UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

EJERCICIOS DE TEORIA ELECTROMAGNETICA

CARLOS GIRON GARCIA

DIVISION DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA
DEPARTAMENTO DE COMUNICACIONES Y ELECTRONICA

FI/DIME/84-017

INTRODUCCION

EL OBJETIVO DE ESTE TRABAJO ES PROPORCIONAR AL ALUMNO EL MATERIAL NECESARIO, PARA QUE ADQUIERA CIERTA HABILIDAD EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE TEORIA ELECTROMAGNETICA.

ESTE INTENTO DE PROBLEMAS RESUELTOS CONSTITUYE UNA AYUDA PARA QUE EL ESTUDIANTE COMPLEMENTE LOS CONCEPTOS TEORICOS DE LA MATERIA.

EN ESTA SERIE DE EJERCICIOS RESUELTOS SE PRESENTAN PROBLEMAS DE CADA UNO DE LOS TEMAS QUE ACTUALMENTE INCLUYE LA MATERIA.

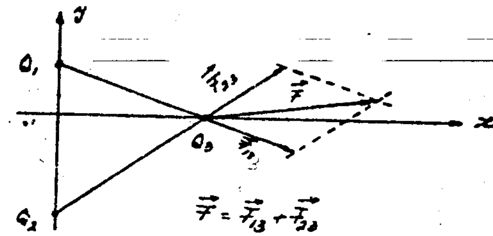
CUALQUIER SUGERENCIA O COMENTARIO POR PARTE DE ESTUDIANTES Y PROFESORES ENRIQUECERA Y MEJORARA EL PRESENTE TRABAJO.

Ing. Carlos G. Girón G.
Mayo de 1984

CAPITULO I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y ECUACIONES DE MAXWELL.

1.1 Una carga de 10×10^{-12} coul está localizada en $x = 0$, --- $y = 100$ mm. y otra de igual carga en $x = o$, $y = -200$ mm. Obtener la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre una carga positiva de 10×10^{-9} coul. en $x = 300$ - mm., --- $y = 0$.



Solución.

$Q_1 = 10pC$; $P_1(0, 0.1)m$

$Q_2 = 10pC$; $P_2(0, -0.2)m$

$Q_3 = 10nC$; $P_3(0.3, 0)m$

$$\vec{F}_{13} = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}^2}\,\vec{a}_{R_{13}} \rightarrow \vec{a}_{R_{13}} = \frac{0.3\vec{a}_x - 0.1\vec{a}_y}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.1)^2}} = \frac{0.3\vec{a}_x - 0.1\vec{a}_y}{0.316}$$

$$\vec{F}_{13} = \frac{(10\times10^{-9})(10\times10^{-12})}{\cancel{4\pi}\,\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(0.316)^2}\left[\frac{0.3\vec{a}_x - 0.1\vec{a}_y}{0.316}\right] = \frac{100\times10^{-21}}{\frac{1}{9}\times10^{-9}(0.316)^3}(0.3\vec{a}_x - 0.1\vec{a}_y)$$

$$\vec{F}_{13} = 2.852\times10^{-8}(0.3\vec{a}_x - 0.1\vec{a}_y) = (8.556\,\vec{a}_x - 2.852\,\vec{a}_y)\times10^{-9}\ \text{new.}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}^2}\,\vec{a}_{R_{23}} \quad ; \quad \vec{a}_{R_{23}} = \frac{0.3\vec{a}_x + 0.2\vec{a}_y}{0.360}$$

$$\vec{F}_{23} = \frac{10\times10^{-12}\times10\times10^{-9}}{\frac{1}{9}\times10^{-9}(0.360)^3}(0.3\vec{a}_x + 0.2\vec{a}_y) = 1.929\times10^{-8}(0.3\vec{a}_x + 0.2\vec{a}_y)$$

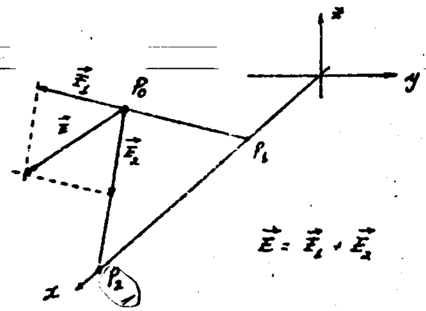
$$\vec{F}_{23} = (5.787\,\vec{a}_x + 3.858\,\vec{a}_y)\times10^{-9}\ \text{new.}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = (14.343\,\vec{a}_x + 1.006\,\vec{a}_y)\times10^{-9}\ \text{new.}$$

$$\vec{F} = 1.437\times10^{-8}\ \underline{|14.01^\circ}\ \text{new.}$$

1.2 Dos cargas puntuales de 4×10^{-9} coul. y -2×10^{-9} coul. están localizadas en el vacío en los puntos x = 2 y x = 6 sobre el eje x respectivamente. Obtener la intensidad de campo eléctrico en el punto (4, -1, 2).

Solución.



$Q_1 = 4nC$; $P_1(2,0,0)$

$Q_2 = -2nC$; $P_2(6,0,0)$

$\vec{E} = ?$; $P_0(4,-1,2)$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}_1}{Q} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_{10}^2}\,\vec{a}_{R_{01}} \quad ; \quad \vec{a}_{R_{01}} = \frac{(4-2)\vec{a}_x + (-1+0)\vec{a}_y + (2-0)\vec{a}_z}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{4\times10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9} \times (3)^2}\left(\frac{2\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z}{3}\right) = \frac{36}{27}(2\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z)$$

$$\vec{E}_1 = 2.666\,\vec{a}_x - 1.333\,\vec{a}_y + 2.666\,\vec{a}_z$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{F}_2}{Q} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{20}^2}\,\vec{a}_{R_{02}} \quad ; \quad \vec{a}_{R_{02}} = \frac{(4-6)\vec{a}_x + (-1+0)\vec{a}_y + (2-0)\vec{a}_z}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{-2\times10^{-9}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9} \times (3)^2}\left(\frac{-2\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z}{3}\right) = -\frac{18}{27}(-2\vec{a}_x - \vec{a}_y + 2\vec{a}_z)$$

$$\vec{E}_2 = 1.333\,\vec{a}_x + 0.667\,\vec{a}_y - 1.333\,\vec{a}_z$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 3.999\,\vec{a}_x - 0.666\,\vec{a}_y + 1.333\,\vec{a}_z \quad \text{volt/m}$$

1.3 Obtener la carga total producida por las distribuciones :

a) $\rho_v = 10xy/z^2$ coul./m^3 en $1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 1 \le z \le 2$

b) $\rho_v = 30r^2 z\cos\phi$ coul/m^3 en $0 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le 30°,\ 1 \le z \le 4$

Solución :

$$Q = \int_{vol} \rho_v\, dv$$

a) $$Q = \int_1^2\int_0^2\int_1^3 \frac{10xy}{z^2}\,dx\,dy\,dz = 10\,\frac{y}{z^2}\int_0^2\int_1^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 dy\,dz$$

$$Q = \frac{40}{z^2}\int_1^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dz = 40(2)\int_1^2 z^{-2}\,dz = 80\left[-\frac{1}{z}\right]_1^2$$

$$Q = 80\left(-\tfrac{1}{2}+1\right) = 40 \text{ coul.}$$

b) $$Q = \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^4 (30r^2 z\cos\phi)(r\,dr\,d\phi\,dz)$$

$$Q = z\cos\phi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^4 30\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\phi\,dz = 120\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos\phi\,d\phi$$

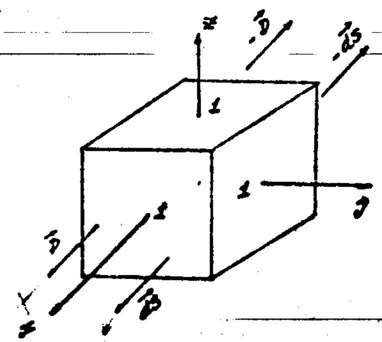
$$Q = 120\left(8-\tfrac{1}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\phi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 120(7.5)(0.5)$$

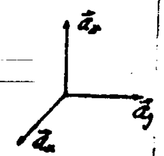
$$Q = 450 \text{ coul.}$$

$30° = \frac{\pi}{6}$ rad.

1.6 Dado el vector : $\vec{D} = (10\ x^3/3)\ \vec{a}_x$ coul/m^2, evaluar ambos lados del Teorema de la Divergencia (Gauss) para un volumen cúbico de 2 m. de lado, centrado en el origen con sus ejes paralelos a los ejes coordenados.

<u>Solución :</u>





$$\oint_{sup} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv \quad \ldots \text{ (TEOREMA DE GAUSS)}$$

$$\oint_{sup} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \sum \text{flujos en cada una de las caras}$$

Para evaluar esta integral se observa que el vector sólo tiene componente en x :

$$\therefore \oint_{sup} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{x=1} \vec{D}\,(dy\,dz\,\vec{a}_x) + \int_{x=-1} \vec{D}\,(-dy\,dz\,\vec{a}_x)$$

$$\oint_{sup} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{10(1)}{3}\, dy\,dz - \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{10(-1)}{3}\, dy\, dz$$

$$\oint_{sup} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \frac{10}{3}(2)(2) + \frac{10}{3}(2)(2) = \frac{40}{3} + \frac{40}{3} = \frac{80}{3}$$

Por otro lado :

$$\int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv$$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} = \frac{30x^2}{3} = 10x^2 \,,$$

$$\int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (10x^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$\int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv = (2)(2)\int_{-1}^{1} 10x^2\, dx = 4\times 10 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$\int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv = 40\left(1/3 - -1/3\right) = 40\left(2/3\right)$$

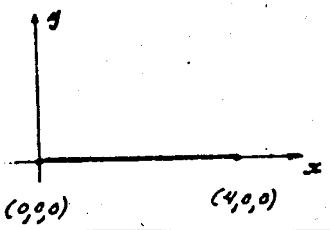
$$\int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv = \frac{80}{3}$$

$$\Rightarrow \oint_{sup} \vec{D}\cdot\vec{ds} = \int_{vol} (\nabla\cdot\vec{D})\, dv \qquad \text{l.q.q.d.}$$

1.7 Obtener el trabajo que es necesario para mover una carga - $Q = -20 \times 10^{-6}$ coul. Desde el origen al punto (4,0,0) m. - en el campo :

$$\vec{E} = \left(\frac{x}{2} + 2y \right) \vec{a}_x + 2x\, \vec{a}_y \quad \text{Volt/m.}$$

Solución :



$$dW = -Q\,\vec{E} \cdot \vec{dL}$$

Para una trayectoria a lo largo del eje x: $\vec{dL} = dx\,\vec{a}_x$

$$\therefore\; W = -(-20 \times 10^{-6}) \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2y \right) \vec{a}_x \cdot dx\,\vec{a}_x$$

$$W = 20 \times 10^{-6} \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2 \right) dx$$

$$W = 20 \times 10^{-6} (1/2) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$W = 10 \times 10^{-6} \left(\frac{16}{2} - 0 \right) = 10 \times 10^{-6} (8)$$

$$W = 80\,\mu\,\text{Joule.}$$

1.8 Una carga puntual de 10^{-7} coul. Está localizada en el origen. Obtener el potencial eléctrico en r = 6. Si : a) El potencial de referencia está en el infinito. b) Si el potencial de referencia está en r=10. c) Si el potencial es de - 50 volt en r = 9.

Solución :

$$a)\; V_p = -\int_{-\infty}^{6} \vec{E} \cdot \vec{dL} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{6} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_p = \frac{1 \times 10^{-7}}{4\pi \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^{6} = \frac{1 \times 10^{-7}}{\frac{1}{9} \times 10^{-9}} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\infty} \right]$$

$$V_p = 900\,(1/6) = 150 \text{ volt.}$$

$$b)\; V_p = 900 \int_{10}^{6} \frac{dr}{r^2} = 900 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right] = 900 \left(\frac{10-6}{60} \right)$$

$$V_p = 900 \left(\frac{4}{60} \right) = \frac{360}{6} = 60 \text{ volt.}$$

$$c)\; V_p = -\int_{P_0}^{P} \vec{E} \cdot \vec{dL} = V_p - V_{P_0}$$

$$V_p - 50 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{9}^{6} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_p = 900 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{9} \right] + 50 = 900 \left(\frac{1}{18} \right) + 50$$

$$V_p = 100 \text{ volt.}$$

1.9 La distribución de potencial eléctrico está dada por la expresión : $V = 7\,y^2 + 12\,x$ volt. Obtener la expresión para el campo eléctrico (magnitud y dirección) en los puntos : (0,0), (5,0), (0,3) y (5,3).

Solución :

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{a}_x - \frac{\partial V_y}{\partial y}\vec{a}_y - \cancelto{0}{\frac{\partial V_z}{\partial z}}\vec{a}_z$$

$$\vec{E} = -12\,\vec{a}_x - 14y\,\vec{a}_y$$

$E_n\ (0,0)\quad ;\quad \vec{E} = -12\,\vec{a}_x$

$E_n\ (5,0)\quad ;\quad \vec{E} = -12\,\vec{a}_x$

$E_n\ (0,3)\quad ;\quad \vec{E} = -12\,\vec{a}_x - 42\,\vec{a}_y$

$E_n\ (5,3)\quad ;\quad \vec{E} = -12\,\vec{a}_x - 42\,\vec{a}_y$

1.10 Calcular la carga que debe colocarse dentro de una esfera centrada en el origen para que origine un campo potencial $V = -\frac{6r^{5*}}{\varepsilon_0}$ para $r \leq 1$.

