FACULTAD DE INGENIERIA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Ejercicios de Métodos Matemáticos

Dr. Enzo Levi Lattes
Dr. Gabriel Echavez Aldape
M. en I. Felipe I. Arreguín Cortés
Fis. Domitilo Pereyra Díaz

D-50

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

G-

I N D I C E

1. ANALISIS VECTORIAL

1.1 Problemas resueltos

1.1.1 Para los siguientes vectores, $\bar{a}=2i-2j+k$, $\bar{b}=i+8j-4k$ y $\bar{c}=12i-4j-3k$. Calcular:

a) Las longitudes de $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$

b) $\bar{a}.\bar{b}$

c) $\bar{a}\text{x}\bar{c}$

d) La proyección de $\bar{b}$ sobre $\bar{c}$

e) El ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$

f) $\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right]$

g) $\bar{a}\text{x}(\bar{b}\times\bar{c})$

h) El volúmen del paralelepípedo de arístas $\bar{a}+\bar{c}$, $\bar{a}-\bar{c}$ y $\bar{b}$

Solución:

a) $|\bar{a}|=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\bar{b}|=\sqrt{(1)^2+(8)^2+(-4)^2} = \sqrt{1+64+16} = 9$

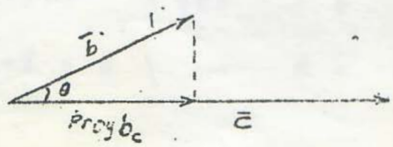
$|\bar{c}|=\sqrt{(12)^2+(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{144+16+9} = 13$

b) $\bar{a}.\bar{b} = (2i-2j+k).(i+8j-4k) = 2-16-4 = -18$

c) $\bar{a}\text{x}\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 12 & -4 & -3 \end{vmatrix} = i(6+4)-j(-6-12)+k(-8+24)=10i+18j+16k$

d) sabiendo que $\bar{b}.\bar{c} = |\bar{b}||\bar{c}|\cos\theta$, entonces la proyección de $\bar{b}$ sobre $\bar{c}$ esta dada por

$|\bar{b}|\cos\theta = \dfrac{\bar{b}.\bar{c}}{|\bar{c}|}$ (ver figura)



$$\bar{b}.\bar{c} = (i+8j-4k).(12i-4j-3k) = 12-32+12 = -8$$

Luego

$$|\bar{b}| \cos\theta = -8/13$$

e) dado que $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$, entonces

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}\right) = \frac{-18}{(3)(9)} = -\frac{18}{27} = -\frac{2}{3} \longrightarrow \theta = 131°49'$$

f) $\left[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\right] = \bar{a}.\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 8 & -4 \\ 12 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-2-16)-(-2)(-3+48)$

$+1(-4-96) = -90$

g) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$

Desarrollemos primero

$$\bar{b}\times\bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 8 & -4 \\ 12 & -4 & -3 \end{vmatrix} = i(-24-16)-j(-3+48)+k(-4-96) = -40i$$

$-45j -100k$

Luego

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ -40 & -45 & -100 \end{vmatrix} = i(200+45) -j(-200+40)+K(-90-8)$$

Por tanto $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = 245i+160j-170k$

h) $\bar{a}+\bar{c} = 14i-6j-2k$

$\bar{a}-\bar{c} = -10i+2j+4k$

el volúmen del paralelepípedo será

$$(\bar{a}+\bar{c})\cdot\left[(\bar{a}-\bar{c})\times\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -10 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 14(-8-32)-(-6)(40-4)-2(-8-2)$$

$-8'$ 216

entonces, $(\bar{a}+\bar{c})\cdot\left[(\bar{a}-\bar{c})\times\bar{b}\right] = 180.$

1.1.2 Calcular la matríz del tensor $\bar{a}x$

Solución:

$$\bar{a}\times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -ja_z - ka_y$$

en forma similar, se obtiene que:

$\bar{a}xj = a_xk - a_zi$ y $\bar{a}xk = a_yi - a_xj$

por lo tanto la matríz pedida es

$$\begin{bmatrix} 0 & a_z & -a_y \\ -a_z & 0 & a_x \\ a_y & -a_x & 0 \end{bmatrix}$$

1.1.3 Se sabe que r^{-1} es una función armónica. a) ¿Hay otros valores de n para los cuales r^n sea armónica?

Solución:

a) Para que una función sea armónica debe satisfacer la ecuación de Laplace, en este caso

$$\nabla^2(r^n) = \frac{\partial^2 r^n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial r^n}{\partial r} = n(n-1)r^{n-2} + \frac{2n}{r}r^{n-1} = 0$$

$$\cancel{n}(n-1)\cancel{r}^{n-2} + 2\cancel{n}\cancel{r}^{n-2} = 0$$

$$n-1+2 = 0 \longrightarrow n = -1$$

Por lo tanto, no existe otro valor distinto de -1 para el cual r^n sea armónica.

