



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CONTROL 1

ING. ROBERTO CANALES

G-603799

APUNTE
51

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



603799

G.- 603799

Capítulo 1

INTRODUCCION

G! 603799

CAPITULO I

INTRODUCCION

1.	<u>Bosquejo Histórico</u> -----	1
2.	<u>El problema de control</u> -----	2
2.1	Planteamiento del problema -----	2
2.2	Más sobre el problema de control -----	5
2.3	La variable tiempo: Sistemas algebraicos y sistemas dinámicos -----	7
3.	<u>Control de mallas abiertas y cerradas</u> -----	8
4.	<u>Malla abierta y malla cerrada: Efectos y comparación</u> -----	10
4.1	Efecto de la realimentación -----	10
4.2	Conclusiones -----	18

CAPITULO I

INTRODUCCION

1. BOSQUEJO HISTORICO

Aunque los principios de Control se aplicaban desde mucho antes (controles de nivel de agua para clepsidras, aparatos posicionadores de molinos de viento para colocar las aspas a favor del aire etc) los sistemas de control comenzaron su auge durante la revolución industrial. En esa época James Watt inventó el primer regulador automático de velocidad para máquinas de vapor (como un accesorio de su máquina de vapor con condensador). A mediados del siglo XIX, J.C. Maxwell analizó por vez primera diversos tipos de gobernadores de velocidad, y relacionó el problema de estabilidad de los mismos con un problema algebraico. A fines de ese siglo, el problema de estabilidad planteado por Maxwell fue resuelto por Hurwitz. Alrededor de 1930, Nyquist y Bode desarrollaron técnicas de análisis para sistemas retroalimentados, utilizando el dominio de la frecuencia y para 1940, la mayor parte de las técnicas descritas en este libro eran ya conocidas. Durante la segunda guerra mundial, el interés en aplicaciones bélicas hizo que se consideraran problemas de dirección y guía de proyectiles balísticos y artillería y problemas estocásticos, no lineales, y de estabilidad. Desde los últimos años de la década de 1950, y gracias primordialmente al advenimiento de las computadoras digitales, se han redescubierto las variables de estado, y estudiando más profundamente problemas de optimización, de control bajo incertidumbre, y apareciendo además el control numérico y el control jerarquizado de sistemas. También, en la última década se ha notado un cambio en el campo de aplicación de la teoría de control. Hoy en día los ingenieros de control analizan entre otros problemas ecológicos, sociales y económicos.

2. El problema de control

2.1 Planteamiento del problema.

Dar definiciones generales sobre una disciplina es una tarea difícil y arriesgada. Difícil porque se trata de resumir el contenido de varios millares de líneas en unas pocas cuantas y arriesgada porque siempre cabe la posibilidad de dejar fuera de la definición algunos aspectos importantes de la disciplina. Por ello hemos optado por recurrir a una serie de ejemplos y ya formada una idea intuitiva de los problemas que se pueden resolver con la ingeniería de control, entonces se darán definiciones más exactas, empleando un lenguaje matemático.

De una manera informal, el problema de control consiste en seleccionar de un conjunto específico o arbitrario de elementos (ó parámetros, configuraciones, funciones de tiempo, etc), aquellos que aplicados a un sistema fijo, hagan que éste se comporte de una cierta manera deseada.

Así pues, un problema de control sería seleccionar el valor de la resistencia R_k de manera tal que el amplificador de la figura 1.1, tenga una ganancia uniforme para un intervalo de frecuencia dado

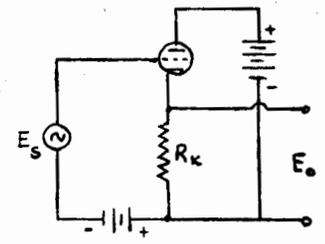


FIGURA I. AMPLIFICADOR SEGUIDOR DE CATODO EN EL QUE R_k PUEDE VARIARSE PARA OBTENER CIERTA RESPUESTA DE FRECUENCIA.

Otro problema de control es el siguiente: Un inversionista posee cierta cantidad de dinero al principio del año y desea invertirlo en el mercado de valores. Suponiendo -- que que el inversionista no puede solicitar préstamos y que su única fuente de información son las cotizaciones que se publican en la sección financiera del periódico, ¿Cuál debe ser su política de inversión para tener la mayor cantidad de efectivo al finalizar el año?

Un tercer problema de control es el que se plantea a continuación:

Un reactor químico tiene inicialmente una temperatura muy baja. La composición de la salida es una función de la temperatura del torrente de entrada. ¿Cuál debe ser la variación de dicha temperatura para obtener una conversión máxima a un cierto producto en la salida?

A pesar de que las disciplinas bajo las cuales caerían los ejemplos anteriores son muy disímiles, estos muestran tres elementos en común:

- Un conjunto de elementos llamados entradas, que podemos modificar.
- Un segundo conjunto de elementos llamados salidas, los cuales deseamos modificar de acuerdo con nuestros intereses.
- Un sistema que relaciona las entradas con las salidas, llamado planta y que no puede ser modificado.

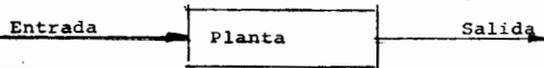


FIGURA 1.2. REPRESENTACION ESQUEMATICA DE UN SISTEMA

En la tabla 1.1, que se muestra a continuación, se identifican la entrada, la salida y la planta, de los ejemplos propuestos.

PROBLEMA	ENTRADA	SALIDA	PLANTA
AMPLIFICADOR	Valor de la resistencia R_k	Respuestas en frecuencia	Relaciones eléctricas del amplificador.
INVERSIONISTA	Cantidad de acciones a comprar y vender en cierta fecha.	Cantidad de efectivo al finalizar el año	Mecanismo de la bolsa
REACTOR QUIMICO	Temperatura del torrente de alimentación.	Composición del torrente de salida	Relaciones de balance y de cinética del reactor.

TABLA 1.1

Cabe hacer notar que la planta se considerará únicamente como el sistema que liga las entradas con las salidas. Para los fines de este libro, la planta no será el sistema físico en sí, sino el modelo matemático del mismo. Dicho modelo, -- puede ser parcialmente desconocido, como en el caso del mecanismo de la bolsa, el que no puede determinarse tan solo a -- partir de la información de los periódicos.

Recapitulando, el problema de control es el de escoger -- para un sistema dado, una entrada que haga responder a la -- planta de una manera deseada; esto es, que se obtenga una salida que cumpla cierto objetivo. En el primer ejemplo este -- sería una respuesta en frecuencia bastante plana; en el segundo, una cantidad máxima de efectivo al final del año; en el -- tercero, una conversión máxima a un producto de salida.

2.2 Más sobre el problema de Control.

Al tratar de resolver para un caso concreto el problema de control definido anteriormente, surgen las preguntas: ¿Cómo ha de modelarse la planta? ¿Cómo verificar el comportamiento de este modelo? ¿Qué hacer cuando la planta no sólo es desconocida si no que además hay efectos aleatorios? ¿Cómo lograr que el sistema se comporte de acuerdo a una política prescrita? Las interrogaciones anteriores plantean las siguientes facetas del problema de control:

a) Modelado. Para poder hacer un análisis es necesario tener una representación racional de la planta, mediante un modelo. La decisión de inclinarse hacia uno u otro tipo de modelo depende fundamentalmente de los usos y el costo de ellos. Así, en la figura 1.1 el circuito puede representarse como una red lineal RC con elementos activos, o como una red RC no lineal, según la utilización que se le piense dar al modelo.

b) Simplificación. Una vez planteado, el modelo puede resultar demasiado complejo. En ese caso conviene saber las suposiciones simplificadoras posibles, y su influencia sobre la verosimilitud del modelo. Por ejemplo, al analizar un circuito electrónico y hacer un modelo para altas frecuencias, algunos condensadores suelen considerarse como corto-circuitos o bien, al hacer el modelo económico de una región, se engloban las industrias de extracción de hierro, zinc, níquel, etc., en una sola industria ficticia de "minerales ferrosos".

c) Simulación. Una vez elaborado el modelo, este puede verificarse analíticamente contra el caso real, o puede recurrirse a simular el modelo para comprobar su validez. Esta simulación se puede usar, además, para tener una idea acerca del comportamiento del sistema formado por la planta y el sistema de control bajo diversas circunstancias. Por ejemplo, antes de probar un avión en el aire, se hace en

tierra simulaciones del vuelo. Las simulaciones pueden lograrse con modelos a escala, con computadoras analógicas o digitales, a base de cálculos manuales, etc.

d) Estabilidad. Una de las preguntas de mayor importancia sobre un sistema es el referente a su estabilidad o sea ¿Motivan en él pequeñas perturbaciones, efectos pequeños? La contestación a esta pregunta puede hacerse a través de simulación o bien con estudios analíticos.

e) Estimación. Muchas veces es necesario indagar el valor de costos variables internas de un sistema a partir del conocimiento de entradas y salidas, puesto que las decisiones para controlar el sistema deben tomarse en función de dichas variables. Por ejemplo un problema de estimación consiste en determinar la temperatura en cierto punto de un reactor en base a la composición de los productos de la entrada y la salida.

f) Identificación. Aquí el problema, consiste en estimar ciertos parámetros desconocidos de una planta, basándose únicamente la entrada y la salida. Por ejemplo, supongamos que desconocemos los parámetros del circuito de la Fig. 1.1 tenemos una serie de datos de entrada y salida al circuito. Indagar el valor de R_x a partir de dichos datos es un problema de identificación.

g) Regulación. Este es un problema de control en que el objetivo consiste en mantener la planta en un estado o conjunto de estados prefijados. Un ejemplo sería el de un frigorífico, en el que se quiere mantener la temperatura en $-5^\circ \text{C} \pm 0.5^\circ \text{C}$.

h) Optimización. Si la meta propuesta en el problema de control es maximizar cierto objetivo cuantizable, se tiene entonces un problema de optimización. Este es el caso de un reactor químico en el que se desea maximizar la conversión a cierto producto de salida.

Nuestro principal objetivo en este libro será el estudiar los problemas de modelado, simplificación, estabilidad y regulación.

2.3 La variable tiempo: Sistemas algebraicos y sistemas dinámicos.

Volviendo nuestra atención a los ejemplos anteriores, podemos notar que en el ejemplo del amplificador, la entrada fué el valor de la resistencia y no hay decisiones posteriores que hacer. En el sistema del inversionista, este -- tiene que hacer 365 decisiones (una por día), y cada una -- de ellas afecta a las que se tomarán en el futuro (por ejemplo, puede quedarse sin dinero y no invertir más). En este ejemplo, las decisiones son múltiples y secuenciales.

En el caso del reactor, las temperaturas pasadas del -- torrente de alimentación afectan las decisiones futuras que debe tomar acerca de la temperatura de este torrente. Aquí también el problema es de decisiones múltiples y secuenciales, pero a diferencia del caso anterior, estas decisiones deben hacerse continuamente y no a intervalos discretos (de un día en el caso del inversionista).

Al hablar de decisiones secuenciales, hemos hablado de "decisiones anteriores". Esto nos fuerza a introducir una variable, que llamaremos tiempo, con respecto a la cual mediremos la anterioridad ó posterioridad de nuestras decisiones.

Motivados por los ejemplos anteriores, podemos clasificar a los sistemas así:

- a) Sistemas algebraicos; aquellos en que las decisiones pasadas no afectan a las decisiones futuras y viceversa, y
- b) Sistemas dinámicos; aquellos en que las decisiones

pasadas influyen en las decisiones futuras. Estos a su vez pueden subdividirse en discretos, si las decisiones se toman a intervalos discretos de la variable tiempo, y continuos, -- si las decisiones han de tomarse continuamente.

En este libro, estudiaremos primordialmente sistemas -- dinámicos.

3. Control de mallas abiertas y cerradas.

Existen dos maneras de controlar un sistema: tomando -- en cuenta el comportamiento de la salida, o ignorándolo. -- Para familiarzarnos un poco con ambas maneras, introduciremos un ejemplo.

El objetivo del alumbrado público es mantener un ni--- vel mínimo de iluminación en las calles al menor costo posi--- ble. Para lograr este objetivo, se podrían proponer dos so--- luciones: La primera, encender los focos del alumbrado a la hora en que comunmente empieza a oscurecer y apagarlos --- cuando comienza a aclarar. Así pues, se decidiría encender el alumbrado a las 6.30 p.m. y apagarlo a las 6.30 a.m. -- En este sistema, la entrada (cambio de posición del inte--- rruptor) es independiente de la salida (cantidad de luz en--- la calle). Este mecanismo, simple de llevar a cabo y econó--- mico, puede acarrear dificultades, ya que la hora en que -- empieza a oscurecer y aquella en que empieza a aclarar, va--- rían de acuerdo a la estación del año (en verano las noches son más cortas), y lo mismo que en el caso de un día nublado, se puede tener una obscuridad indeseable.

La segunda solución posible, más efectiva, consistiría en instalar un dispositivo para detectar la cantidad de i--- luminación (fotoceldas, fototransistores, etc) y de acuerdo con esto se encendería o apagarían las luces del alumbrado--- público.

En este caso, la entrada (cambio de posición de los interruptores) sería modificada por la salida del sistema (iluminación en las calles)

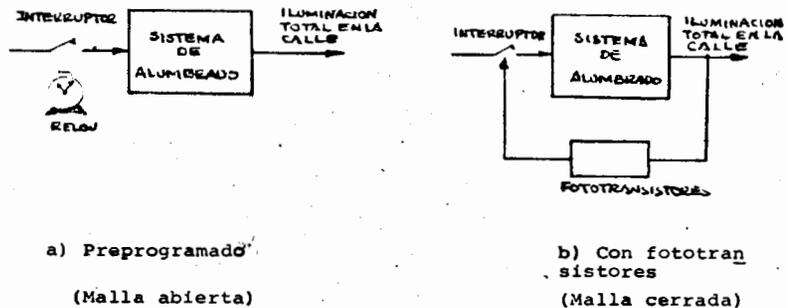


Figura 1.3 Sistema de iluminación.

De las consideraciones anteriores, puede intuirse que para resolver el problema de control bosquejado en la sección 1.1.1, existen dos métodos general: El de malla abierta y el de malla cerrada. El primero consiste en efectuar el control precalculando las entradas del sistema de modo que la salida presente las características deseadas. En este caso, el control aplicado es independiente de la salida real. Por otra parte, el control de malla cerrada consiste en modificar la entrada en función de la salida obtenida.

En el caso del inversionista de la sección 1.1.1, él puede darle a su corredor de bolsa dos tipos de órdenes:-- a) "El 15 de abril vende todas las acciones que poseo del tipo "A", ó b) "Vende las acciones tipo A, cuando lleguen a 180 puntos". El primer tipo de orden, en la que no se toma en cuenta el valor de las acciones, equivale a un control de malla abierta. El segundo, en donde sí se toma en cuenta la salida (valor), equivale a uno de malla cerrada.

A no ser que el inversionista conozca muy bien el --- mercado de valores, el seguir una política del primer tipo puede producir resultados desastrosos.

La escritura de una línea manuscrita puede considerarse como un sistema de malla cerrada, ya que a medida que se escribe, se tiene conocimiento a través de la vista de la dirección de la línea (salida). Si la línea sale torcida entonces el cerebro envía una orden (entrada) al brazo (planta) para que este corrija el defecto. El mismo sistema en su versión de malla abierta, consistiría en tratar de escribir un dictado con los ojos cerrados. En los párrafos siguientes se dará un ejemplo más detallado, para ilustrar las propiedades de los controles de malla abierta y malla cerrada.

4. Malla abierta y malla cerrada: Efectos y comparación.

4.1 Efecto de la realimentación.

El ejemplo que se presenta a continuación, ilustra mejor algunas de las ventajas y desventajas de los sistemas de malla abierta y los de malla cerrada (llamados también de realimentación o retroalimentación).

Considérese un amplificador electrónico, por medio del cual se desea amplificar una señal $e(t)$; esto es, se desea que la salida $s(t)$ del amplificador sea una réplica exacta de la entrada $e(t)$, pero de mayor amplitud. O sea $s(t) = Ae(t)$, donde A es una constante positiva.

En la vida real, los amplificadores disponibles suelen presentar problemas indeseables, como son:

10. Los amplificadores no son lineales, por lo que la salida es una versión distorsionada de la entrada (Fig. 1.4).

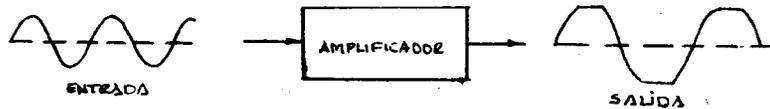


Fig. 1.4. Distorsión del amplificador por no-linealidad.

20. Los amplificadores no responden lo mismo a entradas -- con cambios bruscos que a entradas con cambios suaves, y -- por ello no pueden amplificar fielmente las señales que -- tienen cambios repentinos (Fig.1).

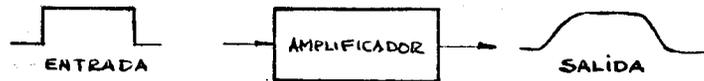


Fig. 1.5. Distorsión producida por cambios repentinos en la señal.

30. Las características de los amplificadores varían por causas externas, tales como cambios en la temperatura ambiente, envejecimiento de los componentes, malos contactos ó variación del voltaje de línea.

A continuación se analizará la posibilidad de eliminar cada uno de los problemas enumerados anteriormente utilizando un control de malla cerrada.

Problema 1. No-linealidad.

Supongase que la característica del amplificador es -- la dada por la figura 1.6.

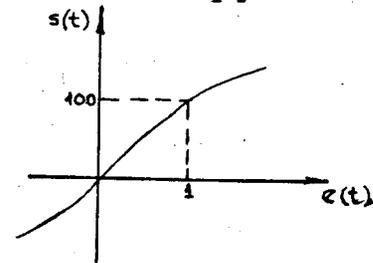


Fig. 1.6. Característica no-lineal del amplificador.

Como la relación entre la entrada y la salida no es -- lineal (es decir, la salida no es igual a una constante -- multiplicada por la entrada) se produce distorsión.

La realimentación empleada consiste en reemplazar la -- entrada por una combinación de la entrada y la salida. En -- el caso más sencillo esta combinación consiste en restar -- de la entrada, el producto de una constante k por la salida, -- tal y como se indica en la figura 1.7.

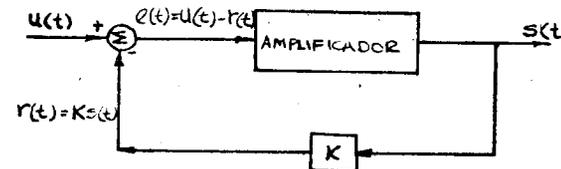


Fig. 1.7. Realimentación propuesta para eliminar la distorsión.

Observando la Figura 1.7 se obtienen las siguientes -- relaciones.

$$e = u - r$$

$$r = ks$$

La figura (1.7) nos indica que la relación entre "e" y "s" dada por el amplificador es:

$$s = f(e) \quad \delta \quad s = \left(\frac{f(e)}{e}\right) \cdot e$$

Despejando "s" en función de "u" y de $(f(e)/e)$ se logra

$$s = \left(\frac{f(e)}{e}\right) \cdot (u-r) = \left(\frac{f(e)}{e}\right) (u-ks)$$

o sea

$$s = \frac{\left(\frac{f(e)}{e}\right) \cdot u}{1 + k \left(\frac{f(e)}{e}\right)}$$

La anterior relación nos da a "s" en función de la entrada "u" y de "e".

Nos interesa ahora obtener "s" en función de "u" solamente, llamemos ahora "ganancia de malla al producto $k f(e)/e$

Si nosotros escogemos "k" de manera que $k \left(\frac{f(e)}{e}\right) \gg 1$, se tiene que, muy aproximadamente

$$s = \frac{\left(\frac{f(e)}{e}\right) u}{k \left(\frac{f(e)}{e}\right)} = u/k$$

Como la ganancia del amplificador (esto es, $\frac{f(e)}{e}$) es aproximadamente 100, si se toma $k=0.1$, se tendrá un amplificador de menor ganancia pero lineal, ya que se obtendría uno en que la salida es una constante multiplicada por la entrada. Se ha eliminado, pues, la distorsión.

Ha de notarse que el valor de "k" supuesto en el ---

* (el signo \approx significa "aproximadamente").

párrafo anterior produce una "e" de valor aproximadamente cero, puesto que

$$e = u - ks \approx ks - ks = 0$$

Problema 2. Mala respuesta a entradas rápidas.

Consideremos ahora un amplificador tal que, si su entrada es un seno de frecuencia " ω ", su salida es otro seno de la misma frecuencia, multiplicado por un factor $\frac{1000}{\omega^2+1}$. Ver figura 8).

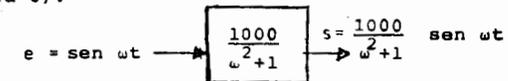


Fig. 1.8) Descripción de un amplificador

Este amplificador responde mejor a las senoides de baja frecuencia (esto es, a entradas que varían lentamente) que a las de alta frecuencia (senoides que varían rápidamente). Si la senoide de entrada tiene una frecuencia de 0.1, la amplificación es de 999. Si la entrada es una senoide de frecuencia 100, la amplificación es menor a la unidad. Este marcado descenso de las ganancias al aumentar la frecuencia puede disminuirse mediante realimentación. (ver. fig. 1.9)

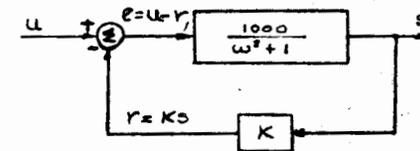


Fig. 1.9 El amplificador realimentado.

Si como la figura lo indica, se coloca una realimentación "k", entonces, bajo la suposición de que todas las señales (u, e, r, s) son senoides de frecuencia " ω ", se ten--

drán las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} e &= u - r \\ r &= ks \\ s &= \frac{1000}{\omega^2 + 1} \cdot e \end{aligned}$$

La relación entre "u" y "s" para el sistema realimentado será dada por

$$\begin{aligned} s &= \frac{1000}{\omega^2 + 1} (u - ks) \\ s &= \frac{1000}{\omega^2 + 1} \cdot \frac{u}{1 + \frac{1000k}{\omega^2 + 1}} = \frac{1000 u}{1000 k + \omega^2 + 1} \end{aligned}$$

Podemos ver que, para las frecuencias en que $\frac{1000k}{\omega^2 + 1}$ -- (la ganancia de malla) sea mucho mayor que la unidad, la salida se expresa como

$$s = \frac{1000}{\omega^2 + 1} \cdot \frac{u}{1 + \frac{1000k}{\omega^2 + 1}} = \frac{1000 u}{(\omega^2 + 1) \cdot \left(\frac{1000k}{\omega^2 + 1}\right)} = \frac{u}{k}$$

Si escogemos una "k" igual a 0.1, la relación entrada salida estará dada por

$$s = \frac{1000 u}{101 + \omega^2}$$

La figura 1.10 nos da una gráfica de ganancia vs frecuencia para los casos del amplificador con y sin realimentación.

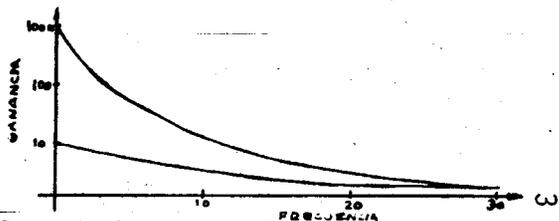
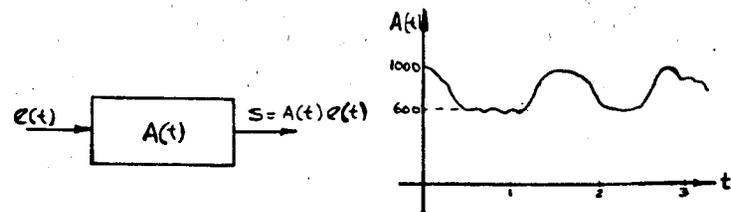


Fig. 1.10 Ganancia de amplificador con y sin realimentación

Así pues, la curva de ganancia vs. frecuencia se ha hecho más uniforme, aunque la ganancia de amplificador -- ha disminuido. En capítulos posteriores, se verá que si la curva de ganancia vs. frecuencia se hace más uniforme, las señales "rápidas" se distorsionarán mucho menos.

Considerese ahora el problema 3) mencionado anteriormente.

Supongamos un amplificador lineal, en que la salida esta dada por la entrada multiplicada por una función del tiempo A(t)



a) Relación entrada salida

b) Gráfica de A(t) vs "t".

Fig. 1.11 Un amplificador cuya ganancia varía con el tiempo

Si se aplica una entrada consistente en un tren de pulsos a un amplificador con estas características, la salida es la indicada por la figura

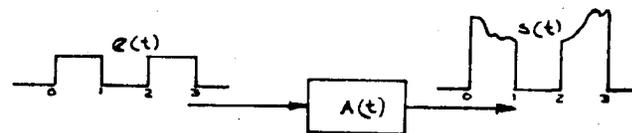


Fig. 1.12 Salida correspondiente a un tren de pulsos

En este caso la salida no es una réplica exacta de la entrada.

El efecto de la variación de la ganancia con el tiempo puede disminuirse mediante realimentación. Para ello, realimentemos el amplificador como lo indica la fig. 1.13

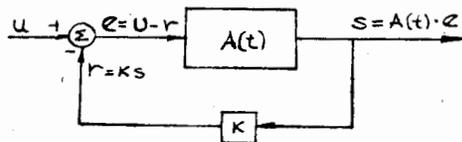


Fig. 1.13 El amplificador realimentado.

Las ecuaciones que describen el sistema son

$$\begin{aligned} e &= u - r \\ r &= ks \\ s &= A(t)e \end{aligned}$$

Eliminando r y e de la ecuación anterior se logra

$$s = A(t)(u - ks) \text{ y por ende}$$

$$s = \frac{A(t)}{1 + kA(t)} u$$

Nuevamente si se escoge k de tal modo que $kA(t)$ (la ganancia de malla) sea mucho mayor que la unidad, la relación entre la entrada y la salida puede aproximarse por

$$s \approx u/k$$

La variación de la amplificación (ganancia) para el caso no realimentado era de 1000 a 600 o sea un 40%. Examinemos ahora qué sucede cuando se incluye la realimentación con $k=0.1$. si $A(t)=1000$ la ganancia para el sistema realimentado es

$$\frac{A(t)}{1+kA(t)} = \frac{1000}{1+(0.1)(1000)} = \frac{1000}{101} = 9.9$$

y cuando $A(t) = 600$ se tiene

$$\frac{A(t)}{1+kA(t)} = \frac{600}{1+(0.1)(600)} = \frac{600}{61} = 9.8$$

La variación de la ganancia es ahora de aproximadamente el 1%. Nótese sin embargo, que la ganancia del nuevo sistema es un centésimo (aprox.9) de la ganancia sin realimentación (aprox.900). Vemos pues, que el sistema realimentado es mucho menos sensible a la variación de la ganancia del amplificador original.

4.2 Conclusiones.

En los ejemplos anteriores se mostró que por medio de la realimentación se puede hacer que un sistema se comporte más linealmente, que sea menos sensible a variaciones de parámetros y que su respuesta se haga más rápida. Las características anteriores emanan del hecho de que, para altas ganancias de mallas, el comportamiento del sistema realimentado está determinado esencialmente por la realimentación (en los ejemplos, se lograba que $s \approx u/k$). Por lo tanto, el comportamiento de un sistema con alta ganancia de malla, es ta determinado por los elementos en la retroalimentación.

Capítulo 2

SISTEMAS Y ESTADOS

1. Introducción

En el capítulo anterior se indicó que para resolver algunos problemas de control es adecuado elaborar un modelo del sistema en cuestión, o sea obtener una abstracción de este y expresarlo en términos matemáticos.

Cabe aclarar que en este texto se tratarán, indistintamente, problemas relativos a redes eléctricas, redes mecánicas, sistemas químicos, sociales, etc. por lo que surge la pregunta de que si dichos sistemas tienen algo en común. La respuesta es afirmativa porque, como se verá, todos pueden describirse mediante modelos matemáticos con la misma estructura.

También se verá que a partir de suposiciones muy simples, puede llegarse a formular una estructura matemática adecuada para describir una gran diversidad de sistemas. A partir de la suposición de que los sistemas son causales (no predictivos), se definirá el concepto de estado, cuyo papel es de gran importan-

cia en los desarrollos que posteriormente se efectuarán. El enfoque que aquí se presente difiere bastante de los que se encuentran en la literatura relativa al tema, a este nivel. El enfoque propuesto consiste en desarrollar los conceptos en vez de proporcionarlos en forma axiomática.

2. Definición de sistema

El término "sistema" es ampliamente utilizado. Al respecto, es fácil escuchar expresiones tales como "el sistema económico", "el sistema métrico decimal", "derrocar el sistema", "el sistema eléctrico central", etc, por lo que surge la pregunta: ¿Qué es un sistema?. Podría considerarse como "un conjunto de entes ligados por una relación", pero es demasiado general para nuestros propósitos; de ahí que conviene hacer una división entre los entes separándolos en dos categorías, una que llamaremos conjunto de *entradas* y otra conjunto de *salidas* por lo que la definición factible es que se trata de "una relación entre entradas y salidas".

Un ejemplo de un sistema, de acuerdo con la definición anterior, puede ser una fábrica de coches que transforma materias primas como lámina de acero, hule, pintura, etc; y mano de obra, energía eléctrica, etc (entradas) en automóviles (salidas). Otro ejemplo sería el de un motor de inducción, que transforma energía eléctrica (entrada) en energía mecánica (salida).

Si la entrada se representa como u y la salida como y , el tipo de sistemas que estudiaremos podría denotarse matemáticamente por la relación

$$y = S[u] \quad (1)$$

Gráficamente corresponde a la fig 1.

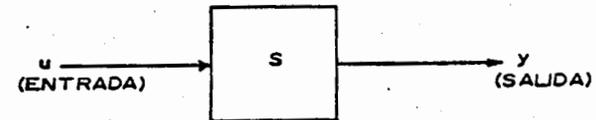


Fig 1. Representación gráfica de un sistema

Si, además, se hace la suposición de *unicidad* (o *determinismo*), esto es, que a cada entrada le corresponde una y solo una salida, entonces la relación (1) es una función.

Nuestro mayor interés estará concentrado en aquellos sistemas en los cuales, tanto la entrada como la salida pueden ser representadas por funciones de una variable independiente t , que en la mayoría de los casos será la variable tiempo. Se considerará también que asociado a cada sistema, existe un tiempo t_c , tiempo de creación, que representa el instante en que principia la existencia del sistema (no se excluye la posibilidad que el tiempo t_c sea $-\infty$). De esta manera, las funciones que representan la entrada y la salida están definidas para cualquier tiempo t que cumpla con $t_c \leq t < \infty$.

2.1 Notación

Para evitar ambigüedades, conviene hacer algunas aclaraciones de notación:

a) Siguiendo la nomenclatura matemática clásica, el conjunto de todos los valores de t que satisfacen la desigualdad

$$a < t < b$$

se denotará $[a, b]$, y el de valores de t que satisfacen la desigualdad

$$a \leq t \leq b$$

se denominará $[a, b]$

b) Tanto las funciones de entrada como de salida estarán definidas en el intervalo $[t_c, \infty)$, las cuales se señalarán con una minúscula sin argumento, por ejemplo z, \bar{y}, w , etc. El valor de una función en un instante determinado t se indicará mediante la letra minúscula correspondiente y el argumento t ; por ejemplo, $z(t_0)$ representa el valor de función z en el instante t_0 .

c) $z[t_1, t_2]$ representará el segmento de la función del tiempo definido en el intervalo $[t_1, t_2]$ que coincide con la función z , en dicho intervalo (fig 2).

A partir de dos segmentos de funciones, $z'[t_1, t_2]$ y

$z''[t_2, t_3]$, puede construirse el segmento de función $z[t_1, t_3]$

de tal manera que se cumpla

$$z(t) = z'(t) \quad \text{si} \quad t_1 \leq t < t_2$$

$$z(t) = z''(t) \quad \text{si} \quad t_2 \leq t \leq t_3$$

Las igualdades anteriores se expresarán:

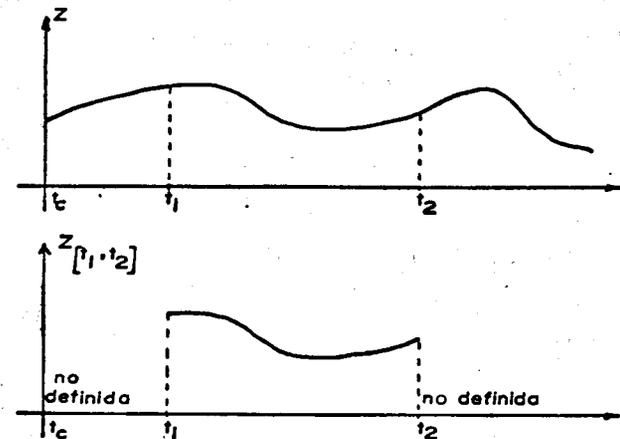


Fig 2. Significado de la definición del segmento $z[t_1, t_2]$

$$z[t_1, t_3] = z'[t_1, t_2] + z''[t_2, t_3]$$

donde la operación $+$, que comúnmente se le da el nombre de con catenación de segmentos, se muestra en la fig 3.

Resumiendo, un sistema consiste en:

1. Un conjunto de entradas, $\{u\}$, cuyos elementos son funciones del tiempo definidas en el intervalo $[t_c, \infty)$
2. Un conjunto de salidas $\{y\}$, cuyos elementos son funciones del tiempo definidas en el intervalo $[t_c, \infty)$
3. Una función S , que define una correspondencia biu

nívoca entre los elementos del conjunto de entradas, $u[t_c, \infty)$ y los elementos del conjunto de las salidas,

$$y[t_c, \infty) = S\{u[t_c, \infty)\}$$

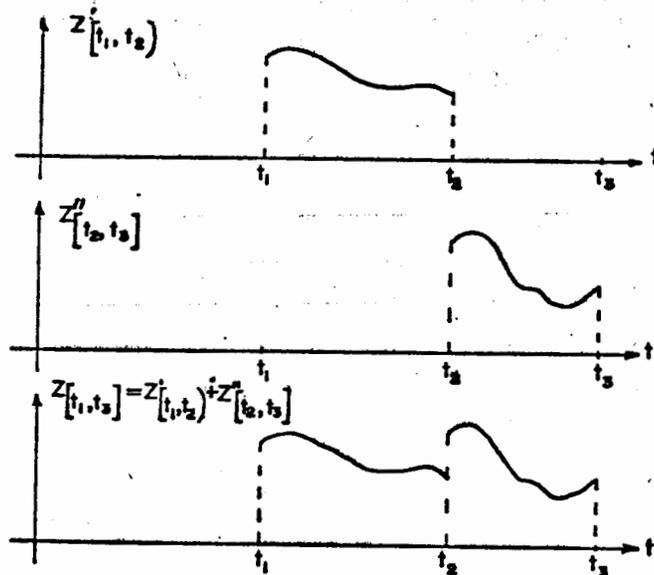


Fig 3. Significado de la operación +

3. Sistemas causales

A lo largo de este libro se considerarán aquellos sistemas en que para cualquier t_1 , el valor de la salida $y(t_1)$ depende únicamente de la función de entrada u en el intervalo $[t_c, t_1]$. Estos sistemas se denominan causales o no anticipato

nios, pues la salida en un instante dado no depende del valor de la entrada en instantes posteriores. Usando la notación señalada en 2.1, es posible definir formalmente un sistema causal.

3.1 Definición de sistema causal

Un sistema es causal si para dos entradas cualesquiera $u'[t_c, \infty)$ y $u''[t_c, \infty)$, para todos los valores de t en que se cumple la igualdad

$$u'[t_c, t] = u''[t_c, t]$$

las salidas correspondientes

$$y'[t_c, \infty) = S\{u'[t_c, \infty)\}$$

$$y''[t_c, \infty) = S\{u''[t_c, \infty)\}$$

satisfacen

$$y'[t_c, t] = y''[t_c, t]$$

La figura 4 ilustra un sistema que no es causal, ya que aún cuando las entradas u_1 y u_2 coinciden en el intervalo $[t_c, t_1]$, resulta que $y_1 \neq y_2$ en el mismo. Entonces, en los sistemas causales, para cualquier $t > t_c$ se cumple que

$$y[t_c, t] = S\{u[t_c, t]\}$$

o sea que el segmento de salida $y[t_c, t]$ depende únicamente del de entrada $u[t_c, t]$.

En particular, el valor de la salida en un instante t ,

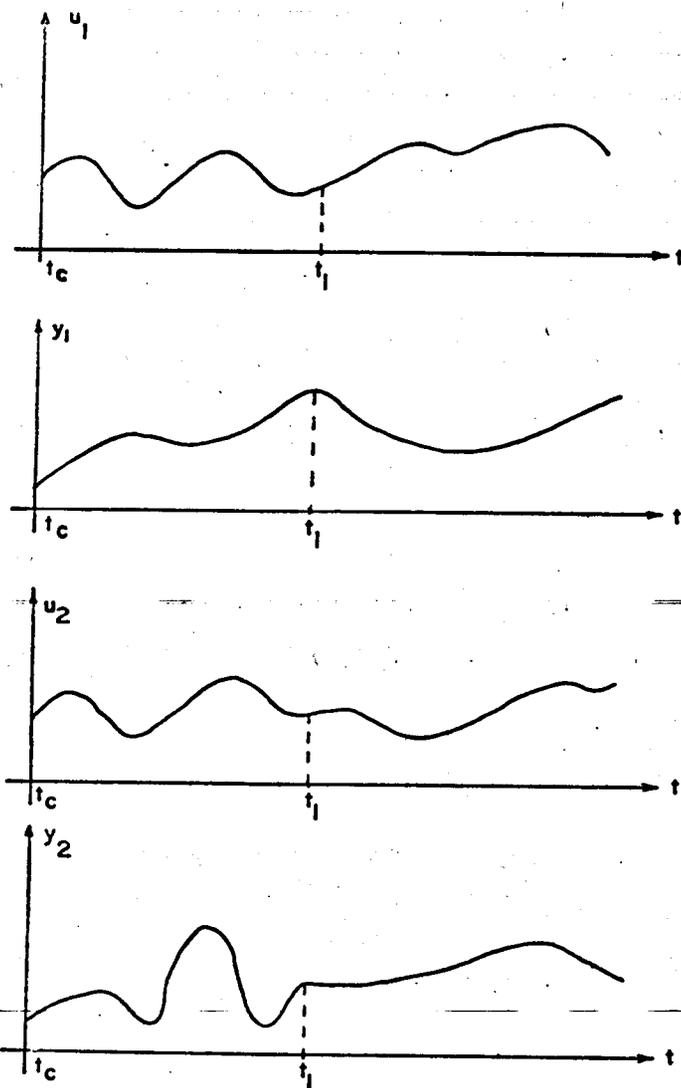


Fig 4. Sistema no causal

arbitrario es una función del segmento de entrada aplicado hasta entonces, esto es $u_{[t_c, t_1]}$; en cambio, los sistemas anticipatorios tienen la característica que en algún instante t_2 , el valor de la salida $y(t_2)$ depende de cierto valor del segmento de entrada $u_{[t_2, \infty)}$

Ejemplo

Considérese un sistema creado en $t_c = 0$, en el cual la relación entre la entrada y la salida es

$$y(t) = u(at)$$

y donde $a > 0$

Para que el sistema sea causal, de acuerdo con los comentarios anteriores, $y(t_1)$ debe depender únicamente de los valores de $u(t)$ en el intervalo $[0, t_1]$. Pero como $y(t_1) = u(at_1)$, a fin de que sea causal, resulta indispensable que $at_1 \leq t_1$. Esta última desigualdad se cumple para valores positivos de a , cuando $a \leq 1$. La fig 5 ilustra la relación entre la entrada y la salida cuando $a = 2$ y $a = 0.5$ para dos entradas u_1 y u_2 .

Nótese que en el caso en que $a = 2$, el sistema no es causal, ya que las entradas u_1 y u_2 aún cuando coinciden en el intervalo $[0, 4]$ los segmentos de salida en éste son diferentes; mientras que si $a \leq 1$, siempre que las entradas coinciden en un intervalo $[0, t_1]$ las salidas correspondientes serán iguales en el mismo; inclusive coincidirán en el intervalo $[0, at_1]$

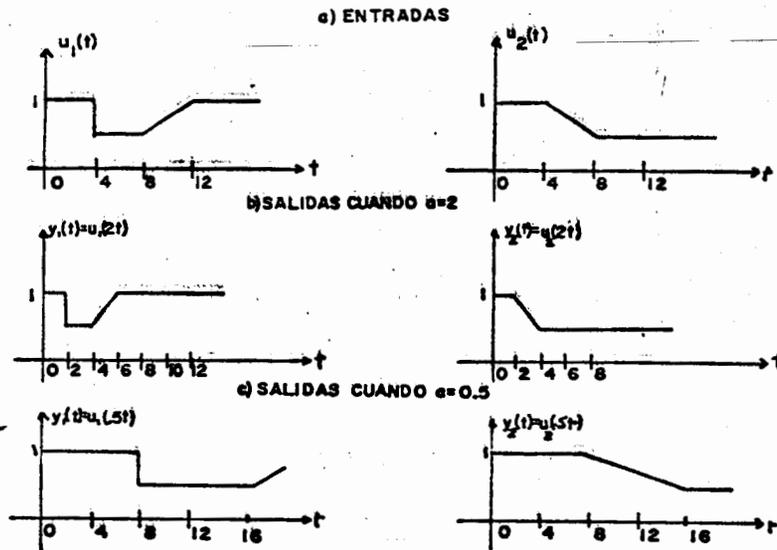


Fig. 5 Comportamiento del sistema $y(t) = u(at)$

Conviene aclarar que se analizarán, casi en forma exclusiva, los sistemas causales y determinísticos, los cuales comunmente se conocen en la literatura especializada como *sistemas dinámicos*.

4. Equivalencia entre entradas

Como el problema que con mayor frecuencia se tratará en este texto es el de analizar las relaciones entre las entradas y las salidas en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, donde $t_c \leq t_0 \leq t_1 \leq \infty$, surge la pregunta: ¿es indispensable conocer exactamente $u[t_c, t_0]$ para obtener la salida $y[t_0, t_1]$? Por fortuna la respuesta es negativa en un gran número de casos, como se ilustrará mediante ejemplos:

- a) Tómesese por caso un banco, creado en el año de 1900. Desde su fundación sus transacciones (*entradas*) han sido múltiples: ha aceptado depósitos, recibido y pagado intereses, comprado y vendido terrenos, etc. Si se considera su capital como la salida del sistema y es deseable conocerlo al 31 de diciembre de 1982, estando a primero de julio de este año, no es necesario revisar operación por operación desde que se fundó, ya que la historia que afectará el aumento de capital puede resumirse en varias cifras (dinero en inversiones, cuentas por cobrar, dinero en caja y otras más) que forman el *estado* de cuentas al primero de julio de este año.
- b) Supóngase que se cuenta con un circuito compuesto de resistencias y capacitancias. Si se desea conocer la corriente que pasará por cierta resistencia, a partir de un instante t_0 en que se conecta al circuito una batería de 10 volts de corriente directa, no habrá necesidad de saber cuáles han sido los voltajes aplicados al circuitos desde su ensamble hasta t_0 , ya que bastará con conocer los voltajes

a través de las capacitancias en el instante t_0 .

De los ejemplos anteriores se intuye que para cualquier tiempo t_0 posterior a t_c , es posible agrupar los segmentos de entrada en el intervalo $[t_c, t_0]$ en clases, de modo tal que dos entradas que pertenecen a la misma clase, tienen igual efecto en la salida a partir de t_0 . De esta manera, en un instante de terminado, t_0 , para conocer cuál será la salida para tiempos posteriores cuando se aplique cierta entrada a partir de t_0 , será suficiente saber la clase a que pertenece la entrada que se ha aplicado al sistema hasta entonces.

4.1 Definición de equivalencia

Para los sistemas causales y para cada $t_0 > t_c$ pueden definirse formalmente equivalencias entre segmentos de entrada que se inician en t_c y terminan en t_0 , de la siguiente forma:

Dos segmentos de las entradas u y \bar{u} son equivalentes en $t_0 > t_c$ con respecto a un sistema S , si y solo si para toda t y todo segmento de función $\kappa[t_0, t]$, los segmentos de las salidas y y \bar{y} , definidas como

$$y[t_c, t] = S\{u[t_c, t_0] + \kappa[t_0, t]\}$$

$$\bar{y}[t_c, t] = S\{\bar{u}[t_c, t_0] + \kappa[t_0, t]\}$$

son iguales en el intervalo $[t_0, t]$

es decir

$$y[t_0, t] = \bar{y}[t_0, t]$$

Informalmente esto significa que dos entradas definidas en un intervalo $[t_c, t_0]$ son equivalentes si producen el mismo efecto en la salida a partir de t_0 . Para ilustrar dicho con

cepto, se incluirán algunos ejemplos.

4.1.1 Ejemplos

Se presentan diversos casos con los cuales se puede ilustrar el concepto de entradas equivalentes:

Ejemplo 1

Considérese un sistema definido por la relación entrada-salida

$$y(t) = \int_{t_c}^t u(\sigma) d\sigma$$

Para determinar si dos entradas $w[t_c, t_0]$ y $\bar{w}[t_c, t_0]$ son equivalentes, basta confirmar si para las funciones

$$u_1[t_c, t] = w[t_c, t_0] + \kappa[t_0, t]$$

$$u_2[t_c, t] = \bar{w}[t_c, t_0] + \kappa[t_c, t]$$

se cumple la igualdad

$$y_1(t_1) = \int_{t_c}^{t_1} u_1(\sigma) d\sigma = \int_{t_c}^{t_1} u_2(\sigma) d\sigma = y_2(t_1)$$

para

$$t_0 \leq t_1 < t$$

pero como

$$\int_{t_c}^{t_1} u_1(\sigma) d\sigma = \int_{t_c}^{t_0} u_1(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^{t_1} u_1(\sigma) d\sigma$$

y en el intervalo $[t_c, t_0]$, u_1 coincide con w , mientras que en $[t_0, t_1]$ coincide con κ , se tiene la identidad

$$y_1(t_1) = \int_{t_c}^{t_0} w(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^{t_1} \kappa(\sigma) d\sigma$$

De manera análoga, se deduce que

$$y_2(t_1) = \int_{t_c}^{t_0} \bar{w}(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^{t_1} \kappa(\sigma) d\sigma$$

Restando las dos últimas ecuaciones se tiene que

$$y_1(t_1) - y_2(t_1) = \int_{t_c}^{t_0} w(\sigma) d\sigma - \int_{t_c}^{t_0} \bar{w}(\sigma) d\sigma$$

entonces, para que $y_1(t_1) - y_2(t_1)$ sea cero para toda t_1 en el intervalo $[t_0, t]$ es necesario y suficiente que

$$\int_{t_c}^{t_0} w(\sigma) d\sigma = \int_{t_c}^{t_0} \bar{w}(\sigma) d\sigma$$

así se concluye que para el sistema en cuestión, dos entradas son equivalentes en t_0 , si y solo si sus integrales de t_c a t_0 son iguales. En la fig 6 se muestran tres entradas, de las cuales las dos primeras son equivalentes, mientras que la tercera no lo es a ninguna de estas.

Un sistema físico que puede representarse por la relación entrada-salida del ejemplo anterior se muestra en la fig 7, que consiste en un tanque con agua. La salida corresponde a la altura del agua, medida de acuerdo con la escala indicada, mientras que la entrada corresponde al gasto q (lt/seg) que puede ser positivo o negativo. Inicialmente $h(t_c) = 0$.

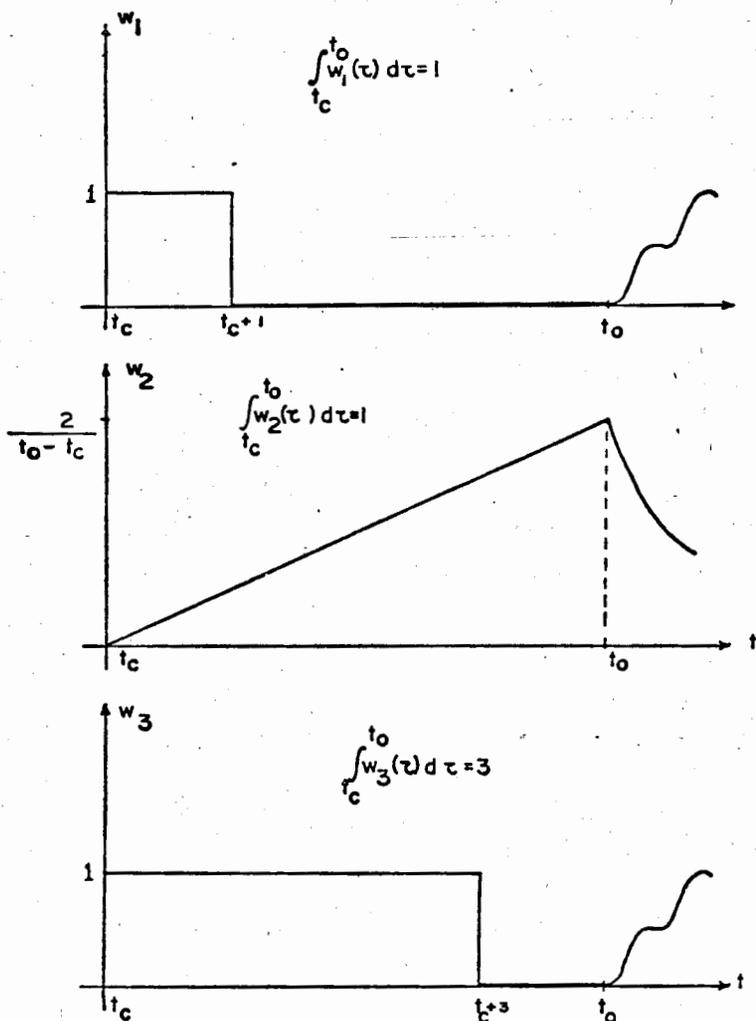


Fig 6. Para el sistema $y(t) = \int_{t_c}^t u(\sigma) d\sigma$, las entradas w_1 y w_2 son equivalentes en t_0 , mientras que w_3 no lo es ni a w_1 ni a w_2 .

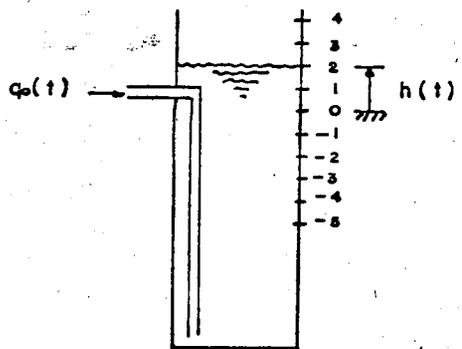


Fig 7. Sistema físico en el cual la relación de entrada-salida es $h(t) = \int_{t_c}^t q(\sigma) d\sigma$; $q(t)$ representa la entrada, y $h(t)$ la salida

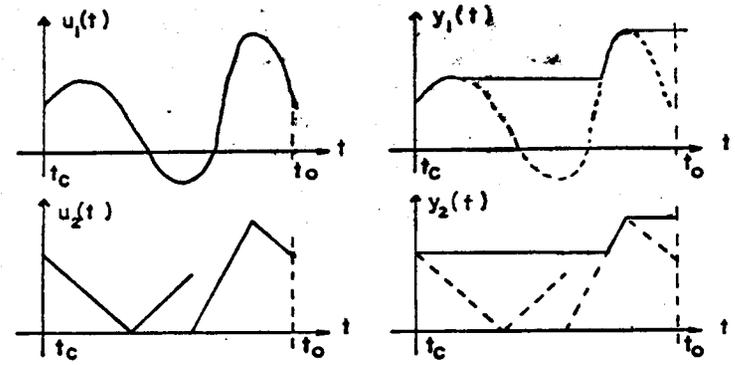


Fig 8. Dos entradas y sus correspondientes salidas para el sistema $y(t) = \max_{t_c \leq \sigma < t} u(\sigma)$

Ejemplo 2

Considérese ahora el sistema en que la relación entrada-salida es

$$y(t) = \max_{t_c \leq \sigma < t} u(\sigma)$$

o sea que la salida en un tiempo t es igual al valor máximo de la entrada en el intervalo $[t_c, t)$. En la fig 8 se muestran dos entradas y sus correspondientes salidas.

Fórmense dos entradas definidas en el intervalo $[t_c, t)$ concatenando $u[t_c, t_0)$ y $\bar{u}[t_c, t_0)$ con una entrada arbitraria, $u[t_0, t)$, quedando dos entradas que se denominarán u_1 y u_2 respectivamente.

Supóngase ahora que

$$a = \max_{t_c \leq \sigma < t_0} u(\sigma)$$

En este sistema, dos entradas, u y \bar{u} , serán equivalentes en tiempo t_0 , si el valor máximo de $u[t_c, t_0)$ es igual al valor máximo de $\bar{u}[t_c, t_0)$, como se muestra a continuación:

$$\bar{a} = \max_{t_c \leq \sigma < t_0} \bar{u}(\sigma)$$

y que

$$\beta = \max_{t_0 \leq \sigma < t} \bar{h}(\sigma)$$

entonces las salidas

$$y_1(t) = \max_{t_c \leq \sigma < t} u_1(\sigma)$$

y

$$y_2(t) = \max_{t_c \leq \sigma < t} u_2(\sigma)$$

para $t > t_0$ estarán dadas por las expresiones

$$y_1(t) = \begin{cases} \bar{a} & \text{si } \bar{a} \geq \beta \\ \beta & \text{si } \beta > \bar{a} \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} \bar{a} & \bar{a} \geq \beta \\ \beta & \beta > \bar{a} \end{cases}$$

y para que $y_1(t)$ sea igual a $y_2(t)$ para cualquier $t \in [t_0, t]$

(cualquier β), debe cumplirse que $\alpha = \bar{a}$, o sea que

$$\max_{t_c \leq \sigma < t_0} u(\sigma) = \max_{t_c \leq \sigma < t_0} \bar{u}(\sigma)$$

El sistema anterior puede corresponder al circuito de la fig 9 formado por un diodo y una capacitancia, donde el voltaje $v_e(t)$ representa la entrada y el voltaje $v_s(t)$ la salida, e inicialmente la capacitancia está cargada con un voltaje negativo muy grande.

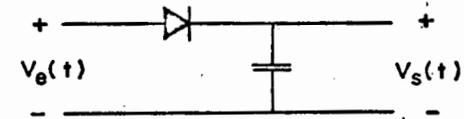


Fig 9. Sistema cuya relación entrada-salida corresponde a la del sistema del ejemplo 2

Ejemplo 3

Considérese ahora un sistema en el cual la relación entre la entrada y la salida es

$$y(t) = [\text{signo } u(t)]^n$$

donde n es el número de veces que $u(t)$ pasa de un valor positivo a un valor cero o negativo (que llamaremos cambios) en el intervalo $[t_c, t]$, y $\text{signo } u(t)$ es una función que vale 1 cuando $u(t)$ es positivo y -1 cuando $u(t)$ es cero o negativo. La fig 10 muestra una entrada y su correspondiente salida.

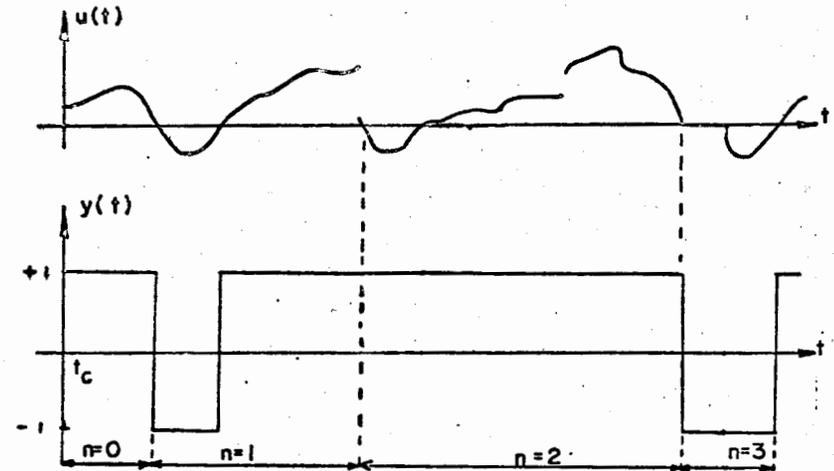


Fig 10. Una entrada y su correspondiente salida para el sistema $y(t) = [\text{signo } u(t)]^n$, donde n es el número de cambios de $u(t)$ en el intervalo $[t_c, t]$.

Un sistema físico que puede ser representado por esta relación es el mecanismo de trabe que se utiliza en algunos interruptores e inclusive en diversos tipos de bolígrafos (fig 11) Si $f(t)$ representa la fuerza aplicada al botón y la salida es la posición del mismo, usando la convención (-1) si está afuera y $(+1)$ si se halla adentro, la relación entre la entrada y la salida, cuando en t_c el botón se encuentra afuera, es

$$y(t) = [\text{signo } f(t)]^m$$

donde m es el número de veces (cambios) que desde t_c hasta t , $f(t)$ pasa de un valor positivo a uno negativo o cero en el intervalo $[t_c, t]$

La explicación del mecanismo es que cuando se aplica una fuerza positiva al botón, la esfera de acero, que puede deslizarse únicamente dentro de la ranura, gira respecto a la leva de forma de corazón en el sentido de las manecillas del reloj (b). Si se deja de presionar el botón ($f(t) \leq 0$), la esfera se aloja en la parte superior de la leva, deteniendo la parte móvil (c). De esta forma, el botón queda en la posición inferior y allí permanecerá debido a la acción del resorte. A partir de esta colocación, al momento de presionar nuevamente el botón, la esfera se aloja en la posición indicada en (d) y cuando cesa de aplicarse la fuerza, girará con respecto a la leva por el lado derecho (e) hasta quedar depositada en la parte inferior de esta (f).

Para este sistema, dos segmentos de entrada son equivalentes en t_1 si la paridad del número de cambios es la misma y si $u_1(t_1^-) u_2(t_1^-)$ es positivo como se verá a continuación*.

* $u(t_1^-)$ indica el valor de $u(t_1 - \epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$

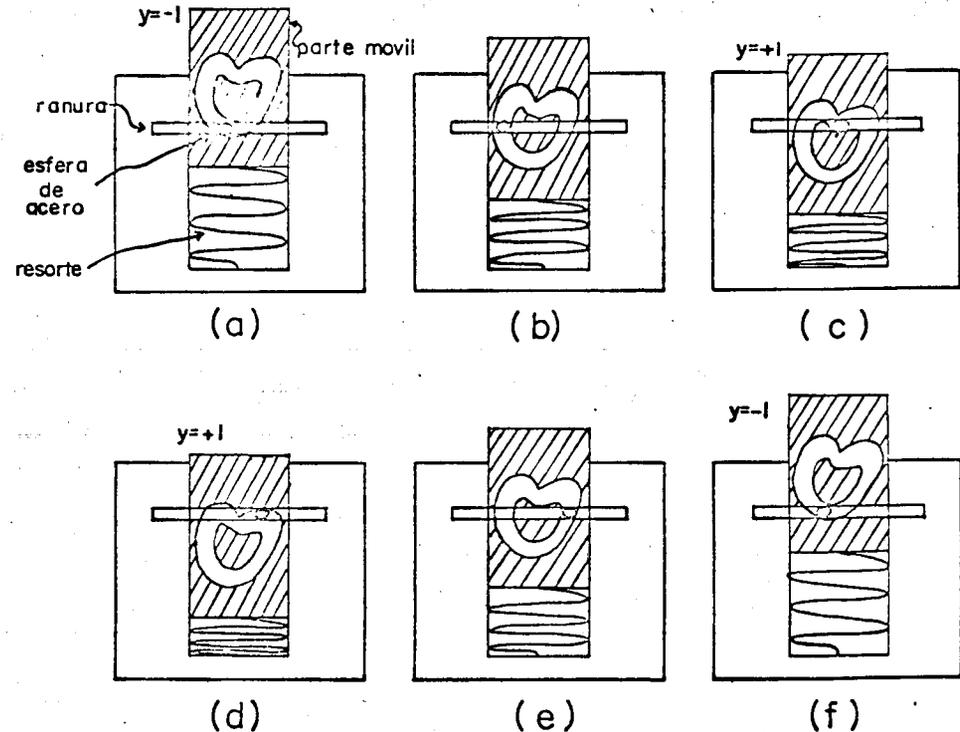


Fig 11. Sistema físico con la relación entrada salida $y(t) = [\text{signo } u(t)]^n$, donde n es el número de cambios de $u(t)$ en el intervalo $[t_c, t]$

Considérense dos entradas arbitrarias formadas por la concatenación de $\bar{u}[t_c, t_1]$ y $\bar{u}[t_c, t_1]$ con $\lambda[t_1, t]$ las salidas correspondientes para el tiempo t , son

$$\bar{y}(t) = [\text{signo } \lambda(t)]^{\bar{n}}$$

$$\bar{y}(t) = [\text{signo } \lambda(t)]^{\bar{n}}$$

donde \bar{n} y \bar{n} representan el número de cambios de los segmentos de función:

$$\bar{w}[t_c, t] = \bar{u}[t_c, t_1] + \lambda[t_1, t] \quad \text{y} \quad \bar{w}[t_c, t] = u[t_c, t_1] + \lambda[t_1, t]$$

respectivamente.

Si se denomina $m_2(t)$ al número correspondiente de cambios del segmento de entrada $\lambda[t_1, t]$, mientras que \bar{m}_1 y \bar{m}_1 se refieren a los cambios de los segmentos de entrada $\bar{u}[t_c, t_1]$ y $\bar{u}[t_c, t_1]$, entonces se tendrá

$$\bar{n} = \begin{cases} \bar{m}_1 + m_2(t) & \text{si no hay cambio de } \bar{w} \text{ en } t_1 \\ \bar{m}_1 + m_2(t) + 1 & \text{si hay cambio de } \bar{w} \text{ en } t_1 \end{cases}$$

y de igual manera

$$\bar{n} = \begin{cases} \bar{m}_1 + m_2(t) & \text{si no hay cambio de } \bar{w} \text{ en } t_1 \\ \bar{m}_1 + m_2(t) + 1 & \text{si hay cambio de } \bar{w} \text{ en } t_1 \end{cases}$$

Para que haya cambio de \bar{w} en t_1 , es necesario que $\bar{w}(t_1^-)$ sea positivo. Además, a fin de que se cumpla

$$[\text{signo } \lambda(t)]^{\bar{m}_1} = [\text{signo } \lambda(t)]^{\bar{m}_1}$$

para cualquier $\lambda(t)$, es necesario que \bar{m}_1 y \bar{m}_1 sean ambos pares o impares, por lo que se concluye que

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(t) \quad t > t_1$$

para un $\lambda(t)$ arbitrario, si y sólo si

- $\bar{u}(t_1^-)$ es del mismo signo que $\bar{u}(t_1^-)$
- que \bar{m}_1 y \bar{m}_1 tengan la misma paridad

En la fig 12 se ilustra cada una de las cuatro clases / cuando se aplican dos entradas a partir de t_0 , una negativa en t_0 y otra positiva en t_0

De acuerdo con dichas consideraciones, para las entradas mostradas en la fig 13 se tendrá que

u_1 es equivalente a u'_1 , porque ambas tienen un número impar de cambios (1 y 3 respectivamente) y terminan con un valor positivo

De manera similar

u_2 es equivalente a u'_2

u_3 es equivalente a u'_3

y u_4 es equivalente a u'_4

Sin embargo, u_1 no es equivalente a u_4 porque aunque ambos terminan en t_1 en un valor positivo, el número de cambios de u_1 es impar y el de u_4 es par.

Ejemplo 4

Por último, considérese un sistema con una relación entrada-salida dada por

$$y(t) = [u(t)]^2$$

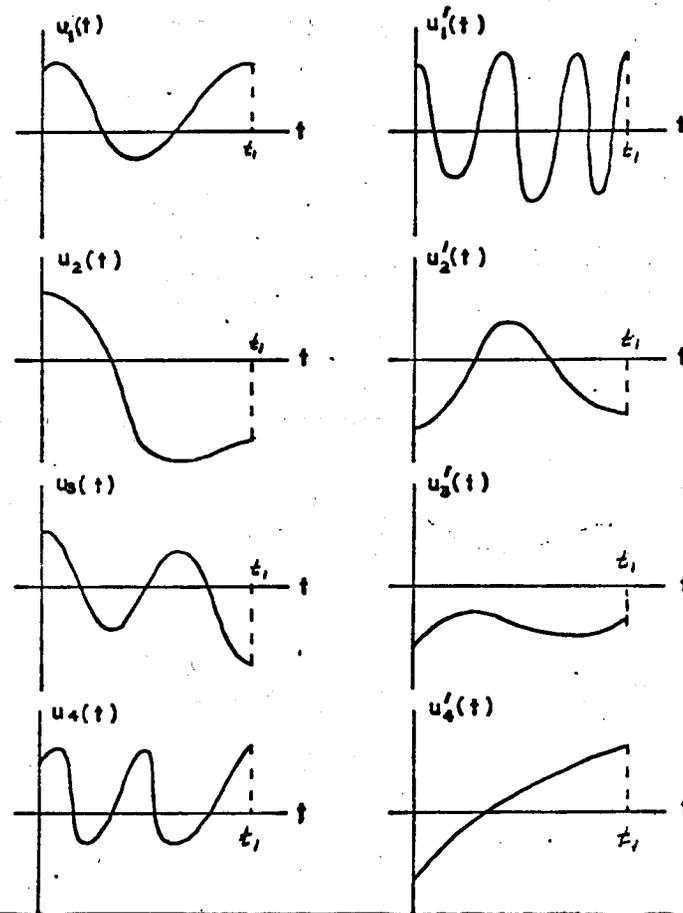
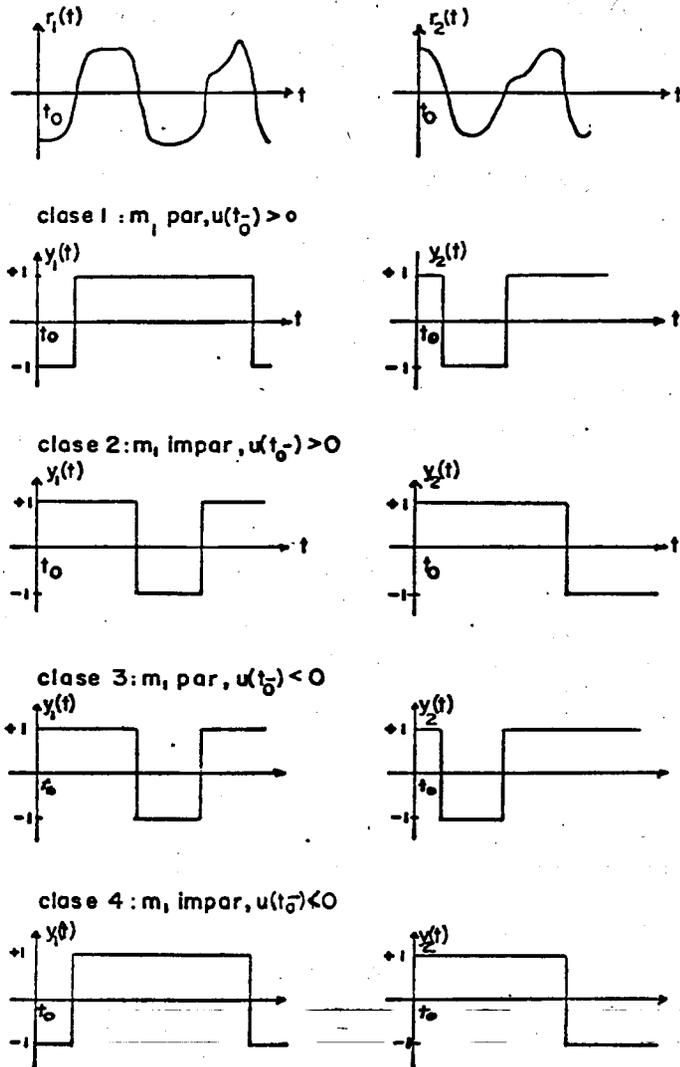


Fig. 12. Salida para $t > t_0$ cuando se aplica al sistema una entrada que es negativa en t_0 y una que es positiva en t_0 , habiéndosele aplicado anteriormente al sistema cada uno de los diferentes tipos.

descrito en el ejemplo 3

Para averiguar si dos segmentos de entrada \bar{u} y u sean equivalentes en t_0 , se forman las entradas w_1 y w_2

$$w_1 = u[t_c, t_0] + \lambda[t_0, t]$$

$$w_2 = \bar{u}[t_c, t_0] + \lambda[t_0, t]$$

con t y $\lambda[t_0, t]$ arbitrarios.

Los valores de las salidas correspondientes y_1 y y_2 para $t > t_0$ estarán dados por

$$y_1(t) = [\lambda(t)]^2$$

$$y_2(t) = [\lambda(t)]^2$$

y como $y_1(t) = y_2(t)$ para todo λ , cualesquiera dos segmentos de entradas $u[t_c, t_0]$ y $\bar{u}[t_c, t_0]$ son equivalentes.

4.2 Clases de equivalencia

Es fácil verificar que la relación de equivalencia definida en 4.1 cumple con las siguientes tres propiedades:

Dado un sistema S , entonces

- u_1 es equivalente a sí misma en cualquier $t > t_c$
- si u_1 es equivalente a u_2 en t_0 , entonces u_2 es equivalente a u_1 en t_0
- si en t_0 , u_1 es equivalente a u_2 y u_2 es equivalente a u_3 , entonces u_1 es equivalente a u_3

De las tres propiedades señaladas es factible demostrar que el conjunto de todas las entradas definidas en un intervalo $[t_c, t_0]$ puede agruparse en clases, de modo que cada una esté formada por todas las entradas equivalentes entre sí.

De los ejemplos anteriores se tienen distintas clases de equivalencia, entre otras

- Todas las entradas cuya integral de t_c a t_0 es igual a un número real k , forman una clase en t_0 (ejemplo 1)
- Todas las entradas cuyo valor máximo en el intervalo $[t_c, t_0]$ es igual a un número real α , forman una clase de equivalencia en t_0 (ejemplo 2)
- Todas las entradas que hasta t_0 han tenido un número impar de cambios y su valor en t_0 es positivo, forman una clase de equivalencia en t_0 (ejemplo 3)
- Todas las entradas forman una sola clase en t_0 (ejemplo 4)

Con base en el comentario que se hizo inmediatamente después de la definición de equivalencia, dado un sistema, dos entradas pertenecen a una misma clase si las "características" de las entradas en $[t_c, t_0]$ que afectan el valor de la salida para tiempos mayores que t_0 son iguales. Estas "características" pueden ser muy diferentes (como se ilustró en los ejemplos anteriores): la integral de t_c a t_0 , el valor máximo en el intervalo de t_c a t_0 , la paridad del número de veces que la entrada pasa de un valor positivo a uno no positivo junto con el signo en t_0 , etc.

Entonces, dado un sistema, pueden identificarse (también, como se efectuó en los ejemplos anteriores) las clases de equivalencia de las entradas para cada instante de tiempo. A su vez

cada equivalencia puede identificarse con uno o varios números reales, de tal suerte que al decir que un sistema en t_0 está en la clase de equivalencia $X(t_0)$, se podrá determinar la salida a partir de t_0 cuando se aplique cualquier entrada definida en el intervalo $[t_0, t]$. Así no es necesario conocer la entrada que se le ha aplicado al sistema de t_c a t_0 , sino la clase de equivalencia a la cual dicha entrada pertenece en t_0 .

4.2.1 Propiedades de las clases de equivalencia

Como para los sistemas causales la salida en un tiempo t está determinada por la entrada u en el intervalo $[t_c, t]$, esto es

$$y(t) = \mathcal{S} \{u_{[t_c, t]}\}$$

y además

$$u_{[t_c, t]} = u_{[t_c, t_0]} + u_{[t_0, t]}$$

entonces

$$y(t) = \mathcal{S} \{u_{[t_c, t_0]} + u_{[t_0, t]}\}$$

De acuerdo con las consideraciones en secciones anteriores, para $t > t_0$, $u_{[t_c, t_0]}$ puede remplazarse por cualquier elemento que pertenezca a su clase de equivalencia, entonces para $t > t_0$, $y(t)$ depende de la clase de equivalencia de la entrada en t_0 y $u_{[t_0, t]}$, lo que se denota como

$$y(t) = F \{X(t_0), u_{[t_0, t]}\}$$

donde $X(t_0)$ es la clase de equivalencia a la cual pertenece

$$u_{[t_c, t_0]}$$

De la última ecuación y haciendo $t = t_0$, puede deducirse que

$$y(t_0) = F \{X(t_0), u_{[t_0, t_0]}\} = f \{X(t_0), u(t_0)\}$$

lo cual significa que f , la función que determina el valor de la salida en cualquier tiempo t_0 , depende únicamente de la clase de equivalencia de la entrada aplicada hasta entonces y el valor de ésta en t_0 .

Volviendo a hacer referencia a los ejemplos de 4.1.1, se ilustrarán para cada caso las funciones f y F .

Ejemplo 1

En este caso, cada clase de equivalencia en un tiempo arbitrario t_0 se caracterizaba por la integral de la entrada desde t_c y t_0 , por lo que resulta natural denominar a cada clase por el valor de dicha integral. De esta manera, si al sistema en cuestión se ha aplicado una entrada u en el intervalo t_c, t_0 que pertenece a la clase k_1 , entonces la salida que se obtendrá al aplicar un segmento de entrada $u_{[t_0, t]}$ será

$$y(t) = k_1 + \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma$$

porque

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_c}^t u(\sigma) d\sigma = \int_{t_c}^{t_0} u(\sigma) d\sigma + \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma \\ &= k_1 + \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

de esta forma

$$F \{k_1, u_{[t_0, t]}\} = k_1 + \int_{t_0}^t u(\sigma) d\sigma$$

y cuando $t = t_0$, se tendrá $F\{k, u_{[t_0, t_0]}\} = \delta[k, u(t_0)] = k$,

Un sistema físico que tenía la relación entrada-salida

$$y(t) = \int_{t_c}^t u(\sigma) d\sigma$$

consistía en un tanque en el cual la altura del nivel de agua representaba la salida, y el gasto q la entrada. Para ese sistema físico, ¿qué significado tiene que hasta t_0 se ha aplicado al sistema una entrada que pertenece a la clase de equivalencia k ? La respuesta es sencilla: significa que en t_0 la altura del agua en el tanque es k . Este resultado es inmediato cuando se observa que la salida en el instante t_0 es

$$y(t_0) = \int_{t_c}^{t_0} u(\sigma) d\sigma = k$$

entonces, en cualquier momento t basta conocer la altura del agua en el tanque para determinar la clase de equivalencia de la entrada aplicada al sistema desde t_c a t . Conociendo dicha clase y la entrada que se le aplicará al sistema, puede determinarse la salida futura mediante la función F .

Ejemplo 2

En él, las clases de equivalencia de las entradas se caracterizaban por el valor máximo de éstas desde t_c a t_0 y cada clase puede ser identificada por dicho valor. De acuerdo con esa nomenclatura, es factible entonces establecer la función F para el sistema en consideración. Conforme al desarrollo del ejemplo, si al sistema se le ha aplicado hasta t_0 una entrada que pertenece a la clase de equivalencia k , entonces la salida en un instante $t > t_0$ cuando se aplica después de t_0 el seg-

mento de entrada $u_{[t_0, t]}$ cuyo valor máximo es β , estará dada por

$$y(t) = \begin{cases} k & \text{si } k > \beta \\ \beta & \text{si } \beta > k \end{cases}$$

la cual puede escribirse como

$$y(t) = \max_{t_0 \leq \sigma < t} [k, u(\sigma)]$$

o sea que el valor de la salida es igual al mayor de k o $\max_{t_0 \leq \sigma < t} u(\sigma)$ así que

$$F\{k, u_{[t_0, t]}\} = \max_{t_0 \leq \sigma < t} [k, u(\sigma)]$$

y cuando $t = t_0$, entonces

$$F\{k, u_{[t_0, t_0]}\} = \delta[k, u(t_0)] = \max[k, u(t_0)]$$

El sistema físico presentado en la fig 14 tiene la relación entrada-salida

$$y(t) = \max_{t_c \leq \sigma < t} u(\sigma)$$

cuando se identifica a $V_c(t)$ como la entrada y $V_d(t)$ como la salida.

En dicho sistema, la clase de equivalencia en t_1 a la cual pertenece un segmento de entrada $u_{[t_c, t_1]}$ aplicado, es igual al valor del voltaje de la capacitancia en t_1 y, en cualquier instante, basta medir el voltaje $V_d(t)$ para establecer la clase de equivalencia de la entrada aplicada hasta entonces; por tanto, podrá determinarse la salida futura cuando se conozca la entrada que se aplicará a partir de t_1 .

