeno representado es anisotrópico.

Con el objeto de hacer coincidir las dos curvas, basta multiplicar la distancia a lo largo de la dirección α_1 , h_1 por el radio de afinidad $a_{\alpha_1} / a_{\alpha_2}$ o alternatively, multiplicar la distancia a lo largo de la dirección α_2 , h_2 por $a_{\alpha_2} / a_{\alpha_1}$. En efecto, para los dos modelos esféricos:

$$\gamma_{\alpha_1}(h_1) = \frac{3}{2 a_{\alpha_1}} h_1 - \frac{1}{2 a_{\alpha_1}^3} h_1^3, \quad \forall h_1 \leq a_{\alpha_1}$$

y

$$\gamma_{\alpha_2}(h_2) = \frac{3}{2 a_{\alpha_2}} h_2 - \frac{1}{2 a_{\alpha_2}^3} h_2^3, \quad \forall h_2 \leq a_{\alpha_2}$$

se obtendría lo siguiente:

$$\gamma_{\alpha_1}(h_1) = \frac{3}{2 a_{\alpha_2}} h_1 \frac{a_{\alpha_2}}{a_{\alpha_1}} - \frac{1}{2 a_{\alpha_2}^3} \left(h_1 \frac{a_{\alpha_2}}{a_{\alpha_1}} \right)^3, \quad \forall h_1 \frac{a_{\alpha_2}}{a_{\alpha_1}} \leq a_{\alpha_2}$$

o

$$\gamma_{\alpha_1}(h_1) = \gamma_{\alpha_2}(h'_1) \quad \text{donde} \quad h'_1 = h_1 \frac{a_{\alpha_2}}{a_{\alpha_1}}$$

El cambio de coordenadas $h'_i = h_i \frac{a_{\alpha_2}}{a_{\alpha_1}}$ permite caracterizar la variabilidad en las direcciones α_1 y α_2 por medio de un sólo modelo esférico con rango a_{α_2} .

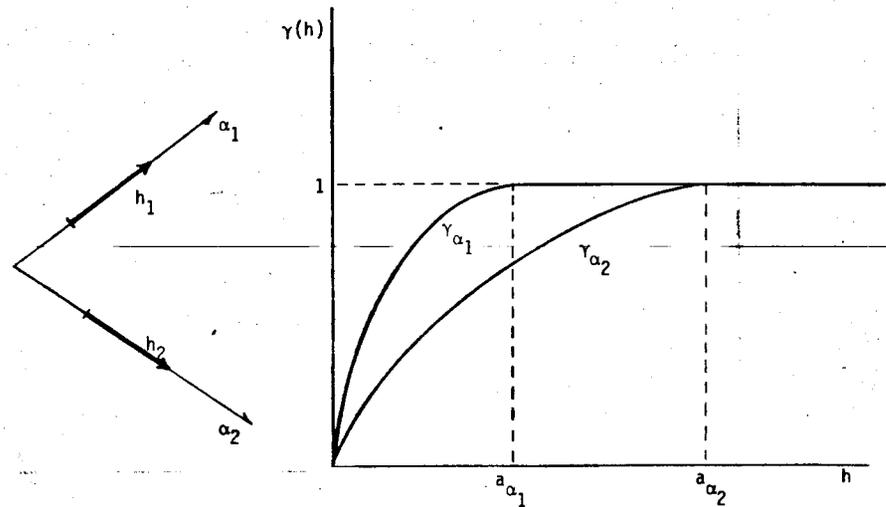


FIGURA 4.7 Anisotropía geométrica.

Considerando n direcciones $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, bastaría con graficar los rangos de los semivariogramas en función de sus direcciones para deducir la posible existencia de una transformación lineal. Si la gráfica pudiera aproximarse a una elipse, entonces una transformación lineal existiría y permitiría transformar la elipse en círculo lo cual equivaldría a considerar un fenómeno isotrópico. En caso contrario, el modelo de anisotropía zonal sería adoptado.

(ii) *Anisotropía Zonal*

El modelo de anisotropía zonal consiste en definir al semivariograma asociado al fenómeno en estudio como una estructura anidada, es decir, como la suma de otros semivariogramas donde cada semivariograma se permite exhibir su propia anisotropía.

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^n \gamma_i(h)$$

Por ejemplo, el semivariograma $\gamma_j(h)$, (h -vector) puede representar un fenómeno con anisotropía geométrica, el semivariograma $\gamma_n(h)$ puede ser isotrópico en 2 dimensiones $\gamma(h_u, h_v) = \gamma(\sqrt{h_u^2 + h_v^2}) = \gamma(|h|)$ o bien el semivariograma $\gamma_k(h)$ puede depender únicamente de la distancia h_u . $\gamma_k(h) = \gamma_k(h_u)$, $\forall h_v$.

El modelo de anisotropía zonal es el más usado en la práctica, ya que por su flexibilidad puede ajustarse a cualquier tipo de anisotropía.

Ejemplos de Ajustes de Semivariogramas.

CASO I: *Tiempos de Reflexión.*

A partir de información estructural obtenida en el distrito Villahermosa de la Zona Sur (Petróleos Mexicanos) que comprende los campos Sitio Grande, Samaria y otros (Figura 4.8), se evaluaron semivariogramas experimentales de tiempos de reflexión a lo largo de dos direcciones, 45 y 135 grados con respecto a la línea oeste-este. Tales semivariogramas presentan las siguientes características (Figura 4.9):

- (i) En los dos casos (45° y 135°) no existe presencia aparente de efecto nugget, por lo menos a la escala de los datos experimentales.
- (ii) Ambos semivariogramas presentan un fenómeno de transición entre el origen y una distancia de cerca de 30 kilómetros. El semivariograma obtenido en la dirección 135° muestra un incremento brusco en sus valores a partir de $h = 30$ km. indicando con ello la presencia de un trend, el cual se conocía de antemano según evidencias geológicas. Se sabe, por ejemplo, que la formación reflectora (Formación Tamabra) aflora hacia el sureste en la Sierra de Chiapas. El semivariograma obtenido en la dirección 45° muestra una caída brusca en sus valores, también a partir de $h = 30$ km., lo cual sugiere la presencia, globalmente hablando, de una estructura simétrica (con respecto a la línea NW - SE, ver figura 4.10-A y -B) y, la cual está generada, como se sabe, por el empuje de un domo salino subyacente.

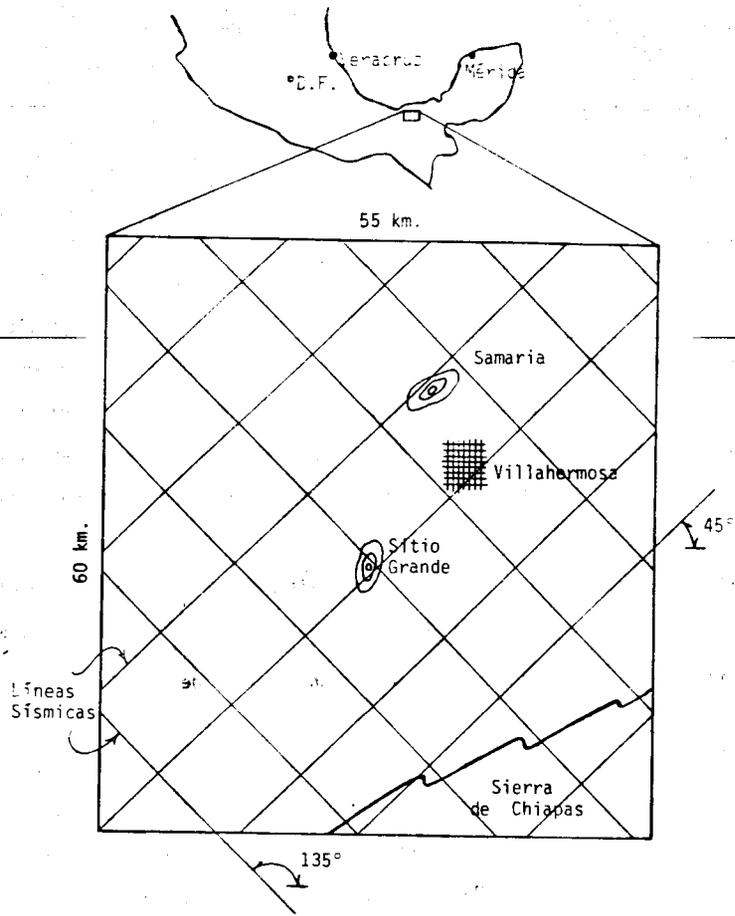


FIGURA 4.8

(iii) Para pares de puntos con distanciamientos, entre sí, menores a 30 km., el fenómeno puede considerarse como estacionario (ó quasi estacionario) e isotrópico y puede caracterizarse por un semi-variograma teórico (esférico) con rango $a = 18$ km. y sill $C(0) = 0.30$.

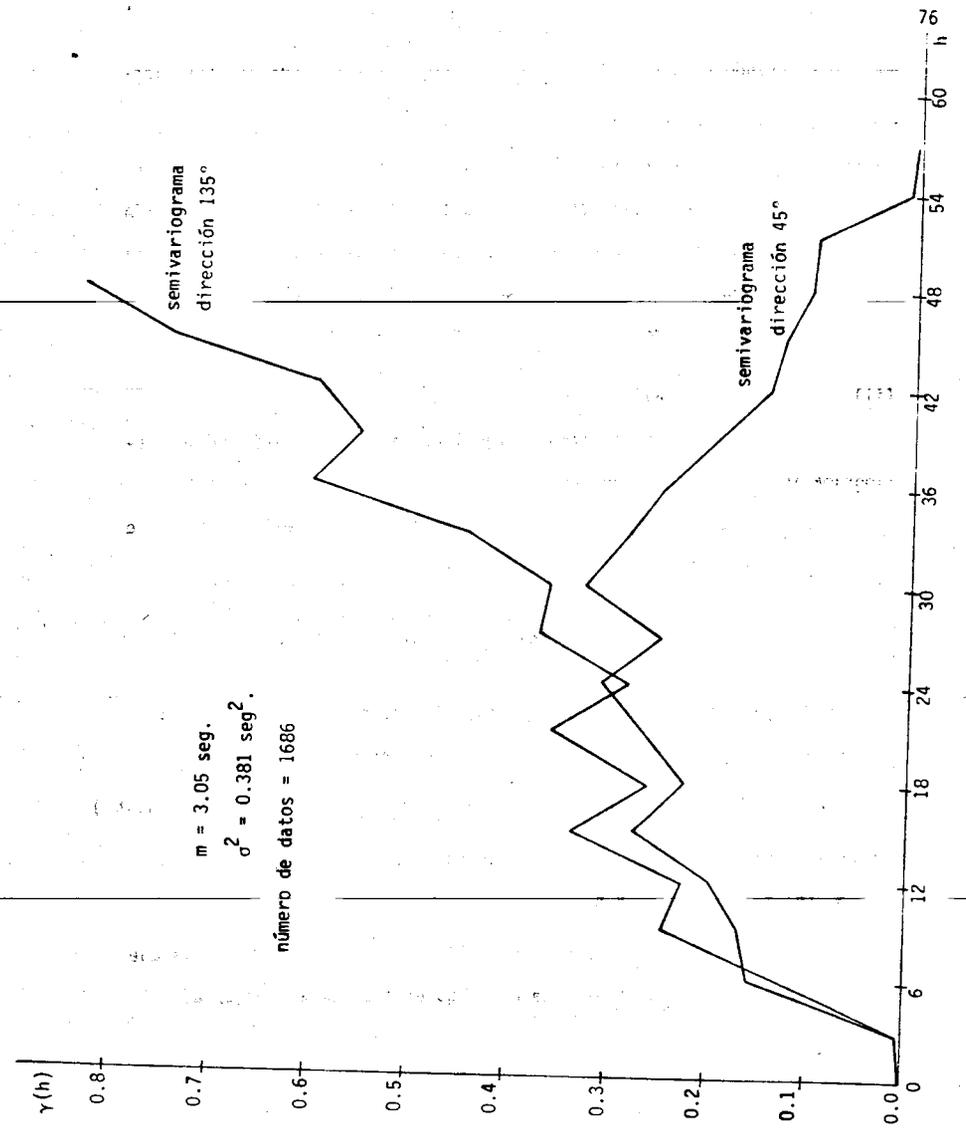


FIGURA 4.9

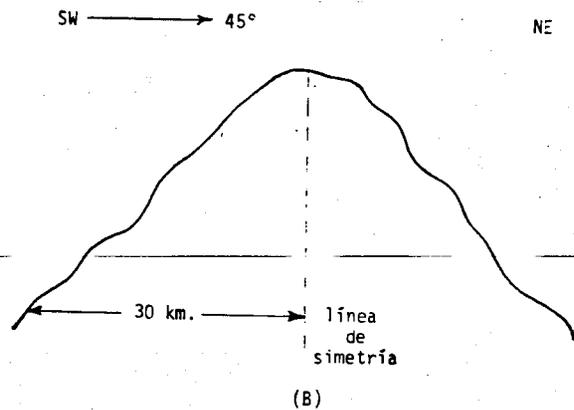
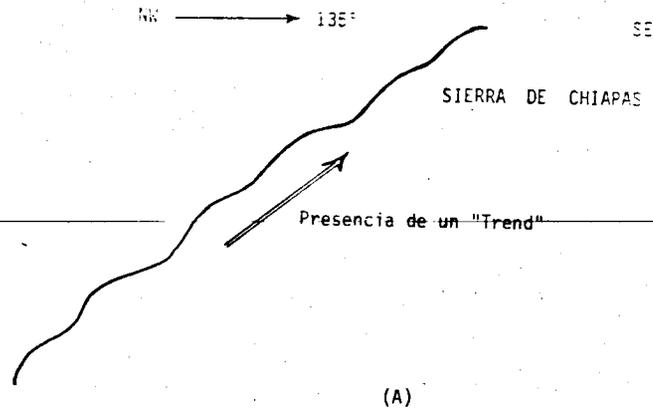


FIGURA 4.10 Perfil estructural de la formación Tamabra, sureste de México.

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0.30 \left[\ln \left(\frac{r}{18} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{18} \right)^3 \right] & \forall h \leq 18 \text{ km.} \\ 0.30 & 18 \text{ km} \leq h \leq 30 \text{ km.} \end{cases}$$

CASO II: Permeabilidades "Campo Acuatempa"

El efecto de pepita puro suelo *aparecer* en aquellos casos donde el mo delo de transición $\gamma_0(h)$, si existe, tiene un rango *a* mucho menor al de la dimensión del soporte de los datos, $a \ll v$. La dimensión del soporte *v* cubre toda la variabilidad de $\gamma_0(h)$, aparentando las características del efecto de pepita puro.

Es frecuente asumir equivocadamente, la hipótesis del efecto de pepita puro, cuando la razón del comportamiento de $\gamma_0(h)$ no es sino la escasez de información o el suavizamiento de los datos.

La Figura 4.11 muestra un semivariograma experimental obtenido a partir de datos de permeabilidad de 7 pozos del campo Acuatempa. Este es el caso donde por la escasez de información se generó un efecto de fluctua--ción alrededor de lo que se suponía el *sill*, simulando el efecto de pepita puro.

Cada dato de permeabilidad está asociado a un soporte *v* aproximadamen--te igual al volumen de un cilindro de radio igual al radio de drenaje del --pozo, y de altura igual al espesor de formación. Si el modelo de transi--ción $\gamma_0(h)$ existiese en este caso, éste tendría como rango una dimen--sión *a* mucho menor a la dimensión *v*.



FACULTAD DE INGENIERIA

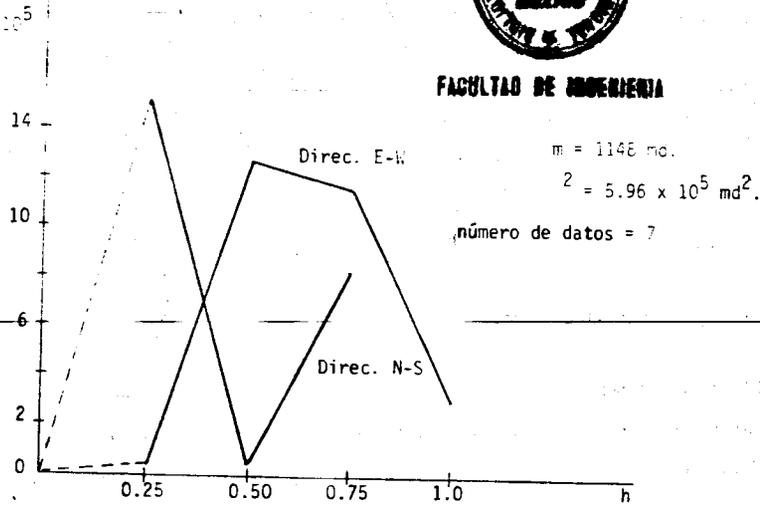


FIGURA 4.11 Semivariogramas de permeabilidades.

CONCLUSION

El objetivo del análisis estructural es detectar las principales características estructurales del fenómeno regionalizado que se estudia, analizando los diversos semivariogramas experimentales. La información obtenida de este análisis debe ser comparada con las características del fenómeno, conocidas por otras evidencias (geológicas, mineralógicas, procedimientos de muestreo, etc.). Bajo ninguna circunstancia, un estudio estructural deberá reemplazar una campaña geológica (ó geofísica) de exploración, por lo contrario, el estudio deberá ser guiado por la geología misma. El análisis estructural complementa y enriquece el conocimiento geológico del fenómeno, cuantificando la información, para usos posteriores de estimación.

CAPITULO V

VARIANZA DE ESTIMACION

INTRODUCCION

Todo método de estimación introduce implícitamente un error de estimación derivado del simple hecho de que la cantidad por estimar z no coincide con el valor estimado z^* ,

$$\lambda = z - z^* \quad (5.1)$$

Así como $z(x_j)$ se interpreta como una realización de la variable aleatoria regionalizada, $Z(x_j)$; el error $r(x_j)$ puede interpretarse como una realización de la variable aleatoria regionalizada $R(x_j) = Z(x_j) - Z^*(x_j)$, en el punto x_j . Por otra parte, si la f.a. $Z(x)$ es estacionaria, entonces la función aleatoria error $R(x)$ será estacionaria y los dos errores $r(x_i)$ y $r(x_j)$ serán considerados como dos realizaciones diferentes de la misma f.a.

$$R(x) = Z(x) - Z^*(x)$$

Bajo la hipótesis de estacionaridad de segundo orden, si los errores $r(x_1), \dots, r(x_n)$ fueran conocidos en una cierta zona de control, a través del histograma de los n valores, sería posible inferir la función de distribución de $R(x)$, o al menos sería posible inferir la media $m_E = E[R(x)]$

y la varianza del error o *varianza de estimación* $\text{Var}[R(x)] = \sigma_E^2$.