Solución :

$$Q = \int_{vol} \rho_v\, dv \quad ;\ \rho_v = \nabla\cdot\vec{D} \quad \text{pero} \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} \quad y \quad \vec{E} = -\nabla V$$

$$\rho_v = \nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}) = \nabla\cdot(-\varepsilon_0\nabla V) = -\varepsilon_0\nabla^2 V$$

$$\therefore\ Q = -\varepsilon_0\int_{vol}(\nabla^2 V)\,dv$$

$$V = f(r) \quad ;\quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) \rightarrow \text{(LAPLACIANO)}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-5\times 6\frac{r^4}{\varepsilon_0}\right)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-30\frac{r^6}{\varepsilon_0}\right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\left(-180\frac{r^5}{\varepsilon_0}\right) = -180\frac{r^3}{\varepsilon_0}$$

$$Q = -\varepsilon_0\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left(-180\frac{r^3}{\varepsilon_0}\right)r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$Q = 180\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^5\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi = 180\,(2\pi)\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1\int_{\theta=0}^{\pi}\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$Q = \overset{60}{360}\pi\left(\frac{1}{6}\right)\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 60\pi[1+1]$$

$$Q = 120\pi\ \text{coul.}$$

* Coordenadas Esféricas

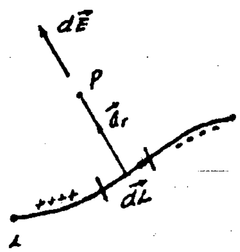
1.11 Para una distribución lineal de $\rho_L = (10^{-9}/2)$ c/m sobre el eje z, obtener V_{AB}, donde A está en el punto (2 m, $\pi/2$, 0) y B en el punto (4 m, π, 5m).

Solución :

$$V_{AB} = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{L}$$

La expresión del campo eléctrico debido a una ρ_L es:

$$\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\epsilon_0 r}\,\vec{a}_r$$



Como el campo es enteramente radial :

$$\vec{E}\cdot d\vec{L} = E_r\,dr$$

$$\therefore\ V_{AB} = -\int_B^A \frac{10^{-9}}{2(2\pi\epsilon_0 r)}\,dr$$

$$V_{AB} = -\frac{10^{-9}}{4\pi\epsilon_0 r}\int_A^B \frac{dr}{r} = -\frac{\times 10^{-9}}{4\pi\times\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}}\left[\ln r\right]_4^2$$

$$V_{AB} = -\frac{1}{\frac{1}{9}}\left[\ln(2)-\ln(4)\right] = -9\,(0.693-1.386)$$

$$V_{AB} = -9(-0.693) = 6.283 \text{ volt.}$$

$$V_{AB} = 6.283 \text{ volt.}$$

1.12 En un conductor cilíndrico de 2 mm. de radio. La densidad de corriente varía con la distancia de su eje de acuerdo a: $\vec{J} = 1000\,e^{-400r}$ amp/m². Obtener la corriente total.

Solución :

$$I = \int_{sup}\vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^{0.002}\int_0^{2\pi}(1000\,e^{-400r})\,\vec{r}\cdot r\,dr\,d\phi\,\vec{a}_r = 2\pi\times10^{3}\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr$$

$$\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr \quad ; \quad \int x e^{x}dx = e^{x}(x-1)$$

Sea : $u = -400r$; $du = -400\,dr \rightarrow r\,dr = \frac{r\,du}{-400}$

$$\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr = -\frac{1}{400}\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,du = -\frac{1}{400}\cdot\frac{1}{-400}\left[e^{-400r}(-400r-1)\right]_0^{0.002}$$

$$\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr = \left[\frac{1}{(400)^2}\,e^{-400r}(-400r-1)\right]_0^{0.002}$$

$$\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr = \frac{1}{16\times10^4}\,e^{-400(0.002)}\left[-400(0.002)-1\right] - \frac{e^{0}}{16\times10^4}(-0-1)$$

$$\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr = \frac{1}{16\times10^4}\,e^{-0.8}(-0.8-1) - \frac{1}{16\times10^4}(-1) = \frac{1}{16\times10^4}(-1.8\,e^{-0.8}+1)$$

$$\therefore \int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr = 1.195\times10^{-6}$$

Pero : $I = 2\pi\times10^{-3}\int_0^{0.002} e^{-400r}\,r\,dr = 2\pi\times10^{3}(1.195\times10^{-6})$

$$I = 7.512\times10^{-3} \text{ amp.}$$

1.13 Una densidad volumétrica de carga en cierta región disminuye a una razón de 2×10^8 coul/m^3-seg. a) Cuál es la corriente total que cruza una superficie esférica incremental si el radio es de 10^{-5} m. b) Cuál es el valor promedio de la componente de densidad de corriente que sale a través de la superficie esférica.

Solución :

a) $I = \int_{r=0}^{10^{-5}}\int_0^{2\pi} \vec{J}\cdot \vec{dS} = \frac{dQ}{dt}$

$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 2\times 10^8 \frac{coul}{m^3\text{-}seg}$ → De la ecuación de continuidad:

$I = \oint_{sup} \vec{J}\cdot\vec{dS} = -\int_{vol}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\,dv$; $I = -\int_{vol}\frac{\partial \rho_v}{\partial t}\,dv$

$$I = -\int_{r=0}^{10^{-5}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} 2\times10^8\,(r^2 sen\theta\, dr\, d\theta\, d\phi)$$

$$I = -4\pi\times10^8\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{10^{-5}}\int_0^{\pi} sen\theta\, d\theta$$

$$I = -\frac{4\pi}{3}\times10^8\times10^{-15}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}\times10^{-7}\left[-1-1\right]$$

$$I^* = -\frac{8\pi}{3}\times10^{-7} = 0.837\times10^{-6}\ amp.$$

b) Como : $I = \oint_{sup}\vec{J}\cdot\vec{dS}$; $J = \frac{I}{S}$

*El signo (-) indica disminución de la carga en la región,

Para una envolvente esférica : $dS = r^2\ sen\ \theta\ d\theta\ d\phi$

$$\therefore S = \int dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(10^{-5})^2 sen\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$S = 2\pi\times10^{-10}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = -2\pi\times10^{-10}(-1-1)$$

$$S = 4\pi\times10^{-10}\ m^2$$

$$J = \frac{I}{S} = \frac{\frac{8\pi\times10^{-7}}{3}}{4\pi\times10^{-10}} = \frac{8\pi\times10^{-7}}{12\pi\times10^{-10}}$$

$$J = 0.666\times10^{-3}\ amp/m^2.$$

1.14 Un alambre de aluminio AWG # 20 tiene una resistencia de --- 16.7 Ω/1000 ft. ¿Cuál es el valor de la conductividad para este tipo de alambre?.

Solución :

De la tabla de alambres. AWG # 20 aluminio tiene un diámetro de 32 mils.

$$A^* = \pi\left[\frac{32\times10^{-3}\ in}{2}\times\frac{0.0254\ m}{in}\right]^2 = 5.19\times10^{-7}\ m^2$$

$$L^* = 100\ ft\times\frac{12\ in}{1\ ft}\times\frac{0.0254\ m}{1\ in} = 3.05\times10^{-2}\ m$$

$R = \frac{L}{\sigma A}$; $\sigma = \frac{L}{RA}$

$$\sigma = \frac{3.05\times10^{-2}}{16.7\times5.19\times10^{-7}} = 35.2\times10^{6}\ mhos/m.$$

* ft = pie = 12 in. In = pulgada = 2.54 cms.

1.15 Un alambra de 50 ft. de longitud de cobre AWG # 12 (80.8 mil diámetro). Lleva una corriente de 20 Amps. Obtener la intensidad de campo eléctrico, la velocidad de arrastre, el voltaje y la resistencia en el alambre.

Solución :

Como tiene un diámetro de 80.8 mil, la sección transversal del alambre es : $(A = \pi r^2)$

$$A = \pi\left[\frac{0.0808}{2}\,in \times \frac{0.0254\,m}{in}\right]^2 = 3.31\times10^{-6}\,m^2$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \;;\; \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \quad \text{para el cobre} : \sigma = 5.8\times10^{7}\ \frac{mhos}{m}$$

$$J = \frac{I}{A} = \frac{20}{3.31\times10^{-6}} = 6.04\times10^{6}\ amp/m^2.$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{6.04\times10^{6}}{5.8\times10^{7}} = 1.04\times10^{-1}\ volt/m.$$

$$\vec{J} = -\mu_e\rho_e\vec{E} \;;\ \text{para un conductor} : \vec{J} = \sigma\vec{E} \;\therefore\; \sigma = -\mu_e\rho_e$$

Para el cobre : $\mu_e = 0.0032\ m^2/volt\text{-}seg.$

$$\rho_e = \frac{\sigma}{\mu_e} = \frac{5.8\times10^{7}}{0.0032} = 1.81\times10^{-10}\ coul./m^3$$

$$\vec{J} = \rho_v\vec{U}_d \;;\; \vec{U}_d = \frac{\vec{J}}{\rho_e}$$

$$\vec{U}_d{}^{*} = \frac{6.04\times10^{6}}{1.81\times10^{-10}} = 3.34\times10^{-4}\ m/seg.$$

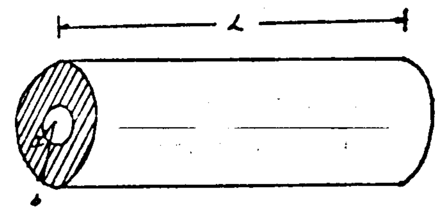
$^*\vec{U}_d = \vec{v}_d$ = Velocidad de arrastre.

$$V = -\int_L^0 \vec{E}\cdot\vec{dL} = EL = 1.04\times10^{-1}\ \frac{volt}{m}\times 50\,ft \times \frac{12\,in}{ft}\times\frac{0.0254\,m}{in}$$

$$V = 1.59\ volt.$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.59\ volt}{20\ amp} = 7.95\times10^{-2}\ ohm.$$

1.16 Determine la resistencia de aislación de un cable coaxial de longitud L, como se muestra en la figura.



Solución :

Considerando una corriente total que va del conductor interior al exterior:

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{2\pi rL} \;;\; \vec{J} = \sigma\vec{E} \;\therefore\; \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$$

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\sigma rL}$$; Si existe un campo eléctrico uniforme se tiene una diferencia de potencial.

$$V_{ab} = -\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{dL} = -\int_b^a \frac{I}{2\pi r\sigma L}\,dr = -\frac{I}{2\pi\sigma L}\int_b^a\frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi\sigma L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\ ohm.$$

1.17 Un capacitor de placas paralelas es cargado a 1000 Volt. Si la fuente se desconecta y las placas se separan dos veces su valor original ¿Cuál es la energía almacenada en ambos casos?

Solución :

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad W = \frac{1}{2} QV$$

La relación es constante:

$$W = \frac{1}{2} Q (1000)$$

La capacitancia no depende ni de Q ni de V

$$W = \frac{1}{2} (1000) = 500 \text{ Joule}$$

Si la distancia es 2d:

La capacitancia : $C = \frac{\varepsilon A}{2d} = \frac{Q}{V}$

$$\therefore C = \frac{Q}{2V}$$

Esto significa que el voltaje es 2000 volt.

Como Q permanece constante.

$$\therefore W = \frac{1}{2} (2 \times 1000) = 1000$$

$$W = 1000 \text{ Joule}$$

1.18 Dos placas metálicas paralelas están separadas por una distancia de 0.1 mm. y cargadas con una diferencia de potencial de 100 Volts. Si las placas guardan una separación de 1.0 cms. ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las -- placas?.

Solución :

$$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Como la relación es constante:

$$C_1 V_1 = C_2 V_2$$

$$\frac{\varepsilon_1 A_1}{d_1} V_1 = \frac{\varepsilon_2 A_2}{d_2} V_2$$

Lo unico que varia es la distancia y el potencial.

$$\therefore \frac{\varepsilon A}{d_1} V_1 = \frac{\varepsilon A}{d_2} V_2$$

$$\frac{V_1}{d_1} = \frac{V_2}{d_2} \quad ; \quad V_2 = \frac{d_2}{d_1} V_1$$

$$V_2 = 100 \; \frac{1 \times 10^{-2}}{1 \times 10^{-4}} = 100 \times 10^{-2} \cdot 10^{4} = 100 \times 10^{2}$$

$$V = 1 \times 10^{4} \text{ volt.}$$

1.19 Obtener la magnitud de la intensidad de campo eléctrico dentro de una muestra de cobre (σ = 5.8 x 10^7 mhos/m, u_e = 0.0032 m^2/Volt- seg. Si : a) $\vec{J}$ = 10^6 amp/m^2. b) La velocidad de -- arrastre de los electrones libres es de 0.1 mm/seg. c) Tiene la forma de un cubo de 1 mm por lado con una corriente total de 2 amp. d) Tiene la forma de un cubo de 1 mm. por lado con una diferencia de potencial de 20μv entre sus caras opuestas.

Solución :

a) $\vec{J} = \sigma\vec{E}$; $\vec{E} = \frac{J}{\sigma} = \frac{10^6}{5.8\times10^7} = 1.724\times10^{-2}$ volt/m.

b) $\vec{J} = \rho_v\vec{U}_d$; $\vec{U}_d = -\mu_e\vec{E}$; $\vec{U}_d = \frac{0.1\text{ mm}}{seg}\cdot\frac{1\text{ m}}{10^3\text{ mm}} = 0.1\times10^{-3}\frac{m}{seg}$

$$E = \frac{U_d}{\mu_e} = \frac{0.1\times10^{-3}}{0.32\times10^{-2}} = 31.25\times10^{-3}\text{ volt/m.}$$

c) $J = \sigma E$; $E = \frac{J}{\sigma}$; $I = \int J\,ds$

$$ds = \int_0^{0.001}\int_0^{0.001} dx\,dy = (0.001)^2$$

$$J = \frac{I}{s} = \frac{2}{(0.001)^2} = 2\times10^6 \quad ; \quad E = \frac{J}{\sigma} = 3.448\times10^{-2}\text{ volt/m.}$$

d) $V_{ab} = -\int_a^b \vec{E}\cdot\vec{dl} = \int_b^a \vec{E}\cdot\vec{dl} = EL$

$$\therefore E = \frac{V_{ab}}{L} = \frac{20\times10^{-6}}{0.001} = 20\times10^{-3}\text{ volt/m.}$$

1.20 Un conductor de 2.5 m. de longitud está localizado en z=0 y x = 4m lleva una corriente de 12 amp en la dirección $-\vec{a}_y$. - Obtener el campo $\vec{B}$ en la región si la fuerza en el conductor es de 1.20 x 10^{-2} nws en la dirección $(-\vec{a}_y+\vec{a}_z / \sqrt{2})$.