Ejemplo 3

Considérese ahora el sistema del ejemplo 3, en el cual se tenían cuatro clases de equivalencia en t_1 , formados por:

entradas en que m_1 es par y $u(t_1^-) > 0$

entradas en que m_1 es impar y $u(t_1^-) > 0$

entradas en que m_1 es par y $u(t_1^-) < 0$

entradas en que m_1 es impar y $u(t_1^-) < 0$

Si las clases anteriores se denotan como 1, 2, 3 y 4 respectivamente, entonces $X(t_0)$ podrá tener únicamente estos valores. Así, con dicha nomenclatura, puede establecerse la función $F\{X(t_0), u[t_0, t]\}$

Si se significa como $m_2(t)$ el número de veces que $u[t_0, t]$ pasa de un valor positivo a uno no positivo, entonces (fig 13)

$$F\{1, u[t_0, t]\} = \begin{cases} [\text{signo } u(t)]^{m_2(t)+1} & \text{si } u(t_0) < 0 \\ [\text{signo } u(t)]^{m_2(t)} & \text{si } u(t_0) > 0 \end{cases}$$

$$F\{2, u[t_0, t]\} = \begin{cases} [\text{signo } u(t)]^{m_2(t)} & \text{si } u(t_0) < 0 \\ [\text{signo } u(t)]^{m_2(t)+1} & \text{si } u(t_0) > 0 \end{cases}$$

$$F\{3, u[t_0, t]\} = [\text{signo } u(t)]^{m_2(t)}$$

$$F\{4, u[t_0, t]\} = [\text{signo } u(t)]^{m_2(t)+1}$$

y cuando se tiene $t = t_0$, $F\{N, u[t_0, t_0]\} = \delta[N, u(t_0)]$ y como $m_2(t)$ es cero (no ocurren cambios), se obtienen las siguientes igualdades:

$$\delta[1, u(t_0)] = \text{signo } u(t_0)$$

$$\delta[2, u(t_0)] = 1$$

$$\delta[3, u(t_0)] = 1$$

$$\delta[4, u(t_0)] = \text{signo } u(t_0)$$

Debido a que en cualquier instante t_0 , la localización relativa de la esfera con respecto a la leva, junto con la entrada que se aplique a partir de entonces, determinarán la salida para valores de $t > t_0$, es posible establecer una correspondencia biunívoca entre dichas posiciones y las clases de equivalencia identificadas (fig 14).

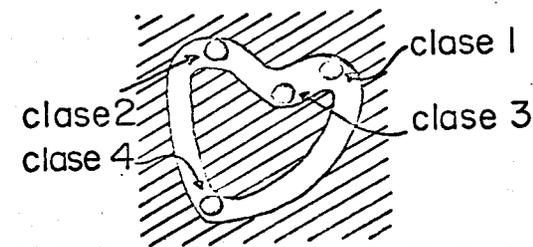


Fig 14. Relación entre las posiciones relativas de la esfera y las clases de equivalencia del ejemplo 3.

5. El concepto de estado

La definición de clase de equivalencia se circunscribió a sistemas causales; en dicho caso, las clases de equivalencia se denominan comunmente estados del sistema.

Ahora bien, de acuerdo con las definiciones anteriores, se puede escribir la siguiente relación

$$y(t) = F\{X(t_0), u_{[t_0, t]}\}$$

o sea que el valor de la salida en un instante $t > t_0$ depende únicamente del estado en que se encuentra el sistema en el instante t_0 y la entrada en el intervalo $[t_0, t]$; además

$$y(t_0) = F\{X(t_0), u_{[t_0, t_0]}\} = f\{X(t_0), u(t_0)\}$$

Esta última ecuación, como ya se dijo, significa que el valor de la salida en cualquier tiempo t_0 depende únicamente del estado y el valor de la entrada en ese instante.

Debido a que las clases de equivalencias de las entradas (o los estados) tienen un significado físico preciso, resulta natural preguntar cómo evolucionan éstos, o sea que dado un sistema en un estado $X(t_0)$, ¿en qué estado estará el sistema en un tiempo $t_1 > t_0$ cuando se aplica un segmento de $u_{[t_0, t_1]}$

Lo anterior tiene importancia a través de la función f : si se conocen en un instante el estado y el valor de la entrada, se podrá determinar el valor de salida.

Ya que

$$y(t) = F\{X(t_0), u_{[t_0, t_1]} + u_{[t_1, t]}\}$$

el estado en t_1 de un sistema, que se halla en t_0 en el estado $X(t_0)$ y se aplica el segmento de entrada $u_{[t_0, t_1]}$, está bien definido, pues corresponde a la clase de equivalencia de la entrada formada por la concatenación de cualquier elemento que pertenece a $X(t_0)$ con $u_{[t_0, t_1]}$. Entonces existe una función ϕ que relaciona el estado de un sistema en un instante con el estado del sistema en otro instante posterior cuando se le aplica un segmento de entrada entre estos dos tiempos. Dicha función tiene como argumentos el tiempo final (t_1), el segmento de entrada (u), el estado inicial $X(t_0)$ y el tiempo inicial (t_0). Para denotarla se utilizará la nomenclatura:

$$\phi\{t_1, u, X(t_0), t_0\}$$

5.2 Ley de evolución de estados.

Para cada uno de los ejemplos tratados anteriormente es posible describir en forma explícita esta ley:

a) En el ejemplo 1 como la salida (el nivel de agua del tanque) era igual al estado, entonces la ley de transición es

$$X(t_1) = \phi(t_1, u, k, t_0) = k + \int_{t_0}^{t_1} u(\sigma) d\sigma$$

b) Para el ejemplo 2, como también la salida en un instante es igual al estado en ese momento, la función ϕ es: $x(t_1) = \phi(t_1, u, a, t_0) = \max_{t_0 \leq \sigma < t_1} [a, u(\sigma)]$.

c) En el ejemplo 3, el estado del sistema no es igual a la salida. La función ϕ puede darse en forma tabular como a continuación se indica:

Cambios de $u [t_0, t_1]$		ENTRADA							
		PAR				IMPAR			
signo de $u(t_0)$		+		-		+		-	
signo de $u(t_1^-)$		+	-	+	-	+	-	+	-
ESTADO	1	1	3	2	4	2	4	1	3
	2	2	4	1	3	1	3	2	4
INICIAL	3	1	3	1	3	2	4	2	4
	4	2	4	2	4	1	3	1	3

así, si el estado en $t=0$ es 3, y la entrada que se aplica es $u(t)=t-1$ y el tiempo final es $t=4$, el estado allí será 1, o sea

$$X(4) = 1 = \phi(4, t-1, 3, 0)$$

porque el segmento de entrada no tiene ningún cambio de un valor positivo a uno no positivo,

$$u(4-) > 0 \text{ y } u(0) < 0$$

La ley de evolución de estados, ϕ , cumple con la propiedad $X(t_1) = \phi\{t_1, u, X(t_0), t_0\} = \phi\{t_1, u, \phi\{t_2, u, X(t_0), t_0\}, t_0\}$ para cualquier t_2 en el intervalo (t_0, t_1) .

La relación anterior significa que si un sistema se encuentra en un estado $X(t_0)$, y se le aplica una entrada $u[t_0, t_1]$, el estado en el tiempo t_1 se determina unívocamente. Sin embargo, dicha evolución puede considerarse de otra forma equivalente, debido a la propiedad de unicidad del sistema: se toma un tiempo arbitrario t_2 que pertenece al intervalo (t_0, t_1) y se considera la

evolución del estado en dos etapas: de t_0 a t_2 y de t_2 a t_1 (fig 15).

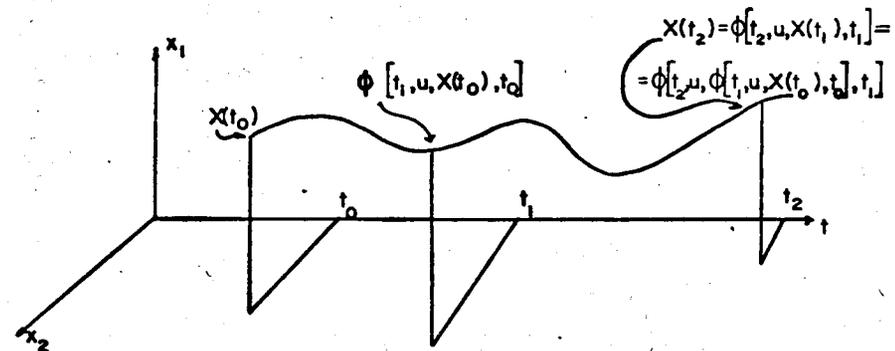


Fig 15. Esquema de la evolución de estados

La ley de evolución de estados, junto con la función ϕ que relaciona el estado y el valor de la entrada en un instante con el valor de la salida, allí forman una descripción equivalente a la original de entrada-salida cuando el sistema es causal. La ventaja que se obtiene con esta nueva descripción es que dado el sistema, es posible determinar la salida a partir de cualquier instante, si se conocen el estado en que se encuentra y el segmento de entrada que se aplicará a partir de entonces. En la fig 15 se muestran las diferentes descripciones de un sistema:

Se parte de una descripción entrada-salida (1).

Con la propiedad de causalidad se puede representar

el sistema mediante una relación entrada-salida entre segmentos de funciones ii). Cuando se introduce la definición de estado, es factible describir el sistema mediante una función que relaciona el estado y un segmento de entrada con un segmento de salida (iii). Por último, con la ley de evolución de estados se describe el sistema a través de dos funciones: una que determina el estado final a partir del estado inicial y un segmento de entrada, y otra que determina el valor de salida en el tiempo final a partir del estado final y el valor final de la entrada.

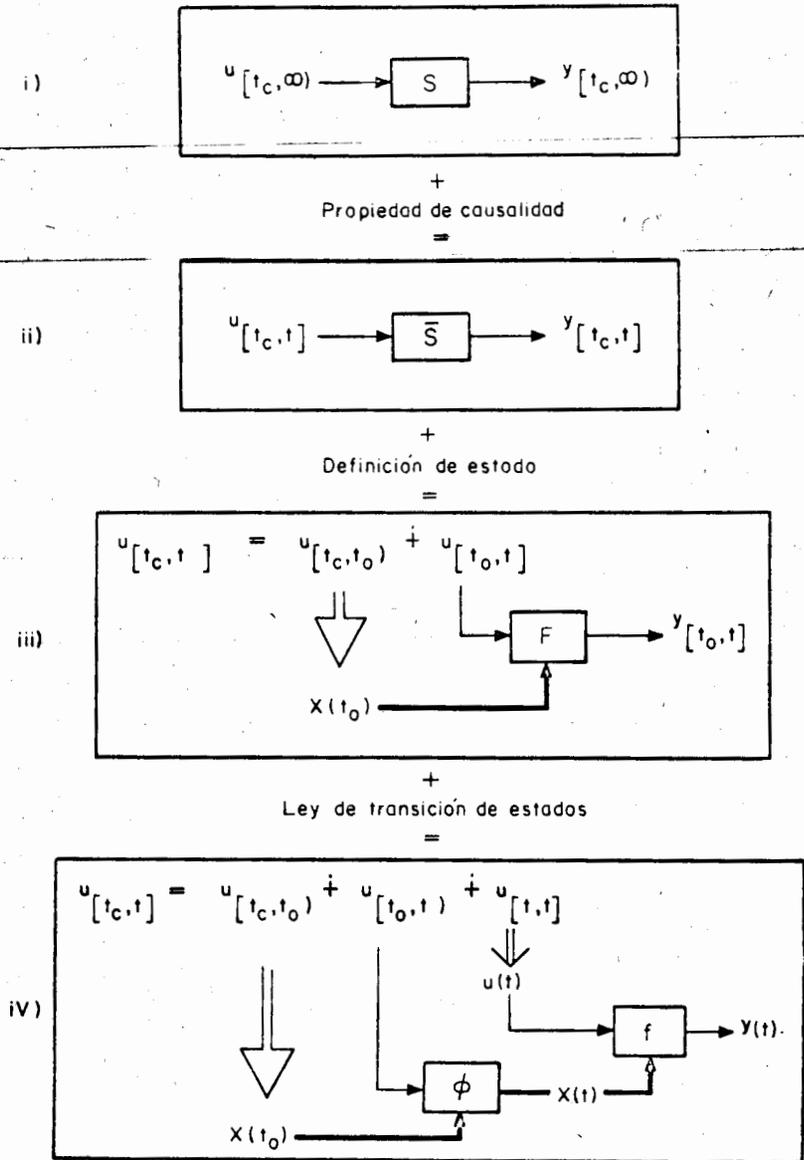


Fig 16. Cuatro maneras de describir un sistema y sus interrelaciones

Capítulo 3

CLASIFICACION DE SISTEMAS DINAMICOS

1. Introducción

Los sistemas dinámicos, o sea aquellos que son causales y determinísticos, pueden clasificarse de acuerdo a varios criterios: número de estados, linealidad de la relación entrada-salida, invariancia con el tiempo de la relación entrada-salida, etc.

En este capítulo se establecerán dichas clasificaciones las cuales serán ilustradas con ejemplos.

2. Clasificación de acuerdo al número de estados

La primera clasificación se hará de acuerdo con el número de estados diferentes en que se puede encontrar el sistema, o sea con forme al número de clases de equivalencia de segmentos de entradas; así es factible distinguir los siguientes tipos de sistemas:

a) Si solo hay una clase de equivalencia, o sea que todos los seg

mentos de entrada son equivalentes, entonces, el sistema es algebraico.

- b) Si el número de clases de equivalencia es finito, se dice que el sistema es un *autómata finito*.
- c) Si el número de clases de equivalencia es infinito pero numerable (esto es, que existe una correspondencia uno a uno entre las clases de equivalencia y los números naturales 1, 2, 3 ...), el sistema es un *autómata infinito*.
- d) Si existe un número infinito no numerable de clases de equivalencia, pero se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los números reales y las clases de equivalencia, entonces se dice que el sistema es de *parámetros concentrados*.
- e) Si existe un número infinito no numerable y además no es posible establecer una correspondencia biunívoca entre los números reales y las clases de equivalencia, el sistema es de *parámetros distribuidos*.

A continuación se desglosarán las definiciones anteriores y cada caso se ilustrará con un ejemplo.

2.1 Sistemas algebraicos

Si para cualquier instante de tiempo, t , todas las entradas pertenecen a la misma clase, el estado es único, y el sistema es

algebraico.

Ejemplo

Considérese una báscula ideal cuya entrada es la función del tiempo que representa el peso que se coloca en ella, y la salida se toma como la función del tiempo que representa la desviación de la aguja indicadora del peso. En dicho sistema, el valor de la salida en el tiempo t_1 depende únicamente, si la báscula es ideal, del valor de la entrada en t_1 y es independiente del peso de los cuerpos que se hayan colocado sobre la báscula anteriormente. Por esta razón, a los sistemas algebraicos también se les denomina *amnésicos*.

En el ejemplo de de la sec. 4.1.1, cap. 2, se presentó un sistema cuya relación entrada-salida era:

$$y(t) = [u(t)]^2$$

y como se demostró que todas las entradas pertenecen a la misma clase de equivalencia, el sistema es *algebraico*.

2.2 Automáta finito

Si para cualquier tiempo t , el número de clases de equivalencia de las entradas es finito, se dice que el sistema es un *autómata finito*.

En el ejemplo 4 de la sec. 4.1.1, ap 2, se presentó un sistema que tenía cuatro estados diferentes: por lo tanto, es un *autómata finito*.

2.3 Autómata infinito

Los autómatas infinitos son aquellos sistemas en los cuales se puede establecer una relación biunívoca entre las clases de equivalencia y los números naturales; por ejemplo, considérese el sistema creado en $t_c = 0$ cuya relación entrada-salida es

$$y(t) = \sum_{k=0}^{g(t)} g[u(k)]$$

donde la función g está definida como

$$g(a) = \text{mayor número entero menor o igual a } a$$

de esta manera, el valor de la salida del sistema en un tiempo t es igual a la suma de los valores enteros $g[u(0)]$, $g[u(1)]$, ..., $g[u(N)]$, donde $t > N > t-1$.

No es difícil verificar que dos entradas, u_1 y u_2 , pertenecen a la misma clase de equivalencia en t_0 , si y solo si

$$\sum_{k=0}^{g(t_0)} g[u_1(k)] = \sum_{k=0}^{g(t_0)} g[u_2(k)]$$

Pero como $g[u_j(k)]$ es un número entero y la suma de estos también lo es, a cada clase de equivalencia se le puede hacer corresponder un número entero y viceversa, de tal manera que a dos clases de equivalencia diferentes les corresponden dos números distintos, por lo que el sistema es *automata infinito*.

2.4 Sistemas de parámetros concentrados

Cuando existe una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia de las entradas para $t > t_c$ y la línea real (todos los números reales), entonces se dice que el sistema es de *parámetros concentrados*.

En los ejemplos 1 y 2 del cap 2 (sec 4.1.1), se presentaron dos sistemas de *parámetros concentrados*, porque en ellos se podía hacer corresponder a cada clase de equivalencia un número real, y viceversa. Sin embargo, como es factible establecer una correspondencia biunívoca entre los números reales y los vectores de n dimensiones cuyas componentes son reales, se puede, en un sistema de parámetros concentrados, definir una correspondencia biunívoca entre las clases de equivalencia y un vector de n dimensiones con componentes reales. Cuando la selección de n se hace de tal modo que sea el número más pequeño con el cual la Ley de transición de estados es una función continua, el sistema de parámetros concentrados es de *dimensión n*. A continuación se presentará un ejemplo de un sistema de parámetros concentrados, de dos dimensiones.

Ejemplo:

Considérese el sistema esquematizado en la fig. 1 que consiste en una masa que se desliza sin fricción sobre una superficie.

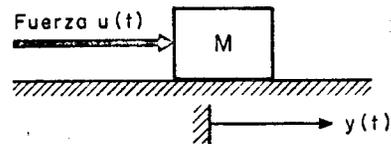


Fig 1. Sistema de dos dimensiones

En t_c la masa está en reposo (velocidad cero) y la posición inicial es $y=0$. Cuando se considera la fuerza u como la entrada y la posición de la masa como la salida, la relación entrada-salida está dada por

$$y(t) = \int_{t_c}^t \int_{t_c}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau$$

cuando $M = 1$

Si se divide el segundo intervalo de integración en dos partes, de t_c a t_0 y de t_0 a t , se tendrá

$$y(t) = \int_{t_c}^{t_0} \int_{t_c}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_c}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau$$

y si a continuación se divide el primer intervalo de integración del segundo término en dos partes, de t_c a t_0 y de t_0 a τ , se tendrá

$$y(t) = \int_{t_c}^{t_0} \int_{t_c}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_c}^{t_0} u(\sigma) d\sigma d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau$$

pero como la derivada de y con respecto al tiempo ($\frac{dy}{dt}$), que es la velocidad de la masa (v), está dada por

$$v(t) = \frac{d}{dt} y(t) = \int_{t_c}^t u(\sigma) d\sigma$$

y observando que el primer término del lado derecho de la ecuación es $y(t_0)$ y el segundo es $\int_{t_0}^t v(t_0) d\tau$, se concluye que

$$y(t) = y(t_0) + (t-t_0) v(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau$$

Llevando a cabo la integral del segundo término, se obtiene

$$y(t) = y(t_0) + (t-t_0) v(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} u(\sigma) d\sigma d\tau$$

De la expresión anterior se puede concluir que dos entradas, \bar{u} y \tilde{u} , son equivalentes en t_0 , si y solo si las salidas correspondientes $\bar{y}(t)$ y $\tilde{y}(t)$ junto con sus derivadas son iguales en $t = t_0$, ya que para que se satisfaga la igualdad

$$\bar{y}(t) - \tilde{y}(t) = \bar{y}(t_0) - \tilde{y}(t_0) + (t-t_0) \bar{v}(t_0) - (t-t_0) \tilde{v}(t_0) = 0$$

para cualquier $t > t_0$ es necesario y suficiente que

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}(t_0)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt}(t_0) = \frac{d\bar{y}}{dt}(t_0)$$

De esta manera, para especificar la clase a la cual pertenece una entrada, basta con determinar dos números reales $y(t_0)$ y $\frac{dy}{dt}(t_0)$. Esto es, dos segmentos de entradas (fuerzas) son equivalentes en t_0 , si tanto la posición como la velocidad de la masa en t_0 debidas a ellas son iguales, y por tanto, el sistema es de dos dimensiones, porque cada estado se identifica por dos números reales.

Sin embargo, puede hacerse una identificación distinta de los estados; así por ejemplo, si se especifican dos números reales, $\omega_1(t_0)$ y $\omega_2(t_0)$, que están relacionados con $y(t_0)$ y $\frac{dy}{dt}(t_0)$ mediante

$$\omega_1(t_0) = 3y(t_0) + \frac{dy}{dt}(t_0)$$

$$\omega_2(t_0) = y(t_0) - 4\frac{dy}{dt}(t_0)$$

dos entradas pertenecen a la misma clase cuando los valores de $\omega_1(t_0)$ y $\omega_2(t_0)$ que producen son iguales; por tanto, la representación del estado no es única.

2.5 Sistemas de parámetros distribuidos

Son aquellos en los cuales a cada estado le corresponde un segmento (o segmentos) de función y viceversa. Por ejemplo, considérese el sistema esquematizado de la fig. 2 que consiste en una banda transportadora en la cual se deposita arena mediante una tolva colocada a una distancia x del extremo de la banda, la que se mueve a velocidad v en el sentido de las manecillas del reloj.

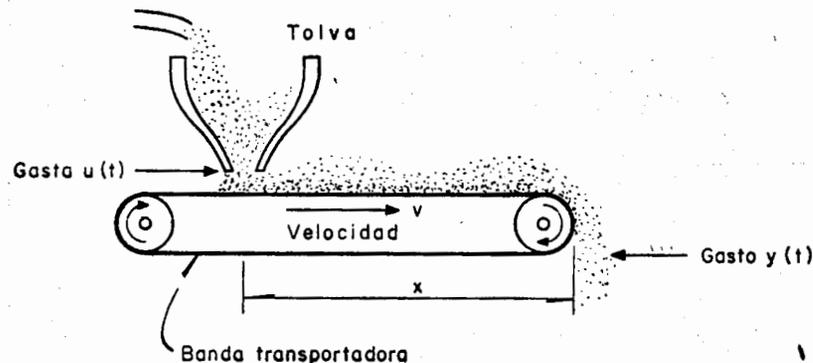


Fig 2 Sistema de parámetros distribuidos

Si se considera como entrada la función del tiempo que representa el gasto de arena en la boquilla de la tolva y la salida el gasto en el extremo derecho de la banda, la relación entrada-salida del sistema en cuestión es

$$y(t) = u\left(t - \frac{v}{x}\right)$$

porque el gasto en el extremo en un instante es igual al gasto en la tolva v/x segundos antes.

Un sistema que tiene una relación entrada-salida de la forma

$$y(t) = u(t-T)$$

se denomina retraso de T unidades, y para determinar cuándo dos entradas son equivalentes, se puede proceder así:

Se toma un tiempo arbitrario t_0 , y al observar que $y(t)$ en el intervalo $[t_0, t_0 + T]$ es una réplica desplazada de la entrada $u(t)$ en $[t_0 - T, t_0]$, entonces dos entradas serán equivalentes únicamente si coinciden en este último intervalo (fig. 3), por tanto, se requiere del segmento $u[t_0 - T, t_0]$ para especificar la clase de equivalencia de la entrada.

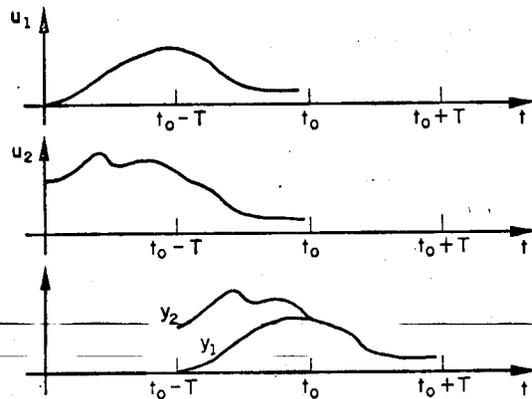


Fig 3. Las entradas u_1 y u_2 para el sistema $y(t) = u(t-T)$ pertenecen a la misma clase de equivalencia en t_0 , porque coinciden en el intervalo $[t_0 - T, t_0]$

En este libro se estudiarán con particular énfasis los sistemas en los cuales la ley de evolución de los estados se representa por una ecuación diferencial vectorial de primer orden y de la forma

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \underline{\dot{x}}(t) = \underline{f}[\underline{x}(t), u(t), t]$$

donde u es la entrada y \underline{x} es el vector de n componentes reales que representa el estado del sistema en el tiempo t . Para estos sistemas la salida $y(t)$ se da mediante una ecuación de la forma

$$y(t) = g[\underline{x}(t), u(t), t]$$

Estos sistemas son dinámicos de parámetros concentrados y de n dimensiones, que por brevedad se pueden denominar como "sistemas de n dimensiones".

3. Sistemas lineales. Sistemas invariables con el tiempo

Existen dos propiedades adicionales cuya posesión hace que el análisis de un sistema sea particularmente elegante y sencillo: linealidad e invariancia con el tiempo. Los modelos lineales e invariables con el tiempo no solo son importantes por representar una extensa clase de sistemas, sino además por el hecho de que bajo ciertas restricciones muchos otros sistemas físicos pueden aproximarse por dichos modelos.

En esta sección se supondrá que el estado se representa por un número finito (o infinito) de números reales y se hará referencia a las propiedades de linealidad e invariancia de las representaciones y no de los sistemas mismos, porque como se comentó anteriormente, la representación del estado de un sistema no es única.

Sin embargo, en algunas ocasiones se hablará, por abuso del lenguaje, de un "sistema lineal" o de uno "invariable con el tiempo", queriendo realmente decir "representación lineal de un sistema" o "representación invariable de un sistema".

3.1 Linealidad

Se dice que la representación de un sistema dinámico es lineal si para cualquier $t_0 > t_c$, todas las entrada u_1 y u_2 definidas en $[t_0, t]$, todos los estado $x_1(t_0)$ y $x_2(t_0)$ y cualquier número real k se cumple que

$$kF(x_1(t_0), u_1) + kF(x_2(t_0), u_2) = F(k[x_1(t_0) + x_2(t_0)], k[u_1 + u_2])$$

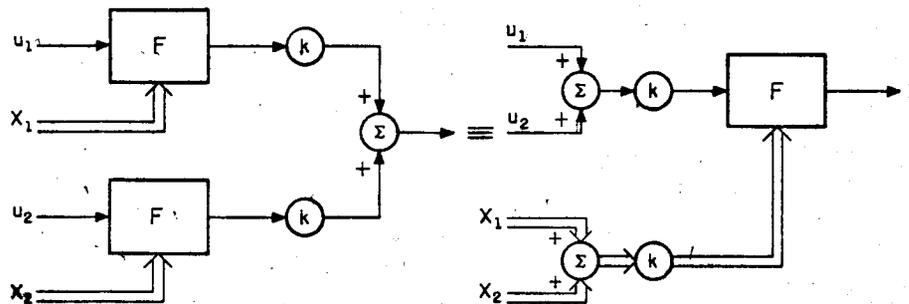


Fig 4. Condiciones para linealidad de un sistema

Se pueden deducir algunas propiedades interesantes a partir de la definición anterior que ayudarán a comprender mejor el concepto de representación lineal de un sistema.

Una primera propiedad dice que la respuesta de un sistema lineal es la suma de dos partes: una debida al estado inicial $x(t_0)$ y la otra a la entrada u . Para deducir esta propiedad basta hacer en la ecuación de la definición $k = 1, x_2(t_0) = 0, u_1 = 0, u_2 = u$, y $x_1(t_0) = x(t_0)$, con lo que resulta:

$$F[x(t_0), u] = F[x(t_0), 0] + F[0, u]$$

Los dos términos a la derecha de dicha ecuación corresponden respectivamente a la solución homogénea y a la solución particular encontradas al resolver ecuaciones diferenciales lineales.

Una segunda propiedad que se puede deducir de la definición de linealidad es que

$$F(0, u_1 + u_2) = F(0, u_1) + F(0, u_2)$$

y

$$F[x_1(t_0) + x_2(t_0), 0] = F[x_1(t_0), 0] + F[x_2(t_0), 0]$$

Estas indican que la salida debida a la suma de dos entradas, cuando el estado inicial es cero, es igual a la suma de las salidas debidas a cada una de las entradas y, además, que la salida que se obtiene con la suma de dos estados iniciales y entrada nula es igual a la suma de las salidas debidas a cada estado inicial por separado. Esta propiedad se llama *superposición o aditividad*. Por último, a partir de la definición fundamental, se obtienen las

siguientes propiedades:

$$F(0, k u_1) = k F(0, u_1)$$

y

$$F[k x(t_0), 0] = k F[x(t_0), 0]$$

que equivale a afirmar que si el estado inicial es cero, entonces al multiplicar la entrada por un escalar k se obtiene k veces la salida debida a la entrada original y de igual forma si el estado inicial se escala por un factor k con entrada cero, la salida se escala proporcionalmente. Esta propiedad se llama *homogeneidad*. Debe hacerse notar que la representación de un sistema dinámico es homogénea y aditiva, si y solo si la representación de éste es lineal.

La importancia del concepto linealidad proviene de las siguientes consideraciones:

Supóngase que para un sistema con una representación lineal se conoce la salida producida por un conjunto de n entradas u_1, u_2, \dots, u_n cuando el estado inicial $x(t_0)$ es cero, o sea, se conocen $y_i(t)$ tales que

$$y_i(t) = F(0, u_i); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y además se conocen las salidas debidas a m condiciones iniciales $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots$, cuando la entrada es cero, esto es

$$z_i(t) = F(x_i(t_0), 0); \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Supóngase ahora que se cuenta con una entrada u y un estado inicial $x(t_0)$, arbitrarios. ¿Puede entonces conocerse, a partir de las $y_i(t)$ y las $z_i(t)$, la respuesta del sistema cuando u es la entrada y $x(t_0)$ el estado inicial?.

Es decir, se desea conocer

$$y(t) = F[x(t_0), u]$$

La respuesta es afirmativa si se puede expresar u como una combinación lineal de las u_i , y $x(t_0)$ como una combinación lineal de los $x_i(t_0)$, es decir, si se pueden encontrar α_i y β_i tales que

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

$$x(t_0) = \sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t_0)$$

Si éste es el caso, entonces, utilizando las propiedades de linealidad de la representación se tendrá

$$y(t) = F[x(t_0), u] = F\left[\sum_{i=1}^m \beta_i x_i(t_0), \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right]$$

$$= \sum_{i=1}^m \beta_i F[x_i(t_0), 0] + \sum_{i=1}^n \alpha_i F(0, u_i)$$

$$= \sum_{i=1}^m \beta_i z_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$$

3.2. Invariancia con el tiempo

Algunos sistemas tienen la característica de que los análisis que se efectúan en un tiempo determinado son válidos para cualquier otro tiempo, es decir, sus propiedades son invariables con traslaciones en el tiempo.

Ejemplo:

Considérese un sistema que en el tiempo $t = 0$ se halla en el estado x_0 , y que al aplicársele la entrada u produce la salida y (fig 5).

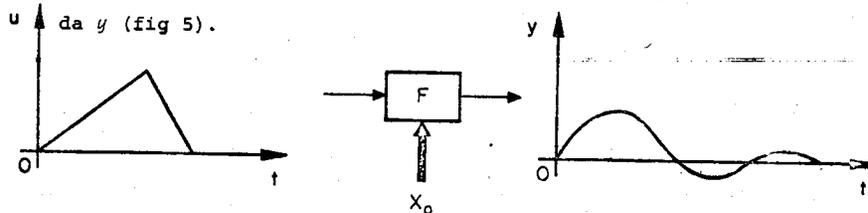


Fig 5. Salida y de un sistema a una entrada u

Por otra parte, si en el tiempo $t = T$, el sistema se halla en el estado x_0 , y se le aplica la entrada \tilde{u}

$$u(t - T) = \tilde{u}(t)$$

que produce la salida y_1 . Si la relación entre las salidas es tal que $y(t - T) = y_1(t)$ (fig 6); se dice que el sistema es *invariable con el tiempo*.

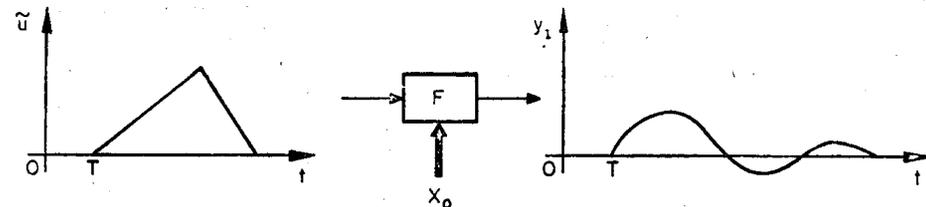


Fig 6 Efecto producido en la salida al retrasar la entrada

Para introducir formalmente el concepto *invariancia* conviene dar la definición de *retraso*.

Un sistema R_T (retraso) es aquel en el cual la relación entrada-salida es

$$y(t) = u(t - T) = R_T(u(t))$$

(ejemplo de la sec 1.5)

La representación de un sistema es *invariable con el tiempo* cuando

$$y(t) = F\{x_0, u[t_0, t]\}$$

implica

$$y(t - T) = R_T[y(t)] = F(x_0, R_T(u[x_0, t]))$$

Esto es, la salida retrasada es idéntica a la que se obtiene con la entrada retrasada (fig 7).

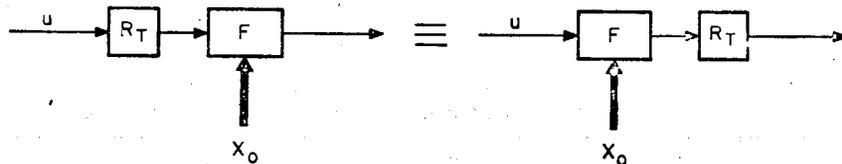


Fig 7 Sistema invariable

Ejemplo:

Tómese por caso un resorte, de constante de elasticidad K , y supóngase que la entrada es la función del tiempo que representa la fuerza aplicada al mismo y la salida es la función del tiempo que representa su elongación. Si el resorte es invariable con el tiempo, cada vez que se le aplica una fuerza δ_0 , se alargará una distancia y_0 , independientemente del instante en que se aplica la fuerza, así que

$$y_0 = \frac{\delta_0}{K}$$

Sin embargo, si se toma un resorte hecho de un material sin

tético que envejece y que por ello cambia de características (por ejemplo, su elasticidad es $K = K_0 e^{-t}$) no será invariable con el tiempo, porque una fuerza de magnitud δ_0 aplicada en $t=0$ producirá un desplazamiento:

$$y_0 = \frac{\delta_0}{K_0}$$

pero cuando otra fuerza de la misma magnitud se aplica en $t=25$, el desplazamiento será

$$y_0 = \frac{\delta_0}{K_0 e^{-25}}$$

que es diferente al caso anterior.

4. Sistemas continuos y sistemas discretos

Hasta ahora se ha considerado que la variable t puede tener cualquier valor real; y cuando éste es el caso, se dice que el sistema es *continuo*. Sin embargo, existe otro tipo de sistemas para los cuales el modelo que los representa admite que la variable t tome únicamente valores discretos, por ejemplo: $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ o bien $\{1.25, 2.50, 3.75, \dots\}$. En este caso, se dice que el sistema (o más correctamente, su modelo) es *discreto*.

Como ejemplo del último caso considérese que en un banco se deposita el primero de enero un capital C_0 . Supóngase además que dicha institución paga intereses el día último de cada mes con una tasa i sobre el capital total acumulado hasta la fecha y que éstos pasan a formar parte del capital. Si se llama 0 al mes de enero de 1972, y 1 al de febrero, etc., la ecuación que determina el capital al principio del k -ésimo mes es

$$C(k) = (1+i) C(k-1)$$

esto es, el capital en un mes determinado es igual a $(1+i)$ veces el del mes anterior.

Como se mencionó al final de la sec 1, los sistemas dinámicos que serán objeto de estudio en este texto, tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t] \\ \underline{y}(t) &= \underline{g}[\underline{x}(t), \underline{u}(t), t]\end{aligned}$$

donde x representa el estado, u la entrada y y la salida. En cuanto a la estructura correspondiente de los sistemas discretos ésta es

$$\begin{aligned}\underline{x}(t_{k+1}) &= \underline{f}[\underline{x}(t_k), \underline{u}(t_k), k] \\ \underline{y}(t_k) &= \underline{g}[\underline{x}(t_k), \underline{u}(t_k), k]\end{aligned}$$

Si el sistema dinámico es lineal, cada una de dichas estructuras toma la forma

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A}(t) \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C}(t) \underline{x}(t) + \underline{D}(t) \underline{u}(t)\end{aligned}$$

donde $\underline{A}(t)$, $\underline{B}(t)$, $\underline{C}(t)$ y $\underline{D}(t)$ son matrices y

$$\begin{aligned}\underline{x}(t_{k+1}) &= \underline{F}(t_k) \underline{x}(t_k) + \underline{G}(t_k) \underline{u}(t_k) \\ \underline{y}(t_k) &= \underline{H}(t_k) \underline{x}(t_k) + \underline{J}(t_k) \underline{u}(t_k)\end{aligned}$$

en las que a su vez $\underline{F}(t_k)$, $\underline{G}(t_k)$, $\underline{H}(t_k)$, $\underline{J}(t_k)$ también son matrices.

Finalmente, si además de la propiedad de linealidad se añade la de invariancia, se obtienen las siguientes estructuras:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) &= \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) \\ \underline{x}(t_{k+1}) &= \underline{F} \underline{x}(t_k) + \underline{G} \underline{u}(t_k) \\ \underline{y}(t_k) &= \underline{H} \underline{x}(t_k) + \underline{J} \underline{u}(t_k)\end{aligned}$$

en este último caso, cada una de las matrices es constante.

5. Sistemas dinámicos de parámetros concentrados

Aquí se verá que los sistemas continuos, en que la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ cumplen la relación dada por la ecuación diferencial*

$$y^{(n)}(t) = h [y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y(t), u(t), t] \quad (1)$$

admiten una representación mediante las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = f [x(t), u(t), t] \quad 2a$$

$$y(t) = g [x(t), u(t), t] \quad 2b$$

donde $x(t)$ es un vector de n componentes, que bajo las suposiciones de determinismo y causalidad del sistema, representará el estado en el tiempo t . De esta manera, estos sistemas son dinámicos, continuos y de dimensión n .

En forma similar, es posible demostrar que los sistemas en que la entrada $u(k)$ y la salida $y(k)$ cumplen con la ecuación de diferencias

$$y(k+n) = h [y(k+n-1), y(k+n-2), \dots, y(k), u(k), k] \quad (3)$$

pueden describirse también mediante:

* La notación $y^{(m)}(t)$ indica $\frac{d^m y(t)}{dt^m}$

$$x(k+1) = f [x(k), u(k), k]$$

$$y(k) = g [x(k), u(k), k]$$

donde $x(k)$ es un vector de n dimensiones que representa al estado del sistema en el tiempo k . Por esta razón son dinámicos y discretos de dimensión n .

Considérense inicialmente los sistemas continuos. Primero se verá que es posible escoger x_1 , de tal manera que la ec 1 sea equivalente a las ecs 2. En efecto, si éstas se definen

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = y^{(1)}(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

entonces, de la ec 1

$$y^{(n)}(t) = h [x_n(t), x_{n-1}(t), \dots, x_1(t), u(t), t]$$

Además

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = y^{(2)}(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = y^{(n)}(t) = h[x_n(t), x_{n-1}(t), \dots, x_1(t), u, t]$$

y la relación entre la salida y los estados es simplemente

$$y(t) = x_1(t),$$

por lo que la ec 1 tiene una representación de la forma de la ec 2. También, si

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = h[x_n, x_{n-1}, \dots, u, t]$$

$$y = x_1$$

implica que u y y satisfacen la ec 1, la cual se logra eliminando las variables x_i ; en efecto

$$y = x_1$$

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$y^{(n)} = \dot{x}_n = h[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, u, t]$$

reemplazando las variables x_i de las n anteriores, en la última ecuación, se obtiene

$$y^{(n)} = h[y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y, u, t]$$

o sea la ec 1.

En conclusión, las ecs 4 y 1 son equivalentes, esto es, cualquier par $\{u(t), y(t)\}$ que satisfaga la ec 1, debe hacerlo con las ecs 4 y viceversa.

Para que el sistema en cuestión sea dinámico, basta suponer que la función h es de tal naturaleza que dada cualquier entrada $u[t_c, t]$ y cualquier conjunto de n parámetros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, solamente existe una función $y[t_c, t]$ que satisface la ecuación diferencial en el intervalo $[t_c, t]$ y que, además, cumple con las condiciones

$$y(t_c) = a_1$$

$$\dot{y}(t_c) = a_2$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t_c) = a_n$$

Así pues, para describir completamente el sistema dinámico, es necesario, además de especificar la ecuación diferencial, suministrar los parámetros a_1, \dots, a_n .

No es difícil comprobar que las condiciones anteriores implican que el sistema, además de ser determinístico, es causal; en tonces, es posible definir las clases de equivalencia entre las entradas. A continuación se verá cómo existe una relación biunívoca entre estas clases en t_0 y el vector $x(t_0)$, demostrando así que éste puede representar el estado del sistema.

Antes de continuar, conviene hacer unas consideraciones preliminares a fin de facilitar la demostración:

Integrando n veces la ec 1, se obtiene que si a una entrada u le corresponde la salida y , ésta debe satisfacer las ecuaciones

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{t_c}^x h [y^{(n-1)}(\sigma_1), \dots, y(\sigma_1), u(\sigma_1), \sigma_1] d\sigma_1 + a_n$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{t_c}^x \int_{t_c}^{\sigma_2} \{ h [y^{(n-1)}(\sigma_1), \dots, y(\sigma_1), u(\sigma_1)] d\sigma_1 + a_n \} d\sigma_2 + a_{n-1}$$

$$y(x) = \int_{t_c}^x \int_{t_c}^{\sigma_n} \dots \int_{t_c}^{\sigma_2} \{ \dots [h [y^{(n-1)}(\sigma_1), \dots, y(\sigma_1), u(\sigma_1), \sigma_1] d\sigma_1 + a_n] d\sigma_2 \dots + a_2 \} d\sigma_n + a_1$$

Si el intervalo de integración a la derecha de la última

ecuación se divide de t_c a t_0 y de t_0 a t y se procede de manera similar como se hizo en el ejemplo de la sec 1.4, utilizando las ecuaciones anteriores se logra el siguiente resultado:

$$y(x) = \int_{t_c}^x \int_{t_c}^{\sigma_n} \dots \int_{t_c}^{\sigma_2} h [y^{(n-1)}(\sigma_1), \dots, y(\sigma_1), u(\sigma_1), \sigma_1] d\sigma_1 d\sigma_2 \dots \\ \dots d\sigma_n + \frac{(x-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(t_0) + \frac{(x-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} y^{(n-2)}(t_0) + \dots y(t_0) \quad (5)$$

Ahora bien, supóngase que se desea encontrar bajo qué condiciones dos entradas, $\bar{u}[t_c, \infty]$ y $\bar{u}[t_c, \infty]$, pertenecen a la misma clase de equivalencia en el tiempo t_0 . Para ello deben formarse dos entradas

$$\bar{u}[t_c, \infty] = \bar{u}[t_c, t_0] + \bar{u}[t_0, \infty]$$

$$\bar{u}[t_c, \infty] = \bar{u}[t_c, t_0] + \bar{u}[t_0, \infty]$$

con $\bar{u}[t_0, \infty]$ arbitraria.

De acuerdo con la definición, \bar{u} y \bar{u} son equivalentes si $\bar{u}[t_0, \infty]$

y $\bar{u}[t_0, \infty]$, las salidas asociadas a \bar{u} y \bar{u} , respectivamente, son iguales.

Conforme la ec 5, se tendrá que

$$\bar{y}(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\sigma_2} h[\bar{y}^{(n-1)}(\sigma_1), \dots, \bar{y}(\sigma_1), \bar{\omega}(\sigma_1), q] d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$\dots d\sigma_n + \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \bar{y}^{(n-1)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} \bar{y}^{(n-2)}(t_0) + \dots + \bar{y}(t_0) \quad (6)$$

y también

$$\bar{y}(t) = \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{\sigma_2} h[\bar{y}^{(n-1)}(\sigma_1), \dots, \bar{y}(\sigma_1), \bar{\omega}(\sigma_1), \sigma_1] d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$\dots d\sigma_n + \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \bar{y}^{(n-1)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} \bar{y}^{(n-2)}(t_0) + \dots + \bar{y}(t_0) \quad (7)$$

Si se impone la condición de que $\bar{y}(t) = \bar{y}(t)$, para $t > t_0$ las integrales de las dos ecuaciones anteriores son iguales porque en el intervalo de integración $[t_0, t]$ se cumple que

$$y(t) = \bar{y}(t)$$

$$\bar{\omega}(t) = \bar{\omega}(t) = r(t)$$

Así pues, si se restan las ecs 6 y 7 se obtiene que para toda t debe cumplirse la igualdad

$$0 = \frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} [\bar{y}^{(n-1)}(t_0) - \bar{y}^{(n-1)}(t_0)] + \frac{(t-t_0)^{n-2}}{(n-2)!} [\bar{y}^{(n-2)}(t_0) - \bar{y}^{(n-2)}(t_0)]$$

$$\dots + [\bar{y}(t_0) - \bar{y}(t_0)]$$

lo que es equivalente a las siguientes condiciones:

$$\bar{y}(t_0) = \bar{y}(t_0)$$

$$\bar{y}^{(1)}(t_0) = \bar{y}^{(1)}(t_0)$$

⋮

$$\bar{y}^{(n-1)}(t_0) = \bar{y}^{(n-1)}(t_0)$$

con lo cual se demuestra que la clase de equivalencia en t_0 de una entrada queda especificada mediante los valores de la salida y sus $n-1$ primeras derivadas en el instante t_0 .

Ahora bien, como para obtener la representación de la ec 1 mediante las ecs 4 se hizo la identificación

$$x_i(t) = y^{(i)}(t)$$

se concluye que el vector $\underline{x}(t)$, representa el estado del sistema en el tiempo t .

Para los sistemas descritos por la ec 3, puede hacerse un razonamiento similar al empleado para los sistemas continuos.

Cuando la función h es de la forma

$$h[y^{(n-1)}(t), y^{(n-2)}(t), \dots, y(t), u(t), t] =$$

$$= a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t) y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0(t) y(t) + b(t) u(t)$$

la representación del sistema en variables de estado puede estructurarse como

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)u(t)$$

$$y(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t)$$

lo que se verá a continuación:

De las ecs 4, para el caso particular considerado

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$$

$$\dot{x}_n(t) = a_{n-1}(t)x_n(t) + a_{n-2}(t)x_{n-1}(t) + \dots + a_0(t)x_1(t) + b(t)u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \dots a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Cuando los coeficientes a_i y b son constantes, las matrices \underline{A} , \underline{B} y \underline{C} también lo son y se obtiene un sistema lineal e invariable con el tiempo como será demostrado en capítulos posteriores.

A lo largo de este capítulo se ha considerado que tanto las entradas como las salidas son escalares debido a la facilidad de exposición.

Todos los argumentos que se han presentado para el caso escalar pueden extenderse sin ninguna dificultad al caso vectorial; esto es, cuando la entrada y la salida (o ambos) son funciones vectoriales del tiempo.

Capítulo 4

MODELADO DE SISTEMAS

1. INTRODUCCION

En el capítulo anterior se definieron los sistemas dinámicos y se introdujeron los conceptos de linealidad e invariancia con el tiempo. En este se presentarán algunos ejemplos de la obtención de modelos de sistemas físicos poniendo énfasis en el concepto de estado. La mayoría de los casos tratados corresponden a sistemas lineales invariables con el tiempo, y de parámetros concentrados.

No se pretende en este capítulo dar una descripción profunda del proceso de modelado para cada uno de los sistemas a tratar: eléctricos, mecánicos, hidráulicos, etc, pues el objetivo de los cursos correspondientes a cada una de estas disciplinas es precisamente desarrollar las técnicas de modelado.

Los sistemas que analizaremos (y en general todos los sistemas) están compuestos por *elementos* interconectados, y el ingeniero se interesa en saber cómo el valor de ciertas variables asociadas a ellos (voltaje, velocidad, temperatura, etc) cambian en función del tiempo cuando se aplica al sistema una entrada para cada elemento existen leyes físicas que pueden representarse por relaciones matemáticas entre las variables asociadas a ese elemento. Dichas leyes se denominarán *leyes de elemento*. Además de estas existen otras, llamadas de *conjunto*, que relacionan variables de diferentes elementos cuando estos forman parte de un sistema.

De acuerdo a lo tratado en el cap 2 los modelos en variables de estado de los sistemas de parámetros concentrados, toman la forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1 [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t] \\ \dot{x}_2(t) &= f_2 [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n(t) &= f_n [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t] \\ y(t) &= g [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t), t] \end{aligned} \quad (2)$$

en donde u representa la entrada y y la salida. Las variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ llamadas comúnmente *variables de estado* representan el estado del sistema en el tiempo t . Nótese que cada variable x_i aparece derivada del lado izquierdo de alguna de las ecs 1 y que en el lado derecho aparecen funciones de $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u(t)$ y t . Además, el valor de la salida en el tiempo

t , $y(t)$, es una función de los valores de las variables de estado en t y el de la entrada ese instante.

En este capítulo se verá cómo construir modelos que tengan la forma de las ecs 1 y 2 para algunos sistemas físicos a partir de las leyes de los elementos y las leyes de conjunto.

2. Sistemas eléctricos

Uno de los tipos de sistemas que se tratarán brevemente, es el llamado eléctrico, en el cual las variables de interés son voltaje, corriente, flujo, carga, etc. Aunque existen muchos elementos (o componentes) eléctricos, nuestra presentación se reducirá a los más simples: resistencias, capacitancias e inductancias, considerándose únicamente dos variables asociadas a estos elementos: voltaje y corriente.

2.1 Resistencia

La representación gráfica de este elemento corresponde a la que se presenta en la fig 1.

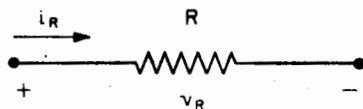


Fig 1. Representación gráfica de una resistencia

donde v_R es la caída del voltaje en el elemento, e i_R la corriente a través de él. La ley que relaciona estas dos variables para el caso de una resistencia lineal R es la ley de Ohm, que dice:

$$v_R = i_R R \tag{3}$$

Entonces, si se toma i_R como la entrada y v_R como la salida,

se ve claramente que el sistema (de un elemento en este caso) es lineal. Además, debido a que para cualquier valor de i_R se puede conocer v_R sin necesidad de ningún antecedente de las entradas pasadas, este elemento (o sistema) es algebraico.

2.2 Capacitancia o capacitor

Se presenta gráficamente conforme la fig 2.

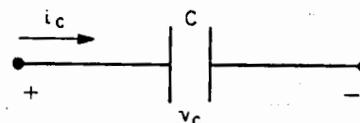


Fig 2. Representación gráfica de una capacitancia

La ley que relaciona la corriente que circula a través de él (i_c) con la caída de voltaje en el elemento es

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \tag{4}$$

donde C es el valor de la capacitancia. Si se considera nuevamente a la corriente, en este caso i_c , como la entrada y v_c como la salida, y debido a que para determinar v_c de la ecuación diferencial de primer orden, es indispensable conocer su condición inicial, entonces $v_c(t_0)$, o sea el voltaje en el instante t_0 , resumiría los efectos de entradas pasadas que son relevantes para encontrar los valores de v_c a partir de t_0 , debidos a una entrada i_c desde el instante indicado. Resumiendo lo anterior, se puede

decir que, la variable v_c representa el estado de la capacitancia.

2.3 Inductancia o inductor

La representación gráfica de este elemento se indica en la fig 3.

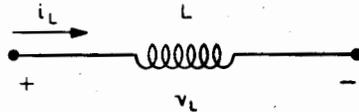


Fig 3. Representación gráfica de una inductancia

Las dos variables que intervienen en su modelo matemático están relacionadas por la ecuación.

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (5)$$

donde L es el valor de la inductancia. Con el mismo tipo de razonamiento que se hizo en el caso de la capacitancia, puede verse que la variable $i_L(t_0)$ representa el estado de dicho elemento en el instante t_0 .

Cabe señalar, que si no se hubieran escogido las corrientes y los voltajes como variables, sino otras tales como la carga (en el capacitor) y el flujo Φ (en el inductor), las leyes propias de cada elemento hubieran sido diferentes, pero también válidas.

A partir de interconexiones de elementos eléctricos se integra un sistema de tipo eléctrico, y las leyes de conjunto que relacionan las variables de los diversos elementos son las leyes de Kirchhoff:

Ley de corrientes: (LCK) La suma algebraica de las corrientes que llegan a un nodo (punto de conexión de elementos) debe ser nula.

Ley de voltajes: (LVK) La suma algebraica de las caídas de potencial alrededor de una malla cerrada debe ser cero.

Con las descripciones anteriores se está en condición de plantear las ecuaciones de un sistema eléctrico.

2.4 Ejemplo

Supóngase que se cuenta con un conjunto de elementos eléctricos interconectados (circuito) como se indica en la fig 4.,

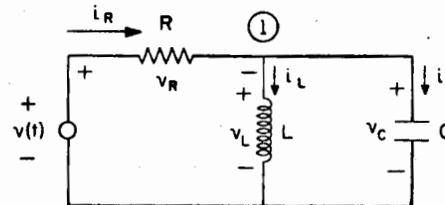


Fig 4. Un circuito eléctrico

y se quiere conocer la corriente i_R que pasa por la resistencia

a partir de cierto instante $t = 0$; además se supone que se sabe el valor del voltaje de la fuente a partir del instante $t = 0$, esto es, $v(t)$ para $t > 0$.

Antes de proseguir conviene hacer una observación que no solamente es válida para este caso particular: si se determina la manera en que los estados iniciales y las entradas afectan los estados futuros, será posible determinar el valor de las variables de estado del sistema para cualquier tiempo futuro. Como estas han sido escogidas apropiadamente, entonces la salida en un instante dado debe ser una función de los valores de la entrada y las variables de estado en ese instante.

Con el comentario del párrafo anterior, se tratará de seleccionar unas variables de estado del circuito en cuestión, determinar las ecuaciones que las rigen y por último, expresar la salida (i_R) como una función algebraica de los estados y la entrada (en este caso $v(t)$).

Escójanse v_c e i_L como las posibles variables de estado, entonces, de las leyes que rigen los elementos (ecs 3, 4 y 5), se obtienen las siguientes relaciones:

$$v_R = i_R R$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Ahora, de las leyes de Kirchoff de corriente y voltaje se derivan las ecuaciones que interrelacionan las variables de los elementos. Tomando la malla del lado izquierdo del circuito se obtiene

$$v(t) = v_R + v_L \quad (1)$$

y de la malla del lado derecho

$$v_c = v_L \quad (2)$$

del nodo 1 de la fig 4

$$i_R = i_c + i_L \quad (3)$$

Las seis ecuaciones pueden manipularse para eliminar todas las variables a excepción de i_L , v_c y $v(t)$. En efecto, de (1), (2) y (3) se p. de

$$v(t) = i_R R + v_c = (i_c + i_L) R + v_c$$

con (2) se obtiene

$$v(t) = RC \frac{dv_c}{dt} + i_L R + v_c$$

y además con (3) y (5)

$$v_c = L \frac{di_L}{dt}$$

Las dos últimas ecuaciones son las del estado del sistema, porque la derivada de cada una de las variables v_c e i_L es función exclusiva de la entrada y ellas mismas, y la salida, i_R , puede expresarse en función de la entrada y las variables de estado como:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{v(t) - v_L}{R} = \frac{v(t) - v_c}{R}$$

con lo cual quedaría resuelto el problema de modelado, ya que si se conocen los valores iniciales de v_c e i_L , se puede en principio encontrar las funciones $v_c(t)$ e $i_L(t)$. De estas, y mediante una relación algebraica, es factible determinar el valor de la salida i_R .

Las últimas tres ecuaciones pueden expresarse de tal manera que tengan la estructura de un sistema dinámico lineal como se expresó en 1, así

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{RC} v_c - \frac{i_L}{C} + \frac{1}{RC} v(t)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{v_c}{L}$$

$$i_R = \frac{1}{R} v(t) - \frac{1}{R} v_c$$

y en forma matricial

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} v(t)$$

$$i_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \end{bmatrix} v(t)$$

3. Sistemas mecánicos traslacionales en una dimensión

Este es el segundo tipo de sistemas que se describirá brevemente, e igual que para el sistema eléctrico, se verán únicamente tres elementos (masa, resorte y amortiguador viscoso), sin que esto implique que son los únicos existentes (hay otros elementos mecánicos: engranes, poleas, planchas, etc). Se considerarán en la formulación que sigue dos variables fundamentales: fuerza y velocidad, y se darán las leyes de los tres elementos mencionados, como relaciones entre estas dos variables.

3.1 Masa

Se representa gráficamente conforme la fig 5.

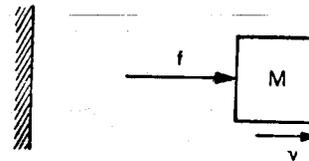


Fig 5. Representación gráfica de una masa

Las dos variables asociadas a este elemento, fuerza neta aplicada f y velocidad relativa v (con respecto a un eje de referencia) están relacionada mediante

$$M \frac{d v(t)}{d t} = f(t)$$

donde M es el valor de la masa. Si se considera f como la entrada y v como la salida, para encontrar la respuesta debida a cierta entrada es necesario conocer la velocidad inicial en el momento en el que se aplica la fuerza; por ello, la velocidad inicial $v(t_0)$ es una variable que representa el estado de la masa en t_0 .

3.2 Resorte

Este elemento se representa como en la fig 6

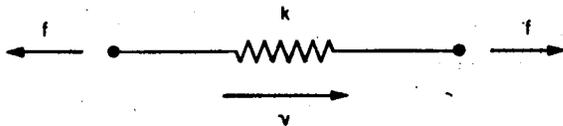


Fig 6. Representación gráfica de un resorte

donde f es la fuerza aplicada entre los extremos del mismo y v es la velocidad relativa con que se mueven estos; k es la constante del resorte. La ley que relaciona las dos variables es

$$kv = \frac{df}{dt}$$

Si se considera v como la entrada y f como la salida, puede verse fácilmente que debe conocerse $f(t_0)$, o sea la fuerza que inicialmente ejercía el resorte, para encontrar el valor de f para $t > t_0$. Así que $f(t_0)$ representa el estado del resorte en t_0 .

3.3 Amortiguador

Es un elemento mecánico cuya representación gráfica se muestra en la fig 7

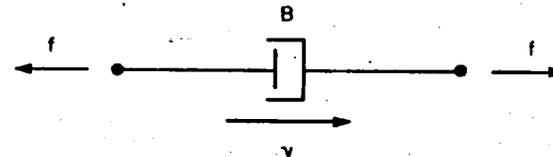


Fig 7. Representación gráfica de un amortiguador viscoso

donde tanto v como f tienen el mismo significado que en el caso del resorte. La relación entre las variables es

$$f = Bv$$

donde B es el valor del amortiguador. Debe notarse que este elemento es amnésico, porque si se considera f como la entrada y v como la salida, el valor de esta para $t > t_0$ es independiente de los valores de aquella previos a t_0 .

El comentario posterior a las definiciones de los elementos eléctricos, es también válida aquí. Es decir que se hubiera podido seleccionar otro par de variables (tales como fuerza y desplazamiento) para describir las leyes de los elementos.

En los sistemas mecánicos traslacionales, las leyes que relacionan las variables de los elementos interconectados son: tercera ley de Newton, que dice: "si un elemento, A, ejerce una fuerza sobre otro elemento, B, este ejerce una fuerza opuesta y de igual magnitud sobre el elemento A", y la suma algebraica de las velocidades relativas alrededor de una malla es cero.

A continuación se presentará un problema de modelado de un sistema mecánico.

3.4 Ejemplo

Supóngase que se cuenta con un sistema como el de la fig 8. Se desea conocer el desplazamiento de la masa cuando se aplica una fuerza $f(t)$ a partir de $t = t_0$.

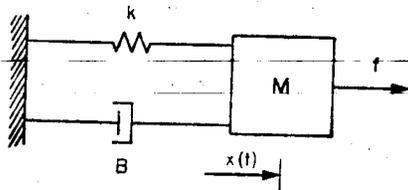


Fig 8. Un sistema mecánico

Los diagramas de cuerpo libre de los elementos se muestran en la fig 9.

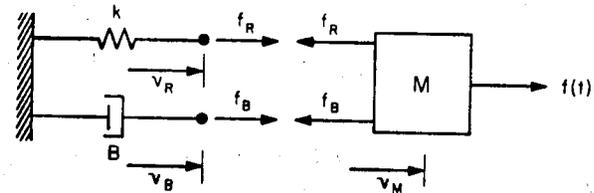


Fig 9. Diagrama de cuerpo libre del sistema de la fig 8

De las leyes de los elementos se obtiene:

para la masa

$$M \frac{dv_M}{dt} = f(t) - f_R - f_B$$

para el resorte

$$\frac{df_R}{dt} = kv_R$$

y para el amortiguador

$$f_B = Bv_B$$

además

$$v_R = v_B = v_M = v$$

De las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\delta_R}{M} - \frac{Bv}{M} + \frac{f(t)}{M} \quad (6)$$

$$\frac{d\delta_R}{dt} = kv \quad (7)$$

La salida $x(t)$ está relacionada con δ_R y $\delta(t)$ mediante la ecuación

$$x(t) - x(t_0) = \frac{1}{k} [\delta_R(t) - \delta_R(t_0)]$$

la cual se obtiene al integrar la relación

$$\frac{d\delta_R}{dt} = kv = k \frac{dx}{dt}$$

y como inicialmente $x(t_0) = \frac{1}{k} \delta(t_0)$, entonces

$$x(t) = \frac{\delta_R(t)}{k}$$

De esa manera, las variables δ_R y v representan el estado del sistema, porque si se conocen sus valores en $t = t_0$ y $\delta(t)$ a partir de ese instante, mediante las ecuaciones diferenciales 6 y 7 puede en principio determinarse $v(t)$ y $\delta_R(t)$ para $t > t_0$; además, la salida $x(t)$ es una función algebraica de $\delta_R(t)$.

Si se hubiese seleccionado a $\delta_B(t)$ como la salida, o sea la fuerza que opone el amortiguador al movimiento de la masa, la representación del estado del sistema por medio de δ_R y v , seguiría siendo adecuada, ya que δ_B es la función de $v(t)$

$$\delta_B(t) = B v(t)$$

4. Sistemas mecánicos rotacionales

Como en los sistemas anteriores, también para estos únicamente se consideran tres elementos y se tomarán como variables fundamentales asociadas a estos el par torsional (T) y la velocidad angular (ω).

4.1 Inercia

La fig 10 la representa gráficamente

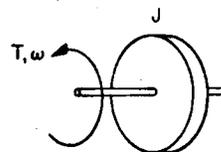


Fig 10. Representación gráfica de una inercia

Las dos variables asociadas a este elemento, el par torsional neto y la velocidad angular, están relacionadas por medio de:

$$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

donde J es el valor de la inercia.

Si se considera $T(t)$ como la entrada y $\omega(t)$ como la salida, para encontrar la respuesta debida a cierta entrada es necesario conocer la velocidad angular en el instante t_0 , en que se aplica el par torsional, por ello la velocidad inicial $\omega(t_0)$ es una variable que representa el estado de la inercia en t_0 .

4.2 Resorte

Considérese una flecha como la de la fig 11.

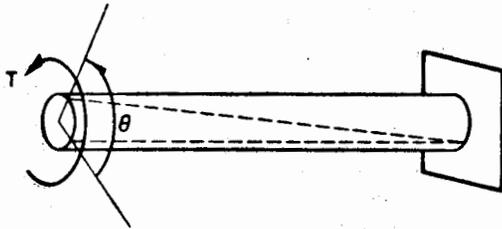


Fig 11. Flecha actuando como resorte torsional

El lado derecho de la flecha se desplaza un ángulo, θ , con respecto al izquierdo, debido al par T_1 . Este tipo de elemento será modelado como un resorte torsional y se representa gráficamente conforme a la fig 12.

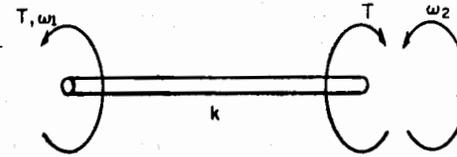


Fig 12. Representación gráfica de un resorte torsional

donde

$$\omega(t) = \omega_1 - \omega_2$$

es la velocidad relativa entre los dos extremos del resorte torsional. Las variables asociadas al elemento, el par torsional en los extremos y la velocidad angular relativa, están relacionadas mediante

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[\omega_1(t) - \omega_2(t)]$$

Si se considera $\omega(t)$ como entrada y $T(t)$ como la salida, para encontrar la respuesta debida a cierta entrada es necesario conocer el par torsional en el instante t_0 en que se aplica la velocidad angular relativa $\omega(t)$; por esto el par torsional inicial, $T(t_0)$, es una variable que representa el estado del resorte torsional en el instante t_0 .

4.3 Amortiguamiento

Existe una serie de elementos que sostienen una flecha (chumaceras, baleros, soportes, etc) en los que se produce un par torsional, que se opone al movimiento y que es función de la velocidad angular de ella. Se supondrá que el par resistivo es proporcional a la diferencia de velocidades angulares entre elementos. Esto es cierto en el caso de juntas con lubricación en las cuales el fluido está en el régimen viscoso. Este elemento se llamará *amortiguamiento torsional* y puede representarse gráficamente como en la fig 13.

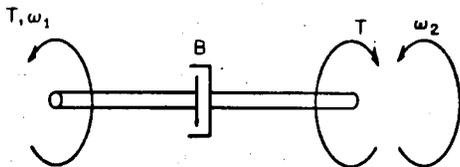


Fig 13. Representación gráfica de un amortiguamiento torsional

Las variables asociadas al elemento, par torsional y velocidades angulares de los extremos, están relacionadas mediante:

$$T = B(\omega_1 - \omega_2)$$

En los sistemas mecánicos rotacionales, las leyes que relacionan las variables de los diferentes elementos, esto es, las leyes de conjunto, son: la tercera ley de Newton aplicada a los sistemas mecánicos rotacionales, o sea que si un elemento A, ejerce un

par sobre un elemento B, este ejerce sobre A otro par de igual magnitud y sentido contrario; y la suma algebraica de las velocidades relativas alrededor de una malla es cero.

4.4 Ejemplo

Considérese el sistema esquematizado en la fig 14

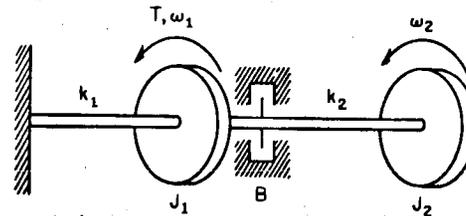


Fig 14. Sistema mecánico rotacional

Se desea conocer la velocidad angular ω_2 de la inercia J_2 cuando se aplica un par torsional T a la inercia J_1 .

En la fig 15 se presentan los diagramas de cuerpo libre de los cinco elementos que forman el sistema

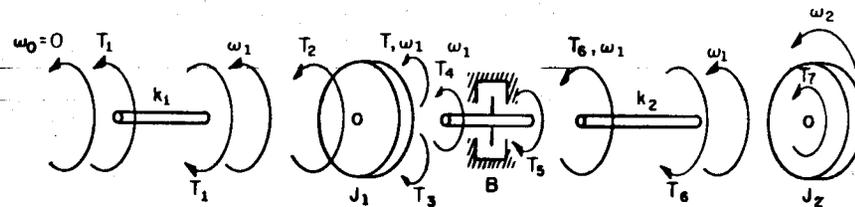


Fig 15. Diagramas de cuerpo libre de los elementos del sistema mecánico de la fig 14

De dicha figura, es factible obtener las relaciones entre las variables asociadas a cada elemento:

para el resorte k_1

$$\frac{dT_1}{dt} = -k_1 \omega_1 \quad (8)$$

para la inercia J_1

$$T + T_2 - T_3 = J_1 \frac{d\omega_1}{dt} \quad (9)$$

para el amortiguador B

$$T_4 - T_5 = B \omega_1 \quad (10)$$

para el resorte k_2

$$\frac{dT_6}{dt} = k(\omega_1 - \omega_2) \quad (11)$$

para la inercia J_2

$$T_7 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} \quad (12)$$

De acuerdo con las leyes de conjunto, se obtienen las siguientes relaciones:

$$T_1 = T_2 \quad (13)$$

$$T_3 = T_4 \quad (14)$$

$$T_5 = T_6 \quad (15)$$

$$T_6 = T_7 \quad (16)$$

Como $T(t)$ es la entrada y $\omega_2(t)$ la salida, deben escogerse unas variables que representen el estado de tal manera que la relación entre T y ω_2 tenga la estructura:

$$\frac{dx}{dt} = \underline{A} x(t) + \underline{B} T(t)$$

$$y(t) = \omega_2(t) = \underline{C} x(t)$$

Si se seleccionan las variables T_1 , ω_1 , T_6 y ω_2 como las que representan los estados, es posible eliminar todas las demás a excepción de $T(t)$ que representará la entrada. De esta manera se obtiene:

de las ecs 9, 10, 13, 14 y 15

$$T + T_1 - T_6 - B \omega_1 = J \frac{d\omega_1}{dt} \quad (17)$$

y de las ecs 12 y 16

$$T_6 = J_2 \frac{d\omega_2}{dt} \quad (18)$$

Las ecs 8, 11, 17 y 18 son las ecuaciones de estado del sistema, que puestos en forma matricial, son

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_1 \\ \omega_1 \\ T_6 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_1} & \frac{B}{J_1} & \frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \omega_1 \\ T_6 \\ \omega_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T$$

y la relación entre el estado y la salida resulta

$$y = \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ \omega_1 \\ T_6 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

5. Sistemas hidráulicos y neumáticos

En este tipo de sistemas se consideran únicamente dos variables: gasto, q , y presión, P . Los elementos que se describirán son: resistencia y capacitancia fluidica.

5.1 Resistencia fluidica

Al tenerse un ducto, orificio, etc, con presiones P_1, P_2 en

sus extremos, se establece un flujo o gasto q que es función de P_1 y P_2 . Supóngase aquí que esta relación entre flujo y diferencia de presiones es lineal

$$q = \frac{1}{R} (P_2 - P_1)$$

Este tipo de elemento será llamado "resistencia" y su valor es R ; la representación que será utilizada corresponde a la fig 16.



Fig 16. Representación gráfica de una resistencia fluidica

5.2 Capacitancia fluidica

Otro efecto en sistemas hidráulicos o neumáticos es el que presenta un tanque de gas cuya presión crece al incrementarse el número de moles de gas almacenadas en él, o por un tinaco en cuyo fondo la presión aumenta al crecer el volumen de agua almacenada en él (fig 17)

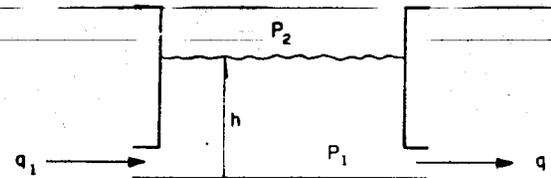


Fig 17. Representación gráfica de una capacitancia fluidica

La ley que relaciona las variables asociadas al elemento es

$$q_1 - q_2 = C_f \frac{d}{dt} (P_1 - P_2)$$

donde C_f es la capacitancia fluidica.

Cabe hacer notar que el nivel del fluido en el elemento es proporcional a la diferencia de presión, $P_1 - P_2$, esto es, $h = (1/\alpha)(P_1 - P_2)$, por lo que la ley de elemento también se puede escribir:

$$\alpha C_f \frac{dh}{dt} = q_1 - q_2$$

donde h es el nivel de fluido en el tanque.

Las leyes de conjunto para los sistemas fluidicos y neumáticos se derivan de las leyes de balance de presiones y conservación de masa. Con la selección de las variables q y P equivalen a

- i) La suma algebraica de los gastos en un nodo es cero
- ii) La suma algebraica de las caídas de presión alrededor de una malla es cero.

5.3 Ejemplo

Considérese el sistema hidráulico representado en la fig 18

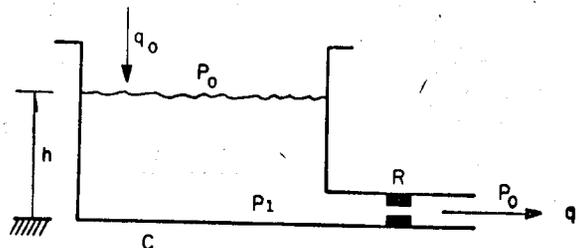


Fig 18. Un sistema hidráulico

Si se considera q_0 como la entrada y h la salida, las leyes de los elementos junto con las de conjunto dan las siguientes ecuaciones

para la capacitancia

$$q_0 - q_1 = C \frac{d(P_1 - P_0)}{dt}$$

para la resistencia

$$q_1 = \frac{1}{R} (P_1 - P_0)$$

Sustituyendo q_1 de la segunda ecuación en la primera, se obtiene

$$\frac{d(P_1 - P_0)}{dt} = -\frac{1}{CR} (P_1 - P_0) + \frac{1}{C} q_0$$

y la salida h está relacionada con $P_1 - P_0$ mediante la ecuación

$$y(t) = q_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

6. Sistemas térmicos

En los sistemas térmicos, dos de las variables que se pueden considerar son: temperatura, T , y flujo de calor, Q . Solamente se tomarán en cuenta dos tipos de elementos: resistencias y capacitancias térmicas.

6.1 Resistencia térmica

El flujo de calor a través de una resistencia térmica, cuyos extremos se mantienen a diferente temperatura (fig 20) está dada por

$$Q = \frac{1}{R_t} (T_1 - T_2)$$

Esta es la idealización del flujo de calor a través de un cuerpo que tiene un calor específico muy bajo

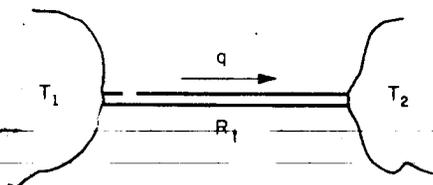


Fig 20. Representación de una resistencia térmica

6.2 Capacitancia térmica

No solo puede haber flujo de calor a través de los cuerpos, sino es factible que estos almacenen calor, dando como resultado un aumento de temperatura en el cuerpo. El cambio de temperatura de un cuerpo de masa M , cuando recibe un flujo neto de calor Q , está dado por

$$M c_p \frac{dT}{dt} = Q$$

donde c_p es el calor específico del cuerpo y T su temperatura. La cantidad $C_t = M c_p$ se denomina capacitancia térmica (fig 21).

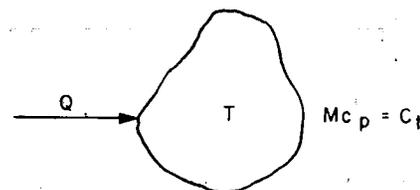


Fig 21. Capacitancia térmica

En estos sistemas, las leyes de conjunto son: la de balance de energía, que equivale a decir que en la interfase entre dos elementos el flujo de calor que emana de un cuerpo es igual al flujo de calor que recibe el otro cuerpo, y las caídas de temperatura al rededor de una malla cerrada es cero.

6.3 Ejemplo

Considérese el sistema térmico representado en la fig 22

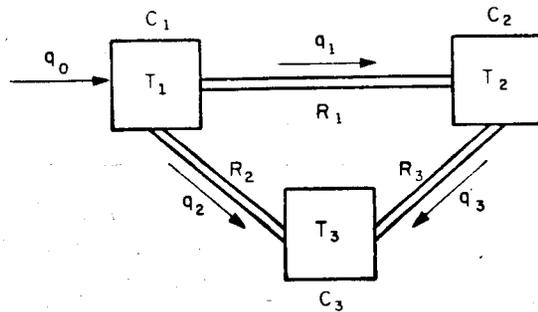


Fig 22. Un sistema térmico

que consiste en tres capacitancias térmicas interconectadas mediante tres resistencias. Si la entrada es un flujo de calor $q_0(t)$, se desea conocer el flujo de calor q_3 .

