



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA CIVIL – GEOTECNIA

INTERACCIÓN SUELO-HILERAS DE PILOTES SOMETIDAS A CARGAS
LATERALES POR SISMO

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
DAMIÁN VITAL VILLASEÑOR

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RIGOBERTO RIVERA CONSTANTINO
CODIRECTOR DE TESIS:
M. EN I. CARMELINO ZEA CONSTANTINO

JURADO ASIGNADO:

Presidente: M.I. Agustín Demeneghi Colina
Secretario: M.I. Germán López Rincón
Vocal: Dr. Rigoberto Rivera Constantino
1^{er.} Suplente: M.I. Carmelino Zea Constantino
2^{do.} Suplente: M.I. Octavio García Domínguez

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Rigoberto Rivera Constantino

FIRMA

(Segunda hoja)

A mis padres

Rosy y Juan

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada con mucho cariño a mis padres. A mi mamá, la persona que más admiro y amo, por todo su esfuerzo y amor incondicional. A mi papá por ser un ejemplo de esfuerzo y dedicación. Siempre estaré en deuda con ustedes,

A mi hermano Alan,

A Ame por ser mi motivación. Te amo,

A mis abuelos:

Luchita

Agustín

Fina

Bibi

A mis tías Ita, Geno, Luchita y Lili,

A mis tíos Javier, Jesús, Jorge, Adrián, Alejandro, Enrique y Ricardo,

A mis compañeros y amigos de la maestría Armando Juárez y David Villafuerte,

Y con especial cariño para Martha Gutiérrez Cera.



Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de México por darme la oportunidad de realizar estudios de Posgrado.

Al Dr. Rigoberto Rivera Constantino por el asesoramiento durante la realización de este trabajo y por ser un ejemplo en mi vida académica y profesional.

Al M.I. Germán López Rincón y al M.I. Carmelino Zea Constantino por su importante participación en la concepción de esta tesis.



ÍNDICE

	Página
RESUMEN	i
OBJETIVO	ii
ALCANCES	ii
1. INTRODUCCIÓN	1
2. ESTADO DEL ARTE	5
2.1 Análisis estático de pilotes ante carga lateral	5
2.1.1 <i>Análisis de reacción horizontal</i>	5
2.1.2 <i>Análisis no lineal (Curvas p-y)</i>	11
2.1.3 <i>Análisis elástico</i>	16
2.2 Análisis pseudoestático	19
2.3 Análisis dinámico de pilotes ante carga lateral	24
2.4 Métodos experimentales	25
2.5 Análisis de grupo de pilotes	27
2.5.1 <i>Análisis estático de grupos de pilotes</i>	27
2.5.2 <i>Análisis dinámico de grupos de pilotes</i>	31
2.6 Modelación numérica	32
3. METODOLOGÍA PROPUESTA	35
3.1 Respuesta sísmica del suelo en campo libre	36
3.2 Determinación de la ecuación matricial de desplazamientos horizontales, HEMAS	38
3.2.1 <i>Integración de la solución fundamental de Mindlin</i>	39
3.2.2 <i>Cálculo de los valores de influencia</i>	44
3.2.3 <i>Cálculo de la matriz de desplazamientos horizontales unitarios, $\bar{\delta}_{ji}$</i>	44
3.3 Determinación de la ecuación matricial de interacción horizontal, HEMIS	45
3.3.1 <i>Cálculo de la matriz de coeficientes, S_{ii}</i>	45
3.3.2 <i>Cálculo del vector de términos independientes, Δ_T</i>	46
3.4 Solución del sistema de ecuaciones	46
3.4.1 <i>Determinación de las reacciones, X_i</i>	47
3.5 Obtención de los diagramas de cortante y momento	47
4. CASO ESTUDIO	49



5. RESULTADOS	53
5.1 Respuesta sísmica de un pilote aislado	53
5.1.1 Cálculo de la ecuación matricial de desplazamientos horizontales, HEMAS	53
5.1.2 Determinación de la ecuación matricial de interacción horizontal, HEMIS	54
5.1.3 Solución del sistema de ecuaciones	56
5.1.4 Obtención de los diagramas de cortante y momento	58
5.2 Respuesta sísmica de una hilera de pilotes	59
5.2.1 Cálculo de la ecuación matricial de desplazamientos horizontales, HEMAS	59
5.2.2 Determinación de la ecuación matricial de interacción horizontal, HEMIS	59
5.2.3 Solución del sistema de ecuaciones	59
5.2.4 Obtención de los diagramas de cortante y momento	59
6. CONCLUSIONES	71
REFERENCIAS	73
ANEXOS	79
A.1. Descripción del software de análisis estructural empleado	81
A.2. Verificación de la metodología propuesta	85
A.3. Ejemplo simplificado de la metodología propuesta	87
A.4. Artículo presentado en la ICSMGE, 2017	97



RESUMEN

El problema de interacción suelo estructura ante cargas laterales en suelos blandos como los encontrados en la Ciudad de México ha sido resuelto para el caso de un pilote aislado siguiendo la metodología desarrollada por el Dr. Leonardo Zeevaert (1973, 1980), la cual considera al suelo como un medio elástico y a los pilotes como vigas apoyadas en resortes interactuantes. Se establece la compatibilidad de deformaciones en la interface suelo-pilote para determinar la configuración de desplazamientos y la distribución de las reacciones generadas por la acción de las fuerzas estáticas y dinámicas. En esta tesis se generaliza el procedimiento para el análisis interacción suelo estructura de un pilote aislado propuesto por Zeevaert, para el caso de hileras de pilotes sometidas a cargas laterales por sismo, considerando que se genera una interacción en la hilera de pilotes que no puede ser despreciada en el diseño de estos elementos estructurales.

En el análisis de interacción aquí realizado se determina la distribución de esfuerzos horizontales empleando la solución de Mindlin, con la cual se pueden obtener las influencias en cualquier punto de la masa de suelo considerada ésta como semi-infinita. De esta manera se puede realizar el análisis de interacción suelo-hileras de pilotes, a diferencia del procedimiento para calcular influencias de esfuerzos horizontales basado en el método de las imágenes de la carga, propuesto por Zeevaert (1973), en el cual dichas influencias sólo se pueden calcular de manera sencilla en un plano que pasa por el centroide del pilote, por lo que sólo es posible analizar un pilote aislado.

Se evalúan, además, los efectos de torsión generados por fuerzas sísmicas, fenómeno particularmente importante en los pilotes de esquina. La metodología aquí propuesta se aplica al caso de hileras de pilotes sometidas a fuerzas horizontales sísmicas y los resultados obtenidos, en términos de desplazamientos y reacciones, se comparan con los análisis de un pilote aislado, resaltándose la importancia de llevar a cabo el análisis de interacción suelo-hileras de pilotes.



OBJETIVO

Generalizar el procedimiento de análisis de interacción suelo-pilote aislado bajo cargas laterales sísmicas propuesto por Zeevaert (1973) al caso de hileras de pilotes, considerando la interacción que existe entre los pilotes que constituyen a la hilera, la cual no puede ser despreciada en el diseño estructural de estos elementos.

ALCANCES

Los alcances de ésta tesis incluyen: 1) La integración de la solución fundamental de Mindlin para carga concentrada horizontal, con el fin de obtener una expresión que permita conocer la distribución de esfuerzos horizontales de un área rectangular uniformemente cargada. 2) Desarrollar una nueva metodología que permita generalizar el análisis de interacción suelo-estructura de un pilote aislado (Zeevaert, 1973) al caso de una hilera de pilotes. 3) Tomar en cuenta los efectos de torsión generados por fuerzas sísmicas en cada uno de los pilotes que conforman la hilera de pilotes con especial énfasis en los pilotes de esquina. 4) Programar la metodología propuesta en el lenguaje Fortran, con el fin de aglutinar en un sólo programa de análisis, los módulos de cálculo que han desarrollado un grupo de profesores del Departamento de Geotecnia de la División de Ingenierías Civil y Geomática de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, para llevar a cabo los análisis de interacción suelo-cimiento.



1. INTRODUCCIÓN

Los pilotes han sido usados por el ser humano para cimentar estructuras en suelos con condiciones desfavorables desde épocas prehistóricas. Hasta finales del siglo XIX el diseño de este tipo de estructuras era totalmente empírico. Desde entonces, una gran cantidad de experiencias de campo, datos empíricos, metodologías analíticas y pruebas de laboratorio referentes al análisis del comportamiento de cimentaciones profundas, han sido documentadas en la literatura técnica. En los últimos años, la necesidad de predecir con mayor certidumbre el comportamiento de las cimentaciones profundas ha estimulado al ingeniero geotecnista a realizar investigación cada vez más sofisticada referente a la interacción suelo-pilote, lo que ha permitido tener un mejor entendimiento teórico de la relación entre los pilotes y el suelo que los rodea.

Es comúnmente aceptado, en la comunidad ingenieril a nivel mundial, que los pilotes representan una gran alternativa para cimentar grandes estructuras en suelos de poca resistencia y alta deformabilidad. En la actualidad existen un gran número de técnicas tanto experimentales como analíticas para evaluar el desempeño de pilotes sometidos a carga vertical. Sin embargo, existen pocas investigaciones referentes a la resistencia lateral de los pilotes durante un evento sísmico. Este tipo de análisis es de gran relevancia en el diseño de cimentaciones en ciudades densamente pobladas y de alta actividad sísmica, como lo es la ciudad de México.

Los pilotes que constituyen un sistema de cimentación pueden estar frecuentemente sujetos a fuerzas laterales y momentos no sólo por la acción sísmica sino por otras causas, como por ejemplo, en las cimentaciones de estructuras ubicadas en las costas, donde la fuerzas laterales son inducidas por las corrientes marinas y la acción de las olas y el viento; en los muelles, en donde la llegada de los barcos ejerce cargas laterales de importante magnitud sobre la estructura; en sistemas de retención a base de pilas, en donde el suelo ejerce



I. INTRODUCCIÓN

fuerzas horizontales y verticales ; y en aerogeneradores, los cuales están sometidos a una gran fuerza provocada por el viento. En el diseño de las cimentaciones de este tipo de estructuras se debe revisar el estado límite de falla, el cual se evalúa con un factor de seguridad ante falla última, y el estado límite de servicio, el cual se revisa mediante una evaluación de las deformaciones inducidas por carga lateral.

La mayoría de las metodologías, reportadas en la literatura técnica, para el análisis de pilotes sometidos a carga horizontal analizan solamente a un pilote individual. Esto se debe a que el análisis se complica cuando se vuelve un problema tridimensional. Una alternativa que se emplea actualmente es la modelación numérica. Sin embargo, el costo de los paquetes computacionales de cálculo y el tiempo que requieren para resolver un análisis dinámico tridimensional son algunas limitantes en su aplicación para fines prácticos. En los últimos años, se han realizado pruebas centrifugas y en mesas vibratorias con grupos de pilotes. Sin embargo, la mayoría de dichos estudios correspondían a pilotes en arenas y el número de pilotes en estas era muy limitado, ya que la mayoría de los modelos contaban con no más de cuatro pilotes.

El problema de la interacción suelo- pilotes en suelos blandos sometidos a cargas laterales sísmicas, situación muy común en muchas cimentaciones profundas de la ciudad de México, se ha resuelto para el caso de un pilote aislado con la metodología desarrollada por Zeevaert (1973, 1980), la cual considera al suelo como un medio continuo y al pilote como una viga apoyada sobre resortes interactuantes con ciertas condiciones de frontera tanto en la cabeza como en la punta. Para el caso dinámico, en el modelo estructural se asume que, al nivel de la cabeza de los pilotes, el desplazamiento lateral es el mismo para todos los pilotes y cuya magnitud es función del nivel de empotramiento de la cimentación y de la amplitud del movimiento sísmico. De esta manera el cortante basal originado por el movimiento sísmico se reparte por igual entre el número de pilotes que conforman la cimentación. Estableciendo la compatibilidad de deformaciones en la interface suelo-pilote es posible determinar la configuración de desplazamientos y la distribución de reacciones generadas por las fuerzas actuantes estáticas o dinámicas.



En esta tesis se generaliza el procedimiento de interacción suelo-cimentación propuesto por Zeevaert para un pilote aislado, al caso de hileras de pilotes sometidas a cargas laterales transversales sísmicas, considerando la interacción que existe en la hilera de pilotes ubicados transversalmente a la fuerza sísmica horizontal, fenómeno que no puede ser ignorado en el diseño sísmico de estos elementos, aunado a los efectos de torsión que se generan sobre todo en los pilotes de esquina.

Para obtener los valores de las influencias entre pilotes en sentido horizontal se integró la solución fundamental de distribución de esfuerzo horizontal para carga puntual, propuesta por Mindlin (1936), al caso de un área rectangular uniformemente cargada, suponiendo que el suelo tiene un comportamiento elástico lineal. La metodología planteada se aplicó para resolver el caso de un pilote aislado y de una hilera de pilotes sometidos a sismo, encontrándose diferencias importantes en la configuración de desplazamientos y la distribución de reacciones lo cual tiene un impacto en el diseño estructural del elemento (rigidez, cuantías de acero, etc.), principalmente en la unión losa de cimentación-pilote.

La metodología aquí presentada es un procedimiento simplificado para el análisis de un grupo de pilotes sometidos a carga lateral por sismo. Se pretende que el ingeniero de la práctica pueda usar esta metodología con la ayuda de un equipo de cómputo convencional. Con el análisis que se describe detalladamente en los siguientes capítulos se obtiene experiencia importante en el comportamiento de grupos de pilotes durante eventos sísmicos.



2. ESTADO DEL ARTE

“En el diseño de sistemas de cimentación constituidos por pilotes, el criterio de diseño en la mayoría de los casos, no es la capacidad lateral última de los pilotes, sino la deformación máxima de los pilotes. La deformación permisible puede ser relativamente grande para estructuras temporales. Sin embargo, en el caso de cimentaciones de estructuras altas solo se pueden tolerar pequeñas deformaciones” (Poulos y Davis, 1980). Para la evaluación de dichas deformaciones se pueden emplear enfoques analíticos, experimentales o bien modelación numérica. Las metodologías usadas a nivel nacional e internacional para el análisis de cimentaciones profundas sometidas a carga lateral se presentan a continuación.

2.1 Análisis estático de pilotes ante carga lateral

Actualmente existen varias metodologías teóricas, reportadas en la literatura técnica, para la evaluación del comportamiento de cimentaciones profundas ante fuerzas horizontales. Generalmente dichas metodologías se pueden clasificar en dos enfoques (Poulos and Davis, 1980):

- 1) El enfoque del módulo de reacción, en el cual se ignora la continuidad del suelo y la reacción de la pila en un punto está simplemente relacionada con la deformación en ese punto.
- 2) El enfoque elástico, el cual asume al suelo como un medio elástico continuo.

2.1.1 Análisis de reacción horizontal

El análisis de reacción horizontal (Subgrade Reaction Analysis), originalmente propuesto por Winkler en 1867, es la solución más popular reportada en la literatura técnica y se caracteriza por simular al suelo con una serie de resortes independientes, es decir que la deformación ocurre solo cuando la carga existe. Este método tiene la ventaja de tomar en



cuenta la no linealidad y heterogeneidad del suelo. La desventaja obvia es que ignora la continuidad del suelo. El suelo es lo suficientemente continuo para que el desplazamiento en un punto esté influenciado por el esfuerzo aplicado en otro punto dentro de la masa de suelo. La precisión de los resultados obtenidos está directamente relacionada con la selección del módulo de reacción horizontal, k_h , el cual no es una propiedad única del suelo sino que depende de la geometría de la cimentación.

En el modelo de suelo de Winkler, se asume que la presión p y la deformación ρ en un punto dentro de la masa de suelo están relacionadas por el k_h (Poulos y Davis, 1980), es decir:

$$p = k_h \rho \quad (2.1)$$

Donde k_h tiene unidades fuerza/longitud³

La ecuación 2.1 ha sido comúnmente reformulada (Reese y Matlock, 1956; Davisson y Gill, 1963) como:

$$w = K \rho \quad (2.2)$$

Donde

- w reacción del suelo por unidad de longitud del pilote
- K módulo reacción, en unidades de fuerza/longitud² ($K = k_h d$)
- d diámetro del pilote

Usualmente se asume que el pilote actúa como una barra cuyo comportamiento está gobernado por la ecuación de la viga:

$$E_p I_p \frac{d^4 \rho}{dz^4} = -pd \quad (2.3)$$

Donde

- E_p módulo de elasticidad del pilote
- I_p momento de inercia de la sección del pilote
- z profundidad



De las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.3 se deduce que la ecuación que gobierna la deformación de los pilotes por carga lateral es:

$$E_p I_p \frac{d^4 \rho}{dz^4} + k_h d \rho = 0 \tag{2.4}$$

La solución a la ecuación anterior puede ser obtenida analítica y numéricamente. La solución analítica tiene una solución cerrada para el caso donde k_h es constante a lo largo del pilote (Poulos y Davis, 1980). Considerando que k_h varía con la profundidad, la solución se obtiene usando el método de diferencias finitas (Palmer y Thompson, 1948; Gleser, 1953). En este método la ecuación 2.4 se escribe en forma de diferencias finitas; para un punto i (Figura 2.1) la ecuación es:

$$E_p I_p \left[\frac{\rho_{i-2} - 4\rho_{i-1} + 6\rho_i - 4\rho_{i+1} + \rho_{i+2}}{\delta^4} \right] + (k_i d \rho_i) = 0 \tag{2.5}$$

Esto es:

$$\rho_{i-2} - 4\rho_{i-1} + a_i \rho_i - 4\rho_{i+1} + \rho_{i+2} = 0 \tag{2.6}$$

Donde:

$$a_i = 6 + \frac{k_i L^4 d}{E_p I_p n^4}$$

n número de intervalos a lo largo de la pila

k_i módulo de reacción k_h a i

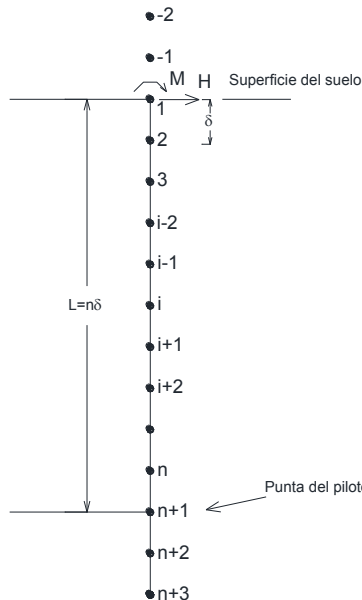


Figura 2.1 Análisis de diferencias finitas de pilas lateralmente cargadas (Poulos 1980)



La ecuación 2.5 se aplica del punto 2 al n , lo que resulta en $n-1$ ecuaciones. Dependiendo de las condiciones de apoyo en la cabeza y la punta del pilote, se tiene:

1. Apoyo libre en la cabeza:

$$\text{Cortante} = E_p I_p \left(\frac{d^3 \rho}{dz^3} \right) = H$$

Es decir:

$$-\rho_{-2} + 2\rho_{-1} - 2\rho_2 + \rho_3 = \frac{HL^3}{E_p I_p n^3} \quad (2.7)$$

$$\text{y momento} = E_p I_p \left(\frac{d^2 \rho}{dz^2} \right) = M$$

Esto es:

$$\rho_2 - 2\rho_1 + \rho_{-1} + \rho_3 = \frac{ML^2}{E_p I_p n^2} \quad (2.8)$$

2. Apoyo fijo en la cabeza

$$\text{Rotación} = E_p I_p \left(\frac{d\rho}{dz} \right) = 0$$

Que es:

$$\rho_2 - \rho_{-1} = 0 \quad (2.9)$$

En la punta del pilote, asumiendo que el pilote trabaja por fricción con apoyo libre en la punta:

$$\text{Cortante} = E_p I_p \left(\frac{d^3 \rho}{dz^3} \right) = 0$$

Es decir:

$$-\rho_{n-1} + 2\rho_n - 2\rho_{n+2} + \rho_{n+3} = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{y momento} = E_p I_p \left(\frac{d^2 \rho}{dz^2} \right) = 0$$

Esto es:

$$\rho_n - 2\rho_{n+1} + \rho_{n+2} = 0 \quad (2.11)$$



Las últimas dos ecuaciones requeridas provienen del equilibrio de fuerzas horizontales y momentos. Un sistema de $n+5$ ecuaciones se obtiene para determinar los $n+5$ desplazamientos desconocidos (Poulos y Davis, 1980). Usando esta solución se puede tomar en cuenta la variación del k_h con la profundidad.

Terzaghi (1955) consideró que para arcillas el valor de k_h es prácticamente el mismo que el coeficiente de reacción vertical y propuso la siguiente expresión para su determinación:

$$k_h = \left(\frac{1}{1.5d} \right) (\bar{k}_{s1}) \quad (2.12)$$

Otras relaciones empíricas para determinar el k_h se enlistan a continuación (Poulos, 1980):

Usando un valor de E_{50} de 50 a 200 veces la resistencia al esfuerzo cortante c_u (Skempton, 1951):

$$k_h = \frac{(80-320) c_u}{d} \quad (2.13)$$

Donde

c_u resistencia al esfuerzo cortante en condiciones no drenadas

Broms (1964) propuso la siguiente expresión:

$$k_h = \frac{1.67 E_{50}}{d} \quad (2.14)$$

Donde

E_{50} módulo secante correspondiente al 50% del esfuerzo último en condiciones no drenadas.

Davisson (1970) sugiere un valor más conservador dado por:

$$k_h = \frac{67 c_u}{d} \quad (2.15)$$



La expresión más usada para determinar la distribución del k_h es la desarrollada por Palmer y Thompson (1948):

$$k_h = k_L \left(\frac{z}{L}\right)^n \quad (2.16)$$

Donde

k_L El valor de k_h en la punta del pilote ($z=L$)

n coeficiente empírico igual o mayor a cero

Según Poulos y Davis (1980) el valor de n para suelos arcillosos es igual a cero, lo que significa que el valor de k_h es constante a lo largo del pilote. Sin embargo, Davisson y Prakash (1963) sugirieron que $n=0.15$ y 1.5 eran valores más realista para arcillas y arenas, respectivamente. Para el caso de suelos granulares generalmente se usa $n=1$. Para este caso es conveniente reescribir la ecuación 2.16 de la siguiente forma:

$$k_h = n_h \left(\frac{z}{d}\right) \quad (2.17)$$

Donde:

n_h coeficiente del módulo de reacción (unidades de fuerza/longitud³)

z profundidad

d diámetro del pilote

Reese et al., (1974) publicó valores de n_h directamente de pruebas de carga lateral en pilas instrumentadas en la arena sumergida de la isla Mustang en Texas. La prueba se hizo para condiciones de carga estática y cíclica y los valores obtenidos se comparan con los obtenidos por Terzaghi (1955), tal como se muestra en la Figura 2.2.

Otros valores observados de n_h (Tomlinson and Woodward, 2015) son:

Arcillas normalmente consolidadas: 350-700 kN/m³

Limos orgánicos: 150 kN/m³

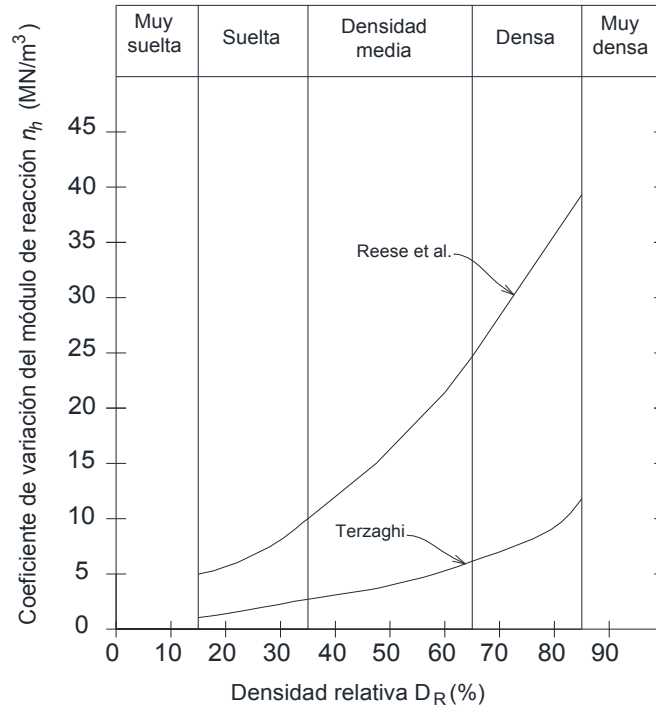


Figura 2.2. Relación entre el coeficiente de variación del módulo de reacción y la densidad relativa (Tomlinson and Woodward, 2015).

2.1.2 Análisis no lineal (Curvas p - y)

La relación entre la deformación y el esfuerzo en cualquier punto a lo largo del suelo es no lineal. Esta condición puede ser tomada en cuenta empleando las curvas p - y (Matlock, 1970; Reese *et al.*, 1974; Reese y Welch, 1975; Bhushan *et al.*, 1979). Este enfoque se basa en la teoría del módulo de reacción, pero se extiende más allá del rango elástico, en donde el suelo tiene un comportamiento plástico. En este enfoque, se obtiene una solución mediante el método de diferencias finitas de la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + (P_z) \frac{d^2 \rho}{dz^2} - p = 0 \quad (2.18)$$

Donde

- ρ deformación
- M momento a la profundidad z
- P_z carga axial a la profundidad z
- p reacción del suelo por unidad de longitud



Esta ecuación es una forma más general de la ecuación 2.4, en la cual los efectos de carga axial y las variaciones en la rigidez del pilote con la profundidad pueden ser tomados en cuenta.

