PRIMERA COMPILACIÓN DEL

BOLETÍN

COPADI

PRODUCCIÓN

ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

REVISIÓN

ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

COLABORACIÓN

LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA
LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

UN ESPECIAL AGRADECIMIENTO A LOS PROFESORES DE LA FACULTAD QUE COLABORARON CON EJERCICIOS Y CUYOS NOMBRES APARECEN EN LOS BOLETINES

PRÓLOGO

En esta publicación se presentan 44 números del Boletín COPADI con 188 ejercicios resueltos de asignaturas de la Facultad de Ingeniería, en su mayoría de las que se cursan en su División de Ciencias Básicas. El objetivo de este trabajo es proporcionar a los estudiantes una amplia variedad de problemas en los que se aplican diversos conocimientos que adquieren en las aulas. También contiene exhortos a los estudiantes para que se esfuercen y alcancen sus metas académicas, así como información del Programa "Tutoría para todos" y cápsulas culturales. Todo ello con la finalidad de nutrir la vida académica de la Facultad y alentar la superación y el éxito de sus alumnos en su formación científica básica y en su crecimiento como seres humanos.

Ing. Pablo García y Colomé

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 1 2 DE MAYO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** TIENE COMO OBJETIVO APOYAR LA FORMACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, POR LO QUE SU CONTENIDO ESTARÁ CONSTITUIDO, ESENCIALMENTE, POR EJERCICIOS Y EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LAS DIVERSAS ASIGNATURAS QUE SE IMPARTEN EN TODAS LAS CARRERAS DE INGENIERÍA, ADEMÁS DE INCLUIR ALGUNOS AVISOS SOBRE ACTIVIDADES DE LA COORDINACIÓN, DE SUS PROGRAMAS Y ALGUNA MANIFESTACIÓN CULTURAL QUE SIEMPRE ALIMENTA EL ESPÍRITU.

CÁLCULO I

EJEMPLO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN TRASCENDENTE

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}};\text{.........}\ \text{FÓRMULA}:\ y=\ln u;\ u=f(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}}{u}$$

Si se aplica la fórmula se tiene que:

$$f'(x)=\frac{\dfrac{\dfrac{(1+\operatorname{sen}x)(-\cos x)-(1-\operatorname{sen}x)(\cos x)}{(1+\operatorname{sen}x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}}}{\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}};\text{.....}f'(x)=\frac{-\cos x-\operatorname{sen}x\cos x-\cos x+\operatorname{sen}x\cos x}{2(1+\operatorname{sen}x)^2\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}}$$

$$f'(x)=\frac{-2\cos x}{2(1+\operatorname{sen}x)^2\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}\ldots\Rightarrow\ldots f'(x)=\frac{-\cos x}{(1+\operatorname{sen}x)(1-\operatorname{sen}x)}\ldots\Rightarrow\ldots f'(x)=\frac{-\cos x}{\cos^2 x}\ldots\Rightarrow f'(x)=-\sec x$$

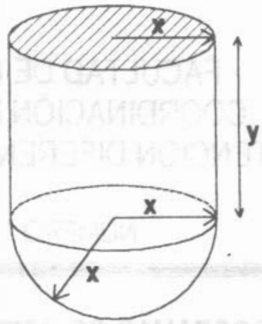
Nota. Seria interesante resolverla mediante la aplicación de las propiedades de la función logaritmo natural y ver cómo se llega al mismo resultado.

CÁLCULO I

CONSIDÉRESE EL SIGUIENTE PROBLEMA DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

Un depósito de petróleo ha de contener 90,000 litros de crudo y debe ser de forma cilíndrica, con base semiesférica y sin tapa. El costo del material usado en la base es de \$ 100.00 por m^2 y para los lados, de \$ 60.00 por m^2. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que el costo de su fabricación sea mínimo y cuál es este costo mínimo?

Solución. En este problema se pretende que el costo en la fabricación del tanque sea mínimo. Lo primero que se ha construir un modelo geométrico:



El modelo matemático preliminar es la siguiente función del costo:

$$C = \text{Costo de la base} + \text{Costo de los lados}$$

de donde, de acuerdo con la figura se tiene que:

$$C = 2\pi x^2(100) + 2\pi xy(60) \ldots \Rightarrow \ldots C = 200\pi x^2 + 120\pi xy$$

Como se sabe, el volumen es de 90,000 litros, que equivalen a 90 m^3. Luego, la ecuación auxiliar está dada por:

$$\frac{2}{3}\pi x^3 + \pi x^2 y = 90 \ldots \Rightarrow \ldots y = \frac{90 - \frac{2}{3}\pi x^3}{\pi x^2}$$

Y, si se sustituye esta expresión en el modelo matemático preliminar, se tendrá entonces el modelo matemático definitivo

$$C = 200\pi x^2 + 120\pi x\left(\frac{90 - \frac{2}{3}\pi x^3}{\pi x^2}\right) \ldots \Rightarrow \ldots C = 200\pi x^2 + 120\left(\frac{90 - \frac{2}{3}\pi x^3}{x}\right) \ldots \Rightarrow \ldots C = 200\pi x^2 + \frac{10{,}800}{x} - 80\pi$$

$$\Rightarrow \ldots C = 120\pi x^2 + \frac{10{,}800}{x}$$

Ahora se resuelve el problema de optimización y se obtiene:

$$\frac{dC}{dx} = 240\pi x - \frac{10{,}800}{x^2} \text{ ;..se..iguala..a..cero..y..} 240\pi x - \frac{10{,}800}{x^2} = 0 \ldots \Rightarrow \ldots 240\pi x^3 = 10{,}800 \ldots \Rightarrow \ldots x = \sqrt[3]{\frac{45}{\pi}} \approx 2.43$$

Luego, $x \approx 2.43$ es un valor crítico. Se obtiene la segunda derivada y se sustituye en ella el valor crítico. Así,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 240\pi + \frac{21{,}600}{x^3} \text{ ;..... } x \approx 2.43 \ldots \Rightarrow \ldots \frac{d^2C}{dx^2} > 0$$

Por lo que se tiene un mínimo relativo y si se calcula "y" se llega a:

$$y = \frac{90 - \frac{2}{3}\pi\left(\frac{45}{\pi}\right)}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{45}{\pi}}\right)^2} \ldots \Rightarrow \ldots y \approx 3.23$$

Finalmente, el radio de la base deberá ser de 2.43 m y la altura de 3.23 m, y el costo mínimo de:

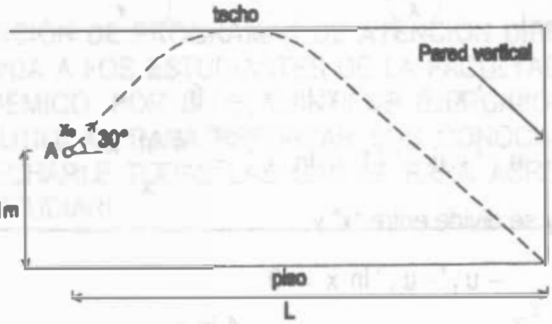
$$C = 120\pi(2.43)^2 + 10{,}800 / 2.43 \text{ ; Costo mínimo} = \$\ 6{,}670.54$$

CINEMÁTICA

CONSIDÉRESE EL SIGUIENTE PROBLEMA RELACIONADO CON EL TIRO PARABÓLICO:

Desde el punto A de la figura, se lanza una pelota pequeña dentro de un recinto de 3.5 m de altura, con una cierta velocidad v_0, la ccual forma un ángulo de 30^0 con respecto a la horizontal, tal como se muestra en la figura. Determinar:

a) La máxima rapidez con la que puede lanzarse la pelota de modo que no toque el techo y,
b) La mínima distancia L a la cual se debe ester retirado de la pared vertical para que, después de lanzar la pelota y no tocar el techo, ésta no choque con dicha pared antes de tocar el piso.



Solución. Las condiciones iniciales en el punto A son: $\theta = 30^0$, $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$; y se puede escribir que:

$a = -g$, de donde $a = -9.81$ y si se integra se llega a: $v = -9.81\,t + C$, y $C = v_0 \text{ sen } 30^0 = v_0/2$. Luego $v = -9.81\,t + v_0/2$. Si se vuelve a integrar, se tiene

$$y = \frac{-9.81t^2}{2} + \frac{v_0 t}{2} + C = -4.905\,t^2 + 0.5\,v_0 t$$

donde la constante $C = 0$ por las condiciones iniciales.

a) Para calcular la velocidad inicial se utilizan como condiciones: $\theta = 30^0$, $v = 0$, $y = 2.5$ m y entonces:

$$0 = -9.81\,t + 0.5\,v_0 \;\Rightarrow\; v_0 = 19.62\,t.$$

se utiliza la ecuación obtenida para calcular "y", y se sustituye en ella la última expresión de la velocidad inicial, se llega a:

$$2.5 = -4.905\,t^2 + 0.5\,(19.62\,t)\,t \;\Rightarrow\; 2.5 = 4.905\,t^2 \;\Rightarrow\; t = 0.7139 \text{ s} \;\Rightarrow\; v_0 = 19.62\,(0.7139) = 14 \text{ m/s}$$

b) Para $y = -1$, en la misma expresión de "y", se tiene que:

$$-1 = -4.905\,t^2 + 7\,t \;\Rightarrow\; 4.905\,t^2 - 7\,t - 1 = 0 \;\Rightarrow\; t = 1.5579 \text{ s}.$$

y en el sentido "x" se tiene que:

$V_x = 14 \cos 30^0 = 12.124$ m / s. Luego, finalmente, $x = L = 12.124\,(1.5579) = 18.89$ m.

ECUACIONES DIFERENCIALES

Si $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$, y $y_3 = x(1 + \ln x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 y'' - x y' + y = 0$, obtener la solución general de la ecuación diferencial $x^2 y'' - x y' + y = 4 x \ln x$.

Solución. Una solución de la homogénea asociada es $y_H = c_1 x + c_2 x \ln x$ y, si se utiliza el método de variación de parámetros, se tiene que:

$y = u_1 x + u_2 x \ln x$; donde u_1 y u_2 son funciones de x. Si se divide la ecuación diferencial original entre x^2, se llega a:

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{4 \ln x}{x}$$

De acuerdo con el método, es posible construir el sistema

$$\begin{bmatrix} x & x \ln x \\ 1 & x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4 \ln x}{x} \end{bmatrix}$$

o bien,

$$u_1' x + u_2' x \ln x = 0$$

$$u_1' + u_2'(1 + \ln x) = \frac{4 \ln x}{x}$$

Se multiplica la primera ecuación por (- 1) y se divide entre "x" y :

$$-u_1' - u_2' \ln x = 0$$

$$u_1' + u_2' + u_2' \ln x = \frac{4 \ln x}{x}$$

de donde, se obtienen las derivadas de las funciones que definen a u_1 y a u_2. Para obtener éstas, se integran las expresiones u_1' y u_2'. Así

$$u_2' = \frac{4 \ln x}{x} \ldots \Rightarrow \ldots u_2 = \int \frac{4 \ln x}{x} dx = 2 \ln^2 x + c_2; \ldots\ldots\ldots u_1' = -\frac{4 \ln^2 x}{x} \ldots \Rightarrow \ldots u_1 = -\int \frac{4 \ln^2 x}{x} dx = \frac{-4 \ln^3 x}{3} + c_1$$

Se sustituyen estos valores en la expresión $y = u_1 x + u_2 x \ln x$ y entonces se llega a:

$$y = \left(\frac{-4 \ln^3 x}{3} + c_1\right) x + \left(2 \ln^2 x + c_2\right) x \ln x \ldots \Rightarrow \ldots y = -\frac{4}{3} x \ln^3 x + c_1 x + 2x \ln^3 x + c_2 x \ln x$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + \frac{2}{3} x \ln^3 x$$

CULTURA

Gabriel Zaid es un mexicano nacido en Monterrey, Nuevo León, el 14 de octubre de 1934, que estudió ingeniería, administración y finalmente se dedicó al ensayo, a la prosa y a la poesía. Se dice que su escritura ha derivado hacia una lírica de la brevedad y la concentración en que la ironía, la nostalgia, el sentimiento del tiempo, se expresan con un tono cada vez más personal y con una economía de medios admirable. Uno de sus poemas, cuyo nombre es Práctica Mortal, dice así: Subir los remos y dejarse llevar / con los ojos cerrados. / Abrir los ojos y encontrarse / vivo: se repitió el milagro. / Anda, levántate y olvida / esta ribera oculta / en que has desembarcado.

AVISO. ESTUDIANTES DE INGENIERÍA GEOLÓGICA DE PRIMER INGRESO O PRIMEROS SEMESTRES. REUNIÓN CON COMPAÑEROS DE SEMESTRES SUPERIORES, EL JUEVES 4, A LAS 14:00 HORAS, EN EL SALÓN 121 DE LA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS.

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 2 17 DE MAYO DE 2000

EDITORIAL

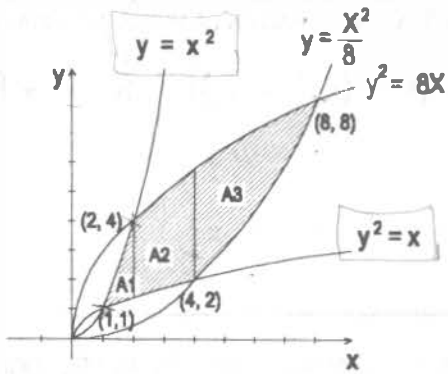
ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. POR ELLO, CONTIENE EJERCICIOS RESUELTOS DE LAS DIFERENTES ASIGNATURAS. OJALA SEA DE UTILIDAD PARA REFORZAR SUS CONOCIMIENTOS. SE ACERCA EL FINAL DEL SEMESTRE Y ES TIEMPO DE "ECHARLE TODAS LAS GANAS" PARA ACREDITAR LAS ASIGNATURAS QUE SE CURSAN. ¡MUCHA SUERTE Y A ESTUDIAR!

CÁLCULO II

ÁREA ENTRE CURVAS

CALCULAR EL ÁREA LIMITADA POR LA GRÁFICA DE LAS PARÁBOLAS: $y = x^2;\ldots y = \dfrac{x^2}{8};\ldots y^2 = x;\ldots y^2 = 8x$

SOLUCIÓN. LA GRÁFICA DE LA SUPERFICIE LIMITADA POR ESTAS PARÁBOLAS SE MUESTRA EN LA FIGURA Y LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE ELLAS SE OBTIENEN MEDIANTE SENCILLOS PROCESOS DE IGUALACIÓN Y/O SUSTITUCIÓN.



(1, 2)

PARA DETERMINAR EL VALOR DEL ÁREA, SE DIVIDE ÉSTA EN TRES PARTES PARA QUE SEA FACTIBLE APLICAR LA EXPRESIÓN QUE DEFINE EL ÁREA ENTRE DOS CURVAS, LA QUE SE EXPRESA COMO: $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. Y PARA CADA PARTE SE CONSTRUYE Y REALIZA LA CORRESPONDIENTE INTEGRAL DEFINIDA, TENIENDO CUIDADO EN ESCOGER ADECUADAMENTE LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN. ASÍ, SE TIENE QUE:

$x^2 - \sqrt{x}$

$$A_1 = \int_1^2 (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1.114\ u^2$$

$$A_2 = \int_2^4 \left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\left(2\sqrt{2} - 1\right)\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_2^4 = \left(2\sqrt{2} - 1\right)\left(\frac{16}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \approx 6.304\ u^2$$

$$A_3 = \int_4^8 \left(2\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{4\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{24}\right]_4^8 = \left(\frac{128}{3} - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3}\right) \approx 8.915\ u^2$$

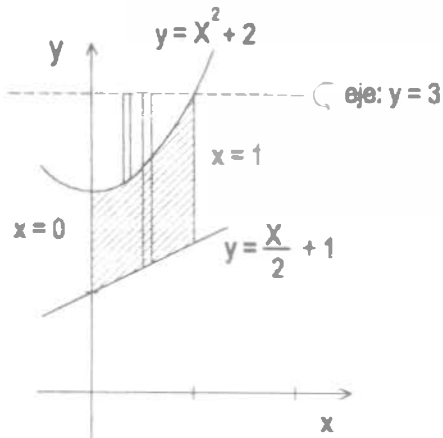
FINALMENTE, EL ÁREA PEDIDA ES $A = A_1 + A_2 + A_3 = 1.114 + 6.304 + 8.915 \approx 16.333\ u^2$.

CÁLCULO II

CALCULAR EL VOLUMEN QUE SE GENERA AL HACER GIRAR, ALREDEDOR DEL EJE Y = 3, LA SUPERFICIE LIMITADA POR LAS GRÁFICAS DE

$$y = x^2 + 2 ;\ldots\ y = \frac{x}{2} + 1 ,\ldots\ x = 0 ;\ldots\ x = 1 .$$

SOLUCIÓN. EN LA FIGURA SE OBSERVA LA SUPERFICIE LIMITADA POR LA PARÁBOLA Y LA RECTA, ASÍ COMO LA RECTA Y = 3, QUE ES EL EJE ALREDEDOR DEL CUAL GIRA PARA GENERAR EL VOLUMEN PEDIDO.



PARA CALCULAR EL VOLUMEN, SE DEBE EFECTUAR LA RESTA DE DOS VOLÚMENES: EL QUE SE GENERA AL GIRAR ALREDEDOR DEL EJE LA SUPERFICIE LIMITADA POR ÉSTE Y LA RECTA, MENOS EL GENERADO AL GIRAR SOBRE DICHO EJE, LA SUPERFICIE LIMITADA POR ÉL Y POR LA PARÁBOLA. SI AMBOS VOLÚMENES SE CONSIDERAN EN LA MISMA INTEGRAL DEFINIDA SE TIENE QUE:

$$V = \pi \int_0^1 \left\{ \left[3 - \left(\frac{x}{2} + 1 \right) \right]^2 - \left[3 - \left(x^2 + 2 \right) \right]^2 \right\} dx = \pi \int_0^1 \left[\left(2 - \frac{x}{2} \right)^2 - \left(1 - x^2 \right)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(3 - 2x + \frac{9}{4} x^2 - x^4 \right) dx = \pi \left[3x - x^2 + \frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{51}{20} \pi u^3$$

ÁLGEBRA

DETERMINAR UNA MATRIZ "X", SI EXISTE, QUE SATISFAGA LA ECUACIÓN AX = BC, DONDE

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN. POR CONFORMABILIDAD SE PUEDE ESTABLECER LO SIGUIENTE: COMO LA MATRIZ "A" ES DE ORDEN 2 x 3, LA "B" DE ORDEN 2 x 4 Y LA "C" DE ORDEN 4 x 1, ENTONCES EL PRODUCTO "BC" ES DE ORDEN 2 x 1 Y POR LO TANTO LA MATRIZ "X" DEBE SER DE ORDEN 3 x 1. POR OTRA PARTE, LA MATRIZ "X" NO PUEDE "DESPEJARSE" YA QUE "A" NO TIENE INVERSA POR NO SER CUADRADA; SIN EMBARGO PUEDE ESTABLECERSE LO SIGUIENTE:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{31} \\ -x_{11} + x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

POR IGUALDAD DE MATRICES: $\begin{matrix} x_{11} + 2x_{31} = 1 \\ -x_{11} + x_{31} = -4 \end{matrix}$ Y SE APLICA EL MÉTODO DE GAUSS A ESTE SISTEMA DE ECUACIONES, DE DONDE:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

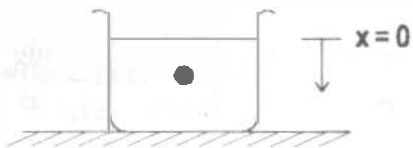
EL SISTEMA EQUIVALENTE ES: $\begin{matrix} x_{11} + 2x_{31} = 1 \\ 3x_{31} = -3 \end{matrix}$ ENTONCES: $\begin{matrix} x_{31} = -1 \\ x_{11} = 3 \end{matrix}$

COMO LA VARIABLE "x_{21}" NO INTERVIENE, PUEDE TOMAR CUALQUIER VALOR. ESTO SIGNIFICA QUE UNA INFINIDAD DE MATRICES "X" SATISFACEN LA ECUACIÓN Y SU FORMA GENERAL ES:

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ -1 \end{bmatrix} \forall \ a \in \Re$$

DINÁMICA DE SISTEMAS FÍSICOS

PROBLEMA. SE TIENE UN OBJETO DE MASA m QUE SE DEJA CAER EN UN RECIPIENTE QUE CONTIENE UN FLUÍDO CON COEFICIENTE DE FRICCIÓN VISCOSA "B". CALCULAR LAS CARACTERÍSTICAS CINEMÁTICAS (ACELERACIÓN, VELOCIDAD Y POSICIÓN) DEL OBJETO DENTRO DEL RECIPIENTE SI SE DEJA CAER CON UNA VELOCIDAD INICIAL v_0.



SOLUCIÓN. SI "f" ES LA FUERZA DE FRICCIÓN VISCOSA, F_i LA FUERZA INERCIAL Y "W" EL PESO DEL OBJETO, ENTONCES EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE QUEDA COMO:

$$\begin{matrix} f \ \ F_i \\ \uparrow \ \ \uparrow \\ \otimes \\ \downarrow W \end{matrix}$$

DE DONDE: $-W + f + F_i = 0 \ldots \Rightarrow \ldots W = f + F_i \ldots\ldots(1)$

COMO SE SABE QUE $W = mg \ ; \ f = Bv \ ; \ F_i = m\dfrac{dv}{dt}$, ENTONCES SE SUSTITUYEN ESTAS EXPRESIONES EN (1) Y SE LLEGA A:

$$mg = Bv + m\frac{dv}{dt} \ldots\ldots\ldots (2)$$

SI AHORA ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL SE RESUELVE MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE, SE OBTIENE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$\frac{mg}{s} = BV(s) + m[sV(s) - v_0] \Rightarrow (B + ms)V(s) = \frac{mg}{s} + mv_0 \Rightarrow V(s) = \frac{mg + mv_0 s}{s(B + ms)} \Rightarrow V(s) = \frac{g + v_0 s}{s\left(s + \frac{B}{m}\right)}$$

SE DESCOMPONE EL SEGUNDO MIEMBRO DE ESTA EXPRESIÓN EN FRACCIONES PARCIALES, SE LLEGA A:

$$V(s) = \frac{g + v_0 s}{s\left(s + \frac{B}{m}\right)} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s + \frac{B}{m}} = \frac{\alpha s + \alpha\frac{B}{m} + \beta s}{s\left(s + \frac{B}{m}\right)} \Rightarrow \alpha\frac{B}{m} = g; \alpha + \beta = v_0 \Rightarrow \alpha = \frac{mg}{B}; \beta = v_0 - \frac{mg}{B}$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES DE α Y β EN V_0 Y SE TIENE QUE: $\dot{V}(s) = \frac{mg}{B}\frac{1}{s} + \left(v_0 - \frac{mg}{B}\right)\frac{1}{s+\frac{B}{m}}$ .....(3)

SE APLICA LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE A ESTA EXPRESIÓN (3) Y SE OBTIENE:

$$v(t) = \frac{mg}{B} + \left(v_0 - \frac{mg}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}t}$$ VELOCIDAD DEL OBJETO

SE DERIVA v(t) Y SE ENCUENTRA LA ACELERACIÓN:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\frac{B}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}t} \Rightarrow a(t) = \left(g - \frac{Bv_0}{m}\right)e^{-\frac{B}{m}t}$$ ACELERACIÓN DEL OBJETO

Y SI SE INTEGRA v(t) , SE ENCUENTRA LA POSICIÓN:

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t \left[\frac{mg}{B} + \left(v_0 - \frac{mg}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}t}\right]dt \Rightarrow x(t) = \left[\frac{mg}{B}t + \frac{-m}{B}\left(v_0 - \frac{mg}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}t}\right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{mg}{B}t + \left(\frac{m^2 g}{B^2} - \frac{mv_0}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}t} - \left(\frac{m^2 g}{B^2} - \frac{mv_0}{B}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{mg}{B}t + \left(\frac{m^2 g}{B^2} - \frac{mv_0}{B}\right)\left(e^{-\frac{B}{m}t} - 1\right)$$

EXPRESIÓN QUE DEFINE LA POSICIÓN DEL OBJETO.

PROBABILIDAD

SUPONGA QUE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA TIENE LA FORMA: $f_{XY}(x,y) = k(x^2 - y + 1)$ PARA $0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1$ Y $f_{XY}(x,y) = 0$ PARA CUALQUIER OTRO VALOR. LA PROBABILIDAD DE QUE "X" Y "Y" ESTÉN EN LOS INTERVALO $[a, b]$ y $[c, d]$ ES:

$$P[a \le X \le b, c \le Y \le d] = \int_a^b \int_c^d k(x^2 - y + 1)dydx = k\left[\frac{b^3 - a^3}{3}(d-c) - \frac{b-a}{2}(d^2 - c^2) + (b-a)(d-c)\right]$$

LA CONSTANTE "k" SE OBTIENE DE LA CONDICIÓN: $F_{XY}(1,1) = 1$, EN DONDE $F_{XY}(1,1)$ SE VALÚA CON LA EXPRESIÓN ANTERIOR PARA $a = c = 0$ y $b = d = 1$; POR LO TANTO: $k\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right) = 1 \Rightarrow k = \frac{6}{5}$. SI EN EL PLANO XY SE ESTABLECEN CUATRO REGIONES D LAS MISMAS DIMENSIONES, LA PROBABILIDAD DE QUE UN PUNTO ESTÉ EN CADA UNA DE ELLAS SERÁ:

$$P[0 \le X \le 0.5, 0 \le Y \le 0.5] = 0.25$$
$$P[0 \le X \le 0.5, 0.5 \le Y \le 1] = 0.10$$
$$P[0.5 \le X \le 1, 0 \le Y \le 0.5] = 0.40$$
$$P[0.5 \le X \le 1, 0.5 \le Y \le 1] = 0.25$$

LAS FUNCIONES DE DENSIDAD MARGINALES SON:

$$f_X(x) = \int_0^1 k(x^2 - y + 1)dy = \frac{k}{2}(2x^2 + 1) \quad f_Y(y) = \int_0^1 k(x^2 - y + 1)dx = \frac{k}{3}(4 - 3y)$$

Y LAS FUNCIONES DE DENSIDAD CONDICIONALES ESTÁN DADAS POR:

$$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{3(x^2 - y + 1)}{4 - 3y}; \; f_{X|Y}(x, 0.5) = \frac{3x^2 + 1.5}{2.5} = \frac{6x^2 + 3}{5}$$

$$f_{Y|X}(x,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2(x^2 - y + 1)}{2x^2 + 1}; \; f_{Y|X}(0.5, y) = \frac{2.5 - 2y}{1.5} = \frac{5 - 4y}{3}$$

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 3 2 DE JUNIO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. FALTAN DOS SEMANAS PARA QUE TERMINEN LAS CLASES. ES TIEMPO DE PONERSE A ESTUDIAR CON DEDICACIÓN Y EMPEÑO PARA ACREDITAR LAS ASIGNATURAS. OJALÁ LOS EJERCICIOS QUE AQUÍ APARECEN, LES SEAN DE UTILIDAD. ¡MUCHA SUERTE Y A ESTUDIAR!

QUÍMICA

EL TITANIO, UN METAL FUERTE, LIGERO Y RESISTENTE A LA CORROSIÓN, SE UTILIZA TANTO EN LA CONSTRUCCIÓN DE AVIONES Y NAVES ESPACIALES, COMO EN LA FABRICACIÓN DE BICICLETAS. SE OBTIENE POR LA REACCIÓN DE CLORURO DE TITANIO (IV) CON MAGNESIO FUNDIDO, A UNA TEMPERATURA ENTRE 950 °C Y 1150 °C

$$TiCl_4(g) + 2Mg(l) \rightarrow Ti(s) + MgCl_2(l)$$

EN UNA OPERACIÓN INDUSTRIAL, $3.54x10^7(g)$ DE $TiCl_4$ REACCIONAN CON $1.13x10^7(g)$ DE Mg. CALCULAR EL PORCENTAJE DE RENDIMIENTO SI REALMENTE SE OBTIENEN $7.91x10^6(g)$ DE Ti.

SOLUCIÓN. PRIMERO SE CALCULA EL NÚMERO DE MOLES DE $TiCl_4$ Y DE Mg PRESENTES AL INICIO:

$$\text{MOLES DE } TiCl_4 = 3.54x10^7(g)TiCl_4\left[\frac{1mol\ TiCl_4}{189.7(g)TiCl_4}\right] = 1.87x10^5 \text{ mol DE } TiCl_4$$

$$\text{MOLES DE } Mg = 1.13x10^7(g)Mg\left[\frac{1mol\ Mg}{24.31(g)Mg}\right] = 4.65x10^5 \text{ mol DE } Mg$$

A CONTINUACIÓN SE DEBE DETERMINAR CUÁL DE LAS DOS SUSTANCIAS ES EL REACTIVO LIMITANTE. A PARTIR DE LA REACCIÓN BALANCEADA SE PUEDE VER QUE 1 mol DE $TiCl_4$ REACCIONA CON 2 mol DE Mg; POR LO TANTO, EL NÚMERO DE moles DE Mg QUE SE NECESITA PARA REACCIONAR CON 1.87moles DE $TiCl_4$ ES:

$$1.87x10^5 \text{ mol } TiCl_4\left[\frac{2mol\ Mg}{1mol\ TiCl_4}\right] = 3.74x10^5 \text{ mol } Mg$$

DEBIDO A QUE ESTÁN PRESENTES $4.65x10^5$ moles DE Mg, MÁS DE LO QUE SE NECESITA PARA REACCIONAR CON LA CANTIDAD DE $TiCl_4$ QUE SE TIENE, EL Mg DEBE SER EL REACTIVO EN EXCESO Y EL $TiCl_4$, EL REACTIVO LIMITANTE.

LA REACCIÓN MUESTRA QUE 1 mol DE $TiCl_4$ REACCIONA CON 1 mol DE Ti; POR LO TANTO, LA MASA TEÓRICA DE Ti QUE SE FORMA ES:

$$\text{MASA DE Ti FORMADO} = 3.54x10^7(g) \text{ DE } TiCl_4\left[\frac{1mol\ TiCl_4}{189.7(g)TiCl_4}\right]\left[\frac{1mol\ Ti}{1mol\ TiCl_4}\right]\left[\frac{47.88g\ Ti}{1mol\ Ti}\right] = 8.935x10^6(g)Ti$$

PARA CALCULAR EL PORCENTAJE DE RENDIMIENTO, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$(\%) \text{ DE RENDIMIENTO} = \frac{\text{RENDIMIENTO REAL}}{\text{RENDIMIENTO TEÓRICO}}x100 = \frac{7.91x10^6(g)}{8.935x10^6(g)}x100 = 88.5(\%)$$

QUÍMICA

SE COLOCAN 2 gmol DE ÁCIDO ACÉTICO EN 1 LITRO DE AGUA. ¿QUÉ VALOR TENDRÁ EL pH?

SOLUCIÓN. ÁCIDO ACÉTICO: CH_3COOH

$$CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-OH \;;\; \text{IÓN ACETATO } CH_3-\underset{\underset{O}{\|}}{C}-O$$

$$C_2H_3O_2H \;;\; mm = 60 \ g/gmol$$

$$\underset{(ac)}{C_2H_3O_2H} + H_2O \rightleftarrows \underset{(ac)}{H^+} + \underset{(ac)}{C_2H_3O_2^{-1}}$$

$$k_C = \text{CONSTANTE DE EQUILIBRIO;} \quad k_c = \frac{[H^+_{ac}]*[C_2H_3O_2{}^{-1}{}_{ac}]}{[C_2H_3O_2]*[H_2O]}$$

A PARTIR DEL EQUILIBRIO DEL AGUA: $H_2O \rightleftarrows H^{+1} + OH^{-1}$

$$k_C = \frac{[H^+]*[OH^-]}{[H_2O]} \Rightarrow k_{AGUA} = k_C[H_2O]$$

$$k_c[H_2O] = \frac{[H^+_{ac}]*[C_2H_3O_2{}^{-1}{}_{ac}]}{[C_2H_3O_2H_{ac}]} \equiv k_A$$

PARA EL ÁCIDO ACÉTICO: $k_A = 1.8x10^{-5}(M)$

LA CONCENTRACIÓN INICIAL DEL ÁCIDO ACÉTICO ES $2M = C_O$

ANÁLISIS DEL DESARROLLO:

$$C_2H_3O_2H(ac) \rightleftarrows H^+(ac) + C_2H_3O_2{}^{-1}(ac)$$

INICIO	Co	-	-
"REACCIONA"	α	α	α
EQUILIBRIO	Co - α	α	α
	$[C_2H_3O_2H(ac)]eq.$	$[H^+(ac)]eq.$	$[C_2H_3O_2{}^{-1}(ac)]eq.$

$$k_A = \frac{(\alpha)(\alpha)}{C_O - \alpha} \Rightarrow k_A C_O - k_A\alpha = \alpha^2 \Rightarrow 0 = \alpha^2 + k_A\alpha - k_A C_O$$

$$\alpha = [H^+] = \frac{-1.8x10^{5}(M) \pm \sqrt{1.8x10^{-10}(M^2) + 4(1.8x10^{-5}(M))2(M)}}{2} \Rightarrow \alpha = 9x10^{-6}(M) = [H^+]$$

DE LA DEFINICIÓN DE pH

$$pH = -\log_{10}[H^+(ac)] \Rightarrow pH = -\log_{10}(9x10^{-6}(M)) \Rightarrow pH = 5.045$$

CÁLCULO III

DETERMINAR EL TRABAJO QUE SE REALIZA AL MOVER, EN CONTRA DE LA GRAVEDAD, UNA PARTÍCULA DE MASA "m", A LO LARGO DE LA CURVA "C" DADA POR

$$x = \cos\ t; \ldots\ y = \text{sen}\ t; \ldots\ z = t$$

DEL PUNTO A $(-1, 0, \pi)$ AL PUNTO B $\left(0, -1, \frac{3\pi}{2}\right)$

SOLUCIÓN. PARA CALCULAR EL TRABAJO SE UTILIZA LA EXPRESIÓN: $W = \int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_C (\bar{F} \cdot \bar{T})\, ds$

SE TRATA DE UN TRABAJO PARA VENCER UN CAMPO DE FUERZA, EL CUAL ESTÁ DADO POR

$$\bar{F} = -mg\ \bar{k}$$

POR OTRO LADO, RECUÉRDESE QUE $\bar{T} = \dfrac{\dfrac{d\bar{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|}$; LUEGO, SI $\bar{r}(t) = \cos t\ i + \operatorname{sen} t\ j + t\ k$ ENTONCES SE TIENE QUE:

$$\bar{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\ i + \cos t\ j + k \Rightarrow |\bar{r}'(t)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \bar{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen} t\ i + \cos t\ j + k)$$

ADEMÁS, $ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-\operatorname{sen}\ t)^2 + (\cos\ t)^2 + 1} = \sqrt{2}$

PARA ENCONTRAR LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN SE VE QUE: $x = -1 \Rightarrow t = \pi$ Y $x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{3\pi}{2}$

FINALMENTE, SE SUSTITUYE EN LA INTEGRAL Y SE LLEGA A:

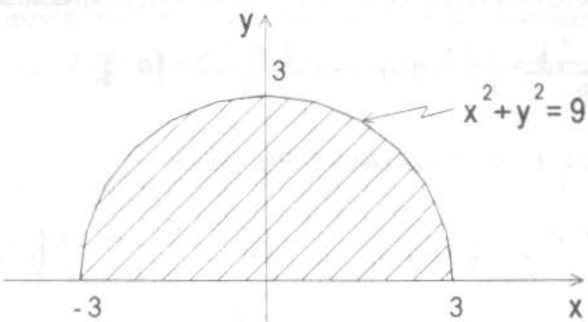
$$W = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left[(-mg\ k) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-\operatorname{sen}\ t\ i + \cos\ t\ j + k)\right]\sqrt{2}\,dt = -\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} mg\,dt = -mg\frac{\pi}{2}$$

RESULTADO QUE ES EQUIVALENTE A LA EXPRESIÓN mgh QUE HABLA DE LA ENERGÍA POTENCIAL Y EN LA CUAL "h" ES LA DIFERENCIA ENTRE LAS COTAS $\dfrac{3\pi}{2}$ Y π.

CÁLCULO III

CALCULAR LA INTEGRAL REITERADA $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dydx$

SOLUCIÓN. DE ACUERDO A LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN, LA REGIÓN "R" ES LA QUE SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA



COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA, SE TRATA DE UN SEMICÍRCULO Y, SI ADEMÁS SE TOMA EN CUENTA QUE EL INTEGRANDO CONTIENE LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE "x" Y DE "y", SE VE LA CONVENIENCIA DE CAMBIAR A COORDENADAS POLARES, DONDE EL FACTOR DE CAMBIO, DE ACUERDO A LO ESTUDIADO EN SISTEMAS DE COORDENADAS CURVILÍNEAS, ES " r ". ADEMÁS, PARA FIJAR LOS NUEVOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN, SE VE CÓMO VARÍAN LAS VARIABLES r Y θ. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy\ dx = \int_0^{\pi}\int_0^3 \frac{1 + r^2}{r}\, r\ dr\ d\theta$$

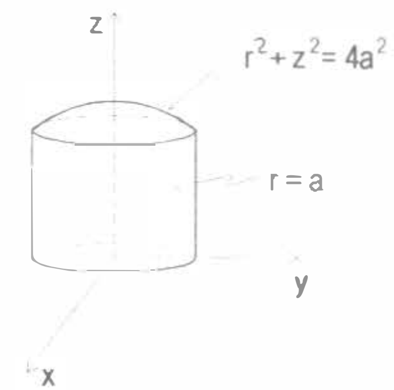
$$= \int_0^{\pi}\left[r + \frac{r^3}{3}\right]_0^3 d\theta = \int_0^{\pi}(3 + 9)\,d\theta = [12\,\theta]_0^{\pi} = 12\,\pi$$

¡IMAGINEN LAS INTEGRALES EN COORDENADAS CARTESIANAS!

CÁLCULO III

UN SÓLIDO TIENE LA FORMA DE LA REGIÓN QUE ESTÁ DENTRO DEL CILINDRO $r = a$ Y LA ESFERA $r^2 + z^2 = 4a^2$ Y SOBRE EL PLANO XY. CALCULAR LA MASA Y EL MOMENTO DE INERCIA I_z SI LA DENSIDAD EN UN PUNTO "P" ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DE ÉL AL PLANO XY.

SOLUCIÓN. SI SE HACE UN TRAZO APROXIMADO DE LA REGIÓN DESCRITA SE TIENE LA SIGUIENTE FIGURA:



SE UTILIZARÁN COORDENADAS CILÍNDRICAS. COMO LA DENSIDAD EN EL PUNTO $P(r,\theta,z)$ ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DEL PUNTO AL PLANO XY, ENTONCES SE PUEDE EXPRESAR COMO $\rho = kz$, DONDE " k " ES LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD. ENTONCES LA MASA "M" PUEDE SER CLACULADA MEDIANTE LA INTEGRAL TRIPLE:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} k\; z\; r\; dz\; dr\; d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[z^2 r\right]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} dr\; d\theta$$

$$M = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(4a^2 r - r^3\right)dr\; d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[2a^2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^{a} d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left(2a^4 - \frac{a^4}{4}\right)d\theta$$

$$M = \frac{7a^4k}{8}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7a^4k}{8}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{7a^4\pi k}{4}$$

PARA CALCULAR EL MOMENTO DE INERCIA I_z SE UTILIZA LA INTEGRAL TRIPLE

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2\; k\; z\; r\; dz\; dr\; d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left[r^3 z^2\right]_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} dr\; d\theta$$

$$I_z = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(4a^2r^3 - r^5\right)dr\; d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left[a^2r^4 - \frac{r^6}{6}\right]_0^{a} d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^6 - \frac{a^6}{6}\right)d\theta$$

$$I_z = \frac{5a^6k}{12}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{5a^6k}{12}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{5a^6\pi k}{6}$$

EL BOLETÍN **COPADI** LES INFORMA QUE EL PROGRAMA DE APOYO ACADÉMICO ENTRE ESTUDIANTES AYUDARÁ PARA LOS FINALES DE ALGUNAS ASIGNATURAS CON LA RESOLUCIÓN DE EXÁMENES COLEGIADOS FINALES ANTERIORES. ESTÉN PENDIENTES DE LOS AVISOS EN LAS MAMPARAS DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS.

EL BOLETÍN **COPADI** AGRADECE UNA COLABORACIÓN DEL ING. ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA EN EL PASADO NÚMERO 2 Y LA DE LA QFB. VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ EN ESTE NÚMERO.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ   REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

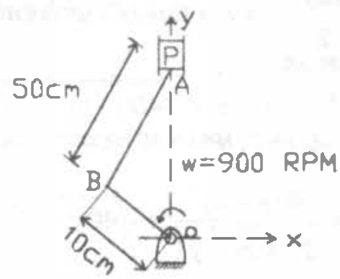
AÑO 2000 NÚMERO 4 17 DE JUNIO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE **LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. "NO QUEDA OTRA" QUE ESTUDIAR MUCHO ESTOS DÍAS Y HACER TODO LO POSIBLE POR ACREDITAR LAS ASIGNATURAS. SE NECESITA VOLUNTAD, DEDICACIÓN Y CONFIANZA EN UNO MISMO. ASÍ QUE... **¡MUCHA SUERTE Y A ESTUDIAR!**

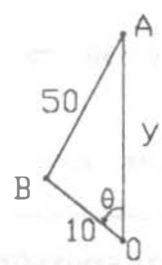
CÁLCULO I

UNA BIELA ES UN MECANISMO ELEMENTAL QUE CONVIERTE UN MOVIMIENTO CIRCULAR EN RECTILÍNEO O VICEVERSA. LA BIELA DE LA FIGURA SE PUEDE INTERPRETAR DE CUALQUIERA DE ESTAS DOS MANERAS: A) EL EJE DE UN MOTOR SE ENCUENTRA EN 'O' Y HACE GIRAR EL BRAZO PEQUEÑO DE LA BIELA, ÉSTA A SU VEZ CONSIGUE QUE EL PISTÓN 'P' SE MUEVA RECTILÍNEA Y ALTERNADAMENTE HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO. (ESTE PISTÓN PUEDE SER EL DE UNA BOMBA RECIPROCANTE, POR EJEMPLO). B) EL PISTÓN ES EL DE UN CILINDRO DE MOTOR DE EXPLOSIÓN INTERNA (COMO EL DE LOS AUTOMÓVILES) QUE, AL DESLIZARSE DE ARRIBA ABAJO, HACE GIRAR EL BRAZO MENOR DE LA BIELA Y ÉSTE A SU VEZ, AL EJE DE UNA RUEDA EN 'O'.



PARA ESTE PROBLEMA SE ACEPTARÁ LA INTERPRETACIÓN (A). SI EL MOTOR GIRA CON UNA VELOCIDAD ANGULAR DE 900 RPM Y LAS DIMENSIONES SON LAS DE LA FIGURA, CALCULAR LA VELOCIDAD DEL PISTÓN CUANDO EL PUNTO 'B' SE ENCUENTRA SOBRE EL EJE DE LAS ABSCISAS.

SOLUCIÓN. LA VELOCIDAD DEL PISTÓN 'P' SERÁ LA DEL PUNTO 'A'. PARA UNA POSICIÓN CUALQUIERA DEL MECANISMO SE PUEDE HACER LA SIGUIENTE FIGURA:



LA ORDENADA DE A ES ' y ' Y SE CALCULA POR LA LEY DE LOS COSENOS. $2500 = y^2 + 100 - 20y\cos\theta$, DE DONDE

$$\cos\theta = \frac{100 + y^2 - 2500}{20y} \quad \Rightarrow \quad 20y\cos\theta = y^2 - 2400$$

LA VELOCIDAD DE 'A' SERÁ ENTONCES $\dfrac{dy}{dt}$ POR LO QUE, SI SE DERIVA IMPLÍCITAMENTE LA EXPRESIÓN ANTERIOR, SE TENDRÁ

$$20\cos\theta\,\frac{dy}{dt} - 20y\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} = 2y\,\frac{dy}{dt}$$

UN DATO DEL PROBLEMA ES $w = \frac{d\theta}{dt} = 900\ \text{RPM} = \frac{900 \times 2\pi}{60} = 30\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. SE PIDE CALCULAR LA VELOCIDAD CUANDO 'θ' ESTÉ EN EL EJE DE LAS ABSCISAS, ESTO ES, CUANDO $\theta = 90^\circ$. EN ESTE INSTANTE $y = \sqrt{2400}$ Y SUSTITUYENDO ESTE VALOR Y EL DE $\frac{d\theta}{dt}$ EN LA DERIVADA, SE TIENE QUE:

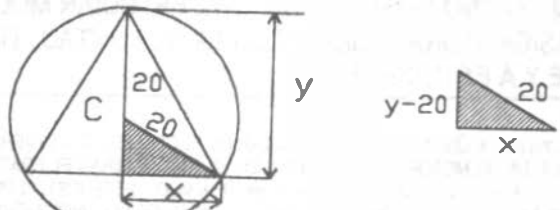
$$20(0)\frac{dy}{dt} - 20\sqrt{2400}\,(1)30\pi = 2\sqrt{2400}\,\frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -942\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = -9.42\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

EL SIGNO NEGATIVO INDICA QUE EL PISTÓN DESCIENDE.

CÁLCULO I

UNA SEÑAL EXPERIMENTAL PARA MARCAR ¡ALTO TOTAL!, EN UNA VÍA DE CIRCULACIÓN, CONSTA DE UN CÍRCULO CON UN TRIÁNGULO ISÓSCELES EN SU INTERIOR, PINTADO DE ROJO Y, MIENTRAS MAYOR SUPERFICIE TIENE EL TRIÁNGULO, LA SEÑAL FUNCIONA MEJOR. CALCULAR LAS DIMENSIONES DEL TRIÁNGULO ROJO DE MAYOR ÁREA QUE SE PUEDE INSCRIBIR EN UN CÍRCULO DE RADIO IGUAL A 20 CM.

SOLUCIÓN. EN LA FIGURA SE MUESTRA EL MODELO GEOMÉTRICO DE LA SEÑAL CON SUS DATOS Y MAGNITUDES VARIABLES.



LA EXPRESIÓN PARA EL ÁREA DEL TRIÁNGULO ES $A = \frac{2xy}{2} = xy$ Y TIENE DOS ARGUMENTOS, PERO SI SE APLICA EL TEOREMA DE PITÁGORAS AL TRIÁNGULO RECTÁNGULO SOMBREADO DE LA FIGURA, SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$x^2 + (y-20)^2 = 20^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{400 - (y-20)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{40y - y^2}$$

AHORA SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN QUE DEFINE EL ÁREA Y SE PROCEDE A DERIVAR, IGUALAR LA DERIVADA A CERO Y OBTENER LOS VALORES CRÍTICOS, ASÍ,

$$A = y\sqrt{40y - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dy} = \frac{40y - 2y^2}{2\sqrt{40y - y^2}} + \sqrt{40y - y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{40y - 2y^2 + 80y - 2y^2}{2\sqrt{40y - y^2}} = 0$$

$$120y - 4y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(30 - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{VALORES CRÍTICOS:} \quad \begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 30 \end{matrix}$$

ES EVIDENTE QUE EL PRIMER VALOR NO CONDUCE A UN ÁREA MÁXIMA YA QUE NI SIQUIERA SE FORMA UN TRIÁNGULO. PARA EL SEGUNDO VALOR, MEDIANTE EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA MÁXIMOS Y MÍNIMOS SE TIENE QUE:

$$\begin{matrix} y = 25 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dy} > 0 \\ y = 35 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dy} < 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \text{MÁXIMO RELATIVO} \qquad y = 30 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{40(30) - 30^2} \quad \Rightarrow \quad x = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

POR LO TANTO, EL TRIÁNGULO ISÓSCELES ROJO DE MAYOR ÁREA QUE SE PUEDE INSCRIBIR EN UN CÍRCULO DE RADIO IGUAL A 20 CM ES EL QUE TIENE 30 CM DE ALTURA Y 34.64 CM DE BASE.

COMPUTADORAS Y PROGRAMACIÓN

EN LA NATURALEZA EXISTEN PROCESOS QUE SE VUELVEN REPETITIVOS Y QUE ADEMÁS IMPLICAN RESULTADOS DE UNA EVALUACIÓN ANTERIOR DEL MISMO PROCESO. A ESTE CONCEPTO DE FUNCIONES QUE NECESITAN DE SÍ MISMAS SE LE DENOMINA RECURSIVIDAD. ESTAS FUNCIONES SON ÚTILES EN LOS MÉTODOS NUMÉRICOS, POR SU NATURALEZA ITERATIVA. CON ESTE CONCEPTO LOS PROCESOS O FUNCIONES SE VUELVEN MÁS COMPACTOS Y EFICIENTES. HE AQUÍ UNA DE LAS VIRTUDES DE LA PROGRAMACIÓN EN LENGUAJE C.

```
//FACTORIAL DE UN NÚMERO ENTERO.
//EL NOMBRE DEL ARCHIVO ES N!.H

#include <stdio.h>
float n_fact(int n);
void main()
    {
        int n;
        scanf("%d",&n);
        printf("\n %2d! = %9.0f",n,n_fact(n));
    }
float n_fact(int n)
    {
        float fact=n;
```

```
9)          if ( n==0 )
            return 1;
10)         else
        return fact*n_fact(n-1);
            }
```

EXPLICACIÓN:
1) SE INCLUYE EL ARCHIVO DE FUNCIONES DE ENTRADA Y SALIDA ESTÁNDAR.
2) SE DEFINE EL PROTOTIPO DE UNA FUNCIÓN LLAMADA " n_fact " DE ARGUMENTO ENTERO Y QUE DEVUELVE UN FLOTANTE. [n_fact : int W float].
3) SE INICIA EL PROGRAMA PRINCIPAL.
4) SE DECLARA UNA VARIABLE ENTERA QUE ES EL ARGUMENTO DE LA FUNCIÓN.
5) SE LEE EL NÚMERO DEL CUAL QUEREMOS OBTENER EL FACTORIAL.
6) SE IMPRIME EL ARGUMENTO Y SU FACTORIAL.
EN ESTE PASO SE LLAMA A LA FUNCIÓN " n_fact ".
LA IMPRESIÓN EN PANTALLA SERÁ : _X! = _YYYYYY YA QUE DEJA UNA SANGRÍA IZQUIERDA DE DOS ESPACIOS PARA EL ARGUMENTO Y UNA DE NUEVE PARA EL FACTORIAL.
7) INICIA LA DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN " n_fact ".
8) SE DEFINE UNA VARIABLE AUXILIAR PARA LAS MULTIPLICACIONES SUCESIVAS.
9) SI EL ARGUMENTO ES 0, POR DEFINICIÓN EL FACTORIAL ES 1.
10) SI NO ES ASÍ, LA FUNCIÓN REGRESA EL ARGUMENTO n MULTIPLICADO POR EL FACTORIAL DE (n - 1).

ES AQUÍ DONDE SE APLICA EL CONCEPTO DE RECURSIVIDAD YA QUE
$n! = n(n-1)!$, y $(n-1)! = (n-1)(n-2)!$; Y ASÍ SUCESIVAMENTE.

MÉTODOS NUMÉRICOS

UN PROBLEMA QUE ENFRENTA EL INGENIERO ES EL DE LAS APROXIMACIONES. EN EL CÁLCULO SE TOCA ESTE TEMA CON LAS SERIES DE POTENCIAS Y MÁS ESPECÍFICAMENTE CON LAS SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN, DONDE ADEMÁS SE HACE USO DEL PROBLEMA DEL FACTORIAL RESUELTO EN EL EJERCICIO ANTERIOR.
SUPÓNGASE QUE SE REQUIERE LA APROXIMACIÓN DE LA FUNCIÓN COSENO POR MEDIO DE LA SERIE DE MACLAURIN.
RECORDEMOS QUE LAS SERIES DE MACLAURIN SE DEFINEN COMO SIGUE:

$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$; ENTONCES $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\ldots$ Y GENERALIZANDO: $\cos(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+2}x^{2k}}{(2k)!}$

SI SE APLICAN ESTOS CONCEPTOS A LA PROGRAMACIÓN EN LENGUAJE C, SE TIENE QUE:

```
 1) #include <stdio.h>
 2) #define TOL 0.000000000001
 3) void main()
    {
 4)     int n=1,k=1;
 5)     double x,aux,tn=1,suma=0;
        printf("\nDE QUE ANGULO QUIERES OBTENER EL COSENO ? ");
 6)     scanf ("%lf",&x);
 7)     do{
             aux=suma;
 8)          suma=suma+n*tn;
 9)          tn=(tn*x*x)/((2*k-1)*(2*k));
             n=-n;
             k++;
10)     }while (fabs((suma-aux))>TOL);
11)   printf("\nCOS (%f) = %f \nCon los %d primeros t,rminos",x,suma,k);
      getch();
    }
```

EXPLICACIÓN:
1) SE INCLUYE EL RCHIVO DE FUNCIONES DE ENTRADA Y SALIDA ESTÁNDAR.
2) SE DEFINE UNA CONSTANTE DE TOLE ANCIA.
3) SE INICIA EL PROGRAMA PRINCIPAL.
4) SE EFINE EL ÍNDICE DE LA SUMATORIA Y SE INICIA EN 1.
LA VARIABLE n NOS SERVIRÁ PARA IR ALTERNANDO LOS SIGNOS EN LAS SUMAS.
5) SE EFINE EL ARGUMENTO, Y DOS VARIABLES PARA LAS SUMAS PARCIALES.
6) SE LEE EL ARGUMENTO EN RADIANES.
7) COMIENZA EL PROCESO ITERATIVO DE SUMAS PARCIALES.
8) SE MANTIENE LA SUMA PARCIAL (S_{n-1}).
9) SE CALCULA EL TÉRMINO ENÉSIMO.
10) SE SEGUIRÁN SUMANDO TÉRMINOS "MIENTRAS" QUE LA RESTA DE LAS SUMAS SEA MAYOR A LA TOLERANCIA.
11) IMPRIME EL RESULTADO APROXIMADO, Y EN PANTALLA SE LEERÁ:
COS (x) = suma
CON LOS k PRIMEROS TÉRMINOS

NOTA: ESTE PROGRAMA DIVERGE PARA VALORES MAYORES A 35 RADIANES.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

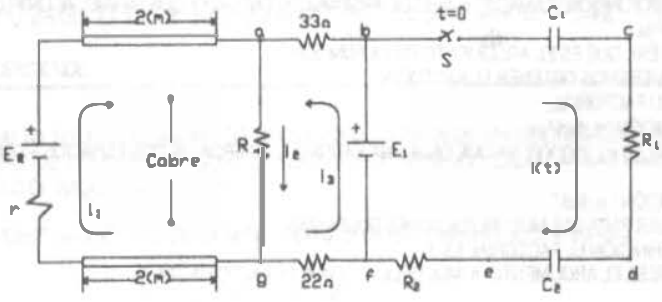
PARA EL CIRCUITO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA.

$\varepsilon_1=12(V),\ \varepsilon_R=10(V),\ r=0.5(\Omega),\ R_1=2R_2=22(K\Omega),\ C_1=4C_2=10(\mu F)$, para $t=0,\ V_{C1}=V_{C2}=0(V)$

EL CONDUCTOR DE COBRE ES DE CALIBRE AWG # 40, $d = 0.079(mm)$, $\rho_{Cu} = 1.72x10^{-8}(\Omega m)$, $\alpha_{Cu} = 0.0039\,^{0}C^{-1}$ (TODO ESTO A 20° C)

PARA ESTO, EL INTERRUPTOR ESTÁ ABIERTO. CON BASE EN ELLO, CALCULAR:

A) LA RESISTENCIA ELÉCTRICA DE CADA ALAMBRE DE COBRE A 20° C Y A 40° C. DESPRECIAR EL EFECTO DE LA DILATACIÓN TÉRMICA.
B) LA POTENCIA ELÉCTRICA QUE DISIPA EL RESISTOR R SI SU VALOR FUESE DE 73(Ω) A UNA TEMPERATURA DE 40° C.
C) EL VALOR DE i(t) PARA 0.05 (S) DESPUÉS DE HABER CERRADO EL INTERRUPTOR S.
D) LA ENERGÍA ALMACENADA EN EL CAPACITOR C_2, EN EL INSTANTE EN QUE t = 0.06 (s)



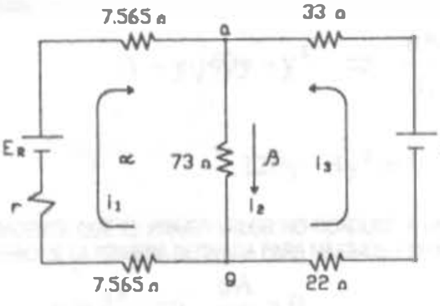
SOLUCIÓN A)

$$A_{Cu} = \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow A_{Cu} = \frac{\pi(0.079x10^{-3})^2}{4} \Rightarrow A_{Cu} = 4.9017x10^{-9}(m^2)$$

$$R_{Cu_{20^0C}} = \frac{\rho_{Cu}\; L_{Cu}}{A_{Cu}} \Rightarrow R_{Cu_{20^0C}} = \frac{(1.72\,x10^{-8})(2)}{4.9017\;X10^{-9}} \Rightarrow R_{Cu_{20^0C}} = 7.018\,(\Omega)$$

$$R_{Cu_{40^0C}} = R_{Cu_{20^0C}}(1+\alpha\Delta T) = 7.018[1+(0.0039)(20)] = 7.565(\Omega)$$

B)



NODO a (LCK) $\quad i_1 - i_2 + i_3 = 0 \qquad i_1 = 0.0672(A)$

MALLA α (LVK) $\quad 15.631 i_1 + 73 i_2 + 0 i_3 = 10 \Rightarrow i_2 = 0.1226(A)$

MALLA β (LVK) $\quad 0 i_1 + 73 i_2 + 55 i_3 = 12 \qquad i_3 = 0.0554(A)$

$$P = R\,i_2^{\,2} = 73(0.122)^2 = 1\,W$$

C) $R_e = R_1 + R_2 = 22(k\Omega) + 11(k\Omega) = 33(k\Omega)$; $\qquad C = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{(10)(2.5)}{10+2.5} = \dfrac{25}{12.5} = 2(\mu F)$

$$i = \frac{\varepsilon_1}{R_e} e^{-\frac{t}{\tau_c}};\; \tau_c = R_e C = 66x10^{-3}(s) = 0.066(s) \;\Rightarrow\; i(0.05) = \frac{12}{33x10^3} e^{-\frac{0.05}{0.066}} = 0.1705(mA)$$

D)

$$V_c(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right) = 12\left(1 - e^{-\frac{0.06}{0.066}}\right) = 7.1653\,(V)$$

COMO $q_1 = q_2 = q_{eq} \Rightarrow V_{C_1}C_1 = V_{C_2}C_2 = V_C C \;\Rightarrow\; V_{C_2} = \dfrac{C}{C_2} V_C = \dfrac{2}{2.5}(7.1653) = 5.7322(V)$

$$U_{C_2} = (0.5)(c_2)(V_{C_2}^{\;2}) = (0.5)(2.5x10^{-6})(5.73)^2 = 41(\mu J)$$

ESTE NÚMERO DEL BOLETÍN COPADI AGRADECE LA PARTICIPACIÓN CON UN PROBLEMA DE LOS PROFESORES GABRIEL JARAMILLO MORALES Y MARTÍN BÁRCENAS ESCOBAR.

EL BOLETÍN NÚMERO 5 SALDRÁ EL LUNES 3 DE JULIO.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 5 2 DE JULIO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. BIENVENIDOS A ESTE NUEVO SEMESTRE. LES DESEAMOS LO MEJOR.

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $$y \ln y \, dx + (x - \ln y)\, dy = 0$$

SOLUCIÓN. SE HACEN ARREGLOS MATEMÁTICOS Y:

$$(x - \ln y)\frac{dy}{dx} + y \ln y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y \ln y}{x - \ln y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} + \frac{x - \ln y}{y \ln y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y}x = \frac{1}{y}$$

COMO SE OBSERVA, SE TRATA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA, LINEAL Y DE PRIMER ORDEN, POR LO QUE SE PROCEDE A RESOLVERLA:

$$P(y) = \frac{1}{y \ln y}.$$

POR SER UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL, EL FACTOR INTEGRANTE ES $$e^{\int P(y)\,dy} = e^{\int \frac{dy}{y \ln y}} = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$$

SE MULTIPLICA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR EL FACTOR INTEGRANTE Y SE LLEGA A:

$$\ln y \frac{dx}{dy} + \frac{\ln y}{y \ln y}x = \frac{\ln y}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln y \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y}$$

EL PRIMER MIEMBRO DE ESTA ECUACIÓN EQUIVALE A LA DERIVADA CON RESPECTO A ' y ' DEL PRODUCTO $x \ln y$, LUEGO LA ECUACIÓN SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$\frac{d}{dy}(x \ln y) = \frac{\ln y}{y}$$

AHORA SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS Y SE OBTIENE LA SOLUCIÓN:

$$\int \frac{d}{dy}(x \ln y)dy = x \ln y + C_1; \qquad \int \frac{\ln y}{y}dy; \; u = \ln y; \; du = \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C_2 \Rightarrow \int \frac{\ln y}{y}dy = \frac{\ln^2 y}{2} + C_2$$

FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$x \ln y = \frac{\ln^2 y}{2} + C; \quad C = C_1 + C_2; \quad \therefore \quad 2x \ln y = \ln^2 y + C$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

UN TANQUE CILÍNDRICO CIRCULAR CONTIENE 50 GALONES DE UNA SOLUCIÓN COMPUESTA DE 90% DE AGUA Y 10% DE ALCOHOL. UNA SEGUNDA SOLUCIÓN QUE CONTIENE 50% DE AGUA Y 50% DE ALCOHOL ES AÑADIDA AL TANQUE A RAZÓN DE 4 GALONES POR MINUTO. AL MISMO TIEMPO QUE LA SEGUNDA SOLUCIÓN ES AÑADIDA, EL TANQUE ES VACIADO A RAZÓN DE 5 GALONES POR MINUTO, COMO SE VE EN LA FIGURA. SI SE ASUME QUE LA SOLUCIÓN EN EL TANQUE SE MEZCLA CONSTANTEMENTE, ¿CUÁNTO ALCOHOL HAY EN EL TANQUE DESPUÉS DE 10 MINUTOS?

SOLUCIÓN. SEA ' y ' EL NÚMERO DE GALONES DE ALCOHOL EN EL TANQUE EN CUALQUIER TIEMPO ' t '. SE SABE QUE $y = 5$ CUANDO $t = 0$. COMO EL TANQUE RECIBE 4 GALONES / MINUTO Y SACA 5 GALONES / MINUTO, ENTONCES PIERDE 1 GALÓN / MINUTO, POR LO QUE EL NÚMERO DE GALONES DE SOLUCIÓN EN EL TANQUE, EN CIERTO TIEMPO, ES $50 - t$. ADEMÁS, COMO PIERDE 5 GALONES DE SOLUCIÓN POR MINUTO, SE PUEDE DECIR QUE PIERDE

$$\left(\frac{5}{50-t}\right)y$$

GALONES DE ALCOHOL POR MINUTO. POR OTRO LADO, COMO RECIBE 2 GALONES DE ALCOHOL POR MINUTO, LA VARIACIÓN DEL ALCOHOL EN EL TANQUE ESTÁ DADA POR:

$$\frac{dy}{dt}=2-\left(\frac{5}{50-t}\right)y \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dt}+\left(\frac{5}{50-t}\right)y=2$$

QUE ES UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL, DE PRIMER ORDEN CON

$$P(t)=\frac{5}{50-t}$$

EL FACTOR INTEGRANTE ES $e^{\int P(t)dt}=e^{\int\frac{5}{50-t}dt}=e^{-5\ln|50-t|}=e^{-5\ln(50-t)}=\frac{1}{(50-t)^5}$

SE MULTIPLICA LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR EL FACTOR INTEGRANTE Y SE TIENE QUE:

$$\frac{1}{(50-t)^5}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{(50-t)^5}\frac{5}{50-t}y=\frac{2}{(50-t)^5}$$

COMO EL PRIMER MIEMBRO DE ESTA ECUACIÓN ES LA DERIVADA DE $\frac{1}{(50-t)^5}y$ CON RESPECTO A " t ", ENTONCES LA ECUACIÓN DIFERENCIAL SE PUEDE ESCRIBIR COMO:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(50-t)^5}y\right]=\frac{2}{(50-t)^5}$$

SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS CON RESPECTO A " t " Y SE LLEGA A

$$\int\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(50-t)^5}y\right]dt=\int\frac{2}{(50-t)^5}dt \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{(50-t)^5}=\frac{1}{2(50-t)^4}+C$$

POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL ES

$$y=\frac{50-t}{2}+C(50-t)^5$$

DE LAS CONDICIONES DEL PROBLEMA $y(0)=5$ LUEGO $5=25+C(50)^5 \Rightarrow C=-\frac{20}{50^5}$; LUEGO LA SOLUCIÓN PARTICULAR ESTÁ DADA POR

$$y=\frac{50-t}{2}-20\left(\frac{50-t}{50}\right)^5$$

FINALMENTE, CUANDO $t=10$ MINUTOS SE OBTIENE

$$y=\frac{50-10}{2}-20\left(\frac{50-10}{50}\right)^5 \quad\Rightarrow\quad y=13.45 \text{ GALONES DE ALCOHOL}$$

ALGEBRA

DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE $a+b$ ES FACTOR DE $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ PARA TODO VALOR DE $n\in Z^+$

SOLUCIÓN. SI SE SIGUE EL PROCEDIMIENTO USUAL SE TIENE QUE:

PARA $n=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{a+b}{a+b}=1$

PARA $n=k \quad\Rightarrow\quad \frac{a^{2k-1}+b^{2k-1}}{a+b}=p\in Z^+$ (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)

PARA $n=k+1$ se debe probar que $\frac{a^{2(k+1)-1}+b^{2(k+1)-1}}{a+b}=\frac{a^{2k+1}+b^{2k+1}}{a+b}=q\in Z^+$

SI SE SIMPLIFICA ESTA EXPRESIÓN Y SE SUMA Y RESTA EN SU NUMERADOR EL MONOMIO a^2b^{2k-1} SE LLEGA A:

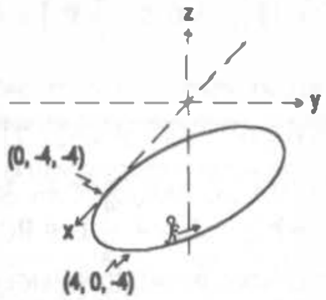
$$\frac{a^{2k+1}+b^{2k+1}}{a+b}=\frac{a^{2k+1}+a^2b^{2k-1}-a^2b^{2k-1}+b^{2k+1}}{a+b}=\frac{a^{2k+2-1}+a^2b^{2k-1}-a^2b^{2k-1}+b^{2k+2-1}}{a+b}$$

$$=\frac{a^2\left(a^{2k-1}-b^{2k-1}\right)-b^{2k-1}\left(a^2-b^2\right)}{a+b}=\frac{a^2\left(a^{2k-1}-b^{2k-1}\right)}{a+b}-\frac{b^{2k-1}\left(a^2-b\right)}{a+b}$$

EL PRIMER SUMANDO ES DIVISIBLE ENTRE $a+b$ POR LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y EL SEGUNDO SUMANDO TAMBIÉN POR LA EVIDENCIA DE LA DIFERENCIA DE CUADRADOS. POR LO TANTO, SE CUMPLE LA DIVISIBILIDAD PARA $n=k+1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

UN ATLETA CORRE A LO LARGO DE UNA PISTA CIRCULAR QUE TIENE 4 M DE RADIO. SI CUANDO INICIA SU MOVIMIENTO ESTÁ EN EL PUNTO $(4,0,-4)$ CON RESPECTO A UN SISTEMA COORDENADO CARTESIANO, ¿CUÁLES SERÁN SUS COORDENADAS ESFÉRICAS CUANDO HA RECORRIDO TRES CUARTAS PARTES DE LA PISTA, EN EL SENTIDO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA?



SOLUCIÓN. COMO SE OBSERVA EN LAS DOS FIGURAS, LAS ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA SON: $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=-4 \end{cases}$, DE DONDE LAS COORDENADAS CARTESIANAS DEL PUNTO EN EL QUE ESTÁ DESPUÉS DE RECORRER TRES CUARTAS PARTES DE LA PISTA SON $(0,-4,-4)$. PARA TRANSFORMAR ESTAS COORDENADAS AL SISTEMA COORDENADO CURVILÍNEO ESFÉRICO SE UTILIZAN LAS RESPECTIVAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN Y SE TIENE QUE:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt{0^2+(-4)^2+(-4)^2}\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt{16+16}\ \Rightarrow\ \rho=4\sqrt{2}$$

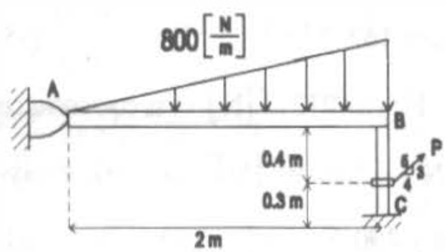
$$\theta=\text{angtan}\ \frac{y}{x}\ \Rightarrow\ \theta=\text{angtan}\ \frac{-4}{0}\ \Rightarrow\ \theta=\text{angtan}\ (-\infty)\ \Rightarrow\ \theta=270^{0}$$

$$\varphi=\text{ang cos}\ \frac{z}{\rho}\ \Rightarrow\ \varphi=\text{ang cos}\ \frac{-4}{4\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \varphi=\text{ang cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \Rightarrow\ \varphi=135^{0}$$

POR LO TANTO, LAS COORDENADAS ESFÉRICAS DEL PUNTO $(0,-4,-4)$ SON $\left(4\sqrt{2},270^{0},135^{0}\right)$.

ESTÁTICA

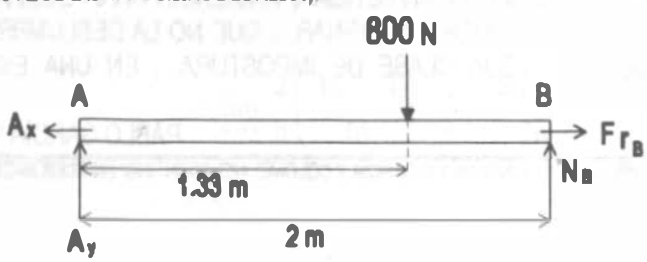
LA VIGA AB TIENE UNA MASA Y ANCHO DESPRECIABLES Y ESTÁ SUJETA A UNA CARGA DISTRIBUIDA TRIANGULAR. ESTÁ SOPORTADA EN UN EXTREMO POR UN PERNO Y EN EL OTRO, POR UN POSTE CUYA MASA ES DE $50\,[\text{kg}]$ Y ESPESOR DESPRECIABLE. DETERMINAR LA FUERZA MÍNIMA "P" NECESARIA PARA MOVER EL POSTE. LOS COEFICIENTES DE FRICCIÓN ESTÁTICA EN B Y C SON RESPECTIVAMENTE, $\mu_B=0.4$ y $\mu_C=0.2$.

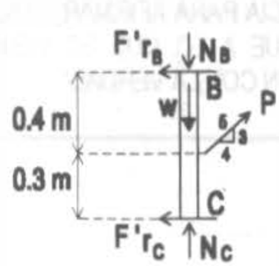


SOLUCIÓN. LA CARGA DISTRIBUIDA TRIANGULAR ES EQUIVALENTE A UNA SÓLA FUERZA CON MAGNITUD F IGUAL AL ÁREA DEL TRIÁNGULO DE LA FIGURA, APLICADA A LOS 2/3 DE LA DISTANCIA ENTRE A Y B ASI,

$$F=\frac{1}{2}\cdot 2\,[\text{m}]\cdot 800\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]\ \Rightarrow\ F=800\,[\text{N}];\qquad \text{aplicados a}\quad d=\frac{2}{3}\cdot 2\,[\text{m}]\ \Rightarrow\ d=1.333\,[\text{m}]$$

EN LA SIGUIENTE FIGURA SE MUESTRAN LOS "DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE" DE LA VIGA AB Y DEL POSTE BC (SE CONSIDERA LOS MOMENTOS POSITIVOS SI EL GIRO ES CONTRARIO AL DE LAS MANECILLAS DEL RELOJ):





$$\sum M_A : 2N_B - 1.333(800) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B = \frac{1067}{2} \quad \Rightarrow \quad N_B = 533.3\,[N]$$

$$F'_{rB} = 0.4(533.3) \quad \Rightarrow \quad F'_{rB} = 213.3\,[N]$$

$$\sum F_x : F_{rB} - A_x = 0 \Rightarrow A_x = F_{rB}\,; \qquad \sum F_y : A_y + N_B - 800 = 0 \Rightarrow A_y = 266.7\,[N]$$

$$\sum M_C : 0.7F_{rB} - 0.3\left(\frac{4}{5}P\right) = 0$$

SI SE SUPONE QUE $F_{rB} = F'_{rB}$, ES DECIR, QUE EN B SE PRESENTA EL MOVIMIENTO INMINENTE, ENTONCES:

$$0.7(213.3) = 0.24P; \quad \Rightarrow \quad P = 622.2\,[N]$$

PODRÍA SUPONERSE QUE ESTE VALOR ES EL QUE SE PREGUNTA; PARA CORROBORARLO, SE RESUELVEN LAS DEMÁS ECUACIONES Y:

$$\sum F_x : -F_{rB} - F_{rC} + \frac{4}{5}P = 0$$

AQUÍ TAMBIÉN SE CONSIDERA QUE SE PRESENTA EL MOVIMIENTO INMINENTE EN B Y C. POR LO TANTO

$$F_{rB} = F'_{rB} \text{ y } F_{rC} = F'_{rC} \quad \Rightarrow \quad -213.3 - F'_{rC} + 0.8(622.2) = 0 \quad \Rightarrow \quad F'_{rC} = 497.7 - 213.3 \quad \Rightarrow \quad F'_{rC} = 284.4\,[N]$$

$$\sum F_y : N_C + \frac{3}{5}P - N_B - W = 0 \Rightarrow N_C + 0.6(6222) - 533.3 - 50(9.81) = 0 \Rightarrow N_C = 533.3 + 490.5 - 373.3 \Rightarrow N_C = 650.5\,[N]$$

POR LO TANTO SE VERIFICA EL VALOR DE LA FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE $F'_{rC} : F'_{rC} = \mu_C N_C \Rightarrow F'_{rC} = 0.2(650.5) \Rightarrow F'_{rC} = 130.1\,[N]$

¡ESTE VALOR ES MENOR QUE EL OBTENIDO ANTERIORMENTE COMO $F'_{rC} = 284.4\,[N]$! (ESTE RESULTADO IMPLICA QUE SI $P = 622.2\,[N]$, EN B ESTÁ A PUNTO DE MOVERSE, PERO EN C YA SE MOVIÓ). POR LO TANTO, EN B NO PUEDE PRESENTARSE EL MOVIMIENTO INMINENTE; SÓLO SE PRESENTA EN C, QUE PARA ESTE CASO ES EL PUNTO CRÍTICO; ENTONCES, SI SE REPLANTEAN TODAS LAS ECUACIONES, SE TIENE QUE:

$$0.7F_{rB} - 0.24P = 0 \cdots (1); \quad -F_{rB} - F'_{rC} + 0.8P = 0 \cdots (2); \quad N_C + 0.6P - N_B - W = 0 \cdots (3); \quad \text{de}(1): F_{rB} = \frac{0.24}{0.7}P \cdots (4)$$

$$(4) \text{ en } (2) \Rightarrow -\frac{0.24}{0.7}P - F'_{rC} + 0.8P = 0 \Rightarrow F'_{rC} = 0.4571P \cdots (5)$$

COMO $F'_{rC} = \mu_C N_C \Rightarrow N_C = \frac{1}{0.2}F'_{rC} \cdots (6)$; (5) y (6) en $(3) \Rightarrow \frac{1}{0.2}(0.4571P) + 0.6P - 533.3 - 490.5 = 0$

$$2.286P + 0.6P = 1023.8 \Rightarrow P = \frac{1023.8}{2.886} \Rightarrow P = 354.8\,[N]$$

SE VERIFICAN LOS DEMÁS VALORES Y:

$$F'_{rC} = 0.4571(354.8) \Rightarrow F'_{rC} = 162.2\,[N]; \qquad F_{rB} = \frac{0.24}{0.7}(354.8) \Rightarrow F_{rB} = 121.2\,[N]$$

VALOR QUE ES MENOR QUE LA FUERZA DE FRICCIÓN LÍMITE $F'_{rB} = 213.3\,[N]$, Y SE CORROBORA QUE EN B NO SE PRESENTA EL MOVIMIENTO INMINENTE; FINALMENTE: $N_C = \frac{1}{0.2}(162.2) \Rightarrow N_C = 810.96\,[N]$; VALOR QUE SE COMPRUEBA A PARTIR DE

$$N_C = 533.34 + 490.5 - 0.6(354.8) \Rightarrow N_C = 810.96\,[N]$$

CON LO CUAL SE VERIFICA QUE EFECTIVAMENTE $F'_{rC} = 0.2(810.96) \Rightarrow F_{rC} 162.2\,[N]$

CULTURA

CUANDO PIENSO CÓMO DEBE SER UN INGENIERO O INGENIERA CON UNA VIDA PLENA Y UN QUEHACER PROFESIONAL PLENO, RECUERDO AQUELLAS VIEJAS Y SABIAS PALABRAS DE FRANCIS BACON, CON LAS QUE ME ATREVO A DEFINIR COMO INGENIERA O INGENIERO A QUIEN POSEE "UNA MENTE LO SUFICIENTEMENTE DESPIERTA Y MALEABLE PARA CAPTAR LA SEMEJANZA DE LAS COSAS Y A LA VEZ LO SUFICIENTEMENTE LISTA COMO PARA FIJAR Y DISTINGUIR SUS MÁS SUTILES DIFERENCIAS; DOTADA POR LA NATURALEZA DEL INTERÉS POR INVESTIGAR, PACIENCIA PARA DUDAR, AFICIÓN PARA MEDITAR, PRUDENCIA PARA AFIRMAR, CUIDADOSA PARA DISPONER Y ORDENAR..., QUE NO LA DESLUMBRE LO QUE ES NUEVO NI SE APEGUE A LO QUE ES VIEJO Y QUE ODIE TODA CLASE DE IMPOSTURA..., EN UNA ESPECIE DE FAMILIARIDAD Y RELACIÓN CON LA VERDAD".

PABLO GARCÍA Y COLOMÉ

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 6 17 DE JULIO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. **¡FELICES VACACIONES!**

CÁLCULO II

CALCULAR EL ÁREA LIMITADA POR LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = f(x) = x^2 + 1$, EL EJE DE LAS ABSCISAS Y LAS RECTAS $x = -1$ y $x = 1$, MEDIANTE LA INTEGRAL DEFINIDA QUE SE OBTIENE A TRAVÉS DEL LÍMITE DE LA SUMA DE RIEMANN, CONSIDERANDO SUBINTERVALOS DE IGUAL LONGITUD EN LA PARTICIÓN Y TOMANDO LA ORDENADA CORRESPONDIENTE AL VALOR PROMEDIO DE LA ABSCISA DE LOS EXTREMOS DE CADA SUBINTERVALO.

SOLUCIÓN. EL DOMINIO DE ESTA FUNCIÓN ALGEBRÁICA ES EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$ LUEGO ES CONTINUA EN EL INTERVALO $[-1, 1]$, Y POR TANTO, LA INTEGRAL DEFINIDA CORRESPONDIENTE EXISTE. PARA CALCULARLA SE CONSIDERA UNA PARTICIÓN DE "n" SUBINTERVALOS DE IGUAL LONGITUD

$$[-1, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, 1]$$

Y LA LONGITUD DE CADA UNO DE ELLOS ES IGUAL A $\Delta x = \dfrac{1-(-1)}{n} = \dfrac{2}{n}$. LAS COORDENADAS DE LOS EXTREMOS DE CADA SUBINTERVALO ESTÁN DADAS POR

$$x_0 = -1;\ x_1 = -1 + \left(\frac{2}{n}\right);\ x_2 = -1 + 2\left(\frac{2}{n}\right);\ \ldots;\ x_{i-1} = -1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right);\ x_i = -1 + i\left(\frac{2}{n}\right);\ \cdots;\ x_n = -1 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 1$$

SE TOMA COMO ABSCISA "α_i" AL VALOR PROMEDIO DEL SUBINTERVALO I-ESIMO, LUEGO SE TIENE QUE

$$\alpha_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{-1 + i\left(\frac{2}{n}\right) - 1 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right)}{2} = -1 + i\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

$$f(\alpha_i) = \left[-1 + i\left(\frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]^2 + 1 = 1 + i^2\left(\frac{4}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} - 2i\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} - i\left(\frac{4}{n^2}\right) + 1 = \left(\frac{4}{n^2}\right)i^2 - \left(\frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)i + \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$f(\alpha_i)\Delta x = \left[\left(\frac{4}{n^2}\right)i^2 - \left(\frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)i + \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]\left(\frac{2}{n}\right)$$

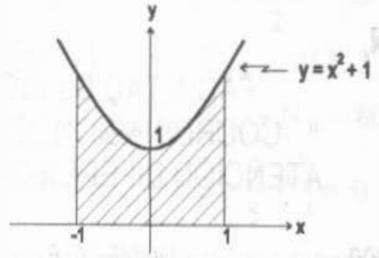
Y, MEDIANTE EL LÍMITE DE LA SUMATORIA, LA INTEGRAL DEFINIDA PARA CALCULAR EL ÁREA PEDIDA ESTÁ DADA POR

$$\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{4}{n^2}\right)i^2 - \left(\frac{4n+n}{n^2}\right)i + \left(\frac{2n^2+2n+1}{n^2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2 - \left(\frac{4n+4}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}i + \left(\frac{2n^2+2n+1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n+4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n^2+2n+1}{n^2}\cdot n\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{4n^2+6n+2}{3n} - \frac{2n^2+4n+2}{n} + \frac{2n^2+2n+1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(\frac{4n^2-1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-2}{3n^2} = \frac{8}{3} \quad \therefore \quad \int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \frac{8}{3}u^2$$

QUE ES EL VALOR DEL ÁREA MOSTRADA EN LA FIGURA



CÁLCULO III

DETERMINAR EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÍNIMO ABSOLUTO DE LA FUNCIÓN $f(x,y)=x^2-x+2y^2$ CUYO DOMINIO SE RESTRINGE A

$$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1 \,;\, x,y \in \Re\}$$

SOLUCIÓN. SE CALCULAN LAS DERIVADAS PARCIALES Y SE IGUALAN A CERO PARA BUSCAR PUNTOS CRÍTICOS ASÍ

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-1\,;\; 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=4y\,;\; 4y=0 \Rightarrow y=0$$

DE DONDE EL PUNTO CRÍTICO ES $\left(\frac{1}{2},0\right)$ Y SATISFACE LA RESTRICCIÓN $x^2+y^2\le 1$. SE DETERMINA SU NATURALEZA Y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2\;;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4\;;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=0 \quad\Rightarrow\quad g(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2 \Rightarrow g\left(\frac{1}{2},0\right)=8>0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$$

POR LO TANTO LA FUNCIÓN TIENE UN MÍNIMO RELATIVO EN EL PUNTO $\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{4}\right)$.

PARA ANALIZAR LA FRONTERA, ES DECIR, $x^2+y^2=1$, SE UTILIZA EL MÉTOD DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE CUYA ECUACIÓN ESTÁ DADA POR

$L(x,y,\lambda)=x^2-x+2y^2+\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$ Y SUS DERIVADAS PARCIALES SON

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x-1+2x\lambda \quad;\quad \frac{\partial L}{\partial y}=4y+2y\lambda \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-1$$

SE IGUALAN A CERO Y SE RESUELVE EL SISTEMA RESULTANTE. LUEGO

$$2x-1+2x\lambda=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2+2\lambda} \quad;\quad 4y+2y\lambda=0 \;\Rightarrow\; 2y(2+\lambda)=0 \quad \text{y} \quad x^2+y^2=1$$

$$y=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1 \;\Rightarrow\; \begin{matrix} f(1,0)=0 \\ f(-1,0)=2 \end{matrix}$$

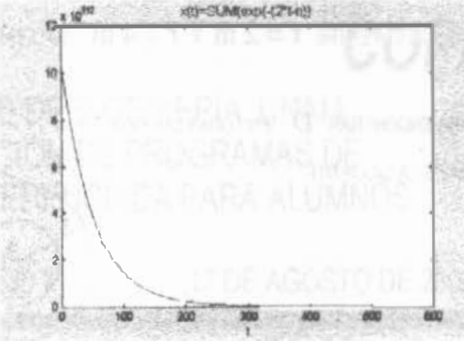
$$\lambda=-2 \;\Rightarrow\; x=-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4} \\ f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{9}{4} \end{matrix}$$

POR LO TANTO SE CONCLUYE QUE EL MÁXIMO ABSOLUTO ES $\frac{9}{4}$ Y SE PRESENTA EN LOS PUNTOS $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Y EL MÍNIMO ABSOLUTO ES $-\frac{1}{4}$ Y SE PRESENTA EN EL PUNTO $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

ANÁLISIS DE SISTEMAS Y SEÑALES

DIGA SI LAS SIGUIENTES SEÑALES SON PERIÓDICAS O NO, EN CASO DE SER PERIÓDICAS ENCONTRAR SUS PERIODO FUNDAMENTAL.

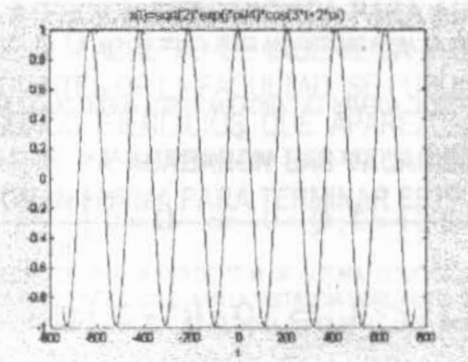
A) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}$



AL EFECTUAR LAS PROPIEDADES DE LA SUMATORIA TENEMOS

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2t}e^{n}=e^{-2t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n}=c\,e^{-2t}$$

SE OBSERVA QUE ES UNA EXPONENCIAL DECRECIENTE MULTIPLICADA POR UNA CONSTANTE, POR LO TANTO ES NO PERIÓDICA



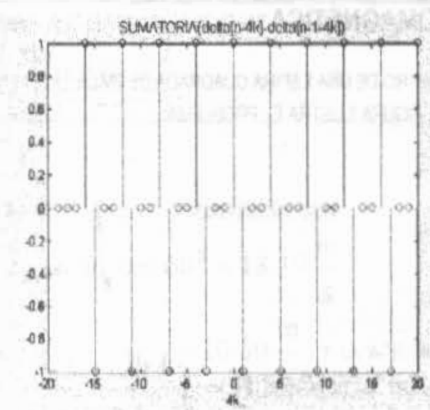
B) $x(t)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}\cos(3t+2\pi)$

SE OBSERVA QUE LA SEÑAL TIENE LA FORMA $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\phi)$,

DONDE ω_0 ES LA FRECUENCIA NATURAL, A ES LA AMPLITUD Y ϕ ES EL ÁNGULO DE FASE. SE TIENE ENTONCES QUE

$$\omega_0=3\Rightarrow T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2}{3}\pi\,,$$

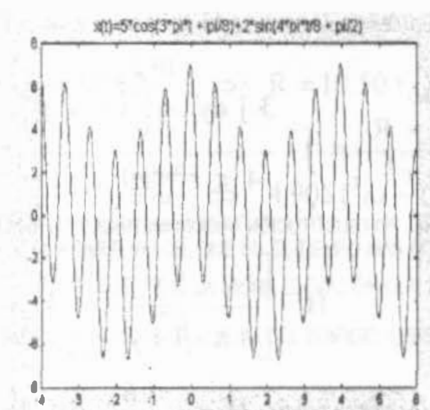
POR LO QUE SE OBSERVA QUE SI ES UNA SEÑAL PERIÓDICA



C) $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]-\delta[n-1-4k]$

ESTÁ SEÑAL REPRESENTA UN TREN DE IMPULSO, AL ANALIZARLA VEMOS QUE EL ARGUMENTO DE LA SUMATORIA SON IMPULSOS DESPLAZADOS CUATRO UNIDADES POR LO QUE SE CONCLUYE QUE SON PERIÓDICAS, CON PERIDO $N_0=4$

D) EXPRESAR X(T) EN TÉRMINOS DE LA FRECUENCIA NATURAL Y CALCULAR SU PERIODO, EN CASO DE SER PERIÓDICA



$$x(t)=5\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

PARA CALCULAR LA FRECUENCIA NATURAL SE EMPLEA LA RELACIÓN

$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r_1\omega_0}{r_2\omega_0}$, DONDE ω_1 Y ω_2 SON LAS FRECUENCIAS NATURALES DE CADA SUMANDO, R_1 Y R_2 SON FACTORES DE PROPORCIONALIDAD Y ω_0 ES LA FRECUENCIA NATURAL DE LA SUMA DE FUNCIONES

LUEGO ENTONCES, SE TIENE QUE $\frac{r_1}{r_2}=\frac{3\pi}{\frac{4}{8}\pi}=6$ POR LO TANTO

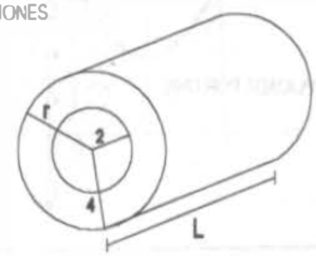
$$\omega_1=r_1\,\omega_0\Rightarrow\omega_0=\frac{\omega_1}{r_1}=\frac{\pi}{2};\ \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\Rightarrow T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=4$$

FINALMENTE LA ECUACIÓN QUEDA COMO $x(t)=5\cos\left(6\omega_0 t+\frac{\pi}{8}\right)+2\,\mathrm{sen}\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)$

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

UN VOLUMEN CILÍNDRICO ESTÁ ENTRE $r = 2\text{ m}$ Y $r = 4\text{ m}$, SU LONGITUD ES "L" Y CONTIENE UNA DENSIDAD UNIFORME DE CARGA $\rho\left[\frac{C}{m^3}\right]$. UTILICE LA LEY DE GAUSS PARA ENCONTRAR $\vec{D}$ EN TODAS LAS REGIONES.