Las relaciones entre las variables indicadas en la fig 22 se deducen de las leyes de elementos y de la ley de conjunto. Así, para las capacitancias térmicas se obtiene

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = q_0 - q_1 - q_2$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = q_1 - q_3$$

$$C_3 \frac{dT_3}{dt} = q_2 + q_3$$

y para las resistencias térmicas

$$\frac{1}{R_1} (T_1 - T_2) = q_1$$

$$\frac{1}{R_2} (T_1 - T_3) = q_2$$

$$\frac{1}{R_3} (T_2 - T_3) = q_3$$

Al eliminar las variables q_1 , q_2 y q_3 se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dT_1}{dt} = -\frac{1}{C_1 R_1} (T_1 - T_2) - \frac{1}{C_1 R_2} (T_1 - T_3) + \frac{1}{C_1} q_0$$

$$\frac{dT_2}{dt} = +\frac{1}{C_2 R_1} (T_1 - T_2) - \frac{1}{C_2 R_3} (T_2 - T_3)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = +\frac{1}{C_3 R_2} (T_1 - T_3) + \frac{1}{C_3 R_3} (T_2 - T_3)$$

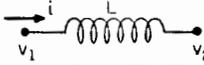
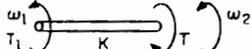
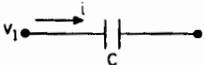
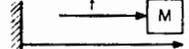
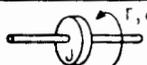
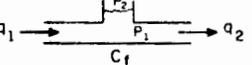
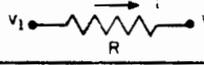
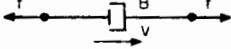
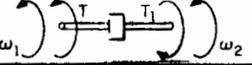
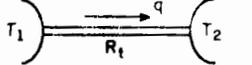
Así que si se conocen T_1 , T_2 y T_3 en un instante dado y la entrada, $q_0(t)$, a partir de ese instante, pueden conocerse T_1 , T_2 y T_3 en instantes posteriores, y como el flujo de calor q_3 , que se ha tomado como la salida, está dado por

$$q_3 = \frac{1}{R_3} (T_2 - T_3)$$

podrá determinarse a partir del conocimiento de T_2 y T_3 . De esta manera, las temperaturas de las capacitancias térmicas representan el estado del sistema.

Las leyes de elementos para sistemas mecánicos, eléctricos, de fluidos y térmicos pueden resumirse en la tabla 1.

TABLA 1. RESUMEN DE LAS LEYES DE ELEMENTO

TIPO DE ELEMENTO	ELEMENTO FISICO	ECUACION REPRESENTATIVA	SIMBOLO
INDUCTANCIA	INDUCTANCIA ELECTRICA	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	
	RESORTE TRASLACIONAL	$v_{21} = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$	
	RESORTE ROTACIONAL	$\omega_{21} = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	
CAPACITANCIA	CAPACITANCIA ELECTRICA	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	
	MASA	$f = M \frac{dv}{dt}$	
	INERCIA	$T = J \frac{d\omega}{dt}$	
	CAPACITANCIA FLUIDICA	$q_{21} = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	
	CAPACITANCIA TERMICA	$Q = C_t \frac{dT}{dt}$	
RESISTENCIA	RESISTENCIA ELECTRICA	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	
	AMORTIGUADOR TRASLACIONAL	$f = B v_{21}$	
	AMORTIGUADOR ROTACIONAL	$T = B\omega_{21}$	
	RESISTENCIA FLUIDICA	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	
	RESISTENCIA TERMICA	$Q = \frac{1}{R_t} T_{21}$	

Donde:

F	fuerza
T	par y temperatura*
i	corriente
q	gasto,
v	velocidad traslacional, voltaje*
ω	velocidad angular
P	presión
L	inductancia
k	constante de resorte
C	capacitancia
M	masa
J	momento de inercia
C _f	capacitancia de fluido
C _t	capacitancia térmica
R	resistencia eléctrica
B	fricción viscosa
R _f	resistencia fluidica
R _t	resistencia térmica
Q	flujo de calor

* Los símbolos T y v se utilizan para indicar variables distintas, pero su significado está implícito en el contexto que aparezcan.

El subíndice 21 indica diferencia, por ejemplo ω_{21} es la diferencia de velocidades angulares $\omega_1 - \omega_2$

7. Modelos no lineales

En las secciones anteriores se han presentado ejemplos de elaboración de modelos para algunos tipos de sistemas físicos. En todos los casos tratados se ha considerado que la relación entre las variables asociadas a cada elemento es una función lineal. Es un hecho, sin embargo, que en el mundo físico dichas relaciones, en su mayoría, son no lineales y por tanto los modelos que representarían fidedignamente el comportamiento físico deberían ser de este tipo.

A modo de ejemplo se presenta un sistema no lineal, en el cual dos de sus elementos incluyen características no lineales.

7.1 Ejemplo de un sistema no lineal

Considérese el sistema físico de la fig 23

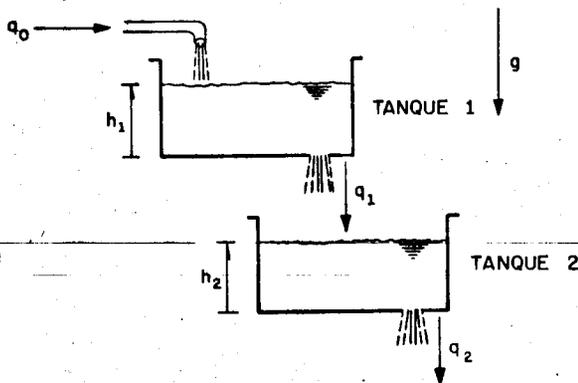


Fig 23. Sistema hidráulico

que consiste de dos tanques idénticos colocados en cascada, que tienen una situación horizontal de área constante.

Por una tubería se descarga al primer tanque cierto líquido (por ejemplo, agua) con un gasto de $q_0(t)$ unidades/seg. Dicho tanque tiene un orificio en la parte inferior por el cual fluye el líquido al segundo depósito con un gasto de $q_1(t)$ unidades/seg. Además hay una descarga del segundo tanque de $q_2(t)$ unidades/seg. Si se considera $q_0(t)$ como la entrada y $h_2(t)$ (la altura del líquido en el segundo depósito) como la salida, se desea construir un modelo que describa el comportamiento del sistema.

Se tiene además que la naturaleza de los orificios es tal que la relación entre la diferencia de presiones a los gastos están relacionadas mediante las ecuaciones no lineales:

$$q_1(t) = k\sqrt{P_1(t) - P_0} \quad (19)$$

$$q_2(t) = k\sqrt{P_2(t) - P_0} \quad (20)$$

donde

k constante que depende de la geometría del sistema

P_1 y P_2 presiones en las partes inferiores de los tanques 1 y 2 respectivamente

P_0 presión externa

La relación entre las presiones P_1 y P_2 y las alturas del

líquido en cada tanque (h_1 y h_2) son

$$P_1(t) = \rho g h_1(t) + P_0 \quad (21)$$

$$P_2(t) = \rho g h_2(t) + P_0 \quad (22)$$

donde ρ es la densidad del líquido y g la constante de gravedad.

Para cada uno de los tanques la cantidad de líquido que entra menos la cantidad que sale debe ser igual a la cantidad acumulada, o sea que para el tanque 1

$$\int_{-\infty}^t q_0(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t q_1(\tau) d\tau = Ah_1(t)$$

y para el tanque 2

$$\int_{-\infty}^t q_1(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^t q_2(\tau) d\tau = Ah_2(t)$$

donde A es el área de cada tanque.

Las dos ecuaciones anteriores pueden escribirse

$$q_0(t) - q_1(t) = A \frac{dh_1(t)}{dt} \quad (23)$$

$$q_1(t) - q_2(t) = A \frac{dh_2(t)}{dt} \quad (24)$$

A partir de estas, debe escribirse la dinámica del sistema mediante dos ecuaciones de la forma

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

para lo cual deberán seleccionarse las variables de estado correspondientes, como se indicó en la sección 5. Una selección adecuada de las variables de estado podría ser las alturas h_1 y h_2 .

De las ecs 19, 20, 21 y 22 y eliminando P_1 y P_2 se obtiene

$$q_1(t) = k\sqrt{\rho g h_1(t)}$$

$$q_2(t) = k\sqrt{\rho g h_2(t)}$$

Al reemplazar q_1 y q_2 en las ecs 23 y 24 se obtiene

$$A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_0(t) - k\sqrt{\rho g h_1(t)}$$

$$A \frac{dh_2(t)}{dt} = k\sqrt{\rho g} \left[\sqrt{h_1(t)} - \sqrt{h_2(t)} \right]$$

Para facilitar el álgebra de los pasos subsiguientes, se hará la suposición que los valores numéricos de los parámetros son

$$A = 1$$

$$k\sqrt{\rho g} = 1$$

en un sistema adecuado de unidades. Por tanto, las ecuaciones que describen el sistema son

$$\frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{h_1(t)} + q_0(t) \quad (25)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \sqrt{h_1(t)} - \sqrt{h_2(t)} \quad (26)$$

$$y(t) = h_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones anteriores son no lineales, porque la parte de la derecha de las ecs 25 y 26 no tiene la forma $a_{11} h_1 + a_{12} h_2 + q_0$. Sin embargo, el modelo que se obtuvo tiene la estructura de un sistema dinámico como se hizo saber en el cap 3.

6. Elementos híbridos

Los elementos considerados a lo largo de este capítulo se han descrito mediante una o más relaciones entre las variables de un solo tipo. Así, los elementos eléctricos, esto es, resistencia, capacitancia e inductancia se describieron como relaciones entre las variables eléctricas consideradas: voltaje y corriente.

Existe, sin embargo, una extensa gama de elementos cuyas variables asociadas no son de una sola clase; por ejemplo, un motor eléctrico ideal de corriente directa y excitación constante tiene asociadas cuatro variables: dos eléctricas y dos mecánicas. Las eléctricas son el voltaje y la corriente de armadura y las

mecánicas el par torsional producido en la flecha del motor, su velocidad angular (fig 24).

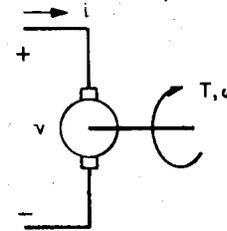


Fig 24. Esquema de un motor

Las relaciones entre las variables asociadas son

$$T = k_f i$$

$$v = k_a \omega$$

donde k_f y k_a son los parámetros del motor.

La enumeración de los elementos mixtos sería demasiado abundante para presentarla en este capítulo. Sin embargo, a lo largo de este libro algunos de ellos serán introducidos en los ejemplos ilustrativos.

Para cerrar este capítulo se presentará un ejemplo de un sistema compuesto por elementos eléctricos, mecánicos y electromecánicos (un motor).

8.1 Ejemplo

Considérese el sistema esquematizado en la fig 25. Se desea obtener la velocidad angular w_2 de la inercia J cuando se aplica un voltaje $v(t)$ al circuito.

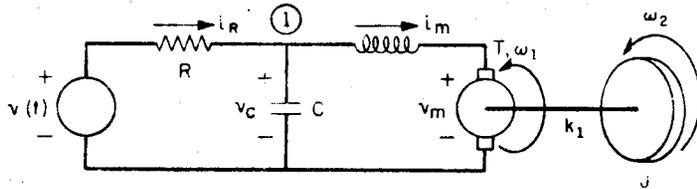


Fig 25. Un sistema electromecánico

De igual manera como se procedió en los ejemplos anteriores de las leyes de los elementos y las de conjunto se obtienen las siguientes relaciones:

De la malla izquierda del circuito

$$i_R = \frac{1}{R} [v(t) - v_c]$$

del nodo 1

$$C \frac{dv_c}{dt} = -i_m$$

de la malla derecha

$$L \frac{di_m}{dt} = v_c - v_m$$

del motor

$$T = k_f i_m$$

$$v_m = k_a w_1$$

del resorte torsional

$$\frac{dT}{dt} = k(w_1 - w_2)$$

de la inercia J

$$J \frac{dw_2}{dt} = T$$

Seleccionando como las variables que representan el estado a v_c , i_m y w_2 , se puede eliminar el resto de las variables, a excepción de $v(t)$ que es la entrada.

Las ecuaciones que se obtienen son:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{CR} v(t) - \frac{1}{CR} v_c - \frac{1}{C} i_m$$

$$\frac{di_m}{dt} = \left(1 - \frac{k}{k_a k_f}\right) v_c - \frac{k k_a}{kL + k_a k_f} w_2$$

que corresponden a la descripción del sistema por medio de variables de estado, ya que la salida (w_2) es una de las componentes de este y la derivada de cada una de las variables de estado $(\frac{dv_c}{dt}, \frac{di_m}{dt}, \frac{dw_2}{dt})$ es una función del valor las variables de estado (v_c, i_m, w_2) y la entrada $v(t)$.

Capítulo 5

REOGRAMAS

1.- Introducción

En el análisis de un sistema es frecuente encontrar en juego un gran número de variables. Interrelacionarlas para integrar un modelo completo del sistema y su posterior análisis son problemas arduos debido a la creciente laboriosidad de los cálculos con el número de variables involucradas.

El planteamiento de modelos matemáticos de sistemas - proporciona una serie de relaciones simultáneas. Para los casos que se van a tratar en este texto las relaciones serán lineales.

Con frecuencia las relaciones mencionadas consistirán en ecuaciones diferenciales ordinarias o, con la ayuda de la transformada de Laplace, podrán reducirse a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas. Sin embargo, dicho conjunto de ecuaciones (que forman el modelo del sistema)

no presentan de manera inmediata las relaciones causa-efecto de todo el sistema simultáneamente; desde el punto de vista de percepción visual, las ecuaciones se ven como relaciones aisladas y es difícil lograr un panorama global del sistema. Por esta razón la estructura de las interrelaciones del sistema, o más correctamente, su topología, es difícil de descubrir.

Debido a ese tipo de inconvenientes se recurre, en muchas disciplinas, a descripciones gráficas de los sistemas, bien por medio de "diagramas de bloque" o por "diagramas de flujo". Para el análisis de sistemas dinámicos también se cuenta con medios similares: los reogramas, mediante los cuales la visualización de la totalidad de las relaciones entre las variables se capta con mayor facilidad que con las descripciones matemáticas convencionales.

De la misma manera que las ecuaciones simultáneas pueden manipularse y resolverse, los reogramas se manipulan y se resuelven como se verá mas adelante, los sistemas que pueden describirse por relaciones lineales, también es factible describirlos mediante reogramas; además, a partir de esta descripción, las relaciones directas entre las variables pueden obtenerse por simple inspección. En resumen, los reogramas son una notación gráfica para describir conjuntos de relaciones lineales, y siendo útiles no solo para la solución de dichas relaciones, sino también para cons --

truir directamente modelos de sistemas lineales.

2.- Definiciones fundamentales

- a) Nodo. Es la representación de una de las variables del sistema, mismo que se indica mediante un punto.
- b) Rama. Representa la relación efecto-causa entre dos variables (nodos) y se indica por una línea dirigida que va desde el nodo causa hasta el nodo efecto.
- c) Nodo fuente. Es un nodo del cual emergen todas las ramas conectadas a él.
- d) Nodo pozo. Es un nodo del cual no emerge ninguna de las ramas conectadas a él.
- e) Transmisión de una rama. Es el "valor" de la rama e indica la operación que debe efectuarse sobre la variable causa a fin de obtener la variable efecto. Se considerarán dichas operaciones lineales, entonces la transmisión puede ser una multiplicación por un escalar, una ecuación diferencial lineal, un retraso etc.
- f) Reograma. Es un grupo de nodos interconectados por ramas que representa un conjunto de relaciones lineales.

2.1 Ejemplo. Considerese el sistema de la figura 1

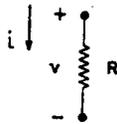


Fig 1 Sistema eléctrico.

Supóngase que las variables del sistema son el voltaje v y la corriente i .

Por la Ley de Ohm, la relación entre dichas variables es:

$$v = Ri$$

Si se toma a la corriente i como la variable independiente (causa), la expresión, mediante reogramas de la relación anterior se indica conforme la fig 2.

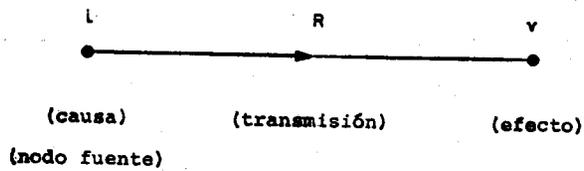


Fig 2 Una representación por un reograma del sistema.

En caso de tomar al voltaje v como la variable independiente, la relación anterior, representada mediante reogramas, se muestra en la fig 3.

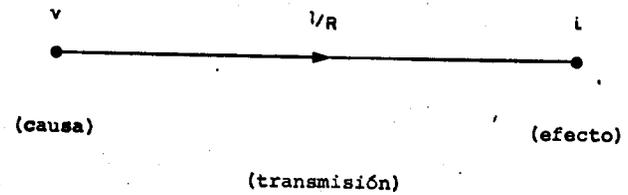


Fig 3 Otra representación del sistema.

En la representación de un sistema en forma de reograma cada variable debe representarse por uno y solo un nodo; de tal suerte que si se tiene un sistema como el indicado en la fig 4, donde v es la variable independiente:

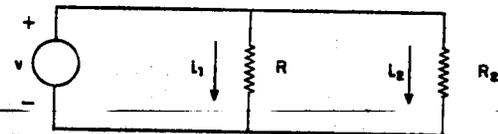


Fig 4 Sistema eléctrico.

se tendrán las ecuaciones

$$i_1 = \frac{1}{R_1} v$$

$$i_2 = \frac{1}{R_2} v$$

en las cuales la variable v se presenta dos veces: una por cada ecuación. Sin embargo, al representar el circuito mediante reogramas, el voltaje v se presenta por un solo nodo tal como se indica en la fig 5.

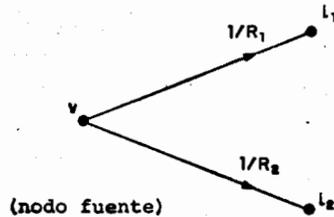


Fig 5 Representación del sistema de la fig 4 mediante un reograma.

Esta economía en la representación de sistemas es una de las ventajas que ofrecen los reogramas.

Cuando una variable dependiente es igual a la suma de dos o más variables modificadas por un operador lineal, como por ejemplo $x_1 = ax_2 + bx_3 + cx_4$ (1)

su representación consistirá en un nodo al cual llegan ramas desde los nodos de las variables que la afectan, y la transmisión de cada una de las ramas será la operación que se efectúa sobre cada una de las variables contributivas, - así, para la expresión 1 se tendrá la representación de la fig 6.

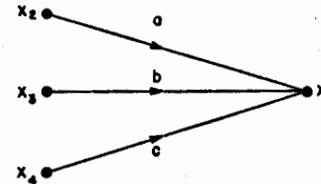


Fig 6 Reograma para la ecuación 1.

Entonces, el valor de una variable representada por un nodo es igual a la suma de todas las variables transformadas que llegan al nodo en cuestión.

2.2 Ejemplo: En la parte derecha de la fig 7 se muestra un reograma que representa el sistema de ecuaciones que se encuentran en el margen izquierdo.

$$x_2 = ax_1 + bx_3$$

$$x_3 = cx_2 + dx_4$$

$$x_4 = ex_2$$

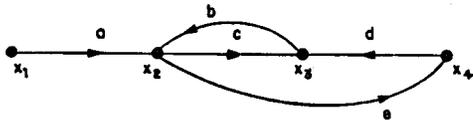


Fig 7 Conjunto de ecuaciones y su representación por reogramas.

Con mucha frecuencia en el análisis de sistemas se desea conocer el efecto que produce una variable sobre otra, sin interesar las relaciones que puedan existir entre otras variables del sistema. En los sistemas complejos la relación que se busca puede encontrarse por métodos matemáticos estándar al respecto, la alternativa que a continuación se presenta consiste en la manipulación del reograma para eliminar todas las variables "intermedias" y lograr una relación de efecto-causa entre dos variables de interés.

A fin de ilustrar el problema que comúnmente se desea resolver, puede tomarse el siguiente ejemplo:

En un reograma como el que se indica en la fig 8.

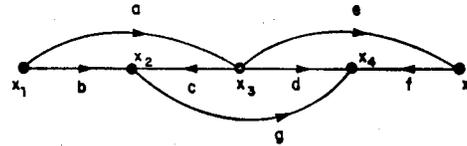


Fig 8 Reograma por simplificar.

Se desea encontrar el valor de la transmisión h (en función de $a, b, c, d, e, f,$ y g) en el reograma de la fig 9

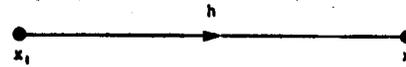


Fig 9 Reograma simplificado.

de tal manera que la relación que exista entre x_1 y x_4 sea la misma para los dos reogramas.

En general, el problema de reducción de un reograma consiste en obtener otro reograma en el que únicamente aparez-

can nodos fuentes y nodos pozo, y todas las ramas vayan de un nodo fuente a uno pozo.

Para resolver el problema se presentan dos formas:

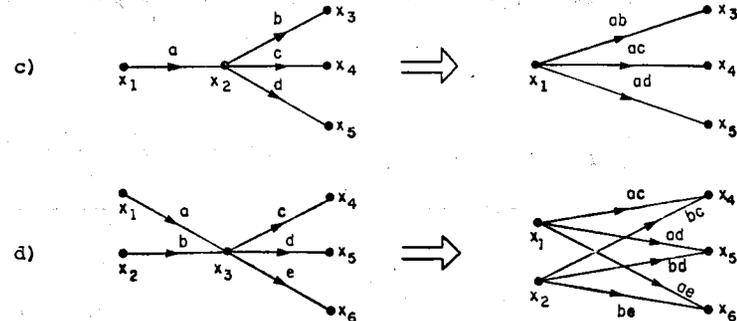
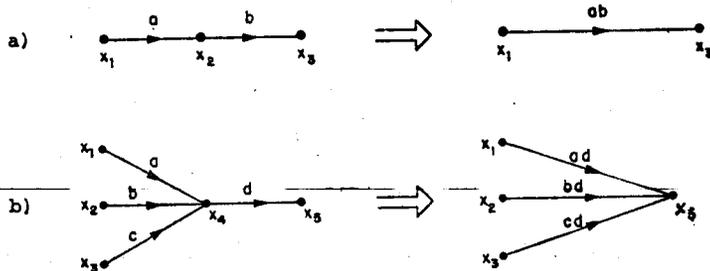
Por reducción del reograma mediante absorción de nodos.

Por la fórmula de Mason.

3.- Reducción de reogramas por absorción de nodos

Para aplicar el primer método es necesario presentar las reglas de manipulación de reogramas, las que, como se verá más adelante, corresponden a manipulaciones en el sistema de ecuaciones que el reograma representa.

3.1 Transformaciones de reogramas. Las transformaciones elementales que reducen en uno el número de nodos de un reograma son:



Cada una de las transformaciones anteriores corresponde a la eliminación de una de las variables en el sistema de ecuaciones que representa el reograma correspondiente. A continuación se muestra por cada caso la equivalencia de las operaciones con reogramas y con ecuaciones simultáneas:

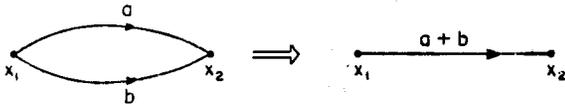
$$\left. \begin{aligned} a) \quad x_2 &= ax_1 \\ x_3 &= bx_2 \end{aligned} \right\} \text{ eliminando } x_2 \Rightarrow x_3 = abx_1$$

$$\left. \begin{aligned} b) \quad x_4 &= ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x_5 &= dx_4 \end{aligned} \right\} \text{ eliminando } x_4 \Rightarrow x_5 = adx_1 + bdx_2 + cdx_3$$

$$\left. \begin{aligned} c) \quad x_2 &= ax_1 \\ x_3 &= bx_2 \\ x_4 &= cx_2 \\ x_5 &= dx_2 \end{aligned} \right\} \text{ eliminando } x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = abx_1 \\ x_4 = acx_1 \\ x_5 = adx_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{d) } x_3 = ax_1 + bx_2 \\
 x_4 = cx_3 \\
 x_5 = dx_3 \\
 x_6 = ex_3
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}} \right\} \text{eliminando } x_3 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = acx_1 + bcx_2 \\ x_5 = adx_1 + bdx_2 \\ x_6 = aex_1 + bex_2 \end{cases}$$

además la reducción del reograma



corresponde a la equivalencia entre las ecuaciones

$$ax_1 + bx_1 = x_2$$

$$(a+b)x_1 = x_2$$

3.2 Ejemplo:

Considérese el reograma de la fig 10

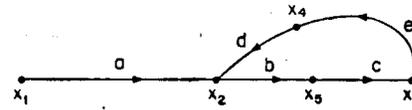


Fig 10 Reograma en el que se desea eliminar los nodos x_2 , x_4 y x_5

Se desea eliminar los nodos intermedios x_2 , x_4 y x_5 para obtener un reograma en el que únicamente aparezcan el no do x_1 (como fuente) y el nodo x_3 (como pozo).

Aplicando las reglas a para eliminar los nodos x_4 y x_5 se obtiene el reograma de la fig 11

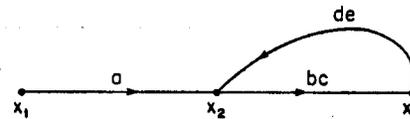


Fig 11 Eliminación de los nodos x_4 y x_5

Con la regla b, para eliminar el nodo x_2 , se llega al reograma de la fig 12

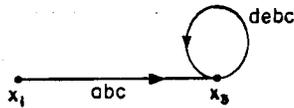


Fig 12 Eliminación del nodo x_2

Para continuar el proceso de eliminación (3.4) es necesario introducir el concepto de automalla y el procedimiento para eliminar este tipo de rama.

3.3 Definición de automalla.

Una automalla es una subgráfica de un reograma formada por una sola rama que parte de un nodo y llega a él mismo.

La manera que pueden eliminarse las automallas es la siguiente: Considérese una parte de un reograma que contiene un nodo, con una automalla y varias otras ramas conectadas a dicho nodo (fig 14)

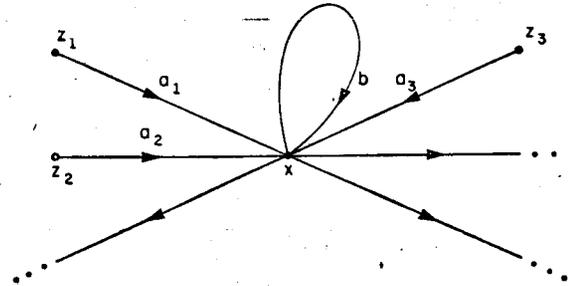


Fig 14 Parte de un reograma con una automalla.

Recordando que el valor de la variable representada por el nodo en cuestión es igual a la suma de los valores de las transmisiones de las ramas que llegan al nodo multiplicadas por las variables en donde se originan dichas ramas, se tendrá que para la fig 14 se cumple.

$$x = b x + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \dots$$

De la ecuación anterior puede despejarse x y obtenerse:

$$(1-b)x = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \dots$$

$$x = \left(\frac{a_1}{1-b}\right) z_1 + \left(\frac{a_2}{1-b}\right) z_2 + \left(\frac{a_3}{1-b}\right) z_3 + \dots$$

La representación por reogramas de la ecuación anterior es la que se indica en la fig 15

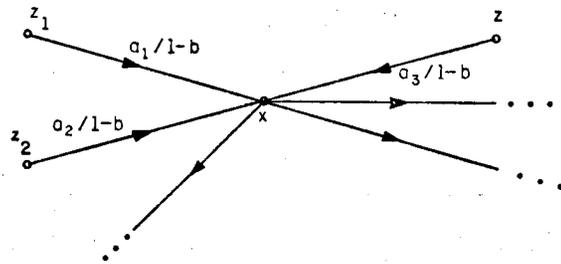


Fig 15 Eliminación de la automalla.

De lo anterior se deduce que una automalla de un nodo - se puede eliminar dividiendo cada una de las transmisiones de las ramas que llegan a él por $(1-b)$, donde b es el valor de la transmisión de la automalla.

3.4 Continuación del ejemplo 3.2

A partir del reograma de la fig 12 se obtiene el reograma final de la fig 16.

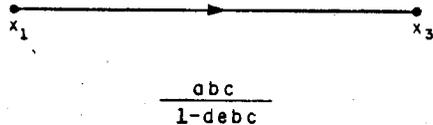


Fig 16 Reograma final que se obtiene a eliminar los nodos intermedios del reograma de la fig 10.

Para verificar la validez de las reglas empleadas en la reducción del reograma original, se parte de las ecuaciones que éste representa, y a través de manipulaciones algebraicas obtener la relación entre x_1 y x_3 .

Las ecuaciones que representa el reograma de la fig 10

$$x_2 = a x_1 + d x_4 \quad (2)$$

$$x_5 = b x_2 \quad (3)$$

$$x_3 = c x_5 \quad (4)$$

$$x_4 = e x_3 \quad (5)$$

de las ecs 2 y 3 al eliminar x_2 se obtiene

$$x_5 = b a x_1 + b d x_4 \quad (6)$$

y de las ecs 6 y 5, eliminando x_4 se obtiene

$$x_5 = b a x_1 + b d e x_3 \quad (7)$$

por último, de las ecs 4 y 7 si se elimina x_5 , se obtiene

$$x_3 = c b a x_1 + c b d e x_3$$

o sea

$$x_3 = \frac{c b a}{1-cbde} x_1$$

Este resultado es equivalente al que se obtuvo mediante la manipulación de los reogramas.

3.5 Ejemplo:

Considérese ahora un ejemplo más complicado de reducción de reogramas. En la fig 17 se desea transformar el reograma de la izquierda al de la derecha.

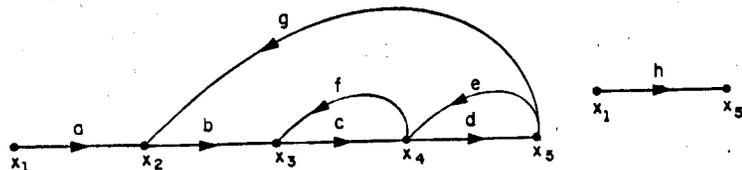
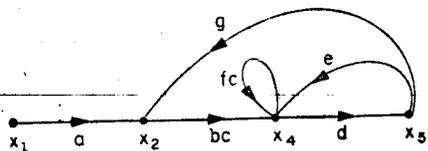


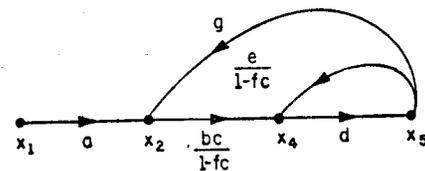
Fig 17 Un reograma y su reducción.

Al respecto, se desea encontrar el valor de h . A continuación se muestran los diferentes pasos a seguir en la eliminación de los nodos intermedios x_2, x_3 y x_4 .

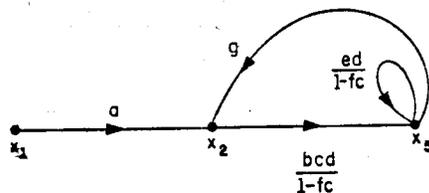
Eliminando x_3



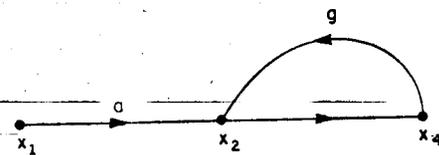
Eliminando la automalla



Eliminando x_4



Eliminando la automalla



$$\frac{bcd}{1-fc} \left(\frac{1}{1-\frac{ed}{1-fc}} \right) = \frac{bcd}{1-fc-ed}$$

Handwritten notes below the equation: $\frac{bcd}{1-fc-ed}$ and $\frac{bcd}{1-fc-ed}$ with arrows pointing to the final graph.

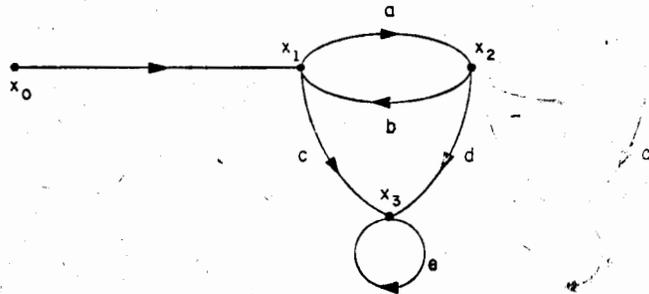


Fig 19 Reograma.

Como puede verificarse, por medio de la absorción de no dos intermedios, se llega a los siguientes reogramas:

$$\begin{array}{l}
 x_0 \xrightarrow{h_1} x_1 \quad h_1 = \frac{1-e}{1-ab-e+abe} \\
 x_0 \xrightarrow{h_2} x_2 \quad h_2 = \frac{a(1-e)}{1-ab-e+abe} \\
 x_0 \xrightarrow{h_3} x_3 \quad h_3 = \frac{c+ad}{1-ab-e+abe}
 \end{array}$$

La expresión $1 - ab - e + a b e$, es independiente del nodo pozo y se denomina determinante del reograma. Para definir la formalmente es necesario introducir algunos conceptos tales como malla, trayectoria, etc.

4.2 Definiciones de trayectoria y mallas.

- Trayectoria es una subgráfica de un reograma formada por una sucesión de ramas conectadas, una después de otra, sin contravenir el sentido de las flechas, de tal manera que ningún nodo aparece más de una vez.
- Malla simple es una trayectoria cerrada en la que ningún nodo aparece más de una vez por ciclo.

- Malla múltiple de orden k es una subgráfica de un reograma formada por k mallas simples que no tienen nodos en común.

4.3 Ejemplo:

Considérese el reograma de la fig 20

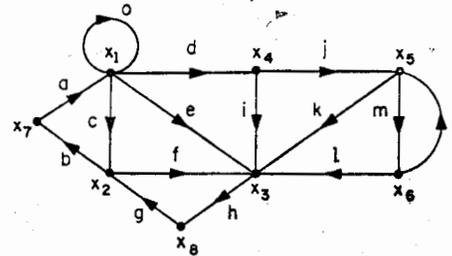
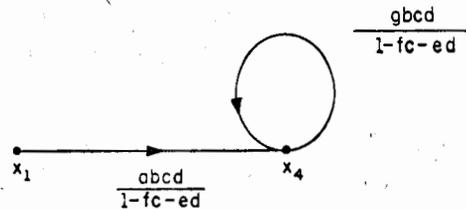


Fig 20 Reograma.

en el cual existen cinco trayectorias que van del nodo x_1 al x_3 . Estas se encuentran identificadas en la fig 21. En la 22 se presentan todas las mallas simples, en la 23 todas las dobles y en la 24 la única malla triple del reograma.

Eliminando el nodo x_2 se obtiene



Por último, con la eliminación de la automalla

$$\frac{abcd}{1-fc-ed} \frac{1}{1-\frac{bcdg}{1-cf-de}} = \frac{abcd}{1-cf-ed-bcdg}$$

$$\therefore h = \frac{abcd}{1-cf-de-bcdg}$$

4.- Solución de reogramas por inspección. Fórmula de Mason.

Como pudo apreciarse en el ejemplo 3.4 el método presentado en la sección anterior para reducir reogramas no ofrece mayores ventajas sobre la solución algebraica de las ecuaciones; así, en el ejemplo mencionado, para llegar a la solución fue necesario pasar por cinco reogramas intermedios, por lo que para reogramas como el de la fig 18 dicho proce-

dimiento se vuelve demasiado elaborado.

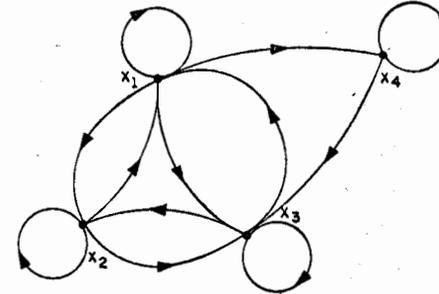


Fig 18 Reograma para reducir por absorción de nodos.

Samuel J. Mason desarrolló un método por el cual es posible encontrar la relación entre dos variables de un reograma por inspección. Así como el método de absorción de nodos corresponde a la solución de ecuaciones lineales simultáneas por eliminación sucesiva de variables, el método de Mason corresponde a la solución de estas ecuaciones usando determinantes y cofactores.

Existen algunas expresiones en un reograma que son invariantes respecto a la selección del nodo pozo:

4.1 Ejemplo:

Considérese el reograma de la fig 19

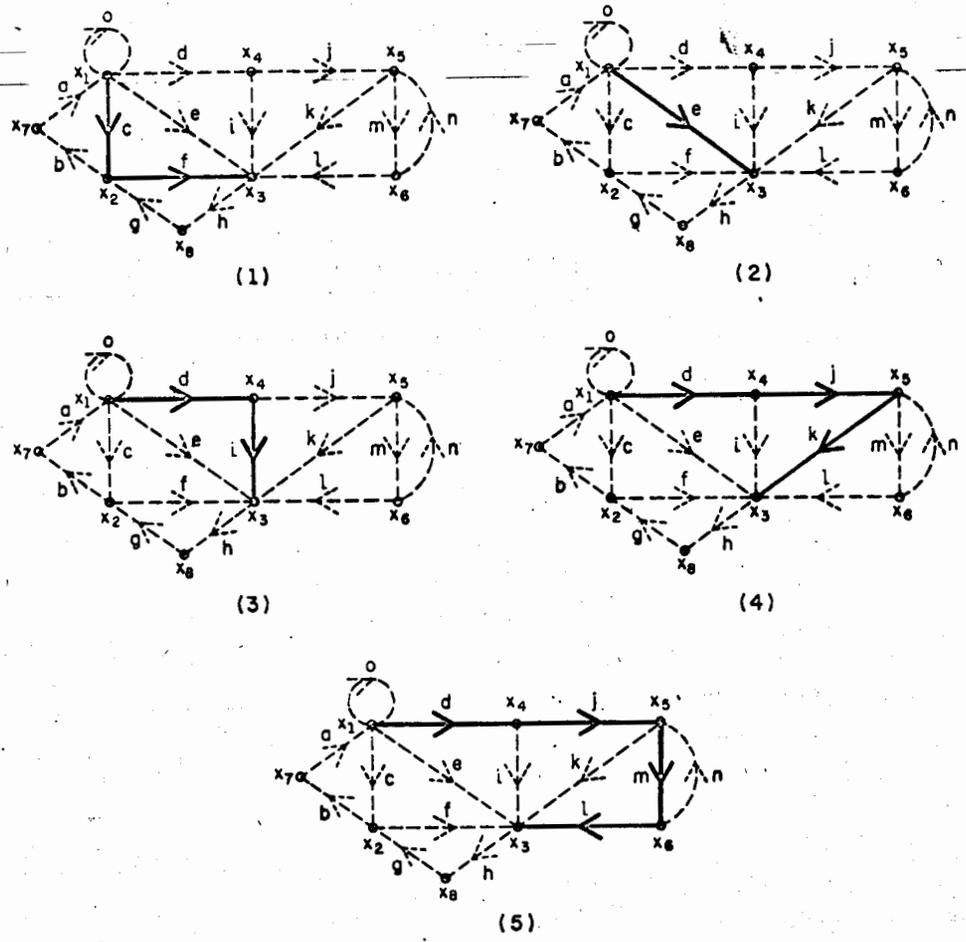


Fig 21 Trayectorias del nodo x_1 al nodo x_3 .

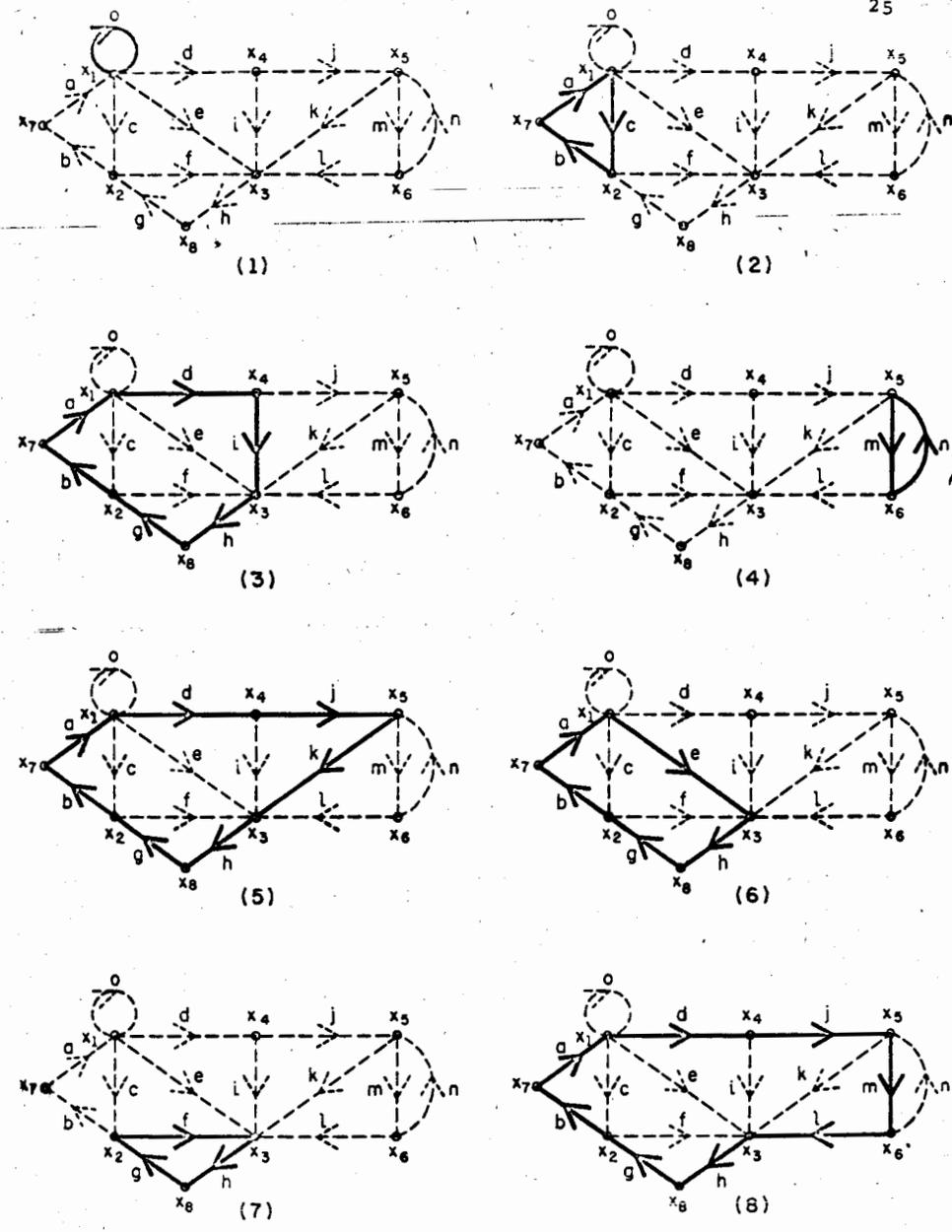


Fig 22 Mallas simples del reograma de la figura 20.

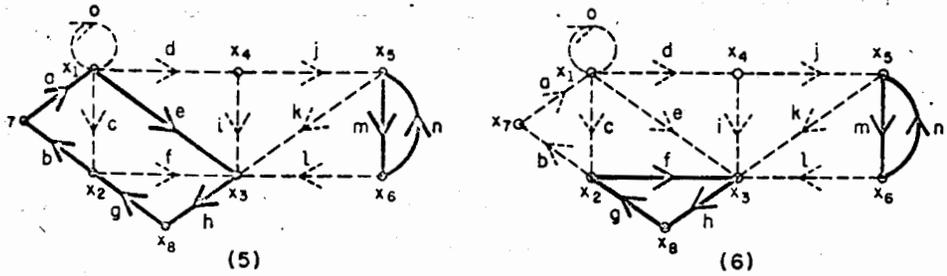
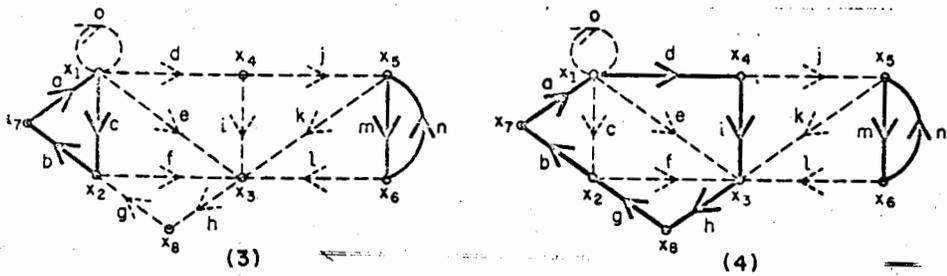
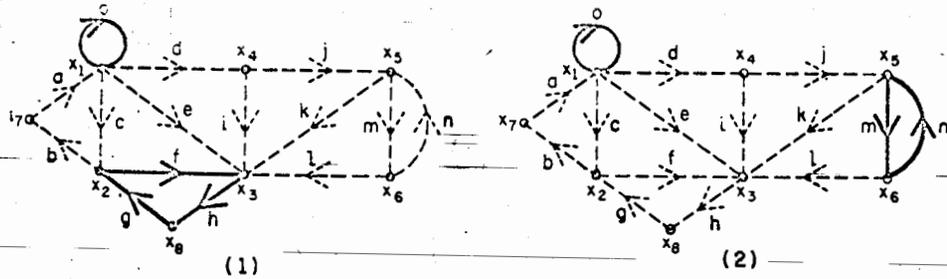


Fig 23. Mallas dobles del reograma de la figura

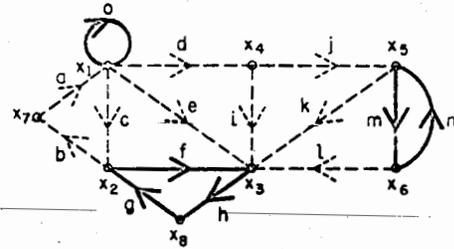


Fig 24 Malla triple del reograma de la figura 20.

Cabe hacer la aclaración que las mallas 1 y 2 no forman una malla doble por tener el nodo x_1 en común.

4.4 Definiciones de ganancia, determinante y cofactor.

La ganancia de una trayectoria es el producto de las transmisiones de las ramas que forman dicha trayectoria. Así pues la ganancia de algunas de las trayectorias del ejemplo anterior son:

- de la trayectoria 1: cf
- de la trayectoria 3: di
- de la trayectoria 5: $djml$

De acuerdo con la definición anterior, la ganancia de una malla de orden k será el producto de las transmisiones de todas las ramas que forman dicha malla. Del ejemplo anterior se deduce que las ganancias de las mallas son:

- de la malla simple 1: o
- de la malla simple 3: $adihgb$

de la malla doble 2: omn

de la malla triple : ofghmn

Supóngase que en un reograma hay m_1 mallas simples, m_2 mallas de orden 2, m_3 mallas de orden 3, etc, hasta mallas de orden p . El determinante de este reograma, Δ , se define como la unidad menos la suma de las ganancias de las mallas simples, más la suma de las ganancias de las mallas dobles, menos la suma de las ganancias de las mallas triples etc. Matemáticamente esta definición puede expresarse como

$$\Delta = 1 - \sum_{j=1}^{m_1} M_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{m_2} M_j^{(2)} - \sum_{j=1}^{m_3} M_j^{(3)} + \dots$$

$$\sum_{j=1}^{m_p} M_j^{(p)} = 1 + \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^{m_j} (-1)^k M_j^{(k)}$$

donde $M_j^{(k)}$ denota la ganancia de la j -ésima malla de orden k .

Como las ganancias de mallas de segundo o más alto orden son iguales al producto de ganancias de mallas simples que no tienen ningún nodo en común, una definición equivalente de determinante es

$$\Delta = | (1-M_1^{(1)}) (1-M_2^{(1)}) \dots (1-M_{m_1}^{(1)}) | *$$

donde la operación $||*$ indica la supresión de todos los -- términos que contengan productos de las ganancias de mallas que posean al menos un nodo en común.

4.5 Ejemplo:

Para el reograma de la fig 25

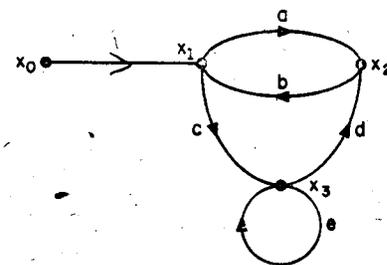
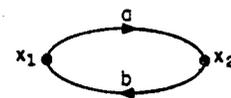
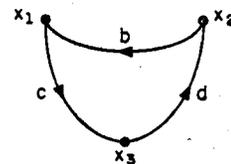


Fig 25 Reograma

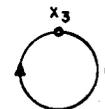
se tienen las siguientes mallas simples:



ganancia: ab

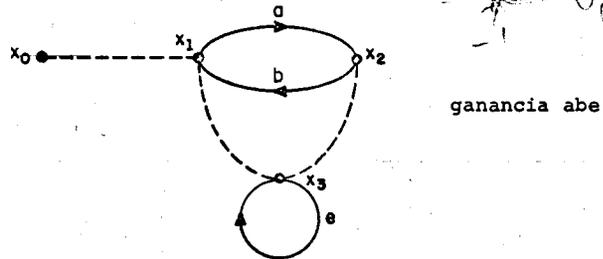


ganancia bcd



ganancia e

y la malla doble

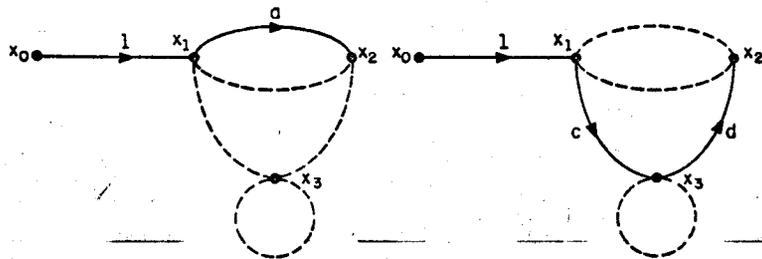


De lo que se deduce que el determinante del reograma es

$$\Delta = 1 - ab - bcd - e + abe$$

Otro concepto necesario para presentar la fórmula de Mason es el de cofactor de una trayectoria, o sea el determinante del reograma que queda al suprimir del original los nodos de la trayectoria y las ramas conectadas a ellos.

En el reograma de la fig 25 se presentan dos trayectorias del nodo x_0 al nodo x_2 :



Trayectoria 1

Trayectoria 2

El cofactor de la trayectoria 1 es $(1-e)$, pues el reograma que queda al suprimir los nodos x_0, x_1 y x_2 es la auto malla del nodo x_3 . Como no queda ninguna malla al suprimir los nodos de trayectoria 2, su cofactor es 1.

Con base en las definiciones anteriores se puede presentar la fórmula de Mason.

4.6 Fórmula de Mason

La transmisión entre un nodo fuente x_f y un no fuente x_n , está dada por

$$\frac{x_n}{x_f} = \frac{\sum_{k=1}^n T_k \Delta_k}{\Delta}$$

donde

n es el número de trayectorias diferentes entre x_f y x_n

T_k La ganancia de la k -ésima trayectoria

Δ_k Su cofactor

Δ El determinante del reograma.

Para el reograma de la fig 25, la transmisión entre el nodo fuente x_0 y el nodo x_2 será

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{a(1-e) + cd}{1 - ab - bcd - e + abe}$$

Las expresiones que intervienen en la fórmula de Mason para el ejemplo anterior.

Trayectorias	T_k	Δ_k	$T_k \Delta_k$
1	1xa	(1-e)	a(1-e)
2	1xcxd	1	cd

Δ , determinante, = $1 - ab - bcd - e + abe$.

Debe señalarse que la fórmula de Mason es válida cuando la transmisión por encontrar surge de un nodo fuente y llega a uno no fuente; en general cuando estas condiciones no se cumplen, los resultados que se obtienen son erróneos. Para ilustrar este último caso, considérese el reograma de la fig 26.

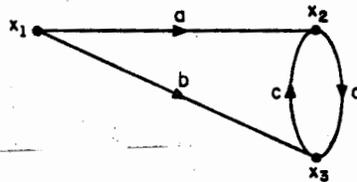


Fig 26 Ejemplo del mal empleo de la fórmula de Mason.

Si se aplica la fórmula de Mason para encontrar la transmisión del nodo x_3 al nodo x_2 se obtiene

$$h_{23} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{c}{1-cd}$$

y la transmisión del nodo x_2 al nodo x_3 .

$$h_{32} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{d}{1-cd}$$

Lógicamente, los dos resultados son inconsistentes pues

$$h_{32} \neq \frac{1}{h_{23}}$$

El error radica en que ni x_2 ni x_3 son nodos fuentes.

Si se aplica la fórmula de Mason para obtener las transmisiones $\left(\frac{x_2}{x_1} \text{ y } \frac{x_3}{x_1}\right)$ se llega a los resultados

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a + bc}{1 - cd} \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{b + ad}{1 - cd}$$

por tanto

$$\frac{\frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_3}{x_1}} = \frac{x_2}{x_3} = \frac{a + bc}{b + ad}$$

Este último resultado es correcto, pues si se trata el problema algebraicamente se llega al mismo valor de la transmisión, como se indica a continuación:

$$x_2 = ax_1 + cx_3$$

$$x_3 = bx_1 + dx_2$$

Después de la eliminación de la variable x_1 se obtiene

$$(a + bc) x_3 = (b + da) x_2$$

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{a + bc}{a + da} \quad (8)$$

5.- Inversión de trayectorias. Inversión de mallas.

Como se demostró en el ejemplo anterior, la fórmula de Mason generalmente no es válida cuando el nodo inicial no es un nodo fuente. Sin embargo, en muchas ocasiones se desea encontrar la transmisión entre dos nodos no fuentes, x_a y x_b , de un reograma dado.

Para resolver el problema existen tres alternativas:

- 1.- Proceder como en el ejemplo anterior, esto es, encontrando la transmisión de un nodo fuente x_f a cada uno de los nodos en cuestión y tomar la razón entre las dos transmisiones obtenidas.
- 2.- Replantear las ecuaciones del reograma y considerar x_a como una variable independiente a fin de construir nuevamente otro reograma en el cual x_a aparezca como un nodo fuente.
- 3.- Modificar el reograma usando inversión de trayectorias, y convertir un nodo no fuente en uno fuente.

En esta sección estudiaremos la alternativa número 3.

5.1 Inversión de una trayectoria

La inversión de una trayectoria (como se verá después) corresponde a intercambiar los papeles de causa y efecto en un reograma, o lo que es equivalente, a invertir la forma de variables dependientes a variables independientes. En el ejemplo 2.1 se vio cómo el reograma de la fig 2 era equivalente al de la fig 3, en el sentido que representan la misma relación algebraica entre las dos variables v e i .

Antes de mostrar el resultado general, considérese el reograma de la fig 27

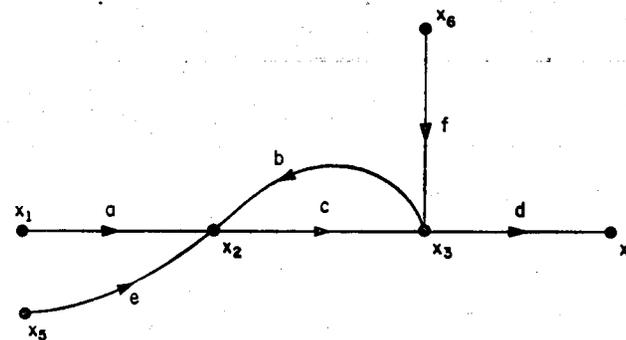


Fig 27 Reograma para la inversión de una trayectoria

Las ecuaciones correspondientes son

$$x_2 = ax_1 + bx_3 + ex_5$$

$$x_3 = cx_2 + fx_6$$

$$x_4 = dx_3$$

Los nodos fuentes son

x_1, x_5, x_6 (variables independientes)

y los no fuentes son

x_2, x_3, x_4 (variables dependientes)

Supóngase que se desea hacer de x_3 una variable independiente y de x_5 una variable dependiente, lo que equivale a despejar x_5 de la primera ecuación

$$x_5 = \frac{1}{e} x_2 - \frac{a}{e} x_1 - \frac{b}{e} x_3$$

al despejar x_2 de la segunda ecuación

$$x_2 = + \frac{1}{c} x_3 - \frac{f}{c} x_6$$

y dejar igual la última

$$x_4 = dx_3$$

el nuevo reograma que se obtiene es el de la fig 28

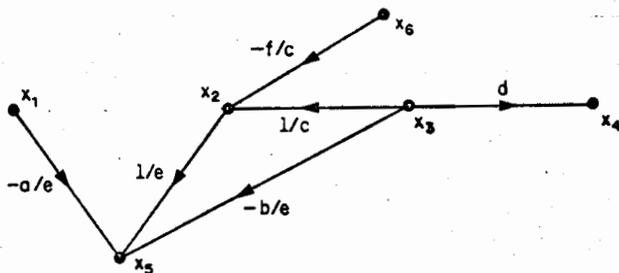


Fig 28 Reograma que se obtiene al invertir la trayectoria $x_5-x_2-x_3$ del reograma de la fig 27

De dicho reograma se pueden hacer las siguientes observaciones:

- a) el sentido de la trayectoria del nodo x_5 al nodo x_3 se invierte.
- b) el valor de las transmisiones de las ramas invertidas es el inverso de las transmisiones originales.
- c) las ramas que acudían al nodo x_3 ahora llegan a x_2 , y las que llegaban a x_2 ahora lo hacen a x_5 , además, el valor de las nuevas transmisiones es el valor original dividido por el negativo de la transmisión de la rama de la trayectoria invertida con la que eran convergentes.

Siguiendo los mismos lineamientos del caso anterior, si se cuenta con un reograma arbitrario y se desea invertir -- una trayectoria de un nodo a otro, se invierte cada una de las ramas de esta. Las modificaciones que resultan del cambio se ilustran en la fig 29.

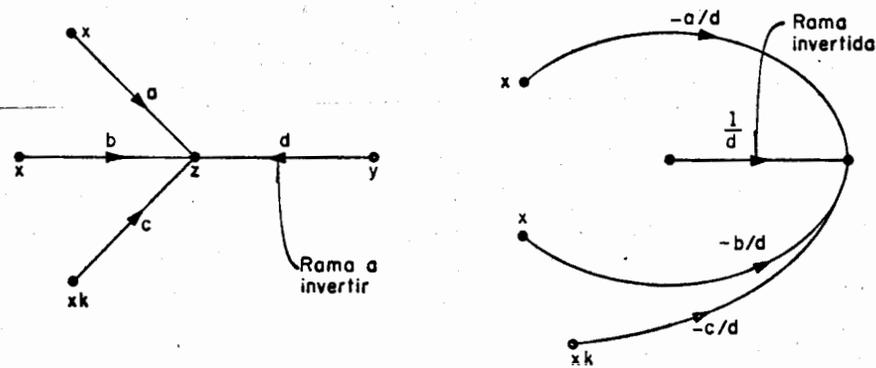


Fig 29 Efecto de invertir una rama

La justificación del proceso anterior se debe a que co-

mo

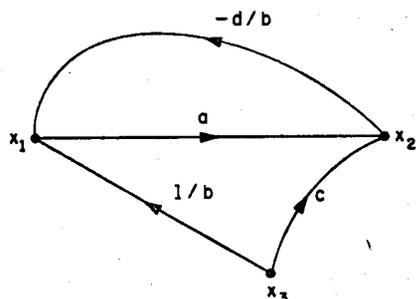
$$z = dy + ax_1 + bx_2 + \dots + cx_k$$

entonces

$$y = \frac{1}{d} z - \frac{a}{d} x_1 - \frac{b}{d} x_2 + \dots - \frac{c}{k} x_n$$

5.2 Ejemplo;

Volviendo al ejemplo de la fig 26 para encontrar $\frac{x_2}{x_3}$ al invertir la rama de transmisión b se obtiene el reograma



Ahora, aplicando la fórmula de Mason para encontrar la transmisión $\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$ se tiene

$$\Delta = 1 + \frac{a}{b} a$$

$$T_1 = c; \Delta = 1$$

$$T_2 = \frac{1}{b} a; \Delta_2 = 1$$

$$\therefore \frac{x_2}{x_3} = \frac{c + \frac{a^2}{b}}{1 + \frac{da}{b}} = \frac{cb + a}{b + da}$$

lo que coincide con la ec 8.

5.3 Inversión de mallas

Las mismas reglas que se emplean en la inversión de una trayectoria pueden aplicarse a la inversión de una malla, - esto es, se aplica la regla general de la inversión a cada una de las ramas de la malla en cuestión.

Lógicamente el propósito de inversión de una malla es - diferente al de inversión de una trayectoria (cuyo propósito es cambiar un nodo no fuente en uno fuente), pues ningún nodo que forme parte de una malla puede ser fuente. Sin embargo, existen dos razones por las cuales la inversión de mallas puede ser importante:

- reducir el número total de mallas (dobles, triples, etc.) en un reograma.
- cambiar los valores de algunas transmisiones.

Cada caso se ilustrará mediante un ejemplo.

5.4 Ejemplo del primer caso:

Considérese el reograma de la fig 30.

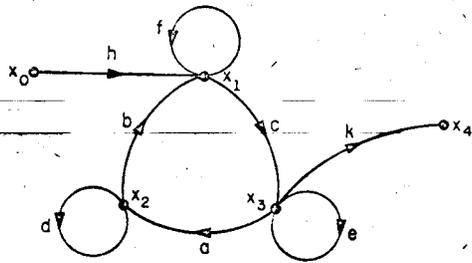
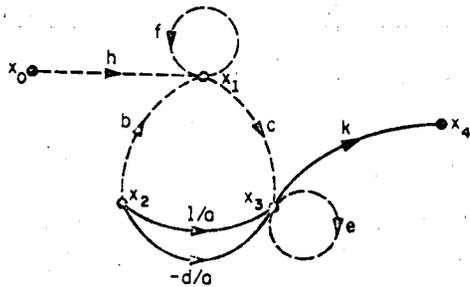


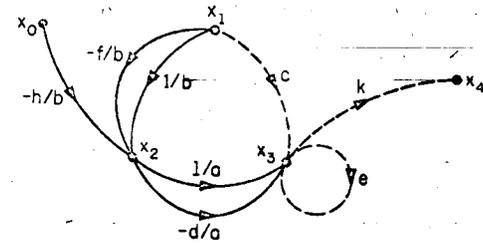
Fig 30. Reograma para la inversión de una malla

en el cual se presentan cuatro mallas simples, tres mallas dobles y una triple, o sea un total de ocho mallas.

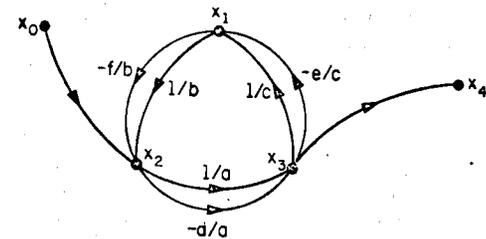
Si se invierte la malla que pasa por los nodos x_1 , x_2 y x_3 se reducirá el número total de mallas. Al respecto, en los diagramas siguientes se ilustra la inversión de cada una de las ramas. Nótese que las ramas punteadas son las del reograma original que no han sufrido modificación alguna, mientras que las continuas son las ramas que formaran parte del reograma final después de invertir la malla.



Inversión de la rama de ganancia a



Inversión de la rama de ganancia b



Inversión de la rama de ganancia c

Sumando las transmisiones de las ramas en paralelo se obtiene el reograma de la fig 31.

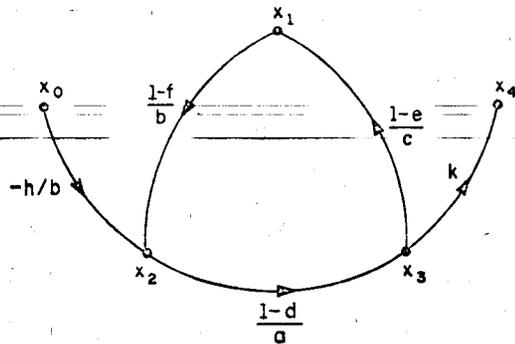


Fig 31 Reograma que obtiene a partir de la fig 30
al invertir la malla $x_1 - x_2 - x_3$

en el cual hay una sola malla.

5.5 Ejemplo del segundo caso:

Considérese el reograma de la fig 32

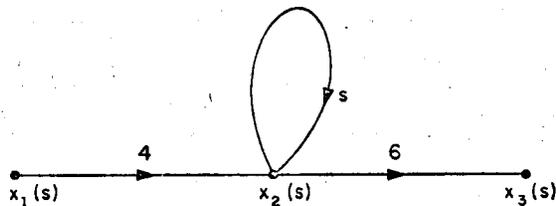


Fig 32 Reograma para ilustrar la inversión de
una malla.

donde las variables son funciones de la variable indepen --
diente s .

Para propósitos de simulación sin embargo, solo se per-
miten multiplicaciones por un escalar e integraciones, esto
es, ramas que tienen transmisiones del tipo $\frac{k_1}{s}$ y k_2 .

Si se invierte la automalla, es posible llegar a un reo-
grama en el que aparecen únicamente estos dos tipos de trans-
misiones (fig 33):

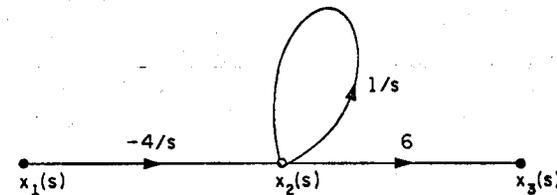


Fig 33 Reograma que se obtiene de la fig 32
al invertir la automalla.

6.- Modelado de sistemas por medio de reogramas.

Una de las formas de analizar los sistemas físicos es -
mediante reogramas que, como se explicó en párrafos anterio-
res, tiene sus ventajas utilizar esta metodología.

La manera más usual y tradicional de obtener un reogra-
ma que represente el comportamiento de un sistema físico es,

como primer paso, escribir las ecuaciones correspondientes, despejar las variables dependientes (una diferente por cada ecuación) y después construir el reograma; sin embargo, se han desarrollado métodos que permiten pasar directamente -- del sistema físico al reograma sin utilizar como paso intermedio la escritura de las ecuaciones. Por ser un tanto diferentes las metodologías usadas para los sistemas eléctricos, mecánicos, hidráulicos etc, no se presentarán aquí en forma explícita, aun cuando se insertará un ejemplo en el cual se podrá apreciar la sencillez y sistematización que puede obtenerse cuando se utilizan directamente los reogramas para modelar las diversas partes de un sistema.

6.1 Ejemplo:

Un posicionador es un sistema electromecánico que permite colocar una carga J (el timón de un barco, la torrecilla de un telescopio, etc.) en una posición deseada, mediante la manipulación de un potenciómetro, sistema que se representa en la fig 34.

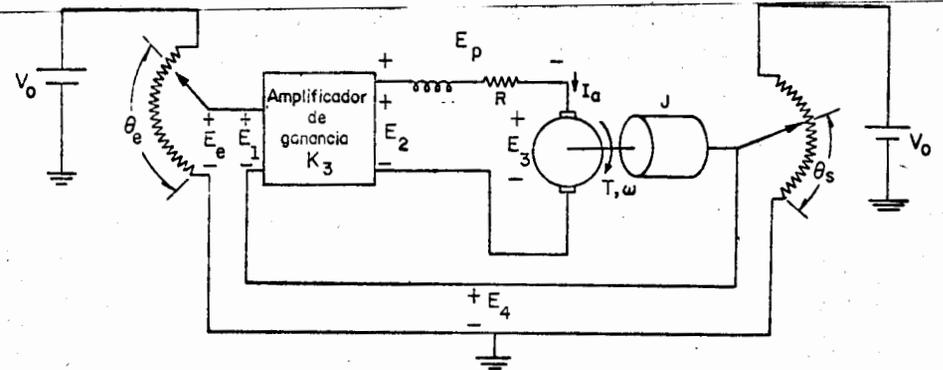


Fig. 34 Esquema de un posicionador.

Consta de un potenciómetro de entrada en el que al ángulo θ_e que se desea colocar la carga J .

Por medio del potenciómetro se produce un voltaje E_e , - proporcional a θ_e , esto es, $E_e = k_1 \theta_e$. Este voltaje se compara con el voltaje E_4 , el cual a su vez es proporcional al ángulo de la carga J , o sea

$$E_4 = k_2 \theta_s$$

La diferencia de los voltajes E_e y E_4 se alimenta a un amplificador a fin de producir, a la salida, un voltaje E_2 , que a su vez alimentará la armadura de un motor de corriente directa de excitación constante.

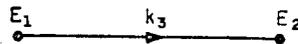
El motor produce un par torsor $T = k_2 I_a$, donde I_a es la corriente de armadura y una fuerza contraelectromotriz $E_3 = k_4 \omega$ (donde ω es la velocidad angular de la carga). El par torsor del motor cambiará el ángulo θ_s y a su vez el voltaje E_1 . Cuando $E_e > E_1$, el motor girará en sentido de incrementar θ_s , y cuando $E_e < E_1$, lo hará en sentido contrario.

Se desea obtener la función de transferencia $\frac{\theta_s(s)}{\theta_e(s)}$

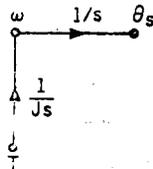
(o sea la razón de las transformadas de Laplace de los ángulos de entrada y salida).

Aun cuando una de las formas para encontrar la función de transferencia deseada es escribir las ecuaciones del sistema, pasar a un reograma y luego, por uno de los métodos presentados en este capítulo, encontrar la relación $\theta_s(s) \pm \theta_e(s)$, aquí se resolverá el problema construyendo modelos parciales de los componentes del sistema después interconectándolos a fin de obtener el modelo global.

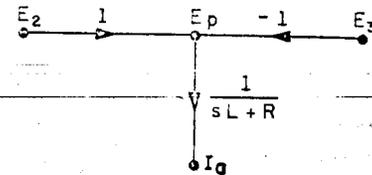
Modelo del amplificador



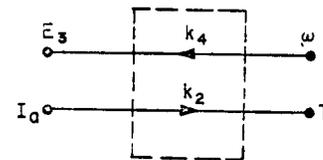
Modelo de la parte mecánica



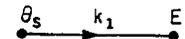
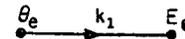
Modelo del circuito eléctrico a la salida del amplificador.



Modelo del motor ideal



Modelo de los potenciómetros.



Modelo del sistema eléctrico a la entrada del amplificador.



Nótese que en cada uno de los modelos parciales los nodos fuentes corresponden a un nodo pozo de otro modelo o a una variable independiente del sistema global, como lo es θ_e .

Los modelos anteriores, interconectados, producen el reograma global del sistema que se presenta en la fig 35

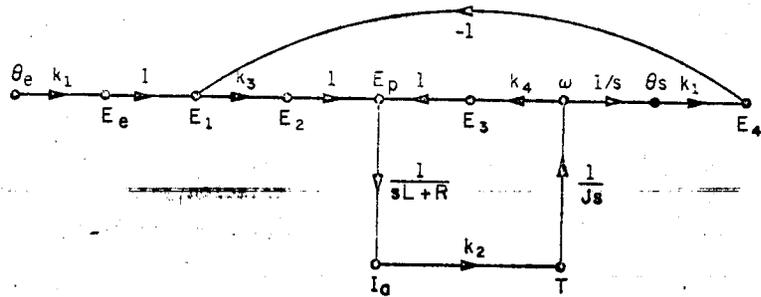


Fig 35 Reograma global del sistema.

La función de transferencia se puede obtener utilizando la fórmula de Mason:

Hay dos mallas simples cuyas ganancias son, respectivamente

$$M_1^{(1)} = (-1) (k_3) (1) \left(\frac{1}{sL+R}\right) (k_2) \left(\frac{1}{Js}\right) \left(\frac{1}{s}\right) (k_1)$$

$$M_2^{(1)} = (-1) \left(\frac{1}{sL+R}\right) (k_2) \left(\frac{1}{Js}\right) (k_4)$$

así que el determinante del reograma es

$$\Delta = 1 + \frac{k_1 k_2 k_3}{(sL+R) Js^2} + \frac{k_2 k_4}{Js(sL+R)}$$

y la única trayectoria de θ_e a θ_s es

$$T_1 = (k_1) (1) (k_3) (1) \left(\frac{1}{sL+R}\right) (k_2) \left(\frac{1}{Js}\right) \left(\frac{1}{s}\right) (k_1)$$

y el cofactor es la unidad, por lo que

$$\frac{\theta_s}{\theta_e} = \frac{k_1^2 k_2 k_3}{(sL+R) Js^2 + k_2 (k_1 k_3 + k_4 s)}$$

7. Diagrama de bloque

Otra manera gráfica de representar las relaciones entre las variables de un sistema es mediante diagramas de bloque. Este método aunque anterior al de los reogramas aún se usa con frecuencia. Porque la diferencia entre los métodos no es conceptual sino meramente notacional, en lugar de presentar los métodos convencionales de reducción de diagramas de bloque, tan solo se ilustrará la equivalencia entre estos y los reogramas.

En los diagramas de bloque las variables se representan por ramas, las relaciones causa-efecto por bloques, la suma de variables por sumadores, como se detalla a continuación.

a) **Bloque.** Es un elemento que representa la relación causa-efecto entre dos variables y equivale a la rama de un reograma. La representación de la relación $x_2 = Hx_1$, se muestra en la figura 36.

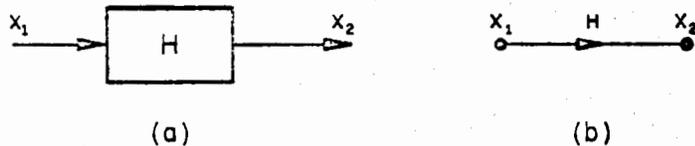


Fig 36 Representación de la relación $x_2 = Hx_1$ (a) por diagramas de bloque (b) por reogramas

b) **Sumador.** Es un elemento de un diagrama de bloque al cual convergen ramas (que representan variables) y emerge tan solo una que representa la suma (con su signo) de las variables contri-

butivas; así la relación $y = x_1 - x_2 + x_3$, se representa en la nomenclatura del diagrama bloque como se ilustra en la figura 37a y que equivale al reograma de la figura 37b

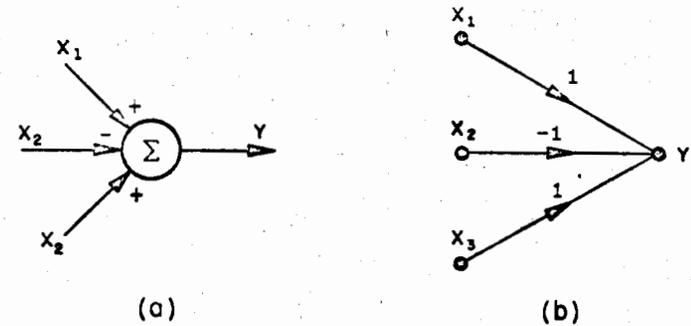
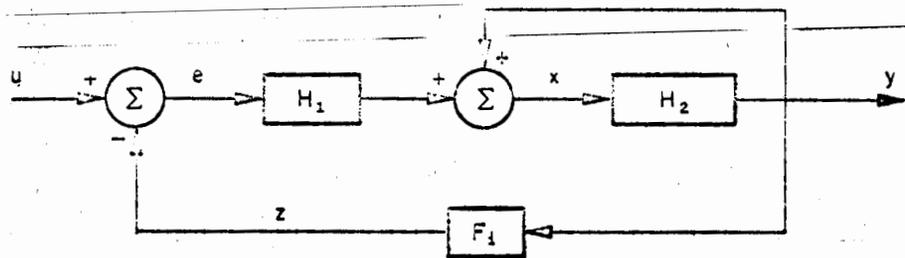
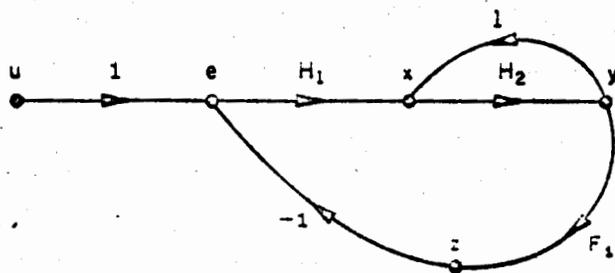


Fig 37. Representación de la relación $y = x_1 - x_2 + x_3$, por medio de (a) diagramas de bloque (b) reogramas

Con las definiciones anteriores es factible convertir un diagrama de bloque a un reograma y en las figuras 38 y 39 se presentan dos ejemplos.

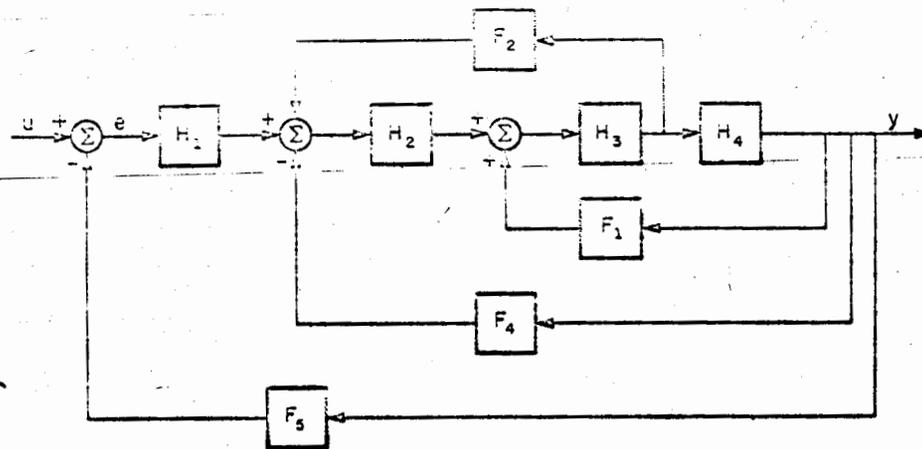


(a)

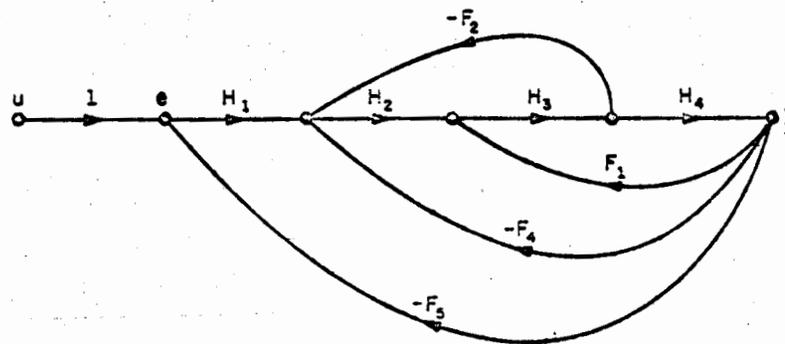


(b)

Fig 38. Diagrama de bloque y su reograma equivalente



(a)



(b)

Fig 39. Diagrama de bloque y su reograma equivalente

Capítulo 6

***SISTEMAS LINEALES DE PARAMETROS
CONCENTRADOS***

A , B , C y D son matrices n por n , n por r , m por n y m por r respectivamente.