La reacción del suelo por unidad de longitud, p , es igual a $k\rho$, donde k es el módulo de reacción. La descripción numérica del módulo de reacción se explica mejor con una familia de curvas que muestra a la reacción p como función de la deformación ρ . En general estas curvas son no lineales y dependen de varios parámetros, incluyendo la profundidad, la resistencia al esfuerzo cortante y el número de ciclos de carga. Las curvas $p-y$ tienen las siguientes características (Prakash y Sharma, 1990):

1. Una serie de curvas $p-y$ representa la deformación del suelo ante un esfuerzo horizontal aplicado en una sección vertical del pilote a cualquier profundidad.
2. La curva es independiente de la forma y la rigidez del pilote y no está afectada por la carga arriba ni abajo del área vertical de suelo. Esta afirmación no es estrictamente verdadera. Sin embargo, la experiencia indica que la deformación del pilote a cierta profundidad puede, para fines prácticos, considerarse esencialmente dependiente sólo de la reacción a esa profundidad. Por tanto, el suelo puede ser idealizado por un mecanismo representado por una serie de curvas $p-y$, tal como se muestra en la Figura 2.3.

Según se muestra en la Figura 2.3, una serie de curvas $p-y$ representa la deformación del suelo a cierta profundidad para un rango de esfuerzo lateral que varía de cero a la resistencia de fluencia del suelo. El método de las curvas $p-y$ es ampliamente usado en el diseño de pilotes sometidos a cargas laterales y ha sido adoptado en las recomendaciones prácticas del API (American Petroleum Institute, 1982).

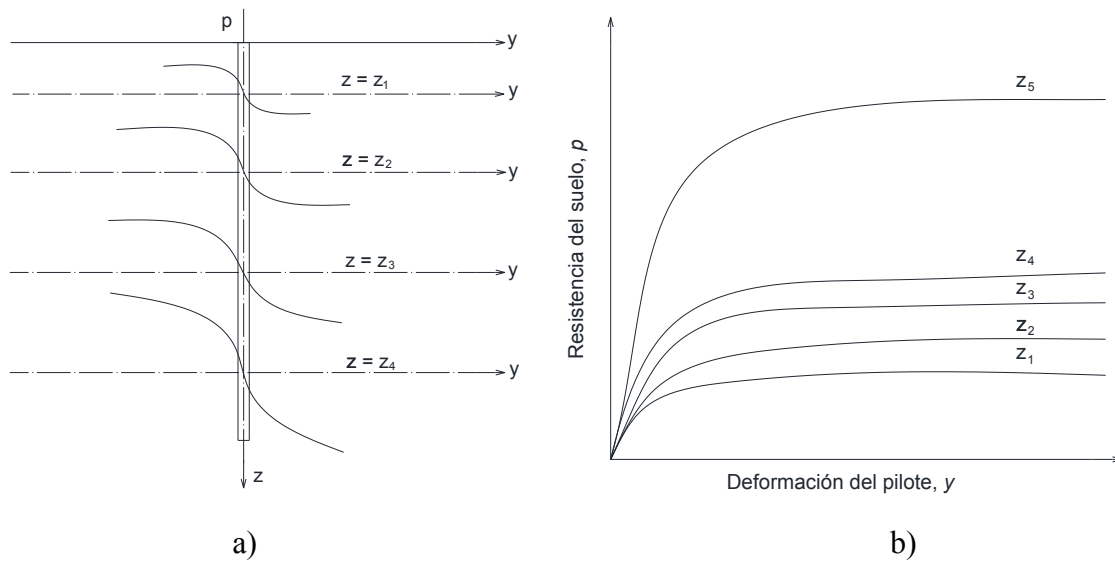


Figura 2.3 Curvas p - y a) Forma de las curvas p - y a varias profundidades y b) curvas p - y en ejes comunes (modificada de Prakash y Sharma, 1990).

Prakash y Sharma (1990) proponen el siguiente procedimiento iterativo para resolver el problema de pilotes lateralmente cargados, usando el enfoque de las curvas p - y :

1. Se calcula T o R , según sea el caso, para el sistema suelo-pilote con un valor estimado o real de n_h o k . Se usa T en suelos friccionantes y arcillas normalmente consolidadas, y R en arcillas sobreconsolidadas. El módulo de reacción y la rigidez relativa (T o R) se determinan como:

$$k = \frac{p}{y} \quad (2.19)$$

$$n_h = \frac{k}{x} \quad T = \left(\frac{EI}{n_h} \right)^{1/5} \quad \text{cuando el módulo de reacción incrementa con la profundidad}$$

$$k_1 = k, \quad R = \left(\frac{EI}{k} \right)^{1/4} \quad \text{cuando el módulo de reacción es constante}$$



2. Con el valor calculado de T o R y la carga lateral impuesta, H y el momento M , se determina la deformación y a lo largo del pilote. Para esto se pueden usar los procedimientos propuestos por Reese y Matlock (1956) o Davisson y Gill (1963), según sea el caso.
3. Para las deformaciones calculadas en el paso anterior se determina el esfuerzo lateral p a cierta profundidad usando las curvas $p-y$ definidas previamente. Se calcula un nuevo valor de T o R y se compara con el calculado en el paso 1. Si estos valores no son iguales se realiza una segunda iteración con los siguientes pasos.
4. Se asume un valor de k o n_h cercano al obtenido en el paso 3. Se repiten los pasos 2 y 3 y se obtienen nuevos valores de T o R . Se continúa con el procedimiento hasta que los valores calculados y supuestos coincidan. Luego las deformaciones y momentos a lo largo del pilote se pueden establecer mediante los valores finales de T o R .

Para determinar las curvas $p-y$ en suelos arcillosos Matlock (1970) estableció el siguiente procedimiento (Figura 2.4):

Paso 1. Realizar pruebas de laboratorio para estimar la resistencia no drenada, c_u , y el peso volumétrico, γ , del suelo de interés.

Paso 2. Calcular los siguientes factores:

$$x_r = \frac{6B}{\frac{\gamma B}{c_u} + J} \quad (2.20)$$

Donde:

- x_r profundidad crítica debajo del nivel de superficie de suelo
 B ancho del pilote
 J factor empírico



Matlock (1970), basado en trabajos experimentales, recomendó un valor de $J=0.5$ para arcilla blanda y $J=0.25$ para arcilla dura.

$$N_c = 3 + \frac{\gamma x}{c_u} + \frac{Jx}{B} \quad \text{para } x < x_r \quad (2.21)$$

$$N_c = 9 \quad \text{para } x \geq x_r \quad (2.22)$$

Donde:

N_c factor de capacidad de carga

x profundidad

Paso 3. Seleccionar la profundidad a la cual interesa obtener la curva p - y . Comparar dicha profundidad con la profundidad crítica x_r , elegir la ecuación para N_c que aplique (*i.e.* ec. 2.21 o 2.22) y posteriormente calcular los valores para determinar las curvas p - y usando los siguientes pasos.

Paso 4. Calcular la resistencia última del suelo por unidad de longitud del pilote, p_u ,

$$p_u = c_u N_c B \quad (2.23)$$

La deformación y_c se obtiene usando la ecuación 2.24

$$y_c = 2.5 \varepsilon_c B \quad (2.24)$$

Donde

ε_c deformación correspondiente al esfuerzo máximo. Se obtiene de pruebas triaxiales no drenadas

Ante la ausencia de pruebas de laboratorio, Matlock (1970) recomienda los siguientes valores de ε_c : 1) 0.005 para arcillas blandas, 2) 0.02 para arcillas remoldeadas, y 3) 0.01 para arcillas normalmente consolidadas.

Paso 5. La forma de la curva p - y está gobernada por la siguiente ecuación:

$$p = 0.5 p_u (y/y_c)^{1/3}$$

El efecto de la carga cíclica en la curva p - y puede ser considerado de la siguiente forma:



1. $x_1 \geq x_r$: Corta la curva p - y en $p_B = 0.72 p_u$ (curva b)
2. $x_1 < x_r$: Se une el punto B y C y luego se dibuja una línea horizontal (curva c). El punto C corresponde a la deformación lateral $y = 15y_c$ y $p = 0.72 p_u x_i/x_r$.
3. $x_1 = 0$: Se une el punto B al punto en donde $y = 15y_c$ (curva d). Se asume que para $y \geq 15y_c$ la resistencia del suelo tiende a 0.

Paso 6. Repetir el procedimiento descrito anteriormente para varias profundidades para obtener el resto de las curvas p - y .

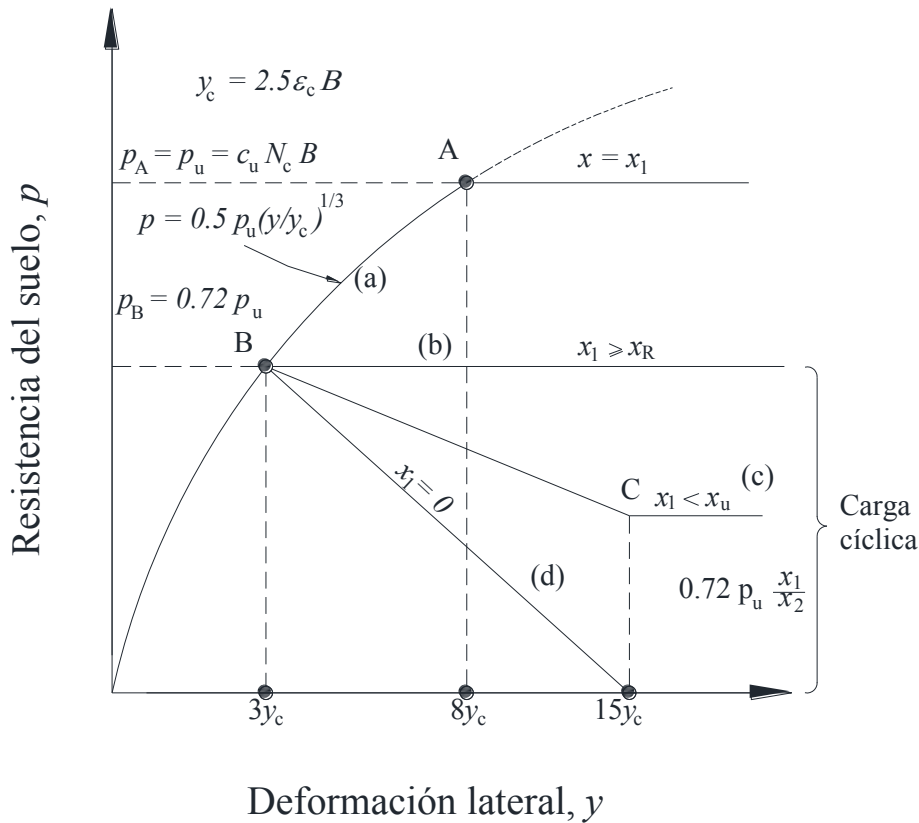


Figura 2.4 Construcción de las curvas p - y

2.1.3. Análisis elástico

La determinación de las deformaciones y momentos de pilotes sometidos a carga lateral mediante el análisis de reacción horizontal, descrito en 2.1.1, no cumple con la continuidad del suelo. El comportamiento de pilotes lateralmente cargados considerando al suelo como un medio continuo elástico fue examinado por Poulos (1971). A pesar de que este enfoque es teóricamente más realista, uno de los principales obstáculos en su aplicación es la determinación de un módulo de elasticidad, E_s , que represente realmente al suelo.



Prakash y Sharma (1990) enlistan las bases teóricas del enfoque elástico de la siguiente manera:

1. Tal como se muestra en la Figura 2.5 la pila se asume como una viga rectangular vertical de ancho B , longitud L y flexibilidad constante EI . La pila se divide en elementos de igual longitud excepto por aquellos en la base y punta del pilote los cuales son de longitud $\delta/2$.
2. Para simplificar el análisis, el posible esfuerzo cortante horizontal desarrollado entre el suelo y los lados del pilote no se toma en cuenta.
3. Se asume que cada elemento actúa con una fuerza horizontal P , la cual se considera constante a lo ancho del pilote.
4. Se asume que el suelo es un material continuo, homogéneo, isótropo y elástico que tiene un módulo de elasticidad, E_s , una relación de Poisson, ν_s , lo cuales no son afectados por la presencia del pilote.

En el análisis elástico los desplazamientos para cada punto a lo largo del pilote están dados por la ecuación 2.25.

$$\{\rho_s\} = \frac{d}{E_s} [I_s] \{p\} \quad (2.25)$$

Donde

$\{\rho_s\}$ vector columna de desplazamientos horizontales del suelo

$[I_s]$ matriz de factores de influencia de desplazamientos del suelo

$\{p\}$ vector columna de carga horizontal

Los elementos I_{ij} de $[I_s]$ se obtienen de la integración de la solución fundamental de Mindlin (1936) para determinar desplazamientos laterales por una carga puntual horizontal, con el fin de obtener los desplazamientos laterales de una área rectangular cargada.

La ecuación 2.25 puede resolverse empleando el método de diferencias finitas para los puntos internos (Figura 2.5) y usando condiciones de frontera apropiadas para la cabeza y a punta del pilote. Los desplazamientos al nivel de superficie para un pilote con apoyo libre y fijo en la cabeza se obtienen empleando las ecuaciones 2.26 y 2.27 respectivamente.

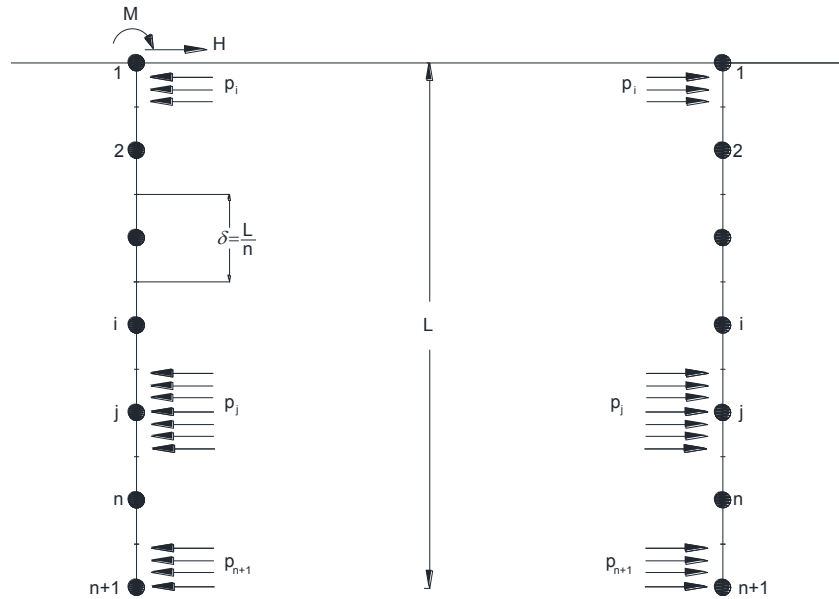


Figura 2.5 esfuerzos actuando sobre (a) el pilote y (b) el suelo adyacente al pilote (Poulos, 1971)

$$\rho = \frac{H}{E_s L} (I_{\rho H} + \frac{e}{L} I_{\rho M}) \quad (2.26)$$

$$\rho = \frac{H}{E_s L} (I_{\rho F}) \quad (2.27)$$

Donde

H carga horizontal aplicada

e excentricidad de la carga $=M/H$

M momento aplicado en la cabeza de la pila

$I_{\rho H}, I_{\rho M}$ factores de influencia para desplazamiento causado por carga horizontal y momento respectivamente, para E_s constante.

F_{ρ} relación del desplazamiento del pilote en suelo elástico y el desplazamiento del pilote en suelo plástico.

$I_{\rho F}$ factor de influencia para el desplazamiento por carga horizontal en pilote con apoyo fijo en la cabeza.

$F_{\rho F}$ factor por rotación para pilotes con apoyo fijo en la cabeza

Los factores $I_{\rho H}, I_{\rho M}, F_{\rho}, I_{\rho F}$ y $F_{\rho F}$ se pueden obtener de las gráficas publicadas por Poulos (1980).



2.2 Análisis pseudoestático

El análisis del comportamiento sísmico de cimentaciones profundas a base de pilotes en suelos blandos como los de la Ciudad de México se puede realizar siguiendo la metodología propuesta por Zeevaert (1980), la cual su autor tuvo oportunidad de aplicar con mucho éxito a un gran número de problemas de Ingeniería de cimentaciones en suelos blandos, a lo largo de su vida profesional. El método resuelve la interacción suelo-pilote aislado, obteniéndose como resultado final la configuración de desplazamientos y reacciones en la interface suelo-pilote, información indispensable para el diseño estructural del elemento. A continuación se describe con cierto detalle dicha metodología.

Durante movimientos fuertes en la masa del suelo debido a sismos se ocasionan reacciones laterales a lo largo del pilote. Las fuerzas involucradas en el movimiento del suelo se traducen en reacciones desconocidas, X_i , sobre el fuste (Figura 2.5). Estas se consideran como fuerzas concentradas interactuantes representativas de las reacciones lineales unitarias desarrolladas en cada una de las secciones consideradas a lo largo de los pilotes. Las fuerzas exteriores sobre el pilote y las reacciones laterales desconocidas actúan en el vástago del pilote y suelo haciendo que el sistema de la cimentación de las pilas se encuentre en equilibrio. Sin embargo, la compatibilidad de deformaciones deberá lograrse en la interface del suelo con el vástago del pilote es su longitud total y en la base (Zeevaert, 1980).

Para resolver el problema se debe establecer la compatibilidad de deformaciones en cada punto o sección del suelo sobre el vástago del pilote, con las propiedades dinámicas del suelo representativas de la sección considerada, esto es, el módulo de rigidez dinámico, μ y la relación de Poisson, ν . Esto puede lograrse por el método que se usa para la resolución de estructuras estáticamente indeterminadas. Si las reacciones desconocidas X_1 a X_i y X_n se suponen nulas, se obtiene un sistema estructural estáticamente determinado en donde los desplazamientos horizontales pueden calcularse. Esta condición se designa como $X_i=0$. Los desplazamientos horizontales del pilote son debidos a la fuerza aplicada en la cabeza del pilote bajo ciertas condiciones de restricción en sus extremos (Zeevaert, 1980).

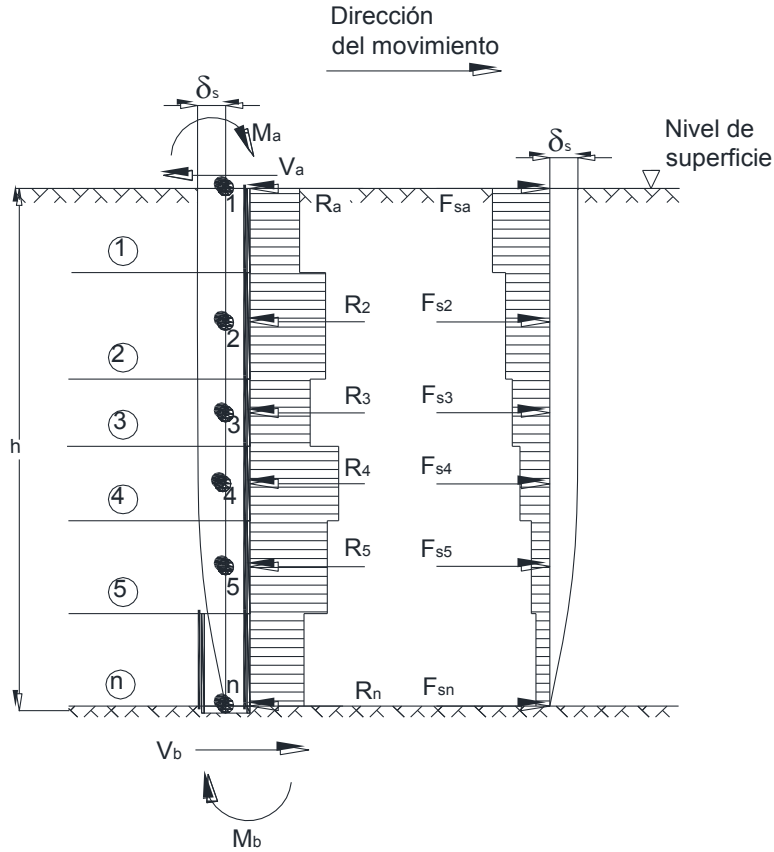


Figura 2.5. Interacción entre pila y suelo (Zeevaert, 1973)

Para realizar el análisis de interacción suelo pilote ante carga lateral considerando al suelo como un medio continuo, se utiliza la Ecuación Matricial de Interacción Horizontal, HEMIS (Ecuación 2.28) y la Ecuación Matricial de Desplazamientos Horizontales, HEMAS (Ecuación 2.29). Estas dos expresiones son compatibles en términos de deformaciones si para un grupo dado de reacciones X_i las deformaciones del suelo y del pilote son las mismas en cualquier punto del pilote. La liga entre ellas será el módulo horizontal de cimentación, K_i (ecuación 2.30).

HEMIS

$$X_i = [\bar{S}_{ij}]^{-1} \cdot |\Delta_{io}| \quad (2.28)$$

HEMAS

$$|\delta_i| = [\bar{\delta}_{ji}] \cdot \left| \frac{X_i}{a_i} \right| \quad (2.29)$$



Donde

$[\bar{\delta}_{ji}]$ matriz de desplazamientos horizontales unitarios

$$K_i = \left| \frac{X_i}{\delta_i} \right| \quad (2.30)$$

La matriz $[\bar{S}_{ij}]$ está formada por las matrices \bar{S}'_{ij} , \bar{S}''_{ij} y \bar{S}'''_{ij} , y el vector $|\Delta_{io}|$ está constituido por los vectores $|\Delta_{io}^p|$, $|\Delta_{io}^A|$ y $|\Delta\delta_{si}|$, de tal forma que la ecuación 2.28 puede ser reformulada como:

$$([\bar{S}'_{ij}] + [\bar{S}''_{ij}] + [\bar{S}'''_{ij}]) \cdot |X_i| = |\Delta_{io}^p| + |\Delta_{io}^A| + |\Delta\delta_{si}| \quad (2.31)$$

Donde

$|X_i|$ matriz columna de las reacciones incógnitas

$[\bar{S}'_{ij}]$ matriz simétrica que representa la flexibilidad del pilote para las condiciones $X_i=+1$. Es inversamente proporcional al valor de EI .

$[\bar{S}''_{ij}]$ matriz simétrica que representa los desplazamientos verticales unitarios del pilote como elemento rígido para las condiciones $X_i=+1$. Es función del módulo de cimentación en los apoyos K_a y K_b .

$[\bar{S}'''_{ij}]$ matriz diagonal que representa el desplazamiento vertical unitario del suelo para las condiciones $X_i=+1$ en el punto i .

$|\Delta_{io}^p|$ matriz columna que representa los desplazamientos del pilote en la condición $X_i=0$. Es inversamente proporcional al valor de EI .

$|\Delta_{io}^A|$ matriz columna que representa los desplazamientos del pilote como elemento rígido en la condición $X_i=0$. Es función del módulo de cimentación en los apoyos a y b .

$|\Delta\delta_{si}|$ matriz columna que representa los desplazamientos horizontales relativos en campo libre del suelo ante fuerzas sísmicas.



La solución de la interacción suelo-pilote usando esta metodología requiere un proceso iterativo con el fin de satisfacer ambas expresiones (*i.e.* HEMI y HEMA), esto es, la compatibilidad de deformaciones del pilote con la masa de suelo. La secuencia de cálculo se realiza como sigue:

1. Se proponen valores iniciales de K_i y K_b y se encuentran las reacciones X_i por medio de HEMI.
2. Con las reacciones X_i' se calculan los desplazamientos horizontales del suelo δ_i' por medio de la ecuación HEMA y se determinan los nuevos valores de K_i' .
3. Con los nuevos valores de K se recalcula la matriz $[\bar{S}_{ij}]$ en HEMI y se determinan las nuevas reacciones X_i'' .
4. Se usa HEMA para encontrar nuevos desplazamientos δ_i'' y lo que conduce a su vez a nuevos valores de K_i'' .
5. Se repite el ciclo 3 y 4 hasta que las reacciones X_i y X_b no cambien sensiblemente.
6. Conocidas las reacciones incógnitas se calculan los momentos y cortantes en el pilote.

El problema de interacción lateral se podría resolver aplicando solo la HEMIS (ecuación 2.28), sin embargo, de este modo se estaría haciendo la hipótesis de que los valores K_i son independientes entre sí y no se alteran por la distribución de reacciones a lo largo del pilote. Esta hipótesis es equivalente al modelo de Winkler (1867), el cual es base de los enfoques del módulo de reacción y de curvas p - y , descritos en las secciones 2.1.1 y 2.1.2 respectivamente. Winkler (1867) estableció que el suelo está representado por una serie de resortes independientes, es decir, no considera a la masa del suelo como un medio continuo. Para tener resultados más precisos en la resolución del problema de interacción suelo-pilote ante carga lateral es necesario emplear una ecuación de desplazamientos horizontales que considere al suelo como un medio continuo. Esto se logra usando HEMAS, con la cual se determinan los esfuerzos y desplazamientos en cualquier punto dentro de la masa de suelo por la aplicación de una carga unitaria en un punto cualquiera i .

Zeevaert también propone una metodología directa, es decir que no requiere iteraciones para encontrar la solución. Para lograr esto es posible fusionar las matrices HEMIS y



HEMAS en una Ecuación Matricial de Interacción Horizontal Sísmica Suelo-Estructura, HEMISES (ecuación 2.32).

$$([\bar{S}'_{ij}] + [\bar{S}''_{ij}] + [\bar{\delta}_{ji}]) \cdot |X_i| = |\Delta_{io}^p| + |\Delta_{io}^A| + |\Delta\delta_{si}| \quad (2.32)$$

Aplicando los dos procedimientos descritos anteriormente Zeevaert (1980) analizó un gran número de cimentaciones a base de pilotes sometidos a carga lateral por sismo en la ciudad de México. En la Figura 2.6 se reproducen los resultados obtenidos en el ejemplo III.13.2 (Zeevaert, 1980), aplicando el método iterativo, correspondientes a los desplazamientos, diagramas de fuerza cortante y momentos para un pilote aislado ubicado en la zona centro de la ciudad de México sometido a cargas laterales sísmicas.

El procedimiento propuesto por Zeevaert para resolver la interacción suelo-pilote aislado utiliza el método de las flexibilidades o de las fuerzas. Sin embargo, López (2012) propuso un método más general para analizar estructuras reticulares tridimensionales en el cual se toman en cuenta los seis grados de libertad de los nudos de la estructura empleando el método de rigideces. En vista de la relación que existe entre la matriz de flexibilidad y la de rigidez, puede decirse que ambos métodos tienen el mismo fundamento, pero con algunas ventajas de tipo numérico cuando se utiliza la matriz de rigideces.

