



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

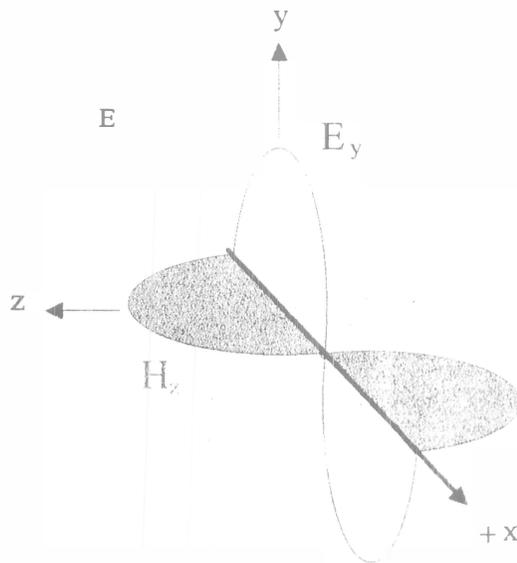
FACULTAD DE INGENIERÍA

**FUNDAMENTOS DE TEORÍA
ELECTROMAGNÉTICA.**

ING. LARRY HIPÓLITO ESCOBAR SALGUERO

ING. FRANCISCO OCTAVIO CORTÉS SOTO

Fundamentos de Teoría Electromagnética



FACULTAD DE INGENIERIA

*Larry Hipólito Escobar Salguero
Francisco Octavio Cortés Soto*

INTRODUCCIÓN

En la actualidad con el auge de las comunicaciones, un ingeniero del área eléctrica-electrónica y de comunicaciones necesita contar con buenas bases de Teoría Electromagnética para los grandes desafíos que esta área muestra día con día. La Teoría Electromagnética es un área muy extensa y fundamental de las ciencias de la ingeniería, y por lo tanto, es necesario darle profundidad en su estudio.

El objetivo de la presente obra es hacer una introducción a las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo y entendimiento de la Teoría Electromagnética, facilitar la comprensión de los temas, llevar a cabo el análisis necesario en cada tema y establecer una mejor comunicación en el aprendizaje de la misma. Debido a su complejidad y extensión, se omiten temas mucho más específicos en lo que se refiere a las aplicaciones.

Los temas están desarrollados con base al temario de la Facultad, y al final se agregan conceptos matemáticos básicos para el curso y un conjunto de problemas propuestos para enriquecer el entendimiento del tema.

Los autores esperan que estas notas sean un apoyo para la comunidad de la Facultad de Ingeniería, a la vez aceptamos cualquier sugerencia o comentario sobre el material.

Larry Hipólito Escobar Salguero

Francisco Octavio Cortés Soto

Noviembre del 2000

TEMARIO

CAPÍTULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES
Y ECUACIONES DE MAXWELL

CAPÍTULO II

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

CAPÍTULO III

REFLEXIÓN, REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN

CAPÍTULO IV

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y GUÍAS DE ONDA

ANEXOS

INTRODUCCIÓN

En la actualidad con el auge de las comunicaciones, un ingeniero del área eléctrica-electrónica y de comunicaciones necesita contar con buenas bases de Teoría Electromagnética para los grandes desafíos que esta área muestra día con día. La Teoría Electromagnética es un área muy extensa y fundamental de las ciencias de la ingeniería, y por lo tanto, es necesario darle profundidad en su estudio.

El objetivo de la presente obra es hacer una introducción a las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo y entendimiento de la Teoría Electromagnética, facilitar la comprensión de los temas, llevar a cabo el análisis necesario en cada tema y establecer una mejor comunicación en el aprendizaje de la misma. Debido a su complejidad y extensión, se omiten temas mucho más específicos en lo que se refiere a las aplicaciones.

Los temas están desarrollados con base al temario de la Facultad, y al final se agregan conceptos matemáticos básicos para el curso y un conjunto de problemas propuestos para enriquecer el entendimiento del tema.

Los autores esperan que estas notas sean un apoyo para la comunidad de la Facultad de Ingeniería, a la vez aceptamos cualquier sugerencia o comentario sobre el material.

Larry Hipólito Escobar Salguero

Francisco Octavio Cortés Soto

Noviembre del 2000

G.- 612440

INDICE



FACULTAD DE INGENIERIA

CAPITULO I CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y ECUACIONES DE MAXWELL

CONCEPTOS BASICOS	1
- Carga	1
- Ley de Coulumb (1736-1806).....	1
Permitividad.....	2
Permitividad Relativa de un Medio.....	2
Sistema de Cargas Discretas Distribuidas Aleatoriamente	3
Distribuciones Uniformes y Continuas de Carga	3
Densidad.....	3
Densidad de Carga Lineal o Línea de Carga.....	4
Densidad de Carga Superficial o Superficie de Carga.....	4
Densidad Volumétrica de Carga	4
Fuerza sobre una Carga Puntual "q" debida a una Distribución Lineal de Carga "I".....	5
Fuerza sobre una Carga Puntual "q" debida a una Distribución Superficial de Carga "S".....	6
Fuerza sobre una Carga Puntual "q" debida a una Distribución Volumétrica de Carga "V".....	6
CAMPO ELECTRICO.....	6
Líneas de Fuerza	7
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a una Distribución Discreta de Cargas.....	9
Campo Eléctrico Debido a una Distribución Continua de Carga.....	9
Campo Eléctrico Debido a una Distribución Lineal de Carga	9
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a una Superficie de Carga.....	10
Campo Eléctrico en un Punto "P" Debido a un Volúmen de Carga.....	10
Flujo Eléctrico.....	10
Densidad de Flujo Eléctrico "D".....	11
Clases de Medios	11
Medio Homogéneo.....	11
Medio Lineal.....	11
Medio Isotrópico.....	12
LEY DE GAUSS.....	12
Resultados Prácticos de la Evaluación de la Ley de Gauss.....	13
Aplicaciones de la Ley de Gauss.....	13
Divergencia.....	13
Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial o Voltaje.....	14
Potencial Absoluto de un Punto Dado, Debido a una Carga Q.....	14
Potencial V_p Debido a Distribución de Carga.....	15
Gradiente de Potencial V.....	15
Líneas y Superficies Equipotenciales.....	16
Propiedades de los Campos Eléctricos, Mapas de Campo y Voltaje.....	16
Capacitor o Condensador.....	16
Campo Eléctrico en un Dieléctrico o Polarización de un Dieléctrico.....	17
Momento Dipolar Eléctrico	17
Corriente Eléctrica y Densidad de Corriente.....	21
Resistencia Eléctrica y Ley de Ohm.....	22
Potencia y Ley de Joule.....	22
Resistividad y Conductividad	23
Ley de Ohm en un Punto	25
Condiciones de Frontera.....	26
Rigidez Dieléctrica.....	32

APUNTE
65-C

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM



612440

CAMPOS MAGNETICOS ESTACIONARIOS	33
Fuerza de un Campo "B" sobre un Conductor	33
Permeabilidad	33
Ley de Biot-Savart	34
Flujo Magnético y Densidad de Flujo Magnético	34
Fuerza de Lorentz.....	35
Campo Eléctrico.....	36
CAMPO MAGNETICO	38
Momento de Torsión de una Espira, Momento Magnético o Torque	41
Ley de Ampere.....	42
LEY DE FARADAY.....	44
Ley de Lenz	45
El Rotacional del Campo H	45
Condición Necesaria pero no Suficiente para que Exista Rotacional	45
Magnetización de los Materiales.....	46
LEYES DE MAXWELL	49
Primera Ley de Maxwell o Ley de Faraday	49
a) Forma Integral de la Ley de Faraday	49
b) Interpretación del Rotacional como una Integral de Línea	50
Teorema de Stokes.....	51
c) Forma Diferencial de la Ley de Faraday	52
Segunda Ley de Maxwell o Ley de Gauss	52
a) Forma Integral de la Ley de Gauss	52
b) Interpretación de la Divergencia como una Integral de la Superficie	52
c) Forma Diferencial de la Ley de Gauss.....	54
Tercera Ley de Maxwell o Ley de Ampere	54
a) En Forma Integral se tiene	54
b) Forma Diferencial aplicado al Teorema de Stokes.....	54
Cuarta Ley de Maxwell o Continuidad de Flujo Magnético	55
a) Forma integral	55
b) Forma Diferencial aplicando el Teorema de la Divergencia	55
Corriente de Desplazamiento.....	57
Ecuaciones de Maxwell en Forma Punto y Forma Integral	60
RELACION ENTRE LA TEORIA DE CAMPO Y LA TEORIA DE CIRCUITO (ECUACIONES DE MAXWELL).....	61
Introducción.....	61
Aplicaciones de las Teorías de Circuito y de Campo	62
Relaciones Generales de Campo	65
El Circuito Serie, Comparación de la Teoría de Circuito y la Teoría de Campo.....	67
Ecuaciones de Maxwell como Generalización de las Ecuaciones Circuitales.....	69
Ecuaciones de Maxwell en el Espacio Libre.....	73
Ecuaciones de Maxwell para Campos Variantes y Armónicos	74
Resistencia, Capacitancia e Inductancia en Términos de Cantidades de Circuitos y de Campo	74
Tablas de las Ecuaciones de Maxwell	74
Ecuaciones de Maxwell en Forma Integral.....	75
Ecuaciones de Maxwell en Forma Diferencial.....	76

CAPITULO II

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

BREVES FUNDAMENTOS	77
Fuentes de Radiación	77
Justificación del uso de Señales Senoidales y Cosenoidales para el Análisis de O.E.M. Planas.....	78
ONDA ELECTROMAGNETICA	79
Onda Plana.....	80
Ondas con Modos de Orden Superior.....	80
Fasores.....	80
ECUACIONES DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA TRANSVERSAL (T.E.M.) EN MEDIOS DIELÉCTRICOS	81
Ecuaciones de Maxwell en Forma Compleja o Fasorial.....	87
Impedancia Intrínseca.....	88
Impedancia Característica.....	88
Impedancia de Onda.....	89
Dieléctrico Perfecto.....	90
Dieléctrico Disipativo.....	90
Impedancia Intrínseca o Característica del Espacio Libre	90
Movimiento de la Onda Plana Uniforme.....	90
Movimiento de la Onda en el Espacio Libre.....	91
IMPEDANCIA INTRÍNSECA PARA UN MEDIO DIELÉCTRICO	93
Movimiento de la Onda en Dieléctrico Perfectos.....	93
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN CONDUCTORES	95
Impedancia Intrínseca para Medios Dieléctricos Disipativos	96
Tangente de Pérdida.....	98
Propagación de Buenos Conductores y Profundidad de Penetración o Efecto Piel.....	100
O.E.M. Y ECUACIÓN DE ONDA EN MEDIOS CONDUCTORES	104
Clasificación Arbitraria de los Medios	107
Resumen de Constantes en los Medios.....	108
POTENCIA ENERGÍA Y VECTOR DE POYNTING.....	109
POLARIZACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	115
Polarización Lineal.....	116
Polarización Circular.....	117
Polarización Elíptica	119

CAPÍTULO III

REFLEXIÓN, REFRACCIÓN Y DIFRACCIÓN.

INTRODUCCION	121
EL PRINCIPIO DE HUYGENS	122
Aproximación del Rayo.....	123

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN.....	125
El Índice de Refracción	127
Dispersión y Prismas	129
Dispersión.....	129
Aplicación del Principio de Huygen a la Reflexión y Refracción	130
Principio de Fermat	131
REFLEXIÓN TOTAL INTERNA.....	136
Intensidad de la Luz	137
Absorción de la Luz Transmitida.....	138
RELACIÓN DE ONDA ESTACIONARIA	139
Impedancia de Entrada de Medios	143
INDICENCIA OBLICUA Y ANÁLISIS ELECTROMAGNÉTICO.....	146
Análisis de Incidentes Oblicua.....	148
Análisis de Incidencia Normal.....	149
Análisis de Ondas en una Interfase	150
Deducción de Ecuaciones de Fresnel y los Coeficientes de Reflexión y Transmisión	152
Interpretación de las Ecuaciones de Fresnel	156
Coeficientes de amplitud	156
Corrimientos de Fase.....	158
Reflectancia y Transmitancia.....	161
REFLEXIÓN TOTAL INTERNA.....	163
Propiedad de Ópticas de los Metales.....	164
Ondas en un Metal	165
El Análisis de Stokes para la Reflexión y la Refracción.....	166
El Experimento de Joseph Thomson	168

CAPÍTULO IV LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y GUÍAS DE ONDA

INTRODUCCIÓN	169
CLASIFICACIONES.....	169
Según la Configuración de su Campo o Modo de Propagación	170
Según la Potencia de Transmisión.....	170
PARÁMETROS O CONSTANTES DISTRIBUIDAS	171
MODELO DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN BIFILAR.....	172
Análisis de una Línea de Transmisión Bifilar. Postulados del Análisis de Circuitos con Elementos Distribuidos	174
Análisis de una Porción Infinitesimal o Circuito Equivalente de una L.T. Uniforme	175
Solución de Ecuaciones en el Dominio del Tiempo y Ecuaciones de Onda	175
REFLEXIÓN DE ONDAS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN.....	178
Velocidad de Grupo	183
Coeficiente de Reflexión	185
Superposición de Ondas	186

ONDA ESTACIONARIA	188
Razón de Onda Estacionaria (SWR).....	190
Acoplamiento.....	192
LA CARTA DE SMITH.....	194
¿Qué es la Carta de Smith?.....	194
¿Cómo se Construye la Carta de Smith?.....	194
Resistencia Normalizada	195
Reactancia Normalizada.....	195
Características de la Carta de Smith.....	197
¿Cómo se Usa la Carta de Smith?	199
LA CARTA DE ADMITANCIA DE SMITH	203

ANEXO I

NÚMEROS COMPLEJOS	204
Formas de Representación de los Números Complejos	205
Operaciones Algebraicas con Números Complejos.....	206
Fasores.....	207
SISTEMAS DE COORDENADAS	208
Volúmen, Superficie y Elementos Diferenciales de Línea.....	213
ANÁLISIS VECTORIAL.....	215
Vectores.....	215
Vector Unitario	216
Cantidad Escalar	216
Cantidad Vectorial	216
Algunas Leyes De La Suma Y Resta Vectorial.....	217
Suma de Vectores.....	217
Resta de Vectores	217
Leyes o Propiedades de la Suma y Resta Vectorial.....	217
Producto Punto o Producto Escalar	218
Producto Vectorial o Producto Cruz.....	219
Campo	219
Campo Escalar	220
Campo Vectorial	220
Diferencia de Vectores y Campos Vectoriales.....	221
Gradiente de una Función Escalar	221
La Integral de Línea, de Contorno o Curvilínea	221
Evaluación de la Integral de Línea	222
Propiedades.....	223
La Integral de Superficie.....	223
La Integral de Volúmen.....	225
La Divergencia y el Rotacional	225
La Divergencia.....	225
Teorema de Divergencia o Teorema de Green's en el Espacio.....	227
El Rotacional.....	228
Teorema de Stokes	220
METODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES	230

OPERADORES DIFERENCIALES VECTORIALES	231
Coordenadas Rectangulares	231
Coordenadas Cilíndricas	231
Coordenadas Esféricas	231
IDENTIDADES VECTORIALES	232
TABLAS DE CONSTANTES CARACTERÍSTICAS	233
PROBABILIDADES DE ALGUNOS DIELECTRICOS	234
PROPIEDADES DE LOS METALES COMO CONDUCTORES	234

ANEXO II

PROBLEMAS PROPUESTOS	235
----------------------------	-----

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFIA	243
--------------------	-----

CAPÍTULO I

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

**CONCEPTOS FUNDAMENTALES
Y ECUACIONES DE MAXWELL.**

CONCEPTOS BÁSICOS

Carga.

Es una propiedad fundamental y característica de las partículas elementales de la materia. La carga responde a la conservación de la energía, es decir, no se crea ni se destruye, sólo se transfiere o se reagrupa, por lo que la carga total de un sistema cerrado es cero, entonces se dice que es eléctricamente neutro.

Ley de Coulomb (1736-1806).

Es una ley que surge de observaciones experimentales de fines del siglo XVIII, y enuncia lo siguiente:

- Existen sólo dos tipos de cargas eléctricas: positiva y negativa.
- Dos cargas puntuales ejercen fuerzas entre sí, esta fuerza actúa sobre la línea que las une. Las cargas de igual signo se repelen y las de signo opuesto se atraen.
- La fuerza es proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las une.

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{a}$$

Donde k es una constante de proporcionalidad conocida como constante de Coulomb. El valor de esta constante depende de la elección del sistema de unidades. Con base en la experimentación, se sabe que la constante de Coulomb en unidades del SI tiene el siguiente valor.

$$k = 8.9875 \times 10^9 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \right]$$

Para simplificar los cálculos que se hacen, comúnmente se usa el valor aproximado.

$$k = 9.0 \times 10^9 \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \right]$$

Frecuentemente esta constante se expresa como:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Donde ϵ es la permitividad del medio en el que están situadas las cargas. Haciendo un análisis dimensional, se encuentra que ϵ tiene las dimensiones de capacitancia por longitud. La unidad del SI para la permitividad es el farad por metro (Fm^{-1}).

La ley de Coulomb, es válida para la repulsión electrostática entre núcleos a distancias mayores a 10^{-4} m aproximadamente, a distancias menores domina el panorama de las fuerzas potentes, pero de corto alcance.

La unidad más pequeña de carga conocida en la naturaleza es la que tiene un electrón o un protón. La carga de un electrón o de un protón tiene una magnitud igual a:

$$e = 1.60207 \times 10^{-19} \text{ Coulombs}$$

Por tanto, una carga de un coulomb es igual a la carga de 6.3×10^{18} electrones, es decir, $1/e^*$. Se puede comparar esto con el número de electrones libres que se encuentran en 1 cm^3 de cobre, que es del orden de 10^{23}

PARTÍCULA	CARGA (C)	MASA (kg)
Electrón	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	9.1095×10^{-31}
Protón	$+1.6021917 \times 10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
Neutrón	0	1.67261×10^{-27}

Además, el radio del electrón es $r_e = 3.8 \times 10^{-15}$ m.

Permitividad.

La permitividad (ϵ) es la facilidad o capacidad que tiene la materia de almacenar (acumular) y/o transportar cargas eléctricas (flujo de carga), y determina el comportamiento eléctrico de un material. La permitividad en el espacio libre o vacío es un patrón de medición que está dado por:

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right] \quad \epsilon_0 = 8.8542 \left[\frac{\text{pF}}{\text{m}} \right] \quad \epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right]$$

También, es común usar el valor aproximado de esta constante.

$$\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right] \quad \epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \left[\frac{\text{nF}}{\text{m}} \right] \quad \epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \left[\frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right]$$

Permitividad Relativa de un Medio.

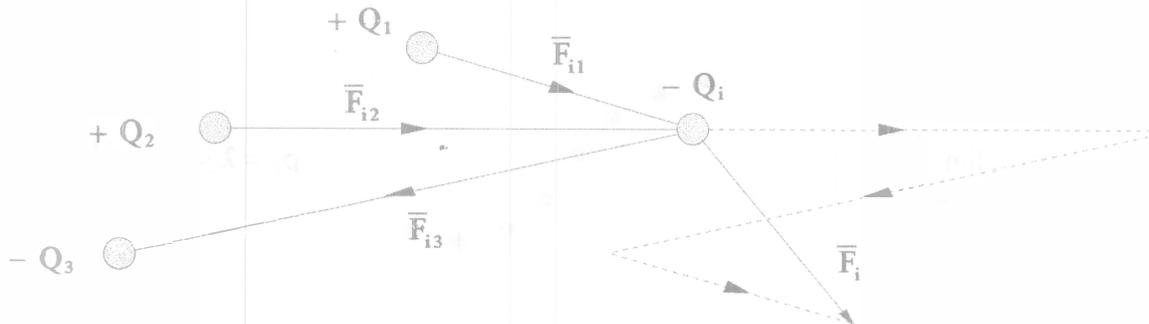
Es la relación entre la permitividad patrón (del vacío) y la permitividad del medio.

$$\epsilon_{r \text{ medio}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

* No se ha descubierto unidad de carga menor que e; sin embargo, recientemente se han propuesto algunas teorías acerca de la existencia de partículas llamadas quarks, con cargas de $e/3$ y $2e/3$.

Sistema de Cargas Discretas Distribuidas Aleatoriamente.

Considérese el siguiente sistema de cargas discretas, aplicando el principio de superposición se determina la fuerza eléctrica sobre una carga "i".



La fuerza que actúa sobre una carga es la resultante de aplicar repetidamente la ley de Coulomb sobre varias cargas que afecta a la carga en particular, luego se efectúa la suma vectorial para encontrar la fuerza resultante.

$$\vec{F}_i = k Q_i \sum_{j=1}^{n-i} \frac{Q_j}{(r_{ij})^2} \hat{a}_{ij} ; \quad i \neq j$$

Distribuciones Uniformes y Continuas de Carga.

En este tipo de distribuciones la carga eléctrica se encuentra distribuida uniformemente en la región correspondiente, ya sea lineal, superficial o volumétrica.

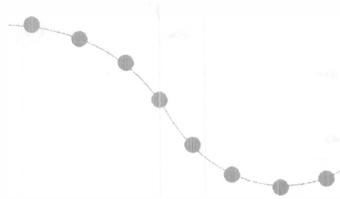
Densidad.

Se le llama así a la cantidad de entes o elementos existentes en un medio, donde el medio es una unidad del espacio (longitud, área, volumen).

Densidad de Carga Lineal o Línea de Carga.

Si se distribuye uniformemente en la línea ℓ la carga "Q", entonces la densidad de carga es constante y por estar distribuida sobre una línea, se le llama densidad de carga lineal; y está se denota por λ o ρ_ℓ , cuando la distribución es lineal pero no uniforme se tiene que la densidad de carga lineal es una función de ℓ , es decir, $\lambda = f(\ell)$.

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\ell}$$

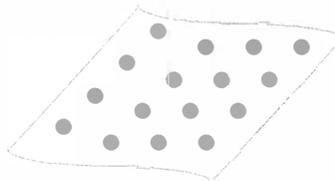


$$\rho_\ell = \lambda = \frac{Q}{\ell} \left[\frac{C}{m} \right]$$

Densidad de Carga Superficial o Superficie de Carga.

Si se distribuye uniformemente en la superficie S la carga "Q", entonces la densidad de carga es constante y por estar distribuida sobre una superficie se le llama densidad de carga superficial; se denota por σ o ρ_s .

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{Q}{S}$$



$$\rho_s = \sigma = \frac{Q}{S} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Densidad Volumétrica de Carga.

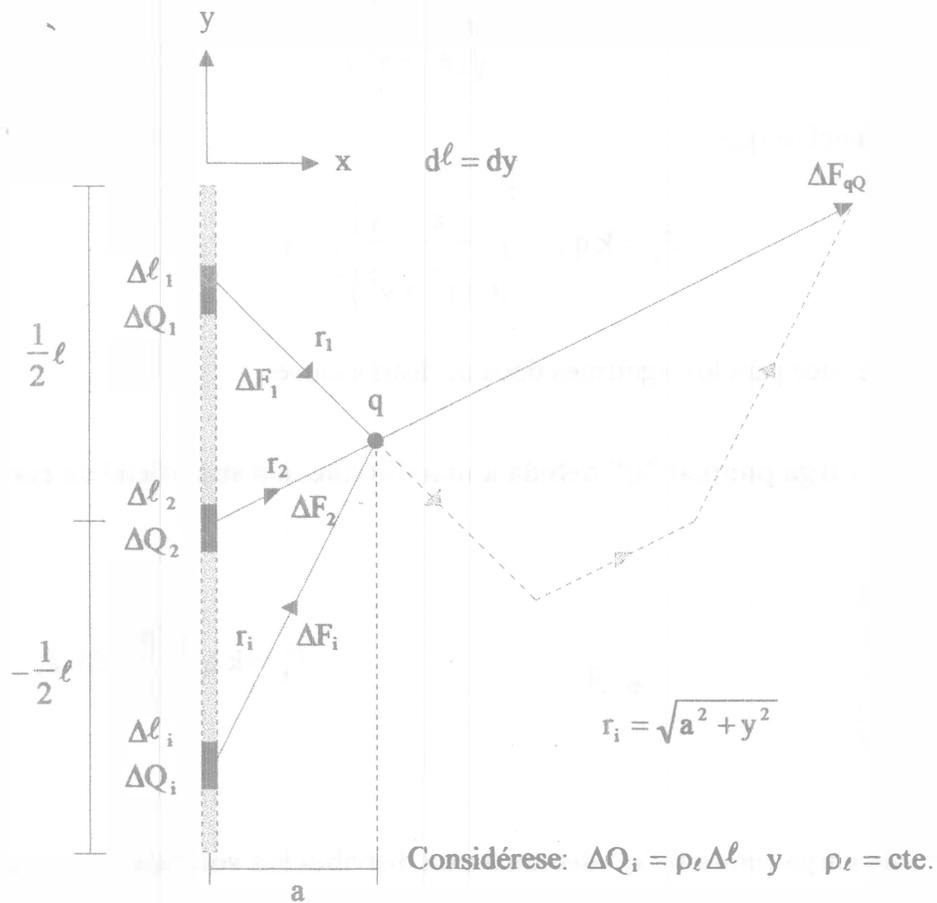
Si se distribuye uniformemente en un volumen V la carga "Q", entonces la densidad de carga es constante y por estar distribuida en un volumen se le llama densidad de carga volumétrica; se denota por ρ_v o simplemente como ρ .

$$\rho_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{Q}{V}$$



$$\rho = \frac{Q}{V} \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Fuerza sobre una carga puntual "q" debida a una distribución lineal de carga "l".



Sabemos que la fuerza eléctrica entre dos cargas está dada por:

$$\vec{F}_{qQ} = k \frac{q \cdot Q}{(r_{qQ})^2} \hat{a}_r$$

De las condiciones dadas se tiene:

$$\vec{F}_{q_i} = k q_i \sum_{j=1}^{n-1} \frac{Q_j}{(r_{ij})^2} \hat{a}_r \Rightarrow \vec{F}_{q\ell} = k q \sum_{\ell} \frac{\rho_{\ell} \Delta \ell}{(r_{ij})^2} \hat{a}_r$$

Cuando $\Delta \ell \rightarrow 0$:

$$\vec{F}_q = k q \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\rho_{\ell}}{r^2} d\ell \hat{a}_r = k q \rho_{\ell} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{r^2} d\ell \hat{a}_r$$

Pero el vector unitario \hat{a}_r está dado por:

$$\hat{a}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{a \hat{i} - y \hat{j}}{\sqrt{(a^2 + y^2)}}$$

Lo que finalmente implica que:

$$\vec{F}_q = k q \rho_\ell \int_{-\frac{1}{2}\ell}^{\frac{1}{2}\ell} \frac{a \hat{i} - y \hat{j}}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy$$

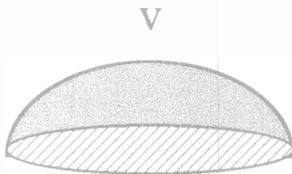
En forma similar se hace para los siguientes tipos de distribuciones.

Fuerza sobre una carga puntual "q" debida a una distribución superficial de carga "S".



$$\vec{F}_q = k q \int_s \frac{\rho_s}{r^2} dS \hat{a}_r$$

Fuerza sobre una carga puntual "q" debida a una distribución volumétrica de carga "V".



$$\vec{F}_q = k q \int_v \frac{\rho}{r^2} dV \hat{a}_r$$

Cuando existen varias distribuciones, se aplica el principio de superposición.

CAMPO ELÉCTRICO

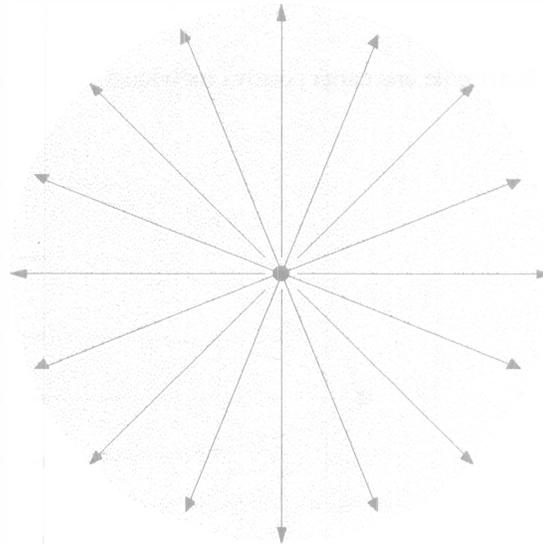
Si tenemos una carga puntual $+Q$ y colocamos en cualquier punto cercano una carga de prueba $+q$, por la ley de Coulomb sabemos que existe una fuerza de repulsión sobre la carga $+q$ debida a la carga $+Q$, esto es, (F_{qQ}) . Si ahora movemos en cualquier sentido la carga $+q$, y de nuevo dibujamos la fuerza sobre $+q$, y si continuamos así, vamos obteniendo varios vectores, los cuales generan una gráfica de las líneas de fuerza que actuarían sobre $+q$. Este dibujo o gráfico es una herramienta que sirve para visualizar el campo de acción debido a la carga $+Q$.

El campo Eléctrico se define como el límite de la fuerza eléctrica sobre una carga testigo colocada en un punto. También, se define como la fuerza por unidad de carga en un punto cercano a una carga dada en dicho punto. La carga $q \rightarrow 0$, ya que su presencia no debe de afectar la distribución de campo eléctrico producida por una carga Q .

$$\vec{E} \triangleq \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_e}{q}$$

ó

$$\vec{E} \triangleq \frac{\vec{F}_e}{q}$$

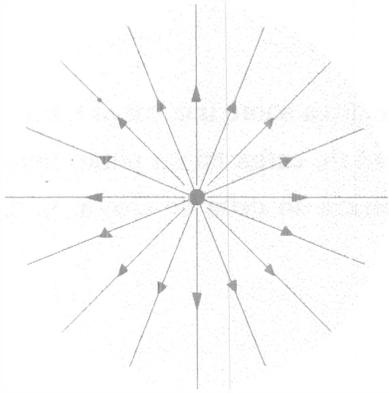


Líneas de Fuerza.

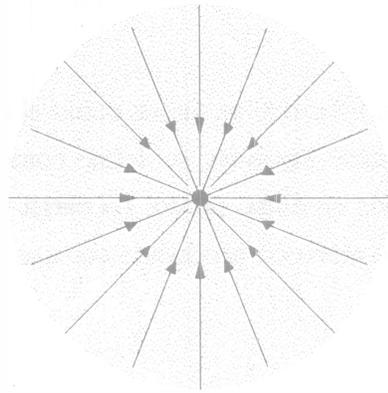
Son líneas imaginarias trazadas de tal forma, que su dirección y sentido en cualquier punto sirven para representar o modelar un campo vectorial o mapa de campo.

Características de las líneas de campo eléctrico:

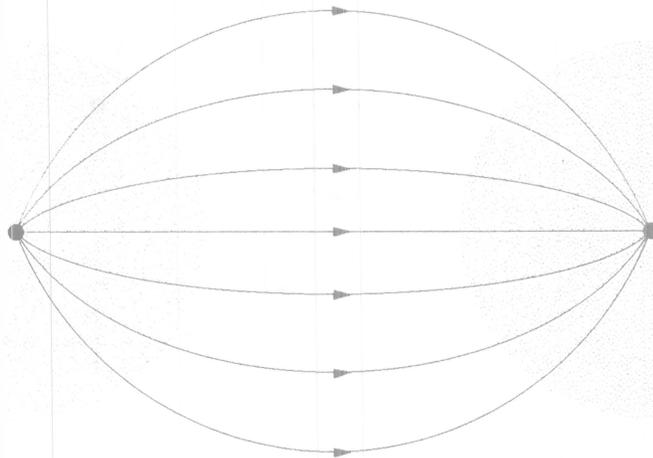
1. En una carga positiva se dibujan saliendo (se tiene una fuente), en una carga negativa se dibujan entrando (se tiene un sumidero).
2. Toda tangente a una de las líneas es la dirección del campo.
3. El número de líneas que se dibuja es proporcional a la magnitud del campo, es decir, son más cercanas entre sí en las regiones donde el campo es más intenso.
4. No se cruzan entre sí.



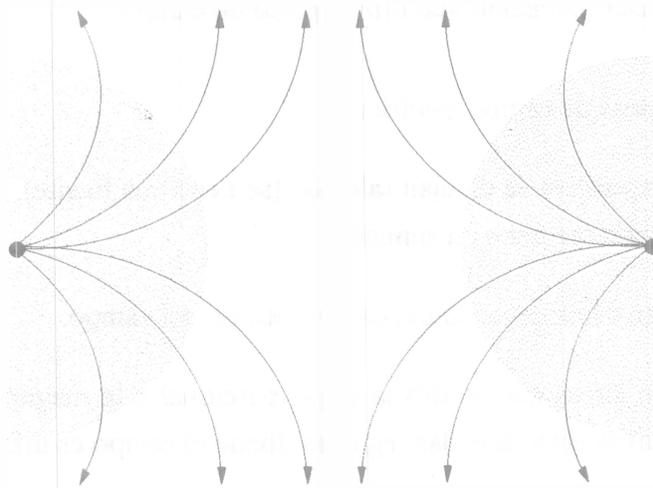
Campo eléctrico de una carga positiva individual.



Campo eléctrico de una carga negativa individual.



Campo eléctrico entre dos cargas eléctricas diferentes.



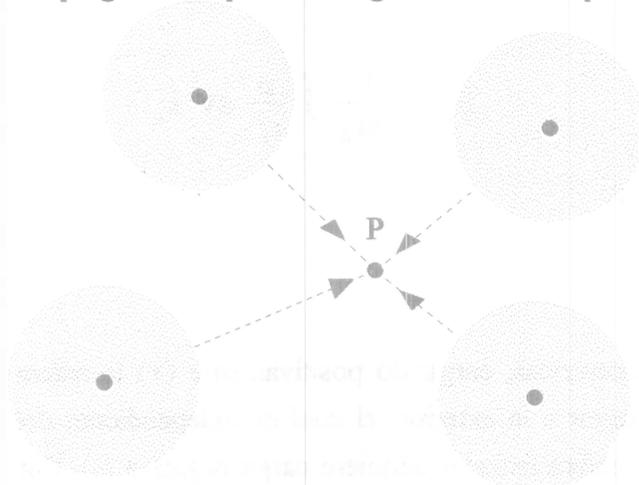
Campo eléctrico entre dos cargas eléctricas iguales.

Una pequeña carga de prueba situada en cualquier punto dentro del campo y que esté libre para moverse, se acelerará en la dirección de la línea de fuerza que pasa por el punto. Una similitud ocurre en el flujo de un fluido con un campo que corresponde a la distribución de velocidades, si se coloca una pequeña partícula con masa ideal, ésta se movería describiendo el comportamiento de las líneas de fuerza. Para una carga puntual "Q", el campo eléctrico a una distancia "r" está dado por:

$$\bar{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad \text{ó} \quad \left[\frac{N}{C} \right]$$

Campo eléctrico en un punto "P" debido a una distribución discreta de cargas.

El campo que actúa sobre un punto es la resultante de la acción que ejerce el campo eléctrico de cada carga sobre ese punto, luego se efectúa la suma vectorial para encontrar la resultante. El campo generado por una carga no afecta a la partícula misma.



$$\bar{E}_p = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{a}_{r_i}$$

Campo eléctrico debido a una distribución continua de carga.

En este caso la carga eléctrica se encuentra uniformemente distribuida en la región correspondiente.

Campo eléctrico debido a una distribución lineal de carga.

El campo eléctrico en el punto P está dado por la suma de los efectos del campo diferencial de cada diferencial de carga.

$$\bar{E}_p = \sum \Delta \bar{E}_p$$

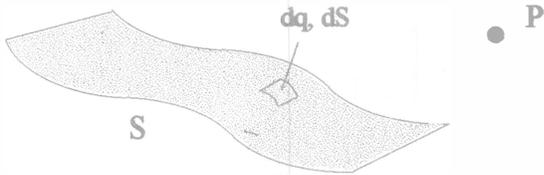
en el límite se tiene que:

$$\Delta \bar{E}_p = d\bar{E}_p$$



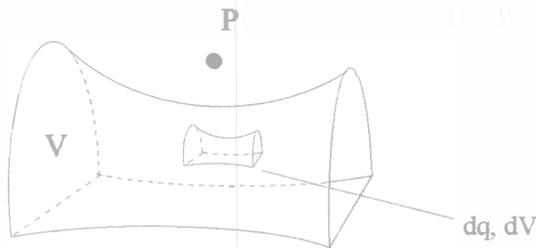
$$\bar{E}_p = \int_{\ell} d\bar{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\rho_{\ell}}{r_i^2} dl \hat{a}_{r_i}$$

Campo eléctrico en un punto "P" debido a una superficie de carga.



$$\bar{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\rho_s}{r_i^2} dS \hat{a}_{r_i}$$

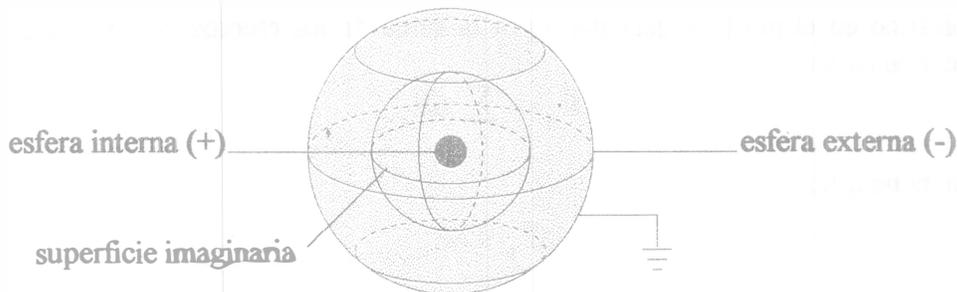
Campo eléctrico en un punto "P" debido a un volumen de carga.



$$\bar{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho}{r_i^2} dV \hat{a}_{r_i}$$

Flujo Eléctrico.

Faraday concluyó que al colocar dos esferas concéntricas, cargando positivamente (+) la esfera interna, existe un flujo de cargas de la esfera interior a la exterior, el cual es independiente del medio y sólo depende de la carga Q, es decir, la esfera exterior adquiere carga negativa (-). Por definición, el flujo eléctrico se origina en las cargas positivas y termina en las cargas negativas y es igual a la magnitud de carga que los produce, por lo que el flujo eléctrico es igual a la Carga. El flujo es una propiedad de cualquier campo vectorial, y atraviesa una superficie hipotética, la cual puede ser abierta o cerrada. En un campo eléctrico E, el flujo eléctrico se mide por el número de líneas de fuerza que pasa a través de una superficie hipotética seleccionada convenientemente.



Densidad de flujo eléctrico "D".

Si alrededor de un punto P, las líneas de flujo tienen la dirección de un vector unitario \hat{a}_n y si la cantidad de flujo $d\psi$ cruza el área diferencial ds , la densidad de flujo eléctrico en P queda definida por:

$$\bar{D} = \frac{d\psi}{dS} \hat{a}_n \quad \text{ó} \quad \bar{D} = \frac{\psi}{A} = \frac{Q}{A} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Para una esfera, se tiene:

$$\bar{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{a}_r \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Nótese que si "D" no depende del medio, entonces "D" se relaciona con "E" por $D = \epsilon_0 E$ para el caso del espacio libre; esto es válido únicamente en los medios isotrópicos, lineales y homogéneos. "D" es la misma que la densidad superficial de carga sobre la esfera, como si la carga Q estuviese distribuida uniformemente sobre la esfera.

Clases de Medios.

La permitividad y la permeabilidad dependen del tipo de medio donde esté el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente.

Medio Homogéneo.

Es un medio con idénticas propiedades en todos los puntos del espacio, es decir, sus características físicas (densidad de masa, estructura molecular, etc.) no varían de punto a punto. Si un medio no es homogéneo se puede describir como inhomogéneo, no homogéneo o heterogéneo. En un medio homogéneo la permitividad y la permeabilidad no dependen de las coordenadas, pero en un medio no homogéneo sí dependen de las coordenadas $f(x, y, z)$, esto es, cambian de punto a punto.

Medio Lineal.

Un medio es lineal en relación con un campo electrostático si la densidad de flujo eléctrico D es proporcional a la intensidad de campo eléctrico E.

Un medio es lineal en relación con un campo magnetostático si la densidad de flujo magnético B es proporcional a la intensidad de campo magnético H.

Este es el caso en el espacio libre o vacío, en donde $D = \epsilon_0 E$ y $B = \mu_0 H$. Aquí los factores ϵ_0 o permitividad, y μ_0 o permeabilidad, son constantes. Si no lo son, se dice que el material es no lineal.

Medio Isotrópico.

Un material isotrópico es aquel cuyas propiedades son independientes de la dirección. Es decir, las propiedades de estos medios no dependen de la orientación o dirección escogida de los campos. Por lo general, los materiales cuya estructura molecular está orientada aleatoriamente, serán isotrópicos. Sin embargo, los medios cristalinos o ciertos plasmas pueden tener características direccionales. Tales materiales se dice que son no isotrópicos o que son anisotrópicos. En un medio anisotrópico sus propiedades dependen de la dirección escogida del campo, por ejemplo, la ferrita imantada con campos de alta frecuencia. En los medios no isotrópicos D y E están relacionados por un Tensor de permitividad.

LEY DE GAUSS

Ésta expresa que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie.

$$Q = \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S}$$

"Q" es la carga total encerrada por la superficie "S".

La Ley de Gauss facilita la solución de problemas que involucran campo eléctrico. Para aplicarla se debe usar superficies "simétricas" al campo, es decir:

1. $\bar{E} \perp d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = 0$
2. $\bar{E} \parallel d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}| |d\bar{S}| \cos(0^\circ) = |\bar{E}| |d\bar{S}|$
3. $\bar{E} \angle 180^\circ d\bar{S} \Rightarrow \bar{E} \cdot d\bar{S} = |\bar{E}| |d\bar{S}| \cos(180^\circ) = -|\bar{E}| |d\bar{S}|$

En las expresiones (2) y (3) E generalmente es constante en todo el ds .

Para campos estáticos la Ley de Gauss permite comprobar que la carga total Q en un conductor se distribuye en toda la superficie.

Resultados prácticos de la evaluación de la Ley de Gauss

1. Facilidad de evaluar el campo eléctrico E en superficies cerradas, buscando una superficie lo más simétrica al campo E para que $E \parallel dS = ES$, y $E \perp dS = 0$.
2. La carga neta de un conductor residen en la superficie.

El campo E dentro de la superficie del conductor se anula, es decir, que el único lugar donde puede estar la carga es en la superficie del conductor. En un conductor, los portadores de carga tienen la libertad de moverse respondiendo a campos eléctricos infinitesimales, los electrones se mueven hasta que hallen posiciones en las que no experimenten fuerza neta. En reposo, el interior del conductor debe ser una región desprovista de campo eléctrico. En condiciones estáticas el campo eléctrico en el interior de un conductor se anula.

Aplicaciones de la Ley de Gauss

$\epsilon_0 \oint E \cdot dS = q$ $\epsilon_0 E (2\pi r h) = \lambda h$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$		$\epsilon_0 \oint E \cdot dS = q$ $\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q$ $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r$
Línea de Carga		Esfera de Carga

Divergencia.

Para que un campo tenga divergencia, es condición necesaria pero no suficiente que el campo varíe en magnitud a lo largo de una línea que tenga la misma dirección de dicho campo. Se puede comprobar que el campo eléctrico tiene divergencia:

de la definición de densidad de carga

$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow q = \int_V \rho dV$$

por ley de Gauss

$$q_{\text{encerrada}} = \int_V \rho \, dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

por el teorema de la divergencia

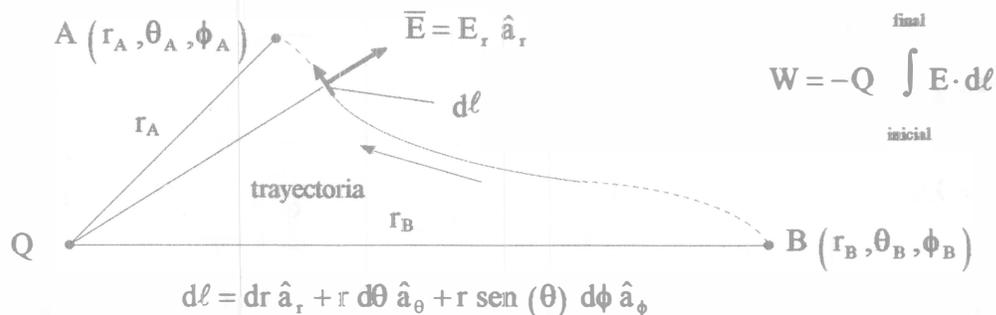
$$\int_V \rho \, dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} \, dV = \epsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV$$

entonces, para un volumen arbitrario

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot \epsilon_0 \vec{E}$$

Potencial Eléctrico, Diferencia de Potencial o Voltaje.

Si el rotacional de un vector se anula, quiere decir que el vector puede expresarse como el gradiente de un escalar. Para mover una carga eléctrica dentro de un campo eléctrico \vec{E} se requiere una fuerza, la cual va ejercer un trabajo sobre la carga:



El potencial eléctrico, se define entonces, como el trabajo por unidad de carga que hay que realizar sobre una carga puntual para moverla en un campo eléctrico.

Diferencia de Potencial: es el trabajo o energía por unidad de carga que se requiere para transportar una carga de prueba de B a A en el campo donde $V_A > V_B$.

Potencial absoluto de un punto dado, debido a una carga Q.

Cuando se realiza la integral de línea no importa la trayectoria de integración, esto quiere decir que la diferencia de potencial está determinada únicamente por la diferencia de potencial entre los puntos en consideración.

Para dos puntos en una superficie equipotencial la diferencia de potencial es cero, es decir que el campo es conservativo; ésta es una propiedad del campo electrostático. El signo (-) de la integral significa que el aumento de potencial es siempre en dirección opuesta al campo E.

Por el principio de conservación de energía se cumple:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Potencial V_p debido a distribuciones de carga.

Para "n" cargas puntuales discretas: el potencial en un punto "P" es igual a la suma algebraica de los potenciales absolutos de cada carga en el punto P debidos a cada carga.

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}$$

Para una línea de carga:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\ell} \frac{\rho_{\ell}}{r} d\ell$$

Para una superficie de carga:

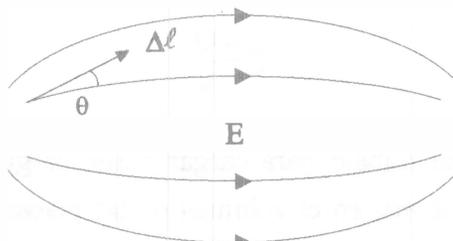
$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_s \frac{\rho_s}{r} dS$$

Para un volumen de carga:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho}{r} dV$$

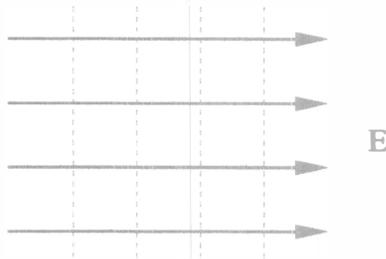
Gradiente de Potencial V.

La dirección del gradiente es opuesta al campo E, es decir, ocurre un aumento de potencial cuando se mueve una carga "q" en contra del campo E.

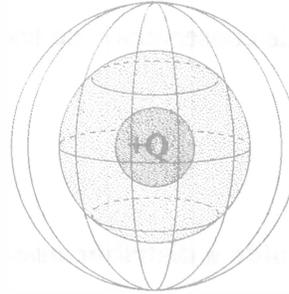


Líneas y Superficies Equipotenciales.

Las líneas y superficies equipotenciales son el lugar geométrico de todos aquellos puntos que tienen el mismo potencial eléctrico, es decir, el potencial se mantiene constante. El trabajo sobre una carga "q" para desplazarla sobre una superficie equipotencial es cero.



líneas equipotenciales



superficies equipotenciales

Propiedades de los Campos Eléctricos, Mapas de Campo y Voltaje.

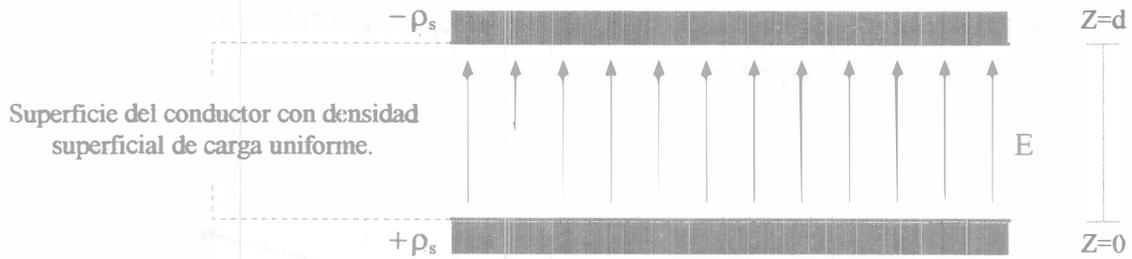
1. Las líneas de E y de potencial se intersecan en ángulos de 90°, excepto en puntos singulares, como una esquina.
2. La superficie de un conductor es una superficie equipotencial. $V = \text{cte.}$
3. El campo corta perpendicularmente una superficie conductora o equipotencial.
4. En un campo uniforme el potencial varía linealmente con la distancia.
5. Un tubo de flujo es paralelo al campo E (línea de campo) y el punto de flujo eléctrico es constante en cualquier sección transversal de un tubo de flujo.
6. Un tubo de flujo inicia en +Q y termina en -Q.

Capacitor o Condensador.

Es un dispositivo eléctrico que almacena energía. Por definición, la capacitancia está dada por la carga entre la unidad de voltaje.

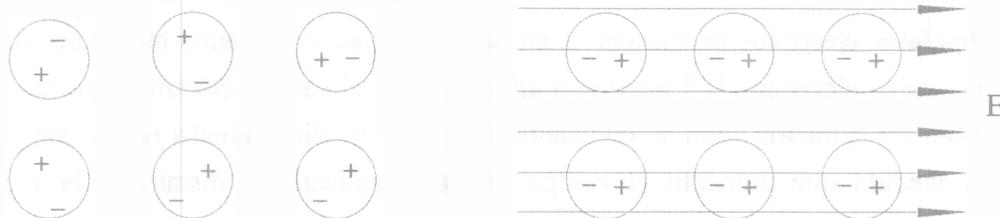
$$C = \frac{Q}{V}$$

Esto implica que se requiere un trabajo para cargar desde carga cero hasta una carga Q a un condensador. La energía se almacena en el volumen de las placas que almacena el campo E, sin embargo, no es necesario que exista un medio material para que la energía quede almacenada por el campo E, por lo que existe energía aun en el vacío, si se coloca un dieléctrico la energía aumenta en proporción a la permitividad del material.



Campo Eléctrico en un Dieléctrico o Polarización de un Dieléctrico.

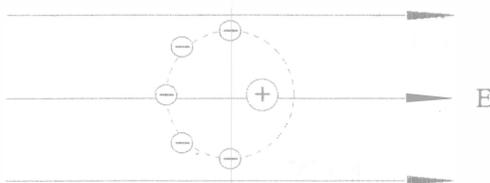
Sea un dieléctrico que está sometido a un campo eléctrico E, el dieléctrico no ocasiona flujo de cargas, sino un ligero desplazamiento de cargas (+) y (-) generando dipolos eléctricos muy pequeños, lo que significa que el dieléctrico está polarizado.



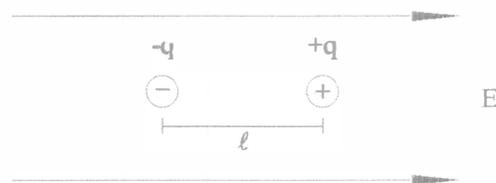
Dipolos eléctricos dispuestos en forma aleatoria y orientados por la acción de un campo eléctrico externo.

El campo E polariza al dieléctrico produciendo una densidad superficial de carga, que aparece en ambas caras del dieléctrico, estas cargas ligadas inducen cargas libres y opuestas en las placas de un capacitor, es decir, la densidad de carga superficial sobre las placas aumenta debido a esta nueva densidad. El efecto de los dipolos atómicos se describe como la polarización "P" o momento dipolar.

Momento Dipolar Eléctrico.



Átomo polarizado por un campo E



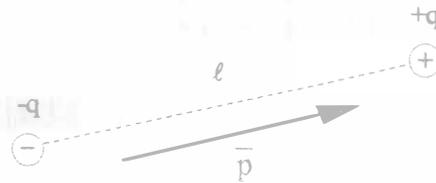
Dipolo Eléctrico en un campo uniforme E

Un dipolo eléctrico consta de dos cargas iguales y opuestas separadas por una determinada distancia, en la figura anterior se tiene un átomo polarizado y su dipolo eléctrico equivalente cuya separación es "l"; para esta configuración se define el momento dipolar eléctrico como un vector

"p" cuya magnitud es el producto de la carga "q" por la separación "ℓ", la dirección del vector es de la carga negativa hacia la carga positiva.

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\ell}$$

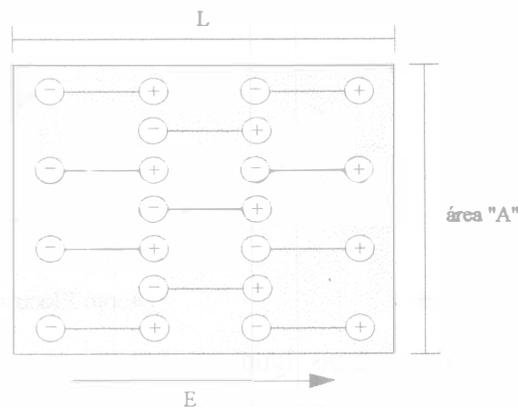
Momento Dipolar Eléctrico



Se dice que un dieléctrico está polarizado o que se encuentra en un estado de polarización cuando están presentes los dipolos. Para la mayoría de los materiales, el suprimir el campo externo que los polariza produce el retorno de los átomos o moléculas a su estado normal no polarizado y la desaparición de los dipolos. Existen dos posibilidades cuando un dieléctrico se coloca en un campo eléctrico, en términos atómicos, las moléculas de algunos dieléctricos como el agua, tienen momentos dipolares eléctricos permanentes; en tales materiales (llamados materiales polares) los momentos dipolares eléctricos "P" tienden a alinearse con el campo eléctrico externo, como las moléculas están en agitación térmica constante, el grado de alineamiento no es completo, pero aumentará a medida que aumente el campo eléctrico aplicado o disminuya la temperatura. Independientemente de que las moléculas tengan o no momentos dipolares permanentes, los adquieren por inducción cuando se colocan en un campo eléctrico; recuérdese que un campo eléctrico externo tiende a separar la carga negativa de la positiva en un átomo o en una molécula.

Resumiendo, el momento dipolar eléctrico inducido solamente ocurre cuando existe un campo eléctrico, es proporcional al campo eléctrico y desde su creación está alineado con dicho campo.

Considérese una placa de dieléctrico de permitividad ϵ situada en el vacío y supóngase que se le aplica un campo eléctrico uniforme que polariza al dieléctrico, es decir, induce dipolos atómicos en toda la placa.



Dieléctrico sometido a un campo E uniforme.

En el interior las cargas positivas y negativas de dipolos adyacentes anulan sus efectos entre sí. El resultado neto de la polarización es producir una capa de carga negativa sobre una superficie de la placa y una capa de carga positiva en la otra. El efecto de los dipolos atómicos se describe como la polarización P o momento dipolar por unidad de volumen, es decir:

$$P = \frac{n}{v} q\ell = \frac{Q\ell}{v}$$

n es el número de dipolos en el volumen v

$Q = nq$ es la carga de todos los dipolos

$Q\ell$ momento dipolar neto en el volumen v

Si por ejemplo, de la figura anterior se considera el volumen rectangular de área superficial " A " y espesor " L " ($v = LA$), se tiene:

$$P = \frac{QL}{AL} = \frac{Q}{A} = \rho_{sp} \quad (\text{C/m}^2)$$

ρ_{sp} es la densidad superficial de carga que aparece en las caras de la placa.

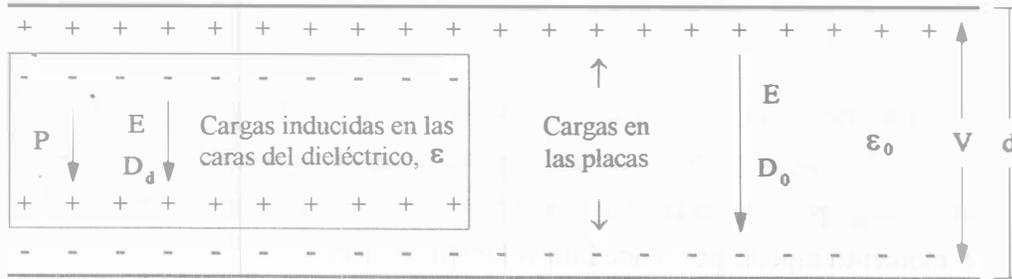
Nótese que " P " tiene las mismas dimensiones que " D ", carga por área. La expresión anterior es un promedio para el volumen " v ".

Para definir el significado de " P " se se hace la suposición de que un dieléctrico en un campo eléctrico tiene una distribución continua de dipolos infinitesimales, o sea, una polarización continua, en realidad los dipolos son discretos por ser átomos polarizados.

Esta suposición no conduce a errores significativos puesto que se consideran volúmenes que contienen muchos átomos o dipolos, esto es, regiones macroscópicas. Suponiendo un dieléctrico con polarización continua, el valor de " P " en un punto se puede definir como el momento dipolar neto $Q\ell$ de un volumen pequeño Δv , dividido entre el volumen Δv , tomando el límite cuando Δv tiende a cero al rededor del punto. Entonces:

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q\ell}{\Delta v}$$

Considere el campo eléctrico uniforme en un capacitor de placas paralelas y separadas una distancia d , como se muestra en la sección transversal de la siguiente figura.



Existe una tensión V entre las placas, por lo que en cualquier punto el campo eléctrico está dado por

$E = V/d$. El medio en la parte derecha es el vacío o el aire con permitividad ϵ_0 , la parte izquierda contiene un material dieléctrico de permitividad ϵ . El dieléctrico llena totalmente el espacio entre las placas, pero el espacio que se ve en la figura es sólo para mostrar las cargas entre las placas.

Del lado derecho del capacitor se tiene $D_0 = \epsilon_0 E$, donde:

- D_0 densidad de flujo eléctrico en el vacío (o parte llena de aire) del capacitor, $C m^{-2}$
- ϵ_0 permitividad del vacío, $8.85 pF m^{-1}$
- $E = V/d$ Intensidad del campo eléctrico, $V m^{-1}$

Del lado izquierdo el campo eléctrico polariza al dieléctrico produciendo una densidad superficial de carga ρ_{sp} que aparece en ambas caras del dieléctrico. Estas cargas ligadas inducen cargas libres de signos opuestos en las placas del capacitor.

Comparando la parte izquierda y derecha del capacitor, se observa que la densidad superficial de cargas libres sobre las placas se aumenta por ρ_{sp} . Por lo tanto, en el dieléctrico se tiene:

$$D_d = \epsilon_0 E + \rho_{sp}$$

y como anteriormente se mostró que $P = \rho_{sp}$, entonces:

$$D_d = \epsilon_0 E + P$$

- D_d densidad de flujo eléctrico en el dieléctrico del capacitor, $C m^{-2}$
- ϵ_0 permitividad del vacío, $8.85 pF m^{-1}$
- $E = V/d$ Intensidad del campo eléctrico, $V m^{-1}$
- P Polarización (del dieléctrico), $C m^{-2}$

El término P en la última ecuación, implica la presencia del dieléctrico, siendo redundante el subíndice de D , por lo que se puede reescribir como:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Aunque la ecuación se desarrolló para el caso especial de un capacitor de placas paralelas, es una relación (vector) que se aplica en general. En el dieléctrico, también puede escribirse $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ o bien $\mathbf{D} = \mathbf{D}_d = \epsilon \mathbf{E}$, donde ϵ es la permitividad del material dieléctrico en farads por metro. Entonces:

$$\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

o sea que:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} \quad \text{o bien} \quad \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} = \epsilon - \epsilon_0$$

Corriente Eléctrica y Densidad de Corriente.

Si en una superficie cerrada "S" se encuentra una carga "Q" que disminuye con el tiempo, esta disminución estará relacionada con la existencia de una corriente que fluye desde el volumen acotado por la superficie.

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ_i}{dt}$$

Donde la corriente está relacionada a la densidad de corriente como $\mathbf{J} = I/A$, por lo que se puede llegar a la "ecuación de continuidad":

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Si la densidad de carga no varía con el tiempo, la integral de superficie es igual a cero, lo que determina el carácter cerrado de las líneas de densidad de corriente.

En un campo eléctrico, toda carga "q" experimentará una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, que implica una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ y una velocidad $\mathbf{v} = \mathbf{a}t$, entonces se obtiene:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m} t = \frac{q\mathbf{E}}{m} t$$

El resultado anterior implica que la velocidad aumentará indefinidamente conforme transcurra el tiempo, sin embargo, las cargas cuando se mueven experimentan choques arbitrarios perdiendo parte de su energía y ocasionando cambios aleatorios en la dirección de su movimiento. En un

medio homogéneo el efecto neto de los choques es limitar a la partícula cargada a una velocidad promedio constante que se llama "velocidad de arrastre o velocidad de deriva" (v_d), que tiene la misma dirección del campo E , y se relaciona con éste por una constante llamada "movilidad del electrón" μ_e , esto implica que:

$$v_d = \mu_e E \left[\frac{m}{s} \right]$$

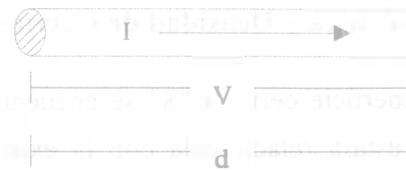
donde $I = v_d \cdot \rho$ y $A = \frac{Q}{s}$, entonces $J = \frac{I}{A} = v_d \cdot \rho$.

Resistencia Eléctrica y Ley de Ohm.

En 1826, Georg Simon Ohm realizó experimentos con las relaciones entre la tensión o voltaje V sobre un conductor y la corriente I que pasa por él, en términos de un parámetro característico del conductor, este parámetro se denomina resistencia R , que se define como la razón de la tensión o voltaje V aplicado al conductor a la corriente I que pasa por él.

$$R = \frac{V}{I} \quad \text{ó} \quad V = RI$$

R depende de las dimensiones del conductor y del material del mismo.



Se supone que la resistencia R es independiente de la corriente I ; es decir, la resistencia R es una constante. Recíprocamente, se dice que una resistencia así, obedece la ley de Ohm. Existen, sin embargo, elementos de circuito, como los rectificadores, cuya resistencia no es una constante. Se dice que tales elementos son no lineales y se requiere un diagrama V contra I para determinar su comportamiento. Aún, se define la resistencia R por medio de la ecuación anterior, pero no es independiente de la corriente I y la resistencia no obedece la ley de Ohm.

Potencia y Ley de Joule.

Como se observa en la figura anterior, la diferencia de potencial V a través del conductor de longitud " d " es igual al trabajo por carga unitaria requerido para mover una carga en el conductor. Multiplicando por la corriente (I) se obtiene el trabajo por unidad de tiempo, o sea la potencia " P ".

$$\frac{\text{trabajo}}{\text{corriente} \times \text{tiempo}} \times \text{corriente} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \text{potencia}$$

o bien

$$VI = P$$

Esta es la potencia disipada en el conductor de longitud d . La unidad del SI para la potencia es el watt (W). En consecuencia,

$$\text{volts} \times \text{amperes} = \text{watts (W)}$$

introduciendo el valor de V de la ley de Ohm se tiene: $P = I^2 R$

Esta relación se conoce como ley de Joule. Entonces el trabajo o energía disipada por el conductor se presenta en éste como calor. Se supone que P es constante en el tiempo, si no lo es, la expresión se integra en el intervalo de tiempo " t ". La energía " W " disipada en el conductor en un tiempo " t " es entonces:

$$W = Pt = I^2 Rt$$

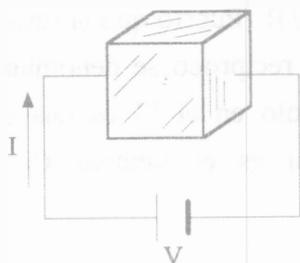
donde

$$\begin{aligned} W &= \text{energía, J} & P &= \text{potencia, W} & I &= \text{corriente, A} \\ R &= \text{resistencia, } \Omega & t &= \text{tiempo, s} \end{aligned}$$

Resistividad y Conductividad.

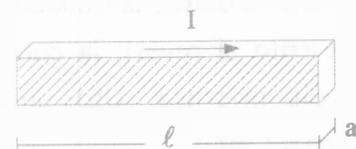
Para facilitar la comparación entre diferentes tipos de sustancias, es conveniente definir una cantidad que sea característica sólo de la sustancia. La resistividad S es dicha cantidad. La resistividad de un material es numéricamente igual a la resistencia de un cubo unitario homogéneo del material, con una distribución de corriente uniforme. Considere el siguiente diagrama, con una corriente I a través del cubo unitario, la resistividad S del material está dada por $S = V/I$, donde V es el potencial entre las terminales.

En unidades del SI, esta medida es en ohms para un cubo de material de un metro por arista. Si se colocan dos cubos en serie entre las terminales, la resistencia medida es de $2S$, mientras que si los cubos se colocan en paralelo, la resistencia medida es de $\frac{1}{2}S$. Se deduce que la resistencia R de un bloque rectangular de longitud ℓ y sección transversal " a ", como el de la figura, es:



$$R = \frac{S\ell}{a}$$

$$S = \frac{R \cdot a}{\ell}$$



Donde S es la resistividad del material del bloque. De acuerdo con la expresión en la figura, la resistividad tiene las dimensiones de:

$$\frac{\text{resistencia} \times \text{área}}{\text{longitud}} = \text{resistencia} \times \text{longitud}$$

Así pues, la resistividad tiene las dimensiones de la resistencia por la longitud y en unidades del SI se expresa en ohm-metro (Ωm).

La resistividad es una función de la temperatura. En conductores metálicos varía casi linealmente con la temperatura absoluta. En un intervalo considerable de temperatura, a partir de una temperatura base o de referencia T_0 , la resistividad S está dada aproximadamente por:

$$S = S_0 [1 + \alpha (T - T_0)]$$

T = temperatura del material, °C

T_0 = temperatura de referencia (normalmente 20°C)

S_0 = resistividad a la temperatura T_0 , Ωm

α = coeficiente de temperatura de la resistividad, unidades numéricas °C⁻¹

En 1911, H. Kamerling Onnes observó por primera vez que a temperaturas cercanas al cero absoluto ($T = 0\text{K}$ ó -273°C) algunos metales se vuelven superconductores. La resistividad baja a cero y el campo magnético es eliminado, de manera que $B = 0$; la transición es súbita. El Niobio (también llamado Colombio) se vuelve superconductor a 9.2°K , el Aluminio a 1.2°K , pero el Cobre y el Oro no son superconductores, al menos no a temperaturas tan bajas como 0.05°K . Algunos compuestos intermetálicos como el $\text{Nb}_3(\text{Al}-\text{Ge})$ se vuelven superconductores a la temperatura relativamente alta de 21°K . Si se llegan a desarrollar materiales que se transformen en superconductores a 25°K o más, ocurrirá una revolución tecnológica puesto que permitirá el uso de superconductores enfriados por Hidrógeno líquido relativamente barato (temperatura de ebullición de 20.4°K).

El recíproco de la resistencia R es la conductancia G . Esto es, $G = 1/R$. Puesto que la resistencia se expresa en ohms, la conductancia en ohms recíprocos. Un ohm recíproco se denomina mho (ohm escrito al revés); la conductancia se da en mhos y el símbolo en el SI es una omega mayúscula invertida. Una unidad opcional para la conductancia es el siemens (S). Así, 1 siemen = 1 mho.

El recíproco de la resistividad S es la conductividad σ , esto es:

$$\sigma = \frac{1}{S} = \frac{\lambda}{R \cdot a}$$

Aunque la resistividad es conveniente en ciertas aplicaciones, es mejor tratar con su recíproco, la conductividad; por ejemplo, en donde haya circuitos en paralelo. Puesto que la resistividad se expresa en ohm-metro, la conductividad se expresa en mhos por metro.

La resistencia R y la conductancia G de un bloque rectangular, como el de la última figura, de material de conductividad σ están dadas por:

$$R = \frac{\lambda}{\sigma \cdot a} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad G = \frac{1}{R} = \frac{\sigma \cdot a}{\lambda} \quad (\text{mhos o siemens})$$

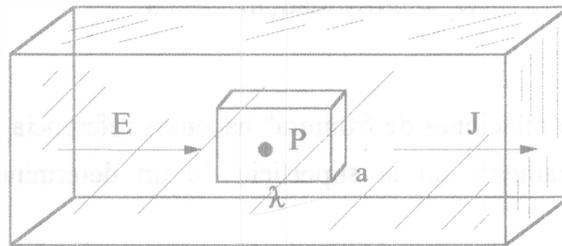
σ ; conductividad del material del bloque, [mhos·m⁻¹].

a ; área de la sección transversal del bloque, [m²].

