

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

*INTRODUCCIÓN AL
ANÁLISIS DE FOURIER*

Rosa Adriana Anguiano Rojas

DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

DEPARTAMENTO DE GEOFÍSICA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANGUIANO ROJAS, Rosa Adriana. *Introducción al análisis de Fourier*. México,
UNAM, Facultad de Ingeniería, 1996, 263 p.



FACULTAD INGENIERIA

Introducción al análisis de Fourier

Prohibida la reproducción o transmisión total o parcial de esta obra por cualquier medio o sistema electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados.

© 1996, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria, 04510, México, D.F.

Primera edición, mayo de 1996.

Primera reimpresión, 2001.

ISBN 968-36-5128-3

Impreso en México.

Apunte
12

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



612325

G.- 612325

En el capítulo 6, se hace un compendio de todo lo visto, pero ahora para señales de tipo discreto, destacándose la importancia del teorema del muestreo en la aplicación de toda la teoría vista con antelación. Es importante destacar que este último capítulo es de fundamental trascendencia, debido a que la mayoría de las señales con las que trabajamos en la práctica profesional son de tipo discreto. Si se desea profundizar en alguno de los temas, se sugiere al lector que consulte la bibliografía que aparece al final del texto.

Por otra parte, cabe hacer mención que este libro no ha sido desarrollado con la rigidez que un tratado formal de matemáticas requiere, sino con objeto de mostrar el significado y forma de aplicación de una herramienta matemática, como lo es el análisis de Fourier. Por lo cual agradeceré los comentarios o sugerencias que los lectores me hagan llegar para mejorar el contenido de esta obra.

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer un reconocimiento al Ing. Ricardo Castrejón, Jefe del Departamento de Geofísica de la División de Ingeniería en Ciencias de la Tierra, por el apoyo brindado para la realización de esta obra. De igual manera, al Ing. Pedro González Villalvaso por la oportunidad que me brindó para impartir la asignatura, así como por el material de apoyo que me proporcionó.

Asimismo, agradezco a la Unidad de Apoyo Editorial de la Secretaría General de la Facultad de Ingeniería de la UNAM por la edición de la obra, especialmente a la Mtra. María Cuairán Ruidíaz, Jefa de la Unidad, a la Lic. Amelia Guadalupe Fiel Rivera, quien realizó la revisión didáctica y de estilo y la captura de correcciones, y a la Sra. Araceli Herrera que apoyó también en la captura.

Dedico este libro a mi esposo Leonardo Bautista G. y a mis hijos Joshua y Vincent por el amor y la alegría que han significado en mi vida, a mi padre Adolfo Anguiano V. por enseñarme el valor del trabajo, y al Dr. Miguel de Vázquez por mostrarme a través de su vida lo que la ética profesional significa.

M. en I. Rosa Adriana Anguiano Rojas
Mayo de 1996.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	III
CAPÍTULO 1. TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN DE FUNCIONES	1
1.1 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN	1
1.2 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS REALES	1
Ejemplo 1.1	2
Ejemplo 1.2	5
Ejemplo 1.3	10
1.3 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR FUNCIONES ORTOGONALES REALES	12
1.3.1 Funciones ortogonales	12
1.3.2 Aproximación por funciones ortogonales reales	13
1.3.3 Aproximación de funciones por polinomios de Legendre	19
Ejemplo 1.4	20
1.4 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR FUNCIONES ORTOGONALES COMPLEJAS	26
1.4.1 Serie finita de Fourier en su forma compleja	28
Ejemplo 1.5	33
1.4.2 Serie finita de Fourier en sus formas trigonométricas	36
a) Primera forma trigonométrica de la serie de Fourier	36
b) Segunda forma trigonométrica de la serie de Fourier	37
1.4.3 Interpretación de la serie de Fourier	41
EJERCICIOS PROPUESTOS	48
CAPÍTULO 2. ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE FUNCIONES PERIÓDICAS CONTINUAS	51
2.1 SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES PERIÓDICAS	51
2.2 TEOREMA DE LA SERIE DE FOURIER (O CONDICIONES DE DIRICHLET)	52
2.3 PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER	53
2.3.1 Desplazamiento en el tiempo	53
2.3.2 Simetría de funciones	55
a) Funciones de simetría par	55
a.1) Suma de dos funciones de simetría par	56
a.2) Producto de dos funciones de simetría par	56
b) Funciones de simetría impar	57
b.1) Suma de dos funciones de simetría impar	58
b.2) Producto de dos funciones de simetría impar	58
c) Producto e integración de funciones simétricas	59
c.1) Producto de una función de simetría par con una función de simetría impar	59
c.2) Integración de funciones simétricas	60

d) Serie de Fourier de funciones simétricas	61
2.3.3 Superposición	63
Ejemplo 2.1	64
2.3.4 Derivación de funciones periódicas continuas	66
2.3.5 Derivación de funciones periódicas discontinuas	67
a) Función impulso	67
b) Propiedades de la función impulso	68
b.1) Primera propiedad	68
b.2) Segunda propiedad	69
b.3) Tercera propiedad	69
b.4) Cuarta propiedad	69
b.5) Quinta propiedad	70
b.6) Sexta propiedad	70
c) Serie de Fourier de un tren de impulsos unitarios	71
d) Función escalón unitario	74
e) Propiedades de la función escalón unitario	74
e.1) Primera propiedad	74
e.2) Segunda propiedad	74
f) Obtención de la derivada de funciones periódicas discontinuas	76
Ejemplo 2.2	78
2.3.6 Determinación de la serie de Fourier de una función periódica por medio de la derivación	82
Ejemplo 2.3	82
2.4 ESPECTRO DISCRETO DE FRECUENCIA	85
2.4.1 Espectros discretos de amplitud y de fase	85
2.4.2 Importancia de los espectros discretos de amplitud y de fase	86
2.4.3 Espectros discretos de amplitud y de fase para las formas trigonométricas	91
2.5 CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA	91
2.5.1 Definición de contenido de potencia	91
2.5.2 Teorema de Parseval	93
2.5.3 Espectro discreto de potencia	96
EJERCICIOS PROPUESTOS	97

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE FUNCIONES NO PERIÓDICAS CONTINUAS	99
3.1 INTEGRAL DE FOURIER	99
3.2 ESPECTRO CONTINUO DE FRECUENCIAS	103
3.2.1 Simetría de la transformada de Fourier	104
Ejemplo 3.1	107
3.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	109
3.3.1 Propiedad de linealidad	109
3.3.2 Propiedad de desplazamiento	109
a) Propiedad de desplazamiento en las frecuencias	109
b) Propiedad de desplazamiento en el tiempo	110
3.3.3 Propiedad de escalamiento	111
3.3.4 Propiedad de simetría de la transformada de Fourier	112
Ejemplo 3.2	113
3.3.5 Transformada de Fourier de funciones simétricas	113
3.3.6 Propiedad de derivación de la transformada de Fourier	115
3.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES ESPECIALES	116
3.4.1 Transformada de Fourier de la función impulso	116
3.4.2 Transformada de una constante	118
3.4.3 Transformada de Fourier de la función escalón unitario $\mu(t)$	118
3.4.4 Transformada de Fourier de funciones simétricas	121
a) Transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$	121
b) Transformada de Fourier de la función $f(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)$	122
c) Transformada de Fourier de la función $g(t) = f(t) \cos(2\pi f_0 t)$	123
d) Transformada de Fourier de la función $g(t) = f(t) \text{sen}(2\pi f_0 t)$	124
3.4.5 Transformada de Fourier de una función periódica	125
3.4.6 Transformada de Fourier de un tren de impulsos	126
Ejemplo 3.3	127
Ejemplo 3.4	128
Ejemplo 3.5	130
Ejemplo 3.6	132
Ejemplo 3.7	133
Ejemplo 3.8	134
Ejemplo 3.9	135

Ejemplo 3.10	136
Ejemplo 3.11	137
Ejemplo 3.12	138
3.5 TRANSFORMADA DE FOURIER BIDIMENSIONAL	140
EJERCICIOS PROPUESTOS	142
CAPÍTULO 4. INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN	145
4.1 DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN	145
4.1.1 Evaluación gráfica	145
4.1.2 Evaluación analítica	149
Ejemplo 4.1	150
4.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN	152
4.3 TEOREMA DE CONVOLUCIÓN	153
4.3.1 Teorema de convolución en el dominio del tiempo	153
4.3.2 Teorema de convolución en el dominio de las frecuencias	154
Ejemplo 4.2	156
Ejemplo 4.3	158
Ejemplo 4.4	160
Ejemplo 4.5	162
4.4 APLICACIÓN A LOS SISTEMAS LINEALES	163
4.4.1 Definición de un sistema lineal	163
4.4.2 Relación entre las señales de entrada y de salida de un sistema lineal	163
4.4.3 Respuesta de un sistema lineal al impulso unitario	167
4.4.4 Transmisión sin distorsión	168
4.4.5 Filtros ideales	171
a) Filtro pasa-todo	171
a.1) Respuesta de un filtro pasa-todo al impulso unitario	171
b) Filtro pasa-bajas	172
b.1) Respuesta de un filtro pasa-bajas al impulso unitario	173
c) Filtro pasa-altas	174
c.1) Respuesta de un filtro pasa-altas al impulso unitario	175
d) Filtro pasa-bandas	176
d.1) Respuesta de un filtro pasa-bandas al impulso unitario	177
Ejemplo 4.6	179

6.3.2	Propiedad de desplazamiento	231
	a) Propiedad de desplazamiento en las frecuencias	231
	b) Propiedad de desplazamiento en el tiempo	232
6.3.3	Propiedad de simetría de la transformada de Fourier	232
6.3.4	Transformada de Fourier de funciones simétricas	232
6.4	APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	234
6.4.1	Aplicación de la transformada discreta de Fourier directa	234
6.4.2	Aplicación de la transformada discreta de Fourier inversa	237
6.4.3	Transformada rápida de Fourier	242
6.5	CONVOLUCIÓN DISCRETA	247
6.5.1	Convolución discreta de funciones de duración finita	248
6.5.2	Convolución discreta de una función finita con una función infinita	250
	Ejemplo 6.1	251
	Ejemplo 6.2	252
6.5.3	Teorema de convolución	254
6.5.4	Convolución cíclica	254
6.6	CORRELACIÓN DISCRETA	255
	Ejemplo 6.3	255
6.6.1	Teorema de correlación discreta	257
6.6.2	Correlación cíclica	257
6.6.3	Transformada bidimensional de Fourier discreta	258
6.7	APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA A DATOS BIDIMENSIONALES	258
	EJERCICIOS PROPUESTOS	260
	BIBLIOGRAFÍA	263

CAPÍTULO 1

TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

1.1 APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

La teoría de la aproximación de funciones nos sirve para encontrar una función analítica a partir de datos discretos.

Las técnicas para aproximar funciones que se detallan a continuación, se utilizan cuando tenemos una forma de onda conocida, pero de la cual no se tiene su expresión analítica, o bien, cuando ésta es muy complicada. Para aproximar una función, utilizamos expresiones de tipo polinomial que pueden ser reales o complejas.

1.2 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS REALES

Una función de aproximación $f_a(t)$ puede estar dada por un polinomio de cualquier grado de la forma:

$$f_a(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_n t^n \quad 1.1$$

donde el problema principal consiste en determinar las constantes a_0, a_1, \dots, a_n para un tiempo t definido, de manera que $f_a(t)$ sea una "buena aproximación".

Un criterio para que una aproximación sea buena consiste en imponer la condición de que la función original $f(t)$ y la función aproximada $f_a(t)$ tengan un número finito de puntos en común.

Si se tienen n puntos en común, se genera un polinomio para cada punto; el grado de cada polinomio para determinar la función aproximada será de $(n-1)$.

Por ejemplo, si se tienen tres puntos ($n=3$) en común en los tiempos $t_1, t_2, y t_3$, se iguala la función original a la aproximada en estos puntos:

$$f(t_1) = f_a(t_1)$$

$$f(t_2) = f_a(t_2) \quad 1.2$$

$$f(t_3) = f_a(t_3)$$

donde:

$$f_a(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2$$

$$f_a(t_2) = a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 \quad 1.3$$

$$f_a(t_3) = a_0 + a_1 t_3 + a_2 t_3^2$$

Obteniéndose de este modo un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, del cual se obtiene el valor de los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 y se genera la función de aproximación $f_a(t)$.

Para establecer qué tanto se parece la función original a la función aproximada se realiza un estudio del error, el cual se calcula mediante

$$\varepsilon(t) = f(t) - f_a(t) \quad 1.4$$

Ejemplo 1.1

Si $f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$, y queremos un polinomio que coincida en tres puntos $(-1,0,1)$, se toma a la función original

$$f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$$

y la función aproximada

$$f_a(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

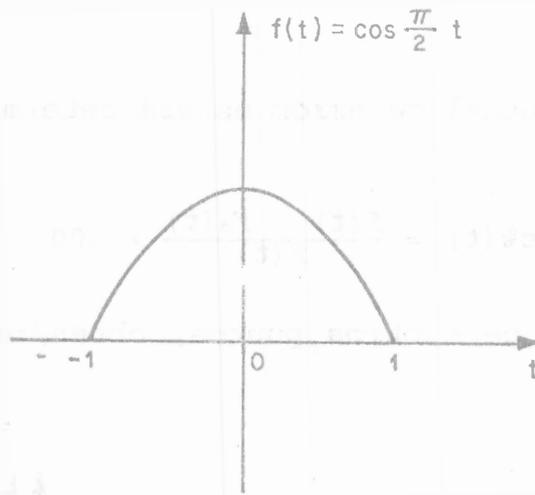


Figura 1.1

Sustituyendo los puntos dados, obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$f_a(-1) = \cos(-\pi/2) = 0 = a_0 - a_1 + a_2$$

$$f_a(0) = \cos(0) = 1 = a_0$$

$$f_a(1) = \cos(\pi/2) = 0 = a_0 + a_1 + a_2$$

resolviendo el sistema, nos queda que

$$a_0 = 1, a_1 = 0 \text{ y } a_2 = -1$$

por lo tanto, la función aproximada estará representada como

$$f_a(t) = 1 - t^2$$

y la función de error estará dada por

$$\varepsilon(t) = f(t) - f_a(t)$$

$$\varepsilon(t) = \cos \frac{\pi}{2} t - (1 - t^2)$$

Si evaluamos el error en (-0.5) y (0.5),

$$\varepsilon(-0.5) = 0.7071 - (1 - 0.25) = -0.0429$$

$$\varepsilon(0.5) = 0.7071 - (1 - 0.25) = -0.0429$$

donde la función porcentual de error estará determinada por

$$\varepsilon\%(t) = \frac{f(t) - f_a(t)}{f(t)} \times 100 \quad 1.5$$

y si además evaluamos para otros puntos, obtendremos la gráfica de la función de error.

t	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon\%(t)$
-1	0	0
-0.5	-0.042	5.96
0	0	0
0.5	-0.042	5.96
1	0	0

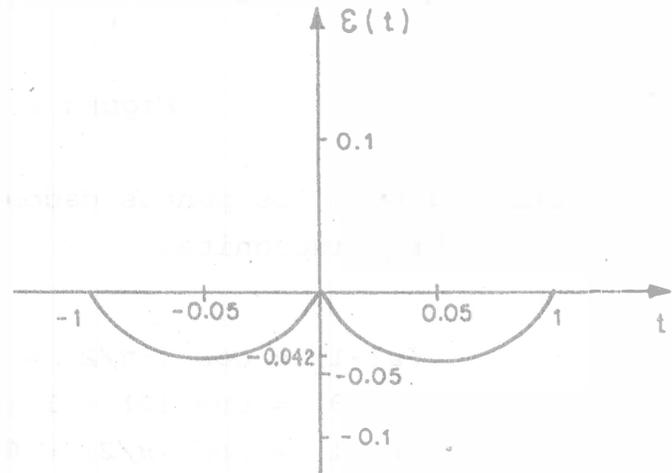


Figura 1.2

De los ejemplos anteriores, podemos observar que:

- En este método de aproximación, al aumentar el número de puntos en común y, por tanto, el grado del polinomio, se obtiene una mejor aproximación, pero el sistema de ecuaciones es más grande y los valores de los coeficientes del polinomio de la función de aproximación son diferentes a los coeficientes del polinomio de la función de aproximación de distinto grado.
- En este método, el cálculo del error se realiza punto por punto.

Otra forma de evaluar la calidad de la aproximación es a través del error promedio.

El *error promedio* evalúa la calidad de la aproximación en todos los puntos dentro de un rango, por lo que

$$\epsilon_0 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)] dt \quad 1.6$$

Ejemplo 1.2

Si queremos un polinomio que coincida en tres puntos (0,1,2) para una función original de la forma

$$f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$$

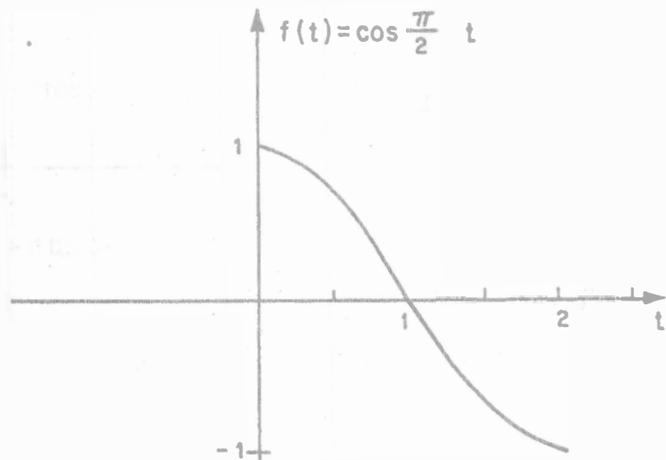


Figura 1.3

y una función aproximada dada por

$$f_a(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$$

entonces,

$$f_a(0) = \cos(0) = 1 = a_0$$

$$f_a(1) = \cos(\pi/2) = 0 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$f_a(2) = \cos(\pi) = -1 = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

resolviendo el sistema, nos queda

$$a_0 = 1, a_1 = -1 \text{ y } a_2 = 0$$

por lo tanto, la función aproximada queda representada como

$$f_a(t) = 1 - t$$

y la función de error estará dada por

$$\varepsilon(t) = \cos \frac{\pi}{2} t - (1 - t)$$

En la figura 1.4 se muestra la gráfica para otros puntos.

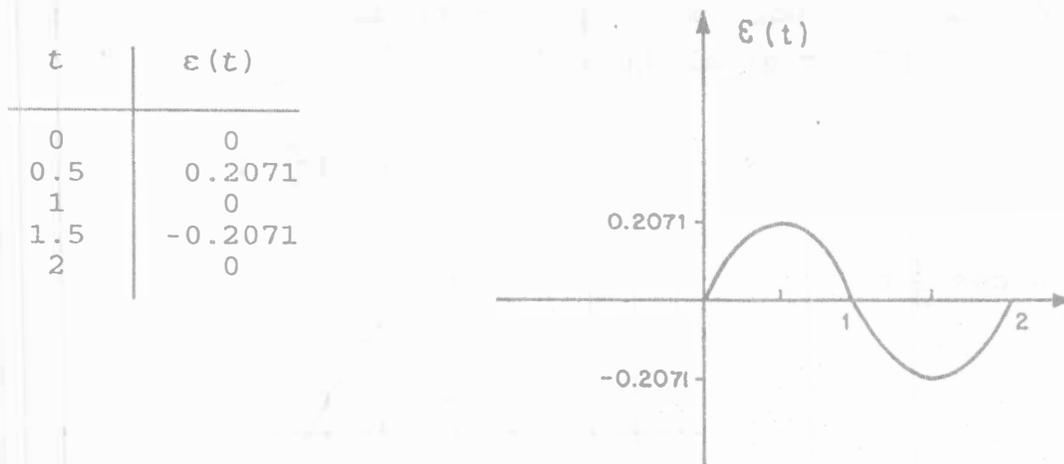


Figura 1.4

Si ahora calculamos el error promedio:

$$\varepsilon_o = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)] dt$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{2 - 0} \int_0^2 \varepsilon(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 [\cos \frac{\pi}{2} t - (1-t)] dt$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos \frac{\pi}{2} t dt - \frac{1}{2} \int_0^2 (1-t) dt = \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} t \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^2$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{\pi} (\operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0) - \frac{1}{2} (2-2) - 0 = 0$$

por lo tanto,

$$\epsilon_0 = 0$$

esto puede hacer suponer que el error real es cero, lo cual como se observa en la figura 1.4 no es verdad. Lo anterior nos indica que el error promedio en algunos casos no es un buen criterio para evaluar a la aproximación, ya que en el proceso se cancelan errores positivos con negativos.

Un método para evitar que se cancelen errores positivos con negativos es el del *error cuadrático medio*, que se define como

$$\epsilon^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \epsilon(t)^2 dt \quad 1.7$$

por lo que:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)]^2 dt \quad 1.8$$

Al desarrollar el binomio al cuadrado de la expresión 1.8 y suponer una aproximación para tres puntos, se sustituye la función aproximada por el polinomio correspondiente.

$$\begin{aligned} \epsilon^2 = & \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) f(t) dt + \\ & + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t + a_2 t^2]^2 dt \quad 1.9 \end{aligned}$$

Para conseguir que este error cuadrático medio sea mínimo, se imponen las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_k} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \epsilon^2}{\partial a_k^2} > 0 \quad 1.10$$

obteniendo la primera derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} & \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) f(t) dt + \right. \\ & \left. + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t + a_2 t^2]^2 dt \right) \end{aligned} \quad 1.11$$

dado que la primera integral se toma como la derivada de una constante,

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_k} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left(- \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] f(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t + a_2 t^2]^2 dt \right) \quad 1.12$$

por lo tanto, para $k = 0, 1, 2$, tenemos que:

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_0} = - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] dt = 0 \quad 1.13$$

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_1} = - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} t f(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2t [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] dt = 0 \quad 1.14$$

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial a_2} = - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} t^2 f(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2t^2 [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] dt = 0 \quad 1.15$$

despejamos las expresiones anteriores, considerando que tratamos de encontrar una función aproximada por tres coeficientes que represente a la original. A continuación se realiza la integración de la función aproximada:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] dt = a_0(t_2 - t_1) + \frac{a_1}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{a_2}{3}(t_2^3 - t_1^3) \quad 1.16$$

$$\int_{t_1}^{t_2} t f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} t [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] dt = \frac{a_0}{2}(t_2^2 - t_1^2) + \frac{a_1}{3}(t_2^3 - t_1^3) + \frac{a_2}{4}(t_2^4 - t_1^4) \quad 1.17$$

$$\int_{t_1}^{t_2} t^2 f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} t^2 [a_0 + a_1 t + a_2 t^2] dt = \frac{a_0}{3}(t_2^3 - t_1^3) + \frac{a_1}{4}(t_2^4 - t_1^4) + \frac{a_2}{5}(t_2^5 - t_1^5) \quad 1.18$$

Y para dos puntos cualesquiera que cumplan con $t_2 > t_1$, se obtiene que la segunda derivada siempre será mayor que cero, ya que $(t_2 - t_1) > 0$ y, por lo tanto, se cumple con la segunda condición para que el error cuadrático medio sea mínimo:

$$\frac{\partial^2 \epsilon^2}{\partial a_0^2} = t_2 - t_1 > 0 \quad 1.19$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon^2}{\partial a_1^2} = \frac{1}{3} (t_2^3 - t_1^3) > 0 \quad 1.20$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon^2}{\partial a_2^2} = \frac{1}{5} (t_2^5 - t_1^5) > 0 \quad 1.21$$

Ejemplo 1.3

Usando la función dada en el ejemplo 1.1, aplicamos las expresiones 1.16, 1.17 y 1.18 para encontrar una función de aproximación tal, que el error sea mínimo.

Dada

$$f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$$

y

$$f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

para $t \in (-1, 1)$, tenemos que:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = a_0 (t_2 - t_1) + \frac{a_1}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{a_2}{3} (t_2^3 - t_1^3)$$

$$\int_{-1}^1 t f(t) dt = \frac{a_0}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{a_1}{3} (t_2^3 - t_1^3) + \frac{a_2}{4} (t_2^4 - t_1^4)$$

$$\int_{-1}^1 t^2 f(t) dt = \frac{a_0}{3} (t_2^3 - t_1^3) + \frac{a_1}{4} (t_2^4 - t_1^4) + \frac{a_2}{5} (t_2^5 - t_1^5)$$

Si sustituimos y evaluamos las integrales del sistema,

$$\int_{-1}^1 \cos \frac{\pi}{2} t dt = 4/\pi = 2a_0 + \frac{2a_2}{3}$$

$$\int_{-1}^1 t \cos \frac{\pi}{2} t dt = 0 = \frac{2a_1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 t^2 \cos \frac{\pi}{2} t dt = \frac{4}{\pi^3} (\pi^2 - 8) = \frac{2a_0}{3} + \frac{2a_2}{5}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones,

$$a_0 = \frac{3}{\pi^3} (20 - \pi^2)$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{15}{\pi^3} (\pi^2 - 12)$$

por lo tanto,

$$f_a(t) = \frac{3}{\pi^3} (20 - \pi^2) + \frac{15}{\pi^3} (\pi^2 - 12) t^2$$

por lo que el error cuadrático medio mínimo estará dado por la expresión:

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\cos \frac{\pi}{2} t - \left[\frac{3}{\pi^3} (20 - \pi^2) + \frac{15}{\pi^3} (\pi^2 - 12) t^2 \right] \right)^2 dt$$

si evaluamos la integral

$$\epsilon^2 = 0.017$$

y el porcentaje de error dado por la expresión,

$$\epsilon^2(\%) = \frac{\epsilon^2}{F^2} \times 100 \quad 1.22$$

donde F^2 es el valor cuadrático medio de la función $f(t)$,

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt \quad 1.23$$

por lo que

$$F^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\cos \frac{\pi}{2} t]^2 dt = \frac{1}{2}$$

y

$$\epsilon^2(\%) = 3.4\%$$

Es conveniente hacer notar que para obtener una mejor aproximación por este método es necesario aumentar el número de puntos en común y, por lo tanto, derivar e igualar a cero la expresión 1.8, que representa a la función de error cuadrático medio, con el nuevo grado del polinomio y obtener las expresiones equivalentes a la 1.16, 1.17, 1.18, etc., para determinar los nuevos valores de los coeficientes.

1.3 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR FUNCIONES ORTOGONALES REALES

1.3.1 Funciones ortogonales

El concepto de ortogonalidad de funciones es una generalización natural del concepto del sistema ortogonal de vectores.

Un sistema ortogonal de vectores puede describirse como tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares y cuyos productos interiores son

$$(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn} \quad (m, n = 1, 2, 3) \quad 1.24$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \quad 1.25$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son perpendiculares entre sí.

Cualquier función $q(r)$, que tenga valores reales cuando $r = 1, 2, 3$, representará a un vector si se acepta que estos valores sean las componentes del vector.

Si el espacio es de k dimensiones, la función $q(r)$ tendrá valores para cuando $r = 1, 2, \dots, k$.

Si una función $q(t)$ está definida para un intervalo $a \leq t \leq b$, y la consideramos como un vector, sus componentes deben consistir en todas las ordenadas de su gráfica.

La "magnitud" de la función $q(t)$, lo mismo que para cualquier vector, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de sus componentes.

$$|q(t)| = \left\{ \int_a^b [q(t)]^2 dt \right\}^{1/2} \quad 1.26$$

Lo mismo que para los vectores, la condición para que dos funciones sean ortogonales se expresa como

$$(q_1(t), q_2(t)) = 0 \quad 1.27$$

y, por lo tanto,

$$\int_a^b q_1(t) q_2(t) dt = 0 \quad 1.28$$

Dado lo anterior, una sucesión de funciones es ortogonal en el intervalo (a, b) si sus productos interiores

$$(q_m(t), q_n(t)) = 0$$

cuando $m \neq n$ ($m, n = 1, 2, 3 \dots$), y tendrá un valor determinado (dado por el tipo de función de que se trate) para cuando $m = n$.

1.3.2 Aproximación por funciones ortogonales reales

Para realizar esta aproximación se utilizan funciones reales, las cuales tienen la característica de ser ortogonales para un intervalo dado. Es decir, la variable t es ahora sustituida por una función ortogonal a la que llamaremos $G(t)$.

Sea la función $f(t)$, la que va a ser aproximada en el intervalo $t \in (t_1, t_1 + T)$.

Para realizar la aproximación se utilizará una serie finita de la forma:

$$f_a(t) = A_0 G_0(t) + A_1 G_1(t) + A_2 G_2(t) + \dots + A_n G_n(t) \quad 1.29$$

donde $G_k(t)$ es el k -ésimo miembro de una cierta clase de funciones y A_k el coeficiente que se desea obtener con el método del error

cuadrático medio mínimo (ECMM); por lo tanto, se usa la ecuación 1.8 del error cuadrático medio, pero aplicando este nuevo polinomio de aproximación, de modo que:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)]^2 dt \quad 1.30$$

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt$$

donde:

1.31

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt = F^2$$

representa el valor cuadrático medio de $f(t)$ o el contenido de potencia de la función para toda $t \in (t_1, t_2)$.

1.32

y

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = F_a^2$$

representa el valor cuadrático medio de $f_a(t)$ o el contenido de potencia de la función aproximada para toda $t \in (t_1, t_2)$.

1.33

Para minimizar el error, se obtiene nuevamente la primera derivada y se iguala a cero:

$$\frac{\partial E^2}{\partial A_k} = \frac{\partial}{\partial A_k} \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right)$$

1.34

Dado que la derivada de la primera integral es cero,

$$\frac{\partial E^2}{\partial A_k} = \frac{\partial}{\partial A_k} \left(-\frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right) = 0 \quad 1.35$$

Al tomar las integrales por separado, tenemos que la primera integral de 1.35 es

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = A_0 \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_0(t) dt + A_1 \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_1(t) dt + \dots + A_n \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_n(t) dt \quad 1.36$$

y, por lo tanto, su derivada es

$$\frac{\partial}{\partial A_k} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt \quad 1.37$$

por otro lado, la derivada para la segunda integral de la expresión 1.35 es

$$\frac{\partial}{\partial A_k} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \frac{\partial}{\partial A_k} \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=0}^n A_i G_i(t) \right)^2 dt = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=0}^n A_i G_i(t) \right) G_k(t) dt$$

1.38

desglosando la serie, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_k} \int_{t_1}^{t_2} \left(A_0 G_0(t) + A_1 G_1(t) + A_2 G_2(t) + \dots + A_k G_k(t) + \dots + A_n G_n(t) \right)^2 dt &= \\ = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(A_0 G_0(t) + A_1 G_1(t) + A_2 G_2(t) + \dots + A_k G_k(t) + \dots + A_n G_n(t) \right) G_k(t) dt & \end{aligned} \quad 1.39$$

Sustituyendo 1.37 y 1.39 en la ecuación original 1.35,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^2}{\partial A_k} = - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt + \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(A_0 G_0(t) + A_1 G_1(t) + A_2 G_2(t) + \right. \\ \left. \dots + A_k G_k(t) + \dots + A_n G_n(t) \right) G_k(t) dt = 0 \end{aligned} \quad 1.40$$

al despejar 1.40, tenemos que:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(A_0 G_0(t) + \dots + A_k G_k(t) + \dots + A_n G_n(t) \right) G_k(t) dt \quad 1.41$$

y separando las integrales,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt = A_0 \int_{t_1}^{t_2} G_0(t) G_k(t) dt + \dots + A_k \int_{t_1}^{t_2} G_k(t) G_k(t) dt + \dots + \\ + A_n \int_{t_1}^{t_2} G_n(t) G_k(t) dt \end{aligned} \quad 1.42$$

Si consideramos que las $G_k(t)$ pertenecen a una clase de funciones ortogonales que cumplen con la condición de ortogonalidad,

$$\int_{t_1}^{t_2} G_j(t)G_k(t)dt = \begin{cases} 0 & ; k \neq j \\ \neq 0 & ; k = j \end{cases} \quad 1.43$$

se tiene que todas las integrales de 1.42 son cero, menos cuando $k=j$, por lo que

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)G_k(t)dt = A_k \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \quad 1.44$$

despejando el coeficiente A_k ,

$$A_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)G_k(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt} \quad 1.45$$

Para que el error al usar los coeficientes A_k sea mínimo, la segunda derivada debe ser mayor que cero, por lo que obteniendo la segunda derivada de la expresión 1.44, tenemos que:

$$\frac{\partial^2 E^2}{\partial A_k^2} = \frac{\partial}{\partial A_k^2} \left(- \int_{t_1}^{t_2} f(t)G_k(t)dt + A_k \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \right) \quad 1.46$$

donde

$$\frac{\partial^2 E^2}{\partial A_k^2} = \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt > 0 \quad 1.47$$

expresión que se cumple, ya que al estar elevada al cuadrado, la integral es positiva.

Si $G_0(t), G_1(t), G_2(t), \dots, G_k(t), \dots, G_n(t)$ cumplen con la condición de ortogonalidad en el intervalo $t \in (t_1, t_2)$, entonces $f(t)$ puede ser aproximado por $f_a(t)$ en ese intervalo con el ECMM de la siguiente manera:

$$f_a(t) = A_0 G_0(t) + A_1 G_1(t) + A_2 G_2(t) + \dots + A_n G_n(t) \quad 1.48$$

donde:

$$A_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) G_0(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [G_0(t)]^2 dt}$$

$$A_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) G_1(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [G_1(t)]^2 dt} \quad 1.49$$

⋮

$$A_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) G_n(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [G_n(t)]^2 dt}$$

Es importante hacer notar, que el valor de cada uno de los coeficientes A_k se mantendrá constante, no importa el número de coeficientes con los que se trabaje. Es decir, los coeficientes A_k son independientes uno del otro, lo cual se debe a la propiedad de

ortogonalidad de las funciones con las que se trabaja. Lo que es una ventaja respecto a los métodos de aproximación anteriores.

Para obtener la función de aproximación por medio de funciones ortogonales, es necesario que cada una de las funciones $G_0(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$, ..., $G_k(t)$, ..., $G_n(t)$ sea un polinomio, donde $G_n(t)$ es el polinomio de n -ésimo grado:

$$\begin{aligned}
 G_0(t) &= a_{00} \\
 G_1(t) &= a_{01} + a_{11}t \\
 G_2(t) &= a_{02} + a_{12}t + a_{22}t^2 \\
 &\vdots \\
 G_n(t) &= a_{0n} + a_{1n}t + a_{2n}t^2 + \dots + a_{nn}t^n
 \end{aligned}
 \tag{1.50}$$

y además que formen un conjunto ortogonal en el intervalo $t \in (t_1, t_2)$.

1.3.3 Aproximación de funciones por polinomios de Legendre

Un conjunto de funciones que satisfacen las condiciones anteriores en el intervalo $t \in (-1, 1)$ son los llamados *polinomios de Legendre*, que se establecen de la ecuación diferencial de Legendre,

$$(1-t^2) \frac{d^2}{dt^2} P_n(t) - 2t \frac{d}{dt} P_n(t) + n(n+1)P_n(t) = 0
 \tag{1.51}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 P_0(t) &= 1 \\
 P_1(t) &= t \\
 P_2(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\
 P_3(t) &= \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \\
 P_4(t) &= \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{1.52}$$

en los que el n -ésimo miembro está dado por la fórmula de Rodríguez:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad 1.53$$

Estos polinomios forman un conjunto ortogonal en el intervalo $t \in (-1, 1)$, cumpliendo con lo siguiente:

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & ; m = n \end{cases} \quad 1.54$$

usando la ecuación 1.45 para los polinomios de Legendre, tenemos:

$$A_k = \frac{\int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt}{\int_{-1}^1 [P_k(t)]^2 dt} \quad 1.55$$

y por la condición de ortogonalidad dada en 1.54 para los polinomios de Legendre,

$$A_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_k(t) dt \quad 1.56$$

Ejemplo 1.4

Aproximar la función

$$f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t$$

en el intervalo $t \in (-1, 1)$ por la suma de los tres primeros polinomios de Legendre,

$$f_a(t) = A_0 P_0(t) + A_1 P_1(t) + A_2 P_2(t)$$

$$f_a(t) = A_0 + A_1 t + A_2 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right)$$

de la expresión 1.56,

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt = \frac{2}{\pi}$$

$$A_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt = 0$$

$$A_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right) \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) dt = \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right)$$

por lo que

$$f_a(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right)$$

reagrupando términos, tenemos que:

$$f_a(t) = \frac{3}{\pi^3} (20 - \pi^2) + \frac{15}{\pi^3} (\pi^2 - 12) t^2$$

que es el mismo resultado que el obtenido cuando no se usaron funciones ortogonales (ejemplo 1.3); sin embargo, ahora se tiene la opción de mejorar la aproximación, calculando sólo los nuevos coeficientes A_k .

Para la evaluación del error cuadrático medio E^2 , se tiene que:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - f_a(t)]^2 dt \quad 1.57$$

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \quad 1.58$$

donde la primera y tercera integral se han definido ya como

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt \quad \text{representa el valor cuadrático medio de } f(t) \quad 1.59$$

$$F_a^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \quad \text{representa el valor cuadrático medio de } f_a(t) \quad 1.60$$

por la expresión 1.36, la segunda integral de 1.58 queda expresada como

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt = A_0 \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_0(t) dt + A_1 \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_1(t) dt + \dots + A_n \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_n(t) dt \quad 1.61$$

Por otro lado, de la ecuación 1.45, tenemos:

$$A_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt} \quad 1.62$$

por lo que, al despejar la ecuación anterior,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt = A_k \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \quad 1.63$$

multiplicamos por A_k y agregamos sumatorias en ambos miembros,

$$\sum_{k=0}^n A_k \int_{t_1}^{t_2} f(t) G_k(t) dt = \sum_{k=0}^n A_k^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \quad 1.64$$

ahora bien, para la tercera integral de la ecuación 1.58,

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(A_0 G_0(t) + A_1 G_1(t) + A_2 G_2(t) + \dots \right. \\ \left. + A_k G_k(t) + \dots + A_n G_n(t) \right)^2 dt \quad 1.65$$

y por condición de ortogonalidad, al elevar la función aproximada al cuadrado, todos los términos cruzados se anulan, quedando sólo los siguientes:

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = A_0^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_0(t)]^2 dt + A_1^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_1(t)]^2 dt + A_2^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_2(t)]^2 dt + \dots + A_n^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_n(t)]^2 dt \quad 1.66$$

$$\int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \sum_{j=0}^n A_j^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_j(t)]^2 dt \quad 1.67$$

De manera que al sustituir 1.64 y 1.67 en la ecuación 1.58, tenemos que:

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^n A_k^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^n A_k^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \quad 1.68$$

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^n A_k^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \quad 1.69$$

por lo tanto,

$$E^2 = F^2 - F_a^2 \quad 1.70$$

El error cuadrático medio es la diferencia entre el valor cuadrático medio de la función y el de su aproximada, la cual es expandida en términos de funciones ortogonales.

Donde

$$F_a^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^n A_k^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt \quad 1.71$$

Si las funciones ortogonales utilizadas son los polinomios de *Legendre*, entonces

$$F_a^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n A_k^2 \left(\frac{2}{2k+1} \right) \quad 1.72$$

por lo que

$$F_a^2 = \sum_{k=0}^n \frac{A_k^2}{2k+1} \quad 1.73$$

Continuando con el ejemplo 1.4, calculamos su error cuadrático medio:

$$E^2 = F^2 - F_a^2$$

$$f(t) = \cos \frac{\pi}{2} t ; \quad t \in (-1, 1)$$

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\cos \frac{\pi}{2} t]^2 dt = \frac{1}{2}$$

$$F_a^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^n A_k^2 \int_{t_1}^{t_2} [G_k(t)]^2 dt$$

$$F_a^2 = \sum_{k=0}^n \frac{A_k^2}{2k+1} = \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 (1) + \left(\frac{10}{\pi} \left(1 - \frac{12}{\pi^2} \right) \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right)$$

$$= 0.40528 + 0.09441 = 0.4997$$

finalmente,

$$E^2 = 0.00031$$

$$E^2 (\%) = 0.062\%$$

1.4 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR FUNCIONES ORTOGONALES COMPLEJAS

Dada una función $f(t)$, ésta puede aproximarse mediante funciones complejas que sean ortogonales, de manera que

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 \mathcal{G}_0(t) + [\mathcal{D}_0 \mathcal{G}_0(t)]^* + \mathcal{D}_1 \mathcal{G}_1(t) + [\mathcal{D}_1 \mathcal{G}_1(t)]^* + \dots + \mathcal{D}_n \mathcal{G}_n(t) + [\mathcal{D}_n \mathcal{G}_n(t)]^* \quad 1.74$$

donde \mathcal{D}_k representa a un coeficiente complejo; \mathcal{G}_k , a una función compleja, y $*$ simboliza el conjugado de la función compleja. Como nuestra función original es real, se suma el conjugado de la función compleja para que la parte imaginaria sea cero, aunque se obtenga dos veces la parte real.

De manera similar a la desarrollada en el tema 1.3.2, se desean encontrar los coeficientes de manera que el error sea mínimo. Para las funciones ortogonales complejas, se obtiene la derivada respecto al coeficiente \mathcal{D}_k y se iguala a cero.

Si partimos de la expresión 1.58,

$$E^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \quad 1.75$$

la derivada es

$$\frac{\partial E^2}{\partial \mathcal{D}_k} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}_k} \left(\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt - \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right) \quad 1.76$$

$$\frac{\partial E^2}{\partial \mathcal{D}_k} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{D}_k} \left(- \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) f_a(t) dt + \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt \right) \quad 1.77$$

Dado que el complejo conjugado de una función compleja es conmutable en las operaciones de integración y derivación, se tomará la derivada de la función de error (E^2) con respecto al coeficiente conjugado de \mathfrak{D}_k , por así convenir para el tipo de función que más adelante aplicaremos.

Separando las integrales de 1.77 y sustituyendo la función aproximada, tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}_k} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left\{ \sum_{j=0}^n \mathfrak{D}_j \mathfrak{G}_j(t) + [\mathfrak{D}_j \mathfrak{G}_j(t)]^* \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \mathfrak{G}_k^*(t) dt \quad 1.78$$

Y

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}_k} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{D}_k} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=0}^n \mathfrak{D}_j \mathfrak{G}_j(t) + [\mathfrak{D}_j \mathfrak{G}_j(t)]^* \right]^2 dt \right\} \quad 1.79$$

$$= 2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=0}^n \mathfrak{D}_j \mathfrak{G}_j(t) + [\mathfrak{D}_j \mathfrak{G}_j(t)]^* \right] \mathfrak{G}_k^*(t) dt \quad 1.80$$

$$= 2 \int_{t_1}^{t_2} f_a(t) \mathfrak{G}_k^*(t) dt \quad 1.81$$

Sabiendo que por condición de ortogonalidad en un intervalo dado, las funciones ortogonales complejas cumplen con la ecuación

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{G}_i(t) \mathfrak{G}_j^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad 1.82$$

donde al tomar a la función y a su conjugado se garantiza que nuestra integral siga siendo real, además de ser ortogonal, con lo que la expresión 1.80 se reduce a

$$2 \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=0}^n \mathcal{D}_j \mathcal{G}_j(t) + [\mathcal{D}_j \mathcal{G}_j(t)]^* \right] \mathcal{G}_k^*(t) dt = 2 \mathcal{D}_k \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_k(t) \mathcal{G}_k^*(t) dt \quad 1.83$$

Sustituyendo 1.78 y 1.83 en la expresión 1.77 e igualando a cero, tenemos

$$\frac{\partial E^2}{\partial \mathcal{D}_k} = -\frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \mathcal{G}_k^*(t) dt + \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{D}_k \mathcal{G}_k(t) \mathcal{G}_k^*(t) dt = 0 \quad 1.84$$

por lo que, despejando,

$$\mathcal{D}_k = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \mathcal{G}_k^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{G}_k(t) \mathcal{G}_k^*(t) dt} \quad 1.85$$

que es la expresión para obtener los coeficientes \mathcal{D}_k , produciendo un error cuadrático medio mínimo.

1.4.1 Serie finita de Fourier en su forma compleja

Un conjunto de funciones complejas que cumplen con la condición de ortogonalidad son las *funciones exponenciales complejas* definidas como

$$\mathcal{G}_k(t) = e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad ; \quad \mathcal{G}_k^*(t) = e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 1.86$$

en donde

$$\int_{t_1}^{t_1+T} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{-\frac{i2\pi jt}{T}} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ T & \text{si } k = j \end{cases} \quad 1.87$$

donde T representa la longitud del intervalo en el que la función toma valores, y que más adelante se reconocerá como el período o intervalo de aproximación.

Retomando la expresión 1.74,

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 \mathcal{G}_0(t) + [\mathcal{D}_0 \mathcal{G}_0(t)]^* + \mathcal{D}_1 \mathcal{G}_1(t) + [\mathcal{D}_1 \mathcal{G}_1(t)]^* + \dots + \mathcal{D}_n \mathcal{G}_n(t) + [\mathcal{D}_n \mathcal{G}_n(t)]^* \quad 1.88$$

y sustituyendo las funciones complejas exponenciales, tenemos que:

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 e^{\frac{i2\pi t(0)}{T}} + \mathcal{D}_0^* e^{-\frac{i2\pi t(0)}{T}} + \mathcal{D}_1 e^{\frac{i2\pi t}{T}} + \mathcal{D}_{-1} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} + \dots + \mathcal{D}_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}} + \mathcal{D}_{-n} e^{-\frac{i2\pi nt}{T}} \quad 1.89$$

por lo tanto, la función aproximada queda definida como

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} + \mathcal{D}_k^* e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right\} \quad 1.90$$

si consideramos que $\mathcal{D}_{-k} = \mathcal{D}_k^*$, y reacomodamos los subíndices de la sumatoria para incluir a los conjugados, partiendo desde $-N$ a N y pasando por cero, tenemos que:

$$f_a(t) = \sum_{k=-N}^N \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 1.91$$

donde la función aproximada de la expresión 1.91 es lo que se conoce como *serie de Fourier de la función original* $f(t)$. El coeficiente \mathcal{D}_k se puede obtener si partimos de la expresión 1.85, en donde debe considerarse la ortogonalidad de las funciones exponenciales complejas dada en 1.87, por lo que tendremos que:

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt \quad 1.92$$

donde $t_2 = t_1 + T$.

Por otro lado, tenemos que:

$$\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} = \operatorname{Re} \left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right] + \operatorname{Im} \left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right] \quad 1.93$$

$$\left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right]^* = \operatorname{Re} \left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right] - \operatorname{Im} \left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right] \quad 1.94$$

por lo que, al sumar 1.93 con 1.94, obtenemos que

$$2\operatorname{Re} \left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right] \quad 1.95$$

y, por lo tanto, la expresión 1.90 puede ser representada por

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + 2 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} \left[\mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right] \quad 1.96$$

La evaluación del error cuadrático medio mínimo para la aproximación por funciones ortogonales complejas se efectúa retomando la ecuación 1.70, pero ahora para funciones ortogonales complejas:

$$E^2 = F^2 - F_a^2 \quad 1.97$$

donde

$$F^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt \quad 1.98$$

y

$$F_a^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f_a(t)]^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_a(t) [f_a(t)]^* dt \quad 1.99$$

si usamos funciones ortogonales complejas.

Por lo que si consideramos la serie de Fourier como la función aproximada

$$f_a(t) = \sum_{k=-N}^N \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 1.100$$

y sustituimos en 1.99, obtendremos que:

$$F_a^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{k=-N}^N \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right) \left(\sum_{j=-N}^N \mathfrak{D}_{-j} e^{-\frac{i2\pi jt}{T}} \right) dt \quad 1.101$$

Desarrollamos la sumatoria para $k = -1, 0, 1$:

$$F_a^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathfrak{D}_{-1} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} + \dots + \mathfrak{D}_1 e^{\frac{i2\pi t}{T}} \right) \left(\mathfrak{D}_1 e^{\frac{i2\pi t}{T}} + \dots + \mathfrak{D}_{-1} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} \right) dt \quad 1.102$$

desarrollando el producto,

$$F_a^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_1 e^{-\frac{i2\pi t}{T}} e^{\frac{i2\pi t}{T}} + \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_1 e^{\frac{i2\pi t}{T}} e^{\frac{i2\pi t}{T}} + \dots \right. \\ \left. + \mathcal{D}_{-1} \mathcal{D}_{-1} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} + \mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{-1} e^{\frac{i2\pi t}{T}} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} \right) dt \quad 1.103$$

por la condición de ortogonalidad dada en 1.87, sólo tendrán valor las integrales cuando $i = -j$ o $j = -i$, por lo tanto,

$$F_a^2 = \frac{2\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{-1}}{T} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{i2\pi t}{T}} e^{\frac{i2\pi t}{T}} dt + \dots = 2\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{-1} + \dots \quad 1.104$$

generalizando,

$$F_a^2 = \frac{2}{T} \sum_{k=0}^N \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-k} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt \quad 1.105$$

por lo que

$$F_a^2 = 2 \sum_{k=0}^N \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-k} = \mathcal{D}_0^2 + 2 \sum_{k=1}^N \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-k} \quad 1.106$$

siendo,

$$\mathcal{D}_k = |\mathcal{D}_k| e^{i\phi_k} \quad ; \quad \mathcal{D}_{-k} = |\mathcal{D}_k| e^{-i\phi_k} \quad 1.107$$

tenemos

$$F_a^2 = \mathcal{D}_0^2 + 2 \sum_{k=1}^N |\mathcal{D}_k|^2 \quad 1.108$$

donde

$$D_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-\frac{i2\pi 0t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad 1.109$$

Es necesario remarcar que la serie compleja de Fourier, como medio de aproximación sobre los métodos descritos anteriormente, presenta la ventaja de ser muy general porque permite aproximar cualquier función en cualquier intervalo, ya que no está limitada a un intervalo dado, como es el caso de los polinomios de Legendre que son funciones ortogonales reales.

Ejemplo 1.5

Dada $w(t) = t$ en $t \in (-\pi, \pi)$, obtener su función aproximada mediante la serie de Fourier.

De la ecuación 1.91 y 1.92, tenemos que:

$$f_a(t) = \sum_{k=-N}^N D_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$
$$D_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt$$

sustituyendo la función dada,

$$D_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{\frac{i2\pi kt}{2\pi}} dt$$
$$D_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} dt = -\frac{(-1)^k}{ik}$$

por lo que

$$f_a(t) = \sum_{k=-N}^N - \frac{(-1)^k}{ik} e^{ikt}$$

por otro lado,

$$D_k = - \frac{(-1)^k}{ik} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i(-1)^k}{k}$$

y en forma de Euler,

$$D_k = \left| \frac{1}{k} \right| e^{i(-1)^k \frac{\pi}{2}}$$

por lo tanto,

$$|D_k| = \frac{1}{k}$$

y

$$\phi_k = (-1)^k \frac{\pi}{2}$$

por lo que

$$\phi_k = -\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad \phi_k = \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

donde ϕ_k es el ángulo que representa a la fase.

1.109: D_0 se evalúa en forma independiente, usando la expresión

$$D_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

por lo tanto,

$$D_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0$$

1.108,

Calculando el error mediante las expresiones 1.97, 1.98 y

$$F^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} \pi^2$$

$$F_a^2 = \mathcal{D}_0^2 + 2 \sum_{k=1}^N |\mathcal{D}_k|^2 = 0 + 2 \sum_{k=1}^N \left| \frac{1}{k} \right|^2 = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$$

por lo que

$$E^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$$

$$\text{Si } N = 2$$

$$F_a^2 = 2(1 + 1/4) = 2.5$$

$$E^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 2.5 = 0.79$$

$$E^2(\%) = 24\%$$

$$\text{Si } N = 4$$

$$F_a^2 = 2(1 + 1/4 + 1/9 + 1/16) = 2.84$$

$$E^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 2.84 = 0.443$$

$$E^2(\%) = 13.45\%$$

$$\text{Si } N = 6$$

$$F_a^2 = 2(1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36) = 2.982$$

$$E^2 = 0.307$$

$$E^2(\%) = 9.33\%$$

Como puede observarse, si aumentamos el número de coeficientes \mathcal{D}_k , el error tiende a disminuir, por lo que si k va desde $-\infty$ a $+\infty$, entonces podemos decir que la serie de Fourier representa a la función original y no es sólo una aproximación, por lo que $f(t)$ queda representada totalmente mediante la serie de Fourier,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

1.110

cuando k va desde $-\infty$ a $+\infty$.

1.4.2 Serie finita de Fourier en sus formas trigonométricas

a) Primera forma trigonométrica de la serie de Fourier

La serie de Fourier puede representarse de varias formas. Retomando la expresión 1.90, tenemos

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} + \mathcal{D}_{-k} e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right\} \quad 1.111$$

donde

$$\mathcal{D}_k = |\mathcal{D}_k| e^{i\phi_k} \quad ; \quad \mathcal{D}_{-k} = |\mathcal{D}_k| e^{-i\phi_k} \quad 1.112$$

Sustituyendo 1.111 en 1.110,

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ |\mathcal{D}_k| e^{i\phi_k} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} + |\mathcal{D}_k| e^{-i\phi_k} e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right\} \quad 1.113$$

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ |\mathcal{D}_k| e^{i\left(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}\right)} + |\mathcal{D}_k| e^{-i\left(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}\right)} \right\} \quad 1.114$$

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ |\mathcal{D}_k| \left[e^{i\left(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}\right)} + e^{-i\left(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}\right)} \right] \right\} \quad 1.115$$

descomponiendo la exponencial, obtenemos que:

$$e^{i(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T})} = \cos(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}) + i \operatorname{isen}(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}) \quad 1.116$$

$$e^{-i(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T})} = \cos(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}) - i \operatorname{isen}(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}) \quad 1.117$$

y sustituyendo 1.116 y 1.117 en 1.115, obtenemos:

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N 2|\mathcal{D}_k| \cos(\phi_k + \frac{2\pi kt}{T}) \quad 1.118$$

Ahora, si decimos que

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_0 \quad \text{Y} \quad \mathcal{C}_k = 2|\mathcal{D}_k|$$

entonces

$$f_a(t) = \mathcal{C}_0 + \sum_{k=1}^N \mathcal{C}_k \cos(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k) \quad 1.119$$

expresión que representa la primera forma trigonométrica de la serie de Fourier.

b) Segunda forma trigonométrica de la serie de Fourier

Para definir una nueva forma de la serie de Fourier, consideramos la parte real e imaginaria del \mathcal{D}_k de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{2} \mathcal{A}_k - i \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \quad 1.120$$

donde

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt \quad 1.121$$

y

$$e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} = \cos \frac{2\pi kt}{T} - i \operatorname{isen} \frac{2\pi kt}{T} \quad 1.122$$

por lo que

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\cos \frac{2\pi kt}{T} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.123$$

separando las integrales,

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\cos \frac{2\pi kt}{T} \right] dt - i \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.124$$

comparando 1.120 con 1.124, tenemos que:

$$\frac{1}{2} A_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\cos \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.125$$

$$-i \frac{1}{2} B_k = -i \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.126$$

por lo tanto,

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\cos \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.127$$

y

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.128$$

Si sustituimos 1.120 y 1.122 en la serie de Fourier definida por la expresión 1.111 como

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} + \mathcal{D}_{-k} e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right\} \quad 1.129$$

tenemos que:

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{1}{2} \mathcal{A}_k - i \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \right) \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right) + \left(\frac{1}{2} \mathcal{A}_k + i \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \right) \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right) \right\} \quad 1.130$$

$$f_a(t) = \mathcal{D}_0 + \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{A}_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + \frac{i}{2} \mathcal{A}_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} - i \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_k \cos \frac{2\pi kt}{T} - \frac{i}{2} \mathcal{A}_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} + i \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + \frac{1}{2} \mathcal{B}_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right\} \quad 1.131$$

al realizar la suma de las expresiones entre paréntesis de la ecuación 1.131, y definiendo a $\mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_0$, obtenemos

$$f_a(t) = \mathcal{A}_0 + \sum_{k=1}^N \mathcal{A}_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + \mathcal{B}_k \operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \quad 1.132$$

expresión que representa la *segunda forma trigonométrica de la serie de Fourier*.

En resumen, las expresiones que nos permiten pasar de la serie compleja a la primera forma trigonométrica son:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \mathcal{D}_0 \\ \mathcal{C}_k &= 2|\mathcal{D}_k| \\ \mathcal{D}_k &= |\mathcal{D}_k| e^{i\phi_k} \end{aligned} \quad 1.133$$

Las expresiones que nos permiten pasar de la serie compleja a la segunda forma trigonométrica son:

$$A_0 = D_0$$

$$A_k = 2 \operatorname{Real} (D_k) = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\cos \frac{2\pi kt}{T} \right] dt \quad 1.134$$

$$B_k = -2 \operatorname{Imag} (D_k) = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left[\operatorname{sen} \frac{2\pi kt}{T} \right] dt$$

Para encontrar las expresiones que nos permiten pasar de la primera a la segunda forma de la serie trigonométrica, tenemos que:

$$f_a(t) = C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k \right) \quad 1.135$$

por identidades trigonométricas,

$$\cos(\gamma + \beta) = \cos\gamma \cos\beta - \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta \quad 1.136$$

por lo tanto,

$$f_a(t) = C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \left\{ \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \cos \phi_k - \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \operatorname{sen} \phi_k \right\} \quad 1.137$$

$$f_a(t) = C_0 + \sum_{k=1}^N \left[C_k \left\{ \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \cos \phi_k \right\} - C_k \left\{ \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \operatorname{sen} \phi_k \right\} \right]$$

1.138

comparándola con la segunda forma trigonométrica expresada en 1.132, tenemos que las expresiones buscadas son:

$$A_0 = C_0$$

$$A_k = C_k \cos \phi_k$$

1.139

$$B_k = -C_k \operatorname{sen} \phi_k$$

Por otro lado, de 1.139 tenemos que:

$$\cos \phi_k = \frac{A_k}{C_k}$$

$$\operatorname{sen} \phi_k = \frac{-B_k}{C_k}$$

1.140

$$\tan \phi_k = \frac{-B_k}{A_k}$$

por lo que las expresiones para pasar de la segunda forma a la primera forma trigonométrica son:

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{-B_k}{A_k} \right)$$

1.141

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

1.4.3 Interpretación de la serie de Fourier

La forma en que la serie de Fourier reconstruye a una función es a través de la suma de funciones cosenoidales. Estas funciones tienen diferentes amplitudes y períodos, las cuales al sumarse con diferentes ángulos de fase van reconstruyendo a la función original. Cada una de estas señales tiene una amplitud definida por el coeficiente de la serie C_k y por el ángulo de fase ϕ_k que indica el desplazamiento que la señal tiene con respecto al origen.