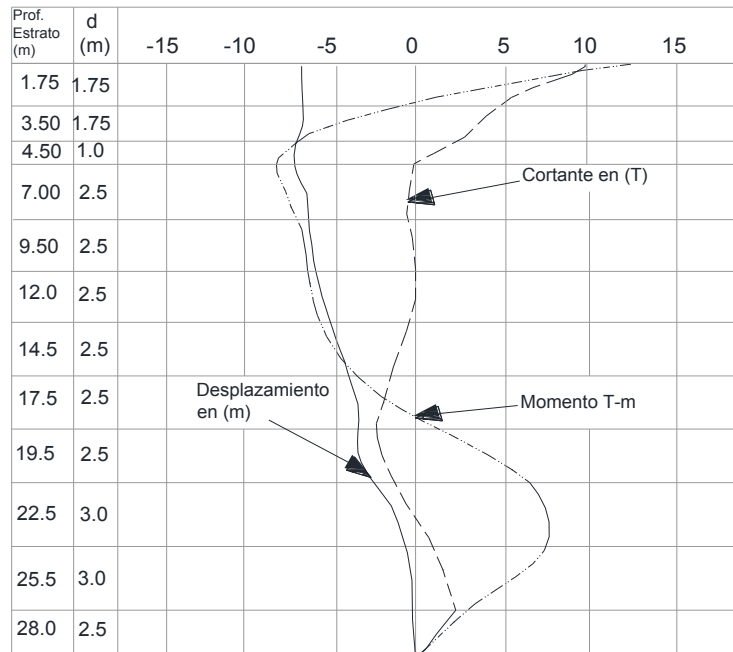


Figura 2.6 Desplazamientos, cortante y momento (Zeevaert, 1980)



2.3 Análisis dinámico de pilotes ante carga lateral

El comportamiento de cimentaciones profundas a base de pilotes sometidas a cargas laterales por sismo es un factor importante para determinar el desempeño de una estructura. Varios estudios han demostrado que los pilotes instalados en suelo firmes, por lo regular tienen un buen comportamiento, mientras que aquellos instalados en suelos blandos son más susceptibles a problemas derivados de movimientos laterales del suelo de gran magnitud. El mayor problema asociado a los sismos en suelos arcillosos es la amplificación de los movimientos sísmicos inducida por las propiedades de los estratos blandos. Varios estudios han demostrado que el efecto de la interacción suelo pilote es mucho más significativa en la respuesta dinámica de estructuras construidas en suelos blandos que en suelos rígidos (Tinawi *et al.*, 1993; Avilés y Pérez Rocha, 1998; Rayhani y El Naggar 2012; Zhang *et al.*, 2017).

La respuesta de cimentaciones constituidas por pilotes ante cargas dinámicas es uno de los problemas más complejos de la dinámica de suelos. Finn y Gohl (1992) definieron cuatro factores que hacen que la estimación de la respuesta sísmica de pilotes sea difícil: 1) La rigidez y el amortiguamiento de la cimentación son dependientes de la frecuencia, 2) El comportamiento no lineal del suelo durante un evento sísmico, 3) La degradación de la resistencia y módulo de rigidez del suelo ante carga cíclica, y 4) La dificultad de modelar el contacto entre pilotes y suelo de forma racional.

En el análisis dinámico de un pilote aislado sujeto a una fuerza horizontal y a un momento dependiente del tiempo, se pueden emplear los siguientes enfoques (Poulos, 1980):

1. El pilote se idealiza como una viga equivalente en voladizo empotrado en uno de sus extremos. La frecuencia resonante y la amplitud de vibración se pueden determinar usando métodos estándar. Sin embargo no se obtiene información referente a los momentos, esfuerzos y desplazamientos a lo largo del pilote.
2. Se considera al pilote como una viga apoyada sobre una cimentación elástica sujeta a una carga dependiente del tiempo. El pilote se analiza usando el método de diferencias finitas: Se pueden obtener los momentos, esfuerzos y desplazamientos a lo largo del pilote.



3. El método analítico aproximado desarrollado por Novak (1974), en el cual se obtienen soluciones numéricas para las constantes de rigidez y amortiguamiento para pilotes aislados. Los resultados demuestran que dichas constantes no son dependientes de la frecuencia, y que los parámetros que gobiernan la respuesta de los pilotes ante carga dinámica son la relación de esbeltez y la relación de velocidades de onda de cortante del suelo y del pilote.

2.4 Métodos experimentales

Durante eventos sísmicos los pilotes están sometidos a esfuerzos derivados del movimiento tanto del suelo circundante (interacción cinemática) como de la superestructura (interacción inercial). De la evaluación adecuada de estas interacciones depende el comportamiento sísmico de las estructuras. Investigaciones de campo posteriores a la ocurrencia de un sismo, simulaciones numéricas y pruebas centrífugas y de mesas vibratorias bien documentadas han permitido evaluar el impacto de la interacción suelo-pilote-estructura en la respuesta dinámica de la estructura y en el movimiento sísmico impuesto en su base. Dichos efectos se presentan en cierto grado en todas las estructuras y es por eso que han sido considerados en los manuales de diseño sísmico actuales (*e.g.* Eurocódigo 8, 1998), los cuales especifican las condiciones en las cuales la interacción suelo-pilote-estructura debe ser tomada en cuenta en el diseño sísmico de cimentaciones. Estas especificaciones están basadas en procedimientos analíticos y numéricos que utilizan dos métodos: 1) el método simplificado múltiple, el cual desacopla la estructura y la cimentación, también conocido como método de descomposición cinemática-inercial (*e.g.* Roesset *et al.*, 1973; Gazetas, 1984; Makris *et al.*, 1996) o 2) el análisis directo, en un solo paso, del sistema acoplado suelo-pilote-estructura. Existen varios estudios sobre este tema reportados en la literatura técnica (*e.g.* Novak, 1991; Pender, 1993; Kaynia y Mahzooni, 1996; Mylonakis *et al.*, 1997; Gazetas y Mylonakis, 1998; Guin y Banerjee, 1998). El método simplificado múltiple es más usado en la ingeniería práctica a pesar de tener la limitante de considerar la respuesta del sistema acoplado suelo-pilote-estructura como lineal. Este método requiere de la realización de pruebas de laboratorio. Una herramienta poderosa para probar la interacción suelo-pilote-estructura es la centrífuga, la cual permite monitorear de forma simultánea la respuesta del suelo, los pilotes y la estructura (Hussien *et al.*, 2016).



Para examinar la respuesta de pilotes a cargas laterales por sismo, se han realizado varias ensayos experimentales usando pruebas centrífugas (Boulangier *et al.*, 1999; Curras *et al.*, 2001; Watanabe *et al.*, 2001; Abdoun y Dobry, 2002; Abdoun *et al.*, 2003; Dobry *et al.*, 2003; Brandenburg *et al.*, 2005; Zhang *et al.*, 2016; Hussien *et al.*, 2016) y mesas vibratoras (Horikoshi *et al.*, 2003; Yao *et al.*, 2004; Tokimatsu *et al.*, 2005; Dungca *et al.*, 2006; Chau *et al.*, 2009). Sin embargo, dichas pruebas se realizaron para determinar el comportamiento dinámico de pilotes en suelos arenosos, mientras que, para pilotes en suelos arcillosos existen pocos análisis relevantes. Meymand (1998) realizó una serie de pruebas en mesas vibratoras de 1 g para estudiar la interacción sísmica de arcillas ante condiciones dinámicas considerando una aceleración pico de 0.45g y una duración de 12 s. Por otro lado, Banerjee *et al.*, (2014) desarrolló una serie de pruebas centrífugas para estudiar el comportamiento de un sistema losa-pilotes en arcillas sujeto a una excitación sísmica de corta duración. Ma (2012) realizó pruebas similares pero con pilotes mucho más flexibles. Zhang *et al.*, (2016) llevaron a cabo una serie de pruebas centrífugas de un grupo de pilotes en arcillas sujetas a un movimiento sísmico de gran duración. Los ensayos se realizaron para cuatro sistemas losa-pilote; dos sistemas de 2x1 (dispersos y cercanos), un sistema de 2x3 y otro de 4x3. Se hace notar la influencia de la configuración del grupo de pilotes (espaciamiento y ubicación) en los momentos flexionantes. Los pilotes en grupos de 2x1 dispersos y cercanos están espaciados a 9 y 3 veces el diámetro del pilote respectivamente. Los momentos flexionantes para cada grupo de pilotes se muestran en la Figura 2.7.

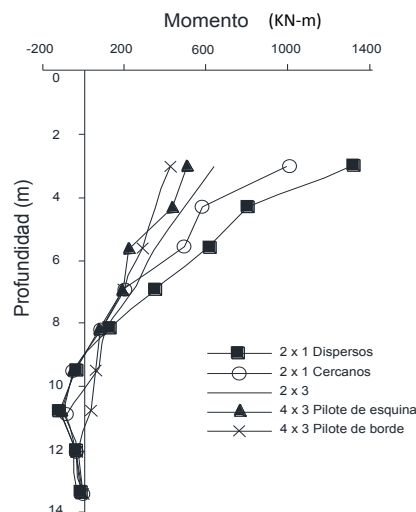


Figura 2.7 Momentos flexionantes (Zhang *et al.*, 2017)



2.5 Análisis de grupo de pilotes

Varios autores han publicado estudios referentes al comportamiento de grupos de pilotes sometidos a cargas laterales por sismo. La mayoría de dichos estudios hacen uso de la teoría de Winkler, sin embargo, como ya se mencionó en capítulos anteriores, esta teoría modela al suelo como un medio no continuo y por tanto, los efectos de interacción en un grupo de pilotes no pueden ser considerados de forma apropiada. Poulos (1971) desarrolló una teoría para el análisis de grupos de pilotes considerando al suelo como un medio continuo elástico. Inicialmente, Poulos (1971) analizó la interacción entre dos pilotes idénticos para posteriormente extender su metodología a grupos de pilotes.

2.5.1 Análisis estático de grupos de pilotes

La metodología que propuso Poulos para analizar la interacción del grupo de pilotes es similar al procedimiento de análisis de un pilote aislado, presentado en la sección 2.1.3. La distancia del centro del pilote 1 al centro del pilote 2 es s y el ángulo entre la línea que une ambos pilotes y la dirección de la carga es β (Figura 2.8). La deformación del pilote 1 se obtiene empleando la ecuación 2.33.

$$\{\rho_s\} = \frac{d}{E_s} [I_1 + I_2] \{p\} \quad (2.33)$$

Donde:

$[I_1 + I_2]$ Es la matriz de factores de influencia I_{ij} , siendo I_1 e I_2 los factores de influencia por desplazamiento horizontal en i causado por el esfuerzo en el elemento j de la pila 1 y 2 respectivamente.

Los valores de I_1 se obtienen de la misma forma descrita para el caso de un pilote aislado. Los factores de influencia de I_2 se obtienen de forma más conveniente asumiendo que el esfuerzo uniforme en cada elemento del pilote 2 puede ser reemplazado por una fuerza puntual equivalente actuando al centro de cada elemento.

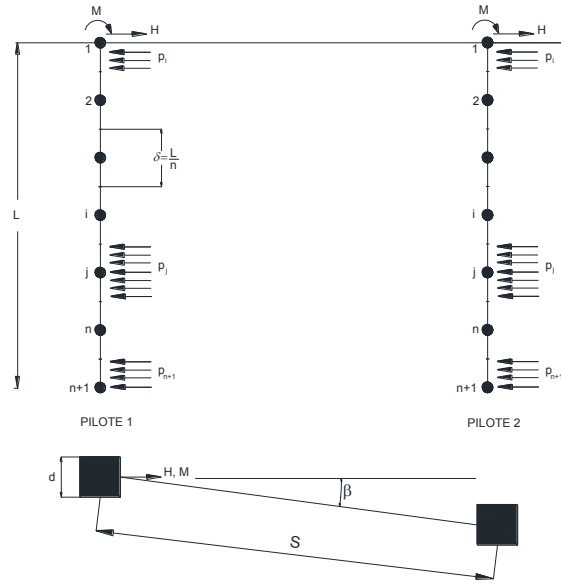


Figura 2.8 Interacción entre dos pilotes idénticos

Los desplazamientos de los pilotes en grupo se obtienen de la misma forma descrita en el análisis de un pilote individual (sección 2.1.3), pero considerando la influencia del segundo pilote en los desplazamientos y rotaciones del primer pilote. Es conveniente expresar dichos desplazamientos y rotaciones adicionales en términos de los factores de interacción α_ρ y α_θ , los cuales se expresan como:

$$\alpha_\rho = \frac{\text{Desplazamiento adicional causado por el segundo pilote}}{\text{Desplazamiento del pilote causado por su propia carga}}$$

$$\alpha_\theta = \frac{\text{Rotación adicional causado por el segundo pilote}}{\text{Rotación del pilote causado por su propia carga}}$$

Los valores de α_ρ y α_θ para varias condiciones de carga y apoyo en la cabeza se clasifican de la siguiente forma:

$\alpha_{\rho H}, \alpha_{\theta H}$: Valores de α_ρ y α_θ para un pilote con apoyo libre en la cabeza y sujeto sólo a carga horizontal.

$\alpha_{\rho M}, \alpha_{\theta M}$: Valores de α_ρ y α_θ para un pilote con apoyo libre en la cabeza y sujeto sólo a momento.

$\alpha_{\rho F}$: Valores de α_ρ para pilote con apoyo fijo en la cabeza



Poulos (1980) presentó gráficamente los valores de $\alpha_{\rho H}$, $\alpha_{\theta H}$, $\alpha_{\rho M}$, $\alpha_{\theta M}$ y $\alpha_{\rho F}$ para dos valores de B (i.e. 0° y 90°), dos valores de $K_R = E_p I_p / E_s L^4$ (i.e. 10^{-3} y 10), para tres relaciones Longitud, $L/\text{diámetro}$, d (i.e. 10, 25, 100) y para varias relaciones s/d (i.e. 0-100), encontrando las siguientes características:

1. Todos los valores de α decrecen con el incremento del espaciamiento de los pilotes y son mayores para $B=0^\circ$ que para $B=90^\circ$.
2. Todos los valores de α se incrementan con el aumento de L/d
3. Todos los valores de α generalmente se incrementan con el aumento de K_R
4. Para pilotes con apoyo libre en la cabeza, los factores de interacción para momento son menores que los correspondientes a carga horizontal.
5. Para pilotes con apoyo libre en la cabeza, los factores de interacción para desplazamiento son mayores que aquellos para rotación.
6. Considerando solo carga horizontal, los valores de $\alpha_{\rho F}$ son mayores que los valores de $\alpha_{\rho H}$.

Poulos (1971) extendió el análisis de dos pilotes idénticos, sometidos a cargas laterales, al caso de un grupo de pilotes usando el principio de superposición. Para un grupo de n pilotes con apoyo libre en la cabeza sujeto sólo a carga lateral, el desplazamiento de una pila k en el grupo es, por superposición:

$$\rho_k = \bar{\rho}_H \left[\sum_{j=1}^n (H_j \cdot \alpha_{\rho Hkj}) + H_k \right]_{j \neq k} \quad (2.34)$$

Donde:

$\bar{\rho}_H$ desplazamiento de referencia, el cual es el desplazamiento de un pilote aislado con apoyo en libre en la cabeza ante una carga unitaria lateral.

H_j carga en el pilote j

$\alpha_{\rho Hkj}$ valor de $\alpha_{\rho H}$ para dos pilotes correspondiente para el espaciamiento entre los pilotes k y j y para el ángulo B .



Si la carga total actuando en el grupo de pilotes es H_G , entonces:

$$H_G = \sum_{j=1}^n H_j \quad (2.35)$$

En el caso de que todos los pilotes se desplacen igual, las n ecuaciones para determinar el desplazamientos de los pilotes (ecuación 2.34) y la ecuación de equilibrio (ecuación 2.35) deben ser resueltas para las cargas incógnitas. En el caso de que todos los pilotes se estén sometidos a las mismas cargas $H_j = H_G/n$ y el desplazamiento de cada pila debe ser calculado directamente usando la ecuación 2.34.

El desplazamiento de los pilotes en grupo suele expresarse a través de la relación de desplazamientos R_ρ , que es la relación entre el desplazamiento del grupo de pilotes y el desplazamiento de un pilote aislado soportando la misma carga o momento promedio que el pilote de grupo. De forma alternativa, el desplazamiento del grupo de pilotes puede expresarse usando el factor de reducción R_R , definido como la relación entre el desplazamiento del grupo de pilotes y un pilote aislado soportando la misma carga o momento total que el grupo de pilotes. R_R se calcula empleando la ecuación 2.36.

$$R_R = \frac{\rho G}{H_G \bar{\rho}} \quad (2.36)$$

Donde

$\bar{\rho}$ desplazamiento de referencia

ρG desplazamiento del grupo de pilotes

R_R y R_ρ están relacionados por:

$$R_\rho = R_R n \quad (2.37)$$

Donde

n número de pilotes en el grupo



Para el análisis teórico de grupos de pilotes el factor R_R tiene ciertas ventajas en comparación con el R_p , siendo este último más usado para fines prácticos. Poulos (1980) determinó varios valores de R_R dependiendo del tipo de carga, condiciones de apoyo, y si se considera el desplazamiento o la rotación.

2.5.2 *Análisis dinámico de grupos de pilotes*

Los enfoques descritos en la sección 2.2, para el análisis dinámico de pilotes aislados, se pueden emplear para el caso de grupos de pilotes, considerando valores apropiados de rigidez y amortiguamiento. Maxwell *et al.*, (1969) realizó pruebas de campo en un grupo de cuatro pilotes y encontró que, al igual que para pilotes aislados, la rigidez y el amortiguamiento son dependientes de la frecuencia. Los resultados encontrados muestran que el amortiguamiento del grupo de pilotes es mayor que el de un pilote aislado.

Los métodos actualmente disponibles para el análisis de grupos de pilotes ante cargas dinámicas son extensiones de métodos de análisis estructural, en donde los pilotes se consideran como vigas equivalentes en voladizo. Se puede obtener una estimación aproximada del comportamiento dinámico del grupo de pilotes analizando un pilote aislado ante la carga dinámica correspondiente al grupo de pilotes, y luego se considera el efecto del grupo de pilotes (sección 2.4.1). Novak y Grigg (1976) emplearon este método y comprobaron los resultados con la respuesta de modelos de grupos de pilotes sometidos a cargas dinámicas.

Uno de los parámetros que rigen la interacción en un grupo de pilotes es el espaciamiento entre ellos. Zhang *et al.*, (2016) determinaron que un espaciamiento entre pilotes mayor a 10 veces el diámetro es una distancia suficiente para desprestigiar la interacción entre pilotes. Banerjee (2014) y Ma (2012) realizaron ensayos en centrífugas para analizar el comportamiento de grupos de pilotes ante carga lateral. Sin embargo, el espaciamiento entre pilotes era mayor a 10 veces el diámetro y por tanto, los resultados obtenidos por dichos autores corresponden al análisis de pilotes aislado, según Zhang.



2.6. Modelación numérica

Con el desarrollo de las computadoras, en los últimos años la modelación numérica ha tenido un gran auge en el diseño de cimentaciones profundas a nivel mundial. El software de diseño geotécnico se pueden clasificar en dos tipos, según el método numérico en el cual están basados: 1) Elemento finito, MEF, y 2) Diferencias finitas, MDF. La diferencia fundamental entre estos radica en que los paquetes de cómputo basados en el MEF discretizan el medio para obtener pequeños elementos con determinadas condiciones de frontera entre sí, lo que permite encontrar un sistema de ecuaciones que, al resolverlo, proporciona el estado esfuerzo-deformación del suelo. Mientras que el método basado en las diferencias finitas permite resolver de forma aproximada las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento del suelo usando ecuaciones aritméticas simples. El MDF es una solución explícita que permite resolver modelos complejos con el mínimo esfuerzo computacional, lo cual es una gran ventaja en comparación con el MEF.

Los paquetes de cómputo más usados en la ingeniería geotécnica son FLAC y PLAXIS. El primero es un software basado en el método de diferencias finitas, mientras que el segundo usa el método de elemento finito. Aunque las dos plataformas numéricas mencionadas permiten realizar el análisis de cimentaciones profundas a base de pilotes, existen otros paquetes de cómputo, quizá menos conocidos, que permiten realizar ese mismo tipo de análisis, los cuales se describen brevemente a continuación (Hadjian *et al.*, 1992):

LPILE (1991). Es un programa basado en un procedimiento racional con el propósito especial de analizar pilotes ante carga lateral. Este software permite calcular los desplazamientos, esfuerzos cortantes, momentos flexionantes, y la respuesta del suelo con respecto a la profundidad en suelos con comportamiento no-lineal. Se emplea el método de diferencias finitas para resolver la ecuación fundamental de cuarto orden. El suelo modela mediante las curvas $p-y$, las cuales pueden ser proporcionadas por el usuario o el programa las genera internamente siguiendo las recomendaciones para varios tipos de suelos.



GROUP (1991). Este software permite determinar la distribución de cargas en pilotes verticales o inclinados en grupo. Pilotes verticales e inclinados pueden ser incluidos en el mismo grupo. Las curvas $p-y$ pueden ser proporcionadas por el usuario o pueden ser generadas internamente por el programa. La solución es bidimensional; si se desea, la interacción suelo-pilote puede ser tomada en cuenta introduciendo factores de reducción para las curvas $p-y$ de pilotes individuales. Se obtienen deformaciones, momentos flexionantes, esfuerzos cortantes, y resistencia del suelo a lo largo de cada pilote que conforma al grupo. El software usa técnicas iterativas para resolver las ecuaciones diferenciales no-lineales.

DYNA (1985). El programa calcula la respuesta de cimentaciones rígidas ante todo tipo de cargas dinámicas, las cuales pueden ser producidas por maquinaria, sismos o tráfico. Las constantes de rigidez y amortiguamiento de la cimentación necesarias para el análisis son evaluadas internamente por el programa. El software permite colocar apoyos libres o fijos en la cabeza de los pilotes. El programa permite modelar tanto pilotes de punta como de fricción y automáticamente, según sea el caso, define la rigidez de los estratos por debajo de la punta. El análisis de este paquete de cómputo es lineal. Para un grupo de pilotes el efecto de interacción suelo-pilote en la rigidez y amortiguamiento se evalúa usando los coeficientes de interacción. El enfoque es aproximado y usa los coeficientes de interacción estáticos propuestos por Poulos (1971). Estos coeficientes son sustituidos en la fórmula para la determinación de la rigidez y amortiguamiento de un grupo de pilotes. Se puede tomar en cuenta la no-linealidad ajustando los valores del esfuerzo cortante y el amortiguamiento de la zona de reducción de resistencia alrededor del pilote, de acuerdo al nivel de esfuerzo.

SPASM. Este paquete de cómputo hace posible realizar el análisis dinámico de un pilote lateralmente cargado mediante un modelo mecánico de elementos discretos, el cual está restringido a un comportamiento elástico-lineal. Todos los datos de entrada del pilote se



pueden variar libremente a lo largo del pilote. La estabilidad y precisión del análisis dinámico se consigue mediante una solución numérica implícita. El acoplamiento suelo-estructura de cada elemento se realiza a través de un ensamble multi-elemento de bloques friccionantes y resortes, lo que permite examinar la interacción histerética suelo-estructura bajo condiciones dinámicas. El modelo inelástico no-lineal del suelo permite la degradación o aumento de la resistencia como función de la deformación y del número de ciclos en el rango inelástico. Además se permite la formación de huecos entre el pilote y el suelo con el fin de representar propiamente la interacción suelo-pilote en los estratos superiores del suelo.



3. METODOLOGÍA PROPUESTA

Las cimentaciones profundas a base de una combinación cajón-pilotes es una solución frecuentemente adoptada en suelos blandos, como los que se tienen en la ciudad de México. Cuando la cimentación se ubica en una zona de alta sismicidad los movimientos sísmicos en el suelo ocasionan reacciones horizontales interactuantes sobre las paredes del cajón y los pilotes que combinadas con las fuerzas externas mantienen en equilibrio al sistema de cimentación. Debido a que el suelo es un medio continuo, en la interface con el sistema de cimentación se debe cumplir con la compatibilidad de deformaciones, lo que involucra por un lado a la cimentación y por el otro al suelo reaccionando lateralmente. El modelo estructural que se contempla para el caso de sismo considera que, al nivel de la cabeza de los pilotes, el desplazamiento lateral es el mismo para todos los pilotes y cuya magnitud depende del nivel de empotramiento de la cimentación y de la amplitud del movimiento sísmico.

Para resolver el problema estructural es usual idealizar el suelo, que le proporciona apoyo lateral al sistema de cimentación, mediante resortes horizontales, cuya rigidez final dependerá de que se cumpla la compatibilidad de deformaciones en la interface del sistema cimentación-suelo.

La modelación del sistema de cimentación se logra transformándolo en una malla o retícula de barras con propiedades equivalentes a la cimentación real. Los nudos de esta malla tendrán, por lo tanto, seis grados de libertad a saber: giros alrededor de los ejes x , y z y desplazamientos también en las tres direcciones.

En este modelo, la resistencia al desplazamiento de los nudos, se deberá tanto a la rigidez de las barras de la estructura como a las rigideces de los resortes que modelan el suelo. La resistencia al giro depende únicamente de la rigidez de las barras. El equilibrio del modelo físico aquí planteado requiere satisfacer la siguiente expresión (ecuación 2.22):



$$([\bar{S}'_{ij}] + [\bar{S}''_{ij}] + [\bar{S}'''_{ij}]) \cdot |X_i| = |\Delta_{io}^p| + |\Delta_{io}^A| + |\Delta\delta_{si}|$$

Las matrices y vectores que constituyen esta ecuación fueron descritos previamente en el capítulo 2 de esta tesis.

3.1 Respuesta sísmica del suelo en campo libre

Para el cálculo de los desplazamientos en el suelo, $|\Delta\delta_{si}|$, y los esfuerzos cortantes asociados, τ_i generados por las ondas de cortante, se utiliza el método de las distorsiones (modelo de viga de cortante, Zeevaert, 1973,1980).