El error $r(x_j)$, ($j \neq 1, 2, \dots, n$) introducido al tratar de estimar

el valor $z(x_j)$ en el punto x_j por medio del valor $z^*(x_j)$ permanece desconocido, sin embargo, la media y la varianza de los errores (ó la función de distribución, si ésta es conocida) pueden ofrecernos una idea de la calidad de la estimación. La media m_E caracteriza el valor medio de los errores y la varianza σ_E^2 representa una medida de dispersión de los errores alrededor de la media. Por lo tanto, un buen método de estimación será aquel que:

- (i) posea una media de los errores m_E cercana a cero, propiedad que guarda un estimador *insesgado*, o *imparcial* (o *unbiased* en inglés), y
- (ii) muestre una dispersión mínima o muy concentrada alrededor de la media, es decir, con una varianza de estimación cercana a cero, $\sigma_E^2 = 0$.

Consideremos por un momento el problema de estimar el valor Z_V (por ejemplo, el porcentaje medio de cobre $Z_{V(x)}$ en un bloque de tamaño V centrado en el punto x), a partir de un conjunto de n datos

$$\{ Z(x_i), i = 1 \text{ a } n \}.$$

El estimador Z^* estará definido como una función de los datos:

$$Z^* = f [Z(x_1), Z(x_2), \dots, Z(x_n)].$$

El cálculo de los momentos de primer y segundo orden del error, $(Z_V - Z^*)$, requerirá del conocimiento de la función de distribución conjunta $F_{Z(x_1), \dots, Z(x_n)}(\cdot)$, la cual, al menos en la etapa de estimación, es imposible de obtener. Esto nos restringe a la clase de estimadores *lineales*.

$$Z^* = \sum_{i=1}^n X_i Z(x_i) \quad (5.2)$$

donde, ahora sí, la media y la varianza del error pueden calcularse empleando la función semivariograma $\gamma(h)$ (o la función covarianza $C(h)$), como se demostrará a continuación.

Sea $Z(x)$ una función aleatoria y estacionaria de segundo orden, con media m , covarianza $C(h)$ y semi-variograma $\gamma(h)$.

Caso Discreto.

Se desea estimar la media aritmética z_k de un conjunto de k valores desconocidos $\{z(x_j), j=1, \dots, k\}$, es decir:

$$z_k = 1/k \sum_{j=1}^k z(x_j)$$

Se empleará como estimador lineal a z_k^* , definido como la media aritmética de un conjunto de n datos conocidos $\{z(x'_i), i' = 1, 2, \dots, n\}$ (Figura 5.1).

$$z_k^* = 1/n \sum_{i=1}^n z(x'_i)$$

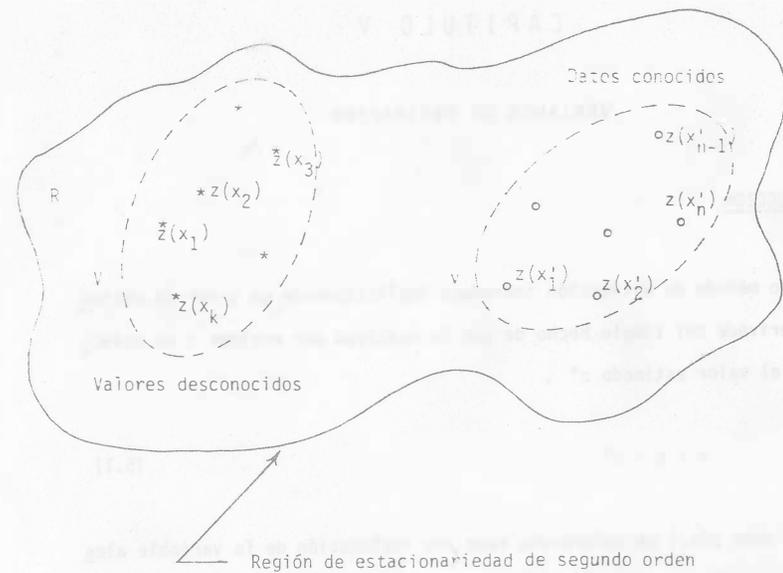


FIGURA 5.1

El valor z_k^* se interpreta como una realización de la v.a.r. Z_k^* , y el error desconocido $z_k - z_k^*$ denota una realización particular de la v.a.r. $Z_k - Z_k^*$. Bajo la hipótesis de estacionariedad de segundo orden, la condición de *estimador insesgado* se cumple ya que:

$$E [Z_k] = E \left[1/k \sum_{j=1}^k Z(x_j) \right] = 1/k \sum_{j=1}^k E [Z(x_j)] = 1/k \sum_{j=1}^k m = m$$

$$E [Z_k^*] = E \left[1/n \sum_{i=1}^n Z(x'_i) \right] = 1/n \sum_{i=1}^n E [Z(x'_i)] = 1/n \sum_{i=1}^n m = m$$

lo que implica

$$E [Z_k - Z_k^*] = 0 \quad (5.3)$$

Para la varianza de estimación se tiene:

$$\sigma_E^2 = E [(Z_K - Z_K^*)^2] = E [Z_K^2] + E [Z_K^{*2}] - 2 E [Z_K Z_K^*] \quad (5.4)$$

donde

$$E [Z_K^2] = E \left[\left(\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K Z(x_j) \right)^2 \right] = E \left[\frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^K \sum_{\ell=1}^K Z(x_j) Z(x_\ell) \right]$$

$$= \frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^K \sum_{\ell=1}^K E [Z(x_j) Z(x_\ell)] = \frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^K \sum_{\ell=1}^K [C(x_j - x_\ell) + m^2]$$

dado que

$$C(h) = C(x-y) = E [Z(x) Z(y)] - m^2$$

Similarmente

$$E [Z_K^{*2}] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [C(x_i' - x_j') + m^2], \text{ y}$$

$$E [Z_K Z_K^*] = \frac{1}{Kn} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n [C(x_j - x_i') + m^2]$$

Sustituyendo en la expresión (5.4) obtenemos:

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{K^2} \sum_{j=1}^K \sum_{\ell=1}^K C(x_j - x_\ell) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^n C(x_i' - x_\ell') - \frac{2}{Kn} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n C(x_j - x_i') \quad (5.5)$$

Denotando por $\bar{C}(K, n)$ al valor medio de la covarianza $C(h)$ cuando un extremo del vector h describe al conjunto de puntos $\{z(x_j), j=1, \dots, K\}$ y el otro extremo describe independientemente al conjunto de puntos $\{z(x_i'), i=1, \dots, n\}$, es decir,

$$\bar{C}(K, n) = \frac{1}{Kn} \sum_{j=1}^K \sum_{i=1}^n C(x_j - x_i')$$

entonces la expresión anterior puede escribirse como:

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(K, K) + \bar{C}(n, n) - 2\bar{C}(K, n) \quad (5.6)$$

Caso Continuo.

Consideremos ahora a los K puntos x_j localizados dentro del volumen V con centro en el punto x , y a los n puntos x_i' dentro del volumen v con centro en el punto x' . Si K y n tienden hacia infinito, entonces las medias aritméticas Z_K y Z_K^* tenderán hacia los valores medios en V y v de la variable puntual $z(y)$, esto es:

$$Z_K \rightarrow z_V(x) = \frac{1}{V} \int_V z(y) dy, \text{ y } Z_K^* \rightarrow z_v(x') = \frac{1}{v} \int_{v(x')} z(y) dy$$

Los valores medios $z_V(x)$ y $z_v(x')$ son interpretados como realizaciones particulares de las dos v.a.r. $Z_V(x)$ y $Z_v(x')$. Bajo la hipótesis de estacionaridad de segundo orden, es fácil demostrar que $Z_v(x')$ es insesgado y que además, paralelamente al caso discreto, la varianza de estimación estará dada por:

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) + \bar{C}(V, V) - 2\bar{C}(V, V) \quad (5.7)$$

Empleando la relación $C(h) = C(0) - \gamma(h)$, la expresión anterior resulta:

$$\sigma_E^2 = 2\bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(V, V) \quad (5.8)$$

donde $\bar{\gamma}(V, V)$, por ejemplo representa el valor medio de $\gamma(h)$ cuando un extremo del vector h describe el dominio $V(x)$ y el otro extremo describe independientemente el dominio $V(x')$.

Case Híbrido.

En este caso se trata de estimar el valor medio $z_V(x)$ de un bloque de volumen Z_V por medio de una combinación lineal Z_K^* de n datos conocidos $\{z(x_i), i=1, \dots, n\}$. En términos de variables aleatorias regionalizadas tenemos:

$$Z_V(x) = 1/V \int_{V(x)} Z(y)dy, \quad y \quad Z_K^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

Z_K^* será insesgado si la condición $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ se cumple ya que $E[Z_V] = m$ y $E[Z_K^*] = E[\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)] = m \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Procediendo análogamente a los dos casos anteriores, de la expresión (5.4), se tiene:

$$\sigma_E^2 = E[(Z_V - Z_K^*)^2]$$

$$\sigma_E^2 = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_i \lambda_k \bar{\gamma}(x_i - x_k) \quad (5.9)$$

donde $\bar{\gamma}(x_i, V)$ denota el valor medio de $\gamma(h)$ cuando un extremo del vector h está fijo en el punto x_i y el otro extremo describe independientemente el volumen V .

Observaciones

- 1.- Las fórmulas de la varianza de estimación son completamente generales para cualesquiera que sean los dominios v y V .
- 2.- La función $2\gamma(h)$ puede interpretarse también como la varianza de estimación generada al tratar de estimar la variable $Z(x)$ por medio de la variable $Z(x+h)$:

$$\sigma_E^2 = E[(Z(x+h) - Z(x))^2] = 2\gamma(x+h, x) - \cancel{\gamma(x, x)} - \cancel{\gamma(x+h, x+h)} = 2\gamma(h)$$

- 3.- Las fórmulas de σ_E^2 expresan cuatro conceptos esenciales e intuitivos que todo buen proceso de estimación debiera de expresar:

(i) Análisis del término $\bar{\gamma}(V, V)$ (ecuación 5.8). Dado que $\gamma(h)$ se incrementa con h , entonces $\gamma(V, V)$ se incrementará con el tamaño de V . Considerando fijos al dominio v y a la distancia (v, V) , será mas fácil estimar el valor medio de un bloque V , que el valor asociado a un punto desconocido ($V=x$). Si V permanece fijo, el término $\bar{\gamma}(V, V)$ y consecuentemente σ_E^2 , dependerán de la geometría de V .

(ii) Análisis del término $\bar{\gamma}(V, v)$ (ecuación 5.5). Si la distancia (v, V) se incrementa, así lo hace el término $\bar{\gamma}(v, V)$ y por consiguiente σ_E^2 también se incrementa. Con esto se demuestra la importancia de la geometría, la de la información disponible (v) y la del volumen que se estima (V) .

(iii) Análisis del término $\bar{\gamma}(v, v)$ (ecuación 5.8). Si el dominio v crece, $\bar{\gamma}(v, v)$ también crece y σ_E^2 disminuye. Considerando fijos a los volúmenes V y v , y a la distancia (v, V) , la varianza de estimación dependerá de la configuración de la información v . En la figura 5.2 por ejemplo, el bloque V estará mejor estimado por las dos muestras v_1 y v_2 cuando éstas están separadas, que por las dos muestras v_1^j y v_2^j cuando éstas están juntas. En efecto, $\bar{\gamma}(v_1^j + v_2^j, v_1^j + v_2^j)$ será menor que $\bar{\gamma}(v_1 + v_2, v_1 + v_2)$. Esta noción intuitiva de la importancia en la configuración (geometría) de los datos disponibles formalizada en geostatística a través del término $\bar{\gamma}(v, v)$, es ignorada por los métodos más comunes de estimación.

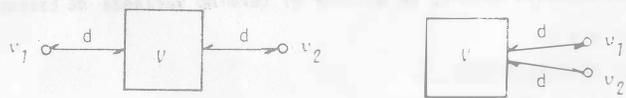


FIGURA 5.2

(iv) Análisis de la función $\gamma(h)$. La calidad de la estimación dependerá obviamente de las características estructurales del fenómeno (grado de regularidad y continuidad) expresadas a través de $\gamma(h)$. En yacimientos petrolíferos, la variación en los valores de la permeabilidad será mucho más continua en dirección horizontal que en dirección vertical. Considerando esta anisotropía en el semivariograma, se asignará, en la estimación de V , un mayor peso a la muestra v_1 que se encuentra en el mismo estrato que V , que a la muestra v_2 de un estrato diferente (Figura 5.3)

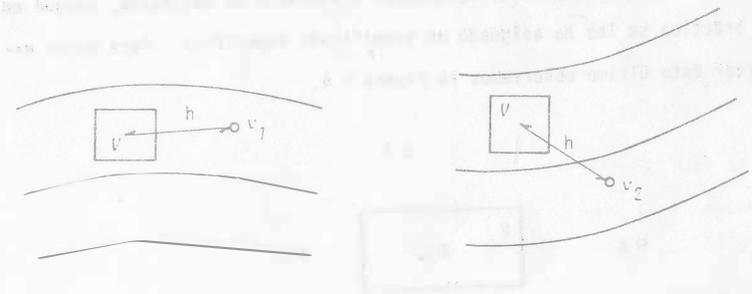


FIGURA 5.3

- 5.- La fórmula (5.9) expresa σ_E^2 como una función lineal de los n pesos λ_i . El método de estimación del Kriging determina el conjunto óptimo de pesos λ_i de modo tal que σ_E^2 sea minimizada y la condición de insesgamiento ($\sum \lambda_i = 1$) sea satisfecha. Por ello el Kriging es reconocido como el mejor estimador lineal insesgado.
- 6.- La expresión de σ_E^2 en la fórmula (5.9) es general, ya que puede apli

carse sobre cualquier volumen V y para cualquier conjunto $\{z_i, i=1, \dots, n\}$ sujeta a la condición $\sum z_i = 1$. De aquí que esta fórmula pueda emplearse en el cálculo de la varianza de estimación de otros métodos lineales de estimación, tales como el método de "ponderación con respecto al inverso del cuadrado de la distancia".

VARIANZA DE ESTIMACION Y VARIANZA DE EXTENSION

Estrictamente hablando no existe diferencia conceptual alguna entre las nociones de *varianza de estimación* y *varianza de extensión*, aunque en la práctica se les ha asignado un significado específico. Para mejor explicar esto último observemos la Figura 5.4.

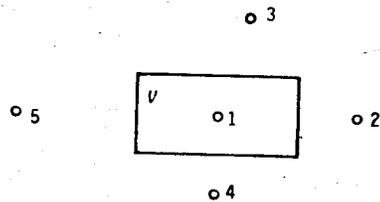


FIGURA 5.4

Supongamos que se tiene un bloque a estimar V , rodeado de 5 muestras con soporte v cuyos valores son conocidos, sean éstos z_1, z_2, z_3, z_4 y z_5 . Supóngase los dos casos siguientes:

i) Estimar V empleando únicamente la muestra 1, localizada dentro del bloque.

ii) Estimar V utilizando las 5 muestras disponibles.

De acuerdo a lo visto en el Caso Discreto y según las fórmulas (5.6) y (5.8), para el caso i) se tiene:

$$Z^* = Z_1$$

$$\sigma_E^2 = 2 \bar{\gamma}(V, v) - \bar{\gamma}(V, V)$$

(lo que se ha hecho es *asociar* el valor conocido z_1 al bloque V).

Para el caso ii) se tiene:

$$Z^* = \frac{1}{5} (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5)$$

$$\sigma_E^2 = 2 \bar{\gamma}(V, v) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v)$$

(donde se ha *estimado* el bloque V en base a las 5 muestras conocidas v).

De ahí que, cuando se tenga la extensión de una muestra individual a su "zona de influencia" se emplee el término *Varianza de Extensión* ($\bar{\gamma}(v, v) = 0$) y cuando se tenga la extensión de un número mayor de muestras a un bloque o al depósito entero, se utilice el término *Varianza de Estimación* ($\bar{\gamma}(v, v) \neq 0$).

Cálculo de los valores medios $\bar{\gamma}$.

La función $\bar{\gamma}(v, V)$ introducida anteriormente se emplea en el cálculo de la *varianza de estimación* y también, como veremos más adelante, forma parte fundamental del método de estimación del Krigeage.

$$\bar{\gamma}(v, V) = 1/(vV) \int_v dx \int_V \gamma(x-x') dx' \quad (5.10)$$

Existen dos métodos para evaluar la función $\bar{\gamma}$:

- (i) Mediante el cálculo numérico. Los dominios v y V pueden discretizarse permitiendo emplear sumatorias (\sum) en vez de integrales. (El uso constante de las computadoras ha hecho de este método el más empleado).
- (ii) Mediante el cálculo directo de las integrales.- Asumiendo un cierto modelo $\gamma(h)$ - exponencial, esférico, lineal, etc. - y ciertos dominios v y V , es posible calcular las integrales que aparecen en la definición de $\bar{\gamma}$. Sin embargo, las expresiones que resultan de resolver las integrales en ocasiones son muy largas y difíciles de evaluar por lo cual se emplean ciertas funciones que se conocen por *funciones auxiliares*, las que se evalúan por medio de gráficas o bien directamente a través de su expresión analítica.

FUNCIONES AUXILIARES.

Existen cuatro funciones auxiliares básicas representadas por las letras α , X , F y H , y definidas sobre dominios de forma rectangular en una y dos dimensiones.

Una dimensión.- Sea AB el segmento de longitud L representado por la Figura 5.5-A, y sea $\gamma(h)$ un cierto modelo de variabilidad estructural.- La función auxiliar $X(L)$ se define como el valor medio de $\gamma(h)$ cuando un extremo del vector h está fijo en el punto A y el otro extremo describe -

el segmento AB .

$$X(L) = \bar{\gamma}(A, AB) = 1/L \int_0^L \gamma(u) du$$

La función $F(L)$ se define como el valor medio de $\gamma(h)$ cuando los dos extremos del vector h , describen independientemente el segmento AB .

$$F(L) = \bar{\gamma}(AB, AB) = 1/L^2 \int_0^L du \int_0^L \gamma(u-u') du'$$

Dos dimensiones.- Sea $ABCD$ el rectángulo ($L \times l$) representado en la Figura 5.5-B. La función $\alpha(L; l)$ se define como el valor

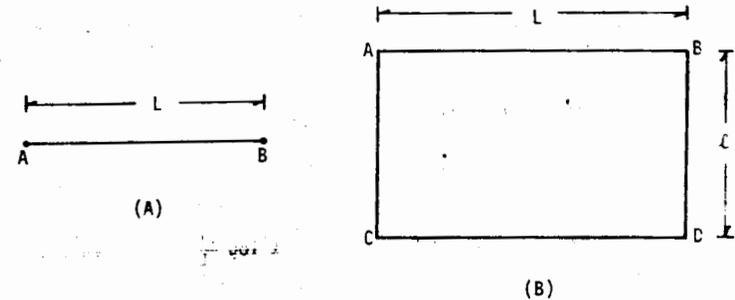


FIGURA 5.5

medio de $\gamma(h)$ cuando un extremo del vector h describe el lado AC y el otro extremo describe independientemente el lado BD .

$$\alpha(L; l) = \bar{\gamma}(AC, BD)$$

Procedimiento similarmente, podemos definir las siguientes funciones auxiliares:

$$\begin{aligned} \alpha(L; \ell) &= \bar{\gamma}(AB, CD) \\ X(L; \ell) &= \bar{\gamma}(AC, ABCD) \\ F(L; \ell) &= \bar{\gamma}(ABCD, ABCD) \\ H(L; \ell) &= \bar{\gamma}(A, ABCD) \end{aligned}$$

Existe un gran número de relaciones entre las diversas funciones auxiliares, las cuales, por falta de tiempo, no se expondrán aquí.

