



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

“COMPORTAMIENTO DE PRODUCCIÓN DE POZOS MÚLTIPLES, EN YACIMIENTOS
RECTANGULARES HETEROGÉNEOS Y ANISOTRÓPICOS CON UNA POROSIDAD”

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN EXPLORACIÓN Y EXPLOTACIÓN DE RECURSOS NATURALES

PRESENTA:

OSCAR CANDIA GUTIÉRREZ

TUTOR

DR. RODOLFO GABRIEL CAMACHO VELÁZQUEZ

CIUDAD DE MÉXICO, CIUDAD UNIVERSITARIA, OCTUBRE 2017

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Guerrero Sarabia Teodoro Iván

Secretario: Dra. Gómora Figueroa Ana Paulina

Vocal: Dr. Camacho Velázquez Rodolfo Gabriel

1er. Suplente: Dr. Aquino López Ambrosio

2do. Suplente: Dr. Coconi Morales Enrique

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, México.

TUTOR DE LA TESIS:

Dr. Camacho Velázquez Rodolfo Gabriel



A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Camacho Velázquez', is written over a horizontal line. The signature is stylized and cursive.

FIRMA

DEDICATORIA

Este trabajo es dedicado:

A mis padres por su ilimitado amor y por lo que han hecho por mi;

A mi esposa Alba Pamela y a mi precioso hijo Oscar con todo mi amor.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la oportunidad y prestarme la vida, de concluir los estudios de maestría.

A mi esposa Alba Pamela, gracias por creer en mí, por tu amor y por nuestro hijo Oscar que apenas nació, los amo mucho.

Doy gracias y un fuerte abrazo, a mis padres José Sotero y Ma. De Lourdes, por el gran apoyo que me dieron en mis estudios. Así como a mi hermano el mayor José Gerardo y a su esposa Wendy del Carmen por sus consejos y soporte que me brindaron.

A mi hermano el menor José Erick gracias por tu respaldo que me diste durante todo este tiempo y a toda mi familia que me ayudo a seguir adelante.

Le agradezco a mi tutor Dr. Rodolfo Gabriel Camacho Velázquez por todo su esfuerzo, comprensión, desgaste, conocimiento y amistad, que me brindo para realizar esta tesis, dios le dé más fuerza.

A los sinodales de esta tesis Dra. Ana Paulina Gómora Figueroa, Dr. Enrique Coconi Morales, Dr. Ambrosio Aquino López y Dr. Teodoro Iván Guerrero Sarabia, les doy las gracias por revisar este trabajo y por sus consejos que me dieron.

A mis compañeros de trabajo de PEMEX del Departamento de Yacimientos, del Proyecto Complejo Antonio J. Bermúdez y al Activo Integral de Producción Samaria Luna, les agradezco todo su apoyo que me dieron.

A mis profesores de las diferentes asignaturas Dr. Fernando Samaniego Verduzco, Dr. Erick Luna Rojero, Dr. José Luis Basbush Bauza, Dr. Heber Cinco Ley, M.I. Ulises Nery Flores, Dr. Victor Hugo Arana Ortiz, Ing. Martin Carlos Velázquez Franco, Ing. Oscar Osorio Peralta les agradezco todo su gran apoyo que me dieron y por confiar en mí.

A mis compañeros de generación, les agradezco: Juan Manuel Contreras Estrella, Francisco Javier Rosado Vázquez, Ubaldo Romero Ortiz, Oscar Emilio Cabrera López.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO		Página
I	ANTECEDENTES	15
	1.1 Estado del arte	15
II	INTRODUCCIÓN	27
	2.1 Principios de conservación	27
III	PROBLEMA MATEMÁTICO	32
	3.1 Planteamiento del Problema Matemático	32
	3.2 Solución del Problema	35
IV	RESULTADOS	65
	4.1 Modelo Analítico	65
	4.2 Caso 1	66
	4.3 Caso 2	73
	4.4 Caso 3	80
	4.5 Caso 4	87
	4.6 Caso 5	94
V	CONCLUSIONES	102
	NOMENCLATURA	103
	BIBLIOGRAFÍA	105
	APÉNDICE A	107

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
1.1 Desarrollo del campo	16
1.2 Yacimiento homogéneo cuadrado, con fronteras cerradas, con 9 pozos produciendo petróleo	20
1.3 Yacimiento heterogéneo cuadrado, con fronteras cerradas, con 9 pozos produciendo petróleo	21
1.4 Modelo conceptual de un yacimiento que tiene 9 zonas, 2 de ellas tienen pozos	22
1.5 Sistema de pozos múltiples en un yacimiento circular	23
1.6 Sistema de pozos múltiples en un yacimiento rectangular	23
1.7 Sistema de pozos múltiples centrados en pequeños rectángulos dentro del yacimiento rectangular	23
1.8 Condiciones de frontera laterales	25
2.1 Poros conectados	29
2.2 La porosidad efectiva y permeabilidad disminuyen	29
2.3 La porosidad efectiva y permeabilidad aumentan	29
2.4 Porosidad primaria y secundaria	30
3.1 Afloramiento de un anticlinal	32
3.2 Sistema yacimiento-pozos	33
3.3 Sistema de coordenadas (η, ζ) , donde $-1 \leq \zeta \leq 1$ y $0 \leq \eta \leq 1$	35
3.4 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=5$	53
3.5 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=15$	54

Figura	Página
3.6 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=25$	54
3.7 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=35$	55
3.8 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=45$	55
4.1 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$), generada con el simulador numérico, con 3 pozos productores de petróleo	66
4.2 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 1	67
4.3 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico del Caso 1, produciendo 3 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico	68
4.4 Mapa de distribución de permeabilidades [0:100] md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 1	69
4.5 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección Y, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 1	69
4.6 Gráfica del Caso 1, Medio Homogéneo-Isotrópico, produciendo 3 pozos a diferentes tiempos, comparando el Modelo Analítico, con el Simulador Numérico	70
4.7 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 1	70
4.8 Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34 \text{ md}$) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100] \text{ md}$; $k_y = 34 \text{ md}$)	71
4.9 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34 \text{ md}$), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$)	72

Figura		Página
4.10	Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 100 \text{ md}$), generada con el Simulador Numérico, con 4 pozos productores de petróleo	73
4.11	Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 2	74
4.12	Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico del Caso 2, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse	75
4.13	Mapa de distribución de permeabilidades $[0:100] \text{ md}$ en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 2	76
4.14	Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección Y, 4 pozos productores, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 2	76
4.15	Gráfica del Caso 2, Medio Homogéneo-Isotrópico, produciendo 4 pozos a diferentes tiempos, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico	77
4.16	Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 2	77
4.17	Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34 \text{ md}$) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100] \text{ md}$; $k_y = 34 \text{ md}$)	78
4.18	Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34 \text{ md}$), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$)	79
4.19	Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$), generada con el Simulador Numérico, con 3 pozos productores de petróleo	80

Figura	Página
4.20 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 3	81
4.21 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico del Caso 3, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico	82
4.22 Mapa de distribución de permeabilidades $[0:100]$ md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 3	83
4.23 Mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección Y, 3 pozos productores, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 3	83
4.24 Gráfica del Caso 3, Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), produciendo 3 pozos a diferentes tiempos, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse	84
4.25 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 3	84
4.26 Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)	85
4.27 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 50$ md)	86
4.28 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md ; $k_y = 100$ md), generada con el Simulador Numérico, con 4 pozos productores de petróleo	87
4.29 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 4	88

Figura		Página
4.30	Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md) del Caso 4, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, N=20, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse	89
4.31	Mapa de distribución de permeabilidades $[0:100]$ md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 4	90
4.32	Mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección Y, 4 pozos productores, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 4	90
4.33	Gráfica del Caso 4, Medio Homogéneo-Isotrópico, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse	91
4.34	Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 4	91
4.35	Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)	92
4.36	Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 100$ md)	93
4.37	Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md ; $k_y = 68$ md), generada con el Simulador Numérico, con 3 pozos productores de petróleo	94
4.38	Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 5	95

Figura	Página
4.39 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md) del Caso 5, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico	96
4.40 Mapa de distribución de permeabilidades $[0:100]$ md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 5	97
4.41 Gráfica del Caso 5, Medio Homogéneo-Isotrópico, ($k_x = k_y = 34$ md) produciendo 3 pozos, a diferentes tiempos, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Eclipse	98
4.42 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 5	98
4.43 Gráfica de Comparación de Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico con el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)	99
4.44 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), y el Modelo del Simulador el Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 68$ md)	100
A1.1 Polinomios de Legendre grados $N=[0:45]$	107
A1.2 Polinomios de Legendre grados $N=0$ y $N=1$	109
A1.3 Polinomio de Legendre grado $N=2$	110
A1.4 Polinomio de Legendre grado $N=3$	110
A1.5 Polinomio de Legendre grado $N=4$	111
A1.6 Polinomio de Legendre grado $N=5$	111

Figura	Página
A1.7 Polinomio de Legendre grado $N=6$	112
A1.8 Polinomio de Legendre grado $N=7$	112
A1.9 Polinomio de Legendre grado $N=8$	113
A1.10 Polinomio de Legendre grado $N=9$	113
A1.11 Polinomio de Legendre grado $N=10$	114
A1.12 Polinomio de Legendre grado $N=11$	114
A1.13 Polinomio de Legendre grado $N=12$	115
A1.14 Polinomio de Legendre grado $N=13$	115
A1.15 Polinomio de Legendre grado $N=14$	116
A1.16 Polinomio de Legendre grado $N=15$	116

LISTA DE TABLAS

Tabla	Página
2.1 Rangos de porosidades, dependiendo del tipo de roca	30
4.1 Datos de entrada del Modelo Analítico	65
4.2 Datos de entrada del Caso 1, para 3 pozos productores	66
4.3 Datos de entrada del Caso 2, para 4 pozos productores	73
4.4 Datos de entrada del Caso 3, para 3 pozos productores	80
4.5 Datos de entrada del Caso 4, para 4 pozos productores	87
4.6 Datos de entrada del Caso 5, para 3 pozos productores	94
A1.1 Ecuaciones de los polinomios de Legendre	118

RESUMEN

La mayoría de los yacimientos petroleros producen de pozos múltiples, por lo que se requiere estudiar el comportamiento de la producción de hidrocarburos de pozos múltiples en yacimientos que no sean homogéneos y se apeguen a la realidad, para optimizar costos de producción e incrementar el factor de recuperación de los yacimientos petroleros.

La productividad del pozo es una de las principales preocupaciones en la industria petrolera y proporciona la base para el desarrollo estratégico del campo petrolero. Para determinar la factibilidad económica de perforar un pozo, los ingenieros petroleros necesitan métodos confiables para estimar su productividad esperada.

El análisis de la curva de declinación es un método tradicional de predicción que se utiliza hoy en día debido a su simplicidad.

En éste trabajo se realizó un modelo en dos dimensiones que simula el comportamiento de la producción de pozos múltiples en yacimientos rectangulares heterogéneos y anisotrópicos, con una porosidad, de petróleo negro en una sola fase.

Este desarrollo es útil para determinar de manera más rápida la posición óptima de los pozos, produciendo a diferentes presiones, daños y tiempos. El yacimiento presenta fronteras cerradas al flujo, esto nos permite maximizar la producción, disminuyendo el número de pozos y optimizando los recursos.

La solución analítica se obtuvo a través de la combinación de los métodos de la transformada de Laplace, separación de variables, funciones de Green y polinomios de Legendre. Esta fue expresada en términos de una sumatoria infinita, que es re-expresada en términos de una sumatoria, se considerarán buenas aproximaciones para valores mayores de $N = 6$ para el ajuste de los polinomios de Legendre.

La producción de petróleo de los pozos depende de la posición donde se ubiquen, de la interferencia que hay entre ellos, de las características dinámicas y estáticas que tiene el yacimiento.

La validación se realizó mediante cinco casos de pozos productores y se compare la respuesta del modelo analítico con la del simulador numérico eclipse dando resultados cercanos.

También se compararon los gastos de producción de los pozos del modelo analítico heterogéneo y anisotrópico con el modelo homogéneo, identificando zonas de gran potencial de producción de hidrocarburos.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

1.1 Estado del arte

En la ingeniería de yacimientos, el objetivo principal es la optimización de la explotación del yacimiento, para obtener la máxima recuperación de hidrocarburos.

El análisis de datos de producción proporciona parámetros clave para una serie de cálculos de ingeniería de yacimientos, tales como estimación de reservas, cálculos de comportamiento del flujo y pronóstico de producción de pozos.

La búsqueda de herramientas para pronosticar la declinación de la producción y las reservas recuperables, ha sido un tema de gran interés para muchos ingenieros de yacimientos, Arabloo (2014).

Yanyan et al. (2008), comentaron que el análisis de la curva de declinación es un método tradicional de predicción que todavía se utiliza hoy en día, debido a su simplicidad. Cuando se perforan más pozos de petróleo en el yacimiento existe un aumento significativo de la producción de hidrocarburos, durante un tiempo determinado esto permite atenuar la declinación.

Las curvas de declinación de producción son usualmente usadas por los ingenieros de yacimientos, para predecir el comportamiento futuro de los pozos. Esto representa una de las herramientas más importantes para estudiar el comportamiento del pozo, así como para calcular el factor de recuperación y futuras evaluaciones económicas.

El trabajo de la ingeniería de yacimientos empieza con el pozo exploratorio que descubre el yacimiento, estudiando los registros geofísicos de pozos y muestras de los fluidos, lo que da una idea inicial del volumen original de hidrocarburos.

Desde la etapa inicial y durante toda la vida productiva del yacimiento, el trabajo en equipo es muy importante para los ingenieros petroleros, geólogos y geofísicos, con el fin de distribuir adecuadamente los pozos en las mejores zonas del yacimiento e incrementar su factor de recuperación. (Figura 1.1)

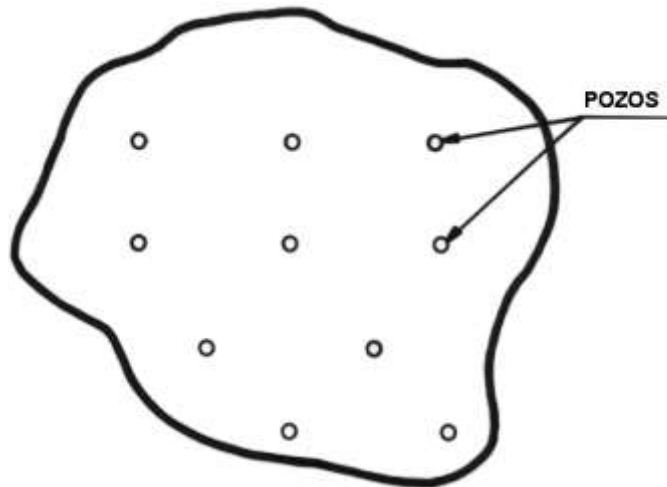


Figura 1.1 Desarrollo del campo

En general, los mecanismos de producción de petróleo y gas son ineficientes. Por ejemplo, para un yacimiento que produce por empuje de gas disuelto, la recuperación varía entre 5-25% y para un yacimiento de empuje hidráulico entre 40-70%.

Esta recuperación puede mejorarse tomando ciertas medidas: control de la cantidad de gas y/o agua producida con el petróleo, ubicación adecuada de los pozos tanto productores, como inyectores de agua o algún otro fluido, para incrementar la energía del yacimiento.

Entre los trabajos que se realizan en ingeniería de yacimientos, pueden mencionarse:

- 1.- Estimación del volumen original de hidrocarburos.
- 2.- Cálculo del factor de recuperación.
- 3.- Relación entre el tiempo y la recuperación de los hidrocarburos.

Para realizar estos trabajos, el ingeniero de yacimientos debe llevar a cabo las actividades siguientes:

- 1.- Obtención y procesamiento de los datos básicos de las propiedades de los fluidos y de la formación productora.
- 2.- Desarrollo y análisis de pruebas de flujo y de presión.
- 3.- Estudios de simulación del comportamiento del yacimiento.
- 4.- Análisis de la implantación de un proceso de recuperación mejorada.

La productividad del pozo es una de las principales preocupaciones y proporciona la base, para el desarrollo estratégico del campo petrolero. Para determinar la factibilidad económica de perforar un pozo, los ingenieros petroleros necesitan métodos confiables para estimar su productividad esperada.

La productividad de un pozo está frecuentemente evaluada utilizando el índice de productividad, que se define como el gasto de producción por unidad de caída de presión. Con frecuencia relacionamos la evaluación de la productividad, al comportamiento de producción de un pozo a largo plazo, es decir, el comportamiento durante el estado pseudoestacionario o estado de flujo estacionario.

Las ecuaciones de productividad de estado estacionario y pseudoestacionario, de una perforación vertical de un pozo, ubicado en el centro de un yacimiento circular, homogéneo y de permeabilidad isotrópica, son suficientemente familiares para los ingenieros petroleros y puede encontrarse en cualquier libro de ingeniería de yacimientos.

Los métodos tradicionales basados en las ecuaciones clásicas de transporte, son comúnmente utilizados para describir los procesos de transferencia y son el sustento de los simuladores numéricos de yacimientos ya existentes.

Los datos de producción son la información más común para el desarrollo del yacimiento. Utilizar los datos de la historia de producción para ajustar los pronósticos de producción, es un aspecto importante de la ingeniería de yacimientos, la estimación de la producción y de las reservas, Yanyan et al. (2008).

Arps (1945) desarrolló el modelo de análisis de la curva de declinación que se usó con frecuencia para modelos exponenciales, hiperbólicos y armónicos.

Partiendo de las ecuaciones de flujo multifásico, Camacho y Raghavan (1989) se establecieron las condiciones físicas para los modelos exponenciales, hiperbólicos y armónicos.

Teóricamente, la producción de petróleo de un pozo disminuirá desde el comienzo de la producción de petróleo a medida que disminuye la presión. Según los datos estadísticos, los gastos de producción de la mayoría de los pozos comienzan a disminuir en sólo varios meses, después de ponerse a producción. Es posible predecir la producción de un pozo con modelos de declinación en estos casos.

El perforar más pozos en el yacimiento da como resultado un incremento en la producción de petróleo, durante los diferentes períodos de desarrollo del campo, dependiendo del momento en que los pozos son perforados y puestos a producción.

Durante las últimas décadas, ha habido una gran cantidad de investigadores sobre este tema, de los análisis de las curvas de declinación como: Agarwal et al. (1999); Agbi and Ng (1987); Arps (1945); Duong (1989); Fetkovich et al. (1996); Gaskari et al. (2006); Marhaendrajana (2005); Marhaendrajana and Blasingame (2001); Palacio y Blasingame (1993).

Fetkovich (1980) publicó un nuevo conjunto de curvas tipo analítica-empíricas, que extendieron las curvas tipo de Arps en la región de flujo transitorio, y usó ecuaciones de flujo para generar curvas tipo, para el flujo transitorio, y las combinaron con las ecuaciones empíricas de la curva de la declinación de Arps.

McCray (1990) desarrolló una función de tiempo, que transforma los datos de producción del sistema a presión variable ó gasto variable, escenario en un sistema de producción equivalente, producido a una presión de fondo constante.

Blasingame et al. (1991) desarrollaron una función de tiempo para transformar los datos de producción, de sistemas que presentan una caída de presión variable o gasto variable, a presión constante del sistema de producción.

Rodríguez y Cinco-Ley (1993) desarrollaron un modelo para la declinación de la producción en un sistema de múltiples pozos con fronteras cerradas. Los principales supuestos en su modelo son que la condición de flujo pseudoestacionario existe en todos los puntos del yacimiento, y que todos los pozos del yacimiento producen a una presión de fondo constante. Concluyeron que el comportamiento de producción del yacimiento se mostró exponencial en todos los casos, siempre y cuando las presiones de fondo del pozo se mantengan constantes.

Palacio y Blasingame (1993) desarrollaron una solución para el caso general de gasto variable / caída de presión variable al flujo en una sola fase líquido o gas.

En los métodos modernos de análisis de datos de producción, se deben conocer la presión de fondo y los gastos de los pozos. Algunos ejemplos de curvas tipo combinadas y curvas de declinación son las curvas tipo integrales de presión Blasingame et al. (1989), la curva de tipo integral de gasto Doublet et al. (1994), la curva tipo Agarwal et al. (1999). Hay también técnicas modernas que no utilizan curvas tipo. Estos métodos se llaman Modelos de Balance de Materia Fluyendo.

Camacho et al. (1994) utilizaron un modelo similar al modelo Rodríguez y Cinco (1993), consideraron que los pozos produjeran a diferentes tiempos, a presión de fondo constante y la existencia de la condición de estado pseudoestacionario. También presentaron soluciones analíticas para los casos en que los pozos son estimulados a diferentes tiempos, y para cuando los valores de presión de fondo son funciones de tiempo para cada pozo.

Valko et al. (2000) presentaron un concepto de "Índice de productividad de múltiples pozos" para un número arbitrario de pozos, en un yacimiento con fronteras cerradas. Consideraron la existencia del flujo pseudoestacionario, pero demostraron que el concepto era válido para un gasto constante, una presión constante o el gasto de producción/presión variable.

Umnuayponwiwat et al. (2000) presentaron una investigación del comportamiento de presión transitoria de pozos múltiples en sistemas rectangulares cerrados. Combinaron pozos verticales y horizontales con variación de gastos y los periodos de incremento son considerados. Mostraron que incluso en yacimientos homogéneos e isótropos, los efectos de interferencia no siempre están dominados por los pozos cercanos. Bajo ciertas condiciones, los pozos más alejados pueden desempeñar papeles más importantes en la producción de los pozos. También analizan los efectos de interferencia del pozo en las pruebas de incremento.

Marhaendrajana y Blasingame (2001) presentaron una nueva solución en un yacimiento con pozos múltiples, y una metodología para analizar los datos de producción de un pozo en un sistema de yacimiento de pozos múltiples. Usaron datos de la producción acumulada del campo y datos de gasto y presión de pozos individuales.

Esta solución proporciona un mecanismo para el análisis de los datos de producción, basados en un balance de materia en todo el yacimiento. Con base a la metodología que desarrollaron, se puede estimar el volumen original del yacimiento, así como la permeabilidad local, y puede ser aplicada para yacimientos de gas y petróleo.

Su enfoque utiliza la curva tipo de declinación de un pozo (es decir, la curva tipo Fetkovich / McCray), junto con la transformación de datos, para un sistema del yacimiento con pozos múltiples. Desarrollaron la función graficada "Tiempo total del balance de materia", definida como la producción acumulada del campo, dividida por el gasto para un pozo individual, en el sistema de yacimiento de múltiples pozos. Además, las estimaciones de capacidad de flujo (o permeabilidad) obtenidas por los estudios de simulación numérica, indican que su enfoque proporciona estimaciones precisas y representativas, para sistemas de yacimientos homogéneos y heterogéneos.

Emplearon un yacimiento homogéneo cuadrado, la distribución de la permeabilidad para este caso esta dado por la figura 1.2.

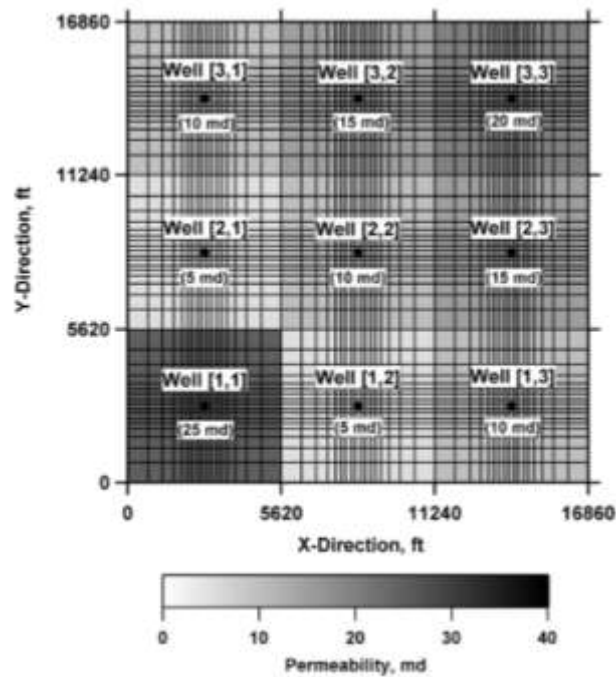


Figura 1.2 Yacimiento homogéneo cuadrado, con fronteras cerradas, con 9 pozos produciendo petróleo. Marhaendrajana y Blasingame (2001)

Cada pozo reproduce el comportamiento de la presión de fondo fluyente y el gasto de petróleo.

Para un yacimiento heterogéneo cuadrado, dan una distribución aleatoria de permeabilidad al yacimiento, como un mecanismo que proporciona una validación general. Las propiedades del yacimiento y del fluido son las mismas utilizadas en el modelo homogéneo. (Figura 1.3)

En este caso, también cada pozo reproduce el comportamiento de la presión de fondo fluyente y el gasto de petróleo. Después grafican la presión promedio del yacimiento, contra la producción acumulada de petróleo del campo, con la que calculan el volumen original de petróleo y pronostican la máxima producción acumulada de petróleo que hay.

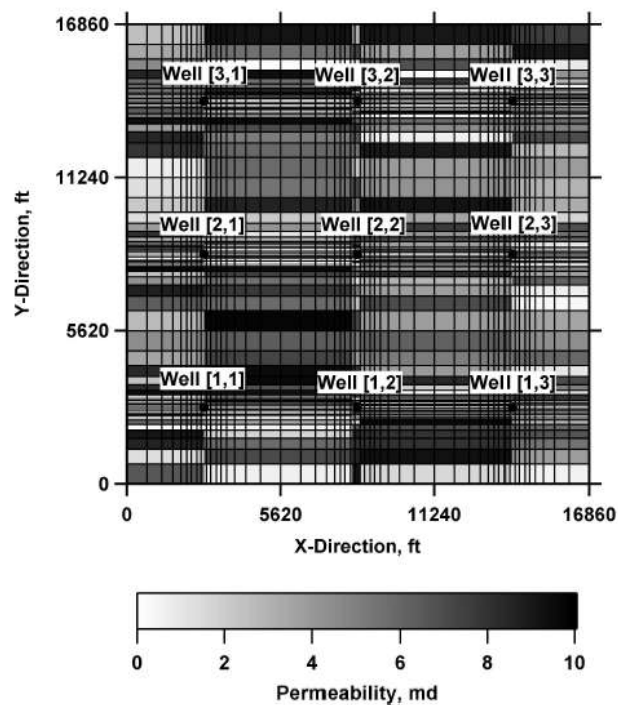


Figura 1.3 Yacimiento heterogéneo cuadrado, con fronteras cerradas, con 9 pozos produciendo petróleo. Marhaendrajana y Blasingame (2001)

Siemek y Stopa (2006) presentaron un modelo de optimización para evaluar el número óptimo de pozos en yacimientos de gas. El problema de optimización lo formularon matemáticamente y resolvieron por el uso iterativo del método SIMPLEX. La técnica que utilizaron, se basa en la física del flujo de fluidos en medios porosos. El yacimiento lo dividen en N zonas, introduciendo una malla, cada zona puede incluir o no pozos, la transferencia de masa entre las zonas y pozos de interferencia son considerados, cuyo objetivo principal es el de minimizar el número de pozos. En general, la posición óptima para minimizar el número total de pozos es una función del tiempo. Esta propiedad puede ser útil para planificar la estrategia de explotación. (Figura 1.4)

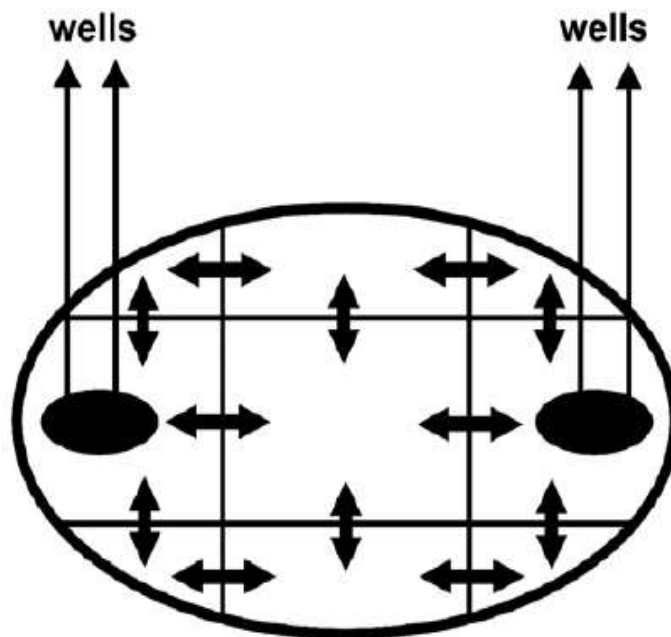


Figura 1.4 Modelo conceptual de un yacimiento que tiene 9 zonas, 2 de ellas tienen pozos. Siemek y Stopa (2006)

Lu y Tiab (2008) presentaron ecuaciones de productividad para un sistema de pozos múltiples verticales, para el estado estacionario y pseudoestacionario en un yacimiento circular o rectangular anisotrópico, con fronteras cerradas. La ecuación de productividad propuesta para los pozos múltiples es una herramienta analítica simple, precisa y rápida para evaluar el comportamiento del estado estacionario y pseudoestacionario de los pozos perforados. Para un número de pozos dados, la condición de frontera exterior del yacimiento, la permeabilidad radial, la permeabilidad horizontal y el factor de daño tienen efectos importantes en la productividad de un pozo y en la productividad total del sistema de pozos múltiples. Lu y Tiab, (2008) (Figuras 1.5, 1.6 y 1.7)

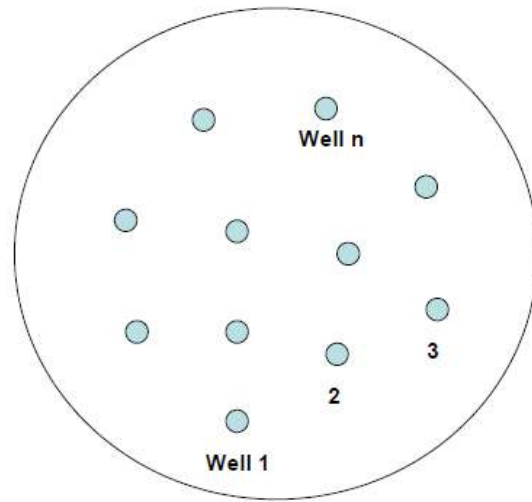


Figura 1.5 Sistema de pozos múltiples en un yacimiento circular. Lu y Tiab (2008)

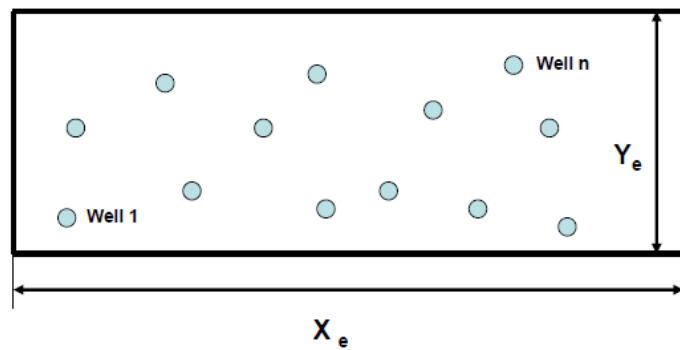


Figura 1.6 Sistema de pozos múltiples en un yacimiento rectangular. Lu y Tiab (2008)

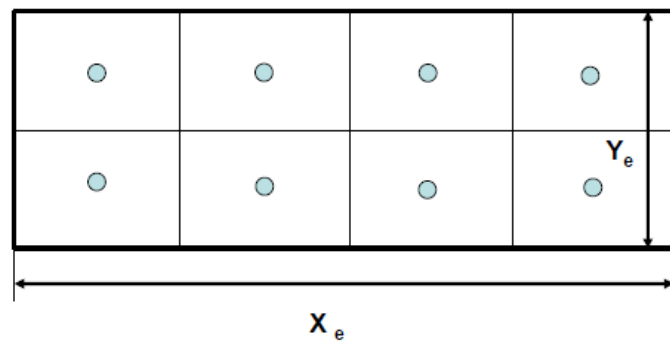


Figura 1.7 Sistema de pozos múltiples centrados en pequeños rectángulos dentro del yacimiento rectangular. Lu y Tiab (2008)

Owayed, Lu y Tiab (2013) presentaron nuevas ecuaciones analíticas para obtener la productividad en estado estacionario, de un sistema de pozos múltiples en yacimientos rectangulares homogéneos-anisotrópicos, usando diferentes fronteras laterales.