1.1.4 Si r es la distancia medida desde un punto fijo 0 y s una superficie cerrada que limita un volúmen V, comprobar que

$$\int_s r\,\frac{\partial r}{\partial n}\,ds = 3V$$

Solución:

$$\int_s r\,\frac{\partial r}{\partial n}\,ds = \int_s r(\operatorname{grad} r.\bar{n})\,ds = \int_s r\left(\frac{\overline{op}}{r}.\bar{n}\right)ds = \int_s \overline{op}.\bar{n}\,ds =$$

$$\int_v \operatorname{div}\overline{op}\,ds\,;\ \operatorname{div}\overline{op} = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right).(xi + yj + zk) = 3$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se tiene

$$\int_s r\,\frac{\partial r}{\partial n}\,ds = \int_v 3\,dv = 3V \qquad \text{L.c.d.c}$$

1.1.5 Hallar el mínimo de la función armónica $f = 2X^2 - y^2 - Z^2$ dentro de una esfera de radio 1 y centro en el origen, indicando cuanto vale y donde se encuentra. Solución:

En la superficie de la esfera $X^2 + y^2 + Z^2 = 1$, la función armónica es igual a $f = 3X^2 - 1$. Como $-1 \leq X \leq 1$, el mínimo de $3X^2$ es 0. Por lo tanto el mínimo de f es $f_{min} = -1$ y se encuentra en todos los puntos del círculo $y^2 + Z^2 = 1$.

1.1.6 Comprobar que la $\int_s (2xi + yj + 2xk)ds$ calculada sobre la esfera de radio 1 y centro en el origen vale 4π.

Solución:

$$\int_s (2x\bar{i} + y\bar{j} + 2xk).\bar{n}ds = \int_v div(2x\bar{i} + y\bar{j} + 2x\bar{k})dv$$

$$= \int_v \left(\frac{\partial}{\partial x}(2X) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(2X)\right)dv$$

$$= \int_v (2+1+0)\,dv$$

$$= 3V = 3\left(\frac{4}{3}\pi R^2\right) = 4\pi(1)^2$$

$$\int_s (2x\bar{i} + y\bar{j} + 2xk).\bar{n}ds = 4\pi \quad L.c.d.c.$$

1.2 Problemas propuestos

1.2.1 Determinar el ángulo entre las normales o la superficie $Xy = Z^2$ en los puntos $(1, 4, -2)$ y $(-3, -3, 3)$.

1.2.2 Expresar el rotacional en Coordenadas Cilíndricas.

1.2.3 Determinar el vector unitario $\bar{n}$ normal a la superficie $Z = X^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$

1.2.4 Comprobar que si $\bar{u}$ es un vector variable que mantiene una dirección constante, $rot\,\bar{u}$ es perpendicular a dicha dirección.

1.2.5 Demostrar que $rot\left[f(r)\bar{r}\right] = 0$

1.2.6 El operador ux es un tensor. Calcular su divergencia

1.2.7 Si $f = xy + yz$ y $g = 2X^2 - y^2 - Z^2$. Calcular la integral $\int_s (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) ds$ sobre una esfera con centro en el origen y radio unitario

1.2.8 Dada las esferas con centro en el origen y radio $R_1 = 2$, $R_2 = 4$. Calcular el cociente

$$\int_{s_2} X(y + 5Z) ds / \int_{s_1} X(y + 5Z) ds$$

1.2.9 Calcular la masa adicional de un cilíndro de radio R y ancho unitario que se mueve en dirección normal a su eje con velocidad u (tomese $\phi = -\frac{R^2}{r} u \cos\theta$).

1.2.10 Comprobar que el flujo caracterizado por la velocidad

$u = X^2 + 2y^2$, $v = -Xy$, $w = -X(Z + y)$

es incompresible. Si el fluido tiene viscosidad $\mu = 0.6 \times 10^{-3}\ kgf/m^2$ y si en el punto de coordenadas $X = 200m$, $y = 50m$, $Z = -100m$ se tiene que $\sigma_z = -.21\ kgf/m^2$, calcular los demas esfuerzos normales y cortantes en ese punto.

1.2.11 Calcular el Laplaciano de $1/r^2$ (sugerencia aplicar la fórmula del Laplaciano de un producto)

2. VARIABLE COMPLEJA

2.1 Problemas resueltos

2.1.1 Expresar en la forma $a+bi$ al siguiente número complejo

$$\frac{(-2+5i)(1+3i)}{2+3i} - \left(\frac{2}{13} - \frac{2}{13}i\right)$$

Solución:

Primero calculemos el numerador del primer término:

$$(-2+5i)(1+3i) = -2 + (-6i+5i) - 15 = -17 - i$$

Luego, multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador el primer término se transforma en:

$$\frac{-17-i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{-34+51i-2i-3}{4+9} = -\frac{37}{13} + \frac{49}{13}i$$