Para el caso específico de un modelo isotrópico lineal $\gamma(h) = r|h|$ se tienen las siguientes funciones auxiliares:

(i) Una dimensión

$$X(L) = L/2, \quad F(L) = L/3 \quad (5.11)$$

(ii) Dos dimensiones

$$\alpha(L; \ell) = 1/3 u + 2/3 L^2/\ell^2 (L-u) + L^2/\ell \log \frac{\ell+u}{L} \quad (5.12)$$

$$X(L; \ell) = \frac{1}{6} \frac{L^3}{\ell^2} + u \left(\frac{1}{4} - \frac{L^2}{6\ell^2} \right) + \frac{1}{3} \frac{L}{\ell} \log \frac{\ell+u}{L} + \frac{1}{12} \frac{\ell^2}{L} \log \frac{L+u}{\ell} \quad (5.13)$$

$$F(L; \ell) = u \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15} \frac{L^2}{\ell^2} - \frac{1}{15} \frac{\ell^2}{L^2} \right) + \frac{1}{15} \left(\frac{L^3}{\ell^2} + \frac{\ell^3}{L^2} \right) + \frac{1}{6} \frac{L^2}{\ell} \log \frac{\ell+u}{L} + \frac{\ell^2}{6L} \log \frac{L+u}{\ell} \quad (5.14)$$

$$H(L; \ell) = \frac{1}{3} u + \frac{\ell^2}{6L} \log \frac{L+u}{\ell} + \frac{L^2}{6\ell} \log \frac{\ell+u}{L} \quad (5.15)$$

donde $u = \sqrt{L^2 - \ell^2}$

Para el caso particular donde $L=\ell$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha(\ell; \ell) &= 1.0765 \ell, & X(\ell; \ell) &= 0.7351 \ell \\ F(\ell; \ell) &= 0.5213 \ell, & H(\ell; \ell) &= 0.7652 \ell \end{aligned}$$

Nota: EXPRESIONES SIMILARES PARA LOS CASOS DE MODELOS EXPONENCIAL, LOGARITMICO, ESFERICO Y r^0 , ASI COMO ALGUNAS GRAFICAS PARA LOS MODELOS ESFERICO Y EXPONENCIAL, PUEDEN ENCONTRARSE EN MINING GEOSTATISTICS (JOURNAL & HUIJBREGTS-1978).

EJEMPLOS.

1.- La varianza de estimación asociada a la evaluación de un segmento AB de longitud ℓ a partir de una muestra central 0 se obtiene empleando la fórmula (5.8) como sigue:

$$\sigma_E^2 = 2 \bar{\gamma}(0, AB) - \bar{\gamma}(AB, AB) - \bar{\gamma}(0, 0)$$

donde, debido a la simetría

$$\bar{\gamma}(0, AB) = \bar{\gamma}(0, OA) = \bar{\gamma}(0, OB) = X(\ell/2)$$

$$\bar{\gamma}(AB, AB) = F(\ell)$$

$$y \quad \bar{\gamma}(0, 0) = \gamma(0) = 0$$

Finalmente, la varianza de estimación resulta igual a:

$$\sigma_E^2 = 2 X(\lambda/2) - F(\lambda)$$

2.- La varianza de estimación de un segmento AB de longitud λ estimado por dos muestras localizadas en los extremos del segmento.

Sea $\xi = \{A + B\}$ las dos muestras, entonces:

$$\sigma_E^2 = 2\bar{Y}(\xi, AB) - \bar{Y}(AB, AB) - \bar{Y}(\xi, \xi)$$

donde debido a la simetría

$$\bar{Y}(\xi, AB) = \bar{Y}(A, AB) = \bar{Y}(B, AB) = \lambda(\lambda),$$

$$\bar{Y}(AB, AB) = F(\lambda)$$

$$\text{y } \bar{Y}(\xi, \xi) = \bar{Y}(A, \xi) = 1/2 [\gamma(A, A) + \gamma(A, B)] = 1/2 \gamma(\lambda)$$

finalmente

$$\sigma_E^2 = 2X(\lambda) - F(\lambda) - 1/2 \gamma(\lambda)$$

3.- Sea un bloque de dimensiones (L, λ) , con una muestra localizada en una de las esquinas del mismo. Según la fórmula (5.8) las expresiones de cada término son:

$$\bar{Y}(V, v) = H(L, \lambda)$$

$$\bar{Y}(V, V) = F(L, \lambda) \quad \text{y}$$

$$\bar{Y}(v, v) = 0$$

por lo que finalmente la varianza de estimación resulta:

$$\sigma_E^2 = 2 H(L, \lambda) - F(L, \lambda)$$

4.- Sea un bloque de dimensiones (L, λ) , con dos muestras en las esquinas diagonalmente opuestas. De acuerdo a la fórmula (5.9) se tiene que:

$$\bar{Y}(V, v) = H(L, \lambda)$$

$$\bar{Y}(V, V) = F(L, \lambda)$$

$$\bar{Y}(v, v) = 1/2 \gamma(u)$$

donde $u = \sqrt{L^2 + \lambda^2}$. Por ende, la varianza de estimación será igual a:

$$\sigma_E^2 = 2 H(L, \lambda) - F(L, \lambda) - 1/2 \gamma(u).$$

CAPITULO VI

EL KRIGEAGE

El método del Krigeage es una técnica de estimación local la cual proporciona el mejor estimador lineal insesgado (o imparcial) de las características desconocidas del fenómeno en estudio. El objetivo de la estimación local es encontrar el mejor estimador del valor medio de una variable regionalizada asociada a un dominio limitado de dimensiones menores a las dimensiones de la zona de quasi-estacionaridad del fenómeno. Una estimación *global*, por lo contrario, considera dimensiones mayores a las del límite de quasi-estacionaridad, llegando a abarcar en ocasiones zonas heterogéneas.

La información requerida por el método del Krigeage consiste de: un conjunto de datos (permeabilidades, porosidades, leyes de mineral, tiempos de reflexión, etc.), e información estructural, es decir, el modelo del semivariograma que caracteriza la variabilidad de la zona estudiada.

El Sistema del Krigeage.- Sea $Z(x)$ una función aleatoria, de soporte *puntual* y estacionaria de segundo orden con

$$\text{media } E [Z(x)] = m$$

$$\text{covarianza } E [Z(x+h)Z(x)] - m^2 = C(h) \quad y$$

$$\text{variograma } E [(Z(x+h) - Z(x))^2] = 2 \gamma(h)$$

El objetivo es estimar el valor medio de la variable regionalizada $Z_V(x_0)$

asociada al dominio $V(x_0)$ con centro en el punto x_0 . Los datos experimentales pueden estar dados por el conjunto de valores $\{Z_{V_\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, n\}$, donde cada valor Z_{V_α} está definido sobre el soporte v_α con centro x_α .

El valor $Z_V(x_0)$ será estimado linealmente, a partir de los n datos experimentales, por el estimador Z_K^* ,

$$Z_K^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z_{V_\alpha} \quad (6.1)$$

Los n coeficientes λ_α se calcularán asegurando que el estimador Z_K^* sea insesgado y que la varianza de estimación sea mínima.

Para satisfacer la condición de insesgamiento basta imponer la condición $\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = 1$, ya que sólo así se garantiza que el valor esperado de Z_V sea igual al valor esperado de Z_K^* , es decir,

$$E [Z_K^*] = E [\sum \lambda_\alpha Z_{V_\alpha}] = \sum \lambda_\alpha m = m = E [Z_V]$$

En cuanto a la varianza de estimación σ_E^2 , se tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_E^2 = E [(Z_V - Z_K^*)^2] = E [Z_V^2] - 2E [Z_V Z_K^*] + E [Z_K^{*2}]$$

donde

$$E [Z_V^2] = \bar{C}(V, V) + m^2 \quad (\text{ver desarrollo de la fórmula de } \sigma_E^2)$$

$$E [Z_V Z_K^*] = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, V) + m^2 \quad y$$

$$E [Z_K^{*2}] = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) + m^2$$

Sustituyendo en la expresión de σ_E^2 se obtiene

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, V) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta})$$

Aplicando el método de los multiplicadores de Lagrange es posible encontrar el conjunto óptimo de coeficientes λ_{α} sujetos a la condición

$\sum \lambda_{\alpha} = 1$. Al igualar a cero las n derivadas parciales:

$$\partial / \partial \lambda_{\alpha} [\sigma_E^2 - 2\mu \sum \lambda_{\alpha}] = 0, \quad \forall \alpha = 1 \text{ a } n$$

y al considerar la función restricción $\sum \lambda_{\alpha} = 1$, se define lineal de $(n+1)$, ecuaciones y $(n+1)$ incógnitas (los n coeficientes λ_{α} más el multiplicador de Lagrange μ), el cual se denomina *Sistema del Krigage*

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) - \mu = \bar{C}(v_{\alpha}, V), \quad \forall \alpha = 1 \text{ a } n \quad (6.2)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} = 1$$

Una vez resuelto el sistema para los coeficientes λ_{α} , la obtención de la varianza de estimación, o varianza del Krigage, es inmediata:

$$\sigma_K^2 = \bar{C}(V, V) + \mu - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, V) \quad (6.3)$$

Haciendo uso de la relación $C(h) = C(0) - \gamma(h)$, el sistema del Krigage también puede expresarse en función del semivariograma $\gamma(h)$:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \bar{\gamma}(v_{\alpha}, v_{\beta}) + \mu = \bar{\gamma}(v_{\alpha}, V), \quad \forall \alpha = 1 \text{ a } n \quad (6.4)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} = 1$$

$$y \quad \sigma_K^2 = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{\gamma}(v_{\alpha}, V) + \mu - \bar{\gamma}(V, V) \quad (6.5)$$

Observaciones:

- 1.- El sistema del Krigage proporciona una solución única toda vez que la matriz de covarianza $\bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta})$ sea una matriz definida positivamente.
- 2.- El método del Krigage es un interpolador *exacto*, esto es, si el soporte V a estimar coincide con cualquiera de los soportes v_{α} , entonces el estimador del Krigage Z_K^* será idéntico al dato conocido Z_{α} , asociado al soporte $v_{\alpha} \equiv V$. Además, la varianza del Krigage σ_K^2 será igual a cero.

- 3.- El sistema del Krigage es aplicable para cualesquiera que sean los soportes v_a y V , y para cualquiera que sea el modelo estructural $\gamma(h)$ (ó $C(h)$).
- 4.- El sistema del Krigage y la varianza del Krigage c_k^2 depende del modelo estructural $\gamma(h)$ o $C(h)$ y de la posición relativa de los soportes v_a y V , pero no dependen de los valores particulares de los datos Z_{v_a} . Por lo tanto, una vez que la configuración sea conocida, anterior a cualquier perforación (o campaña sismológica), el sistema del Krigage puede resolverse y la varianza del Krigage pronosticarse. De esta manera, la varianza del Krigage puede emplearse como un índice comparativo entre los costos de perforación (o de la campaña sismológica) y las utilidades del pronóstico.

Ejemplo del Método del Krigage.- Consideremos en el espacio de dos dimensiones a la función aleatoria $Z(u, v)$ caracterizada por el semivariograma lineal e isotrópico $\gamma(h) = \gamma(r)$, $r=|h|$. Se desea estimar el valor medio Z_V de un panel cuadrado de lado ℓ , a partir de una configuración no-simétrica de cuatro datos de soporte v , tal y como se muestra en la Figura 6.1

S_1 es una muestra central y S_3, O_4 y O_5 son muestras localizadas en la periferia.

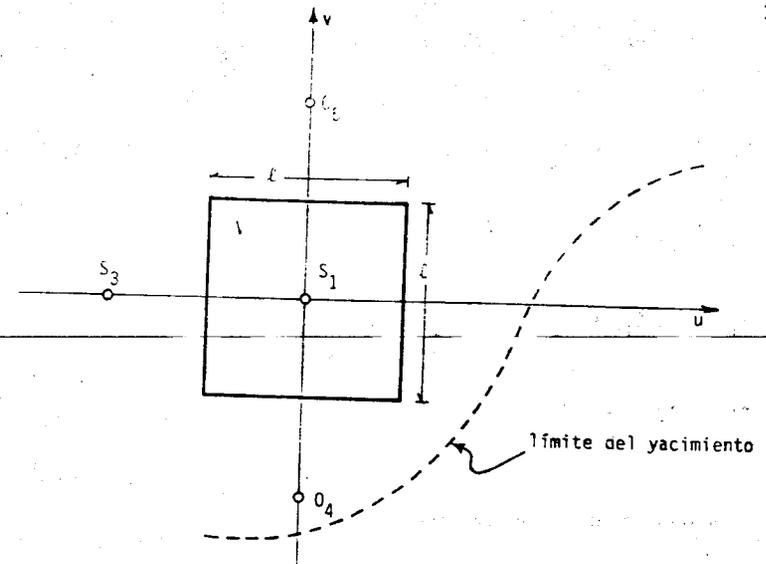


FIGURA 6.1

Por razones de simetría, y debido a que $\gamma(h)$ es isotrópico, los datos O_4 y O_5 recibirán el mismo peso y por lo tanto pueden agruparse y formar el conjunto $S_2 = \{O_4 \cup O_5\}$ de soporte $2v$. El estimador lineal Z_K^* estará definido como:

$$Z_K^* = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} Z(S_{\alpha}) \quad \text{con} \quad Z(S_2) = 1/2 [Z(O_4) + Z(O_5)]$$

entonces, el sistema del Krigage estará formado por las 4 ecuaciones siguientes:

$$\lambda_1 \bar{\gamma}(S_1, S_1) + \lambda_2 \bar{\gamma}(S_1, S_2) - \lambda_3 \bar{\gamma}(S_1, S_3) - \nu = \bar{\gamma}(S_1, V)$$

$$\lambda_1 \bar{\gamma}(S_2, S_1) + \lambda_2 \bar{\gamma}(S_2, S_2) + \lambda_3 \bar{\gamma}(S_2, S_3) - \nu = \bar{\gamma}(S_2, V)$$

$$\lambda_1 \bar{\gamma}(S_3, S_1) + \lambda_2 \bar{\gamma}(S_3, S_2) + \lambda_3 \bar{\gamma}(S_3, S_3) - \nu = \bar{\gamma}(S_3, V)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

y la varianza del Kriging será igual a:

$$\sigma_K^2 = \lambda_1 \bar{\gamma}(S_1, V) + \lambda_2 \bar{\gamma}(S_2, V) + \lambda_3 \bar{\gamma}(S_3, V) + \nu - \bar{\gamma}(V, V)$$

donde

$$\bar{\gamma}(S_1, S_1) = \bar{\gamma}(S_3, S_3) = \bar{\gamma}(v, v)$$

$$\bar{\gamma}(S_2, S_2) = \bar{\gamma}(0_4, S_2) = 1/2 [\bar{\gamma}(v, v) + \bar{\gamma}(2\ell)]$$

(asumiendo las dimensiones de v despreciables con respecto a la longitud ℓ).

$$\bar{\gamma}(S_1, S_3) = \bar{\gamma}(S_1, S_2) = \gamma(\ell)$$

$$\bar{\gamma}(S_2, S_3) = \gamma(\ell\sqrt{2})$$

$$\bar{\gamma}(S_1, V) = H(\ell/2; \ell/2)$$

$$\bar{\gamma}(S_2, V) = \bar{\gamma}(0_4, V) = 2/\ell^2 \left[\frac{3\ell^2}{4} H\left(\frac{3\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) - \frac{\ell^2}{4} H\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right) \right]$$

$$\bar{\gamma}(S_2, V) = \frac{3}{2} H\left(\frac{3}{2}\ell, \frac{\ell}{2}\right) - \frac{1}{2} H\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$$

$$\bar{\gamma}(S_3, V) = \bar{\gamma}(S_2, V)$$

$$\bar{\gamma}(V, V) = F(\ell, \ell)$$

Asumamos ahora, dentro del modelo lineal, las tres alternativas siguientes:

$$(i) \quad \gamma(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ 1 & \text{si } r > 0 \end{cases} \quad \text{efecto de pepita puro}$$

$$(ii) \quad \gamma(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ 1/2 + r & \text{si } r > 0 \end{cases} \quad \text{efecto de pepita}$$

$$(iii) \quad \gamma(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0 \\ 1.92r & \text{si } r > 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Modelo lineal con ausencia} \\ \text{total del efecto de pepita.} \end{array} \right\}$$

Si el soporte v es lo suficientemente pequeño como para considerarlo

puntual, y la longitud l es igual a la unidad, la solución del sistema del Kriguage para cada una de las tres alternativas aportaría los resultados que se presentan en la Tabla 6.1. Estos resultados fueron calculados al resolver los siguientes sistemas:

$$\lambda_2 + \lambda_3 + \mu = 1$$

$$\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{2} + \lambda_3 + \mu = 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu = 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

efecto de pepita puro

$$1.5 \lambda_2 + 1.5 \lambda_3 + \mu = 0.883$$

$$1.5 \lambda_1 + 1.25 \lambda_2 + 1.91 \lambda_3 + \mu = 1.543$$

$$1.5 \lambda_1 + 1.91 \lambda_2 + \mu = 1.543$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

efecto de pepita

$$1.92 \lambda_2 + 1.92 \lambda_3 + \mu = 0.735$$

$$1.92 \lambda_1 + 1.92 \lambda_2 + 1.71 \lambda_3 + \mu = 2.0$$

$$1.92 \lambda_1 + 2.71 \lambda_2 + \mu = 2.0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.0$$

ausencia del efecto de pepita

DIRECCION DEL INCREMENTO DEL "EFECTO PARTIALIA"

Tabla 2.- Estimación del Valor Medio Z_V

Efecto Pepita	Kriguage	ρ_{1i}	ID	ID-2
Puro	$\lambda_1 = .25$	$\lambda_1 = 1$	0.484	0.727
	$\lambda_2 = .50$	$\lambda_2 = 0$	0.344	0.182
	$\lambda_3 = .25$	$\lambda_3 = 0$	0.172	0.091
	$\sigma_K^2 = .25$	$\sigma_E^2 = 1$	0.324	0.553
Parcial	$\lambda_1 = .468$			
	$\lambda_2 = .395$	idem	idem	idem
	$\lambda_3 = .136$			
Total Ausencia	$\sigma_K^2 = .442$	$\sigma_E^2 = 0.734$	0.780	0.671
	$\lambda_1 = .624$			
	$\lambda_2 = .291$	idem	idem	idem
	$\lambda_3 = .084$			
	$\sigma_K^2 = .221$	$\sigma_E^2 = 0.468$	1.23	0.754

Observaciones

- (i) En el caso del efecto de pepita puro, los valores de los coeficientes fueron proporcionales a los soportes $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{\lambda_2}{2}$, o en otras pala-

bras, los coeficientes asociados a cada dato fueron los mismos. Esto no sorprende ya que el efecto de pepita puro caracteriza a un fenómeno donde existe total ausencia de correlación entre los datos.