λ ; longitud del bloque, [m].

Ley de Ohm en un punto.

Considérese un bloque de material conductor y constrúyase una pequeña celda cúbica imaginaria de longitud λ y sección transversal "a" alrededor de un punto P en el interior del bloque siendo a normal a J, como se indica en la siguiente figura.



Entonces, al aplicar la ley de Ohm a esta celda se tiene $V = RI$ donde V es la diferencia de potencial entre los extremos de la celda. Pero $V = E\lambda$ e $I = J \cdot a$; así que $E\lambda = J \cdot a \cdot R$, de lo que se obtiene:

$$J = \frac{\lambda}{a R} E$$

Haciendo que la celda sea tan pequeña como se quiera, se puede aplicar esta relación en el punto P, y se escribe:

$$J = \sigma E$$

Esta ecuación es la ley de Ohm en un punto y relaciona la densidad de corriente "J" en un punto con el campo total "E" en el punto y la conductividad σ del material.

En este análisis se ha supuesto que el material conductor es homogéneo (el mismo material en todo el volumen), es isotrópico (la resistencia entre las caras opuestas del cubo es independiente del par de caras que se escoja), y que es lineal (la resistencia es independiente de la corriente).

De la expresión anterior se tiene que la conductividad es la relación de la densidad de corriente J al campo aplicado E .

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad \left(\frac{\text{mhos}}{\text{m}} \right)$$

Pero, anteriormente se vio que la densidad de corriente es el producto de la velocidad de deriva o de arrastre v_d y la densidad de carga ρ .

$$J = \rho \cdot v_d$$

Entonces, la conductividad queda expresada como:

$$\sigma = \rho \frac{v_d}{E} = \rho \cdot \mu_e \quad \left[\frac{\text{mhos}}{\text{m}} \right]$$

$$\rho = \text{densidad de carga, } \text{C m}^{-3}$$

$$\mu_e = \text{movilidad, } \text{m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

Condiciones de Frontera.

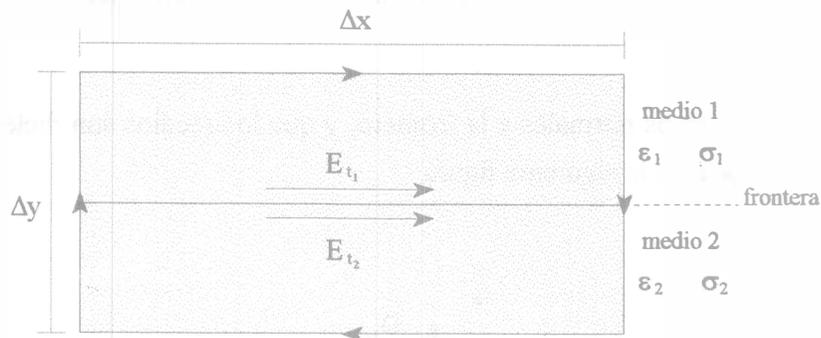
Al hablar de "condiciones o relaciones de frontera" hacemos referencia al estudio de lo que sucede eléctricamente y magnéticamente en la superficie de un determinado material o medio en condiciones estáticas.

Podemos pensar que todos los medios están separados entre sí por una frontera o límite, entonces al analizar las condiciones eléctricas que se imponen en esta separación o límite, estamos hablando de las "condiciones de frontera". Los casos que se analizan son: frontera entre conductor y espacio libre, frontera entre un conductor y un dieléctrico y frontera entre dos dieléctricos.

En un medio particular el campo eléctrico es continuo, es decir, si no es constante, cambia sólo en una cantidad infinitesimal en una distancia infinitesimal. Sin embargo, en la frontera o límite entre dos medios diferentes el campo eléctrico puede cambiar abruptamente tanto en magnitud como en dirección.

El problema en la frontera se analiza en dos partes, primero la relación entre los campos tangentes a la frontera y después los normales a ésta. En el caso de los campos tangentes a la frontera, se suponen dos medios dieléctricos que se consideran aisladores perfectos, es decir, sus conductividades son cero. En la siguiente figura se indica lo anterior y además una trayectoria que

encierra a la frontera, y se suponen las intensidades promedio de campo eléctrico tangente de cada medio.



El trabajo por unidad de carga necesario para transportar una carga de prueba alrededor de esta trayectoria cerrada es la integral de línea del campo "E" alrededor de la trayectoria:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = 0$$

Si $\Delta y \rightarrow 0$ el trabajo a lo largo de la trayectoria perpendicular a la frontera es cero aunque pueda existir un campo finito perpendicular a la frontera.

En estas condiciones la integral de línea en dirección de la trayectoria es:

$$E_{t_1} \Delta x - E_{t_2} \Delta x = 0 \quad (1)$$

$$E_{t_1} \Delta x = E_{t_2} \Delta x \quad (2)$$

De acuerdo con (2) las componentes tangenciales del campo eléctrico son las mismas a ambos lados de una frontera entre dos dieléctricos, es decir, el campo eléctrico tangencial es continuo a través de una frontera como la descrita.

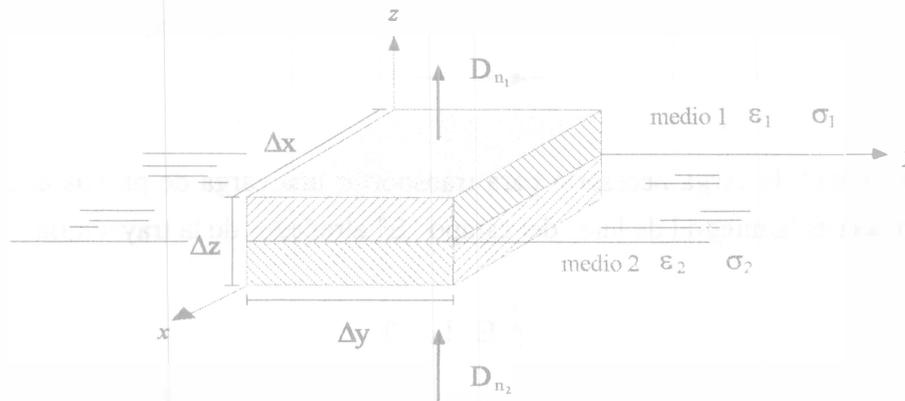
Si el medio 2 fuese un conductor ($\sigma_2 \neq 0$) el campo E_{t_2} en el medio 2 debe ser cero en condiciones estáticas y la ecuación anterior se reduce a:

$$E_{t_1} = 0 \quad (3)$$

De acuerdo con (3), el campo eléctrico tangencial en una frontera dieléctrico-conductor es cero. Con esto se supone que no fluyen corrientes. Si hay corrientes, el campo E en el conductor no es cero, a no ser que la conductividad sea infinita, y (2) se aplica en lugar de (3). Estas dos ecuaciones se pueden ampliar para abarcar los campos que cambian en el tiempo y se puede demostrar que la relación matemática de (2), se satisface para campos estáticos o variables para la frontera entre dos medios cualesquiera, de permitividades, permeabilidades y conductividades:

$\epsilon_1, \epsilon_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$. Más aún, para campos cambiantes la relación (3), se restringe al caso en que la conductividad del medio 2 sea infinita ($\sigma_2 \rightarrow \infty$). Esto se sigue del hecho de que un campo eléctrico cambiante en el tiempo en un conductor es cero sólo si la conductividad es infinita.

Considérese ahora los campos normales a la frontera, y que los medios son dieléctricos separados por el plano XY mostrado en la siguiente figura:



La componente normal de densidad de flujo es continuo a través de una frontera libre de carga.

Los medios de la figura anterior se suponen aisladores perfectos, es decir, que su conductividad es cero, además, considérese una superficie gaussiana (una caja imaginaria, la mitad en cada medio) de dimensiones $\Delta x \Delta y \Delta z$. Nótese que las densidades de flujo promedio D_{n_1} y D_{n_2} , son las densidades de flujo promedio normales a los medios 1 y 2 respectivamente. D_{n_1} es una normal hacia afuera o positiva y D_{n_2} es una normal hacia adentro o negativa. Por la ley de Gauss sabemos que el flujo eléctrico o integral de superficie de la componente normal de "D" sobre una superficie cerrada, es igual a la carga encerrada por ella. Si $\Delta z \rightarrow 0$, la contribución de los lados a la integral es cero y entonces el flujo total sobre la superficie es debido enteramente al flujo sobre las superficies superior e inferior. Si la densidad de carga superficial promedio en la frontera es ρ_s , al aplicar la ley de Gauss se tiene:

$$\begin{aligned} D_{n_1} \Delta x \Delta y - D_{n_2} \Delta x \Delta y &= \rho_s \Delta x \Delta y \\ D_{n_1} - D_{n_2} &= \rho_s \end{aligned} \quad (4)$$

La última expresión indica que la componente normal de la densidad de flujo cambia en una frontera cargada entre dos dieléctricos en una cantidad igual a la densidad superficial de carga, ésta normalmente es cero en una frontera dieléctrico-dieléctrico a no ser que la carga sea colocada ahí por medios mecánicos, como es el caso de la fricción.

Si la frontera está libre de carga, $\rho_s = 0$ y la expresión (4) se reduce a:

$$D_{n_1} = D_{n_2} \quad (5)$$

De acuerdo con (5) la componente normal de la densidad de flujo es continua a través de la frontera sin carga entre dos dieléctricos. Si el medio 2 es un conductor, $D_{n_2} = 0$ y (4) se reduce a:

$$D_{n_1} = \rho_s \quad (6)$$

De acuerdo con (6), la componente normal de la densidad de flujo en una frontera dieléctrico-conductor es igual a la densidad superficial de carga en el conductor.

En estas expresiones ρ_s se refiere a una carga eléctrica real separada por distancias finitas de cantidades iguales de cargas opuestas, y no a la carga superficial por causa de la polarización ($\rho_{s,p}$). La Carga superficial de polarización es producida por dipolos atómicos que tienen cargas iguales y opuestas, separadas por lo que se supone es una distancia infinitesimal. No es permisible separar las cargas positiva y negativa de tal dipolo por una superficie de integración y en consecuencia el volumen debe contener siempre en un número entero de dipolos y por tanto, carga neta de cero. Sólo cuando las cargas positiva y negativa están separadas por una distancia macroscópica (como en las caras opuestas de una lámina conductora) se puede separar por medio de una superficie de integración. Esto resalta una diferencia fundamental entre la polarización (o también llamada carga ligada o unida) en una superficie dieléctrica y la carga real en la superficie de un conductor. En una forma semejante, la relación de frontera para polarización es:

$$P_{n_1} - P_{n_2} = -\rho_{s,p} \quad (7)$$

si el medio 2 es el espacio libre,

$$P_{n_1} = -\rho_{s,p} \quad (8)$$

Las ecuaciones (6) y (8) pueden escribirse como:

$$D \cdot \hat{n} = \rho_s \quad \text{y} \quad -P \cdot \hat{n} = \rho_{s,p} \quad (9)$$

El signo menos en la relación de la polarización proviene del hecho de que la carga de polarización positiva en una superficie dieléctrica está dirigida hacia adentro, mientras que la normal a la superficie se dirige hacia afuera.

Ejemplo. Frontera entre dos dieléctricos.

Sean dos medios dieléctricos isotrópicos 1 y 2 separados por una frontera plana libre de carga como se indica en la figura. Sean las permitividades ϵ_1 y ϵ_2 y sean las conductividades $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$. Se quiere encontrar la relación entre los ángulos α_1 y α_2 de una línea de campo estático o tubo de flujo que atraviese la frontera. Por ejemplo, dado α_1 encontrar α_2 .

Solución.

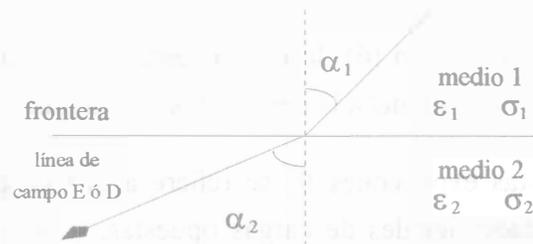
D_1 = magnitud de D en el medio 1

D_2 = magnitud de D en el medio 2

E_1 = magnitud de E en el medio 1

E_2 = magnitud de E en el medio 2

En un medio isotrópico D y E
tiene la misma dirección.



De acuerdo con las relaciones de frontera,

$$D_{n_1} = D_{n_2} \quad \text{y} \quad E_{t_1} = E_{t_2} \quad (a)$$

de acuerdo con la figura:

$$D_{n_1} = D_1 \cos(\alpha_1) \quad \text{y} \quad D_{n_2} = D_2 \cos(\alpha_2) \quad (b)$$

$$E_{t_1} = E_1 \sin(\alpha_1) \quad \text{y} \quad E_{t_2} = E_2 \sin(\alpha_2) \quad (c)$$

sustituyendo (b) y (c) en (a) y haciendo la razón de los campos D a los campos E se obtiene:

$$\frac{D_1 \cos(\alpha_1)}{E_1 \sin(\alpha_1)} = \frac{D_2 \cos(\alpha_2)}{E_2 \sin(\alpha_2)} \quad (d)$$

Pero $D_1 = \epsilon_1 E_1$ y $D_2 = \epsilon_2 E_2$; de manera que la ecuación (4) viene a ser:

$$\frac{\text{tg}(\alpha_1)}{\text{tg}(\alpha_2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{r_1} \epsilon_0}{\epsilon_{r_2} \epsilon_0} = \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}} \quad (5)$$

ϵ_{r_1} = permitividad relativa del medio 1

ϵ_{r_2} = permitividad relativa del medio 2

ϵ_0 = permitividad en el espacio libre

Supóngase, por ejemplo, que el medio 1 es el aire ($\epsilon_{r_1} = 1$), mientras que el medio 2 es una placa de azufre ($\epsilon_{r_2} = 4$). Entonces cuando $\alpha_1 = 30^\circ$, el ángulo α_2 en el medio 2 es de 66.6°

Ejemplo. Frontera entre un Conductor y un Dieléctrico

Supóngase que el medio 2 de la figura anterior es un conductor. Se desea encontrar el valor de α_1 .

Solución.

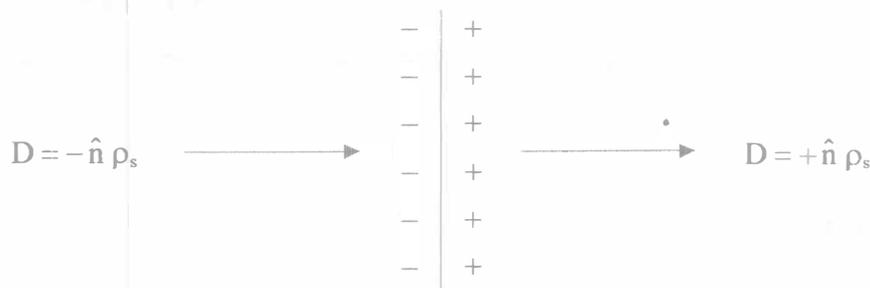
Puesto que el medio 2 es un conductor, $D_2 = E_2 = 0$ en condiciones estáticas. De acuerdo con las relaciones de frontera:

$$D_{n_1} = \rho_s \quad E_{n_1} = \frac{\rho_s}{\epsilon_1} \quad E_{t_1} = 0$$

En consecuencia:

$$\alpha_1 = \text{ang } \text{tg } \alpha_2 \frac{E_{t_1}}{E_{n_1}} = \text{ang } \text{tg } (0) = 0^\circ$$

Se dice que una línea de campo eléctrico estático o tubo de flujo en una frontera dieléctrico-conductor siempre es perpendicular a la superficie del conductor (cuando no hay corrientes presentes). Este hecho es fundamental para trazar el mapa de campo. Si se introduce una lámina conductora delgada en forma perpendicular a un campo eléctrico, se inducen cargas superficiales sobre la lámina de manera que el campo inicial, externo de la lámina, no se vea afectado; el valor de la densidad de carga superficial inducida ρ_s es igual a la densidad de flujo D en la lámina. Por lo tanto, puede interpretarse la densidad de flujo en un punto como igual a la densidad de carga ρ_s , que aparecería en una lámina conductora delgada introducida en forma perpendicular al campo D en el punto. Para la lámina conductora delgada normal al campo de la siguiente figura, la relación D y ρ_s es como sigue.



\hat{n} es el vector unitario perpendicular a la superficie.

En consecuencia D se dirige normalmente hacia adentro del lado izquierdo y normalmente hacia afuera del lado derecho. La magnitud de la densidad de flujo a cada lado es igual a la densidad de carga ρ_s .

Relaciones de Frontera para Campos Eléctricos Estáticos.

	Componente de Campo	Condiciones de Frontera	Condición
(1)	Tangencial	$E_{t_1} = E_{t_2}$	Dos medios cualesquiera.
(2)	Tangencial	$E_{t_1} = 0$	El medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 es un conductor.
(3)	Normal	$D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s$	Dos medios cualesquiera con carga en la frontera.
(4)	Normal	$D_{n_1} = D_{n_2}$	Dos medios cualesquiera sin carga en la frontera.
(5)	Normal	$D_{n_1} = \rho_s$	El medio 1 es un dieléctrico y el medio 2 es un conductor con cargas superficial.

Las relaciones (1), (3) y (4) se aplican en la presencia de corrientes y también para campos que varían con el tiempo.

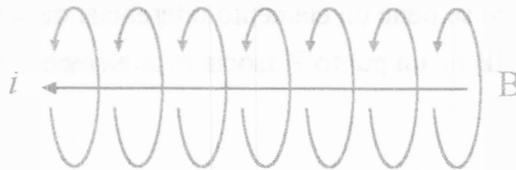
Las relaciones (2) y (5) también se aplican para situaciones que cambian con el tiempo puesto que $\sigma_2 \rightarrow 0$.

Rigidez Dieléctrica

Es la máxima intensidad de E que soporta un dieléctrico sin que ocurra una descarga eléctrica (arco o descarga por efecto corona), es decir que E no puede aumentarse indefinidamente. El radio de curvatura de la superficie conductora es otro factor que influye en la intensidad del campo. Menor radio mayor densidad superficial de carga.

CAMPOS MAGNÉTICOS ESTACIONARIOS

Una carga móvil constituye una corriente eléctrica I , donde I genera un Campo Magnético B , que forma espiras circulares concéntricas y cerradas al rededor del conductor, la dirección del campo B está dada por la ley de la mano derecha. Las líneas de campo magnético siempre son cerradas, por lo que no existen polos magnéticos positivos o negativos independientes.



Fuerza de un Campo "B" sobre un conductor.

Un conductor eléctrico con una corriente I , en un campo magnético B , experimenta una fuerza magnética F_m dada por la siguiente expresión:

$$F_m = \lambda i \times B$$



λ = longitud del conductor, m

i = corriente en el conductor, A

B = densidad de flujo magnético, Teslas ó Web / m²

La fuerza magnética (F_m) describe el principio básico de funcionamiento de los motores eléctricos.

Permeabilidad.

Es una constante que relaciona la densidad de flujo magnético "B" con la intensidad de campo magnético "H"

$$B = \mu H$$

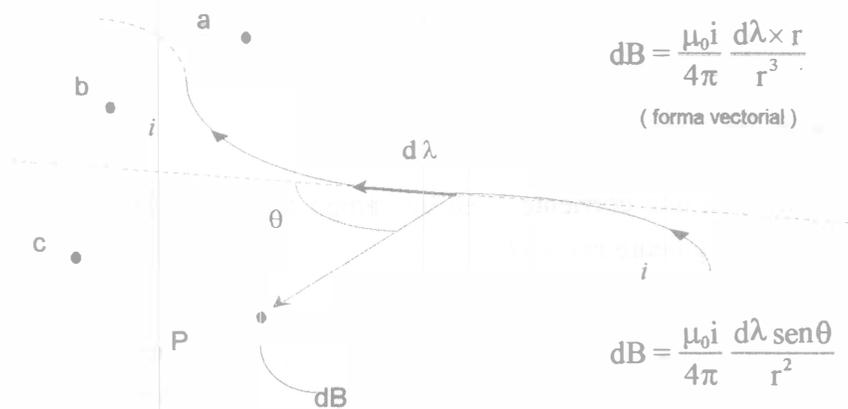
Para el vacío se tiene:

$$B = \mu_0 H$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{H}{m} \right]$

Ley de Biot-Savart.

Considere la siguiente figura. Si se tiene un elemento diferencial de corriente $i \cdot d\lambda$, para calcular el campo magnético diferencial dB en un punto P asociado al elemento de corriente se tiene:



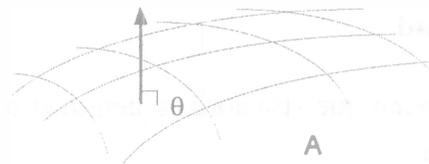
donde la dirección del elemento diferencial de densidad de campo magnético (dB) está dada por el producto cruz $d\lambda \times r$. Esta ley sirve para el cálculo de B en cualquier distribución arbitraria de corriente.

Flujo Magnético y Densidad de Flujo Magnético.

Considerando la siguiente figura, se tiene un flujo continuo, es decir, no existen fuentes ni sumideros, y las líneas de flujo magnético son perpendiculares al área A . Entonces, el flujo magnético es:

$$B = \frac{\phi}{A}$$

$$\phi = |A||B| \cos(90^\circ) = A \cdot B$$



Fuerza de Lorentz.

En un campo eléctrico, la definición de intensidad de campo eléctrico muestra que la fuerza sobre una partícula cargada es:

$$F_e = q \cdot E$$

La fuerza eléctrica está en la misma dirección que la intensidad de campo eléctrico si la carga es positiva, y opuesta al campo si la carga es negativa. La fuerza eléctrica es directamente proporcional a las magnitudes del campo E y de la carga q .

Experimentalmente se encuentra que una partícula cargada que está en movimiento dentro de un campo magnético con densidad de flujo B , experimenta una fuerza cuya magnitud es proporcional al producto de las magnitudes de carga q , a su velocidad v , a la densidad de flujo B y al seno del ángulo entre los vectores v y B . La dirección de la fuerza es perpendicular a los vectores v y B , y está dada por un vector unitario en la dirección del vector $v \times B$. Por lo tanto, la fuerza puede expresarse como:

$$F_m = q v \times B$$

Esto muestra una diferencia fundamental en el efecto de los campos eléctrico y magnético sobre partículas cargadas, puesto que una fuerza que siempre se aplica en una dirección perpendicular a la dirección en que avanza la partícula nunca puede cambiar la magnitud de la velocidad de la partícula, dicho de otra manera, el vector aceleración siempre es normal al vector velocidad. En consecuencia, la energía cinética de la partícula permanece inalterada, por lo tanto, el campo magnético estable es incapaz de transferir energía a la carga en movimiento. El campo eléctrico, por su parte, ejerce una fuerza sobre la partícula que es independiente de la dirección en la cual avanza la partícula, por lo tanto, se efectúa una transferencia de energía entre el campo eléctrico y la partícula en general. La fuerza sobre una partícula en movimiento debida a campos eléctricos y magnéticos combinados se obtienen fácilmente por superposición:

$$F = q (E + v \times B)$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de la fuerza de Lorentz, que junto con la segunda ley de Newton es básica para la determinación de los cálculos del movimiento de partículas aceleradas en un Tubo de Rayos Catódicos CRT, las órbitas del electrón en el magnetrón, las trayectorias del protón en el ciclotrón, las características del plasma en el generador magnetohidrodinámico (MHD) o en general, en el movimiento de la partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos combinados.

Otro enfoque para el estudio anterior, es analizar los efectos del campo eléctrico y del campo magnético por separado y relacionarlos con la segunda ley de Newton.

Campo Eléctrico.

Si se coloca una partícula de carga "e" en un punto de un campo eléctrico uniforme E, la fuerza F sobre la partícula es:

$$F = e E$$

ya que la intensidad de campo eléctrico E es la fuerza por unidad de carga (newtons por coulomb).

Si la partícula está en reposo y se aplica el campo, la partícula se acelera uniformemente en la dirección del campo. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza sobre una partícula se relaciona con su masa y su aceleración por medio de:

$$F = m \cdot a$$

por lo tanto, la aceleración de la partícula es:

$$a = \frac{e}{m} E \quad (a)$$

La velocidad de la partícula después de un tiempo t es:

$$v = at = \frac{e}{m} Et \quad (b)$$

Si se formula la ecuación (b) como sigue:

$$m \cdot a = e \cdot E \quad (c)$$

Entonces se concluye que el campo provee energía a la partícula cargada, la expresión (c) tiene dimensiones de fuerza.

Al integrar esta fuerza en la distancia recorrida se obtiene la energía W adquirida, esto es:

$$W = m \int_1^2 a \cdot d\lambda = -e \int_1^2 E \cdot d\lambda \quad (d)$$

La integral de línea del campo E entre dos puntos 1 y 2 puede reconocerse como la diferencia de potencial V entre esos puntos. Cuando $a = dv/dt$ y $d\lambda = v \cdot dt$ se sustituyen en la ecuación (d), se tiene la siguiente expresión.

$$W = m \int_1^2 v \cdot dv = e \cdot V \quad (e)$$

o bien

$$W = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = e \cdot V \quad (f)$$

Si la partícula parte del reposo $v_1 = 0$ y entonces:

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 = e \cdot V \quad (g)$$

La ecuación (g) tiene las mismas dimensiones que la energía, la relación dimensional en unidades del SI es:

$$\text{joules} = \text{coulomb} \times \text{volt} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

Entonces, la energía adquirida por una partícula de carga "e" que parte del reposo y pasa a través de una caída de potencial V está dada por el producto de la carga y la diferencia de potencial, o por la mitad del producto de la masa y el cuadrado de la velocidad final de la partícula.

Al despejar la ecuación (g) se obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (h)$$

La energía adquirida por un electrón ($e = 1.6 \times 10^{-19}$ C) al pasar a través de una diferencia de potencial de 1 Volt es 1.6×10^{-19} J. Esta cantidad de energía es una unidad conveniente para designar las energías de partículas y se denomina "electrón-volt" (eV).

Para un electrón se tiene $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C y $m = 0.91 \times 10^{-30}$ kg, de manera que la ecuación (h) queda:

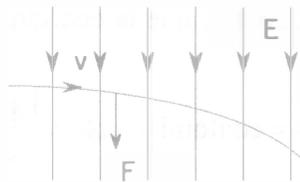
$$v = 5.9 \times 10^5 \sqrt{V} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Si $V = 1$ volt, la velocidad que tiene el electrón es de 0.59 Mm/s ó 590 km/s. Así que una tensión relativamente pequeña imparte una velocidad muy grande a un electrón. Si $V = 2.5$ kilovolts, la velocidad es de 30 Mm/s, o sea, aproximadamente el 10% de la velocidad de la luz. La masa de una partícula se aproxima a un valor infinito conforme la velocidad de ésta se aproxima a la velocidad de la luz (efecto relativista), mientras que las relaciones anteriores se basan en un valor constante de la masa; sin embargo, el aumento de la masa es en realidad de

consecuencias despreciables para la mayor parte de las aplicaciones a no ser que la velocidad de la partícula sea de por lo menos la décima parte de la velocidad de la luz. La relación entre la masa m de la partícula y su masa m_0 a bajas velocidades (masa en reposo) está dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Si la velocidad de la partícula es la décima parte que la velocidad de la luz, la masa es sólo 0.5% mayor que la masa en reposo. Si la partícula tiene una velocidad que no sea paralela a la dirección del campo, la partícula describe una trayectoria parabólica como se indica en la figura.



CAMPO MAGNÉTICO

La fuerza F sobre un elemento de corriente de longitud $d\ell$ en un campo magnético es:

$$dF = (I \times B) d\ell \quad [N] \quad (\alpha)$$

Esta es la ecuación fundamental de los motores de maquinaria eléctrica. Esto también es aplicable a partículas cargadas móviles en ausencia de cualquier conductor metálico. La corriente I en un conductor o un haz de iones o electrones puede expresarse en términos de la densidad de corriente J , la densidad volumétrica de carga ρ , el área del haz A y la velocidad v por medio.

$$I = JA = \rho vA \quad (\beta)$$

Sustituyendo (β) en (α) se tiene:

$$dF = \rho A d\ell (v \times B)$$

Pero la carga en una longitud $d\ell$ del haz es $\rho A d\ell = dq$, entonces:

$$dF = dq (v \times B)$$

Para una sola partícula de carga "e", se tiene la fuerza de Lorentz:

$$dF = e (v \times B)$$

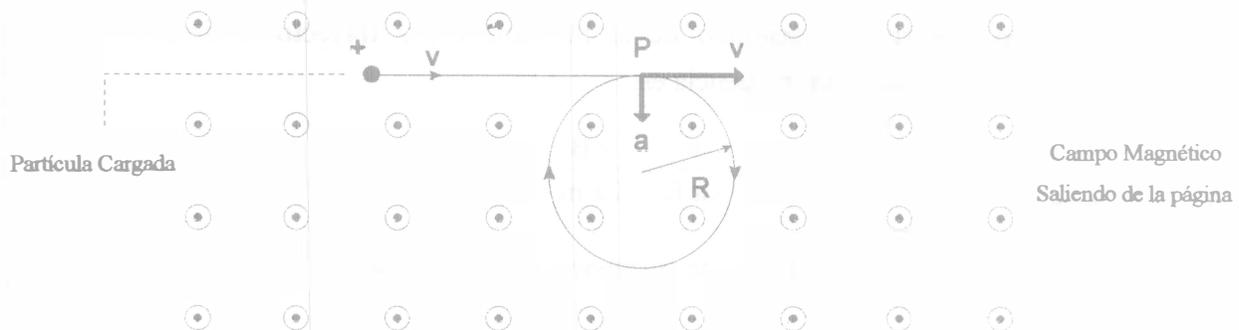
Considérese ahora el movimiento de una partícula de carga "e" desplazándose con una velocidad v dentro de un campo magnético uniforme de densidad de flujo B .

Por la segunda ley de Newton, la fuerza sobre la partícula es igual al producto de su masa m por su aceleración $a = dv/dt$, entonces:

$$m a = e (v \times B) \quad (\gamma)$$

o bien

$$a = \frac{e}{m} (v \times B) \quad (\delta)$$



Trayectoria de una partícula cargada positivamente en un campo magnético.

De acuerdo con la expresión (δ) , la aceleración es normal tanto al plano que contiene la trayectoria de la partícula, como al campo B . Si la trayectoria de la partícula (indicada por v) es normal al campo B , la aceleración es un máximo. Si la partícula está en reposo, el campo B no tiene efecto. De manera semejante, si la trayectoria de la partícula es en la misma dirección del campo B , no hay efecto y la partícula continúa sin desviarse. Solamente puede tener el campo B algún efecto cuando la trayectoria o la velocidad de la partícula tiene una componente normal al campo B . Si un campo magnético de gran extensión está en ángulos rectos con la dirección del movimiento de una partícula cargada, la partícula se desvía hasta formar una trayectoria circular. Supóngase que en una región libre de campos una partícula cargada positivamente se mueve hacia la derecha, como se indica en la figura anterior, y que cuando alcanza el punto P se le aplica un campo magnético. La dirección del campo B es perpendicular al plano de esta página y saliente de la misma. De acuerdo con el producto cruz de v sobre B dado por la ecuación (δ) , la aceleración es hacia abajo; de manera que la partícula describe un círculo en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj en el plano de la página. La magnitud de la fuerza F sobre la partícula está dada por la segunda ley de Newton ($F = m \cdot a$) y por la ecuación (γ) , o sea, $m \cdot a = e \cdot v \cdot B$, entonces:

$$F = e \cdot v \cdot B$$

la magnitud de la fuerza también está dada por:

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Igualando las dos últimas expresiones se puede obtener el radio (R) de la trayectoria circular de la partícula de la figura anterior.

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \text{ó} \quad R = \frac{mv}{eB}$$

Entonces, cuanto mayor sea la velocidad de la partícula o mayor sea su masa, tanto mayor será el radio. Por otro lado, cuanto mayor sea la carga o la densidad de flujo, menor será el radio.

El número de revoluciones por segundo de la partícula en la trayectoria circular se llama frecuencia "f" de la partícula. Ésta frecuencia es:

$$f = \frac{v}{2\pi R} = \frac{eB}{2\pi m} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

Ésta es la misma frecuencia en el ciclotrón.

CARGA Y MASA DE PARTÍCULAS

Partícula	Carga (C)	Masa en reposo (kg)	Razón e/m (C/kg)
Electrón	$- 1.602 \times 10^{-19}$	9.11×10^{-31}	$- 1.76 \times 10^{11}$
Positrón	$+ 1.602 \times 10^{-19}$	9.11×10^{-31}	$+ 1.76 \times 10^{11}$
Neutrón	0	1.6747×10^{-27}	0
Protón (núcleo de H)	$+ 1.602 \times 10^{-19}$	1.6725×10^{-27}	$+ 9.6 \times 10^7$
Protón (núcleo de H pesado)	$+ 1.6 \times 10^{-19}$	3.34×10^{-27}	$+ 4.8 \times 10^7$
Partícula α (núcleo de He)	$+ 3.2 \times 10^{-19}$	6.644×10^{-27}	$+ 4.81 \times 10^7$

Momento de Torsión de una Espira, Momento Magnético o Torque.

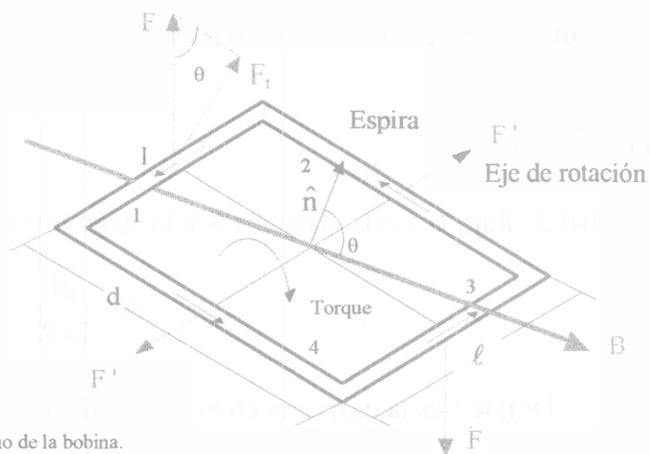
Cuando una espira de corriente se coloca paralelamente a un campo magnético actúan fuerzas magnéticas sobre la espira que tratan de hacerla girar. La fuerza tangencial a una distancia radial al eje de rotación de la espira genera el torque (también llamado momento mecánico o momento de torsión) sobre la espira o bobina. Las dimensiones del torque son de fuerza por longitud y se expresan en Newton-metro (N m).

Considere una espira rectangular con lados cuya longitud son ℓ y d , situada en un campo magnético de flujo uniforme y de densidad B . La espira tiene una corriente continua I . La fuerza en cualquier elemento de la bobina está dada por la siguiente expresión:

$$dF = (I \times B) d\ell \quad [\text{N}]$$

Una espira rectangular en un campo uniforme B experimenta un momento torsor que tiende a alinear con B a su vector normal \hat{n}

El vector unitario \hat{n} es normal al plano de la bobina.



Si el vector unitario normal al plano de la espira (\hat{n}) forma un ángulo θ con respecto a B , como se aprecia en el dibujo, la fuerza que tiende a girar la bobina (fuerza que siempre es perpendicular al plano de la bobina) en los lados 1 y 3 es $F_t = I B \ell \sin(\theta)$, ya que las fuerzas F' están a lo largo del eje de rotación y son iguales, se tiene que el torque total en la espira es:

$$T = 2F_t \frac{d}{2} = I B \ell d \sin(\theta)$$

pero $\ell \cdot d$ es igual al área A de la espira, de manera que:

$$T = I A B \sin(\theta)$$

De acuerdo a esta última expresión, el torque es directamente proporcional a la corriente en la espira, al área de la misma y a la densidad de flujo del campo en donde está la espira. El producto $I A$ es por definición el momento magnético o momento dipolar magnético de la espira, y tiene dimensiones de corriente por área.

Se designa el momento dipolar magnético por la letra m , es decir, $m = I A$, de modo que:

$$T = m B \sin (\theta)$$

En donde θ es el ángulo entre el vector normal (\hat{n}) al plano de la espira y la dirección del campo B . Si la espira es de N vueltas, el momento magnético está dado por $m = N I A$. El momento dipolar magnético puede estar referido al vector \hat{n} y ser considerado como $\vec{m} = m \hat{n}$, considerando la regla de la mano derecha. Entonces, empleando el producto cruz, se puede expresar:

$$T = m \hat{n} \times B = \vec{m} \times B$$

Aunque la espira de la figura tiene un área rectangular, estas dos últimas expresiones se aplican independientemente de la forma del área de la espira.

Ley de Ampère.

La densidad de flujo B a una distancia R a lo largo de un conductor recto está dada por:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi R}$$

Donde I es la corriente en el conductor y μ es la permeabilidad del medio.

Si B es integrado alrededor de una trayectoria cerrada de radio R encerrando un conductor, entonces se tiene:

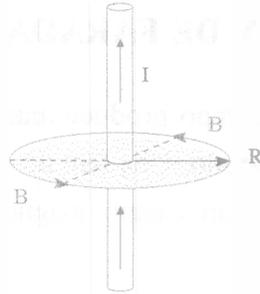
$$\oint B \cdot d\ell = \frac{\mu I}{2\pi R} \oint d\ell = \frac{\mu I}{2\pi R} 2\pi R = \mu I$$

$$\text{si se define } H = \frac{B}{\mu} \text{ entonces } \oint H \cdot d\ell = I$$

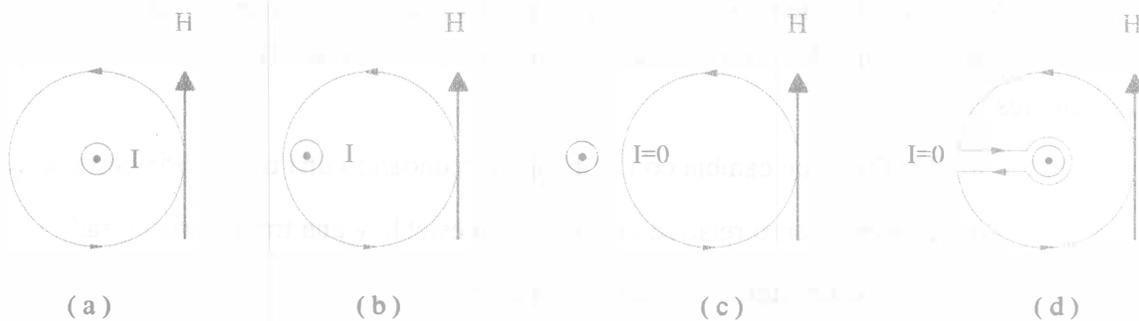
Esta ecuación es conocida como ley de Ampère o ley circuital de Ampère, y expresada en palabras dice:

"La integral de línea de H sobre cualquier trayectoria cerrada es igual a la corriente constante encerrada por dicha trayectoria"

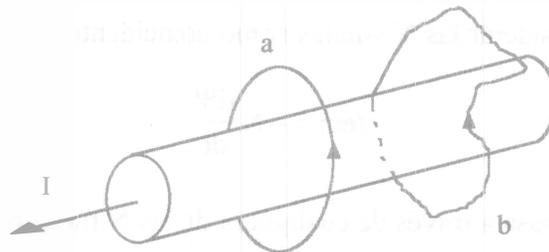
Es obvio que los vectores H y B tienen la misma dirección, esto es verdad para todo medio isotrópico. Esta integral puede ser independiente del medio.



En el caso del conductor que se muestra, en las trayectorias "a" y "b" arrojan el mismo resultado en la integración, es decir, hay una corriente "I", mientras que con las trayectorias "c" y "d" la integración da cero corriente.



Se verifica también que la integración sobre una trayectoria que atraviesa a un conductor dará como resultado la porción de corriente que encierra dicha trayectoria.



Un conductor tiene una corriente total I . La integral de línea de H alrededor de la trayectoria cerrada "a" es igual a I , y la integral alrededor de la trayectoria "b" es menor que I , debido a que ésta no encierra a toda la corriente.

LEY DE FARADAY

Un campo magnético que varía con el tiempo produce una fuerza electromotriz (fem) que puede producir una corriente en un circuito cerrado. Una fem no es otra cosa que un voltaje procedente de los conductores que se mueven en un campo magnético o campos magnéticos variables, entonces:

$$\text{fem} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{volts} \quad (1)$$

Esta ecuación implica una trayectoria cerrada (aunque no necesariamente una trayectoria conductora cerrada), por ejemplo, la trayectoria cerrada podría incluir un capacitor o podría ser una línea puramente imaginaria en el espacio. El flujo magnético es el flujo que cruza a través de cualquier superficie cuyo perímetro sea una trayectoria cerrada y $d\Psi/dt$ es la variación del flujo con respecto al tiempo. Un valor diferente de cero de $d\Psi/dt$ puede ser el resultado de cualquiera de las siguientes situaciones:

- a) Un flujo que cambia con el tiempo circundando una trayectoria cerrada fija.
- b) El movimiento relativo entre un flujo estable y una trayectoria cerrada.
- c) Una combinación de los dos casos anteriores.

El signo menos indica que la fem tiene una dirección tal que produce una corriente, cuyo flujo, si se suma al flujo original, reduciría la magnitud de la fem. Este enunciado que establece que el voltaje inducido actúa para producir un flujo opuesto es conocido como la ley de Lenz. Si la trayectoria cerrada es un filamento conductor enrollado de N vueltas, generalmente es suficientemente preciso considerar las N vueltas como coincidentes y establecer entonces:

$$\text{fem} = -N \frac{d\Psi}{dt}$$

Ψ es el flujo que pasa a través de cualquiera de las N trayectorias coincidentes.

La fem es un escalar y se define como el voltaje a lo largo de una trayectoria cerrada específica, esto es:

$$V = \text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$$

Al sustituir Ψ en (1) por la integral de superficie de \mathbf{B} , se tiene:

$$\text{fem} = \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Los dedos de la mano derecha indican la dirección de la trayectoria cerrada y el pulgar la dirección ds . Una densidad de flujo B en la dirección de ds que aumenta con el tiempo produce un valor promedio de E que es opuesto a la dirección positiva en que se recorre la trayectoria cerrada.

Ley de Lenz.

Expresa el principio de conservación de la energía, y dice que el voltaje inducido por un flujo de campo B variable tiene una polaridad tal que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da lugar a un flujo que se opone al cambio del flujo del campo B . En un conductor que se mueve a través de un campo estacionario B , la polaridad de la Ley de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento.

El Rotacional del Campo H.

Es una relación puntual que puede considerarse como una extensión de la ley de Ampère aplicada en un punto. Integrando en la periferia de un área A se tiene:

$$(\text{rot } H)_N = \lim_{\Delta S_N \rightarrow 0} \frac{\oint H \cdot d\lambda}{\Delta S_N}$$

expresando en forma de determinante:

$$\text{rot } H = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

y en términos del operador vectorial se expresa como $\text{rot } H = \nabla \times H$.

Condición necesaria pero no suficiente para que exista rotacional.

El campo debe de variar en magnitud a lo largo de una línea normal a la dirección del campo.

La divergencia del rotacional de una función vectorial es cero si la divergencia de la función vectorial es cero, entonces la función vectorial debe de ser el rotacional de alguna otra función vectorial.

El rotacional del gradiente de una función escalar es cero cuando cualquier función vectorial que sea el gradiente de una función escalar no tiene rotacional.

Magnetización de los materiales.

Si a un núcleo de cualquier material se le enrolla una bobina donde se hace pasar una corriente se generará un campo B en el núcleo. Existe un campo B_C complementario al generado por la corriente I , éste determina la orientación de los imanes elementales del núcleo y es equivalente a un campo creado por un corriente I_C .

$$M = \frac{dI_\lambda}{d\lambda} \quad \text{ó} \quad I_\lambda = \oint M \cdot d\lambda$$

Todos los materiales presentan algunos efectos magnéticos. En muchas sustancias los efectos magnéticos son tan débiles que el material se considera frecuentemente como no magnético. Sin embargo, el vacío es el único medio que en realidad es no magnético. En general, los materiales pueden ser clasificados de acuerdo a su comportamiento magnético en la siguiente forma:

*Clasificación general de los materiales
según su comportamiento magnético*



Diamagnéticos
Paramagnéticos
Ferromagnéticos
Antiferromagnéticos
Ferrimagnéticos
Superparamagnéticos

En los materiales diamagnéticos los efectos magnéticos son débiles. Aunque la órbita y el momento magnético del espín del electrón en tales materiales es nulo en ausencia de un campo magnético externo, un campo aplicado origina que el momento del espín exceda ligeramente su momento orbital, resultando en un pequeño momento magnético neto el cual se opone al campo aplicado. Así, si una muestra diamagnética es colocada cerca de cualquier polo de un imán fuerte, éste será repelido; este efecto fue descubierto por Michael Faraday en 1846. La muestra que usó Faraday fue una pieza de bismuto, una sustancia que presenta un diamagnetismo más intenso que muchos otros materiales diamagnéticos entre los cuales están el hidrógeno, helio y otros gases "inertes", cloruro de sodio, cobre, oro, silicio, germanio, grafito y azufre. El efecto diamagnético está presente en todos los materiales, ya que proviene de la interacción del campo magnético externo con cada electrón orbital; sin embargo, se ve enmascarado por otros efectos. Se analiza el átomo en el cual los efectos del espín del electrón y del movimiento orbital no se anulan completamente. El átomo como un todo tiene un pequeño momento magnético, pero la orientación al azar de los átomos en una muestra grande produce un momento magnético

promedio de cero. El material no muestra efectos magnéticos en ausencia de un campo exterior, sin embargo, cuando se aplica un campo externo existe una pequeña torca en cada momento atómico y estos momentos tienden a alinearse con el campo magnético externo. Este alineamiento conduce a un aumento del valor del campo magnético dentro del material sobre el valor externo, sin embargo, el efecto diamagnético sigue actuando sobre los electrones orbitantes y puede contrarrestar el incremento antes dicho. Si el resultado neto es una disminución en el campo magnético, el material es llamado paramagnético. El potasio, oxígeno, tungsteno, tierras raras y muchas de sus sales como el cloruro de erbio, óxido de neodimio, óxido de itrio, uno de los materiales más usados en masers, son ejemplos de sustancias paramagnéticas.

Los materiales ferromagnéticos, antiferromagnéticos, ferrimagnéticos y superparamagnéticos, tienen intensos momentos atómicos, además, la interacción de átomos adyacentes causa un alineamiento de los momentos magnéticos de los átomos, en ocasiones sumándose y en otras restándose exactamente.

En los materiales ferromagnéticos cada átomo tiene un momento dipolar magnético relativamente grande, causado principalmente por los momentos no equilibrados de espín del electrón. Las fuerzas interatómicas causan que estos momentos se alineen en forma paralela por regiones que contienen un gran número de átomos. Estas regiones llamadas dominios pueden tener una variedad de formas y tamaños que fluctúan desde un micrómetro a varios centímetros, según el tamaño, la forma, el material y la historia magnética de la muestra. Materiales ferromagnéticos vírgenes tendrán dominios, sin embargo, varían en dirección, de dominio a dominio. El efecto completo es de cancelación y el material como un todo no tiene momento magnético. Sin embargo, con la aplicación de un campo magnético externo aquellos dominios que tienen momentos en dirección del campo aplicado aumentan su tamaño a expensas de sus vecinos, el campo magnético interno aumenta grandemente por encima del campo magnético externo. En general, cuando se retira el campo externo no se produce un alineamiento azaroso de dominios, pero permanece un residuo o remanente de campo dipolar magnético en la estructura macroscópica. Al hecho de que el momento magnético del material sea diferente después de que el campo se ha retirado o que el estado magnético sea función de su historia magnética, se le llama histéresis. Los materiales ferromagnéticos no son isotrópicos en monocristales o cristales sencillos y por lo tanto se limitará la discusión a materiales policristalinos, excepto para mencionar que una de las características de los materiales magnéticos anisotrópicos es la magnetostricción, o cambio en las dimensiones del cristal cuando se aplica un campo magnético sobre él. El hierro, níquel y cobalto son los únicos elementos que son ferromagnéticos a la temperatura ambiente, pierden todas sus características ferromagnéticas arriba de una temperatura llamada de Curie, la cual es

1043K (770°C) para el hierro. Algunas aleaciones entre estos metales y con otros metales son también ferromagnéticas, por ejemplo, el alnico que es una aleación de aluminio-níquel-cobalto con una pequeña cantidad de cobre. A bajas temperaturas algunas tierras raras tales como el gadolinio y el disprosio son ferromagnéticas. También es interesante que algunas aleaciones metálicas no ferromagnéticas cambian a ferromagnéticas bajo estas circunstancias, tales como bismuto-manganeso-estaño.

En materiales antiferromagnéticos los momentos magnéticos de átomos adyacentes se alinean en forma antiparalela (direcciones opuestas) de manera que el momento magnético desaparece en presencia de un campo aplicado. El momento magnético neto es cero y los materiales antiferromagnéticos son afectados sólo levemente por la presencia de un campo magnético externo. Este efecto fue descubierto primero en el óxido de manganeso, pero varios cientos de materiales antiferromagnéticos se han identificado desde entonces. Muchos óxidos, sulfuros y cloruros tales como el óxido de níquel (NiO), sulfuro ferroso (FeS) y cloruro de cobalto (CoCl_2). El antiferromagnetismo sólo se presenta a temperatura ambiente, el efecto no es importante para la ingeniería en el presente.

Las sustancias ferrimagnéticas también muestran un alineamiento antiparalelo de momentos atómicos adyacentes, pero los momentos no son iguales, por lo tanto, se origina una respuesta grande al campo magnético externo, aunque no tan grande como en materiales ferromagnéticos. El grupo más importante de materiales ferrimagnéticos son las ferritas, en donde la conductividad es baja, varios órdenes de magnitud menores que la de los semiconductores. El hecho de que estas sustancias tengan resistencia mayor que los materiales ferromagnéticos da por resultado corrientes inducidas mucho menores en el material cuando se aplican campos alternantes, como en el caso de núcleos de transformadores que operan a altas frecuencias. Las corrientes reducidas (corrientes de eddy) conducen a bajas pérdidas óhmicas en el núcleo del transformador. La magnetita de óxido de hierro (Fe_3O_4), la ferrita de níquel-zinc ($\text{Ni}_{1/2}\text{Zn}_{1/2}\text{Fe}_2\text{O}_4$) y la ferrita de níquel (NiFe_2O_4) son ejemplos de esta clase de materiales. El ferrimagnetismo también desaparece a temperaturas mayores que la temperatura de Curie.

Los materiales superparamagnéticos están compuestos por un montaje de partículas ferromagnéticas en una matriz no ferromagnética. Aunque existen dominios dentro de las partículas individuales, las paredes del dominio no pueden penetrar el material matriz intermedio a la partícula adyacente. Un ejemplo importante es la cinta magnética usada en grabaciones de audio, video y en sistemas de almacenamiento de datos.

Características de los diferentes materiales magnéticos.

Clasificación	Momentos magnéticos	Valores de B	Comentarios
Diamagnético	$m_{orb} + m_{espín} = 0$	$B_{int} < B_{apl}$	$B_{int} \approx B_{apl}$
Paramagnético	$m_{orb} + m_{espín} = \text{pequeño}$	$B_{int} > B_{apl}$	$B_{int} \approx B_{apl}$
Ferromagnético	$ m_{espín} \gg m_{orb} $	$B_{int} \gg B_{apl}$	Dominios
Antiferromagnético	$ m_{espín} \gg m_{orb} $	$B_{int} \approx B_{apl}$	Momentos adyacentes opuestos
Ferrimagnético	$ m_{espín} \gg m_{orb} $	$B_{int} > B_{apl}$	Momentos adyacentes desiguales y opuestos, baja σ
Superparamagnético	$ m_{espín} \gg m_{orb} $	$B_{int} > B_{apl}$	Matriz no magnética; cintas de grabación

LEYES DE MAXWELL

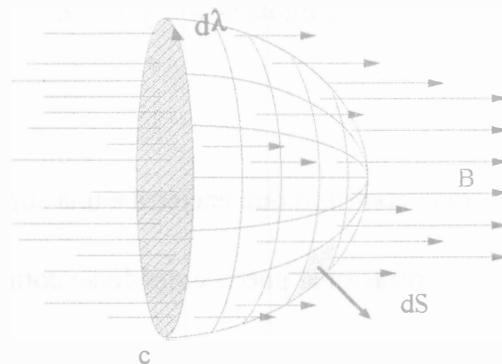
Primera Ley de Maxwell o Ley de Faraday.

Se observa que cuando por un conductor fluye corriente se produce un campo magnético. En 1831, Michael Faraday en Londres (Inglaterra) y Joseph Henry en Albany (Estados Unidos), encontraron en forma independiente que el efecto inverso también es posible. Es decir, un campo magnético puede producir una corriente en un circuito cerrado, pero debe cumplirse la importante condición de que el flujo magnético de enlace sobre el circuito debe estar cambiando.

a) Forma integral de la ley de Faraday.

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial \phi_{total}}{\partial t}$$

La figura muestra los sentidos de referencia para la ecuación.



El signo menos en la ecuación de la Ley de Faraday implícitamente incluye a la Ley de Lenz, la cual dice que el voltaje inducido por un flujo variable tiene una polaridad tal que la corriente establecida en una trayectoria cerrada da lugar a un flujo que se opone a la variación en el flujo. Para un conductor que se mueve a través de un campo magnético estacionario B , la polaridad de Lenz siempre será tal que el conductor experimenta fuerzas magnéticas que se oponen al movimiento. La ley de Lenz expresa la conservación de la energía, es decir, que el trabajo realizado sobre el sistema debe ser exactamente igual a la energía de Joule producida por la bobina. Si se considera lo siguiente:

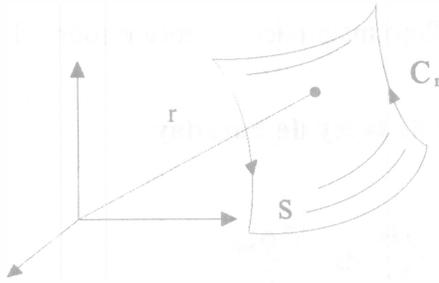
$$\frac{\partial \phi_{\text{total}}}{\partial t} > 0$$

entonces el campo eléctrico E es opuesto a $d\lambda$, de tal manera que E produce una corriente cuyo flujo magnético se opone a B . Debe notarse que las direcciones de C y dS también están relacionadas por la regla de la mano derecha. La ley expresa que el trabajo hecho para llevar una carga eléctrica positiva unitaria alrededor de S sobre C hasta volver al punto inicial (voltaje), es de magnitud igual a la rapidez de cambio del flujo magnético total a través de la superficie S .

b) Interpretación del rotacional como una integral de línea.

Para pasar de la forma integral de la Ley de Faraday a su forma diferencial hay que recordar la siguiente interpretación rotacional:

- (i) Definiendo la "circulación" como en mecánica de fluidos, se tiene:

$$\text{Circulación} = \oint_{C_r} E \cdot d\lambda$$


C_r es el contorno que encierra a una superficie plana de área S que contiene al punto r .

- ii) El rotacional puede entenderse como la circulación por unidad de área en el punto r .

- iii) El Teorema de Stokes relaciona la integral de trayectoria o de línea sobre un contorno cerrado con la integral de superficie sobre la superficie comprendida por el contorno.

$$|\nabla \times \mathbf{E}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{C_r} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Teorema de Stokes:

Sea S una superficie suave a trozos orientada en el espacio, cuya frontera es una curva simple suave a trozos, cerrada, dirigida de acuerdo a la orientación dada a la superficie S; y sea U un campo vectorial, con componentes continuas y diferenciables, definido en un dominio D que incluye a S. Entonces:

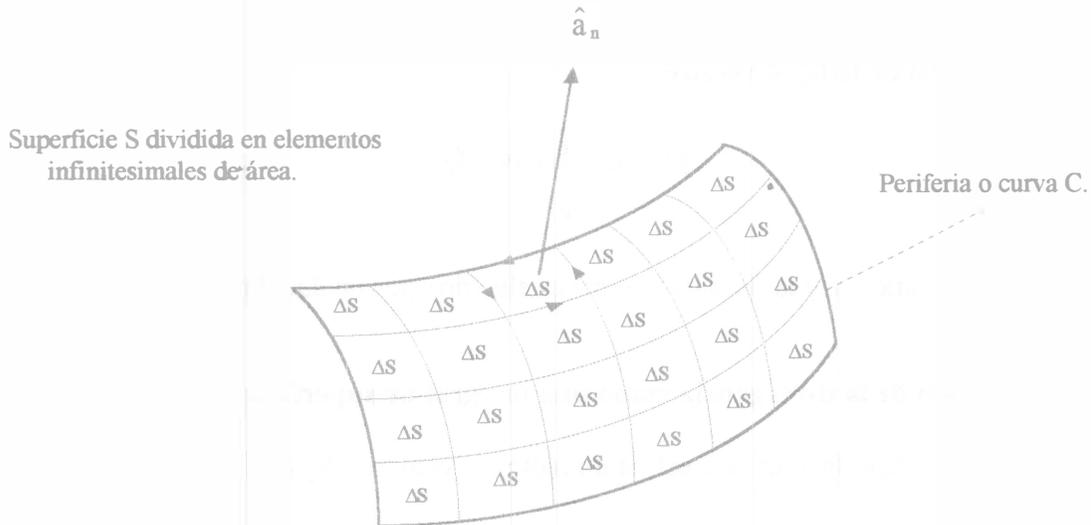
$$\oint_C \mathbf{U} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{S}$$

- iv) Se muestra su interpretación física usando el concepto de circulación; efectuando la integral como una sumatoria de $\nabla \times \mathbf{E}$ en elementos diferenciales de superficie:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \Delta \mathbf{S}_i$$

Aplicando el concepto de circulación:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \left(\oint_{C_{r_i}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right)$$



De la figura se observa que al efectuar la suma los únicos términos que quedan sin cancelarse son los que están sobre la periferia C

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda}$$

c) Forma diferencial de la Ley de Faraday.

Partiendo de la forma integral

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

y utilizando el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s}$$

entonces, para una superficie fija

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

si S es arbitraria y por igualdad de integrales

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

Segunda Ley de Maxwell o Ley de Gauss.

Partiendo de los resultados experimentales de Faraday, quien encontró que el flujo eléctrico es igual a la carga, se tiene lo siguiente.

a) Forma integral de la ley de Gauss.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho \, dv = Q_{\text{total}}$$

S encierra al volumen V y la densidad de carga eléctrica por unidad de volumen es $\rho \left[\frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^3} \right]$

b) Interpretación de la divergencia como una integral de superficie.

i) Sea S_r la superficie de una esfera de radio r y volumen V_r con centro en $r' = (x', y', z')$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} \Big|_{\mathbf{r}} = \lim_{V_r \rightarrow 0} \frac{1}{V_r} \int_{S_r} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{s}$$

Como dS es positiva hacia el exterior de la superficie, la expresión anterior dice que la divergencia en el punto \mathbf{r}' es el flujo que sale por unidad de volumen en dicho punto.

- ii) El teorema de la divergencia o Teorema de Gauss relaciona la integral de superficie con la integral de volumen.

Teorema de Gauss: Sea \mathbf{U} un campo vectorial en el dominio D . Sea S una superficie cerrada en D , y sea $d\bar{S} = \bar{\mathbf{n}} dS$, con $\bar{\mathbf{n}}$ la normal exterior de S con respecto a V . Entonces:

$$\int_S \mathbf{U} \cdot d\bar{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{U}) dV$$

- iii) Interpretación física del teorema de la divergencia

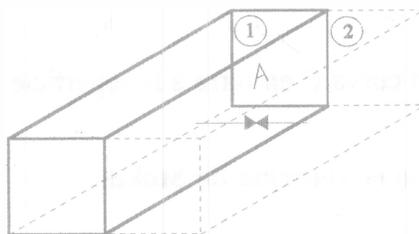
Se ilustra con cubos, sin embargo, para elementos diferenciales no importa la forma del volumen utilizado. Evaluando la integral como una sumatoria de $\nabla \cdot \mathbf{U}$ en elementos diferenciales de volumen:

$$\int_V (\nabla \cdot dV) = \lim_{\max V_{r_i}} \sum_i (\nabla \cdot \mathbf{U}) V_{r_i}$$

y por la interpretación física de la divergencia:

$$\int_V (\nabla \cdot dV) = \lim_{\max V_{r_i}} \sum_i \left(\oint_{S_{r_i}} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

Pero los flujos a través de las superficies en contacto de elementos contiguos se cancelan:



Lo que sale de (1) por la cara A, entra a (2) con signo menos y la suma se cancela. Los flujos en el interior se cancelan y la suma se reduce al flujo en la superficie exterior.

c) Forma diferencial de la Ley de Gauss

De la forma integral de la Ley de Gauss, la carga es definida:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho \, dV = Q_{\text{total}}$$

Por el Teorema de la divergencia o de Gauss:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \int_V \rho \, dV$$

pero como V es arbitrario y por igualdad de integrales se tiene que $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ entonces se concluye que las fuentes para el campo eléctrico son:

$$\rho \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Nótese que la Ley de Faraday y la Ley de Gauss especifican que estas fuentes están dadas por:

$$\rho = \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{y} \quad -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$$

Tercera Ley de Maxwell o Ley de Ampère.

a) En forma integral se tiene.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

La curva C encierra a la superficie S.

b) Forma diferencial aplicando el Teorema de Stokes.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

por ser la superficie S arbitraria (pero estática), y factorizando del lado derecho de la igualdad, o aplicando la linealidad de la integral, entonces se tiene en ambos lados de la ecuación una integral de superficie, por lo que se deduce que las funciones a integrar son las mismas.

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

Nótese que las fuentes para \mathbf{H} son las siguientes.

Corriente de conducción (Ley de Ohm en forma puntual):

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad \left[\frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

Corriente de desplazamiento:

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \left[\frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

Corriente de convección
(por ahora no será considerada):

$$\rho \mathbf{V} \quad \left[\frac{\text{Amp}}{\text{m}^2} \right]$$

Cuarta Ley de Maxwell o Continuidad de Flujo Magnético.

a) Forma integral.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

La ecuación expresa lo siguiente:

"las líneas de flujo magnético entran y salen en igual número a una superficie cerrada".

A diferencia de las líneas de campo \mathbf{D} , que terminan en cargas eléctricas, las del campo \mathbf{B} son continuas y forman curvas cerradas.

b) Forma diferencial aplicando el teorema de la divergencia.

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0$$

y como V es arbitrario:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esto indica que el flujo magnético que entra en un punto es igual al que sale de él, es decir, el flujo magnético es continuo y no existen fuentes ni sumideros, desde el punto de vista de la divergencia.

De las ecuaciones de Maxwell, se deduce la ecuación de la continuidad:

$$\text{De la Ley de Gauss:} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{De la Ley de Ampère:} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c$$

Ya que la divergencia del rotacional es cero, se concluye que:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

o bien:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{V_r \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{S_r} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

La ecuación de continuidad manifiesta que:

"El cambio en la densidad de carga es igual al flujo neto de corriente".

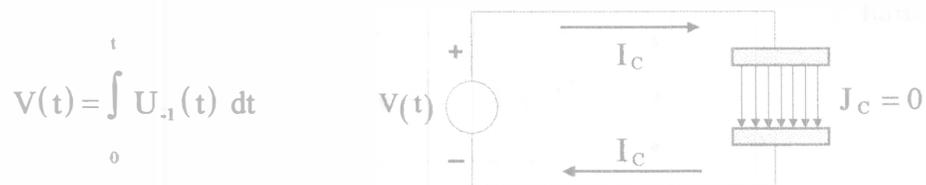
Es decir, la corriente que sale de un pequeño volumen por unidad de volumen es igual a la razón de cambio de la carga que decrece con el tiempo por unidad de volumen en cada punto.

Nota: Cuando se procede en forma rigurosa, primero se da la demostración matemática de los Teoremas de Gauss y Stokes, y luego su interpretación física.

Si bien $-\partial \mathbf{B} / \partial t$ es una fuente para el campo eléctrico \mathbf{E} y $\partial \mathbf{D} / \partial t$ es una fuente para el campo \mathbf{H} , las fuentes primarias de los campos electromagnéticos son \mathbf{J} y ρ . Para campos que varían con el tiempo es posible derivar todos los campos electromagnéticos que varían con el tiempo exclusivamente a partir del conocimiento de \mathbf{J} , ya que la ecuación de continuidad relaciona a ρ y \mathbf{J} .

Corriente de Desplazamiento.

Al suministrar corriente alterna a las placas de un condensador, por el circuito del condensador pasará una corriente que creará un campo magnético de la misma manera que una corriente de conducción. Este fue uno de los grandes méritos de Maxwell de haber introducido este concepto además de la corriente de conducción. La corriente de desplazamiento permite mantener la noción de que la corriente es continua en las placas de un capacitor, la corriente de conducción no es continua a través de la separación de las placas debido a que no existe transporte de carga a través de ellas, esto implica que existe una corriente $I_d = I$ en ese espacio del dieléctrico para que se satisfaga el principio de continuidad. Es imposible imaginarse la corriente continua sin un campo H. La corriente de desplazamiento en el dieléctrico aparece como resultado del proceso de polarización, es decir, que al agregar un dieléctrico entre las placas de un condensador, en éste aparecerá una corriente de desplazamiento capaz de crear un campo magnético. Experimentalmente se demuestra que el campo B también se genera en el caso que entre las placas exista el vacío, en este caso la corriente I_d la crean los fotones. Considere una fuente de voltaje que genera una rampa que se aplica a un capacitor de placas paralelas.



I_C es la corriente de conducción y es nula en el capacitor, por lo que al aplicar la Ley de Corrientes de Kirchhoff no se cumpliría.

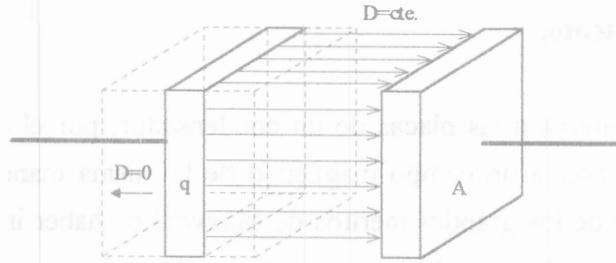
La corriente de conducción es

$$I_C = \frac{dq}{dt}$$

La corriente de desplazamiento es

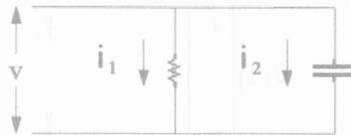
$$I_d = \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q}{A} \right) A = I_C$$

Esto es, en el aislante la corriente de conducción se continua con la corriente de desplazamiento, y así no se viola la Ley de Kirchhoff. Se obtuvo D aplicando la Ley de Gauss con una superficie que encierra a una de las placas del capacitor.



La Corriente de Desplazamiento es una de las grandes contribuciones de Maxwell a la Teoría Electromagnética. Ésta nos describe que la circulación de la intensidad de campo magnético H por un contorno arbitrario λ es igual a la corriente total que pasa por cualquier superficie que se apoya en dicho contorno. La corriente de desplazamiento permite tener la noción de continuidad de la corriente, con lo cual la validez de ley de corrientes de Kirchhoff no se altera. El concepto de corriente de desplazamiento o densidad de corriente de desplazamiento fue introducido por James Clerk Maxwell para explicar la producción de campos magnéticos en el espacio vacío, en el que la corriente de conducción es cero y los campos magnéticos se deben exclusivamente a corrientes de desplazamiento.

Ejemplo. Considere la siguiente figura en la que se aplica una tensión a un resistor y a un capacitor en paralelo.



La naturaleza del flujo de corriente a través del resistor es diferente del flujo del capacitor. Si se tiene una tensión constante, se tendrá una corriente constante a través del resistor, y sólo se tendrá corriente a través del capacitor si se tiene una tensión que esté cambiando. Para los elementos de la figura se tiene:

$$\begin{array}{l} \text{corriente para el resistor} \quad i_1 = \frac{V}{R} \quad \text{corriente para el capacitor} \\ i_2 = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} \end{array}$$

La carga instantánea Q en el capacitor está dada por $Q = CV$.

La corriente a través del resistor es una *corriente de conducción*, mientras que la corriente "entre terminales" del capacitor puede llamarse *corriente de desplazamiento*. Aunque la corriente no fluye por el capacitor, el efecto hacia el exterior es como si lo hiciese, puesto que la misma corriente que sale por una de las placas es la misma que fluye hacia adentro por la otra placa.