Estudiaron cinco casos con diferentes fronteras laterales, las ecuaciones derivadas relacionan el vector del gasto de producción, con la caída de presión. Proporcionan herramientas rápidas para evaluar el comportamiento del sistema de pozos múltiples, que son ubicados arbitrariamente en el yacimiento, figura 1.8. Para un yacimiento rectangular, éstas son las suposiciones que se realizaron:

- Antes de iniciar la producción de los pozos, la presión está distribuida uniformemente en el yacimiento, igual que la presión inicial
- Los pozos son paralelos en la dirección Z, si la frontera lateral es a presión constante, ésta siempre es igual a la presión inicial durante su producción
- Un fluido monofásico, una compresibilidad pequeña y constante, viscosidad constante, el factor del volumen de formación constante, el flujo del yacimiento hasta los pozos constante. Las propiedades del flujo son independientes a la presión. Las fuerzas de gravedad son despreciables
- El yacimiento tiene una permeabilidad constante en k_x, k_y, k_z y un espesor constante h. En algún intervalo de tiempo dado, el número de pozos, su ubicación, radio y factor de daño son considerados constantes

Se analizaron tres ejemplos de Owayed et al. (2013):

El primer ejemplo es un yacimiento homogéneo-isotrópico, con 8 pozos productores, donde se utiliza una permeabilidad constante, es decir, $k_x = k_y = k_z$ en todo el yacimiento, donde la frontera que predomina en el índice de productividad total de los pozos, es la del caso 1, donde sus cuatro fronteras son a presión constante.

El segundo ejemplo, es un yacimiento homogéneo-anisotrópico con 9 pozos productores, utilizan una permeabilidad diferente en cada dirección X, Y, Z, con $k_x \neq k_y \neq k_z$ y la frontera que predomina en el índice de productividad total de los pozos, es la del caso 2, con dos fronteras a presión constante y las otras dos son impermeables.

El tercer ejemplo es un yacimiento con 8 pozos ubicados en el centro de rectángulos de tamaño pequeño, de la misma área, como la que se muestra en la figura 1.7; es un yacimiento rectangular homogéneo-isotrópico, la permeabilidad $k_x = k_y = k_z$ en todo el yacimiento, donde la frontera que predomina en el índice de productividad total de los pozos es la del caso 1, donde sus cuatro fronteras son a presión constante. (Figura 1.8)

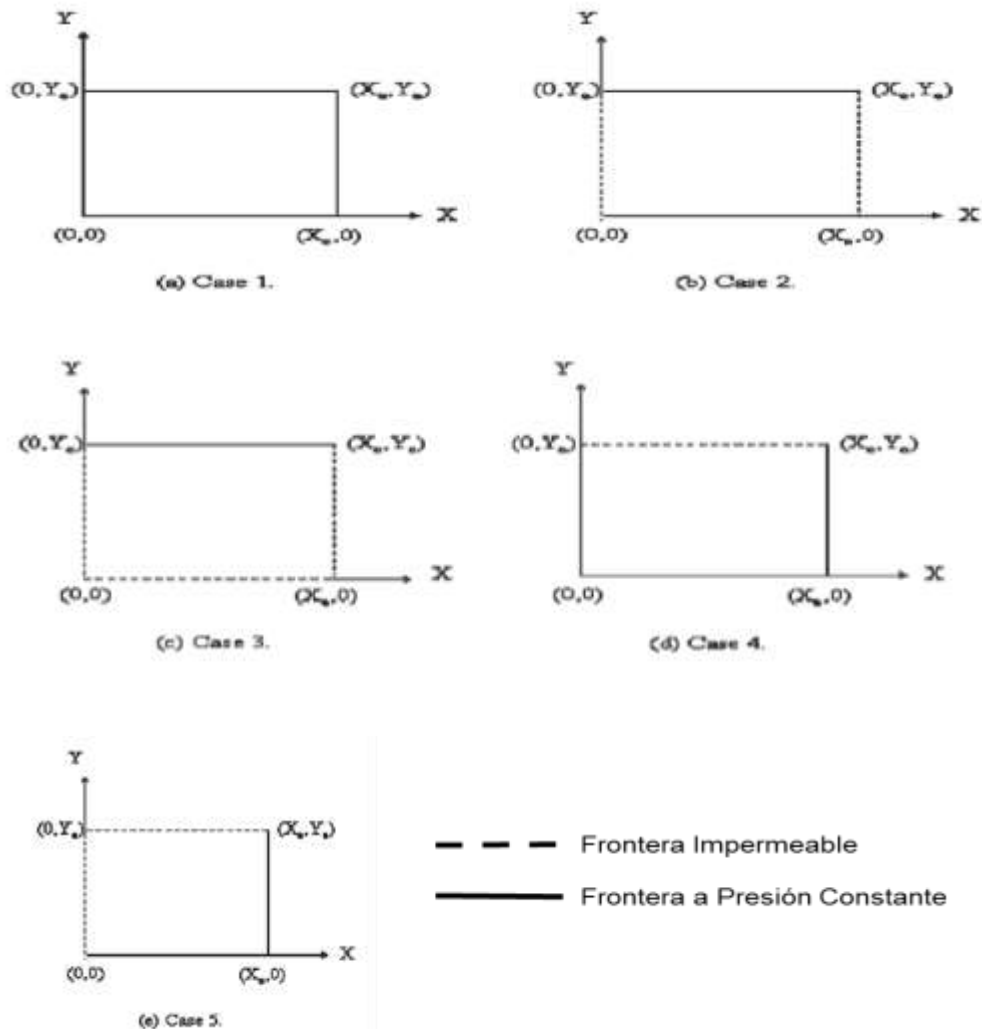


Figura 1.8 Condiciones de frontera laterales. Owayed, Lu y Tiab (2013)

Derivaron las ecuaciones de productividad de estado estacionario para un sistema de pozos múltiples en un yacimiento rectangular homogéneo y anisotrópico con diferentes fronteras laterales. Estas ecuaciones se han aplicado a varias condiciones de frontera laterales.

Owayed, Lu y Tiab (2013) concluyeron que para un yacimiento determinado, si los pozos se ubican simétricamente con respecto al mismo tipo de frontera lateral, entonces sus índices de productividad serán idénticos. Para un sistema determinado de pozos múltiples, cuando el número de fronteras a presión constante incrementa, el índice de productividad se incrementa.

Arabloo, Heidari y Gerami (2014) presentaron una metodología sencilla pero precisa para la estimación del volumen original de gas y la presión media del yacimiento en yacimientos de gas y condensado. Este estudio proporciona ejemplos de análisis y establece directrices para el análisis y la interpretación de los datos de producción a largo plazo, usando datos de producción de yacimientos de gas y condensado, desarrollado en gráficas cartesianas.

CAPÍTULO II

INTRODUCCIÓN

2.1 Principios de conservación

El propósito de este trabajo es obtener un modelo analítico que simule el comportamiento de la producción de pozos múltiples, en yacimientos rectangulares heterogéneos-anisotrópicos, con una porosidad constante, para petróleo negro en una sola fase.

Este desarrollo es útil para determinar la posición óptima de varios pozos, produciendo a diferentes presiones y con diferentes daños, entrando a producir a diferentes tiempos; el yacimiento presenta fronteras cerradas al flujo; este desarrollo puede ser útil para maximizar la producción acumulada, disminuyendo el número de pozos.

Los problemas de flujo de fluidos a través de medios porosos pueden resolverse combinando varios de los principios siguientes:

1. Conservación de masa
2. Conservación de energía
3. Conservación de momento
4. Ecuación de transporte
5. Ecuación de estado

A los tres primeros principios o leyes se les conoce como leyes de continuidad. Cada una de ellas establece que cualquier propiedad de la naturaleza no puede ser creada ni destruida.

La ley de conservación de masa establece:

$$(\text{masa que entra}) - (\text{masa que sale}) = (\text{masa acumulada})$$

La ley de conservación de energía es una expresión de la primera ley de la termodinámica, la cual toma en cuenta los diferentes cambios de energía y su mayor importancia es en el flujo no isotérmico de fluidos. En el flujo de fluidos en el yacimiento, con excepción de los procesos térmicos, los cambios de energía pueden despreciarse.

La ley de conservación de momento es una expresión de la segunda ley de Newton. Se establece en la teoría de flujo de fluidos a través de medios porosos. Esta ley, así como la ecuación de transporte, se relacionan por medio de una sola ecuación empírica: la ley de Darcy. Una ecuación de estado relaciona la densidad de un fluido como función de la presión y la temperatura.

Un medio poroso es homogéneo con respecto a cierta propiedad, si ésta no depende de la posición dentro del medio poroso. Si lo anterior no se cumple el medio poroso es heterogéneo.

Un medio poroso es isotrópico con respecto a la permeabilidad si ésta es independiente de la dirección en el medio poroso. Si lo anterior no se cumple, el medio poroso es anisotrópico.

En forma general, los diferentes tipos de medios porosos que se tienen son los siguientes:

1. Medio Homogéneo-Isotrópico
2. Medio Homogéneo-Anisotrópico
3. Medio Heterogéneo-Isotrópico
4. Medio Heterogéneo-Anisotrópico

En esta tesis se analizó un tipo de heterogeneidad con permeabilidad en la dirección X , que representa un anticlinal, donde la máxima permeabilidad se encuentra en el eje central del anticlinal y disminuye en los extremos. En el eje Y , se considera que existe una sola permeabilidad. De esta forma el medio es heterogéneo y anisotrópico.

La permeabilidad absoluta es la conductividad de una roca a un fluido, cuando ésta se encuentra saturada al 100 % de dicho fluido. La permeabilidad del medio poroso debe ser la misma para cualquier líquido que no reaccione con la roca y que la sature al 100%.

La permeabilidad efectiva de una fase dada es menor que la permeabilidad absoluta y está en función de la saturación de la fase. Las permeabilidades efectivas del yacimiento pueden depender de la ubicación y del número de pozos.

Algunos rangos de permeabilidad para yacimientos convencionales son:

Muy baja:	$k < 1 \text{ md}$
Baja:	$1 \text{ md} < k < 10 \text{ md}$
Aceptable:	$10 \text{ md} < k < 50 \text{ md}$
Promedio:	$50 \text{ md} < k < 200 \text{ md}$
Buena:	$200 \text{ md} < k < 500 \text{ md}$
Excelente:	$k > 500 \text{ md}$

La permeabilidad depende fundamentalmente del tamaño y abertura de los poros, grado de conectividad y del tipo de cemento entre los granos y cementación. (Figura 2.1)

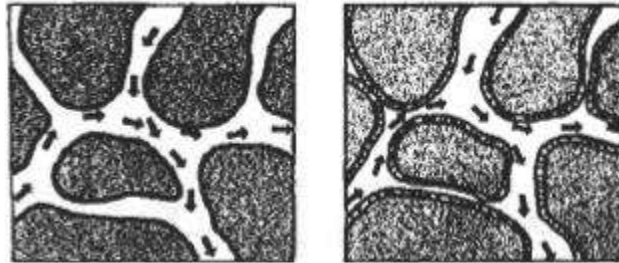


Figura 2.1 Poros conectados

La permeabilidad se ve afectada por la presión de sobre carga, el tamaño, acomodo y forma de los granos, la distribución de los mismos de acuerdo con el tamaño y el grado de cementación y consolidación. (Figura 2.2. y 2.3)



Figura 2.2 La porosidad efectiva y la permeabilidad disminuyen



Figura 2.3 La porosidad efectiva y la permeabilidad aumentan

La porosidad es una medida del espacio disponible para almacenar fluidos. Según la forma en que fueron depositados, las calizas y dolomitas, también pueden presentar porosidad intergranular.

Así mismo, se puede tener porosidad secundaria en forma de pequeñas cavidades; la porosidad secundaria se debe a la acción de aguas de formación y fuerzas tectónicas, fracturas, en la matriz de roca después del depósito. (Figura 2.4)



Figura 2.4 Porosidad primaria y secundaria.

Entre los rangos de porosidades de los distintos tipos de rocas o sedimentos, que podemos encontrar en nuestros yacimientos. (Tabla 2.1)

Tabla 2.1 Rangos de porosidades dependiendo del tipo de roca

Tipo de roca o sedimento	%
Arenisca	4-30+
Arena limpia y uniforme	25-45+
Grava limpia y uniforme	25-45+
Arena y grava mezcladas	15
Limolita y arcilla (cuando es depositada)	40-90
Compactada y deshidratada	20-40
Lutita	3-20+
Calizas	1-15+

Debido a la acción de fuerzas tectónicas, se pueden presentar tensiones en la formación causando redes de fracturas, fisuras o grietas, que se agregan al volumen de poros.

Las fracturas son un elemento universal en las capas de roca sedimentaria, tanto que prácticamente son omnipresentes en afloramientos de rocas sedimentarias. Las fracturas que se ven en el afloramiento, también existen en el subsuelo.

Por lo tanto, se deduce que los yacimientos petroleros de rocas sedimentarias en su mayoría contienen fracturas y son lo suficientemente fracturados como para ser llamados yacimientos fracturados.

El cálculo del volumen original del yacimiento depende del conocimiento de la porosidad, de la matriz y la fractura. La permeabilidad de la fractura y de la matriz, especialmente su interacción, contribuyen al comportamiento de un yacimiento dado.

La geometría, el espaciamiento, la superficie y la apertura de las fracturas se combinan con su morfología y la distribución del espacio poroso, para crear una verdadera permeabilidad del yacimiento y/o anisotropía de permeabilidad.

La disminución de la presión del fluido con el tiempo, cambia el valor de algunas variables, pero no el valor de otras. Por lo tanto, los cálculos iniciales no se aplican a lo largo de la vida del yacimiento y algunos parámetros deben ser recalculados en varios intervalos de tiempo durante la vida del yacimiento.

El escrito de Henry Darcy fue la base de todos los estudios físico-matemáticos posteriores sobre el flujo del agua subterránea.

Ley de Darcy

$$q = KA \frac{h_1 - h_2}{L}$$

K = Constante de proporcionalidad del empacamiento de arena

q = Gasto de flujo de agua

A = Área de sección transversal de la muestra

L = Longitud de la muestra

$h_1 - h_2$ = Diferencia de los datos de agua de los manómetros

CAPÍTULO III

PROBLEMA MATEMÁTICO

3.1 Planteamiento del Problema Matemático

Un yacimiento en la naturaleza generalmente es heterogéneo y anisotrópico, por lo que su representación se dificulta. Discretizar el medio, en un gran número de bloques no es la solución, ya que esto puede generar un modelo impráctico del yacimiento. (Figura 3.1)



Figura 3.1 Afloramiento de un anticlinal.

Una buena representación de los fenómenos que ocurren en los yacimientos, requieren acoplar modelos que logren describir el comportamiento de pozos múltiples.

Rodríguez et al. (1993) y Camacho et al. (1994) presentaron soluciones analíticas para pozos múltiples produciendo a presión constante de un yacimiento rectangular homogéneo e isotrópico.

Camacho et al. (1994) presentaron soluciones para casos donde los pozos se estimulan y comienzan a producir a diferentes tiempos, donde sus presiones de fondo cambian con el tiempo.

En este trabajo se presenta una aproximación a la solución analítica para el caso donde los pozos comienzan a producir bajo diferentes presiones constantes de fondo del pozo en un yacimiento rectangular, pero con una heterogeneidad en la permeabilidad en la dirección X, y una permeabilidad en la dirección Y constante, es decir un yacimiento anisotrópico.

En la figura 3.2, se tiene un yacimiento rectangular heterogéneo y anisotrópico de dos dimensiones, con fronteras cerradas al flujo. El yacimiento produce a través de pozos múltiples, a diferentes presiones de fondo fluyendo, daños y tiempos.

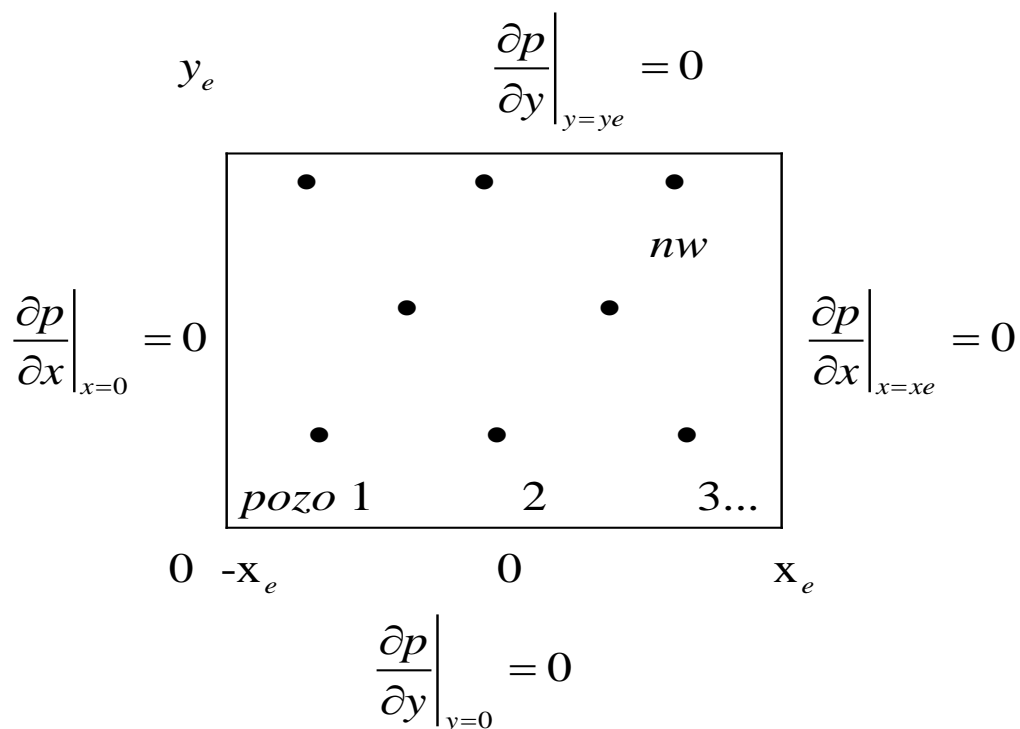


Figura 3.2 Sistema yacimiento-pozos

La geometría del yacimiento rectangular y las condiciones de frontera cerradas son iguales a las consideradas con Rodríguez et al. (1993) y Camacho et al. (1994).

Se tiene un yacimiento rectangular en dos dimensiones (x,y) , no homogéneo, de una porosidad con anisotropía, con pozos múltiples y produciendo a diferentes tiempos.

Se desarrolló una solución analítica en el presente trabajo para pronosticar el comportamiento de la producción de pozos múltiples en un yacimiento rectangular, con fronteras cerradas al flujo, bajo diferentes presiones constantes de fondo.

Los pozos fueron representados como una línea fuente arbitrariamente situados en el dominio del yacimiento; el daño de cada pozo es considerado. La solución fue a través de la combinación de los métodos de la transformada de Laplace, separación de variables, funciones de Green y polinomios de Legendre.

El desarrollo y solución es similar al planteado por Camacho et. al. (1994), pero en ésta tesis se considera un tipo de heterogeneidad en la permeabilidad horizontal, implicando anisotropía.

En este trabajo se utilizaron las variables adimensionales siguientes:

Presión adimensional

$$p_D(x_D, y_D, t_D) = \frac{p_i - p(x, y, t)}{p_i - p_{wref}}$$

Gasto adimensional

$$q_{wDj}(t_D) = \frac{\mu q_{wj}(t) B}{141.2kh(p_i - p_{wref})}$$

Tiempo adimensional

$$t_D = \frac{0.006329kt}{\phi\mu c_i A}$$

Coordenadas adimensionales

$$x_D = \frac{x}{x_E}$$

$$y_D = \frac{y}{y_E}$$

donde:

$$x_E = y_E$$

3.2 Solución del Problema

El yacimiento que se considera contempla un paralelepípedo rectangular 2×1 , donde la permeabilidad en la dirección horizontal, varía con respecto a la posición, siendo mayor en el centro del rectángulo y constante en la vertical.

Normalizando las coordenadas por $x_E = y_E$, en el eje vertical, η , va de 0 a 1 y en el eje horizontal, ζ , va de -1 a 1, como se muestra en la figura 3.3.

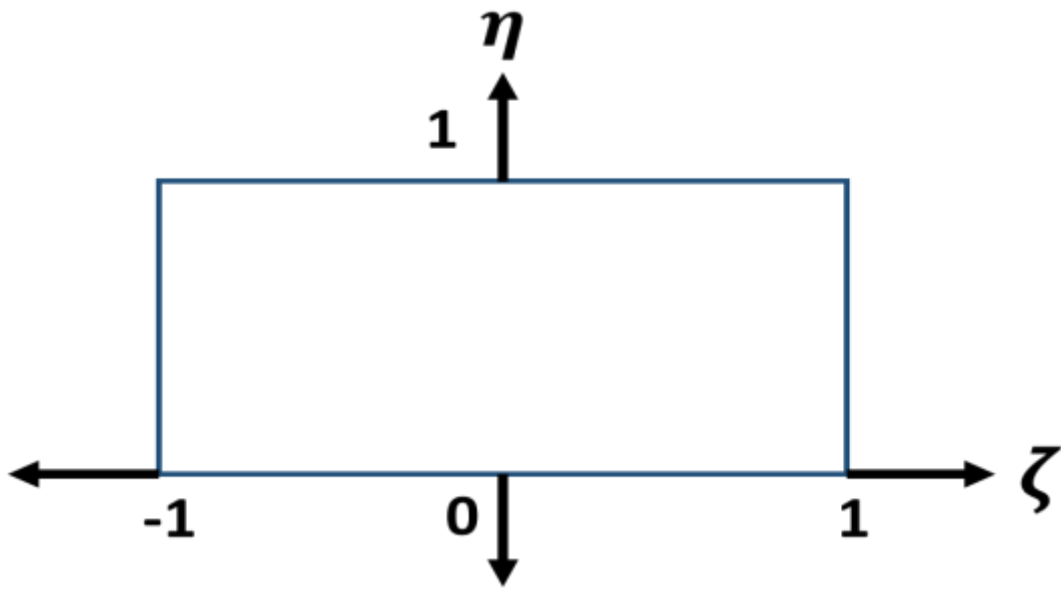


Figura 3.3 Sistema de coordenadas (η, ζ) , donde $-1 \leq \zeta \leq 1$ y $0 \leq \eta \leq 1$

Es decir, el yacimiento contempla un área rectangular de 2×1 , considerando que el eje del anticlinal se encuentre en $\zeta = 0$

La ecuación diferencial parcial que satisface al problema del yacimiento heterogéneo y anisotrópico, está dada por:

$$\frac{k_x}{k_{ref}} \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial x_D^2} + \frac{k_x'}{k_{ref}} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial x_D} + \frac{k_y}{k_{ref}} \frac{\partial^2 \bar{p}_D}{\partial y_D^2} + \frac{k_y'}{k_{ref}} \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial y_D} + 2\pi \sum_{j=1}^{nw} \bar{q}_{wDj} \delta(x_D - x_{Dj}; y_D - y_{Dj}) = s \bar{p}_D, \quad \dots (1)$$

Dado que la permeabilidad de referencia es la permeabilidad máxima en la dirección X, que está ubicada sobre el eje del anticlinal, que se encuentra en $x=0$.

Usando los apuntes de matemáticas aplicadas, Camacho (2016):

$$\iint_R GL\bar{p}_D d\sigma = \int_c (M_i + N_j) \cdot nds + \iint_R \bar{p}_D L^* G d\sigma , \quad \dots (2)$$

donde:

$$L^* G = \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \right)_{\zeta\zeta} + \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \right)_{\eta\eta} - \left(\frac{k'_\zeta}{k_{ref}} G \right)_\zeta - \left(\frac{k'_\eta}{k_{ref}} G \right)_\eta - sG = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) - sG , \quad \dots (3)$$

$$M = \frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \right)_\zeta + \frac{k'_\zeta}{k_{ref}} \bar{p}_D G , \quad \dots (4)$$

$$N = \frac{k_\eta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \right)_\eta + \frac{k'_\eta}{k_{ref}} \bar{p}_D G , \quad \dots (5)$$

$$\int_c (M_i + N_j) \cdot nds = \int_c \left\{ \left[\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \right)_\zeta + \frac{k'_\zeta}{k_{ref}} \bar{p}_D G \right] i + \left[\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \right)_\eta + \frac{k'_\eta}{k_{ref}} \bar{p}_D G \right] j \right\} \cdot nds ,$$

$$\begin{aligned}
\int_c (M_i + N_j) \cdot nds = & - \int_0^{x_{eD}} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \right)_\eta + \frac{k'_\eta}{k_{ref}} \bar{p}_D G \right)_{\eta=0} d\zeta \\
& + \int_0^{y_{eD}} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \right)_\zeta + \frac{k'_\zeta}{k_{ref}} \bar{p}_D G \right)_{\zeta=x_{eD}} d\eta \\
& + \int_0^{x_{eD}} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \eta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} G \right)_\eta + \frac{k'_\eta}{k_{ref}} \bar{p}_D G \right)_{\eta=y_{eD}} d\zeta \\
& - \int_0^{y_{eD}} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \frac{\partial \bar{p}_D}{\partial \zeta} - \bar{p}_D \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} G \right)_\zeta + \frac{k'_\zeta}{k_{ref}} \bar{p}_D G \right)_{\zeta=-x_{eD}} d\eta , \quad \dots (6)
\end{aligned}$$

$$\therefore \tilde{k}_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \tilde{k}_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=x_{eD}} = \tilde{k}_\eta \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=y_{eD}} = \tilde{k}_\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=-x_{eD}} = 0 , \quad \dots (7)$$

Con $\tilde{k}_\eta = \frac{k_\eta}{k_{ref}}$; $\tilde{k}_\zeta = \frac{k_\zeta}{k_{ref}}$; $y: X_{eD} = Y_{eD} = 1$

De la ecuación (3), la ecuación diferencial adjunta es:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) - sG = \delta(\zeta - x_D; \eta - y_D) , \quad \dots (8)$$

Si $G = X(\zeta) Y(\eta)$, el problema homogéneo de la ecuación (8) es:

$$Y \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} X' \right) + X \frac{d}{d\eta} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} Y' \right) - sXY = 0 , \quad \dots (9)$$

Dividiendo por XY e igualando a una constante de separación:

$$\frac{1}{X} \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} X' \right) = -\frac{1}{Y} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} Y' \right) + s = -\lambda , \quad \dots (10)$$

$$\therefore \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{k_\zeta}{k_{ref}} X' \right) + X(\lambda) = 0 , \quad \dots (11)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{k_\eta}{k_{ref}} Y' \right) + Y(-\lambda - s) = 0 , \quad \dots (12)$$

Si consideramos:

$$\tilde{k}_\zeta = 1 - \zeta^2 , \quad \dots (13)$$

donde $-1 \leq \zeta \leq 1$

$$\tilde{k}'_\zeta = -2\zeta , \quad \dots (14)$$

Efectivamente:

$$a_n = \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots (15)$$

$$(1 - \zeta^2) X'' - 2\zeta X' + a_n X = 0 , \quad \dots (16)$$

La solución está dada por:

$$x_n(\zeta) = C_1 P_n(\zeta) + C_2 Q_n(\zeta) , \quad \dots (17)$$

Donde P_n y Q_n , son los polinomios de Legendre de primera y segunda clase.

Aplicando la condición de frontera (7) en $\zeta = 1, -1$

$$(1-\zeta^2)X_n' \Big|_{\zeta=1} = C_1 \left[(1-\zeta^2) \frac{dP_n}{d\zeta} \right]_{\zeta=1} + C_2 \left[(1-\zeta^2) \frac{dQ_n}{d\zeta} \right]_{\zeta=1} ,$$

$$(1-\zeta^2)X_n' \Big|_{\zeta=1} = C_1 \underbrace{\left[nP_n(1) - (n+1)P_{n+1}(1) + P_n(1) \right]}_0 + C_2 *$$

$$\left\{ \left[nP_n(1) - (n+1)P_{n+1}(1) + P_n(1) \right] \int \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)} \Big|_{\zeta=1} + \frac{1}{P_n(\zeta)} \Big|_{\zeta=1} \right\} = 0 , \quad \dots (18)$$

$$\therefore C_2 = 0 , \quad \dots (19)$$

Ya que $P_n(1) = 1, \forall_n$

$$(1-\zeta^2)X_n' \Big|_{\zeta=-1} = C_1 \left\{ (1-\zeta^2) \left[\frac{dP_n}{d\zeta} \right] \right\}_{\zeta=-1} + C_2 \left\{ (1-\zeta^2) \left[\frac{dQ_n}{d\zeta} \right] \right\}_{\zeta=-1}$$

$$(1-\zeta^2)X_n' \Big|_{\zeta=-1} = \left\{ C_1 (1-\zeta^2) \left[\frac{dP_n}{d\zeta} \right] \right.$$

$$\left. + C_2 \left[(1-\zeta^2) \frac{dP_n}{d\zeta} \int \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)} + \frac{1}{P_n(\zeta)} \right] \right\}_{\zeta=-1} = 0 , \quad \dots (20)$$

Usando la ecuación (A-11) del apéndice A, en ecuación (20):

$$\begin{aligned}
 (1-\zeta^2)X \Big|_{\zeta=-1} &= C_1 \left[-n\zeta P_n(\zeta) - (n+1)P_{n+1}(\zeta) + (2n+1)\zeta P_n(\zeta) \right]_{\zeta=-1} \\
 &\quad + C_2 \left\{ \left[-n\zeta P_n(\zeta) - (n+1)P_{n+1}(\zeta) + (2n+1)\zeta P_n(\zeta) \right]_{\zeta=-1} \right. \\
 &\quad \left. \int \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)} \Big|_{\zeta=-1} + \frac{1}{P_n(\zeta)} \Big|_{\zeta=-1} \right\}, \quad \dots (21)
 \end{aligned}$$

Como:

$$\therefore P_n(-1) = \begin{cases} 1 & ; n=0,2,4, \dots \\ -1 & ; n=1,3,5, \dots \end{cases}, \quad \dots (22)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \left[-n\zeta P_n(\zeta) - (n+1)P_{n+1}(\zeta) + (2n+1)\zeta P_n(\zeta) \right]_{\zeta=-1} &= \\
 \begin{cases} 0 & ; n=0,2,4, \dots \\ 0 & ; n=1,3,5, \dots \end{cases} &= 0 \quad \forall_n, \quad \dots (23)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (22) y (23) en (21):

$$(1-\zeta^2)X \Big|_{\zeta=-1} = \left\{ C_1(0) + C_2 \left[(0) + \frac{1}{P_n(-1)} \right] \right\} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \quad \forall_n, \quad \dots (24)$$

Lo cual concuerda con la condición de frontera en $\zeta=1$:

$$\therefore X(\zeta) = C_1 P_n(\zeta), \quad \dots (25)$$

Considerando que k_η es constante, el problema de Y está dado por:

$$\frac{k_\eta}{k_{ref}} Y'' - Y'(\lambda + s) = 0 \quad , \quad \dots (26)$$

Cuya solución es:

$$\therefore Y_n = a_n \cosh \mu_n \eta + b_n \sinh \mu_n \eta \quad , \quad \dots (27)$$

donde:

$$\mu_n^2 = \frac{(\lambda_n + s)}{\tilde{k}_\eta} \quad ; \quad \mu_n = \sqrt{\frac{(\lambda_n + s)}{\tilde{k}_\eta}} \quad , \quad \dots (28)$$

Por lo tanto, considerando las ecuaciones (25) y (27):

$$G(\zeta, \eta; X_D, Y_D) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1n} \cosh \mu_n \eta + b_{1n} \sinh \mu_n \eta] P_n(\zeta); & 0 \leq \eta < Y_D \\ \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n} \cosh \mu_n \eta + b_{2n} \sinh \mu_n \eta] P_n(\zeta); & Y_D < \eta \leq 1 \end{cases} \quad , \quad \dots (29)$$

De la condición de frontera en $\eta = 0$, de la ecuación (7):

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{1n} \mu_n \cosh \mu_n \eta + b_{1n} \mu_n \sinh \mu_n \eta] P_n(\zeta) \quad ,$$

$$\therefore b_{1n} = 0 \quad , \quad \dots (30)$$

De la condición de frontera en $\eta = 1$, de la ecuación (7):