(ii) A medida que el efecto de pepita disminuye, la influencia del dato S_1 se incrementa (λ_1 va de 0.25 a 0.468). Nótese que el valor del coeficiente de S_2 (de soporte $2v$) es siempre mayor que dos veces λ_3 , el valor del coeficiente de S_3 . Esto es debido al hecho de que S_2 está más cercano a una zona donde existe menor información.

(iii) En la misma Tabla 6.1 se han incluido los valores de los coeficientes evaluados según otros métodos de estimación (polígonos de influencia, inverso de la distancia e inverso del cuadrado de la distancia).

Estos métodos no toman en cuenta las características estructurales del fenómeno, de aquí que produzcan los mismos resultados en las tres alternativas.

(iv) En todos los casos, el Krigeage proporciona al mejor estimador. Dependiendo del grado de correlación, alguno de los otros métodos se acerca al método del Krigeage, pero únicamente un análisis estructural puede decirnos cuál de ellos es el más cercano. Una selección afortunada (ID, por ejemplo) en el caso del efecto de pepita puro, hubiera dado resultados tan aceptables como los del Krigeage. La misma selección, pero en el caso de total ausencia del efecto de pepita, resultaría en errores de estimación de aproximadamente seis

veces el error que se produciría con el método del Krigeage.

Epílogo.- Para aquel lector interesado en la elaboración de un algoritmo del método del Krigeage, resumiremos a continuación los pasos principales del método:

- (i) Selección de los datos Z_{V_α} empleados en la estimación de Z_V .
- (ii) Cálculo de las covarianzas medias $\bar{C}(v_\alpha, v_\beta)$ ó $\bar{Y}(v_\alpha, v_\beta)$
- (iii) Cálculo de las covarianzas medias $\bar{C}(v_\alpha, V)$ ó $\bar{Y}(v_\alpha, V)$
- (iv) Selección del algoritmo más apropiado para la solución del sistema del Krigeage.

El diseño de un buen algoritmo debe de minimizar el tiempo de ejecución a la vez que debe producir resultados aceptables dentro de ciertos límites de aproximación.

Cinco puntos son esenciales en la reducción del tiempo de ejecución:

- 1.- La reducción de la dimensión del sistema del Krigeage.
- 2.- La reducción del número de sistemas a resolver.
- 3.- La rápida evaluación de los valores medios \bar{C} (ó \bar{Y}).
- 4.- La preparación de un archivo de datos convenientemente adaptado al plan del método.
- 5.- La selección de un buen algoritmo para la solución del sistema.

Por lo que al algoritmo se refiere, el enfoque de estos cinco pun

tos puede variar drásticamente de un problema a otro, permitiendo introducir, en algunos casos, simplificaciones importantes.

EL KRIGEAGE UNIVERSAL

En lo que hasta ahora hemos visto, se han asumido condiciones de estacionariedad (o de quasi-estacionariedad) en la función aleatoria $Z(x)$. Pero, ¿qué alternativa puede adoptarse cuando estas condiciones no se satisfacen?. Esto es, cuando el valor esperado de una variable regionalizada depende de la posición de la variable.

$$E [Z(x)] = m(x)$$

o cuando no existe suficiente información en la zona a estudiar como para asumir condiciones de quasi-estacionariedad. El método del *Krigeage Universal* nos da una respuesta a este problema.

Las funciones aleatorias no estacionarias se caracterizan por presentar cierta disposición en sus realizaciones (o valores); estas realizaciones crecen o decrecen más o menos constantemente a lo largo de ciertas direcciones preferenciales. Por ejemplo, el perfil del fondo marino cercano a las márgenes continentales muestra, a medida que se aleja de la costa, una clara tendencia a incrementar su profundidad con el alejamiento. Esta actitud de los valores de las variables aleatorias regionalizadas se denomina *tendencia* (*trend* o *drift*, en inglés y *dérive*, en francés). (Estrictamente hablando, *trend* y *drift* son dos conceptos diferentes -Matheron 1969- los cuales no discutiremos aquí.)

El Krigeage Universal es un método que proporciona un estimador lineal insesgado y toma en cuenta, además, la tendencia. Todo ello a partir del conocimiento de ambos, la forma de la tendencia $E [Z(x)] = m(x)$, y del modelo de la estructura de variabilidad $\gamma(h)$ de la f.a. $Z(x)$.

Por definición, la tendencia $m(x)$ es la media de la f.a. $Z(x)$, $E [Z(x)] = m(x)$. Evaluar el semi-variograma $\gamma(h)$ de $Z(x)$ implica asumir condiciones de estacionariedad, o bien conocer la fórmula de la función $m(x)$; de otra manera, la estimación de $\gamma(h)$ y $m(x)$ debería efectuarse simultáneamente y a partir de la realización única $z(x)$, lo cual sería, rigurosamente hablando, imposible.

La forma de la función $m(x)$ puede estar definida como una combinación lineal de funciones pre-establecidas $f_k(x)$,

$$m(x) = \sum_{k=1}^k a_k f_k(x) \quad (6.6)$$

donde los coeficientes a_k permanecen desconocidos.

La función $m(x)$ podría expresarse de las diversas maneras siguientes:

$$m(x) = a_1 + a_2 x \quad \text{- tendencia lineal (1 dimensión)}$$

$$m(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 \quad \text{- tendencia cuadrática (1 dimensión)}$$

$$m(x) = a_1 + a_2 u + a_3 v + a_4 u^2 + a_5 u v + a_6 v^2 \quad \text{- tendencia cuadrática (2 dimensiones)}$$

etc.

Ecuaciones del Krigeage Universal.

Consideremos la estimación del valor medio $Z_V(x_0)$, definido en el blo que $V(x_0)$, a partir de los n datos $Z_{V\alpha}$ definidos a su vez sobre los so-

portos v_α .

La función aleatoria puntual correspondiente $Z(x)$ es no estacionaria y, dentro de una vecindad $R(x_0)$, presenta una tendencia de forma

$$E [Z(x)] = m(x) = \sum_{\ell=1}^K a_\ell f_\ell(x) \quad (6.7)$$

en donde las funciones $f_\ell(x)$ se asumen conocidas.

$R(x_0)$ representan una vecindad centrada en x_0 e incluye el bloque V y los soportes de todos los datos usados en la estimación. Dentro de $R(x_0)$, la función covarianza $C(h)$ o el semi-variograma $\gamma(h)$ son conocidos.

Entonces, un estimador lineal de $Z_V(x_0)$ puede estar dado de la siguiente forma:

$$Z_K^* = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha Z_{V_\alpha} \quad (6.8)$$

La condición de insesgamiento se establece a partir de:

$$E [Z_V - Z_K^*] = E [Z_V] - E [Z_K^*] = 0$$

donde

$$E [Z_V] = 1/V \int_{V(x_0)} E [Z(x)] dx = \sum_{\ell=1}^K a_\ell \int_{V(x_0)} f_\ell(x) dx$$

denotando, en general, al valor medio de la función $f_\ell(x)$ sobre el soporte v por b_V^ℓ , esto es: $b_V^\ell = 1/v \int_v f_\ell(x) dx$

la expresión anterior se reduce a:

$$E [Z_V] = \sum_{\ell=1}^K a_\ell b_V^\ell$$

Similarmen

$$E [Z_K^*] = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha E [Z_{V_\alpha}] = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \int_{v_\alpha} E [Z(x)] dx$$

$$= \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \int_{v_\alpha} \sum_{\ell=1}^K a_\ell f_\ell(x) dx = \sum_{\ell=1}^K \lambda_\alpha \int_{v_\alpha} a_\ell f_\ell(x) dx$$

Para obtener la condición de insesgamiento basta imponer las K condiciones siguientes:

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha b_{V_\alpha}^\ell = b_V^\ell, \quad \forall \ell=1 \text{ a } K$$

Como puede observarse en esta última expresión, en nada intervienen los coeficientes a_ℓ de la tendencia; además esta condición elimina todos los términos donde la tendencia $m(x)$ aparece, permitiendo reducir la expresión de la varianza de estimación:

$$\begin{aligned} \sigma_K^2 &= \text{Var} [Z_V - Z_K^*] = E [\{ Z_V - Z_K^* - (E [Z_V] - E [Z_K^*]) \}^2] \\ &= E [(Z_V - Z_K^*)^2] \end{aligned}$$

Repetiendo el procedimiento seguido en el método del Krigage (bajo condiciones de estacionaridad), la varianza de estimación puede escribirse también en función de la covarianza:

$$E [(Z_V - Z_K^*)^2] = \bar{C}(V, V) - 2 \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \bar{C}(V, v_{\alpha}) + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta})$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\ell}) + \sum_{\ell=1}^k \mu_{\ell} b_{V_{\ell}}^{\ell} = \bar{C}(v_{\alpha}, V), \quad \alpha = 1 \text{ a } n$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} b_{V_{\ell}}^{\ell} = b_{V_{\ell}}^{\ell}, \quad \forall \ell = 1 \text{ a } k \quad (6.10)$$

La minimización de la varianza de estimación estará sujeta, en este caso, a las K condiciones de inesgamiento establecidas arriba. Empleando el método de los multiplicadores de Lagrange se obtiene un sistema de n+K ecuaciones lineales con n+K incógnitas (los n coeficientes, y los K multiplicadores de Lagrange μ_k). Este sistema se denomina *Sistema del Krigage Universal*:

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} \bar{C}(v_{\alpha}, v_{\beta}) - \sum_{\ell=1}^k \mu_{\ell} b_{V_{\ell}}^{\ell} = \bar{C}(v_{\alpha}, V), \quad \forall \alpha = 1 \text{ a } n \quad (6.9)$$

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} b_{V_{\ell}}^{\ell} = b_{V_{\ell}}^{\ell}, \quad \forall \ell = 1 \text{ a } K$$

donde la mínima varianza de estimación correspondiente queda igual a:

$$\sigma_K^2 = \bar{C}(V, V) + \sum_{\ell=1}^k \mu_{\ell} b_{V_{\ell}}^{\ell} - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, V)$$

o escrito en términos de la función semivariograma $\gamma(h)$:

y

$$\sigma_K^2 = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} \bar{C}(v_{\alpha}, V) + \sum_{\ell=1}^k \mu_{\ell} b_{V_{\ell}}^{\ell} - \bar{C}(V, V)$$

El caso del Krigage estacionario puede verse como un caso particular del Krigage Universal cuando K es idéntica a 1, es decir, para tendencias de la forma

$$m(x) = a_1 f_1(x) = a_1, \quad \text{con } f_1(x) = 1, \quad \forall x.$$

CAPITULO VII

ESTIMACION DE RESERVAS

$$z_V(x_i) = 1/v \int z(y) dy$$

y el valor medio de la variable en el bloque V será:

Estimación de Reservas In-Situ

Entre las herramientas de la geoestadística, aparte del variograma y de la varianza de estimación, existe otra herramienta conocida como "varianza de dispersión" la cual es de gran utilidad en la solución de aquellos problemas relacionados con la estimación de reservas.

En ingeniería minera, por ejemplo, conocer el valor medio de la ley de mineral en un cierto bloque v de un yacimiento, es de poca utilidad - si no se tiene también una idea de la variabilidad o dispersión de los valores de las leyes de mineral asociados a las unidades de producción v , localizadas dentro de V . En la explotación del yacimiento, la medida de la variación diaria de la producción es uno de los parámetros más importantes que se consideran en la selección adecuada del equipo (molinos, bancos de flotación, etc.).

Varianza de Dispersión

Consideremos un bloque V centrado en el punto x y dividido en N unidades iguales $v(x_i)$ centrados en los puntos x_i : $V = \sum_{i=1}^N v_i = Nv$.

Sea $z(y)$ una variable regionalizada puntual. El valor medio de la variable en cada unidad $v(x_i)$ será:

$$z_V(x) = 1/V \int z(y) dy = 1/N \sum_{i=1}^N z_V(x_i)$$

Considerando los N valores $z_V(x_i)$ y la media $z_V(x)$, es posible calcular la varianza experimental, es decir:

$$s^2(x) = 1/N \sum_{i=1}^N (z_V(x) - z_V(x_i))^2$$

Sin embargo, en la práctica, en la etapa de evaluación los valores verdaderos $z_V(x_i)$ de las unidades v_i , así como el valor medio $z_V(x)$ son desconocidos. El problema es, otra vez, estimar las dos características principales de la distribución de los valores $z_V(x_i)$, es decir, la media $z_V(x)$ y la varianza $s^2(x)$.

Si $z(y)$ es interpretada como una realización de la función aleatoria $Z(y)$, entonces $z_V(x_i)$ y $z_V(x)$ aparecerán como realizaciones de las funciones aleatorias $Z_V(x_i)$ y $Z_V(x)$, respectivamente.

Consecuentemente, $S^2(x)$ se interpretará como una realización de la f.a. $S^2(x)$ definida en el punto x .

$$S^2(x) = 1/N \sum_{i=1}^N (Z_V(x) - Z_V(x_i))^2$$

Bajo la hipótesis de estacionaridad de la función aleatoria puntual $Z(y)$, el valor esperado o media de la f.a. $S^2(x)$ es, por definición, la varianza de dispersión de las unidades v dentro de V , representada como:

$$D^2(v/V) = E [S^2(x)] = E \left[1/N \sum_{i=1}^N (Z_V(x) - Z_V(x_i))^2 \right]$$

Generalizando para el caso continuo se tiene:

$$S^2(x) = 1/V \int_{V(x)} (Z_V(x) - Z_V(y))^2 dy$$

y

$$D^2(v/V) = E \left[1/V \int_{V(x)} (Z_V(x) - Z_V(y))^2 dy \right], \quad v \ll V$$

o bien

$$D^2(v/V) = 1/V \int_{V(x)} E [(Z_V(x) - Z_V(y))^2] dy$$

$$= 1/V \int_{V(x)} \sigma_E^2(V(x), v(y)) dy, \quad v \ll V$$

La varianza de dispersión aparece entonces como el valor medio sobre $V(x)$ de la varianza de estimación introducida al pretender calcular $Z_V(x)$ empleando $Z_V(y)$. Recordando la fórmula de la varianza de estimación, el término $\sigma_E^2(V(x), v(y))$ puede escribirse como:

$$\sigma_E^2(V(x), v(y)) = \bar{C}(V(x), V(x)) + \bar{C}(v(y), v(y)) - 2\bar{C}(V(x), v(y))$$

dado que $C(h)$ es estacionaria (no depende de la posición x ó y), podemos escribir:

$$\bar{C}(V(x), V(x)) = \bar{C}(V, V), \quad \forall x$$

$$y \quad \bar{C}(v(y), v(y)) = \bar{C}(v, v), \quad \forall y$$

Sustituyendo en la última expresión de la varianza de dispersión $D^2(v/V)$, obtenemos:

$$D^2(v/V) = 1/V \int_{V(x)} \{ \bar{C}(V, V) + \bar{C}(v, v) - 2\bar{C}(V(x), v(y)) \} dy$$

donde

$$1/V \int_{V(x)} \bar{C}(V(x), v(y)) dy = \bar{C}(V(x), V(x)) = \bar{C}(V, V).$$

Finalmente

$$D^2(v/V) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(V, V)$$

o en términos del semivariograma $\gamma(r)$

$$D^2(v/V) = \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v)$$

La propiedad de aditividad de la varianza de dispersión puede ser establecida como una consecuencia de la linealidad en la expresión de $D^2(v/V)$. Esta propiedad encontrada experimentalmente por D. G. Krige establece lo siguiente:

$$D^2(v/G) = D^2(v/V) + D^2(V/G), \text{ si } v \subset V \subset G.$$

La dispersión de la unidad v dentro del depósito G es igual a la suma de la dispersión de v dentro del bloque V y la dispersión de los bloques V dentro del depósito G . Esta propiedad se le conoce como *Relación de Krige*.

Nota: La varianza de dispersión aumenta cuando el tamaño del soporte v disminuye.

$$D^2(v/G) \geq D^2(V/G) \text{ si } v < V$$

Si v es puntual y V es infinitamente grande, entonces $D^2(0/\infty) =$

$$\bar{\gamma}(\infty, \infty) - \bar{\gamma}(0, 0) = \gamma(\infty) - \gamma(0) = C(0).$$

Estimación de Reservas In-Situ

Una vez efectuadas las estimaciones locales, el siguiente paso le corresponde a la estimación global, es decir, la estimación correspondiente a toda la zona de estudio D (Figura 7.1).

La estimación global puede llevarse a cabo simplemente ponderando la diversas estimaciones locales.

$$Z_D^* = 1/D \sum_i V_i Z_{V_i}^*$$

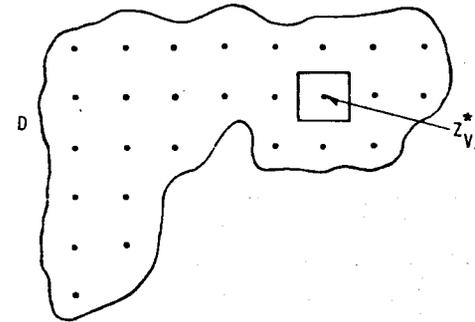


FIGURA 7.1

Las varianzas de estimación locales, sin embargo, no pueden combinarse tan fácilmente como las estimaciones locales.