En la Figura 3.1 se muestra el equilibrio de un elemento de suelo, ubicado a una profundidad z_i , sometido a una onda de cortante. El equilibrio elasto-dinámico del elemento conduce a los siguientes algoritmos para el cálculo de los desplazamientos y los esfuerzos de corte:

$$\delta_{i+1} = A_i \delta_i - B_i \tau_i \quad (3.1)$$

$$\tau_{i+1} = C_i (\delta_i + \delta_{i+1}) + \tau_i \quad (3.2)$$

En donde los coeficientes A_i , B_i y C_i tienen los siguientes valores:

$$A_i = \frac{1 - N_i}{1 + N_i} \quad (3.3)$$

$$B_i = \frac{1}{1 + N_i} \left(\frac{d_i}{G_i} \right) \quad (3.4)$$

$$C_i = \frac{1}{2} \rho_i d_i \omega_s^2 \quad (3.5)$$

Donde:

$$N_i = \frac{\rho_i d_i \omega_s^2}{4G_i} \quad (3.6)$$

Donde:

ω_s : frecuencia circular en la superficie del suelo

- G_i : módulo dinámico de rigidez al esfuerzo cortante del estrato i
- ρ_i : densidad del estrato i
- d_i : espesor del estrato i

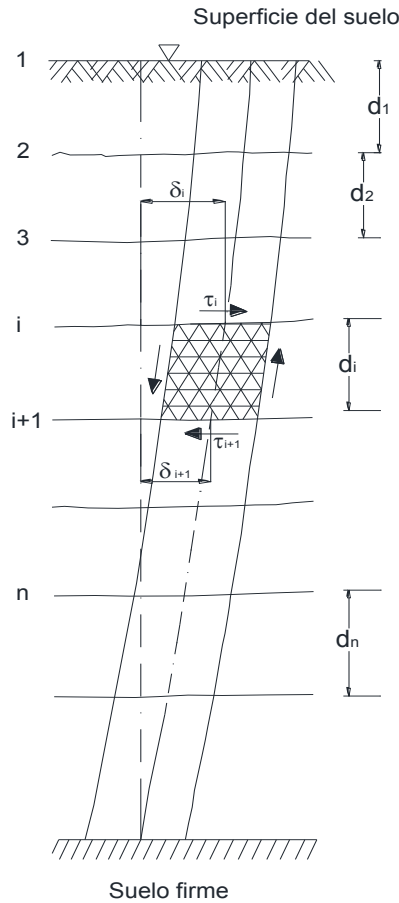


Figura 3.1 Columna de suelo sometida a un movimiento sísmico (Zeevaert 1973)

Conociendo la aceleración máxima (a_o) superficial y las condiciones de frontera en la superficie ($(\delta_s)_{\text{máx}}$; $\tau_i=0$) y base firme del suelo ($\delta_b=0$ y $(\tau_{sb})_{\text{máx}}$), es posible calcular las configuraciones finales de los desplazamientos horizontales y esfuerzos cortantes haciendo uso de las ecuaciones 3.1 y 3.2 de manera iterativa. Pueden estudiarse configuraciones producidas por el primer y segundo modo de vibrar superpuestos en la forma más desfavorable, empleando para ello un coeficiente de participación de modos.



3.2 Determinación de la ecuación matricial de desplazamientos horizontales, HEMAS

Se supone que el suelo es un medio continuo el cual simultáneamente quedará representado por una serie de n resortes elásticos de rigidez horizontal K_i , interrelacionados entre sí, mientras que las paredes de la cimentación (cajón y pilotes) se discretizan mediante un número finito n de placas de área a_i .

El cálculo de los módulos de reacción o constantes de resorte equivalentes del subsuelo se puede realizar por medio del análisis de interacción suelo-cimentación, resolviendo la siguiente ecuación denominada HEMAS (Zeevaert 1973 y 1980):

$$\{\delta_i\} = [\bar{\delta}_{ji}] \{q_i\} \quad (3.7)$$

Donde:

$\{\delta_i\}$ Vector de desplazamientos horizontales

$[\bar{\delta}_{ji}]$ Matriz de desplazamientos horizontales por carga unitaria

$\{q_i\} = \left\{ \begin{array}{l} X_i \\ a_i \end{array} \right\}$ Vector de reacciones horizontales, correspondiente a la presión de contacto suelo-cimentación en el área tributaria a_i .

Cada uno de los renglones de la matriz $[\bar{\delta}_{ji}]$ se puede calcular como:

$$\{\bar{\delta}_{ji}\} = [I_{ji}]^T \cdot \{\alpha_n\} \quad (3.8)$$

Donde:

$[I_{ji}]$: Matriz de influencias por carga unitaria horizontal aplicada en el área tributaria a_i (carga por unidad de área), calculada a partir de la integración de la solución fundamental de Mindlin.

$\{\alpha_n\}$: Vector de compresibilidades en sentido horizontal de los diferentes estratos de suelo involucrados en el análisis.

3.2.1 Integración de la solución fundamental de Mindlin

Para tomar en cuenta la influencia de un pilote sobre el resto que conforman la hilera de pilotes se emplea la solución de Mindlin. Para encontrar la ecuación que permita obtener el incremento de esfuerzo lateral por carga horizontal de forma rectangular se integra la solución de Mindlin para carga puntual. (ecuación. 3.9), suponiendo que el medio es semi-infinito, homogéneo e isótropo (Figura 3.2).

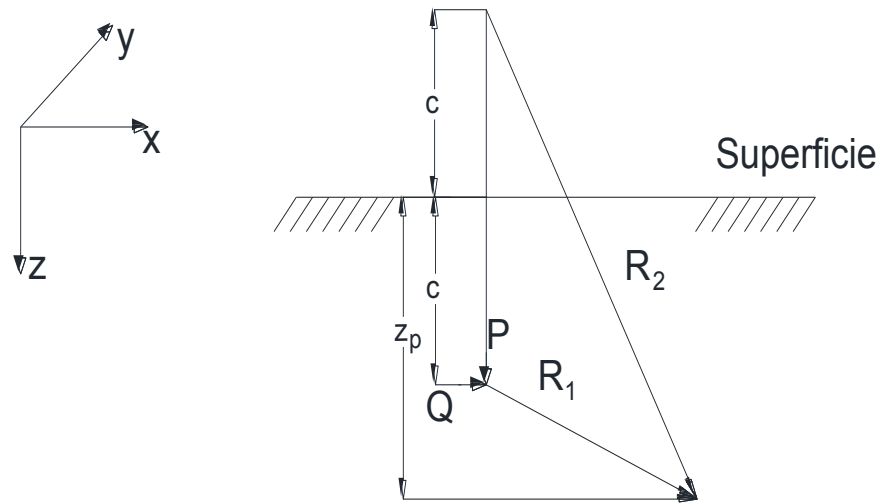


Figura 3.2 Solución de Mindlin para carga puntual (Poulos, 1974)

$$\sigma_x = \frac{-Q_x}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left(3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right) + \frac{6c}{R_2^5} \left(3c - (3-2\nu)(z+c) + \frac{5x^2z}{R_2^2} \right) \right] \quad (3.9)$$

Donde:

$$r^2 = x^2 + y^2$$



$$R_1^2 = r^2 + (z_p - c)^2$$

$$R_2^2 = r^2 + (z_p + c)^2$$

Para realizar la integración de la solución de Mindlin para carga concentrada a un área rectangular con carga uniformemente repartida, es necesario realizar el cambio de variable que se describe a continuación:

$$z = z_p - c \quad (3.10)$$

$$c = z_p - z \quad (3.10b)$$

$$z_p + c = z + 2c \quad (3.11)$$

Sustituyendo la ecuación 3.10b en el segundo término de la ecuación 3.11

$$z_p + c = z + 2(z_p - z) = z + 2z_p - 2z$$

$$z_p + c = 2z_p - z \quad (3.12)$$

$$z_p - c = z_p - (z_p - z) = z \quad (3.13)$$

De las ecuaciones 3.12 y 3.13 las variables R_1 y R_2 quedan redefinidas como:

$$R_1^2 = r^2 + z^2$$

$$R_2^2 = r^2 + (2z_p - z)^2$$

El punto donde se quiere calcular el esfuerzo lateral se encuentra a una profundidad z_p con respecto a la superficie horizontal del medio semi-infinito. El sistema de referencia se ubica en dicho punto por lo que, con respecto a este sistema de referencia, las coordenadas de los vértices del rectángulo cargado son: $V_1(x, y_1, z_1)$, $V_2(x, y_1, z_2)$, $V_3(x, y_2, z_1)$ y $V_4(x, y_2, z_2)$. Si ν es la relación de Poisson del medio semi-infinito y Q es la carga horizontal por unidad de ancho, el esfuerzo horizontal está dado por la ecuación 3.14:

$$\sigma_x = a \sum_{i=1}^9 a_i I_i \quad (3.14)$$

$$a = -\frac{Qx}{8\pi(1-\nu)};$$



$$a_1 = 2\nu - 1 ; I_1 = \iint \frac{1}{R_1^3} dydz$$

$$a_2 = (1 - 2\nu)(5 - 4\nu); I_2 = \iint \frac{1}{R_2^3} dydz$$

$$a_3 = -3x^2 ; I_3 = \iint \frac{1}{R_1^5} dydz$$

$$a_4 = 3(4\nu - 3)x^2 ; I_4 = \iint \frac{1}{R_2^5} dydz$$

$$a_5 = 12(1 - \nu)(2\nu - 1); I_5 = \iint \frac{1}{R_2(R_2 + 2z_p - z)^2} dydz$$

$$a_6 = 4(\nu - 1)(2\nu - 1)x^2; I_6 = \iint \frac{3R_2 + 2c - z}{R_2^3(R_2 + 2z_p - z)^3} dydz$$

$$a_7 = 18; I_7 = \iint \frac{(z_p - z)^2}{R_2^5} dydz$$

$$a_8 = 6(2\nu - 3); I_8 = \iint \frac{(2z_p - z)(z_p - z)}{R_2^5} dydz$$

$$a_9 = 30x^2; I_9 = \iint \frac{z_p(z_p - z)}{R_2^7} dydz$$

Cada una de las integrales descritas arriba se puede evaluar, para una carga horizontal de forma rectangular, como:

$$I_i = F_i(y_1, z_1) - F_i(y_1, z_2) - F_i(y_2, z_1) + F_i(y_2, z_2)$$

Las funciones F_i se calculan mediante las expresiones que se describen a continuación:

$$F_1 = \frac{\text{ArcTan} \left[\frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{x}$$



$$F_2 = - \frac{\text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x \sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}} \right]}{x}$$

$$F_3 = \frac{z \left(\frac{xy(2x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\text{ArcTan} \left[\frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]}{z} \right)}{3x^3}$$

$$F_4 = \frac{(-2z_p + z) \left(\frac{xy(4z_p^2 + 2x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2)}{(x^2 + y^2)(4z_p^2 + x^2 - 4z_p z + z^2)\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}} + \frac{\text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}} \right]}{2z_p - z} \right)}{3x^3}$$

$$F_5 = \frac{1}{2x^3} \left(\frac{xy(-2z_p + z)^2}{x^2 + y^2} - \frac{xy(2z_p - z)\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}}{x^2 + y^2} + (4z_p^2 + x^2 - 4z_p z + z^2)\text{ArcTan} \left[\frac{y}{x} \right] - (4z_p^2 + x^2 - 4z_p z + z^2)\text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}} \right] \right)$$

$$F_6 = \frac{1}{2x^5} (-2z_p + z) \left(\frac{2x^3 y(-2z_p + z)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{3xy(-2z_p + z)}{x^2 + y^2} + \frac{xy(5x^2 + 3y^2)\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}}{(x^2 + y^2)^2} - 3(2z_p - z)\text{ArcTan} \left[\frac{y}{x} \right] + \frac{(12z_p^2 + x^2 - 12z_p z + 3z^2)\text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_p z + z^2}} \right]}{2z_p - z} \right)$$



$$F_7 = \frac{1}{3} \left(\frac{y\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2} \left(\frac{-\frac{z_p^2}{x^2(x^2 + y^2)} + (z_p - z)^2}{(4z_p^2 + x^2 - 4z_pz + z^2)(4c^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2)} \right)}{2c - z} \right. \\
\left. - \frac{(c^2 + x^2) \text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x\sqrt{4c^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2}} \right]}{x^3} \right)$$

$$F_8 = \frac{1}{3} \left(\frac{y(z_p - z)}{(4z_p^2 + x^2 - 4z_pz + z^2)\sqrt{4c^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2}} \right. \\
\left. - \frac{\text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - z_p + z^2}} \right]}{x} \right)$$

$$F_9 = \frac{1}{15} z_p \left(\frac{1}{(2z_p - z)^3} y \sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2} \left(\frac{2z_p(-2z_p + z)^2}{x^2(x^2 + y^2)^2} \right. \right. \\
+ \frac{(z_p - z)(-2z_p + z)^2}{(4z_p^2 + x^2 - 4z_pz + z^2)(4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2)^2} \\
+ \frac{z_p(12z_p^2 - x^2 - 12z_pz + 3z^2)}{x^4(x^2 + y^2)} \\
+ \left. \frac{12z_p^3 - 20z_p^2z - 2z^3 + z_p(x^2 + 11z^2)}{(4z_p^2 + x^2 - 4z_pz + z^2)^2(4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2)} \right) \\
+ \frac{3c \text{ArcTan} \left[\frac{y(2z_p - z)}{x\sqrt{4z_p^2 + x^2 + y^2 - 4z_pz + z^2}} \right]}{x^5} \right)$$

Estas nueve ecuaciones pueden parecer muy complejas, sin embargo, es posible implementarlas en un lenguaje de programación para facilitar el cálculo del esfuerzo horizontal.



3.2.2 Cálculo de los valores de influencia

Para determinar los valores de influencia por carga horizontal se emplea la ecuación 3.15. Se aplica una carga unitaria en un punto cualquiera i y se investigan los esfuerzos horizontales inducidos en la masa del suelo en otros puntos. (Figura 3.3).

Estrato		1	2	3	n	$\sum_1^n I_{ji}$	α_i	$\bar{\delta}_{ji}$
		Δx	Δx	Δx	Δx			
1		I'_{1i}	I''_{1i}	I'''_{1i}	I^n_{1i}	\bar{I}_{1i}	α_1	$\bar{\delta}_{1i}$
2		I'_{2i}	I''_{2i}	I'''_{2i}	I^n_{2i}	\bar{I}_{2i}	α_2	$\bar{\delta}_{2i}$
i		I'_{ii}	I''_{ii}	I'''_{ii}	I^n_{ii}	\bar{I}_{ii}	α_i	$\bar{\delta}_{ii}$
4		I'_{4i}	I''_{4i}	I'''_{4i}	I^n_{4i}	\bar{I}_{4i}	α_4	$\bar{\delta}_{4i}$
5		I'_{5i}	I''_{5i}	I'''_{5i}	I^n_{5i}	\bar{I}_{5i}	α_5	$\bar{\delta}_{5i}$
n		I'_{ni}	I''_{ni}	I'''_{ni}	I^n_{ni}	\bar{I}_{ni}	α_n	$\bar{\delta}_{ni}$

Figura 3.3 Formación de la matriz de los desplazamientos horizontales (Zeevaert, 1980)

3.2.3 Cálculo de la matriz de desplazamientos horizontales unitarios, $\bar{\delta}_{ji}$

La matriz de desplazamientos horizontales unitarios, $\bar{\delta}_{ij}$, debido a la carga unitaria aplicada en i se obtiene usando la ecuación 3.15:

$$\bar{\delta}_{ji} = \sum_1^n \alpha^N \cdot I_{ji}^N \quad (3.15)$$

Donde

I_{ji}^N Valores de los coeficientes de influencia debido a la carga unitaria aplicada en i
 α es igual a $M_{ej} \cdot \Delta x$



M_{ej} Módulo de deformación unitaria dinámico unitaria para el estrato de suelo considerado. Es igual a $\frac{1}{G(1+\nu)}$

Δx Distancia en dirección horizontal que contribuye a la integración de $\bar{\delta}_{ij}$

3.3 Determinación de la ecuación matricial de interacción horizontal, HEMIS

Para resolver el problema de interacción suelo-pilote con la metodología aquí propuesta es necesario resolver la ecuación de interacción horizontal, HEMIS (ecuación 2.19):

$$X_i = [\bar{S}_{ij}]^{-1} \cdot |\Delta_{io}|$$

La matriz $[\bar{S}_{ij}]$ está formada por las matrices \bar{S}'_{ij} , \bar{S}''_{ij} y \bar{S}'''_{ij} , y el vector $|\Delta_{io}|$ está constituido por los vectores $|\Delta^p_{io}|$, $|\Delta^A_{io}|$ y $|\Delta\delta_{si}|$, los cuales fueron descritos en la sección 2.1.4. A continuación se describe el procedimiento para determinar cada una de estas matrices.

3.3.1 Cálculo de la matriz de coeficientes S_{ij}

La matriz de coeficientes S_{ij} representa los desplazamientos en la masa de suelo ante cargas unitarias laterales bajo distintas condiciones de apoyo y rigidez del pilote. Para obtener los valores de las matrices \bar{S}'_{ij} y \bar{S}''_{ij} se hace uso del programa EMISES 3D (López, 2012), el cual fue desarrollado en el lenguaje de programación FORTRAN.

La matriz \bar{S}'_{ij} se determina considerando lo siguiente:

1. Apoyos inferiores fijos
2. Cargas unitarias en cada uno de los nudos
3. Se considera al pilote como cuerpo flexible

La matriz \bar{S}''_{ij} se determina asumiendo:

1. Apoyos inferiores elásticos (resorte)
2. Cargas unitarias en cada uno de los nudos
3. El pilote tiene una rigidez muy grande



La matriz \bar{S}_{ij}''' es igual a $\frac{1}{K_i}$, por tanto es diagonal. Para su determinación se emplea la siguiente expresión (definida en 2.1.4):

$$K_i = \left| \frac{X_i}{\delta_i} \right|$$

Los desplazamientos δ_i se calculan empleando HEMA. Debido a que las reacciones X_i son incógnitas y el procedimiento de análisis es iterativo se inicia el cálculo considerando que $q_i = X_i/a_i$ es igual a 1.

3.3.2 Cálculo del vector de términos independientes, Δ_{io}

Las matrices columna $|\Delta_{io}^p|$ y $|\Delta_{io}^A|$ se determinan con ayuda del programa EMISES3D asumiendo:

Para $|\Delta_{io}^p|$:

1. Apoyos inferiores fijos
2. Fuerza cortante en la cabeza del pilote
3. Se considera al pilote como cuerpo flexible

Para $|\Delta_{io}^A|$:

1. Apoyos inferiores con resorte
2. Fuerza cortante en la cabeza del pilote
3. La rigidez del pilote es muy grande

La matriz columna $|\Delta\delta_{si}|$ corresponde a los desplazamientos relativos en campo libre los cuales se obtienen siguiendo el procedimiento descrito en 3.1.

3.4 Solución del sistema de ecuaciones

Para obtener la solución del problema de interacción por carga horizontal se resuelven las ecuaciones HEMAS y HEMIS de forma simultánea para la primera iteración. Se continúa con el procedimiento iterativo hasta que los valores del módulo de cimentación K_i sean iguales a las obtenidas en el análisis anterior. En los siguientes capítulos se presenta a detalle este cálculo.



3.4.1 Determinación de las reacciones X_i

Las reacciones X_i se obtienen para los nodos intermedios a lo largo del pilote mediante la solución del sistema de ecuaciones (HEMIS) descrito en la sección anterior. Para la reacción en la base, X_b , es necesario satisfacer la ecuación 3.16.

$$X_a + X_b + \sum_1^n X_i = 0 \quad (3.16)$$

3.5 Obtención de los diagramas de cortante y momento

Los cortantes, V_i y momentos flexionantes, M_i en una sección i de la pila a una profundidad z_i de la cabeza se determinan empleando la ecuación 3.17 y 3.18 respectivamente. El momento flexionante en la cabeza del pilote, M_a se determina usando la ecuación 3.19.

$$V_i = V_a - (X_1 + X_2 + \dots + X_{i-1}) \quad (3.17)$$

$$M_i = M_a - V_a z_i + (X_1 y_1 + X_2 y_2 + \dots + X_{i-1} y_{i-1}) \quad (3.18)$$

Donde

$$y_i = z_1 - z_{i-1}$$

$$M_a = \sum_1^n z_i X_i \quad (3.19)$$

4. CASO ESTUDIO

En esta tesis se analizan dos casos estudio; el primero corresponde al análisis de un pilote aislado y el segundo caso es una cimentación constituida por una losa de cimentación apoyada sobre un grupo de seis pilotes (3x2). La losa de cimentación tiene un área en planta de 15 x 10 m y los pilotes son de sección cuadrada de 50x50cm. Se analizan ambos casos con el fin de poner en evidencia las diferencias en la configuración de desplazamientos y la distribución de reacciones entre un pilote aislado y una hilera de pilotes. Los casos estudio descritos anteriormente se presentan en la Figura 4.1. Las propiedades del suelo corresponden a una estratigrafía típica de la ciudad de México hasta 60m de profundidad aproximadamente constituida por depósitos de arcillas compresibles y baja resistencia al esfuerzo cortante (Figura 4.2).

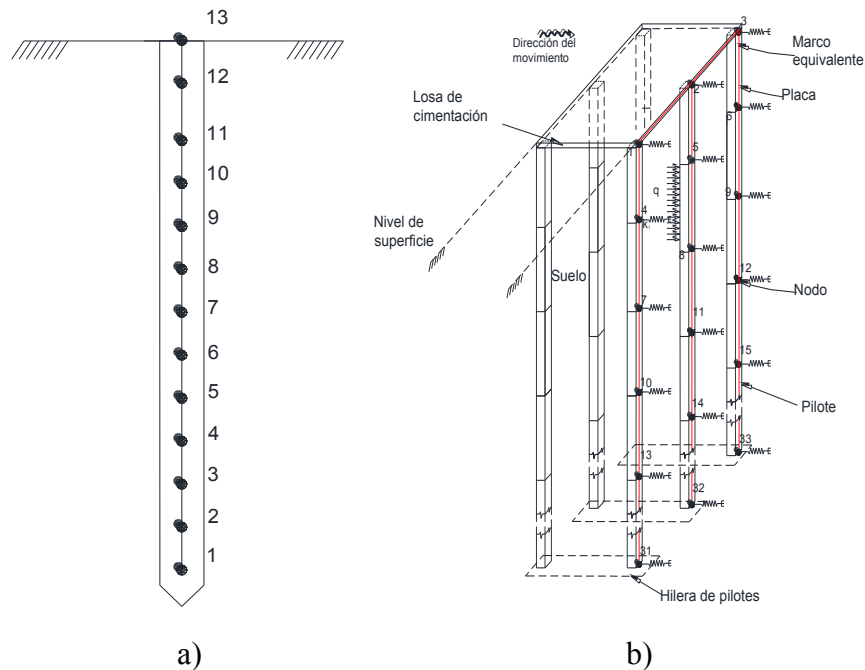


Figura 4.1 Casos estudios a) Pilote aislado, b) Losa de cimentación y pilotes

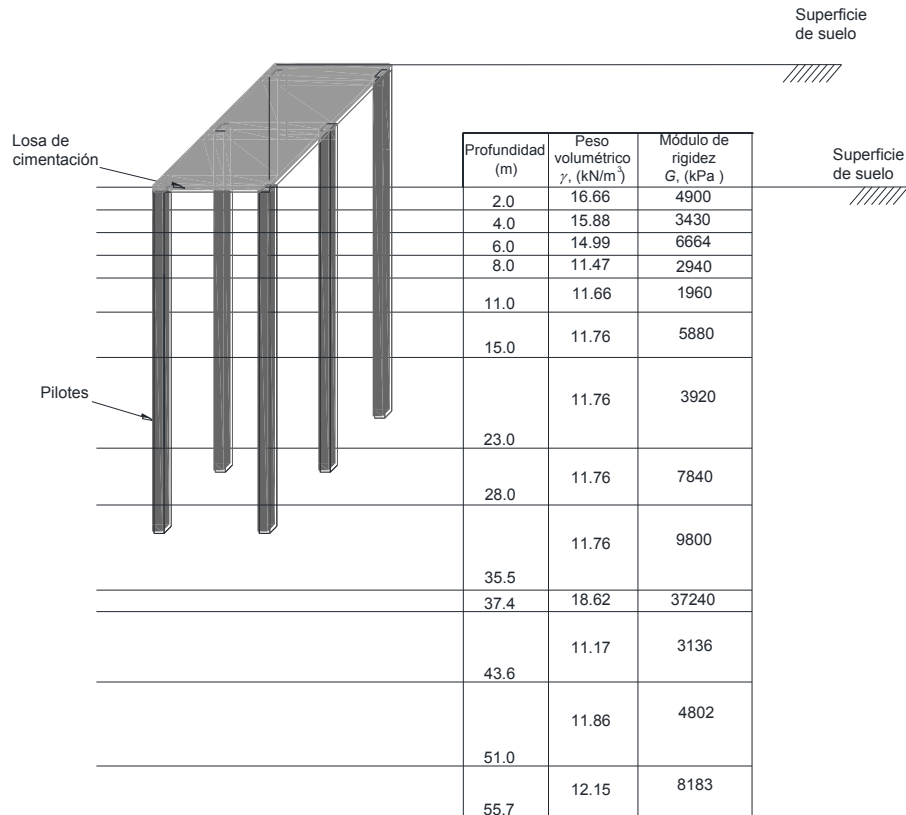


Figura 4.2 Propiedades índice y mecánicas de los estratos considerados en los análisis

Para este caso estudio se consideran tres columnas de suelo de longitud Δx , ancho y altura igual al diámetro y largo del pilote, respectivamente, y diez apoyos elásticos (resortes) por cada pilote (Figura 4.3). Las columnas de suelo tienen una longitud de 1m. Para tomar en cuenta al grupo de pilotes se realizó el análisis de una hilera de tres pilotes y se consideró para cada pilote de la hilera, una rigidez equivalente a la sección de dos pilotes usando el teorema de los ejes paralelos (Figura 4.4). La estructura que soporta la cimentación genera un cortante basal de 13500 kN, asociado a una aceleración máxima en superficie de 1m/s^2 . Se consideró un módulo de elasticidad dinámico del concreto de 22240 MPa. La relación de Poisson se asumió igual a 0.5. Para simular el fenómeno de torsión en la cimentación estudiada, se considera el 100% de la aceleración en la dirección más desfavorable y 30% en la otra dirección (RCDF NTC 2004). Para determinar el vector de desplazamientos relativos en campo libre se considera 90% del primer modo de vibrar más el 10% del segundo modo.