SOLUCIÓN. LA FIGURA ES LA SIGUIENTE



DE LA LEY DE GAUSS, LA CARGA ENCERRADA EN EL CILINDRO ES $Q_{enc} = \int_S \vec{D}\cdot\vec{ds}$ POR LO QUE PUEDE COMPROBARSE QUE $\vec{D} = \frac{Q}{A}\hat{r}$, DONDE "A" ES EL ÁREA DE LA SUPERFICIE. ADEMÁS, LA CARGA ENCERRDA PUEDE CALCULARSE CON $Q = V\rho$, DONDE "V" ES EL VOLUMEN DEL CILINDRO Y EQUIVALE A $V = \left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right)\pi L$. ENTONCES, SE ANALIZAN TODAS LAS REGIONES DONDE VARIA EL RADIO Y SE TIENE QUE:

$$0 \le r < 2;\ Q = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{D} = \vec{0}\left[\frac{A}{m^2}\right]$$

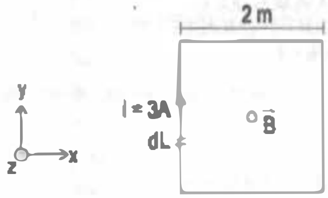
$$2 \le r < 4 \quad\Rightarrow\quad Q = \left(r^2 - 2^2\right)\pi L\rho \quad\Rightarrow\quad \vec{D} = \frac{\left(r^2-4\right)\pi L\rho}{2\pi r L}\hat{r} = \frac{\rho\left(r^2-4\right)}{2r}\hat{r}\left[\frac{A}{m^2}\right]$$

$$r \ge 4 \quad\Rightarrow\quad Q = \left(4^2-4\right)\pi L\rho \quad\Rightarrow\quad \vec{D} = \frac{\left(4^2-4\right)\pi L\rho}{2\pi r L}\hat{r} = \frac{12\rho}{2r}\hat{r} = \frac{6\rho}{r}\hat{r}\left[\frac{A}{m^2}\right]$$

TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

CALCULAR $\vec{B}$ EN EL CENTRO DE UNA ESPIRA CUADRADA DE 2M DE LADO EN LA QUE CIRCULA UNA CORRIENTE DE $3\,[A]$

SOLUCIÓN. LA SIGUIENTE FIGURA ILUSTRA EL PROBLEMA



POR LA LEY DE BIOT - SAVART, SE TIENE QUE $H = \int \frac{I\,dL \times \hat{a}_r}{4\pi r^2}$. EL VECTOR $\vec{R}$ ESTÁ DADO POR $\vec{R} = \hat{i} - y\hat{j}$, POR LO QUE $\hat{a}_r = \hat{R} = \frac{\hat{i} - y\hat{j}}{\sqrt{1+y^2}}$

ADEMÁS $dL = dy$. ENTONCES, SE CALCULA $\vec{H}$ PARA UN LADO DE LA ESPIRA Y

$$\vec{H} = \int \frac{I\,dy \times \hat{R}}{4\pi r^2} = \int_{-1}^{1} \frac{3\,\hat{j}\,dy \times \left(\hat{i} - y\hat{j}\right)}{4\pi r^2\sqrt{1+y^2}} = \frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{1} \frac{-dy\,\hat{k}}{\left(1+y^2\right)\sqrt{1+y^2}} = -\frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

SE RESUELVE LA INTEGRAL POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA Y SU RESULTADO ES

$$H = \left[\frac{-3y}{4\pi\sqrt{1+y^2}}\right]_{-1}^{1}\hat{k} = -\frac{3}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{k} = -\frac{3}{2\sqrt{2}\,\pi}\hat{k}$$

Y, COMO SON CUATRO LADOS DE LA ESPIRA: $\vec{H} = -\frac{6}{\sqrt{2}\,\pi}\hat{k};\quad \vec{B} = \mu_0\vec{H} \quad\Rightarrow\quad \vec{B} = -\frac{6\mu_0}{\sqrt{2}\,\pi}\hat{k} = -1.697\times10^{-6}\,\hat{k}\,[T]$

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

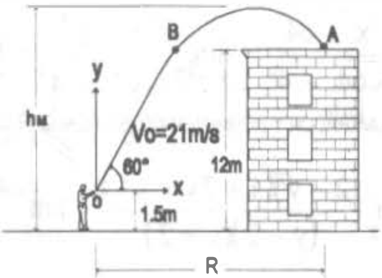
AÑO 2000 NÚMERO 7 17 DE AGOSTO DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. **YA ACABARON LAS VACACIONES. AHORA, ¡A ESTUDIAR! UN SEMESTRE BIEN APROVECHADO SERÍA UNA GRAN FORMA PARA TERMINAR ESTE AÑO 2000.**

CINEMÁTICA

SE ARROJA UNA PELOTA DESDE UNA POSICIÓN "O" A 1.5 M SOBRE EL PISO, HACIA EL TECHO DE UN EDIFICIO DE 12 M DE ALTURA, COMO SE VE EN LA FIGURA. SI LA VELOCIDAD INICIAL DE LA BOLA ES DE 21 M/S, CON UN ÁNGULO DE 60º CON RESPECTO A LA HORIZONTAL, CALCULAR LA DISTANCIA HORIZONTAL "R", DESDE EL PUNTO EN QUE SE ARROJA LA PELOTA, HASTA EL PUNTO DONDE CHOCA CON EL TECHO Y DESPUÉS DETERMINAR LA ALTURA MÁXIMA "h_M" QUE ALCANZA LA PELOTA.



SOLUCIÓN. SE CONSIDERA EL ORIGEN DE COORDENADAS EN "O" Y ENTONCES LAS COMPONENTES DE LA VELOCIDAD INICIAL SON

$$v_{ox} = 21\cos 60^0 = 10.50\frac{m}{s} \quad y \quad v_{oy} = 21\,\text{sen}\,60^0 = 18.19\frac{m}{s}$$

COMO SE SABE, LA COMPONENTE EN "X" DE LA VELOCIDAD FINAL EN EL PUNTO "A" ES $v_{Ax} = v_{ox} = 10.50\frac{m}{s}$; Y LA ACELERACIÓN EN "Y" ES LA DE LA GRAVEDAD, ES DECIR, $a_y = g = -9.81\frac{m}{s^2}$

MOVIMIENTO HORIZONTAL

$$x_A = x_o + v_{ox}\,t_{OA}\;;\quad x_A = R\quad;\quad x_o = 0 \quad y \quad v_{ox} = 10.50\frac{m}{s} \quad\Rightarrow\quad R = 10.50\,t_{OA}\cdots(1)$$

MOVIMIENTO VERTICAL

$$y_A = y_o + v_{oy}\,t_{OA} + \frac{1}{2}a_y t^2_{OA} \quad\Rightarrow\quad (12-1.5) = 0 + 18.19\,t_{OA} + \frac{1}{2}(-9.81)t^2_{OA} \quad\Rightarrow\quad 4.905\,t^2_{OA} - 18.19\,t_{OA} + 10.5 = 0$$

SE RESUELVE ESTA ECUACIÓN CUADRÁTICA Y SE LLEGA A LOS VALORES 0.716 S Y 2.99 S. EL PRIMER VALOR, QUE ES EL TIEMPO MÁS CORTO, SE IDENTIFICA COMO t_{OB}, YA QUE REPRESENTA EL TIEMPO NECESARIO PARA QUE LA PELOTA ALCANCE EL PUNTO "B" QUE TIENE LA MISMA ELEVACIÓN QUE EL PUNTO "A", Y EL TIEMPO t_{OA} ES EL TIEMPO EN EL QUE LA PELOTA VUELVE A PASAR POR LA MISMA ALTURA DEL PUNTO "B", QUE ES LA ALTURA DEL EDIFICIO. LUEGO, $t_{OA} = 2.99$ S. SE SUSTITUYE EN LA ECUACIÓN (1) Y SE OBTIENE QUE $R = 10.5(2.99) = 31.40$ m.

PARA DETERMINAR LA ALTURA MÁXIMA, SE TIENE QUE EL TIEMPO EN EL QUE LA ALCANZA ES LA MITAD DEL TIEMPO EN QUE SE DESPLAZA DE "B" A "A", ES DECIR, $t_{h_M} = 2.99 - 0.716 = 2.274$ S. LUEGO

$$h_M = 5 + v_{oy}\,t_{h_M} + \frac{1}{2}a_y\,t^2_{h_M} \quad\Rightarrow\quad h_M = 1.5 + 18.19(2.274) + \frac{1}{2}(-9.81)(2.274)^2 \quad\Rightarrow\quad h_M = 17.5\,\text{m}.$$

CÁLCULO I

CALCULAR EL VALOR DE LOS SIGUIENTES LÍMITES

$$\text{i) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}} \quad ; \quad \text{ii) } \lim_{x\to 0}\frac{8-\sqrt{x+64}}{\sqrt[3]{x+64}-4} \quad ; \quad \text{iii) } \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{5x}$$

SOLUCIÓN: i) SE TIENE QUE $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}}=\frac{0}{0}$ QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA. PARA DESAPARECER LA INDETERMINACIÓN, SE MULTIPLICAN AL MISMO TIEMPO, NUMERADOR Y DENOMINADOR POR SUS RESPECTIVOS "BINOMIOS CONJUGADOS" ASÍ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+4}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\cdot\frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1-1)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{\left[4-(x+4)\right]\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{-x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sqrt{x+4}}{-\sqrt{x+1}+1}=\frac{4}{-2}=-2$$

QUE ES EL VALOR DEL LÍMITE.

ii) SE TIENE QUE $\lim_{x\to 0}\frac{8-\sqrt{x+64}}{\sqrt[3]{x+64}-4}=\frac{0}{0}$ QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA. PARA DESAPARECER LA INDETERMINACIÓN, SE HACE LO SIGUIENTE: SE SIMPLIFICA LA EXPRESIÓN MEDIANTE UN CAMBIO DE VARIABLE, EN EL QUE EL RADICANDO COMÚN DE AMBAS RAÍCES SE CAMBIA POR UNA NUEVA VARIABLE A LA QUE SE LE COLOCA COMO EXPONENTE EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE LOS ÍNDICES DE LAS DOS RAÍCES, QUE EN ESTE CASO ES 6. ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR

$x+64=y^6$. EL LÍMITE DE $x+64$ CUANDO $x\to 0$ ES 64. LUEGO, PARA QUE EL LÍMITE DE y^6 SEA 64, LA NUEVA VARIABLE "y" DEBE TENDER A 2. ASÍ SE REALIZA EL CAMBIO DE VARIABLE Y SE LLEGA A:

$$\lim_{x\to 0}\frac{8-\sqrt{x+64}}{\sqrt[3]{x+64}-4}=\lim_{y\to 2}\frac{8-\sqrt{y^6}}{\sqrt[3]{y^6}-4}=\lim_{y\to 2}\frac{8-y^3}{y^2-4}=\frac{0}{0}$$

PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR, SE REALIZAN LAS SIMPLIFICACIONES CORRESPONDIENTES Y SE LLEGA AL VALOR DEL LÍMITE. LUEGO,

$$\lim_{y\to 2}\frac{8-y^3}{y^2-4}=\lim_{y\to 2}\frac{(2-y)\left(4+2y+y^2\right)}{(y-2)(y+2)}=\lim_{y\to 2}\frac{4+2y+y^2}{-(y+2)}=\frac{12}{-4}=-3$$

QUE ES EL VALOR DEL LÍMITE.

iii) SE TIENE QUE $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{5x}=\frac{\infty}{\infty}$ QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA. PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE DIVIDEN NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE, QUE EN ESTE CASO ES $x^1=x$. ESTO SE HACE PARA BUSCAR QUE DESPUÉS DE LA DIVISIÓN SOLAMENTE QUEDE LA VARIABLE COMO DENOMINADOR Y, AL HACERLA TENDER A ∞, COMO SE SABE, LA DIVISIÓN ENTRE ∞ ES CERO Y DESAPARECE LA INDETERMINACIÓN. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}}{\frac{5x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}}{5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+1}}{5}=\frac{\sqrt[3]{0+1}}{5}=\frac{1}{5}$$

QUE ES EL VALOR DEL LÍMITE.

ÁLGEBRA-GEOMETRÍA ANALÍTICA

DEMOSTRAR QUE EL NÚMERO DE DIAGONALES DE UN POLÍGONO DE "n" LADOS ES $D_n=\frac{1}{2}n(n-3)$

SOLUCIÓN: UN TRIÁNGULO NO TIENE DIAGONALES LO QUE SE VERIFICA AL APLICAR ESTA EXPRESIÓN, ASÍ,

$$D_3=\frac{1}{2}(3)(3-3)=0$$

SI SE UTILIZA EL MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN CONOCIDO COMO "INDUCCIÓN MATEMÁTICA", SE TIENE QUE:

$$\text{PARA} \quad n=k \quad \Rightarrow \quad D_k=\frac{1}{2}k(k-3) \quad \text{HIPÓTESIS}$$

$$\text{PARA} \quad n=k+1 \quad \Rightarrow \quad D_{k+1}=\frac{1}{2}(k+1)(k-2) \quad \text{TESIS}$$

UN POLINOMIO DE "k" LADOS, AL AUMENTARSE UN VÉRTICE, SE AUMENTAN $k-2+1=k-1$ DIAGONALES. LUEGO, SE SUMA ESTE BINOMIO A LA HIPÓTESIS Y SE LLEGA A:

$$D_{k+1} = \frac{1}{2}k(k-3)+(k-1) = \frac{1}{2}k(k-3)+\frac{2(k-1)}{2} = \frac{k(k-3)+2(k-1)}{2} = \frac{k^2-3k+2k-2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(k^2-k+2) = \frac{1}{2}(k+1)(k-2)$$

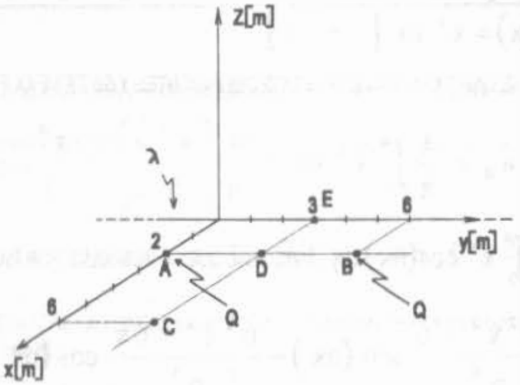
EXPRESIÓN QUE ES IGUAL A LA TESIS POR LO QUE LA FÓRMULA DADA ESTÁ DEMOSTRADA

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

SE TIENE UNA LÍNEA MUY LARGA, CON DENSIDAD LINEAL DE CARGA UNIFORME $\lambda = -2.0\left[\frac{\mu C}{m}\right]$ LA QUE SE CONSIDERA QUE COINCIDE CON EL EJE 'y' DE UN DETERMINADO SISTEMA COORDENADO, COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA; EN CADA UNO DE LOS PUNTOS $A(2,0,0)\,m$ Y $B(2,6,0)\,m$ SE COLOCA UNA CARGA PUNTUAL DE $Q = 4[\mu C]$ TODAS LAS CARGAS DE ESTE CONJUNTO ESTÁN LO SUFICIENTEMENTE ALEJADAS COMO PARA DESPRECIAR EL EFECTO DE INDUCCIÓN. SUPÓNGASE QUE SE ENCUENTRAN EN EL VACÍO. DETERMINAR:

a) EL CAMPO ELÉCTRICO TOTAL EN EL PUNTO $C(6,3,0)\,m$.

b) EL TRABAJO NECESARIO PARA TRASLADAR UNA CARGA $q = 1[nC]$ DESDE EL PUNTO 'C' HASTA EL PUNTO $D(2,3,0)\,m$.



SOLUCIÓN

a) CON EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN Y CONSIDERANDO QUE $|\hat{r}_{CE}| = r_{CE}$, SE PLANTEA LO SIGUIENTE

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{C\lambda} + \vec{E}_{CQ_A} + \vec{E}_{CQ_B} \quad ; \quad \vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{CE}}\hat{r}_{CE} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_A|}{r_{AC}^2}\hat{r}_{AC} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_B|}{r_{BC}^2}\hat{r}_{BC}$$

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2|\lambda|\hat{i}}{r_{CE}} + \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2}\left(\frac{4\hat{i}+3\hat{j}}{5}\right) + \frac{|Q_B|}{r_{BC}^2}\left(\frac{4\hat{i}-3\hat{j}}{5}\right)\right]$$

COMO $|Q_A| = |Q_B|$ y $r_{AC} = r_{BC}$ ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR

$$\vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{2|\lambda|}{r_{CE}}\hat{i} + \frac{|Q_A|}{r_{AC}^2}\left(\frac{8}{5}\hat{i}\right)\right] = 9\times10^9\left[\frac{-2(2\times10^{-6})\hat{i}}{6} + \frac{4\times10^{-6}}{(5)^2}\left(\frac{8}{5}\hat{i}\right)\right]$$

$$\vec{E}_C = 9\times10^3\left(-\frac{4}{6}\hat{i} + \frac{32}{125}\hat{i}\right) = 9\times10^3\left(-0.4107\,\hat{i}\right) = -3,696\,\hat{i}\left[\frac{N}{C}\right]$$

b) PARA CALCULAR EL TRABAJO REQUERIDO SE CONSIDERA LO SIGUIENTE

$${}_C W_D = EP_D - EP_C = q\,V_{DC} \quad ; \quad V_{DC} = V_{DC\lambda} + V_{DCQ_A} + V_{DCQ_B}$$

POR INSPECCIÓN SE OBTIENE QUE $V_{DC\lambda} < 0$; $V_{DCQ_A} > 0$, V_{DCQ_B}

$$V_{DC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}2\lambda\,\mathrm{Ln}\frac{r_C}{r_D} + \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{AC}}\right) + \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{BD}} - \frac{1}{r_{BC}}\right)$$

SE OBSERVA QUE $r_{AD} = r_{BD}$ Y, COMO $r_{AC} = r_{BC}$, ENTONCES SE PUEDE ESCRIBIR

$$V_{DC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\lambda \, Ln \frac{r_C}{r_D} + \frac{2 Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{AD}} - \frac{1}{r_{AC}}\right) = 2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\left[-2\times10^{-6} \, Ln \frac{6}{2} + 4\times10^{-6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$V_{DC} = -39{,}950 + 9{,}600 \quad ; \quad V_{DC} = -29{,}950 \, [V]$$

Y, FINALMENTE, EL TRABAJO ES IGUAL A:

$${}_C W_D = \left(1\times10^{-9}\right)(-29{,}950) \quad ; \quad {}_C W_D = -29.95\times10^{-6} \, [J]$$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SERIES Y COEFICIENTES DE FOURIER EN $[-\pi, \pi]$

SEA ' f ' UNA FUNCIÓN INTEGRABLE EN EL EINTERVALO CERRADO $[-\pi, \pi]$ ENTONCES:

1. LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE ' f ' EN $[-\pi, \pi]$ SON LOS NÚMEROS

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \; ; \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \; , \; n = 1,2,3,\ldots \; ; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx \; , \; n = 1,2,3,\ldots$$

2. LA SERIE DE FOURIER DE ' f ' EN EL INTERVALO $[-\pi, \pi]$ ES: $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \,\text{sen}(nx)\right]$, DONDE LOS COEFICIENTES SON LOS COEFICIENTES DE FOURIER DE ' f ' EN $[-\pi, \pi]$

EJEMPLO. ENCONTRAR LA SERIE DE FOURIER DE $f(x) = x^4$ EN $[-\pi, \pi]$.

COMO x^4 ES PAR EN $[-\pi, \pi]$, $b_n = 0$. SE CALCULAN LOS OTROS DOS COEFICIENTES Y SE TIENE QUE:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{5}$$

Y, PARA $n = 1,2,3,\ldots$ SE TIENE QUE: $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 \cos(nx)\,dx$, INTEGRAL QUE SE RESUELVE POR PARTES (4 VECES) Y DA POR RESULTADO:

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\left[x^4 \,\text{sen}(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{8}{n\pi}\left[\frac{3n^2x^2 - 6}{n^4}\,\text{sen}(nx) - \frac{n^2x^3 - 6x}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{8}{\pi n^4}\left(n^2\pi^3 - 6\pi\right)\cos(n\pi)$$

Y SE LLEGA A: $a_n = \frac{8}{n^4}\left(n^2\pi^2 - 6\right)(-1)^n$, POR LO QUE LA SERIE DE FOURIER PARA $f(x) = x^4$ EN $[-\pi, \pi]$ ES:

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{N=1}^{\infty}\frac{8}{n^4}\left(n^2\pi^2 - 6\right)(-1)^n \cos(nx)$$

UTOPÍA CIENTÍFICA

¿SON LOS SERES HUMANOS DEMASIADO INTELIGENTES PARA SU PROPIO BIEN?

A PRINCIPIOS DEL SIGLO XXI LOS SERES HUMANOS SE PREGUNTAN SI ESTÁN ESCLAVIZADOS POR LAS MÁQUINAS QUE UTILIZAN, LAS COSECHAS QUE HACEN CRECER O EL DINERO QUE GANAN. PERO HAY DOS POSIBILIDADES LATENTES EN LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA ACTUALES. UNA ES EL DESAFÍO DE LAS COMPUTADORAS QUE, EN CIERTO SENTIDO PRÁCTICO, SERÁN MÁS INTELIGENTES QUE LOS SERES HUMANOS. OTRA IDEA ES QUE EL CONOCIMIENTO DE LA GENÉTICA Y LA INGENIERÍA GENÉTICA PODRÍAN OFRECERNOS LOS MEDIOS PARA CREAR UNA NUEVA ESPECIE O RAZA DE SERES HUMANOS SUPERIORES AL HOMO SAPIENS SAPIENS EN PODERES TANTO FÍSICOS COMO MENTALES. EN CUALQUIER CASO, LA GENTE PUEDE CREER QUE SE LE HA CONDENADO A LA MISMA RELACIÓN CON SUPERCOMPUTADORAS O SUPERHOMBRES, QUE LA QUE TIENEN LOS CHIMPANCÉS CON LOS SERES HUMANOS. ESTAS POSIBILIDADES EXTREMAS TRAEN A COLACIÓN MUCHAS PREGUNTAS: ¿EN QUÉ MEDIDA EL TRABAJO CREATIVO DEL HOMBRE, EN LAS ARTES Y EN LA TECNOLOGÍA, SERÍA MANEJADO POR LAS COMPUTADORAS? ¿DÓNDE ESTÁ LA LÍNEA DIVISORIA ENTRE LA CURACIÓN DE DEFECTOS GENÉTICOS EN PACIENTES Y EL TRATAR DE CREAR SERES HUMANOS SUPERIORES? ¿CUÁL ES LA ESENCIA DE LA NATURALEZA HUMANA QUE LA HACE DIFERENTE A LAS MÁQUINAS O A LOS SUPERHOMBRES? CON EXCEPCIÓN DE LA EXTERMINACIÓN, NO PODRÍA HABER NADA TAN EMPOBRECEDOR COMO ROBAR A LOS SERES HUMANOS EL CONTROL SOBRE SUS PROPIOS ASUNTOS, Y DIRIGIRLO TODO DESDE COMPUTADORAS SUPERINTELIGENTES O SUPERHOMBRES. Y TÚ, LECTOR, ¿QUÉ CREES AL RESPECTO?

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS INGENIEROS ERIK CASTAÑEDA Y GABRIEL JARAMILLO.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 8 2 DE SEPTIEMBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. **¡YA VIENE LA "SEMANASEFIINGENIERÍA UNAM 2000" CON SUS FABULOSAS "SEFIOLIMPIADAS 2000" DEPORTE-CULTURA! ¡PARTICIPA Y GANA"**

QUÍMICA

EL ÚLTIMO ELECTRÓN DE UN ÁTOMO TIENE LOS NÚMEROS CUÁNTICOS SIGUIENTES $n = 4$, $l = 1$, $m = -1$ y giro $= +\frac{1}{2}$. SUPONGA QUE AL ÁTOMO SE LE QUITAN ELECTRONES DE TAL MANERA QUE SOLAMENTE CONSERVA UNO. CALCULE LA FRECUENCIA DE LA SEÑAL ELECTROMAGNÉTICA QUE SE EMITE CUANDO EL ELECTRÓN SALTA DE LA SEXTA ÓRBITA A LA TERCERA.

SOLUCIÓN. PARA EL CÁLCULO DE LA FRECUENCIA SE UTILIZA LA ECUACIÓN $C = \lambda f$ EN LA CUAL $C = 2.997924 \times 10^{8} \left[\frac{m}{s}\right]$, $\lambda =$ LONGITUD DE ONDA Y $f =$ FRECUENCIA. COMO SE OBSERVA, SE REQUIERE LA LONGITUD DE ONDA Y, COMO SE TRATA DE TRANSICIONES ELECTRÓNICAS EN UN ÁTOMO HIDROGENOIDE, SE PIENSA INMEDIATAMENTE EN LA ECUACIÓN DE BOHR

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left[\frac{1}{n_f^{\,2}} - \frac{1}{n_i^{\,2}}\right] \text{donde } R = 10{,}973{,}731.53 \left[\frac{1}{m}\right]$$

DE IGUAL FORMA, SE APRECIA QUE HAY VARIABLES DESCONOCIDAS COMO EL NÚMERO ATÓMICO (Z), n_f (NIVEL FINAL) Y n_i (NIVEL INICIAL). VEAMOS CÓMO CALCULARLAS.

PARA Z

EN EL PROBLEMA SE MENCIONA QUE PARA EL ÚLTIMO ELECTRÓN DEL ÁTOMO $n = 4$, $\ell = 1$, $m = -1$ y giro $= +\frac{1}{2}$. ESTA INFORMACIÓN PERMITE IDENTIFICAR AL ELEMENTO DEL QUE SE TRATA, CON EL ANÁLISIS SIGUIENTE. PARA $n = 4$, ℓ PUEDE TOMAR VALORES DE

$$0 = s \quad ; \quad \ell = p \quad ; \quad 2 = d \quad ; \quad 3 = f$$

EN ESTE CASO SE TRATA DEL ORBITAL "p", EN ÉSTE "m" PUEDE ADQUIRIR VALORES DE $-1, 0, +1$ QUE CORRESPONDAN A LAS TRES ORIENTACIONES (np_x, np_y, np_z) DEL ORBITAL "p" EN EL ESPACIO. SE DEDUCE QUE SI $m = -1$, EL ELECTRÓN SE UBICA EN np_x.

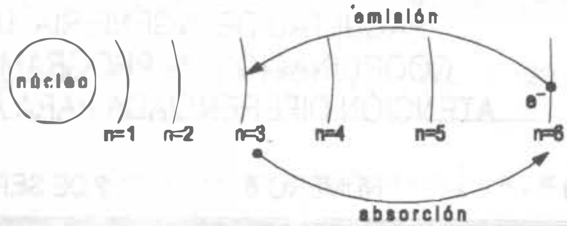
FINALMENTE Y SEGÚN EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI, UN ORBITAL PUEDE CONTENER 2 ELECTRONES CON GIROS OPUESTOS $\left(+\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{1}{2}\right)$. SI EL GIRO ES $+\frac{1}{2}$, LA REPRESENTACIÓN PUEDE PLANTEARSE DE LA MANERA SIGUIENTE

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \\ \overline{\quad\quad} & \overline{\quad\quad} & \overline{\quad\quad} \\ 4p_x & 4p_y & 4p_z \\ -1 & 0 & +1 \end{array}$$

ASÍ QUE SE TRATA DE UN ELEMENTO CUYO ÚLTIMO ELECTRÓN SE UBICA EN EL ORBITAL $4p^1$, QUE ES EL GALIO, CON NÚMERO ATÓMICO 31 Y CONFIGURACIÓN ELECTRÓNICA $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^1$

PARA n_f Y n_i

COMO SE TRATA DE UN FENÓMENO DE EMISIÓN, SE SABE QUE $n_f = 3$ y $n_i = 6$, YA QUE EL ELECTRÓN SALTA DEL NIVEL 6 AL NIVEL 3



SI SE SUSTITUYE EN LA ECUACIÓN DE BOHR, SE TIENE QUE

$$\frac{1}{\lambda} = [31]^2 \left[10{,}973{,}731.53\right]\left[\frac{1}{m}\right]\left[\frac{1}{(3)^2} - \frac{1}{(6)^2}\right] \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 878.813 \times 10^6 \left[\frac{1}{m}\right]$$

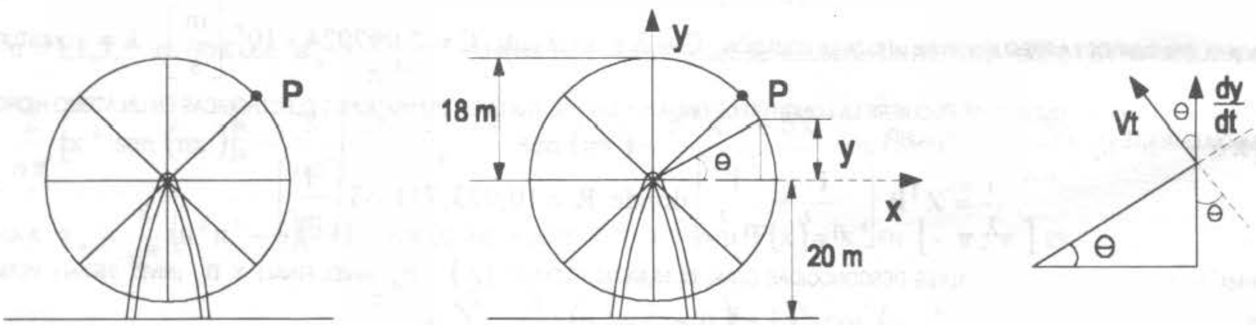
DE TAL FORMA QUE $\lambda = 1.1379 \times 10^{-9}\,[m]$ Y LA FRECUENCIA CORRESPONDIENTE SE CALCULA COMO

$$f = \frac{C}{\lambda} = \frac{2.997924 \times 10^8 \left[\frac{m}{s}\right]}{1.1379 \times 10^{-9}\,[m]} = 2.6346 \times 10^{17}\left[\frac{1}{s}\right]$$

QUE ES EL RESULTADO FINAL DE LO SOLICITADO

CÁLCULO I

UNA "RUEDA DE LA FORTUNA" COMO LA MOSTRDA EN LA FIGURA, DA UNA VUELTA Y MEDIA CADA DOS MINUTOS. ¿CON QUÉ VELOCIDAD SE ELEVA UNA PERSONA CUYO ASIENTO ESTÁ A 29 M SOBRE EL NIVEL DEL SUELO? Y, ¿CUÁL ES LA VELOCIDAD TANGENCIAL DE LA PERSONA CON RESPECTO A LA TRAYECTORIA CIRCULAR QUE DESCRIBE?



SOLUCIÓN. LA VELOCIDAD ANGULAR DE LA RUEDA ESTÁ DADA POR $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1.5(2\pi)\,rad}{2\,min} = 1.5\,\pi\,\frac{rad}{min}$ Y, DE ACUERDO CON LA FIGURA EN LA QUE SE HAN FIJADO MAGNITUDES VARIABLES Y CONSTANTES, LO QUE SE PIDE EN EL PROBLEMA ES LA RAPIDEZ CON LA QUE VARÍA " y ", ES DECIR, $\frac{dy}{dt}$ Y LA SEGUNDA PREGUNTA ES CON RESPECTO AL VALOR DE LA VELOCIDAD TANGENCIAL, LA QUE, EN RELACIÓN CON EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE LA FIGURA ES " v_t ".

LA DISTANCIA " y " SE EXPRESA COMO

$$y = 18\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{DE DONDE} \qquad \frac{dy}{dt} = 18\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

DE LOS DATOS

$$y = 9\,m \;\Rightarrow\; \theta = \text{ang sen}\,\frac{9}{18} \;\Rightarrow\; \theta = 30^0$$

LUEGO

$$\frac{dy}{dt} = 18\cos 30^0\,(1.5\,\pi) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = 73.46$$

POR OTRO LADO, DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO DE LA FIGURA, SE TIENE QUE:

$$\cos\theta = \frac{73.46}{v_t} \;\Rightarrow\; v_t = 84.82$$

POR LO QUE LA PERSONA SE ELEVA A RAZÓN DE $73.46\,\frac{m}{min}$ Y SU VELOCIDAD TANGENCIAL ES DE $84.82\,\frac{m}{min}$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL SIGUIENTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES

$$y''-\sqrt{2}\,y'+y=0 \quad ; \quad y(0)=\sqrt{2} \quad ; \quad y'(0)=0$$

SOLUCIÓN. LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA ES $m^2-\sqrt{2}\,m+1=0$, LUEGO

$$m=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

DE DONDE $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES:

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

DE LA PRIMERA CONDICIÓN

$$y(0)=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{2}=C_1(1) \;\Rightarrow\; C_1=\sqrt{2} \;\Rightarrow\; y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

SE DERIVA ESTA EXPRESIÓN Y SE TIENE QUE

$$y'=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(-\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Y, DE LA SEGUNDA CONDICIÓN:

$$y'(0)=0 \;\Rightarrow\; 0=C_2\frac{\sqrt{2}}{2}(1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right) \;\Rightarrow\; C_2\frac{\sqrt{2}}{2}=-1 \;\Rightarrow\; C_2=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN DE ESTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES ES:

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \;\Rightarrow\; y=\sqrt{2}\,e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SI LA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ SE EXPRESA EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS POLARES r y θ, DEMOSTRAR QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

SOLUCIÓN $f(z)=u(x,y)+v(x,y)\,i$ donde $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$

COMO " f " ES ANALÍTICA, ENTONCES $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

SE DERIVAN " u " y " v " CON RESPECTO A " r " y " θ " Y SE TIENE QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\operatorname{sen}\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) \quad \cdots \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\operatorname{sen}\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta) \quad \cdots \quad (4)$$

DE LAS ECUACIONES (1) y (3) REPRESENTADAS EN FORMA MATRICIAL, SE OBTIENE

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}\\ \frac{\partial u}{\partial\theta}\end{bmatrix}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL SIGUIENTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES

$$y''-\sqrt{2}\,y'+y=0 \quad ; \quad y(0)=\sqrt{2} \quad ; \quad y'(0)=0$$

SOLUCIÓN. LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA ES $m^2-\sqrt{2}\,m+1=0$, LUEGO

$$m=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

DE DONDE $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

DE LA PRIMERA CONDICIÓN

$$y(0)=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}=C_1(1)\ \Rightarrow\ C_1=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

SE DERIVA ESTA EXPRESIÓN Y SE TIENE QUE

$$y'=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(-\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

Y, DE LA SEGUNDA CONDICIÓN

$$y'(0)=0\ \Rightarrow\ 0=C_2\frac{\sqrt{2}}{2}(1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)\ \Rightarrow\ C_2\frac{\sqrt{2}}{2}=-1\ \Rightarrow\ C_2=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN DE ESTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES ES:

$$y=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\ \Rightarrow\ y=\sqrt{2}\,e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SI LA FUNCIÓN ANALÍTICA $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$ SE EXPRESA EN TÉRMINOS DE LAS COORDENADAS POLARES r y θ, DEMOSTRAR QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

SOLUCIÓN $f(z)=u(x,y)+v(x,y)i$ donde $x=r\cos\theta$ y $y=r\operatorname{sen}\theta$

COMO " f " ES ANALÍTICA, ENTONCES $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

SE DERIVAN " u " y " v " CON RESPECTO A " r " y " θ " Y SE TIENE QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \quad \cdots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \quad \cdots (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\operatorname{sen}\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) \quad \cdots (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\operatorname{sen}\theta)+\frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta) \quad \cdots (4)$$

DE LAS ECUACIONES (1) y (3) REPRESENTADAS EN FORMA MATRICIAL, SE OBTIENE

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}\\ \frac{\partial u}{\partial \theta}\end{bmatrix}$$

SE RESUELVE EL SISTEMA POR KRAMER DE LA SIGUIENTE FORMA

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r} & \operatorname{sen}\theta\\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta} & r\cos\theta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial r}r\cos\theta-\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta}{r\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\quad\cdots\quad(5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\cos\theta & \dfrac{\partial u}{\partial r}\\ -r\operatorname{sen}\theta & \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta+\dfrac{\partial u}{\partial r}r\operatorname{sen}\theta}{r\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta}=\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\quad\cdots\quad(6)$$

SI SE PROCEDE EN FORMA ANÁLOGA CON LAS ECUACIONES (2) y (4) SE OBTIENE

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\quad\cdots\quad(7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\operatorname{sen}\theta+\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\quad\cdots\quad(8)$$

COMO " f " ES ANALÍTICA $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ DE DONDE, AL IGUALAR (5) y (8) SE LLEGA A

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}=\frac{\partial v}{\partial r}\operatorname{sen}\theta+\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\cos\theta-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)\operatorname{sen}\theta=0$$

COMO LAS FUNCIONES $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES, PARA QUE UNA COMBINACIÓN LINEAL DE ELLAS SEA CERO, SE REQUIERE QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}=0\qquad y\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial r}=0$$

DE DONDE, FINALMENTE, DE TIENE QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\qquad\qquad y\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

QUE ES LO QUE SE QUERÍA DEMOSTRAR.

NOTA: UN RESULTADO IGUAL SE OBTIENE SI SE CONSIDERA LA IGUALDAD $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$

CIENCIA Y TECNOLOGÍA

CUÁNTA RAZÓN TENIA LEIBNIZ CUANDO EN SU ÉPOCA EXPRESARA:

"NO ES ADMISIBLE QUE LOS ESTUDIOSOS Y CIENTÍFICOS EN LUGAR DE ELABORAR Y CONFRONTAR NUEVAS TÉCNICAS, PIERDAN SU TIEMPO COMO ESCLAVOS EN LAS FATIGAS DEL CÁLCULO, QUE PODÍA SER CONFIADO A CUALQUIERA SI SE PUDIERAN UTILIZAR MÁQUINAS PARA ELLO".

ESTUDIANTES: APROVECHEN LOS APOYOS ACADÉMICOS DE LA **COPADI**. HAY SESIONES EN QUE SE RESUELVEN EXÁMENES COLEGIADOS ANTERIORES. SON MÁS DE 90 MINUTOS DE EJERCICIOS PARA PREPARAR TUS EXÁMENES. ADEMÁS ESTÁN LAS "AAC" (ACCIONES ACADÉMICAS INDIVIDUALES) EN LAS QUE COMPAÑEROS TE AYUDAN EN DUDAS DE MUCHAS ASIGNATURAS. CONSULTA LOS HORARIOS EN LAS VENTANAS DE LA **COPADI** Y ENTRA. AHÍ TE ESPERAN ESTUDIANTES COMO TÚ QUE QUIEREN AYUDARTE Y APOYAR ASÍ TU APRENDIZAJE PARA QUE ALCANCES EL ÉXITO EN TUS ASIGNATURAS.

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LA QFB. VIOLETA L. M. BRAVO HERNÁNDEZ Y DE LOS INGENIEROS
ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, GABRIEL JARAMILLO MORALES Y ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

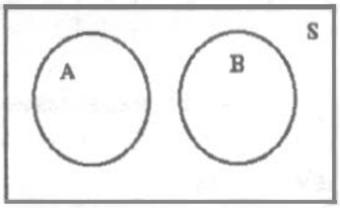
AÑO 2000 NÚMERO 9 17 DE SEPTIEMBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. A PETICIÓN DE ESTUDIANTES DE LA FACULTAD, SE PUBLICARÁN TAMBIÉN EJERCICIOS DE LAS DIVISIONES PROFESIONALES. SI ALGUNOS EJERCICIOS QUE APAREZCAN NO LOS HAS ESTUDIADO, COLECCIONA EL BOLETÍN Y YA LOS NECESITARÁS. **¡YA VIENE LA "SEMANASEFIINGENIERÍA UNAM 2000" CON SUS FABULOSAS "SEFIOLIMPIADAS 2000" DEPORTE-CULTURAI ¡PARTICIPA Y GANA"**

PROBABILIDAD (EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE)

1.- DADOS LOS EVENTOS A Y B; CUYA REPRESENTACIÓN EN UN DIAGRAMA DE VENN ES



ENTONCES, PARA LAS SIGUIENTES PROPOSICIONES:

I) SON EVENTOS INDEPENDIENTES.
II) SU INTERSECCIÓN ES EL VACÍO.
III) SON MUTUAMENTE EXCLUYENTES.

SE PUEDE AFIRMAR DE A Y B QUE:

1) SÓLO (I) ES CIERTA
2) SÓLO (II) ES CIERTA
3) SÓLO (III) ES CIERTA
4) SÓLO (II) Y (III) SON CIERTAS.
5) TODAS SON CIERTAS.

2.- SEA X UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA CON FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.1 & 0\le x<1 \\ 0.8 & 1\le x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

ENTONCES $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$ ES:

1) 0.1 2) 0.7 3) 0.8 4) 0.45 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

3.- EL VALOR DE LA CONSTANTE c, PARA QUE LA FUNCIÓN

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} c\ , & si\ x^2+y^2\le 1 \\ 0\ , & en\ otro\ caso \end{cases}$$

SEA UNA FUNCIÓN DE DENSIDAD CONJUNTA ES:

1) 1 2) π 3) $\frac{1}{\pi}$ 4) 2 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

4.- EL TIEMPO QUE TOMA REPARAR UNA COMPUTADORA PERSONAL ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON FUNCIÓN DE DENSIDAD.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0<x<2\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

EL COSTO DE LA REPARACIÓN DEPENDE DEL TIEMPO, Y ES IGUAL A $40+30\sqrt{x}$. EL COSTO ESPERADO AL REPARAR UNA COMPUTADORA PERSONAL ES: ☐

1) 68.28   2) 70   3) 1   4) 16.56   5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

1.- RESPUESTA: 4

NO DEBE CONFUNDIRSE EL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA CON EL DE EVENTOS EXCLUYENTES. DE HECHO, DOS EVENTOS EXCLUYENTES SON DEPENDIENTES.

2.- RESPUESTA: 2

DEBE OBSERVARSE QUE SE TRATA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA, QUE SÓLO TOMA LOS VALORES 0,1 Y 2.

X	0	1	2
$f_X(x)$	0.1	0.7	0.2

$$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=P(X=1)=0.7$$

3.- RESPUESTA: C

RESOLUCIÓN

DE LA CONDICIÓN $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(xy)\,dx\,dy=1$

INTEGRAL QUE SE PUEDE INTERPRETAR COMO QUE EL VOLUMEN BAJO LA SUPERFICIE $f_{XY}(x,y)=c$ Y DENTRO DE LA REGIÓN $x^2+y^2\le 1$, PUESTO QUE SE TIENE EL VOLUMEN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO DE ALTURA c Y RADIO 1, ENTONCES:

$c\pi=1$ ENTONCES: $c=\frac{1}{\pi}$

4.- RESPUESTA: A

$$E\left(40+30\sqrt{x}\right)=40+30E\left(\sqrt{x}\right)$$

PERO $E\left(\sqrt{x}\right)=\int_0^2\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\,dx=\left.\frac{2}{3(2)}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{2}{3}\sqrt{2}=0.9428$

POR LO QUE

$$E\left(40+30\sqrt{x}\right)=68.28427$$

ESTADÍSTICA (OPCIONES MÚLTIPLES)

1.- EL ERROR ESTÁNDAR DE UN ESTADÍSTICO ES: ☐

A) LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR ENTRE LA MEDIA.

B) EL ERROR EN LA ESTIMACIÓN PUNTUAL.

C) LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE SU DISTRIBUCIÓN MUESTRAL.

D) $S_{n-1}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$

E) NINGUNO DE LOS ANTERIORES.

2.- SI T ES UNA VARIABLE ALEATORIA CON DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT CON ν GRADOS DE LIBERTAD, ENTONCES T^2 TIENE DISTRIBUCIÓN: ☐

A) χ_{ν}^2 B) $N(0,1)$

C) t_{ν^2} D) $F_{1,\nu}$

E) t_ν

3.- SI SE DEFINEN LOS ESTIMADORES DE LA VARIANCIA

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \text{ Y } S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

ENTONCES EL INTERVALO DE CONFIANZA DE DOS LADOS DEL $100(1-\alpha)\%$ PARA LA VARIANCIA ES:

A) $\left[\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha,n}} S^2_{n-1}, \frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha,n}} S^2_{n-1}\right]$ B) $\left[\frac{n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} S_n^2, \frac{n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} S_n^2\right]$

C) $\left[\frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} S^2_{n-1}, \frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} S^2_{n-1}\right]$ D) $\left[\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}} S_n^2, \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}} S_n^2\right]$

E) $\left[\frac{n}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}} S_n^2, \frac{n}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}} S^2_{n-1}\right]$

4.- EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE UN ESTIMADOR Θ ES:

A) $[\theta - E(\Theta)]^2$ B) $Var(\Theta)$

C) $E[\Theta]-\theta$ D) $E\{[\theta - E(\Theta)]^2\}$

E) $E[(\Theta - \theta)^2]$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE ESTADÍSTICA

1.- RESPUESTA: C

EL ERROR ESTÁNDAR DE UN ESTADÍSTICO ES LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR DE SU DISTRIBUCIÓN MUESTRAL.

2.- RESPUESTA: D

UNA VARIABLE ALEATORIA T SE DEFINE COMO UNA V.A. NORMAL ESTÁNDAR ENTRE LA RAÍZ CUADRADA DEL COCIENTE DE UNA JI CUADRADA ENTRE SUS GRADOS DE LIBERTAD, ESTO ES:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{X^2}{\nu}}}$$

AL ELEVARLA AL CUADRADO SE TIENE:

$$T^2 = \frac{Z^2}{\frac{X^2}{\nu}}$$

Y PUESTO QUE UNA V.A. JI CUADRADA ES LA SUMA DE NORMALES ESTÁNDAR AL CUADRADO, ENTONCES EN EL NUMERADOR SE TIENE OTRA V.A. JI CUADRADA, ENTONCES T^2 ES EL COCIENTE DE DOS JI CUADRADAS ENTRE SUS GRADOS DE LIBERTAD, LO QUE DEFINE UN V.A. F.

3.- RESPUESTA: B

LA ESTIMACIÓN POR INTERVALOS ESTÁ DADA TRADICIONALMENTE POR

$$\left[\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} S^2_{n-1}, \frac{n-1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} S^2_{n-1}\right]$$

TENIÉNDOSE EN EL NUMERADOR LA CANTIDAD $(n-1)S_{n-1}^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, QUE ES IGUAL

$$(n)S_n^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

ES DECIR, LA DISTRIBUCIÓN DE $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}$ EN JI CUADRADA CON $n-1$ GRADOS DE LIBERTAD.

4.- RESPUESTA E

EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO PUEDE INTERPRETARSE COMO LA DIFERENCIA (ERROR) ENTRE EL ESTADÍSTICO Y EL PARÁMETRO A ESTIMAR ELEVADA AL CUADRADO (CUADRÁTICO) Y PUESTO QUE ESTO SE PUEDE HACER VARIAS VECES SE TOMA EL PROMEDIO (MEDÍO), QUE PARA EL CASO DE UNA DISTRIBUCIÓN ES EL VALOR ESPERADO.

EL ERROR CUADRÁTICO MEDIO PARA UN ESTIMADOR SE DEFINE COMO

$$ECM(\Theta)=E(\Theta-\theta)^2=Var(\Theta)+sesgo^2$$

ÁLGEBRA LINEAL

PARA EL CONJUNTO $D=\{f(x),\ g(x),\ h(x)\}$, DONDE: $f(x)=\begin{cases}1 & si \quad x\le 2\\ x-1 & si \quad x>2\end{cases}$;

$$g(x)=\begin{cases}sen^2 x & si \quad x\le 0\\ x & si \quad x>0\end{cases};\quad h(x)=\begin{cases}\cos 2x & si \quad x\le 0\\ x^3 & si \quad x>0\end{cases}$$

DETERMINAR UN INTERVALO DE VALORES DE "x" PARA EL CUAL LAS FUNCIONES DEL CONJUNTO "D" SON:

A) LINEALMENTE DEPENDIENTES

EN EL INTERVALO $x\le 0$:

$\alpha(1)+\beta(sen^2 x)+\gamma(\cos 2x)=0$; COMO $sen^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$, CON $\alpha=-1;\ \beta=2$ y $\gamma=1$ SE OBSERVA QUE LA FUNCIÓN $sen^2 x$ SE PUEDE ESCRIBIR COMO UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LAS OTRAS DOS FUNCIONES. POR LO TANTO, LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE DEPENDIENTES EN EL INTERVALO $x\le 0$

B) LINEALMENTE INDEPENDIENTES

- EN EL INTERVALO $0<x<2$:

$$\alpha(1)+\beta(x)+\gamma(x^3)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0;\quad \beta=0;\quad \gamma=0$$

ENTONCES LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES. SI SE COMPRUEBA LA INDEPENDENCIA LINEAL CON EL WRONSKIANO, SE TIENE QUE $W(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^3\\ 0 & 1 & 3x^2\\ 0 & 0 & 6x\end{vmatrix}=6x\ne 0$ entre 0 y 2

- EN EL INTERVALO $x>2$

$$\alpha(x-1)+\beta(x)+\gamma(x^3)=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha x-\alpha+\beta x+\gamma x^3=0x^3+0x+0$$

$$\gamma=0;\ \alpha+\beta=0;\ -\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha=0;\ \beta=0;\ \gamma=0$$

ENTONCES LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN EL INTERVALO. SI SE COMPRUEBA LA INDEPENDENCIA LINEAL CON EL WRONSKIANO, SE TIENE QUE $W(x)=\begin{vmatrix}x-1 & x & x^3\\ 1 & 1 & 3x^2\\ 0 & 0 & 6x\end{vmatrix}=6x(x-1-x)=-6x\ne 0$ en $x>2$. POR LO TANTO, LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN $x>0$.

NOTA. CABE RECORDAR QUE SI EL WRONSKIANO ES DIFERENTE DE CREO, SE PRESENTA LA INDEPENDENCIA LINEAL.

"LA LIBERTAD NO ES SÓLO UN SUEÑO. ESTÁ DETRÁS DE LAS CERCAS QUE ERIGIMOS NOSOTROS MISMOS"

¡HAY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS INGENIEROS ÁNGEL LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO Y RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

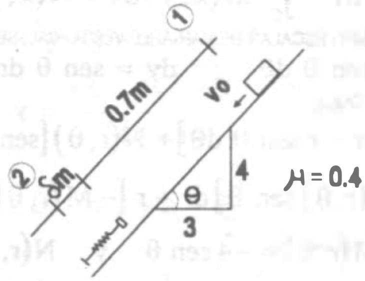
AÑO 2000 NÚMERO 10 2 DE OCTUBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **¡EL LUNES 9 DE OCTUBRE COMIENZA LA "SEMANASEFIINGENIERÍA UNAM 2000" CON SUS "JORNADAS DE INGENIERÍA", SUS FABULOSAS "SEFIOLIMPIADAS 2000" DEPORTE-CULTURA", SU CONGRESO Y SU EXPOSICIÓN ¡PARTICIPA, APRENDE Y GANA! ¡INVITA A TUS PROFESORES!**

DINÁMICA

¿CUÁL ES LA VELOCIDAD v_o A LA QUE SE DEBE LANZAR UN BLOQUE DE $40\,[N]$ DE PESO, CONTRA UN RESORTE LINEAL DE CONSTANTE $k = 3{,}584\left[\frac{N}{m}\right]$ PARA QUE DESPUÉS DE COMPRIMIRLO, REGRESE EXACTAMENTE A LA POSICIÓN DE LANZAMIENTO? ¿CUÁNTO VALE LA ACELERACIÓN DEL BLOQUE JUSTO EN EL MOMENTO CUANDO EL RESORTE EXPERIMENTA LA MÁXIMA COMPRESIÓN?



SOLUCIÓN. SEA δ_m LA COMPRESIÓN MÁXIMA PRODUCIDA AL RESORTE. EL TRABAJO TOTAL DE (1) A (2) LO REALIZAN EL PESO $(+)$, LA FRICCIÓN $(-)$ Y LA FUERZA DEL RESORTE $(-)$ (LA FUERZA NORMAL NO REALIZA TRABAJO). LA SUMA DE ESTOS TRABAJOS ES IGUAL A LA VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA. POR OTRO LADO, LA RAPIDEZ EN (2) ES NULA.

$$U_W + U_\mu + U_k = EC_2 - EC_1 \quad ; \quad (EC_2 = 0)$$

$$W\,(\delta_m + 0.7)\,\text{sen}\,\theta - \mu\, W\,(\delta_m + 0.7)\cos\theta - \frac{1}{2}k\,\delta^2_m = 0 - \frac{1}{2}\frac{W}{g}v^2_o \quad \cdots \quad (1)$$

DE LA MISMA MANERA SE FORMULA EL TRABAJO TOTAL DE LOS PUNTOS (2) AL (1), QUE LO REALIZAN LAS SIGUIENTES FUERZAS: EL PESO $(-)$, LA FRICCIÓN $(-)$ Y EL RESORTE $(+)$. EN ESTAS CONDICIONES, $EC_1 = EC_2 = 0$

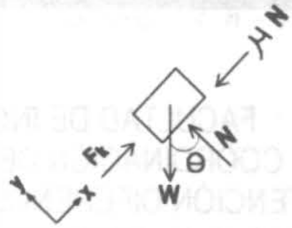
$$-W\,(\delta_m + 0.7)\,\text{sen}\,\theta - \mu\, W\,(\delta_m + 0.7)\cos\theta + \frac{1}{2}k\,\delta^2_m = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

AL SUSTITUIR LOS DATOS $W = 40\,[N], \mu = 0.4, \cos\theta = 0.6, \text{sen}\,\theta = 0.8$ y $k = 3{,}584\left[\frac{N}{m}\right]$ EN LAS ECUACIONES (1) Y (2) Y SIMPLIFICAR, SE TIENE LO SIGUIENTE: SE SUSTITUYEN LOS VALORES EN LA ECUACIÓN (2) Y SE LLEGA A:

$$22.4\,\delta_m + 15.68 - 1{,}792\,\delta^2_m = -2.038\,v^2_o \quad \Rightarrow \quad 1{,}792\,\delta^2_m - 41.6\,\delta_m - 29.12 = 0$$

SE RESUELVE ESTA ECUACIÓN Y SE OBTIENE QUE $\delta_m = 0.1396$. CON ESTE VALOR, DE LA ECUACIÓN (1) SE TIENE QUE $v_o = 2.81\left[\frac{m}{s}\right]$

EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL) CUANDO SE TIENE COMPRESIÓN MÁXIMA DEL RESORTE, ES DECIR, CUANDO EL BLOQUE ESTÁ A PUNTO DE SUBIR, SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA



DE DONDE:

$$\sum F_y = 0 \quad ; \quad N - W\cos\theta = 0 \quad \cdots \quad (3) \qquad y \qquad \sum F_x = m\ddot{x} \quad ; \quad F_k - W\,\text{sen}\,\theta - \mu N = \frac{W}{g}\ddot{x} \quad \cdots \quad (4)$$

DADO QUE $F_k = k\,\delta_m \quad \cdots \quad (5)$, SE UTILIZAN ESTAS TRES ECUACIONES Y SE OBTIENE FINALMENTE QUE $\ddot{x} = 112.5\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

CÁLCULO III

UN CAMPO DE FUERZA ESTÁ DADO POR LA ECUACIÓN $\bar{F}(r,\theta) = -4\,\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + 4\,\text{sen}\,\theta\,\hat{j}$ DONDE $x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$

CALCULAR EL TRABAJO NECESARIO PARA MOVER UNA PARTÍCULA DEL PUNTO $A(1,0)$ AL ORIGEN, A LO LARGO DE LA ESPIRAL CUYA ECUACIÓN POLAR ES $r = e^{-\theta}$.

SOLUCIÓN. EL TRABAJO SE OBTIENE A PARTIR DE LA EXPRESIÓN

$$W = \int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_C M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

DE DONDE, SI SE APLICA EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL DE UN CAMPO ESCALAR DE VARIABLE VECTORIAL, SE TIENE QUE:

$$dx = \cos\theta\,dr - r\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \quad ; \quad dy = \text{sen}\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta$$

POR LO QUE LA EXPRESIÓN QUE DETERMINA EL TRABAJO QUEDA COMO:

$$W = \int_C M(r,\theta)\left[\cos\theta\,dr - r\,\text{sen}\,\theta\,d\theta\right] + N(r,\theta)\left[\text{sen}\,\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta\right]$$

$$\therefore \quad W = \int_C \left[M(r,\theta)\cos\theta + N(r,\theta)\,\text{sen}\,\theta\right]dr + r\left[-M(r,\theta)\,\text{sen}\,\theta + N(r,\theta)\cos\theta\right]d\theta$$

PARA EL CASO DEL PRESENTE PROBLEMA SE TIENE QUE $\quad M(r,\theta) = -4\,\text{sen}\,\theta \quad y \quad N(r,\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta$

LUEGO $\quad W = \int_C \left[-4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 4\,\text{sen}^2\theta\right]dr + r\left[4\,\text{sen}^2\theta + 4\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\right]d\theta$

POR OTRO LADO, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS PARA LA TRAYECTORIA ' C ' SON LAS SIGUIENTES:

$$\theta = t \quad ; \quad r = e^{-t}$$

$$d\theta = dt \quad ; \quad dr = -e^{-t}\,dt$$

PARA DEFINIR LOS EXTREMOS DE INTEGRACIÓN, SE HACE LO SIGUIENTE:

$\theta = 0 \;\Rightarrow\; t = 0 \;\Rightarrow\; r = 1$ Y SE TIENE EL PUNTO $(1,0)$

$\theta \to \infty \;\Rightarrow\; t \to \infty \;\Rightarrow\; r = 0$ Y SE TIENE EL PUNTO $(0,0)$

DE DONDE, EL TRABAJO EQUIVALE A:

$$W = \int_0^{\infty}\left(4e^{-t}\,\text{sen}\,t\cos t - 4e^{-t}\,\text{sen}^2 t + 4e^{-t}\,\text{sen}^2 t + 4e^{-t}\,\text{sen}\,t\cos t\right)dt$$

$$W = 8\int_0^{\infty} e^{-t}\,\text{sen}\,t\cos t\,dt$$

Y, COMO $\text{sen}\,t\cos t = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t$, ENTONCES LA INTEGRAL QUEDA COMO $W = 4\int_0^{\infty} e^{-t}\,\text{sen}\,2t\,dt$, QUE AL INTEGRARSE (CABE RECORDAR QUE ES UNA INTEGRAL IMPROPIA) MEDIANTE EL MÉTODO POR PARTES, DA POR RESULTADO

$$W = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{4}{5}e^{-t}(2\cos 2t + \text{sen}\,2t)\right]_0^R = \frac{8}{5}$$ UNIDADES DE TRABAJO.

CÁLCULO I

ESTUDIAR LA VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$

SOLUCIÓN: 1) INTERSECCIONES

i) CON EL EJE "y": $x=0 \Rightarrow y=-1$

ii) CON EL EJE "x": $y=0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow$ NO TIENE SOLUCIÓN REAL

2) SIMETRÍAS

i) CON EL EJE "x": y POR -y $\Rightarrow -y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$ $\therefore$ NO HAY SIMETRÍA

ii) CON EL EJE "y": x POR -x $\Rightarrow y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ $\therefore$ NO HAY SIMETRÍA

iii) CON EL ORIGEN: x POR -x Y POR -y $\Rightarrow -y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ $\therefore$ NO HAY SIMETRÍA

3) ASÍNTOTAS

i) VERTICALES

COMO $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}=\dfrac{3}{0}\to\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}=\dfrac{1}{0}\to\infty$ ENTONCES $x=1$ y $x=-1$ SON ASÍNTOTAS VERTICALES.

ii) HORIZONTALES

COMO $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}=1$ entonces $y=1$ ES ASÍNTOTA HORIZONTAL.

4) EXTENSIÓN

i) EN EL EJE "x": $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1} \Rightarrow x\in\Re-\{-1,1\}$

ii) EN EL EJE "y": $x^2y-y=x^2+x+1 \Rightarrow (y-1)x^2-x-(y+1)=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4(y+1)(y-1)}}{2(y-1)} \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{4y^2-3}}{2(y-1)} \quad ; \quad 4y^2-3\ge 0 \Rightarrow \left(2y+\sqrt{3}\right)\left(2y-\sqrt{3}\right)\ge 0$$

PRIMERA POSIBILIDAD:

$$2y+\sqrt{3}\ge 0 \Rightarrow y\ge-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2y-\sqrt{3}\ge 0 \Rightarrow y\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$$

;SEGUNDA POSIBILIDAD:

$$2y+3\le 0 \Rightarrow y\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$2y-3\le 0 \Rightarrow y\le\frac{\sqrt{3}}{2}$$

POR LO TANTO, LA EXTENSIÓN EN "y" ES $y\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},\infty\right)$

5) EXTREMOS RELATIVOS, PUNTOS DE INFLEXIÓN Y CONCAVIDAD.

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-1)(2x+1)-(x^2+x+1)(2x)}{(x^2-1)^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x^3+x^2-2x-1-2x^3-2x^2-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2} \quad ; \quad \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}=0 \Rightarrow -x^2-4x-1=0 \Rightarrow x^2+4x+1=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4}}{2}=-2\pm\sqrt{3} \Rightarrow x_1=-2-\sqrt{3}=-3.732 \quad y \quad x_2=-2+\sqrt{3}=-0.268$$

QUE SON LOS VALLORES CRÍTICOS DONDE SE PUEDE PRESENTAR UN EXTREMO RELATIVO. PARA LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN SE DERIVA POR SEGUNDA OCASIÓN Y SE ANALIZA SI EXISTEN VALORES PARA LOS CUALES ESTA SEGUNDA DERIVADA ES NULA O NO EXISTE. ASÍ,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(x^2-1)(-2x-4)-(-x^2-4x-1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2x^3-4x^2+2x+4+4x^3+16x^2+4x}{(x^2-1)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x^3+12x^2+6x+4}{(x^2-1)^3} \quad ; \quad \frac{2x^3+12x^2+6x+4}{(x^2-1)^3}=0 \Rightarrow x^3+6x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=-5.522$$

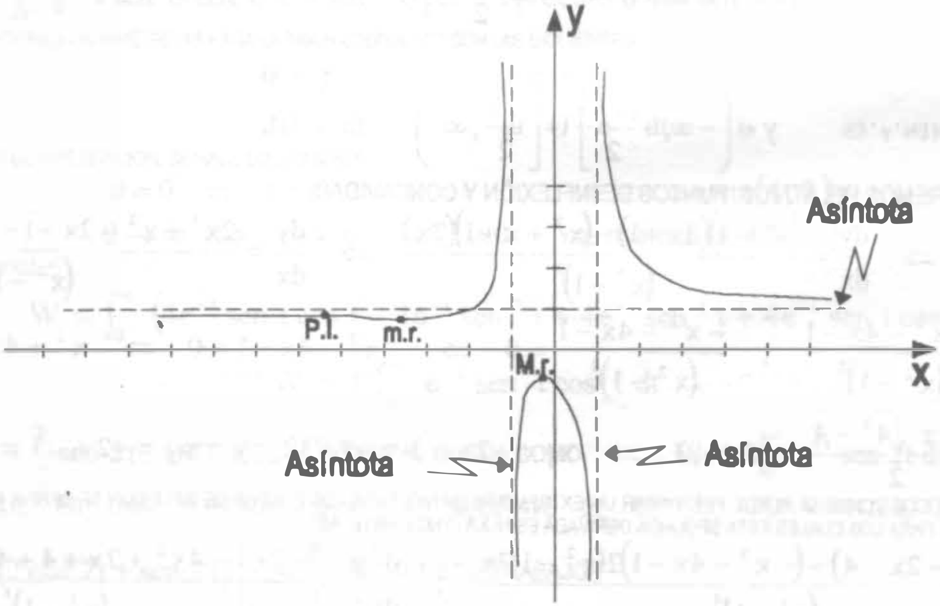
QUE ES LA ÚNICA RAÍZ REAL Y DONDE POSIBLEMENTE SE PRESENTA UN PUNTO DE INFLEXIÓN.

AHORA SE CONSTRUYE LA TABLA CORRESPONDIENTE AL ESTUDIO DE LO QUE SUCEDE EN LOS VALORES CRÍTICOS Y EN EL POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN. COMO OBSERVA, SE DEBE VER SI EXISTE VARIACIÓN DEL SIGNO DE LA DERIVADA PARA VER SI HAY EXTREMOS Y EN EL POSIBLE PUNTO DE INFLEXIÓN SE ANALIZA SI H CAMBIO DE SIGNO EN LA SEGUNDA DERIVADA, ANTES Y DESPUÉS, LO QUE CONFIRMARÍA SU EXISTENCIA. ADEMÁS, SI EL SIGNO DE LA PRIMERA DERIVADA CAMBIA MÁS A MENOS HAY UNA MÁXIMO RELATIVO Y EN CASO CONTRARIO SE TENDRÁ UN MÍNIMO RELATIVO. POR OTRO LADO, EL SIGNO MÁS O MENOS DE LA SEGUN DERIVADA HABLARÁ DE CONCAVODAD "HACIA ARRIBA" O "HACIA ABAJO" RESPECTIVAMENTE. A CONTINUACIÓN SE PRESENTA LA TABLA:

x	y	y'	y''	CARACTERÍSTICA
$(-\infty,-5.522)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	NEGATIVA	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x=-5.522$	PUNTO DE INFLEXIÓN		0	$\text{P.I.}\left(-5.522,0.88\right)$
$(-5.522,-3.732)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	POSITIVA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x=-3.732$	MÍNIMO RELATIVO	0		MIN$\left(-3.732,0.866\right)$
$(-3.732,-1)$	CRECIENTE	POSITIVA	POSITIVA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA
$x=-1$	NO ESTÁ DEFINIDA			ASÍNTOTA VERTICAL
$(-1,-0.268)$	CRECIENTE	POSITIVA	NEGATIVA	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x=-0.268$	MÁXIMO RELATIVO	0		MAX$\left(-0.268,-0.866\right)$
$(-0.268,1)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	NEGATIVA	CÓNCAVA HACIA ABAJO
$x=1$	NO ESTÁ DEFINIDA			ASÍNTOTA VERTICAL
$(1,\infty)$	DECRECIENTE	NEGATIVA	POSITIVA	CÓNCAVA HACIA ARRIBA

LUEGO LA CURVA REPRESENTA UNA FUNCIÓN QUE ES CRECIENTE EN LOS INTERVALOS $\left(-3.732,-1\right)$ y $\left(-1,-0.268\right)$; DECRECIENTE E $\left(-\infty,-3.732\right)$, $\left(-0.268,1\right)$ y $\left(1,\infty\right)$; CÓNCAVA HACIA ABAJO EN $\left(-\infty,-5.522\right)$ y $\left(-1,1\right)$; CÓNCAVA HACIA ARRIBA EN $\left(-5.522,-1\right)$ $\left(1,\infty\right)$; TIENE UN MÁXIMO RELATIVO EN EL PUNTO $\left(-0.268,-0.866\right)$, UN MÍNIMO RELATIVO EN EL PUNTO $\left(-3.732,0.866\right)$ Y UN PUNTO DE INFLEXIÓ EN EL PUNTO $\left(-5.522,0.88\right)$.

6) REPRESENTACIÓN GRÁFICA. CON LA INFORMACIÓN DE LOS INCISOS (1) AL (5) Y LA OBTENIDA DE LA TABLA ANTERIOR, SE TRAZA LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN OBJETO DEL ESTUDIO, EN LA CUAL SE OBSERVA TODA SU VARIACIÓN



¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR HUGO GERMÁN SERRANO MRANDA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHE
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVIL

BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 11 17 DE OCTUBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. PRONTO TERMINARÁ EL SEMESTRE Y ESTÁS A TIEMPO DE CERRAR MUY BIEN. **¡A ESTUDIAR CON MUCHAS GANAS!** VALE LA PENA EL ESFUERZO. **¡Y LLEGARÁS A SER INGENIERO!**

ECUACIONES DIFERENCIALES

DETERMINAR LA SOLUCIÓN GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ EN EL INTERVALO $(-\infty,\infty)$

SOLUCIÓN. PRIMERO SE RESUELVE EL SISTEMA HOMOGÉNEO $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X}$

LA MATRIZ DE COEFICIENTES ES $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+5) = 0$; DE DONDE, LOS VALORES CARACTERÍSTICOS SON

$\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -5$. AHORA SE OBTIENEN LOS VECTORES CARACTERÍSTICOS CORRESPONDIENTES:

$$\lambda_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 - 2k_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 \quad ; \quad k_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -5 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 2k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad k_2 = -2k_1 \quad ; \quad k_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -2$$

POR LO TANTO, LOS VECTORES CARACTERÍSTICOS SON $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Y LOS VECTORES SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO SON

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-5t} = \begin{pmatrix} e^{-5t} \\ -2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

DE ACUERDO CON EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS, LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO EQUIVALE A LA DEL HOMOGÉNEO MÁS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL NO HOMOGÉNEO. LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA HOMOGÉNEO ES $\mathbf{X} = \mathbf{C}\,\phi(t)$, DONDE $\phi(t)$ SE FORMA CON LOS VECTORES SOLUCIÓN DEL SISTEMA HOMOGÉNEO. LUEGO $\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$ Y SU INVERSA ES $\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix}$

Y LA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL SISTEMA ES:

$$\mathbf{X}_p = \phi(t)\int \phi^{-1}(t)\,\mathbf{F}(t)\,dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{1}{3}e^{2t} \\ \frac{1}{3}e^{5t} & -\frac{1}{3}e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3t \\ e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2te^{2t} + \frac{1}{3}e^{t} \\ te^{5t} - \frac{1}{3}e^{4t} \end{pmatrix} dt$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{t} \\ \frac{1}{5}te^{5t}-\frac{1}{25}e^{5t}-\frac{1}{12}e^{4t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Y ENTONCES, FINALMENTE, LA SOLUCIÓN GENERAL DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO ESTÁ DADA POR:

$$X = C\,\phi(t) + \phi(t)\int \phi^{-1}(t)\,F(t)\,dt$$

$$X=\begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{6}{5}t-\frac{27}{50}+\frac{1}{4}e^{-t} \\ \frac{3}{5}t-\frac{21}{50}+\frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-5t}+\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}t-\begin{pmatrix} \frac{27}{50} \\ \frac{21}{50} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}e^{-t}$$

CÁLCULO II

SEA $w = yz^2 - x^3$, Y SEAN $x = e^{r-t}$, $y = \ln(r + 2s + 3t)$ y $z = \sqrt{rs + t}$ CALCULAR $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ y $\frac{\partial w}{\partial t}$

SOLUCIÓN. SE UTILIZA LA REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL Y SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=-3x^2e^{r-t}+z^2\left(\frac{1}{r+2s+3t}\right)+2yz\left(\frac{s}{2\sqrt{rs+t}}\right)=-3e^{3(r-t)}+\frac{rs+t}{r+2s+3t}+s\ln(r+2s+3t)$$

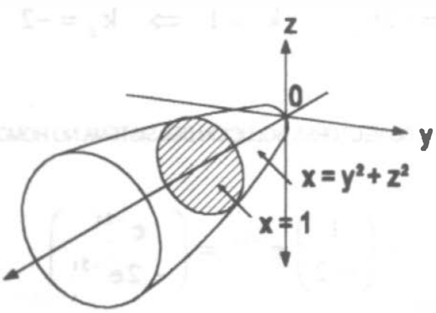
$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}=-3x^2\cdot 0+z^2\frac{2}{r+2s+3t}+2yz\left(\frac{r}{2\sqrt{rs+t}}\right)=\frac{2(rs+t)}{r+2s+3t}+r\ln(r+2s+3t)$$

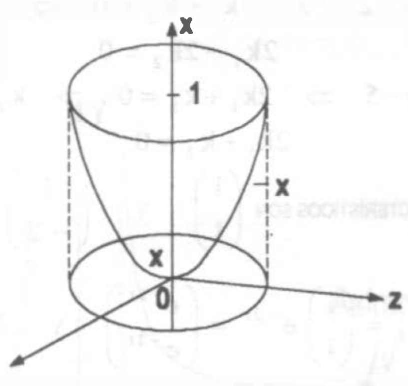
$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=-3x^2\left(-e^{r-t}\right)+z^2\left(\frac{3}{r+2s+3t}\right)+2yz\left(\frac{1}{2\sqrt{rs+t}}\right)=3e^{3(r-t)}+\frac{3(rs+t)}{r+2s+3t}+\ln(r+2s+3t)$$

CÁLCULO III

ENCONTRAR EL VOLUMEN DEL SÓLIDO LIMITADO POR EL PARABOLOIDE CIRCULAR $x = y^2 + z^2$ Y EL PLANO $x = 1$

SOLUCIÓN. EL VOLUMEN QUE SE PIDE SE MUESTRA EN LA FIGURA (A). TAL VEZ LA MEJOR MANERA DE OBTENERLO ES MEDIANTE OTRA PERSPECTIVA DE LA GRÁFICA, COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA (B), CON EL EJE "x" VERTICAL.





ASÍ, CONSIDERANDO LA REGIÓN EN EL PLANO "y z", SE OBSERVA QUE LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO EQUIVALE AL VOLUMEN BAJO EL PLANO HORIZONTAL $x = 1$ Y EL VOLUMEN BAJO EL PARABOLOIDE CIRCULAR. ENTONCES, APROVECHANDO LA SIMETRÍA, EL VOLUMEN SE CALCULA MEDIANTE LA SIGUIENTE INTEGRAL DOBLE:

$$V = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}(1-x)\,dy\,dz = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\left(1-y^2-z^2\right)dy\,dz = 4\int_0^1\left[y-\frac{y^3}{3}-yz^2\right]_0^{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= 4\int_0^1\left[\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\left(1-z^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-z^2\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]dz$$

ESTA INTEGRAL SE PUEDE RESOLVER MEDIANTE LA SUSTITUCIÓN $z = \operatorname{sen}\theta$, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3} - \text{sen}^2\,\theta\cos\theta \right)\cos\theta\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\theta\left(1-\text{sen}^2\,\theta\right) - \frac{\cos^3\theta}{3} \right]\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)^2\, d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right) d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \text{sen}\ 2\theta + \frac{\text{sen}\ 4\theta}{8} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\frac{\pi}{2} + \text{sen}\ \pi + \frac{\text{sen}\ 2\pi}{8} \right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ u^3$$

CÁLCULO I

UNA SERIE TELESCÓPICA

USAR LA SUCESIÓN $\{S_n\}$ PARA DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$ CONVERGE O DIVERGE. SI CONVERGE, CALCULAR SU SUMA.

SOLUCIÓN. LOS PRIMEROS TÉRMINOS DE $\{S_n\}$, ES DECIR,. LAS PRIMERAS SUMAS PARCIALES DE TÉRMINOS SERÍAN:

$$S_1 = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

$$S_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = 0.8$$

$$S_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} \approx 0.857$$

$$S_4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} \approx 0.889$$

$$S_5 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \frac{2}{99} \approx 0.909$$

SI SE CALCULARAN OTRAS SUMAS PARCIALES, SE LLEGARÁ A:

$$S_{10} \approx 0.952 \quad ; \quad S_{50} \approx 0.990 \quad ; \quad S_{100} \approx 0.995 \quad ; \quad S_{500} \approx 0.999$$

LO QUE HACE SOSPECHAR QUE LA SERIE CONVERGE A "1". PARA COMPROBARLO, SE DESARROLLA UNA EXPRESIÓN PARA S_n BASADA EN QUE:

$$a_n = \frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

LUEGO, DESCOMPONIENDO EN FRACCIONES RACIONALES SIMPLES, SE TIENE QUE:

$$a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

ASÍ, LOS TÉRMINOS DE $\{S_n\}$ SE PUEDEN ESCRIBIR EN LA FORMA:

$$S_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = 1 - \frac{1}{7}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \quad \cdots \quad + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

Y AHORA SE PUEDE VER QUE LA SERIE CONVERGE AL VALOR "1" YA QUE:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$$

OBSÉRVESE QUE CADA TÉRMINO, TRAS EL PRIMERO, ES CANCELADO POR EL SIGUIENTE, ESTO ES,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots$$

UNA SERIE QUE SE ESCRIBE DE ESTA FORMA, SE DENOMINA **SERIE TELESCÓPICA**.

ÁLGEBRA

SEAN $(A,*)$ Y (B,Δ) DOS GRUPOS, DONDE $a*b=a+b-1$; $a,b\in A$ Y SEA LA FUNCIÓN $f:A\rightarrow B$ TAL QUE $f(a)=3^a \quad \forall \quad a\in A$ QUE ESTABLECE UN ISOMORFISMO ENTRE AMBOS GRUPOS.

a) DETERMINAR EL RESULTADO DE $a*a*b*\hat{a}*\hat{b}$ DONDE $\hat{a}$ SIGNIFICA EL INVERSO DE a

b) DETERMINAR EL ELEMENTO INVERSO DE $x\in B$ CON RESPECTO A LA OPERACIÓN Δ

SOLUCIÓN.

a) EL IDÉNTICO DEL GRUPO $(A,*)$; $e*a=a$; $e+a-1=a \Rightarrow e=1$

EL INVERSO DE $a\in A$; $\hat{a}*a=1$; $\hat{a}+a-1=1 \Rightarrow \hat{a}=2-a$

ENTONCES:

$$a*a*b*\hat{a}*\hat{b}=a*a*b*\left(\hat{a}*\hat{b}\right)=(a*a)*b*(2-a*2-b)=(a+a-1)*b*(2-a+2-b-1)$$

$$=(2a-1)*b*(2-a+2-b-1)=(2a-1)*b*(3-a-b)$$

$$=(2a-1+b-1)*(3-a-b)=2a+b-2+3-a-b-1$$

$$=a$$

b) COMO NO SE CONOCE LA OPERACIÓN Δ, SE HACE USO DE UN TEOREMA. SI $\hat{a}$ ES EL INVERSO DE $a\in A$, $f\left(\hat{a}\right)$ ES EL INVERSO DE $f(a)$ CON RESPECTO A LA OPERACIÓN Δ.

$$f(a)=x \quad ; \quad f\left(\hat{a}\right)=x^{-1} \quad ; \quad f(a-2)=3^{a-2}$$

"TUTORÍA PARA TODOS"

¿QIÉN ES UN TUTOR?

- UN PROFESOR QUE TIENE LA VOLUNTAD Y VOCACIÓN PARA ESTABLECER UN VÍNCULO ENTRE EL ESTUDIANTE Y LAS DIVERSAS PROBLEMÁTICAS ESCOLARES Y EXISTENCIALES QUE ENFRENTA DURANTE SU VIDA UNIVERSITARIA, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE SE PRESENTA ANTE EL ESTUDIANTE COMO UN SER HUMANO CON VIRTUDES Y DEFECTOS, FUERZAS Y DEBILIDADES, SEGURIDADES E INSEGURIDADES, PROBLEMAS Y LOGROS, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE MANIFIESTA AL ESTUDIANTE SU PLENA DISPOSICIÓN A ESCUCHAR, A COMPRENDER Y A REFLEXIONAR JUNTO CON ÉL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE FACILITA LA INTEGRACIÓN DEL ESTUDIANTE CON LA UNIVERSIDAD, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE DEMUESTRA AL ESTUDIANTE UN GENUINO INTERÉS POR SU DESEMPEÑO ESCOLAR Y POR SU CRECIMIENTO PERSONAL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE ORIENTA Y ALIENTA LA FORMACIÓN TÉCNICA Y CULTURAL DEL ESTUDIANTE, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE SE PREOCUPA Y OCUPA DEL DESARROLLO DEL ESTUDIANTE COMO SER HUMANO, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE PROPICIA EN EL ESTUDIANTE SU COMPROMISO SOCIAL DE FRENTE A LA REALIDAD NACIONAL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR QUE ENCAUZA AL ESTUDIANTE HACIA EL ÉXITO EN SU DEVENIR PROFESIONAL, ES UN TUTOR.
- UN PROFESOR AL QUE INTERESA QUE EL ESTUDIANTE SEA CREATIVO, INNOVADOR Y CON ESPÍRITU LIBRE Y CRÍTICO, ES UN TUTOR.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ

COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

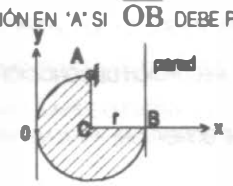
AÑO 2000 NÚMERO 12 2 DE NOVIEMBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. VALE LA PENA UN ÚLTIMO ESFUERZO PARA TERMINAR BIEN EL SEMESTRE. ASÍ QUE: **¡A ESTUDIAR SE HA DICHO!**

ESTÁTICA

LA PLACA DE LA FIGURA TIENE UN PESO ω POR UNIDAD DE SUPERFICIE, SE ENCUENTRA ARTICULADA EN "A" Y APOYADA LIBREMENTE CONTRA UNA PARED VERTICAL LISA. DETERMINAR LA MAGNITUD DE LAS COMPONENTES DE LA REACCIÓN EN "A" SI $\overline{OB}$ DEBE PERMANECER HORIZONTAL.



ESTE EJERCICIO CONJUGA LOS TEMAS DE CENTROIDE Y EQUILIBRIO DE CUERPOS. PARA PODER RESOLVERLO ES NECESARIO UBICAR EL CENTROIDE Y POSTERIORMENTE TRAZAR EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE (DCL) PARA PODER PLANTEAR LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO. SI SE CONSIDERA EL ORIGEN DE COORDENADAS EN "O" SE TIENE QUE:

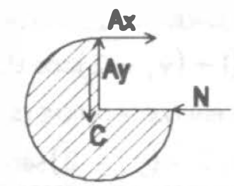
$$W_1 = \pi r^2 \omega = 3.1416\, r^2 \omega \quad ; \quad W_2 = \frac{\pi r^2}{4}\omega = 0.7854\, r^2 \omega \quad ; \quad x_2 = r + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi} = r(1+0.4244) = 1.4244\, r$$

PLACA

	W_i	x_i	y_i	$W_i\, x_i$	$W_i\, y_i$
CÍRCULO	$3.1416\, r^2\, \omega$	r	0	$3.1416\, r^3\, \omega$	0
- CUARTO DE CÍRCULO	$-0.7854\, r^2\, \omega$	$1.4244\ r$	$0.4244\, r$	$-1.1187\ r^3\ \omega$	$-0.3333\, r^3\, \omega$
$\sum$	$2.3562\, r^2\, \omega$			$2.0229\ r^3\ \omega$	$-0.3333\, r^3\, \omega$

$$\bar{x} = \frac{2.0229\ r^3\ \omega}{2.3562\ r^2\ \omega} = 0.85854\ r \quad ; \quad \bar{y} = \frac{-0.3333\ r^3\ \omega}{2.3562\ r^2\ \omega} = -0.14146\ r \quad \Rightarrow \quad C\,(0.85854\ r, -0.14146\ r)$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE



ECUACIONES DE EQUILIBRIO

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad 2.3562\, r^2\, \omega\,(1-0.85854)\, r - N\, r = 0 \quad \Rightarrow \quad N = 0.3333\, r^2\, \omega$$

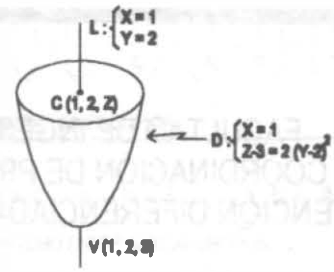
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x - 0.3333\, r^2\, \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0.3333\, r^2\, \omega$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 2.3562\, r^2\, \omega$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SE DESEA OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y UNA ECUACIÓN VECTORIAL DEL PARABOLOIDE CIRCULAR QUE TIENE SU VÉRTICE EN EL PUNTO $V\,(1,2,3)$ Y QUE CONTIENE A LA PARÁBOLA "D" DE ECUACIONES

$$D: \begin{cases} x = 1 \\ z - 3 = 2\,(y-2)^2 \end{cases}$$



SOLUCIÓN. PARA OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA, SE TOMARÁ COMO GENERATRIZ A UNA CIRCUNFERENCIA PARALELA AL PLANO " xy " QUE SE DESPLAZA VERTICALMENTE DE MODO QUE SU CENTRO SIEMPRE ESTÉ SOBRE LA RECTA $L:\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ Y CON RADIO VARIABLE IGUAL A $\sqrt{\alpha}$. ENTONCES, LAS ECUACIONES DE LA GENERATRIZ SON $G:\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2=\alpha & \cdots\ (a) \\ z=\beta & \cdots\ (b) \end{cases}$

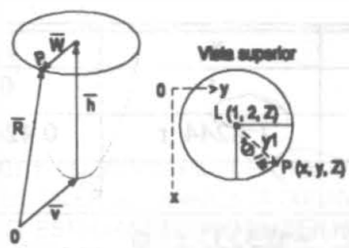
PUESTO QUE EN LAS ECUACIONES DE LA GENERATRIZ SE TIENEN DOS PARÁMETROS, α y β, SE REQUIERE SÓLO DE UNA DIRECTRIZ: LA PARÁBOLA "D" DE ECUACIONES $D:\begin{cases} x=1 & \cdots\ (c) \\ z-3=2\,(y-2)^2 & \cdots\ (d) \end{cases}$

DEBIDO A QUE ÚNICAMENTE HAY UNA DIRECTRIZ, SE TENDRÁ UNA SÓLA ECUACIÓN DE CONDICIÓN; PARA OBTENERLA, SE SUSTITUYE (b) EN (d) Y (c) EN (a):

$\begin{matrix} \beta-3=2\,(y-2)^2 \\ (y-2)^2=\alpha \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \beta-3=2\,\alpha \quad \cdots$ (ECUACIÓN DE CONDICIÓN). FINALMENTE, PARA OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PARABOLOIDE, SE SUSTITUYEN (a) y (b) EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN Y SE LLEGA A:

$$Z-3=2\,(X-1)^2+2\,(Y-2)^2$$

ANTES DE OBTENER UNA ECUACIÓN VECTORIAL DEL PARABOLOIDE, ES CONVENIENTE RECORDAR QUE EN ÉSTA DEBEN APARECER DOS PARÁMETROS, Y QUE DICHA ECUACIÓN ES LA REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA DE UN VECTOR DE POSICIÓN QUE SE MUEVE DE MODO QUE SU EXTREMO RECORRE TODOS LOS PUNTOS DE LA SUPERFICIE. PARA OBTENER DICHO VECTOR DE POSICIÓN $\bar{p}$, CONSIDÉRENSE LOS VECTORES $\bar{v}$, $\bar{h}$ y $\bar{w}$ QUE SE MUESTRAN EN LA SIGUIENTE FIGURA:



$$\bar{v}=(1,2,3)\quad;\quad \bar{h}=(0,0,z_1-3)\quad;\quad \bar{w}=((y_1-2)\cos\theta,(y_1-2)\operatorname{sen}\theta,0);\ |\bar{w}|=y_1$$

$P(x,y,z)$ ES UN PUNTO CUALQUIERA DE LA SUPERFICIE

LA RELACIÓN ENTRE ESTOS VECTORES ES: $\bar{p}=\bar{v}+\bar{h}+\bar{w}=(1+(y_1-2)\cos\theta,\ 2+(y_1-2)\operatorname{sen}\theta,\ z_1)$;

PERO $z_1-3=2\,(y_1-2)^2$, POR LO QUE LA ECUACIÓN VECTORIAL QUE SE OBTIENE ES:

$$\bar{p}=\left(1+(y_1-2)\cos\theta,\ 2+(y_1-2)\operatorname{sen}\theta,\ 3+2\,(y_1-2)^2\right)$$

Y, FINALMENTE, LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PARABOLOIDE, QUE SE OBTIENEN DIRECTAMENTE DE ESTA ECUACIÓN VECTORIAL SON:

$$S:\begin{cases} x=1+(y_1-2)\cos\theta \\ y=2+(y_1-2)\operatorname{sen}\theta \\ z=3+2\,(y_1-2)^2 \end{cases}\quad;\quad \begin{cases} y_1\ge 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

COMPROBACIÓN. LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PARABOLOIDE SE PUEDE OBTENER POR ELIMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS y_1 y θ, DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS, Y TOMANDO EN CONSIDERACIÓN LA IDENTIDAD $\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1$, SE TIENE QUE:

$$\cos\theta=\frac{x-1}{y_1-2}\quad;\quad \operatorname{sen}\theta=\frac{y-2}{y_1-2}\quad;\quad (y_1-2)^2=\frac{z-3}{2}\quad\Rightarrow\quad (x-1)^2+(y-2)^2=\frac{z-3}{2}$$

QUE ES LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL PARABOLOIDE

QUÍMICA

EL ANÁLISIS DE UNA MUESTRA DE CRISTALES APARENTEMENTE PUROS, OBTENIDA POR EVAPORACIÓN DE UNA MUESTRA DE AGUAS NEGRAS MUNICIPALES, INDICA QUE CONTIENEN $63.97\ [\%]$ DE CADMIO, $24.28\ [\%]$ DE OXIGENO Y $11.75\ [\%]$ DE FÓSFORO. CALCULAR LA FÓRMULA EMPÍRICA.