Solución :

$$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} \quad ; \quad \vec{B} = \frac{\vec{F}}{I\vec{L}}$$

$$I\vec{L}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 0 & -12(2.5) & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$I\vec{L}\times\vec{B} = \vec{a}_x(-30B_z) - \vec{a}_y(0) + \vec{a}_z(30B_x) = -30B_z\vec{a}_x + 30B_x\vec{a}_z$$

$$1.2\times10^{-2}\left[\frac{(-\vec{a}_x+\vec{a}_z)}{\sqrt{2}}\right] = -30B_z\vec{a}_x + 30B_x\vec{a}_z$$

$$-\frac{1.2\times10^{-2}}{\sqrt{2}}\vec{a}_x = -30B_z\vec{a}_x \quad ; \quad B_z = \frac{1.2\times10^{-2}}{30\sqrt{2}}$$

$$\frac{1.2\times10^{-2}}{\sqrt{2}}\vec{a}_z = 30B_x\vec{a}_z \quad ; \quad B_x = \frac{1.2\times10^{-2}}{30\sqrt{2}}$$

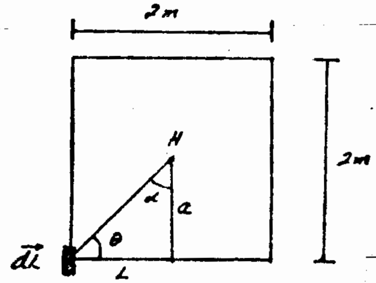
$$\therefore B_x = B_z = \frac{4\times10^{-4}}{\sqrt{2}}\ \text{weber/m}^2$$

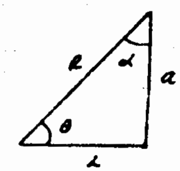
B_y puede tomar cualquier valor.

1.21 Calcular la densidad de flujo magnético ($\vec{B}$) en el centro de una espira cuadrada de alambre de 2 m. de lado, donde circula una corriente de 3 amp.

Solución :

$$\vec{H} = \oint \frac{I\, \vec{dL} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2}$$





$\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha$ $\qquad$ $\tan ($

$\sec\alpha = \frac{R}{a}$ $\qquad$ $L = a\tan$

$R = a\sec\alpha$

$dL = a\sec^2\alpha\, d\alpha$

$$H = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{dL\,\operatorname{sen}\theta}{R^2}$$

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\cancel{a}\,\cancel{\sec^2\alpha}\, d\alpha \cos\alpha}{a^{\cancel{2}}\, \cancel{\sec^2\alpha}}$$

$$H = \frac{I}{4\pi a}\int_0^{\pi/4} \cos\alpha\, d\alpha = \frac{I}{4\pi a}\Big[\operatorname{sen}\alpha\Big]_0^{\pi/4} = \frac{I}{4\pi a}(0.7071)$$

$$H = \frac{3}{4\pi(1)}(0.7071) = 0.17 \text{ amp/m. (sobre un lado)}$$

$$\therefore H_{total} = \text{Perimetro} \cdot H \;;\; \text{Perimetro} = 4(2) = 8\text{ m.}$$

$$H = 8(0.17) = 1.35 \text{ amp/m.}$$

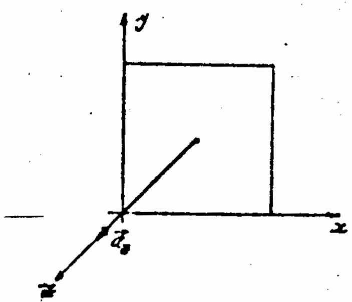
$$\text{Pero: } B = \mu_0 H = 4\pi\times10^{-7}(1.35)$$

$$B = 1.7\times10^{-6} \text{ weber/m}^2.$$

1.22 Obtenga la corriente total que pasa a través de una área cuadrada cuyos lados miden 2 m y coinciden con los ejes positivos "x" y "y", para un campo : $\vec{H} = 2\,y^2\,\vec{a}_x$ amp/m^2.

Solución :

De la Ley de Ampere : $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$



$$\nabla\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_x(0) - \vec{a}_y\overbrace{\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)}^{0} + \vec{a}_z\left(-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\times\vec{H} = -(4y)\,\vec{a}_z = \vec{J}$$

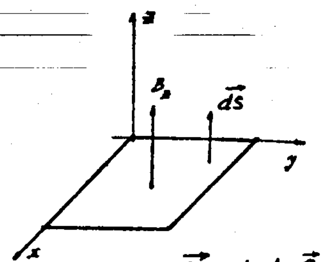
$$I = \int_{sup}\vec{J}\cdot\vec{dS} = \int_0^2\!\!\int_0^2 (-4y)\,\vec{a}_z\cdot dx\,dy\,\vec{a}_z$$

$$I = -2\int_0^2 4y\,dy = -8\int_0^2 y\,dy = -8\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = -8\left[\frac{4}{2}-0\right]$$

$$I = -16 \text{ amp.}$$

1.23 Si el campo : $\vec{B} = 6$ sen $(\pi x/2)$ Sen $(\pi y/2)$ $\vec{a}_z$ weber/m^2. Obtener el flujo magnético total sobre una espira cuadrada de 2 m. de lado cuyos lados coinciden con los ejes positivos "x", "y" y una esquina en el origen. Si $\vec{B} = \frac{k}{r}\ \vec{a}_z$ weber/m^2 cuál es el flujo magnético que pasa a través de un círculo de radio r_o.

Solución :



a) $$\Phi = \int_{sup} \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

$$\Phi = \int_0^2\int_0^2 \vec{B}\cdot\vec{dS} \quad ; \quad \vec{dS} = \vec{n}\,dS \qquad \vec{dS} = dxdy\,\vec{a}_z$$

$$\Phi = 6\int_0^2\int_0^2 \operatorname{sen}(\pi x/2)\operatorname{sen}(\pi y/2)\,\vec{a}_z \cdot dxdy\,\vec{a}_z$$

sea : $u = \pi x/2$; $du = \frac{\pi}{2}dx$ $\therefore$ $dx = \frac{2}{\pi}du$

$$\Phi = 6\left(\frac{2}{\pi}\right)\left[-\cos(\pi x/2)\right]_0^2 \int_0^2 \operatorname{sen}(\pi y/2)\,dy$$

$$\Phi = \frac{12}{\pi}\left[-\cos\pi + \cos 0\right]\int_0^2 \operatorname{sen}(\pi y/2)\,dy = \frac{12}{\pi}(2)\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)\left[-\cos(\pi y/2)\right]_0^2$$

$$\Phi = \frac{24}{\pi}\cdot\frac{2}{\pi}(+2) = \frac{24\times 4}{\pi^2} = 9.726 \text{ weber}$$

b) $$\Phi = \int_{r=0}^{r_o}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{k}{r}\vec{a}_z \cdot r\,dr\,d\phi\,\vec{a}_z = K(2\pi)\int_{r=0}^{r_o} dr = 2\pi K\left[r\right]_0^{r_o}$$

$$\Phi = 2\pi K r_o \text{ weber.}$$

1.24 Calcular el flujo magnético total que cruza el plano $z = o$ en un sistema de coordenadas cilíndricas para $r \leq 5 \times 10^{-2}$ m.

Sí : $\vec{B} = \frac{0.2}{r}$ sen$^2\ \phi\ \vec{a}_z$ weber/m^2

Solución :

$$\Phi = \int_{sup} \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

$$\Phi = \int_{r=0}^{5\times10^{-2}}\int_0^{2\pi} \frac{0.2}{r}\operatorname{sen}^2\phi\,\vec{a}_z \cdot r\,dr\,d\phi\,\vec{a}_z$$

$$\Phi = 0.2\,(5\times10^{-2})\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi$$

$$\Phi = 1\times10^{-2}\left[\frac{1}{2}(\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi)\right]_0^{2\pi}$$

$$\Phi = \frac{1\times10^{-2}}{2}\left[2\pi - 0 - 0 - 0\right] = \pi\times10^{-2}$$

$$\Phi = 3.14\times10^{-2} \text{ weber.}$$

1.25 Calcular la corriente de desplazamiento en un conductor de cobre a través del cual circula una corriente de conducción de 0.5 amp. a una frecuencia de 100 Hz, considere para el cobre : $\mu_r = \epsilon_r = 1$ y $\sigma = 5.8 \times 10^7$ mhos/m.

Solución :

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ (\text{amp/m}^2) \quad ; \quad I_D = A\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ (\text{amp})$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad ; \quad J_c = \frac{I_c}{A} = \sigma E$$

$$\therefore \ E = \frac{I_c}{\sigma A} \quad \text{pero} : I_c = I_o \cos\omega t \quad ; \omega = 2\pi f$$

$$E = \frac{I_o}{\sigma A}\cos\omega t$$

$$I_D = A\,\mathcal{E}_o \frac{\partial E}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\omega\frac{I_o}{\sigma A}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$I_D = -A\mathcal{E}_o\,\omega\frac{I_o}{\sigma A}\,\text{sen}\,\omega t$$

$$I_D = -\frac{\omega\mathcal{E}_o}{\sigma} I_o\,\text{sen}\,\omega t \quad ; \omega = 2\pi\times 100$$

$$I_D = -\frac{2\pi\times 10^2\times\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}}{5.8\times 10^7}(0.5)\,\text{sen}\,(2\pi\times 100)t \ \ \text{amp}$$

$$I_D = -\frac{1\times 10^{-7}\times 0.5}{5.8\times 10^7\times 18}\,\text{sen}\,(200\pi t) \ \text{amp.}$$

$$I_D = -4.789\times 10^{-17}\,\text{sen}\,(200\pi t) \ \text{amp.}$$

1.26 En un punto de cierto material que está definido por : $\mu = \mu_o$ $\epsilon_r = 5$ y $\sigma = 1$ mhos/m se tiene un campo : $E_x = 200 \cos wt$ -- amp/m. Obtenga : a) La densidad de corriente de conducción. b) La densidad de corriente de desplazamiento. c) La frecuencia a la cual sus amplitudes son iguales.

Solución :

a) $\vec{J}_c = \sigma\vec{E} = 1\times 200\cos\omega t$

$$\vec{J}_c = 200\cos\omega t\ \vec{a}_x \quad \text{amp/m}^2$$

b) $\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad y \quad \varepsilon = \varepsilon_o\varepsilon_r$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 5\mathcal{E}_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 5\mathcal{E}_o(200\omega)(-\text{sen}\,\omega t)\ \vec{a}_x$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -1000\,\omega\,\mathcal{E}_o\,\text{sen}\,\omega t\ \vec{a}_x \quad \text{amp/m}^2$$

c) La frecuencia a la cual sus amplitudes son iguales:

$$200 = 1000\,\omega\,\mathcal{E}_o \quad ; \quad \omega = \frac{200}{1000\,\mathcal{E}_o}$$

$$\omega = \frac{2}{\frac{1}{36\pi}\times 10^{-8}} \quad ; \quad 2\pi f = \frac{2}{\frac{1}{36\pi}\times 10^{-8}}$$

$$f = \frac{1}{\pi\times\frac{1}{36\pi}\times 10^{-8}} = 36\times 10^8\ \text{Hz}$$

$$f = 3.6\ \text{GHz.}$$

1.27 **Si las componentes del campo eléctrico están dadas por :**

$$E_y = A e^{jw\,(t-z/v)}, \quad E_x = E_z = 0$$

¿Obtener las componentes del campo magnético?

Solución :

De la 2a. Ecuación de Maxwell: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_x\left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \vec{a}_y(0) + \vec{a}_z \cancelto{0}{\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{a}_x = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\frac{\omega}{v} A e^{j\omega(t-z/v)}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = j\frac{\omega}{v} A e^{j\omega(t-z/v)} \quad ; \quad B_x = j\frac{\omega}{v} A \int e^{j\omega(t-z/v)}\,dt$$

$$B_x = \mu H_x \Rightarrow H_x = \frac{B}{\mu} \quad \therefore \quad H_x = j\frac{\omega}{v\mu} A \int e^{j\omega(t-z/v)}\,dt.$$

$$H_x = j\frac{\omega}{v\mu} A \cdot \frac{1}{j\omega} A e^{j\omega(t-z/v)}$$

$$H_x = \frac{A}{v\mu} A e^{j\omega(t-z/v)} \quad ; \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

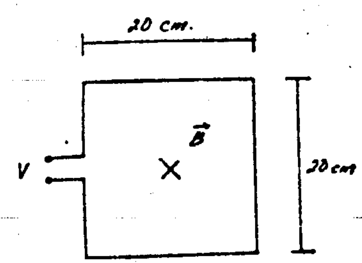
v: velocidad de propagación (fase)

$$H_y = H_z = 0$$

Nota : Se observa que el campo eléctrico es perpendicular al campo magnético, la dirección de los campos la da en este caso el rotacional.

1.28 Una espira cuadrada de alambre de 20 x 20 cms. tiene conectado un vóltmetro en serie con uno de sus lados. Determine el voltaje indicado por el dispositivo cuando se situa la espira en un campo magnético alterno cuya intensidad máxima es de 1 amp/m, el plano de la espira es perpendicular al campo y la frecuencia es de 10 MHz.

Solución :



$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{L} = -\int_{sup} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{L} = fem$$

$$\vec{H} = H_0 \operatorname{sen}\omega t \quad ; \quad H_0 = 1 \text{ amp/m} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\therefore \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu \omega H_0 \cos\omega t$$

$$S = \int_0^{0.2}\int_0^{0.2} dx\,dy = (0.2)(0.2) = 0.04\,m^2$$

$$fem = -\mu\omega H_0 \cos\omega t \cdot 0.04 \quad ; \quad \omega = 2\pi f = 2\pi\times10^7, \quad \mu = \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$$

$$fem = 4\pi\times10^{-7}\times 2\pi\times10^{7}(1)(0.04)\cos(2\pi\times10^7 t)$$

$$fem = 8\pi^2\times0.04\cos(2\pi\times10^7 t) = 3.158\cos(2\pi\times10^7 t)$$

$$\therefore |fem|_{pico} = 3.158 \text{ volt.}$$

1.29 **La densidad de flujo magnético :**

$\vec{B} = 10^{-6} \cos 10^{6}\, t \cos 5z\ \hat{A}y$ weber/m^{2}

Existe en un material lineal, homogéneo e isotrópico caracterizado por μ y ε. Obtener la densidad de corriente de desplazamiento.