En el ejemplo 1.5, se obtuvo que para

$$x(t) = t \quad ; \quad t \in (-\pi, \pi) \quad D_0 = 0 \quad ; \quad C_0 = 0$$

$$T = 2\pi \quad ; \quad D_k = i \frac{(-1)^k}{k} \quad ; \quad C_k = \frac{2}{k} \quad ; \quad \phi_k = \frac{\pi}{2} (-1)^k$$

por lo que la serie de Fourier, para el ejemplo mencionado, en su primera forma trigonométrica quedará representada por

$$f_a(t) = \epsilon_0 + \sum_{k=1}^N \epsilon_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right)$$

Sustituyendo,

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^N \frac{2}{k} \cos\left(kt + \frac{\pi}{2} (-1)^k\right)$$

En la tabla 1.1 se encuentran los valores de los primeros 24 coeficientes de la serie.

En la figura 1.5 se muestran las primeras seis señales cosenoidales que se generan, según se muestra para $t \in (-\pi, \pi)$.

k	Dk	Ck	PHI(k)
1	-1	2	-1.5707963
2	0.5	1	1.5707963
3	-0.3333333	0.6666667	-1.5707963
4	0.25	0.5	1.5707963
5	-0.2	0.4	-1.5707963
6	0.1666667	0.3333333	1.5707963
7	-0.1428571	0.2857143	-1.5707963
8	0.125	0.25	1.5707963
9	-0.1111111	0.2222222	-1.5707963
10	0.1	0.2	1.5707963
11	-0.0909091	0.1818182	-1.5707963
12	0.0833333	0.1666667	1.5707963
13	-0.0769231	0.1538462	-1.5707963
14	0.0714286	0.1428571	1.5707963
15	-0.0666667	0.1333333	-1.5707963
16	0.0625	0.125	1.5707963
17	-0.0588235	0.1176471	-1.5707963
18	0.0555556	0.1111111	1.5707963
19	-0.0526316	0.1052632	-1.5707963
20	0.05	0.1	1.5707963
21	-0.047619	0.0952381	-1.5707963
22	0.0454545	0.0909091	1.5707963
23	-0.0434783	0.0869565	-1.5707963
24	0.0416667	0.0833333	1.5707963

Tabla 1.1

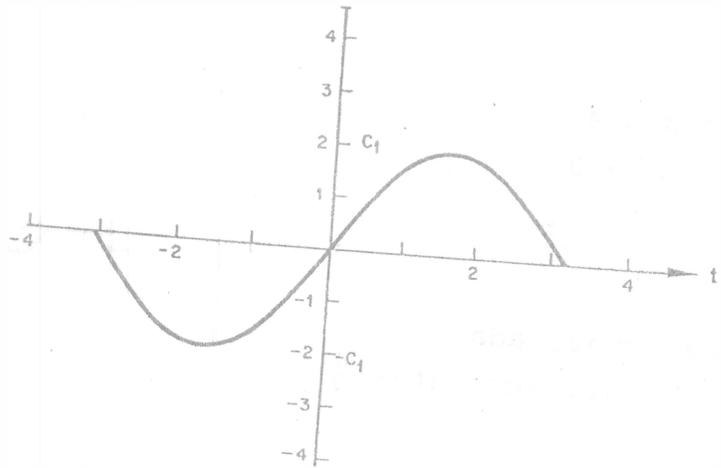
Para $K = 1$

$$C_1 = 2$$

$$\phi_1 = \frac{-\pi}{2}$$

Señal graficada

$$= (2)\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$



a)

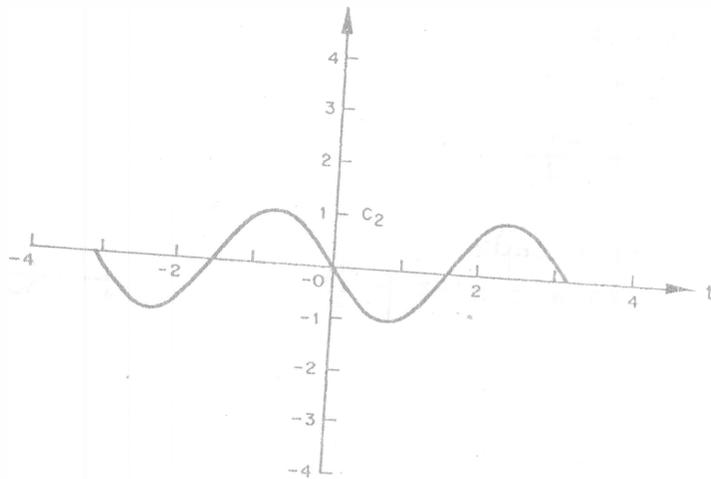
Para $K = 2$

$$C_2 = 1$$

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Señal graficada

$$= (1)\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$



b)

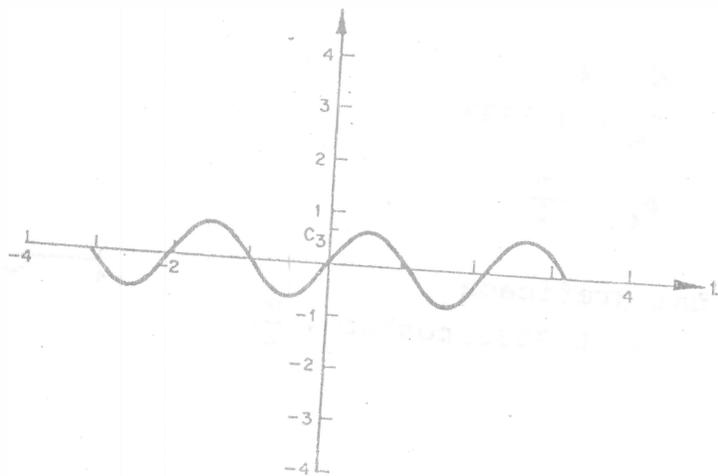
Para $K = 3$

$$C_3 = 0.6666$$

$$\phi_3 = \frac{-\pi}{2}$$

Señal graficada

$$= (0.6666)\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$$



c)

Figura 1.5

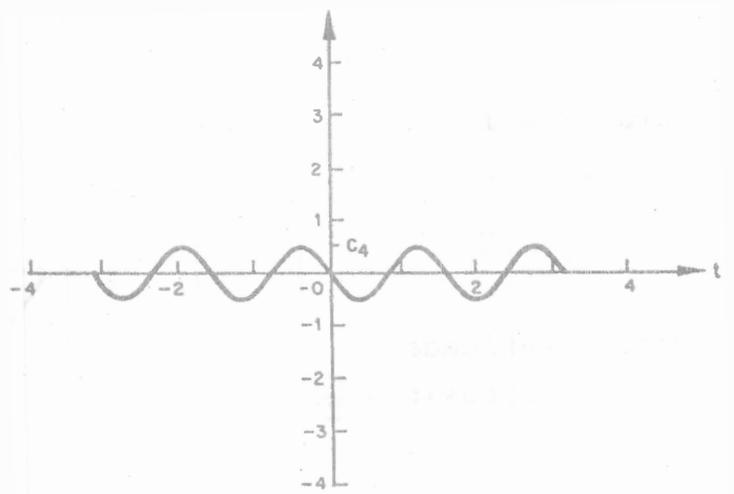
Para $K = 4$

$$C_4 = 0.5$$

$$\phi_4 = \frac{\pi}{2}$$

Señal graficada

$$= (0.5) \cos(4t + \frac{\pi}{2})$$



d)

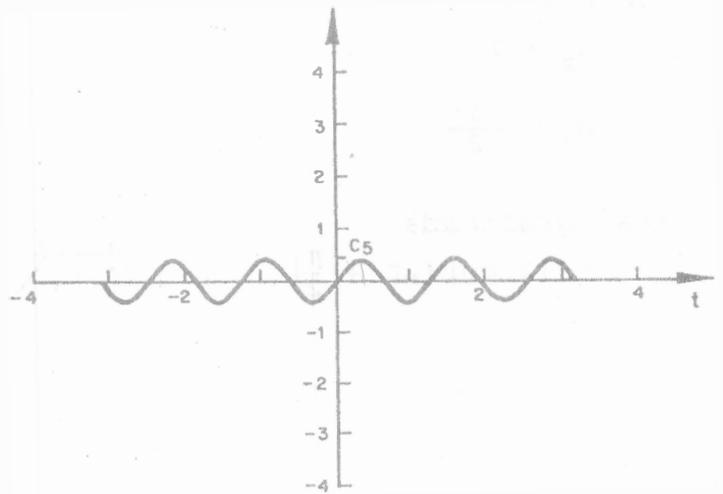
Para $K = 5$

$$C_5 = 0.4$$

$$\phi_5 = \frac{-\pi}{2}$$

Señal graficada

$$= (0.4) \cos(5t - \frac{\pi}{2})$$



e)

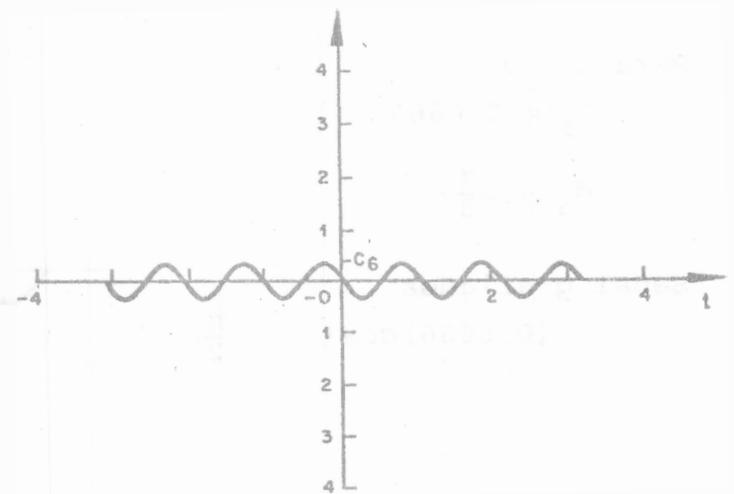
Para $K = 6$

$$C_6 = 0.3333$$

$$\phi_6 = \frac{\pi}{2}$$

Señal graficada

$$= (0.3333) \cos(6t + \frac{\pi}{2})$$

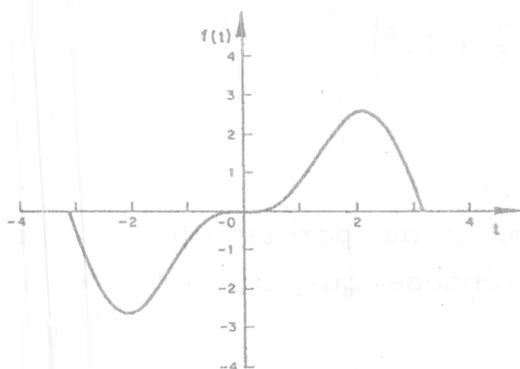


f)

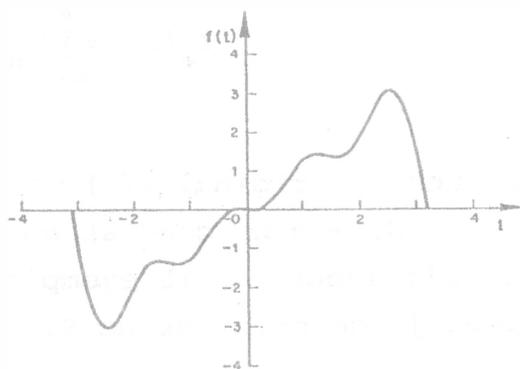
Figura 1.5 (continuación)

Los valores de estas funciones se encuentran en la tabla 1.2.

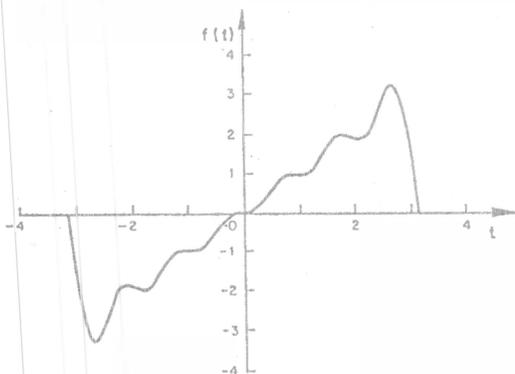
Sumando las señales de la figura 1.5, se obtiene la construcción de la señal aproximada (figura 1.6). Como podemos observar, al incrementarse el número de coeficientes sumados que representan funciones cosenoidales, se aumenta nuestra aproximación a la señal original.



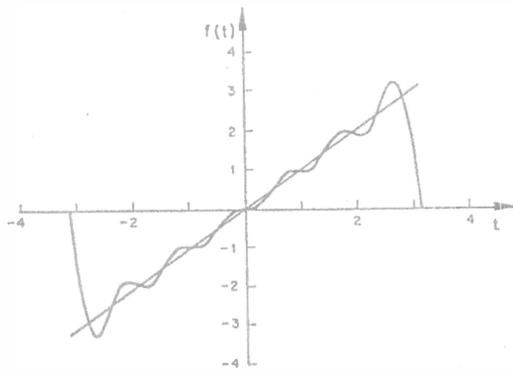
$N = 2$
a)



$N = 4$
b)



$N = 6$
c)



d)

Figura 1.6

En las últimas tres columnas del lado derecho de la tabla 1.2, se muestran los valores calculados para la suma de los primeros dos coeficientes de la serie de Fourier (figura 1.6a), para la suma de los primeros cuatro coeficientes de la serie de Fourier (figura 1.6b), y los valores para la suma de los primeros seis coeficientes de la serie de Fourier (figura 1.6c).

En la figura 1.6d se muestra la función aproximada para $N = 6$ representada por

$$f_a(t) = \sum_{k=1}^6 \frac{2}{k} \cos \left(kt + \frac{\pi}{2} (-1)^k \right)$$

y la función original $v(t) = t$; $t \in (-\pi, \pi)$.

El error cuadrático medio mínimo y su porcentaje ya han sido calculados en el ejemplo 1.4, obteniéndose que para $N = 6$ el porcentaje de error es de 9.33%.

t	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	suma2	suma4	suma6
-3.141593	-3.68E-16	-1.84E-16	-2.86E-16	-2.14E-16	-9.8E-16	-8.17E-16	-5.51E-16	-1.05E-15	-2.85E-15
-3.063053	-0.156918	-0.156434	-0.156663	-0.154508	-0.153073	-0.151333	-0.313353	-0.623491	-0.927895
-2.984513	-0.312869	-0.309017	-0.302666	-0.293893	-0.282843	-0.269672	-0.621886	-1.218439	-1.770954
-2.905973	-0.466891	-0.453999	-0.432965	-0.404508	-0.369552	-0.329229	-0.920881	-1.758555	-2.457136
-2.827433	-0.618034	-0.587785	-0.539344	-0.475528	-0.4	-0.317019	-1.205819	-2.220692	-2.93771
-2.748894	-0.765367	-0.707107	-0.615919	-0.5	-0.369552	-0.235702	-1.472474	-2.586393	-3.193647
-2.670354	-0.907981	-0.809017	-0.658458	-0.475528	-0.282843	-0.103006	-1.716998	-2.850984	-3.236833
-2.591814	-1.044997	-0.891007	-0.664611	-0.404508	-0.153073	0.0521448	-1.936004	-3.005123	-3.106052
-2.513274	-1.175571	-0.951057	-0.634037	-0.293893	2.205E-16	0.1959284	-2.126627	-3.054557	-2.858628
-2.434734	-1.298896	-0.987688	-0.568426	-0.154508	0.1530734	0.2970022	-2.286584	-3.009519	-2.559444
-2.356194	-1.414214	-1	-0.471404	1.531E-16	0.2828427	0.3333333	-2.414214	-2.895618	-2.269442
-2.277655	-1.520812	-0.987688	-0.348332	0.1545085	0.3695518	0.2970022	-2.5085	-2.702324	-2.03577
-2.199115	-1.618034	-0.951057	-0.206011	0.2938926	0.4	0.1959284	-2.569091	-2.481209	-1.885281
-2.120575	-1.70528	-0.891007	-0.052306	0.4045085	0.3695518	0.0521448	-2.596287	-2.244084	-1.822388
-2.042035	-1.782013	-0.809017	0.1042895	0.4755283	0.2828427	-0.103006	-2.59103	-2.011212	-1.831375
-1.963495	-1.847759	-0.707107	0.255122	0.5	0.1530734	-0.235702	-2.548666	-1.799744	-1.882373
-1.884956	-1.902113	-0.587785	0.3918564	0.4755283	-1.72E-16	-0.317019	-2.489898	-1.622514	-1.939532
-1.806416	-1.94474	-0.453999	0.5069368	0.4045085	-0.153073	-0.329229	-2.39873	-1.487285	-1.969588
-1.727876	-1.975377	-0.309017	0.5940038	0.2938926	-0.282843	-0.269672	-2.284394	-1.396497	-1.949012
-1.649336	-1.993835	-0.156434	0.648246	0.1545085	-0.369552	-0.151333	-2.150269	-1.347515	-1.868397
-1.570796	-2	6.126E-17	0.666666	-9.19E-17	-0.4	1.021E-16	-2	-1.333334	-1.733334
-1.492257	-1.993835	0.1564345	0.648246	-0.154508	-0.369552	0.1513302	-1.8374	-1.343663	-1.561884
-1.413717	-1.975377	0.309017	0.5940038	-0.293893	-0.282843	0.2696723	-1.66636	-1.366249	-1.379419
-1.335177	-1.94474	0.4539905	0.5069368	-0.404508	-0.153073	0.3292294	-1.490749	-1.388321	-1.212165
-1.256637	-1.902113	0.5877853	0.3918564	-0.475528	-0.1225E-16	0.3170188	-1.314328	-1.398	-1.080981
-1.178097	-1.847759	0.7071068	0.255122	-0.5	0.1530734	0.2357023	-1.140852	-1.38553	-0.996755
-1.098557	-1.782013	0.809017	0.1042895	-0.475528	0.2828427	0.1030057	-0.972996	-1.344235	-0.958386
-1.021018	-1.70528	0.8910065	-0.052306	-0.404508	0.3695518	-0.052145	-0.814274	-1.271088	-0.953681
-0.942478	-1.618034	0.9510565	-0.206011	-0.293893	0.4	-0.195928	-0.666977	-1.166881	-0.96281
-0.863938	-1.520812	0.9876883	-0.348332	-0.154508	0.3695518	-0.297002	-0.533124	-1.035964	-0.963414
-0.785398	-1.414214	1	-0.471404	3.063E-17	0.2828427	-0.333333	-0.414214	-0.885618	-0.936108
-0.706858	-1.298896	0.9876883	-0.568426	0.1545085	0.1530734	-0.297002	-0.311208	-0.725125	-0.869054
-0.628319	-1.175571	0.9510565	-0.634037	0.2938926	-7.35E-17	-0.195928	-0.224514	-0.564658	-0.760587
-0.549779	-1.044997	0.8910065	-0.664611	0.4045085	-0.153073	-0.052145	-0.153991	-0.414093	-0.619311
-0.471239	-0.907981	0.809017	-0.658458	0.4755283	-0.282843	0.1030057	-0.098964	-0.281894	-0.461731
-0.392699	-0.765367	0.7071068	-0.615919	0.5	-0.369552	0.2357023	-0.05826	-0.174179	-0.308029
-0.314159	-0.618034	0.5877853	-0.539344	0.4755283	-0.4	0.3170188	-0.030249	-0.094065	-0.177046
-0.235619	-0.466891	0.4539905	-0.432965	0.4045085	-0.369552	0.3292294	-0.0129	-0.041357	-0.081679
-0.15708	-0.312869	0.309017	-0.302666	0.2938926	-0.282843	0.2696723	-0.003852	-0.012619	-0.02579
-0.07854	-0.156918	0.1564345	-0.15563	0.1545085	-0.153073	0.1513302	-0.000484	-0.001605	-0.003349
0	1.225E-16	6.126E-17	4.084E-17	3.063E-17	2.45E-17	2.042E-17	1.838E-16	2.552E-16	3.002E-16
0.0785398	0.1569182	-0.156434	0.1556301	-0.154508	0.1530734	-0.151333	0.0004837	0.0016053	0.0033485
0.1570796	0.3128689	-0.309017	0.302666	-0.293893	0.2828427	-0.269672	0.0038519	0.0126193	0.0257897
0.2356194	0.4668907	-0.453999	0.4329649	-0.404508	0.3695518	-0.329229	0.0129002	0.0413567	0.081679
0.3141593	0.618034	-0.587785	0.5393441	-0.475528	0.4	-0.317019	0.0302487	0.0940646	0.1770458
0.3926991	0.7653669	-0.707107	0.6159191	-0.5	0.3695518	-0.235702	0.0582601	0.1741792	0.3080287
0.4712389	0.907981	-0.809017	0.6584582	-0.475528	0.2828427	-0.103006	0.098964	0.281894	0.461731
0.5497797	1.0449971	-0.891007	0.6646109	-0.404508	0.1530734	0.0521448	0.1539906	0.414093	0.6193112
0.6283185	1.1755705	-0.951057	0.634037	-0.293893	2.45E-17	0.1959284	0.224514	0.5646584	0.7605868
0.7068583	1.2988961	-0.987688	0.5684262	-0.154508	-0.153073	0.2970022	0.3112078	0.7251255	0.8690543
0.7853982	1.4142136	-1	0.471404	-9.19E-17	-0.282843	0.3333333	0.4142136	0.8856176	0.9361082
0.863938	1.5208119	-0.987688	0.348332	0.1545085	-0.369552	0.2970022	0.5331236	1.0359641	0.9634145
0.9424778	1.618034	-0.951057	0.2060111	0.2938926	-0.4	0.1959284	0.6669775	1.1668812	0.9628096
1.0210176	1.7052803	-0.891007	0.052306	0.4045085	-0.369552	0.0521448	0.8142738	1.2710883	0.9536813
1.0985574	1.782013	-0.809017	-0.10429	0.4755283	-0.282843	-0.103006	0.9729961	1.3442348	0.9583864
1.1780972	1.8477591	-0.707107	-0.255122	0.5	-0.153073	-0.235702	1.1406523	1.3855303	0.9967546
1.2566371	1.902113	-0.587785	-0.391856	0.4755283	-7.35E-17	-0.317019	1.3143278	1.3979996	1.0809808
1.3351769	1.9447398	-0.453999	-0.506937	0.4045085	0.1530734	-0.329229	1.4907493	1.388321	1.212165
1.4137167	1.9753767	-0.309017	-0.594004	0.2938926	0.2828427	-0.269672	1.6663597	1.3662486	1.3794189
1.4922565	1.9938347	-0.156434	-0.648246	0.1545085	0.3695518	-0.151333	1.8374002	1.3436627	1.5618844
1.5707963	2	-1.84E-16	-0.666666	1.531E-16	0.4	-1.43E-16	2	1.333334	1.733334
1.6493361	1.9938347	0.1564345	-0.648246	-0.154508	0.3695518	0.1513302	2.1502691	1.3475147	1.8683966
1.727876	1.9753767	0.309017	-0.594004	-0.293893	0.2828427	0.2696723	2.2843937	1.3964973	1.9490123
1.8064158	1.9447398	0.4539905	-0.506937	-0.404508	0.1530734	0.3292294	2.3987303	1.487285	1.9695879
1.8849556	1.902113	0.5877853	-0.391856	-0.475528	1.225E-16	0.3170188	2.4898983	1.6225136	1.9395324
1.9634954	1.8477591	0.7071068	-0.255122	-0.5	-0.153073	0.2357023	2.5548658	1.7997438	1.8823727
2.0420352	1.782013	0.809017	-0.10429	-0.475528	-0.282843	0.1030057	2.59103	2.0112122	1.8313752
2.120575	1.7052803	0.8910065	0.052306	-0.404508	-0.369552	-0.052145	2.5962869	2.2440844	1.8223877
2.1991149	1.618034	0.9510565	0.2060111	-0.293893	-0.4	-0.195928	2.5690905	2.481209	1.8852806
2.2776547	1.5208119	0.9876883	0.348332	-0.154508	-0.369552	-0.297002	2.5085003	2.7023238	2.0357698
2.3561945	1.4142136	1	0.471404	-2.14E-16	-0.282843	-0.333333	2.4142136	2.8856176	2.2694416
2.4347343	1.2988961	0.9876883	0.5684262	0.1545085	-0.153073	-0.297002	2.2865844	3.0095191	2.5594436
2.5132741	1.1755705	0.9510565	0.634037	0.2938926	-1.72E-16	-0.195928	2.126627	3.0545567	2.8586283
2.5918139	1.0449971	0.8910065	0.6646109	0.4045085	0.1530734	-0.052145	1.9360037	3.005123	3.1060516
2.6703538	0.907981	0.809017	0.6584582	0.4755283	0.2828427	0.1030057	1.716998	2.8509845	3.2368329
2.7488936	0.7653669	0.7071068	0.6159191	0.5	0.3695518	0.2357023	1.4724736	2.5883927	3.1936468
2.8274334	0.618034	0.5877853	0.5393441	0.4755283	0.4	0.3170188	1.2058192	2.2206916	2.9377105
2.9059732	0.4668907	0.4539905	0.4329649	0.4045085	0.3695518	0.3292294	0.9208812	1.7583547	2.4571359
2.984513	0.3128689	0.309017	0.302666	0.2938926	0.2828427	0.2696723	0.6218859	1.2184386	1.7709536
3.0630528	0.1569182	0.1564345	0.1556301	0.1545085	0.1530734	0.1513302	0.3133527	0.6234912	0.9278948
3.1415927	1.225E-16	3.063E-16	2.042E-16	2.757E-16	2.205E-16	-3.27E-16	4.288E-16	9.087E-16	8.025E-16

Tabla 1.2

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dada la función $f(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ en $t \in [-1, 1]$:

a) Aproxime la función, usando el polinomio

$$f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

de tal forma que $f(t) = f_a(t)$ en $t = -1, 0$ y 1 .

b) Construya la función de error y error relativo.

¿Es la aproximación de buena calidad?

Evalúe el error promedio. De acuerdo al error promedio, ¿qué podemos decir sobre la calidad de la aproximación?

c) Aproxime la función $f(t)$, usando el criterio del error cuadrático medio mínimo. Escoja el número de puntos de coincidencia adecuada, de tal manera que el error cuadrático medio producido en la aproximación sea menor que el 5% respecto al valor cuadrático medio $[F^2]$ de la función $f(t)$.

d) Aproxime la función, usando el método del polinomio de Legendre, de tal manera que el error cuadrático medio mínimo producido en la aproximación sea menor que el 5% respecto al valor cuadrático medio $[F^2]$ de la función $f(t)$.

2. Dada la función $q(t) = e^{-t}$; $0 \leq t \leq 2$:

a) Obtenga la función aproximada para tres puntos, usando el polinomio

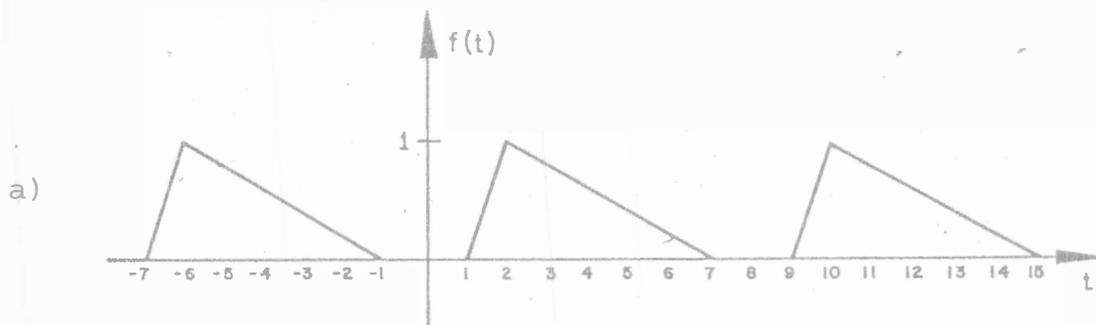
$$f_a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

b) Obtenga y grafique las funciones de error y error relativo (%) para valores espaciados cada 0.1.

c) Establezca si la aproximación es de buena calidad, si se toma como criterio de buena calidad que para ninguno de los puntos el valor del error relativo sea mayor del 10%.

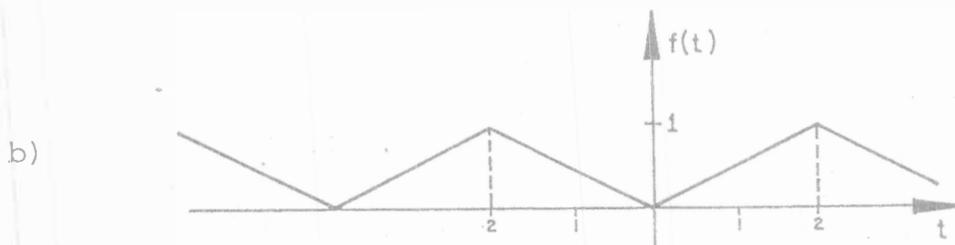
d) Aproxime la función, usando el método de polinomios de Legendre si es posible, y si no, establezca por qué.

3. Obtenga la representación de las funciones mostradas en la serie de Fourier compleja y en la primera y segunda formas trigonométricas.



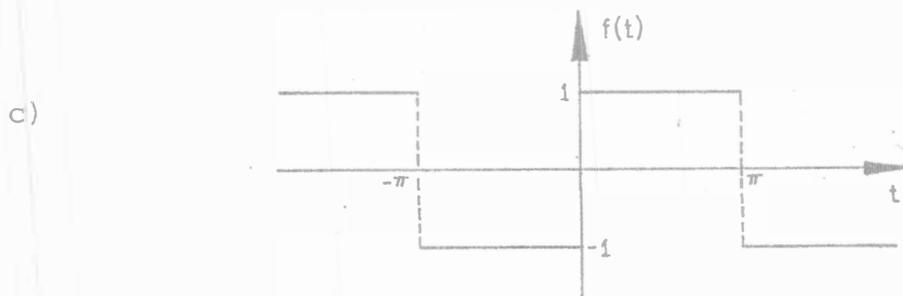
$$t \in (0, 8)$$

Observe que el período de esta función no es igual al del intervalo integrable, ya que el período $T = 8$ y el intervalo integrable está entre 1 y 7.



$$T = 4$$

$$t \in (-2, 2)$$



$$T = 2\pi$$

$$t \in (-\pi, \pi)$$

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE FUNCIONES PERIÓDICAS CONTINUAS

2.1 SERIE DE FOURIER DE FUNCIONES PERIÓDICAS

Una función periódica es aquella que satisface la condición:

$$f(t) = f(t+T)$$

donde T es un intervalo constante.

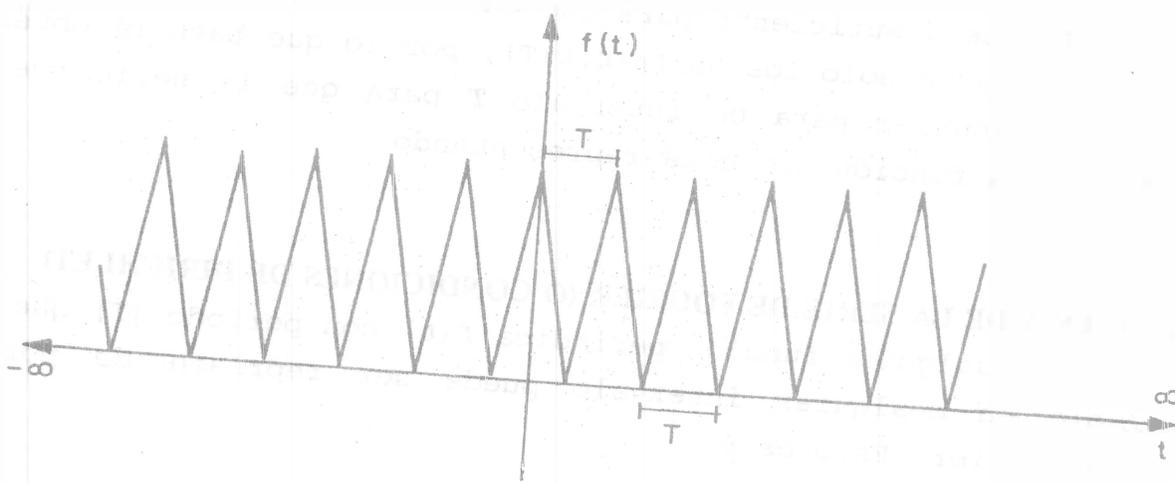


Figura 2.1

El valor más pequeño de T que cumple la condición se conoce como *período* de $f(t)$.

Para determinar si la serie de Fourier es periódica,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.1$$

se sustituye t por $t+T$,

$$f(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi k(t+T)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{i2\pi kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.2$$

como $e^{i2\pi k} = \cos(2\pi k) + i \operatorname{sen}(2\pi k) = 1 + 0$, entonces $f(t+T) = f(t)$.

Por lo que la serie de Fourier es periódica para cualquier período T .

Si por otro lado, si tenemos una función $f(t)$ que es periódica con un período T y se quiere representar por la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

entonces con que se obtenga la serie de Fourier para un solo período de $t \in (t, t+T)$, será suficiente para que todos los valores de t queden representados y no sólo los de $t \in (t, t+T)$, por lo que bastará obtener la serie de Fourier para un intervalo T para que la serie vuelva periódica a la función que está representando.

2.2 TEOREMA DE LA SERIE DE FOURIER (O CONDICIONES DE DIRICHLET)

1. Cualquier función periódica $f(t)$ con período (T) que sea integrable en cualquier intervalo puede ser representada por la serie de Fourier. Esto es si

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt = \text{valor finito}$$

implica que puede ser representada por

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

2. Si además $[f(t)]^2$ es integrable, entonces la serie de Fourier converge al valor $f(t)$ en cualquier punto donde $f(t)$ es continua.

Si en $t = t_1$ la función periódica $f(t)$ no es continua, de manera que el valor de la función por la derecha es diferente del valor de la función por la izquierda, esto es $f(t_1^+) \neq f(t_1^-)$,

entonces en ese punto (t_1) la serie converge al valor medio de la discontinuidad:

$$\frac{1}{2} \left(f(t_1^+) + f(t_1^-) \right)$$

2.3 PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER

La serie de Fourier posee ciertas características o propiedades que nos permiten simplificar pasos al momento de obtener la serie para algunas funciones. Dichas propiedades se describen a continuación.

2.3.1 Desplazamiento en el tiempo

Esta propiedad nos permite obtener de una forma simple y directa la serie de Fourier de una función desplazada en el tiempo a partir de la serie de Fourier de la función original y viceversa.

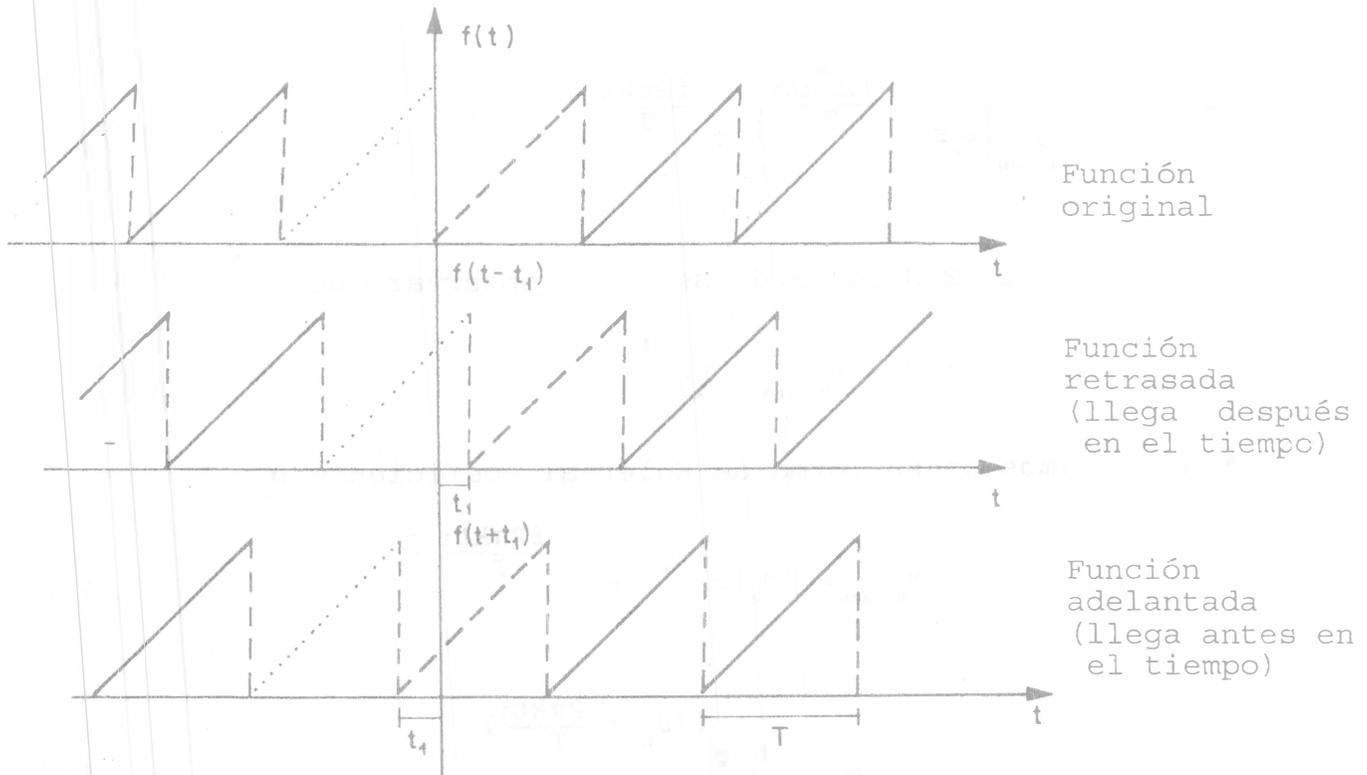


Figura 2.2

Si tenemos una función periódica $f(t)$ cualquiera, representada por la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.3$$

y desplazamos la función $f(t)$, como se muestra en la figura 2.2,

$$f_{des}(t) = f(t \pm t_1)$$

entonces, su serie de Fourier será:

$$f(t \pm t_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi k(t \pm t_1)}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{\pm \frac{i2\pi kt_1}{T}} \quad 2.4$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{\pm \frac{i2\pi kt_1}{T}} \quad 2.5$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\mathcal{D}_k e^{\pm \frac{i2\pi kt_1}{T}} \right) e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.6$$

Comparando 2.3 con 2.6, se puede observar que

$$\mathcal{D}_{k des} = \mathcal{D}_k e^{\pm \frac{i2\pi kt_1}{T}} \quad 2.7$$

y si representamos en su forma de Euler al coeficiente \mathcal{D}_k ,

$$\mathcal{D}_{k des} = |\mathcal{D}_k| e^{i\phi_k} e^{\pm \frac{i2\pi kt_1}{T}} \quad 2.8$$

por lo tanto,

$$\mathcal{D}_{k des} = |\mathcal{D}_k| e^{i(\phi_k \pm \frac{2\pi kt_1}{T})} \quad 2.9$$

como puede observarse, en lo único que cambia el coeficiente D_k en una función desplazada es en que el ángulo de fase se ve aumentado (adelanto) o reducido (retraso) en $\frac{2\pi kt_1}{T}$ (En sistemas físicos reales se habla de retraso en el tiempo, ya que no existe físicamente el adelanto).

2.3.2 Simetría de funciones

Existen algunas funciones que por su simetría presentan propiedades muy útiles cuando se quiere obtener de éstas la serie de Fourier. Como se explicará más adelante, esto se debe a que la serie de Fourier se puede descomponer en funciones de tipo simétrico. A continuación se describen estas funciones y sus propiedades.

a) Funciones de simetría par

Una función es de simetría par respecto a un eje $t = t_0$ si:

$$f(t_0+t) = f(t_0-t) \quad 2.10$$

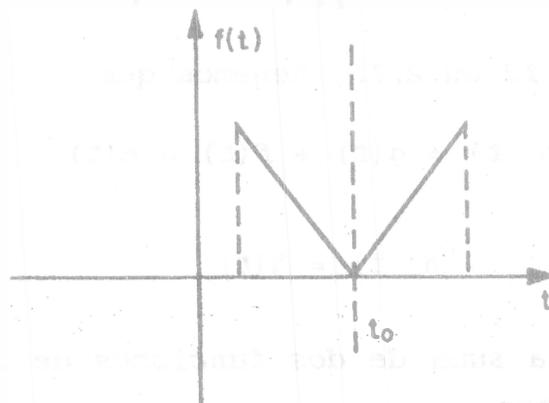


Figura 2.3

Si el eje de simetría es $t_0 = 0$,

$$f(t) = f(-t) \quad 2.11$$

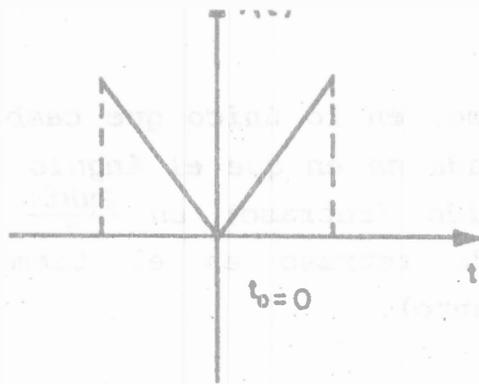


Figura 2.4

a.1) Suma de dos funciones de simetría par

Sean $f(t)$ y $q(t)$ dos funciones, tales que

$$f(t) = f(-t) \quad 2.12$$

y

$$q(t) = q(-t) \quad 2.13$$

al calcular

$$h(t) = q(t) + f(t) \quad 2.14$$

y

$$h(-t) = q(-t) + f(-t) \quad 2.15$$

y sustituir 2.12 y 2.13 en 2.15, tenemos que:

$$h(-t) = q(t) + f(t) = h(t) \quad 2.16$$

por lo tanto,

$$h(-t) = h(t) \quad 2.17$$

lo que implica que la suma de dos funciones de simetría par es una función de simetría par.

a.2) Producto de dos funciones de simetría par

Sean $f(t)$ y $q(t)$ dos funciones, tales que

$$f(t) = f(-t) \quad 2.18$$

y

$$q(t) = q(-t) \quad 2.19$$

calculando

y

$$h(t) = g(t) \cdot f(t) \quad 2.20$$

$$h(-t) = g(-t) \cdot f(-t) \quad 2.21$$

y sustituyendo las ecuaciones 2.18 y 2.19 en 2.21, tenemos que:

$$h(-t) = g(t) \cdot f(t) = h(t) \quad 2.22$$

por lo tanto,

$$h(-t) = h(t) \quad 2.23$$

lo cual implica que el producto de dos funciones de simetría par es una función de simetría par.

b) Funciones de simetría impar

Una función es de simetría impar respecto al eje $(t = t_0)$ cuando

$$f(t_0+t) = (-f(t_0-t)) \quad 2.24$$

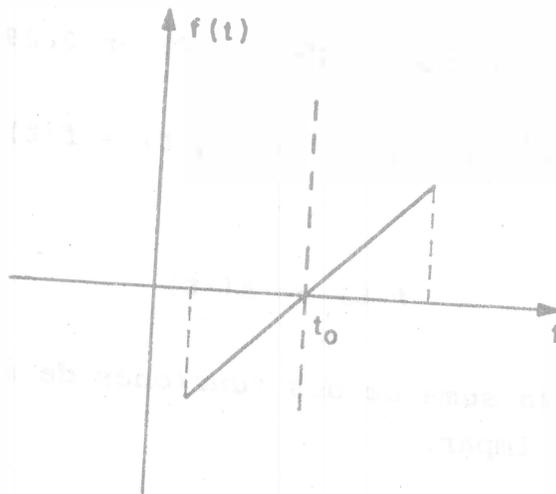


Figura 2.5

Si $t_0 = 0$,

$$f(t) = (-f(-t)) \quad 2.25$$

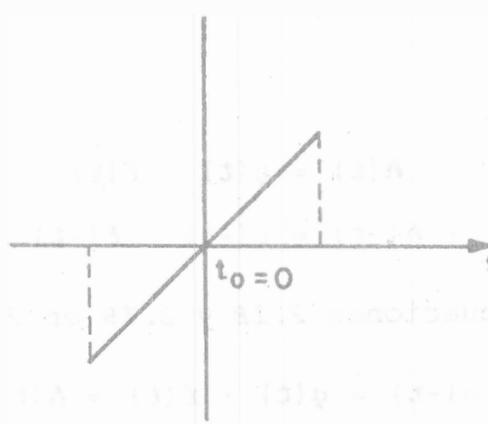


Figura 2.6

b.1) Suma de dos funciones de simetría impar

Sean $f(t)$ y $q(t)$ dos funciones, tales que

$$f(t) = -f(-t) \quad 2.26$$

y

$$q(t) = -q(-t) \quad 2.27$$

al calcular

$$h(t) = q(t) + f(t) \quad 2.28$$

y

$$h(-t) = q(-t) + f(-t) \quad 2.29$$

y al sustituir las ecuaciones 2.26 y 2.27 en 2.29, tenemos que:

$$h(-t) = (-q(t)) + (-f(t)) = -(q(t) + f(t)) = -h(t) \quad 2.30$$

por lo tanto,

$$h(t) = -h(-t) \quad 2.31$$

lo que implica que *la suma de dos funciones de simetría impar es una función de simetría impar.*

b.2) Producto de dos funciones de simetría impar

Sean $f(t)$ y $q(t)$ dos funciones, tales que

$$f(t) = -f(-t) \quad 2.32$$

y

$$q(t) = -q(-t) \quad 2.33$$

definiendo a

$$h(t) = q(t) \cdot f(t) \quad 2.34$$

$$h(-t) = q(-t) \cdot f(-t) \quad 2.35$$

y sustituyendo las ecuaciones 2.32 y 2.33 en 2.35, obtenemos

$$h(-t) = (-q(t)) \cdot (-f(t)) = q(t) \cdot f(t) = h(t) \quad 2.36$$

por lo tanto,

$$h(t) = h(-t) \quad 2.37$$

lo cual implica que el producto de dos funciones de simetría impar es una función de simetría par.

c) Producto e integración de funciones simétricas

c.1) Producto de una función de simetría par con una función de simetría impar

Sean $f(t)$ y $q(t)$ dos funciones, tales que

$$f(t) = f(-t) \quad 2.38$$

$$q(t) = -q(-t) \quad 2.39$$

considerando a

$$h(t) = q(t) \cdot f(t) \quad 2.40$$

$$h(-t) = q(-t) \cdot f(-t) \quad 2.41$$

y sustituyendo las ecuaciones 2.38 y 2.39 en 2.41, tenemos que:

$$h(-t) = (-q(t)) \cdot (f(t)) = -q(t) \cdot f(t) = -h(t) \quad 2.42$$

por lo tanto,

$$h(t) = -h(-t) \quad 2.43$$

lo cual implica que el producto de una función de simetría par por una función de simetría impar es una función de simetría impar.

c.2) Integración de funciones simétricas

Deseamos encontrar la integral de $f(x)$ cuando $f(x)$ es una función de simetría par o una de simetría impar, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \begin{cases} \text{si } f(x) \text{ es de simetría par} \\ \text{si } f(x) \text{ es de simetría impar} \end{cases}$$

Separando los límites de integración, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \quad 2.44$$

si igualamos $x = -y$ en la primera integral del segundo miembro de la igualdad 2.44, entonces tenemos que $dx = -dy$, y cuando $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow +\infty$, por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = - \int_{+\infty}^0 f(-y) dy = \int_0^{+\infty} f(-y) dy \quad 2.45$$

al cambiar otra vez la variable y por x

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(-x) dx \quad 2.46$$

y sustituir 2.46 en 2.44, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(-x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \quad 2.47$$

Si $f(x)$ es una función de simetría par, entonces

$$\underline{f(x) = f(-x)}$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

2.48

lo que implica que se evalúa el área bajo la curva de cero a ∞ y se multiplica por dos.

Si $f(x)$ una función de simetría impar, entonces

$$f(x) = -f(-x)$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(-x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx$$

2.49

$$= - \int_0^{+\infty} f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$$

2.50

ya que se integra un área positiva con una negativa, lo que da como resultado final cero.

d) Serie de Fourier de funciones simétricas

Si retomamos la serie de Fourier de la forma:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + B_k \sen \frac{2\pi kt}{T} \right)$$

2.51

donde:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} \right) dt$$

2.52

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \left(\sen \frac{2\pi kt}{T} \right) dt$$

2.53

y sabiendo que $\cos \frac{2\pi kt}{T}$ es una función de simetría par y $\sin \frac{2\pi kt}{T}$ una de simetría impar, tenemos que si $f(t)$ es una función de simetría par, entonces

$$A_k = 2 \left(\frac{2}{T} \right) \int_0^{t_2} f(t) \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} \right) dt = \frac{4}{T} \int_0^{t_2} f(t) \left(\cos \frac{2\pi kt}{T} \right) dt \quad 2.54$$

y por las propiedades de las funciones simétricas expresadas en 2.42 y 2.50, obtenemos

$$B_k = 0 \quad 2.55$$

por lo tanto, la segunda forma trigonométrica de la serie de Fourier para funciones de simetría par queda definida como

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{2\pi kt}{T} \quad 2.56$$

lo que implica que para funciones de simetría par:

$$D_k = \frac{1}{2} A_k$$

$$C_k = A_k \quad 2.57$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \left[\frac{-B_k}{A_k} \right] = 0$$

Por consiguiente, la primera forma trigonométrica para una función de simetría par es

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \quad 2.58$$

Por otro lado, si $f(t)$ es una función de simetría impar, entonces por las propiedades de las funciones simétricas expresadas en 2.42 y 2.50,

$$A_k = A_0 = 0 \quad 2.59$$

Y

$$B_k = 2 \left(\frac{2}{T} \right) \int_0^{t_2} f(t) \left(\text{sen } \frac{2\pi kt}{T} \right) dt = \frac{4}{T} \int_0^{t_2} f(t) \left(\text{sen } \frac{2\pi kt}{T} \right) dt \quad 2.60$$

por lo que

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \text{sen } \frac{2\pi kt}{T} \quad 2.61$$

que representa la segunda forma trigonométrica de la serie de Fourier para funciones de simetría *impar*.

Dado lo cual:

$$D_k = -i \frac{1}{2} B_k$$

$$C_k = B_k \quad 2.62$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{-B_k}{0} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la primera forma trigonométrica para una función de simetría *impar* es

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} - \frac{\pi}{2} \right) \quad 2.63$$

2.3.3 Superposición

Algunas funciones periódicas pueden ser expresadas como la suma de varias funciones periódicas más simples.

Es posible entonces encontrar la serie de Fourier para esta suma por la adición de las series de Fourier de varias funciones.

Ejemplo 2.1

Sea una función a la que llamaremos $f_a(t)$ definida por

$$f_a(t) = \begin{cases} A & ; t \in (0, T_1) \\ 0 & ; t \in (T_1, T) \end{cases}$$

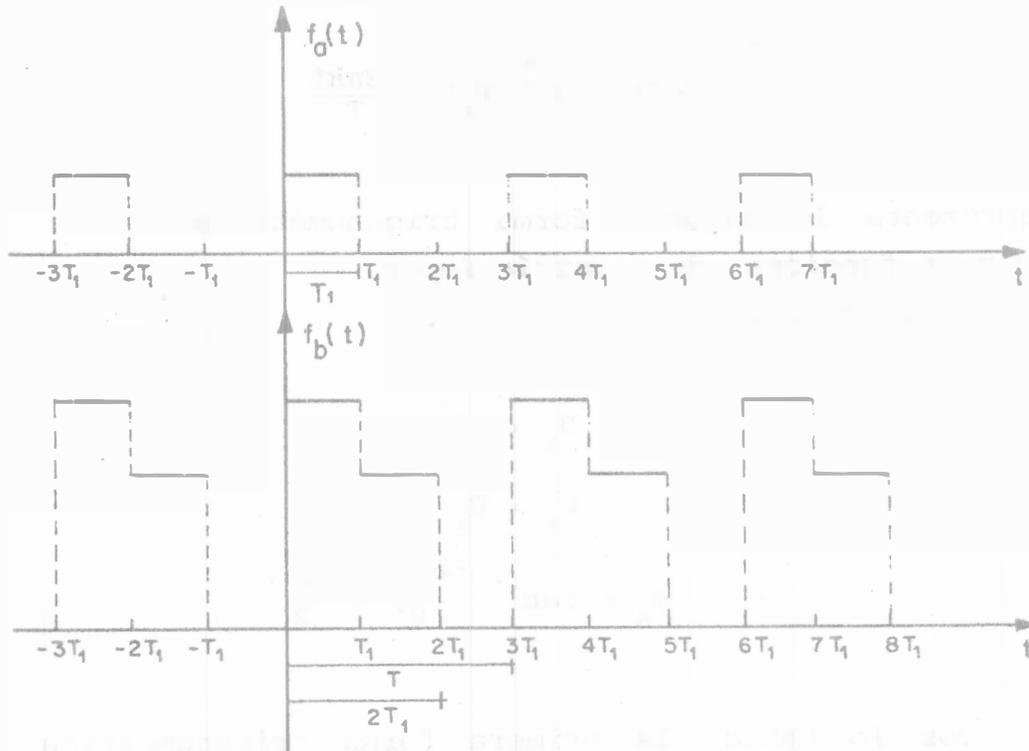


Figura 2.7

de la cual deseamos obtener la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt$$

por lo que

$$D_{ak} = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} A e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt + \frac{1}{T} \int_{T_1}^T (0) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt$$

$$D_{ak} = \frac{-A}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right)_0^{T_1}$$

$$D_{ak} = \frac{A}{i2\pi k} \left(1 - e^{-\frac{i2\pi k T_1}{T}} \right)$$

Y, por lo tanto,

$$f_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{i2\pi k} \left(1 - e^{-\frac{i2\pi k T_1}{T}} \right) e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

Observando la figura 2.7, se puede determinar que

$$f_b(t) = f_a(t) \Big|_{T_1} = \frac{1}{3} T + 2f_a(t) \Big|_{T_1} = \frac{2}{3} T$$

por lo cual

$$D_{bk} = \frac{-A}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right)_0^{\frac{1}{3} T} - \frac{2A}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} \right)_0^{\frac{2}{3} T}$$

$$D_{bk} = A \left(\frac{-1}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i\pi k 2}{3}} - 1 \right) - \frac{2}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i\pi k 4}{3}} - 1 \right) \right)$$

$$D_{bk} = \frac{-A}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i\pi k 2}{3}} + 2e^{-\frac{i\pi k 4}{3}} - 3 \right)$$

y, por lo tanto,

$$f_b(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{-A}{i2\pi k} \left(e^{-\frac{i\pi k 2}{3}} + 2e^{-\frac{i\pi k 4}{3}} - 3 \right) e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

2.3.4 Derivación de funciones periódicas continuas

El teorema de la serie de Fourier establece que para cualquier valor de la variable t en una función continua, la serie de Fourier converge al valor de su correspondiente función periódica $f(t)$.

Si $f(t)$ es continua implica que es diferenciable, por lo que

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k \frac{d}{dt} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.64$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k \left(\frac{i2\pi k}{T} \right) e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.65$$

por lo tanto,

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}'_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.66$$

donde

$$\mathfrak{D}'_k = \mathfrak{D}_k \left(\frac{i2\pi k}{T} \right) \quad 2.67$$

Lo que implica que si conocemos los coeficientes de la serie de Fourier de una función, podemos determinar los coeficientes de la serie de Fourier de la derivada de esa función y, por lo tanto, la derivada de la función.

Generalizando,

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k \frac{d^n}{dt^n} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k \left(\frac{i2\pi k}{T} \right)^n e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.68$$

por lo que

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k^n e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.69$$

donde

$$D_k^n = D_k \left(\frac{i2\pi k}{T} \right)^n \quad 2.70$$

2.3.5 Derivación de funciones periódicas discontinuas

Si $f(t)$ no es continua, el teorema de la serie de Fourier establece que en los puntos de discontinuidad de $f(t)$ la serie converge a

$$\frac{1}{2} (f(t)^- + f(t)^+)$$

que corresponde al valor medio de la discontinuidad.

Para poder obtener la derivada de estas funciones discontinuas es necesario conocer y establecer las propiedades de otro tipo de funciones, las cuales se describen a continuación.

a) Función impulso

Un impulso en el tiempo simula causas que tienen comparativamente poca duración, pero que son suficientemente fuertes para dar lugar a un efecto observable.