Dentro de cada elemento el campo eléctrico E es igual a la tensión V entre terminales del elemento, dividido entre su longitud d , es decir, $E = V/d$. De acuerdo a la ley de Ohm en un punto ($J = \sigma E$) la densidad de corriente J_1 en el interior del resistor es igual al producto del campo eléctrico y la conductividad σ del medio dentro del elemento resistor, que también es igual a i_1 dividida entre el área de la sección transversal A , esto es:

$$J_1 = E\sigma = \frac{i_1}{A} \quad \text{dimensionalmente} \quad \frac{\text{Amperes}}{\text{metros}^2} = \frac{\text{volts}}{\text{metro}} \times \frac{\text{mhos}}{\text{metro}}$$

Para el capacitor se tiene que su capacitancia es $C = \epsilon A/d$, donde A es el área de las placas y d es el espaciado entre ellas. Sustituyendo este valor para C , y $V = Ed$ en i_2 se tiene:

$$i_2 = \frac{\epsilon A d}{d} \frac{dE}{dt} = \epsilon A \frac{dE}{dt}$$

Al dividir entre el área A se tiene la relación en que la densidad de corriente J_2 , dentro del capacitor, es igual a la permitividad del medio no conductor que llena el elemento capacitor multiplicada por la rapidez de cambio del campo eléctrico, esto es:

$$\frac{i_2}{A} = \epsilon \frac{dE}{dt} = J_2 \quad \text{dimensionalmente} \quad \frac{\text{Amperes}}{\text{metros}^2} = \frac{\text{farads}}{\text{metro}} \times \frac{\text{volt / metro}}{\text{segundo}}$$

Recordando que $D = \epsilon E$ la expresión anterior queda $J_2 = \frac{dD}{dt}$

Para este ejemplo, se tiene que J_1 es una densidad de corriente de conducción J_{cond} , mientras que J_2 es una densidad de corriente de desplazamiento J_{desp} , como la densidad de corriente J , el desplazamiento eléctrico D y la intensidad de campo eléctrico E realmente son vectores espaciales con la misma dirección en medios isotrópicos, entonces J_1 y J_2 pueden expresarse en forma más general, como se indica a continuación.

$$J_{\text{cond}} = \sigma E \quad \text{y} \quad J_{\text{desp}} = \epsilon \frac{dE}{dt} = \frac{dD}{dt}$$

Si en vez de tenerse dos elementos separados en paralelo, se tiene un solo elemento con resistencia y capacitancia, se tiene entonces un capacitor con un dieléctrico conductor, de modo que se presenta tanto corriente de conducción como corriente de desplazamiento; se tiene entonces que la corriente total está dada por:

$$J_{\text{total}} = J_{\text{cond}} + J_{\text{desp}}$$

Ecuaciones de Maxwell en forma Punto y Forma Integral

CAMPOS INVARIANTES CON EL TIEMPO

Ley	Forma Diferencial	Forma Integral
Ampère	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$I = \int \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{\mu} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$
Gauss Eléctrica	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$Q_{\text{enc}} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v dV$
Gradiente	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = 0$
Gauss Magnética	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

CAMPOS VARIANTES CON EL TIEMPO

Forma Diferencial	Forma Integral
$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$I = \int \left(\mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$	$Q_{\text{enc}} = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_v dV$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = -\int \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$

Recuérdese que $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, y por Ley de Ohm $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$

RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA DE CAMPO Y LA TEORÍA DE CIRCUITO (ECUACIONES DE MAXWELL)

Introducción.

En la teoría de circuito tratamos con elementos de circuito, el voltaje y la corriente total a través de ellos. En la teoría de campo tratamos con los vectores de campo (E , D , B , H , y J) y sus valores como una función de posición. Considere, por ejemplo, un trozo de varilla conductora de longitud " l " y con sección transversal de área " A " en la siguiente figura.



En la teoría de circuitos de baja frecuencia es conveniente describir el conductor en términos de una cantidad, ésta es la resistencia " R ". Así la diferencia de voltaje entre los extremos de la varilla de material conductor, de la ley de Ohm se tiene:

$$V = RI \quad (1)$$

donde " I " es la corriente en el conductor. Esta es una relación circuital.

Desde el punto de vista de la teoría de campo, consideramos el valor del campo eléctrico " E " en un punto del conductor. De la ley de Ohm en un punto ($J = \sigma E$) tenemos:

$$E = \frac{J}{\sigma} \quad \left[\frac{V}{m} \right] \quad (2)$$

donde " J " es la densidad de corriente de conducción dada en [A / m^2], y " σ " es la conductividad y sus unidades son [mho / m]. Ésta es una relación de campo.

Ahora, integrando (2) a lo largo del conductor, obtenemos el voltaje entre los extremos, esto es:

$$V = - \int E \cdot d\lambda = - \int \frac{J}{\sigma} \cdot d\lambda \quad (3)$$

Para un conductor uniforme con densidad de corriente uniformemente distribuida, esto se transforma en la siguiente expresión:

$$V = \frac{J \lambda}{\sigma} = J A \frac{\lambda}{\sigma A} \quad [V] \quad (4)$$

donde $I = J A$ es la corriente a través del conductor, en Amperes.
 A área de la sección transversal, del conductor en metros cuadrados.
 $R = \frac{\lambda}{\sigma A}$ es la resistencia del conductor, en Ohms.

Así, de la ecuación (4) tenemos:

$$V = J A \frac{\lambda}{\sigma A} = I R \quad [V]$$

$$V = R I \quad (5)$$

Comenzando con la teoría de campo hemos llegado a la importante relación circuital conocida como "Ley de Ohm". Históricamente, ésta y otras relaciones circuitales fueron postuladas y verificadas primero, después, por generalización fueron extendidas para aplicarse a situaciones más generales. Esto lleva, en consecuencia, a que las relaciones circuitales sean casos especiales de las ecuaciones de campo y quizá deducidas de ellas. Aunque las relaciones de campo son más generales, es más usual usar las ecuaciones circuitales cada vez que ellas son aplicables. La ecuación (1) es una relación circuital pura, por otra parte la ecuación (2) es una relación de campo pura. Hay muchas ecuaciones no puras pero son una combinación o mezcla. Tales relaciones son necesarias, por ejemplo, a fin de proporcionar una conexión entre las teorías de circuito y de campo. Dos ecuaciones que proveen tales conexiones, son:

$$V = - \int E \cdot d\lambda \quad (6)$$

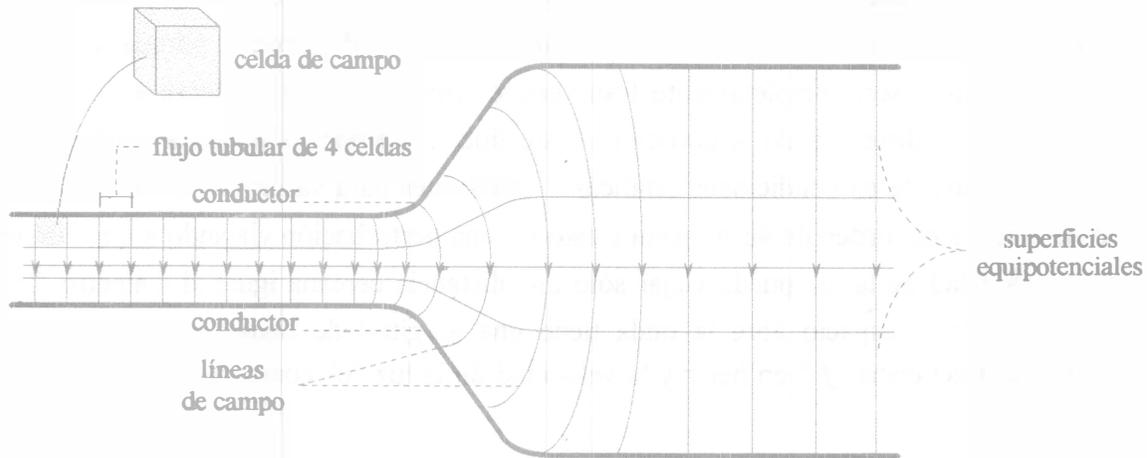
$$I = \oint H \cdot d\lambda \quad (7)$$

La ecuación (6) relaciona el voltaje (una cantidad circuital) de la integral de línea de "E" (una cantidad de campo) entre dos puntos. Igualmente, la ecuación (7), la cual es la "Ley de Ampère", relaciona corriente (una cantidad circuital) a la integral de línea de "H" (una cantidad de campo) al rededor de una trayectoria cerrada.

Aplicaciones de las teorías de circuito y de campo.

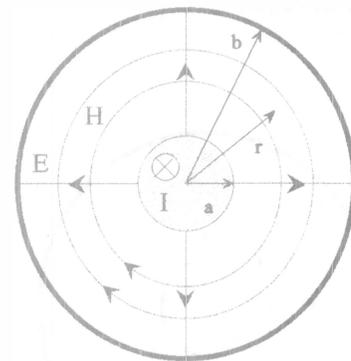
Mientras las relaciones de campo son aplicables en general, las relaciones circuitales son usualmente más convenientes siempre que el voltaje "V" y la corriente "I" tengan un significado simple, pero bien definido.

Así, en la determinación de la capacitancia de un capacitor de forma irregular con la ayuda de una gráfica de mapa de campo, dirigimos nuestra atención al campo y su valor como una función de la posición en el capacitor.



Sin embargo, una vez que hemos determinado la capacitancia podemos considerar en bajas frecuencias por simplicidad un elemento circuital de dos terminales de capacitancia "C" con una diferencia de potencial "V". El tamaño físico, la forma del capacitor y la configuración del campo contenido son relegados a una posición de importancia secundaria.

Como otro ejemplo ilustrativo, consideremos una línea de transmisión coaxial mostrada a continuación, en su sección transversal, bajo dos condiciones, una donde "V" e "I" son cantidades útiles y otra en la que no lo son. La línea coaxial tiene un conductor interno de radio "a" y en el exterior un conductor de radio "b". Con una diferencia de potencial estático entre los conductores, las líneas de campo eléctrico son radiales. Si fluye una corriente "I" las líneas de campo magnético "H" son circulares, entonces, por la ecuación (6) la diferencia de potencial entre los dos conductores es:



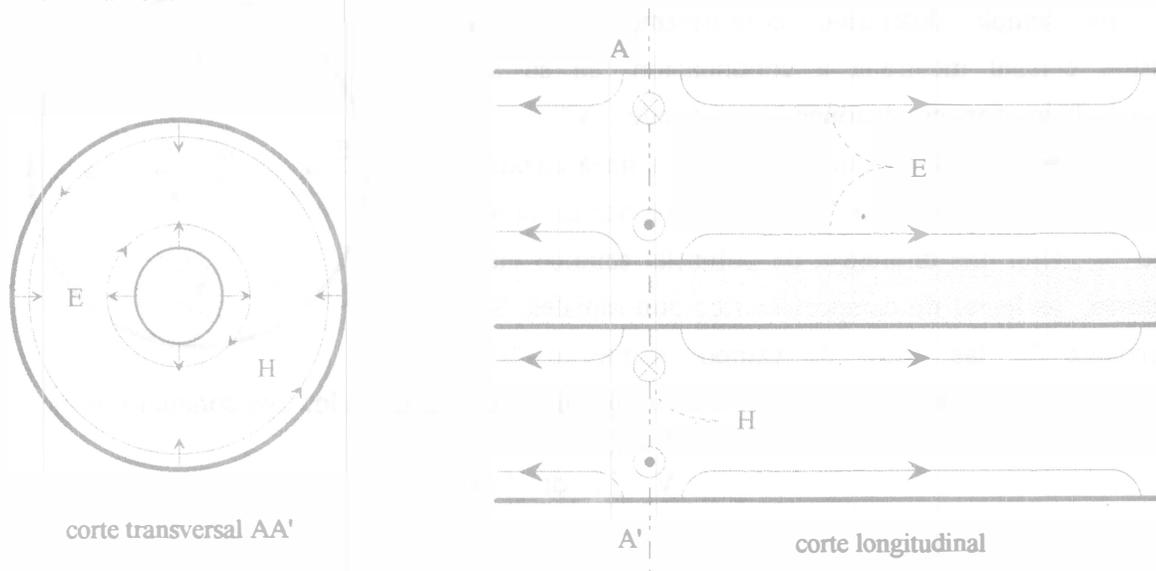
$$V = \int_a^b E \cdot dr \quad (v) \tag{8}$$

En forma similar, de la ecuación (7), la corriente "I" en el conductor interno es:

$$I = \oint H \cdot d\lambda = \int_0^{2\pi} H r d\theta \quad (A) \tag{9}$$

En la ecuación (8) "V" es independiente de la trayectoria entre los conductores, mientras que en la ecuación (9) el valor de "I", obtenido por la integración de "H", es independiente del radio "r" entre los conductores "a" y "b". Por lo tanto, "V" e "I" tienen un significado simple y definido en este caso y son cantidades útiles. La configuración mostrada en la figura es llamada Campo Electro-Magnético Transversal (T.E.M., "Transverse Electro Magnetic") porque los campos eléctrico y magnético son completamente transversales (no tienen componente en la dirección axial, es decir, en la dirección de la corriente). Este tipo de campo es la única configuración o forma de campo posible en condiciones estáticas y situaciones para variación de tiempo donde la longitud de onda es del orden de $4b$ o mayor (esto es, una perturbación viajando a una frecuencia alta con la velocidad de la luz puede viajar sólo una distancia cercana igual al diámetro " $2b$ " en medio periodo. En el espacio libre la onda tiene una longitud de onda λ en metros que es relacionada a la frecuencia " f " en hertz y la velocidad de la luz " c " como sigue: $\lambda = c/f$, donde $c = 300 \text{ km/s}$).

A altas frecuencias (la longitud de onda es muy pequeña) existen configuraciones de campo más complejas, conocidas como modos de orden superior. Estos modos se caracterizan por tener algunas componentes de campo sobre la dirección axial (la dirección de la línea de transmisión). Aunque hay líneas coaxiales rara vez usadas bajo tales condiciones, suponga que la frecuencia es suficientemente alta para la existencia de la configuración mostrada a continuación.



Ambos cortes (longitudinal o axial y transversal) fueron necesarios para mostrar la configuración del campo. Este campo es llamado "modo transversal magnético (T.M.)" porque el campo magnético es enteramente transversal, mientras que el campo eléctrico tiene componentes axiales o longitudinales.

Para este modo, la diferencia de potencial "V" entre los conductores, obtenido por la ecuación (8), quizá llega a ser insignificante, mientras que "I" obtenida por la ecuación (9) depende del radio "r" en el cual "H" es integrado. De aquí "V" e "I" ya no tienen un significado simple y no son tan útiles como las cantidades de campo mismas. El concepto de circuito no se aplica cuando las dimensiones transversales llegan a ser comparables con la longitud de onda.

Relaciones generales de campo.

La divergencia del rotacional de un vector "F" es cero, entonces:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

Como corolario, cualquier función vectorial sin divergencia debe ser el rotacional de alguna otra función vectorial. Así pues, si $\nabla \cdot G = 0$, se puede escribir $G = \nabla \times F$, donde "F" es alguna otra función vectorial, por ejemplo, $\nabla \cdot B = 0$, de manera que "B" se puede expresar como el rotacional de un potencial vectorial $B = \nabla \times A$. También, el rotacional del gradiente de una función escalar "f" es cero. Así pues, $\nabla \times (\nabla f) = 0$.

Como corolario, cualquier función vectorial sin rotacional es el gradiente de alguna función escalar, entonces, si $\nabla \times F = 0$, se puede decir que $F = \nabla g$, donde "g" es una función escalar. Como ejemplo, el rotacional del campo eléctrico estático debido a cargas estáticas es cero $\nabla \times E = 0$. Se concluye que el campo eléctrico estático a causa de cargas puede expresarse como el gradiente de una función escalar, es decir, $E = -\nabla V$, donde "V" es el potencial eléctrico escalar.

De acuerdo con la ecuación de Maxwell deducida a partir de la ley de Faraday, se observa que en situaciones que cambian con el tiempo, el rotacional del campo eléctrico no es cero sino que es igual a la rapidez de disminución de "B", entonces:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Puesto que $\nabla \times E$ no es cero, la relación $E = -\nabla V$ no es suficiente para campos que varían con el tiempo; se requiere un término adicional y éste puede encontrarse de la siguiente manera.

Considerando que $B = \nabla \times A$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial(\nabla \times A)}{\partial t}$$

de la cual,

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Como el rotacional de la expresión dentro del paréntesis es cero, debe ser igual al gradiente de una función escalar, entonces se puede escribir:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla f$$

donde "f" es una función escalar. Si el potencial escalar eléctrico "V" se toma como su función escalar, se obtiene una relación que satisface los requisitos tanto para situaciones estáticas como en las que varían con el tiempo.

Sea entonces $f = -V$, de manera similar que de la última expresión se obtiene:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Para el caso de campos estáticos esta expresión se reduce a $\mathbf{E} = -\nabla V$. El caso general, en que el campo puede variar con el tiempo, "E" está dado tanto por un potencial escalar "V" como por un potencial vectorial "A", como se indica en la expresión anterior; si la variación en el tiempo es armónica, ésta se transforma en:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - j\omega \mathbf{A}$$

Cuando el potencial vectorial "A" y el potencial escalar "V" son conocidos, los campos eléctrico y magnético pueden obtenerse en condiciones estáticas o variables en el tiempo, con las expresiones:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad [\text{Teslas}]$$

donde:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV \quad [\text{Volts}] \quad \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dV \quad \left[\frac{\text{wb}}{\text{m}} \right]$$

Se supone que la distancia "r" en las expresiones para "V" y "A" es pequeña comparada con la longitud de onda, de manera que los efectos del tiempo de propagación pueden despreciarse. Si no es el caso, el tiempo de propagación debe tenerse en cuenta y usarse la forma retardada, más general para "ρ" y "J".

El circuito serie, comparación de la teoría de circuito y la teoría de campo.

La ley de voltajes de Kirchhoff expresa la diferencia entre fem y diferencia de potencial de la siguiente manera:

"La suma algebraica de las fems alrededor de un circuito cerrado es igual a la suma algebraica de las caídas óhmicas alrededor del circuito, si se trata de situaciones donde cambia el tiempo, donde las dimensiones del circuito son muy pequeñas con respecto a la longitud de onda, se habla entonces de suma de valores instantáneos alrededor del circuito."

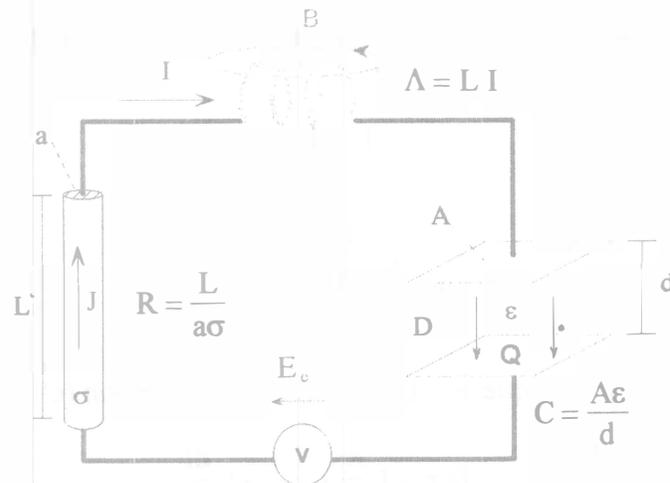
Lo anterior permite expresar el campo eléctrico total (E_{TOTAL}) como la suma del campo " E_e " relacionado con "fems" y el campo "E" inducido por cargas y corrientes. Así,

$$E_{\text{TOTAL}} = E_e + E \quad \text{ó} \quad E_e = E_{\text{TOTAL}} - E \quad (a)$$

Recordando la ley de Ohm en su forma puntual, del análisis vectorial, de las leyes de Maxwell y considerando el análisis anterior, se tiene:

$$E_{\text{TOTAL}} = \frac{J}{\sigma} \quad \text{y} \quad E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (b)$$

Considérese un circuito serie RLC conectado a un generador tal y como se ilustra en la siguiente figura.



Considérese que la resistencia total en el circuito está confinada en el resistor, toda la inductancia en el inductor, toda la capacitancia en el capacitor, y toda la "fem" en el generador. Aplicando las relaciones de campo al circuito, primero se sustituyen las expresiones (b) en (a), entonces para

pasar de cantidades de campo a cantidades circuitales y, finalmente, integramos todos los términos completamente al rededor del circuito en el sentido de las agujas del reloj.

Esto nos da:

$$\oint E_e \cdot d\lambda = \oint \frac{J}{\sigma} \cdot d\lambda + \oint \nabla V \cdot d\lambda + \oint \frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\lambda \quad (c)$$

Integrando el lado izquierdo se obtiene la "fem" del generador. Integrando también el primero de los dos términos en el lado derecho y notando que $\nabla V = -E$, tenemos:

$$fem = \frac{J\lambda}{\sigma} + Ed + \frac{d}{dt} \oint \frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\lambda \quad (d)$$

el último término puede ser reexpresado como:

$$\oint \frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\lambda = \frac{dI}{dt} \oint \frac{A}{I} \cdot d\lambda = L \frac{dI}{dt} \quad (e)$$

La transformación de esta última expresión también puede hacerse con la ayuda del teorema de Stokes recordando que $B = \nabla \times A$ y $\Lambda = LI$, esto es:

$$\oint \frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\lambda = \frac{d}{dt} \int_s (\nabla \times A) \cdot dS = \frac{d}{dt} \int_s B \cdot dS = \frac{d\Lambda}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

donde "L" es la inductancia del circuito y la corriente a través del circuito es "I", matemáticamente esto es:

$$L = \oint \frac{A}{I} \cdot d\lambda \quad \text{la inductancia del circuito}$$

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J}{r} dV \quad \text{el vector de potencial}$$

obsérvese también que $J = I/A$ y que $E = D/\epsilon$, entonces la ecuación (e) se transforma en:

$$fem = I \frac{\lambda}{a\sigma} + \frac{Dd}{\epsilon} + L \frac{dI}{dt} \quad (f)$$

ahora bien, $R = \frac{\lambda}{a\sigma}$ y $D = \frac{Q}{A}$; así pues se tiene:

$$fem = IR + \frac{Qd}{A\epsilon} + L \frac{dI}{dt} \quad (g)$$

pero

$$C = \frac{A \epsilon}{d} \quad Q = \int I dt$$

y así, la ecuación (g) toma la forma:

$$fem = IR + \frac{1}{C} \int I dt + L \frac{dI}{dt} \quad (h)$$

Para una variación senoidal de corriente la forma fasorial de la ecuación (h) es:

$$fem = IR + \frac{I}{j \omega C} + j \omega L I \quad (i)$$

$$fem = IR + j \left(I \omega L - \frac{I}{\omega C} \right) \quad (j)$$

En la obtención de la ecuación (j) la suposición hecha es que la corriente instantánea en cualquier momento en todo el circuito es la misma. Esto implica que una perturbación es propagada al rededor del circuito instantáneamente. Si la longitud del circuito es pequeña comparada con la longitud de onda, ésta es una suposición satisfactoria, sin embargo, si la longitud del circuito es apreciable comparada con la longitud de onda (menor de $\lambda/8$), la variación en la corriente y fase alrededor del circuito, quizá, llegue a ser de importancia. Bajo estas circunstancias los conceptos para circuito simple tienden a ser inadecuados e imprecisos. Es importante indicar que en el tratamiento del circuito presentado se ignoró el fenómeno de la radiación, el cual es muy importante a altas frecuencias. Hay ciertas excepciones en las que las expresiones (i) y (j), esos conceptos circuitales llegan a ser inadecuados cuando la longitud del circuito es comparable con la longitud de onda, por ejemplo, los conceptos circuitales son aplicados con buenos resultados a extensas líneas de transmisión. En este último caso la inductancia y la capacitancia distribuidas son representadas por elementos concentrados o aglomerados apropiados; aunque la longitud de las líneas puede ser mucho mayor que la longitud de onda, es importante que en ésta extensión de la teoría circuital el tratamiento es adecuado sólo para líneas con dimensiones de sección transversal muy pequeña comparada con la longitud de onda.

Ecuaciones de Maxwell como generalización de las ecuaciones circuitales.

Estas relaciones conocidas como "Ecuaciones de Maxwell", consisten en cuatro expresiones: una que se deriva de la Ley de Ampère, otra de la Ley de Faraday, y dos más, derivadas de la Ley de Gauss. Estas ecuaciones son de profunda importancia; junto con las condiciones de frontera, el

principio de continuidad y otras relaciones auxiliares, forman las herramientas básicas para el análisis de muchos problemas de electromagnetismo.

La Ley de Ampère relaciona la integral de línea del campo H al rededor de una trayectoria cerrada, obteniéndose la corriente:

$$\oint H \cdot d\lambda = I \quad (A)$$

Reemplazando "I" por la densidad de corriente de conducción "J" sobre un área limitada por la trayectoria de integración de "H", tenemos una relación más general:

$$\oint H \cdot d\lambda = \int_S J \cdot dS \quad (B)$$

esta relación se hizo aún más general al agregar la densidad de corriente de desplazamiento a la densidad de corriente de conducción, así la ecuación (B) llega a ser:

$$\oint H \cdot d\lambda = \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS \quad (C)$$

Ésta es la relación llamada "Ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Ampère". En esta expresión obtenida en forma integral, la integral de "H" es valuada sobre una trayectoria cerrada limitando la superficie "S". En términos de circuitos, una trayectoria cerrada o "loop" es frecuentemente llamada "malla". De aquí que la ecuación (C) es una "relación de malla", aplicándole el Teorema de Stokes obtenemos su correspondiente forma puntual, también conocida como forma vectorial diferencial o simplemente como forma diferencial.

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (D)$$

La ecuación (D) relaciona las cantidades de campo (magnitud) a un punto. Ésta es la forma diferencial de la ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Ampère.

Por otra parte, la Ley de Faraday relaciona una "fem" (fuerza electromotriz) inducida en un circuito en razón con el tiempo para el decremento del flujo magnético total en el circuito, obtenido como:

$$fem = - \frac{d\Lambda}{dt} \quad (E)$$

Reemplazando el flujo " Λ " por la integral de superficie de " B " sobre el área limitada por el circuito, tenemos una ecuación más general:

$$fem = -\frac{d}{dt} \int_s B \cdot dS \quad (F)$$

Reemplazando en (F) "fem" por la integral de E al rededor del circuito, tenemos una relación más general (para circuitos estacionarios):

$$\oint E \cdot d\lambda = -\int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS \quad (G)$$

Esta relación de campo es una generalización de la Ley Circuital de Faraday (G), y es conocida como "Ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Faraday". La ecuación (G) está en su forma integral; ésta es una ecuación de malla. Su correspondiente expresión puntual se puede obtener de (G) aplicándole el Teorema de Stokes, resultando:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (H)$$

La expresión diferencial (H) relaciona las cantidades de campo a un punto, ésta es la "Ecuación de Maxwell derivada de la Ley de Faraday en su forma diferencial".

Por otra parte, la Ley de Gauss relaciona la integral de superficie de una densidad de flujo eléctrico " D " con la carga encerrada " Q ", obteniéndose:

$$\oint_s D \cdot dS = Q \quad (I)$$

Reemplazando " Q " en (I) por la integral de volumen de la densidad de carga " ρ " a través del volumen encerrado por la superficie " S ", podemos escribir (I) en una forma más general:

$$\oint_s D \cdot dS = \int \rho dV \quad (J)$$

Esta relación de campo es la generalización de la Ley de Gauss y es llamada "Ecuación de Maxwell de Campo Eléctrico derivada de la forma eléctrica de la Ley de Gauss". La ecuación (J) aparece en forma integral aplicada a un volumen finito " V "; aplicándola a un volumen infinitesimal se obtiene su correspondiente relación diferencial que relaciona las cantidades de campo a un punto:

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (K)$$

Esta es la "Ecuación de Maxwell de Campo Eléctrico derivada de la Ley de Gauss en su forma diferencial".

Para campos magnéticos la integral de superficie de "B" sobre una superficie cerrada "S" da cero. Así, la contraparte magnética de la Ley de Gauss Eléctrica (I) es la siguiente.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{L})$$

Su correspondiente forma diferencial o relación puntual es:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{M})$$

Se hace referencia a las ecuaciones (L) y (M) como "Ecuaciones de Maxwell de Campo Magnético derivadas de la Ley de Gauss Magnética" en su forma integral y diferencial correspondiente.

El desarrollo de las ecuaciones de Maxwell como una generalización de las relaciones de circuito, implican tanto el razonamiento inductivo como el razonamiento físico. Para desarrollar sus ecuaciones, Maxwell se basó en los trabajos experimentales de Faraday. También usó analogías con sistemas hidráulicos y otros sistemas mecánicos para ayudarse en la formulación de sus ideas.

No debe implicarse que la "deducción" de las ecuaciones de Maxwell es rigurosa. Sus ecuaciones son justificadas por el hecho de que las conclusiones que se basan en ellas se han visto en innumerables casos que tienen un acuerdo excelente con los experimentos, de la misma forma en que las primeras ecuaciones circuitales son justificadas dentro de su más restringido dominio por el excelente acuerdo general de conclusiones basadas en ellas comparadas con lo experimentado.

Es notable recordar que las ecuaciones de "Maxwell" no fueron aceptadas por muchos años después de postuladas en 1873. Sus ecuaciones rotacionales (en las que se involucran $\nabla \times \mathbf{E}$ y $\nabla \times \mathbf{H}$) implicaron la interdependencia de los campos magnéticos y eléctricos variables con el tiempo en el espacio vacío, siendo capaz un cambio en el campo eléctrico de generar un campo magnético, y viceversa. La inferencia de esto es que los campos electromagnéticos variantes con el tiempo pueden propagar energía a través del espacio vacío con la velocidad de la luz y, además, que la luz tiene una naturaleza electromagnética. Las radio-ondas eran desconocidas en aquel tiempo y pasaron 15 años (1888) antes de que Hertz demostrase que las ondas electromagnéticas (o de radio) eran posibles, como fue predicho por Maxwell.

Esto no significa una garantía de que las ecuaciones de Maxwell son exactas, no obstante, en cuanto lo permite la precisión de las medidas experimentales, parecen ser exactas y por lo tanto las consideramos como tales. Junto con las ecuaciones de Maxwell existen otras relaciones fundamentales que son de importancia en el tratamiento de problemas de electromagnetismo.

Entre éstas, quizá, se mencionó la ley de Ohm en un punto:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{N})$$

la relación general de continuidad, llamada también ecuación de conservación de carga:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{O})$$

las relaciones de fuerza:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q\mathbf{E} \\ d\mathbf{F} &= (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) d\lambda \end{aligned} \quad (\text{P})$$

y las relaciones entre los campos "E" y "D", y entre los campos "B" y "H" dadas por:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{Q})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{R})$$

Ecuaciones de Maxwell en el espacio libre.

En los párrafos anteriores las ecuaciones de Maxwell se presentaron en su forma general. Para el caso especial del espacio libre donde la densidad de corriente "J" y la densidad de carga "ρ" son nulas, se reducen a formas más simples.

En forma integral:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} = -\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

En forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Ecuaciones de Maxwell para campos variantes y armónicos.

Para variaciones armónicas, las formas fasoriales de las ecuaciones integrales y diferenciales de Maxwell se presentan en la siguiente tabla.

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda} &= (\sigma + j\omega\epsilon) \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} & \nabla \times \mathbf{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda} &= -j\omega\mu \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} & \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu \mathbf{H} \\ \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho \, dV & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Resistencia, capacitancia e inductancia en términos de cantidades de circuito y de campo.

	Definición del Circuito	Definición física	Celda de Campo	Definición de Energía
Resistencia	$\frac{\int \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda}}{\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda}}$	$\frac{\lambda}{\sigma A}$	$\frac{1}{\sigma d}$	$\frac{\iiint \frac{J^2}{\sigma} \, dV}{I^2}$
Capacitancia	$\frac{\iint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\lambda}}$	$\frac{\epsilon A}{\lambda}$	ϵd	$\frac{\iiint \epsilon E^2 \, dV}{V^2}$
Inductancia	$\frac{\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\oint \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\lambda}}$	$\frac{\mu A}{\lambda}$	μd	$\frac{\iiint \mu H^2 \, dV}{I^2}$

Tablas de las Ecuaciones de Maxwell.

Las ecuaciones de Maxwell son resumidas en las siguientes tablas, en la 1ª en forma integral y en la 2ª en forma diferencial. Las ecuaciones se presentan para el caso general, el caso del espacio libre, el caso de la variación armónica, caso estacionario (campos estáticos pero con corrientes de conducción estacionarias) y el caso estático (campos estáticos sin corrientes). En 1ª tabla se indican las equivalencias entre las diversas cantidades de campo y el potencial eléctrico "V", la fem, el potencial magnético "U", la fuerza magnetomotriz "fmm", la corriente total, la corriente de desplazamiento, la corriente de conducción, el flujo eléctrico ψ , y el flujo magnético ψ_m . Se debe hacer notar que las ecuaciones de Maxwell tabuladas en la forma que se hace aquí se aplican específicamente a sistemas estacionarios o cuerpos en reposo.

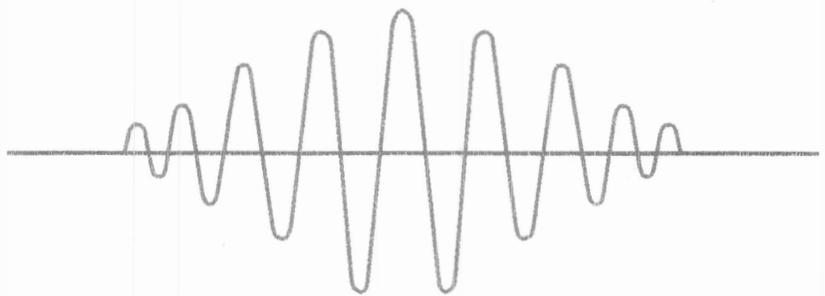
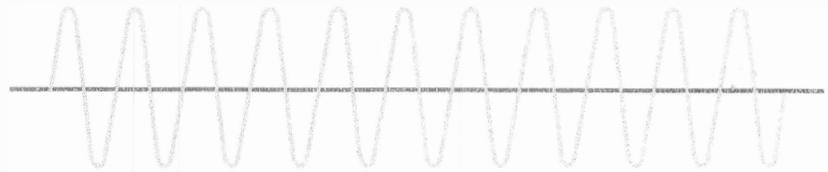
ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA INTEGRAL.

Caso	Ley De Ampère	Ley De Faraday	Ley De Gauss	
	fmm, [A]	fem, [V]	Flujo eléctrico, [C]	Flujo magnético, [Wb]
General	$f_{mm} = \oint H \cdot d\lambda = \int_s \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) \cdot dS = I_{total}$	$f_{em} = \oint E \cdot d\lambda = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Espacio Libre	$f_{mm} = \oint H \cdot d\lambda = \int_s \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS = I_{desp}$	$f_{em} = \oint E \cdot d\lambda = - \int_s \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = 0$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Variación Armónica	$f_{mm} = \oint H \cdot d\lambda = (\sigma + j\omega\epsilon) \int_s E \cdot dS = I_{total}$	$f_{em} = \oint E \cdot d\lambda = -j\omega\mu \int_s H \cdot dS$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Estacionario	$f_{mm} = \oint H \cdot d\lambda = \int_s J \cdot dS = I_{cond}$	$V = \oint E \cdot d\lambda = 0$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$
Estático	$U = \oint H \cdot d\lambda = 0$	$V = \oint E \cdot d\lambda = 0$	$\psi = \oint_s D \cdot dS = \int_v \rho \, dV$	$\psi_m = \oint_s B \cdot dS = 0$

ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL.

Caso	Ley De Ampère	Ley De Faraday	Ley De Gauss	
	Corriente Eléctrica / Área	Potencial Eléctrico / Área	Flujo Eléctrico / Volumen	Flujo Magnético / Volumen
General	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Espacio Libre	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Variación Armónica	$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Estacionario	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
Estático	$\nabla \times \mathbf{H} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

CAPÍTULO II



ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.

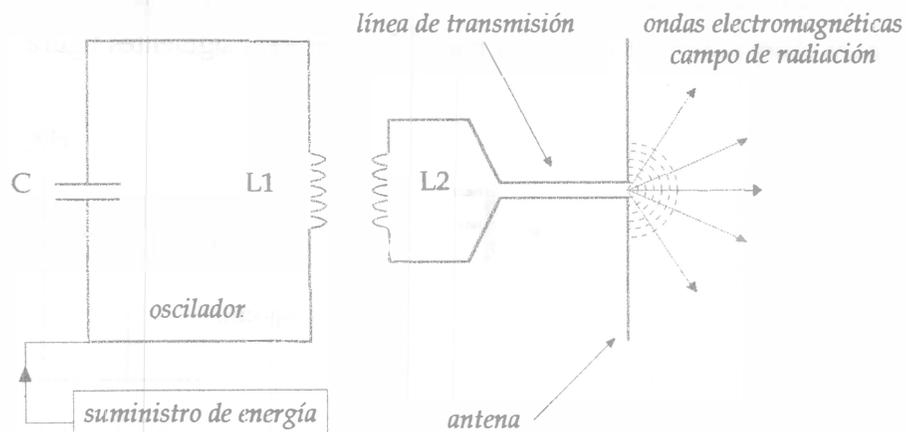
BREVES FUNDAMENTOS

Cuando tenemos cargas estáticas el campo E está determinado por la Ley de Coulomb o también por la Ley de Gauss, y cuando la corriente es estática o estacionaria, el campo B generado está determinado por La ley de Biot Savart o también por La ley de Ampère. Cuando las cargas y las corrientes cambian en posición y en magnitud, entonces los campo E y B en un punto P cualquiera del espacio reflejan esos cambios como una perturbación del campo que se propaga alejándose de la fuente a una velocidad C (velocidad de la luz).

Los valores instantáneos de los campos E y B (en un tiempo t) dependen de la configuración de la fuente en un tiempo anterior $t - (v/c)$. Este efecto de retardo se hace mayor en la medida que P está más alejado de la fuente. Debido a que los campos en el punto P cambian con el tiempo, se generan otros campos descritos por la Ley de Faraday (de manera formal, un campo magnético B variable genera un campo eléctrico E) y por la extensión de Maxwell a la de Faraday (un campo eléctrico E variable genera un campo magnético B). Experimentalmente se ha determinado que siempre que se aceleran cargas se irradia una onda electromagnética de la fuente a una velocidad C en el vacío y puede transportar energía. En un dipolo variable, el campo a grandes distancias es un campo de radiación.

Fuentes de Radiación.

Un circuito LC puede producir cargas que oscilan sinusoidalmente (si $R = 0$) existiendo un intercambio de energía entre el campo eléctrico del capacitor y el campo magnético B de la inductancia L. Si $R \neq 0$, entonces las oscilaciones se agotan por efecto joule (oscilaciones amortiguadas). Las oscilaciones se pueden mantener si se construye un dispositivo que suministre periódicamente suficiente energía de una fuente externa para compensar las pérdidas de energía interna.

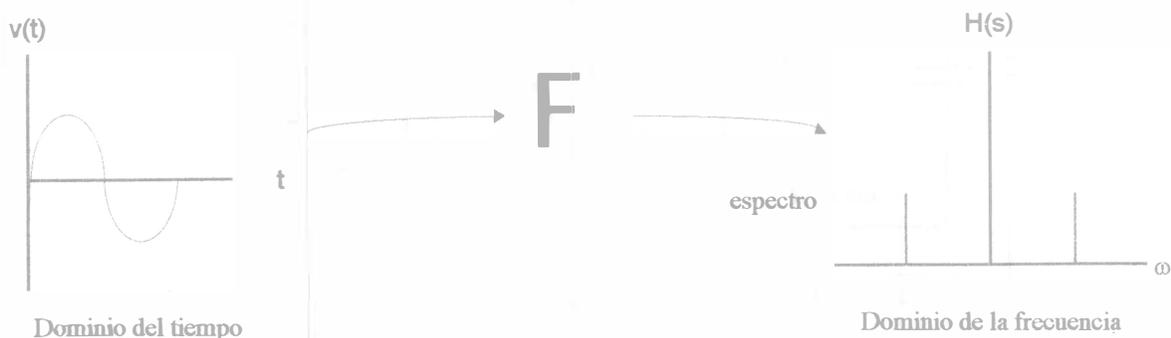


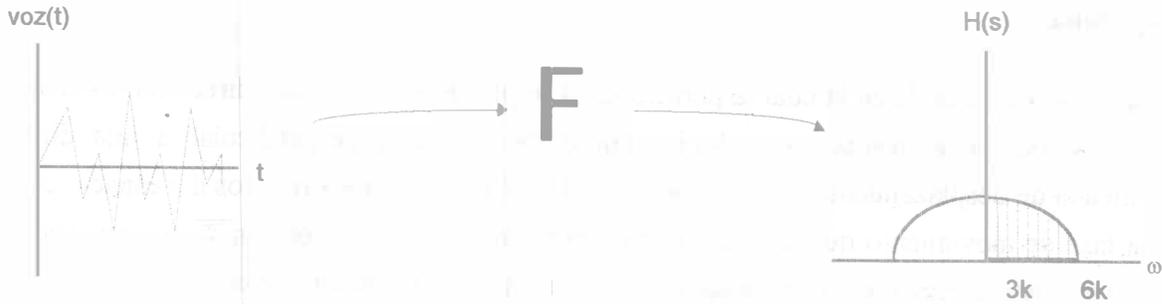
Si una bobina conductora L_2 se acerca a la inductancia del circuito se induce una corriente en la bobina, esta energía es transportada por una línea de transmisión hasta una antena que irradia las ondas electromagnéticas al espacio. La diferencia de potencial entre los conductores en la antena varía sinusoidalmente haciendo que las cargas se aceleren en ambos sentidos, esto implica que el momento dipolar $\bar{p} = q\bar{\lambda}$ varíe con el tiempo. Entonces la onda se mueve hacia P, donde los campos E y B cambian periódicamente con el tiempo en la medida que la onda pasa a través del punto P. Una característica importante de la radiación es que el campo eléctrico E es perpendicular al campo B (son mutuamente perpendiculares), lo que implica ondas magnéticas transversales (T.E.M.), teniendo la característica de ser planamente polarizadas, es decir, que las vibraciones del campo E son paralelas entre sí en todos los puntos de la onda. En cualquier punto, el vector vibrante E y la dirección de propagación forman un plano llamado plano de vibración; en una onda planamente polarizada todos los planos son paralelos. La siguiente figura muestra ondas electromagnéticas generadas por un dipolo oscilante.



Justificación del uso de señales senoidales y cosenoidales para el análisis de O.E.M. planas.

Para el análisis de las ondas electromagnéticas se partirá de señales senoidales o cosenoidales, sin embargo, cuando se trata de una onda electromagnética que transporta información, ésta no es una senoidal ni cosenoidal; la justificación del análisis senoidal, está fundamentado en la teoría de Fourier, es decir, si observamos los espectros que se indican en la siguientes figuras:





Si $f(t)$ es una función del tiempo, entonces se puede representar como una suma de senos y cosenos, además, si es periódica:

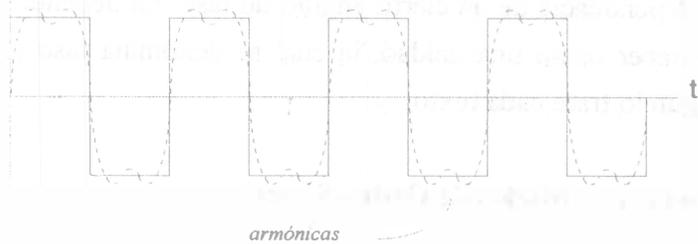
$$f(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(n\omega_0 t) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(n\omega_0 t)$$

para otras:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\omega t} dt$$



Formación de una onda cuadrada a partir de la suma de ondas senoidales.



De lo anterior, y en lo sucesivo, siempre se utilizarán ondas senoidales y/o cosenoidales en los desarrollos matemáticos.

ONDA ELECTROMAGNÉTICA G.- 612440

Una onda electromagnética es uno de varios fenómenos físicos que se pueden describir empleando las matemáticas del movimiento ondulatorio, es decir, una perturbación que se propaga a través del espacio. La perturbación podría ser la magnitud del campo E o del campo B asociado a una onda electromagnética, un campo E cambiante que genera un campo B cambiante, que a su vez genera un campo E, y así sucesivamente se produce la propagación de la energía a través del espacio vacío a la velocidad de la luz (C). El carácter ondulatorio del campo electromagnético es la manifestación de una ley muy general que consiste en que no hay transmisiones instantáneas de iteraciones. Los procesos de polarización de la materia no se producen inmediatamente después de variar el campo. La inducción eléctrica como función del tiempo se retrasa, lo que implica que las oscilaciones se produzcan con un retardo de fase igual a un ángulo de fase, que se puede despreciar a altas frecuencias.

Onda Plana.

La onda plana es aquella en la cual la perturbación se propaga en una sola dirección. Es una onda cuya magnitud es la misma en cualquier punto de un plano perpendicular a una dirección especificada de desplazamiento o de propagación. Los frentes de onda (puntos del espacio con una misma fase de movimiento que forman el plano perpendicular a la dirección de propagación) son planos perpendiculares al eje de propagación. Por lo tanto, los vectores eléctrico y magnético de una onda plana deben ser paralelos a los frentes de onda. La dirección de propagación se define convencionalmente como la dirección de la máxima rapidez del cambio de fase de la onda (cambio de fase de E y B). Como la perturbación está en movimiento, la onda debe ser descrita por una función tanto en la posición como en el tiempo, es decir, $f = f(x, t)$. Para un instante particular $t = 0$ tenemos una función de posición que representa un perfil de la onda en ese momento, esto es, como tomar una fotografía de la perturbación que va viajando. Al introducir la dependencia en el tiempo, el valor que la perturbación tenía en un determinado plano habrá cambiado, y puesto que la perturbación se propaga con un perfil constante, ese valor lo encontramos en un plano posterior con un valor de fase diferente, por lo tanto la dependencia en el tiempo deberá restarse a la dependencia de un cierto ángulo de fase. La dependencia de la función de onda en x y t deberá aparecer como una unidad, la cual se denomina fase y se puede denotar como: α , β , ϕ , ψ o θ , según lo trate cada texto.

Ondas con Modos de Orden Superior.

Son ondas que tienen componentes de campo eléctrico E y/o magnético H en la dirección de propagación, éstas sólo se pueden transportar en guías de onda.

Fasores.

Los vectores E y H son funciones de la posición en el espacio y tiempo (x, y, z, t), esto implica lo siguiente:

$$E = E \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T} \quad \phi = \text{fase [rad]} \quad E \text{ es la posición, y } \cos(\omega t + \phi) \text{ es el tiempo.}$$

Las cantidades que varían sinusoidalmente con el tiempo, se pueden representar por cantidades complejas en la forma de EULER.

$$e^{j(\omega t + \phi)} = \cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)$$

$$j^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad E = \text{Re}|E| e^{j(\omega t + \phi)}$$

R_e indica que solamente se toma la parte real, por lo que:

$$E_s = E = |E| e^{j\phi}$$

La penúltima expresión es una forma fasorial o cantidad compleja variando en el espacio y frecuencia, lo que implica que para transformar un fasor en una cantidad que varía con el tiempo hay que multiplicar por $e^{j\omega t}$, tomando el vector real instantáneo, es decir, tomando la proyección de $|E|e^{j(\omega t + \phi)}$ sobre el eje real. La notación E_s indica que se está en el dominio de la frecuencia ($s = j\omega$). La derivada en el tiempo de una cantidad que varía con el tiempo, es equivalente a su fasor multiplicado por $j\omega$, la 2ª derivada es equivalente a multiplicar por $(j\omega)^2$.

ECUACIONES DE LA ONDA ELECTROMAGNÉTICA TRANSVERSAL (T.E.M.) EN MEDIOS DIELECTRICOS

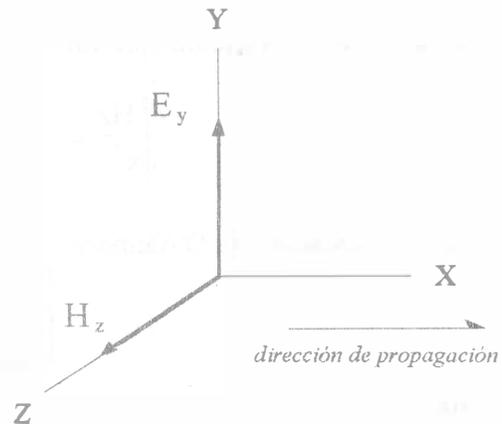
Para una onda plana uniforme E y H están en un mismo plano y tienen los mismos valores en todas partes del plano, por lo tanto los campos E y H son transversales a la dirección de propagación. Supóngase que se tiene una onda viajera en la dirección del eje X , el campo E tiene sólo componente E_y y H sólo tiene componente H_z , entonces la onda está polarizada en la dirección Y , y la densidad de corriente de conducción es $J_c = 0$, para un medio no conductor. Las ecuaciones de Maxwell que describen el comportamiento (movimiento) de las O.E.M. en el espacio libre pueden escribirse en términos de los campos E y H únicamente, de la siguiente manera:

$$\nabla \times H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot H = 0$$



onda en el espacio libre

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell y del diagrama anterior se deducen las ecuaciones de onda para $D = \epsilon E$ y $B = \mu H$, y considerando también $E = 0\hat{i} + E_y\hat{j} + 0\hat{k}$ y $H = 0\hat{i} + 0\hat{j} + H_z\hat{k}$.

Por la Ley de Ampère se tiene:

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t}$$

realizando el rotacional:

$$\text{rot H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (D_y \hat{j})$$

obteniéndose:

$$-\hat{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \hat{j} \frac{\partial D_y}{\partial t} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (1)$$

Por la Ley de Faraday se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

realizando el rotacional:

$$\text{rot H} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (B_y \hat{k}) \quad (2)$$

obteniéndose:

$$\hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\hat{k} \frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

entonces se tiene:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

sustituyendo (2) en la ecuación anterior:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = \epsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

se obtiene la 1ª ecuación de D'Alembert:

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}}$$

de la ecuación (2):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(-\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \right)$$

sustituyendo la ecuación (1) en la ecuación anterior se obtiene la 2ª ecuación de D'Alembert:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}$$

Estas son las ecuaciones de D'Alembert para un medio donde $\sigma=0$ (el vacío), que relaciona la variación en el espacio y el tiempo de una magnitud escalar H_z ó E_y , también es la forma más simple de la ecuación de onda escalar.

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \quad \text{ecuación de onda en } H_z$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \text{ecuación de onda en } E_y$$

E_y representa la magnitud escalar de la intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección X.

$$\text{En general si } v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c \cong 3 \times 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{\text{volt}}{\text{m}\cdot\text{s}^2} \right] = v^2 \left[\frac{\text{volt}}{\text{m}\cdot\text{m}^2} \right] \quad \Leftrightarrow \quad v = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Al encontrar E_y para la ecuación anterior se puede considerar la solución siguiente:

$$E_y = \text{sen } \beta(x + kt)$$

donde β es la constante de propagación o constante de fase, y además si se tiene que:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

donde:

λ : es la longitud de onda

t: es el tiempo

k: es una constante por determinar

β es el número de radianes que recorre la onda por unidad de longitud, y si se sabe que:

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

y recordando

$$V = C = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

entonces

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

y se llega a que el valor buscado de la constante sea $k = \pm c = \pm v$ una solución más general es:

$$E_y = \text{sen } \beta (x + kt) + \text{sen } \beta (x - kt)$$

donde cada término separado es una solución para la ecuación de D'Alembert. Si consideramos la afirmación anterior:

$$E_y = \text{sen } (\beta x + \beta vt) + \text{sen } (\beta x - \beta vt)$$

sabemos que

$$V = f \lambda \text{ y } \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

entonces

$$\beta V = \frac{2\pi}{\lambda} f \lambda = 2\pi f = \omega$$

de donde

$$E_y = \text{sen } (\beta x + \omega t) + \text{sen } (\beta x - \omega t)$$

En esta última ecuación de onda se observa que el primer término representa una onda viajera en la dirección negativa del eje "x" y el segundo término representa una onda viajera en el sentido positivo del eje "x". Empleando esta ecuación se puede comprobar que $\beta = \omega/c$ al obtener la segunda derivada parcial con respecto al tiempo y con respecto al desplazamiento, tal y como se muestra:

$$E(x, t) = E_y = \text{sen } (\beta x - \omega t) + \text{sen } (\beta x + \omega t)$$

donde se puede considerar sólo un término:

$$E_y = \text{sen } (\beta x - \omega t)$$

derivando:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \omega^2 \text{sen } (\beta x - \omega t) \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \beta^2 \text{sen } (\beta x - \omega t)$$

(a) (b)

empleando la segunda ecuación de D'Alembert se iguala (a) y (b):

$$\omega^2 \text{sen } (\beta x - \omega t) = \frac{1}{\mu \epsilon} \beta^2 \text{sen } (\beta x - \omega t)$$

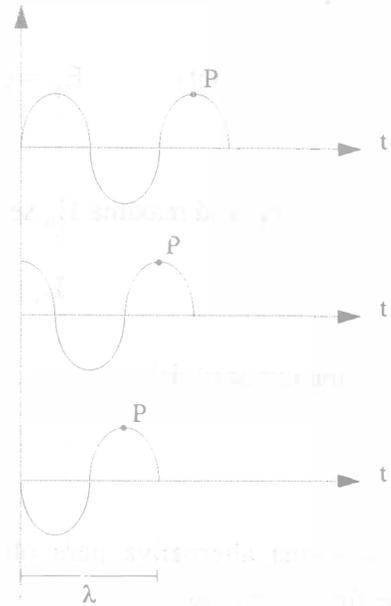
$$\omega^2 = \frac{\beta^2}{\mu \epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}$$

Verificando el viaje de la onda, se gráfica $E_y = \text{sen} (\beta (x + vt))$ manteniendo "x" constante y dando valores para "t", tal y como se muestra a continuación.

$$t = 0 \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f(0) \Rightarrow E_y = \text{sen} (\beta x)$$

$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f\left(\frac{T}{4}\right) \Rightarrow E_y = \text{sen} \left(\beta x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \beta vt = \omega t = 2\pi f\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow E_y = \text{sen} (\beta x + \pi)$$



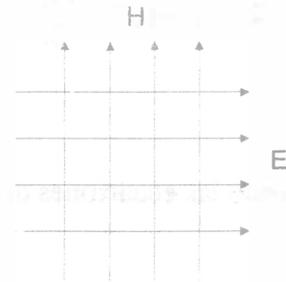
Conforme transcurre el tiempo, la perturbación correspondiente y el punto "P" se mueve a la izquierda, es decir, la onda $E_y = \text{sen} (\beta (x + vt))$ se desplaza hacia la izquierda en la dirección negativa del eje "x". Por lo tanto, un punto "P" de fase constante se caracteriza por la siguiente condición:

$$\omega t + \beta x = \text{cte.} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\omega t + \beta x) = 0 \Rightarrow \omega + \beta \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{\beta} = -\frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu\epsilon}} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = -v$$

dx/dt es la rapidez de cambio de la distancia respecto al tiempo o velocidad de un punto de fase constante, conocida como velocidad de fase o velocidad con que se mueven los planos de fase constante de la O.E.M.

Frente de onda, viéndose de frente el eje de propagación.

Para una fase constante se tiene una O.E.M. de un plano de magnitud constante.



Para $E_y = \text{sen}(\beta(x-vt))$ se tiene que $dx/dt = v$, es decir, que la O.E.M. se desplaza en la dirección positiva del eje "x". Entonces en la constante $(\beta \pm \omega t)$ el signo está asociado con el sentido en que viaja la onda. Otras formas equivalentes de la ecuación de onda son:

$$E_y = \text{sen}(\beta x \pm \omega t) \quad E_y = \cos(\beta x \pm \omega t) \quad E_y = \text{sen}(\omega t \pm \beta x) \quad E_y = \cos(\omega t \pm \beta x)$$

para una amplitud máxima E_0 se tiene, por ejemplo:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t \pm \beta x) + E_0 \cos(\omega t \mp \beta x)$$

en forma exponencial:

$$E_y = E_0 e^{j(\omega t \pm \beta x)}$$

Otra forma alternativa para obtener las ecuaciones de D'Alembert es empleando la siguiente identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

En el espacio libre $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, como $Q=0$ y $\rho_v = Q/V$ entonces $\rho_v = 0$, con $J_c = \sigma E$ y $\sigma=0$ se tiene que $J_c = 0$, por la Ley de Maxwell $\nabla \cdot D = \rho$ lo que matemáticamente implica que $\nabla \cdot D = 0$ o si se prefiere, partiendo de que $D = \epsilon_0 E$ y $J_c = \sigma E$ se deduce que $E \rightarrow \infty$ por lo que $D \rightarrow 0$. Entonces:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon_0 \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E})$$

sustituyendo las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

en las últimas expresiones:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad - \nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}}$$

Ecuaciones de onda en el espacio libre.

Ecuaciones de Maxwell en Forma Compleja o Fasorial.

Utilizando formas exponenciales:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_m e^{j(\omega t - \beta x)} = \mathbf{E}_m e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = \mathbf{E}_m e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}_m e^{j(\omega t - \beta x)} = \mathbf{H}_m e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = \mathbf{H}_m e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_m e^{j(\omega t - \beta x)} = \mathbf{D}_m e^{-j\beta x} e^{j\omega t} = \mathbf{D}_m e^{j\omega t}$$

sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell para campos invariantes en el tiempo:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t} = \sigma \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}) = \sigma \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t} + j\omega \epsilon \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}$$

$$\therefore \nabla \times \dot{\mathbf{H}}_m = \sigma \dot{\mathbf{E}}_m + j\omega \epsilon \dot{\mathbf{E}}_m$$

similarmente:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \mu \dot{\mathbf{H}}_m \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

en el espacio libre $\sigma=0$, entonces:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{E}}_m \quad \nabla \times \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_m \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Impedancia Intrínseca.

Es la razón de los campos fasoriales \mathbf{E} y \mathbf{H} , para una onda plana electromagnética transversal (TEM) en un medio no limitado.

Para un medio con μ y ϵ complejas:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\omega\mu'' + j\omega\mu'}{\sigma + j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')}} \quad [\Omega]$$

Para un medio conductor con μ y ϵ reales:

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad [\Omega]$$

Para un medio no conductor con μ y ϵ reales:

$$Z_d = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega]$$

Para el espacio libre:

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \quad [\Omega]$$

Para un buen conductor ($\sigma \gg \omega\epsilon$):

$$Z_d = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\sigma}} \angle 45^\circ \quad [\Omega]$$

Impedancia Característica.

Ésta es la razón del fasor de tensión o voltaje V , al fasor de corriente I en una línea de transmisión infinita de dos conductores, siendo la tensión V igual a la integral del campo eléctrico \mathbf{E} a lo largo de una trayectoria o camino entre conductores, mientras que la corriente I es igual a la integral del campo \mathbf{H} alrededor de uno de los conductores (Ley de Ampère). Para una celda de línea de transmisión la impedancia característica V/I es igual a la impedancia intrínseca E/H . La impedancia característica de una línea de dos conductores también puede expresarse en términos

de su resistencia serie R , de su inductancia serie L , su conductancia G en derivación y su capacitancia C en paralelo. Para una línea de dos conductores se tiene:

$$Z_0 = \frac{V}{I} = \frac{\int E \cdot d\lambda}{\int H \cdot d\lambda} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad [\Omega]$$

Impedancia de Onda.

Es la razón de una componente de campo eléctrico E a una componente de campo magnético H en el mismo punto de la onda. Para una onda electromagnética transversal (TEM) la impedancia de onda es la misma que la impedancia intrínseca, pero para modos de orden superior, como en una guía de onda hueca de un solo conductor puede haber tantas impedancias de onda como componentes haya de campos eléctricos y campos magnéticos. Para un modo TE en una guía de onda rectangular con componentes transversales a la dirección "x" de propagación de la onda (E_y y H_z), se tiene que la impedancia de onda transversal es:

$$Z_{yz} = \frac{E_y}{H_z} \quad [\Omega]$$

En una guía de onda cilíndrica la impedancia de onda transversal es igual a: $Z_{r\phi} = \frac{E_r}{H_\phi} \quad [\Omega]$

La impedancia de onda transversal de una guía de onda es una función de la impedancia intrínseca del medio que llena la guía y de las dimensiones de la misma guía. Conforme las dimensiones transversales se hacen muy grandes en comparación con la longitud de onda, la impedancia de onda transversal de la guía tiende a ser la impedancia intrínseca del medio.

NOTA: Mientras que la impedancia característica es básicamente una cantidad de circuito (V/I), la impedancia intrínseca y la impedancia de onda son cantidades de campo o cantidades de onda que incluyen las razones de campos eléctricos a magnéticos.

Dieléctrico Perfecto.

Es un medio ideal que se considera sin pérdidas ($\sigma=0$), con permitividad ϵ , permeabilidad μ , isotrópico y homogéneo.

Dieléctrico Disipativo.

Todos los materiales dieléctricos tienen alguna conductividad ($\sigma \neq 0$), y aunque puede despreciarse en muchos casos, se considera necesario considerar esta característica.

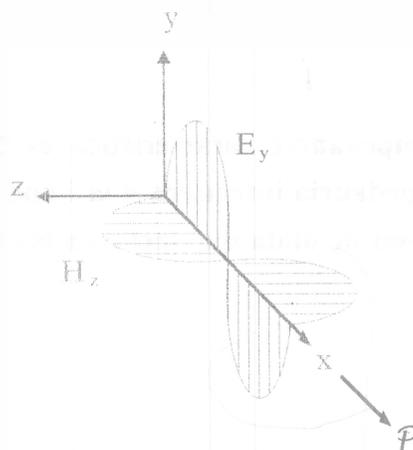
Impedancia Intrínseca o Característica del espacio Libre (η_0).

Es una relación fasorial entre la onda de campo E y la onda de campo H en cualquier punto del espacio libre.

$$\eta_0 = \frac{E}{H} \left[\frac{\text{volt/metro}}{\text{Ampère/metro}} \right] = \frac{E}{H} \quad [\Omega]$$

Movimiento de la Onda Plana Uniforme.

Este desarrollo implica expresar las ecuaciones de Maxwell para el caso especial de una variación cosenoidal en el tiempo. Esto es posible por medio de la notación compleja y de fasores.



Dado el vector de campo $E = E_y \hat{j}$, donde el vector E sólo tiene componente E_y y está dada por la expresión:

$$E_y = E_{xyz} \cos(\omega t + \varphi)$$

donde E_{xyz} es una función real de X , Y y Z , y tal vez de ω , pero no del tiempo; φ es un ángulo de fase que puede ser también función de X , Y y Z y ω . Haciendo uso de la identidad de Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$ se tiene:

$$E_y = R_e E_{xyz} e^{j(\omega t + \varphi)} = R_e E_{xyz} e^{j(\omega t)} e^{j(\varphi)}$$

donde R_e indica que se toma la parte real de la cantidad que le sigue. Simplificando la nomenclatura con la omisión de R_e y suprimiendo el término $e^{j\omega t}$, la cantidad de campo E_y se transforma en un fasor o cantidad compleja, la cual se identifica con subíndice "s":

$$E_{ys} = E_{xyz} e^{j\varphi} \Rightarrow E_s = \hat{j} E_{ys}$$

Se puede considerar que la "s", indica una cantidad en el dominio de la frecuencia expresada como función de la frecuencia compleja "s", aun cuando sólo se consideren aquellos casos en los cuales "s" es un imaginario puro, $s = j\omega$. Recuérdese que la derivada en el tiempo de una cantidad que varía con el tiempo es equivalente a su fasor multiplicado por $j\omega$, la 2ª derivada es equivalente a multiplicar por el término $(j\omega)^2$.

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [E_{xys} \cos(\omega t + \varphi)] = \frac{\partial}{\partial t} E_{xys} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{j} \omega E_{xys} e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{j} \omega E_s$$

Movimiento de la onda en el espacio libre.

Recuérdese que las ecuaciones de Maxwell para el vacío son:

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} & \nabla \times E &= -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla \cdot E &= 0 & \nabla \cdot H &= 0 \end{aligned}$$

y al aplicar en éstas los resultados obtenidos en lo que respecta a notación fasorial:

$$\nabla \times H_s = j \omega \epsilon_0 E_s \quad \nabla \times E_s = -j \omega \mu_0 H_s \quad \nabla \cdot H_s = 0 \quad \nabla \cdot E_s = 0$$

que son las cuatro ecuaciones de Maxwell en notación fasorial para una variación cosenoidal en el tiempo, en el espacio libre.

Además $\nabla H_s = 0$ y $\nabla E_s = 0$ no son relaciones independientes, ya que se pueden obtener tomando la divergencia de los rotacionales de H_s y E_s , respectivamente. esto es:

$$\text{div rot } A = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

Ahora se obtendrá la forma de estado estable cosenoidal de la ecuación de onda:

$$\nabla \times \nabla \times E_s = \nabla (\nabla \cdot E_s) - \nabla^2 E_s$$

como $\nabla \cdot E_s = 0$ entonces $\nabla \times \nabla \times E_s = -\nabla^2 E_s$

además $\nabla \times \nabla \times E_s = \nabla \times (\nabla \times E_s) = \nabla \times (-j \omega \mu_0 H_s)$

$$\nabla \times \nabla \times E_s = -j \omega \mu_0 (\nabla \times H_s) = -j \omega \mu_0 (j \omega \epsilon_0 E_s) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_s$$

$$\therefore \nabla^2 E_s = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_s$$

Esta ecuación fasorial se conoce como ecuación vectorial de Helmholtz. Conservando la notación del operador "nabla u operador DEL (∇)" se tiene:

$$\nabla^2 E_{ys} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{ys}$$

y el desarrollo del operador nabla en coordenadas cartesianas conduce a la ecuación:

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial z^2} = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 E_{ys}$$

Por ejemplo, si se tiene uno de los campos E o H, se puede calcular el otro campo:

$$E = E_m \text{ sen } (\omega t - \beta x) \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{E_m}{\eta_0} \text{ sen } (\omega t - \beta x)$$

$$\nabla \times H = j \omega \epsilon_0 \dot{E} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{H} = H_m e^{-j\beta x} \quad \text{y} \quad \dot{E} = E_m e^{-j\beta x} \end{array} \right.$$

$$\text{rot } H = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & H_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \hat{k} (0)$$

$$j \omega \epsilon_0 \dot{E} = \hat{i} (0) + \hat{j} (j \omega \epsilon_0 \dot{E}) + \hat{k} (0)$$

igualando componentes en "j" :

$$\hat{i} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \hat{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \hat{k} (0) = \hat{i} (0) + \hat{j} \left(j\omega\epsilon_0 \dot{E} \right) + \hat{k} (0)$$

$$-\hat{j} \frac{\partial H_z}{\partial x} = \hat{j} \left(j\omega\epsilon_0 \dot{E} \right) \Leftrightarrow j\omega\epsilon_0 \dot{E} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}$$

donde:

$$\dot{H} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + H_z e^{-j\beta x} \hat{k} \quad \text{y} \quad \dot{E} = 0\hat{i} + E_y e^{-j\beta x} \hat{j} + 0\hat{k}$$

sustituyendo las respectivas componentes E_y y H_z :

$$j\omega\epsilon_0 E_y e^{-j\beta x} = -\frac{\partial}{\partial x} (H_z e^{-j\beta x}) = j\beta H_z e^{-j\beta x} \Leftrightarrow \omega\epsilon_0 E_y e^{-j\beta x} = \beta H_z e^{-j\beta x}$$

$$\text{como } \eta_0 = \frac{E_y}{H_z} \Rightarrow \eta_0 = \frac{\beta}{\omega\epsilon_0} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{\omega\epsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{4\pi 10^{-7} \text{ H/m}}{8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m}}} \cong 120\pi [\Omega] \approx 377 [\Omega]$$

válido cuando la O.E.M. viaja en dirección "+X"

se verifica que:

$$H(x, t) = \left| \frac{E_m}{\eta_0} \right| \text{sen} (\omega t - \beta x) = H_m \text{sen} (\omega t - \beta x)$$

IMPEDANCIA INTRÍNSECA PARA UN MEDIO DIELECTRICO

La impedancia característica de un medio (dieléctrico perfecto) es:

$$\eta = \eta_0 \eta_r = 120 \pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Movimiento de la Onda en Dieléctricos Perfectos.

Como en estos medios existe una atenuación exponencial, la ecuación de la perturbación que se desplaza en dirección del eje +x en el dominio del tiempo está dada por la siguiente expresión:

$$E_y = E_{y0} e^{-\alpha x} \cos (\omega t - \beta x)$$

E_{y0} es un factor de amplitud arbitrario o la amplitud del campo en el tiempo $t=0$ y en $x=0$.