Finalmente, operando ambos términos se llega a:

$$\left(-\frac{37}{13} + \frac{49i}{13}\right) - \left(\frac{2}{13} - \frac{2}{13}i\right) = -\frac{39}{13} + \frac{52}{13}i$$

Por lo tanto

$$Z = -3 + 4i$$

2.1.2 Demostrar que $(2,i)$ y $(2,-i)$ son raices de la siguiente ecuación

$$Z^2 - (4,0)Z + (5,0) = (0,0)$$

Solución:

Para que sean raíces de la ecuación cuadrática, deben satisfacerla:

Sustituyendo $(2,i)$

$$(2+i)(2+i) - (4+0i)(2+i) + (5+0i) = (0,0)$$

$$4+2i+2i-1-8-4i+5 = 4i-9-4i+9 = (0,0) \quad \text{L.c.d.d.}$$

Sustituyendo $(2,-i)$

$(2-i)(2-i)-(4+0i)(2-i)+(5+0i)=(0,0)$

$4-2i-2i+1-8+4i+5=(0,0)$ L.c.d.d.

2.1.3 Demostrar que $(1+i)^{100}=-2^{50}$

Solución:

Sea $Z=1+i$, de donde se obtiene $r=2^{1/2}$ y $\theta=\frac{\pi}{4}$, de la fórmula de Moivre

$$Z^n = r^n\,(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Luego

$$Z^{100}=(\sqrt{2})^{100}\,(\cos 100\,\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,100\,\frac{\pi}{4})$$

$$Z^{100}=2^{50}\,(\cos 25\pi + i\,\text{sen}\,25\pi)$$

pero $\cos n\pi = -1$, si n es impar y $\text{sen}\,n\pi = 0$ si n es par entonces

$Z^{100}=(1+i)^{100}=-2^{50}$ L.c.d.d

2.1.4 Calcular las tres raíces cúbicas de la unidad y graficarlas

Solución:

Se sabe

$$Z^{1/n} = r^{1/n}\,(\cos\frac{\theta+2K\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{\theta+2k\pi}{n})$$

en nuestro caso

$Z=1+0i$, de donde $r=1$ y $\theta=0$

luego

$$Z^{1/3} = 1^{1/3}\,(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2k\pi}{3})$$

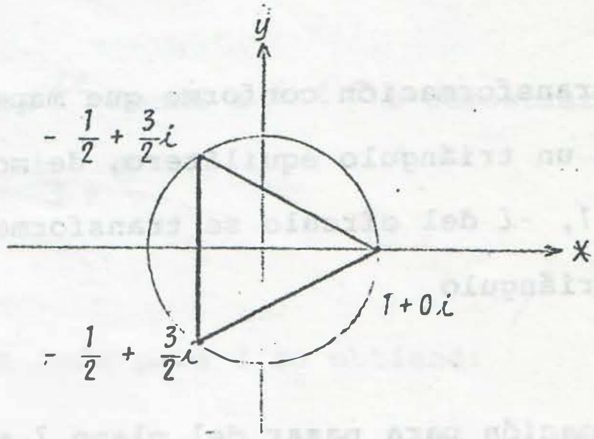
para obtener las tres raíces, hay que dar valores a k de $0 - 2$.

$k = 0 \quad Z_0 = 1 \times (1 + 0i) \quad ; \quad Z_0 = 1$

$k = 1 \quad Z_1 = 1 \times (\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}) \; ; \; Z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k = 2 \quad Z_2 = 1 \times (\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}) \; ; \; Z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

La gráfica se muestra en la figura siguiente



2.1.5 Encontrar la ecuación de la circunferencia de radio 4 con centro en $(-2, i)$

Solución:

La ecuación de la circunferencia en el plano complejo es:

$$|Z - Z_0| = 4$$

donde $Z = X + iy$ y $Z_0 = -2 + i$

Sustituyendo en la ecuación anterior y operando se obtiene

$$(X + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16 \qquad L.c.d.e.$$

2.1.6 Demostrar que en el campo complejo $\frac{d}{dZ}\cos Z = -\operatorname{sen} Z$

Solución:

$$\frac{d}{dZ}\cos Z = \frac{d}{dZ}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(i\,e^{iz} - i\,e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = i^2\left(\frac{e^{iz} - e^{-2i}}{2i}\right)$$

$$\frac{d}{dZ}\cos Z = -\operatorname{sen} Z \qquad \text{L.c.d.d.}$$

2.1.7 Hallar la transformación conforme que mapea un círculo unitario en un triángulo equilátero, de modo que los puntos i, -1, $-i$ del círculo se transformen en los vértices del triángulo

Solución:

La transformación para pasar del plano Z al plano W es:

$$w = \frac{Z - i}{Z + i}$$

de donde se obtiene que

$$Z = \frac{w + 1}{i(w - 1)}$$

Con la nueva transformación se pasa el plano W al plano Z, esto es:

$w = i \longrightarrow Z = -1$

$w = -1 \longrightarrow Z = 0$

$w = -i \longrightarrow Z = 1$

Ahora, de la transformación de Schwarz-Christoffel se tiene:

$$\delta = \int_0^z (Z+1)^{\frac{1}{3}-1} (Z+0)^{\frac{1}{3}-1} (Z-1)^{\frac{1}{3}-1} dZ \quad , (m = 1)$$

$$\delta = \int_0^z (Z+1)^{-2/3} Z^{-2/3} (Z-1)^{-2/3} dZ \qquad \text{ó}$$

$$\delta = \int_0^z \frac{dZ}{Z(Z-1)^{2/3}} \qquad \text{L.c.d.e.}$$

2.1.8 Dado $Z = Z_o + r e^{it}$ donde $a \leq t \leq b$ demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dZ}{Z - z_o} = \frac{b - a}{2\pi}$$

Solución:

De la condición dada para Z se obtiene:

$$Z - Z_o = r e^{it}$$

$$dZ = i r e^{it} dt$$

Sustituyendo en la ecuación dada, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dZ}{Z - Z_o} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt = \frac{i}{2\pi i} \int_a^b dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big[t \Big]_a^b$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{dZ}{Z - Z_o} = \frac{b-a}{2\pi} \qquad \text{L.c.d.d.}$$

2.1.9 Calcular la integral de $\frac{2}{Z^2 + 2Z}$ sobre una circunferencia con centro en el origen y radio 3.

Solución:

Usando fracciones parciales

$\frac{2}{Z^2+2Z} = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z+2}$, los polos son 0 y -2, estan dentro de la región dada y su integral es distinta de 0, entonces

$$\int \frac{2}{Z^2+2Z}\,dZ = \int \frac{dZ}{Z} - \int \frac{dZ}{Z+2}$$

Usando el teorema integral de Couchy se obtiene

$$\int \frac{dZ}{Z} = \int \frac{dZ}{Z-0} = \frac{2\pi i}{0!} f^{(0)}(0) = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

$$\int \frac{dZ}{Z+2} = \frac{2\pi i}{0!} f^{(0)}(2) = 2\pi i\ (1) = 2\pi i$$

Por lo tanto

$$\int \frac{2\,dZ}{Z^2+2Z} = 2\pi i - 2\pi i = 0 \qquad L.c.d.c$$

2.2 Problemas propuestos

2.2.1 Dado $Z = \frac{(1-i)^8}{(\sqrt{3}+i)^5}$, escribir a Z en forma polar

2.2.2 Calcular las raíces cuadradas de $Z = -3 + 4i$

2.2.3 Calcular las raíces de $Z = \left[(-1)^{1/3}\right]^2$

2.2.4 Encontrar la imagen de la banda $1 \leq R(z) \leq 2$ empleando la transformación $W = Z^2$

2.2.5 Calcular el valor de Z para el cual $sen\, Z = 2$

2.2.6 Por medio de la fórmula de Arctang Z comprobar que

Arctang $1 = \pi/4$

2.2.7 Calcular la integral de $\dfrac{5Z^3 + 3Z + 3}{(Z - i)^3}$ sobre una circunferencia con centro en el origen y radio 2.

2.2.8 Encontrar un mínimo en $|Z^3 - 2Z - 4|$ en la región circular con centro en el origen y radio 2. ¿Cuánto vale?

2.2.9 Hallar la transformación bilineal que lleva a los puntos $Z = i,\ 0,\ -i$ en $f = 0,\ 2i,\ 1$ respectivamente. ¿En qué se transforma el punto $Z = 1 + i$?

2.2.10 Comprobar que en el campo complejo son válidas las siguientes fórmulas

a) $\cos \dfrac{Z}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos Z}{2}}$

b) $\cos 2Z = \cos^2 Z - \operatorname{Sen}^2 Z$

c) $\ln Z_1 - \ln Z_2 = \ln (Z_1/Z_2)$

d) $\dfrac{d}{dZ} \operatorname{Sen} Z = \cos Z$.

2.2.11 Calcular la $\displaystyle\int_C \frac{3Z^2 + 7Z + 1}{(Z - 2)^2}$ siendo C el rectángulo de vértices $(0,1)$, $(3,1)$, $(3,-1)$, $(0,-1)$

3. DESARROLLOS EN SERIES

3.1 Problemas resueltos

3.1.1 Desarrollar $f(Z) = Sen\, Z$ en una serie de Taylor alrededor de $Z = \pi/4$

Solución:

Procedamos a calcular cada término del desarrollo en serie de Taylor:

$f(Z) = Sen\, Z$, $f'(Z) = Cos\, Z$, $f''(Z) = -Sen\, Z$, $f'''(Z) = -cos\, Z$

$f^{IV}(Z) = Sen\, Z, \ldots.$

$f(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $f'(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $f''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, $f'''(\pi/4)$

$= -\sqrt{2}/2$, $f^{IV}(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \ldots.$