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n \eta + b_{2n} \mu_n \cosh \mu_n \eta] P_n(\zeta)_{\eta=1}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n \eta + b_{2n} \mu_n \cosh \mu_n \eta] P_n(\zeta)_{\eta=1} = 0 \quad , \quad \dots (31)$$

Aplicando ortogonalidad para los polinomios de Legendre:

$$a_{2n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n \eta + b_{2n} \mu_n \cosh \mu_n \eta = 0 \quad , \quad \dots (32)$$

Considerando que con $\eta = 1$, G es continua en $\eta = Y_D$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{1n} \cosh \mu_n Y_D] P_n(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n} \cosh \mu_n Y_D + b_{2n} \operatorname{senh} \mu_n Y_D] P_n(\zeta) \quad , \quad \dots (33)$$

Aplicando ortogonalidad en los polinomios de Legendre:

$$a_{1n} \cosh \mu_n Y_D = a_{2n} \cosh \mu_n Y_D + b_{2n} \operatorname{senh} \mu_n Y_D \quad , \quad \dots (34)$$

Integrando la ecuación diferencial adjunta (8), de Y_D^- a Y_D^+ , usando continuidad de G:

$$\tilde{k}_\eta \left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{Y_D^-}^{Y_D^+} = \delta(\zeta - X_D) \quad , \quad \dots (35)$$

Sustituyendo (29):

$$\tilde{k}_\eta \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n Y_D + b_{2n} \mu_n \cosh \mu_n Y_D] P_n(\zeta) - P_n(\zeta) [a_{1n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n Y_D] = \delta(\zeta - X_D) , \quad \dots$$

(36)

Aplicando ortogonalidad a los polinomios de Legendre:

$$\tilde{k}_\eta [a_{2n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n Y_D + b_{2n} \mu_n \cosh \mu_n Y_D - a_{1n} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n Y_D] \left(\frac{2}{2n+1} \right) = P_n(X_D) , \quad \dots \quad (37)$$

De la ecuación (32), considerando que $\mu_n \neq 0$:

$$a_{2n} = \frac{-b_{2n} \cosh \mu_n}{\operatorname{senh} \mu_n} , \quad \dots \quad (38)$$

De las ecuaciones (34) y (38):

$$a_{1n} = b_{2n} \left[\frac{-\cosh \mu_n \cosh \mu_n Y_D + \operatorname{senh} \mu_n \operatorname{senh} \mu_n Y_D}{\operatorname{senh} \mu_n \cosh \mu_n Y_D} \right] ,$$

$$\therefore a_{1n} = \frac{-b_{2n} \cosh \mu_n (1 - Y_D)}{\operatorname{senh} \mu_n \cosh \mu_n Y_D} , \quad \dots \quad (39)$$

Usando las ecuaciones (38) y (39) en (37):

$$b_{2n} = \frac{\left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n(X_D)}{\mu_n \tilde{k}_\eta \left\{ \left(\frac{-\cosh \mu_n}{\operatorname{senh} \mu_n} \right) \operatorname{senh} \mu_n Y_D + \cosh \mu_n Y_D + \frac{\cosh \mu_n (1 - Y_D) \operatorname{senh} \mu_n Y_D}{\operatorname{senh} \mu_n \cosh \mu_n Y_D} \right\}} ,$$

$$b_{2n} = \frac{\left(\frac{2n+1}{2}\right) P_n(X_D) \sinh \mu_n \cosh \mu_n Y_D}{\mu_n \left\{ \sinh(1-Y_D) \mu_n \cosh \mu_n Y_D + \frac{\sinh \mu_n + \sinh(2Y_D-1) \mu_n}{2} \right\} \tilde{k}_\eta},$$

$$\therefore b_{2n} = \left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{P_n(X_D) \cosh(\mu_n Y_D)}{\mu_n \tilde{k}_\eta}, \quad \dots (40)$$

De la ecuación (38):

$$a_{2n} = -\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{P_n(X_D) \cosh(\mu_n Y_D) \cosh(\mu_n)}{\mu_n \sinh(\mu_n) \tilde{k}_\eta}, \quad \dots (41)$$

De la ecuación (39):

$$a_{1n} = -\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{P_n(X_D) \cosh(\mu_n Y_D) \cosh(\mu_n) (1-Y_D)}{\mu_n \sinh(\mu_n) \cosh(\mu_n Y_D) \tilde{k}_\eta},$$

$$\therefore a_{1n} = -\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{P_n(X_D) \cosh \mu_n (1-Y_D)}{\mu_n \sinh \mu_n \tilde{k}_\eta}, \quad \dots (42)$$

Sustituyendo las ecuaciones (30), (40), (41), (42) en (29):

$$G(\zeta, \eta; X_D, Y_D) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{P_n(X_D) \cosh \mu_n (1-Y_D)}{\mu_n \operatorname{senh} \mu_n \tilde{k}_\eta} \cosh \mu_n \eta \right] P_n(\zeta); \\ 0 \leq \eta < Y_D \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{2n+1}{2}\right) \frac{\cosh \mu_n}{\operatorname{senh} \mu_n} \cosh \mu_n \eta + \left(\frac{2n+1}{2}\right) \operatorname{senh} \mu_n \eta \right] \frac{\cosh \mu_n Y_D}{\mu_n \tilde{k}_\eta} P_n(X_D) P_n(\zeta); \\ Y_D < \eta \leq 1 \end{cases}, \quad \dots (43)$$

con:

$$\mu_n = \sqrt{\frac{\lambda_n + s}{\tilde{k}_\eta}} = \sqrt{\frac{n(n+1) + s}{\tilde{k}_\eta}}, \quad \dots (44)$$

Donde los polinomios de Legendre, $P_n(X)$, están dadas por las ecuaciones (A-6) y (A-7).

Teniendo G, se puede encontrar $\bar{P}_n(X_D, Y_D)$ de la ecuación (2):

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(X_D, Y_D) &= -\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\zeta, \eta; X_D, Y_D) 2\pi \sum_{j=1}^{nw} \bar{q}_{wDj} \delta(X_D - X_{Dj}; Y_D - Y_{Dj}) d_\zeta d_\eta, \\ &= -2\pi \sum_{j=1}^{nw} G(X_{Dj}, Y_{Dj}; X_D, Y_D) \bar{q}_{wDj}, \end{aligned} \quad \dots (45)$$

Para un yacimiento produciendo de múltiples pozos, con daño y a presión constante:

$$P_D(X_{Di}, Y_{Di}, t_D) = P_{wDi} - S_i q_{wDi}(t_D); \quad i = 1, 2, 3, \dots, nw, \quad \dots (46)$$

En el espacio de Laplace:

$$\bar{P}_n(X_D, Y_D) = \frac{P_{wDi}}{s} - S_i \bar{q}_{wDi} , \quad \dots (47)$$

Tomando en cuenta el planteamiento mostrado por Camacho et al. (1994), para pozos que producen a diferentes tiempos (45), se convierte en:

$$\bar{P}_n(X_D, Y_D) = -2\pi \sum_{j=1}^{nw} G(X_{Dj}, Y_{Dj}; X_D, Y_D) \bar{q}_{wDj} e^{-st_{Dj}} , \quad \dots (48)$$

Y en la ecuación (47) en:

$$\bar{P}_n(X_{Di}, Y_{Di}) - \int_0^{t_{Di}} e^{-st_D} P_D(X_{Di}, Y_{Di}, t_D) dt_D = \left[\frac{P_{wDi}}{s} - S_i \bar{q}_{wDi} \right] e^{-st_{Di}} , \quad \dots (49)$$

Usando el teorema del valor medio de integrales en (49) y sustituyendo en (48), se obtiene un sistema de ecuaciones para \bar{q}_{wDi} :

$$\sum_{j=1}^{nw} F_{ij} \bar{q}_{wDj} = \frac{-P_D(X_{Di}, Y_{Di}, \bar{t}_{Di})}{2\pi s} [1 - e^{-st_{Di}}] - \frac{P_{wDi}}{2\pi s} e^{-st_{Di}} ; i = 1, 2, 3, \dots, nw , \quad \dots (50)$$

Donde t_{Di}^- es el tiempo antes de que el pozo i empiece a producir y:

$$F_{ij} = e^{-st_{Dj}} [G_{ij} + \alpha_{ij}] , \quad \dots (51)$$

Con:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -\frac{S_i}{2\pi} ; & \text{si } i=j \\ 0 & ; \text{si } i \neq j \end{cases} , \quad \dots (52)$$

Y:

$$G_{ij} = G(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}; s) , \quad \dots (53)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (50), se obtiene:

$$\bar{q}_{wDj} = -\frac{1}{2\pi s} \sum_{j=1}^{nw} (-1)^{i+j} \frac{M_{ij}}{|F|} \left\{ P_D(X_{Di}, Y_{Di}, \bar{t}_{Di}) (1 - e^{-s t_{Di}}) + p_{wDi} e^{-s t_{Di}} \right\}, \quad j = 1, \dots, nw \quad \dots (54)$$

Donde M_{ij} es el menor de F_{ij} , de la matriz F , de orden nw , teniendo elementos

F_{ij} y $|F|$ es el determinante de F .

La aproximación de la función de Green a tiempos grandes de la ecuación (43):

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}; s) = -\frac{1}{2s} - \tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) \quad \dots (55)$$

Donde:

$$\tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) = \tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) + \frac{1}{2\tilde{k}_\eta} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} (Y_{Di}^2 + Y_{Dj}^2) - \tilde{Y} \right], \quad \dots (56)$$

Para los rangos de:

$$\tilde{Y} = Y_{Di} \quad \text{si} : 0 \leq Y_{Dj} < Y_{Di} \quad , \quad \dots (57)$$

$$\tilde{Y} = Y_{Dj} \quad \text{si} : Y_{Di} \leq Y_{Dj} < 1 \quad , \quad \dots (58)$$

$$\tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) =$$

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2n+1}{2} \right) \frac{P_n(X_{Di}) \cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (1-Y_{Di}) \right] \cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] P_n(X_{Dj})}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] \tilde{k}_\eta} \right]; \\ 0 \leq Y_{Dj} < Y_{Di} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \right) \left[\frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] \cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right]}{\operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] \tilde{k}_\eta} - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \right] \\ \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right]}{\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right]} P_n(X_{Di}) P_n(X_{Dj}); \\ Y_{Di} < Y_{Dj} \leq 1 \end{array} \right], \quad \dots (59)$$

Usando:

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2, \quad \dots (60)$$

Para: $0 \leq Y_{Dj} < Y_{Di}$

$$\tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n(X_{Di})^*$$

$$\left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] \cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right]^*$$

$$\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \frac{P_n(X_{Dj})}{\tilde{k}_\eta \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right]} ,$$

$$\tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n(X_{Di})^*$$

$$\left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \coth \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right]^*$$

$$\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \frac{P_n(X_{Dj})}{\tilde{k}_\eta \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2} \right) P_n(X_{Di})^*$$

$$\left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right]^*$$

$$\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \frac{P_n(X_{Dj})}{\tilde{k}_\eta \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} , \quad \dots (61)$$

Donde N es tal que:

$$\coth \left(\sqrt{\frac{N(N+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right) \approx 1 , \quad \dots (62)$$

La cual se establece para valores no muy grandes de N .

Considerando que:

$$\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] = e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di}}, \quad \dots (63)$$

$$\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di}} = \frac{1}{2} \left[e^{\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (Y_{Dj} - Y_{Di})} + e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (Y_{Dj} + Y_{Di})} \right], \quad \dots (64)$$

De Magnus et al. (1954), se tiene:

$$P_n(\cos \theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{sen} \theta}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] + \varphi \left(n^{\left(\frac{3}{2} \right)} \right), \quad \dots (65)$$

Cuando n es grande, $\epsilon \leq \theta \leq \pi - \epsilon$, $\epsilon > 0$, $n \geq \frac{1}{\epsilon}$.

Así usando (64):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{\tilde{k}_\eta} P_n(X_{Di}) \left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right] \cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \frac{P_n(X_{Dj})}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} \\ & \approx \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (2n+1) \frac{P_n(X_{Di})}{\tilde{k}_\eta} \left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right] \cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \frac{P_n(X_{Dj})}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{n=M+1}^{\infty} (2n+1) \left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right] * \\
& \frac{\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{sen} \theta}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \right\}}{\tilde{k}_\eta \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} * \\
& \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{sen} \varphi}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] \right\} = \\
& \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (2n+1) \frac{P_n(X_{Di}) P_n(X_{Dj})}{\tilde{k}_\eta \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} \frac{1}{2} \left[e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (Y_{Di} - Y_{Dj})} + e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (Y_{Dj} + Y_{Di})} \right] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{\mathcal{Z} \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} \left[e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (Y_{Di} - Y_{Dj})} + e^{-\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} (Y_{Dj} + Y_{Di})} \right] \frac{\mathcal{Z}}{\pi n \tilde{k}_\eta} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen} \theta}} * \\
& \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen} \varphi}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right], \quad \dots (66)
\end{aligned}$$

Con:

$$\theta = \cos^{-1} X_{Di} \quad , \quad \dots (67)$$

$$\varphi = \cos^{-1} X_{Dj} \quad , \quad \dots (68)$$

Usando:

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] = \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \cos \frac{\pi}{4} + \text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \text{sen} \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] = \cos \frac{\pi}{4} \left[\cos n\theta \left(\cos \frac{\theta}{2} + \text{sen} \frac{\theta}{2} \right) + \text{sen} n\theta \left(\cos \frac{\theta}{2} - \text{sen} \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad \dots (69)$$

$$\therefore \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] = \cos^2 \frac{\pi}{4} \left\{ \cos(n\theta) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right.$$

$$* \cos(n\varphi) \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

$$+ \cos(n\theta) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \text{sen}(n\varphi) \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

$$+ \text{sen}(n\theta) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cos(n\varphi) \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right)$$

$$\left. + \text{sen}(n\theta) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \text{sen}(n\varphi) \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right) \right\}, \quad \dots (70)$$

La segunda sumatoria de la ecuación (66), se puede expresar como:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\text{sen}(\theta)\text{sen}(\varphi)}} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \left[e^{\frac{-n(Y_{D_i} - Y_{D_j})}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} + e^{\frac{-n(Y_{D_j} + Y_{D_i})}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} \right]$$

$$* \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right], \quad \dots (71)$$

Donde M es tal que:

$$P_M(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi M \sin(\alpha)}} \cos \left[\left(M + \frac{1}{2} \right) \alpha - \frac{\pi}{4} \right], \quad \dots (72)$$

Para una $n \leq 5$ se tienen aproximaciones malas de los polinomios de Legendre, de la \coth , donde $\frac{2n+1}{2} \neq n$, y $\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_n}} \neq \frac{n}{\sqrt{\tilde{k}_n}}$.

La comparación de los polinomios de Legendre de grados 5, 15, 25, 35 y 45, con la aproximación del polinomio dada por la ecuación (65) o (72), se muestran a continuación en las figuras 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8.

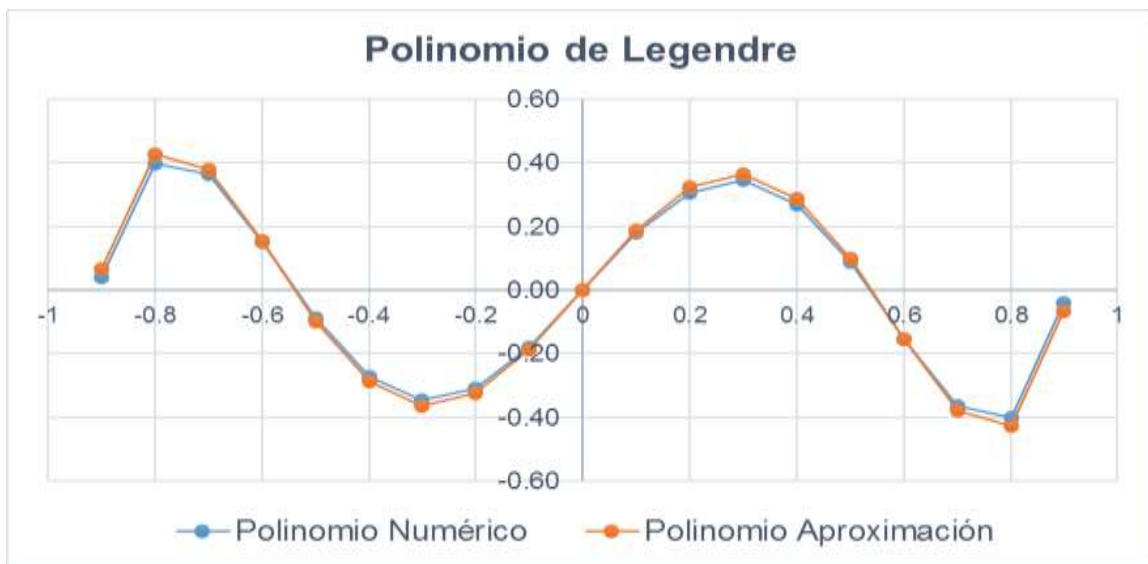


Figura 3.4 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=5$

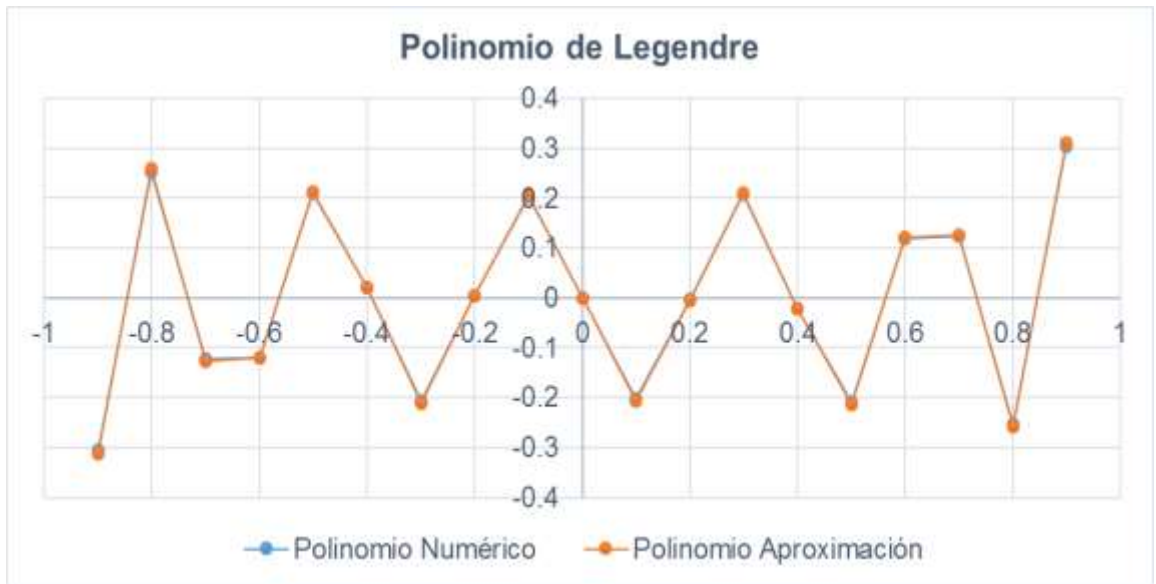


Figura 3.5 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=15$

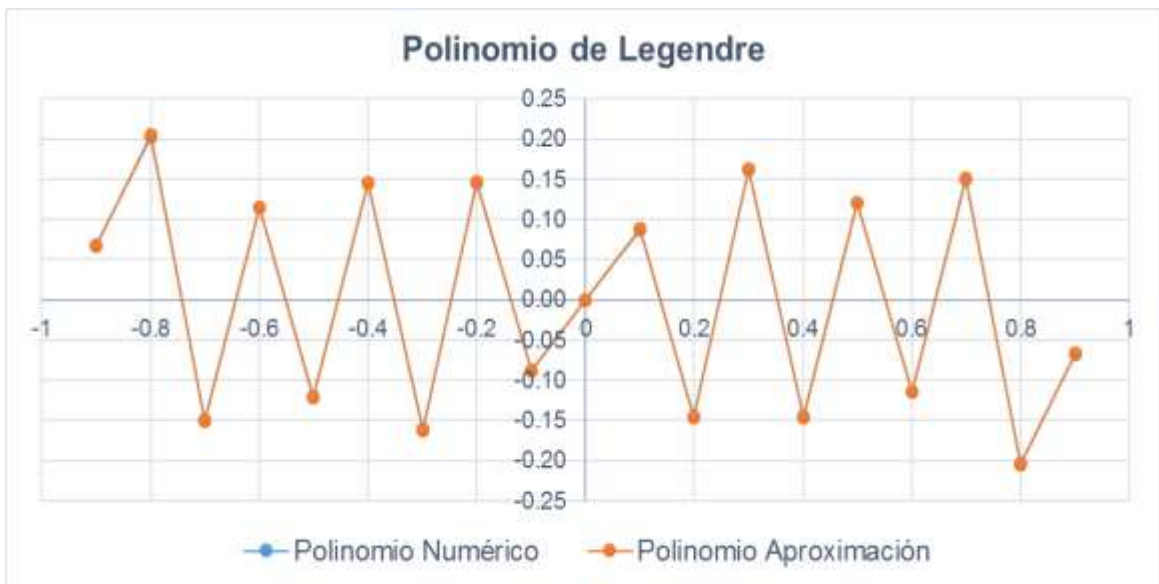


Figura 3.6 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=25$

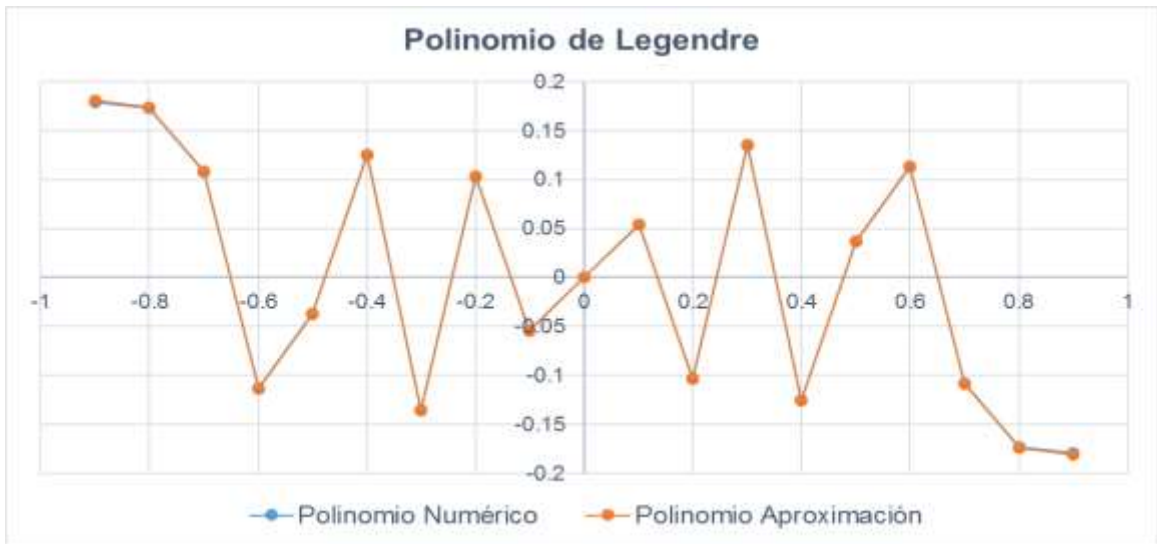


Figura 3.7 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=35$

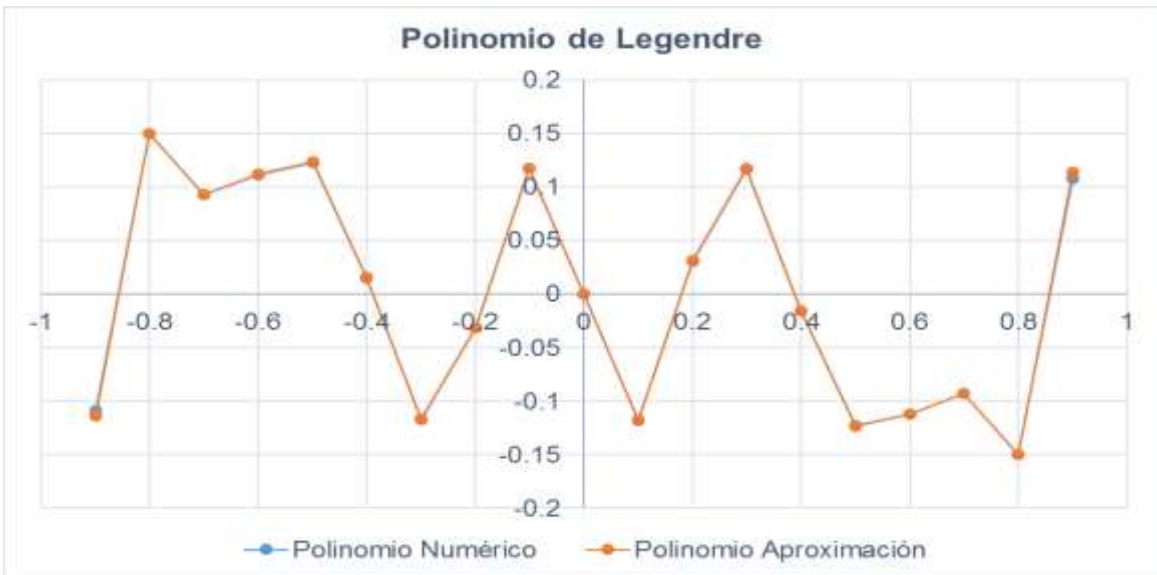


Figura 3.8 Gráfica del polinomio de Legendre grado $N=45$

Como se muestran en las figuras 3.4 a la 3.8, existe una muy buena aproximación de los polinomios de Legendre para un rango de $n \geq 6$.

$$\sqrt{\frac{M(M+1)}{\tilde{k}_n}} \approx M \sqrt{\frac{1}{\tilde{k}_n}} , \quad \dots (73)$$

$$2M+1 \approx 2M , \quad \dots (74)$$

Usando:

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = u_1 u_2 , \quad \dots (75)$$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = u_1 v_1 , \quad \dots (76)$$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = w_1 u_2 , \quad \dots (77)$$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = w_1 v_1 , \quad \dots (78)$$

De Gradshteyn et al. (2007) se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi)}{n} e^{-2nz} = \frac{1}{4} \ln \left[\frac{\text{sen}^2\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) + \text{senh}^2(z)}{\text{sen}^2\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) + \text{senh}^2(z)} \right] , \quad \dots (79)$$

De funciones trigonométricas se tiene:

$$\text{sen}(n\theta) \cos(n\varphi) = \frac{\left[\text{sen}[n(\theta+\varphi)] + \text{sen}[n(\theta-\varphi)] \right]}{2} , \quad \dots (80)$$

$$\cos(n\theta) \cos(n\varphi) = \cos[n(\theta+\varphi)] + \text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi) , \quad \dots (81)$$

De las tablas de Gradshteyn et al. (2007):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{e^w} \right)^n \text{sen}(n\theta) = \arctan \left[\frac{\frac{1}{e^w} \text{sen}\theta}{1 - \frac{1}{e^w} \cos\theta} \right], \quad \dots (82)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{e^w} \right)^n \cos(n\theta) = \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{e^w} \right) \cos\theta + \frac{1}{e^{2w}}}} \right], \quad \dots (83)$$

Usando (70), (75) - (83), en (71):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\text{sen}\theta \text{sen}\varphi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{-\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}} n} + e^{-\frac{v}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}} n}}{n} \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\text{sen}\theta \text{sen}\varphi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 \frac{\pi}{4} \{ w_1 v_1 \cos(n\theta) \cos(n\varphi) + w_1 u_2 \cos(n\theta) \text{sen}(n\varphi) \\ & \quad + u_1 v_1 \text{sen}(n\theta) \cos(n\varphi) + u_1 u_2 \text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi) \} \frac{\left(e^{-\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}} n} + e^{-\frac{v}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}} n} \right)}{n}, \\ &= \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\text{sen}\theta \text{sen}\varphi}} \sum_{n=1}^{\infty} \cos^2 \frac{\pi}{4} \{ w_1 v_1 [\cos[n(\theta + \varphi)] + \text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi)] \\ & \quad + \frac{w_1 u_2}{2} [\text{sen}[n(\theta + \varphi)] + \text{sen}[n(\varphi - \theta)]] \} \end{aligned}$$

$$+ \frac{u_1 v_1}{2} \left[\text{sen}[n(\theta + \varphi)] + \text{sen}[n(\theta - \varphi)] \right] + u_1 u_2 \text{sen}(n\theta) \text{sen}(n\varphi) \left\{ \frac{\left(e^{-\frac{n}{\sqrt{k_\eta}} u} + e^{-\frac{n}{\sqrt{k_\eta}} v} \right)}{n} \right\},$$

$$= \frac{\sqrt{k_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\text{sen}\theta \text{sen}\varphi}} *$$

$$\left\{ w_1 v_1 \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}} \right) \cos(\theta + \varphi) + \frac{1}{e^{\frac{2u}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right)} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}{2} \right)} \right) \right] \right\}$$

$$+ \frac{w_1 u_2}{2} \left[\arctan \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{\theta + \varphi}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}} \right)}{1 - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) + \arctan \left(\frac{\text{sen} \left(\frac{\varphi - \theta}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}} \right)}{1 - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] + \frac{w_1 v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\text{sen}(\theta + \varphi)}{1 - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right]$$

$$+ \arctan \left(\frac{\text{sen}(\theta - \varphi)}{1 - \frac{\cos(\theta - \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) + \frac{u_1 u_2}{4} \ln \left[\frac{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{\frac{u}{\sqrt{k_\eta}}}{2} \right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& +w_1v_1 \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{1}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}\right)\cos(\theta+\varphi)+\frac{1}{e^{\frac{2v}{\sqrt{k_\eta}}}}}\right)}} \right) + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+\operatorname{senh}^2\left(\frac{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)+\operatorname{senh}^2\left(\frac{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}{2}\right)} \right) \right] \\
& + \frac{w_1v_2}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1-\frac{\cos(\theta+\varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) + \arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\theta)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1-\frac{\cos(\varphi-\theta)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \\
& + \frac{u_1v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1-\frac{\cos(\theta+\varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) + \arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta-\varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1-\frac{\cos(\theta-\varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \\
& + \frac{u_1u_2}{4} \ln \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)+\operatorname{senh}^2\left(\frac{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)+\operatorname{senh}^2\left(\frac{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}{2}\right)} \right] , \quad \dots (84)
\end{aligned}$$

Usando (84) en (66):

donde:

$$u = y_{Di} - y_{Dj} , \quad \dots (85)$$

$$v = y_{Di} + y_{Dj} , \quad \dots (86)$$

$$\tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) = \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\frac{2n+1}{2} \right) \frac{P_n(X_{Di})}{\tilde{k}_\eta} \right\} *$$

$$\left[\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \coth \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right] - \operatorname{senh} \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right] \right] *$$

$$\cosh \left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right] \frac{P_n(X_{Dj})}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} - \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi}} \left(\frac{e^{-n \frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} + e^{-n \frac{v}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}{n} \right) *$$

$$\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] \left\{ \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)}} \right\} w_1 v_1 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} \right)} \cos(\theta + \varphi) + \frac{1}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} \right)}}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(w_1 v_1 + u_1 u_2)}{4} \ln \left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) + \operatorname{sen}h^2\left(\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) + \operatorname{sen}h^2\left(\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}\right)} \right) \\
& + \frac{w_1 u_2 + u_1 v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta + \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}} \right) + \frac{w_1 u_2}{2} \arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}} \right) \right] \\
& + \frac{u_1 v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\theta - \varphi)}{e^{\frac{u}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}} \right) + w_1 v_1 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{e^{\frac{v}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}} \right) \cos(\theta + \varphi) + \frac{1}{e^{\frac{v}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}}} \right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(w_1 v_1 + u_1 u_2)}{4} \ln \left(\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta + \varphi}{2}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}\right)} \right) + \frac{(w_1 u_2 + u_1 v_1)}{2} \left[\operatorname{arctan} \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta + \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(\theta + \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \\
& + \frac{w_1 u_2}{2} \left[\operatorname{arctan} \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(\varphi - \theta)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] + \frac{u_1 v_1}{2} \left[\operatorname{arctan} \left(\frac{\frac{\operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \Bigg\} , \quad \dots (87)
\end{aligned}$$

Para: $0 \leq Y_{Dj} < Y_{Di}$

Por otro lado, para $Y_{Di} < Y_{Dj} \leq 1$, de (59) se tiene:

$$\tilde{\beta}(X_{Di}, Y_{Di}; X_{Dj}, Y_{Dj}) = \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\frac{2n+1}{2} \right) \left(\frac{P_n(X_{Di}) P_n(X_{Dj})}{\tilde{k}_\eta \sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}}} \right) \right.$$

$$\left[\cosh \left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right) \coth \left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} \right) - \operatorname{senh} \left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Dj} \right) \right] \cosh \left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{\tilde{k}_\eta}} Y_{Di} \right)$$

$$- \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)}} \frac{\left(e^{-\frac{w}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}} n} + e^{-\frac{v}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}} n} \right)}{n} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \varphi - \frac{\pi}{4} \right] \left. \right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}{\tilde{k}_\eta} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)}} \left\{ w_1 v_1 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{e^{\frac{w}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} n} \right) \cos(\theta + \varphi) + \frac{1}{e^{\frac{w}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}} n}}}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(w_1 v_1 + u_1 u_2)}{4} \ln \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\frac{w}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}{2} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) + \operatorname{senh}^2 \left(\frac{\frac{w}{\sqrt{\tilde{k}_\eta}}}{2} \right)} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{w_1 u_2 + u_1 v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\text{sen}(\theta + \varphi)}{e^{\frac{w}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{e^{\frac{w}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] + \frac{w_1 u_2}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\text{sen}(\varphi - \theta)}{e^{\frac{w}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{e^{\frac{w}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \\
& + \frac{u_1 v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\text{sen}(\theta - \varphi)}{e^{\frac{w}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\theta - \varphi)}{e^{\frac{w}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] + w_1 v_1 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2 \left(\frac{1}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}} \right) \cos(\theta + \varphi) + \frac{1}{e^{2 \frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right)} \\
& + \frac{(w_1 v_1 + u_1 u_2)}{4} \ln \left(\frac{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}{2} \right)}{\text{sen}^2 \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right) + \text{senh}^2 \left(\frac{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}{2} \right)} \right) + \frac{(w_1 u_2 + u_1 v_1)}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\text{sen}(\theta + \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\theta + \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \\
& + \frac{w_1 u_2}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\text{sen}(\varphi - \theta)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\varphi - \theta)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] + \frac{u_1 v_1}{2} \left[\arctan \left(\frac{\frac{\text{sen}(\theta - \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}}{1 - \frac{\cos(\theta - \varphi)}{e^{\frac{v}{\sqrt{k_\eta}}}}} \right) \right] \Bigg\} , \quad \dots (88)
\end{aligned}$$

$$w = y_{Dj} - y_{Di} \quad , \quad \dots (89)$$

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1 Modelo Analítico

Se generó un modelo analítico para un yacimiento rectangular heterogéneo y anisotrópico de una porosidad, en dos dimensiones (x,y) , de tamaño $[2 \times 1]$, que nos permite simular un anticlinal, con el origen del yacimiento en el eje del anticlinal ignorando la componente vertical z y se consideraron los siguientes datos de entrada, para estudiar el comportamiento de pozos múltiples. (Tabla 4.1)

Tabla 4.1 Datos de entrada del Modelo Analítico

Datos de Entrada	
Dimensiones del yacimiento en X_e , ft	14000
Dimensiones del yacimiento en Y_e , ft	7000
Radio del pozo, ft	0.25
Presión Inicial, psi	3000
Porosidad, fracción	0.15
Permeabilidad máxima, en la dirección X, md	100
Permeabilidad en la dirección Y, md	34
Espesor del yacimiento, ft	100
Compresibilidad del petróleo, psi^{-1}	0.00002
Factor del volumen de formación	1.558
Viscosidad del petróleo, cp	0.5364

Se realizaron cinco casos, en los cuales se hacen las comparaciones del medio homogéneo-anisotrópico, el medio heterogéneo-anisotrópico y el medio homogéneo-isotrópico, en estos casos de estudio, los pozos inician a producir a diferentes tiempos, variando su presión de fondo, el daño o estimulación que maneja cada pozo, también existe una interferencia entre pozos al tiempo en que nuevos pozos entran a producir, esto se ve reflejado en la producción de petróleo, y va depender de la posición donde se ubiquen los pozos.