La expresión equivalente en notación exponencial compleja es:

$$E_{ys} = E_{y0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

El factor exponencial real indica que la onda se atenúa a medida que se propaga en la dirección $+x$; α es la constante de atenuación. Como se está analizando un medio "sin pérdidas" se demuestra que $\alpha=0$, la constante de fase βx es una medida del corrimiento de fase que se mide en radianes por metro, (suponiendo β real). En general, se combinan α y β en una constante de propagación compleja γ (gamma), esto es, $\gamma=\alpha+j\beta$. Entonces, la ecuación anterior queda:

$$E_{ys} = E_{y0} e^{-\gamma x}$$

la ecuación de onda es:

$$\nabla^2 E_s = -\omega^2 \mu \epsilon E_s$$

y para E_{ys} se tiene:

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{ys}$$

sustituyendo en ésta última expresión el campo E expresado en términos de γ y x :

$$\frac{\partial^2 E_{ys}}{\partial x^2} = \gamma E_{y0} e^{-\gamma x} = -\omega^2 \mu \epsilon E_{ys}$$

entonces:

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \pm j \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

para un medio sin pérdidas se concluye que:

$$\alpha = 0 \text{ [Np/m]} \quad \text{y} \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \text{ [rad/m]}$$

Np es una unidad adimensional llamada *neper*, término seleccionado (por alguien que no supo deletrear) en honor al matemático escocés John Napier que fue el primero en proponer el uso de los logaritmos. Se ha seleccionado la raíz negativa que produce la propagación en la dirección $+x$, entonces la ecuación de la onda viajera en la dirección $+x$ con velocidad de fase v es:

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta x) \quad \text{donde} \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

Para una onda plana uniforme que se propaga en un dieléctrico perfecto, se encuentra que:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

La longitud de onda es la distancia que se requiere para efectuar un cambio de fase en 2π radianes, de donde $\beta\lambda=2\pi$, lo cual conduce a la definición fundamental para la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

se sigue que:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{f \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{f \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

λ_0 es la longitud de onda en el espacio libre.

Nótese que $\mu_r \epsilon_r > 1$, por lo que la longitud de onda es más pequeña que λ_0 y la velocidad es menor en todo medio en comparación con la velocidad de la luz en el espacio libre.

ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN CONDUCTORES

Continuando la atención en las variaciones temporales de tipo senoidal y considerando la convención fasorial, las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j \omega \epsilon \mathbf{E}_s = \sigma \mathbf{E}_s + j \omega \epsilon \mathbf{E}_s$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j \omega \epsilon) \mathbf{E}_s$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j \omega \mu \mathbf{H}_s$$

recuérdese que en el dominio de "t":

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{y} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

El único efecto que se presenta por incluir la conductividad σ en la expresión, es que el factor $j\omega\epsilon$ se transforma en $\sigma + j\omega\epsilon$, por lo tanto, se puede calcular inmediatamente el nuevo valor de la constante de propagación:

$$\gamma^2 = (\sigma + j\omega\epsilon) j\omega\mu \quad \Rightarrow \quad \gamma = \pm \sqrt{(\sigma + j\omega\epsilon) j\omega\mu}$$

donde:

$$\gamma = \sqrt{(j\sigma - \omega\epsilon) \omega\mu} = \sqrt{\left(\frac{j\sigma}{\omega\epsilon} - 1\right) \omega^2 \mu \epsilon} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{(-1) \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)}$$

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}}$$

Esta expresión difiere del caso de un medio no disipativo sin pérdidas, por la presencia del segundo factor en el radical es evidente que este factor tiende a uno conforme σ tiende a cero, en el caso general puede incluirse valores para σ , μ , ϵ y ω , luego calcular las partes real e imaginaria de $\gamma = \alpha + j\beta$. Para un campo eléctrico E con componente en Y que se propaga en la dirección $+x$, se obtiene:

$$E_{ys} = E_{y0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

El signo positivo para el radical conduce a valores numéricos positivos de α y β , y por lo tanto corresponde a la propagación en la dirección $+x$.

Impedancia Intrínseca para Medios Dieléctricos Disipativos ($\sigma \neq 0$).

Considérense los campos E y H expresados en forma compleja:

$$E = E_m e^{-\gamma x} e^{j\omega t} = \dot{E} e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{E} = E_m e^{-\gamma x}$$

$$H = H_m e^{-\gamma x} e^{j\omega t} = \dot{H} e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{H} = H_m e^{-\gamma x}$$

también considérese las ecuaciones de Maxwell para campos invariantes en el tiempo:

$$\nabla \times H = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

sustituyendo en éstas los campos E y H considerados, y realizando las derivadas parciales:

$$\nabla \times \dot{H} e^{j\omega t} = \sigma \dot{E} e^{j\omega t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\dot{E} e^{j\omega t}) = \sigma \dot{E} e^{j\omega t} + j\omega \epsilon \dot{E} e^{j\omega t} \Rightarrow \nabla \times \dot{H} = \sigma \dot{E} + j\omega \epsilon \dot{E}$$

$$\nabla \times \dot{E} e^{j\omega t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\dot{H} e^{j\omega t}) = -j\omega \mu \dot{H} e^{j\omega t} \Rightarrow \nabla \times \dot{E} = -j\omega \mu \dot{H}$$

recordando la identidad vectorial:

$$\nabla \times \nabla \times \dot{E} = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \dot{E}}_0) - \nabla^2 \dot{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \dot{E}) = \nabla \times (-j\omega \mu \dot{H}) = -j\omega \mu (\nabla \times \dot{H})$$

$$\nabla^2 \dot{E} = - \left[-j\omega \mu (\nabla \times \dot{H}) \right] = j\omega \mu \left[\sigma \dot{E} + j\omega \epsilon \dot{E} \right]$$

resolviendo por determinantes el producto vectorial $\nabla \times \dot{\mathbf{E}}$:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dot{E}_y & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right) \hat{i} - (0) \hat{j} + \left(\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} \right) \hat{k}$$

además:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{H}_z \hat{k}$$

igualando componentes en \hat{k} :

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = -j\omega\mu \dot{H}_z$$

recordando que:

$$\dot{E}_y = E_m e^{-\gamma x} \quad y \quad \dot{H}_z = H_m e^{-\gamma x}$$

al derivar parcialmente respecto de "x":

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} = -\gamma E_m e^{-\gamma x} \quad \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = -\gamma H_m e^{-\gamma x}$$

finalmente:

$$-\gamma E_m e^{-\gamma x} = -j\omega\mu H_m e^{-\gamma x} \Rightarrow \gamma E_m = j\omega\mu H_m$$

para cualquier medio:

$$\eta = \frac{E_m}{H_m} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\sigma\omega\mu - \omega^2\mu\epsilon}}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{j\omega\mu}{\sqrt{j\sigma\omega\mu - \omega^2\mu\epsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{(-1)(\omega^2\mu\epsilon - j\sigma\omega\mu)}} = \frac{j\omega\mu}{j\sqrt{(\omega^2\mu\epsilon - j\sigma\omega\mu)}} \\ \eta &= \frac{\omega\mu}{\sqrt{(\omega^2\mu\epsilon - j\sigma\omega\mu)}} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon \left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)}} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}}} = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}}} \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}}} \end{aligned}$$

Tangente de Pérdida.

Se considera ahora el caso más práctico de un material dieléctrico que tiene una pérdida pequeña. El criterio por el cual debe juzgarse si la pérdida es pequeña o no, es que la magnitud de $\sigma/\omega\epsilon$ sea comparable con la unidad, como es notable en las expresiones para la constante de propagación γ y para la impedancia característica η . Considerando la ecuación de Maxwell del rotacional de H:

$$\nabla \times H_s = (\sigma + j\omega\epsilon) E_s$$

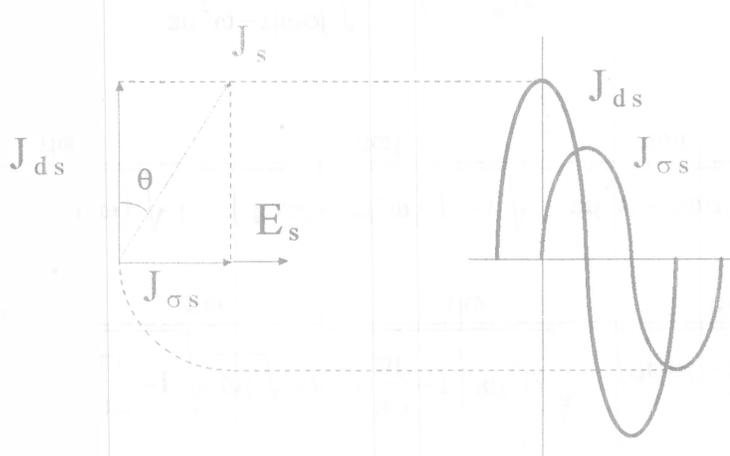
$$\text{donde } J_{\sigma s} = \sigma E_s \quad \text{y} \quad J_{ds} = j\omega\epsilon E_s$$

$$\frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}$$

Los dos vectores apuntan en la misma dirección, pero están 90° fuera de fase con respecto al tiempo. La densidad de corriente de desplazamiento adelanta a la corriente de conducción cerca de 90° . Esta relación entre los dos vectores define la tangente de pérdida:

$$\tan(\theta) = \frac{\sigma}{\omega\epsilon}$$

El siguiente diagrama ilustra la relación fase-tiempo entre J_{ds} (densidad de corriente de desplazamiento) y $J_{\sigma s}$ (densidad de corriente de conducción denotada también como J_c), es decir, J_s y E_s . La tangente de θ es igual a $\sigma/\omega\epsilon$, y $(90^\circ - \theta)$ es el ángulo común de factor de potencia o el ángulo por el cual J_s adelanta a E_s .



Si la tangente de pérdida es pequeña, se pueden obtener aproximaciones útiles para la constante de fase, para la constante de atenuación y para la impedancia intrínseca.

Dado que:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)}$$

y recordando el teorema del binomio:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

donde $|x| \ll 1$ y $x = -j\sigma/\omega\epsilon$ y $n = 1/2$, entonces:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + \dots \right]$$

además, por definición:

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

de aquí

$$\alpha \doteq j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}\right) \doteq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\beta \doteq \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right) \doteq \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

de manera similar
se encuentra η :

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right] \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right]$$

Se recomienda el uso de estas aproximaciones sólo cuando $\sigma/\omega\epsilon < 0.1$.

Cualquier aproximación adicional debe basarse en un juicio de ingeniería, o de lo contrario utilizar la ecuación exacta. En la mayor parte de los dieléctricos físicos la tangente de pérdida varía menos con la frecuencia que con la conductividad, esto es, la conductividad tiende a aumentar con la frecuencia aunque no linealmente. También pueden ocurrir cambios relativamente rápidos de conductividad, permitividad y tangente de pérdida en la región infrarroja y la región ultravioleta.*

* Ver página 394 de Teoría Electromagnética de William H. Hayt Jr. 5ª edición en español.

Propagación en Buenos Conductores y Profundidad de Penetración o Efecto Piel.

Finalmente, como ejemplo de una propagación no confinada se estudia el comportamiento de un buen conductor cuando una onda plana uniforme se establece en él. Se considera un campo electromagnético existente en algún dieléctrico externo en contacto con la superficie del conductor. Entonces la transmisión principal de energía tiene lugar en la región externa al conductor porque todos los campos variantes con el tiempo se atenúan muy rápidamente al penetrar en un buen conductor. Un buen conductor tiene una conductividad alta y corrientes de conducción grandes. La energía representada por la onda que viaja a través del material disminuye conforme la onda se propaga porque siempre existen pérdidas óhmicas. Recordando que la tangente de pérdida es $\sigma/\omega\epsilon$, que para los dieléctricos es menor o mucho menor que la unidad, y que en los conductores al tener una alta conductividad la expresión es mayor o mucho mayor que la unidad, se infiere lo siguiente para los conductores:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \gg \omega\epsilon$$

Esto permite hacer aproximaciones tendientes a encontrar α , β y η para un buen conductor. La expresión general para la constante de propagación es:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\left(1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}\right)}$$

la cual se simplifica al aplicarla a un conductor:

$$\gamma = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{-j \frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = j \sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

pero

$$-j = 1 \angle -90^\circ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-j} = \sqrt{1 \angle -90^\circ} = 1 \angle -45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por lo tanto

$$\gamma = j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\omega\mu\sigma}$$

de donde

$$\gamma = (j1+1) \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

A pesar de los parámetros μ y σ o del conductor o de la frecuencia del campo aplicado, α y β son iguales. Si se supone nuevamente que sólo existe la componente E_y que viaja en la dirección $+x$, entonces:

$$E_y = E_{y0} e^{-x\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - x\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (A)$$

Se puede atribuir este campo en el conductor a un campo externo en la superficie del conductor. Se considera que la región $x > 0$ es el conductor y la región $x < 0$ es un dieléctrico perfecto. Entonces en la superficie de frontera $x = 0$ la ecuación anterior viene dada por:

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t)$$

Éste se considera como el campo fuente que establece los campos dentro del conductor. Dado que la corriente de desplazamiento es despreciable siendo significativa la corriente de conducción y en consecuencia la densidad de corriente de conducción ($J = \sigma E$) está relacionada directamente con el campo E en cualquier punto dentro del conductor:

$$J_y = \sigma E_y = \sigma E_{y0} e^{-x\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - x\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (B)$$

Las ecuaciones "A" y "B" poseen gran información. Observando el término exponencial negativo se encuentra una disminución exponencial en la densidad de corriente de conducción y en la intensidad del campo E a medida que la penetración en el conductor aumenta, es decir, la energía alejándose de la fuente. El factor exponencial en la frontera es igual a la unidad, ya que $x = 0$, entonces $e^{-1} = 0.368$ cuando:

$$x = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

esta distancia es denotada por δ y es llamada profundidad de penetración o efecto piel (en inglés skin effect). También se le conoce como efecto pelicular o efecto Kelvin.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

La constante de atenuación o amortiguamiento se mide en nepers por metro (Np/m) para que el exponente de "e" sea medido en unidades adimensionales llamadas nepers. El término neper fue seleccionado (por alguien que no supo deletrear) en honor al matemático escocés John Napier, quien fue el primero en proponer el uso de los logaritmos. La constante de fase se mide también en unidades adimensionales (rad/m). Como δ a una distancia e^{-1} es pequeña en los conductores, esto implica que λ es pequeña en éstos. Se puede ver claramente que

$$\delta \propto (1/f)^{1/2}$$

por lo tanto, una lámina delgada de material conductor puede actuar como filtro paso bajas para O.E.M.

A partir de la última ecuación se obtienen expresiones para la velocidad y longitud de onda en un buen conductor.

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma} = \frac{1}{\delta}$$

sabemos que:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

por lo tanto:

$$\lambda = 2\pi\delta \quad v = \omega\delta$$

Con el propósito de encontrar el campo H_z , se necesita una expresión para la impedancia intrínseca de un buen conductor. Recordando que:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{j\sigma}{\omega\epsilon}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

como ya se ha mencionado,
para un buen conductor $\sigma \gg \omega\epsilon$,
entonces se tiene:

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2} \angle 45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta}$$

y reescribiendo la ecuación de campo
 E_y en términos de profundidad de piel:

$$E_y = E_{y0} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

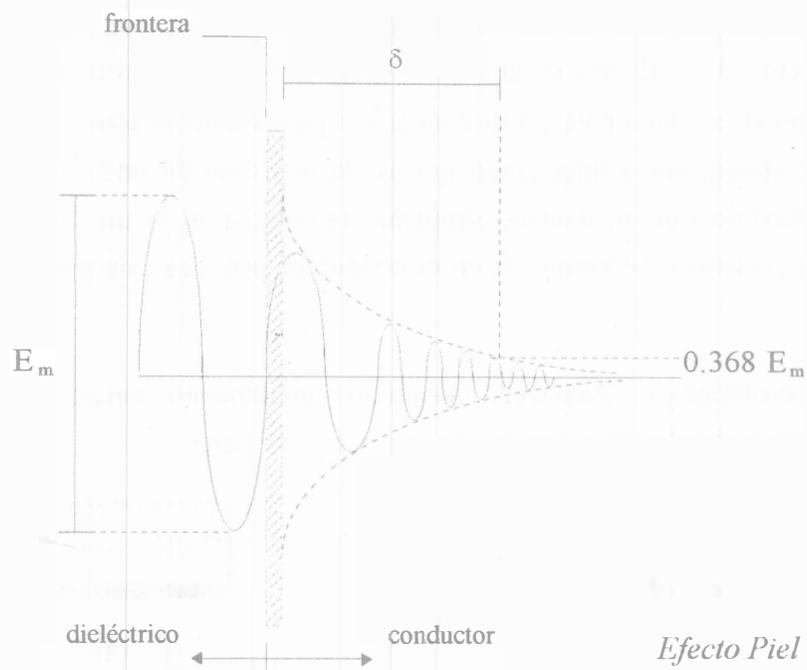
de donde:

$$H_z = \frac{E_{y0}}{\eta} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

$$H_z = \sigma\delta \frac{E_{y0}}{\sqrt{2}} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

donde se ve que la amplitud máxima de la intensidad de campo magnético ocurre un octavo de ciclo después que la amplitud máxima de la intensidad de campo eléctrico en cada punto.*

* Este desarrollo se encuentra en las páginas 399 a 403 del texto de Teoría Electromagnética de William H. Hayt Jr. 5a edición en español.



Tangente de pérdida y los parámetros α y β

O.E.M. Y ECUACIÓN DE ONDA EN MEDIOS CONDUCTORES

Los medios conductores poseen una elevada conductividad σ , esto implica que en las ecuaciones de Maxwell el término $J_c = \sigma E$ no se anula, es decir, hay grandes corrientes de conducción. Entonces, la onda en el conductor va a sufrir un amortiguamiento (la ecuación de onda presenta un término de amortiguamiento) implicando que en la ecuación de onda existe un término de primer orden. Un buen conductor, llamado simplemente conductor, es un medio con pérdidas (σ es finita) ya que la presencia del campo E en el conductor provoca una pérdida de energía por efecto Joule.

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, derivando parcialmente con respecto al tiempo el rotacional de H y aplicando el rotacional al rotacional de E, se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$-\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

relacionando éstos dos últimos resultados:

$$-\mu \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right) = -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

pero recuerdese que el rotacional del rotacional de un campo vectorial es igual al gradiente de la divergencia del campo, menos el laplaciano del campo, esto aplicado al campo E nos da:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

y del desarrollo anterior, al aplicar el rotacional a la ecuación de Maxwell para el rotacional del campo E se obtiene:

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{E} = \mu \left(\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)$$

y finalmente:

$$\nabla^2 E = \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

similarmente se encuentra:

$$\nabla^2 H = \mu\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Estas son las ecuaciones de onda para un medio conductor y son conocidas como ecuaciones de Helmholtz*. Éstas se pueden expresar en forma fasorial, lo que conduce a que los campos pueden ser expresados en una magnitud por un factor exponencial complejo en función del tiempo o la frecuencia, además, sabemos que la primera derivada parcial de cualquier cantidad de campo con respecto al tiempo es equivalente a multiplicar el fasor correspondiente por el factor $j\omega$, y la segunda derivada parcial con respecto al tiempo equivale a multiplicar el fasor correspondiente por el factor $(j\omega)^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \dot{E} e^{j\omega t} & H(x,t) &= \dot{H} e^{j\omega t} \\ \frac{\partial}{\partial t} E(x,t) &= j\omega \dot{E} e^{j\omega t} & \frac{\partial}{\partial t} H(x,t) &= j\omega \dot{H} e^{j\omega t} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x,t) &= -\omega^2 \dot{E} e^{j\omega t} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(x,t) &= -\omega^2 \dot{H} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

al sustituir en las ecuaciones de Helmholtz:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{E} e^{j\omega t} &= j\omega\mu\sigma \dot{E} e^{j\omega t} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{E} e^{j\omega t} & \nabla^2 \dot{H} e^{j\omega t} &= j\omega\mu\sigma \dot{H} e^{j\omega t} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{H} e^{j\omega t} \\ \nabla^2 \dot{E} &= j\omega\mu\sigma \dot{E} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{E} & \nabla^2 \dot{H} &= j\omega\mu\sigma \dot{H} - \omega^2 \mu\epsilon \dot{H} \\ \nabla^2 \dot{E} &= (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon) \dot{E} & \nabla^2 \dot{H} &= (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon) \dot{H} \end{aligned}$$

sabemos que:

$$\gamma^2 = (j\omega\mu\sigma - \omega^2 \mu\epsilon)$$

* Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmholtz (1821-1894) fue profesor en Berlín, y se dedicaba a investigaciones en los campos de la fisiología, la electrodinámica y la óptica. Hertz fue uno de sus alumnos.

entonces:

$$\nabla^2 \dot{E} = \gamma^2 \dot{E} \quad \nabla^2 \dot{H} = \gamma^2 \dot{H}$$

Por otra parte, al desarrollar la siguiente expresión:

$$\gamma^2 = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) \equiv (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + 2j\alpha\beta - \beta^2$$

se obtienen los parámetros α y β :

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu\epsilon \quad 2j\alpha\beta = j\omega\mu\sigma \Leftrightarrow 2\alpha\beta = \omega\mu\sigma$$

haciendo simultáneas estas ecuaciones:

$$\alpha^2 - \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}\right)^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$$

$$\left(\frac{\omega\mu\sigma}{2\beta}\right)^2 - \beta^2 + \omega^2\mu\epsilon = 0$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

El desarrollo de estas ecuaciones se deja al lector como ejercicio, para lo cual se recomienda consultar el tema de raíces de números complejos en cualquier texto de Álgebra Superior.

Para los medios conductores se tiene que $\sigma/\omega\epsilon \gg 100$, esto implica que $(\sigma/\omega\epsilon)^2 \gg 1$. Por lo tanto, las ecuaciones anteriores se simplifican y quedan de la siguiente forma:

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}$$

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon} - 1 \right]}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\frac{\sigma}{\omega\epsilon} + 1 \right]}$$

Pero $\mu\sigma/2\omega \gg 1$ por lo que las ecuaciones se simplifican aun más:

$$\alpha \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} = \sqrt{\omega^2 \frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

$$\beta \approx \omega \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} = \sqrt{\omega^2 \frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Como la unidad comparada con los cocientes $\sigma/\omega\epsilon$ y $\mu\sigma/2\omega$ es mucho menor, al aumentarla o quitarla de éstos, los valores de α y de β prácticamente no se alteran, entonces:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

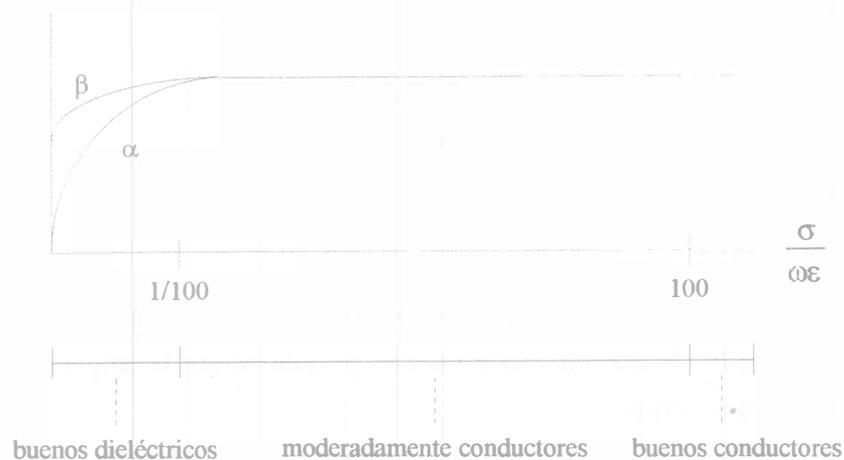
$$\beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

Las unidades de α y β son $[m^{-1}]$, sin embargo, los términos artificiales y adimensionales de neper y radian son empleados para hacer hincapié en su significado de atenuación y fase, respectivamente.

Clasificación Arbitraria de los Medios.

Con base a la relación entre la densidad de corriente de desplazamiento y densidad de corriente de conducción, se hace la siguiente clasificación.

Dieléctrico	$0 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < \frac{1}{100} \Rightarrow \sigma \ll \omega\epsilon \Rightarrow J_d > J_c$
Cuasi Conductor	$\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} < 100 \Rightarrow \sigma \approx \omega\epsilon \Rightarrow J_d \approx J_c$
Conductor	$100 < \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \Rightarrow \sigma \gg \omega\epsilon \Rightarrow J_d < J_c$



Resumen de Constantes en los Medios.

Para todos los medios se tienen constantes primarias: (μ , ϵ , σ) y constantes secundarias (α , β , η).

Para medios no magnéticos:

$$\mu_r = 1 \text{ y } \epsilon_r \neq 1$$

Para el espacio libre (vacío):

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = 1 \text{ y } \sigma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \approx 377$$

Dieléctrico perfecto:

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = 1 \text{ y } \sigma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dieléctricos disipativos:

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = 1 \text{ y } \sigma \neq 0$$

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \beta \doteq \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right]$$

Medios conductores:

$$\mu_r \neq 1, \epsilon_r \neq 1 \text{ y } \sigma \neq 0$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right]} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}}} \right]$$

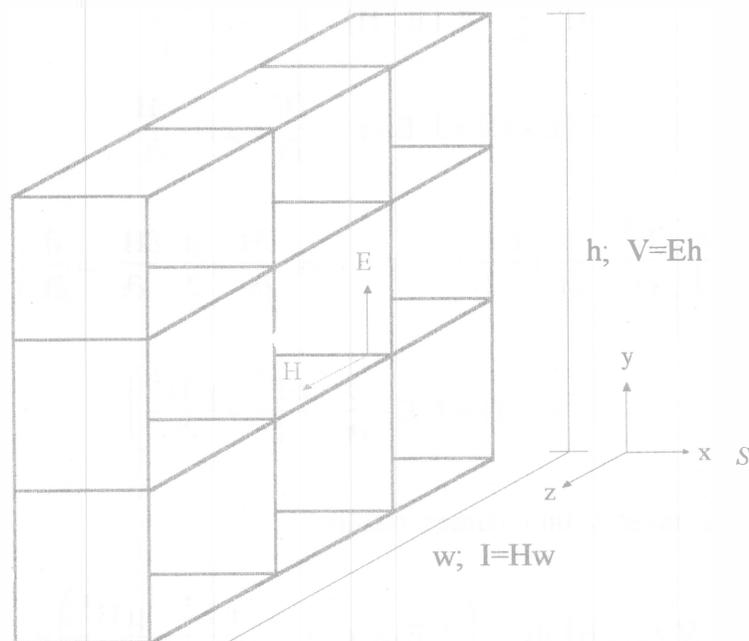
La frecuencia es un factor importante para determinar si un medio actúa como dieléctrico o como conductor. Las propiedades de los dieléctricos se dan en general por la tangente de pérdida que es un factor de disipación de energía.

POTENCIA, ENERGÍA Y VECTOR DE POYNTING

Considérese en el espacio una región de celdas de campo, de altura h y ancho w , y una onda plana que viaja en la dirección $+x$ con componentes E_y y H_z . Entonces, por medio de un análisis dimensional se encuentra la tensión total y la corriente total para ésta región. Si h y w tienen unidades de longitud (m), E tiene unidades de potencial por unidad de longitud (V/m) y H tiene unidades de corriente por unidad de longitud (A/m), entonces, la potencia entregada es $P = VI = (Eh)(Hw) = EH(hw) = EHA$ (A es el área de este arreglo de celdas). De esto se obtiene la densidad superficial de potencia llamada vector de Poynting, y da el flujo de potencia a través de cualquier superficie en una región ocupada por una O.E.M. que se obtiene integrando en la superficie la cantidad instantánea $S = E \times H$.

$$S = \frac{P}{A} = EH \left[\frac{\text{watt}}{\text{m}^2} \right]$$

El flujo de potencia es perpendicular a E y H , lo que implica la posibilidad de demostrar que $S = E \times H$, como se hará más adelante.



Con el propósito de encontrar la potencia de una onda plana uniforme, fue necesario desarrollar un teorema de potencia para el campo electromagnético conocido como teorema de Poynting. Éste fue postulado originalmente por el físico inglés John H. Poynting.

Iniciando con la ecuación de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

al aplicar el producto punto con el campo \mathbf{E} en cada lado de la ecuación:

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

ahora, haciendo uso de la identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

pero

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

por lo tanto

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

sin embargo

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} \right) \quad \text{y} \quad \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial \mathbf{H}^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right)$$

entonces

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right)$$

finalmente, integrando a través de un volumen, resulta:

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, dv = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) \, dv$$

aplicando el teorema de la divergencia:

$$-\oint_{\text{S}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{vol}} \left(\frac{\epsilon \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} \right) \, dv$$

Suponiendo que no existen fuentes dentro del volumen, entonces, la primera integral de la derecha es la potencia óhmica total (e instantánea) disipada dentro del volumen. Si hay fuentes dentro del volumen, entonces, el resultado de la integral sobre el volumen de la fuente será positivo si la potencia está siendo suministrada a la fuente, pero será negativa si la potencia es suministrada por la fuente.

La integral en el segundo término de la derecha es la energía total almacenada en los campos eléctrico y magnético, y las derivadas parciales con respecto al tiempo provocan que este término sea la razón de cambio con respecto al tiempo de la energía (velocidad de energía) almacenada dentro de ese volumen, o sea, la potencia instantánea que hará que la energía almacenada dentro de este volumen aumente.

Por lo tanto, la suma de las dos integrales de la derecha debe ser la potencia total que fluye hacia el volumen, en consecuencia, la potencia total que fluye fuera del volumen es:

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

La integral es sobre la superficie cerrada que rodea el volumen.

El producto $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es conocido como el vector de Poynting:

$$\mathcal{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

que se interpreta como una densidad de potencia instantánea medida en watts por metro cuadrado (W/m^2). Esta interpretación está sujeta a las mismas consideraciones filosóficas como en el caso de $(1/2) \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = (1/2) \epsilon \mathbf{E}^2$ ó $(1/2) \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = (1/2) \mu \mathbf{H}^2$ como densidades de energía. Lo único que se puede demostrar rigurosamente, es que la integración del vector de Poynting sobre una superficie cerrada proporciona la potencia total que atraviesa la superficie en un sentido hacia afuera. Sin embargo, la interpretación como una densidad de potencia no está mal encaminada, especialmente cuando se aplica a campos que varían sinusoidalmente. Cuando el vector de Poynting se aplica a campos constantes en el tiempo se pueden encontrar resultados extraños. La dirección del vector de Poynting indica la dirección de flujo instantáneo de potencia en el punto, se puede pensar en el vector Poynting como un vector "apuntante"*. Este homónimo, aunque accidental, es correcto. Puesto que \mathcal{P} está dado por el producto cruz de \mathbf{E} y \mathbf{H} , la dirección del flujo de potencia en cualquier punto es normal a ambos vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} ; esto concuerda muy bien con la experiencia con la onda plana uniforme, puesto que la propagación en la dirección $+x$ estuvo asociada con una componente \mathbf{E}_y y \mathbf{H}_z se tiene: $\mathbf{E}_y \hat{j} \times \mathbf{H}_z \hat{k} = \mathcal{P}_x \hat{i}$.

* En inglés es evidente este juego de palabras: Poynting (apellido) y pointing (que apunta, apuntante).

En un dieléctrico perfecto ($\sigma=0$, $J_c=0$), estos campos E y H están dados por:

$$E_y = E_{y0} \cos(\omega t - \beta x) \quad H_z = \frac{E_{y0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta x)$$

y por tanto:

$$\mathcal{P}_x = \frac{E_{y0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x)$$

Para encontrar la densidad de potencia promedio en el tiempo, se integra sobre un ciclo y se divide entre el periodo $T=1/f$,

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = f \int_0^{1/f} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta x) dt$$

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \int_0^{1/f} [1 - \cos(2\omega t - 2\beta x)] dt$$

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \left[t - \frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t - 2\beta x) \right] \Big|_0^{1/f}$$

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{f}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta} \left[\frac{w}{m^2} \right]$$

Si se usan valores de raíz cuadrática media (R.M.S.) en lugar de amplitudes pico, podría no aparecer el término $\frac{1}{2}$. Finalmente, la potencia promedio que fluye a través de cualquier área S normal al eje x es:

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{\eta} S \text{ [w]}$$

En el caso de un dieléctrico disipativo E_y y H_z no están en fase, se tiene:

$$E_y = E_{y0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x)$$

si,

$$\eta = \eta_m \angle \theta_\eta$$

entonces, se puede escribir la intensidad de campo magnético como:

$$H_z = \frac{E_{y0}}{\eta_m} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \theta_\eta)$$

entonces:

$$\mathcal{P}_x = E_y H_z = \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) \cos(\omega t - \beta x - \theta_\eta)$$

usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(A) \cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

se tiene que:

$$\mathcal{P}_x = E_y H_z = \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \left[\cos(2\omega t - 2\beta x - \theta_\eta) \cos(\theta_\eta) \right]$$

Se encuentra que la densidad de potencia tiene sólo una componente de segunda armónica y una componente de CD. Puesto que el primer término tiene un valor promedio cero sobre un número entero de periodos, el valor promedio en tiempo del vector de Poynting es:

$$\mathcal{P}_{x \text{ prom}} = \frac{1}{2} \frac{E_{y0}^2}{\eta_m} e^{-2\alpha x} \cos(\theta_\eta)$$

Obsérvese que la densidad de potencia se atenúa con un factor $e^{-2\alpha x}$, mientras que E_y y H_z decaen con un factor $e^{-\alpha x}$

La densidad de energía eléctrica y la densidad de energía magnética en un punto, son respectivamente:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad W_m = \frac{1}{2} \mu H^2$$

para un medio sin pérdidas:

$$\eta = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

se comprueba que $W_e \equiv W_m$:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon (\eta H)^2 = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\mu}{\epsilon} H^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 = W_m$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{E}{\eta} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{\epsilon}{\mu} E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = W_e$$

$$W_e \equiv W_m$$

Se concluye que la densidad de energía magnética y la densidad de energía eléctrica en una onda viajera plana son iguales, esto implica que la densidad de energía total es:

$$W_{\text{total}} = W_e + W_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \epsilon E^2 = \mu H^2$$

Considerando un medio dieléctrico perfecto ($\sigma=0$, $J=0$) se tiene:

$$\left| \oint_s \mathcal{P} \cdot dS \right| = \int_v \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\mu}{2} H^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2 \right] dv$$

como las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales se tiene que:

$$W_e + W_m = 2W_e = 2W_m = W$$

entonces, dividiendo el vector de Poynting entre la densidad total de energía se obtiene la velocidad de energía:

$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \left[\frac{\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}}{\frac{\text{joule}}{\text{m}^3}} \right] = \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

en un medio sin pérdidas:

$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \frac{EH}{\mu H^2} = \frac{1}{\mu} \frac{E}{H} = \frac{1}{\mu} \eta = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

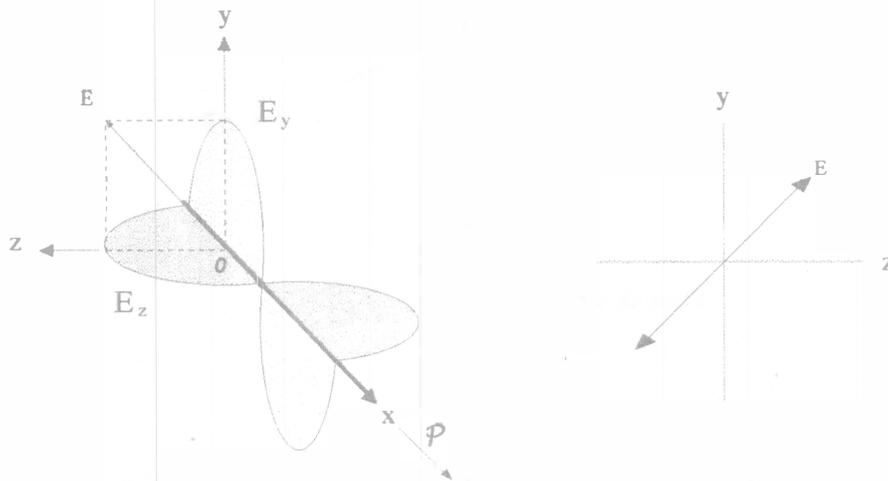
$$v_{\text{energía}} = \frac{\mathcal{P}}{W_{\text{total}}} = \frac{EH}{\epsilon E^2} = \frac{1}{\epsilon} \frac{H}{E} = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

de esto se concluye que la velocidad de energía es igual a la velocidad de fase.

POLARIZACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

La polarización de una onda electromagnética es el lugar geométrico que describe la punta del vector de campo eléctrico (E) al ser proyectado en un plano de fase constante. En otras palabras, es el comportamiento del vector intensidad de campo eléctrico E , con respecto al tiempo en un plano de fase constante y fijo del espacio.

El campo eléctrico es considerado como la perturbación óptica y reside en lo que se conoce como plano de vibración, éste plano de vibración contiene tanto al vector de campo E como al vector de propagación P (vector de Poynting en la dirección de movimiento).



$$E_y(x, t) = E_{m_1} \cos(\omega t - \beta x) \hat{j}$$

$$E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t - \beta x) \hat{k}$$

En el plano YZ el campo E se ve como una recta con pendiente "m" en el origen, entonces:

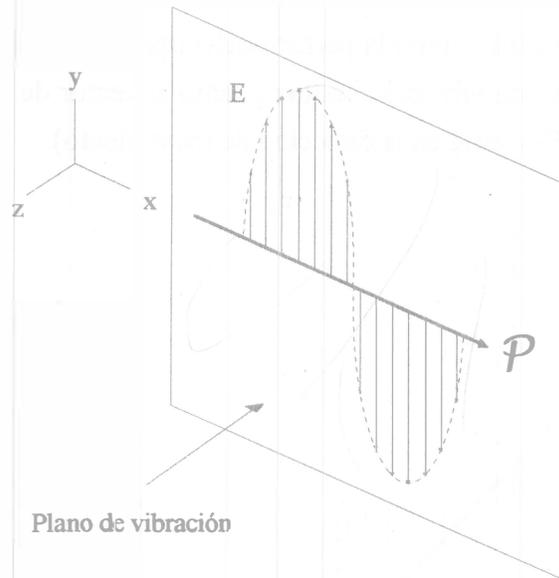
$$m = \frac{E_y}{E_z} = \frac{E_{m_1} \cos(\omega t - \beta x)}{E_{m_2} \cos(\omega t - \beta x)}$$

de donde:

$$E_y = \frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z = m E_z$$

Polarización Lineal.

Para una onda plana polarizada linealmente las vibraciones del vector E son paralelas entre sí en todos los puntos de la onda. En cualquier punto el vector E y la dirección de propagación forman un plano llamado plano de vibración.



En general, dos perturbaciones ópticas o de campo E ortogonales entre sí de la forma:

$$E_y(x, t) = E_{m_1} \cos(\omega t + \beta x + \xi) \hat{j} \quad E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{k}$$

donde ξ es la diferencia de fase relativa entre las ondas, ambas viajando en la dirección x , entonces, la perturbación resultante es simplemente:

$$E(x, t) = E_y(x, t) + E_z(x, t)$$

Si ξ es cero o un entero múltiplo de $\pm 2\pi$, se dice que las ondas están en fase, y las ecuaciones anteriores quedan:

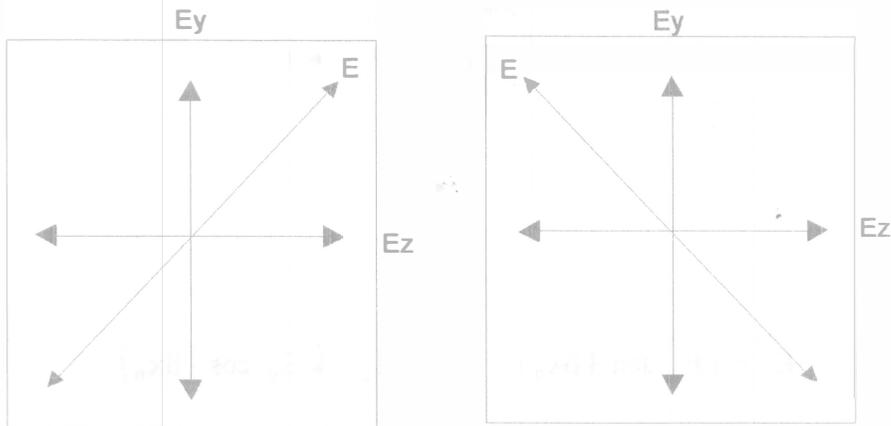
$$E = (E_{m_1} \hat{j} + E_{m_2} \hat{k}) \cos(\omega t + \beta x)$$

Ésta es una onda linealmente polarizada. Este proceso se puede llevar igualmente a cabo a la inversa, es decir, podemos resolver cualquier onda linealmente polarizada en dos componentes ortogonales.

Supóngase ahora que ξ es un entero impar, múltiplo de $\pm\pi$; se dice que las dos ondas están 180° fuera de fase y

$$\mathbf{E} = (-E_{m_1} \hat{\mathbf{j}} + E_{m_2} \hat{\mathbf{k}}) \cos(\omega t + \beta x)$$

Esta onda está de nuevo linealmente polarizada pero el plano de vibración ha sido rotado 45° . Nótese que la onda puede descomponerse en componentes que no sean ortogonales.



Polarización Circular.

Otro caso especial de particular interés aparece cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud, es decir:

$$E_{m_1} = E_{m_2} = E_0$$

y además, su diferencia de fase relativa es:

$$\xi = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi$$

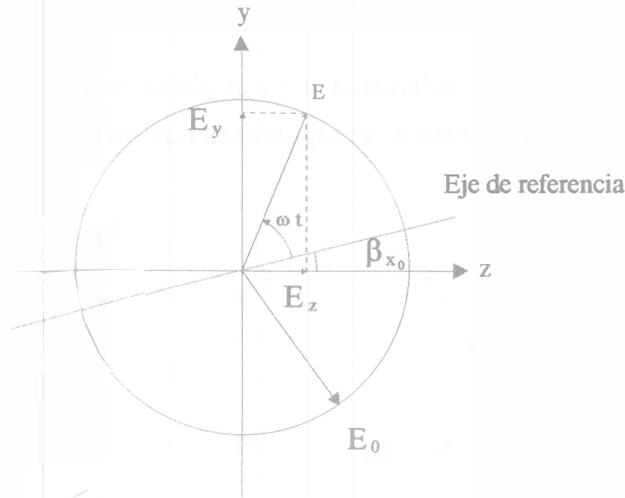
donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

por lo tanto: $E_y(x, t) = E_{m_1} \sin(\omega t + \beta x) \hat{\mathbf{j}}$ $E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{\mathbf{k}}$

la onda queda: $\mathbf{E} = E_0 \left[\sin(\omega t + \beta x) \hat{\mathbf{j}} + \cos(\omega t + \beta x) \hat{\mathbf{k}} \right]$

Obsérvese que en este caso la amplitud escalar de "E", la cual es igual a E_0 , es una constante. Pero la dirección de "E" es variable con el tiempo y no está restringida como antes a un solo plano.

La figura siguiente muestra lo que está sucediendo en algún punto arbitrario X_0 en el eje. En $t=0$ "E" cae a lo largo del eje de referencia en la figura, y así:



$$E_y = \hat{j} E_0 \sin(\beta x_0) \quad E_z = \hat{k} E_0 \cos(\beta x_0)$$

Un tiempo $t = ((2\pi - \beta x_0) / \omega)$ más tarde, $E_y = 0$, $E_z = E_0 \hat{k}$ y "E" están a lo largo del eje "z". El vector campo eléctrico resultante E está rotando en la dirección opuesta de las manecillas del reloj con una frecuencia ω visto por un observador hacia quien la onda se está moviendo (es decir, viendo hacia la fuente). Tal onda tiene polarización circular izquierda y se hace referencia a ella simplemente como luz circular izquierda. El vector E hace una rotación completa cuando la onda avanza una longitud de onda. En comparación, si $\xi = -\pi/2, -5\pi/2, -9\pi/2, \text{etc.}$, es decir, $\xi = (-\pi/2) + (2m\pi)$ donde $m=0, \pm 2, \pm 3, \dots$, entonces

$$E = E_0 \left[-\sin(\omega t + \beta x) \hat{j} + \cos(\omega t + \beta x) \hat{k} \right]$$

La amplitud no se ve afectada, pero ahora E gira en el sentido de las manecillas del reloj y la onda tiene polarización circular derecha.

Una onda linealmente polarizada se puede sintetizar con dos ondas con polarización circular opuesta de igual amplitud. En particular si usamos las ondas circulares descritas anteriormente, se tiene:

$$E = 2 E_0 \hat{k} \cos(\omega t + \beta x_0)$$

el cual es un vector de amplitud constante $2E_0 \hat{k}$, donde el vector \hat{k} indica que se encuentra en un solo plano (en este caso en el "YZ"), y por lo tanto es linealmente polarizado.

Polarización Elíptica.

En cuanto a la descripción matemática se refiere, tanto una onda electromagnética polarizada linealmente como una onda electromagnética polarizada circularmente se pueden considerar como casos especiales de una onda electromagnética polarizada elípticamente. Entonces, el vector campo eléctrico resultante rotará y cambiará su magnitud. En tales casos el extremo E trazará una elipse en un plano fijo perpendicular a "î", cuando la onda avanza. Por medio de una expresión matemática para la curva trazada por la punta E. Recordando que:

$$E_y(x, t) = E_{m_1} \cos(\omega t + \beta x + \xi) \hat{j} \quad E_z(x, t) = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x) \hat{k}$$

La ecuación de polarización que se busca no debe depender de la posición ni del tiempo, es decir, se debe eliminar la dependencia de $(\omega t + \beta x)$. Recordando la expresión trigonométrica para el coseno de la suma de dos ángulos:

$$\cos(A \pm B) = \cos(A) \cos(B) \mp \sin(A) \sin(B)$$

aplicando a E_y :

$$\frac{E_y}{E_{m_1}} = \cos(\omega t + \beta x) \cos(\xi) - \sin(\omega t + \beta x) \sin(\xi)$$

combinándola con

$$\frac{E_z}{E_{m_2}} \cos(\xi)$$

se tiene

$$\frac{E_y}{E_{m_1}} - \frac{E_z}{E_{m_2}} \cos(\xi) = -\sin(\omega t + \beta x) \sin(\xi)$$

de la ecuación

$$E_z = E_{m_2} \cos(\omega t + \beta x)$$

se deduce

$$\sin^2(\omega t + \beta x) = 1 - \left(\frac{E_z}{E_{m_2}} \right)^2$$

entonces

$$\left[\frac{E_y}{E_{m_1}} - \frac{E_z}{E_{m_2}} \cos(\xi) \right]^2 = \left[-\sin(\omega t + \beta x) \sin(\xi) \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_z}{E_{m_2}} \right)^2 \right] \sin^2(\xi)$$

al desarrollar y recomodar términos se obtiene la ecuación general de polarización de una O.E.M.

$$\left(\frac{E_y}{E_{m_1}} \right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{m_2}} \right)^2 - 2 \frac{E_y E_z}{E_{m_1} E_{m_2}} \cos(\xi) = \sin^2(\xi)$$

La última expresión es la ecuación de una elipse que hace un ángulo α con el sistema coordenado (E_y, E_z) , tal que:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{m_1} E_{m_2} \cos(\xi)}{E_{m_2}^2 - E_{m_1}^2}$$

Si los ejes de la elipse se alinean con los ejes coordenados, es decir, $\alpha=0$ o equivalentemente $\xi = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2, \dots$, entonces se tiene:

$$\left(\frac{E_y}{E_{m_1}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{m_2}}\right)^2 = 1$$

si $E_{m_1} = E_{m_2} = E_0$, entonces:

$$E_y^2 + E_z^2 = 1$$

que de acuerdo a resultados anteriores, es un círculo. Si ξ es un múltiplo par de π , la ecuación que resulta es:

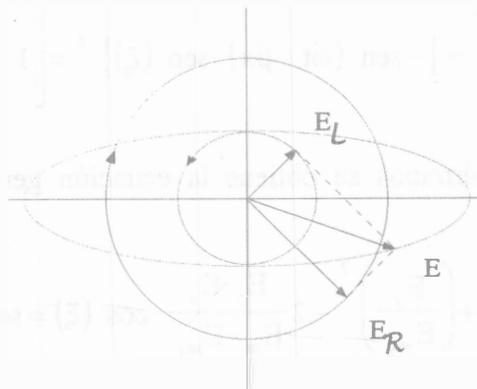
$$E_y = \frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z$$

similarmente, para múltiplos impares:

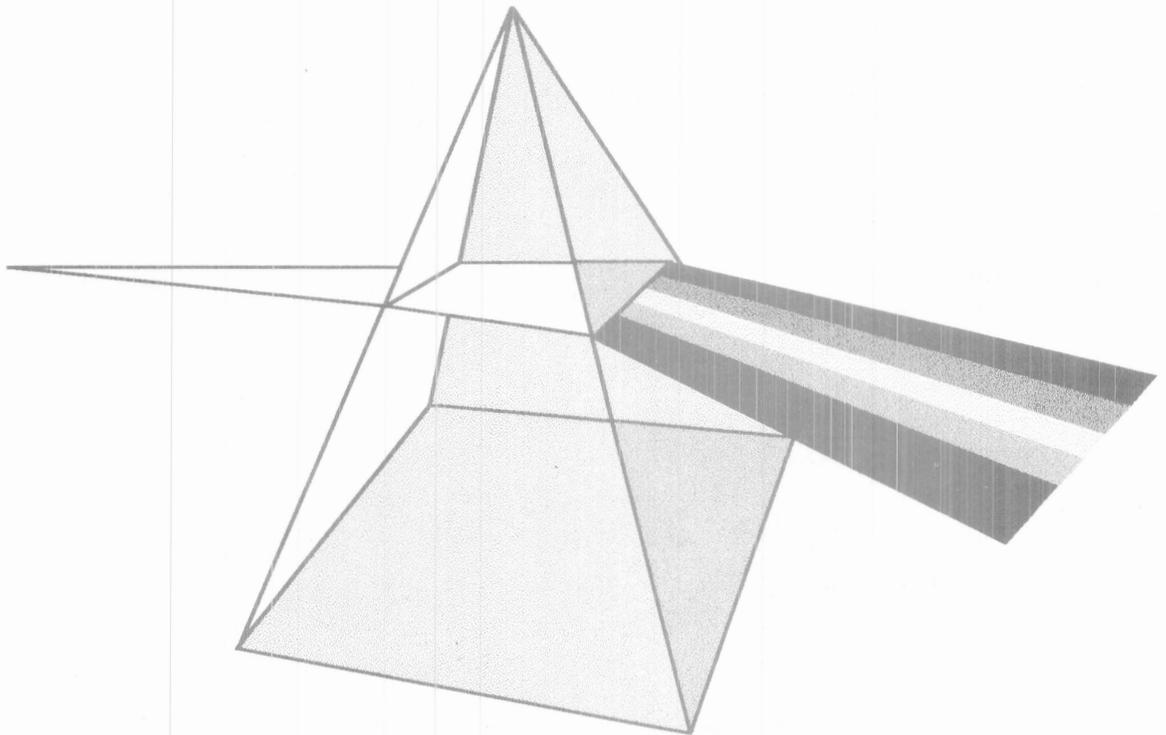
$$E_y = -\frac{E_{m_1}}{E_{m_2}} E_z$$

Ambas son líneas rectas, es decir, se tiene polarización lineal en este punto.

En algunos textos de óptica se hace referencia a una onda de luz particular en términos de su estado específico de polarización. Se dice que la luz lineal o polarizada en un plano tiene un estado P, mientras que la luz circular derecha o izquierda está en un estado R o L (según corresponda), y para la condición de polarización elíptica se dice que está en un estado E. Se ha demostrado que un estado P se puede representar como una superposición de estados R y L, y lo mismo se cumple para un estado E. En este caso se ve en la figura como las amplitudes de las dos ondas circulares son diferentes.



CAPÍTULO III



**REFLEXIÓN, REFRACCIÓN
Y DIFRACCIÓN.**

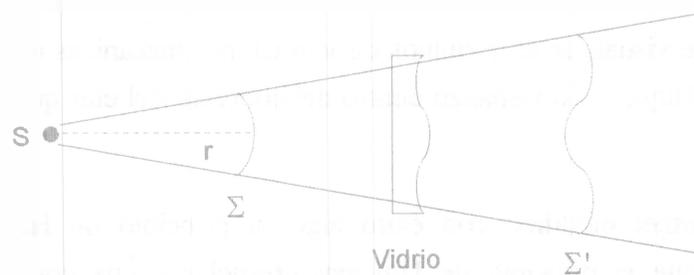
INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian ciertos fenómenos relacionados con la propagación de la luz y su interacción con los medios materiales considerando la luz desde un punto de vista ondulatorio. En particular se estudian las características de las ondas de la luz al progresar a través de varias sustancias, cruzando interfases y siendo reflejadas y refractadas en su travesía.

Aunque las leyes de reflexión y refracción pueden deducirse a partir de las ecuaciones de Maxwell (tratamiento electromagnético), en principio se da un enfoque más simple a nuestro estudio. Para esto, este tema se apoya en un método geométrico propuesto por el físico holandés Christian Huygens publicado en 1690 bajo el título de "Traité de la Lumière" (Tratado de la Luz), en realidad Huygens lo escribió en el año de 1678.

Por el momento considérese que un frente de onda es una superficie sobre la cual un disturbio óptico tiene una fase constante, por ejemplo, en la siguiente figura se muestra un frente de onda esférico (Σ) emitido por una fuente puntual monocromática "S" en un medio homogéneo (una fuente puntual monocromática es una fuente emisora de luz de una sola longitud de onda o con un reducido intervalo de longitudes de onda).

Si el radio del frente de onda es "r", algún tiempo "t" más tarde, será $(r+vt)$, donde "v" es la velocidad de la fase de la onda. Pero si este frente de onda pasa a través de una hoja de vidrio no uniforme, como se muestra, de tal forma que el frente de onda queda distorsionado, ¿cómo se podrá determinar la nueva forma del frente de onda (Σ')?



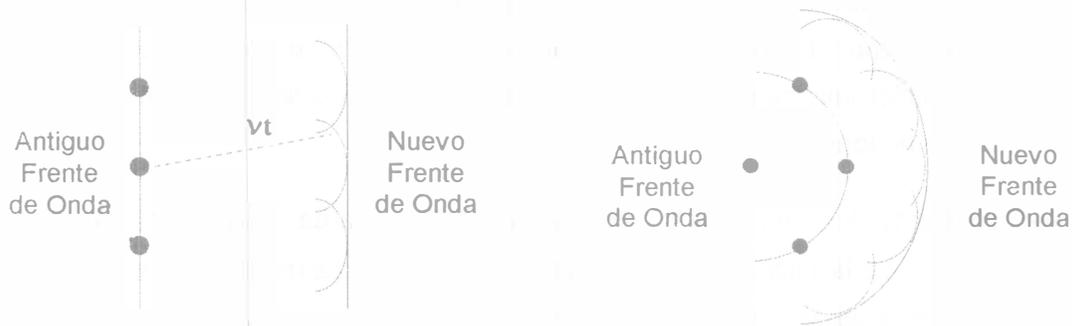
Un paso preliminar hacia la solución de este problema es el trabajo realizado por Huygens; él no tenía conocimiento de la naturaleza de las ondas, ni del carácter electromagnético de la luz. Sin embargo, su modelo simplificado de onda resulta adecuado para la comprensión de muchos aspectos prácticos de la propagación de la luz.

EL PRINCIPIO DE HUYGENS

El principio de Huygens es una construcción geométrica empleada para determinar la posición de un nuevo frente de onda en algún instante, a partir del conocimiento de un frente de onda anterior.

Cada punto en un frente de onda primario sirve como fuente puntual de onditas esféricas secundarias (ondulaciones) tales que el frente de la onda primaria un instante más tarde es la envolvente de estas onditas. Además, las onditas avanzan con rapidez y frecuencia igual a la de la onda primaria en cada punto del espacio.

El frente de onda al que se hace referencia es una superficie tangencial a las onditas antes mencionadas; si el medio es homogéneo, las onditas pueden construirse con radio finito, mientras que si no lo es, las onditas tendrán que tener radios infinitesimales.



Construcción de Huygens para una onda plana y para una onda esférica.

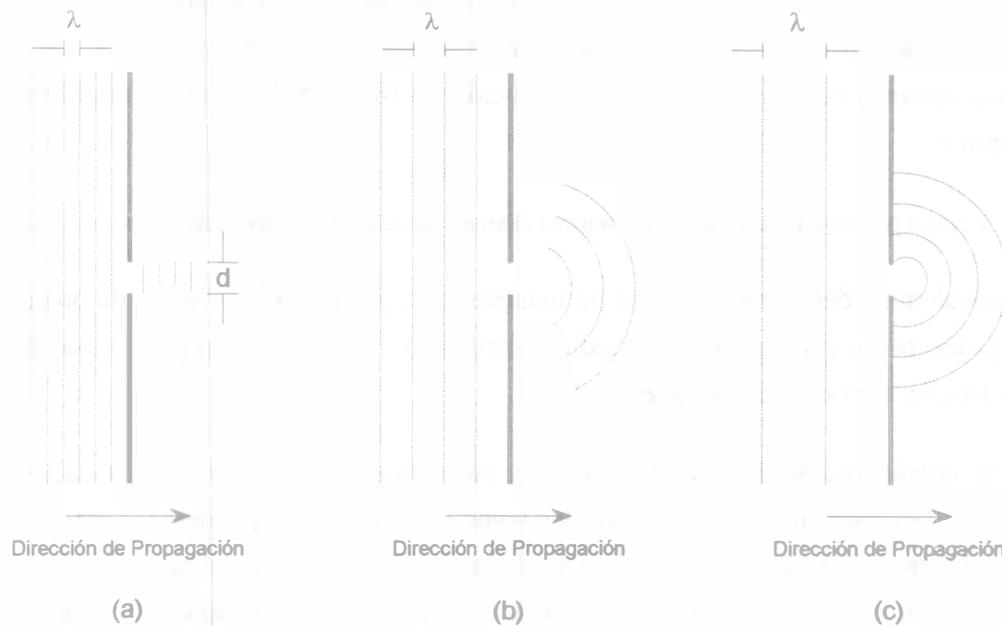
Este proceso se puede visualizar en términos de vibraciones mecánicas de un medio elástico. En efecto, de este modo Huygens lo visualizó dentro del contexto del éter que todo lo invadía, según se creía en su época.

En el siglo XIX Fresnel modificó con éxito algo el principio de Huygens. Posteriormente Kirchhoff demostró que el principio de Huygens-Fresnel era una consecuencia directa de la ecuación diferencial de onda, dando así una firme base matemática a este conocimiento.

De las figuras anteriores se observa que si se dibujaran esferas en vez de onditas, surge de inmediato que habría una onda propagándose hacia la fuente, esto fue tomado en cuenta por Fresnel y Kirchhoff en la reformulación del principio de Huygens.

Aproximación del Rayo.

En óptica geométrica se emplea la llamada aproximación del rayo, en la cual se supone que una onda viaja en un medio en línea recta en la dirección de propagación de la onda (dirección del flujo de energía o vector de Poynting). Además, se desprecian los efectos de la difracción si la longitud de onda es menor en comparación con las dimensiones de la abertura por la que pasa, esto da una buena aproximación.



En el caso (a) $\lambda \ll d$ y la aproximación al rayo permanece válida, en el caso (b) $\lambda \approx d$ y se dice que la onda saliente es notablemente difractada, en el caso (c) $\lambda \gg d$, entonces la abertura se comporta como una fuente puntual de ondas esféricas, es decir, que la difracción no es despreciable.

El concepto de rayo de luz es de gran importancia a través de todo el estudio de la óptica, como tal, es un instrumento matemático más que una entidad física. Entonces comencemos por decir:

Un rayo es una línea en el espacio que corresponde a la dirección del flujo de la energía radiante.

En un medio isotrópico, los rayos son trayectorias ortogonales a los frentes de onda, es decir, son normales a los frentes de onda en cada punto, y por lo tanto dichos rayos son paralelos al vector de propagación (vector de Poynting), esto no se cumple en sustancias anisotrópicas. Además, del hecho de que la velocidad de propagación es la misma en todas direcciones, se tiene que la separación espacial entre dos frentes de onda a lo largo de los rayos es siempre la misma; esto no es cierto cuando se involucra más de un medio o en materiales no homogéneos, en donde se

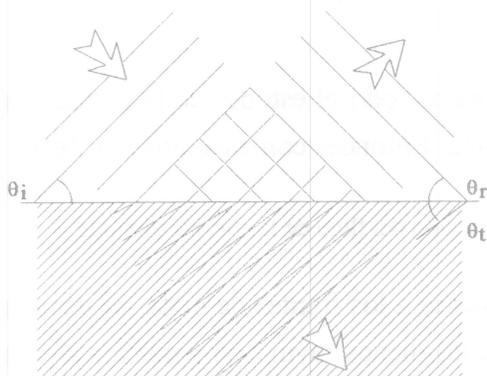
hablará de "longitud de camino óptico". Los puntos donde un rayo intersecta frentes de onda se llaman puntos correspondientes. La separación temporal entre los puntos correspondientes de los frentes de onda consecutivos es idéntica, esto se cumple aún si los frentes de onda pasan de un medio isotrópico homogéneo a otro. Si un grupo de rayos es tal que existe una superficie que es ortogonal a todos y cada uno de ellos, se dice entonces que forman una "congruencia normal". Por ejemplo, los rayos que emanan de una fuente puntual, son perpendiculares a una esfera concéntrica a dicha fuente, por lo tanto forman una congruencia normal.

Dicho lo anterior, se puede ahora considerar una técnica alternativa al principio de Huygens que permite también seguir el progreso de la luz a través de varios medios isotrópicos. La base de este método es el teorema de Malus y Dupin (introducido en 1808 por E. Malus y modificado en 1816 por C. Dupin).

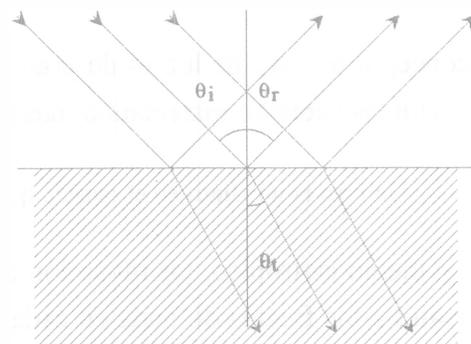
Un grupo de rayos preservará su congruencia normal después de cualquier número de reflexiones y refracciones.

Esto es equivalente a decir que los rayos permanecen ortogonales a los frentes de onda a través de todos los procesos de propagación de medios isotrópicos. El teorema se puede usar para deducir la ley de reflexión conocida como la ley de Snell.

Tomando en consideración las ideas anteriores, a menudo es conveniente llevar a cabo un trazo de rayos a través de un sistema óptico usando las leyes de reflexión y refracción y entonces construir los frentes de onda con igual tiempo de tránsito entre puntos correspondientes manteniendo la ortogonalidad entre rayos y frentes de onda. La siguiente figura ilustra la formación de rayos paralelos concomitantes (que se acompañan entre sí), con una onda plana.



Representación de la onda



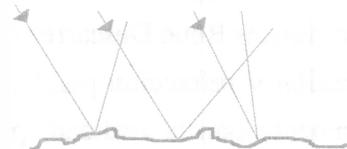
Representación del rayo

REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN

Cuando un haz de luz viaja en un medio y atraviesa una frontera que conduce a otro medio, parte de este haz se regresa al medio de origen, es decir, hay reflexión; otra parte del haz de luz se transmite al segundo medio, desviándose de la frontera; de éste último se dice que se refracta. Se habla de reflexión especular en superficies poco rugosas, y para superficies rugosas se dice que hay reflexión difusa.



Reflexión Especular

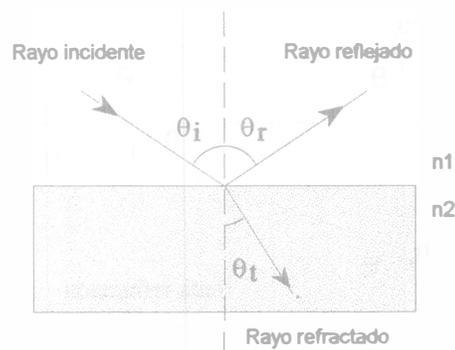


Reflexión difusa

Experimentalmente se llegó al conocimiento de que los rayos incidente y reflejado forman ángulos iguales con respecto a la normal a la superficie de incidencia, siempre y cuando se trate de reflexión especular. La ley de reflexión apareció por vez primera en el libro titulado Catóptrica que se supone fue escrito por Euclides y se expresa como:

$$\theta_i = \theta_r$$

La ley de reflexión es absolutamente válida en cualquier región que sea suficientemente pequeña para considerarse tersa, es decir, una pequeñísima superficie especular. Puede pensarse en una superficie rugosa como una superficie formada por una infinidad de pequeñas superficies "lisas" con diferentes inclinaciones. Por otra parte, el ángulo de refracción depende del ángulo de incidencia y de las propiedades ópticas de los medios, nótese que los rayos incidente, reflejado y transmitido (refractado) son coplanares. La ley de reflexión ya era conocida por Euclides.

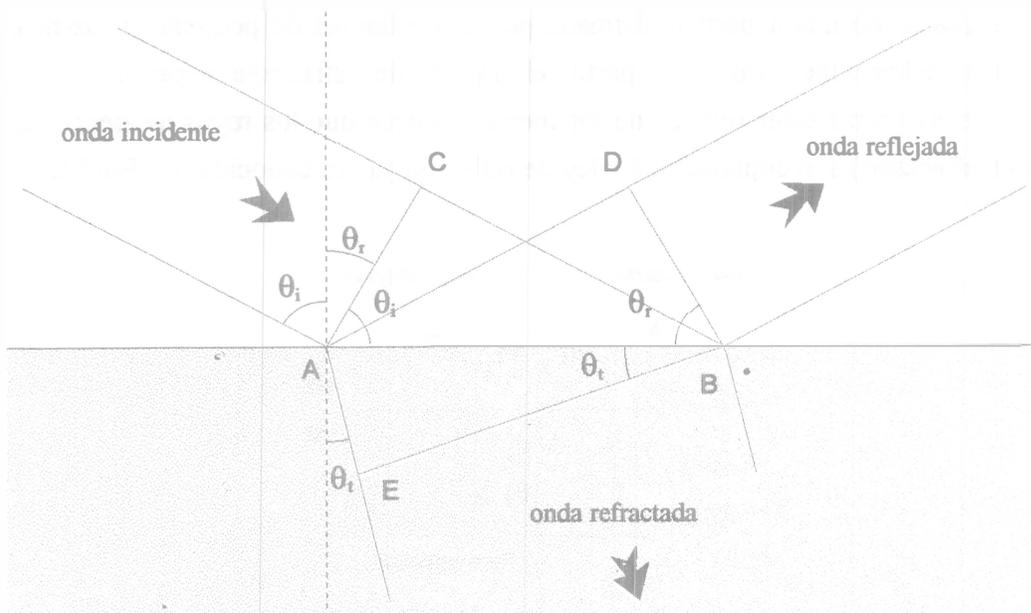


Los rayos incidente, reflejado y transmitido (refractado) son coplanares

Las consecuencias físicas de la ley de refracción han sido estudiadas, al menos documentalmente, por más de mil ocho cientos años. Con base en observaciones muy finas Claudio Tolomeo de Alejandría intentó sin éxito intuir la expresión. Kepler casi tuvo éxito en la deducción de la ley de refracción en su libro "Suplementos de Vitello" en 1604, desafortunadamente fue engañado por algunos datos erróneos compilados anteriormente por Vitello (CA. 1270). El descubrimiento experimental de esta relación se acreditó a Willebord Snell (1591-1626), parece que las relaciones correctas fueron obtenidas por él en la Universidad de Leyden y deducidas independientemente por el matemático francés René Descartes (1596-1650) a partir de una teoría corpuscular anterior. Las leyes de reflexión y refracción pueden obtenerse de las ecuaciones de Maxwell, hecho que concuerda exactamente con la realidad, pues estas leyes se cumplen en todas las regiones del espectro electromagnético.

Estas leyes son aplicables al paso de la luz de un medio cualquiera a otro, se encuentra que son aplicables tanto al rayo reflejado como al refractado. Por ejemplo, en su aplicación se encuentra que un rayo que va en una trayectoria desde un punto "A" en el aire a un punto "B" en el vidrio, es la misma que si fuera de "B" a "A", es decir, es un proceso reversible. A este importante resultado se le llama principio de reciprocidad.

Considerando el carácter general de la incidencia oblicua, la ley de reflexión y la ley de refracción de Snell se deducen de la siguiente manera.



La onda incidente toma un tiempo "t" en viajar de C a B a velocidad v_1 , en el mismo tiempo la onda transmitida viaja de A a E con una velocidad v_2 y la onda reflejada viaja de A a D a velocidad v_1 .

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad v_1 &= \frac{CB}{t} & \text{sen } \theta_i &= \frac{CB}{AB} = \frac{v_1 t}{AB} \\ \text{(b)} \quad v_2 &= \frac{AE}{t} & \text{sen } \theta_t &= \frac{AE}{AB} = \frac{v_2 t}{AB} \\ \text{(c)} \quad v_1 &= \frac{AD}{t} & \text{sen } \theta_r &= \frac{AD}{AB} = \frac{v_1 t}{AB} \end{aligned}$$

igualando las ecuaciones a y b se obtiene la ley de reflexión:

$$v_1 t = AB \text{ sen } \theta_i \quad v_1 t = AB \text{ sen } \theta_r$$

$$\theta_i = \theta_r$$

del cociente de la ecuación a entre la b o de la c entre b se obtiene la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \text{cte.} \quad \frac{\text{sen } \theta_r}{\text{sen } \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \text{cte.}$$

donde v_1 es la velocidad de fase en el medio de incidencia y v_2 es la velocidad de fase en el medio de transmisión.

El índice de refracción.