Aplicando el teorema de Taylor se obtiene

$$f(Z) = \sqrt{2}/2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(Z - \pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2.2!}(Z - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2.3!}(Z - \frac{\pi}{4})^3 + \ldots$$

ó

$$f(Z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\{1 + (Z - \frac{\pi}{4}) - \frac{(Z - \frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{(Z - \pi/4)^3}{3!} + \ldots..\} \quad L.c.d.e.$$

3.1.2 Desarrollar $f(Z) = \dfrac{Z^2 - 1}{(Z+2)(Z+3)}$ en serie de Laurent, para $|Z| > 3$.

Solución:

Usando fracciones parciales se obtiene que

$$\frac{Z^2 - 1}{(Z+2)(Z+3)} = 1 + \frac{3}{Z+2} - \frac{8}{Z+3}$$

Ahora desarrollemos en serie los dos últimos términos de la expresión anterior

$$\frac{3}{Z+2} = \frac{3}{Z(1+2/Z)} = \frac{3}{Z}\left(1 - \frac{2}{Z} + \frac{4}{Z^2} - \frac{8}{Z^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$\frac{-8}{Z+3} = \frac{8}{Z(1+3/Z)} = -\frac{8}{Z}\left(1 - \frac{3}{Z} + \frac{9}{Z^2} - \frac{27}{Z^3} + \ldots\ldots\right)$$

Finalmente, la suma de los tres términos nos da el desarrollo en serie de Laurent:

$$f(Z) = 1 - \frac{5}{Z} + \frac{18}{Z^2} - \frac{60}{Z^3} + \frac{192}{Z^4} - \ldots\ldots \qquad \text{L.c.d.e.}$$

3.1.3 Usando el teorema de los residuos, obtener $\int_c \frac{\operatorname{Senh} Z}{Z4} dZ$, siendo c una circunferencia centrada en el origen y radio 2.

Solución:

$$\operatorname{Senh} Z = \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} + \ldots\ldots$$

$$f(Z) = \frac{\operatorname{Senh} Z}{Z^4} = \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{3!Z} + \frac{Z}{5!} + \ldots\ldots$$

dado que el polo vale o

$$\operatorname{Res} f(Z)_o = \lim_{Z\to o} (Z-0)\left\{\frac{1}{Z^3} + \frac{1}{3!Z} + \frac{Z}{5!} + \ldots\ldots\right\} = \frac{1}{3!}$$

por lo tanto $\operatorname{Res} f(Z)_o = \frac{1}{6}$. Ahora, aplicando el teorema de los residuos, se obtiene:

$$\int_c \frac{\operatorname{Senh} Z}{Z^4} dZ = 2\pi i\left\{\frac{1}{6}\right\} \qquad \text{ó}$$

$$\int_c \frac{\operatorname{Senh} Z}{Z^4} dZ = \frac{\pi i}{3} \qquad \text{L.c.d.o.}$$

3.1.4 Usando la forma integral de la función Gamma, demostrar que $\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z)$.

Solución:

De la definición de la función Gamma,

$$\Gamma(Z+1) = \int_0^{\infty} t^Z\ e^{-t}\ dt = \lim_{m\to\infty} \int_0^M t^Z\ e^{-t}\ dt$$

integrando por partes se tiene

$$\Gamma(Z+1) = \lim_{m\to\infty} \ (t^Z)(-e^{-t})\Big|_0^M - \int_0^M (Z\,t^{Z-1})(-e^{-t})dt$$

$$\Gamma(Z+1) = 0 + Z\int_0^{\infty} t^{Z-1}\ e^{-t}\ dt$$

$$\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z) \qquad \text{L.c.d.d}$$

3.1.5 Sabiendo que $\Gamma(1.25) = 0.9064$, calcular $\Gamma(0.75)$.

Solución:

Se sabe

$$\Gamma(Z)\Gamma(1-Z) = \frac{\pi}{Sen\pi Z}$$

luego

$$\Gamma(.25)\Gamma(.75) = \frac{\pi}{Sen(\frac{\pi}{4})}$$

$$\Gamma(.75) = \frac{\pi}{\Gamma(.25)Sen(\frac{\pi}{4})}$$

por otro lado

$$\Gamma(Z+1) = Z\Gamma(Z)$$

de aquí

$$\Gamma(.25+1) = .25\Gamma(.25)$$

$$\Gamma(.25) = \frac{\Gamma(.125)}{.25} = \frac{.9064}{.25}$$

$\Gamma(.25) = 3.6256$

Con este valor ya conocido, se puede determinar el valor de $\Gamma(.75)$

$$\Gamma(.75) = \frac{\pi}{(3.6256)\,Sen\,\frac{\pi}{4}}$$

por lo tanto

$\Gamma(.75) = 1.2254$ L.c.d.c.