Fue validada mediante la comparación de los resultados del modelo analítico, con el simulador numérico eclipse, dando buenos resultados y un buen ajuste para estos casos, lo que permite validar la solución analítica.

4.2 Caso 1

En el Caso 1, intervienen tres pozos productores, los datos de entrada de los pozos se muestran en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Datos de entrada del Caso 1, para 3 pozos productores

	Posición (ft)		Daño	Pwf (psi)	Tiempo entrada (días)	Tiempo operación (días)
	X	Y				
Pozo 1	-3733	5133	10	1000	0	500
Pozo 2	3266	5133	0	1000	0	500
Pozo 3	466	2333	-3	1000	100	500

4.2.1 Medio Homogéneo-Anisotrópico

En el medio homogéneo-anisotrópico, la permeabilidad es de $k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$, ambas constantes en el yacimiento rectangular y los tres pozos producen a diferentes tiempos.

Los dos primeros pozos entran al tiempo 0 y el tercer pozo entra a producir al tiempo 100 días, se utilizó el modelo de simulación numérica para este medio. (Figura 4.1)

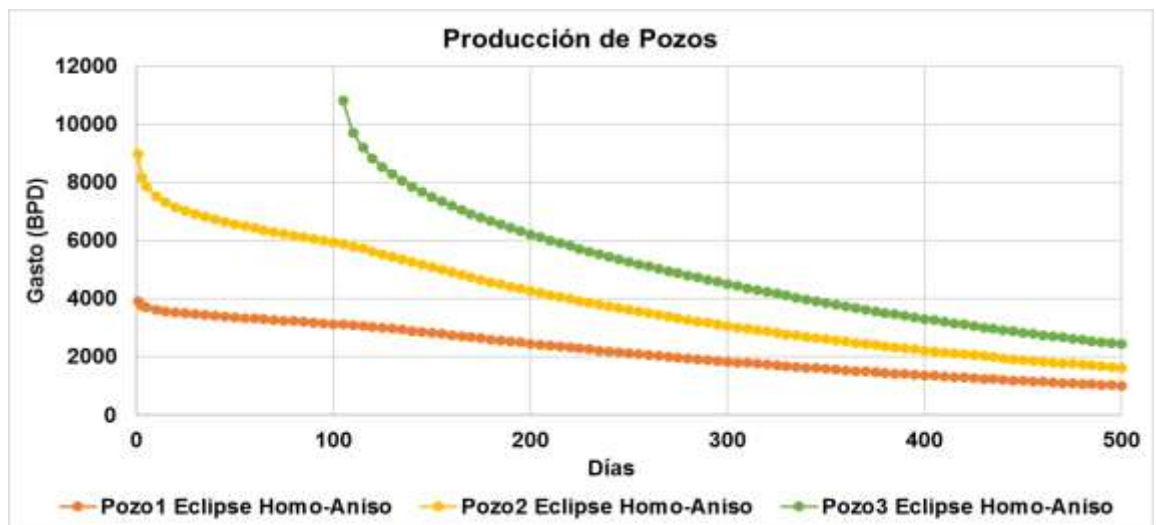


Figura 4.1 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$), generada con el simulador numérico con 3 pozos productores de petróleo

Se observa que cuando el pozo 3, comienza a producir a los 100 días hay una caída de producción instantánea en el pozo 2, lo que genera una interferencia entre pozos en el yacimiento.

En la figura 4.2, se tiene un mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección X, mientras que para la dirección Y la permeabilidad es de 50 md.

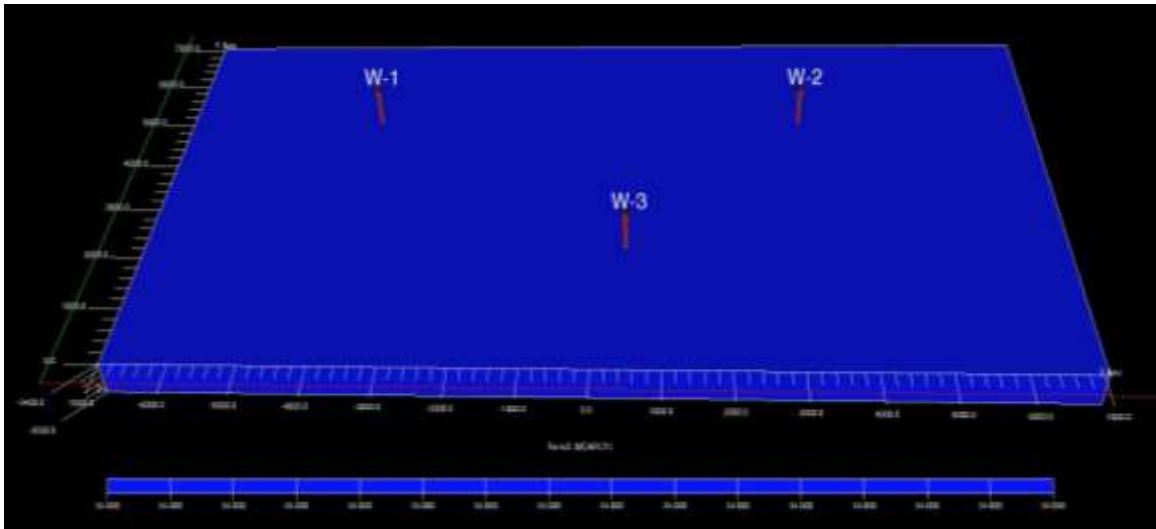


Figura 4.2 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 1

4.2.2 Medio Heterogéneo-Anisotrópico, k_y igual al promedio armónico de permeabilidades en X

En este medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md), los dos primeros pozos entran al tiempo 0 y el tercer pozo entra al tiempo 100 días, se utilizó una $N=20$, en la sumatoria de la solución analítica, de la cual obtenemos un buen ajuste para este valor, como se muestra en la figura 4.3.

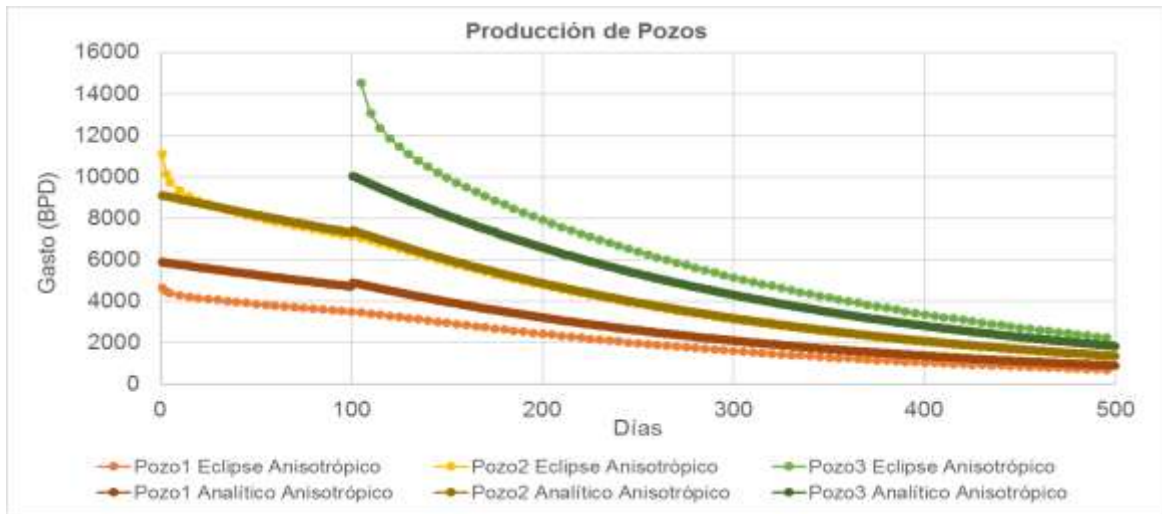


Figura 4.3 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico del Caso 1, produciendo 3 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico

La variación de la permeabilidad en la dirección X es de $[0:100]$ md, y la permeabilidad en la dirección Y es un promedio armónico de 34 md, que se obtuvo de las permeabilidades en la dirección X, estas condiciones permiten tener un medio heterogéneo-anisotrópico. (Figuras 4.4 y 4.5)

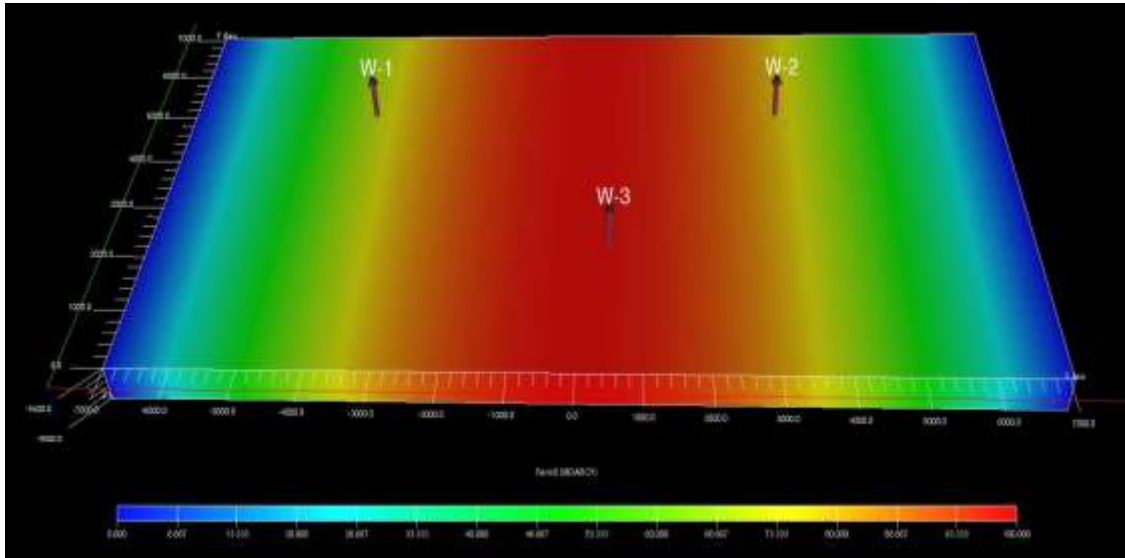


Figura 4.4 Mapa de distribución de permeabilidades [0:100] md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 1

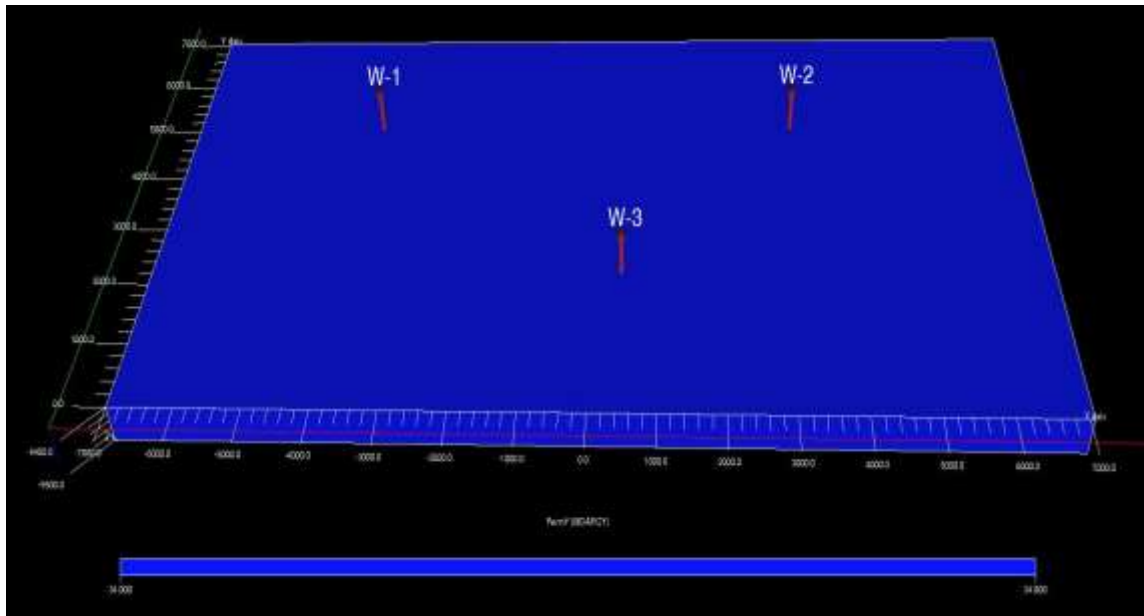


Figura 4.5 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección Y, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 1

4.2.3 Medio Homogéneo-Isotrópico

Se realizó la validación del modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico obtenida por Camacho et al. (1994), con el simulador numérico, donde la permeabilidad $k_x = k_y = 34 \text{ md}$. (Figuras 4.6 y 4.7)

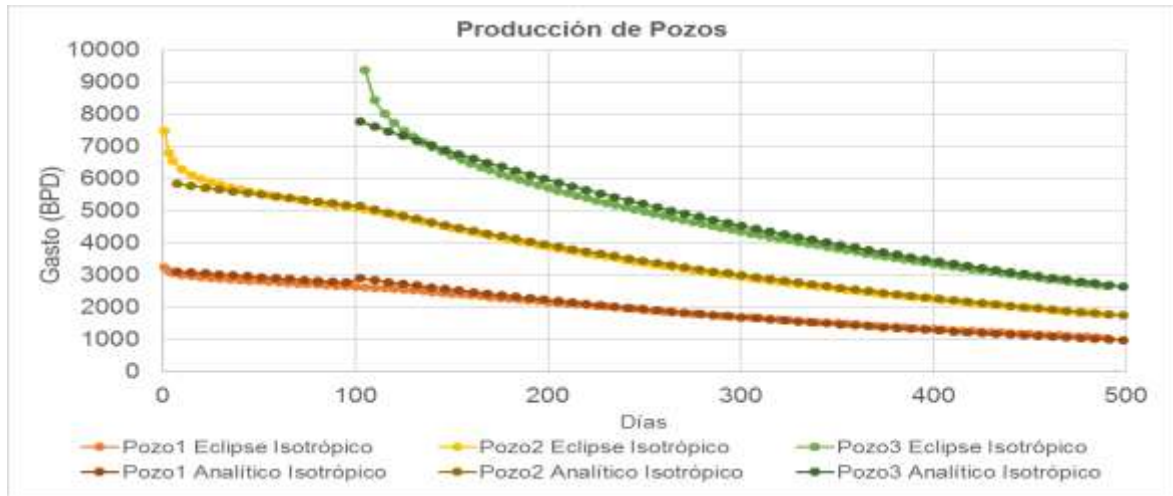


Figura 4.6 Gráfica del Caso 1, Medio Homogéneo-Isotrópico, produciendo 3 pozos a diferentes tiempos, comparando el Modelo Analítico, con el Simulador Numérico

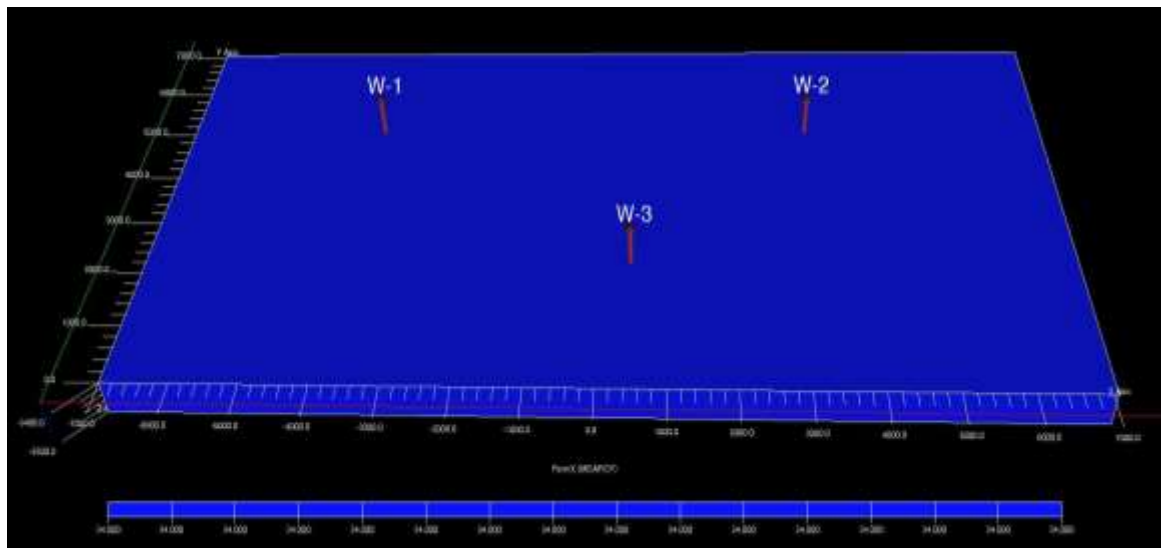


Figura 4.7 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 1

4.2.4 Comparación de los Modelos Analíticos

La comparación de los dos modelos analíticos, del medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md), con el medio homogéneo-isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), se observa que en el medio heterogéneo-anisotrópico, los pozos tienen mayor producción de petróleo, debido a la posición que tienen los pozos y a la anisotropía que hay en el yacimiento. (Figuras 4.8 y 4.9)

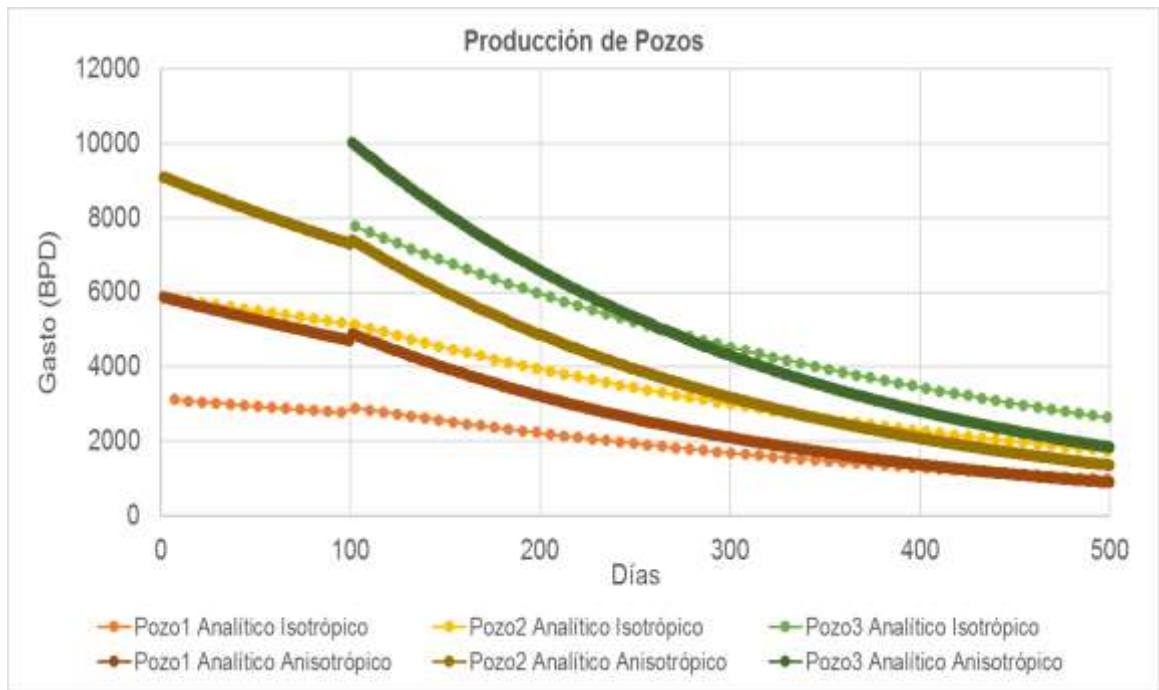


Figura 4.8 Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)

A continuación se comparó el modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico, se compara con el modelo generado con el simulador numérico, para el caso del medio homogéneo- anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 50$ md) de la figura 4.1, se observó que en el medio homogéneo-anisotrópico hay una mayor producción de petróleo de los pozos, debido a la anisotropía. (Figura 4.9)

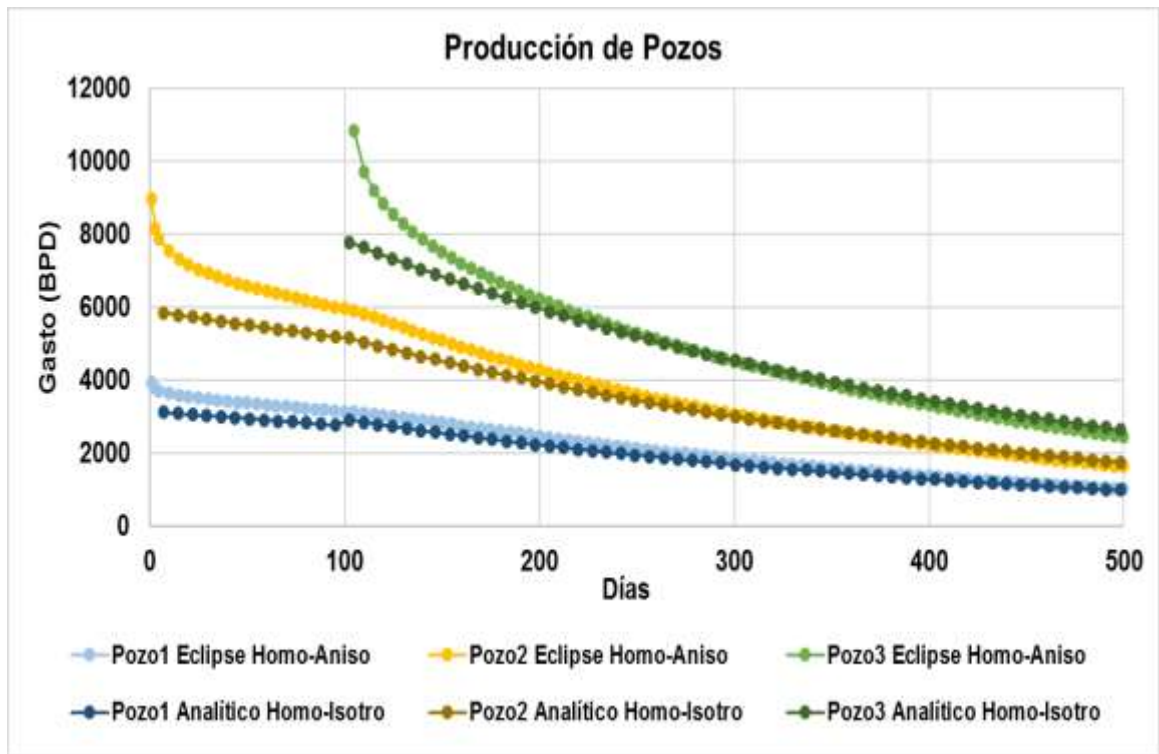


Figura 4.9 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 50$ md)

4.3 Caso 2

Para el Caso 2, intervienen cuatro pozos productores. Los datos de entrada de estos pozos se muestran en la tabla 4.3.

Tabla 4.3 Datos de entrada del Caso 2, para 4 pozos productores

	Posición (ft)		Daño	Pwf (psi)	Tiempo entrada (días)	Tiempo operación (días)
	X	Y				
Pozo 1	-5366	3500	0	1900	0	500
Pozo 2	-1633	3500	5	1500	0	500
Pozo 3	1633	3500	0	1500	200	500
Pozo 4	5366	3500	1	1100	200	500

4.3.1 Medio Homogéneo-Anisotrópico

En este medio homogéneo-anisotrópico la permeabilidad es de $k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 100 \text{ md}$ ambas permeabilidades son constantes en el yacimiento, donde cuatro pozos producen a diferentes tiempos.

Los dos primeros pozos producen al tiempo 0 días y los otros dos pozos, entran a producir al tiempo 200 días. (Figura 4.10)

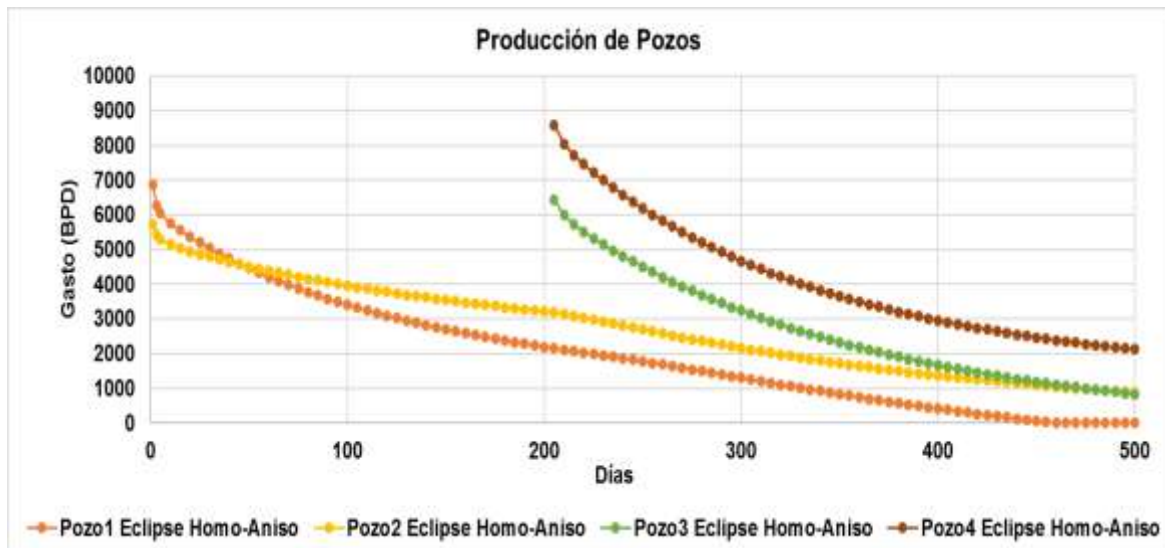


Figura 4.10 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 100 \text{ md}$), generada con el Simulador Numérico, con 4 pozos productores de petróleo

Al entrar a operar el pozo 3 y el pozo 4, se produce una mayor caída de presión en el yacimiento, declinando con mayor rapidez el pozo 1 y el pozo 2. La producción de petróleo de los pozos, depende de la posición donde estén ubicados, de las propiedades y características que tenga la roca en ese punto.

En la figura 4.11, se tiene un mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección X, mientras que para la dirección Y la permeabilidad es de 100 md.

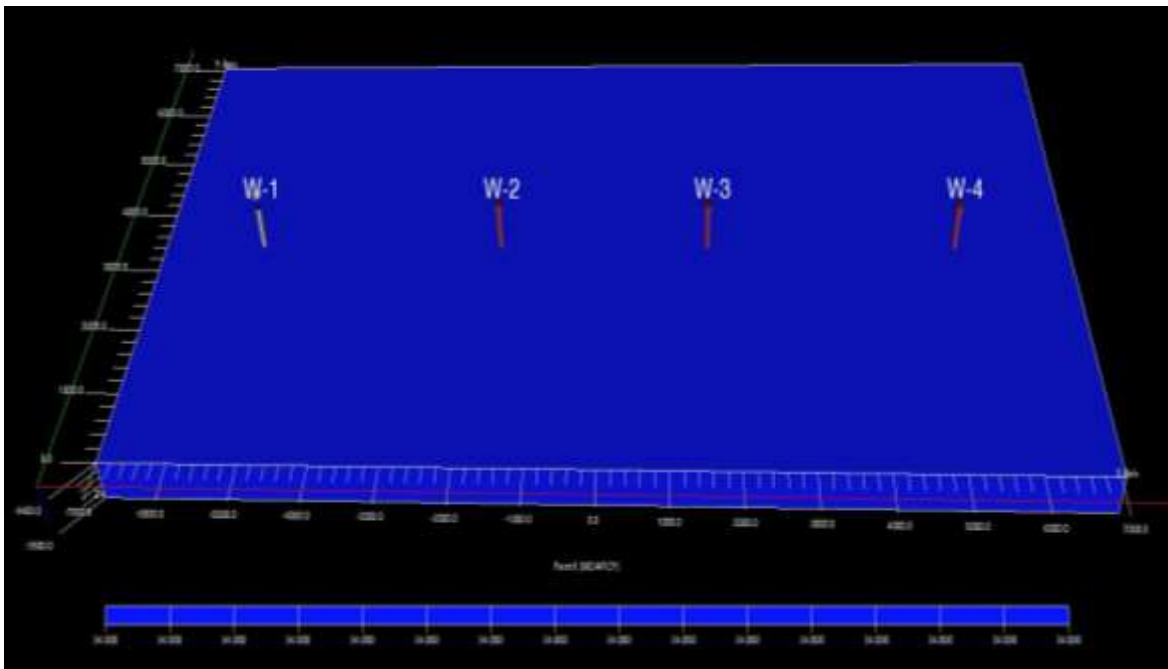


Figura 4.11 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 2

4.3.2 Medio Heterogéneo-Anisotrópico, k_y igual al promedio armónico de permeabilidades en X

En este medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md), los primeros dos pozos entran al tiempo 0 y los otros dos pozos entra al tiempo 200 días, se utilizó una $N=20$, en la sumatoria de la solución analítica, la cual obtenemos un buen ajuste para este valor como se muestra en la figura 4.12.