Si

$$Z_D^* = 1/D \sum_{i=1}^N V_i Z_{V_i}^*$$

representa la combinación de los N valo--

res $Z_{V_i}^*$ obtenidos por el método del Krigeage y $c_{KV_i}^2 = E | (Z_{V_i} - Z_{V_i}^*)^2 |$

representa la varianza de estimación de cada unidad V_i , entonces la varianza de estimación global asociada al estimador Z_D^* es igual a:

$$\begin{aligned} \sigma_{ED}^2 &= E[(Z_D - Z_D^*)^2] = E\left[\frac{1}{D} \sum_i v_i (z_{V_i} - z_{V_i}^*)^2\right] \\ &= \frac{1}{D^2} \sum_i v_i^2 \sigma_{KV_i}^2 + \\ &+ \sum_i \sum_{j \neq i} v_i v_j E[(z_{V_i} - z_{V_i}^*)(z_{V_j} - z_{V_j}^*)] \end{aligned}$$

122

Cada vez que los estimadores $Z_{V_i}^*$ y $Z_{V_j}^*$ ($j \neq i$) han considerado información común, los dos errores de estimación $[Z_{V_i} - Z_{V_i}^*]$ y $[Z_{V_j} - Z_{V_j}^*]$ están correlacionados. Por lo tanto, algunas de las covarianzas $E[(Z_{V_i} - Z_{V_i}^*)(Z_{V_j} - Z_{V_j}^*)]$ son diferentes de cero y su suma no puede despreciarse frente al término $\frac{1}{D^2} \sum v_i^2 \sigma_{KV_i}^2$ de la expresión de la varianza de estimación global σ_{ED}^2 .

El cálculo de la expresión $E[(Z_{V_i} - Z_{V_i}^*)(Z_{V_j} - Z_{V_j}^*)]$ es sumamente tedioso. Sin embargo, es posible obtener buenas aproximaciones en los casos particulares siguientes:

(i) Malla regular.- Si la zona D está dividida en una malla regular de N celdas (Figura 7.2), donde cada celda d_i de la malla tiene una muestra en su centro, y si esta muestra es la única que interviene en la estimación de $Z_{V_i}^*$, entonces los errores $[Z_{V_i} - Z_{V_i}^*]$ y $[Z_{V_j} - Z_{V_j}^*]$ serán independientes, ya que ninguno de ellos emplea

datos comunes. Por lo tanto, la varianza de estimación global puede expresarse como $\sigma_{ED}^2 = 1/N \sigma_{KV}^2$, ya que todas las varianzas de estimación locales $\sigma_{KV_i}^2$ serán idénticas.

123

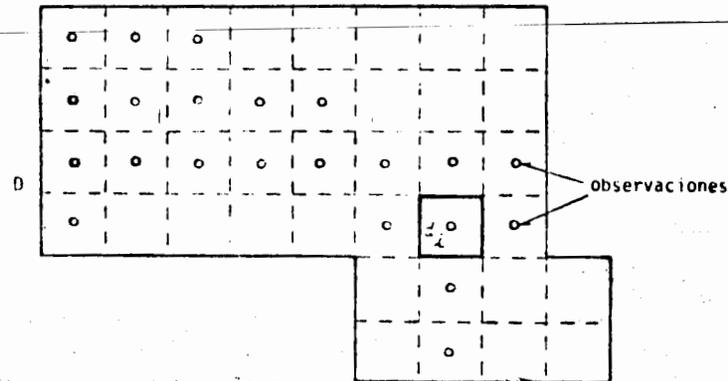


FIGURA 7.2

(ii) Malla regular con datos cuya localización está uniformemente distribuida.- Si la zona D está dividida en una malla regular de N celdas (Figura 7.3), donde cada celda d_i de la malla contiene una muestra localizada al azar y con la misma probabilidad de situarse en cualquier punto de la celda, y si esta muestra es la única que interviene en la estimación $Z_{V_i}^*$, entonces los errores $[Z_{V_i} - Z_{V_i}^*]$ y $[Z_{V_j} - Z_{V_j}^*]$ serán independientes ya que ninguno de ellos empleará información común. Por lo tanto, la varianza de estimación glo-

bal puede expresarse como $\sigma_{ED}^2 = 1/N^2 \sum_i \sigma_{KV_i}^2$, ya que cada varian-
za de estimación $\sigma_{KV_i}^2$; dependerá de la posición de la muestra en
la celda d_i .

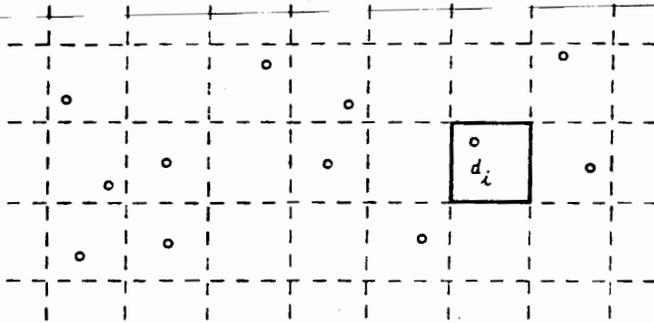


FIGURA 7.3

(iii) Malla irregular.- Si la zona D está dividida en una malla irregular (Figura 7.4), donde cada celda d_i contiene una muestra localizada en su centro, y si esta muestra es la única que interviene en la estimación de $Z_{V_i}^*$, entonces los errores $[Z_{V_i} - Z_{V_i}^*]$ y $[Z_{V_j} - Z_{V_j}^*]$ serán como en los ejemplos anteriores, independientes. La varianza de estimación global queda igual a:

$$\sigma_{ED}^2 = 1/D \sum_i V_i^2 \sigma_{KV_i}^2$$

ya que cada varianza de estimación local $\sigma_{KV_i}^2$ dependerá del volu-

men V_i asociado en la celda d_i .

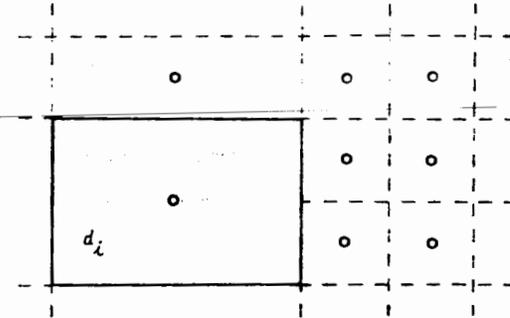


FIGURA 7.4

En los ejemplos que hemos visto, se ha asumido implícitamente que la geometría o el volumen de la zona o depósito es conocida. En aquellos casos donde exista cierta incertidumbre asociada a la extensión del depósito a estimar, otros métodos, tales como el método transitivo (Matheron 1971), deben aplicarse.

Evaluación de Reservas Recuperables

Una vez determinadas las reservas in-situ, es necesario determinar qué porcentaje de estas reservas puede ser explotado siguiendo un determinado contexto técnico y/o económico.

En un proyecto minero, por ejemplo, son diversos los factores que afectan la estimación de las reservas recuperables, entre los que se puede citar:

- el criterio de selección, el cual puede estar orientado hacia la maximización de las ganancias o hacia la satisfacción de las demandas del mercado.
- los parámetros adoptados para alcanzar tal selección, entre los que se pueden citar la ley de corte, el espesor mínimo minable, etc.
- las restricciones tecnológicas del proyecto minero; si la explotación es a cielo abierto, un bloque V puede ser minado únicamente si todos los bloques arriba de éste, en un cono con vértice en V , han sido previamente minados.
- el soporte (tamaño y forma) de la unidad selectiva (bloque de varios cientos o miles de toneladas).
- la información disponible al tiempo de la selección.

La influencia en la selección por parte del soporte y del nivel de información está expresada en las varianzas de estimación y de dispersión, lo cual representa una de las principales aportaciones de la geostatística a la ingeniería minera.

Algunos factores semejantes podrían citarse en ingeniería petrolera. Además de los criterios ya mencionados arriba, el criterio de selección podría estar dictado por aspectos políticos y/o sociales. La saturación de aceites (o de gas) sería uno de los parámetros más importantes en la selección y por ende en la estimación de las reservas recuperables. Como ejemplos de restricciones tecnológicas se podrían citar la profundidad del yacimiento a estimar, su localización (marina o terrestre), etc. Por último, el soporte y el nivel de información serían dos factores de

vital importancia en la evaluación de la porosidad y de la permeabilidad, ambos, parámetros fundamentales para la determinación de las características de yacimientos petroleros.

Método de Estimación.

La estimación del volumen de mineral recuperable en un depósito G , basada en los datos de la ley del mineral medida en núcleos de longitud constante $z_c(x)$, podría realizarse empleando un histograma de los valores $z_c(x)$ (Figura 7.5). En el eje de las abscisas estarían referidos todos los valores de $z_c(x)$, y en el de las ordenadas, las frecuencias de estos valores. El histograma de los valores $z_c(x)$ tendría una media experimental m^* , una varianza de dispersión $s^2(c/G)$, y una cierta forma (asimétrica, por ejemplo). Considerando ahora un cierto valor z_0 en las abscisas, el área achurada representaría la proporción de núcleos con ley del mineral mayor a z_0 ($z_c(x) \geq z_0$), lo cual al multiplicarse por el tonelaje total de roca proporcionaría un estimador del valor de la reserva recuperable.

Suponiendo ahora conocidos los valores $z_v(x)$ (ley de mineral asociada al soporte de volumen v), un histograma (Figura 7.5), con media experimental m^* , varianza de dispersión $s^2(v/G)$, y de cierta forma (simétrica, por ejemplo), podría ser construido. El área punteada representaría, en este caso, la proporción de bloques de volumen v con ley de mineral $z_v(x) \geq z_0$.

Lo que se observa en estos dos histogramas no puede clasificarse de ninguna manera como trivial. Sabemos que en un proyecto minero la selección se efectúa en bloques de tamaño v y no en muestras del tamaño de un

núcleo. Considerando valores de m^* z_0 , cualquier evaluación de las reservas recuperables basada en el histograma de los valores z_c , sobrestimaría la proporción real de bloques con valores medios mayores a z_0 , o lo que es lo mismo, subestimaría la proporción de metal pronosticado como desperdicio. Esto es debido, entre otras razones, a que la varianza de dispersión de los valores con soporte v es menor a la varianza de dispersión de los valores con soporte c , $s^2(v/G) < s^2(c/G)$.

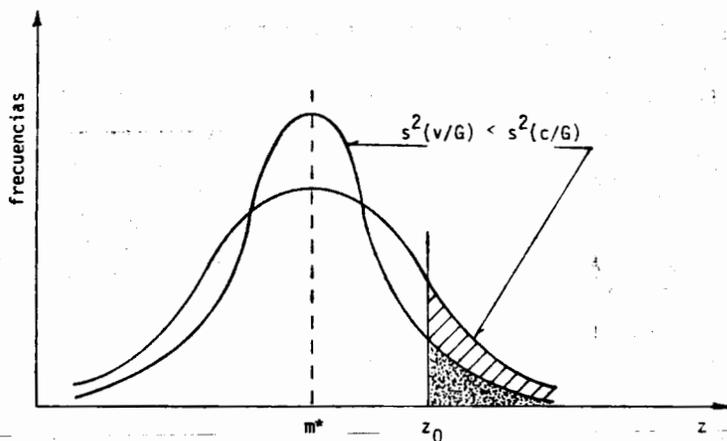


FIGURA 7.6 - Histogramas Experimentales

Una de las ventajas de la geoestadística es la de permitirnos evaluar el valor teórico de la varianza de dispersión $D^2(v/G)$ asociada a los valores Z_v , ya sea por medio de la fórmula

$$D^2(v/G) = \sigma^2(c, G) - \sigma^2(v, v)$$

o bien por medio de la relación de Krige.

$$D^2(v/G) = D^2(c/G) - D^2(c/v)$$

donde las dos últimas varianzas de dispersión pueden obtenerse experimentalmente.

Asimismo, el valor medio de Z_v puede ser estimado por m^* , el valor medio de los valores de las muestras disponibles. Sin embargo, no bastan estos dos parámetros (m^* y $D^2(v/G)$) para inferir la distribución de Z_v . Es necesario conocer también el tipo de distribución. Si el tipo de distribución no se conoce de antemano, será indispensable adoptar la hipótesis de permanencia de distribución, la cual consiste en asumir la misma distribución para las dos variables aleatorias, Z_c y Z_v .

Pero, ¿es realmente útil conocer el histograma de los valores reales Z_v ? Sabemos que, excepto en casos muy raros, los valores reales z_v son desconocidos al momento de la selección, y que, en efecto, la selección se basa en los valores estimados z_v^* . Esto significa que la recuperación real consistirá no de aquellas unidades con valores reales $z_v \geq z_0$, sino más bien de aquellas unidades con valores estimados $z_v^* \geq z_0$, es decir, del área punteada mostrada en la Figura 7.6.

Esta área punteada, fundada en unidades con valores $z_v^* \geq z_0$, difiere del área achurada correspondiente a una selección perfecta efectuada

sobre los valores reales $(z_v - z_0)$. Esta diferencia resulta más importante a media que la desviación entre los valores estimados Z_v^* y los valores reales z_v se incrementa, esto es, cuando la varianza de estimación $E[(Z_v - Z_v^*)^2]$ aumenta. Sabemos, por otro lado, que el método del Krigage minimiza esta varianza.

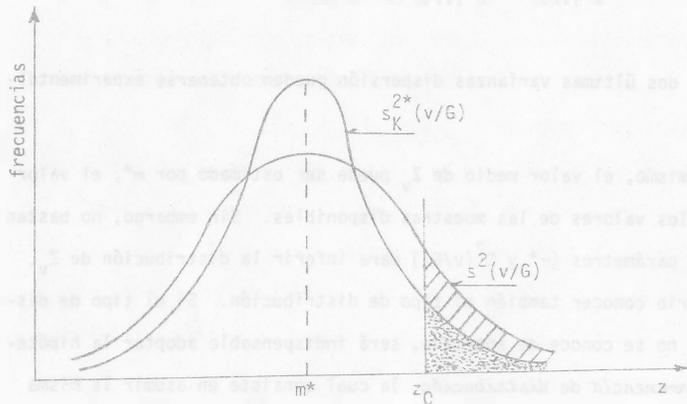


FIGURA 7.6 - Distribución de valores reales y estimados

Si el estimador Z_v^* está definido según el método de Krigage, entonces es posible establecer una relación entre las varianzas de los valores reales y de los valores estimados $D^2(v/G)$ y $D_K^{2*}(v/G)$ (Journel & Huijbregts, 1978, p. 451), esto es:

$$D^2(v/G) \approx D_K^{2*}(v/G) + \bar{c}_{Kv}^2$$

donde \bar{c}_{Kv}^2 es el valor medio de las varianzas de estimación, asociadas a las unidades v_i

$$\bar{c}_{Kv}^2 = 1/h \sum_{i=1}^N c_{Kv_i}^2$$

A través de esta relación es más fácil inferir la distribución de Z_v , que a través de la hipótesis de permanencia de la distribución. Además, se puede deducir que $D_K^{2*}(v/G) \leq D^2(v/G)$, lo que significa que el método del Krigage introduce un efecto de suavizamiento en la estimación y el cual se refleja directamente en el histograma de $z_{v_k}^*$.

El objetivo de la estimación de reservas puede, finalmente, representarse graficando la distribución bi-variable de las funciones aleatorias Z_v y Z_v^* , como se muestra en la Figura 7.7.

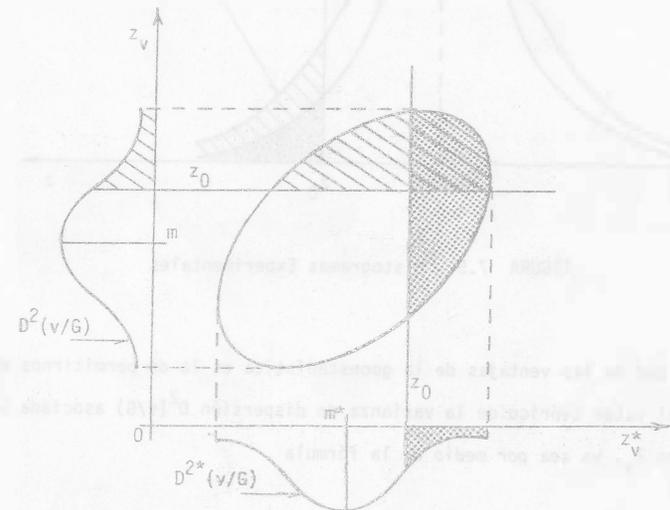


FIGURA 7.7 - Distribución bi-variable de valores reales (Z_v) y valores estimados (Z_v^*)

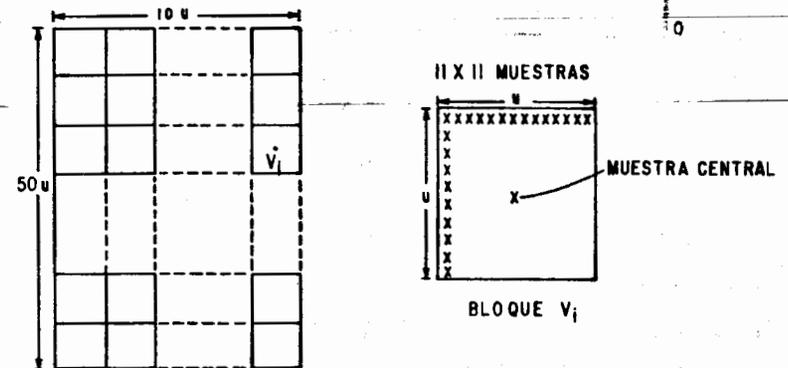
Los valores reales aparecen a lo largo del eje de las ordenadas y los valores estimados a lo largo del eje de las abscisas. La distribución de los valores reales, con varianza $D^2(v/G)$, puede ser vista como la proyección de la distribución bi-variable sobre el eje de las ordenadas. El área achurada representa el valor real del porcentaje de mineral recuperable. Similarmente, la distribución de los valores estimados, con varianza $D^{2*}(v/G)$, puede ser vista como la proyección de la distribución bi-variable sobre el eje de las abscisas. El área punteada denota el valor estimado del porcentaje de mineral recuperable.

Observando las correspondientes áreas achurada y punteada de la -- distribución bi-variable, puede verse que se comete un error en la estimación. Primero, un cierto número de unidades estimadas como pobres, resultan arriba del valor z_0 ; estas unidades se rechazan equivocadamente y corresponden al área achurada, exclusivamente. Segundo, un cierto número de unidades estimadas con valores arriba de z_0 resultan pobres; estas unidades se aceptan erróneamente y corresponden al área punteada, exclusivamente.