Matemáticamente, la función impulso se puede definir partiendo de un pulso rectangular de base $t=a$ y altura $h=1/a$ que tiene un área unitaria; dicho pulso puede ser considerado como una función impulso cuando $a \rightarrow 0$.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & ; t = 0 \\ 0 & ; t \neq 0 \end{cases} \quad 2.71$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad 2.72$$

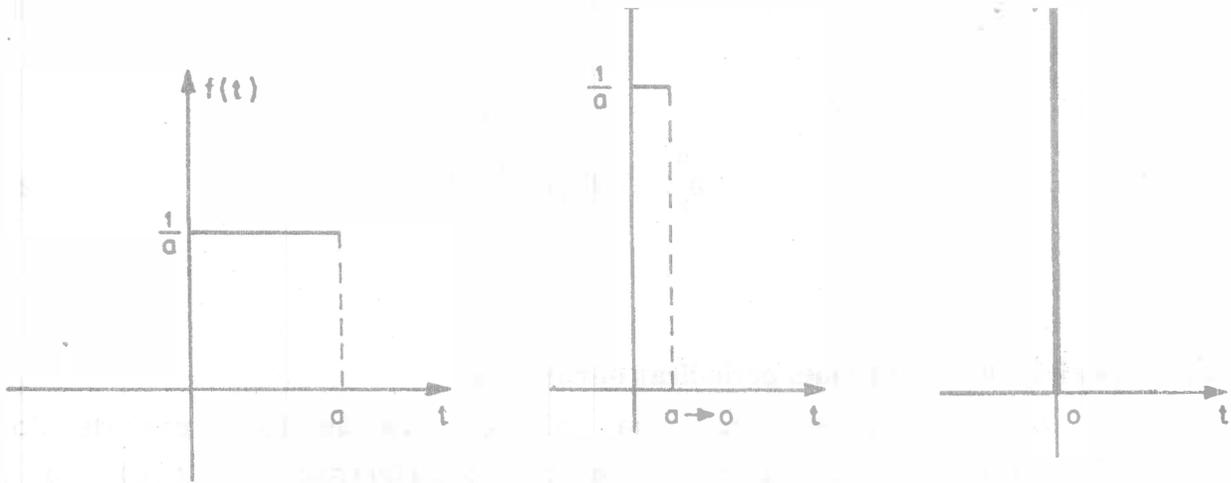


Figura 2.8

b) Propiedades de la función impulso

b.1) Primera propiedad

Se define de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) dt = 1 \quad 2.73$$

$$\delta(t-T) = \begin{cases} \infty & ; t = T \\ 0 & ; t \neq T \end{cases} \quad 2.74$$

y representa a una función impulso desplazada.

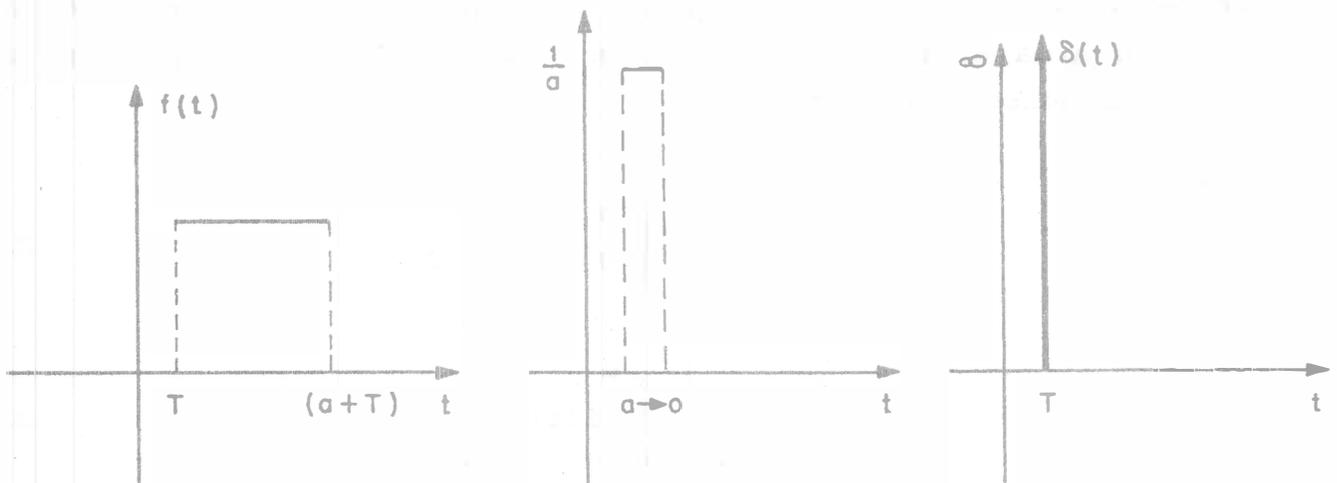


Figura 2.9

b.2) Segunda propiedad

La siguiente propiedad de la función impulso es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad 2.75$$

b.3) Tercera propiedad

Una propiedad más de la función impulso es

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t) \quad 2.76$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t) f(t)) \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) (f(t) \phi(t)) dt = f(0) \phi(0) \quad 2.77$$

Nota: La segunda, tercera y, más adelante, la quinta propiedad de la función impulso pueden ser fácilmente entendidas si consideramos que la función impulso vale cero en cualquier punto, excepto en el punto en el que está definido y, por lo tanto, al multiplicarla por cualquier otra función sólo existirá el producto en el punto donde está el impulso.

b.4) Cuarta propiedad

Otra propiedad de la función impulso es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t) \delta(t) dt = -\phi'(0) \quad 2.78$$

Demostración:

Integrando por partes, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \phi(t) dt = \phi(t) \delta(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t) \delta(t) dt$$

donde

$$\begin{aligned} u &= \phi(t) & v &= \delta(t) \\ du &= \phi'(t) dt & dv &= \delta'(t) dt \end{aligned}$$

evaluando los límites de integración, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \phi(t) dt = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t) \delta(t) dt$$

y por la propiedad expresada en 2.75,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(t) \delta(t) dt = -\phi'(0) \quad 2.79$$

b.5) Quinta propiedad

De manera análoga a la segunda propiedad, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-T) f(t) dt = f(T) \quad 2.80$$

b.6) Sexta propiedad

Un tren de impulsos unitarios es la repetición periódica de un impulso y se define como:

$$\delta_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau-kT) \quad 2.81$$

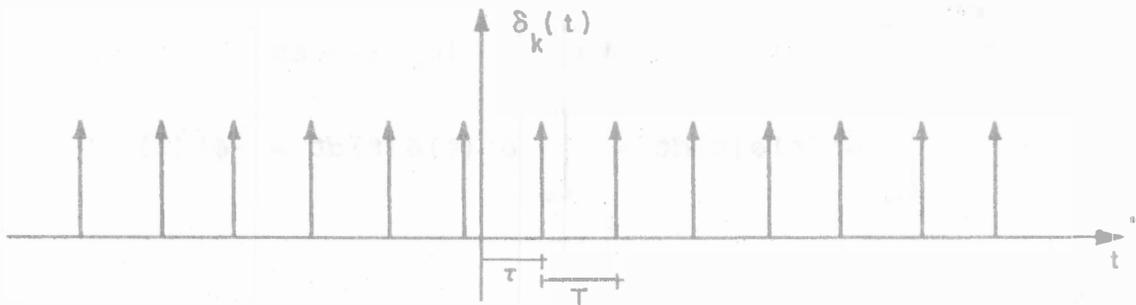


Figura 2.10

donde τ es el desplazamiento a la derecha, respecto al origen, del primer impulso del tren de impulsos.

Si $\tau = 0$, entonces:

$$\delta_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

2.82

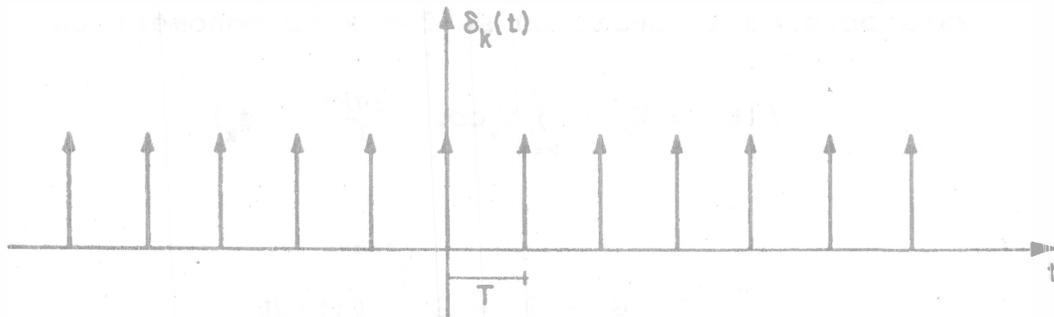


Figura 2.11

c) Serie de Fourier de un tren de impulsos unitarios

La función impulso, si se repite periódicamente, se puede representar mediante una serie de Fourier, pero no será convergente, pues no cumple con la segunda condición de Dirichlet.

Como el tren de impulsos es periódico se considera a la función como tal, por lo que para obtener su serie de Fourier sólo será necesario calcular los coeficientes D_k para un solo intervalo $|T| = |-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}|$:

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt$$

de este modo, los coeficientes de la serie de Fourier de un tren de impulsos desplazado del origen será

$$D_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-\tau) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt \quad 2.83$$

Y por la quinta propiedad de la función impulso,

$$D_k = \frac{1}{T} e^{-\frac{i2\pi k\tau}{T}} \quad 2.84$$

Por lo tanto, la serie de Fourier para un tren de impulsos (δ_k) con un desplazamiento τ queda definida como

$$\delta_k(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i2\pi k\tau}{T}} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i2\pi k(t-\tau)}{T}} \quad 2.85$$

Para obtener la serie en su forma trigonométrica

$$f(t) = \mathcal{E}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k\right) \quad 2.86$$

donde

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{D}_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad 2.87$$

se tiene que

$$\mathcal{D}_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t-\tau) dt = \frac{1}{T} \quad 2.88$$

y que

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T} e^{-\frac{i2\pi k\tau}{T}}$$

y, por consiguiente,

$$|\mathcal{D}_k| = \frac{1}{T} \quad 2.89$$

y

$$\phi_k = -\frac{2\pi k\tau}{T}$$

por lo que si

$$\mathcal{E}_k = 2|\mathcal{D}_k|$$

entonces

$$\delta_k(t) = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} - \frac{2\pi k\tau}{T}\right) \quad 2.90$$

que representa a la serie de Fourier para un tren de impulsos unitarios.

Evaluando $t = \tau$ para determinar su convergencia, se tiene que:

$$\delta_k(\tau) = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos\left(\frac{2\pi k\tau}{T} - \frac{2\pi k\tau}{T}\right) \quad 2.91$$

$$\delta_k(\tau) = \frac{1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T} \cos(0) \quad 2.92$$

por lo tanto,

$$\delta_k(\tau) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} (1+1+1+\dots) \quad 2.93$$

lo cual implica que la serie de Fourier de un tren de impulsos es divergente.

Para comprobar que el área de un impulso es unitaria, se utiliza la serie de Fourier:

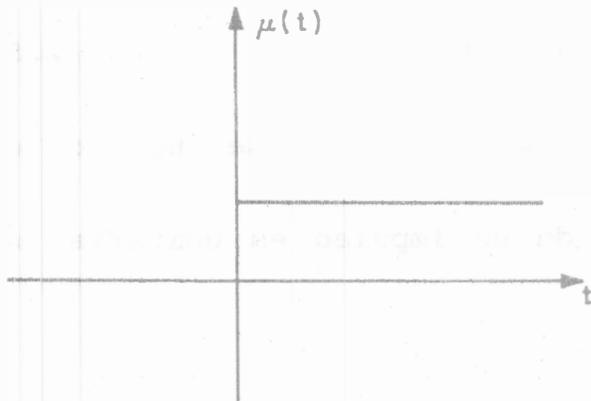
$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_k(t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi kt}{T} - \frac{2\pi kt}{T}\right) \right) dt = \\ &= \left(\frac{1}{T} t \right)_{-T/2}^{T/2} + \left(\frac{2}{T} \frac{T}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kt}{T} - \frac{2\pi kt}{T}\right) \right)_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) + \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kT}{2T} - \frac{2\pi kT}{T}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi kT}{2T} - \frac{2\pi kT}{T}\right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\operatorname{sen}\left(\pi k - \frac{2\pi kT}{T}\right) - \operatorname{sen}\left(-\pi k - \frac{2\pi kT}{T}\right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\operatorname{sen} \pi k \cdot \cos\left(\frac{2\pi kT}{T}\right) - \cos \pi k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kT}{T}\right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen} \pi k \cos\left(\frac{2\pi kT}{T}\right) + \cos \pi k \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi kT}{T}\right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (0) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\int_{-T/2}^{T/2} \delta_k(t) dt = 1 \quad 2.94$$

d) Función escalón unitario

La función escalón unitario está relacionada con la función impulso, por lo que será conveniente conocerla y observar sus propiedades (figura 2.12).



$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad 2.95$$

Figura 2.12

e) Propiedades de la función escalón unitario

e.1) Primera propiedad

Se define de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt \quad 2.96$$

ya que la función $f(t)$ queda multiplicada por cero de $(-\infty, 0)$ y por 1 de $(0, \infty)$.

e.2) Segunda propiedad

La siguiente propiedad es la que relaciona a la función impulso con la función escalón unitario:

$$\delta(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mu(t) \quad 2.97$$

Demostración:

Sea $f(t) = c|_a^b$, donde c puede representar a una variable o a una constante que existe sólo en el intervalo (a,b) y que pasa por el origen.

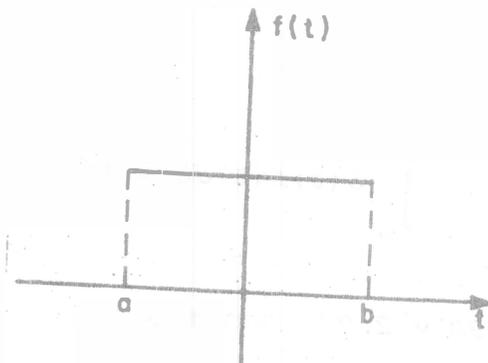


Figura 2.13

Si partimos de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu'(t) f(t) dt$$

e integramos por partes, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu'(t) f(t) dt = \mu(t) f(t) dt \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) f'(t) dt$$

donde

$$\begin{aligned} u &= f(t) & v &= \mu(t) \\ du &= f'(t) dt & dv &= \mu'(t) dt \end{aligned}$$

debido a que la función $f(t)$ no existe en $-\infty$ o $+\infty$, tenemos que:

$$= -f(t) \Big|_0^{\infty} = -f(\infty) + f(0) = 0 + f(0)$$

por lo que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu'(t) f(t) dt = 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) f'(t) dt = - \int_0^{+\infty} f'(t) dt$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu'(t) f(t) dt = f(0) \quad 2.98$$

si como se había definido en 2.75,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \quad 2.99$$

por analogía entre 2.98 y 2.99, tenemos que:

$$\delta(t) = \mu'(t) \quad 2.100$$

f) Obtención de la derivada de funciones periódicas discontinuas

De la ecuación 2.67, tenemos que:

$$\mathcal{D}'_k = \mathcal{D}_k \left(\frac{i2\pi k}{T} \right)$$

de modo que la derivada de la serie de Fourier para una función continua queda representada como

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}'_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i2\pi k}{T} \right) \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.101$$

Si consideramos ahora una función de la forma:

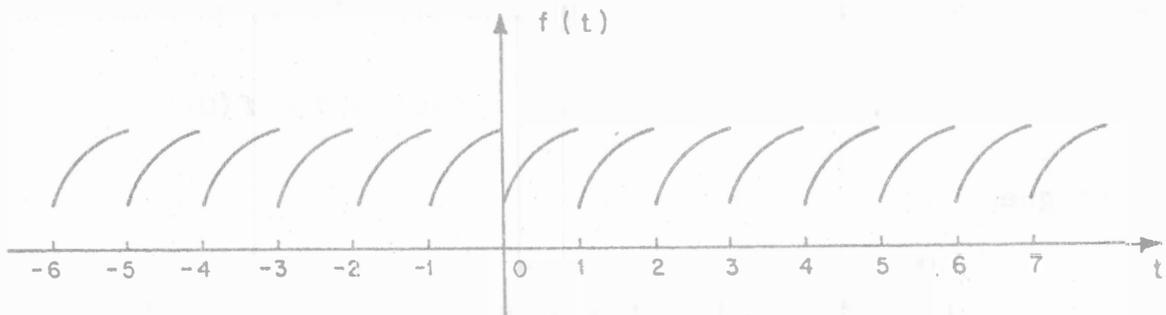


Figura 2.14

donde existe una discontinuidad con período $T = 1$, y de la cual deseamos obtener su derivada. Para poder derivar una función de este tipo, primero necesitamos remover la discontinuidad, sumando una serie de funciones escalón de la siguiente forma:

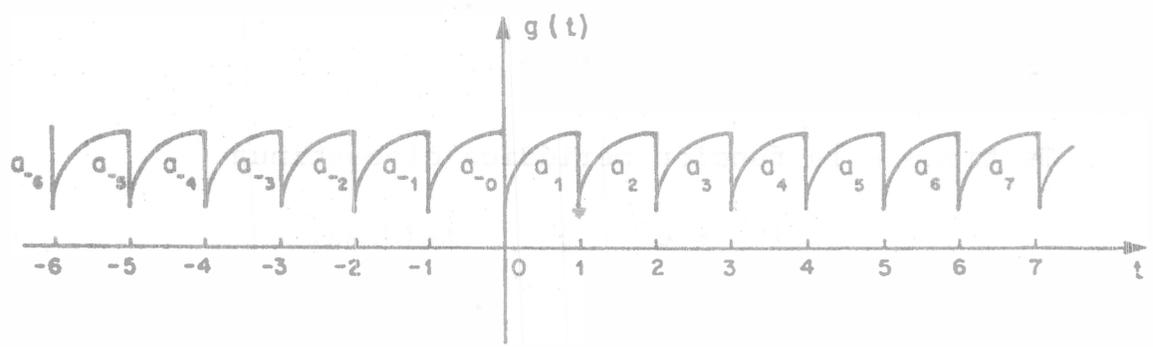


Figura 2.15

donde:

- $f(t)$, función original discontinua
- $q(t)$, función sin discontinuidad
- a_k , representa la magnitud del escalón

por lo que

$$q(t) = f(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mu(t-kT) \tag{2.102}$$

(el signo menos es porque el salto para hacer la función continua es hacia abajo). Derivando la función, obtenemos que

$$q'(t) = f'(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{d}{dt} \mu(t-kT) \tag{2.103}$$

y por la propiedad representada en la ecuación 2.100,

$$q'(t) = f'(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT) \tag{2.104}$$

por consiguiente, despejando a la derivada de nuestra función original discontinua, tenemos que:

$$f'(t) = g'(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kT) \quad 2.105$$

Por lo tanto, en el caso de funciones discontinuas, la derivada de una función discontinua añade un pulso de magnitud a_k en los puntos de discontinuidad.

Ejemplo 2.2

Se tiene a la función periódica discontinua

$$f(t) = e^{-t} \quad ; \quad t \in (0, 2\pi)$$

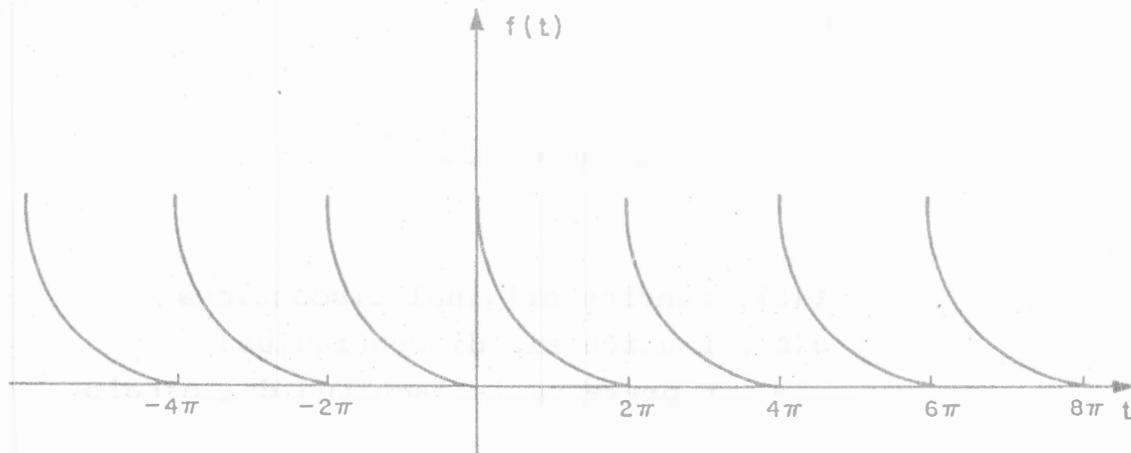


Figura 2.16

para hacerla continua, tenemos que:

$$f_c(t) = f(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mu(t-kT)$$

por lo tanto,

$$f'_c(t) = \frac{d}{dt} e^{-t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-kt) \quad 2.106$$

Para evaluar a_k , que representa el valor de la discontinuidad o salto, tomamos el valor de la función por la derecha y luego el valor de la función por la izquierda en el punto de la discontinuidad:

$$a_k = f(t_k)^{(+)\text{derecha}} - f(t_k)^{(-)\text{izquierda}} \quad 2.107$$

$$a_k = e^0 - e^{-2\pi} = 1 - e^{-2\pi} \quad 2.108$$



por lo que

$$f'_c(t) = -e^{-t} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{-2\pi}) \delta(t - kt) \quad 2.109$$

Como se muestra en la figura 2.17,

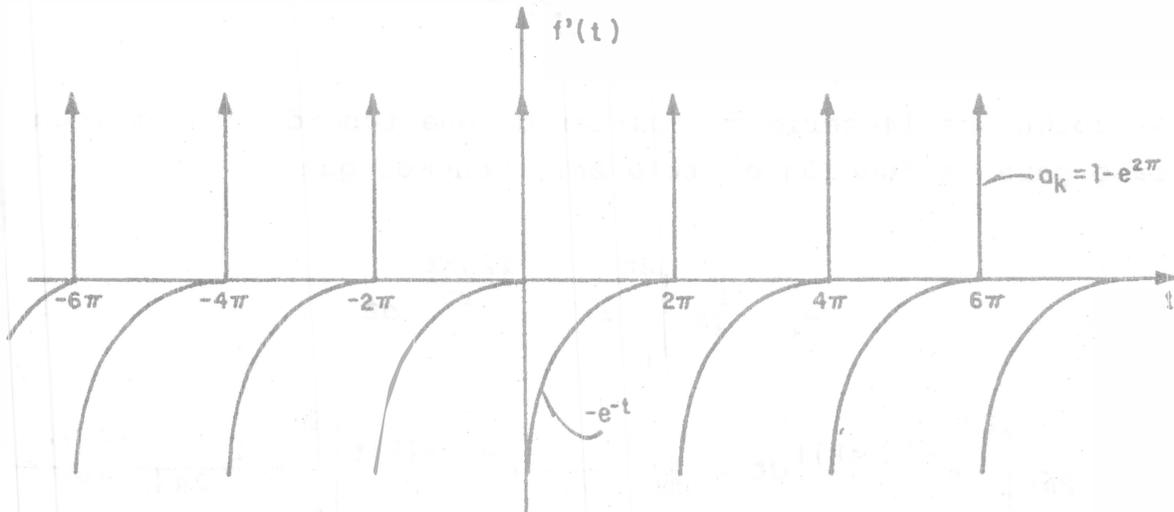


Figura 2.17

G.- 612325

como a_k es una constante,

$$f'_c(t) = -e^{-t} + a_k \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt) \quad 2.110$$

que representa a la derivada de la función.

Si ahora sumamos

$$f'_c(t) + f(t) = -e^{-t} + a_k \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt) + e^{-t} \quad 2.111$$

tendremos que:

$$f'_c(t) + f(t) = a_k \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt) \quad 2.112$$

que representa el tren de impulsos que remueve a la discontinuidad.

Por otro lado, si una función es continua y derivable implica que puede ser representada mediante la serie de Fourier y, por lo tanto, se puede obtener su derivada, como se describió en las expresiones 2.66 y 2.67,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad ; \quad f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i2\pi k}{T} \right) \mathfrak{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}}$$

donde

$$\mathfrak{D}'_k = \mathfrak{D}_k \left(\frac{i2\pi k}{T} \right)$$

pero si obtenemos la serie de Fourier de una función discontinua, en este caso para la función e^{-t} $t \in (0, 2\pi)$, tenemos que:

$$\mathfrak{D}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-t} e^{-\frac{i2\pi kt}{2\pi}} dt \quad 2.113$$

$$\mathfrak{D}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-(1+ik)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{-1}{1+ik} e^{-(1+ik)t} \right|_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-(1+ik)2\pi}}{2\pi(1+ik)}$$

$$\mathfrak{D}_k = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi(1+ik)} \quad 2.114$$

por lo tanto,

$$f(t) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+ik)} e^{ikt} \quad 2.115$$

Al calcular su derivada a partir de 2.66 y 2.67, tenemos que:

$$\mathfrak{D}'_k = \mathfrak{D}_k \left(\frac{i2\pi k}{2\pi} \right)$$

por consiguiente,

$$\mathcal{D}'_k = ik \mathcal{D}_k \quad 2.116$$

por lo que

$$f'(t) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{ik}{(1+ik)} e^{ikt} \quad 2.117$$

Ahora bien, si sumamos 2.115 y 2.117,

$$f'(t) + f(t) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+ik)} (1+ik) e^{ikt} \quad 2.118$$

$$f'(t) + f(t) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt} \quad 2.119$$

Por otro lado, sabemos de la expresión 2.85 que la representación en serie de Fourier de un tren de impulsos es

$$\delta_k(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i2\pi k(t-t_1)}{T}} \quad 2.120$$

si no existe el desplazamiento respecto al origen $t_1 = 0$; y si $T = 2\pi$, entonces

$$\delta_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} \quad 2.121$$

y sabiendo que para el ejemplo 2.2

$$a_k = 1 - e^{-2\pi}$$

y considerando 2.120, la expresión 2.119 puede quedar expresada como

$$f'(t) + f(t) = a_k \delta_k(t) \quad 2.122$$

donde $\delta_k(t)$ es la serie de Fourier de un tren de impulsos.

Al comparar 2.112 con 2.122, podemos observar que se obtuvo el mismo resultado cuando se realizó la derivada de la función

original, removiendo la discontinuidad (ec. 2.112), que cuando se obtuvo la serie de Fourier de la función y después se derivó (ec. 2.122).

De lo anterior, podemos concluir que cuando derivamos la serie de Fourier de una función discontinua se remueve automáticamente la discontinuidad y se añade el tren de impulsos del tamaño adecuado a_k .

Por lo tanto, cuando calculamos la derivada de la serie de Fourier, el coeficiente D'_k que se obtiene es el de la derivada de la función, aunque la función *no sea continua*.

2.3.6 Determinación de la serie de Fourier de una función periódica por medio de la derivación

Para explicar esta propiedad, se presenta a continuación una demostración gráfica.

Ejemplo 2.3

Si tenemos una función, tal que (figura 2.18a)

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ -\frac{1}{2}t + 2 & 2 < t < 4 \end{cases}$$

de la cual obtenemos su derivada por tramos (figura 2.18b),

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 < t < 4 \end{cases}$$

al calcular la segunda derivada, como se muestra en la figura 2.18c, se obtiene una serie de impulsos, aplicando la propiedad demostrada en 2.100.

$$f''(t) = 1.5\delta(t) - \delta(t-1) - 0.5\delta(t-2)$$

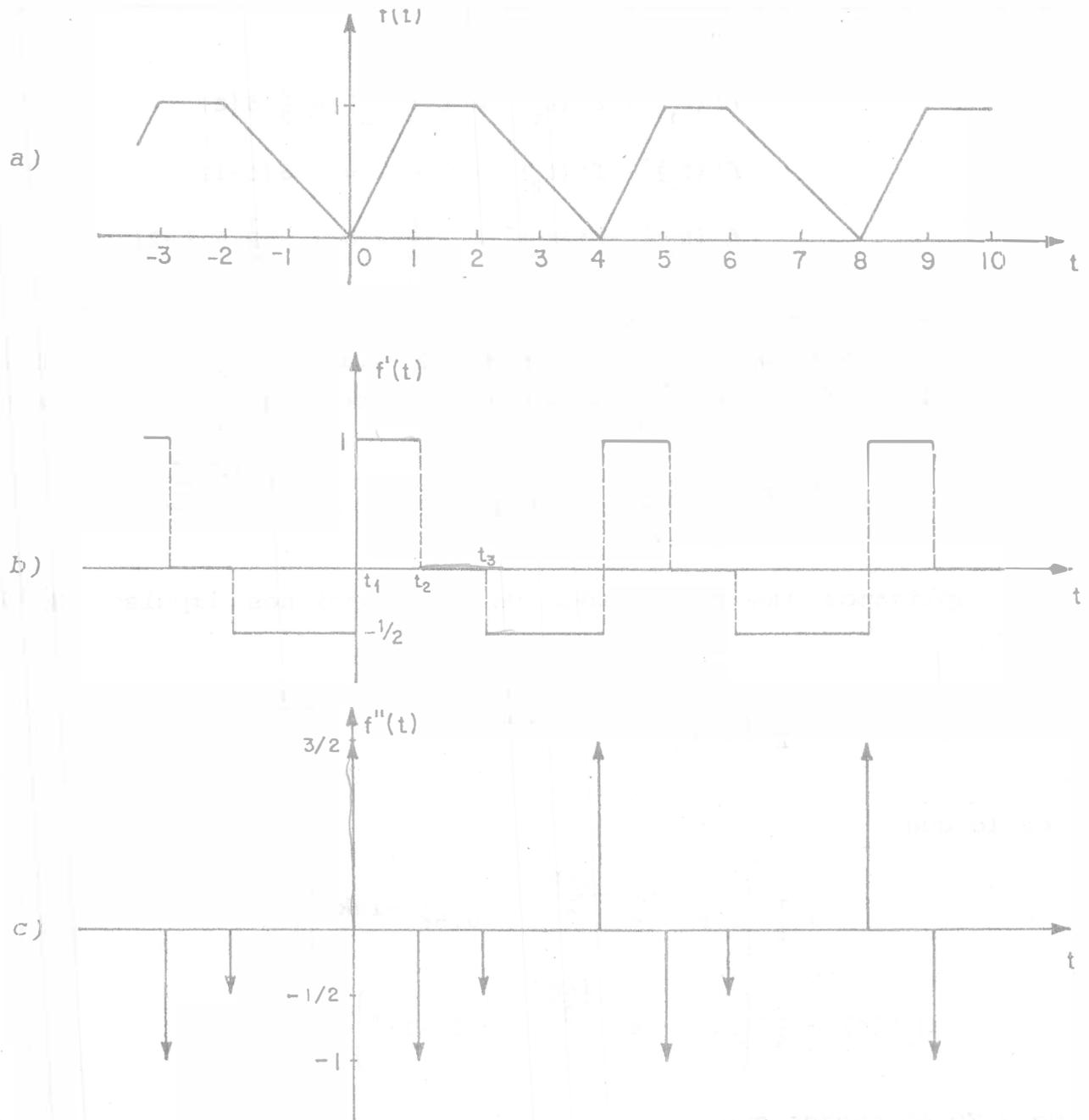


Figura 2.18

donde la magnitud de los impulsos se obtuvo restándole al valor de la función escalón de la derecha el de la izquierda en el punto de discontinuidad. El signo del impulso depende de si el salto es hacia arriba (+) o hacia abajo (-).

$$f'(t_1)^+ - f'(t_1)^- = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \delta(t)$$

$$f'(t_2)^+ - f'(t_2)^- = 0 - 1 = -\delta(t-1)$$

$$f'(t_3)^+ - f'(t_3)^- = -\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} \delta(t-2)$$

donde $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ y $t_3 = 2$.

A continuación se obtiene el coeficiente de Fourier para la segunda derivada de la función que se representa por los impulsos:

$$\mathcal{D}'_k(t) = \frac{1}{4} \int_0^4 (1.5\delta(t) - \delta(t-1) - 0.5\delta(t-2)) e^{-\frac{i2\pi kt}{T}} dt$$

y si aplicamos las propiedades de las funciones impulso (2.75 y 2.80),

$$= \frac{1}{4} \left(1.5 e^0 - e^{-\frac{i2\pi k(1)}{4}} - 0.5 e^{-\frac{i2\pi k(2)}{4}} \right)$$

por lo que

$$= \frac{1}{4} \left(1.5 - e^{-\frac{i\pi k}{2}} - 0.5 e^{-i\pi k} \right)$$

$$\mathcal{D}''_k(t) = \frac{1}{4} \left(1.5 - e^{-\frac{i\pi k}{2}} - 0.5(-1)^k \right)$$

de 2.70 obtenemos que:

$$\mathcal{D}'_k = \left(\frac{i2\pi k}{T} \right) \mathcal{D}_k \quad \text{y} \quad \mathcal{D}''_k = \left(\frac{i2\pi k}{T} \right)^2 \mathcal{D}_k$$

por lo cual

$$\mathcal{D}_k = \left(\frac{T}{i2\pi k} \right)^2 \mathcal{D}''_k = \left(-\frac{16}{4\pi^2 k^2} \right) \mathcal{D}''_k = -\frac{4}{\pi^2 k^2} \mathcal{D}''_k$$

por lo tanto,

$$D_k = -\frac{1}{\pi^2 k^2} \left(1.5 - e^{-\frac{i\pi k}{2}} - 0.5(-1)^k \right)$$

y la serie de Fourier estará representada por

$$f(t) = -\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(1.5 - e^{-\frac{i\pi k}{2}} - 0.5(-1)^k \right) e^{\frac{i\pi k t}{2}}$$

2.4 ESPECTRO DISCRETO DE FRECUENCIA

2.4.1 Espectros discretos de amplitud y de fase

Cuando una función periódica de período T se representa mediante la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{\frac{i2\pi k t}{T}}$$

el inverso del período de la función que se esté representando será $\frac{1}{T} = f_0$, donde a f_0 se le conoce como la *frecuencia fundamental de la serie de Fourier* y a los coeficientes D_k como los *armónicos de la función*. Algunos autores trabajan con la variable ω , donde $\omega = 2\pi/T$, de modo que $\omega = 2\pi f_0$.

Para obtener lo que se denomina *espectro de amplitud y de fase* de una función, se grafica su

$$|D_k| \text{ vs } kf_0, \text{ espectro de amplitud}$$

y

$$\phi_k \text{ vs } kf_0, \text{ espectro de fase}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

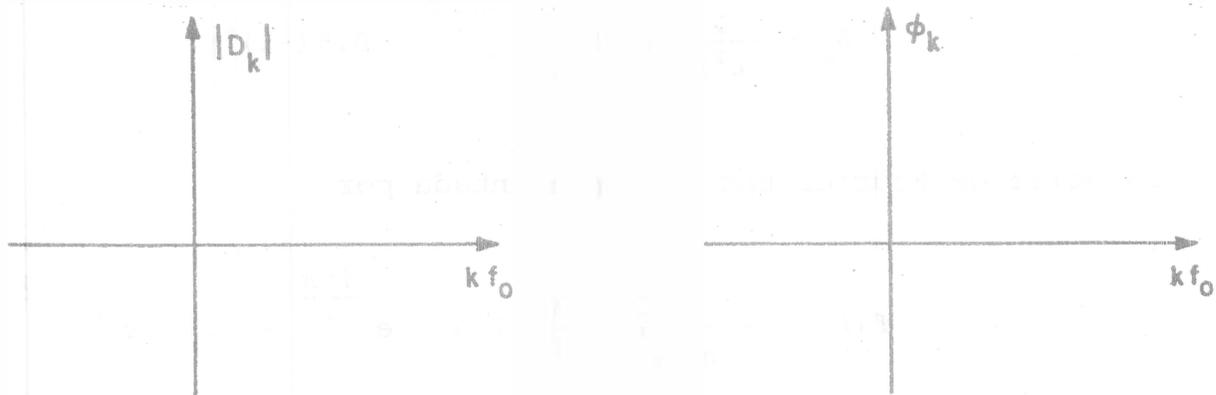


Figura 2.19

2.4.2 Importancia de los espectros discretos de amplitud y de fase

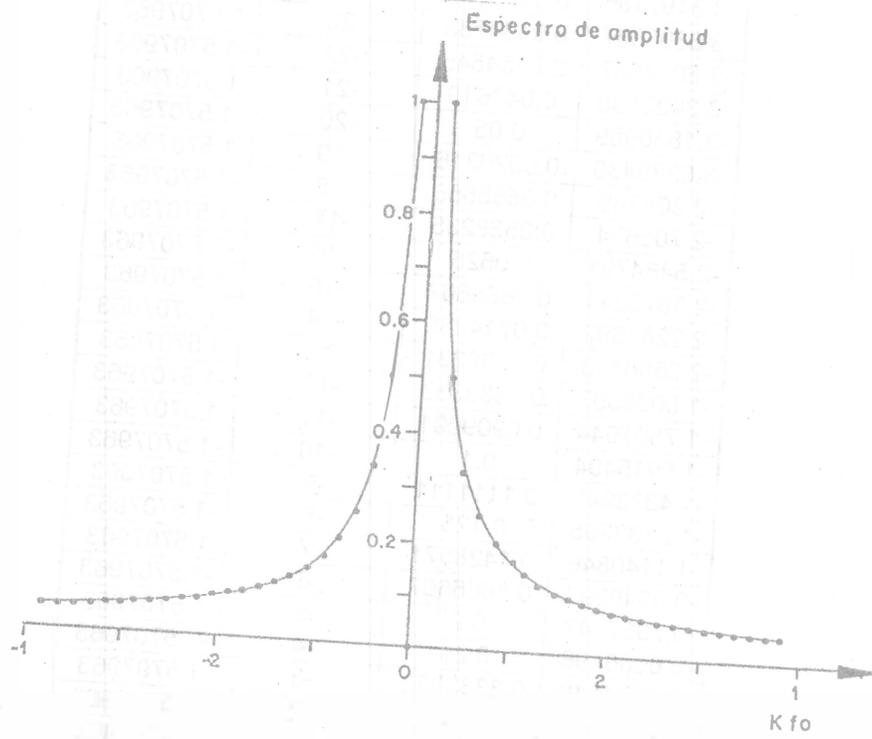
Los espectros son otra forma de representar una función en un nuevo dominio que es el de la frecuencia; dicha representación es unívoca.

Cada valor $|D_k|$ representa la amplitud de una componente sinusoidal, la cual tendrá su correspondiente ángulo de fase ϕ_k . Este ángulo de fase nos indicará con qué ángulo o defasamiento entra la señal respecto al origen. Por lo tanto, al efectuar la suma de todas las funciones cosenoidales podremos reconstruir la función original (véase figura 1.15).

* El *espectro de amplitud* representa la amplitud de cada componente sinusoidal como una función de la frecuencia y es de simetría *par*; el *espectro de fase*, de simetría *impar*, nos indica el tiempo de retraso respecto al origen que tiene cada una de las componentes.

Los espectros de amplitud y de fase correspondientes a la función de las figuras 1.5, cuyos valores están tabulados en la tabla 2.1, se muestran en la figura 2.20.

a)



b)

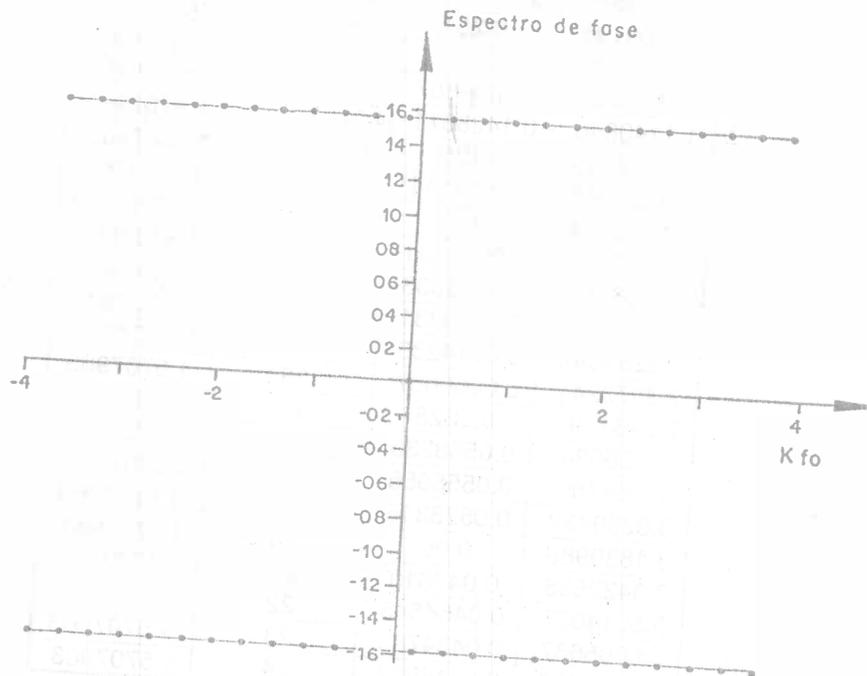


Figura 2.20

KFo	MOD Dk	k	PHI K
-3.8197186	0.0416667	-24	-1.5707963
-3.6605637	0.0434783	-23	1.5707963
-3.5014087	0.0454545	-22	-1.5707963
-3.3422538	0.047619	-21	1.5707963
-3.1830989	0.05	-20	-1.5707963
-3.0239439	0.0526316	-19	1.5707963
-2.864789	0.0555556	-18	-1.5707963
-2.705634	0.0588235	-17	1.5707963
-2.5464791	0.0625	-16	-1.5707963
-2.3873241	0.0666667	-15	1.5707963
-2.2281692	0.0714286	-14	-1.5707963
-2.0690143	0.0769231	-13	1.5707963
-1.9098593	0.0833333	-12	-1.5707963
-1.7507044	0.0909091	-11	1.5707963
-1.5915494	0.1	-10	-1.5707963
-1.4323945	0.1111111	-9	1.5707963
-1.2732395	0.125	-8	-1.5707963
-1.1140846	0.1428571	-7	1.5707963
-0.9549297	0.1666667	-6	-1.5707963
-0.7957747	0.2	-5	1.5707963
-0.6366198	0.25	-4	-1.5707963
-0.4774648	0.3333333	-3	1.5707963
-0.3183099	0.5	-2	-1.5707963
-0.1591549	1	-1	1.5707963
0	0	0	0
0.1591549	1	1	-1.5707963
0.3183099	0.5	2	1.5707963
0.4774648	0.3333333	3	-1.5707963
0.6366198	0.25	4	1.5707963
0.7957747	0.2	5	-1.5707963
0.9549297	0.1666667	6	1.5707963
1.1140846	0.1428571	7	-1.5707963
1.2732395	0.125	8	1.5707963
1.4323945	0.1111111	9	-1.5707963
1.5915494	0.1	10	1.5707963
1.7507044	0.0909091	11	-1.5707963
1.9098593	0.0833333	12	1.5707963
2.0690143	0.0769231	13	-1.5707963
2.2281692	0.0714286	14	1.5707963
2.3873241	0.0666667	15	-1.5707963
2.5464791	0.0625	16	1.5707963
2.705634	0.0588235	17	-1.5707963
2.864789	0.0555556	18	1.5707963
3.0239439	0.0526316	19	-1.5707963
3.1830989	0.05	20	1.5707963
3.3422538	0.047619	21	-1.5707963
3.5014087	0.0454545	22	1.5707963
3.6605637	0.0434783	23	-1.5707963
3.8197186	0.0416667	24	1.5707963

Tabla 2.1

Como otro ejemplo, tomaremos a la función:

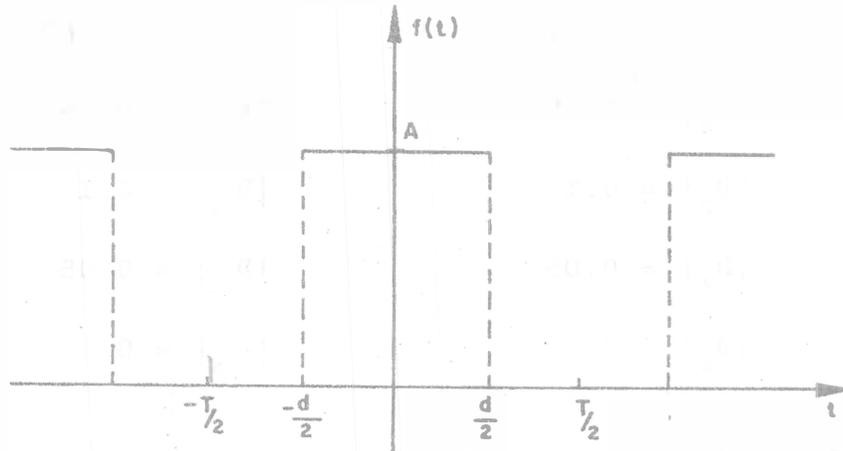


Figura 2.21

para la cual los coeficientes de la serie de Fourier quedan definidos como

$$D_k = Af_0 d \frac{\text{sen } \pi k f_0 d}{\pi k f_0 d}$$

donde $f_0 = \frac{1}{T}$.

A este tipo de función se le conoce como la función "sampling" o muestreadora por tener la forma $[\frac{\text{sen } x}{x}]$.

En la figura 2.21 tenemos una función de simetría par, por lo que el ángulo de fase es cero para todas las componentes de frecuencia; por lo tanto, el espectro de fase es cero y sólo tendremos valores en el espectro de amplitud. Todas las cosenoidales que teóricamente son infinitas y reconstruyen esta señal son de simetría par, aunque tengan diferentes amplitudes representadas por los $|D_k|$, y distintos períodos que dependen de la posición kf_0 que los coeficientes ocupen en el espectro de frecuencia.

Si ahora asignamos los siguientes valores:

$$d = \frac{1}{20} ; \quad T = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad A = 1$$

y obtenemos el valor de D_0 , calculándolo por separado, tenemos que nuestros primeros valores quedarán como:

$$D_0 = \frac{1}{5}$$

$$|D_1| = 0.187$$

$$|D_{-1}| = 0.187$$

$$|D_2| = 0.15$$

$$|D_{-2}| = 0.15$$

$$|D_3| = 0.1$$

$$|D_{-3}| = 0.1$$

$$|D_4| = 0.05$$

$$|D_{-4}| = 0.05$$

$$|D_5| = 0$$

$$|D_{-5}| = 0$$

⋮

⋮

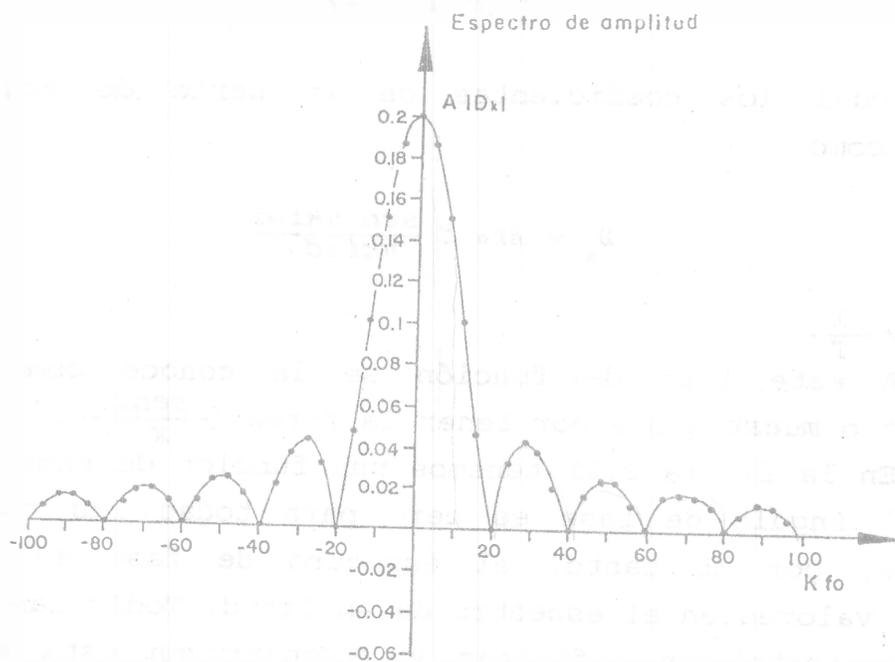


Figura 2.22

Si la señal reconstruida no tiene simetría par, las señales que la van a formar mediante su suma, además de tener diferentes valores de amplitud $|D_k|$, presentan distintos ángulos de fase; es decir, cada una de ellas tiene un ángulo diferente al pasar por el origen. Por lo cual esta señal tendrá espectros de amplitud y de fase.

2.4.3 Espectros discretos de amplitud y de fase para las formas trigonométricas

En la primera forma trigonométrica:

$$\mathcal{E}_k = 2|D_k| \quad ; \quad \mathcal{E}_0 = D_0$$

2.123

$$f(t) = \mathcal{E}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k \cos \left(\frac{2\pi kt}{T} + \phi_k \right)$$

Para esta forma trigonométrica, los espectros de frecuencia sólo tienen valor para las frecuencias positivas, esto se debe a que el subíndice k va de 0 a ∞ . Debe notarse que la amplitud $|D_k|$ está multiplicada por dos, para compensar el que la sumatoria de la expresión 2.123 va de 0 a ∞ .

Con lo que respecta a la segunda forma trigonométrica, cuando se grafican los armónicos A_k vs kf_0 y B_k vs kf_0 lo que se obtiene no es un espectro de amplitudes, sino la representación de la parte real y la parte imaginaria del espectro.

El espectro de amplitud es muy importante porque aquí se puede observar en qué frecuencias se encuentran las componentes más grandes o importantes que reconstruyen a nuestra función y, por lo tanto, el rango de frecuencias en que se encuentra concentrada la mayor parte de energía de nuestra función.

2.5 CONTENIDO DE POTENCIA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

2.5.1 Definición de contenido de potencia

En la expresión 1.32 del capítulo anterior se había definido

$$F^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt$$

donde F^2 es el valor cuadrático medio, también conocido como el contenido de potencia de la función $f(t)$ en un período.

Demostración:

En un circuito eléctrico donde i representa la corriente eléctrica y q la carga, existe una diferencia de potencial entre el punto A y B:



donde la corriente eléctrica está definida por

$$i = \frac{dq}{dt} \quad 2.124$$

por lo que

$$dq = idt \quad 2.125$$

y la diferencia de potencial estará dada por

$$dw = dq(V_A - V_B) = dqV \quad 2.126$$

donde V representa el voltaje.

Si

$$V = Ri \quad 2.127$$

entonces, sustituyendo 2.125 y 2.127 en 2.126,

$$dw = dqV = idt (Ri) \quad 2.128$$

si $R=1$, entonces

$$dw = i^2 dt \quad 2.129$$

si hacemos $i = f(t)$,

$$dw = [f(t)]^2 dt \quad 2.130$$

Por consiguiente, para un intervalo de tiempo dado,

$$\int_{-T/2}^{+T/2} dw = \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)]^2 dt \quad 2.131$$

por lo tanto,

$$W = \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)]^2 dt \quad 2.132$$

que representa la energía liberada.

Si definimos a la potencia P como la cantidad de energía liberada en un determinado tiempo, al que llamaremos período, tenemos que:

$$P = \frac{W}{T} \quad 2.133$$

por lo tanto,

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)]^2 dt \quad 2.134$$

que representa el contenido de potencia de la función $f(t)$ en un período.

2.5.2 Teorema de Parseval

Si consideramos el contenido de potencia de una función

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [(f(t))]^2 dt \quad 2.135$$

y a la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \quad 2.136$$

y si sabemos que para funciones complejas,

$$\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)] [f(t)]^* dt \quad 2.137$$

sustituimos 2.136 en 2.135, por lo que

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k e^{\frac{i2\pi kt}{T}} \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_{-j} e^{\frac{i2\pi jt}{T}} \right) dt \quad 2.138$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-j} e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{\frac{i2\pi jt}{T}} \right) dt \quad 2.139$$

$$P = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-j} \int_{-T/2}^{+T/2} \left(e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{\frac{i2\pi jt}{T}} \right) dt \quad 2.140$$

por condición de ortogonalidad,

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \left(e^{\frac{i2\pi kt}{T}} e^{\frac{i2\pi jt}{T}} \right) dt = \begin{cases} T & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad 2.141$$

por lo tanto, la integral en 2.140 sólo tendrá valor cuando $k=j$, de manera que

$$P = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-j} (T) \quad 2.142$$

y siendo $k=j$, podemos reducir nuestra expresión a

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_{-k} \quad 2.143$$

donde

$$\mathcal{D}_k = |\mathcal{D}_k| e^{i\phi k} \quad \text{Y} \quad \mathcal{D}_{-k} = |\mathcal{D}_k| e^{-i\phi k} \quad 2.144$$

por lo que

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mathcal{D}_k|^2 \quad 2.145$$

que representa al *teorema de Parseval*.

El teorema de Parseval nos dice que el contenido de potencia de un período será igual a la suma de los cuadrados del módulo de los armónicos:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\mathcal{D}_k|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} [f(t)]^2 dt = F^2 \quad 2.146$$

reacomodando la sumatoria para esta primera serie de Fourier, obtenemos

$$P = \mathcal{D}_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |\mathcal{D}_k|^2 \quad 2.147$$

para la primera forma trigonométrica de la serie de Fourier,

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{C}_0 \quad \text{Y} \quad \mathcal{C}_k = 2|\mathcal{D}_k|$$

por lo tanto, el teorema de Parseval se expresa como

$$P = \mathcal{C}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_k^2}{2} \quad 2.148$$

Todo lo anterior implica que el contenido de potencia depende sólo de los armónicos de una función.

El contenido de energía (ec. 2.149) y de potencia (ec. 2.150) en una banda de frecuencias se puede obtener por

$$W \Big|_{f_1}^{f_2} = T \sum_{k=m}^n \frac{\mathcal{C}_k^2}{2} \quad 2.149$$

Contenido de energía en una banda de frecuencias.

$$P \Big|_{f_1}^{f_2} = \sum_{k=m}^n \frac{G_k^2}{2}$$

2.150

Contenido de potencia en una banda de frecuencias, donde:

$m = \frac{f_1}{f_0}$, o el número entero mayor más próximo.

$n = \frac{f_2}{f_0}$, o el número entero menor más próximo.

2.5.3 Espectro discreto de potencia

El espectro discreto de potencia se obtiene al graficar el contenido de potencia contra las frecuencias, es decir:

$|D_k|^2$ vs $k f_0$

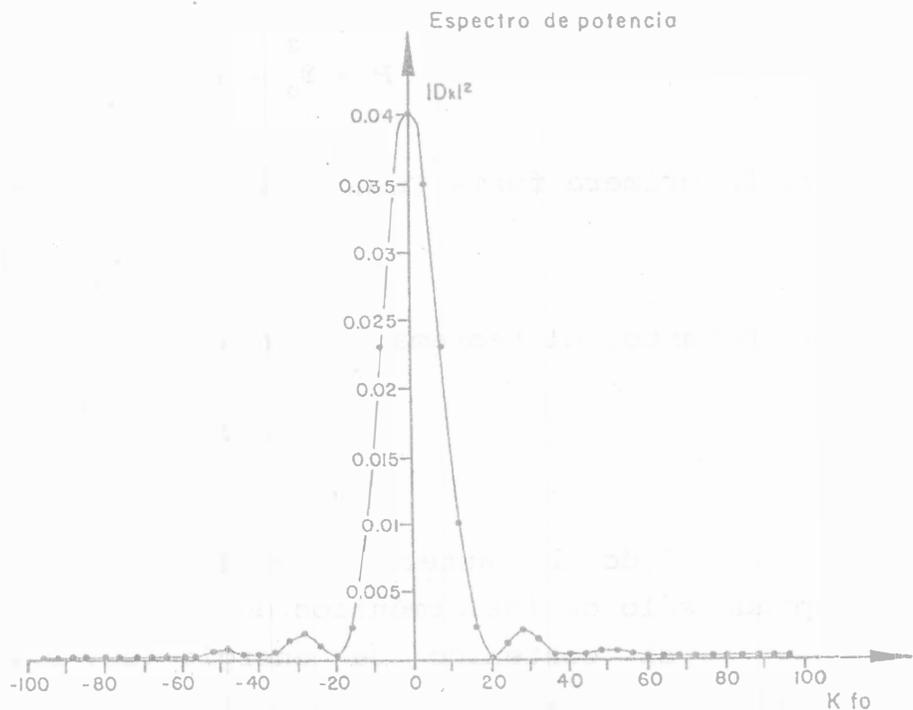


Figura 2.23

En esta figura se muestra el espectro de potencia de la función de la figura 2.22.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Elabore un programa de computadora que realice las sumas sucesivas de los armónicos de la serie de Fourier para las funciones:

a)
$$v(t) = \begin{cases} 1 & -\pi \leq t \leq \pi \\ 0 & \forall! \end{cases}$$

b)
$$x(t) = \begin{cases} t^2 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \forall! \end{cases}$$

Grafique las sumas sucesivas para los primeros 2, 4, 6 y 12 armónicos de la serie para cada una de las funciones.

2. Grafique los espectros discretos de frecuencia de las funciones, tanto para la forma compleja como para la trigonométrica de cada una de las funciones.

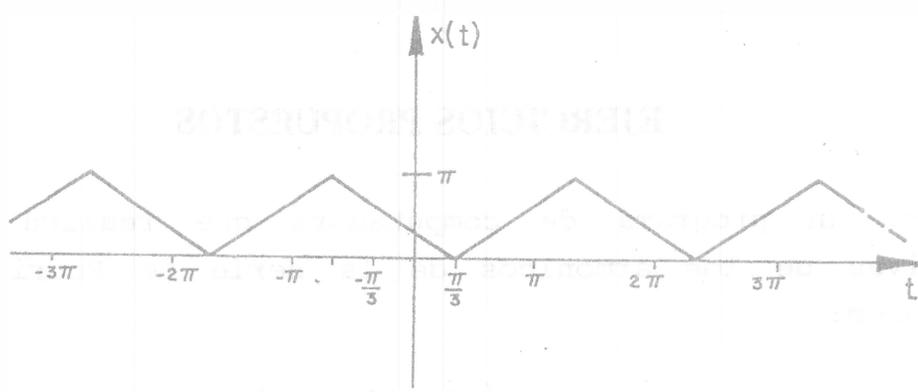
3. Obtenga y grafique el espectro discreto de potencia de cada una de las funciones.