3.1.6 Demostrar que $\int_{-\ell}^{\ell} Sen\,\frac{K\pi X}{\ell}\,dx = \int_{-\ell}^{\ell} Cos\,\frac{K\pi X}{\ell}\,dx = 0$ si $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Solución:

$$\int_{-\ell}^{\ell} Sen\,\frac{K\pi X}{\ell}\,dx = -\frac{1}{K\pi}\,Cos\,\frac{K\pi X}{\ell}\Big|_{-\ell}^{\ell} = -\frac{1}{K\pi}\,Cos\,K\pi + \frac{1}{K\pi}$$

$Cos(-K\pi) = 0$ L.c.d.d.

$$\int_{-\ell}^{\ell} Cos\,\frac{K\pi X}{\ell}\,dx = \frac{1}{K\pi}\,Sen\,\frac{K\pi X}{\ell}\Big|_{-\ell}^{\ell} = \frac{1}{K\pi}\,Sen\,K\pi - \frac{1}{K\pi}$$

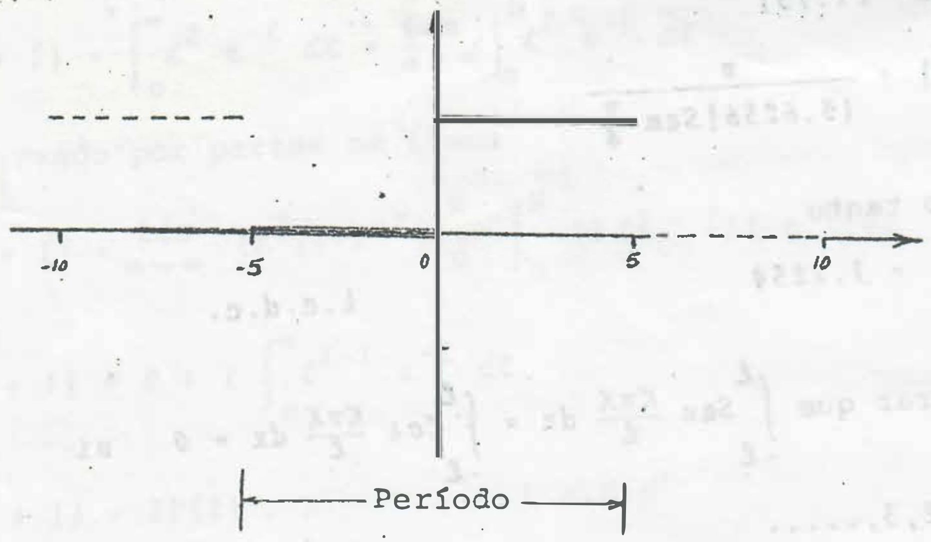
$Sen(-K\pi) = 0$ L.c.d.d

3.1.7 Desarrollar en serie de Fourier a la siguiente función

$$F(X) = \begin{cases} 0 & -5 < X < 0 \\ 3 & 0 < X < 5 \end{cases}$$

Solución:

Se procede a graficar la función,



de donde se puede ver que el período $=10$. Por otro lado, período $=2\ell$, entonces $\ell=5$. Escogiendo como intervalo de integración de -5 a 5, entonces los coeficientes se obtienen de la siguiente manera:

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(X)\ \mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\ \mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx +$$

$$\int_{0}^{5}(3)\mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\ \mathrm{Sen}\ \frac{n\pi x}{5}\right)$$

$$\Big|_{0}^{5} = 0,\ \text{si } n \neq 0$$

$$\text{si } n = 0,\ a_n = \underline{a_0} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\mathrm{Cos}\ \frac{0\pi x}{5}\ dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}dx = \frac{3}{5}\ X\Big|_{0}^{5} = \underline{3}$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}F(X)\mathrm{Sen}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0}(0)\mathrm{Sen}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx +$$

$$\frac{1}{5}\int_{0}^{5}(3)\mathrm{Sen}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\mathrm{Sen}\ \frac{n\pi x}{5}\ dx = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\ \mathrm{Cos}\ \frac{n\pi x}{5}\right)$$

$$\Big|_0^5 = -\frac{3}{n\pi}\cos n\pi + \frac{3}{n\pi}$$

$$bn = \frac{3}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

Se sabe que la serie de Fourier pedida es de la forma

$$F(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(an \cos\frac{n\pi x}{e} + bn \operatorname{Sen}\frac{n\pi x}{e}\right)$$

por lo tanto

$$F(X) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1 - \cos n\pi)}{n\pi}\operatorname{Sen}\frac{n\pi x}{5}$$

desarrollando, se tiene

$$F(X) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\operatorname{Sen}\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\operatorname{Sen}\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\operatorname{Sen}\frac{5\pi x}{5} + \ldots\ldots\right)$$

L.c.d.e.

3.2 Problemas propuestos

3.2.1 Desarrollar $f(Z) = \cos Z$ en serie de Taylor alrededor de $Z = \frac{\pi}{2}$

3.2.2 Sea $f(Z) = \ln(1 + Z)$, cuando se considera la rama que toma el valor cero cuando $Z = 0$. Desarrollar $f(Z)$ en serie de Taylor alrededor de $Z = 0$.