La luz al pasar de un medio a otro se afecta a causa de la diferencia de la velocidad de la luz en cada uno de los medios. La razón de esta variación en la velocidad es algo compleja y sólo se explica apropiadamente por medio de un modelo atómico. En general, se sabe que la velocidad de la luz en cualquier medio es menor que la velocidad en el vacío ($c = 3 \times 10^8$ m/s). Por consiguiente, la luz viaja a su máxima velocidad en el vacío. De aquí se define el índice absoluto de refracción (denotado como n ó η) de un medio como:

$$\eta = \frac{\text{velocidad de la luz en el vacío}}{\text{velocidad de la luz en el medio}} = \frac{c}{v}$$

Partiendo de la definición, se observa que η es un valor adimensional mayor que la unidad ya que $v < c$, además $\eta = 1$ para el vacío.

Sustancia	Índice de Refracción	Sustancia	Índice de Refracción
Sólidos a 20°C		Líquidos a 20°C	
Diamante (C)	2.419	Benceno	1.501
Fluorita (CaF ₂)	1.434	Disulfuro de Carbono	1.628
Cuarzo Fundido (SiO ₂)	1.458	Tetracloruro de Carbono	1.461
Vidrio, sin plomo	1.52	Alcohol Etilico	1.361
Vidrio, roca	1.66	Glicerina	1.473
Hielo (H ₂ O)	1.309	Agua	1.333
Poliestireno	1.49	Gases a 0°C, a 1 atm	
Cloruro de Sodio (NaCl)	1.544	Aire	1.000293
Circón	1.923	Dióxido de Carbono	1.00045

Índice de refracción de diferentes sustancias medidas con luz de longitud de onda en el vacío $\lambda_0 = 598 \text{ nm} = 5980 \text{ \AA}$.

Cuando la luz viaja de un medio a otro la frecuencia de la onda no cambia. Por lo tanto, ya que la relación $v = \lambda f$ debe ser válida en ambos medios, se tiene que:

$$v_1 = \lambda_1 f \text{ y } v_2 = \lambda_2 f$$

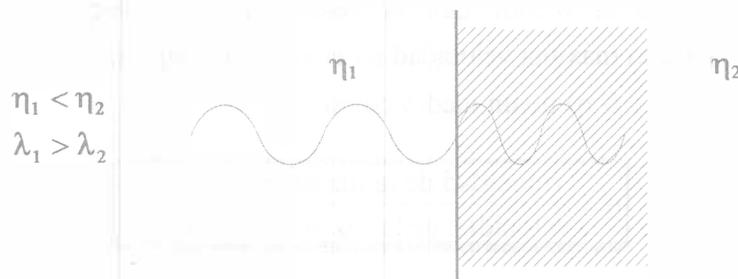
dividiendo las dos expresiones anteriores entre sí, y considerando la definición de η , se obtiene:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{c}{\eta_1}}{\frac{c}{\eta_2}} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 \eta_1 = \lambda_2 \eta_2$$

Si el medio 1 es el vacío, entonces $\eta_1 = 1$. Entonces, se deduce que el índice de refracción de cualquier medio puede expresarse en función de la longitud de onda.

$$\eta = \frac{\lambda_0}{\lambda_n}$$

Donde λ_0 es la longitud de onda de la luz en el vacío λ_0 es la longitud de onda en el medio cuyo índice de refracción es "n".

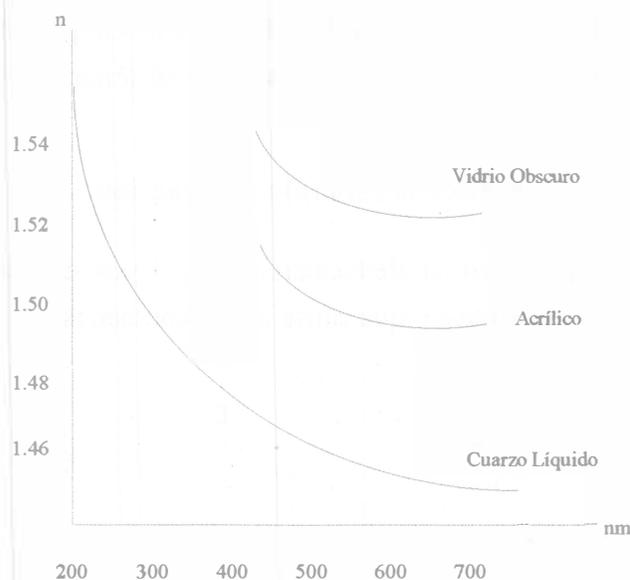


Una forma más práctica de la ley de Snell, considerando los parámetros θ_1 , θ_2 , η_1 y η_2 es:

$$\eta_1 \sin \theta_1 = \eta_2 \sin \theta_2$$

Dispersión y Prismas.

Una propiedad importante del índice de refracción, es que éste varía con la longitud de onda, como se muestra en la siguiente gráfica.

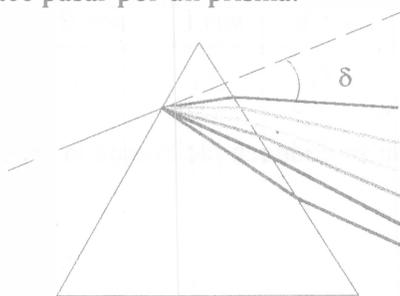


Este comportamiento representa la variación de la velocidad de la luz en diferentes materiales con la longitud de onda.

Como n es una función de la longitud de la onda, la desviación angular de un rayo de luz que penetra una sustancia, depende de las características del material y del color (longitud de onda) de la luz.

Dispersión.

Toda sustancia en la que n varíe con la longitud de onda λ se dice que presenta dispersión, es decir, hay una desviación angular neta al pasar por el material. En la siguiente figura se presenta el experimento que estudió Newton, en cual un rayo de luz blanca (compuesta por todas las longitudes de onda visibles) se hace pasar por un prisma.

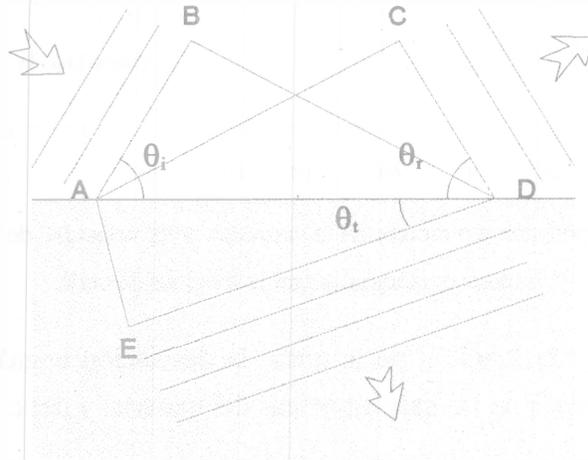


Dispersión de la luz en un espectro, por medio de un prisma o espectro prismático.

Newton demostró que los rayos de luz que salen del prisma, se dispersan en una serie de colores que dan lugar a un espectro. A la desviación angular de los rayos salientes con respecto a la trayectoria del rayo incidente se le llama "ángulo de desviación" (δ). Esto se aplica en el estudio de las características espectrales de una fuente luminosa, también para la determinación de las características de absorción óptica de las sustancias (espectrofotómetro prismático).

Aplicación del principio de Huygens a la reflexión y refracción.

El principio de Huygens es útil en la deducción de las leyes de reflexión y refracción sin profundizar en los detalles del mecanismo que causa estos fenómenos.



de la anterior figura se observa que:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{BD} = \frac{\text{sen } \theta_r}{AC} = \frac{\text{sen } \theta_t}{AE} = \frac{1}{AD}$$

como $BD = AC = v_i t$ y $AE = v_t t$ entonces:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{v_i} = \frac{\text{sen } \theta_r}{v_r} = \frac{\text{sen } \theta_t}{v_t}$$

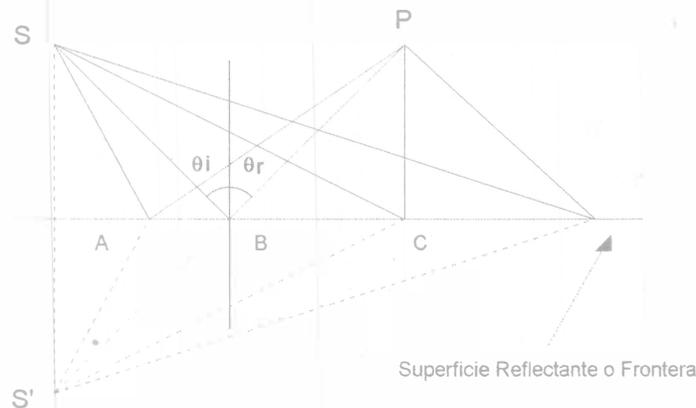
Recuerde que $v_i = v_r$, de la ecuación se deducen fácilmente la ley de reflexión y la ley de refracción.

Principio de Fermat.

Las leyes de reflexión y refracción y en general, la forma en que se propaga la luz se puede deducir del principio de Fermat, el cual establece que la trayectoria que seguirá un rayo luminoso al viajar entre dos puntos cualesquiera es la trayectoria que toma el menor tiempo. Este principio empleado para la determinación de las trayectorias reales de los rayos de luz fue desarrollado por Pierre de Fermat (1601-1665).

Las ideas que se desarrollan a continuación han tenido gran influencia en el pensamiento físico en la óptica clásica y la cuántica.

Hero de Alejandría (150 AC. a 250 DC.) fue el primero en establecer lo que desde entonces se ha conocido como "principio variacional". Al formular la ley de la reflexión afirmó:



La trayectoria real de la luz al ir de un punto S a un punto P pasando por una superficie reflectora es la más corta posible.

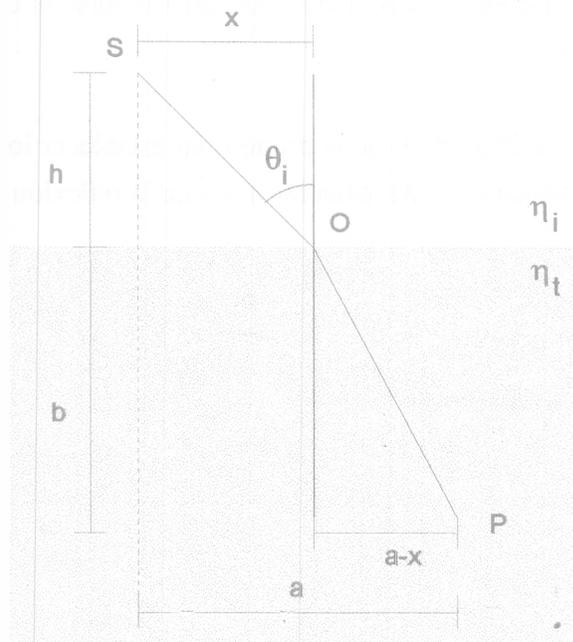
De la figura observamos que sólo una de las trayectorias será real físicamente. La trayectoria más corta es: $S'BP = SBP$, que corresponde a $\theta_i = \theta_r$ y que es la más corta posible. Este razonamiento hace evidente que los tres puntos S, B y P deben estar en el ya definido plano de incidencia.

Estas observaciones hechas por Hero permanecieron en el olvido poco más de 1500 años, hasta que en 1657 Fermat propuso el "principio del tiempo mínimo" que incluía tanto la reflexión como la refracción.

Es evidente que un haz de luz que atraviesa una interfase no sigue una recta o trayectoria espacial mínima, entre un punto en el medio de incidencia y otro en el medio de transmisión, Fermat entonces enunció lo siguiente:

La trayectoria real entre dos puntos que toma un haz de luz es aquella que es recorrida en el menor tiempo.

Esta afirmación es un poco incompleta y un tanto equivocada, pero por el momento considérese. La siguiente figura explica el principio de Fermat.



A partir de la figura se obtendrá el tiempo de tránsito de S a P en función de "x", y por lo anterior se deduce que el menor tiempo coincidirá con la trayectoria real. Entonces se tiene:

$$t = \frac{SO}{v_i} + \frac{OP}{v_t} = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{b^2 + (a-x)^2}}{v_t} = \frac{(h^2 + x^2)^{1/2}}{v_i} + \frac{[b^2 + (a-x)^2]^{1/2}}{v_t}$$

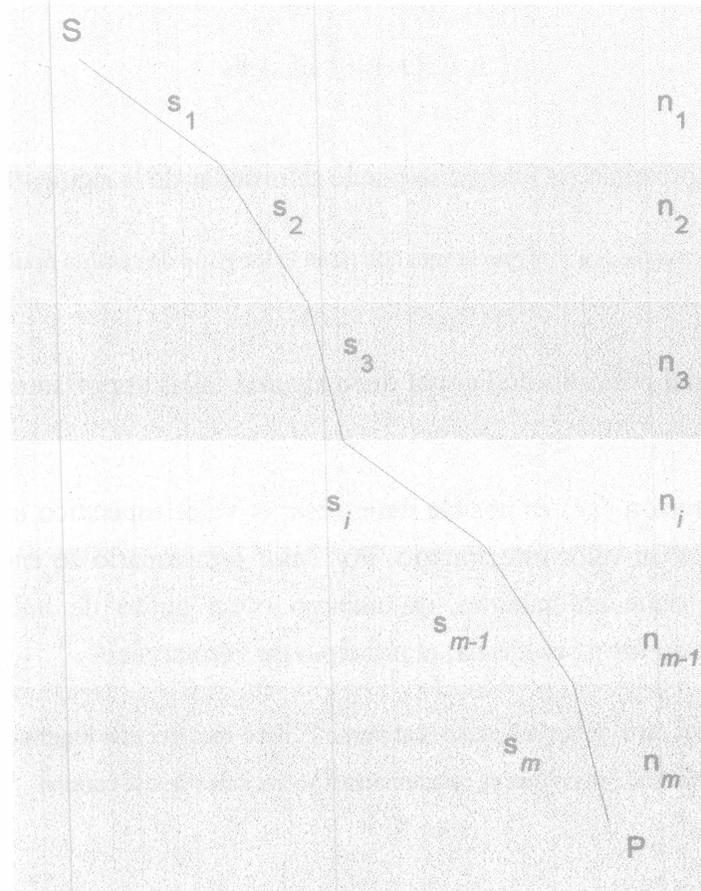
Para minimizar $t(x)$ con respecto a las variaciones en x se calcula la derivada de t con respecto a x y se iguala a cero.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i(h^2 + x^2)^{1/2}} + \frac{-(a-x)}{v_t[b^2 + (a-x)^2]^{1/2}} = 0$$

analizando esta última expresión y la gráfica anterior se obtiene la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\theta_i}{v_i} = \frac{\text{sen}\theta_t}{v_t}$$

De lo anterior se concluye que si un haz de luz debe ir de S a P en el tiempo mínimo posible, debe satisfacer la ley empírica de la refracción. Si se considera un material estratificado compuesto de m capas cada una con un índice de refracción diferente como el siguiente:



Rayo propagándose a través de un material de capas.

El tiempo de propagación de S a P está dado por: $t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_m}{v_m} = \sum_{i=1}^m \frac{s_i}{v_i}$

donde s_i y v_i son las longitudes de las trayectorias y las velocidades asociadas con la contribución i ésima, entonces:

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m n_i s_i$$

en la expresión anterior la sumatoria se conoce como longitud de camino óptico (L.C.O.) atravesado por el rayo. Esto difiere de la longitud de camino espacial:

$$\sum_{i=1}^m s_i$$

es claro que para un medio no homogéneo donde "n" es una función de la posición, la expresión esta dada por:

$$(L.C.O.) = \int_S^P n(s) ds$$

Como $t=(L.C.O.)/c$ el principio de Fermat se puede reformular de la siguiente forma:

La luz, al ir de los puntos S a P, sigue la ruta que tiene la longitud de camino óptico más pequeña.

La afirmación original del principio de Fermat tiene algunas fallas importantes por lo cual debe ser alterado.

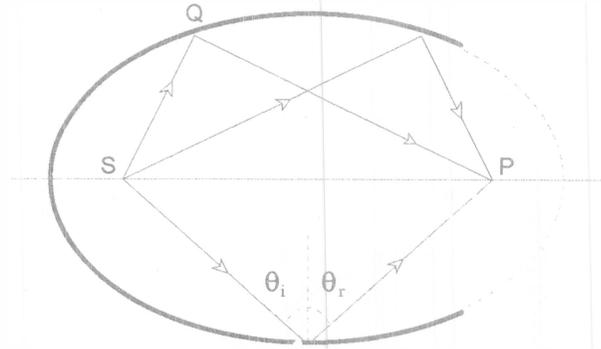
Cuando se tiene una función $f(x)$ es posible determinar el valor específico que toma la variable x que hace que $f(x)$ tenga un valor estacionario. Por valor estacionario se entiende aquel valor en que $f'(x)=0$, es decir, tiene un máximo, un mínimo o un punto de inflexión con pendiente horizontal. Entonces en su forma moderna, el principio de Fermat dice:

Al ir un rayo de luz del punto S al punto P, debe recorrer una longitud de camino óptico que es estacionaria a variaciones de ese camino.

Esto significa que la L.C.O. para la trayectoria verdadera será igual, en primera aproximación, a la L.C.O. de las trayectorias inmediatamente adyacentes a ella (la primera derivada de la L.C.O. se anula en su desarrollo en serie de Taylor ya que el camino es estacionario). Si un haz de luz se desplaza a través de un medio isotrópico homogéneo (recuérdese que un medio isotrópico es aquel cuyas propiedades son las mismas en todas direcciones) entre dos puntos, de S a P, por ejemplo, los átomos dentro del material serán impulsados por el disturbio incidente y reirradiarán en todas las direcciones.

En general, las onditas que se originan en la vecindad inmediata de una trayectoria estacionaria llegarán a P por rutas que difieren sólo ligeramente y, por lo tanto se reforzaran unas a otras. Las

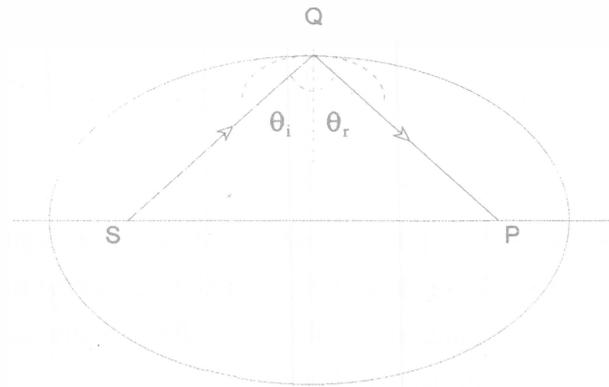
onditas que toman otros caminos llegarán a P fuera de fase y por consiguiente tenderán a anularse unas con otras. Siendo ese el caso, la energía se propagará efectivamente a lo largo del rayo de S a P que satisface el principio de Fermat. Para mostrar que la L.C.O. para un rayo no siempre necesita ser un mínimo, examinemos la siguiente figura en que se muestra un segmento de espejo elipsoidal tridimensional hueco.



S y P son los focos de la elipsoide, entonces por definición la distancia SQP es constante independientemente de la variación en la posición de Q sobre el perímetro, además, una propiedad geométrica de la elipse es que $\theta_i = \theta_r$ para cualquier ubicación de Q. Todos los caminos ópticos de S a P son iguales, de donde ninguno es un mínimo. En consecuencia se tiene una L.C.O. estacionaria con respecto a las

variaciones en la posición de Q sobre el perímetro de la superficie de la elipsoide.

Desde otro punto de vista se puede afirmar que la energía radiante emitida por S será esparcida por electrones de la superficie pulida, de modo que las onditas se reforzarán unas a otras en P, hasta donde habrán viajado la misma distancia y tendrán la misma fase.

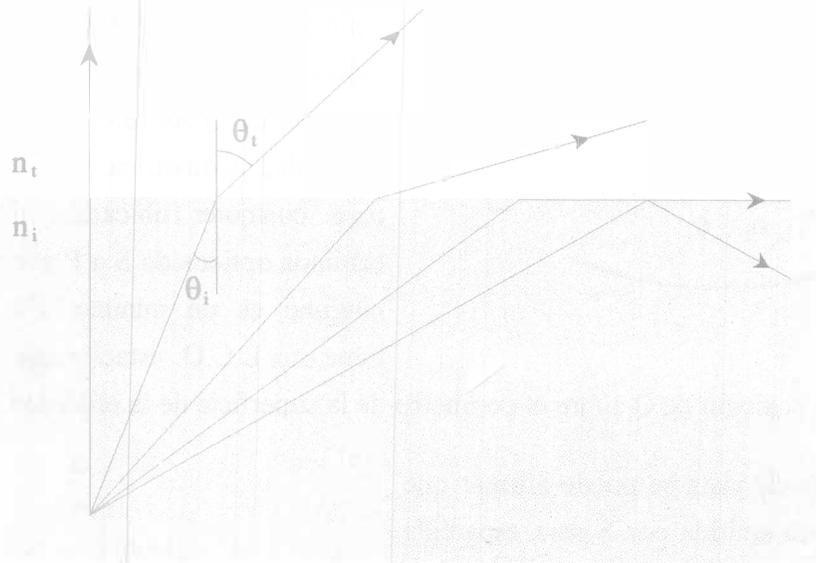


En cualquier caso, si hubiera un espejo plano tangente a la elipse en Q la misma trayectoria exacta SQP recorrida por el rayo sería entonces un mínimo relativo. Por el contrario, si la superficie pulida tuviera el perfil de una curva dentro de la elipse, como la que se muestra en la anterior figura, el mismo rayo SQP tendría un máximo relativo de la L.C.O.

Esto es cierto aunque las curvas donde $\theta_i \neq \theta_r$ son en realidad más cortas. Obsérvese que ya que el principio habla sólo de la trayectoria y no de la dirección a lo largo de ella, al ir un rayo de P a S trazará la misma ruta que uno de S a P. Este es el principio de la reversibilidad.

REFLEXIÓN TOTAL INTERNA

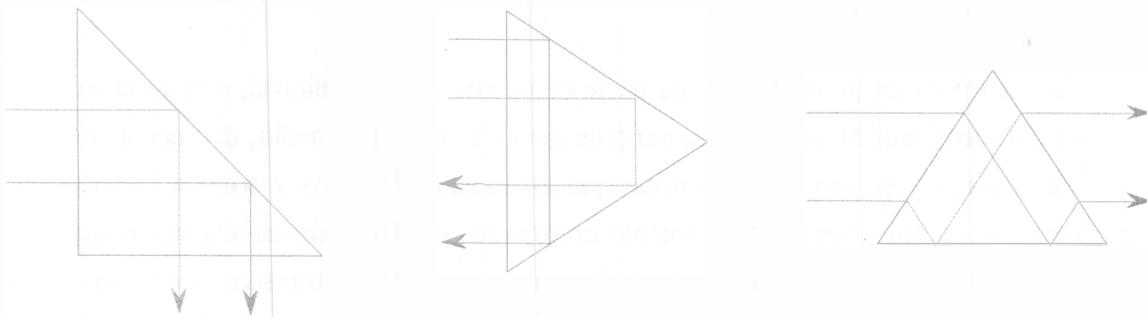
Un fenómeno interesante, denominado reflexión total interna, puede ocurrir cuando la luz viaja de un medio ópticamente más denso a otro menos denso, es decir, $n_i > n_t$.



El valor de θ_i para el cual $\theta_t = 90^\circ$ se llama ángulo crítico θ_c . Como se observa en la figura, el rayo transmitido se aleja de la normal, y conforme aumenta θ_i aumenta θ_t ($\theta_t \rightarrow 90^\circ$), para valores $\theta_i > \theta_c$ ocurre la reflexión total interna. Para determinar el valor del ángulo límite θ_c se puede emplear la ley de refracción de Snell:

$$\theta_c = \text{ang sen } \frac{n_t}{n_i}$$

Se observa que la expresión anterior sólo se puede emplear en el caso de que $n_i > n_t$ ya que para $n_i < n_t$ los resultados matemáticos son absurdos. Una aplicación muy importante de la reflexión total interna está en el empleo de fibras ópticas para comunicaciones y en diversos aparatos ópticos que emplean prismas, como son: telescopios, microscopios, binoculares, espectroscopios, cámaras fotográficas, etc.



Prismas de reflexión interna utilizados en instrumentos ópticos.

Intensidad de la Luz.

Para determinar la cantidad de luz reflejada y/o refractada en términos de energía transportada por un rayo de luz incidente, se encuentra que la fracción de luz reflejada y transmitida depende de los índices de refracción de los medios y del ángulo de incidencia.

Las expresiones necesarias para esto se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera. Por el momento sólo se dará una explicación cualitativa de los factores que afectan las intensidades relativas.

Sea I_0 , I_r e I_t las intensidades de luz de los rayos: incidente, reflejado y transmitido, respectivamente. Y además supóngase que el haz incidente es muy cercano a la normal de la frontera entre los medios, entonces se tiene:

$$I_r = \left(\frac{n_t - n_i}{n_i + n_t} \right)^2 I_0 \quad I_t = \frac{4 n_i n_t}{(n_i + n_t)^2} I_0$$

Estas expresiones son conocidas como ecuaciones de Fresnel, permiten conocer la intensidad luminosa reflejada y transmitida a partir del conocimiento de los índices de refracción y de la intensidad luminosa incidente. Cuando θ_i no es muy pequeño las expresiones anteriores se complican e incluyen a θ_i y θ_t .

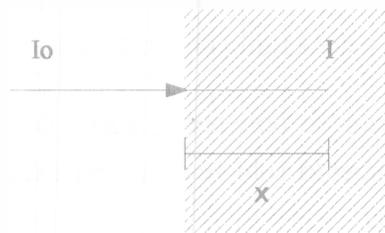
Nótese que para la incidencia normal y $n_i = n_t$ se tiene $I_r = 0$ e $I_t = I_0$, es decir, no se refleja luz, ya que no existe frontera.

Si $n_i \gg n_t$ se encuentra que $I_r \approx 1$ e $I_t \approx 0$, que indica que la mayor parte de la luz se refleja y que se trata de una superficie metálica y pulida. Por otra parte, se tiene por el principio de conservación de la energía que $I_0 = I_r + I_t$.

Absorción de la luz transmitida.

La luz al viajar a través de un medio pierde parte de su intensidad luminosa, ésta es absorbida por el medio; en consecuencia, al aumentar la penetración de la luz en el medio, decrece su intensidad. En el aire la absorción es pequeña, mientras que en muchos líquidos y sólidos la absorción es bastante significativa. En objetos intensamente coloreados la absorción es altamente significativa en ciertas longitudes de onda visibles, mientras que en un material transparente la absorción es muy débil en la región visible. La energía absorbida por el material se transfiere continuamente como energía térmica de átomos y moléculas, pero el mecanismo específico de absorción puede ser muy complejo.

Supóngase un rayo de luz de intensidad I_0 que incide normalmente sobre un material, se desea conocer la intensidad de luz transmitida I , después de recorrer una distancia "x" en el material.



Suponiendo que el cambio de intensidad luminosa ΔI para una distancia Δx recorrida por la luz es proporcional a la intensidad de la luz y la distancia Δx , es decir:

$$\Delta I = -\alpha I \Delta x$$

donde α es la constante de proporcionalidad denominada coeficiente de absorción del medio, el signo menos indica un decremento en intensidad con incremento de profundidad. En el límite de las pequeñas profundidades se tiene que $\Delta x \rightarrow dx$ y $\Delta I \rightarrow dI$ y entonces:

$$\frac{dI}{I} = -\alpha dx$$

resolviendo por integración y considerando $x=0$ en la frontera y $I=I_0$:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

Recuérdese que α es una función de la longitud de onda y por esto se debe tener precaución al emplearla. Cuando se estudió el efecto pelicular o Kelvin se vio esto mismo desde el enfoque de la teoría electromagnética.

RELACIÓN DE ONDA ESTACIONARIA

Al pasar una onda de un medio a otro, puede o no presentarse un fenómeno de reflexión en la frontera de los dos medios, es decir, parte la onda viajera incidente es absorbida hacia el nuevo medio y parte es rechazada.

Hasta el momento se ha realizado el análisis de una sola onda viajera, ya sea en sentido positivo o negativo. Para hacer el estudio de la onda estacionaria, se debe considerar el caso de dos ondas que viajan en la misma dirección, pero en sentidos opuestos. Supóngase el caso de dos ondas son de la misma frecuencia y de forma senoidal, este par de condiciones se satisface si una de las ondas es la reflexión de la otra, es decir, permanecen en el mismo medio.



De la figura anterior se puede establecer fácilmente la ecuación de la onda incidente (E_{y0}) y la de la onda reflejada (E_{y1}):

$$E_{y0}(x, t) = E_0 e^{j(\omega t + \beta x)}$$

$$E_{y1}(x, t) = E_1 e^{j(\omega t - \beta x + \delta)}$$

E_0 y E_1 son las amplitudes de la onda incidente y de la onda reflejada, respectivamente; δ es el adelanto de fase en el tiempo de (E_{y1}) respecto a (E_{y0}) en $x=0$, es decir, δ es el corrimiento de fase en el punto de reflexión. El campo eléctrico total está dado por:

$$E_y = E_{y0} + E_{y1}$$

El valor instantáneo se obtiene considerando la parte real o la parte imaginaria, por ejemplo, considerando la parte imaginaria:

$$E_y = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \beta x) + E_1 \operatorname{sen}(\omega t - \beta x + \delta)$$

Si $\delta = 0$ ó 180° y recordando la identidad trigonométrica $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a)\cos(b) \pm \cos(a)\text{sen}(b)$ la ecuación anterior puede desarrollarse de la siguiente forma:

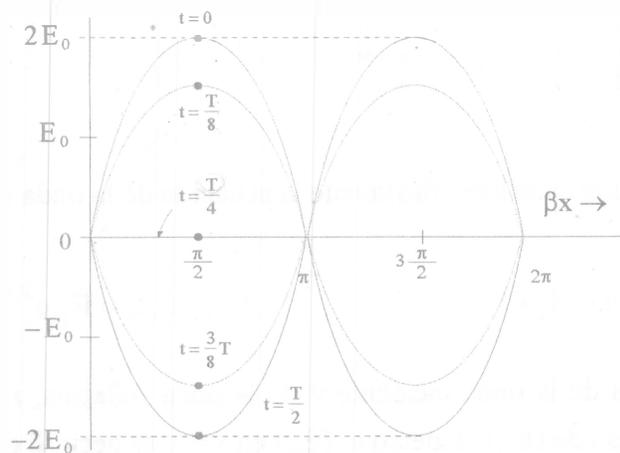
$$E_y = E_0 \text{sen}(\omega t) \cos(\beta x) + E_0 \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x) + E_1 \text{sen}(\omega t) \cos(\beta x) - E_1 \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x)$$

$$E_y = (E_0 + E_1) \text{sen}(\omega t) \cos(\beta x) + (E_0 - E_1) \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x)$$

Si el medio 2 es un conductor perfecto, la onda reflejada es igual en magnitud a la onda incidente. En $x=0$ se considera la relación de frontera para la componente tangencial de campo E, entonces $E_y=0$ lo que implica que $E_1 = -E_0$ cuando $\delta = 180^\circ$. Finalmente se tiene que:

$$E_y = 2E_0 \cos(\omega t) \text{sen}(\beta x)$$

Esta ecuación es la representación matemática de una onda estacionaria en el espacio. Obsérvese cuidadosamente que los valores de E_y en un instante particular son una función coseno de "x", mientras que los valores instantáneos en un punto particular son función cosenoidal de "t", el valor pico de la onda es la suma de los valores pico de la onda reflejada y de la onda incidente. Una onda estacionaria de este tipo se le denomina onda estacionaria pura y se caracteriza porque $|E_1| = |E_0|$.



En la figura se muestran las variaciones de E_y en el espacio y en el tiempo para una onda estacionaria pura.

Obsérvese que un punto de fase constante como el punto P, no se mueve en la dirección de "x", permanece en una posición fija conforme transcurre el tiempo.

¿Qué sucede cuando la onda reflejada es menor que la onda incidente?

Por ejemplo, si la onda reflejada fuera la mitad de la onda incidente, entonces $E_1 = -0.5E_0$. Los valores pico en función de "x" en un intervalo de tiempo mayor a un ciclo corresponden a la envolvente, ésta permanece estacionaria, pero el interés está en el punto "P" de fase constante. Obsérvese que la onda instantánea total viaja hacia la izquierda y que la velocidad con la que se mueve el punto "P" no es constante.

La velocidad promedio del punto de fase constante es la misma que para la onda viajera pura, pero su magnitud instantánea varía.

Entonces se tienen dos ondas E_y que viajen en sentidos opuestos en la dirección de "x", la que viaja en sentido positivo tiene la mitad de la amplitud de la que viaja a la izquierda, estas dos ondas se refuerzan mutuamente en algunos puntos y en otros se anulan entre sí, la onda resultante viaja en el sentido positivo de "x".

En cualquier posición βx es valor máximo del campo en algún momento durante el ciclo es igual al valor de la ordenada de la envolvente. Ahora se determina el valor de la envolvente de la onda estacionaria.

Partiendo E_y :

$$E_y = (E_0 + E_1) \sin(\omega t) \cos(\beta x) + (E_0 - E_1) \cos(\omega t) \sin(\beta x)$$

se hace:

$$A = (E_0 + E_1) \cos(\beta x) \quad B = (E_0 - E_1) \sin(\beta x)$$

que conduce a:

$$E_y = \sin(\omega t + \beta x) \sqrt{A^2 + B^2}$$

sustituyendo A y B:

$$E_y = \sin(\omega t + \beta x) \sqrt{(E_0 + E_1)^2 \cos^2(\beta x) + (E_0 - E_1)^2 \sin^2(\beta x)}$$

Cuando $\sin(\omega t + \beta x) = 1$ se alcanza el valor máximo de E_y en alguna posición βx dentro de un intervalo de al menos un periodo; entonces:

$$E_{y \text{ máx}} = \sqrt{(E_0 + E_1)^2 \cos^2(\beta x) + (E_0 - E_1)^2 \sin^2(\beta x)}$$

La forma de la envolvente de la onda estacionaria no es de mucho interés, pero la razón de los valores mínimo al máximo de ésta sí, ya que proporciona más información.

A este cociente se le conoce como *relación o razón de onda estacionaria* (ROE) en inglés *standing wave ratio* (SWR). La tensión o potencial a cualquier distancia "x" será proporcional al campo, en ese caso la ROE se puede manejar como *razón de onda estacionaria de tensión* (ROET) cuyas siglas en inglés son VSWR. El valor máximo de la envolvente corresponde a $(E_0 + E_1)$ y el mínimo a $(E_0 - E_1)$, esta información permite determinar la porción de onda reflejada y transmitida, también permite determinar las condiciones del punto de reflexión.

$$\text{ROET ó VSWR} = \frac{E_{\text{máx}}}{E_{\text{mín}}} = \frac{E_0 + E_1}{E_0 - E_1}$$

De la ecuación es claro que si no existe onda reflejada ($E_1=0$) entonces la relación de onda estacionaria será igual a la unidad ($\text{VSWR}=1$), pero si $E_1=E_0$ entonces la razón de onda estacionaria será infinita ($\text{VSWR} \rightarrow \infty$). por lo tanto, todos los valores intermedios de la ROET se encuentran en el intervalo de uno a infinito $[1, \infty)$.

En la frontera o punto de reflexión ($x=0$) y en el instante $t=0$ el coeficiente de reflexión está dado por la razón de la onda reflejada a la onda incidente:

$$\rho = \frac{E_{y1}}{E_{y0}} = \frac{E_1 e^{j\delta}}{E_0} = \frac{E_1 \angle \delta}{E_0} = \rho \angle \delta$$

La magnitud de ρ va de 0 a 1 con ángulos de fase entre 0° y $\pm 180^\circ$.

Con estas consideraciones se puede expresar el VSWR en función de ρ :

$$\text{VSWR} = \frac{1 + \frac{E_1}{E_0}}{1 - \frac{E_1}{E_0}} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

También se puede tener a ρ expresado en términos del VSWR:

$$|\rho| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1}$$

Todo lo que se ha explicado del VSWR no sólo es aplicable a ondas sino también a ondas en líneas de transmisión, sólo siendo necesario reemplazar el campo E por la tensión de la línea de transmisión V.

Impedancia de Entrada de Medios.

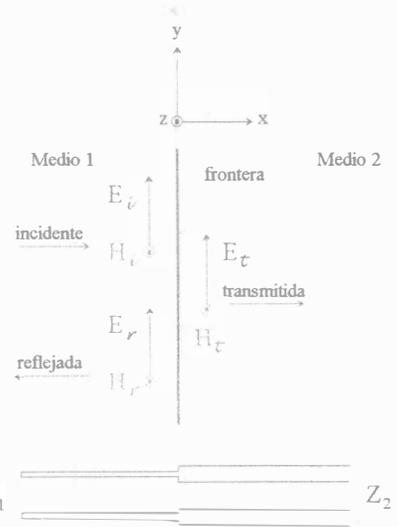
La figura muestra una onda plana que incide perpendicularmente en la frontera de dos medios y una línea de transmisión análoga.

Por la continuidad de las componentes tangenciales de campo en la frontera, se tiene:

$$E_i + E_r = E_t \quad H_i + H_r = H_t \quad (a)$$

Por medio de la impedancia intrínseca se pueden relacionar los campos eléctrico y magnético:

$$Z_1 = \frac{E_i}{H_i} \quad -Z_1 = \frac{E_r}{H_r} \quad Z_2 = \frac{E_t}{H_t} \quad (b)$$



La impedancia de la onda reflejada se toma como negativa por viajar en sentido negativo de las "x":

$$H_t = \frac{E_t}{Z_2} = \frac{E_i}{Z_1} - \frac{E_r}{Z_1} \quad E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i - \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (c)$$

Multiplicando la expresión para el campo eléctrico de la ecuación (a) por Z_2/Z_1 , se tiene:

$$\frac{Z_2}{Z_1} (E_i + E_r) = \frac{Z_2}{Z_1} E_t \Rightarrow \frac{Z_2}{Z_1} E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (d)$$

Sumando (c) y (d):

$$\left[E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i - \frac{Z_2}{Z_1} E_r \right] + \left[\frac{Z_2}{Z_1} E_t = \frac{Z_2}{Z_1} E_i + \frac{Z_2}{Z_1} E_r \right] = \quad (e)$$

$$E_t \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_i \quad (f)$$

$$E_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} E_i = TE_i \quad (g)$$

"T" es el coeficiente de transmisión, esto se verifica fácilmente:

$$T = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Restando (c) de (d), se tiene:

$$E_t \left(\frac{Z_2}{Z_1} - 1 \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_r \quad (i)$$

Si se sustituye E_t de la ecuación (g) en la ecuación (i), y despejando E_r , se tiene:

$$E_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} E_i = R E_i \quad (j)$$

"R" es el coeficiente de reflexión, y se verifica fácilmente:

$$R = \frac{E_r}{E_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (k)$$

De lo anterior se obtiene fácilmente que $T = R + 1$, esto se deja al lector como ejercicio.

Caso 1. Suponiendo que el medio 1 es el aire y el medio 2 es un conductor, de modo que $Z_1 \gg Z_2$, de la ecuación (g) se tiene la relación aproximada:

$$E_t \approx 2 \frac{Z_2}{Z_1} E_i$$

Pero de la ecuación (b) se tiene que:

$$H_t Z_2 \approx 2 \frac{Z_2}{Z_1} H_i Z_1 \quad \Rightarrow \quad H_t \approx 2 H_i$$

Se concluye entonces que cuando una onda plana en el aire que incide perpendicularmente en un medio conductor, se obtiene en la frontera un campo magnético casi del doble en intensidad. También se encuentra que $H_r \approx H_i$, de manera que a la izquierda de la frontera existe una onda estacionaria casi pura.

Caso 2. Suponiendo que el medio 1 es el conductor y el medio 2 es el aire, de modo que ahora $Z_1 \ll Z_2$, de la ecuación (g) se tiene la relación aproximada:

$$E_t \approx 2 E_i$$

De esto se concluye que para una onda plana que deja un conductor, el campo eléctrico casi se duplica en la frontera. Se obtiene que $E_r \approx E_i$, de manera que existe una onda estacionaria casi pura (ROET = ∞) en el medio 1). No obstante, debido a la atenuación de las ondas en el medio 1 la ROET disminuye rápidamente al alejarse de la frontera (hacia la izquierda).

Caso 3. Suponiendo $Z_1 \gg Z_2$ y considerando el medio 1 el aire, y el medio 2 es un conductor perfecto ($Z_2=0$), en consecuencia de la expresión (k) $R=-1$ y por la expresión $T=R+1$ el coeficiente de transmisión es cero $T=0$. Por lo tanto, la onda es totalmente reflejada y no se transmite campo al segundo medio, por lo que el campo en la frontera se duplica exactamente al alejarse de la frontera ($E_r=-E_i$ y $H_r=H_i$), esto es análogo a una línea de transmisión en corto circuito.

Caso 4. Suponiendo $Z_1 \ll Z_2$ y considerando que Z_2 es infinita, de la ecuación (k) $R=+1$ y por la expresión $T=R+1$ el coeficiente de transmisión es cero $T=2$. Por lo tanto, hay reflexión total de la onda, pero $E_r=+E_i$, esto indica que en la frontera la intensidad de campo eléctrico se duplica exactamente, esto es análogo a una línea de transmisión en circuito abierto.

Caso 5. Suponiendo que los dos medios son dieléctricos ferromagnéticos sin pérdidas ($\mu_1=\mu_2=\mu_0$), de las ecuaciones (k) y (h) se deduce, respectivamente:

$$R = \frac{\sqrt{\epsilon_1 \epsilon_2} - 1}{\sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2} + 1} \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1}}$$

Caso 6. Si $Z_1=Z_2$, entonces $R=0$ y $T=1$ lo que indica que la onda se propaga en el medio 2 sin reflejarse, esto es semejante a una línea de transmisión continua con una impedancia característica uniforme.

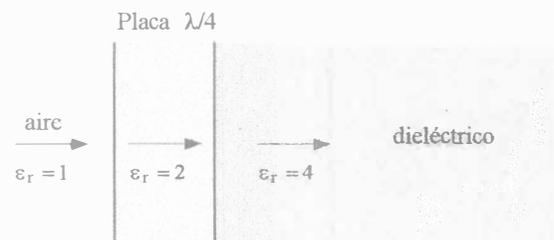
Placa $\lambda/4$. Es una capa que elimina reflejos en lentes y prismas en cámaras, binoculares, telescopios y otros dispositivos ópticos para mejorar su eficiencia.

La impedancia intrínseca de la placa está dada por:

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2}$$

Z_0 es la impedancia intrínseca del aire.

Z_2 es la impedancia intrínseca del dieléctrico.



En el presente caso:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.7 \Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{Z_0 Z_2} = 266 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{376.7}{\sqrt{4}} = 188 \Omega$$

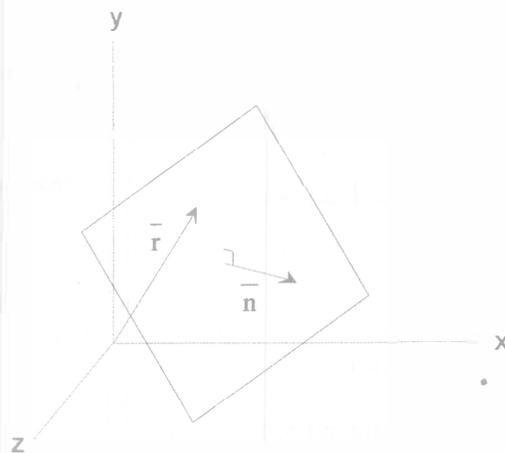
$$\epsilon_r = \frac{Z_0}{Z_2} = 2$$

INCIDENCIA OBLICUA Y ANÁLISIS ELECTROMAGNÉTICO

Hasta ahora se han deducido y estudiado las leyes de reflexión y refracción empleando tres puntos de vista diferentes: el principio de Huygens, el teorema de Malus y Dupin y el principio de Fermat. Otro enfoque aún más poderoso es el de la teoría electromagnética de la luz, que en contraste con las técnicas anteriores, considera las densidades de flujo radiante incidente, reflejado y transmitido dentro de un contexto de la matemática vectorial y los conceptos antes descritos a lo largo de este capítulo.

Anteriormente se mencionó que cuando una onda atraviesa la separación entre dos medios de distintas características, la energía de la O.E.M. proveniente del primer medio se divide en dos, una parte se transmite a través del segundo medio y la otra se refleja regresándose por el primer medio. Si el segundo medio es conductor, sólo una pequeña parte de la energía de la onda incidente penetra al conductor propagándose la mayor parte de la energía en la onda reflejada. Por otra parte, vimos que una influencia que el medio puede ejercer en la propagación de una O.E.M. es la de absorber la energía de ésta (dispersión).

En la siguiente figura se tiene un plano que constituye un frente de O.E.M. plana de fase constante con sentido de propagación en la dirección del vector normal al plano (vector de Poynting). La forma escalar del plano está dada por $Ax+By+Cz=k$.



Las expresiones vectoriales para el vector de posición y para el vector normal al plano son:

$$\vec{r} = x_r \hat{i} + y_r \hat{j} + z_r \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{n} = x_n \hat{i} + y_n \hat{j} + z_n \hat{k}$$

donde el vector normal se puede expresar:

$$\vec{n} = \hat{i} \cos A + \hat{j} \cos B + \hat{k} \cos C$$

realizando el producto punto obtenemos:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = x_r x_n + y_r y_n + z_r z_n = \text{cte.}$$

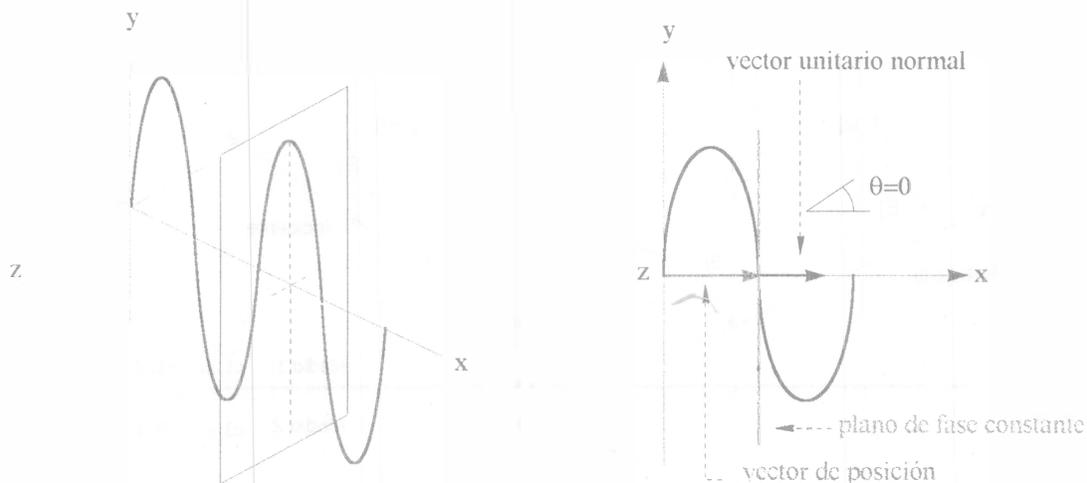
$$\vec{r} \cdot \vec{n} = x_r \cos A + y_r \cos B + z_r \cos C = \text{cte.}$$

Entonces para cualquier medio una onda queda expresada de la siguiente forma:

$$E(x, y, z, t) = E e^{\gamma(\vec{r} \cdot \vec{n})} = E e^{\gamma(x \cos A + y \cos B + z \cos C)}$$

Recuérdese que una onda electromagnética queda completamente definida al expresarse en función de las propiedades del medio de propagación y de la frecuencia, además sabemos que $\gamma = \alpha \pm j\beta$ en donde γ es la constante de propagación, α es la constante de atenuación o amortiguamiento que representa las propiedades del medio y β es la constante de fase. Por lo tanto para una onda en el espacio libre se tiene:

$$E(x, y, z, t) = E e^{-j\beta(\vec{r} \cdot \vec{n})} = E e^{-j\beta(x \cos A + y \cos B + z \cos C)}$$



Para una onda electromagnética plana que se propaga en la dirección indicada en la figura anterior se tiene:

$$E(x, y, z, t) = E e^{-j\beta(\vec{r} \cdot \vec{n})} = E e^{-j\beta \left(\overbrace{x \cos A}^1 + \overbrace{y \cos B}^0 + \overbrace{z \cos C}^0 \right)}$$

$$\vec{r} = x_r \hat{i} \quad \vec{n} = \cos 0^\circ \hat{i}$$

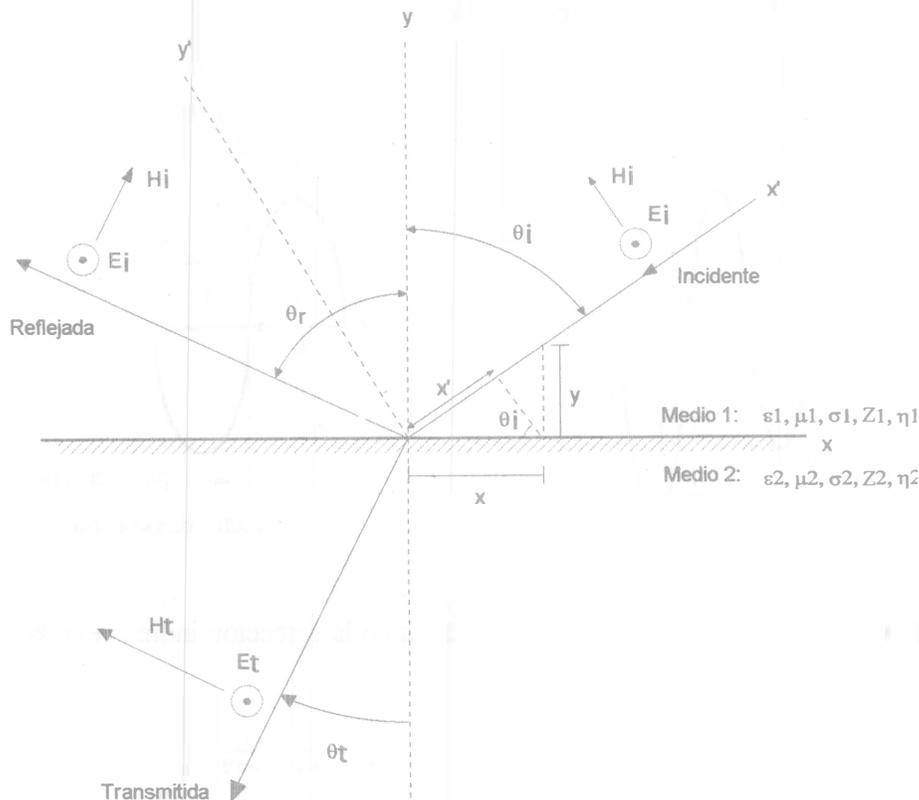
$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{r} = x_r \hat{i} \hat{i} = x_r$$

De lo anterior se observa claramente que el resultado del producto punto de los dos vectores es un valor constante, es decir, un plano.

Es importante mencionar que todo medio está caracterizado por constantes primarias: la permeabilidad magnética (μ), la permitividad eléctrica (ϵ), la conductividad (σ); y constantes secundarias: la constante de atenuación (α), la constante de fase (β) y la impedancia característica (η). Estas constantes permiten conocer el comportamiento de la luz en distintos medios.

Análisis de Incidencia Oblicua.

Considérese una onda plana polarizada linealmente (onda plana uniforme), que incide oblicuamente en la frontera entre dos medios, tal como se muestra en la siguiente gráfica. La onda incidente (desde el medio 1) forma un ángulo θ_i con el eje "Y", la onda reflejada (hacia el medio 1) forma un ángulo θ_r con el eje "Y", y la onda transmitida* forma un ángulo θ_t con la parte negativa del eje "Y".



Geometría en el plano de incidencia (plano XY) para una onda linealmente polarizada con incidencia oblicua y polarización perpendicular. La dirección Z es hacia afuera de la página.

* La onda transmitida también es llamada "onda refractada". De aquí que θ_t es llamado "ángulo de refracción".

Se consideran dos casos por el tipo de polarización:

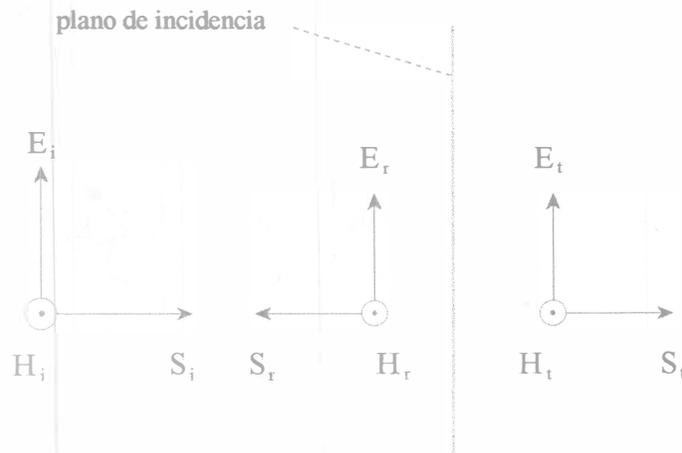
- el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia (el plano xy de la página) y se dice entonces que hay polarización perpendicular
- el campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, en este caso se dice que las ondas están polarizadas paralelamente

En la gráfica anterior se muestran los vectores de campo para el primer caso (polarización perpendicular).

Recuérdese que una onda plana arbitraria cualquiera se puede resolver por componentes perpendiculares y paralelas.

Análisis de Incidencia Normal.

Una O.E.M. presenta incidencia normal cuando choca de un medio 1 a un medio 2 en forma perpendicular a la frontera o superficie de incidencia.



El sentido de propagación de la onda (+x) es perpendicular a la frontera entre los dos medios

en la figura anterior se observa que tanto el vector de campo eléctrico como el vector de campo magnético, no tienen componentes normales.

Análisis de ondas en una Interfase.

Supóngase una onda de luz monocromática incidente plana dada por la expresión:

$$E_i = E_{0i} e^{[i(k_i \cdot r - \omega_i t)]}$$

o más simplemente

$$E_i = E_{0i} \cos(k_i \cdot r - \omega_i t)$$

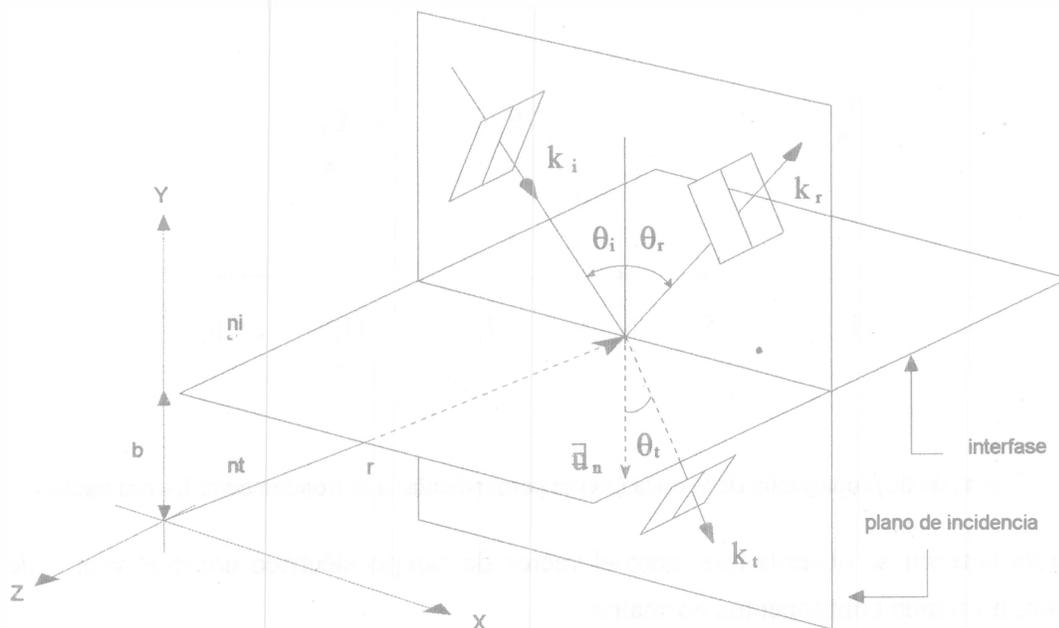
Si E_{0i} es constante en el tiempo, entonces la onda es linealmente polarizada o polarizada en un plano.

El origen en el tiempo y el origen en el espacio, son arbitrarios, por lo tanto se puede seleccionar $t=0$ y $r=0$. Sin hacer suposiciones sobre sus direcciones, frecuencias, longitudes de onda, fases o amplitudes, se obtienen las ondas reflejada y transmitida como

$$E_r = E_{0r} \cos(k_r \cdot r - \omega_r t + \phi_r)$$

$$E_t = E_{0t} \cos(k_t \cdot r - \omega_t t + \phi_t)$$

ϕ_r y ϕ_t son constantes de fase relativas a E_i que se introducen debido a que la posición del origen no es única.



Las leyes de la teoría electromagnética conducen a ciertos requisitos que deben satisfacer los campos, estos requisitos son las condiciones de frontera. Específicamente, uno de los requisitos es que la componente de la intensidad de campo eléctrico E (que es tangente a la interfase), debe ser continua a través de ella, lo mismo es cierto para H . En otras palabras, la componente tangencial total de E en un lado de la superficie debe ser igual a la del otro lado. entonces se tiene:

$$\hat{u}_n \times E_i + \hat{u}_n \times E_r = \hat{u}_n \times E_t$$

de donde se obtiene

$$\hat{u}_n \times E_{0i} \cos(k_i \cdot r - \omega_i t) + \hat{u}_n \times E_{0r} \cos(k_r \cdot r - \omega_r t + \phi_r) = \hat{u}_n \times E_{0t} \cos(k_t \cdot r - \omega_t t + \phi_t) \quad (A)$$

En cualquier instante, esta relación debe mantenerse constante y en todo punto de la interfase ($y=b$), en consecuencia E_i , E_r y E_t deben tener la misma dependencia funcional de las variables t y r , es decir:

$$(k_i \cdot r - \omega_i t) \Big|_{y=b} = (k_r \cdot r - \omega_r t + \phi_r) \Big|_{y=b} = (k_t \cdot r - \omega_t t + \phi_t) \Big|_{y=b}$$

con esto los cosenos de las ecuación A se anularían dejando una expresión independiente de t y r , como en efecto debe ser. Como esto debe cumplirse para todo valor de t , los coeficientes de t deben ser iguales, obteniéndose

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Recuérdese que los electrones dentro del medio están sujetos a vibraciones forzadas (lineales) a la frecuencia de la onda incidente. Claramente, cualquier luz que sea esparcida tiene la misma frecuencia; además, considerando que r termina en la interfase, se tiene

$$(k_i \cdot r) \Big|_{y=b} = (k_r \cdot r + \phi_r) \Big|_{y=b} = (k_t \cdot r + \phi_t) \Big|_{y=b} \quad (B)$$

Los valores de ϕ_r y de ϕ_t corresponden a una posición dada de O y entonces ellos permiten que la relación sea válida independientemente de esa ubicación; por ejemplo, si se selecciona r de tal modo que r fuera perpendicular a k_i pero no a k_r o a k_t .

De los dos primeros términos de la ecuación B se obtiene:

$$\left[(k_i - k_r) \cdot r \right]_{y=b} = \phi_r$$

recordando que la ecuación de un plano perpendicular a un vector k es

$$k \cdot r = \text{constante} = a$$

expresión que indica que el punto extremo de r barre un plano (que es por supuesto la interfase) perpendicular al vector $(k_i - k_r)$, es decir, el vector $(k_i - k_r)$ es paralelo al vector unitario \hat{u}_n . Sin embargo, ya que las ondas reflejada e incidente están en el mismo medio, $k_i = k_r$. Como $(k_i - k_r)$ no tiene componente en el plano de la interfase, es decir, $\hat{u}_n \times (k_i - k_r) = 0$, se concluye que

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_r \operatorname{sen} \theta_r$$

de donde obtenemos la ley de reflexión

$$\theta_i = \theta_r$$

Además, como $(k_i - k_r)$ es también paralelo a \hat{u}_n , los tres vectores k_i , k_r y \hat{u}_n están en el mismo plano, que es el plano de incidencia. De la ecuación B se tiene

$$\left[(k_i - k_r) \cdot r \right]_{y=b} = \phi_i$$

por lo tanto $(k_i - k_r)$ también es normal a la interfase. Entonces k_i , k_r , k_t y \hat{u}_n son todas coplanares. Como antes, las componentes tangenciales de k_i y k_t deben ser iguales y entonces

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_t \operatorname{sen} \theta_t$$

pero como $\omega_i = \omega_t$, se puede multiplicar ambos lados por c/ω_i para obtener la ley de Snell

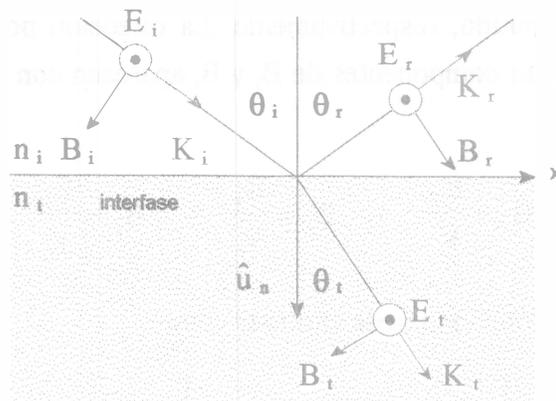
$$n_i \operatorname{sen} \theta_i = n_t \operatorname{sen} \theta_t$$

Si se hubiese escogido el origen O en la interfase, es evidente que ϕ_r y ϕ_t habrían sido nulas. En adelante se hará esta consideración por simplicidad.

Deducción de las ecuaciones de Fresnel y los coeficientes de reflexión y transmisión.

Se ha encontrado la relación que existe entre las fases $E_i(r, t)$, $E_r(r, t)$ y $E_t(r, t)$ en la frontera. Existe aún una interdependencia compartida por las amplitudes E_{oi} , E_{or} y E_{ot} , con el fin de evaluar ésta, supóngase que una onda monocromática plana incide en una superficie plana que separa dos medios isotrópicos. Sin importar el tipo de polarización de la onda, se resolverán sus campos E y H en componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia y se tratarán separadamente.

Caso 1E (⊥) Polarización Perpendicular al Plano de Incidencia.



E perpendicular al plano de incidencia y B paralelo al mismo

Se puede demostrar* que $E = vB$ de modo que E, B y el vector de propagación forman un sistema derecho, es decir:

$$\hat{k} \times E = vB \quad \hat{k} \cdot E = 0$$

Por la continuidad de las componentes tangenciales del campo E, se tiene que en la frontera en cualquier tiempo y en cualquier punto

$$E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$$

donde los cosenos se anulan. Los vectores de campo mostrados deben visualizarse en $y=0$, es decir, en la superficie.

La presencia de sustancias materiales que son polarizadas eléctricamente por la onda tiene un efecto definido en la configuración del campo. Mientras la componente tangencial de E es continua al pasar la frontera, su componente normal del producto ϵE es la misma en cualquier lado de la interfase.

Similarmente, la componente normal del campo B es continua como lo es la componente tangencial de B/μ . Aparece aquí el efecto de los dos medios a través de sus permeabilidades μ_i y μ_r . Esta última condición en la frontera será la más sencilla de usar, particularmente aplicada a la reflexión en la superficie de un conductor.** Por lo tanto la continuidad de la componente tangencial de B/μ requiere que:

$$-\frac{B_i}{\mu_i} \cos\theta_i + \frac{B_r}{\mu_r} \cos\theta_r = -\frac{B_t}{\mu_t} \cos\theta_t \tag{C}$$

* La demostración se da al final de este capítulo en la sección correspondiente al experimento de Thompson.

** Se evita el uso de las expresiones usuales en términos de $H=B/\mu$, sólo se usan los campos E y B.

donde los lados izquierdo y derecho son las magnitudes totales de B/μ paralelas a la interfase en los medios incidente y transmitido, respectivamente. La dirección positiva es aquella en la que aumenta x de tal forma que las componentes de B_i y B_t aparecen con signos menos. De la ley de Snell se tiene:

$$B_i = \frac{E_i}{v_i} \quad B_r = \frac{E_r}{v_r} \quad B_t = \frac{E_t}{v_r}$$

Como $v_i = v_r$ y $\theta_i = \theta_r$, la ecuación C se puede expresar como

$$\frac{1}{\mu_i v_i} (E_i - E_r) \cos\theta_i = \frac{1}{\mu_t v_t} E_t \cos\theta_t$$

haciendo uso de las primeras cuatro ecuaciones de este apartado y recordando que los cosenos que aparecen en éstas son iguales a uno en $y=0$, se obtiene:

$$\frac{\eta_i}{\mu_i} (E_{oi} - E_{or}) \cos\theta_i = \frac{\eta_t}{\mu_t} E_t \cos\theta_t$$

combinando esto con la ecuación $E_{oi} + E_{or} = E_{ot}$ obtenemos las ecuaciones de Fresnel:

$$\left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{\frac{\eta_i}{\mu_i} \cos\theta_i - \frac{\eta_t}{\mu_t} \cos\theta_t}{\frac{\eta_i}{\mu_i} \cos\theta_i + \frac{\eta_t}{\mu_t} \cos\theta_t} \quad \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{2 \frac{\eta_i}{\mu_i} \cos\theta_i}{\frac{\eta_i}{\mu_i} \cos\theta_i + \frac{\eta_t}{\mu_t} \cos\theta_t}$$

estas dos expresiones son completamente generales y se aplican a todo medio homogéneo, isotrópico y lineal, el subíndice \perp indica que se está tratando el caso en que E es perpendicular al plano de incidencia.

Con frecuencia se trata con dieléctricos para los cuales $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_0$; por lo tanto la forma más común de estas expresiones es:

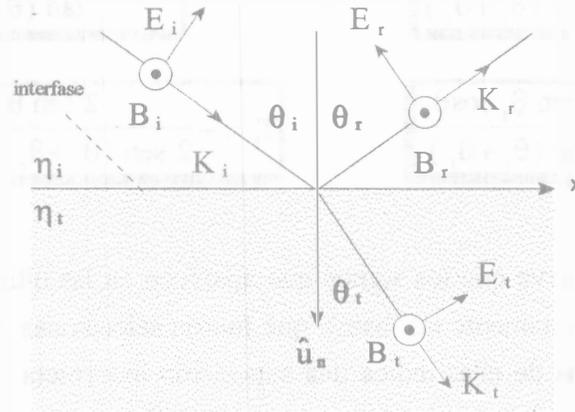
$$R_{\perp} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{\eta_i \cos\theta_i - \eta_t \cos\theta_t}{\eta_i \cos\theta_i + \eta_t \cos\theta_t}$$

$$T_{\perp} = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_{\perp} = \frac{2 \eta_i \cos\theta_i}{\eta_i \cos\theta_i + \eta_t \cos\theta_t}$$

Aquí R_{\perp} denota la amplitud del coeficiente de reflexión, T_{\perp} es la amplitud del coeficiente de transmisión.

Caso 2 E (||) Polarización Paralela al Plano de Incidencia.

En este caso E es paralela al plano de incidencia. De manera similar se puede deducir un par de ecuaciones cuando el campo incidente E está en el plano de incidencia como se muestra en la siguiente figura.



La continuidad de las componentes tangenciales de E en ambos lados de la frontera lleva a

$$E_{oi} \cos \theta_i - E_{or} \cos \theta_r = E_{ot} \cos \theta_t$$

la continuidad de las componentes tangenciales de B/μ da

$$\frac{1}{\mu_i} E_{oi} + \frac{1}{\mu_r} E_{or} = \frac{1}{\mu_t} E_{ot}$$

considerando $\mu_i = \mu_r$ y $\theta_i = \theta_r$, estas expresiones se pueden combinar para dar dos más de las ecuaciones de Fresnel.

$$R_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\parallel} = \frac{\frac{\eta_t}{\mu_t} \cos \theta_t - \frac{\eta_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{\eta_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{\eta_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \qquad T_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \frac{\eta_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\frac{\eta_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \frac{\eta_t}{\mu_t} \cos \theta_i}$$

cuando los dos medios que forman la interfase son dieléctricos, los coeficientes de amplitud vienen a ser:

$$R_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}} \right)_{\parallel} = \frac{\eta_t \cos \theta_t - \eta_i \cos \theta_i}{\eta_i \cos \theta_i + \eta_t \cos \theta_t}$$

$$T_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}} \right)_{\parallel} = \frac{2 \eta_i \cos \theta_i}{\eta_i \cos \theta_t + \eta_t \cos \theta_i}$$

Haciendo uso de la ley de Snell se puede hacer una simplificación de la notación quedando las ecuaciones de Fresnel expresadas como:

$$R_{\perp} = - \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$R_{\parallel} = + \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$

$$T_{\perp} = + \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

$$T_{\parallel} = + \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{2 \sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

Es importante que se observe que los signos que aparecen en las últimas expresiones resultan de las direcciones (más correctamente las fases), que fueron seleccionadas en forma arbitraria. El signo menos que aparece en una de ellas indica una suposición incorrecta del sentido de E_r en el caso perpendicular, no obstante, hay que tener presente que la literatura no es uniforme y que se puede encontrar cualquier signo bajo el título de ecuaciones de Fresnel. Para evitar confusión, tales ecuaciones deben estar relacionadas con las direcciones específicas de los campos de las que fueron deducidas.