El problema que se tratará en la primera parte de este capítulo es determinar la salida $y(t)$ a partir del conocimiento del estado en el tiempo t_0 , es decir $x(t_0)$, y de la entrada en el intervalo $[t_0, t]$, o sea $u[t_0, t]$.

Este valor se obtiene al determinar el estado en el cual estará el sistema en el tiempo t cuando se aplica la entrada $u[t_0, t]$ y el sistema se encuentra en el estado x_0 en $t = t_0$ (ec 2). Esta última condición requiere conocer la ley de transición de estados que implica la ecuación diferencial (ec 1).

Para ser más precisos en desarrollos posteriores, la ley de transición de estados se indica como se hizo en el cap 2, mediante:

$$\phi(t, u, x_0, t_0)$$

que representa el estado en el cual estará el sistema en el tiempo t cuando se aplica la entrada $u[t_0, t]$ hallándose en t_0 en el estado x_0 .

2. Ley de transición de estados.

Para determinar en forma explícita la relación entrada-estado-

1. Introducción

Considérese el sistema descrito por las ecuaciones

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2)$$

donde

$x(t)$ es un vector de dimensión n que representa el estado del sistema en el tiempo t

$u(t)$ es un vector de r componentes que representa la entrada del sistema (algunas veces llamado control)

$y(t)$ es un vector de m componentes que representa la salida del sistema

salida para un sistema descrito por las ecs 1 y 2, es necesario conocer la ley de transición. Inicialmente se estudiarán propiedades de dicha función.

Una de las propiedades que facilita el estudio de los sistemas en cuestión es la linealidad de la función ϕ , o sea

$$k\phi(t, \underline{u}_1, \underline{x}_1, t_0) + k\phi(t, \underline{u}_2, \underline{x}_2, t_0) \\ = \phi\{t, k(\underline{u}_1 + \underline{u}_2), k(\underline{x}_1 + \underline{x}_2), t_0\}$$

Para comprobar lo anterior, únicamente hace falta notar que

si

$$\underline{x}(t) = \phi(t, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0) \quad (3)$$

entonces, integrando ambos lados de la ec 1 de t_0 a t , se obtiene

$$\underline{x}(t) = \int_{t_0}^t \underline{A}(\tau)\underline{x}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{B}(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau + \underline{x}_0 \quad (4)$$

Si se indica mediante

$$\underline{x}_a(t) = \phi(t, \underline{u}_1, \underline{x}_1, t_0)$$

y por

$$\underline{x}_b(t) = \phi(t, \underline{u}_2, \underline{x}_2, t_0)$$

dichas funciones satisfacen las identidades

$$\underline{x}_a(t) = \int_{t_0}^t \underline{A}(\tau)\underline{x}_a(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{B}(\tau)\underline{u}_1(\tau)d\tau + \underline{x}_1$$

$$\underline{x}_b(t) = \int_{t_0}^t \underline{A}(\tau)\underline{x}_b(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \underline{B}(\tau)\underline{u}_2(\tau)d\tau + \underline{x}_2$$

Multiplicando por k cada una de las ecuaciones anteriores, sumándolas y utilizando el hecho de que

$$k \int_{t_0}^t \delta(\tau)g(\tau)d\tau + k \int_{t_0}^t \delta(\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t \delta(\tau)k[g(\tau) + h(\tau)]d\tau$$

se obtiene la igualdad

$$k\{\underline{x}_a(t) + \underline{x}_b(t)\} = \int_{t_0}^t \underline{A}(\tau)\{k[\underline{x}_a(\tau) + \underline{x}_b(\tau)]\}d\tau \\ + \int_{t_0}^t \underline{B}(\tau)\{k[\underline{u}_1(\tau) + \underline{u}_2(\tau)]\}d\tau + k(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)$$

que, de acuerdo con las igualdades 3 y 4, implica que

$$k\{\underline{x}_a(t) + \underline{x}_b(t)\} = \phi[t, k(\underline{u}_1 + \underline{u}_2), k(\underline{x}_1 + \underline{x}_2), t_0]$$

o sea el resultado deseado.

Entonces por la linealidad de la función ϕ , se tendrá que

$$\phi(t, \underline{u}_1, \underline{x}_0, t_0) = \phi(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0) + \phi(t, \underline{u}_1, \underline{0}, t_0)$$

es decir que el estado de un sistema en $t > t_0$ puede calcularse como la suma de dos términos: uno que corresponde al estado en que se hallará el sistema cuando se encuentra en t_0 en el estado \underline{x}_0 y se le aplica la entrada *cero* y otro en el cual estará el sistema al tiempo t , cuando en t_0 el sistema se encuentra en el estado inicial *cero* y se aplica la entrada \underline{u} . Así es factible separar los efectos debidos al estado inicial \underline{x}_0 y los de la entrada \underline{u} .

Inicialmente se analizará el término $\phi(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0)$, al que se denominará $\underline{x}_h(t)$. Debido a que la entrada es nula en el intervalo $[t_0, t]$, $\underline{x}_h(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\underline{x}}_h(t) = \underline{A}(t)\underline{x}_h(t)$$

y la condición inicial $\underline{x}_h(t_0) = \underline{x}_0$

El estado también se puede expresar mediante

$$\underline{x}_0 = \sum_{i=1}^n x_{0i} \underline{e}_i$$

donde \underline{e}_i representa el vector cuya i -ésima componente es 1 y las demás cero*

*Recuérdese que cualquier vector \underline{x} puede escribirse como

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n$$

y la evolución de estados ϕ , por ser función lineal, es, para este caso

$$\begin{aligned} \underline{x}_h(t) &= \phi(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0) = \phi(t, \underline{0}, \sum_{i=1}^n x_{0i} \underline{e}_i, t_0) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_{0i} \phi(t, \underline{0}, \underline{e}_i, t_0) \end{aligned}$$

donde $\phi(t, \underline{0}, \underline{e}_i, t_0)$ representa la evolución del estado cuando la entrada es nula y el estado inicial es el vector \underline{e}_i . Así pues si se conoce la evolución de los n estados iniciales $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ cuando la entrada es nula, es posible determinar $\phi(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0)$ para cualquier \underline{x}_0 .

2.1 Matriz de transición

La ecuación inmediata anterior puede escribirse en forma más compacta, utilizando notación matricial:

$$\underline{x}_h(t) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{x}_0$$

donde $\underline{\Phi}(t, t_0)$ es una matriz cuadrada cuya i -ésima columna es

$$\phi(t, \underline{0}, \underline{e}_i, t_0)$$

o sea

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = [\phi(t, \underline{0}, \underline{e}_1, t_0), \phi(t, \underline{0}, \underline{e}_2, t_0), \dots, \phi(t, \underline{0}, \underline{e}_n, t_0)]$$

A la matriz $\underline{\Phi}(t, t_0)$ se le denomina matriz de transición y

jugará un papel importante en desarrollos posteriores.

La matriz de transición del sistema descrito por

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t)$$

cumple las siguientes propiedades

$$i) \underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{I}$$

donde \underline{I} representa la matriz identidad

$$ii) \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t, t_0)$$

La primera propiedad puede probarse fácilmente si se observa que

$$a) \underline{\Phi}(t_0, t_0, \underline{e}_i, t_0) = \underline{e}_i$$

y

$$b) \text{ La } i\text{-ésima columna de la matriz } \underline{\Phi} \text{ es } \underline{e}_i$$

La segunda propiedad se deduce del hecho que la función $\underline{\Phi}$ satisface la ecuación diferencial

$$\dot{\underline{\Phi}}(t, t_0, \underline{e}_i, t_0) = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t, t_0, \underline{e}_i, t_0)$$

Puede demostrarse, aunque no se hará aquí, que solo existe una matriz que satisface las condiciones *i* y *ii*. De esta manera, para confirmar si una matriz es la de transición, basta comprobar que cumple dichas condiciones.

Otra propiedad que cumple la matriz $\underline{\Phi}(t, t_0)$ es la siguiente

$$iii) \underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0)$$

Esta puede deducirse de la propiedad de la ley de evolución de estados, enunciada en el cap 2:

$$\underline{\Phi}(t, t_0, \underline{x}_0, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1, \underline{\Phi}(t_1, t_0, \underline{x}_0, t_0), t_1)$$

y como

$$\underline{\Phi}(t, t_0, \underline{x}_0, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{x}_0$$

se tendrá que

$$\underline{\Phi}(t, t_0) \underline{x}_0 = \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0, \underline{x}_0, t_0)$$

$$= \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0) \underline{x}_0$$

Por ser la última igualdad válida para cualquier \underline{x}_0 , se concluye que

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0)$$

y si se particulariza para el caso $t=t_0$, se obtiene

$$I = \Phi(t_0, t_0) = \Phi(t_0, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$

o sea que el inverso de la matriz de transición $\Phi(t, \tau)$ es simplemente $\Phi(\tau, t)$.

A continuación se presenta un ejemplo de la matriz de transición de un sistema de dos dimensiones. Utilizando esa matriz, se confirman las propiedades *i*, *ii*, y *iii*.

2.2 Ejemplo de una matriz de transición

Considérese el sistema descrito por las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

La matriz de transición asociada a este sistema es

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

ya que las propiedades *i* y *ii* se cumplen

Propiedad *i*:

$$\Phi(t_0, t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t_0-t_0) & \sin(t_0-t_0) \\ -\sin(t_0-t_0) & \cos(t_0-t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Propiedad *ii*:

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \cos(t-t_0)}{\partial t} & \frac{\partial \sin(t-t_0)}{\partial t} \\ \frac{\partial [-\sin(t-t_0)]}{\partial t} & \frac{\partial \cos(t-t_0)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \\ -\cos(t-t_0) & -\sin(t-t_0) \end{bmatrix}$$

Por otra parte

$$A\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(t-t_0) & \cos(t-t_0) \\ -\cos(t-t_0) & -\operatorname{sen}(t-t_0) \end{bmatrix}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a$$

entonces

$$\frac{\partial \underline{\Phi}(t, t_0)}{\partial t} = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t, t_0)$$

Propiedad iii:

Por ser $\underline{\Phi}(t, t_0)$ una matriz de transición, resulta cierto que

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0)$$

en efecto,

$$\underline{\Phi}(t, t_1) \underline{\Phi}(t_1, t_0) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_1) & \operatorname{sen}(t-t_1) \\ -\operatorname{sen}(t-t_1) & \cos(t-t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t_1-t_0) & \operatorname{sen}(t_1-t_0) \\ -\operatorname{sen}(t_1-t_0) & \cos(t_1-t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(t-t_1)\cos(t_1-t_0) - \operatorname{sen}(t-t_1)\operatorname{sen}(t_1-t_0) & \cos(t-t_1)\operatorname{sen}(t_1-t_0) + \\ & + \operatorname{sen}(t-t_1)\cos(t_1-t_0) \\ -\operatorname{sen}(t-t_1)\cos(t_1-t_0) - \cos(t-t_1)\operatorname{sen}(t_1-t_0) & -\operatorname{sen}(t-t_1)\operatorname{sen}(t_1-t_0) + \\ & + \cos(t-t_1)\cos(t_1-t_0) \end{bmatrix}$$

Ahora utilizando las igualdades trigonométricas

la última matriz es

$$\begin{bmatrix} \cos(t-t_1+t_1-t_0) & \operatorname{sen}(t-t_1+t_1-t_0) \\ -\operatorname{sen}(t-t_1+t_1-t_0) & \cos(t-t_1+t_1-t_0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \operatorname{sen}(t-t_0) \\ -\operatorname{sen}(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0)$$

Conocida la matriz de transición del sistema, se puede determinar el estado para cualquier tiempo $t \geq t_0$ cuando la entrada es cero y el estado en t_0 es \underline{x}_0 :

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \operatorname{sen}(t-t_0) \\ -\operatorname{sen}(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

o sea

$$x_1(t) = x_{01} \cos(t-t_0) + x_{02} \operatorname{sen}(t-t_0)$$

$$x_2(t) = -x_{01} \operatorname{sen}(t-t_0) + x_{02} \cos(t-t_0)$$

En resumen, la ley de transición de estados $\underline{\Phi}$, para una entrada nula, puede escribirse como

$$\underline{\phi}(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_0) \underline{x}_0$$

donde $\underline{\Phi}(t, t_0)$ es la matriz de transición del sistema que cumple las condiciones

$$i) \underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{I}$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t, t_0)$$

2.3 Evolución del estado nulo

En esta sección se analizará el segundo término de la ley de transición de estados, o sea

$$\underline{\phi}(t, \underline{u}, \underline{0}, t_0)$$

Como se ha supuesto (sec 1) que la entrada es una función vectorial del tiempo con componentes, es posible expresar

$$\underline{u}(t) = u_1(t) \underline{e}_1 + u_2(t) \underline{e}_2 + \dots + u_n(t) \underline{e}_n$$

donde los vectores \underline{e}_i son los unitarios definidos en la sección anterior y las funciones $u_i(t)$ son escalares. Aplicando la propiedad de linealidad de la ley de transición de estados se obtiene

$$\underline{\phi}(t_1, \underline{u}, \underline{0}, t_0) = \sum_{i=1}^n \underline{\phi}(t_1, \underline{e}_i u_i, \underline{0}, t_0)$$

De esta forma, el problema de la determinación de la evolución del estado nulo queda prácticamente resuelto una vez que se conoce

$$\underline{\phi}(t_1, \underline{e}_i u, \underline{0}, t_0)$$

Ya que cualquier función u (que tenga un número finito de discontinuidades) puede aproximarse en el intervalo $[t_0, t_1]$ por la suma de unas funciones pulso, es posible efectuar las siguientes operaciones

a) Se divide el intervalo $[t_0, t_1]$ en n subintervalos iguales, cada intervalo de longitud $\frac{t_1 - t_0}{n} = \Delta$

b) Se define la función pulso $p_\Delta(t)$ como (fig 1)

$$p_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{si } 0 \leq t < \Delta \\ 0 & \text{para otros valores de } t \end{cases}$$

c) Entonces el valor de u_i en el intervalo $[t_0, t_1]$ puede aproximarse por (fig 2)

$$u_i(t) \approx \sum_{k=0}^n u_i(t_0 + k\Delta) p_\Delta(t - t_0 - k\Delta) \Delta$$

d) La evolución del estado nulo en el intervalo $[t_0, t_1]$ cuando la entrada es $\underline{e}_i u$ puede aproximarse, debido a la linealidad de $\underline{\phi}$, por

$$\begin{aligned} \underline{x}(t_1, \underline{e}_i, u, \underline{q}, t_0) &\approx \underline{x}\left[t_1, \sum_{k=0}^n \underline{e}_i u_i(t_0+k\Delta) p_\Delta(t-t_0-k\Delta), \underline{q}, t_0\right] = \\ &= \sum_{k=0}^n u_i(t_0+k\Delta) \Delta \underline{x}\left[t_1, \underline{e}_i p_\Delta(t-t_0-k\Delta), \underline{q}, t_0\right] \end{aligned}$$

donde $\underline{x}(t_1, p_\Delta(t-t_0-k\Delta) \underline{e}_i, \underline{q}, t_0)$ es el estado del sistema en t_1 cuando en t_0 es \underline{q} y se aplica la entrada $p_\Delta(t-t_0-k\Delta) \underline{e}_i$

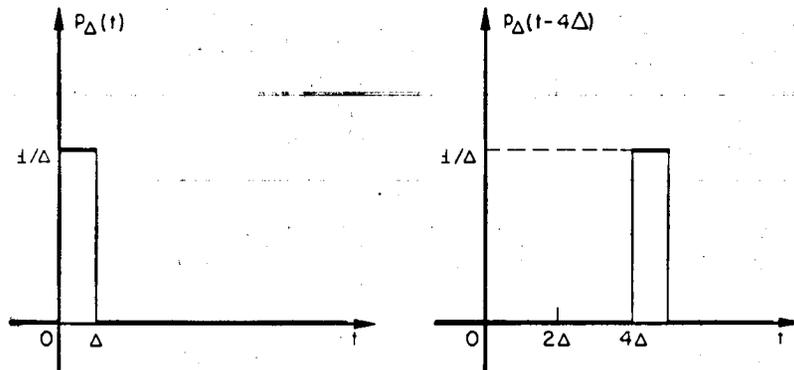


Fig 1. Definición de la función $p_\Delta[t]$

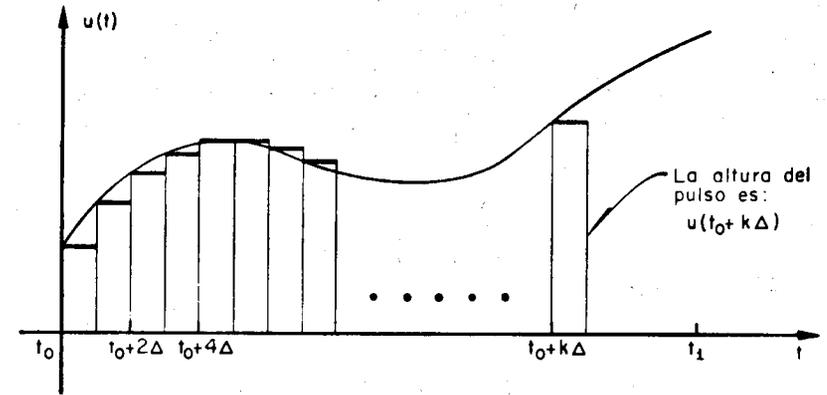


Fig 2. Aproximación de una función $u(t)$

Antes de continuar el desarrollo, conviene presentar un ejemplo.

Ejemplo

Considérese que la entrada $u(t)$ es como se indica en la fig 3 y que el intervalo $[t_0, t_1]$ se divide en tres partes iguales.

En este caso, la aproximación de u se ve en la fig 4.

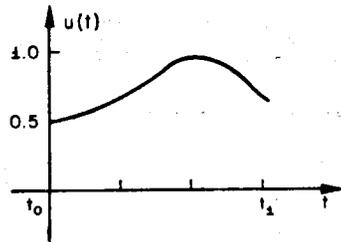


Fig 3. La función $u[t_0, t_1]$

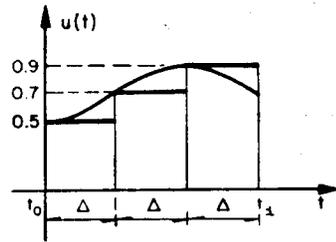


Fig 4. Aproximación de $u[t_0, t_1]$

Supóngase ahora que las funciones $\phi[t, p_\Delta(t-t_0-k\Delta), e_i, \underline{0}, t_0]$ son como se muestran en la fig 5

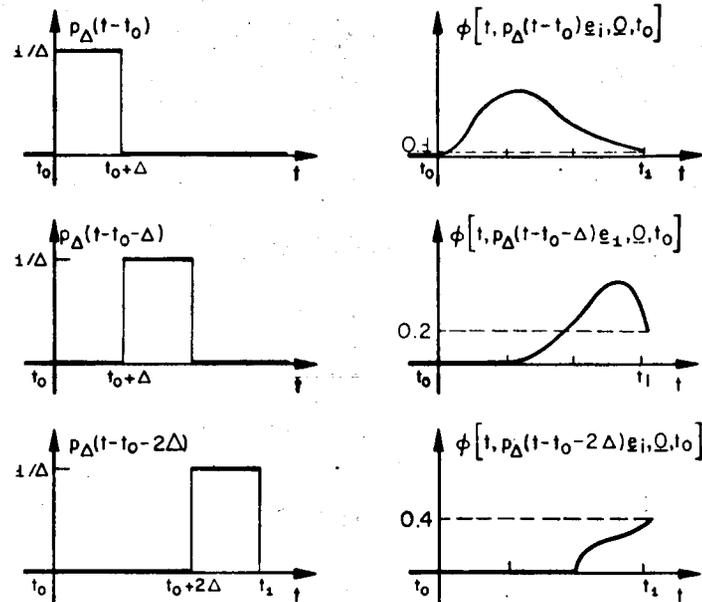


Fig 5. Las evoluciones $\phi[t, p_\Delta(t-t_0-k\Delta), e_i, \underline{0}, t_0]$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(t_1, u, e_i, \underline{0}, t_0) &= 0.5\phi(t_1, p_\Delta(t-t_0), e_i, \underline{0}, t_0) + 0.7\phi(t_1, p_\Delta(t-t_0-\Delta), e_i, \underline{0}, t_0) \\ &\quad + 0.9\phi(t_1, p_\Delta(t-t_0-2\Delta), e_i, \underline{0}, t_0) \} \Delta = \\ &= (0.5 \times 0.1 + 0.7 \times 0.3 + 0.9 \times 0.4) \Delta = .55 \Delta \end{aligned}$$

En general, para cualquier valor de t en el intervalo $[t_0, t_1]$ el valor aproximado de $\underline{\phi}(t, u, \underline{e}_i, \theta, t_0)$ se obtiene de manera simi-
lar.

La función $\underline{\phi}(t, \sum_{k=1}^3 \Delta u_i(t_0+k\Delta) p_{\Delta}(t-t_0-k\Delta) \underline{e}_i, \theta, t_0)$ se muestra en la fig 6.

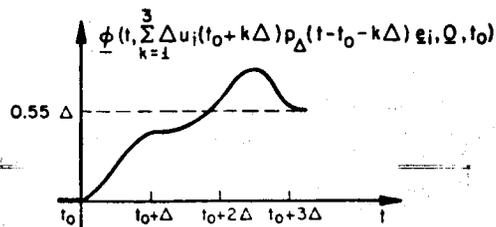


Fig 6. Aproximación de $\underline{\phi}(t, u, \underline{e}_i, \theta, t_0)$.

Cuando n , el número de subintervalos en que se divide $[t_0, t_1]$ se aproxima a ∞ , entonces la función p_{Δ} se acerca a un impulso de área unitaria, o sea

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} p_{\Delta}(t) = \delta(t)$$

donde δ es la función generalizada impulso.

De esta forma, si se hace el cambio de variables

$$\sigma = t_0 + k\Delta$$

se tendrá que

$$\Delta = d\sigma$$

y para el intervalo de valores de t entre t_0 y t_1 , es cierto que

$$u(t) = \int_{t_0}^{t_1} u(\sigma) \delta(t-\sigma) d\sigma$$

y la aproximación de $\underline{\phi}(t_1, u, \underline{e}_i, \theta, t_0)$ se convierte en la igualdad

$$\underline{\phi}(t_1, u, \underline{e}_i, \theta, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} u(\sigma) \underline{\phi}(t_1, \delta(t-\sigma) \underline{e}_i, \theta, t_0) d\sigma \quad (1)$$

Entonces, es posible expresar la evolución del estado cero debido a una entrada $u \underline{e}_i$ en función de la evolución del estado nulo cuando la entrada es el impulso $\delta(t-\sigma) \underline{e}_i$ que ocurre en $t=\sigma$. Por las consideraciones anteriores conviene examinar la función

$$\underline{\phi}(t_1, \delta(t-\sigma) \underline{e}_i, \theta, t_0)$$

la cual se designará $x_{\sigma, i}(t_1)$.

De acuerdo con la ec 4 de la sec 2, $x_{\sigma}(t)$ debe ser la única función que satisfaga la ecuación

$$\dot{x}_{\sigma}(t) = \int_{t_0}^t \underline{A}(\tau) x_{\sigma}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \underline{B}(\tau) \delta(\tau-\sigma) \underline{e}_i d\tau \quad (2)$$

Como a continuación se verá, por ser la entrada un impulso unitario que ocurre en el tiempo σ , $x_{\sigma i}(t)$, será cero para $t < \sigma$ debido a que $x_{\sigma i}(t_0) = 0$, para $t > \sigma$, $x_{\sigma i}(t)$ será igual a la evolución del estado cuando en $t = \sigma$ es $B(\sigma)e_i$, que es la i -ésima columna de la matriz $B(\sigma)$, y la entrada es nula (fig 7).

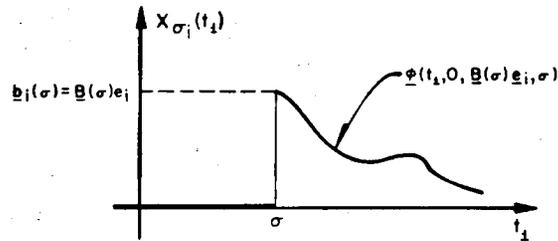


Fig 7. Esquematización $\phi(t, \sigma, B(\sigma)e_i, \sigma)$ para el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Considérese $t < \sigma$; entonces, como $\delta(t - \sigma)$ es cero para valores de τ en el intervalo $[t_0, \sigma)$, se tiene que

$$\int_{t_0}^t B(\tau)\delta(\tau - \sigma)e_i d\tau = 0$$

y resulta

$$\dot{x}_{\sigma i}(t) = \int_{t_0}^t A(\tau)x_{\sigma i}(\tau) d\tau$$

y la única solución de esta ecuación es $x_{\sigma i}(\tau) = 0$

Considérese ahora el intervalo $\sigma - \epsilon, \sigma + \epsilon$, donde ϵ es un número positivo arbitrariamente pequeño.

En este caso

$$\int_{\sigma - \epsilon}^{\sigma + \epsilon} A(\tau)x_{\sigma i}(\tau) d\tau = 0$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$; así que

$$x_{\sigma i}(\sigma + \epsilon) = \int_{\sigma - \epsilon}^{\sigma + \epsilon} B(\tau)\delta(\tau - \sigma)e_i d\tau$$

pero de acuerdo con la propiedad de la función impulso

$$\int_{\sigma - \epsilon}^{\sigma + \epsilon} f(\tau)\delta(\tau - \sigma) d\tau = f(\sigma)$$

se tendrá

$$x_{\sigma i}(\sigma + \epsilon) = B(\sigma)e_i$$

En el intervalo $[\sigma + \epsilon, t_1]$ la función $\delta(\tau - \sigma)$ vale cero; por ello

$$\dot{x}_{\sigma i}(t) = \phi(t, \sigma, B(\sigma)e_i, \sigma)$$

que de acuerdo con las consideraciones de la sección anterior se puede expresar como

$$x_{\sigma i}(t) = \Phi(t, \sigma)B(\sigma)e_i$$

donde $\underline{\Phi}$ es la matriz de transición del sistema.

De esta manera es posible escribir la igualdad

$$\underline{\Phi}(t, \delta(t-\sigma)\underline{e}_i, \underline{0}, t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma > t \\ \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{e}_i & \text{si } \sigma < t \end{cases}$$

Volviendo a la igualdad 1, se tendrá que como

$$\underline{\Phi}(t, \underline{u}, \underline{x}_0, \underline{0}, t_0) = \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{e}_i u_i(\sigma) d\sigma$$

en el intervalo de integración $\sigma < t$; por lo que se concluye que

$$\underline{\Phi}(t, \underline{u}, \underline{x}_0, \underline{0}, t_0) = \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{e}_i u_i(\sigma) d\sigma$$

2.4 Fórmula de variación de parámetros

Conjugando los resultados de las dos últimas secciones, puede escribirse en forma explícita la ley de evolución de estados, denominada comúnmente fórmula de variación de parámetros:

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}(t, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0) &= \underline{\Phi}(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0) + \underline{\Phi}(t, \underline{u}, \underline{0}, t_0) \\ &= \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \underline{\Phi}(t, \sum_{i=1}^n u_i \underline{e}_i, \underline{0}, t_0) \\ &= \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \sum_{i=1}^n \underline{\Phi}(t, u_i \underline{e}_i, \underline{0}, t_0) \\ &= \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)u_i(\sigma)\underline{e}_i d\sigma \\ &= \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma) \sum_{i=1}^n u_i(\sigma)\underline{e}_i d\sigma \\ &= \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

o sea

$$\underline{\Phi}(t, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma$$

De la propiedad de la matriz de transición

$$\underline{\Phi}(t, \sigma) = \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{\Phi}(t_0, \sigma)$$

la fórmula de variación de parámetros puede escribirse como:

$$\underline{\Phi}(t, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0) = \underline{\Phi}(t, t_0) \left[\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t_0, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma \right]$$

Para saber si la ley de evolución de estados efectivamente es la correcta, basta comprobar, de acuerdo con la sec 6 del cap 2, que se cumplen dos condiciones:

si $\underline{x}(t) = \underline{\phi}(t, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0)$

i) $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

ii) $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t)$

Para ello considérese la condición i

como

$$\underline{x}(t_0) = \underline{\Phi}(t_0, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t_0} \underline{\Phi}(t_0, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma$$

y como

$\underline{\Phi}(t_0, t_0) = \underline{I}$ y el intervalo de integración es nulo, se concluye que $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

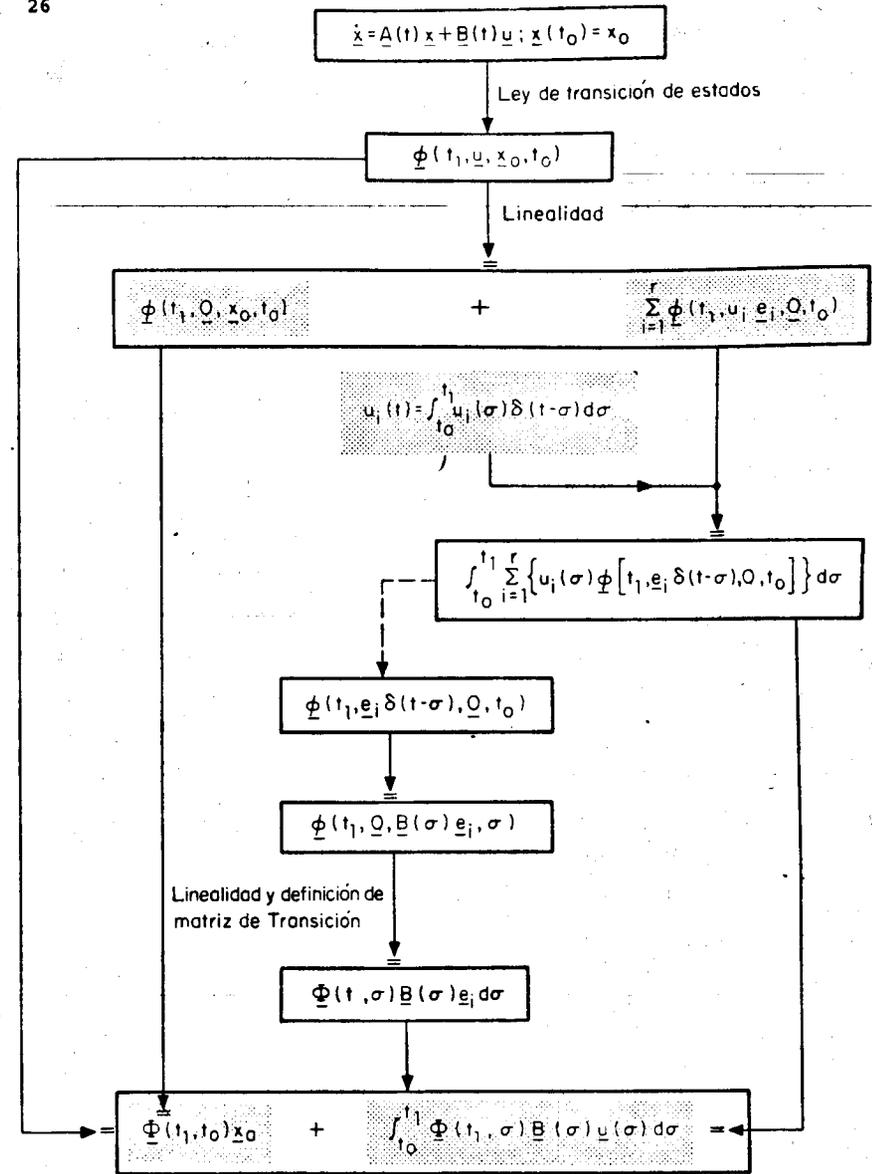
para la condición ii, derivando los dos términos de la fórmula de variación de parámetros

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \underline{\Phi}(t, t)\underline{B}(t)\underline{u}(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \underline{A}(t)\underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \underline{B}(t)\underline{u}(t) + \int_{t_0}^t \underline{A}(t)\underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \underline{A}(t)\left[\underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma) d\sigma\right] + \underline{B}(t)\underline{u}(t) \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t).$$

La secuencia de pasos utilizados en la derivación de la fórmula de variación de parámetros que representa en forma esquematizada en la fig 8.

Conocida la ley de evolución de los estados, puede entonces presentarse la relación entre la entrada-salida-estado que correspon



Esquema de la derivación de la fórmula de variación de parámetros

de a la función $F\{x_0, u[t_0, t]\}$ del cap 2.

Como

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t),$$

entonces, utilizando la fórmula de variación de parámetros, se obtiene

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= F\{x_0, u[t_0, t]\} \\ &= \underline{C}(t)\underline{\Phi}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \underline{C}(t)\underline{\Phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma)d\sigma \\ &+ \underline{D}(t)\underline{u}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

De la expresión anterior puede comprobarse que los sistemas descritos por

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t)$$

son lineales de acuerdo con la definición del cap 2.

La matriz*

$$T(t, \tau) = \underline{C}(t)\underline{\Phi}(t, \tau)\underline{B}(\tau)u_{-j}(\tau - \tau) + \underline{D}(\tau)\delta(t - \tau)$$

conocida como patrón de peso o matriz de respuesta a impulso del sistema tiene un significado especial y este es si en τ el estado

* $u_{-j}(t)$ indica un escalón unitario

del sistema es 0 , el elemento (i, j) corresponde al valor de la i -ésima componente de la salida cuando la j -ésima componente de $\underline{u}(t)$ es un impulso unitario que ocurre en el tiempo τ y todas las otras componentes son nulas.

La importancia del patrón de peso radica en que a partir de él puede calcularse la respuesta del sistema debida a cualquier entrada cuando el estado inicial es cero, sin necesidad de realizar ninguna otra medición sobre el sistema.

De esta forma el patrón de peso caracteriza completamente la relación entrada-salida, con estado nulo, en los sistemas lineales de parámetros concentrados.

De la ec 3 se deduce que el valor de la salida para cualquier $t > t_0$ puede determinarse si se conocen el estado en t_0 , la entrada en el intervalo $[t_0, t]$ y la matriz de transición. En la siguiente sección se presentarán algunos métodos para obtener la matriz $\underline{\Phi}(t, t_0)$ para aquellos sistemas en que \underline{A} es una matriz constante.

3. Matriz exponencial

Considérese el caso en que la descripción interna del sistema tiene una matriz \underline{A} constante. De acuerdo con la sec 2, la matriz de transición debe ser la única que satisfaga las condiciones

$$1) \quad \underline{\Phi}(t, t) = \underline{I}$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial t} \underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{A} \underline{\Phi}(t, t_0)$$

Considérese la matriz dada por la serie infinita

$$\underline{G}(t, t_0) = \underline{I} + (t-t_0) \underline{A} + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \underline{A}^2 + \dots + \frac{(t-t_0)^k}{k!} \underline{A}^k + \dots$$

la cual es uniformemente convergente. Nótese que

$$\underline{G}(t_0, t_0) = \underline{I}$$

Si se toma la derivada parcial, con respecto a t de cada uno de los términos resulta la serie

$$\underline{0} + \underline{A} + \frac{2(t-t_0)}{2!} \underline{A}^2 + \dots + \frac{k(t-t_0)^{k-1}}{k!} \underline{A}^{k-1} + \dots$$

Factorizando la matriz \underline{A} y observando que $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ se obtiene

$$\underline{A} \left[\underline{I} + (t-t_0) \underline{A} + \dots + \frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} \underline{A}^{k-1} + \dots \right]$$

que es igual a $\underline{A} \underline{G}(t, t_0)$. Como esta última serie es también uniformemente convergente, la derivada de $\underline{G}(t, t_0)$ es igual a la serie que se obtiene derivando cada uno de los términos. Así, puede concluirse que

$$\frac{\partial \underline{G}}{\partial t}(t, t_0) = \underline{A} \underline{G}(t, t_0).$$

Por satisfacer $\underline{G}(t, t_0)$ las condiciones i y ii es la matriz de transición buscada, luego entonces

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = \underline{I} + (t-t_0) \underline{A} + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \underline{A}^2 + \dots + \frac{(t-t_0)^k}{k!} \underline{A}^k$$

Por similitud con la serie que define e^{at} , esto es

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^k}{k!} + \dots$$

se ha convenido en denotar como $e^{\underline{M}}$, cuando \underline{M} es una matriz, a la serie

$$\underline{I} + \underline{M} + \frac{\underline{M}^2}{2!} + \frac{\underline{M}^3}{3!} + \dots + \frac{\underline{M}^k}{k!}$$

entonces, haciendo $\underline{M} = (t-t_0) \underline{A}$ se puede escribir la igualdad

$$e^{(t-t_0) \underline{A}} = \underline{I} + (t-t_0) \underline{A} + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \underline{A}^2 + \dots + \frac{(t-t_0)^k}{k!} \underline{A}^k + \dots$$

o sea que la matriz de transición puede escribirse en forma compacta como

$$\underline{\Phi}(t, t_0) = e^{(t-t_0) \underline{A}}$$

Por ser $e^{(t-t_0)\underline{A}}$, la matriz de transición del sistema

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t)$$

tiene las siguientes propiedades

$$i) \quad \underline{\phi}(t_0, t_0) = e^{(t_0-t_0)\underline{A}} = e^{0\underline{A}} = e^0 = e^0 = I$$

$$ii) \quad \frac{\partial}{\partial t} \underline{\phi}(t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} e^{(t-t_0)\underline{A}} = \underline{A} e^{(t-t_0)\underline{A}} = \underline{A} \underline{\phi}(t, t_0)$$

$$iii) \quad \underline{\phi}(t_2, t_0) = \underline{\phi}(t_2, t_1) \underline{\phi}(t_1, t_0) \\ = e^{(t_2-t_1)\underline{A}} e^{(t_1-t_0)\underline{A}} = e^{(t_2-t_0)\underline{A}}$$

iv) haciendo $t_2 = t_0$ en la igualdad anterior se obtiene

$$I = e^{(t_0-t_1)\underline{A}} e^{(t_1-t_0)\underline{A}}$$

o sea que

$$[e^{t\underline{A}}]^{-1} = e^{-t\underline{A}}$$

Debe tenerse presente que $e^{t\underline{A}}$ es solo una convención de notación, por eso algunas de las propiedades de e^{at} cuando a es un escalar, no se pueden extender a la función $e^{\underline{A}t}$ excepto bajo condiciones especiales. Por ejemplo, la igualdad

$$e^a e^b = e^{a+b}$$

aunque válida para el caso en que a y b son escalares, no es en general cierta para el caso matricial; esto es

$$e^{\underline{A}} e^{\underline{B}} \neq e^{\underline{A}+\underline{B}}$$

sin embargo, cuando $\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A}$ (las matrices \underline{A} y \underline{B} conmutan) entonces puede afirmarse que

$$e^{\underline{A}} e^{\underline{B}} = e^{\underline{A}+\underline{B}}$$

Por la forma de la serie que define la matriz exponencial, se cumple que

$$\underline{A} e^{t\underline{A}} = e^{t\underline{A}} \underline{A}$$

esto es, la matriz exponencial de \underline{A} conmuta con la matriz \underline{A} porque

$$\underline{A} [I + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2}{2!} t^2 + \dots] = \underline{A} + \underline{A}^2 t + \frac{\underline{A}^3}{2!} t^2 + \dots$$

$$= [I + \underline{A}t + \frac{\underline{A}^2}{2!} t^2 + \dots] \underline{A}$$

La serie que define $e^{(t-t_0)\underline{A}}$ puede utilizarse para encontrar la matriz de transición:

Ejemplo

Considérese que un sistema está descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

La matriz de transición es

$$\Phi(t, t_0) = e^{(t-t_0)A} = \exp(t-t_0) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2!} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2!} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^3}{3!} & 0 \end{bmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Efectuando la suma se obtiene

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} - \dots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix}$$

Identificando cada una de las series que aparecen en la matriz anterior resulta

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \text{sen } t \\ -\text{sen } t & \cos t \end{bmatrix}$$

o sea que

$$e^{(t-t_0)A} = \begin{bmatrix} \cos(t-t_0) & \text{sen}(t-t_0) \\ -\text{sen}(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{bmatrix}$$

que, de acuerdo con la comprobación que se hizo en el ejemplo 2.2, es la matriz de transición del sistema.

3.1 Obtención de e^{At} mediante la transformada de Laplace

Se vio que la matriz de transición para un sistema en el que la matriz A es constante, es:

$$\Phi(t, 0, x_0, t_0) = \Phi(t-t_0, 0, x_0, 0)$$

y esto es igual a $\Phi(t-t_0, 0)$ por lo que la matriz de transición depende únicamente de la diferencia $t-t_0$, lo cual quiere decir que

$$\underline{\phi}(t, \underline{0}, \underline{x}_0, t_0) = \underline{\phi}(t-t_0, \underline{0}, \underline{x}_0, 0)$$

De esta manera, si se conoce $\underline{\phi}(t, 0)$, puede determinarse

$\underline{\Phi}(t_1, t_2)$ para cualquier valor de t_2 y t_1 , ya que

$$\underline{\Phi}(t_1, t_2) = \underline{\phi}(t_1 - t_2, 0)$$

Vale la pena examinar entonces $\underline{\phi}(t, 0)$, o sea e^{tA} . Como esta función satisface

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{tA} = \frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

es posible tomar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, o sea*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} e^{tA}\right] = \mathcal{L}[A e^{tA}]$$

y de acuerdo con las propiedades de la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} e^{tA}\right] &= s\mathcal{L}[e^{tA}] - e^{tA} \Big|_{t=0} \\ &= s\mathcal{L}[e^{tA}] - \underline{I} \end{aligned}$$

* La transformada de Laplace de una matriz se define como otra matriz cuyos elementos son las transformadas de Laplace de cada uno de los elementos de la matriz original, o sea

$$\mathcal{L}(p(t)) = \mathcal{L} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}(t) & p_{m1}(t) & \dots & p_{mn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[p_{11}(t)] & \mathcal{L}[p_{12}(t)] & \dots & \mathcal{L}[p_{1n}(t)] \\ \mathcal{L}[p_{21}(t)] & \mathcal{L}[p_{22}(t)] & \dots & \mathcal{L}[p_{2n}(t)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{L}[p_{m1}(t)] & \mathcal{L}[p_{m2}(t)] & \dots & \mathcal{L}[p_{mn}(t)] \end{bmatrix}$$

Además, debido a la linealidad de la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[A e^{tA}] = A \mathcal{L}[e^{tA}]$$

se obtiene la ecuación

$$s\mathcal{L}[e^{tA}] - \underline{I} = A \mathcal{L}[e^{tA}]$$

Factorizando $\mathcal{L}[e^{tA}]$ se logra la igualdad

$$(s\underline{I} - A) \mathcal{L}[e^{tA}] = \underline{I}$$

y se concluye que

$$\mathcal{L}[e^{tA}] = (s\underline{I} - A)^{-1}$$

De acuerdo con el resultado anterior, para encontrar e^{tA} puede determinarse primero $(s\underline{I} - A)^{-1}$ y encontrar su transformada inversa de Laplace.

Ejemplo

Considérese nuevamente la matriz A del último ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

la matriz $(s\underline{I} - A)$ es, entonces

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ +1 & s \end{bmatrix} = (sI - A)$$

Para encontrar el inverso de la última matriz puede utilizarse la igualdad*

$$\underline{M}^{-1} = \frac{Adj(\underline{M})}{det(\underline{M})}$$

donde $det(\underline{M})$ denota el determinante de la matriz \underline{M} y $Adj(\underline{M})$ es la matriz adjunta (o adjugada) de \underline{M} que se define como la que se obtiene al trasponer \underline{M} y reemplazar cada elemento por su cofactor.

Así que

$$det(I_s - A) = s^2 + 1$$

$$\text{y } adj(I_s - A) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

entonces

$$(I_s - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 1} & \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{-1}{s^2 + 1} & \frac{s}{s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

y como la transformada inversa de $\frac{s}{s^2 + 1}$ es $\cos t$, y la de $\frac{1}{s^2 + 1}$ es $\sin t$, se concluye que

* Apéndice 2

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

resultado que coincide con el obtenido mediante la serie que define e^{tA}

Ejemplo

Considérese ahora la matriz

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

para este caso

$$(I_s - A) = \begin{bmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s-5 \end{bmatrix}$$

$$det(I_s - A) = (s-2)(s-5) - 4 = s^2 - 7s + 6 = (s-1)(s-6)$$

$$Adj(I_s - A) = \begin{bmatrix} s-5 & -4 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix}$$

y reuniendo estos resultados

$$(I_s - A)^{-1} = \frac{Adj(I_s - A)}{det(I_s - A)} = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{(s-1)(s-6)} & \frac{-4}{(s-1)(s-6)} \\ \frac{-1}{(s-1)(s-6)} & \frac{s-2}{(s-1)(s-6)} \end{bmatrix}$$

y la transformada inversa de Laplace de la última matriz es:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} e^t + \frac{1}{5} e^{6t} & \frac{4}{5} e^t - \frac{4}{5} e^{6t} \\ \frac{1}{5} e^t - \frac{1}{5} e^{6t} & \frac{1}{5} e^t + \frac{4}{5} e^{6t} \end{bmatrix}$$

Debe aclararse que al tomar la transformada inversa de una función de s , la función del tiempo que se obtiene está definida únicamente para $t > 0$.

Obtener la matriz de transición por medio de la transformada de Laplace es de utilidad cuando la dimensión del sistema es pequeña y se desea una expresión analítica para $\underline{x}(t, 0)$. En el caso de que la dimensión del sistema sea grande y se desea obtener valores numéricos de la matriz, hay una manera eficiente para hacerlo utilizando la computadora digital. El método se basa en la propiedad

$$e^{t_1 A} e^{t_2 A} = e^{(t_1 + t_2) A}$$

así pues si se desea calcular e^{At} para valores de $t = \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots$

mediante la serie que define la matriz exponencial, se calcula $e^{\Delta A}$. Conforme Δ es más pequeño, la serie se aproxima más rápidamente a su valor final. Conocido $e^{\Delta A}$, se puede calcular

$$e^{2\Delta A} = e^{\Delta A} e^{\Delta A} = (e^{\Delta A})^2$$

iterativamente

$$e^{k\Delta A} = e^{\Delta A} = (e^{\Delta A})^k$$

La ventaja de proceder de acuerdo al esquema anterior es que es necesario utilizar la serie que define e^{tA} solo una vez.

4. Sistemas invariables con el tiempo

En la sección anterior se demostró que la matriz de transición de los sistemas que tienen una matriz A constante era

$$\underline{x}(t, \sigma) = \underline{\Phi}(t, \sigma) = e^{(t-\sigma)A}$$

Considérese ahora la relación entre la entrada-estado-salida para los sistemas descritos por ecuaciones del tipo

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \quad (1)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) \quad (2)$$

donde \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} y \underline{D} son matrices constantes.

De acuerdo con la fórmula de variación de parámetros

$$\underline{y}(t) = \underline{C} e^{(t-t_0)A} \underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{C} e^{(t-\sigma)A} \underline{B} \underline{u}(\sigma) d\sigma + \underline{D} \underline{u}(t)$$

Al cambiar t por $t-T$ se logra

$$\underline{y}(t-T) = \underline{C}e^{(t-T-t_0)A} \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t-T} \underline{C}e^{(t-T-\sigma)A} \underline{B}u(\sigma) d\sigma + u(t-T)$$

Al sustituir la variable de integración σ por $\delta-T$ se obtiene

$$\underline{y}(t-T) = \underline{C}e^{(t-t_0-T)A} \underline{x}_0 + \int_{t_0+T}^{t+T} \underline{C}e^{(t-t)A} \underline{B}u(t-T) d\tau + \underline{D} u(t-T)$$

y por ello el sistema es invariable con el tiempo de acuerdo a la definición del cap 2, porque

$$\underline{y}(t) = \underline{F}[x_0, u[t_0, t]]$$

implica

$$\underline{y}(t-T) = \underline{F}[x_0, u[t_0, t]] = \underline{F}[x_0, u[t_0, t]]$$

El patrón de peso (o la respuesta a impulso) de estos sistemas es

$$\underline{H}(t-\sigma) = \underline{C}e^{(t-\sigma)A} \underline{B} u_{-1}(t) + \underline{D}\delta(t-\sigma)$$

y como esta función depende únicamente de $t-\sigma$, la respuesta a impulso puede escribirse como

$$\underline{H}(t) = \underline{C}e^{tA} \underline{B} u_{-1}(t) + \underline{D}\delta(t)$$

esto es, si el estado en $t = 0$ es cero y se determina la salida cuando cada componente de la entrada es un impulso que ocurre en $t=0^*$ la salida asociada a cualquier entrada estando el sistema en el estado 0 puede ser calculada sin necesidad de conocer absolutamente nada adicional del sistema, porque

$$\underline{y}(t) = \int_{t_0}^t \underline{H}(t-\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma$$

Esta propiedad no abarca los sistemas variables con el tiempo porque en ese caso la respuesta a impulso no solo es una función de la diferencia $t-\sigma$ sino de t y σ . Esto quiere decir que debe determinarse la respuesta a impulso para cada valor de σ y no solo para $\sigma=0$.

Ejemplo

Considérese un sistema lineal e invariable con el tiempo. Al aplicarle un impulso en $t=0$ estando en el estado nulo, se obtiene la salida que se muestra en la fig 9.

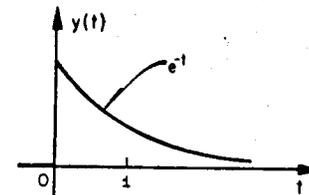


Fig 9 Respuesta a impulso del sistema

* Recuérdense las consideraciones de la sec 2, cap 2

Entonces si la entrada fuera $u(t) = \cos t$, la salida sería

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-(t-\sigma)} \cos \sigma \, d\sigma \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{\sigma} \cos \sigma \, d\sigma = e^{-t} \frac{1}{2} [e^{\sigma} (\cos \sigma + \sin \sigma)] \Big|_0^t \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \{ e^t (\cos t + \sin t) - 1 \} \\ &= \frac{1}{2} [\cos t + \sin t - e^{-t}] \end{aligned}$$

Esta función se muestra en la fig. 10

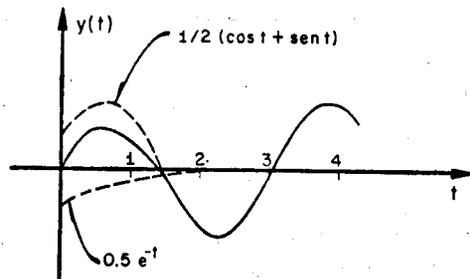


Fig. 10 Respuesta del sistema cuando la entrada es $\cos t$

5. Linealización

Como se mostró en la sec 7 del cap 3, es posible elaborar un modelo de un sistema que no tenga la propiedad de linealidad.

Ya que no existen procesos generales para resolver analíticamente ecuaciones diferenciales no lineales, en la mayoría de los

casos es preciso recurrir a métodos numéricos. Sin embargo, a diferencia de lo que sucede en los sistemas lineales*, en los no lineales, para cada entrada y cada estado inicial se debe recurrir a los métodos numéricos a fin de encontrar la salida, porque esta no puede inferirse a partir del conocimiento de las salidas debidas a otras entradas y otros estados iniciales.

Ante la dificultad de conocer el comportamiento de un sistema no lineal bajo todas las entradas posibles y todos los estados iniciales, se trata de describir su comportamiento alrededor de una solución, esto es, que una vez conocida la salida $y^*(t)$ del sistema debida a una entrada $u^*(t)$ y un estado inicial $x^*(t_0)$ se requiere conocer la salida $y(t)$ debida a una entrada $u(t)$ "parecida" a $u^*(t)$ y un estado inicial "cercano" $x(t)$.

Como se verá a continuación, es posible obtener una descripción lineal del sistema cuya salida $\bar{y}(t)$, debida a la entrada $\bar{u}(t) = u(t) - u^*(t)$ y al estado inicial $\bar{x}(t_0) = x(t_0) - x^*(t_0)$ es aproximadamente igual a la diferencia $y(t) - y^*(t)$

De esta forma

$$y(t) = y^*(t) + \bar{y}(t)$$

* Como se vió en secciones anteriores, dichos sistemas tienen la propiedad que si se encuentra respuesta a unos cuantos estados iniciales y una entrada, se puede construir la respuesta para cualquier estado inicial y cualquier entrada.

Considérese un sistema no-lineal, invariable con el tiempo descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f[x(t), u(t)] \\ y(t) &= g[x(t), u(t)]\end{aligned}\quad (1)$$

La función de evolución de estados para este sistema, $\phi(t, u, x_0, t_0)$, debe satisfacer:

i) la ecuación diferencial; es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi, u)$$

ii) la condición inicial

$$\phi(t_0, u, x_0, t_0) = x_0$$

Supóngase que la evolución del estado se ha determinado cuando el estado inicial es x_0^* y la entrada es $u^*(t)$, esto es

$$\phi(t, u^*, x_0^*, t_0) = x^*(t)$$

La función $x^*(t)$ debe satisfacer las dos condiciones

$$\frac{d x^*(t)}{dt} = f[x^*(t), u^*(t)]$$

y

$$x^*(t_0) = x_0$$

así que

$$y^*(t) = g[x^*(t), u^*(t)]$$

Ahora, si la entrada que se aplica al sistema es $u(t)$ y el estado inicial es x_0 , pueden definirse las nuevas funciones

$$\bar{u}_0(t) = u(t) - u^*(t)$$

y

$$\begin{aligned}\bar{x}_0(t) &= \phi(t, u, x_0, t_0) - x^*(t) \\ \bar{y}_0(t) &= g(\phi, u) - y^*(t)\end{aligned}$$

Cuando las funciones f y g pueden expandirse en una serie de Taylor alrededor de $u^*(t)$ y $x^*(t)$, entonces las siguientes relaciones son válidas†

† $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial u}$ son las formas abreviadas de escribir las matrices

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f[\underline{x}(t), \underline{u}(t)] &= f[\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t)] + \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] [\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)] + \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] [\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)] + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{x}^2}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] [\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)] [\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)] \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g[\underline{x}(t), \underline{u}(t)] &= g[\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t)] + \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] [\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)] + \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] [\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)] + \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] [\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)] [\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)] + \dots \end{aligned}$$

Las series que aparecen en las dos ecuaciones anteriores pueden aproximarse por los tres primeros términos cuando las diferencias $[\underline{x}(t) - \underline{x}^*(t)]$ y $[\underline{u}(t) - \underline{u}^*(t)]$ son suficientemente pequeñas, lo que equivale a decir que $\tilde{\underline{x}}(t)$ y $\tilde{\underline{u}}(t)$ son pequeñas.

Si es el caso, entonces es factible obtener un sistema lineal que describa la evolución de $\tilde{\underline{x}}(t)$ y $\tilde{\underline{u}}(t)$. Dicho proceso se denomina linealización del sistema.

A continuación se determina el modelo lineal mencionado arriba y se presenta un ejemplo de aplicación de esta técnica:

Restando las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones ϕ y \underline{x}^* se obtiene

$$\dot{\tilde{\phi}} - \dot{\tilde{\underline{x}}}^* = f[\tilde{\phi}, \underline{u}] - f[\phi^*, \underline{u}^*]$$

pero como $\tilde{\underline{x}}(t) = \underline{\phi} - \underline{x}^*$ y utilizando la aproximación de la expansión

de $f(\phi^*, \underline{u}^*)$, se obtiene

$$\dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] \tilde{\underline{x}}(t) + \left[\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] \tilde{\underline{u}}(t)$$

Nótese que una vez determinada la función $\underline{x}^*(t)$, los coeficientes de $\tilde{\underline{x}}(t)$ y $\tilde{\underline{u}}(t)$ son funciones del tiempo que no dependen de $\tilde{\underline{x}}(t)$. De esta manera se obtiene una ecuación del tipo $\dot{\tilde{\underline{x}}}(t) = \underline{A}(t) \tilde{\underline{x}}(t) + \underline{B}(t) \tilde{\underline{u}}(t)$ que es lineal.

Para determinar la ecuación que satisface $\tilde{\underline{y}}(t)$ se procede de manera análoga:

Restando las ecuaciones que determinan $\underline{y}(t)$ y $\underline{y}^*(t)$ se obtiene

$$\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{y}(t) - \underline{y}^*(t) = g(\phi, \underline{u}) - g(\phi^*, \underline{u}^*)$$

y utilizando la expansión de $g(\phi, \underline{u})$ se logra la ecuación lineal

$$\tilde{\underline{y}}(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] \tilde{\underline{x}}(t) + \left[\frac{\partial g}{\partial \underline{u}}(\underline{x}^*, \underline{u}^*) \right] \tilde{\underline{u}}(t)$$

que es de la forma

$$\tilde{\underline{y}}(t) = \underline{C}(t) \tilde{\underline{x}}(t) + \underline{D}(t) \tilde{\underline{u}}(t)$$

5.1 Punto de equilibrio

En los sistemas no lineales son de particular interés los estados llamados de equilibrio, o sea aquellos para los cuales existe una entrada $\underline{u}^*(t)$ tal que

$$\phi(t, \underline{u}^*, \underline{x}^*, t_0) = \underline{x}^* \text{ para } t > t_0 \quad (2)$$

Esto significa que el sistema permanecerá en el mismo estado

do mientras se aplique la entrada \underline{u}^*

De acuerdo con la ec 1, un punto de equilibrio cumple con la condición

$$\dot{\underline{x}}^* = 0 = f(\underline{x}^*, \underline{u}^*)$$

o sea, que el estado no cambia.

Ejemplo

Considérese nuevamente el ejemplo 7.1 del cap 4.

Las ecuaciones que describían el sistema eran

$$\frac{dh_1}{dt} = -\sqrt{h_1(t)} + q_0(t)$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \sqrt{h_1(t)} - \sqrt{h_2(t)}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

donde $q_0(t)$ representada la entrada, $h_1(t)$ y $h_2(t)$ los estados y $y(t)$ la salida. Si $q_0^* = 3$, entonces el punto de equilibrio está dado por los valores de h_1 y h_2 que satisfacen las ecuaciones

$$-\sqrt{h_1} + 3 = 0$$

$$\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} = 0$$

o sea

$$h_1^* = 9; \quad h_2^* = 9$$

Ahora bien, si la entrada es $3 + \bar{u}(t)$ y $|\bar{u}(t)| \ll \epsilon$ donde ϵ

es pequeño y además, $h_1(0) = 9 + \delta_1$, $h_2(0) = 9 + \delta_2$, donde δ_1 y δ_2 son cantidades pequeñas, la evolución de $\bar{h}_1(t) = h_1(t) - 9$ y $\bar{h}_2(t) = h_2(t) - 9$ cumple con la ecuación

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{h}_1(t) \\ \bar{h}_2(t) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f}{\partial h} (h^*, q^*) \right] \begin{bmatrix} \bar{h}_1(t) \\ \bar{h}_2(t) \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial f}{\partial q} (h^*, q^*) \right] \bar{u}(t)$$

pero como

$$f = \begin{bmatrix} -\sqrt{h_1} + q_0 \\ \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial h} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(-\sqrt{h_1} + q_0)}{\partial h_1} & \frac{\partial(-\sqrt{h_1} + q_0)}{\partial h_2} \\ \frac{\partial(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{\partial h_1} & \frac{\partial(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{\partial h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{h_1}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{h_1}} & \frac{-1}{2\sqrt{h_2}} \end{bmatrix}$$

$$y \quad \frac{\partial f}{\partial q_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_0} (-\sqrt{h_1} + q_0) \\ \frac{\partial}{\partial q_0} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

al evaluar las derivadas parciales anteriores en el punto de equilibrio se tiene

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{h}} (\bar{h}^*, q^*) = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial q} (\bar{h}^*, q^*) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea que el modelo linealizado alrededor del punto de equilibrio es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{h}_1(t) \\ \bar{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 \\ -1/6 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1(t) \\ \bar{h}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(t)$$

y la salida $\bar{y}(t) = y(t) - y^*(t) = y(t) - 9$ estará dada por

$$\bar{y}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial h} (\bar{h}^*, q^*) \\ \frac{\partial g}{\partial u} (\bar{h}^*, q^*) \end{bmatrix} \bar{h}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial h} (\bar{h}^*, q^*) \\ \frac{\partial g}{\partial u} (\bar{h}^*, q^*) \end{bmatrix} \bar{u}(t) \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{h}(t)$$

6. Controlabilidad

En ocasiones es necesario resolver el siguiente problema:

¿Dada la representación de un sistema por medio de variables de estado y si en $t = t_0$ está en el estado \underline{x}_0 , existe una entrada $\underline{u}[t_0, t_1]$ que lleve al sistema al estado \underline{x}_1 en $t=t_1$?

Utilizando la notación que se introdujo en este capítulo, el problema anterior puede plantearse así: dados $\underline{x}_0, \underline{x}_1, t_0$ y t_1 ¿Existe una entrada $\underline{u}[t_0, t_1]$ tal que

$$\phi(t_1, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0) = \underline{x}_1 ?$$

Cuando la transferencia entre los estados definida arriba, se puede realizar a partir de cualquier \underline{x}_0 en t_0 , a cualquier \underline{x}_1 , en un tiempo arbitrario $t_1 > t_0$, se dice que la representación del sistema en cuestión es completamente controlable o (por brevedad) controlable.

Cuando la representación del sistema es lineal, si es posible transferir cualquier estado al estado cero, entonces, es controlable. Esto puede verificarse de la siguiente manera:

Para los sistemas lineales la igualdad

$$\phi(t_1, \underline{u}, \underline{x}_0, t_0) = \underline{x}_1$$

es equivalente a

$$\underline{x}_1 = \phi(t_1, t_0) \underline{x}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma$$

y como esta ecuación puede escribirse como

$$\underline{0} = \phi(t_1, t_0) [\underline{x}_0 - \phi(t_0, t_1) \underline{x}_1] + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \sigma) \underline{B}(\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma$$

entonces la ec 1 es equivalente a

$$\phi(t_1, \underline{u}, \underline{x}_0 - \phi(t_0, t_1) \underline{x}_1, t_0) = \underline{0}$$

Esto quiere decir que la transferencia de \underline{x}_0 a \underline{x}_1 es equivalente a la transferencia del estado $\underline{x}_0 - \phi(t_0, t_1) \underline{x}_1$ a cero.

Por ser $\underline{x}_0, t_0, t_1$ y \underline{x}_1 arbitrarios, la representación lineal de un sistema es controlable si dado cualquier estado inicial \underline{x} cualesquiera valores de t_0 y $t_1 > t_0$ es posible encontrar una entrada \underline{u} , tal que

$$\phi(t_1, \underline{u}, \underline{x}, t_0) = \underline{0}$$

Puede probarse, aunque no lo haremos aquí, que un sistema lineal invariable con el tiempo y de dimensión n es controlable si y solo si

$$\int_0^t e^{-\sigma A} \underline{B} \underline{B}' e^{-\sigma A'} d\sigma$$

es no singular. Esta última condición es a su vez equivalente a que la matriz

$$[\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B}]$$

tenga los renglones linealmente independientes.

6.1 Ejemplo

Considérese el circuito de la fig 11

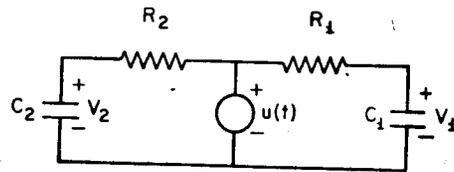


Fig 11 Circuito para ilustrar el concepto de controlabilidad

donde la entrada es el voltaje $v(t)$ y las salidas son los voltajes v_1 y v_2 .

Las ecuaciones que describen el sistema son

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_1 C_1 & 0 \\ 0 & -1/R_2 C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R_1 C_1 \\ 1/R_2 C_2 \end{bmatrix} u(t)$$

Se desean conocer las condiciones que deben satisfacer las constantes de tiempo $R_1 C_1$ y $R_2 C_2$ para que la representación del sistema sea controlable, esto es para que exista una entrada $u(t)$ tal que los voltajes v_1 y v_2 puedan alcanzar cualquier valor a partir de cualesquiera valores iniciales.

De acuerdo con el criterio mencionado, debe examinarse la matriz

$$[\underline{B}, \underline{A}\underline{B}]$$

que para el caso específico es

$$[\underline{B}, \underline{A}\underline{B}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{-1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}$$

Esta matriz cuadrada tiene los renglones linealmente independientes si su determinante es diferente de cero.

Como

$$\det[\underline{B}, \underline{A}\underline{B}] = \left[\frac{-1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} \right] \cdot \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_2}$$

se obtiene que la condición para que el sistema sea controlable es que*

$$R_2 C_2 \neq R_1 C_1$$

* Además de las condiciones triviales:

$$R_1 \neq \infty, R_2 \neq \infty, C_1 \neq \infty, C_2 \neq \infty$$

Si $R_1 C_1 = 1$ y $R_2 C_2 = 1/2$ entonces el sistema es controlable y por tanto existe un control $u(t)$ que transfiera el sistema

$$\text{de } \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ a } \begin{bmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Para determinar una $u(t)$ que satisfaga las condiciones arriba señaladas se puede proceder así: se determina la matriz de transición, que en este caso es

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

El problema entonces se reduce a encontrar u para que se satisfaga la siguiente ecuación

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} e^{-(1-\sigma)} & 0 \\ 0 & e^{-2(1-\sigma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(\sigma) d\sigma$$

o sea que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ e^2 \end{bmatrix} = \int_0^1 \begin{bmatrix} e^\sigma \\ 2e^{2\sigma} \end{bmatrix} u(\sigma) d\sigma$$

Para este caso particular puede seleccionarse una u que sea constante a intervalos, esto es si

$$u(t) = \begin{cases} k_1 & \text{para } 0 \leq t < 0.5 \\ k_2 & \text{para } 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

se obtienen dos ecuaciones que satisfacen k_1 y k_2

$$\begin{bmatrix} (e^{0.5} - 1) k_1 + (e^1 - e^{0.5}) k_2 \\ (e - 1) k_1 + (e^2 - e^1) k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ e^2 \end{bmatrix}$$

que numéricamente son

$$\begin{bmatrix} 0.65 & 1.07 \\ 1.72 & 4.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7.40 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$k_1 = -10.39$$

$$k_2 = 5.37$$

En la fig 12 se muestra un control $u(t)$ que hace la transferencia deseada

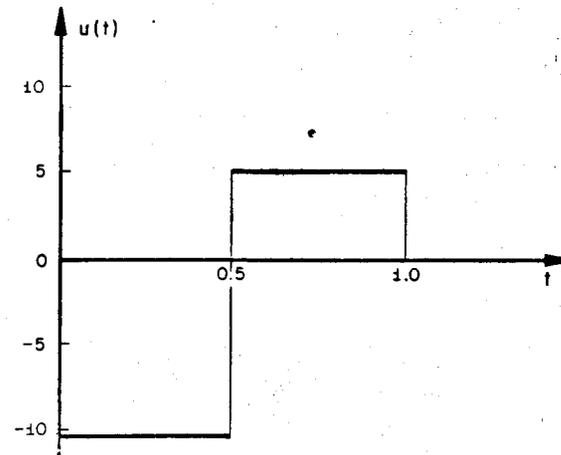


Fig 12 Control que transfiere al sistema del estado $(1, 0)$ en $t=0$ al estado $(0, 1)$ en $t=1$.

7. Observabilidad

Otro concepto de importancia es el de la observabilidad, el cual aparece cuando se plantea el siguiente problema: Dada la representación de un sistema dinámico del que se conoce la salida en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, debida a una entrada conocida en ese mismo intervalo, ¿es posible determinar unívocamente el estado $\underline{x}(t_0)$?

El problema, planteado formalmente para el caso de los sistemas lineales, se traduce al siguiente:

Dados $\underline{y}(t)$ y $\underline{u}(t)$ $t_0 \leq t \leq t_1$, existe un único \underline{x}_0 tal que se satisfaga la ecuación

$$\underline{y}(t) = \underline{c}(t)\underline{\phi}(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma)d\sigma$$

Si se define $\bar{\underline{y}}(t) = \underline{y}(t) - \int_{t_0}^t \underline{\phi}(t, \sigma)\underline{B}(\sigma)\underline{u}(\sigma)d\sigma$, la cual se supone conocida, el problema se reduce entonces a determinar las condiciones deben cumplir $\underline{\phi}(t, t_0)$ y $\underline{c}(t)$ para que dado $\bar{\underline{y}}$ se lo exista un \underline{x}_0 que satisfaga la ecuación:

$$\bar{\underline{y}}(t) = \underline{c}(t)\underline{\phi}(t, t_0)\underline{x}_0 \quad (2)$$

Cuando la ecuación anterior puede resolverse para un solo \underline{x}_0 , para cualquier $\bar{\underline{y}}(t)$, en cualquier intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ se dice que la representación del sistema es completamente observable o por simplicidad observable.

Si existiese un estado inicial $\underline{x}^* \neq 0$ tal que

$$\underline{c}(t)\underline{\Phi}(t, t_0)\underline{x}^* = 0 \quad (3)$$

en el intervalo $[t_0, t_1]$, el sistema no sería observable porque además de \underline{x}^* , cualquier otro estado $k\underline{x}^*$ para k arbitrario produciría la misma salida $\underline{y}(t)$, y por ende habría más de un estado inicial que satisficiera la ec 2.

Existe un criterio para determinar si la representación de un sistema lineal, invariable de dimensión n , es observable:

Si la matriz

$$\int_0^t e^{-\sigma\Delta'} \underline{c}' \underline{c} e^{-\sigma\Delta} d\sigma$$

es no singular la representación del sistema es observable y viceversa.

Dicho criterio es equivalente a:

Si la matriz

$$\begin{bmatrix} \underline{c} \\ \underline{A}\underline{c} \\ \vdots \\ \underline{A}^{n-1}\underline{c} \end{bmatrix}$$

tiene n columnas independientes, la representación del sistema es observable y viceversa.

7.1 Ejemplo

Considérese un sistema similar al presentado en la sec 5.3 del cap 4, que consiste de dos tanques interconectados (fig 13)

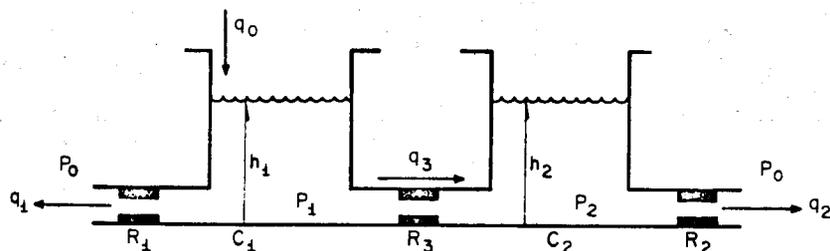


Fig 13 Sistema hidráulico para ilustrar el concepto de observabilidad

En este sistema se considerará al gasto $q_0(t)$ como la entrada y al gasto $q_3(t)$ como la salida. A partir de las ecuaciones

$$\alpha C_1 \frac{dh_1}{dt} = q_0 - q_1 - q_3$$

$$\alpha C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_3 - q_2$$

$$q_1 = \frac{\alpha}{R_1} h_1$$

$$q_2 = \frac{\alpha}{R_2} h_2$$

$$q_3 = \frac{\alpha}{R_3} (h_1 - h_2)$$

se obtiene la siguiente representación del sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) & \frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q_0(t)$$

$$y(t) = q_3(t) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{R_3} & -\frac{\alpha}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Para ciertos valores de las constantes, la representación obtenida no es observable. En particular si se supone que $C_1 = C_2 = C_3 = 1$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, $\alpha = 1$ entonces la representación del sistema es

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_0(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

y en este caso existe un estado inicial, diferente de cero, que satisface la ec 3; este estado inicial es $h_1(0) = h_2(0) = k$. En efecto, si inicialmente las alturas del líquido en los tanques son iguales, el gasto entre ellos, y por tanto la salida, será cero. De allí se concluye que la representación obtenida no es observable. Para verificar matemáticamente que la ec 3 se satisface para $\underline{x}^* = [k; k]$ es necesario encontrar la matriz de transi-

ción. Esta, calculada de acuerdo con el método presentado en la sec 3.1 de este capítulo, es

$$e^{At} = .5 \begin{bmatrix} e^{-3t} + e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-3t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \underline{C}e^{At}\underline{x}^* &= \begin{bmatrix} .5 & -.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} + e^{-t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-3t} + e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} .5 & -.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2ke^{-t} \\ 2ke^{-t} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Este resultado es consistente con el criterio para determinar si un sistema es o no observable, porque los renglones de la matriz

$$\begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{AC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

no son linealmente independientes.

Capítulo 7

**SISTEMAS LINEALES E
INVARIANTES CON EL TIEMPO**

1. INTRODUCCION

En este capítulo se estudiarán detalladamente los sistemas lineales e invariables con el tiempo. Como se dedujo en la sec 4, cap 6, en dichos sistemas, cuando son de n dimensiones, la relación entre la entrada y la salida para un estado inicial cero, está dada por una integral de la forma

$$\underline{y}(t) = \int_0^t \underline{H}(t-\sigma) \underline{u}(\sigma) d\sigma \quad (1)$$

donde $\underline{H}(t)$ es el patrón de peso del sistema.

En la primera parte se verán algunas propiedades de las integrales de la forma anterior y posteriormente se introducirá el concepto de matriz de transferencia, que equivale a la transformada de Laplace de la respuesta a impulso. También se estudiarán las maneras de pasar de la función de transferencia de un sistema a representaciones de éste por medio de variables de estado.

En la última parte del capítulo se estudiará una caracterización gráfica de los sistemas lineales, invariables con el tiempo y de dimensión n que se denomina patrón de polos y ceros. Se verán algunos criterios de diseño de servomecanismos y se presentará el concepto de polos dominantes así como las características de los sistemas de segundo orden.

2. Integral de convolución

La integral que aparece en la ec 1, conocida como integral de convolución, juega un papel muy importante en el estudio de los sistemas lineales e invariables con el tiempo, no necesariamente de dimensión finita. Dicha importancia radica en que mediante esta integral puede determinarse la salida de un sistema debida a una entrada arbitraria cuando el estado inicial es cero y se conoce el patrón de peso del sistema. La integral de convolución tiene algunas propiedades que facilitan grandemente el cálculo de las salidas, conocidas las entradas. Algunas de estas propiedades se demostrarán para el caso en que el patrón de peso es un escalon.

Se indicará por $h(t) * u(t)$ la integral $\int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma$

Además se considerará que tanto h como u son cero para tiempos negativos.

2.1 Propiedades

La integral de convolución cuando $h(t)$ es un escalon posee las siguientes propiedades:

i) Es conmutativa, esto es

$$h(t) * u(t) = u(t) * h(t)$$

la cual puede probarse con facilidad ya que el lado izquierdo de la ecuación es

$$\int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma$$

y si se hace un cambio en la variable de integración por ejemplo, $\zeta = t - \sigma$, se obtiene

$$\int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma = - \int_t^0 h(\zeta) u(t-\zeta) d\zeta = \int_0^t h(\zeta) u(t-\zeta) d\zeta$$

siendo esta última integral $u(t) * h(t)$

$$ii) \frac{d}{dt} [h(t) * u(t)] = \dot{h}(t) * u(t) + h(0)u(t) = \dot{u}(t) * h(t) + u(0)h(t)$$

Esta propiedad se comprueba efectuando la derivación directamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma &= h(t-\sigma) u(\sigma) \Big|_{\sigma=t} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [h(t-\sigma) u(\sigma)] d\sigma = \\ &= h(0)u(t) + \int_0^t \left[\frac{d}{dt} h(t-\sigma) \right] u(\sigma) d\sigma = \\ &= h(0)u(t) + \dot{h}(t) * u(t) \end{aligned}$$

Si se utilizan los conceptos de función generalizada y se supone que $h(t)$ es discontinua en $t=0$ y vale cero para $t < 0$, la propiedad puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} [h(t) * u(t)] = \dot{h}(t) * u(t)$$

entendiendo que $\dot{h}(t) \Big|_{t=0} = h(0+) \delta(t)$, donde $\delta(t)$ indica un impulso unitario

Con la propiedad de conmutatividad de la convolución, se obtiene

$$\frac{d}{dt} [h(t) * u(t)] = \frac{d}{dt} [u(t) * h(t)] = \dot{u}(t) * h(t)$$

donde nuevamente se utiliza la convención que si $u(t)$ es discontinua en $t=0$, $u(t)$ debe incluir un impulso en el origen cuya magnitud es igual al valor de la discontinuidad de u .