SOLUCIÓN. CONVIENE CONVERTIR LOS DATOS DE COMPOSICIÓN PORCENTUAL EN RELACIONES DE MASAS, TOMANDO $100\ [g]$ DE SUSTANCIA COMO BASE PARA LOS CÁLCULOS. EL NÚMERO DE MOLES DE CADMIO, OXIGENO Y FÓSFORO SE CALCULAN COMO SIGUE

$$63.97\ \text{g Cd}\left(\frac{1\ \text{mol Cd}}{112.4\ \text{g Cd}}\right) = 0.5691\ \text{mol de Cd}$$

$$24.28\ \text{g O}\left(\frac{1\ \text{mol O}}{15.999\ \text{g O}}\right) = 1.5176\ \text{mol de O}$$

$$11.75\ \text{g P}\left(\frac{1\ \text{mol P}}{30.973\ \text{g P}}\right) = 0.3794\ \text{mol de P}$$

LA RELACIÓN DE MOLES, $0.5691 : 1.5176 : 0.3794$, ES TAMBIÉN LA RELACIÓN DE ÁTOMOS. EL OBJETIVO CONSISTE EN OBTENER LA RELACIÓN DE ÁTOMOS EN NÚMEROS ENTEROS PEQUEÑOS. PARA TAL FIN, SE DIVIDE CADA NÚMERO DE MOLES ENTRE EL MÁS PEQUEÑO DE ELLOS. ASÍ, PARA EL CADMIO $\frac{0.5691\ \text{mol}}{0.3794\ \text{mol}} = 1.5$, PARA EL OXIGENO $\frac{1.5176\ \text{mol}}{0.3794\ \text{mol}} = 4$, Y PARA EL FÓSFORO $\frac{0.3794\ \text{mol}}{0.3794\ \text{mol}} = 1$. EN ESTA ETAPA SUELE SER FRECUENTE QUE LA RELACIÓN NO SEA EN LA FORMA DE NÚMEROS ENTEROS, POR LO QUE ES NECESARIO MULTIPLICARLA POR UN NÚMERO PEQUEÑO $(2, 3 ó 4)$. UNA SIMPLE INSPECCIÓN BASTA PARA SELECCIONAR EL FACTOR DOS Y ENTONCES SE TIENE QUE PARA EL CADMIO $1.5 \times 2 = 3$, PARA EL OXÍGENO $4 \times 2 = 8$, Y PARA EL FÓSFORO $1 \times 2 = 2$ DE TAL FORMA QUE LA FÓRMULA MAS SIMPLE O EMPÍRICA ES $Cd_3\,O_8\,P_2$

ÁLGEBRA LINEAL

SEA EL OPERADOR LINEAL $T(x, y) = (2x + 2y,\ x + 3y)$

a) DETERMINAR SI EL OPERADOR LINEAL " T " PUEDE SER REPRESENTADO CON UNA MATRIZ DIAGONAL.

b) EN CASO AFIRMATIVO, DETERMINAR LA MATRIZ DIAGONAL Y LA MATRIZ DIAGONALIZADORA.

SOLUCIÓN. UN OPERADOR LINEAL PUEDE SER REPRESENTADO POR UNA MATRIZ DIAGONAL SI EXISTE UNA BASE DE VECTORES CARACTERÍSTICOS. UNA MATRIZ ASOCIADA AL OPERADOR, PARA LA BASE $B = \{(1,0), (0,1)\}$ SE OBTIENE COMO

$$T(1,0) = (2,1) \quad ; \quad T(0,1) = (2,3)$$

$$(2,1) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha = 2;\ \beta = 1 \quad ; \quad (2,3) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow \alpha = 2;\ \beta = 3$$

Y ENTONCES LA MATRIZ ESTA DADA POR $M(T) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Y EL POLINOMIO CARACTERISTICO ES EL DETERMINANTE DE LA MATRIZ $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$, ES DECIR, $(2-\lambda)(3-\lambda) - 2$, O SEA $\lambda^2 - 5\lambda + 4$. LAS RAÍCES DE ESTE POLINOMIO CARACTERÍSTICO SON

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 4 \quad ; \quad \lambda_2 = 1$$

PARA

$$\lambda = 4 \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad x - y = 0 \Rightarrow x = y; \quad E = \{(x, x) \mid x \in \Re\}$$

PARA

$$\lambda = 1 \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y; \quad E = \{(-2y, y) \mid y \in \Re\}$$

EL OPERADOR SI SE PUEDE REPRESENTAR CON UNA MATRIZ DIAGONAL $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Y LA MATRIZ DIAGONALIZADORA SERIA $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. CABE RECORDAR QUE LA MATRIZ DIAGONAL " D " SE OBTIENE A PARTIR DEL PRODUCTO $D = P^{-1}\,M(T)\,P$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

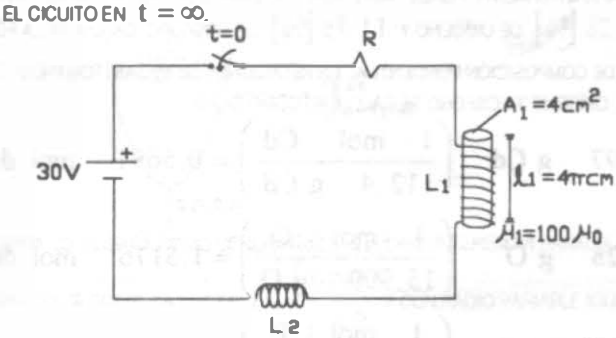
PARA EL CIRCUITO RL DE LA FIGURA, SE TIENE UN SOLENOIDE DE INDUCTANCIA $L_1 = 0.1\ [H]$ Y UN EMBOBINADO DE INDUCTANCIA $L_2 = 0.2\ [H]$, AMBOS DE RESISTENCIA DESPRECIABLE. SI EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA (M) SE DESPRECIA, CALCULAR

a) EL NUMERO DE VUELTAS QUE TIENE EL SOLENOIDE

b) EL VALOR DE LA RESISTENCIA " R ", SI LA CONSTANTE DE TIEMPO ES $\tau_L = 10^{-3}\ [s]$

c) LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA EN L_1 CUANDO $t = \tau_L$

d) LA ENERGÍA MAGNÉTICA ALMACENADA POR EL CICUITO EN $t = \infty$.



SOLUCIÓN

a) EL MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE LA INDUCTANCIA PROPIA DE UN SOLENOIDE DE SECCIÓN CIRCULAR, ENROLLADO UNIFORME Y DE LONGITUD ℓ ES

$L_s = \dfrac{\mu_0 N^2 A}{\ell}\,[\mathrm{H}]$ EN DONDE $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ \dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A\cdot m}}$ (PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO), L ES LA INDUCTANCIA PROPIA DEL SOLENOIDE (H); N ES EL NÚMERO DE VUELTAS, A ES EL ÁREA TRANSVERSAL DEL SOLENOIDE (m^2), Y ℓ ES LA LONGITUD DEL SOLENOIDE (m)

SE DESPEJA N Y SE LLEGA A $N = \left(\dfrac{L_s\ \ell_1}{\mu_1\ A_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{(0.1)(4\pi\times10^{-2})}{(100)(4\pi\times10^{-7})(4\times10^{-4})}\ \dfrac{\mathrm{H\,m}}{\dfrac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A\cdot m}}\mathrm{m}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow N = 500$ VUELTAS

b) LA CONSTANTE DE TIEMPO EN UN CIRCUITO RL ES $\tau_L = \dfrac{L_{eq}}{R}\ [\mathrm{s}]$, EN DONDE τ_L ES LA CONSTANTE DE TIEMPO (s); L_{eq} ES LA INDUCTANCIA EQUIVALENTE DEL CIRCUITO (H); Y R ES LA RESISTENCIA DEL CIRCUITO (Ω) DE LA EXPRESIÓN SE TIENE QUE

$$R = \frac{L_{eq}}{\tau_L} = \frac{0.3}{1\times10^{-3}}\ \frac{(\mathrm{H})}{(\mathrm{s})} = 300\ (\Omega)$$

c) LA FUERZA ELECTROMOTRIZ AUTOINDUCIDA. PRIMERO SE CALCULA LA AUTOINDUCTANCIA EQUIVALENTE DEL CIRCUITO

$$L_{eq} = L_1 + L_2 = 0.1 + 0.2 = 0.3\ [\mathrm{H}]$$

EL MODELO MATEMÁTICO PARA EL CÁLCULO DE LA FUERZA ELECTROMOTRIZ AUTOINDUCIDA ES

$$\varepsilon_i = -L_1\frac{di}{dt} = \frac{L_1}{L_{eq}}\,\varepsilon\, e^{-\frac{t}{\tau_L}} = \frac{0.1}{0.3}(30)\,e^{-1} \Rightarrow \varepsilon_i = 3.7\ (\mathrm{V})$$

d) LA ENERGÍA MAGNÉTICA ALMACENADA ESTÁ DADA POR $U = \dfrac{1}{2} L_{eq}\ I^2_{max}$, DONDE $I_{max} = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{30}{300} = 0.1\,(\mathrm{A})$ POR LO TANTO

$$U = (0.5)(0.3)(0.1)^2 = 1.5\times10^{-3}\ (\mathrm{J}) = 1.5\ (\mathrm{m\,J})$$

PROGRAMA "TUTORÍA PARA TODOS"

TUTORÍA ES UNA LABOR EDUCATIVA DE ORIENTACIÓN, AYUDA Y SEGUIMIENTO, QUE REALIZA UN PROFESOR DE MANERA PERSONAL Y QUE DIRIGE A SUS ALUMNOS -PARTIENDO DE SUS NECESIDADES EDUCATIVAS-, PARA FACILITAR SU APRENDIZAJE ESCOLAR Y PROMOVER SU DESARROLLO INTEGRAL.

EL ESTUDIANTE QUE ACUDE A TUTORÍA PUEDE BUSCAR EN SU TUTOR ORIENTACIÓNES ACADÉMICAS, CONSEJOS PARA SU CRECIMIENTO CULTURAL Y OPINIONES, BASADAS EN LA EXPERIENCIA, SOBRE SUS PROBLEMÁTICAS EXISTENCIALES. SÓLO ES CUESTIÓN DE ACERCARSE AL TUTOR Y PEDIRLE SER ESCUCHADO, HACIENDO LO MISMO CUANDO EL TUTOR COMENTE ALGO AL ESTUDIANTE, SOBRE EL ALUMNO O CON RESPECTO DE SU VIDA.

CONSOLIDAR LA "TUTORÍA" EN LA FACULTAD ES UNA ARDUA LABOR PERO VALE LA PENA TODO LO QUE SE HAGA POR LOGRARLO. SE TRATA DE ESTABLECER UN CANAL IMPORTANTÍSIMO DE COMUNICACIÓN ENTRE PROFESORES Y ESTUDIANTES FUERA DEL SALÓN DE CLASES, LO QUE LE FALTABA AL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE PARA ESTAR COMPLETO.

¡TODO ES QUE SE SIENTEN TUTOR Y ESTUDIANTE Y COMIENCEN A HABLAR!

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LA QFB VIOLETA LUZ M. BRAVO HERNÁNDEZ Y LOS INGS. BERTHA FRANCO ROSAS, MANUEL DE J. VACIO GONZÁLEZ, LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ Y RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA.

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 13 2 DE DICIEMBRE DE 2000

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTÁ COMENZANDO EL SEMESTRE 2001-1 . ESTE BOLETÍN LES DA LA BIENVENIDA A LOS ALUMNOS DE PRIMER INGRESO Y LES DESEA LO MEJOR. ESTÁN EN LA MEJOR FACULTAD DE INGENIERÍA DEL PAÍS. APROVECHEN TODO Y ESTUDIEN MUCHO. EN LA UNAM PUEDEN ENCONTRAR TODO PARA SU FORMACIÓN INTEGRAL, QUE COMPRENDE EL ASPECTO TÉCNICO Y EL HUMANO.

ÁLGEBRA

DE ACUERDO CON LA LEYENDA, EL AUTOR DEL AJEDREZ LE PIDIÓ A SU REY, COMO RECOMPENSA POR SU INTERESANTE CREACIÓN, UN GRANO DE TRIGO EN EL PRIMER ESCAQUE (CUADRITO DEL TABLERO), DOS EN EL SEGUNDO, CUATRO EN EL TERCERO Y ASÍ SUCESIVAMENTE HASTA COMPLETAR LOS SESENTA Y CUATRO ESCAQUES QUE COMPONEN EL TABLERO. SEGÚN LA HISTORIA, LOS "MATEMÁTICOS" DEL REY SE PASARON LA NOCHE CALCULANDO EL NÚMERO DE GRANOS QUE SE DEBÍAN PAGAR. ¡SI HUBIERAN CONOCIDO LA EXPRESIÓN QUE PROPORCIONA LA SUMA DE LA CANTIDAD DE GRANOS PARA CUALQUIER " n " NATURAL! Y, SOBRE TODO, SI HUBIERAN CONFIADO EN ELLA. AQUÍ SE PRESENTA Y SE DEMUESTRA POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1 \qquad \forall\, n\in N$$

DEMOSTRACIÓN. PARA $n=1$ $\quad 1=2^1-1 \;\Rightarrow\; 1=1$ SÍ SE CUMPLE

SE SUPONE LA EXPRESIÓN VÁLIDA PARA $n=k$ $\quad 1+2+4+\cdots+2^{k-1}=2^k-1$ (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)

A PARTIR DE LA HIPÓTESIS DEBE DEMOSTRARSE QUE LA EXPRESIÓN SE CUMPLE PARA $n=k+1$

$$1+2+4+\cdots+2^{k-1}+2^k=2^{k+1}-1 \quad \text{(TESIS)}$$

EN LA HIPÓTESIS SE TIENE QUE LOS PRIMEROS "k" SUMANDOS VALEN 2^k-1 SE SUSTITUYE EN LA TESIS Y SE LLEGA A

$$¿\,2^k-1+2^k=2^{k+1}-1\,?$$

$$¿\,2\left(2^k\right)-1=2^{k+1}-1\,?$$

$$2^{k+1}-1=2^{k+1}-1$$

VEMOS QUE SÍ SE CUMPLE Y POR LO TANTO LA EXPRESIÓN ES VÁLIDA PARA TODOS LOS NÚMEROS NATURALES, EN PARTICULAR,

$$n=64 \;\Rightarrow\; 2^{64}-1\approx 1.84\times 10^{19}$$ GRANOS DE TRIGO

PROBABILIDAD

1. SI $P(A)=0.6$ Y $P(B)=0.5$ Y $P(A|B)=0.9$

ENTONCES $P(A\cup B)$ ES

1) 0.1 2) 0.45 3) 0.3 4) 0.65 5) 0.2

RESPUESTA 4

RESOLUCIÓN:

SE SABE QUE $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, DE DONDE $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=0.5(0.9)=0.45$

POR LO QUE

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.5-0.45=0.65$$

2. SI X Y Y SON VARIABLES ALEATORIAS CONJUNTAS CON $\mu_X=10$, $\mu_Y=20$, $\sigma_X=1$, $\sigma_Y=2$ Y $\rho_{XY}=0.5$, ENTONCES $\mathrm{Var}(X-2Y)$ ES

1) – 30 2) - 11 3) – 7 4) 13 5) 21

RESPUESTA 4

RESOLUCIÓN:

$$\mathrm{Var}(X-2Y)=(1)\mathrm{Var}(X)+(-2)^2\,\mathrm{Var}(Y)+2\,(1)\,(-2)\,\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}$$
$$=1+4(4)+2(1)(-2)(1)(2)(0.5)=13$$

3. SEA X UNA VARIABLE ALEATORIA CON FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

x	-1	0	1	2
$f_X(x)$	0.2	0.3	0.3	0.2

ENTONCES, $\mathrm{Var}(X)$ ES

1) 0.5 2) 2.1 3) 1.05 4) 1.36 5) 3.42

RESPUESTA 3

RESOLUCIÓN:

$$\mu_X=-1(0.2)+0(0.3)+1(0.3)+2(0.2)=0.5$$
$$\sigma_X^2=(-1)^2(0.2)+0^2(0.3)+1^2(0.3)+2^2(0.2)-(0.5)^2=1.05$$

4. CIERTOS AUTOBUSES LLEGAN A UNA PARADA ESPECÍFICA A INTERVALOS DE 15 MINUTOS COMENZANDO A LAS 7:00 A.M. ESTO ES 7:00, 7:15, 7:30 Y ASÍ SUCESIVAMENTE. SI EL TIEMPO DE LLEGADA DE UN PASAJERO ESTÁ DISTRIBUIDO UNIFORMEMENTE ENTRE LAS 7:00 Y LAS 7:30, LA PROBABILIDAD DE QUE UN PASAJERO TENGA QUE ESPERAR MENOS DE 5 MINUTOS PARA TOMAR EL AUTOBÚS ES:

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{5}{6}$ 5) NINGUNA DE LAS ANTERIORES

RESPUESTA 2

RESOLUCIÓN

SEA X LA v.a. QUE REPRESENTA EL TIEMPO DE LLEGADA EN MINUTOS DESPUÉS DE LAS 7:00

$$X\approx uniforme(0\ ,30)$$

PARA QUE TENGA QUE ESPERAR 5 MINUTOS O MENOS, SIGNIFICA QUE LLEGA 5 MINUTOS O MENOS ANTES DE QUE PASE EL CAMIÓN DE LAS 7:15 O EL DE LAS 7:30, ESTO ES:

$$P(10<X<15)+P(25<X<30)=\frac{5}{30}+\frac{5}{30}=\frac{1}{3}$$

5. DADA LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 0.3 & 0\le x<1\\ 0.4 & 1\le x<2\\ c & x\ge 2\end{cases}$$

EL VALOR ESPERADO DE X, $E(X)$, ES EL QUE APARECE EN LA OPCIÓN:

1) 1 2) $\frac{1}{3}$ 3) 1.5 4) 3.25 5) 1.3

RESPUESTA 5

RESOLUCIÓN:

DEBE OBSERVARSE QUE LA v.a. ES DISCRETA Y SU FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ES:

$x.$	0	1	2
$f_X(x)$	0.3	0.1	0.6

EL VALOR DE 0.6 SE OBTUVO AL UTILIZAR LA PROPIEDAD $\sum_{\forall x} f_X(x)=1$

Y EL VALOR ESPERADO ESTÁ DADO POR $E(X)=\sum_{\forall x} x\; f_X(x)=0(0.3)+1(0.1)+2(0.6);\quad E(X)=1.3$

DINÁMICA

SE DESEA ANALIZAR UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y PARA TAL FIN SE HIZO DESCENDER UN MOVIL CUYA MASA ERA DE $900\,[g]$, POR UNA RAMPA, RECTA Y LARGA, CON UNA PENDIENTE CONSTANTE. LA RAMPA FORMABA UN ÁNGULO DE 30^0 CON RESPECTO A LA HORIZONTAL. SE MIDIERON LOS TIEMPOS EN QUE EL MÓVIL ALCANZÓ DIFERENTES VALORES DE RAPIDEZ. LOS DATOS OBTENIDOS DEL EXPERIMENTO SE ANOTARON EN UNA TABLA. DETERMINAR, EN UNIDADES DEL S.I.:

A) EL MODELO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL QUE RELACIONA ALAS VARIABLES RAPIDEZ (v) Y TIEMPO (t)

B) EL SIGNIFICADO FÍSICO DE LA PENDIENTE DEL MODELO MATEMÁTICO ANTERIOR, ASÍ COMO SU EXPRESIÓN DIMENSIONAL.

C) LA RAPIDEZ INICIAL DEL MÓVIL, ASÍ COMO SU ENERGÍA CINÉTICA EN ESE INSTANTE (EN $t=0$).

D) EL MODELO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL QUE RELACIONA LAS VARIABLES DISTANCIA (x) Y TIEMPO (t) CONSIDERE QUE EN $t=0$, $x=0$

E) LA ACELERACIÓN GRAVITATORIA EXPERIMENTAL DEL LUGAR Y EL PESO DEL MÓVIL.

$t\,[s]$	2	3	4	5
$v\left[\frac{m}{s}\right]$	14.9	21.1	24.8	30

A) COMO SE TRATA DE UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO, ENTONCES $v(t)=\mu\,t+b$. SI SE UTILIZA EL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS, SE TIENE QUE

$$\mu=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{[(30-21.1)+(24.8-14.9)]\left[\frac{m}{s}\right]}{[(5-3)+(4-2)][s]}=\frac{18.8}{4}\left[\frac{m}{s^2}\right]=4.7\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

COMO $v=22.7\left[\frac{m}{s}\right]$; $t=3.5\,[s]$; ENTONCES

$$v=\mu\,t+b\Rightarrow b=v-\mu\,t=22.7\left[\frac{m}{s}\right]-\left(4.7\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)(3.5\,[s])=6.25\left[\frac{m}{s}\right]$$

Y POR LO TANTO, EL MODELO MATEMÁTICO ES

$$v\left[\frac{m}{s}\right]=4.7\left[\frac{m}{s^2}\right]t\,[s]+6.25\left[\frac{m}{s}\right]$$

B) COMO ES UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO, SE TIENE QUE EL MODELO TEÓRICO QUE RELACIONA LA RAPIDEZ CON EL TIEMPO ES $v=a\,t+v_0$; COMPARANDO ESTE ÚLTIMO MODELO CON EL OBTENIDO EN EL PRIMER INCISO, SE TIENE QUE

$$a=\mu\quad;\quad \mu=aceleración\ del\ móvil\quad;\quad como[\mu]_u=\frac{m}{s^2}\quad entonces\quad [\mu]=LT^{-2}$$

C) SI SE COMPARA EL MODELO TEÓRICO $v=a\,t+v_0$ CON EL MODELO EXPERIMENTAL, SE OBSERVA QUE $b=v_0$ Y POR LO TANTO

$v_0=6.25\left[\frac{m}{s}\right]$ SI SE CALCULA LA ENERGÍA CINÉTICA EN $t=0$, SE OBTIENE:

$$E_C=\frac{1}{2}m\,v_0^{\,2}=\frac{1}{2}(0.9\,[Kg])\left(6.25\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2=17.5781\,[J]$$

D) SE SABE QUE $v=\frac{dx}{dt}\ \Rightarrow\ dx=v\,dt$ SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS DE ESTA IGUALDAD Y

$$x=\int v\,dt=\int\left\{4.7\left[\frac{m}{s}\right]t\,[s]+6.25\left[\frac{m}{s}\right]\right\}dt\quad;\quad x(t)=4.7\left(\frac{1}{2}\right)t^2+6.25\,t+x_0\quad(en\ el\ S.I.)$$

COMO $x_0=0$, ENTONCES $x(t)=2.35\left[\frac{m}{s^2}\right]t^2\,[s^2]+6.25\left[\frac{m}{s}\right]t\,[s]$

E) SE SABE QUE EN UN MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO EN UNA RAMPA $a = g \operatorname{sen} \alpha$; DE DONDE $g = \dfrac{a}{\operatorname{sen} \alpha}$. COMO $a = 4.7\left[\dfrac{m}{s^2}\right]$.

$$g = \frac{4.7\left[\dfrac{m}{s^2}\right]}{\operatorname{sen} 30^0} = 9.4\left[\frac{m}{s^2}\right]$$. POR LO TANTO $g_{\text{exp.}} = 9.4\left[\dfrac{m}{s^2}\right]$. Y ADEMÁS $\left|\vec{W}\right| = m\left|\vec{g}\right|$, DE DONDE

$$W = m\,g = \left\{(0.9\,[Kg])\left(9.4\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\right\} = 8.46\,[N]$$ LUEGO $W_{\text{exp.}} = 8.46\,[N]$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

EXPRESAR LA FUNCIÓN $\operatorname{sen} z$ EN FORMA BINÓMICA.

SOLUCIÓN. $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$z = x + i\,y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}\left[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right] = \frac{1}{2i}\left(e^{ix+i^2y} - e^{-ix-i^2y}\right)$$

COMO $i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} z = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right)$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)\right] = \frac{1}{2i}\left[\left(e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x\right) + i\left(e^{-y}\operatorname{sen} x + e^{y}\operatorname{sen} x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}\cos x - e^{y}\cos x\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right)\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(e^{-y} - e^{y}\right)\cos x + \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right)\operatorname{sen} x$$

$$= -\frac{1}{2}i\left(e^{-y} - e^{y}\right)\cos x + \frac{1}{2}\left(e^{-y} + e^{y}\right)\operatorname{sen} x = \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x = u + i\,v$$

DONDE $u = \cosh y \operatorname{sen} x \quad y \quad v = \operatorname{senh} y \cos x$

NOTA. $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{\sqrt{-1}} \times \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \dfrac{\sqrt{-1}}{-1} = -i$

"TUTORÍA PARA TODOS"

LA TUTORÍA, COMO ACTIVIDAD DOCENTE, PUEDE APOYAR AL ESTUDIANTE A CONFIRMAR SU VOCACIÓN; A INFORMARSE SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA CARRERA Y LAS CONDICIONES DE ESTUDIO EN LA FACULTAD; A CONOCER LOS SERVICIOS DE LA FACULTAD Y DE LA UNIVERSIDAD; A CANALIZARLO A LAS INSTANCIAS APROPIADAS DEPENDIENDO DE LA PROBLEMÁTICA PLANTEADA; A INCREMENTAR SU DESARROLLO CIENTÍFICO, CULTURAL, HUMANÍSTICO Y DEPORTIVO; A ESTIMULAR EN ÉL LA CRÍTICA Y EL ANÁLISIS PARA LA GENERACIÓN DE CONOCIMIENTO; A PROPICIAR EN SU FUTURO ACTITUDES PROFESIONALES ÚTILES PARA EL MEJORAMIENTO DE LA REALIDAD NACIONAL; Y A RESOLVER PROBLEMAS ACADÉMICOS Y EMOCIONALES.

LA TUTORÍA NO ES UNA ACCIÓN AISLADA SINO COLECTIVA Y DEBE SER PARTE INHERENTE DE LA ACTIVIDAD COTIDIANA DE TODO PROFESOR DE CARRERA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, LEONARDO BAÑUELOS SAUCEDO, RIGEL GÁMEZ LEAL Y VERÓNICA GARCÍA CASANOVA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 14 2 DE ENERO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA PUBLICACIÓN LES DESEA UN FELIZ AÑO 2001, PLENO DE SATISFACCIONES, FELICIDAD, AMOR Y PAZ. OJALÁ SE LES CUMPLAN SUS MÁS PRECIADOS ANHELOS y QUE LLEGUEN A SER UNOS GRANDES PROFESIONALES DE LA INGENIERÍA MEXICANA, PERO SOBRE TODO, MUJERES Y HOMBRES DE BIEN.

CÁLCULO I

CALCULAR EL VALOR NUMÉRICO DE LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$\text{i) } \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1-8x^3}{6x^3-7x^2+2x} \quad ; \quad \text{ii) } \lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{2-\sqrt[3]{10-x}} \quad ; \quad \text{iii) } \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+6x+2}{6x^2+5x+1} \quad ; \quad \text{iv) } \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\, x \cos^2 x}{\dfrac{x \tan x}{\sec x}}$$

SOLUCIÓN. i) SE SUSTITUYE LA VARIABLE POR EL VALOR AL QUE TIENDE Y SE TIENE QUE $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1-8x^3}{6x^3-7x^2+2x} = \frac{0}{0}$, QUE ES UNA INDETERMINACIÓN. SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR Y SE LLEGA A:

$$1-8x^3 = (1-2x)(1+2x+4x^2) \quad ; \quad 6x^3-7x^2+2x = x(6x^2-7x+2) = x\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-4)$$

DE DONDE EL LÍMITE QUEDA COMO:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(1-2x)(1+2x+4x^2)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-4)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)(1+2x+4x^2)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-4)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{-2(1+2x+4x^2)}{x(6x-4)} = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12$$

QUE ES EL VALOR NUMÉRICO DEL LÍMITE.

ii) AL SUSTITUIR LA VARIABLE POR EL VALOR AL QUE TIENDE SE LLEGA A) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{2-\sqrt[3]{10-x}} = \frac{0}{0}$, QUE ES UNA FORMA INDETERMINADA Y, PARA OBTENER EL VALOR DEL LÍMITE, SI EXISTE, SE FACTORIZA EL NUMERADOR Y DESPUÉS SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR POR EL TRINOMIO QUE RACIONALIZA (CONVIERTE AL DENOMINADOR EN UNA DIFERENCIA DE CUBOS) Y SE RESUELVE EL PROBLEMA DE LA INDETERMINACIÓN. ASÍ, SE LLEGA AL LÍMITE

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)\left[4+2\sqrt[3]{10-x}+\sqrt[3]{(10-x)^2}\right]}{\left(2-\sqrt[3]{10-x}\right)\left[4+2\sqrt[3]{10-x}+\sqrt[3]{(10-x)^2}\right]} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)\left[4+2\sqrt[3]{10-x}+\sqrt[3]{(10-x)^2}\right]}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} (x+5)\left[4+2\sqrt[3]{10-x}+\sqrt[3]{(10-x)^2}\right] = 84$$ QUE ES EL VALOR BUSCADO.

iii) SI SE SUSTITUYE LA VARIABLE POR " ∞ " SE TIENE QUE $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+6x+2}{6x^2+5x+1} = \frac{\infty}{\infty}$ COMO SE TRATA DE UNA INDETERMINACIÓN, SE DIVIDEN LOS POLINOMIOS DE NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE, SE REALIZAN LAS SIMPLIFICACIONES CORRESPONDIENTES Y SE OBTIENE:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{6x}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{6x^2}{x^2}+\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{6+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{3+0+0}{6+0+0}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ENTONCES EL VALOR NUMÉRICO DEL LÍMITE ES $\frac{1}{2}$. CABE COMENTAR QUE LO QUE SE HIZO FUE HACER QUE LA VARIABLE QUEDARA COMO DENOMINADOR SIEMPRE Y COMO TIENDE A " ∞ ", LOS COCIENTES RESPECTIVOS SE ANULABAN Y EL VALOR DEL LÍMITE, SI SE OBSERVA, FUE EL COCIENTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VARIABLE DE MAYOR GRADO. ESTO HACE PENSAR QUE CUANDO SE TIENE UN LÍMITE DE COCIENTE DE POLINOMIOS Y LA VARIABLE TIENDE A " ∞ ", ENTONCES SE PRESENTAN TRES CASOS: SI LOS POLINOMIOS TIENEN EL MISMO GRADO, EL RESULTADO DEL LÍMITE ES EL COCIENTE DE LOS COEFICIENTES DE LA VARIABLE CON MAYOR GRADO; SI EL GRADO DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR ES MAYOR, LA RESPUESTA SERÁ INVARIABLEMENTE " 0 "; Y SI EL POLINOMIO DEL NUMERADOR ES DE MAYOR GRADO, ENTONCES EL LÍMITE NO EXISTE.

w) EN ESTE CASO, AL SUSTITUIR LA VARIABLE POR " 0 " SE TIENE QUE $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{\dfrac{x\tan x}{\sec x}}=\frac{0}{0}$ PARA RESOLVER ESTE LÍMITE SE ACUDE A LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y AL CONOCIMIENTO DE LOS SIGUIENTES LÍMITES: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\cos x=1$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0$. ASÍ, SE LLEGA A:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{\dfrac{\dfrac{x\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times(\lim_{x\to 0}\cos x)^2=1\times 1^2=1$$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES:

$$\text{i) }\int_1^9\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}\quad;\quad\text{ii) }\int\frac{x-5}{\sqrt{x-1}}\,dx\quad;\quad\text{iii) }\int\frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$$

SOLUCIÓN. $\text{i) }\displaystyle\int_1^9\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$ SE OBTIENE PRIMERO LA INTEGRAL INDEFINIDA, PARA LO CUAL SE REALIZA EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE, LO QUE LA VUELVE " INMEDIATA ":

$$u=\sqrt{x}+2\;\Rightarrow\;du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\;\Rightarrow\;2\int\frac{du}{u^2}=2\int u^{-2}du=2\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+C=-\frac{2}{u}+C=-\frac{2}{\sqrt{x}+2}+C$$

AHORA SE APLICA LA REGLA DE BARROW PARA CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y FINALMENTE SE LLEGA A:

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{x}+2}\right]_1^9=\left(-\frac{2}{\sqrt{9}+2}\right)-\left(-\frac{2}{\sqrt{1}+2}\right)=-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

$\text{ii) }\displaystyle\int\frac{x-5}{\sqrt{x-1}}\,dx$ EN ESTE TIPO DE INTEGRALES, EL CAMBIO DE VARIABLE QUE CONDUCE A SU OBTENCIÓN ES SUSTITUIR EL RADICANDO POR UNA NUEVA VARIABLE, LO QUE CONVIERTE A LA INTEGRAL EN VARIAS INTEGRALES " INMEDIATAS". DE ESTE MODO SE TIENE QUE:

$$u=x-1\;\Rightarrow\;du=dx\,;\,x=u+1\;\Rightarrow\;\int\frac{u+1-5}{\sqrt{u}}du=\int\frac{u-4}{\sqrt{u}}du=\int\frac{u}{\sqrt{u}}du-4\int\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$=\int u^{\frac{1}{2}}du-4\int u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-4\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}-8(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

iii) $\int \frac{\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\,dx$ PARA CALCULAR ESTA INTEGRAL, SE MULTIPLICAN NUMERADOR Y DENOMINADOR POR EL BINOMIO CONJUGADO DEL NUMERADOR, SE REALIZAN OPERACIONES, SE UTILIZAN IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y SE APLICAN LAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN CORRESPONDIENTES, ENTONCES:

$$\int \frac{\text{sen } x}{1-\text{sen } x}\times\frac{1+\text{sen } x}{1+\text{sen } x}\cdot dx = \int \frac{\text{sen } x+\text{sen}^2 x}{1-\text{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\text{sen } x+\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \sec x \tan x\,dx + \int \tan^2 x\,dx = \int \sec x \tan x\,dx + \int \sec^2 x\,dx - \int dx = \sec x + \tan x - x + C$$

CÁLCULO III

ENCONTRAR LOS EXTREMOS RELATIVOS Y LOS PUNTOS SILLA DE LA FUNCIÓN $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{4y^3}{3}-x^2-3x-4y-3$.

SOLUCIÓN. LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES SON: $f_x(x,y)=x^2-2x-3$ y $f_y(x,y)=4y^2-4$

COMO AMBAS DERIVADAS EXISTEN PARA TODO PUNTO (x,y) LOS PUNTOS CRÍTICOS, QUE SE OBTIENEN DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA FORMADO POR LAS DERIVADAS PARCIALES IGUALADAS A CERO, SON:

$$\begin{cases} x^2-2x-3=0 & \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 & \Rightarrow x=3\ ;\ x=-1 \\ 4y^2-4=0 & (y-1)(y+1)=0 & y=1\ ;\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (3,1),(3,-1),(-1,1),(-1,-1)$$

LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES Y LA MIXTA ESTÁN DADAS POR:

$$f_{xx}(x,y)=2x-2\ ;\ f_{yy}(x,y)=8y \ \text{ y }\ f_{xy}=0 \ \Rightarrow \text{ que el Hessiano sea } g(x,y)=(2x-2)(8y)-(0)^2=16xy-16y$$

EN LA SIGUIENTE TABLA SE PUEDEN VER LOS RESULTADOS: UN MÁXIMO Y UN MÍNIMO RELATIVOS Y DOS PUNTOS SILLA.

PUNTOS CRÍTICOS	VALOR Y SIGNO DE " g "	VALOR Y SIGNO DE f_{xx}	NATURALEZA DEL PUNTO CRÍTICO
$(3,1)$	$g(3,1)=32>0$	$f_{xx}(3,1)=4>0$	MÍNIMO RELATIVO $(3,1,-14.67)$
$(3,-1)$	$g(3,-1)=-32<0$	IRRELEVANTE	PUNTO SILLA $(3,-1,-9.33)$
$(-1,1)$	$g(-1,1)=-32<0$	IRRELEVANTE	PUNTO SILLA $(-1,1,-4)$
$(-1,-1)$	$g(-1,-1)=32>0$	$f_{xx}(-1,-1)=-4<0$	MÁXIMO RELATIVO $(-1,-1,1.33)$

CÁLCULO III

SEA LA FUNCIÓN $f(x,y,z)=4x^2+y^2+5z^2$ ENCONTRAR EL PUNTO DEL PLANO $2x+3y+4z=12$ DONDE LA FUNCIÓN f TOMA SU MENOR VALOR Y CALCULAR ÉSTE.

SOLUCIÓN. SE ESTABLECE COMO FUNCIÓN OBJETIVO A $f(x,y,z)=4x^2+y^2+5z^2$ SUJETA A LA RESTRICCIÓN $g(x,y,z)=2x+3y+4z-12=0$. MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE SE PUDE ESCRIBIR LA SIGUIENTE ECUACIÓN, CONOCIDA COMO " ECUACIÓN DE LAGRANGE ":

$$L=4x^2+y^2+5z^2+\lambda(2x+3y+4z-12)$$

Y SUS DERIVADAS PARCIALES, CON RESPECTO A x, y, z, λ IGUALADAS A CERO, FORMAN UN SISTEMA CUYA RESOLUCIÓN PROPORCIONA LOS PUNTOS CRÍTICOS, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=8x+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-4x \\ \frac{\partial L}{\partial y}=2y+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{2}{3}y \quad \Rightarrow \quad -4x=-\frac{2}{3}y \Rightarrow y=6x \quad \Rightarrow \quad 2x+18x+\frac{32}{5}x-12=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}=10z+4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{5}{2}z \quad\quad -4x=-\frac{5}{2}z \Rightarrow z=\frac{8}{5}x \quad\quad x=\frac{5}{11};\ y=\frac{30}{11};\ z=\frac{8}{11} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=2x+3y+4z-12=0 \end{cases}$$

COMO SÓLO SE TIENE UN PUNTO CRÍTICO, SE SIGUE QUE EL MÍNIMO VALOR DE LA FUNCIÓN SE OCURRE EN EL PUNTO $\left(\frac{5}{11},\frac{30}{11},\frac{8}{11}\right)$ Y SU VALOR APROXIMADO ES DE 10.91

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $x^2y'+5xy+3x^5=0$ DONDE $x\neq 0$

SOLUCIÓN. SE TRATA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN Y PARA ENCONTRAR EL FÁCTOR INTEGRANTE, SE EXPRESA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$y'+\frac{5}{x}y=-3x^3$$

LUEGO, DICHO FACTOR EQUIVALE A $e^{\int P(x)dx}=e^{5\ln|x|}=e^{\ln|x|^5}=|x|^5$

SI $x>0$, ENTONCES $|x|^5=x^5$ SI $x<0$, ENTONCES $|x|^5=-x^5$ EN AMBOS CASOS, MULTIPLICANDO AMBOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN POR $|x|^5$ PRODUCE

$$x^5y'+5x^4y=-3x^8\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dx}\left(x^5y\right)=-3x^8$$

SE INTEGRAN AHORA AMBOS MIEMBROS Y SE LLEGA A LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN. ASÍ,

$$x^5y=\int-3x^8dx=-\frac{x^9}{3}+C\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{x^4}{3}+\frac{C}{x^5}$$

ECUACIONES DIFERENCALES

RESOLVER LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $y'+y\tan x=\sec x+2x\cos x$

SOLUCIÓN. SE TRATA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN, POR LO QUE EL FACTOR INTEGRANTE EQUIVALE A:

$$e^{\int \tan x\,dx}=e^{\ln|\sec x|}=|\sec x|$$

SE MULTIPLICAN AMBOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR ESTE FACTOR Y SE TIENE QUE:

$$y'\sec x+y\sec x\tan x=\sec^2x+2x\quad\Rightarrow\quad\frac{d}{dx}\left(y\sec x\right)=\sec^2x+2x$$

SE INTEGRAN AMBOS MIEMBROS Y SE LLEGA A LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DADA. ASÍ,

$$y\sec x=\tan x+x^2+C\quad\Rightarrow\quad y=\operatorname{sen}x+\left(x^2+C\right)\cos x$$

TUTORÍA

CONSOLIDAR "UNA CULTURA DE LA TUTORÍA" EN LA FACULTAD ES UNA ARDUA TAREA EN LA QUE ESTAMOS INMERSOS MUCHOS ALUMNOS, PROFESORES -DE CARRERA EN SU MAYORÍA- Y LA COPADI.

SE TRATA DE QUE LOS ESTUDIANTES AL ENTRAR CUENTEN, DURANTE SU PRIMER SEMESTRE CURRICULAR, CON UN TUTOR Y DESPUÉS, EL RESTO DE SU CARRERA, PUEDAN ACUDIR CON ÉL O CON OTRO, CON LA PLENA SEGURIDAD DE QUE LES SERÁ ÚTIL PARA LA CULMINACIÓN EXITOSA DE SU CARRERA.

CON UN TUTOR UN ESTUDIANTE PUEDE PLANTEAR SUS PROBLEMAS ACADÉMICOS Y PEDIR ORIENTACIÓN PARA RESOLVERLOS DE LA MEJOR MANERA. PERO TAMBIEN PUEDE ACUDIR AL TUTOR CON CUESTIONES EXISTENCIALES QUE TENGAN QUE VER CON SU CRECIMIENTO, CON SUS RELACIONES HUMANAS, CON PROBLEMÁTICAS FAMILIARES Y, EN GENERAL, CON CUALQUIER ASUNTO, POR DIFÍCIL QUE SEA, Y SE TRATARÁ INVARIABLEMENTE DE APOYAR, AYUDAR Y ENCONTRAR LA MEJOR SOLUCIÓN.

TODO ES CUESTIÓN DE ABRIRSE Y PEDIR APOYO. PARA ESO ESTÁN LOS TUTORES, PARA APOYAR Y AYUDAR.

CULTURA

SI VEN EL LIBRO **"TE DOY MI PALABRA DE AMOR"** DE FERNANDO DÍEZ DE URDANIVIA, CÓMPRENLO. SON ESCRITOS DE 329 AUTORES DE LA LITERATURA UNIVERSAL SOBRE EL SENTIMIENTO AMOROSO. ALGUNOS DE ELLOS:

"ERES COMO EL SOL: CUANDO TU VIENES SE HACE DE DÍA EN MI CORAZÓN" (M. MACHADO); *"QUIERO HACER CONTIGO LO QUE LA PRIMAVERA HACE CON LOS CEREZOS"* (P. NERUDA); *"EL AMOR ES LA MÁS FUERTE DE TODAS LAS PASIONES, PORQUE ATACA AL MISMO TIEMPO A LA CABEZA, AL CORAZÓN Y AL CUERPO"* (VOLTAIRE); *"A NADIE TE PARECES DESDE QUE YO TE AMO"* (P. NERUDA); *"TUS PALABRAS SON MI ALIMENTO Y TU ALIENTO MI VINO"* (S. BERNHARDT); *"SÓLO EN TORNO DE UNA MUJER QUE SE SIENTE AMADA PUEDE FORMARSE UNA FAMILIA"* (F. SCHLEGEL); *"MÁS TARDE, EN UN MUNDO MEJOR QUE ÉSTE, DESEARÉ AMARTE MÁS Y CONOCERTE MÁS"* (SHAKESPEARE); *"EN AMOR, SÓLO ES GRANDE EL QUE PERDONA"* (E. ARCINIEGA); *"DEBO ESTAR VIVO, AMOR / PARA SABERTE TODA, / PARA BEBERTE TODA / EN UN VASO DE AMOR"* (EFRAÍN HUERTA)

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 15 17 DE ENERO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. COLECCIÓNALOS Y TENDRÁS UN GRAN NÚMERO DE EJERCICIOS DE VARIAS ASIGNATURAS.

ÁLGEBRA

OBTENER EL POLINOMIO DE COEFICIENTES REALES DE MENOR ORDEN CUYA GRÁFICA PASA POR LOS PUNTOS $A(-1,0), B\left(-2\sqrt{3},0\right), C(0,3)$ Y QUE TIENE COMO UNA DE SUS RAÍCES A $\alpha=-1+2i$

SOLUCIÓN: LA OTRA RAÍZ DEL POLINOMIO ES $\beta=-1-2i$ POR OTRA PARTE, DE LOS DATOS DEL PROBLEMA SE TIENEN OTRAS DOS RAÍCES, QUE SON $\gamma=-1$ Y $\delta=-2\sqrt{3}$ PODRÍA PENSARSE QUE OTRA RAÍZ ES $2\sqrt{3}$; SIN EMBARGO, ESTO NO ES ASÍ, NO SE TIENE INFORMACIÓN EN EL SENTIDO DE QUE LOS COEFICIENTES DEL POLINOMIO SEAN RACIONALES, LUEGO EL POLINOMIO ES

$$\begin{aligned}p(x) &= a_4(x+1)\left(x+2\sqrt{3}\right)(x+1-2i)(x+1+2i)\\ &= a_4\left[x^4+\left(3+2\sqrt{3}\right)x^3+\left(7+6\sqrt{3}\right)x^2+\left(5+14\sqrt{3}\right)x+10\sqrt{3}\right]\end{aligned}$$

PERO POR EL PUNTO "C" SE TIENE QUE $p(0)=3$; ENTONCES $3=a_4\,10\sqrt{3} \;\Rightarrow\; a_4=\dfrac{3}{10\sqrt{3}}$

FINALMENTE, SE TIENE QUE

$$\begin{aligned}p(x) &= \frac{3}{10\sqrt{3}}\left[x^4+\left(3+2\sqrt{3}\right)x^3+\left(7+6\sqrt{3}\right)x^2+\left(5+14\sqrt{3}\right)x+10\sqrt{3}\right]\\ &= \frac{3}{10\sqrt{3}}x^4+\left(\frac{9}{10\sqrt{3}}+\frac{3}{5}\right)x^3+\left(\frac{21}{10\sqrt{3}}+\frac{9}{5}\right)x^2+\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+\frac{21}{5}\right)x+3\end{aligned}$$

PARA PRACTICAR EL DESARROLLO DE ESTE PROBLEMA CON NÚMEROS MÁS SENCILLOS, SE PODRÍA RESOLVER CON EL MISMO ENUNCIADO, LOS PUNTOS $A(-1,0), B(0,5), C(2,0)$ Y LA RAÍZ CONOCIDA $\alpha=-1+2i$. ENTONCES, LA SOLUCIÓN SERÍA:

COMO EL POLINOMIO TIENE REPRESENTACIÓN GRÁFICA, SUS COEFICIENTES SON REALES Y OTRA DE SUS RAÍCES ES $\beta=-1-2i$. DE LOS DATOS SE TIENEN OTRAS DOS RAÍCES QUE SON $\gamma=-1$ y $\delta=2$ EL POLINOMIO ES ENTONCES:

$$\begin{aligned}p(x) &= a_4(x+1)(x-2)(x+1-2i)(x+1+2i)\\ &= a_4\left(x^4+x^3+x^2-9x-10\right)\end{aligned}$$

PERO POR EL PUNTO "B" SE TIENE QUE $p(0)=5$; ENTONCES $5=-10a_4 \;\Rightarrow\; a_4=-\dfrac{1}{2}$ Y, FINALMENTE SE LLEGA A:

$$p(x)=-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}x+5$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEAN LAS RECTAS $L_1 : \begin{cases} x = 3 + 3t_1 \\ y = 1 \\ z = -t_1 \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x = -2 + 2t_2 \\ y = 7 + 5t_2 \\ z = t_2 \end{cases}$

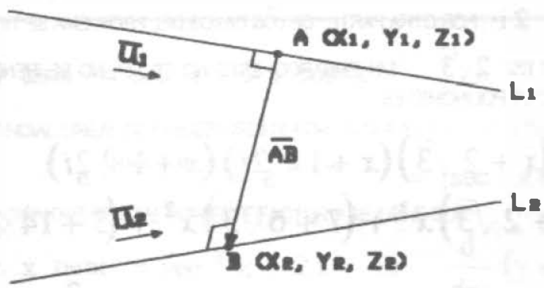
SE DESEA DETERMINAR LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS A y B PERTENECIENTES A LAS RECTAS L_1 y L_2, RESPECTIVAMENTE, TALES QUE LA DISTANCIA ENTRE DICHOS PUNTOS SEA MÍNIMA.

SOLUCIÓN. SEAN

$$A(x_1, y_1, z_1) \in L_1 \text{ y } B(x_2, y_2, z_2) \in L_2 \therefore \quad L_1 : \begin{cases} x_1 = 3 + 3t_1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = -t_1 \end{cases} \quad y \quad L_2 : \begin{cases} x_2 = -2 + 2t_2 \\ y_2 = 7 + 5t_2 \\ z_2 = t_2 \end{cases}$$

DE L_1 : $\bar{u}_1 = (3, 0, -1)$ Y DE L_2 : $\bar{u}_2 = (2, 5, 1)$

LOS PUNTOS A y B SON LOS EXTREMOS DEL SEGMENTO DE RECTA $\overline{AB}$ QUE ES SIMULTÁNEAMENTE PERPENDICULAR A L_1 y L_2 POR LO QUE $\overline{AB} \cdot \bar{u}_1 = 0$ y $\overline{AB} \cdot \bar{u}_2 = 0$ EN DONDE $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$



$$\overline{AB} \cdot \bar{u}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (3, 0, -1) = 3(x_2 - x_1) - z_2 + z_1 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

$$\overline{AB} \cdot \bar{u}_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \cdot (2, 5, 1) = 2(x_2 - x_1) + 5(y_2 - y_1) + 1(z_2 - z_1) = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

CON OBJETO DE REDUCIR EL NÚMERO DE INCÓGNITAS EN EL SISTEMA DE ECUACIONES FORMADO POR (1) y (2), SE SUSTITUYEN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE L_1 y L_2 Y SE LLEGA A:

$$3[(-2 + 2t_2) - (3 + 3t_1)] - t_2 - t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5t_2 - 10t_1 - 15 = 0 \quad \cdots \quad (1')$$

$$2[(-2 + 2t_2) - (3 + 3t_1)] + 5[(7 + 5t_2) - 1] + t_2 + t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6t_2 - t_1 + 4 = 0 \quad \cdots \quad (2')$$

AL RESOLVER ESTE NUEVO SISTEMA DE ECUACIONES $(1')$ y $(2')$ SE OBTIENEN LOS VALORES $t_1 = -2$ y $t_2 = -1$, LOS CUALES SE SUSTITUYEN EN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE L_1 y L_2 RESPECTIVAMENTE, PARA OBTENER FINALMENTE LOS PUNTOS $A(-3, 1, 2)$ y $B(-4, 2, -1)$

CÁLCULO I

OBTENER LA DERIVADA DE LAS FUNCIONES SIGUIENTES A PARTIR DE LA DEFINICIÓN (MÉTODO DE LOS "CUATRO PASOS")

$$i) \ y = 2x^2 - 5x + 8 \qquad ii) \ y = \frac{x + 1}{x - 1} \qquad iii) \ y = \sqrt{3 - x}$$

SOLUCIÓN. PARA DERIVAR A PARTIR DE LA DEFINICIÓN, LO QUE SE HACE ES SEGUIR LA SECUELA DE PASOS QUE SE ENCUENTRAN EN ELLA Y QUE SON: PRIMERO, SE INCREMENTA LA FUNCIÓN; SEGUNDO, SE LE RESTA A LA FUNCIÓN INCREMENTADA LA FUNCIÓN ORIGINAL; TERCERO, SE DIVIDE ESTA DIFERENCIA ENTRE EL INCREMENTO DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE, Y CUARTO Y ÚLTIMO, SE CALCULA EL LÍMITE DEL COCIENTE OBTENIDO. ESTO NO ES OTRA COSA QUE TRANSFORMAR LA FUNCIÓN $y = f(x)$ EN SU DERIVADA $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. PARA DERIVAR ASÍ LAS FUNCIONES DADAS SE SEGUIRÁN LOS PASOS DEFINIDOS ANTERIORMENTE. CABE ACLARAR QUE EXISTEN VARIAS FORMAS DE HACERLO, ÉSTA ES UNA DE ELLAS QUE OJALÁ GUSTE A LOS LECTORES.

$i)\ y = 2x^2 - 5x + 8$

PRIMERO : $y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 8$

$= 2x^2 + 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x + 8$

SEGUNDO : $-y = -2x^2 + 5x - 8$

$$\Delta y = 4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5\Delta x$$

TERCERO : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4x\,\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 5\Delta x}{\Delta x} = 4x + 2\Delta x - 5$

CUARTO : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x - 5)$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = 4x - 5$

$ii)\ y = \dfrac{x+1}{x-1}$

PRIMERO : $y + \Delta y = \dfrac{x + \Delta x + 1}{x + \Delta x - 1}$

SEGUNDO : $-y = -\dfrac{x+1}{x-1}$

$$\Delta y = \frac{x + \Delta x + 1}{x + \Delta x - 1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x + \Delta x + 1)(x-1) - (x+1)(x + \Delta x - 1)}{(x + \Delta x - 1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x + x\,\Delta x - \Delta x + x - 1 - x^2 - x\,\Delta x + x - x - \Delta x + 1}{(x + \Delta x - 1)(x-1)} = \frac{-2\Delta x}{(x + \Delta x - 1)(x-1)}$$

TERCERO : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2\Delta x}{\Delta x\,(x + \Delta x - 1)(x-1)} = \dfrac{-2}{(x + \Delta x - 1)(x-1)}$

CUARTO : $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2}{(x + \Delta x - 1)(x-1)}$

$\therefore \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$iii)\ y = \sqrt{3 - x}$

PRIMERO : $y + \Delta y = \sqrt{3 - (x + \Delta x)} = \sqrt{3 - x - \Delta x}$

SEGUNDO : $-y = -\sqrt{3 - x}$

$$\Delta y = \sqrt{3 - x - \Delta x} - \sqrt{3 - x}$$

TERCERO : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{3 - x - \Delta x} - \sqrt{3 - x}}{\Delta x}$

CUARTO :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3-x-\Delta x}-\sqrt{3-x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{3-x-\Delta x}-\sqrt{3-x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{3-x-\Delta x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x-\Delta x}+\sqrt{3-x}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3-x-\Delta x)-(3-x)}{\Delta x\left(\sqrt{3-x-\Delta x}+\sqrt{3-x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3-x-\Delta x-3+x}{\Delta x\left(\sqrt{3-x-\Delta x}+\sqrt{3-x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{3-x-\Delta x}+\sqrt{3-x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{3-x-\Delta x}+\sqrt{3-x}}=\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$$

CÁLCULO II

ESTUDIAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE LA SIGUIENTE INTEGRAL IMPROPIA: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$

SOLUCIÓN. LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO ES CONTINUA EN LOS REALES PERO AL SER INFINITO (+ Y -) LOS LÍMITES DE LA INTEGRAL, ENTONCES ÉSTA SE EXPRESA MEDIANTE:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{0}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}+\lim_{N\to\infty}\int_{0}^{N}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$$

AHORA SE RESUELVE, EN PRIMER LUGAR, LA INTEGRAL INDEFINIDA, PARA PODER OBTENER LOS LÍMITES ANTERIORES CUYA EXISTENCIA DETERMINARÁ SU CONVERGENCIA O DIVERGENCIA. ASÍ, SI SE MULTIPLICAN NUMERADOR Y DENOMINADOR POR e^{x}, SE TIENE QUE:

$$\int\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\cdot\frac{e^{x}}{e^{x}}\,dx=\int\frac{e^{x}\,dx}{e^{2x}+1}$$

Y CON EL CAMBIO DE VARIABLE: $u^2=e^{2x}\quad;\quad u=e^{x}\quad;\quad du=e^{x}dx\quad;\quad a^2=1\quad;\quad a=1$

SE LLEGA A: $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\,angtan\,\frac{u}{a}+C=angtan\;e^{x}+C$

Y EN CONSECUENCIA

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}=\lim_{M\to-\infty}\left[angtan\;e^{x}\right]_{M}^{0}+\lim_{N\to\infty}\left[angtan\;e^{x}\right]_{0}^{N}$$

$$=\lim_{M\to-\infty}\left(angtan\;e^{0}-angtan\;e^{M}\right)+\lim_{N\to\infty}\left(angtan\;e^{N}-angtan\;e^{0}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-0+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Y LA INTEGRAL IMPROPIA ES CONVERGENTE

TUTORÍA

UN PROFESOR QUE ENSEÑA, TRANSMITE, APRENDE Y CONVIVE CON LOS ESTUDIANTES, AL GRADO DE ESCUCHARLOS Y TRATAR DE AYUDARLOS EN SU DESARROLLO ACADÉMICO Y EN SU CRECIMIENTO ESPIRITUAL, ES UN SER HUMANO QUE REALIZA SU NOBLE LABOR CON AMOR

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

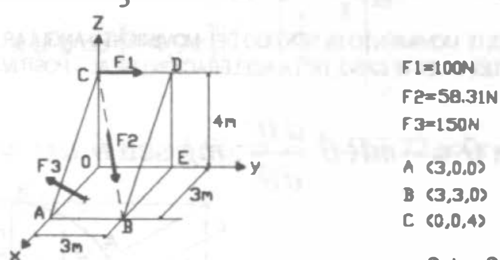
AÑO 2001 NÚMERO 16 2 DE FEBRERO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

ESTÁTICA. UN SISTEMA DE TRES FUERZAS ACTÚA SOBRE LA CUÑA, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. SI $F_1 = 100\ N$, $F_2 = 58.31\ N$ Y SUS LÍNEAS DE SOPORTE PASAN POR LOS PUNTOS C y B RESPECTIVAMENTE, Y $F_3 = 150\ N$, QUE ES PERPENDICULAR AL PLANO INCLINADO DE LA CUÑA Y LAS COORDENADAS VECTORIALES CANÓNICAS DEL SISTEMA SON $\left[150\,i\,,130\,j\,,50\,k\,,-520\,i-150\,j+0\,k\right]\ \left[N\,,Nm\right]$ DETERMINAR:

a) F_3 ; b) LAS COORDENADAS DE P PARA UNA COTA MÍNIMA DONDE F_3 CORTE EL PLANO INCLINADO DE LA CUÑA.



OBTENCIÓN DE FUERZAS EN FORMA VECTORIAL: $\overline{F}_1 = 100\,j$; $\overline{F}_2 = 58.31\,\overline{e}_{CB} \Rightarrow \overline{F}_2 = 58.31\dfrac{3\,i+3\,j-4\,k}{\sqrt{9+9+16}} = 30\,i+30\,j-40\,k$

$$\overline{CA}\times\overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 12\,i+9\,k \Rightarrow \overline{F}_3 = 150\,\frac{12\,i+0\,j+9\,k}{\sqrt{144+0+81}} = 120\,i+90\,k$$

OBTENCIÓN DE MOMENTOS CON RESPECTO A "O":

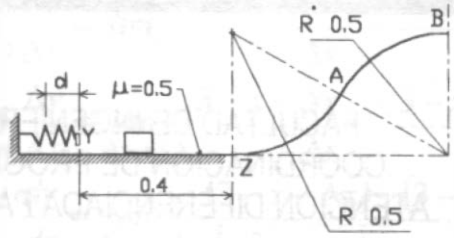
$$\overline{M}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 100 & 0 \end{vmatrix} = -400\,i \quad ; \quad \overline{M}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 30 & 30 & -40 \end{vmatrix} = i(-120) - j(-120) = -120\,i+120\,j$$

$$\overline{M}_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 120 & 0 & 90 \end{vmatrix} = i\,(90y) - j\,(90x-120z) + k\,(-120y) = 90y\,i + (120z-90x)\,j - 120y\,k$$

$\overline{M}_O = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 = (-400-120+90y)\,i + (120+120z-90x)\,j - 120y\,k$; PERO $\overline{M}_O = -520\,i - 150\,j + 0\,k$.

LUEGO: $-120y = 0 \Rightarrow y = 0$; $-150 = 120+120z-90x$; $-270 = 120z-90x$; $si\ z = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \therefore P(3,0,0)$

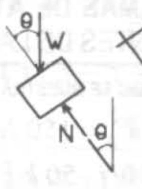
DINÁMICA. EL BLOQUE CON $30\,[N]$ DE PESO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA, SE COLCOCA EN EL EXTREMO LIBRE DE UN RESORTE LINEAL CUYA CONSTANTE DE RIGIDÉZ ES $k = 1500\left[\dfrac{N}{m}\right]$, Y POSTERIORMENTE SE COMPRIME ÉSTE UNA CIERTA LONGITUD "d". CONSIDERANDO QUE ÚNICAMENTE SE TIENE FRICCIÓN (SECA) ENTRE EL CUERPO Y EL PLANO EN EL TRAMO RECTO (LOS TRAMOS CURVOS SON LISOS), DETERMINAR: a) EL VALOR "d" $en\,[m]$, QUE SE DEBE COMPRIMIR EL RESORTE PARA QUE EL BLOQUE LLEGUE JUSTO AL PUNTO B CON RAPIDEZ NULA.; b) LA MAGNITUD DE LA ACELERACIÓN TOTAL EN EL PUNTO A.



Longitudes en metros.

SOLUCIÓN. ESTE PROBLEMA PUEDE RESOLVERSE EMPLEANDO " ECUACIONES DE MOVIMIENTO" O EL "MÉTODO DE TRABAJO Y ENERGÍA". SI SE APLICAN LAS "ECUACIONES DE MOVIMIENTO", CONVIENE ANALIZAR DE ATRÁS HACIA DELANTE, YA QUE SE CONOCEN LAS CONDICIONES FINALES, Y SE DESEA CALCULAR UN VALOR INICIAL, LA COMPRESIÓN " d " DEL RESORTE. DADO QUE SE CONOCE LA RAPIDEZ EN B, SE PUEDE DETERMINAR LA RAPIDEZ EN A.

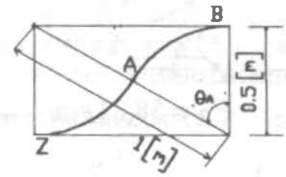
"dcl" DEL TRAMO CURVO ENTRE A y B



$$\sum F_t = -W \operatorname{sen}\theta = m\ddot{s} \quad ; \quad \sum F_n = W\cos\theta - N = m\frac{\dot{s}^2}{R} \quad ; dado\ que: \quad \ddot{s} = -R\ddot{\theta}$$

(EL SIGNO NEGATIVO ES PORQUE EN ESTE MOVIMIENTO EL SENTIDO DEL MOVIMIENTO ANGULAR, θ, ES HORARIO, Y POR TANTO, NEGATIVO; Y AL MULTIPLICAR POR EL SIGNO CITADO SE OBTIENE LA MAGNITUD, EN ESTE CASO, DE LA ACELERACIÓN LINEAL – POSITIVA)... Y COMO

$$\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta};\ -W\operatorname{sen}\theta = -mR\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta};\ mg\operatorname{sen}\theta\, d\theta = mR\dot{\theta}\, d\dot{\theta};\ \int_{\theta_A}^{\theta_B} g\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_{\dot{\theta}_A}^{\dot{\theta}_B} R\dot{\theta}\, d\dot{\theta}$$



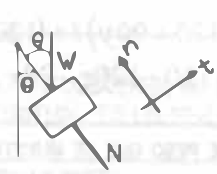
$$\cos\theta_A = \frac{0.5}{1} \Rightarrow \theta = ang\cos 0.5 \Rightarrow \theta = 60^0$$

$$\int_{60^0}^{0^0} g\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_{\dot{\theta}}^{0} R\dot{\theta}\, d\dot{\theta} \Rightarrow \left[-g\cos\theta\right]_{60^0}^{0^0} = \left[\frac{0.5}{2}\dot{\theta}^2\right]_{\dot{\theta}_A}^{0}$$

$$-g\cos 0^0 + g\cos 60^0 = 0 - 0.25\,\dot{\theta}_A^2 \Rightarrow -9.8(1-0.5) = -0.25\,\dot{\theta}_A^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta}_A^2 = \frac{9.8\,(0.5)}{0.25} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_A^2 = 19.6 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}_A = -4.427\left[\frac{rad}{s}\right]$$ (EL SIGNO NEGATIVO ES PORQUE EL MOVIMIENTO ANGULAR ES EN SENTIDO HORARIO); $\dot{s}_A = -R\dot{\theta}_A \quad \Rightarrow \quad \dot{s}_A = -0.5(-4.427) \quad \therefore \quad \dot{s}_A = 2.214\left[\frac{m}{s}\right]$

LUEGO, SE PUEDE OBTENER LA RAPIDEZ EN Z: DEL TRAMO CURVO DE Z a A



$$\sum F_t = -W\operatorname{sen}\theta = m\ddot{s} \quad ; \quad \sum F_n = N - W\cos\theta = m\frac{\dot{s}^2}{R}$$ EN ESTE CASO $\ddot{s} = R\ddot{\theta}$ (MOVIMIENTO ANGULAR EN SENTIDO ANTIHORARIO) Y CON $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ SE TIENE QUE:

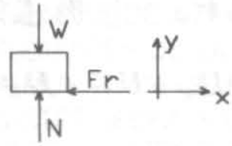
$$-mg \operatorname{sen}\theta \, d\theta = mR\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \Rightarrow \int_{\theta_Z}^{\theta_A} - g \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \int_{\dot{\theta}_Z}^{\dot{\theta}_A} 0.5\dot{\theta}\, d\dot{\theta} \Rightarrow [9.8\cos\theta]_{0^0}^{60^0} = \left[0.25\dot{\theta}^2\right]_{\dot{\theta}_Z}^{4.427}$$

EN ESTE TRAMO CURVO, COMO $\dot{s}_A$ $es\ de\ 2.214 \left[\frac{m}{s}\right]$ (POSITIVO) Y $\dot{s}_A = R\dot{\theta}_A$; $\dot{\theta}_A$ ES POSITIVO Y VALE $4.427\left[\frac{rad}{s}\right]$, ENTONCES:

$$9.8\left(\cos 60^0 - \cos 0^0\right) = 0.25\left(19.6 - \dot{\theta}_Z^{\,2}\right) \Rightarrow 9.8(0.5-1) = 4.9 - 0.25\dot{\theta}_Z^{\,2} \Rightarrow 0.25\dot{\theta}_Z^{\,2} = 4.9 + 4.9$$

$$\dot{\theta}_Z^{\,2} = \frac{9.8}{0.25} \Rightarrow \dot{\theta}_Z^{\,2} = 39.2 \Rightarrow \dot{\theta}_Z = 6.261\left[\frac{m}{s}\right] \quad \therefore \quad \dot{s}_Z = 3.130\left[\frac{m}{s}\right]$$

PARA EL TRAMO RECTO DE Y a Z, EL "dcl" ES:



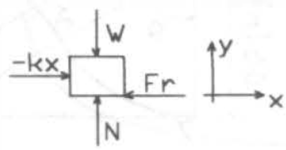
$$\sum F_x : -F_r = ma_x \ ; \sum F_y : N - W = 0 \Rightarrow N = W$$

COMO $F_r = \mu_k N \Rightarrow F_r = 0.5(30) \Rightarrow F_r = 15\,[N]$

$$-15 = \frac{30}{9.8}\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \Rightarrow \int_0^{0.4} -4.9\, dx = \int_{\dot{x}_Y}^{\dot{x}_Z} \dot{x}\, d\dot{x} \Rightarrow [-4.9x]_0^{0.4} = \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2\right]_{\dot{x}_Y}^{\dot{x}_Z}$$

$$\Rightarrow -4.9(0.4) = \frac{1}{2}(9.8) - \frac{1}{2}\left(\dot{x}_Y^{\,2}\right) \Rightarrow 0.5\dot{x}_Y^{\,2} = 4.9 + 1.96 \Rightarrow \dot{x}_Y^{\,2} = 13.72 \Rightarrow \dot{x}_Y = 3.704\left[\frac{m}{s}\right]$$

FINALMENTE, PARA EL TRAMO RECTO EN EL QUE INTERACTÚA EL RESORTE, EL "dcl" ES:



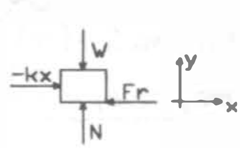
$$\sum F_x : -kx - F_r = ma_x \quad ; \quad \sum F_y : N - W = 0$$

$$-1{,}500\ x - 15 = \frac{30}{9.8}\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int_{-d}^{0}(-490\ x - 4.9)\, dx = \int_0^{\dot{x}_Y} \dot{x}\, d\dot{x}$$

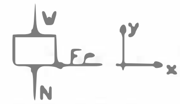
$$\left[-245\ x^2 - 4.9x\right]_{-d}^{0} = \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2\right]_0^{\dot{x}_Y} \quad \Rightarrow 0 - \left[-245(-d)^2 - 4.9(-d)\right] = \frac{1}{2}(13.72)$$

$$\Rightarrow d^2 - 0.02d - 0.028 = 0 \Rightarrow d_{1,2} = 0.01 \pm \sqrt{(0.01)^2 + 0.028} \Rightarrow d_1 = 0.1776\,[m]; d_2 = -0.1576\,[m]$$

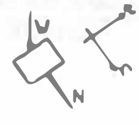
COMO EL VALOR NEGATIVO NO TIENE SIGNIFICADO FÍSICO, LA SOLUCIÓNES $d = 0.1776\,[m]$. AHORA, SI SE RESUELVE EL PROBLEMA CON EL "**MÉTODO DE TRABAJO Y ENERGÍA**", SE TIENE QUE: EL "dcl" (INTERACTUANDO EL RESORTE) ES:



EL "dcl" (PLANO) ES:



EL "dcl" (SUPERFICIE CURVAS) ES:



EL RESORTE REALIZA TRABAJO EN $-d \le x \le 0\,[m]$

$$U_k = \int_{-d}^{0} -kx\,dx \Rightarrow U_k = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{-d}^{0} \Rightarrow U_k = 0 - \left[-\frac{1}{2}(1500)(-d)^2\right] \Rightarrow U_k = 750\,d^2\,[N\cdot m]$$

LA FRICCIÓN REALIZA TRABAJO EN $-d \le x \le 0.4\,[m]$

$$U_{F_r} = \int_{-d}^{0.4} -F_r\,dx\ ;\ N - W = 0 \Rightarrow N = W\ ;\ N = 30\,[N];\ F'_r = \mu N \Rightarrow F'_r = 0.5(30) \Rightarrow F'_r = 15\,[N]$$

$$U_{F_r} = \int_{-d}^{0.4} -15\,dx \Rightarrow U_{F_r} = \left[-15x\right]_{-d}^{0.4} \Rightarrow U_{F_r} = -15(0.4) - \left[-15(-d)\right] \Rightarrow U_{F_r} = -6 - 15d\,[N\cdot m]$$

EL PESO REALIZA TRABAJO EN $0 \le y \le 0.5\,[m]$

$$U_W = \int_0^{0.5} -W\,dy \quad \Rightarrow \quad U_W = \left[-Wy\right]_0^{0.5} \quad \Rightarrow \quad U_W = -15\,[N\cdot m]$$

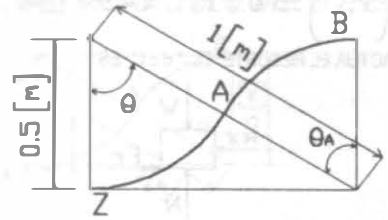
EL TRABAJO TOTAL ES IGUAL AL INCREMENTO DE ENERGÍA CINÉTICA: $U_k + U_{F_r} + U_W = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$

DADO QUE $v_1 = 0\left[\frac{m}{s}\right];\ v_2 = 0\left[\frac{m}{s}\right]$, ENTONCES $750d^2 - 6 - 15d - 15 = 0 - 0 \Rightarrow 750d^2 - 15d - 21 = 0$

$$\Rightarrow d^2 - 0.02d - 0.028 = 0 \Rightarrow \quad d_{1,2} = 0.01 \pm \sqrt{(0.01)^2 + 0.028} \Rightarrow d_{1,2} = 0.01 \pm \sqrt{0.0281}$$

$d_1 = 0.1776\,[m];\ d_2 = -0.1576\,[m]$; EL VALOR NEGATIVO NO TIENE SIGNIFICADO FÍSICO, LUEGO $d = 0.1776\,[m]$

b) PARA CALCULAR LA MAGNITUD DE LA ACELERACIÓN EN A, SE HACE LO SIGUIENTE:



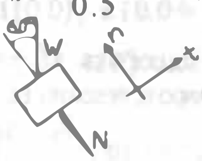
$$\cos\theta = \frac{0.5}{1} \Rightarrow \theta = 60^0\ ;\ h_A = 0.5\cos 60^0 \Rightarrow h_A = 0.25\,[m]$$

$$U_W = \int_0^{0.25} -W\,dy \Rightarrow U_W = -7.5\,[N\cdot m] \quad ; \quad U_k + U_{F_r} + U_W = \frac{1}{2}mv_A^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}$$

$$750(0.1776)^2 - 6 - 15(0.1776) - 7.5 = \frac{1}{2}\frac{30}{9.8}v_A^{\,2} \Rightarrow v_A^{\,2} = \frac{7.5(19.6)}{30} \Rightarrow v_A^{\,2} = 4.9\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$$

SUPOSICIÓN, A CONTENIDO EN LA PRIMERA CURVA: $a_n = \frac{v_A^{\,2}}{r} \Rightarrow a_n = \frac{4.9}{0.5} \Rightarrow a_n = 9.8\left[\frac{m}{s^2}\right]$

"dcl":



$$\sum F_t : -W\ \text{sen}\ 60^0 = ma_t \Rightarrow a_t = \frac{-30(0.866)}{\frac{30}{9.8}} \Rightarrow a_t = -8.487\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\therefore a_{TOT} = \sqrt{(9.8)^2 + (-8.487)^2} \Rightarrow \quad a_{TOT} = 12.96\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES BERTHA FRANCO ROSAS Y YUKIHIRO MINAMI KOYAMA

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 17 17 DE FEBRERO DE 2001

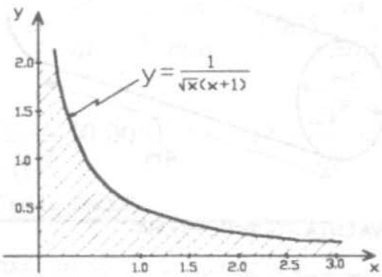
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTÁS A MUY BUEN TIEMPO DE RECUPERARTE SI TE HAS ATRASADO O NO HAS ESTUDIASDO LO SUFICIENTE ESTE SEMESTRE. ¡ÉCHALE GANAS Y TENDRÁS ÉXITO!

CÁLCULO II

EVALUAR LA INTEGRAL IMPROPIA $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ Y PARA ELLO, GRAFICAR LA FUNCIÓN DEL INTEGRANDO

SOLUCIÓN. COMO SE OBSERVA EN LA GRÁFICA, ÉSTA ES ASINTÓTICA A LOS EJES " X " Y " Y ", LUEGO SE DEBEN CONSIDERAR DOS INTEGRALES IMPROPIAS, TOMANDO UN PUNTO, EN ESTE CASO, EL CORRESPONDIENTE A $x = 1$, COMO EL VALOR DE LAS ABSCISAS QUE SEPARA EN DOS EL ÁREA.



ENTONCES LA INTEGRAL SE PUEDE EXPRESAR COMO

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

PARA RESOLVER LA INTEGRAL INDEFINIDA, SE REALIZA EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE $u^2 = x\,;\ u = \sqrt{x}\,;\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$;

Y SE HACE $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$, LUEGO SE TIENE QUE $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\ angtan\ \sqrt{x} + C$, DE DONDE

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{P\to 0}\left[2\ angtan\ \sqrt{x}\right]_P^1 + \lim_{R\to\infty}\left[2\ angtan\ \sqrt{x}\right]_1^R$$

$$= 2\ angtan\ (1) - 2\ angtan\ (0) + 2\ angtan\ (\infty) - 2\ angtan\ (1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

QUE ES EL VALOR DE LA INTEGRAL IMPROPIA LO QUE LA HACE " CONVERGENTE ".

CÁLCULO II

CALCULAR EL VALOR DEL LÍMITE $\lim_{x\to 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x}$

SOLUCIÓN. SI SE SUSTITUYE EL VALOR AL QUE TIENDE LA VARIABLE " x ", SE LLEGA A

$$\lim_{x\to 0} (x + \cos 2x)^{\csc 3x} = 1^{\infty}$$

QUE ES UNA INDETERMINACIÓN. PARA CALCULAR ESTE LÍMITE SE PUEDE HACER LO SIGUIENTE

$$a = \lim_{x\to 0}(x+\cos 2x)^{\csc 3x} \quad \Rightarrow \quad \ln a = \ln \lim_{x\to 0}(x+\cos 2x)^{\csc 3x} \quad \Rightarrow \quad \ln a = \lim_{x\to 0}\ln(x+\cos 2x)^{\csc 3x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln a = \lim_{x\to 0}\csc 3x \ln(x+\cos 2x) \quad \Rightarrow \quad \ln a = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\cos 2x)}{\frac{1}{\csc 3x}} \quad \Rightarrow \quad \ln a = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\cos 2x)}{\text{sen } 3x}$$

AHORA SE CALCULA EL IMITE DEL COCIENTE AL QUE SE LLEGÓ Y SE TIENE QUE $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\cos 2x)}{\text{sen } 3x} = \frac{0}{0}$ (INDETERMINACIÓN)

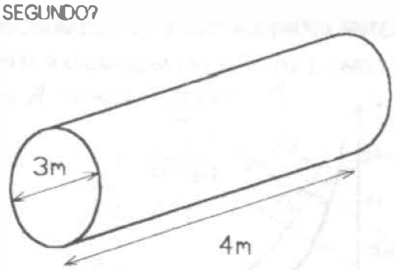
SE APLICA LA REGLA DE L'HOPITAL Y SE TIENE QUE

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\cos 2x)}{\text{sen } 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-2\,\text{sen } 2x}{x+\cos 2x}}{3\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2\,\text{sen } 2x}{3x\cos 3x + 3\cos 2x\cos 3x} = \frac{1-0}{0+3} = \frac{1}{3}$$

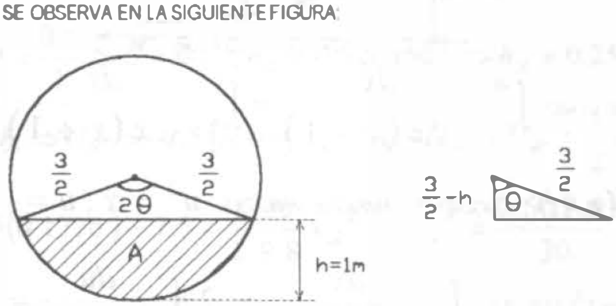
DE DONDE $\ln a = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad a = e^{\frac{1}{3}} \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0}(x+\cos 2x)^{\csc 3x} = e^{\frac{1}{3}}$

CÁLCULO I

EL TANQUE SUBTERRÁNEO DE UNA ESTACIÓN DE GASOLINA TIENE FORMA DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA Y ESTÁ SIENDO LLENADO POR UNA PIPA CUANDO EL NIVEL DE LA GASOLINA EN EL TANQUE ES DE 1 M, SE OBSERVA QUE ESTE NIVEL CRECE A RAZÓN DE $\frac{1\ cm}{2\ min}$ ¿QUÉ VOLUMEN DE GASOLINA (GASTO) ESTÁ DESCARGANDO LA PIPA EN UN SEGUNDO?



SOLUCIÓN. UN CORTE TRANSVERSAL DEL TANQUE SE OBSERVA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



POR OTRA PARTE, EL GASTO "Q" SE DEFINE COMO LA DERIVADA DEL VOLUMEN CON RESPECTO AL TIEMPO, ESTO ES

$$Q = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

EN ESTE PROBLEMA $V = 4A \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = 4\frac{dA}{dt}$ DE LA FIGURA ANTERIOR SE PUEDE VER QUE EL ÁREA "MOJADA" (DONDE SÍ HAY GASOLINA) EQUIVALE A LA RESTA DEL ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR, MENOS EL ÁREA DEL TRIÁNGULO CENTRAL, Y ESTO SE DETERMINA DE LA SIGUIENTE FORMA

$$A = \frac{\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2\pi}2\theta - 2\left(\frac{\frac{3}{2}\,\text{sen }\theta\,\frac{3}{2}\cos\theta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{9}{4}\theta - \frac{9}{4}\,\text{sen }\theta\cos\theta \Rightarrow A = \frac{9}{8}(2\theta - \text{sen } 2\theta)$$

COMO $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$ ENTONCES $\frac{dA}{dt} = \frac{9}{8}(2-2\cos 2\theta)\frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{9}{4}(1-\cos 2\theta)\frac{d\theta}{dt}$

LUEGO $$\frac{dV}{dt}=4\left[\frac{9}{4}(1-\cos 2\theta)\frac{d\theta}{dt}\right] \Rightarrow \frac{dV}{dt}=9\,(1-\cos 2\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

EN LA MISMA FIGURA SE PUEDE ESTABLECER "θ" EN FUNCIÓN DE "h" DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\theta = ang\cos\frac{\frac{3}{2}-h}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \theta = angc\cos\frac{3-2h}{3}$$ Y, COMO $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dh}\frac{dh}{dt}$, ENTONCES SE TIENE QUE

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{3-2h}{3}\right)^2}}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=-\frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{9-9+12h-4h^2}{9}}}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{2}{\sqrt{4\left(3h-h^2\right)}}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\sqrt{3h-h^2}}\frac{dh}{dt}$$

Y SUSTITUYENDO FINALMENTE ESTE RESULTADO, SE LLEGA A $$\frac{dV}{dt}=9\,(1-\cos 2\theta)\frac{1}{\sqrt{3h-h^2}}\frac{dh}{dt}$$

AHORA SE OBTIENE EL VALOR DE θ CON $h=1\,M$

$$\theta = ang\cos\frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}} \Rightarrow \theta = angc\cos\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 70.529^0$$

CON ESTE VALOR Y LA RAZÓN DE CRECIMIENTO DEL NIVEL QUE ES $\frac{dh}{dt}=\frac{1}{2}\frac{cm}{min}=0.005\,\frac{m}{min}$ SE LLEGA POR ÚLTIMO AL RESULTADO DEL PROBLEMA QUE ES

$$Q=\frac{dV}{dt}=9\left[1-\cos\left(141.058^0\right)\right]\frac{1}{\sqrt{3(1)-(1)^2}}(0.005) \Rightarrow Q=\frac{dV}{dt}=0.0566\,\frac{m^3}{min} \Rightarrow Q=0.94\,\frac{litros}{segundo}$$

POR LO QUE LA PIPA DESCARGA CASI UN LITRO POR SEGUNDO EN EL TANQUE.

CÁLCULO I

OBTENER LAS DERIVADAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES PARA EL VALOR DE " x " QUE SE PIDE:

$$i)\ f(x)=\frac{\sec x}{1+tanx}\ ;\ x=0 \quad ii)\ y=ang\sec\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ x=1.2 \quad iii)\ x^3+y^3=6xy\ ;\ x=y=3$$

SOLUCIÓN. SI SE PLANTEAN LAS CORRESPONDIENTES FÓRMULAS DE DERIVACIÓN Y SE APLICAN SE TIENE QUE:

$i)\ f(x)=\frac{\sec x}{1+tanx}\ ;\ x=0$ LA FÓRMULA PARA DERIVAR UN COCIENTE DE FUNCIONES ES $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot u'-u\cdot v'}{(v)^2}$, DE DONDE, AL APLICAR TAMBIÉN LAS DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS, SE LLEGA A:

$$f'(x)=\frac{(1+tanx)(\sec x\ tanx)-\sec x\sec^2 x}{(1+tanx)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\sec x\ tanx+\sec x\ tan^2 x-\sec x\sec^2 x}{(1+tanx)^2}$$

Y, COMO $tan^2 x=\sec^2 x-1$, ENTONCES

$$f'(x)=\frac{\sec x\ tanx+\sec x\left(\sec^2 x-1\right)-\sec^3 x}{(1+tanx)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{\sec x\ tanx+\sec^3 x-\sec x-\sec^3 x}{(1+tanx)^2}$$

$\therefore\ f'(x)=\frac{\sec x\,(tanx-1)}{(1+tanx)^2}$ Y, PARA $x=0 \Rightarrow f'(0)=\frac{\sec 0\,(tan0-1)}{(1+tan0)^2} \quad \therefore\ f'(0)=\frac{1\,(0-1)}{(1+0)^2}=-1$

$ii)\ y = ang\sec\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ x = 1.2$. LA FÓRMULA PARA DERIVAR LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA INVERSA "$ang\sec u$". ES

$$\frac{d}{dx}(ang\ \text{sen}\ u) = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$$

DE DONDE, AL PALICAR TAMBIÉN LAS DERIVADAS DE UN COCIENTE DE FUNCIONES Y DE UNA FUNCIÓN DENTRO DE UNA RAÍZ CUADRADA, SE LLEGA A:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-1}(0)-1\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{\left[\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2-1\right]}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{\dfrac{1-(x^2-1)}{x^2-1}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{2-x^2}}$$

Y PARA $x = 1.2 \Rightarrow \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1.2} = \dfrac{-1.2}{\sqrt{1.2^2-1}\ \sqrt{2-1.2^2}}\ \therefore\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1.2} = \dfrac{-1.2}{\sqrt{0.44}\ \sqrt{0.56}}\ \therefore\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1.2} \approx -2.42$

$iii)\ x^3 + y^3 = 6xy\ ;\ x = y = 3$. AQUÍ SE TRATA DE DERIVACIÓN IMPLÍCITA, PARA LA CUAL CABE RECORDAR QUE CADA OCASIÓN QUE APAREZCA LA VARIABLE DEPENDIENTE "y", SE TRATA DE UNA FUNCIÓN DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" Y QUE POR CONSIGUIENTE SE DEBE APLICAR LA "REGLA DE LA CADENA". SE TIENE ENTONCES:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(3y^2 - 6x\right) = 6y - 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}$$

Y, PARA LOS VALORES PEDIDOS SE TIENE FINALMENTE QUE

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=y=3} = \frac{6(3)-3(3)^2}{3(3)^2-6(3)}\ \therefore\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=y=3} = -1$$

TUTORÍA

" SE PUEDE DECIR QUE EL MÉTODO TUTORIAL ES UN CONJUNTO SISTEMATIZADO DE ACCIONES EDUCATIVAS CENTRADAS EN EL ESTUDIANTE. EN ESE SENTIDO, DENTRO DEL CONTEXTO DE LA UNAM SE LLEVAN A CABO EN LA ACTUALIDAD UN CONJUNTO DE PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS DENOMINADAS TUTORÍAS, QUE CONSISTE EN UN INSTRUMENTO DE LA ORIENTACIÓN EDUCATIVA PARA REALIZAR LA FUNCIÓN DE SUPERVISAR Y SERVIR A LOS ESTUDIANTES NO SÓLO EN EL ASPECTO COGNITIVO DEL APRENDIZAJE SINO INCLUSO EN EL AFECTIVO.

CON ESTO SE TRATA DE GUIAR DE UN MODO MÁS EFICAZ A LOS ESTUDIANTES TANTO EN LAS ACTIVIDADES ACADÉMICAS COMO EN LA PROBLEMÁTICA PROPIA DE LA JUVENTUD. CON BASE EN ESTAS CONSIDERACIONES, LA TUTORÍA ES UN MÉTODO CENTRADO EN EL ALUMNO Y EN EL CUAL EL PAPEL DEL PROFESOR - TUTOR TIENE ACTITUDES POSITIVAS HACIA LA ENSEÑANZA, LOS ESTUDIANTES, LA INSTITUCIÓN Y EL CAMBIO, CUMPLE CON LAS CONDICIONES PREVISTAS PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE.