Solución :

De la 1ª ecuación de Maxwell: $\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\nabla\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{a}_x\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \vec{a}_y(0) + \vec{a}_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)^{0}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}\vec{a}_x = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \therefore \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_y}{\partial z}\vec{a}_x$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -5\times10^{-6}\cos 10^{6}t\,(-\operatorname{sen} 5z) = 5\times10^{-6}\cos 10^{6}t \operatorname{sen} 5z$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{5\times10^{-6}}{\mu}\cos 10^{6}t \operatorname{sen} 5z\ \vec{a}_x \ \text{amp/m}^2$$

De la 2ª ecuación de Maxwell: $\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\nabla\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{E} = \vec{a}_x(0) - \vec{a}_y\left(-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{a}_z\left(-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)^{0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 10^{6}\cdot10^{-6}(-\operatorname{sen} 10^{6}t)\cos 5z$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{sen} 10^{6}t \cos 5z\ \vec{a}_y$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \operatorname{sen} 10^{6}t \cos 5z$$

$$\therefore \quad E_x = \int \operatorname{sen} 10^{6}t \cos 5z\, dz = \frac{1}{5}\operatorname{sen} 10^{6}t \operatorname{sen} 5z$$

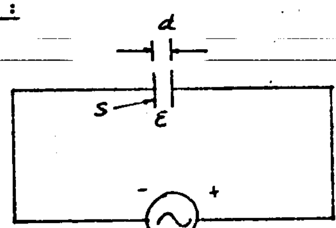
$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{5}10^{6}\cos(10^{6}t)\operatorname{sen} 5z$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0.2\times10^{6}\cos 10^{6}t \operatorname{sen} 5z$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 2\times10^{5}\varepsilon\cos 10^{6}t \operatorname{sen} 5z\ \vec{a}_x \ \text{amp/m}^2$$

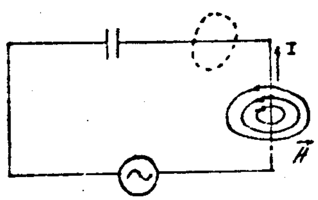
1.30 Demostrar que para un circuito simple de A. C. el cual consiste de un generador y un capacitor. La corriente de desplazamiento a través del capacitor es igual a la corriente de conducción en los alambres.

Solución :



$v_0 \, sen\omega t$

a) Considerando una trayectoria L en los alambres del circuito.



$$\oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl} = I$$

En este caso I es la corriente que circula por el alambre.

La corriente que circula por el capacitor es:

$$I_c = C\,\frac{\partial V}{\partial t} \quad (amp)$$

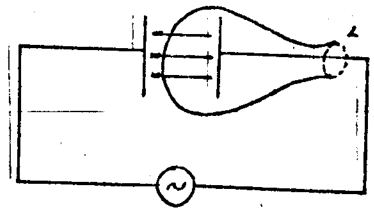
donde : C= capacitancia ; $C = \varepsilon\,\frac{S}{d}$

V= voltaje

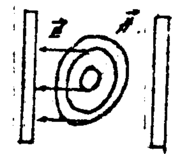
$$\frac{\partial V}{\partial t} = \omega\, v_0 \cos\omega t$$

$$\therefore\; I_c = \varepsilon\,\frac{S}{d}\,\omega\, v_0 \cos\omega t \;\; amp.$$

b) Considerando ahora una bolsa como la trayectoria y dentro de la misma una de las placas del capacitor.



$v_0 \, sen\omega t$



Entre las placas aparece un campo eléctrico variable el cual genera un campo magnético.

$$\oint_L \vec{H}\cdot\vec{dl} = I$$

En este caso la corriente es una corriente de desplazamiento:

$$I_D = S\,\frac{\partial D}{\partial t} \quad ; \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

Pero : $E = \dfrac{V}{d}$; $V = v_0 \, sen\omega t$

$$I_D = S\,\varepsilon\,\frac{\partial E}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{d}\,\omega\, v_0 \cos\omega t$$

$$I_D = S\,\frac{\varepsilon}{d}\,\omega\, v_0 \cos\omega t \;\; amp.$$

$$\therefore\; I_c = I_D \qquad l.q.q.d.$$

CAPITULO II

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

2.1 El vector de intensidad de campo eléctrico de una onda electromagnética está dada por : $\vec{E} = 20 \cos [2\pi(10^9 t - 5x)]\vec{a}_y$. Obtenga : a) La frecuencia. b) La longitud de onda. c) La velocidad de fase. d) La ε_r del medio, donde se propaga la onda, considerando que este es un material no magnético ---- ($\mu_r = 1$). e) La impedancia del medio.

Solución :

a) De la expresión : $\vec{E} = 20 \cos(\omega t \pm \beta x)$

$\omega = 2\pi f$; $2\pi f = 2\pi \times 10^9$; $f = \frac{2\pi \times 10^9}{2\pi}$

$f = 1$ GHz.

b) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5} = 0.2$ m.

c) $v = \lambda f = 0.2 \times 1 \times 10^9 = 2 \times 10^8$ m/seg.

d) $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$; $\mu = \mu_o \mu_r$ y $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$

$v = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}$; $\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{3 \times 10^8}{v} = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 10^8}$

$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.5$; $\varepsilon_r = (1.5)^2 = 2.25$

e) $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2.25}}$

$\eta = 251.73$ ohms.

2.2 Una onda plana uniforme de 5GHZ se propaga en el poliestireno ($\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2.53$). Si la amplitud de la intensidad de campo eléctrico es de 10 [m Volt/m.] Obtener : a) La velocidad de propagación. b) La longitud de onda. c) La constante de fase. d) La amplitud del campo magnético.

Solución :

a) $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$; $\mu = \mu_0\mu_r$; $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{2.53}} = 1.886\times10^8 \text{ m/seg.}$$

b) $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$; $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1.886\times10^8}{5\times10^9}$

$$\lambda = 3.77\times10^{-2} \text{ m} = 3.77 \text{ cm}$$

c) $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3.77\times10^{-2}} = 166.56$ rad/m.

d) $\eta = \frac{E}{H}$; $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$

$$\eta = 120\pi\sqrt{\frac{1}{2.53}} = 75.44\pi \approx 237 \text{ ohm}$$

$$H = \frac{E}{\eta} = \frac{10\times10^{-3}}{237} = 0.042\times10^{-3} \text{ amp/m.}$$

2.3 La expresión del campo eléctrico, para una onda que se propaga en el espacio libre es :

$\vec{E} = 0.2$ sen $(wt - 0.5x)$ $\vec{a}_y$ Volt/m.

a) Obtener w. b) Obtener el campo $\vec{H}$. c) Decir en qué dirección viaja la onda.

Solución :

a) De la expresión del Campo : $\vec{E} = E_m$ sen $(wt - \beta x)$ $\vec{a}_y$

Sabemos que : $\beta = \frac{w}{v}$ $\rightarrow$ $w = \beta v$

Como la onda se propaga en el espacio libre $v = v_0 = 3\times10^8$ m/seg. $\therefore$ $w = 0.5\text{x}3\text{x}10^8 = 1.5\text{x}10^8$ rad/seg.

b) $\frac{E_y}{H_z} = \eta$ como el medio es el espacio libre. $\eta = \eta_0 = 120\pi$ ohm

$\therefore$ $H_z = \frac{E_y}{\eta} = \frac{0.2}{120\pi}$ sen $(1.5 \times 10^8\ t - 0.5x)$

$\vec{H} = 0.53^{-3}$ sen $(1.5 \times 10^8\ t - 0.5\ x)$ $\vec{a}_z$ mamp/m.

c) De acuerdo a la expresión del campo, la onda se propaga en la dirección + x.

2.4 Obtenga la constante dieléctrica relativa (ε_r) de un material no magnético ($\mu_r = 1$) a través del cual se propaga una onda plana. Si : a) La impedancia intrínseca del medio es 180 ohms. b) Si la longitud de onda a 10 GHZ es de 2 cms.

Solución :

a) $$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \longrightarrow 180 = 120\pi\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}$$

$$180 = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad ; \quad \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{120\pi}{180}$$

$$\varepsilon_r = \left(\frac{4\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 = 4.386$$

b) $$v = \lambda f \quad ; \quad v = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\frac{3\times10^8}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 0.02\times10\times10^9$$

$$\sqrt{\varepsilon_r} = \frac{3\times10^8}{2\times10^8} \quad ; \quad \varepsilon_r = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\varepsilon_r = (1.5)^2 = 2.25$$

2.5 Dar una expresión de campo eléctrico para una onda plana uniforme que se propaga en la dirección + Z, si el campo eléctrico es paralelo al eje y y su alcance máximo positivo es de 150 m Volt/m. Para una frecuencia de 200 MHz en (0, 0, 1) y t = 0- cuando el medio es : a) El espacio libre. b) Poliestireno, $\mu_r = 1$ $\varepsilon_r = 2.53$

Solución :

a) Como la dirección de propagación es en + Z y el campo eléctrico es paralelo al eje y :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z)\,\vec{a}_y$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 200\times10^6 = 4\pi\times10^8 \text{ rad/seg}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{v_0} = \frac{4\pi\times10^8}{3\times10^8} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad/m.}$$

$$\therefore \vec{E} = 150\cos\left(4\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}z\right)\vec{a}_y \text{ mvolt/m}$$

En $(0,0,1)$ y $t=0$

$$\vec{E} = 150\cos\left[4\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}(z-1)\right]\vec{a}_y$$

$$\vec{E} = 150\cos\left(4\pi\times10^8 t - \frac{4\pi}{3}z + \frac{4\pi}{3}\right)\vec{a}_y \text{ mvolt/m.}$$

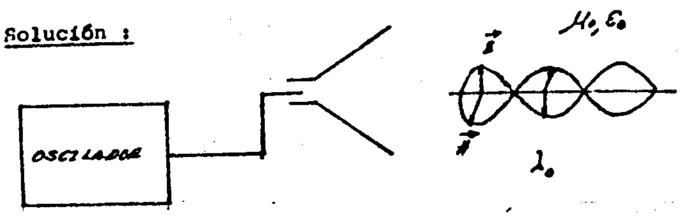
b) $$\beta = \frac{\omega}{v} \quad ; \quad v = \frac{3\times10^8}{\sqrt{2.53}} = 1.886\times10^8$$

$$\beta = \frac{4\pi\times10^8}{1.886\times10^8} = 6.662 \text{ rad/m.}$$

$$\vec{E} = 150\cos\left(4\pi\times10^8 t - 6.662z + 6.662\right)\vec{a}_y \text{ mvolt/m.}$$

2.6 Un oscilador electrónico es conectado a una antena y se p duce una onda plana, la cual se propaga en el espacio lib con una longitud de onda de 40 cms. cuando la misma se es producida en un material plástico no magnético (μ_r = la longitud de onda obtenida es de 25 cms. Obtener la f cuencia de oscilación. b) La permitividad relativa del plástico.

Solución :



a) $\lambda = vT = \frac{v}{f}$; $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{\lambda_0}$

$$f = \frac{3\times10^{10}}{40} = 7.5\times10^{8}\ Hz \qquad \therefore f = 750\ MHz.$$

Esta frecuencia permanece constante, ya que depende úni mente del oscilador, lo que varía es la velocidad de la la longitud de onda.

b) Para este caso se tiene otro medio (plástico) con longitud de onda :

$$\lambda_p = \frac{v}{f_1} \quad ; \quad v_p = \lambda_p f \quad ; \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\mu = \mu_0\mu_r \quad ; \quad \varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$

$$v_p = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^{10}}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad ; \quad \frac{3\times10^{10}}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \lambda_p f$$

$$\therefore \sqrt{\varepsilon_r} = \frac{3\times10^{10}}{25\times7.5\times10^{8}} = 1.6 \qquad ;(\sqrt{\varepsilon_r})^2 = (1.6)^2$$

$$\varepsilon_r = 2.56$$

2.7 Si una onda electromagnética se propaga en el agua destilada con una frecuencia de 15.9 GHz. Tómese para el agua destilada : μ_r = 1, ε_r = 50 y σ = 20 mhos/m. Se pide : a) Como se comporta el medio. b) α, c) β . d) η

Solución :

a) De la relación :

$$\boxed{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} = \frac{20}{2\pi\times15.9\times10^{9}\times50\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}} = 0.4528$$

$\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < \frac{1}{100}$ el medio se comporta como un medio moderadamente conductor.

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\varepsilon} = \alpha + j\beta$$

$$\gamma = \left[j(2\pi\times15.9\times10^{9}\times4\pi\times10^{-7}\times20) - (2\pi\times15.9\times10^{9})^2\times4\pi\times10^{-7}\times50\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\right]^{1/2}$$

$$\gamma = \left[j(8\pi^2\times20\times15.9\times10^{2}) - (2\pi\times15.9\times10^{9})^2\times\frac{50}{9}\times10^{-16}\right]^{1/2}$$

$$\gamma = \sqrt{-5.544\times10^{6} + j\,2.510\times10^{6}} = \sqrt{-5.544 + j2.510}\times10^{3}$$

$$\gamma = \sqrt{6.086\ \angle 155.642^\circ}\times10^{3} = 2.467\times10^{3}\ \angle 77.863^\circ$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = Re\{\gamma\} = 2.467\times10^{3}\cos 77.863^\circ = 518.687\ neper/m$$

$$\beta = Im\{\gamma\} = 2.467\times10^{3}\ sen\ 77.863^\circ = 2,407.916\ radianes/m.$$

$\alpha \doteq 518.687$ neper/m

$\beta \doteq 2,407.946$ radianes/m.