Aplicando repetidas veces al resultado anterior se obtiene

$$si \quad y(t) = h(t) * u(t)$$

entonces

$$y^{(n)}(t) = h^{(n)}(t) * u^{(n-k)}(t)$$

iii) La convolución de una función con un impulso unitario es igual a la función, esto es

$$u(t) = u(t) * \delta(t)$$

La igualdad anterior es una consecuencia inmediata de la definición de impulso, (Apéndice A), porque

$$\int_0^t u(\sigma) \delta(t-\sigma) d\sigma = u(\sigma) \Big|_{\sigma=t} = u(t)$$

iv) Por último

$$\int_0^t u(\sigma) * h(\sigma) d\sigma = h(t) * \int_0^t u(\sigma) d\sigma = \left[\int_0^t h(\sigma) d\sigma \right] * u(t)$$

La prueba de esta igualdad es: La integral del lado izquierdo es

$$f(t) = \int_0^t \int_0^\sigma h(\sigma-\tau) u(\tau) d\tau d\sigma$$

pero como $\int_c^t h(\sigma-\tau) u(\tau) d\tau = 0$ porque en el intervalo de integración el argumento de h es negativo y $h(t) = 0$ para $t < 0$, entonces

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t h(\sigma-\tau) u(\tau) d\tau d\sigma \\ = \int_0^t \int_0^t h(\sigma-\tau) u(\tau) d\sigma d\tau$$

Cambiando la variable de integración σ por ρ , donde ρ se define como

$$\rho = \sigma - \tau$$

se tendrá que

$$f(t) = \int_0^t \int_{-\tau}^t h(\rho) u(\tau) d\rho d\tau$$

y como la integral $\int_{-\tau}^0 h(\rho) d\rho = 0$ porque el argumento de h es negativo se tendrá

$$f(t) = \int_0^t \int_0^{t-\tau} h(\rho) u(\tau) d\rho d\tau$$

que no es más que $\int_0^t h(\rho) d\rho * u(t)$, con lo que queda demostrada la segunda parte de la propiedad iv. La primera parte se obtiene cambiando los papeles de u y h .

2.2. Comentarios

La propiedad i implica que si un sistema de entrada y salida escalares tiene una respuesta a impulso $h(t)$ y se aplica una entrada $u(t)$ y el estado inicial es cero, la salida coincide con la de otro sistema que teniendo a $u(t)$ como respuesta a impulso y estando en el estado cero se le aplica la entrada $h(t)$; en resumen, los papeles de respuesta a impulso y entrada son intercambiables.

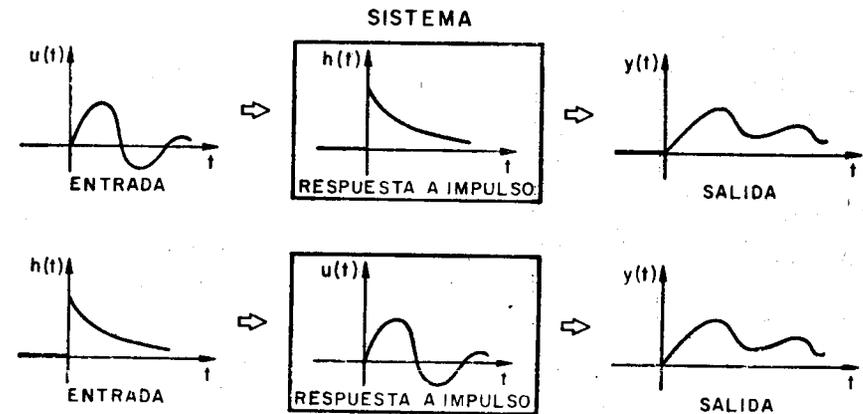


Fig 1. Ilustración de la propiedad i

Las propiedades iii y iv son consecuencias inmediatas de la linealidad del sistema y las demostraciones dadas pueden extenderse sin mayor dificultad para los sistemas en que la relación entre la entrada y la salida para estado cero es

$$y(t) = \int_0^t h(t, \sigma) u(\sigma) d\sigma$$

donde $h(t, \sigma)$ es la respuesta a impulso.

La propiedad ii implica que si un sistema tiene una respuesta a impulso $h(t)$ y se le aplica una entrada $u(t)$, cuando el estado es cero, se obtiene una salida $y(t)$; al aplicarse otra entrada que es la derivada de $u(t)$, $\dot{u}(t)$, la salida correspondiente es $\dot{y}(t)$, la cual se obtiene cuando a otro sistema cuya respuesta a impulso es $\dot{h}(t)$ se le aplica la entrada $u(t)$ hallándose en el estado cero. Algo similar sucede con la integración según la propiedad iv. Las propiedades ii, iii y iv pueden ser extendidas al caso matricial, esto es cuando, tanto la entrada como la salida son vectores y el patrón de peso es una matriz.

En el ejemplo siguiente se ilustra la aplicación de las propiedades mencionadas:

Considérese un sistema cuya respuesta impulso $h(t)$ está dada por

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

Si el sistema es lineal e invariable con el tiempo y se halla en el estado cero, ¿Cuál será la salida causada por la entrada $u(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-1)$?

Como la derivada de la entrada son dos impulsos unitarios, uno en $t=0$ y otro en $t=1$ (fig 2), de acuerdo con las propiedades ii y iii se tendrá que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{du}{dt} * h(t) = [\delta(t) - \delta(t-1)] * h(t) = \delta(t) * h(t) - \delta(t-1) * h(t) \\ &= h(t) - h(t-1) = e^{-t} u_{-1}(t) - e^{-(t-1)} u_{-1}(t-1) \end{aligned}$$

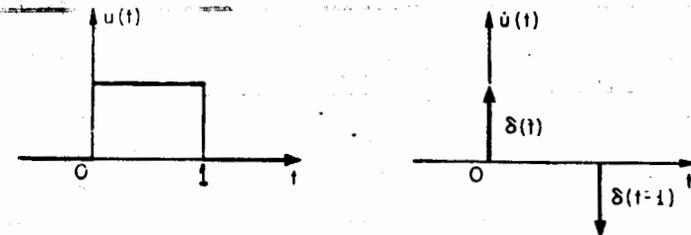


Fig 2. La entrada $u(t)$ y su derivada

Integrando la ecuación anterior, se obtiene que la salida está dada por

$$y(t) = \int_0^t \dot{y}(\sigma) d\sigma = \int_0^t e^{-\sigma} d\sigma - \int_0^t e^{-(\sigma-1)} u_{-1}(\sigma-1) d\sigma$$

* Recuérdese que $u_{-1}(t)$ es un escalón unitario (Apéndice 1).

En la fig 3 se muestran $\dot{y}(t)$ y $y(t)$

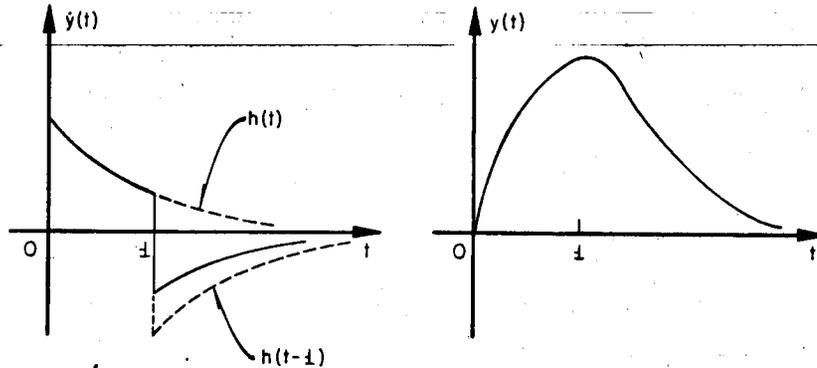


Fig 3. Respuesta del sistema y su derivada

2.3 Convolución Gráfica

Como la relación entre la entrada y la salida para algunos sistemas lineales e invariables con el tiempo, entre ellos los de dimensión n , está dada mediante la integral

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma$$

ésta puede interpretarse gráficamente como el área bajo una curva. Considérese que se desea obtener el valor de la salida en un tiempo t_1 , cuando al sistema se le ha aplicado una entrada $u(t)$.

Según la fórmula de convolución, en el tiempo t_1 , la salida se halla dada por

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} u(\tau) h(t_1 - \tau) d\tau$$

Por lo que el valor de la integral, o sea $y(t_1)$, es igual al área bajo la curva de la función $u(\tau) h(t_1 - \tau)$

Para dar una interpretación gráfica a la integral de convolución hace falta observar que la función $h(-\tau)$ es la imagen espejo de $h(\tau)$, o sea la función dibujada para tiempos negativos en vez de positivos, (de derecha a izquierda, en vez de izquierda a derecha). Además, la función $h(t_1 - \tau)$ es la función $h(-\tau)$ corrida t_1 unidades de tiempos hacia la derecha. Todo ello se expresa en la fig 4.

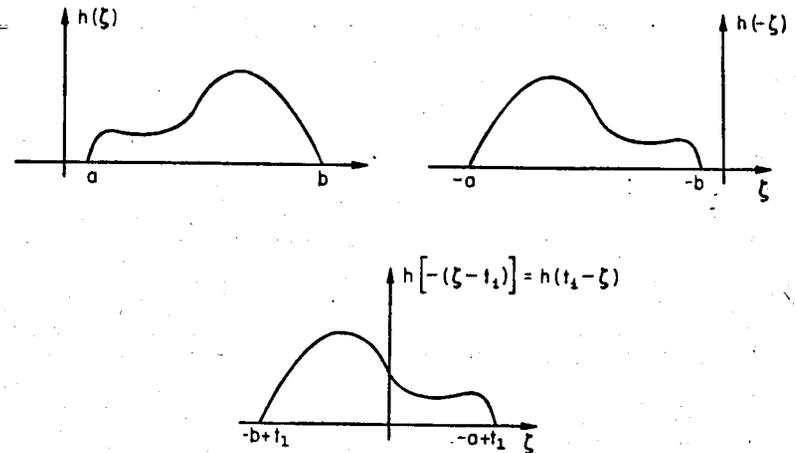


Fig 4. Obtención de $h(t_1 - \tau)$

A continuación se multiplica $u(\tau)$ por $h(t_1 - \tau)$ y el área bajo la curva así obtenida es $y(t_1)$. En la fig 5 se muestran dos funciones, de las que se desea obtener su convolución

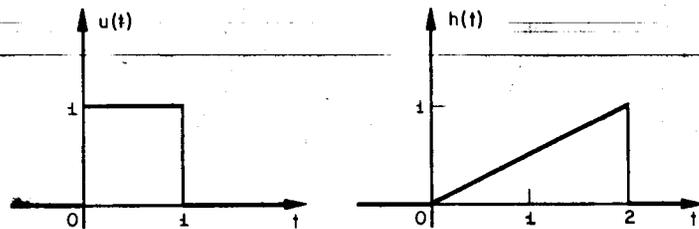
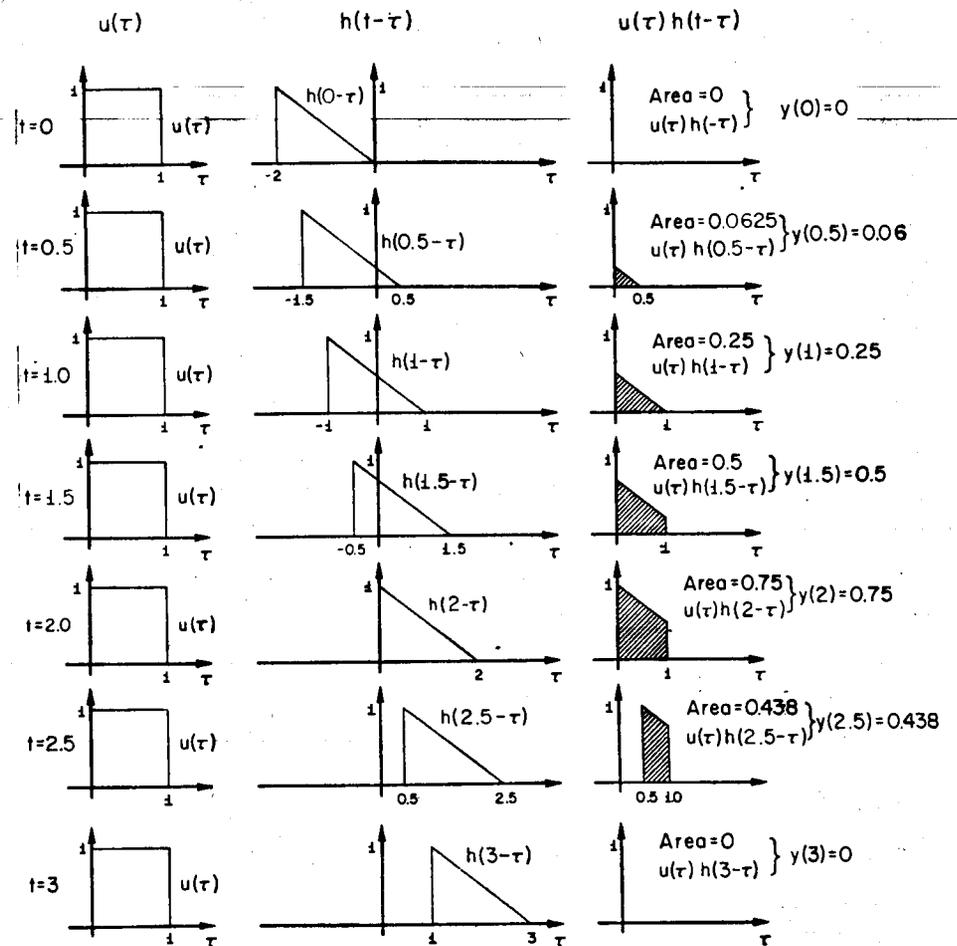


Fig 5. Dos funciones por convolucionar

En la figura 6 se incluyen los valores de $y(t) = u(t) * h(t)$ obtenidos por el método gráfico descrito, para los tiempos $t=0, 0.5, \dots, 2.5$, y en la número 7, la función $y(t)$.

Fig 6. Convolución gráfica de $u(t)$ y $h(t)$

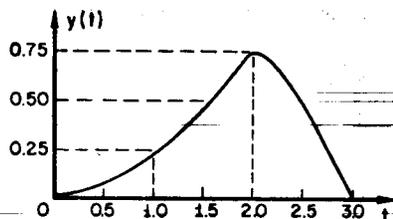


Fig 7. Gráfica de $y(t)$, de acuerdo a las áreas de la fig 6.

3. La matriz de transferencia

Mediante la transformada de Laplace se puede dar una caracterización alternativa de los sistemas lineales e invariables con el tiempo, en los cuales la relación entre la entrada y la salida cuando el estado es cero resulta

$$y(t) = \int_0^t H(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma,$$

en la que $H(t)$ representa la respuesta a impulso del sistema. De acuerdo con uno de los teoremas sobre la transformada de Laplace si $u(t)$ y $y(t)$ están relacionadas por la ec 2, entonces

$$\hat{y}(s) = \hat{H}(s)\hat{u}(s)$$

donde \hat{u} , \hat{H} y \hat{y} representan las transformadas de Laplace de las variables $y(t)$, $H(t)$ y $u(t)$ respectivamente.* A la matriz $\hat{H}(s)$ se le denomina *matriz de transferencia* del sistema y corresponde a la transformada de Laplace del patrón de peso del sistema.

* Véase sec 3.7 del Apéndice A.

Cuando $\hat{H}(s)$ es escalar, comunmente se conoce con el nombre de *función de transferencia*.

Supóngase que se cuenta con un sistema lineal e invariable. Si la entrada es un vector de dos dimensiones y la salida es uno de tres, la matriz $\hat{H}(s)$ será de 3×2 . Si el sistema está en reposo y se aplica la entrada

$$\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

y la salida que se obtiene es

$$\underline{y}_u(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$$

la matriz $\hat{H}(s)$ estará dada por

$$\hat{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{u}_1(s)} & \frac{\hat{y}_1(s)}{\hat{u}_2(s)} \\ \frac{\hat{y}_2(s)}{\hat{u}_1(s)} & \frac{\hat{y}_2(s)}{\hat{u}_2(s)} \\ \frac{\hat{y}_3(s)}{\hat{u}_1(s)} & \frac{\hat{y}_3(s)}{\hat{u}_2(s)} \end{bmatrix}$$

y al aplicarse cualquier otra entrada $\underline{u}(t)$ al sistema en reposo, la salida estará dada por

$$\underline{y}_\omega(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{H}(s) \hat{u}(s)]$$

En conclusión, los sistemas lineales e invariables con el tiempo, cuando están en reposo, pueden caracterizarse completamente por cualquier par entrada-salida $[u(t), y(t)]$. (Debe hacerse notar aquí, que si la entrada es un vector de n -componentes, cada una de ellas debe ser diferente de cero para poder determinar la matriz de transferencia).

Esta propiedad tiene implicaciones prácticas muy importantes como la que se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Considérese un circuito lineal, invariable con el tiempo y en reposo. Si la entrada es el voltaje v_e y la salida la corriente i , se desea conocer $i(t)$ cuando $v_e(t)$ es la función sent . Supóngase que al mismo circuito al aplicarle la entrada (fig 8).

$$v_e(t) = u_{-1}(t)$$

la salida obtenida fue

$$i(t) = e^{-t} u_{-1}(t).$$

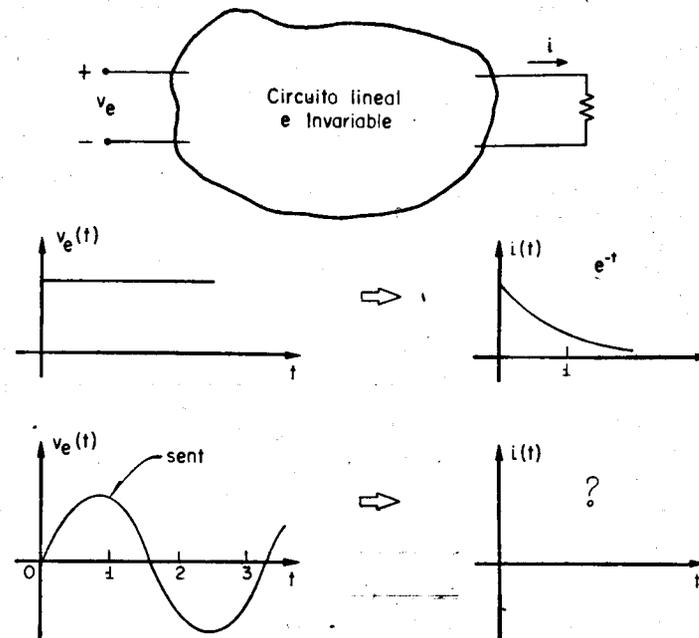


Fig 8. Ilustración del uso de la matriz de transferencia

De las consideraciones anteriores, la función de transferencia del sistema es

$$\hat{h}(s) = \frac{\mathcal{L}[e^{-t} u_{-1}(t)]}{\mathcal{L}[u_{-1}(t)]} = \frac{\frac{1}{s+1}}{\frac{1}{s}} = \frac{s}{s+1}$$

y como la transformada de Laplace de $\{\text{sent}\}u_{-1}(t)$ es $\frac{1}{s^2+1}$, la salida pedida tendrá la transformada de Laplace

$$\frac{s}{(s^2+1)(s+1)}$$

La función del tiempo correspondiente es

$$i(t) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right] - \frac{1}{2} e^{-t} \right\} u_{-1}(t)$$

la cual se ilustra en la fig 9.

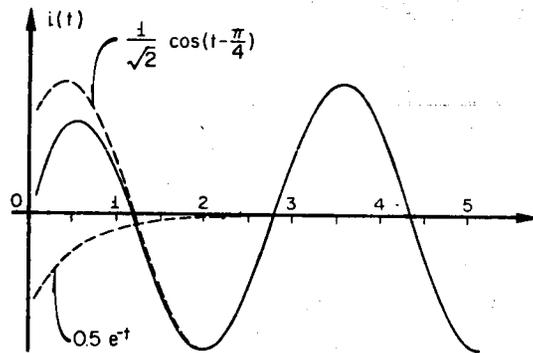


Fig 9. Respuesta del circuito cuando la entrada es $\{s \cos t\} u_{-1}(t)$

Considérense ahora los sistemas descritos por las ecuaciones

$$\underline{x}(t) = \underline{A}x(t) + \underline{B}u(t) \quad (3)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}x(t) + \underline{D}u(t) \quad (4)$$

en las que \underline{x} representa el estado, \underline{u} la entrada y $\underline{y}(t)$ la salida. Si además \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} y \underline{D} son matrices constantes, el patrón de peso de estos sistemas (como se vió en el capítulo anterior), es

$$C e^{t\underline{A}} \underline{B} u_{-1}(t) + \underline{D} \delta(t)$$

entonces como consecuencia de que $\int_0^t e^{t\underline{A}} u_{-1}(t) = (\underline{s} \underline{I} - \underline{A})^{-1}$, la linealidad de la transformada de Laplace y $\delta(t) = 1$, se obtiene que

$$\underline{C} e^{t\underline{A}} \underline{B} u_{-1}(t) + \underline{D} \delta(t) = \underline{C} (\underline{s} \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}$$

o sea que la matriz de transferencia de los sistemas dinámicos descritos por las ecs 3 y 4 es $\underline{C} (\underline{s} \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}$

Ejemplo:

Considérese un sistema descrito por las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 5u(t)$$

La función de transferencia de este sistema será

$$\hat{h}(s) = C(I\delta - A)^{-1} \underline{3} + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta-1 & -2 \\ -3 & \delta-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5$$

y tomando el inverso indicado en la expresión anterior

$$\begin{bmatrix} \delta-1 & -2 \\ -3 & \delta-4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\delta-1)(\delta-4)-6} \begin{bmatrix} \delta-4 & 2 \\ 3 & \delta-1 \end{bmatrix}$$

$$\text{entonces } \hat{h}(s) = \frac{3}{\delta^2 - 5\delta - 2} + 5 = \frac{5\delta^2 - 25\delta - 7}{\delta^2 - 5\delta - 2}$$

4. Síntesis de sistemas (De la función de transferencia a variables de estado)

La matriz de transferencia caracteriza completamente a los sistemas lineales e invariantes con el tiempo y como fue comentado en la sección anterior de este capítulo, puede obtenerse a partir de cualquier par entrada-salida $[\underline{u}(t), \underline{y}(t)]$ en que $u_i(t) \neq 0$. Para propósitos de análisis y diseño de sistemas es conveniente contar con un método por medio del cual se pueda "construir" sistemas que tengan una función de transferencia prescrita, pues así es posible hacer más expedito el proceso, al contar con sistemas que simule el comportamiento de otros.

En el cap 6 se presentó una manera de llevar a cabo la simulación digital de un sistema lineal e invariable de tiempo por medio

de variables de estado en esta sección también se incluirá la manera de simular dichos sistemas con la ayuda de una computadora analógica.

Concretamente en esta parte, se analizará el problema inverso al último tratado en la sección anterior; esto es, dada una función de transferencia, bajo qué condiciones y cómo pueden obtenerse matrices \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} y \underline{D} para que dada $\hat{H}(s)$ se cumpla la igualdad

$$C(I\delta - A)^{-1} \underline{B} + D = \hat{H}(s)$$

Como los términos de la matriz $(\delta I - A)^{-1}$ son funciones racionales propias de δ (tanto el determinante como los cofactores de $(I\delta - A)$ son polinomios, y los cofactores a lo máximo son polinomios de grado $n-1$, donde n es el número de variables de estado) puede concluirse que la matriz de transferencia de los sistemas descritos por las ecs 3 y 4 tiene todos sus elementos de la forma

$$H_{ij}(s) = \frac{q_{n-1}\delta^{n-1} + q_{n-2}\delta^{n-2} + \dots + q_0}{\delta^n + p_{n-1}\delta^{n-1} + \dots + p_0} + k_{ij}$$

entonces la síntesis de sistemas que será presentada aquí estará restringida a aquellos en que $\hat{H}(s)$ es una matriz cuyos elementos son funciones racionales de δ y el grado del numerador no excede al del denominador.

Debe hacerse notar que no todas las funciones de transferencia son expresables en forma racional. Por ejemplo, si un sistema con-

siste en un retraso de T unidades de tiempo, su función de transferencia es e^{-sT} , la cual no puede ser expresable como un cociente de polinomios en s de orden finito.

Por facilidad de exposición se restringirá la teoría al caso en que la $\hat{H}(s)$ es un escalar, esto es una matriz de 1×1 .

Considerese un sistema cuya función de transferencia puede expresarse como cociente de los polinomios $p(s)$ y $q(s)$. Sea m el grado del numerador y n el del denominador, donde $n > m$

$$\hat{h}(s) = q(s)/p(s)$$

$$\hat{h}(s) = \frac{q_m s^m + q_{m-1} s^{m-1} + \dots + q_1 s + q_0}{s^n + p_{n-1} s^{n-1} + p_{n-2} s^{n-2} + \dots + p_1 s + p_0}$$

donde los coeficientes p_i y q_i son números reales.

Al expresar $\hat{H}(s)$ como $q(s)/p(s)$ se hará que el coeficiente del término s^n de $p(s)$ sea unitario, lo cual siempre puede lograrse dividiendo numerador y denominador entre el susodicho coeficiente.

También se considerará tan solo el caso en que $n > m$, porque al hacer la división del numerador entre el denominador se puede obtener directamente la matriz \underline{D} para el caso en que $m = n$.

Por ejemplo si

$$\hat{H}(s) = \frac{3s^2 + 1}{s^2 + s + 1} = 3 + \frac{-3s - 1}{s^2 + s + 1} \quad \dots \quad d = 3$$

y el problema se reduce a encontrar únicamente A, B y C .

Si se introduce una variable intermedia $x(s)$ (fig 10)

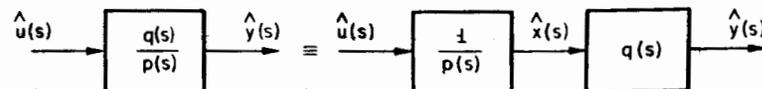


Fig 10. Introducción de la variable s .

se tendrá

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{x}(s)} = q(s) \quad \hat{y}(s) = q(s) \hat{x}(s) \quad (5)$$

$$\frac{\hat{x}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{p(s)} \quad \hat{u}(s) = p(s) \hat{x}(s) \quad (6)$$

o sea

$$\hat{u}(s) = (s^n + p_{n-1} s^{n-1} + \dots + p_1 s + p_0) \hat{x}(s)$$

lo cual, en el dominio del tiempo es

$$u(t) = x^{(n)}(t) + p_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + p_0 x(t) \quad (7)$$

donde $x^{(n)}(t)$ significa $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$

De la ec 5, se tiene

$$y(s) = (q_m s^m + q_{m-1} s^{m-1} + \dots + q_1 s + q_0) \hat{x}(s)$$

y en el dominio del tiempo

$$y(t) = q_m x^{(m)}(t) + q_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + q_0 x(t) \quad (8)$$

si se hace un cambio de variable, definiendo un vector \underline{x} de n dimensiones, tal que su j -ésima componente x_j sea:

$$x_j = \frac{d^{j-1} x(t)}{dt^{j-1}}$$

de manera similar a lo realizado en la sec 1, cap 3, la ecuación diferencial 7 es equivalente a las ecuaciones

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -p_0 x_1 - p_1 x_2 - \dots - p_{n-1} x_n + u(t); \quad x(t) = x_1$$

entonces, la salida $y(t)$, dada por la ec 4 se puede expresar

$$y(t) = q_m x_{m+1} + q_{m-1} x_m + \dots + q_1 x_2 + q_0 x_1$$

Las ecuaciones previas en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Así, dada una función de transferencia $\hat{h}(s)$ que es el cociente de polinomios $q(s)/p(s)$, existe un sistema cuya representación en variables de estado es

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u \\ y &= \underline{c} \underline{x} + d u \end{aligned}$$

donde los elementos de las matrices y vectores \underline{A} , \underline{b} y \underline{c} son tales

que

Las ecuaciones anteriores pueden expresarse en forma extendida
da como

$$c(I_4 - A)^{-1}b + d = \hat{h}(s)$$

Ejemplo:

Supóngase que se desea sintetizar por medio de variables de estado la función de transferencia

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{s^4 + es^3 + fs^2 + gs + h}$$

Solución

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -h & -g & -f & -e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [d \ c \ b \ a] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -hx_1 - gx_2 - fx_3 - ex_4 + u \\ y &= dx_1 + cx_2 + bx_3 + ax_4 \end{aligned}$$

y de allí se puede construir el reograma correspondiente (fig 11)

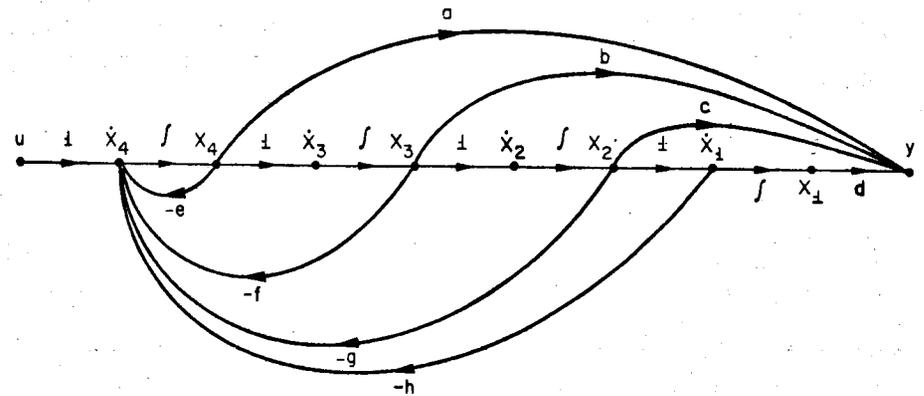


Fig 11. Reograma que representa las ecs 9

en donde las ramas que tienen la trasmisión \int indican que debe realizarse la operación de integración sobre la variable causa

para obtener la variable efecto.

Al tomar la transformada de Laplace del reograma, esto es, otro reograma en el cual cada variable del original se reemplaza por su transformada de Laplace y cada transmisión por la operación correspondiente en el dominio de la frecuencia (de esta forma las ramas con transmisión \int en el rograma original tendrán transmisión $\frac{1}{s}$ en el transformado) se obtiene el de la fig 12.

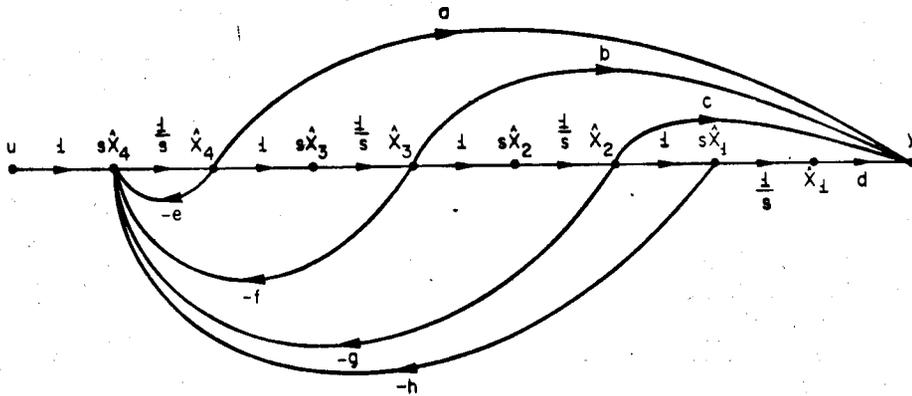


Fig 12. Reograma de la fig 11 transformado

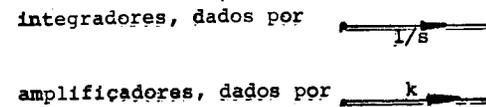
El reograma anterior tiene cuatro mallas, tocándose todas en el nodo $s\hat{x}_4$. Las mallas tienen ganancias $-e/s, -f/s^2, -\frac{g}{s}, \frac{h}{s^4}$. Luego el determinante vale

$$\Delta = 1 + \frac{e}{s} + \frac{f}{s^2} + \frac{g}{s^3} + \frac{h}{s^4}$$

Se presentan cuatro trayectorias del nodo fuente hacia $\hat{y}(s)$, las cuales tocan al nodo \hat{x}_4 , cuyas ganancias son $\frac{a}{s}, \frac{b}{s^2}, \frac{c}{s^3}$; como dichas trayectorias tocan todas las mallas, entonces sus cofactores son unitarios, por lo que

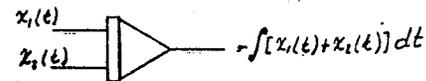
$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s^3} + \frac{d}{s^4}}{1 + \frac{e}{s} + \frac{f}{s^2} + \frac{g}{s^3} + \frac{h}{s^4}} = \frac{as^3 + bs^2 + cs}{s^4 + es^3 + fs^2 + gs + h}$$

que es la función de transferencia original. Si se observa con cuidado, puede verse en la última figura, que este reograma tiene dos tipos de elementos:

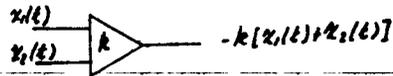


y por ello es fácil sintetizar la función de transferencia en las computadoras analógicas, porque en su forma más simple, son aparatos que tienen dos tipos de elementos:

a) Integradores, dados por



b) Aplicadores, dados por



los cuales precisamente tienen el mismo tipo de transferencias que el reograma de la fig 12.

Ejemplo

Expresa por medio de un diagrama de alambrado de computadora analógica un sistema cuya función de transferencia es

$$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 3}$$

Las ecuaciones en variables de estado son:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(10)

a los cuales le corresponde el reograma de fig 13

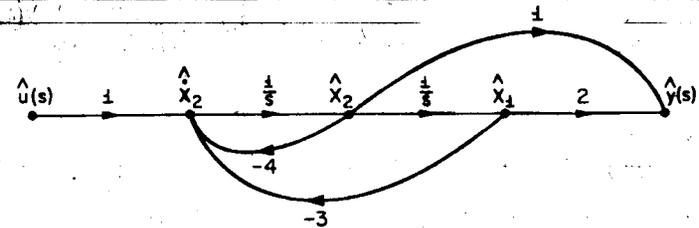


Fig 13. Representación de la ec 10

El diagrama de alambrado de la computadora analógica se muestra en la fig 14.

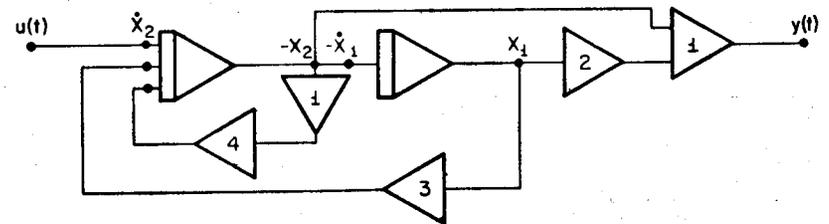


Fig 14. Diagrama de computadora analógica para el ejemplo

En las secciones anteriores se ha visto como un sistema lineal, invariable con el tiempo y de parámetros concentrados, cuyo estado inicial es cero, puede ser descrito mediante una función que relaciona la entrada $u[0, \infty]$ con la salida $y[0, \infty]$. Dicha función puede representarse de diversas maneras:

- a) Por una ecuación diferencial escalar de orden n

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} y(t) + p_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + p_1 \frac{d}{dt} y(t) + p_0 y(t) = \\ = q_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + q_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \dots + \\ + q_1 \frac{du(t)}{dt} + q_0 u(t); y^{(k)}(0) = 0 \text{ para } k=0, \dots, n-1 \end{aligned}$$

- b) Por una ecuación diferencial vectorial de primer orden y una ecuación algebraica

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{b} u(t); \underline{x}(0) = 0 \\ y(t) &= \underline{c} \underline{x}(t) + \underline{d} u(t) \end{aligned}$$

- c) Mediante la ecuación

$$y(t) = \int_0^t h(t-\sigma) u(\sigma) d\sigma$$

donde $h(t)$ es la respuesta a impulso

- d) Por la fórmula algebraica

$$\hat{y}(s) = \hat{h}(s) \hat{u}(s) = c(I s - A)^{-1} b + d \hat{u}(s) = \frac{q(s)}{p(s)} \hat{u}(s)$$

en la que $\hat{u}(s)$, $\hat{h}(s)$ y $\hat{y}(s)$ representan respectivamente las transformadas de Laplace de la entrada, la respuesta a impulso y la salida.

Se ha estudiado también cómo pasar de una descripción a otra. En este capítulo se tratará de caracterizar los sistemas en cuestión de otra manera más. Por este otro método es posible adquirir un gran conocimiento intuitivo sobre el comportamiento de los sistemas, lo que facilita el análisis y el diseño de los sistemas de control.

5. Patrón de polos y ceros

La función de transferencia de los sistemas lineales, invariantes y de dimensión n es la razón de dos polinomios en s con coeficientes reales, así que:

$$\hat{h}(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_m s^m + q_{m-1} s^{m-1} + \dots + q_1 s + q_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Cada uno de los polinomios $p(s)$ y $q(s)$ puede ser expresado en forma factorizada como

$$q(s) = q_m (s - z_1) (s - z_2) (s - z_3) \dots (s - z_m)$$

y

$$p(s) = (s - p_1) (s - p_2) (s - p_3) \dots (s - p_n)$$

donde z_i y p_i son en general número complejos.

Como es sabido, si los coeficientes de los polinomios $q(s)$ y $p(s)$ son números reales, las raíces complejas deben aparecer en pares conjugados. Por ejemplo, si:

$$z_i = a + jb \text{ es una raíz de } q(s), \text{ entonces}$$

$$\bar{z}_i = a - jb \text{ también debe ser una raíz de } q(s)$$

Dicho de otra forma

$$q(z_i) = 0, \text{ implica que } q(\bar{z}_i) = 0$$

Los números complejos

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_m, p_1, p_2, \dots, p_n$$

junto con q_m , caracterizan completamente la función de transferencia de estos sistemas.

Los números p_i se denominan polos y los z_i , ceros del sistema.

Tanto los polos como los ceros pueden ser representados gráficamente en el plano complejo (parte real vs. parte imaginaria), utilizando la convención:

Los polos serán representados por \times

y los ceros por \circ

Entonces, a excepción de la constante q_m , un sistema puede ser representado en el plano complejo por un conjunto de polos y ceros.

Ejemplo

Considérese un sistema con una función de transferencia

$$\hat{h}(s) = \frac{(s+1)(s-3)}{(s^2+2s+2)(s+2)} = \frac{(s+1)(s-3)}{(s+1-j)(s+1+j)(s+2)}$$

Entonces $\hat{h}(s)$ tiene un patrón de polos y ceros como lo indica la fig 15

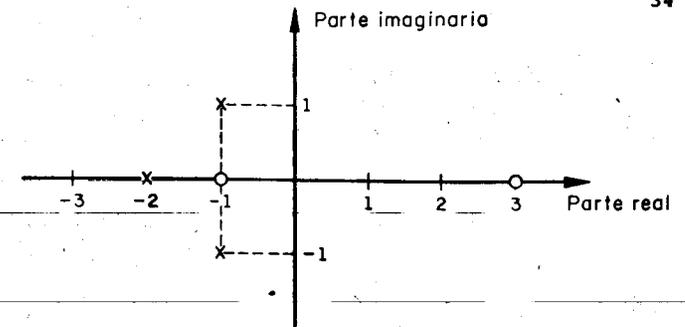


Fig 15 Gráfica de polos y ceros

Existen casos en que algunas raíces del numerador o del denominador de $\hat{h}(s)$ son múltiples, entonces los polos (o los ceros) son múltiples, lo que se indica explícitamente en el patrón de polos y ceros.

Ejemplo

Sea

$$\hat{h}(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 12s + 8} = \frac{(s+1)^2}{(s+2)^3}$$

Su representación mediante polos y ceros se indica en la fig 16

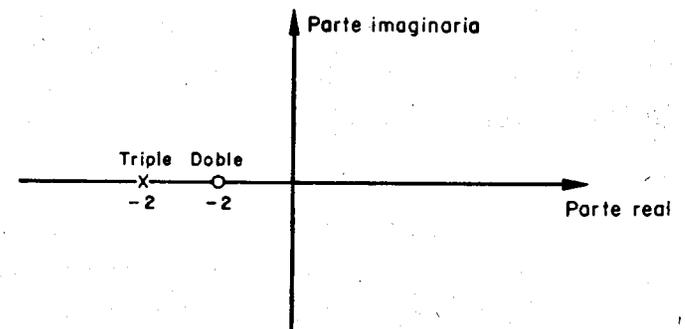


Fig 16 Patrón de polos y ceros múltiples

6. Obtención de la respuesta impulso a partir del patrón de polos y ceros.

En esta sección se presenta un método gráfico para obtener la respuesta a impulso de un sistema a partir de su caracterización por medio del patrón de polos y ceros.

Como se recordará, una manera de encontrar la transformada inversa de Laplace de una función racional era mediante la expansión de $\hat{h}(s)$ en fracciones parciales*. Así, en el caso de polos simples y cuando $n > m$ se tenía

$$\hat{h}(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (11)$$

y los parámetros A_1, A_2, \dots, A_n , se determinaban multiplicando $\hat{h}(s)$ por $(s-p_i)$ y evaluando s en el punto p_i , o sea

$$A_i = (s-p_i) \hat{h}(s) \Big|_{s=p_i} \quad (12)$$

Recordando que la transformada de Laplace es lineal y que la de e^{at} es $\frac{1}{s-a}$, se tiene que la transformada inversa de Laplace de $\hat{h}(s)$ es

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{h}(s)] = [A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}] u_{-1}(t) \quad (13)$$

De la expresión anterior y de la ec 11 puede deducirse que las funciones exponenciales que aparecen en la expresión $\mathcal{L}^{-1}[\hat{h}(s)]$ están determinadas por los polos del sistema. Más específicamente, la respuesta a impulso del sistema con una función de trans-

* Apéndice A

ferencia $\hat{h}(s)$, es una combinación lineal de las funciones $e^{p_i t}$, donde p_i es un polo de $\hat{h}(s)$. Como veremos a continuación, la combinación lineal de estas funciones está determinada por todos los polos y ceros del sistema.

Supóngase que se desea evaluar el coeficiente A_i , cuando las raíces son simples. De acuerdo con la ec 12, se tendrá

$$A_i = \frac{(p_i - z_1)(p_i - z_2)\dots(p_i - z_m)}{(p_i - p_1)(p_i - p_2)\dots(p_i - p_{i-1})(p_i - p_{i+1})\dots(p_i - p_n)} \quad (14)$$

Lo que implica que para evaluar los parámetros A_i se necesitan operaciones de resta, multiplicación y división entre números complejos, las que pueden realizarse gráficamente como se explicará más adelante. Antes de continuar, conviene recordar algunos conceptos básicos acerca de los números complejos.

Cualquier número complejo $a+jb$ donde j representa $\sqrt{-1}$ puede ser expresado como

$$a+jb = R e^{j\theta}$$

donde R es la "magnitud" del número complejo, y viene dado por

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y θ es el "ángulo" del número complejo, o sea

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

La justificación de esta igualdad se basa en

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

y en las igualdades trigonométricas

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta}} \quad ; \quad \text{sen } \theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 \theta}}$$

de tal suerte que utilizando las definiciones de R , de θ y las identidades anteriores se comprueba que

$$\begin{aligned} R e^{j\theta} &= \sqrt{a^2+b^2} (\cos \theta + j \text{sen } \theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} + j \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}} \right) \\ &= a + jb \end{aligned}$$

La representación de un número complejo mediante $R e^{j\theta}$ se denomina *representación polar*.

También es común utilizar las convenciones:

$$\begin{aligned} R &= |a+jb| \\ \theta &= \angle (a+jb) \end{aligned}$$

con lo cual un número complejo $R e^{j\theta}$ también puede representarse como

$$|a + jb| \angle (a+jb)$$

o bien

$$R \angle \theta$$

Si un número complejo se interpretase como un vector en plano complejo (fig 17)

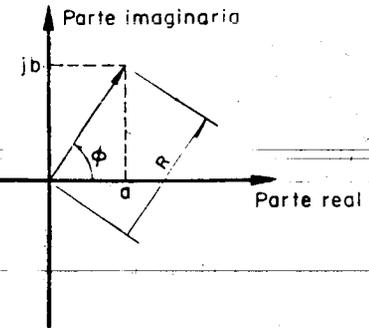


Fig 17 Interpretación del número $a+jb$ como un vector

la diferencia de dos números complejos puede interpretarse como la diferencia de dos vectores. Entonces, si

$$\begin{aligned} e+jf &= (a+jb) - (c+jd) = R_1 \angle \theta_1 - R_2 \angle \theta_2 \\ &= R_3 \angle \theta_3 \end{aligned}$$

Cada uno de los ángulos y magnitudes tendrá la interpretación indicada en la fig 18

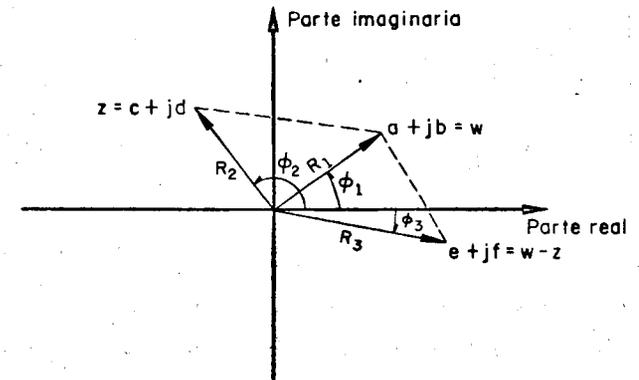


Fig 18 Interpretación gráfica de la diferencia de dos números complejos.

Así, la diferencia de dos números complejos w y z puede inter-

pretarse como un vector que une el punto w con el punto z .

A las operaciones de multiplicación y de división puede dárseles también una interpretación gráfica.

Considérense dos números complejos $(a+jb)$ y $(c+jd)$

entonces, si

$$a+jb = R_1 e^{j\theta_1}$$

y

$$c+jd = R_2 e^{j\theta_2}$$

se tendrá que

$$(a+jb)(c+jd) = (R_1 e^{j\theta_1})(R_2 e^{j\theta_2}) = R_1 R_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

o sea que el producto de dos números complejos es otro número complejo cuya magnitud es el producto de las magnitudes de los factores y cuyo ángulo es la suma de los ángulos de los factores.

Utilizando la notación abreviada puede escribirse

$$(R_1 \angle \theta_1)(R_2 \angle \theta_2) = R_1 R_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Similarmente,

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{R_1 e^{j\theta_1}}{R_2 e^{j\theta_2}} = \frac{R_1}{R_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

es un número complejo que tiene una magnitud igual a la razón entre las magnitud del numerador y denominador, cuyo ángulo es la diferencia entre los ángulos del numerador y el denominador.

Con la notación abreviada se tendrá que

$$\frac{R_1 \angle \theta_1}{R_2 \angle \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

En las figs 19a y 19b se presentan las operaciones de multiplicación y división de números complejos.

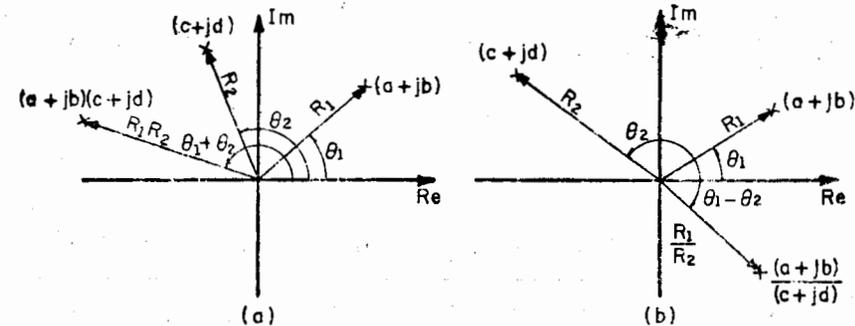


Fig 19 c) Multiplicación gráfica de números complejos
d) División gráfica de números complejos

6.1 Evaluación gráfica de residuos

Regresando al problema de evaluación de los coeficientes A_k (llamados también *residuos*), de acuerdo con la ec 13, se pueden obtener gráficamente. Si se desea evaluar el residuo en un polo simple p_k , esto es A_k , de acuerdo con la ec 14 se debe calcular la diferencia entre el polo p_k y todos los ceros, efectuar el producto de dichas diferencias y dividirlo entre el producto de las diferencias del polo p_k y polos restantes.

Ejemplo

Considérese la configuración de polos y ceros de la figura 20

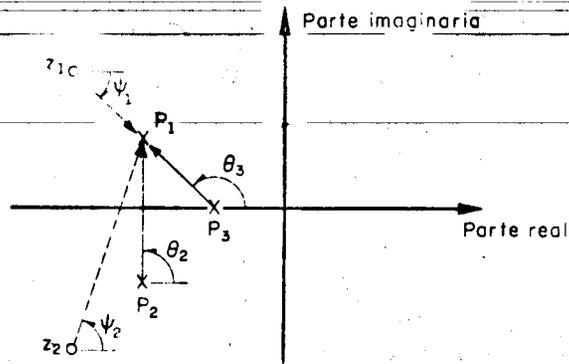


Fig 20 Ilustración como evaluar el residuo

A_i

Como los segmentos dirigidos de z_1 y z_2 a p_1 representan la diferencia $p_1 - z_1$ y $p_1 - z_2$, respectivamente, y los de p_2 y p_3 a p_1 las diferencias $p_1 - p_3$ y $p_1 - p_2$ respectivamente, el número complejo

$$A_1 = \frac{(p_1 - z_1)(p_1 - z_2)}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}$$

tendrá la representación polar dada por el producto de los segmentos punteados dividido por el producto de los no punteados. Su magnitud será igual a

$$\frac{R_c}{R_p}$$

donde R_c es el producto de las distancias a los ceros y R_p es

el de las distancias a los polos; el ángulo será igual a la suma de los ángulos α_1 y α_2 menos la suma de los ángulos θ_1 y θ_2 , esto es

$$A_1 = \frac{R_c}{R_p} \angle (\alpha_1 + \alpha_2 - \theta_1 - \theta_2)$$

En el caso general se tendrá entonces que el residuo es un polo simple p_k está dado por:

$$A_k = \frac{\text{producto de las distancias dirigidas de cada cero al polo } p_k}{\text{producto de las distancias de los demás polos al polo } p_k}$$

o lo que es equivalente (cuando hay n polos y m ceros) a la siguiente expresión de A_k en forma abreviada:

$$A_k = \frac{\prod_{i=1}^m |p_k - z_i|}{\prod_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n |p_k - p_e|} \quad \left(\sum_{i=1}^m \angle (p_k - z_i) - \sum_{\substack{e=1 \\ e \neq k}}^n \angle (p_k - p_e) \right)$$

En el siguiente ejemplo se ilustra la manera gráfica de evaluar los residuos A_i a partir de la representación $\hat{h}(s)$ mediante un patrón de polos y ceros. Una vez obtenidos los residuos, se determinará la función del tiempo cuya transformada de Laplace tiene el patrón de polos y ceros dado.

Ejemplo

Considérese el patrón de polos y ceros que aparece en la fig 21

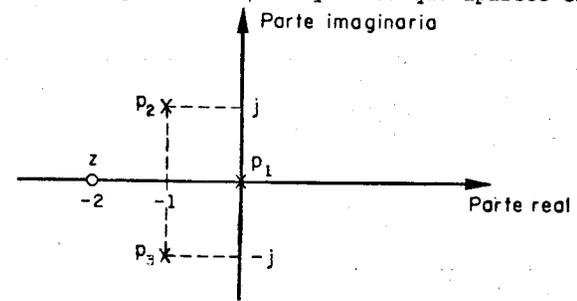


Fig 21. Un patrón de polos y ceros

Como existen tres polos (p_1 , p_2 y p_3), habrá necesidad de evaluar tres residuos (A_1 , A_2 y A_3). En la fig 22 se muestran los segmentos dirigidos que intervienen en la evaluación de A_1 , el residuo en el polo p_1 y en la fig 23 el caso correspondiente para la evaluación del residuo en el polo p_2

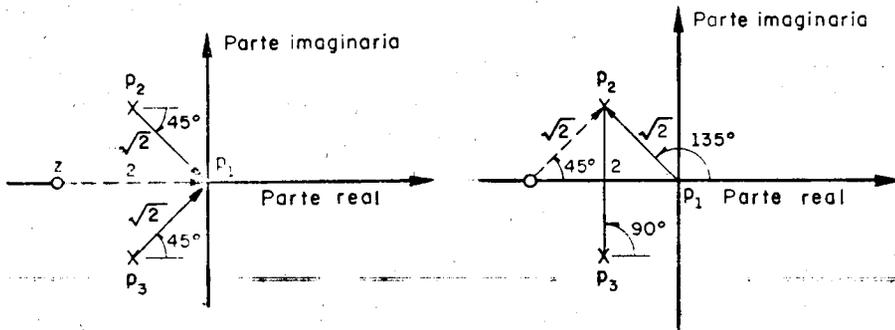


Fig 22 Evaluación gráfica del residuo p_1

Fig 23 Evaluación gráfica del residuo en p_2

Entonces, los residuos A_1 y A_2 serán

$$A_1 = \frac{2}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} \angle (0^\circ + 45^\circ - 45^\circ) = 1 \angle 0^\circ = 1e^{j0} = 1$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \angle (45^\circ - 90^\circ - 135^\circ) = \frac{1}{2} \angle (-180^\circ) = \frac{1}{2} e^{-j\pi} = -\frac{1}{2}$$

Como A_3 es el complejo conjugado de A_2 (las magnitudes son las

mismas y el ángulo de A_3 es el negativo del ángulo de A_2), se tendrá que

$$A_3 = -\frac{1}{2}$$

La función del tiempo corresponde al patrón de polos y ceros dado que será, de acuerdo con la ec 13

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}[h(s)] = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} \\ &= 1 \cdot e^{(0)t} - \frac{1}{2} e^{(-1+j)t} - \frac{1}{2} e^{(-1-j)t} \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-t} (2 \cos t) = 1 - e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

Para evaluar residuos por el método gráfico descrito, y determinar posteriormente la función del tiempo que corresponde al patrón de polos y ceros dado, son necesarias las siguientes observaciones:

Debido a que los coeficientes del numerador y del denominador $\hat{h}(s)$ son reales, cuando un polo (o un cero) es complejo (parte imaginaria no nula), habrá otro polo (o cero) cuyo valor sea el complejo conjugado del primero por lo que

- i) Los residuos en los polos reales son reales como se aprecia en la fig 24

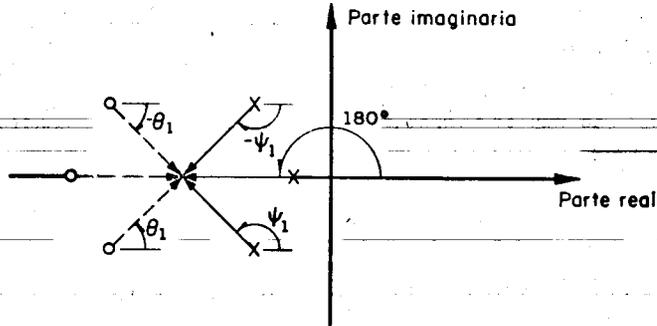


Fig 24 Los residuos en polos reales son reales

la contribución de ángulos de los otros polos y los ceros reales es un múltiplo de 180°, mientras que la suma de los ángulos desde dos polos (o ceros) complejos conjugados es cero. Así pues

$$A_L = Me^{jn\pi}$$

y como la parte imaginaria de $e^{jn\pi}$ es cero, el residuo es real.

ii) Los residuos en dos polos que son complejos conjugados son también complejos conjugados. Supóngase que dichos polos son p y \bar{p} , los residuos serán

$$A = Me^{j\theta}$$

y

$$\bar{A} = Me^{-j\theta}$$

respectivamente. De esta manera, la función del tiempo que corres-

ponde a los términos de la expansión en fracciones parciales

$$\frac{A}{s-p} + \frac{A}{s-p}$$

es

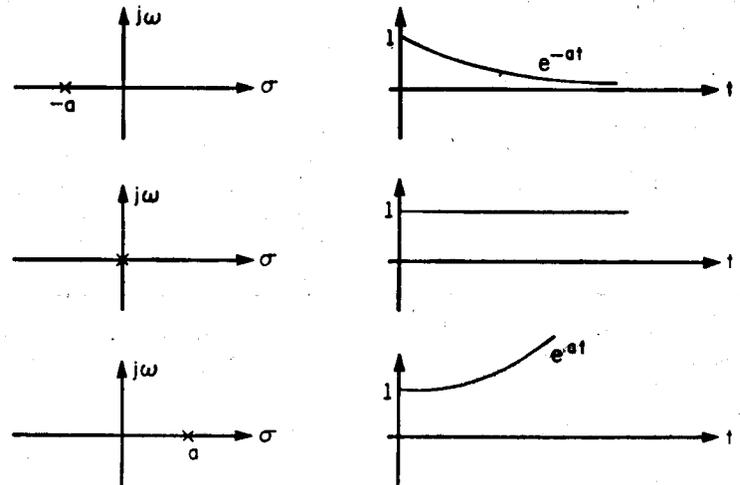
$$Me^{j\theta}e^{pt} + Me^{-j\theta}e^{pt}$$

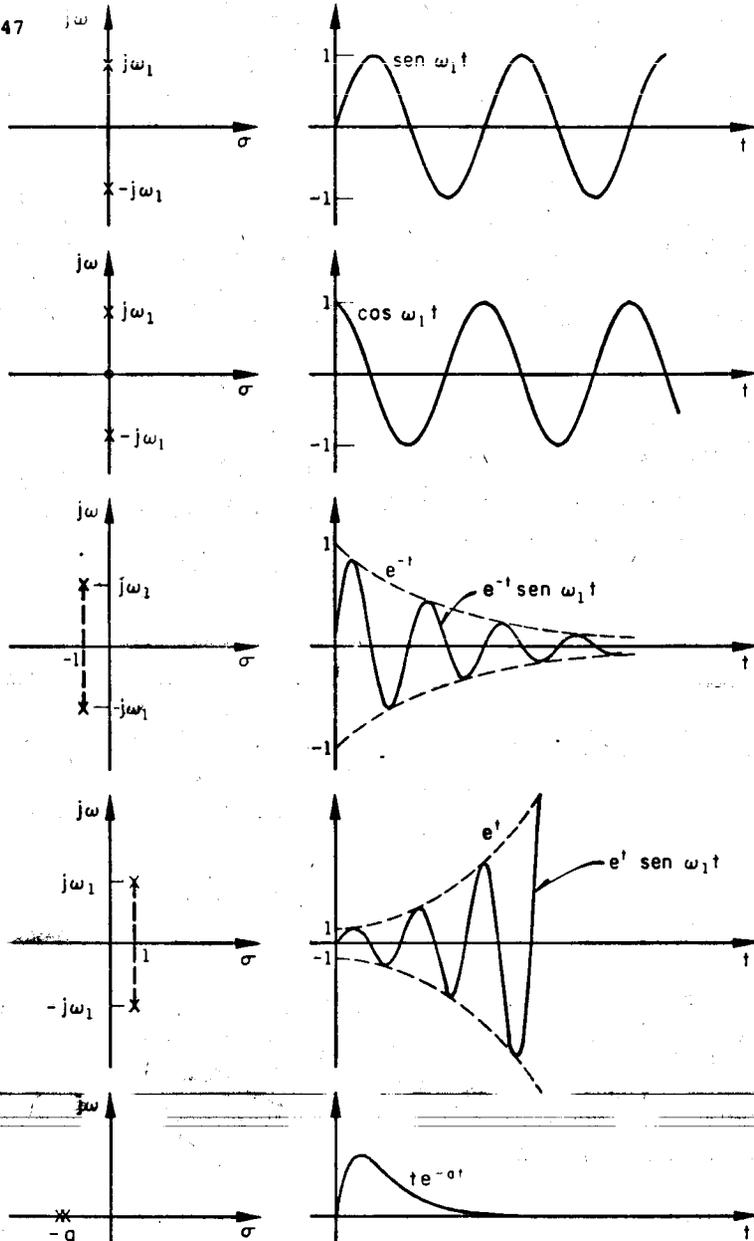
y si $p=a+jb$, la función anterior es

$$Me^{at} [e^{j(\theta+bt)} + e^{-j(\theta+bt)}] = 2Me^{at} \cos(bt+\theta)$$

Aunque este método gráfico no necesariamente es la manera más eficaz de obtener transformadas inversas de Laplace, sí es útil en la visualización de la forma de esta.

A continuación se incluyen algunas configuraciones muy frecuentes y su respectiva función del tiempo cuando $q_m=1$





7. Polos dominantes

Es muy frecuente encontrar en los sistemas configuraciones de polos y ceros de cierto tipo que hacen que este se comporte de manera similar a otro sistema de orden más bajo o sea con menor número de polos que el sistema original. Por ejemplo si la configuración es tal que existen dos polos complejos conjugados cuya parte real es menos negativa que la del resto de los polos del sistema su comportamiento está esencialmente determinado por aquellos. Dicho par se conoce como polos dominantes.

Ejemplo

Supóngase que la función de transferencia de un sistema es

$$h(s) = \frac{(s+3)(s+20)(s+5)}{(s^2+4s+5)(s+10)(s+100)} = \frac{(s+3)(s+5)(s+20)}{(s+2-j)(s+2+j)(s+10)(s+100)}$$

La configuración de polos ceros se muestra en la fig 25

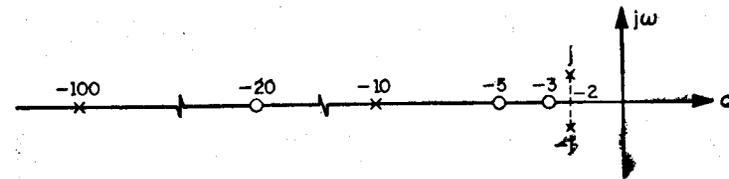


Fig 25 Configuración de polos y ceros

La respuesta a impulso de este sistema está dada entonces

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{B_1 s + A_1}{(s+2)^2 + 1} + \frac{A_2}{s+10} + \frac{A_3}{s+100} \right]$$

$$= K e^{-2t} \operatorname{sen}(t+\theta) + A_2 e^{-10t} + A_3 e^{-100t}$$

Nótese que los exponenciales e^{-10t} y e^{-100t} decrecen mucho más rápido que e^{-2t} , por lo que, después de un corto tiempo, la respuesta impulso será en esencia $K e^{-2t} \operatorname{sen}(t+\theta)$.

Los polos

$$p_1 = -2+j$$

$$p_2 = -2-j$$

son dominantes.

Como para tiempos grandes los polos dominantes describen el comportamiento del sistema, es conveniente estudiar detalladamente los sistemas de segundo orden, o sea, aquellos que tienen tan solo dos polos.

8. Sistemas de segundo orden

Considérese un sistema con una función de transferencia de la forma

$$\hat{h}(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

en el que $\hat{h}(s)$ puede escribirse convenientemente como

$$\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

entonces $\zeta\omega_n = a$

$$\omega_n^2 = a^2 + \omega^2 \text{ o sea } \omega = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

A los parámetros $a, \omega, \omega_n, \zeta$ comúnmente se les dan los nombres

a amortiguamiento real

ω frecuencia real

ζ amortiguamiento relativo o coeficiente de amortiguamiento

ω_n frecuencia natural

La fig 26 muestra las relaciones geométricas suponiendo que la parte real de las raíces de

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

es negativa

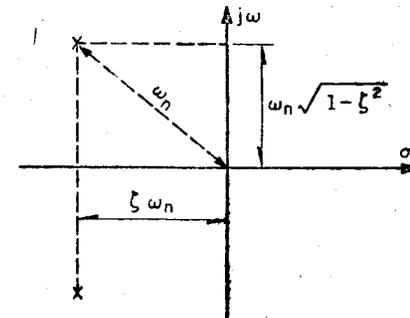


Fig 26 Gráfica de los parámetros de

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

Los polos del sistema están dados en función de ζ y ω_n por

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

y dependiendo del valor de ζ , se pueden distinguir cuatro casos, pues el carácter de un sistema de segundo orden es drásticamente distinto en cada uno de ellos:

- i) $0 < \zeta < 1$ En este caso los dos polos son estrictamente complejos (tanto la parte real como la imaginaria son diferentes de cero) y se denomina subamortiguado
- ii) $\zeta = 1$ Los dos polos coinciden y son reales, por lo que se dice que el sistema está críticamente amortiguado
- iii) $\zeta > 1$ Los polos son reales pero no coinciden, en cuyo caso se dice que el sistema está sobreamortiguado
- iv) $\zeta = 0$ Aquí sucede que los dos polos están exactamente sobre el eje imaginaria y el sistema se dice que es no amortiguado

Es conveniente visualizar gráficamente lo que sucede a los polos del sistema de segundo orden cuando se tiene ω_n fija y ζ varía continuamente entre los valores de 0 y 1 para ello nótese que:

$$p_1 \bar{p}_1 = p_2 \bar{p}_2 = [p_1]^2 = [p_2]^2 = \zeta^2 \omega_n^2 + \omega_n^2 (1 - \zeta^2) = \omega_n^2$$

$$(\bar{p}_i = \text{conjugado de } p_i)$$

entonces, la distancia de los polos al origen permanece constante (esto es, están en un círculo de radio ω_n). Además, el ángulo que forma la línea que une al origen con los polos y con el eje real está dado por (fig 27)

$$\cos \theta = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

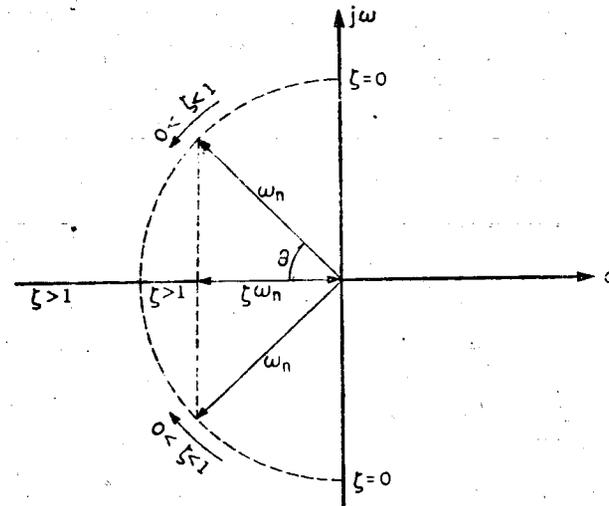


Fig 27 Efecto de la variación de ζ en la localización de los polos.

Para $\zeta \geq 1$ los polos se encuentran sobre el eje real, por tanto $\theta = 0^\circ$. A medida que ζ crece a partir de $\zeta = 1$, los dos polos se irán separando del punto $s = -\omega_n$.

8.1 Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden

Se ha visto en los párrafos anteriores cómo del patrón de polos y ceros es posible obtener la respuesta a impulso del sistema; además se ha hecho énfasis en la importancia de los de segundo orden. Sin mayor complicación adicional se puede obtener de la misma forma la respuesta a un escalón unitario (o en general a cualquier otra entrada).

Considérese el caso en que el sistema es de segundo orden con una función de transferencia

$$\hat{h}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

y que la entrada es un escalón unitario. Entonces la transformada de Laplace de la salida tendrá un patrón de polos y ceros que se muestra en la fig 28, para el caso en que $0 < \zeta < 1$

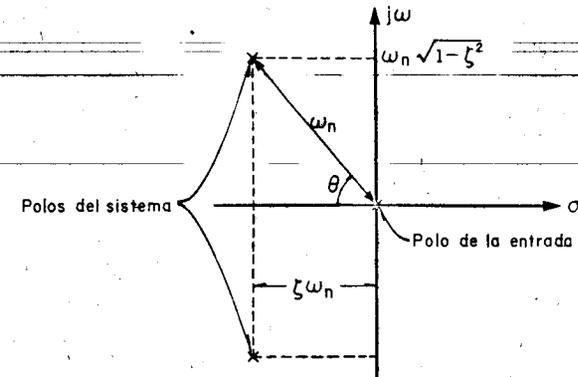


Fig 28a Patrón de polos y ceros de

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{para } 0 < \zeta < 1$$

En el caso en que $\zeta = 1$ el patrón aparece en la fig 28b

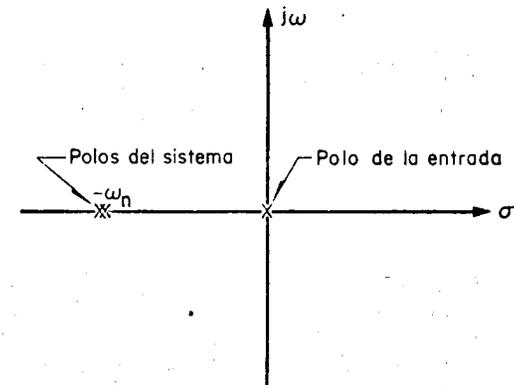


Fig 28b Patrón de polos y ceros de $\frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)}$

y para valores de $\zeta > 1$ el patrón se muestra en la fig 28c

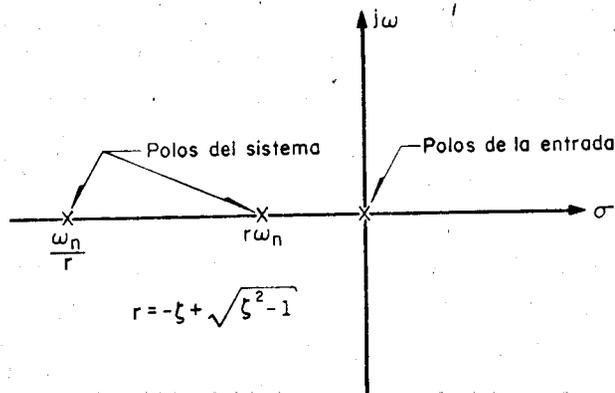


Fig 28c Patrón de polos y ceros de $\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

para valores de $\zeta > 1$.

La transformada inversa de Laplace de la salida

$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

para cada uno de los casos anteriores es:

i) Si $0 < \zeta < 1$

$$y(t) = \left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \theta) \right] u_{-1}(t) \quad (15)$$

en donde $\theta = \cos^{-1} \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

ii) Si $\zeta = 1$

$$y(t) = [1 - e^{-\omega_n t} + \omega_n t e^{-\omega_n t}] u_{-1}(t) \quad (16)$$

iii) Si $\zeta > 1$

$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{1-\lambda^2} e^{-\lambda\omega_n t} + \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} e^{-\frac{\omega_n}{\lambda} t} \right] u_{-1}(t) \quad (17)$$

en donde $\lambda = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$

En la fig 29 se muestra la respuesta a escalón, $y(t)$, para diversos valores de ζ

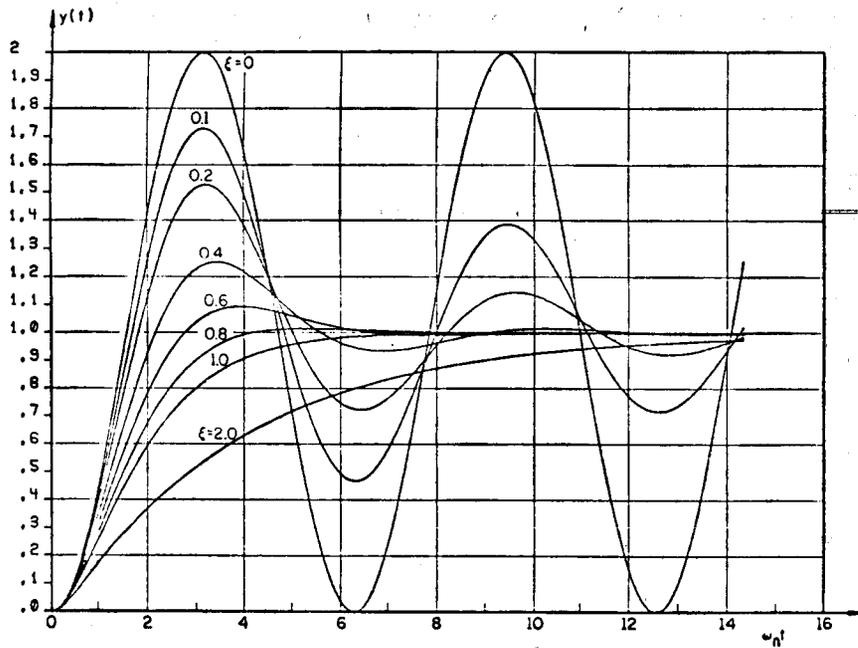


Fig. 29 Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden

9. Parámetros de diseño

Para diseñar un sistema de control es necesario especificar algunas condiciones que este debe cumplir, las cuales pueden darse de formas muy diversas, desde especificaciones directas en el dominio del tiempo, hasta indirectas, en el dominio de la frecuencia. En esta sección se verán algunas de las primeras.

Una de las señales de prueba más comunes en sistemas de control, particularmente para servomecanismos (o sea aquellos sistemas que tienen por objeto producir una salida que reproduce fielmente la entrada) es el escalón unitario. La respuesta de un sistema estable a dicho tipo de entrada, tiene en general la forma mostrada en la fig 30

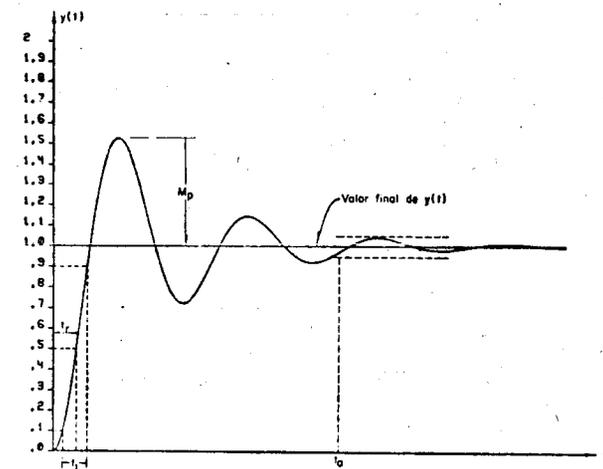


Fig 30 Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden

Si el propósito es que la salida sea lo más parecida a la entrada, ha resultado conveniente definir varias cantidades que dan una medida de la fidelidad del sistema.

Aquí únicamente se consideran cuatro de ellas que se refieren al comportamiento transitorio del sistema, y posteriormente se verán condiciones referentes al estado permanente (fig 30)

- Sobrepaso (M_p) Es la máxima sobredesviación con respecto al valor final de la respuesta del sistema. Generalmente se expresa como el porcentaje de exceso del valor máximo de la salida con respecto al valor final
- Tiempo de retardo (t_r) Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el 50 por ciento de su valor final
- Tiempo de levantamiento (t_l) Es una medida del tiempo que le toma al sistema para que la respuesta pase del 10 al 90 por ciento del valor final
- Tiempo de asentamiento (t_a) Es el mínimo valor del tiempo a partir del cual la respuesta estará dentro de 5 por ciento de su valor final.

Debe hacerse notar que hay muchos sistemas para los cuales dichas definiciones son de utilidad nula (por ejemplo, sistemas inestables); sin embargo, ya que en general son especificaciones de diseño, es fácil verificar si un sistema dado las cumple o no.

Pocos son los sistemas en los cuales es posible expresar analíticamente

mente cada uno de los parámetros (M_p , t_l , y t_a); no obstante, para sistemas de segundo orden puede hacerse.

9.1 Sobrepaso (M_p)

Para obtener (M_p) el sobrepaso en el caso que $0 < \zeta < 1$ se deriva la respuesta $y(t)$ dada por la ec 15 y se iguala a cero a fin de encontrar el tiempo t en el cual la función tiene un máximo o un mínimo. Entre las posibles soluciones, debe extraerse aquella que corresponde al sobrepaso.