4. Obtenga y grafique el contenido de energía y potencia de cada función en las bandas de frecuencia.

a)
$$t_1 = 4.5f_0 \quad ; \quad t_2 = 10f_0, \quad \text{donde } f_0 = \frac{1}{T}$$

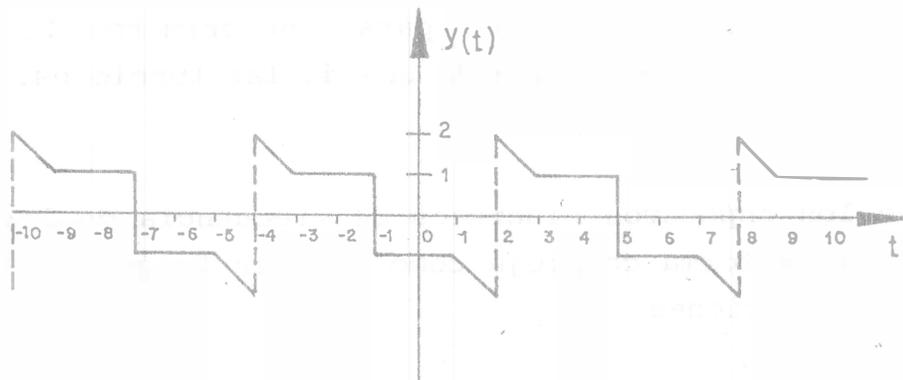
b)
$$t_1 = 0 \quad ; \quad t_2 = 8.7f_0$$

5. Dada la siguiente función:



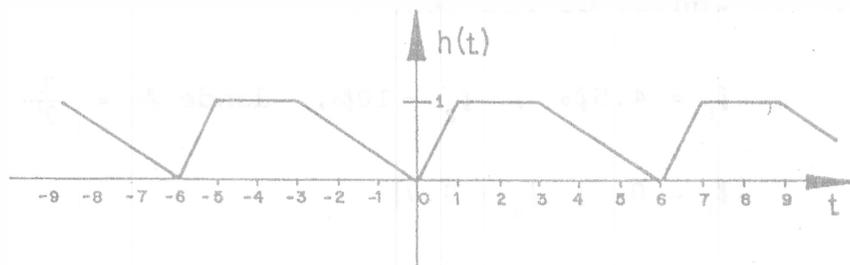
Obtenga su representación en serie de Fourier, utilizando las propiedades de desplazamiento y simetría.

6. Dada la función:



Obtenga su representación en serie de Fourier, empleando las propiedades de desplazamiento, superposición y simetría.

7. Dada la siguiente función:



Obtenga su representación en serie de Fourier, utilizando la propiedad de derivación.

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE FUNCIONES NO PERIÓDICAS CONTINUAS

3.1 INTEGRAL DE FOURIER

Para obtener la integral de Fourier, partimos de la serie de Fourier para funciones periódicas con base en las siguientes consideraciones.

Dada la función periódica $f(t)$ de la figura 3.1a, se obtiene que el coeficiente D_k queda definido como

$$D_k = Adf_0 \frac{\text{sen } d\pi k f_0}{d\pi k f_0}$$

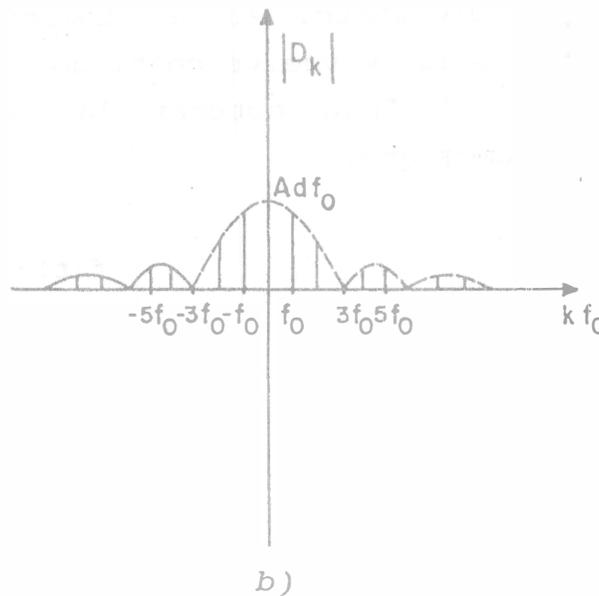
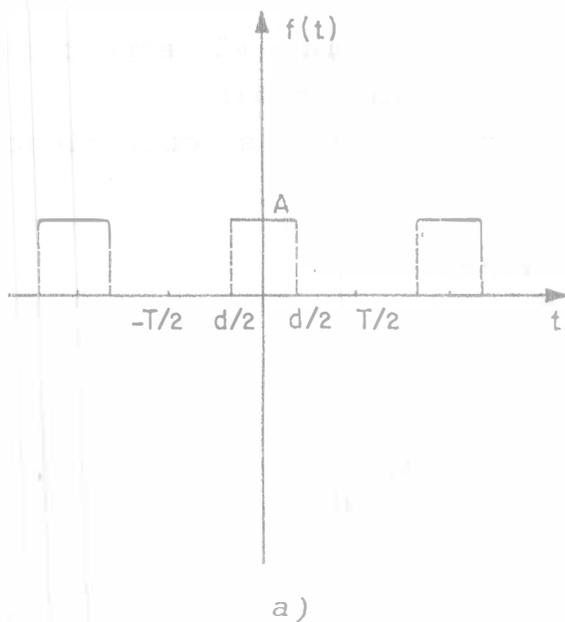


Figura 3.1

y cuyo espectro de amplitud se muestra en la figura 3.1b. Para poder convertir una función periódica en una no periódica, debemos considerar que el período T de esta función "periódica" es infinito.

Por lo que si para esta función tomamos sólo un período y queremos convertir a la función $f(t)$ en no periódica, entonces tenemos que considerar que $T \rightarrow \infty$ (figura 3.2) y como

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad \text{entonces} \quad f_0 \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad T \rightarrow \infty$$

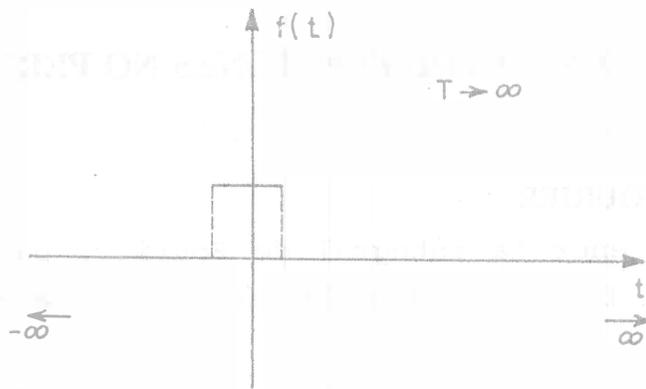


Figura 3.2

por lo tanto, en el dominio de la frecuencia, el espectro de amplitud se vuelve continuo al hacerse f_0 infinitesimal.

Para obtener la serie de Fourier y sus coeficientes, tenemos que:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k e^{i2\pi k f_0 t} \quad 3.1$$

donde

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt \quad 3.2$$

sustituyendo 3.2 en 3.1,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt \right) e^{i2\pi k f_0 t} \quad 3.3$$

Si hacemos

$$f_0 = \Delta f = \frac{1}{T}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi k \Delta f t} dt \right) e^{i2\pi k \Delta f t} \Delta f \quad 3.4$$

si $T \rightarrow \infty$ implica que $\Delta f \rightarrow 0$ y como $k \rightarrow \infty$; implica que $(\Delta f)(k)$ tiende a un valor definido finito, por lo que $k\Delta f \rightarrow f$, la que representará una variable continua; por lo tanto, sustituyendo $k\Delta f$ por f , a la sumatoria por una integral, y a Δf por un diferencial, tenemos que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt \right) e^{i2\pi f t} df \quad 3.5$$

expresión conocida como *identidad de Fourier*, donde la integral entre paréntesis

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad 3.6$$

representa a la transformada de Fourier que nos permite transformar una función del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia en forma continua. Introduciendo la expresión 3.6 en 3.5, obtenemos que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f) e^{i2\pi f t} df \quad 3.7$$

que representa la transformada inversa de Fourier, expresión que nos permite transformar la función del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.

A continuación se describe la notación utilizada para la transformada de Fourier de las funciones $g(t)$ y $f(t)$:

$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f)$ Transformada de Fourier de la función $g(t)$
 $\mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} = g(t)$ Transformada inversa de Fourier de la función $G(f)$
 $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(f)$ Transformada de Fourier de la función $f(t)$
 $\mathcal{F}^{-1}\{F(f)\} = f(t)$ Transformada inversa de Fourier de la función $F(f)$

Debido a que la transformada de Fourier se deriva de la serie de Fourier y ésta se define a partir de funciones complejas, la transformada de Fourier de una función está compuesta por una parte real y una imaginaria. Sea $G(f)$ la transformada de Fourier de la función $g(t)$:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

entonces

$$G(f) = R(f) + iI(f) \quad 3.8$$

donde $R(f)$ es la parte real e $I(f)$ es la parte imaginaria de la transformada de Fourier de la función $g(t)$, por lo que al representarla en su forma exponencial

$$G(f) = |G(f)| e^{i\phi(f)} \quad 3.9$$

donde, graficando $|G(f)|$ contra la frecuencia, obtenemos el espectro continuo de amplitud y, graficando $\phi(f)$ contra la frecuencia, obtenemos el espectro continuo de fase.

Condición de existencia:

La condición suficiente, pero no necesaria, para que una función tenga transformada de Fourier es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt < \infty \quad 3.10$$

Demostración:

Tomando la parte interior de la integral de Fourier, podemos decir que:

$$|f(t) e^{-i2\pi ft}| = |f(t)| |e^{-i2\pi ft}| \quad 3.11$$

donde

$$|e^{-i2\pi ft}| = \sqrt{\cos^2 2\pi ft + \sin^2 2\pi ft} = 1 \quad 3.12$$

por lo tanto,

$$|f(t) e^{-i2\pi ft}| = |f(t)| \quad 3.13$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-i2\pi ft}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \quad 3.14$$

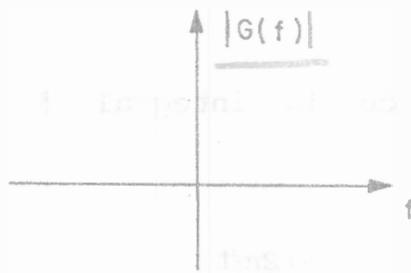
por lo que si la integral existe y tiende a un valor finito, implica que la transformada también existe, de modo que si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad \text{implica que} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{-i2\pi ft}| dt < \infty \quad 3.15$$

Pueden haber funciones que no cumplan con esta condición y para las que, sin embargo, su transformada exista.

3.2 ESPECTRO CONTINUO DE FRECUENCIAS

Si graficamos $|G(f)|$ vs f , representamos el espectro continuo de amplitud en el dominio de la frecuencia; si graficamos $\phi(f)$ vs f , representamos el espectro continuo de fase (figura 3.3).



a) Espectro de amplitud



b) Espectro de fase

Figura 3.3

3.2.1 Simetría de la transformada de Fourier

Para observar la simetría de la transformada de Fourier, tenemos que considerar que la transformada está compuesta por una parte real y una imaginaria:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(f) = R(f) + iI(f) \quad 3.16$$

Separando,

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) [\cos(2\pi ft) - i\sin(2\pi ft)] dt \quad 3.17$$

tenemos que:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi ft) dt \quad 3.18$$

por lo que

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt \quad 3.19$$

e

$$I(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(2\pi ft) dt \quad 3.20$$

Para observar la simetría de la función, sustituimos f por $-f$

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{cos}(-2\pi ft) dt \quad 3.21$$

como $\operatorname{cos} \theta = \operatorname{cos}(-\theta)$, entonces

$$R(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{cos}(2\pi ft) dt \quad 3.22$$

por lo tanto,

$$R(f) = R(-f)$$

lo que implica que $R(-f)$ es una función de simetría par (véase figura 3.4c).

Por otro lado,

$$I(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(-2\pi ft) dt \quad 3.23$$

como $\operatorname{sen} \theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$, tenemos que:

$$I(-f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(2\pi ft) dt \quad 3.24$$

por lo que

$$I(f) = -I(-f)$$

lo que implica que $I(\ell)$ es una función de simetría impar (véase figura 3.4d).

Para determinar la simetría del espectro de amplitud y de fase, se toma la transformada en la forma de Euler.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\ell) \quad ; \quad F(\ell) = |F(\ell)| e^{i\phi(\ell)} \quad 3.25$$

$$F(-\ell) = |F(-\ell)| e^{i\phi(-\ell)} \quad 3.26$$

$$F^*(\ell) = |F(\ell)| e^{-i\phi(\ell)} \quad 3.27$$

por otro lado,

$$F(\ell) = R(\ell) + iI(\ell) \quad 3.28$$

$$F(-\ell) = R(-\ell) + iI(-\ell) = R(\ell) - iI(\ell) = F^*(\ell) \quad 3.29$$

por lo que

$$F(-\ell) = F^*(\ell) \quad 3.30$$

entonces

$$|F(-\ell)| e^{i\phi(-\ell)} = |F(\ell)| e^{-i\phi(\ell)} \quad 3.31$$

lo que implica que

$$|F(-\ell)| = |F(\ell)| \quad 3.32$$

y, por lo tanto, el espectro de amplitud es una función de simetría par (figura 3.4a) y el espectro de fase es una función de simetría impar (véase figura 3.4b).

$$\phi(-\ell) = -\phi(\ell) \quad 3.33$$

donde $\phi(\ell)$ puede definirse también como

$$\phi(f) = \tan^{-1} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right)$$

3.34

Ejemplo 3.1

Obtener la transformada de Fourier de $f(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$F(f) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-i2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f)t} dt = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

donde

$$F(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \cdot \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha - i2\pi f} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{i2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$$|F(f)| = \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right)^2 + \left(\frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} [\alpha^2 + (2\pi f)^2]^{1/2}$$

y

$$|F(f)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}}$$

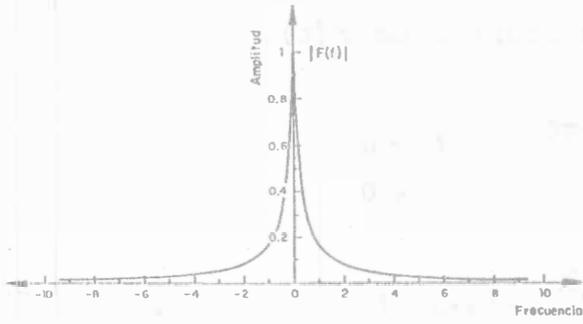
$$\phi(f) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\pi f}{\alpha} \right)$$

donde la parte real es

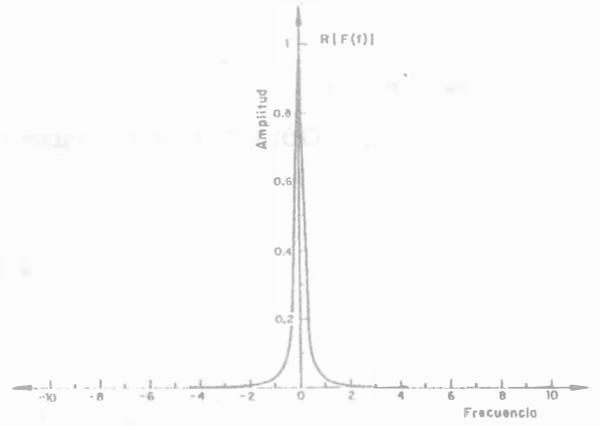
$$R(F(f)) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} ; \quad I(F(f)) = - \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

Para $\alpha = 1$

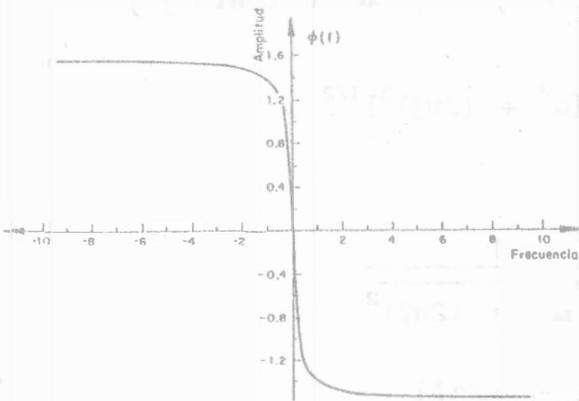
Para $a=1$



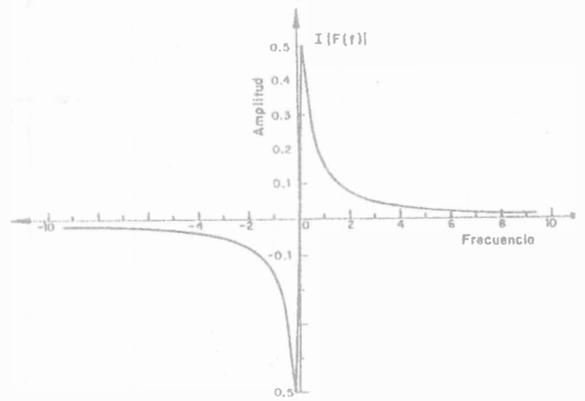
a)



c)



b)



d)

Figura 3.4

3.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

3.3.1 Propiedad de linealidad

Sean $F_1(\ell) = \mathcal{F}\{f_1(t)\}$ y $F_2(\ell) = \mathcal{F}\{f_2(t)\}$ las transformadas de Fourier de dos funciones, tales que multiplicadas por las constantes a_1 y a_2 ,

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\ell) + a_2 F_2(\ell) \quad 3.35$$

cumplen con las condiciones de homogeneidad y superposición que a continuación se describen.

Condición de homogeneidad:

$$\mathcal{F}\{af(t)\} = aF(\ell) \quad 3.36$$

Condición de superposición:

$$\mathcal{F}\{f(t) + g(t)\} = F(\ell) + G(\ell) \quad 3.37$$

Si una transformada cumple con las dos condiciones anteriores, se habla de una transformación lineal.

3.3.2 Propiedad de desplazamiento

a) Propiedad de desplazamiento en las frecuencias

Sea una función $f(t)$, tal que $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\ell)$. Si a esta función la definimos ahora como

$$f(t)e^{i2\pi\ell_0 t} \quad 3.38$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi\ell_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\ell_0 t} e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.39$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi(\ell-\ell_0)t} dt \quad 3.40$$

si hacemos que $q = \ell - \ell_0$,

$$F(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi(q)t} dt \quad ; \quad F(q) = F(\ell - \ell_0) \quad 3.41$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{f(t) e^{i2\pi\ell_0 t}\} = F(\ell - \ell_0) \quad 3.42$$

Esta última ecuación representa la propiedad de desplazamiento en las frecuencias de la transformada de Fourier.

b) Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Sea una función $f(t)$, tal que $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\ell)$. Si deseamos obtener la transformada de Fourier de

$$f(t - t_0) \quad 3.43$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.44$$

considerando $t - t_0 = x$ y $dt = dx$, tenemos

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\ell(x+t_0)} dx \quad 3.45$$

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i2\pi\ell t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\ell x} dx \quad 3.46$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = F(\ell) e^{-i2\pi\ell t_0} \quad 3.47$$

expresión que representa la propiedad de desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier.

3.3.3 Propiedad de escalamiento

Sea una función $f(t)$, tal que $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\ell)$ y $f(at)$ otra función en donde a es una constante mayor que cero, entonces

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.48$$

si consideramos que $at = x$, entonces $dt = dx/a$,

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi\ell \frac{x}{a}} dx \quad 3.49$$

si hacemos $w = \frac{\ell}{a}$

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi wx} dx \quad 3.50$$

y, por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(w) \quad 3.51$$

tomando la variable original,

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\ell}{a}\right) \quad 3.52$$

si $a < 0$, entonces $a = |a|$, por lo que

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\ell}{a}\right) \quad 3.53$$

Esta propiedad lo que nos indica es que una contracción en el dominio del tiempo equivale a una expansión en el dominio de la frecuencia y viceversa.

3.3.4 Propiedad de simetría de la transformada de Fourier

Si tenemos una primera función $f(t)$ cuya transformada está definida por $F(\ell)$ y si por otro lado tenemos una segunda función en el tiempo $F(t)$ con las mismas características que la transformada de la primera función, es decir, $F(t)$ es similar a $F(\ell)$, pero en diferente dominio, entonces la transformada de esta segunda función será de forma similar a la primera función en el tiempo $f(t)$, pero con signo negativo en la frecuencia $f(-\ell)$. Es decir,

$$\begin{aligned} f(t) &\Leftrightarrow F(\ell) \\ F(t) &\Leftrightarrow f(-\ell) \end{aligned} \quad 3.54$$

Demostración:

Sea la función $f(t)$ la transformada inversa de Fourier de $F(\ell)$, donde

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\ell)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\ell) e^{i2\pi\ell t} d\ell \quad 3.55$$

por otro lado, haciendo una analogía, sea $f(\ell)$ la transformada de Fourier de $F(t)$

$$f(\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.56$$

si ahora sustituimos ℓ por $-\ell$,

$$f(-\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i2\pi\ell t} dt \quad 3.57$$

donde las ecuaciones 3.55 y 3.57 son similares, pero en diferente dominio.

Por lo tanto, por simetría podemos decir que si la transformada de Fourier de $f(t)$ es $F(\ell)$, entonces la transformada de Fourier de una función que es idéntica a $F(\ell)$, pero ahora en el dominio del tiempo $F(t)$, será igual a la función inicial en el dominio del tiempo, pero ahora estará en la frecuencia con signo negativo $f(-\ell)$.

Ejemplo 3.2

Sea $f(t) = e^{-\alpha t}$, cuya transformada de Fourier es la siguiente:

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + i2\pi\ell} = F(\ell)$$

si ahora

$$F(t) = \frac{1}{\alpha + i2\pi t}$$

entonces, la transformada de Fourier de $F(t)$ será

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-\ell) = e^{-\alpha(-\ell)}$$

3.3.5 Transformada de Fourier de funciones simétricas

a) Sea una función $f(t)$ real que tiene simetría par:

$$F(\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.58$$

si separamos la función exponencial de la transformada de Fourier en sus componentes coseno, seno, tenemos que:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(2\pi ft) dt \quad 3.59$$

donde el producto de la primera integral es una función de simetría par, y el producto de la segunda integral es una función de simetría impar; por simetría de funciones tenemos que la segunda integral de la expresión 3.59 es cero, y que la primera integral es la integral de una función de simetría par, por lo tanto,

$$F(f) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt \quad 3.60$$

donde

$$|F(f)| = |R(f)| \quad \text{y} \quad \phi(f) = 0 \quad 3.61$$

lo que nos indica que la transformada de Fourier de una función de simetría par es una *función real*.

b) Sea una función $f(t)$ real que tiene simetría impar

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad 3.62$$

por lo que

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(2\pi ft) dt \quad 3.63$$

por simetría de funciones tenemos que la primera integral de la expresión 3.63 es cero y que la segunda integral corresponde a una función de simetría par, por lo tanto,

$$F(\ell) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(2\pi\ell t) dt \quad 3.64$$

donde

$$|F(\ell)| = |I(\ell)| \quad \text{y} \quad \phi(\ell) = -\pi/2 \quad 3.65$$

lo cual nos indica que la transformada de Fourier de una función de simetría impar es una *función imaginaria pura*.

3.3.6 Propiedad de derivación de la transformada de Fourier

Sea $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\ell)$, donde $f(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \pm\infty$, lo que nos indica que es una función finita, entonces:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i(2\pi\ell)F(\ell) \quad 3.66$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.67$$

si integramos por partes:

$$u = e^{-i2\pi\ell t} \quad ; \quad du = -(i2\pi\ell) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad ; \quad v = f(t) \quad ; \quad dv = f'(t) dt$$

por lo que

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \left[f(t) e^{-i2\pi\ell t} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i2\pi\ell \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.68$$

como $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \pm\infty$ entonces, al evaluar los límites, la primera expresión de 3.68 es cero. Por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i2\pi\ell \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\ell t} dt = i2\pi\ell F(\ell) \quad 3.69$$

y de manera generalizada

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (i2\pi\ell)^n F(\ell) \quad 3.70$$

3.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES ESPECIALES

3.4.1 Transformada de Fourier de la función impulso

Sea $f(t) = A\delta(t-t_0)$

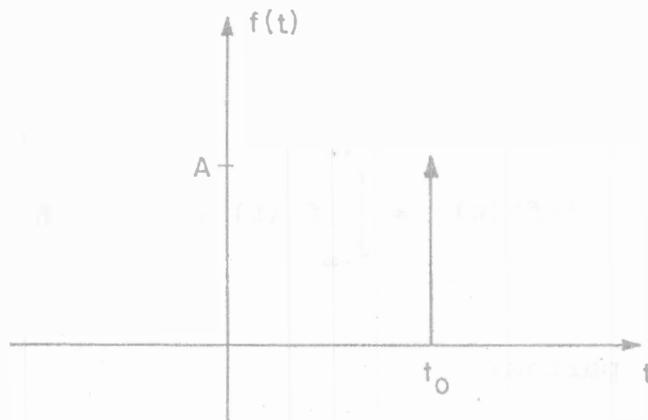


Figura 3.5

si consideramos que

$$F(\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\ell t} dt \quad 3.71$$

tenemos que:

$$\mathcal{F}\{A\delta(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} A\delta(t-t_0) e^{-i2\pi ft} dt \quad 3.72$$

y aplicamos las propiedades de la función impulso

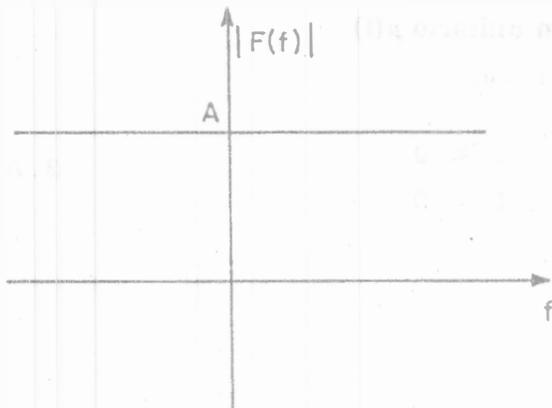
$$\mathcal{F}\{A\delta(t-t_0)\} = A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-i2\pi ft} dt = Ae^{-i2\pi ft_0} \quad 3.73$$

por lo que

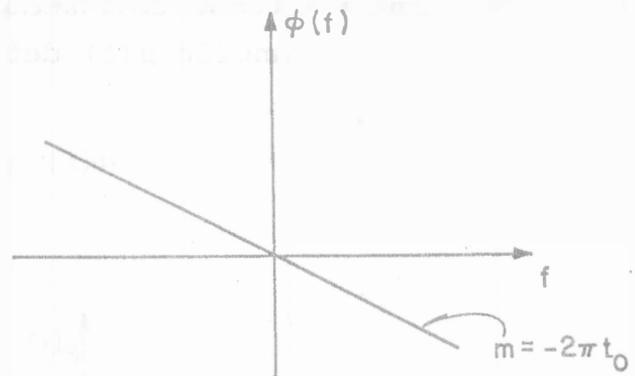
$$\mathcal{F}\{A\delta(t-t_0)\} = Ae^{-i2\pi ft_0} \quad 3.74$$

dado lo cual,

$$|F(f)| = A \quad \text{y} \quad \phi(f) = -2\pi ft_0 \quad 3.75$$



a) Espectro de amplitud



b) Espectro de fase

Figura 3.6

si $t_0 = 0$, entonces

$$|F(f)| = A \quad \text{y} \quad \phi(f) = 0 \quad 3.76$$

3.4.2 Transformada de una constante

Sea $f(t) = A$. Por propiedad de simetría, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)\} &\Leftrightarrow F(\ell) \\ \mathcal{F}\{F(t)\} &\Leftrightarrow f(-\ell)\end{aligned}\tag{3.77}$$

por lo que, si

$$\mathcal{F}\{A\delta(t)\} = A\tag{3.78}$$

entonces

$$\mathcal{F}\{A\} = A\delta(-\ell)\tag{3.79}$$

debido a que la función impulso se encuentra en el origen,

$$\mathcal{F}\{A\} = A\delta(\ell)(2\pi)\tag{3.80}$$

si $A = 1$, entonces

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(\ell)\tag{3.81}$$

3.4.3 Transformada de Fourier de la función escalón unitario $\mu(t)$

Dada la función $\mu(t)$ definida como

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}\tag{3.82}$$

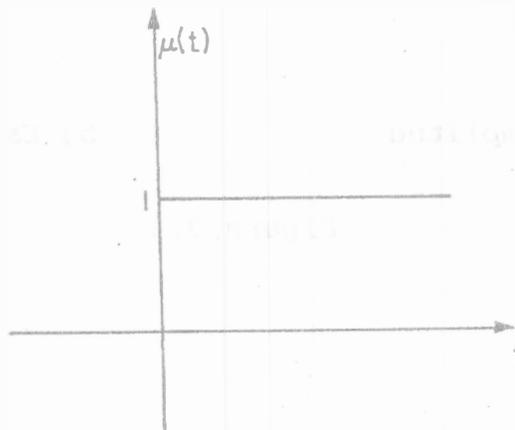


Figura 3.7

tenemos que su transformada estará dada por

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad 3.83$$

y por la propiedad de la función escalón unitario, descrita en el capítulo anterior, obtenemos que

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-i2\pi ft} dt = - \left. \frac{e^{-i2\pi ft}}{i2\pi f} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{i2\pi f} \quad 3.84$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} = \frac{1}{i2\pi f} \quad 3.85$$

De la expresión anterior se observa que para $f = 0$, la transformada no está definida, por lo que para determinar este valor se descompone a la función escalón de la siguiente forma:

$$f_1(t) = 1/2 \quad 3.86$$

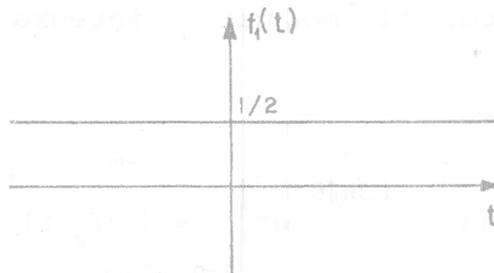


Figura 3.8a

$$f_2(t) = \begin{cases} 1/2 & ; t > 0 \\ -1/2 & ; t < 0 \end{cases} \quad 3.87$$

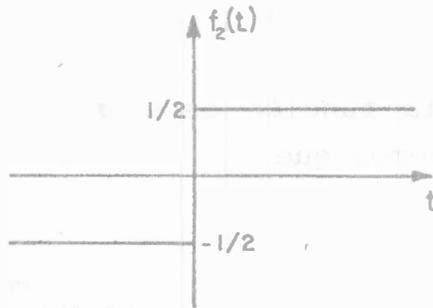


Figura 3.8b

donde

$$\mu(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad 3.88$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} \Big|_{f=0} = \mathcal{F}\{f_1(t)\} \Big|_{f=0} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} \Big|_{f=0} \quad 3.89$$

y siendo $f_1(t)$ una constante, su transformada queda definida como una función impulso.

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} \Big|_{f=0} = \frac{1}{2} \delta(\ell) + \mathcal{F}\{f_2(t)\} \Big|_{f=0} \quad 3.90$$

Por otra parte, al evaluar e integrar la transformada de Fourier de $f_2(t)$, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-i2\pi\ell t} dt \Big|_{f=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt = 0 \quad 3.91$$

debido a que $f_2(t)$ es una función de simetría impar.

Por lo que finalmente tenemos que:

$$\mathcal{F}\{\mu(t)\} = \begin{cases} \frac{1}{i2\pi f} & ; f \neq 0 \\ \frac{1}{2} \delta(f) & ; f = 0 \end{cases} \quad 3.92$$

3.4.4 Transformada de Fourier de funciones simétricas

a) Transformada de Fourier de la función $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2}\right\} \quad 3.93$$

tenemos que, por la propiedad de desplazamiento,

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi f_0 t}\} = F(f-f_0) \quad 3.94$$

y por linealidad, considerando que la transformada de Fourier de una constante es una función impulso, tenemos que:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{i2\pi f_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} e^{-i2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} \delta(f+f_0) \quad 3.95$$

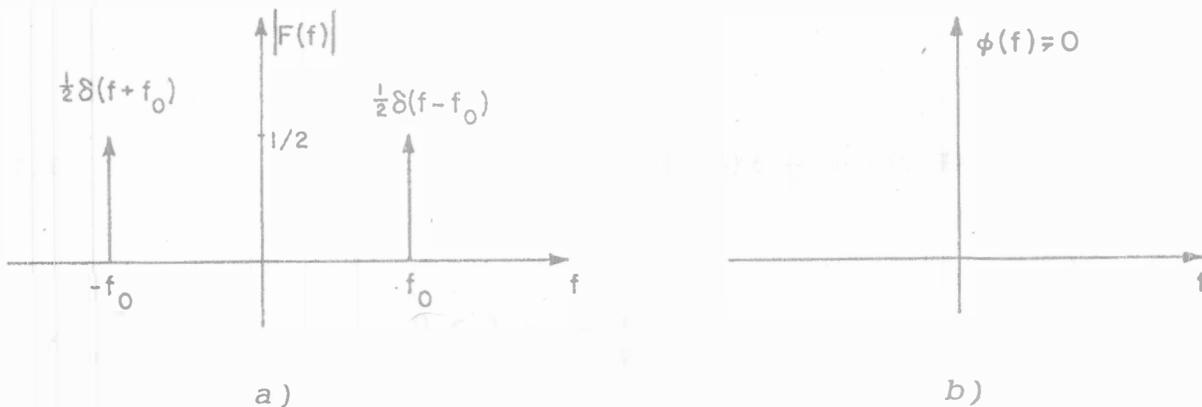


Figura 3.9

b) Transformada de Fourier de la función $f(t) = \text{sen}(2\pi f_0 t)$

Considerando que

$$\mathcal{F}\{\text{sen}(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i}\right\} \quad 3.96$$

tenemos que, por la propiedad de desplazamiento,

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{i2\pi f_0 t}\} = F(f-f_0) \quad 3.97$$

y por linealidad

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2i} e^{i2\pi f_0 t}\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2i} e^{-i2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2i} \delta(f-f_0) - \frac{1}{2i} \delta(f+f_0) \quad 3.98$$

por lo que

$$F(f) = -\frac{i}{2} \delta(f-f_0) + \frac{i}{2} \delta(f+f_0) \quad 3.99$$

si consideramos que

$$-i = e^{-i\pi/2} \quad ; \quad i = e^{i\pi/2}$$

tenemos que:

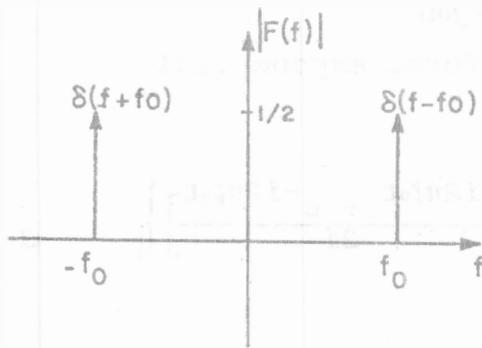
$$F(f) = \frac{1}{2} \delta(f-f_0) e^{-i\pi/2} + \frac{1}{2} \delta(f+f_0) e^{i\pi/2} \quad 3.100$$

por lo que

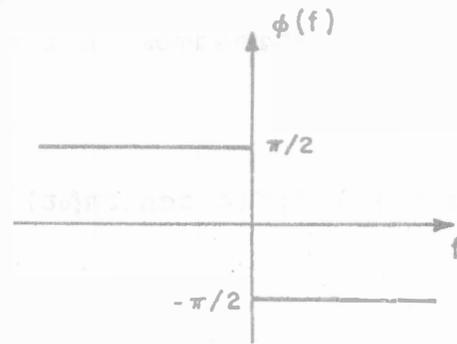
$$|F(f)| = \frac{1}{2} \delta(f-f_0) + \frac{1}{2} \delta(f+f_0) \quad 3.101$$

y

$$\phi(f) = \begin{cases} -\pi/2 & ; f > 0 \\ \pi/2 & ; f < 0 \end{cases} \quad 3.102$$



a) Espectro de amplitud



b) Espectro de fase

Figura 3.10

c) Transformada de Fourier de la función $g(t) = f(t) \cos(2\pi f_0 t)$

Si expresamos la función en su forma exponencial,

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t) \cos(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \left[\frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2} \right]\right\} \quad 3.103$$

por propiedad de desplazamiento,

$$\mathcal{F}\{f(t) e^{i2\pi f_0 t}\} = F(f-f_0) \quad 3.104$$

y por linealidad,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} f(t) e^{i2\pi f_0 t}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} f(t) e^{-i2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2} F(f-f_0) + \frac{1}{2} F(f+f_0) \quad 3.105$$

por lo tanto,

$$G(f) = \frac{1}{2} F(f-f_0) + \frac{1}{2} F(f+f_0) \quad 3.106$$

d) Transformada de Fourier de la función $g(t) = f(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)$

Si expresamos la función en su forma exponencial,

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t) \operatorname{sen}(2\pi f_0 t)\} = \mathcal{F}\left\{f(t) \left[\frac{e^{i2\pi f_0 t} - e^{-i2\pi f_0 t}}{2i} \right]\right\} \quad 3.107$$

por propiedad de desplazamiento,

$$\mathcal{F}\{f(t) e^{i2\pi f_0 t}\} = F(f - f_0) \quad 3.108$$

y por linealidad,

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2i} f(t) e^{i2\pi f_0 t}\right\} - \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2i} f(t) e^{-i2\pi f_0 t}\right\} = \frac{1}{2i} F(f - f_0) - \frac{1}{2i} F(f + f_0) \quad 3.109$$

y, por lo tanto,

$$G(f) = \frac{1}{2i} F(f - f_0) - \frac{1}{2i} F(f + f_0) \quad 3.110$$

$$G(f) = -\frac{i}{2} F(f - f_0) + \frac{i}{2} F(f + f_0) \quad 3.111$$

y si consideramos que

$$-i = e^{-i\pi/2} \quad e \quad i = e^{i\pi/2}$$

entonces

$$G(f) = \frac{1}{2} F(f - f_0) e^{-i\pi/2} + \frac{1}{2} F(f + f_0) e^{i\pi/2} \quad 3.112$$

3.4.5 Transformada de Fourier de una función periódica

Una función periódica se puede representar por la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k e^{i2\pi k f_0 t} \quad 3.113$$

donde

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi k f_0 t} dt \quad 3.114$$

por lo que la transformada de Fourier de una función periódica puede ser representada por

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad 3.115$$

al sustituir la función representada por su serie de Fourier,

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k e^{i2\pi k f_0 t} \right) e^{-i2\pi f t} dt \quad 3.116$$

si intercambiamos el orden de la sumatoria,

$$F(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi k f_0 t} e^{-i2\pi f t} dt \quad 3.117$$

donde la integral representa la transformada de Fourier de una constante con valor unitario, y cuya multiplicación por la exponencial nos indica un desplazamiento en la frecuencia de $k f_0$, por lo que

$$F(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}_k \delta(f - kf_0) \quad 3.118$$

Lo que nos indica que la transformada de Fourier de una función periódica es una sumatoria que depende de los \mathcal{D}_k multiplicados por un tren de impulsos (Este es un caso particular de la transformada de Fourier).

3.4.6 Transformada de Fourier de un tren de impulsos

Consideremos ahora un tren de impulsos como una función periódica.

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad 3.119$$

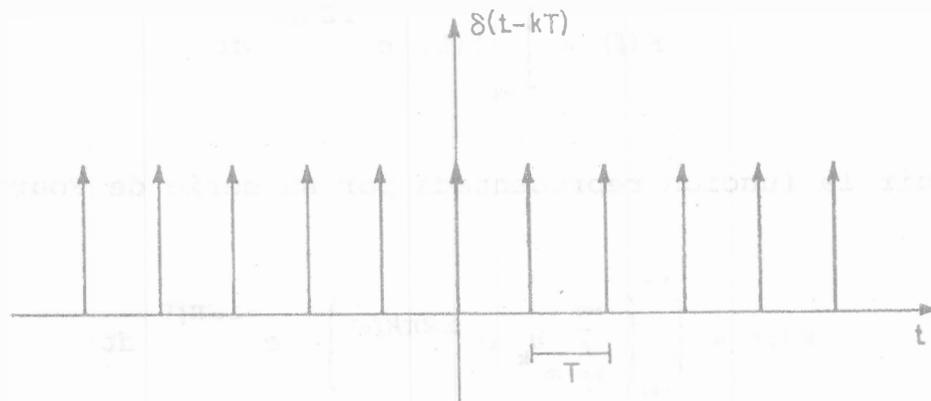


Figura 3.11

La representación en serie de Fourier de un tren de impulsos sin desplazamiento, como se había demostrado en el capítulo anterior (expresión 2.85), es

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi k f_0 t} \quad 3.120$$

donde

$$\mathcal{D}_k = \frac{1}{T}$$

Por tratarse de una función periódica y según la ecuación

3.118,

$$F(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k \delta(f - k f_0) \quad 3.121$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0) \quad 3.122$$

Por lo que la transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos escalado en $1/T$ y cuyo período en la frecuencia está definido por $f_0 = \frac{1}{T}$.

Ejemplo 3.3

Obtener la transformada de Fourier de la función $f(t)$.

$$f(t) = e^{-a|t|}$$

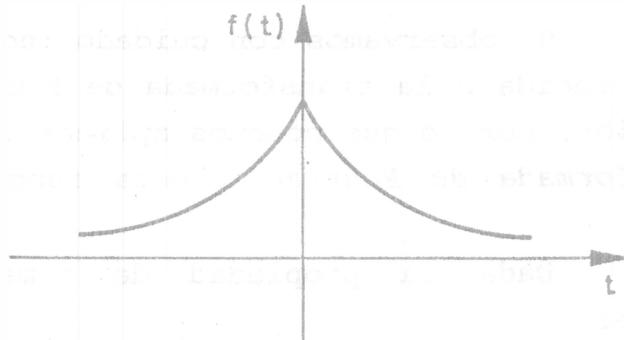


Figura 3.12

Esta función es de simetría par, por lo que la transformada de Fourier sólo tendrá parte real. De la ecuación 3.60,

$$F(f) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi f t) dt$$

por lo tanto, al sustituir tenemos que:

$$F(\ell) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(2\pi\ell t) dt$$

integrando y evaluando, llegamos a que:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi\ell)^2}$$

Ejemplo 3.4

Obtener la transformada de Fourier de $h(t)$.

$$h(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

Si observamos con cuidado, notaremos que la función $h(t)$ es muy parecida a la transformada de Fourier obtenida para el problema anterior, por lo que podemos aplicar la *propiedad de simetría de la transformada de Fourier* a esta función, siguiendo los siguientes pasos.

Dada la propiedad de simetría de la transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} f(t) &\Leftrightarrow F(\ell) \\ F(t) &\Leftrightarrow f(-\ell) \end{aligned}$$

Primero, suponemos una función $F(t)$ definida como

$$F(t) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi t)^2}$$

Segundo, usamos la propiedad de simetría para obtener su transformada de Fourier apoyándonos en el ejemplo anterior, por lo que

$$f(-f) = e^{-a|-f|}$$

Tercero, una vez resuelta la transformada de Fourier para la función $F(t)$, encontramos la relación entre la función $h(t)$ y $F(t)$. De manera que

$$h(t) = \frac{1}{2a} F\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

comprobando,

$$h(t) = \frac{1}{2a} \frac{2a}{a^2 + \left(\frac{2\pi t}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{a^2 + t^2}$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2a} F\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\}$$

si aplicamos la propiedad de escalamiento 3.52 y de linealidad 3.35, obtenemos que:

$$\mathcal{F}\{c[f(bt)]\} = c \frac{1}{b} F\left(\frac{f}{b}\right)$$

donde $c = \frac{1}{2a}$ y $b = \frac{1}{2\pi}$ para nuestro ejemplo. Sustituyendo y aplicando la propiedad de simetría 3.54, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2a} F\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = \frac{1}{2a} \mathcal{F}\left\{F\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi}} \left(f\left(\frac{-f}{\frac{1}{2\pi}}\right)\right)\right)$$

por lo que

$$= \frac{2\pi}{2a} \left(f(-2\pi f)\right) = \frac{\pi}{a} \left(e^{-a|-2\pi f|}\right) = \frac{\pi}{a} \left(e^{-a|2\pi f|}\right)$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{\pi}{a} e^{-a|2\pi f|}$$

Ejemplo 3.5

Obtener la transformada de Fourier de la función $h(t)$.

$$h(t) = \begin{cases} A & ; t < |t_0| \\ 0 & ; t > |t_0| \end{cases}$$

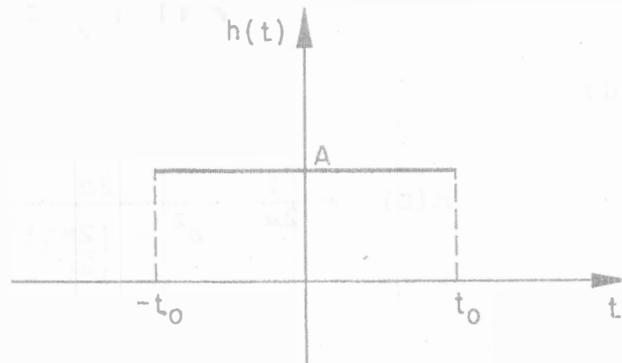


Figura 3.13

Su transformada estará definida como

$$\begin{aligned} H(f) &= A \int_{-t_0}^{+t_0} e^{-i2\pi ft} dt = -\frac{A}{i2\pi f} e^{-i2\pi ft} \Big|_{-t_0}^{+t_0} \\ &= -\frac{A}{i2\pi f} \left(e^{-i2\pi ft_0} - e^{i2\pi ft_0} \right) \end{aligned}$$

si separamos las funciones exponenciales de la siguiente manera:

$$= \cos(2\pi ft_0) - i \operatorname{sen}(2\pi ft_0) - [\cos(2\pi ft_0) + i \operatorname{sen}(2\pi ft_0)]$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{A}{i2\pi f} [-2i \operatorname{sen}(2\pi f t_0)] \\ &= \frac{A}{\pi f} [\operatorname{sen}(2\pi f t_0)] \end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por $2t_0$, obtenemos

$$H(f) = \frac{2At_0 \operatorname{sen}(2\pi f t_0)}{2\pi f t_0}$$

expresión conocida como la *función sampling* o *muestreadora*.

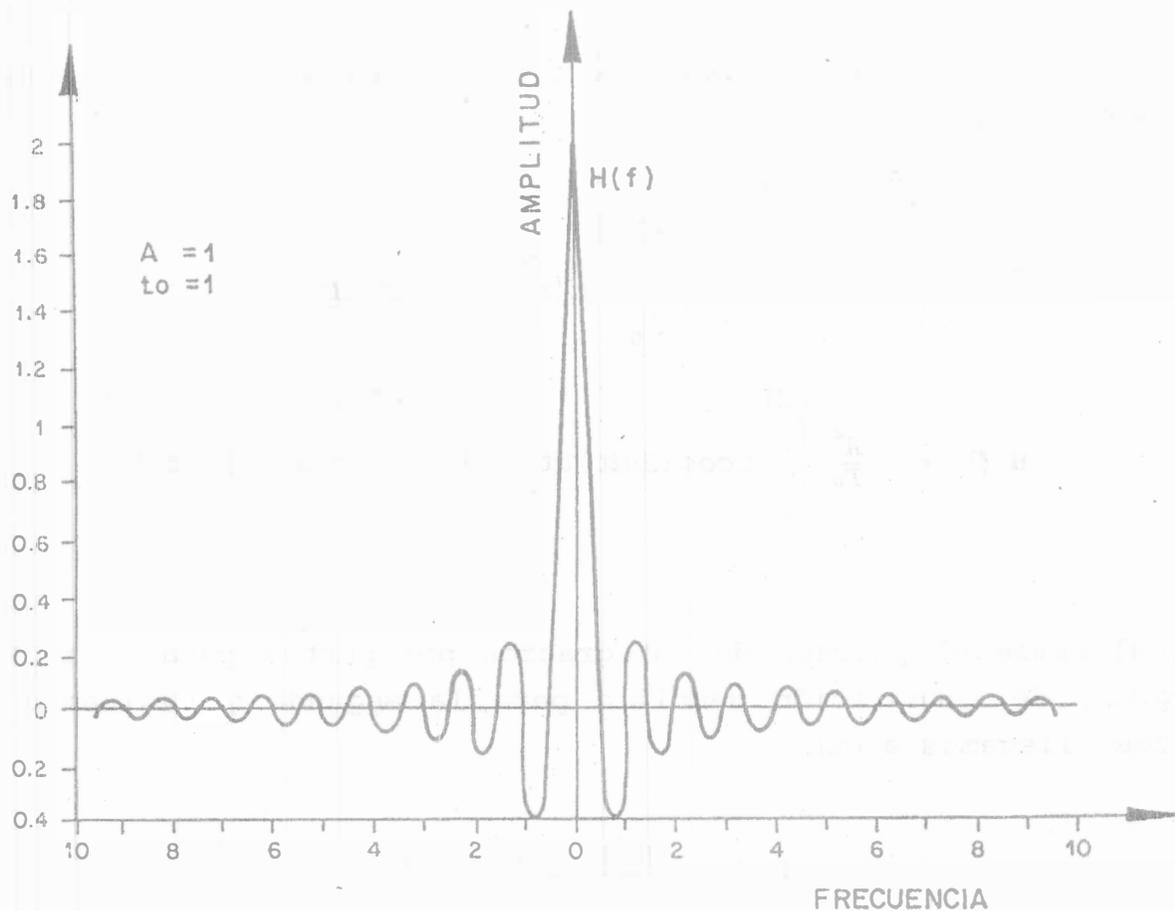


Figura 3.14

Ejemplo 3.6

Obtener la transformada de Fourier de la función $h(t)$.

$$h(t) = \begin{cases} \frac{-A^2}{2T_0} t + A^2 & |t| < 2T_0 \\ 0 & |t| > 2T_0 \end{cases}$$

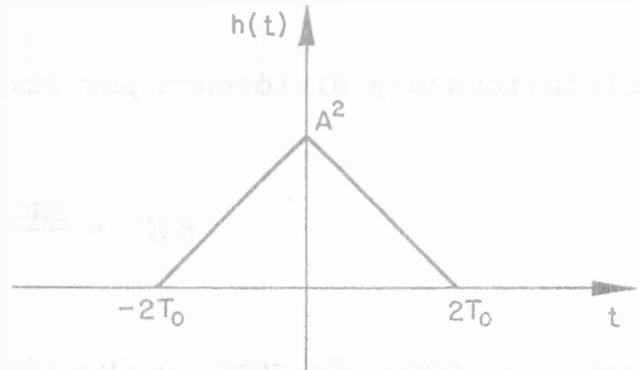


Figura 3.15

Como se puede observar, se trata de una función de simetría par, por lo tanto,

$$H(f) = 2 \int_0^{+T/2} h(t) \cos(2\pi f t) dt$$

$$H(f) = -\frac{A^2}{T_0} \int_0^{+2T_0} t \cos(2\pi f t) dt + 2A^2 \int_0^{+2T_0} \cos(2\pi f t) dt =$$

si realizamos el proceso de integración por partes para la primera integral, de integración sencilla para la segunda y evaluamos los límites, llegamos a que

$$H(f) = \frac{2A^2 T_0 \operatorname{sen}^2(2\pi f T_0)}{(2\pi f T_0)^2}$$

conocida como la *función sampling cuadrada*.

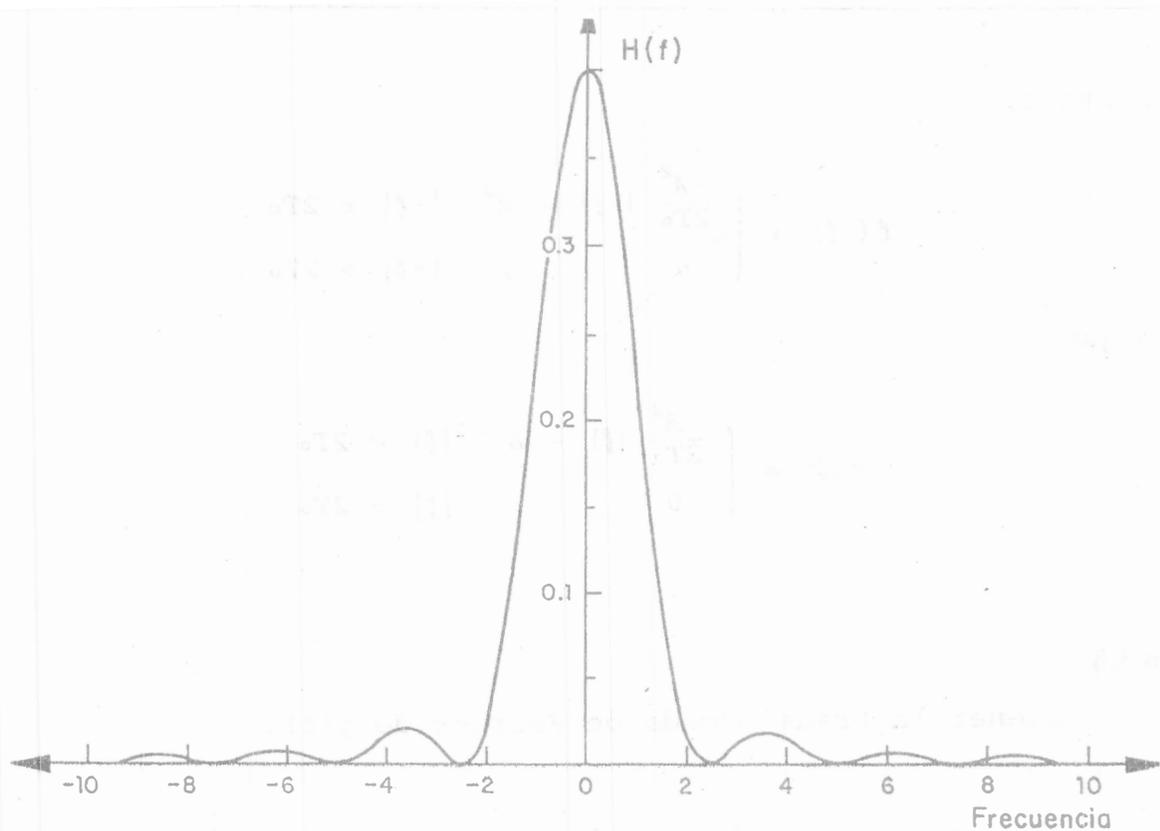


Figura 3.16

Ejemplo 3.7

Obtener la transformada de Fourier de $h(t)$.

$$h(t) = \frac{2A^2T_0 \operatorname{sen}^2(2\pi tT_0)}{(2\pi tT_0)^2}$$

Sabiendo que $h(t) = F(t)$, donde

$$F(t) = \frac{2A^2T_0 \operatorname{sen}^2(2\pi tT_0)}{(2\pi tT_0)^2}$$

podemos aplicar la propiedad de simetría en el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} f(t) &\Leftrightarrow F(\ell) \\ F(t) &\Leftrightarrow f(-\ell) \end{aligned}$$

de manera que

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{2A^2T_0 \operatorname{sen}^2(2\pi tT_0)}{(2\pi tT_0)^2}\right\} = f(-\ell)$$

por lo tanto,

$$f(-f) = \begin{cases} \frac{-A^2}{2T_0} (-f) + A^2 & | -f | < 2T_0 \\ 0 & ; \quad | -f | > 2T_0 \end{cases}$$

por lo que

$$H(f) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T_0} (f) + A^2 & | f | < 2T_0 \\ 0 & ; \quad | f | > 2T_0 \end{cases}$$

Ejemplo 3.8

Obtener la transformada de Fourier de $g(t)$.

$$g(t) = \begin{cases} \frac{-A^2}{2T_0} (t-t_0)^2 + A^2; & | t-t_0 | < 2T_0 \\ 0 & ; \quad | t-t_0 | > 2T_0 \end{cases}$$

Podemos observar que esta nueva función es igual a la del ejemplo 3.6, pero desplazada en el tiempo.

$$g(t) = h(t-t_0)$$

y sabiendo que

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f)$$

por la propiedad de desplazamiento en el tiempo 3.47, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{h(t-t_0)\} = H(f) e^{-i2\pi f t_0}$$

por lo que

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{h(t-t_0)\} = \frac{2A^2 T_0 \operatorname{sen}^2(2\pi f T_0)}{(2\pi f T_0)^2} e^{-i2\pi f t_0}$$

Ejemplo 3.9

Obtener la transformada de Fourier de $h(t)$.

$$h(t) = e^{-\alpha t} \operatorname{sen} bt \mu(t)$$

al estar multiplicada por la función $\mu(t)$, nuestra función queda definida de 0 a ∞ , por lo que

$$H(f) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} bt e^{-i2\pi f t} dt$$

y como

$$\operatorname{sen} bt = \left[\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} \right]$$

tenemos que

$$H(f) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \left[\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} \right] e^{-i2\pi f t} dt$$

por lo que, separando las integrales,

$$H(f) = \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f - ib)t} dt - \frac{1}{2i} \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f + ib)t} dt$$

nuestra transformada queda definida como

$$H(f) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\alpha + i(2\pi f - b)} - \frac{1}{\alpha + i(2\pi f + b)} \right)$$

y desarrollando algebraicamente, tenemos que:

$$H(f) = \frac{b}{(\alpha + i2\pi f)^2 + b^2}$$

Ejemplo 3.10

Obtener la transformada de Fourier de

$$g(t) = \frac{\cos 8\pi t}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

Trataremos a esta función como una función de la forma $g(t) = f(t) \cos(2\pi f_0 t)$, cuya transformada fue obtenida en la expresión 3.106

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2} F(f-f_0) + \frac{1}{2} F(f+f_0)$$

y donde

$$f(t) = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

por lo tanto, igualando,

$$\cos 2\pi f_0 t = \cos 8\pi t \Rightarrow 2\pi f_0 t = 8\pi t$$

tenemos que:

$$f_0 = 4$$

Por lo que ahora sólo queda obtener la transformada de Fourier de

$$f(t) = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

considerando el resultado obtenido en el ejemplo 3.3 y aplicando la propiedad de simetría de la transformada de Fourier,

$$f(t) = \frac{1}{2a} H(t)$$

por lo que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2a} \mathcal{F}\{H(t)\}$$

y

$$F(\ell) = \frac{1}{2a} e^{-a|\ell|}$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\cos 8\pi t}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{2a} e^{-a|\ell-4|} + \frac{1}{2} \frac{1}{2a} e^{-a|\ell+4|}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\cos 8\pi t}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \right\} = \frac{1}{4a} e^{-a|\ell-4|} + \frac{1}{4a} e^{-a|\ell+4|}$$

Ejemplo 3.11

Obtener la transformada de Fourier de

$$g(t) = \frac{\text{sen } 8\pi t}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

de acuerdo con el procedimiento del ejemplo 3.10 y la expresión 3.110,

$$\mathcal{F}\{f(t) \text{ sen } 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2i} F(\ell - f_0) - \frac{1}{2i} F(\ell + f_0)$$

igualando,

$$\text{sen } 2\pi f_0 t = \text{sen } 8\pi t \Rightarrow 2\pi f_0 t = 8\pi t$$

por lo tanto,

$$f_0 = 4$$

Por lo que ahora sólo queda obtener la transformada de Fourier de

$$f(t) = \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

del ejemplo 3.3

$$f(t) = \frac{1}{2a} H(t)$$

por lo que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2a} \mathcal{F}\{H(t)\}$$

y

$$F(f) = \frac{1}{2a} e^{-a|f|}$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen } 8\pi t}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \right\} = \frac{1}{2i} \frac{1}{2a} e^{-a|f-4|} - \frac{1}{2i} \frac{1}{2a} e^{-a|f+4|}$$

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\text{sen } 8\pi t}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \right\} = \frac{1}{i4a} e^{-a|f-4|} - \frac{1}{i4a} e^{-a|f+4|}$$

Ejemplo 3.12

Obtener la transformada inversa de Fourier de la función $H(f)$.

$$H(f) = \frac{\beta}{\alpha + i2\pi f}$$

separando la parte real y la imaginaria,

$$H(f) = \frac{\beta}{\alpha + i2\pi f} \cdot \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha - i2\pi f} = \beta \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{i2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi f t} df$$

por lo que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{i2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right) e^{i2\pi f t} df$$

separando la función exponencial en sus componentes coseno, seno, tenemos que:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - \frac{i2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right) [\cos 2\pi f t + i \operatorname{sen} 2\pi f t] df$$

y, considerando la simetría de las funciones, sólo quedan los siguientes términos:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right) \cos 2\pi f t df +$$

$$+ i \int_{-\infty}^{+\infty} \beta \left(\frac{i2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right) \operatorname{sen} 2\pi f t df$$

Resolviendo por tablas,

$$h(t) = \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{2} e^{-\alpha t}$$

y, por lo tanto,

$$h(t) = \beta e^{-\alpha t}$$

3.5 TRANSFORMADA DE FOURIER BIDIMENSIONAL

Hasta ahora se ha considerado a la transformada de Fourier en función de una variable: *el tiempo*. Sin embargo, también es posible definir a la transformada de Fourier en función de la distancia x , en donde los espectros estarán dados en el dominio del número de onda (véase tabla 3.1), en vez del de la frecuencia.