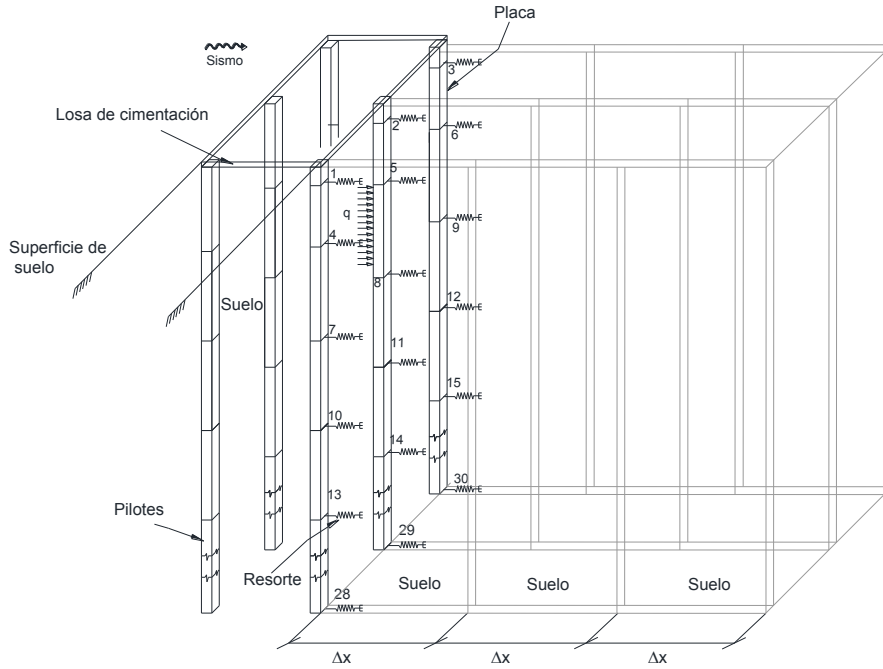


Figura 4.3. Columnas de suelo consideradas en el análisis

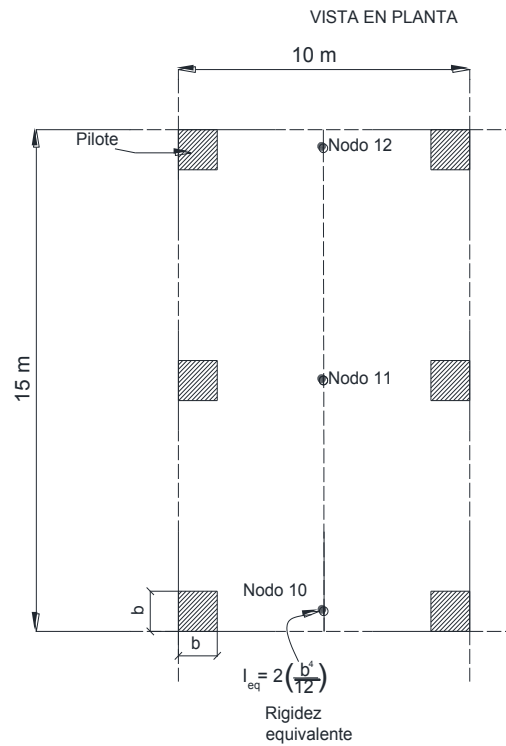


Figura 4.4. Vista en planta del caso estudio



5. RESULTADOS

Los resultados obtenidos del análisis del caso estudio se resumen en este capítulo. Inicialmente se presenta el análisis del pilote aislado y posteriormente se describe el análisis del grupo de pilotes el cual objetivo principal de este trabajo. La metodología aquí propuesta se verificó para un pilote aislado resolviendo el ejemplo III.13.2 que se consigna en Zeevaert (1980). Dichos resultados se presentan en el Anexo A.2.

5.1 Respuesta sísmica de un pilote aislado

En esta sección se presentan los resultados del análisis de interacción suelo-pilote aislado que se describe en el capítulo anterior.

5.1.1 Cálculo de la ecuación matricial de desplazamientos horizontales, HEMAS

Inicialmente se determina la matriz de desplazamientos unitarios del suelo (Tabla 5.1) mediante la aplicación de la ecuación 3.14. Los módulos de cimentación K_i obtenidos de la primera iteración se muestran en la Tabla 5.2. Con los valores de K_i se forma la matriz diagonal \bar{S}_{ij}''' presentada en la Tabla 5.3.

Tabla 5.1 Matriz de desplazamientos unitarios horizontales, $\bar{\delta}_{ij}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.369E-04	1.195E-05	-9.700E-09	-3.678E-07	-2.843E-07	-2.015E-07	-1.441E-07	-1.054E-07	-7.904E-08	-6.061E-08
2	1.181E-05	2.749E-04	1.047E-05	5.620E-07	5.058E-08	-1.836E-08	-2.991E-08	-2.947E-08	-2.624E-08	-2.263E-08
3	2.162E-06	2.202E-05	5.667E-04	2.153E-05	1.218E-06	1.866E-07	3.655E-08	-9.560E-10	-1.276E-08	-1.642E-08
4	4.656E-07	1.215E-06	1.725E-05	4.521E-04	1.714E-05	9.679E-07	1.579E-07	4.210E-08	1.246E-08	1.979E-09
5	1.035E-07	1.655E-07	5.720E-07	9.305E-06	2.451E-04	9.282E-06	5.217E-07	8.571E-08	2.440E-08	8.942E-09
6	7.660E-08	1.045E-07	1.690E-07	7.476E-07	1.279E-05	3.375E-04	1.277E-05	7.154E-07	1.172E-07	3.388E-08
7	3.955E-08	5.693E-08	6.965E-08	1.419E-07	7.295E-07	1.278E-05	3.375E-04	1.277E-05	7.134E-07	1.162E-07
8	1.790E-08	2.667E-08	2.955E-08	4.019E-08	9.742E-08	5.409E-07	9.580E-06	2.531E-04	9.576E-06	5.340E-07
9	7.635E-09	1.184E-08	1.281E-08	1.454E-08	2.260E-08	6.182E-08	3.583E-07	6.385E-06	1.687E-04	6.384E-06
10	3.651E-09	5.886E-09	6.399E-09	6.426E-09	8.282E-09	1.448E-08	4.290E-08	2.550E-07	4.560E-06	1.21E-04



Tabla 5.2 Módulos de cimentación K_i (Primera iteración)

X_i/a_i	δ_n (m)	a_i (m ²)	X_i (t)	K_i (t/m)
1	0.00034762	1.75	1.75	5034.22
1	0.00029764	1.5	1.5	5039.66
1	0.00061385	1.5	1.5	2443.58
1	0.0004893	1.5	1.5	3065.60
1	0.00026516	1.5	1.5	5656.99
1	0.00036502	1.5	1.5	4109.40
1	0.0003649	1.5	1.5	4110.74
1	0.00027355	1.5	1.5	5483.43
1	0.000182	1.5	1.5	8241.94
1	0.00012543	1.5	1.5	11958.89

Tabla 5.3 Matriz diagonal \bar{S}_{ij}'''

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2.291	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2.288	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	4.719	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	3.761	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	2.038	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	2.806	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	2.805	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	2.103	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1.399	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.964

5.1.2 Determinación de la ecuación matricial de interacción horizontal, HEMIS

Las matrices \bar{S}'_{ij} y \bar{S}''_{ij} que constituyen al sistema de ecuaciones a resolver se muestran en la Tabla 5.4 y 5.5 respectivamente.

Tabla 5.4 Matriz \bar{S}'_{ij}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8054.90	7761.33	7264.28	6577.97	5729.46	4745.78	3653.95	2481.03	1254.03	0.00
2	7761.34	7497.75	7033.64	6380.29	5564.73	4613.99	3555.12	2415.14	1221.08	0.00
3	7264.29	7033.65	6623.63	6028.86	5271.87	4379.71	3379.41	2298.00	1162.52	0.00
4	6578.00	6380.31	6028.87	5515.21	4843.84	4037.29	3122.59	2126.79	1076.91	0.00
5	5729.49	5564.76	5271.89	4843.85	4280.63	3586.72	2784.67	1901.51	964.27	0.00
6	4745.81	4614.02	4379.73	4037.30	3586.73	3028.01	2365.64	1622.16	824.60	0.00
7	3653.98	3555.15	3379.43	3122.61	2784.68	2365.64	1865.49	1288.73	657.88	0.00
8	2481.05	2415.16	2298.01	2126.80	1901.52	1622.16	1288.73	901.21	464.13	0.00
9	1254.04	1221.10	1162.53	1076.92	964.28	824.60	657.88	464.13	243.33	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00



Tabla 5.5 Matriz \bar{S}_{ij}''

$$\begin{bmatrix} 1.016 & \dots & \dots & 1.016 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1.016 & \dots & \dots & 1.016 \end{bmatrix} [9 \times 9]$$

Las matrices columna $|\Delta_{io}^p|$ y $|\Delta_{io}^A|$ obtenidas se muestran en la Tabla 5.6. La matriz columna $|\Delta\delta_{si}|$ corresponde a los desplazamientos relativos en campo libre los cuales se obtienen siguiendo el procedimiento descrito en 3.1 y se presentan en la Figura 5.1.

Tabla 5.6 Matrices columna $|\Delta_{io}^p|$ y $|\Delta_{io}^A|$

Nodo	Δ_{io}^p	Δ_{io}^A
1	15.80	0.00189
2	15.22	0.00189
3	14.24	0.00189
4	12.89	0.00189
5	11.22	0.00189
6	9.30	0.00189
7	7.16	0.00189
8	4.86	0.00189
9	2.46	0.00189

Nodo	δ_{si} (m)
1	0.114
2	0.11
3	0.101
4	0.081
5	0.074
6	0.058
7	0.04
8	0.024
9	0.012

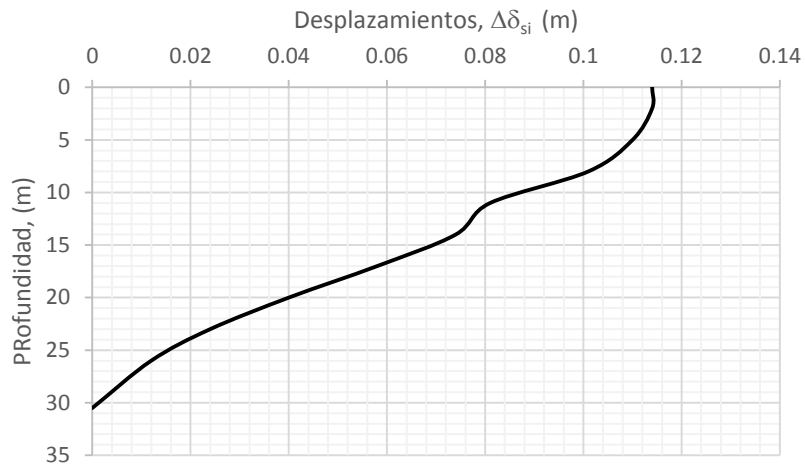


Figura 5.1 Desplazamientos relativos del suelo en campo libre, $\Delta\delta_{si}$



V. RESULTADOS

Por tanto la matriz S_{ij} y la matriz columna Δ_{io} resultantes en la primera iteración se presentan en la Tabla 5.7 y 5.8 respectivamente. Para que exista compatibilidad en las unidades el vector Δ_{io} debe multiplicarse por EI .

Tabla 5.7 Matriz S_{ij}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8058.20	7762.35	7265.29	6578.99	5730.48	4746.79	3654.97	2482.04	1255.05
2	7762.35	7501.05	7034.66	6381.31	5565.75	4615.01	3556.13	2416.15	1222.10
3	7265.31	7034.67	6629.36	6029.87	5272.89	4380.73	3380.42	2299.01	1163.53
4	6579.01	6381.33	6029.88	5519.99	4844.86	4038.31	3123.61	2127.81	1077.93
5	5730.51	5565.77	5272.91	4844.86	4283.68	3587.74	2785.69	1902.53	965.29
6	4746.83	4615.04	4380.75	4038.32	3587.75	3031.83	2366.66	1623.17	825.61
7	3655.00	3556.16	3380.45	3123.62	2785.70	2366.66	1869.31	1289.74	658.90
8	2482.07	2416.17	2299.03	2127.82	1902.53	1623.18	1289.74	904.33	465.14
9	1255.06	1222.11	1163.54	1077.94	965.29	825.62	658.90	465.14	245.75

Tabla 5.8 Matriz columna Δ_{io}

Nodo	Δ_{io}
1	15.91
2	15.33
3	14.34
4	12.97
5	11.30
6	9.36
7	7.20
8	4.88
9	2.47

5.1.3 Solución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones a resolver (ecuación 2.22) se muestra en la Tabla 5.9. Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las reacciones X_i mostradas en la Tabla 5.10. Con los nuevos valores de $q_i = X_i/a_i$ se determinan los nuevos valores del módulo de cimentación K_i .

Tabla 5.9 Sistema de ecuaciones a resolver

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_{io}
1	0.0546	-0.0756	0.0123	0.0088	0.0010	-0.0009	-0.0002	0.0000	0.0000	183511.7
2	-0.0756	0.1425	-0.0695	-0.0073	0.0087	0.0017	-0.0002	-0.0002	0.0000	176748.3
3	0.0123	-0.0695	0.1092	-0.0566	-0.0025	0.0061	0.0013	-0.0003	-0.0002	165357.4
4	0.0088	-0.0073	-0.0566	0.1204	-0.0801	0.0085	0.0064	0.0006	-0.0006	149581.8
5	0.0010	0.0087	-0.0025	-0.0801	0.1504	-0.0902	0.0035	0.0091	0.0010	130306.1
6	-0.0009	0.0017	0.0061	0.0085	-0.0902	0.1459	-0.0815	0.0018	0.0094	107885.3
7	-0.0002	-0.0002	0.0013	0.0064	0.0035	-0.0815	0.1456	-0.0910	0.0100	83008.16
8	0.0000	-0.0002	-0.0003	0.0006	0.0091	0.0018	-0.0910	0.1704	-0.1206	56329.12
9	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0006	0.0010	0.0094	0.0099	-0.1206	0.1740	28479.65



Tabla 5.10. Reacciones, X_i y módulos de cimentación K_i (Primera iteración)

X_i (t)	a_i (m ²)	X_i/a_i	δ_n (m)	K_i (t/m)
21.44	1.75	12.25	0.00415	5163.32
2.89	1.5	1.93	0.00070	4144.23
3.91	1.5	2.60	0.00139	2813.29
-11.28	1.5	-7.52	-0.00327	3451.18
6.80	1.5	4.53	0.00105	6482.66
0.86	1.5	0.57	0.00024	3647.60
-1.24	1.5	-0.83	-0.00029	4283.68
-2.53	1.5	-1.69	-0.00042	5963.20
1.52	1.5	1.01	0.00016	9460.82
0.13	1.5	0.09	0.00001	8933.62

Comparando los nuevos valores de K_i (Tabla 5.10) con los valores iniciales (Tabla 5.2) se puede observar que es necesario realizar más iteraciones. De la tercera iteración se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado en la Tabla 5.11. La solución de dicho sistema proporciona los valores finales de las reacciones X_i y de los módulos de cimentación K_i (Tabla 5.12).

Tabla 5.11 Sistema de ecuaciones (Tercera iteración)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ_{i0}
1	0.0516	-0.0700	0.0097	0.0086	0.0010	-0.0007	-0.0002	0.0000	0.0000	183535.18
2	-0.0700	0.1338	-0.0682	-0.0048	0.0086	0.0010	-0.0002	-0.0002	0.0000	176771.87
3	0.0097	-0.0682	0.1157	-0.0643	0.0003	0.0058	0.0016	-0.0004	-0.0002	165380.96
4	0.0085	-0.0048	-0.0643	0.1311	-0.0873	0.0098	0.0073	0.0004	-0.0008	149605.28
5	0.0010	0.0086	0.0003	-0.0873	0.1543	-0.0859	-0.0014	0.0098	0.0013	130329.65
6	-0.0007	0.0010	0.0058	0.0098	-0.0859	0.1356	-0.0753	0.0019	0.0086	107908.86
7	-0.0002	-0.0002	0.0015	0.0073	-0.0014	-0.0753	0.1450	-0.0953	0.0133	83031.69
8	0.0000	-0.0002	-0.0003	0.0004	0.0098	0.0019	-0.0953	0.1784	-0.1264	56352.64
9	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0008	0.0013	0.0086	0.0133	-0.1264	0.1775	28503.17

Tabla 5.12. Reacciones, X_i y módulos de cimentación K_i (Tercera iteración)

X_i (t)	a_i (m ²)	X_i/a_i	δ_n (m)	K_i (t/m)
21.61	1.75	12.35	0.00418	5167.98
2.43	1.5	1.62	0.00062	3924.61
4.63	1.5	3.09	0.00164	2818.59
-12.21	1.5	-8.14	-0.00353	3456.43
7.53	1.5	5.02	0.00116	6485.14
0.61	1.5	0.41	0.00019	3290.07
-1.22	1.5	-0.82	-0.00029	4228.05
-2.76	1.5	-1.84	-0.00046	5995.48
1.95	1.5	1.30	0.00021	9411.14
-0.07	1.5	-0.05	0.00000	230016.31



5.1.4 Obtención de los diagramas de cortante y momento

Los diagramas de cortante y de momento correspondientes al caso del pilote aislado se muestran en la Figura 5.2 y 5.3 respectivamente.

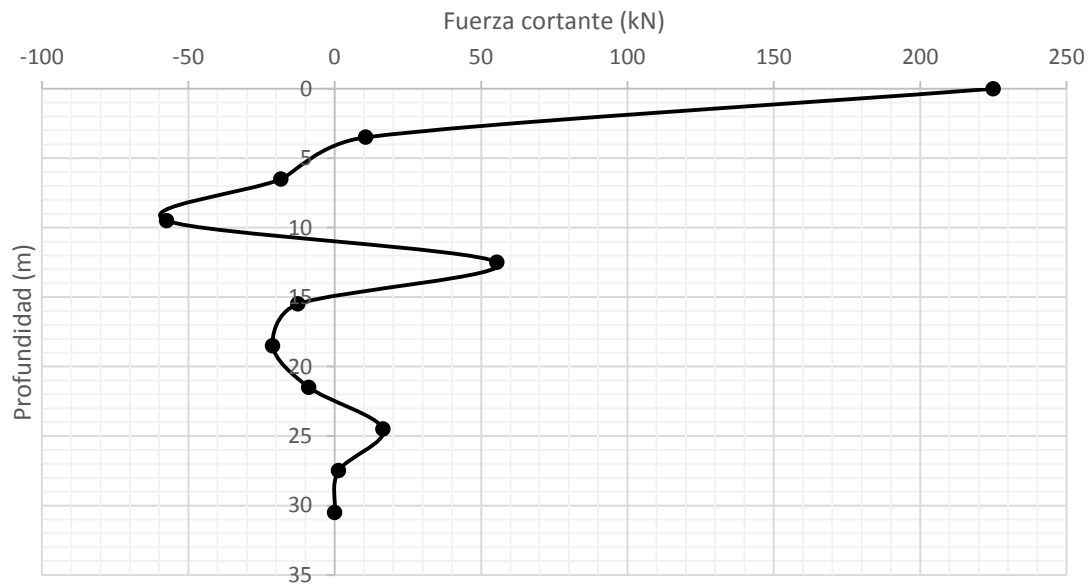


Figura 5.2 Diagrama de fuerza cortante (pilote aislado)

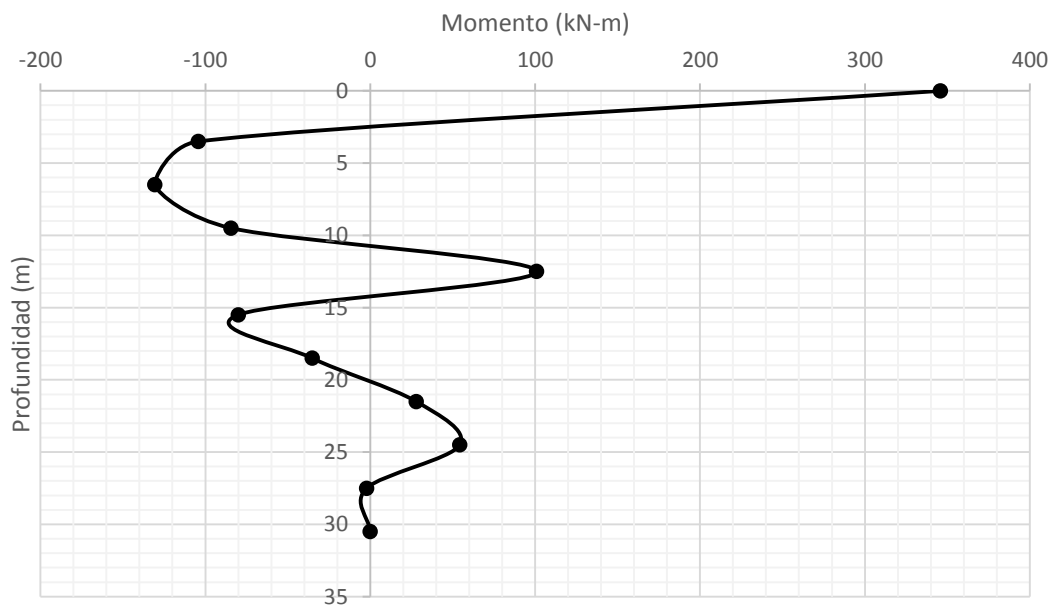


Figura 5.3 Diagrama de momentos (pilote aislado)



5.2 Respuesta sísmica de una hilera de pilotes

En esta sección se presentan los resultados del análisis de interacción de un grupo de seis pilotes (3x2). La configuración de los pilotes se presenta en el capítulo anterior.

5.2.1 Cálculo de la ecuación matricial de desplazamientos horizontales, HEMAS

Inicialmente se determina la matriz de desplazamientos unitarios del suelo, la cual se presenta en la Tabla 5.13. Los módulos de cimentación K_i obtenidos de la primera iteración se muestran en la Tabla 5.14. Con los valores de K_i se forma la matriz diagonal \bar{S}_{ij}'' presentada en la Tabla 5.15.

5.2.2 Determinación de la ecuación matricial de interacción horizontal, HEMIS

Las matrices \bar{S}_{ij}' y \bar{S}_{ij}'' que constituyen al sistema de ecuaciones a resolver se muestran en la Tabla 5.16 y 5.17 respectivamente. Las matrices columna $|\Delta_{io}^p|$ y $|\Delta_{io}^A|$ obtenidas se presentan en la Tabla 5.18. La matriz columna $|\Delta\delta_{si}|$ corresponde a los desplazamientos relativos en campo libre los cuales son los mismos al caso del pilote aislado. Por tanto la matriz S_{ij} y la matriz columna Δ_{io} resultantes en la primera iteración se presentan en la Tabla 5.19 y 5.20 respectivamente.

5.2.3 Solución del sistema de ecuaciones

El sistema de ecuaciones a resolver se muestra en la Tabla 5.21. Al resolver el sistema de ecuaciones se obtienen las reacciones X_i mostradas en la Tabla 5.22. Con los nuevos valores de $q_i = X_i/a_i$ se determinan los valores del módulo de cimentación K_i .

De la tercera iteración se obtiene el sistema de ecuaciones mostrado en la Tabla 5.23. La solución de dicho sistema proporciona los valores finales de las reacciones X_i y de los módulos de cimentación K_i (Tabla 5.24).

5.2.4 Obtención de los diagramas de cortante y momento

Los diagramas de cortante y de momento correspondientes al caso del grupo de pilotes se muestran en la Figuras 5.4 y 5.5 respectivamente.