Los valores de α y β pueden calcularse por las relaciones :

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right)} \doteq 520.489 \text{ neper/m.}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)} \doteq 2410.752 \text{ radianes/m.}$$

Para la impedancia : $\eta = \sqrt{\dfrac{j\omega\mu}{\sigma+j\omega\varepsilon}}$

$$\eta = \sqrt{\frac{j(2\pi\times 15.9\times 10^{6}\times 4\pi\times 10^{-7})}{20+j\,2\pi\times 15.9\times 10^{6}\times 50\times\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{j\,8\pi^2\times 15.9\times 10^{2}}{20+j\,15.9\times 50/18}} = \sqrt{\frac{j\,1.255\times 10^{5}}{20+j\,44.167}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1.255\times 10^{5}\angle 90^\circ}{48.484\angle 65.637^\circ}} = \sqrt{2,588.483\angle 24.362^\circ}$$

$$\eta = 50.877\angle 12.181^\circ \text{ ohm.}$$

2.8 Determine la constante de atenuación para una onda plana -- uniforme que se propaga en un material no magnético ($\mu_r=1$). A una $w = 10^7$ rad/seg. Sí : a) $\sigma/\varepsilon = 10^7$ 1/seg y $\varepsilon_r = 4$. - b) Si la tangente de pérdida es 0.04 y la constante de fase es de 0.1 rad/m.

Solución :

a) Para un conductor $\vec{E} = E_m e^{-\gamma x}$

$$\gamma = \alpha \pm j\beta = \sqrt{j\omega\mu\sigma-\omega^2\mu\varepsilon}$$

$$\gamma = \sqrt{j^2\omega^2\mu\varepsilon\left(1-j\,\sigma/\omega\varepsilon\right)} = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}$$

$$\gamma = j10^7\sqrt{4\pi\times 10^{-7}\times 4\times\frac{1}{36\pi}\times 10^{-9}}\,\sqrt{1-j1}$$

$$\gamma = j10^7\times\sqrt{4/9\times 10^{-16}}\,\sqrt{1.414\angle -45^\circ}$$

$$\gamma = j10^7\left(\frac{2}{3}\times 10^{-8}\right)(1.189\angle -22.5^\circ) = 0.0792\angle 90^\circ-22.5^\circ$$

$$\alpha = Re\{\gamma\} = 0.0792\cos(67.5^\circ) = 0.0303 \text{ neper/m.}$$

b) $$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \doteq j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[1+\frac{1}{2}\left(-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)+\ldots\right]$$

$$\alpha \doteq Re\{\gamma\} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \quad ; \beta = \frac{\omega}{v} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\alpha \doteq \beta\left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) = \frac{0.1}{2}(0.04)$$

$$\alpha \doteq 0.0022 \text{ neper/m.}$$

2.9 Calcular la velocidad de propagación de una onda plana uniforme en un cierto material para el cual : $\mu = \mu_o$, $\epsilon = 16\epsilon_o$, $\sigma = 10^{-4}$ mhos/m y $w = 10^5$ rad/seg.

Solución :

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon}$$

$$\gamma = \left[j(10^5 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-4}) - (10^5)^2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 16 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \right]^{1/2}$$

$$\gamma = \sqrt{j\,4\pi \times 10^{-6} - \frac{16}{9} \times 10^{-6}} = \sqrt{\left(-16/9 + j\,4\pi\right) \times 10^{-6}}$$

$$\gamma = \sqrt{12.691 \angle 98.052} \times 10^{-3} = 3.562 \times 10^{-3} \angle 49.026°$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad ; \quad v = \frac{\omega}{\beta}$$

$$\beta = I_m\{\gamma\} = 3.562 \times 10^{-3} \operatorname{sen}(49.026°)$$

$$\beta = 0.002689 \text{ rad/m}$$

$$v = \frac{10^5}{2.6893 \times 10^{-3}} = 3.7189 \times 10^7$$

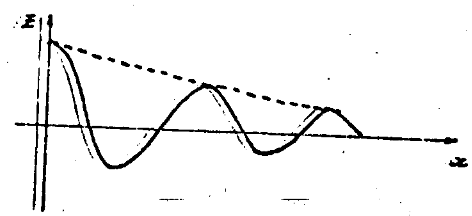
$$v = 3.7189 \times 10^7 \text{ m/seg.}$$

2.10 Para el agua del mar : σ = 5MHOS/m, $\epsilon_r = 80$ y $\mu_r = 1$. Obtener la distancia para la cual una señal de radio de 25 MHz es transmitida. Si el rango donde es tomada la señal está a una distancia en la cual la amplitud de la señal es atenuada un 90%.

Solución :

En un material conductor la señal es atenuada por el factor :

$$E = E_m e^{-\alpha x}$$



La amplitud de la señal a una distancia x se ve disminuida en un 90%

$$\therefore \; 0.1 E_m = E_m e^{-\alpha x} \quad ; \quad 0.1 = e^{-\alpha x}$$

$$\ln(0.1) = -\alpha x \quad ; \quad x = -\frac{\ln(0.1)}{\alpha}$$

Para calcular α, se deberá analizar como se comporta el medio

$$\boxed{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \frac{5}{50\pi \times 10^6 \times 80 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}} \gg 100$$

$$\therefore \alpha = \sqrt{\pi f \mu\sigma} = \sqrt{\pi \times 25 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5} = \sqrt{25\pi \times 2\pi}$$

$$\alpha = 22.214$$

$$\therefore x = -\frac{(-2.302)}{22.214} = 0.1036 \text{ m}$$

2.11 Un transmisor radía isotrópicamente una onda electromagnética cuya potencia es de 50×10^{-3} watts a 11 GHz, a una distancia de 5 Kms. Obtener : a) El campo eléctrico, b) El campo magnético. c) El vector de Poynting.

Solución :

Para un transmisor que radía isotrópicamente: $P_o = \frac{P_t}{4\pi d^2}$

donde : P_o - densidad de potencia

P_t - potencia de transmisión

A una distancia de 5 Kms. : $P_o = \frac{50 \times 10^{-3}}{4\pi(5\times10^3)^2} = \frac{50\times10^{-11}}{\pi}$ $\frac{\text{watts}}{m^2}$

$S_p = EH$; $\eta = \frac{E}{H}$ $\therefore$ $H = \frac{E}{\eta}$

$\therefore S_p = E\frac{E}{\eta} = \frac{E^2}{\eta}$ S_p = Vector de Poynting (potencia por unidad de área).

a) $E = \sqrt{S\eta}$ considerando el medio como el espacio libre

$$E = \sqrt{\frac{50\times10^{-11}}{\pi}\times120\pi} = 244.98\times10^{-6} \text{ volt/m.}$$

b)

$$H = \frac{E}{\eta} = \frac{244.98\times10^{-6}}{120\pi} = 649.74\times10^{-9} \text{ amp/m.}$$

c)

$$S = EH = (244.98\times10^{-6}\times649.74\times10^{-9})$$

$$S = 159.17\times10^{-12} \text{ watts/m}^2.$$

2.12 Obtener la potencia promedio a través de una área de 50 mts^2 en el plano $z = 0$, si se tiene una onda plana uniforme de 1 MHz con una amplitud de 10 Volts/m. Si : a) el medio está caracterizado por $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 8$ y $\sigma = 0$. b) $\eta = 100 + j50$ ohm.

Solución :

$S = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\eta}$ valor medio del vector de Poynting.

donde el vector de Poynting es la potencia/área.

a) $S = \frac{1}{2}\frac{100}{\eta}$; $\eta = 120\pi\sqrt{\frac{8}{2}} = 120\pi(2) = 240\pi$

$$S = \frac{1}{2}\frac{100}{240\pi} = \frac{5}{24\pi} = 0.0663 \text{ watts/m}^2$$

$$\therefore P = S_{prom}\times 50m = 3.315 \text{ watts.}$$

b) $S = \frac{1}{2}\frac{100}{\eta}$; En este caso $\eta = \eta_m \angle\theta$

$$\therefore S = \frac{1}{2}\frac{100}{\eta_m}$$

$$\eta = \sqrt{(100)^2+(50)^2}\,\angle\tan^{-1}\left(\frac{50}{100}\right) = 111.803\,\angle 26.56°$$

$$S = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\overset{50}{\cancel{100}}}{111.803} = \frac{50}{111.803} = 0.447 \text{ watts/m}^2$$

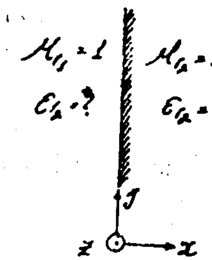
$$\therefore P = 0.447\times50 = 22.36 \text{ watts.}$$

CAPITULO III

REFLEXION Y REFRACCION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS.

3.1. La onda $E_y^o = 10 \cos(3 \times 10^9 t - 30\pi x)$ incide normalmente en una frontera plana en $x = 0$. Si $\mu_r = 1$ en todos lados y $\epsilon_r = 4$ para $x > 0$, obtenga E y H para $x > 0$

Solución:



$\omega = 3 \times 10^9$ rad/seg ; $\beta_1 = 30\pi$ rad/m.

$v_1 = \dfrac{\omega}{\beta_1} = \dfrac{3 \times 10^9}{30\pi} = \dfrac{1}{\pi} \times 10^8$ m/seg

$v_1 = \dfrac{v_o}{\sqrt{\mu_{r_1} \epsilon_{r_1}}} = \dfrac{v_o}{\sqrt{\epsilon_{r_1}}}$

$\epsilon_{r_1} = \left(\dfrac{v_o}{v_1}\right)^2 = \left(\dfrac{3 \times 10^8}{\frac{1}{\pi} \times 10^8}\right)^2 = (3\pi)^2 = 88.826$

$\eta_1 = 120\pi \sqrt{\dfrac{\mu_{r_1}}{\epsilon_{r_1}}} = \dfrac{120\pi}{3\pi} = 40$ ohms

$\eta_2 = \dfrac{120\pi}{2} = 60\pi = 188.495$ ohms

$T = \dfrac{E_{t_o}^{+}}{E_{i_o}^{0}} = \dfrac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = \dfrac{2(188.495)}{188.495 + 40} = 1.649$

$\therefore E_y^{o} = 10 \cos(3 \times 10^9 t - 30\pi x) \Rightarrow E_{io} = 10 \quad \therefore E_{to} = 10 \times 1.649$

Pero : $E_y^{+} = Re\{E_{to}\, e^{-j\beta_2 x}\, e^{j\omega t}\}$

donde: $\beta_2 = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 3 \times 10^9 \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 4} = 3 \times 10^9 \sqrt{\frac{4}{9} \times 10^{-16}}$

$\beta_2 = 20$ rad/m ; $E_y^{+} = 16.49 \cos(3 \times 10^9 t - 20x)$ volt/m.

$H_z^{+} = \dfrac{E_y^{+}}{\eta_2} = 0.0873 \cos(3 \times 10^9 t - 20x)$ amp/m

3.2. Una onda plana uniforme de 10 MhZ que se propaga en un material no magnético : $\vec{E} = 20\, e^{-j0.1\pi z}\, \vec{a}_x$ volt/m (z < 0) incide sobre la superficie de un conductor perfecto en z = 0 . a). Obtener los campos $\vec{E}$ (t) y $\vec{H}$ (t) en z = -2m. b) Obtener el vector de corriente por unidad de ancho (corriente laminar) en el conductor.

Solución:

a) $f = 10^7\, Hz$; $E_{s_1} = 20\, e^{-j0.1\pi z} \Rightarrow \beta_1 = 0.1\pi$, $\mu = \mu_0$

$\beta = \frac{\omega}{v}$; $v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{\epsilon_r}}$ $\qquad 0.31415 = \frac{6.28318\times10^6}{v}$

$v = 200\times10^6$

$$\beta = \frac{2\pi\times10^7}{\frac{3\times10^8}{\sqrt{\epsilon_r}}} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r_1}}\times 2\pi\times10^7}{3\times10^8} = 0.1\pi$$

$\epsilon_r = \left(\frac{3\times10^8}{200\times10^6}\right)^2$

$\epsilon_r = 2.24$

$$\sqrt{\epsilon_r} = \frac{0.1\pi\times3\times10^8}{2\pi\times10^7} = \frac{3}{2} \quad \therefore\ \epsilon_r = (1.5)^2 = 2.25$$

Como la onda incide sobre un conductor perfecto se forma una -- onda estacionaria.

$$E_x^t = 2E_{i0}\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathrm{sen}\,\beta_1 z$$

$$E_{x_1}^t = 2(20)\,\mathrm{sen}\,(2\pi\times10^7 t)\,\mathrm{sen}\,[0.1\pi\times(-2)]$$

$$\vec{E}(t) = -23.511\,\mathrm{sen}\,(2\pi\times10^7 t)\,\vec{a}_x \ \text{volt/m.}$$

$$H_x^t = 2H_{i0}\cos\omega t\cos\beta_1 z$$

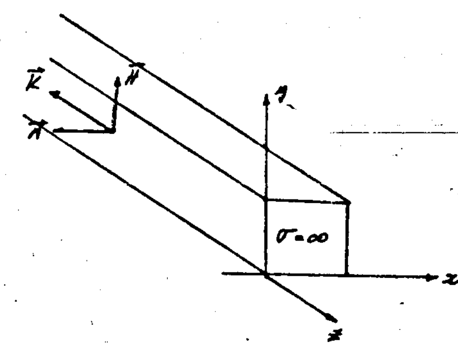
$$H_{i0} = \frac{E_{i0}}{\eta_1} \ ; \ \eta_1 = \frac{120\pi}{\sqrt{2.25}} = 251.327$$

$$\therefore\ H_{i0} = 0.0796\ \text{amp/m.}$$

$$\vec{H}(t) = 2(0.0796)\cos[0.1\pi\times(-2)]\cos(2\pi\times10^7 t)\,\vec{a}_y$$

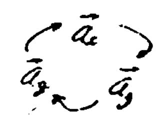
$$\vec{H}(t) = 0.1288\cos(2\pi\times10^7 t)\,\vec{a}_y$$

b) En $z=0$ $\quad \vec{K} = \vec{n}\times\vec{H}$



$$\vec{H}(t) = 2\times0.0796\cos(2\pi\times10^7 t)$$

$$\vec{n} = -\vec{a}_x$$



$$\therefore\ \vec{K} = -\vec{a}_x\times\vec{a}_y\,[H_0\cos(2\pi\times10^7 t)]$$

$$\vec{K} = 0.1592\cos(2\pi\times10^7 t)\,\vec{a}_z\ \text{amp/m.}$$

3.3. Considere una onda plana con un campo E = 1 volt/m y una frecuencia de 300 MhZ que se propaga en el espacio libre e incide sobre una placa de cobre localizada perpendicularmente a la dirección de propagación. Obtener : a) El campo E en la superficie de la placa. b) El campo H en la misma localización. c) La profundidad de penetración (δ) . d) La densidad de corriente de conducción a una profundidad de 10^{-2} mm. de la placa de cobre.