LA TUTORÍA IMPLICA LA EXISTENCIA DE UNA RELACIÓN INTERPERSONAL ESTRECHA, CON MUCHA FRECUENCIA SU ÉXITO DEPENDE DE LA FORMA Y EL DESARROLLO DE DICHA RELACIÓN. NO SÓLO SE TRATA DEL CONTACTO FORMAL, DISCIPLINARIO, PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINADOS PROBLEMAS, NI TAMPOCO DE QUE EL TUTOR SE TRANSFORME EN UNA ESPECIE DE GUÍA SENTIMENTAL DEL ESTUDIANTE. SIN PERDER DE VISTA LOS OBJETIVOS ACADÉMICOS, MOTIVO PRINCIPAL DE LA RELACIÓN, LO IMPORTANTE ES EL EQUILIBRIO EN AMBAS SITUACIONES."

ALCÀNTARA SANTUARIO ARMANDO. CONSIDERACIONES SOBRE LA TUTORÍA EN LA DOCENCIA UNIVERSITARIA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 18 2 DE MARZO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. CONSÉRVALOS Y COLECCIÓNALOS. SIEMPRE SERÁN DE UTILIDAD.

CÁLCULO II

CALCULAR LAS DERIVADAS PARCIALES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN, ASÍ COMO LAS DERIVADAS PARCIALES MIXTAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES ESCALARES DE VARIABLE VECTORIAL:

$$i)\ z=f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right);\quad ii)\ z=f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3};\quad iii)\ u=f(x,y,z)=x^4y^3z^2;$$

$$iv)\ z=\cosh\sqrt{1-xy};\quad v)\ f(x,y)=e^{x^2+y^2};\quad vi)\ xy+xz+yz^2=5\quad;\quad z=f(x,y)$$

SOLUCIÓN.

$$i)\ z=f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)(2)-2x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)(2)-2y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2\right)(0)-2x(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$ii)\ z=f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(x^3+y^3\right)\left(3x^2\right)-\left(x^3-y^3\right)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+y^3\right)^2}=\frac{3x^5+3x^2y^3-3x^5+3x^2y^3}{\left(x^3+y^3\right)^2}$$

$$=\frac{6x^2y^3}{\left(x^3+y^3\right)^2};\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(x^3+y^3\right)\left(-3y^2\right)-\left(x^3-y^3\right)\left(3y^2\right)}{\left(x^3+y^3\right)^2}=\frac{-3x^3y^2-3y^5-3x^3y^2+3y^5}{\left(x^3+y^3\right)^2}=\frac{-6x^3y^2}{\left(x^3+y^3\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left(x^3+y^3\right)^2\left(12xy^3\right)-6x^2y^3\cdot 2\left(x^3+y^3\right)\cdot 3x^2}{\left(x^3+y^3\right)^4}=\frac{12x^4y^3+12xy^6-36x^4y^3}{\left(x^3+y^3\right)^3}=\frac{12xy^6-24x^4y^3}{\left(x^3+y^3\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\left(x^3+y^3\right)^2\left(-12x^3y\right)-\left(-6x^3y^2\right)\cdot 2\left(x^3+y^3\right)\cdot 3y^2}{\left(x^3+y^3\right)^4}=\frac{-12x^6y-12x^3y^4+36x^3y^4}{\left(x^3+y^3\right)^3}=\frac{-12x^6y+24x^3y^4}{\left(x^3+y^3\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}=\frac{\left(x^3+y^3\right)^2\cdot 18x^2y^2-6x^2y^3\cdot 2\left(x^3+y^3\right)\cdot 3y^2}{\left(x^3+y^3\right)^4}=\frac{18x^5y^2+18x^2y^5-36x^2y^5}{\left(x^3+y^3\right)^3}=\frac{18x^5y^2-18x^2y^5}{\left(x^3+y^3\right)^3}$$

$$iii)\ u=f(x,y,z)=x^4y^3z^2\ \Rightarrow\ u_x=4x^3y^3z^2;\ u_y=3x^4y^2z^2;\ u_z=2x^4y^3z$$

$$u_{xx}=12x^2y^3z^2;\ u_{yy}=6x^4yz^2;\ u_{zz}=2x^4y^3;\ u_{xy}=12x^3y^2z^2;\ u_{xz}=8x^3y^3z;\ u_{yz}=6x^4y^2z$$

$$iv)\ z=\cosh\sqrt{1-xy}\ \Rightarrow\ z_x=\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}}\operatorname{senh}\sqrt{1-xy};\ z_y=\frac{-x}{2\sqrt{1-xy}}\operatorname{senh}\sqrt{1-xy}$$

$$z_{xx}=\left(\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}}\right)\Bigg(-\cosh\sqrt{1-xy}\left(\frac{-y}{2\sqrt{1-xy}}\right)+\operatorname{senh}\sqrt{1-xy}\cdot\frac{2\sqrt{1-xy}(0)-(-y)\dfrac{-2y}{2\sqrt{1-xy}}}{4(1-xy)}$$

$$=\frac{y^2\cosh\sqrt{1-xy}}{4(1-xy)}-\frac{y^2\operatorname{senh}\sqrt{1-xy}}{4(1-xy)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z_{yy}=\frac{-x}{2\sqrt{1-xy}}\cosh\sqrt{1-xy}\cdot\frac{-x}{2\sqrt{1-xy}}+\operatorname{senh}\sqrt{1-xy}\cdot\frac{2\sqrt{1-xy}(0)-(-x)\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-xy}}}{4(1-xy)}$$

$$=\frac{x^2\cosh\sqrt{1-xy}}{4(1-xy)}-\frac{x^2\operatorname{senh}\sqrt{1-xy}}{4(1-xy)^{\frac{3}{2}}}$$

v) $f(x,y)=e^{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad f_x=2xe^{x^2+y^2}\ ;\ f_y=2ye^{x^2+y^2}\ ;\ f_{xx}=2x\cdot 2xe^{x^2+y^2}+2e^{x^2+y^2}=2e^{x^2+y^2}(2x^2+1)$

$f_{yy}=2y\cdot 2ye^{x^2+y^2}+2e^{x^2+y^2}=2e^{x^2+y^2}(2y^2+1)\ ;\ f_{xy}=2x\cdot 2ye^{x^2+y^2}+e^{x^2y^2}(0)=4xye^{x^2+y^2}$

vi) $xy+xz+yz^2=5\Rightarrow y+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z+2yz\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\therefore\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y-z}{x+2yz}\quad ;\quad x+x\dfrac{\partial z}{\partial y}+2yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0\therefore\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-x-z^2}{x+2yz}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x+2yz)\left(-\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)-(-y-z)\left(1+2y\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(x+2yz)^2}=\frac{(x+2yz)\left(-\dfrac{-y-z}{x+2yz}\right)+(y+z)\left[1+2y\left(\dfrac{-y-z}{x+2yz}\right)\right]}{(x+2yz)^2}$$

$$=\frac{y+z+(y+z)\left(\dfrac{x+2yz-2y^2-2yz}{x+2yz}\right)}{(x+2yz)^2}=\frac{xy+2y^2z+xz+2yz^2+xy-2y^3-2y^2z+xz}{(x+2yz)^3}=$$

$$=\frac{2xy+2xz+2yz^2-2y^3}{(x+2yz)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x+2yz)\left(-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)-(-x-z^2)\left(2y\dfrac{\partial z}{\partial y}+2z\right)}{(x+2yz)^2}=\frac{(x+2yz)\left[-2z\left(\dfrac{-x-z^2}{x+2yz}\right)\right]+(x+z^2)\left[2y\left(\dfrac{-x-z^2}{x+2yz}\right)+2z\right]}{(x+2yz)^2}=$$

$$=\frac{2xz+2z^3+(x+z^2)\left[\dfrac{-2xy-2yz^2}{x+2yz}+2z\right]}{(x+2yz)^2}=\frac{2x^2z+4xyz^2+2xz^3+4yz^4+(x+z^2)(-2xy-2yz^2+2xz+4yz^2)}{(x+2yz)^3}$$

$$=\frac{2x^2z+4xyz^2+2xz^3+4yz^4-2x^2y+2xyz^2+2x^2z-2xyz^2+2yz^4+2xz^3}{(x+2yz)^3}=\frac{4x^2z+4xyz^2+4xz^3+6yz^4-2x^2y}{(x+2yz)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{(x+2yz)\left(-1-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)-(-y-z)\left(2y\dfrac{\partial z}{\partial y}+2z\right)}{(x+2yz)^2}=\frac{(x+2yz)\left(-1-\dfrac{-x-z^2}{x+2yz}\right)+(y+z)\left(2y\cdot\dfrac{-x-z^2}{x+2yz}+2z\right)}{(x+2yz)^2}=$$

$$=\frac{(x+2yz)\left(\dfrac{-x-2yz+x+z^2}{x+2yz}\right)+(y+z)\left(\dfrac{-2xy-2yz^2+2xz+4yz^2}{x+2yz}\right)}{(x+2yz)^2}$$

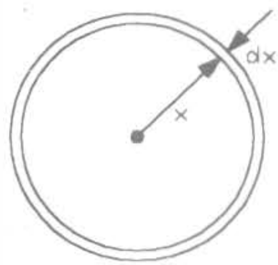
$$\frac{-2xyz + xz^2 - 4y^2z^2 + 2yz^3 - 2xy^2 + 2y^2z^2 + 2xyz - 2xyz + 2yz^3 + 2xz^2}{(x+2yz)^3} =$$

$$= \frac{3xz^2 - 2y^2z^2 + 4yz^3 - 2xy^2 - 2xyz}{(x+2yz)^3}$$

CÁLCULO I

UNGLOBO METEOROLÓGICO DE FORMA ESFÉRICA TIENE 2 M DE RADIO Y AL SUBIR A CIERTA ALTURA, SU RADIO AUMENTÓ 25 MM. UTILIZAR LA DIFERENCIAL PARA CALCULAR CUÁNTO AUMENTARON SU VOLUMEN Y SU SUPERFICIE, Y DETERMINAR EL PORCENTAJE DE ERROR AL CONSIDERAR LOS INCREMENTOS APROXIMADOS QUE DA LA DIFERENCIAL, EN LUGAR DE LOS EXACTOS.

SOLUCIÓN. ENSEGUIDA SE PRESENTA EL MODELO GEOMÉTRICO DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL GLOBO, DONDE SE DENOTA CON "x" AL RADIO Y CON "dx" INCREMENTO DEL MISMO.



AL APLICAR EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL AL VOLUMEN, SE TIENE QUE:

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi x^2 dx \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi(2)^2(0.025) \quad \Rightarrow \quad dV = 1.2566\ m^3$$

QUE ES EL VALOR APROXIMADO DEL INCREMENTO DEL VOLUMEN. PARA CALCULAR EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO, SE CALCULAN LOS VALORES INICIAL Y FINAL DEL VOLUMEN Y SE RESTAN. ASÍ SE LLEGA A:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi(2)^3 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 33.5104\ m^3 \quad y \quad V_2 = \frac{4}{3}\pi(2.025)^3 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 34.7828\ m^3$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta V = 1.2724\ m^3$$

QUE ES EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO DEL VOLUMEN. AHORA SE CALCULAN EL ERROR ABSOLUTO, EL RELATIVO Y EL PORCENTAJE DEL ERROR QUE SE COMETE AL UTILIZAR LA DIFERENCIAL EN LUGAR DEL INCREMENTO EXACTO. ESTO SE HACE COMO SIGUE:

$$E_a = |\Delta V - dV| = 0.0158 \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{E_r}{\Delta V} = \frac{0.0158}{1.2724} = 0.0124 \quad \Rightarrow \quad P_e = 1.24\,\%$$

AL APLICAR EL CONCEPTO DE DIFERENCIAL A LA SUPERFICIE DEL GLOBO, SE TIENE QUE:

$$S = 4\pi x^2 \quad \Rightarrow \quad dS = 8\pi x\, dx \quad \Rightarrow \quad dS = 8\pi(2)(0.025) \quad \Rightarrow \quad dS = 1.2566\ m^2$$

QUE ES EL VALOR APROXIMADO DEL INCREMENTO DE LA SUPERFICIE DEL GLOBO. PARA CALCULAR EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO, SE CALCULAN LOS VALORES INICIAL Y FINAL DE LA SUPERFICIE Y SE RESTAN. ASÍ SE LLEGA A:

$$S_1 = 4\pi(2)^2 \quad \Rightarrow \quad S_1 = 50.2656\ m^2 \quad y \quad S_2 = 4\pi(2.025)^2 \quad \Rightarrow \quad S_2 = 51.5301\ m^2$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta S = 1.2645\ m^2$$

QUE ES EL VALOR EXACTO DEL INCREMENTO DE LA SUPERFICIE. AHORA, IGUAL QUE CON EL VOLUMEN, SE CALCULAN EL ERROR ABSOLUTO, EL RELATIVO Y EL PORCENTAJE DEL ERROR QUE SE COMETE AL UTILIZAR LA DIFERENCIAL EN LUGAR DEL INCREMENTO EXACTO. ESTO SE HACE COMO SIGUE:

$$E_a = |\Delta S - dS| = 0.0079\ m^2 \quad \Rightarrow \quad E_r = \frac{E_r}{\Delta S} = \frac{0.0079}{1.2645} = 0.00625 \quad \Rightarrow \quad P_e = 0.625\,\%$$

$$h_\alpha - h_\omega = \frac{kR}{k-1}(T_\alpha - T_\omega) \quad ; \quad \left\{\dot{W}\right\}_{eje} = -\left\{\dot{Q}\right\} - \dot{m}\left[\frac{kR}{k-1}(T_\alpha - T_\omega) - \frac{1}{2}\vec{V}_\omega^{\,2}\right]$$

$$\left\{\dot{W}\right\}_{eje} = -\left[-20\times 10^3\left(\frac{J}{s}\right)\right] - 660.4756\left(\frac{g}{s}\right)\left[-133.0112\left(\frac{J}{g}\right) - 11.4075\left(\frac{J}{g}\right)\right]$$

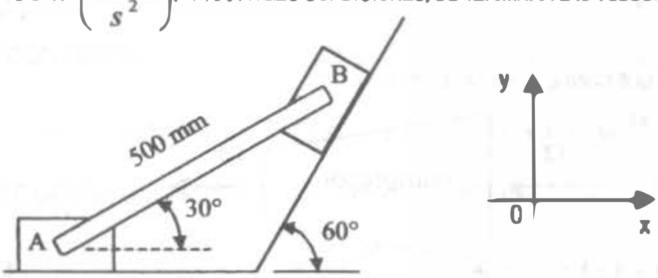
$$\left\{\dot{W}\right\}_{eje} = 115384.9977\ (W) = 115.385\ (kW)$$

COMENTARIOS:

- EL GASTO VOLUMÉTRICO EN LA ENTRADA α $\left[45\left(\frac{m^3}{min}\right)\right]$ ES DISTINTO DEL DE LA SALIDA ω $\left[7.11\left(\frac{m^3}{min}\right)\right]$ PUES EL GAS ES UNA SUSTANCIA COMPRESIBLE. SIN EMBARGO, EL GASTO MÁSICO ES EL MISMO EN LA ENTRADA Y EN LA SALIDA.
- OBSERVE QUE EL CAMBIO EN LA ENERGÍA CINÉTICA ES SOLAMENTE EL $8.6\ (\%)$ DEL CAMBIO EN LA ENTALPIA. EL CAMBIO EN LA ENERGÍA CINÉTICA SE DESPRECIA EN MUCHAS APLICACIONES.
- LA POTENCIA DE COMPRESIÓN SE USA PARA CAMBIAR EL ESTADO DEL GAS, PARA ACELERARLO Y PARA COMPENSAR LA POTENCIA CALORÍFICA QUE SE ENVÍA AL EXTERIOR DEL SISTEMA.

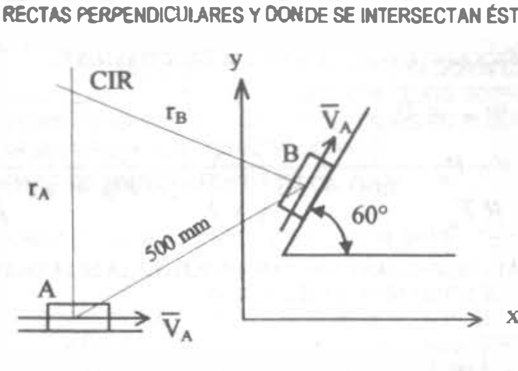
CINEMÁTICA

PARA EL ARREGLO MOSTRADO EN LA FIGURA Y EN EL INSTANTE CONSIDERADO, LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN ANGULARES DE LA BARRA $\overline{AB}$ SON $\bar{\omega} = 20\,\hat{k}\left(\frac{rad}{s}\right)$ y $\bar{\alpha} = -10\,\hat{k}\left(\frac{rad}{s^2}\right)$. PARA TALES CONDICIONES, DETERMINAR LAS VELOCIDADES DE CADA BLOQUE.



SOLUCIÓN. PARA DETERMINAR LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "A" $(\bar{v}_A)$ Y LA DEL BLOQUE "B" $(\bar{v}_B)$, SE APLICARÁ EL CONCEPTO DE CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN (CIR)

PARA DETERMINAR LA UBICACIÓN DEL "CIR", PRIMERO DEBERÁ DETERMINARSE LA DIRECCIÓN DE $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$; PARA LOGRAR ESTO, NÓTESE QUE LA BIELA "AB" GIRA EN SENTIDO ANTIHORARIO $\left(\bar{\omega} = 20\,\hat{k}\right)$, POR LO QUE LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "A" SERÁ PARALELA AL PLANO HORIZONTAL. POR OTRA PARTE, EL BLOQUE "B" SE DESPLAZARÁ HACIA ARRIBA DEL PLANO INCLINADO, TENIÉNDOSE LA VELOCIDAD DE "B" EN ESA DIRECCIÓN. CONOCIDAS LAS DIRECCIONES DE $\bar{v}_A$ y $\bar{v}_B$, SE TRAZAN RECTAS PERPENDICULARES Y DONDE SE INTERSECTAN ÉSTAS, SE TIENE EL "CIR".



EN ESTA FIGURA SE OBSERVA QUE LA BARRA Y LAS LÍNEAS "r_A" y "r_B" FORMAN EL TRIÁNGULO $AB\,CIR$, EL CUAL ES EQUILÁTERO; POR LO TANTO: $r_A = r_B = 0.5\ m \ldots (1)$. LA VELOCIDAD DEL BLOQUE "A" SE OBTIENE AL APLICAR LA EXPRESIÓN:

$$\bar{v}_A = \bar{\omega}_{AB} \times \bar{r}_{A/CIR} \ \ldots (2) \quad de\ donde\ : \quad \bar{\omega}_{AB} = 20\,\hat{k}\left(\frac{rad}{s}\right) \ldots (3)$$

ADEMÁS $\bar{r}_{A/CIR} = -0.5\,\hat{j}\,(m) \ldots (4)$. AHORA SE SUSTITUYEN $(3)\, y\, (4)\, en\, (2)$ Y SE TIENE QUE:

$$\bar{v}_A = \left(20\,\hat{k}\right) \times \left(-0.5\,\hat{j}\right) \quad \therefore \quad \bar{v}_A = 10\,\hat{i}\left(\frac{m}{s}\right)$$

DE MANERA SIMILAR SE OBTIENE LA VELOCIDAD DEL BLOQUE " B " , ES DECIR, $\bar{v}_B = \bar{\omega}_{AB} \times \bar{r}_{B/CIR} \ldots (5)$; EN DONDE

$$\bar{r}_{B/CIR} = 0.5\left(\cos 60^0\,\hat{i} - \text{sen}\ 60^0\,\hat{j}\right) \Rightarrow \bar{r}_{B/CIR} = 0.25\,\hat{i} - 0.433\,\hat{j} \ldots (6)$$

SE SUSTITUYEN $(3)\, y\, (6)\, en\, (5)$ Y SE TIENE QUE:

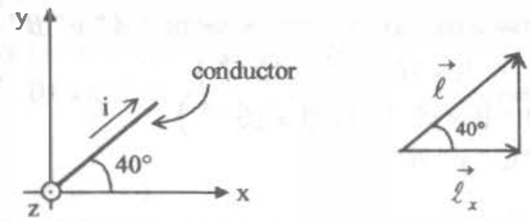
$$\bar{v}_B = \left(20\,\hat{k}\right) \times \left(0.25\,\hat{i} - 0.433\,\hat{j}\right) \quad \therefore \quad \bar{v}_B = 5\,\hat{i} + 8.66\,\hat{j}\left(\frac{m}{s}\right)$$

COMO EJERCICIO, SE DEJA AL LECTOR DETERMINAR LAS ACELERACIONES LINEALES DE CADA BLOQUE, DEBIENDO LLEGAR A LOS VALORES:

$$\bar{a}_A = 110.47\,\hat{i}\left(\frac{m}{s^2}\right) \quad y \quad \bar{a}_B = -60.235\,\hat{i} - 104.33\,\hat{j}\left(\frac{m}{s^2}\right).$$

FÍSICA EXPERIMENTAL

UN CONDUCTOR, CUYA LONGITUD ES DE $3.6\,[cm]$ SE ENCUENTRA COLOCADO COMO SE INDICA EN LA FIGURA. SI LA CORRIENTE ELÉCTRICA QUE TRANSPORTA EL CONDUCTOR ES DE $3.4\,[A]$, DETERMINAR EL VECTOR FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO QUE ACTÚA SOBRE EL CONDUCTOR, CONSIDERANDO QUE ÉSTE SE HALLA INMERSO EN EL CAMPO MAGNÉTICO $\vec{B} = 0.5\,\hat{j} - 0.4\,\hat{k}\,[T]$; EXPRESAR EL RESULTADO EN LA UNIDAD DEL " SI ".



RESOLUCIÓN.

EL VECTOR FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO EN UN CONDUCTOR ESTÁ DADO POR $\vec{F}_m = i\,\vec{\ell} \times \vec{B} \ldots (1)$. AHORA, DE LA SEGUNDA FIGURA,

$$\vec{\ell} = \ell_x\,\hat{i} + \ell_y\,\hat{j}\,;\ \ell_x = \ell\cos 40^0 = 0.036\cos 40^0 = 0.0276\,[m] \quad ; \quad \ell_y = \ell\ \text{sen}\ 40^0 = 0.036\ \text{sen}\ 40^0 = 0.0231\,[m]$$

$$\vec{\ell} = 0.0276\,\hat{i} + 0.0231\,\hat{j}\,[m] \ldots (2) \quad ; \quad i = 3.4\,[A] \ldots (3) \quad ; \quad \vec{B} = 0.5\,\hat{j} - 0.4\,\hat{k}\,[T] \ldots (4)$$

SE SUSTITUYEN $(2),\,(3)\ y\ (4)\ en\ (1)$ Y SE TIENE QUE:

$$\vec{F}_m = (3.4\ A)\left[(0.0276\,\hat{i} + 0.0231\,\hat{j})\,m \times \left(0.5\,\hat{j} - 0.4\,\hat{k}\right)T\right]$$

. LUEGO, SE REALIZA EL PRODUCTO CRUZ Y SE LLEGA A:

$$\vec{\ell} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0.0276 & 0.0231 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.4 \end{vmatrix} = -0.00924\,\hat{i} + 0.1104\,\hat{j} + 0.0138\,\hat{k}\ \ [T \cdot m]$$

LUEGO $\vec{F}_m = -0.031416\,\hat{i} + 0.037536\,\hat{j} + 0.0138\,\hat{k}$

SI SE HACE UN ANÁLISIS DE UNIDADES, SE VE QUE:

$$\left[\vec{F}\right]_u = A \cdot m \cdot T = A \cdot m \cdot \frac{Wb}{m^2} = A \cdot \frac{Wb}{m} = A \cdot \frac{V \cdot s}{m} = A \cdot V \cdot \frac{s}{m} = A \cdot \frac{J}{c} \cdot \frac{s}{m} = \frac{c}{s} \cdot \frac{J}{c} \cdot \frac{s}{m} = \frac{J}{m} = \frac{N \cdot m}{m} = [N]$$

POR LO TANTO $\vec{F}_m = -0.0314\,\hat{i} + 0.0375\,\hat{j} + 0.0138\,\hat{k}\quad [N]$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

UN CIRCUITO CON CAPACITORES SE MUESTRA EN LA FIGURA. CON BASE EN ELLO, DETERMINAR:

a) LA CAPACITANCIA EQUIVALENTE ENTRE LOS PUNTOS $"A"$ y $"B"$.

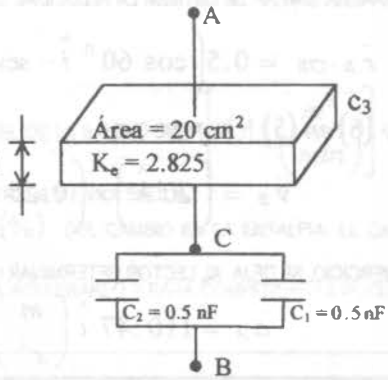
b) LA DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB} SI $Q_{C_1} = 0.25\ \mu C$ y $C_3 = 1\ nF$.

c) LA ENERGÍA ALMACENADA POR EL CAPACITOR C_2 SI $Q_{C_2} = 0.25\ \mu C$ y $C_3 = 1\ nF$.

d) ELEGIR EL DIELÉCTRICO ADECUADO DE MODO QUE EL CAPACITOR C_3 NO SE DAÑE SI $V_{AC} = 1000\ V$. EMPLEAR LA TABLA ADJUNTA Y JUSTIFICAR LA RESPUESTA.

DIELÉCTRICO	E máx [kV/mm]
NEOPRENO	12
PAPEL	14
POLIESTIRENO	25

d = 0.05 mm



SOLUCIÓN. a) PRIMERO SE DETERMINA EL VALOR DEL CAPACITOR C_3 MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$C_3 = \frac{K_e \varepsilon_0 A}{d} = \frac{(2.825)(8.85\times10^{-12})(20\times10^{-4})}{(0.05\times10^{-3})} = \frac{5\times10^{-14}}{5\times10^{-5}} = 1\times10^{-9}\ (F)$$

POSTERIORMENTE SE OBTIENE EL VALOR DEL CAPACITOR EQUIVALENTE ENTRE LOS PUNTOS $"C"$ y $"B"$ DEL ARREGLO:

$$C_{eq_{CB}} = C_1 + C_2 = 0.5\times10^{-9} + 0.5\times10^{-9} = 1\times10^{-9}\ (F)$$

UNA VEZ OBTENIDO ESTE VALOR, SE CALCULA LA CAPACITANCIA EQUIVALENTE ENTRE LOS PUNTOS $"A"$ y $"B"$:

$$C_{eq_{AB}} = \frac{C_{CB}\ C_3}{C_{CB} + C_3} = \frac{(1\times10^{-9})(1\times10^{-9})}{(1\times10^{-9}) + (1\times10^{-9})} = 0.5\times10^{-9}\ (F) = 0.5\ nF$$

b) SE DETERMINA LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE $"C"$ y $"B"$:

$V_{CB} = \frac{Q_{C_1}}{C_1} = \frac{0.25\times10^{-6}}{0.5\times10^{-9}} = 500\ V$. LUEGO, MEDIANTE UNA EXPRESIÓN SEMEJANTE, SE OBTIENE LA CARGA Q_{C_2}:

$$Q_{C_2} = C_2 V_{CB} = (0.5\times10^{-9})(500) = 0.25\times10^{-6}\ (C) = 0.25\ \mu C$$

SE OBTIENE LA CARGA Q_3 A PARTIR DE: $Q_3 = Q_{12} = Q_{C_1} + Q_{C_2} = 0.25\ \mu C + 0.25\ \mu C = 0.5\ \mu C$.

ENTONCES ES POSIBLE DETERMINAR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE $"A"$ y $"C"$: $V_{AC} = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{0.5\ \mu C}{1\times10^{-9}\ F} = 500\ V$.

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE $"A"$ y $"B"$ ES: $V_{AB} = V_{CB} + V_{AC} = 500\ V + 500\ V = 1000\ V$.

c) LA ENERGÍA ALMACENADA POR EL CAPACITOR C_2 SE DETERMINA MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_{CB}^{\ 2} = (0.5)(0.5\times10^{-9})(500)^2 = 62.5\ \mu J$$

d) AHORA SE CALCULA EL CAMPO ELÉCTRICO DE RUPTURA (MÁXIMO) PARA CADA MATERIAL:

NEOPRENO $\Rightarrow$ $(12\times10^6)(0.05\times10^{-3}) = 600\ V$

PAPEL $\Rightarrow$ $(14\times10^6)(0.05\times10^{-3}) = 700\ V$

POLIESTIRENO $\Rightarrow$ $(25\times10^6)(0.05\times10^{-3}) = 1250\ V$

EL DIELÉCTRICO QUE CUMPLE CON LOS REQUISITOS ES EL POLIESTIRENO.

EL BOLETÍN "COPADI" AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES
FÉLIX NÚÑEZ, FERNANDO SÁNCHEZ R., RIGEL GÁMEZ L. Y MANUEL VACIO G.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 20 2 DE ABRIL DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ***DÍAS DE FINALES. ¡A ESTUDIAR! ¡USTEDES PUEDEN! LA COPADI CONFÍA EN USTEDES, PORQUE LA COPADI ES DE Y PARA LOS ESTUDIANTES:***

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER LA SIGUIENTE ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA CON COEFICIENTES CONSTANTES

$$X'''-6X''+12X'-8X=t^3e^{2t} \quad ; \text{ DONDE } \quad X(0)=1 \quad ; \quad X'(0)=-1 \quad ; \quad X''(0)=-2$$

SOLUCIÓN. DE ACUERDO CON LA EXPRESIÓN DE LAPLACE PARA DERIVADAS:

$$\mathcal{L}\left\{F^{(n)}(t)\right\}=s^n\ f(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-\ldots-sF^{(n-2)}(0)-F^{(n-1)}(0)$$

CON LOS VALORES INICIALES DADOS, SE TIENE QUE:

$$\mathcal{L}\{X\}=x \quad ; \quad \mathcal{L}\{X'\}=sx-1 \quad ; \quad \mathcal{L}\{X''\}=s^2x-s+1 \quad ; \quad \mathcal{L}\{X'''\}=s^3x-s^2+s+2$$

AHORA SE IGUALAN LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE LOS DOS MIEMBROS DE LA ECUACIÓN Y SE LLEGA A:

$$s^3x-s^2+s+2-6\left(s^2x-s+1\right)+12(sx-1)-8x=\mathcal{L}\left\{t^3e^{2t}\right\}=\frac{6}{(s-2)^4}$$

DE DONDE $\left(s^3-6s^2+12s-8\right)x-s^2+7s-16=\dfrac{6}{(s-2)^4}$

PERO $s^3-6s^2+12s-8=(s-2)^3$

PORLOQUE $x=\left(s^2-7s+16\right)(s-2)^{-3}+6(s-2)^{-7}$

COMO $s^2-7s+16=s^2-4s+4-3s+12=(s-2)^2-3(s-4)=(s-2)^2-3(s-2)+6$

LUEGO $x=(s-2)^{-1}-3(s-2)^{-2}+6(s-2)^{-3}+6(s-2)^{-7}$

SI SE APLICA AHORA LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{n!}{(s-2)^{n+1}}\right\}=t^ne^{2t}\ ;\ n\geq 0$, SE LLEGA FINALMENTE A LA INVERSA QUE RESUELVE EL PROBLEMA ENTONCES

$$X=\mathcal{L}^{-1}\{x\}=e^{2t}\left(1-3t+3t^2+\frac{t^6}{120}\right)$$

CÁLCULO III

EVALUAR LA INTEGRAL $\int_C xy\,dx-2x^2\,dy$ DONDE " C " ES EL TRIÁNGULO CON VÉRTICES $(-2,0),\ (2,0)\ y\ (0,3)$

SOLUCIÓN. EL TEOREMA DE GREEN RELACIONA A LA INTEGRAL DE LÍNEA CON LA INTEGRAL DOBLE, MEDIANTE LA EXPRESIÓN:

$$\int_C M(x,y)dx+N(x,y)dy=\iint_R\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

DEL INTEGRANDO DE LA INTEGRAL DEL PROBLEMA SE TIENE QUE: $M(x, y) = xy$ y $N(x, y) = -2x^2$. LUEGO, A TRAVÉS DE LAS DERIVADAS PARCIALES, SE LLEGA A:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = -4x - x = -5x$$

Y, DE ACUERDO CON ESTE TEOREMA

$$\oint_C xy\,dx - 2x^2\,dy = -5\iint_R x\,dA \quad ; \quad \text{PERO} \quad \iint_R x\,dA = \bar{x}\,A(R) \;;\; \text{LUEGO} \quad \oint_C xy\,dx - 2x^2\,dy = -5\bar{x}\,A(R)$$

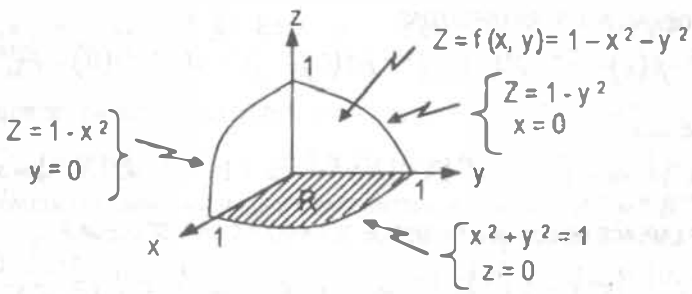
DONDE " $\bar{x}$ " ES LA ABSCISA DEL CENTROIDE DE LA REGIÓN " R ". PERO, POR SIMETRÍA DE LA REGIÓN, $\bar{x} = 0$. POR LO QUE, FINALMENTE

$$\oint_C xy\,dx - 2x^2\,dy = 0$$

CÁLCULO III

CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE LA PARTE DEL PARABOLOIDE $z = f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ QUE SE ENCUENTRA SOBRE EL PLANO " xy "

SOLUCIÓN: LA GRÁFICA DE LA PARTE DEL PARABOLOIDE QUE ESTÁ SOBRE EL PLANO " xy ", EN EL PRIMER OCTANTE SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



LAS DERIVADAS PARCIALES DE LA FUNCIÓN QUE DEFINE AL PARABOLOIDE, CON RESPECTO A " x " y " y " ESTÁN DADAS POR:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y$$

Y SI SE APLICA LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE, SE TIENE QUE:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\; dA = \iint_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2}\; dA = \iint_R \sqrt{4\left(x^2 + y^2\right) + 1}\; dx\,dy$$

AL PLANTEAR LA DOBLE INTEGRAL EN TÉRMINOS DE COORDENADAS CARTESIANAS SE LLEGARÍA A UNA EXPRESIÓN COMO:

$$S = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4\,(x^2 + y^2) + 1}\;\, dy\;dx$$

COMO SE PUEDE APRECIAR, EL PROCESO DE INTEGRACIÓN ES COMPLICADO, POR LO QUE, SI SE UTILIZAN COORDENADAS POLARES, LA INTEGRAL DOBLE SE PLANTEA COMO SIGUE:

$$S = \iint_R \sqrt{4r^2 + 1}\;\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1}\;\, r\,dr\,d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}\left(4r^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right)\int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$S = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 5.33$$

CALCULO I

UNA LÁMPARA ESTÁ COLGADA SOBRE EL CENTRO DE UNA MESA REDONDA DE RADIO IGUAL A 0.70 M. ¿A QUÉ ALTURA SE DEBERÁ COLOCAR PARA QUE LA ILUMINACIÓN DE UN OBJETO QUE SE ENCUENTRA EN EL BORDE SEA LA MÁXIMA POSIBLE? LA ILUMINACIÓN ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL COSENO DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA DE LOS RAYOS LUMINOSOS E INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA AL FOCO DE LUZ.

SOLUCIÓN: EN LA SIGUIENTE FIGURA SE PUEDE VER EL FOCO DE LUZ Y SUS DISTANCIAS AL CENTRO DE LA MESA Y AL BORDE DE LA MISMA. Y AL ÁNGULO QUE FORMAN ESTAS DOS REFERENCIAS, QUE ES EL ÁNGULO DE INCIDENCIA, SE LE DENOTA CON "θ".

EL MODELO MATEMÁTICO PRELIMINAR, QUE RELACIONA A LA ILUMINACIÓN CON EL COSENO DEL ÁNGULO DE INCIDENCIA Y CON EL CUADRADO DE LA DISTANCIA "z" AL FOCO DE LUZ, Y QUE CONSIDERA A UNA CONSTANTE "k" DE PROPORCIONALIDAD ES:

$$I = \frac{k \cos \theta}{z^2}$$

PERO DE LA FIGURA $z^2 = 0.7^2 + y^2 = 0.49 + y^2$ y $\cos \theta = \frac{y}{z} = \frac{y}{\sqrt{0.49 + y^2}}$, DE DONDE:

$$I = \frac{k \frac{y}{\sqrt{0.49+y^2}}}{0.49+y^2} \Rightarrow I = \frac{k\,y}{\left(0.49+y^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

QUE ES EL MODELO MATEMÁTICO A OPTIMIZAR; LUEGO SE TIENE QUE:

$$\frac{dI}{dy} = \frac{\left(0.49+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot k - k \cdot y \cdot \frac{3}{2}\left(0.49+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2y}{\left(0.49+y^2\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\left(0.49+y^2\right) \cdot k - k \cdot y \cdot \frac{3}{2} \cdot 2y}{\left(0.49+y^2\right)^2}$$

$$\frac{dI}{dy} = \frac{0.49\,k + k\,y^2 - 3ky^2}{\left(0.49 + y^2\right)^2} = \frac{0.49\,k - 2ky^2}{\left(0.49 + y^2\right)^2}$$

SE IGUALA A CERO LA DERIVADA, DE DONDE SALEN LOS PUNTOS CRÍTICOS Y, MEDIANTE EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA, SE OBTIENE EL MÁXIMO DE LA FUNCIÓN ILUMINACIÓN. ASÍ

$$\frac{0.49\,k - 2ky^2}{\left(0.49 + y^2\right)^2} = 0 \Rightarrow 0.49\,k - 2ky^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{0.49}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{0.7}{\sqrt{2}} = \pm 0.495$$

LÓGICAMENTE SE TOMA EL VALOR POSITIVO YA QUE NO SE CONCIBE UNA DISTANCIA NEGATIVA DE LA LÁMPARA A LA MESA ENTONCES:

$$y = 0.4 \Rightarrow \frac{dI}{dy} > 0$$

$$\therefore \quad I \quad \text{MÁXIMA}$$

$$y = 0.5 \Rightarrow \frac{dI}{dy} < 0$$

POR LO QUE PARA QUE LA ILUMINACIÓN SEA MÁXIMA EN EL BORDE, LA LÁMPARA DEBE ESTAR A $0.495\ m$ DE ALTURA SOBRE LA MESA

CÁLCULO II

SEAN LAS ECUACIONES: $u^2 - v^2 - x^3 + 3y = 0 \quad y \quad u + v - y^2 - 3x = 0$. CALCULAR EL VALOR DE LAS DERIVADAS PARCIALES:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

SOLUCIÓN.. SI SE DENOTA A LAS ECUACIONES CON LAS LETRAS " F " y " G " RESPECTIVAMENTE SE TIENE QUE ;

$$u^2 - v^2 - x^3 + 3y = 0 \qquad (F)$$

$$u + v - y^2 - 3x = 0 \qquad (G)$$

LUEGO, URILIZANDO "DETERMINANTES JACOBIANOS" SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{F,G}{x,v}\right)}{J\left(\frac{F,G}{u,v}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -3x^2 & -2v \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3x^2 + 6v}{2u + 2v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{F,G}{y,v}\right)}{J\left(\frac{F,G}{u,v}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2v \\ -2y & 1 \end{vmatrix}}{2u + 2v} = \frac{4vy - 3}{2u + 2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{J\left(\frac{F,G}{u,x}\right)}{J\left(\frac{F,G}{u,v}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & -3x^2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{2u + 2v} = \frac{6u - 3x^2}{2u + 2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{J\left(\frac{F,G}{u,y}\right)}{J\left(\frac{F,G}{u,v}\right)} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & 3 \\ 1 & -2y \end{vmatrix}}{2u + 2v} = \frac{4uy + 3}{2u + 2v}$$

TUTORÍA

ES HERMOSO EL CONSTATAR COMO POCO A POCO - COMO CUANDO SE VIVE LA TRANSFORMACIÓN DE SEMILLAS EN BELLOS ÁRBOLES QUE DAN FRUTO-, SE ACERCAN CADA VEZ MÁS PROFESORES A COPADI Y NOS HABLAN CON EMOCIÓN, ENTUSIASMO Y COMPROMISO, DE LA TUTORÍA, EXPRESAN QUE YA ENTRÓ EN SUS MENTES Y CORAZONES LO IMPORTANTE QUE ES ESCUCHAR, ACONSEJAR, CONVIVIR Y AYUDAR A UN SEMEJANTE -EN ESTE CASO UN ESTUDIANTE-. ES FASCINANTE VER CÓMO SE VA COSOLIDANDO ESTE SERVICIO QUE, A LA LARGA, VA A HUMANIZAR MÁS A LA FACULTAD Y LOGRARÁ UNA MAYOR INTEGRACIÓN DE SU COMUNIDAD. ¡FELICIDADES A LOS TUTORES QUE YA ESTÁN "METIDOS" EN LA TUTORÍA. AHÍ ENCONTRARÁN SABIDURÍA, BONDAD, CRECIMIENTO, FELICIDAD Y UNA SATISFACCIÓN MUY ÍNTIMA, MUY PERSONAL, QUE LOS ACOMPAÑARÁ SIEMPRE.

CULTURA

XAVIER VILLAURRUTIA NACIÓ AN LA CIUDAD DE MÉXICO EN 1903, MURIÓ EN 1950, Y DESDE 1955 LOS ESCRITORES DE MÉXICO INSITUYERON UN PREMIO NACIONAL, DE ESCRITORES PARA ESCRITORES, CON SU NOMBRE.

UN POCO DE SU POESIA:

AYER TE SOÑÉ. TEMBLANDO / LOS DOS EN EL GOCE IMPURO / Y ESTÉRIL DE UN SUEÑO OSCURO. / Y SOBRE TU CUERPO BLANDO / MIS LABIOS IBAN DEJANDO / HUELLAS, SEÑALES, HERIDAS... / Y TUS PALABRAS TRANSIDAS / Y LAS MÍAS DELIRANTES / DE AQUELLOS BREVES INSTANTES /PROLONGABAN NUESTRAS VIDAS.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 21 17 DE ABRIL DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

ÁLGEBRA

SEA LA FUNCIÓN $f:\Re\to\Re$ TAL QUE $f(a)=-a$ PARA TODA $a\in\Re$ ESTA FUNCIÓN ES UN ISOMORFISMO ENTRE LOS GRUPOS $(\Re,\#)$ y $(\Re;\nabla)$ LA OPERACIÓN ∇ ESTÁ DEFINIDA POR $a\ \nabla\ b=a+b+2$; $a,b\in\Re$ DETERMINAR LA REGLA DE DEFINICIÓN DE LA OPERACIÓN $\#$

SOLUCIÓN. COMO f ES UN ISOMORFISMO, ENTRE LOS GRUPOS, SE TIENE QUE:

$$f(x\ \#\ y)=f(x)\ \nabla\ f(y)=f(x)+f(y)+2\quad\cdots\quad(1)$$

POR OTRA PARTE, SI SE APLICA LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE LA FUNCIÓN, SE LLEGA A:

$$f(x\#\ y)=-(x\#\ y)\quad\cdots\quad(2)$$

SE IGUALAN (1) y (2) Y:

$$-(x\#\ y)=f(x)+f(y)+2$$
$$(x\#\ y)=-f(x)-f(y)-2$$

PERO

$$f(x)=-x\quad y\quad f(y)=-y$$

Y, FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$x\ \#\ y=x+y-2$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

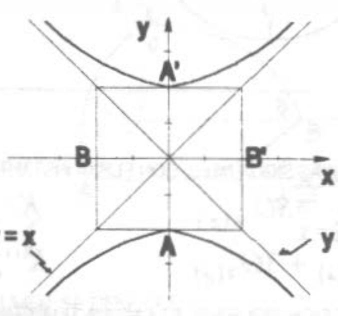
OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE QUE SE GENERA AL GIRAR LA HIPÉRBOLA DE ECUACIONES

$$\begin{cases} z=0\\ y^2-x^2=4\end{cases}$$

ALREDEDOR DE:
i) SU EJE TRANSVERSO
ii) SU EJE CONJUGADO

IDENTIFICAR LA SUPERFICIE GENERADA PARA CADA UNO DE LOS INCISOS ANTERIORES.

SOLUCIÓN. LA FIGURA DE LA HIPÉRBOLA ES LA SIGUIENTE, DONDE AA' y BB' SON, RESPECTIVAMENTE, LOS EJES TRANSVERSO Y CONJUGADO



i) COMO SE TRATA DE UNA SUPERCICIE DE REVOLUCIÓN, SE TOMA COMO GENERATRIZ A LA CIRCUNFERENCIA " G " DE ECUACIONES

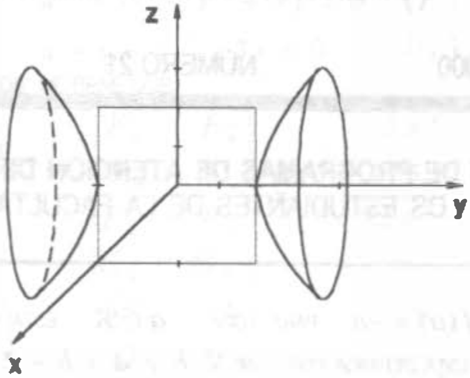
$$G:\begin{cases} x^2+z^2=\alpha^2 & \cdots\quad(a)\\ y=\beta & \cdots\quad(b)\end{cases}$$

Y COMO DIRECTRIZ A LA HIPÉRBOLA DE ECUACIONES $D:\begin{cases} y^2-x^2=4 & \cdots\quad(c)\\ z=0 & \cdots\quad(d)\end{cases}$

PARA OBTENER LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, SE REALIZAN LAS SIGUIENTES SUSTITUCIONES:

$$(b) \quad en \quad (c) \quad \Rightarrow \quad \beta^2 - x^2 = 4 \quad ; \quad (d) \quad en \quad (a) \quad \Rightarrow \quad x^2 = \alpha^2$$

DE DONDE, LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN ES: $\beta^2 - \alpha^2 = 4$. FINALMENTE SE SUSTITUYEN (a) y (b) EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN Y SE OBTIENE LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE: $y^2 - x^2 - z^2 = 4$, QUE ES LA ECUACIÓN DE UN HIPERBOLOIDE CIRCULAR DE DOS MANTOS, CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS $C(0,0,0)$ Y EJE COINCIDENTE CON EL EJE "y".



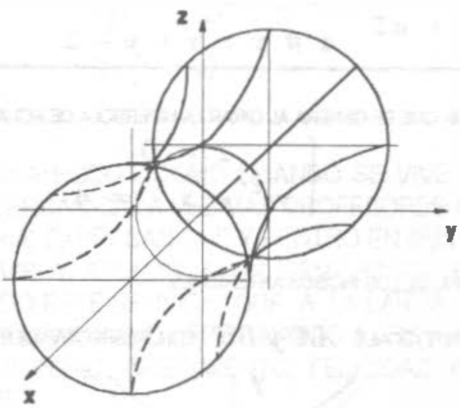
ii) COMO AHORA LA HIPÉRBOLA GIRA ALREDEDOR DEL EJE CONJUGADO Y ÉSTE ESTÁ CONTENIDO EN EL EJE "x", LA GENERATRIZ ES LA CIRCUNFERENCIA G ' DE ECUACIONES:

$$G : \begin{cases} y^2 + z^2 = \alpha^2 \quad \cdots \quad (A) \\ x = \beta \quad \cdots \quad (B) \end{cases}$$ Y LA DIRECTRIZ ES LA HIPÉRBOLA DE ECUACIONES $$D : \begin{cases} y^2 - x^2 = 4 \quad \cdots \quad (C) \\ z = 0 \quad \cdots \quad (D) \end{cases}$$

PARA OBTENER LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, SE REALIZAN LAS SIGUIENTES SUSTITUCIONES:

$$(B) \quad en \quad (C) \quad \Rightarrow \quad y^2 - \beta^2 = 4 \quad ; \quad (D) \quad en \quad (A) \quad \Rightarrow \quad y^2 = \alpha^2$$

DE DONDE, LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN ES: $\alpha^2 - \beta^2 = 4$ FINALMENTE SE SUSTITUYEN (A) y (B) EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN Y SE OBTIENE LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE: $y^2 + z^2 - x^2 = 4$, QUE ES LA ECUACIÓN DE UN HIPERBOLOIDE CIRCULAR DE UN MANTO, CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS $C(0,0,0)$ Y EJE COINCIDENTE CON EL EJE "x".



QUÍMICA

EQUILIBRIOS MÚLTIPLES

A DETERMINADA TEMPERATURA, SE TIENEN LAS REACCIONES QUÍMICAS SIGUIENTES, CON SUS CONSTANTES:

$$S_{(s)} + O_{2(g)} \leftrightarrow SO_{2(g)} \qquad K'_c = 4.2 \times 10^{52}$$

$$2SO_{3(g)} \leftrightarrow 2S_{(s)} + 3O_{2(g)} \qquad K''_c = 10.2 \times 10^{-130}$$

CALCULAR LA CONSTANTE DE EQUILIBRIO "K_c" PARA LA REACCIÓN SIGUIENTE A LA MISMA TEMPERATURA:

$$2SO_{2(g)} + O_{2(g)} \leftrightarrow 2SO_{3(g)}$$

RESOLUCIÓN. AL TRATARSE DE EQUILIBRIOS MÚLTIPLES, HAY QUE ANALIZAR LA UBICACIÓN DE LAS ESPECIES QUÍMICAS EN LA REACCIÓN QUE SE SOLICITA:

$$2SO_{2(g)} + O_{2(g)} \leftrightarrow 2SO_{3(g)}$$

EN PRIMER LUGAR SE OBSERVA QUE APARECEN DOS MOLES DE $SO_{2(g)}$ COMO REACTIVO; LUEGO HAY QUE INVERTIR LA PRIMERA REACCIÓN CUYO $K'_c = 4.2\times10^{52}$, Y MULTIPLICARLA POR 2. ESTO IMPLICA QUE LA CONSTANTE DE EQUILIBRIO DE LA REACCIÓN RESULTANTE DEBERÁ SER $\left(\frac{1}{K'_c}\right)^2$

SE OBSERVA TAMBIÉN QUE APARECEN DOS MOLES DE $SO_{3(g)}$ COMO PRODUCTO, POR LO TANTO, HAY QUE INVERTIR LA SEGUNDA REACCIÓN CUYO $K''_c = 10.2\times10^{-130}$, MISMO QUE MATEMÁTICAMENTE DEBERÁ SER $\left(\frac{1}{K''_c}\right)$

LO QUE SE HA EXPLICADO SE REPRESENTA DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\begin{array}{lcl} 2SO_{2(g)} & \leftrightarrow & 2S_{(s)} + 2O_{2(g)} \\ + \quad 2S_{(s)} + 3O_{2(g)} & \leftrightarrow & 2SO_{3(g)} \\ \hline 2SO_{2(g)} + O_{2(g)} & \leftrightarrow & 2SO_{3(g)} \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{K'_c}\right)^2 = 5.6689\times10^{-106}$$

$$\left(\frac{1}{K''_c}\right) = 9.8039\times10^{128}$$

$$\left(\frac{1}{K'_c}\right)^2\left(\frac{1}{K''_c}\right) = K_c = 55.5773\times10^{22}$$

OBSÉRVESE QUE AL SUMAR LAS DOS REACCIONES, DEBERÁN MULTIPLICARSE LAS CONSTANTES DE EQUILIBRIO, DE TAL FORMA QUE A DETERMINADA TEMPERATURA $K_c = 55.5773\times10^{22}$ PARA EL PROCESO

$$2SO_{2(g)} + O_{2(g)} \leftrightarrow 2SO_{3(g)}$$

ES IMPORTANTE MENCIONAR QUE ES POSIBLE QUE LAS CALCULADORAS MARQUEN "ERROR" AL INTENTAR REALIZAR LAS OPERACIONES INDICADAS Y, SI SUCEDE ESTO, EL ESTUDIANTE TENDRÁ QUE USAR LAS LEYES DE LOS EXPONENTES PARA OBTENER EL RESULTADO SOLICITADO.

CÁLCULO III

USAR EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA PARA CALCULAR EL VOLUMEN DEL ELIPSOIDE DE ECUACIÓN

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

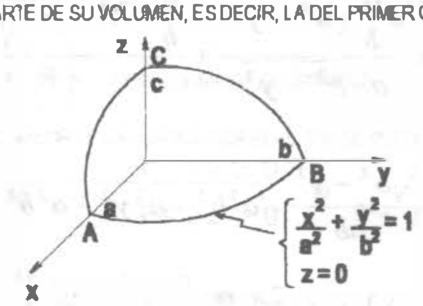
SOLUCIÓN. EL TEOREMA DE LA DIVERGENCIA EXPRESA LO SIGUIENTE:

$$\iiint_R \left(\overline{\nabla}\cdot\overline{F}\right)dV = \oiint_S \left(\overline{F}\cdot\overline{N}\right)dS \qquad \text{COMO} \quad \overline{N} = \cos\alpha\,\hat{i} + \cos\beta\,\hat{j} + \cos\gamma\,\hat{k}$$

SI SE HACE $\overline{F} = x\,\hat{i} \Rightarrow \overline{\nabla}\cdot\overline{F} = 1$, POR LO QUE $\iiint_R \left(\overline{\nabla}\cdot\overline{F}\right)dV = \iiint_R dV = V$ POR LO TANTO, SE TIENE QUE:

$V = \oiint_S x\cos\alpha\, dS$ Y, DE MANERA SEMEJANTE: $V = \oiint_S y\cos\beta\, dS$ Y $V = \oiint_S z\cos\gamma\, dS$

PARA EL ELIPSOIDE EN CUESTIÓN, SE TOMARÁ LA OCTAVA PARTE DE SU VOLUMEN, ES DECIR, LA DEL PRIMER OCTANTE, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA:



SI SE UTILIZA LA TERCERA EXPRESIÓN DEFINIDA PARA EL VOLUMEN, SE TIENE QUE:

$$V = \oiint_S z\cos\gamma\, dS = \left[\iint_{AOC} z\cos\gamma\, dS + \iint_{AOB} z\cos\gamma\, dS + \iint_{BOC} z\cos\gamma\, dS + \iint_{elipsoide} z\cos\gamma\, dS\right]$$

PARA LAS CARAS AOB y BOC SE TIENE QUE $\cos\gamma = 0$ Y PARA LA CARA AOC; $\cos\gamma = -1$, PERO $z = 0$; POR LO TANTO:

$$V=\iint_{elipsoide} z\cos\gamma\, dS=\iint_{elipsoide} z\,dx\,dy$$

YA QUE $dS\cos\gamma=dx\,dy$. LUEGO, SE EFECTÚA LA INTEGRAL DOBLE Y SE LLEGA AL VOLUMEN DEL ELIPSOIDE. ASÍ,

$$V=8\int_0^b\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} z\,dx\,dy=8\int_0^b\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy$$

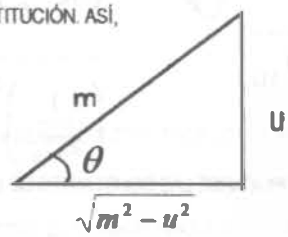
SE RESUELVE PRIMERO LA INTEGRAL INDEFINIDA CON RESPECTO A " x " Y SE TIENE QUE:

$$\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx=\int\sqrt{\frac{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}{a^2b^2}}\,dx=\frac{1}{ab}\int\sqrt{a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2}\,dx$$

PARA FACILITAR LA RESOLUCIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA, SE UTILIZA EL CAMBIO DE VARIABLE SIGUIENTE:

$$u^2=b^2x^2\quad\Rightarrow\quad u=bx\quad\Rightarrow\quad du=b\,dx\qquad;\qquad m^2=a^2b^2-a^2y^2\quad\Rightarrow\quad m=\sqrt{a^2b^2-a^2y^2}=a\sqrt{b^2-y^2}$$

DE DONDE, LA INTEGRAL DEFINIDA QUEDA, EN TÉRMINOS DE " u " y " m ", COMO: $\frac{1}{ab^2}\int\sqrt{m^2-u^2}\,du$ SE CONSTRUYE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO COMO EL DE LA FIGURA, QUE SERVIRÁ PARA LA SUSTITUCIÓN. ASÍ,



DEL TRIÁNGULO SE OBTIENEN QUE: $u=m\,\text{sen}\,\theta\ \Rightarrow\ du=m\cos\theta\,d\theta\quad;\quad\sqrt{m^2-u^2}=m\cos\theta$

DE DONDE, LA INTEGRAL SE TRANSFROMA EN:

$$\frac{1}{ab^2}\int m^2\cos^2\theta\,d\theta=\frac{m^2}{ab^2}\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=\frac{m^2}{2ab^2}\theta+\frac{m^2}{4ab^2}\,\text{sen}\,2\theta+C=\frac{m^2}{2ab^2}\theta+\frac{m^2}{2ab^2}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta+C$$

AHORA SE SUSTITUYEN, PRIMERO, EL ÁNGULO Y LAS FUCNIONES SENO Y COSENO, DE ACUERDO CON EL TRIÁNGULO DE LA FIGURA Y, DESPUÉS, LOS VALORES DE " u " y " m ". ENTONCES:

$$\frac{m^2}{2ab^2}\,ang\,\text{sen}\,\frac{u}{m}+\frac{m^2}{2ab^2}\frac{u}{m}\frac{\sqrt{m^2-u^2}}{m}+C=\frac{a^2b^2-a^2y^2}{2ab^2}\,ang\,\text{sen}\,\frac{bx}{a\sqrt{b^2-y^2}}+\frac{bx\sqrt{a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2}}{2ab^2}+C$$

POR LO QUE, REGRESANDO A LA INTEGRAL DOBLE SE TIENE QUE:

$$V=8\int_0^b\int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} z\,dx\,dy=\frac{8ac}{2b}\int_0^b\left[\frac{b^2-y^2}{b}\,ang\,\text{sen}\,\frac{bx}{a\sqrt{b^2-y^2}}+\frac{x\sqrt{a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2}}{a^2}\right]_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dy$$

$$V=\frac{4ac}{b}\int_0^b\left(\frac{b^2-y^2}{b}\,ang\,\text{sen}\,\frac{b\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}{a\sqrt{b^2-y^2}}+\frac{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\sqrt{a^2b^2-a^2y^2-b^2\frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)}}{a^2}\right)$$

$$V=\frac{4ac}{b}\int_0^b\left(\frac{b^2-y^2}{b}\,ang\,\text{sen}(1)+\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{ab}\sqrt{a^2b^2-a^2y^2-a^2b^2+a^2y^2}\right)dy=\frac{4ac}{b}\int_0^b\frac{b^2-y^2}{b}\left(\frac{\pi}{2}\right)dy$$

$$V=\frac{2\pi\,ac}{b^2}\int_0^b\left(b^2-y^2\right)dy=\frac{2\pi\,ac}{b^2}\left[b^2y-\frac{y^3}{3}\right]_0^b=\frac{2\pi\,ac}{b^2}\frac{2b^3}{3}=\frac{4}{3}\pi\,abc$$

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 22 2 DE MAYO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. EL PASADO 2 DE MAYO EL BOLETÍN CUMPLIÓ SU PRIMER AÑO DE SERVIR A LOS ESTUDIANTES. **¡FELIZ CUMPLEAÑOS BOLETÍN COPADI! Y ¡LARGA VIDA!**

CÁLCULO I

DETERMINAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

$i)\ f(x)=2x^2-5x+6 \quad ii)\ y=\dfrac{3-x}{2+x} \quad iii)\ f(x)=\sqrt{8-x} \quad iv)\ y=\sqrt{9-4x^2} \quad v)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{7-x}}{x+1} \quad vi)\ y=\dfrac{x-4}{x^2-x-20}$

SOLUCIÓN

$i)\ f(x)=2x^2-5x+6$ SE TRATA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL EN LA CUAL PARA CUALQUIER VALOR DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x", LA FUNCIÓN "f" TIENE UN VALOR REAL. LUEGO SU DOMINIO ES EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES, ES DECIR $D_f=\Re=(-\infty,+\infty)=\{x|x\in\Re\}$

$ii)\ y=\dfrac{3-x}{2+x}$ ESTA ES UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA Y COMO SE TRATA DE UN COCIENTE CUYO DENOMINADOR ES UNA FUNCIÓN DE "x", ESTA VARIABLE NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE "-2" PUES SE TENDRÍA UNA DIVISIÓN ENTRE CERO LO QUE NO DETERMINA UN VALOR REAL. LUEGO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ESTÁ DADO POR $D_f=\Re-\{-2\}=(-\infty,+\infty)-\{-2\}=\{x|-\infty<x<+\infty;\ x\neq-2;\ x\in\Re\}$

$iii)\ f(x)=\sqrt{8-x}$ AQUÍ SE PRESENTA UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA Y COMO SE SABE, EL RADICANDO NO PUEDE SER NEGATIVO, LUEGO PARA DETERMINAR PARA QUÉ VALORES ES POSITIVO, LO QUE DEFINE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$8-x\geq0 \quad\Rightarrow\quad -x\geq-8 \quad\Rightarrow\quad x\leq8 \quad\Rightarrow\quad D_f=(-\infty,8]=\{x|-\infty<x\leq8;\ x\in\Re\}$$

$iv)\ y=\sqrt{9-4x^2}$. EN ESTA FUNCIÓN ALGEBRÁICA, SI SE ACUDE A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, SE PUDE OBTENER LO SIGUIENTE:

$$y=\sqrt{9-4x^2} \quad\Rightarrow\quad y^2=9-4x^2 \quad 4x^2+y^2=9 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{9}=1$$

QUE ES LA ECUACIÓN DE UNA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y SEMIEJES $a=\dfrac{3}{2}$ y $b=3$ DE DONDE SE CONCLUYE QUE EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f=\left[-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right]=\left\{x\middle|-\dfrac{3}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2};\ x\in\Re\right\}$ OTRA FORMA DE DETERMINAR EL DOMINIO ES MEDIANTE UNA DESIGUALDAD, TOMANDO EN CUENTA QUE EL RADICANDO DEBE SER POSITIVO PARA QUE EL VALOR DE LA FUNCIÓN SEA REAL. ASÍ, SE PUEDE HACER LO SIGUIENTE:

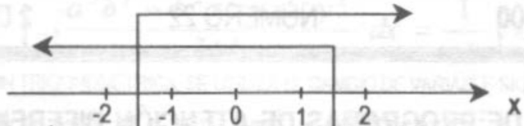
$$9-4x^2\geq0 \quad\Rightarrow\quad (3-2x)(3+2x)\geq0 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}3-2x\geq0\\3+2x\geq0\end{matrix} \quad ó \quad \begin{matrix}3-2x\leq0\\3+2x\leq0\end{matrix}$$

SI SE ANALIZAN LAS DOS POSIBILIDADES, SE TIENE QUE:

$$1^a:\quad \begin{matrix}3-2x\geq0\\3+2x\geq0\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}-2x\geq-3\\2x\geq-3\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}x\leq\frac{3}{2}\\x\geq-\frac{3}{2}\end{matrix}$$

$2^A: \quad \begin{matrix} 3-2x \le 0 \\ 3+2x \le 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} -2x \le -3 \\ 2x \le -3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x \ge \frac{3}{2} \\ x \le -\frac{3}{2} \end{matrix}$

SI SE UBICAN LOS RESULTADOS DE LAS DOS POSIBILIDADES EN EL EJE DE LAS " x ", SE OBSERVA QUE EN LA PREIMERA EXISTE UNA INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS Y PARA LA SEGUNDA LA INTERSECCIÓN ES EL VACÍO, LUEGO LA DESIGUALDAD ORIGINAL ES VÁLIDA PARA LOS VALORES COMPRENDIDOS ENTRE $-\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$, QUE ES EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.



$v)\ f(x) = \frac{\sqrt{7-x}}{x+1}$ PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRÁICA, SE OBSERVA QUE LA VARIABLE INDEPENDIENTE " x " NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE " -1 ", LO QUE CONDICIRÍA A UNA DIVISIÓN ENTRE CERO. TAMBIÉN HAY QUE TOMAR EN CUENTA QUE EL RADICANDO DEL NUMERADOR NO PUEDE SER NEGATIVO. ASÍ, PARA EL NUMERADOR SE TIENE QUE $7-x \ge 0 \quad \Rightarrow \quad -x \ge -7 \quad \Rightarrow \quad x \le 7$ Y $x+1 \ne 0 \quad \Rightarrow \quad x \ne -1$ LUEGO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES

$$D_f = (-\infty, 7] - \{-1\} = \{x \mid -\infty < x \le 7;\ x \ne -1;\ x \in \Re\}$$

$vi)\ y = \frac{x-4}{x^2-x-20}$ EN ESTA FUNCIÓN ALGEBRÁICA, LA VARIABLE INDEPENDIENTE NO PUEDE TOMAR LOS VALORES DE LAS RAÍCES DEL POLINOMIO DEL DENOMINADOR SI ÉSTAS SON REALES, LO QUE SE PUDE INVESTIGAR MEDIANTE UNA FACTORIZACIÓN O CON LA FÓRMULA GENERAL DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. ASÍ, SE TIENE QUE

$x^2 - x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+4)(x-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4 \quad y \quad x = 5$ POR LO EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES

$$D_f = \Re - \{-4, 5\} = \{x \mid -\infty \le x \le \infty;\ x \ne -4;\ x \ne 5;\ x \in \Re\}$$

ÁLGEBRA

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

1. MOSTRAR QUE 3 ES UN FACTOR DE $n^3 - n + 3 \quad \forall\, n \in Z$

DEMOSTRACIÓN

PARA $n = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1-1+3}{3} = \frac{3}{3} = 1$ CUMPLE

PARA $n = k \quad \Rightarrow \quad \frac{k^3 - k + 3}{3} = p \in Z$ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA

$$n = k + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(k+1)^3 - (k+1) + 3}{3} = q \in Z$$

$$\frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 3}{3}$$

$$\frac{k^3 - k + 3 + 3k^2 + 3k}{3}$$

$$\frac{k^3 - k + 3}{3} + \frac{3(k^2 + k)}{3}$$

EL PRIMER SUMANDO ES DIVISIBLE ENTRE 3 POR LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y EL SEGUNDO SUMANDO LO ES TAMBIÉN POR RAZONES EVIDENTES, POR LO QUE 3 ES UN FACTOR PARA $n = k + 1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

2. DEMOSTRAR QUE $\left(\frac{3}{4}\right)^n < \frac{3}{4} \quad \forall\ n \in Z\ ;\ n \ge 2$

DEMOSTRACIÓN.

PARA $n = 2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 < \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{16} < \frac{3}{4}$ CUMPLE

PARA $n = k \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k} < \frac{3}{4}$ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA $n = k + 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} < \frac{3}{4}$

SE MULTIPLICAN AMBOS MIEMBROS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN POR $\frac{3}{4}$ Y SE TIENEN QUE:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{K} \cdot \frac{3}{4} < \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{K+1} < \frac{9}{16}$$

COMO $\frac{9}{16} < \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{K+1} < \frac{3}{4}$ POR LO QUE ES VERDADERA PARA $n = k + 1$ Y TERMINA LA DEMOSTRACIÓN.

3 DEMOSTRAR QUE $\operatorname{sen} \theta + \cdots + \operatorname{sen} (2n - 1)\theta = \frac{\operatorname{sen}^2 n\theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad \forall\ \theta \in \Re$

PARA $n = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$ CUMPLE

PARA $n = k \Rightarrow \operatorname{sen} \theta + \cdots + \operatorname{sen} (2k - 1)\theta = \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta}{\operatorname{sen} \theta}$ HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

PARA $n = k+1 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta + \cdots + \operatorname{sen}[2(k+1)-1]\theta = \frac{\operatorname{sen}^2(k+1)\theta}{\operatorname{sen} \theta} = \operatorname{sen} \theta + \cdots + \operatorname{sen}(2k+1)\theta = \frac{\operatorname{sen}^2(k\theta+\theta)}{\operatorname{sen} \theta}$

SE SUMA $\operatorname{sen}(2k\theta+\theta)$ EN AMBOS MIEMBROS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y SE LLEGA A:

$$\operatorname{sen}\theta + \cdots + \operatorname{sen}(2k\theta+\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta + \operatorname{sen}(2k\theta+\theta)\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta + \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen} 2k\theta \cos\theta + \cos 2k\theta \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta + \operatorname{sen}\theta(2\operatorname{sen}k\theta\cos k\theta\cos\theta + \cos^2 k\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^2 k\theta\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta + 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}k\theta\cos k\theta\cos\theta + \cos^2 k\theta\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^2 k\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + 2\operatorname{sen}k\theta\cos k\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2 k\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 k\theta\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}k\theta\cos k\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2 k\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen}k\theta\cos\theta + \cos k\theta\operatorname{sen}\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2(k\theta+\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$$

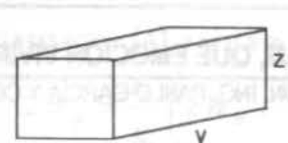
COMO SE OBSERVA, SE PARTIÓ DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN QUE ES VERDADERA Y SE LLEGÓ A LA EXPRESIÓN PARA $n = k+1$, LUEGO LA EXPRESIÓN DADA ES VERDADERA PARA ESTE VALOR Y SE CONCLUYE LA DEMOSTRACIÓN.

CÁLCULO III

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

DEMOSTRAR QUE ENTRE TODOS LOS PARALELEPÍPEDOS RECTANGULARES CON UNA SUPERFICIE LATERAL DE $600\,m^2$, EL CUBO DE $10\,m$ DE LADO ES EL QUE TIENE VOLUMEN MÁXIMO Y DETERMINAR ESTE VOLUMEN

SOLUCIÓN. LA FIGURA DE UN PARALELEPÍPEDO CUALQUIERA SERÍA LA SIGUIENTE CON SUS DIMENSIONES VARIABLES



ESTE PROBLEMA SE RESOLVERÁ UTILIZANDO EL MÉTODO CONOCIDO COMO "MULTIPLICADORES DE LAGRANGE". LA EXPRESIÓN QUE DEFINE EL VOLUMEN DE ESTE PARALELEPÍPEDO ES: $V = x\,y\,z$ QUE ES LA FUNCIÓN OBJETIVO. LA RESTRICCIÓN ES EL ÁREA DE LA SUPERFICIE, ESTO ES, $2xy + 2xz + 2yz = 600$

LUEGO, SI SE APLICA EL MÉTODO SELECCIONADO, LA FUNCIÓN DE LAGRANGE ESTÁ DADA POR:

$$L = xyz + \lambda\left(2xy + 2xz + 2yz - 600\right)$$

AHORA SE CALCULAN SUS DERIVADAS PARCIALES, SE IGUALAN A CERO, SE OBTIENEN LO PUNTOS CRÍTICOS Y SE RESUELVE EL PROBLEMA ASÍ:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = yz + (2y + 2z)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{yz}{2y + 2z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xz + (2x + 2z)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xz}{2x + 2z}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = xy + (2x + 2y)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{xy}{2x + 2y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2xy + 2xz + 2yz - 600 = 0$$

AL IGUALAR LAS PRIMERAS TRES EXPRESIONES QUE DEFINEN A λ, SE TIENE QUE:

$$-\frac{yz}{2y + 2z} = -\frac{xz}{2x + 2z} \quad \Rightarrow \quad 2xy + 2yz = 2xy + 2xz \quad \Rightarrow \quad y = x$$

POR LO TANTO $x = y = z$

$$-\frac{yz}{2y + 2z} = -\frac{xy}{2x + 2y} \quad \Rightarrow \quad 2xz + 2yz = 2xy + 2xz \quad \Rightarrow \quad z = x$$

NOTA: AL IGUALAR ESTAS EXPRESIONES, SE DEBIÓ CONSIDERAR, PARA EL PRIMER CASO, LA POSIBILIDAD DE " $z = 0$ " Y PARA EL SEGUNDO, QUE " $y = 0$ ", PERO SE OMITIERON YA QUE ES LÓGICO QUE AL ANULARSE CUALQUIERA DE LAS DOS, NO SE TIENE PARALELEPÍPEDO Y POR LO TANTO VOLUMEN.

SI SE UTILIZA EL RESULTADO AL QUE SE LLEGÓ EN LA CUARTA EXPRESIÓN SE TIENE QUE

$$2xy + 2xz + 2yz - 600 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 600 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = 600 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 10$$ (PUNTOS CRÍTICOS)

NO SE TOMA EN CUNTA EL VALOR NEGATIVO POR RAZONES OBVIAS, LUEGO $x = y = z = 10$ ENTONCES EL PARALELEPÍPEDO DE MÁXIMO VOLUMEN ES EL CUBO DE $10\,m$ DE LADO Y SU VOLUMEN ES DE $1000\,m^3$.

TUTORÍA

ESTÁN POR INICIAR LAS TUTORÍAS PARA LOS ESTUDIANTES QUE CURSAN EL PRIMER SEMESTRE CURRICULAR DE LA GENERACIÓN 2001, ES DECIR, PARA AQUÉLLOS QUE LLEVARON EL CURSO PROPEDÉUTICO. CABE EXPRESARLES QUE LA TUTORÍA ES UN SERVICIO ACADÉMICO QUE DEBEN LLEVAR Y APROVECHAR AL MÁXIMO. SE TRATA DE MANTENER, DURANTE UN SEMESTRE, UNA RELACIÓN CON UN PROFESOR DE CARRERA DE LA FACULTAD, DISPUESTO A AYUDAR Y ACONSEJAR EN CUESTIONES ACADÉMICAS Y TAMBIÉN EXISTENCIALES. UN TUTOR ES UN ALIADO EN EL QUE TE PUEDES APOYAR Y QUE TE PUEDE ORIENTAR EN TODO AQUELLO QUE REQUIERAS PARA INICIAR BIEN TUS ESTUDIOS DE LICENCIATURA EN INGENIERÍA. ASISTE CON ÉL, PLATÍCALE LO QUE QUIERAS Y VERÁS QUE ENCUENTRAS UN OÍDO ATENTO Y UNA PALABRA PRONTA. LA FACULTAD OFRECE ESTE TRASCENDENTAL SERVICIO ACADÉMICO Y DEBES APROVECHARLO.

SI YA TUVISTE TUTORÍA, RECUERDA QUE PUEDES MANTENER LA COMUNICACIÓN CON TU TUTOR DURANTE TODA LA CARRERA. SIEMPRE, DURANTE TU ESTANCIA EN LA FACULTAD, SERÁ ALGUIEN CON QUIEN PUEDAS HABLAR DE DIFERENTES TEMAS, INCLUYENDO TU FUTURO COMO PROFESIONAL DE LA INGENIERÍA, UNA BELLA CARRERA QUE VALE LA PENA ESTUDIAR Y EJERCER CON CALIDAD Y ÉTICA PROFESIONAL.

CULTURA

EN LA FANTÁSTICA NOVELA "NINGUNA ETERNIDAD COMO LA MÍA" DE LA ESCRITORA MEXICANA ÁNGELES MASTRETTA, LA PROTAGONISTA HACE UN JURAMENTO QUE BIEN VALDRÍA LA PENA RECORDAR Y EXTERNAR EN MUCHAS OCASIONES DE NUESTRAS VIDAS: "ME COMPROMETO A VIVIR CON INTENSIDAD Y REGOCIJO, A NO DEJARME VENCER POR LOS ABISMOS DEL AMOR, NI POR EL MIEDO QUE DE ÉSTE ME CAIGA ENCIMA, NI POR EL OLVIDO, NI SIQUIERA POR EL TORMENTO DE UNA PASIÓN CONTRARIADA. ME COMPROMETO A RECORDAR, A CONOCER MIS YERROS, A BENDECIR MIS ARREBATOS. ME COMPROMETO A PERDONAR LOS ABANDONOS, A NO DESDEÑAR NADA DE TODO LO QUE ME CONMUEVA, ME DESLUMBRE, ME QUEBRANTE, ME ALEGRE. LARGA VIDA PROMETO, LARGA PACIENCIA, HISTORIAS LARGAS. Y NADA ABREVIARÉ QUE DEBA SUCEDERME, NI LA PENA NI EL ÉXTASIS, PARA QUE CUANDO SEA VIEJA TENGA COMO DELEITE LA DETALLADA HISTORIA DE MIS DÍAS."

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 23 17 DE MAYO DE 2001

EDITORIAL

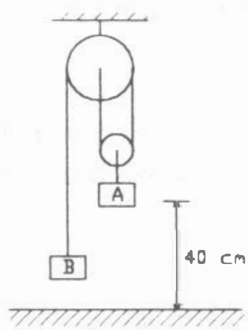
ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

DINÁMICA

CONSIDÉRESE QUE EL SISTEMA MECÁNICO MOSTRADO EN LA FIGURA PARTE DEL REPOSO. EL BLOQUE " A ", QUE PESA $30\,[N]$ Y, DESPUÉS DE TRANSCURRIR UN INTERVALO DE TIEMPO DE $0.8\,[s]$, TOCA EL PISO. DETERMINAR:

A) EL PESO DEL BLOQUE " B "

B) LA TENSIÓN EN EL CABLE INEXTENSIBLE Y DE PESO DESPRECIABLE QUE SOSTIENE AL BLOQUE " B "



SOLUCIÓN. SI SE ANALIZA EL BLOQUE " A " SE TIENE QUE.

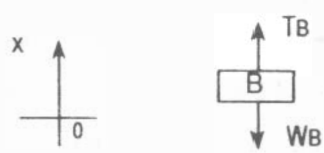
$$\sum F_x = m\,a_{A_x} \quad \Rightarrow \quad W_A - T_A = \frac{W_A}{g} a_A \quad \cdots \quad (1)$$

Y, DADO QUE $T_A = 2T_B \cdots (2)$ y $a_B = 2a_A \cdots (3)$.

SI SE SUSTITUYEN (2) y (3) EN (1) SE TIENE QUE

$$W_A - 2T_B = \frac{W_A}{g}\left(\frac{1}{2}a_B\right) \cdots (4)$$

SI SE ANALIZA AHORA EL BLOQUE " B " SE LLEGA A:



$$\sum F_x = m\,a_{B_x} \quad \Rightarrow \quad T_B - W_B = \frac{W_B}{g} a_B \cdots (5)$$

SE MULTIPLICA LA EXPRESIÓN (5) POR 2 Y SE SUMA CON LA ECUACIÓN (4) Y SE PUEDE ESCRIBIR ENTONCES QUE

$$W_A - 2W_B = \frac{a_B}{g}\left(2W_B + \frac{W_A}{2}\right) \cdots (6)$$

COMO $a_B = cte$; $v_B = a_B\, t$ Y ADEMÁS $x_B = \frac{1}{2} a_B\, t^2 \cdots (7)$ SE SUSTITUYEN VALORES EN ESTA ÚLTIMA ECUACIÓN Y

$$0.4 = \frac{1}{2} a_B\, (0.8)^2 \quad \Rightarrow \quad a_B = 1.25 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$; Y DE LA ECUACIÓN (3) $a_A = 0.625 \left[\frac{m}{s^2}\right]$

AHORA SE SUSTITUYEN VALORES EN (6) Y SE PUEDE ESCRIBIR $30 - 2W_B = \frac{1.25}{9.81}\left(2W_B + \frac{30}{2}\right)$, DE DONDE LA RESPUESTA AL INCISO A) ES

$W_B = 12.48\,[N]$ Y, AL SUSTITUIR VALORES EN (5) SE LLEGA A LA RESPUESTA DEL INCISO B) ASÍ,

$$T_B - 12.48 = \frac{12.48}{9.81}(1.25) \quad \Rightarrow \quad T_B = 12.48\left(1 + \frac{1.25}{9.81}\right) \quad \Rightarrow \quad T_B = 14.06\,[N]$$

QUÍMICA

MASA ATÓMICA PROMEDIO

LA MAYOR PARTE DE LOS ELEMENTOS ESTÁN PRESENTES EN LA NATURALEZA COMO MEZCLAS DE ISÓTOPOS. SE PUDE DETERMINAR LA MASA ATÓMICA PROMEDIO DE UN ELEMENTO A PARTIR DE LAS MASAS DE SUS DIVERSOS ISÓTOPOS Y DE SUS ABUNDANCIAS RELATIVAS. ASÍ POR EJEMPLO, ANALICE EL EJERCICIO SIGUIENTE:

EXISTEN TRES ISÓTOPOS DEL SILICIO EN LA NATURALEZA

$^{28}S_i$ $(92.21\,\%)$, QUE TIENE UNA MASA DE $27.97693\,[uma]$;

$^{29}S_i$ (4.70%), QUE TIENE UNA MASA DE $28.97659\,[uma]$ Y

$^{30}S_i$ $(3.09\,\%)$, QUE TIENE UNA MASA DE $29.97376\,[uma]$

CALCULE LA MASA ATÓMICA DEL SILICIO

RESOLUCIÓN. LA MASA ATÓMICA PROMEDIO SE OBTIENE AL MULTIPLICAR LA ABUNDANCIA DE CADA ISÓTOPO POR SU MASA ATÓMICA Y SUMANDO LOS PRODUCTOS OBTENIDOS. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\text{MASA ATÓMICA PROMEDIO} = [(0.9221)(27.97693\ uma) + (0.047)(28.97659\ uma) + (0.0309)(29.97376\ uma)]$$

$$\text{MASA ATÓMICA PROMEDIO} = 25.7975 uma + 1.3619 uma + 0.9262\ \ uma$$

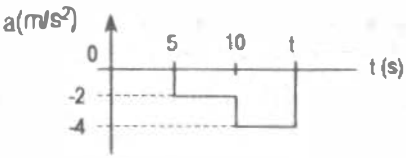
$$\text{MASA ATÓMICA PROMEDIO} = 28.0856\ uma$$

CINEMÁTICA

UN AUTOMÓVIL VIAJA POR UNA CARRETERA RECTA. SI AL INICIO DEL CONTEO DEL TIEMPO LLEVA UNA RAPIDEZ DE $60\,\frac{km}{h}$, Y EL COMPORTAMIENTO DE LA MAGNITUD DE SU ACELERACIÓN ES EL MOSTRADO EN LA GRÁFICA, DETERMINAR

A) EL TIEMPO QUE TARDA EN DETENERSE Y

B) LA DISTANCIA TOTAL QUE RECORRE DESDE $t = 0$ SEGUNDOS HASTA QUE SE DETIENE.



RESOLUCIÓN. LA RAPIDEZ DE $60\,\frac{km}{h}$ SE PUEDE EXPRESAR COMO $v = 16.66\,\frac{m}{s}$. DE LA INFORMACIÓN PROPORCIONADA SE DEDUCE QUE EL MOVIMIENTO DESCRITO POR EL AUTOMÓVIL ES RECTILÍNEO. PARA DETERMINAR EL TIEMPO QUE TARDA EN DETENERSE Y LA DISTANCIA RECORRIDA, SE ANALIZARÁ EL EJERCICIO PARA LOS DIFERENTES INTERVALOS DE TIEMPO MOSTRADOS EN LA GRÁFICA.

SI SE ANALIZA LA INFORMACIÓN DE LA GRÁFICA, DE 0 A 5 SEGUNDOS, SE TIENE UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME, YA QUE

$a = 0\,\frac{m}{s^2}$ Y $v = 16.66\,\frac{m}{s}$; COMO $v = \frac{dS}{dt}$ $\Rightarrow$ $S = 16.66t + C_1$ PARA $t = 0$, $S = 0$ $\Rightarrow$ $C_1 = 0$ Y POR LO TANTO

$$S = 16.66\,t \quad \cdots \quad (1)$$

SI SE ANALIZA AHORA EL INTERVALO DE 5 A 10 SEGUNDOS, SE TIENE UNA ACELERACIÓN DE MAGNITUD CONSTANTE E IGUAL A $-2\,\frac{m}{s^2}$, POR LO QUE EL AUTOMÓVIL EXPERIMENTA UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO.