V. RESULTADOS

Tabla 5.13. Matriz de desplazamientos unitarios horizontales, δ_{ij}

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30			
1																																	
2	337E-04																																
3	514E-07	337E-04																															
4	116E-05	421E-07	337E-04																														
5	421E-07	116E-05	421E-07																														
6	116E-05	421E-07	116E-05																														
7	421E-07	116E-05	421E-07																														
8	116E-05	421E-07	116E-05																														
9	421E-07	116E-05	421E-07																														
10	116E-05	421E-07	116E-05																														
11	421E-07	116E-05	421E-07																														
12	116E-05	421E-07	116E-05																														
13	421E-07	116E-05	421E-07																														
14	116E-05	421E-07	116E-05																														
15	421E-07	116E-05	421E-07																														
16	116E-05	421E-07	116E-05																														
17	421E-07	116E-05	421E-07																														
18	116E-05	421E-07	116E-05																														
19	421E-07	116E-05	421E-07																														
20	116E-05	421E-07	116E-05																														
21	421E-07	116E-05	421E-07																														
22	116E-05	421E-07	116E-05																														
23	421E-07	116E-05	421E-07																														
24	116E-05	421E-07	116E-05																														
25	421E-07	116E-05	421E-07																														
26	116E-05	421E-07	116E-05																														
27	421E-07	116E-05	421E-07																														
28	116E-05	421E-07	116E-05																														
29	421E-07	116E-05	421E-07																														
30	116E-05	421E-07	116E-05																														

Tabla 5.14. Módulos de cimentación K_i (Primera iteración)

Nodo	X_i/a_i	δ_{ij} (m)	K_i (t/m)	$X_i(t)$	a_i (m ²)	$X_i(t)$	X_i/a_i	δ_{ij} (m)	a_i (m ²)	$X_i(t)$	K_i (t/m)
1	1	0.0003	2882.97	1	1	1	1	0.0004	1.5	1.5	4094.28
2	1	0.0003	2883.15	1	1	1	1	0.0004	1.5	1.5	4084.13
3	1	0.0003	2882.97	1	1	1	1	0.0004	1.5	1.5	4094.28
4	1	0.0003	5023.35	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0004	1.5	1.5	4096.51
5	1	0.0003	5008.01	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0004	1.5	1.5	4086.84
6	1	0.0003	5023.35	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0004	1.5	1.5	4096.51
7	1	0.0006	2450.58	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0003	1.5	1.5	5465.93
8	1	0.0006	2442.81	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0003	1.5	1.5	5453.75
9	1	0.0006	2450.58	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0003	1.5	1.5	5465.93
10	1	0.0005	3052.68	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0002	1.5	1.5	8218.73
11	1	0.0005	3043.89	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0002	1.5	1.5	8202.36
12	1	0.0005	3052.68	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0002	1.5	1.5	8218.73
13	1	0.0003	5634.51	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0001	1.5	1.5	11931.74
14	1	0.0003	5619.65	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0001	1.5	1.5	11913.12
15	1	0.0003	5634.51	1.5	1.5	1.5	1.5	0.0001	1.5	1.5	11931.74



Tabla 5.15. Matriz diagonal S''''_{ij}

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
3.9998																														
	3.9995																													
		3.9998																												
			2.2955																											
				2.3026																										
					2.2955																									
						4.7055																								
							4.7205																							
								4.7055																						
									3.7774																					
										3.7883																				
											3.7774																			
												2.0465																		
													2.052																	
														2.0465																
															2.8164															
																2.8234														
																	2.8164													
																		2.8149												
																			2.8216											
																				2.8149										
																					2.1097									
																						2.1144								
																							2.1097							
																								1.403						
																									1.4058					
																										1.403				
																											1.403			
																												0.9664		
																													0.9664	
																														0.9679
																														0.9664



Tabla 5.17. Matriz \bar{S}_{ij}''

$$\begin{bmatrix} 0.322 & \dots & \dots & 0.322 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 0.322 & \dots & \dots & 0.322 \end{bmatrix} [27 \times 27]$$

Tabla 5.18 Matrices columna $|\Delta_{io}^p|$ y $|\Delta_{io}^A|$

Nodo	Δ_{io}^p	Δ_{io}^A	Nodo	Δ_{io}^p	Δ_{io}^A
1	15.810	0.004	16	9.318	0.004
2	15.811	0.004	17	9.318	0.004
3	15.811	0.004	18	9.318	0.004
4	15.252	0.004	19	7.174	0.004
5	15.253	0.004	20	7.174	0.004
6	15.252	0.004	21	7.174	0.004
7	14.271	0.004	22	4.870	0.004
8	14.271	0.004	23	4.871	0.004
9	14.271	0.004	24	4.871	0.004
10	12.920	0.004	25	2.462	0.004
11	12.920	0.004	26	2.462	0.004
12	12.920	0.004	27	2.462	0.004
13	11.251	0.004	28	0.000	0.004
14	11.251	0.004	29	0.000	0.004
15	11.251	0.004	30	0.000	0.004



V. RESULTADOS

Tabla 5.19. Matriz S_{ij}

1	1346.55	1341.39	1341.37	1297.21	1284.05	1284.03	1215.24	1210.82	1101.21	1086.21	1086.18	959.70	954.68	954.64	795.30	790.72	790.69	612.58	608.82	608.79	416.13	413.46	413.46	210.51	209.14	208.13
2	1341.39	1346.54	1341.39	1297.21	1284.04	1284.04	1215.24	1210.82	1101.22	1086.19	1086.19	954.65	959.72	954.66	790.69	795.32	790.70	612.58	608.80	612.60	413.45	416.14	413.45	210.51	209.14	208.13
3	1297.21	1294.04	1294.03	1284.05	1284.05	1284.36	1215.24	1210.82	1086.17	1086.21	1101.21	954.64	954.66	959.71	790.68	790.72	795.30	612.59	608.82	612.59	413.44	416.13	413.44	209.12	209.14	210.52
4	1284.05	1284.04	1284.03	1284.36	1248.37	1248.35	1190.01	1168.09	1083.68	1067.51	1057.49	947.99	920.98	920.95	762.81	762.81	762.81	587.31	587.31	587.31	388.88	398.88	398.88	201.76	201.76	201.75
5	1284.03	1294.05	1294.05	1284.37	1248.37	1248.36	1188.06	1168.09	1057.50	1037.50	1037.50	920.96	920.96	948.01	762.79	787.85	787.85	587.32	587.32	587.32	388.88	413.67	398.87	201.75	209.44	201.76
6	1215.24	1210.81	1210.80	1190.01	1168.08	1168.06	1139.40	1092.94	1043.49	999.50	989.47	919.58	861.75	861.72	768.43	713.76	713.73	595.47	549.55	549.55	406.17	373.24	373.23	205.97	188.80	188.80
7	1210.82	1215.24	1210.82	1168.09	1168.08	1092.96	1139.43	1092.96	989.49	989.51	1043.50	861.72	861.75	919.59	713.74	768.45	713.75	549.56	595.50	549.56	406.19	373.24	373.23	188.80	205.98	188.80
8	1101.21	1086.18	1086.17	1083.68	1067.50	1067.48	1043.49	989.49	989.47	977.09	895.83	895.81	868.11	868.14	780.15	731.64	646.20	497.56	497.56	497.56	300.93	337.92	337.91	198.73	170.96	170.95
9	1086.18	1086.19	1086.19	1083.69	1067.51	1063.69	1043.50	989.48	989.50	989.50	989.50	989.50	868.11	868.14	780.16	731.67	646.20	497.55	497.56	497.56	300.93	337.92	337.92	170.95	170.96	170.95
10	959.70	954.65	954.64	947.99	920.96	920.96	919.59	861.74	861.75	861.75	861.75	789.26	789.26	679.46	627.78	562.79	529.72	433.34	433.34	433.34	294.32	294.32	294.31	186.33	148.91	148.91
11	954.67	959.72	954.67	920.98	948.01	948.00	861.73	861.75	861.75	861.75	861.75	789.26	789.26	679.46	627.78	562.79	529.72	433.34	433.34	433.34	294.32	294.32	294.31	148.91	186.34	148.92
12	795.30	790.69	790.68	787.82	762.79	762.78	768.43	713.74	713.73	731.83	646.17	627.78	627.78	562.76	588.81	466.15	466.13	358.94	358.94	358.94	243.81	243.81	243.80	123.39	123.39	123.38
13	790.72	795.32	790.72	762.81	762.81	762.81	713.76	768.45	713.76	646.20	646.20	562.78	627.81	562.79	588.84	466.15	466.13	358.94	358.94	358.94	243.81	243.81	243.81	123.39	123.39	123.39
14	612.58	608.79	608.79	608.79	608.79	608.79	595.47	549.55	549.54	570.70	497.55	497.55	433.32	433.32	433.32	433.32	433.32	276.41	276.41	276.41	187.77	187.77	187.77	95.07	95.07	95.06
15	608.80	608.80	612.59	612.59	612.59	612.59	595.47	549.55	549.56	570.71	497.56	497.56	433.32	433.32	433.32	433.32	433.32	276.41	276.41	276.41	187.77	187.77	187.77	140.45	95.07	95.06
16	416.12	413.44	413.44	413.65	398.86	398.85	406.17	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	276.41	276.41	276.41	187.77	187.77	187.77	140.45	95.07	95.06
17	413.45	413.45	413.45	413.66	398.87	398.86	406.17	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	373.22	276.41	276.41	276.41	187.77	187.77	187.77	140.45	95.07	95.06
18	210.51	209.12	209.12	209.43	201.75	201.75	205.97	188.80	188.79	188.79	170.95	170.95	186.33	148.91	148.91	148.91	148.91	104.19	104.19	104.19	64.65	64.65	64.65	56.60	32.83	32.83
19	209.14	210.52	209.14	209.44	201.76	209.44	205.98	188.80	188.80	188.80	170.95	170.95	186.33	148.91	148.91	148.91	148.91	104.19	104.19	104.19	64.65	64.65	64.65	56.60	32.83	32.83
20	209.13	210.52	209.13	201.76	209.44	209.44	205.98	188.80	170.95	170.95	198.74	148.91	148.92	186.33	123.38	123.38	123.38	95.06	95.06	95.06	64.65	64.65	64.65	56.60	32.83	32.83
21																										
22																										
23																										
24																										
25																										
26																										
27																										

Tabla 5.20 Matriz columna Δ_{i0}

Nodo	Δ_{i0}	Nodo	Δ_{i0}	Nodo	Δ_{i0}
1	183673.09	10	149957.68	19	83225.18
2	183675.29	11	149962.18	20	83229.45
3	183673.21	12	149958.72	21	83226.57
4	177201.64	13	130635.46	22	56483.29
5	177204.52	14	130640.41	23	56486.52
6	177202.10	15	130636.72	24	56484.33
7	165771.29	16	108161.16	25	28568.33
8	165775.21	17	108166.12	26	28570.06
9	165772.10	18	108162.55	27	28568.90



Tabla 5.22 Reacciones obtenidas en la primera iteración

Nodo	$X_i(t)$	Nodo	$X_i(t)$
1	34.31	16	2.28
2	34.68	17	2.30
3	34.32	18	2.28
4	18.03	19	-1.69
5	18.11	20	-1.70
6	18.02	21	-1.68
7	1.95	22	-3.96
8	1.95	23	-3.96
9	1.96	24	-3.97
10	-15.52	25	1.76
11	-15.52	26	1.75
12	-15.52	27	1.75
13	7.07	28	0.77
14	7.04	29	0.35
15	7.07	30	0.77



Tabla 5.23 Sistema de ecuaciones (Tercera iteración)

Table with 27 columns (1-27) and 27 rows (1-27). Each cell contains a numerical value representing coefficients in a system of equations. The values are symmetric across the main diagonal, indicating a square matrix. The diagonal elements are mostly 1.0000, with some variations in rows 1, 2, 3, and 24.

Tabla 5.24 Reacciones, X_i y módulos de cimentación K_i (tercera iteración)

Nodo	X_i/a_i	δ_n (m)	a (m ²)	X_i (t)	K_i (t/m)
1	33.13	0.0114	1.0	33.13	2915.79
2	33.45	0.0115	1.0	33.45	2911.23
3	33.11	0.0114	1.0	33.11	2915.70
4	13.00	0.0040	1.5	19.49	4889.68
5	13.07	0.0040	1.5	19.61	4868.82
6	13.00	0.0040	1.5	19.50	4890.26
7	1.83	0.0011	1.5	2.74	2387.99
8	1.82	0.0012	1.5	2.73	2347.76
9	1.83	0.0011	1.5	2.74	2386.72
10	-11.53	-0.0050	1.5	-17.29	3441.03
11	-11.53	-0.0050	1.5	-17.30	3445.33
12	-11.52	-0.0050	1.5	-17.28	3440.91
13	5.44	0.0013	1.5	8.16	6527.36
14	5.42	0.0012	1.5	8.13	6518.34
15	5.43	0.0012	1.5	8.14	6527.14
16	1.56	0.0006	1.5	2.34	4045.85
17	1.58	0.0006	1.5	2.37	4043.88
18	1.57	0.0006	1.5	2.35	4052.09
19	-1.25	-0.0004	1.5	-1.87	4293.45
20	-1.26	-0.0004	1.5	-1.88	4300.50
21	-1.25	-0.0004	1.5	-1.87	4297.29
22	-3.03	-0.0008	1.5	-4.54	5954.15
23	-3.02	-0.0008	1.5	-4.53	5950.48
24	-3.03	-0.0008	1.5	-4.55	5953.69
25	1.29	0.0002	1.5	1.94	9532.52
26	1.29	0.0002	1.5	1.93	9605.91
27	1.30	0.0002	1.5	1.95	9528.50
28	0.60	0.0001	1.5	0.90	11572.52
29	0.33	0.0000	1.5	0.50	10943.78
30	0.60	0.0001	1.5	0.90	11574.60

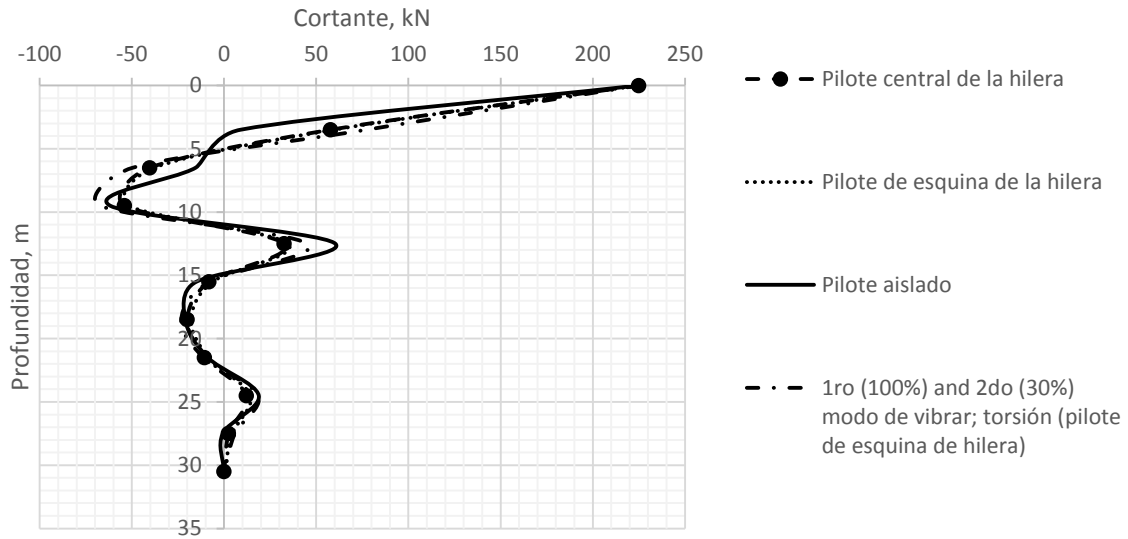


Figura 5.4 Diagrama de fuerza cortante (grupo de pilotes)

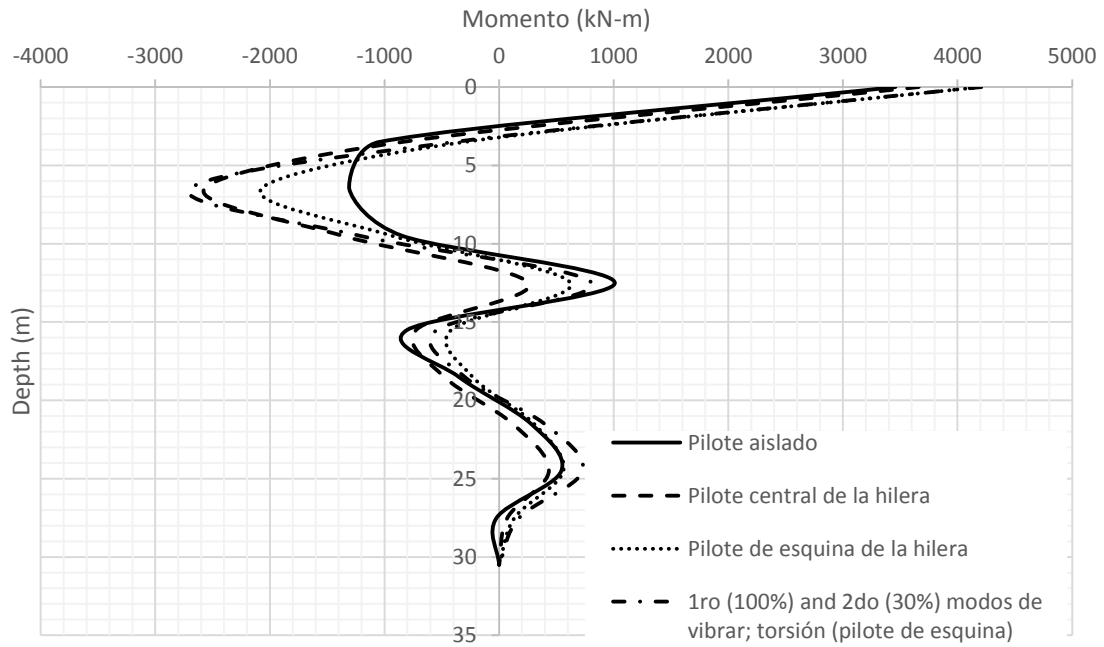


Figura 5.5 Diagrama de momento flexionante (grupo de pilotes)



6. CONCLUSIONES

Se logró hallar una expresión para determinar la distribución de esfuerzos horizontales para una carga rectangular uniformemente cargada mediante la integración de la solución fundamental de Mindlin para carga concentrada horizontal.

La metodología propuesta en esta tesis se verificó para el caso de un pilote aislado resolviendo el ejemplo III.13.2 de Zeevaert (1980). Los resultados obtenidos siguiendo el procedimiento aquí descrito son muy parecidos a los reportados por Zeevaert.

Una de las ventajas del método propuesto en esta tesis es que, a diferencia de los métodos basados en la teoría de Winkler (*i.e.* Módulo de reacción y curvas $p-y$), considera al suelo como un medio continuo, es decir los resortes sobre los que se apoya el pilote son interactuantes. Esta condición se logra haciendo intervenir en el análisis a la ecuación matricial HEMA, con la cual se obtienen los desplazamientos horizontales inducidos en la masa del suelo a cualquier profundidad por la aplicación de una carga unitaria en un punto cualquiera i .

De los resultados obtenidos del análisis interacción suelo-hilera de pilotes se observan diferencias poco significativas en los diagramas de fuerza cortante. Sin embargo, en los diagramas de momento se obtienen diferencias importantes, sobre todo en la parte superior del pilote, en donde, en ciertos puntos, el momento del pilote de esquina llega a ser hasta 100% mayor que el del pilote aislado.



La metodología aquí propuesta representa un procedimiento simplificado para el análisis racional de hileras de pilotes sometidos a cargas laterales por sismo. Debido a la complejidad de los métodos tradicionales para el análisis dinámico de pilotes, y al costo y tiempo requerido para implementar modelos geotécnicos en plataformas numéricas, el procedimiento de análisis, descrito en esta tesis, es una opción de gran aplicabilidad desde el punto de vista práctico debido a su simple conceptualización y a su conveniencia computacional.



REFERENCIAS

- Abdoun T, Dobry R. (2002) “Evaluating of pile foundation response to lateral spreading” Soil Dynamics and Earthquake Engineering.
- Abdoun T., Dobry R., O’Rourke T.D., Goh S.H. (2003) “Piles respond to lateral spreads: centrifuge modeling”. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.
- American Petroleum Institute, API, (1982) Recommended Practice for Planning, Design and Constructing Fixed Offshore Platforms, API RP 2A, Washington, DC.
- Avilés J., Pérez-Rocha L.E. (1998) “Site effects and soil structure interaction in the Valley of Mexico”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering.
- Banerjee S., Goh S.H., Lee F.H. (2014) “Earthquake-induced bending moment in fixed-head piles in soft clay”. Geotechnique.
- Bhushan K., Haley S.C. y Fonf P.T. (1979) “Lateral load test on drilled piers in stiff clays”. J. Geotech. Eng. Div. ASCE, Vol. 105, No. GT 8.
- Boulanger R.W., Curras C.J., Kutter B.L., Wilson D.W., Abghari A. (1999) “Seismic soil-pile-structure interaction experiments and analyses. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.
- Brandenberg S.J., Boulanger R.W., Kutter B.L., Chang D. (2005). “Behavior of pile foundations in laterally spreading ground during centrifuge test”. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.
- Broms B. B. (1964) “Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils” J.S.M.F.D., ASCE vol. 90, SM 2.
- Chau K.T., Shen C.Y., Guo X. (2009) “Nonlinear seismic soil-pile-structure interactions: shaking table test and FEM analyses”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering.
- Curras C.J., Boulanger R.W., Kutter B.L., Wilson D.W. (2001) “Dynamic experiments and analyses of a pile-group-supported structure”. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.



- Davisson M.T. y Gill H.L. (1963) “Laterally-Loaded Piles in a Layered Soil System, Journal of the Soil Mechanics Division, 89, SM3.
- Davisson M.T. y Prakash S. (1963) “A review of soil-pile behavior” High. Res. Rec. No. 39.
- Davisson M.T. (1970) “Lateral Load Capacity of Piles” High. Res. Rec. No. 333.
- Dobry R., Abdoun T., O’Rourke T.D., Goh S.H. (2003) “Single piles in lateral spreads: field bending moment evaluation”. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering.
- Dungca J.R. Kuwano J., Takahashi A., Sarawatari T., Izawa J., Suzuki H., et al., (2006) “Shaking table test on the lateral response of a pile buried in liquefied sand”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering.
- EN 1998-1. Eurocode 8 (2004) “Design of structure for earthquake resistance- Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings”.
- Finn, W.D. Liam, Gohl W. Blair (1992) “Response of Model Pile Groups to Strong Shaking”. Piles under Dynamics Loads, ASCE.
- Gazetas G., (1984) “Seismic Response of End Bearing Single Piles”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering
- Gazetas G., Mylonakis G. (1998) “Seismic soil-structure interaction: new evidence and emerging issues”. Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics III, ASCE.
- Gleser S. M. (1953) “Lateral Load Test on Vertical Fixed-Head and Free-Head Piles” ASTM, STP 154.
- Guin J, Banerjee P.K. (1998) “Coupled soil-pile-structure interaction analysis under seismic excitation. J. Struct. Eng.
- Hadjian A.H., Fallgren R.B. y Tufenkjian M.R., (1992) “Dynamic Soil-Pile-Structure Interaction, The State of practice”. Piles under Dynamics Loads, ASCE.
- Horikoshi K., Matsumoto T., Hashizume Y., Watanabe T. y Fukuyama H. (2003) “Performance of piled raft foundations subjected to static horizontal loads”. International Journal of Physics Modelling in geotechnics.
- Hussien M. N., Tobita T., Iai S. y Karray M. (2016) “Spoil-pile-structure kinematic and inertial interaction observed in geotechnical centrifuge experiments”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering.



- Kaynia A.M. y Mahzooni S. (1996) "Forces in pile foundations under seismic loading". J. Eng. Mech.
- López G. (2012), Tesis. "Un método directo de interacción tridimensional suelo-estructura". UNAM. México D.F.
- Ma K., Banerjee S., Lee F.H. y Xie H.P. (2012) "Dynamic soil-pile-raft interaction in normally consolidated soft clay during earthquakes". Journal of Earthquake and Tsunami.
- Makris N., Gazetas G. y Delis E., (1996) "Dynamic soil-pile-foundation-structure interaction: records and predictions". Geotechnique 46 (1).
- Matlock H. (1970) "Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay" Proceedings 2nd Offshore Technology Conference, Houston, vol. I.
- Maxwell A.A., Fry Z.B. y Poplin J.K. (1969) "Vibratory Loading of Pile Foundations" ASTM, STP 444.
- Mindlin R.D. (1936) "Force at a point interior of a semi-infinite solid". Physics.
- Meymand P.J. (1998) "Shaking table scale model test of nonlinear soil-pile-superstructure interaction in soft clay (Ph.D. thesis). Berkeley, California: University of California.
- Mylonakis G., Nikolaou A. y Gazetas G. (1997) "Soil-pile-bridge seismic interaction: kinematic and inertial effects. Part I; soft Soil. Earthq. Eng. Struct. Dyn.
- Novak M. (1974) "Dynamic Stiffness and Damping of Piles" Can. Geot. Jnl., vol. 11, n. 4
- Novak M. y Grigg R. F. (1976) "Dynamic Experiments with Small Pile Foundations" Can. Geot. Jnl., vol. 13, n. 4.
- Novak M. (1991). "Piles under dynamic loads. In: State of the art paper. Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, vol. III. Missouri: University of Missouri-Rolla.
- Palmer L. A. y Thompson J. B. (1948) "The Earth Pressure and Deflection along the Embedded Lengths of Piles Subjected to Lateral Thrusts." Proceedings 2nd. Int. Conf. S.M. and F.E., Rotterdam, vol 5.
- Pender M.J. (1993) "A Seismic Pile Foundation Design Analysis". Bull N Z Natl. Soc. Earthq. Eng.
- Poulos H. G. (1971a) "Behavior of Laterally Loaded Piles: I Single Piles" J.S.M.F.D., ASCE, vol. 97, no. SM5.



- Poulos H. G. (1971b) "Behavior of Laterally Loaded Piles: II Pile Groups" J.S.M.F.D., ASCE, vol. 97, no. SM5.
- Poulos H.G. y Davis E.H. (1974) "Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics". John Wiley and Sons.
- Poulos H.G. y Davis E.H. (1980) "Pile Foundation Analyses and Design" John Wiley and Sons.
- Prakash S., Sharma H. (1990) "Pile Foundations in Engineering Practice" John Wiley and Sons.
- Rayhani M.H.T, El Naggat M.H. (2008) "Numerical Modeling of Seismic Response of Rigid Foundation on Soft Soil". International Journal of Geomechanics.
- Reglamento de Construcción del Distrito Federal (RCDF, 2004). Normas Técnicas Complementarias para el Diseño por Sismo.
- Resse L. C. y Matlock H. (1956) " Non-Dimensional Solutions for Laterally-Loaded Piles with Soil Modulus Assumed Proportional to Depth". Proceedings of the Eight Texas Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Austin, TX.
- Resse L. C., Cox W. R. y Koop F. B. (1974) "Analysis of Laterally Loaded Piles in Sand" Proceedings of the Offshore Technology Conference, Houston, TX. Paper No.OTC 2080.
- Resse L. C. y Welch R. C. (1975) "Lateral Loading of Deep Foundations in Stiff Clay" Journal of the Geotechnical Engineering Division, 101 (GT7).
- Roeset J.M., Whitman R.V. y Dobry R. (1973) "Modal analysis for structures with foundation interaction" J. Struct. Div.
- Skempton (1951) "The Bearing Capacity of Clays." Build. Res. Congress, London. Inst. Civ. Engrs., div. I.
- Terzaghi K. (1955) "Evaluation of Coefficients of Sub-grade Reaction" Geot. Vol 5.
- Tinawi R., Sarrazin M. Filiatrault A. (1993) "Influence of soft clays on the response spectra for structures in eastern Canada". Soil Dynamics and Earthquake Engineering.
- Tokimatsu K., Suzuki H., Sato M. (2005) "Effects of inertial and kinematic interaction on seismic behavior of pile with embedded foundation". Soil Dynamics and Earthquake Engineering.