Solución:

Para el cobre : $\sigma = 5.8\times 10^{7}$ mhos/m , $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$

a) $$\Gamma = \frac{E_{t0}^{+}}{E_{i0}^{0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_1+\eta_2} \quad ; \quad \eta_1 = \eta_0 = 120\pi \text{ ohms}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j(2\pi\times 300\times 10^{6})\times 4\pi\times 10^{-7}}{5.8\times 10^{7} + j(2\pi\times 300\times 10^{6}\times \frac{1}{36\pi}\times 10^{-9})}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\,2368.70}{5.8\times 10^{7} + \underbrace{j(0.0167)}_{\text{despreciable}}}} \quad ; \quad \eta_2 \doteq 0.0064\angle 45^\circ$$

$$\therefore E_{t0} = 1\left(\frac{0.0128\angle 45^\circ}{120\pi + \underbrace{\cancel{0.0064\angle 45^\circ}}_{\text{despreciable}}}\right) \doteq 3.39\times 10^{-5}\angle 45^\circ \text{ volt/m.}$$

b) $$H_{t0} = \frac{E_{t0}}{\eta_2} = \frac{3.39\times 10^{-5}\angle 45^\circ}{0.0064\angle 45^\circ} = 0.0053 \text{ amp/m.}$$

c) Para un buen conductor : $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f\mu\sigma}}$

$$\delta = \left(\frac{1}{300\times 10^{6}\times\pi\times 4\pi\times 10^{-7}\times 5.8\times 10^{7}}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi\times 10^{3}\sqrt{300\times 5.8}}$$

$$\delta = \frac{10^{-3}}{2\pi\sqrt{1740}} = 0.0038\times 10^{-2}\,m = 3.8\times 10^{-3}\,mm$$

d) $\vec{J} = \sigma\vec{E}$; $\vec{J}_c = \sigma_c\vec{E}_{t0}$

$$J_c = 5.8\times 10^{7}\times 3.39\times 10^{-5}\angle 45^\circ = 1966.20\angle 45^\circ \text{ amp/m}^2$$

A una distancia x de la placa de cobre

$J = J_c\, e^{-\alpha x}$ pero como $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 100$, entonces

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\alpha = \sqrt{\pi\times 300\times 10^{6}\times 4\pi\times 10^{-7}\times 5.8\times 10^{7}} = \sqrt{4\pi^{2}\times 300\times 10^{6}\times 5.8}$$

$$\alpha = 2\pi\times 10^{3}\sqrt{300\times 5.8} = 262.09\times 10^{3} \text{ neper/m.}$$

Para $x = 0.01\times 10^{-3}\,m$

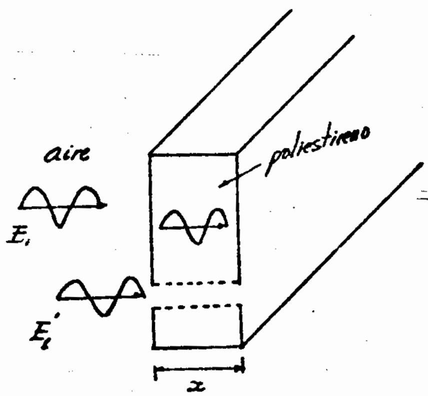
$$J = 1966.20\, e^{-262.09\times 10^{3}\times 0.01\times 10^{-3}}\angle 45^\circ$$

$$J = 1966.20\,(0.0727)\angle 45^\circ$$

$$J = 143.01\angle 45^\circ \text{ amp/m}^2$$

3.4. Una onda plana de 3Ghz. Incide normalmente sobre una superficie de poliestireno ($\varepsilon_r = 2.7$) ¿Cuál debe ser el espesor de ésta, para que la onda que penetra se retrase en fase 180° con respecto a una onda que viaja a través de un agujero de la superficie?

Solución:



$f = 3\ Ghz$

$$E_1 = E_0 e^{j(\omega t - \beta_1 x)}$$

$$E_2 = E_0 e^{j(\omega t - \beta_2 x)}$$

$$E_1' = E_0 e^{j(\omega t - \beta_1 x - 180°)}$$

$$\omega t - \beta_1 x - 180° = \omega t - \beta_2 x$$

$$x(-\beta_2 + \beta_1) = -180°$$

$$x = \frac{180°}{\beta_2 - \beta_1}$$

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_0} = \frac{2\pi \times 3\times10^9}{3\times10^8} = 20\pi = 62.831$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{v_2} \ ; \ v_2 = \frac{3\times10^8}{\sqrt{2.7}} = 1.825\times10^8\ m/seg$$

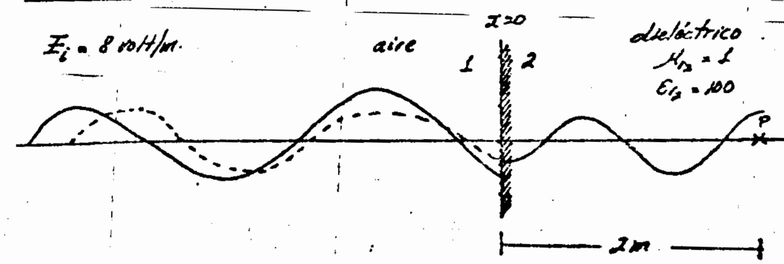
$$\beta_2 = \frac{6\pi\times10^9}{1.825\times10^8} = 103.243 \quad \therefore \beta_2 - \beta_1 = 103.243 - 62.831$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 40.412 \quad \therefore x = \frac{\pi}{40.412} = 0.07774$$

$$x = 7.774\ cm.$$

3.5. Calcular la intensidad de campo eléctrico y magnético (E y H) en el punto P considerando que una onda electromagnética incide normalmente en un dieléctrico, el cual se muestra en la figura. La frecuencia de la onda es de 30 Mhz.

Solución:



$$\frac{E_{t0}^{+}}{E_{i0}^{+}} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \ ; \ \eta_1 = \eta_0 = 120\pi\ ohm$$

$$\eta_2 = \frac{120\pi}{\sqrt{100}} = 12\pi \ ; \ \frac{E_{t0}^{+}}{E_{i0}^{+}} = \frac{2(12\pi)}{\pi(120+12)} = \frac{24}{142}$$

$$\therefore E_{t0} = 8(0.1690) = 1.352$$

$$E = E_{t0}\cos(-\beta_2 x) \ ; \ \beta_2 = \frac{\omega}{v_2} \ ; \ v_2 = \frac{3\times10^8}{\sqrt{100}} = 3\times10^7$$

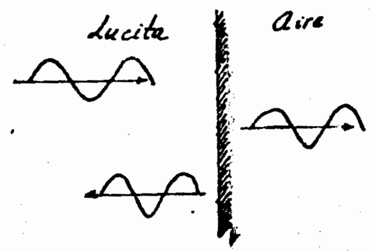
$$\therefore \beta_2 = \frac{2\pi\times30\times10^6}{3\times10^7} = 2\pi$$

$$E = 1.352\cos(-2\pi\times2) = 1.352\cos(-4\pi) = 1.352\ volt/m.$$

$$H = \frac{E}{\eta_2} = \frac{1.352}{12\pi} = 0.0351\ amp/m.$$

3.6. Obtenga el porcentaje de la potencia que es reflejada cuando una onda plana uniforme que viaja en la región 1, incide normalmente en la región 2. Si la región 1 y 2 son lucita (ϵ_r = 2.53) y aire respectivamente. Obtenga también el SWR.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} S_i = \dfrac{E_i^2}{\eta_1} \\ S_r = \dfrac{E_r^2}{\eta_1} \end{array}\right\} \text{Vector de Poynting}$$

$$\frac{P_r}{P_i} = \frac{A\,\dfrac{E_r^2}{\eta_1}}{A\,\dfrac{E_i^2}{\eta_1}} = \frac{E_r^2}{E_i^2} = \Gamma^2 \; ; \; \Gamma = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$$

$$\eta_1 = 120\pi\sqrt{\frac{1}{2.53}} = 237.01 \; ; \; \eta_2 = \eta_0 = 377\ ohm$$

$$\Gamma = \frac{377-237.01}{377+237.01} = 0.2279 \quad \therefore \frac{P_r}{P_i} = (0.2279)^2 \times 100$$

$$\frac{P_r}{P_i} = 5.194\,\% \qquad ; \; SWR = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad \text{donde } \rho = 0.2279$$

$$\therefore SWR = \frac{1.2279}{0.7721} = 1.447$$

3.7. Una onda plana incide normalmente sobre una superficie, la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente es de 10 m volt/m. Obtener el SWR cuando E_r = 5 m volt/m. ¿Bajo qué condiciones existe una onda estacionaria pura?

Solución:

$$SWR = \frac{E_{max}}{E_{min}} \qquad E_{max} = |E_i| + |E_r| \qquad E_{min} = |E_i| - |E_r|$$

$$E_{max} = |E_m^0| + |E_m^-| \qquad E_{min} = |E_m^0| - |E_m^-|$$

$$\therefore SWR = \frac{|E_i| + |E_r|}{|E_i| - |E_r|}$$

Si $E_i = 10\ mvolt/m$ y $E_r = 5\ mvolt/m$.

$$\therefore SWR = \frac{10+5}{10-5} = \frac{15}{5} = 3$$

Sabemos que: $1 < SWR < \infty$

Se tiene una onda estacionaria pura cuando el SWR = ∞ , o sea - cuando E_r = 10

$$SWR = \frac{10+10}{10-10} = \frac{20}{0} = \infty$$

3.8. Al incidir normalmente desde el espacio libre hacia un cierto material, una onda plana uniforme encuentra un coeficiente de reflexión de - 0.125 y una reducción de velocidad del 50%. Si el medio es sin pérdidas, obtener μ_r y ε_r .

Solución:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \; ; \text{ donde: } \eta_1 = \eta_0 = 120\pi \text{ ohm}$$

$$\Gamma = -0.125 \Rightarrow -0.125 = \frac{\eta_2 - 120\pi}{\eta_2 + 120\pi}$$

$$-0.125\eta_2 - 0.125(120\pi) = \eta_2 - 120\pi$$

$$-0.125\,\eta_2 - \eta_2 = -120\pi + 0.125(120\pi)$$

$$-\eta_2(1.125) = -329.87 \Rightarrow \eta_2 = 293.22 \text{ ohm}$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \; ; \; 0.5 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{r_2} \varepsilon_{r_2}}} = \frac{V_2}{V_0} = 0.5$$

$$\therefore \sqrt{\mu_{r_2} \varepsilon_{r_2}} = \frac{1}{0.5} = 2 \quad \text{---} (1)$$

$$\eta_2 = 120\pi \sqrt{\frac{\mu_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}}} \; ; \; \sqrt{\frac{\mu_{r_2}}{\varepsilon_{r_2}}} = \frac{293.22}{377} \quad \ldots (2)$$

$$\text{De (1)}: \mu_{r_2} \varepsilon_{r_2} = (2)^2 \; ; \; \mu_{r_2} = \frac{4}{\varepsilon_{r_2}}$$

$$\sqrt{\frac{4}{\varepsilon_{r_2}^2}} = 0.777 \; ; \; \frac{2}{\varepsilon_{r_2}} = 0.777 \Rightarrow \varepsilon_{r_2} = \frac{2}{0.777} = 2.574$$

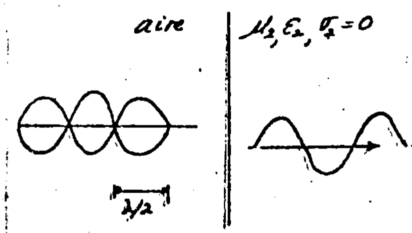
$$\text{finalmente } \mu_{r_2} = \frac{4}{2.574} = 1.554$$

.9. Una onda plana uniforme que viaja en el aire con una frecuencia f incide normalmente en un material sin pérdidas. Cuando el campo eléctrico es sondeado cerca de la superficie reflectora, se encuentra que su valor máximo es cinco veces su valor mínimo y que la separación entre mínimos es de 12 cm. a) ¿Cuál es la impedancia intrínseca del material? b) Si el espesor más pequeño de este material para que no produzca reflexión es de 2 cms., obtenga la μ_r y ε_r del material.

SWR

$\frac{\lambda}{2} = l_{min}$

Solución:



a) $SWR = \dfrac{E_{max}}{E_{min}}$

$E_{max} = 5 E_{min}$

$\therefore SWR = 5$

La separación entre los mínimos es de 12 cm.

$$\therefore \frac{\lambda_1}{2} = 0.12 \; ; \; \lambda_1 = 0.24 \text{ m} \qquad d = \frac{\lambda}{2}$$

$$f = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_0}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^8}{0.24} = 1.25 \times 10^9 \text{ Hz} = f$$

$$SWR = \frac{1+\rho}{1-\rho} \; ; \; 5 = \frac{1+\rho}{1-\rho} \Rightarrow 5(1-\rho) = 1+\rho$$

$$5 - 5\rho = 1 + \rho \; ; \; 6\rho = 4 \; \therefore \rho = \frac{2}{3}$$

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \; ; \text{ pero } \eta_1 = \eta_0 = 120\pi$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{\eta_2 - 120\pi}{\eta_2 + 120\pi}$$

$2\eta_2 + 240\pi = 3\eta_2 - 360\pi \quad ; \quad 3\eta_2 - 2\eta_2 = 240\pi + 360\pi$

$600\pi = \eta_2 \quad ; \quad \eta_2 = 600\pi \text{ ohm.}$

b) Si el material no produce reflexión.