Asimismo, es importante destacar que la transformada de Fourier se puede obtener en función de dos o más variables (que pueden ser espaciales, temporales o ambas).

La siguiente expresión:

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xk_x, yk_y)} dx dy$$

representa a la transformada de Fourier bidimensional para dos variables espaciales; y la expresión

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{i2\pi(xk_x, yk_y)} dk_x dk_y$$

representa a la transformada inversa de Fourier bidimensional.

Para efectuar esta transformación es necesario realizar la integral primero respecto a una variable y a continuación con la otra. De esta manera hacemos la transformación en una dirección y después en la otra.

Tabla 3.1

Concepto	Unidades	Equivalencia
Velocidad	distancia/tiempo	$v = \frac{\omega}{k} = f\lambda$
Frecuencia	1/tiempo	$f = \omega/2\pi = 1/T = v/\lambda$
Frecuencia angular	1/tiempo	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
Período	tiempo	$T = 2\pi/\omega = 1/f$
Longitud de onda	distancia	$\lambda = 2\pi/k = v/f = vT$
Número de onda	1/distancia	$k = 2\pi/\lambda = \frac{\omega}{v}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine las partes real e imaginaria de la transformada de Fourier de cada una de las siguientes funciones:

a)
$$h(t) = e^{-a|t|} \quad ; \quad -\infty < t < \infty$$

b)
$$h(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_0 t) & ; \quad t > 0 \\ \frac{A}{2} & ; \quad t = 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

c)
$$h(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

2. Determine el espectro de amplitud y de fase de la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a)
$$h(t) = e^{-a|t|}$$

b)
$$h(t) = A \operatorname{sen}(2\pi f_0 t) \quad ; \quad 0 \leq t < \infty$$

c)
$$h(t) = A e^{-\alpha t} \cos(2\pi f_0 t) \quad ; \quad 0 \leq t < \infty$$

3. Sean las funciones

$$h(t) = \begin{cases} A & ; \quad |t| < 2 \\ \frac{A}{2} & ; \quad t \pm 2 \\ 0 & ; \quad |t| > 2 \end{cases} \quad \alpha(t) = \begin{cases} -A & ; \quad |t| < 1 \\ -\frac{A}{2} & ; \quad t \pm 1 \\ 0 & ; \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Obtenga la transformada de Fourier de las funciones $h(t)$, $\alpha(t)$ y $g(t) = [h(t) - \alpha(t)]$.

4. Usando la propiedad de simetría, determine la transformada de Fourier de

a)
$$h(t) = \frac{A^2 \operatorname{sen}^2 (2\pi T_0 t)}{(\pi t)^2}$$

b)
$$h(t) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 t^2}$$

5. Sea la función

$$h(t) = \begin{cases} A^2 - \frac{A^2 |t|}{2T_0} & ; |t| < 2T_0 \\ 0 & ; |t| > 2T_0 \end{cases}$$

Obtenga la transformada de Fourier de las funciones $h(t)$, $h(2t)$, $h(4t)$ y $h(8t)$.

6. Empleando la propiedad de desplazamiento, obtenga la transformada de Fourier de

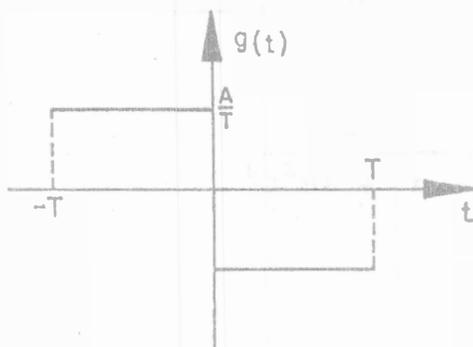
$$h(t) = \frac{A \operatorname{sen} [2\pi f_0 (t-t_0)]}{\pi (t-t_0)}$$

7. Utilizando la propiedad de desplazamiento en la frecuencia, obtenga la transformada inversa de Fourier de

a)
$$H(f) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 4\pi^2 (f+f_0)^2}$$

b)
$$H(f) = \frac{A^2 \operatorname{sen}^2 [2\pi T_0 (f-f_0)]}{[\pi (f-f_0)]^2}$$

8. Encuentre la transformada de Fourier de la siguiente función, considerando su simetría.



CAPÍTULO 4

INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

4.1 DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

La integral de convolución se define como

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau = e(t)*h(t) \quad 4.1$$

Para visualizar el significado de la operación matemática de la convolución que se representa en la ecuación 4.1, donde el carácter * se emplea como el operador que simboliza la operación de convolución, es conveniente mostrar gráficamente el desarrollo de dicha operación.

4.1.1 Evaluación gráfica

Sean $e(t)$ y $h(t)$ dos funciones dadas representadas en las figuras 4.1a y 4.1b. Para realizar la convolución es necesario reemplazar a la variable t por τ (figuras 4.1c y 4.1d), lo cual no altera a la función ya que sólo estamos cambiando el nombre de la variable, por lo que ahora tenemos $e(\tau)$ y $h(\tau)$.

Como siguiente paso plegamos la función $h(\tau)$ para obtener su imagen con lo cual tenemos $h(-\tau)$ (figura 4.1e) y la desplazamos un intervalo t de manera que nuestra función ahora la representamos como $h(t-\tau)$, como se observa en la figura 4.1f. Para realizar la convolución, como se establece en la definición, es necesario multiplicar la función $e(\tau)$ por cada valor desplazado de la función $h(t-\tau)$ e integrar el producto. El valor del desplazamiento t se toma de $-\infty$ a ∞ (figura 4.1g).

Para nuestro ejemplo, si tomamos un desplazamiento cada 0.25, podemos observar gráficamente como se va comportando nuestra convolución en estos puntos. Por ejemplo, si se tiene un desplazamiento $t=0$, el área de intersección entre las dos funciones es cero (véase figura 4.2a).

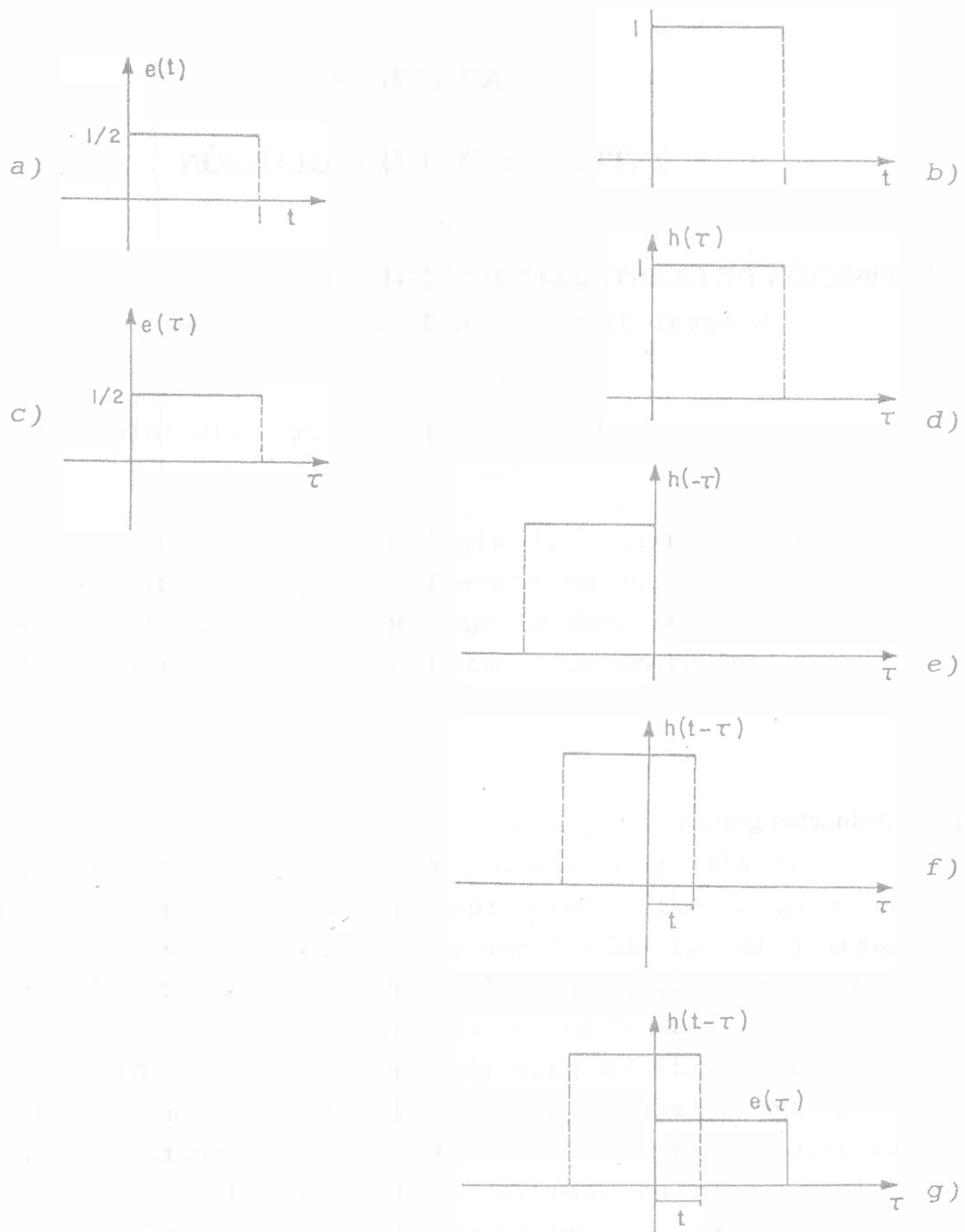
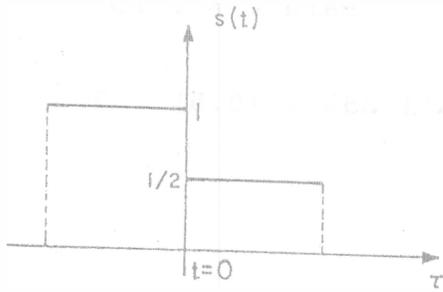


Figura 4.1

Pero si desplazamos a la función, se puede observar que existe un área de intersección a medida que la función $h(t-\tau)$ se superpone y multiplica por la función $e(\tau)$ para cada desplazamiento, véase figura 4.2. En este ejemplo, debido a las características de las funciones mostradas, se puede decir que el área de intersección representa a la integral de convolución.

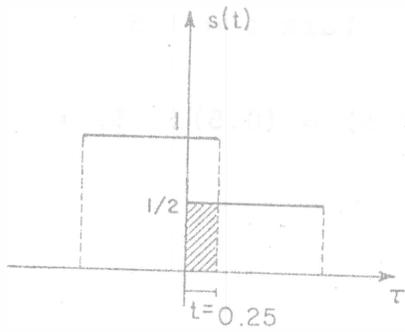
a)



Para $t = 0$

$$\Delta(0) = 0$$

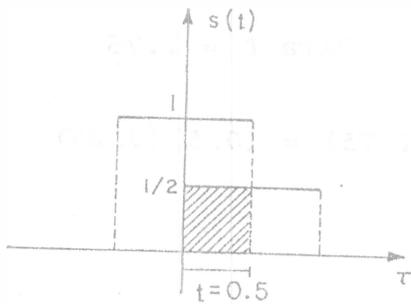
b)



Para $t = 0.25$

$$\Delta(0.25) = (0.5)(0.25) = 0.125$$

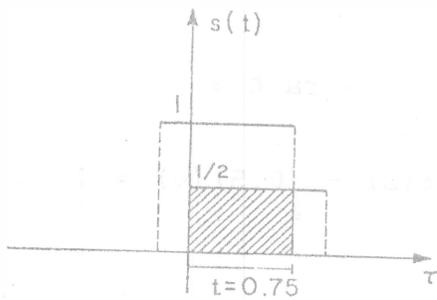
c)



Para $t = 0.5$

$$\Delta(0.5) = (0.5)(0.5) = 0.25$$

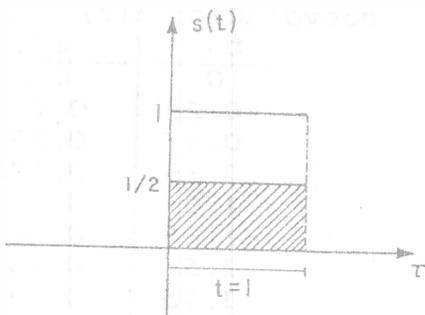
d)



Para $t = 0.75$

$$\Delta(0.75) = (0.5)(0.75) = 0.375$$

e)

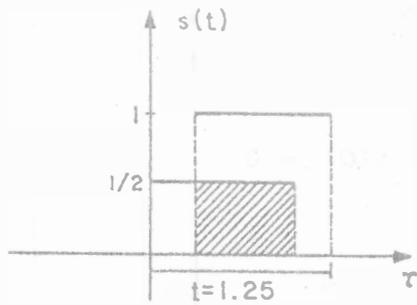


Para $t = 1$

$$\Delta(1) = (0.5)(1) = 1$$

Figura 4.2

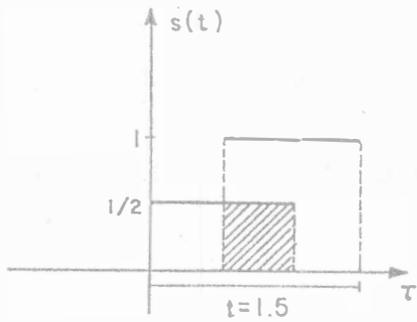
f)



Para $t = 1.25$

$$\Delta(1.25) = (0.5)(0.75) = 0.375$$

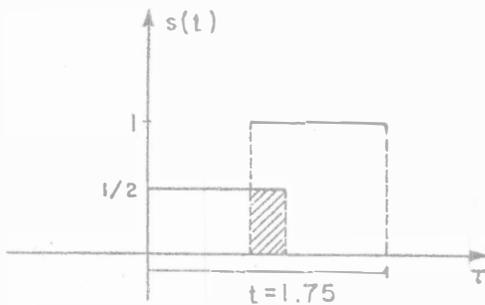
g)



Para $t = 1.5$

$$\Delta(1.5) = (0.5)(0.5) = 0.25$$

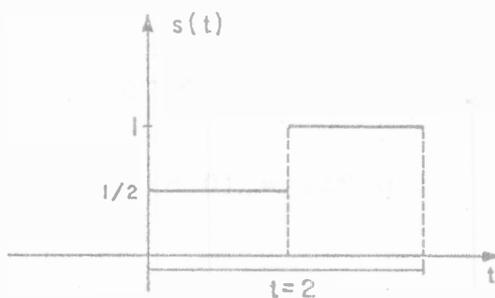
h)



Para $t = 1.75$

$$\Delta(1.75) = (0.5)(0.25) = 0.125$$

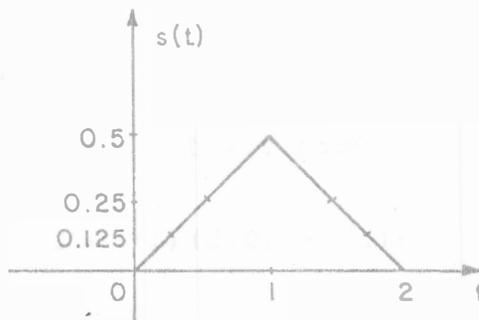
i.)



Para $t = 2$

$$\Delta(2) = (0.5)(0) = 0$$

j)



Por lo que la función de convolución $\Delta(t)$ es:

t	$\Delta(t)$
0	0
0.25	0.125
0.5	0.25
0.75	0.375
1.0	0.5
1.25	0.375
1.5	0.25
1.75	0.125
2	0

Figura 4.2 (continuación)

El procedimiento descrito para la evaluación de la integral de convolución tiene los siguientes pasos:

1. *Plegamiento*: Cuando se obtiene $h(-\tau)$, es decir, la imagen de la función $h(t)$ respecto al eje de ordenadas.
2. *Desplazamiento*: Consiste en desplazar un intervalo t a la función $h(-\tau)$, es decir, obtener $h(t-\tau)$.
3. *Multipliación*: Cuando se obtiene el producto de la función $e(\tau)$ por $h(t-\tau)$.
4. *Integración*: Consiste en calcular el área bajo la curva del producto anterior. Esta área es el valor de la convolución para un desplazamiento t .

4.1.2 Evaluación analítica

Los valores de la convolución para las dos funciones anteriores son fácilmente obtenidos a través de una evaluación gráfica en puntos definidos; sin embargo, cuando se tienen otro tipo de funciones, el obtener estos valores se complica, por lo que es necesario deducirlos de manera analítica.

Para la evaluación analítica de la operación de convolución entre dos funciones se siguen los pasos 1, 2 y 3; sin embargo, para la etapa final de integración se requiere la evaluación analítica de una integral definida, por lo que es necesario fijar adecuadamente los límites de integración.

Para determinar los límites de integración de la convolución primero se investigan los valores mínimos de τ , para los cuales las funciones $e(\tau)$ y $h(t-\tau)$ son no nulos y se selecciona como límite inferior de la integral el mayor de los dos; a continuación se investigan los valores máximos de τ para los cuales las funciones $e(\tau)$ y $h(t-\tau)$ son no nulos y se selecciona como límite superior al menor de los dos. Para la obtención de estos límites, nos auxiliaremos de la gráfica de la convolución de las funciones.

Ejemplo 4.1

Utilizando las funciones del ejercicio anterior, tenemos que para

$e(\tau)$	Límite inferior	Límite superior
	0	1
$h(t-\tau)$	$t-1$	t

Por lo que los límites de la integral definida irán variando como sigue:

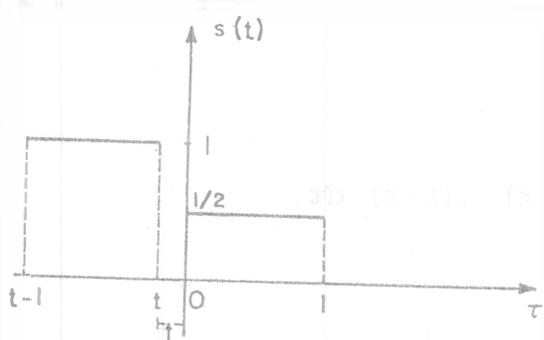
$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \int_0^t & ; 0 < t \leq 1 \\ \int_{t-1}^1 & ; 1 < t \leq 2 \\ 0 & ; t > 2 \end{cases}$$

Ya que no existe intersección entre las funciones, por lo que el producto es cero (véanse figuras 4.3 a,b).

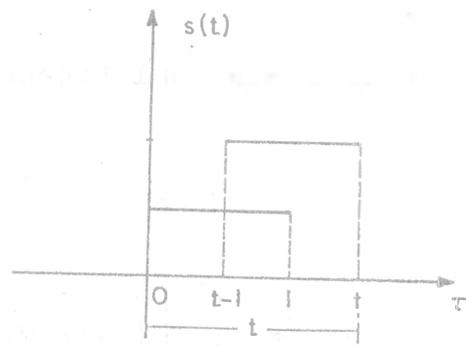
Ya que para este intervalo el límite mayor entre 0 y $t-1$ es 0, y el menor entre 1 y t es t (véanse figuras 4.3 c,d).

Ya que para este intervalo el límite mayor entre 0 y $t-1$ es $t-1$, y el menor entre 1 y t es 1 (véanse figuras 4.3 e,f).

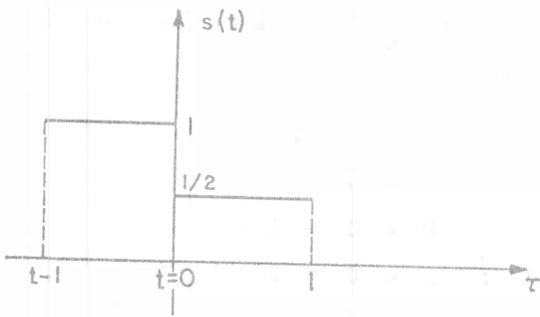
Para $t > 2$ no existe intersección entre las dos funciones, por lo que el producto es cero (véanse figuras 4.3 f,g).



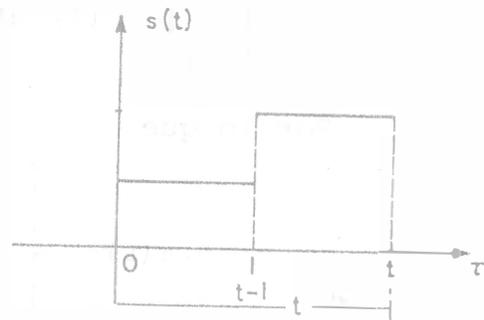
a)



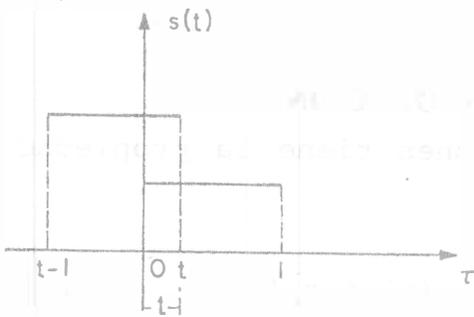
e)



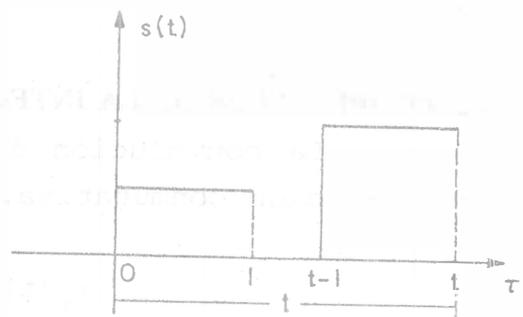
b)



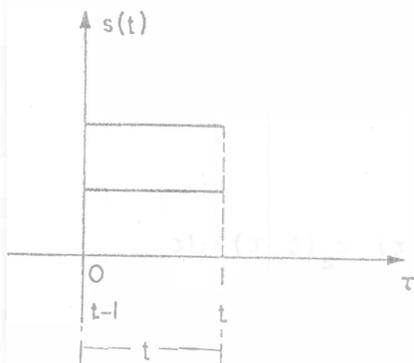
f)



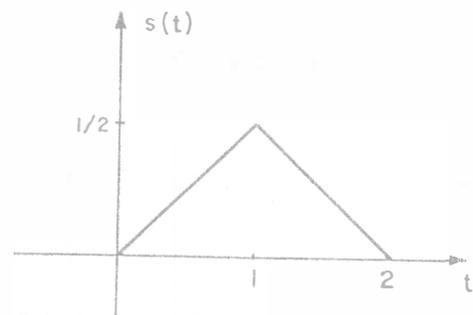
c)



g)



d)



h)

Figura 4.3

si resolvemos analíticamente,

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$I_1 = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\right) (1) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau = \frac{1}{2} (t - 0) = \frac{1}{2} t$$

$$I_2 = \int_{t-1}^1 \left(\frac{1}{2}\right) (1) d\tau = \frac{1}{2} \int_{t-1}^1 d\tau = \frac{1}{2} (1 - t + 1) = 1 - \frac{1}{2} t$$

Por lo que

$$\Delta(t) \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \frac{1}{2} t & ; 0 < t \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2} t & ; 1 < t \leq 2 \\ 0 & ; t \geq 2 \end{cases}$$

donde $\Delta(t)$ está representada en la figura 4.3h.

4.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE CONVOLUCIÓN

La convolución de dos funciones tiene la propiedad de ser una operación conmutativa, esto es

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) \quad 4.2$$

donde $*$ representa a la operación de convolución de $x_1(t) * x_2(t)$.

Demostración:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \quad 4.3$$

si cambiamos la variable $t-\tau$ por x en la integral de convolución

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-x) x_2(x) dx \quad 4.4$$

y sustituimos x por τ , tenemos que:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau) x_1(t-\tau) d\tau = x_2(t) * x_1(t) \quad 4.5$$

con lo que podemos decir que la operación de convolución es conmutativa.

4.3 TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Una de las herramientas más importantes para el análisis de los sistemas lineales se debe a la relación que existe entre la transformada de Fourier y la operación de convolución. A esta relación se le conoce como *teorema de convolución*.

4.3.1 Teorema de convolución en el dominio del tiempo

Si

$$\mathcal{F}\{h_1(t)\} = H_1(f) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\{h_2(t)\} = H_2(f) \quad 4.6$$

entonces

$$\mathcal{F}\{h_1(t) * h_2(t)\} = H_1(f) \cdot H_2(f) \quad 4.7$$

La convolución de dos funciones en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación de las transformadas de estas funciones en el dominio de la frecuencia.

Demostración:

$$\mathcal{F}\{h_1(t) * h_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-i2\pi ft} dt \quad 4.8$$

si cambiamos el orden de integración,

$$\mathcal{F}\{h_1(t) * h_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) h_2(t-\tau) e^{-i2\pi ft} d\tau dt \quad 4.9$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t-\tau) e^{-i2\pi ft} dt \right] d\tau \quad 4.10$$

la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t-\tau) e^{-i2\pi ft} dt = H_2(f) e^{-i2\pi f\tau} \quad 4.11$$

representa a la transformada de Fourier de la función $h_2(t)$ desplazada; por lo que, sustituyendo 4.11 en la ecuación 4.10, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{h_1(t) * h_2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) H_2(f) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad 4.12$$

por lo que

$$= H_2(f) \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad 4.13$$

$$= H_2(f) \cdot H_1(f) \quad 4.14$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{h_1(t) * h_2(t)\} = H_1(f) \cdot H_2(f) \quad 4.15$$

4.3.2 Teorema de convolución en el dominio de las frecuencias

Si

$$\mathcal{F}\{h_1(t)\} = H_1(f) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\{h_2(t)\} = H_2(f)$$

entonces

$$\mathcal{F}\{h_1(t) \cdot h_2(t)\} = H_1(f) * H_2(f) \quad 4.16$$

La convolución de dos funciones en el dominio de la frecuencia es equivalente a la multiplicación en el dominio del tiempo de la transformada inversa de Fourier de estas funciones.

En otras palabras, la transformada de la multiplicación en el dominio del tiempo de dos funciones es equivalente a la convolución de las transformadas de Fourier de dichas funciones.

Demostración:

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_1(f) * H_2(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\tau) H_2(f-\tau) d\tau \right] e^{i2\pi ft} df \quad 4.17$$

si cambiamos el orden de integración,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_1(f) * H_2(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\tau) H_2(f-\tau) e^{i2\pi ft} df d\tau \quad 4.18$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(f-\tau) e^{i2\pi ft} df \right] d\tau \quad 4.19$$

donde la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(f-\tau) e^{i2\pi ft} df = h_2(t) e^{i2\pi t\tau} \quad 4.20$$

sustituyendo en la ecuación anterior,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_1(f) * H_2(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\tau) h_2(t) e^{i2\pi t\tau} d\tau \quad 4.21$$

$$= h_2(t) \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\tau) e^{i2\pi t\tau} d\tau \quad 4.22$$

$$= h_2(t) \cdot h_1(t) \quad 4.23$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_1(\ell) * H_2(\ell)\} = h_1(t) \cdot h_2(t) \quad 4.24$$

Ejemplo 4.2

Obtener la convolución de las funciones $e(t)$ y $h(t)$.

$$e(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 2 & ; 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & ; t > 0 \\ 0 & ; t \leq 0 \end{cases}$$

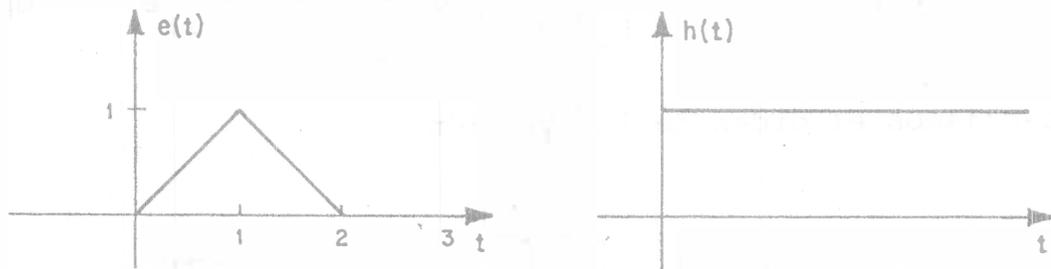
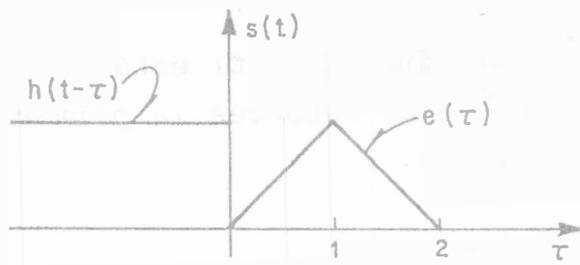


Figura 4.4

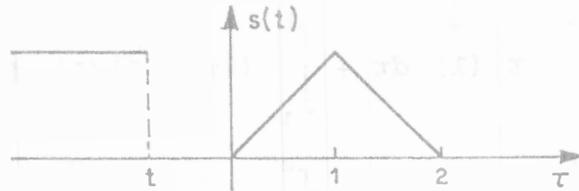
	Límite inferior	Límite superior
$e(\tau)$	0	2
$h(t-\tau)$	$-\infty$	t

definiendo los límites de integración, tenemos que:

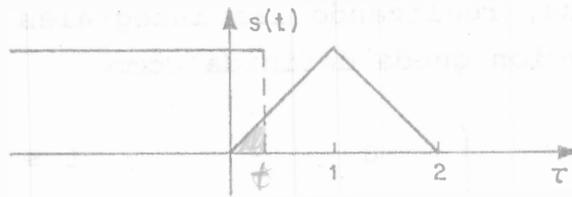
$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 & \text{Ya que no existe el producto de las} \\ & & \text{funciones (véase figura 4.5b).} \\ \int_0^t & ; 0 < t \leq 2 & \text{Ya que el límite mayor entre } -\infty \text{ y } 0 \text{ es} \\ & & \text{0 y el menor entre } 2 \text{ y } t \text{ es } t \text{ (véanse} \\ & & \text{figuras 4.5c y 4.5d).} \\ \int_0^2 & ; t > 2 & \text{Ya que para este intervalo el límite} \\ & & \text{mayor entre } -\infty \text{ y } 0 \text{ es } 0 \text{ y el menor} \\ & & \text{entre } 2 \text{ y } t \text{ es } 2 \text{ (véanse figuras 4.5d} \\ & & \text{y 4.5e).} \end{cases}$$



a)

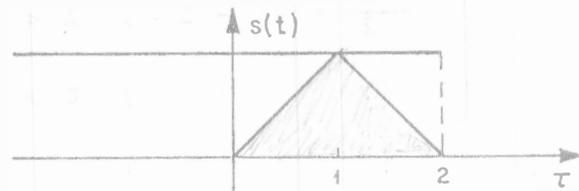


b)

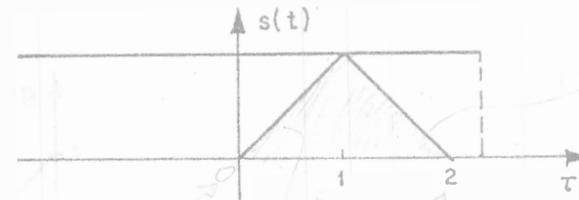


$$\int_0^t \int_0^1$$

c)



d)



$$(-t+\tau) \int_0^2$$

Muyos del
max

e)

Linear del max

Figura 4.5

Debido a que la función $e(t)$ está dividida en dos funciones para el intervalo $0 < t \leq 2$, entonces la primera integral también se separará en dos intervalos.

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \int_0^t \tau (1) d\tau & ; 0 < t < 1 \\ \int_0^1 \tau (1) d\tau + \int_1^t (-\tau + 2) (1) d\tau & ; 1 < t \leq 2 \\ \int_0^1 \tau (1) d\tau + \int_1^2 (-\tau + 2) (1) d\tau & ; t > 2 \end{cases}$$

Figura *Movil* *Figura* *Movil*
Figura *Movil* *Figura* *Movil*

Por lo que, realizando las integrales correspondientes, la función de convolución queda definida como

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2} & ; 0 < t \leq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + 2t - 1 & ; 1 < t \leq 2 \\ 1 & ; t > 2 \end{cases}$$

Ejemplo 4.3

Obtener la convolución de las funciones $h(t)$ y $g(t)$.

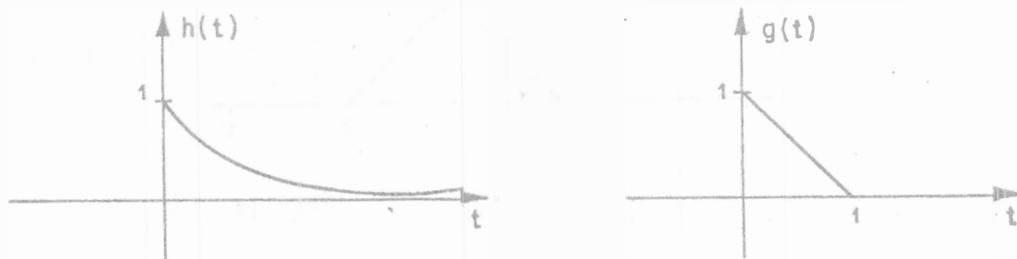


Figura 4.6

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 1 - t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; \forall t \end{cases}$$

Definiendo los límites de integración, tenemos que:

	Límite inferior	Límite superior
$h(t-\tau)$	$-\infty$	t
$g(\tau)$	0	1

$$s(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 0 \\ \int_0^t & ; 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{Véanse figuras 4.7a y 4.7b}). \\ \int_0^1 & ; t > 1 \quad (\text{Véanse figuras 4.7c y 4.7d}). \end{cases}$$

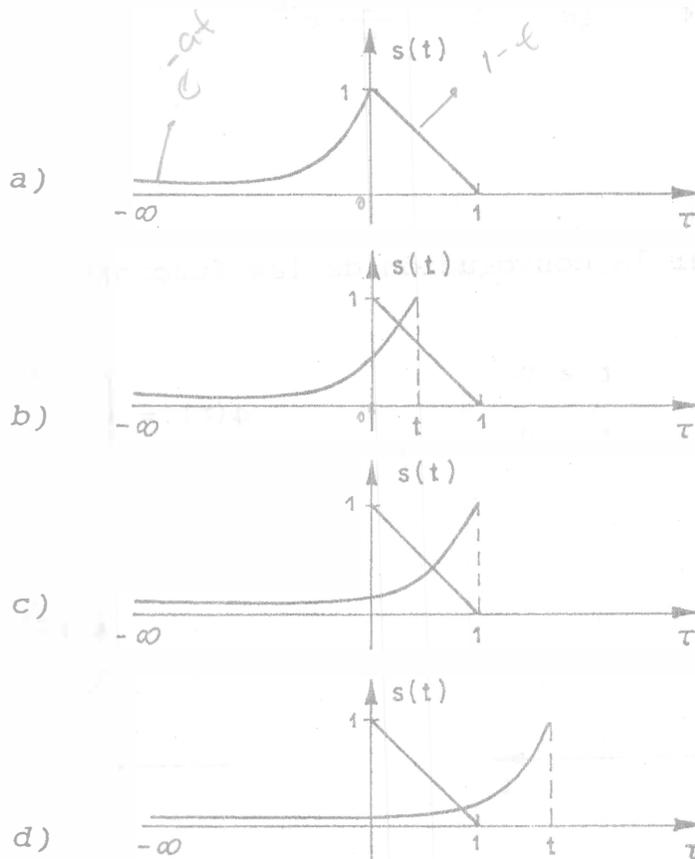


Figura 4.7

Sustituyendo las funciones, tenemos que:

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ \int_0^t \underbrace{(1 - \tau)}_{\text{Fig. a}} \underbrace{e^{-\alpha(t-\tau)}}_{\text{Movil}} d\tau & ; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \int_0^1 (1 - \tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau & ; \quad t > 1 \end{cases}$$

realizando las integrales correspondientes, obtenemos

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 0 \\ \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}] + \frac{1}{\alpha^2} [1 - e^{-\alpha t}] - \frac{t}{\alpha} & ; \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha t} [e^{\alpha} - 1] - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} & ; \quad t > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 4.4

Obtener la convolución de las funciones $\mu(t)$ y $g(t)$.

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

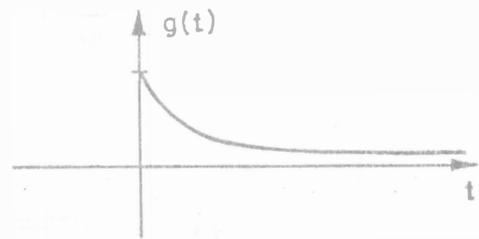
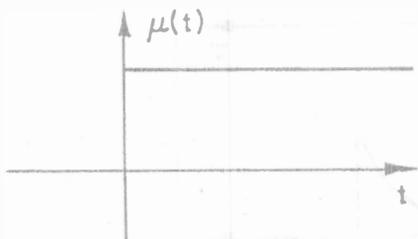


Figura 4.8

Definiendo los límites de integración, tenemos que:

	Límite inferior	Límite superior
$g(\tau)$	0	∞
$\mu(t-\tau)$	$-\infty$	t

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \int_0^t & ; t > 0 \end{cases}$$

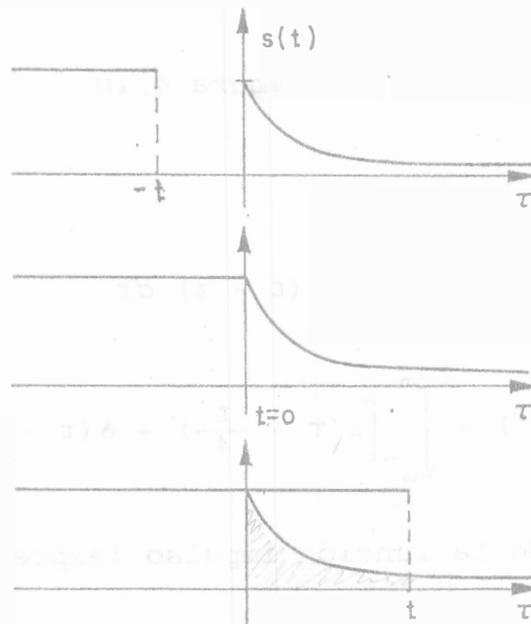


Figura 4.9

Por lo que la integral queda definida como

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \int_0^t e^{-\tau} (1) d\tau & ; t > 0 \end{cases}$$

y evaluándola,

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & ; t > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 4.5

Obtener la convolución de las funciones $h(t)$ y $g(t)$.

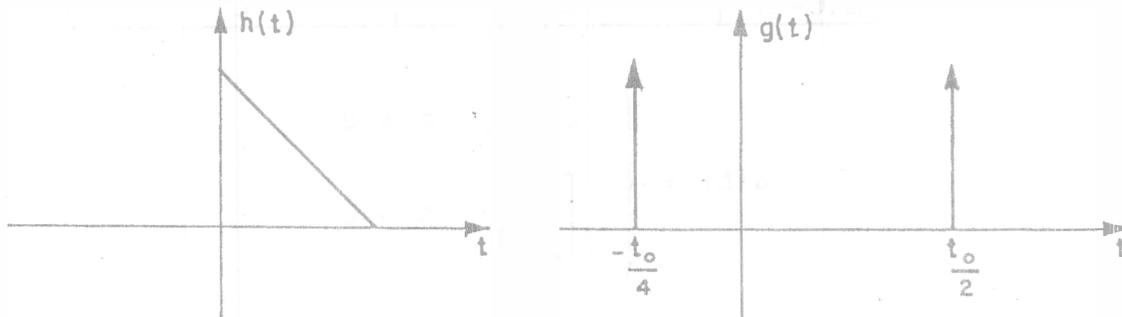


Figura 4.10

sabiendo que

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta\left(\tau + \frac{t_0}{4}\right) + \delta\left(\tau - \frac{t_0}{2}\right) \right] h(t - \tau) d\tau$$

por propiedades de la función impulso (expresión 2.80)

$$\Delta(t) = h\left(\tau + \frac{t_0}{4}\right) + h\left(\tau - \frac{t_0}{2}\right) \Bigg|_{\tau = t}$$

$$\Delta(t) = h\left(t + \frac{t_0}{4}\right) + h\left(t - \frac{t_0}{2}\right)$$

Lo que indica que obtenemos la función original $h(t)$ colocada en el lugar donde estaban ubicados los impulsos. Esto es importante, ya que nos muestra que cuando convolucionamos un impulso o tren de impulsos con otra función, lo que obtenemos es la función repetida en cada punto donde estaba el impulso o el tren de impulsos.

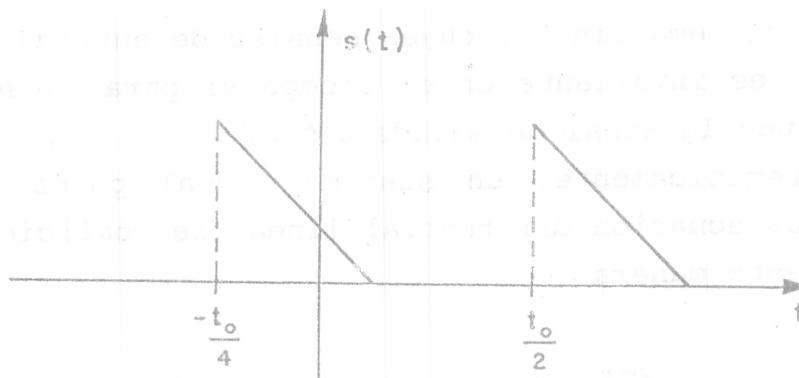


Figura 4.11

4.4 APLICACIÓN A LOS SISTEMAS LINEALES

4.4.1 Definición de un sistema lineal

Un *sistema* puede definirse como cualquier proceso que provoque la transformación de una señal.

Esquemáticamente lo podemos representar como



4.4.2 Relación entre las señales de entrada y de salida de un sistema lineal

Se dice que un sistema está completamente caracterizado, si se conoce la forma en que la señal de salida depende de la señal de entrada.

Un sistema es lineal, si y sólo si, cumple con las propiedades de homogeneidad y superposición.



donde α y β son constantes.

Un sistema lineal, cuyas señales de entrada y de salida son $e(t)$ y $s(t)$, es invariante en el tiempo si para la señal de entrada $e(t-t_0)$ produce la señal de salida $s(t-t_0)$.

Matemáticamente, un sistema lineal puede ser descrito a través de una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes de la siguiente manera:

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d s(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{d e(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad 4.25$$

donde

$e(t)$ es la función de entrada,
 $s(t)$, la función de salida,
 a_i y b_i son los coeficientes constantes.

Los grados de n y m , así como los valores de los coeficientes a_i y b_i de la ecuación 4.25, dependerán del sistema físico particular que se esté representando.

La solución de la ecuación diferencial puede llevarse a cabo por distintas técnicas matemáticas, entre ellas el análisis de Fourier. Para ello, si consideramos que

$$\mathcal{F}\{e(t)\} = E(f) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}\{s(t)\} = S(f)$$

y que la transformada de la derivada de una función, según lo descrito en el capítulo anterior (expresión 3.70), es

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n h(t)}{dt^n} \right\} = (i2\pi f)^n H(f)$$

podemos sustituir la transformada de Fourier en ambos miembros de la ecuación diferencial:

$$a_n (i2\pi f)^n S(f) + a_{n-1} (i2\pi f)^{n-1} S(f) + \dots + a_1 (i2\pi f) S(f) + a_0 S(f) = b_m (i2\pi f)^m E(f) + b_{m-1} (i2\pi f)^{m-1} E(f) + \dots + b_1 (i2\pi f) E(f) + b_0 E(f) \quad 4.26$$

factorizando,

$$\begin{aligned}
 S(f) [a_n (i2\pi f)^n + a_{n-1} (i2\pi f)^{n-1} + \dots + a_1 (i2\pi f) + a_0] &= \\
 = E(f) [b_m (i2\pi f)^m + b_{m-1} (i2\pi f)^{m-1} + \dots + b_1 (i2\pi f) + b_0] &
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

despejando,

$$S(f) = \frac{b_m (i2\pi f)^m + b_{m-1} (i2\pi f)^{m-1} + \dots + b_1 (i2\pi f) + b_0}{a_n (i2\pi f)^n + a_{n-1} (i2\pi f)^{n-1} + \dots + a_1 (i2\pi f) + a_0} E(f)
 \tag{4.28}$$

donde

$$H(f) = \frac{b_m (i2\pi f)^m + b_{m-1} (i2\pi f)^{m-1} + \dots + b_1 (i2\pi f) + b_0}{a_n (i2\pi f)^n + a_{n-1} (i2\pi f)^{n-1} + \dots + a_1 (i2\pi f) + a_0}
 \tag{4.29}$$

que es llamada *función característica del sistema lineal en el dominio de la frecuencia* o *función de transferencia*, y cuya expresión matemática depende de las características del sistema físico.

Por lo tanto,

$$S(f) = H(f) \cdot E(f)
 \tag{4.30}$$

donde

$$H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}
 \tag{4.31}$$

y cuya transformada inversa es

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = h(t)$$

La ecuación 4.30 nos muestra la relación que existe entre la señal de entrada y la de salida en un sistema lineal, donde se puede observar como la función característica del sistema $H(f)$ es la función modificadora o ponderadora de la señal de entrada en el dominio de la frecuencia.

Para establecer la relación que existe entre la señal de entrada y la de salida en el dominio del tiempo, se obtiene la transformada inversa de la ecuación 4.30.

Sean $H(f)$ y $E(f)$ dos funciones en el dominio de la frecuencia, en el que

$$H(f) \cdot E(f) = S(f) \quad 4.32$$

Por lo que

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f) \cdot E(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \cdot E(f) e^{i2\pi ft} df \quad 4.33$$

donde

$$E(f) = \mathcal{F}\{e(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad 4.34$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f) \cdot E(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) e^{-i2\pi\tau} d\tau \right] e^{i2\pi ft} df \quad 4.35$$

si intercambiamos el orden de integración,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f) \cdot E(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) e^{-i2\pi f\tau} H(f) e^{i2\pi ft} df d\tau \quad 4.36$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi ft} e^{-i2\pi f\tau} df \right] d\tau \quad 4.37$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi f(t-\tau)} df \right] d\tau \quad 4.38$$

donde por la propiedad de desplazamiento en el tiempo, descrita en el capítulo anterior (expresión 3.47), la expresión entre paréntesis se define como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi f(t-\tau)} df = h(t-\tau) \quad 4.39$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f) \cdot E(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 4.40$$

y como consecuencia:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 4.41$$

Las ecuaciones 4.40 y 4.41 establecen que la relación que existe entre la señal de entrada y la señal de salida de un sistema lineal, está dada por la convolución entre la señal de entrada y la función característica en el dominio del tiempo, la cual se puede representar como

$$s(t) = e(t) * h(t) \quad 4.42$$

donde * representa a la operación de convolución y, por convención, $h(t)$ a la función que se pliega y se desplaza $h(t-\tau)$.

4.4.3 Respuesta de un sistema lineal al impulso unitario

De las propiedades de la función impulso, descritas en capítulos anteriores, sabemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) g(t) dt = g(t_0) \quad 4.43$$

de esta misma manera,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau-t_0) g(t-\tau) d\tau = g(t-t_0) \quad 4.44$$

por lo tanto, cuando convolucionamos una función cualquiera $g(t)$ con una función impulso, lo que obtenemos es la función $g(t)$ posicionada en el punto donde se encuentra la función impulso.

Si consideramos que la función de entrada es una función impulso,

$$e(t) = \delta(t) \quad 4.45$$

y que la integral de convolución está dada por

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 4.46$$

entonces,

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau = h(\tau) = h(t) \quad 4.47$$

lo que se aprecia mejor si se considera que la operación de convolución es conmutativa

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) h(\tau) d\tau = h(\tau) = h(t)$$

por lo tanto,

$$\Delta(t) = h(t) \quad 4.48$$

lo que implica que *la respuesta de un sistema lineal al impulso unitario es la función característica o función de transferencia del sistema.*

4.4.4 Transmisión sin distorsión

Como se explicó anteriormente un sistema lineal, lo podemos representar como

$$\Delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 4.49$$

donde por el teorema de convolución tenemos

$$S(f) = H(f) E(f) \quad 4.50$$

y la representación en su forma de Euler de las funciones de entrada, salida y transferencia son:

$$S(f) = |S(f)| e^{i\phi_s(f)} \quad 4.51$$

$$H(f) = |H(f)| e^{i\phi_h(f)} \quad 4.52$$

$$E(f) = |E(f)| e^{i\phi_e(f)} \quad 4.53$$

por lo que, sustituyendo 4.51, 4.52 y 4.53 en la expresión 4.50,

$$|S(f)| e^{i\phi_s(f)} = |H(f)| |E(f)| e^{i\phi_h(f)} e^{i\phi_e(f)} \quad 4.54$$

$$= |H(f)| |E(f)| e^{i(\phi_h(f) + \phi_e(f))} \quad 4.55$$

por lo tanto,

$$|S(f)| = |H(f)| |E(f)| \quad 4.56$$

y

$$\phi_s(f) = \phi_h(f) + \phi_e(f) \quad 4.57$$

Considerando lo anterior, podemos preguntarnos:

¿Qué característica debe tener la función de transferencia formada por $|H(f)|$ y $\phi_h(f)$ para que la función de salida $s(t)$ presente la misma forma que la señal de entrada $e(t)$?

Observando las ecuaciones 4.56 y 4.57, se puede concluir que $s(t)$ y $e(t)$ son iguales si

$$|H(f)| = 1 \quad \text{y} \quad \phi_h(f) = 0 \quad 4.58$$

entonces

$$e(t) = s(t) \quad 4.59$$

Sin embargo, si para una señal de entrada tenemos una señal de salida de la forma:

$$s(t) = H_0 e(t-t_0) \quad 4.60$$

donde H_0 representa una constante y t_0 un cierto desplazamiento, entonces la forma de $s(t)$ es la misma que $e(t)$, sólo que $e(t)$ está desplazada y su magnitud cambia por un factor H_0 .

Cuando un sistema produce una función de salida

$$s(t) = H_0 e(t-t_0)$$

para una entrada $e(t)$, se dice que transmite la señal $e(t)$ sin distorsión.

Si obtenemos la transformada de este sistema, tenemos que:

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = \mathcal{F}\{H_0 e(t-t_0)\} = H_0 E(f) e^{-i2\pi f t_0} \quad 4.61$$

donde la función de transferencia está representada por

$$H(f) = H_0 e^{-i2\pi f t_0} \quad 4.62$$

por lo que

$$H_0 = |H(f)| \quad ; \quad \phi(f) = i2\pi f t_0 \quad 4.63$$

Por lo tanto, la condición necesaria y suficiente para que un sistema transmita sin distorsión consiste en que la función característica debe tener la forma de la expresión 4.63, cuyo espectro de amplitud y fase se representa en la figura 4.12.

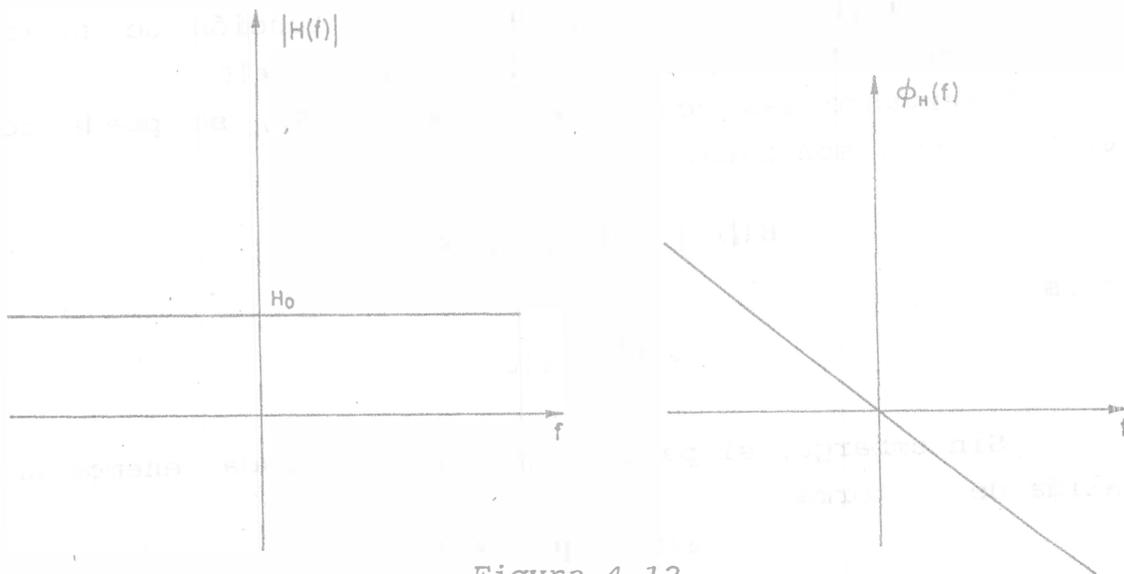


Figura 4.12

4.4.5 Filtros ideales

Se llama *filtro ideal* a aquel que tiene la propiedad de transmitir sin distorsión las componentes de frecuencias contenidas dentro una banda dada de frecuencias y que fuera de esta banda anula al resto de las componentes.

a) Filtro pasa-todo

Este filtro, como su nombre lo indica, tiene la propiedad de transmitir sin distorsión en toda la banda de frecuencias. Su expresión matemática es

$$H(f) = H_0 e^{-i2\pi ft_0} \quad ; \quad -\infty < f < \infty \quad 4.64$$

y su espectro es el mismo que el mostrado en la figura 4.12.

a.1) Respuesta de un filtro pasa-todo al impulso unitario

Sea

$$H(f) = H_0 e^{-i2\pi ft_0} \quad ; \quad -\infty < f < \infty$$

la función característica de un sistema lineal en el que la señal de entrada es

$$e(t) = \delta(t)$$

y donde el sistema lineal está representado por

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

y cuya transformada, de acuerdo con la ecuación 4.30, es

$$S(f) = H(f) \cdot E(f)$$

considerando que

$$\mathcal{F}\{e(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = E(f) = 1$$

tenemos que:

$$S(f) = H(f) \quad 4.65$$

Si obtenemos su transformada inversa:

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0 e^{-i2\pi ft_0} e^{i2\pi ft} df \quad 4.66$$

$$\Delta(t) = h(t) = H_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f(t-t_0)} df \quad 4.67$$

$$\Delta(t) = h(t) = H_0 \delta(t-t_0) \quad 4.68$$

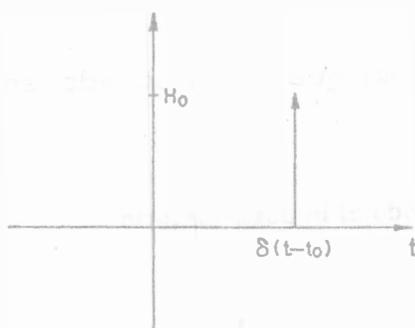


Figura 4.13

b) Filtro pasa-bajas

Este filtro sólo deja pasar a las bajas frecuencias, definiéndose como

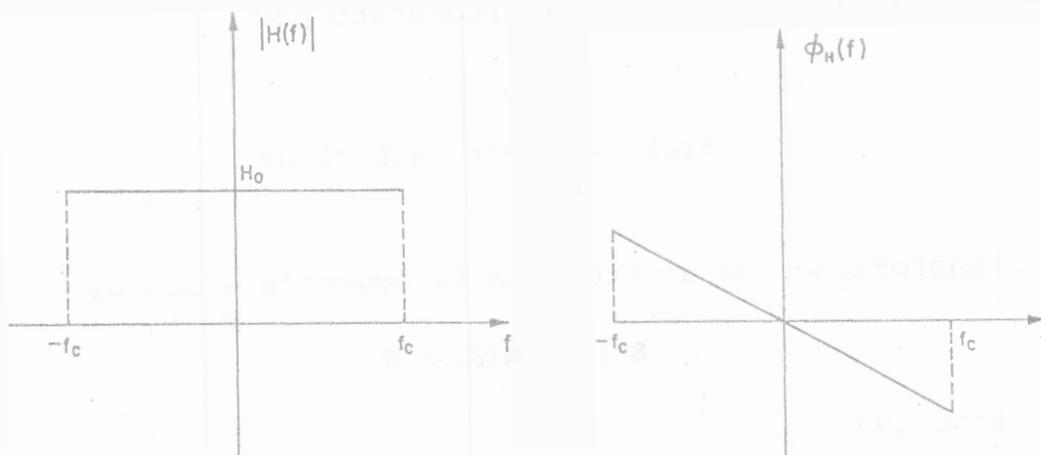


Figura 4.14

donde

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-i2\pi ft_0} & ; -f_c < f < f_c \\ 0 & ; |f| > f_c \end{cases} \quad 4.69$$

b.1) Respuesta de un filtro pasa-bajas al impulso unitario

Sea

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-i2\pi ft_0} & ; -f_c < f < f_c \\ 0 & ; |f| > f_c \end{cases}$$

la función característica de un sistema lineal donde la señal de entrada es

$$e(t) = \delta(t)$$

y el sistema lineal está representado por

$$s(t) = \int_{-f_c}^{+f_c} e(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 4.70$$

y cuya transformada de acuerdo con la ecuación 4.30 es

$$S(f) = H(f) E(f) \quad 4.71$$

considerando que

$$\mathcal{F}\{e(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = E(f) = 1 \quad 4.72$$

entonces:

$$S(f) = H(f) \quad 4.73$$

Si obtenemos su transformada inversa,

$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-f_c}^{+f_c} H_0 e^{-i2\pi f t_0} e^{i2\pi f t} df \quad 4.74$$

$$s(t) = h(t) = H_0 \int_{-f_c}^{+f_c} e^{i2\pi f (t-t_0)} df \quad 4.75$$

$$s(t) = h(t) = H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} e^{i2\pi f (t-t_0)} \Big|_{-f_c}^{+f_c} \quad 4.76$$

$$s(t) = h(t) = H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} \left(e^{i2\pi f_c (t-t_0)} - e^{-i2\pi f_c (t-t_0)} \right) \quad 4.77$$

descomponiendo la función exponencial en funciones coseno-seno y realizando las operaciones algebraicas correspondientes, obtenemos que

$$s(t) = h(t) = H_0 2f_c \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t-t_0)}{2\pi f_c (t-t_0)} \quad 4.78$$

que es una función de tipo *sampling*.