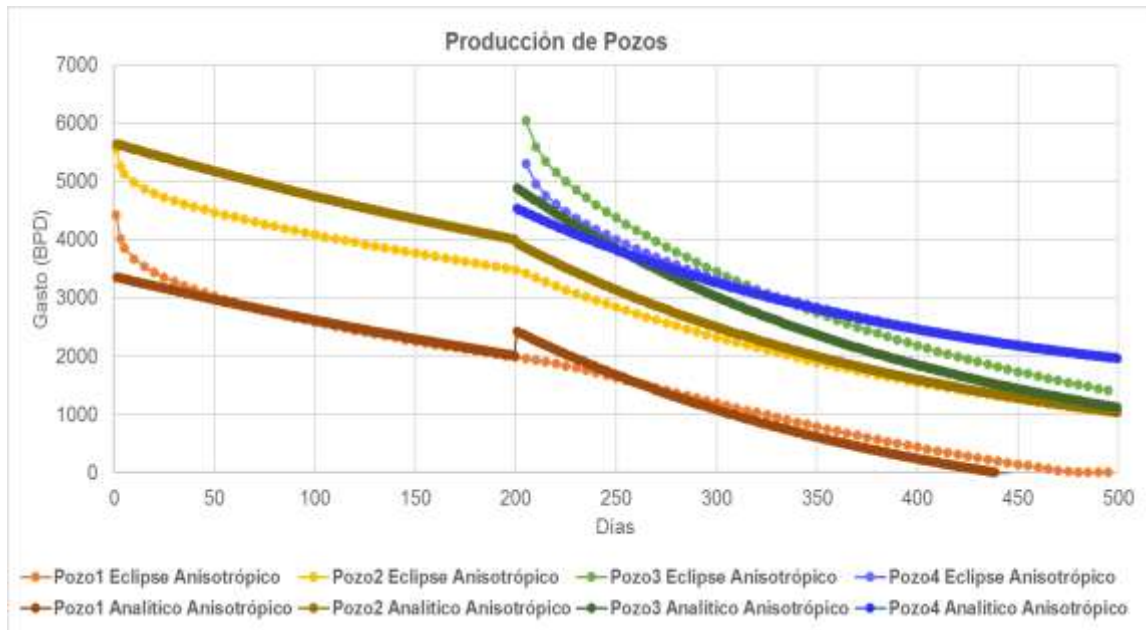


Figura 4.12 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico del Caso 2, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse

La variación de la permeabilidad en la dirección X , es de $[0:100]$ md, y la permeabilidad en la dirección Y es un promedio armónico de 34 md que se obtuvo de las permeabilidades en dirección X , estas condiciones nos permiten tener un medio heterogéneo-anisotrópico. (Figuras 4.13 y 4.14)

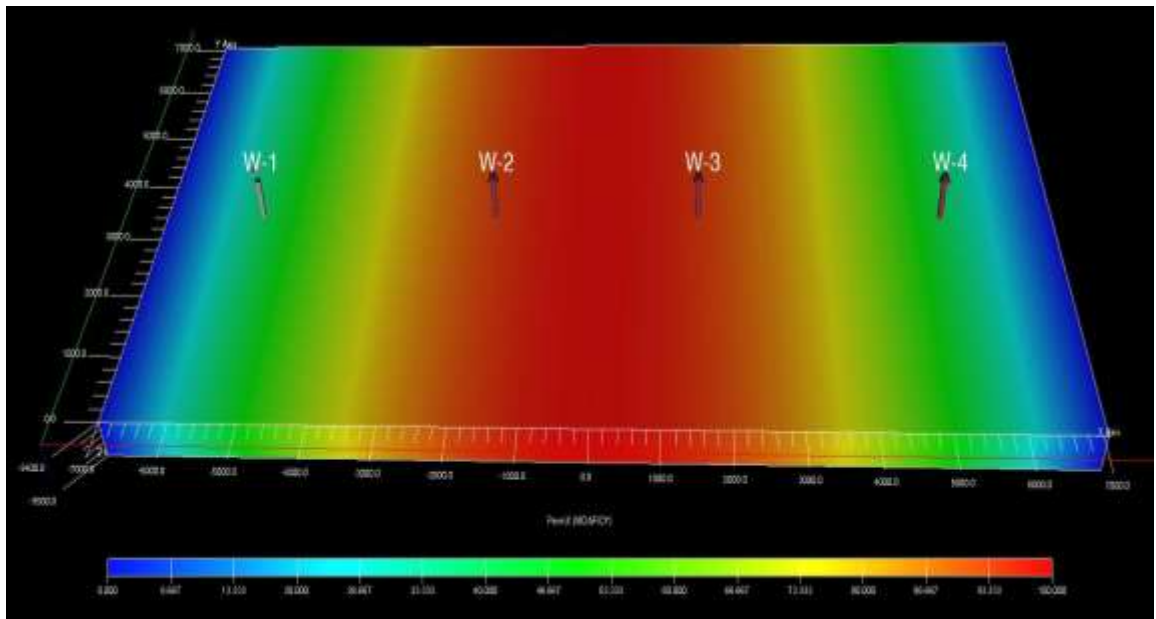


Figura 4.13 Mapa de distribución de permeabilidades [0:100] md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 2

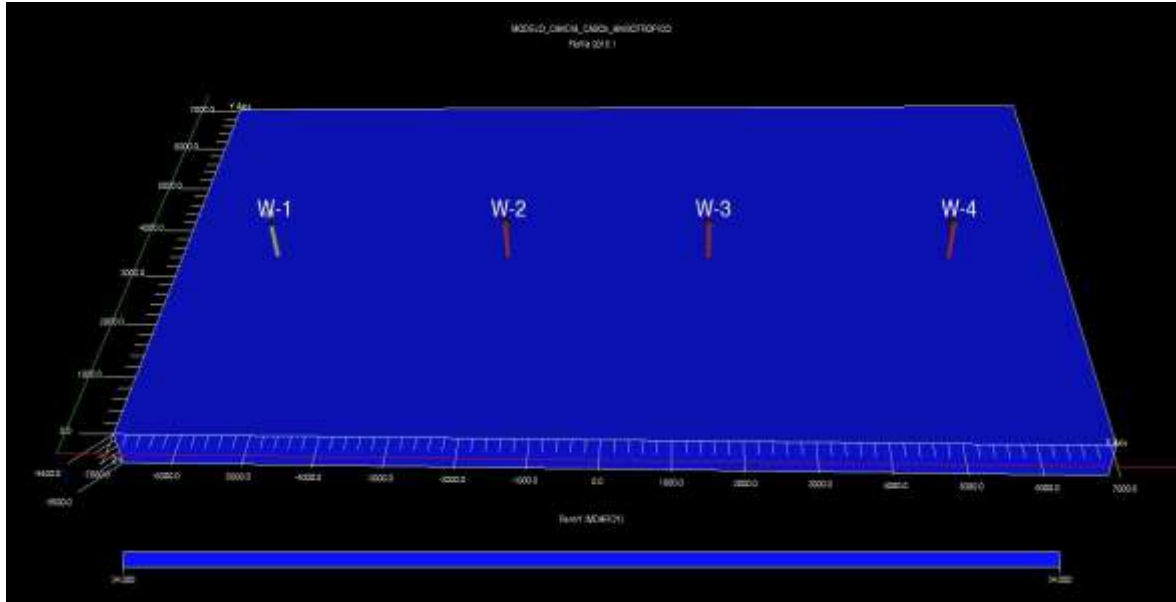


Figura 4.14 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección Y, 4 pozos productores, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 2

4.3.3 Medio Homogéneo-Isotrópico

Se realizó la validación del modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico, obtenida por Camacho et al. (1994), con el simulador numérico donde la permeabilidad es $k_x = k_y = 34$ md. (Figuras 4.15 y 4.16)

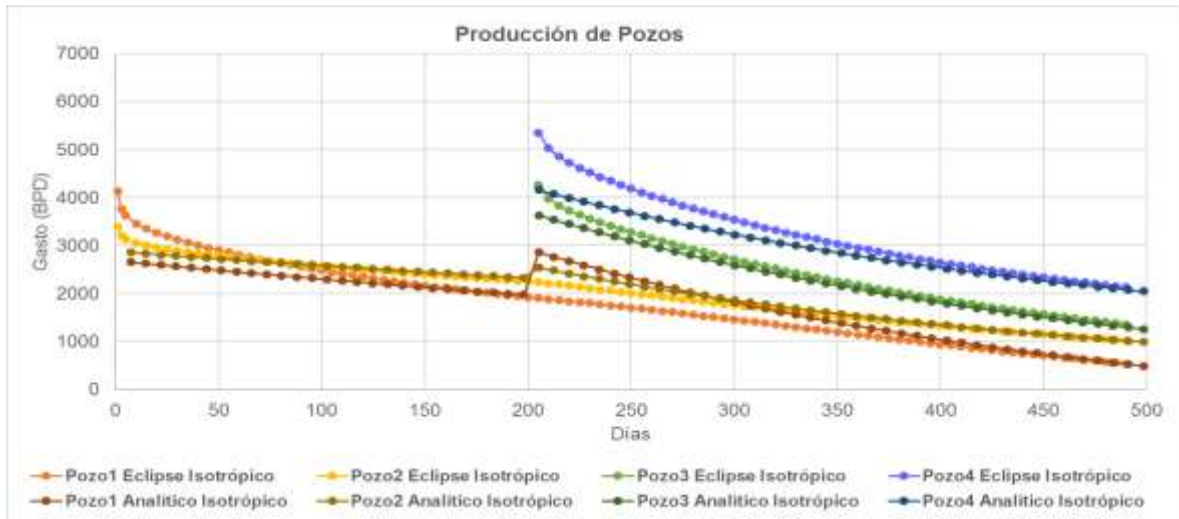


Figura 4.15 Gráfica del Caso 2, Medio Homogéneo-Isotrópico, produciendo 4 pozos a diferentes tiempos, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico

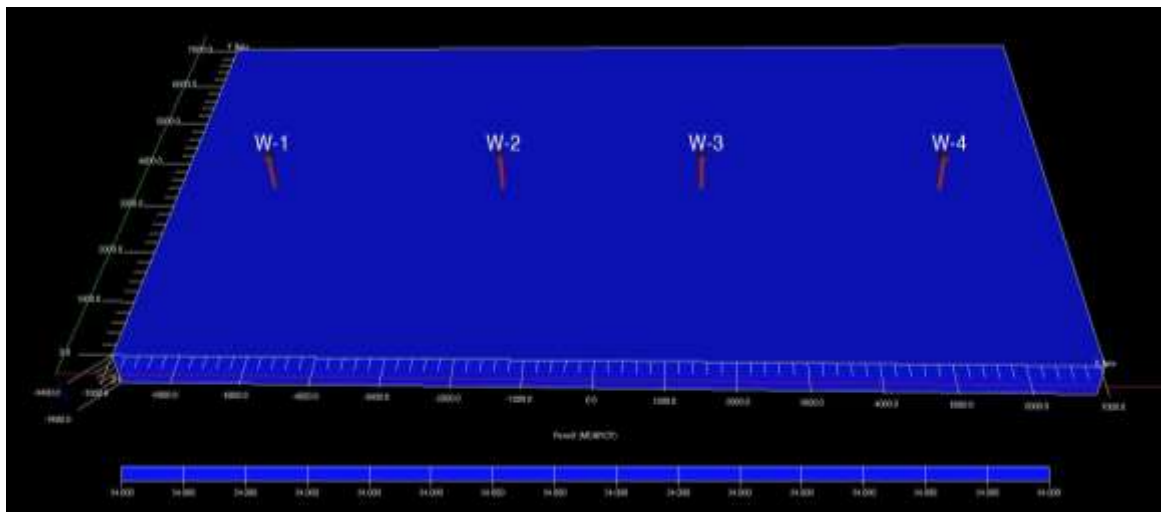


Figura 4.16 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 2

4.3.4 Comparación de los Modelos Analíticos

La comparación para el Caso 2, de los modelos analíticos del medio heterogéneo-anisotrópico con el medio homogéneo-isotrópico, se observa que el medio heterogéneo-anisotrópico, con excepción del pozo 1, los pozos tienen mayor producción de petróleo, debido a la anisotropía y posición en el yacimiento. (Figura 4.17)

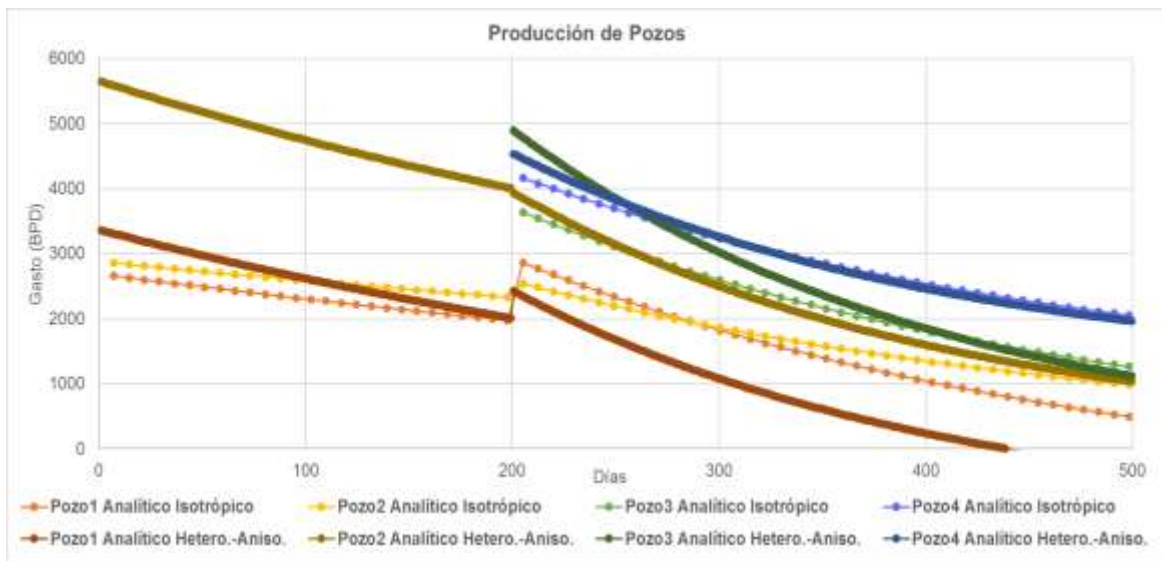


Figura 4.17 Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)

A continuación el modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico, lo comparo con el modelo del caso medio homogéneo-anisotrópico ($k_x = 34$ md ; $k_y = 100$ md) (Figura 4.10) generado con el simulador numérico, se observa que en el medio homogéneo-anisotrópico hay una mayor producción de los pozos. (Figura 4.18)

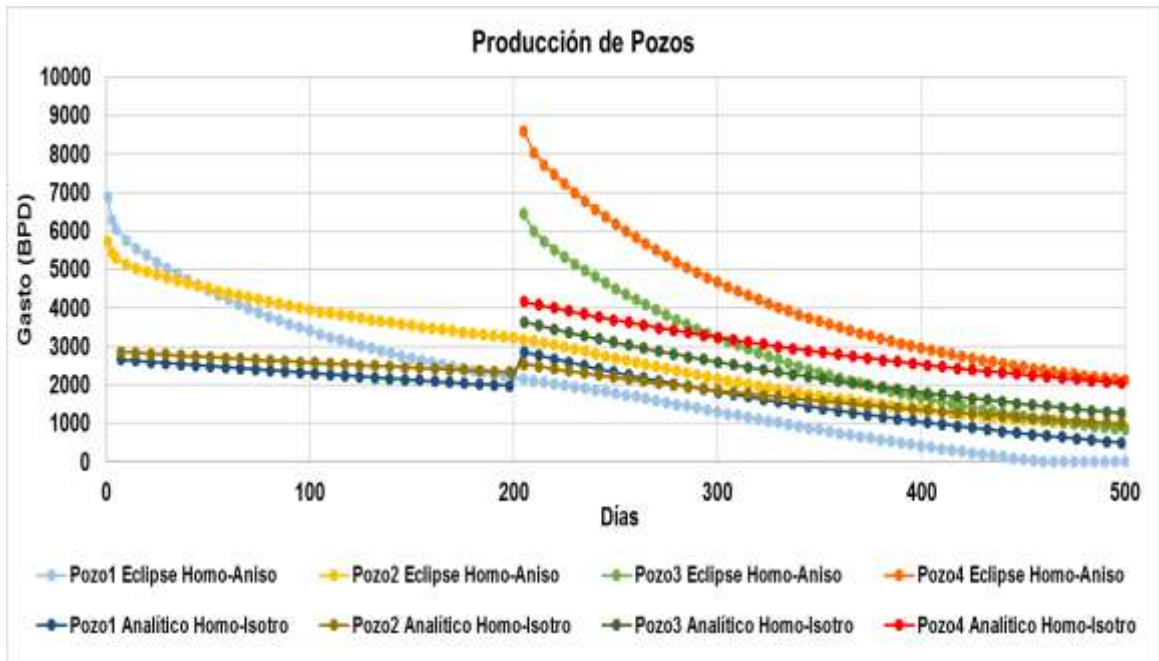


Figura 4.18 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34 \text{ md}$), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 100 \text{ md}$)

4.4 Caso 3

Para el Caso 3, intervienen tres pozos productores, con una variación en la permeabilidad de 0 a 100 md en la dirección X, y la permeabilidad para el eje Y, es constante de 50 md, los datos de entrada de estos pozos se muestran en la tabla 4.4.

Tabla 4.4 Datos de entrada del Caso 3, para 3 pozos productores

	Posición (ft)		Daño	Pwf (psi)	Tiempo entrada (días)	Tiempo operación (días)
	X	Y				
Pozo 1	-1000	6000	0	1500	0	500
Pozo 2	6000	3000	2	1800	0	500
Pozo 3	-800	5400	1	1000	200	500

4.4.1 Medio Homogéneo-Anisotrópico

En este medio homogéneo-anisotrópico la permeabilidad es de $k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$, ambas son constantes en el yacimiento donde los tres pozos producen a diferentes tiempos.

Los dos primeros pozos entran al tiempo 0 y el tercer pozo entra a producir al tiempo 100 días, se utilizó el modelo de simulación numérica para este medio. (Figura 4.19)

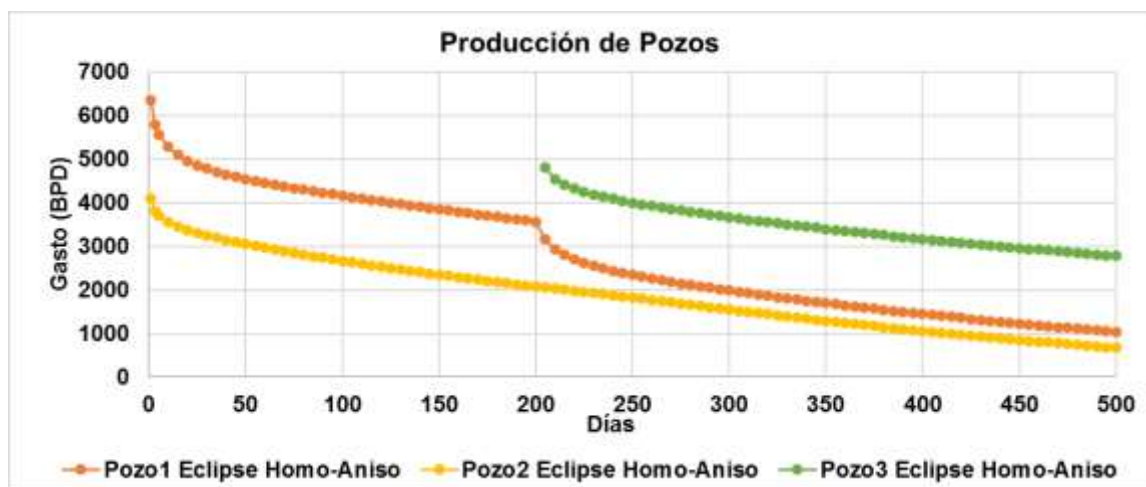


Figura 4.19 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34 \text{ md}$; $k_y = 50 \text{ md}$), generada con el Simulador Numérico, con 3 pozos productores de petróleo

Como se observa en la figura 4.20, el pozo 1 y el pozo 3 están muy juntos, con respecto a su ubicación, pero como el pozo 1 entra al tiempo 0 días y comienza a producir, al entrar el pozo 3 a los 200 días, se nota una clara interferencia entre pozos debido a la rápida caída de producción del pozo 1, esto significa que le está quitando producción de petróleo, debido a su cercanía con este pozo y en muchas ocasiones esto es lo que pasa al perforar nuevos pozos y ubicarlos a cortas distancias de otros pozos productores.

En la figura 4.20, se tiene un mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección X , mientras que para la dirección Y la permeabilidad es de 50 md .

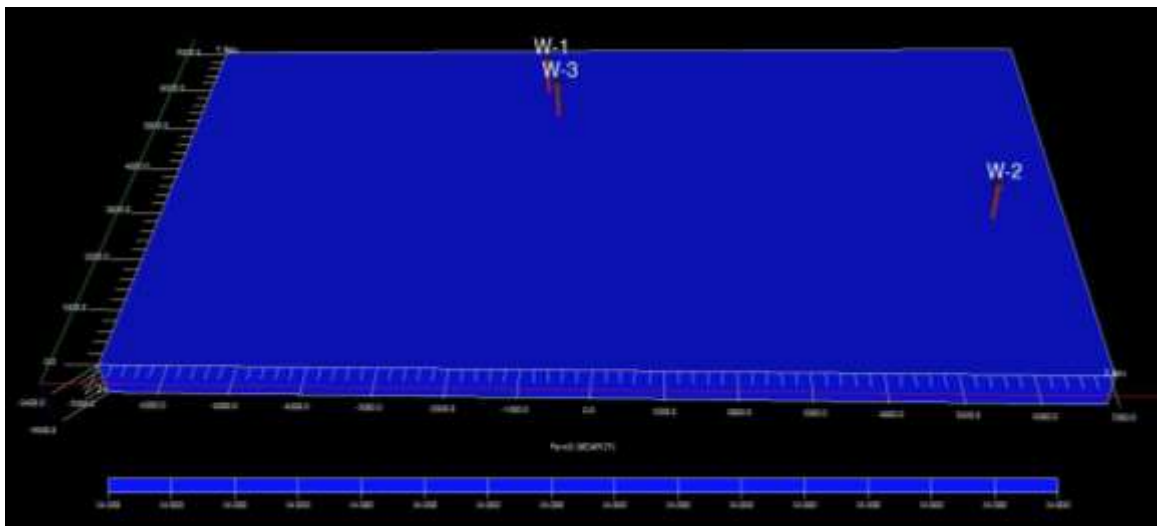


Figura 4.20 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X , del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 3

El perforar pozos nuevos a distancias cortas de los pozos productores implica que existirá una interferencia entre pozos y que su factor de declinación del pozo aumente más rápido. Cabe mencionar que los pozos se deben de ubicar en la mejor zona productora del yacimiento, considerando las mejores características y la calidad de roca del yacimiento, para poder incrementar el factor de recuperación del yacimiento.

4.4.2 Medio Heterogéneo-Anisotrópico, k_y igual al promedio armónico de permeabilidades en X

En este medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md), los primeros dos pozos entran al tiempo 0 y otro pozo entra al tiempo 200 días, se utilizó una $N=20$ en la sumatoria de la solución analítica lo que da un buen ajuste para este valor, como se muestra en la figura 4.21.

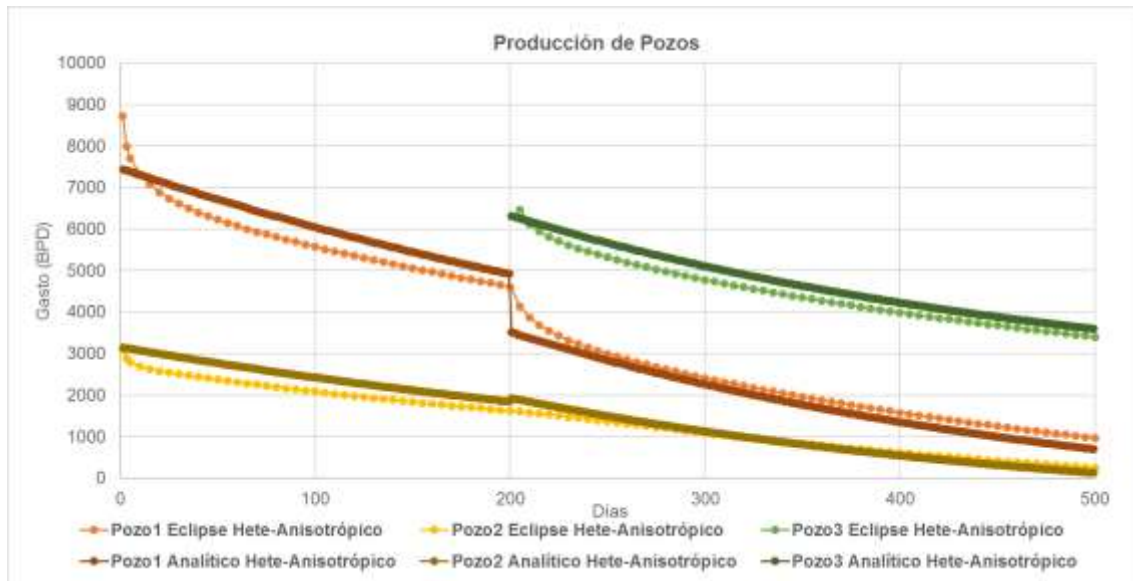


Figura 4.21 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico del Caso 3, produciendo 3 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico

La variación de la permeabilidad en la dirección X , es de $[0:100]$ md, y la permeabilidad en la dirección Y es un promedio armónico de 34 md, que se obtuvo de las permeabilidades en la dirección X , éstas condiciones nos permiten tener un medio heterogéneo-anisotrópico. (Figuras 4.22 y 4.23)

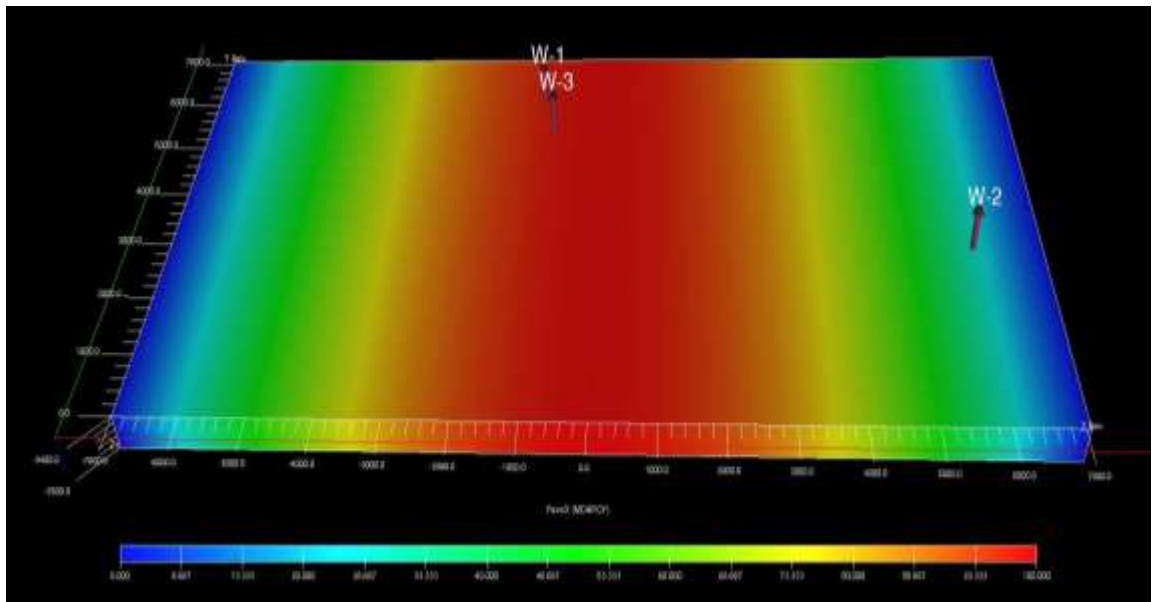


Figura 4.22 Mapa de distribución de permeabilidades [0:100] md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 3

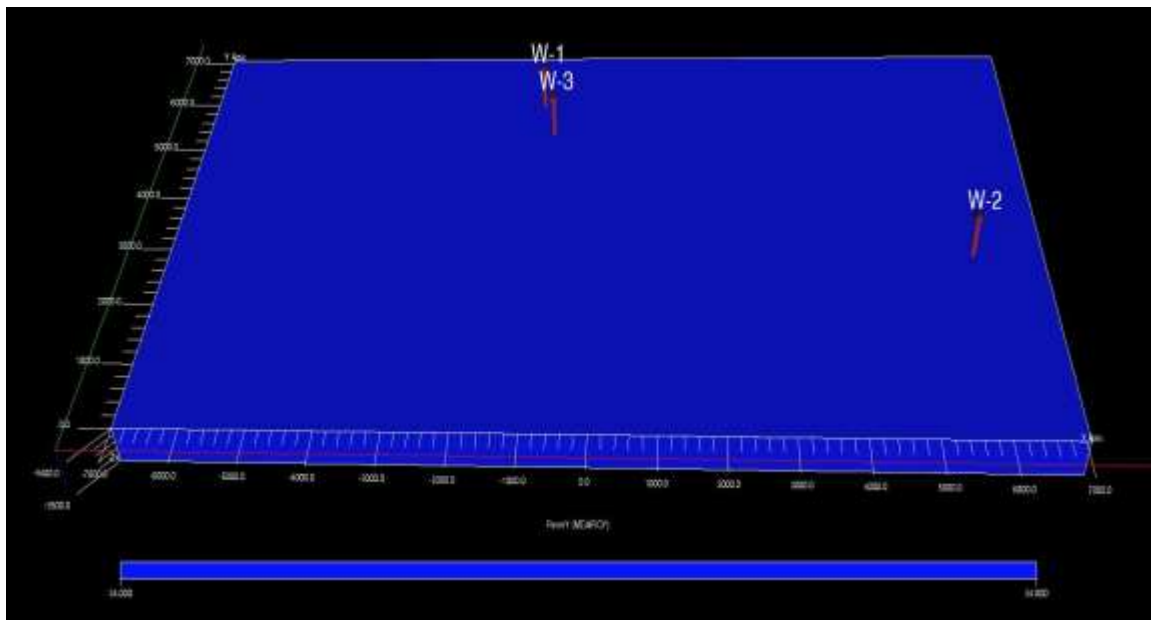


Figura 4.23 Mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección Y, 3 pozos productores del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 3

4.4.3 Medio Homogéneo-Isotrópico

Se realizó la validación del modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico obtenida por Camacho et al. (1994), con el simulador numérico donde la permeabilidad es $k_x = k_y = 34$ md. (Figuras 4.24 y 4.25)