$\frac{\lambda_2}{2} = 2cm \quad ; \lambda_2 = 4cm. \quad \therefore \; v_2 = f\lambda_2$

$v_2 = 1.25\times10^9 \times 0.04 = 5\times10^7 \text{ m/seg}$

$v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}} \quad ; \; 5\times10^7 = \frac{3\times10^8}{\sqrt{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}}$

$\sqrt{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}} = \frac{3\times10^8}{5\times10^7} = 6$

$\sqrt{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}} = 6 \quad \ldots (1)$

Pero:

$\eta_2 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_{r_2}}{\epsilon_{r_2}}} \quad ; \sqrt{\frac{\mu_{r_2}}{\epsilon_{r_2}}} = \frac{600\pi}{120\pi} = 5 \quad \ldots (2)$

De (1) :

$\mu_{r_2}\epsilon_{r_2} = 36 \quad ; \quad \mu_{r_2} = \frac{36}{\epsilon_{r_2}} \quad \ldots (3)$

Sustituyendo (3) en (2)

$\sqrt{\frac{\frac{36}{\epsilon_{r_2}}}{\epsilon_{r_2}}} = 5 \quad ; \sqrt{\frac{36}{\epsilon_{r_2}^2}} = 5 \Rightarrow \frac{6}{\epsilon_{r_2}} = 5$

$\therefore \; \epsilon_{r_2} = \frac{6}{5} = 1.2 \quad y \quad \mu_{r_2} = \frac{36}{1.2} = 30$

3.10. Para $x < 0$ $\eta = 250$ ohms y $\beta = 0.01\,\pi$ rad/m. Obtener el SWR para una onda plana uniforme que incide normalmente si: - a) $\eta = 400$ ohms para $x > 0$. b) Existe en un conductor perfecto en $x = 0$. c) Obtenga η_{ent} en $x = -100/3$ con el conductor -- presente.

Solución:

a) $\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{400 - 250}{400 + 250} = \frac{150}{650} = \frac{3}{13}$

$\therefore \; SWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + \frac{3}{13}}{1 - \frac{3}{13}} = \frac{16}{10} = 1.6$

b) Para un conductor perfecto $\eta_2 = 0$

$\Gamma = \frac{0 - 250}{0 + 250} = -1$

$\therefore \; SWR = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \infty$

c) $\eta_{ent} = \cancel{\eta_1}\, \frac{\cancel{\eta_2}^{\,0} + j\eta_1 \tan\beta_1 L}{\cancel{\eta_1} + j\cancel{\eta_2 \tan\beta_1 L}^{\,0}} = j\eta_1 \tan\beta_1 L$

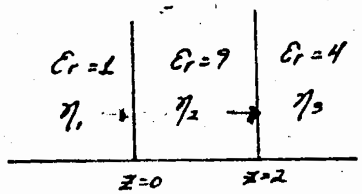
donde: $\eta_1 = 250$ ohm y $\beta_1 = 0.01\pi$

$\eta_{ent} = j(250)\tan\left(0.01\pi \times \frac{100}{3} \text{ rad}\right)$

$\eta_{ent} = j\,433 \text{ ohm.}$

3.11. Sea $\epsilon_r = 1$ para $z < 0$, $\epsilon_r = 9$ para $0 < z < 2$. y $\epsilon_r = 4$ - para $z > 2$. Todas las regiones son sin pérdidas y no magnéti-- cas. Para una frecuencia de 6250 Khz, obtener η_{ent} en : a) $z=2$ b) $z = 0$ c) ¿Cuál es el valor del SWR que existe en la región - $z < 0$?

Solución:



a) $\eta_{ent}\Big|_{z=2} = \eta_3$

$$\eta_3 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_{r_3}}{\epsilon_{r_3}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{4}} = 60\pi \text{ ohm}$$

b) $$\eta_{ent}\Big|_{z=0} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan\beta_2 d_2}{\eta_2 + j\eta_3 \tan\beta_2 d_2} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{\omega}{v_2} \rightarrow \omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi \times 6250\times10^3 \quad ; \quad v_2 = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_{r_2}\epsilon_{r_2}}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{9}} = 1\times10^8 \text{ m/seg}$$

$$\beta_2 d_2 = \frac{2\pi\times6.25\times10^6}{10^8}\times2 = 0.7854 \; ; \; \tan\beta_2 d_2 = \tan(0.7854)$$

$$\eta_2 = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_{r_2}}{\epsilon_{r_2}}} = \frac{120\pi}{3} = 40\pi \text{ ohm.}$$

$$\eta_{ent} = 40\pi\times\frac{60\pi + j\,40\pi}{40\pi + j60\pi} = 40\pi\,\frac{226.54\,\angle 33.69^\circ}{226.54\,\angle 56.31} = 40\pi \times 1\,\angle -22.6$$

$$\eta_{ent} = 40\pi(0.9231 - 0.3846) = 116 - j48.33 = 125.66\,\angle -22.61$$

$$\Gamma = \frac{\eta_{ent} - \eta_1}{\eta_{ent} + \eta_1} = \frac{-261 - j48.33}{493 - j48.33} = \frac{265.43\,\angle -169.50^\circ}{495.36\,\angle -5.59^\circ} = 0.536$$

$$SWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 3.31$$

3.12. El vector de campo eléctrico esta dado por:

$$\vec{E} = (4\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - \sqrt{8}\,\vec{a}_z)\, e^{-j\,0.04\pi(5x + 4y + \sqrt{8}z)}$$

Obtener: a) La dirección de propagación de la onda. b) La longitud de onda a lo largo de la dirección de propagación. c) La -- frecuencia de la onda. d) Las longitudes de onda y velocidades de fase aparentes en los ejes x, y, z

a) $$\vec{E} = E_0\, e^{-\gamma(\vec{n}\cdot\vec{r})} \quad ; \text{ para un dieléctrico } \gamma = j\beta$$

$$\therefore \; \vec{E} = E_0\, e^{-j\beta(\vec{n}\cdot\vec{r})}$$

donde: $\vec{n} = \cos A\,\vec{a}_x + \cos B\,\vec{a}_y + \cos C\,\vec{a}_z$ y $\vec{r} = x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z$

Por lo tanto de la expresión del campo se tiene que:

$$\vec{n} = \frac{5}{7}\vec{a}_x + \frac{4}{7}\vec{a}_y + \frac{\sqrt{8}}{7}\vec{a}_z$$

Entonces:

$$\beta(\vec{n}\cdot\vec{r}) = 0.28\pi\left(\frac{5}{7}\vec{a}_x + \frac{4}{7}\vec{a}_y + \frac{\sqrt{8}}{7}\vec{a}_z\right)\cdot(x\vec{a}_x + y\vec{a}_y + z\vec{a}_z)$$

La dirección de propagación está dada por el vector $\vec{n}$

b) $$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.28\pi} = 7.143 \text{ m.}$$

c) $$\lambda = \frac{v_0}{f} \; ; \; f = \frac{v_0}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{7.143} = 42 \text{ MHz.}$$

d) $$v_x = \frac{3\times10^8}{5/7} = 4.2\times10^8 \frac{m}{seg} \quad ; \quad \lambda_x = \frac{7.143}{5/7} = 10.0 \text{ m.}$$

$$v_y = \frac{3\times10^8}{4/7} = 5.25\times10^8 \frac{m}{seg} \quad ; \quad \lambda_y = \frac{7.143}{4/7} = 12.5 \text{ m.}$$

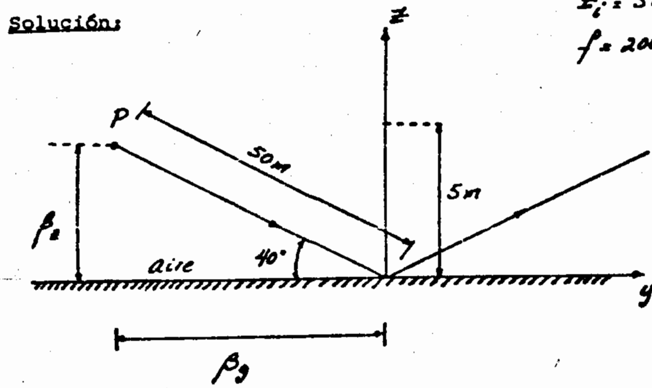
$$v_z = \frac{3\times10^8}{\sqrt{8}/7} = 7.42\times10^8 \frac{m}{seg} \quad ; \quad \lambda_z = \frac{7.143}{\sqrt{8}/7} = 17.7 \text{ m.}$$

3.13. Una antena (Colocada en el punto P) irradia una onda que incide sobre un conductor perfecto y produce una onda estacionaria a lo largo del eje Z, si la frecuencia es de 200 MHZ y la amplitud del campo incidente es de 10 volt/m. Calcular el campo E y H a una distancia de 5m a partir de la superficie reflectora sobre el eje Z.

Solución:

$E_i = 5\ volt/m$

$f = 200\ MHz$



De la expresión de una estacionaria a lo largo del eje Z.

$$E = 2E_i \operatorname{sen}(\beta_z z)\, e^{-j\beta_y y} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi \times 200\times 10^6}{3\times 10^8} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\beta_y = \beta \cos 40° = 3.208 \quad ; \quad \beta_z = \beta \operatorname{sen} 40° = 2.691$$

$$E = 2E_i \operatorname{sen}(2.691\times 5)\cos(3.208\, y) \quad ; \quad y = 50m \times \cos 40$$

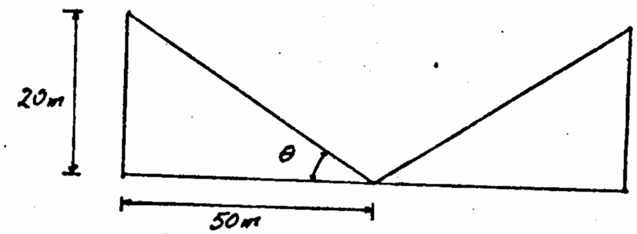
$$y = 38.302\, m \quad \therefore \quad E = 2(10)\operatorname{sen}(13.455\ rad)\cos(122.872\ rad)$$

$$E = 20(0.7762)(-0.9394) = -14.584\ volt/m.$$

$$\frac{E}{H} = \eta_0 \Rightarrow H = \frac{E}{\eta_0} = \frac{-14.584}{120\pi}$$

$$H = -0.0387\ amp/m.$$

3.14. Una onda que viaja en el aire polarizada linealmente incide en un medio que tiene las características: $\sigma = 0$, $\mu_r = 1$ y $\epsilon_r = 8$, como se muestra en la figura.



Si la polarización es paralela, obtener el coeficiente de reflexión y el ángulo de Brewster.

Solución:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} - \operatorname{sen}^2\theta_i} - \left(\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}\right)\cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} - \operatorname{sen}^2\theta_i} + \left(\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}\right)\cos\theta_i}$$

$$\theta_i = 90 - \theta \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{20}{50}\right) = 21.801° \quad \therefore \quad \theta_i = 68.198°$$

$$\cos\theta_i = 0.3714 \quad ; \quad \operatorname{sen}^2\theta_i = 0.8621$$

$$\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = \frac{8}{1} = 8$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\sqrt{8-0.8621} - 8(0.3714)}{\sqrt{8-0.8621} + 8(0.3714)} = \frac{2.6717-2.9712}{2.6717+2.9712} = \frac{-0.2995}{5.6429}$$

$$\Gamma_{\parallel} = -0.0531$$

$$\theta_{iB} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}} = \tan^{-1}\sqrt{8} = 70.528°$$

$$\theta_{iB} = 70.528°$$

3.15. En cierta sustancia el ángulo crítico para ondas lumino es de 45°. ¿Cuál es el ángulo de polarización (O de Brewster]

Solución:

$$\theta_{ic} = sen^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}}$$

$$sen\,\theta_{ic} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}}$$

$$sen\,45^{\circ} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}} = 0.7071$$

$$\text{Pero :} \quad \theta_{iB} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}}$$

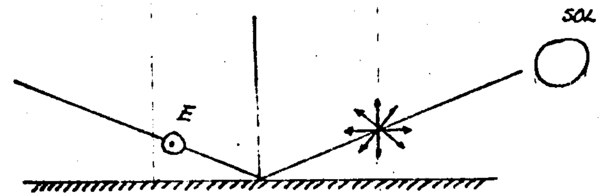
$$\therefore \theta_{iB} = \tan^{-1}(0.7071)$$

$$\theta_{iB} = 35.264^{\circ}$$

3.16. A qué ángulo por encima de la horizontal debe estar el sol, para que su luz reflejada por la superficie de un lago tranquilo tenga un campo $\vec{E}$ perpendicular al plano de incidencia.

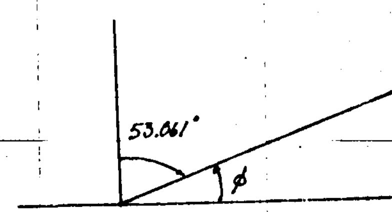
Para el aire : $n_1 = 1$

Para el agua : $n_2 = 1.33$



$$\theta_{iB} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}} = \tan^{-1}\frac{n_1}{n_2}$$

$$\theta_{iB} = \tan^{-1}(1.33) = 53.061$$



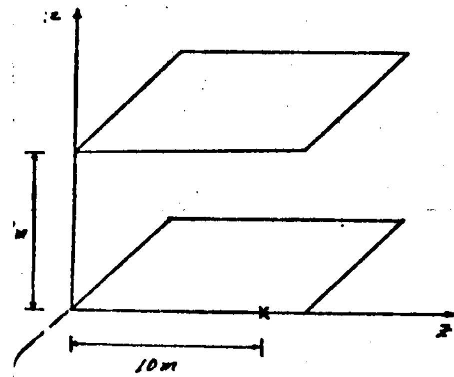
$$\phi = 90 - \theta_{iB} = 36.938^{\circ}$$

C A P I T U L O IV

G U I A S D E O N D A

.1. Una guía de onda formada por dos placas paralelas (De conuct›r perfecto), opera bajo el modo TE_{10}. Si las placas están -epa:adas por una distancia de 0.1 m y el dieléctrico entre las ism›s, está caracterizado por $\mu_r = 1$ y $\epsilon_r = 10$, siendo la freuen:ia de operación de 2Ghz. Para una onda que viaja en la diacc.ón z con un campo E = 4 volt/m, determinar: a) K en el pun› P. b) La densidad de potencia. c) ¿Existe propagación?.