3.2.3 Desarrollar $f(Z) = e^{-Z}$ en serie de Taylor alrededor de $Z = 0$

3.2.4 Desarrollar $f(Z) = \frac{1}{(Z - 3)}$ en serie de Laurent, válida para, a) $|Z| < 3$ b) $|Z| > 3$

3.2.5 Desarrollar $f(Z) = \dfrac{Z}{(Z-1)(2-Z)}$ en serie de Laurent, válida para, a) $|Z| < 1$ b) $|Z| > 2$

3.2.6 Desarrollar $f(Z) = \dfrac{10}{(Z+2)(Z^2+1)}$ en serie de Laurent, para $1 < |Z| < 2$

3.2.7 Desarrollar $f(Z) = \dfrac{24}{Z^2(Z-1)(Z+2)}$ en serie de Laurent, para $0 < |Z| < 2$

3.2.8 Usando el teorema de los residuos, calcular

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{e^{zt}}{Z^2(Z^2+2Z+2)}\,dZ$ alrededor del círculo C con centro en el origen y radio 3.

3.2.9 Demostrar que $\displaystyle\int_C \dfrac{\cosh Z}{Z^3}\,dZ = \pi i$ si C es el cuadrado con vércites en $\pm 2 \pm 2i$

3.2.10 Calcular $\displaystyle\int_C \dfrac{e^z\,dZ}{\cosh Z}$ al rededor del círculo C centrado en el origen y radio 5.

3.2.11 Hallar el valor numérico de las siguientes integrales aplicando la función gamma

a) $\displaystyle\int_0^\infty y^3\, e^{-2y}\, dy$

b) $\displaystyle\int_0^\infty u^{3/2}\, e^{-3u}\, du$

c) $\displaystyle\int_0^\infty y^2\, e^{-2y^2}\, dy$

3.2.12 Demostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3.2.13 Desarrollar en serie de Fourier la función que se defi_ne enseguida

$$F(X) = \begin{cases} 0 & -2 < X < -1 \\ 1 & -1 < X < 0 \\ -1 & 0 < X < 1 \\ 0 & 1 < X < 2 \end{cases}$$

3.2.14 Desarrollar en serie de Fourier las siguientes funciones

a) $$F(X) = \begin{cases} 8 & 0 < X < 2 \\ -8 & 2 < X < 4 \end{cases}$$

b) $$F(X) = \begin{cases} -X & -4 \leq X \leq 0 \\ X & 0 \leq X \leq 4 \end{cases}$$

c) $$F(X) = \begin{cases} 2X & 0 \leq X < 3 \\ 0 & -3 < X < 0 \end{cases}$$

4. CALCULO FUNCIONAL

4.1 Problemas resueltos

4.1.1 Comprobar que las funciones $f_1(x) = X^{1/2}$ y $f_2(x) = X^{5/2}$ son ortogonales en el intervalo $(-1,1)$.

Solución:

Dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ortogonales en el intervalo (a,b) si

$$\int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx = 0$$

aplicando la definición anterior a nuestro caso se tie_ne,

$$\int_{-1}^{1} X^{1/2}\, X^{5/2}\, dx = \int_{-1}^{1} X^3\, dx = \frac{X^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

por lo tanto $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son ortogonales en $(-1, 1)$.

4.1.2 Resolver la siguiente ecuación integral de Volterra de $2^{\underline{a}}$ especie

$$\int_0^x \xi^2 y(\xi)\, d\xi + y(X) = \frac{1}{X^2}$$

Solución:

Sea $\alpha_0 = \frac{1}{X^2}$

$$\alpha_1 = -\int_0^X \xi^2 \left(\frac{1}{\xi^2}\right) d\xi = -\int_0^X d\xi = -X$$

$$\alpha_2 = -\int_0^X \xi^2 (-\xi)\, d\xi = \int_0^X \xi^3 d\xi \cdot \frac{1}{4} X^4$$

$$\alpha_3 = -\int_0^X \xi^2 \left(\frac{\xi^4}{4}\right) d\xi = -\int_0^X \frac{\xi^6}{4} = -\frac{1}{28} X^7$$

Por lo tanto

$$\dot{y}(X) = \frac{1}{X^2} - X + \frac{1}{4} X^4 - \frac{1}{28} X^7 + \ldots\ldots \qquad L.c.d.e.$$