Tomlinson M., Woodward J., (2015) “Pile Design and Construction Practice” Taylor and Francis Group.

Watanabe T., Fukuyama H., Horikoshi K., Matsumoto T., (2001) “Centrifuge modeling of piled raft foundations subjected to horizontal loads”. Proc. 5th Int. Conf. on Deep Foundation Practice incorporating Piletalk.

Winkler E. (1867) Die Lehre von Elasticzitat und Festigkeit (On elasticity and Fixity). Prague

Yao S., Kobayashi K., Yoshida N., Matsuo H., (2004) “Interactive behavior of soil-pile-superstructure system in transient state to liquefaction by means of large shake table test”. Soil Dynamics and Earthquake Engineering.

Zeevaert L. (1973) “Foundation Engineering for Difficult Subsoil Conditions”. Van Nostrand Reinhold Co. Nueva York.

Zeevaert L. (1980) “Interacción Suelo-Estructura de Cimentaciones Superficiales y Profundas, Sujetas a Cargas Estáticas y Sísmicas”. Limusa.

Zhang L., Goh S. H. y Liu H. (2016) “Seismic response of pile-raft-clay system subjected to a long duration earthquake: centrifuge test and finite element analysis” Soil Dynamics and Earthquake Engineering



ANEXO



A.1 DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL EMPLEADO

El programa EMISES3D (López, 2012), desarrollado en el lenguaje Fortran, analiza marcos ubicados en el espacio haciendo uso del elemento finito. El análisis tridimensional que realiza el programa está limitado al uso de estructuras reticulares. Sin embargo, para los casos analizados en esta tesis, esta condición no representa ninguna desventaja. Debido a que se trata de un análisis tridimensional, los nudos de la retícula tendrán seis grados de libertad: giros alrededor de los ejes x y y y z , y desplazamientos lineales en las tres direcciones.

La resistencia al desplazamiento de los nudos, se deberá tanto a la rigidez de las barras de la estructura como a las constantes de los resortes que modelan el suelo. El equilibrio del modelo físico así planteado conduce a un sistema de $6 \times n$ ecuaciones (n = número de nudos), con el mismo número de incógnitas (*i.e.*, los desplazamientos y giros de los nudos), y se representa con la siguiente expresión matricial (ecuación A.1).

$$([K'_e] + [K'_s]) \{\delta'_i\} + \{\bar{F}'_{it}\} = \{\bar{F}'_{et}\} \quad (\text{A.1})$$

Donde:

$[K'_e]$ Matriz de rigidez del sistema estructura-cimentación

$[K'_s]$ Matriz de rigidez del sistema interdependiente de resortes del suelo

$\{\delta'_i\}$ Vector de desplazamientos lineales y angulares de los nudos

$\{\bar{F}'_{it}\}$ Vector de fuerzas internas o de empotramiento

$\{\bar{F}'_{et}\}$ Vector de fuerzas externas aplicadas en los nudos de la estructura



La matriz de rigidez correspondiente a una barra sin resortes, definida por sus nudos “origen” y “destino” y con seis grados de libertad, es:

$$[K_{ei}] = \begin{bmatrix} [K_{aa}] & & \\ & & \\ [K_{ba}] & & \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Donde:

$$[K_{aa}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{ab}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{ba}] = [K_{ab}]$$

$$[K_{bb}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$



Las fuerzas internas o de empotramiento, \bar{F}'_{it} , se deben a fuerza axial, fuerza cortante, momento flexionante y momento torsionante producidos por su propio peso y por las cargas aplicadas sobre los elementos de la retícula.

El vector de fuerzas externas \bar{F}'_{et} se construye con las fuerzas y momentos puntuales aplicados directamente en los nodos de la retícula, en las direcciones de los grados de libertad.

La determinación de las constantes de los resortes equivalentes se puede realizar aplicando la ecuación HEMA:

$$|\delta_i| = [\bar{\delta}_{ji}] \cdot \left| \frac{X_i}{\bar{a}_i} \right|$$

O bien:

$$|\delta_i| = [F_{ji}] \cdot |X_i| \tag{A.3}$$

Donde:

$|X_i|$ Vector de reacciones en las placas

$[F_{ji}] = [\bar{\delta}_{ji}] \cdot \left| \frac{1}{\bar{a}_i} \right|$ Matriz de flexibilidades del suelo

Despejando el vector $|X_i|$ de la ecuación A.3, se tiene:

$$|X_i| = [F_{ji}]^{-1} \cdot |\delta_i| \tag{A.4}$$

$[F_{ji}]^{-1}$ es igual a $[K'_s]$, es decir, la inversa de la matriz de flexibilidades del suelo es igual a la matriz de rigidez de los resortes que representan la deformabilidad del suelo.

Si los resortes en las diferentes placas se ubican en la posición de los nodos correspondientes al modelo de análisis estructural, la matriz $[K'_s]$ se puede ensamblar con la matriz $[K'_e]$ de la ecuación [A.1], de donde resulta:

$$[K_{es}] = [K'_e] + [K'_s] \tag{A.5}$$



Finalmente, aplicando la ecuación A.1, se forma el sistema de ecuaciones que permite calcular los desplazamientos lineales y angulares de los nodos de la estructura.



A.2 VERIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA

Para validar la metodología aquí propuesta se resuelve el ejemplo III.13.2 de Zeevaert (1980). Se comparan los valores de reacciones, fuerzas cortantes y módulos de cimentación obtenidos con la metodología desarrollada por Zeevaert y la propuesta en esta tesis (Tabla A.1). El diagramas de cortante correspondiente se presenta en la Figura A.1.

Tabla A.1 Comparación de resultados

Dovela	Zeevaert (1980)			Vital (2017)		
	X_i (t)	K_i (t/m)	V (t)	X_i (t)	K_i (t/m)	V (t)
1	4.968	714.481	10	4.959	714.605	10
2	2.470	589.428	5.033	2.462	594.362	5.041
3	2.607	2294.288	2.564	2.587	2338.984	2.579
4	0.494	836.721	-0.044	0.480	1502.814	-0.008
5	-0.327	6094.36	-0.539	-0.328	4401.431	-0.488
6	0.183	1419.705	-0.211	0.186	1464.950	-0.160
7	1.048	1933.936	-0.394	1.084	1934.154	-0.346
8	0.970	1573.143	-1.442	1.023	1581.746	-1.430
9	-0.893	1330.849	-2.412	-1.077	1385.504	-2.452
10	-2.344	3919.077	-1.519	-2.230	3876.660	-1.376
11	-1.386	4163.412	0.824	-1.385	4183.015	0.854
b	2.210	14520.370	2.21	2.239	14506.882	2.239

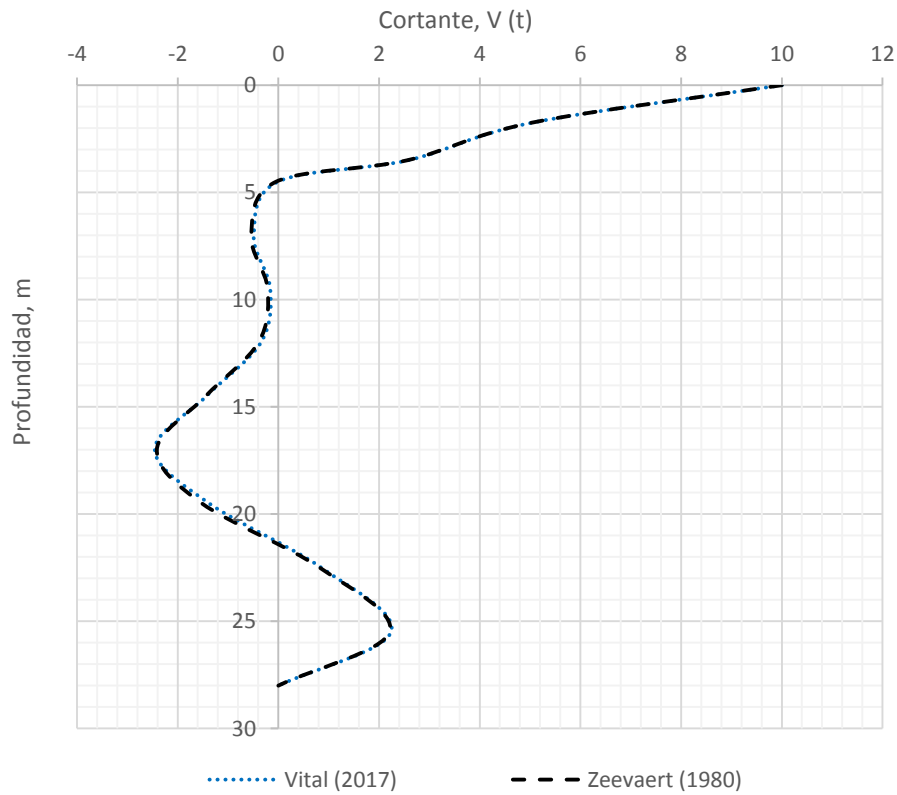


Figura A.1. Diagramas de momentos

En la Figura A.1 se puede observar que los resultados obtenidos, siguiendo la metodología aquí propuesta, son muy parecidos a los publicados por Zeevaert (1980) y por tanto se verifica el procedimiento desarrollado en esta investigación.



A.3. EJEMPLO SIMPLIFICADO DEL ANÁLISIS DE UN PILOTE AISLADO ANTE CARGA LATERAL POR SISMO

En el análisis de un pilote aislado ante carga lateral por sismo se resuelve la ecuación matricial de interacción HEMI:

$$X_i = [\bar{S}_{ij}]^{-1} \cdot |\Delta_{io}|$$

Donde la matriz $[\bar{S}_{ij}]$ está formada por las matrices \bar{S}'_{ij} , \bar{S}''_{ij} y \bar{S}'''_{ij} , y el vector $|\Delta_{io}|$ está constituido por los vectores $|\Delta_{io}^p|$, $|\Delta_{io}^A|$ y $|\Delta\delta_{si}|$, de tal forma que HEMI puede ser redefinida como:

$$([\bar{S}'_{ij}] + [\bar{S}''_{ij}] + [\bar{S}'''_{ij}]) \cdot |X_i| = |\Delta_{io}^p| + |\Delta_{io}^A| + |\Delta\delta_{si}|$$

La matriz simétrica $[\bar{S}'_{ji}]$ representa la flexibilidad del pilote para las condiciones $X_i = +1$ (Figura A.4), es inversamente proporcional al valor de EI y se determina, para el caso de un pilote aislado, usando la ecuación A.1a y A.1b (Zeevaert, 1980).

Para $z_j \leq z_i$

$$(EI)\bar{S}'_{ji} = h z_j z_i - \frac{1}{2} z_j z_i^2 - \frac{1}{6} z_j^3 \tag{A.1.a}$$

Para $z_j \geq z_i$

$$(EI)\bar{S}'_{ji} = h z_j z_i - \frac{1}{2} z_i z_j^2 - \frac{1}{6} z_i^3 \tag{A.1.b}$$

La matriz simétrica $[\bar{S}''_{ji}]$ representa los desplazamientos verticales unitarios del pilote como elemento rígido para las condiciones $X_i = +1$ (Figura A.4), es función del módulo de cimentación en los apoyos K_a y K_b , y para el caso de un pilote aislado se determina empleando la ecuación A.2 (Zeevaert, 1980).

$$(EI)\bar{S}''_{ji} = \frac{(EI)}{K_b} \tag{A.2}$$



La matriz simétrica $[\bar{S}_{ji}''']$ representa la deformación del suelo debido a la aplicación de la carga unitaria en i , se obtiene empleando la ecuación A.3 (Zeevaert, 1980).

$$(EI)\bar{S}_{ji}''' = \frac{(EI)}{K_i} \quad (A.3)$$

Los valores de K_i se determinan haciendo intervenir a la ecuación HEMA:

$$|\delta_i| = [\bar{\delta}_{ji}] \cdot \left| \frac{X_i}{a_i} \right|$$

La matriz columna $|\Delta_{io}^P|$ representa los desplazamientos del pilote en la condición $X_i = 0$ (Figura A.4), es inversamente proporcional al valor de EI y se obtiene empleando la ecuación A.4 (Zeevaert, 1980).

$$(EI)\Delta_{io}^P = \frac{Ph^3}{6} \left(3 \frac{z_i}{h} - \frac{z_i^3}{h^3} \right) \quad (A.4)$$

La matriz columna $|\Delta_{io}^A|$ representa los desplazamientos del pilote como elemento rígido en la condición $X_i = 0$, es función del módulo de cimentación en el apoyo b (Figura A.4) y se obtiene usando la ecuación A.5 (Zeevaert, 1980).

$$(EI)\Delta_{io}^A = \frac{EI}{K_b} \cdot P \quad (A.5)$$

La matriz columna $|\Delta\delta_{si}|$ representa los desplazamientos del suelo en campo libre ante una excitación sísmica y se determinan como se indica en la sección 3.1.

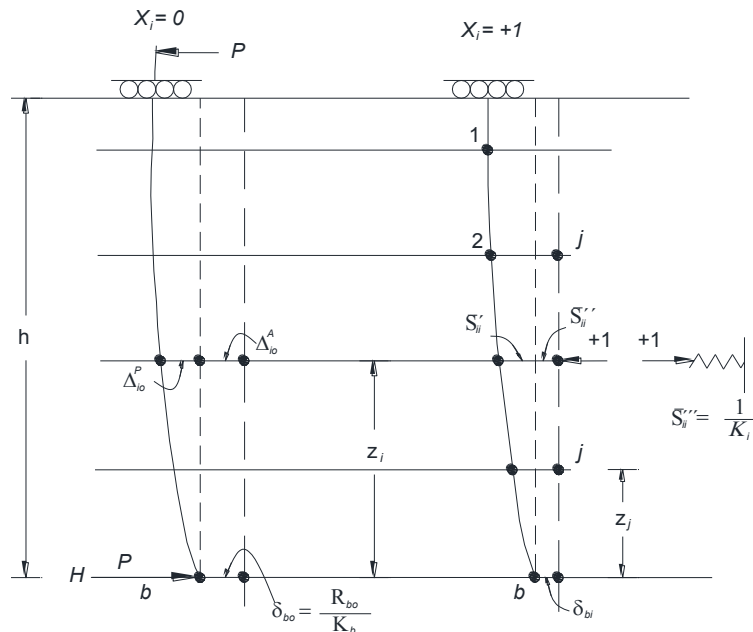


Figura A.4 Desplazamientos del pilote ante carga lateral

Para ejemplificar la determinación de la matriz S_{ij} y el vector de términos independientes Δi_0 se analiza la respuesta ante carga lateral por sismo de un pilote de 12 m. de longitud, con sección de 0.4x0.4m, apoyado sobre tres resortes interactuantes en un suelo homogéneo. El pilote se encuentra empotrado en la estructura en su extremo superior y tiene la libertad de girar en su extremo inferior (Figura A.5).

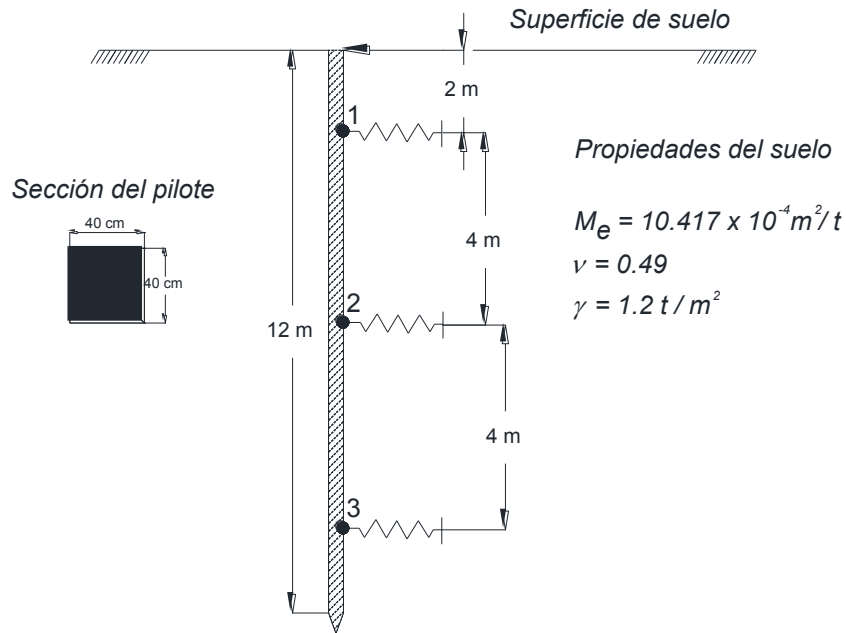


Figura A.5. Ejemplo simplificado

Considerando una aceleración en la superficie del suelo de 1m/s^2 y empleando las ecuaciones 3.1 y 3.2 se obtienen los desplazamientos del suelo $|\Delta\delta_{si}|$ en campo libre mostrados en la Tabla A.2.

Tabla A.2. Desplazamientos y esfuerzos cortantes del suelo en campo libre

Prof. (m)	D (m)	ρ ($\text{t s}^2/\text{m}^4$)	G_{din} (t/m^2)	N_i	A_i	B_i	C_i	δ_i (m)	τ (t/m^2)
0								0.0213	0.00
4	4.0	0.12	320	0.07	0.87	0.01	11.48	0.0185	0.46
8	4.0	0.12	320	0.07	0.87	0.01	11.48	0.0107	0.79
12	4.0	0.12	320	0.07	0.87	0.01	11.48	0.0	0.91

La matriz $\bar{\delta}_{ij}$ (3x3) se determina usando la integración de la solución fundamental de Mindlin al caso de un área rectangular uniformemente cargada, presentada en la sección 3.2.1. Se consideran tres placas de 4 m de longitud cada una. Los resortes se ubican al centro de dichas placas (Figura A.5). La matriz de influencias para una distancia horizontal, x , de 0.5, 1.5 y 2.5 m se muestran en las Tablas A.3, A.4 y A.5 respectivamente.



Tabla A.3 Matriz de influencias ($x=0.5m$)

	1	2	3
1	2.30E-01	8.75E-05	-8.37E-05
2	3.80E-04	2.28E-01	2.04E-04
3	4.87E-05	2.26E-04	2.28E-01

Tabla A.4 Matriz de influencias ($x=1.5m$)

	1	2	3
1	8.17E-02	2.00E-03	-2.02E-04
2	2.84E-03	7.84E-02	2.36E-03
3	1.83E-04	2.43E-03	7.83E-02

Tabla A.5 Matriz de influencias ($x=2.5m$)

	1	2	3
1	4.39E-02	3.90E-03	-2.10E-04
2	5.18E-03	4.11E-02	4.50E-03
3	3.95E-04	4.60E-03	4.09E-02

Aplicando la ecuación 3.16;

$$\bar{\delta}_{ji} = \sum_1^n \alpha^N \cdot I_{ji}^N$$

La determinación de los renglones de la matriz δ_{ji} correspondientes a las placa 1,2 y 3 se detalla en la Tabla A.4, A.5 y A.6 respectivamente. La matriz δ_{ji} se presenta en la Tabla A.7.

Tabla A.4 Determinación del primer renglón del matriz δ_{ji} , correspondiente a la placa 1

	I_{x_1}	I_{x_2}	I_{x_3}	Σ	$Me (m^2/t)$	δ_{ji}
1	2.30E-01	8.2E-02	4.4E-02	3.6E-01	1.04E-03	3.71E-04
2	3.80E-04	2.8E-03	5.2E-03	8.4E-03	1.04E-03	8.76E-06
3	4.87E-05	1.8E-04	4.0E-04	6.3E-04	1.04E-03	6.53E-07



Tabla A.5 Determinación del primer renglón del matriz δ_{ji} , correspondiente a la placa 2

	Ix_1	Ix_2	Ix_3	Σ	$M_e (m^2/t)$	δ_{ji}
1	8.7E-05	2.0E-03	3.9E-03	6.0E-03	1.04E-03	6.24E-06
2	2.3E-01	7.8E-02	4.1E-02	3.5E-01	1.04E-03	3.62E-04
3	2.3E-04	2.4E-03	4.6E-03	7.3E-03	1.04E-03	7.55E-06

Tabla A.6 Determinación del primer renglón del matriz δ_{ji} , correspondiente a la placa 3

	Ix_1	Ix_2	Ix_3	Σ	$M_e (m^2/t)$	δ_{ji}
1	-8.4E-05	-2.0E-04	-2.1E-04	-5.0E-04	1.04E-03	-5.17E-07
2	2.0E-04	2.4E-03	4.5E-03	7.1E-03	1.04E-03	7.36E-06
3	2.3E-01	7.8E-02	4.1E-02	3.5E-01	1.04E-03	3.62E-04

Tabla A.7 Matriz de desplazamientos laterales por carga unitaria, $\bar{\delta}_{ij}$

	1	2	3
1	3.709E-04	6.239E-06	-5.172E-07
2	8.758E-06	3.624E-04	7.360E-06
3	6.530E-07	7.555E-06	3.620E-04

A continuación se describe el procedimiento para obtener el sistema de ecuaciones constituido por la matriz $[\bar{S}_{ij}]^{-1}$ y por el vector de términos independientes $|\Delta_{io}|$.

Empleando la ecuación A.1a y A.1.b se determinan los valores que constituyen a la matriz $[\bar{S}'_{ji}]$:

Para $z_j \leq z_i$

$$(EI)\bar{S}'_{ji} = h z_j z_i - \frac{1}{2} z_j z_i^2 - \frac{1}{6} z_j^3$$

Para la condición $x_1 = +1$:

$$EI = 4722.35 \text{ t m}^2$$

$$z_i = 8 \text{ m}$$

$$z_j = 8 \text{ m}$$



$$(EI)\bar{S}'_{ji} = 10 (8) (8) - \frac{1}{2}(8)(8)^2 - \frac{1}{6}(8)^3 = 298.66$$

Para el segundo punto:

$$z_j = 4 \text{ m}$$

$$(EI)\bar{S}'_{ji} = 10 (4)(8) - \frac{1}{2}(4)(8)^2 - \frac{1}{6}4^3 = 181.33$$

Para la condición $x_2 = +1$:

$$EI = 4722.35 \text{ t m}^2$$

$$z_i = 4 \text{ m}$$

$$z_j = 8 \text{ m}$$

$$(EI)\bar{S}'_{ji} = (10)(8) (4) - \frac{1}{2}(4)(8)^2 - \frac{1}{6}(4)^3 = 181.33$$

Para el segundo punto:

$$z_j = 4 \text{ m}$$

$$(EI)\bar{S}'_{ji} = 10 (4) (4) - \frac{1}{2}(4)(4)^2 - \frac{1}{6}(4)^3 = 113.33$$

Por tanto la matriz simétrica $[\bar{S}'_{ji}]$ resulta:

$$[\bar{S}'_{ji}] = \begin{bmatrix} 298.66 & 181.33 \\ 181.33 & 113.33 \end{bmatrix}$$

Para la determinación de la matriz simétrica $[\bar{S}''_{ji}]$ se requiere el valor de K_b :

$$K_b = \left| \frac{X_b}{\delta_b} \right|$$

Los desplazamientos δ_i se calculan empleando HEMA.

$$|\delta_i| = [\bar{\delta}_{ji}] \cdot \left| \frac{X_i}{\bar{a}_i} \right|$$

Debido a que las reacciones X_i son incógnitas y el procedimiento de análisis es iterativo se inicia el cálculo considerando que $q_i = X_i/a_i$ es igual a 1 (Tabla A.8).



Tabla A.8 Primera aproximación para obtener los valores de K_i

δ_{ji}			q_i (t/m ²)	δ_i (m)	a (m ²)	X_i (t)	K_i (t/m)	EI/K_i (m ³)
3.71E-04	6.24E-06	-5.17E-07	1	3.77E-04	1.6	1.6	4248.56	1.11
8.76E-06	3.62E-04	7.36E-06	1	3.79E-04	1.6	1.6	4227.19	1.12
6.53E-07	7.55E-06	3.62E-04	1	3.70E-04	1.6	1.6	4321.80	1.09

Considerando que:

$$(EI)\bar{S}_{ji}'' = \frac{(EI)}{K_b}$$

Entonces, el valor de \bar{S}_{ji}'' es igual para los cuatro elementos que constituyen a la matriz:

$$(EI)\bar{S}_{ji}'' = \frac{(EI)}{K_b} = \frac{4722.35}{4321.79} = 1.093$$

Por tanto:

$$\bar{S}_{ji}'' = \begin{bmatrix} 1.093 & 1.093 \\ 1.093 & 1.093 \end{bmatrix}$$

La matriz simétrica $[\bar{S}_{ji}''']$ resulta:

Para el punto 1

$$(EI)\bar{S}_{ji}''' = \frac{(EI)}{K_i} = \frac{4722.35}{4248.56} = 1.11$$

Para el punto 2:

$$(EI)\bar{S}_{ji}''' = \frac{(EI)}{K_i} = \frac{4722.35}{4227.19} = 1.12$$

Por tanto:

$$\bar{S}_{ji}''' = \begin{bmatrix} 1.11 & 0 \\ 0 & 1.12 \end{bmatrix}$$



La matriz $[\bar{S}_{ij}]$ que resulta es:

$$[\bar{S}_{ij}] = \begin{bmatrix} 300.871 & 183.54 \\ 182.43 & 119.543 \end{bmatrix}$$

Considerando un cortante en la cabeza del pilote de 5 t y aplicando las ecuaciones A.3 y A.4 se obtienen los vectores $|\Delta_{io}^P|$ y $|\Delta_{io}^A|$ respectivamente, que junto con el vector $|\Delta\delta_{si}|$ constituyen el vector de términos independientes $|\Delta_{io}|$.