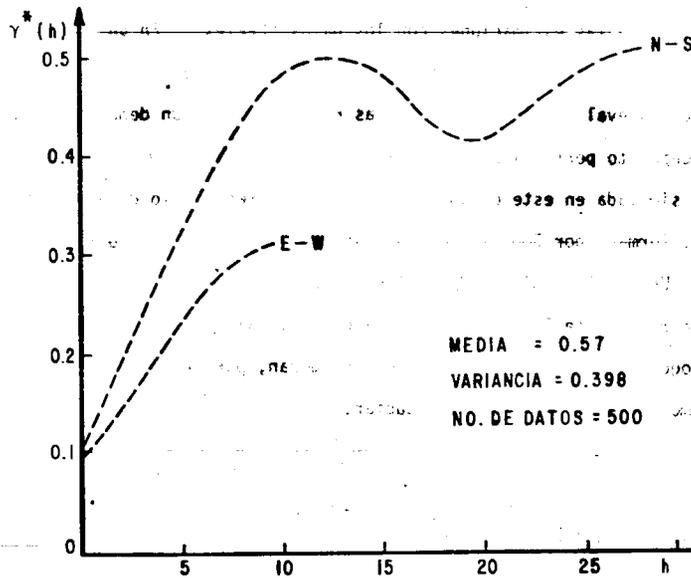
El objetivo, pues, será la minimización de estas dos áreas, mismo que se obtiene al minimizar la varianza de estimación $E[(Z_V - Z_V^*)^2]$.

Trabajar con depósitos simulados, en contraste con depósitos reales, reporta una serie de ventajas. En un depósito simulado es posible de una manera inmediata y sin tener que "explotar" el depósito, comprobar los resultados obtenidos de las estimaciones con los datos "reales". En un depósito simulado es posible determinar exactamente el efecto de cualquier método de estimación en la evaluación de las reservas recuperables. Un depósito simulado es un depósito perfectamente conocido.

La zona simulada en este estudio consiste de un rectángulo de dimensión $50 u \times 10 u$, formado por 500 bloques cuadrados v_i (de dimensión $u \times u$), - Figura 7.8. Un total de 60,500 datos (porcentaje de mineral) se simularon en una malla regular de 550×110 nodos dando un total de $121 (=11 \times 11)$ muestras por bloque v_i . Los 60,500 datos se consideran, para efectos de este ejemplo, como el depósito real G a estudiar.

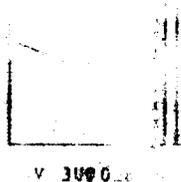


Empleando las 500 muestras centrales s_i (una por cada bloque v_i), tal y como si ellas constituyeran los primeros resultados de una campaña de exploración, se obtuvo el semi-variograma experimental $\gamma^*(h)$ de la Figura 7.9.



SEMIVARIOGRAMA EXPERIMENTAL DE 500 MUESTRAS CENTRALES

FIGURA 7.9



Un semi-variograma teórico $\gamma(h)$ con efecto de agujero e isotrópico fue ajustado al semi-variograma experimental $\gamma^*(h)$.

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h=0 \\ 0.1 + 3.6 \left[1 - \frac{\text{Sen } 0.041h}{0.041h} \right] & \text{si } h > 0 \end{cases}$$

Empleando el modelo de $\gamma(h)$ se verificó la relación de Krige (ver Tabla 3):

Las diferentes varianzas de dispersión fueron calculadas, para el caso de los 60-500 datos, por medio del valor esperado de las varianzas experimentales (esto es, según la definición de $D^2(-/-)$), y para el caso de las 500 muestras, a través de la fórmula

$$D^2(v/G) = \bar{\gamma}(G,G) - \bar{\gamma}(v_i, v_i)$$

TABLA 3. Relación de Krige.

	Varianza de Dispersión Real	Varianza de Dispersión Estimada
$D^2(o/G)$	0.3846	0.398
$D^2(o/v)$	0.1236	0.1270
$D^2(v/G)$	0.2604	0.2710
	+ = 0.3840	+ = 0.398

Cada uno de los porcentajes medios z_{v_i} y errores $\sigma_{k_{v_i}}^2$ de los 500

bloque v_i fueron estimados según el método Krigeage. El número de muestras consideradas en la estimación $z_{v_i}^*$ fue de 9, según se muestra en la Figura 7.10.

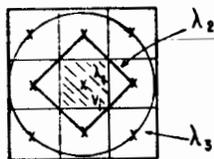


FIGURA 7.10

El coeficiente λ_1 fue asignado a la muestra central; el coeficiente λ_2 fue asignado al valor promedio de las cuatro muestras de la primera aureola; y λ_3 fue asignado a las cuatro muestras restantes de la aureola externa. Posteriormente, se verificó el efecto de suavizamiento inherente del método Krigeage.

$$D^2(v/G) = D_k^2(v/G) + \sigma_{k_{v_i}}^2$$

obteniéndose los siguientes resultados:

$$D^2(v/G) = 0.2604, D_k^2(v/G) = 0.2349 \text{ y } \sigma_{k_{v_i}}^2 = 0.042$$

$$0.2604 = 0.2349 + 0.042 = 0.2769$$

Finalmente, y con el propósito de comparar la eficiencia del método Krigeage con otros métodos de estimación, se calcularon curvas de tonelaje, de cantidad de metal recuperado y de porcentaje de mineral promedio contra

varios valores del porcentaje de corte, z_c .

El tonelaje se calculó empleando el estimador Krigeage $I_{k_{v_i}}^*$ de la variable aleatoria regionalizada "indicador", I_{v_i} . Esta variable indicador denota la proporción mineralizada del bloque v_i (Figura 7.11). El tonelaje se define, entonces, como la suma de aquellos valores estimados $I_{k_{v_i}}^*$ asociados a valores $z_{k_{v_i}}^* \geq z_c$, para cada bloque v_i .

$$T(z_c) = \sum_{i=1}^{N(z_c)} I_{k_{v_i}}^*$$

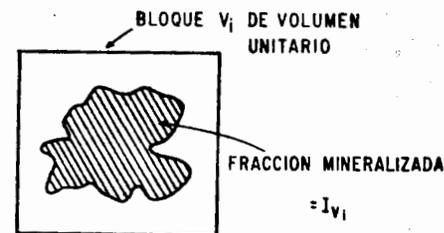


FIGURA 7.11

La curva de la cantidad de metal vs porcentaje de corte z_c se calcula con la fórmula

$$Q(z_c) = \sum_{i=1}^{N(z_c)} I_{k_{v_i}}^* z_{k_{v_i}}^*$$

es decir, como la suma del producto de la fracción mineralizada y del porcentaje de mineral para aquellos bloques v_i donde $z_{k_{v_i}}^* > z_c$.

El promedio del porcentaje de mineral como función de z_c se evalúa sim--

plemente como:

$$m(z_c) = \frac{Q(z_c)}{T(z_c)}$$

Ahora bien, el conocimiento total del depósito permitió cotejar las predicciones con los resultados reales.

La Figura 7.12 muestra una gráfica con tres curvas, todas ellas de tonelaje (eje de las ordenadas) vs valores de z_c (eje de las abscisas) y obtenidas en forma diferente: la curva "real", la curva obtenida por el método Krigeage y la curva obtenida según el método de "polígonos de influencia". Este último consiste simplemente en la estimación de $Z_{V_i}^*$ (ó de $I_{V_i}^*$) a partir del valor de la muestra central s_i del bloque v_i , dicho de otra manera $Z_{V_i}^* = s_i$ (ó $I_{V_i}^* = 1$ ó 0 , dependiendo si la muestra central del bloque v_i está localizada sobre una zona mineralizada o no). Como se observa en la figura, para valores relativamente bajos de z_c , el método de los polígonos subestima considerablemente el valor del tonelaje, siendo lo contrario (sobre estimación) para valores altos de z_c . La curva obtenida según el método de Krigeage se aproxima más a la curva real, oscilando siempre alrededor de esta última.

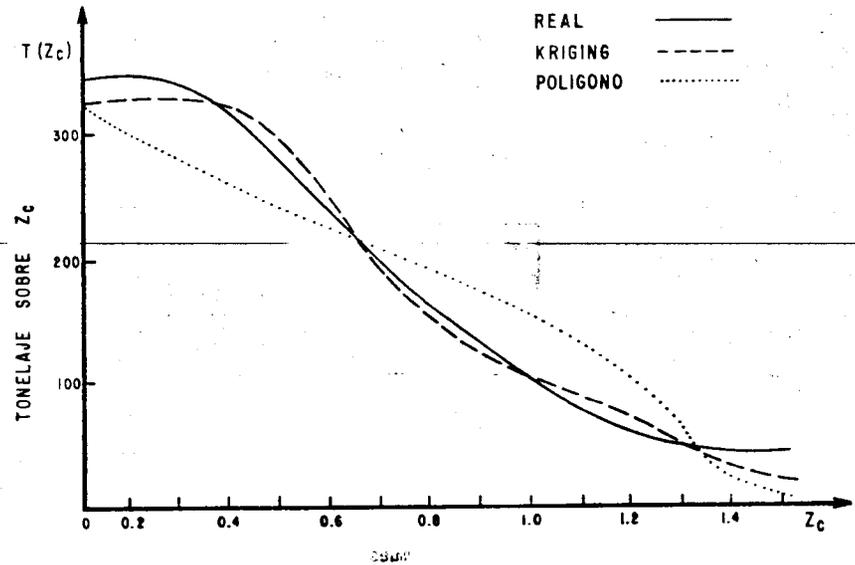


FIGURA 7.12

La Figura 7.13 muestra igualmente tres curvas (real, Krigeage y polígonos de influencia) todas ellas de cantidad de mineral recuperado vs z_c . Una vez más, el método Krigeage proporciona la curva que más se aproxima a la curva real. Por lo que se refiere a la estimación de reservas globales ($z_c=0$), no existe ninguna diferencia práctica entre los dos métodos de estimación.

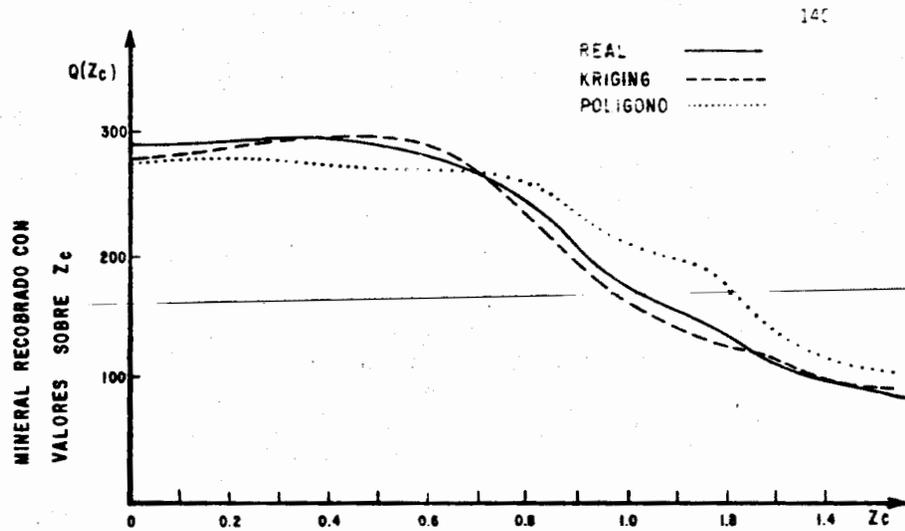


FIGURA 7.13

En la Figura 7.14 gráfica de promedio del porcentaje de mineral contra z_c , se observa que la curva obtenida por el método de los polígonos de influencia sobre-estima constantemente a la curva real. En la práctica, y dependiendo del tipo de yacimiento, este error en la estimación del porcentaje promedio podría acarrear pérdidas económicas de considerables consecuencias. El método Krigeage por otro lado, produce una curva más cercana a la curva real.

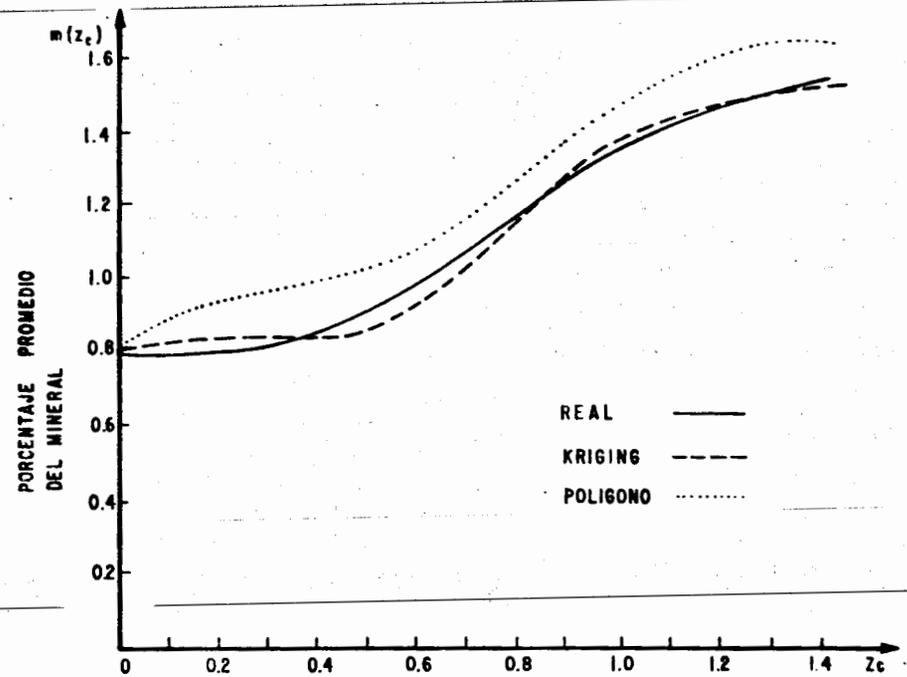


FIGURA 7.14

CAPITULO VIII

SIMULACION DE YACIMIENTOS

Es bien sabido entre los ingenieros mineros que uno de los parámetros más importantes que intervienen en la selección del equipo minero, por lo que a flexibilidad se refiere, es la dispersión de los porcentajes de mineral extraído en todas las escalas, diaria, mensual, anual, etc. Igualmente, la selección del equipo de excavación depende entre otros factores, de las dispersiones diarias del espesor mineralizado.

Si un yacimiento minero fuese conocido en su totalidad, las dispersiones requeridas, y por ende los métodos más adecuados para su explotación, podrían ser determinados aplicando diversos procesos simulados. Desafortunadamente, en las etapas de exploración y de planeación, se dispone únicamente de información fragmentaria, porcentajes de mineral en un pequeño número de muestras, por ejemplo.

Ahora bien, si no es posible conocer la realidad del yacimiento en suficiente detalle, una alternativa podría ser simularlo siguiendo algún modelo. Pensemos que, en cierta forma, el yacimiento real y las distintas simulaciones del yacimiento no son más que diversas realizaciones de una misma función aleatoria $Z(x)$. El yacimiento simulado $\{z_s(x)\}$ tiene la ventaja sobre el yacimiento real $\{z(x)\}$ de que el primero puede ser conocido en todos los puntos x .

Más aún, es posible restringir la simulación de tal forma que los valores simulados en las localizaciones muestreadas sean idénticos precisamente a los valores muestreados, es decir:

$$z_{sc}(x) = z(x) \quad \forall x$$

Esto se conoce como simulación condicional y puede ser todavía mejorada, agregando toda clase de información cualitativa.

En conclusión, un yacimiento simulado se distingue por satisfacer la condición $z_{sc}(x_a) = z(x_a)$, en toda localización muestreada x_a , y por presentar las mismas características de dispersión (al menos hasta de segundo orden) del yacimiento real. Pero entonces, ¿en qué forma se diferencian la simulación y la estimación? Su diferencia se basa en sus objetivos:

- (i) La estimación proporciona, en cada punto x , el estimador $z^*(x)$ más cercano al valor real y desconocido $z(x)$. Sin embargo, la estimación no produce la variabilidad espacial de los valores reales $\{z(x)\}$.
- (ii) No obstante que, en cada punto x , el valor simulado $z_s(x)$ no es el mejor estimador de $z(x)$, el conjunto de valores simulados $\{z_s(x)\}$ o todavía mejor, el conjunto de valores condicionalmente simulados $\{z_{sc}(x)\}$ reproduce los mismos primeros dos momentos (media y covarianza $C(h)$ ó semivariograma $\gamma(h)$) que el conjunto de valores reales $\{z(x)\}$, esto es, reproduce las principales características de dispersión de los valores reales. Por lo que a la varianza de dispersión se refiere, ambos, el yacimiento simulado y el yacimiento real, son idénticos.

En general, los objetivos de la simulación y de la estimación no son compatibles. En la Figura 8.1 puede observarse que, aunque la curva de estimación $z^*(x)$ se encuentra en promedio más cercano a la curva real $z(x)$, la curva de simulación $z_{sc}(x)$ reproduce mejor las fluctuaciones de la curva real.

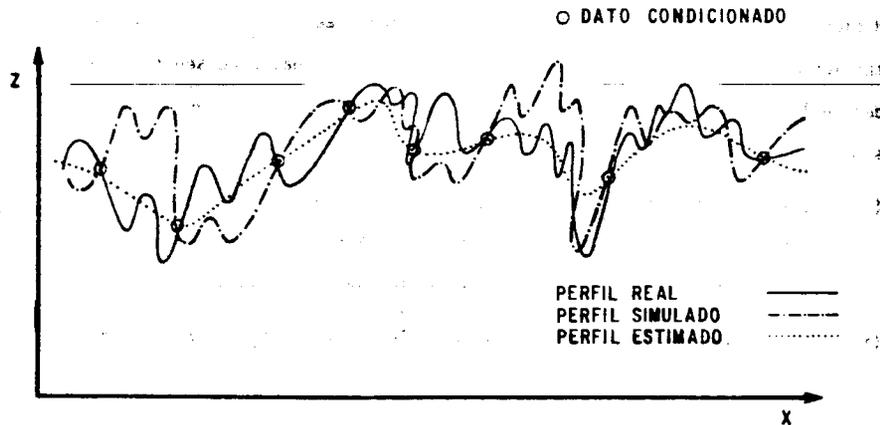


FIGURA 8.1 Perfiles real, simulado y estimado (Kriging)

Teoría de la Simulación Condicional.

Consideremos la función aleatoria estacionaria $Z(x)$, con media m y covarianza $C(h)$ ó semi-variograma $\gamma(h)$. El problema consiste en formar realizaciones de la función aleatoria $Z_{SC}(x)$ isomórfica a $Z(x)$, es decir, una función aleatoria con media y momentos de segundo orden, $C(h)$ o $\gamma(h)$, iguales a los de la f.a. $Z(x)$. Más aún, las realizaciones $Z_{SC}(x)$ deben estar condicionadas, esto es, en cada localización muestreada, el valor simulado

debe ser igual al valor muestreado:

$$z_{SC}(x_\alpha) = z(x_\alpha) \quad \forall x_\alpha \text{ conjunto de datos.}$$

Es posible demostrar, aunque no lo haremos aquí, que cada realización de la f.a. $Z_{SC}(x)$ estará dada por:

$$z_{SC}^*(x) = z_k^*(x) + [z_S(x) - z_{Sk}^*(x)] \quad (8.1)$$

donde:

$z_k^*(x)$ es el valor obtenido en el punto x , a partir del conjunto de datos $z(x_\alpha)$, según el método Kriging.