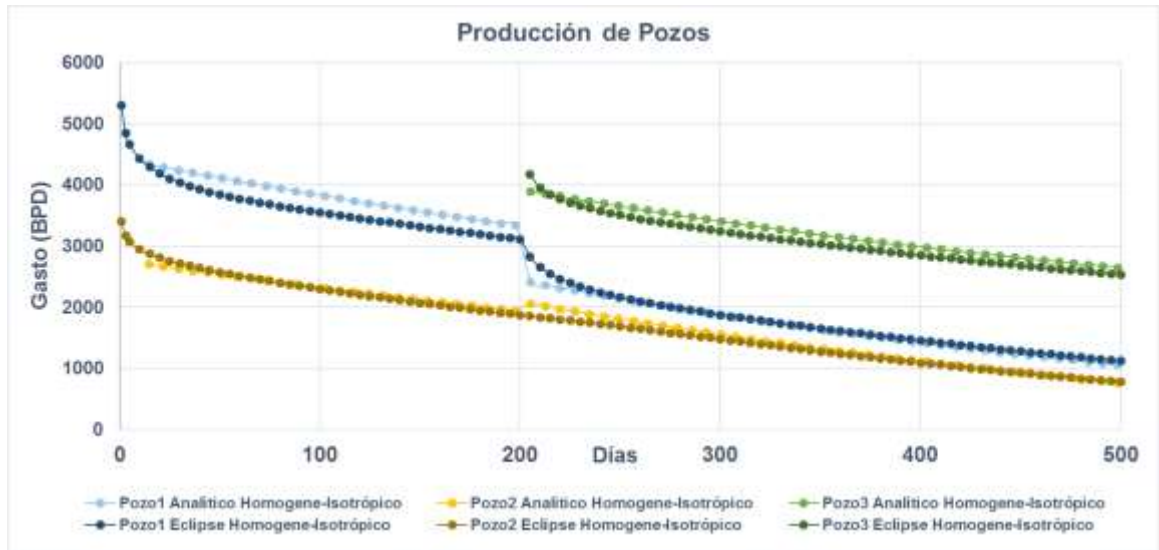


Figura 4.24 Gráfica del Caso 3, Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), produciendo 3 pozos a diferentes tiempos, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse

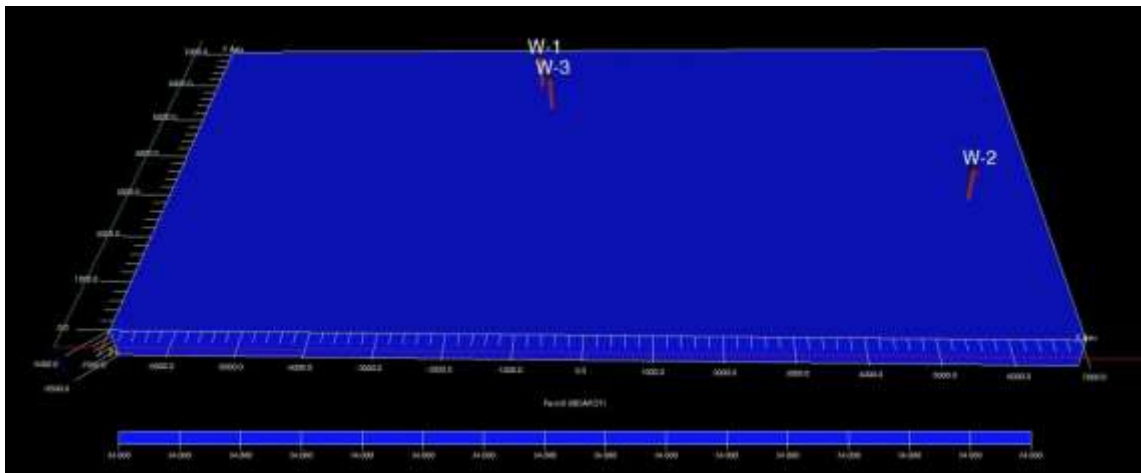


Figura 4.25 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 3

4.4.4 Comparación Modelos Analíticos

Para el Caso 3, se realizaron las comparaciones de los modelos analíticos del medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md, $k_y = 34$ md) con el medio homogéneo-isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), se observa que en el medio heterogéneo-anisotrópico los pozos tienen mayor producción de petróleo, debido a la anisotropía y posición de los pozos en el yacimiento. (Figura 4.26)

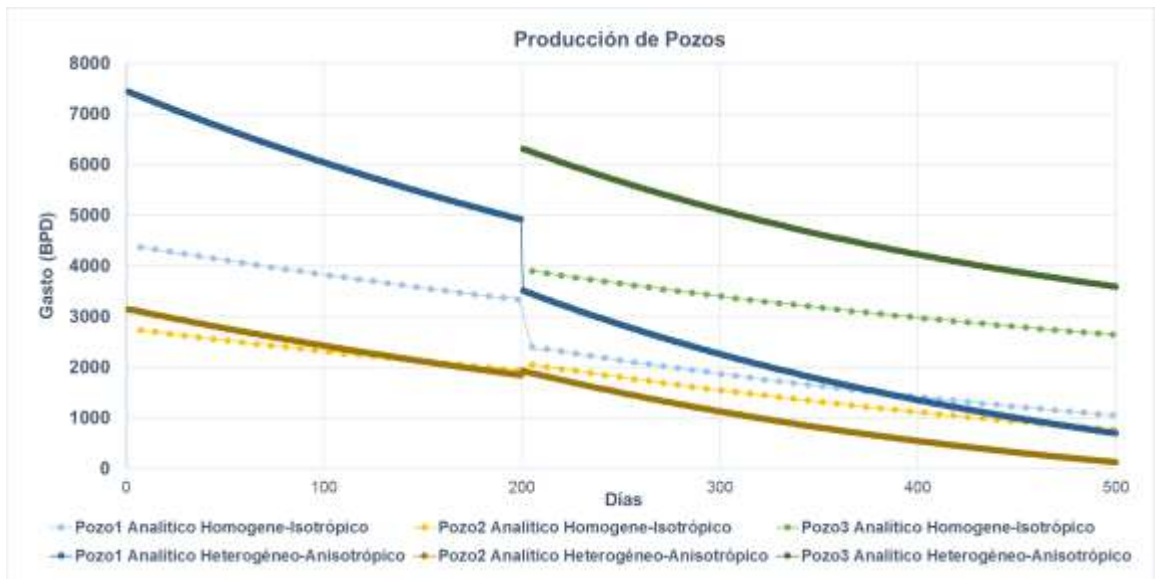


Figura 4.26 Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)

En este caso, para el modelo analítico del medio heterogéneo-anisotrópico de una porosidad, la producción de los pozos es mucho mayor para el pozo 1 y 3, mientras que para el medio homogéneo-isotrópico la producción de los pozos es menor.

Para el pozo 2, en el medio heterogéneo-anisotrópico la producción de petróleo es mucho menor, debido a que este pozo se encuentra en una zona de baja permeabilidad con respecto a su posición en el yacimiento, mientras que en el medio homogéneo-isotrópico, el pozo 2 produce más petróleo ya que no existe heterogeneidad, ni anisotropía del medio.

Un modelo analítico heterogéneo-anisotrópico está más apegado a la realidad de un yacimiento petrolero, que un modelo analítico homogéneo-isotrópico que no considera la heterogeneidad, ni anisotropía del medio. Esta comparación permite generar mejores pronósticos de producción de petróleo, tener un mejor diseño de las instalaciones superficiales, una mejor ubicación en el yacimiento al perforar los pozos evitando la interferencia entre ellos y poder incrementar el factor de recuperación del yacimiento.

En la figura 4.27, se comparan los gastos de petróleo de los pozos del modelo de simulación numérica del medio homogéneo-anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 50$ md), con el modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md).

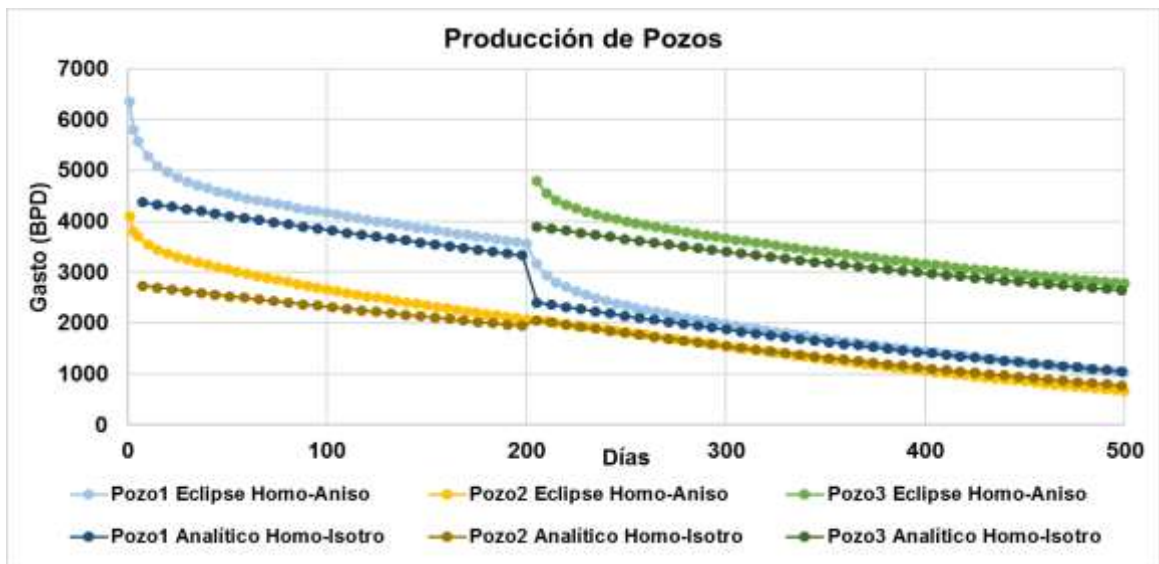


Figura 4.27 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 50$ md)

Se observa que los pozos del medio homogéneo-anisotrópico presentan una mayor producción de petróleo debido a que su permeabilidad en la dirección Y es mayor.

4.5 Caso 4

Para el Caso 4, intervienen cuatro pozos productores, con una variación en la permeabilidad de $[0:100]$ md en la dirección X, y la permeabilidad para la dirección Y, es constante de 50 md, los datos de entrada de estos pozos, se muestran en la tabla 4.5.

Tabla 4.5 Datos de entrada del Caso 4, para 4 pozos productores

	Posición (ft)		Daño	Pwf (psi)	Tiempo entrada (días)	Tiempo operación (días)
	X	Y				
Pozo 1	-500	3500	2	1700	0	500
Pozo 2	-6900	2000	3	1500	0	500
Pozo 3	10	4000	1	1000	200	500
Pozo 4	6000	6000	0	1600	200	500

4.5.1 Medio Homogéneo-Anisotrópico

En este medio homogéneo-anisotrópico, la permeabilidad es de $k_x = 34$ md ; $k_y = 100$ md ambas permeabilidades son constantes en el yacimiento, donde cuatro pozos producen a diferentes tiempos.

Los dos primeros pozos producen al tiempo 0 días y los otros dos pozos, entran a producir al tiempo 200 días. (Figura 4.28)

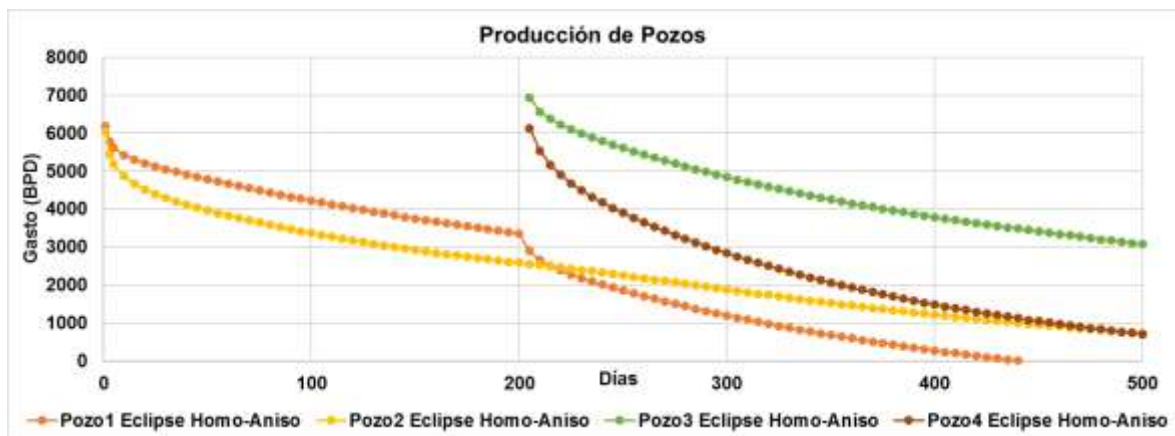


Figura 4.28 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md ; $k_y = 100$ md), generada con el Simulador Numérico, con 4 pozos productores de petróleo

Al entrar a operar los pozos 3 y 4 se produce una mayor caída de presión del yacimiento declinando con mayor rapidez los pozos 1 y 2. La producción de petróleo de los pozos depende de la posición donde estén ubicados, de las propiedades y características que tenga la roca en ese punto.

En la figura 4.29, se tiene un mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección X , mientras que para la dirección Y la permeabilidad es de 100 md .

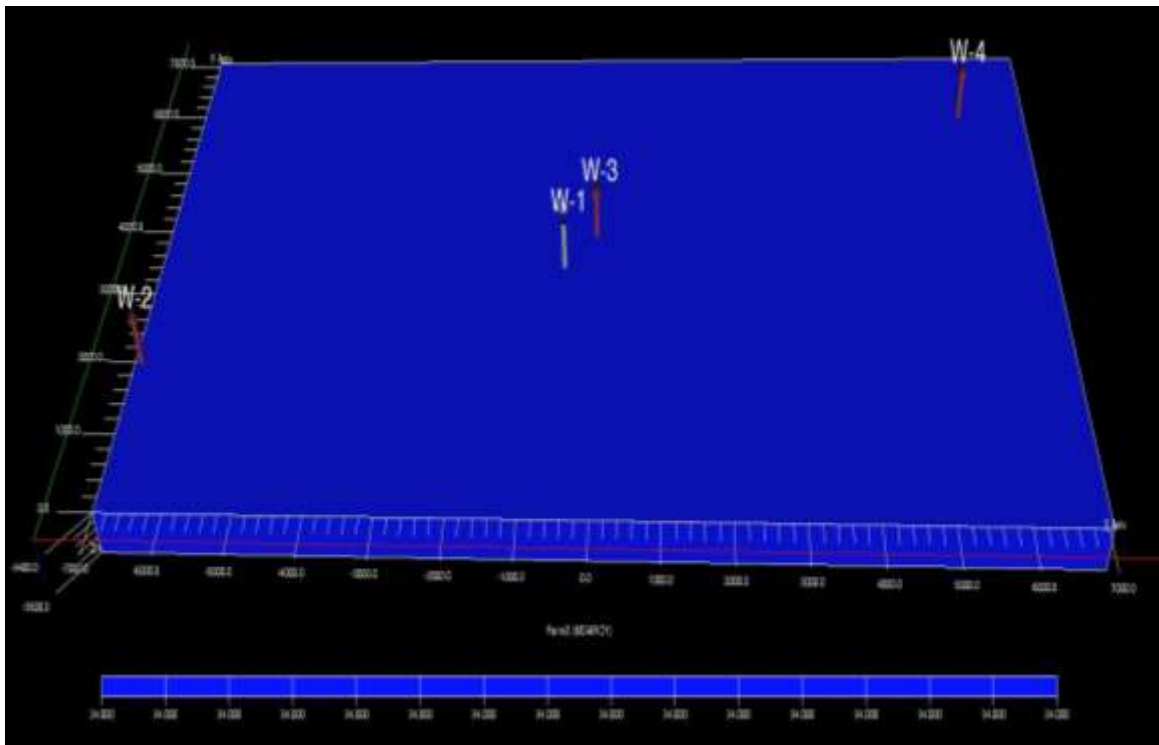


Figura 4.29 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X , del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 4

4.5.2 Medio Heterogéneo-Anisotrópico, k_y igual al promedio armónico de permeabilidades en X

En este medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md), los primeros dos pozos entran al tiempo 0 y los otros dos pozos entran al tiempo 200 días, se utilizó una $N=20$, en la sumatoria de la solución analítica, la cual da un buen ajuste para este valor como se muestra en la figura 4.30.

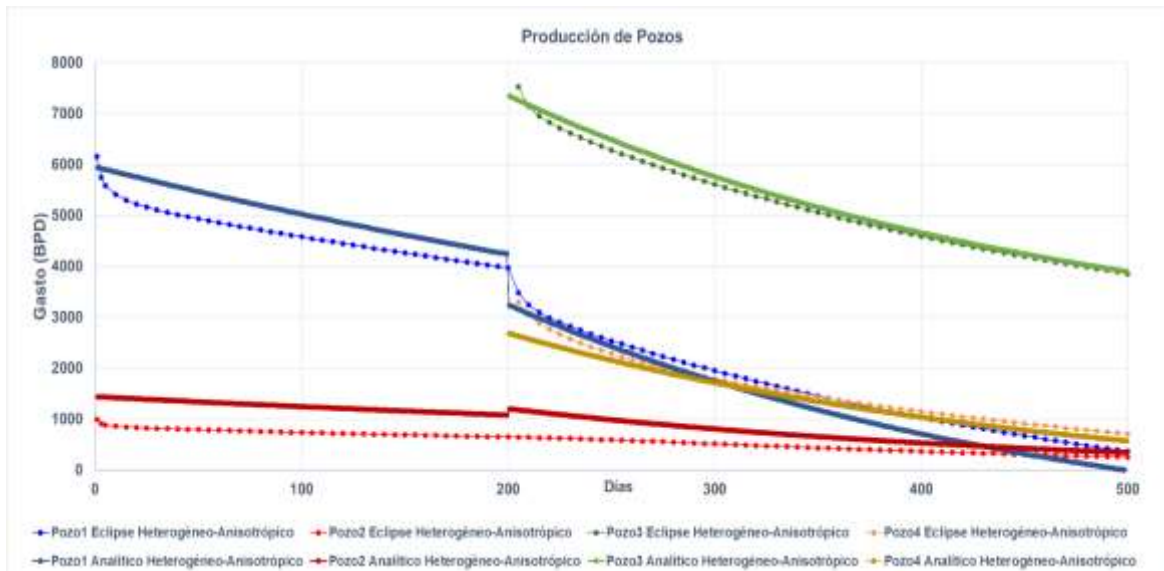


Figura 4.30 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md) del Caso 4, produciendo 4 pozos a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse

La variación de la permeabilidad en la dirección X, es de $[0:100]$ md, y la permeabilidad en la dirección Y es un promedio armónico de 34 md, que se obtuvo de las permeabilidades en la dirección X, estas condiciones nos permiten tener un medio heterogéneo-anisotrópico. (Figuras 4.31 y 4.32)

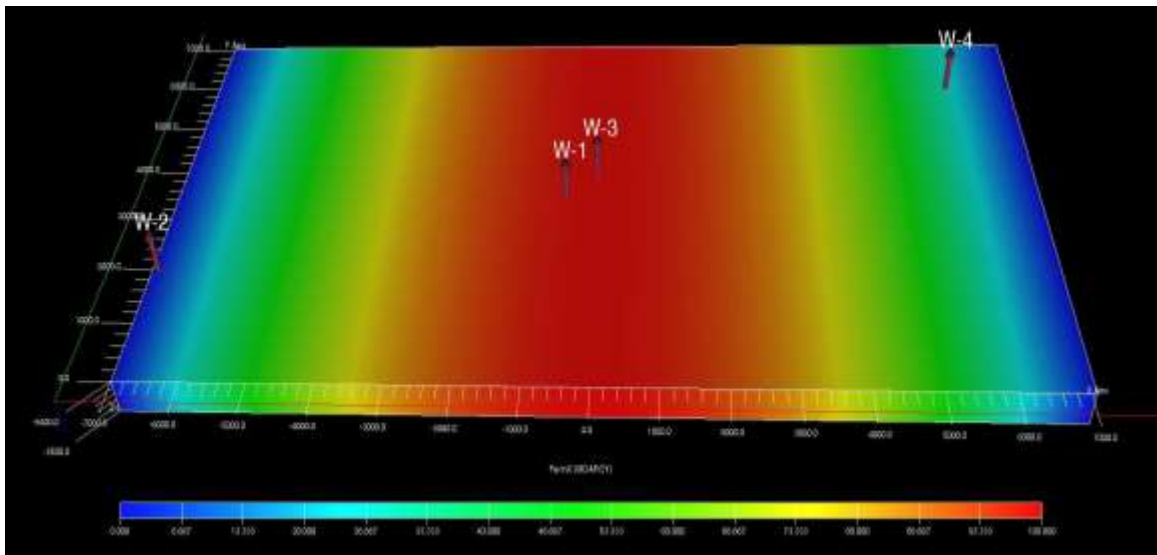


Figura 4.31 Mapa de distribución de permeabilidades [0:100] md en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 4

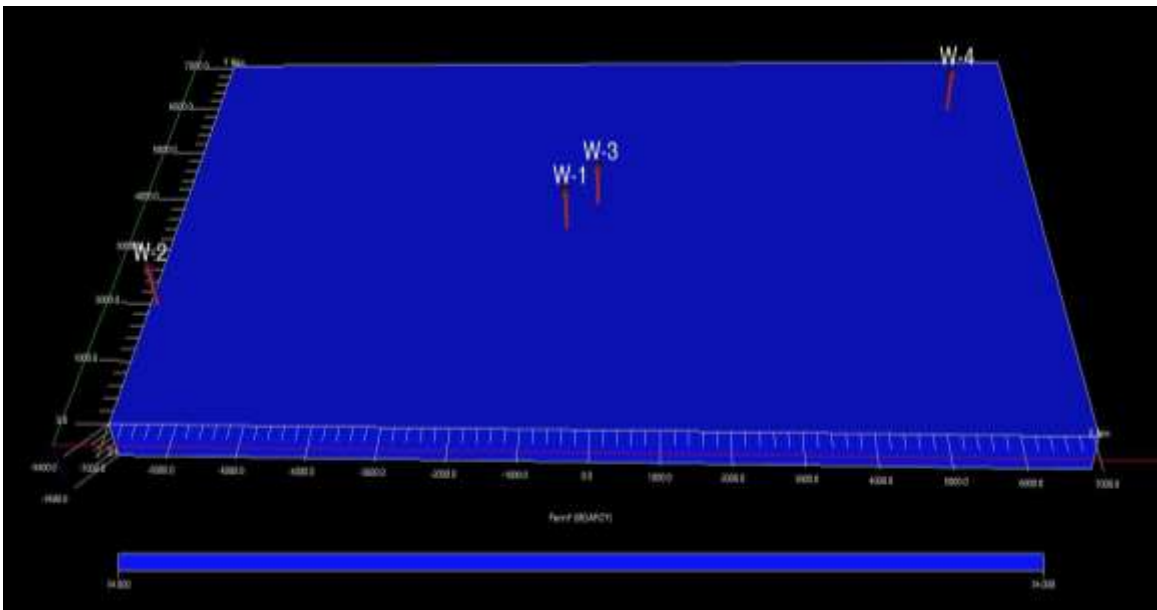


Figura 4.32 Mapa de permeabilidad de 34 md en la dirección Y, 4 pozos productores del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 4

4.5.3 Medio Homogéneo-Isotrópico

Se realizó la validación del modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico, obtenida por Camacho et al. (1994), con el simulador numérico donde la permeabilidad $k_x = k_y = 34 \text{ md}$. (Figuras 4.33 y 4.34)

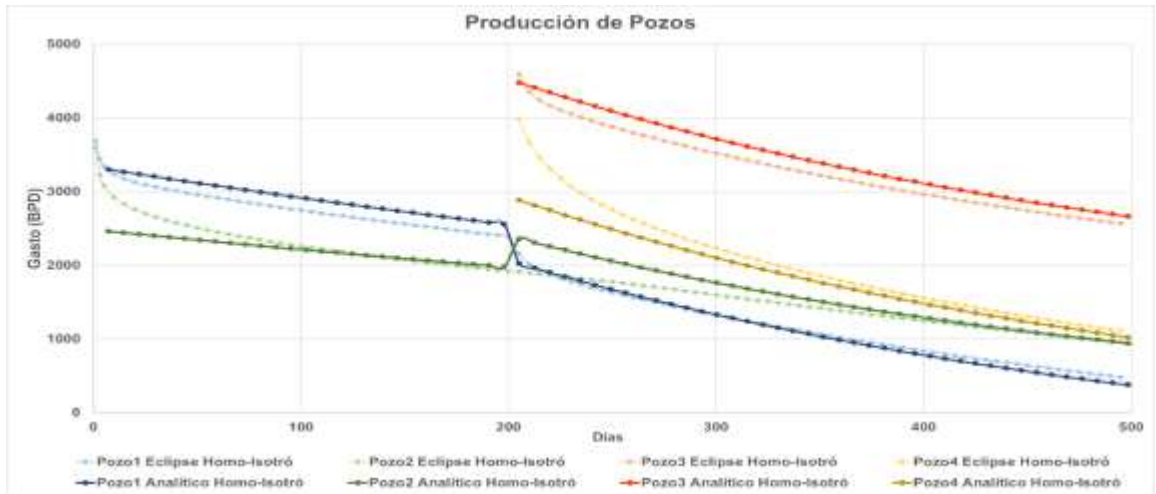


Figura 4.33 Gráfica del Caso 4, Medio Homogéneo-Isotrópico, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, comparando el modelo analítico con el simulador eclipse

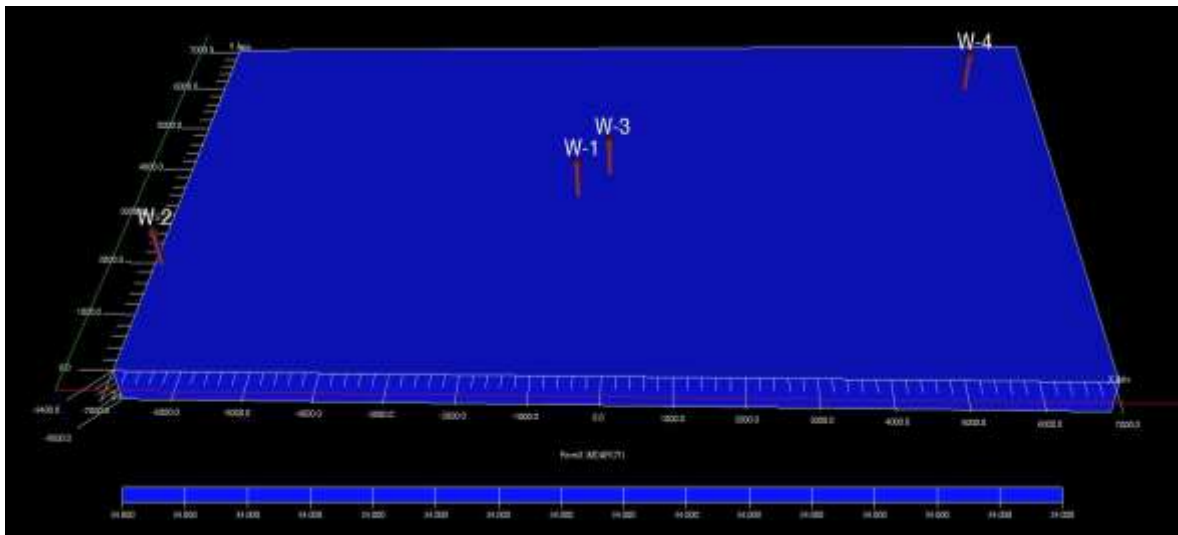


Figura 4.34 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del medio homogéneo-isotrópico, Caso 4

4.5.4 Comparación de los Modelos Analíticos

La comparación del Caso 4, de los modelos analíticos del medio heterogéneo-anisotrópico $k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md, con el medio homogéneo-isotrópico $k_x = k_y = 34$ md, se observa en el medio heterogéneo-anisotrópico que los pozos tienen mayor producción de petróleo debido a la anisotropía y posición en el yacimiento.

Los pozos 1 y 3, producen más petróleo en el medio heterogéneo-anisotrópico, que en el medio homogéneo-isotrópico, esto se debe a la buena permeabilidad y a la posición donde se ubican los pozos en el modelo heterogéneo y anisotrópico.

Los pozos 2 y 4, en el medio heterogéneo-anisotrópico producen menos petróleo, debido a la baja permeabilidad que hay esta zona, mientras que el medio homogéneo-isotrópico, estos pozos tienen buena producción debido a que tienen una permeabilidad constante. (Figura 4.35)

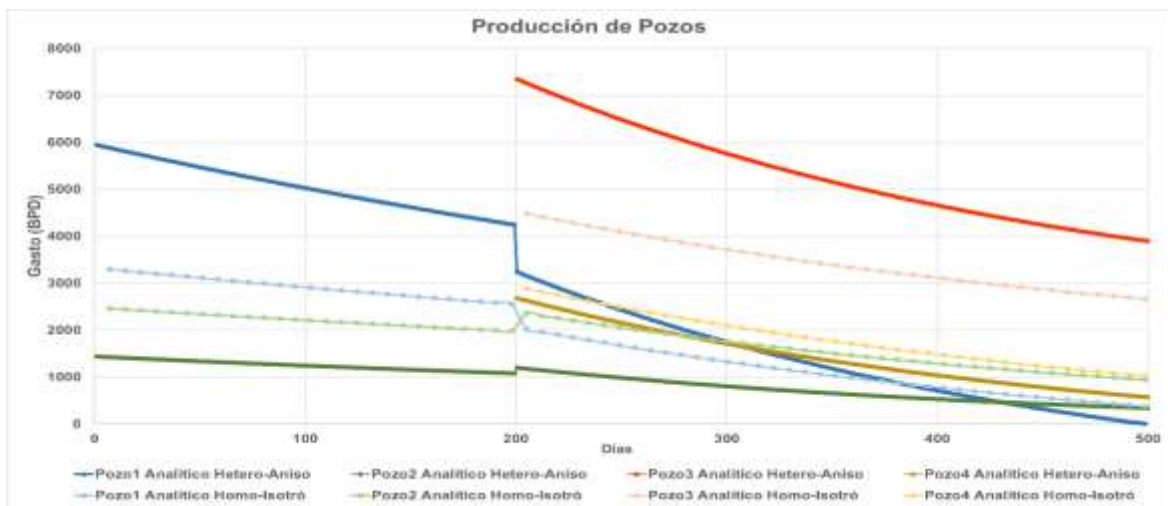


Figura 4.35 Gráfica de Comparación de los Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md) y el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)

A continuación el modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico $k_x = k_y = 34$ md , lo compáro con el modelo del medio homogéneo-anisotrópico generado con el simulador numérico, se observa que en el medio homogéneo-anisotrópico $k_x = 34$ md ; $k_y = 100$ md , hay una mayor producción de petróleo de los pozos debida a la mayor permeabilidad en la dirección Y. (Figura 4.36)

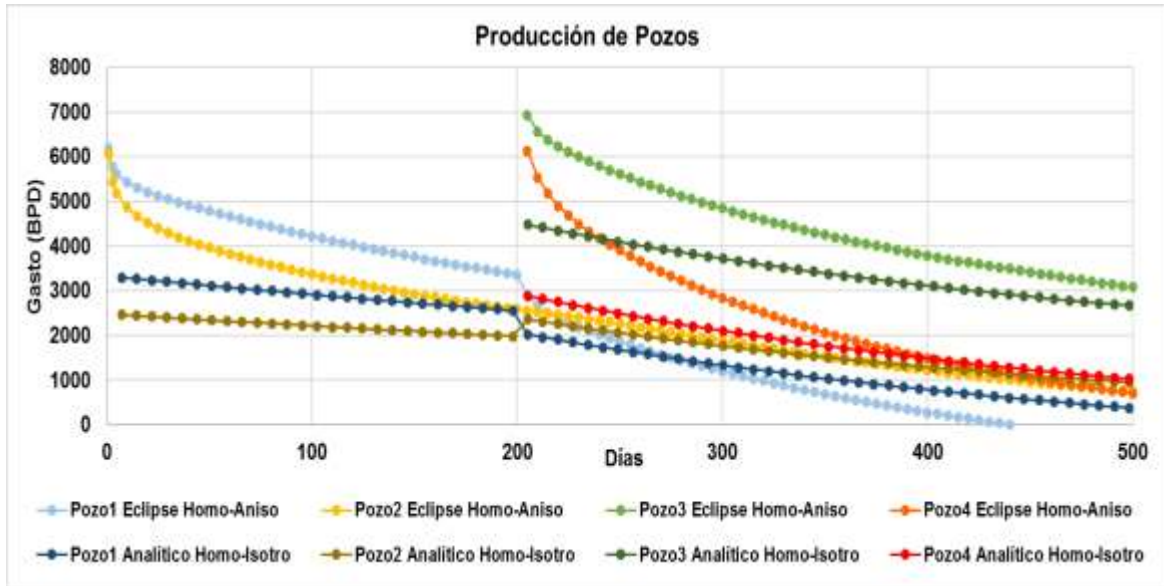


Figura 4.36 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), con el Modelo de Simulación Numérica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 100$ md)

4.6 Caso 5

Para el Caso 5, hay tres pozos productores en el yacimiento heterogéneo y anisotrópico de una porosidad, la variación de permeabilidad de 0 a 100 md en la dirección X, y la permeabilidad para el eje Y es constante de 34 md, esta permeabilidad se obtuvo del promedio armónico de las permeabilidades que hay en la dirección X. Los datos de entrada de estos pozos se muestran en la tabla 4.6.