Para el punto 1

$$(EI)\Delta_{io}^P = \frac{Ph^3}{6} \left(3 \frac{z_i}{h} - \frac{z_i^3}{h^3} \right) = \frac{(5)(10)^3}{6} \left(3 \frac{8}{10} - \frac{8^3}{10^3} \right) = 1573.33$$

$$(EI)\Delta_{io}^A = \frac{EI}{K_b} \cdot P = \frac{4722.35}{4321.79} \cdot 5 = 5.463$$

$$(EI) \delta_{si} = (4722.35)(0.0199) = 93.97$$

Para el punto 2

$$(EI)\Delta_{io}^P = \frac{(5)(10)^3}{6} \left(3 \frac{4}{10} - \frac{4^3}{10^3} \right) = 946.667$$

$$(EI)\Delta_{io}^A = \frac{EI}{K_b} \cdot P = \frac{4722.35}{4321.79} \cdot 5 = 5.463$$

$$(EI) \delta_{si} = (4722.35)(0.0146) = 68.95$$

El vector de términos independientes $|\Delta_{io}|$, resulta:

$$[\Delta_{io}] = \begin{bmatrix} 1672.77 \\ 1021.08 \end{bmatrix}$$

La solución de la ecuación HEMI permite conocer los valores de las reacciones X_i :

$$X_i = [\bar{S}_{ij}]^{-1} \cdot |\Delta_{io}|$$



$$[\bar{S}_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.048 & -0.074 \\ -0.073 & 0.121 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta_{io}] = \begin{bmatrix} 1672.77 \\ 1021.08 \end{bmatrix}$$

$$X_i = \begin{bmatrix} 5.056 \\ 0.824 \end{bmatrix}$$

Por tanto X_b es:

$$X_b = V_a - \sum_i^n X_i = 5 - (5.880) = -0.88 t$$

Con estos valores de X_i se calculan nuevos valores de K_i .(Tabla A.9) El cálculo se termina cuando los valores obtenidos de K_i sean muy parecidos a los obtenidos en el cálculo anterior. Los resultados obtenidos en la segunda y la tercera iteración se muestran en las Tablas A.10 y A.11 respectivamente.

Tabla A.9 Valores de K_i (Primera iteración)

δ_{ji}			$X_i(t)$	$a (m^2)$	$X_i/a (t/m)$	$\delta_i (m)$	$K_i (t/m)$	$EI/K_i (m^3)$
3.71E-04	6.24E-06	-5.17E-07	5.05	1.6	3.16	1.18E-03	4301.21	1.10
8.76E-06	3.62E-04	7.36E-06	0.83	1.6	0.52	2.11E-04	3921.45	1.20
6.53E-07	7.56E-06	3.62E-04	-0.88	1.6	-0.55	-1.94E-04	4556.05	1.04

Tabla A.10 Valores de K_i (Segunda iteración)

δ_{ji}			$X_i(t)$	$a (m^2)$	$X_i/a (t/m)$	$\delta_i (m)$	$K_i (t/m)$	$EI/K_i (m^3)$
3.71E-04	6.24E-06	-5.17E-07	5.05	1.6	3.16	1.17E-03	4301.10	1.10
8.76E-06	3.62E-04	7.36E-06	0.83	1.6	0.52	2.13E-04	3925.53	1.20
6.53E-07	7.56E-06	3.62E-04	-0.89	1.6	-0.55	-1.95E-04	4556.17	1.04



Tabla A.11 Valores de K_i (Tercera iteración)

δ_{ji}			X_i (t)	a (m ²)	X_i/a (t/m)	d_i (m)	K_i (t/m)	EI/K_i (m ³)
3.71E-04	6.24E-06	-5.17E-07	5.05	1.6	3.16	1.17E-03	4301.10	1.10
8.76E-06	3.62E-04	7.36E-06	0.83	1.6	0.52	2.13E-04	3925.57	1.20
6.53E-07	7.56E-06	3.62E-04	-0.89	1.6	-0.55	-1.95E-04	4556.17	1.04

Como se puede observar en las Tablas A.10 y A.11 los valores de K_i correspondientes a la segunda y tercera iteración son practicamente iguales, por tanto se concluye el cálculo. Los valores de esfuerzo cortante y momento se muestran en la Figura A.4.

Dovela	X_i (t)	V_i (t)	M (t-m)
		5.0	6.224
1	5.05	-0.05	-3.76
2	0.83	-0.88	-3.55
3	-0.89	0	0

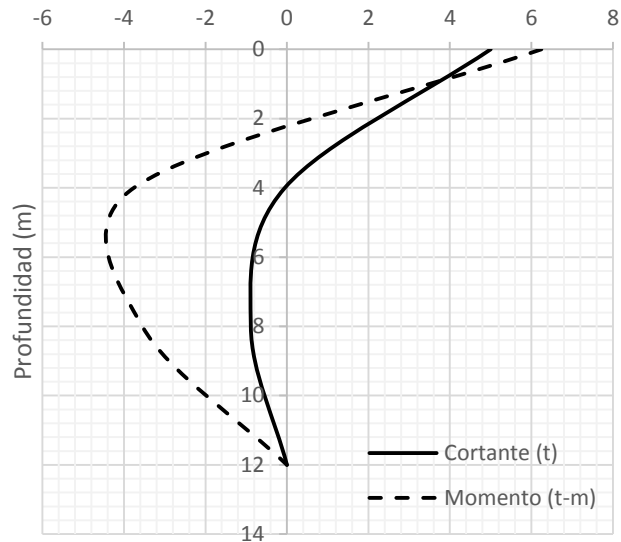


Figura A.4 Diagramas de fuerza cortante y momento



A.5. ARTÍCULO PRESENTADO EN LA ICSMGE, 2017

Proceedings of the 19th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, Seoul 2017

Soil-pile rows interaction under seismic transverse lateral loads

Interaction sol-rangées de pieux soumis à des charges latérales transversales sismiques

Rigoberto Rivera, Carmelino Zea, Germán López & Damián Vital

Geotechnical Department, Engineering School, UNAM, CDMX, Mexico, riverac@unam.mx

ABSTRACT: The problem of soil-pile interaction under lateral loads on soft soil in the case of Mexico City has been solved, for the case of an isolated pile, with the methodology developed by Professor Zeevaert (1980, 1983), which considers the soil as a continuous medium and the pile as a beam resting on interacting springs. Compatibility of deformations in the pile-soil interface is established to determine the displacements configuration and distribution of reactions generated by applying forces, static or dynamic. In this paper Zeevaert's soil-foundation interaction procedure for an isolated pile is generalized to the case of piles rows under seismic transverse lateral loads, assuming that the base shear is not distributed equally between the total number of piles, but exist an interaction in the piles row, transverse to the lateral force, that cannot be ignored in the seismic design of these elements combined with the effects of torsion generated mainly in the corner piles. The methodology proposed here is applied to solve the case of a row of piles subjected to earthquake to compare the results with those of an isolated pile, finding important differences in the configuration of displacements and distribution of reactions which have an impact on the structural design element (rigidity, steel ratios, etc.), mainly in the slab union-pile foundation.

RÉSUMÉ : Le problème de sol-pieu interaction sous des charges latérales sur un sol mou dans le cas de la ville de Mexico, dans le cas d'une cellule isolée, peut être résolu avec la méthodologie développée par le professeur Zeevaert (1983, 1988). qui considère le sol comme un milieu continu et la pile comme une poutre reposant sur des ressorts en interaction. compatibilité de contrainte est définie sur l'interface pile-sol pour déterminer la configuration du mouvement et de la distribution des réactions engendrées par l'application de forces statiques ou dynamiques. Dans cet article, la procédure de l'interaction sol-fondation Zeevaert pour une seule pile, dans le cas de rangées de pieux sous charges transversales sismiques généralise, en supposant que le cisaillement de base est pas répartie uniformément entre le nombre total de batteries, mais il une interaction dans les rangées de pieux, qui ne peuvent être ignorés dans la conception sismique de ces éléments combinés avec les effets du couple généré principalement dans les batteries coin. La méthodologie proposée ici est appliquée pour résoudre le cas d'une rangée de pieux soumis au tremblement de terre de comparer les résultats avec ceux d'un pieu isolé, trouver des différences importantes dans la configuration des déplacements et la distribution des réactions qui ont un impact sur l'élément de conception structurelle (rigidité, relations d'acier, etc.), principalement à la tête d'articulation de la pile avec la dalle de fondation.

KEYWORDS: Soil-pile interaction, beam resting on interacting springs, Compatibility of deformations in the pile-soil interface.



1. INTRODUCTION.

The problem of soil-drawer-piles in soft soil under seismic lateral loads, very common in many deep foundations of Mexico City, can be solved for the case of a pile isolated with the methodology developed by Professor Leonardo Zeevaert (1973, 1980, 1983), which considers the soil as a continuous medium and the pile as a beam supported on interacting horizontal springs and with certain boundary conditions in both the head and the base of the pile. For the case of an earthquake in the structural model, it is assumed that at the level of the head of the piles, the lateral displacement is the same for all piles and whose magnitude is a function of the level of embedment of the foundation and of the range of seismic motion. Thus, the base shear caused by the earthquake is equally divided between piles number that form the foundation. Configuration of displacement and distribution of reactions, generated by acting static or dynamic forces, are determined by means of the compatibility of deformations in the soil-pile interface.

In this paper Zeevaert's soil-foundation interaction procedure for an isolated pile generalizes to the case of rows of piles under transversal seismic lateral loads, assuming that the base shear is not distributed evenly among the total number of piles, but in the row of piles located transversely to the horizontal seismic force, there is an interaction, a phenomenon that cannot be overlooked in the seismic design of these elements, in addition to the effects of torsion generated mainly in the corner piles.

In order to obtain the values of the influences between piles in horizontal sense, the fundamental Mindlin's solutions for horizontal punctual loading was integrated to the case of a rectangular area uniformly loaded, assuming that the soil has a linear elastic behavior (Zea et al, 2010). The methodology was applied to solve the case of an isolated pile and a row of piles under earthquake, with important differences in the configuration of displacements and the distribution of reactions, which has an impact on the structural design of the element (rigidity, quantities of steel, etc.), mainly in the joint foundation-pile slab.

2 STRUCTURAL MODELING

Consider a foundation formed by a drawer and piles subject to seismic lateral loads, a solution frequently adopted in soft soils, as in the case of Mexico City. The seismic movements in the ground cause interacting horizontal reactions on the walls of the drawer and on the shaft of the piles which, combined with the external forces, keep the foundation system in balance. Because the soil can be considered as a continuous medium, at the interface of the foundation system and the soil reacting laterally, the compatibility of deformations must be fulfilled. Structural model used here considers that lateral displacement, magnitude of which depends

on deep of embedment of the foundation and amplitude of the seismic movement at the level of their head is the same for all piles.

In order to solve the structural problem, it is usual to idealize the soil through horizontal springs, which provides lateral support to the foundation system and whose final stiffness will depend on the compatibility of deformations in the soil-foundation interface.

Modeling the foundation system is achieved by transforming it into a mesh or grid of bars with equivalent properties to the actual foundation (Fig. 3). Nodes of this mesh will therefore have six degrees of freedom, namely: displacements in direction of the "x", "y" and "z" axes and rotations around these axes.

In this model, resistance to displacement and rotation of nodes is due to both rigidity of the bars of the structure and rigidity of the springs that simulate the soil.

Equilibrium of the physical model thus proposed leads to a system with $6 \times N$ equations (where N = number of nodes), with the same number of unknowns (displacements and rotation of the nodes), which is represented by following matrix equation (Zeevaert 1980, 1983):

$$\left[\left[\bar{S}'_{ij} \right] + \left[\bar{S}''_{ij} \right] + \left[1/K_i \right]_D \right] \cdot \{X_i\} = \{\Delta_{i0}^P\} + \{\Delta_{i0}^A\} + \{\Delta \delta_{ij}\} \quad (2.1)$$

Donde:

$\left[\bar{S}'_{ij} \right]$ Flexibility Matrix of structural system formed by the rows of piles, assuming finite stiffness, fixed but spring base support, guided in the head and virtual unit loads in each node.

$\left[\bar{S}''_{ij} \right]$ Flexibility matrix of structural system formed by the rows of piles, assuming infinite stiffness, elastic support in the base, guided in the head and virtual unit loads in each node.

$\left[1/K_i \right]_D$: Diagonal flexibility matrix of soil (Section 3).

$\{\Delta_{i0}^P\}$: Relative displacements and rotations vector of the piles nodes, assuming finite stiffness, fixed but spring base support, guided in the head and basal shear force on head.

$\{\Delta_{i0}^A\}$: Relative displacements and rotations vector of the piles nodes, assuming infinite stiffness, elastic base support, guided on the head and basal shear force on head.



$\{\Delta\delta_{si}\}$: Relative horizontal displacements vector, produced in soil mass by the seismic movement (Section 4).

Equation 2.1 can be rewrite as follow:

$$[F_{ij}]_T \cdot \{X_i\} = \{\delta_i\}_T \quad (2.2)$$

Where:

$$[F_{ij}]_T = [\bar{S}'_{ij}] + [\bar{S}''_{ij}] + [1/K_i]_D : \text{ Total flexibility matrix}$$

$$\{\delta_i\}_T = \{\Delta_{i0}^p\} + \{\Delta_{i0}^A\} + \{\Delta\delta_{si}\} : \text{ Total vector displacements}$$

Solving equation 2.2 yields the reactions, from which it will be possible to calculate the bending moments and the shear forces. However, because springs that simulate soil interacting each other, the solution of the system of equations 2.1 has to be done iteratively to ensure compatibility of deformations in the soil-pile interface.

3. SOIL RIGIDITY

In this part of the analysis, the soil is assumed to be a continuous medium which will simultaneously be represented by a series of "m" elastic springs of horizontal stiffness K_i , interrelated to each other, while the pile rows will be divided into a finite number of "n" plates of area a_i .

Calculation of the reaction modules or equivalent spring constants of the subsoil can be performed by mean of a soil-foundation interaction analysis, solving the following equation called HEMA (Zeevaert 1980 and 1983):

$$\{\delta_i\} = [\bar{\delta}_{ji}] \{q_i\} \quad (3.1)$$

Where:

$\{\delta_i\}$: Vector of horizontal displacements.

$\{q_i\} = \left\{ \begin{matrix} X_i \\ a_i \end{matrix} \right\}$: Vector of horizontal reactions uniformly distributed in the contact area, a_i , in the soil-foundation interface. Hence $X_i = q_i a_i$.

$[\bar{\delta}_{ji}]$: Matrix of horizontal displacements where each column of it, $\{\bar{\delta}_{ji}\}$, is obtained as follows:

$$\{\bar{\delta}_{ji}\} = [I_{ji}]^T [\alpha_n] \quad (3.2)$$

Where:

$[I_{ji}]$: Matrix of influences obtained by applying a uniformly distributed virtual unit load to each plate of pile rows with tributary area, a_i , calculated from the integration of Mindlin's fundamental solution (Zea et al, 2010) at different horizontal distance along direction analyzed.

$[\alpha_n]$: Matrix of horizontal compressibility of the different soil strata involved in the analysis.

Equation 3.1 can be written as:

$$\{\delta_i\} = [\bar{\delta}_{ji}] \left\{ \begin{matrix} X_i \\ a_i \end{matrix} \right\} \quad (3.3)$$

Where $\{X_i\}$ vector of horizontal reactions on the plates of rows of piles.

4. SEISMIC ACTION IN THE SUBSOIL

In the case of a stratified subsoil, we can estimate the configuration of relative distortions and shear stresses generated by the shear waves by mean of the following procedure (shear soil-beam model, Zeevaert, 1973,1980).

Figure 1 show a soil element in a soil column under dynamic maximum amplitude generated by the shear waves.

From elastic-dynamic equilibrium of the soil element we obtain the algorithms using the computation of the maximum horizontal displacement and the shear stresses. These equations are:

$$\delta_{i+1} = A_i \delta_i - B_i \tau_i \quad (4.1)$$

$$\tau_{i+1} = C_i (\delta_i + \delta_{i+1}) + \tau_i \quad (4.2)$$

In which the coefficients A_i , B_i y C_i have the following values:

$$A_i = \frac{1 - N_i}{1 + N_i} \quad (4.3)$$



$$B_i = \frac{1}{1 + N_i} \left(\frac{d_i}{G_i} \right) \quad (4.4)$$

$$C_i = \frac{1}{2} \rho_i d_i \omega_s^2 \quad (4.5)$$

Where:

$$N_i = \frac{\rho_i d_i}{4G_i} \omega_s^2 \quad (4.6)$$

And:

ω_s : Circular frequency in the stratified deposit.

G_i : Dynamic soil rigidity for the stratum i.

ρ_i : Density of stratum i.

d_i : Thickness of stratum i.

Knowing the maximum surface acceleration (a_0), surface boundary conditions ($(\delta_s)_{\max}$; $\tau_i=0$) and firm ground basis ($\delta_b=0$ and $(\tau_{sb})_{\max}$), it is possible to calculate the final configurations of the horizontal displacements and shear forces using equations 4.1 and 4.2 in an iterative manner. Configurations produced by the first and second modes of vibrations can be studied in the most unfavorable form, using for this purpose a coefficient of mode participation.

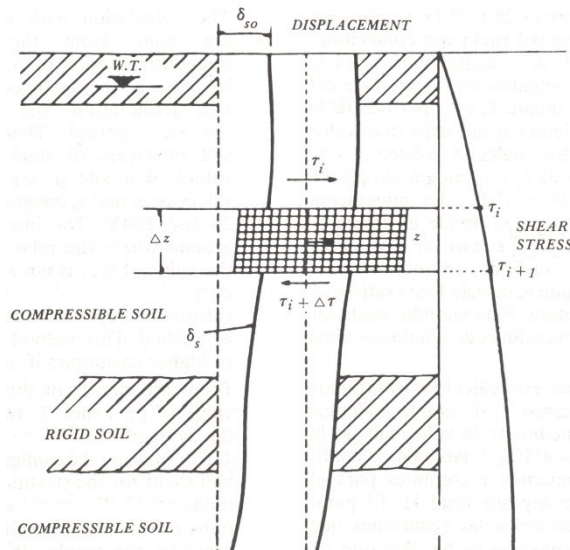


Fig. 1 Shear soil-beam model (Zeevaert, 1973 and 1980)

5. EXAMPLE

In order to illustrate proposed methodology a foundation with a set of six friction piles, of square section 40x40 cm, joined in their head by a foundation rigid slab is adopted; geometry of the foundation and adopted soil properties in which the piles are embedded are shown in Figure 2. It is a typical stratigraphy of Mexico City composed of very compressible clay deposits and low shear strength. Structure that will support the foundation in this example generates a basal shear of 13500 KN, associated with a maximum acceleration at the soil surface of 1.0 m/s². Dynamic modulus of concrete is considered to be 22240 MPa, while the Poisson ratio of the clayey soil strata was considered to be 0.5. For torsion phenomenon, 100% acceleration in the most unfavorable direction was considered and 30% in the other direction (Gobierno de la Ciudad de México, 2005). Vector $\{\Delta \delta_{si}\}$ for 90% of first vibrate mode plus 10% for second mode, is:

$$\{\Delta \delta_{si}\}_{33 \times 1}^T = (0.115 \quad 0.115 \quad . \quad 0.000 \quad 0.000) \text{m}$$

For calculation of matrixes $[\bar{S}'_{ij}]$, $[\bar{S}''_{ij}]$, $\left[\frac{1}{K_i} \right]_D$

and vectors $\{\Delta_{i0}^P\}$, $\{\Delta_{i0}^A\}$ model of analysis shown in

Figure 3 was adopted. Final total flexibility matrix for the most unfavorable direction is equal to:

$$[F_{ji}]_T = \begin{bmatrix} 1130.33 & 1124.88 & . & 175.41 & 175.42 \\ 1124.88 & 1130.67 & . & 176.59 & 175.42 \\ . & . & . & . & . \\ 175.41 & 176.59 & . & 49.59 & 27.58 \\ 175.42 & 175.42 & . & 27.58 & 49.59 \end{bmatrix}_{30 \times 30} \quad (\text{KN/m})$$

While total vector of independent terms is equal to:

$$EI(\delta_i)_{30 \times 1}^T = (154239 \quad 154241 \quad . \quad 23985 \quad 23985)$$

Hence the following reaction vector:

$$2(X_i)_{30 \times 1}^T = (32.22 \quad 30.40 \quad . \quad 1.65 \quad 1.67) \text{KN}$$

Relative displacements, bending moment and shear force diagrams derived from the reactions forces, X_i , are presented in figures 4, 5 and 6 respectively. Results include the analysis for the pile in the center row and in the edge row, without and considering the torsion. For comparison purposes, results corresponding to the analysis proposed by Zeevaert (1973, 1980) for an individual pile are also presented.

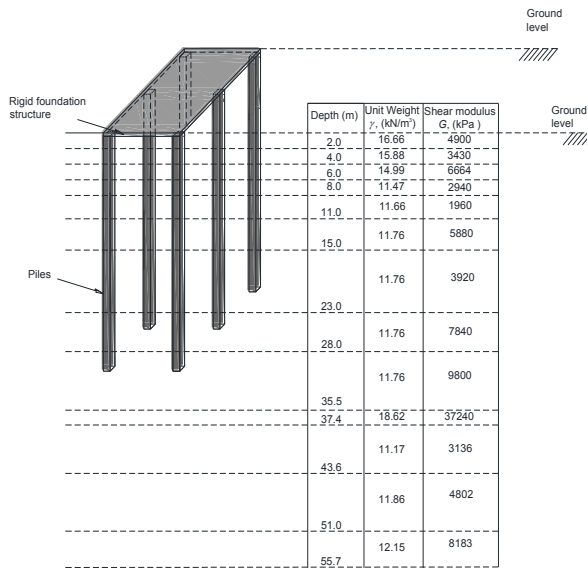


Fig. 2 Geometry of foundation and properties of soil

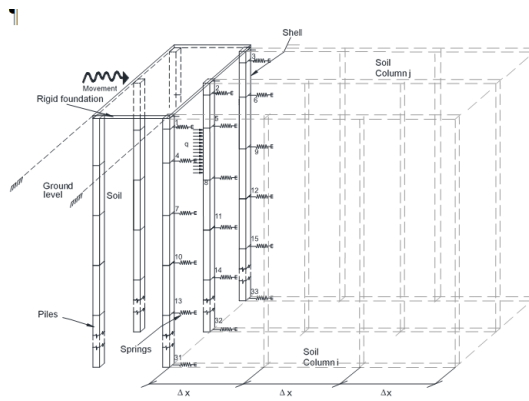


Fig. 3 Plates and soil columns of the model and structural model of beams for the example.

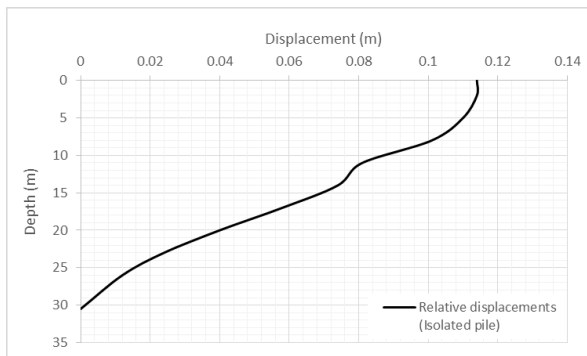


Fig. 4 Relative displacement (Isolated pile)

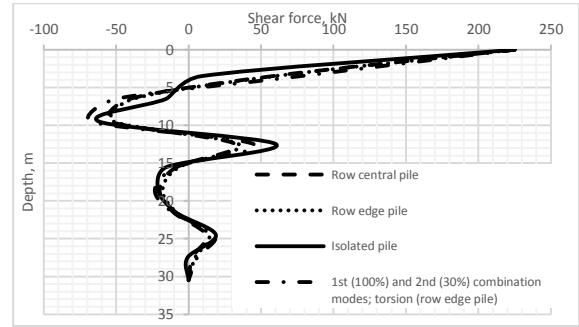


Fig. 5 Shear force diagram

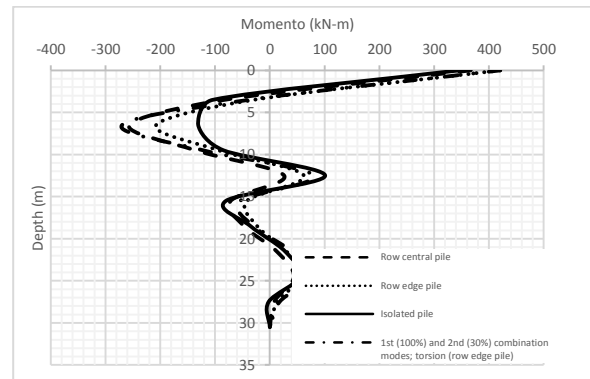


Fig. 6 Bending moment diagram

6. CONCLUSIONS

Proposed method, based on the Zeevaert's interaction methodology, provides a good alternative for the calculation of soil-pile rows interaction from practical engineering point of view.

Analysis results of example compared with the methodology developed by Zeevaert for an individual pile indicate importance of taking account three-dimensional effect in interaction analyzes, since mechanical elements present important differences; in central pile the shear force resulted of more than double in some points, joined to torsion effects.

Generalization of the Zeevaert's method to the three-dimensional interaction case allows to analyze influence of the rows and effect of torsion on the pile behaviour.

Finally, authors of this paper recommend comparing analytical results derived from this methodology with field measurements to validate proposed method.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

Authors of this work desires to express his grateful to "División de Ingenierías Civil y Geomática" for allowing us to participate in the research that gives place to this publication.



8. REFERENCES

Gobierno de la Ciudad de México (2004). Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo.

López G. (2012). Programa de cómputo para el análisis tridimensional de interacción suelo-estructura (EMISES3D), *Publicación Interna del Departamento de Geotecnia, Facultad de Ingeniería, UNAM.*

Zea, Rivera y López (2010), Cálculo del Esfuerzo Lateral por Carga Horizontal Rectangular Uniformemente Distribuida Mediante la Solución de Mindlin, *Documento interno clave: DOCINTER-UNAM-FI-DICTG-GEOT-CZC-2010-1, Facultad de Ingeniería, UNAM.*

Zeevaert L. (1973). Foundation Engineering for difficult subsoil conditions, first edition. *Van Nostrand Reinhold.*

Zeevaert L. (1983). Foundation Engineering for difficult subsoil conditions, second edition. *Van Nostrand Reinhold.*

Zeevaert L. (1980). Interacción suelo-estructura de cimentaciones superficiales y profundas, sujetas a cargas estáticas y sísmicas. Primera edición, *Editorial Limusa.*