Se sabe que si $y(t)$ es la respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón unitario, tiene la transformada de Laplace

$$\hat{y}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Además $y(0)$ vale cero, por lo que

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = s\hat{y}(s) - y(0) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Reacomodando algunos términos

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{(\delta + \zeta\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})^2}$$

y tomando la transformada inversa

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{\omega_n} t\right)$$

La expresión para $\frac{dy}{dt}$ vale cero cuando

$$t = \frac{N\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}; N = 0, 1, 2, \dots$$

El valor máximo de $y(t)$ ocurre cuando $N = 1$, o sea

$$t_{M_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

evaluando en este tiempo la respuesta a escalón, se obtiene

$$y(t_{M_p}) = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

entonces

$$M_p = y(t_{M_p}) - 1 = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

lo cual se muestra en la fig 31

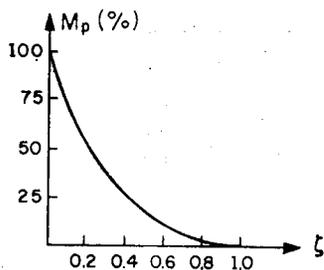


Fig 31 Sobrepaso en función del amortiguamiento relativo en un sistema de segundo orden

Es interesante hacer notar que el sobrepaso es únicamente fun-

ción de ζ y no de ω_n

9.2 Tiempo de levantamiento (t_{ℓ})

Se ha definido como el tiempo que se requiere para que la respuesta pase de 10 a 90 por ciento del valor final. En sistemas subamortiguados de segundo orden ($0 < \zeta < 1$) generalmente se usa el tiempo necesario para pasar de 0 a 100 por ciento del valor final. Este último tiempo es solamente un poco mayor que t_{ℓ} . Esta aproximación no es válida para sistemas sobreamortiguados, ($\zeta > 1$) o que no sean de segundo orden.

Para calcular el tiempo de 0 a 100 por ciento del valor final, solo hace falta calcular el tiempo más pequeño para el cual $y(t)$ es igual al valor final, esto es

$$y(t_{\ell_1}) = 1 = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t_{\ell_1}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_{\ell_1} + \phi)$$

por tanto

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_{\ell_1}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_{\ell_1} + \phi) = 0$$

Como $e^{-\zeta\omega_n t_{\ell_1}} \neq 0$

se tiene que

$$\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_{\ell_1} + \phi) = 0$$

Utilizando conversiones trigonométricas resulta que debe cumplirse

$$\zeta \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1+\zeta^2} t_{\ell_1}) + \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_{\ell_1}) = 0$$

que puede ponerse en la forma

$$\operatorname{tng}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t_{L1}) = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

y así llegar al resultado

$$t_L = t_{0-100\%} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{tng}^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} \right)$$

10. Tiempo de asentamiento

En un sistema subamortiguado de segundo orden, la respuesta a escalón es

$$y(t) = \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \right] \right\} u_{-1}(t)$$

Las curvas $1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ son las envolventes de la respuesta a escalón unitario. La curva de respuesta $y(t)$ permanece dentro de dichas curvas como lo indica la fig 32

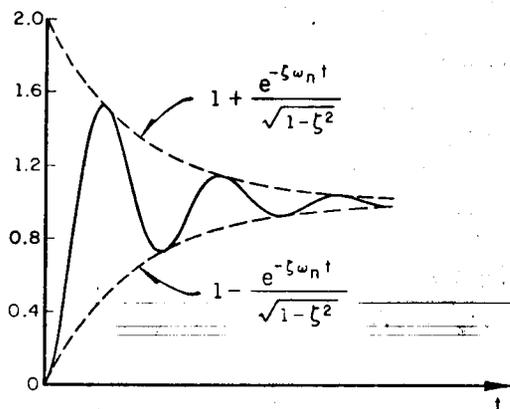


Fig 32 Curvas envolventes de la respuesta a escalón de un sistema de segundo orden

Las envolventes son exponenciales del tipo $e^{-\frac{t}{T}}$, donde T se denomina la constante de tiempo y es igual a $\frac{1}{\zeta\omega_n}$. La velocidad con que el transitorio decae depende de esta constante de tiempo.

En la fig 30 se aprecia que para la misma ω_n y para un intervalo de ζ entre 0 y 1, el tiempo de asentamiento disminuye conforme ζ aumenta.

Para calcular el tiempo de asentamiento puede procederse así. Llámese $y_{tr}(t)$ a la parte transitoria de la respuesta a escalón dada por

$$y_{tr}(t) = 1 - y(t)$$

o sea

$$y_{tr}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

Porque $|\operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)| \leq 1$, entonces se tiene que la parte transitoria cumplirá la desigualdad

$$|y_{tr}(t)| \leq \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

como el tiempo de asentamiento (t_a) es aquel a partir del cual y_{tr} es menor de $0.05 \times y(\infty)$ entonces si t_1 es tal que

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{\sqrt{1-\zeta^2}} < 0.05$$

se puede garantizar que $y_{tr}(t) < .05$ para $t > t_1$, pudiéndose

aproximar t_a por t_L

Al tomar logaritmos naturales en ambos lados de la expresión anterior resulta

$$-\zeta\omega_n t_1 = \ln 0.05 + \ln \sqrt{1-\zeta^2}$$

como $\sqrt{1-\zeta^2}$ es menor que la unidad, entonces $\ln \sqrt{1-\zeta^2} < 0$ y por tanto

$$-\zeta\omega_n t_1 < \ln 0.05 = -2.9957$$

por lo que si

$$t > \frac{2.9957}{\zeta\omega_n}$$

se garantiza que $y_{tn}(t)$ es menor que $0.05y(=)$ por tanto t_a puede aproximarse mediante

$$t_a = \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

o sea, que t_a es aproximadamente tres veces la constante de tiempo de la envolvente $e^{-\zeta\omega_n t}$ del sistema

Ejemplo

Supóngase que un sistema de segundo orden tiene una función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{9}{s^2 + 2s + 9}$$

¿Cuáles son los valores de M_p , t_L y t_a ? (esto es, los parámetros de diseño)

Solución:

Los valores de ζ y ω_n están dados por

$$\omega_n = \sqrt{9} = 3; \quad 2\zeta\omega_n = 2 \Rightarrow \zeta = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

y el sobrepaso por

$$M_p = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{1-\zeta^2}\right) = \exp\left(\frac{-\pi}{8}\right) = \exp\left(\frac{-\pi}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = 0.333$$

El tiempo de levantamiento es

$$t_L = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1} [0.333] = 70^\circ = 1.23 \text{ rad}$$

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 3\sqrt{1-\frac{1}{9}} = 2\sqrt{2} = 2.82$$

$$t_L = \frac{3.14 - 1.23}{2.82} = 0.68$$

El tiempo de asentamiento es

$$t_a = \frac{3}{\zeta\omega_n} = \frac{3}{1} = 3$$

Estos valores pueden verificarse de la curva correspondiente a $\zeta = .33$ que aparece en la fig 20.

11. Comportamiento asintótico

Existen otros tipos de especificaciones que se refieren al comportamiento *asintótico* del sistema, esto es, la respuesta del sistema cuando $t \rightarrow \infty$. Lógicamente, este comportamiento dependerá no solo del sistema, sino además de la entrada. Generalmente las entradas que se utilizan como funciones de prueba para este propósito son un escalón $u_1(t)$, una rampa $u_2(t)$ y una entrada

parabólica $u_3(t)$. Dichas funciones, como se verá, tienen interpretación física en algunos sistemas de control, tales como posicionadores.

El tema se trata, parcialmente, en el Apéndice sobre transformada de Laplace, por lo que aquí se utilizarán algunos de los resultados allí obtenidos.

Los sistemas modelados hasta ahora han tenido funciones de transferencia expresables como cocientes de polinomios $\hat{h}(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$. Razón por la cual se darán las condiciones para que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ exista, donde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{h}(s)]$ únicamente para este tipo de sistemas.

Para que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ exista los polos de $\hat{h}(s)$ deberán estar en el semiplano $\text{Re}(s) < 0$ incluyendo el origen; si esto se cumple $\hat{h}(s)$ pueden expandirse en fracciones parciales como

$$\hat{h}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{(s+p_1)} + \frac{B_2}{(s+p_1)^2} + \dots + \frac{B_n}{(s+p_2)} + \frac{C_q}{(s+p_2)^q} + \dots + \text{etc.}$$

en donde la parte real de p_i es menor que cero.

La transformada inversa de $\hat{h}(s)$ en este caso es del tipo {constante + exponenciales amortiguadas * (polinomios en t)} $u_1(t)$. Cuando $\hat{h}(s)$ tiene por lo menos un polo en un punto del eje imaginario que no sea el origen, entonces $h(t)$ tendrá términos de la forma

$$\text{sen}(\omega t + \phi)$$

en dicho caso, $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ no existe y cuando $\hat{h}(s)$ tiene un polo con parte real positiva $h(t)$ tiene términos de la forma e^{bt} con $b > 0$ y por tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$ tampoco existe.

Considérese el sistema de malla cerrada de la fig 33

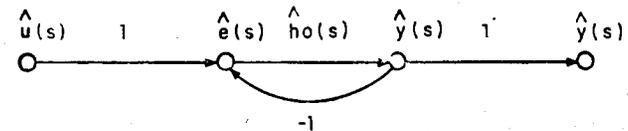


Fig 33 Reograma de un sistema con retroalimentación unitaria

La variable que representa al nodo $\hat{e}(s)$ es la diferencia entre la entrada y la salida y se denomina error del sistema. La función de transferencia $\frac{\hat{e}(s)}{\hat{u}(s)}$ obtenida por la fórmula de Mason es

$$\frac{\hat{e}(s)}{\hat{u}(s)} = \frac{1}{1 + \hat{h}(s)}$$

o también.

$$\hat{e}(s) = \frac{\hat{u}(s)}{1 + \hat{h}(s)}$$

El estado estable del error, dado por el teorema del valor final es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{e}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s u(s)}{1 + \hat{h}(s)} \quad (18)$$

Como $y(t) = u(t) - e(t)$ y se conoce $u(t)$, se describirá el comportamiento asintótico en función del error $e(t)$ para los tres tipos estandar de entradas.

11.1 Entrada escalón unitario $u_1(t)$

El error a estado estable para un escalón unitario es, según la ec 18

$$e_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s}}{1 + \hat{h}(s)} = \frac{1}{1 + \hat{h}(0)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

y K_p se denomina *constante de error de posición*.

Claramente, la forma de $\hat{h}(s)$ es la que determina el error a estado estable.

Si se supone que $\hat{h}(s)$ es de la forma

$$\hat{h}_0(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^n (s + p_k)}$$

se ve que cuando $s \rightarrow 0$, el valor de $\hat{h}(s)$ dependerá del número de integraciones N . Si $N > 0$, $\hat{h}(0)$ será infinita y el error tenderá a cero para tiempos grandes.

El número N de polos en el origen se indicará diciendo que el sistema es de tipo N

11.2 Entrada rampa $u_2(t)$

El error a estado estable cuando $u(s) = \frac{1}{s^2}$ es

$$e_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{1}{s^2} \right)}{1 + \hat{h}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + s \hat{h}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \hat{h}(s)}$$

Una vez más, el error depende de $\hat{h}(s)$, y por consiguiente del tipo de sistema. Para un sistema tipo 0 ($N=0$), el error a estado estable es infinito. Para un sistema tipo 1, $N=1$, el error es

$$e_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)} = \frac{1}{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)} = \frac{1}{K_v}$$

$$\frac{s^N \prod_{k=1}^n (s + p_k)}{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}$$

donde K_v se denomina como *constante de error de velocidad*.

Cuando $\hat{h}(s)$ es de tipo 2 o mayor, el error a estado estable es cero.

11.3 Entrada parabólica $u_3(t)$

Cuando la entrada al sistema es $\frac{1}{2} u_3(t)$, el error a estado estable es

$$e_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \left(\frac{1}{s^3} \right)}{1 + \hat{h}(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 \hat{h}(s)}$$

El error a estado estable para $N < 2$ es infinito; y para $N=2$ se tiene

$$e_e(t) = \frac{1}{K \prod_{i=1}^m (s + z_i)} = \frac{1}{K_a}$$

$$\frac{s^N \prod_{k=1}^n (s + p_k)}{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}$$

donde K_a se denomina *coeficiente de error de aceleración*.

Cuando $N \geq 3$, el error del sistema a estado estable es cero. Los sistemas de control se describen frecuentemente en términos de su tipo y su coeficiente de error. La tabla 1 resume los resultados obtenidos.

Tabla 1. Coeficientes de error y su relación con el error en estado permanente para diferentes tipos de sistemas

ENTRADA TIPO DEL SISTEMA	$u_{-1}(t)$ $\hat{u}_{-1}(s) = \frac{1}{s}$	$u_{-2}(t)$ $\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{2} u_{-3}(t)$ $\frac{1}{s^3}$
0	$e_p(t) = \frac{1}{1+K_p}$	∞	∞
1	$e_p(t) = 0$	$\frac{1}{K_v}$	∞
2	$e_p(t) = 0$	0	$\frac{1}{K_a}$

Ejemplo

Supóngase que un sistema está descrito por un reograma como el de la fig 33 en donde la función de transferencia del sistema es

$$\hat{h}_0(s) = \frac{11s+6}{s^2(s+6)}$$

Debido a que los polos de la función de transferencia de u a y están en el semiplano izquierdo es posible encontrar los coeficientes K_p , K_v y K_a , así pues:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{11s+6}{s^2(s+6)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{11s+6}{s^2(s+6)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{11s+6}{s(s+6)} = \infty$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{11s+6}{s^2(s+6)} = \frac{6}{6} = 1$$

A partir de los valores anteriores se puede obtener el comportamiento asintótico del error $e(t)$, para diversas entradas. Estos se indican en la tabla siguiente para los tres tipos de entrada considerados anteriormente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+K_p} = 0, & \text{cuando } u = u_{-1}(t) \\ \frac{1}{K_v} = 0, & \text{cuando } u = u_{-2}(t) \\ \frac{1}{K_a} = 1, & \text{cuando } u = u_{-3}(t) \end{cases}$$

Así pues si la entrada al sistema descrito es un escalón unitario, debido a que el error (la diferencia entre la entrada y la salida) tiende a cero, entonces esta se acercará arbitrariamente a la función entrada. Algo similar sucede cuando la entrada es una rampa: la salida para tiempos grandes se aproximará a la rampa de la entrada. Por último, cuando $u(t)$ es una función parabólica para tiempos muy grandes de salida, tenderá también a una función de ese tipo, pero habrá una diferencia de una unidad con la entrada (fig 3)

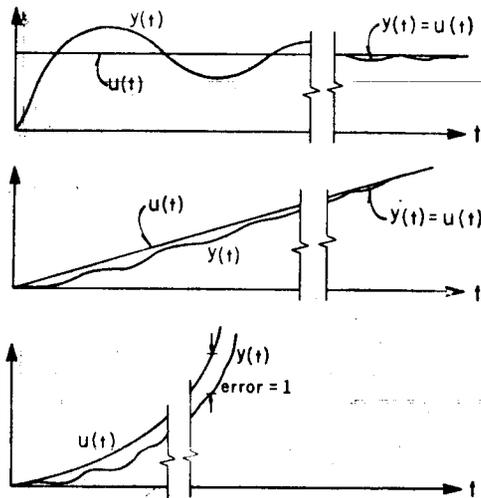


Fig 34 Errores a estado permanente del sistema del ejemplo para los tres tipos de entradas

Ahora bien, si se supone que el sistema representa un servomecanismo de posición y tanto la variable de entrada como la de salida son ángulos, entonces, el error es una medida de la diferencia entre estos. Cuando la entrada es un escalón, lo que equivale a cambiar el ángulo de entrada de un valor a otro instantáneamente, entonces $e(t)$ para $t \rightarrow \infty$ indica la diferencia entre el valor deseado y el de salida; de allí el nombre de *error de*

posición.

Además, si la razón de cambio del ángulo de entrada es constante, esto es, que el servomecanismo tiene como entrada una velocidad angular constante (una rampa si la variable de entrada es un ángulo), el error será la diferencia entre las posiciones de la entrada y la salida y por tener aquella una velocidad constante se le da el nombre de *error de velocidad*. De un modo similar, cuando la entrada es un ángulo producido por una aceleración constante, o sea una función parabólica, del desplazamiento, la diferencia entre la entrada y la salida se denomina *error de aceleración*. Luego las constantes K_p , K_v , y K_a son una medida de la capacidad de un sistema a "seguir" entradas de los tipos mencionados.

Ejemplo

En una planta química se quiere controlar la apertura de ciertas válvulas desde un puesto central de mando. Para ello se sugiere un sistema como el indicado en la fig 35

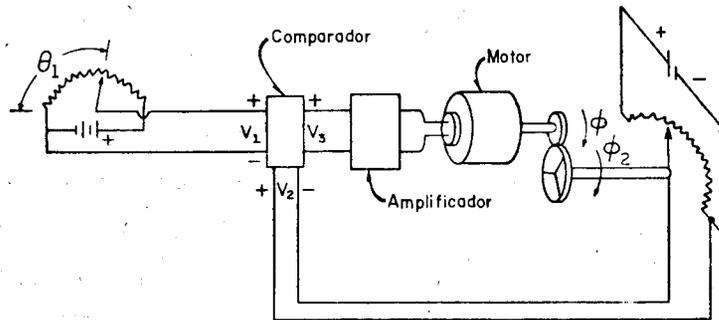


Fig 35 Sistema controlador de posición

El sistema propuesto funciona de la siguiente manera: el operador acciona un potenciómetro en el puesto de mando cuando desea abrir o cerrar la válvula. El ángulo al cual coloca el cursor del potenciómetro será proporcional a la apertura deseada de la válvula. Esto produce un voltaje v_1 (proporcional a θ_1) entre un par de terminales. Mediante un elemento comparador, se le resta al voltaje v_1 otro voltaje, v_2 , que es proporcional a la apertura real de la válvula (la manera de producir v_2 es idéntica a la de v_1). La salida del comparador es pues la diferencia $v_1 - v_2 = v_3$ este voltaje se amplifica y se aplica a un motor de corriente directa.

El ángulo ϕ de la flecha del motor está relacionado al voltaje aplicado por medio de la función de transferencia:

$$\frac{\hat{\phi}(s)}{\hat{v}_3(s)} = \frac{K}{s^2 + 5s + 8}$$

La flecha del motor y la que abre o cierra la válvula están acopladas por engranes de inercia despreciable. Esta última flecha tiene acoplado un potenciómetro que produce un voltaje proporcional a la apertura real de la válvula, cuyo eje tiene fricción, así que la función de transferencia entre el ángulo de la flecha del rotor y el eje de la válvula está dado por

$$\frac{\hat{\phi}_2(s)}{\hat{\phi}(s)} = \frac{3}{4}$$

Para facilidad de exposición, se considerará que todas las constantes de proporcionalidad son la unidad y que $k = 2$; el diagrama que representará la dinámica del sistema de control se indica mediante la fig 36

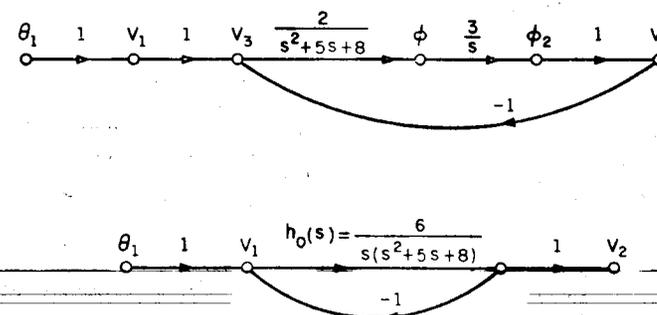


Fig 36 Reograma del servomecanismo de posición

Se desea determinar si el sistema considerado es apropiado para propósitos de control de flujo de cierta componente química que pasa por la válvula.

Para ello se desea encontrar tanto el comportamiento transitorio como el asintótico.

El último reograma tiene retroalimentación unitaria por tanto:

$$\hat{h}(s) = \frac{6}{s(s^2 + 5s + 8)}$$

La función de transferencia de malla cerrada es

$$\frac{\hat{v}_2(s)}{\theta_1(s)} = \frac{\hat{h}(s)}{1 + \hat{h}(s)} = \frac{6}{s(s^2 + 5s + 8) + 6} = \frac{6}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6}$$

Los polos de este sistema están dados por las raíces del polinomio

$$s^3 + 5s^2 + 8s + 6 = 0$$

o sea

$$(s+3)(s^2 + 2s + 2) = 0$$

Entonces, el sistema tiene un polo real en $s = -3$ y dos polos complejos en $s = -1 \pm j$ (fig 37)

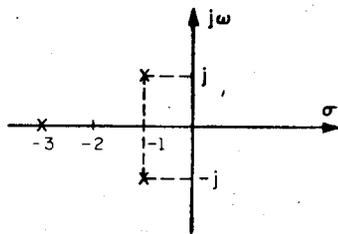


Fig 37 Patrón de polos y ceros

Por tanto, el sistema cumple con las condiciones para las cuales es aplicable el teorema del valor final. Como el sistema es del tipo 1, de la tabla 1, se obtiene

$$K_p = \infty \quad \text{error de posición} = 0$$

$$K_v = \frac{3}{4} \quad \text{error de velocidad} = \frac{4}{3}$$

$$K_a = 0 \quad \text{error de aceleración} = \infty$$

Como los polos dominantes del sistema son los localizados en $-1 \pm j$, el comportamiento del sistema estará determinado esencialmente por ellos.

El coeficiente de amortiguamiento ζ y la frecuencia natural ω_n son

$$\omega_n = \sqrt{2} = 1.41$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

Esto implica que el sistema está subamortiguado y que las características de su comportamiento transitorio pueden obtenerse de las expresiones para los sistemas de segundo orden

$$M_p = e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})}} = e^{-\pi} = 0.043$$

$$t_{M_p} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}}} = \pi = 3.14 \text{ seg}$$

$$t_l = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi - \theta}{\omega_n} \quad \theta = \cos^{-1} \zeta = \cos^{-1}(0.707) = 0.79 \text{ rad}$$

$$t_l = \frac{3.14 - 0.79}{1} = 2.35 \text{ seg}$$

$$t_a = \frac{3}{\zeta \omega_n} = 3 \text{ seg}$$

Así, después de haber hecho un examen del sistema propuesto, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- a) El sistema tenderá a llegar a la apertura deseada por ser del tipo 1
- b) Si se deseara abrir la válvula continuamente, de manera tal que el gasto en ella se incremente en forma gradual, el sistema de control propuesto no cumplirá fielmente con este cometido, por ser el error de velocidad casi la unidad
- c) El sobrepaso es suficientemente pequeño para garantizar que no se va a exceder demasiado la apertura propuesta. Esto puede convenir en algunos casos para evitar golpeteo del vástago en el asiento o cuando se corre peligro de alguna explosión en caso de tener un excedente del compuesto controlado por válvula.

En los párrafos anteriores se han obtenido, pero no utilizando los tiempos de asentamiento, retraso y levantamiento. Estos pueden ser útiles al diseñador en criterios sobre rapidez de respuesta del sistema, suavidad de comportamiento del mismo, etc.

Capítulo 8

ESTABILIDAD DE SISTEMAS

que la salida debida a una entrada pequeña sea arbitrariamente grande, porque en caso de que se introduzcan perturbaciones al sistema, éste las amplifica.

El propósito de este capítulo es estudiar los aspectos relacionados con dicho problema y, particularmente, determinar las condiciones bajo las cuales es posible garantizar que la salida (o respuesta) sea "pequeña", mientras la entrada, las perturbaciones externas, y el estado inicial, lo sean.

Este problema, conocido como problema de la estabilidad, ha tenido varios enfoques.

En el enfoque más utilizado, mismo que consideraremos en este capítulo, se considera la descripción externa del sistema, o sea, la relación entrada-salida. El análisis de este tipo de estabilidad fue tratado en detalle por Nyquist (1932), y considera que un sistema es estable cuando la salida no crece indefinidamente debido a entradas o perturbaciones (ruido) pequeñas.

2. Definiciones fundamentales

Para simplificar algunos de los desarrollos y definiciones de esta sección, es conveniente utilizar los conceptos de función acotada y función absolutamente integrable.

Se dice que una función $f(t)$ es acotada cuando existe una constante $M < \infty$ tal que $|f(t)| < M$ para toda t . Por ejemplo,

1. Introducción

En capítulos anteriores se han puesto de manifiesto las ventajas que se logran con altas ganancias de malla en los sistemas realimentados; particularmente en el primero se ilustró que a medida en que se aumentaba el valor de la ganancia de malla, la relación entrada-salida del sistema se hacía menos sensible a las características de la planta. En el cap 5 se vio que es posible incrementar la selectividad de los sistemas realimentados con respecto a perturbaciones externas cuando se aumenta la ganancia de malla. En el número 7 se demostró que es posible disminuir los errores permanentes de los sistemas unitariamente realimentados, cuando se aumenta el factor de amplificación de la transmisión directa. Parece entonces natural pensar que siempre es deseable tener valores altos de ganancia de malla. Sin embargo, como se verá en este capítulo, al aumentarla se puede llegar a tener una de las características menos deseables en los sistemas de control:

senes una función acotada porque $|\text{sen } t| < 2$ para toda t ; y la función $g(t) = t^2 + 3t + 8$ no es acotada, ya que dada cualquier constante M siempre es posible encontrar un tiempo t_1 para el cual $t_1^2 + 3t_1 + 8 > M$ (fig 1).

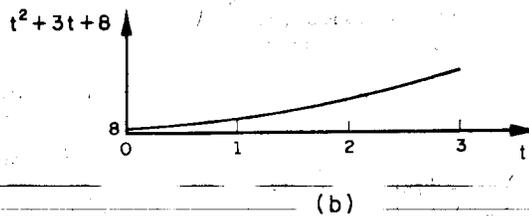
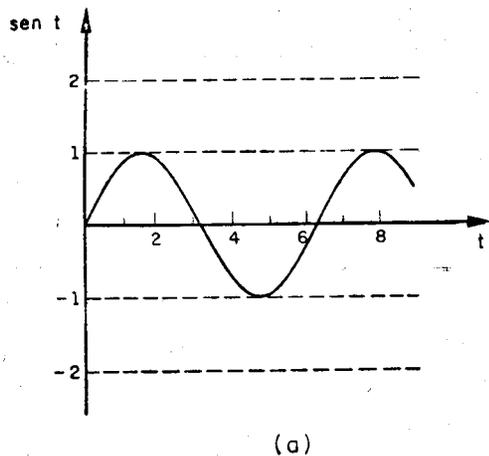


Fig 1 (a) función acotada
 (b) función no acotada

Una función $h(t)$ es absolutamente integrable si

$$g(t) = \int_{-\infty}^t |h(\sigma)| d\sigma \text{ es acotada}$$

Así $h(t) = e^{-t} u_1(t)$ es una función absolutamente integrable porque la función

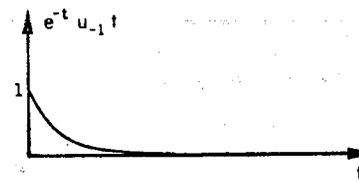
$$g(t) = \int_{-\infty}^t |e^{-\sigma} u_1(\sigma)| d\sigma = \int_0^t e^{-\sigma} d\sigma = 1 - e^{-t}$$

es acotada.

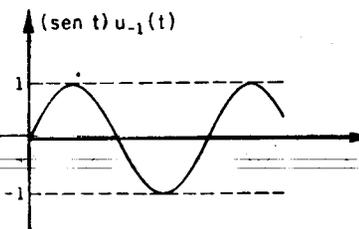
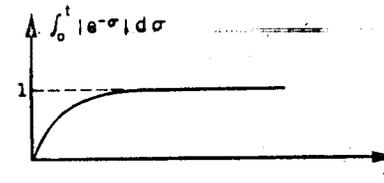
Por otra parte $(\text{sen } t) u_1(t)$ no es absolutamente integrable porque la función

$$g(t) = \int_{-\infty}^t |(\text{sen } \sigma) u_1(\sigma)| d\sigma = \int_0^t |\text{sen } \sigma| d\sigma = 2n + 1 - \cos(t - 2n\pi)$$

(en donde n es un entero positivo que satisface $n\pi < t \leq (n+1)\pi$) no es acotada (fig 2)



(a)



(b)

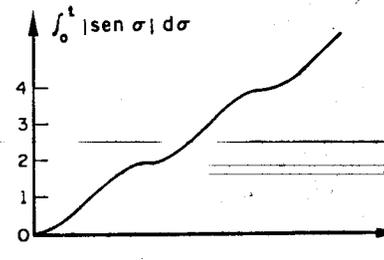


Fig 2 a) Función absolutamente integrable
 b) Función no absolutamente integrable

2.1 Definición de sistema estable

Un sistema dinámico es estable en el sentido entrada-salida, si estando en reposo: i) cualquier entrada acotada produce una salida acotada, ii) entradas suficientemente pequeñas producen salidas suficientemente pequeñas.

Dicha definición puede darse mediante símbolos matemáticos:

Si $u(t)$ representa la entrada y $y(t)$ la salida, entonces el sistema es estable, si (fig 3)

- i) $|u(t)| < M$ implica que existe una constante N tal que $|y(t)| < N$
- ii) Para todo $\delta > 0$ existe una $\epsilon > 0$ tal que si $|u(t)| < \epsilon$, entonces $|y(t)| < \delta$

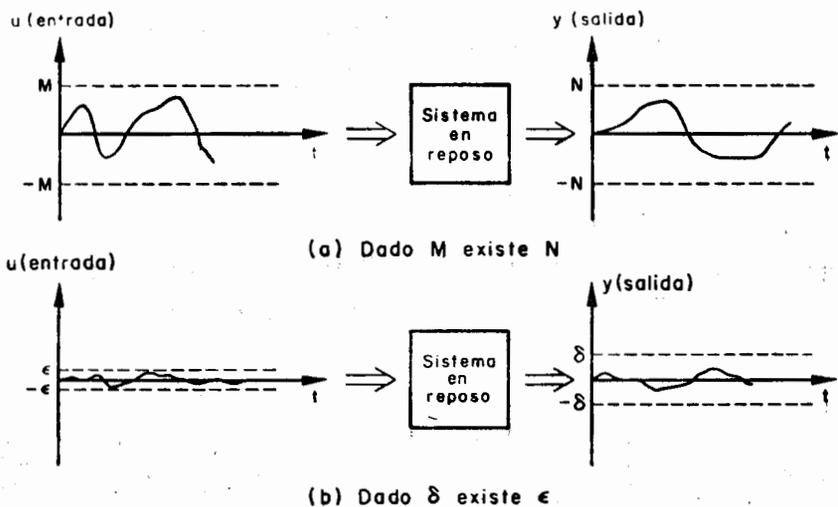


Fig 3 Sistema estable en el sentido entrada-salida

La definición de sistema estable es aplicable a cualquier tipo de sistema: lineal, no-lineal, distribuido, etc. Sin embargo, nuestra atención se concentrará a los descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes, tal como se hizo en capítulos anteriores.

Antes de entrar a fondo en los detalles de las condiciones para determinar la estabilidad de un sistema, las implicaciones de la definición anterior se ejemplificarán con casos sencillos.

2.1.1 Ejemplo

Considérese un sistema lineal e invariable, cuya función de transferencia es $\hat{h}(s) = 1/(s+1)$. La respuesta a impulso $h(t) = \int_{-\infty}^t \hat{h}(s) ds$ está dada por $h(t) = e^{-t} u_{-1}(t)$

Si $u(t)$ es una entrada arbitraria que vale cero para tiempos negativos, la salida $y(t)$ correspondiente se expresa mediante la integral de convolución.

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau) e^{-\tau} d\tau$$

Para este caso $|u(t)| < M$ implica la existencia de una constante finita N tal que

$$|y(t)| < N$$

como a continuación se demuestra:

Utilizando la desigualdad: "el valor absoluto de una inte

gral es menor o igual a la integral del valor absoluto del integrando", esto es

$$\left| \int_a^b x(t) dt \right| \leq \int_a^b |x(t)| dt$$

y la identidad

$$|\delta(t)g(t)| = |\delta(t)| |g(t)|$$

de la integral de convolución, se obtiene que

$$|y(t)| \leq \int_0^t |u(t-\tau)| |e^{-\tau}| d\tau$$

y como se supone que $u(t)$ es acotada, es decir que $|u(t)| < M$,

se concluye que

$$|y(t)| \leq \int_0^t M |e^{-\tau}| d\tau = M \int_0^t e^{-\tau} d\tau$$

y notando que

$$\int_0^t |e^{-\tau}| d\tau = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}$$

resulta que

$$|y(t)| \leq M(1 - e^{-t}) \leq M \text{ para } t > 0$$

de modo que, para este ejemplo, cualquier entrada acotada que se aplique al sistema, producirá una salida acotada.

2.1.2 Ejemplo

Considérese ahora el caso en que la función de transferencia del sistema es

$$h(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Aquí podrá demostrarse la existencia de una entrada acotada que produce una salida no acotada. Como la respuesta a impulso es $h(t) = (\sin t) u_{-1}(t)$, al tomar como entrada la función $u(t) = (\cos t) u_{-1}(t)$ se tendrá

$$y(t) = \hat{y}(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 1)} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{2} t \sin t u_{-1}(t)$$

por tanto

$$y(t) = \left\{ \frac{1}{2} t \sin t \right\} u_{-1}(t)$$

Esta función no es acotada pues no existe constante N alguna tal que

$$y(t) < N$$

Haciendo $\epsilon = \delta$, se encuentra que para cualquier $\epsilon > 0$ tal que $|u(t)| < \epsilon$, se garantiza que $|y(t)| < \delta$ para toda t . Así que el sistema en cuestión no es estable. A los sistemas que no son estables se les llama *inestables*.

El sistema por lo tanto es estable.

La condición ii no es redundante porque hay sistemas que aunque cumplen con la condición i no satisfacen la segunda. Un ejemplo se muestra a continuación:

Lógicamente para cualquier entrada $f(t)$ la salida no podrá exceder el valor ϵl y por tanto entradas acotadas producen salidas acotadas, o sea que el sistema satisface la condición i .

Ejemplo.

Considérese un péndulo invertido como el mostrado en la figura 4a que consiste de una masa m sostenida por una barra.

Sin embargo si $f(t) = \epsilon > 0$ donde ϵ es arbitrariamente pequeño se tendrá que para algunos valores de t , $y(t) > l$ y por tanto no se cumple la condición ii .

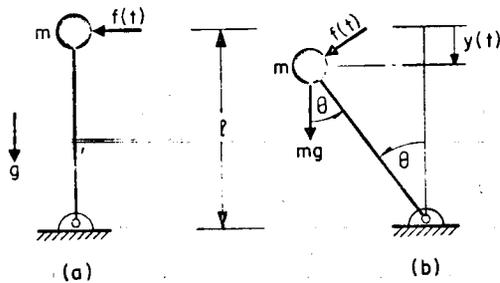


Fig 4. Péndulo invertido

Si se supone que ésta no tiene peso, que no hay fricción y que el péndulo está en un campo gravitacional, entonces cuando se considera a la fuerza $f(t)$ como la entrada y el desplazamiento vertical $y(t)$ como la salida, las ecuaciones que describen el movimiento del sistema son (fig 4b).

$$ml^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = [f(t) + mg \operatorname{sen} \theta] l$$

$$y(t) = l(1 - \cos \theta)$$

A partir de la definición dada no es fácil determinar si un sistema es estable, porque aún para ciertos inestables, existen entradas acotadas a las cuales les corresponden salidas del mismo tipo. Sin embargo cuando el sistema es lineal e invariable la estabilidad del sistema puede caracterizarse completamente con la respuesta a impulso como a continuación se demuestra.

2.2 Estabilidad de sistemas lineales invariantes.

Un sistema lineal e invariable cumple con la condición *i* si y solo si su respuesta a impulso es absolutamente integrable.

Demostración. Primero se probará que si la respuesta a impulso es absolutamente integrable, entonces cualquier entrada acotada produce una salida acotada. Supóngase que $|u(t)| \leq M$ y que $\int_0^t |h(\sigma)| d\sigma < K$ para toda t .

Entonces

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_0^t u(t-\zeta) h(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \int_0^t |u(t-\zeta)| |h(\zeta)| d\zeta \leq M \int_0^t |h(\zeta)| d\zeta < MK, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que la salida es acotada.

La segunda parte de la prueba consiste en demostrar que cuando la respuesta a impulso no es absolutamente integrable, entonces es posible encontrar $|u(t)| \leq 1$ para la cual la salida $y(t)$ exceda en valor absoluto cualquier valor prescrito. Supóngase que dicho valor es N . Debido a la no integrabilidad ab

soluta de la respuesta a impulso, existe un valor del tiempo, digamos t_1 , tal que

$$\int_0^{t_1} |h(\zeta)| d\zeta > N.$$

Ahora se seleccionará una $u(t)$ que en valor absoluto sea igual a la unidad, que haga que $|y(t)| > N$.

Como el sistema es lineal e invariable, la salida está dada por la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t h(t-\zeta) u(\zeta) d\zeta$$

y particularmente para $t = t_1$

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} h(t_1-\zeta) u(\zeta) d\zeta$$

Además, si se escoge $u(\zeta)$ como

$$u(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{cuando } h(t_1-\zeta) > 0 \\ -1 & \text{cuando } h(t_1-\zeta) \leq 0 \end{cases}$$

se tendrá que

$$|y(t_1)| = \int_0^{t_1} |h(t_1-\zeta)| d\zeta = \int_0^{t_1} |h(\sigma)| d\sigma > N$$

por tanto $y(t)$ excede al valor N prescrito.

A continuación se demostrará que

si un sistema lineal e invariable satisface la condición i entonces satisface la condición ii

Demostración. Como el sistema satisface la condición i la respuesta a impulso es absolutamente integrable, o sea que existe un valor K tal que

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < K$$

y como

$$y(t) = \int_0^t h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

se concluye que

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \left[\int_0^t |h(t-\sigma)| d\sigma \right] \max_{0 < \sigma < t} |u(\sigma)| \\ &\leq K \max_{0 < \sigma < t} |u(\sigma)| \end{aligned}$$

Entonces, dado cualquier $\delta > 0$ existe un $\epsilon > 0$ tal que $|u(\sigma)| < \epsilon$ garantiza que $|y(t)| < \delta$. En efecto esto se satisface cuando se hace la selección

$$\epsilon < \frac{\delta}{M}$$

A partir de esta última demostración puede concluirse que

un sistema lineal e invariable es estable en el sentido entrada-salida si y solo si su respuesta a impulso es absolutamente integrable

2.2.1 Ejemplo

Considérese un sistema lineal e invariable cuya respuesta a impulso es

$$h(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0$$

Dicho sistema es estable en el sentido entrada-salida porque la respuesta a impulso es absolutamente integrable:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t |h(\sigma)| d\sigma = \int_0^t |e^{-\sigma} - e^{-2\sigma}| d\sigma \\ &= \int_0^t (e^{-\sigma} - e^{-2\sigma}) d\sigma = -e^{-t} + 0.5e^{-2t} + 0.5 \end{aligned}$$

y $g(t)$ es acotada para $t > 0$.

Debe hacerse énfasis en que aunque la respuesta a impulso de un sistema lineal e invariable tienda a cero cuando t tienda a infinito no es una condición suficiente para garantizar la estabilidad del sistema.

2.2.2 Ejemplo

Considérese un sistema lineal e invariable con el tiempo cuya respuesta a impulso se muestra en la fig 5

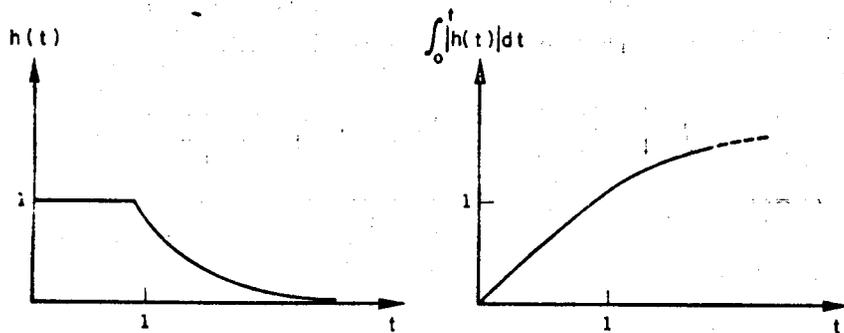


Fig 5 Respuesta a impulso de un sistema lineal e invariable y la integral de su valor absoluto

La integral del valor absoluto de la respuesta a impulso es

$$g(t) = \int_0^t |h(\sigma)| d\sigma = \begin{cases} t & \text{para } t \leq 1 \\ 1 + \log t & \text{para } t > 1 \end{cases}$$

pero como ésta función no es acotada (fig 5), el sistema es inestable.

2.3 Estabilidad de sistemas lineales, invariantes y de parámetros concentrados

Si el sistema en cuestión además de ser lineal e invariable es de parámetros concentrados*, su estabilidad queda determinada por la localización de los polos, porque como fue comentado en el cap 7, la respuesta a impulso de estos sistemas es una combinación lineal de términos de la forma

$$t^k e^{\sigma_i t} \text{sen}(\omega_i t + \phi_i)$$

esto es

$$h(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i-1} A_{ik} t^k e^{\sigma_i t} \text{sen}(\omega_i t + \phi_i)$$

donde los polos del sistema están localizados en

$$\phi_i = \sigma_i + j\omega_i; \quad i=1, \dots, n$$

Y m_i es la multiplicidad del i -ésimo polo.

Entonces para que se cumpla que

$$\int_0^t |h(\sigma)| d\sigma < K$$

para toda t y alguna K es necesario y suficiente que $\sigma_i < 0$ para toda i .

La prueba de suficiencia es simple:

Si $|\sigma_i| < 0$ entonces

$$\int_0^{\infty} |t^k e^{\sigma_i t} \text{sen}(\omega_i t + \phi_i)| dt < \frac{k!}{|\sigma_i|^{k+1}}$$

y por tanto

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i-1} A_{ik} t^k e^{\sigma_i t} \text{sen}(\omega_i t + \phi_i) \right| dt$$

* Debe recordarse que un sistema con estas tres características tiene un número de polos igual o mayor al de ceros.

$$< \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=0}^{m_i-1} |A_{ik}| \int_0^{\infty} t^k e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \phi_i) dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{k=0}^{m_i-1} |A_{ik}| \frac{k!}{|\sigma_i|^{k+1}}$$

Y por tanto la respuesta a impulso es absolutamente integrable.

La prueba de necesidad, en la que se demuestra que si hay al menos un polo con parte real no negativa, entonces el sistema es inestable, es también muy simple, pero no será incluida aquí.

En resumen

un sistema lineal, invariable y de parámetros concentrados es estable si y solo si todos los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa.

2.3.1 Ejemplos

El sistema lineal, invariable y de parámetros concentrados cuya función de transferencia es

$$\frac{(s + 5)(s - 10)}{(s + 3)(s + 4 - 7j)(s + 4 + 7j)}$$

es estable porque las partes reales de los polos (-3, -4 y -4) son negativas.

El sistema cuya función de transferencia es

$$\frac{(s + 7)(s + 4)}{s(s + 3)(s + 7)}$$

es inestable por tener un polo en el origen (su parte real no es negativa).

En los ejemplos anteriores fue sencillo determinar la estabilidad de los sistemas considerados ya que los polinomios característicos (denominadores de las funciones de transferencia) estaban dados en forma factorizada.

Podría entonces pensarse que para establecer la estabilidad de un sistema lineal, invariable y de parámetros concentrados es necesario factorizar el polinomio característico, sin embargo, existen dos argumentos para no hacerlo.

- a) En muchos problemas de control interesa conocer el intervalo de valores que puede tomar un parámetro para el cual el sistema es estable. Si se utilizara la técnica de factorizar el polinomio característico habría que realizar la tediosa tarea de obtener las raíces del polinomio característico para cada valor del parámetro en cuestión.
- b) Existen métodos que serán estudiados en la próxima sección, mediante los cuales se puede determinar el número de raíces de un polinomio que están en el semiplano izquierdo $\text{Re } [s] < 0$.

3. Condición necesaria para la estabilidad

De acuerdo con la sec 2.3, para determinar si un sistema lineal invariable y de parámetros concentrados es estable, es necesario y suficiente establecer que todos los polos de la función de transferencia tengan parte real negativa, pero antes de presentar los criterios por los cuales se determina si esta condición se cumple se hará una observación: Para que todas las raíces de un polinomio de grado n y coeficientes reales tengan parte real negativa, es necesario que los coeficientes de las n primeras potencias de s sean diferentes de cero y del mismo signo.

Este hecho es fácil de verificar. Supóngase que todas las raíces del polinomio en cuestión tienen parte real negativa, entonces, como las raíces complejas aparecen en pares conjugados, $p(s)$ es factorizable en la forma

$$p(s) = p_n \underbrace{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2) \dots (s + \sigma_k + j\omega_k)(s + \sigma_k - j\omega_k) \dots}_{n \text{ factores}}$$

donde $\sigma_k > 0$ para toda k

Al realizar la multiplicación

$$(s + \sigma_k + j\omega_k)(s + \sigma_k - j\omega_k) = (s^2 + 2\sigma_k s + \sigma_k^2 + \omega_k^2)$$

se obtiene un polinomio de segundo orden con coeficientes positivos. De esta forma, al efectuar todos los productos indicados en la factorización de $p(s)$, los coeficientes de s^k se forman mediante sumas y productos de números positivos y por tanto son positivos.

De acuerdo con dicha observación puede concluirse que los polinomios

- a) $s^5 + 7s^4 + s^2 + 3$
 b) $s^2 - 3s + 8$
 c) $s^7 + 5s^6 + 3s^5 + 8s^4 + 18s^3 + 11s^2$

tienen al menos una raíz con parte real no negativa.

El primero porque el coeficiente de s^3 es cero; el segundo por causa de que no todos sus coeficientes son del mismo signo y el último por no tener término independiente.

Sin embargo, el hecho de que un polinomio de grado n cumpla con la condición de que todos sus coeficientes sean distintos de cero y del mismo signo, no implica que todas las raíces del polinomio tengan parte real negativa, como se demuestra en los siguientes ejemplos:

Considérese el polinomio

$$p(s) = s^3 + s^2 + s + 1 = (s + 1)(s^2 + 1) = (s + 1)(s + j)(s - j)$$

Dos de sus raíces tienen parte real igual a cero:

$$s = j, s = -j.$$

El polinomio

$$\begin{aligned} p(s) &= s^3 + s^2 + 11s + 51 = (s + 3)(s^2 - 2s + 17) \\ &= (s + 3)(s - 1 + 4j)(s - 1 - 4j) \end{aligned}$$

tiene dos raíces con parte real positiva:

$$s = 1 + 4j, s = 1 - 4j$$

4. El criterio de Routh

Por medio de éste análisis se puede determinar el número de raíces de un polinomio de orden n que tienen parte real positiva.

4.1 Preliminares

En el criterio de Routh interviene una cadena de polinomios $\delta_n(s), \delta_{n-1}(s), \dots, \delta_0(s)$ de grados $n, n-1, \dots$, respectivamente que se forman como a continuación se explica.

Dado el polinomio $p(s)$ de grado n , se toman dos polinomios: uno par $p_p(s)$, formado por todos los términos de potencias pares de s en $p(s)$, y uno impar $p_i(s)$ integrado por las potencias impares.

Si n es par, se hace $\delta_n(s) = p_p(s)$ y $\delta_{n-1}(s) = p_i(s)$, y en caso contrario $\delta_n(s) = p_i(s)$ y $\delta_{n-1}(s) = p_p(s)$.

A partir de $\delta_n(s)$ y $\delta_{n-1}(s)$ se generan otros $n-1$ polinomios $\delta_{n-2}(s), \delta_{n-3}(s), \dots, \delta_0(s)$ utilizando el algoritmo de Euclides de la manera siguiente:

$\delta_{n-2}(s)$ es igual al residuo que se obtiene de dividir $\delta_n(s)$ entre $\delta_{n-1}(s)$, o sea $\delta_{n-2}(s)$ satisface

$$\delta_n(s) = q_1 \delta_{n-1}(s) + \delta_{n-2}(s)$$

donde q_1 es una constante.

A partir de los últimos polinomios obtenidos $\delta_k(s)$ y

$\delta_{k-1}(s)$, se toma $\delta_{k-2}(s)$, de manera análoga, como el residuo de la división $\delta_k(s) \div \delta_{k-1}(s)$

De la cadena de polinomios

$$\delta_n(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-2} + \dots$$

$$\delta_{n-1}(s) = b_0 s^{n-1} + b_1 s^{n-3} + \dots$$

$$\delta_k(s) = c_0 s^k + c_1 s^{k-2} + \dots +$$

⋮

$$\delta_0(s) = d_0$$

se toma el número de cambios de signos de la sucesión $(a_0, b_0, \dots, c_0, \dots, d_0)$ y el criterio de Routh dice que el número de raíces del polinomio $p(s)$ con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de la sucesión

4.1.1 Ejemplo

Considérese el polinomio

$$p(s) = 4s^3 + 8s^2 + 3s + 9$$

en este caso

$$p_p(s) = 8s^2 + 9$$

$$p_c(s) = 4s^3 + 3s$$

y como el polinomio $p(s)$ es de grado impar, se toma

$$\delta_3(s) = 4s^3 + 3s$$

$$\delta_2(s) = 8s^2 + 9$$

para formar δ_1 , se efectúa la división

$$\frac{\delta_3(s)}{\delta_2(s)} \quad \text{o sea} \quad \frac{4s^3 + 3s}{8s^2 + 9} = \frac{0.5s}{8s^2 + 9} + \frac{-4s^3 - 4.5s}{8s^2 + 9} = \frac{-1.5s}{8s^2 + 9}$$

y el residuo es $-1.5s$, entonces

$$\delta_1(s) = -1.5s$$

por último $\delta_0(s)$ es igual al residuo que se obtiene al dividir $\delta_2(s)$ entre $\delta_1(s)$, o sea

$$\frac{8s^2 + 9}{-1.5s} = \frac{-8s}{1.5} + \frac{9}{-1.5s} = \frac{-8s^2 + 9}{-1.5s}$$

$$\therefore \delta_0(s) = 9$$

De esta forma puede concluirse que $p(s)$ tiene dos raíces con parte real positiva porque en la sucesión

$$(4, 8, -1.5, 9)$$

hay dos cambios de signo, de δ a -1.5 y de -1.5 a 9

Routh sistematizó las operaciones del algoritmo de Euclides, formando un arreglo que lleva su nombre, al notar que los coeficientes del polinomio δ_{k-1} pueden obtenerse de forma sencilla a partir de los coeficientes de δ_{k+1} y δ_k :

Supóngase que

$$\delta_{k+1} = a_0 \delta^{k+1} + a_1 \delta^{k-1} + a_2 \delta^{k-3} + \dots$$

$$\delta_k = b_0 \delta^k + b_1 \delta^{k-2} + \dots$$

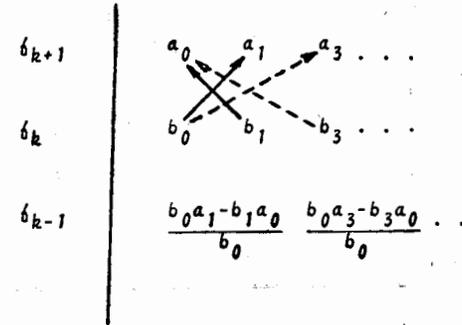
al efectuar la división $\delta_{k+1} \div \delta_k$ se tiene

$$\begin{array}{r} \frac{a_0}{b_0} \delta \\ \hline b_0 \delta^k + b_1 \delta^{k-2} + b_2 \delta^{k-4} + \dots \\ \underline{a_0 \delta^{k+1} + a_1 \delta^{k-1} + a_2 \delta^{k-3} + \dots} \\ -a_0 \delta^{k+1} - \frac{a_0 b_1}{b_0} \delta^{k-1} - \frac{a_0 b_2}{b_0} \delta^{k-3} \dots \\ \hline (a_1 - \frac{a_0 b_1}{b_0}) \delta^{k-1} + (a_2 - \frac{a_0 b_2}{b_0}) \delta^{k-3} + \dots \end{array}$$

Entonces

$$\delta_{k-1}(\delta) = \frac{(b_0 a_1 - a_0 b_1)}{b_0} \delta^{k-1} + \frac{(b_0 a_2 - a_0 b_2)}{b_0} \delta^{k-3} + \dots$$

La obtención de los coeficientes del polinomio δ_{k-1} se puede hacer en forma simplificada colocando en dos renglones los coeficientes de δ_{k+1} y δ_k y efectuando multiplicaciones cruzadas de acuerdo con la regla

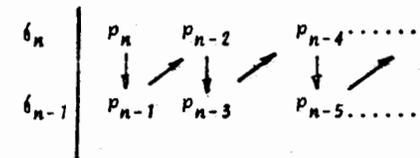


4.2 El arreglo de Routh

Con esta observación se pueden calcular rápidamente todos los polinomios $\delta_i(\delta)$. Para ser más específicos, considérese que el polinomio en cuestión está dado por

$$p(\delta) = p_n \delta^n + p_{n-1} \delta^{n-1} + p_{n-2} \delta^{n-2} + \dots + p_0$$

Los dos primeros renglones del arreglo son



A partir de estos dos se forma un tercero (con $(n-1)/2$

elementos si n es impar y $n/2$ elementos cuando n es par)

$$\delta_{n-2} \left| \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & \dots \end{array} \right.$$

donde los b_i están dados por

$$b_i = \frac{p_{n-1} p_{n-2i} - p_n p_{n-2i-1}}{p_{n-1}}$$

Con los dos últimos renglones obtenidos se procede a calcular el siguiente renglón de la manera indicada:

$$\begin{array}{c|cccc} \delta_k & d_0 & d_1 & d_2 & \dots \\ \delta_{k-1} & e_0 & e_1 & e_2 & \dots \\ \delta_{k-2} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots \end{array}$$

y los x_i están dados por

$$x_i = \frac{e_0 d_{i+1} - d_0 e_{i+1}}{e_0}$$

El proceso termina cuando se han obtenido $n+1$ renglones.

El criterio de Routh dice que el número de raíces con parte real positiva del polinomio $p(s)$ es igual al número de cambios de signo que hay en la primera columna del arreglo descrito.

De lo anterior se deduce que cuando todos los elementos de la primera columna son del mismo signo, se cuenta con un polinomio en el cual todas las raíces tienen parte real negativa.

4.2.1 Ejemplos

a) Considérese el polinomio

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + 4$$

El arreglo de Routh en este caso es

$$\begin{array}{c|ccc} \delta_5 & 1 & 3 & 3 \\ \delta_4 & 2 & 2 & 4 \\ \delta_3 & 2 & 1 & 0 \\ \delta_2 & 1 & 4 & \\ \text{cambio de signo} \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_0 \end{array} \right. & -7 & 0 & \\ \delta_0 & 4 & & \end{array}$$

Puede asegurarse que el polinomio $p(s)$ tiene dos raíces con parte real positiva debido a que hay dos cambios de signo (de +1 a -7 y de -7 a +4)

b) El polinomio

$$p(s) = s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3$$

tiene todas sus raíces con parte real negativa, pues en la primera columna del arreglo de Routh que se presenta a continuación

los elementos son positivos:

δ_4	1	8	3
δ_3	2	4	0
δ_2	6	3	
δ_1	3	0	
δ_0	3		

4.3 Casos singulares

Comunmente la diferencia de grado de dos polinomios consecutivos en la cadena $(\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_0)$ es la unidad, en cuyo caso es posible obtener el arreglo completo de Routh siguiendo la regla de la sección anterior.

Hay sin embargo dos situaciones llamadas singulares.

Caso 1

La diferencia entre el grado de δ_k y δ_{k-1} es mayor que la unidad y $\delta_{k-1}(\delta) \neq 0$

Caso 2

$$\delta_{k-1}(\delta) = 0$$

en los cuales no es posible continuar con el arreglo de Routh más allá del renglón correspondiente a δ_{k-1} , porque para obtener el siguiente habría que efectuar una división entre cero.

4.3.1 Ejemplo (caso singular 1)

Considérese el polinomio

$$p(\delta) = \delta^4 + \delta^3 + 4\delta^2 + 4\delta + 6$$

Los primeros tres renglones del arreglo de Routh son

δ_4	1	4	6
δ_3	1	4	
δ_2	0	6	
δ_1	?		

y no se podría calcular el cuarto porque implicaría una división entre cero.

4.3.2 Ejemplo (caso singular 2)

Tómese por caso el polinomio

$$p(\delta) = \delta^6 + 8\delta^5 + 8\delta^4 + 24\delta^3 + 16\delta^2 + 8\delta + 5$$

Los cuatro primeros renglones del arreglo de Routh son

δ_6	1	8	16	5
δ_5	8	24	8	
δ_4	5	15	5	
δ_3	0	0		
δ_2	?			

No sería posible continuar con los cálculos de los coeficientes de b_2 , por implicar una división entre cero.

Para cada uno de los casos singulares Routh dio una solución.

4.3.3 Solución del caso singular 1

En el primer caso singular se reemplaza el cero que aparece en la primera columna por un número ϵ arbitrariamente pequeño. Se continúa el proceso de cálculo de los renglones restantes, cuyos elementos serán funciones racionales de ϵ y a continuación se examina el número de cambios de signo de la primera columna del arreglo en función de ϵ .

Considérese nuevamente el ejemplo 4.3.1 si se reemplaza 0 por ϵ el arreglo completo es:

b_4	1	4	6
b_3	1	4	
b_2	ϵ	6	
b_1	$4 - 6/\epsilon$		
b_0	6		

cuando ϵ es suficientemente pequeño se tiene la sucesión $(1, 1, \epsilon, -6/\epsilon, 6)$, si $\epsilon > 0$ se presentan dos cambios de signo en ella: de ϵ a $-6/\epsilon$ y de $-6/\epsilon$ a 6. Por tanto, se concluye que hay dos

raíces con parte real positiva. Si $\epsilon < 0$ también se tendrán dos cambios de signo, de 1 a ϵ y de ϵ a $-6/\epsilon$, por lo que el polinomio $p(s)$ tiene dos raíces con parte real positiva.

La razón del procedimiento sugerido por Routh para tratar el primer caso singular se basa en la propiedad de que la localización de las raíces de un polinomio varía de manera continua con respecto a los coeficientes del mismo. El cambiar el cero obtenido en la primera columna por un número pequeño ϵ , equivale a cambiar uno o más de los coeficientes del polinomio original por una cantidad del mismo orden. En particular, para el ejemplo dado equivale a cambiar el polinomio,

$$p(s) = s^4 + s^3 + 4s^2 + 4s + 6$$

por el polinomio

$$p(s) = s^4 + s^3 + (4+\epsilon)s^2 + 4s + 6$$

4.3.4 Solución del caso singular 2

El segundo caso, o sea, cuando en el arreglo de Routh se tiene un renglón de ceros, ocurre cuando $p(s)$ tiene un factor del tipo

$$s^k (s^{2m} + a_2 s^{2(m-1)} + a_4 s^{2(m-2)} + \dots + a_{2m})$$

lo cual puede verse al examinar detalladamente la obtención de la cadena de polinomios: b_n, b_{n-1}, \dots, b_k porque como estos satisfacen las ecuaciones

$$\delta_n(s) = q_1 s \delta_{n-1}(s) + \delta_{n-2}(s)$$

$$\delta_{n-1}(s) = q_2 s \delta_{n-2}(s) + \delta_{n-3}(s)$$

$$\vdots$$

$$\delta_{k+2}(s) = q_{n-1-k} s \delta_{k+1}(s) + \delta_k(s)$$

$$\frac{d\delta_4(s)}{ds} = \frac{d}{ds} (5s^4 + 15s^2 + 5)$$

$$= 20s^3 + 30s$$

o sea que arreglo completo queda:

y si $\delta_k(s) = 0$, entonces de acuerdo con el algoritmo de Euclides, se puede concluir que $\delta_{k+1}(s)$ es factor común de $\delta_n(s)$ y $\delta_{n-1}(s)$ y como

$$p(s) = \delta_n(s) + \delta_{n-1}(s)$$

éste es divisible por $\delta_{k+1}(s)$

Routh demostró que si se continúa el arreglo reemplazando el renglón de ceros correspondiente a $\delta_k(s)$ por el renglón formado a partir de los coeficientes del polinomio

$$\frac{d\delta_{k+1}(s)}{ds}$$

el número de cambios de signo de la primera columna corresponde al de las raíces de $p(s)$ con parte real positiva. En el ejemplo 4.3.2, los números que deben colocarse en el renglón correspondiente a $\delta_3(s)$ serían los del polinomio

δ_6	1	8	16	5
δ_5	8	24	8	
δ_4	5	15	5	
δ_3	20	30		
δ_2	15/2	5		
δ_1	50/3			
δ_0	5			

y se concluye que por no haber cambios de signo en la primera columna, ninguna raíz de

$$p(s) = s^6 + 8s^5 + 8s^4 + 24s^3 + 16s^2 + 8s + 5$$

tiene parte real positiva.

5. Utilización del criterio de Routh en el diseño.

Se presentan dos ejemplos en los cuales se utiliza el criterio de Routh para determinar el intervalo de valores de un parámetro que hacen estable un sistema

5.1 Ejemplo a) Servomecanismo eléctrico

Considérese el sistema posicionador de válvula (fig 6) presentado en el capítulo 7, sec 2.

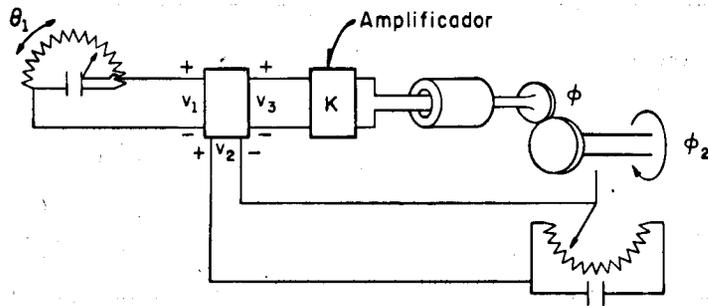


Fig. 6 Servomecanismo eléctrico

Supóngase ahora que el amplificador tiene una ganancia K . El reograma que describe las relaciones entre las variables es el de la fig 7.

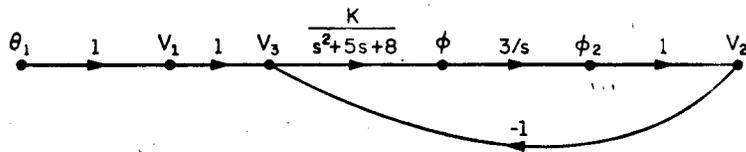


Fig 7 Reograma del posicionador

Simplificando el reograma mediante la fórmula de Mason, la función de transferencia $H(s)$ es

$$\frac{\phi_2(s)}{\theta_1(s)} = H(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \quad \text{en donde } G(s) = \frac{3}{s(s^2+5s+8)}$$

Como se recordará, en el cap 7 se indicaba que el coeficiente de error a escalón es

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3K}{s(s^2+5s+8)} = \infty$$

y el coeficiente de error a rampa:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot 3K}{s(s^2+5s+8)} = 3K/8$$

por tanto, al aumentar K se incrementará K_v , con lo cual mejora el comportamiento asintótico del sistema. Además como se enfatizó en el cap. 1, es conveniente incrementar la ganancia de malla para disminuir, entre otros, los efectos que puedan tener las no linealidades de la planta.

Sin embargo, para valores de K muy grandes, el sistema puede ser inestable. En este ejemplo se determinará la relación entre los valores de K y la estabilidad del sistema.

Como la función de transferencia del sistema es

$$H(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{3K}{s^3 + 5s^2 + 8s + 3K}$$

el polinomio característico es $s^3 + 5s^2 + 8s + 3K$. Si éste tiene una o más raíces con parte real no negativa, implicará que el sistema es inestable.

Para aplicar el criterio de Routh al polinomio característico, primero se obtiene el arreglo.

s_3	1	8
s_2	5	3K
s_1	$8 - \frac{3K}{5}$	0
s_0	3K	

y de allí las siguientes consideraciones:

Cuando $K < 0$, los primeros tres elementos de la columna inicial del arreglo son positivos, mientras que el último es negativo; por lo que habrá un cambio de signo y el sistema tendrá un polo en el semiplano derecho (parte real positiva). Para $0 < K < 40/3$, todos los términos de la primera columna son positivos; por tanto, al no haber cambios de signo, el sistema es estable.

Para $K > 40/3$, el primer término del renglón correspondiente a s_1 es negativo, y hay dos cambios de signo: uno entre 5 y $8 - \frac{3K}{5}$ y

otro entre $8 - \frac{3K}{5}$ y 3K.

En este caso, dos polos están localizados en el semiplano derecho y el sistema es inestable.

Para $K = 0$, se tiene que $\delta_0(s) = 0$, lo que significa que el polinomio característico incluye a s como factor, o sea que existe una raíz en el origen y el sistema es inestable.

Para $K = \frac{40}{3}$, $\delta_1(s) = 0$, y como el renglón correspondiente a $\delta_2(s)$ es:

s_2	5	40
-------	---	----

el polinomio característico tiene como factor a $5s^2 + 40$, o lo que es lo mismo, a $s^2 + 8$. En efecto, $s^3 + 5s^2 + 8s + 40 = (s^2 + 8)(s + 5)$; entonces se tienen dos raíces sobre el eje imaginario.

La siguiente tabla resume los resultados anteriores.

Valor de K	Posición de polos	Estabilidad
$K < 0$	dos en el semiplano izq. uno en el derecho	inestable
$K = 0$	dos en el semiplano izq. uno en el origen	inestable
$0 < K < 40/3$	tres en el semiplano izq.	estable
$K = 40/3$	uno en semiplano izq. dos polos complejos en $\pm j\sqrt{8}$	inestable
$K > 40/3$	uno en el semiplano izq. dos en el derecho	inestable

Por tanto, para que el sistema sea estable, K deberá estar en el intervalo $0 < K < 40/3$, por lo que el máximo coeficiente de error a rampa posible será $K_{v\text{máx}} = 3K/8 < 5$

Sin embargo, es aconsejable no usar valores de K cercanos a $40/3$, pues podría presentarse entonces un comportamiento inadecuado del sistema (sobrepaso excesivo, tiempo de asentamiento muy grande, etc).

Ejemplo b) Servomecanismo hidráulico

La fig 8 presenta un bosquejo de un servomecanismo hidráulico de posición. Por medio de este sistema se pretende que una masa, M , siga fielmente los desplazamientos horizontales que se apliquen a un punto de una palanca.

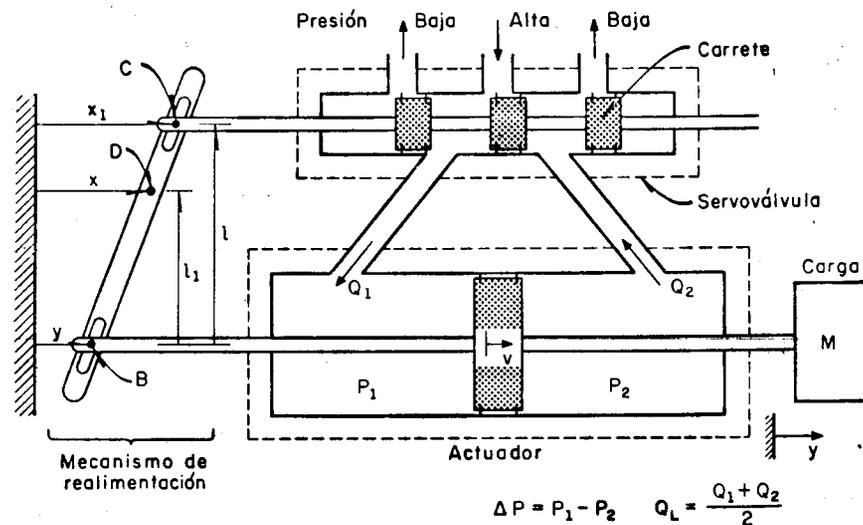


Fig 8 Servomecanismo hidráulico

El sistema consta esencialmente de cuatro partes: una servoválvula, un actuador, una carga y un sistema mecánico de realimentación. Su funcionamiento consiste en lo siguiente:

Cuando el punto D se cambia de posición (se desplaza horizontalmente una distancia x), la palanca gira instantáneamente con respecto a B y el punto C se desplaza haciendo que los carretes de la servoválvula se muevan hacia la derecha. Esto permite que un líquido (generalmente aceite) fluya hacia la cámara izquierda del actuador. Al producirse una diferencia de presión entre las dos cámaras, el émbolo del actuador se mueve, resultando un desplazamiento de la masa. Simultáneamente a este movimiento, el punto B se desplaza y la palanca gira con respecto a D . De esta forma, C se desplaza hacia la izquierda volviendo los carretes de la servoválvula a la posición original.

Se desea examinar en este ejemplo la estabilidad del sistema para diferentes localizaciones verticales del punto D más específicamente, los valores de l_1 para los cuales el sistema es estable.

Antes de realizar el análisis matemático correspondiente debe observarse que si $l = l_1$, el sistema será inestable porque en este caso los puntos D y C coinciden, y la servoválvula permanentemente estará abierta haciendo que la masa se desplace continuamente.

Cuando l , es muy pequeño, el sistema también es inestable, porque al producirse un pequeño desplazamiento de D , la servoválvula se abre demasiado, lo que hace que la masa adquiera gran velocidad; al desplazarse esta una pequeña cantidad, la servoválvula cambia de posición y el fluido hace que la masa adquiera una velocidad en el sentido opuesto y el ciclo se repite, produciendo así oscilaciones de amplitud cada vez mayores.

Las relaciones matemáticas entre las variables que intervienen en el sistema son:

Si Q_L representa el gasto medio que fluye por la servoválvula, x_1 , el desplazamiento de los carretes con respecto a su posición central, y ΔP , la diferencia de presión entre las cámaras del actuador. La versión linealizada de la relación entre estas variables es:

$$Q_L = k_1 x_1 - k_2 \Delta P$$

Si $v(t)$ representa la velocidad con que se mueve el émbolo del actuador, entonces

$$\frac{d\Delta P}{dt} = k_3 Q_L - k_4 v$$

Si A es el área del émbolo, la fuerza aplicada a él debida a la diferencia de presión de aceite entre las dos cámaras es

$$F = A\Delta P$$

Además si $y(t)$ es la posición de la masa, entonces

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

La relación entre la fuerza aplicada al pistón y la velocidad de la masa es

$$\frac{Mdv}{dt} = F$$

En cuanto al sistema mecánico de realimentación, si la distancia vertical entre los puntos B y C es l , y entre los puntos B y D es l_1 . La relación geométrica es similar a la fig 9

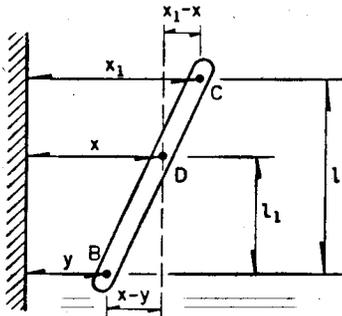


Fig 9 Relación entre las variables de posición del mecanismo de realimentación

por triángulos semejantes se deduce que

$$\frac{x-y}{l_1} = \frac{x_1-x}{l-l_1}$$

$$\therefore x_1 = \frac{l-l_1}{l_1} (x-y) + x = (1 - l/l_1) y + \frac{l}{l_1} x$$

De las ecuaciones anteriores se puede construir un reograma en el que se presenta la relación entre todas las variables (fig 10)

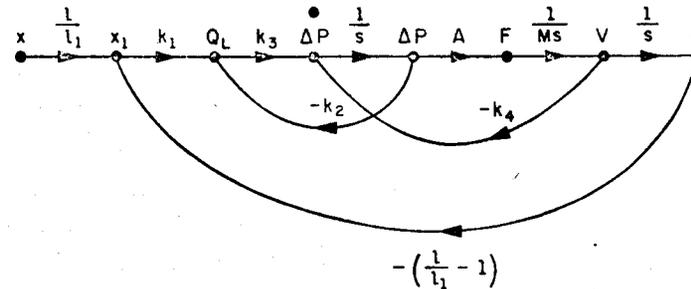


Fig 10 Reograma que representa las relaciones entre las variables del sistema.

La función de transferencia $\frac{y(s)}{x(s)}$ se obtiene del reograma utilizando la regla de Mason y es

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\left(\frac{l}{l_1}\right) \frac{(k_1 k_3 A)}{M} \left(\frac{1}{s^3}\right)}{1 - \left(1 - \frac{l}{l_1}\right) \frac{(k_1 k_3 A)}{M} \left(\frac{1}{s^3}\right) + \frac{k_2 k_3}{\delta} + \frac{k_4 A}{M} \left(\frac{1}{s^2}\right)}$$

$$\frac{\left(\frac{L}{L_1}\right) \frac{(k_1 k_3 A)}{M} \left(\frac{1}{s}\right)}{s^3 + k_2 k_3 s^2 + \frac{k_4 A}{M} s + \left(\frac{L}{L_1} - 1\right) \frac{(k_1 k_3 A)}{M}}$$

Antes de continuar con el ejemplo, por facilidad de exposición se supondrán los siguientes valores numéricos

$$\frac{k_1 k_3 A}{M} = 10$$

$$\frac{k_4 A}{M} = 5$$

$$k_2 k_3 = 1$$

$$L = 1$$

Así que la función de transferencia del sistema queda

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\frac{10}{L_1}}{s^3 + s^2 + 5s + 10 \frac{1}{L_1} - 1}$$

El arreglo de Routh para el polinomio característico es

s_3	1	5	
s_2	-1	$10\left(\frac{1}{L_1} - 1\right)$	
s_1	15	$-10\left(\frac{1}{L_1}\right)$	
s_0	$\frac{10}{L_1}$		

Para que el sistema sea estable es necesario que no haya cambios de signo en la primera columna, lo cual implica dos desigualdades:

$$15 - 10\left(\frac{1}{L_1}\right) > 0$$

$$\frac{10}{L_1} - 10 > 0$$

que al resolverlas se obtiene

$$\frac{2}{3} < L_1 < 1$$

Cuando $L_1 > 1$ se tiene un solo cambio de signo en la primera columna del arreglo, por tanto, la función de transferencia cuenta con un polo en el lado derecho del plano complejo. Si $0 < L_1 < 2/3$ hay dos cambios de signo en el arreglo, por lo que se concluye que existen dos raíces con parte real positiva. Finalmente cuando $L_1 = 2/3$, el polinomio $\delta_1(s)$ es cero y el característico presenta como factor $s^2 + 5$, o sea que tiene dos raíces imaginarias, en $\pm j\sqrt{5}$; cuando $L_1 = 1$, $\delta_0(s) = 0$, resultando que la función de transferencia tiene un polo en el origen.

En la fig 11 se presenta la respuesta del sistema para los valores de $L_1 = .5, .7, .8, .9, 1$ cuando la entrada es un escalón.

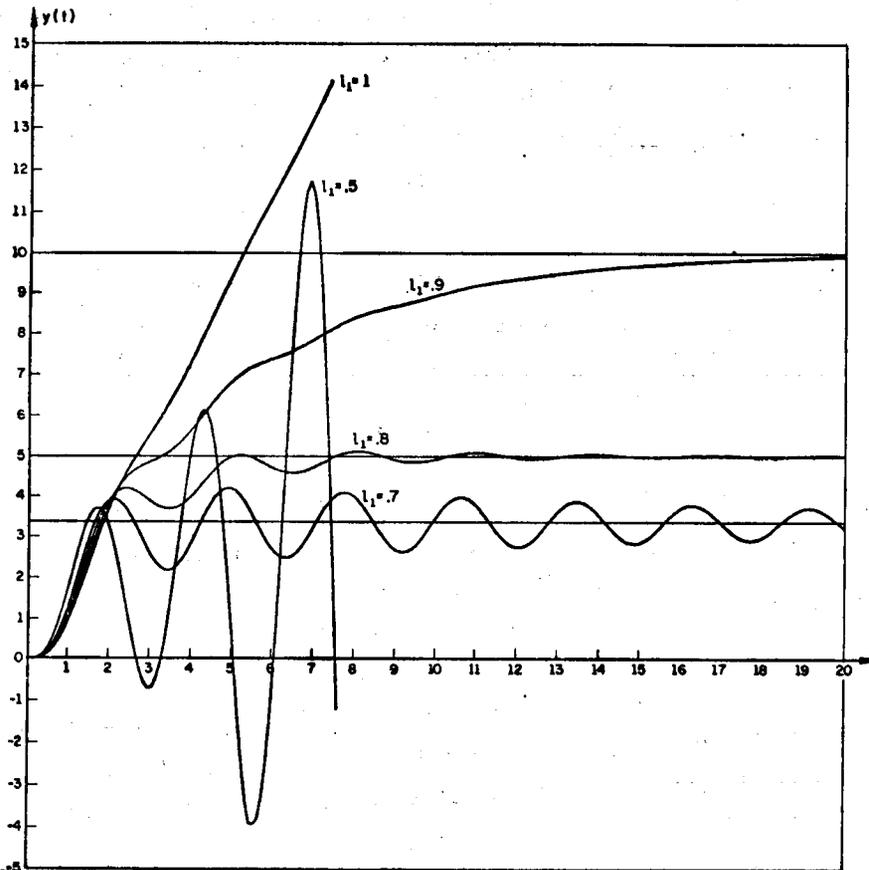


Fig 11. Respuesta a escalón del servomecanismo hidráulico para diferentes valores de l_1 .

CAPITULO 9

LUGAR GEOMETRICO DE LAS

RAICES

de Routh. Sin embargo, a pesar de ser la estabilidad una condición que deben satisfacer los sistemas de control, en la mayoría de los casos, deben cumplirse otras especificaciones. Estas pueden ser de varios tipos; por ejemplo, que el sobrepaso a una entrada a escalón, no exceda un valor prefijado, que el error cuadrático a una entrada determinada sea mínimo o que algún parámetro del sistema (como puede ser la localización de algún polo) esté dentro de cierto intervalo de valores. El criterio de Routh da información solamente acerca de la estabilidad del sistema, sin suministrarla sobre el comportamiento mismo ni señalar formas para mejorarlo.