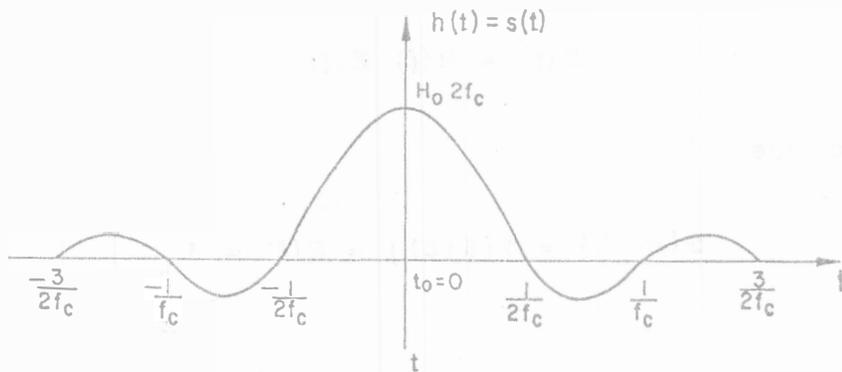


Figura 4.15

c) Filtro pasa-altas

Este filtro sólo deja pasar las altas frecuencias.

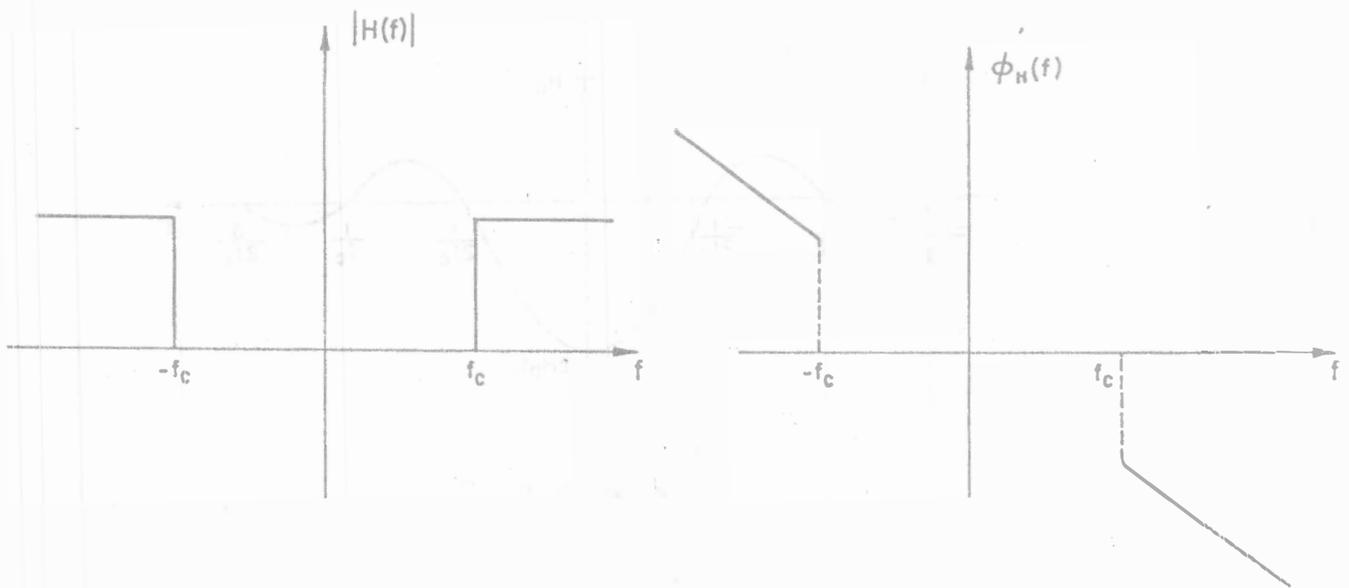


Figura 4.16

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-i2\pi f t_0} & ; |f| \geq f_c \\ 0 & ; |f| < f_c \end{cases} \quad 4.79$$

c.1) Respuesta de un filtro pasa-altas al impulso unitario

Para determinar la respuesta de un filtro *pasa-altas* al impulso unitario, consideramos lo siguiente.

De las figuras 4.12, 4.14 y 4.16, tenemos que:

$$H(f)_{\text{pasa todo}} = H(f)_{\text{pasa bajas}} + H(f)_{\text{pasa altas}} \quad 4.80$$

por lo tanto,

$$H(f)_{\text{pasa altas}} = H(f)_{\text{pasa todo}} - H(f)_{\text{pasa bajas}} \quad 4.81$$

entonces, considerando la propiedad de linealidad, la transformada inversa nos queda como

$$h(t)_{\text{pasa altas}} = H_0 \delta(t-t_0) - H_0 2f_c \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t-t_0)}{2\pi f_c (t-t_0)} \quad 4.82$$

y para $t_0 = 0$

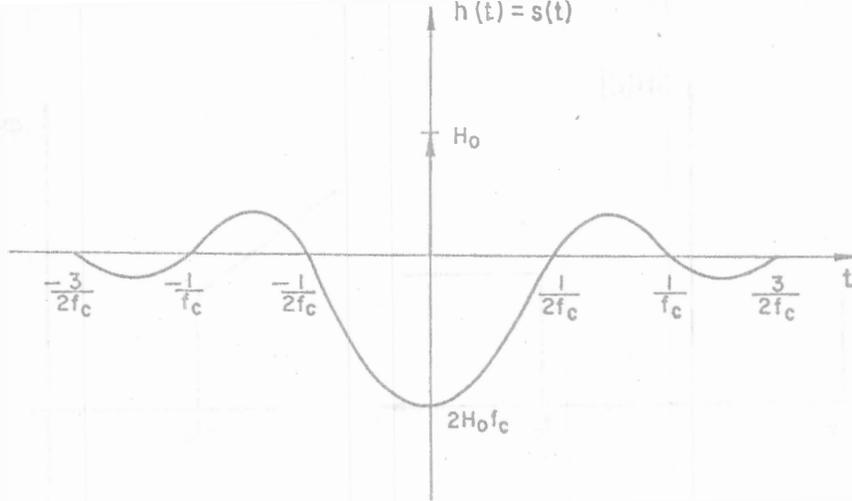


Figura 4.17

d) Filtro pasa-bandas

Este filtro sólo deja pasar una banda de frecuencias.

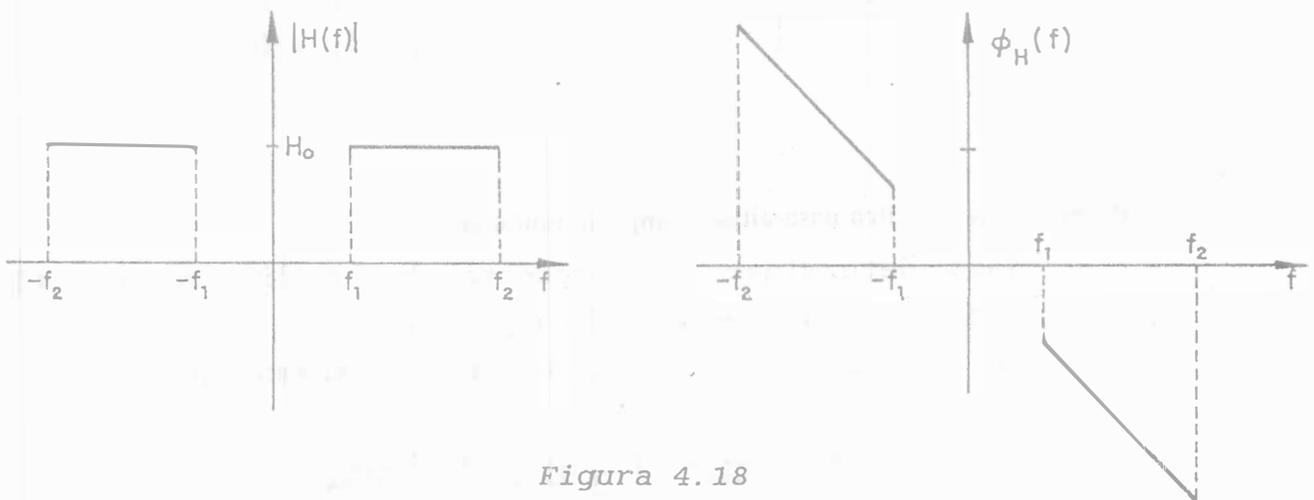


Figura 4.18

por lo que su expresión matemática es

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-i2\pi ft} & ; -f_2 \leq f \leq -f_1 ; f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & ; \forall ! f \end{cases} \quad 4.83$$

d.1) Respuesta de un filtro pasa-bandas al impulso unitario

Sea

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-i2\pi f t_0} & ; -f_2 \leq f \leq -f_1 ; f_1 \leq f \leq f_2 \\ 0 & ; \forall ! f \end{cases}$$

la función característica de un sistema lineal donde la señal de entrada es

$$e(t) = \delta(t)$$

y el sistema lineal está representado por

$$s(t) = \int_{-f_c}^{+f_c} e(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad 4.84$$

cuya transformada, de acuerdo con la ecuación 4.30, es

$$S(f) = H(f) E(f) \quad 4.85$$

Si consideramos que

$$\mathcal{F}\{e(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} = E(f) = 1 \quad 4.86$$

entonces:

$$S(f) = H(f) \quad 4.87$$

Al obtener su transformada inversa,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-f_2}^{-f_1} H_0 e^{-i2\pi f t_0} e^{i2\pi f t} df + \int_{f_1}^{f_2} H_0 e^{-i2\pi f t_0} e^{i2\pi f t} df \quad 4.88$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = H_0 \int_{-f_2}^{-f_1} e^{i2\pi f (t-t_0)} df + H_0 \int_{f_1}^{f_2} e^{i2\pi f (t-t_0)} df \quad 4.89$$

$$h(t) = H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} e^{i2\pi f (t-t_0)} \Bigg|_{-f_2}^{-f_1} + H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} e^{i2\pi f (t-t_0)} \Bigg|_{f_1}^{f_2} \quad 4.90$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Delta(t) = h(t) = H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} \left(e^{-i2\pi f_1(t-t_0)} - e^{-i2\pi f_2(t-t_0)} \right) + \\ + H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} \left(e^{i2\pi f_2(t-t_0)} - e^{i2\pi f_1(t-t_0)} \right) \end{aligned} \quad 4.91$$

factorizando,

$$\begin{aligned} h(t) = H_0 \frac{1}{i2\pi(t-t_0)} \left(e^{-i2\pi f_1(t-t_0)} - e^{-i2\pi f_2(t-t_0)} \right. \\ \left. + e^{i2\pi f_2(t-t_0)} - e^{i2\pi f_1(t-t_0)} \right) \end{aligned} \quad 4.92$$

descomponiendo las funciones exponenciales en sus componentes cosenoidales y realizando las operaciones algebraicas correspondientes, tenemos que:

$$\Delta(t) = h(t) = H_0 2f_2 \frac{\text{sen } 2\pi f_2(t-t_0)}{2\pi f_2(t-t_0)} - H_0 2f_1 \frac{\text{sen } 2\pi f_1(t-t_0)}{2\pi f_1(t-t_0)} \quad 4.93$$

Las respuestas de los filtros ideales representados por las ecuaciones 4.68, 4.78, 4.82 y 4.93 permiten determinar cuál será la respuesta del filtro para cualquier señal de entrada $e(t)$.

Dentro de las características importantes de estos filtros están:

- a) Para los filtros *pasa-bajas*, *pasa-altas* y *pasa-bandas*, el valor máximo de la respuesta es proporcional a la frecuencia de corte.
- b) La respuesta al impulso unitario de los filtros ideales es de duración infinita en el dominio del tiempo.

Por otra parte, se dice que un sistema lineal es de tipo *pasivo*, si para una señal de entrada

$$e(t) \quad \text{nula para} \quad t < t_0$$

tenemos una señal de salida

$$s(t) \text{ nula para } t < t_0$$

A los sistemas lineales pasivos también se les conoce como **sistemas causales**. Estos sistemas son los físicamente realizables mediante componentes electrónicos, eléctricos, mecánicos, etc.

Los sistemas lineales de **filtros ideales** no son causales, puesto que para una señal de entrada

$$e(t) = \begin{cases} x(t) & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

La señal de salida tendrá valores distintos de cero para $t < 0$, puesto que las funciones $h(t)$ (filtros ideales) están definidas para $-\infty \leq t \leq \infty$, y por lo tanto, la señal de salida también estará definida para estos mismos valores. Como físicamente no podemos tener una señal de salida antes que la señal de entrada se produzca, entonces los **filtros ideales** no son físicamente realizables.

Ejemplo 4.6

Obtención de un filtro inversor. Sea un sistema lineal dado por

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

donde

$y(t)$ es la señal de salida,
 $x(t)$, la señal de entrada,
y $h(t)$, la función característica del sistema.

Dada la función de salida

$$y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t} & ; 0 \leq t < 1 \\ e^{-(t+1)} & ; 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

y la función característica

$$h(t) = e^{-t} \quad ; \quad t > 0$$

calcular el filtro inversor $h^{-1}(t)$, de tal modo que

$$x(t) = y(t) * h^{-1}(t)$$

y de esta manera obtener $x(t)$.

Sabemos que la convolución en el dominio del tiempo es una multiplicación en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, nuestro sistema en el dominio de las frecuencias se representa por

$$Y(f) = H(f) X(f)$$

por lo tanto, despejando la ecuación anterior,

$$X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)}$$

es de notarse que este despeje *sólo es posible realizarlo en el dominio de las frecuencias*, ya que en el dominio del tiempo las funciones no pueden despejarse en la operación de la convolución.

Si consideramos

$$H^{-1}(f) = \frac{1}{H(f)}$$

entonces

$$X(f) = H^{-1}(f) Y(f)$$

Para obtener $h^{-1}(t)$, debemos calcular la transformada de Fourier de $h(t)$.

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f) = \mathcal{F}\{e^{-t} u(t)\} = \frac{1}{1 + i2\pi f}$$

y, por lo tanto,

$$H^{-1}(f) = 1 + i2\pi f$$

obteniendo la transformada inversa de $H^{-1}(f)$,

$$\mathcal{F}^{-1}\{H^{-1}(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{1 + i2\pi f\} = \delta(t) + \delta'(t)$$

por lo tanto,

$$h^{-1}(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

dado lo anterior,

$$x(t) = y(t) * h^{-1}(t)$$

realizando la operación de convolución para obtener $x(t)$,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) h^{-1}(t-\tau) d\tau$$

considerando que la convolución es conmutativa, sustituimos la función de salida y el filtro inversor

$$x(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (1-e^{-(t-\tau)}) [\delta(t) + \delta'(t)] dt & ; 0 \leq t < 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-(t-\tau+1)} - e^{-t}) [\delta(t) + \delta'(t)] dt & ; 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

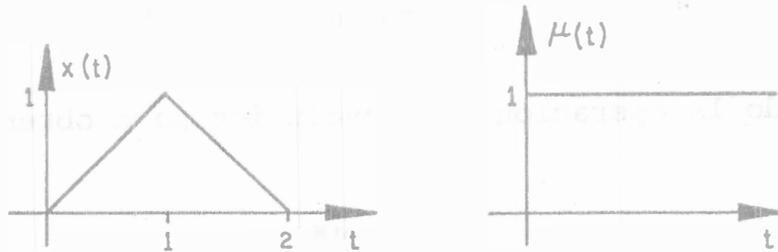
al efectuar las operaciones correspondientes, considerando las propiedades de la función impulso, obtenemos

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t < 1 \\ 0 & ; 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

al proceso desarrollado para encontrar a la señal de entrada, se le llama *deconvolución*.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine gráficamente la convolución entre las siguientes funciones:



2. Determine analíticamente la convolución entre las siguientes funciones:

$$a) \quad h(t) = \begin{cases} e^{-at} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-bt} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

$$b) \quad h(t) = \begin{cases} te^{-t} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

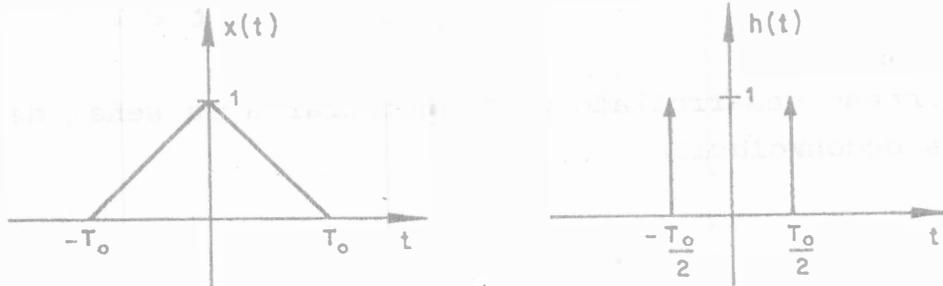
$$c) \quad h(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t) & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ; \forall t \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 < t < \frac{1}{8} \\ 0 & ; t < 0, t > \frac{1}{8} \end{cases}$$

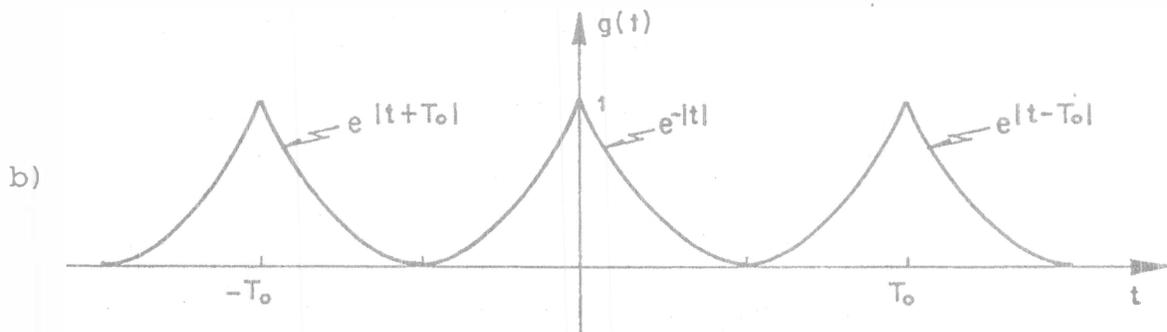
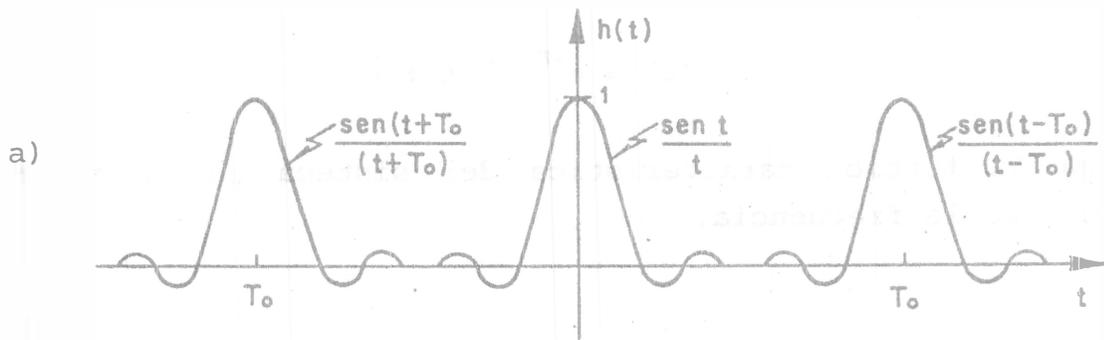
$$d) \quad h(t) = \begin{cases} 1-t & ; 0 < t < 1 \\ 0 & ; t < 0 ; t > 1 \end{cases}$$

$$g(t) = h(t)$$

3. Obtenga la convolución de las funciones $x(t)$ y $h(t)$ mostradas.



4. Use el teorema de convolución para determinar gráficamente la transformada de Fourier de las siguientes funciones:



5. Emplee el teorema de convolución para obtener:

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{(1 + i2\pi f)^2} \right\}$$

6. Utilice el teorema de convolución para obtener:

$$\mathcal{F} \left\{ A \cos^2(2\pi f_0 t) \right\}$$

7. Se sabe que en un sistema lineal la función de respuesta es

$$\Delta(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad |t| < \infty$$

cuando la función de entrada es

$$e(t) = e^{-t} \quad t \geq 0$$

Obtenga la función característica del sistema en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

CAPÍTULO 5

INTEGRAL DE CORRELACIÓN

5.1 DEFINICIÓN DE LA INTEGRAL DE CORRELACIÓN

La integral de correlación se define como

$$R_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau \quad 5.1$$

que es una expresión muy similar a la integral de convolución, la única diferencia es que en esta operación no se efectúa el plegamiento en ninguna de las dos funciones.

5.1.1 Evaluación gráfica

Para observar cuál es la diferencia que existe entre la integral de convolución y la de correlación, analicemos ambas operaciones gráficamente, para ello desarrollemos la convolución y la correlación de las siguientes funciones:

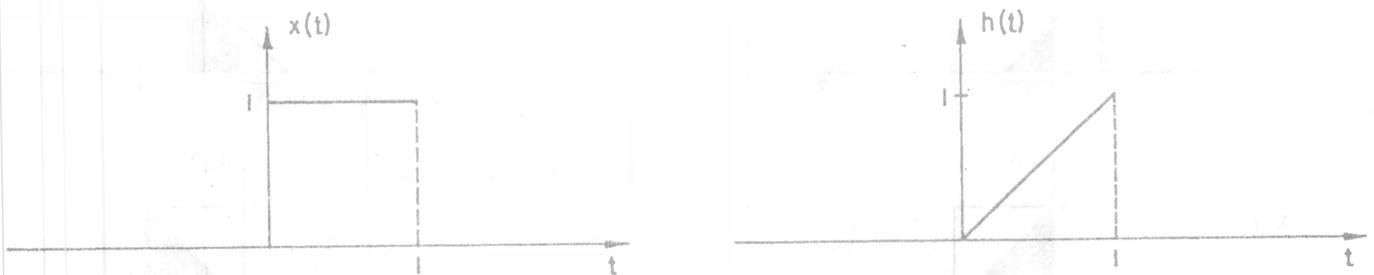


Figura 5.1

Convolución

Correlación

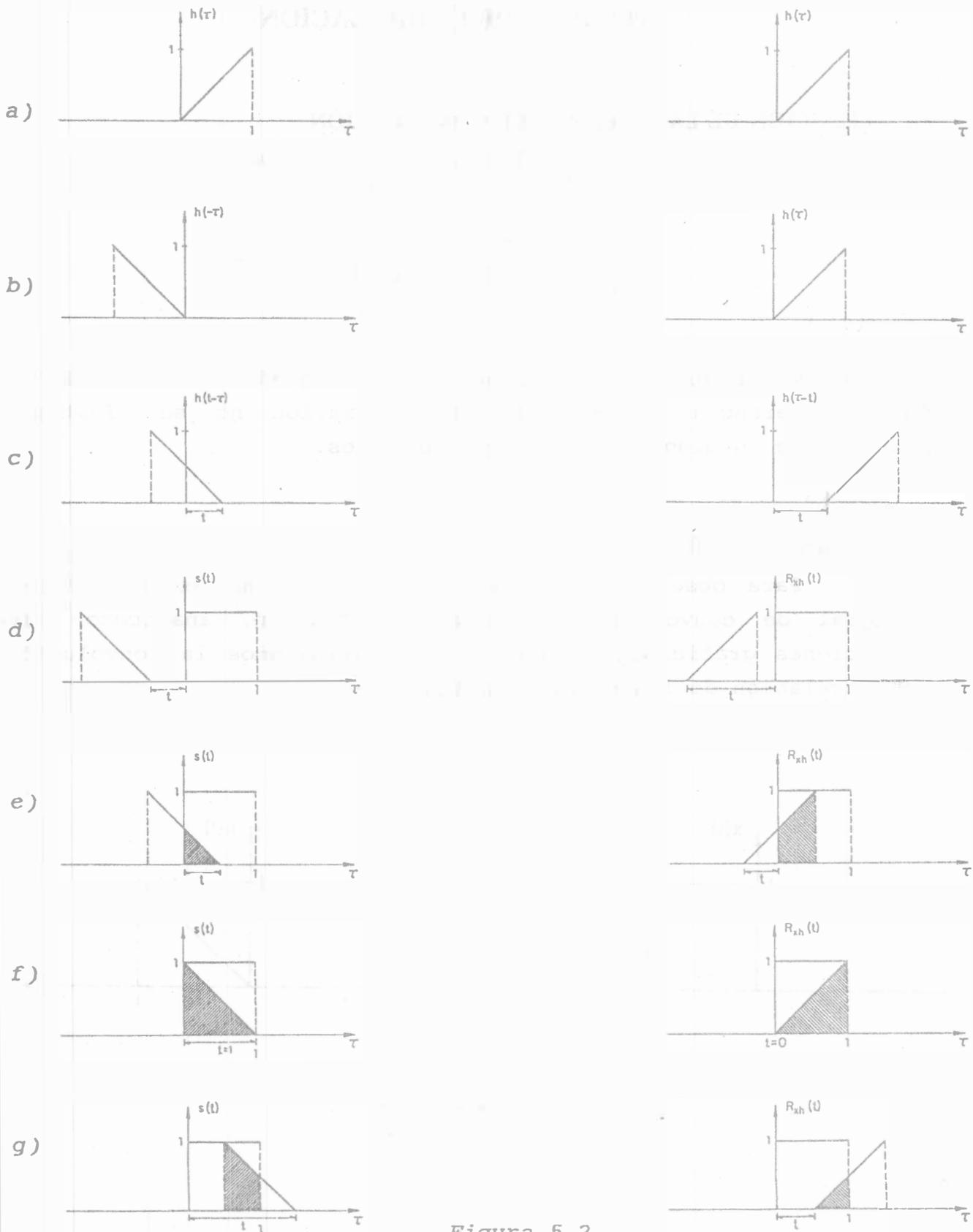


Figura 5.2

En ambas operaciones cambió la variable t por τ (figura 5.2a). En la integral de convolución existe el plegamiento al obtener $h(-\tau)$, mientras que en la de correlación sólo se cambia a la variable obteniéndose $h(\tau)$ (figura 5.2b). Por lo que se puede observar que la integral de convolución requiere de plegamiento, mientras que la de correlación no.

A continuación para la correlación desplazamos a la función $h(\tau)$, quedando como $h(\tau-t)$ si el corrimiento es a la derecha, y como $h(\tau+t)$ si el desplazamiento es a la izquierda. Por otro lado, se desplaza a la función $h(-\tau)$ en la convolución, obteniendo $h(t-\tau)$, donde t representa el desplazamiento a la derecha de la función (figura 5.2c). Obsérvese que la forma en que se toma t es diferente para la convolución que para la correlación (figura 5.2d).

Luego se realiza el producto de la función $x(\tau)$ con cada una de las versiones desplazadas de la función $h(\tau)$, tanto para la correlación como para la convolución (figura 5.2e, f y g).

Finalmente, para cada uno de los casos anteriores se integra la función producto, la cual, para este ejemplo, se muestra como el área achurada.

De lo anterior se desprende que la operación de convolución y la de correlación difieren únicamente en que para la convolución es necesario plegar una de las dos funciones, y que los demás pasos de desplazamiento, multiplicación e integración son similares.

5.1.2 Evaluación analítica

Para la evaluación analítica, nos auxiliaremos, como lo hicimos en la convolución, de gráficas que nos ayuden a determinar los límites de integración, los cuales se obtienen de la misma forma que en la convolución.

Ejemplo 5.1

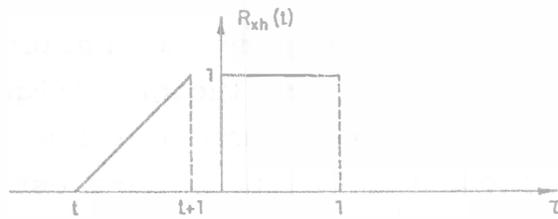
Calcular la correlación de $x(t)$ y $h(t)$, véase figura 5.1.

$$x(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; \forall t \end{cases}$$

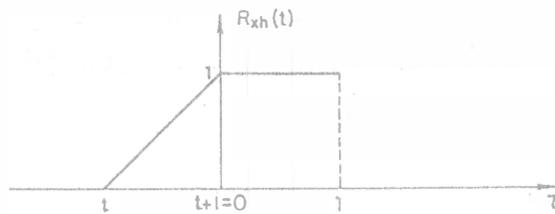
$$h(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; \forall t \end{cases}$$

$$R_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau$$

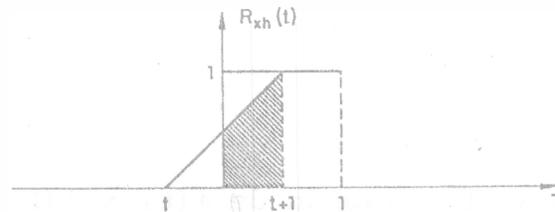
	Límite inferior	Límite superior
$x(\tau)$	0	1
$h(\tau-t)$	t	t + 1



a)

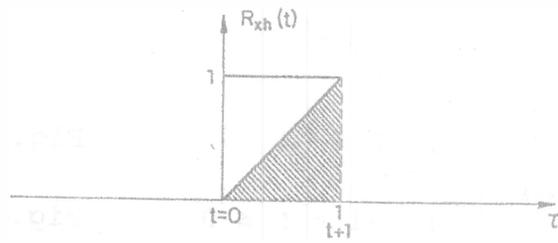


b)

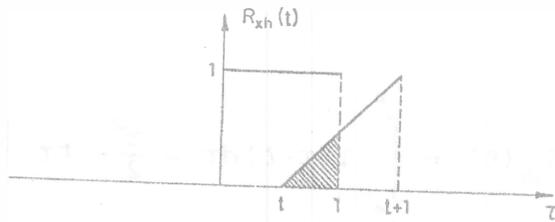


c)

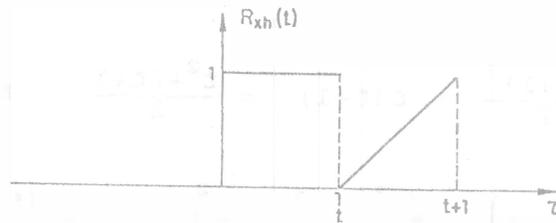
Figura 5.3



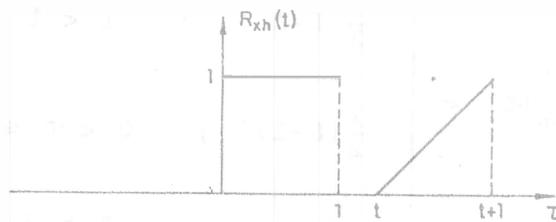
d)



e)



f)



g)

Figura 5.3 (continuación)

Por lo que los límites de la integral de correlación irán variando de la siguiente manera:

$$0 < t < t+1$$

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq -1 & \text{Fig. 5.3 a,b} \\ \int_0^{t+1} & ; -1 < t \leq 0 & \text{Fig. 5.3 c,d} \\ \int_t^1 & ; 0 < t \leq 1 & \text{Fig. 5.3 e,f} \\ 0 & ; t > 1 & \text{Fig. 5.3 g} \end{cases}$$

por lo tanto,

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_a^b 1(\tau-t) d\tau = \left. \frac{\tau^2}{2} - t\tau \right|_a^b$$

para cada intervalo determinado.

Evaluando,

$$I_1 = \left. \frac{\tau^2}{2} - t\tau \right|_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{2} - t(t+1) = \frac{t^2+2t+1}{2} - t^2 - t = \frac{1-t^2}{2}$$

$$I_2 = \left. \frac{\tau^2}{2} - t\tau \right|_t^1 = \left(\frac{1}{2} - t \right) - \left(\frac{t^2}{2} - t^2 \right) = \frac{t^2-2t+1}{2} = \frac{(t-1)^2}{2}$$

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \begin{cases} 0 & ; t \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1-t^2) & ; -1 < t \leq 0 \\ \frac{1}{2}(t-1)^2 & ; 0 < t \leq 1 \\ 0 & ; t > 1 \end{cases}$$

Ejemplo 5.2

Determine la función de correlación:

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau$$

donde

$$x(t) = h(t) = \begin{cases} e^{-at} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

	Límite inferior	Límite superior
$x(\tau)$	0	$+\infty$
$h(\tau-t)$	t	$+\infty$

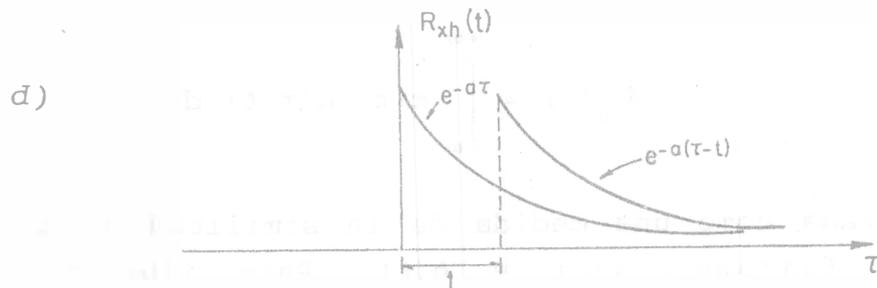
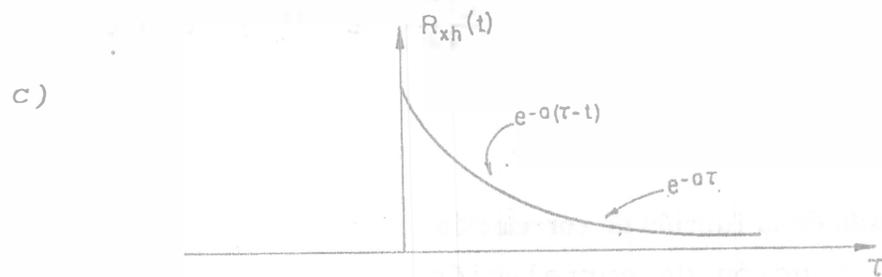
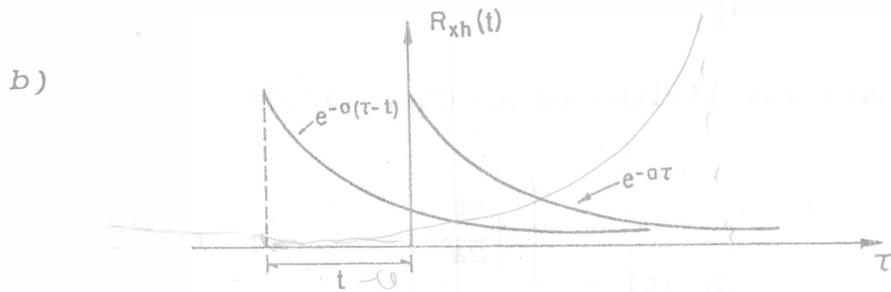
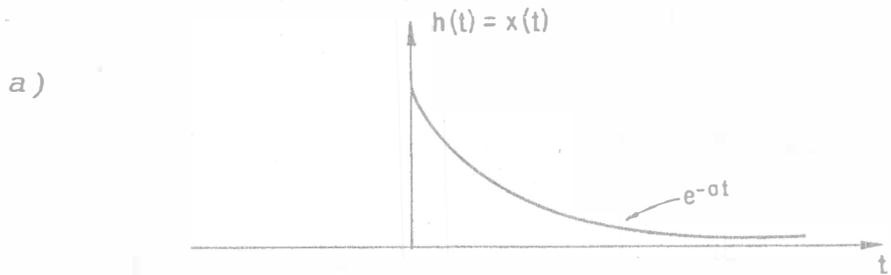


Figura 5.4

con lo cual

$$\mathcal{R}_{xx}(t) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-a(\tau-t)} d\tau & t < 0 \\ \int_t^{\infty} e^{-a\tau} e^{-a(\tau-t)} d\tau & t > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Fig. 5.4 b,c} \\ \text{Fig. 5.4 c,d} \end{array}$$

si resolvemos la integral,

$$\int_c^d e^{-a\tau} e^{-a(\tau-t)} d\tau = \frac{e^{at}}{-2a} e^{-2a\tau} \Big|_c^d$$

evaluando para los límites de la correlación,

$$\mathcal{R}_{xx}(t) = \begin{cases} \frac{e^{at}}{2a} & ; t < 0 \\ \frac{e^{at}}{2a} e^{-2at} & ; t > 0 \end{cases}$$

5.1.3 Significado de la función de correlación

La función de correlación

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau$$

es considerada como una medida de la similitud o interdependencia entre las funciones $x(t)$ y $h(t)$. Para ilustrar este punto, consideremos las funciones:

$$a(t) = \text{sen } t \quad \text{y} \quad h(t) = \text{cos } t$$

Sabemos que las funciones $\text{sen } t$ y $\text{cos } t$ son muy parecidas entre sí, por lo cual en forma intuitiva esperamos una correlación fuerte entre ambas.

Para observar el grado de similitud, evaluamos la correspondiente función de correlación para el intervalo de 0 a 2π , ya que los valores de la correlación se repetirán para cualquier otro intervalo, debido a la periodicidad de ambas funciones.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{xh}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen } \tau \text{cos } (\tau-t) \, d\tau = \int_0^{2\pi} \text{sen } \tau \text{cos } (\tau-t) \, d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sen } \tau [\text{cos } \tau \text{cos } t + \text{sen } \tau \text{sen } t] \, d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \text{sen } \tau \text{cos } \tau \text{cos } t \, d\tau + \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \tau \text{sen } t \, d\tau \\ &= \text{cos } t \int_0^{2\pi} \text{sen } \tau \text{cos } \tau \, d\tau + \text{sen } t \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \tau \, d\tau \\ &= \text{cos } t \left(\frac{\text{sen}^2 \tau}{2} \right)_0^{2\pi} + \text{sen } t \left(\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}\text{sen}2\tau \right)_0^{2\pi} = 0 + \left(\frac{2\pi}{2} \right) \text{sen } t \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \pi \text{sen } t$$

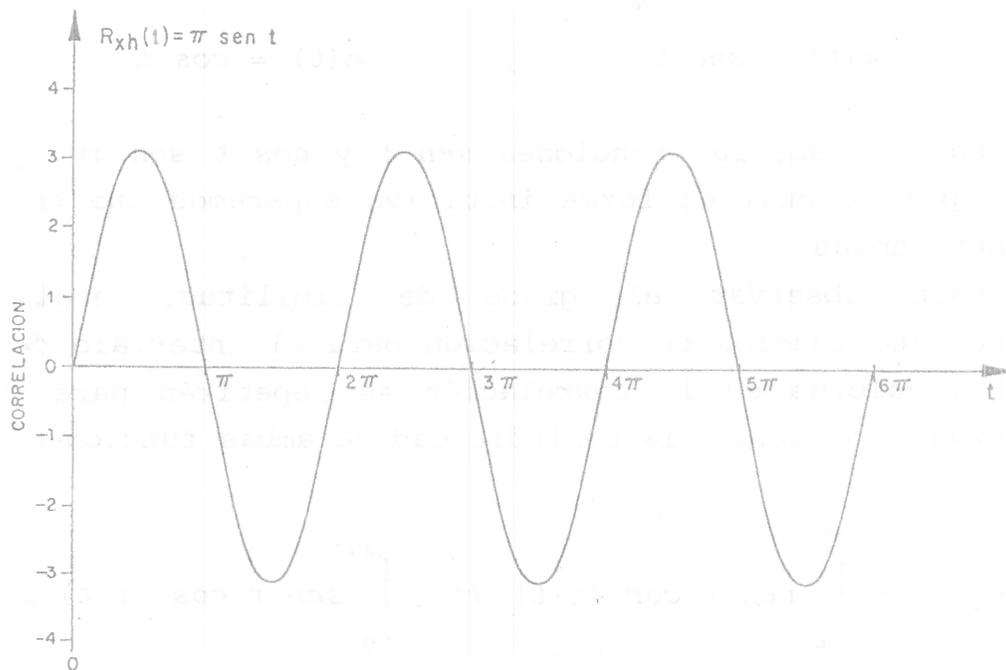


Figura 5.5

Como se puede observar, la función de correlación es no nula para la mayoría de los valores. Esto es, en la operación de correlación se comparará a la función $x(t)$ con todas las versiones desplazadas de $h(t)$ y se obtiene una medida de similitud entre ambas funciones. Por lo tanto, la variable t es considerada como un parámetro de búsqueda que nos dice cuál es el desplazamiento más apropiado para que la similitud entre las dos señales correlacionadas sea máxima. Para nuestro ejemplo, la similitud más grande entre la función $\text{sen } t$ y $\text{cos } t$ se alcanza cuando la función $h(t) = \text{cos } t$ tiene un desplazamiento de $t = \frac{\pi}{2}$, mientras el punto en el cual la similitud es menor es cuando el desplazamiento de la función $\text{cos } h(t)$ t vale cero (figura 5.5). Debido a la periodicidad de las funciones originales, la correlación también es periódica.

5.2 TEOREMA DE CORRELACIÓN

El teorema de correlación señala la relación que existe entre la integral de correlación y la transformada de Fourier.

Para ello obtengamos la transformada de Fourier de la integral de correlación.

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau \quad 5.2$$

con la consideración de que t puede tomar valores positivos o negativos, dependiendo del desplazamiento; la integral de correlación también puede ser representada por

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau+t) d\tau \quad 5.3$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{xh}(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau+t) d\tau \right) e^{-i2\pi ft} dt \quad 5.4$$

si intercambiamos el orden de integración,

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{xh}(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+t) e^{-i2\pi ft} dt \right) d\tau \quad 5.5$$

cambiando de variable, $\sigma = t+\tau \Rightarrow t = \sigma - \tau$

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{xh}(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) e^{-i2\pi f(\sigma-\tau)} d\sigma \right) d\tau \quad 5.6$$

y reescribimos la integral dentro del paréntesis,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) e^{-i2\pi f(\sigma-\tau)} d\sigma = e^{i2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) e^{-i2\pi f\sigma} d\sigma = e^{i2\pi f\tau} H(f) \quad 5.7$$

por lo cual tenemos ahora que:

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{xh}(t) \} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{i2\pi f\tau} d\tau \right] H(f) \quad 5.8$$

pero

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{xh}(t) \} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau + i \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \operatorname{sen} 2\pi f\tau d\tau \right] H(f) \quad 5.9$$

por lo que

$$\mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{xh}(t) \} = H(f) [R [X(f)] + iI [X(f)]] \quad 5.10$$

Por otro lado, sabemos que la transformada de Fourier de $x(t)$ es

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad 5.11$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos 2\pi ft dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \operatorname{sen} 2\pi ft dt \quad 5.12$$

por lo que

$$X(f) = [R [X(f)] - iI [X(f)]] \quad 5.13$$

y, por lo tanto,

$$X^*(f) = [R [X(f)] + iI [X(f)]] \quad 5.14$$

que es el conjugado de la transformada; de esta forma, retomando 5.9 y 5.10, tenemos

$$\mathcal{F}\{R_{xh}(t)\} = H(f) X^*(f) \quad 5.15$$

que es la expresión que representa al *teorema de correlación*, el cual nos dice que la *correlación en el dominio del tiempo de dos funciones es equivalente a la multiplicación de la transformada de Fourier de una función con el conjugado de la transformada de Fourier de la otra*, todo esto en el dominio de la frecuencia.

5.3 FUNCIONES DE CORRELACIÓN

Si $x(t)$ y $h(t)$ son la misma función, entonces a la función de correlación se le llama *autocorrelación*. Si $x(t)$ y $h(t)$ son funciones diferentes, entonces la función de correlación se denomina *croscorrelación* o *correlación cruzada*.

5.3.1 Propiedades de la función de correlación

Sean las siguientes correlaciones:

$$R_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau \quad 5.16$$

$$R_{hx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(\tau-t) d\tau \quad 5.17$$

$$R_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(\tau-t) d\tau \quad 5.18$$

si en las expresiones anteriores sustituimos τ por $\tau+t$, donde t representa un desplazamiento,

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t) h(\tau) d\tau \quad 5.19$$

$$\mathcal{R}_{hx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+t) x(\tau) d\tau \quad 5.20$$

$$\mathcal{R}_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t) x(\tau) d\tau \quad 5.21$$

e igualamos 5.16 y 5.19,

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t) h(\tau) d\tau \quad 5.22$$

realizamos lo mismo con 5.17 y 5.20,

$$\mathcal{R}_{hx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+t) x(\tau) d\tau \quad 5.23$$

y también igualamos 5.18 y 5.21,

$$\mathcal{R}_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+t) x(\tau) d\tau \quad 5.24$$

Esta propiedad lo que nos muestra es que en la operación de correlación es indiferente si se desplaza $h(\tau)$ una cantidad $-t$, o si desplazamos la función $x(t)$ una cantidad $+t$. Es decir, cuando correlacionamos dos funciones podemos desplazar cualquiera de las dos, conservando el movimiento relativo de una respecto de la otra, y el resultado sigue siendo el mismo.

Si retomamos la ecuación 5.23,

$$\mathcal{R}_{hx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(\tau-t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau+t) x(\tau) d\tau \quad 5.25$$

y si ahora obtenemos $\mathcal{R}_{hx}(-t)$ $t \rightarrow -t$

$$\mathcal{R}_{hx}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(\tau+t) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau-t) x(\tau) d\tau = \mathcal{R}_{xh}(t) \quad 5.26$$

por lo tanto,

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \mathcal{R}_{hx}(-t) \quad 5.27$$

Este resultado nos indica que la operación de correlación no es conmutativa, puesto que la función de correlación de las funciones $x(t)$ y $h(t)$ dadas por $\mathcal{R}_{xh}(t)$ no es igual a la función de correlación de las funciones $h(t)$ y $x(t)$ dadas por $\mathcal{R}_{hx}(t)$.

Otra forma de demostrarlo es a través del teorema de correlación, obtenido en la expresión 5.15.

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{xh}(t)\} = H(f) X^*(f)$$

$$= [R[H(f)] - i I[H(f)]] [R[X(f)] + i I[X(f)]] \quad 5.28$$

$$= R[H(f)] \cdot R[X(f)] + I[H(f)] \cdot I[X(f)] + i [R[H(f)] \cdot I[X(f)] - I[H(f)] \cdot R[X(f)]] \quad 5.29$$

de manera similar,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{hx}(t)\} = X(f) H^*(f) \quad 5.30$$

$$= [R[X(f)] - i I[X(f)]] [R[H(f)] + i I[H(f)]] \quad 5.31$$

$$= R[X(f)] \cdot R[H(f)] + I[X(f)] \cdot I[H(f)] + i [R[X(f)] \cdot I[H(f)] - I[X(f)] \cdot R[H(f)]] \quad 5.32$$

Comparando 5.29 con 5.32, obtenemos que:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{hx}(t)\} \neq \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{xh}(t)\} \quad 5.33$$

por lo tanto, la transformada de Fourier de la correlación no es conmutativa y por linealidad la correlación tampoco lo es.

$$\mathcal{R}_{hx}(t) \neq \mathcal{R}_{xh}(t) \quad 5.34$$

Como caso especial están las funciones con *simetría par*, las cuales sólo tienen parte real.

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(f) = R[X(f)] \quad 5.35$$

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(f) = R[H(f)] \quad 5.36$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{xh}(t)\} = H(f) X^*(f) = R[X(f)] R[H(f)] \quad 5.37$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{hx}(t)\} = X(f) H^*(f) = R[H(f)] R[X(f)] \quad 5.38$$

así que

$$\mathcal{R}_{hx}(t) = \mathcal{R}_{xh}(t) \quad 5.39$$

lo que se cumple sólo si las funciones que correlacionamos son de *simetría par*.

5.3.2 Función de correlación promedio

Hasta ahora se ha definido a la función de correlación como

$$\mathcal{R}_{xh}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\tau-t) d\tau \quad 5.40$$

sin embargo, para las funciones que existen para un intervalo de tiempo de $(-\infty, \infty)$, es obvio que la función de correlación no tendrá un valor finito. Para estos casos es necesario considerar a la función de correlación promedio dada por

$$\overline{\mathcal{R}}_{xh}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) h(\tau-t) d\tau \quad 5.41$$

llamada *función de crosrelación promedio*, y

$$\overline{\mathcal{R}}_{xx}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) x(\tau-t) d\tau \quad 5.42$$

denominada *función de autocorrelación promedio*.

La *correlación promedio* tiene la característica de ser periódica si $h(t)$ es periódica con período T_1 . Como la integral de esta función es la misma para cada período, entonces no es necesario el integrarla para un intervalo muy grande (infinito), sino sólo para un período T_1 .

Demostración:

$$\overline{\mathcal{R}}_{xh}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) h(\tau-t) d\tau = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(\tau) h(\tau-t) d\tau \quad 5.43$$

si sustituimos t por $t-T_1$,

$$\overline{\mathcal{R}}_{xh}(t-T_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(\tau) h[\tau-(t-T_1)] d\tau \quad 5.44$$

$$= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(\tau) h(\tau-t+T_1) d\tau \quad 5.45$$

pero como $h(\tau-t+T_1) = h(\tau-t)$, ya que $h(\tau)$ es periódica con período T_1 :

$$\overline{\mathcal{R}}_{xh}(t-T_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} x(\tau) h(\tau-t) d\tau = \overline{\mathcal{R}}_{xh}(t) \quad 5.46$$

por lo tanto,

$$\overline{\mathcal{R}}_{xh}(t) = \overline{\mathcal{R}}_{xh}(t-T_1) \quad 5.47$$

para cuando $h(t)$ es periódica, o para cuando las dos funciones son periódicas con período T_1 . Lo mismo sucede con la autocorrelación:

$$\overline{\mathcal{R}}_{xx}(t) = \overline{\mathcal{R}}_{xx}(t-T_1) \quad 5.48$$

por lo tanto, la autocorrelación también es periódica.

5.4 TEOREMA DE PARSEVAL

En el capítulo 2 (expresiones 2.135 y 2.145), se estableció el teorema de Parseval para funciones periódicas como

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad 5.49$$

$$P = \sum_n^m |D_k|^2 \quad 5.50$$

y el mismo razonamiento lo podemos aplicar para funciones no periódicas, siendo un concepto útil el del contenido de energía definido en 2.132, como:

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt \quad 5.51$$

Una forma adicional para obtener el contenido de energía de una función $f(t)$ es mediante la función de autocorrelación, dado que

$$\mathcal{R}_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(\tau-t) d\tau \quad 5.52$$

evaluando para $t=0$,

$$\mathcal{R}_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\tau)]^2 d\tau \quad 5.53$$

por lo que

$$W = \mathcal{R}_{ff}(0) \quad 5.54$$

Por lo tanto, el contenido de energía de una función $f(t)$ es igual al valor de la función de autocorrelación de $f(t)$ para $t=0$.

Para una función periódica se sigue el mismo desarrollo, pero ahora se considerará la autocorrelación promedio, que al estar dividida entre el intervalo T , genera el espectro de potencia.

$$\overline{\mathcal{R}}_{ff}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) f(\tau-t) d\tau = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(\tau) f(\tau-t) d\tau \quad 5.55$$

$$\overline{\mathcal{R}}_{ff}(0) = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} f(\tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} [f(\tau)]^2 d\tau \quad 5.56$$

por lo que el contenido de potencia para una función queda definido a través de la autocorrelación promedio, como

$$P = \overline{\mathcal{R}}_{ff}(0) \quad 5.57$$

Para encontrar el espectro de energía de una función por la autocorrelación, partimos del teorema de correlación.

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{xh}(t)\} = \mathbf{H}(\ell) \mathbf{X}^*(\ell) \quad 5.58$$

Para la autocorrelación,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{ff}(t)\} = \mathbf{F}(\ell) \mathbf{F}^*(\ell) \quad 5.59$$

en forma de Euler,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{ff}(t)\} = |\mathbf{F}(\ell)| e^{i\phi(\ell)} |\mathbf{F}(\ell)| e^{-i\phi(\ell)} \quad 5.60$$

por lo tanto,

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_{ff}(t)\} = |\mathbf{F}(\ell)|^2 \quad 5.61$$

si tomamos la transformada inversa,

$$\mathcal{R}_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{F}(\ell)|^2 e^{i2\pi\ell t} d\ell \quad 5.62$$

por lo tanto, evaluando para $t=0$, y considerando las ecuaciones 5.51 y 5.54,

$$\mathcal{R}_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{F}(\ell)|^2 d\ell = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt \quad 5.63$$

llamaremos a la expresión anterior *teorema de Parseval* para funciones continuas no periódicas, la cual establece que el contenido de energía de una función $f(t)$ puede evaluarse a partir de la función de autocorrelación de $f(t)$, o a través de la transformada de Fourier de dicha función.

5.5 ESPECTRO CONTINUO DE ENERGÍA

El espectro continuo de energía se obtiene al graficar

$$|F(f)|^2 \text{ vs } f$$

En la figura 5.6 se muestra el espectro de energía correspondiente a una función tipo sampling.

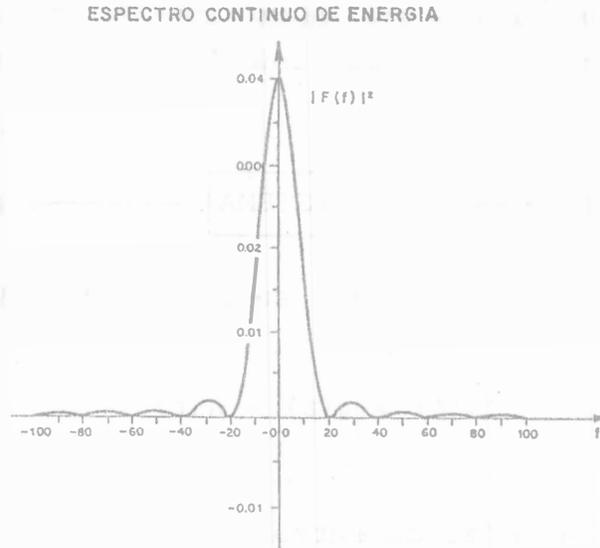


Figura 5.6

y el contenido de energía se obtiene al evaluar el área bajo la curva. Es decir, se evalúa la integral

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df \quad 5.64$$

5.6 APLICACIÓN DE LA CORRELACIÓN

5.6.1 Determinación del espectro de energía

El contenido de energía se puede obtener a través de la función de correlación, la cual se evalúa para $t=0$, como se representó en la expresión 5.63.

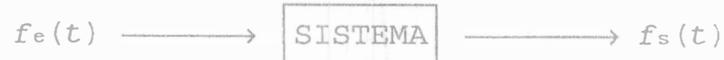
$$\mathcal{R}_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]^2 dt \quad 5.65$$

5.6.2 Detección de señales en presencia de ruido

a) Tipos de ruido

Como se explicó en el capítulo anterior, una señal de entrada introducida en un sistema produce una correspondiente señal de salida.

Los sistemas no tienen este comportamiento tan sencillo, la señal producida por un sistema generalmente va formada de una parte útil y otra inútil; a esta parte inútil o contaminada se le denomina *ruido*.



por lo que la señal de salida será igual a la señal de salida deseada más ruido.

$$f_s(t) = \Delta(t) + n(t) \quad 5.66$$

donde

$f_e(t)$ es la señal de entrada,
 $\Delta(t)$, la señal de salida deseada o útil,
 $n(t)$, la señal de ruido,
 $f_s(t)$, señal que recibimos como salida.

Denominamos *ruido* a cualquier perturbación inducida que tienda a encubrir u oscurecer la señal deseada. El ruido puede clasificarse en dos tipos:

- *Ruido coherente*: si la señal no útil tiene similitud o correlación con la señal útil.

$$R_{sn}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\tau) n(\tau-t) d\tau \neq 0 \quad 5.67$$

- *Ruido no coherente*: si la señal no útil no tiene ninguna similitud con la señal útil.

$$R_{sn}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(\tau) n(\tau-t) d\tau = 0 \quad 5.68$$

b) Identificación de señales mediante autocorrelación

La autocorrelación nos sirve también para recuperar la señal útil de la señal obtenida, usando el proceso que a continuación se describe.