Interpretación de las ecuaciones de Fresnel.

Esta sección hace un análisis de las implicaciones físicas de las ecuaciones de Fresnel. En particular se determinarán las amplitudes fraccionarias, densidades de flujo que se reflejan y refractan, así como cualquier corrimiento de fase que pueda suceder en el proceso.

- **Coefficientes de amplitud.**

Se analiza la forma de los coeficientes de amplitud considerando el intervalo completo de valores de θ_i . A incidencia casi normal ($\theta_i \approx 0$) las tangentes de la ecuación R_{\parallel} son esencialmente iguales a los senos, en cuyo caso:

$$[R_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [R_{\perp}]_{\theta_i=0} = \left[\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \right]_{\theta_i=0}$$

Posteriormente se verá el significado del signo menos. Después de desarrollar los senos y usar la ley de Snell esta expresión queda:

$$[R_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [R_{\perp}]_{\theta_i=0} = \left[\frac{\eta_t \cos \theta_i - \eta_i \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i + \eta_t \cos \theta_t} \right]_{\theta_i=0}$$

cuando $\theta_i \rightarrow 0$ el $\cos \theta_i \rightarrow 1$ y el $\cos \theta_t \rightarrow 1$ y por lo tanto se tiene:

$$[R_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [R_{\perp}]_{\theta_i=0} = \left[\frac{\eta_t - \eta_i}{\eta_i + \eta_t} \right]$$

cuando $\eta_t > \eta_i$ se deduce de la ley de Snell que $\theta_i > \theta_t$ y así R_{\perp} es negativa para todos los valores de θ_i . Por el contrario, R_{\parallel} comienza siendo positiva en $\theta_i=0$ y decrece gradualmente hasta que se anula cuando $(\theta_i + \theta_t) = 90^\circ$ ya que la $\tan \pi/2$ es infinita. El valor particular del ángulo de incidencia para el cual sucede esto se denota por θ_p y se conoce como el ángulo de polarización. Cuando θ_i aumenta más allá de θ_p , R_{\parallel} se hace aún más negativa hasta llegar a -1.0 a los 90° . A incidencia normal se tiene:

$$[T_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [T_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{2\eta_i}{\eta_i + \eta_t}$$

se puede demostrar que la siguiente expresión es válida para todo valor de θ_i :

$$T_{\perp} + (-R_{\perp}) = 1$$

mientras que la siguiente ecuación es válida sólo a incidencia normal:

$$T_{\parallel} + R_{\parallel} = 1$$

El anterior análisis, en gran parte, estaba restringido al caso de la reflexión externa, es decir, $\eta_t > \eta_i$. En el caso contrario de la reflexión interna en la cual el medio incidente es más denso ($\eta_t < \eta_i$), se tiene que $\theta_t > \theta_i$ y R_{\perp} será positiva, R_{\perp} aumenta desde su valor inicial positivo para el valor $\theta_i=0$ llegando a +1 en lo que se llama ángulo crítico, θ_c . Específicamente θ_c es el valor particular del ángulo de incidencia para el cual $\theta_t = \pi/2$. De igual forma, R_{\parallel} comienza en un valor negativo para $\theta_i=0$ y aumenta hasta +1 cuando $\theta_i = \theta_c$ como es evidente de la ecuación de Fresnel para R_{\parallel} en función de los índices η_t y η_i y de los ángulos θ_t y θ_i .

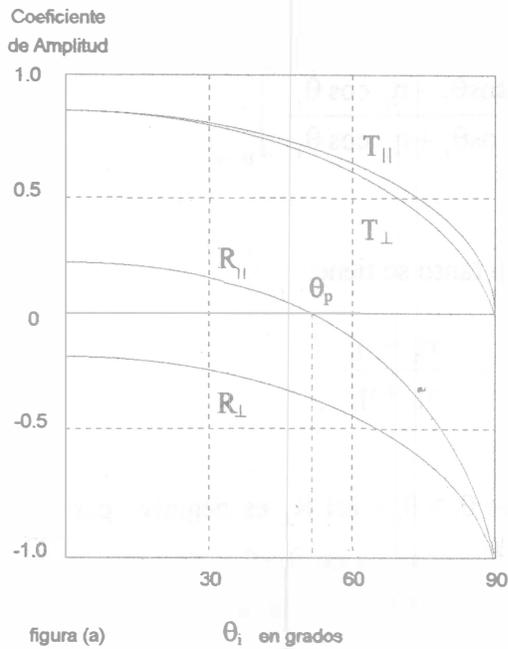


figura (a)

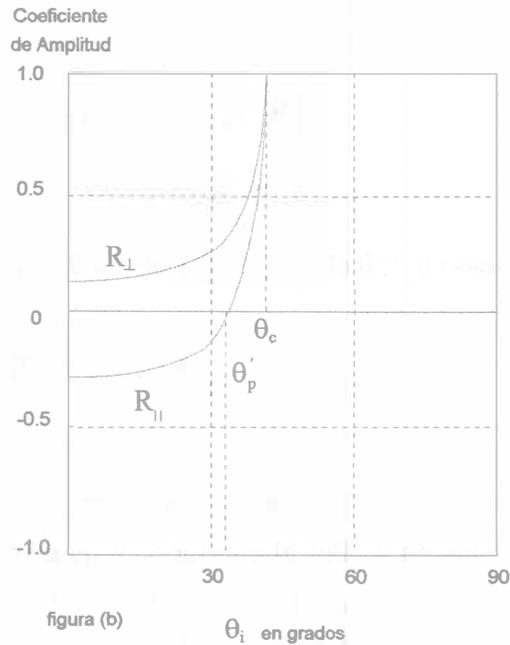


figura (b)

- (a) Coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión como una función del ángulo de incidencia. Éstos corresponden a reflexión externa $\eta_t > \eta_i$ en una interfase aire-vidrio ($\eta_{ii} = 1.5$).
- (b) Coeficientes de amplitud de reflexión como función del ángulo de incidencia. Éstos corresponden a reflexión interna $\eta_t < \eta_i$ en una interfase aire-vidrio ($\eta_{ii} = 1/1.5$).

Como antes $R_{||}$ pasa por cero en el ángulo de polarización θ'_p . Se puede demostrar que tanto θ_p y θ'_p en una interfase entre los mismo dos medios, son complementarios entre sí. Posteriormente se analizará la reflexión interna con más detalle y se demostrará que R_{\perp} y $R_{||}$ son cantidades complejas para $\theta_i > \theta_c$.

• **Corrimientos de fase.**

De las ecuaciones de Fresnel, en particular la ecuación para R_{\perp} , es evidente que R_{\perp} es negativa independientemente de θ_i cuando $\eta_t > \eta_i$.

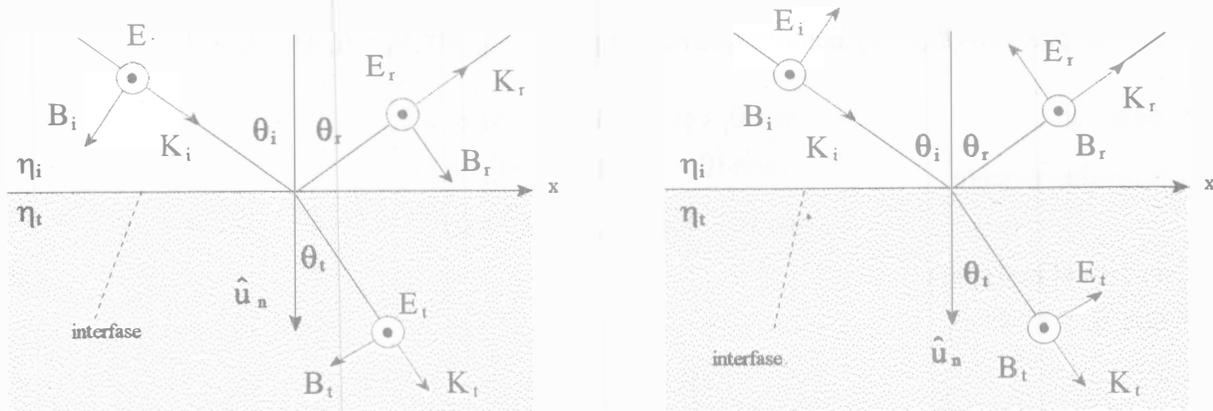
Como ya se mencionó antes, R_{\perp} está asociada con las direcciones relativas de $E_{oi\perp}$ y $E_{or\perp}$, de tal forma que si se hubiese escogido el sentido opuesto para $E_{r\perp}$ la primera ecuación de Fresnel que se obtuvo hubiera tenido signo positivo. Recuérdese que una inversión de $E_{oi\perp}$ es equivalente a introducir un corrimiento de fase, $\Delta\phi_{\perp}$, de π radianes en $E_{r\perp}$. Por consiguiente en la frontera $E_{i\perp}$ y $E_{r\perp}$ serán antiparalelos y por lo tanto π radianes fuera de fase uno del otro como lo indica el valor negativo de R_{\perp} .

Cuando se consideran las componentes normales al plano de incidencia no hay confusión si los dos campos están en fase o π radianes fuera de fase; si son paralelos están en fase; si son antiparalelos están fuera de fase π radianes.

Resumiendo, la componente del campo eléctrico normal al plano de incidencia sufre un corrimiento de fase de π radianes bajo reflexión cuando el medio incidente tiene un índice más bajo que el medio transmisor. Similarmente T_{\perp} y T_{\parallel} son siempre positivas y $\Delta\phi=0$. Además, cuando $\eta_t < \eta_i$ no existe corrimiento de fase en la componente normal al reflejarse, es decir, $\Delta\phi=0$ siempre que $\theta_i < \theta_c$.

Las cosas no resultan tan claras cuando se considera E_{\perp} , E_{\parallel} y E_{\parallel} . Es necesario definir más explícitamente lo que se quiere decir con el término "en fase" ya que los vectores de fase son coplanares pero generalmente no son colineales.

Las direcciones de campo se consideraron de tal forma que mirando cualquiera de los vectores de propagación en la dirección en que viene la luz, los vectores E, B y K se ven con la misma orientación relativa sea el rayo incidente, reflejado o transmitido, como muestra la siguiente figura.



Se puede usar esto como la condición requerida a fin de que los dos campos E estén en fase; de manera equivalente pero más simple, "dos campos en el plano incidente están fuera de fase si sus componentes son paralelas y fuera de fase si son antiparalelas".

Nótese que cuando un par de campos E están fuera de fase, también lo están sus campos asociados B y viceversa. Con esta definición sólo se necesita ver los vectores normales al plano de incidencia, sean ellos E o B, para determinar la fase relativa de los campos acompañantes en el plano incidente.

Obsérvese en la figura (a) que E_i y E_t están en fase como lo están B_i y B_t mientras que E_i y E_r están fuera de fase como lo están B_i y B_r . Similarmente en la figura (b) E_i , E_r y E_t están en fase como lo están B_i , B_r y B_t .

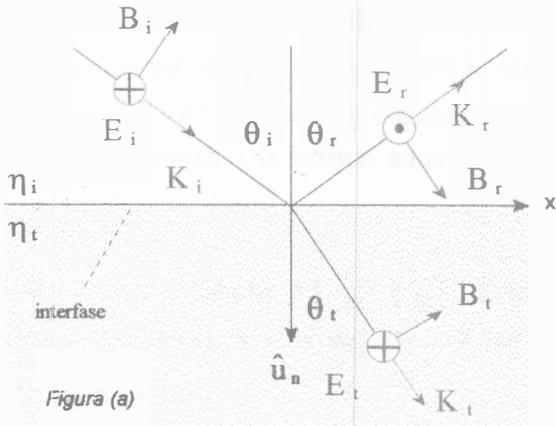


Figura (a)

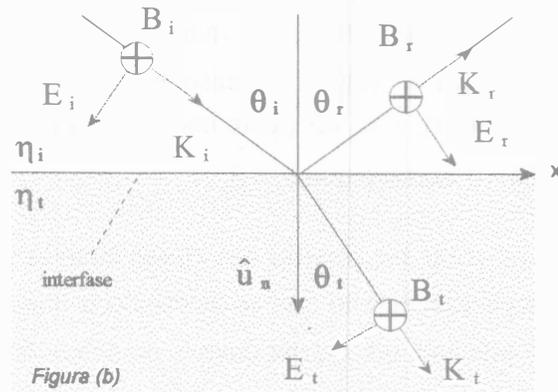


Figura (b)

Ahora el coeficiente de amplitud de reflexión para la componente paralela está dado por:

$$R_{\parallel} = \frac{\eta_t \cos \theta_i - \eta_i \cos \theta_t}{\eta_t \cos \theta_i + \eta_i \cos \theta_t}$$

el cual es positivo ($\Delta\phi_{\parallel} = 0$) siempre que se cumpla $\eta_t \cos \theta_i - \eta_i \cos \theta_t > 0$

es decir, si

$$\text{sen } \theta_i \cos \theta_i - \text{sen } \theta_t \cos \theta_t > 0$$

o equivalentemente

$$\text{sen } (\theta_i - \theta_t) \cos (\theta_i + \theta_t) > 0$$

$$\text{sen } (\theta_i - \theta_t) \cos (\theta_i + \theta_t) > 0$$

Este será el caso para el que $\eta_i < \eta_t$ si

$$(\theta_i + \theta_t) < \frac{\pi}{2}$$

y para $\eta_i > \eta_t$ si

$$(\theta_i + \theta_t) > \frac{\pi}{2}$$

Y así, cuando $\eta_t > \eta_i$, $E_{o\parallel}$ y $E_{o\parallel}$ estarán en fase ($\Delta\phi_{\parallel} = 0$) hasta que $\theta_i = \theta_p$ y fuera de fase en π radianes de ahí en adelante. La traslación no es en realidad discontinua ya que $E_{o\parallel}$ va a cero en valor θ_p . Por el contrario, para reflexión interna R_{\parallel} es negativa hasta θ_p , lo cual quiere decir que se tiene que $\Delta\phi_{\parallel} = \pi$. Desde θ_p a θ_c , R_{\parallel} es positiva y $\Delta\phi_{\parallel} = 0$. Más allá del valor de θ_c , R_{\parallel} se hace compleja y $\Delta\phi_{\parallel}$ aumenta gradualmente hasta π para $\theta_i = 90^\circ$

- **Reflectancia y Transmitancia.**

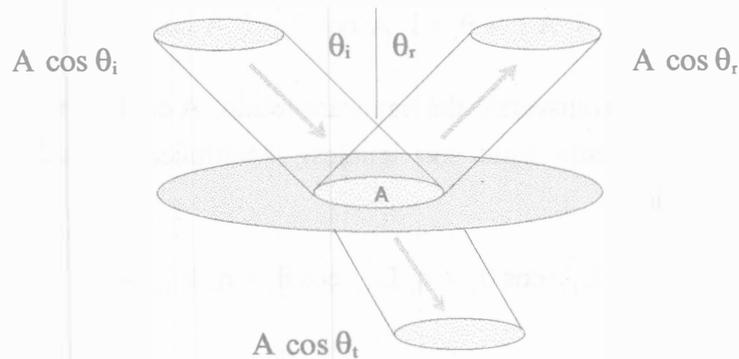
La potencia por unidad de área que cruza una superficie en el vacío cuya normal es paralela a S (el vector de Poynting), está dada por:

$$S = c^2 \epsilon_0 E \times B$$

Además, la densidad de flujo radiante (W/m^2) o irradiancia es entonces

$$I = \langle S \rangle = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} E_0^2$$

Ésta es la energía promedio por unidad de tiempo que cruza un área unitaria normal a S (en medios isotrópicos S es paralelo a K). Para el caso que se muestra en la figura, sean I_i , I_r e I_t las densidades de flujo incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.



La porción de energía incidiendo normalmente en un área de la frontera por segundo está dada por $I_i \cos \theta_i$. Similarmente $I_r \cos \theta_r$ y $I_t \cos \theta_t$ son las energías por segundo que salen de un área unitaria de la frontera normalmente en cada lado.

La reflectancia \mathcal{R} es la razón del flujo (o potencia) reflejado al incidente, es decir:

$$\mathcal{R} = \frac{I_r \cos \theta_r}{I_i \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i}$$

mientras que la transmitancia \mathcal{T} es la razón del flujo transmitido al incidente y está dada por:

$$\mathcal{T} = \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i}$$

El cociente I_r/I_i es igual a $(v_r \epsilon_r E_{0r}^2/2)/(v_i \epsilon_i E_{0i}^2/2)$ y ya que las ondas reflejadas e incidentes están en el mismo medio $v_r = v_i$, $\epsilon_r = \epsilon_i$, entonces:

$$\mathcal{R} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = R^2$$

En la misma forma, suponiendo que $\mu_i = \mu_r = \mu_o$, y considerando que $\mu_o \epsilon_i = 1/v_i^2$ y $\mu_o v_t \epsilon_t = \eta_t/c$, se tiene:

$$\mathcal{T} = \frac{\eta_t \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i} \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2 = \left(\frac{\eta_t \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i} \right) T^2$$

La energía total que llega al área A por unidad de tiempo debe ser igual a la energía que fluye fuera de ella por unidad de tiempo (este es el principio de conservación de la energía).

$$I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t$$

Es evidente que el área transversal del haz transmitido, $A \cos \theta_t$, es más grande que la de los haces incidente y reflejado (que son iguales). Multiplicando ambos lados de la última expresión por c , se tiene:

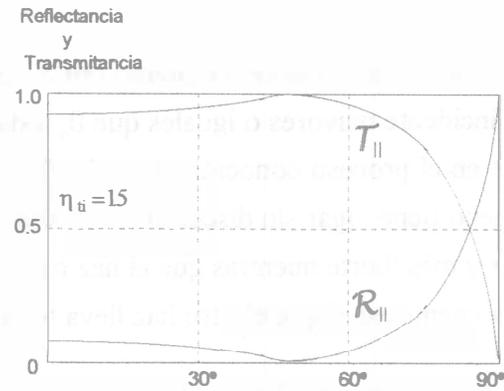
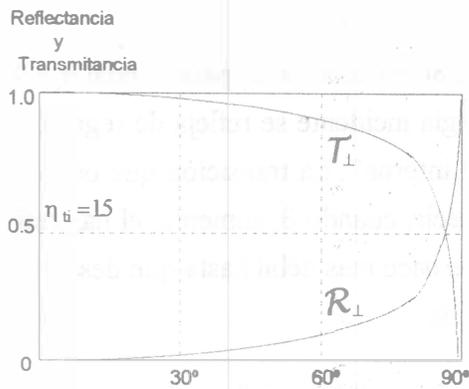
$$\eta_i E_{0i}^2 \cos \theta_i = \eta_i E_{0r}^2 \cos \theta_i + \eta_t E_{0t}^2 \cos \theta_t$$

$$1 = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 + \left(\frac{\eta_t \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i} \right) \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)^2$$

Pero esto es simplemente $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ donde no hay absorción. Es conveniente usar las formas componentes:

$$\mathcal{R}_\perp = R_\perp^2 \quad \mathcal{R}_\parallel = R_\parallel^2 \quad \mathcal{T}_\perp = \left(\frac{\eta_t \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i} \right) T_\perp^2 \quad \mathcal{T}_\parallel = \left(\frac{\eta_t \cos \theta_t}{\eta_i \cos \theta_i} \right) T_\parallel^2$$

Se puede demostrar que $\mathcal{R}_\parallel + \mathcal{T}_\parallel = 1$ y $\mathcal{R}_\perp + \mathcal{T}_\perp = 1$, la siguiente figura ilustra estas expresiones.



Una característica interesante de estas curvas se verifica fácilmente, al menos cualitativamente, y ella es que ambas \mathcal{R}_\parallel y \mathcal{R}_\perp se acercan a uno cuando $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Esto implica que casi cualquier interfase dieléctrica muy lisa se comportará como un espejo para la incidencia rasante. Si por ejemplo, se intenta observar una fuente luminosa usando esta hoja como cuna superficie de frontera donde $\theta_i \approx 90^\circ$ se podrá ver una imagen bastante clara de la fuente en el papel.

Cuando $\theta_i = 0^\circ$ el plano incidente queda indefinido y cualquier distinción entre las componentes paralela y perpendicular de \mathcal{R} y \mathcal{T} desaparece. En este caso se tiene

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_\parallel = \mathcal{R}_\perp = \left(\frac{\eta_t - \eta_i}{\eta_t + \eta_i} \right)^2 \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}_\parallel = \mathcal{T}_\perp = \frac{4\eta_i\eta_t}{(\eta_t + \eta_i)^2}$$

REFLEXIÓN TOTAL INTERNA

Supóngase que se tiene una fuente luminosa sumergida en un medio ópticamente denso y se permite que el ángulo de incidencia aumente gradualmente. En la figura "b" de la sección "coeficientes de amplitud" se vio que \mathcal{R}_\parallel y \mathcal{R}_\perp aumentan al aumentar θ_i y por consiguiente tanto \mathcal{T}_\parallel como \mathcal{T}_\perp disminuyen. Además $\theta_i > \theta_c$ ya que:

$$\text{sen } \theta_i = \frac{\eta_t}{\eta_i} \text{ sen } \theta_t$$

como $\eta_t < \eta_i$ se tiene que $\eta_t/\eta_i < 1$, entonces al crecer θ_i , el rayo transmitido se aproxima gradualmente a la tangencia con la frontera y conforme lo va haciendo, más y más de la energía disponible va apareciendo en el haz reflejado. Finalmente cuando $\theta_t = 90^\circ$, $\text{sen } \theta_t = 1$ y se tiene:

$$\text{sen } \theta_c = \eta_t/\eta_i$$

Como se dijo anteriormente, el ángulo crítico es ese valor especial de θ_i para el cual $\theta_r = 90^\circ$. Para ángulos incidente mayores o iguales que θ_c toda la energía incidente se refleja de regreso al medio incidente en el proceso conocido como "reflexión total interna". La transición que ocurre durante el fenómeno tiene lugar sin discontinuidad alguna. Es decir, cuando θ_i aumenta, el haz reflejado se hace más y más fuerte mientras que el haz transmitido se hace más débil hasta que desaparece para $\theta_i = \theta_c$, momento en el que el otro haz lleva toda la energía.

Si se considera que no hay onda transmitida se hará imposible satisfacer las condiciones a la frontera sumando solamente las ondas incidente y reflejada, y entonces se puede obtener

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - (\eta_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\cos \theta_i + (\eta_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}} \quad R_{\parallel} = \frac{\eta_{ii}^2 \cos \theta_i - (\eta_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}{\eta_{ii}^2 \cos \theta_i + (\eta_{ii}^2 - \sin^2 \theta_i)^{\frac{1}{2}}}$$

Ya que $\sin \theta_c = \eta_{ii}$ cuando $\theta_i > \theta_c$ $\sin \theta_i > \eta_{ii}$ y tanto R_{\perp} como R_{\parallel} se hacen cantidades complejas. A pesar de esto $R_{\perp} R_{\perp}^* = R_{\parallel} R_{\parallel}^* = 1$ y $\mathcal{R} = 1$ lo que significa que $I_r = I_i$ y $I_t = 0$. Entonces, aunque debe haber una onda transmitida, ella no puede, en promedio, transportar energía a través de la frontera.

Propiedades Ópticas de los Metales.

Los medios conductores se caracterizan por un número de cargas eléctricas libres o electrones cuyo movimiento constituye una corriente. La corriente por unidad de área que resulta de la aplicación de un campo E está relacionada con la conductividad del medio por $J = \sigma E$. Para un dieléctrico no hay electrones libres y la conducción es $\sigma = 0$, mientras que para los metales σ es diferente de cero y finita.

En contraste, un conductor perfecto, idealizado, tendría una conductividad infinita. Esto equivale a decir que los electrones impulsados a oscilar por una onda armónica simplemente seguirían las alteraciones del campo. No habría fuerza de restauración ni frecuencias naturales, ni absorción. En los metales reales los electrones sufren colisiones, así convierten la energía electromagnética en calor de Joule. Evidentemente la absorción de energía radiante por un material es una función de su conductividad.

- **Ondas en un metal.**

Considérese el medio como si fuera continuo, entonces las ecuaciones de Maxwell conducen a:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

El último término de esta ecuación es una variación del campo E con respecto al tiempo que genera un voltaje, lo que implica una circulación de corriente, al ser resistivo el material la luz se transforma en calor, lo que implica absorción de luz.

Utilizando la ecuación de onda y considerando las condiciones en la frontera, se puede dar una solución que se puede aplicar a ondas senoidales simples en el conductor. Por ejemplo, una onda propagándose en la dirección "y" está dada por:

$$E = E_0 \cos(\omega t - ky)$$

la expresión en función de n (índice de refracción complejo) queda:

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - ny / c \right)$$

$$n_c = n_R - n_I$$

entonces

$$E = E_0 e^{(-\omega n_I y / c)} e^{i\omega (t - n_R y / c)}$$

$$E = E_0 e^{(-\omega n_I y / c)} \cos \omega \left(t - n_R y / c \right)$$

De la ecuación anterior es obvio que la onda avanza con una velocidad c / n_R , al progresar la onda en el medio conductor, su amplitud es atenuada en forma exponencial.

$$E_0 e^{(-\omega n_I y / c)}$$

Sabemos que la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud, entonces:

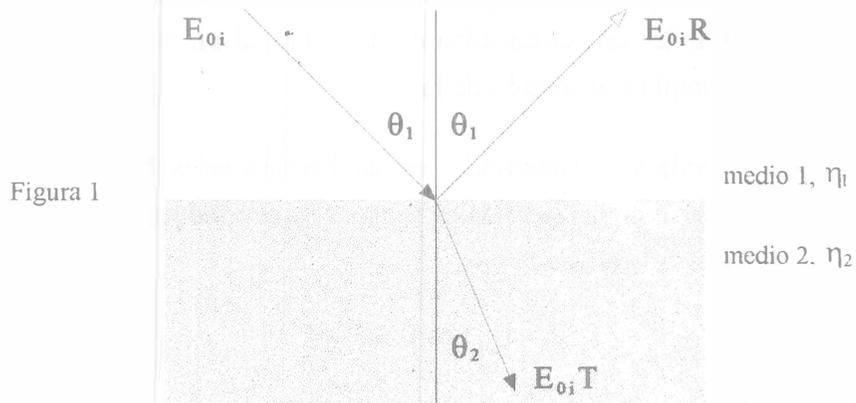
$$I(y) = I_0 e^{-\alpha y}$$

donde $I_0 = I(0)$ es la irradiancia en la interfase o frontera ($y = 0$) y la absorción o coeficiente de atenuación es $\alpha \equiv 2\omega n_I / c$, además, $y = 1/\alpha$ es la profundidad de penetración.

Si un material es transparente, es claro que la profundidad de penetración es grande con respecto a su grosor, para los metales es muy pequeña (del orden de los nanómetros) por lo que éstos son "opacos", el lustre metálico de los conductores corresponde a una alta reflectancia.

El Análisis de Stokes para la Reflexión y la Refracción.

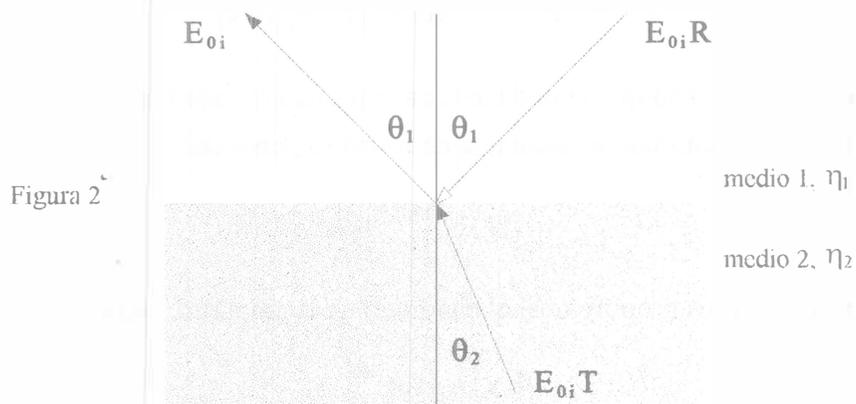
Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) supuso una onda incidente en una interfase plana entre dos dieléctricos.



R y T son las amplitudes fraccionales reflejada y transmitida, respectivamente, $\eta_1 = \eta_i$ y $\eta_2 = \eta_t$, entonces:

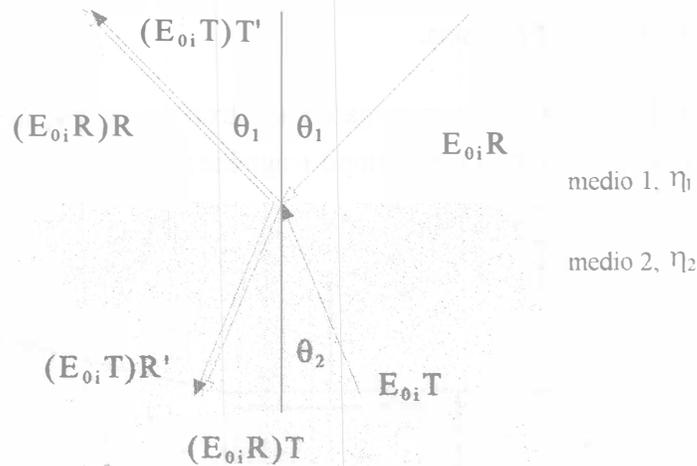
$$E_{0r} = R E_{0i} \quad \text{y} \quad E_{0t} = T E_{0i}$$

Por el principio de reversibilidad debe ser posible que:



Esto modernamente se denomina invariancia de la inversión del tiempo, que significa, que si un proceso ocurre, el proceso inverso puede ocurrir también.

Figura 3



$E_{0i}R$ y $E_{0i}T$ son las amplitudes de ondas que se reflejan y refractan (transmiten). R y T son las amplitudes fraccionales reflejadas y transmitidas, respectivamente, al considerar $\eta_i = \eta_1$ y $\eta_t = \eta_2$ son los índices de reflexión y transmisión (refracción) para la onda de amplitud $E_{0i}T$. R' y T' son los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitudes para una onda que incide del medio 1 al medio 2, es decir, $\eta_i = \eta_2$ y $\eta_t = \eta_1$. $E_{0i}TR'$ y $E_{0i}TT'$ son las porciones reflejada y refractada, respectivamente, de la onda $E_{0i}T$. $E_{0i}TR$ y $E_{0i}TT$ son las porciones reflejada y refractada, respectivamente, de la onda $E_{0i}R$.

Comparando las figuras 2 y 3, resulta obvio que:

$$E_{0i}TT' + E_{0i}RR = E_{0i} \quad \text{y} \quad E_{0i}RT + E_{0i}TR = 0$$

de donde se obtiene $TT' + RR = 1$ y $R + R' = 0$, que finalmente queda de la siguiente forma:

$$TT' = 1 - R^2 \quad \text{y} \quad R = -R'$$

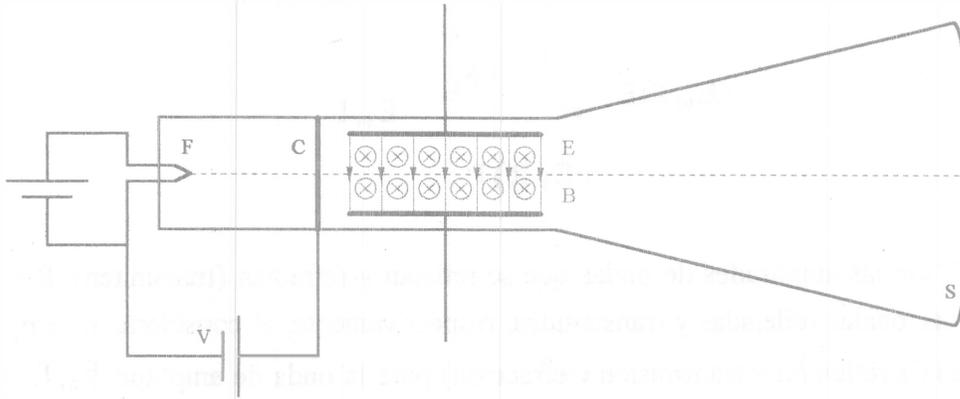
Éstas son las relaciones de Stokes, es importante observar que los coeficientes de amplitud están en función de los ángulos de incidencia, entonces las relaciones de Stokes en forma más correcta son:

$$T(\theta_1)T'(\theta_2) = 1 - R^2(\theta_1) \quad \text{y} \quad R(\theta_1) = -R'(\theta_2)$$

En la segunda expresión el signo menos indica una diferencia de fase de 180° entre la ondas reflejadas interna y externamente. Recuerde que los ángulos están relacionados por medio de la ley de Snell, además, observe que no se especificó en este análisis cual de los dos índices (η_1 y η_2) es mayor que el otro, por lo que es evidente que las ecuaciones de Stokes son de carácter general.

El experimento de Joseph Thomson.

En 1897 determinó la relación entre la carga del electrón y su masa, observando su deflexión ante la presencia de un campo eléctrico y un campo magnético.



Los electrones de un filamento caliente F se aceleran mediante una diferencia de potencial V y pasan a través de un orificio en la pantalla C; después de pasar por la región en la cual existe un campo eléctrico E y uno magnético B perpendiculares entre sí, inciden sobre la pantalla fluorescente.

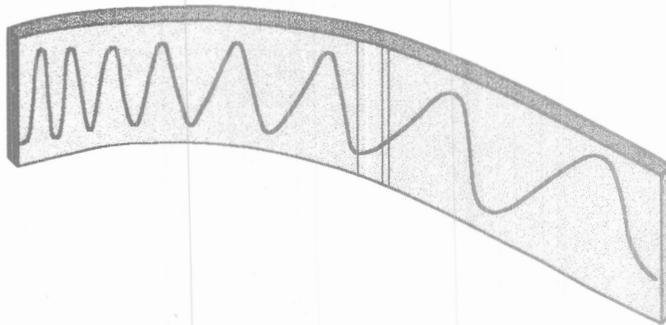
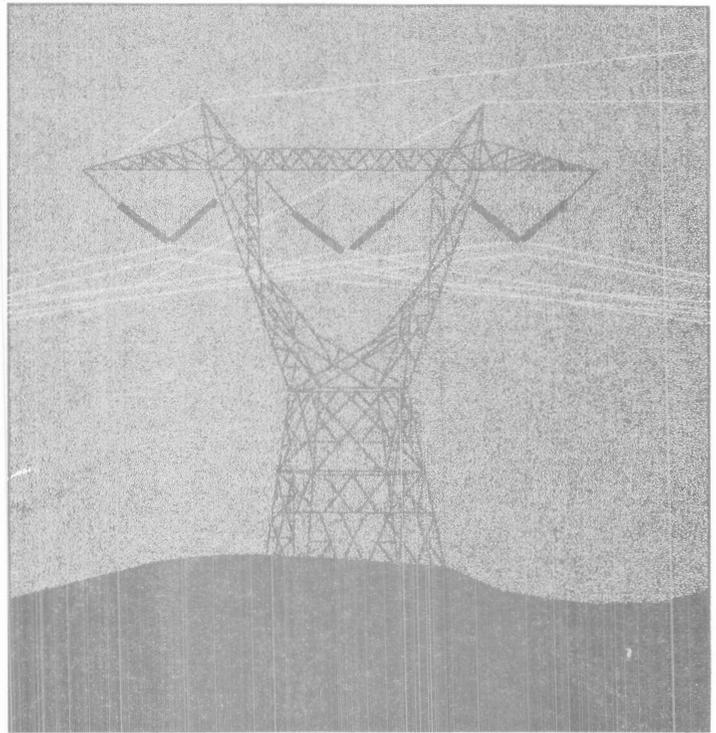
La fuerza resultante sobre una partícula cargada en movimiento en una región con campo magnético y un campo eléctrico está dada por:

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E} + q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

En la figura se puede observar que el campo eléctrico deflexiona a la partícula hacia arriba, mientras que el campo magnético la deflexiona hacia abajo. En el caso de que estas dos fuerzas se equilibren (es decir, si $\mathbf{F} = 0$), para este fenómeno la ecuación anterior se reduce a:

$$e\mathbf{E} = e\mathbf{v}\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \mathbf{v}\mathbf{B}$$

CAPÍTULO IV



**LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y
GUÍAS DE ONDA.**

INTRODUCCIÓN

Es importante mencionar que la propagación de las ondas electromagnéticas, éstas son muy variadas y forman parte importante de nuestra vida actual. Si se piensa con detenimiento, la energía eléctrica que llega a nuestros hogares, las señales de radio y televisión que recibimos en nuestros receptores, Las señales telefónicas, las señales de radiofrecuencia, las señales de satélite, etcétera; son todas ondas electromagnéticas, energía electromagnética que se genera en algún sitio y que se propaga y llega a otro u otros lugares. Para la conducción de estas señales es indispensable un medio de transporte, a éste se le llama "*línea de transmisión*".

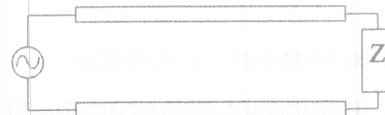
Una línea de transmisión (L.T.), en general, es un medio en el cual una onda está confinada y guiada por éste, es decir, es un dispositivo para transmitir o guiar energía de un punto a otro y por lo general se desea que el transporte de esta energía sea de la mejor calidad y con pérdidas mínimas en el trayecto, debidas a la radiación y calor por efecto Joule. Una línea de transmisión básicamente tiene cuatro terminales, dos en las que se alimenta la energía a la línea y dos en las que la línea entrega la energía. Todas las líneas de transmisión funcionan bajo los mismos principios básicos.

CLASIFICACIONES

1. Línea bifilar: formada por dos cables conductores con separación constante, puede estar blindada para evitar radiación.
2. Línea coaxial: formada por un par de conductores concéntricos separados por un dieléctrico, el conductor externo cubre completamente al conductor interno, evitando así pérdidas por radiación. Se puede operar a frecuencias mayores que en el caso de la línea bifilar.
3. Línea de placas paralelas: formada por dos placas conductoras paralelas.
4. Línea de conductor hueco: formada por un conductor hueco.



Línea bifilar (cc)



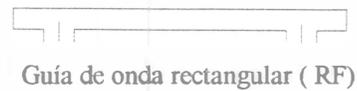
Línea bifilar (ac)



Línea coaxial (cc, ac, RF)



Fibra Óptica (luz)



Según la Configuración de su Campo o Modo de Propagación.

1. Tipos de modo TEM

El campo E y H son absolutamente transversales a la dirección de propagación. A este tipo pertenecen las líneas bifilares y coaxiales. Aquí, la energía viaja a lo largo de los conductores y entre ellos.

2. Tipos de modo superior o TE y TM

El campo E o H o ambos tienen componentes en la dirección de propagación. A este tipo pertenecen las "guías de onda" huecas de un solo conductor y las fibras ópticas o varillas dieléctricas. En este caso la energía se propaga en el espacio interior del conductor, o dentro o cerca de la fibra de que se trate. Una guía de onda (G.O.) es un tipo especial de línea de transmisión que sólo puede transportar ondas electromagnéticas de orden superior.

3. Ondas espaciales TEM

Éstas viajan entre antenas a través de la atmósfera o del espacio libre, según se trate de radioenlaces terrestres, entre satélites o entre satélites y estaciones terrenas.

Para que un par de hilos conductores se le considere como línea de transmisión, se debe cumplir que la longitud de onda a la que está operando sea mucho menor que la longitud física del par de hilos.

$$\lambda_{\text{operación}} \ll \text{longitud del conductor}$$

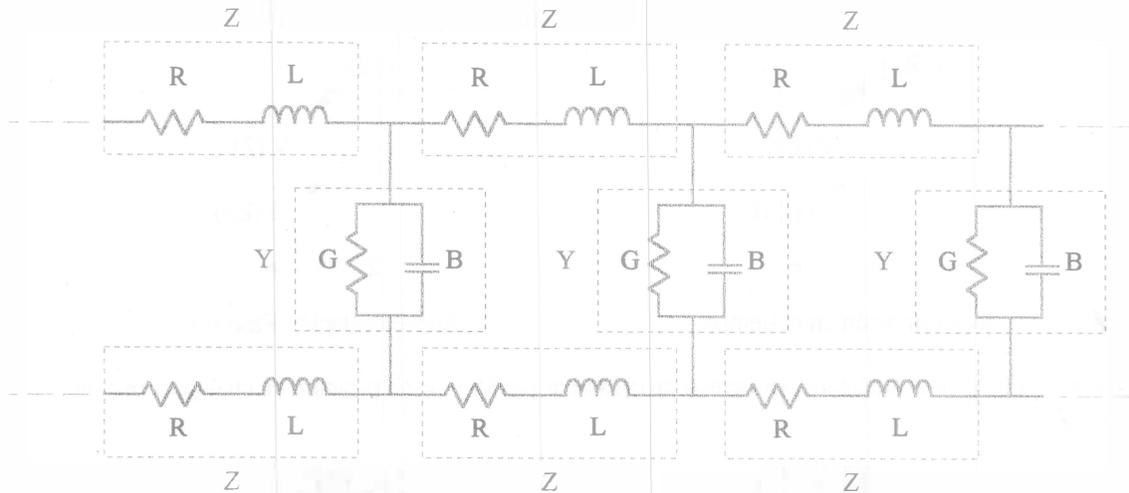
Según la Potencia de Transmisión.

1. Líneas de transmisión de potencia.
2. Líneas de transmisión para comunicación.

Las primeras son empleadas para transmisión de altas potencias a bajas frecuencias sin modular (por lo general 50 ó 60 Hz). Las segundas se usan en la transmisión de potencias muy pequeñas del orden de los nanowatts a los kilowatts y voltajes de microvolts hasta kilovolts y con frecuencias de operación de cero hertz al rango de los gigahertz (GHz).

PARÁMETROS O CONSTANTES DISTRIBUIDAS

Los parámetros de una línea de transmisión son su inductancia (L), capacitancia (C), resistencia (R) y conductancia (G) por unidad de longitud.



Modelo General de una Línea de Transmisión

Al fluir una corriente en los conductores de una línea de transmisión, aparece un campo magnético al rededor, cualquier cambio en este flujo inducirá un voltaje dado por la expresión

$$V = L \frac{dI}{dt}$$

En este caso \$L\$ es la inductancia distribuida a lo largo de la línea dada en unidades de inductancia por longitud (Hy/m).

El espacio entre los conductores de la línea de transmisión se presenta un efecto capacitivo distribuido a lo largo de toda la línea, es decir, los conductores se comportan como placas de un capacitor y el material entre ellos es un dieléctrico, la capacitancia es una medida de la energía almacenada en el campo eléctrico por la unidad de longitud de la línea por unidad de diferencia de potencial. Las unidades de \$C\$ se dan en unidades de capacitancia por unidades de longitud (F/m).

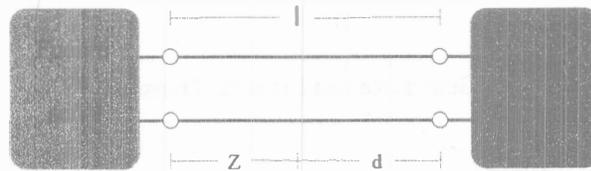
Considerando que tanto los conductores como el dieléctrico no son materiales perfectos o ideales, entonces se puede asociar a la línea una resistencia en serie y una conductancia en paralelo a lo largo de toda la línea, dadas en unidades de resistencia por unidades de longitud (\$\Omega\$/m) y unidades conductancia por unidades de longitud (siemens/m), respectivamente. La conductancia es una

medida de la pérdida de potencia en la unidad de longitud de la línea por unidad de diferencia de potencial. Este parámetro representa una pérdida interna molecular de los materiales aislantes dieléctricos, más que una corriente de escape o fuga.

Convención de Signos



$i(t, Z)$ y $V(t, Z)$ son funciones del tiempo en cualquier punto, y de su posición en cualquier instante.



Coordenadas en un circuito de Línea de Transmisión

MODELO DE UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN BIFILAR

Considerando Z_T es la impedancia terminal de carga.

$$Z_T = R_T + j X_T = \frac{V_T}{I_T}$$

Z_s es la impedancia de un generador conectado a la fuente de señal.

$$Z_s = R_s + j X_s \neq \frac{V_s}{I_s}$$

V_s / I_s depende del circuito total de la línea de transmisión.

Z_0 es la impedancia característica, su valor no depende del lugar en que se mida, está determinada exclusivamente por los coeficientes del circuito distribuido de la línea y la frecuencia de la señal.

$$Z_0 = R_0 + j X_0$$

$Z(z)$ es la impedancia dada por la razón del fasor de voltaje al fasor de corriente en la línea (en z).

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} \quad Z(z) = |Z(z)| e^{j\theta(z)}$$

esto implica que $Z=R+j\omega L$

En general la admitancia está dada por:

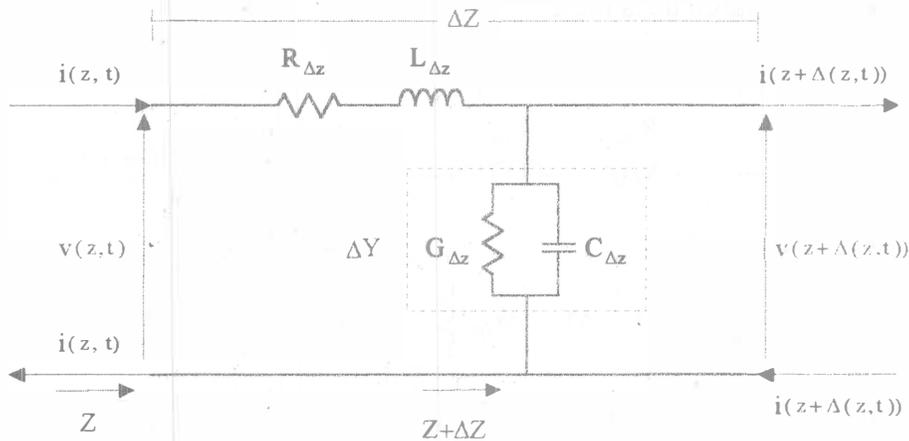
$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = G + j\omega C$$

entonces, se tiene:

$$Y_T = \frac{1}{Z_T} = G_T + jB_T \text{ [mhos/m]} \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0} = G_0 + jB_0 \text{ [mhos/m]} \quad Y(z) = \frac{1}{Z(z)} = G(z) + jB(z) \text{ [mhos/m]}$$

en forma polar:

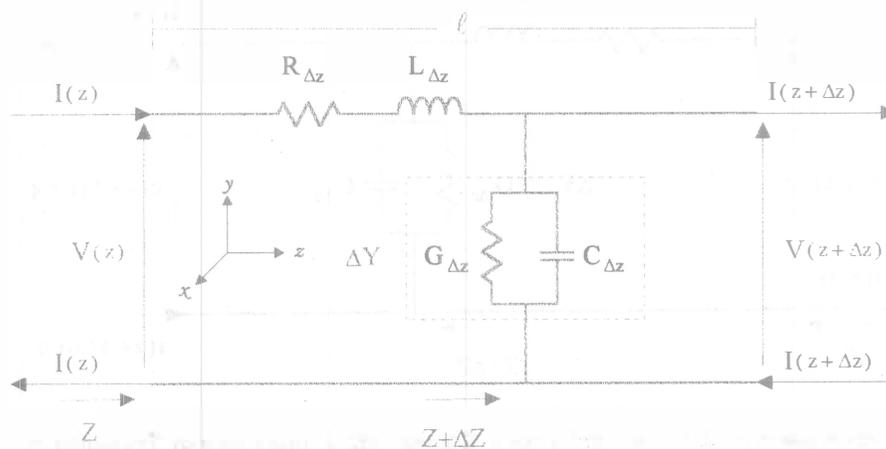
- Y: Admitancia en derivación, [siemens/m o mhos/m]
- Z: Impedancia en serie, [Ω /m]
- G: Conductancia en derivación, [siemens/m o mhos/m]
- B: Susceptancia en derivación, [siemens/m o mhos/m]
- C: Capacitancia en derivación, [F/m]
- R: Resistencia en serie, [Ω /m]
- X: Reactancia en serie, [Ω /m]
- L: Inductancia en serie, [Hy/m]



Representación en el Tiempo del Modelo Equivalente de una Línea de Transmisión

Análisis de una Línea de Transmisión Bifilar. Postulados del Análisis de Circuitos con Elementos Distribuidos.

- ☞ El sistema o línea consiste de dos conductores rectos y paralelos.
- ☞ Las corrientes en los conductores de la línea fluyen únicamente en la dirección de la longitud de la línea, lo que implica que no reconoce la existencia de modos de guía de onda.
- ☞ En la intersección de cualquier plano transversal con los conductores de una línea de transmisión, las corrientes instantáneas totales en los dos conductores son iguales en magnitud, pero fluyen en direcciones opuestas (esto significa que, idealmente, la corriente es la misma en todos los puntos del circuito en un instante dado).
- ☞ En la intersección de cualquier plano transversal con los conductores de una línea de transmisión hay un valor de diferencia de potencial único entre los conductores en cualquier instante, que es igual a la integral de línea del campo a lo largo de todas las trayectorias en el plano transversal entre cualquier punto sobre la periferia de uno de los conductores y cualquier punto sobre la periferia del otro.
- ☞ El comportamiento eléctrico de la línea se describe completamente por cuatro coeficientes del circuito eléctrico distribuido, cuyos valores por unidad de longitud de la línea son constantes en cualquier parte de ésta; éstos son:
 1. Resistencias e Inductancias, en serie, como elementos del circuito uniformemente distribuidos a lo largo de la línea
 2. Capacitancias y Conductancias, en paralelo, como elementos del circuito uniformemente distribuidos a lo largo de la línea.



Representación en el Dominio de la Frecuencia del Modelo Equivalente de una Línea de Transmisión

Análisis de una Porción Infinitesimal o Circuito Equivalente de una L.T. Uniforme.

Haciendo uso de las Leyes de Kirchhoff se tienen:

$$v(z+(\Delta z,t)) - v(z,t) = \Delta v(z,t) = -R_{\Delta z} i(z,t) - L_{\Delta z} \frac{\partial}{\partial t} i(z,t)$$

$$i(z+(\Delta z,t)) - i(z,t) = \Delta i(z,t) = -G_{\Delta z} v(z,t) - C_{\Delta z} \frac{\partial}{\partial t} v(z,t)$$

dividiendo entre Δz y si $\Delta z \rightarrow 0$, es decir, aplicando el concepto de derivada, entonces las ecuaciones diferenciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial z} v(z,t) = -R i(z,t) - L \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) \quad \frac{\partial}{\partial z} i(z,t) = -G v(z,t) - C \frac{\partial}{\partial t} v(z,t)$$

Si $v(z,(\Delta z,t))$ se expande en series de Taylor al rededor de "z", entonces los términos de orden superior ($\Delta z^2, \Delta z^3, \Delta z^4, \dots$) se pueden ignorar al hacer que $\Delta z \rightarrow 0$.

Los signos quedan determinados por la elección original de convenios para voltajes y corrientes en la línea de transmisión, por lo tanto los signos de "v" e "i" son independientes entre sí, esto es, en cualquier instante pueden tener cualquier signo.

Solución de las Ecuaciones en el Dominio del Tiempo y Ecuaciones de Onda.

Éstas quedan sujetas a las condiciones de Borde o frontera determinadas por la naturaleza de los dispositivos conectados a los extremos de la línea de transmisión.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} v(z,t) \right\} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} v(z,t) = -R \frac{\partial}{\partial z} i(z,t) - L \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) \right\} = -R \frac{\partial}{\partial z} i(z,t) - L \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} i(z,t) \right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v(z,t) = -R \frac{\partial}{\partial z} \left(-G v(z,t) - C \frac{\partial}{\partial t} v(z,t) \right) - L \frac{\partial}{\partial t} \left(-G v(z,t) - C \frac{\partial}{\partial t} v(z,t) \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v(z,t) = RG v(z,t) + RC \frac{\partial}{\partial t} v(z,t) + LG \frac{\partial}{\partial t} v(z,t) + LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(z,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v(z,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(z,t) + (LG + RC) \frac{\partial}{\partial t} v(z,t) + RG v(z,t)$$

Alternando el procedimiento en términos de $i(z,t)$, se tiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} i(z,t) = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(z,t) + (LG + RC) \frac{\partial}{\partial t} i(z,t) + RG i(z,t)$$

Si se utilizan las ecuaciones fasoriales de Maxwell en el dominio de ω :

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -(\sigma + j\omega\epsilon) E_y \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) E_y = (j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon) E_y$$

Ecuación de Onda en un Medio Conductor

Si se considera el espacio libre como una línea de transmisión de celdas de campo, esto implica que en una celda de campo la inductancia por unidad de longitud sea la permeabilidad, la capacitancia por unidad de longitud sea la permitividad y que la conductancia por unidad de longitud sea la conductividad.

$$L/\ell \equiv \mu \quad C/\ell \equiv \epsilon \quad G/\ell \equiv \sigma$$

entonces, la ecuación de onda queda expresada de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = (j\omega LG - \omega^2 LC) E_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = j\omega L(G + j\omega C) E_y = 0$$

en donde

$$V = E_y \ell \Rightarrow E_y = \frac{V}{\ell} \left[\frac{\text{volts}}{\text{u. longitud}} \right]$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = j\omega L(G + j\omega C) V = 0$$

Ecuación de Onda para una L.T. de celdas de Campo en Términos de la Tensión "V" entre las Cintas Conductoras.

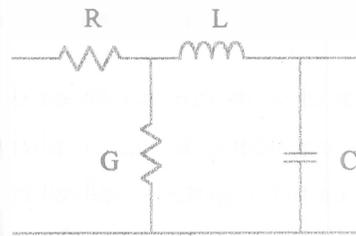
Para una R/l finita se tiene:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = (G + j\omega C) (R + j\omega L) V = 0 \equiv YZV$$

Por otra parte, de las ecuaciones de Máxwell aplicadas al estudio de las L.T. se observa que no existe análogo a la resistencia por unidad de longitud, lo que implica que la resistencia de los conductores debe determinarse obteniendo soluciones separadas de las ecuaciones de Maxwell dentro del conductor y forzando las dos soluciones a satisfacer las condiciones de frontera, el término que se omite en la ecuación de campo representa el problema de los campos dentro del conductor, cuya solución permite obtener un valor para R en el circuito.

Si se deduce la ecuación de onda en términos del campo H_z , la ecuación de la línea de transmisión resultante da como resultado la corriente "I" en cada conductor:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - YIZ = 0$$



Circuito equivalente en Δx

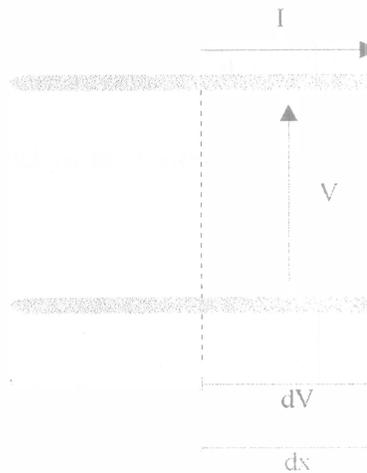
Por ley de Ohm se tiene que:

Cambio de potencial en x

$$\frac{dV}{dx} = ZI; \quad I = \text{cte.}$$

Cambio de Corriente en derivación

$$\frac{dI}{dx} = YV$$



$$\frac{d^2 V}{dx^2} = I \frac{dZ}{dx} + Z \frac{dI}{dx} = I \frac{dZ}{dx} + ZYV$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = V \frac{dY}{dx} + Y \frac{dV}{dx} = V \frac{dY}{dx} + YIZ$$

En una línea de transmisión uniforme no existe variación de la impedancia o de la admitancia respecto a "x", es decir, estos parámetros no cambian y son los mismo en cualquier punto de la línea de transmisión, por lo tanto:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - ZYV = 0$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} - ZYI = 0$$

REFLEXIÓN DE ONDAS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

¿Qué sucede con la energía electromagnética al llegar a la carga?

- (1) La energía se absorbe totalmente
- (2) Parte es reflejada y parte absorbida
- (3) Hay reflexión total

Cuando la carga no absorbe una parte de la energía, ésta se refleja sobre la línea de transmisión de lo que se concluye que en la línea se propagan dos energías en sentidos opuestos.

Del análisis anterior se observa que las líneas de transmisión se pueden estudiar resolviendo las ecuaciones de campo considerando las condiciones de frontera (ecuaciones de Maxwell) que arrojan resultados de carácter general aplicables tanto a líneas de transmisión como a guías de onda, pero es un método algo complicado. Otra forma más sencilla es por medio de las tensiones y corrientes asociadas al campo electromagnético. En el análisis anterior se llegó a las siguientes expresiones:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = ZYV \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} - ZYV = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 I}{dx^2} = ZYI \Rightarrow \frac{d^2 I}{dx^2} - ZYI = 0$$

La forma de las ecuaciones anteriores es el de una ecuación homogénea de 2º orden con raíces repetidas con signos opuestos:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - ZYV = 0 \Rightarrow m^2 - ZY = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 I}{dx^2} - ZYI = 0 \Rightarrow m^2 - ZY = 0$$

$$\therefore m^2 = ZY \Rightarrow m = \sqrt{ZY} \quad \text{haciendo} \quad m = \gamma \Rightarrow \gamma = \sqrt{ZY}$$

Recuérdese que γ es la constante de propagación, que como es obvio, es compleja; Z es la impedancia serie dada por $Z = R + j\omega L$, Y es la admitancia paralelo dada por $Y = G + j\omega C$.

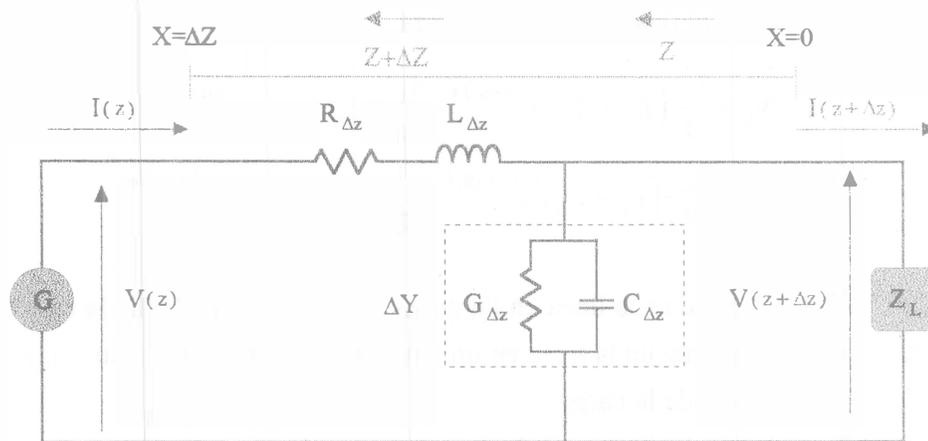
La solución de la ecuación diferencial homogénea de segundo es $V = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$, donde A y B son constantes a determinar considerando las condiciones de frontera en los extremos de la línea. Los exponentes indican el desplazamiento de la energía electromagnética a lo largo de la línea de transmisión, los signos en éstos significan que existe una onda que se aleja (emitida) y otra que se aproxima (reflejada) al generador o fuente.

$$\frac{dV}{dx} = ZI \quad \text{y} \quad \frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} (Ae^{\gamma x} - Be^{-\gamma x}) = \gamma Ae^{\gamma x} - \gamma Be^{-\gamma x} \quad \therefore ZI = \gamma Ae^{\gamma x} - \gamma Be^{-\gamma x}$$

$$I = \frac{\gamma}{Z} Ae^{\gamma x} - \frac{\gamma}{Z} Be^{-\gamma x} = \frac{\sqrt{ZY}}{Z} Ae^{\gamma x} - \frac{\sqrt{ZY}}{Z} Be^{-\gamma x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} Ae^{\gamma x} - \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Y}}} Be^{-\gamma x}$$

$$I = \frac{A}{Z_0} e^{\gamma x} - \frac{B}{Z_0} e^{-\gamma x}$$

Z_0 es la impedancia característica o intrínseca de la L.T.



Circuito equivalente de una Línea de Transmisión

En $x=0$ se tiene:

$$V = V_L \quad I = I_L$$

entonces:

$$V_L = A + B \Rightarrow I_L = \frac{A}{Z_0} - \frac{B}{Z_0}$$

donde:

$$A = V_L - B \Rightarrow I_L = \frac{V_L - B - B}{Z_0} \Rightarrow B = \frac{V_L - I_L Z_0}{2} = \frac{I_L}{2} (Z_L - Z_0)$$

$$B = V_L - A \Rightarrow I_L = \frac{A - V_L + A}{Z_0} \Rightarrow A = \frac{V_L + I_L Z_0}{2} = \frac{I_L}{2} (Z_L + Z_0)$$

Con los valores de A y B se puede ahora determinar el voltaje y la corriente en cualquier punto alejado de la carga.

$$V_x = \frac{I_L}{2} (Z_L + Z_0) e^{\gamma x} + \frac{I_L}{2} (Z_L - Z_0) e^{-\gamma x} \quad I_x = \frac{I_L}{2Z_0} (Z_L + Z_0) e^{\gamma x} - \frac{I_L}{2Z_0} (Z_L - Z_0) e^{-\gamma x}$$

Por otra parte recuérdese que "Z" es la impedancia serie y "Y" es la admitancia paralelo debida a la separación entre los conductores, entonces:

$$\gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \sqrt{RC - \omega^2 LC + j(\omega LG + \omega RC)} = \alpha + j\beta$$

Constante de propagación para L.T. con pérdidas

El término real de la constante de propagación (α constante de atenuación u amortiguamiento) indica la atenuación de la onda en su viaje a través de la línea, es decir, por pérdidas o imperfecciones de los conductores y su dieléctrico; la parte imaginaria (β constante de fase) indica el cambio de fase de la onda al desplazarse en la línea.

$$V_x = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0) e^{(\alpha + j\beta)x} + \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0) e^{-(\alpha + j\beta)x}$$

$$I_x = \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L + Z_0) e^{(\alpha + j\beta)x} - \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L - Z_0) e^{-(\alpha + j\beta)x}$$

- V_x : Tensión total en la línea en un punto cualquiera alejado de la carga.
 I_x : Corriente total en la línea en un punto cualquiera alejado de la carga.
 Z_L : Impedancia de la carga.
 Z_0 : Impedancia Intrínseca de la línea.
 I_L : Corriente que circula en la carga.
 V_L : Tensión entre las terminales de la carga.
 α : Constante de amortiguamiento.
 β : Constante de fase.
 x : Distancia desde la carga donde se mide V_x e I_x .

Partiendo de α y de β se determinan las constantes distribuidas de la línea de transmisión (se deja al lector realizar la demostración que llevan a estas expresiones).

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} + (RG - \omega^2 LC)}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} - (RG - \omega^2 LC)}$$

Es importante hacer énfasis que las líneas de comunicación y de transporte de radio-frecuencias se diseñan de tal manera que presenten bajas pérdidas, por ejemplo, en el rango de ultra alta frecuencia (UHF) se utilizan secciones de bajas pérdidas como elementos de circuito por lo que resulta necesario conocer el funcionamiento de los circuitos de parámetros distribuidos.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Impedancia característica de una L.T. a partir de sus parámetros distribuidos.

Por otra parte, las líneas suficientemente largas presentan atenuación que afecta notablemente al voltaje y corriente de la línea de transmisión. Recordando que R y G son las imperfecciones del conductor y del dieléctrico, respectivamente, entonces para el caso ideal éstas valen cero ($R=G=0$); para que la línea sea baja en pérdidas debe cumplir que $R \ll \omega L$ y $G \ll \omega C$, matemáticamente se expresa:

$$\gamma = \alpha + j\beta \approx j\omega\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \text{ y } \beta = \omega\sqrt{LC}$$

En el caso de las líneas bifilares a frecuencias en el rango de 1 a 100 MHz (considerando $\omega L/R > 10$) se tiene que la impedancia intrínseca es:

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{\ell}$$

D es la separación entre los conductores, y ℓ es la longitud de la línea

Para las líneas coaxiales operando a frecuencias en el rango de 1 a 100 MHz (considerando $\omega L/R > 10$ y $\omega C/G > 10$) se tiene que la impedancia intrínseca es:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{b}{a}$$

b es el radio interno del conductor exterior y a es el radio del conductor interno.

De nuestros estudios en capítulos precedentes, sabemos que para una onda viajera el término $x - vt$ tiene un valor constante, análogamente $t - \beta x$ también es constante; entonces se tiene que

$$\omega t - \beta x = \text{constante}$$

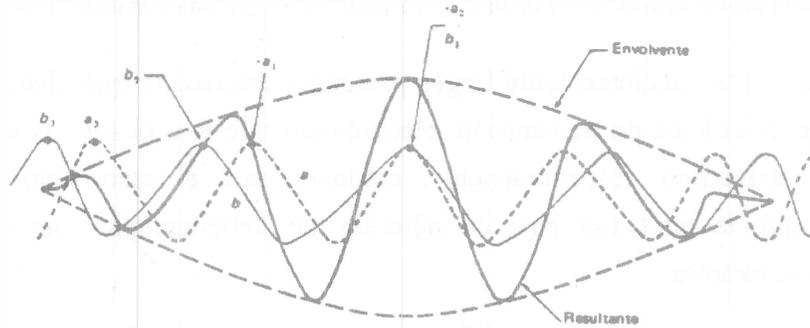
si se deriva respecto al tiempo

$$\omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{\beta}$$

La expresión anterior es la velocidad de un punto de fase constante o velocidad de fase, es decir:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f$$

Para una onda individual la velocidad de fase es igual a la velocidad de propagación. Para el caso en que se combinan dos o más ondas de diferentes frecuencias en una onda de amplitud modulada:



se tiene que si las ondas componentes tiene la misma velocidad de propagación, éstas se desplazarán juntas y el máximo de la envolvente con ellas a la misma velocidad, obviamente, tanto la velocidad de fase y velocidad de propagación son iguales. Cuando las ondas componentes tienen diferentes velocidades de propagación, puede suceder una de dos cosas, en un caso, la envolvente se deslizará hacia atrás respecto a las ondas componentes, lo que indica que la velocidad del grupo de ondas es menor que la velocidad de fase individual de cada una de ellas; el otro comportamiento que se puede llegar a dar es el opuesto al descrito, esto cuando aumenta la frecuencia de las ondas.

Coefficiente de atenuación	$\alpha = 0$
Coefficiente de fase	$\beta = \omega \sqrt{LC}$
Velocidad e propagación	$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Impedancia Intrínseca	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$
Longitud de onda	$\lambda = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{LC}}$

Resumen de propiedades de L.T. de bajas pérdidas y sin pérdidas .

Velocidad de Grupo.

De la figura se tiene:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - \beta x)$$

Si se considera que la onda tiene dos frecuencias de igual amplitud dadas por $\omega_0 + \Delta\omega$ y $\omega_0 - \Delta\omega$ se tiene que los valores correspondientes para β son:

$$\beta_0 + \Delta\beta \quad \text{que corresponde a } \omega_0 + \Delta\omega$$

$$\beta_0 - \Delta\beta \quad \text{que corresponde a } \omega_0 - \Delta\omega$$

Para una frecuencia se tiene E_y' y para otra E_y'' , es decir:

$$E_y' = E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x] \quad E_y'' = E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x]$$

$$E_y = E_y' + E_y''$$

$$E_y = E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)x] + E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)x]$$

$$E_y = 2E_0 \cos(\omega_0 t - \beta_0 x) \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta x)$$

En los factores coseno hay pequeños impulsos que son una ligera variación sobrepuestas más rápida.

Para un punto de fase constante se obtiene la *velocidad de fase*:

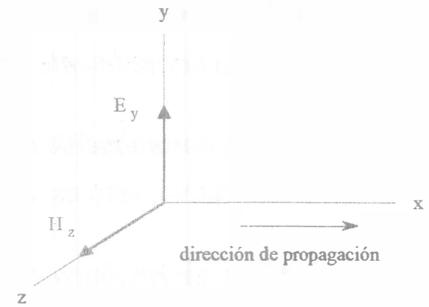
$$\omega_0 t - \beta_0 x = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0} = v = f_0 \lambda_0$$

En la misma forma para el segundo factor cosenoidal se tiene:

$$\Delta\omega t - \Delta\beta x = \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = u = \Delta f \Delta \lambda$$

u es la velocidad de fase de la envolvente de la onda llamada comúnmente *velocidad de grupo*.

Obsérvese que se puede considerar a $\omega_0 + \Delta\omega$ y $\omega_0 - \Delta\omega$ como las frecuencias de banda lateral de una onda portadora modulada en frecuencia de frecuencia ω_0 por una frecuencia $\Delta\omega$, siendo suprimida la frecuencia portadora. Para medios no dispersores (sin pérdidas), la velocidad de grupo es la misma que la velocidad de fase, por ejemplo en el espacio libre $v = u = c$, pero para medios dispersores las velocidades de grupo y de fase son diferentes.



En un medio dispersor la velocidad de fase es una función de la frecuencia, los medios dispersores se clasifican en *normalmente dispersores* y en *anormalmente dispersores*.