1. INTRODUCCION

Al final del capítulo anterior se ilustró la aplicación del método de Routh para determinar la estabilidad de dos sistemas; en el primero, un posicionador de válvula, el parámetro por modificar era la ganancia k de un amplificador. El sistema era estable para valores pequeños de k ; al aumentar el valor de ésta, mejoraba la constante de velocidad del sistema (y por tanto su comportamiento asintótico) sin embargo, al rebasar la ganancia el valor $k = 40/3$ el sistema dejaba de ser estable. En el segundo caso se examinó la estabilidad de un servomecanismo hidráulico, según se variaba el brazo l_1 de la palanca de realimentación.

La estabilidad de ambos sistemas se determinó por el método

En este capítulo se considerarán dos temas:

- i) ¿Cómo se modifica el comportamiento de un sistema bajo diferentes realimentaciones?
- ii) ¿Cómo seleccionar subsistemas cuya introducción mejore el comportamiento del sistema realimentado?

Se estudiarán solamente sistemas de parámetros concentrados, los que pueden ser modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Para ellos, la función de transferencia (y por tanto toda la información necesaria para describir el sistema desde el punto de vista de entrada-salida) puede ser representada mediante un patrón de polos y ceros. En consecuencia, si se desea conocer el comportamiento de un sistema de control bajo diferentes condiciones de diseño, es necesario saber cómo se modificará este patrón de polos y ceros.

En el siguiente ejemplo se ilustra la manera como varía un patrón de polos y ceros cuando se modifica un parámetro de la realimentación.

Ejemplo 1

Para elevar la temperatura de un líquido es común usar un intercambiador de calor. Este dispositivo tiene un arreglo similar al mostrado en la fig 1.

Válvula de control de gasto

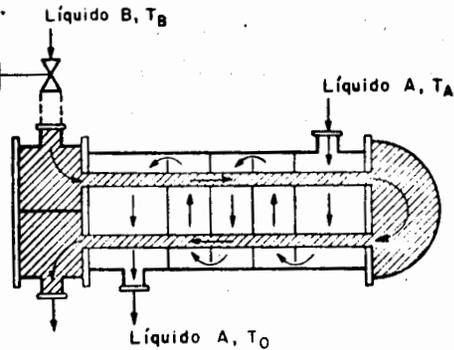


Fig 1 Esquema de un intercambiador de calor

El líquido A entra con una temperatura T_A al intercambiador y el líquido B, llamado de servicio entra a una temperatura constante T_B . Si $T_B > T_A$, la temperatura del líquido A a la salida (T_0) será mayor que T_A debido a que el líquido de servicio le cede calor a través de las paredes de los tubos del intercambiador. Para mantener la temperatura T_0 constante a pesar de las variaciones que T_A pueda tener, se modifica mediante una válvula el gasto Q de líquido de servicio. Esta operación puede llevarse a cabo de manera automática usando el sistema de realimentación que se muestra en la fig 2.

El sistema de realimentación consiste en lo siguiente: T_0 se mide con un termopar, dispositivo que produce un voltaje V_T pro-

porcional a T_0 . Este voltaje se compara con otro de referencia V_r . La diferencia de voltajes $\Delta V = V_r - V_T$ se aplica a un amplificador electrónico de ganancia k , la que será el único parámetro libre para diseño. El voltaje a la salida del amplificador $V_a = k \Delta V$ energiza el actuador de la válvula, la que al abrirse o cerrarse regula el calor transmitido de un líquido a otro.

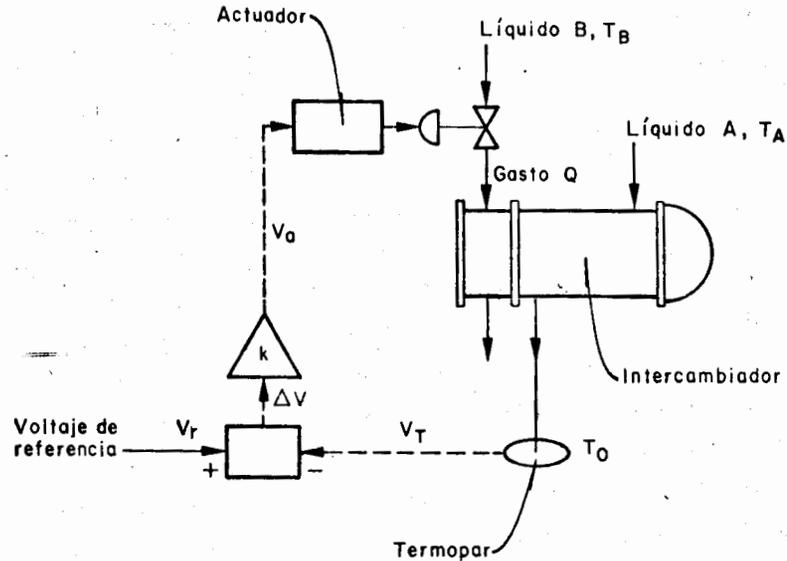


Fig 2 Sistema de control de temperatura

en un intercambiador de calor

La respuesta del termopar a un cambio en la temperatura T_0 requiere algún tiempo, lo que implica un cierto retraso, y su función de transferencia es

$$\frac{\hat{V}_T(s)}{\hat{T}_0(s)} = \frac{1}{1+s}$$

Se sabe además que los modelos linealizados del intercambiador de calor y del conjunto actuador-válvula tienen las si-

quientes funciones de transferencia:

$$\frac{\hat{T}_0(s)}{\hat{Q}(s)} = \frac{1}{(1+3s)}$$

$$\frac{\hat{Q}(s)}{\hat{V}_a(s)} = 3$$

El reograma del sistema de la fig 2 se muestra en la fig 3

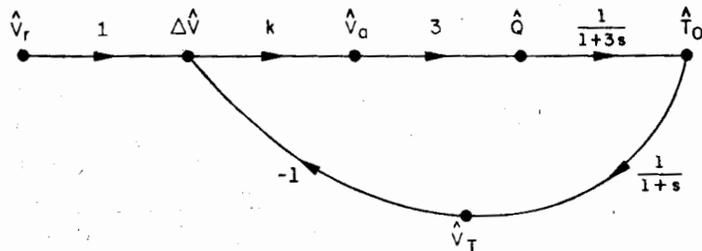


Fig 3 Reograma del sistema de control

Utilizando la fórmula de Mason, la función de transferencia es:

$$\hat{H}(s) = \frac{T_0(s)}{V_h(s)} = \frac{\frac{3k}{1+3s}}{1 + \frac{3k}{(1+3s)+1+s}} = \frac{k(1+s)}{s^2 + \frac{4}{3}s + k + \frac{1}{3}} \quad (1)$$

Como se ha dicho, el parámetro de diseño es la ganancia k del amplificador, y se desea conocer el comportamiento de $\hat{H}(s)$ para diferentes valores del mismo. En la ec 1 se observa que el único cero de $\hat{H}(s)$, situado en $s = -1$, no depende de la ganancia, mientras que la localización de los dos polos del denominador está determinada por el valor de k . El polinomio del denominador es $s^2 + \frac{4}{3}s + k + \frac{1}{3} = (s-p_1)(s-p_2)$, donde p_1 y p_2 son los polos del sistema y están dados por

$$p_1 = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{1-9k}}{3} \quad p_2 = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{1-9k}}{3} \quad \text{para } k \leq \frac{1}{9}$$

$$p_1 = -\frac{2}{3} + j \frac{\sqrt{9k-1}}{3} \quad p_2 = -\frac{2}{3} - j \frac{\sqrt{9k-1}}{3} \quad \text{para } k > \frac{1}{9}$$

La fig 4 muestra la localización de los polos y de los ceros de $\hat{H}(s)$ para diversos valores del parámetro de diseño k

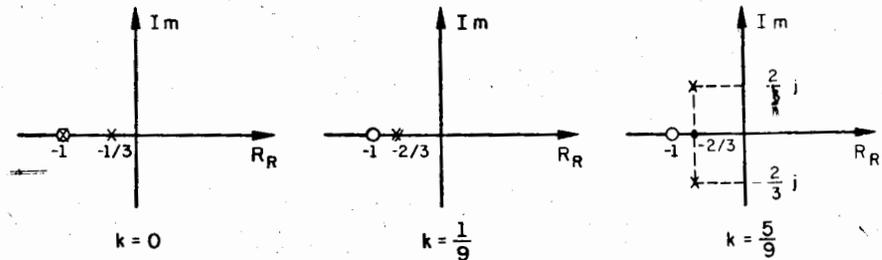


Fig 4 Patrón de polos y ceros de $H(s)$ para diversos valores de k

Encontrado el patrón de polos y ceros de $\hat{H}(s)$ en función de k , puede conocerse la respuesta en el tiempo a diversos tipos de entrada por métodos diversos, como el de fracciones parciales.

Para obtener, el comportamiento de un sistema realimentado, al variar un parámetro de diseño k , se llegó a una ecuación del tipo

$$p(s) + k q(s) = 0 \quad (2)$$

cuyas raíces deben extraerse para toda k .

En el caso anterior en que $p(s) = s^2 + \frac{4}{3}s + \frac{1}{3}$, $q(s) = 1$, fué posible obtener las raíces en forma explícita. Desafortunadamente no es posible resolver el problema analíticamente en el caso general y por ello es necesario recurrir a métodos aproximados. Uno de ellos, llamado "lugar geométrico de las raíces" será el tema de las siguientes secciones.

Este método tiene dos ventajas:

- 1) Proporciona sin muchas operaciones, el patrón de polos y ceros del sistema para cualquier valor de k
- 2) Permite determinar la sensibilidad del sistema y variaciones en el parámetro de diseño.

1. LUGAR GEOMETRICO DE LAS RAICES.

Definición

En esta sección se planteará formalmente el problema de encontrar las raíces de

$$p(s) + kq(s) = 0 \quad (3)$$

conforme k varía.

Por ejemplo, si se deseara encontrar las raíces de

$$s^4 + (k+1)s^3 + 20s^2 + ks + 20k + 2 = 0$$

en función de k , la expresión anterior se factoriza en la forma de la ec 2, como

$$(s^4 + s^3 + 20s^2 + 2) + k(s^3 + s + 20)$$

El problema de encontrar los valores de s que satisfacen la ec 2 puede plantearse de otra forma; al dividir los términos de esta ecuación entre $p(s)$ resulta

$$1 + kG(s) = 0 \quad (4)$$

donde $G(s) = q(s)/p(s)$

La ec 3 tiene exactamente las mismas raíces que la ec 2 y aparece en el problema de determinar los polos del sistema realimentado de la fig 5.

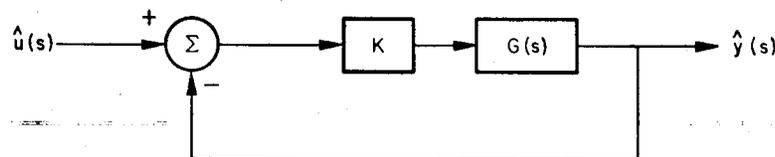


Fig 5 Diagrama de bloque de un sistema

En efecto, como la función de transferencia del sistema es

$$\hat{H}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$$

Si $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ entonces

$$H(s) = \frac{\frac{kq(s)}{p(s)}}{1 + \frac{kq(s)}{p(s)}}$$

Después de multiplicar numerador y denominador por $p(s)$, se obtiene

$$H(s) = \frac{kq(s)}{p(s) + kq(s)}$$

De donde se puede concluir que

- i) Los ceros de $H(s)$ y los de $G(s)$ coinciden, por ser ambos las raíces de $q(s) = 0$
- ii) Los polos de $H(s)$ son las raíces de $p(s) + kq(s) = 0$ o sea las de $1 + kG(s)$

Para que un número complejo, $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$, sea una raíz de $1 + kG(s) = 0$, es necesario que tanto la parte real como la imaginaria de esta ecuación sean iguales a cero, lo cual implica que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{kG(s_0)\} = -1 & \quad \text{o} \quad \operatorname{Re}\{G(s_0)\} = \frac{-1}{k} \\ \operatorname{Im}\{kG(s_0)\} = 0 & \quad \text{o} \quad \operatorname{Im}\{G(s_0)\} = 0 \end{aligned}$$

De allí la utilidad de la siguiente definición: el lugar geométrico de las raíces (o por brevedad lugar geométrico) de $G(s)$ es el conjunto de todos los puntos s_0 en el plano complejo tales que

$$\operatorname{Im}\{G(s_0)\} = 0$$

Si la parte real de $-G(s_0)$ es positiva; entonces el lugar geométrico correspondiente se denomina positivo, y cuando se tiene la situación contraria, negativo.

Cuando $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$, de la definición anterior, se tiene que si s_0 pertenece al lugar geométrico positivo (abreviado $l g p$) de $G(s)$, entonces será una raíz de

$$p(s) + kq(s) = 0$$

para algún valor positivo de k . En efecto si

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\{G(s_0)\} &= 0 \\ \operatorname{Re}\{G(s_0)\} &= \alpha < 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} p(s_0) + kq(s_0) &= p(s_0) \left[1 + k \frac{q(s_0)}{p(s_0)} \right] \\ &= p(s_0) \left[1 + k \{ \operatorname{Re}G(s_0) + j\operatorname{Im}G(s_0) \} \right] \\ &= p(s_0) [1 + k\alpha] \end{aligned}$$

Si se hace $k = \frac{-1}{\alpha} > 0$, se tendrá el resultado deseado.

De manera similar puede demostrarse que si s_0 pertenece al lugar geométrico negativo (abreviado como $l g n$) existe un valor negativo de k para el cual

$$p(s_0) + kq(s_0) = 0$$

A continuación se ilustrará la definición mediante dos

ejemplos:

Ejemplo I.

Se desea saber el lugar geométrico cuando la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{1}{(s-p_0)^m}$$

donde p_0 es real, y m un entero positivo.

La ec 2 es en este caso

$$1 + k(s-p_0)^m = 0$$

Despejando s de la ecuación inmediatamente anterior se obtiene

$$\Delta = p_0 + \left[-\frac{1}{k} \right]^{1/m}$$

Ahora bien, si $k > 0$, entonces

$$-\frac{1}{k} = \left| \frac{1}{k} \right| e^{-j(2\ell+1)\pi} \text{ para } \ell = 0, 1, 2, \dots *$$

o sea que

$$\left[-\frac{1}{k} \right]^{1/m} = \sqrt[m]{\left| \frac{1}{k} \right|} e^{-j(2\ell+1)\frac{\pi}{m}} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

De esta forma el lugar geométrico positivo estará dado por to dos los puntos

$$\Delta_0 = p_0 + \sqrt[m]{\left| \frac{1}{k} \right|} e^{-\frac{j(2\ell+1)\pi}{m}} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

y similarmente el l g n estará dado por los puntos que satis facen

$$\Delta_0 = p_0 + \sqrt[m]{\left| \frac{1}{k} \right|} e^{-\frac{j(2\ell)\pi}{m}} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

En la fig 6 se ilustran los lugares geométricos para $m = 1, 2$ y 3

Los lugares geométricos de $G(s) = (s - z_0)^m$ tienen la mis ma forma, que los anteriores, cambiando únicamente $\sqrt[m]{\left| \frac{1}{k} \right|}$ por $\sqrt[m]{k}$

*Recuérdese que $e^{-2\pi j\ell} = 1, \quad \ell = 0, 1, \dots$

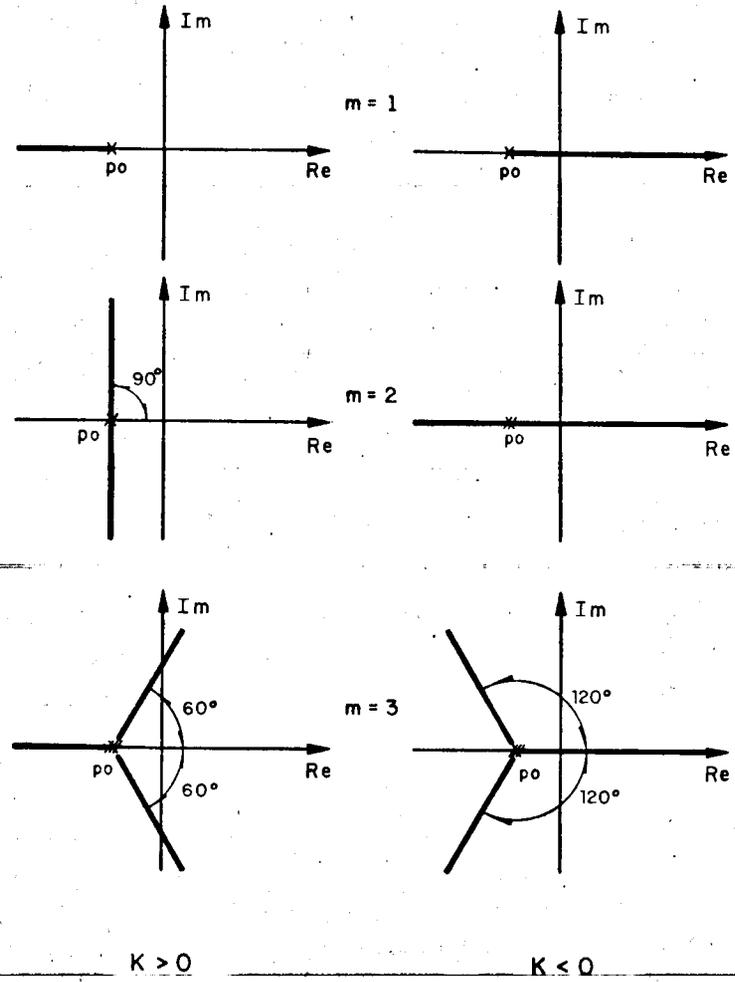


Fig 6 Lugares geométricos de

$$G(s) = \frac{1}{(s - p_0)^m}$$

Ejemplo 2

Encontrar el lugar geométrico de

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

Sustituyendo $s = \sigma + j\omega$

$$G(s) = \frac{\sigma+1+j\omega}{(\sigma+j\omega)^2} = \frac{\sigma+1+j\omega}{\sigma^2-\omega^2+2j\sigma\omega} = \frac{(\sigma+1)(\sigma^2-\omega^2)+2\omega^2\sigma+j\omega(\sigma^2-\omega^2-2\sigma(\sigma+1))}{(\sigma^2-\omega^2)^2+4\omega^2\sigma^2}$$

y separando las partes real e imaginaria se obtiene

$$\text{Re}[G(s)] = \frac{(\sigma+1)(\sigma^2-\omega^2)+2\omega^2\sigma}{(\sigma^2-\omega^2)^2+4\omega^2\sigma^2}$$

$$\text{Im}[G(s)] = \frac{\omega[\sigma^2-\omega^2-2\sigma(\sigma+1)]}{(\sigma^2-\omega^2)^2+4\omega^2\sigma^2}$$

El lugar geométrico de $G(s)$ está formado por aquellos puntos $(\sigma+j\omega)$ en el plano complejo que satisfacen

$$\text{Im}\{G(s)\} = 0, \text{ o sea } \omega[\sigma^2-\omega^2-2\sigma(\sigma+1)] = 0$$

cuyas soluciones son

$$\omega = 0 \text{ (esto es, el eje real),}$$

y

$$\sigma^2 - \omega^2 - 2\sigma^2 - 2\sigma = 0 \Rightarrow$$

Esta última ecuación puede escribirse como

$$(\sigma+1)^2 + \omega^2 = 1$$

que es la fórmula de un círculo con centro en -1 y radio 1 . En

la fig 7 se presentan gráficamente estos resultados o sea los puntos

del lugar geométrico.

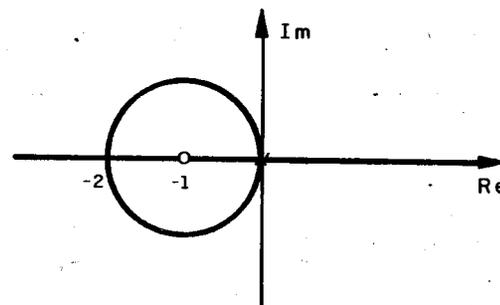


Fig 7 Lugar geométrico de $\frac{s+1}{s^2}$

Al examinar $\text{Re}[G(s)]$, se pueden separar las partes positiva y negativa del lugar geométrico.

Debido a que el denominador de la expresión obtenida para $\text{Re}[G(s)]$ es positivo, el signo de ella queda determinado por el de $(\sigma+1)(\sigma^2-\omega^2)+2\omega^2$ y para que $\text{Re}[G(s)]$ sea negativa en el eje real ($\omega=0$), es necesario que $(\sigma+1)\sigma^2 < 0$ o sea $\sigma < -1$

Para que un punto en la circunferencia $(\sigma+1)^2 + \omega^2 = 1$ pertenezca al $\ell p g$ es forzoso que

$$(\sigma+1)(\sigma^2+\omega^2+2\sigma)-2(\sigma^2+2\sigma)\sigma < 0$$

lo que equivale a

$$\sigma(\sigma+1)^2 - \sigma^2(\sigma+2) = \sigma < 0$$

Como la circunferencia está a la izquierda del eje imaginario, pertenece al l p g

De las dos últimas condiciones se concluye que el lugar geométrico positivo es como se indica en la fig 8.

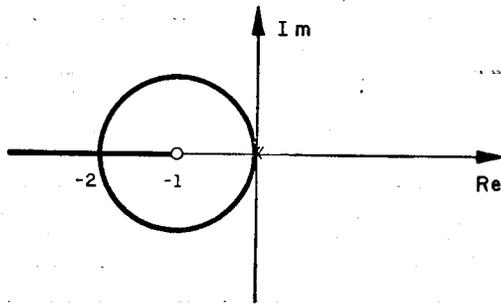


Fig 8 Lugar geométrico positivo de $\frac{s+1}{s^2}$

El lugar geométrico negativo estará sobre el eje real y es el segmento $\sigma > -1$ (Fig 9)

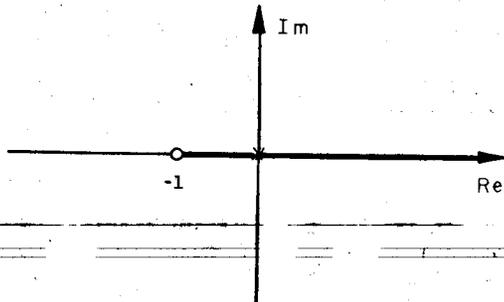


Fig 9 Lugar geométrico negativo de $\frac{s+1}{s^2}$

Para saber a qué valor de k corresponde el punto $\sigma = -1$, $\omega = 1$ (que está en el lugar geométrico) se hará el cálculo $Re[G(s_0)] = Re[G(-1+j)] = -\frac{1}{2}$

Como

$$1 + k Re[G(s_0)] = 0$$

$$\therefore k = +2$$

La otra raíz del polinomio para este valor de k estará en el punto $\sigma = -1$, $\omega = -1$, por venir en pares conjugados (Fig 10).

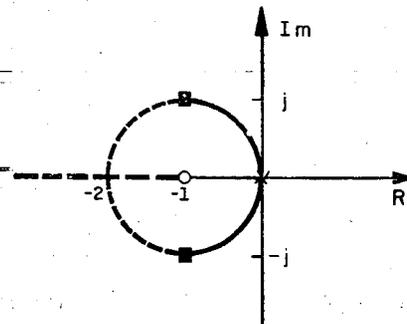


Fig 10 Localización de las raíces para $k = 2$

Como puede notarse, los cálculos involucrados en ese ejemplo no obstante tan simple, resultan algo laboriosos; como para sistemas con más polos o ceros los cálculos aumentan de dificultad, se necesitaría una computadora digital. Hay sin embargo resultados que facilitan la labor de encontrar el lugar geométrico de las raíces de una función de transferencia, y aunque el resultado que se obtiene es aproximado, ayuda grandemente tan

to en el análisis como en el diseño de sistemas de control. Dichos resultados auxilian en la localización de las raíces de $1 + k[G(s)] = 0$ en función de k , cuando $G(s)$ es el cociente de dos polinomios con raíces conocidas.

El análisis del lugar geométrico es útil para el estudio de sistemas del tipo de la fig 5. Sin embargo hay sistemas con otras configuraciones que se pueden estudiar mediante dicho método. Por ejemplo si para el sistema de la fig 11, se desea indagar

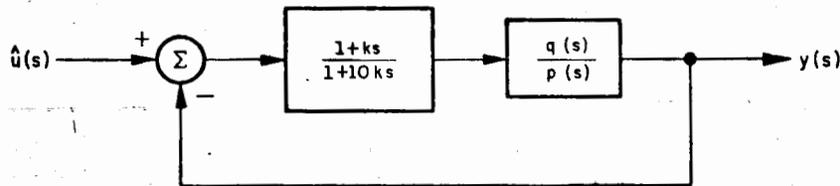


Fig 11 Un sistema realimentado

como varían los polos y ceros de $H(s)$ en función de k . Para ello, se procede así

$$H(s) = \frac{\frac{1+ks}{1+10ks} \cdot \frac{q(s)}{p(s)}}{1 + \frac{1+ks}{1+10ks} \cdot \frac{q(s)}{p(s)}} = \frac{(1+ks) \cdot q(s)}{[p(s) + q(s)] + ks [q(s) + 10p(s)]}$$

Los ceros de $H(s)$ son las raíces de $q(s) = 0$ y el punto $s = -\frac{1}{k}$. Los polos de $H(s)$ son las raíces de $1 + kG_1(s)$, donde $G_1(s) = \frac{q(s) + 10p(s)}{q(s) + p(s)}$. Por tanto, los polos de $H(s)$ estarán en el lugar geométrico de $G_1(s)$.

En este capítulo se estudiará la manera de bosquejar el lugar geométrico para valores de $k > 0$, pues las reglas correspondientes para el caso $k < 0$ pueden deducirse fácilmente a partir de las que se presenten.

El lugar geométrico positivo de $G(s)$ se ha definido como el conjunto de puntos s_0 tales que

- i) $\text{Im} [G(s_0)] = 0$
- ii) $\text{Re} [G(s_0)] = -\frac{1}{k}; (k > 0)$

Otra manera, en algunos casos más conveniente, de expresar estas condiciones es

$$\angle G(s_0) = 180^\circ + 360^\circ L; L = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$|G(s_0)| = \frac{1}{k}$$

Debe recordarse además, que el lugar geométrico positivo describe las trayectorias de las raíces de

$$p(s) + kq(s) = 0$$

cuando k se varía desde 0 hasta ∞ .

2. REGLAS PARA CONSTRUIR EL LUGAR GEOMETRICO POSITIVO

En los desarrollos que se harán a continuación se hará la suposición que $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios primos, esto es que no tienen ninguna raíz en común.

Antes de presentar algunas reglas que simplifican la construcción del lugar geométrico de una función racional, conviene introducir el concepto de rama del lugar geométrico.

Se dice que una línea continua en el plano complejo es una rama del lugar geométrico de $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ si a cada punto s_0 de dicha línea le corresponde uno y solo un valor de k que satisfice

$$p(s_0) + k q(s_0) = 0$$

Esto es, hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de una rama y los valores de k en el eje real.

Se entenderá además por rama del $l p g$ si k en la definición anterior l se restringe al intervalo de valores positivos.

En el ejemplo 3 se pueden identificar cuatro ramas del $l p g$ como se ilustra en la fig 12.

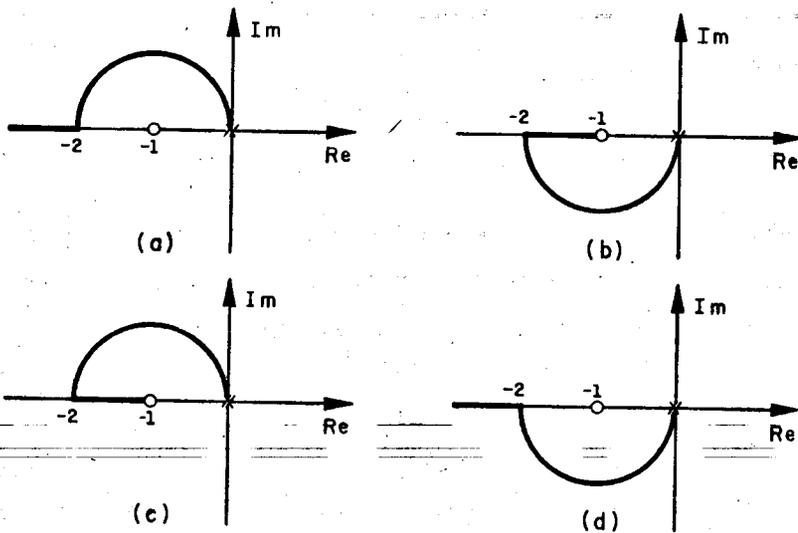


Fig 12 Cuatro ramas del $l p g$ de $\frac{s+1}{s^2}$

En este ejemplo, aunque existen cuatro ramas diferentes, con solo dos de ellas (a y b o c y d) queda determinado el lugar geométrico positivo, por esta razón conviene introducir la siguiente definición:

Dos ramas de un lugar geométrico son independientes si no tienen ningún segmento en común. Así en el ejemplo en cuestión las ramas a y d no son independientes porque tienen en común el intervalo $(\sigma < -2)$, mientras que c y d son independientes por que sólo tienen en común los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 0)$.

Regla 1 Principio y fin de lugar geométrico

El lugar geométrico positivo (o negativo) comienza ($k=0$) en los polos y termina ($k = \infty$) en los ceros, y tiene tantas ramas independientes como el máximo entre el número de polos y el de ceros de $G(s)$

Justificación:

Para $k = 0$, la ec 3 se convierte en

$$p(s) = 0$$

Para $k = \infty$, la misma ecuación, reescrita como $\frac{p(s)}{k} + q(s) = 0$

se vuelve $q(s) = 0$.

Esta regla se cumple también para el lugar geométrico negativo ($l g n$)

Por tanto el $l p g$ coincide con los polos de $G(s)$ para $k = 0$ y con los ceros de $G(s)$ para $k = \infty$. Supóngase ahora que se tiene un polo de orden m en $s = p_0$, y que $p(s)$ se factoriza en la forma

$$p(s) = (s - p_0)^m \tilde{p}(s)$$

Se desea saber el comportamiento de las soluciones de $p(s) + \Delta k q(s) = 0$ en la cercanía de p_0 , para una Δk suficientemente pequeña. Si una solución en dicha cercanía es $p_0 + \Delta s$, la nueva ecuación resulta

$$(\Delta s)^m \tilde{p}(p_0 + \Delta s) + \Delta k q(p_0 + \Delta s) = 0$$

Al hacer la expansión en series de Taylor de $p(p_0 + \Delta s)$ y $q(p_0 + \Delta s)$ alrededor de p_0 y tomar únicamente el primer término de cada expansión se obtiene

$$(-\Delta s)^m \tilde{p}(p_0) + \Delta k q(p_0) = 0$$

y de allí

$$(\Delta s)^m = \frac{\Delta k q(p_0)}{\tilde{p}(p_0)}$$

Esta ecuación tiene m soluciones distintas (ejemplo 2), por tanto, para pequeños valores de Δk , se apartarán del polo de orden m , m ramas del lugar geométrico.

Como

- i) el lugar geométrico coincide con los polos para $k = 0$
- ii) $\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \Delta s = 0$
- iii) en el entorno de un polo de orden m existen m soluciones diferentes

puede concluirse que el lugar geométrico comienza en los polos para $k = 0$ separándose de cada polo una rama conforme k crece.

Un razonamiento similar puede efectuarse para el caso de un cero

de orden m situado en $s = z_0$, haciendo $k^* = \frac{1}{k}$ y observando el comportamiento de $\Delta k^* p(s) + q(s) = 0$ en las cercanías de z_0 , pudiéndose concluir que los ceros de $G(s)$ son límites, cuando k tiende infinito, de las raíces de (3) y que a cada cero le llega una rama.

Por tanto, el lugar geométrico comienza en los polos, termina en los ceros, y tiene tantas ramas como el máximo orden del numerador o denominador de $G(s)$

Regla 2 Asintotas del lugar geométrico

Si el grado de $p(s)$ ($=n$) es mayor que el de $q(s)$ ($=m$) existirán $n-m$ raíces de la ecuación

$$p(s) + k q(s) = 0 \quad (5)$$

que, conforme $k \rightarrow \infty$, son asintóticas a las raíces de la ecuación

$$(s - c)^{n-m} + k = 0 \quad (6)$$

en donde c (llamado centroide*) está dado por

$$c = \frac{\sum_{k=1}^n p_k \quad \sum_{k=1}^m z_k}{n - m} \quad (7)$$

en donde p_k y z_k corresponden a los polos y ceros de $G(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ respectivamente.

Debe recordarse que el $l p g$ (ejemplo 2) de

$$(s - c)^{n-m} + k = 0$$

* c es llamado así por coincidir con el centro de gravedad de un conjunto de masas unitarias positivas y negativas, las primeras localizadas en los ceros y las segundas en los polos.

está formado por líneas rectas que se cruzan en c y forman ángulos

$$\frac{180^\circ(2\ell+1)}{n-m} \quad \ell = 0, 1, \dots, n-m-1$$

con el eje real.

Justificación

Se probará que conforme k crece, las raíces de la ec 6 y $n-m$ raíces de la ec 5 se aproximan asintóticamente (las otras m raíces de la ec 5 tienden asintóticamente a los m ceros)

Para $k > 0$ las raíces de la ec 6 (ejemplo 2) están dadas por

$$\delta_\ell = R k^\ell \phi_\ell + c$$

donde

$$R = \sqrt[n-m]{|k|}$$

$$\phi_\ell = \frac{180^\circ(2\ell+1)}{n-m} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

En el análisis subsecuente se considerarán solamente singularidades (polos o ceros) en el eje real. El desarrollo para el caso complejo, aunque idéntico en forma, no se incluye para simplificar la notación.

Si δ_ℓ es una raíz de la ec 6 se demostrará que

$$\dagger G(\delta_\ell) = 180^\circ(2\ell+1) + \epsilon_1$$

y que

$$|G(\delta_\ell)| = \frac{1}{E} (1 + \epsilon_2)$$

en donde ϵ_1 y ϵ_2 son tales que $\epsilon_1 R^2$ y $\epsilon_2 R^2$ están acotados

para toda R .

De esta manera quedará establecido que δ_ℓ se aproxima asintóticamente a una raíz de la ec 5.

Para la evaluación de $\dagger G(\delta_\ell)$ se derivará una expresión para el ángulo de $\delta_k - a_k$ en donde a_k es una singularidad de $G(s)$ sobre el eje real.

Sea δ_k una raíz de la ec 6 y $\Delta_k = a_k - c$. El ángulo de $\delta_k - a_k$ está dado por (fig 13)

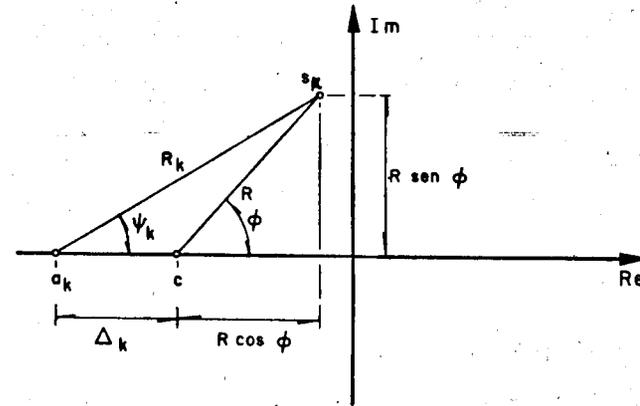


Fig 13 Distancia y ángulo entre una solución de la ec 6 y una singularidad

$$\psi_k = \arctan \left[\frac{\text{sen } \phi}{\text{cos } \phi + \frac{\Delta_k}{R}} \right]$$

Al hacer una expansión en series de Taylor de

$$\arctan \left[\frac{\sin \phi}{x} \right]$$

alrededor del punto $x = \cos \phi$ se obtiene $\psi_k = -(\sin \phi) \frac{\Delta_k}{R} +$
 $+ 2(\sin \phi) (\cos \phi) \frac{\Delta_k^2}{R^2} + \dots$

Por tanto

$$\angle (s_k - a_e) = \phi - (\sin \phi) \frac{\Delta_k}{R} + \delta_k$$

en donde $R^2 |\delta_k|$ es acotado para toda R

De la sec 6 cap 7, $\angle G(s_e)$ está dado por

$$\angle G(s_e) = \sum \text{ángulos de los ceros a } s_e - \sum \text{ángulos de los polos a } s_e$$

o sea

$$\angle G(s_e) = \sum_{\text{ceros}} (\phi + \Delta \phi_k) - \sum_{\text{polos}} (\phi + \Delta \phi_k)$$

$$= (m - n) \phi + \frac{\sin \phi}{R} \left(\sum_{\text{polos}} \Delta_k - \sum_{\text{ceros}} \Delta_k \right) + \sum_{\text{ceros}} \delta_k - \sum_{\text{polos}} \delta_k$$

Pero debido a que

$$(m - n) \phi = (m - n) \frac{180^\circ (2L + 1)}{n - m} = -180^\circ (2L + 1)$$

Y a que

$$\sum_{\text{polos}} \Delta_k - \sum_{\text{ceros}} \Delta_k = \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) - nc - \left(\sum_{i=1}^m z_i \right) + mc = 0 \quad (8)$$

se concluye que

$$\angle G(s_e) = -180^\circ (2L + 1) + \epsilon_1$$

en donde

$\epsilon_1 = \sum_{\text{ceros}} \delta_k - \sum_{\text{polos}} \delta_k$ es tal que $R^2 |\epsilon_1|$ es acotado para toda R

En cuando a la magnitud de $s_k - a_e$, de la fig 11

se obtiene que

$$R_k = \sqrt{R^2 \sin^2 \phi + (\Delta_k + R \cos \phi)^2} = R \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta_k}{R} \cos \phi + \frac{\Delta_k^2}{R^2}}$$

y al usar la expresión para $|G(s_e)|$ dada por (sec 6 cap 7)

$$|G(s_e)| = \frac{\text{Producto de las distancias de los ceros a } s_e}{\text{Producto de las distancias de los polos a } s_e}$$

se obtiene

$$|G(s_e)| = \frac{R^m \prod_{\text{ceros}} \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta_k}{R} \cos \phi + \frac{\Delta_k^2}{R^2}}}{R^n \prod_{\text{polos}} \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta_k}{R} \cos \phi + \frac{\Delta_k^2}{R^2}}}$$

o sea

$$|G(s_e)| = R^{m-n} \frac{\prod_{\text{ceros}} (x_1 x_2 x_3 \dots x_m)^{1/2}}{\prod_{\text{polos}} (x_{m+1} x_{m+2} \dots x_{n+m})^{1/2}}$$

en donde

$$x_k = 1 + \frac{\Delta_k}{R} \cos \phi + \frac{\Delta_k^2}{R^2}$$

Al hacer una expansión en series de Taylor de $|G(s_e)|$ alrededor del punto $x_1 = x_2 = \dots = x_{m+n} = 1$ se obtiene

$$|G(s_e)| = R^{m-n} \left\{ 1 + \frac{\cos \phi}{R} \left(\prod_{\text{ceros}} \Delta_k - \prod_{\text{polos}} \Delta_k \right) + \epsilon_2 \right\}$$

en donde los términos agrupados en ϵ_2 son tales que

$|e_2| R^2$ está acotado para toda R . Pero en vista de ec 8 y del

hecho que $R^{m-n} = (\sqrt[n-m]{|k|})^{m-n} = \frac{1}{|k|}$

se obtiene

$$|G(\Delta_2)| = \frac{1}{k} (1 + \epsilon_2)$$

que es el resultado deseado.

Un argumento similar al anterior puede utilizarse para el caso en que $m > n$, en donde el resultado es:

Las raíces de

$$p(\Delta) + kq(\Delta) = 0$$

para $k > 0$,

se aproximan asintóticamente, cuando $k \rightarrow 0$, a las raíces de

$$(\Delta - c)^{m-n} + \frac{1}{k} = 0$$

en donde c está definido por la ec 7.

Ejemplo 4

Se ilustrará la aplicación de las reglas hasta ahora descri-
tas para el caso en que

$$G(\Delta) = \frac{(\Delta + 3)\Delta}{(\Delta^2 + 2\Delta + 2)(\Delta + 1)(\Delta - 1)} = \frac{\Delta^2 + 3\Delta}{\Delta^4 + 2\Delta^3 + \Delta^2 - 2\Delta - 2}$$

El patrón de polos y ceros correspondiente se indica en la fig 14

De acuerdo con la primera regla, el lugar geométrico comien-
za en los polos ($k=0$) y termina en los ceros ($k=\infty$). Como hay dos

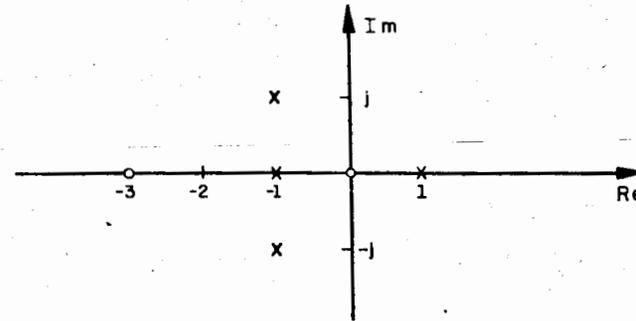


Fig 14 Patrón de polos y ceros de $G(\Delta)$

polos más que ceros ($n-m = 2$) dos de las raíces de la ec 5 tien-
den a infinito a lo largo de las asíntotas, conforme k crece;
las asíntotas forman con el eje real ángulos de

$$\frac{180^\circ(2 \times 0 + 1)}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{-180^\circ(2 \times 1 + 1)}{2} = 270^\circ$$

El centroide c está en

$$c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{2} = \frac{(-1+j) + (-1-j) + (-1) + (1) - (-3) - (-2) - (-3)}{2} = \frac{1}{2}$$

Así pues, según k crece, dos raíces de (5) se aproximan a las así-
ntotas mostradas en la fig 15

Regla 3 Lugar geométrico sobre el eje real.

Pertencen al ℓ gp aquellos segmentos del eje real que tienen

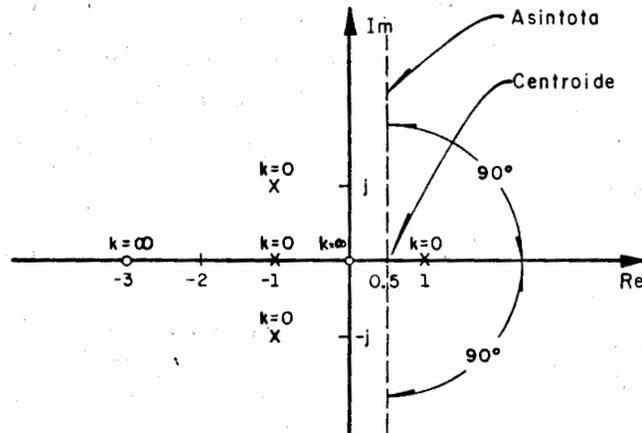


Fig 15 Centroide y asíntotas del lugar geométrico

un número impar de singularidades (polos + ceros) a su derecha*

Justificación:

Por definición, un punto s_0 pertenece al l.g.p si y solamente si cumple con la condición

$$G(s_0) = 180^\circ + L \cdot 360^\circ; (L=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Se demostrará que los únicos segmentos en el eje real que cumplen con lo anterior son aquellos descritos en el enunciado de la re-

* Para el lugar geométrico negativo, se necesita un número par de singularidades a la derecha.

gla. Para ello, tómesese un punto cualquiera s_0 sobre dicho eje. La contribución de un par de polos (o ceros) complejos conjugados al ángulo $\angle G(s_0)$ será de cero grados, ya que si el ángulo entre s_0 y una singularidad compleja es de θ , el ángulo con la singularidad conjugada será de $-\theta$ (fig 16)

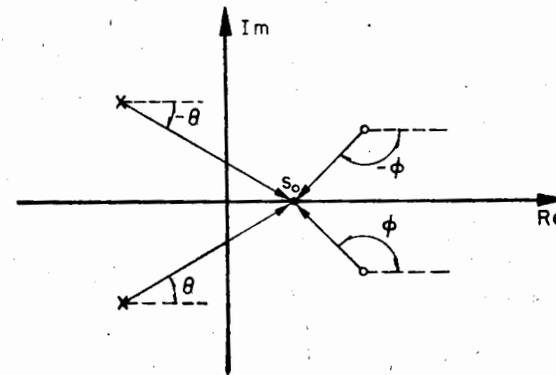


Fig 16 Contribución de polos y ceros complejos al ángulo $\angle G(s_0)$

Por tanto las singularidades sobre el eje real son la únicas que contribuyen a $\angle G(s_0)$. Además de estas últimas, las situadas a la izquierda de s_0 participan con un ángulo igual a cero grados. De donde se deduce que las únicas singularidades que colaborarán son aquellas a la derecha del punto en cuestión. La aportación de un cero a la derecha de s_0 es de 180° y la de un polo de -180° , así que para tener un total de $180^\circ + L \cdot 360^\circ$ es necesario que haya un número impar de singularidades sobre el eje

real a la derecha del punto en cuestión.

Ejemplo 5

Para $G(s) = \frac{(s+3)s}{(s^2+2s+2)(s+1)(s-1)}$, el lugar geométrico positivo sobre el eje real se muestra en la fig 17.

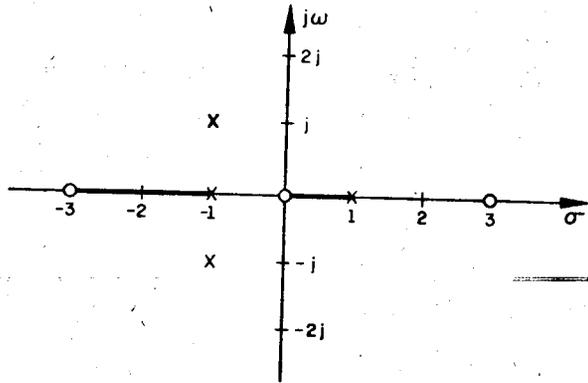


Fig 17 Lugar geométrico positivo en el eje real

Regla 4. Angulos de partida y llegada del lgp a singularidades complejas.

- i) En ángulo de partida, θ , del lgp desde un polo complejo es $\theta = 180^\circ - \sum \text{ de otros polos} + \sum \text{ de los ceros}$
- ii) El ángulo de llegada ϕ del lgp a un cero complejo es $\phi = 180^\circ + \sum \text{ de polos} - \sum \text{ de otros ceros}$ *

* para el lgn
 $\theta = \sum \text{ de ceros} - \sum \text{ de otros polos}$
 $\phi = \sum \text{ de polos} - \sum \text{ de otros ceros}$

Justificación:

Como se ha mencionado repetidamente, para que s_0 pertenezca al lgp, es necesario y suficiente que $\angle G(s_0) = 180^\circ + 2k360^\circ$ (k entero).

Para justificar i), considérese un polo complejo en p_L y un punto s_0 perteneciente al lgp, muy próximo a p_L , de tal forma que para cualquier polo $p_i \neq p_L$ (o cero z_j), el ángulo del vector $s_0 - p_i$ ($\delta s_0 - z_j$) sea prácticamente el mismo que el del vector $p_L - p_i$ ($\delta p_L - z_j$). Si se llama θ el ángulo de $s_0 - p_L$, se tiene

$$-\theta - \sum \text{ de otros polos} + \sum \text{ de otros ceros} = -180^\circ$$

y al despejar θ se logra la condición i).

En la fig 18 se ilustra el uso de esta regla.

La condición ii se prueba de una manera análoga.

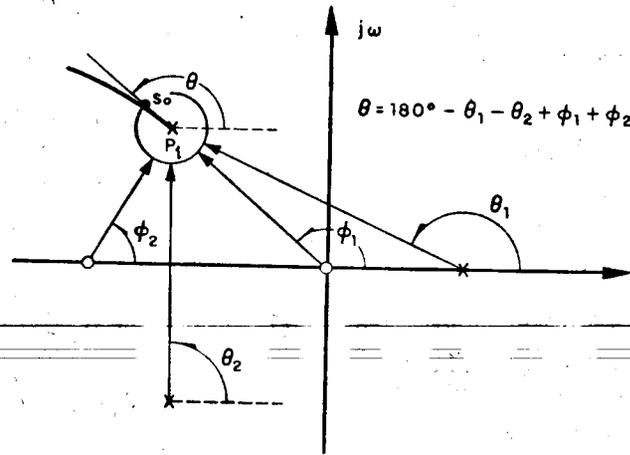


Fig 18 Angulo de partida de un polo

Ejemplo 6

Considérese la función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s+2)(s^2+4s+5)}{(s+3)(s^2+1)}$$

cuyo patrón de polos y ceros se muestra en la figura 19

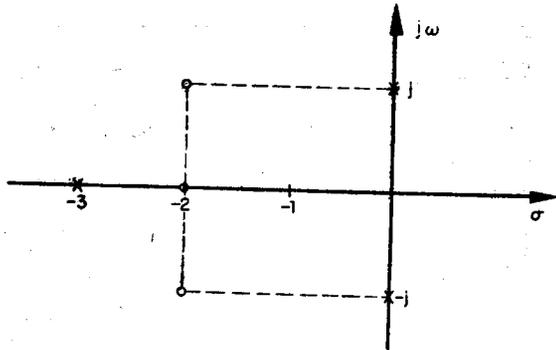
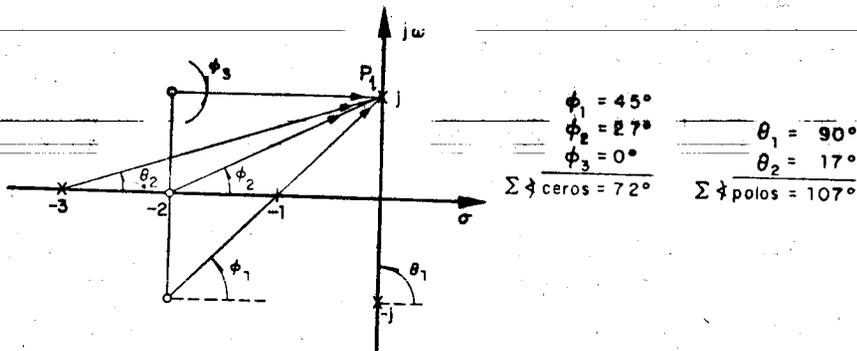


Fig 19 Gráfica de polos y ceros

Al respecto, se evaluarán los ángulos de partida del polo complejo situado en $p_2 = -2 + j$ y el ángulo de llegada al cero $z_2 = -2 + j$

En la fig 20 se muestran los ángulos de los polos y los ceros al polo complejo p_2 por tanto el ángulo de partida desde el polo p_2 es $\theta = 180^\circ - 107^\circ + 72^\circ = 145^\circ$



Para obtener el ángulo de llegada al cero z_2 , se procede como se muestra en la fig 21 y por tanto el ángulo de llegada al cero en cuestión es $\phi = 180^\circ + 360 - 180 = 360^\circ$

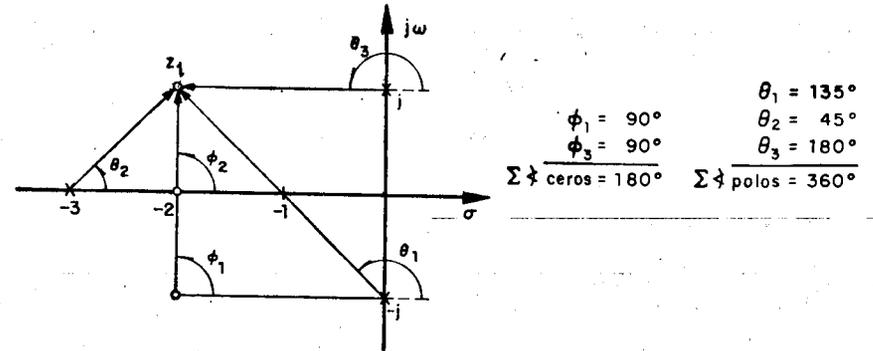


Fig 21 Determinación del ángulo de llegada al cero

Como el número de polos y el número de ceros son iguales, no hay asíntotas.

El lgp sobre el eje real existe en el intervalo $(-2, -3)$. Con estos datos, puede bosquejarse el lgp de $G(s)$ del ejemplo en la forma que se muestra en la fig 22.

Del lugar geométrico de $G(s) = (s+1)/s^2$ (ejemplo 3) puede observarse que el punto $s = -2$ es un punto común a dos ramas independientes. Para $s = -2$, la k correspondiente es $k_s = \frac{1}{R_2 G(-2)} = 4$ y el polinomio $p(s) + k_g(s)$ es $s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$ (raíces repetidas).

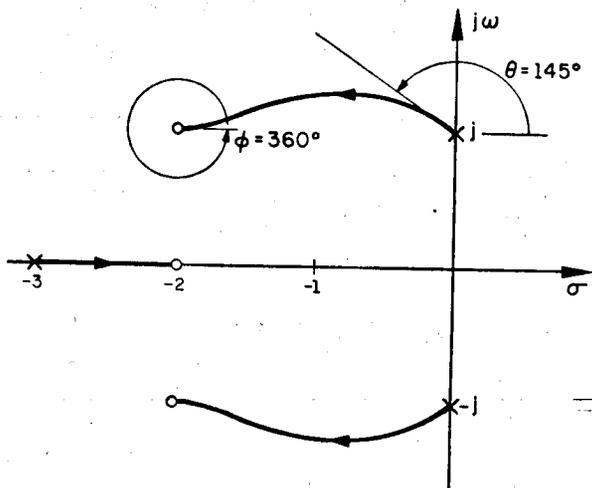


Fig 22 Lgp de las raíces de $G(s)$

Cuando en s_0 la ecuación $p(s) + kq(s)$ tiene una raíz múltiple de orden ℓ , por él pasan ℓ ramas independientes del lugar geométrico.

Esta aseveración puede comprobarse factorizando

$$p(s) + k_0 q(s) = (s - s_0)^\ell f(s)$$

en donde

$$k_0 = \frac{-p(s_0)}{q(s_0)}$$

y escribiendo la ec 5 como

$$p(s) + kq(s) = p(s) + k_0 q(s) + (k - k_0)q(s) = (s - s_0)^\ell f(s) + (k - k_0)q(s) = 0$$

que, de acuerdo con la regla 2, tiene ℓ ramas que parten del punto s_0 .

Regla 5. Raíces múltiples

El valor de s_0 para el cual existen raíces múltiples en el lugar geométrico positivo* (llamado punto silla), cumple con la condición

$$\left. \frac{dG(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = 0$$

Justificación:

Debido a que si s_0 es una raíz múltiple de

$$p(s) + kq(s) = 0$$

cuando $k = k_0$, entonces es posible expresar el polinomio anterior como

$$p(s) + k_0 q(s) = (s - s_0)^\ell f(s), \text{ donde } \ell \geq 2$$

además, al tomar la derivada de la expresión anterior con respecto a s y evaluarla en s_0 se tendrá:

$$\left. \frac{dp(s)}{ds} \right|_{s=s_0} + k_0 \left. \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = \ell (s - s_0)^{\ell-1} f(s) \Big|_{s=s_0} + (s - s_0)^\ell \left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = 0$$

* Esta condición se cumple también para el lgn

de lo cual se concluye que s_0 debe satisfacer las dos condiciones siguientes

$$p(s_0) + k_0 q(s_0) = 0$$

$$\left. \frac{dp(s)}{ds} \right|_{s=s_0} + k_0 \left. \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = 0$$

Al eliminar k_0 de las ecuaciones anteriores, se obtiene que

$$q(s_0) \left. \frac{dp(s)}{ds} \right|_{s=s_0} - p(s_0) \left. \frac{dq(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = 0$$

la cual es el enunciado de la regla. Debe notarse que esta condición es solamente necesaria y no suficiente; su importancia radica en que por medio de ellas es posible determinar los puntos en los cuales hay cruces de ramas del *lgp*. Esto se ilustrará a continuación mediante un ejemplo.

Ejemplo 7

Encontrar el lugar geométrico positivo de la función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s-1)}$$

cuyo patrón de polos y ceros se muestra en la fig 23.

De las reglas enunciadas se obtienen los siguientes datos:

- número de ramas = 2
- número de asíntotas = una, a 180°
- lugar geométrico sobre el eje real en los segmentos

o sea

esto es

$$s_0 = \begin{cases} -3 - \sqrt{8} = -5.83 \\ -3 + \sqrt{8} = -0.17 \end{cases}$$

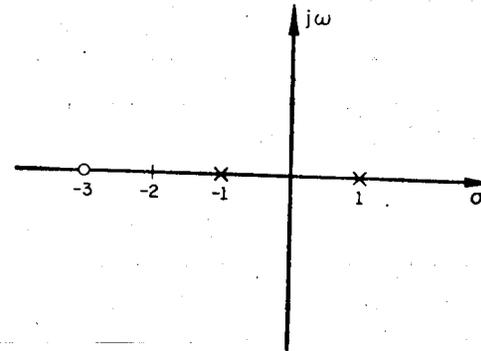


Fig 23 Patrón de polos y ceros de $G(s)$

$(1, -1)$ y $(-3, -\infty)$

- d) puesto que en el segmento $(1, -1)$ hay lugar geométrico entre polos, deberá existir algún punto allí para el cual el *lgp* tenga raíces dobles. Ese punto estará dado por unas raíces del polinomio.

$$q(s) \frac{dp(s)}{ds} - p(s) \frac{dq(s)}{ds} = 0$$

$$(s+3)(2s) - (s^2-1) = 0$$

$$s^2 + 6s + 1 = 0$$

esto es

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

De acuerdo con las reglas dadas, existirán tres asíntotas formando ángulos de 60° , 180° y 300° . El centroide está dado por

$$\frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n - m} = -\frac{6}{3} = -2$$

además los intervalos del eje real $(-1, -2)$ y $(-3, -\infty)$ pertenecen al lugar geométrico positivo; también es posible encontrar el punto silla sobre el eje real utilizando

$$\frac{dG(s)}{ds} = 0$$

esto es

$$\frac{dG(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \right) = 0$$

o lo que es equivalente

$$3s^2 + 12s + 11 = 0$$

Este polinomio tiene las raíces $s = -2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ pero como el punto silla debe estar en el intervalo $(-1, -2)$ se utilizará la raíz $s = -2 + \sqrt{\frac{1}{3}} = -1.422$; el valor de k asociado está dado, como se ha visto, por

$$k = \frac{1}{|G(-1.422)|} = 2.6$$

Se encontrará ahora las frecuencias ω en donde hay cruce con el eje imaginario y los valores de k asociadas a esos puntos. Para ello considérese

$$p(s) + kq(s) = (s+1)(s+2)(s+3) + k = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + k = 0$$

El arreglo de Routh correspondiente es

s_3	1	11
s_2	6	$6+k$
s_1	$10 - \frac{k}{6}$	
s_0	$6+k$	

Para $k > 60$ existen dos cambios de signo, y por tanto dos raíces con parte real positiva, como para $0 < k < 60$ no hay ningún cambio de signo, se concluye que cuando $k = 60$ habrá dos raíces sobre el eje imaginario. Para encontrar el valor de ω_0 se usa el hecho que cuando el arreglo de Routh produce un renglón de ceros (para $k = 60$, en el renglón de s_1), entonces el polinomio correspondiente al renglón anterior, $6s^2 + 6+k$, o sea $6s^2 + 66$, es factor del polinomio original; en este caso,

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 66 =$$

$$= (s^2 + 11)(s+6)$$

y el valor de ω_0 correspondiente al cruce es

$$\omega_0 = \sqrt{11}$$

Con esta información adicional puede bosquejarse el lgp del caso considerado (fig 26).

A continuación se muestran algunos ejemplos de obtención y utilización del lgp.

Ejemplo 9

En ocasiones el método del lugar geométrico de las raíces pue

de aplicarse para la determinación aproximada de los ceros de un polinomio. En este ejemplo se muestra como utilizar las reglas del lugar geométrico para obtener las raíces de un polinomio de tercer orden.

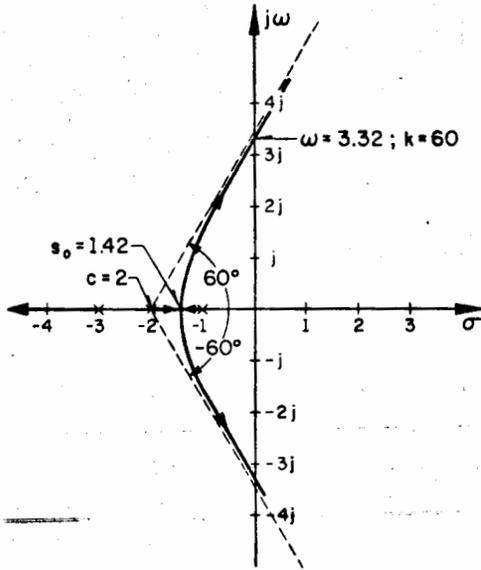


Fig 26 Bosquejo del lgp del ejemplo anterior.

Se trata de determinar las raíces del polinomio

$$\delta^3 + 5\delta^2 + 3\delta + 12 = 0$$

El primer paso es reordenar el polinomio en la forma

$$p(\delta) + k_0 q(\delta) = 0$$

donde $p(\delta)$ y $q(\delta)$ son polinomios factorizados. Una vez realizado esto, se aplican las reglas generales para encontrar el lgp.

El polinomio puede reordenarse como sigue

$$\delta^3 + 5\delta^2 + 3(\delta+4) = 0$$

siendo factible escribirlo como

$$\delta^2(\delta+5) + k_0(\delta+4) = 0$$

en donde $k_0 = 3$

Esta forma posee dos polos en el origen, uno en -5 y un cero en -4, pudiéndose aplicar el método del lugar geométrico para encontrar las raíces del polinomio. El patrón de polos y ceros es conforme la fig 27.

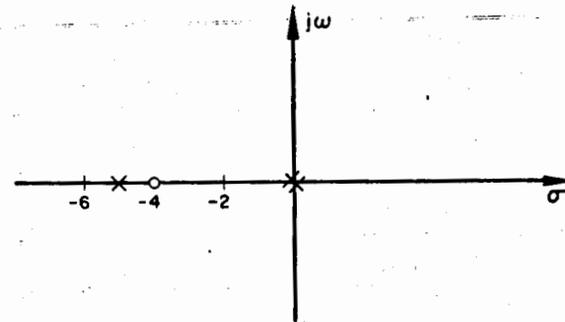


Fig 27 Patrón de polos y ceros del polinomio reordenado

El lugar geométrico en el eje real está en el segmento comprendido entre -4 y -5.

Hay dos asíntotas que forman ángulos de 90° y 270° . El centro de está en

$$c = \frac{-5+4}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

El valor de k para el cruce del l_{gp} con el eje imaginario está dado por el criterio de Routh, y la ecuación característica es

$$s^2(s+5) + k(s+4) = 0$$

$$s^3 + 5s^2 + ks + 4k = 0$$

El arreglo de Routh es

s^3	5	k
s^2	5	$4k$
s^1	$\frac{k}{5}$	
s^0	$4k$	

Como no puede haber dos cambios de signo sea cual fuere el valor de k entonces el l_{gp} no cruza el eje imaginario.

El único punto de despegue es el origen (puesto que hay polos dobles).

Con estos datos y utilizando la condición de magnitud y ángulo, es posible obtener el l_{gp} (fig 28).

Usando la condición de magnitud $k = \frac{-s^2(s+5)}{(s+4)}$

se determinarán los puntos del lugar geométrico con $k=3$. Usando

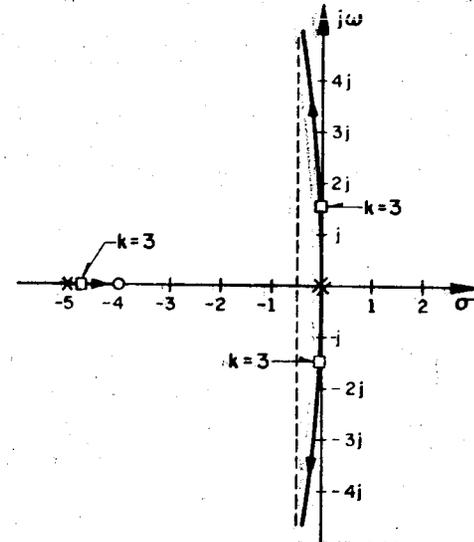


Fig 28 Lugar geométrico de $\frac{s+4}{s^2(s+5)}$

un método de ensayos, se encuentra el valor

$$s = -4.89$$

Aun cuando es factible seguir usando este método para encontrar las dos raíces restantes, también es posible factorizar el polinomio por medio de la división

$(s^3 + 5s^2 + 3s + 12) / (s + 4.89) = s^2 + 0.11s + 2.462$
y las raíces del cociente son

$$-.055 \pm 1.566j$$

Las reglas citadas anteriormente, permiten bosquejar el l_{gp} . Sin embargo para mayor precisión, suelen usarse transportadores especiales, a fin de verificar que la condición de ángulo

en puntos determinados.

Ejemplo 10

Considérese el sistema posicionador de válvula de la fig 29 a), mismo que ha sido analizado en el cap 7 sec 2, y el cap 8 sec 5.

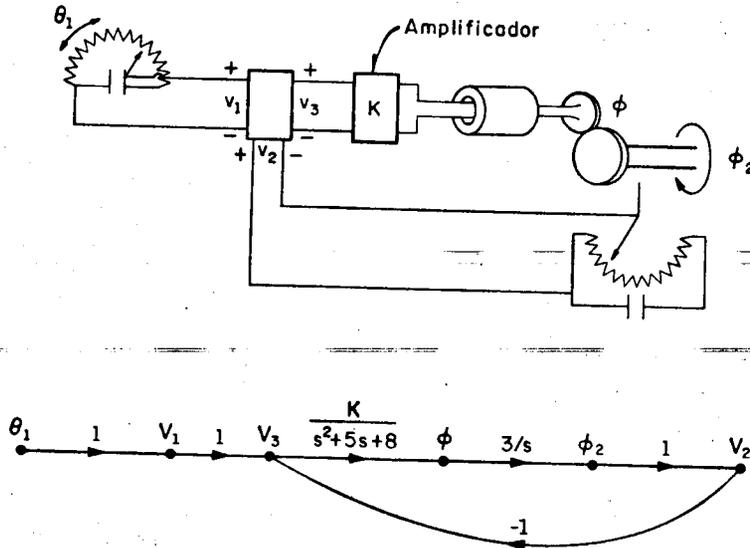


Fig 29 Servomecanismo posicionador y su reograma

El amplificador tiene una ganancia k . Se desea:

- i) El lugar geométrico de los polos del sistema realimentado
- ii) El valor de k necesario para que los polos dominantes tengan un amortiguamiento $\xi = 0.6$

A partir del análisis de la sec 2 del cap 7 se obtuvo que la función de transferencia del sistema es

$$\frac{\phi_2(s)}{\theta_1(s)} = \frac{3k G(s)}{1+3kG(s)}$$

$$\text{donde } G(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+8)} = \frac{1}{s[(s+2.5)^2+1.3229^2]}$$

El patrón de polos y ceros de $G(s)$ se muestra en la fig 30

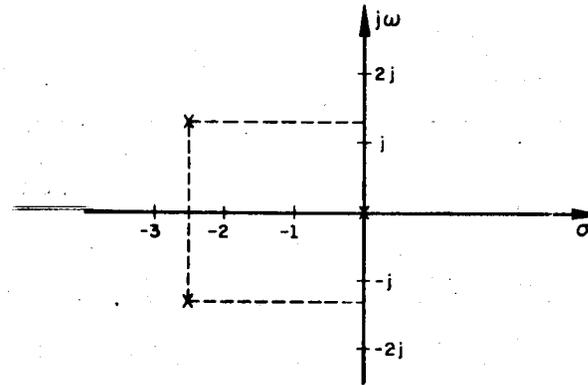


Fig 30 Patrón de polos y ceros de $G(s)$

Las reglas de construcción del l_{gp} arrojan los siguientes resultados:

- i) El l_{gp} en el eje real está definido en el intervalo $\sigma < 0$
- ii) Existen tres asíntotas, a 60° , 180° y -60° , partiendo de un centroide situado en

$$c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n - m} = \frac{0 - 2.5 - 2.5}{3} = \frac{-5}{3}$$

49

50

- iii) El ángulo de partida del polo situado en $(-2.5+1.3369j)$ está dado por $180^\circ - \theta_1 - \theta_2 = 180^\circ - 90^\circ - 152.13^\circ = -62.13^\circ$
- iv) Como los puntos silla, cuando existen, satisfacen la ecuación

$$p(s) \frac{dq(s)}{ds} - a(s) \frac{dp(s)}{ds} = 0$$

es necesario investigar si alguna de las raíces del polinomio anterior esta sobre el lugar geométrico, y en dicho caso corresponderá a un punto silla; en el caso en cuestión $q(s) = 1$ y $p(s) = s(s^2+5s+8)$ como las raíces del polinomio

$$3s^2 + 10s + 8 = 0$$

que son

$$s_1 = -2$$

$$s_2 = -\frac{4}{3}$$

están sobre el lugar geométrico (el eje real negativo), serán puntos silla del lugar geométrico.

- v) Para encontrar la intersección del l_{gp} con el eje imaginario, es necesario construir el arreglo de Routh que para el polinomio característico $s^3+5s^2+8s+3k$ que es

s^3	1	8
s^2	5	3k
s^1	$8 - \frac{3k}{5}$	0
s^0	3k	

Según el ejemplo A de la sec 5.1 cap 8, cuando $k = \frac{40}{3}$ el polinomio característico tiene un par de raíces imaginarias (dadas por $\omega = \sqrt{8}$). Así pues, el l_{gp} corta el eje imaginario en $\omega = \sqrt{8} = 2.828$.

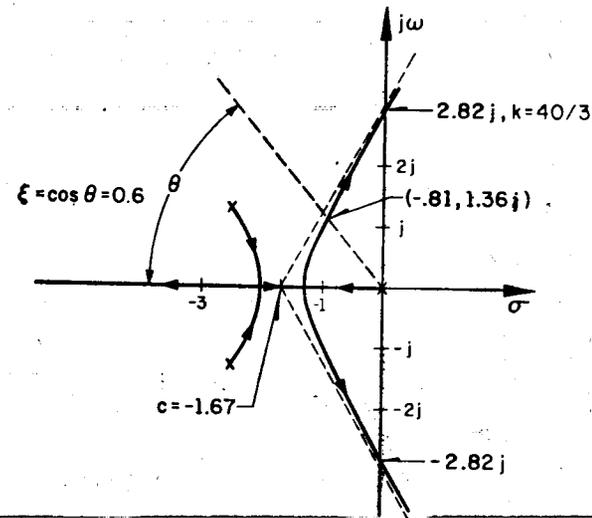


Fig 31 l_{gp} de $\frac{1}{s(s^2+5s+8)}$

Ya dibujado el ℓ_{gp} , se traza una recta con pendiente

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \frac{.8}{.6} = 1.333, \text{ que corta al } \ell_{gp} \text{ en el punto } .81 + 1.36j$$

(fig 31). A este punto corresponde una ganancia dada por $k=2.8$

Puede averiguarse fácilmente que la tercera raíz está localizada en $\delta = -3.37$.

La respuesta a escalón unitario del sistema para el valor de $k=2.8$ se muestra en la fig 32.

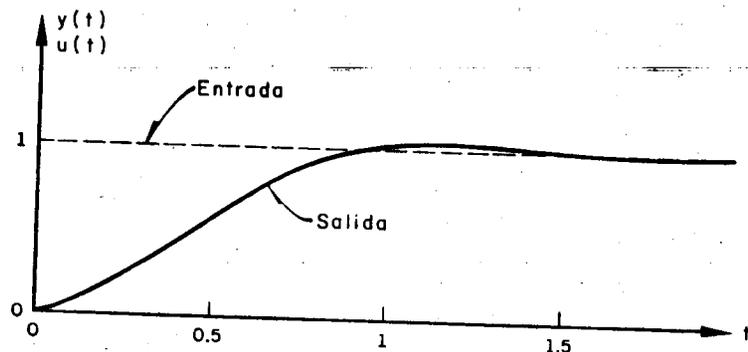


Fig 32 Respuesta a escalón del posicionador válvula

Ejemplo 11

Considérese el caso del servomecanismo hidráulico del capí-

tulo anterior con los valores

$$k_1 k_3 A/M = 10$$

$$k_2 k_3 = 5$$

$$k_4 A/M = 6$$

$$\ell = 1$$

Se desea saber el valor de ℓ_1 necesario para tener un sobrepaso a un escalón de 4%. Para lograrlo y suponiendo predominancia en la respuesta de un par de polos complejos, las singularidades en cuestión deberán tener, de acuerdo a la fig 21 del cap 7, un amortiguamiento de 0.70.

La función de transferencia $\frac{\hat{y}(\delta)}{\hat{x}(\delta)}$, para los valores numéricos supuestos es

$$\frac{10/\ell_1}{\delta^3 + 5\delta^2 + 6\delta + 10(\frac{\ell}{\ell_1} - 1)}$$

Haciendo $k = 10(\frac{\ell}{\ell_1} - 1)$, queda $q(\delta)=1$, $p(\delta) = \delta^3 + 5\delta^2 + 6\delta$ o sea que los polos están localizados en 0, -2 y -3 que son las raíces de $\delta^3 + 5\delta^2 + 6\delta$ y no hay ceros en el sistema.

Aplicando las reglas, existe lugar geométrico positivo en los segmentos (fig 33)

$$-2 < \delta < 0, \quad \delta < -3$$

Hay tres asíntotas, a $\pm 60^\circ$ y a 180° , cuyo centroide yace en $\delta=1.66$ porque

$$c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n - m} = \frac{-5}{3} = -1.66$$

Existe un punto de desprendimiento en el l_{gp} , dado por la solución de

$$\frac{d}{ds} (s^3 + 5s^2 + 6s) = 0 = 3s^2 + 10s + 6$$

ecuación que tiene una raíz en $s = -0.78$ (la otra, en $s = -2.54$, corresponde al lugar geométrico negativo).

Los cruces con el eje imaginario se obtienen de la tabla de Routh para $s^3 + 5s^2 + 6s + k$

s^3	1	6
s^2	5	k
s^1	$6 - k/5$	
s^0	k	

Para $k = 30$ se tienen dos raíces complejas, solución de $5s^2 + 30 = 0$ ($s = \pm 2.45j$), lográndose así la intersección del l_{gp} con el eje imaginario.

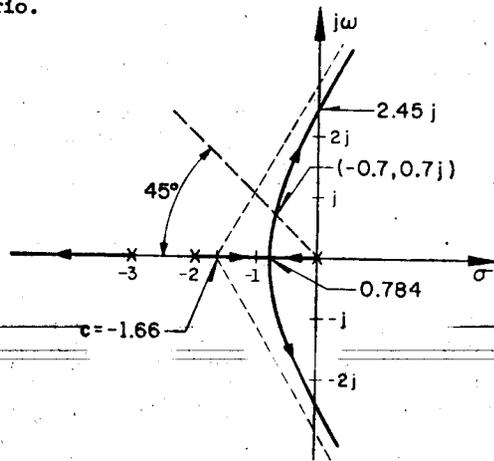


Fig 33 l_{gp} para $p(s) = s^3 + 5s^2 + 6s$, $q(s) = 1$

Una vez trazado el l_{gp} (fig 33), se dibuja una recta a 45° (lugar geométrico de los puntos con amortiguamiento 0.70), que cruza al l_{gp} en $s = -0.7 \pm 0.7j$, correspondiendo a estos valores una $k = 3.514$. De este valor de k puede determinarse el valor de l_1 , que es $l_1 = 0.74$. La raíz restante puede obtenerse fácilmente, ya sea despejando de $p(s) + kq(s) = 0$ las raíces conocidas, u obteniendo por aproximaciones sucesivas la s_0 ($s_0 < -3$) que corresponda al valor de k anterior. Tal punto es $s = -3.606$.

Luego, la función de transferencia para $k = 3.51$ está dada por

$$\frac{v(s)}{x(s)} = \frac{13.514}{(s^2 + 1.4s + 9.8)(s + 3.606)}$$

siendo su respuesta a un escalón unitario:

$$[3.824 - 0.4194 e^{-3.606t} - 3.27 e^{-0.7t} \cos(1.7t - 32^\circ)] u_{-1}(t)$$

De los coeficientes de la fórmula anterior se observa que los polos en $(-0.7 \pm 0.7j)$ son dominantes, y que su posición es el principal determinante del comportamiento dinámico del sistema. Así pues, la k obtenida dará con aceptable aproximación el sobrepaso impuesto como condición de diseño. Como puede comprobarse observando en la fig 11 del cap 8, la respuesta de escalón al sistema cuando $l_1 = 0.7$ y $l_2 = 0.8$.

Ejemplo 12

Se tiene un sistema realimentado, cuyo diagrama de bloque se muestra en la fig 34.