La señal de salida de un sistema está dada por

$$f(t) = s(t) + n(t) \quad 5.69$$

si obtenemos la autocorrelación,

$$\bar{R}_{ff}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) f(\tau-t) d\tau \quad 5.70$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [s(\tau) + n(\tau)] [s(\tau-t) + n(\tau-t)] d\tau \quad 5.71$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) s(\tau-t) d\tau + \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) n(\tau-t) d\tau + \int_{-T/2}^{T/2} n(\tau) s(\tau-t) d\tau + \int_{-T/2}^{T/2} n(\tau) n(\tau-t) d\tau \right\} \quad 5.72$$

por lo tanto,

$$\bar{R}_{ff}(t) = \bar{R}_{ss}(t) + \bar{R}_{sn}(t) + \bar{R}_{ns}(t) + \bar{R}_{nn}(t) \quad 5.73$$

si consideramos que la señal útil $s(t)$ y el ruido $n(t)$ no están relacionados, es decir, que se trata de ruido incoherente, entonces:

$$\bar{R}_{sn}(t) = \bar{R}_{ns}(t) = 0 \quad 5.74$$

por lo cual,

$$\bar{R}_{ff}(t) = \bar{R}_{ss}(t) + \bar{R}_{nn}(t) \quad 5.75$$

Lo anterior nos indica que para poder detectar la señal útil mediante la autocorrelación es necesario conocer la naturaleza del ruido, un ejemplo de esto sería el conocer el espectro de potencia, pues si éste se conoce, podemos evaluar $\overline{\mathcal{R}}_{nn}(t)$ como

$$\overline{\mathcal{R}}_{nn}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{P_n(\ell)\} \quad 5.76$$

donde $P_n(\ell)$ es el espectro de potencia del ruido. Es común considerar el ruido como blanco o aleatorio, es decir, que ocurre en un instante en el tiempo (como un pulso) y, por lo tanto, se considera que

$$P_n(\ell) = k \quad 5.77$$

por lo que

$$\overline{\mathcal{R}}_{nn} = k \delta(t) \quad 5.78$$

si comparamos $\overline{\mathcal{R}}_{nn}(t)$ con $\overline{\mathcal{R}}_{ff}(t)$ y si

$$\overline{\mathcal{R}}_{ff}(t) \neq \overline{\mathcal{R}}_{nn}(t) \quad 5.79$$

se puede concluir que existe señal útil en la señal recibida $f(t)$.

c) Identificación de señales mediante crosacorrelación

La *crosacorrelación* o *correlación cruzada* nos sirve también para recuperar la señal útil de la señal obtenida. Para ello es necesario conocer la señal transmitida $g(t)$ y la señal recibida o de salida $f(t)$, donde

$$f(t) = g(t) + n(t) \quad 5.80$$

si obtenemos la función de crosacorrelación de $f(t)$ y $g(t)$,

$$\bar{R}_{fg}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) g(\tau-t) d\tau \quad 5.81$$

$$\bar{R}_{fg}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\Delta(\tau) + n(\tau)] g(\tau-t) d\tau \quad 5.82$$

$$\bar{R}_{fg}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} \Delta(\tau) g(\tau-t) d\tau + \int_{-T/2}^{T/2} n(\tau) g(\tau-t) d\tau \right\} \quad 5.83$$

por lo tanto,

$$\bar{R}_{fg}(t) = \bar{R}_{sg}(t) + \bar{R}_{ng}(t) \quad 5.84$$

si el ruido es incoherente,

$$\bar{R}_{ng}(t) = 0 \quad 5.85$$

entonces

$$\bar{R}_{fg}(t) = \bar{R}_{sg}(t) \quad 5.86$$

si la señal de salida es sólo ruido, quiere decir que $\Delta(t) = 0$ y, por lo tanto,

$$\bar{R}_{sg}(t) = 0 \quad 5.87$$

y

$$\bar{R}_{fg}(t) = 0 \quad 5.88$$

lo cual significa que no se tiene señal útil en la señal recibida. De lo anterior, podemos concluir que si la función de crosacorrelación promedio entre la señal recibida $f(t)$ y la transmitida $g(t)$ no es cero, entonces existe una señal útil en la señal recibida.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Evalúe la función de correlación de las funciones mostradas.

a)

$$h(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t); & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ; t < 0 ; t > \frac{1}{2} \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq t \leq \frac{1}{8} \\ 0 & ; \forall t \end{cases}$$

b)

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; \forall t \end{cases} \quad g(t) = h(t)$$

c)

$$h(t) = \begin{cases} e^{-at} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} e^{-bt} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

d)

$$h(t) = \begin{cases} te^{-t} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} e^{-t} & ; t > 0 \\ 0 & ; t < 0 \end{cases}$$

2. Obtenga el contenido de potencia, usando la autocorrelación para cada una de las funciones dadas en el ejercicio anterior.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS DE FRECUENCIAS DE FUNCIONES DISCRETAS

6.1 MUESTREO DE FUNCIONES

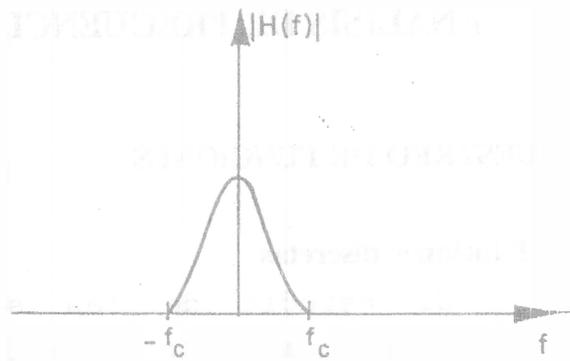
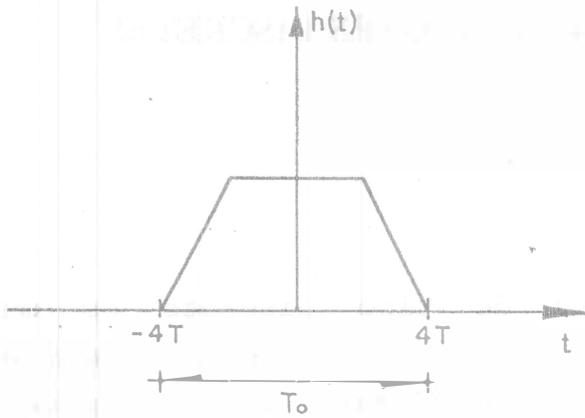
6.1.1 Funciones discretas

El estudio de las señales de tipo discreto es muy importante, porque en la práctica la mayoría de las señales que se obtienen son de tipo digital o se digitalizan para su estudio apoyándose en el gran avance que han tenido las computadoras y sistemas digitales.

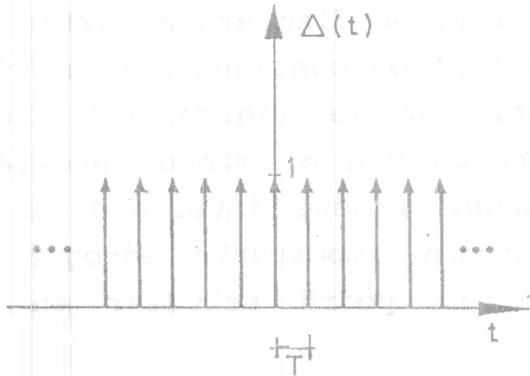
Matemáticamente obtenemos una función discreta a partir de una continua cuando multiplicamos a la función continua por un tren de impulsos unitarios, como se muestra en la figura 6.1. Debe notarse que la función se vuelve discreta con el mismo intervalo (periodo) que tenga el tren de impulsos; a este intervalo se le conoce como *intervalo de muestreo*. Es muy importante escoger un intervalo de muestreo adecuado, como se podrá estudiar en el siguiente punto.

Como hemos observado a través de nuestro estudio, cuando nosotros aplicamos a una función algún cambio en el dominio del tiempo, ésta sufre cambios también en el dominio de la frecuencia; esto es, cuando adelantamos o retrasamos una función en el tiempo, provocamos un cambio de fase en la frecuencia; cuando derivamos una función en el tiempo, ésta se multiplica por un factor en la frecuencia; cuando convolucionamos dos funciones en el tiempo, las multiplicamos en la frecuencia.

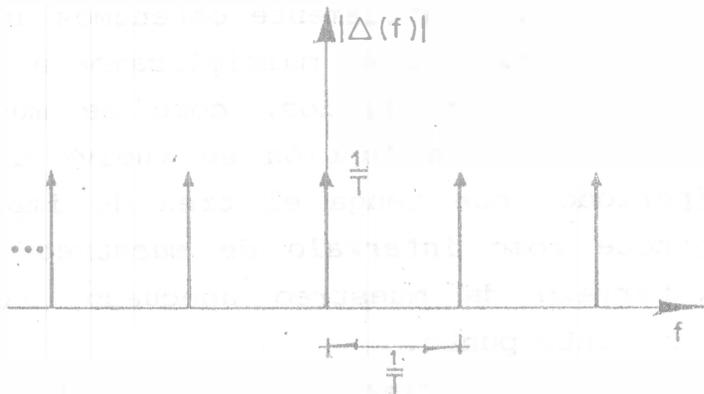
Todo lo anterior nos lleva a concluir que cuando hacemos discreta una función en el tiempo, debe de haber una repercusión en el dominio de la frecuencia.



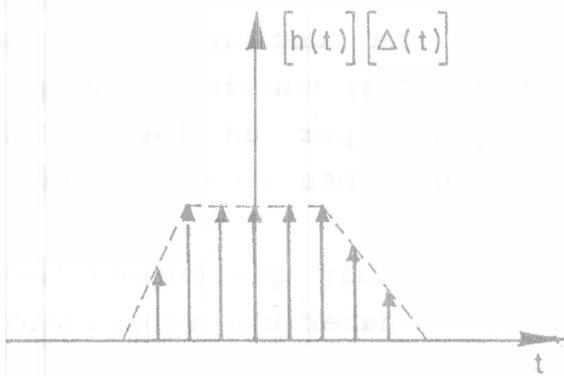
X



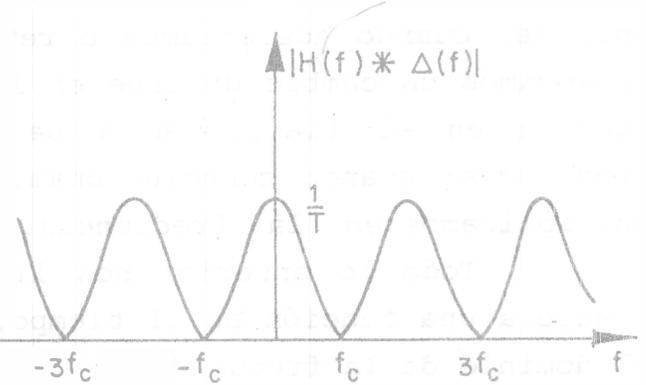
*



=



=



Dominio del tiempo
Figura 6.1

Dominio de la frecuencia
Figura 6.2

Sea la función continua $h(t)$, la cual volvemos discreta al multiplicarla por un tren de impulsos (figura 6.1). Por el teorema de convolución en el dominio de la frecuencia, al multiplicar en el dominio del tiempo convolucionamos en el dominio de la frecuencia; por lo tanto, si obtenemos la transformada de $h(t)$ y la de $\Delta(t)$, como se puede observar en la figura 6.2, $H(f)$ de ser una función no periódica en el dominio de la frecuencia, se vuelve periódica en la frecuencia, debido a la discretización que realizamos en el dominio del tiempo (véase ejemplo 4.5).

Ahora bien, es necesario observar qué es lo que sucede si aumentamos o disminuimos el intervalo de muestreo Δt que representa el período T del tren de impulsos en el dominio del tiempo.

Si consideramos un tren de impulsos en el dominio del tiempo con un intervalo de muestreo $\Delta t = T$, el tren de impulsos de su transformada se verá escalado en el dominio de la frecuencia por $1/T$, con una frecuencia fundamental $f_0 = 1/T$ (véase transformada de un tren de impulsos, tema 3.4.6). Por lo tanto, si el intervalo de muestreo Δt es muy grande en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia la frecuencia fundamental f_0 será muy pequeña, lo que provocará que al convolucionar este nuevo tren de impulsos con la función $H(f)$ se produzca el fenómeno de enmascaramiento conocido como *aliasing*, como se puede observar en la figura 6.3.

Por el contrario, si disminuimos el intervalo de muestreo Δt (figura 6.4a), entonces en la transformada del tren de impulsos la frecuencia fundamental f_0 está más espaciada, lo cual provoca que al convolucionar el tren de impulsos con la función $H(f)$ ésta última se vuelva periódica sin enmascaramiento, pero con un espacio más grande de lo necesario entre función y función (figura 6.4b).

Por lo tanto, es necesario encontrar el intervalo de muestreo más adecuado, de tal manera que no exista enmascaramiento en el dominio de la frecuencia (figura 6.3), pero tampoco exista un período tan grande en el dominio de la frecuencia, como el que se muestra en la figura 6.4, ya que esto significaría un intervalo de muestreo más pequeño de lo necesario en el dominio del tiempo y, por lo tanto, un mayor número de muestras de lo necesario, lo cual en la práctica significa tiempo y dinero invertido de más.

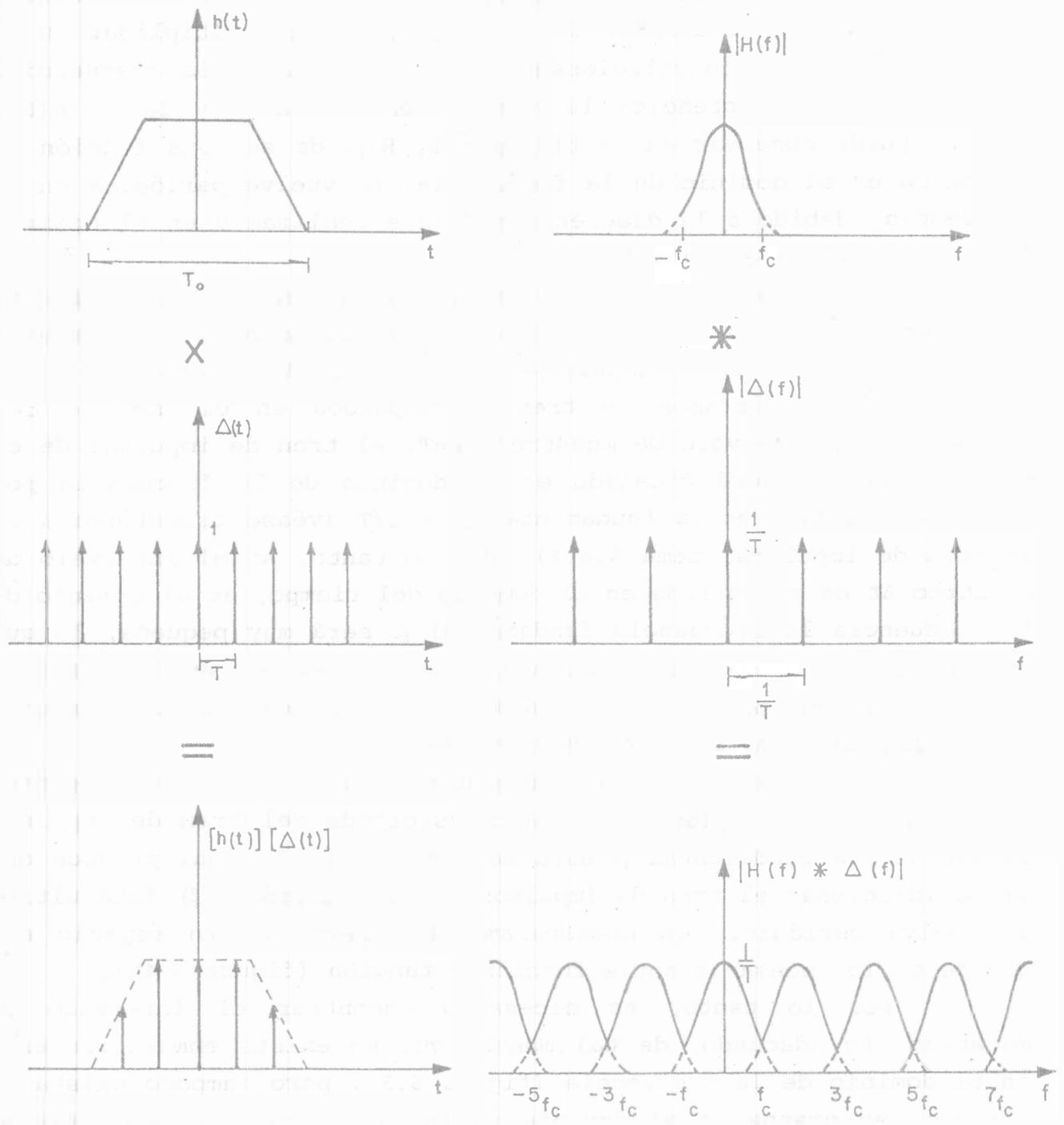
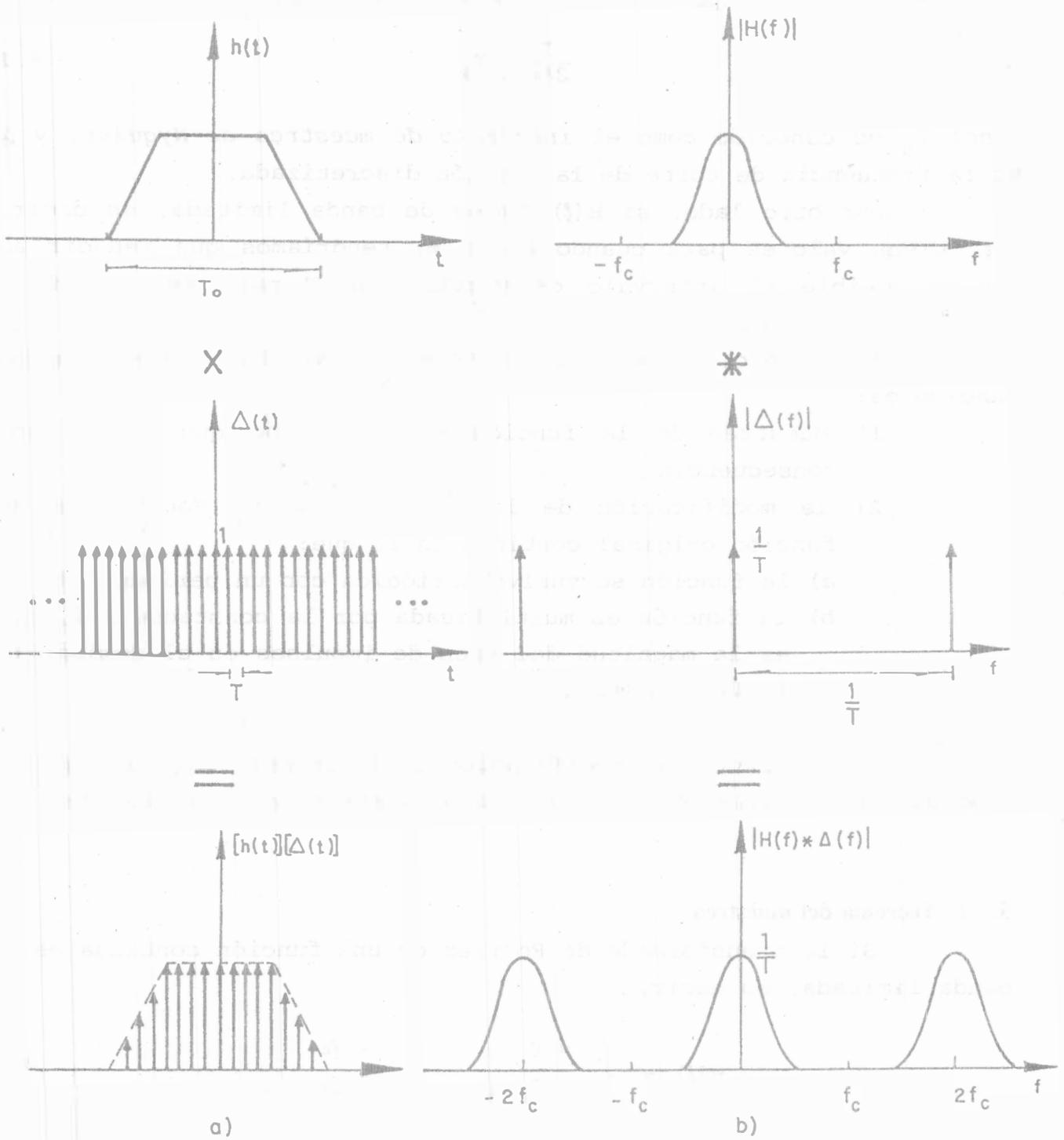


Figura 6.3



Domino del tiempo

Domino de la frecuencia

Figura 6.4

Por lo tanto, el intervalo de muestreo más adecuado (figuras 6.1 y 6.2) para una función de banda limitada es

$$\frac{1}{2f_c} = T_N \quad 6.1$$

donde T_N es conocido como el *intervalo de muestreo de Nyquist*, y f_c es la frecuencia de corte de la función discretizada.

Por otro lado, si $H(f)$ no es de banda limitada, es decir, $H(f)$ tiene valores para cuando $f = \pm \infty$, tendríamos que reducir al mínimo posible el intervalo de muestreo $\Delta t = T$ para evitar en lo posible el *alising*.

Resumiendo, el proceso que se sigue para hacer discreta una función es:

- 1) Muestreo de la función en el tiempo que tiene como consecuencia
- 2) la modificación de la transformada de Fourier de la función original continua en la que:
 - a) la función se vuelve periódica con un período $1/T$.
 - b) la función es multiplicada por la constante $1/T$, que es la magnitud del tren de impulsos en el dominio de la frecuencia.

Por lo tanto, la modificación de la transformada de Fourier dependerá exclusivamente del intervalo de muestreo seleccionado.

6.1.2 Teorema del muestreo

Si la transformada de Fourier de una función continua es de banda limitada, es decir,

$$H(f) = \begin{cases} \neq 0 & ; \quad |f| < f_c \\ 0 & ; \quad |f| > f_c \end{cases} \quad 6.2$$

y si esta función continua es muestreada, usando el intervalo de muestreo de Nyquist $T_N = \frac{1}{2f_c}$, entonces la función continua $h(t)$ puede ser unívocamente reconstruida a partir de los valores discretos o muestreados $h(nt)$, mediante

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(nT) \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t-nT)}{2\pi f_c (t-nT)} \quad 6.3$$

donde:

- t es el valor de la abscisa en el dominio del tiempo de la señal que se quiere reconstruir;
- f_c , la frecuencia de corte de la función que se quiere reconstruir y está dada en función del intervalo de muestreo usado cuando se hizo discreta a la función;
- T, el intervalo de muestreo o período del tren de impulsos usado al hacer discreta a la función.

Demostración:

Si partimos de lo explicado anteriormente, al volver discreta una función en el dominio del tiempo, hacemos periódica a la transformada en el dominio de la frecuencia. Para obtener nuevamente nuestra función original en la frecuencia, necesitamos evitar la periodicidad; para ello multiplicamos a nuestra función periódica en el dominio de la frecuencia por una función caja de magnitud T, como se muestra en la figura 6.5a.

Realizando el desarrollo matemático, tenemos que:

Dominio del tiempo:

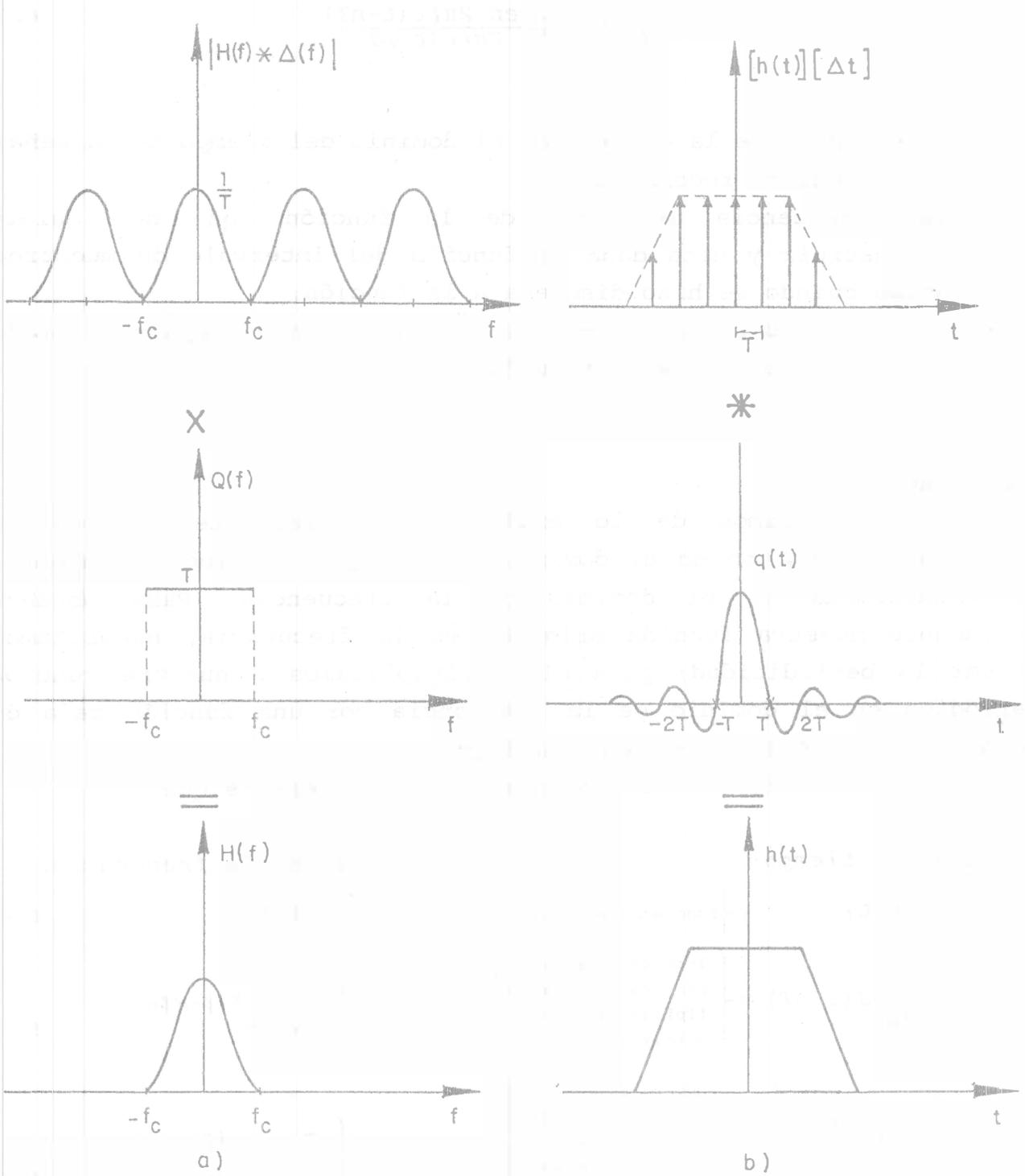
Dominio de la frecuencia:

$$h(t) \quad \leftarrow \begin{cases} \text{Funcion original.} \\ \end{cases} \quad H(f) \quad 6.4$$

$$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \leftarrow \begin{cases} \text{Tren de impulsos} \\ \text{por los que se mul-} \\ \text{tiplica la funcion} \\ \text{original.} \end{cases} \quad \Delta(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f-kf_0) \quad 6.5$$

$$q(t) = \frac{\text{sen } 2\pi f_c t}{2\pi f_c t} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Funcion caja por} \\ \text{la que se multipli-} \\ \text{ca la funcion en} \\ \text{la frecuencia para} \\ \text{evitar la perio-} \\ \text{dicidad.} \end{array} \right\} \rightarrow Q(f) = \begin{cases} T & ; \quad |f| \leq f_c \\ 0 & ; \quad |f| > f_c \end{cases} \quad 6.6$$

por lo tanto, la función muestreada o discretizada queda definida como



Dominio de la frecuencia

Dominio del tiempo

Figura 6.5

$$\hat{h}(t) = h(t) \cdot \Delta(t)$$

$$\hat{H}(f) = H(f) * \Delta(f) \quad 6.7$$

y finalmente, después de multiplicarla en la frecuencia por una función de tipo caja con el fin de eliminar la periodicidad en el dominio de la frecuencia.

$$h(t) = [h(t) \cdot \Delta(t)] * q(t) \quad H(f) = [H(f) * \Delta(f)] \cdot Q(f) \quad 6.8$$

Considerando que ahora lo que queremos obtener es la señal $h(t)$ para cualquier valor de t a partir de la señal discreta $\hat{h}(t)$.

Sustituimos en 6.8 las expresiones 6.4 , 6.5 y 6.6, y obtenemos que:

$$h(t) = \left(h(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \right] \right) * \frac{\text{sen } 2\pi f_c t}{2\pi f_c t} \quad 6.9$$

reordenamos la convolución dentro de la sumatoria y tomamos los valores de la función discreta en cada punto nT .

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(nT) \left(\delta(t-nT) * \frac{\text{sen } 2\pi f_c t}{2\pi f_c t} \right) \quad 6.10$$

Si sabemos que la convolución entre una función y un tren de impulsos es la función posicionada en cada punto donde está el impulso, obtenemos que la función $h(t)$ para cualquier punto t puede ser reconstruida mediante los valores muestreados $\hat{h}(nT)$ multiplicados por una función de la forma $\frac{\text{sen } x}{x}$, conocida como *muestreadora* o "sampling", por esta razón (figura 6.5b).

Al realizar la convolución expresada en 6.10, se llega como resultado final a

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{h}(nT) \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t-nT)}{2\pi f_c (t-nT)} \quad 6.11$$

con lo que obtenemos la ecuación que representa al *teorema del muestreo*.

Para aplicar esta fórmula debemos considerar cuántos valores muestreados tenemos. Si por ejemplo, nuestra función ha sido muestreada tomando el intervalo de Nyquist T_N , y tenemos una función de cinco muestras, donde la muestra central está en el origen, entonces podremos reconstruir a la función para cualquier valor t diferente a los muestreados. Por ejemplo, si queremos saber cuál es el valor de la función en t_1 , entonces tenemos que nuestra expresión quedará definida para este punto como

$$h(t_1) = \sum_{n=-2}^2 \hat{h}(nT_N) \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t_1 - nT_N)}{2\pi f_c (t_1 - nT_N)}$$

considerando que $f_c = \frac{1}{2T_N}$.

Para $t = t_2$

$$h(t_2) = \sum_{n=-2}^2 \hat{h}(nT_N) \frac{\text{sen } 2\pi f_c (t_2 - nT_N)}{2\pi f_c (t_2 - nT_N)}$$

Es decir, para encontrar el valor de la función $h(t)$ en cada punto t_n que deseemos obtener, tenemos que efectuar la sumatoria usando los cinco valores (o los n valores dependiendo, del número de muestras de la señal discreta) dados.

En el caso de que la función no sea de banda limitada, es decir, exista para una banda de frecuencias infinita, entonces se deberá escoger una frecuencia de corte f_c lo suficientemente amplia para evitar en lo más posible el enmascaramiento provocado por la repetición periódica de la función transformada, pero considerando que entre mayor sea la frecuencia de corte, menor será el intervalo de muestreo y, por consiguiente, mayor el número de muestras con las que se requiere trabajar; por lo que esta elección dependerá entonces de lo que se quiera obtener a partir de la señal estudiada. Para este tipo de funciones, debido a que no existe una frecuencia de Nyquist definida por la misma función, sino tomada

arbitrariamente, el teorema del muestreo reconstruirá a la función, pero con un cierto error que dependerá de qué tan pequeño sea el intervalo de muestreo: entre más pequeño sea el intervalo de muestreo, menor será el error de reconstrucción.

6.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

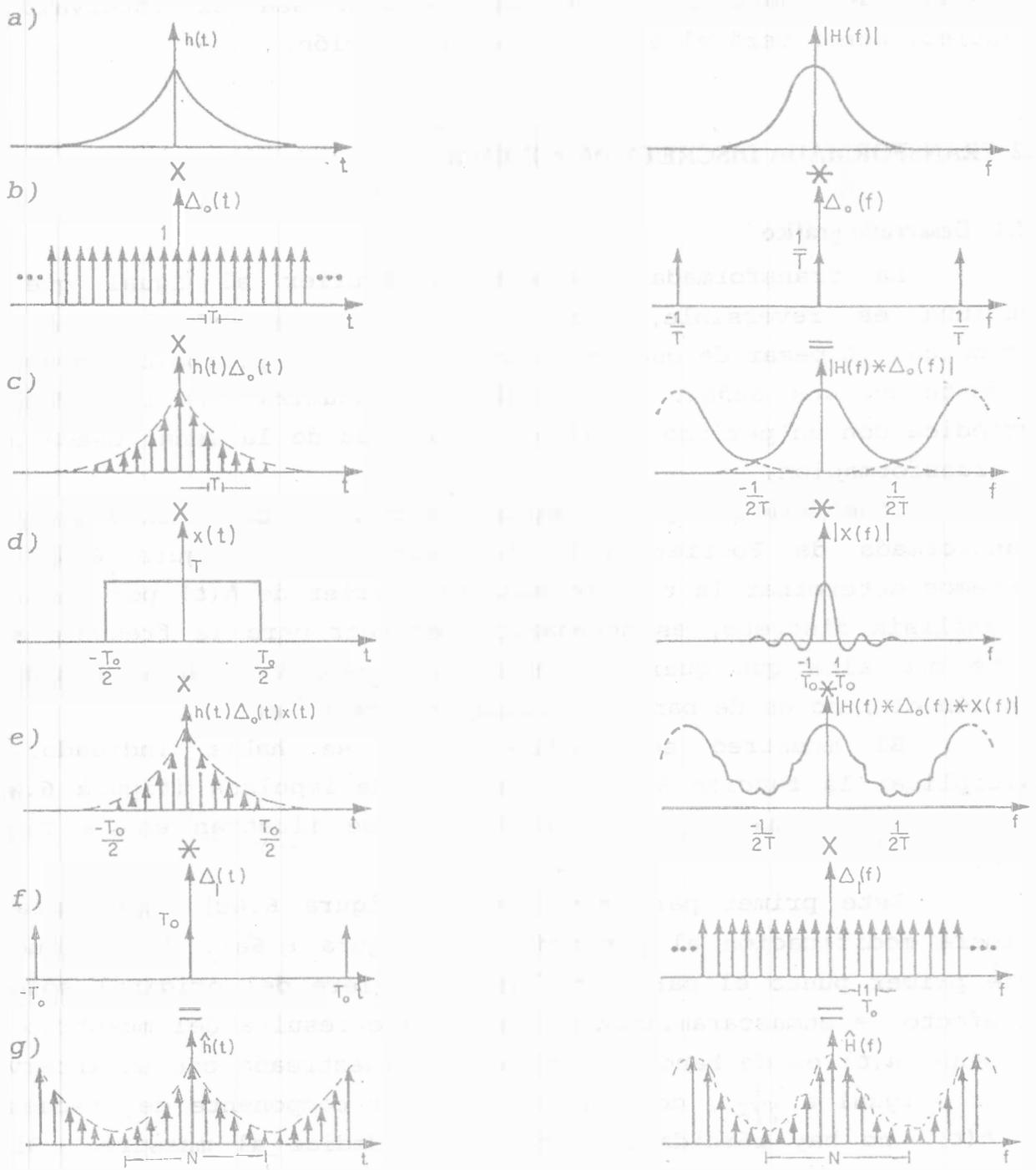
6.2.1 Desarrollo gráfico

La transformada discreta de Fourier al igual que la continua es reversible, pero tiene la característica de ser periódica. A pesar de que en algunos casos esta periodicidad no sea evidente en una señal, la transformada asumirá que la señal es periódica con un período igual a la longitud de la señal usada para la transformación.

Considerando, por ejemplo, la función continua $h(t)$ y su transformada de Fourier $H(f)$ ilustrada en la figura 6.6a, si queremos determinar la transformada de Fourier de $h(t)$ por medio de un análisis discreto, es necesario muestrear para la frecuencia de corte más alta que queramos encontrar, esto es debido a que la función $h(t)$ no es de banda limitada (figura 6.6a).

El muestreo se produce, como se había indicado, al multiplicar la función $h(t)$ por un tren de impulsos (figura 6.6b). La función muestreada y su transformada se ilustran en la figura 6.6c.

Este primer par transformado (figura 6.6c) representa la primera modificación al par original (figura 6.6a). Nótese que en este primer punto el par transformado difiere del original sólo en el efecto de enmascaramiento *aliasing*, que resulta del muestreo. Si la señal $h(t)$ es de banda limitada y es muestreada con un intervalo menor o igual a $\frac{1}{2f_c}$, donde f_c es la mayor componente de frecuencia de $h(t)$, no hay pérdida de información debido al muestreo. Si la función de $h(t)$ no es de banda limitada, entonces $H(f) \neq 0$ para $|f| > f_c$, y el muestreo introducirá el enmascaramiento ilustrado en la figura 6.6c. Para reducir este error, es necesario tomar al intervalo de muestreo lo más pequeño posible.



Dominio del tiempo

Dominio de la frecuencia

Figura 6.6
(Modificada de Brigham, 1974)

Si la función $\hat{h}(t)$ está definida para un intervalo muy grande o infinito, debido al cálculo computacional, es necesario truncarla, de tal manera que sólo un número finito de puntos (N) sean considerados. La función de truncamiento y su transformada se representan en la figura 6.6d. El resultado del producto entre la secuencia infinita $\hat{h}(t)$ por la función de truncamiento se muestra en la figura 6.6e.

El truncamiento introduce la segunda modificación al par original. Este efecto se debe a la convolución de la transformada de la señal, que puede ya tener enmascaramiento en el dominio de la frecuencia con el espectro de la función de truncamiento (figuras 6.6c y 6.6d). Como se observa, el espectro ahora se ha rizado (figura 6.5e). A este efecto se le conoce como *fenómeno de rizamiento* o *fenómeno de Gibbs*.

Para reducir el error por rizamiento, se considera que cuando la función de truncamiento crece en el dominio del tiempo, la transformada de esta función que es de la forma $\frac{\text{sen } f}{f}$ en el dominio de la frecuencia, se aproxima a un impulso y de esta manera se reduce el rizamiento o error introducido por la convolución que resulta del truncamiento.

Sin embargo, sólo los valores muestreados pueden ser procesados; por lo que es necesario modificar el espectro de frecuencias, que hasta ahora es continuo (figura 6.6a a la 6.6e), muestreándolo en la frecuencia por la función ilustrada en la figura 6.6f, donde el intervalo de muestreo en la frecuencia está dado por $1/T_0$, este último paso provoca que la función en el tiempo se vuelva periódica.

El par transformado de la figura 6.6g es el deseado, ya que tanto en el tiempo como en el dominio de la frecuencia se tiene a las funciones representadas por valores discretos.

Nótese que el muestreo en el dominio del tiempo da como resultado una función periódica en el dominio de la frecuencia y que el muestreo en dominio de la frecuencia da como resultado una función periódica en el dominio del tiempo. Por lo tanto, un período en el dominio del tiempo y otro en el dominio de la frecuencia están constituidos por un número N de muestras.

6.2.2 Desarrollo teórico de la transformada discreta de Fourier

Para obtener la transformada discreta de Fourier es necesario observar los cambios matemáticos que resultan de cada una de las modificaciones requeridas que son: a) *muestreo en el dominio del tiempo*, b) *truncamiento en el dominio del tiempo* y c) *muestreo en el dominio de las frecuencias*.

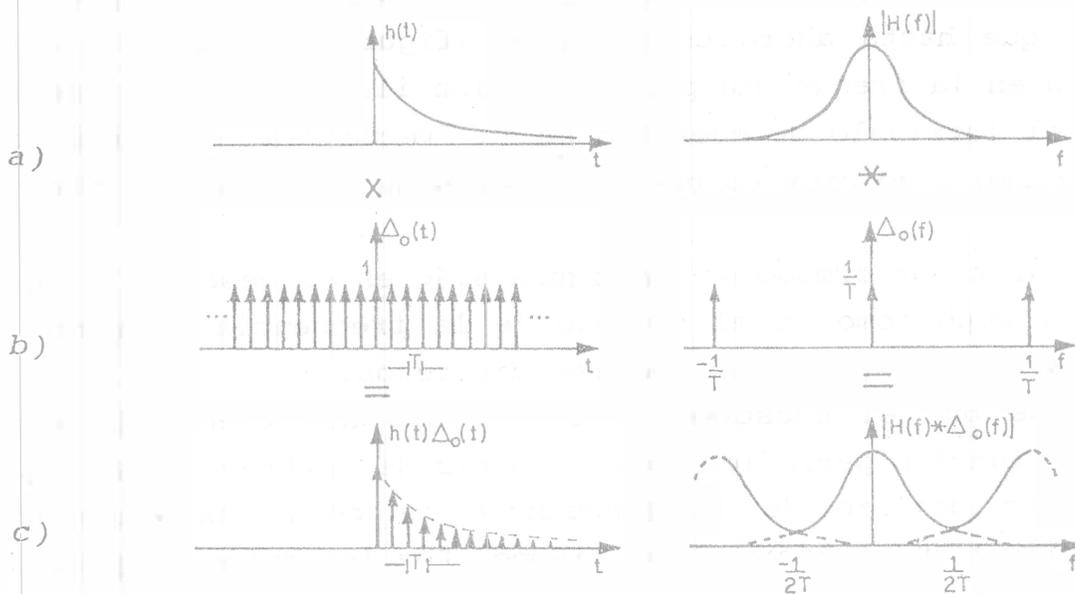
La primera modificación en este par de Fourier (figura 6.7a) es el muestreo de la función en el dominio del tiempo, donde $\Delta_o(t)$ (figura 6.7b) es la función que hace discreta a la función en el dominio del tiempo, quedando así desarrollada la primera modificación (figura 6.7c).

$$\Delta_o(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \quad 6.12$$

$$\hat{h}(t) = h(t) \cdot \Delta_o(t) \quad 6.13$$

$$\hat{h}(t) = h(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \quad 6.14$$

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \cdot \delta(t-kT) \quad 6.15$$



Primera modificación
Figura 6.7 (Modificada de Brigham, 1974)

La segunda modificación que debe aplicarse es el truncamiento de la función muestreada en el dominio del tiempo. Esto se logra multiplicando la función muestreada $h(t)$ (figura 6.8a) por la función de truncamiento $\alpha(t)$, figura 6.8b.

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad -T/2 \leq t \leq T_0 - T/2 \\ 0 & ; \quad t < -T/2 \quad t > T_0 - T/2 \end{cases} \quad 6.16$$

donde T_0 es el período de la función $h(t)$ y está determinado tanto por el intervalo de muestreo T como por el número de muestras N , por lo que, $T_0 = NT$. Y de esta manera queda efectuada la segunda modificación (figura 6.8c).

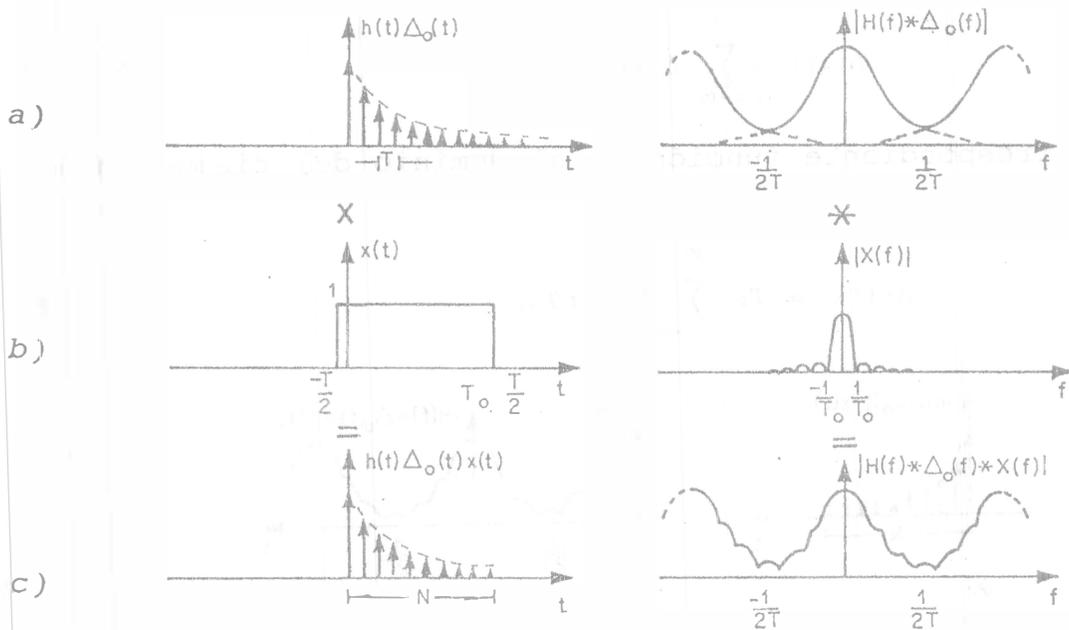


Figura 6.8 Segunda modificación (Modificada de Brigham, 1974)

Hasta ahora la función muestreada está dada por N muestras de la siguiente manera:

$$\hat{h}(t) = h(t) \cdot \Delta_0(t) \cdot \alpha(t) \quad 6.17$$

$$\hat{h}(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT) \cdot \delta(t - kT) \right) \alpha(t) \quad 6.18$$

y si aplicamos el truncamiento, restringiendo la sumatoria, obtenemos que (figura 6.8c):

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \cdot \delta(t-kT) \quad 6.19$$

Por otra parte, la tercera modificación que debemos aplicar es el muestreo en el dominio de las frecuencias de la función $|H(f) * \Delta_0(f) * X(f)|$ dada en la figura 6.9a.

La función de muestreo en el dominio de la frecuencia es el tren de impulsos mostrado en la figura 6.9b y cuya expresión es

$$\Delta_1(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(f-r/T_0) \quad 6.20$$

pero, como $1/T_0 = f_0$,

$$\Delta_1(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(f-rf_0) \quad 6.21$$

La correspondiente función en el dominio del tiempo estará dada por

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t-rT_0) \quad 6.22$$

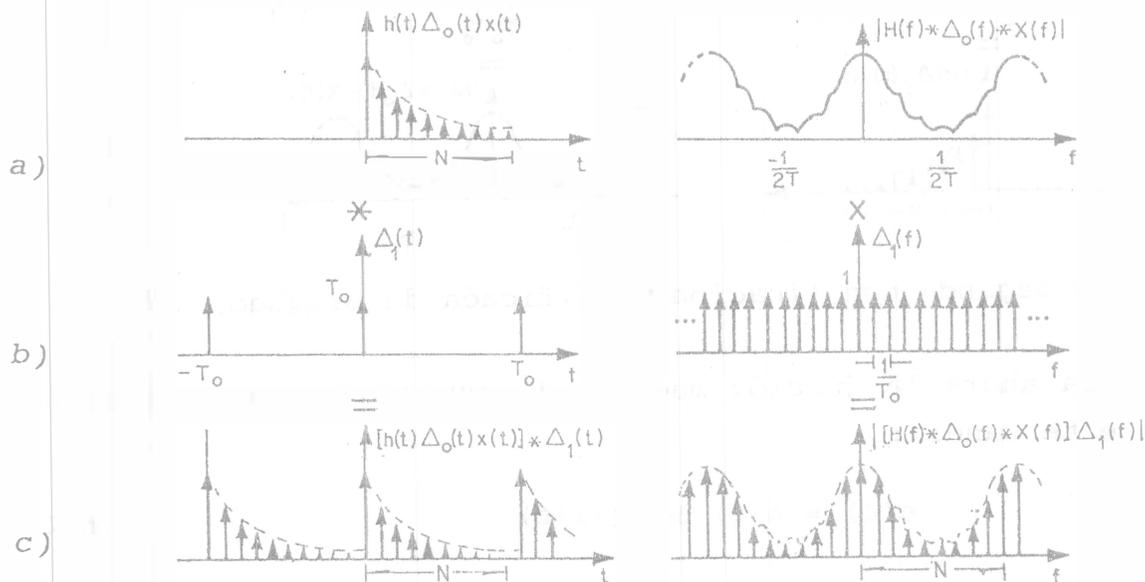


Figura 6.9 Tercera modificación (Modificada de Brigham, 1974)

Por el teorema de convolución en el dominio del tiempo, la función en el tiempo que resulte del muestreo en el dominio de la frecuencia estará dada por

$$\hat{h}(t) = [h(t) \cdot \Delta_0(t) \cdot x(t)] * \Delta_1(t) \quad 6.23$$

y considerando la expresión 6.19,

$$\hat{h}(t) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \cdot \delta(t-kT) \right) * \left(T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t-rT_0) \right) \quad 6.24$$

reacomodando términos y desarrollando la convolución en el tren de impulsos,

$$\hat{h}(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \cdot \delta(t-kT-rT_0) \quad 6.25$$

donde el subíndice k maneja a las muestras y el subíndice r da la periodicidad de la función (figura 6.9c).

Para encontrar la expresión matemática de la transformada de la ecuación anterior, tenemos que considerar que la transformada de una función periódica $h(t)$, véase el tema 3.4.5, es una secuencia de impulsos equidistantes multiplicados por los \mathcal{D}_n , de modo que

$$\hat{H}(n/T_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_n \delta(\ell - n\ell_0) \quad 6.26$$

y si consideramos que

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0-T/2} \hat{h}(t) e^{-\frac{i2\pi nt}{T_0}} dt \quad 6.27$$

entonces

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} \left(T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \cdot \delta(t - kT - rT_0) \right) e^{-\frac{i2\pi nt}{T_0}} dt \quad 6.28$$

como la integración debe ser sólo sobre un período, tenemos que:

$$\mathcal{D}_n = \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \cdot \delta(t - kT) \right) e^{-\frac{i2\pi nt}{T_0}} dt \quad 6.29$$

cambiando el orden de integración,

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \int_{-T/2}^{T_0 - T/2} e^{-\frac{i2\pi nt}{T_0}} \delta(t - kT) dt \quad 6.30$$

y aplicando propiedades de la función impulso, obtenemos

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi knT}{T_0}} \quad 6.31$$

como $T_0 = NT$, entonces $T/T_0 = 1/N$; por lo que

$$\mathcal{D}_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.32$$

introduciendo la expresión 6.32 en 6.26, tenemos que la transformada de Fourier se representa como

$$\hat{H}(n/NT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \delta(f - n f_0) \quad 6.33$$

De esta expresión no es tan fácil visualizar que la transformada de Fourier tiene sólo N valores distintos calculables, que corresponden a la sumatoria interior. Para obtener una expresión más adecuada para la transformada de Fourier discreta, es necesario demostrar que la ecuación anterior es una función periódica con periodicidad igual a N muestras; para esto tenemos que $n=r$ donde r es un número entero arbitrario.

$$\hat{H}(r/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kr}{N}} \quad 6.34$$

y ahora tomamos $n = r+N$

$$\hat{H}[(r+N)/NT] = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi k(r+N)}{N}} \quad 6.35$$

$$\hat{H}[(r+N)/NT] = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kr}{N}} e^{-i2\pi k} \quad 6.36$$

$$\hat{H}[(r+N)/NT] = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kr}{N}} [\cos 2\pi k - i \operatorname{sen} 2\pi k] \quad 6.37$$

por lo tanto,

$$\hat{H}[(r+N)/NT] = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kr}{N}} = \hat{H}(r/NT) \quad 6.38$$

Esto implica que cuando obtenemos la transformada de Fourier de una función discreta, sólo podemos obtener N muestras distintas, ya que como se explicó, las demás son repetidas debido a la periodicidad de la misma transformada.

Dado lo anterior, cuando se obtiene la transformada sólo se representan las N muestras distintas a través de una sola sumatoria que va de 0 a N , si se desea representar a la transformada en una forma periódica, entonces se agrega la segunda sumatoria que irá de $-\infty$ a ∞ .

$$\hat{H}(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.39$$

Expresión que define a la transformada discreta de Fourier, donde $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ (que representa un sólo período).

El espectro de amplitud y el de fase estarán definidos en la misma forma que en la transformada continua por

$$\text{Amplitud} = |\hat{H}(n/NT)| \quad 6.40$$

$$\text{Fase} = \tan^{-1} \left(\frac{I [\hat{H}(n/NT)]}{R [\hat{H}(n/NT)]} \right) \quad 6.41$$

6.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Las propiedades de la transformada discreta de Fourier son básicamente las mismas de la transformada de Fourier continua, ya que como hemos visto, la primera es simplemente un caso especial de la segunda.

6.3.1 Propiedad de linealidad

Sean $F_1(n/NT) = \mathcal{F}\{f_1(kT)\}$ y $F_2(n/NT) = \mathcal{F}\{f_2(kT)\}$ las transformadas de Fourier de dos funciones, tales que multiplicadas por las constantes a_1 y a_2 , cumplen con

$$\mathcal{F}\{a_1 f_1(kT) + a_2 f_2(kT)\} = a_1 F_1(n/NT) + a_2 F_2(n/NT) \quad 6.42$$

condiciones de homogeneidad y superposición que a continuación se describen.

- *Condición de homogeneidad:*

$$\mathcal{F}\{af(kT)\} = aF(n/NT) \quad 6.43$$

- *Condición de superposición:*

$$\mathcal{F}\{f(kT) + g(kT)\} = F(n/NT) + G(n/NT) \quad 6.44$$

Si una transformada cumple con las dos condiciones anteriores, se habla de una *transformación lineal*.

6.3.2 Propiedad de desplazamiento

a) Propiedad de desplazamiento en las frecuencias

Sea una función $f(kT)$, tal que $\mathcal{F}\{f(kT)\} = F(n/NT)$. Si a esta función la definimos ahora como

$$f(kT) e^{i2\pi k j/N} \quad 6.45$$

entonces su transformada estará definida como

$$F[(n-j)/NT] \quad 6.46$$

b) Propiedad de desplazamiento en el tiempo

Sea una función $f(kT)$, tal que $\mathcal{F}\{f(kT)\} = F(n/NT)$. Si deseamos obtener la transformada de Fourier de

$$f[(k-j)t] \quad 6.47$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f[(k-j)t]\} = F(n/NT) e^{i2\pi nj/N} \quad 6.48$$

6.3.3 Propiedad de simetría de la transformada de Fourier

Sea $f(kT)$ en el dominio del tiempo una función, tal que $\mathcal{F}\{f(kT)\} = F(n/NT)$ en el dominio de las frecuencias, y sea $F(kT)$ otra función en el dominio del tiempo, entonces su transformada en el dominio de las frecuencias será una función del tipo $f(-n/NT)$.

Por lo tanto, si existe una correspondencia tal, que para

$$f(kT) \Leftrightarrow F(n/NT) \quad 6.49$$

entonces

$$F(kT) \Leftrightarrow f(-n/NT) \quad 6.50$$

6.3.4 Transformada de Fourier de funciones simétricas

a) Sea una función $f(kT)$ real que tiene simetría par, entonces su transformada discreta de Fourier se puede expresar como

$$F(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.51$$

si separamos la función exponencial de la transformada de Fourier en sus componentes coseno, seno,

$$F(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \cos \frac{2\pi kn}{N} + i \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \quad 6.52$$

por simetría de funciones tenemos que la segunda sumatoria de la expresión 6.52 es cero, y que la primera sumatoria es la sumatoria de una función de simetría par, por lo tanto,

$$F(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \cos \frac{2\pi kn}{N} \quad 6.53$$

que es una función real, por lo tanto,

$$\phi(n/NT) = 0 \quad \text{y} \quad |F(n/NT)| = |R(n/NT)| \quad 6.54$$

lo cual nos indica que la transformada de Fourier de una función de simetría par es una *función real*.

b) Sea una función $f(kT)$ real que tiene simetría impar, entonces su transformada discreta de Fourier es

$$F(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.55$$

si separamos la función exponencial de la transformada de Fourier en sus componentes coseno, seno,

$$F(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \cos \frac{2\pi kn}{N} + i \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \quad 6.56$$

por simetría de funciones tenemos que la primera sumatoria de la expresión 6.56 es cero, y que la segunda sumatoria es la de una función de simetría par, por lo tanto,

$$F(n/NT) = i \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) \operatorname{sen} \frac{2\pi kn}{N} \quad 6.57$$

que es una función *imaginaria pura* y, por lo tanto,

$$\phi(n/NT) = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad |F(n/NT)| = |I(n/NT)| \quad 6.58$$

6.4 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

6.4.1 Aplicación de la transformada discreta de Fourier directa

En la figura 6.10 se muestra la función e^{-t} , la cual se desea transformar haciendo los cálculos en un programa de computadora. Para obtener la transformada deben considerarse los siguientes aspectos:

- 1) Primeramente, seleccionar el número de muestras N y el intervalo de muestreo T . Para el ejemplo de la figura 6.10, $N = 32$ y $T = 0.25$.
- 2) A continuación es necesario observar si existe alguna discontinuidad para algún valor de la función. Para nuestro ejemplo, tenemos una discontinuidad en $t=0$, por lo cual el valor de la función en este punto debe definirse como el valor medio de la discontinuidad.
- 3) Después se programa la expresión 6.59 de la transformada de Fourier discreta.

$$\hat{H}(n/NT) = T \sum_{k=0}^{N-1} [e^{-kT}] e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.59$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Nótese el factor T que se introduce para conservar la escala entre la transformada continua y la discreta. Este factor puede ser interpretado como el dt de la integral que ahora en la sumatoria indicará el tamaño del incremento del intervalo de muestreo.