S‹lución:



a) De las condiciones de frontera.

$$H_{t_z} = -K \;;\; K = -H$$

$$\eta = \frac{E}{H} \;;\; \eta = 120\pi\sqrt{\frac{1}{10}}$$

$$\eta = 119.215 \text{ ohm}$$

$$H = 0.0336 \text{ amp/m}$$

$$K = -0.0336\, e^{-j\beta \times 10}$$

donde:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

$$\sqrt{16\pi^2 \times 10^{18} \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 10 - \left(\frac{\pi}{0.1}\right)^2} = 128.682$$

$$-0.0336 \cos(-128.682 \times 10 \text{ rad}) = -0.0111 \text{ amp/m}$$

$$S = \frac{E^2}{\eta} = \frac{[4\cos(1286.82)]^2}{119.215} = 0.0147 \cdot \text{watt/m}^2$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{0.1}\right)^2 - \frac{16\pi^2}{9} \times 10^3} = \sqrt{-16,559}$$

$$\gamma = j128.682 \quad (\gamma = j\beta) \;\therefore \text{ existe propagación}$$

4.2. Considere una guía de onda de placas separadas por una distancia de 0.1 m que opera bajo el modo TE_{10}. Obtenga la constante de propagación a las frecuencias de 10^8, 10^9 y 10^{10} Hz. ¿A cuál de estas frecuencias existe propagación?

Solución:

Para el modo TE_{10}, la constante de propagación es:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\epsilon} = \alpha + j\beta$$

donde : $\omega = 2\pi f$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - 4\pi^2 f^2 \mu_0\epsilon_0} = \sqrt{\pi\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \mu_0\epsilon_0 (2f)^2}$$

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad ; \quad v_0^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \quad \therefore \mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{v_0^2}$$

$$\gamma = \pi\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{2f}{v_0}\right)^2} \quad ; \quad v_0 = 3\times10^8 \text{ m/seg}$$

Para $f = 10^8$ Hz ; $a = 0.1$ m

$\gamma = \pi\sqrt{100 - 0.444} = 31.346$; $\gamma = \alpha = 31.346$ neper/m $\Rightarrow \beta = 0$

$\therefore$ no existe propagación

Para $f = 10^9$ Hz

$\gamma = \pi\sqrt{100 - 44.444} = 23.416$; $\gamma = \alpha = 23.416$ neper/m $\Rightarrow \beta$

$\therefore$ no existe propagación

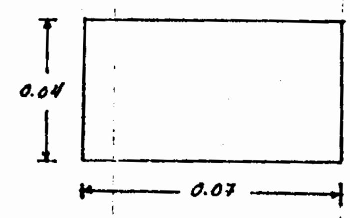
Para $f = 10^{10}$ Hz

$\gamma = \pi\sqrt{100 - 4{,}444.444} = j65.912$; $\gamma = j\beta \Rightarrow \alpha = 0$

$\therefore$ existe propagación

4.3. Determinar los modos TE que pueden ser transmitidos en una guía de onda rectangular, con una sección transversal de 0.04 por 0.07 m, considere que la guía de onda se sitúa a una frecuencia de 3 x 10^9 Hz.

Solución:



$f_{op} = 3\times10^9$ Hz

dieléctrico : el aire

Para una guía de onda rectangular:

$$f_c = \frac{v_0}{2}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Para el modo TE_{10} : $f_c = \frac{3\times10^8}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{0.07}\right)^2} = 2.143\times10^9$ Hz

En este caso la $f_{op} > f_c$ $\therefore$ existe propagación

Para el modo TE_{11} : $f_c = 1.5\times10^8\sqrt{\left(\frac{1}{0.07}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.04}\right)^2} = 4.319\times10^9$ Hz

En este caso la $f_{op} < f_c$ $\therefore$ no existe propagación

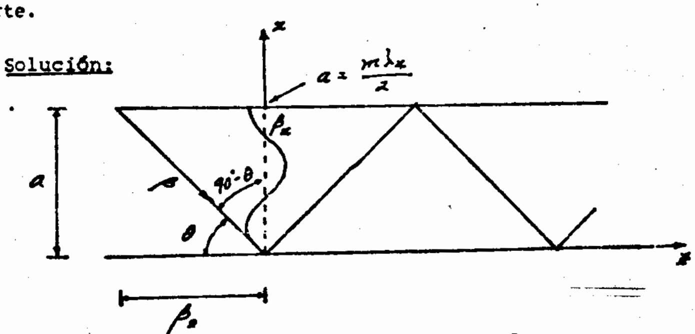
Para el modo TE_{20} : $f_c = 1.5\times10^8\sqrt{\left(\frac{2}{0.07}\right)^2} = 4.285\times10^9$ Hz

En este caso la $f_{op} < f_c$ $\therefore$ no existe propagación

Se demuestra que sólo el modo TE_{10} se propaga en esta guía de onda.

4.4. Una guía de onda rectangular cuyas dimensiones transversales son de 2 cm. de altura por 4 cm. de ancho, opera bajo el modo TE. Considerando que las paredes de la guía son de conductor perfecto y como dieléctrico el aire. Obtener: a) El modo que se propaga. b) λ_g . c) υ_f . d) υ_g y e) $\bar{\beta}$ de la guía. Si la --- guía opera a una frecuencia 20% más alta que la frecuencia de - corte.

Solución:



$\cos\theta = \frac{\beta_z}{\beta}$; $\beta_z = \beta\cos\theta$ pero $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

$\therefore \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\beta\cos\theta} = \frac{\lambda}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}\theta = \frac{\beta_x}{\beta}$; $\beta_x = \beta\operatorname{sen}\theta$ $\therefore \lambda_x = \frac{2\pi}{\beta_x} = \frac{2\pi}{\beta\operatorname{sen}\theta} = \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta}$

$a = \frac{m\lambda_x}{2}$ → significa que existe un número de mea ciclos que se forman a lo largo del eje

$\lambda_x = \frac{2a}{m}$; $\frac{2a}{m} = \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta}$ $\therefore \operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{2a}$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$

$$\therefore \lambda_z = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}}$$

donde λ_z es la longitud de om paralela a las paredes de l guía $(\lambda_z = \lambda_g)$

a) Para el modo TE_{10}^{*} :

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

donde $\lambda_c = 2a$ es la longitud de onda de corte siendo "a" el ancho de la guía.

$\therefore \lambda_c = 2(4) = 8cm = 0.08m$

$f_c = \frac{v_o}{\lambda_c} = \frac{3\times10^8}{0.08} = 3.75\ GHz.$

20% arriba de 3.75 GHz = 4.5 GHz (frecuencia de operación)

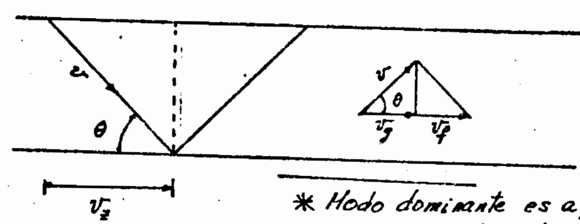
$\therefore \lambda = \frac{v_o}{f_\varphi} = \frac{3\times10^8}{4.5\times10^9} = 6.67\ cm.$

Para el modo TE_{01} :

$\lambda_c = 2b = 0.04m$; $f_c = \frac{3\times10^8}{0.04} = 7.5\ GHz$

En este caso la frecuencia de corte es mayor que la frecuencia de operación .·. sólo el modo TE_{10} se propaga

$$\lambda_g = \frac{6.67}{\sqrt{1-\left(\frac{6.67}{8}\right)^2}} = 12.08\ m.$$



* Modo dominante es aquel que tiene la frecuencia de corte más baja.

$$v_g = v_f = \frac{v_0}{\cos\theta} \; ; \; \lambda_g = \frac{\lambda}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

$$\cos\theta = \frac{6.67}{12.08} = 0.552$$

$$v_f = \frac{3\times10^8}{0.552} = 5.43\times10^8 \text{ m/seg}$$

d) $v_g = v_0 \cos\theta = 3\times10^8 \times 0.552 = 1.656\times10^8$ m/seg

e) $$\bar\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\bar\beta = \sqrt{(2\pi\times4.5\times10^9)^2 \times 4\pi\times10^{-7}\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9} - \left(\frac{\pi}{0.04}\right)^2}$$

$$\bar\beta = \sqrt{(2\pi\times4.5\times10^9)^2 \times \frac{1}{9}\times10^{-16} - \left(\frac{\pi}{0.04}\right)^2}$$

$$\bar\beta = \sqrt{4\pi^2\times(4.5)^2\times10^{2\times9}\times\frac{1}{9}\times10^{-16} - \left(\frac{\pi}{0.04}\right)^2}$$

$$\bar\beta = 52.097 \text{ rad/m.}$$

4.5. Calcular la impedancia característica de una guía de onda formada por dos placas paralelas (perfectamente conductoras), para el modo TE y TM en función de λ y λ_g. Si la frecuencia de operación es de 10 GHz y λ_g = 4 cm., el dieléctrico entre las placas tiene una $\varepsilon_r = 9$ y $\sigma = 0$.

<u>Solución</u>:

Para el modo TM ($E_z \neq 0$ y $H_z = 0$)

$$E_z = (C \operatorname{sen} Ax \operatorname{sen} By)\, e^{-\bar\gamma z}$$

$$E_x = \left(-\frac{\bar\gamma}{h^2} CB \cos Bx \operatorname{sen} Ay\right) e^{-\bar\gamma z}$$

$$E_y = \left(-\frac{\bar\gamma}{h^2} CA \operatorname{sen} Bx \cos Ay\right) e^{-\bar\gamma z}$$

$$H_x = \left(\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} CA \operatorname{sen} Bx \cos Ay\right) e^{-\bar\gamma z}$$

$$H_y = \left(-\frac{j\omega\varepsilon}{h^2} CB \cos Bx \operatorname{sen} Ay\right) e^{-\bar\gamma z}$$

donde: C = constante ; $A = \frac{n\pi}{b}$, $B = \frac{m\pi}{a}$ y $h^2 = \bar\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon$

$$Z_{0TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\frac{\bar\gamma}{h^2}}{\frac{j\omega\varepsilon}{h^2}} = \frac{\bar\gamma}{j\omega\varepsilon}$$

si $\bar\gamma = \bar\alpha + j\bar\beta$ y existe propagación $\Rightarrow \bar\alpha = 0$

$$\therefore Z_{0TM} = \frac{j\bar\beta}{j\omega\varepsilon} = \frac{\bar\beta}{\omega\varepsilon} \; ; \; \bar\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

$$Z_{0TM} = \frac{2\pi}{\omega\varepsilon\lambda_g} = \frac{2\pi}{2\pi f\varepsilon\lambda_g} = \frac{1}{\lambda_g f\varepsilon} \; ; \; f = \frac{v}{\lambda} \; ;$$

$$Z_{0TM} = \frac{\lambda}{\lambda_g v\varepsilon} \; ; \; v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \; \therefore v\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$Z_{0TM} = \frac{\lambda}{\lambda_g}\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rightarrow \text{pero} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\therefore Z_{0_{TM}} = \eta\frac{\lambda}{\lambda_g} \quad ; \quad \eta = 120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

$$Z_{0TM} = 120\pi\sqrt{\frac{1}{9}}\left(\frac{\lambda}{\lambda_g}\right) \quad ; \quad \lambda_g = 4cm$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad ; \quad v = \frac{v_0}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{\sqrt{9}} = 1\times10^8 \ m/seg$$

$$\lambda = \frac{1\times10^{10}}{1\times10^{10}} = 1 \ cm$$

$$Z_{0TM} = \frac{120\pi}{3}\left(\frac{1}{4}\right) = 10\pi \ ohm$$

Las componentes del campo para el modo TE considerando que :

$\bar{\gamma} = j\bar{\beta} \quad (\bar{\alpha} = 0)$ son:

$$H_z = C\cos Bx\cos Ay$$

$$H_x = j\frac{\bar{\beta}}{h^2}CB\,\text{sen}\,Bx\cos Ay$$

$$H_y = j\frac{\bar{\beta}}{h^2}CA\cos Bx\,\text{sen}\,Ay$$

$$E_x = j\frac{\omega\mu}{h^2}CA\cos Bx\,\text{sen}\,Ay$$

$$E_y = -j\frac{\omega\mu}{h^2}CB\,\text{sen}\,Bx\cos Ay$$

$$Z_{0TE} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\bar{\beta}} = \frac{2\pi f\mu\lambda_g}{2\pi} = \frac{v\mu\lambda_g}{\lambda}$$

$$v\mu = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{\mu\varepsilon}} = \eta \quad \therefore Z_{0TE} = \eta\frac{\lambda_g}{\lambda}$$

$$\therefore Z_{0TE} = 120\pi\sqrt{\frac{1}{9}}(4) = 160\pi \ ohm.$$

4.6. El valor de la amplitud de la componente longitudinal de la intensidad de campo en el centro de la sección de una guía de onda rectangular de 5 x 2.5 cm. es de 10^5 volt/m. El modo que se propaga es el TM_{11}, siendo la frecuencia de operación de 7.5 GHz y como dielectrico el aire. Determinar las amplitudes de las componentes de campo eléctrico y magnético (considerando que las paredes son de conductor perfecto).

Solución:

De las condiciones de frontera:

$$E_0 = 10^5 \text{ volt/m} \quad \text{en} \quad m = n = 1 \quad y \quad z = 0$$

Para el modo TM_{11} :

$$E_z = E_0 \operatorname{sen} Bx \operatorname{sen} Ay$$

$$E_x = -j \frac{\bar{\beta}}{h^2} CB \cos Bx \operatorname{sen} Ay$$

$$E_y = -j \frac{\bar{\beta}}{h^2} CA \operatorname{sen} Bx \cos Ay$$

$$H_x = j \frac{\omega \varepsilon}{h^2} CA \operatorname{sen} Bx \cos Ay$$

$$H_y = -j \frac{\omega \varepsilon}{h^2} CB \cos Bx \operatorname{sen} Ay$$

$$B = \frac{m\pi}{a} = \frac{\pi}{0.05} = 62.83$$

$$A = \frac{n\pi}{b} = \frac{\pi}{0.025} = 125.66$$

$$h^2 = \bar{\gamma}^2 + \omega^2 \mu \varepsilon$$

$$h^2 = A^2 + B^2$$

Considerando que $\bar{\alpha} = 0$

$$\bar{\beta} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad , \quad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{seg}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_0} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \Rightarrow \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \beta^2$$

$$\beta = \frac{2\pi \times 7.5 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 50\pi$$