DE $a = \frac{dv}{dt}$; $v = -2t + C_2$; PARA $t = 5\,s$; $v = 16.66\,\frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $C_2 = 26.66$ Y POR LO TANTO

$$v = -2t + 26.66 \quad \frac{m}{s} \quad \cdots \quad (2)$$

Y COMO $v = \dfrac{ds}{dt}$; $S = -t^2 + 26.66\,t + C_3$ PARA DETERMINAR EL VALOR DE C_3, SE SUSTITUYE EN LA EXPRESIÓN (1) $t = 5\,s$ Y SE LLEGA A QUE $S = 83.3\,m$, POR LO QUE $83.3 = -(5)^2 + 26.66(5) + C_3 \;\Rightarrow\; C_3 = -25$ Y POR LO TANTO

$$S = -t^2 + 26.66\,t - 25 \quad m \quad \cdots \quad (3)$$

AHORA SE ANALIZARÁ EL INTERVALO DE 10 A t SEGUNDOS. PARA ESTE CASO, LA ACELERACIÓN ES CONSTANTE E IGUAL A $-4\dfrac{m}{s^2}$ POR LO QUE EL MOVIMIENTO DEL AUTOMÓVIL ES RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO. COMO $a = \dfrac{dv}{dt}$; $v = -4t + C_4$. SE EVALÚA LA EXPRESIÓN (2) CON $t = 10\,s$ Y SE LLEGA A $v = 6.66\dfrac{m}{s}$, POR LO QUE $6.66 = -4(10) + C_4 \;\Rightarrow\; C_4 = 46.66$ Y, POR LO TANTO

$$v = -4t + 46.66 \quad \frac{m}{s} \quad \cdots \quad (4)$$

Y DE $v = \dfrac{ds}{dt}$; $S = -2t^2 + 46.66\,t + C_5$, SE SUSTITUYE $t = 10\,s$ EN LA ECUACIÓN (3), SE TIENE QUE $S = 141.6\,m$ POR LO QUE $141.6 = -2(10)^2 + 46.66(10) + C_5 \;\Rightarrow\; C_5 = -125$ Y, POR LO TANTO

$$S = -2t^2 + 46.66t - 125 \quad m \quad \cdots \quad (5)$$

CUANDO EL AUTOMÓVIL SE DETIENE, $v = 0\dfrac{m}{s}$, POR LO QUE DE LA ECUACIÓN (4) SE TIENE QUE $0 = -4t + 46.66$ POR LO QUE

A) $t = 11.66 \quad s$

Y SI SE EVALÚA (5) CON EL TIEMPO OBTENIDO SE TIENE QUE $S = -2(11.66)^2 + 46.66(11.66) - 125$, POR LO QUE

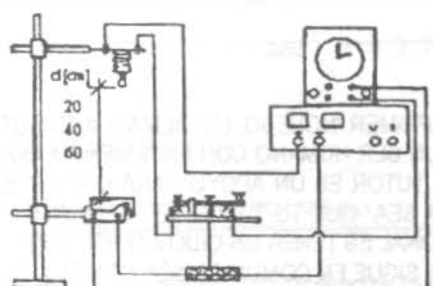
B) $S = 147.14 \quad m$

FÍSICA EXPERIMENTAL

UN ALUMNO DE LA ASIGNATURA FÍSICA EXPERIMENTAL REALIZÓ LA PRÁCTICA DE CAÍDA LIBRE CON EL EQUIPO QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA. CALCULÓ LOS TIEMPOS (t_p) QUE EL BALÍN EMPLEARÍA EN RECORRER CIERTAS DISTANCIAS (d) Y LUEGO LOS MIDIÓ CON UN CRONÓMETRO COMO EL DE LA FIGURA; PARTE DE LAS MEDICIONES SE MUESTRAN EN LA TABLA. CON BASE EN ELLO Y UTILIZANDO EL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS, DETERMINAR EN EL SI

A) LA SENSIBILIDAD DEL CRONÓMETRO.
B) EL MODELO MATEMÁTICO DE LA CURVA DE CALIBRACIÓN DEL MISMO INSTRUMENTO.
C) EL PORCENTAJE DE EXACTITUD PARA EL TIEMPO PATRÓN $t_p = 0.2022\,[s]$.
D) EL MODELO MATEMÁTICO LINEAL QUE RELACIONA A LA DISTANCIA (d) CON EL TIEMPO (t_L) SI LA VARIABLE INDEPENDIENTE FUE d.
E) LA RAPIDEZ EXPERIMENTAL DEL MÓVIL PARA EL INSTANTE EN QUE $t_p = 0.143\,[s]$
F) LA ACELERACIÓN EXPERIMENTAL DEL BALÍN PARA EL INSTANTE DEL INCISO ENTERIOR

d [dm]	$\bar{t}_L$ [cs]	t_P [s]
0	0	0
1	16	0.143
2	21	0.2022
3	25	0.2477



RESOLUCIÓN

A) $t_L = m\,t_P + b$; $m = S$; $m = \dfrac{\Delta t_L}{\Delta t_P}$; $m = \dfrac{[(25-16)+(21-0)]\left(10^{-2}\right)[s]}{[(0.2477-0.143)+(0.2022-0)][s]}$ $S =$ SENSIBILIDAD

$$m=\frac{0.3\,s}{0.3069\,s}=0.9775\left[\frac{s}{s}\right]\quad;\quad S=0.9775\left[\frac{s}{s}\right]$$

B) SE CALCULA EL CENTROIDE Y SE TIENE QUE:

$$\bar{t}_L=15.5\,[cs]=0.155\,[s]\quad;\quad \bar{t}_P=0.1482\,[s]$$

CON EL CENTROIDE SE CALCULA LA ORDENADA AL ORIGEN:

$$b=\bar{t}_L-m\,\bar{t}_P=(0.155\ s)-\left(0.9775\ \frac{s}{s}\right)(0.1482\ s)=0.0101\ s$$

Y ENTONCES EL MODELO MATEMÁTICO ES: $t_L\ [s]=0.9775\ \left[\frac{s}{s}\right]t_P\ [s]+0.0101\ [s]$

C) PARA CALCULAR EL PORCENTAJE DE XACTITUD SE NECESITA EL PORCENTAJE DE ERROR DE EXACTITUD. POR LO TANTO

$$\%EE=\left|\frac{t_P-t_L}{t_P}\right|\times 100=\left|\frac{(0.2022-0.21)\,s}{0.2022\ s}\right|\times 100=3.8576\ \%\quad;\quad \%E=100-\%EE=100-3.8576=96.1424\%$$

D) SE REALIZA EL CAMBIO DE VARIABLE $z=t_L^{\,2}\ [s^2]$

$d\ [dm]$	0	1	2	3
$z\ [s^2]$	0	0.0256	0.0441	0.0625

EL MODELO MATEMÁTICO QUEDARÍA COMO: $z=m\,d+b$ SE CALCULA LA PENDIENTE:

$$m=\frac{\Delta z}{\Delta d}=\frac{[(0.0625-0.0256)+(0.0441-0)]\,[s^2]}{[(3-1)+(2-0)](10^{-1})\,[m]}=\frac{0.081\ s^2}{0.4\ m}=0.2025\ \left[\frac{s^2}{m}\right]$$

EL CENTROIDE SERÍA: $\bar{d}=1.5\ dm=0.15\ m\ ;\ \ \bar{z}=0.03305\ s^2$ CON LO CUAL SE CALCULA LA ORDENADA AL ORIGEN:

$$b=\bar{z}-m\,\bar{d}=(0.03305\ s^2)-\left(0.2025\ \frac{s^2}{m}\right)(0.15\ m)=0.0027\ [s^2]$$

Y ENTONCES EL MODELO MATEMÁTICO SOLICITADO ES:

$$t_L^{\,2}\ [s^2]=0.2025\ \left[\frac{s^2}{m}\right]d\ [m]+0.0027\ [s^2]$$

E) $v(t)=\frac{d}{dt}[d]$; SE DESPEJA " d " DEL MODELO ANTERIOR Y SE TIENE: $d=\frac{t^2-0.0027}{0.2025}$; POR LO TANTO:

$$v(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{t^2-0.0027}{0.2025}\right]=\frac{1}{0.2025}\frac{d}{dt}\left[t^2-0.0027\right]\ \Rightarrow\ v(t)=\frac{1}{0.2025}[2t]=9.8765\,t$$

(EN EL $S.I.$) AHORA SE SUSTITUYE EN ESTA EXPRESIÓN EL VALOR $t=0.143\ s$ Y SE LLEGA A:

$$v(0.143\ s)=\left(9.8765\ \frac{m}{s^2}\right)(0.143\ s)=1.4123\left[\frac{m}{s}\right]$$

F) $$a(t)=\frac{d}{dt}[v(t)]\ \Rightarrow\ a(t)=\frac{d}{dt}[9.8765\,t]=9.8765\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

TUTORÍA

SI ERES ALUMNO DE PRIMER INGRESO, LOCALIZA A A TU TUTOR Y APROVECHA ESTA OPORTUNIDAD DE TENER UN ALIADO, UN AMIGO EN QUIEN CONFIAR, UN SER HUMANO CON EXPERIENCIA QUE TE PUEDE AYUDAR PARA QUE TU INICIO EN LA FACULTAD RESULTE UN ÉXITO ROTUNDO. UN TUTOR ES UN APOYO PARA QUE APRENDAS A APRENDER, PARA QUE APRENDAS A EMPRENDER Y PARA QUE APRENDAS A SER. YA SEA QUE TU TUTOR TE HABLE O TÚ LE HABLES PERO OJALÁ QUE SE DÉ LA COMUNICACIÓN MUY PRONTO Y VERÁS QUE SENSACIONAL ES TENER UN OÍDO ATENTO Y UNA MANO AMIGA.

SI YA TUVISTE TUTOR, SIGUE EN COMUNICACIÓN CON ÉL O ELLA Y SIEMPRE TE APOYARÁ.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, RIGEL GÁMEZ LEAL Y FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 24 2 DE JUNIO DE 2001

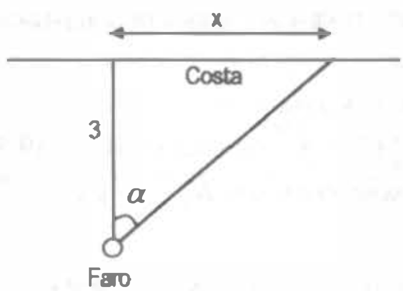
EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

CÁLCULO I

UN FARO FUE CONSTRUIDO EN UN ISLOTE SITUADO A $3\ km$ DE LA COSTA, LA QUE FRENTE AL FARO ES RECTA. EL HAZ LUMINOSO DEL FARO GIRA A UNA VELOCIDAD CONSTANTE DE 0.15^0 POR MINUTO. DETERMINAR LA VELOCIDAD CON LA QUE SE DESPLAZA LA LUZ A LO LARGO DE LA COSTA, EN UN PUNTO LOCALIZADO A $5\ km$ DEL PUNTO MÁS PRÓXIMO AL FARO.

SOLUCIÓN. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE PRESENTA UN MODELO GEOMÉTRICO CON LA COSTA, EL FARO, LA DISTANCIA A LA COSTA Y EL ÁNGULO ENTRE DICHA DISTANCIA (PERPENDICULAR A LA COSTA) Y LA COSTA MISMA.



COMO DATOS SE TIENEN LA DISTANCIA DEL FARO A LA COSTA, LA RAPIDEZ DE VARIACIÓN DEL ÁNGULO, ES DECIR $\dfrac{d\alpha}{dt}$ DONDE $\dfrac{d\alpha}{dt} = 0.15\left(\dfrac{\pi}{180}\right) = 0.0026\ \dfrac{rad}{min}$, Y SE PREGUNTA LA RAPIDEZ DE VARIACIÓN DE LA DISTANCIA DEL PUNTO QUE ESTÁ A $5\ km$ AL PUNTO MÁS PRÓXIMO A LA COSTA, ES DECIR, $\dfrac{dx}{dt}$

DE LA TRIGONOMETRÍA Y APLICANDO LA DERIVADA CON RESPECTO AL TIEMPO, SE TIENE QUE

$$\frac{x}{3} = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad x = 3\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 3\sec^2\alpha\ \frac{d\alpha}{dt}$$

Y, POR OTRO LADO, EN EL INSTANTE CONSIDERADO Y POR IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$\tan\alpha = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \tan^2\alpha = 2.78 \quad ; \quad \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \sec^2\alpha = 3.78$$

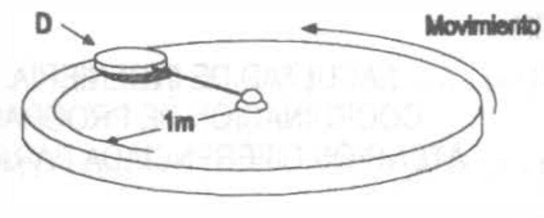
FINALMENTE, SE SUSTITUYE ESTE VALOR Y SE LLEGA A

$$\frac{dx}{dt} = 3\,(3.78)(0.0026) = 0.029$$

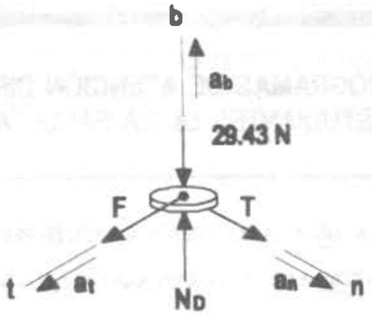
LUEGO LA LUZ DEL FARO SE DESPLAZA A RAZÓN DE 0.029 KILÓMETROS POR MINUTO, O BIEN, A 48 CENTÍMETROS POR SEGUNDO.

CINEMÁTICA

EL DISCO "D" DE $3\ kg$ DE MASA ESTÁ FIJO AL EXTREMO DE UNA CUERDA COMO SE VE EN LA FIGURA. EL OTRO EXTREMO DE LA CUERDA ESTÁ FIJO A UNA RÓTULA EN EL CENTRO DE UNA PLATAFORMA. SI LA PLATAFORMA GIRA RÁPIDAMENTE Y EL DISCO ESTÁ COLOCADO SOBRE ELLA Y SE SUELTA DESDE EL REPOSO, CALCULAR EL TIEMPO QUE SE TARDA EL DISCO EN ALCANZAR UNA VELOCIDAD SUFICIENTEMENTE GRANDE PARA ROMPER LA CUERDA. LA TENSIÓN MÁXIMA QUE PUEDE SOSTENER ÉSTA ES DE $100\ N$, Y EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN CINÉTICA ENTRE EL DISCO Y LA PLATAFORMA ES $\mu_k = 0.1$.



SOLUCIÓN. DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE.



COMO SE VE EN LA FIGURA, EL DISCO TIENE COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN COMO RESULTADO DE LAS FUERZAS T y F QUE NO ESTÁN EN EQUILIBRIO. COMO SE TIENE DESLIZAMIENTO, LA FUERZA DE FRICCIÓN TIENE UNA MAGNITUD $F=\mu_k\ N_D=0.1\,N_D$ Y UN SENTIDO QUE SE OPONE AL MOVIMIENTO RELATIVO DEL DISCO CON RESPECTO A LA PLATAFORMA. LA CUERDA LIMITA EL MOVIMIENTO DEL DISCO EN LA DIRECCIÓN "n" Y, POR LO TANTO, F ACTÚA EN LA DIRECCIÓN POSITIVA DE LAS "t". EL PESO DEL DISCO ES $W=3(9.81)=29.43\ N$ COMO "a_N" PUEDE RELACIONARSE CON "v" Y A VELOCIDAD MÁXIMA $T=100\ N$, LAS INCÓGNITAS SON N_D, a_t y v

ECUACIONES DE MOVIMIENTO:

$$\sum F_b=0 \quad\Rightarrow\quad N_D-29.43=0 \quad\cdots\quad (1)$$
$$\sum F_t=m\,a_t \quad\Rightarrow\quad 0.1\,N_D=3\,a_t \quad\cdots\quad (2)$$
$$\sum F_n=m\,a_n \quad\Rightarrow\quad T=3\left(\frac{v^2}{1}\right) \quad\cdots\quad (3)$$

SI SE SUSTITUYE $T=100\ N$, SE PUEDE DESPEJAR, DE LA ECUACIÓN (3), LA VELOCIDAD CRÍTICA "v_{cr}" QUE ES LA QUE NECESITA TENER EL DISCO PARA ROMPER LA CUERDA. SE RESUELVEN TODAS LAS ECUACIONES Y SE TIENE QUE:

$$N_D=29.43\quad N$$
$$a_t=0.981\quad \frac{m}{s^2}$$
$$v_{cr}=5.77\quad \frac{m}{s}$$

COMO "a_t" ES CONSTANTE, EL TIEMPO NECESARIO PARA ROMPER LA CUERDA SE OBTIENE COMO SIGUE:

$$v_{cr}=v_0+a\,t \Rightarrow 5.77=0+(0.981)t \Rightarrow t=5.89\ s$$

CALCULO II

ENCONTRAR SERIES DE POTENCIAS PARA REPRESENTAR A LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS DIRECTAS $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ Y DECIR PARA QUÉ VALORES REALES LAS REPRESENTAN.

SOLUCIÓN. SE PARTE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL $f(x)=e^x$ DE LA CUAL SE SABE QUE TODAS SUS DERIVADAS EQUIVALEN A ELLA MISMA. ES DECIR, QUE $f(x)=f'(x)=f''(x)=f'''(x)=\cdots=f^{(n)}(n)=e^x$ Y POR LO TANTO TODAS EQUIVALEN A "1". LUEGO, MEDIANTE LA SERIE DE MACLAURIN SE PUDE ESCRIBIR QUE:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+\cdots=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$$

SI SE APLICA EL CRITERIO DE LA RAZÓN A ESTA SERIE, SE TIENE QUE

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)|x| = 0 < 1 \quad \therefore \text{ ABSOLUTAMENTE DIVERGENTE EN } x \in \Re$$

PARA REPRESENTAR A LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ ES NECESARIO CONOCER LAS SERIES PARA REPRESENTAR A LAS FUNCIONES "e^x" y "e^{-x}" (ÉSTA ÚLTIMA MEDIANTE LAS SUSTITUCIÓN DE "x" POR "$-x$" EN LA SERIE DE LA FUNCIÓN OBTENIDA PARA REPRESENTAR A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL "e^x") ASÍ, SE PUEDE ESCRIBIR QUE

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad y \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

FUNCIÓN SENO HIPERBÓLICO

COMO SE SABE $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, POR LO QUE BASTARÁ SEMISUMAR LOS TÉRMINOS DE LAS DOS SERIES ANTERIORES Y SE LLEGA A:

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad y \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

QUE SON LAS SERIES DE MACLAURIN QUE REPRESENTAN A LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS REQUERIDAS Y, EN AMBOS CASOS, EL INTERVALO DE CONVERGENCIA SON TODOS LOS REALES YA QUE ES EL MISMO QUE PARA LA FUCNIÓN EXPONENCIAL "e^x"

CÁLCULO III

EL VECTOR DE POSICIÓN DE UNA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO EN UN TIEMPO "t" ESTÁ DADA POR

$$\bar{r}(t) = t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j} + t^3\,\hat{k} \quad ; \quad 1 \le t \le 4$$

A) ENCONTRAR LAS COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN EN UN TIEMPO "t"

B) CALCULAR, CON DOS CIFRAS DECIMALES DE APROXIMACIÓN, LOS VALORES DE "a_N", "a_T" y "$|\bar{v}|$", PARA $t = 1, 2, 3$ y 4, Y DESCRIBIR EL RECORRIDO DE LA PARTÍCULA

SOLUCIÓN

A) COMO SE SABE, A TRAVÉS DE LA PRIMERA Y SEGUNDA DREIVADA SE TIENE QUE:

$$\bar{v}(t) = \bar{r}'(t) = \hat{i} + 2t\,\hat{j} + 3t^2\,\hat{k}$$

$$\bar{a}(t) = \bar{r}''(t) = 2\,\hat{j} + 6t\,\hat{k}$$

$$|\bar{v}(t)| = |\bar{r}'(t)| = \left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

DE LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN TANGENCIAL SE TIENE QUE:

$$a_T = \frac{\bar{r}'(t)\cdot\bar{r}''(t)}{|\bar{r}'(t)|} = \frac{4t + 18t^3}{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

PARA CALCULAR a_N PRIMERO SE PUEDE CALCULAR EL PRODUCTO

$$\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\,\hat{i} - 6t\,\hat{j} + 2\,\hat{k}$$

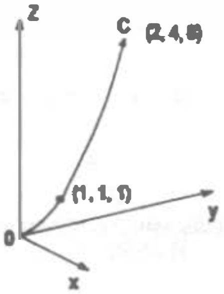
DE LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN NORMAL SE TIENE QUE:

$$a_N = \frac{|\bar{r}'(t)\times\bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|} = \frac{\left(36t^4 + 36t^2 + 4\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\left(\frac{9t^4 + 9t^2 + 1}{9t^4 + 4t^2 + 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

B) LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA CURVA DEFINIDA POR LA FUCNIÓN VECTORIAL $\bar{r}(t)$ SON

$$x = t \quad ; \quad y = t^2 \quad ; \quad z = t^3 \quad ; \quad t \ge 0$$

SI SE ELIMINA EL PARÁMETRO EN LAS PRIMERAS DOS ECUACIONES SE OBTIENE $y = x^2$. ESTO IMPLICA QUE QUE CUALQUIER PUNTO DE LA CURVA $\bar{r}(t)$ PERTENECE TAMBIÉN AL CILINDRO PARABÓLICO DE ECUACIÓN $y = x^2$. Y SI SE ELIMINA EL PARÁMETRO DE LAS ECUACIONES PRIMERA Y TERCERA SE OBTIENE $z = x^3$ QUE ES LA ECUACIÓN DE UN CILINDRO QUE SE APOYA EN EL EJE " y " . ENTONCES, LA CURVA $\bar{r}(t)$ ES LA INTERSECCIÓN DE LOS CILINDROS $y = x^2$ y $z = x^3$ EN LA SIGUIENTE FIGURA SE PUEDE VER LA GRÁFICA DE ESTA CURVA



COMO $1 \le t \le 4$ EL RECORRIDO ES EL CONSIDERADO DEL PUNTO $(1,1,1)$ AL PUNTO $(4,16,64)$ SE REALIZAN LAS CORRESPONIDIENTES SUSTITUCIONES EN LAS EXPRESIONES OBTENIDAS EN EL INCISO (A) Y SE TIENE QUE:

t	1	2	3	4
POSICIÓN DEL PUNTO "P"	$(1,1,1)$	$(2,4,8)$	$(3,9,27)$	$(4,16,64)$
a_N	2.33	2.12	2.06	2.03
a_T	5.88	11.98	17.99	(24.00)
$\lvert\bar{v}(t)\rvert$	3.74	12.69	27.68	48.67

ENTONCES, MIENTRAS " t " CRECE DE 1 A 4 . EL PUNTO SE MUEVE SOBRE LA CURVA DEL PUNTO $(1,1,1)$ AL PUNTO $(4,16,64)$ INCREMENTANDO SU VELOCIDAD RÁPIDAMENTE. LA COMPONENTE NORMAL DE SU ACELARACIÓN SE APROXIMA A 2 (NÓTESE QUE $\lim_{t\to\infty} a_N = 2$) EN LA TABLA SE OBSERVA QUE LA COMPONENTE TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN SE INCREMENTA 6 UNIDADES APROXIMADAMENTE POR CADA UNIDAD QUE AUMENTA EL TIEMPO.

NOTA. OTRA FORMA PARA HABER CALCULADO LA COMPONENTE NORMAL DE LA ACELERACIÓN, HUBIERA SIDO LA SIGUIENTE

COMO SE SABE

$|\bar{a}| = |\bar{r}''| = \sqrt{4 + 36t^2}$ Y, ADEMÁS TAMBIÉN SE PUEDE ESCRIBIR QUE $|\bar{a}| = \sqrt{a_T^{\,2} + a_N^{\,2}}$; DE DONDE

$$a_N = \sqrt{|\bar{a}|^2 - a_T^{\,2}} = \sqrt{\left(4 + 36t^2\right) - \frac{\left(4t + 18t^3\right)^2}{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

EXPRESIÓN QUE SI SE SIMPLIFICA, SE LLEGA AL RESULTADO ANTES OBTENIDO PARA LA COMPONENTE NORMAL DE LA ACELERACIÓN.

PROMOTORES DE LA COPADI

LA COPADI NECESITA PROMOTORES QUE ES COMO LLAMAMOS A LOS ESTUDIANTES QUE SE OFRECEN PARA AYUDAR CON SESIONES DE PREPARACIÓN PARA LOS EXÁMENES COLEGIADOS Y PARA DAR ASESORÍAS INDIVIDUALES DE LA ASIGNATURA EN LA QUE CONSIDEREN ESTAR MEJOR. ES UNA EXCELENTE FORMA DE AYUDAR A LOS COMPAÑEROS. SE TRATA DE UNA ACTIVIDAD EXENTA DE EGOÍSMOS. VEN A COPADI Y OFRECE TUS SERVICIOS COMO PROMOTOR. SI QUIERES TE PUEDE VALER COMO SERVICIO SOCIAL. RECUERDEN QUE EN EL SALÓN 129, ESTUDIANTES APOYAN A ESTUDIANTES CON ASESORÍAS INDIVIDUALES EN ALGUNAS ASIGNATURAS.

TUTORÍA

"DESDE LA PRIMERA VEZ QUE HABLAMOS, ME PLANTEÓ UN PROBLEMA EXISTENCIAL EN EL QUE LE PUDE AYUDAR PORQUE LO MISMO ME PASÓ DE JOVEN. AL TERMINAR ESA SESIÓN ME SENTÍ MUY BIEN"

(TESTIMONIO DE UN TUTOR DE LA FACULTAD)

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 25 17 DE JUNIO DE 2001

EDITORIAL

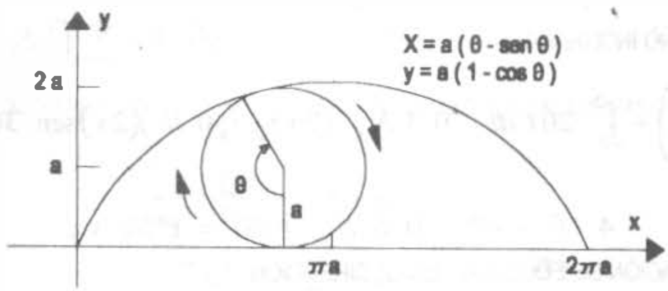
ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

CÁLCULO II

CALCULAR LA LONGITUD "L" DE LA CICLOIDE $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$, $a > 0$

SOLUCIÓN. LA GRÁFICA DE ESTA CURVA SE OBSERVA EN LA SIGUIENTE FIGURA, EN LA CUAL SE VE QUE UN ARCO DE ELLA CORRSPONDE AL INTEVALO

$0 \le \theta \le 2\pi$ Y LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA LONGITUD DE CURVA ES $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$



SI SE DERIVAN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS, SE TIENE QUE

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \quad ; \quad \frac{dy}{d\theta} = a\operatorname{sen}\theta$$

COMO LA EXPRESIÓN QUE VA EN EL INTEGRANDO ES LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE ESTAS DOS DERIVADAS, ENTONCES SE PUEDE HACER LO SIGUIENTE

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = 2a^2(1-\cos\theta)$$

LUEGO

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,a\,\sqrt{1-\cos\theta}\, d\theta$$

PARA EVALUAR ESTA INTEGRAL SE HACE USO DE LA IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$ ENTONCES

$$L = \sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2a\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4a\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a\left[-(-1)+(1)\right] = 8a$$

EL PRIMERO EN OBTENER ESTE RESULTADO, ESTO ES, QUE LA LONGITUD DEL ARCO DE UNA CICLOIDE ES OCHO VECES EL RADIO DEL CIRCULO QUE LA GENERA, FUE SIR CHRISTIOPHERWREN, EL ARQUITECTOCONSTRUCTOR DE LA CATEDRAL DE SAN PABLO Y DE MUCHAS OTRAS IGLESIAS EN INGLATERRA.

DINÁMICA

LA CAJA QUE APARECE EN LA FIGURA TIENE UN PESO DE $50\ lb$ Y SOBRE ELLA ACTÚA UNA FUERZA CON UNA MAGNITUD VARIABLE $P = (20\,t)\ lb$, DONDE "t" SE EXPRESA EN SEGUNDOS. DETERMINAR LA VELOCIDAD DE LA CAJA $2\ s$ DESPUÉS DE APLICAR P SI LA CAJA TIENE UNA VELOCIDAD INICIAL $v_1 = 3\ \frac{pies}{s}$, DESCENDIENDOSOBRE EL PLANO INCLINADO A 30^0 , Y EL COEFICIENTE DE FRICCIONCINÉTICA ENTRE LA CAJA Y EL PLANO ES $\mu_k = 0.3$

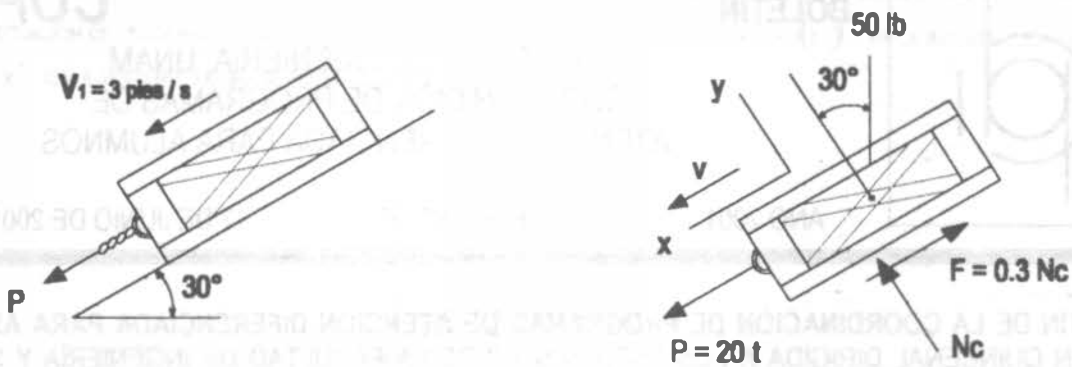


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE. OBSÉRVESE LA SEGUNDA FIGIURA COMO LA MAGNITUD DE LA FUERZA $P = 20t$ VARÍA CON EL TIEMPO, ES PRECISO DETERMINAR EL IMPULSO POR INTEGRACIÓN EN EL INTERVALO DE TIEMPO DE $2\ s$. EL PESO, LAS FUERZAS NORMAL Y DE FRICCIÓN (QUE ACTÚAN EN DIRECCIÓN OPUESTA A LA DEL MOVIMIENTO) SON CONSTANTES, DE MODO QUE EL IMPULSO QUE ORIGINA CADA UNA DE ESTAS FUERZAS ES SIMPLEMENTE LA MAGNITUD DE LA FUERZA MULTIPLICADA POR $2\ s$.

PRINCIPIO DE IMPULSO Y MOMENTO. AL APLICAR LAS ECUACIONES QUE REPRESENTAN EL PRINCIPIO DE IMPULSO LINEAL Y EL MOMENTO PARA LA PARTICULA, EN ESTE CASO EN LA DIRECCIÓN " x " , SE LLEGA A:

$(+)$ HACIA ABAJO PARALELA AL PLANO INCLINADO $$m(v_x)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = m(v_x)_2$$

$$\frac{50\ lb}{32.2\ \frac{pies}{s^2}}\left(3\ \frac{pies}{s}\right) + \int_0^2 20t\, dt - 0.3\ N_C\ (2s) + (50\ lb)(2s)\operatorname{sen} 30^0 = \frac{50\ lb}{32.2\ \frac{pies}{s^2}}\, v_2$$

$$4.66 + 40 - 0.6\ N_C + 50 = 1.55\ v_2$$

AHORA ES POSIBLE APLICAR LA ECUACIÓN DE EQUILIBRIO EN LA DIRECCIÓN " y "

$(+)$ HACIA ARRIBA PERPENDICULAR AL PLANO INCLINADO $$N_C - 50 \cos 30^0\ lb = 0$$

SE DESPEJA Y SE TIENE QUE $N_c = 43.3\ lb$ VALOR QUE SE SUSTITUYE EN LA ANTERIOR ECUACIÓN Y SE OBTIENE " v_2 " . ASÍ,

$$4.66 + 40 - 0.6\ (43.3) + 50 = 1.55\ v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 44.3\ \frac{pies}{s}$$

ÁLGEBRA

SEA " p " UN POLINOMIO DE GRADO TRES, DEL CUAL SE TIENE QUE

$$p(1) = 5 \quad ; \quad p(-1) = 3 \quad ; \quad p(2) = 18$$

ADEMÁS SE SABE QUE SU GRÁFICA CORTA EL EJE DE LAS ORDENADAS EN EL PUNTO DE COORDENADAS $P(0,4)$. CALCCULAR $p(-2)$

SOLUCIÓN.

SI $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, COMO $p(0) = 4 \;\Rightarrow\; a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 4 \;\Rightarrow\; d = 4$

ENTONCES $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$

AHORA, COMO $p(1) = 5 \;\Rightarrow\; a(1)^2 + b(1)^2 + c(1) + 4 = 5 \;\Rightarrow\; a + b + c = 1 \quad \cdots \quad (1)$

DE MANERA ANÁLOGA, $p(-1) = 3 \;\Rightarrow\; a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + 4 = 3 \;\Rightarrow\; -a + b - c = -1 \quad \cdots \quad (2)$

Y PARA $p(2) = 18 \;\Rightarrow\; a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + 4 = 18 \;\Rightarrow\; 8a + 4b + 2c = 14 \quad \cdots \quad (3)$

SI SE DIVIDE ENTRE DOS LA TERCERA ECUACIÓN, EL SISTEMA QUEDARÍA COMO:

$$a + b + c = 1 \quad ; \quad -a + b - c = -1 \quad ; \quad 4a + 2b + c = 7$$

SI SE RESUELVE POR CRAMER SE TIENE QUE:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

LUEGO

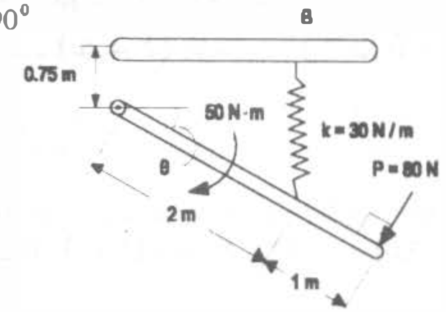
$$a=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\7&2&1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{-12}{-6}=2\quad;\quad b=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\4&7&1\end{vmatrix}}{-6}=\frac{0}{-6}=0\quad;\quad c=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\4&2&7\end{vmatrix}}{-6}=\frac{6}{-6}=-1$$

POR LO QUE EL POLINOMIO ESTÁ DADO POR

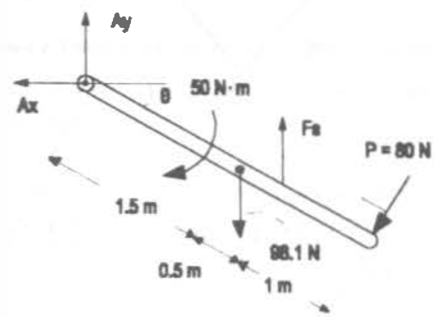
$p(x)=2x^3-x+4$ DE DONDE $p(-2)$ SE OBTIENE COMO $p(-2)=2(-2)^3-(-2)+4$; $p(-2)=-10$

DINÁMICA

LA BARRA QUE APARECE EN LA FIGURA TIENE UNA MASA DE $10\,kg$ Y ESTÁ SOMETIDA A UN MOMENTO DE $50\,N\,m$ Y A UNA FUERZA DE $P=80\,N$, SIEMPRE APLICADA PERPENDICULAR AL EXTREMO DE LA BARRA. ASIMISMO, EL RESORTE TIENE UNA LONGITUD NO ESTIRADA DE $0.5\,m$ Y PERMANECE EN POSICIÓN VERTICAL DEBIDO A LA GUÍA EN "B". DETERMINAR EL TRABAJO TOTAL REALIZADO POR TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA BARRA CUANDO ÉSTA HA GIRADO HACIA ABAJO DESDE $\theta=0^0$ a $\theta=90^0$



SOLUCIÓN: PRIMERO SE TRAZA EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE LA BARRA PARA REPRESENTAR TODAS LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE LA MISMA



PESO W. EL PESO ES $10\,(9.81)\,N=98.1\,N$ DESPLAZÁNDOSE $1.5\,m$ HACIA ABAJO. EL TRABAJO ENTONCES ES

$$U_W=98.1\,N\,(1.5\,m)=147.2\,J$$

MOMENTO M. EL MOMENTO GIRA A TRAVÉS DE UN ÁNGULO $\theta=\frac{\pi}{2}\,rad$ POR LO TANTO

$$U_M=50\,N\,m\left(\frac{\pi}{2}\right)=78.5\,J$$

FUERZA DE RESORTE F_s. CUANDO $\theta=0$, EL RESORTE ESTÁ ESTIRADO $(0.75-0.5m)=0.25\,m$, Y CUANDO $\theta=90^0$, EL ESTIRAMIENTO ES $(2\,m+0.75\,m)-0.5m=2.25\,m$ POR LO TANTO

$$U_s=-\left[\frac{1}{2}\left(30\,\frac{N}{m}\right)(2.25\,m)^2-\frac{1}{2}\left(30\,\frac{N}{m}\right)(0.25\,m)^2\right]=-75.0\,J$$

EL RESORTE REALIZA UN TRABAJO NEGATIVO SOBRE LA BARRA DEBIDO A QUE F_s ACTÚA EN DIRECCIÓN OPUESTA AL DESPLAZAMIENTO

FUERZA P. A MEDIDA QUE LA BARRA SE NUEVE HACIA ABAJO, LA FUERZA SE DESPLAZA UNA DISTANCIA DE $\frac{\pi}{2}(3\,m)=4.712\,m$. ENTONCES

$$U_P=80\,N\,(4.712\,m)=377.0\,J$$

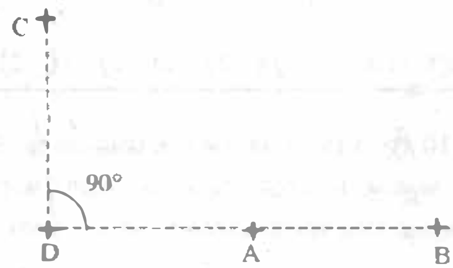
REACCIONES EN EL PERNO. LAS FUERZAS A_x y A_y NO REALIZAN TRABAJO PORQUE NO EXISTE UN DESPLAZAMIENTO

TRABAJO TOTAL. POR LO TANTO, EL TRABAJO DE TODAS LAS FUERZAS CUANDO LA BARRA SE DESPLAZA DE $\theta = 0^{\circ}$ a $\theta = 90^{\circ}$ ES

$$U \approx 147.2 + 78.5 - 75.0 + 377.0 \approx 528 \ J$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEAN LOS PUNTOS A, B, C y D QUE SE MUESTRAN EN LA FIGURA



LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS A, B y C SON $A(1,2,3)$; $B(2,4,5)$; $C(-2,-1,3)$

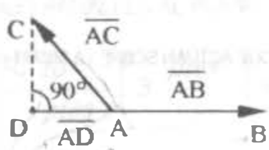
EMPLEAR ÁLGEBRA VECTORIAL PARA:

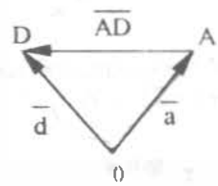
A) DETERMINAR LAS COORDENADAS DEL PUNTO "D"

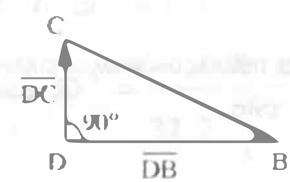
B) CALCULAR EL ÁREA DEL TRIÁNGULO BDC

RESOLUCIÓN

$$\overline{AC} = c - a = (-2,-1,3) - (1,2,3) = (-3,-3,0) \quad ; \quad \overline{AB} = b - a = (2,4,5) - (1,2,3) = (1,2,2) \quad \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$$







DE LA FIGURA (a)

$\overline{AD}$ = COMPONENTE VECTORIAL DE $\overline{AC}$ EN DIRECCIÓN DE $\overline{AB}$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} \frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{(-3,-3,0)\cdot(1,2,2)}{3} \frac{(1,2,2)}{3} = (-1,-2,-2)$$

DE LA FIGURA (b)

$$\overline{d} = \overline{a} + \overline{AD} = (1,2,3) + (-1,-2,-2) = (0,0,1) \quad \therefore \quad D(0,0,1)$$

DE LA FIGURA (c)

$$\overline{DC} = c - d = (-2,-1,3) - (0,0,1) = (-2,-1,2) \quad ; \quad \overline{DB} = b - d = (2,4,5) - (0,0,1) = (2,4,4)$$

$$\overline{DC} \times \overline{DB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = (-12,12,-6) \quad ; \quad \left|\overline{DC} \times \overline{DB}\right| = \sqrt{144+144+36} = 18 \quad \therefore \quad \text{ÁREA} = \frac{1}{2}\left|\overline{DC} \times \overline{DB}\right| = 9 \ u^2$$

LA COPADI NECESITA ESTUDIANTES QUE QUIERAN AYUDAR A SUS COMPAÑEROS. VENGAN A LAS JUNTAS LOS VIERNES A LAS 13:00 HORAS Y APÚNTENSE. LO PUEDEN HACER DE MANERA VOLUNTARIA O CUMPLIENDO SU SERVICIO SOCIAL. ¡LOS NECESITAMOS! HAY MUCHAS COSAS EN LAS QUE PUEDEN AYUDAR A SUS COMPAÑEROS.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y PSIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2000 NÚMERO 26 2 DE JULIO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO.

ANÁLISIS GRÁFICO

PROBLEMA DE MÉTODO AXIOMÁTICO

A PARTIR DEL PUNTO A MOSTRADO EN LA FIGURA 1, TRAZAR UN TRIÁNGULO ABC DE TAL FORMA QUE EL LADO AB SEA HORIZONTAL Y MIDA 90 mm, EL ÁNGULO EN EL VÉRTICE A SEA DE 75° Y EN EL VÉRTICE B DE 45° DIBUJAR LA CIRCUNFERENCIA QUE CIRCUNSCRIBA AL TRIÁNGULO ABC.

DEMOSTRAR QUE EL RADIO DE DICHA CIRCUNFERENCIA MIDE 51.93 mm ($30\sqrt{3}$), EMPLEANDO LA TRIGONOMETRÍA, ASÍ COMO TEOREMAS GEOMÉTRICOS.

Figura 1 Punto de partida para el dibujo del ejercicio

EL TRAZO DE LA FIGURA NO DEBE TENER PROBLEMA ALGUNO. BASTA CON TRAZAR LAS MEDIATRICES DE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO (CON DOS ES SUFICIENTE) Y SU INTERSECCIÓN ES EL CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA BUSCADA, QUE SE IDENTIFICÓ EN LA FIGURA 2 COMO O.

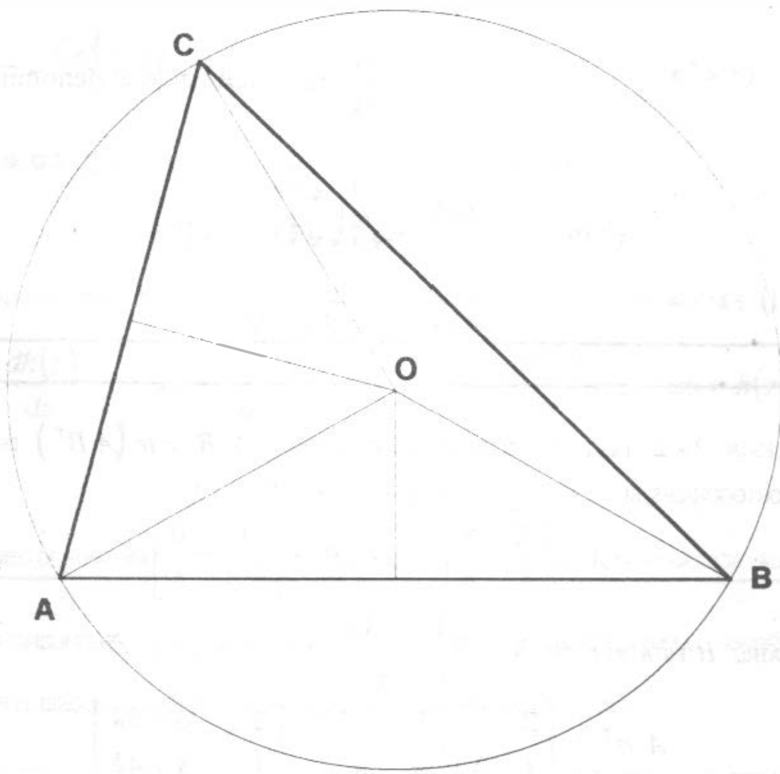


FIGURA 2 SOLUCIÓN GRÁFICA

Razones	Resultados
D: circunferencia	OA = OB OB = OC OC = OA
T: ∀Δ Σ μ<int=π	$75^0+45^0+\gamma+\beta = 180^o$ $\gamma+\beta = 60^o$
μ∀= Σ μ partes	$\alpha+\beta = 45^o$ (1) $\beta+\gamma = 60^o$ (2) $\gamma+\alpha = 75^o$ (3) de (1) $\alpha = 45^0 - \beta$ (4) de (2) $\gamma = 60^o - \beta$ (5) (4) y (5) en (3) $45^o-\beta+60^o-\beta = 75^o$ $\beta = 15^o$ $\therefore \alpha = 30^o$
D: Coseno	$\cos\alpha = \frac{45}{OA}$ $OA = \frac{45}{\cos 30^0}$; pero como $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $OA = \frac{90}{\sqrt{3}}$; racionalizando el denominador $OA = \frac{90}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$ $OA = 30\sqrt{3}$); qed

ÁLGEBRA LINEAL

SEA M EL ESPACIO DE LAS MATRICES DE 2×2 Y EL PRODUCTO INTERNO DEFINIDO POR $\langle A|B\rangle = tr\left(A\,B^T\right)$ DETERMINAR ÉL VALOR DE "k" PA QUE LAS MATRICES A y B SEAN ORTOGONALES, SI

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & k \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN. LA TRANSPUESTA DE LA MATRIZ B ESTÁ DADA POR $B^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ LUEGO SE TIENE QUE:

$$A\,B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -6+5k \\ 1 & -3+4k \end{bmatrix}$$

LA TRAZA DE LA MATRIZ OBTENIDA ES: $tr\left(A\,B^T\right)=2+(-3+4k)=2-3+4k=-1+4k$ Y PARA QUE LAS MATRICES A y B SEAN ORTOGONALES, SE DEBE CUMPLIR QUE SU PRODUCTO INTERNO SEA NULO, ES DECIR, QUE $\langle A|B\rangle=0$. POR LO QUE, FINALMENTE SE LLEGA AL VALOR DE "k" QUE ES:

$$-1+4k=0 \quad\Rightarrow\quad 4k=1 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{4}$$

CÁLCULO III

DEMOSTRAR QUE EL SIGUIENTE CAMPO VECTORIAL ES CONSERVATIVO Y ENCONTRAR UNA FUNCIÓN POTENCIAL PARA ÉL.

$$\overline{F}=\left(e^x\cos y+yz\right)\hat{i}+\left(xz-e^x\,seny\right)\hat{j}+(xy+z)\hat{k}$$

SOLUCIÓN. PARA ESTE CAMPO VECTORIAL SE TIENE QUE:

$$M=e^x\cos y+yz \quad;\quad N=xz-e^x\,seny \quad;\quad P=xy+z$$

DE DONDE

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-e^x\,seny+z=\frac{\partial N}{\partial x} \quad;\quad \frac{\partial M}{\partial z}=y=\frac{\partial P}{\partial x} \quad;\quad \frac{\partial N}{\partial z}=x=\frac{\partial P}{\partial y}$$

ESTAS IGUALDADES EXPRESAN QUE EXISTE UNA FUNCIÓN f CUYO GRADIENTE ES EL CAMPO VECTORIAL $\overline{F}$, ES DECIR, QUE $\nabla f=\overline{F}$. PARA ENCONTRAR LA FUNCIÓN f, QUE ES LA FUNCIÓN POTENCIAL REQUERIDA, SE PARTE DE QUE LA DIFERENCIAL TOTAL DE LA FUNCIÓN f QUE ESTÁ DADA POR:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$$

DONDE

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M=e^x\cos y+yz \quad;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=N=xz-e^x\,seny \quad;\quad \frac{\partial f}{\partial z}=P=xy+z \quad\cdots\quad (1)$$

SE INTEGRA LA PRIMERA ECUACIÓN DE (1) CON RESPECTO A x, MANTENIENDO FIJAS A y Y A z Y SE OBTIENE

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+g(y,z)$$

SE ESCRIBE LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN g COMO UNA FUNCIÓN DE y Y z. AHORA SE DERIVA ESTA ECUACIÓN CON RESPECTO A y Y SE IGUALA CON LA EXPRESIÓN PARA $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ DE LAS ECUACIONES (1). ASÍ, SE TIENE QUE:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-e^x\,seny++xz+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y} \quad;\quad -e^x\,seny+xz+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=xz-e^x\,seny \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=0$$

COMO $\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$, ENTONCES SE TIENE QUE g ES FUNCIÓN SÓLO DE z Y SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$f(x,y,z)=e^x\cos y+xyz+h(z)$$

AHORA SE DERIVA ESTA ECUACIÓN CON RESPECTO A z Y SE IGUALA CON LA EXPRESIÓN PARA $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ DE LAS ECUACIONES (1). ASÍ, SE LLEGA A:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=xy+\frac{dh(z)}{dz} \quad;\quad xy+\frac{dh(z)}{dz}=xy+z \quad\Rightarrow\quad \frac{dh(z)}{dz}=z \quad\Rightarrow\quad h(z)=\frac{z^2}{2}+C$$

POR LO TANTO:

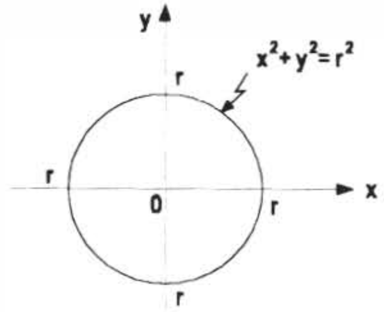
$$f=e^x\cos y+xyz+\frac{z^2}{2}+C$$

ASI SE HA OBTENIDO UN NÚMERO INFINITO DE FUNCIONES POTENCIALES PARA EL CAMPO VECTORIAL $\overline{F}$, UNA PARA CADA VALOR DE LA CONSTANTE C.

CÁLCULO II

DEMOSTRAR QUE LA LONGITUD DE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO IGUAL A "r" ES $2\pi r$, EL ÁREA DEL CÍRCULO CORRESPONDIENTE πr^2 Y EL VOLUMEN DE LA ESFERA QUE SE FORMA AL GIRAR EL CÍRCULO ALREDEDOR DE UNO DE LOS EJES COORDENADOS $\dfrac{4}{3}\pi r^3$

SOLUCIÓN. PARA LOS TRES PROBLEMAS REQUERIDOS, CONSIDÉRESE LA CIRCUNFERENCIA DE LA SIGUIENTE FIGURA, QUE, POR COMODIDAD Y SIMPLIFICACIÓN EN LAS OPERACIONES MATEMÁTICAS, SE UBICA CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS.



PARA CALCULAR LA LONGITUD, SE CONSIDERA LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA DEL PRIMER CUADRANTE Y SE PROCEDE COMO SIGUE, TOMANDO EN CUENTA LA EXPRESIÓN QUE SE UTILIZA PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO CUANDO LA CURVA ESTÁ DEFINIDA POR SUS ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$x = r\cos\theta \;\Rightarrow\; \frac{dx}{d\theta} = -r\,sen\theta \quad ; \quad y = r\,sen\theta \;\Rightarrow\; \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$$

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 sen^2\theta + r^2\cos^2\theta}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\, d\theta = 4r\,[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r$$

PARA CALCULAR EL ÁREA DEL CÍRCULO, TAMBIÉN SE CONSIDERA LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA DEL PRIMER CUADRANTE Y SE PROCEDE COMO SIGUE, TOMANDO EN CUENTA LA EXPRESIÓN QUE SE UTILIZA PARA CALCULAR EL ÁREA BAJO LA CURVA, CON LA ECUACIÓN DE ESTA EN COORDENADAS CARTESIANAS

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

SE OBTIENE PRIMERO LA INTEGRAL INDEFINIDA CON UN CAMBIO DE VARIABLES Y LA COORESPONSIENTE SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA, ASÍ

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \quad ; \quad u^2 = x^2\, ; u = x\, ; du = dx\, ; a^2 = r^2\, ; a = r \;\Rightarrow\; \int \sqrt{a^2 - u^2}\, du$$

$$u = a\,sen\,y;\; du = a\cos y\,dy;\; \sqrt{a^2 - u^2} = a\cos y \;\Rightarrow\; \int a\cos y\, a\cos y\, dy = a^2\int \cos^2 y\, dy = \frac{a^2}{2}\int dy + \frac{a^2}{2}\int \cos 2y\, dy$$

$$= \frac{a^2}{2}y + \frac{a^2}{4}sen2y + C = \frac{a^2}{2}\,angsen\frac{u}{a} + \frac{a^2}{2}\,sen\,y\cos y + C = \frac{a^2}{2}\,angsen\frac{u}{a} + \frac{a^2}{2}\frac{u}{a}\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} + C = \frac{r^2}{2}\,angsen\frac{x}{r} + \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2} + C$$

SE RESUELVE AHORA LA INTEGRAL DEFINIDA Y SE TIENE QUE

$$A = 4\left[\frac{r^2}{2}\,angsen\frac{x}{r} + \frac{x\sqrt{r^2 - x^2}}{2}\right]_0^r = 4\left(\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \pi r^2$$

PARA CALCULAR EL VOLUMEN DE LA ESFERA, TAMBIÉN SE CONSIDERA LA CUARTA PARTE DE LA CIRCUNFERENCIA DEL PRIMER CUADRANTE Y SE PROCEDE COMO SIGUE, TOMANDO EN CUENTA LA EXPRESIÓN QUE SE UTILIZA PARA CALCULAR EL VOLUMEN DEL SÓLISO DE REVOLUCIÓN, CON LA ECUACIÓN DE LA CURVA EN COORDENADAS CARTESIANAS
ASÍ

$$V = 2\pi\int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

TUTORÍA

ESTUDIANTE: UN TUTOR PUEDE

- APOYARTE EN EL DESARROLLO DE UNA METODOLOGÍA DE ESTUDIO Y DE TRABAJO APROPIADA AL PRIMER AÑO DE TU CARRERA.
- OFRECERTE APOYO Y SUPERVISIÓN EN TEMAS DE MAYOR DIFICULTAD DE TUS ASIGNATURAS, YA SEA DE MERA DIRECTA O CONSIGUIÉNDOTE QUIEN TE AYUDE.
- CREAR UN CLIMA DE CONFIANZA CONTIGO QUE LE PERMITA CONOCER LOS ASPECTOS DE TU VIDA PERSONAL QUE PUDIERAN INFLUIR EN TU DESEMPEÑO.
- SUGERIRTE ACTIVIDADES EXTRACURRICULARES QUE FAVOREZCAN TU DESARROLLO PROFESIONAL INTEGRAL.
- PROPORCIONARTE INFORMACIÓN ACADÉMICO-ADMINISTRATIVA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ALFREDO ARENAS Y RICARDO MARTÍNEZ GÓMEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 27 17 DE JULIO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETIN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. AHORA, ¡A ESTUDIAR Y SALIR BIEN EN ESTE SEMESTRE!

CÁLCULO II

INTEGRALES DE LA FORMA $I_n = \int x^n e^x \, dx \, ; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

LA INTEGRAL DE LA FORMA $\int x^n e^x \, dx$ CUANDO $n = 0$ ES DIRECTA CUANDO $n = 1$, EL MÉTODO POR USAR ES EL DE INTEGRACIÓN POR PARTES. A PARTIR DE $n = 2$, LA INTEGRAL SE REALIZA MEDIANTE EL MÉTODO POR PARTES, EN EL CUAL SE PRESENTA LA REDUCCIÓN $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$

ESTA INTEGRAL TIENE MUCHAS Y VARIADAS APLICACIONES EN CÁLCULO Y EN ECUACIONES DIFERENCIALES. ADEMÁS, EN ÁLGEBRA LINEAL, EN ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO, EN PARTICULAR EN PROBLEMAS DONDE SE REQUIERE OBTENER LA PROYECCIÓN DEL VECTOR $v = e^x$ SOBRE UN ESPACIO VECTORIAL, CON BASE POLINOMIOS.

A CONTINUACIÓN SE PRESENTAN EN UNA TABLA LAS INTEGRALES DE ESTE TIPO, DESDE $n = 0$ HASTA $n = 6$ Y CON LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN DE 0 a 1 Y DE -1 a $+1$, CON VALORES EXACTOS Y VALORES NUMÉRICOS APROXIMADOS.

$$I_0 = \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$I_1 = \int x e^x dx = e^x (x - 1) + C$$

$$I_2 = \int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

$$I_3 = \int x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

$$I_4 = \int x^4 e^x dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$$

$$I_5 = \int x^5 e^x dx = e^x (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120) + C$$

$$I_6 = \int x^6 e^x dx = e^x (x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720) + C$$

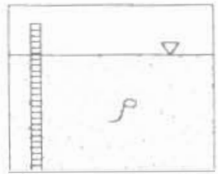
I_n	$\int_0^1 x^n e^x \, dx$	$\int_{-1}^1 x^n e^x \, dx$
I_0	$e - 1 \approx 1.7182818$	$e - e^{-1} \approx 2.3504024$
I_1	$e^0 = 1.0000000$	$2e^{-1} \approx 0.7357588$
I_2	$e - 2 \approx 0.7182818$	$e - 5e^{-1} \approx 0.8788846$
I_3	$-2e + 6 \approx 0.5634363$	$-2e + 16e^{-1} \approx 0.4495074$
I_4	$9e - 24 \approx 0.4645364$	$9e - 65e^{-1} \approx 0.5523728$
I_5	$-44e + 120 \approx 0.3955995$	$-44e + 326e^{-1} = 0.3242973$
I_6	$265e - 720 \approx 0.3446845$	$265e - 1957e^{-1} \approx 0.4046181$

FÍSICA EXPERIMENTAL

TIPO PRESIÓN ABSOLUTA

EN UN EXPERIMENTO DE LABORATORIO SE MIDIERON PRESIONES ABSOLUTAS Y PROFUNDIDADES PARA OBTENER EL MODELO MATEMATICO QUE RELACIONA AMBAS VARIABLES. LAS MEDICIONES EFECTUADAS SE RESUMEN EN LA TABLA SIGUIENTE

$$g = 9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]$$



$z\,[cm]$	$P_{abs}\,[Pa]$
0	78000
20	79760
40	81521
60	83281
80	85042
100	86802

Material	$\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Alcohol	810
Benceno	900
Glicerina	1260
Mercurio	13600

OBTENER

1. LA PENDIENTE DEL MODELO $P = m\,z + b$ Y EL SIGNIFICADO FÍSICO DE LA PENDIENTE
2. EL MODELO MATEMÁTICO DEL FENÓMENO
3. LA DENSIDAD DEL FLUIDO QUE SE UTILIZÓ EN EL EXPERIMENTO
4. EL MATERIAL DEL QUE SE TRATA DE ACUERDO CON LA SEGUNDA TABLA
5. LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA DONDE SE REALIZO EL EXPERIMENTO

RESOLUCIÓN

1. EL MODELO MATEMATICO LINEAL $P_{abs} = m\,z + b$ SE PUEDE OBTENER A TRAVÉS DEL MÉTODO DE PARES DE PUNTOS, DONDE LA PENDIENTE m TIENE COMO SIGNIFICADO AL PESO ESPECIFICO DE LA SUSTANCIA QUE SE UTILIZÓ EN EL EXPERIMENTO Y CUYO VALOR ES

$$m = \frac{(86802 - 81521) + (85042 - 79760) + (83281 - 78000)}{(1.0 - 0.4) + (0.8 - 0.2) + (0.6 - 0.0)}\left[\frac{P_a}{m}\right] = \frac{15844}{1.8}\left[\frac{P_a}{m}\right]$$

$$m = 8802.2222\left[\frac{P_a}{m}\right] = 8802.2222\left[\frac{N}{m^3}\right] \text{ (PESO ESPECIFICO)}$$

2. EL MODELO MATEMÁTICO SE COMPLETA CON EL CALCULO DE LA ORDENADA AL ORIGEN b ES DECIR $b = P_{abs} - m\,z$ LUEGO

$$P_{abs} = \frac{86802 + 85042 + 83281 + 81521 + 79760 + 78000}{6} = 82401\,[P_a]$$

$$z = \frac{1.0 + 0.8 + 0.6 + 0.4 + 0.2 + 0.0}{6} = 0.5\,[m] \Rightarrow b = 82401 - (8802.2222)(0.5) = 77999.8889\,[P_a]$$

POR LO QUE EL MODELO MATEMÁTICO ES

$$P_{abs}\,[P_a] = \left(8802.2222\left[\frac{P_a}{m}\right]\right) z\,[m] + 77999.8889\,[P_a]$$

3 COMO LA PENDIENTE m REPRESENTA AL PESO ESPECÍFICO Y ÉSTE A SU VEZ ES IGUAL AL PRODUCTO DE LA DENSIDAD POR LA GRAVEDAD, ENTONCES

$$m=\rho g \Rightarrow \rho=\frac{m}{g}=\frac{8802.2222\left[\frac{N}{m^3}\right]}{9.78\left[\frac{m}{s}\right]}=900.0227\left[\frac{kg}{m^3}\right]$$; QUE ES LA DENSIDAD DEL MATERIAL UTILIZADO.

4 LA DENSIDAD EXPERIMENTAL OBTENIDA EN EL INCISO ANTERIOR SE APROXIMA AL VALOR DE LA DENSIDAD DEL BENCENO POR LO QUE MUY PROBABLEMENTE EL MATERIAL UTILIZADO FUE EL BENCENO

5 SE SABE QUE EL MODELO TEÓRICO PARA LA PRESIÓN ABSOLUTA ES

$$P_{abs}=P_{relativa}+P_{atmosferica}$$

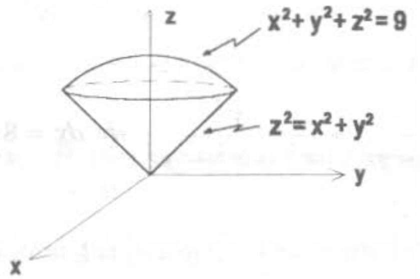
SI SE COMPARA CON EL MODELO MATEMÁTICO EXPERIMENTAL OBTENIDO $P_{abs}\;[P_a]=\left(8802.2222\left[\frac{P_a}{m}\right]\right)z\,[m]+77999.8889\;[P_a]$

SE PUEDE DECIR QUE $P_{atmosferica}=77999.8889\,[P_a]$ OTRA FORMA DE SABER CUÁL ES EL VALOR DE $P_{atmosferica}$ ES HACER CERO EL VALOR DE LA PROFUNDIDAD z ASÍ, SI $z=0\,[m]$, ENTONCES $P_{relativa}=0\,[P_a]$ Y DEL MODELO MATEMÁTICO OBTENIDO SE OBTIENE EL VALOR SEÑALADO ANTERIORMENTE. TAMBIÉN SE OBSERVA, EN LA TABLA DE VALORES QUE, CUANDO $z=0\,[cm]$, SE TIENE QUE $P_{abs}=78000\,[P_a]=P_{atmosferica}$

CÁLCULO III

CALCULAR EL VOLUMEN Y EL CENTRO DE MASA DEL SÓLIDO LIMITADO SUPERIORMENTE POR LA ESFERA $x^2+y^2+z^2=9$ E INFERIORMENTE POR LA HOJA SUPERIOR DEL CONO $z^2=x^2+y^2$ SUPÓNGASE QUE EL SÓLIDO TIENE DENSIDAD UNIFORME.

SOLUCIÓN. EN LA SIGUIENTE FIGURA SE APRECIA EL SÓLIDO CONSIDERADO.



LA ECUACIÓN DE LA ESFERA EN COORDENADAS ESFÉRICAS ESTÁ DADA POR:

$$r^2=x^2+y^2+z^2=9 \quad \text{O SEA} \quad r=3$$

ADEMÁS, LA ESFERA Y EL CONO SE CORTAN CUANDO

$$x^2+y^2=-z^2+9 \quad ; \quad x^2+y^2=z^2 \Rightarrow -z^2+9=z^2 \Rightarrow 2z^2=9 \Rightarrow z=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

POR LO TANTO, COMO $z=r\cos\phi$ SE DEDUCE QUE $\cos\phi=\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{3} \Rightarrow \phi=ang\cos\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{4}$

Y ENTONCES EL VOLUMEN SE CALCULA MEDIANTE LA INTEGRAL TRIPLE SIGUIENTE

$$V=\iiint_R dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 r^2 sen\,\phi\; dr\; d\phi\; d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^3}{3}sen\,\phi\right]_0^3 d\phi\; d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 9\,sen\,\phi\; d\phi\; d\theta=\int_0^{2\pi}\left[-9\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{9}{\sqrt{2}}+9\right)d\theta=\left(-\frac{9}{\sqrt{2}}+9\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi}\approx 16.56$$

POR LA SIMETRÍA DEL PROBLEMA, EL CENTRO DE MASA ESTÁ SOBRE EL EJE z Y, POR CONSIGUIENTE, SÓLO ES NECESARIO CALCULAR LA COTA $\bar{z}$ DEL CENTRO DE MASA, LO QUE SE HACE MEDIANTE LA EXPRESIÓN $\bar{z}=\frac{M_z}{V}$. COMO $z=r\cos\phi$, ENTONCES

$$M_z=\iiint_R z\, dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 (r\cos\phi)\,r^2\, sen\,\phi\; dr\; d\phi\; d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{r^4}{4}sen\,\phi\cos\phi\right]_0^3 d\phi\; d\theta$$

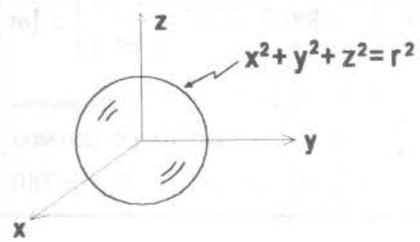
$$M_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{81}{4} \, sen\, \phi \cos \phi \right) d\phi \, d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{sen^2 \phi}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{81}{16} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81}{16} [\theta]_0^{2\pi} \approx 31.81$$

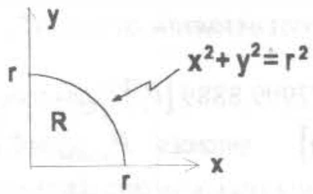
DE DONDE $\bar{z} = \dfrac{31.81}{16.56} \approx 1.92$ Y ENTONCES LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE MASA SON $(0,\ 0,\ 1.92)$

CÁLCULO III

VERIFICAR QUE EL ÁREA DE LA SUPERFICIE DE UNA ESFERA DE RADIO r EQUIVALE A $4\pi r^2$

SOLUCIÓN. CONSIDÉRESE UNA ESFERA CON CENTRO EN EL ORIGEN DE COORDENADAS Y RADIO r





LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR EL ÁREA DE LA SUPERFICIE $z = f(x, y)$ ES $S = \iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$

COMO $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$; LUEGO, SI SE CONSIDERA LA REGIÓN CIRCULAR

$x^2 + y^2 = r^2$ Y SE TRABAJA EN UN CUARTO DE ELLA, SE TIENE QUE EL ÁREA DE LA SUPERFICIE VIENE DADA POR

$$S = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx = 8 \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

$$S = 8r \int_0^r \left[angsen \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right]_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 8r \int_0^r angsen\,(1)\, dx = 4\pi\, r [x]_0^r = 4\pi\, r^2$$

TUTORÍA

ALGUNOS TESTIMONIOS DE ESTUDIANTES Y TUTORES

ESTUDIANTES

-" Como programa puede ser una forma de que alguien esté al pendiente de ti y sabes que cuentas con un tutor".

-" Es cuando alguien nos guía en las decisiones que tomamos y nos aclara sobre las dudas de la carrera que queremos".

-" Es una especie de reunión donde alguien va a "cuidarnos" y ayudarme cuando tenga problemas"

-" Es un programa en el cual una persona, en este caso un profesor de la Facultad te ayuda como estudiante y como ser humano. Es una guía en tu carrera".

TUTORES

-"Yo concibo a la Tutoría no como una clase, o como una actividad que tenga un programa estricto a seguir. Yo veo a la Tutoría como una labor libre y humana".

-"En la Tutoría, no sólo hay que trabajar en las cosas técnicas, sino en todo aquello que envuelve a las personas".

-"Durante la Tutoría yo le muestro a los estudiantes las ventajas y desventajas de lo que es la carrera; trato de darles un panorama general de las actitudes que requiere esta profesión; los llevo a visitar instituciones como el Instituto de Ingeniería, de Geofísica ,de Astronomía, etcétera."

"Yo creo que en la Tutoría el profesor debe exponer lo que se puede o no hacer en el programa. Debe dar oportunidad a que los estudiantes expongan sus problemas personales. Canalizarlos hacia las instancias donde los puedan ayudar. Porque pienso que la Tutoría debe ofrecer una atención humana y personal. Siempre se puede hacer más y mejor".

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES GUSTAVO BALMORI NEGRETE Y MARTÍN BÁRCENAS ESCOBAR

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. NIDIA IBARRA OJEDA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 28 17 DE AGOSTO DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. SE ACERCA EL FINAL DEL SEMESTRE. ¡TODAVÍA ES TIEMPO DE RECUPERARSE Y ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS!

FÍSICA EXPERIMENTAL

EN EL SISTEMA INGLÉS (FPS) GRAVITATORIO SE TIENE LA EXPRESIÓN SIGUIENTE QUE RELACIONA LA VARIABLE W (TRABAJO, EN $lb_f \cdot ft$) CON LAS VARIABLES P (PRESIÓN MANOMÉTRICA, EN $psi = \frac{lb_f}{in^2}$) Y ℓ (DISTANCIA EN ft):

$$W = AP + B\ell^2$$

SEAN $A = 4$ y $B = 0.5$. DETERMINAR:

A) LAS UNIDADES DE CADA UNA DE LAS CONSTANTES A y B EN EL SISTEMA INGLÉS GRAVITATORIO.
B) EL VALOR DE LAS CON TANTES (COEFICIENTES NUMÉRICO) EN EL **SI**.
C) LA TRADUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN DADA AL **SI**

CONSIDÉRESE QUE $1\,[ft] = 0.3048\,[m]$; $1\,[in] = 2.54\,[cm]$; $1\,[lb_f] = 4.448\,[N]$

SOLUCIÓN: A) DE ACUERDO CON LA INFORMACIÓN PROPORCIONADA

$$[W]_u = lb_f \cdot ft \quad ; \quad [P]_u = \frac{lb_f}{in^2} \quad ; \quad [\ell]_u = ft$$

$$W = 4P + 0.5\ell^2 = AP + B\ell^2$$

CON BASE EN EL PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD DIMENSIONAL, SE PUEDE ESTABLECER QUE:

$$[A]_u [P]_u = [W]_u = lb_f \cdot ft$$

POR LO TANTO $$[A]_u = \frac{[W]_u}{[P]_u} = \frac{lb_f \cdot ft}{\frac{lb_f}{in^2}} = ft \cdot in^2$$

POR OTRA PARTE $$[B]_u [\ell^2]_u = [W]_u = lb_f \cdot ft \quad \Rightarrow \quad [B]_u = \frac{[W]_u}{[\ell^2]_u} = \frac{lb_f \cdot ft}{ft^2} = \frac{lb_f}{ft}$$

B) SE DETERMINA EL VALOR DE LA CONSTANTE A EN EL **SI**:

$$A = 4\ ft \cdot in^2 = 4\ ft \cdot in^2 \left(\frac{0.3048\ m}{1\ ft}\right)\left(\frac{2.54^2\ cm^2}{1\ in^2}\right)\left(\frac{1\ m^2}{100^2\ cm^2}\right) \Rightarrow A = 0.000787\ [m^3]$$

PARA LA CON TANTE B SE TIENE QUE:

$$B = 0.5\ \frac{lb_f}{ft}\left(\frac{4.448\ N}{1\ lb_f}\right)\left(\frac{1\ ft}{0.3048\ m}\right) \Rightarrow B = 7.2966\ \left[\frac{N}{m}\right]$$

C) $$W\ [N \cdot m] = 0.000787\ [m^3]\,P\,[P_a] + 7.2966\ \left[\frac{N}{m}\right]\ell^2\,[m^2]$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

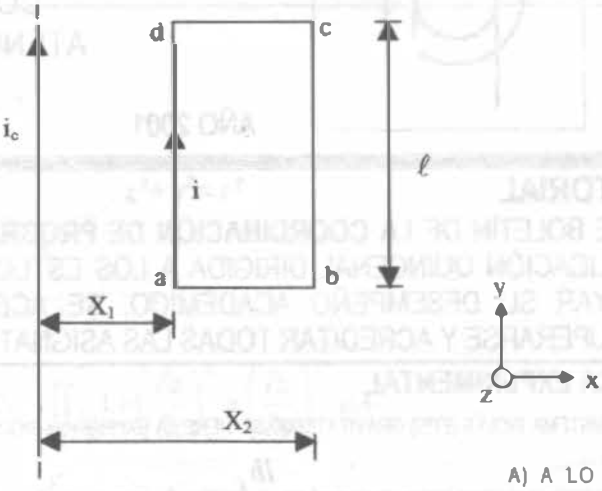
EN LA FIGURA SE MUESTRAN UN CONDUCTOR RECTO MUY LARGO Y UNA ESPIRA RECTANGULAR, AMBOR COPLANARES AL PLANO xy SI POR EL CONDUCTOR RECTO CIRCULA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA DE $100\,[A]$ Y POR LAESPIRA UNA DE $20\,[A]$; $x_1 = 2\,[cm]$; $x_2 = 10\,[cm]$ y $\ell = 20\,[cm]$, CALCULAR

A) LA FUERZA DE ORIGEN MAGNÉTICO EN EL LADO ab DE LA ESPIRA, DEBIDA AL CONDUCTOR RECTO MUY LARGO.

B) EL FLUJO MAGNÉTICO DEBIDO AL CONDUCTOR RECTO A TRAVÉS DEL ÁREA ENCERRADA POR LA ESPIRA RECTANGULAR

C) LA fem INDUCIDA EN LA ESPIRA SI POR EL CONDUCTOR RECTO CIRCULARA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA $i_c = 100 \text{ sen } \omega t$, SIENDO $\omega = 2\pi f$ y $f = 60\,[Hz]$

D) EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA ENTRE LA ESPIRA Y EL CONDUCTOR



RESOLUCIÓN

A) A LO LARGO DEL LADO ab DE LA ESPIRA SE TIENE UN CAMPO MAGNÉTICO VARIABLE EN MAGNITUD PERO DE DIRECCIÓN $\left(-\hat{k}\right)$ CONSTANTE, POR ESTA RAZÓN LA FUERZA F_{ab} SE OBTENDRÁ POR INTEGRACIÓN DE $d\vec{F}_{ab} = i\, d\vec{\ell} \times \vec{B}$; EN MAGNITUD:

$$dF_{ab} = i d\ell\, B \text{ sen } \theta \quad ; \quad \theta\left(entre\ \vec{B}\ y\ d\vec{\ell}\right) = \frac{\pi}{2}\,[rad] \quad ; \quad \vec{F}_{ab} = F_{ab}\left(-\hat{j}\right) \quad y \quad F_{ab} = \int dF_{ab}$$

$$F_{ab} = i \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0\, i_c}{2\pi\, r}\, dr = \frac{\mu_0\, i_c\, i}{2\pi}\, Ln\, \frac{x_2}{x_1} \quad donde \quad dr = d\ell$$

$$\therefore\ \vec{F}_{ab} = -\left[\frac{4\pi \times 10^{-7}(100)20}{2\pi}\, Ln\, \frac{10}{2}\right]\hat{j} = -0.6438\ \hat{j}\,[m\ N]$$

B) DE LA DEFINICIÓN DE FLUJO MAGNÉTICO $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ SE OBTIENE

$$\phi = \iint B\, dS \cos\alpha \quad ; \quad \alpha = 0\,,\ \alpha\left(entre\ \vec{B}\ y\ d\vec{S}\right)\ y\ B = f(r) \quad \therefore \quad \phi = \iint B\, dx\, dy = \int_c^{\ell}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mu_0\, i_c}{2\pi\, x}\, dx\, dy$$

$$\phi_{ec} = \frac{\mu_0\, i_c\, \ell}{2\pi}\, Ln\, \frac{x_2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad \phi_{ec} = \frac{4\pi \times 10^{-7}(100)\, 0.2}{2\pi}\, Ln\, \frac{10}{2} = 6.438\,[\mu\, Wb] \quad entrando\ a\ la\ figura$$

C) CON LA LEY DE FARADAY: $\varepsilon = -N\dfrac{d\phi}{dt} \Rightarrow \varepsilon = -N\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mu_0\, i_c\, \ell}{2\pi}\, Ln\, \dfrac{x_2}{x_1}\right)$

$$\varepsilon = -N\frac{\mu_0\, \ell}{2\pi}\, Ln\, \frac{x_2}{x_1}\, \frac{d(i_c)}{dt} = -N\frac{\mu_0\, \ell}{2\pi}\, Ln\, \frac{x_2}{x_1}\, \frac{d(100 \text{ sen } \omega t)}{dt} = -N\frac{\mu_0\, \ell}{2\pi}\, Ln\, \frac{x_2}{x_1}\, 100\,\omega \cos \omega t$$

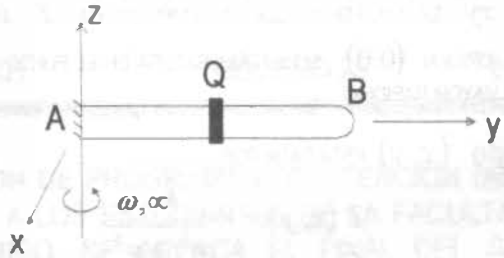
$$\varepsilon = -(1)\frac{4\pi \times 10^{-7}(0.2)}{2\mu}\left(Ln\, \frac{10}{2}\right) 100\ [2\pi(60)] \cos \omega t = 2.4269 \cos(120\pi t)\,[mV]$$

D) EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA SE OBTIENE CON: $M = \dfrac{N\phi_{ec}}{i_c} \Rightarrow M = \dfrac{N\mu_0\, i_c\, \ell}{(i_c)\, 2\pi}\, Ln\, \dfrac{x_2}{x_1}$

$$M = \frac{(1)\, 4\pi \times 10^{-7}\ (0.2)}{2\pi}\, Ln\, \frac{10}{2} = 64.378\ [nH]$$

CINEMÁTICA

UN ANILLO Q SE DESPLAZA A LO LARGO DE LA BARRA $\overline{AB}$ PARTIENDO DE A CUANDO DICHA BARRA GIRA ALREDEDOR DEL EJE " z " CON UNA ACELARACIÓN DE MAGNITUD $10\left(\frac{rad}{s^2}\right)$ Y UNA RAPIDEZ ANGULAR DE $5\left(\frac{rad}{s}\right)$. DETERMINAR LA ACELERACIÓN ABSOLUTA DEL ANILLO CUANDO SE ENCUENTRA A $60\,(cm)$ DE A, SI SE SABE QUE PARA DICHA POSICIÓN SU RAPIDEZ A LO LARGO DE LA BARRA Y LA MAGNITUD DE SU ACELERACIÓN SON, RESPECTIVAMENTE, $120\left(\frac{cm}{s}\right)$ $y\ 90\left(\frac{cm}{s^2}\right)$



SOLUCIÓN. SI SE HACE COINCIDIR EL ORIGEN DEL SISTEMA DE REFERENCIA MÓVIL CON A, SE OBTIENE:

$$\overline{R} = \overline{0}\,(m) \quad ; \quad \dot{\overline{R}} = \overline{0}\left(\frac{m}{s}\right) \quad ; \quad \ddot{\overline{R}} = \overline{0}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

ADEMÁS SE SABE QUE:

$$\overline{\rho} = 0.6\,\overline{e}_r\,(m) \quad ; \quad \dot{\overline{\rho}}_r = 1.2\,\overline{e}_r\left(\frac{m}{s}\right) \quad ; \quad \ddot{\overline{\rho}}_{rr} = 0.9\,\overline{e}_r\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

$$\overline{\omega} = 5\,\hat{k}\left(\frac{rad}{s}\right) \quad ; \quad \overline{\alpha} = 10\,\hat{k}\left(\frac{rad}{s^2}\right)$$

LA ACELERACIÓN ABSOLUTA DE Q ESTARÁ DADA POR:

$$\overline{a}_Q = \ddot{\overline{R}} + \overline{\alpha}\times\overline{\rho} + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{\rho}) + 2\overline{\alpha\omega}\times\dot{\overline{\rho}}_r + \ddot{\overline{\rho}}_{rr}$$

SE SUSTITUYEN LOS DATOS CONOCIDOS Y SE TIENE QUE:

$$\overline{a}_Q = \overline{0} + 10\,\hat{k}\times 0.6\,\overline{e}_r + 5\,\hat{k}\times\left(5\,\hat{k}\times 0.6\,\overline{e}_r\right) + 2\left(5\,\hat{k}\right)\times 1.2\,\overline{e}_r + 0.9\,\overline{e}_r$$

DE DONDE: $\overline{a}_Q = -14.1\,\overline{e}_r + 18\,\overline{e}_\phi\left(\frac{m}{s^2}\right)$

QUÍMICA

LA ENTALPIA DE FORMACIÓN DEL PROPINO GASEOSO $C_3H_4\,[g]$ ES $+185.4\left[\frac{kJ}{gmol}\right]$. CALCULAR CUÁNTO CALOR SE DESPRENDERÍA DE LA COMBUSTIÓN COMPLETA DE $325\,[g]$ DE PROPINO. TODOS LOS PRODUCTOS SON GASES A $298.15\,[K]$

RESOLUCIÓN. 1. SE PLANTEA LA REACCIÓN DE COMBUSTIÓN Y SE BALANCEA.

$$C_3H_4\,[g] + 4O_2\,[g] \;\rightarrow\; 3CO_2\,[g] + 2H_2O\,[g]$$

2. SE CALCULA LA ENTALPIA DE REACCIÓN (COMBUSTIÓN) UTILIZANDO LAS TABLAS DE DATOS TERMODINÁMICOS QUE APARECEN EN LOS LIBROS DE QUÍMICA GENERAL

$$\Delta H^0{}_r = \left[3\,mol\,CO_2\left(-393.5\,\frac{kJ}{mol}\right) + 2\,mol\,H_2O\left(-241.8\,\frac{kJ}{mol}\right)\right] - \left[1\,mol\,C_3H_4\left(185.4\,\frac{kJ}{mol}\right)\right]$$

$$\Delta H^0{}_r = -1664.1\,[kJ] - 185.4\,[kJ] \;\Rightarrow\; \Delta H^0{}_r = -1849.5\,[kJ]$$

3. DE ACUERDO A LOS CÁLCULOS, SE OBSERVA QUE LA COMBUSTIÓN DE $1\,[mol]\,de\,C_3H_4$ LIBERA $1849.5\,[kJ]$ DE ENERGÍA EN FORMA DE CALOR, ESTO SE PUEDE PLANTEAR DE LA FORMA SIGUIENTE:

$40.0653\,[g]\,de\,C_3H_4$ (QUE EQUIVALE A $1\,[mol]$) LIBERAN $1849.5\,[kJ]$ DE ENERGÍA EN FORMA DE CALOR, CUANDO SE QUEMAN, DE TAL FORMA QUE $325\,[g]$ LIBERARÁN:

$$325\ [g]C_3H_4\left(\frac{-1849.5\ [kJ]}{40.0653\ [g]C_3H_4}\right)=-15{,}002.6844\ [kJ]$$

QUE ES EL RESULTADO DEL PROBLEMA, ES DECIR QUE

$$Q=-15{,}002.6844\ [kJ]$$

NOTA. EJERCICIO DEL CUADERNO DE EJERCICIOS DE QUÍMICA GENERAL, EDITADO POR LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

CÁLCULO II

UN PLATO METÁLICO ESTÁ SITUADO EN EL PLANO xy DE TAL FORMA QUE LA TEMPERATURA T EN CUALQUIER PUNTO $P(x,y)$ ES INVERSAMENTE PROPORCIONAL A LA DISTANCIA DEL PUNTO P AL ORIGEN $(0,0)$. SI LA TEMPERATURA EN EL PUNTO $(-3,4)$ ES IGUAL A $50^0 C$, ¿EN QUÉ DIRECCIÓN DESDE ESTE PUNTO LA TEMPERATURA AUMENTA CON MAYOR RAPIDEZ?

SOLUCIÓN. LA TEMPERATURA T EN CUALQUIER PUNTO (x,y) ESTÁ DADA POR

$$T(x,y)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

DONDE k ES LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD. COMO $T=50^0 C$ CUANDO $(x,y)=(-3,4)$ ENTONCES SE TIENE QUE

$$k=T(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad k=50\sqrt{(-3)^2+(4)^2}\quad\Rightarrow\quad k=50(5)=250$$

EL GRADIENTE DE T ES

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial T}{\partial x}\hat{j}=\frac{-250\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\hat{i}+\frac{-250\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\hat{j}=\frac{-250x}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{i}+\frac{-250y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{j}$$

$$\nabla T(-3,4)=\frac{-250(-3)}{(5)^3}\hat{i}+\frac{-250(4)}{(5)^3}\hat{j}\quad\Rightarrow\quad\nabla T(-3,4)=6\hat{i}-8\hat{j}$$

Y ES EN ESTA DIRECCIÓN DEL GRADIENTE EN LA CUAL LA TEMPERATURA SE INCREMENTA CON MAYOR RAPIDEZ DESDE EL PUNTO CONSIDERADO.

LA TEMPERATURA DECRECE CON MAYOR RAPIDEZ EN LA DIRECCIÓN OPUESTA, ESTO ES, EN LA DIRECCIÓN $-6\hat{i}+8\hat{j}$. EN CUALQUIER DIRECCIÓN PERPENDICULAR A $6\hat{i}-8\hat{j}$ LA TEMPERATURA NI CRECE NI DECRECE SINO QUE PERMANECE CONSTANTE. ESTA DIRECCIÓN PERPENDICULAR DEFINE LO QUE SE CONOCE COMO CURVA ISOTÉRMICA, QUE ES EQUIVALENTE A AL CONCEPTO DE "CURVA DE NIVEL".

CULTURA

LA PERFECCIÓN

ME PREGUNTAS, HERMANO MÍO, ¿CUÁNDO SERÁ PERFECTO EL HOMBRE? ESCUCHA, PUES, MI CONTESTACIÓN:

SE DIRIGE ÉSTE A LA PERFECCIÓN CUANDO SIENTE QUE ES EL ESPACIO, SIN CONTORNOS Y SIN LÍMITES; QUE ES EL MAR, SIN RIBERAS Y SIN PLAYAS; QUE ES EL FUEGO SIEMPRE ENCENDIDO; LA LUZ, ETERNAMENTE ESPLENDOROSA; LOS VIENTOS, TRANQUILOS O BORRASCOSOS; LAS NUBES, CON LA LLUVIA, EL RELÁMPAGO Y EL TRUENO; LOS ARROYOS GEMEBUNDOS O RISUEÑOS; LOS ÁRBOLES, FLORECIDOS EN PRIMAVERA Y DESNUDOS EN OTOÑO; LOS MONTES ENHIESTOS; LOS VALLES PROFUNDOS; Y LOS CAMPOS, YA ESTÉRILES, YA FERACES. SI EL HOMBRE SE IDENTIFICA CON TODAS ESTAS COSAS, ALCANZA LA MITAD DEL CAMINO DE LA PERFECCIÓN.

PERO SI DESEA LLEGAR A LA META, DEBE IDENTIFICARSE CON SU ÍNTIMO SER. DEBE SENTIRSE EL NIÑO QUE SE REFUGIA EN SU MADRE; EL JOVEN EXTRAVIADO ENTRE SU AMOR Y SUS ESPERANZAS; EL HOMBRE MADURO QUE LUCHA ENTRE SU PASADO Y SU PORVENIR; EL ANCIANO QUE RESPONDE POR SU FAMILIA; EL RELIGIOSO EN LA CELDA, EL CRIMINAL EN LA PRISIÓN; EL SABIO ENTRE SUS LIBROS Y SUS DOCUMENTOS; EL IGNORANTE ENTRE LA LOBREGUEZ DE SU NOCHE Y LA OSCURIDAD DE SU DÍA; LA MONJA ENTRE LAS FLORES DE SU FE Y LAS ESPINAS DE SU MELANCOLÍA; LA RAMERA ENTRE LOS COLMILLOS DE SU DEBILIDAD Y LAS GARRAS DE SUS NECESIDADES; EL POBRE ENTRE SU AMARGURA Y SU SUMISIÓN; EL RICO ENTRE SU CODICIA Y SU OBEDIENCIA; Y EL POETA ENTRE LAS NIEBLAS DE SU CREPÚSCULO Y LA CLARIDAD DE SUS DESLUMBRAMIENTOS. SI PUEDE EL HOMBRE CONOCER Y SENTIR TODAS ESTAS COSAS, ALCANZARÁ LA PERFECCIÓN, CONVIRTIÉNDOSE, ENTONCES, EN UNA DE LAS SOMBRAS DE DIOS.

GIBRÁN JALIL GIBRÁN

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, RIGEL GÁMEZ LEAL, GABRIEL JARAMILLO MORALES Y FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ, COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 29 2 DE SEPTIEMBRE DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. SE ACERCA EL FINAL DEL SEMESTRE. ¡TODAVÍA ES TIEMPO DE RECUPERARSE Y ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS!

CÁLCULO I

¿CONVERGEN O DIVERGEN LAS SIGUIENTES SERIES?

$$i)\quad \frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2} \quad ; \quad ii)\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$iii)\quad \frac{101}{3}+\frac{102}{10}+\frac{103}{29}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100+n}{n^3+2} \quad ; \quad iv)\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}$$

SOLUCIÓN.

$i)$ *Sean* $a_n=\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}$ y $b_n=\dfrac{1}{n}$ LA SERIE $\sum b_n$ ES LA SERIE ARMÓNICA DIVERGENTE. POR LA PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE, SI $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k>0$, ENTONCES LAS DOS SERIES CONVERGEN O LAS DOS DIVERGEN. LUEGO,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n+1}{n^2+2n+1}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2>0 \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}\ \textit{es divergente}$$

$ii)$ EL LÍMITE DEL TÉRMINO ENÉSIMO ES IGUAL A $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1\neq 0$. ENTONCES, POR EL CRITERIO DEL LÍMTE DEL TÉRMINO ENÉSIMO, LA SERIE $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$ ES DIVERGENTE.