Tabla 4.6 Datos de entrada del Caso 5, para 3 pozos productores

	Posición (ft)		Daño	Pwf (psi)	Tiempo entrada (días)	Tiempo operación (días)
	X	Y				
Pozo 1	-4500	2000	1	1300	0	500
Pozo 2	50	5000	0	1500	0	500
Pozo 3	6500	3000	1	2000	300	500

4.6.1 Medio Homogéneo-Anisotrópico

En este medio homogéneo-anisotrópico la permeabilidad es de $k_x = 34$ md ; $k_y = 68$ md , ambas permeabilidades son constantes en el yacimiento donde tres pozos producen a diferentes tiempos.

Los dos primeros pozos producen al tiempo 0 días y el otro pozo, entran a producir al tiempo 300 días. (Figura 4.37)

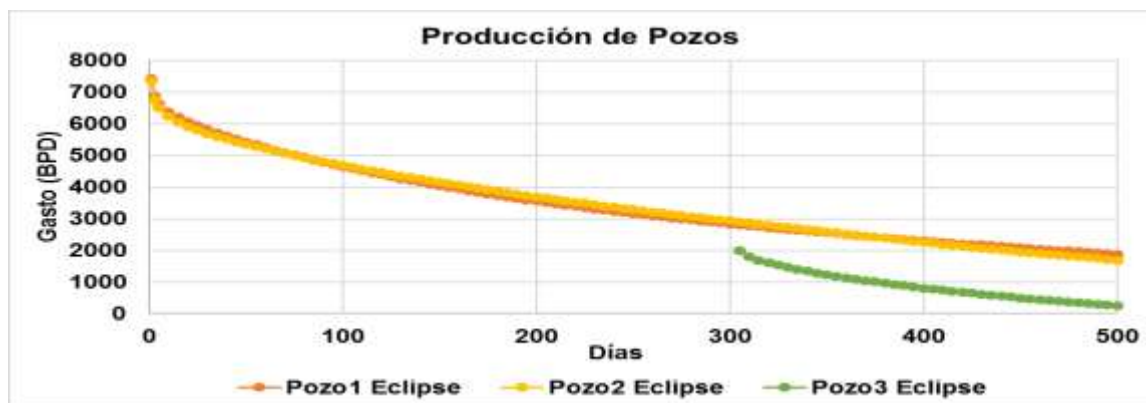


Figura 4.37 Gráfica del Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md ; $k_y = 68$ md), generada con el Simulador Numérico, con 3 pozos productores de petróleo

Se observó que cuando el pozo 3, comienza a producir a los 100 días, se produce una caída de producción y presión en el pozo 2 al instante, lo que genera una interferencia entre pozos.

En la figura 4.38, se tiene un mapa de permeabilidades 34 md , en la dirección X , mientras que para la dirección Y , la permeabilidad es de 68 md .

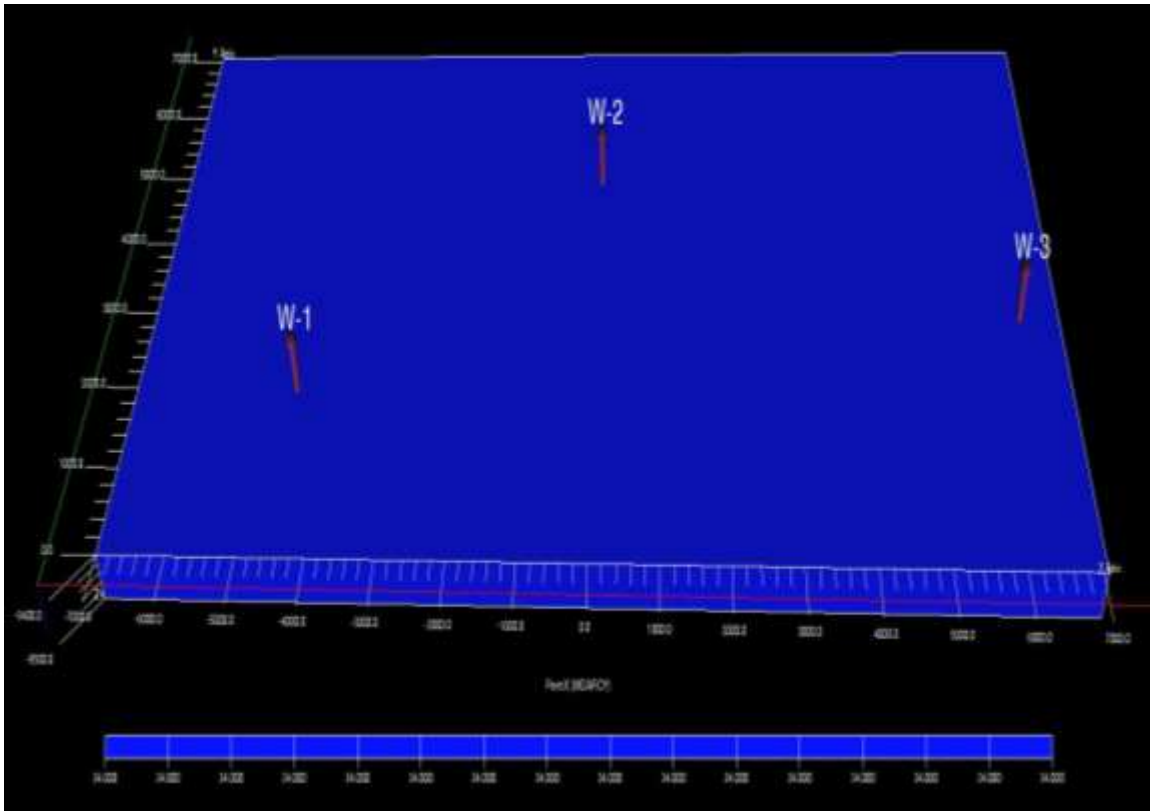


Figura 4.38 Mapa de permeabilidad 34 md en la dirección X , del Medio Homogéneo-Anisotrópico, Caso 5

4.6.2 Medio Heterogéneo-Anisotrópico, k_y igual al promedio armónico de permeabilidades en X

En este medio heterogéneo-anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md), los dos primeros pozos entran al tiempo 0 y el tercer pozo entra al tiempo 300 días, se utilizó una $N=20$, en la sumatoria de la solución analítica, la cual obtenemos un buen ajuste para este valor como se muestra en la figura 4.39.

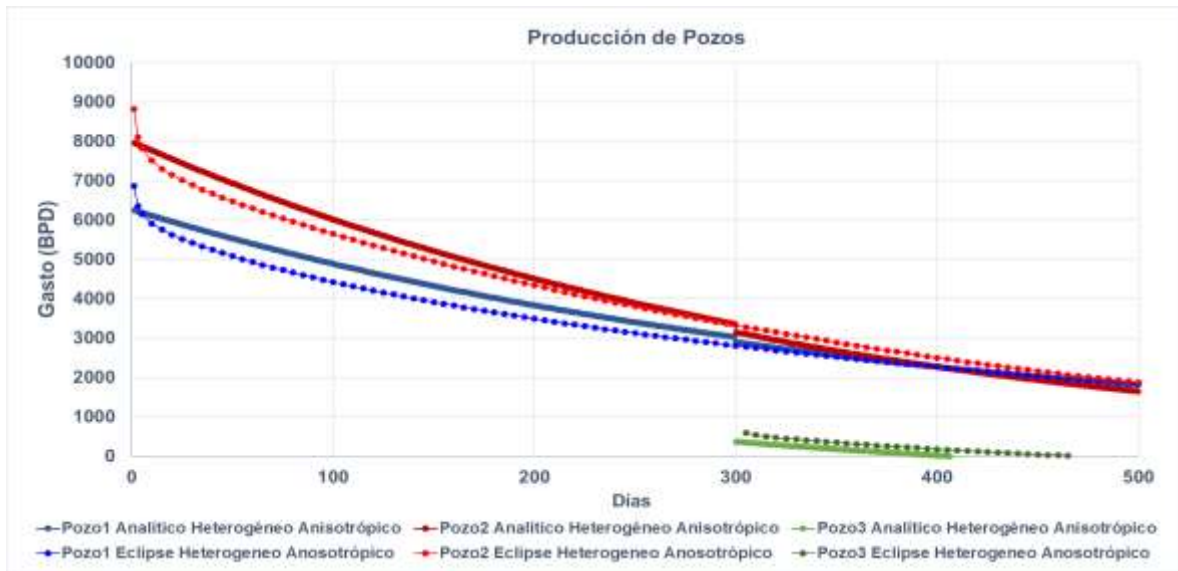


Figura 4.39 Gráfica del Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md) del Caso 5, produciendo 4 pozos, a diferentes tiempos, $N=20$, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Numérico

Al tiempo cero el pozo 1 comienza a producir donde hay una permeabilidad de 45 md en esa zona, mientras que el pozo 2 produce con mejor gasto de petróleo donde se encuentra la máxima permeabilidad del yacimiento.

Al tiempo 300 días, el pozo 3 inicia a producir generando una caída de presión adicional al yacimiento produciendo con un gasto bajo de petróleo ya que la permeabilidad es de 10 md en esta zona del yacimiento. (Figura 4.40)

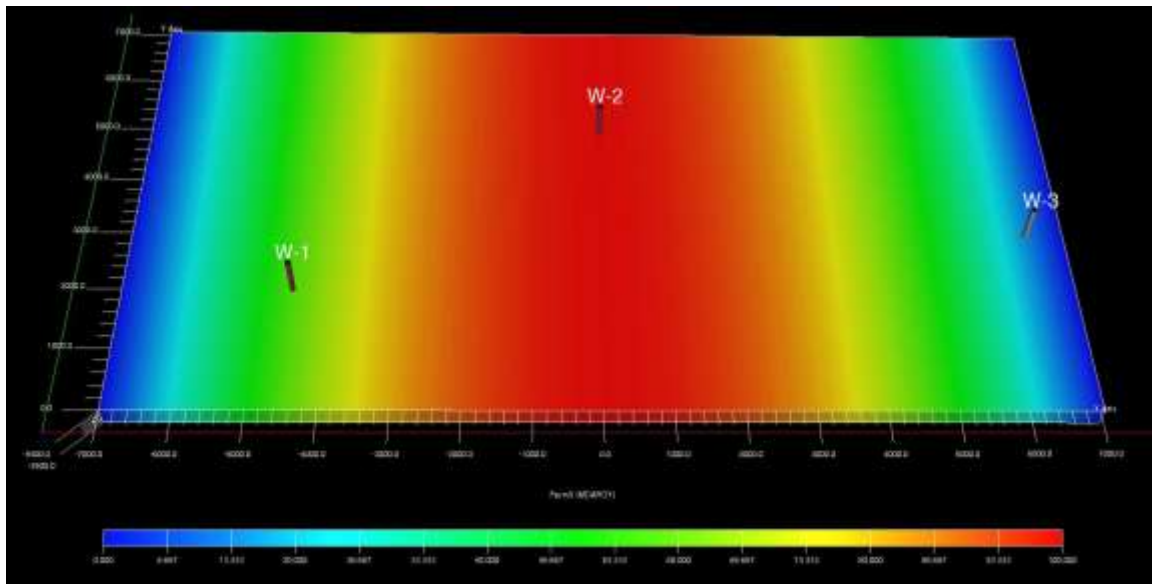


Figura 4.40 Mapa de distribución de permeabilidades $[0:100] \text{ md}$ en la dirección X, del Medio Heterogéneo-Anisotrópico, Caso 5

A continuación se comparó el modelo analítico del medio heterogéneo-anisotrópico, con el modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico.

4.6.3 Medio Homogéneo-Isotrópico

Se realizó la validación del modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico obtenida por Camacho et al. (1994), con el simulador numérico donde la permeabilidad $k_x = k_y = 34 \text{ md}$. (Figuras 4.41 y 4.42)

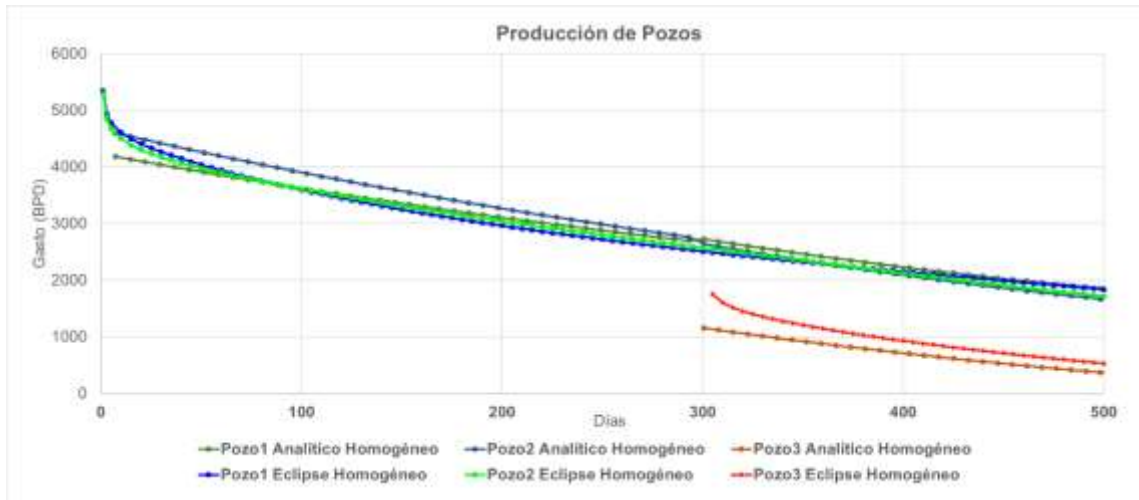


Figura 4.41 Gráfica del Caso 5, Medio Homogéneo-Isotrópico, ($k_x = k_y = 34 \text{ md}$) produciendo 3 pozos, a diferentes tiempos, comparando el Modelo Analítico con el Simulador Eclipse

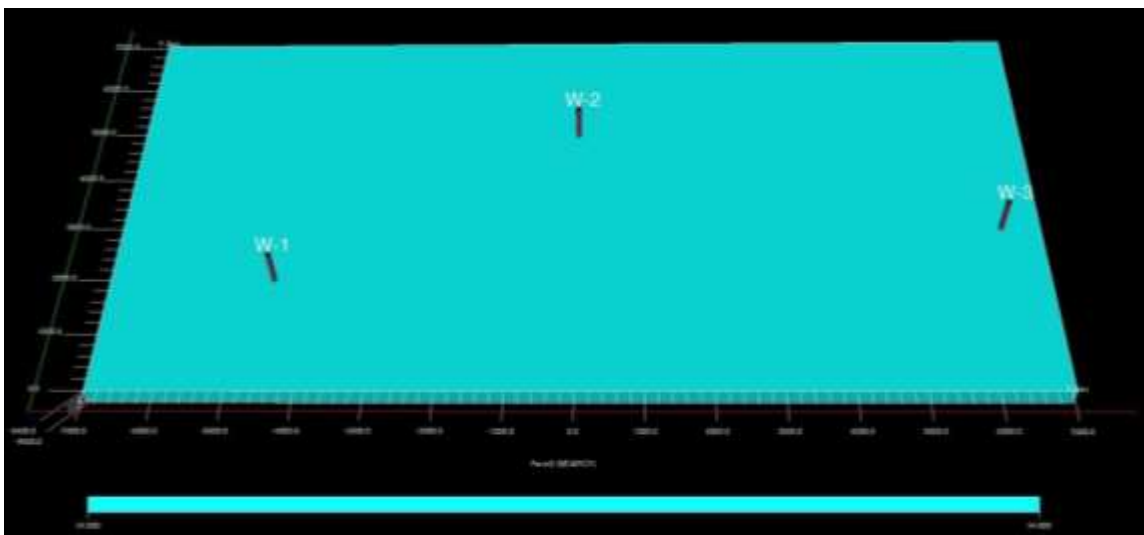


Figura 4.42 Mapa de la permeabilidad de 34 md en la dirección X, del Medio Homogéneo-Isotrópico, Caso 5

4.6.4 Comparación Modelos Analíticos

La comparación del Caso 5, de los modelos analíticos del medio heterogéneo-anisotrópico con el medio homogéneo-isotrópico, se observa que los pozos 1 y 2 del medio heterogéneo-anisotrópico, tienen mayor producción de petróleo debido a la anisotropía y posición en el yacimiento (Figuras 4.43 y 4.44), mientras que el pozo 3 tiene una menor producción de petróleo debida a la posición donde se encuentra ubicado.

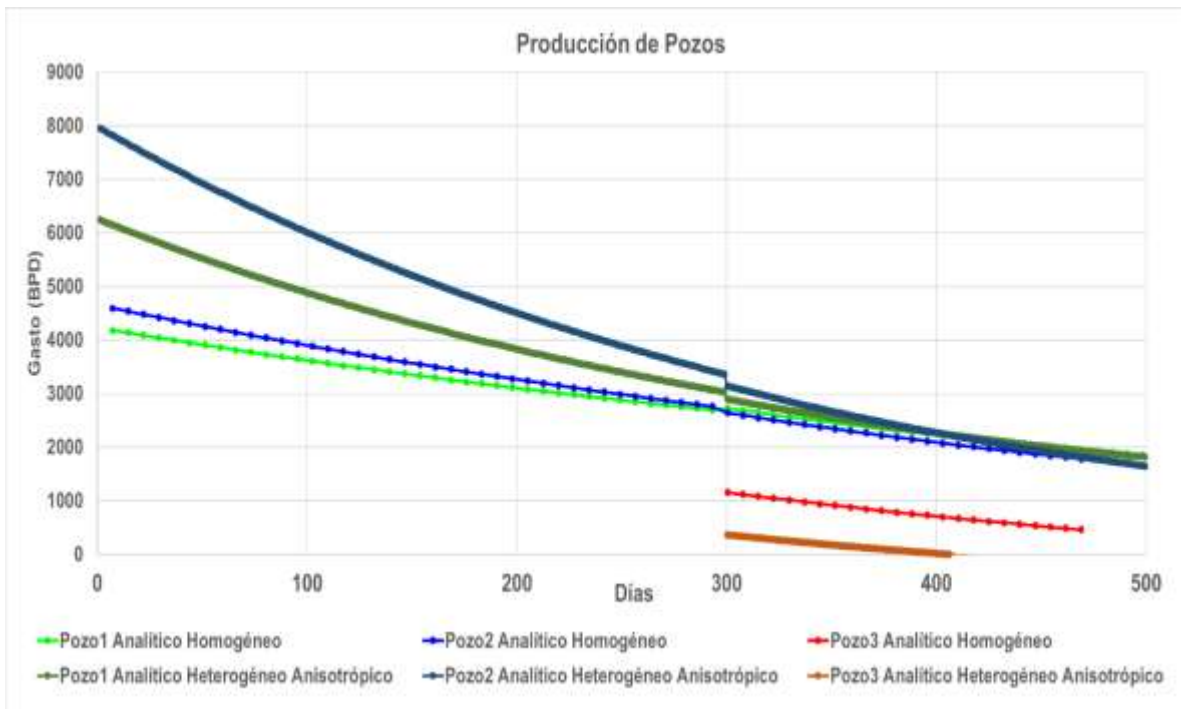


Figura 4.43 Gráfica de Comparación de Modelos Analíticos, del Medio Homogéneo-Isotrópico con el Medio Heterogéneo-Anisotrópico ($k_x = [0:100]$ md; $k_y = 34$ md)

La producción de los pozos en el modelo heterogeneo-anisotrópico, para el pozo 1 y 2 presentan altos gastos de petróleo, mientras que el pozo 3 produce con muy poco gasto de petróleo durante un corto tiempo, esto se debe a la variación de permeabilidad y a la posición donde se encuentran produciendo los pozos en el yacimiento.

A continuación el modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), se compara con el modelo para el caso homogéneo-anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 68$ md), generado con el simulador numérico, se observa una mayor producción de petróleo de los pozos el medio homogéneo-anisotrópico, debida a la mayor permeabilidad en la dirección Y. (Figura 4.44)

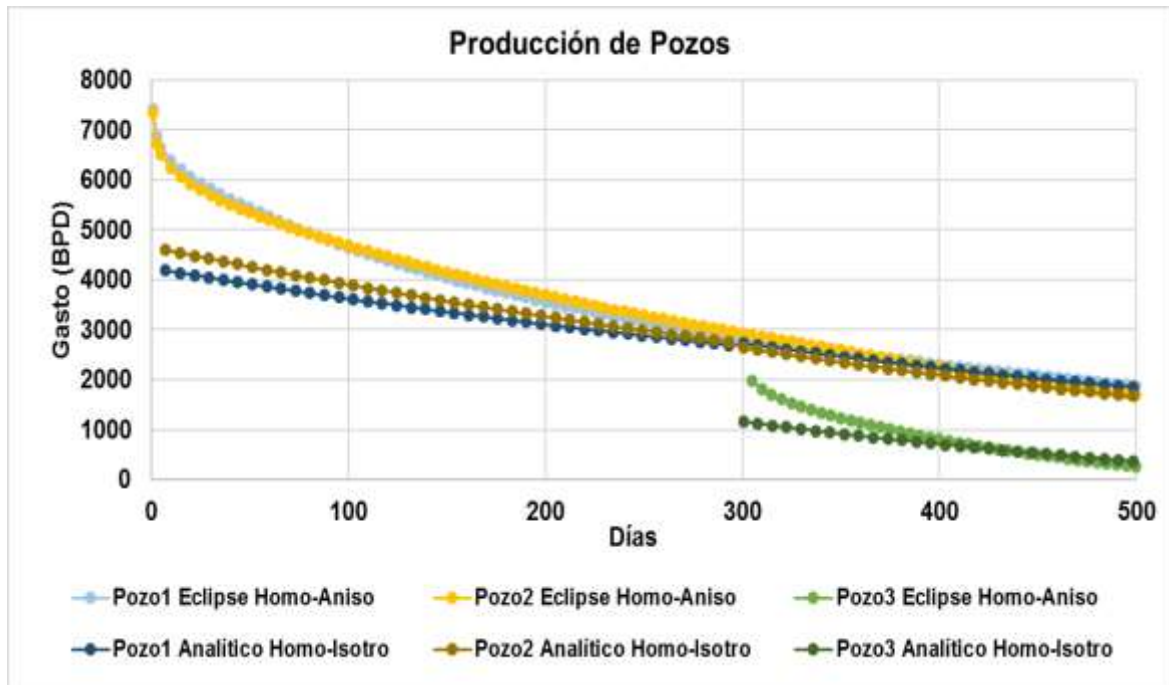


Figura 4.44 Gráfica de Comparación del Modelo Analítico, del Medio Homogéneo-Isotrópico ($k_x = k_y = 34$ md), y el Modelo del Simulador el Medio Homogéneo-Anisotrópico ($k_x = 34$ md; $k_y = 68$ md)

Es muy común encontrar estos casos tanto en México como en el mundo, donde los yacimientos producen a través de pozos multiples, y se presenta una alta heterogeneidad y anisotropía en el yacimiento, dando prioridad a este tipo de modelo, que nos permite estudiar de mejor manera el comportamiento del yacimiento, para incrementar el factor de recuperación, optimizar los recursos económicos, naturales y humanos que nos ayudan al entendimiento del flujo de fluidos en medios porosos.

Mientras que un modelo analítico del medio homogéneo-isotrópico presenta muchas limitantes, con propiedades petrofísicas constantes y con zonas en el yacimiento de alto potencial de producción de hidrocarburos, cuando en realidad no existen.

Con base en los resultados presentados en esta tesis, el modelo analítico heterogéneo-anisotrópico es una herramienta que permite evaluar de manera rápida, el comportamiento de la producción de pozos múltiples en los yacimientos, posicionando los pozos en zonas donde la calidad de la roca es la mejor, evitando la interferencia entre pozos, considerando el daño y produciendo los pozos a diferentes tiempos.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

- ❖ La solución analítica considera pozos iniciando a producir a diferentes tiempos, daños y presiones de fondo de un yacimiento heterogéneo y anisotrópico de una porosidad
- ❖ Las sumas infinitas que están presentes en la solución, se expresan en una forma condensada la cual es importante para reducir el tiempo de computo, cuando sea usado el algoritmo de optimización y aumentar la precisión de la solución
- ❖ La producción de petróleo de los pozos depende de la posición donde estén ubicados, de la interferencia que hay entre ellos y de las características estáticas y dinámicas que tenga el yacimiento
- ❖ La solución analítica se obtuvo a través de la combinación de los métodos de la transformada de Laplace, separación de variables, funciones de Green y polinomios de Legendre. Se consideran buenas aproximaciones para la sumatoria de la solución analítica, valores de $N=20$ para los polinomios de Legendre, del rango de $6 \leq N \leq 45$
- ❖ El daño o estimulación que tiene cada pozo afecta al comportamiento de la producción de todo el sistema de pozos múltiples del yacimiento
- ❖ La importancia de tener un modelo analítico heterogéneo y anisotrópico de una porosidad, nos permite posicionar los pozos en las mejores zonas de producción del yacimiento, tener un mejor estudio sobre el comportamiento de los pozos múltiples más afines a la realidad de los yacimientos petroleros, lo que en un modelo homogéneo no se toman en cuenta estas variaciones en permeabilidad

NOMENCLATURA

Variable

A	Área del yacimiento, ft^2
D	Coeficiente de declinación
G	Función de Green
k_x	Permeabilidad en la dirección X, L^2
k_y	Permeabilidad en la dirección Y, L^2
k_ζ	Permeabilidad en la dirección ζ
k_η	Permeabilidad en la dirección η
k_{ref}	Permeabilidad de referencia, L^2
nw	Número de pozos
p_i	Presión inicial, [psi]
P_n	Polinomios de Legendre
p_{wDj}	Presión adimensional del pozo j
q_{wj}	Gasto de producción del pozo j, [bpd]
q_{wDj}	Gasto de producción adimensional del pozo j
r_w	Radio del pozo, [ft]
s	Parámetro del espacio de Laplace
S_j	Factor de daño del pozo j

Variable

t	Tiempo, horas, días
t_D	Tiempo adimensional
(x, y)	Sistema de coordenadas, [ft]
x_e	Longitud del yacimiento en x, [ft]
x_{eD}	Longitud adimensional del yacimiento en x
y_e	Longitud del yacimiento en y, [ft]
y_{eD}	Longitud adimensional del yacimiento en y
μ	Viscosidad del fluido, [cp]
ϕ	Porosidad
h	Espesor, [ft]

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Camacho, R., Rodríguez, F., Galindo, N. A. and Prats, M., 1994, "Optimum Position for Wells Producing at Constant Wellbore Pressure", SPE 28715, International Petroleum Conference & Exhibition of Mexico held in Veracruz, Mexico, October 10-13. <http://dx.doi.org/10.2118/28715-PA>
- [2] Rodríguez F. y Cinco H., 1993, "A New Model for Production Decline", SPE 25480, The Production Operations Symposium held in Oklahoma City, OK, USA, March 21-23. <http://dx.doi.org/10.2118/25480-MS>
- [3] Lu, J. and Tiab, D., 2008, "Productivity Equations For Multiple Wells System in Anisotropic Reservoirs", Petroleum Society 2008-099, The Canadian International Petroleum Conference/SPE Gas Technology Symposium, Calgary, Alberta, Canada, June 17-19
https://www.researchgate.net/publication/254539977_Productivity_Equations_for_Multiple_Wells_System_in_Anisotropic_Reservoirs
- [4] Yanyan G., Yanliang, N., Dejin, H., Xisheng, Z., and Kewen, L., 2008, "Prediction of Production in Oil Reservoirs by Considering by Change in Number of Production Wells", SPE 117149, SPE Eastern Regional/AAPG Eastern Section Joint Meeting held in Pittsburgh, Pennsylvania, USA, October 11-15. <https://doi.org/10.2118/117149-MS>
- [5] Camacho, R., "Apuntes de Matemáticas Aplicadas", 2016, UNAM, Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México
- [6] Gradshteyn, I. and Ryzhik, I., 2007, "Table of Integrals, Series and Products", seventh edition, Elsevier, USA
- [7] Magnus, W., and Oberhettinger, F., 1954, "Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics", Chelsea, New York, USA
- [8] Abramowitz, M., and Stegun, I., 1972, "Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables", National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, USA
- [9] Marhaendrajana, T., 2000, "Modeling and Analysis of Flow Behavior in Single and Multiwell Bounded Reservoirs", Texas A&M University, USA, May

-
-
- [10] Samaniego, F., "Apuntes de Mecánica de Yacimientos", 2014, UNAM, Posgrado de Ingeniería, Ciudad Universitaria, México
- [11] Moon, P. and Spencer, D., 1961, "Field Theory for Engineers", The van nostrad Serie, in electronics and communications, Princeton, Nueva Jersey, USA
- [12] Magulis, V., 1965, "Handbook of Series for Scientists and Engineers", Academic Press, New York, USA
- [13] Zill, D., 1997, "Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado", International Thomson Editores, Sexta Edición, Loyola Marymount University, USA
- [14] Arabloo, M., Heidari, M., and Gerami, S., 2014, "A new approach for analysis of production data from constant production rate wells in gas condensate reservoirs", Journal of Natural Gas Science and Engineering, Tehran, Iran
- [15] Owayed, J., Lu, J. and Tiab, D., 2013, "Multiple Wells system productivity equations in a rectangular reservoir", Journal of Engg. Research Vol 1, Kuwait
- [16] Siemek, J., and Stopa, J., 2006, "Optimization of the wells placement in gas reservoirs using SIMPLEX method", Kraków, Poland
- [17] Marhaendrajana, T., and Blasingame, T., 2001, "Decline Curve Analysis Using Type Curves - Evaluation of Well Performance Behavior in a Multiwell Reservoir System", SPE 71517, Texas A&M U
- [18] Umnuayponwivat, S., Ozkan, E., Raghavan, R., 2000, "Pressure Transient Behavior and Inflow Performance of Multiple Wells in Closed Systems", SPE 62988, SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in Dallas, Texas

APÉNDICE A
POLINOMIOS DE LEGENDRE

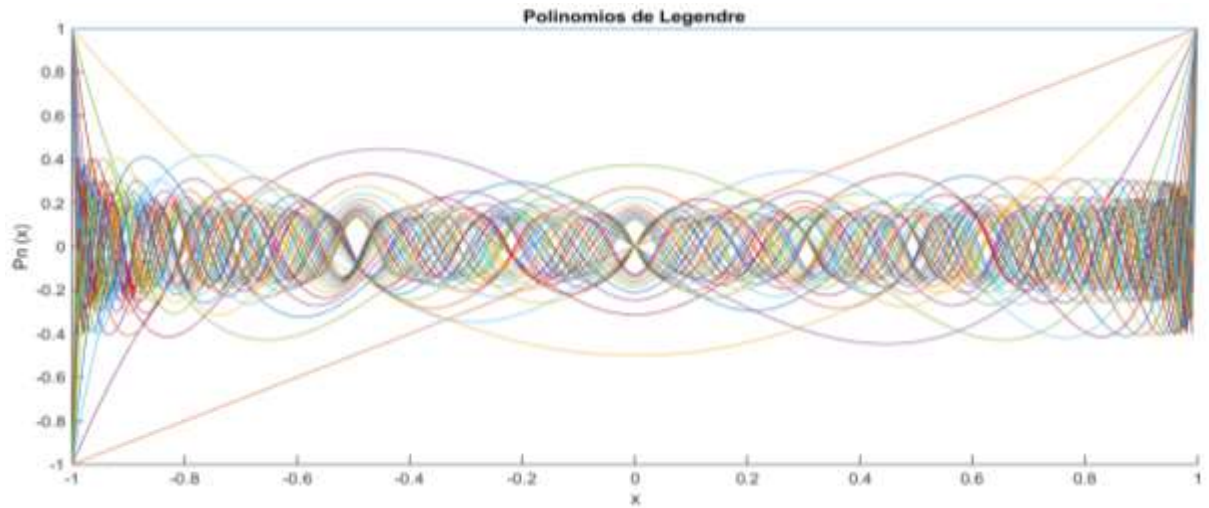


Figura A1.1 Polinomios de Legendre grados $N=[0:45]$

Si consideramos a $\tilde{k}_\zeta = 1 - \zeta^2$, donde $-1 \leq \zeta \leq 1$

$$\tilde{k}'_\zeta = -2\zeta ,$$

$$a_n = \lambda_n = n(n+1) , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(1 - \zeta^2) X'' - 2\zeta X' + a_n X = 0 , \quad \dots \text{(A-1)}$$

La solución está dada por:

$$x_n(\zeta) = C_1 P_n(\zeta) + C_2 Q_n(\zeta) , \quad \dots \text{(A-2)}$$

Donde P_n serán Polinomios de grado “n”, llamados Polinomios de Legendre, Q_n son Funciones de Legendre de segunda clase, como se muestra en el Apéndice:

$$Q_n(\zeta) = P_n(\zeta) \int \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)P_n^2(\zeta)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots \text{ (A-3)}$$

$$\text{Con } a_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \dots \text{ (A-4)}$$

$$\therefore \lambda_n = n(n+1) = a_n, \quad \dots \text{ (A-5)}$$

$$P_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)! (n-k)!} \zeta^{n-2k}, \quad \dots \text{ (A-6)}$$

$$m = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ par} \\ \frac{n-1}{2} & , n \text{ impar} \end{cases}, \quad \dots \text{ (A-7)}$$

$$\therefore p_0(\zeta) = 1; \quad P_1(\zeta) = \zeta; \quad P_2(\zeta) = \frac{1}{2}(-1 + 3\zeta^2), \quad \dots \text{ (A-8)}$$

De las tablas de Gradshteyn et al. (2007):

$$(\zeta^2 - 1) \frac{dP_n}{d\zeta} = n[\zeta P_n(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)], \quad \dots \text{ (A-9)}$$

Y que:

$$(n+1)P_{n+1}(\zeta) - (2n+1)\zeta P_n(\zeta) + nP_{n-1}(\zeta) = 0, \quad \dots \text{ (A-10)}$$

de (A-9) en (A-10)

$$(\zeta^2 - 1) \frac{dP_n}{d\zeta} = n\zeta P_n(\zeta) + (n+1)P_{n+1}(\zeta) - (2n+1)\zeta P_n(\zeta) , \quad \dots \text{(A-11)}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Lo cual se cumple para cualquier valor de n , $P_n(1) = 1$; \forall_n

$$P_0(-1) = 1, P_1(-1) = -1, P_2(-1) = 1, P_3(-1) = -1, P_4(-1) = 1, P_5(-1) = -1, \dots$$

A continuación, se presentan algunas de las gráficas de los polinomios de Legendre, en sus distintas modalidades de grados.