Se quiere encontrar el valor de k tal que se cumplan las siguientes

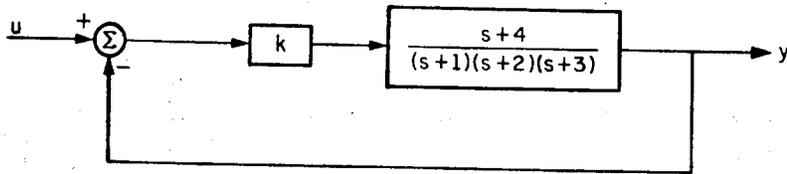


Fig 34 Diagrama de bloque de un sistema realimentado.

tes condiciones:

- El tiempo de asentamiento debe ser menor o igual a 4
- El sobrepaso a escalón debe ser menor o igual a 0,43
- La constante de error a escalón necesitar ser la mínima que cumpla las condiciones a) y b).

Siguiendo los pasos usuales para la construcción aproximada del ζ_{gp} , se obtiene el que aparece en la fig 35.

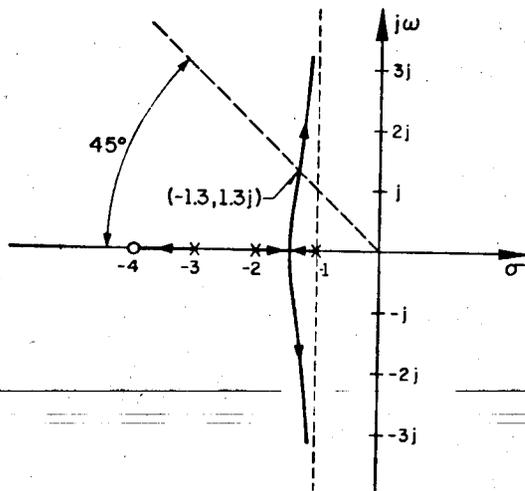


Fig 35 ζ_{gp} para $G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

Las intersecciones entre el ζ_{gp} y el lugar geométrico de los puntos con amortiguamiento $\xi = 0.707$ (correspondiente al sobrepaso deseado) ocurren $s_0 = \{-1.3 \pm 1.3j\}$ con un valor de $k = 1.2$. No hay intersección con la recta $\sigma = -1.0$, por ende, la condición a) es siempre satisfecha. Como para $k > 1.2$ el amortiguamiento de las raíces asociadas es menor que el deseado, el punto s_0 cumple con las metas del diseño. El polo restante, fácilmente obtenible dividiendo

$$\frac{p(s) + 1.2 q(s)}{[(s+1.3)^2 + 1.3^2]}$$

o mediante aproximaciones sucesivas en el intervalo $-4 < s < 3$, está en -3.233

La función de transferencia del sistema realimentado resulta

$$\frac{1.199 (s+4)}{[(s+1.3)^2 + 1.3^2] (s+3.233)}$$

Analizando esta función de transferencia es aparente que los polos complejos en $s_0 = -1.3 \pm 1.3j$ dominan la respuesta a escalón, tanto por encontrarse mucho más cerca del origen como por hallarse el polo remanente $(s + -3.233)$ mucho más próximo al cero $(s = -4)$, lo que prácticamente cancela su residuo. El análisis de la respuesta mediante polos dominante es adecuado.

En la fig 36 se muestra la respuesta a escalón del sistema para el valor de $k = 1.2$

En ambos ejemplos se tuvo como parámetro de diseño una ganancia, presentándose en ellos dos fenómenos:

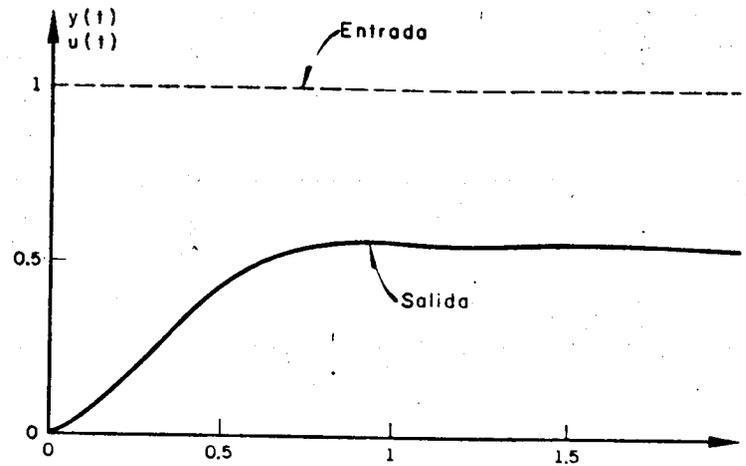


Fig 36 Respuesta a escalón para $k=1.2$

- i) El tiempo de asentamiento del sistema realimentado no pudo disminuirse arbitrariamente incrementando k , ya que en el lgp los polos dominantes no se desplazan hacia la izquierda al crecer la ganancia
- ii) Si se desea disminuir la constante de error a la velocidad, esto puede lograrse por un incremento en el sobrepaso a escalón, teniéndose así, un sistema poco estable.

Capítulo 9

***ANALISIS DE SISTEMAS POR MEDIO
DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA***

CAPITULO 9

RESPUESTA EN FRECUENCIA

1. <u>Introducción</u> -----	1
1.1 Ejemplo -----	2
2. <u>Respuesta permanente y transitoria</u> -----	4
3. <u>Propiedades de $H(j\omega)$</u> -----	11
3.1 Ejemplo -----	13
4. <u>Representaciones gráficas de $H(j\omega)$</u> -----	16
4.1 Ejemplo -----	17
5. <u>Traza polar</u> -----	19
5.1 Criterio de estabilidad de Nyquist. Preliminares	21
5.2 Puntos interiores y puntos exteriores -----	22
5.3 Ejemplo -----	24
5.4 Ejemplo -----	25
5.5 Ejemplo -----	26
5.7 Principio del argumento -----	28
5.8 Criterio de Nyquist -----	29a
6. <u>Margen de fase. Margen de ganancia</u> -----	35
6.1 Margen de fase -----	35
6.2 Margen de ganancia -----	36
7. <u>Trazas de Bode. Introducción</u> -----	36
7.1 Método para dibujar trazas de Bode -----	39
7.2 Funciones de fase mínima y no mínima -----	58
7.3 Determinación de la fase de un sistema a partir de su magnitud -----	59
8. <u>Círculos M y N</u> -----	62
8.1 Factor de resonancia. Ancho de banda -----	69
8.2 Obtención del factor de resonancia a partir de los círculos M y N -----	70

1. Introducción

Para el diseño y análisis de sistemas de control es necesario tener un modelo de la planta. Se ha visto en capítulos anteriores que cuando ésta es lineal e invariable con el tiempo y está en reposo, la respuesta a cualquier entrada puede ser obtenida a partir de $h(t)$, la respuesta a impulso del sistema, o de su matriz de transferencia $H(S)$. En la práctica, sin embargo, no es fácil obtener la función de transferencia $H(S)$. Tómese como ejemplo la situación en que se desea obtener la función de transferencia de un circuito que supuestamente funciona como un amplificador operacional. Aunque se conozca las "interconexiones" internas de las componentes del circuito (fig 1), es demasiado laborioso obtener $H(S)$; Se podría pensar entonces que experimentalmente es posible

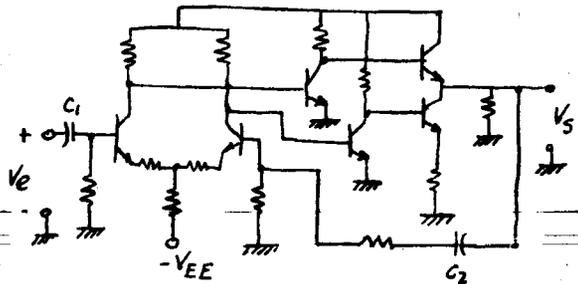


Fig1. Esquema de un amplificador operacional

obtener la respuesta a impulso $h(t)$, o la respuesta a escalón y de esta manera obtener un modelo del circuito que permitiera analizar los efectos que produciría la inserción de este circuito en un sistema de control. Esta alternativa, como se ilustrará en el siguiente ejemplo, no permite obtener experimentalmente una descripción fig1 de los sistemas.

1.1 Ejemplo

Considérense dos sistemas S_1 y S_2 , descritos por las funciones de transferencia $H_1(S)$ y $H_2(S)$ respectivamente.

$$H_1(s) = \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)} ; H_2(s) = \frac{2}{(.1s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

La respuesta a escalón de cada uno de estos sistemas

$$g_1(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)} \right] = 1 + \sqrt{2} e^{-t} \text{sen}(t - 135^\circ)$$

$$g_2(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{.1s + 1} \cdot \frac{2}{s^2 + 2s + 2} \right] = 1 - \frac{1}{4!} e^{-10t} + \frac{10}{\sqrt{64}} e^{-t} \text{sen}(t - 141^\circ)$$

Análiticamente las funciones $g_1(t)$ y $g_2(t)$ son distintas, sin embargo las gráficas correspondientes como puede apreciarse en la fig 2 son prácticamente iguales, así que ^{si} se determinase experimentalmente la respuesta a escalón del sistema S_2 y de acuerdo a un análisis para un sistema de segundo orden, se pensaría que la función de transferencia correspondiente fuera

$$H_2(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

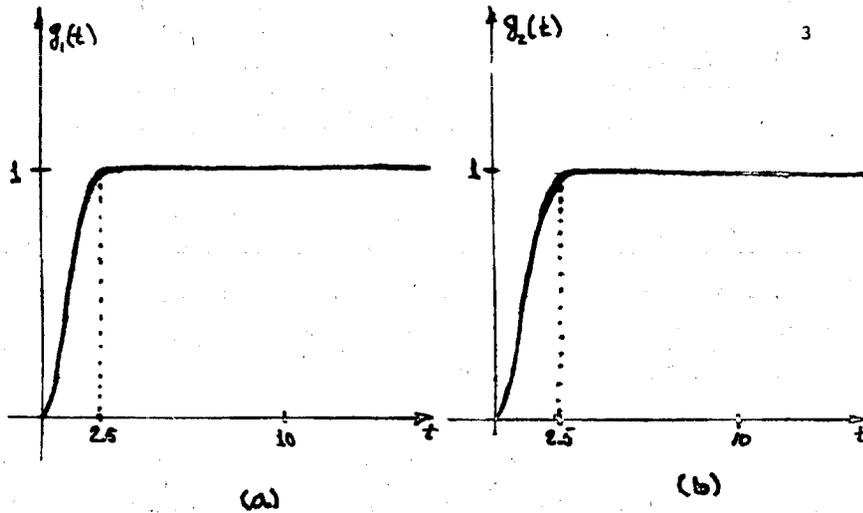


Fig 2 (a) respuesta escalón del sistema S_1
 (b) respuesta a escalón del sistema S_2

Por esta razón, podría concluirse que el sistema mostrado en la fig 3, es estable para cualquier

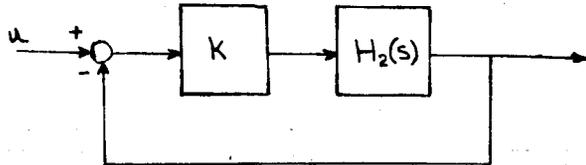


Fig. 3 Sistema realimentado unitariamente

valor de K , en particular $K=15$. Pero en verdad el sistema S_2 realimentado, como se propone, es inestable como puede comprobarse por el criterio de Routh aplicado al polinomio

$$s^3 + 12s^2 + 22s + 20(1+K) = s^3 + 12s^2 + 22s + 320$$

Por las razones anteriormente expuestas se presentará en este capítulo una manera alternativa de caracterizar a los sistemas estables, lineales e invariantes con el tiempo, que es particularmente adecuada para obtener modelos de dichos sistemas a partir de datos experimentales.

Esta caracterización se denomina respuesta en frecuencia del sistema y consiste en evaluar $H(S)$ a lo largo del eje imaginario $S=j\omega$, esto es $H(j\omega)$ para $0 \leq \omega < \infty$. El nombre respuesta en frecuencia se debe a que $H(j\omega_0)$ caracteriza la respuesta del sistema para $t \rightarrow \infty$ cuando la entrada es una senoide de frecuencia ω_0 .

La respuesta en frecuencia presenta las siguientes ventajas sobre las caracterizaciones estudiadas anteriormente:

- los modelos de la respuesta en frecuencia, obtenidos a partir de datos experimentales, son más fidedignos que los que se pueden obtener a partir de la respuesta a impulso o a escalón.
- la dimensión del sistema, tiene menos influencia en la complejidad de los análisis cuando se usa la respuesta en frecuencia que cuando se lleva a cabo en el dominio del tiempo.
- algunos análisis en el dominio de la frecuencia, tales como estabilidad, no requieren que las funciones de transferencia de las componentes del sistema sean funciones racionales.

2. Respuestas permanente y transitoria

Como se mencionó anteriormente, la respuesta en frecuencia recibe

su nombre porque un sistema estable, lineal e invariable con el tiempo, la salida debida a una entrada $\text{sen } \omega_0 t$, cuando $t \rightarrow \infty$ es

$$y(t) = |\hat{H}(j\omega_0)| \text{sen} [\omega_0 t + \angle \hat{H}(j\omega_0)]$$

en donde $\hat{H}(s)$ es la función de transferencia del sistema.

En el siguiente ejemplo se ilustra este resultado.

2.1 Ejemplo. Considérese un sistema lineal e invariable con el tiempo y en reposo en $t=0$, cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

y además $a > 0$

Cuando en $t=0$ se aplica la entrada $\text{sen } \omega_0 t$, de acuerdo a lo tratado en el capítulo 6, la salida $y(t)$ está dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \cdot L \{ \text{sen } \omega_0 t \} \right] \\ &= L^{-1} \left[\frac{1}{s+a} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

Por medio de la evaluación gráfica de residuos y de acuerdo al patrón de polos y ceros (fig 4)

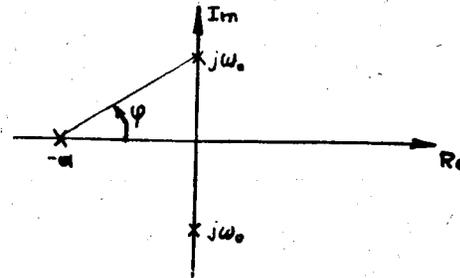


Fig 4. Patrón de polos y ceros de $\frac{1}{s+a} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

Se obtiene que

$$y(t) = \frac{\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} e^{-at} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \text{sen} (\omega_0 t - \varphi)$$

en donde $\tan \varphi = \frac{\omega_0}{a}$

Entonces la salida $y(t)$, se compone de la suma de dos términos:

$$y_1(t) = \frac{\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} e^{-at} \quad \text{y}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \text{sen} (\omega_0 t - \varphi)$$

al término $y_1(t)$ se le denomina respuesta transitoria porque como $a > 0$, $y_1(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$

al término $y_2(t)$ se le denomina respuesta permanente porque $y_2(t)$ es una función periódica.

En la figura 5 se ilustran las funciones $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y(t)$ y la entrada para el caso particular $a=1$ $\omega_0=2\pi$

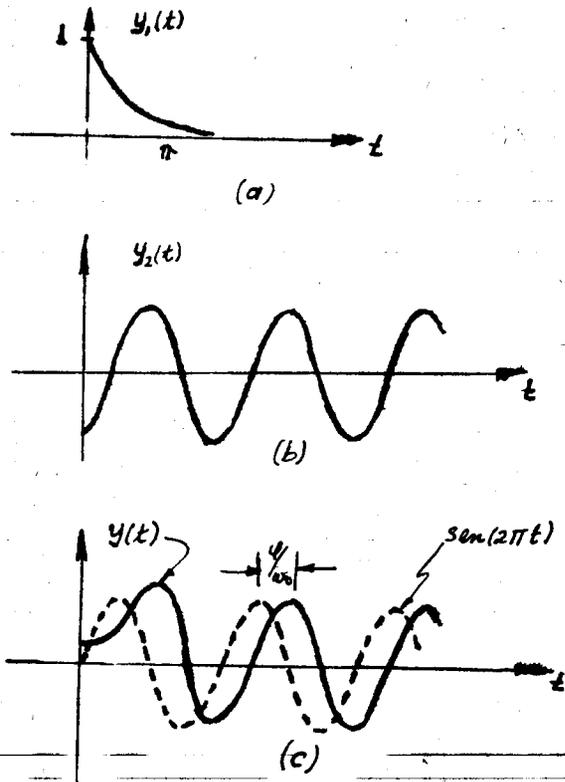


Fig. 5. (a) respuesta transitoria (b) respuesta permanente (c) respuesta global y entrada

Debe hacerse notar que el término permanente $y_2(t)$ es

$$|H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$$

porque

$$|H(j\omega_0)| = \left| \frac{1}{j\omega_0 + a} \right| = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}}$$

$$\angle H(j\omega_0) = \tan^{-1} \left(-\frac{\omega_0}{a} \right)$$

Las consideraciones anteriores pueden extenderse al caso general en que se cuenta con un sistema lineal, invariable, estable y en reposo al cual se aplica una entrada $\sin \omega_0 t$.

La salida $y(t)$, está dada por la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t h(\sigma) \sin \omega_0(t-\sigma) d\sigma$$

y de acuerdo a la identidad trigonométrica

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

la última integral puede expresarse como

$$y(t) = \int_0^t h(\sigma) [\sin \omega_0 t \cos \omega_0 \sigma - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \sigma] d\sigma$$

$$= \left[\int_0^t h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma \right] \sin w_0 t - \left[\int_0^t h(\sigma) \sin w_0 \sigma d\sigma \right] \cos w_0 t$$

y expresando la integral de cero a t como la diferencia entre la integral de 0 a ∞ y de t a ∞ , se obtiene

$$y(t) = \left[\int_0^{\infty} h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma \right] \sin w_0 t - \left[\int_0^{\infty} h(\sigma) \sin w_0 \sigma d\sigma \right] \cos w_0 t \\ + \left[\int_t^{\infty} h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma \right] \sin w_0 t - \left[\int_t^{\infty} h(\sigma) \sin w_0 \sigma d\sigma \right] \cos w_0 t$$

Cada uno de los dos primeros términos representa una función periódica, mientras que cada uno de los dos últimos términos, tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$ porque

$$\left| \int_t^{\infty} h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma \right| \leq \int_t^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma$$

y como la respuesta a impulso de los sistemas estables es absolutamente integrable* esto es,

$$\int_0^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma < \infty$$

se tendrá que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} |h(\sigma)| d\sigma = 0$$

* Véase capítulo 7

De esta forma la salida puede expresarse como la suma de dos términos

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

en donde

$$y_1(t) = \left[\int_0^{\infty} h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma \right] \sin w_0 t - \left[\int_0^{\infty} h(\sigma) \sin w_0 \sigma d\sigma \right] \cos w_0 t$$

es una función periódica y en particular sinusoidal y

$$y_2(t) = \left[\int_t^{\infty} h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma \right] \sin w_0 t - \left[\int_t^{\infty} h(\sigma) \sin w_0 \sigma d\sigma \right] \cos w_0 t$$

que tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$

El primer término se denomina respuesta permanente y el segundo respuesta transitoria.

Examinando más detalladamente la respuesta permanente, debe hacerse notar que

$$\int_0^{\infty} h(\sigma) \cos w_0 \sigma d\sigma = \text{Real} \left[\int_0^{\infty} e^{-jw_0 t} h(\sigma) d\sigma \right] = \text{Re} [H(jw_0)] \\ - \int_0^{\infty} h(\sigma) \sin w_0 \sigma d\sigma = \text{Imaginaria} \left[\int_0^{\infty} e^{-jw_0 t} h(\sigma) d\sigma \right] \\ = \text{Im} [H(jw_0)]$$

o sea que

$$y_1(t) = \text{respuesta permanente} = \text{Real} [H(jw_0)] \cos w_0 t$$

$$+ \operatorname{Im} [H(j\omega_0)] \operatorname{sen} \omega_0 t$$

$$= |H(j\omega)| \operatorname{sen} [\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$$

En vista del resultado anterior, dado un sistema lineal, e invariable aplicándole una entrada $\operatorname{sen} \omega t$ puede determinarse experimentalmente $|H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ esto es $H(j\omega)$. De esta manera para cada valor de ω , se determinan dos parámetros del sistema: La magnitud y el ángulo de la función de transferencia evaluada en $s = j\omega$.

Lo que hace especialmente útil a la función $H(j\omega)$ es que de ella se puede determinar la respuesta a impulso, o sea que $H(j\omega)$ caracteriza completamente al sistema como se verá a continuación

3. Propiedades de $H(j\omega)$

La respuesta en frecuencia de un sistema estable, esto es, su función de transferencia evaluada en el eje imaginario, contiene toda la información pertinente al sistema. Para ver esto basta probar que la respuesta a impulso $h(t)$ puede calcularse a partir de $H(j\omega)$.

En el capítulo 7 se vio que un sistema era estable si y sólo si su respuesta a impulso era absolutamente integrable, esto es,

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

esta última relación implica que la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |h(t)| dt < \infty$$

para $\sigma \geq 0$ y por ello el eje imaginario pertenece a la región de convergencia de la transformada de Laplace. Siendo este el caso, la transformada inversa de Laplace de $H(s)$, $L^{-1}\{H(s)\}$ (ver apéndice 1), puede definirse como

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} H(j\omega) d\omega$$

y por lo tanto, basta con conocer $H(j\omega)$ ($H(s)$ evaluada en el eje imaginario) para caracterizar al sistema.

La fórmula anterior permite obtener la función del tiempo que tiene una transformada $H(j\omega)$ y existen métodos numéricos eficientes para llevar a cabo la integración indicada. Sin embargo el estudio de los sistemas a través de la función de transferencia evaluada en el eje imaginario permite llegar a diseños de sistemas de control sin necesidad de utilizar explícitamente la respuesta a impulso y en la práctica es más común dar especificaciones en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo. Los índices de desempeño que serán estudiados más adelante están basados fundamentalmente en criterios de estabilidad.

El valor de $H(j\omega)$ para una " ω_1 " fija es un número complejo del tipo

$$H(j\omega_1) = X(\omega_1) + jy(\omega_1) \quad (1)$$

en donde $X(\omega) = \text{Re} [H(j\omega)]$, $Y(\omega) = \text{Im} [H(j\omega)]$,

La respuesta en frecuencia, $H(j\omega)$, se suele representar tanto en su forma cartesiana (1), como en la forma polar (2)

$$h(j\omega) = M(\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad (2)$$

en la que la magnitud $M(\omega)$ viene dada por

$$M(\omega) = \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)}$$

y el ángulo θ , llamado "fase" es igual a

$$\theta(\omega) = \text{tg}^{-1}(Y(\omega)/X(\omega))$$

Para comprobar la equivalencia entre las representaciones (1) y (2), basta recordar que

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \text{sen} \theta$$

Notación: El número complejo $Me^{j\theta}$ como se hizo en el capítulo 6 se representará como $M \angle \theta$.

Veamos ahora un ejemplo de una representación ^{de un sistema} por medio de la respuesta en frecuencia.

3. / Ejemplo

Sea la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

por lo tanto

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

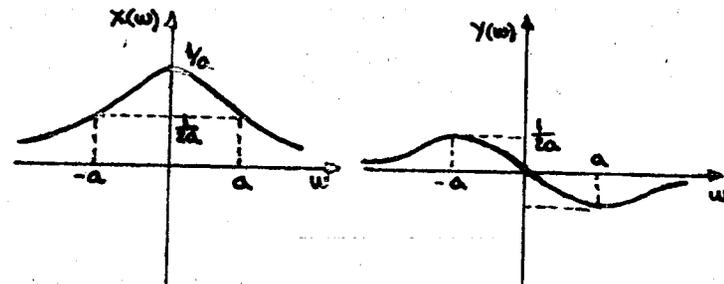
y entonces las partes reales e imaginarias de la respuesta en frecuencia resultan ser

$$X(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}, \quad Y(\omega) = \frac{-\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Aplicando las fórmulas correspondientes; la magnitud M , y el ángulo θ son:

$$M(\omega) = \frac{1}{a^2 + \omega^2}, \quad \theta(\omega) = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Las gráficas de $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $M(\omega)$, $\theta(\omega)$ vs. ω se muestran en la figura 6.



(a)

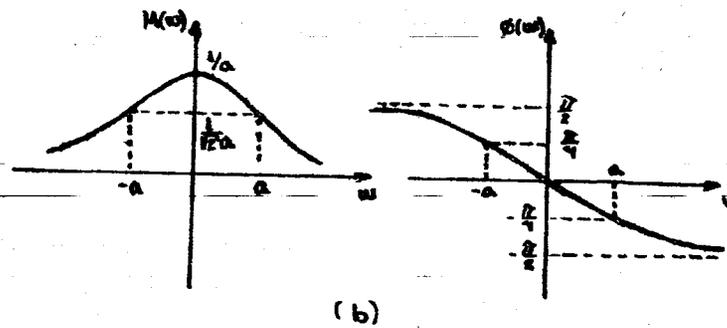


Fig 6. Gráficas de la respuesta en frecuencia de $H(s) = \frac{1}{s+a}$ (a) Forma cartesiana (b) forma polar

De la figura anterior se pueden apreciar ciertas propiedades de simetría, que son válidas para cualquier sistema cuya respuesta a impulso $h(t)$ sea una función real:

$$i) \begin{cases} Y(\omega) = -Y(-\omega) \\ X(\omega) = X(-\omega) \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} \theta(\omega) = -\theta(-\omega) \\ M(\omega) = M(-\omega) \end{cases}$$

Solamente demostraremos la propiedad de simetría i), ya que la propiedad ii) puede ser obtenida fácilmente expresando $M(\omega)$ y $\theta(\omega)$ en función de $X(\omega)$ y $Y(\omega)$

Para la demostración de i) basta evaluar $H(j\omega)$, lo que se hará utilizando la definición de la transformada de Laplace.

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} h(t) dt = \int_0^{\infty} (\cos \omega t - j \sin \omega t) h(t) dt =$$

Apéndice A

TRANSFORMADA DE LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f(t)\}$$

A.1. Introducción

La transformada de Laplace es una de las herramientas más prácticas en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes. Su utilidad se manifiesta al permitir resolverlas por métodos meramente algebraicos.

2.1 Definición

La transformada de Laplace convierte una función del tiempo, $f(t)$, en otra función $\hat{f}(s)$ donde s es una variable compleja.

Por ejemplo, la función $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ e^{-t} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

Se transforma, como se verá en secciones subsiguientes, en una nueva función, $\hat{f}(s) = \frac{1}{s+1}$

La variable compleja s es de la forma $s = \sigma + j\omega$, donde $j = \sqrt{-1}$, y tanto σ como ω son números reales. La parte real de s es σ y se denota como $\text{Re}(s)$. La parte imaginaria de s es $j\omega$ la cual se designa como $\text{Im}(s)$.

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ se representa como

y se define mediante la integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

En el texto se hará referencia a $f(t)$ como la función expresada "en el dominio del tiempo", y a $\hat{f}(s)$ como la función expresada "en el dominio de la frecuencia".

A.2.1 Observaciones

- i) La integral (1) se efectúa entre límites definidos, por lo tanto la variable real t desaparece completamente quedando la integral en función de la variable s solamente.
- ii) La integral (1) considera únicamente la parte de $f(t)$ definida en el intervalo $t \geq 0$. Por ello, dos funciones idénticas en este intervalo tendrán la misma transformada de Laplace. Para evitar ambigüedades al respecto, se supondrá que las funciones bajo estudio valen cero para $t < 0$. Esto, aunque limita el campo de aplicación será suficiente para nuestros propósitos, pues en la solución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales en $t=0$ se requieren únicamente funciones que estén definidas para $t \geq 0$.

A.2.2 Condiciones de existencia de la transformada de Laplace

Se sabe de la existencia de funciones como t^t , $e^{(t^2)}$, $e^{(e^t)}$ que no tienen transformada de Laplace, por lo que surge la pregunta: ¿Que clase de funciones la tienen?

Puede responderse parcialmente a través de una condición suficiente, esto es, una que al ser cumplida garantiza la existencia de la transformada de la función. La condición es:*

"si existe una $\delta > 0$ tal que se cumpla

$$\int_0^{\infty} |\delta(t)| e^{-\delta t} dt < \infty \quad (2)$$

entonces existe una función $\hat{\delta}(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}$

Se llamará región de convergencia a la parte del plano complejo dada por $\text{Re}(s) > \delta$

La mayoría de las funciones de interés en la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes cumple la condición (2) para algún valor de δ . Cuando este es el caso, la integral (1) existe y $\hat{\delta}(s)$ es continua y posee todo tipo de derivadas en la región de convergencia. Se volverá a hablar de esta región al tratar acerca de la transformada inversa de Laplace. Fuera de ahí, se supondrá que (2) converge para algún valor de δ .

* Cabe hacer notar que dicha condición no es necesaria, es decir, que hay funciones para las que esta no se cumple, y aun así tienen transformada de Laplace.

Cuando $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ existe, puede definirse también como un límite

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \hat{\delta}(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\delta}_T(s) \quad (3)$$

donde $\hat{\delta}_T(s)$ es la integral propia

$$\hat{\delta}_T(s) = \int_0^T e^{-st} \delta(t) dt \quad (4)$$

La función $\hat{\delta}_T(s)$ converge punto a punto (junto con sus derivadas), hacia $\hat{\delta}(s)$ conforme T tiende a infinito.

A.2.3 Transformada de Laplace de algunas funciones elementales

Ejemplo 1. Escalón unitario

Considérese un escalón unitario, denotado por $u_{-1}(t)$ (fig A.1)

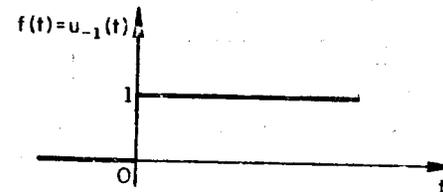


Fig A.1. Función escalón unitario

Esta función, que será usada frecuentemente, se define formalmente como:

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

Utilizando la definición dada por la ec 4, la transformada de Laplace de $u_{-j}(t)$ es

$$\mathcal{L}\{u_{-j}(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} u_{-j}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-sT} - 1}{-s}$$

Puesto que s es una variable compleja: $s = \sigma + j\omega$, entonces $e^{-sT} = e^{-\sigma T} e^{-j\omega T} = e^{-\sigma T} \{\cos \omega T - j \sin \omega T\}$. Cuando $\sigma > 0$ (o $\text{Re}(s) < 0$), se tiene que $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} = 0$. Así pues

$$\mathcal{L}\{u_{-j}(t)\} = \frac{1}{s} \text{ para } \text{Re}(s) > 0$$

Ejemplo 2. Exponencial

$$\text{sea } f(t) = \begin{cases} e^{kt} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t \leq 0 \end{cases}$$

donde k es un número complejo

Utilizando la definición de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} e^{kt} dt$$

Si se toma una s tal que $\text{Re}(s-k) > 0$ (o sea $\text{Re}(s) > \text{Re}(k)$), se tiene que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(s-k)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left. \frac{-1}{(s-k)} e^{-(s-k)t} \right|_0^T$$

utilizando un procedimiento similar al del ejemplo anterior, resulta que

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$$

A.3 Propiedades de la transformada de Laplace

A continuación se presentan algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, que serán de gran utilidad tanto para adquirir un conocimiento más profundo sobre las relaciones de los dominios del tiempo y de la frecuencia, como para tener herramientas adecuadas para la solución de ecuaciones diferenciales.

A.3.1 Linealidad

La transformada de Laplace es lineal; esto es para cualesquiera constantes a_1, a_2 , y cualesquiera funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ que posean transformada de Laplace (dadas por $\hat{f}_1(s)$ y $\hat{f}_2(s)$), se cumple que

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} =$$

$$= a_1 \hat{f}_1(s) + a_2 \hat{f}_2(s) \quad (5)$$

Esta propiedad proviene de la linealidad de la integración necesaria para valorar (1).

Ejemplo 3. Transformada de un coseno

Es muy fácil obtener la transformada de esta función aplicando la propiedad de linealidad y el resultado del ejemplo 2.

$$\text{Por el teorema de Euler, } \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$$

y aprovechando la linealidad de la transformada

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\} \\ &= \frac{1}{2(\delta - j\omega)} + \frac{1}{2(\delta + j\omega)} = \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

o sea

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{\delta}{\delta^2 + \omega^2} \quad (6)$$

De un modo idéntico puede probarse que

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{\delta^2 + \omega^2}$$

A.3.2 Desplazamiento

Si $\hat{f}(\delta)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, ¿cual es la transformada de Laplace $\hat{f}(t-T)$? esto es, de la función desplazada a lo largo del eje del tiempo, tal como lo indica la fig A.2

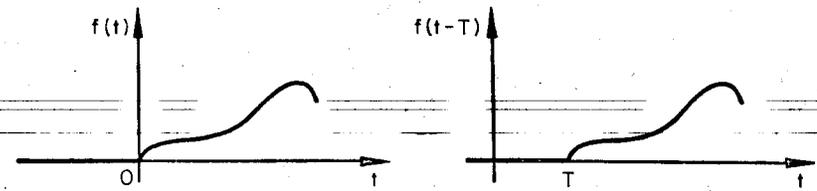


Fig A.2. Gráfica de $f(t)$ y de $f(t-T)$

Nótese que $f(t-T)$ es cero cuando $0 < t < T$ por la suposición que se hizo al principio: $f(t) = 0$ para $t < 0$

Por aplicación directa de la definición de transformada de Laplace, se tiene

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = \int_0^{\infty} f(t-T)e^{-\delta t} dt$$

Si se efectúa el cambio de variable de integración $\tau = t - T$, se tendrá

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = \int_{-T}^{\infty} f(\tau)e^{-\delta(\tau+T)} d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\delta(\tau+T)} d\tau$$

El límite inferior de la última integral se cambio de $-T$ a cero debido a que $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, por lo cual puede procederse a realizar la integración

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-T)\} &= \int_0^{\infty} e^{-\delta(\tau+T)} f(\tau) d\tau = e^{-\delta T} \int_0^{\infty} e^{-\delta\tau} f(\tau) d\tau = e^{-\delta T} \hat{f}(\delta) \\ \mathcal{L}\{f(t-T)\} &= e^{-\delta T} \hat{f}(\delta) \end{aligned} \quad (7)$$

Ejemplo 4.

Para encontrar la transformada de Laplace de la función definida por (fig A.3)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0, \text{ para } t > T \\ 1 & \text{para } 0 < t < T \end{cases}$$

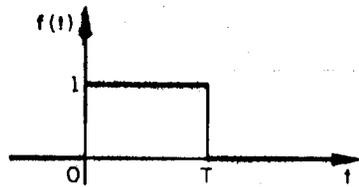


Fig A.3 Gráfica de una función pulso

se utilizará la propiedad de desplazamiento. En la fig A.4 puede verse que la función $f(t)$ esta dada por

$$f(t) = u_{-1}(t) - u_{-1}(t-T)$$

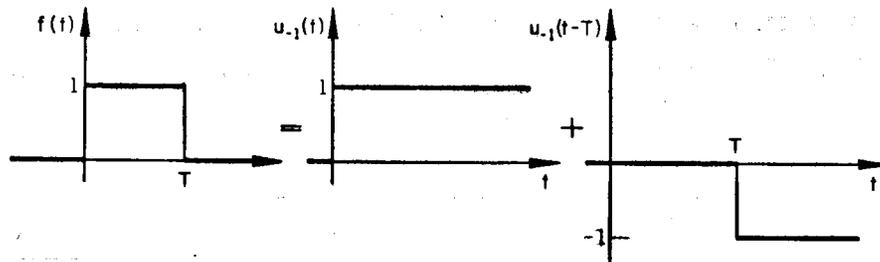


Fig A.4 Obtención de la función pulso a partir de dos escalones

Utilizando la linealidad de la transformada de Laplace, se tiene que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} - \mathcal{L}\{u_{-1}(t-T)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

A.3.3. Transformada de $e^{kt}f(t)$

Si se conoce $\hat{f}(s)$, la transformada de Laplace de $f(t)$, es sencillo obtener la transformada de $e^{kt}f(t)$, ya que es $\hat{f}(s-k)$

Para demostrar esto, nótese que por definición

$$\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{kt}f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-k)t}f(t)dt = \hat{f}(s-k)$$

o sea

$$\mathcal{L}\{e^{kt}f(t)\} = \hat{f}(s-k) \quad (9)$$

Queremos hacer notar al lector la semejanza que existe entre las ecs 9 y 7

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}\hat{f}(s) \quad (7)$$

Puede verse en la ec 9 que multiplicando $f(t)$ por e^{kt} , en el dominio del tiempo, equivale a desplazar la función k unidades en el dominio de la frecuencia. Asimismo, la ec 7 indica que multiplicar por e^{-sT} en el dominio de la frecuencia equivale a desplazar la función T unidades en el dominio del tiempo.

De lo anterior puede intuirse que los dominios del tiempo y de la frecuencia son "duales", es decir, a grosso modo, que existe cierto paralelismo en los efectos de una operación en un dominio con respecto al otro. En las páginas subsecuentes se encontrarán ejemplos que reforzarán esta idea.

A continuación se incluye un ejemplo que indica la utilidad de la propiedad A.3.3.

Ejemplo 5.

Se dedujo que la transformada de e^{kt} era $\frac{1}{s-k}$. Sin embargo también puede deducirse ese resultado obteniendo la transformada de $e^{kt}u_{-j}(t)$. Usando la ec 9 resulta

$$\mathcal{L}[e^{kt}u_{-j}(t)] = \mathcal{L}\{u_{-j}(s, j)\} \Big|_{s, j=s-k} = \frac{1}{s, j} \Big|_{s, j=s-k} = \frac{1}{s-k}$$

A.3.4. Multiplicación por potencias de t .

A continuación se indagará la relación entre $\hat{f}(s)$ (la transformada de $f(t)$) y la de $tf(t)$. Para ello, debe observarse que

$$te^{-st} f(t) = -\frac{d}{ds} (e^{-st} f(t))$$

de ahí que

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = \int_0^{\infty} tf(t)e^{-st} dt = -\int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt$$

Como los límites de la última integral no dependen de s ,

puede extraerse $\frac{d}{ds}$ de la integral, quedando

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = -\frac{d}{ds} \hat{f}(s) \quad (10)$$

Aplicando repetidamente este resultado puede obtenerse la transformada de Laplace de $t^n f(t)$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s) \quad (11)$$

Ejemplo 6. Función rampa

Considérese la función definida por

$$u_{-2}(t) = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

la cual se conoce como rampa unitaria, muy frecuente por cierto en los problemas de control. Para obtener su transformada de Laplace puede utilizarse la propiedad vista anteriormente, esto es

$$\mathcal{L}\{u_{-2}(t)\} = \mathcal{L}\{tu_{-1}(t)\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \quad (12)$$

A.3.5 Transformada de $\frac{d}{dt} f(t)$

Se desea evaluar

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df(t)}{dt} dt$$

Para calcular dicha integral se emplea la fórmula de integración por partes:

$$\int_0^{\infty} u dv = uv \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v du$$

con $u = e^{-st}$; $du = -s e^{-st} dt$, $dv = \frac{d}{dt} f(t) dt$; $v = f(t)$

obteniendo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = -f(0) + s \hat{f}(s)$$

ya que al seleccionar adecuadamente $\text{Re}(s)$ puede lograrse que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$$

Entonces

luego

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = s \hat{f}(s) - f(0) \quad (13)$$

Si se aplica n veces la regla anterior, se establecerá la fórmula general como

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n \hat{f}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0)$$

donde $f^{(j)}(0) = \left. \frac{d^j}{dt^j} f(t) \right|_{t=0}$

Cuando $f(t)$ y sus $(n-1)$ primeras derivadas son cero en la expresión anterior se reduce a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n \hat{f}(s) \quad (14)$$

Se recomienda que el lector note la evidente dualidad entre la ecuación anterior y la ecuación número 11.

$$t^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \hat{f}(s) \quad (11)$$

Ejemplo 7. Transformada de la función coseno

La transformada de $\cos \omega t \cdot u_{-1}(t)$ puede obtenerse directamente como en el caso de la función seno, aun cuando también es factible obtenerla utilizando la propiedad anterior. Si $f(t)$ se define como $f(t) = \text{sen } \omega t \cdot u_{-1}(t)$ entonces

$$f(s) = \mathcal{L}\{\text{sen } \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (15)$$

La transformada de Laplace de la función coseno se obtiene en la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t\right\} = \frac{1}{\omega} [s \hat{f}(s) - f(0)] = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - 0\right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (16) \end{aligned}$$

Ejemplo 8.

Se tiene la ecuación diferencial

$$y'' + y = 0. \quad (16)$$

con las condiciones iniciales $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Transformándola mediante la expresión 14 y la propiedad de linealidad se obtiene

$$\mathcal{L}(\ddot{y}+y) = \mathcal{L}(\ddot{y}) + \mathcal{L}(y) = s^2 \hat{y}(s) - sy(0) - y'(0) + \hat{y}(s) = 0$$

Agrupando y factorizando resulta

$$(s^2+1) \hat{y}(s) = s y(0) + \hat{y}(0)$$

Ahora, sustituyendo $y(0)$, $y'(0)$ por su valor, queda

$$\hat{y}(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1}$$

Recordando las ecs 6 y 15, se tiene

$$y(t) = \cos t + 2 \operatorname{sent}$$

A.3.6 Transformada de $\int_0^t f(\tau) d\tau$

En el párrafo anterior se relacionó $\hat{f}(s)$, la transformada de Laplace de $f(t)$, con la transformada de $\frac{df(t)}{dt}$. Aquí se verá la relación entre la transformada de una función y la de su integral

Hágase

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Al respecto, nótese que

$$\frac{dg(t)}{dt} = f(t) \quad (17)$$

y además que

$$g(0) = 0$$

transformando los dos miembros de la ec 17

$$s \hat{g}(s) - g(0) = \hat{f}(s)$$

y como $g(0) = 0$, resulta que

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

de lo cual se concluye

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{\hat{f}(s)}{s} \quad (18)$$

Aplicando la ec 18 repetidas veces puede deducirse que

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1} \dots d\tau_1 dt\right\} = \frac{\hat{f}(s)}{s^n} \quad (19)$$

Ejemplo 9.

a) Es posible obtener la transformada de Laplace de

$\int_0^t e^{-\tau} d\tau$, utilizando la propiedad anterior. Recordando que

$$\mathcal{L}(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}, \text{ luego } \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-\tau} d\tau\right) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)}$$

b) Puesto que la integral de un escalón $u_{-1}(t)$ es una rampa $tu_{-1}(t)$, al dividir la transformada de $u_{-1}(t)$ por s se tendrá la transformada de la rampa unitaria que es $\frac{1}{s^2}$

A.3.7 Convolución

La convolución es una operación frecuentemente utilizada en el análisis de sistemas lineales e invariables con el tiempo.

La convolución toma un par de funciones $f(t)$ y $g(t)$ (ambas con valor cero para tiempos negativos) y las transforma en otra función $h(t)$, definida por

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (20)$$

La integral 20 suele también indicarse como

$$h(t) = g(t) * f(t)$$

En general no es fácil obtener la convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$; sin embargo, la operación de convolución en el dominio del tiempo, corresponde en el de la frecuencia a la multiplicación de las transformadas de Laplace $f(s)$ y $g(s)$

Más exactamente, se probará que si $f(t)$ y $g(t)$ son dos funciones del tiempo, y $h(t)$ es su convolución

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

entonces

$$\hat{h}(s) = \hat{g}(s) \hat{f}(s)$$

donde $\hat{h}(s)$, $\hat{g}(s)$ y $\hat{f}(s)$ son las transformadas de $h(t)$, $g(t)$ y $f(t)$, respectivamente.

Prueba:

Se desea demostrar que

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau\right) = \hat{g}(s) \hat{f}(s)$$

Aplicáse la definición de transformada de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau \right) dt = \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} g(\tau) f(t-\tau) d\tau dt \end{aligned} \quad (22)$$

e introduzcanse dos nuevas variables de integración

$$\begin{aligned} u + v &= t \\ u &= \tau \end{aligned} \quad (23)$$

ha de notarse que $dt = du + dv$.

La manera como cambian las regiones de integración puede verse en la fig A.5.

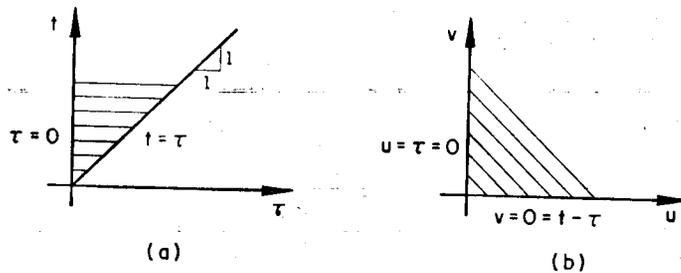


Fig A.5 a y b. Regiones de integración para las variables (t, τ) y (u, v)

Al introducir las nuevas variables dadas por la ec 23 en la ec número 22, queda

$$\int_0^\infty \int_0^t e^{-st} g(\tau) f(t-\tau) dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} g(u) f(v) du dv \quad (24)$$

Los límites de integración de la 22 cambian ambos de cero a infinito para cubrir la región señalada en la fig A.5b

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-su} g(u) e^{-sv} f(v) du dv \quad (25)$$

rearrreglando el orden de integración de la ec 25, queda

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^\infty e^{-su} g(u) du \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv = \hat{g}(s) \hat{f}(s) \quad (26)$$

A.3.8. Teorema del valor inicial

Muchas veces es importante conocer el valor inicial de la función $f(t)$ (cuando $t=0$), partiendo del conocimiento de $\hat{f}(s)$, la transformada de $f(t)$. La manera común de hacer esto es encontrar la $f(t)$ que corresponde a $\hat{f}(s)$ y después evaluar la función $f(t)$ cuando $t=0$. Sin embargo, existe una forma más rápida de conocer $f(0)$. Para ello supóngase que $f(t)$ es analítica, esto es todas sus derivadas existen; por tanto puede expresarse como una serie de Taylor. En estas condiciones se tendrá

$$f(t) = \left[a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \dots \right] u_{-1}(t)$$

Lógicamente $f(0) = a_0$. Este es el valor que se debe obtener de $\hat{f}(s)$. Para lograrlo solo hace falta observar que la transformada de $f(t)$, o sea $\hat{f}(s)$ puede escribirse como

$$\hat{f}(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \dots$$

Si se multiplican los dos miembros de la expresión anterior por s , se obtiene

$$s \hat{f}(s) = a_0 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} + \dots$$

y si se hace que $s \rightarrow \infty$, entonces se tiene la igualdad

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s) = a_0 \quad (27)$$

que se conoce como *teorema del valor inicial*.

Si también interesa conocer el valor de la derivada de $f(t)$ cuando $t = 0+$, puede derivarse y obtenerse

$$\frac{d}{dt} f(t) = a_1 + \frac{2a_2 t}{2!} + \frac{3a_3 t^2}{3!} + \dots$$

estando dado su valor en $t = 0+$ por

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=0+} = a_1$$

siendo a_1 el valor inicial de la derivada de $f(t)$.

Para obtener dicho valor a partir de la transformada de Laplace de $f(t)$, se multiplica $(s \hat{f}(s) - a_0)$, o sea la transformada de la derivada de $f(t)$, por s a fin de obtener

$$s(s \hat{f}(s) - a_0) = a_1 + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{s^2} + \dots$$

y si se hace que $s \rightarrow \infty$ en el límite, se tendrá

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s(s \hat{f}(s) - a_0) = a_1 = \left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=0+} \quad (28)$$

Procediendo de manera similar, se podría obtener el valor inicial de todas y cada una de las derivadas de $f(t)$ sin necesidad de evaluar explícitamente $f(t)$. Esta es precisamente la importancia del teorema anterior.

Ejemplo 10.

Considérese el siguiente par

$$f(t) = e^{-kt} \operatorname{sen} \omega t; \quad \hat{f}(s) = \frac{\omega}{(s+k)^2 + \omega^2}$$

el límite de $f(t)$ cuando $t = 0+$, es:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} e^{-kt} \operatorname{sen} \omega t = 0$$

Si se utiliza el teorema del valor inicial se puede encontrar dicho límite aunque no se conozca $f(t)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \hat{f}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\omega}{(s+k)^2 + \omega^2} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\omega}{s + 2k + \frac{k^2}{s} + \frac{\omega^2}{s}} = \frac{\omega}{\infty} = 0$$

que es el mismo resultado que se obtuvo anteriormente.

A.3.9 Teorema del valor final

Supóngase ahora que interesa conocer el valor final de $f(t)$

esto es $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

Para ello basta con observar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) \quad (29)$$

además

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\sigma) d\sigma &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(\sigma) e^{-\delta \sigma} d\sigma \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [\delta f(\delta) - f(0)] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta f(\delta) - f(0) \quad (30) \end{aligned}$$

De las ecs 29 y 30 se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta f(\delta)$$

y a esta última relación se le conoce con el nombre de *teorema del valor final*.

El teorema anterior solo tiene aplicación en el caso de que

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ exista y sea finito

Ejemplo 11

Considérese

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

entonces

$$f(\delta) = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta+1} = \frac{1}{\delta(\delta+1)}$$

$$\text{Y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta f(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta+1} = 1$$

lo cual puede comprobarse directamente obteniendo el $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$

Considérese ahora $f(t) = e^t$ cuyo $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ no está definido

En este caso el teorema del valor final da un resultado erróneo que predice que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta f(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\delta-1} = 0$, (e^t tiende a infinito conforme t aumenta).

A.4. Transformada inversa de Laplace

El problema que se tratará en esta sección es encontrar una función de tiempo $f(t)$ de la cual se conoce su transformada de Laplace.

Formalmente, la transformada inversa de Laplace está definida con la ecuación

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{f}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \tilde{f}(s) e^{st} ds \quad (31)$$

donde σ_0 es un número real que está dentro de la región de convergencia definida al principio de la sec A.1.3. La trayectoria de integración de la ec 31 puede verse en la fig A.6

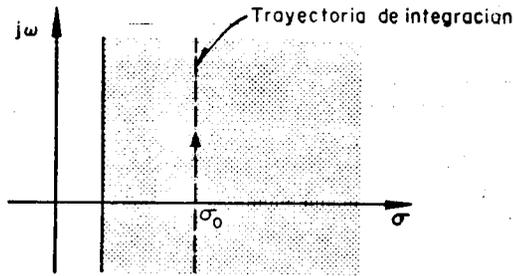


Fig A.6. Trayectoria de integración de la transformada inversa de Laplace

La integral 30 se puede evaluar en forma cerrada por medio de tablas, o calcularse con computadora digital.

Se examinará aquí un método para obtener la transformada inversa de cierto tipo de funciones que ocurren a menudo en la práctica y que son las dadas por cocientes de polinomios. El punto de vista que se adoptará es el siguiente: si $\hat{f}(s)$ puede expresarse como una suma de términos de los cuales se conoce la función del tiempo que les corresponde, entonces debido a la linealidad de la transformada de Laplace, se podrá conocer la función del tiempo de la cual $\hat{f}(s)$ es transformada de Laplace.

Ejemplo 12

Si $\hat{f}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+2)^2}$, entonces debido a que

$$\mathcal{L}(u_{-1}(t)) = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}(e^{-t}u_{-1}(t)) = \frac{1}{s+1}$$

$$\mathcal{L}(te^{-2t}u_{-1}(t)) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

por la propiedad de linealidad se tiene que

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{f}(s)] = \{1 + e^{-t} + te^{-2t}\}u_{-1}(t)$$

A.4.1 Método de fracciones parciales

El método que será utilizado para obtener la transformada inversa de Laplace es el que se denomina de *fracciones parciales*. Al respecto, supóngase que

$$\hat{f}(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$$

donde $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios de grados n y m respectivamente, siendo $n > m$. Además considérese que la n raíces de $p(s)$ son distintas; en tal caso

$$p(s) = (s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)$$

En las condiciones anteriores es posible escribir la siguiente

igualdad

$$\hat{f}(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_n)} = \frac{A_1}{(s-a_1)} + \frac{A_2}{(s-a_2)} + \dots + \frac{A_n}{(s-a_n)}$$

El problema entonces se reduce a determinar los valores de A_1, A_2, \dots, A_n llamados *residuos*, a fin de que la igualdad anterior se cumpla.

Uno de los métodos para determinar estos residuos es: Si se multiplica la igualdad anterior por $(s-a_1)$, se obtendrá

$$(s-a_1) \hat{f}(s) = \frac{(s-a_1)q(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\dots(s-a_1)\dots(s-a_n)} = A_1 \frac{(s-a_1)}{(s-a_2)} + A_2 \frac{(s-a_1)}{(s-a_2)} + \dots + A_n \frac{(s-a_1)}{(s-a_n)}$$

y si se obtiene el límite de $(s-a_1) \hat{f}(s)$ cuando $s \rightarrow a_1$, resulta

$$\lim_{s \rightarrow a_1} (s-a_1) \hat{f}(s) = A_1 \quad (32)$$

por supuesto, lo anterior se puede hacer para cualquier valor de i

Ejemplo 13.

Considérese la siguiente $\hat{f}(s)$

$$\hat{f}(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

factorizando el denominador de $\hat{f}(s)$ se tiene que

$$\hat{f}(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$$

pudiéndose escribir

$$\hat{f}(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}$$

Los valores de A_1 y A_2 están dados por la ec 31:

$$A_1 = (s+1) \hat{f}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{2(-1)+3}{(-1+2)} = 1$$

$$A_2 = (s+2) \hat{f}(s) \Big|_{s=-2} = \frac{2(-2)+3}{(-2+1)} = 1$$

por tanto

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

correspondiéndole en el tiempo la función

$$f(t) = (e^{-t} + e^{-2t}) u_{-1}(t)$$

A.4.1.1. Raíces repetidas

En el caso de que $p(s)$ tenga raíces repetidas se procede de la siguiente manera: supóngase que una de ellas, a_1 , está repetida λ veces, esto es

$$p(s) = (s-a_1)^\lambda (s-a_2)(s-a_3)\dots(s-a_{n-\lambda+1})$$

la expansión en fracciones toma entonces forma

$$\hat{f}(s) = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{B_1}{(s-a_1)} + \frac{B_2}{(s-a_1)^2} + \dots + \frac{B_\lambda}{(s-a_1)^\lambda} + \frac{A_2}{(s-a_2)} + \dots + \frac{A_{n-\lambda+1}}{(s-a_{n-\lambda+1})} \quad (32)$$

Nótese que para obtener los residuos $A_2, A_3, \dots, A_{n-\lambda+1}$, el método presentado en el párrafo anterior es adecuado pues al multiplicar $\hat{f}(s)$ por $(s-a_1)^i$ donde $i=2, 3, \dots, n-\lambda+1$, solo quedará el término A_i en el lado derecho de la ecuación; sin embargo, para evaluar los residuos $B_1, B_2, \dots, B_\lambda$, el procedimiento no funciona, ya que al hacer la evaluación en $s=a_1$, los términos

$$\frac{B_2}{(s-a_1)}, \frac{B_3}{(s-a_1)^2}, \dots, \frac{B_\lambda}{(s-a_1)^{\lambda-1}}$$

tienden a infinito. Por tanto hay que recurrir a otro artificio. Al multiplicar $\hat{f}(s)$ por $(s-a_1)^\lambda$, la ec 32 queda

$$(s-a_1)^\lambda \hat{f}(s) = (s-a_1)^{\lambda-1} B_1 + (s-a_1)^{\lambda-2} B_2 + \dots + (s-a_1) B_{\lambda-1} + B_\lambda + (s-a_1)^\lambda \left[\frac{A_2}{(s-a_2)} + \frac{A_3}{(s-a_3)} + \dots + \frac{A_{n-\lambda+1}}{(s-a_{n-\lambda+1})} \right] \quad (33)$$

Para facilitar las manipulaciones posteriores se llamará $\hat{g}(s)$ a

$$\frac{A_2}{(s-a_2)} + \frac{A_3}{(s-a_3)} + \dots + \frac{A_{n-\lambda+1}}{(s-a_{n-\lambda+1})}$$

Al calcular el valor de la ec 33 cuando $s=a_1$, se obtendrá

$$B_\lambda = (s-a_1)^\lambda \hat{f}(s) \Big|_{s=a_1} \quad (34)$$

pues los términos restantes son cero por tener como coeficiente a $(s-a_1)^\lambda$. Veamos ahora cómo calcular los residuos $B_2, B_3, \dots, B_{\lambda-1}$.

Si se deriva la ec 33 con respecto a s , se tendrá

$$\frac{d}{ds} \{ (s-a_1)^\lambda \hat{f}(s) \} = (\lambda-1) (s-a_1)^{\lambda-2} B_1 + (\lambda-2)$$

$$(s-a_1)^{\lambda-3} B_2 + \dots + B_{\lambda-1} + (s-a_1)^\lambda \frac{d}{ds} \hat{g}(s) + \lambda (s-a_1)^{\lambda-1} \hat{g}(s)$$

al evaluar esta expresión en $s=a_1$, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{d}{ds} \{ (s-a_1)^\lambda \hat{f}(s) \} \Big|_{s=a_1} = B_{\lambda-1} \quad (34)$$

Utilizando el mismo procedimiento, derivando de nuevo y calculando el resultado en $s=a_1$, se obtienen todos los residuos B_i . Este resultado puede sintetizarse en la fórmula

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} \left[(s-a_1)^\lambda \hat{f}(s) \right] \Big|_{s=a_1} = B_{\lambda-k}$$

$$k = 0, 1, \dots, \lambda-1 \quad (35)$$

Ejemplo 14.

Si $\hat{f}(s)$ está dado por

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

su expansión en fracciones parciales es

$$\hat{f}(s) = \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} + \frac{B_3}{s^3} + \frac{A_2}{s+1}$$

Utilizando el método expuesto anteriormente para calcular los residuos, se obtiene

$$A_2 = (s+1) \hat{f}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^3} \Big|_{s=-1} = -1$$

$$B_3 = s^3 \hat{f}(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{s+1} \Big|_{s=0} = 1$$

$$B_2 = \frac{d}{ds} (s^3 \hat{f}(s)) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+1} \right] \Big|_{s=0} = -\frac{1}{(s+1)^2} \Big|_{s=0} = -1$$

$$B_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s^3 \hat{f}(s)) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left[-\frac{1}{(s+1)^2} \right] \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{2}{(s+1)^3} \Big|_{s=0} = 1$$

por tanto

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

correspondiéndole en el dominio del tiempo

$$f(t) = u_{-1}(t) - tu_{-1}(t) + \frac{1}{2} t^2 u_{-1}(t) - e^{-t} u_{-1}(t) =$$

$$= \left\{ 1 - t + \frac{1}{2} t^2 - e^{-t} \right\} u_{-1}(t)$$

Cuando existe más de una raíz repetida, se utiliza el mismo procedimiento para cada una de ellas.

Hay otras maneras de realizar la expansión en fracciones parciales, particularmente en aquellos caso en los cuales existen raíces repetidas.

Puesto que la suma de los términos

$$\frac{B_1}{(s-a_1)} + \frac{B_2}{(s-a_1)^2} + \dots + \frac{B_k}{(s-a_1)^k}$$

puede escribirse como

$$\frac{C_{k-1} s^{k-1} + C_{k-2} s^{k-2} + \dots + C_0}{(s-a_1)^k}$$

En lugar de evaluar los residuos B_i podría pensarse en evaluar los coeficientes C_i . Para ilustrar como se procede en este caso, nos valdremos de un ejemplo:

Ejemplo 15

$$\text{Si } \hat{f}(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

se plantea la ecuación

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{C_2 s^2 + C_1 s + C_0}{s^3} + \frac{A_1}{s+1}$$

El valor de A_1 se puede calcular utilizando el método estudiado anteriormente, esto es

$$A_1 = (s+1) \hat{f}(s) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^3} \Big|_{s=-1} = -1$$

una vez obtenido este valor, se suman las fracciones del lado derecho

$$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{(s+1)(C_2 s^2 + C_1 s + C_0) - s^3}{s^3(s+1)}$$

de donde se obtiene que

$$1 = (s+1)(C_2 s^2 + C_1 s + C_0) - s^3$$

$$\therefore 1 = (C_2 - 1)s^3 + (C_1 + C_2)s^2 + (C_1 + C_0)s + C_0$$

Los coeficientes de las potencias de s deberán ser idénticos en ambos lados de la ecuación. Esto producirá una serie de ecua

ciones lineales que determinarán los valores de los coeficientes C_i . En el caso particular que nos ocupa, esas ecuaciones son:

$$C_2 - 1 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 + C_0 = 0$$

$$C_0 = 1$$

y su solución es

$$C_2 = 1, C_1 = -1, C_0 = 1$$

entonces

$$\frac{1}{s^3(s+1)} = \frac{s^2 - s + 1}{s^3} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}$$

que es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo anterior.

Veamos por último lo que sucede cuando el grado del numerador es mayor o igual al del denominador siendo $\hat{f}(s)$ una función racional. En este caso se procede a hacer una división larga hasta que el residuo sea de grado menor que el del divisor. Específicamente, si

$$\hat{f}(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}; m \geq n$$

entonces, $\hat{f}(s)$ puede expresarse como

$$\hat{f}(s) = D_{m-n} s^{m-n} + D_{m-n-1} s^{m-n-1} + \dots + D_0 + \frac{q(s)}{p(s)}$$

donde los coeficientes $D_{m-n}, D_{m-n-1}, \dots, D_0$, se obtienen por medio de la división larga. La fracción que queda pertenece a

la clase de funciones que fueron estudiadas anteriormente, y por tanto, puede expresarse en fracciones parciales.

Ejemplo 16

$$\text{Si } f(s) = \frac{s^3 + s^2 + 3s + 1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s^3 + s^2 + 3s + 1}{s^2 + 3s + 2}$$

la división larga se obtiene

$$\begin{array}{r} s-2 \\ \hline s^2+3s+2 \overline{) s^3+s^2+3s+1} \\ \underline{-s^3-3s^2-2s} \\ -2s^2+8s+1 \\ \underline{2s^2+6s+4} \\ 7s+5 \end{array}$$

$$\text{y } f(s) = s-2 + \frac{7s+5}{s^2+3s+2} = s-2 - \frac{2}{s+1} + \frac{9}{s+2}$$

La única dificultad que se nos presenta es identificar las funciones del tiempo a las que corresponde una transformada de Laplace $1, s, s^2$, etc. Este es el tema que se estudiará en la siguiente sección.

A.5 Funciones generalizadas

Se desea encontrar la transformada inversa de 1 . Para ello se utilizarán dos resultados obtenidos anteriormente.

- La transformada de Laplace de un escalón unitario $u_{-1}(t)$ es $\frac{1}{s}$
- Si $\mathcal{L}\{f(t)\}$ es $\hat{f}(s)$, entonces $\mathcal{L}\left\{-\frac{d}{dt}f(t)\right\}$ es $\{s \hat{f}(s) - f(0)\}$

Se había definido el escalón unitario como

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

y se tiene que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{du_{-1}(t)}{dt}\right\} = \left\{s\left(\frac{1}{s}\right) - u_{-1}(0)\right\}$$

pero por la definición dada

$$u_{-1}(0) = 0$$

luego

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{d}{dt}u_{-1}(t)\right\} = 1 \quad (36)$$

Entonces la derivada de un escalón tiene una transformada de Laplace igual a la unidad pero al examinar la función escalón unitario se observa que la derivada es cero para $t > 0$ y $t < 0$, no está definida en $t = 0$, por haber una discontinuidad en ese punto (fig A.7)

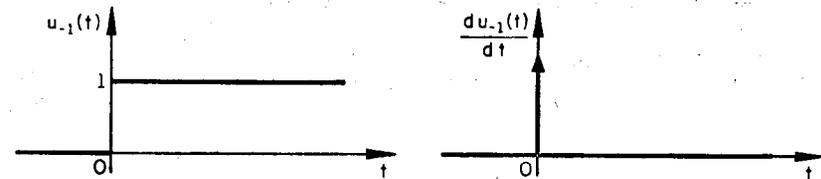


Fig A.7 Gráfica de la función escalón y de su derivada

Para entender el significado de $-\frac{d}{dt}u_{-1}(t)$ es necesario extender el concepto de derivada a funciones con discontinuidades, y este es el tema que se tratará a continuación.

A.5.1 Obtención de la derivada de un escalón unitario

La manera convencional en que se define la derivada de una función es

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$$

pero no es aplicable a funciones discontinuas en los puntos de discontinuidad porque

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\epsilon) - f(t)}{\epsilon}$$

es diferente cuando ϵ tiende a cero del lado positivo que cuando la hace del lado negativo.

Otra manera alternativa de definir la derivada de una función se basa en la fórmula de integración por partes: $f'(t)$ es la derivada de $x(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$, si para cualquier función $v(t)$ (que tenga derivadas) se cumple que

$$\int_a^b v(t)x'(t)dt = v(t)x(t) \Big|_a^b - \int_a^b v(t)x(t)dt \quad (38)$$

La definición anterior será utilizada para encontrar $\frac{d}{dt} u_{-1}(t)$

Considérese el problema de evaluar la integral

$$\int_{-1}^1 u_{-1}(t) v(t) dt \quad (39)$$

Si se sustituye $u_{-1}(t)$ por su valor, la integral 39 queda

$$\int_{-1}^1 u_{-1}(t) v(t) dt = \int_0^1 v(t) dt = v(1) - v(0) \quad (40)$$

Ahora, si se emplea en la ec 39 la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\int_{-1}^1 u_{-1}(t)v(t)dt = u_{-1}(t)v(t) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \dot{u}_{-1}(t)v(t)dt \quad (41)$$

Al sustituir $u_{-1}(t)$ por su valor resulta que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u_{-1}(t)v(t)dt &= u_{-1}(1)v(1) - u_{-1}(-1)v(-1) - \int_{-1}^1 \dot{u}_{-1}(t)v(t)dt \\ &= v(1) - v(-1) - \int_{-1}^1 \dot{u}_{-1}(t)v(t)dt \\ \therefore \int_{-1}^1 \dot{u}_{-1}(t)v(t)dt &= v(1) - v(-1) - \int_{-1}^1 u_{-1}(t)v'(t)dt \quad (42) \end{aligned}$$

Si las ecs 40 y 42 se igualan, entonces resulta

$$v(1) - v(0) = v(1) - v(-1) - \int_{-1}^1 \dot{u}_{-1}(t)v(t)dt$$

o sea

$$v(0) = \int_{-1}^1 \dot{u}_{-1}(t)v(t)dt \quad (43)$$

por lo que se concluye que

- la derivada de $u_{-1}(t)$ deberá ser cero para $|t| > 0$
- la derivada de $u_{-1}(t)$ deberá cumplir la ec 43

La manera de obtener una $\dot{u}_{-1}(t)$ que cumpla con a) y b) será tomando $\lambda_{-1}(t)$ como el límite de una sucesión. La función $u_{-1}(t)$ se puede considerar como el límite de una sucesión infinita de funciones $u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), \dots, u^{(n)}(t), \dots$ dadas por

$$u^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ nt & \text{para } 0 < t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{para } t > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (44)$$

Dichas funciones se muestran en la fig A.8.

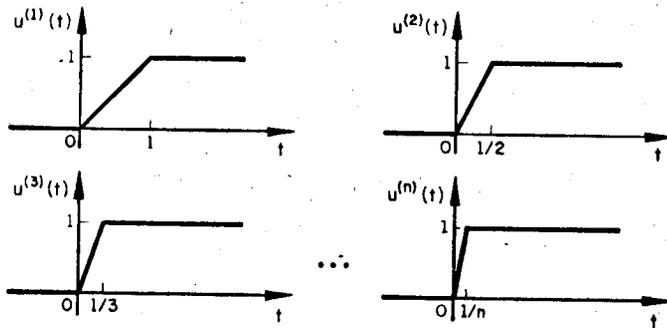


Fig A.8. Gráfica de $u^{(n)}(t)$

En la fig A.8 puede verse que conforme n crece, $u^{(n)}(t)$ se semeja más a $u_{-1}(t)$. Esto implica que al aumentar n , la integral

$\int_{-1}^1 u^{(n)}(t)v(t)dt$ se aproxima a $\int_{-1}^1 u_{-1}(t)v(t)dt$, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 u^{(n)}(t)v(t)dt = \int_{-1}^1 u_{-1}(t)v(t)dt$$

por lo cual es posible sustituir $u_{-1}(t)$ por $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}(t)$

La derivada de $u^{(n)}(t)$ esta dada por

$$u^{(n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ n & \text{para } 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{para } t > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (45)$$

La gráfica de esta función corresponde a la fig A.9

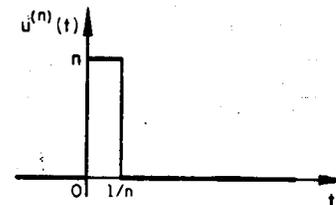


Fig A.9. Gráfica de $u^{(n)}(t)$

El objetivo ahora es probar que la derivada del escalón unitario $u_{-1}(t)$ es el límite de $u^{(n)}(t)$, esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}(t) = \frac{d}{dt} u_{-1}(t) \quad (46)$$

Para ello basta probar que para toda función $v(t)$ se obedece la regla de integración por partes

$$\int_{-1}^1 v(t) u_{-1}(t) dt = v(t) u_{-1}(t) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 v(t) \dot{u}_{-1}(t) dt$$

De la ec 43 se sabe que la regla de integración por partes se cumplirá si es cierto que

$$v(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 v(t) \dot{u}^{(n)}(t) dt \quad (47)$$

La ec 47 se prueba así:

Al sustituir $u^{(n)}(t)$ por su valor, dado en la 45, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 u^{(n)}(t) v(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} n v(t) dt \quad (48)$$

Al definir ahora una nueva función $w(t)$ dada por

$$w(t) = \int_{-1}^t v(\tau) d\tau,$$

entonces $\dot{w}(t) = v(t)$

Introduciendo $w(t)$ en la ec 48, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} n v(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1/n} n \dot{w}(t) dt = \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{w(1/n) - w(0)}{1/n}$$

lo cual, por definición convencional de derivada, implica que

$$\lim_{1/n \rightarrow 0} \frac{w(1/n) - w(0)}{1/n} = \dot{w}(0) = v(0)$$

Esto indica que para toda función $v(t)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \dot{u}^{(n)}(t) v(t) dt = v(0) \quad (49)$$

por tanto, se ve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{u}^{(n)}(t) = \dot{u}_{-1}(t) = \frac{d}{dt} u_{-1}(t)$$

que es lo que deseabamos probar.

Debe constatar, sin embargo, que este límite no es una función, ya que $u^{(n)}(t)$, vale cero en todo el eje excepto en un intervalo de longitud $\frac{1}{n}$ y su integral es la unidad. Al tomar el límite se tendría una función que vale cero en todo el eje excepto en un punto y tendrá área unitaria: Esto no puede ser, ya que todo rectángulo de base cero tiene área-cero.

Dicho conflicto se resuelve de una manera similar al surgido con $\sqrt{-1}$: inventando j . La respuesta consiste en ampliar el concepto de función, definiendo función generalizada como

- cualquier función ordinaria es una función generalizada
- el límite de cualquier sucesión de funciones generalizadas es una función generalizada

Una función generalizada siempre tiene su derivada definida, siendo también una función generalizada.

En el caso en cuestión, la derivada de $u_{-1}(t)$ es el límite de la sucesión de funciones de $u^{(n)}(t)$ cuando n tiende a infinito. Este límite se llama "impulso unitario" y se representa como $u_0(t)$. A veces también se denomina *delta de Dirac* y se representa por $\delta(t)$.

A.5.2 Observaciones

1) Como la función generalizada $u_0(t)$ vale cero para $t < 0$; y para $t > 0$, los límites de la integral del lado derecho de la ec 42 pueden cambiarse a $(0, \infty)$, resultando entonces que

$$\int_0^{\infty} u_0(t)v(t)dt = v(0) \tag{50}$$

Se puede probar además mediante un cambio de variable $\tau = t - T$,

que

$$\int_0^{\infty} u_0(t-T)v(t)dt = v(T) \tag{50a}$$

ii) Es factible lograr la misma función generalizada a partir de diversos procesos de aproximación. Por ejemplo $u_0(t)$ puede obtenerse como $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{(n)}(t)$ o como $\lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(t)$ (fig A.10)

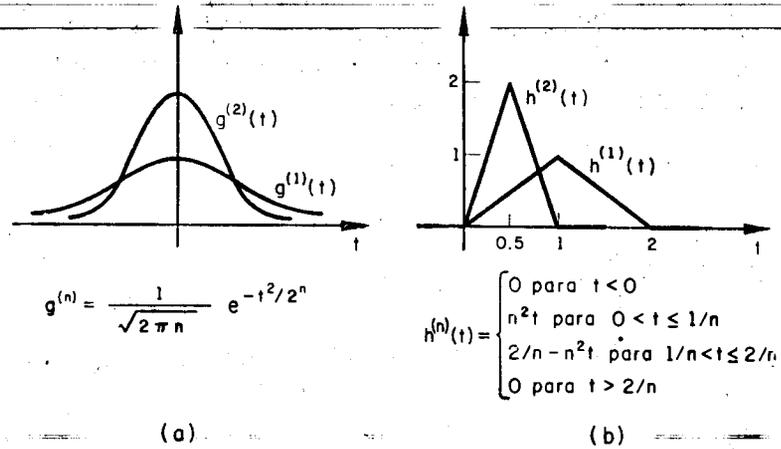


Fig A.10. Dos sucesiones de función cuyo límite es $u_0(t)$

iii) La transformada de un impulso unitario es 1, lo cual pueda probarse utilizando la definición de transformada y la propiedad de la ec 50

$$\mathcal{L}\{u_0(t)\} = \int_0^{\infty} u_0(t)e^{-st}dt = e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} = 1 \tag{51}$$

o bien definiendo $u_0(t)$ como $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{(n)}(t)$

Obsérvese que

$$u^{(n)}(t) = n(u_{-1}(t) - u_{-1}(t - \frac{1}{n}))$$

Aprovechando la linealidad de la transformada se tiene que

$$\mathcal{L}\{\dot{u}^{(n)}(t)\} = n\mathcal{L}\{u_{-1}(t) - u_{-1}(t - \frac{1}{n})\} = n \frac{1 - e^{-s/n}}{s}$$

Utilizando la regla de L'Hopital y haciendo $\alpha = 1/n$, puede verse que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{\dot{u}^{(n)}(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(1 - e^{-s/n})}{s} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\alpha}}{s} = 1$$

iv) El impulso unitario $u_0(t)$, al derivarse, genera una familia de funciones generalizadas. Para obtener la derivada $\frac{du_0(t)}{dt}$, aproxímede $u_0(t)$ por la serie de funciones $h^{(n)}(t)$ de la fig A10b o sea

$$u_0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(t)$$

entonces

$$\frac{du_0(t)}{dt} = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(t)$$

La derivada de $u_0(t)$ se llama a veces *doblete unitario* y se representa como $u_1(t)$ (fig A.11)

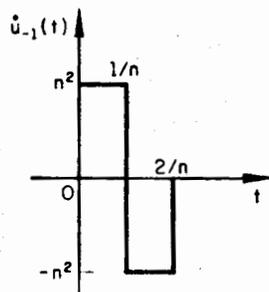


Fig A.11. Gráfica de $h^{(n)}(t)$

$$u_1(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h^{(n)}(t)$$

Empleando un método parecido al utilizado al deducir las ecs

50 y 50a, es fácil probar lo siguiente:

$$\int_0^{\infty} u_1(t) \delta(t) dt = -\dot{\delta}(0)$$

$$\int_0^{\infty} u_1(t - T_1) \delta(t) dt = -\dot{\delta}(T_1) \quad (52)$$

Nótese que $h^{(n)}(t)$ se puede representar mediante una suma de escalones unitarios con diferentes desplazamientos

$$h^{(n)}(t) = n^2 (u_{-1}(t) - 2u_{-1}(t - \frac{1}{n}) + u_{-1}(t - \frac{2}{n}))$$

La transformada de $u_1(t)$ viene dada por

$$\mathcal{L}\{u_1(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{h^{(n)}(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{n^2 [u_{-1}(t) - 2u_{-1}(t - \frac{1}{n}) + u_{-1}(t - \frac{2}{n})]\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 (1 - 2e^{-s/n} + e^{-2s/n})}{s} \right) = \frac{1}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - e^{-s/n})^2$$

$$= \frac{s^2}{s} = s$$

luego

$$\mathcal{L}\{u_1(t)\} = s \quad (53)$$

Puede probarse que en general, si se define

$$u_k(t) = \frac{d^k}{dt^k} u_0(t)$$

entonces

$$\mathcal{L}\{u_k(t)\} = s^k \quad (54)$$

y que

$$\int_0^{\infty} u_k(t) \delta(t) dt = (-1)^k \left. \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \right|_{t=0} \quad (55)$$

TABLA A.1. Transformada de Laplace de algunas funciones

$f(t)$	$\hat{f}(s)$
$u_{-j}(t)$	$1/s$
$e^{kt} u_{-j}(t)$	$\frac{1}{s-k}$
$(\cos \omega t) u_{-j}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$(\operatorname{sen} \omega t) u_{-j}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{d^k}{dt^k} u_0(t)$	s^k