$iii)$ *Sean* $a_n=\dfrac{100+n}{n^3+2}$ y $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ LA SERIE $\sum b_n$ ES CONVERGENTE YA QUE SE TRATA DE UNA SERIE "p" CON $p=2>1$. POR LA PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE, SI $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k>0$, ENTONCES LAS DOS SERIES CONVERGEN O LAS DOS DIVERGEN. LUEGO,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{100+n}{n^3+2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{100n^2+n^3}{n^3+2}=1>0 \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{100+n}{n^3+2}\ \textit{es convergente}$$

$iv)$ *Sean* $a_n=\dfrac{1}{2^n-1}$ y $b_n=\dfrac{1}{2^n}$ LA SERIE $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ ES CONVERGENTE YA QUE SE TRATA DE UNA SERIE GEOMÉTRICA CON $r=\dfrac{1}{2}<1$

POR LA PRUEBA DEL LÍMITE DEL COCIENTE, SI $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k>0$, ENTONCES LAS DOS SERIES CONVERGEN O LAS DOS DIVERGEN. LUEGO,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}=1>0\quad\therefore\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}\ es\ convergente$$

CÁLCULO II

PARA LA FUNCIÓN $f(x,y)=x^2y+2y^2x$, EN EL PUNTO $P(1,3)$, DETERMINAR:

i) LA DERIVADA DIRECCIONAL DE LA FUNCIÓN f EN LA DIRECCIÓN DEL VECTOR $\bar{a}=5\hat{i}+6\hat{j}$

ii) LA DIRECCIÓN DE MAYOR CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN f.

iii) LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f EN LA DIRECCIÓN DE SU MAYOR CRECIMIENTO.

iv) LA DIRECCIÓN DE MAYOR DECRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN f.

v) LAS DIRECCIONES EN LAS QUE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f ES NULA.

vi) LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE $z=f(x,y)$ EN EL PUNTO $(1,3,21)$

SOLUCIÓN. PARA CALCULAR LA DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y EN UNA CIERTA DIRECCIÓN DADA SE USA LA EXPRESIÓN

$$D_{\omega}f(x,y)=\bar{\nabla}f\cdot\bar{\omega}$$

PRIMERO SE CALCULARÁ EL GRADIENTE DE LA FUNCIÓN. ASÍ

$$\bar{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}=\left(2xy+2y^2\right)\hat{i}+\left(x^2+4yx\right)\hat{j}\quad\Rightarrow\quad\bar{\nabla}f\Big|_P=24\hat{i}+13\hat{j}$$

i) SE APLICA LA EXPRESIÓN DADA PARA LA DERIVADA DIRECCIONAL, PERO ANTES SE HACE UNITARIA LA DIRECCIÓN DADA. ASÍ,

$$\left|\bar{a}\right|=\sqrt{5^2+6^2}=\sqrt{61}\approx 7.81\quad\Rightarrow\quad\bar{\omega}\approx\frac{5}{7.81}\hat{i}+\frac{6}{7.81}\hat{j}\approx 0.64\hat{i}+0.768\hat{j}$$

LUEGO, LA DERIVADA DIRECCIONAL ES:

$$D_{\omega}f(x,y)=\bar{\nabla}f\Big|_P\cdot\bar{\omega}\approx(24,13)\cdot(0.64,\ 0.768)\approx 15.36+\ 9.984\approx 25.344$$

ii) LA DIRECCIÓN DE MAYOR CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN SE PRESENTA EN LA DIRECCIÓN DEL GRADIENTE, ES DECIR, EN LA DIRECCIÓN

$$\bar{\nabla}f\Big|_P=24\hat{i}+13\hat{j}$$

iii) LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f EN LA DIRECCIÓN DE SU MAYOR CRECIMIENTO EQUIVALE A LA MÁXIMA DERIVADA DIRECCIONAL, ESTO ES, AL MÓDULO DEL GRADIENTE. ASÍ,

$$D_{\omega}f(1,3)_{max}=\left|\bar{\nabla}f\right|=\sqrt{24^2+13^2}\approx 27.29$$

iv) LA DIRECCIÓN DE MAYOR DECRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN f EQUIVALE A LA DIRECCIÓN OPUESTA A LA DEL GRADIENTE, ESTO ES

$$-\bar{\nabla}f\Big|_P=-24\hat{i}-13\hat{j}$$

v) LAS DIRECCIONES EN LAS QUE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f ES NULA, SON LAS QUE SON PERPENDICULARES A LA DIRECCIÓN DEL GRADIENTE, ES DECIR, AQUÉLLAS CUYO PRODUCTO ESCALAR (O PUNTO) CON EL GRADIENTE, ES CERO. ENTONCES SON.

$$-13\hat{i}+24\hat{j}\quad y\quad 13\hat{i}-24\hat{j}$$

vi) PARA ENCONTRAR LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE $z=f(x,y)$ EN EL PUNTO $(1,3,21)$ SE HACE LO SIGUIENTE: SE OBTIENE UN VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE $z=f(x,y)$ Y PARA ELLO SE OBTIENE EL GRADIENTE DE LA FUNCIÓN $F=-f(x,y)+z=0$, ESTO ES, DE LA FUNCIÓN $F=-x^2y-2y^2x+z=0$. LUEGO, EL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE ES:

$$\bar{N}=\bar{\nabla}F=\frac{\partial F}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}=\left(-2xy-2y^2\right)\hat{i}+\left(-x^2-4yx\right)\hat{j}+\hat{k}\quad\Rightarrow\quad\bar{N}\Big|_{(1,3,21)}=-24\hat{i}-13\hat{j}+\hat{k}$$

Y UN VECTOR PARALELO AL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE EN EL PUNTO $(1,3,21)$ ESTA DADO POR $(x-1)\hat{i}+(y-3)\hat{j}+(z-21)\hat{k}$, DONDE EL PUNTO (x,y,z) PERTENECE A DICHO PLANO. LUEGO, LA ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE A LA SUPERFICIE SE OBTIENE A TRAVÉS DEL PRODUCTO ESCALAR DE ESTE VECTOR CON EL VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE IGUALADO A CERO, LA CUAL ES LA CONDICIÓN DE PERPENDICULARIDAD. ASÍ, FINALMENTE SE TIENE QUE

$$-24(x-1)-13(y-3)+1(z-21)=0\quad\Rightarrow\quad -24x+24-13y+39+z-21=0\quad\Rightarrow\quad 24x+13y-z-42=0$$

CÁLCULO II

PROBAR QUE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON ARMÓNICAS, ES DECIR, QUE EN SUS RESPECTIVOS DOMINIOS SATISFACEN LA ECUACIÓN

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

$$i)\ f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}\quad ;\quad ii)\ f(x,y)=\operatorname{angtan}\frac{y}{x}$$

$$iii)\ f(x,y)=\cos x\operatorname{senh} y+\operatorname{sen} x\cosh y\quad ;\quad iv)\ f(x,y)=e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x$$

SOLUCIÓN. EN TODOS LOS CASOS SE DEBEN OBTENER LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES CON RESPECTO A AMBAS VARIABLES INDEPENDIENTES, SUMAR RESULTADOS Y VERIFICAR QUE EL RESULTADO ES CERO PARA QUE LAS FUNCIONES SEAN ARMÓNICAS

i)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)(1)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)(1)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ii)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{-y}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)(0)-(-y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2xy-2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)(0)-x(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

iii)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y+\cos x\cosh y\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\cos x\operatorname{senh} y-\operatorname{sen} x\cosh y$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos x\cosh y+\operatorname{sen} x\operatorname{senh} y\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\cos x\operatorname{senh} y+\operatorname{sen} x\cosh y$$

iv)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-e^{-x}\cos y-e^{-y}\operatorname{sen} x\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{-x}\cos y-e^{-y}\cos x$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

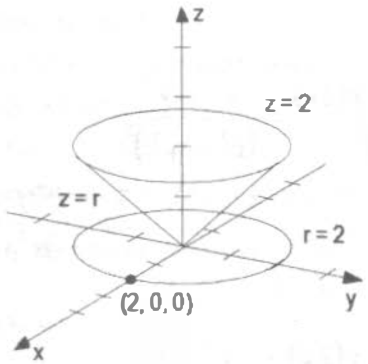
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-e^{-x}\operatorname{sen} y-e^{-y}\cos x\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x$$

CÁLCULO III

UN SÓLIDO ESTÁ LIMITADO POR EL CONO DE ECUACIÓN $z=\sqrt{x^2+y^2}$ Y EL PLANO $z = 2$. LA DENSIDAD EN CUALQUIER PUNTO $P(x,y,z)$ DEL SÓLIDO ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE SU DISTANCIA AL ORIGEN DE COORDENADAS. ENCONTRAR SU MASA.

SOLUCIÓN. EL SÓLIDO SE MUESTRA EN LA FIGURA. LA ECUACIÓN DEL CONO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS ES $z=r$, CON $r\geq 0$. Nótese que si $z=2$, ENTONCES $2=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 4=x^2+y^2$. POR LO TANTO, LA PARTE SUPERIOR DEL CONO PROYECTA EN EL PLANO xy EL CÍRCULO $x^2+y^2=4$ o $r=2$. LA DENSIDAD EN EL PUNTO (x,y,z) ESTÁ DADA POR:

$$\rho = k\left(x^2+y^2+z^2\right) \quad o \quad \rho = k\left(r^2+z^2\right)$$



ENTONCES LA MASA SE OBTIENE COMO:

$$M = \iiint_R \rho \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 k\left(r^2+z^2\right) r \, dz \, dr \, d\theta$$

SE RESUELVEN LAS INTEGRALES REITERADAS Y SE OBTIENE:

$$M = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[r^2 z+\frac{z^3}{3}\right]_r^2 r \, dr \, d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\left[\left(2r^2+\frac{8}{3}\right)-\left(r^3+\frac{r^3}{3}\right)\right] r \, dr \, d\theta$$

$$M = k\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(2r^3+\frac{8}{3}r-\frac{4}{3}r^4\right) dr \, d\theta = k\int_0^{2\pi}\left[2\frac{r^4}{4}+\frac{8}{3}\frac{r^2}{2}-\frac{4}{3}\frac{r^5}{5}\right]_0^2 d\theta$$

$$M = k\int_0^{2\pi}\frac{24}{5}\, d\theta = \frac{24}{5}k\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{48}{5}\pi\, k$$

CULTURA

ALGUNAS MÁXIMAS DE GIBRÁN JALIL GIBRÁN

"APENAS AYER ME SENTÍA UNA PARTÍCULA OSCILANDO SIN RITMO DENTRO DE LA ESFERA DE LA VIDA. AHORA SÉ QUE SOY ESA ESFERA, Y TODA LA VIDA PALPITA EN RÍTMICA FAENA EN MI INTERIOR."

"LA VERDADERA DIMENSIÓN DE HOMBRE NO REDIDE EN LO QUE LOGRA, SINO EN LO QUE ANSÍA LOGRAR."

"LA VOZ DE LA VIDA QUE HAY EN MÍ NO PUEDE LLEGAR AL OÍDO DE LA VIDA QUE HAY EN TI. PERO HABLEMOS PARA QUE NO NOS SINTAMOS SOLOS."

"¿CÓMO PODRÁS CANTAR, SI TU BOCA ESTÁ LLENA DE COMIDA? ¿CÓMO PODRÁ ALZARSE TU MANO PARA BENDECIR, SI ESTÁ LLENA DE ORO?"

"EL ENGAÑO TIENE ÉXITOS A VECES, PERO SIEMPRE TERMINA SUICIDÁNDOSE."

"PREFERIRÍA SER EL ÚLTIMO ENTRE LOS HOMBRES QUE SUEÑAN, Y QUE TIENEN EL DESEO DE REALIZAR SUS SUEÑOS, Y NO EL MÁS ENCUMBRADO DE TODOS, SIN SUEÑOS NI DESEOS."

"¡CUÁN ESTRECHA ES LA VISIÓN QUE EXALTA LA LABORIOSIDAD DE LA HORMIGA POR ENCIMA DEL CANTO DEL GRILLO!"

"LO EVIDENTE ES ESO QUE NO SE VE HASTA QUE ALGUIEN LO EXPRESA CON SENCILLEZ."

"UNA RAÍZ ES UNA FLOR QUE DESPRECIA LA FAMA."

"ES LA MENTE LA QUE SE PLIEGA A LAS LEYES QUE HEMOS HECHO, PERO NUNCA NUESTRO ESPÍRITU."

"LAS TORTUGAS PUEDEN DECIRNOS MÁS ACERCA DE LOS CAMINOS QUE LAS LIEBRES."

"SI TE SENTARAS EN UNA NUBE, NO VERÍAS LAS FRONTERAS ENTRE PAÍS Y PAÍS, NI LOS CERCOS DE PIEDRAS ENTRE GRANJA Y GRANJA. ES UNA LÁSTIMA QUE NO PUEDAS SENTARTE EN UNA NUBE..."

"ESPERO LIBERAR CON MIS ACCIONES CADA PENSAMIENTO QUE HE ENCARCELADO EN MIS PALABRAS."

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 30 17 DE SEPTIEMBRE DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA PUBLICACIÓN LES DESEA LO MEJOR EN SUS EXÁMENES FINALES Y DESPUÉS ESPERA QUE LOGREN UNA BUENA REINSCRIPCIÓN Y ¡A ESTUDIAR DURO!, PARA LOGRAR UNA BUENA CARRERA Y CON ELLA LAS GRANDES SATISFACCIONES DE LA VIDA. ESTE PAÍS NECESITA DE PROFESIONALES DE LA INGENIERÍA CREATIVOS, INNOVADORES Y CON UN ESPÍRITU LIBRE Y CRÍTICO, COMO SE FORMAN EN NUESTRA QUERIDA UNIVERSIDAD.

ÁLGEBRA

DETERMINAR EL TIPO DE ESTRUCTURA ALGEBRAICA QUE FORMAN EL CONJUNTO

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} ; \; para \quad \theta \in \Re \right\}$$

Y LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES. CONSIDERAR QUE SE CUMPLE QUE $(AB)C = A(BC)$

SOLUCIÓN. EN PRIMER LUGAR SE DETERMINARÁ SI EXISTE CERRADURA:

$$\text{SEAN} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \cdots (1)$$

COMO $\alpha + \beta \in \Re$, $AB \in M$; POR LO TANTO SÍ HAY CERRADURA.
LA ASOCIATIVIDAD SE CUMPLE DE ACUERDO CON EL ENUNCIADO.
AHORA SE VERÁ SI EXISTE ELEMENTO IDÉNTICO. ES EVIDENTE QUE SI $\theta = 0$, SE TIENE QUE

$$I = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\operatorname{sen} 0 \\ \operatorname{sen} 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

POR OTRA PARTE, ¿EXISTEN ELEMENTOS INVERSOS? LA RESPUESTA ES AFIRMATIVA YA QUE SI $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ENTONCES

$\det A = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$, POR LO QUE SE TRATA DE MATRICES NO SINGULARES Y CADA UNA DE ELLAS TIENE SU INVERSA.

ENTONCES LA ESTRUCTURA ES UN GRUPO. AHORA SE VERA SI ES ABELIANO. DE (1) SE TIENE QUE

$$AB = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Y POR OTRA PARTE

$$BA = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha & -\cos\beta\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta\cos\alpha + \cos\beta\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\operatorname{sen}(\beta+\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} \cdots (2)$$

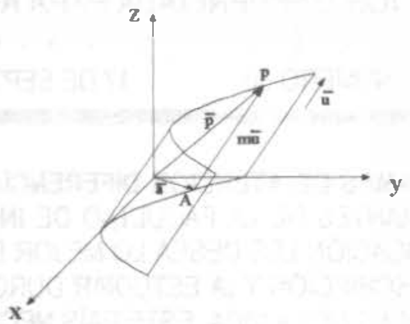
LAS MATRICES (1) y (2) SON EQUIVALENTES POR LA CONMUTATIVIDAD EN LA ADICIÓN DE LOS REALES Y, POR LO TANTO, LA ESTRUCTURA ES UN GRUPO ABELIANO.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

DETERMINAR UNA ECUACIÓN VECTORIAL, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO PARABÓLICO CUYA RECTA GENERATRIZ ES PARALELA AL VECTOR $\bar{u} = (0,2,3)$ Y QUE CONTIENE A LA PARÁBOLA 'C' DE CUACIONES:

$$C : \begin{cases} y = (x-3)^2 + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

RESOLUCIÓN. LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA PORCIÓN DEL CILINDRO PARABÓLICO ES LA SIGUIENTE:



UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA PARÁBOLA SON:

$$C : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t^2 + 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

SEA "$\bar{a}$" EL VECTOR DE POSICIÓN DE UNA PUNTO CUALQUIERA "A" DE LA PARÁBOLA, POR LO QUE:

$$\bar{a} = \left(3 + t, t^2 + 1, 0\right)$$

Y SEA $\bar{p}$ EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA "P" DEL CILINDRO. ENTONCES ES POSIBLE ESCRIBIR QUE:

$$\bar{p} = \bar{a} + m\,\bar{u} = \left(3 + t, t^2 + 1, 0\right) + m\,(0,2,3) = \left(3 + t, t^2 + 1 + 2m, 3m\right) \cdots (A)$$

LA ECUACIÓN (A) ES LA ECUACIÓN VECTORIAL OBTENIDA PARA EL CILINDRO, LA QUE SE PUEDE ESCRIBIR TAMBIÉN COMO:

$$\bar{p} = (3 + t)\,\hat{i} + \left(t^2 + 1 + 2m\right)\hat{j} + 3m\,\hat{k}$$

LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL CILINDRO, QUE SE OBTIENEN DE LA ECUACIÓN (A) SON LAS SIGUIENTES:

$$\begin{cases} x = 3 + t & \cdots \quad (1) \\ y = t^2 + 2m + 1 & ; \quad m, t \in \Re \cdots \quad (2) \\ z = 3m & \cdots \quad (3) \end{cases}$$

UNA FORMA DE OBTENER LA ECUACIÓN CARTESIANA DE LA SUPERFICIE ES ELIMINANDO LOS PARÁMETROS m y t DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS. ASÍ, SE OBTIENE QUE:

$$\textbf{de} \quad (1): \quad t = x - 3$$

$$\textbf{en} \quad (2): \quad y = (x-3)^2 + 2m + 1$$

$$\textbf{de} \quad (3): \quad m = \frac{z}{3}$$

$$\therefore \quad y = (x-3)^2 + \frac{2z}{3} + 1$$

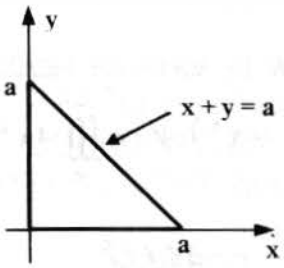
DE DONDE, LA ECUACIÓN DEL CILINDRO ES:

$$3y = 3(x-3)^2 + 2z + 3$$

CÁLCULO III

UNA LÁMINA TIENE LA FORMA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO ISÓSCELES CUYOS LADOS IGUALES MIDEN "a" UNIDADES. CALCULAR SU MASA Y EL CENTRO DE MASA SI LA DENSIDAD DE ÁREA EN CUALQUIER PUNTO "P" ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA DE "P" AL VÉRTICE OPUESTO A LA HIPOTENUSA.

SOLUCIÓN. RESULTA CONVENIENTE INTRODUCIR UN SISTEMA COORDENADO, DONDE EL VÉRTICE DEL TRIÁNGULO SEA EL ORIGEN DE COORDENADAS Y LA HIPOTENUSA ESTÉ SOBRE LA RECTA DE ECUACIÓN $x + y = a$. CONSIDÉRESE ENTONCES LA SIGUIENTE FIGURA:



SI SE DENOTA COMO " k " A LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD, ENTONCES LA DENSIDAD SE EXPRESA COMO $\rho(x,y)=k\left(x^2+y^2\right)$ Y LA MASA SE OBTIENE MEDIANTE LA INTEGRAL DOBLE

$$M=\iint_R k\left(x^2+y^2\right)dA=\int_0^a\int_0^{a-x}k\left(x^2+y^2\right)dy\,dx$$

$$M=\int_0^a\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x}dx=k\int_0^a\left[x^2(a-x)+\frac{(a-x)^3}{3}\right]dx$$

$$M=k\int_0^a\left(ax^2-x^3+\frac{a^3}{3}-\frac{3a^2x}{3}+\frac{3ax^2}{3}-\frac{x^3}{3}\right)dx=k\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{a^3x}{3}-\frac{a^2x^2}{2}+\frac{ax^3}{3}-\frac{x^4}{12}\right]_0^a$$

$$M=k\left(\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{2}+\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{12}\right)=\frac{ka^4}{6}$$

PARA CALCULAR EL MOMENTO ESTÁTICO CON RESPECTO AL EJE " y ", SE PROCEDE MEDIANTE LA SIGUIENTE INTEGRAL DOBLE:

$$M_y=\iint_R x\,k\left(x^2+y^2\right)dA=\int_0^a\int_0^{a-x}x\,k\left(x^2+y^2\right)dy\,dx=k\int_0^a\int_0^{a-x}\left(x^3+xy^2\right)dy\,dx$$

$$M_y=k\int_0^a\left[x^3y+\frac{xy^3}{3}\right]_0^{a-x}dx=k\int_0^a\left[x^3(a-x)+\frac{x(a-x)^3}{3}\right]dx$$

$$M_y=k\int_0^a\left(ax^3-x^4+\frac{a^3x}{3}-\frac{3a^2x^2}{3}+\frac{3ax^3}{3}-\frac{x^4}{3}\right)dx$$

$$M_y=k\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{a^3x^2}{6}-\frac{a^2x^3}{3}+\frac{ax^4}{4}-\frac{x^5}{15}\right]_0^a=k\left(\frac{a^5}{4}-\frac{a^5}{5}+\frac{a^5}{6}-\frac{a^5}{3}+\frac{a^5}{4}-\frac{a^5}{15}\right)=\frac{ka^5}{15}$$

ENTONCES LA ABSCISA DEL CENTRO DE MASA ESTÁ DADA POR: $\bar{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{\frac{ka^5}{15}}{\frac{ka^4}{6}}=\dfrac{2}{5}a$. Y, POR SIMETRÍA, TANTO DE LA REGIÓN COMO DE LA DISTRIBUCIÓN DE DENSIDAD, LA ORDENADA TIENE EL MISMO VALOR. LUEGO, EL CENTRO DE MASA ES: $CM\left(\frac{2}{5}a\,,\,\frac{2}{5}a\right)$

CÁLCULO III

SEA "Q" LA REGIÓN LIMITADA POR EL CILINDRO $z=4-x^2$, EL PLANO $y+z=5$ Y LOS PLANOS " xy " y " xz " . Y SEA "S" LA SUPERFICIE QUE ENVUELVE A LA REGIÓN "Q". SI SE TIENE EL CAMPO VECTORIAL

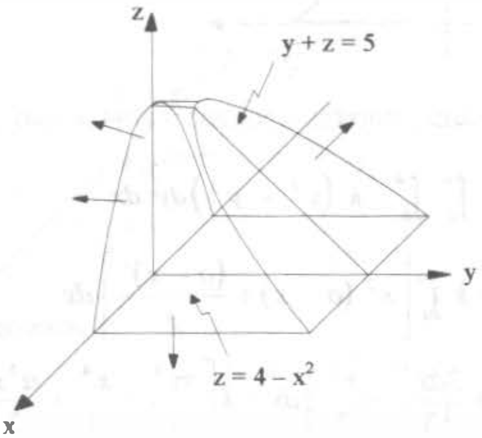
$$\bar{F}(x,y,z)=\left(x^3+\operatorname{sen} z\right)\hat{i}+\left(x^2y+\cos z\right)\hat{j}+e^{x^2+y^2}\hat{k}\ ,$$

CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE $\iint_S \bar{F}\cdot\bar{n}\,dS$.

SOLUCIÓN. COMO SE OBSERVA EN LA FIGURA, LA REGIÓN "Q" TIENE MUCHOS VECTORES NORMALES UNITARIOS EXTERNOS, POR LO QUE SERÍA UN TRABAJO SUMAMENTE COMPLICADO EVALUAR LA INTEGRAL DE SUPERFICIE PEDIDA, DE FORMA DIRECTA. SIN

EMBARGO, SI SE USA EL TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA, QUE SE EXPRESA MEDIANTE LA IDENTIDAD: $\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,dS=\iiint_Q \nabla\cdot\overline{F}\,dV$, DADO QUE EL CAMPO VECTORIAL TIENE DERIVADAS PARCIALES CONTINUAS EN LA REGIÓN "Q", ENTONCES SE TIENE QUE EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE PEDIDO EQUIVALE AL CÁLCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE SIGUIENTE:

$$\iiint_Q \left(3x^2+x^2\right)dV=\iiint_q 4x^2\,dV$$



ESTA INTEGRAL TRIPLE EQUIVALE A:

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{4-X^2}\int_0^{5-Z}4x^2\,dy\,dz\,dx=\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\left[4x^2y\right]_0^{5-z}dz\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}4x^2(5-z)\,dz\,dx=\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\left(20x^2-4x^2z\right)dz\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[20x^2z-2x^2z^2\right]_0^{4-x^2}dx=\int_{-2}^{2}\left[20x^2\left(4-x^2\right)-2x^2\left(4-x^2\right)^2\right]dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(80x^2-20x^4-32x^2+16x^4-2x^6\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(48x^2-4x^4-2x^6\right)dx$$

$$=\left[16x^3-\frac{4x^5}{5}-\frac{2x^7}{7}\right]_{-2}^{2}=\left(128-\frac{128}{5}-\frac{256}{7}\right)-\left(-128+\frac{128}{5}+\frac{256}{7}\right)=\frac{4608}{35}\approx 131.7$$

POR LO TANTO SE TIENE QUE

$$\iint_S \overline{F}\cdot\overline{n}\,dS\approx 131.7$$

CULTURA

SOY TU YO

HAY UNA REVELADORA HISTORIA ACERCA DE UN MONJE QUE VIVÍA EN EL DESIERTO EGIPCIO Y AL QUE LAS TENTACIONES ATORMENTARON DE TAL MODO QUE YA NO PUDO SOPORTARLO. DE MANERA QUE DECIDIÓ ABANDONAR EL CENOBIO Y MARCHARSE A OTRA PARTE.

CUANDO ESTABA CALZÁNDOSE LAS SANDALIAS PARA LLEVAR A EFECTO SU DECISIÓN, VIO, CERCA DE DONDE ÉL ESTABA, A OTRO MONJE QUE TAMBIÉN ESTABA PONIÉNDOSE LAS SANDALIAS.

"¿QUIÉN ERES TÚ?", PREGUNTÓ EL DESCONOCIDO.

"SOY TU YO", FUE LA RESPUESTA. "SI ES POR MI CAUSA POR LO QUE VAS A ABANDONAR ESTE LUGAR, DEBO HACERTE SABER QUE, VAYAS A DONDE VAYAS, YO IRÉ CONTIGO".

ANTHONY DE MELLO

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 31 2 DE NOVIEMBRE DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA PUBLICACIÓN LES DA LA MÁS CORDIAL BIENVENIDA AL SEMESTRE 2002-1, EN ESPECIAL A LOS ALUMNOS DE PRIMER INGRESO DE LA GENERACIÓN 2002. Y AHORA, ¡A ESTUDIAR CON RESPONSABILIDAD, ENTUSIASMO COMPROMISO Y ESPÍRITU UNIVERSITARIO!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

DETERMINAR EL DOMINIO DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES.

$i)\ f(x)=3x^2-5x+6$; $ii)\ y=\dfrac{x-2}{x+2}$; $iii)\ f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$; $iv)\ y=+\sqrt{5-x}$; $v)\ f(x)=\dfrac{1}{5}\sqrt{225-9x^2}$

$vi)\ y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$; $vii)\ f(x)=\dfrac{5}{x^2-x-12}$; $viii)\ y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$; $ix)\ f(x)=\begin{cases}-x & si\quad x<0\\ 0 & si\quad x=0\\ x & si\quad x>0\end{cases}$; $x)\ y=\sqrt{-x}$

SOLUCIÓN

$i)\ f(x)=3x^2-5x+6$. SE TRATA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL Y COMO SE OBSERVA PARA TODO VALOR REAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x", LA FUNCIÓN ES REAL. POR LO TANTO SU DOMINIO ES $D_f=\Re$

$ii)\ y=\dfrac{x-2}{x+2}$. PARA ESTA FUNCIÓN LGEBRAICA, EL ÚNICO VALOR QUE NO HARÍA REAL A LA FUNCIÓN ES $x=-2$ YA QUE SE TENDRÍA UNA DIVISIÓN ENTRE "CERO". LUEGO, EL DOMINIO ES $D_f=\Re-\{-2\}$ EN ESTE VALOR SE PRESENTA UNA ASÍNTOTA VERTICAL CUYA ECUACIÓN ES $x=-2$.

$iii)\ f(x)=\dfrac{x^3-x^2}{x-1}$ PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, LA VARIABLE INDEPENDIENTE "x" NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE "1" POR LO QUE SU DOMINIO ES $D_f=\Re-\{1\}$ SIN EMBARGO, EN ESTE VALOR NO SE PRESENTA UNA ASÍNTOTA VERTICAL, YA QUE SI SE FACTORIZA LA EXPRESIÓN QUE DEFINE A LA FUNCIÓN SE TIENE QUE $\dfrac{x^3-x^2}{x-1}=\dfrac{x^2(x-1)}{x-1}=x^2$ LUEGO LA FUNCIÓN QUE HAY QUE GRAFICAR ES LA PARÁBOLA $y=x^2$, PERO EN EL VALOR CORRESPONDIENTE A $x=1$, ES DECIR, EN EL PUNTO $(1,1)$ SE COLOCARÁ UN HUECO O UN "VACÍO" QUE INDICA QUE LA FUNCIÓN NO TIENE VALOR AHÍ.

$iv)\ y=+\sqrt{5-x}$. EN ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, EL RADICANDO TIENE QUE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO, Y DE AHÍ SE PARTE PARA OBTENER SU DOMINIO. ASÍ, SE TIENE QUE

$$5-x\ge 0\quad\Rightarrow\quad -x\ge -5\quad\Rightarrow\quad x\le 5$$

POR LO TANTO, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f=\{x\,|-\infty<x\le 5;\ x\in\Re\}=(-\infty,5]$ MEDIANTE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE PUEDE TAMBIÉN DETERMINAR EL DOMINIO, DEFINIENDO DE QUÉ CÓNICA SE TRATA. ASÍ, SE TIENE QUE

$$y=+\sqrt{5-x}\quad\Rightarrow\quad y^2=5-x\quad\Rightarrow\quad y^2=-(x-5)$$

QUE ES UNA MEDIA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN $(5,0)$ CON EJE DE SIMETRÍA EL EJE "x" Y, POR EL SIGNO NEGATIVO, ABRE HACIA LA IZQUIERDA, LUEGO SÓLO TIENE VALORES POSITIVOS DE "y" O EL VALOR CERO

v) $f(x)=-\frac{1}{5}\sqrt{225-9x^2}$ COMO EN EL CASO ANTERIOR, AQUÍ SE PUEDE OBTENER EL DOMINIO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE UNA DESIGUELADAD O A TRAVÉS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. CON LA DESIGUALDAD SE TIENE QUE $225-9x^2\geq 0 \Rightarrow (15+3x)(15-3x)\geq 0$. AQUÍ SE ESTUDIAN DOS POSIBILIDADES: LOS DOS FACTORES POSITIVOS O LOS DOS NEGATIVOS. DE DONDE

PRIMERA POSIBILIDAD: $\begin{cases}15+3x\geq 0 \Rightarrow x\geq -5\\ 15-3x\geq 0 \Rightarrow x\leq 5\end{cases}$ SEGUNDA POSIBILIDAD: $\begin{cases}15+3x\leq 0 \Rightarrow x\leq -5\\ 15-3x\leq 0 \Rightarrow x\geq 5\end{cases}$

DE ESTOS RESULTADOS SE VE QUE LA PRIMERA POSIBLIDAD ES LA QUE POR LA INTERSECCIÓN DE LOS CONJUNTOS, PROPORCIONA LOS VALORES QUE PUEDE TOMAR LA VARIABLE INDEPENDIENTE " x " DE TAL FORMA QUE LA VARIABLE DEPENDIENTE " y " SEA REAL. ASÍ, EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN ES $D_f=[-5,5]$ CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE HACE LO SIGUIENTE:

$$y=-\frac{1}{5}\sqrt{225-9x^2} \Rightarrow y^2=\frac{1}{25}(225-9x^2) \Rightarrow 25y^2=225-9x^2 \Rightarrow 9x^2+25y^2=225 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

QUE ES UNA MEDIA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y SEMIEJES MAYOR Y MENOR CON VALORES 5 y 3 RESPECTIVAMENTE. LUEGO, EL DOMINIO ES, EVIDENTEMENTE, EL ANTES OBTENIDO. EL SIGNO NEGATIVO DE LA REGLA DE CORRESPONDENCIA HABLARÍA DE LA PARTE INFERIOR DE LA CÓNICA.

vi) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$ PARA ESTA FUNCIÓN ALGEBRAICA, EL DENOMINADOR NO PUEDE VALER CERO, POR LO QUE LA " x " NO PUEDE TOMAR EL VALOR DE " 1 " ADEMÁS, EL RADICANDO DEL NUMERADOR TIENE QUE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO, DE DONDE $x+3\geq 0 \Rightarrow x\geq -3$ POR LO TANTO EL DOMINIO DE LA FUCNIÓN ES $D_f=[-3,\infty)-\{1\}=\{x \mid x\geq -3;\ x\neq 1;\ x\in\Re\}$

vii) $f(x)=\frac{5}{x^2-x-12}$ EN ESTA FUNCIÓN SE DEBEN BUSCAR LOS VALORES DE " x " QUE HACEN CERO EL DENOMINADOR. ASÍ, MEDIANTE UNA FACTORIZACIÓN SE LLEGA A: $x^2-x-12=0 \Rightarrow (x+3)(x-4)=0$ LUEGO EL DOMINO DE LA FUNCIÓNES $D_f=\Re-\{-3,4\}$ Y EN ESOS VALORES, -3 y 4, QUE ANULAN EL DENOMINADOR, SE PRESENTAN ASÍNTOTAS VERTICALES.

viii) $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$. COMO EN CASOS ANTERIORES, SI SE RESUELVE LA DESIGUALDAD QUE SE DERIVA DEL HECHO DE QUE EL RADICANDO DEBE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO, SE LLEGA AL DOMINIO DE LA FUNCIÓN. ASÍ $x^2-4\geq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2)\geq 0$

PRIMERA POSIBILIDAD: $\begin{cases}x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2\\ x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2\end{cases}$ SEGUNDA POSIBILIDAD: $\begin{cases}x+2\leq 0 \Rightarrow x\leq -2\\ x-2\leq 0 \Rightarrow x\leq 2\end{cases}$

AQUÍ, EN LAS DOS POSIBILIDADES HAY INTERSECCIÓN Y SU UNIÓN ES LA SOLUCIÓN. ENTONCES $D_f=(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$, QUE TAMBIÉN SE PUDE ESCRIBIR COMO $D_f=\Re-(-2,2)$. Y CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA, SE TIENE QUE

$$y=-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4} \Rightarrow y^2=\frac{1}{4}(x^2-4) \Rightarrow 4y^2=x^2-4 \Rightarrow x^2-4y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$$

SE TRATA DE UNA HIPÉRBOLA CON EL EJE " x " COMO EJE DE SIMETRÍA Y SU SEMIEJE TRANSVERSO IGUAL A " 2 ", POR LO QUE LA VARIABLE " x " TOMA LOS VALORES OBTENIDOS EN EL DOMINIO DE LA FUNCIÓN.

ix) $f(x)=\begin{cases}-x & si\quad x<0\\ 0 & si\quad x=0\\ x & si\quad x>0\end{cases}$. ESTA FUNCIÓN TIENE TRES REGLAS DE CORRESPONDENCIA, ES DECIR QUE ESTÁ DEFINIDA EN TRES INTERVALOS. SE LE CONOCE COMO FUNCIÓN "VALOR ABSOLUTO" Y DE ACUERDO A LOS INTERVALOS SE VE QUE SU DOMINO SON TODOS LOS VALORES REALES, ES DECIR, $D_f=\Re$

x) $y=\sqrt{-x}$. SI SE PROCEDE COMO YA SE HA VISTO CON EL RADICANDO QUE DEBE SER POSITIVO O CERO, SE TIENE QUE: $-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$ LUEGO EL DOMINIO ES $D_f=(-\infty,0]$ Y CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA SE TIENE QUE: $y=\sqrt{-x} \Rightarrow y^2=-x$, QUE ES UNA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE " x " POR EL SIGNO, ABRE HACIA LA IZQUIERDA LO QUE ES CONCRUENTE CON EL DOMINIO OBTENIDO.

ÁLGEBRA

SEA " a " UN NÚMERO REAL NO NULO, TAL QUE $a>-1$ DEMOSTRAR POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA QUE $(1+a)^n>1+na$ PARA TODO ENTERO $n\geq 2$

SOLUCIÓN. PARA CADA ENTERO POSITIVO n, SEA P_n LA DESIGUALDAD $(1+a)^n>1+na$ NÓTESE QUE P_1 ES FALSO, PUESTO QU

$(1+a)^1 = 1+(1)(a)$. SIN EMBARGO, SE PUEDE DEMOSTRAR QUE P_n ES CIERTO PARA $n \geq 2$ MEDIANTE EL MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA, COMO SIGUE:

PRIMERO SE OBSERVA QUE $(1+a)^2 = 1+2a+a^2$. COMO $a \neq 0$ SE TIENE QUE $a^2 > 0$ Y POR LO TANTO $1+2a+a^2 > 1+2a \Rightarrow (1+a)^2 > 1+2a$ Y POR LO TANTO P_2 ES VERDADERA.

SUPÓNGASE QUE P_K ES VERDADERA PARA $k \geq 2$. ENTONCES, LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN ES

$$(1+a)^k > 1+ka$$

SE DESEA DEMOSTRAR QUE P_{k+1} ES VERDADERA, ES DECIR, QUE

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$$

COMO $a > -1$ SE TIENE QUE $a+1 > 0$, Y POR LO TANTO, MULTIPLICAR AMBOS LADOS DE LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN POR $1+a$ NO CAMBIARÁ EL SIGNO DE LA DESIGUALDAD. ASÍ,

$$(1+a)^k(1+a) > (1+ka)(1+a)$$

QUE SE PUEDE ESCRIBIR COMO $(1+a)^{k+1} > 1+ka+a+ka^2$ O COMO $(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a+ka^2$

COMO $ka^2 > 0$, SE TIENE QUE $1+(k+1)a+ka^2 > 1+(k+1)a$ Y POR LO TANTO

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a$$

DE ESTA FORMA, P_{k+1} ES VERDADERA Y LA DEMOSTRACIÓN ESTÁ COMPLETA.

ÁLGEBRA

RESOLVER LA SIGUIENTE DESIGUALDAD: $\dfrac{x+1}{x+3} \leq 2$

SOLUCIÓN. LAS SIGUIENTES DESIGUALDADES SON EQUIVALENTES:

$$\frac{x+1}{x+3} \leq 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x+1-2x-6}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x-5}{x+3} \leq 0 \Rightarrow \frac{x+5}{x+3} \geq 0$$

EL NUMERADOR Y EL DENOMINADOR DEL PRIMER LADO DE LA ÚLTIMA DESIGUALDAD TIENEN COMO RAÍCES A -5 y -3 RESPECTIVAMENTE. NÓTESE TAMBIÉN QUE -5 ES SOLUCIÓN DE ESTA DESIGUALDAD.

EN LA RECTA NUMÉRICA, CON LOS DOS VALORES ANTERIORES SE DETERMINAN LOS SIGUIENTES INTERVALOS

$$(-\infty,-5),\ (-5,-3),\ (-3,\infty)$$

COMO $\dfrac{x+5}{x+3}$ ES UN COCIENTE DE DOS POLINOMIOS, SU VALOR SIEMPRE ES POSITIVO O SIEMPRE ES NEGATIVO EN TODO UN INTERVALO. SE PUEDEN UTILIZAR VALORES DE PRUEBA PARA VER LOS SIGNOS Y SE CONSTRUYE LA SIGUIENTE TABLA:

INTERVALO	VALOR DE PRUEBA	SIGNO DE $x+5$	SIGNO DE $x+3$	SIGNO DE $\dfrac{x+5}{x+3}$
$(-\infty,-5)$	-6	NEGATIVO	NEGATIVO	POSITIVO
$(-5,-3)$	-4	POSITIVO	NEGATIVO	NEGATIVO
$(-3,\infty)$	0	POSITIVO	POSITIVO	POSITIVO

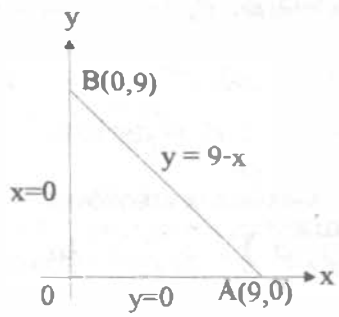
A PARTIR DE LA TABLA SE OBSERVA QUE LAS SOLUCION PARA QUE EL COCIENTE SEA POSITIVO ES $(-\infty,-5) \cup (-3,\infty)$ Y, POR EL SIGNO "MÁS MENOS" DE LA DESIGUALDAD, LA SOLUCIÓN DE ÉSTA ESTA DADA FINALMENTE POR:

$x \in (-\infty,-5] \cup (-3,\infty)$

CÁLCULO III

DETERMINAR LOS VALORES MÁXIMO Y MÍNIMO ABSOLUTOS DE LA FUNCIÓN $f(x,y) = 2+2x+2y-x^2-y^2$ EN LA PLACA TRIANGULAR DEL PRIMER CUADRANTE LIMITADA POR LAS RECTAS $x=0$, $y=0$, $y=9-x$.

SOLUCIÓN. LA PLACA SE PRESENTA EN LA SIGUIENTE FIGURA:



SE OBTIENEN LAS DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN QUE SON $f_x = 2-2x$ y $f_y = 2-2y$ SE IGUALAN A CERO Y $2-2x=0 \;\Rightarrow\; x=1$; $2-2y=0 \;\Rightarrow\; y=1$ POR LO QUE SE TIENE UN PUNTO CRÍTICO QUE ES $(1,1,4)$ AHORA SE OBTIENEN LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES Y LA MIXTA Y SE LLEGA A:

$$f_{xx} = -2 \quad ; \quad f_{yy} = -2 \quad y \quad f_{xy} = 0$$

ENTONCES $g(x,y) = f_{xx}\,f_{yy} - f_{xy}^{\;2} = (-2)(-2)-(0)^2 = 4 > 0$ LUEGO, PARA EL PUNTO $(1,1)$, $g(1,1) = 4 > 0$ Y ADEMÁS SE VE QUE $f_{xx}(1,1) = -2 < 0$ o $f_{yy}(1,1) = -2 < 0$ POR LO TANTO EN ESTE PUNTO SE PRESENTA UN MÁXIMO RELATIVO.

AHORA CONSIDÉRESE TODA LA FRONTERA DE LA PLACA

EN EL SEGMENTO "OA". $y=0$, LUEGO LA FUNCIÓN ES $f(x,0) = 2+2x-x^2$ QUE PUEDE CONSIDERARSE COMO UNA FUNCIÓN DE "x" DEFINIDA EN EL INTERVALO CERRADO $0 \le x \le 9$. EN LOS EXTREMOS, LA FUNCIÓN TIENE LOS SIGUIENTES VALORES.

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0,0)=2 \quad ; \quad x=9 \;\Rightarrow\; f(9,0)=-61$$

Y MEDIANTE LA DERIVADA SE TIENE QUE $f'(x,0) = 2-2x$; $2-2x=0 \;\Rightarrow\; x=1 \;\Rightarrow\; f(1,0)=3$

EN EL SEGMENTO "OB" $x=0$, LUEGO LA FUNCIÓN ES $f(0,y) = 2+2y-y^2$ POR LA SIMETRÍA DE f EN "x" y "y", EN ESTE SEGMENTO LAS POSIBILIDADES SON LAS MISMAS QUE EN EL SEGMENTO ANTERIOR, ESTO ES,

$$f(0,0)=2 \quad ; \quad f(0,9)=-61 \quad ; \quad f(0,1)=3$$

PARA EL SEGMENTO "AB" YA SE HAN VISTO LOS EXTREMOS, POR LO QUE SÓLO QUEDA VER EL INTERIOR DEL MISMO CON $y = 9-x$ SE TIENE QUE $f(x,y) = 2+2x+2(9-x)-x^2-(9-x)^2 = -61+18x-2x^2$ COMO SE TRATA DE UNA FUNCIÓN CON UN ARGUMENTO, SE DERIVA Y SE OBTIENE:

$$f' = 18-4x \quad ; \quad 18-4x=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{9}{2} \;\Rightarrow\; y = 9-\frac{9}{2} = \frac{9}{2} \;\Rightarrow\; f(x,y) = -61+18\left(\frac{9}{2}\right)-2\left(\frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{41}{2}$$

CONCLUSIÓN DE TODOS LOS VALORES OBTENIDOS, QUE SON $4,\; 2,\; -61,\; 3,\; -\frac{41}{2}$ SE CONCLUYE QUE EL MÁXIMO ABSOLUTO ES 4, VALOR QUE SE ALCANZA EN EL PUNTO $(1,1)$ Y EL MÍNIMO ABSOLUTO ES -61, EN LOS PUNTOS $(0,9)$ y $(9,0)$

TUTORÍA

A LOS ALUMNOS DE NUEVO INGRESO

AHORA QUE ESTÁN LLEGANDO A LA FACULTAD QUEREMOS DESEARLES MUCHO ÉXITO EN ESTA NUEVA ETAPA DE SU VIDA. DESEAMOS ATRAER SU ATENCIÓN PARA SUGERIRLES QUE DE AHORA EN ADELANTE LA AUTOMOTIVACIÓN JUEGA UN PAPEL IMPORTANTE EN SU TRAYECTORIA ACADÉMICA. SE PREGUNTARÁN ¿CÓMO LOGRARLO? PUES BIEN; PARA QUE SEAN CONSTANTES EN LA REALIZACIÓN DE SUS OBJETIVOS Y LA BÚSQUEDA DE SUS METAS, ES IMPORTANTE QUE CONOZCAN QUE EXISTEN DOS FORMAS DE MOTIVACIÓN: UNA ES EL ***MIEDO*** (ENERGÍA NEGATIVA) QUE SEGURAMENTE YA LO HABRÁN EXPERIMENTADO EN ALGUNA O MUCHAS OCASIONES. EL MIEDO SE HA DE ENFRENTAR PRIMERO RECONOCIÉNDOLO Y DESPUÉS HACIÉNDOLE FRENTE Y OBTENER DE ÉL LO POSITIVO. RECUERDEN QUE NO EXISTEN FRACASOS, SÓLO TROPIEZOS DE LOS CUALES SE HAN DE LEVANTAR Y HABRÁN GANADO EXPERIENCIAS. LA OTRA FORMA DE MOTIVACIÓN ES EL ***DESEO*** (ENERGÍA POSITIVA) QUE LOS LLEVARÁ A LA REALIZACIÓN DE LAS METAS QUE SE PROPONGAN. DESPUÉS DE HABER EXPERIMENTADO CIERTOS LOGROS, ENCONTRARÁN MÚLTIPLES SATISFACCIONES. ¡TIENEN EN SUS MANOS SU PROPIO MOTOR! LES DESEAMOS QUE SU ESTANCIA EN LA FACULTAD ESTÉ LLENA DE DESEOS Y ÉXITOS, Y QUE LOGREN ESA REALIZACIÓN PLENA QUE LOS CONDUZCA A UN FUTURO LLENO DE SATISFACCIONES, TANTO EN SU QUEHACER PROFESIONAL COMO EN SU CRECIMIENTO PERSONAL.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2001 NÚMERO 32 17 DE NOVIEMBRE DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **LA COPADI LES DESEA FELICIDAD, PAZ Y AMOR EN ESTAS FIESTAS DE FIN DE AÑO Y UN 2002 CON LAS COSAS MÁS BELLAS DE LA VIDA.**

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

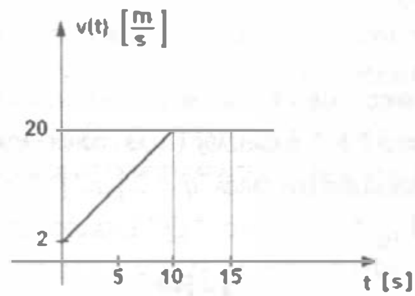
FÍSICA EXPERIMENTAL

LA GRÁFICA MUESTRA LA VARIACIÓN DE LA RAPIDEZ DE UN MÓVIL QUE SE DESPLAZA EN LÍNEA RECTA EN UN INTERVALO DE TIEMPO. DETERMINAR:

A) LA DISTANCIA QUE HA RECORRIDO A LOS 8 SEGUNDOS

B) LA ACELARACIÓN DEL MÓVIL A LOS 5 SEGUNDOS

C) LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL A LOS 12 SEGUNDOS



SOLUCIÓN. DE LA GRÁFICA:

A) $v(0)=v_0=2\left[\frac{m}{s}\right]$ COMO $v(t)=m\,t+v_0$ PARA $0\le t\le 10\ [s]$, ENTONCES, AL CALCULAR LA PENDIENTE, SE TIENE QUE

$m=\dfrac{(20-2)\left[\frac{m}{s}\right]}{(10-0)\,[s]}=1.8\left[\frac{m}{s^2}\right]$; POR LO TANTO $v(t)=1.8\left[\frac{m}{s^2}\right]t\,[s]+2\left[\frac{m}{s}\right]$; ADEMÁS SE SABE QUE $v=\dfrac{dr}{dt}$ DE DONDE

$r(t)=\int v\,dt=\int(1.8\,t+2)\,dt$; $r(t)=\int 1.8\,t\,dt+\int 2\,dt=1.8\int t\,dt+2\int dt$ SI SE INTEGRA SE TIENE QUE: $r(t)=0.9\,t^2+2\,t+r_0$.

PERO $r_0=0$, LUEGO $r(t)=0.9\,t^2+2\,t$ COMO SE QUIERE SABER LA DISTANCIA QUE HA RECORRIDO A LOS 8 SEGUNDOS, ENTONCES

$$r(t=8\,[s])=0.9\,(8)^2+2\,(8)=73.6\,[m]$$

B) DEL MODELO MATEMÁTICO $v(t)=m\,t+v_0$, OBTENIDO EN EL INCISO ENTERIOR, SE TIENE QUE $a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}[m\,t+v_0]=m$. POR LO TANTO, EN EL INTERVALO $0\le t\le 10\ [s]$, LA ACELERACIÓN ES $a=1.8\left[\frac{m}{s^2}\right]$ POR LO QUE $a\,(t=5\,[s])=a\,(5)=1.8\,\dfrac{m}{s^2}$

C) EN EL INTERVALO $10\le t\le 15\,[s]$ SE TIENE QUE $v\,(t)=20\left[\frac{m}{s}\right]$ (CONSTANTE)

COMO $a=\dfrac{dv}{dt}$, ENTONCES $a=\dfrac{d}{dt}[20]=0$ Y POR LO TANTO $a\,(t=12\,[s])=a\,(12)=0\left[\frac{m}{s^2}\right]$

QUÍMICA

ACOMODAR LAS ESPECIES SIGUIENTES EN ORDEN CRECIENTE DE RADIO ATÓMICO O IÓNICO.

$$Mg^{+} \;;\; Al^{2+} \;;\; Si^{3+} \;;\; Na$$

RESOLUCIÓN. SE PUEDE ARMAR UNA TABLA PARA VISUALIZAR CON CLARIDAD LAS CARACTERÍSTICAS DE CADA ESPECIE:

ESPECIE	NÚMERO DE PROTONES	NÚMERO DE ELECTRONES
Na	11	11
Mg^{+}	12	11
Al^{2+}	13	11
Si^{3+}	14	11

SEGÚN SE OBSERVA, TODAS LAS ESPECIES SON ISOELECTRÓNICAS, ES DECIR, TIENEN LA MISMA CONFIGURACIÓN ELECTRÓNICA = $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$; SIN EMBARGO, EL NÚMERO DE PROTONES AUMENTA PROGRESIVAMENTE, LO CUAL PROVOCA MAYOR INFLUENCIA DEL NÚCLEO HACIA LA NUBE ELECTRÓNICA, EMPEQUEÑECIÉNDOLA A MEDIDA QUE AUMENTA EL NÚMERO ATÓMICO. CON BASE EN ESTO, EL ACOMODO EN ORDEN CRECIENTE DE RADIO QUEDA ASÍ:

$$Si^{3+} < Al^{2+} < Mg^{+} < Na$$

COMENTARIO FINAL:

SE SABE QUE AL MOVERNOS HORIZONTALMENTE POR CUALQUIER PERÍODO DE LA TABLA PERIÓDICA, LA CARGA NUCLEAR EFECTIVA AUMENTA EN TANTO QUE EL NÚMERO CUÁNTICO PRINCIPAL NO VARÍA. AL AUMENTAR LA CARGA NUCLEAR EFECTIVA (DE IZQUIERDA A DERECHA) LOS ELECTRONES SON ATRAÍDOS MÁS CERCA DEL NÚCLEO; ES POR ESTO QUE EL RADIO DISMINUYE CONFORME NOS MOVEMOS DE IZQUIERDA A DERECHA.

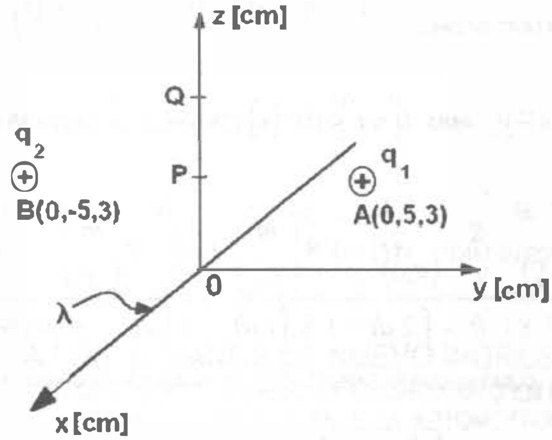
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

SE TIENE UNA LÍNEA CON $\lambda = 50\left[\frac{pC}{m}\right]$ UNIFORMEMENTE CARGADA Y LAS CARGAS PUNTUALES q_1 y q_2, DE $10[pC]$ CADA UNA, LOCALIZADAS EN LOS PUNTOS $(0,5,3)$ y $(0,-5,3)$ RESPECTIVAMENTE, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA.

A) DETERMINAR EL CAMPO ELÉCTRICO EN EL PUNTO "P" LOCALIZADO EN LAS COORDENADAS $P(0,0,3)[cm]$.

B) CALCULAR LA FUERZA ELÉCTRICA QUE EXPERIMENTARÍA UNA CARGA $q = 2[\mu C]$, SI ÉSTA SE LOCALIZARA EN EL PUNTO "P".

C) CALCULAR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL "V_{PQ}", SI EL PUNTO "Q" ESTÁ LOCALIZADO EN LAS COORDENADAS $Q(0,0,6)[cm]$.



RESOLUCIÓN.

A) SI SE APLICA EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, SE PLANTEA QUE: $\vec{E}_p = \vec{E}_{p\lambda} + \vec{E}_{p1} + \vec{E}_{p2}$

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2|\lambda|}{r_{OP}}\hat{r}_{OP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2_{AP}}\hat{r}_{AP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2_{BP}}\hat{r}_{BP}$$

$$\vec{E}_p = 9\times10^9\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\left[\frac{2(50\times10^{-12})\left[\frac{C}{m}\right]}{0.03\,[m]}\hat{k} - \frac{10\times10^{-12}\,[C]}{(0.05)^2\,[m^2]}\hat{j} + \frac{10\times10^{-12}\,[C]}{(0.05)^2\,[m^2]}\hat{j}\right] \Rightarrow \vec{E}_p = 30\,\hat{k}\left[\frac{N}{C}\right]$$

B) DE LA DEFINICIÓN DE CAMPO ELÉCTRICO:

$$\vec{E}_p = \frac{\vec{F}_p}{q} \; ; \; \vec{F}_p = q\,\vec{E}_p \; ; \; \vec{F}_p = 2\times 10^{-6}\,[C]\,30\,\hat{k}\left[\frac{N}{C}\right] = 60\,\hat{k}\,[\mu N]$$

C) MEDIANTE EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: $V_{PQ} = V_{PQ\lambda} + V_{PQ1} + V_{PQ2}$

$$V_{PQ} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,2\lambda\, Ln\,\frac{r_{OQ}}{r_{OP}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q_1\left[\frac{1}{r_{AP}} - \frac{1}{r_{AQ}}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q_2\left[\frac{1}{r_{BP}} - \frac{1}{r_{BQ}}\right]$$

$$V_{PQ} = 9\times 10^9\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\left[2\left(50\times 10^{-12}\right)\left[\frac{C}{m}\right] Ln\,\frac{6}{3} + 10\times 10^{-12}\left[\frac{C}{m}\right]\left[\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.0583} + \frac{1}{0.5} - \frac{1}{0.0583}\right]\right]$$

$$V_{PQ} = (0.6238 + 0.5125)\,[V] \quad ; \quad V_{PQ} = 1.1363\,[V]$$

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR, POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA, QUE $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS.

SOLUCIÓN.

SE COMPRUEBA PARA $n=1$

$$(1)(2)(3)(4) = 24$$ QUE SÍ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS.

SE SUPONE VÁLIDO PARA $n = k$

$$k\,(k+1)(k+2)(k+3)$$ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS ... (HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)

CON BASE EN LA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN, DEBE DEMOSTRARSE QUE ES VÁLIDO PARA $n = k+1$

$$(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS ... (AFIRMACIÓN POR DEMOSTRAR)

DE LA AFIRMACIÓN, POR DISTRIBUTIVIDAD: $k\,(k+1)(k+2)(k+3) + 4\,(k+1)(k+2)(k+3)$

EL PRIMER TÉRMINO ES DIVISIBLE ENTRE SEIS POR HIPÓTESIS. EL SEGUNDO SE DEMOSTRARÁ QUE LO ES, A SU VEZ, POR INDUCCIÓN MATEMÁTICA, DE LA SIGUIENTE FORMA:

PARA $k=1$

$$4(2)(3)(4) = 96$$ SÍ SE CUMPLE YA QUE $96 = 6(16)$

AHORA SE SUPONE QUE SE CUMPLE PARA $k = m$

$$4(m+1)(m+2)(m+3)$$ ES DIVISIBLE ENTRE SEIS ... (NUEVA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN)

SI SE ACEPTA ESTA HIPÓTESIS, CON BASE EN ELLA DEBE DEMOSTRARSE QUE PARA $k = m+1$ TAMBIÉN SE CUMPLE:

$$4(k+2)(k+3)(k+4)$$ ... (NUEVA AFIRMACIÓN POR DEMOSTRAR)

DE LA AFIRMACIÓN:

$$4(k+2)(k+3)(k+4) = 4(k+2)(k+3)(k+1+3) = 4(k+1)(k+2)(k+3) + 12(k+2)(k+3)$$

EL PRIMER TÉRMINO ES DIVISIBLE ENTRE SEIS POR LA NUEVA HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN Y EL SEGUNDO TAMBIÉN POR CONTENER COMO FACTOR A 12 QUE ES DIVISIBLE ENTRE SEIS, Y QUEDA FINALIZADA LA DEMOSTRACIÓN.

CÁLCULO I

RESOLVER LOS SIGUIENTES LÍMITES:

$$A)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^4+8x}{5x^2+8x-4} \quad ; \quad B)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}} \quad ; \quad C)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3+9}}{15x-7}$$

SOLUCIÓN.

$$A)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^4+8x}{5x^2+8x-4} = \frac{(-2)^4+8(-2)}{5(-2)^2+8(-2)-4} = \frac{16-16}{20-16-4} = \frac{0}{0}$$ (INDETERMINACIÓN)

PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, Y EN CASO DE QUE EXISTA CALCULAR SU LÍMITE, SE FACTORIZAN NUMERADOR Y DENOMINADOR Y SE LLEGA A:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+8x}{5x^2+8x-4} = \lim_{x\to -2}\frac{x\left(x^3+8\right)}{(x+2)(5x-2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x\,(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{(x+2)(5x-2)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^4+8x}{5x^2+8x-4} = \lim_{x\to -2}\frac{x^3-2x^2+4x}{5x-2} = \frac{(-2)^3-2(-2)^2+4(-2)}{5(-2)-2} = \frac{-8-8-8}{-10-2} = \frac{-24}{-12} = 2$$

$$B)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}=\frac{\sqrt{3+13}-4}{5-\sqrt[3]{3+122}}=\frac{\sqrt{16}-4}{5-\sqrt[3]{125}}=\frac{4-4}{5-5}=\frac{0}{0}$$ (INDETERMINACIÓN)

PARA QUITAR EN ESTE CASO LA INDETERMINACIÓN, SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA EXPRESIÓN ORIGINAL, PRIMERO POR EL CONJUGADO DEL BINOMIO DEL NUMERADOR PARA LOGRAR UNA DIFERENCIA DE CUADRADOS Y, DESPUÉS, POR EL TRINOMIO QUE AL MULTIPLICARSE POR EL DENOMINADOR, DEVIENE EN UNA DIFERENCIA DE CUBOS. ASÍ SE TIENE QUE:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+4}{\sqrt{x+13}+4}\cdot\frac{25+5\sqrt[3]{x+122}+\sqrt[3]{(x+122)^2}}{25+5\sqrt[3]{x+122}+\sqrt[3]{(x+122)^2}}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+13-16)\left(25+5\sqrt[3]{x+122}+\sqrt[3]{(x+122)^2}\right)}{[125-(x+122)]\left(\sqrt{x+13}+4\right)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(25+5\sqrt[3]{x+122}+\sqrt[3]{(x+122)^2}\right)}{-(x-3)\left(\sqrt{x+13}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{25+5\sqrt[3]{x+122}+\sqrt[3]{(x+122)^2}}{-\left(\sqrt{x+13}+4\right)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{5-\sqrt[3]{x+122}}=\frac{25+25+25}{-4-4}=\frac{75}{-8}=-\frac{75}{8}$$

$$C)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3+9}}{15x-7}=\frac{\sqrt[3]{27(\infty)^3+9}}{15(\infty)-7}=\frac{\infty}{\infty}$$ (INDETERMINACIÓN)

PARA QUITAR LA INDETRMINACIÓN, SE DIVIDEN NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE Y SE TIENE ENTONCES QUE:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3+9}}{15x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{27x^3+9}}{x}}{\frac{15x-7}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{27x^3+9}{x^3}}}{\frac{15x-7}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{27x^3}{x^3}+\frac{9}{x^3}}}{\frac{15x}{x}-\frac{7}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^3+9}}{15x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27+\frac{9}{x^3}}}{15-\frac{7}{x}}=\frac{\sqrt[3]{27+\frac{9}{\infty}}}{15-\frac{7}{\infty}}=\frac{\sqrt[3]{27+0}}{15-0}=\frac{\sqrt[3]{27}}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

CULTURA

SALUD Y QUE COMIENCE EL BAILE

QUERIDOS JÓVENES DE TODOS LOS PAÍSES: PERMITIDME QUE OS PRESENTE LOS JUEGOS, LOS BAILES, LAS CANCIONES TRISTES Y ALEGRES, LA PICARDÍA Y LA ESENCIA DE LOS PUEBLOS AMERICANOS.

NOS DEJARON LOS AZTECAS SU SEMILLA, SUS CANTOS DE LAS COSECHAS, SUS HIMNOS DE GUERRA, SUS RITOS DE PAZ. LOS MAYAS ESTABLECIERON SU FUEGO FLORIDO EN LA DELGADA CINTURA DE AMÉRICA CENTRAL. LOS ARAUCANOS BAILARON BAJO SUS ÁRBOLES TUTELARES. LOS ESPAÑOLES DEJARON UNA CINTA DE SUSPIROS, EL AIRE ALEGRE DE LAS COMARCAS MONTAÑESAS Y EL LENGUAJE EN QUE POR SIGLOS SE DESGRANARON LUCHAS, ILUSIONES, OSCUROS DRAMAS DEL PUEBLO, HISTORIAS INCREÍBLES. EN EL BARSIL TEMBLARON LOS RÍOS MÁS PODEROSOS DE LA TIERRA, CONTANDO Y CANTANDO HISTORIAS. LOS HOMBRES Y LAS MUJERES SE ARRULLARON Y BAILARON BAJO LAS PALMERAS. DESDE EL PORTUGAL LLEGARON LOS MÁS DULCES SONIDOS, Y LA VOZ DEL BRASIL SE PENETRÓ DE SUS PROFUNDIDADES SELVÁTICAS Y DE AZAHARES MARINOS. ESTAS SON LAS CANCIONES Y LOS BAILES DE AMÉRICA. EN ESTE CONTINENTE, LA SANGRE Y LA SOMBRA SUMERGIERON MUCHAS VECES LA ESPERANZA, PARECÍAN DESANGRADOS LOS PUEBLOS, UNA OLA DE TERROR ANIQUILÓ LOS CORAZONES. SIN EMBARGO, CANTAMOS. LINCOLN FUE ASESINADO, PARECIÓ MORIR TAMBIÉN LA LIBERACIÓN, SIN EMBARGO, POR LAS ORILLAS DEL MISSISSIPPI CANTARON LOS NEGROS. ERA UN CANTO DE DOLOR QUE AÚN NO TERMINA, ERA UN CANTO PROFUNDO, UN CANTO CON RAÍCES. EN EL SUR, EN LAS GRANDES PAMPAS, SÓLO LA LUNA ILUMINÓ A LA SOLEDAD DE LAS PRADERAS, LA LUNA Y LAS GUITARRAS. EN EL ALTO PERÚ CANTARON LOS INDIOS COMO LOS MANANTIALES EN LA CORDILLERA. EN TODO EL CONTINENTE EL HOMBRE HA GUARDADO SUS CANCIONES, HA AMPARADO, CON SUS BRAZOS Y SU FUERZA, LA PAZ DE SUS PLACERES, HA DESARROLLADO SU ANTIGUA TRADICIÓN, EL FULGOR Y LA DULZURA DE SUS FIESTAS, EL TESTIMONIO DE SUS DOLORES. OS PRESENTO EL TESORO DE NUESTROS PUEBLOS, LA GRACIA DE ELLOS, LO QUE PRESERVARON A TRAVÉS DE ACONTECIMIENTOS TERRIBLES, DESAMPARADOS Y MARTIRIZADOS. QUE LA ALEGRÍA, LAS CANCIONES Y LOS BAILES DE LAS TIERRAS AMERICANAS BRILLEN EN ESTA FIESTA DE LA JUVENTUD Y DE LA PAZ, JUNTO A OTRAS ALEGRÍAS, OTRAS CANCIONES Y OTRAS DANZAS. DESDE EL MÁS LEJANO DE LOS PAÍSES DE AMÉRICA, DESDE CHILE, SEPARADO DEL MUNDO POR LA CORDILLERA ANDINA Y UNIDO A TODOS LOS PUEBLOS POR SU OCEANO Y POR SU HISTORIA DE LUCHAS, YO SALUDO A LOS JÓVENES Y LES DIGO: MÁS ALTAS QUE NUESTRAS MONTAÑAS FUERON NUESTRAS CANCIONES, PUESTO QUE AQUÍ PUEDEN ESCUCHARSE. MÁS INSISTENTE QUE LAS OLAS DEL OCEANO FUERON NUESTRAS DANZAS, PUESTO QUE AQUÍ MOSTRARÁN SU ALEGRÍA. DEFENDAMOS TODA ESTA FUERZA DELICADA, DEFENDAMOS UNIDOS EL AMOR Y LA PAZ QUE LOS MANTUVO. ESTA ES LA TAREA DE TODOS LOS HOMBRES, EL TESORO CENTRAL DE LOS PUEBLOS Y LA LUZ DE ESTE FESTIVAL. SALUD Y QUE COMIENCE EL BAILE.

PABLO NERUDA, PREMIO NOBEL AMERICANO

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, RIGEL GÁMEZ LEAL Y GABRIEL JARAMILLO MORALES

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

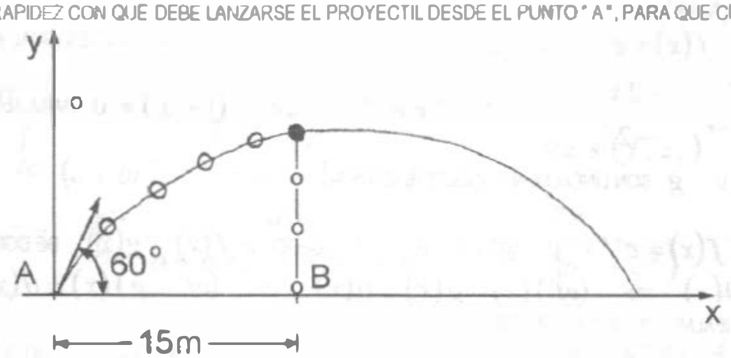
AÑO 2001 NÚMERO 33 2 DE DICIEMBRE DE 2001

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **DICIEMBRE ES UN MES QUE INVITA A LA REFLEXIÓN, A HACER UN ALTO EN EL CAMINO DE LA VIDA Y REPLANTEAR MUCHAS COSAS. ¿POR QUÉ NO SER MÁS GENEROSOS, MÁS BUENOS, MÁS ESTUDIOSOS, MÁS SOLIDARIOS, MÁS LECTORES, MÁS AMIGOS, MÁS ENTUSIASTAS, MÁS COMPROMETIDOS, MÁS RESPONSABLES, MÁS DIVERTIDOS Y MÁS SENCILLOS?**

CINEMÁTICA

CON UNA RAPIDEZ DE $17.32\ \dfrac{m}{s}$ SE DISPARA EN EL PUNTO " B ", VERTICALMENTE HACIA ARRIBA, UN PROYECTIL, AL MISMO TIEMPO, DE LA POSICIÓN " A " ES LANZADO OTRO CON UN MOVIMIENTO DE TIRO PARABÓLICO, COMO SE MUESTRA EN LA FIGURA. SI SE CONSIDERA COMO TIRO VERTICAL AL MOVIMIENTO DEL PROYECTIL DISPARADO DESDE " B ", DETERMINAR LA RAPIDEZ CON QUE DEBE LANZARSE EL PROYECTIL DESDE EL PUNTO " A ", PARA QUE CHOQUEN AMBOS PROYECTILES.



RESOLUCIÓN

SI SE ANALIZA EL PROYECTIL QUE SE LANZA DEL PUNTO " B " (TIRO VERTICAL), SE TIENE QUE:

$$a_B = -g = \text{CONSTANTE}$$

$$\text{COMO } a_B = \frac{dv_B}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_B = v_{0B} - g\,t$$

$$\text{ADEMÁS } v_B = \frac{dy_B}{dt} \quad \Rightarrow \quad y_B = v_{0B}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \quad \cdots \quad (1)$$

SI SE ANALIZA EL PROYECTIL QUE SE LANZA DEL PUNTO " A " (TIRO PARABÓLICO), SE TIENE QUE:

$$\bar{v}_A = v_0 \cos 60^0\ \hat{i} + \left(v_0 sen 60^0 - g\,t\right)\hat{j}$$

$$\text{COMO } \bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt} \quad \Rightarrow \quad \bar{r}_A = v_0\,t\cos\theta\ \hat{i} + \left(v_0\,t\,sen\theta - \frac{1}{2}g\,t^2\right)\hat{j} \quad \cdots \quad (2)$$

DADO QUE $\cos 60^0 = 0.5$ y $sen 60^0 = 0.866$ SE LLEGA A:

$$\bar{r}_A = 0.5\,v_0\,t\,\hat{i} + \left(0.866\,v_0\,t - \frac{1}{2}g\,t^2\right)\hat{j} \quad \cdots \quad (3)$$

DE (3) SE TIENE QUE: $x_A = 0.5\,v_0\,t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x_A}{0.5\,v_0} \quad \cdots \quad (4) \quad y \quad y_A = 0.866\,v_0\,t - \dfrac{1}{2}g\,t^2 \quad \cdots \quad (5)$

SE IGUALAN (1) y (4) Y SE LLEGA A: $v_{0B}\ t-\frac{1}{2}\ g\ t^2 = 0.866\ v_0\ t-\frac{1}{2}\ g\ t^2 \cdots \quad (6)$

AHORA SE SUSTITUYE (4) EN (6) Y:

$$v_{0B}\left(\frac{x_A}{0.5v_0}\right)-\frac{1}{2}\ g\left(\frac{x_A}{0.5v_0}\right)^2 = 0.866\ v_0\left(\frac{x_A}{0.5v_0}\right)-\frac{1}{2}\ g\left(\frac{x_A}{0.5v_0}\right)^2$$

$$v_{0B}\left(\frac{x_A}{0.5v_0}\right)-\frac{g\ x_A^{\ 2}}{0.5\ v_0^{\ 2}}=\frac{0.866\ x_A}{0.5}-\frac{g\ x_A^{\ 2}}{0.5\ v_0^{\ 2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{0B}}{v_0}=0.866 \quad \Rightarrow \quad v_0=\frac{v_{0B}}{0.866}$$

Y DADO QUE $v_{0B}=17.32\ \frac{m}{s}$ ENTONCES SE TIENE FINALMENTE QUE $v_0=\frac{17.32}{0.866} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 20\ \frac{m}{s}$

ÁLGEBRA LINEAL

DETERMINAR UN INTERVALO PARA EL CUAL LAS FUNCIONES

$$f(x)=\begin{cases} x & para \quad -\infty < x \le -2 \\ e^{-x} & para \quad -2 < x < +\infty \end{cases} \qquad y \qquad g(x)=\begin{cases} -2x & para \quad -\infty < x < 0 \\ e^{-x+1} & para \quad 0 \le x < +\infty \end{cases}$$

SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

SOLUCIÓN.

PARA $-\infty < x \le -2$ SE TIENE QUE $f(x)=x$ y $g(x)=-2x$, LUEGO $g(x)=-2\ f(x)$; DE DONDE

$$2\ f(x)+g(x)=0(x) \quad \Rightarrow \quad (2f)(x)+g(x)=0(x) \quad \Rightarrow \quad (2f+g)(x)=0(x) \quad \Rightarrow \quad 2f+g=0$$

POR LO TANTO LAS FUNCIONES f y g SON LINEALMENTE DEPENDIENTES

PARA $-2 < x < 0$ SE TIENE QUE $f(x)=e^{-x}$ y $g(x)=-2x$; DE DONDE, EL WRONSKIANO ES IGUAL A

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{-x} & -2x \\ -e^{-x} & -2 \end{vmatrix} = -2e^{-x}-2x\ e^{-x} = -2e^{-x}\ (1+x)\neq 0 \quad \text{PARA ALGUNA } x\in(-2,0)$$

POR LO TANTO LAS FUNCIONES f y g SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

PARA $0 \le x < \infty$ SE TIENE QUE $f(x)=e^{-x}$ y $g(x)=e^{-x+1}$, LUEGO $e\ f(x)=g(x)$, DE DONDE

$$e\ f(x)-g(x)=0(x) \quad \Rightarrow \quad (ef)(x)-g(x)=0(x) \quad \Rightarrow \quad (ef-g)(x)=0(x) \quad \Rightarrow \quad ef-g=0$$

POR LO TANTO LAS FUNCIONES SON LINEALMENTE DEPENDIENTES

NO EXISTEN VALORES α, $\beta\in\Re$, NO AMBOS NULOS, TALES QUE $\alpha\ f(x)+\beta\ g(x)=\theta(x) \quad \forall\ x\in(-\infty,\infty) \quad \cdots \quad (1)$ POR LO TANTO, LA EXPRESIÓN (1) SÓLO SE SATISFACE PARA $\alpha=\beta=0$ DE DONDE SE CONCLUYE QUE LAS FUNCIONES f y g SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES EN $(-\infty,\infty)$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

CALCULAR EL VALOR DE LA INTEGRAL

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\ \cos\ \theta + c\ sen\ \theta}$$

SI $a^2 > b^2 + c^2$ SUGERENCIA: HACER EL CAMBIO DE VARIABLE $z=e^{i\theta}$

SOLUCIÓN.

SEA $z=e^{i\theta}$, ENTONCES

$$sen\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left(z-z^{-1}\right) \quad ; \quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right) \quad y \quad dz=ie^{i\theta}\ d\theta=iz\ d\theta$$

POR LO QUE

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\ \cos\theta+c\ sen\theta}=\oint_C\frac{\frac{dz}{iz}}{a+\frac{b\left(z+z^{-1}\right)}{2}+\frac{c\left(z-z^{-1}\right)}{2i}}=\oint_C\frac{2\ dz}{2aiz+bi\left(z^2+1\right)+c\left(z^2-1\right)}$$

SI SE EXPRESA EL DENOMINADOR COMO UNA ECUACIÓN EN TÉRMINOS DE " z " SE TIENE QUE

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta + c\ sen\ \theta} = \oint_C \frac{2\,dz}{(c+bi)z^2 + 2aiz - (c-bi)}$$

DONDE C ES LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO UNO CON CENTRO EN EL ORIGEN.

LOS POLOS DE $f(z) = \dfrac{2}{(c+bi)z^2 + 2aiz - (c-bi)}$ SE OBTIENEN AL RESOLVER LA ECUACIÓN CUADRÁTICA DEL DENOMINADOR, Y ESTÁN DADOS POR:

$$z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 + 4\left(c^2+b^2\right)}}{2\left(c+bi\right)} = \frac{-ai \pm \sqrt{\left(b^2+c^2\right) - a^2}}{c+bi} = \frac{\left(-a \pm \sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}\right)i}{c+bi} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}}{b^2+c^2}(b+ci)$$

$$\therefore \quad z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}}{b^2+c^2}(b+ci) \quad y \quad z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}}{b^2+c^2}(b+ci)$$

SOLAMENTE z_1 ESTÁ DENTRO DE C PUESTO QUE:

$$|z_1| = \left|\frac{-a + \sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}}{b^2+c^2}(b+ci)\right| = \left|\frac{-a + \sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)} - a}{\sqrt{b^2+c^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)} + a}{\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)} + a}\right|$$

$$|z_1| = \left|\frac{-\left(b^2+c^2\right)}{\sqrt{b^2+c^2}\left(\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)} + a\right)}\right| = \left|\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)} + a}\right| < 1 \quad si \quad a^2 > b^2 + c^2$$

EL RESIDUO DE f EN z_1 ES:

$$\mathrm{Re}\,s\left(f, z_1\right) = \lim_{z\to z_1}\left(z - z_1\right)\frac{2}{(c+bi)z^2 + 2aiz - (c-bi)} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{(c+bi)z + ai} = \frac{1}{(c+bi)z_1 + ai} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}\ i}$$

POR LA REGLA DE L'HOPITAL.

ENTONCES, POR EL TEOREMA DEL RESIDUO

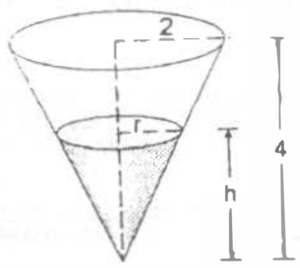
$$\oint_C \frac{2\,dz}{(c+bi)z^2 + 2aiz - (c-bi)} = 2\pi i \quad \mathrm{Re}\,s\left(f, z_1\right)$$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta + c\ sen\ \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - \left(b^2+c^2\right)}}$$

CÁLCULO I

UN TANQUE DE AGUA TIENE LA FORMA DE UN CONO CIRCULAR INVERTIDO, CON BASE DE RADIO $2\ m$ Y ALTURA $4\ m$. SI SE BOMBEA AGUA A RAZÓN DE $2\dfrac{m^3}{\min}$, ENCONTRAR LA RAZÓN A LA CUAL SUBE EL NIVEL DEL AGUA CUANDO ÉSTA TIENE UNA PROFUNDIDAD DE $3\ m$.

SOLUCIÓN. SE DIBUJA UN ESQUEMA DEL CONO Y SE LE ASOCIAN LAS MAGNITUDES CONSTANTES Y VARIABLES, COMO SIGUE:



SEAN $V, r\ y\ h$ EL VOLUMEN DEL AGUA, EL RADIO EN LA SUPERFICIE DE LA MISMA Y LA ALTURA EN EL INSTANTE t, DONDE ÉSTE SE MIDE EN MINUTOS. COMO DATO SE EXPRESA QUE $\dfrac{dV}{dt} = 2\dfrac{m^3}{\min}$ Y SE PIDE CALCULAR $\dfrac{dh}{dt}$ CUANDO $h = 3\ m$. LAS CANTIDADES V y h ESTÁN RELACIONADAS POR LA ECUACIÓN

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

PERO PARA ESTE PROBLEMA ES NECESARIO EXPRESAR A V COMO FUNCIÓN SÓLO DE h. SI SE OBSERVA LA FIGURA, SE PUDE ESTABLECER UNA RELACIÓN ENTRE LAS VARIABLES r y h, POR TRIÁNGULOS SEMEJANTES, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\frac{r}{h}=\frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{h}{2}$$

Y AL SUSTITUIR ESTE RESULTADO EN EL VOLUMEN SE TIENE QUE:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h \quad \Rightarrow \quad V=\frac{\pi}{12}h^3$$

AHORA SE DERIVA CADA MIEMBRO DE ESTA ECUACIÓN CON RESPECTO A t Y SE LLEGA A:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

SE SUSTITUYEN LOS VALORES DE $h=3\,m$ y $\frac{dV}{dt}=2\frac{m^3}{\min}$ Y SE OBTIENE FINALMENTE $\frac{dh}{dt}$ QUE ES:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2=\frac{8}{9\pi}=0.28\ \frac{m}{\min}$$

CÁLCULO III

DADO EL CAMPO VECTORIAL

$$\overline{F}=\left(ax^2+2z^2-sen\ e^y\right)\hat{i}+xy\ \hat{j}-2xz\ \hat{k}$$

A) DETERMINAR EL VALOR DE LA CONSTANTE a DE TAL MANERA QUE EL CAMPO VECTORIAL SEA SOLENOIDAL.
B) CALCULAR EL ROTACIONAL DEL CAMPO VECTORIAL DADO.

SOLUCIÓN:

A) PARA QUE EL CAMPO VECTIRIAL SEA SOLENOIDAL, SU DIVERGENCIA DEBE SER CERO, LUEGO:

$$div\left(\overline{F}\right)=\overline{\nabla}\cdot\overline{F}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(ax^2+2z^2-sen\ e^y,xy,-2xz\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 2ax+x-2x=0 \quad \Rightarrow \quad 2a+1-2=0 \quad \Rightarrow \quad 2a=1$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2}$$

B) PARA CALCULAR EL ROTACIONAL DEL CAMPO VECTORIAL, SE HACE LO SIGUINTE:

$$rot\left(\overline{F}\right)=\overline{\nabla}\times\overline{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ ax^2+2z^2-sen\ e^y & xy & -2xz\end{vmatrix}=-\hat{j}\left(-2z-4z\right)+\hat{k}\left(y+e^y\cos e^y\right)$$

$$\therefore\ rot\left(\overline{F}\right)=6z\ \hat{j}+\left(y+e^y\ \cos\ e^y\right)\hat{k}$$

TUTORÍA

¡SABÍAS QUE LOS DISTRACTORES PSICOLÓGICOS, SON DEL TIPO DE PROBLEMAS QUE EN SU MAYORÍA INTERFIEREN EN EL APRENDIZAJE? ¿PODRÁS IDENTIFICARLOS? CUANDO SIENTAS QUE NO TE PUEDES CONCENTRAR, Y POR ELLO COMIENCES A TENER PROBLEMAS DE BAJO RENDIMIENTO ACADÉMICO, O BIEN EN DIFERENTES ÁREAS DE TU VIDA; ENTONCES ES CONVENIENTE IDENTIFICARLOS Y ASUMIRLOS CON PLENA CONCIENCIA DE LA REALIDAD, TENER CONTROL, EQUILIBRIO Y MADUREZ PARA ENFRENTARLOS.

¿CUÁLES SON ALGUNOS DE LOS DISTRACTORES PSICOLÓGICOS? POR EJEMPLO, PROBLEMAS CON LA FAMILIA PADRES, HERMANOS, FRICCIONES CON LOS COMPAÑEROS EN EL GRUPO, CON LA NOVIA (O), DIFICULTADES POR EL DINERO, ENFERMEDAD O MUERTE DE UN SER QUERIDO.

SUGERENCIAS: PENSAR ANTES DE ACTUAR, RESPONDER CON SOLUCIONES INMEDIATAS, NO PREOCUPARSE DEMASIADO MEJOR ENFRENTAR. RECUERDA QUE TODAS LAS PERSONAS TIENEN PROBLEMAS EN MENOR O MAYOR INTENSIDAD PERO QUIENES LOS ENFRENTAN PUEDEN SALIR ADELANTE. ¡ÁNIMO!, PIENSA SIEMPRE QUE HAY ALGUIEN CERCA DE TI DISPUESTO A ESCUCHARTE. ACÉRCATE Y HABLA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES FERNANDO SÁNCHEZ RODRÍGUEZ,
JOSÉ ROMERO LÓPEZ Y BRAULIO TORRES MIRANDA Y LA COORDINACIÓN DE MATEMÁTICAS AVANZADAS

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN

COPADI

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 34 2 DE ENERO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ¡AÑO NUEVO!, ¡VIDA NUEVA! ES TIEMPO DE PROPONERSE NUEVOS OBJETIVOS DE VIDA, COMO: SER MEJOR ESTUDIANTE, SER MEJOR HIJO, HERMANO Y AMIGO Y, SOBRE TODO, SER MEJOR SER HUMANO. ¡YA ES TIEMPO! ¡TIENES TODA LA VIDA POR ADELANTE!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEA LA RECTA ℓ QUE CONTIENE AL PUNTO $A\left(2,-3,6\right)$ Y ES PARALELA AL VECTOR $\bar{u}=\hat{i}+\hat{k}$ DETERMINAR LAS COORDENADAS DE UN PUNTO B QUE PERTENECE A LA RECTA ℓ Y QUE ESTÁ A UNA DISTANCIA DE CINCO UNIDADES DEL ORIGEN.

SOLUCIÓN. LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ SON:

$$x=2+t \quad ; \quad y=-3 \quad ; \quad z=6+t$$

COMO LA DISTANCIA DEL PUNTO $B(x,y,z)$ AL ORIGEN ES DE CINCO UNIDADES, ENTONCES SE TIENE QUE:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2+z^2=25$$

SI SE SUSTITUYEN EN ESTA EXPRESIÓN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ YA QUE EL PUNTO B PERTENECE A ELLA, SE TIENE QUE:

$$(2+t)^2+(-3)^2+(6+t)^2=25 \quad \Rightarrow \quad 4+4t+t^2+9+36+12t+t^2=25 \quad \Rightarrow \quad 2t^2+16t+24=0$$

$$t^2+8t+12=0 \quad \Rightarrow \quad (t+2)(t+6)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_1=-2 \\ t_2=-6 \end{cases}$$

SI SE SUSTITUYEN ESTOS VALORES EN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ SE OBTIENEN DOS PUNTOS DE ELLA QUE SATISFACEN LAS CONDICIONES DADAS; ESTOS PUNTOS SON:

$$B_1\,(0,-3,4) \quad y \quad B_2\,(-4,-3,0)$$

GEOMETRÍA NALÍTICA

CONSIDÉRESE LA RECTA ℓ, UNA DE CUYAS ECUACIONES VECTORIALES ES

$$\bar{r}=(2,2,-2)+\left(\sqrt{3}\ t,-\sqrt{3}\ t,-\sqrt{3}\ t\right)$$

DETERMINAR:

A) EL ÁNGULO QUE FORMA LA RECTA ℓ CON EL PLANO $x\,y$

B) EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE LA RECTA ℓ CON EL PLANO $y\,z$

C) UNAS ECUACIONES CARTESIANAS EN FORMA SIMÉTRICA DE LA RECTA ℓ

SOLUCIÓN

A) UN VECTOR PARALELO A LA RECTA ℓ ES: $\bar{u}=(1,-1,-1)$ Y EL VECTOR PERPENDICULAR AL PLANO $x\,y$ ES: $\bar{N}=\hat{k}=(0,0,1)$.

LUEGO EL ÁNGULO ENTRE LA RECTA ℓ Y EL PLANO $x\,y$ ESTÁ DADO POR:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\bar{u}\cdot\bar{N}}{|\bar{u}|\,|\bar{N}|} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta=\frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_1=35.3^\circ \\ \theta_2=144.7^\circ \end{cases}$$

COMO SE OBSERVA, LA RECTA FORMA CON EL PLANO DOS ÁNGULOS, UNO AGUDO Y EL OTRO OBTUSO, SIENDO AMBOS SUPLEMENTARIOS.

B) SI SE IGUALA A CERO LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA ℓ CORRESPONDIENTE A x, SE TIENE QUE:

$$x = 2 + \sqrt{3}\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

AHORA SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LAS OTRAS DOS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA ℓ Y SE OBTIENEN LA ORDENADA Y LA COTA DEL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE ELLA CON EL PLANO $y\,z$. ASÍ,

$$y = 2 - \sqrt{3}\ t \quad \Rightarrow \quad y = 2 - \sqrt{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

$$z = -2 - \sqrt{3}\ t \quad \Rightarrow \quad z = -2 - \sqrt{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

POR LO TANTO, EL PUNTO DE INTERSECCIÓN ES $(0,4,0)$.

C) SI SE CONSIDERA EL VECTOR $\bar{u} = (1,-1,-1)$ PARALELO A LA RECTA Y EL PUNTO $(2,2,-2)$ QUE PERTENECE A ELLA, ENTONCES UNAS DE SUS ECUACIONES CARTESIANAS EN FORMA SIMÉTRICA SON:

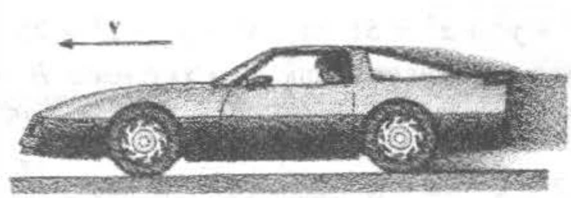
$$\ell \ : \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{-1}$$

Y SI, CON EL MISMO VECTOR PARALELO, SE TOMA EN CUENTA AL PUNTO DE INTERSECCIÓN CON EL PLANO $y\,z$, ES DECIR, EL PUNTO $(0,4,0)$, ENTONCES UNAS DE SUS ECUACIONES CARTESIANAS EN FORMA SIMÉTRICA SON:

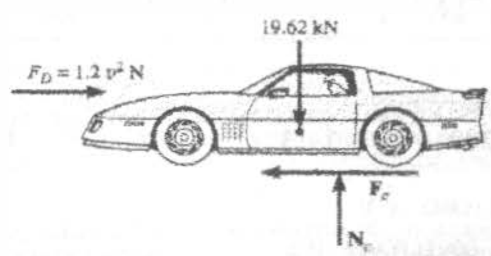
$$\ell \ : \quad \frac{x}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-1}$$

DINÁMICA

EL AUTOMÓVIL DEPORTIVO DE LA FIGURA TIENE UNA MASA DE $2\ Mg$ Y LA EFICIENCIA DE SU MOTOR ES $\varepsilon = 0.63$. AL MOVERSE HACIA DELANTE EL AIRE CREA UNA RESISTENCIA $F_D = 1.2\ v^2\ N$, SIENDO v LA VELOCIDAD DEL AUTO EN $\frac{m}{s}$. SI EL AUTO VIAJA A UNA VELOCIDAD CONSTANTE DE $50\ \frac{m}{s}$ CALCULAR LA POTENCIA MÁXIMA QUE SE SUMINISTRA AL MOTOR.