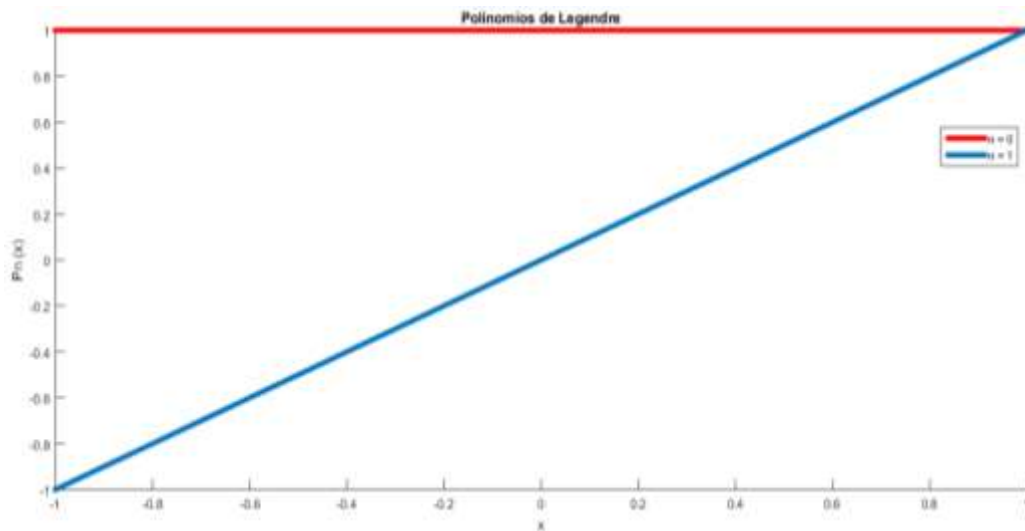


Figura A1.2 Polinomios de Legendre grados $N=0$ y $N=1$

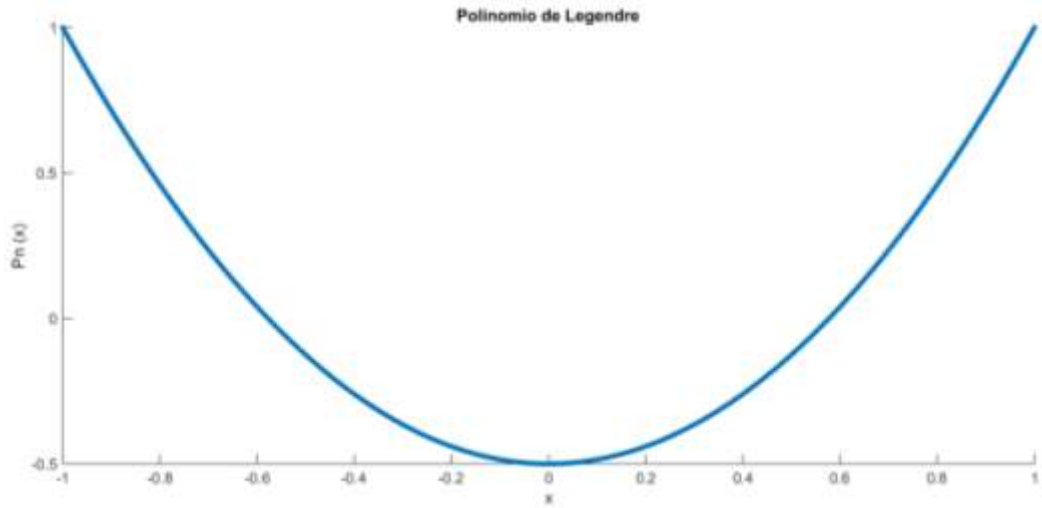


Figura A1.3 Polinomio de Legendre grado N=2

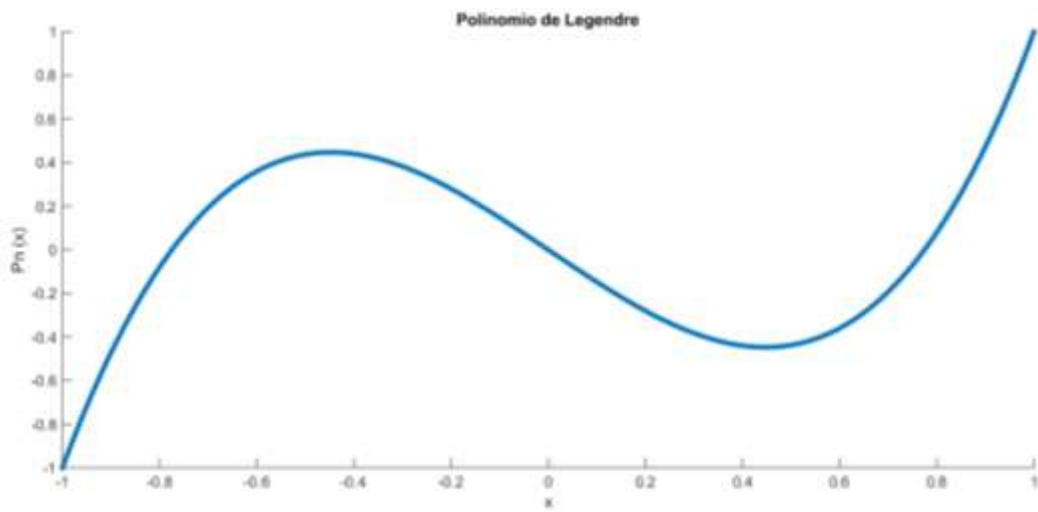


Figura A1.4.- Polinomio de Legendre grado N=3

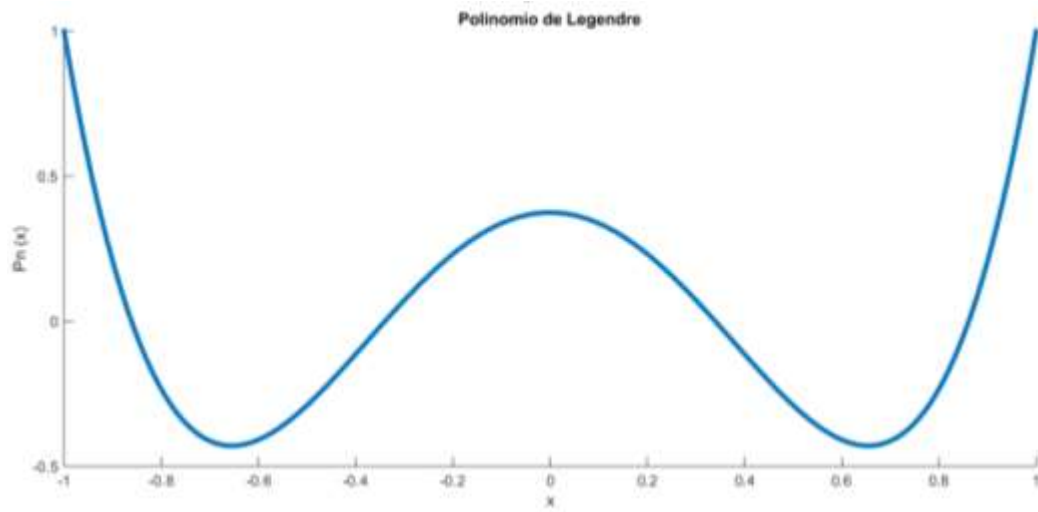


Figura A1.5 Polinomio de Legendre grado $N=4$

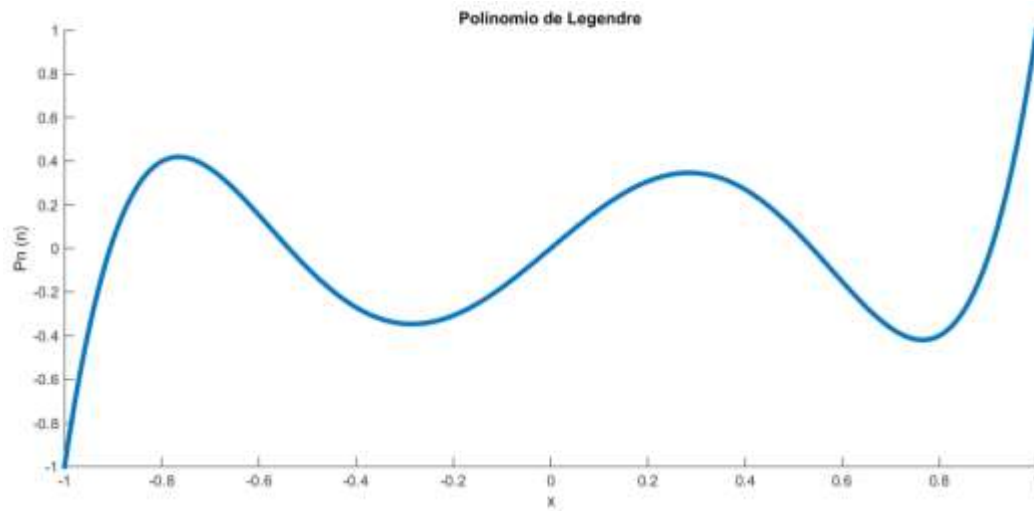


Figura A1.6 Polinomio de Legendre grado $N=5$

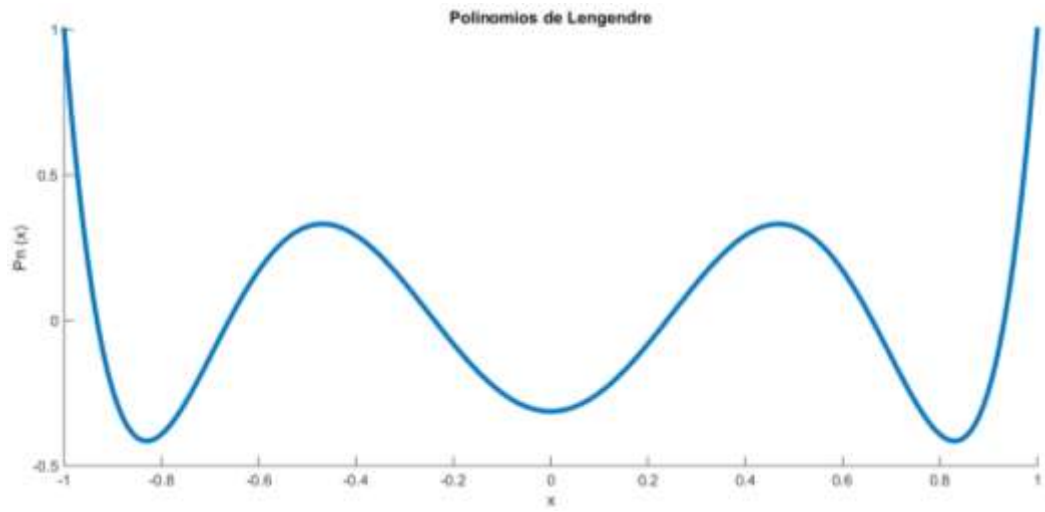


Figura A1.7 Polinomio de Legendre grado $N=6$

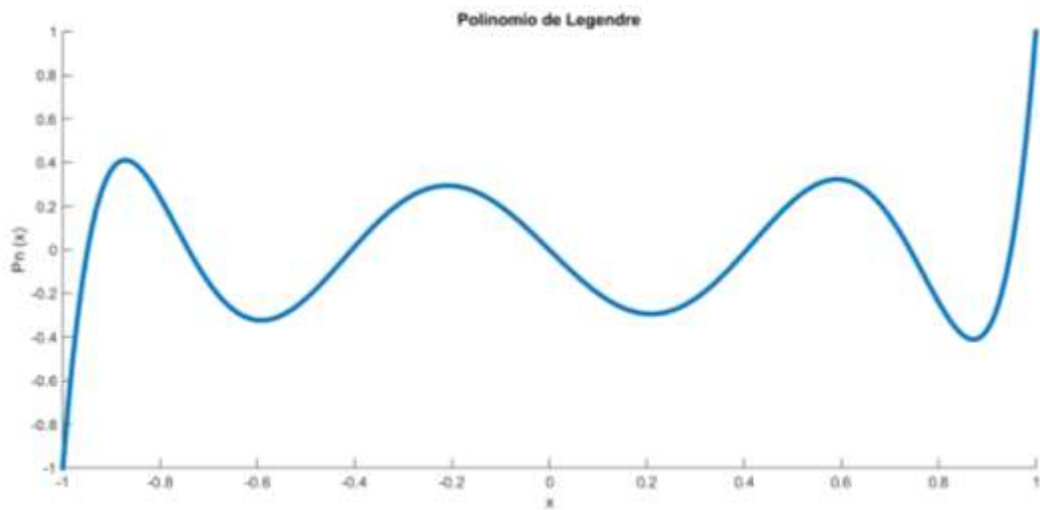


Figura A1.8 Polinomio de Legendre grado $N=7$

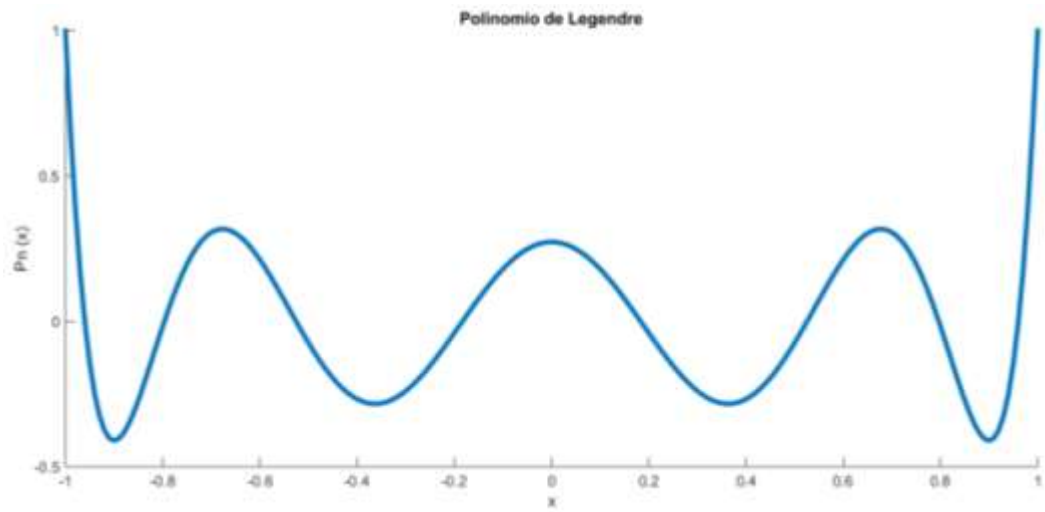


Figura A1.9 Polinomio de Legendre grado $N=8$

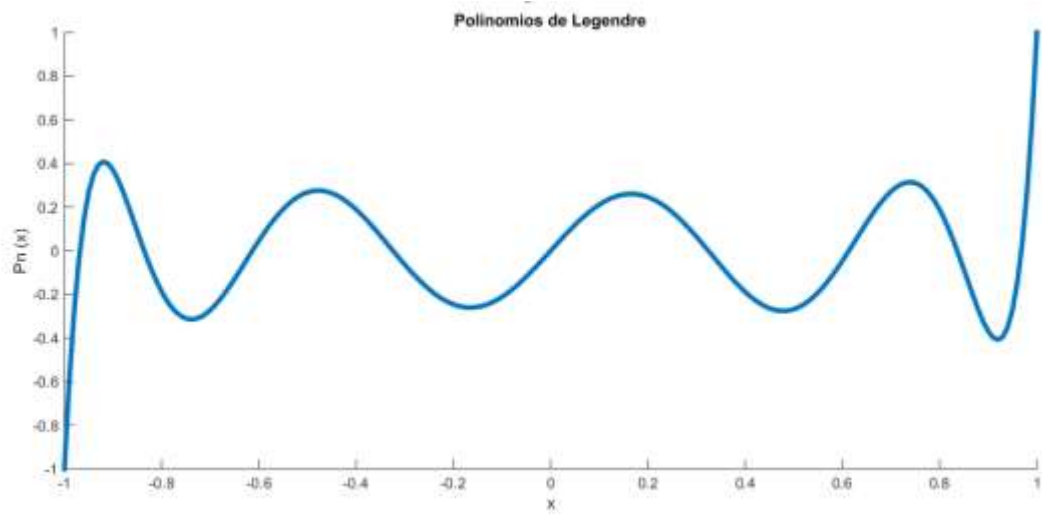


Figura A1.10 Polinomio de Legendre grado $N=9$

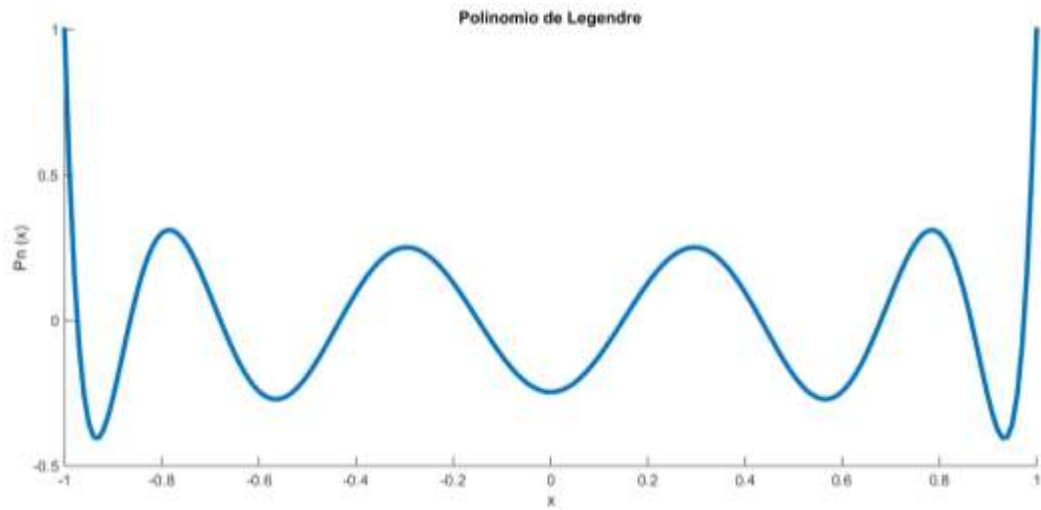


Figura A1.11 Polinomio de Legendre grado $N=10$

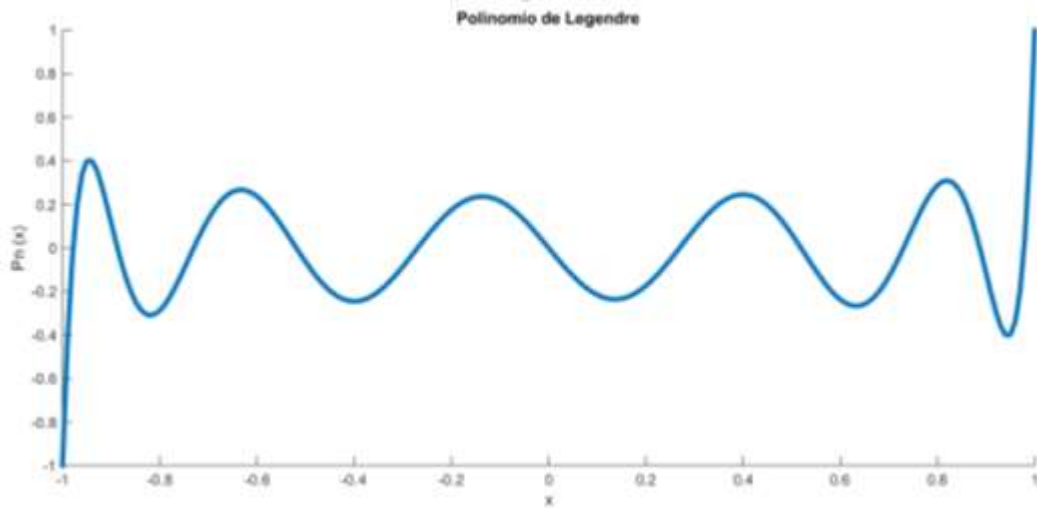


Figura A1.12 Polinomio de Legendre grado $N=11$

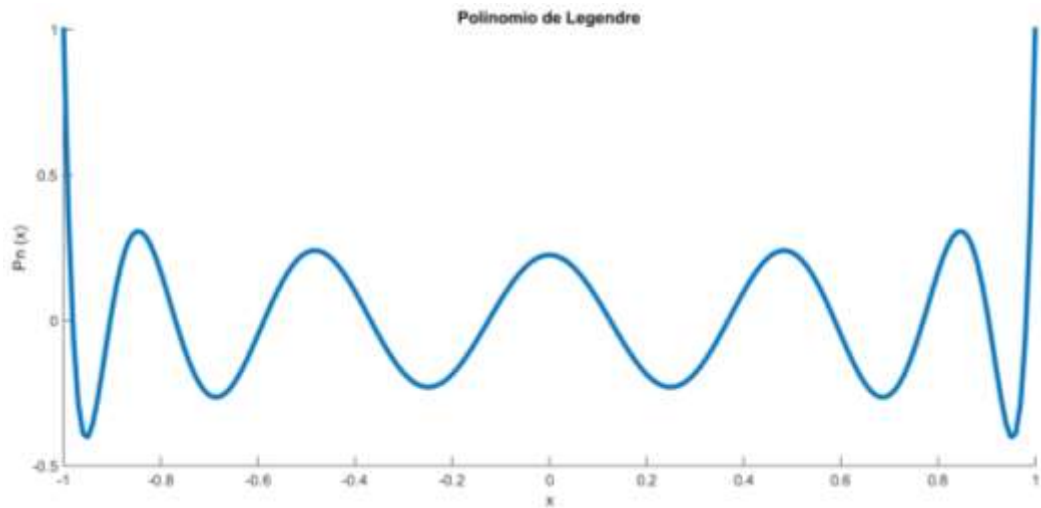


Figura A1.13 Polinomio de Legendre grado $N=12$

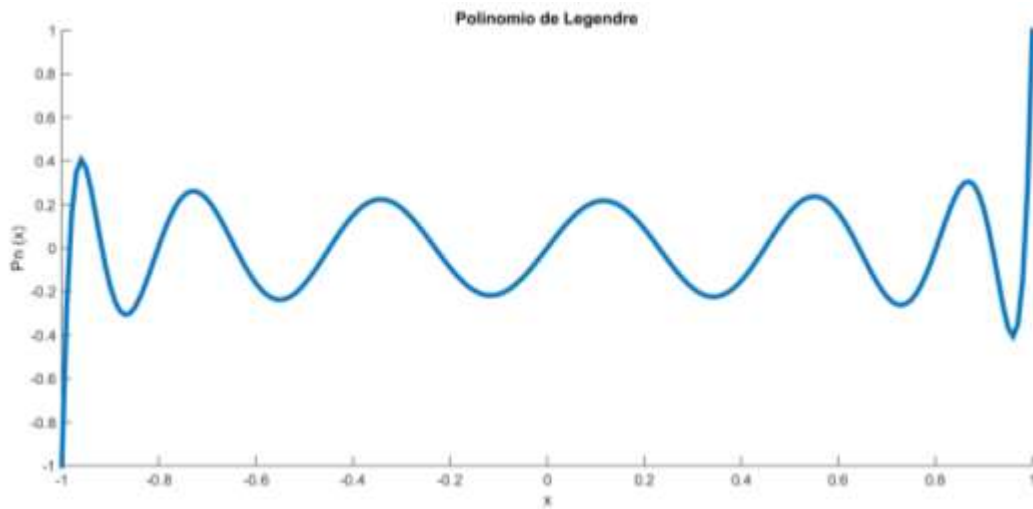


Figura A1.14 Polinomio de Legendre grado $N=13$

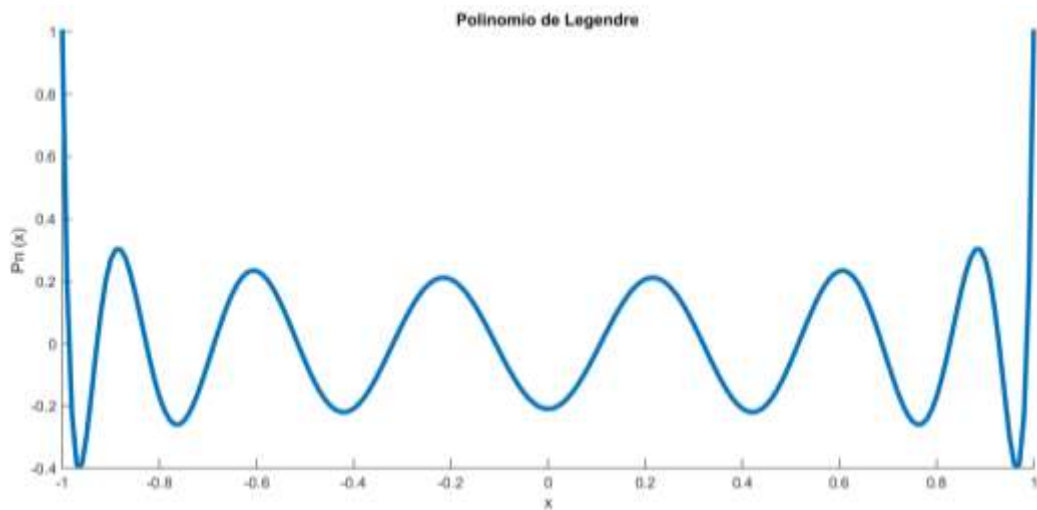


Figura A1.15 Polinomio de Legendre grado $N=14$

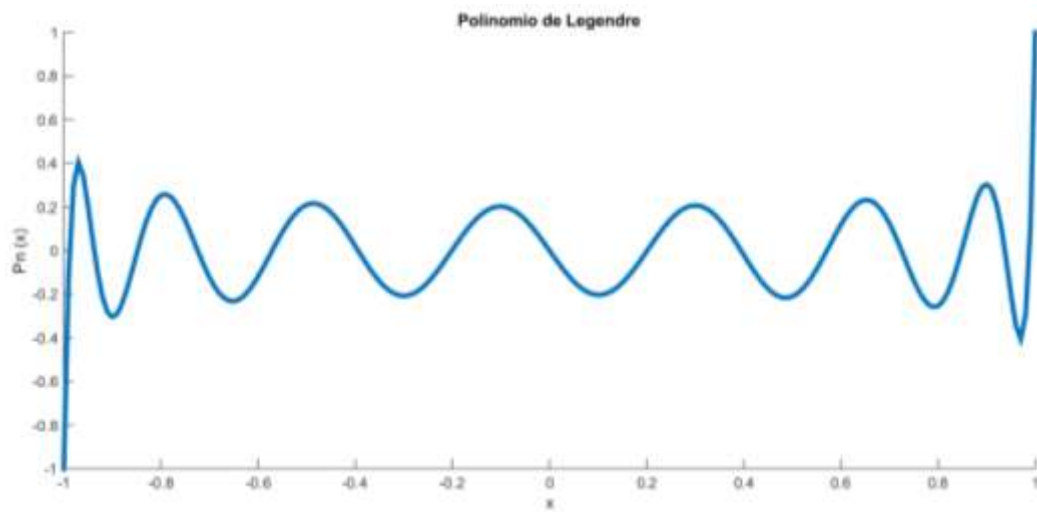


Figura A1.16 Polinomio de Legendre grado $N=15$

Propiedades de Ortogonalidad de los Polinomios

Para un sistema de polinomios $f_n(x)$, grado $[f_n(x)] = n$, es llamado ortogonal en el intervalo $a \leq x \leq b$, con respecto a la función de peso $w(x)$, si:

$$\int_a^b w(x) f_n(x) f_m(x) dx = 0 ; \quad (n \neq m; n, m = 0, 1, 2, \dots) , \quad \dots \text{ (A-12)}$$

La función de peso $w(x) [w(x) \geq 0]$ determina el sistema $f_n(x)$ hasta un factor constante en cada polinomio. La especificación de estos factores se denomina normalización. Para estandarizar adecuadamente los polinomios ortogonales, establecimos:

$$\int_a^b w(x) f_n^2(x) dx = h_n, f_n(x) = k_n x^n + k_n' x^{n-1} + \dots ; \quad (n = 0, 1, 2, \dots) , \quad \dots \text{ (A-13)}$$

Estos polinomios satisfacen un número de relaciones de la misma forma general. Los más importantes son:

$$g_2(x) f_n'' + g_1(x) f_n' + a_n f_n = 0 , \quad \dots \text{ (A-14)}$$

Donde $g_2(x), g_1(x)$ son independientes de n y a_n que depende solo de n .

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{du}{dx} \right] + v(v+1)u = 0 , \quad \dots \text{ (A-15)}$$

Esta ecuación para valores enteros de v (y solo para estos valores), tienen un polinomio en x con solución. Nosotros tenemos $u = P_n(x)$, esta es una solución para $v=n=0,1,2$, donde $P_n(z)$ es un polinomio de enesimo grado en x y puede ser definido como:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n , \quad \dots \text{ (A-16)}$$

Los polinomios de Legendre son un caso especial de los polinomios de Gegenbauer, según Abramowitz et al. (1972).

Una importante propiedad de los polinomios de Legendre es que éstos son ortogonales con respecto al producto escalar definido en L^2 en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_{n'}(x)dx = 0; \text{ para } n \neq n', \quad \dots \text{ (A-17)}$$

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad \dots \text{ (A-18)}$$

En la tabla A1.1, se presentan algunas de las ecuaciones de los polinomios de Legendre.

Tabla A1.1 Ecuaciones de los polinomios de Legendre

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

INFORMACIÓN DEL AUTOR

Para aspectos relacionados con esta tesis

Nombre: Candia Gutiérrez Oscar

Compañía: PEMEX

Activo Integral de Producción Samaria Luna

Correo PEMEX: oscar.candia@pemex.com

Correo personal: ocgmx010@yahoo.com.mx

Teléfono celular: 5951148460