$z_S(x)$ es el valor simulado (no condicional) en el punto x , -- que representa una realización de la f.a. $Z_S(x)$, la cual es isomórfica a, e independiente de la f.a. $Z(x)$.

$z_{Sk}^*(x)$ es el valor obtenido en el punto x , a partir del conjunto de valores simulados $z_S(x_\alpha)$, según el método Kriging.

y $z_{SC}^*(x)$ es el valor condicionalmente simulado en el punto x .

En términos de funciones aleatorias, esta última expresión queda representada como:

$$Z_{SC}(x) = Z_k^*(x) + [Z_S(x) - Z_{Sk}^*(x)]$$

Igualmente y sin pasar por mayores detalles, diremos que, la varianza de estimación de un valor real, $z(x)$ por un valor condicionalmente simulado, $z_{sc}(x)$, es igual a dos veces la varianza de estimación según el método del Kriging, c_K^2 , es decir:

$$E\left[\left(z(x) - z_{sc}(x)\right)^2\right] = 2E\left[\left(z(x) - z_k^*(x)\right)^2\right] = 2c_K^2.$$

De la expresión 8.1 podemos ver que la obtención de los valores condicionalmente simulados $z_{sc}(x)$, se inicia con la generación de las realizaciones no condicionadas $z_s(x)$, de una función aleatoria $Z_s(x)$, isomórfica a $Z(x)$. Recordemos que las notaciones $z_s(x)$ y $z(x)$ representan realizaciones en el espacio de tres-dimensiones, $x \in \mathbb{R}^3$.

Existen diversas maneras de obtener simulaciones sujetas a satisfacer una función de covarianza dada en una dimensión. Hablando de simulaciones en tres dimensiones, sin embargo, los métodos comunes de simulación resultan, en términos del tiempo de ejecución por computadora, sumamente costosos. Una alternativa la representa el método de "rotación de bandas" (turning bands, en inglés) creado por George Matheron. Este método reduce la simulación en tres dimensiones a varias simulaciones independientes en una dimensión. Las simulaciones en una dimensión se efectúan a lo largo de líneas rectas, mismas que al rotarse en el espacio de tres dimensiones generarán otras simulaciones (en una dimensión).

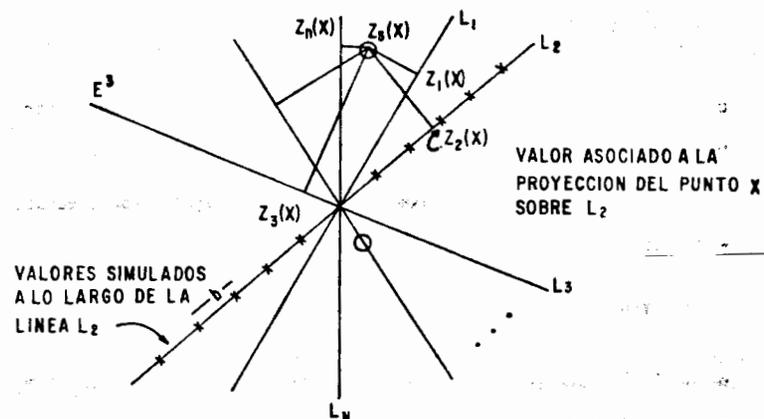
Asumiendo por un momento como realizadas las simulaciones en una dimensión a lo largo de N líneas rectas localizadas en el espacio E^3 , la simulación $z_s(x)$ en el punto $x \in E^3$ podrá obtenerse a partir de la proyección del punto x sobre cada una de las N líneas rectas. El valor de $z_s(x)$ será --

igual a la suma de los N valores observados en los puntos de proyección sobre las N líneas rectas, multiplicadas por $1/\sqrt{N}$, esto es:

$$z_s(x) = 1/\sqrt{N} \sum_{i=1}^N z_i(x)$$

donde $z_i(x)$ es el valor simulado a lo largo de la i -ésima línea recta y que coincide (dentro de cierta tolerancia) con la proyección del punto x en E^3 sobre la línea recta.

El método de la rotación de bandas se muestra esquemáticamente en la Figura 8.2.



La simulación resultante $z_s(x)$ es una realización de la función aleatoria tridimensional $Z_s(x)$, la cual es estacionaria de segundo orden, tiene como media cero y como covarianza $C(h)$.

Sin entrar en detalles, el procedimiento seguido en la generación de realizaciones $z_s(x)$ de una función aleatoria $Z_s(x)$ con covarianza tridimensional $C(s)$, a partir de simulaciones uni-dimensionales es el siguiente:

- (i) Dada la función covarianza uni-dimensional $C^{(1)}(s)$ asociada a simulaciones a lo largo de las líneas rectas, se obtiene de la fórmula

$$C^{(1)}(s) = \frac{\partial}{\partial s} (s C(s))$$

- (ii) La función covarianza $C^{(1)}(s)$, a su vez, puede representarse como la convolución de una función $f(s)$ y su transpuesta $f^v(s) = f(-s)$

$$C^{(1)}(s) = f * f^v = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(u+s) du$$

o lo que es lo mismo, dada la función $C^{(1)}(s)$ es posible encontrar una función $f(s)$ tal que ésta satisfaga la expresión anterior.

- (iii) Una función aleatoria uniformemente distribuida $Y(u)$ puede crearse, entonces, aplicando la siguiente fórmula:

$$Y(u) = T * f^v = \int_{-\infty}^{\infty} T(r) f(r+u) dr$$

donde $T(r)$ representa una sucesión de variables aleatorias uniformemente distribuidas.

Para el caso discreto, las realizaciones y_i a lo largo de una línea recta pueden calcularse según la fórmula

$$y_i = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{i+k} \cdot f(kb)$$

donde los valores t_{i+k} denotan realizaciones independientes de una variable aleatoria uniformemente distribuida y las cuales pueden ser generadas por la computadora (ver subrutina URAND basada en un algoritmo de Donald Knuth "The Art of Computer Programming", Vol. I). "b" representa el intervalo de separación (ver Figura 8.2), a lo largo de la línea recta, entre cada valor simulado.

En la práctica, un número impar $(2R+1)$ de valores elementales t_{i+k} es empleado en el cálculo de cada realización y_i .

$$y_i = \sum_{k=-R}^R t_{i+k} f(kb)$$

Si la función de covarianza tri-dimensional estuviese dada por el modelo esférico,

$$C(s) = \begin{cases} K \left[1 - \frac{3s}{a} + \frac{s^3}{2a^3} \right], & \forall s \in [0, a] \\ 0, & \forall s \geq a \end{cases}$$

entonces, la función de covarianza uni-dimensional $C^{(1)}(s)$ estaría dada por:

$$C^{(1)}(s) = \begin{cases} K \left[1 - \frac{3s}{a} + \frac{2s^3}{a^3} \right], & \forall s \in [0, a] \\ 0, & \forall s \geq a \end{cases}$$

y la función $f(s)$ estaría dada, según la condición $C^{(1)}(s) = f \cdot f$, por

$$f(s) = \begin{cases} \sqrt{12 K/a^3} \cdot s, & \forall s \in [-a/2, + a/2] \\ 0 & \text{Para cualquier otro valor de } s. \end{cases}$$

Aplicaciones

La técnica de simulación descrita ha sido de gran utilidad en el análisis y solución de los problemas de ingeniería minera que a continuación se citan:

- (i) Determinación del tamaño mínimo de la unidad de selección en la recuperación de recursos in-situ.
- (ii) Influencia de la concentración de paneles ricos y paneles pobres en la recuperación de recursos in-situ.
- (iii) Influencia de la cantidad de información disponible al momento de la selección de recursos in-situ.
- (iv) Determinación de los gastos de producción y de los porcentajes de corte (mismos que varían con el tiempo) y su impacto económico.

Ejemplo de Aplicación de la Simulación en la Selección del Método de Exploración (J. Deraisme, 1977).

En este estudio se analiza un depósito de cobre G, el cual presenta mineralización homogénea. Sus dimensiones en el plano horizontal son 450 m x 450 m; además, consiste de cuatro niveles de bloques paralelepípedos v de 18 m x 18 m x 5 m (Figura 8.3). El depósito es conocido a tra-

vés de muestras de pozos verticales centrados en cada uno de los bloques v . Un modelo de simulación sujeta a las siguientes condiciones fue creado:

- (i) Porcentaje medio de los valores simulados $m = 1\% \text{ Cu}$
- (ii) Regionalización isotrópica representada por un modelo esférico con efecto pepita y con rango de aproximadamente 70 m.

La mínima unidad por minar se establece con dimensiones iguales a las del bloque v . Cada bloque v contiene 4,730 toneladas de mineral. Ocho bloques de mineral (35,000 toneladas) se explotarán constantemente cada día. Para tal efecto se instalará un molino el cual recibirá el mineral extraído.

Tres diferentes alternativas de producción se contemplan:

- I. La zona G se minará considerando bancos de 18 m x 18 m x 10 m. Dos palas mecánicas instaladas en el depósito avanzarán paralelamente al frente y no podrán retroceder; las palas deberán extraer todo el mineral a lo largo la frente (18 x 25 = 450 m) antes de pasar a la siguiente frente. Cada pala mecánica podrá extraer únicamente dos bancos contiguos por día.
- II. La explotación se llevará a cabo de la misma forma que en el método anterior, excepto que:

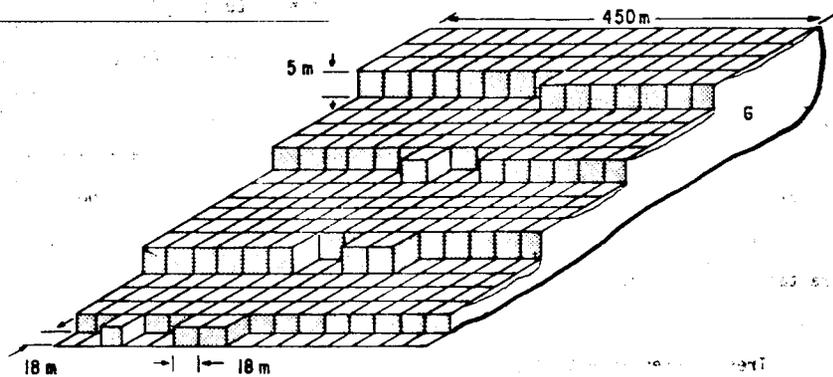


FIGURA 8.3 VISTA DE FRENTES MINEROS

en lugar de enviar todos los bloques al molino, algunos de ellos - serán enviados a un depósito de almacenamiento (stockpile).

El depósito de almacenamiento tiene capacidad para almacenar el -- equivalente a dos días de producción (70,000 Ton.) y está dividido en dos secciones: Una para mineral rico y la otra para mineral pobre. Un banco será enviado al depósito de almacenamiento cuando - su porcentaje medio afecte la producción media del día. Cuando un banco sea enviado a la sección de mineral rico, un banco equivalen - te será tomado de la sección de mineral pobre y enviado al molino,

a fin de satisfacer la demanda diaria (ver Figura 8.4)

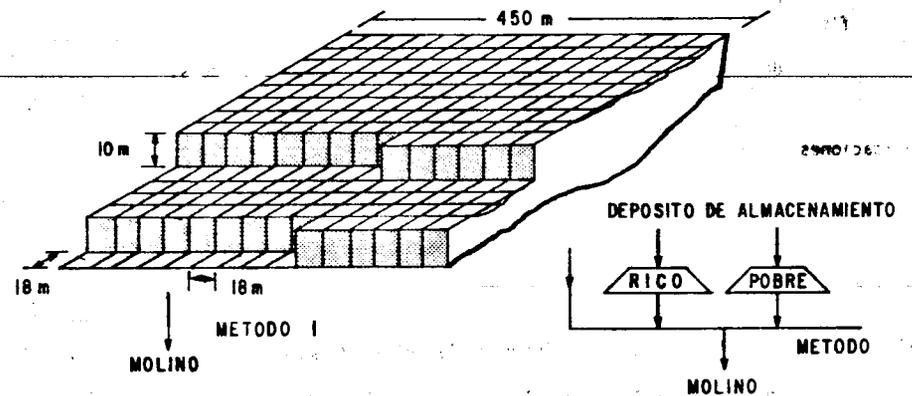


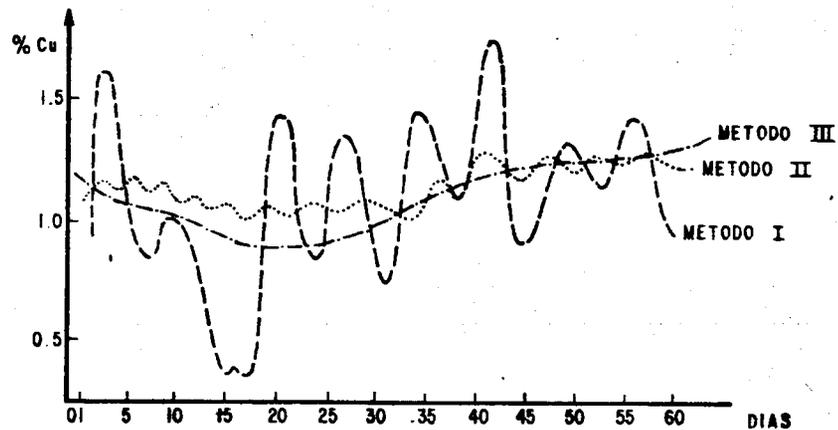
FIGURA 8.4 VISTA DE LOS FRENTES MINERALES

III. La zona G será minada empleando banco de altura 5 m (Figura 8.3). En cada uno de los cuatro niveles habrá una pala mecánica con capa - cidad suficiente para extraer hasta dos bloques de 18 m x 18 m x 5 m cada día. Toda la producción diaria de 35,000 ton. Será envia - da directamente al molino. Todo el mineral a lo largo de la frente deberá ser extraído antes de pasar a la siguiente frente.

Los bloques extraídos deberán ser seleccionados considerando ambos aspectos, la estabilidad de la producción diaria y el matenimiento al mínimo del desplazamiento total de cada pala mecánica.

Partiendo de los datos originales se efectuó la simulación del de-

dósito. Cada uno de los bloques, según las tres alternativas, fue simulado. Los resultados se muestran en la Figura 8.5, donde las variaciones diarias - (líneas punteadas) del porcentaje de mineral simulado por bloque, se grafican para los primeros 60 días de producción.



VARIACION DIARIA DEL PORCENTAJE MEDIO DE COBRE

FIGURA 8.5

Observando la gráfica, podemos deducir la inclinación del operador del molino por las alternativas II ó III, y la preferencia del ingeniero encar

gado de la extracción del mineral por la alternativa I.

La manera más idónea de decidir cual alternativa sería la más apropiada es por medio de la asignación de costos. Las pérdidas causadas en el molino, si el método I fuese elegido, deberían ser balanceadas con los costos - que implicarían la creación de un depósito de almacenamiento (método II) o por los costos que originarían operaciones más flexibles (método III).

La teoría de simulación descrita en este capítulo ha encontrado aplicaciones en el campo de la ingeniería minera, principalmente. Por lo que respecta a otras ciencias de la tierra, aún se está estudiando la elaboración del tipo de preguntas válidas que puedan plantearse y resolverse dentro del marco de esta teoría.

BIBLIOGRAFIA

David, M.

GEOSTATISTICAL ORE RESERVE ESTIMATION

Elsevier Amsterdam. 1977

Huijbregts, Ch. and Matheron, G.

UNIVERSAL KRIGING- AN OPTIMAL APPROACH TO TREND SURFACE ANALYSIS.En DECISION MAKING IN THE MINERAL INDUSTRY.

Special Volume No. 12, CIMM Montreal, 1970

p.p. 159 - 169

Journel, A. and Huijbregts, Ch.

MINING GEOSTATISTICS

Academic Press. 1978

Haas, A. and Jousselin, C.

GEOSTATISTICS IN THE PETROLEUM INDUSTRY

"Geostat 75"

1975 p.p. 333-347

Haas, A. and Viallix, J.

KRIGEAGE APPLIED TO GEOPHYSICS

Geophysical Prospecting, 24.

1976 p.p. 49-69.

Matheron, G.

LE KRIGEAGE UNIVERSEL

Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique

Fasc. 1, CG, Fontainebleau 1969

Matheron, G.

THE THEORY OF REGIONALIZED VARIABLES AND ITS APPLICATIONS

Le Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique

Fasc. 5, CG, Fontainebleau 1971

EJERCICIOS

EJERCICIO No. 1

Los datos de la Tabla fueron obtenidos empleando registros eléctricos y núcleos de pozos perforados a través de diversas formaciones en el área de "Chicagoland". Los valores dados están expresados en porcentajes.

Sample no.	Log-derived porosity	Core-derived porosity	Sample no.	Log-derived porosity	Core-derived porosity
1	10.0	5.5	26	10.0	9.6
2	9.0	3.6	27	5.0	10.3
3	7.0	3.5	28	7.0	4.5
4	6.0	4.8	29	6.0	6.0
5	9.0	7.1	30	9.0	6.7
6	7.0	2.0	31	5.0	4.1
7	10.0	8.5	32	8.0	4.5
8	5.0	5.2	33	9.0	6.5
9	7.0	2.6	34	7.0	3.8
10	0.0	1.9	35	3.0	2.1
11	5.0	6.1	36	7.0	2.5
12	6.0	9.3	37	7.0	6.8
13	9.0	6.9	38	10.0	3.7
14	8.0	4.3	39	7.0	6.0
15	5.0	3.3	40	5.0	3.4
16	6.0	2.5	41	8.0	2.2
17	6.0	4.5	42	4.0	1.6
18	5.0	2.4	43	5.0	2.9
19	8.0	3.8	44	8.0	2.6
20	15.0	18.4	45	16.0	15.3
21	16.0	14.7	46	4.0	16.9
22	7.0	10.9	47	5.0	15.7
23	12.0	12.5	48	14.0	12.4
24	14.0	18.6	49	21.0	22.9
25	22.0	22.1	50	21.0	21.8

- (a) Ordene en forma ascendente los valores de porosidad obtenidos a partir de los registros eléctricos.

- (b) Compute el número de muestras que caen dentro de cada una de las categorías siguientes:

intervalo de clase	frecuencia	porcentaje
0.0 - 3.0		
3.0 - 6.0		
6.0 - 9.0		
9.0 - 12.0		
12.0 - 15.0		
15.0 - 18.0		
18.0 - 21.0		
21.0 - 24.0		
	50	100 %

- (c) Calcule el porcentaje asociado a cada intervalo de clase y grafique la pareja de valores (porcentaje, intervalo de clase), o en otras palabras, obtenga el histograma de frecuencias relativas. Según la forma del histograma obtenido, ¿qué tipo de distribución, diría ud., sigue la variable aleatoria ϕ ?