Función exponencial muestreada $N=32$
 $T=0.25$

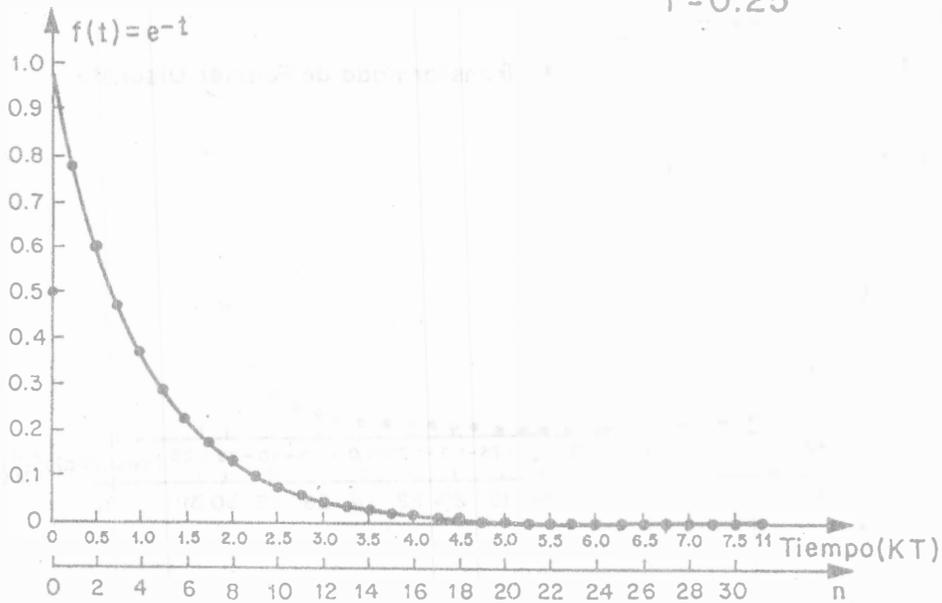


Figura 6.10

Una vez que se realiza el cálculo de la transformada para poder determinar el orden de los datos de salida, se debe considerar que la transformada de Fourier discreta es simétrica respecto al origen; por lo tanto, los datos de salida serán simétricos en $n = N/2$ muestras, debiéndose considerar a los valores restantes ($n > N/2$) como los correspondientes a las frecuencias negativas. Si se grafica por separado las partes real e imaginaria de la función, tendríamos los siguientes resultados (figura 6.11).

Nótese que la parte real de la transformada de Fourier es de simetría par respecto de $N/2$ y la parte imaginaria es de simetría impar.

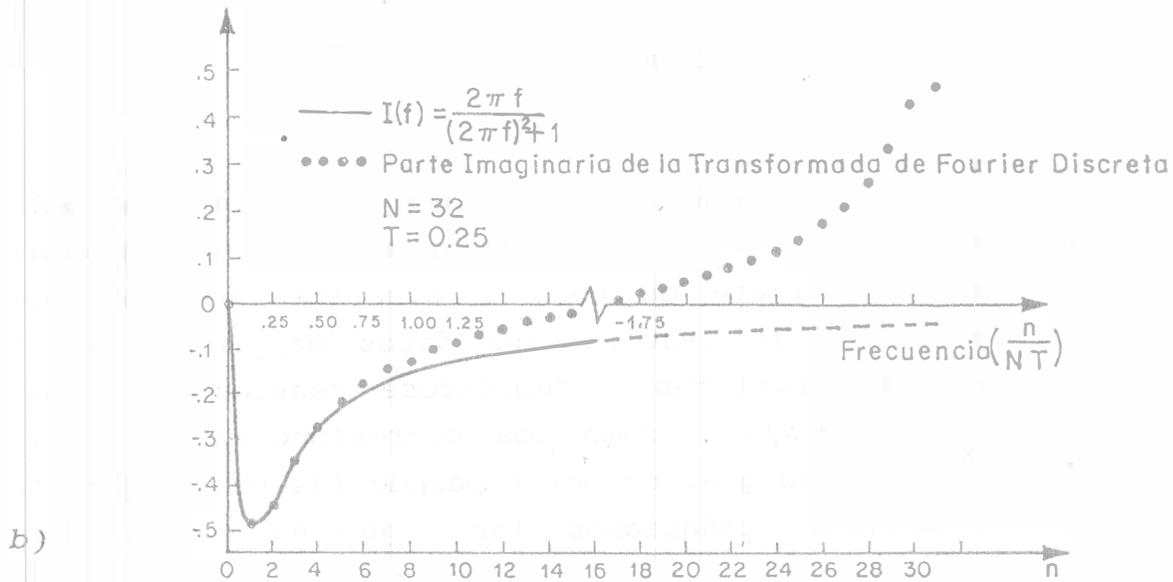
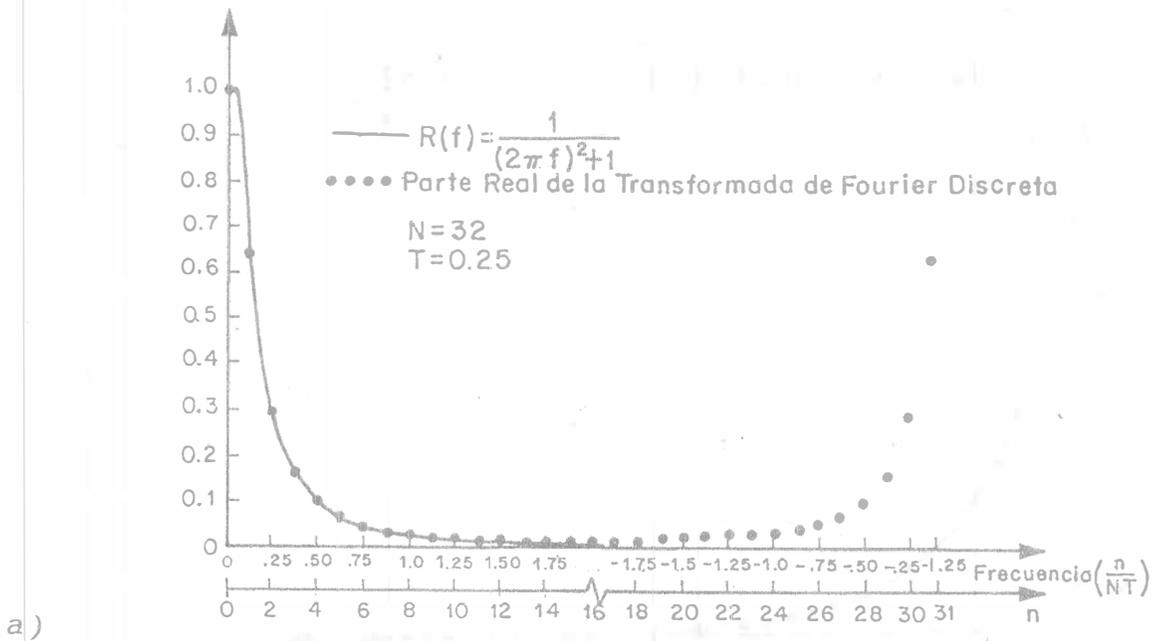


Figura 6.11

En la figura 6.12 se muestra la parte real e imaginaria de la transformada continua de la función exponencial e^{-t} , en donde se considera este efecto de la salida de los datos transformados, que es la misma forma en que debemos acomodarlos para obtener la transformada discreta de Fourier inversa.

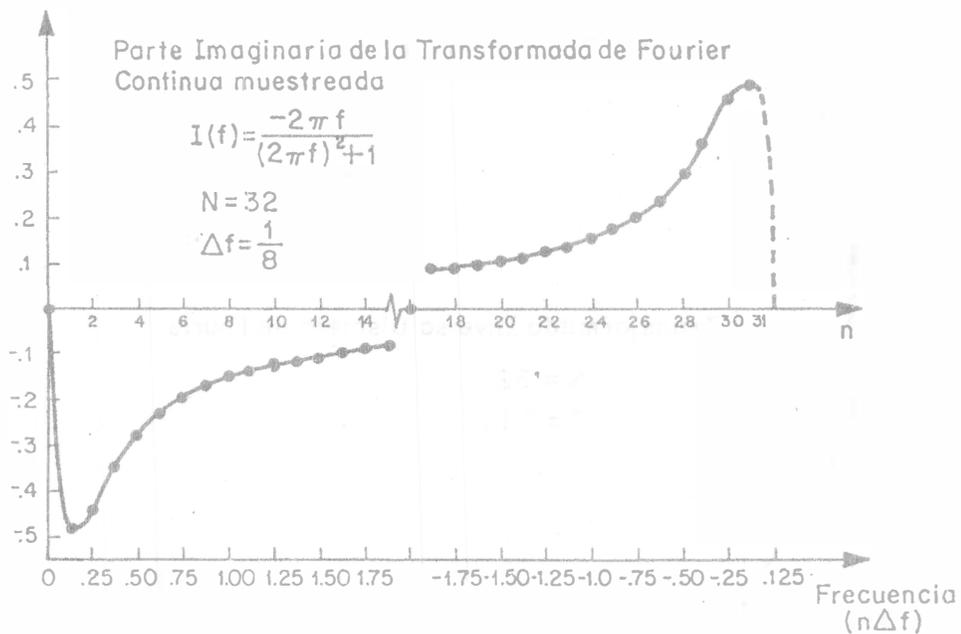
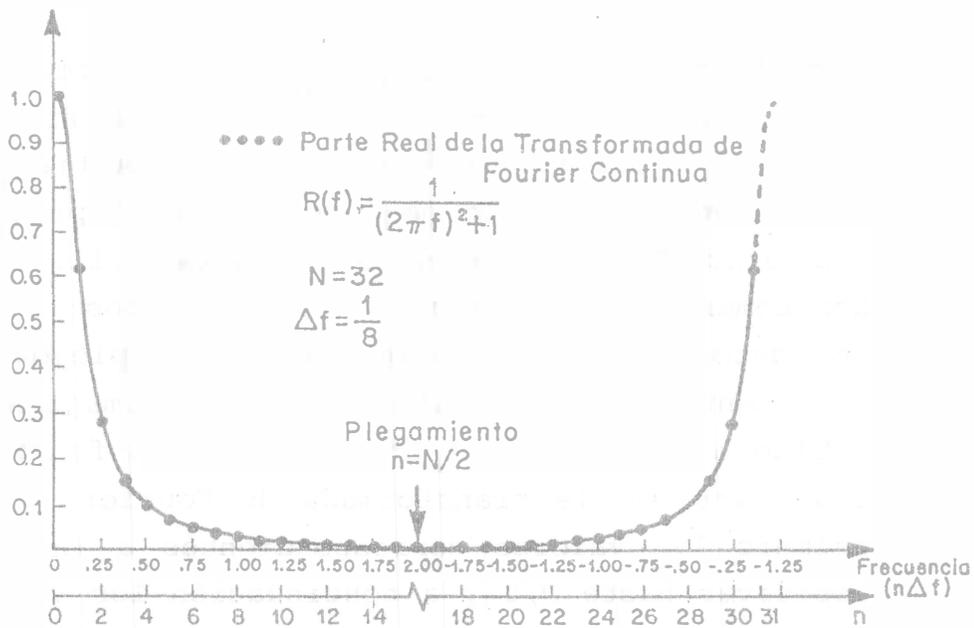


Figura 6.12

6.4.2 Aplicación de la transformada discreta de Fourier inversa

Para obtener la transformada de Fourier inversa se deben considerar dos tipos de casos. Cuando los datos de entrada son

datos a partir de una función continua en las frecuencias y a continuación discretizados, como es el caso en la figura 6.12, o cuando tenemos datos discretos provenientes de una transformada de Fourier discreta y en la que sólo se desea hacer el proceso inverso para los datos discretos ya obtenidos (figura 6.11). Para ambos casos, se deben tomar en cuenta los siguientes puntos:

- 1) Los datos deben darse como valores complejos, es decir, que cuenten con una parte real y otra imaginaria.
- 2) Debido nuevamente a la simetría de las funciones real e imaginaria de la transformada de Fourier, se deben dar primero los valores correspondientes a las frecuencias positivas hasta $N/2$ y a continuación los valores de las frecuencias negativas, de manera que se comporten como un espejo después de la muestra $N/2$ para la parte real, y como un espejo girado para la parte imaginaria, por lo que debemos además cambiar de signo a partir de la $N/2$ muestra (figura 6.12).

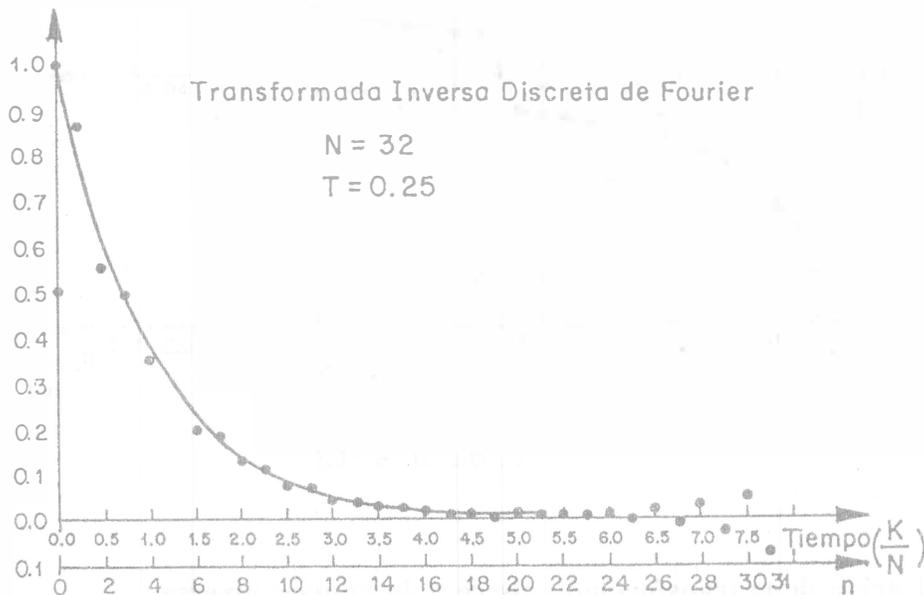


Figura 6.13

A continuación se realiza el cálculo de la transformada inversa discreta de Fourier mediante la ecuación

$$h(kT) = \Delta f \sum_{n=0}^{N-1} [R(n\Delta f) + iI(n\Delta f)] e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.60$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

donde Δf es el intervalo de muestreo en las frecuencias, el cual es importante para obtener la transformada inversa discreta de Fourier, ya que de él depende la aproximación que tenga la transformada inversa del espectro con la función continua en el dominio del tiempo (figura 6.13).

En la figura 6.14 se muestra el registro de una onda sísmica. La quinta señal de arriba hacia abajo fue discretizada y transformada, y su espectro de amplitudes se muestra en la figura 6.15, en donde se puede observar la frecuencia de corte en la salida.

ESTACION TEACALCO

Fecha: 12 oct. 86
Tiro horizontal (lado derecho)
500 mseg
Dirección WE
para obtener frecuencia de
amortiguamiento

Offset 50 cm.
3 geofonos cada 6 m.
Trazas importantes 3-6.
Ganancia 36.
Amplitud máx.
LP F_c 30 db.

240

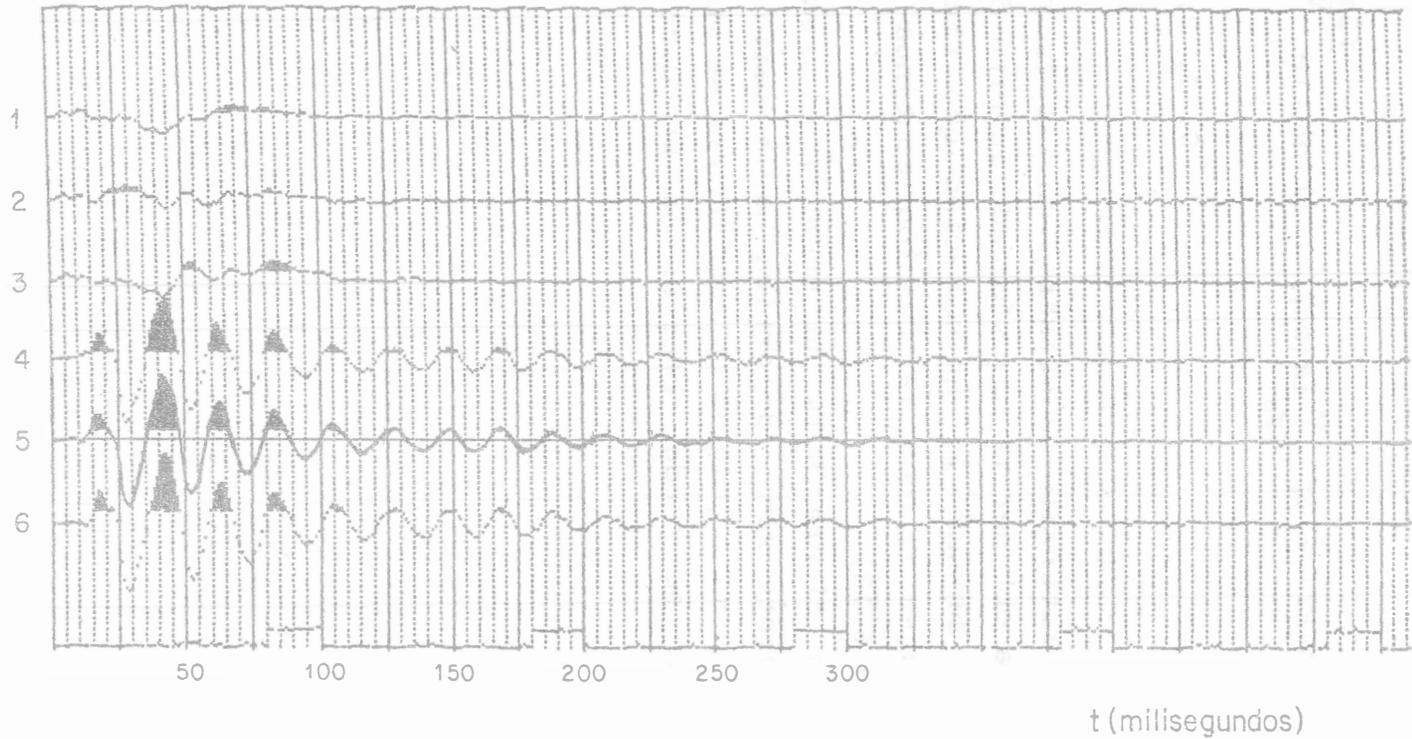


Figura 6.14

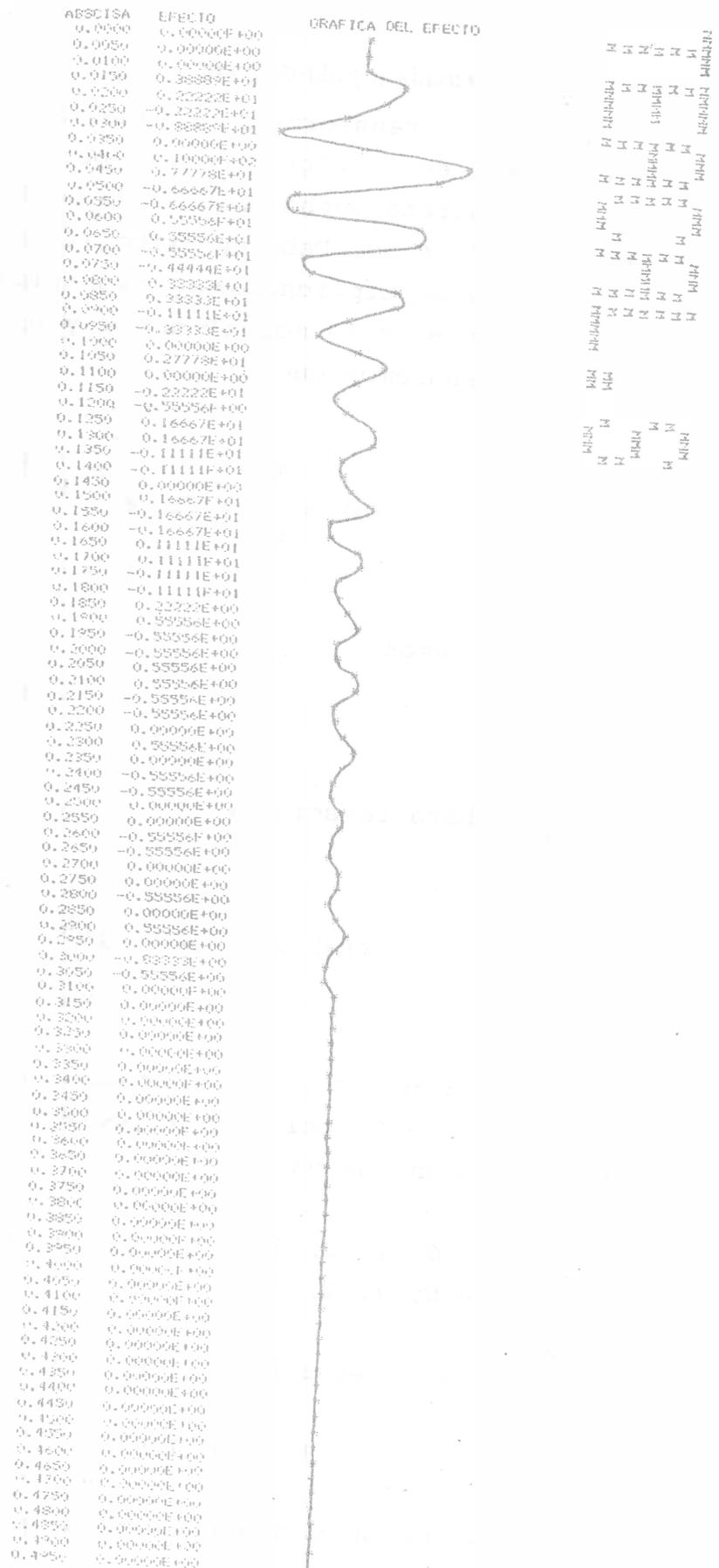
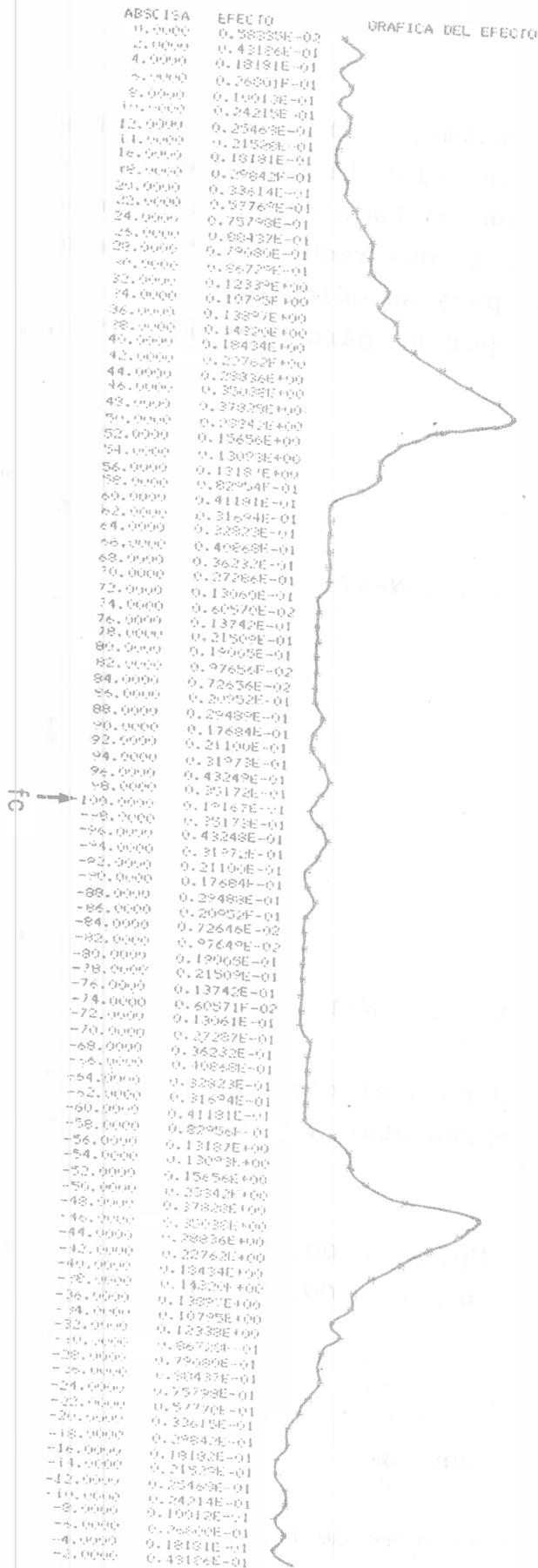


Figura 6.15

6.4.3 Transformada rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier, FFT (*Fast Fourier Transform*), es un algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta mucho más rápido de lo que se hace cuando se emplea la expresión 6.59. Debe su éxito al hecho de que reduce el número de adiciones y multiplicaciones requeridas para su cálculo.

Si sustituimos kT por k y n/NT por n , para simplificar la notación tendremos que:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-\frac{i2\pi kn}{N}} \quad 6.61$$

$n = 0, 1, \dots, N-1.$

y si calculamos

$$W = e^{-\frac{i2\pi}{N}} \quad 6.62$$

podemos ahora reescribir

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) W^{nk} \quad 6.63$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$

si decimos que $N = 2^\gamma$ y desarrollamos para el caso de que $N = 4$, entonces $\gamma = 2$, por lo que podremos representar k y n como números binarios con dos valores.

$\rightarrow N-1 = 4-1$

$k = 0, 1, 2, 3$	ó	$k = (k_1, k_0) = 00, 01, 10, 11$
$n = 0, 1, 2, 3$	ó	$n = (n_1, n_0) = 00, 01, 10, 11$

otra forma de escribir k y n es

$\hookrightarrow N-1 = 4-1$

$k = 2k_1 + k_0$	$n = 2n_1 + n_0$
------------------	------------------

6.64

$2(0)+0=0$
 $2(0)+1=1$
 $2(1)+0=2$
 $2(1)+1=3$

donde k_0, k_1, n_0 y n_1 pueden tomar sólo valores de 0 y 1.

Ahora nuestra ecuación 6.63, para el caso de $N = 4$, se puede reescribir como

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} \quad 6.65$$

donde

$$\begin{aligned} W^{(2n_1+n_0)(2k_1+k_0)} &= W^{(2n_1+n_0)2k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= [W^{4n_1k_1}] W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \\ &= W^{2n_0k_1} W^{(2n_1+n_0)k_0} \end{aligned} \quad 6.66$$

ya que

$$[W^{4n_1k_1}] = [W^4]^{n_1k_1} = [e^{-i2\pi/4}]^{n_1k_1} = 1 \quad 6.67$$

la ecuación 6.65 puede escribirse como

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \right] W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad 6.68$$

esta ecuación representa el fundamento del algoritmo de FFT.

Consideremos ahora cada una de las sumatorias de manera individual. Observemos primero lo que está dentro del paréntesis, para cuando la sumatoria exterior toma valores de n_0 y k_0

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0k_1} \quad 6.69$$

y al desarrollar esta ecuación,

$$\text{Para } n_0 = 0, k_0 = 0$$

$$x_1(0,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^0$$

$$\text{Para } n_0 = 0, k_0 = 1$$

$$x_1(0,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^0$$

$$\text{Para } n_0 = 1, k_0 = 0$$

$$x_1(1,0) = x_0(0,0) + x_0(1,0)W^2$$

$$\text{Para } n_0 = 1, k_0 = 1$$

$$x_1(1,1) = x_0(0,1) + x_0(1,1)W^2$$

6.70

la que podemos reescribir en su forma matricial como

$$\begin{pmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(0,0) \\ x_0(0,1) \\ x_0(1,0) \\ x_0(1,1) \end{pmatrix}$$

6.71

De manera similar, podemos reescribir la sumatoria externa de la ecuación 6.68 como

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0}$$

6.72

que al desarrollar la ecuación

$$\text{Para } n_0 = 0, n_1 = 0$$

$$x_2(0,0) = x_1(0,0) + x_1(1,0)W^0$$

$$\text{Para } n_0 = 0, n_1 = 1$$

$$x_2(0,1) = x_1(0,0) + x_1(0,1)W^2$$

$$\text{Para } n_0 = 1, n_1 = 0$$

$$x_2(1,0) = x_1(1,0) + x_1(1,1)W^1$$

$$\text{Para } n_0 = 1, n_1 = 1$$

$$x_2(1,1) = x_1(1,0) + x_1(1,1)W^3$$

6.73

cuya matriz quedará como

$$\begin{pmatrix} x_2(0,0) \\ x_2(0,1) \\ x_2(1,0) \\ x_2(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0,0) \\ x_1(0,1) \\ x_1(1,0) \\ x_1(1,1) \end{pmatrix} \quad 6.74$$

De las ecuaciones 6.68 y 6.72, llegamos a la transformada

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1) \quad 6.75$$

Esto es, de las ecuaciones 6.69, 6.72 y 6.75, obtenemos que

$$x_1(n_0, k_0) = \sum_{k_1=0}^1 x_0(k_1, k_0) W^{2n_0 k_1}$$

$$x_2(n_0, n_1) = \sum_{k_0=0}^1 x_1(n_0, k_0) W^{(2n_1+n_0)k_0} \quad 6.76$$

$$X(n_1, n_0) = x_2(n_0, n_1)$$

El conjunto de ecuaciones de 6.76 representa el algoritmo original de Cooley-Turkey de la transformada rápida de Fourier de FFT para $N = 4$. Estas ecuaciones son llamadas *recursivas*, ya que la segunda se genera en términos de la anterior.

Si se hace extensivo este método, el algoritmo de Cooley-Turkey para $N = 2^\gamma$ se representará como

$$X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2}, \dots, n_0) = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) \cdot$$

$$\cdot (W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})} W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-1}k_{\gamma-1}}) \cdot \dots \cdot$$

$$\cdot (W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)k_0}) \quad 6.77$$

y en donde las ecuaciones recursivas están definidas por

$$\begin{aligned}
 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-1}=0}^1 x_0(k_{\gamma-1}, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{2^{\gamma-1}(n_0 k_{\gamma-1})} \\
 x_2(n_0, n_1, k_{\gamma-3}, \dots, k_0) &= \sum_{k_{\gamma-2}=0}^1 x_1(n_0, k_{\gamma-2}, \dots, k_0) W^{(2n_1+n_0)2^{\gamma-2}k_{\gamma-2}} \\
 &\vdots \\
 x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1}) &= \sum_{k_0=0}^1 x_{\gamma-1}(n_0, n_1, \dots, k_0) W^{(2^{\gamma-1}n_{\gamma-1} + 2^{\gamma-2}n_{\gamma-2} + \dots + n_0)k_0} \\
 X(n_{\gamma-1}, n_{\gamma-2} + \dots + n_0) &= x_\gamma(n_0, n_1, \dots, n_{\gamma-1})
 \end{aligned}$$

6.78

este conjunto de ecuaciones recursivas representa la forma en que Cooley-Turkey definieron la FFT para $N = 2^\gamma$.

El interés de este método de cálculo es su rapidez. Pues si evaluamos el número de multiplicaciones que demanda una transformada de Fourier discreta, debemos hacer N multiplicaciones para cada índice, o sea, un total $N \times N$ multiplicaciones.

Sin embargo, en la FFT existen γ ecuaciones de sumatoria, cada una de las cuales representa N ecuaciones. Cada una de estas ecuaciones contiene dos multiplicaciones complejas, pero una de ellas es por 1. Esto se debe a que la primera multiplicación es de la forma

$$W^{k_{\gamma-1}}$$

donde $k_{\gamma-1} = 0$. Por lo que sólo se requieren $N \times \gamma$ multiplicaciones.

Por otra parte, se puede probar que si

$$n = p + N/2$$

6.79

donde p varía entre 0 y $N/2-1$, entonces $W^p = -W^{p+N/2}$, por lo que estos datos se pueden manejar en un mismo lugar de memoria y de manera simultánea, por lo que el número de multiplicaciones complejas se puede reducir en otro factor de 2, y por lo tanto se realizan $N \times \gamma / 2$ multiplicaciones complejas. De manera similar, se puede razonar que se realizan $N \times \gamma$ sumas complejas.

En el caso de que el número de puntos no sea una potencia de 2, podemos aumentar con ceros el número de puntos hasta llegar a la siguiente potencia o formular el algoritmo de la transformada rápida de Fourier para otra base, siguiendo un proceso similar (véase Brigham, 1974).

6.5 CONVOLUCIÓN DISCRETA

La convolución discreta sigue los mismos pasos que la continua, realizando la secuencia de *plegamiento, desplazamiento, multiplicación e integración*, sólo que este último paso, por tratarse de funciones de tipo discreto se convierte en *sumatoria*, en donde la diferencial se toma como el intervalo de muestreo T .

Por lo tanto, la convolución discreta se define como

$$y(kT) = T \sum_{i=0}^{N-1} x(iT) h[(k-i)T] \quad 6.80$$

que se puede representar como

$$y(kT) = x(kT) * h(kT) \quad 6.81$$

Para que se pueda realizar la convolución es necesario que se tomen en consideración los siguientes puntos:

- 1) El intervalo de muestreo de las dos funciones por convolucionar debe ser el mismo, pues es el usado para hacer el desplazamiento punto por punto.
- 2) Cuando exista una discontinuidad en la o las funciones por convolucionar, el valor asignado a la función en el punto de discontinuidad es el valor medio de la discontinuidad.

6.5.1 Convolución discreta de funciones de duración finita

Como se puede observar en la figura 6.16, si deseamos que la función discreta se aproxime a la continua es necesario:

- 1) Muestrear las dos funciones $x(t)$ y $h(t)$ con un intervalo T , por lo cual se asume que las dos funciones son periódicas con un NT (según lo visto en el *teorema del muestreo*) para cada función período.
- 2) Escoger el período para la convolución lo suficientemente grande para las dos funciones, de manera que no exista traslape en la función (figuras 6.16b y 6.16c), de acuerdo con la relación

$$N = P + Q - 1 \qquad 6.82$$

donde P y Q representan el número de muestras de cada función. Para el ejemplo $Q = 6$ y $P = 6$, por lo tanto, $N = 11$, ya que si se escogen más muestras (figura 6.16d) no existe traslape, pero se obtienen más muestras de lo necesario, lo que implica mayor costo y trabajo.

- 3) Si se desea obtener una aproximación mejor a la convolución continua, el intervalo de muestreo T que se escoja deberá ser muy pequeño (figura 6.16f).

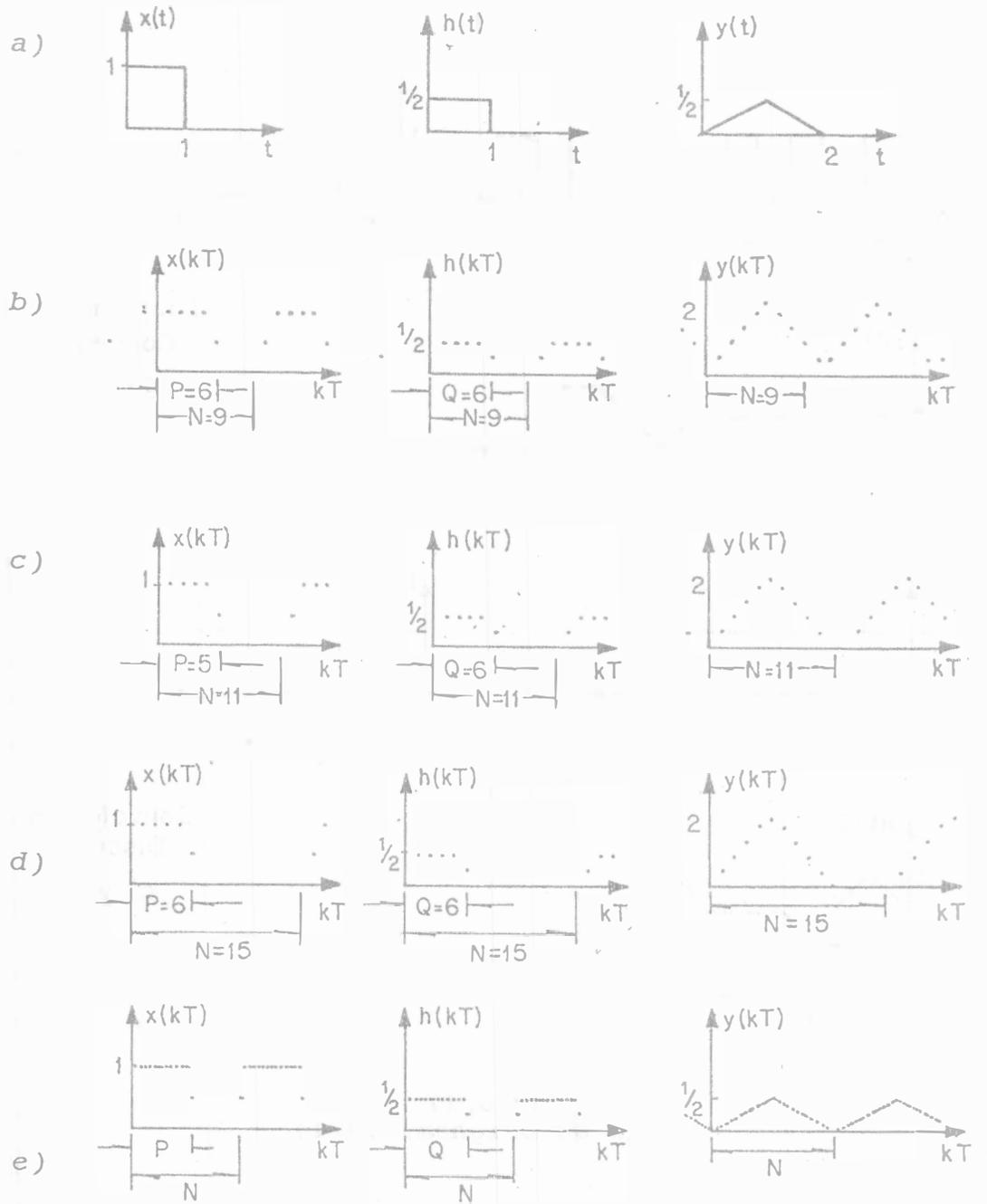


Figura 6.16
(Tomado de Brigham, 1974)

6.5.2 Convolución discreta de una función finita con una función infinita

Como se puede observar en figura 6.17, cuando convolucionamos una función de duración infinita $x(t)$ con una función de duración finita $h(t)$, se debe efectuar lo siguiente:

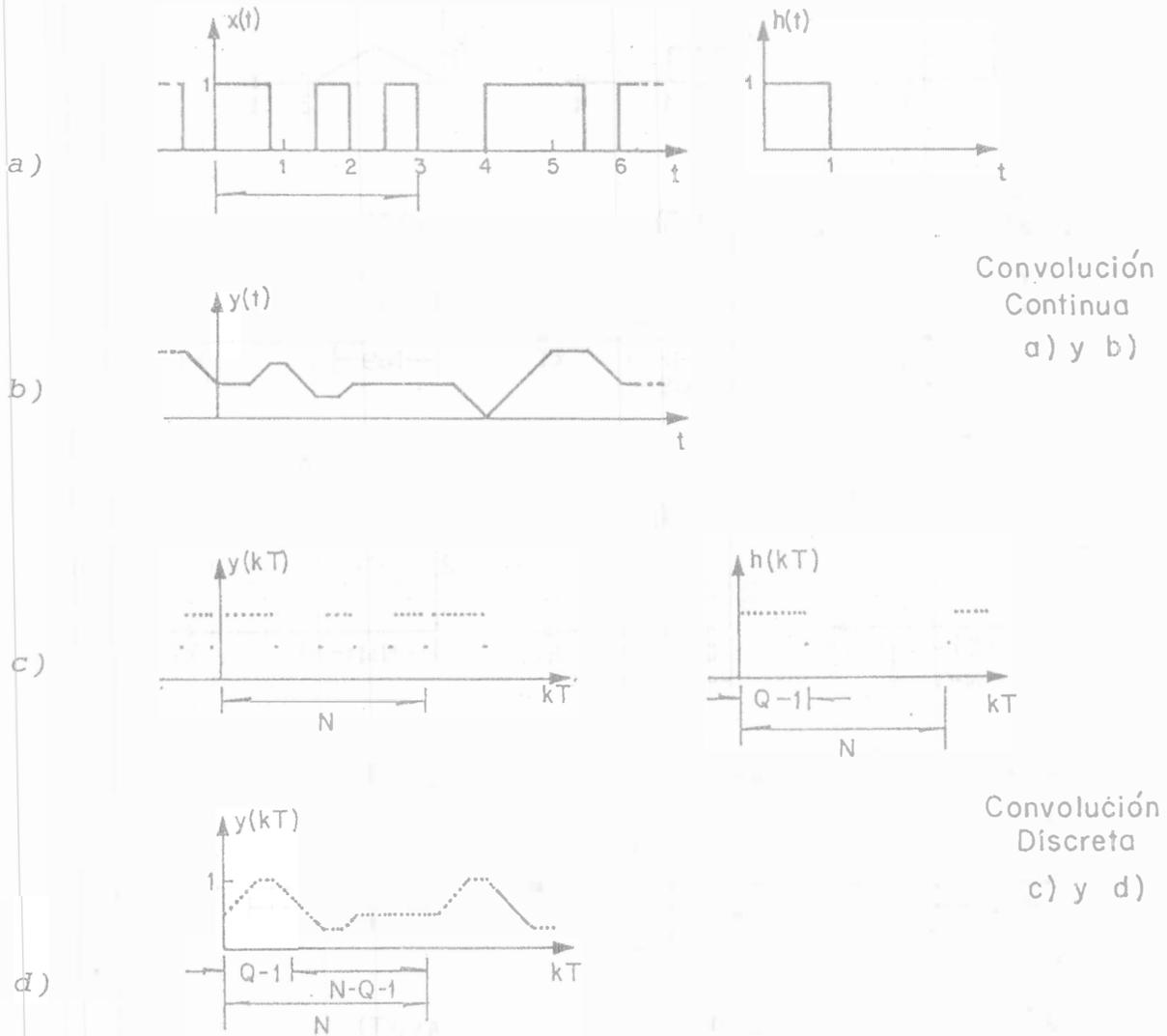


Figura 6.17
(Tomada de Brigham, 1974)

- 1) Debido a que la función $x(t)$ es infinita, debemos cortarla en algún punto, tomando sólo los valores correspondientes al período NT (figura 6.15a).

- 2) Muestrear a las funciones $x(t)$ y $h(t)$ con el mismo intervalo de muestreo T , por lo que se considera que las dos funciones son periódicas con un período NT (figura 6.17c) para cada una de ellas.
- 3) Al realizar la convolución, debida a la periodicidad que se adquiere en el muestreo, se produce lo que se conoce como *efecto de frontera*. Este efecto se puede observar al comparar la figura 6.17d con la 6.17b, donde el resultado de la convolución concuerda razonablemente bien con la discreta, excepto en los $Q-1$ valores de las primeras muestras. Este efecto se manifiesta en la frontera izquierda de las N muestras.

Una forma rápida de calcular la convolución discreta de dos funciones, sin el uso de programas de cómputo, es hacer una tabla de valores como se plantea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1

Para las funciones $x(t)$ y $h(t)$ de la figura 6.18 y cuyos valores muestreados $x(kT)$ y $h(kT)$ que se dan en la tabla 6.1, para un intervalo de muestreo de $T = 0.25$.

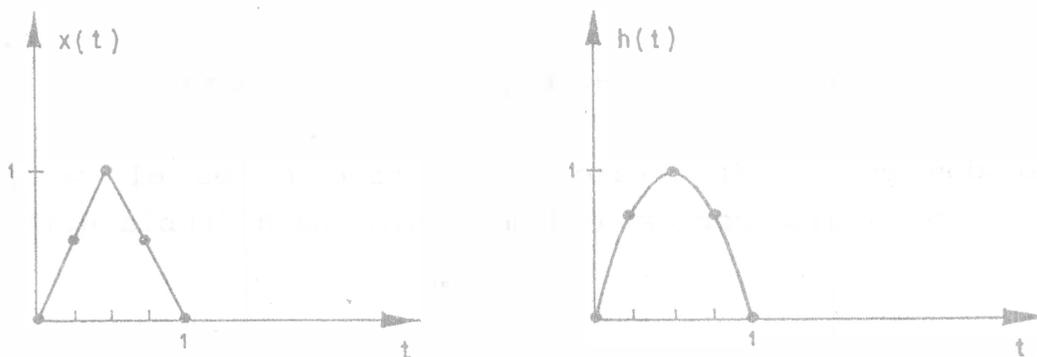


Figura 6.18

k	kT	$x(kT)$	$h(kT)$	$y(kT)$
0	0	0	0	0
1	0.25	1/2	0.7071	0
2	0.5	1	1	0.088
3	0.75	1/2	0.7071	0.301
4	1	0	0	0.426
5	1.25	0	0	0.301
6	1.5	0	0	0.088
7	1.75	0	0	0
8	2	0	0	0

Tabla 6.1

se desea obtener la convolución, que podemos efectuar mediante un arreglo matricial a partir de los valores muestreados.

$x(kT)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$h(kt)$	0	1/2	1	1/2	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.7071	0	.353	.707	.353	0	0	0	0	0
1	0	1/2	1	1/2	0	0	0	0	0
0.7071	0	.353	.707	.353	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A continuación se trazan unas líneas diagonales a cada uno de los elementos. La suma de los valores de cada diagonal multiplicados por el intervalo de muestreo T , es el valor de la convolución para cada correspondiente valor de k (tabla 6.1).

Ejemplo 6.2

Para las funciones $x(t)$ y $h(t)$ de la figura 6.19 y cuyos valores muestreados $x(kT)$ y $h(kT)$ que se dan en la tabla 6.2, para un intervalo de muestreo $T = 0.25$.

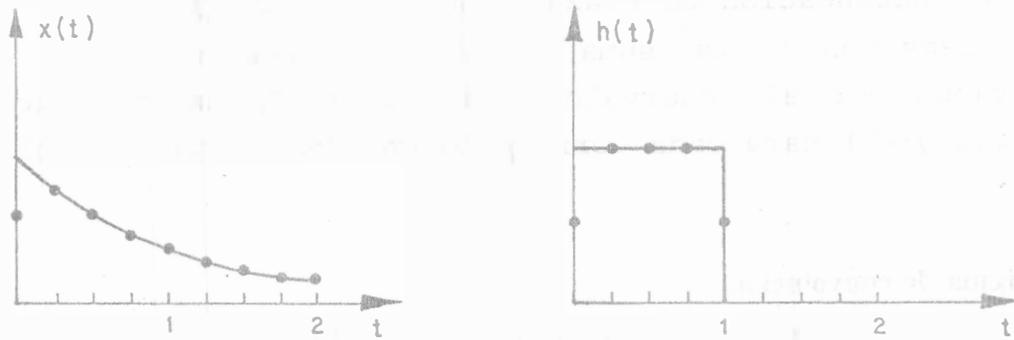


Figura 6.19

k	kT	$x(kT)$	$h(kT)$	$y(kT)$
0	0	0.5	0.5	0.0625
1	0.25	0.7788	1	0.2223
2	0.5	0.6065	1	0.3955
3	0.75	0.4723	1	0.5303
4	1	0.3678	0.5	0.5729
5	1.25	0.2865	0	0.4948
6	1.5	0.2231	0	0.3853
7	1.75	0.1737	0	0.3001
8	2	0.1353	0	0.2337

Tabla 6.2

se desea obtener la convolución, que podemos efectuar mediante un arreglo matricial a partir de los valores muestreados.

$x(kT)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$h(kt)$	0.5	.778	.606	.472	.367	.286	.223	.173	.135
0.5	0.25	.389	.303	.236	.183	.143	.111	.086	.067
1	0.5	.778	.606	.472	.367	.286	.223	.173	.135
1	0.5	.778	.606	.472	.367	.286	.223	.173	.135
1	0.5	.778	.606	.472	.367	.286	.223	.173	.135
0.5	0.25	.389	.303	.236	.183	.143	.111	.086	.067
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A continuación se trazan unas líneas diagonales a cada uno de los elementos. La suma de los valores de cada diagonal multiplicados por el intervalo de muestreo T , es el valor de la convolución $y(kT)$ para cada correspondiente valor de k (tabla 6.2).

6.5.3 Teorema de convolución

Al igual que en la convolución continua, se puede demostrar que la convolución discreta se relaciona con la transformada de Fourier como

$$T \sum_{i=0}^{N-1} x(iT) h[(k-i)T] \Leftrightarrow X(n/NT) H(n/NT) \quad 6.83$$

lo que nos indica que *la convolución discreta en el dominio del tiempo de dos funciones es equivalente a la multiplicación de la transformada de Fourier discreta en el dominio de la frecuencia de estas funciones.*

Debido a que la transformada de Fourier discreta está *definida* sólo para funciones periódicas, se considera que las funciones por convolucionar en el tiempo son periódicas; por lo tanto, la convolución discreta requiere que ambas funciones sean discretas y consideradas como periódicas.

6.5.4 Convolución cíclica

Lo mismo que para la convolución continua, la convolución discreta se puede obtener a partir de las transformadas de Fourier discretas de las funciones involucradas aplicando el *teorema de convolución*.

Debido a las características de la transformada de Fourier discreta, cuando obtenemos la convolución discreta a través de la transformada de Fourier discreta, la transformada inversa de la multiplicación de las transformadas discretas de las funciones involucradas será una función de tipo periódico con N muestras. En este caso se puede observar con claridad la periodicidad de la convolución, por lo que se le llamará *convolución cíclica*. Y es en

este tipo de proceso en donde queda de manifiesto el efecto de frontera y enmascaramiento de la convolución discreta.

6.6 CORRELACIÓN DISCRETA

La correlación discreta difiere de la convolución en que no existe el plegamiento. Por lo que sólo se efectúa el desplazamiento, la multiplicación y la sumatoria, pero las consideraciones que se tienen que hacer para realizar esta operación son exactamente las mismas que para el caso de la convolución.

La correlación discreta se define como

$$r_x(kT) = T \sum_{i=0}^{N-1} x(iT) h[(k+i)T] \quad 6.84$$

y lo mismo que para la convolución existe una manera fácil de realizarla. Sólo que tenemos que observar cómo colocar la función que se desplazará en la tabla.

Ejemplo 6.3

Para las funciones $x(t)$ y $h(t)$ de la figura 6.20 y cuyos valores muestreados $x(kT)$ y $h(kT)$ que se dan en la tabla 6.3, para un intervalo de muestreo de $T = 0.25$.

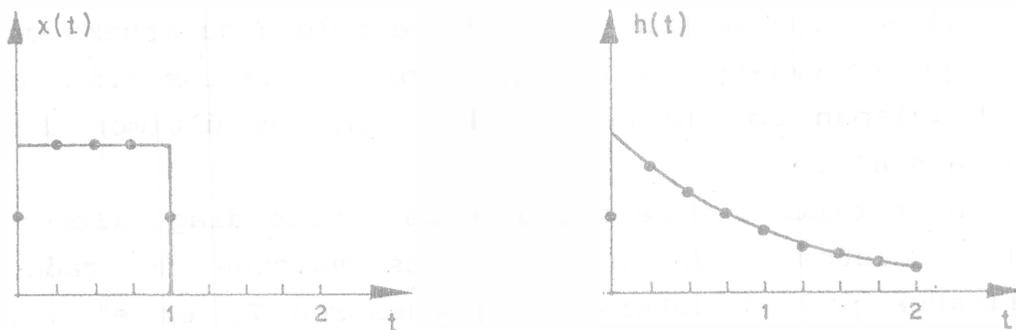


Figura 6.20

k	kT	$\alpha(kT)$	$h(kT)$
0	0	0.5	0.5
1	0.25	1	0.7788
2	0.5	1	0.6065
3	0.75	1	0.4723
4	1	0.5	0.3678
5	1.25	0	0.2865
6	1.5	0	0.2231
7	1.75	0	0.1737
8	2	0	0.1353

Tabla 6.3

se desea obtener la correlación, que podemos efectuar mediante un arreglo matricial a partir de los valores muestreados.

$\alpha(kT) \backslash h(kt)$	$k=-8$	$k=-7$	$k=-6$	$k=-5$	$k=-4$	$k=-3$	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$
$h(kt)$	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0	0
.135	.067	.135	.135	.135	.067	0	0	0	0
.173	.086	.173	.173	.173	.086	0	0	0	0
.223	.111	.223	.223	.223	.111	0	0	0	0
.286	.143	.286	.286	.286	.143	0	0	0	0
.367	.183	.367	.367	.367	.183	0	0	0	0
.472	.236	.472	.472	.472	.236	0	0	0	0
.606	.303	.606	.606	.606	.303	0	0	0	0
.778	.389	.778	.778	.778	.389	0	0	0	0
0.5	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0	0	0	0

k=1
k=2
k=3
k=4
k=5
k=6
k=7
k=8

Nótese que la función $h(kT)$ se coloca de manera descendente debido a que no existe plegamiento, por lo que los primeros valores que se traslapan con la señal $\alpha(kT)$ son los últimos de la señal desplazada $h(kT)$.

A continuación se trazan unas líneas diagonales a cada uno de los elementos. La suma de los valores de cada diagonal multiplicados por el intervalo de muestreo T , es el valor de la correlación $\alpha(kT)$ para cada correspondiente valor de k (tabla 6.4).

k	kT	$\alpha_c(kT)$
-8	-2	0.016
-7	-1.75	0.055
-6	-1.5	0.104
-5	-1.25	0.168
-4	-1	0.233
-3	-0.75	0.299
-2	-0.5	0.384
-1	-0.25	0.494
0	0	0.572
1	0.25	0.530
2	0.5	0.395
3	0.75	0.222
4	1	0.625
5	1.25	0
6	1.5	0
7	1.75	0
8	2	0

Tabla 6.4

6.6.1 Teorema de correlación discreta

El teorema de correlación discreta nos dice que la correlación discreta en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación del conjugado de la transformada de Fourier discreta de la primera función por la transformada de Fourier discreta de la segunda función. Este par transformado se puede expresar como

$$T \sum_{i=0}^{N-1} x(iT) h[(k+i)T] \Leftrightarrow X^*(n/NT) H(n/NT) \quad 6.85$$

6.6.2 Correlación cíclica

La correlación cíclica es la que se obtiene a partir del teorema de correlación. Y debido a que tiene el mismo proceso que la convolución, considerando solamente que se trata del conjugado de la transformada de una de las funciones, las reglas para su desarrollo son las mismas que las de la convolución.

6.6.3 Transformada bidimensional de Fourier discreta

Como se explicó en el capítulo 3 (Tabla 3.1), la transformada de Fourier puede efectuarse en el dominio del tiempo, pero también en el dominio del espacio, correspondiendo a esta transformación el dominio del número de onda.

6.7 APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DISCRETA A DATOS BIDIMENSIONALES

Cuando tenemos datos discretos en arreglos bidimensionales, ya sea en el espacio o en el tiempo, o como una combinación de ambos dominios, la transformada bidimensional discreta al igual que la continua debe efectuarse primero en una dirección y luego en otra. Para dos variables espaciales, la transformada bidimensional de Fourier discreta quedará definida como

$$\mathcal{F}(n\Delta_x, m\Delta_y) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} a(k\Delta_x, l\Delta_y) e^{-i2\pi\left(\frac{nk}{N} + \frac{ml}{M}\right) \Delta_x \Delta_y}$$

Si tenemos una matriz "A" de datos de la cual deseamos obtener su transformada de Fourier, lo primero que se tiene que hacer es considerar a cada "renglón" como si fuera una señal independiente y obtener la transformada para

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$$

a continuación para

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots$$

y así sucesivamente.

Los resultados obtenidos de esta transformación deben quedar posicionados en otra matriz "B" transformada

$$b_{11}, b_{12}, b_{13}, \dots$$

así como

$$b_{21}, b_{22}, b_{23}, \dots \text{ etc.}$$

Una vez aplicado este proceso en todos los renglones, se debe hacer una nueva transformación a los datos, pero ahora de la matriz B, considerando ahora a las columnas como el vector correspondiente de la señal a transformar

$$\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

de manera que la transformación se realice en las dos direcciones, es decir, primero sobre los renglones de la matriz original y luego sobre las columnas de los datos obtenidos en la primera transformación. La matriz de datos obtenida después de este proceso será nuestra señal transformada.

El proceso de transformación puede hacerse considerando primero a las columnas y luego a los renglones siempre y cuando se aplique en ambas direcciones.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtenga la transformada de Fourier continua $H(f)$ de la función:

$$h(t) = e^{-2t} \quad ; \quad t \geq 0$$

Tabule y grafique las partes real e imaginaria de la función $H(f)$, así como los espectros continuos de amplitud y de fase.

2. Elabore un programa de computadora para obtener la transformada de Fourier discreta. El programa debe presentar los datos de salida de la siguiente forma:

TRANSFORMADA DISCRETA DIRECTA

Número de Muestra	Frecuencia	Parte Real	Parte Imaginaria	Espectro de Amplitud	Espectro de Fase
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA

Número de Muestra	Tiempo	Parte Real	Parte Imaginaria
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

3. Muestree adecuadamente la función $h(t)$ y obtenga su transformada discreta directa, aplicando el programa de computadora. Grafique los resultados obtenidos para las partes real e imaginaria, y los espectros discretos de amplitud y de fase. Compare estos resultados con los obtenidos en el inciso 1), explique la causa de las diferencias y sugiera la forma para mejorar los resultados.

4. Muestree adecuadamente la función continua $H(f)$ y obtenga su transformada discreta inversa, aplicando el programa de computadora. Grafique los resultados obtenidos para las partes real e imaginaria. Compare estos resultados con los correspondientes valores de la función continua $h(t)$, explique la causa de las diferencias y sugiera la forma para mejorar los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

- BRIGHAM, E.O. *The Fast Fourier Transform*. Estados Unidos, Prentice-Hall, 1974, 251 pp.
- CHURCHILL, R.V. *Series de Fourier y problemas de contorno*. 2a., México, McGraw-Hill de México, 1996, 256 pp.
- HSU, H.P. *Análisis de Fourier*. Colombia, Colección del Fondo Educativo Interamericano, 1973, 274 pp.
- LIU, C.L. y J.W.S. LIU. *Linear System Analysis*. Japón, International Student Edition, McGraw-Hill, 1975, 467 pp.
- SCHWARTZ, M. y L. SHAW. *Signal Processing, Discrete Spectral Analysis Detection and Estimation*. Japón, International Student Edition, McGraw-Hill, 1975, 396 pp.

Esta obra se terminó de imprimir
en marzo de 2001
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 300 ejemplares
más sobrantes de reposición.