En los medios *normalmente dispersores* el cambio de velocidad de fase con respecto a la longitud de onda es positivo, esto es, $dv/d\lambda > 0$. Para estos medios $u < v$.

En los medios *anormalmente dispersores* o *anómalos* el cambio de velocidad de fase con respecto a la longitud de onda es negativo, esto es, $dv/d\lambda < 0$. Para estos medios $u > v$.

Para una frecuencia particular (de muy pequeño ancho de banda):

$$u = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta}$$

pero

$$\omega = 2\pi f = 2\pi f \frac{\lambda}{\lambda} = \beta v$$

entonces

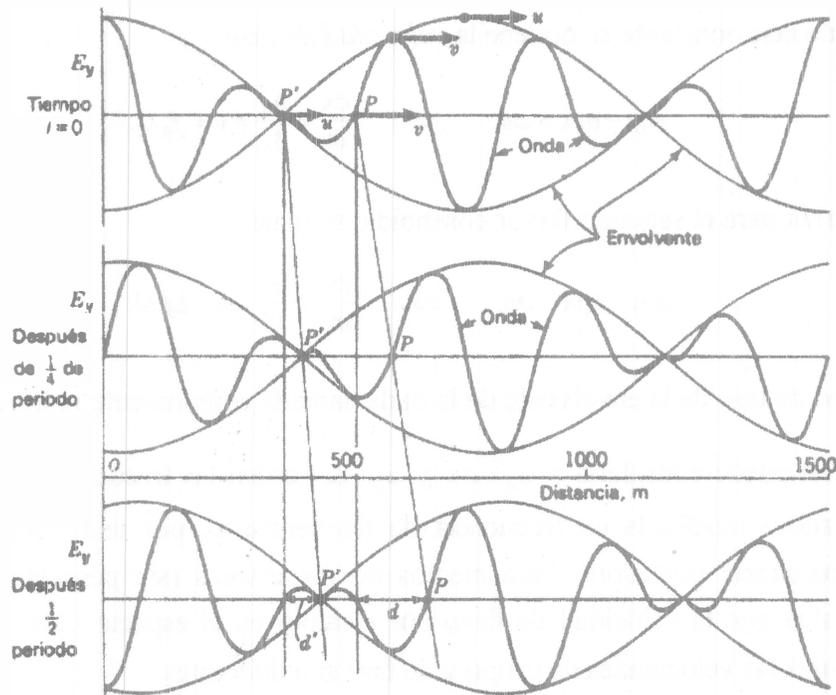
$$u = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{d(\beta v)}{d\beta} = \beta \frac{dv}{d\beta} + v$$

es decir

$$u = v + \beta \frac{dv}{d\beta}$$

Se puede demostrar que:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$



Coefficiente de Reflexión (ζ).

Considérese las siguientes ecuaciones de voltaje y corriente en cualquier punto a distancia de la carga:

$$V_x = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0) e^{\gamma x} + \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0) e^{-\gamma x} \quad I_x = \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L + Z_0) e^{\gamma x} - \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L - Z_0) e^{-\gamma x}$$

Para las líneas de bajas pérdidas ($\alpha \approx 0$) y para líneas sin pérdidas ($\alpha = 0$), la constante de propagación

$\gamma = \alpha \pm j\beta$ queda $\gamma = \pm j\beta$, entonces las expresiones quedan:

$$V_x = \frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0) e^{j\beta x} + \frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0) e^{-j\beta x} \quad I_x = \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L + Z_0) e^{j\beta x} - \frac{I_L}{2Z_0}(Z_L - Z_0) e^{-j\beta x}$$

Cuando la impedancia de carga Z_L es diferente a la impedancia de la línea Z_0 , se presenta una onda reflejada. Para cuantificar la reflexión en la línea se hace uso del coeficiente de reflexión ζ que se define como la relación de la onda reflejada de voltaje entre la onda emitida de voltaje:

$$\zeta_v = \frac{V''}{V'} = \frac{\frac{I_L}{2}(Z_L - Z_0) e^{-j\beta x}}{\frac{I_L}{2}(Z_L + Z_0) e^{j\beta x}} = \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)} e^{-2j\beta x} \quad \zeta_I = \frac{I''}{I'} = \frac{\frac{I_L}{2Z_0}(Z_L - Z_0) e^{-j\beta x}}{\frac{-I_L}{2Z_0}(Z_L + Z_0) e^{j\beta x}} = \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)} e^{-2j\beta x}$$

$$\zeta_v = \frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)} \quad \zeta_I = -\frac{(Z_L - Z_0)}{(Z_L + Z_0)}$$

Coefficiente de reflexión para la onda de tensión.

Coefficiente de reflexión para la onda de corriente.

Es obvio que el coeficiente de reflexión es un número complejo siempre que la impedancia de carga lo sea, para altas frecuencias la impedancia característica es un número real.

$$Z_L = 0 \Rightarrow \zeta = -1 \quad Z_L = \infty \Rightarrow \zeta = 1 \quad Z_L = Z_0 \Rightarrow \zeta = 0$$

(1)

(2)

(3)

La expresión "1" indica una línea de transmisión en circuito corto, la "2" indica una línea de transmisión en circuito abierto y la "3" es la condición ideal para una línea de transmisión de comunicaciones. Haciendo el cociente de las mismas ecuaciones de voltaje y corriente en cualquier punto a distancia de la carga se tiene, se obtiene la ecuación general para la impedancia en cualquier punto de la línea:

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 j \operatorname{tgh} \gamma x}{Z_0 + Z_L j \operatorname{tgh} \gamma x}$$

Si la línea está en circuito abierto ($Z_L = \infty$):

$$Z_x = \frac{Z_0}{\tanh \gamma x} = Z_0 \coth \gamma x$$

Si la línea está en circuito corto ($Z_L = 0$):

$$Z_x = Z_0 \tanh \gamma x$$

Por otra parte, el producto de la impedancia de la línea cuando está en circuito abierto y la impedancia de la línea en corto circuito es igual al cuadrado de la impedancia característica:

$$Z_0^2 = Z_{c.c.} \cdot Z_{c.a.}$$

Si la línea es de bajas pérdidas o sin pérdidas:

$$Z_x = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 j \operatorname{tg} \beta x}{Z_0 + Z_L j \operatorname{tg} \beta x}$$

Esta última expresión es la ecuación general para la impedancia Z_x en función de la distancia x medida desde la carga.

Si la línea está en circuito abierto ($Z_L = \infty$):

$$Z_x = \frac{Z_0}{j \tan \beta x} = -j Z_0 \cot \beta x$$

Si la línea está en circuito corto ($Z_L = 0$):

$$Z_x = j Z_0 \tan \beta x$$

Para una L.T. que termina en una reactancia:

$$Z_x = j Z_0 \frac{X + Z_0 \operatorname{tg} \gamma x}{Z_0 - X \operatorname{tg} \gamma x}$$

Observe que cuando la carga es reactiva, la impedancia Z_x , también es reactiva para cualquier punto de la línea.

Superposición de ondas.

Hasta ahora hemos enfocado todo nuestro estudio en las ondas electromagnéticas, pero es importante que se mencione aquí que todos los tipos de ondas electromagnéticas y mecánicas (el sonido, movimiento armónico de los materiales, etc.) tienen el mismo comportamiento y sufren los mismos efectos en lo referente a su desplazamiento de un medio a otro. En un medio lineal, esto es, un medio en que la fuerza de restauración es proporcional al desplazamiento del mismo (para el caso mecánico), se aplica el principio de superposición para obtener el efecto resultante de la acción de dos más perturbaciones combinadas. Este principio establece que el desplazamiento

efectivo o neto de cualquier porción del medio perturbado es igual a la suma algebraica de los desplazamientos individuales de cada perturbación actuante en el mismo.

A lo largo de estos apuntes se ha hecho uso de ondas armónicas para los análisis, continuando con la ayuda de este tipo de perturbaciones armónicas ahora se analiza qué sucede cuando éstas pasan por una discontinuidad o frontera entre dos medios diferentes, ya sea que tengan o no la misma frecuencia.

Considérese el caso general de dos ondas viajeras de diferente fase, con la misma frecuencia y longitud de onda (misma frecuencia) desplazándose en el sentido positivo del eje "x".

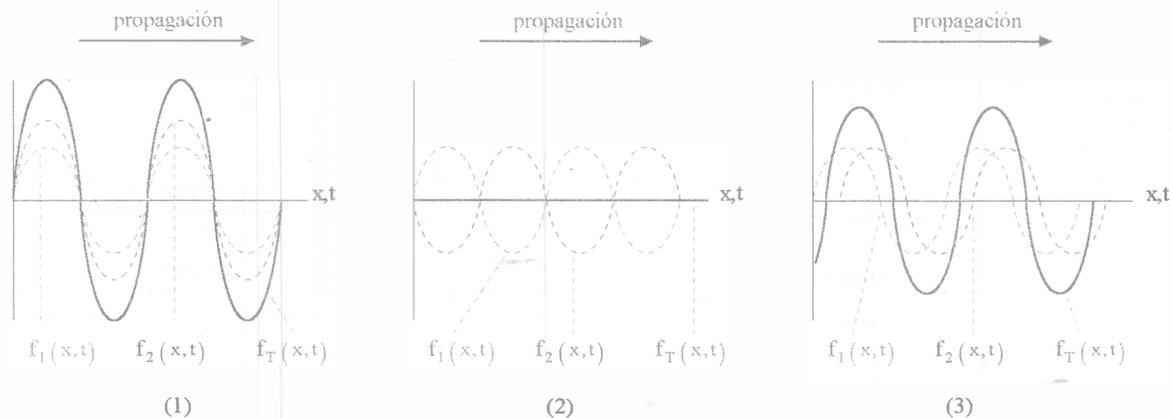
$$f_1 = E_0 \text{ sen } (kx - \omega t) \quad \text{y} \quad f_2 = E_0 \text{ sen } (kx - \omega t - \psi)$$

la onda resultante es:

$$f_T = f_1 + f_2 = E_0 \left\{ \text{sen } (kx - \omega t) + \text{sen } (kx - \omega t - \psi) \right\}$$

$$f_T = \left[2E_0 \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) \right] \text{sen } \left(kx - \omega t - \frac{\psi}{2} \right)$$

Observe que el primer factor de la expresión resultante es la amplitud de la onda, cuyo valor depende sólo de la fase (ψ); el segundo factor indica su posición en el tiempo y en el espacio.



La figura anterior muestra el comportamiento entre dos ondas viajeras de igual magnitud y frecuencia, pero con diferente fase en cada caso. El caso (1) muestra interferencia constructiva de dos ondas en fase; el caso (2) muestra interferencia destructiva cuando las dos ondas están fuera de fase 180° ; el caso (3) muestra el comportamiento entre los dos casos límite anteriores, cuando la fase se encuentra en el intervalo $0 < \psi < 180^\circ$, la onda resultante se encuentra entre los caso (1) y (2).

ONDA ESTACIONARIA

Al pasar una onda de un medio a otro, puede o no presentarse un fenómeno de reflexión en la frontera de los dos medios, es decir, parte la onda viajera incidente hacia un nuevo medio es absorbida por éste y parte es rechazada.

Del anterior análisis

$$f_T = E_0 \{ \text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx - \omega t - \psi) \}$$

aplicando la identidad trigonométrica

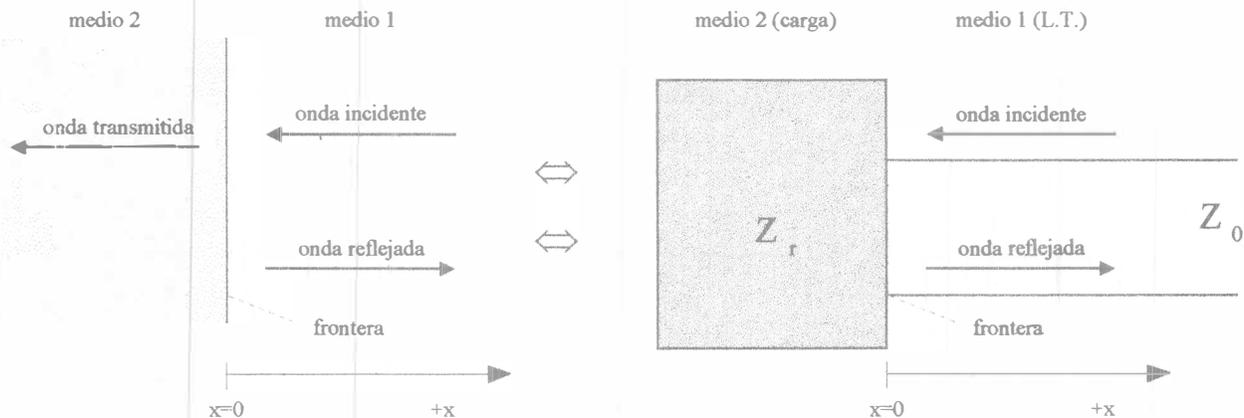
$$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a) \cos(b) \pm \text{sen}(b) \cos(a)$$

se tiene

$$f_T = 2E_0 \text{sen}(kx) \cos(\omega t)$$

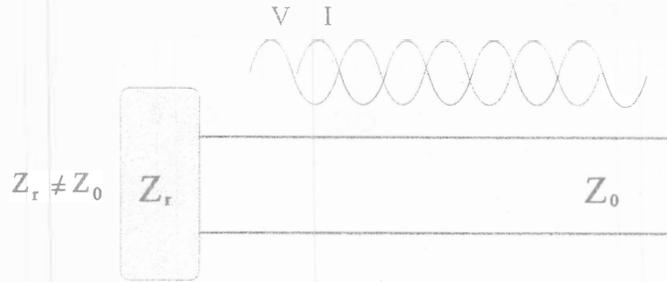
Expresión de una onda estacionaria.

Esta ecuación tiene por amplitud $2E_0 \text{sen}(kx)$ y con frecuencia angular " ω ", es claro que la amplitud de la onda estacionaria depende de la posición.



Anteriormente se demostró que la corriente y voltaje a una distancia " x " de la carga se consideran compuestas de dos ondas de energía propagándose en sentidos opuestos cuando la impedancia de la carga y la impedancia intrínseca o característica son diferentes; también se vio el caso ideal, en el que no existen pérdidas ni ondas reflejadas, esto sucede sólo si las impedancia Z_r y Z_0 son iguales, lo que implica una transferencia máxima de energía, es decir, la energía es transmitida totalmente al medio en el que incide la onda.

Cuando las impedancias Z_r y Z_0 sean diferentes existirá reflexión total o parcial, lo que indica la presencia de energía estacionaria debido al efecto combinado de la energía incidente y de la parte reflejada. Analice con cuidado que una L.T. en c.c. o en c.a. presenta reflexión total.



Ondas estacionarias de corriente y voltaje en una L.T. no acoplada.

Previamente determinamos el coeficiente de reflexión tanto para la onda de voltaje como para la onda de corriente.

$$\zeta_v = \frac{(Z_r - Z_0)}{(Z_r + Z_0)} \qquad \zeta_I = -\frac{(Z_r - Z_0)}{(Z_r + Z_0)}$$

Coeficiente de reflexión.

Como son cantidades complejas se pueden expresar en forma polar:

$$\zeta_v = |\zeta| \angle \theta_v \qquad \zeta_I = |\zeta| \angle \theta_I$$

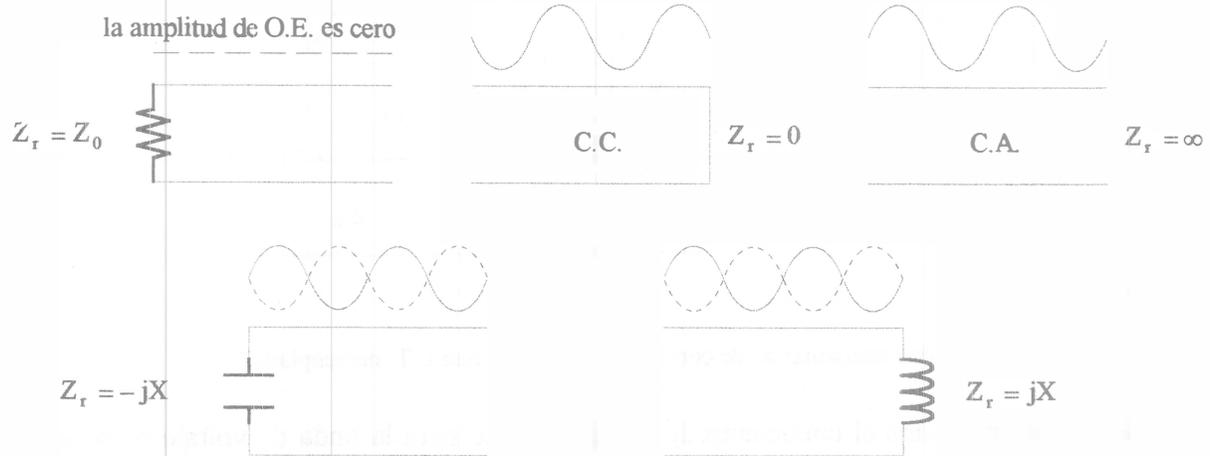
donde

$$\theta_v = \text{tg}^{-1} \left(\frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} \right) \qquad \theta_I = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{Z_r - Z_0}{Z_r + Z_0} \right)$$

entonces se puede observar que:

$Z_r = Z_0$	$ \zeta = 0$	$\theta = 0$
$Z_r = 0$	$ \zeta = 1$	$\theta = \pi$
$Z_r = \infty$	$ \zeta = 1$	$\theta = 0$
$Z_r = \pm jX$	$ \zeta = 1$	$\theta = \pi \mp 2 \text{tg}^{-1} \frac{ X }{Z_0}$
$Z_r = \pm jZ_0$	$ \zeta = 1$	$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Estos resultados se indican gráficamente:



Razón de onda estacionaria (SWR).

En general el estudio de las ondas estacionarias se centra en la razón de los valores máximo y mínimo de la envolvente de éstas en lugar de interesarse en la forma de la misma envolvente. A este cociente se le denomina razón o relación de onda estacionaria ROE (Standing Wave Ratio, SWR).

$$VSWR = \frac{\text{valor máximo de la envolvente}}{\text{valor mínimo de la envolvente}} = \frac{|V_{máx}|}{|V_{mín}|} = \frac{|I_{máx}|}{|I_{mín}|}$$

Como la tensión a cualquier distancia "x" de la carga es proporcional al campo, entonces se puede manejar este cociente como la razón de onda estacionaria de tensión ROET (VSWR). El máximo de la envolvente es la suma de las amplitudes de las ondas incidentes y reflejadas ($E_0 + E_r$), mientras que el valor mínimo está dado por la diferencia de éstas ($E_0 - E_r$). Estos datos permiten determinar la parte de la energía incidente que es rechazada en la discontinuidad entre los dos medios, así como la porción absorbida a través de la interfase; finalmente esto ayuda a conocer la naturaleza de las condiciones del punto de reflexión.

$$VSWR = \frac{E_{máx}}{E_{mín}} = \frac{E_0 + E_r}{E_0 - E_r}$$

Nótese que el subíndice "r" en esta sección lo usamos como indicador de la onda reflejada y no en el sentido de las secciones precedentes en que denota alguna cantidad relacionada con la carga de una línea.

Sabemos que la razón entre la onda reflejada y la onda incidente es el coeficiente de reflexión ζ , que como se vio antes

$$\zeta = \frac{E_r e^{j\gamma}}{E_0} = \frac{|E_r| \angle \gamma}{|E_0|} = |\zeta| \angle \gamma$$

también se encontró que $0 < \zeta < 1$ con ángulos de fase entre cero y $\pm 180^\circ$, entonces

$$\text{VSWR} = \frac{E_0 + E_r}{E_0 - E_r} = \frac{\frac{E_0 + E_r}{E_0}}{\frac{E_0 - E_r}{E_0}} = \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|}$$

lo que permite tener una expresión de la magnitud del coeficiente de reflexión en función del VSWR:

$$|\zeta| = \frac{\text{VSWR} - 1}{\text{VSWR} + 1}$$

Por ley de Ohm sabemos que

$$R_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{I_{\text{mín}}} = \frac{E_0 + E_r}{I_0 - I_r} \quad R_{\text{mín}} = \frac{E_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}}} = \frac{E_0 - E_r}{I_0 + I_r}$$

sabemos que

$$Z_0 = \frac{E_0}{I_0} = \frac{E_r}{I_r}$$

entonces se tiene

$$\frac{R_{\text{máx}}}{Z_0} = \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|} = \text{VSWR} \quad R_{\text{mín}} = \frac{1 - |\zeta|}{1 + |\zeta|} = \frac{1}{\text{VSWR}}$$

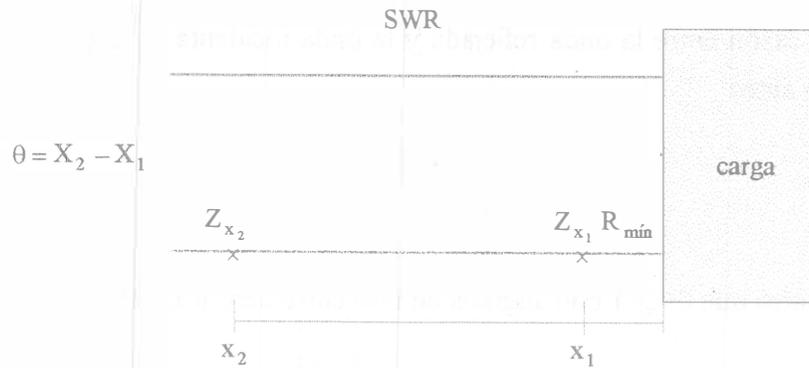
de donde finalmente

$$Z_0 = \sqrt{R_{\text{máx}} \cdot R_{\text{mín}}}$$

Anteriormente obtuvimos la expresión para la impedancia en la línea a cualquier distancia de la carga, si la relacionamos con el resultado anterior tenemos una forma para determinar una impedancia más alejada de la carga a una distancia x_2 conociendo la resistencia máxima o la mínima a una distancia x_1 de la carga y conociendo también el SWR.

$$Z_x = Z_0 \left[\frac{Z_r + jZ_0 \operatorname{tg} \theta}{Z_0 + jZ_r \operatorname{tg} \theta} \right]$$

Impedancia en la L.T. a cualquier distancia de la carga.



Si se conoce R_{\min} :

$$Z_{x_2} = Z_0 \left[\frac{R_{\min} + jZ_0 \operatorname{tg} \theta}{Z_0 + jR_{\min} \operatorname{tg} \theta} \right] = Z_0 \left[\frac{\frac{R_{\min} + jZ_0 \operatorname{tg} \theta}{R_{\min}}}{\frac{Z_0 + jR_{\min} \operatorname{tg} \theta}{R_{\min}}} \right] = Z_0 \left[\frac{1 + j\operatorname{SWR} \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{SWR} + j \operatorname{tg} \theta} \right]$$

Si se conoce R_{\max} :

$$Z_{x_2} = Z_0 \left[\frac{R_{\max} + jZ_0 \operatorname{tg} \theta}{Z_0 + jR_{\max} \operatorname{tg} \theta} \right] = Z_0 \left[\frac{\frac{R_{\min} + jZ_0 \operatorname{tg} \theta}{Z_0}}{\frac{Z_0 + jR_{\min} \operatorname{tg} \theta}{Z_0}} \right] = Z_0 \left[\frac{\operatorname{SWR} + j \operatorname{tg} \theta}{1 + j\operatorname{SWR} \operatorname{tg} \theta} \right]$$

Acoplamiento.

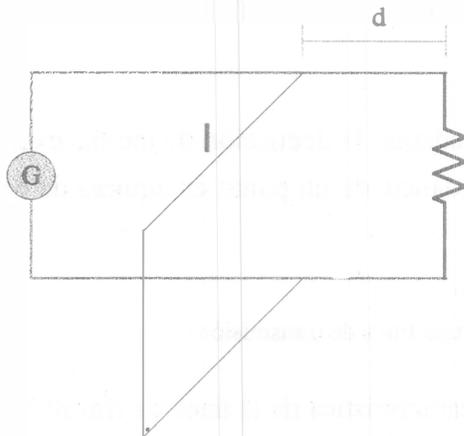
De lo que se ha visto, es claro que en la realidad las ondas electromagnéticas al pasar de un medio a otro siempre han de sufrir los efectos de reflexión, pero en aplicaciones prácticas se desea reducir al mínimo la existencia de la energía estacionaria, ya que su presencia resulta en pérdida de energía y de información.

Una forma práctica de reducir y casi eliminar la energía estacionaria, es mediante el uso de tramos líneas de transmisión, ya sea en circuito corto o en circuito abierto; a estos tramos se les llama STUB o BALUN (BALanced-UNbalanced). Estos tramos tienen un efecto compensatorio de la energía reactiva en la línea. De lo que se trata es de lograr que $\operatorname{SWR}=1$ lo que implicaría que $Z_0=Z_r$.

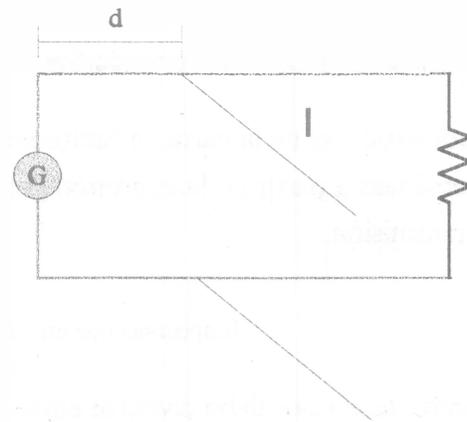
Una forma práctica de realizar este tipo de acoplamiento es como se muestra en la siguiente figura, colocar tramos del mismo material de la línea, en paralelo. Si se coloca el BALUN en circuito corto, éste debe colocarse a una distancia "d" medida a partir de la carga; si por el contrario, Este tramo se coloca en circuito abierto, la distancia "d" se debe medir a partir del generador.

La distancia "d" se puede determinar por medio del uso de la carta de Smith, pero si no se cuenta con ella, se tendrá que determinar por tanteo. La longitud del elemento también se puede determinar en la carta de Smith, pero una forma práctica es dar una longitud que cumpla con la siguiente condición:

$$l \leq n \frac{\lambda}{4}; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

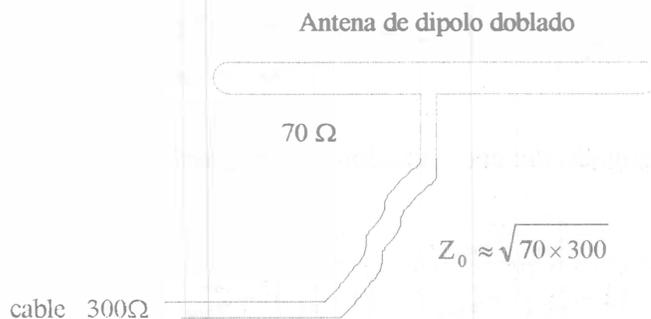


BALUN en circuito corto



BALUN en circuito abierto

Si no se cuenta con material igual al de la línea, se puede usar un tramo en serie que tenga una impedancia característica intermedia entre la de la línea y la impedancia de la carga, como ya vimos, este valor está dado por la raíz cuadrada del producto de los valores de la resistencia mínima y la resistencia máxima. Esto es más claro en el siguiente ejemplo.



$$l \leq n \frac{\lambda}{4}; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

LA CARTA DE SMITH

¿Qué es la carta de Smith?

La carta de Smith es una gráfica que auxilia en el estudio y resolución de problemas sobre líneas de transmisión. Esta carta se dibuja en el plano de coeficientes de reflexión de tensión sobre las coordenadas polares lineales de $\zeta = \zeta e^{j\phi}$ y se puede considerar que está dibujada sobre coordenadas rectangulares de las componentes real e imaginaria de ζ .

¿Cómo se construye la carta de Smith?

La construcción de la carta de Smith se lleva a cabo mediante la deducción de ciertas expresiones matemáticas a partir de la expresión general de la impedancia de un punto cualquiera de una línea de transmisión.

$$Z_s = R_s + j X_s$$

Impedancia de un punto cualquiera de una línea de transmisión.

Primero, este valor debe dividirse entre la impedancia característica de la línea de transmisión para poder normalizarlo.

$$Z_s = \frac{Z_s}{Z_0} = \frac{R_s + j X_s}{Z_0} = r_s + j x_s$$

Impedancia Normalizada.

Por otra parte, puede demostrarse que: $Z_s = Z_0 \frac{1 + \zeta_v}{1 - \zeta_v}$; $\zeta_v = -\zeta_i$

Normalizando Z_s respecto a Z_0 , se tiene: $\frac{Z_s}{Z_0} = \frac{1 + \zeta_v}{1 - \zeta_v} = r_s + j x_s$

pero ζ es un número complejo, entonces: $Z_s = \frac{1 + \zeta_{Re} + j \zeta_{Im}}{1 - \zeta_{Re} - j \zeta_{Im}} = r_s + j x_s$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador y simplificando se llega a:

$$Z_s = r_s + j x_s = \frac{1 - \zeta_{Re}^2 - \zeta_{Im}^2}{(1 - \zeta_{Re})^2 + \zeta_{Im}^2} + j \frac{2\zeta_{Im}}{(1 - \zeta_{Re})^2 + \zeta_{Im}^2}$$

Resistencia Normalizada.

Partiendo de: $r_s = \frac{1 - \zeta_{Re}^2 - \zeta_{Img}^2}{(1 - \zeta_{Re})^2 + \zeta_{Img}^2}$, agrupando, completando cuadrados y reagrupando, se obtiene:

$$\left(\zeta_{Re} - \frac{r_s}{1+r_s} \right)^2 + \zeta_{Img}^2 = \left(\frac{1}{1+r_s} \right)^2 \tag{A}$$

Ecuación de una familia de circunferencias con centro $C_1 \left(\frac{r_s}{1+r_s}, 0 \right)$ y radio $R_1 = \frac{1}{1+r_s}$

Reactancia Normalizada.

Partiendo de: $r_s = \frac{2\zeta_{Img}}{(1 - \zeta_{Re})^2 + \zeta_{Img}^2}$, agrupando, completando cuadrados y reagrupando, se obtiene:

$$(1 - \zeta_{Re})^2 + \left(\zeta_{Img} - \frac{1}{x_s} \right)^2 = \left(\frac{1}{x_s} \right)^2 \tag{B}$$

Ecuación de una familia de circunferencias con centro $C_2 \left(1, \frac{1}{x_s} \right)$ y radio $R_2 = \frac{1}{x_s}$

r_s	Coordenadas del centro del círculo		Radio del círculo
	ζ_{Re}	ζ_{Img}	
0	0	0	1
1/7	1/8	0	7/8
1/3	1/4	0	3/4
1	1/2	0	1/2
3	3/4	0	1/4
7	7/8	0	1/8
15	15/16	0	1/16

Tabla 1

x_s	Coordenadas del centro del círculo		Radio del círculo
	ζ_{Re}	ζ_{Img}	1
0	1	∞	∞
0.2	1	5	5
-0.2	1	-5	-5
± 0.5	1	± 2	± 2
± 1	1	± 1	± 1
± 2	1	± 0.5	± 0.5
± 5	1	± 0.2	± 0.2

Tabla 2

Tabulación de r_s y x_s

Partiendo de los valores tabulados se construyen las siguientes gráficas.

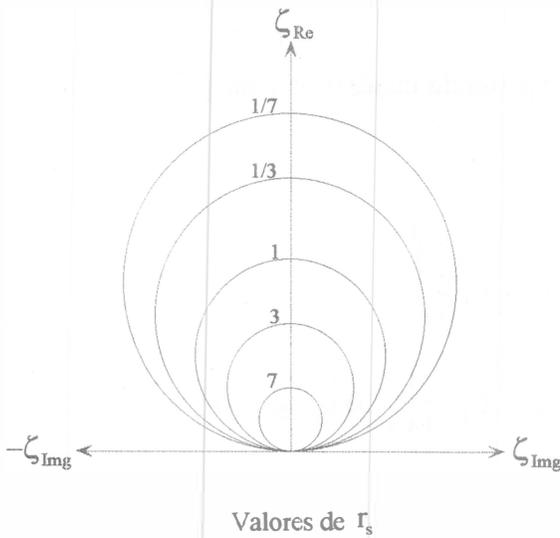


Figura "a"

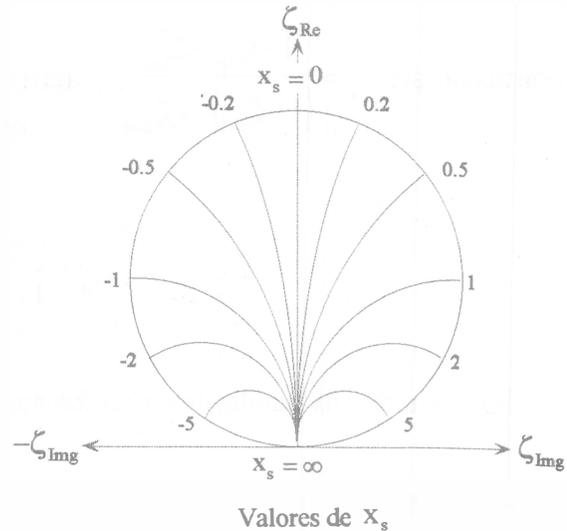


Figura "b"

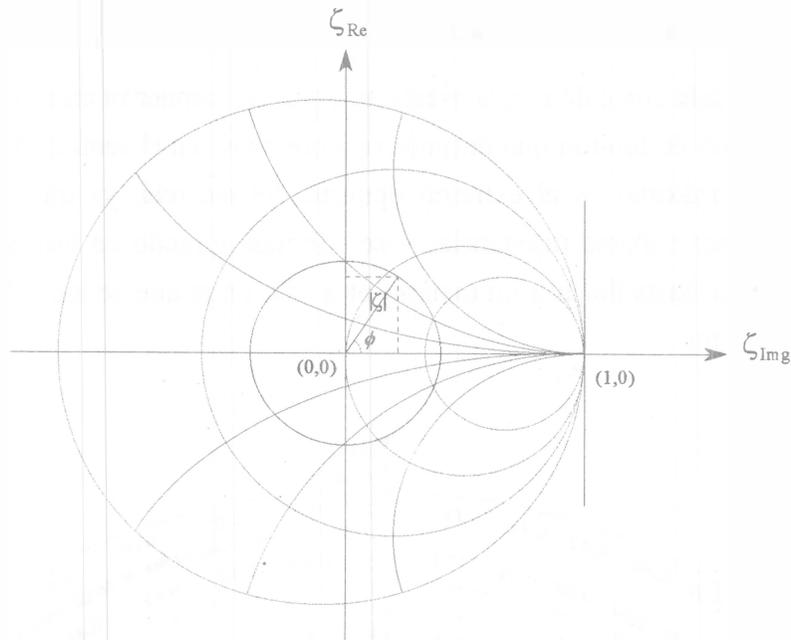
En la primera gráfica se puede localizar cualquier valor de impedancia en la línea de transmisión, ya que en el eje real es posible leer a partir del centro de la carta, los valores mínimos de $r_{s,\text{mín}}$ ó $V_{\text{mín}}$ cuando los círculos tienen un mayor radio, y los valores máximos de $r_{s,\text{máx}}$ ó $V_{\text{máx}}$ cuando los radios son menores. El centro de la carta está en el centro del eje real, es decir, cuando la resistencia normalizada vale 1.

En la segunda gráfica se observan círculos simétricos respecto al eje real, los que se forman hacia la derecha indican valores de reactancia positiva, y los que se forman hacia la izquierda indican valores de reactancia negativa.

Entre la impedancia normalizada y el coeficiente de reflexión (ζ) existe la siguiente relación:

$$\zeta = \frac{Z-1}{Z+1} = \zeta_{\text{Re}} + j \zeta_{\text{Img}} = \zeta \angle \phi$$

De las ecuaciones A y B, ζ_{Re} y ζ_{Img} son las variables, y r_s y x_s son las constantes, de tal manera que para cada valor de r_s y/o x_s existe un punto en el plano rectangular ζ_{Re} y ζ_{Img} . Al hacer simultáneas estas expresiones se concluye que todos los círculos de r_s y x_s constantes, cruzan por la coordenada (1,0). Si se grafica a ζ en forma polar se obtiene un punto definido por la carga, es decir, para cada carga se tiene $Z_r = r_r + x_r$, y para cualquier otro punto en la línea el coeficiente de reflexión mantendrá constante su magnitud, pero variará su ángulo ϕ en $\angle \phi - 2\beta s$, observe la siguiente figura.



Relación entre Z_s y ζ en la carta de impedancias de Smith.

En la gráfica anterior se observa que el círculo superpuesto sobre los círculos de r_s y x_s corresponde al lugar geométrico de todas las impedancias que hay en la línea de transmisión para una determinada carga y que corresponde a la forma polar de ζ . El valor de la impedancia en cualquier punto de L. T. se puede localizar sobre el círculo ζ constante variando el ángulo desde la carga hasta $2\beta s$ que son los grados eléctricos del punto que se analiza en la línea.

Características de la Carta de Smith.

Ángulo de reflexión en grados.

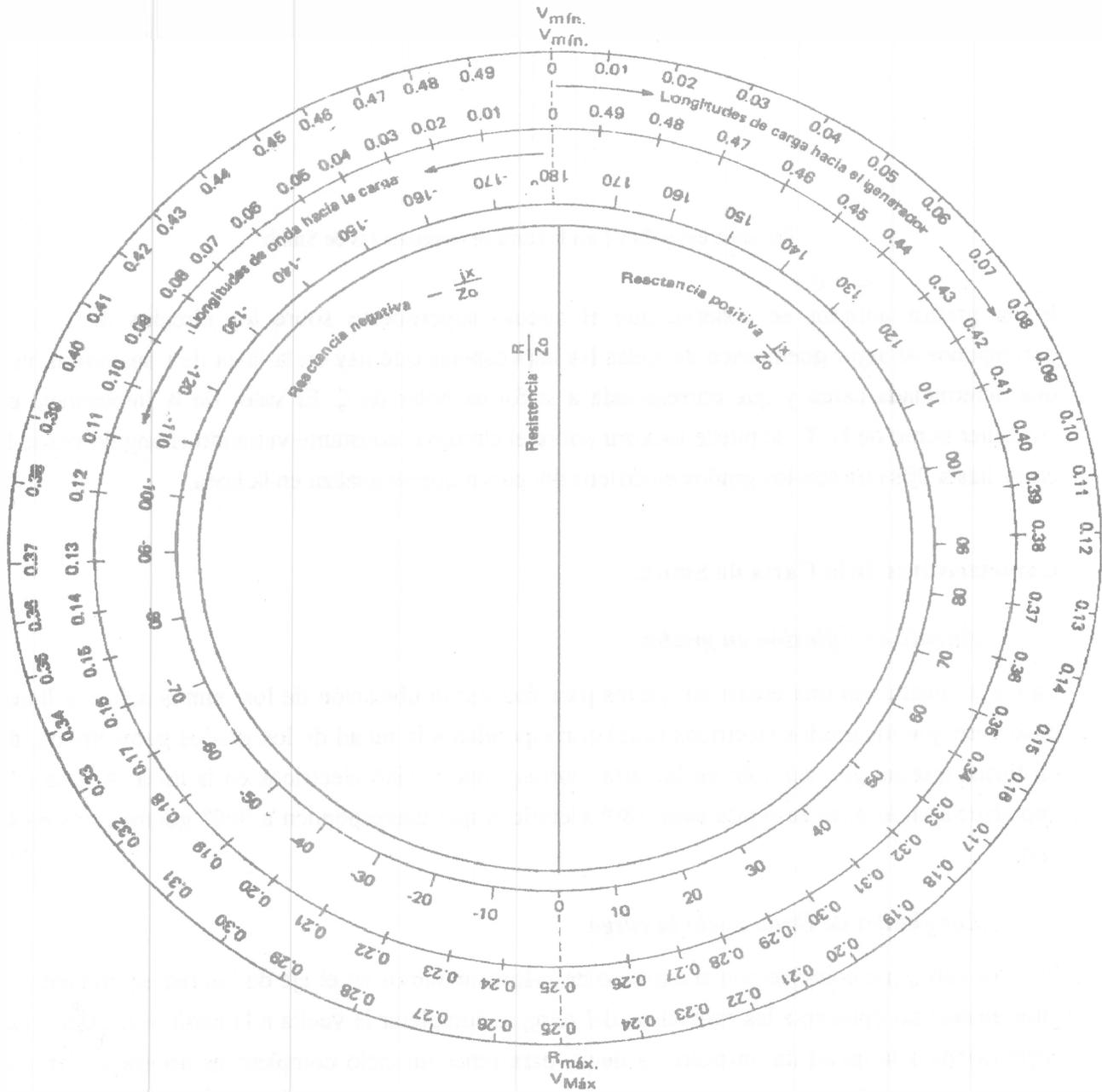
La carta cuenta con una escala en grados para facilitar la ubicación de los puntos sobre la línea, obsérvese que los grados eléctricos ($2\beta s$) corresponden a la mitad de los grados geométricos, de tal forma que un giro de 360° en la carta, corresponde a 180° eléctricos en la línea. Además, la impedancia en la línea se repite cada 180° eléctricos que corresponden a 360° geométricos en la carta.

Longitudes de Onda hacia la carga.

El valor cero, que coincide con el extremo de valores mínimos en el eje de los reales, comienza a girar en sentido opuesto a las manecillas del reloj; al completar la vuelta a la carta se lee 0.5λ que corresponde a la mitad de un ciclo, es decir, para tener un ciclo completo es necesario dar dos vueltas a la carta.

Longitudes de Onda hacia el generador.

El valor cero de esta escala coincide con la escala anterior. Se comienza en este lugar porque aquí se indica un valor mínimo de tensión que después se incrementa en el sentido de las manecillas del reloj hasta llegar a un máximo en el extremo opuesto del eje real, ya que para tener máxima tensión es necesario tener máxima resistencia; si se continúa girando en este sentido, se observa que comienza a decrecer hasta llegar a un mínimo otra vez, en el que se lee 0.5λ , es decir, medio ciclo de la onda de tensión.



¿Cómo se usa la carta de Smith?

Por medio de los siguientes ejemplos se pretende ilustrar brevemente la manera en que se emplea la carta de impedancias de Smith.

Ejemplo 1

Una línea de transmisión de 50Ω está terminada en una impedancia de carga de $30 + j 40 \Omega$. Si la línea tiene una longitud de 60° eléctricos, calcule:

- La impedancia de entrada Z_i .
- El coeficiente de reflexión ζ .
- La relación de onda estacionaria SWR.

Respuesta al inciso "a".

1° Se debe normalizar el valor de z_r :

$$z_r = \frac{Z_r}{Z_0} = \frac{30}{50} + j \frac{40}{50} = 0.6 + j 0.8 \quad \Rightarrow \quad r_r = 0.6 \quad \text{y} \quad x_r = +0.8$$

2° Se localiza el valor z_r en la carta:

En el eje real se encuentra un círculo marcado con 0.6, como la parte imaginaria es positiva se gira sobre este círculo en sentido de las manecillas del reloj hasta cruzar con un círculo que está marcado con +0.8. A este punto de cruce se le llama z_r .

3° Se traza el círculo ζ constante:

Se hace el trazo del círculo ζ cuyo centro es el centro de la carta, y su radio parte de éste hasta el punto z_r .

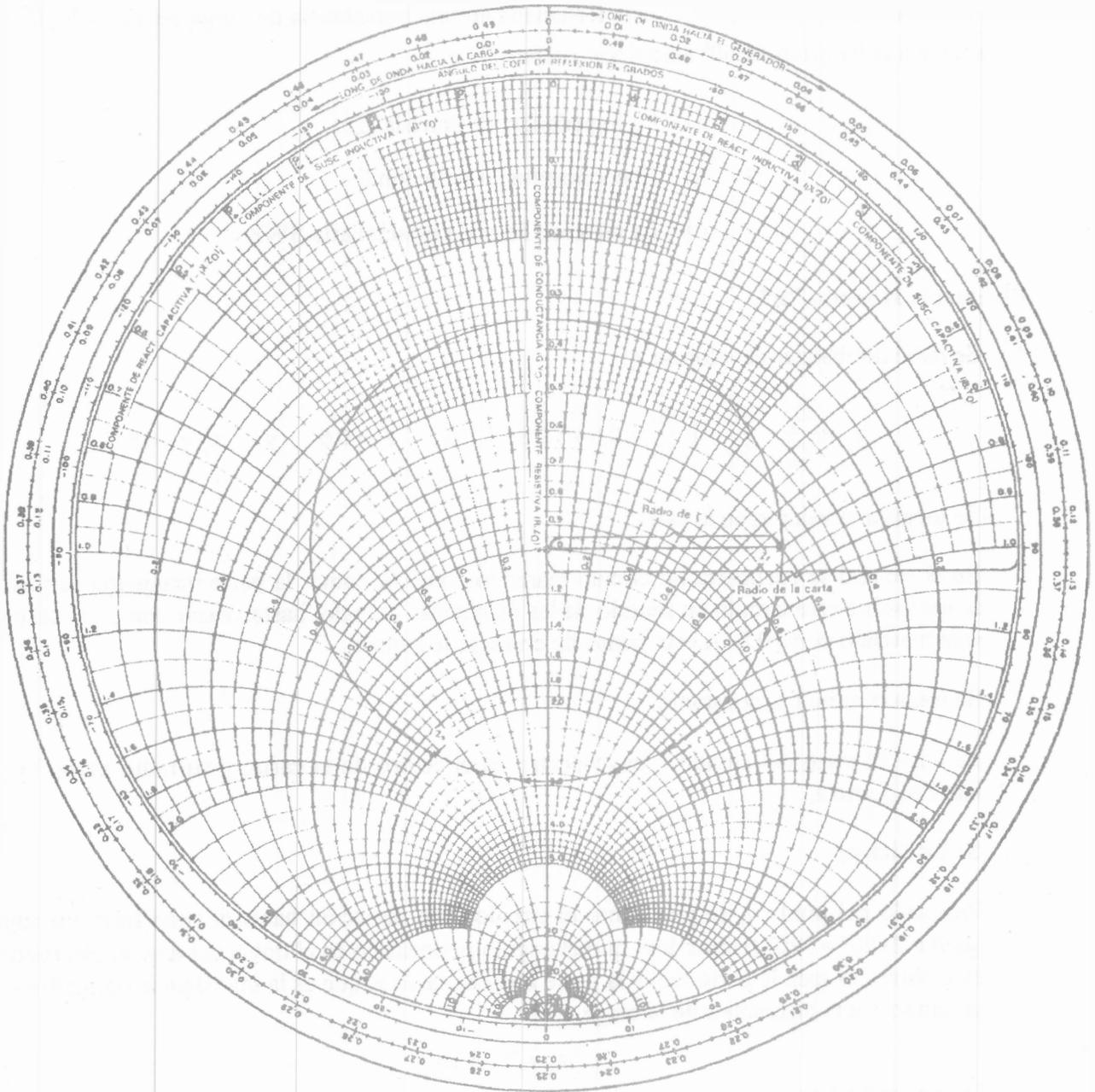
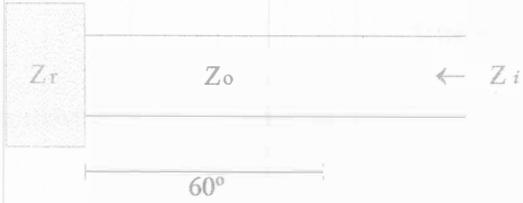
4° Se localiza z_s :

Partiendo del punto z_r se gira sobre el círculo ζ en dirección hacia el generador, un ángulo igual a $2 \times 60^\circ = 120^\circ$ (recuérdese que el ángulo geométrico es el doble del ángulo eléctrico) en este punto, se leen la parte real y la parte imaginaria de z_r que es la impedancia normalizada en un punto a una distancia s de la carga.

$$z_s = 2 - j 1.3$$

5° Desnormalizar z_s :

$$\text{Se multiplica } z_s \text{ por } z_0 \text{ y se obtiene } Z_s: \quad z_s Z_0 = 50 (2 - j 1.3) \quad \Rightarrow \quad Z_s = 100 - j 65 \quad [\Omega]$$



Escalas en la Carta de Smith

Respuesta al inciso "b".

Para determinar el valor del coeficiente de reflexión ζ , con una regla mídase sobre la carta:

$$\zeta = \frac{\text{radio del círculo } \zeta}{\text{radio de la carta}} = \frac{0.34}{0.70} = 0.485$$

Si se traza una línea del centro de la carta, pasando por z_r , hasta alcanzar la escala de grados geométricos, se encuentra el argumento para ζ , es decir, $\zeta = 0.485 \angle 90^\circ$. Esta línea pasa por z_r porque el punto de reflexión está definido en el punto de carga.

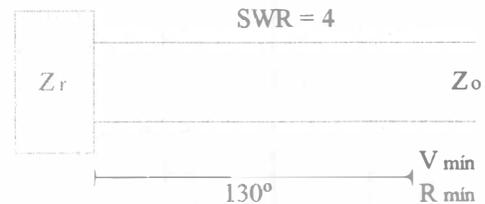
Respuesta al inciso "c".

Para determinar el valor del SWR, se toma el valor indicado por el cruce del círculo ζ con el eje real en los valores máximos de resistencia, que en este caso en particular es 3; entonces el valor buscado es $\text{SWR} = 3$.

Ejemplo 2

Una línea de transmisión de 100Ω tiene una $\text{SWR} = 4$ y una tensión a 130° de la carga, determinar:

- La impedancia de carga Z_r .
- El coeficiente de reflexión ζ .
- La distancia entre la carga y el primer máximo de tensión.
- La $R_{\text{máx}}$.

**Respuesta al inciso "a".**

- Se hace centro en el centro de la carta y se ubica en el eje real el valor 4.0, la distancia entre estos dos puntos se toma como radio y se traza el círculo constante ζ .
- Se localiza el valor $r_{\text{mín}}$ en la carta en el cruce del círculo ζ y el eje real en la parte de valores mínimos.
- Se ubica z_r :

Partiendo del punto $r_{\text{mín}}$ y desplazándose 260° sobre el círculo ζ hacia la carga, se traza una línea del centro de la carta a este punto, obsérvese que la línea coincide con el ángulo cuya lectura en la carta es de 80° . El cruce de esta línea con el círculo ζ es el punto z_r .

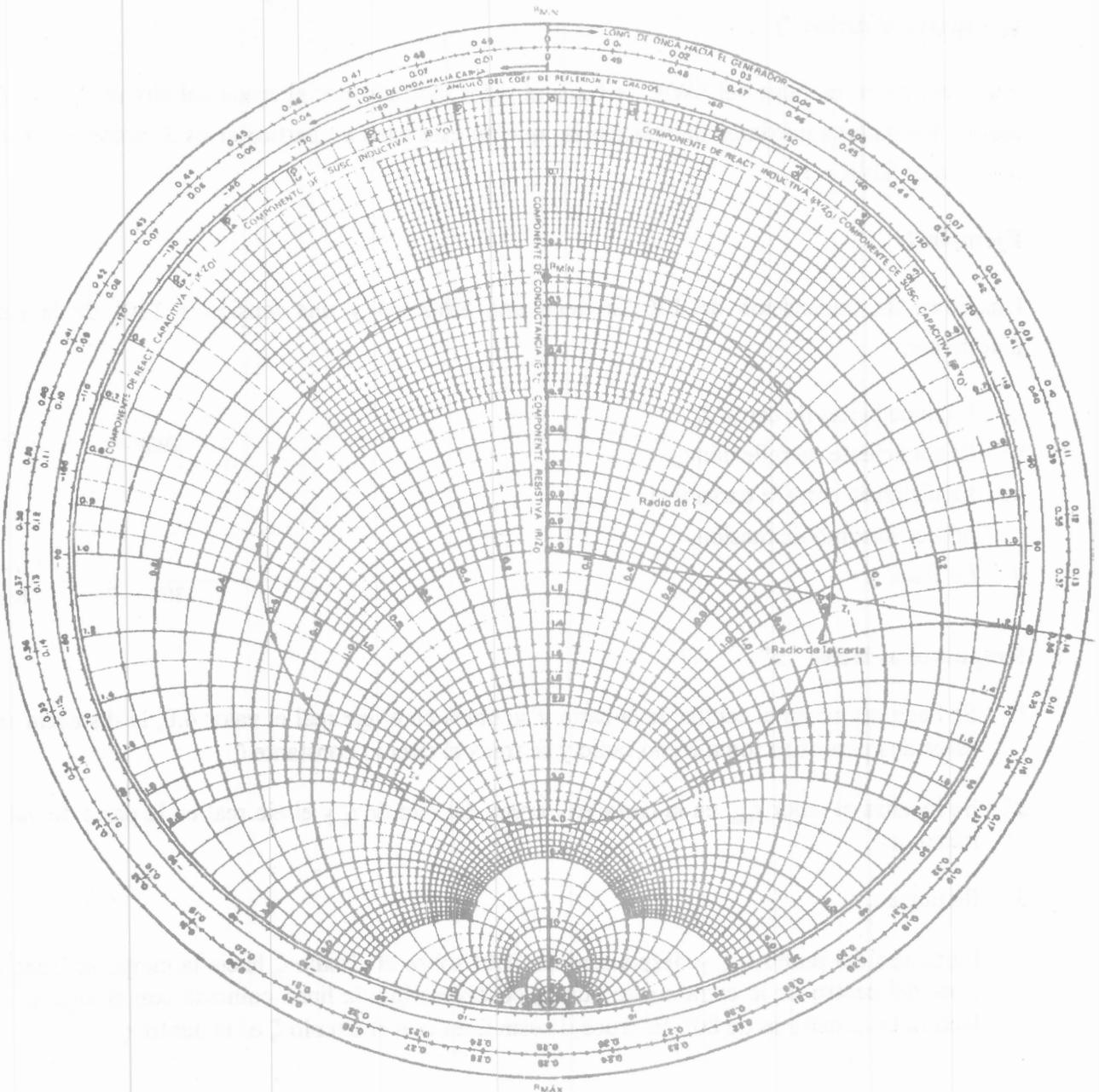
4° Se lee el valor de z_r :

En este punto pasan dos círculos, uno corresponde a la parte real e indica un valor de 0.56 y el otro indica una reactancia positiva de valor 1.02, es decir, $z_r = 0.56 + j 1.02$.

5° Desnormalizar z_r :

Se multiplica z_r por z_0 y se obtiene Z_s :

$$z_s Z_0 = 100 (0.56 - j 1.02) \Rightarrow Z_s = 56 - j 102 \text{ } [\Omega]$$



Respuesta al inciso "b".

Con una regla, se mide sobre la carta el radio del círculo ζ y el radio total de la carta, el cociente de estos dos valores es el valor del coeficiente de reflexión. El ángulo es el indicado por el cruce de la línea que parte del centro de la carta y que pasa por z_r .

$$\zeta = \frac{\text{radio del círculo } \zeta}{\text{radio de la carta}} = \frac{0.42}{0.70} = 0.6 \quad \therefore \zeta = 0.6 \angle 80^\circ$$

Respuesta al inciso "c".

Partiendo del punto z_r se gira sobre el círculo ζ en dirección al generador hasta el cruce con el eje real en el extremo de $r_{\text{máx}}$. En la carta la distancia es $2\phi = 80^\circ$, entonces el primer máximo se encuentra a 40° eléctricos.

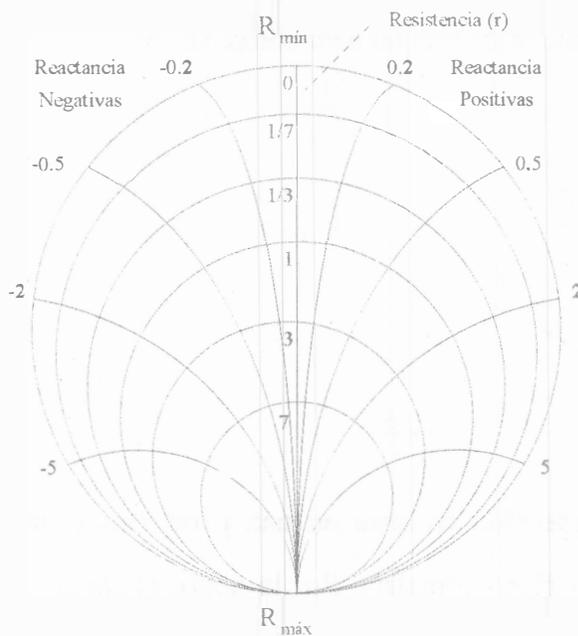
Respuesta al inciso "d".

El valor $r_{\text{máx}}$ leído en la carta se desnormaliza:

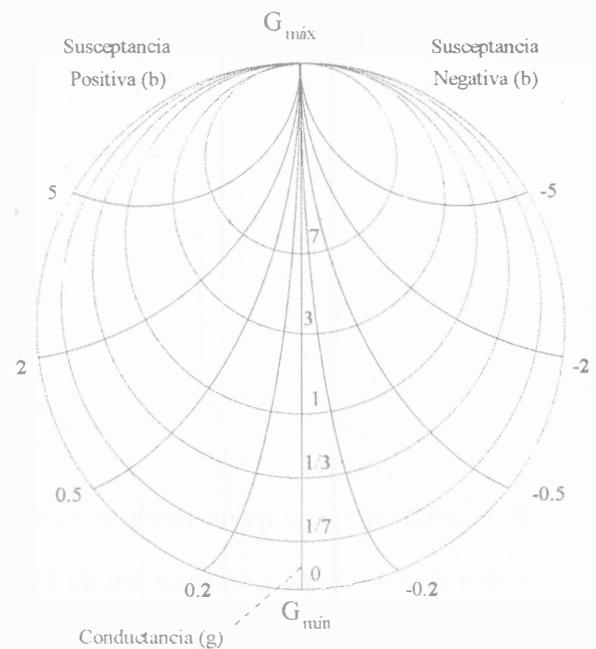
$$R_{\text{máx}} = r_{\text{máx}} Z_0 = 4 \times 100 = 400 \quad [\Omega]$$

LA CARTA DE ADMITANCIA DE SMITH

Si se gira 180° la carta de impedancias de Smith, todos los puntos sobre la misma se transforman en admitancias.



Carta de Impedancia de Smith



Carta de Admitancia de Smith

NÚMEROS COMPLEJOS

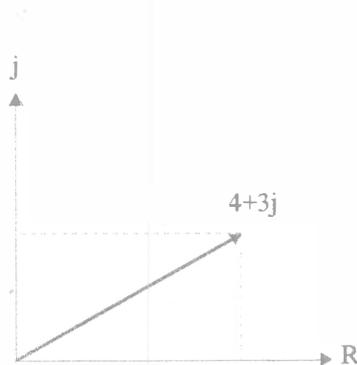
Los primeros matemáticos que encontraron las raíces cuadradas de números negativos designaron a tales cantidades "números imaginarios", porque en su época nadie había dado un significado a tales números. En 1797 el agrimensor noruego Casper Wessel, en un artículo presentado en la Real Academia de Dinamarca, expuso el hecho de que la expresión $(\sqrt{-1})^2 = -1$ podía considerarse como un vector unidad que hubiese girado 180 grados en el sentido contrario del giro de las manecillas del reloj.

Entonces, $\sqrt{-1}$ sería un vector unidad que hubiera girado sólo la mitad del ángulo anterior (90°), partiendo de la misma posición. Esta propiedad especial de rotación lleva a denominar a $\sqrt{-1}$ como un operador y se le asigna el símbolo "j" para representarlo.

El operador "j" sugiere trazar una recta vertical perpendicular a la horizontal determinando así un espacio bidimensional, que se llama plano complejo.

Es posible considerar al plano complejo como un mapa donde se puede localizar cualquier número o punto con distancias x e y, medidas desde origen del plano

Ejemplo: $p = 4 + j3$, se representa en el plano como la suma de dos vectores 4 y $j3$ (a estos vectores preferiblemente se les llama fasores) para obtener el número complejo "p".



Por definición cualquier número complejo específico consiste en una parte real y una parte imaginaria y ocupa una posición definida en el plano complejo. Por lo tanto, el plano complejo tiene un eje real y un eje imaginario.

ANEXO I

Formas de representación de los números complejos.

Rectangular o algebraica. $p = x + jy$

Polar o de Steinmetz (magnitud y ángulo). $p = |A| \angle \phi$ donde $A = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\phi = \text{tg}^{-1} \frac{y}{x}$

Transformaciones de forma polar a forma rectangular.

$$x = A \cos(\phi) \quad y = A \sin(\phi) \Rightarrow p = A [\cos(\phi) + j \sin(\phi)]$$

Fórmula de Euler.

Nos permite expresar un número complejo en forma exponencial y convertirla a forma trigonométrica.

$$e^{j\phi} = \text{cis}(\phi) = \cos(\phi) + j \sin(\phi) \quad \text{ó} \quad e^{-j\phi} = \text{cis}(-\phi) = \cos(\phi) - j \sin(\phi)$$

efectuando operaciones y considerando $z = \phi$, se tiene:

$$\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad \cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \quad \text{donde } e = 2.718281828\dots$$

La demostración de la validez del teorema de Euler se hace sumando la serie infinita del $\cos(\theta)$ con la serie infinita del $\sin(\theta)$ multiplicada por j . Sabemos que el desarrollo en serie de Maclaurin de e^x está dado por:

$$e^x = \cos(x) + j \sin(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

si se hace $x = j\theta$, se tiene:

$$e^{j\theta} = 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \frac{(j\theta)^5}{5!} + \frac{(j\theta)^6}{6!} + \frac{(j\theta)^7}{7!} + \dots$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - j\frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad \cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

entonces:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

Forma exponencial.

$$p = |A| e^{j\phi}$$

Operaciones algebraicas con números complejos.

Dados los números complejos siguientes:

$$A = a + jb = |A| e^{j\phi_1} = |A| \angle \phi_1 \quad \text{y} \quad B = c + jd = |B| e^{j\phi_2} = |B| \angle \phi_2$$

La suma está dada por:

$$A + B = (a + c) + j(b + d)$$

La resta está dada por:

$$A - B = (a - c) + j(b - d)$$

La multiplicación está dada por:

en forma cartesiana: $A \cdot B = (ac - bd) + j(bc + ad)$

en forma exponencial: $A \cdot B = |A| |B| e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$

en forma polar: $A \cdot B = |A| |B| \angle (\phi_1 + \phi_2)$

La división está dada por:

en forma cartesiana: $\frac{A}{B} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{(c^2 + d^2)}$

en forma exponencial: $\frac{A}{B} = \frac{|A|}{|B|} e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$

en forma polar: $\frac{A}{B} = \frac{|A|}{|B|} \angle (\phi_1 - \phi_2)$

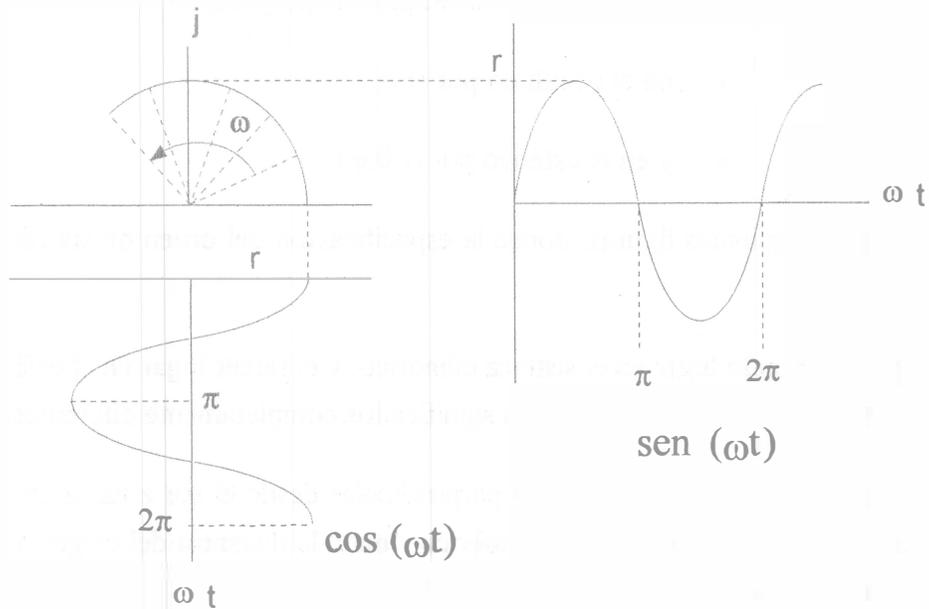
Como se aprecia de las operaciones anteriores es más fácil efectuar la suma y resta utilizando notación cartesiana y luego convertir el resultado a polar o exponencial si así se requiere. Para la multiplicación y la división es mejor utilizar la notación exponencial o polar y luego convertir el resultado a forma cartesiana si es necesario.

Fasores.

Si el vector $|A|e^{j\phi}$ se hace girar a una velocidad angular constante (ω) en sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces a este vector giratorio se le denomina fasor.

Por medio de las transformaciones de Euler, las proyecciones en los ejes real y complejo forman ondas cosenoidal y senoidal respectivamente.

En el manejo de ondas senoidales, cualquiera de las proyecciones representan el mismo vector giratorio con la única consideración de la diferencia de fase de 90° entre el seno y el coseno.



Los fasores nos permiten hacer a las funciones senoidales o cosenoidales independientes del tiempo y trasladarnos al dominio de la frecuencia, manejando nada más los valores eficaces de las funciones de tensión o corriente y el ángulo de fase.

SISTEMAS DE COORDENADAS

Un problema que tenga simetría esférica o cilíndrica puede expresarse en el sistema familiar de coordenadas cartesianas. Sin embargo, la solución no mostrará la simetría y, en muchos casos, será innecesariamente compleja.

Existen, además de los sistemas de coordenadas cartesianas, los sistemas de coordenadas esféricas y cilíndricas.

Un punto P queda determinado por tres coordenadas:

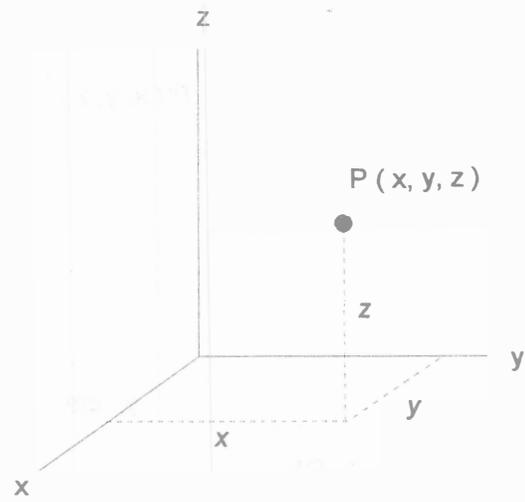
- en el sistema cartesiano por (x, y, z) ,
- en el cilíndrico por (r, φ, z)
- y en el esférico por (r, θ, φ)

Esto se muestra en las siguientes figuras, donde la especificación del orden de las coordenadas es importante.

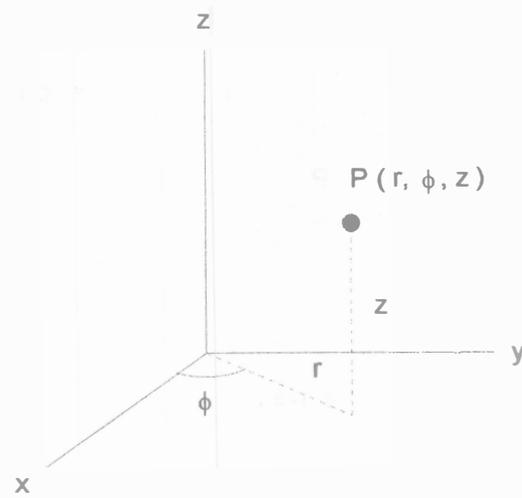
El ángulo φ ocupa el segundo lugar en el sistema cilíndrico, y el tercer lugar en el esférico, además r se usa en los sistemas cilíndrico y esférico con significados completamente diferentes.

En coordenadas cilíndricas r mide la distancia perpendicular desde el eje z hasta un punto en un plano normal éste, mientras que en el sistema esférico r mide la distancia del origen a un punto en cualquier lugar (distancia radial).

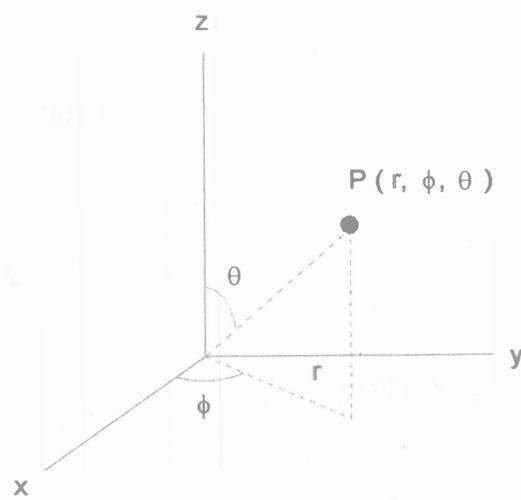
El contexto del problema debe aclarar a cuál "r" se hace referencia.