Si la variable aleatoria ϕ sigue una distribución log-normal, entonces, el mejor estimador de la media de ϕ estará dado, no por la media aritmética, sino por la media geométrica, la cual se expresa como:

$$\phi = \left(\prod_{i=1}^N \phi_i \right)^{1/N} = \text{antilog} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \phi_i \right)$$

- (d) Repita el procedimiento anterior empleando los valores de ϕ obtenidos de los núcleos de pozo.

EJERCICIO No. 2

Si la variable aleatoria continua X está normalmente distribuida con media cero y varianza uno, entonces su función de densidad $f_X(x)$ es dada por la expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}} e^{-x^2/2} \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

Demuestre que, en efecto, $f_X(x)$ es una función de densidad que satisface las dos condiciones:

(i) $f_X(x) \geq 0 \quad \forall x$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) \, du = 1.$

EJERCICIO No. 3.

De entre las distribuciones paramétricas que hemos visto, cite aquellas en las cuales:

- (i) La media sea mayor o igual a la varianza
- (ii) La media sea igual a la varianza
- (iii) La media sea menor o igual a la varianza
- (iv) La media pueda ser mayor que, menor que, o igual a la varianza.

EJERCICIO No. 4.

En las primeras etapas del desarrollo de un depósito minero de cobre, 20 valores del porcentaje de mineral se encuentran a nuestra disposición:

z = 0.25 0.32 0.32 0.36 0.39 0.45 0.53 0.70
 0.73 0.78 0.90 0.95 1.13 1.20 1.35 1.55
 2.10 2.94 2.96 5.91 % Cu

Estos porcentajes, definidos bajo el mismo tamaño de muestra, han sido muestreados empleando en cada uno de ellos la misma técnica. Las localizaciones de los 20 datos no son proporcionadas, por lo tanto asumiremos que cada dato representa una realización independiente de la variable aleatoria Z.

- (a) Efectúe un estudio estadístico de los 20 valores z, esto es, calcule la media experimental \bar{m} y la varianza experimental s^2 , empleando las fórmulas:

$$\bar{m} = 1/20 \sum_{i=1}^{20} z_i$$

$$s^2 = 1/20 \sum_{i=1}^{20} (z_i - \bar{m})^2$$

Calcule el número de muestras que caen dentro de cada una de las categorías siguientes:

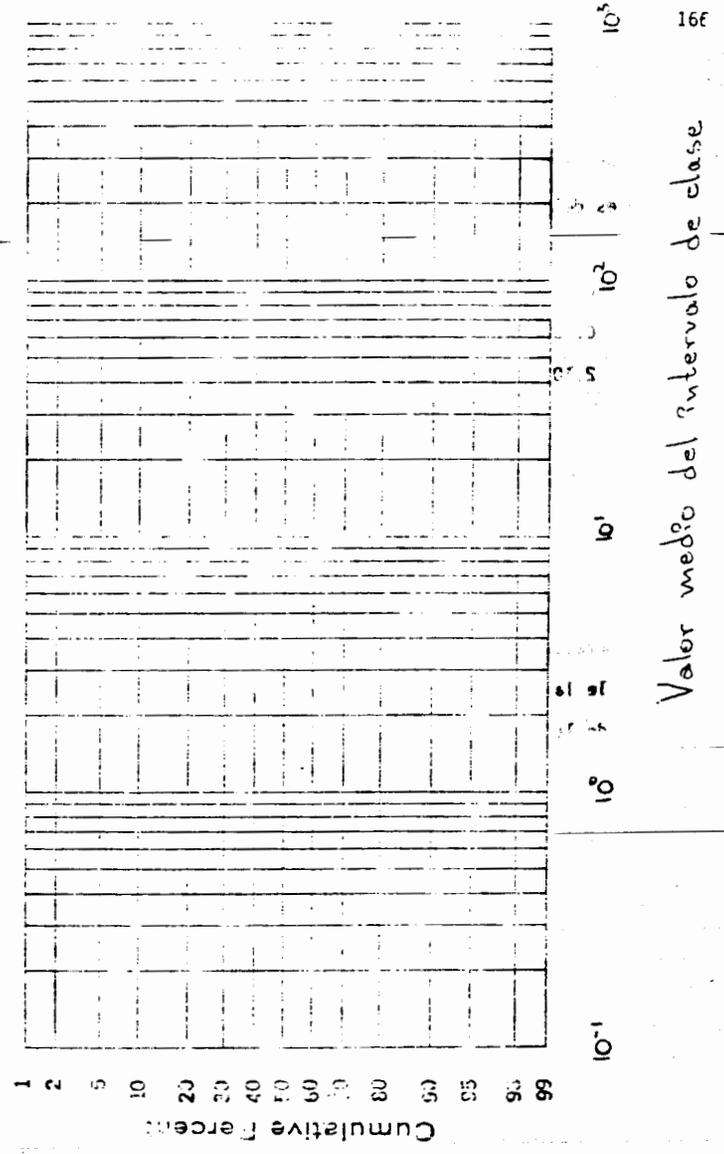
intervalo de clase	valor medio del intervalo	frecuencia	%	% ac.
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0.0 - 0.6	0.3			
0.6 - 1.2	0.9			
1.2 - 1.8	1.5			
1.8 - 2.4	2.1			
2.4 - 3.0	2.7			
3.0 - >				
		20		100%

Calcule el porcentaje (columna 4) y el porcentaje acumulado (columna 5) para cada uno de los intervalos de clase.

Grafique las parejas de valores de las columnas 2 y 5 en la hoja adjunta de papel logarítmico-probabilístico.

Una prueba simple para determinar si la variable aleatoria Z sigue una distribución log-normal, consiste en observar si los puntos graficados presentan (más o menos) cierta alineación.

- (b) Asumiendo μ y σ^2 como los parámetros de la distribución log-normal, calcule μ y σ^2 , los parámetros de la distribución normal asociada a la variable aleatoria $Y = \log Z$.
- (c) Como ingeniero experto en ciencias de la tierra responsable de la explotación de este yacimiento, diga ud., ¿cuál sería el siguiente paso hacia la mejor comprensión del yacimiento?.



EJERCICIO No. 5

Construcción de un Semi-variograma.

El conjunto de datos empleado en este ejercicio ha sido suficientemente reducido para permitir el cálculo de los diversos semi-variogramas direccionales, ya sea a mano o empleando la calculadora.

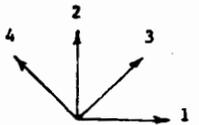
Los datos están localizados en los nodos de la malla cuadrada de lado a . Las direcciones por estudiar son las dos direcciones principales α_1 y α_2 , y las dos direcciones diagonales α_3 y α_4 . Note que el tamaño del espaciamiento básico a lo largo de las direcciones diagonales es $a\sqrt{2}$, mientras que en las direcciones principales es a .

Complete la tabla de abajo dando los números de pares de datos usados $N(i)$, y los valores correspondientes del semi-variograma experimental $\gamma(i)$, para cada una de las cuatro direcciones y para los tres primeros múltiplos de los espaciamientos básicos. Use la siguiente fórmula para el cálculo de $\gamma(i)$:

$$\gamma(r) = \frac{1}{2N(r)} \sum_{i=1}^{N(r)} [z(x_i+r) - z(x_i)]^2$$

MALLA DE DATOS

	35	35	33	33	34	31	35	37	41	41
α_1										
a	35	35	35			35	33			41
	37	35	37	35		37	37	39	39	41
	37	40	42		34	36	41			34
	35		41			33				
				35			42	33		
							39		31	
						30				



Verifique si la regionalización es isotrópica. Calcule el semi-variograma isotrópico medio combinando los cuatro semi-variogramas experimentales. Use la fórmula

$$\bar{\gamma}(r) = \frac{\sum_{k=1}^4 N_k(r) \gamma_k(r)}{\sum_{k=1}^4 N_k(r)}$$

Ajuste un modelo lineal al semivariograma medio.

T A B L A

NUMERO DE DATOS - SEMI-VARIOGRAMA

DIRECCION	N(1)	$\gamma(1)$	N(2)	$\gamma(2)$	N(3)	$\gamma(3)$
α_1						
α_2						
α_3						
α_4						

EJERCICIO No. 6

Los siguientes valores corresponden a un semi-variograma experimental. Grafique los puntos definidos por las parejas $(h_i, \gamma(h_i))$ y ajuste a ellos el modelo teórico más apropiado (esférico, lineal, exponencial, etc.) definiendo los parámetros del modelo.

h_i	$\gamma(h_i)$
200	0.43
282	0.57
400	0.63
488	0.75
564	0.85
600	0.85
800	0.87
1000	0.88
1200	0.87
1400	0.85
1600	0.80

EJERCICIO No. 7

Anisotropía Geométrica.

El semi-variograma del ejercicio No. 6 representa la variabilidad estructural de cierta variable aleatoria regionalizada, en la dirección norte-sur. Los valores que a continuación se muestran corresponden al semi-variograma de la misma variable aleatoria regionalizada, pero en la dirección este-oeste.

Grafique los valores de este último semi-variograma sobre la gráfica del semi-variograma N-S y ajuste a dichos valores el modelo teórico más apropiado, definiendo, una vez más, sus respectivos parámetros.

Defina la transformación lineal necesaria para reducir los dos semi-variogramas a un solo semi-variograma isotrópico.

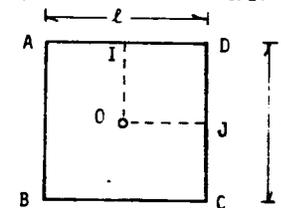
h_i	$\gamma(h_i)$
200	0.24
282	0.29
400	0.38
488	0.45
564	0.55
600	0.64
800	0.75
1000	0.85
1200	0.87
1400	0.85
1600	0.82

EJERCICIO No. 8

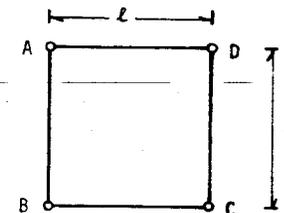
Ejemplo de Aplicación de las Funciones Auxiliares.

Procediendo en forma similar a la descrita en los ejemplos de aplicación (página 95), exprese la varianza de estimación $\frac{\sigma^2}{E}$ en términos de -- funciones auxiliares apropiadas, para cada uno de los casos particulares siguientes: (*)

- (a) La varianza de estimación de un cuadrado ABCD de lado ℓ , cuando éste es estimado por una muestra central O.



- (b) La varianza de estimación de un cuadrado ABCD de lado ℓ , cuando éste es estimado por el conjunto de muestras localizadas en cada una de las esquinas del cuadrado.



(*) Asuma condiciones isotrópicas.

- (c) Considerando en los dos casos anteriores un semivariograma lineal e isotrópico $\gamma(r) = r$, $c = 1$, y $\ell = 1$, calcule los valores correspondientes de c_E^2 .

EJERCICIO No. 9

Estimación del Valor Medio de la Porosidad en un Bloque de Roca de Tamaño V .

Consideremos el ejemplo de la página 102. La variable aleatoria regionalizada a tratar representa la porosidad, la cual se ha medido en núcleos (de tamaño v) de pozos perforados en las localizaciones S_1, S_3, O_4 y O_5 (figura 21).

Empleando esta información, se desea estimar el valor medio de la porosidad en el bloque V , así como la varianza de estimación. Asuma que el tamaño del núcleo v es lo suficientemente pequeño, comparado con el tamaño del bloque V , como para considerarlo puntual.

Los valores medidos son:

Localización	porosidad (%)
S_1	22.0
S_3	30.0
O_4	14.0
O_5	30.0

El espaciamiento "1" entre los pozos es igual a 600 m. y el semivariograma asociado al fenómeno tiene como ecuación:

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r=0 \\ 8.0 & \text{si } 0 < r \leq 600 \\ 1.92 r & \text{si } r > 600 \end{cases}$$

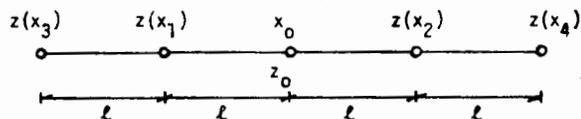
"semivariograma lineal sin efecto de pepita".

EJERCICIO No. 10

Estimación de Valores Puntuales.

En este ejercicio se pretende mostrar la influencia o efecto de la pendiente de un semi-variograma lineal en los pesos de un estimador.

Se desea estimar el valor puntual $z(x_0)$ empleando cuatro valores puntuales regularmente espaciados y alineados:



El estimador $z^*(x_0)$ del valor $z(x_0)$, es una combinación lineal de los cuatro datos:

$$z^*(x_0) = \lambda_1 z(x_1) + \lambda_2 z(x_2) + \lambda_3 z(x_3) + \lambda_4 z(x_4)$$

Debido a condiciones de simetría y de insesgamiento, esta expresión se reduce a:

$$z^*(x_0) = \lambda \frac{z(x_1) + z(x_2)}{2} + (1 - \lambda) \frac{z(x_3) + z(x_4)}{2}$$

donde λ es el peso asociado al conjunto de datos $S_1 = \{z(x_1), z(x_2)\}$ y $(1 - \lambda)$ es el peso asociado al conjunto de datos $S_2 = \{z(x_3), z(x_4)\}$.

- (a) Expresar la varianza de estimación σ_E^2 en términos de λ , $\bar{\gamma}(S_1, S_1)$, $\bar{\gamma}(S_2, S_2)$, $\bar{\gamma}(S_1, S_2)$, $\bar{\gamma}(S_1, 0)$ y $\bar{\gamma}(S_2, 0)$.
- (b) Expresar σ_E^2 en términos de $\gamma(h)$.
- (c) Si $\gamma(h) = h^\omega$, $\forall \omega \in (0, 2)$, expresar σ_E^2 en términos de h, ω y λ .
- (d) Expresar σ_E^2 / h^ω en términos de ω y λ .
- (e) Si ω se considera constante, ¿qué valor de $\lambda = \lambda_m$ minimiza la expresión σ_E^2 / h^ω ?
- (f) De los valores numéricos de λ_m y los correspondientes de σ_E^2 / h^ω para cada uno de los siguientes valores de ω :

ω	λ_m	σ_E^2 / h^ω	$(1 - \lambda_m)$
0^+			
$\frac{1}{2}$			
1			
$3/2$			
2^-			

Comente los resultados.

NOTA: - cuando $\omega \rightarrow 0^+$, $\gamma(h) = h^0 = 1$, representa un modelo con efecto de pepita puro.

- cuando $\alpha = 1$, $\gamma(h) = h$, el modelo corresponde a un proceso "Wiener-Levy" (movimiento Browniano): esto es, en un proceso donde el estado presente $z(x)$ es conocido, el estado futuro $z(x+h)$ dependerá exclusivamente de $z(x)$ y no de los estados pasados $z(x-h)$.

EJERCICIO No. 11

EVALUACION DEL ESPESOR MEDIO NETO DE LA CAPA DE CARBON EN UN BLOQUE DE VOLU-
MEN V - RIO ESCONDIDO.

En la zona ED del yacimiento de carbón de Río Escondido se han efectua-
do una serie de perforaciones las cuales han permitido medir el espesor ne-
to de la capa de carbón. Considerando cada uno de estos espesores como va-
lores puntuales, se calculó el semivariograma experimental correspondiente.

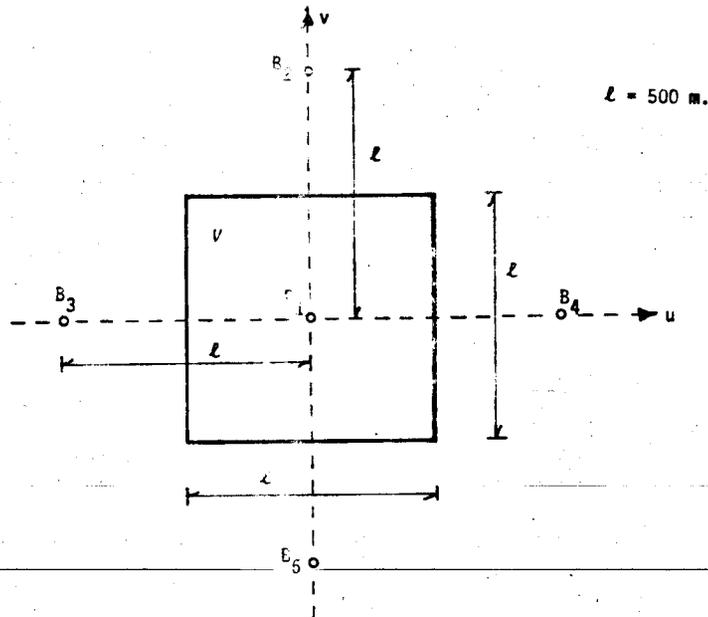
TABLA I

(h)	$\gamma(h)$
250	0.129
500	0.142
750	0.144
1000	0.162
1250	0.178
1500	0.208
1750	0.200
2000	0.203
2500	0.202

La media de los espesores es 1.63 m. y la varianza 0.213 m². El semiva-
riograma de la Tabla I fue calculado en diversas direcciones sin apreciarse
diferencias significativas que indujeran a considerar al fenómeno como ani-
sotrópico.

Grafique los puntos de la tabla h vs. $\ln(h)$ y ajuste el modelo teórico "más apropiado" (esférico, exponencial, lineal, etc.) definiendo sus parámetros.

Ahora bien, el bloque V , al cual se le desea estimar su espesor neto medio, guarda la siguiente relación geométrica con los barrenos más cercanos:



Los espesores netos en los barrenos son:

$$z_{B_1} = 1.50 \text{ m.}$$

$$z_{B_2} = 1.00 \text{ m.}$$

$$z_{B_3} = 2.40 \text{ m.}$$

$$z_{B_4} = 0.80 \text{ m.}$$

$$z_{B_5} = 1.60 \text{ m.}$$

Empleando la técnica del Krigeage evalúe z_V , el espesor neto medio asociado al bloque de volumen V .

CONSEJO: Dado que existe simetría entre las muestras B_2, B_3, B_4 y B_5 y el bloque V , y dado que el fenómeno es considerado como isotrópico, las muestras B_2, \dots, B_5 podrán considerarse como una sola muestra B'_2 . El valor de λ asociado a $z_{B'_2}$ deberá ser dividido entre cuatro (4) y aplicado a cada barreno original z_{B_2}, \dots, z_{B_5} , en la evaluación de z_V .

$$\text{Si } B'_1 = B_1 \text{ y}$$

$$B'_2 = \{B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5\}$$

el estimador Z^* podría definirse como:

$$Z^* = \lambda_1 z_{B'_1} + \lambda_2 z_{B'_2}$$

$$\text{donde } z_{B'_1} = z_{B_1} \text{ y } z_{B'_2} = (z_{B_2} + z_{B_3} + z_{B_4} + z_{B_5}) / 4$$