SOLUCIÓN. EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE SE MUESTRA EN LA SIGUIENTE FIGURA, DONDE SE INDICA QUE LA FUERZA NORMAL N_C Y LA FUERZA DE FRICCIÓN F_C, REPRESENTAN LAS FUERZAS RESULTANTES DE LAS CUATRO RUEDAS.



EN ESPECIAL, LA FUERZA DE FRICCIÓN, NO BALANCEADA, IMPULSA O EMPUJA EL VEHÍCULO HACIA DELANTE. ESTE EFECTO SE CREA, NATURALMENTE, POR EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN DE LAS CUATRO RUEDAS SOBRE EL PAVIMENTO, Y ESTÁ DESARROLLADO POR LA POTENCIA DEL MOTOR.
SI SE APLICA LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO EN LA DIRECCIÓN x, SE TIENE QUE:

$$\sum F_x = m\ a_x \quad \Rightarrow \quad F_C - 1.2\ v^2 = 2000\ \frac{dv}{dt}$$

COMO EL AUTOMÓVIL VIAJA CON VELOCIDAD CONSTANTE, $\frac{dv}{dt} = 0$. POR LO TANTO, SI $v = 50\ \frac{m}{s}$, ENTONCES:

$$F_C = 1.2\ (50)^2 = 3000\ \ N$$

LA POTENCIA DE SALIDA DEL AUTOMÓVIL SE MANIFIESTA POR LA FUERZA DE FRICCIÓN F_C. ASÍ, SE TIENE QUE:

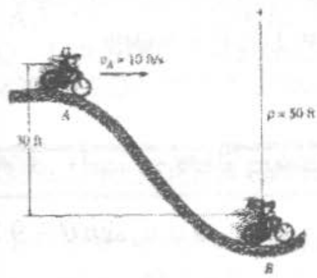
$$P = F_C \cdot v = (3000 \quad N)\left(50 \ \frac{m}{s}\right) = 150 \quad kW$$

LA POTENCIA QUE SUMINISTRA EL MOTOR (POTENCIA DE ENTRADA AL VEHÍCULO) ES, POR LO TANTO, IGUAL A:

$$\text{ENTRADA DE POTENCIA} = \frac{1}{\varepsilon} \ \text{(SALIDA DE POTENCIA)} = \frac{1}{0.63}(150) = 238 \quad kW$$

DINÁMICA

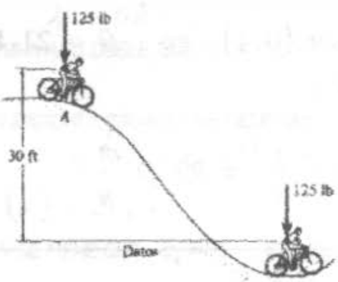
EL JOVEN Y SU BICICLETA, QUE APARECEN EN LA FIGURA, TIENEN UN PESO TOTAL DE $125\ lb$ Y SU CENTRO DE MASA ESTÁ EN G. SI RUEDA SIN IMPULSO, ES DECIR, QUE NO PEDALEA, CON UNA VELOCIDAD DE $10\ \frac{ft}{s}$ EN LA CUMBRE DE LA COLINA, EN A, CALCULAR LA FUERZA NORMAL QUE SE EJERCE EN AMBAS RUEDAS DE LA BICICLETA CUANDO LLEGA A B, EN DONDE EL RADIO DE CURVATURA DEL PAVIMENTO ES $\rho = 50\ ft$. DESPRECIAR LA FRICCIÓN.



SOLUCIÓN. COMO LA FUERZA NORMAL NO EFECTÚA TRABAJO, DEBE CALCULARSE EMPLEANDO LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO:

$$\sum F_n = m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)$$

SIN EMBARGO, SE PUEDE DETERMINAR LA VELOCIDAD DE LA BICICLETA EN B EMPLEANDO LA ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA. ¿POR QUÉ?



ENERGÍA POTENCIAL. EN LA FIGURA SE MUESTRA LA BICICLETA EN LOS PUNTOS A y B. POR COMODIDAD, SE HA ESTABLECIDO LA REFERENCIA DE ENERGÍA POTENCIAL EN EL CENTRO DE MASA CUANDO LA BICICLETA ESTÁ EN EL PUNTO B.

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$\{T_A\} + \{V_A\} = \{T_B\} + \{V_B\}$$

$$\left\{\frac{1}{2} m_A v_A{}^2\right\} + \{m_A g h_A\} = \left\{\frac{1}{2} m_B v_B{}^2\right\} + \{m_B g h_B\}$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{125}{32.2}\right)(10)^2\right\} + \{(125)(30)\} = \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{125}{32.2}\right)(v_B)^2\right\} + \{(125)(0)\}$$

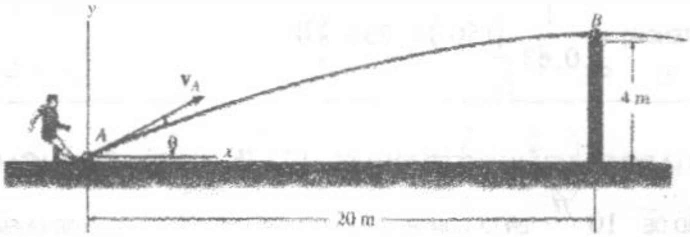
$$\therefore \quad v_B = 45.1 \ \frac{ft}{s}$$

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO. SI SE USAN LOS DATOS DEL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE CUANDO LA BICICLETA ESTÁ EN B, SE TIENE QUE:

$$\sum F_n = m a_n \quad \Rightarrow \quad N_B - 125 = \frac{125}{32.2}\frac{(45.1)^2}{50} \quad \therefore \quad N_B = 283 \quad lb$$

CINEMÁTICA

POR MEDIO DE UNA CÁMARA DE VIDEO SE OBSERVA QUE CUANDO SE GOLPEA UN BALÓN EN A, COMO SE INDICA EN LA FIGURA, APENAS LOGRA PASAR POR ENCIMA DE UN MURO EN B CUANDO ALCANZA SU MÁXIMA ALTURA. SI SE SABE QUE LA DISTANCIA DE A AL MURO ES DE $20\ m$ Y QUE LA ALTURA DE ÉSTE ES DE $4\ m$, CALCULAR LA VELOCIDAD INICIAL CON LA QUE SE PATEÓ EL BALÓN. IGNORAR EL TAMAÑO DEL MISMO.



SOLUCIÓN.

SISTEMA DE COORDENADAS. LA RAPIDEZ INICIAL v_A, EL ÁNGULO DE INCLINACIÓN θ Y EL TIEMPO t_{AB} PARA RECORRER DE A A B REPRESENTAN LAS TRES INCÓGNITAS. EN SU PUNTO MÁS ALTO, B, LA VELOCIDAD $(v_B)_y = 0$ Y ADEMÁS:

$(v_B)_x = (v_A)_x = v_A \cos\theta$

MOVIMIENTO HORIZONTAL

$$x_B = x_A + (v_A)_x\, t_{AB} \quad \Rightarrow \quad 20\ m = 0 + (v_A \cos\theta)\, t_{AB} \quad \cdots \quad (1)$$

MOVIMIENTO VERTICAL

$$(v_B)_y = (v_A)_y + g\, t_{AB} \quad \Rightarrow \quad 0 = v_A sen\,\theta - 9.81\, t_{AB} \quad \cdots \quad (2)$$

$$(v_B)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2g\,(y_B - y_A) \quad \Rightarrow \quad 0 = v_A^2 sen^2\theta + 2\,(-9.81)(4-0) \quad \cdots \quad (3)$$

DE LAS ECUACIONES (1) y (2) SE TIENE QUE $v_A^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 196.2 \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = \dfrac{196.2}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta} \quad \cdots \quad (4)$; SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN (3) Y SE LLEGA A:

$$\frac{\operatorname{sen}\,\theta}{\cos\,\theta} = tan\,\theta = \frac{2(9.81)(4)}{196.2} \quad \Rightarrow \quad \theta = angtan\,(0.4) \quad \Rightarrow \quad \theta = 21.8^0$$

POR LO TANTO, EN LA ECUACIÓN (4) SE OBTIENE FINALEMENTE QUE

$$v_A = \sqrt{\frac{196.2}{(\operatorname{sen}\ 21.8^0)(\cos\ 21.8^0)}} \quad \Rightarrow \quad v_A = 23.9\ \frac{m}{s}$$

CULTURA

AUGUSTO MONTERROSO ES UNO DE LOS GRANDES ESCRITORES LATINOAMERICANOS DE NUESTRO TIEMPO, QUE LOGRA SEDUCIRNOS, DE PRINCIPIO A FIN, CON SU PROSA RÁPIDA Y AMENA. UNA DE SUS FÁBULAS:

EL ZORRO MÁS SABIO

UN DÍA QUE EL ZORRO ESTABA MUY ABURRIDO Y HASTA CIERTO PUNTO MELANCÓLICO Y SIN DINERO DECIDIÓ CONVERTIRSE EN ESCRITOR, COSA A LA CUAL SE DEDICÓ INMEDIATAMENTE, PUES ODIABA ESE TIPO DE PERSONAS QUE DICEN VOY A HACER ESTO O LO OTRO Y NUNCA LO HACEN.

SU PRIMER LIBRO RESULTÓ MUY BUENO, UN ÉXITO; TODO EL MUNDO LO APLAUDIÓ, Y PRONTO FUE TRADUCIDO (A VECES NO MUY BIEN) A LOS MÁS DIVERSOS IDIOMAS.

EL SEGUNDO FUE TODAVÍA MEJOR QUE EL PRIMERO, Y VARIOS PROFESORES NORTEAMERICANOS DE LO MÁS GRANADO DEL MUNDO ACADÉMICO DE AQUELLOS REMOTOS DÍAS LO COMENTARON CON ENTUSIASMO Y AUN ESCRIBIERON LIBROS SOBRE LOS LIBROS QUE HABLABAN DE LOS LIBROS DEL ZORRO.

DESDE ESE MOMENTO EL ZORRO SE DIO CON RAZÓN POR SATISFECHO, Y PASARON LOS AÑOS Y NO PUBLICABA OTRA COSA.

PERO LOS DEMÁS EMPEZARON A MURMURAR Y A REPETIR "¿QUÉ PASA CON EL ZORRO?", Y CUANDO LO ENCONTRABAN EN LOS COCTELES PUNTUALMENTE SE LE ACERCABAN A DECIRLE TIENE USTED QUE PUBLICAR MÁS.

-PERO SI YA HE PUBLICADO DOS LIBROS -RESPONDÍA ÉL CON CANSANCIO.

-Y MUY BUENOS -LE CONTESTABAN-; POR ESO MISMO TIENE USTED QUE PUBLICAR OTRO.

EL ZORRO NO LO DECÍA, PERO PENSABA: "EN REALIDAD LO QUE ÉSTOS QUIEREN ES QUE YO PUBLIQUE UN LIBRO MALO; PERO COMO SOY EL ZORRO, NO LO VOY A HACER", Y NO LO HIZO.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 35 17 DE ENERO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. NUESTRO PAÍS NECESITA DEL CONCURSO SERIO, RESPONSABLE, COMPROMETIDO Y EFICIENTE DE LOS INGENIEROS DE LA UNAM. ASÍ HA SIDO SIEMPRE. HAY QUE SEGUIR LA TRADICIÓN.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ECUACIONES DIFERENCIALES

OBTENER LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE COEFICIENTES CONSTANTES

$$y''-6y'+9=0$$

SUJETA A LAS CONDICIONES INICIALES

$$y(0)=1 \quad ; \quad y'(0)=3$$

SOLUCIÓN

LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA, ASÍ COMO SU SOLUCIÓN, ESTÁN DADAS POR:

$$\lambda^2-6\lambda+9=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-3)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=3 \quad y \quad \lambda_2=3$$

COMO SE OBSERVA, SE TIENE UNA RAÍZ DOBLE, LUEGO LA SOLUCIÓN GENERAL ES:

$$y(x)=c_1\, e^{3x}+c_2\, x\, e^{3x}$$

SI SE UTILIZAN AHORA LAS CONDICIONES INICIALES SE TIENE QUE:

$$y(x)=c_1\, e^{3x}+c_2\, x\, e^{3x} \quad ; \quad y(0)=1 \quad \Rightarrow \quad c_1=1$$

$$y'(x)=3c_1\, e^{3x}+c_2\left(3x\, e^{3x}+e^{3x}\right) \quad ; \quad y'(0)=3 \quad \Rightarrow \quad 3c_1+c_2=3$$

SE RESUELVE ESTE SISTEMA Y SE TIENE QUE $c_1=1 \quad y \quad c_2=0$ LUEGO, LA SOLUCIÓN ÚNICA DE ESTE PROBLEMA DE CONDICIONES INICIALES ES

$$y(x)=e^{3x}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL SISTEMA

$$x'=x+y \quad ; \quad x(0)=1$$
$$y'=-3x-y \quad ; \quad y(0)=0$$

SOLUCIÓN

SE DERIVA LA PRIMERA ECUACIÓN Y SE SUSTITUYE EN ELLA A y' POR LA SEGUNDA ECUACIÓN. ASÍ, SE TIENE QUE

$$x''=x'+y' \quad \Rightarrow \quad x''=x'+(-3x-y)$$

AHORA SE DESPEJA y EN LA PRIMERA ECUACIÓN DEL SISTEMA Y SE SUSTITUYE EN LA ÚLTIMA EXPRESIÓN OBTENIDA, LUEGO SE LLEGA A:

$$y=x'-x \quad \Rightarrow \quad x''=x'-3x-(x'-x) \quad \Rightarrow \quad x''=x'-3x-x'+x \quad \Rightarrow \quad x''+2x=0$$

LA SOLUCIÓN DE ESTA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESTÁ DADA POR:

$$x(t)=c_1\cos\sqrt{2}\,t+c_2\,\text{sen}\,\sqrt{2}\,t$$

DE ACUERDO CON LA PRIMERA ECUACIÓN DEL SISTEMA DADO, SE PUEDE ESCRIBIR QUE:

$$y(t)=x'-x=-\sqrt{2}\,c_1\,sen\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}\,c_2\cos\sqrt{2}\,t-c_1\cos\sqrt{2}\,t-c_2\,sen\sqrt{2}\,t$$

$$y(t)=\left(\sqrt{2}\,c_2-c_1\right)\cos\sqrt{2}\,t-\left(\sqrt{2}\,c_1+c_2\right)sen\sqrt{2}\,t$$

SI SE UTILIZAN LAS CONDICIONES INICIALES, SE TIENE QUE

$$x(0) = c_1 = 1 \quad ; \quad y(0) = \sqrt{2}\,c_2 - c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

POR LO TANTO, LA SOLUCIÓN ÚNICA DEL SISTEMA ESTÁ DADA POR LAS FUNCIONES SIGUIENTES:

$$x(t) = \cos\sqrt{2}\,t + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$$

$$y(t) = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t = -\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$$

CÁLCULO I

LAS ECUACIONES DE UNA SEMIELIPSE, EN FORMA IMPLÍCITA Y PARAMÉTRICA, SON LAS SIGUIENTES:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad ; \quad y \geq 0 \qquad y \qquad f: \begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\theta \end{cases} ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

CALCULAR EL VALOR DE LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA ELIPSE EN EL PUNTO EN EL CUAL $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. UTILIZAR PARA ELLO LOS PROCEDIMIENTOS DE DERIVACIÓN CORRESPONDIENTES A FUNCIONES DEFINIDAS EN FORMA IMPLÍCITA Y EN FORMA PARAMÉTRICA.

SOLUCIÓN. COMO SE SABE, LA DERIVADA ES LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE. LUEGO:

FORMA IMPLÍCITA

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad ; \quad y \geq 0$$

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{16}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{25}\,\frac{8}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{16x}{25y}$$

COMO $\theta = \dfrac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{5}{2} \quad ; \quad y = 2\sqrt{3}$

POR LO TANTO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16\left(\frac{5}{2}\right)}{25\left(2\sqrt{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{40}{50\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \approx -0.4619$$

FORMA PARAMÉTRICA

$$f: \begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\theta \end{cases} ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\frac{dx}{dt} = -5\operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{dt} = 4\cos\theta \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4\cos\theta}{-5\operatorname{sen}\theta} = -\frac{4}{5}\cot\theta$$

Y PARA $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ SE TIENE QUE:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5}\cot\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{4}{5\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \approx -0.4619$$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES:

$$i)\ \int\frac{2x+5}{9+16x-4x^2}\,dx \qquad ii)\ \int x^2 angtanx\,dx \qquad iii)\ \int\frac{2x+1}{x^3-8}\,dx$$

SOLUCIÓN.

$$i)\ \int\frac{2x+5}{9+16x-4x^2}\,dx$$

LO PRIMERO QUE SE ACONSEJA ES LLAMAR AL DENOMINADOR CON UNA NUEVA VARIABLE u Y VER CÓMO SE PRESENTA LA DIFERENCIAL. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$u = 9 + 16x - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad du = (16 - 8x)dx = -4(2x-4)dx$$

ENTONCES LA EXPRESIÓN ORIGINAL SE PUEDE ESCRIBIR COMO

$$\int \frac{2x+5}{9+16x-4x^2}dx = \int \frac{2x+5-4+4}{9+16x-4x^2}dx = \int \frac{2x-4+9}{9+16x-4x^2}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{-4(2x-4)}{9+16x-4x^2}dx + 9\int \frac{dx}{9+16x-4x^2}dx$$

LA PRIMERA INTEGRAL SE RESUELVE HACIENDO USO DEL CAMBIO DE VARIABLE PROPUESTO Y QUEDA COMO,

$$-\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{4}\ln|u| + C_1 = -\frac{1}{4}\ln|9+16x-4x^2| + C_1$$

PARA RESOLVER LA SEGUNDA INTEGRAL SE COMLETA EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO EN EL DENOMINADOR, LO QUE CONDUCE A LO SIGUIENTE:

$$9\int \frac{dx}{9+16x-4x^2} = 9\int \frac{dx}{-(4x^2-16x-9)} = 9\int \frac{dx}{-(4x^2-16x+16-16-9)} = 9\int \frac{dx}{25-(2x-4)^2}$$

SE REALIZAN LOS CORRESPONDIENTES CAMBIOS DE VARIABLE, DE DONDE:

$$a^2 = 25 \quad ; \quad a = 5 \quad ; \quad u^2 = (2x-4)^2 \quad ; \quad u = 2x-4 \quad ; \quad du = 2\,dx$$

LUEGO

$$9\int \frac{dx}{9+16x-4x^2} = 9\int \frac{dx}{25-(2x-4)^2} = \frac{9}{2}\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{9}{2}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C_2 = \frac{9}{2}\ln\left|\frac{1+2x}{9-2x}\right| + C_2$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL ES:

$$\int \frac{2x+5}{9+16x-4x^2}dx = -\frac{1}{4}\ln|9+16x-4x^2| + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{1+2x}{9-2x}\right| + C \quad ; \quad C = C_1 + C_2$$

ii) $\int x^2 angtanx\, dx$

ESTA ES UNA INTEGRAL QUE SE RESUELVE POR EL MÉTODO CONOCIDO COMO "INTEGRACIÓN POR PARTES". ASÍ SE TIENE QUE:

$$u = ang\tan x \quad dv = x^2 dx$$

$$du = \frac{dx}{x^2+1} \qquad v = \frac{x^3}{3} \qquad \Rightarrow \quad \int x^2 ang\tan x\, dx = \frac{x^3}{3}ang\tan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$$

SE EFECTÚA LA DIVISIÓN DEL INTEGRANDO DE LA INTEGRAL QUE APARECE EN EL SEGUNDO TÉRMINO DE LA EXPRESIÓN QUE SE ACABA DE OBTENER Y SE LLEGA A:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \int x\,dx - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C_1$$

FINALMENTE SE TIENE QUE:

$$\int x^2 angtanx\, dx = \frac{x^3}{3}angtanx - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln|x^2+1| + C$$

iii) $\int \frac{2x+1}{x^3-8}dx$

POR EL MÉTODO DE "INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES RACIONALES", SE TIENE QUE:

$$\frac{2x+1}{x^3-8} = \frac{2x+1}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

$$2x+1 = A(x^2+2x+4) + (Bx+C)(x-2)$$

$$2x+1 = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

DE DONDE:

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 2 &= 2A - 2B + C \\ 1 &= 4A - 2C \end{aligned}$$

SE RESUELVE EL SISTEMA Y SE LLEGA A:

$$B=-A \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}2=4A+C\\ 1=4A-2C\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}2=4A+C\\ -1=-4A+2C\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad 1=3C \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}C=\dfrac{1}{3}\\ A=\dfrac{5}{12}\\ B=-\dfrac{5}{12}\end{matrix}$$

POR LO QUE LA INTEGRAL QUEDA COMO

$$\int\frac{2x+1}{x^3-8}\,dx=\int\frac{\frac{5}{12}}{x-2}\,dx+\int\frac{-\frac{5}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\,dx=\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{12}\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}\,dx$$

LA PRIMERA INTEGRAL SE RESUELVE FÁCILMENTE MEDIANTE UN SENCILLO CAMBIO DE VARIABLE QUE CONDUCE A UNA FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

$$\frac{5}{12}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{5}{12}\ln|x-2|+C_1$$

Y LA SEGUNDA INTEGRAL SE RESUELVE DE MANERA SEMEJANTE A LA (i) DE ESTA SERIE DE INTEGRALES. ASÍ, SE TIENE QUE:

$$u=x^2+2x+4 \quad\Rightarrow\quad du=(2x+2)dx=2(x+1)dx$$

$$\int\frac{5x-4}{x^2+2x+4}\,dx=\int\frac{5x+5-5-4}{x^2+2x+4}\,dx=5\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx-9\int\frac{dx}{x^2+2x+4}$$

$$5\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}\,dx=\frac{5}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{5}{2}\ln|u|+C_2=\frac{5}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right|+C_2$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+4}\,dx=\int\frac{dx}{x^2+2x+1-1+4}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+3}$$

$$a^2=3 \quad;\quad a=\sqrt{3} \quad;\quad u^2=(x+1)^2 \quad;\quad u=x+1 \quad;\quad du=dx$$

$$-9\int\frac{dx}{x^2+2x+4}\,dx=-9\int\frac{dx}{(x+1)^2+3}=-9\int\frac{du}{u^2+a^2}=-9\cdot\frac{1}{a}\,angtan\,\frac{u}{a}+C_3=-\frac{9}{\sqrt{3}}\,angtan\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C_3$$

FINALMENTE LA SOLUCIÓN DE LA INTEGRAL ES:

$$\int\frac{2x+1}{x^3-8}\,dx=\frac{5}{12}\ln|x-2|+\frac{5}{2}\ln\left|x^2+2x+4\right|-\frac{9}{\sqrt{3}}\,angtan\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C \qquad;\quad C=C_1+C_2+C_3$$

TUTORÍA

ALUMNOS DE PRIMER INGRESO CURRICULAR

APROVECHEN LA TUTORÍA. ES UN SERVIVIO ACADÉMICO QUE PUEDE SER FUNDAMENTAL EN SUS ESTUDIOS. EL TUTOR ES UN ALIADO QUE PUEDE ORIENTAR ACADÉMICA Y HUMANAMENTE. ES UN PROFESOR DE LA FACULTAD DISPUESTO A AYUDAR, A ESCUCHAR Y A TRATAR DE ENCONTRAR SOLUCIONES A TODAS LAS PROBLEMÁTICAS QUE USTEDES LE PLANTEEN.

ALUMNOS DE PRIMER INGRESO PROPEDÉUTICO

EL PRÓXIMO SEMESTRE, CUANDO ESTÉN EN RIMER SEMESTRE CURRICULAR, SE LES PROPORCIONARÁ UN TUTOR, DISPUESTO A APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ENTREVÍSTENSE CON ÉL, APÓYENSE EN ÉL, PÍDANLE SU CONSEJO SOBRE TODO AQUELLO QUE LES PREOCUPE O QUIZÁ HASTA LOS ANGUSTIE.

ALUMNOS DE OTROS SEMESTRES

SI TUVIERON UNA BUENA RELACIÓN CON SU TUTOR EN EL PRIMER SEMESTRE - LO QUE DESEAMOS SINCERAMENTE-, PUEDEN SEGUIR BUSCANDO SU AYUDA Y SU ORIENTACIÓN, Y CONTINUAR LA RELACIÓN DE AFECTO QUE SE ESTABLECIÓ.

CULTURA

LA MOSCA QUE SOÑABA QUE ERA UN ÁGUILA (AUGUSTO MONTERROSO)

HABÍA UNA VEZ UNA MOSCA QUE TODAS LAS NOCHES SOÑABA QUE ERA UN ÁGUILA Y QUE SE ENCONTRABA VOLANDO POR LOS ALPES Y POR LOS ANDES. EN LOS PRIMEROS MOMENTOS ESTO LA VOLVÍA LOCA DE LA FELICIDAD; PERO PASADO UN TIEMPO LE CAUSABA UNA SENSACIÓN DE ANGUSTIA, PUES HALLABA LAS ALAS DEMASIDO GRANDES, EL CUERPO DEMASIADO PESADO, EL PICO DEMASIADO DURO Y LAS GARRAS DEMASIADO FUERTES; BUENO, QUE TODO ESE GRAN APARATO LE IMPEDÍA POSARSE A GUSTO SOBRE LOS RICOS PASTELES O SOBRE LAS INMUNDICIAS HUMANAS, ASÍ COMO SUFRIR A CONCIENCIA DÁNDOSE TO ES CONTRA LOS VIDRIOS DE SU CUARTO.

EN REALIDAD NO QUERÍA ANDAR EN LAS GRANDES ALTURAS, O EN LOS ESPACIOS LIBRES, NI MUCHO MENOS.

PERO CUANDO VOLVÍA EN SÍ LAMENTABA CON TODA EL ALMA NO SER UN ÁGUILA PARA REMONTAR MONTAÑAS, Y SE SENTÍA TRISTÍSIMA DE SER UNA MOSCA, Y POR ESO VOLABA TANTO, Y ESTABA TAN INQUIETA, Y DABA TANTAS VUELTAS, HASTA QUE LENTAMENTE, POR LA NOCHE, VOLVÍA A PONER LAS SIENES EN LA ALMOHADA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ.
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 36 2 DE FEBRERO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. **LA COPADI LES DESEA TODO TIPO DE ÉXITOS EN EL SEMESTRE QUE ESTÁ POR TERMINAR. BIEN VALE LA PENA UN PROFUNDO Y DEDICADO ESTUDIO FINAL PARA ACREDITAR LAS ASIGNATURAS Y AVANZAR EN EL CAMINO QUE LOS CONDUCIRÁ A SER UNOS EXCELENTES INGENIEROS.**

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

CALCULAR LA DISTANCIA ENTRE LOS PLANOS PARALELOS π_1 y π_2 DE ECUACIONES:

$$\pi_1 : \quad 2x - 3y + 6z + 28 = 0$$
$$\pi_2 : \quad 2x - 3y + 6z + 14 = 0$$

SOLUCIÓN:

PRIMERA FORMA

SE HACE USO DE LA EXPRESIÓN: $d = \dfrac{\left|(\bar{q} - \bar{p}_0)\cdot \bar{N}\right|}{\left|\bar{N}\right|}$ EN DONDE $\bar{q}$ ES EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA Q , DEL PLANO π_1

$\bar{p}_0$ ES EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA P_0 DEL PLANO π_2 ; Y $\bar{N}$ ES EL VECTOR NORMAL A CUALQUIERA DE LOS DOS PLANOS.

PARA OBTENER EL PUNTO Q Y EL VECTOR $\bar{q}$, SE HACE LO SIGUIENTE: SEAN $y = 0$ y $z = 0$ EN π_1 , LUEGO

$$2x + 28 = 0 \;\Rightarrow\; x = -14 \;\Rightarrow\; Q(-14,0,0) \;\Rightarrow\; \bar{q} = (-14,0,0)$$

PARA OBTENER EL PUNTO P_0 Y EL VECTOR $\bar{p}_0$, SE HACE LO SIGUIENTE: SEAN $y = 0$ y $z = 0$ EN π_2 , LUEGO

$$2x + 14 = 0 \;\Rightarrow\; x = -7 \;\Rightarrow\; P_0(-7,0,0) \;\Rightarrow\; \bar{p}_0 = (-7,0,0)$$

UN VECTOR NORMAL AL PLANO π_1 ES: $\bar{N} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k} \;\Rightarrow\; \left|\bar{N}\right| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = 7$. ENTONCES:

$$\bar{q} - \bar{p}_0 = (-14,0,0) - (-7,0,0) = (-7,0,0)$$
$$(\bar{q} - \bar{p}_0)\cdot \bar{N} = (-7,0,0)\cdot(2,-3,6) = -14$$
$$d = \frac{|-14|}{7} = 2 \quad \text{UNIDADES DE LONGITUD}$$

OTRA FORMA

CON LA DISTANCIA DE UN PLANO DE ECUACIÓN $Ax + By + Cz + D = 0$, AL ORIGEN, QUE ESTÁ DADA POR $d = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

SE CALCULA LA DISTANCIA ENTRE CADA UNO DE LOS PLANOS Y EL ORIGEN

PARA π_1 : $d_1 = \dfrac{|D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \dfrac{28}{7} = 4$ UNIDADES DE LONGITUD

PARA π_2 : $d_2 = \dfrac{|D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \dfrac{14}{7} = 2$ UNIDADES DE LONGITUD

PUESTO QUE PARA $\overline{N}_1 = \overline{N}_2$ SE TIENE QUE $D_1D_2 > 0$, ENTONCES EL ORIGEN DE COORDENADAS NO ESTÁ COMPRENDIDO ENTRE LOS DOS PLANOS, POR LO QUE LA DISTANCIA ENTRE ELLOS ESTÁ DADA POR:

$$d = d_1 - d_2 = 4 - 2 = 2 \quad \text{UNIDADES DE LONGITUD}$$

NOTA. SI PARA $\overline{N}_1 = \overline{N}_2$ SE TUVIERA QUE $D_1D_2 < 0$, ENTONCES ESTO QUERRÍA DECIR QUE EL ORIGEN ESTÁ COMPRENDIDO ENTRE LOS DOS PLANOS, Y EN ESTE CASO SE TENDRÍA QUE:

$$d = d_1 + d_2$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

CON BASE EN LA INFORMACIÓN SIGUIENTE:

$$\varepsilon_1 = 12\ [V] \quad r_1 = 2\ [\Omega] \quad R_1 = 18\ [\Omega]$$
$$\varepsilon_2 = 6\ [V] \quad r_2 = 1\ [\Omega] \quad R_2 = 9\ [\Omega]$$
$$\varepsilon_3 = 6\ [V] \quad r_3 = 2\ [\Omega] \quad R_3 = 28\ [\Omega]$$
$$\varepsilon_4 = 3\ [V] \quad r_4 = 1\ [\Omega]$$

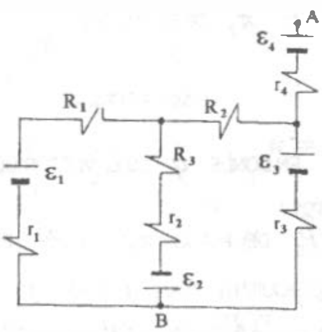
QUE CORRESPONDE AL CIRCUITO DE LA FIGURA, OBTENER:

A) LA CORRIENTE ELÉCTRICA EN CADA UNA DE LAS FUENTES DE *fem*

B) LA ENERGÍA ELÉCTRICA QUE SE TRANSFORMA EN CALOR, CADA SEGUNDO, EN EL RESISTOR R_1

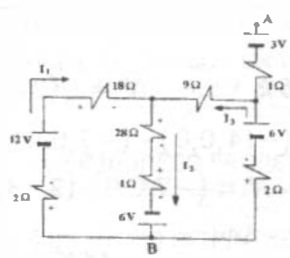
C) LA DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB}

D) LA ENERGÍA SUMINISTRADA POR LA FUENTE ε_2 AL RESTO DEL CIRCUITO, EN 5 SEGUNDO



RESOLUCIÓN

A) EN LA FIGURA SIGUIENTE SE MUESTRAN LAS CORRIENTES EN CADA RAMA:



CON LA LCK EN EL NODO B TENEMOS QUE

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

CON LA LVK EN LA MALLA IZQUIERDA, SE TIENE QUE

$$r_1 I_1 - \varepsilon_1 + R_1 I_1 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$$
$$20 I_1 + 29 I_2 = 18 \quad \cdots \quad (2)$$

CON LA LVK EN LA MALLA DERECHA, SE TIENE QUE

$$r_3 I_3 - \varepsilon_3 + R_2 I_3 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2 = 0$$
$$29 I_2 + 11 I_3 = 12 \quad \cdots \quad (3)$$

AL RESOLVER EL SISTEMA DE ECUACIONES SE ENCUENTRAN:

$$I_1 = 0.3324\ [A] \quad ; \quad I_2 = 0.3914\ [A] \quad ; \quad I_3 = 0.059\ [A] \quad ; \quad \text{Y ADEMÁS } I_{\varepsilon_4} = 0$$

B) $E_{dis_{R_1}} = P_1 \Delta t \quad ; \quad P_1 = R_1 I_1^2 \quad \therefore \quad E_{dis_{R_1}} = 18\,[\Omega]\,0.3324^2\,[A]^2\,1\,[S] \;\Rightarrow\; E_{dis_{R_1}} = 1.989\,[J]$

C)
$$V_{AB} = \varepsilon_4 - r_4(0) + R_2 I_3 + R_3 I_2 + r_2 I_2 - \varepsilon_2$$
$$V_{AB} = [3 + 9(0.059) + 28(0.3914) + 1(0.3914) - 6]\,[V]$$
$$V_{AB} = (3 + 0.531 + 10.959 + 0.3914 - 6)\,[V]$$
$$V_{AB} = 8.882\ [V]$$

D) $E_{SUM_2} = P_2\,\Delta t \quad ; \quad P_2 = \varepsilon_2 I_2 - r_2 I_2^2$ YA QUE ES FUENTE REAL ; $\Delta t = 5\ [s]$

$$E_{SUM_2} = [6(0.3914) - 1(0.3914)^2]\,[W]\,5\,[S] \;\Rightarrow\; E_{SUM_2} = 10.976\ [J]$$

TERMODINÁMICA

EN UN CILINDRO VERTICAL, CON UN ÉMBOLO LIBRE DE FRICCIÓN, HAY $23\,(g)$ DE UN GAS IDEAL $\left(R = 2.0786\left(\frac{J}{gK}\right), k = \frac{5}{3}\right)$ EL FLUIDO SE ENFRÍA CASIESTÁTICAMENTE DESDE $200\,(^\circ C)$ HASTA $90\,(^\circ C)$. LA MASA DEL ÉMBOLO ES TAL, QUE EL GAS ESTABA INICIALMENTE A $300\,(kPa)$. EL CILINDRO TIENE $40\,(cm)$ DE DIÁMETRO Y SE HALLA EN LA CU (CIUDAD UNIVERSITARIA) $\left(77.17\,(kPa), 18\,(^\circ C), 9.78\left(\frac{m}{s^2}\right)\right)$.

CALCULAR EL CAMBIO EN LA ENERGÍA DEL GAS QUE EL PROCESO PROVOCA.

RESOLUCIÓN

SISTEMA: CERRADO (LA MASA DEL GAS EN EL CILINDRO)

PARA LA APLICACIÓN DE LOS PRINCIPIOS DE LA TERMODINÁMICA, DEBEN CONOCERSE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO INICIAL Y FINAL.

EL ESTADO DE EQUILIBRIO INICIAL SE DETERMINA MEDIANTE $200\,(^\circ C)$ y $300\,(kPa)$

EN EL ESTADO DE EQUILIBRIO FINAL SE DA ÚNICAMENTE $90\,(^\circ C)$; PARA LA DETERMINACIÓN DE ESTE ESTADO, APÓYESE EN EL HECHO DE QUE UN PROCESO CASIESTÁTICO ES UNA SUCESIÓN DE ESTADOS DE EQUILIBRIO.

PARA QUE HAYA EQUILIBRIO TERMODINÁMICO HA DE HABER EQUILIBRIO MECÁNICO. SI SE APLICA ESTA CONDICIÓN AL ÉMBOLO, EN CUALQUIERA DE LOS ESTADOS DE EQUILIBRIO A LOS LARGO DEL PROCESO, SE LLEGA A:

$$P_{\substack{abs\\gas}} = \frac{M_{émbolo} \cdot g}{á} + P_{amb} \quad \cdots \quad (I)$$

LOS SÍMBOLOS DE LA ECUACIÓN (I) SON.

$M_{émbolo}$ = DESCONOCIDA, PERO CONSTANTE

P_{amb} = CONSTANTE

$á = \frac{\pi D^2}{4}$ = CONSTANTE

g = CONSTANTE

DE LA ECUACIÓN (I) PUEDE CONCLUIRSE QUE LA PRESIÓN DEL SISTEMA SE MANTIENE CONSTANTE DURANTE EL ENFRIAMIENTO.

POR LO TANTO, LA SEGUNDA PROPIEDAD QUE SE NECESITA PARA LA DETERMINACIÓN DEL ESTADO FINAL ES $300\,(kPa)$.

APLIQUE LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA AL SISTEMA CERRADO. CONSIDERE QUE DURANTE EL PROCESO LOS CAMBIOS EN LA ENERGÍA CINÉTICA Y EN LA ENERGÍA POTENCIAL DEL SISTEMA SON DESPRECIABLES:

$$E_{final} - E_{inicial} \approx U_{final} - U_{inicial}$$

PUESTO QUE EL SISTEMA ES UN GAS IDEAL, QUE ES UNA SUSTANCIA SIMPLE COMPRESIBLE, EL ÚNICO TRABAJO CASIESTÁTICO ES TRABAJO DE EXPANSIÓN.

$$\{W\}_{exp} = -\int_{\forall_{ini}}^{\forall_{fin}} P_{\substack{abs\\sistema}}\, d\forall$$

YA QUE EL PROCESO ES ISOBÁRICO: $\{W\}_{exp} = -P_{\substack{abs\\sistema}} \cdot (\forall_{fin} - \forall_{ini})$

POR LA ECUACIÓN DEL GAS IDEAL: $\{W\}_{exp} = -M_{sist} \cdot R \cdot (T_{fin} - T_{ini}) \quad \cdots \quad (II)$

COMO EL PROCESO ES ISOBÁRICO: $\{Q\} = M_{sist} \cdot C_p \left(T_{fin} - T_{ini}\right)$

POR LA FÓRMULA DE MAYER, $C_p - C_v = R$, Y POR LA DEFINICIÓN DEL EXPONENTE ADIABÁTICO DE POISSON, $k = \dfrac{C_p}{C_v}$; $C_p = \dfrac{kR}{k-1}$

$$\{Q\} = M_{sist} \frac{kR}{k-1}\left(T_{fin} - T_{ini}\right) \quad \dots \quad (III)$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA, CON LA CONSIDERACIÓN ANTERIOR, QUEDA COMO:

$$\{Q\} + \{W\}_{exp} \approx U_{final} - U_{inicial}$$

POR LAS ECUACIONES (II) y (III) EL LADO IZQUIERDO ES EVALUABLE CON FACILIDAD. PARA EVALUAR EL LADO DERECHO, SE HACE LO SIGUIENTE:

$$M_{sist} \frac{kR}{k-1}\left(T_{fin} - T_{ini}\right) + \left(-M_{sist} \cdot R \cdot \left(T_{fin} - T_{ini}\right)\right) \approx U_{fin} - U_{ini}$$

$$M_{sist} \frac{R}{k-1}\left(T_{fin} - T_{ini}\right) = U_{fin} - U_{ini}$$

$$23\,(g)\,2.0876\left(\frac{J}{gK}\right)\frac{1}{\frac{5}{3}-1}\left(90\;({}^{0}C) - 200\;({}^{0}C)\right) \approx U_{fin} - U_{ini}$$

$$-7.9224\quad (kJ) \approx U_{fin} - U_{ini}$$

COMENTARIOS

OBSERVE QUE INMEDIATAMENTE DESPUÉS DE ESCOGER AL SISTEMA HAY QUE ESTAR SEGURO DE QUE LOS ESTADOS INICIAL Y FINAL SE CONOCEN.
A VECES, COMO EN ESTE CASO, DEBE USARSE LA INFORMACIÓN ACERCA DEL PROCESO PARA TAL DETERMINACIÓN.
EL LECTOR FAMILIARIZADO CON LA LEY DE JOULE PODRÍA HABER ENCONTRADO LA RESPUESTA MÁS CONCISAMENTE.

CULTURA

LA RANA QUE QUERÍA SER UNA RANA AUTÉNTICA

HABÍA UNA VEZ UNA RANA QUE QUERÍA SER UNA RANA AUTÉNTICA, Y TODOS LOS DÍAS SE ESFORZABA EN ELLO.

AL PRINCIPIO SE COMPRÓ UN ESPEJO EN EL QUE SE MIRABA LARGAMENTE BUSCANDO SU ANSIADA AUTENTICIDAD.

UNAS VECES PARECÍA ENCONTRARLA Y OTRAS NO, SEGÚN EL HUMOR DE ESE DÍA O DE LA HORA, HASTA QUE SE CANSÓ DE ESTO Y GUARDÓ EL ESPEJO EN UN BAÚL.

POR FIN PENSÓ QUE LA ÚNICA FORMA DE CONOCER SU PROPIO VALOR ESTABA EN LA OPINIÓN DE LA GENTE, Y COMENZÓ A PEINARSE Y A VESTIRSE Y A DESVESTIRSE (CUANDO NO LE QUEDABA OTRO RECURSO) PARA SABER SI LOS DEMÁS LA APROBABAN Y RECONOCÍAN QUE ERA UNA RANA AUTÉNTICA.

UN DÍA OBSERVÓ QUE LO QUE MÁS ADMIRABAN DE ELLA ERA SU CUERPO, ESPECIALMENTE SUS PIERNAS, DE MANERA QUE SE DEDICÓ A HACER SENTADILLAS Y A SALTAR PARA TENER UNAS ANCAS CADA VEZ MEJORES, Y SENTÍA QUE TODOS LA APLAUDÍAN.

Y ASÍ SEGUÍA HACIENDO ESFUERZOS HASTA QUE, DISPUESTA A CUALQUIER COSA PARA LOGRAR QUE LA CONSIDERARAN UNA RANA AUTÉNTICA, SE DEJABA ARRANCAR LAS ANCAS, Y LOS OTROS SE LAS COMÍAN, Y ELLA TODAVÍA ALCANZABA A OIR CON AMARGURA CUANDO DECÍAN QUE QUÉ BUENA RANA, QUE PARECÍA POLLO.

AUGUSTO MONTERROSO

TUTORÍA

EL PRÓXIMO SEMESTRE, EL PROGRAMA **"TUTORÍA PARA TODOS"** SE DEDICARÁ ESPECIALMENTE A LOS ESTUDIANTES DE LA GENERACIÓN 2002 QUE ESTÁN AHORA EN EL CURSO PROPEDÉUTICO. PERO ESTO NO QUIERE DECIR QUE QUIENES YA HAN ESTABLECIDO COMUNICACIÓN E INTERACCIÓN CON SU TUTOR, DEJEN DE HACERLO. AL CONTRARIO, SE PRETENDE QUE EL CONTACTO PERDURE Y QUE LA AMISTAD Y EL AFECTO SIGAN. DE ESTA MANERA EL ESTUDIANTE PUEDE SEGUIR RECIBIENDO APOYO Y ALIENTO EN SUS ESTUDIOS Y EL TUTOR CONTINÚA CON ESTA NOBLE LABOR QUE ES INHERENTE A SU LABOR ACADÉMICA Y A SU VOCACIÓN DOCENTE. ES TAN IMPORTANTE LA TUTORÍA QUE HAY BECAS DE LICENCIATURA QUE PIDEN COMO REQUISITO QUE EL ESTUDIANTE CUENTE CON UN TUTOR.

ESTUDIANTES: APROVECHEN ESTE SERVICIO ACADÉMICO Y BUSQUEN A ESE PROFESOR QUE ESTÁ DISPUESTO A AYUDARLOS

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO, GABRIEL JARAMILLO MORALES, HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ Y DE LA COORDINACIÓN DE TERMODINÁMICA.

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 37 17 DE FEBRERO DE 2002

EDITORIAL

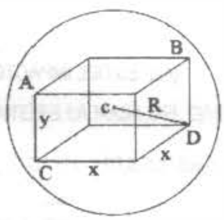
ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. EN LA VIDA DE LOS ESTUDIANTES, TODO ES CUESTIÓN DE DECISIÓN Y VOLUNTAD. Y DESPUÉS VENDRÁN TODOS LOS FRUTOS DE LA "COSECHA". UNA VIDA DIGNA, UN SALARIO DIGNO Y LA INMENSA OPORTUNIDAD DE AYUDAR A LOS DEMÁS Y SER FELIZ.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

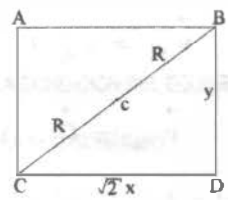
CÁLCULO I

CALCULAR LAS DIMENSIONES DEL PARALELEPÍPEDO DE BASE CUADRADA, DE VOLUMEN MÁXIMO, QUE SE PUEDE INSCRIBIR EN UNA ESFERA DE RARIO "R" OBTENER TAMBIÉN EL VOLUMEN MÁXIMO.

SOLUCIÓN.



(A)



(B)

EN LA FIGURA (A) SE OBSERVA EL PARALALAPÍPEDO INSCRITO EN UNA ESFERA DE RADIO "R". SOLAMENTE LOS VÉRTICES DEL PRISMA RECTANGULAR PERTENECEN A LA ESFERA. LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR ES EL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO, ES DECIR, $V = x^2 y$

COMO ESTÁ INSCRITO EN LA ESFERA, SUS VÉRTICES PERTENECEN A ELLA. LUEGO, PARA PODER ESTABLECER UNA ECUACIÓN AUXILIAR QUE RELACIONE A LOS LADOS DEL PARALELEPÍPEDO CON EL RADIO DE LA ESFERA, SE CONSIDERA LA SECCIÓN PLANA "$ABCD$" QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA (B). DE ÉSTA SE TIENE QUE:

$$2x^2 + y^2 = 4R^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4R^2 - y^2}{2} \quad \cdots \quad (1)$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR Y SE RESUELVE EL PROBLEMA PLANTEADO. ASÍ,

$$V = \frac{4R^2 - y^2}{2} y \quad \Rightarrow \quad V = 2R^2 y - \frac{y^3}{2} \quad ; \quad \frac{dV}{dy} = 2R^2 - \frac{3y^2}{2} \quad ; \quad 2R^2 - \frac{3y^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{4R^2}{3}; y = \pm\sqrt{\frac{4R^2}{3}}$$

COMO SE TRATA DE UNA LONGITUD, EL VALOR LÓGICO ES EL POSITIVO. LUEGO, EL VALOR CRÍTICO ES $y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. PARA VERIFICAR QUE SE TRATA DE UN VALOR CRÍTICO QUE CONDUCE A UN VOLUMEN MÁXIMO, SE DERIVA POR SEGUNDA VEZ Y SE LLEGA A $\frac{d^2V}{dy^2} = -3y$. Y SI SE SUSTITUYE EN ESTA SEGUNDA DERIVADA EL VALOR CRÍTICO OBTENIDO, SE TIENE QUE $\left.\frac{d^2V}{dy^2}\right|_{y=\frac{2R}{\sqrt{3}}} < 0$. POR LO TANTO SE TRATA DEL VOLUMEN MÁXIMO. Y PARA ENCONTRAR EL VALOR DEL LADO DE LA BASE, SE SUSTITUYE EL VALOR OBTENIDO DE "y" EN LA EXPRESIÓN (1) Y SE TIENE QUE:

$$x^2 = \frac{4R^2 - \frac{4R^2}{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{12R^2 - 4R^2}{6} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4R^2}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4R^2}{3}}$$

SE TOMA EL VALOR POSITIVO POR SER LA LONGITUD DEL LADO DE LA BASE. FINALMENTE, LAS DIMENSIONES DEL PARALELEPÍPEDO SON $x = y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ Y EL VOLUMEN MÁXIMO ES $V = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$

DINÁMICA (IMPACTO)

DOS PARTÍCULAS SE MUEVEN EN LÍNEA RECTA TAL COMO SE INDICA EN LA FIGURA

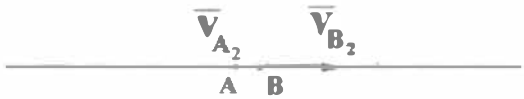
SI SE CONSIDERA QUE LAS MASAS DE LAS PARTÍCULAS SON IGUALES Y QUE LA MAGNITUD DE LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA A ES EL DOBLE DE LA MAGNITUD DE LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA B, ANTES DEL IMPACTO, ENTONCES DETERMINAR EL VALOR DEL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN PARA QUE LA PARTÍCULA A NO SE MUEVA Y LA PARTÍCULA B CAMBIE DE SENTIDO SU MOVIMIENTO DESPUÉS DEL IMPACTO.

SOLUCIÓN: POR COMODIDAD, LLAMAREMOS "x" A LA LÍNEA DE IMPACTO. DEFINIMOS LAS VELOCIDADES COMO

$$\vec{v}_{A_1} = v_{A_1}\,\hat{i} \quad y \quad \vec{v}_{B_1} = -v_{B_1}\,\hat{i} \qquad \text{(ANTES DEL IMPACTO)}$$

Y DESPUÉS DEL IMPACTO SE TIENE QUE

$$\vec{v}_{A_2} = \vec{0} \quad y \quad \vec{v}_{B_2} = v_{B_2}\,\hat{i} \qquad \text{(DESPUÉS DEL IMPACTO)}$$



DEL PRINCIPIO DE IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO SE TIENE QUE

$$m_A v_{A_1} + m_B v_{B_1} = m_A v_{A_2} + m_B v_{B_2} \quad \cdots \quad (1)$$

DADO QUE LAS MASAS SON IGUALES, LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA B ANTES DEL CHOQUE Y QUE LA PARTÍCULA A SE DETIENE DESPUÉS DEL CHOQUE, SE TIENE QUE

$$v_{A_1} - v_{B_1} = v_{B_2} \quad \cdots \quad (2)$$

ADEMÁS $v_{A_1} = 2v_{B_1} \quad \cdots \quad (3)$ ENTONCES, SE SUSTITUYE EN (2) Y SE LLEGA A $v_{B_2} = v_{B_1} \quad \cdots \quad (4)$

POR OTRA PARTE, EL COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN ESTÁ DADO POR

$$e = \frac{v_{B_2} - v_{A_2}}{v_{A_1} - v_{B_1}} \quad \cdots \quad (5)$$

DE (3) y (4) Y, CONSIDERANDO LA VELOCIDAD DE LA PARTÍCULA B ANTES DEL CHOQUE, SE TIENE QUE $e = \frac{v_{B_1}}{2v_{B_1} + v_{B_1}}$ Y POR LO TANTO

$$e = \frac{1}{3}$$

NOTA: RECORDAR QUE HAY QUE TOMAR EN CUENTA LOS SENTIDOS DE LAS VELOCIDADES.

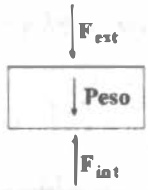
TERMODINÁMICA

EN UN CILINDRO VERTICAL, CON UN ÉMBOLO LIBRE DE FRICCIÓN, HAY $23\,(g)$ DE UN GAS IDEAL $\left(R = 2.0786\left(\frac{J}{gK}\right), k = \frac{5}{3}\right)$. EL FLUIDO SE ENFRÍA CASIESTÁTICAMENTE DESDE $200\,({}^{0}C)$ HASTA $90\,({}^{0}C)$. LA MASA DEL ÉMBOLO ES TAL, QUE EL GAS ESTABA INICIALMENTE A $300\,(kPa)$. EL CILINDRO

TIENE $40\,(cm)$ DE DIÁMETRO Y SE HALLA EN LA CU (CIUDAD UNIVERSITARIA) $\left(77.17\,(kPa),\,18\,(^{\circ}C),\,9.78\left(\frac{m}{s^2}\right)\right)$. ESTABLEZCA LA MASA DEL ÉMBOLO.

RESOLUCIÓN.

EL GAS ESTABA AL COMIENZO EN EQUILIBRIO TERMODINÁMICO (EL ESTADO INICIAL). EN ESAS CONDICIONES DEBE HABER EQUILIBRIO MECÁNICO SI SE APLICA AL ÉMBOLO



$$\sum F_{verti} = 0 \quad ; \quad F_{int} - peso - F_{ext} = 0$$

$$F_{int} = P_{\underset{gas}{abs}} \cdot a' \quad ; \quad F_{ext} = P_{amb} \cdot a' \quad ; \quad peso = M_{\grave{e}mbolo} \cdot g \quad \Rightarrow \quad \left(P_{\underset{gas}{abs}} - P_{amb}\right)\frac{a'}{g} = M_{\grave{e}mbolo} \quad \cdots \quad (I)$$

LOS SÍMBOLOS DE LA ECUACIÓN (I) SON:

$$P_{\underset{gas}{abs}} = 300\,(kPa) \quad ; \quad P_{amb} = 77.17\,(kPa) \quad ; \quad a' = \frac{\pi D^2}{4} = 125.6637 \times 10^{-3}\,(m^2) \quad ; \quad g = 9.78\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

AL SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN (I) QUEDA:

$$\left(300 \times 10^3\left(\frac{N}{m^2}\right) - 77.17 \times 10^3\left(\frac{N}{m^2}\right)\right)\frac{125.6637 \times 10^{-3}\,(m^2)}{9.78\left(\frac{m}{s^2}\right)} = M_{\grave{e}mbolo} \quad \Rightarrow \quad 2863.1537\,(kg) = M_{\grave{e}mbolo}$$

COMENTARIOS.

EL SISTEMA QUE SE ESCOGE NATURALMENTE ES LA MASA DEL GAS EN EL CILINDRO. OBSERVE QUE LA CONDICIÓN DEL EQUILIBRIO MECÁNICO SE APLICA AL ÉMBOLO, QUE NO FORMA PARTE DEL SISTEMA.

SI DE LA ECUACIÓN (I) SE DESPEJARA $P_{\underset{gas}{abs}}$ SE VERÍA QUE EL PROCESO CASIESTÁTICO DEBIERA SER ISOBÁRICO.

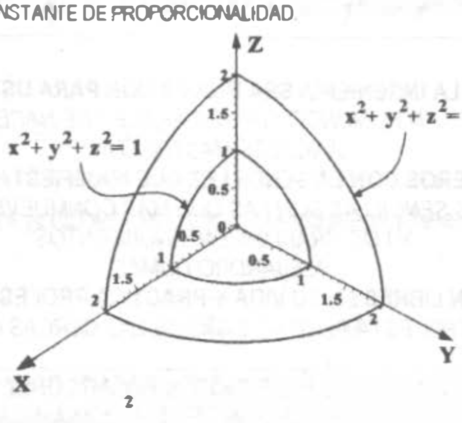
NOTE QUE UNA GRAN CANTIDAD DE DATOS FUERON INNECESARIOS EN LA RESOLUCIÓN. ESTE HECHO NO DIFICULTÓ LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA QUE SE SOLICITÓ.

OBSERVE FINALMENTE QUE LA CONDICIÓN DEL EQUILIBRIO MECÁNICO SE LE EXPLICÓ EN CURSOS PREVIOS, NO EN EL DE TERMODINÁMICA.

CÁLCULO III

ENCONTRAR LA MASA DEL SÓLIDO LIMITADO POR LAS ESFERAS $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (EXTERIOR A LA PRIMERA E INTERIOR A LA SEGUNDA) SI LA DENSIDAD δ EN UN PUNTO P DEL SÓLIDO DESCRITO ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL CUADRADO DE LA DISTANCIA DEL CENTRO DE LAS ESFERAS AL PUNTO P

SOLUCIÓN. LAS ESFERAS SE MUESTRAN EN LA FIGURA, AL IGUAL QUE UN CIERTO PUNTO P SITUADO ENTRE ELLAS, CUYA DISTANCIA A SU CENTRO EQUIVALE A LA DISTANCIA DE ÉL AL ORIGEN DE COORDENADAS, ESTO ES, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, LUEGO, LA DENSIDAD EN CUALQUIER PUNTO P DEL SÓLIDO ES IGUAL A $\delta = k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ DONDE k ES LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD.



LA EXPRESIÓN PARA CALCULAR LA MASA ES $M = \iiint_R \delta\, dV = \iiint_R k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV$

POR LA FORMA DE LA REGIÓN, ES CONVENIENTE UTILIZAR COORDENADAS ESFÉRICAS. POR OTRO LADO, DADA LA SIMETRÍA DE LA EXPRESIÓN QUE DEFINE A LA DENSIDAD, CON RESPECTO A x, y, z, ES POSIBLE REALIZAR EL CÁLCULO DE LA MASA EN UN OCTANTE Y MULTIPLICAR POR 8. ASÍ, SE TIENE QUE

$$M = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 k\, r^2 \cdot r^2 sen\, \varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = 8k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 r^4 sen\, \varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$M = 8k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^5}{5} sen\, \varphi\right]_1^2 d\varphi\, d\theta = 8k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{32}{5} sen\, \varphi - \frac{1}{5} sen\, \varphi\right) d\varphi\, d\theta$$

$$M = 8\left(\frac{31}{5}\right)k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\, \varphi\, d\varphi\, d\theta = \frac{248}{5}k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{248}{5}k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{248}{5}k\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$M = \frac{124}{5}k\pi$$

JUEGO NUMÉRICO

UN CÍRCULO ES ROTULADO CON LOS NÚMEROS DEL 1 AL 1000.

EL JUEGO CONSISTE EN TACHAR EL NÚMERO 1 Y, A CONTINUACIÓN, TACHAR EL NÚMERO QUE DISTA 15 LUGARES DEL MISMO, ES DECIR, EL NÚMERO 16. EL PROCESO ANTERIOR SE REPITE TACHANDO LOS NÚMEROS QUE DISTAN 15 LUGARES DEL ÚLTIMO NÚMERO MARCADO. EL JUEGO TERMINA CUANDO AL CONTAR 15, DESPUÉS DEL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO, EL NÚMERO CORRESPONDIENTE YA SE HABÍA TACHADO ANTERIORMENTE. AL FINAL DEL PROCESO, ¿CUÁNTOS NÚMEROS QUEDAN SIN MARCAR EN EL CÍRCULO?

SOLUCIÓN

LA CANTIDAD DE NÚMEROS TACHADOS ANTES DE COMPLETAR UNA VUELTA AL CÍRCULO SE OBTIENE AL DESPEJAR n DE LA SIGUIENTE EXPRESIÓN:

$$1 + 15\,n \le 1000 \quad \Rightarrow \quad 15\,n \le 999 \quad \Rightarrow \quad n \le \frac{999}{15} \quad \Rightarrow \quad n \le 66.6$$

ESTO SIGNIFICA QUE SE HABRÁN TACHADO 67 NÚMEROS $(n+1)$, Y EL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO ES EL 991. AL SEGUIR EL JUEGO, EL SIGUIENTE NÚMERO TACHADO SERÁ EL 6 (DE LA SEGUNDA VUELTA) Y SE PUEDE APLICAR EL MISMO CRITERIO ANTERIOR PARA ENCONTRAR n:

$$6 + 15\,n \le 1000 \quad \Rightarrow \quad n \le \frac{994}{15} = 66.27$$

ASÍ PUES, EN LA SEGUNDA VUELTA SE HABRÁN TACHADO NUEVAMENTE 67 NÚMEROS, Y EL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO ES EL 996.

EN LA TERCERA VUELTA, EL PRIMER NÚMERO TACHADO ES EL 11, Y LA CANTIDAD DE NÚMEROS TACHADOS SE OBTENDRÁ AL RESOLVER n DE:

$$11 + 15\,n \le 1000 \quad \Rightarrow \quad n \le \frac{989}{15} = 65.93$$

ES DECIR, 66 NÚMEROS TACHADOS, SIENDO EL ÚLTIMO NÚMERO TACHADO EL 986. AL SUMAR 15 UNIDADES A ESTE NÚMERO PARA INICIAR LA CUARTA VUELTA, SE OBSERVA QUE EL NÚMERO QUE SE DEBE TACHAR ES EL 1, SIN EMBARGO, ÉSTE FUE EL PRIMER NÚMERO QUE SE TACHÓ AL INICIAR EL JUEGO, Y, POR LO TANTO, EL PROCESO FINALIZA. EN CONSECUENCIA, LA CANTIDAD DE NÚMEROS QUE QUEDAN SIN TACHAR EN EL CÍRCULO ES DE:

$$1000-(67+67+66)=800$$

(EL PROBLEMA FUE PROPUESTO POR EL DR. ROGELIO SOTO AYALA Y ESTA SOLUCIÓN FUE PROPUESTA POR EL ESTUDIANTE ULISES MIRANDA GONZÁLEZ)

HUMANISMO E INGENIERÍA

¡QUE LA INGENIERÍA SEA UNA PASIÓN PARA USTEDES!

"LA VIDA VALDRÁ LA PENA MIENTRAS HAYA EN EL MUNDO SERES CAPACES DE HACER MAGIA CUANDO PROFESAN UNA PASIÓN"
ÁNGELES MASTRETTA

¡SEAN INGENIEROS CON LA SENCILLEZ QUE MANIFIESTA LA SABIDURÍA!

"ES INNEGABLE QUE LAS COSAS SENCILLAS SON LAS QUE MÁS CONMUEVEN LOS CORAZONES PROFUNDOS Y LOS GRANDES ENTENDIMIENTOS"
ALEJANDRO DUMAS

¡SEAN LIBRES EN SU VIDA Y PRÁCTICA PROFESIONAL!

"LA LIBERTAD NO ES SÓLO UN SUEÑO. ESTÁ AL OTRO LADO DE LAS CERCAS QUE ERIGIMOS NOSOTROS MISMOS"

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES EDGAR LÓPEZ TÉLLEZ, ROGELIO SOTO AYALA Y LA COORDINACIÓN DE TERMODINÁMICA.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 38 17 DE ABRIL DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTA INICIANDO UN NUEVO SEMESTRE. ES TIEMPO DE REFLEXIÓN SOBRE LA ACTITUD Y EL COMPORTAMIENTO ACADÉMICO DEL SEMESTRE ANTERIOR Y DE PONERSE UNAS *PILAS NUEVAS* Y LANZARSE AL FUTURO CON GANAS DE TRIUNFAR, DE ACREDITAR TODAS LAS ASIGNATURAS Y DE BUSCAR LA ARMONÍA Y LA FELICIDAD CON LOS AMIGOS Y AMIGAS, Y TAMBIÉN EN CASA. ¿DE ACUERDO?

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

TEMÁTICAS AVANZADAS

CARACTERIZAR LAS CÓNICAS EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE COMPLEJA $z \in C$ EN ESTE TRABAJO SE DEBEN APLICAR LAS RELACIONES

$$z = x + iy \quad ; \quad \bar{z} = x - iy \quad ; \quad x = \operatorname{Re}(z) \quad ; \quad y = \operatorname{Im}(z)$$

CIÓN

1. LA RECTA

$$Ax + By + C = 0$$

SE PUEDE ESCRIBIR EN LA FORMA

$$A\,\frac{z + \bar{z}}{2} + B\,\frac{z - \bar{z}}{2\,i} + C = 0$$

ENTONCES

$$Az + A\bar{z} - Biz + Bi\,\bar{z} + 2C = 0 \quad \text{O BIEN} \quad (A + Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + 2C = 0$$

SI SE DEFINEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS $\lambda = A + Bi \quad ; \quad \mu = 2C$ LA ECUACIÓN QUEDA COMO

$$\lambda z + \lambda\,\bar{z} + \mu = 0$$

2. LA CIRCUNFERENCIA

CUYA ECUACIÓN ES

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

QUE SIN DIFICULTAD SE SUSTITUYE POR LA EXPRESIÓN

$$|z - z_0| = r$$

SI SE CONSIDERAN $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$

3. LA PARÁBOLA

CUYO FOCO SE ENCUENTRA EN EL ORIGEN Y SE EXTIENDE HORIZONTALMENTE HACIA LA IZQUIERDA Y TIENE COMO REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS POLARES A LA EXPRESIÓN

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos\ \theta}$$

(SI SE CONSIDERAN COORDENADAS CARTESIANAS, SU VÉRTICE ESTÁ EN EL PUNTO $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ Y LA DISTANCIA FOCAL ES $p = \frac{1}{2}$ POR OTRO LADO, AL INTRODUCIR COORDENADAS POLARES AL PLANO COMPLEJO, OCURRE QUE $z = \rho(\cos\,\theta + i\ sen\,\theta)$.

ENTONCES $|z| = \rho$ y $\operatorname{Re} z = \rho\cos\theta$. LUEGO

$$\rho(1 + \cos\,\theta) = \rho + \rho\cos\,\theta = |z| + \operatorname{Re}\ z$$

COMO LA PARÁBOLA SE CARACTERIZA PORQUE $\rho = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$, EL PRODUCTO ANTERIOR ES IGUAL A UNO. FINALMENTE, LLEVADA A LA VARIABLE COMPLEJA, LA ECUACIÓN QUEDA COMO:

$$|z| + \text{Re } z = 1$$

SE PUEDE HACER LO MISMO CON LA PARÁBOLA VERTICAL.

4. LA ELIPSE

SE CARACTERIZA PORQUE

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

DONDE $a \in \Re$ SI F_1 y F_2 SON DOS PUNTOS DISTINTOS QUE SE LLAMAN FOCOS. ENTONCES EN VARIABLE COMPLEJA LA ECUACIÓN QUEDA COMO:

$$|z - F_1| + |z - F_2| = 2a$$

5. LA HIPÉRBOLA

ES CASI IDÉNTICA A LA ELIPSE. LA DIFERENCIA ESTÁ EN UN SIGNO, LUEGO LA ECUACIÓN QUEDA COMO.

$$\big||z - F_1| - |z - F_2|\big| = 2a$$

QUÍMICA

EXPERIMENTO DE MILLIKAN

SE APLICAN $31.5\,V$ A DOS PLACAS METÁLICAS PARALELAS, SEPARADAS ENTRE SÍ $10\,mm$. UNA GOTA DE ACEITE CARGADA ELÉCTRICAMENTE, Y COLOCADA ENTRE LAS PLACAS, EXPERIMENTA UNA VELOCIDAD ASCENDENTE DE $0.02\,\dfrac{mm}{s}$. BAJO EL EFECTO ÚNICAMENTE DE LA GRAVEDAD, LA GOTA CAE CON UNA VELOCIDAD DE $0.002\,\dfrac{mm}{s}$. ¿CUÁNTAS CARGAS ELECTRÓNICAS POSEE LA GOTA? (DESPRECIAR LA RESISTENCIA DEL AIRE).

DATOS:

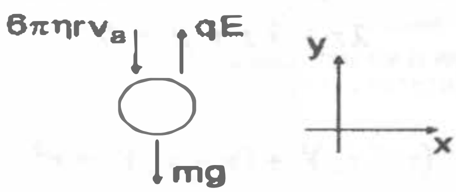
COEFICIENTE DE VISCOSIDAD DEL AIRE $(\eta): 1.8\times10^{-5}\,\dfrac{kg}{m\,s}$

DENSIDAD DEL ACEITE $(\rho): 900\,\dfrac{kg}{m^3}$

ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD $(g): 9.81\,\dfrac{m}{s^2}$

SOLUCIÓN

EL DIAGRAMA DEL CUERPO LIBRE DE LA GOTA EN EL ASCENSO ES:



ES DECIR, $qE - mg = 6\pi\eta r v_a$; v_a = VELOCIDAD DE ASCENSO

YA QUE LA GOTA SE CONSIDERA ESFÉRICA, $m = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho \;\Rightarrow\; qE - \dfrac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_a \quad \cdots \quad (1)$

POR OTRA PARTE, CUANDO LA GOTA CAE SÓLO POR EFECTO DE LA GRAVEDAD,

$$mg = 6\pi\eta r v_d \quad \cdots \quad (2)$$

DONDE v_d = VELOCIDAD DE DESCENSO.

ES DECIR,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = 6\pi\eta r v_d \quad ; \quad r = \left(\frac{9\eta v_d}{2\rho g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

AL SUSTITUIR (2) EN (1)

$$q\,E-6\,\pi\,\eta\,r\,v_d=6\,\pi\,\eta\,r\,v_a \quad ; \quad q=\frac{6\,\pi\,\eta\left(\dfrac{9\,\eta\,v_d}{2\,\rho\,g}\right)^{\frac{1}{2}}(v_a+v_d)}{\dfrac{V}{D}}$$

DONDE LA ÚLTIMA EXPRESIÓN SE OBTUVO AL CONSIDERAR QUE $E=\dfrac{V}{D}$

POR LO TANTO:

$$q=\frac{6\,\pi\,\eta^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{9\,v_d}{2\,\rho\,g}\right)^{\frac{1}{2}}(v_a+v_d)}{\dfrac{V}{D}}=\frac{6\quad\pi\left(1.8\times10^{-5}\ \dfrac{kg}{ms}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{9\left(2\times10^{-6}\ \dfrac{m}{s}\right)}{2\left(900\ \dfrac{kg}{m^3}\right)\left(9.81\ \dfrac{m}{s^2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2\times10^{-5}+2\times10^{-6}\right)\dfrac{m}{s}}{\dfrac{31.5\,V}{1\times10^{-2}\ m}}$$

$$q=3.21\times10^{-19}\ C$$

LO CUAL SIGNIFICA QUE LA GOTA DE ACEITE POSEE 2 CARGAS ELECTRÓNICAS EN EXCESO $q=2\,\bar{e}$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES

$$i)\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^5}{\sqrt{x}}dx \qquad ii)\int\frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{7}{3}}dx \qquad iii)\int\frac{2x+3}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$iv)\int\frac{(5-\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x}dx \qquad v)\int\frac{2-x^2}{\left(x^3-6x+1\right)^3}dx \qquad vi)\int\frac{\sqrt{x}\ dx}{\left(30-x^{\frac{3}{2}}\right)^3}$$

SOLUCIÓN. TODAS ESTAS INTEGRALES INDEFINIDAS SE RESUELVEN MEDIANTE UN CAMBIO DE VARIABLE. CONSIDÉRENSE ENTONCES LAS SIGUIENTES RESOLUCIONES:

$$i)\ I=\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^5}{\sqrt{x}}dx. \qquad u=1+\sqrt{x} \quad ; \quad du=\frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad I=2\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^5}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\Rightarrow\quad I=2\int u^5du=2\frac{u^6}{6}+C=\frac{u^6}{3}+C=\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^6}{3}+C$$

$$ii)\ I=\int\frac{1}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{7}{3}}dx. \qquad u=1+\frac{1}{x^2} \quad ; \quad du=-\frac{2\,dx}{x^3} \quad\Rightarrow\quad I=-\frac{1}{2}\int\frac{-2}{x^3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{7}{3}}dx$$

$$\Rightarrow\quad I=-\frac{1}{2}\int u^{\frac{7}{3}}du=-\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{10}{3}}}{\frac{10}{3}}+C=-\frac{3}{20}u^{\frac{10}{3}}+C=-\frac{3}{20}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{10}{3}}+C$$

$$iii)\ I=\int\frac{2x+3}{\sqrt{x-1}}dx \qquad u=x-1 \quad ; \quad du=dx \quad ; \quad x=u+1\ \Rightarrow$$

$$I=\int\frac{2(u+1)+3}{\sqrt{u}}du=\int\frac{2u+2+3}{\sqrt{u}}du=\int\frac{2u+5}{\sqrt{u}}du=\int\left(2u^{\frac{1}{2}}+5u^{-\frac{1}{2}}\right)du=$$

$$=\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{5u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}+10\,u^{\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{3}(x-1)^{\frac{4}{3}}+10\,(x-1)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$iv)\ I=\int\frac{(5-\ln x)^{\frac{3}{2}}}{x}dx.\qquad u=5-\ln x\quad;\quad du=-\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad I=-\int(5-\ln x)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{dx}{x}\right)=$$

$$=-\int u^{\frac{3}{2}}du=-\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=-\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+C=-\frac{2}{5}(5-\ln x)^{\frac{5}{2}}+C$$

$$v)\ I=\int\frac{2-x^2}{(x^3-6x+1)^3}dx.\qquad u=x^3-6x+1\quad;\quad du=(3x^2-6)dx\ ;\ du=-3(2-x^2)dx$$

$$\Rightarrow\quad I=-\frac{1}{3}\int\frac{-3(2-x^2)}{(x^3-6x+1)^3}dx=-\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^3}=-\frac{1}{3}\int u^{-3}du=-\frac{1}{3}\frac{u^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{6(x^3-6x+1)^2}+C$$

$$vi)\ I=\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(30-x^{\frac{3}{2}}\right)^3}.\qquad u=30-x^{\frac{3}{2}}\quad;\quad du=-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx\ ;\ du=-\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$$

$$\Rightarrow\quad I=-\frac{2}{3}\int\left(-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(30-x^{\frac{3}{2}}\right)^3}\right)=-\frac{2}{3}\int\frac{du}{u^3}=-\frac{2}{3}\int u^{-3}du=-\frac{2}{3}\frac{u^{-2}}{-2}+C=\frac{1}{3\left(30-x^{\frac{3}{2}}\right)^2}+C$$

ÁLGEBRA

DETERMINAR EL CONJUNTO DE NÚMEROS $z\in C$ QUE CUMPLEN CON LA IGUALDAD $|z-3i|+|z+3i|=12$

SOLUCIÓN. LA REPRESENTACIÓN BINÓMICA DE z ES $z=x+yi$; $x,y\in\Re$, POR LO QUE:

$$|x+yi-3i|+|x+yi+3i|=12\quad\Rightarrow\quad|x+(y-3)i|+|x+(y+3)i|=12$$

AHORA SE APLICA LA EXPRESIÓN DEL MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=12\quad\Rightarrow\quad\sqrt{x^2+(y-3)^2}=12-\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

SE ELEVAN AL CUADRADO AMBOS MIEMBROS Y SE TIENE QUE:

$$x^2+(y-3)^2=144-24\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+(y+3)^2\quad\Rightarrow\quad y^2-6y+9=144-24\sqrt{x^2+(y+3)^2}+y^2+6y+9$$

$$24\sqrt{x^2+(y+3)^2}=144+12y\quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{x^2+(y+3)^2}=12+y$$

SE ELEVA NUEVAMENTE AL CUADRADO Y SE LLEGA A:

$$4\left(x^2+(y+3)^2\right)=144+24y+y^2\quad\Rightarrow\quad 4\left(x^2+y^2+6y+9\right)=144+24y+y^2$$

$$\Rightarrow\quad 4x^2+4y^2+24y+36=144+24y+y^2\quad\Rightarrow\quad 4x^2+3y^2=108\quad\Rightarrow\quad\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$$

POR LO QUE, LOS NÚMEROS COMPLEJOS QUE CUMPLEN CON LA IGUALDAD TIENEN SU REPRESENTACIÓN, EN EL PLANO COMPLEJO, EN LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN, EJE FOCAL COINCIDENTE CON EL EJE IMAGINARIO, EJE MAYOR DE 12 UNIDADES Y EJE MENOR DE $6\sqrt{3}$ UNIDADES.

TUTORÍA

ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR DE LA GENERACIÓN 2002 QUE CURSARON PROPEDÉUTICO:
¡BUSQUEN A SU TUTOR EN LA COPADI Y EMPIECEN A INTERACTUAR CON ÉL! ES UNA EXPERIENCIA FORMIDABLE TENER A ALGUIEN QUE SE OCUPE DE UNO AL INICIAR LA CARRERA Y CON QUIEN SE PUEDA TENER AMISTAD, AFECTO, APOYO Y CONSEJO TODA LA CARRERA.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, AUGUSTO GUADALUPE MISS PAREDES Y ROGELIO SOTO AYALA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 39 2 DE MAYO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. PARA ADQUIRIR EL HÁBITO DEL ESTUDIO SE REQUIERE EN PRIMER LUGAR EL "MIRAR" HACIA EL FUTURO DONDE SE VERÁN DOS ESCENARIOS: UNO SIN LA CARRERA Y EL OTRO CON LA CULMINACIÓN DE ÉSTA; Y PREGUNTARSE: ¿CUÁL QUIERO? DESPUÉS SE TRATA DE HACER UN SACRIFICIO QUE MUCHAS VECES TIENE QUE VER CON LOS ANTECEDENTES ACADÉMICOS QUE SE TRAEN DEL BACHILLERATO, LA DISTANCIA RECORRIDA, LA SITUACIÓN ECONÓMICA, LAS PROBLEMÁTICAS FAMILIARES, ETCÉTERA. Y DECIDIRSE A VENCER TODOS LOS OBSTÁCULOS Y PONERSE A ESTUDIAR. SEGURAMENTE LO LOGRARÁN. ¿POR QUÉ NO INTENTARLO? ¡CON SEGURIDAD TRIUNFARÁN! ¡LA COPADI TIENE FE EN USTEDES!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

SEA EL PUNTO $P\left(4,150^{\circ},-1\right)$ DADO EN COORDENADAS CILÍNDRICAS. DETERMINAR LAS COORDENADAS ESFÉRICAS DEL PUNTO Q, QUE ES SIMÉTRICO DEL PUNTO P RESPECTO AL PLANO xy.

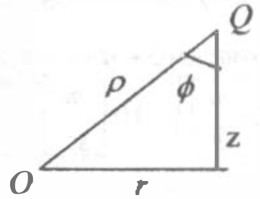
PRIMERA FORMA DE RESOLUCIÓN. LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS DE Q SE OBTIENEN AL CAMBIAR EL SIGNO A LA COTA DEL PUNTO P. ESTO ES: $Q\left(4,150^{\circ},1\right)$. SE TRANSFORMA Q A COORDENADAS CARTESIANAS Y:

$$Q:\begin{cases} x = r\cos\theta = 4\cos 150^{\circ} = 4\left(-\cos 30^{\circ}\right) = 4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\ y = r\,sen\,\theta = 4\,sen\,150^{\circ} = 4\left(sen\,30^{\circ}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \\ z = z = 1 \end{cases} \qquad \therefore \quad Q\left(-2\sqrt{3},2,1\right)$$

AHORA SE TRANSFORMA Q A COORDENADAS ESFÉRICAS Y SE TIENE QUE:

$$Q:\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+2^2+1^2} = \sqrt{17} \\ \theta = ang\tan\dfrac{y}{x} = ang\tan\dfrac{2}{-2\sqrt{3}} = 150^{\circ} \\ \phi = ang\cos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = ang\cos\dfrac{1}{\sqrt{17}} = 75.9^{\circ} \end{cases} \qquad \therefore \quad Q\left(\sqrt{17},150^{\circ},75.9^{\circ}\right)$$

SEGUNDA FORMA DE RESOLUCIÓN. LA TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS Y VICEVERSA SE PUEDE HACER DIRECTAMENTE (SIN PASAR POR COORDENADAS CARTESIANAS) SI SE HACE USO DE LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN QUE SE OBTIENEN DE LA SIGUIENTE FIGURA:



$$\left.\begin{array}{l} r = \rho \ sen \ \phi \\ \theta = \theta \\ z = \rho \ \cos \ \phi \end{array}\right\}$$ DE ESFÉRICAS A CILÍNDRICAS

$$\left.\begin{array}{l} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} \\ \theta = \theta \\ \phi = ang \ \tan \left(\frac{r}{z}\right) \end{array}\right\}$$ DE CILÍNDRICAS A ESFÉRICAS

LA SEGUNDA COORDENADA, θ NO CAMBIA. SI SE APLICAN LAS ECUACIONES ANTERIORES, SE TIENE QUE:

$$Q\left(4,150^{\circ},1\right): \begin{cases} \rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \\ \theta = \theta = 150^{\circ} \\ \phi = ang \ \tan \frac{r}{z} = ang \ \tan \frac{4}{1} = 75.9^{\circ} \end{cases}$$

$$\therefore \quad Q\left(\sqrt{17}, 150^{\circ}, 75.9^{\circ}\right)$$

FÍSICA EXPERIMENTAL

EN UN EXPERIMENTO DE CAÍDA DE UN MÓVIL, SE MIDIÓ SU RAPIDEZ PARA DIFERENTES INSTANTES DE TIEMPO, COMO SE MUESTRA EN LA TABLA. DETERMINAR, EN EL SI

a) EL MODELO MATEMÁTICO LINEAL QUE RELACIONA LAS VARIABLES DEL EXPERIMENTO. CONSIDERAR QUE LA VARIABLE INDEPENDIENTE FUE EL TIEMPO.

b) LA RAPIDEZ INICIAL DEL MÓVIL.

c) LA GRÁFICA DE LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL PARA EL INTERVALO DE TIEMPO EN EL QUE SE REALIZARON LAS MEDICIONES.

$t\,[s]$	$v\left[\frac{m}{s}\right]$
0	0.2
0.04	0.6
0.08	1.0
0.12	1.4

RESOLUCIÓN.

a) $v = m\,t + b$; SE CALCULA LA PENDIENTE Y:

$$m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow m = \frac{\left[(1.4 - 0.6) + (1 - 0.2)\right]\frac{m}{s}}{\left[(0.12 - 0.04) + (0.08 - 0)\right] s} = \frac{1.6 \ \frac{m}{s}}{0.16 \ s} = 10\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

PARA ENCONTRAR LA ORDENADA AL ORIGEN SE CALCULA EL CENTROIDE ASÍ:

$\bar{t} = 0.06\,[s]$, $\bar{v} = 0.8\left[\frac{m}{s}\right]$; DE $v = m\,t + b$ SE TIENE QUE $b = \bar{v} - m\,\bar{t} = \left(0.8\,\frac{m}{s}\right) - \left(10\,\frac{m}{s^2}\right)(0.06\,s) = 0.2\left[\frac{m}{s}\right]$

POR LO TANTO, EL MODELO MATEMÁTICO SOLICITADO ES:

$$v\left[\frac{m}{s}\right] = 10\left[\frac{m}{s^2}\right] t\,[s] + 0.2\left[\frac{m}{s}\right]$$

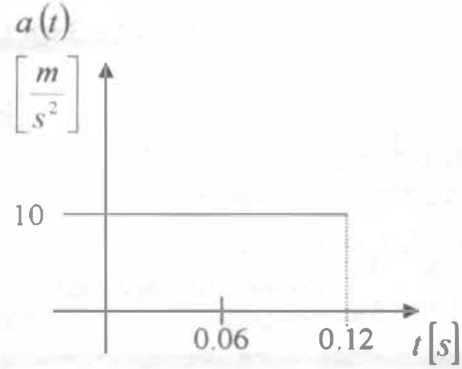
b) LA RAPIDEZ INICIAL SE TIENE PARA $t = 0$, POR LO QUE

$$v_0 = v(t=0) = v(0) = \left(10\,\frac{m}{s^2}\right)(0\,s) + 0.2\,\frac{m}{s} \Rightarrow v_0 = 0.2\left[\frac{m}{s}\right]$$

c) PARA ENCONTRAR LA GRÁFICA SE DETERMINARÁ PRIMERO LA EXPRESIÓN QUE INDICA LA ACELERACIÓN DEL MÓVIL.