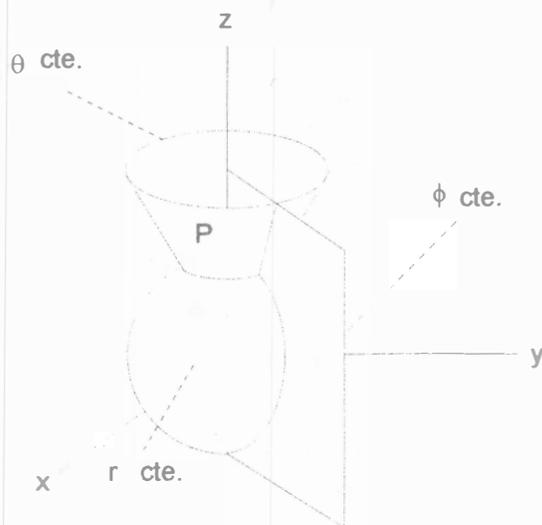
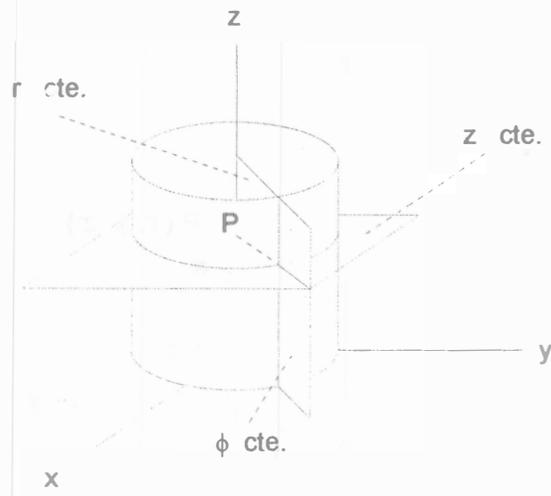
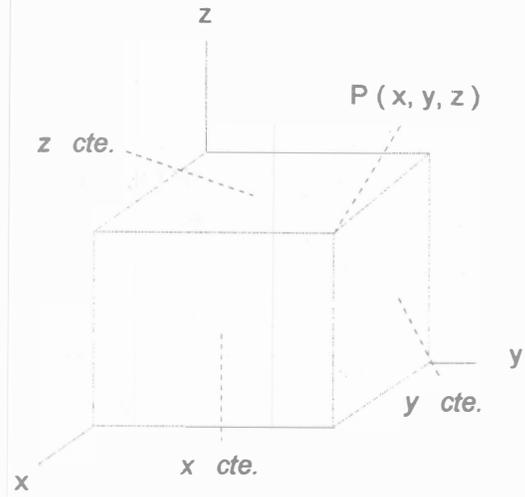
rectangulares



cilíndricas



esféricas



La intersección de 3 superficies ortogonales determina también un punto.

Hay que hacer notar la ortogonalidad de los sistemas de coordenadas para que exista un conjunto de vectores unitarios independientes.

En coordenadas cartesianas, las superficies son los planos x igual constante, y igual constante y z igual constante.

En coordenadas cilíndricas, z igual constante, es el mismo plano infinito que en las coordenadas cartesianas, ϕ igual constante es el plano con su borde a lo largo del eje z y r igual constante es un cilindro circular recto.

En coordenadas esféricas, ϕ igual constante es el mismo plano que aparece en las coordenadas cilíndricas, r igual constante es una esfera con centro en el origen, y θ es un cono circular recto cuyo eje es el eje z y cuyo vértice está en el origen del sistema coordenado. Obsérvese que θ está limitado al intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$.

Estas tres superficies son ortogonales y su intersección se localiza en el punto P .

Las figuras de la siguiente página muestran los tres vectores unitarios en el punto P . En el sistema cartesiano los vectores unitarios tienen unidades fijas, independientemente de la localización de P . Esto no sucede en los otros dos sistemas (excepto en el caso de \mathbf{a}_z).

Cada vector unitario es normal a las superficies de coordenadas y tiene la dirección de incremento de esas coordenadas.

Obsérvese que todos los sistemas son de mano derecha:

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_z \quad \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\phi$$

Las formas de componentes de un vector en los tres sistemas son:

Sistema Cartesiano

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z$$

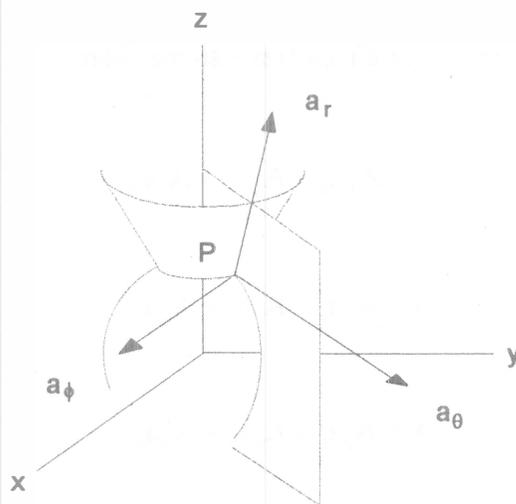
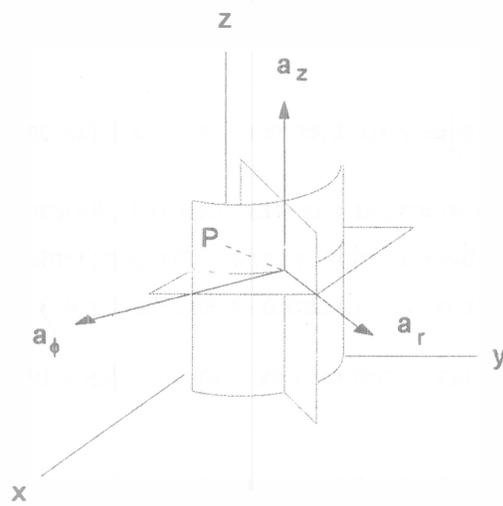
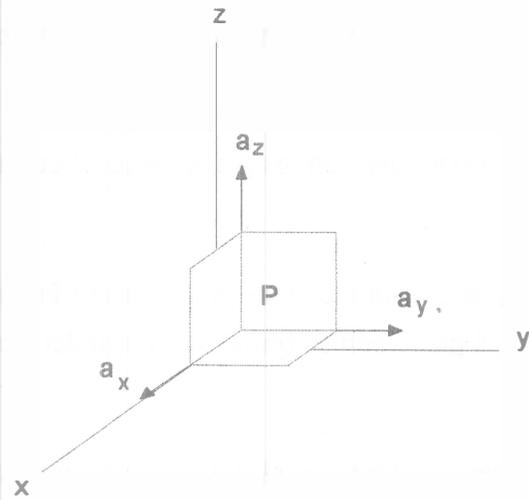
Sistema Cilíndrico

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\phi \mathbf{a}_\phi + A_z \mathbf{a}_z$$

Sistema Esférico

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

Debe notarse que las componentes A_x , A_r , A_ϕ , etc., generalmente no son constantes, sino a menudo, funciones de las coordenadas en el sistema particular.



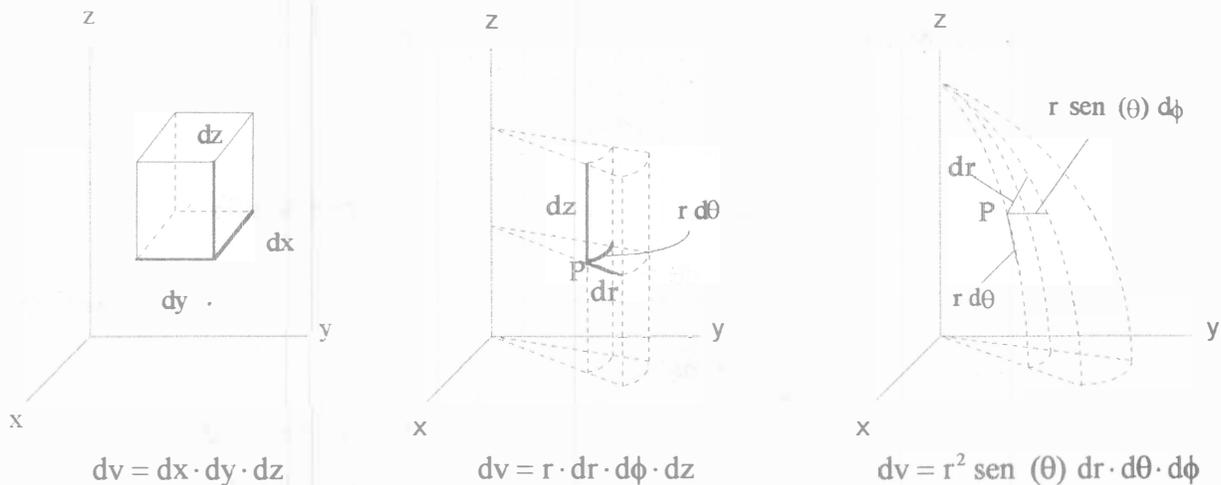
Vectores unitarios independientes de cada sistema coordenado.

Volúmen, Superficie y Elementos Diferenciales de Línea.

Cuando las coordenadas del punto P se desarrollan como se indica a continuación, se forma un volumen diferencial "dv"; en cantidades infinitesimales de primer orden.

Sistema Cartesiano o Rectangular	$(x + dx, y + dy, z + dz)$
Sistema Cilíndrico	$(r + dr, \phi + d\phi, z + dz)$
Sistema Esférico	$(r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$

El volumen diferencial en los tres sistemas coordenados es una caja rectangular; el valor del elemento diferencial de volumen, "dv", en cada sistema aparece en la siguiente figura.



También, puede verse las áreas de los elementos de superficie que limitan el volumen diferencial. Por ejemplo, en coordenadas esféricas, el elemento diferencial de superficie perpendicular a " a_r ", es:

$$dS = [r d\theta] [r \text{ sen } (\theta) d\phi]$$

$$dS = r^2 \text{ sen } (\theta) d\theta \cdot d\phi$$

El elemento diferencial de línea $d\ell$, es la diagonal a través de P, por lo que:

Sistema Cartesiano o Rectangular

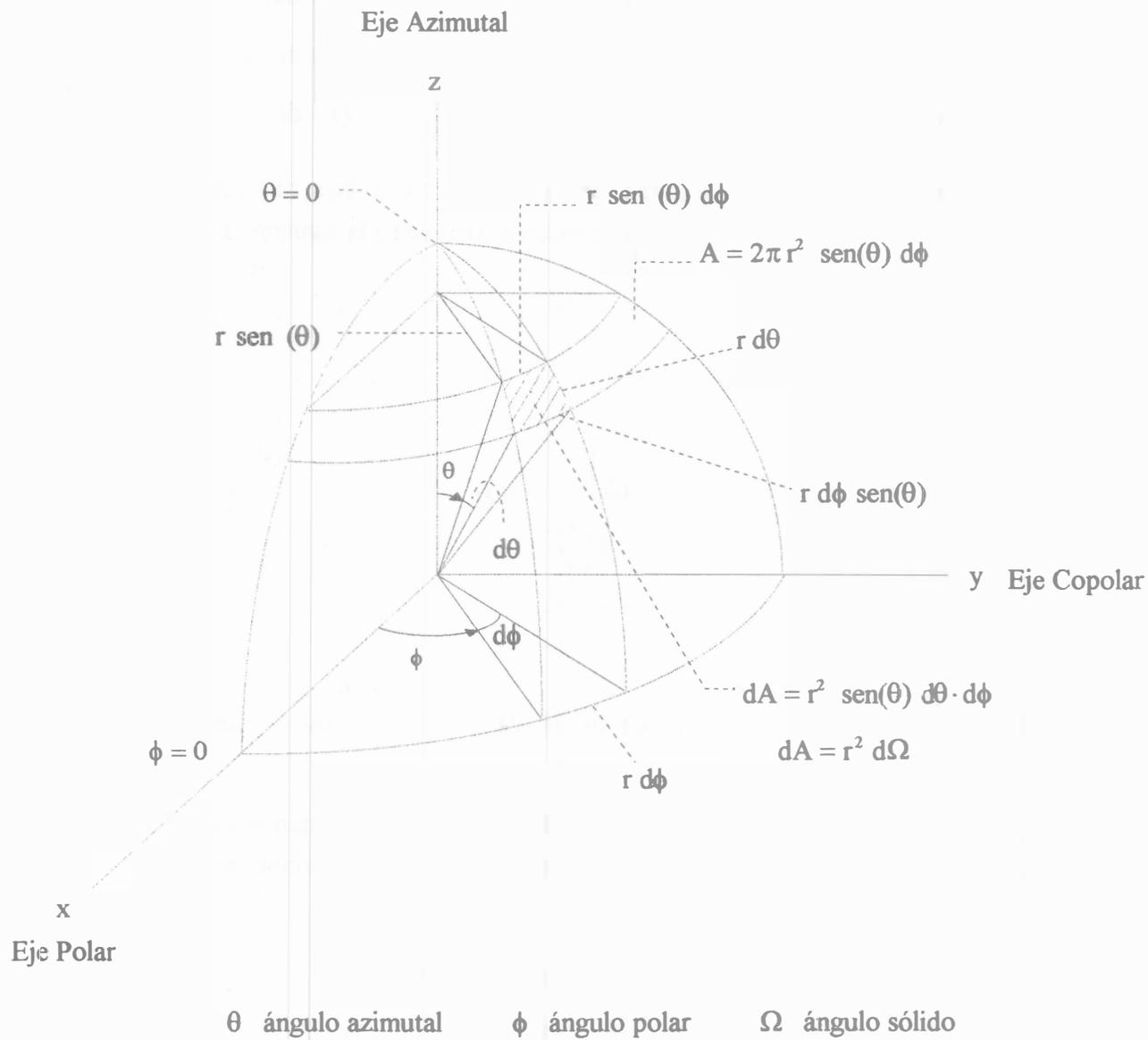
$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Sistema Cilíndrico

$$d\ell = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2}$$

Sistema Esférico

$$d\ell = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{ sen}^2(\theta) d\phi^2}$$



ANÁLISIS VECTORIAL

Cantidades Vectoriales y Escalares

Operaciones Vectoriales

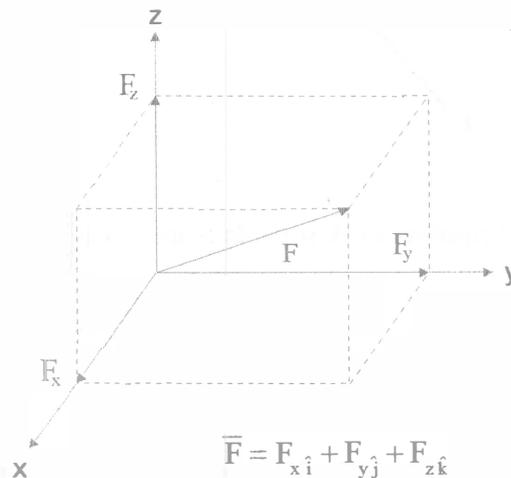
Vectores Unitarios y Componentes Vectoriales

Campo Vectorial

Producto Punto y Producto Vectorial

Vectores.

Un vector es una cantidad física que se determina por una magnitud, dirección y sentido, ejemplo: velocidad, aceleración, posición etc. En un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) un vector está compuesto de varias componentes que son la proyección ortogonal del vector en la dirección de los ejes, por ejemplo, un vector \vec{F} se puede escribir como la suma de sus componentes en tres dimensiones.



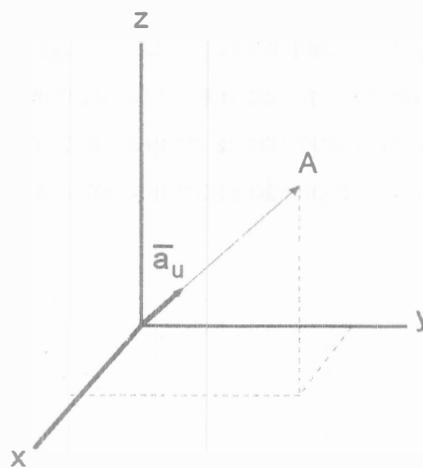
Donde F_x , F_y y F_z son las componentes respectivas a cada eje, \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} son los vectores unitarios de cada eje coordenado. La magnitud de cada uno de estos vectores unitarios está dada por el teorema de Pitágoras:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}$$

Vector Unitario.

Es un vector cuya magnitud es igual a la unidad. Para encontrar un vector unitario en la dirección de otro vector, se divide este vector entre su magnitud: Sea $\vec{F} = F_{xi} + F_{yj} + F_{zk}$ y \vec{a}_u un vector unitario en la dirección de \vec{F} se obtiene:

$$\vec{a}_u = \frac{(F_x \hat{i}) + (F_y \hat{j}) + (F_z \hat{k})}{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}}$$



La magnitud de un vector \vec{A} se puede obtener como: $|\vec{A}| = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$

Cantidad Escalar.

Es una cantidad que está determinada por su magnitud, y que puede ser representada simplemente por un número real. Algunos ejemplos son: Temperatura, masa, tiempo, los precios, la densidad, un tamaño, etcétera.

Cantidad Vectorial.

Es una cantidad que está determinada por su magnitud, dirección y sentido. Su representación se hace utilizando vectores, una cantidad vectorial por convención se expresa con letras negritas o una letra con flecha encima llamada testa. Algunos ejemplos son: La fuerza (\vec{F}), la velocidad (\vec{v}), la aceleración (\vec{a}), etcétera.

ALGUNAS LEYES DE LA SUMA Y RESTA VECTORIAL

Suma de Vectores.

Su resultado es otro vector y se suma componente a componente de cada vector, siguiendo la ley del paralelogramo, es decir, que se coloca el inicio de un vector en el origen, a continuación de éste el otro vector, y se trazan paralelas en sus extremos para formar el paralelogramo, la diagonal que va del origen al extremo del paralelogramo es el vector resultante de la suma. La suma de vectores tiene la propiedad de ser conmutativa.

Sean los vectores:

$$A = (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) \quad B = (\hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z)$$

La suma está dada por:

$$A + B = \hat{i} (A_x + B_x) + \hat{j} (A_y + B_y) + \hat{k} (A_z + B_z)$$

Resta de Vectores.

Se efectúa como una suma pero multiplicando por -1 al vector a restar, es decir, restando las respectivas componentes del segundo vector

Sean los vectores:

$$A = (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) \quad B = (\hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z)$$

La resta o diferencia está dada por:

$$A - B = \hat{i} (A_x - B_x) + \hat{j} (A_y - B_y) + \hat{k} (A_z - B_z)$$

Leyes o Propiedades de la Suma y Resta Vectorial.

Ley Asociativa

Ley Distributiva

Ley Conmutativa

$$A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$$

$$k (A \pm B) = kA \pm kB \quad \text{y} \quad A (k_1 \pm k_2) = Ak_1 \pm Ak_2$$

$$A + B = B + A$$

Donde k es una constante escalar.

Producto Punto o Producto Escalar.

Se define como el producto de las magnitudes de A y B por el coseno del ángulo entre ellos. También se puede obtener como la suma de multiplicaciones componente a componente de los vectores; su resultado siempre es una cantidad escalar. El producto punto siempre es conmutativo. El producto escalar de dos vectores dados A y B se lee "a punto b".

Sean los vectores:

$$A = (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) \quad B = (\hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z)$$

El producto escalar de éstos, está dado por:

$$A \cdot B = |A||B| \cos(\phi_{AB})$$

Donde ϕ_{AB} es el ángulo comprendido entre los vectores A y B.

Otra forma de obtenerlo es:

$$A \cdot B = (\hat{i} A_x + \hat{j} A_y + \hat{k} A_z) \cdot (\hat{i} B_x + \hat{j} B_y + \hat{k} B_z)$$

$$A \cdot B = (\hat{i} \cdot \hat{i}) (A_x B_x) + (\hat{j} \cdot \hat{j}) (A_y B_y) + (\hat{k} \cdot \hat{k}) (A_z B_z)$$

Según la definición del producto escalar se tiene:

$$(\hat{i} \cdot \hat{i}) = 1 \quad (\hat{j} \cdot \hat{j}) = 1 \quad (\hat{k} \cdot \hat{k}) = 1 \quad \text{y} \quad (\hat{i} \cdot \hat{j}) = 0 \quad (\hat{i} \cdot \hat{k}) = 0 \quad (\hat{j} \cdot \hat{k}) = 0$$

De donde finalmente se tiene que:

$$A \cdot B = (1) (A_x B_x) + (1) (A_y B_y) + (1) (A_z B_z)$$

$$A \cdot B = (A_x B_x) + (A_y B_y) + (A_z B_z)$$

De lo anterior se puede concluir, que cuando dos vectores son paralelos, su producto punto es igual al producto de sus magnitudes, debido a que el ángulo entre ellos es cero se tiene que $\cos(0^\circ) = 1$.

El producto punto entre dos vectores perpendiculares es cero, ya que el ángulo entre ellos es de 90° se tiene que $\cos(90^\circ) = 0$.

Como ya se mencionó, el producto punto es conmutativo, es decir:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Producto Vectorial o Producto Cruz.

Como su nombre lo indica, su resultado es otro vector. Está definido como el producto entre las magnitudes de los vectores dados multiplicado por el seno del ángulo entre ambos vectores, y su dirección está dada por la aplicación de la ley de la mano derecha, es decir barriendo con los dedos de el primer vector al segundo vector, la dirección resultante la da el dedo pulgar.

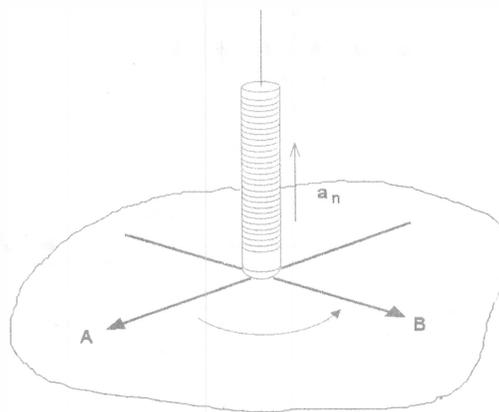
$$A \times B = |A||B| \operatorname{sen}(\phi_{AB})$$

La magnitud del vector resultante se obtiene multiplicando las magnitudes de los vectores por el seno del ángulo menor entre los vectores, el vector resultante es perpendicular al plano formado por los vectores A y B.

También se puede realizar resolviendo el determinante formado por los vectores \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , y las componentes de los vectores A y B.

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - B_y A_z) \hat{i} - (A_x B_z - B_x A_z) \hat{j} + (A_x B_y - B_x A_y) \hat{k}$$

El vector resultante también se puede visualizar como un vector que avanza en la misma dirección de un tornillo de rosca derecha cuando A es rotado hacia B.



El producto vectorial no es conmutativo, pero se cumple lo siguiente: $A \times B = -B \times A$

Campo.

Se entiende como una propiedad física extendida en una región del espacio, descrita por una función de posición y de tiempo. Región del espacio influenciada por algún fenómeno.

Campo Escalar.

Campo Escalar es una región del espacio donde a cada punto se le puede asociar una cantidad escalar, la función escalar que define el campo es una función escalar de posición.

Campo Vectorial.

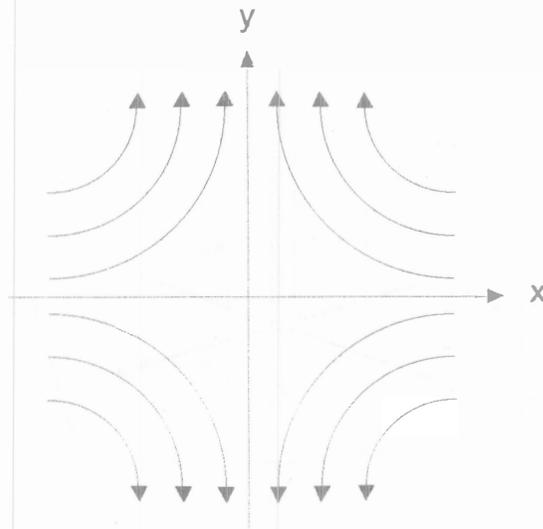
Campo Vectorial es una región del espacio donde a cada punto se le puede asociar un vector. Se puede entender como una región del espacio donde actúan fuerzas. Puede definirse matemáticamente como una función del vector que relaciona un origen arbitrario con un punto cualquiera en el espacio.

Las expresiones vectoriales en electromagnetismo son de tal naturaleza que generalmente los coeficientes de los vectores unitarios contienen las variables; por esto la expresión cambia de magnitud y dirección punto a punto a través de la región de interés.

Por ejemplo, para el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{E} = -x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y$$

si se dan diferentes valores a las componentes x e y se obtienen varios puntos del campo \mathbf{E} como se aprecia en la siguiente figura.



Además, un campo vectorial puede cambiar con el tiempo, es decir, si al campo bidimensional anterior se le agrega una variación temporal se tiene:

$$\mathbf{E} = (-x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y) e^{j\omega t}$$

$$\mathbf{E} = (-x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y) \text{sen}(\omega t)$$

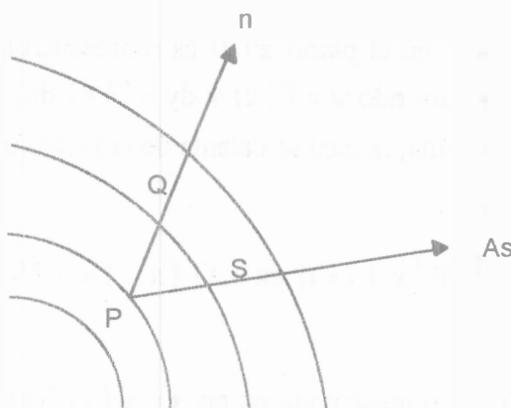
DIFERENCIACIÓN DE VECTORES Y CAMPOS VECTORIALES

Gradiente de una Función Escalar.

El gradiente de una función escalar es un vector cuya magnitud es la máxima derivada direccional en el punto en consideración y su dirección es la dirección de la máxima derivada direccional en el punto. Es decir, el gradiente representa un vector normal a la superficie de igual nivel de una función escalar en la dirección del crecimiento de la función y numéricamente igual a la rapidez con que varía la función en esa dirección. El gradiente de una función escalar dada U se designa como $\text{grad } U$ y se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$\nabla U = \frac{dU}{dn} \mathbf{a}_n = \frac{dU}{ds} \mathbf{a}_n = \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{PQ} \quad \text{y} \quad \frac{dU}{ds} = \lim_{PS \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{PS}$$

Gráficamente se puede visualizar como si indica en la figura siguiente.



La Integral de Línea, de Contorno o Curvilínea.

La mayoría de las curvas en el plano xy pueden ser expresadas mediante una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$; pero en la práctica suelen ser más convenientes las ecuaciones paramétricas, es decir, las expresiones de x e y en función de una variable t .

Por ejemplo, el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ admite como ecuaciones paramétricas $x = a \cos(t)$ y $y = a \sin(t)$; la parábola $y^2 = 4mx$ admite las ecuaciones paramétricas $x = mt^2$, $y = 2mt$.

En general las ecuaciones paramétricas de la curva $f(x, y) = 0$ se expresan como $x = \psi(t)$, $y = \phi(t)$.

Los campos vectoriales cuya reducción a un sólo parámetro definen implícitamente una curva, se dice que son integrables sobre la misma curva.

Esto es muy importante, pues la integral de línea siempre está referida a una curva, razón por la que también es llamada integral de contorno o integral curvilínea. La integral de línea a lo largo de una curva C se denota de la siguiente forma:

$$\int_C [P(x,y) dx + Q(x,y) dy]$$

$$\int_C A_1 dx + \int_C A_2 dy + \int_C A_3 dz = \int_C [(A_1 i + A_2 j + A_3 k) \cdot (dx i + dy j + dz k)] = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Evaluación de la integral de línea.

Para realizar una integral vectorial basta con integrar cada una de sus componentes, siempre y cuando las componentes de la función vectorial sean funciones continuas o bien que tengan un número finito de puntos de discontinuidad.

Si la ecuación de una curva C en el plano $z=0$ es representada como una función $y=f(x)$, la integral de línea es evaluada haciendo $y=f(x)$ y $dy=f(x) dx$, y sustituyéndolo en el integrando para obtener una integral definida, la cual se calcula de la forma usual:

$$\int_{a_1}^{a_2} P\{x, f(x)\} dx + Q\{x, f(x)\} f'(x) dx$$

Similarmente si la curva C es representada como $x=g(y)$, entonces $dx=g'(y) dy$ de donde la integral de línea quedará:

$$\int_{b_1}^{b_2} P\{g(y), y\} g'(y) dy + Q\{g(y), y\} dy$$

Si la curva C está representada en su forma paramétrica, $x=\psi(t)$, $y=\phi(t)$, la integral de línea quedará:

$$\int_{t_1}^{t_2} P\{\phi(t), \psi(t)\} \phi'(t) dt + Q\{\phi(t), \psi(t)\} \psi'(t) dt$$

en donde t_1 y t_2 denotan los valores correspondientes de t para los puntos A y B respectivamente.

Las combinaciones de los métodos anteriores podrán ser usadas en la evaluación, también, a lo largo de curvas en el espacio son usados métodos similares.

Propiedades.

La integral de línea tienen propiedades que son análogas a las integrales ordinarias y son similares a las propiedades de las integrales de línea para curvas en el espacio. Por ejemplo, considerando otro punto sobre la curva C de coordenadas (a_3, b_3) :

$$\int_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_C P(x,y) dx + \int_C Q(x,y) dy$$

$$\int_{(a_2, b_2)}^{(a_1, b_1)} P dx + Q dy = - \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} P dx + Q dy$$

$$\int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} P dx + Q dy = \int_{(a_1, b_1)}^{(a_3, b_3)} P dx + Q dy + \int_{(a_3, b_3)}^{(a_2, b_2)} P dx + Q dy$$

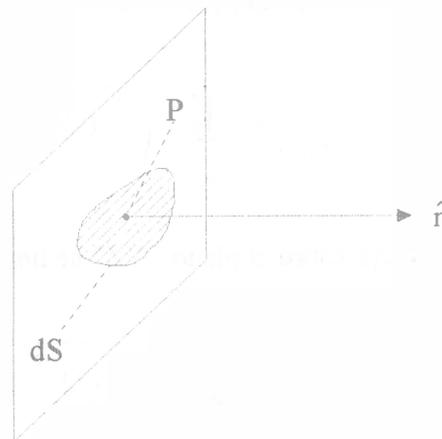
La Integral de Superficie.

Supóngase una superficie S en el espacio de tres dimensiones. En cualquier punto de esta superficie se puede formar el elemento de área dS . si \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie en P dirigido hacia el exterior, se define el elemento vectorial de área en el punto P por:

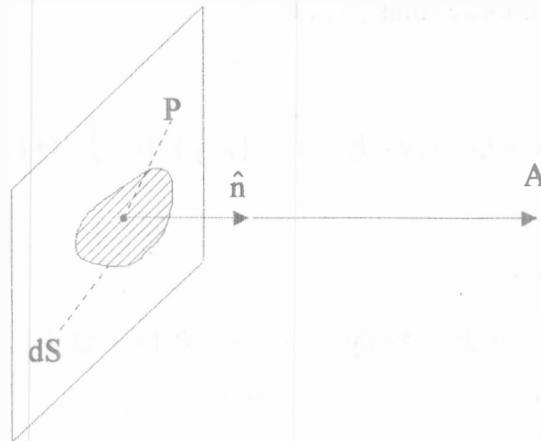
$$d\mathbf{S} = \hat{n} dS$$

Así definido $d\mathbf{S}$ es un vector en la dirección normal en el punto P . La integral de superficie puede interpretarse como:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{A} \cdot \hat{n}) dS$$



Ahora se introduce el concepto de flujo de un vector. Según las condiciones de la figura anterior, el flujo del vector "A" a través del elemento diferencial de área dS en la dirección de \hat{n} es $(A \cdot \hat{n}) dS$, es decir, $A \cdot dS$ donde dS es el vector elemento de área en el punto P.



La extensión de este concepto a una superficie finita se obtiene por integración; el flujo del vector "A" a través de una superficie finita de área S se define como:

$$\int_S A \cdot dS$$

Si "f" tiene derivadas parciales de primer orden, continuas en una región cerrada "R" del plano XY, entonces el área "S" de la parte de la superficie $z = f(x, y)$ que se proyecta sobre "R", es:

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right]} dA$$

Si el cuerpo se proyecta sobre el plano "XZ" se tiene:

$$S = \iint_{R_{xz}} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1\right]} dA$$

Si el cuerpo se proyecta sobre el plano "YZ" se tiene:

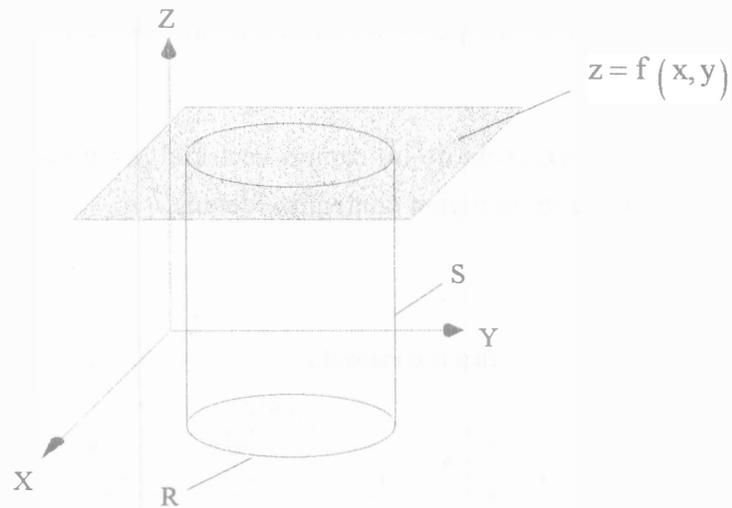
$$S = \iint_{R_{yz}} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + 1\right]} dA$$

La Integral de Volúmen.

Sea $f(x,y) \geq 0$, entonces la doble integral de $f(x,y)$ sobre "R" es igual al volumen de un ángulo sólido limitado superiormente por una superficie $z = f(x,y)$, inferiormente por el plano "XY" y lateralmente por una superficie cilíndrica cuya generatriz es paralela al eje "Z" y cuya directriz es la frontera de la región "R" que está sobre el plano "XY"; este lugar geométrico en unidades cúbicas mide el volumen de un cilindro de altura unitaria y base igual a la superficie "R", en unidades cuadradas mide el área de la región "R" en el plano "XY".

$$V = \iint_R f(x,y) dA$$

$$A = \iint_R dA$$



La Divergencia y El Rotacional.

La forma en que un campo vectorial cambia de un punto a otro a través del espacio se puede caracterizar de dos formas; con la divergencia y el rotacional.

La Divergencia.

Al examinar los problemas del análisis vectorial se introducen los conceptos de manantial o fuente que engendra un campo vectorial, y de sumidero que absorbe hacia éste último. La intensidad del manantial o del sumidero del campo se suele caracterizar mediante la operación matemática llamada divergencia, que esencialmente es la derivada de un vector. La divergencia de un vector es el límite de su integral de superficie por unidad de volumen cuando el volumen encerrado por la superficie tiende a cero; por ejemplo, la divergencia de un vector "A" se expresa matemáticamente de la siguiente forma.

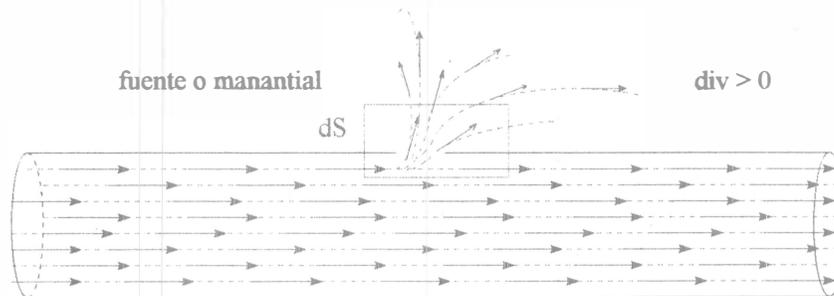
$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{div } A = \nabla \cdot A = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$

La integral cerrada de superficie se efectúa sobre el producto escalar del vector de campo "A" y una diferencial de superficie que rodea a un volumen en un punto dado donde se quiere encontrar la divergencia, al efectuar el límite, la superficie se contrae al contraerse el volumen, de esta manera la divergencia se caracteriza por la intensidad del manantial o sumidero del campo en el punto. La divergencia es una función escalar y puntual en el límite de la superficie de integración, y es independiente de cualquier sistema de coordenadas, puede obtenerse para saber la forma explícita del operador divergencia en cualquier sistema de coordenadas particulares.

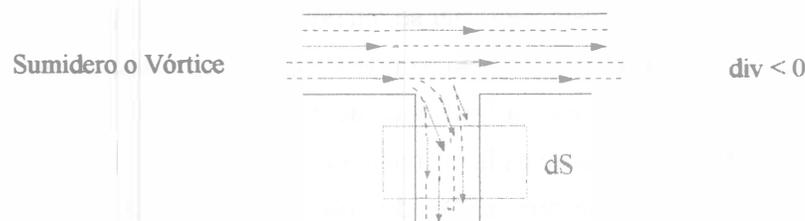
Si la divergencia de un campo vectorial es diferente de cero, entonces se tendrá un sumidero o una fuente.

Siempre que la divergencia de un campo vectorial sea positiva, es decir, cuando el ángulo entre "A" y "dS" sea agudo, la región contendrá fuentes.



Sección de un tubo con un fluido, indicándose el campo de velocidades del mismo.

Siempre que la divergencia de un campo vectorial sea negativa, es decir, cuando el ángulo entre "A" y "dS" sea obtuso, la región contendrá sumideros.



Flujo de gas en una tubería residencial.

Si el campo no existe, o el flujo total del vector "A" a través de la superficie cerrada "ΔS" es cero, entonces la divergencia en el punto dado es igual a cero.

En general, un campo vectorial en el cual la divergencia es cero en todos los puntos del campo, se denomina campo solenoidal.

De la definición de divergencia se deduce que si un campo vectorial "A" es solenoidal entonces el flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo. En electrostática, por ejemplo, esto se cumple en cualquier región sin cargas eléctricas.

En Dinámica de Fluidos la divergencia se interpreta como la razón de cambio de la masa de un fluido o cambio en la densidad en un punto de este, en este caso cuando la divergencia es cero, se dice que el fluido es incompresible.

Se denomina línea de campo a la representación de una función vectorial; es una línea tal que la tangente en cada punto de la misma tiene la dirección del vector que corresponde a dicho punto al aplicarle la función vectorial "A".

Una condición necesaria pero no suficiente para que un campo tenga divergencia es que el campo vectorial debe de variar en magnitud a lo largo de una línea que tenga la misma dirección de dicho campo.

En conclusión, de un límite relacionado con un flujo se deriva el concepto de divergencia de un vector, siendo la divergencia un escalar, ya que el flujo de un vector es un escalar.

El concepto de flujo aparece en temas tales como la dinámica de fluidos, donde el vector "A" es la velocidad del fluido, y en electrostática, donde "A" es la intensidad del campo eléctrico.

Teorema de la Divergencia o Teorema de Green's en el Espacio.

La integral de divergencia de un vector sobre un volumen V es igual a la integral de superficie de la componente normal del vector sobre la superficie que limita al volumen.

Este teorema nos permite en ciertos problemas y con características específicas hacer una conversión de una integral de volumen a una de superficie y viceversa.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} \, d\vec{v} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

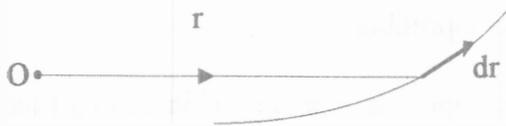
El teorema establece que la integral de superficie de una componente normal a un vector "A" tomada sobre una superficie cerrada es igual la integral de la divergencia de "A" tomada sobre el volumen encerrado por la superficie.

El Rotacional.

El rotacional de un vector es un vector que se deriva de un límite relacionado con la circulación.

Sabemos que la integral curvilínea para una función vectorial puntual $V(x,y,z)$ en una trayectoria cerrada C recorrida en sentido opuesto a las manecillas del reloj está dada por:

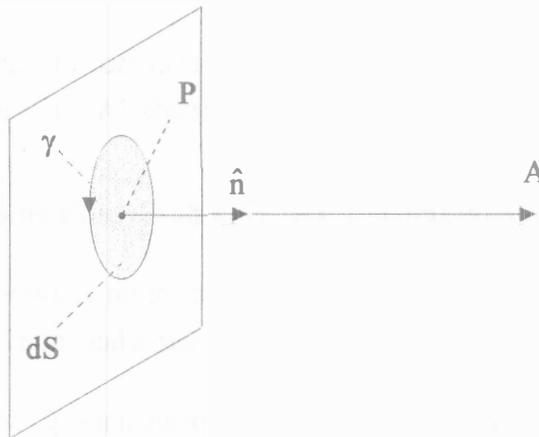
$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$



En donde $d\mathbf{r}$ es un elemento diferencial de desplazamiento a partir de una posición inicial dada por un vector "r".

Atendiendo a la siguiente figura, la curva cerrada γ alrededor de P encierra una superficie dS ; es decir, se tiene un elemento diferencial de superficie. Se define a dC como la circulación del vector "A" en el ciclo o circuito γ .

$$dC = \oint_{\gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$



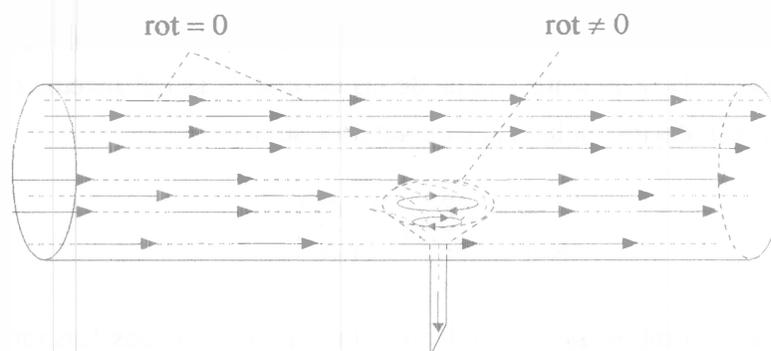
Si se hace el cociente dC/dS haciendo que dS tienda a cero, el límite que se obtiene es un escalar, que corresponde a la elección particular de \hat{n} . se define el rotacional de "A" como el vector cuya componente en la dirección de \hat{n} es el límite anterior.

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{\hat{n}} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dC}{dS}$$

Resumiendo, el rotacional de un vector es el límite de la razón de la integral de su producto vectorial de dicho vector con la normal trazada hacia afuera sobre una superficie cerrada, entre el volumen encerrado por la superficie cuando el volumen tiende a cero.

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}}{\Delta S} \hat{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} \, dS$$

Donde $\text{rot } \mathbf{A}$ es la componente orientada en la dirección normal " dS ", la integral se efectúa a lo largo de un contorno cerrado " $\Delta\ell$ " que acota la superficie " ΔS ". Por medio del límite la superficie se contrae a un punto. Una condición necesaria pero no suficiente para la que un campo tenga rotacional es que el campo debe de variar en magnitud a lo largo de una línea normal a la dirección del campo.



Al pasar el fluido por el vórtice, el campo de velocidades se vuelve rotatorio.

La divergencia del rotacional de una función vectorial es cero. Esto implica que si la divergencia de una función vectorial es cero entonces debe ser el rotacional de alguna función vectorial.

El rotacional del gradiente de una función escalar es cero. Cualquier función vectorial que sea el gradiente de una función escalar no tiene rotacional.

Teorema de Stokes.

Este teorema establece que la integral de línea de una componente tangencial " $d\boldsymbol{\ell}$ " a un vector " \mathbf{A} " que es tomada alrededor de una simple curva cerrada " C " es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional de " \mathbf{A} " evaluada sobre alguna superficie rodeada por " C ".

$$\oint_C \bar{\mathbf{F}} \cdot d\bar{\boldsymbol{\ell}} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}$$

MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

El método de separación de variables para ecuaciones con derivadas parciales reduce la solución de éstas a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación bidimensional de Laplace en coordenadas cilíndricas (donde la solución depende de z), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right) = 0$$

Para efectos de solución se puede omitir el factor $1/r$.

Si se considera que la solución buscada $u(r)=u(r,\alpha)$ es el producto: $u(r,\alpha)=R(r)A(\alpha)$, donde cada uno de los factores depende solamente de una de las coordenadas del sistema (o de una variable). Sustituyendo esta representación en la ecuación anterior se tiene:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{d^2 A}{d\alpha^2} \right) = 0$$

De esta forma, el primer término se ha quedado como la suma de dos funciones independientes. Los sumandos deben ser constantes.

Fijando cierto valor de "r" y haciendo constante el primer sumando y variando α , esto es posible debido a la independencia de los sumandos.

El segundo sumando queda invariable e igual al primero pero con signo contrario. Las consideraciones pueden continuarse fijando el valor de α y variando "r".

La constante a la que es igual el primer sumando es desconocida, y se le puede designar un valor arbitrario n^2 . Igualando los sumandos de la última ecuación a n^2 y $-n^2$ respectivamente, se obtienen las ecuaciones ordinarias:

$$\frac{d^2 A}{d\alpha^2} + n^2 A = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - n^2 \frac{R}{r^2} = 0$$

Al encontrar la solución de estas dos ecuaciones diferenciales, entonces la solución de la ecuación de Laplace quedaría como:

$$U(r,\alpha) = R(r) A(\alpha)$$

OPERADORES DIFERENCIALES VECTORIALES

Coordenadas Rectangulares

$$\begin{aligned}\text{grad } \varphi &= i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \text{div } \bar{F} &= i \frac{\partial F_x}{\partial x} + j \frac{\partial F_y}{\partial y} + k \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \text{rot } \bar{F} &= i \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\begin{aligned}\text{grad } \varphi &= a_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \text{div } \bar{F} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + k \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ \text{rot } \bar{F} &= a_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) + a_\theta \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + k \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned}\text{grad } \varphi &= a_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + a_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \\ \text{div } \bar{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ \text{rot } \bar{F} &= a_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F_\phi \sin \theta - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) + a_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_\phi) \right) + a_\phi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

IDENTIDADES VECTORIALES

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$$

$$\nabla\phi\psi = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\operatorname{div}(F + G) = \operatorname{div} F + \operatorname{div} G$$

$$\operatorname{rot}(F + G) = \operatorname{rot} F + \operatorname{rot} G$$

$$\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \times \operatorname{rot} G + G \times \operatorname{rot} F$$

$$\operatorname{div}\phi F = \phi \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{rot} G$$

$$\operatorname{div}(F \times G) = G \operatorname{rot} F - F \operatorname{rot} G$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

$$\operatorname{rot} \phi F = \phi \operatorname{rot} F + \nabla\phi \times F$$

$$\operatorname{rot}(F \times G) = F \operatorname{div} G - G \operatorname{div} F + (G \cdot \nabla)F - (F \cdot \nabla)G$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \nabla^2 F$$

$$\operatorname{rot} \nabla \phi = 0$$

$$\oint_S F \cdot n \, da = \int_V \operatorname{div} F \, dv$$

$$\oint_C F \cdot n \, dl = \int_S \operatorname{rot} F \, da$$

$$\oint_S \phi n \, da = \int_V \nabla \phi \, dv$$

$$\oint_S F (G \cdot n) \, da = \int_V F \operatorname{div} G \, dv + \int_V (G \cdot \nabla) F \, dv$$

$$\oint_S n \times F \, da = \int_V \operatorname{rot} F \, dv$$

$$\oint_C \phi \, dl = \int_S n \times \nabla \phi \, da$$

TABLAS DE CONSTANTES CARACTERÍSTICAS

Nombre	Símbolo	Valor para cálculos	Mejor valor experimental 1969
Rapidez de la luz	C	3.00×10^8 m/s	2.99792458(4)
Constante de permeabilidad	μ_0	1.26×10^{-6} H/m	$4\pi \times 10^{-7}$ exactamente
Constante de permitividad	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m	8.8541853(59)
Carga elemental	E	1.60×10^{-19} C	1.6021917(70)
Número de Avogadro	N_0	6.02×10^{23} mol	6.022169(40)
Masa en reposo del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg.	9.109558(54)
Masa en reposo del protón	m_p	1.67×10^{-27} kg.	1.672614(11)
Masa en reposo del neutrón	m_n	1.67×10^{-27} kg.	1.672614(11)
Constante de Plank	H	6.63×10^{-34} J s	6.626196(50)
Relación carga/masa del electrón	e/m_e	1.76×10^{11} C/kg	1.7588028(54)
Relación de cuanto/carga	h/e	4.14×10^{-15} J s/C	4.135708(14)
Longitud de Rydberg	λ_e	2.43×10^{-12} m	2.4263096(74)
Longitud de onda de Compton del electrón	R_e	1.10×10^{-7} m	1.09737312(11)
Radio de Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m	5.2917715(81)
Magnetón de Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T	9.274096(65)
Magnetón nuclear	μ_N	5.05×10^{-27} J/T	5.050951(50)
Momento magnético del protón	μ_p	1.41×10^{-26} J/T	1.4106203(90)
Constante universal de los gases	R	8.31 J/Kmol	8.31434(35)
Volumen normal de un gas ideal		2.24×10^{-2} m ³ /mol	2.24136(30)
Constante de Boltzmann	κ	1.38×10^{-23} J/K	1.380622(59)
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.56×10^{-8} W/m ² K ⁴	5.66961(59)
Constante gravitacional	G	6.67×10^{-11} Nm ² /kg ²	6.6732(31)

PROPIEDADES DE ALGUNOS DIELECTRICOS

Material	Constante dieléctrica	Intensidad Dieléctrica (KV./mm.)
Vacío	1.00000	∞
Aire	1.00054	0.8
Agua	78	
Papel	3.5	14
Mica de rubí	5.4	160
Ámbar	2.7	90
Porcelana	6.5	4
Cuarzo fundido	3.8	8
Vidrio pyrex	4.5	13
Polietileno	2.3	50
Poliestireno	2.6	25
Teflón	2.1	60
Neopreno	6.9	12
Aceite de piranol	4.5	12
Dióxido de titanio	100	6

La intensidad dieléctrica es el máximo gradiente de potencial que puede existir en un dieléctrico sin que ocurra el rompimiento eléctrico.

PROPIEDADES DE LOS METALES COMO CONDUCTORES

	Resistividad (a 20°C) (ohm m)	Coefficiente térmico de resistividad (por °C)	Densidad (g/cm. ³)	Punto de fusión (°C)
Aluminio	2.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}	2.7	659
Cobre	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}	8.9	1080
Carbón (amorfo)	3.5×10^{-5}	-5×10^{-4}	1.9	3500
Hierro	1.0×10^{-7}	5.0×10^{-3}	7.8	1530
Manganita	4.4×10^{-7}	1×10^{-5}	8.4	910
Níquel	6.8×10^{-8}	6×10^{-3}	8.9	1450
Plata	1.6×10^{-8}	3.8×10^{-3}	10.5	960
Acero	1.8×10^{-7}	3×10^{-3}	7.7	1510
Volframio (tungsteno)	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}	19	3400

ANEXO II

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Pruebe la validez de las siguientes expresiones.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{c} \cdot \bar{a})\bar{b} - (\bar{c} \cdot \bar{b})\bar{a}$$

2. La posición de una partícula está dada por $x = \sin(2t)$, $y = \cos(2t)$ y $z = e^{-t}$.

Determine \bar{v} , \bar{a} y $\bar{v}(0)$.

3. Evaluar $\bar{\nabla}f$ en el punto $(2,3,5)$ si f es un campo escalar dado por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 \sin(x_1) - x_1^2 x_2 x_3 + x_1 e^{x_2}$$

4. Verifique la validez de las siguientes identidades vectoriales

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla}f = \bar{0}, \quad \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{a}) = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{F} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \bar{\nabla}^2 \bar{F}$$

5. Verifique el teorema de la divergencia si $\bar{D} = x\hat{a}_x$ para un cubo unitario con centro en el origen.

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{D} dV$$

6. Comprobar que el campo eléctrico tiene divergencia y su rotacional es cero.

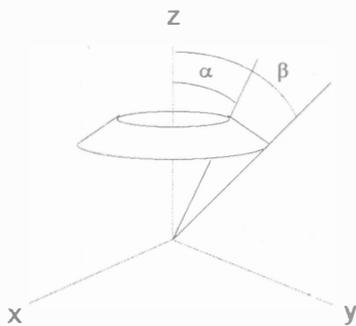
7. Utilizando el sistema de coordenadas adecuado, determine:

- (a) La superficie y el volumen de una esfera de radio R .
 (b) La superficie y el volumen de un cilindro de radio R y longitud L .

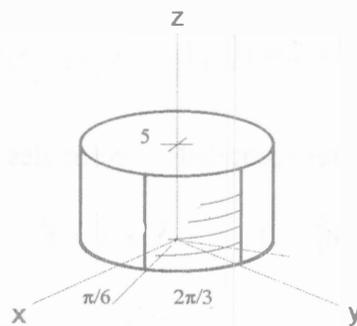
8. Determine la distancia entre los puntos $A(3,7,9)$ y $B(-5,-7,-3)$ y un vector unitario en el sentido de B hacia A .

9. Haciendo uso del sistema de coordenadas cilíndricas, determine la distancia entre los puntos $P(7, \pi/2, 0)$ y $Q(7, \pi/2, -13)$.

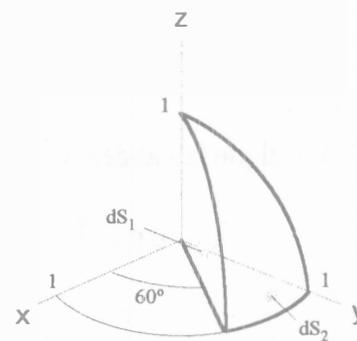
10. Exprese un vector unitario que apunte desde $z = h$ en el eje "z" hacia $(r, \phi, 0)$ en coordenadas cilíndricas.
11. Haciendo uso de coordenadas esféricas, determine el área de la franja entre $\alpha \leq \theta \leq \beta$ sobre la concha esférica de radio "a". ¿Qué resultado se obtiene si $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$?, ver figura.
12. Usando coordenadas cilíndricas, determine el área de la superficie curva de un cilindro recto circular en donde $r = 2$, $h = 5$ y $30^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$, ver figura
13. Por medio de coordenadas esféricas, determine el área de las superficies marcadas con 1 y 2, ver figura.



Inciso 6

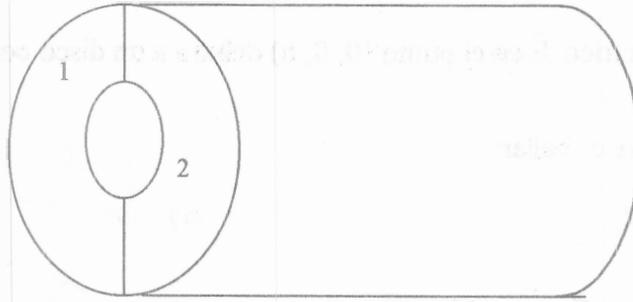


Inciso 7



Inciso 8

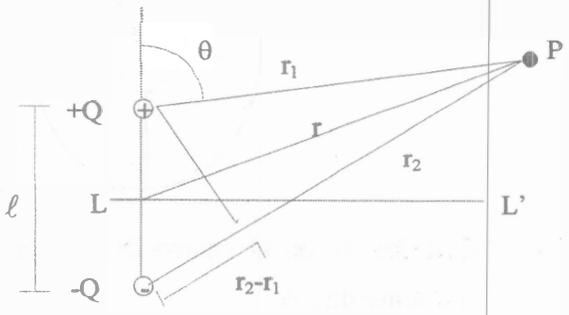
14. Investigue que significa un medio "isotrópico" y demuestre analíticamente por qué el gradiente es un operador no isotrópico y por qué el laplaciano es isotrópico.
15. En que casos la integral de línea no depende de la trayectoria de integración sino de los extremos únicamente.
16. Para qué tipos de campos se evalúan integrales de línea sólo en los extremos y qué características deben tener estos campos.
17. Qué significan y cómo se expresan los términos: potencia, trabajo y energía; indique sus unidades.
18. Hallar la capacitancia del capacitor coaxial con dos medios uno y dos con permeabilidades ϵ_{r1} y ϵ_{r2} , radio interno r_1 , radio externo r_2 y longitud L .

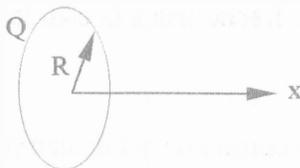


19. Calcular \bar{B} en el centro de una espira cuadrada de 2m de lado, en la que circula una corriente de 3A.
20. Hallar \bar{B} en el interior de un solenoide de diámetro "D" y longitud "L" con "n" vueltas o espiras y con una corriente "I".
21. Obtener la corriente total que pasa a través de un área cuadrada cuyos lados miden 2m, si $\bar{H} = 2y^2 \hat{a}_x$.
22. Demuestre que $J_c = J_d$ en un circuito con capacitor.
23. Dadas las componentes de campo eléctrico, hallar las componentes de campo magnético.

$$E_x = E_z = 0 \quad E_y = Ae^{j\omega(t-z/v)}$$

24. Una espira cuadrada de alambre de 20×20 cm tiene conectado un voltmetro en sus extremos. Determine el voltaje indicado por el voltmetro cuando se sitúa la espira en un campo magnético alterno (senoidal) a frecuencia de 10 MHz, cuya máxima intensidad es de 1 A/m, el plano de la espira es perpendicular al campo, es decir, $H = \cos(\omega t)$.
25. Encuéntrese la densidad de corriente de desplazamiento de un campo magnético en aire dado por:
- (a) $H_y = H_0 \cos(\omega t - \beta x)$
- (b) $\mathbf{H} = \hat{x}H_x \cos(2x) \cos(\omega t - \beta y) + \hat{z}H_z \cos(2x) \cos(\omega t - \beta y)$
26. Hallar las condiciones de frontera para el campo magnético.
27. Hallar la resistencia de aislamiento que existe en un aislante de tipo coaxial con permeabilidades ϵ_{r1} , radio interno r_1 , radio externo r_2 y longitud L.

28. Hallar el campo eléctrico \vec{E} en el punto $(0, 0, h)$ debido a un disco con radio R y carga Q .
29. Para el dipolo eléctrico, hallar:
- El voltaje pico V_p
 - El campo eléctrico \vec{E} para todo punto
 - El voltaje sobre la línea LL'
- 
30. Para dos anillos concéntricos coplanares con cargas $+Q$ y $-Q$, hallar el potencial en un punto r_p sobre el eje perpendicular al plano de los anillos.
31. Para un semianillo con $\rho_L = \rho_0 \cos \theta$:
Hallar el campo eléctrico \vec{E} en $p(x,0,0)$, si el eje x es perpendicular al radio del anillo.
Comprobar que si $x \gg R$ donde R es el radio del semianillo, entonces \vec{E} es similar al de un dipolo.
32. Hallar la capacitancia entre los dos cables paralelos con radio r y separados una distancia D (línea de transmisión bifilar).
33. Para un cascarón esférico conductor con carga eléctrica $+Q$ y radio R , hallar:
 \vec{E} , V y ρ_s dentro y fuera de la superficie.
Graficar \vec{E} , V y ρ_s .
34. Demostrar la ecuación de Poisson.
35. Para un capacitor coaxial con $V_T = 10$ volts, $r_1 = 1$ mm, $r_2 = 50$ mm y $r_3 = 100$ mm, hallar V_1 y V_2 si $V_T = V_1 + V_2$
36. Una carga de -10^{-9} C está localizada en el origen en un sistema de coordenadas en el espacio libre. Qué carga debe haber en el punto $(2,0,0)$ para que la componente de campo eléctrico en el eje x (E_x) sea cero en el punto $(3,1,1)$.

37. Un volumen en coordenadas cilíndricas está entre $r=2\text{m}$ y $r=4\text{m}$, y contiene una densidad uniforme de carga ρ (C/m^3). Utilice la ley de Gauss para hallar \mathbf{D} en todas las regiones.
38. Para una línea de carga circular de carga Q y radio R , axial al eje x , hallar el campo eléctrico $\bar{\mathbf{E}}$:
 En un punto cualquiera sobre el eje x .
 En $x = 0$
 Si $x \gg a$
- 
39. Determine el campo eléctrico y el potencial en una juntura PN (diodo).
40. Se tienen tres cargas en las esquinas de un rectángulo de 4×3 cm, en el espacio libre, donde los valores de las cargas son $Q_1 = -5 \times 10^{-6}$ C, $Q_2 = -2 \times 10^{-6}$ C, $Q_3 = 7 \times 10^{-6}$ C. Encuentre la fuerza F_3 sobre la carga Q_3 .
41. Dos cargas puntuales, $Q_1 = 250 \mu\text{C}$, $Q_2 = -300 \mu\text{C}$, están localizadas en $(5,0,0)$ m y $(0,0,5)$ m, respectivamente. Determine la fuerza sobre Q_2 .
42. Desarrolle la expresión en coordenadas cartesianas para \mathbf{E} debido a una configuración de carga de recta infinitamente larga con densidad uniforme ρ_l .
43. El plano $-x+3y-6z=6$ contiene una distribución uniforme de carga $\rho_s = 0.53$ nC/m². Encuentre \mathbf{E} en el lado que contiene al origen.
44. El disco circular $r \leq 1$ m, $z=0$ tiene una densidad de carga $\rho_s = 2(r^2+25)^{3/2} e^{-10r}$ (C/m²). Encuentre \mathbf{E} en $(0,0,5)$ m.
45. Un conductor de 2.5 m de longitud está colocado en $z=0$ y $x=4$ m, lleva una corriente de 12 amperes en la dirección $-\mathbf{a}_y$. Obtener el campo \mathbf{B} en la región si la fuerza en el conductor es de 1.2×10^{-2} N en la dirección $0.7071(-\mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z)$.
46. Obtener la corriente total que pasa a través de una superficie cuadrada cuyos lados miden 2 m y coinciden con los ejes positivos "x" y "y", para un campo $\mathbf{H} = 2y \mathbf{a}_x$ [A/m].

47. En un punto de cierto material que está definido por $\mu = \mu_0$, $\epsilon_r = 5$ y $\sigma = 1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ y $E_x = 200 \cos(\omega t)$ [V/m], obtener:
- La densidad de corriente de conducción.
 - La densidad de corriente de desplazamiento.
 - La frecuencia a la cual las amplitudes de a y b son iguales.
48. Dadas las componentes de campo eléctrico, hallar las componentes de campo magnético.
- $$E_x = \dot{E}_z = 0 \quad E_y = Ae^{j\omega(t-z/v)}$$
49. Una espira cuadrada de alambre de 20×20 cm tiene conectado un voltmetro en sus extremos. Determine el voltaje indicado por el voltmetro cuando se sitúa la espira en un campo magnético alterno (senoidal) a frecuencia de 10 MHz, cuya máxima intensidad es de 1 A/m, el plano de la espira es perpendicular al campo, es decir, $H = \cos(\omega t)$.
- 50.Cuál es la densidad superficial de carga en un punto situado sobre la superficie de un conductor en la que:
- $$E = 0.70a_x - 0.35a_y - 1.50a_z \quad [\text{V/m}]$$
51. Encuéntrese la densidad de corriente de desplazamiento de un campo magnético en aire dado por:
- $H_y = H_0 \cos(\omega t - \beta x)$
 - $\mathbf{H} = \hat{x}H_x \cos(2x) \cos(\omega t - \beta y) + \hat{z}H_z \cos(2x) \cos(\omega t - \beta y)$
52. Averiguar el espectro electromagnético en función de la frecuencia y de la longitud de onda, e indique la región que ocupa cada banda de frecuencias (ejemplo: AM, FM, TV., S, K, etc.).
53. Averiguar:
- El ancho de banda de audio, video, y señales climatológicas.
 - La frecuencia de transmisión de los canales de televisión comerciales en nuestra ciudad

54. Haga el desarrollo matemático por medio del cual se obtienen las siguientes expresiones, diga que representan y cuáles son sus unidades.

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right)} \qquad \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right)}$$

55. Para la siguiente expresión compruebe que los dos términos de la derecha representan dos ondas viajeras en la misma dirección, pero en sentidos diferentes. Haga un dibujo en el que se muestre el marco de referencia usado y las ondas viajeras.

$$E(x, t) = A \sin(\omega t - \beta x) + A \sin(\omega t + \beta x)$$

56. Una onda viajera está descrita por $y = 10 \sin(\beta z - \omega t)$. Dibuje la onda en $t = 0$ y en $t = t_1$, cuando ha avanzado $\lambda/8$, si la velocidad es de 3×10^8 m/s y la frecuencia angular es $\omega = 10^6$ rad/s. Repita el ejercicio para $\omega = 2 \times 10^6$ rad/s y el mismo tiempo t_1 .

57. Utilizando las ecuaciones de Maxwell, demuestre que para la onda plana los campos eléctrico y magnético son perpendiculares

58. Obtenga $\mathbf{H}(z, t)$ en el espacio vacío para la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}(z, t) = 10^3 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y \quad [\text{V/m}]$$

59. Coprobar que la impedancia intrínseca de una onda electromagnética que viaja en el espacio libre en el sentido negativo del eje x es igual a la onda que viaja en el sentido positivo de x pero con signo negativo.

60. Demostrar que una onda estacionaria no transporta energía.

61. Demostrar que en incidencia normal de ondas electromagnéticas, la potencia emitida es igual a la potencia transmitida más la potencia reflejada.

62. Utilizando principios de Teoría Electromagnética comprobar que la corriente en un capacitor es la corriente de desplazamiento y es $I = C \, dV_c(t)/dt$.

63. Una O. E. M. plana se propaga en el espacio libre con una $\lambda = 40$ cm, si la misma señal es producida en un material plástico no magnético y $\lambda = 25$ cm, obtenga:
- La frecuencia de la onda.
 - La permitividad relativa del plástico.
64. Si una O. E. M. se propaga en el agua con una frecuencia de 15.9 GHz, donde $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 50$ y $\sigma = 20$ (1/ Ω m) determine:
- Cómo se comporta el medio.
 - Las constantes secundarias del medio.
65. Obtenga la potencia promedio a través de una área de 50 m² en el plano $z=0$, si se tiene una O. E. M. plana de 1 MHz con una amplitud de 10 V/m.
- Si el medio está caracterizado por $\mu_r = 8$, $\epsilon_r = 2$ y $\sigma = 0$.
 - Si $\eta = 100 + j 50 \Omega$.
66. Sea $\epsilon_r = 1$ para $z < 0$, $\epsilon_r = 9$ para $0 < z < 2$ y $\epsilon_r = 4$ para $z > 2$; todas las regiones son sin pérdidas y no magnéticas. Para una frecuencia de 6250 kHz, obtener η_{ent} en
- $z = 2$ y
 - $z = 0$
 - ¿Cuál es el valor del SWR que existe en la región $z < 0$? (considere incidencia normal).
67. Evaluar la potencia total que entra a una superficie S que abarca a un conductor de longitud L y área transversal A, si éste tiene una corriente axial I. compruebe que el resultado es equivalente a las pérdidas por efecto joule en una resistencia.
68. Obtenga la potencia media de una O. E. M. que se propaga en un medio conductor.
69. Utilizando los principios de Teoría Electromagnética, demostrar las leyes de Snell ..

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFIA

1. EDMINISTER, J.A. *Electromagnetismo*. Shaum's Mc Graw-Hill.
2. BALANIS, Constantine A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. Ed. John Wiley & Sons
3. CHENG, David K. *Field and Wave electromagnetics*. Ed. Addison-Wesley Publishing Company
4. CHIPMAN R. *Líneas de Transmisión*. Shaum's McGraw-Hill.
5. ESCOBAR S., L. *Apuntes de Teoría Electromagnética*. 1996 (inédito).
6. FIÓDOROV, N.N. *Fundamentos de Electrodinámica*. Ed. Mir. Moscú, 1982.
7. HAYT, William H. *Engineering Electromagnetics. International Student Edition*. Ed. Mc. Graw Hill Novaro
8. JOHNK C. *Engineering Electromagnetic Fields and Waves*. Ed. John Wiley & Sons. U.S.A 1988.
9. KRAUSS, John D. *Electromagnetics*. Ed. Mc. Graw Hill, México 1998.
10. MARSHALL, DUBROFF & SKITEK. *Electromagnetismo, Conceptos y Aplicaciones*. Ed. Prentice-Hall.
11. NIKOLSKI, V.V. *Electrodinámica y Propagación de Ondas de Radio*. Ed. Mir Moscú, 1985.
12. REITZ, John R.; MILFORD, F.J. y Robert W. CHRISTY, R.W. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*. Ed. Addison-Wesley Iberoamericana
13. REYES GUERRA, Bernardo. *El fenómeno Electromagnético. Introducción al Estudio de la Transmisión de Información*. Ed. Noriega Editores
14. SADIKU M. *Elementos de Electromagnetismo*. Editorial CECSA, 2ª. Ed., México 1998.
15. SERWAY, R.A. *Física*. Ed. Mc. Graw Hill
16. SOSA PEDROZA, Jorge y ORTEGA LARA, Lizbeth. *Líneas de Transmisión y Guías de Onda*. Ed. Limusa.
17. WYLIE, C.R. *Matemáticas Superiores para Ingeniería*. Mc Graw-Hill. Méxio 1994.

Esta obra se terminó de imprimir
en junio de 2001
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares
más sobrantes de reposición.