COMO $a = \frac{dv}{dt}$, ENTONCES $a(t) = \frac{d}{dt}\left[10\left[\frac{m}{s^2}\right] t\,[s] + 0.2\left[\frac{m}{s}\right]\right] = 10\left[\frac{m}{s^2}\right]$

LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $a(t) = 10\left[\frac{m}{s^2}\right]$ ES:



CÁLCULO III

ENCONTRAR EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÍNIMO ABSOLUTO DE $f(x, y) = 2x - 3y$ EN LA REGIÓN $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

SOLUCIÓN. COMO $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3$, NO HAY PUNTOS CRÍTICOS PARA LA FUNCIÓN f LO QUE ES OBVIO YA QUE SE TRATA DE UN PLANO. LUEGO, EL MÁXIMO ABSOLUTO Y EL MÍNIMO ABSOLUTO DEBEN PRESENTARSE EN LA FRONTERA DE LA REGIÓN. COMO SE TRATA DE EXTREMOS CONDICIONADOS, SE UTILIZA EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. ASÍ, SE TIENE QUE LA ECUACIÓN DE LAGRANGE SE ESTABLECE CON LA FUNCIÓN OBJETIVO (EL PLANO) MAS LA RESTRICCIÓN (LA FRONTERA DE LA REGIÓN QUE ES UNA ELIPSE) POR UN MULTIPLICADOR. ASÍ:

$$L = 2x - 3y + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

DE DONDE

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + \frac{2x}{4}\lambda \;\Rightarrow\; \frac{4 + x\lambda}{2} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\frac{4}{x} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -3 + 2y\lambda \;\Rightarrow\; -3 + 2y\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{3}{2y} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \cdots \quad (3)$$

DE (1) y (2) SE TIENE QUE:

$$-\frac{4}{x} = \frac{3}{2y} \;\Rightarrow\; -8y = 3x \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{8}x$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA EXPRESIÓN (3) Y SE LLEGA A:

$$\frac{x^2}{4} + \left(-\frac{3}{8}x\right)^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{4} + \frac{9x^2}{64} = 1 \;\Rightarrow\; 25x^2 = 64 \;\Rightarrow\; x = \pm\frac{8}{5} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = -\dfrac{8}{5} \;\Rightarrow\; y = \dfrac{3}{5} \\ x = \dfrac{8}{5} \;\Rightarrow\; y = -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

ESTOS SON LOS PUNTOS CRÍTICOS DE LA FUNCIÓN DE LAGRANGE. AHORA SE EVALÚA LA FUNCIÓN EN ELLOS Y SE TIENE QUE:

$$f\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = -5 \;\therefore\; \text{MÍNIMO ABSOLUTO} \qquad f\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 5 \;\therefore\; \text{MÁXIMO ABSOLUTO}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA ES SI SE CONSIDERA LA CURVA FRONTERA (ELIPSE) Y SE SUSTITUYEN EN ELLA SUS ECUACIONES PARAMÉTRICAS, CON LO QUE QUEDA UNA FUNCIÓN CON UNA SÓLA VARIBALE, LO QUE CONDUCE A UNA SOLUCIÓN MÁS SIMPLE DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN. ASÍ, EL DESARROLLO DE ESTE MÉTODO ES EL SIGUIENTE:

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 40 17 DE MAYO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. UNA GRAN CIENTÍFICA MEXICANA, RECIENTEMENETE GALARDONADA A NIVEL MUNDIAL, EXPRESÓ QUE VALE LA PENA SER EGRESADA DE LA UNAM Y TRABAJAR E INVESTIGAR EN ELLA. TÚ TAMBIÉN PUEDES. ESTÁS EN LA MEJOR UNIVERSIDAD DE ESTE PAÍS Y EN UNA DE LAS MEJORES FACULTADES DE INGENIERÍA DE AMÉRICA LATINA. APROVECHA TODO LO QUE LA UNAM TE DA Y LLEGARÁS A SER UN GRAN INGENIERO Y UN MAGNÍFICO SER HUMANO.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO I

CALCULAR EL VALOR DE LOS SIGUIENTES LÍMITES

$$i)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2} \qquad ii)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \qquad iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \qquad iv)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} \qquad v)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x^3}$$

SOLUCIÓN.

$$i)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\frac{0}{0}(INDET)$$

PARA ELIMINAR LA INDETERMINACIÓN SE FACTOTIZAN AMBOS POLINOMIOS Y SE LLEGE A:

$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2) \quad y \quad 3x^2-5x-2=(x-2)(3x+1)$$

LUEGO, EL LÍMITE QUEDA COMO

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(3x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{3x+1}=\frac{7}{7}=1$$

EN ESTE EJERCICIO, SE PUDO HABER REALIZADO LA DIVISIÓN ALGEBRÁICA DE LOS DOS POLINOMIOS ENTRE EL BINOMIO $(x-2)$ YA QUE 2 ES RAÍZ DE AMBOS POLINOMIOS. DESPUÉS SE OBTENDRÍA EL LÍMITE DEL COCIENTE DE LOS RESULTADOS DE LAS DIVISIONES Y SE LLEGERÁ AL MISMO RESULTADO.

$$ii)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}(INDET)$$

EN ESTE CASO, PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE PUEDE HACER EL SIGUIENTE CAMBIO DE VARIABLE. SE CAMBIA EL RADICANDO, QUE ES COMÚN, POR OTRA VARIABLE A LA QUE SE LE COLOCA COMO EXPONENTE EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE LOS ÍNDICES DE LOS RADICALES, QUE EN ESTE CASO ES 6 ASÍ,

$$x=u^6 \quad ; \quad \lim_{x\to 1}x=\lim_{u\to ?}u^6 \Rightarrow u^6=1 \Rightarrow u=1 \Rightarrow \lim_{u\to 1}\frac{\sqrt[3]{u^6}-1}{\sqrt{u^6}-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u^2-1}{u^3-1}$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{(u-1)(u+1)}{(u-1)(u^2+u+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{u+1}{u^2+u+1}=\frac{2}{3}$$

ESTE EJERCICIO TAMBIÉN SE PODRÍA HABER RESUELTO MULTIPLICANDO NUMERADOR Y DENOMINADOR DE LA EXPRESIÓN ORIGINAL POR LAS EXPRESIONES $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ y $\sqrt{x}+1$ PARA LOGRAR LA DIFERENCIA DE CUBOS Y DE CUADRADOS Y ASÍ QUITAR LA INDETERMINACIÓN. SE LLEGARÍA AL MISMO RESULTADO

$$iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\frac{0}{0}(INDET).$$

PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE MULTIPLICAN, NUMERADOR Y DENOMINADOR, POR EL BINOMIO CONJUGADO DEL NUMERADOR Y SE RESUELVE EL LÍMITE ASI

$$iii)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\,\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}$$

$iv)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{\infty}{\infty} = (INDET\ )$ PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE DIVIDEN NUMERADOR Y DENOMINADOR ENTRE LA VARIABLE ELEVADA A SU MAYOR EXPONENTE. ESTO ES CON LA FINALIDAD DE LOGRARA COCIENTES CON EL INFINITO COMO DENOMINADOR LO QUE CONDUCE LA DIVISIÓN A CERO. ASÍ, EN ESTE CASO, HABRÁ QUE DIVIDIR ENTRE x QUE, DEBIDO A LAS RAÍCES, ES LA VARIABLE CON MAYOR EXPONENTE. LUEGO:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x^2}}}{\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}} = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt[3]{1+0}} = 1$$

$v)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - senx}{x^3} = \frac{0}{0} (INDET)$ PARA QUITAR LA INDETERMINACIÓN, SE ACUDE A LAS IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y AL HECHO DE QUE SE SABE QUE DOS LÍMITES CONOCIDOS Y MUY IMPORTANTES EN MATEMÁTICAS SON $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$; $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

LUEGO, EL LÍMITE EN CUESTIÓN SE RESUELVE DE LA SIGUINTE MANERA:

$$v)\ \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - senx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{senx}{\cos x} - senx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{senx - senx\cos x}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{senx(1-\cos x)}{x^3\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{senx(1-\cos x)}{x^3\cos x}\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{senx\ sen^2 x}{x^3 \cos x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^3 x}{x^3(\cos x + \cos^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{sen^3 x}{x^3}}{\cos x + \cos^2 x} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{senx}{x}\right)^3}{\lim_{x\to 0}\cos x + \lim_{x\to 0}\cos^2 x} = \frac{\left(\lim_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}\right)^3}{\lim_{x\to 0}\cos x + \left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)^2} = \frac{1^3}{1+1^2} = \frac{1}{2}$$

CÁLCULO I

ENCONTRAR LAS DERIVADAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

$$i)\ y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad ii)\ y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \qquad iii)\ y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad iv)\ y = e^{x^x}$$

$$v)\ y = ang\ \operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen} x} \qquad vi)\ x^3+y^3-3axy=0 \qquad vii)\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\operatorname{sen}^3 t\end{cases} \qquad viii)\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$$

SOLUCIÓN:

$$i)\ y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1+x^2}(4x) - (2x^2-1)\left(x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}(1)\right)}{\left(x\sqrt{1+x^2}\right)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2\sqrt{1+x^2} - (2x^2-1)\dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2(1+x^2)} = \frac{4x^2(1+x^2)-(2x^2-1)(2x^2+1)}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x^2+4x^4-4x^4+1}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2+1}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

$$ii)\ y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{\dfrac{2\sqrt{x+\sqrt{x}}+1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}\,2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{2\sqrt{x}\,2\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\,2\sqrt{x+\sqrt{x}}\,2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

$$iii)\ y=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\dfrac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}=\frac{1-x+1+x}{2(1-x)^2\dfrac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{1-x^2}$$

DE OTRA FORMA, SI SE APLICAN LAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA, SE TIENE QUE:

$$y=\frac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$iv)\ y=\left(e^x\right)^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=x\left(e^x\right)^{x-1}e^x+\left(e^x\right)^x\ln e^x(1)=\left(e^x\right)^x(x+x)=2x\left(e^x\right)^x$$

$$v)\ y=ang\ \text{sen}\sqrt{\text{sen}\ x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\ x}}}{\sqrt{1-\text{sen}\ x}}=\frac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}\ x-\text{sen}^2 x}}$$

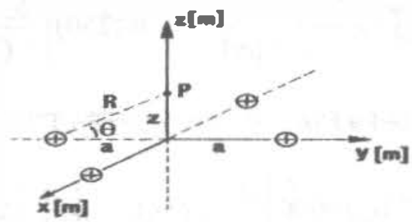
$$vi)\ x^3+y^3-3axy=0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3ax\frac{dy}{dx}-3ay=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3ay-3x^2}{3y^2-3ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

$$vii)\ \begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=b\,\text{sen}^3 t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3b\,\text{sen}^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\,\text{sen}\,t}=-\frac{b}{a}\tan t$$

$$viii)\ \begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{(1+t^2)6at-3at^2(2t)}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{(1+t^2)3a-3at(2t)}{(1+t^2)^2}}=\frac{6at+6at^3-6at^3}{3a+3at^2-6at^2}=\frac{6at}{3a-3at^2}=\frac{2t}{1-t^2}$$

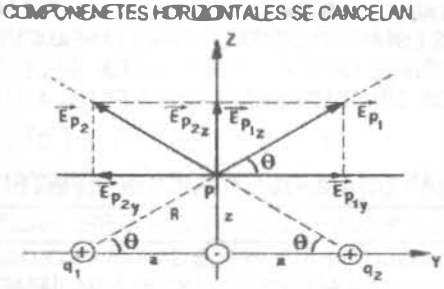
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

CUATRO CARGAS PUNTUALES DE $50\,[nC]$ EN EL ESPACIO LIBRE, ESTÁN SITUADAS SIMÉTRICAMENTE SOBRE UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO $a=0.2\,[m]$, CENTRADA EN EL ORIGEN Y LOCALIZADA EN EL PLANO $z=0$. DETERMINAR: A) ¿EN QUÉ PUNTO DEL EJE z EL CAMPO ELÉCTRICO ES MÁXIMO? B) EL VALOR DE E_z MÁXIMO. C) EL POTENCIAL ELÉCTRICO DEL ORIGEN. D) EL TRABAJO NECESARIO PARA MOVER UNA CARGA $q_0=1\,[nC]$ DESDE EL INFINITO HASTA EL ORIGEN.



RESOLUCIÓN.

A) SEA P EL PUNTO DEL EJE z EN EL CUAL EL CAMPO ELÉCTRICO ES MÁXIMO. DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, EL CAMPO TOTAL EN P SE DEBE A LA SUMA DE LAS CONTRIBUCIONES DE CADA UNA DE LAS CARGAS PUNTUALES: $E_P=E_{P_1}+E_{P_2}+E_{P_3}+E_{P_4}$ CONVIENE RESALTAR QUE LOS TÉRMINOS DEL SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN ANTERIOR SON DE MAGNITUDES IGUALES, YA QUE LAS CARGAS PUNTUALES SON DE VALORES IGUALES Y SE ENCUENTRAN A LA MISMA DISTANCIA DEL PUNTO P. ADEMÁS, DEBIDO A LA SIMETRÍA DEL CONJUNTO DE CARGAS, EL CAMPO ELÉCTRICO TOTAL EN DICHO PUNTO TENDRÁ LA DIRECCIÓN DEL EJE z YA QUE LAS COMPONENETES HORIZONTALES SE CANCELAN.



COMO $E_{P_1} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{R^2}$, POR LO ANTERIOR, EL CAMPO EN P RESULTA $E_P = 4E_{P_1} sen\theta\,\hat{k}\left[\dfrac{N}{C}\right]$ y $E_P = 4\left[\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\dfrac{q_1}{R^2}\dfrac{z}{R}$,

$R = \sqrt{a^2+z^2}$; $E_P = 4\left[\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]q_1\dfrac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ SE OBSERVA QUE $E_P = f(z)$ SI SE OBTIENE LA DERIVADA DE E_P CON RESPECTO A LA VARIABLE z Y SE IGUALA CON CERO, SE OBTENDRÁ EL VALOR DE z PARA EL CUAL E_P ES MÁXIMO, ENTONCES

$$\frac{dE_P}{dz} = \frac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}(1) - z\left(\frac{3}{2}\right)\left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}(2z)}{\left(a^2+z^2\right)^3}\right] = \frac{4q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3z^2\left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2+z^2\right)^3}\right]$$

AL IGUALAR ESTA DERIVADA CON CERO, SE ENCUENTRA EL PUNTO CRÍTICO, PARA ESTO ES SUFICIENTE QUE EL NUMERADOR DE LA FREACCIÓN SEA CERO, ES DECIR:

$$\left(a^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3z^2\left(a^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(a^2+z^2\right) - 3z^2 = 0 \Rightarrow \quad a^2 - 2z^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad a = \sqrt{2}z \quad ó \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

PARA ESTE VALOR DE z SE TIENE UN MÁXIMO, YA QUE SI $z = 0$ SE TIENE UN MÍNIMO EN EL ORIGEN

B) EL VALOR DE E_z MÁXIMO SE OBTIENE CON LA EXPRESIÓN DE E_P CON EL VALOR $z = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$$E_{MAX} = 4\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]q_1\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\left(a^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad E_{MAX} = 4\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]q_1\frac{a}{\sqrt{2}a^3\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad E_{MAX} = \left[\frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\right]q_1\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2}a^2\sqrt{3}^3}$$

$$E_{MAX} = 4q_1\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\frac{2}{a^2\left(\sqrt{3}\right)^3}. \quad COMO \quad a = 0.2\,[m] \quad\Rightarrow\quad E_{MAX} = 17{,}320.508\,\hat{k}\left[\frac{N}{C}\right]$$

C) EL POTENCIAL EN EL ORIGEN SE DEBERÁ A LAS CUATRO CARGAS, ES DECIR, $V_0 = V_{01} + V_{02} + V_{03} + V_{04}$ Y POR LA SIMETRÍA DEL CONJUNTO, LOS CUATRO TÉRMINOS DEL SEGUNDO MIEMBRO DE LA ECUACIÓN ANTERIOR SON IGUALES A $V_{01} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{a}$ $\therefore$ $V_0 = 4\left[\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]\dfrac{q_1}{a}$

$$\therefore \quad V_0 = 4\left(9\times10^9\right)\left[\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right]\frac{50\times10^{-9}\,[C]}{0.2\,[m]} = 4(2250)\left[\frac{N\cdot m}{C}\right] \quad ; \quad V_0 = 9000\,[V]$$

D) ${}_\infty W_0 = EP_0 - EP_\infty$, PERO q_0 Y CUALQUIER CARGA, EN EL ∞ , TENDRÁ ENERGÍA POTENCIAL NULA, COMO $V_P = \dfrac{EP_P}{q_0}$; $EP_P = q_0 V_P$

$$\therefore \quad {}_\infty W_0 = q_0\left(V_0 - 0\right) \quad ; \quad {}_\infty W_0 = 1\times10^{-19}\,(C)\,9000\left[\frac{J}{C}\right] = 9\times10^{-6}\,[J] \quad \therefore \quad {}_\infty W_0 = 9 \quad [\mu J]$$

COMO EL SIGNO DEL TRABAJO RESULTÓ POSITIVO, SIGNIFICA QUE q_0 INCREMENTA SU ENERGÍA AL SER TRASLADADA DESDE EL INFINITO AL ORIGEN.

PRESERVACIÓN DEL MEDIO AMBIENTE

"... EL EFECTO INVERNADERO LLEVADO AL PAROXISMO EN VENUS, DEBERÍA HACERNOS PENSAR EN LA LOCURA QUE ES CALENTAR UN PLANETA. EL HIELO DE MARTE DEBERÍA ALERTARNOS SOBRE LO QUE SIGNIFICA RAPAR LA TIERRA DE TODA VEGETACIÓN, Y AMBAS DEMENCIALES Y COMPLEMENTARIAS ACCIONES ESTÁN OCURRIENDO SIMULTÁNEAMENTE EN NUESTRO PLANETA. POR UNA PARTE SE SOBRECALIENTA LA ATMÓSFERA CON LA EMISIÓN DE GASES Y, POR LA OTRA, SE DEFORESTAN CONTINENTES ENTEROS. LO HEMOS VENIDO OBSERVANDO DESDE HACE DOS SIGLOS, SIN COMPRENDER QUE A ESTAS ALTURAS LOS HUMANOS NO HAYAMOS ENTENDIDO LA CATÁSTROFE QUE PREPARAMOS ..."

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES AGUIRRE MALDONADO Y JARAMILLO MORALES

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 41 2 DE JUNIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. MUY PRONTO SALDRÁ A LA VENTA LA PRIMERA **COLECCIÓN COPADI DE EJERCICIOS RESUELTOS** CON LOS PRIMEROS CUARENTA BOLETINES. SON APROXIMADAMENTE 200 EJERCICIOS RESUELTOS DE DIFERENTES ASIGNATURAS. SEGURAMENTE SERÁ UNA VALIOSA HERRAMIENTA DE ESTUDIO Y APRENDIZAJE.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ECUACIONES DIFERENCIALES

RESOLVER EL PROBLEMA DE VALOR INICIAL

$$y''+4y'+4y = x^{\frac{5}{2}}e^{-2x} \quad ; \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$$

SOLUCIÓN.

PARA y_h :

$$y''+4y'+4y=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2+4\lambda+4=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=\lambda_2=-2 \;\Rightarrow\; y_p = C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

SE UTILIZA EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS Y SE TIENE QUE:

PARA y_p :

$$y_p = u(x)e^{-2x} + v(x)\,x\,e^{-2x}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x}+e^{-2x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x^{\frac{5}{2}}e^{-2x} \end{bmatrix}$$

SE RESUELVE Y

$$u'(x) = -x^{\frac{7}{2}} \quad y \quad v'(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

Y AL INTEGRAR SE TIENE QUE

$$u(x) = -\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} \quad y \quad v(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} \quad\Rightarrow\quad y_p = \frac{4}{63}x^{\frac{9}{2}}e^{-2x}$$

POR LO QUE LA SOLUCIÓN GENERAL ES:

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{4}{63}x^{\frac{9}{2}}e^{-2x}$$

PARA APLICAR CONDICIONES INICIALES SE DERIVA Y SE OBTIENE:

$$y' = -2C_1e^{-2x} - 2C_2xe^{-2x} + C_2e^{-2x} - \frac{8}{63}x^{\frac{9}{2}}e^{-2x} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}e^{-2x}$$

AHORA SE APLICAN CONDICIONES INICIALES Y

$$y(0)=0 \quad\Rightarrow\quad 0 = C_1$$
$$y'(0)=0 \quad\Rightarrow\quad 0 = -2C_1 + C_2$$

DE DONDE $C_1=0 \quad y \quad C_2=0 \quad \therefore \quad y = \frac{4}{63}x^{\frac{9}{2}}e^{-2x}$ SOLUCIÓN QUE SATISFACE LAS CONDICIONES INICIALES

ÁLGEBRA LINEAL

DETERMINAR SI EL CONJUNTO $D=\{2\ sen\ x, -\cos x, 4x\}$ ES LINEALMENTE DEPENDIENTE O LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN EL INTERVALO $(-\infty,\infty)$.

SOLUCIÓN. DE LA ECUACIÓN DE DEPENDENCIA LINEAL SE TIENE QUE

$$\alpha_1(2\ sen\ x)+\alpha_2(-\cos x)+\alpha_3(4x)=0 \quad \forall\ x\in\Re$$
$$2\alpha_1\ sen\ x-\alpha_2\cos x+4\alpha_3 x=0 \quad \forall\ x\in\Re \quad \cdots \quad (I)$$

COMO LA ECUACIÓN (I) SE SATISFACE PARA CUALQUIER VALOR DE x EN LOS REALES, SE PUEDEN PROPONER TRES VALORES PARA x QUE GENEREN UN SISTEMA DE TRES ECUACIONES CON TRES INCÓGNITAS. SI EL SISTEMA PROPUESTO SÓLO ADMITE LA SOLUCIÓN TRIVIAL, ENTONCES EL CONJUNTO DE FUNCIONES ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE.

PARA $x=0 \Rightarrow 2\alpha_1\ sen\,0-\alpha_2\cos 0+4\alpha_3(0)=0 \Rightarrow 0-\alpha_2+0=0 \quad\cdots\quad (1)$

PARA $x=\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha_1\ sen\dfrac{\pi}{4}-\alpha_2\cos\dfrac{\pi}{4}+4\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\alpha_3=0 \Rightarrow 2\alpha_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-\alpha_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\,\alpha_3=0$

$$\sqrt{2}\,\alpha_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2+\pi\,\alpha_3=0 \quad\cdots\quad (2)$$

PARA $x=\pi \Rightarrow 2\alpha_1\ sen\,\pi-\alpha_2\cos\pi+4\pi\,\alpha_3=0 \Rightarrow 0+\alpha_2+4\pi\,\alpha_3=0 \quad\cdots\quad (3)$

DE LA ECUACIÓN (1) SE OBTIENE QUE $\alpha_2=0$ SI SE SUSTITUYE $\alpha_2=0$ EN LA ECUACIÓN (3), SE LLEGA A $\alpha_3=0$. FINALMENTE $\alpha_2=\alpha_3=0$ IMPLICA, DE LA ECUACIÓN (2) QUE $\alpha_1=0$.

DE ESTE MODO, COMO $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, SE CONCLUYE QUE EL CONJUNTO D ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN $(-\infty,\infty)$

COMO MÉTODO ALTERNATIVO SE PUEDE UTILIZAR EL CRITERIO DEL WRONSKIANO. ASÍ, PARA EL CONJUNTO D SE TIENE QUE

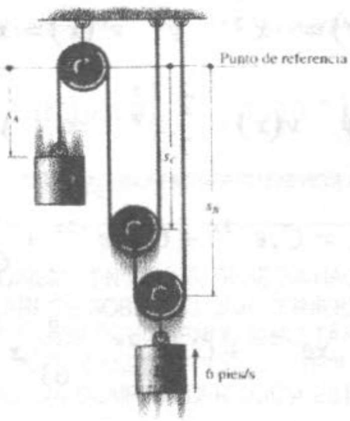
$$W(x)=\begin{vmatrix} 2\ sen\ x & -\cos x & 4x \\ 2\cos x & sen\ x & 4 \\ -2\ sen\ x & \cos x & 0 \end{vmatrix}=2\ sen\ x(-4\cos x)+\cos x(8sen\ x)+4x\left(2\cos^2 x+2\ sen^2 x\right)=8x$$

EL CRITERIO DEL WRONSKIANO ESTABLECE QUE SI $W(x_0)\neq 0$ PARA ALGÚN VALOR $x_0\in(a,b)$, ENTONCES EL CONJUNTO DE FUNCIONES ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN DICHO INTERVALO.

SI $x=1$ ENTONCES $W(1)=8\neq 0$; POR LO TANTO EL CONJUNTO D ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE EN $(-\infty,\infty)$

CINEMÁTICA

DETERMINAR LA RAPIDEZ DEL BLOQUE A QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA, SI EL BLOQUE B TIENE UNA RAPIDEZ ASCENDENTE DE $6\ \dfrac{pies}{s}$



SOLUCIÓN

ECUACIONES DE LAS COORDENADAS DE POSICIÓN. COMO SE ILUSTRA EN LA FIGURA, LAS POSICIONES DE LOS BLOQUES A y B SE DEFINEN POR MEDIO DE LAS COORDENADAS S_A S_B. COMO EL SISTEMA TIENE DOS CUERDAS DE LONGITUD VARIABLE, SERÁ NECESARIO USAR UNA TERCERA COORDENADA, S_C, CON OBJETO DE RELACIONAR S_A CON S_B. EN OTRAS PALABRAS, ES POSIBLE EXPRESAR LA LONGITUD DE UNA DE LAS CUERDAS EN TÉRMINOS DE S_A y S_C, Y LA LONGITUD DE LA OTRA SE EXPRESA EN TÉRMINOS DE S_B y S_C.

DE LA FIGURA SE PUEDEN FIJAR LAS SIGUIENTES LONGITUDES

$$l_1 = S_A + 2S_C \qquad y \qquad l_2 = S_B + (S_B - S_C)$$

DE AMBAS EXPRESIONES, AL ELIMINAR S_C, SE OBTIENE UNA ECUACIÓN QUE DEFINE LAS POSICIONES DE AMBOS BLOQUES, ES DECIR,

$$S_C = \frac{l_1 - S_A}{2} \quad ; \quad S_C = 2S_B - l_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{l_1 - S_A}{2} = 2S_B - l_2 \quad \Rightarrow \quad S_A + 4S_B = 2l_2 + l_1$$

AL DERIVAR CON RESPECTO AL TIEMPO SE TIENE QUE

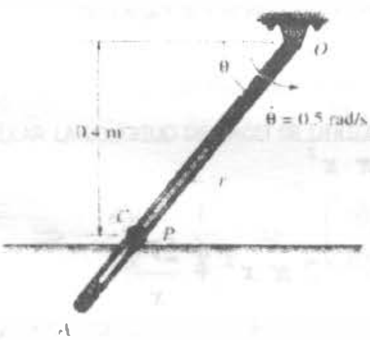
$$v_A + 4v_B = 0$$

POR LO QUE, FINALMENTE, CUANDO $v_B = -6\,\frac{pies}{s}$ (HACIA ARRIBA), ENTONCES

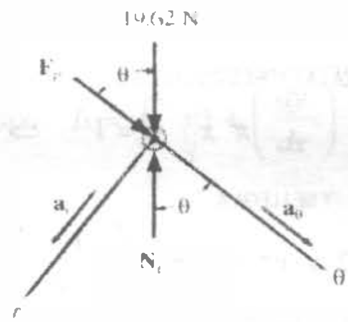
$$v_A = +24\,\frac{pies}{s} \downarrow$$

DINÁMICA

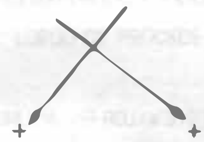
EL CILINDRO LISO DE $2\,kg$, MOSTRADO EN LA FIGURA (A), TIENE UN PERNO P QUE LO ATRAVIESA POR EL CENTRO Y QUE PASA POR LA RANURA EN EL BRAZO OA. SI EL BRAZO GIRA EN EL PLANO VERTICAL CON UNA RAPIDEZ CONSTANTE $\omega = \dot{\theta} = 0.5\,\frac{rad}{s}$, DETERMINAR LA FUERZA QUE EJERCE EL BRAZO SOBRE EL PERNO, EN EL INSTANTE EN QUE $\theta = 60^0$



(a)



(b)



SOLUCIÓN

LA FIGURA (B) ILUSTRA EL DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DEL CILINDRO. LA FUERZA DEL PERNO, F_P, ACTÚA EN FORMA PERPENDICULAR A LA RANURA EN EL BRAZO. COMO ES USUAL, SE SUPONE QUE a_r y a_θ ACTÚAN EN LAS DIRECCIONES r y θ POSITIVAS, RESPECTIVAMENTE.

SI SE UTILIZAN LOS DATOS DE LA FIGURA (B), TOMADO EN CONSIDERACIÓN LOS EJES PROPUESTOS Y SU SENTIDO, SE TIENE QUE

$$\sum F_r = m\,a_r \quad ; \quad 19.62\ sen\,\theta - N_C\ sen\,\theta = 2a_r \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sum F_\theta = m\,a_\theta \quad ; \quad 19.62\cos\theta + F_P - N_C\cos\theta = 2a_\theta \quad \cdots \quad (2)$$

POR OTRO LADO, CON BASE EN LA FIGURA (A), ES POSIBLE RELACIONAR r CON θ POR MEDIO DE LA ECUACIÓN

$$r = \frac{0.4}{sen\,\theta} = 0.4\csc\theta$$

COMO $d(\csc\theta) = -\csc\theta\cot\theta\,d\theta$ y $d(\cot\theta) = -\csc^2\theta\,d\theta$, ENTONCES, PARA $\omega = \dot{\theta} = 0.5$ y $\alpha = \ddot{\theta} = 0$ SE TIENE QUE

$$r = 0.4\csc\theta \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = -0.4\csc\theta\cot\theta\,\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = -0.4\left[-\csc\theta\cot^2\theta\,\dot{\theta}^2 - \csc^3\theta\,\dot{\theta}^2 + \csc\theta\cot\theta\,\ddot{\theta}\right]$$

SE SUSTITUYEN $\dot{\theta} = 0.5$ y $\ddot{\theta} = 0$ Y SE LLEGA A $\ddot{r} = 0.1\csc\theta\left(\csc^2\theta + \cot^2\theta\right) = 0.1\csc^3\theta + 0.1\csc\theta\cot^2\theta$

AL EVALUAR ESTAS EXPRESIONES PARA $\theta = 60^0$ SE LLEGA A

$$r = 0.462 \quad ; \quad \dot{r} = -0.133 \quad ; \quad \ddot{r} = 0.192$$

$$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462\,(0.5)^2 = 0.0765$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} = 0 + 2\,(-0.133)(0.5) = -0.133$$

SE SUSTITUYEN ESTOS RESULTADOS EN LAS ECUACIONES (1) y (2), CON $\theta = 60^0$ Y DESPEJANDO SE OBTIENE

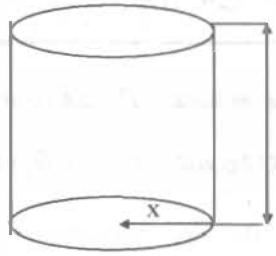
$$N_C = 19.4\ N \quad y \quad F_P = -0.355\ N$$

EL SIGNO NEGATIVO INDICA QUE F_P ACTÚA EN FORMA OPUESTA A LO QUE SE ILUSTRA EN LA FIGURA (B)

CÁLCULO I

¿CUÁLES SON LAS DIMENSIONES DE UN DEPÓSITO EN FORMA DE CILINDRO CIRCULAR RECTO CON TAPA, DE VOLUMEN IGUAL A "V", QUE TIENE MENOR SUPERFICIE TOTAL?

SOLUCIÓN.



DE LAS MAGNITUDES VARIABLES, RADIO DE LA BASE Y ALTURA, SE TIENE QUE LA FUNCIÓN A OPTIMIZAR ES LA SUPERFICIE, DADA POR:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x y$$

Y, PARA RELACIONAR A LAS VARIABLES SE UTILIZA LA EXPRESIÓN QUE DEFINE AL VOLUMEN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO.

$$\pi x^2 y = V \quad \Rightarrow \quad y = \frac{V}{\pi x^2}$$

SE SUSTITUYE ESTE VALOR EN LA FUNCIÓN S Y SE LLEGA A:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x\left(\frac{V}{\pi x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad S = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

SE DERIVA ESTA FUNCIÓN Y SE RESUELVE EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN.

$$\frac{dS}{dx} = 4\pi x - \frac{2V}{x^2} \quad ; \quad 4\pi x - \frac{2V}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{(PUNTO CRÍTICO)}$$

EL VALOR $x = 0$ NO SE TOMA EN CONSIDERACIÓN YA QUE NO EXISTIRÍA CILINDRO.
SE OBTIENE LA SEGUNDA DERIVADA Y SE SUSTITUYE EN ELLA AL PUNTO CRÍTICO.

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 4\pi + \frac{4V}{x^3} \quad ; \quad \left.\frac{d^2S}{dx^2}\right|_{x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 12\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{MÍNIMO}$$

SE CALCULA LA ALTURA Y:

$$y = \frac{V}{\pi x^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(2\pi)^{\frac{2}{3}}\,V}{\pi\,V^{\frac{2}{3}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}}\,V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{3}{3}}\,V^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}\,\pi^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

LUEGO EL CILINDRO CIRCULAR RECTO DE MENOR SUPERFICIE TOTAL ES EL QUE TIENE COMO ALTURA EL DIÁMETRO DE SU BASE

TUTORÍA

ESTUDIANTE DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR: ¿YA COMENZASTE A INTERACTUAR CON TUTOR. ¿QUÉ ESPERAS? CONÓCELO Y VERÁS QUÉ MAGNÍFICO ES TENER UN ALIADO, UN AMIGO, ALGUIEN EN QUIEN CONFIAR CUESTIONES ACADÉMICAS Y EXISTENCIALES. ¡APÚRATE, TODAVÍA HAY TIEMPO!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DEL PROFESOR JUAN VELÁZQUEZ TORRES Y DE LA COORDINACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 42 17 DE JUNIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. ESTUDIAR UNA CARRERA DE INGENIERÍA ES ALGO MUY DIGNO DE APRECIAR EN TODO SER HUMANO. LA INGENIERÍA ES ÍNTIMA UNIÓN CON LA NATURALEZA Y UNO DE LOS PRINCIPALES OBJETIVOS DE SU QUEHACER COTIDIANO ES EL MEJORAMIENTO DE LA CALIDAD DE LA VIDA. ¡REALMENTE VALE LA PENA SER INGENIERO!

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

CÁLCULO II

CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO DE LA CURVA $y = \ln x$ DESDE $x = \sqrt{3}$ HASTA $x = \sqrt{8}$.

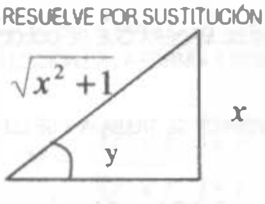
SOLUCIÓN. PARA CALCULAR LA LONGITUD DE ARCO SE UTILIZA LA EXPRESIÓN $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$. LUEGO SE PROCEDE DE LA SIGUIENTE MANERA: $y = \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

DE DONDE, SE APLICA LA EXPRESIÓN SEÑALADA Y SE OBTIENE QUE: $L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$

SE OBTIENE LA INTEGRAL INDEFINIDA:

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \int \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$$

SE RESUELVE POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA, POR LO QUE SE LLEGA A



$$x = \tan y \Rightarrow dx = \sec^2 y\, dy \quad ; \quad \sqrt{x^2+1} = \sec y$$

$$\int \frac{\sec y \sec^2 y\, dy}{\tan y} = \int \frac{\sec y \left(\tan^2 y + 1\right)}{\tan y}\, dy = \int \sec y \tan y\, dy + \int \frac{\sec y}{\tan y}\, dy$$

$$= \int \sec y \tan y\, dy + \int \csc y\, dy = \sec y + \ln(\csc y - \cot y) + C$$

$$= \sqrt{x^2+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right) + C$$

LUEGO LA INTEGRAL DEFINIDA QUEDA COMO:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx = \left[\sqrt{x^2+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

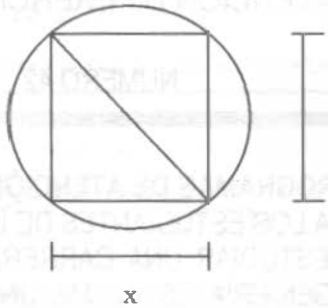
$$= 3 + \ln\frac{2}{\sqrt{8}} - 2 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 + \ln\frac{\frac{2}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 1 + \ln\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \approx 1.2027$$

CÁLCULO I

DE UN TRONCO REDONDO, DE DIÁMETRO IGUAL A $1.5\ m$, HAY QUE CORTAR UNA VIGA DE SECCIÓN RECTANGULAR. ¿QUÉ ANCHO Y QUÉ PERALTE (ALTURA) DEBERÁ TENER ESTA SECCIÓN PARA QUE LA VIGA TENGA LA RESISTENCIA MÁXIMA POSIBLE: A) A LA COMPRESIÓN (ESFUERZO SOBRE SU EJE) Y B) A LA FLEXIÓN (ESFUERZO PERPENDICULAR A SU EJE) ?

OBSERVACIÓN. LA RESISTENCIA DE LA VIGA A LA COMPRESIÓN ES DIRECTAMENTE PROPORCIONAL AL ÁREA DE SU SECCIÓN TRANSVERSAL, MIENTRAS QUE A LA FLEXIÓN LO ES AL PRODUCTO DEL ANCHO POR EL CUADRADO DEL PERALTE.

SOLUCIÓN. SE TIENE LA SIGUIENTE FIGURA DONDE SE DESIGNA CON x AL ANCHO DE LA SECCIÓN Y CON y SU LA ALTURA O PERALTE.



A) LA FUNCIÓN OBJETIVO A OPTIMIZAR ES EN ESTE CASO: $R_C = k\ xy$ Y DE LA FIGURA SE OBTIENE UNA RELACIÓN ENTRE EL ANCHO Y EL PERALTE DE LA SECCIÓN, MEDIANTE EL TEOREMA DE PITÁGORAS, DE LA QUE SE DESPEJA UNA VARIABLE, SE SUSTITUYE EN LA FUNCIÓN OBJETIVO Y SE RESUELVE EL PROBLEMA PLANTEADO. ASÍ SE TIENE QUE:

$$x^2 + y^2 = 1.5^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{1.5^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{2.25 - x^2}$$

$$R_C = k\,x\sqrt{2.25 - x^2} \;\Rightarrow\; \frac{dR_C}{dx} = k\,x\,\frac{-x}{\sqrt{2.25 - x^2}} + k\sqrt{2.25 - x^2} = \frac{-k\,x^2 + k\left(2.25 - x^2\right)}{\sqrt{2.25 - x^2}} = \frac{-k\,x^2 + 2.25\,k - k\,x^2}{\sqrt{2.25 - x^2}}$$

$$\frac{dR_C}{dx} = \frac{-2k\,x^2 + 2.25k}{\sqrt{2.25 - x^2}} \quad ; \quad \frac{-2k\,x^2 + 2.25k}{\sqrt{2.25 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; -2k\,x^2 + 2.25k = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{2.25}{2}} = 1.06$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1.0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dR_C}{dx} > 0 \\ x = 2.0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dR_C}{dx} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; máximo \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} x = 1.06\,m \\ y = \sqrt{2.25 - 1.06^2} = 1.06\,m \end{array}$$

CABE DECIR QUE EN ESTE PROBLEMA, LA RESISTENCIA MÁXIMA A LA COMPRESIÓN SE DA CUANDO $x = y = \dfrac{D}{\sqrt{2}}$, DONDE D ES EL DIÁMETRO DEL TRONCO. ES IMPORTANTE TAMBIÉN HACER NOTAR QUE EN ESTE CASO LA SECCIÓN ES CUADRADA. RECUÉRDESE LA SECCIÓN DE LOS POLINES DE MADERA QUE SE COLOCAN PARA SOPORTAR LA CIMBRA EN UNA OBRA, ¡SON DE SECCIÓN CUADRADA!

B) AHORA LA FUNCIÓN OBJETIVO ES: $R_F = k\ xy^2$. CON LA MISMA RELACIÓN ENTRE EL ANCHO Y EL PERALTE DEL INCISO ANTERIOR SE TRABAJA Y SE LLEGA A:

$$y = \sqrt{2.25 - x^2} \;\Rightarrow\; R_F = k\,x\left(2.25 - x^2\right) \;\Rightarrow\; R_F = 2.25k\,x - k\,x^3 \;\Rightarrow\; \frac{dR_F}{dx} = 2.25k - 3k\,x^2$$

$$2.25k - 3k\,x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{2.25}{3}} = 0.866$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dR_F}{dx} > 0 \\ x = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{dR_F}{dx} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \; máximo \;\Rightarrow\; \begin{array}{c} x = 0.866\,m \\ y = \sqrt{2.25 - 0.866^2} = 1.225\,m \end{array}$$

AQUÍ, LA RESISTENCIA MÁXIMA A LA FLEXIÓN SE DA CUANDO $x = \dfrac{D}{\sqrt{3}}$ y $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,D$, DONDE D ES EL DIÁMETRO DEL TRONCO. ES IMPORTANTE DESTACAR QUE EN ESTE CASO EL PERALTE ES MAYOR QUE EL ANCHO DE LA SECCIÓN DE LA VIGA, LO QUE RESULTA LÓGICO. VALGA PENSAR EN UNA VIGA DE MADERA UTILIZADA COMO BANCA PARA SENTARSE. ES MAYOR EL PERALTE QUE EL ANCHO PARA QUE AGUANTE MÁS. OBSÉRVENSE LAS TRABES EN UNA EDIFICACIÓN. GENERALMENTE CUMPLEN CON ESTO Y HASTA SE DICE QUE SON POCO O MUY PERALTADAS.

CÁLCULO III

CALCULAR LAS COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACIÓN DE UNA PARTÍCULA QUE SE MUEVE EN LA HÉLICE DE ECUACIÓN $\bar{r}(t)=\cos t\,\hat{i}+sen t\,\hat{j}+t\,\hat{k}$. TAMBIÉN EXPRESAR ESTAS COMPONENTES DE MANERA VECTORIAL, EN TÉRMINOS DE LOS VECTORES $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$

SOLUCIÓN. COMO SE SABE, LA ACELERACIÓN DE LA PARTÍCULA SE EXPRESA A TRAVÉS DE LA ECUACIÓN: $\bar{a}=\dfrac{dv}{dt}\bar{T}+\dfrac{v^2}{\rho}\bar{N}$

LUEGO, LAS COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL ESTÁN DADAS, RESPECTIVAMENTE, POR $\dfrac{dv}{dt}$ y $\dfrac{v^2}{\rho}$

SE PROCEDE AL CÁLCULO DE LA RAPIDEZ v, DE SU DERIVADA, DE SU CUADRADO Y DEL RADIO DE CURVATURA ρ, DE LA SIGUIENTE MANERA:

$$\bar{r}(t)=\cos t\,\hat{i}+sen\,t\,\hat{j}+t\,\hat{k}\ \Rightarrow\ v=\frac{d\bar{r}}{dt}=-sen\,t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+\hat{k}\ \Rightarrow\ v=|\bar{v}|=\sqrt{sen^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ \frac{dv}{dt}=0$$

POR LO TANTO LA COMPONENTE TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN ES IGUAL A CERO. DE AQUÍ SE DEDUCE QUE LA ACELERACIÓN NORMAL ES LA ÚNICA QUE SE PRESENTA Y POR LO TANTO EQUIVALE A LA ACELERACIÓN DE LA PARTÍCULA, ES DECIR QUE:

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=-\cos t\,\hat{i}-sen\,t\,\hat{j}\ \Rightarrow\ |\bar{a}|=a_N=1$$

Y LA ACELERACIÓN NORMAL, EN TÉRMINOS DE LOS VECTORES $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ES LA MISMA EXPRESIÓN QUE DEFINE A LA ACELERACIÓN, ESTO ES:

$$\bar{a}_N=-\cos t\,\hat{i}-sen\,t\,\hat{j}$$

SIN EMBARGO, PARA PRACTICAR LAS EXPRESIONES DE LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL, SE OBTENDRÁ LA COMPONENTE NORMAL CON LAS EXPRESIONES CORRESPONDIENTES:

$$k=\frac{|\bar{r}'\times\bar{r}''|}{|\bar{r}'|^3}\quad;\quad \bar{r}'=-sen\,t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j}+\hat{k}\ \Rightarrow\ \bar{r}''=-\cos t\,\hat{i}-sen\,t\,\hat{j}$$

$$\bar{r}'\times\bar{r}''=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-sen\,t&\cos t&1\\-\cos t&-sen\,t&0\end{vmatrix}=sen\,t\,\hat{i}-\cos t\,\hat{j}+\left(sen^2 t+\cos^2 t\right)\hat{k}=sen\,t\,\hat{i}-\cos t\,\hat{j}+\hat{k}$$

$$|\bar{r}'\times\bar{r}''|=\sqrt{sen^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}\quad;\quad |\bar{r}'|^3=v^3=2\sqrt{2}\quad\therefore\quad k=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \rho=\frac{1}{k}=2\quad\therefore\quad a_N=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}=1$$

LUEGO, LAS COMPONENTES DE LA ACELERACIÓN SON: $a_T=0$ y $a_N=1$. PARA EXPRESAR LA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN NORMAL COMO VECTOR, EN TÉRMINOS DE $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ BASTARÍA CON MULTIPLICARLA POR EL VECTOR NORMAL UNITARIO $\bar{N}$, LO QUE SE HARÁ PARA MOSTRAR LA UTILIZACIÓN DE LA FÓRMULA RESPECTIVA. ASÍ:

$$\bar{N}=\frac{(r'\times r'')\times r'}{|(r'\times r'')\times r'|}\quad;\quad (r'\times r'')\times r'=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\sent&-\cos t&1\\-sent&\cos t&1\end{vmatrix}=-2\cos t\,\hat{i}-2sent\,\hat{j}\ \Rightarrow\ |(r'\times r'')\times r'|=2$$

$$\Rightarrow\ \bar{N}=-\cos t\,\hat{i}-sent\,\hat{j}\quad\therefore\quad \bar{a}_N=-\cos t\,\hat{i}-sent\,\hat{j}$$

CÁLCULO II

RESOLVER LAS SIGUIENTES INTEGRALES: $i)\ \displaystyle\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ $\quad ii)\ \displaystyle\int senx\,\ln\tan x\,dx$ $\quad iii)\ \displaystyle\int\frac{x\cos x\,dx}{sen^3 x}$

SOLUCIÓN.

$i)\ \displaystyle\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$. PARA RESOLVER ESTA INTEGRAL, SE TRABAJA PRIMERO CON LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA, APROVECHANDO SUS PROPIEDADES. ASÍ SE TIENE QUE:

$$\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\int x\ln\frac{x+1}{x}dx=\int x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]dx=\int x\ln(x+1)dx-\int x\ln x\,dx$$

Y LAS DOS INTEGRALES SE RESUELVEN POR PARTES DE LA SIGUIENTE MANERA:

PARA $\int x\ln(x+1)\,dx$ SE PROCEDE COMO SIGUE:

$$u=\ln(x+1)\ \Rightarrow\ du=\frac{dx}{x+1}\quad;\quad dv=x\,dx\ \Rightarrow\ v=\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\ \int x\ln(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(x+1)+C=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+C$$

PARA $\int x\ln x\,dx$ SE PROCEDE COMO SIGUE:

$$u=\ln x\ \Rightarrow\ du=\frac{dx}{x}\quad;\quad dv=x\,dx\ \Rightarrow\ v=\frac{x^2}{2}$$

$$\therefore\ \int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$$

FINALMENTE, LA SOLUCIÓN A LA INTEGRAL PLANTEADA ES LA SUMA DE LAS SOLUCIONES DE LAS DOS INTEGRALES, ES DECIR:

$$\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x}{2}+C$$

ii) $\int sen x\ln\tan x\,dx$. ESTA INTEGRAL SE RESUELVE POR PARTES COMO SIGUE.

$$u=\ln\tan x\ \Rightarrow\ du=\frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=\frac{dx}{sen\,x\cos x}\quad;\quad dv=sen\,x\,dx\ \Rightarrow\ v=-\cos x$$

$$\therefore\ \int sen x\ln\tan x\,dx=-\cos x\ln\tan x-\int(-\cos x)\frac{dx}{sen x\cos x}=-\cos x\ln\tan x+\int\csc x\,dx$$

$$=-\cos x\ln\tan x+\ln(\csc x-\cot x)+C$$

iii) $\int\frac{x\cos x}{sen^3 x}dx$. PARA EFECTUAR ESTA INTEGRAL SE UTILIZA EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES, DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$u=x\ \Rightarrow\ du=dx\quad;\quad dv=\frac{\cos x}{sen^3 x}dx\quad;\quad w=sen x\Rightarrow dw=\cos x\,dx\ \Rightarrow\ v=\int\frac{dw}{w^3}=-\frac{1}{2w^2}=-\frac{1}{2sen^2 x}$$

$$\therefore\ \int\frac{x\cos x}{sen^3 x}dx=-\frac{x}{2sen^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{sen^2 x}dx=-\frac{x}{2sen^2 x}+\frac{1}{2}\int\csc^2 x\,dx=-\frac{x}{2sen^2 x}-\frac{\cot x}{2}+C$$

CULTURA

ALGUNOS PENSAMIENTOS SOBRE EL AMOR

"EL AMOR DEBE SER ESENCIALMENTE UN ACTO DE LA VOLUNTAD, LA DECISIÓN DE DEDICAR TODA NUESTRA VIDA A LA DE LA OTRA PERSONA" (ERICH FROMM)
"HEMOS VIVIDO EN COMPAÑÍA DE UNA MUJER ENJAULADA. PERO YA LE ABRIMOS LA PUERTA. AHORA SABREMOS POR FIN SI SOMOS AMADOS DE VERDAD" (JUAN JOSÉ ARREOLA)
"AMAR NO ES RETIRARSE EL UNO EN LOS OJOS DEL OTRO SINO MIRAR JUNTOS EN UNA MISMA DIRECCIÓN" (SAINT-EXUPÉRY)
"ME ESTÁS ENSEÑANDO A AMAR. YO NO SABÍA. AMAR NO ES PEDIR, ES DAR. NOCHE TRAS DÍA" (GERARDO DIEGO)
"CUANDO EL AMOR HA SIDO UNA COMEDIA, FORZOSAMENTE TIENE QUE TERMINAR EN TRAGEDIA" (LAMARTINE)
"AMAR ES ENCONTRAR EN LA FELICIDAD DE OTRO LA PROPIA FELICIDAD" (LEIBNIZ)
"A MAYOR POSESIÓN, MENOR AMOR" (TITA VALENCIA)
"ESTABAS A RAS DE TIERRA Y NO TE VI. TUVE QUE CAVAR HASTA EL FONDO DE MÍ PARA ENCONTRARTE" (JUAN JOSÉ ARREOLA)
"EL AMOR ES UN ACTO DE FE, Y QUIEN TENGA POCA FE TAMBIÉN TIENE POCO AMOR" (ERICH FROMM)
"EN AMOR SÓLO ES GRANDE EL QUE PERDONA" (ENRIQUE ARCINIEGA)
"SÓLO EN TORNO DE UNA MUJER QUE SE SIENTE AMADA PUEDE FORMARSE UNA FAMILIA" (FEDERICO SCHLEGEL)
"A NADIE TE PARECES DESDE QUE YO TE AMO" (PABLO NERUDA)
"SÓLO AQUELLAS RELACIONES HUMANAS INSPIRADAS POR EL AMOR TENDRÁN LA VIRTUD DE SATISFACER NUESTRO ANHELO INMORTAL" (ALEXIS CARREL)
"MÁS TRISTE QUE LA MUERTE ES LA AGONÍA DE UN AMOR ENTRE DUDAS Y TEMORES" (JACINTO BENAVENTE)

TUTORÍA

..." TUVE UN SUEÑO ... ERA UN ESPACIO GRANDE VERDE Y ARBOLADO, HABÍA MUCHOS TUTORES, CADA UNO CON UN ESTUDIANTE; DE LAS MANOS DE LOS TUTORES, ASÍ COMO DE SUS BOCAS, SALÍAN DESTELLOS DE LUZ FOSFORESCENTE QUE SE ESTRELLABAN EN LAS HUMANIDADES DE LOS ESTUDIANTES Y ÉSTOS EMPEZABAN A BRILLAR ... A RATOS SE REPETÍA EL MISMO FENÓMENO PERO AL REVÉS" ... (PENSAMIENTO DE UN TUTOR DE LA FACULTAD)

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 43 2 DE JULIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. SE DICE QUE EL INGENIERO PUEDE DESARROLLAR MUCHAS ACTIVIDADES COLATERALES A SU PROFESIÓN, LO CUAL ES VERDADERO POR LA FORMACIÓN Y DISCIPLINA MENTALES QUE ADQUIERE DURANTE SU APRENDIZAJE DE LA INGENIERÍA, EN LA QUE TIENEN QUE VER MUCHO LAS CIENCIAS BÁSICAS. POR LO TANTO, A ECHARLE GANAS A ESTAS ASIGNATURAS Y PRONTO SE VERÁ LA LUZ RESPLANDECIENTE DEL EJERCICIO DIGNO Y HERMOSO DE LA INGENIERÍA.

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

GEOMETRÍA ANALÍTICA

RELACIÓN RECTA CON PLANO. LA RECTA Y EL PLANO SE RELACIONAN A TRAVÉS DE:

- ÁNGULO FORMADO POR LA RECTA Y EL PLANO, TAL QUE $0 \le \phi \le 90^0$
- LA INTERSECCIÓN DE LA RECTA CON EL PLANO PUEDE SER UN PUNTO, LA MISMA RECTA O NO EXISTIR.
- LA DISTANCIA MÍNIMA DE SEPARACIÓN, EN CASO DE SER PARALELOS LA LÍNEA RECTA CON EL PLANO, CALCULADA COMO LA DISTANCIA DE UN PUNTO DE LA RECTA, AL PLANO.

SEA EL PLANO DE ECUACIÓN $2x - 3y - 6z = -23$ Y LA LÍNEA RECTA $\dfrac{x-16}{6} = \dfrac{y-12}{-2} = \dfrac{z-16}{3}$

A) DETERMINAR EL ÁNGULO ϕ FORMADO POR LA LÍNEA RECTA Y EL PLANO

B) CALCULAR LA DISTANCIA MÍNIMA DE SEPARACIÓN ENTRE LA RECTA Y EL PLANO

SOLUCIÓN

A) $\overline{N}$: VECTOR NORMAL DEL PLANO $\overline{N} = (2,-3,-6)$; $\overline{u}$: VECTOR DIRECCIÓN DE LA RECTA $\overline{u} = (6,-2,3)$

LOS MÓDULOS DE ESTOS VECTORES SON:

$$|\overline{N}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} \Rightarrow |\overline{N}| = \sqrt{49} \Rightarrow |\overline{N}| = 7$$

$$|\overline{u}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} \Rightarrow |\overline{u}| = \sqrt{49} \Rightarrow |\overline{u}| = 7$$

$$sen\,\phi = \frac{\overline{N} \cdot \overline{u}}{|\overline{N}|\,|\overline{u}|} \Rightarrow sen\,\phi = \frac{(2,-3,-6)\cdot(6,-2,3)}{(7)(7)} \Rightarrow sen\,\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0^0$$

POR LO TANTO LA RECTA Y EL PLANO SON PARALELOS.

B) SEA P_P UN PUNTO CUALQUIERA DEL PLANO $P_P(5,-7,9)$

SEA P_R UN PUNTO CUALQUIERA DE LA RECTA $P_R(16,12,16)$

POR LO QUE EL VECTOR $\overline{P_R P_P} = (-11,-19,-7)$ ***ENTONCES, LA DISTANCIA ESTÁ DADA POR:***

$$d = \frac{\overline{P_R P_P} \cdot \overline{N}}{|\overline{N}|} = \frac{(-11,-19,-7)\cdot(2,-3,-6)}{7} = \frac{-22+57+42}{7} = \frac{77}{7} \quad \therefore \quad d = 11\,u$$

QUÍMICA

BALANCEO DE REACCIONES QUÍMICAS POR EL MÉTODO DEL " ION – ELECTRÓN " PARA ESTE CASO PARTICULAR, SE TRABAJARÁ EN MEDIO ÁCIDO CON LA REACCIÓN SIGUIENTE.

$$Se + BrO_3^- \rightarrow H_2SeO_3 + Br^-$$

1. SE ESCRIBEN DOS SEMIREACCIONES, UNA DE OXIDACIÓN Y OTRA DE REDUCCIÓN (O BIEN, SE ASOCIAN LAS ENTIDADES QUE TIENEN LOS MISMOS ELEMENTOS)

$$Se \rightarrow H_2 SeO_3$$
$$BrO_3^- \rightarrow Br^-$$

2. SE BALANCEAN LAS SEMIREACCIONES SUMANDO MOLÉCULAS DE AGUA EN DONDE HAYA DEFICIENCIA DE OXÍGENO Y SUMANDO IONES H^+ DONDE HAYA DEFICIENCIA DE HIDRÓGENO

$$3H_2O + Se \rightarrow H_2SeO_3 + 4H^+$$
$$6H^+ + BrO_3^- \rightarrow Br^- + 3H_2O$$

3. SE SUMAN ELECTRONES PARA QUE EL BALANCEO DE CARGA SEA IGUAL TANTO EN REACTIVOS COMO EN PRODUCTOS

$$3H_2O + Se \rightarrow H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e^-$$
$$0 + 0 \rightarrow 0 + (+4) + (-4)$$
$$0 \rightarrow 0$$
$$6e^- + 6H^+ + BrO_3^- \rightarrow Br^- + 3H_2O$$
$$(-6) + (+6) + (-1) \rightarrow -1$$
$$-1 \rightarrow -1$$

4. SE IGUALA EL NÚMERO DE ELECTRONES OBTENIENDO EL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO DE 4 y 6 (QUE REPRESENTAN A LOS MOLES DE ELECTRONES QUE SE SUMARON) QUE ES 12, POR LO TANTO, LA PRIMERA SEMIREACCIÓN SE MULTIPLICA POR 3 Y LA SEGUNDA POR 2 Y SE TIENE QUE

$$\left[3H_2O + Se \rightarrow H_2SeO_3 + 4H^+ + 4e^-\right]\cdot 3$$
$$\left[6e^- + 6H^+ + BrO_3^- \rightarrow Br^- + 3H_2O\right]\cdot 2$$

SE REALIZAN LAS OPERACIONES INDICADAS Y SE OBTIENE

$$9H_2O + 3Se \rightarrow 3H_2OSeO_3 + 12H^+ + 12e^-$$
$$12e^- + 12H^+ + 2BrO_3^- \rightarrow 2Br^- + 6H_2O$$

5. SE SUMAN LAS SEMIREACCIONES Y SE ELIMINAN TÉRMINOS SEMEJANTES, DE DONDE SE LLEGA A:

$$9H_2O + 3Se \rightarrow 3H_2SeO_3 + 12H^+ + 12e^-$$
$$+$$
$$12e^- + 12H^+ + 2BrO_3^- \rightarrow 2Br^- + 6H_2O$$
$$\overline{9H_2O + 3Se + 2BrO_3^- \rightarrow 3H_2SeO_3 + 2Br^- + 6H_2O}$$

SE PUEDE SIMPLIFICAR AÚN MÁS, REDUCIENDO LOS MOLES DE AGUA Y SE TIENE QUE

$$3H_2O + 3Se + 2BrO_3^- \rightarrow 3H_2SeO_3 + 2Br^-$$

SE PUEDE OBSERVAR QUE LA REACCIÓN TOTAL ESTÁ BALANCEADA, TANTO EN MASA COMO EN CARGA

FÍSICA EXPERIMENTAL

LA MAGNITUD DEL CAMPO MAGNÉTICO EN EL CENTRO DE UNA BOBINA CIRCULAR DE RADIO "a" COLOCADA EN EL VACÍO, ESTÁ DADA POR LA EXPRESIÓN $B = \dfrac{\mu_0 \, i \, N}{2a}$, EN LA CUAL μ_0 ES LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO; a ES EL RADIO DE LA BOBINA; N ES EL NÚMERO DE ESPIRAS DE LA BOBINA E i ES LA CORRIENTE ELÉCTRICA EN DICHA BOBINA. DETERMINAR, EN EL $S.I.$:

A) LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DEL CAMPO MAGNÉTICO B, DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA i Y DEL NÚMERO DE ESPIRAS N

B) LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DE LA PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO. CONSIDERAR QUE EL NÚMERO 2 QUE APARECE EN LA EXPRESIÓN ES UNA CONSTANTE ADIMENSIONAL.

SOLUCIÓN.

A) PARA DETERMINAR LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DEL CAMPO MAGNÉTICO, RECORDEMOS QUE LA MAGNITUD DE LA FUERZA MAGNÉTICA (Fm) QUE ACTÚA EN UN CONDUCTOR DE LONGITUD "ℓ", INMERSO EN UN CAMPO MAGNÉTICO B Y QUE TRANSPORTA UNA CORRIENTE ELÉCTRICA i, ESTÁ DADA POR

$Fm = i \, \ell \, B \, sen\, \alpha$; SI SE DESPEJA B, SE TIENE QUE:

$$B = \frac{Fm}{i\ \ell\ sen\ \alpha} \quad \therefore \quad [B] = \left[\frac{Fm}{i\ \ell\ sen\ \alpha}\right] = \frac{[Fm]}{[i][\ell][sen\ \alpha]}$$

LA EXPRESIÓN DIMENSIONAL DE CADA TÉRMINO ES:

$$[Fm] = L\ M\ T^{-2}$$
$$[i] = I$$
$$[\ell] = L \qquad \therefore \quad [B] = \frac{L\ M\ T^{-2}}{(I)(L)(1)} = M\ T^{-2}\ I^{-1}$$
$$[sen\,\alpha] = 1$$

A LA CORRIENTE ELÉCTRICA i LE CORRESPONDE UNA UNIDAD DE BASE (EL AMPERE), POR LO QUE

$$[i] = I$$

EL NÚMERO DE ESPIRAS ES UN FACTOR QUE SÓLO INDICA CANTIDAD POR LO QUE NO TIENE DIMENSIONES, ES DECIR:

$$[N] = 1$$

B) DE LA EXPRESIÓN $B = \frac{\mu_0\ i\ N}{2\,a}$ SE TIENE QUE $\mu_0 = \frac{2\,a\,B}{i\,N}$, POR LO TANTO

$$[\mu_0] = \left[\frac{2\ a\ B}{i\ N}\right] = \frac{[2][a][B]}{[i][N]}$$

COMO $[2] = 1$; $[a] = L$; $[B] = M\ T^{-2}\ I^{-1}$; $[i] = I$; $[N] = 1$, ENTONCES, FINALMENTE SE LLEGA A

$$[\mu_0] = \frac{(1)(L)\left(M\ T^{-2}\ I^{-1}\right)}{(I)(1)} = L\ M\ T^{-2}\ I^{2}$$

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

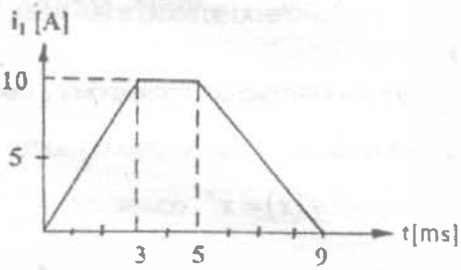
EN LA FIGURA SE MUESTRA UN NÚCLEO TOROIDAL DE MATERIAL FERROMAGNÉTICO $(\mu = 100\ \mu_0)$ SOBRE EL CUAL SE HAN DEVANADO $N_1 = 850\ vueltas$, POR CUYO EMBOBINADO SE HACE CIRCULAR LA CORRIENTE i_1 QUE SE PRESENTA EN LA GRÁFICA. SOBRE EL MISMO NÚCLEO SE COLOCA UNA BOBINA DE $25\ vueltas\ (N_2)$; SI $r_1 = 15\,[cm]$, $r_2 = 20\,[cm]$ y $e = 4\ cm$, DETERMINAR:

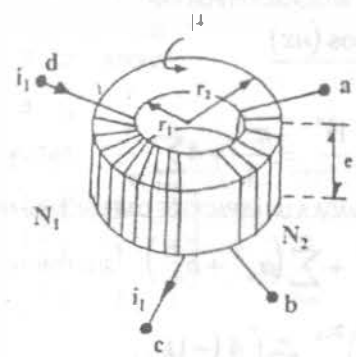
A) EL FLUJO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DEL TOROIDE, CUANDO $t = 4\,[ms]$

B) EL COEFICIENTE DE INDUCTANCIA MUTUA ENTRE LOS DOS EMBOBINADOS

C) LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA (V_{ab}) ENTRE LAS TERMINALES DE LA BOBINA, CUANDO $t = 7\,[ms]$

D) LA FUERZA ELECTROMOTRIZ INDUCIDA (V_{cd}) EN $t = 6\,[ms]$





SOLUCIÓN

A) DE LA DEFINICIÓN $\phi_b = \iint B \cdot dS = \iint B\,dS\,\cos\alpha$; $\alpha = 0$ y $\cos\alpha = 1$; $\phi_b = \iint B\,dS$

$$\phi_b = \int_0^e \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu\ N_1\ i_1}{2\,\pi\,r}\,dr\,de = \frac{\mu\ N_1\ i_1\ e}{2\,\pi} \ln\frac{r_2}{r_1} \quad ; \quad \phi_b = \frac{4\,\pi \times 10^{-5}(850)(10)(0.04)}{2\,\pi} \ln\frac{20}{15} = 1.956\,[mWb]$$

YA QUE $i_1 = 10\,[A]$ en $t = 4\,[ms]$

B) EL COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA SE OBTIENE CON $M = \frac{N_2\ \phi_{21}}{i_1}$

COMO $\mu >> \mu_0$; $\phi_{21} = \phi_{11} = \phi_b$ $\therefore$ $M = \frac{e\ \mu\ N_2\ N_1}{2\,\pi} \ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{4\,\pi \times 10^{-5}(25)(850)\,0.04}{2\,\pi} \ln\frac{20}{15} = 4.8906\,[mH]$

C) CON LA LEY DE FARADAY: $\left|V_{ab}\right| = M\left|\frac{di_1}{dt}\right| = 4.8906\times10^{-3}\left|\frac{-10}{4\times10^{-3}}\right| = 12.2265\,[V]$

SI SE APLICA EL PRINCIPIO DE LENZ: $V_b > V_a \quad \therefore \quad V_{AB} = -12.2265\,[V]$

D) SI SE APLICA LA LEY DE FARADAY: $\left|V_{cd}\right| = \left|L_1\frac{di_1}{dt}\right|$

COMO $L_1 = \frac{N_1\,\phi_1}{i_1} = \frac{N_1\,\mu\,N_1\,i_1\,e}{i_1\,2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{4\,\pi\times10^{-5}(850)^2\;0.04}{2\,\pi}\ln\frac{20}{15} = 0.1663\,[H]$, ENTONCES SE TIENE QUE

$\left|V_{cd}\right| = \left|0.1663\left[\frac{-10}{(9-5)10^{-3}}\right]\right| = 415.7\,[V]$; DE ACUERDO CON EL PRINCIPIO DE LENZ, COMO $i_{1\downarrow}$ (DISMINUYE),

$V_c > V_d \quad \therefore \quad V_{cd} = 415.7\,[V]$

MATEMÁTICAS AVANZADAS

EN EL CONJUNTO DE TODAS LAS FUNCIONES PERIODICAS CON PERIODO $2\,\pi$ DEFINIDAS EN EL SEGMENTO $[-\pi,\,\pi]$, CONSIDÉRESE LA FUNCIÓN $f(x) = x^2$

OBTENER EL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE ELLA EN DICHO INTERVALO Y UTILIZAR LA IDENTIDAD DE PARSEVAL PARA CALCULAR LA SUMA DE $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

SOLUCIÓN. ESTA FUNCIÓN ES *PAR*, ENTONCES PARA DESARROLLARLA EN UNA SERIE DE FOURIER ES SUFICIENTE CON CALCULAR LOS COEFICIENTES a_0 y a_n DE ACUERDO CON ESTO:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3\,\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{x^2\,sen\,(nx)}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\,sen\,(nx)\,dx\right]$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left[-\left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right] = \frac{4\left[(-1)^n\,\pi - 0\right]}{n^2\,\pi} - \left.\frac{4\,sen\,(nx)}{n^3\,\pi}\right|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n\,4}{n^2}$$

(SE HA EMPLEADO EL MÉTODO DE "INTEGRACIÓN POR PARTES")

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$; AHORA, SI SE SUSTITUYE EL VALOR $x = \pi$ EN LA IGUALDAD SE TIENE QUE

$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ENTONCES $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ HAY UNA IDENTIDAD QUE CORRESPONDE A UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS LLEVADA A UN ESPACIO DE DIMENSIÓN INFINITA, ÉSTA ES LA "IDENTIDAD DE PARSEVAL" Y TIENE LA FORMA SIGUIENTE:

$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2\,dx = 2\,a_0^{\,2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right)$ SI EN PARTICULAR NOS FIJAMOS EN LA FUNCIÓN $f(x) = x^2$, OCURRE QUE

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x^2\right]^2 dx = 2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\,(-1)^n}{n^2}\right)^2$. LA INTEGRAL DE LA IZQUIERDA TOMA LA FORMA $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,dx = \left.\frac{1}{\pi}\frac{x^5}{5}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\,\pi^4}{5}$

MIENTRAS QUE EL LADO DERECHO QUEDA COMO: $\frac{2\,\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^4} = \frac{2\,\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. LUEGO, REUNIÉNDOLOS, DE ACUERDO A LA IDENTIDAD DE PARSEVAL, SE OBTIENE: $\frac{2\,\pi^4}{5} = \frac{2\,\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Rightarrow 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{9}\right)\pi^4 = \frac{8}{45}\pi^4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES VIOLETA LUZ MARÍA BRAVO HERNÁNDEZ, GUSTAVO BALMORI NEGRETE, RIGEL GÁMEZ LEAL, ELIZABETH AGUIRRE MALDONADO, GABRIEL JARAMILLO MORALES Y AUGUSTO GUADALUPE MISS PAREDES.

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

BOLETÍN **COPADI**

FACULTAD DE INGENIERÍA. UNAM
COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE
ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS

AÑO 2002 NÚMERO 44 17 DE JULIO DE 2002

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN, DE LA **COORDINACIÓN DE PROGRAMAS DE ATENCIÓN DIFERENCIADA PARA ALUMNOS** (COPADI), ES UNA PUBLICACIÓN QUINCENAL DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO ACADÉMICO. FALTA UN MES PARA QUE TERMINE EL SEMESTRE. ES TODO UN MES PARA RECUPERARSE Y ***"CERRAR A TAMBOR BATIENTE"***. ESTUDIAR ES ALGO VALIOSO Y PRODUCTIVO. SI SE HACE CON SENCILLEZ, CONDUCE A LA SABIDURÍA Y ÉSTA AL BIEN Y A LA FELICIDAD. **¡A ESTUDIAR Y TRIUNFAR!**

"APRENDER A APRENDER, APRENDER A EMPRENDER Y APRENDER A SER"

ÁLGEBRA

DEMOSTRAR QUE PARA LA MATRIZ $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$, SU ENÉSIMA POTENCIA ESTÁ DADA POR $A^n = 3^{n-1}A$

SOLUCIÓN
SE UTILIZARÁ EL MÉTODO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

$i)$ COMPROBACIÓN PARA $n=1$; $A^1 = 3^{1-1}A = 3^0 A = A$ SÍ SE CUMPLE

$ii)$ SE SUPONE QUE LA EXPRESIÓN SE CUMPLE PARA ALGÚN VALOR $n=k$ DE HECHO, YA SE COMPROBÓ QUE SE CUMPLE AL MENOS PARA $n=1$.

$$A^k = 3^{k-1}A \quad \cdots \quad \text{HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN}$$

CON BASE EN LA HIPÓTESIS, DEBE DEMOSTRARSE QUE LA EXPRESIÓN ES CIERTA PARA $n=k+1$

$$A^{k+1} = 3^k A \quad \cdots \quad \text{AFIRMACIÓN O TESIS}$$

AL POSTMULTIPLICAR EN AMBOS LADOS DE LA HIPÓTESIS POR A SE TIENE QUE

$$A^k A = 3^{k-1}A\,A$$

$$A^{k+1} = 3^{k-1}A\,A$$

$$A^{k+1} = 3^{k-1}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$= 3^{k-1}\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$$

$$= 3^{k-1}\cdot 3\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

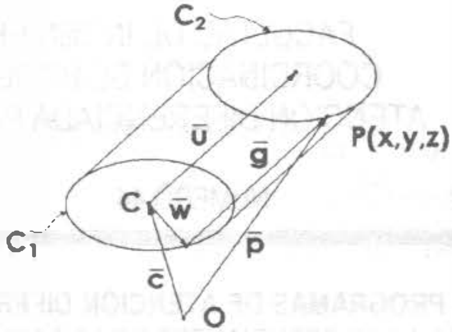
$$= 3^k A \qquad Q.E.D.$$

GEOMETRÍA ANALÍTICA

DETERMINAR UNA ECUACIÓN VECTORIAL, UNAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO CIRCULAR OBLICUO CUYAS TRAZAS EN LOS PLANOS $z=0$ y $z=6$ SON LAS CURVAS C_1 y C_2 REPRESENTADAS POR LAS ECUACIONES

$$C_1:\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4\\ z=0\end{cases} \qquad y \qquad C_2:\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=4\\ z=6\end{cases}$$

RESOLUCIÓN. CONSIDÉRESE LA SIGUIENTE FIGURA



SEA $\bar{c}=(1,2,0)$ EL VECTOR DE POSICIÓN DEL PUNTO C, CENTRO DE LA CIRCUNFERENCIA C_1

SEA $\bar{w}=(2\cos\theta, 2sen\,\theta, 0)$; $0\le\theta<2\pi$, EL VECTOR CON ORIGEN EN EL PUNTO C Y CUYO EXTREMO VA A "RECORRER" LA CIRCUNFERENCIA C_1 CUANDO θ TOMA TODOS LOS VALORES DEL INTERVALO $[0, 2\pi)$

SEA EL VECTOR $\bar{u}=(4,3,6)-(1,2,0)=(3,1,6)$, PARALELO AL EJE DEL CILINDRO.

SEA $\bar{g}$ EL VECTOR CUYO ORIGEN ESTÁ EN EL EXTREMO DEL VECTOR $\bar{w}$ Y QUE ES PARALELO AL VECTOR $\bar{u}$ LUEGO

$\bar{g}=\lambda\,\bar{u}=\lambda\,(3,1,6)$; $\lambda\neq 0$

SEA $\bar{p}$ EL VECTOR DE POSICIÓN DE UN PUNTO $P(x,y,z)$ QUE PERTENECE AL CILINDRO Y QUE ESTÁ EN EL EXTREMO DEL VECTOR $\bar{g}$ LUEGO

$$\bar{p}=\bar{c}+\bar{w}+\bar{g}=(1,2,0)+(2\cos\theta, 2sen\theta, 0)+\lambda\,(3,1,6) \quad\Rightarrow\quad \bar{p}=(1+2\cos\theta+3\lambda, 2+2sen\theta+\lambda, 6\lambda)$$

EXPRESIÓN QUE REPRESENTA UNA ECUACIÓN VECTORIAL DEL CILINDRO.

LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL CILINDRO QUE CORRESPONDEN A LA ECUACIÓN VECTORIAL OBTENIDA SON

$$S:\begin{cases}x=1+2\cos\theta+3\lambda\\ y=2+2sen\,\theta+\lambda \qquad ; \quad 0\le\theta<2\pi \quad ; \quad \lambda\in\Re\\ z=6\lambda\end{cases}$$

LA ECUACIÓN CARTESIANA SE PUEDE OBTENER "ELIMINANDO" LOS PARÁMETROS θ y λ DE LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA SUPERFICIE, COMO SIGUE:

DE LA PRIMERA ECUACIÓN $\cos\theta=\dfrac{x-1-3\lambda}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\theta=\dfrac{(x-1-3\lambda)^2}{4}$

DE LA SEGUNDA ECUACIÓN $sen\,\theta=\dfrac{y-2-\lambda}{2} \quad\Rightarrow\quad sen^2\theta=\dfrac{(y-2-\lambda)^2}{4}$

DE LA TERCERA ECUACIÓN $\lambda=\dfrac{z}{6}$

DE LA IDENTIDAD $sen^2\theta+\cos^2\theta=1$ PARA LOS DOS PRIMEROS RESULTADOS, Y UTILIZANDO EL VALOR DE λ, SE LLEGA A

$$\frac{\left(x-1-3\cdot\frac{z}{6}\right)^2}{4}+\frac{\left(y-2-\frac{z}{6}\right)^2}{4}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{(2x-z-2)^2}{16}+\frac{(6y-z-12)^2}{144}=1$$

QUE ES LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO.

ESTA ECUACIÓN TAMBIÉN SE PUEDE OBTENER UTILIZANDO EL MÉTODO DE LAS GENERATRICES. ASÍ, SI SE CONSIDERA COMO DIRECTRIZ A LA TRAZA EN EL PLANO $z=0$ Y COMO GENERATRIZ A UNA FAMILIA DE RECTAS PARALELAS AL EJE DEL CILINDRO, SE TIENE QUE

$$D:\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4 & \cdots(a)\\ z=0 & \cdots(b)\end{cases} \qquad G:\begin{cases}x=\dfrac{a}{c}z+\alpha=\dfrac{3}{6}z+\alpha=\dfrac{1}{2}z+\alpha & \cdots(c)\\ y=\dfrac{b}{c}z+\beta=\dfrac{1}{6}z+\beta & \cdots(d)\end{cases}$$

SE SUSTITUYE (b) EN (c) Y SE TIENE QUE: $x=\alpha$. SE SUSTITUYE (b) EN (d) Y SE TIENE QUE: $y=\beta$ Y AL SUSTITUIR AMBOS RESULTADOS EN (a) SE LLEGA A: $(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=4 \quad \cdots$ ECUACIÓN DE CONDICIÓN

DE (c) SE OBTIENE QUE: $\alpha = x - \dfrac{z}{2}$ Y DE (d) QUE $\beta = y - \dfrac{z}{6}$. Y CON ESTOS RESULTADOS EN LA ECUACIÓN DE CONDICIÓN, SE LLEGA FINALMENTE A LA ECUACIÓN CARTESIANA DEL CILINDRO, ESTO ES, A:

$$\frac{(2x-z-2)^2}{16}+\frac{(6y-z-12)^2}{144}=1$$

PROBABILIDAD

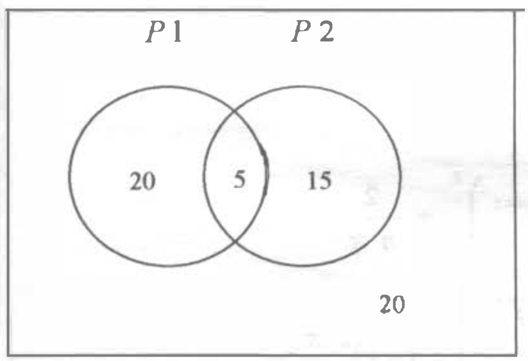
EN UN GRUPO DE ESTADÍSTICA DEL SEMESTRE 2002-1 DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM ESTÁN INSCRITOS 60 ALUMNOS. DE ÉSTOS, 25 PERTENECEN A UN PROGRAMA ACADÉMICO DENOMINADO $P1$; 20 A OTRO PROGRAMA DENOMINADO $P2$ Y CINCO PERTENECEN A AMBOS PROGRAMAS. SI SE SELECCIONA ALEATORIAMENTE UN ALUMNO DEL GRUPO MENCIONADO:

A) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ALUMNO SELECCIONADO PERTENEZCA AL MENOS A UNO DE LOS PROGRAMAS?
B) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ALUMNO SELECCIONADO PERTENEZCA EXACTAMENTE A UN PROGRAMA ACADÉMICO?
C) ¿CUÁL ES LA PROBABILIDAD DE QUE EL ALUMNO SELECCIONADO NO PERTENEZCA A NINGUNO DE LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS?

SOLUCIÓN. PRIMERO SE HACE UNA DEFINICIÓN DE EVENTOS COMO SIGUE:

$AP1$	ALUMNO QUE PERTENECE O ESTÁ EN UN PROGRAMA
$AP0$	ALUMNO QUE NO ESTÁ EN NINGUNO DE LOS PROGRAMAS
$A1$	ALUMNO QUE ESTÁ AL MENOS EN UNO DE LOS DOS PROGRAMAS ACADÉMICOS

AHORA SE REALIZA UN DIAGRAMA DE "VENN"



A) $$P(A1)=\frac{N(A1)}{N(S)}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$$

B) $$P(AP1)=\frac{N(AP1)}{N(S)}=\frac{35}{60}$$

C) $$P(AP0)=\frac{N(AP0)}{N(S)}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

DONDE:

$N(S)=60$	NÚMERO DE ALUMNOS DEL ESPACIO MUESTRAL
$N(A1)=40$	NÚMERO DE ALUMNOS QUE ESTÁN AL MENOS EN UN PROGRAMA (EN UNO O DOS DE LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS)
$N(AP1)=35$	NÚMERO DE ALUMNOS QUE ESTÁN EN UN PROGRAMA ACADÉMICO
$N(AP0)=20$	NÚMERO DE ALUMNOS QUE NO ESTÁN EN NINGUNO DE LOS PROGRAMAS ACADÉMICOS

QUÍMICA

EL EMPLEO DE NITRATOS COMO FERTILIZANTES EN AGRICULTURA SE HA CONVERTIDO EN UN FACTOR DE CONTAMINACIÓN PARA LAS AGUAS EN MUCHAS REGIONES. EL ANÁLISIS CUANTITATIVO DIRECTO DE LOS NITRATOS ES DIFÍCIL DE REALIZAR, POR LO QUE UN MÉTODO ACONSEJABLE PARA DETERMINARLOS, EN ANÁLISIS DE MUESTRAS DE AGUAS CONTAMINADAS, ES MEDIANTE SU REDUCCIÓN CON CINC Y LA POSTERIOR DETERMINACIÓN DEL AMINÍACO FORMADO. COMPLETE Y BALANCEE LA ECUACIÓN QUÍMICA DE LA CITADA REDUCCIÓN:

$$NO_3^- + Zn \rightarrow NH_3 + [Zn(OH)_4]^{2-}$$

SOLUCIÓN. LA REACCIÓN QUÍMICA SE LLEVA A CABO EN MEDIO BÁSICO POR LA FORMACIÓN DEL ÚLTIMO COMPUESTO. SI SE UTILIZA EL MÉTODO DEL IÓN – ELECTRÓN, LA ECUACIÓN QUÍMICA GLOBAL SE PUEDE DESCOMPONER EN DOS SEMIREACCIONES, QUE SON:

$$a)\ NO_3^- \rightarrow NH_3 \quad y \quad b)\ Zn \rightarrow [Zn(OH)_4]^{2-}$$

EL BALANCE DE LA PRIMERA SEMIREACCIÓN DA LUGAR A:

$$8e^- + 3H_2O + 3H_2O + NO_3^- + 3OH^- \rightarrow NH_3 + 6OH^- + 6OH^-$$

QUE SE SIMPLIFICA A:

$$NO_3^- + 6H_2O + 8e^- \rightarrow NH_3 + 9OH^- \quad \cdots \quad (1)$$

MIENTRAS QUE LA SEGUNDA SEMIREACCIÓN SE EXPRESA COMO:

$$Zn + 4OH^- \rightarrow [Zn(OH)_4]^{2-} + 2e^- \quad \cdots \quad (2)$$

ANTES DE SUMAR LAS ECUACIONES (1) y (2), SE DEBE VERIFICAR QUE EL NÚMERO DE ELECTRONES PERDIDOS Y GANADOS SEA EL MISMO. ESTO IMPLICA MULTIPLICAR LA ECUACIÓN (2) POR 4. ENTONCES SE TIENE QUE:

$$NO_3^- + 6\,H_2O + 8e^- \rightarrow NH_3 + 9\,OH^-$$
$$+ \quad 4\,Zn + 16\,OH^- \rightarrow 4\left[Zn\,(OH)_4\right]^{2-} + 8e^-$$

$$NO_3^- + 4\,Zn + 6\,H_2O + 7\,OH^- \rightarrow NH_3 + 4\left[Zn\,(OH)_4\right]^{2-}$$

ES ACONSEJABLE, POR ÚLTIMO, CORROBORAR QUE LA ECUACIÓN QUÍMICA SE ENCUENTRA BALANCEADA, TANTO EN ESPECIES QUÍMICAS, COMO EN CARGAS ELÉCTRICAS. LA ECUACIÓN QUÍMICA ANTERIOR, COMO SE OBSERVA, SATISFACE ESTOS REQUISITOS.

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SEA LA FUNCIÓN f CUYA SERIE DE FOURIER EN FORMA COMPLEJA ES $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi}\, i\, e^{i n \pi t}$, DETERMINAR:

$a)$ SU SERIE TRIGONOMÉTRICA Y $b)$ SU SERIE EN FORMA ARMÓNICA

SOLUCIÓN. DEL ARGUMENTO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL SE TIENE QUE $\omega_0 = \pi$, COMO $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, ENTONCES $T = 2$

$a)$ $\quad c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - i\,b_n) \quad \Rightarrow \quad 2\,c_n = a_n - i\,b_n$

ENTONCES $a_n - i\,b_n = \dfrac{2}{n\pi}(-1)^n\, i$, POR LO QUE $a_n = 0$; $b_n = -\dfrac{2}{n\pi}(-1)^n = \dfrac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$

ADEMÁS $c_0 = 0$, DE DONDE $a_0 = 0$

ENTONCES, LA FORMA TRIGONOMÉTRICA DE LA SERIE ES:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\, sen\,(n\,\pi\,t)$$

$b)$ $\quad c_0 = 0$; $c_n = \sqrt{a_n^{\,2} + b_n^{\,2}}$. ENTONCES $c_n = \sqrt{\left(\dfrac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\right)^2} = \dfrac{2}{n\pi}$

$$\delta_n = ang\ \tan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = ang\ \tan\left(-\frac{\dfrac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}}{0}\right) = (-1)^n\,\frac{\pi}{2}$$

POR LO QUE, LA SERIE, EN FORMA ARMÓNICA, QUEDA COMO:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\cos\left(n\,\pi\,t + (-1)^n\,\frac{\pi}{2}\right)$$

TUTORÍA

LA *COPADI* AGRADECE A LA DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES, Y EN PARTICULAR A LOS PROFESORES DE LA ASIGNATURA CULTURA Y COMUNICACIÓN POR EL VALIOSO APOYO AL PROGRAMA "TUTORÍA PARA TODOS", YA QUE A TRAVÉS DE ESTOS DOCENTES Y SU ASIGNATURA, SE PODRÁ DAR UN SEGUIMIENTO MAS EFICIENTE A LA TUTORÍA Y TAMBIÉN HABRÁ POSIBILIDAD DE EVALUAR ESTE NOBLE SERVICIO ACADÉMICO. ASÍ PUES, ALUMNOS Y TUTORES, A TRABAJAR POR EL BIEN DE USTEDES, DE LA FACULTAD, DE NUESTRA QUERIDA UNIVERSIDAD Y DE LA SOCIEDAD, QUIEN RECIBIRÁ FINALMENTE LOS BENEFICIOS DEL QUEHACER PROFESIONAL DE INGENIERAS E INGENIEROS MEJOR PREPARADOS, TANTO EN LA TÉCNICA COMO EN EL OFICIO DE SERES HUMANOS CAPACES DE REALIZARSE PLENAMENTE Y LLEVAR UNA VIDA Y UN TRABAJO DIGNOS.

CULTURA

LEER OBRAS MAESTRAS DE LA LITERATURA UNIVERSAL ES UN EJERCICIO DE VIDA QUE SE DEBE REALIZAR SIEMPRE. LEER NOS PERMITE RELACIONARNOS CON GRANDES AUTORES A QUIENES NI SIQUIERA CONOCEMOS Y VER CÓMO ENFRENTARON SITUACIONES DIVERSAS QUE SE NOS PODRÍAN PRESENTAR EN NUESTRAS VIDAS. LEER ES VIAJAR POR EL PENSAMIENTO Y REFLEXIÓN DE NUMEROSOS SERES HUMANOS Y COMPARTIR CON ELLOS LA MAGIA, EL MISTERIO Y LA BELLEZA DE LA VIDA Y DE MUCHAS DE SUS MANIFESTACIONES. LEER ES DARNOS LA OPORTUNIDAD DE REÍR Y LLORAR, DE SOÑAR E IMAGINAR, DE SENTIR Y PRESENTIR. LEER ES LA MEJOR COMPAÑÍA QUE SE PUEDA TENER, PORQUE LA LECTURA INVOLUCRA A SERES HUMANOS Y SENTIMIENTOS.

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA, HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ, MIGUEL EDUARDO GONZÁLEZ CÁRDENAS Y ROGELIO SOTO AYALA

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR

Esta obra se terminó de imprimir
en octubre de 2002
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 500 ejemplares
más sobrantes de reposición

908043

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = sen\, t \end{array} \quad ; \quad 0 \le t \le 2\pi \right\} \Rightarrow f(x,y) = g(t) = 4\cos t - 3sen\, t \quad ; \quad \frac{dg}{dt} = -4sen\, t - 3\cos t \quad ;$$

$$-4sen\, t - 3\cos t = 0 \Rightarrow \tan t = -\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} sen\, t = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos t = -\frac{4}{5} \\ sen\, t = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos t = \frac{4}{5} \end{cases}$$

LUEGO LOS PUNTOS CRÍTICOS SON: $\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ DE DONDE, LOS EXTREMOS ABSOLUTOS SON:

$f\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = -5 \quad \therefore$ MÍNIMO ABSOLUTO $\qquad f\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 5 \quad \therefore$ MÁXIMO ABSOLUTO

CÁLCULO I

SI SE ASUME QUE LAS SIGUIENTES FUNCIONES SON BIYECTIVAS, ES DECIR QUE SON INYECTIVAS (A DIFERENTES ELEMENTOS DEL DOMINIO LES CORRESPONDEN DIFERENTES ELEMENTOS DEL CODOMINIO) Y SUPRAYECTIVAS (TODOS LOS ELEMENTOS DEL CODOMINIO ESTÁN ASOCIADOS CON ELEMENTOS DEL DOMINIO), POR LO QUE ADMITEN FUNCIÓN INVERSA, ENCONTRAR LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE DICHA FUNCIÓN INVERSA Y EXPRESARLA EN FORMA EXPLÍCITA, ES DECIR, A LA VARIABLE DEPENDIENTE EN TÉRMINOS DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.

$$i)\ y = \frac{+\sqrt{4-x^2}}{2}; -2 \le x \le 0 \qquad ii)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad -4 \le x < 0 \\ senx & si \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad iii)\ y = \ln(3-x); x < 3$$

SOLUCIÓN

$$i)\ y = \frac{+\sqrt{4-x^2}}{2}; -2 \le x \le 0$$

$$x = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{4-y^2} = 2x \Rightarrow 4 - y^2 = 4x^2 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x^2 \Rightarrow y = -\sqrt{4-4x^2}\ ; 0 \le x \le 1$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{4-4x^2}; \quad 0 \le x \le 1$$

$$ii)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si \quad -4 \le x < 0 \\ sen\, x & si \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad ; \quad y = \frac{x}{2} \quad ; \quad x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x\ ; -2 \le x < 0$$

$$y = sen\, x \quad ; \quad x = sen\, y \Rightarrow y = angsen\, x\ ; 0 \le x \le 1 \quad \therefore \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & si \quad -2 \le x < 0 \\ angsen\, x & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$iii)\ y = \ln(3-x); x \in (-\infty, 3) \quad ; \quad x = \ln(3-y) \Rightarrow e^x = e^{\ln(3-y)} \Rightarrow e^x = 3 - y \quad ; \quad y = 3 - e^x \quad ; x \in \Re$$

$$\therefore \quad f^{-1}(x) = 3 - e^x\ ; x \in \Re$$

TUTORÍA

ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE CURRICULAR: BUSQUEN A SU TUTOR, APROVECHEN ESTE SERVICIO ACADÉMICO E INFÓRMENLE A SU PROFESOR DE CULTURA Y COMUNICACIÓN QUE YA ESTABLECIERON CONTACTO CON ÉL Y PLATÍQUENLE DE CÓMO VA LA INTERACCIÓN ENTRE AMBOS. A PROPÓSITO DE LA TUTORÍA, HAY UNAS PALABRAS DEL PREMIO NOBEL DE LITERAURA JOSÉ SARAMAGO QUE REZAN COMO SIGUE: **"EL JOVEN NO SABE LO QUE PUEDE Y EL VIEJO NO PUEDE LO QUE SABE. ESTE ASUNTO SE RESOLVERÍA SI LOS JÓVENES PUSIERAN LA VOLUNTAD Y LOS VIEJOS LA EXPERIENCIA, SIN ENTRAR EN ESA COMPETENCIA DE VER QUIÉN TIENE MÁS RAZÓN QUE OTRO"**. ¡APROVECHEN A SU TUTOR! ¡ÉL TIENE GANAS DE AYUDAR Y APOYAR!

SE AGRADECE LA COLABORACIÓN DE LOS PROFESORES RIGEL GÁMEZ LEAL Y LUIS HUMBERTO SORIANO SÁNCHEZ

¡AY UNAM, QUÉ EMOCIÓN VIVIRTE!

PRODUCCIÓN: ING. PABLO GARCÍA Y COLOMÉ. REVISIÓN: ING. ENRIQUE ARENAS SÁNCHEZ
COLABORACIÓN: LIC. ANA MARÍA VIEYRA ÁVILA Y LIC. MARÍA ELENA CANO SALAZAR