4.1.3 Resolver la convolución $X * \operatorname{Sen} X$

Solución:

$$X * \operatorname{Sen}X = \int_0^X (X - \xi)\operatorname{Sen}\xi \, d\xi = X\int_0^X \operatorname{Sen}\xi \, d\xi - \int_0^X \xi \operatorname{Sen}\xi \, d\xi$$

$$= X(-\operatorname{Cos}\xi)\Big|_0^X - \{\xi(-\operatorname{Cos}\xi)\Big|_0^X + \int_0^X \operatorname{Cos}\xi d\xi\}$$

$$= -X\operatorname{Cos}X + X + X\operatorname{Cos}X - 0 - \operatorname{Sen}\xi\Big|_0^X$$

$$X * \operatorname{Sen}X = X - \operatorname{Sen}X \qquad L.c.d.e.$$

4.1.4 Hallar la transformada de Fourier de la siguiente función

$$F(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

Solución:

$$L\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{ixt} dt = \int_{-a}^{a} (1) e^{ixt} dt$$

$$= \frac{e^{ixt}}{ix}\Big|_{-a}^{a} = \frac{e^{ixa} - e^{ixa}}{ix}$$

$$\left.\begin{aligned} L\{F(t)\} &= 2\,\frac{\operatorname{Sen}xa}{x}, \ si\ x \neq 0 \\ L\ F(t) &= 2a \qquad\ , \ si\ x = 0 \end{aligned}\right\} \ L.c.d.e.$$

4.1.5 Demostrar que $L\{1\} = \frac{1}{s}$ si $s > 0$.

Solución:

De la definición de transformada de Laplace se tiene

$$\underline{L\{1\}} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s} \quad L.c.d.d.$$

4.1.6 Demostrar que $L\{Sen\, a\, t\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$ si $s > 0$

Solución:

$$L\{Sen\, a\, t\} = \int_0^\infty e^{-st} Sen\, at\, dt = \lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-st} Sen\, at\, dt$$

integrando por partes se tiene

$$L\{Sen\, at\} = \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{e^{-st}(-s\ Sen\, at - a\ Cos\, at)}{s^2 + a^2}\right\}_0^p$$

$$= \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2} - \frac{e^{-sp}(s\ Sen\, ap + a\cos ap)}{s^2 + a^2}\right\}$$

$$L\{Sen\, at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \text{ si } s > 0 \qquad L.c.d.d.$$

4.1.7 Hallar la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $F(t) = 3t + 4$

b) $F(t) = 2te^t$

Solución:

a) $f(s) = L\{3t\} + L\{4\} = 3L\{t\} + 4L\{1\} = 3(\frac{1}{S^2}) + 4(\frac{1}{S})$

$$f(s) = \frac{3 + 4s}{S^2} \qquad L.c.d.e.$$

b) Usando la siguiente fórmula

$$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!} = \frac{1}{(s-a)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots..$$

Se tiene que, $n = 2$ y $a = 1$, de donde

$$f(s) = 2\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

$$f(s) = \frac{2}{(s-1)^2} \qquad \text{L.c.d.e.}$$

4.1.8 Resolver la siguiente ecuación de Abel

$$\int_0^t \frac{y(u)}{\sqrt{t-u}}\, du = 1 + t + t^2$$

Solución:

Usando el producto integral o convolución de dos funcio nes la ecuación se puede expresar como

$$y(u) * t^{-\frac{1}{2}} = 1 + t + t^2$$

aplicando la tranformada de Laplace

$$L\{yt^{-1/2}\} = L\{1 + t + t^2\}$$

$$L\{y\}\, L\{t^{-1/2}\} = L\{1\} + L\{t\} + L\{t^2\}$$

$$\frac{y\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

$$y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{1}{s^{5/2}}\right\}$$

Antitransformando

$$y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{2\,t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\right\}$$

usando las propiedades de la función Gamma se tiene

$$y = \frac{1}{\pi}\left\{t^{-1/2} + 2t^{1/} + \frac{8}{3}t^{3/2}\right\}$$

$$y = \frac{t^{-1/2}}{3\pi}\,(3 + 6t + 8t^2) \qquad \text{L.c.d.e.}$$

4.1.9 Usando transformada de Laplace resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 5$$

Solución:

$$L\{y''\} - 3L\{y'\} + 2L\{y\} = 4L\{e^{2t}\}$$

Haciendo uso de las tablas de transformadas, se tiene

$$\{S^2y - Sy(0) - y'(0)\} - 3\{Sy - y(0)\} + 2y = \frac{4}{S-2}$$

Sustituyendo las condiciones de frontera, se tiene

$$\{S^2y + 3S - 5\} - 3\{Sy + 3\} + 2y = \frac{4}{S-2}$$

$$(S^2 - 3S + 2)y + 3S - 14 = \frac{4}{S-2}$$

$$y = \frac{4}{(S^2 - 3S + 2)(S-2)} + \frac{14 - 3S}{(S^2 - 3S + 2)}$$

$$y = \frac{-3S^2 + 20S - 24}{(S-1)(S-2)^2}$$

usando fracciones parciales se obtiene

$$y = \frac{-7}{S-1} + \frac{4}{S-2} + \frac{4}{(S-2)^2}$$

antitransformado

$$L\{y\} = L\{\frac{-7}{S-1} + \frac{4}{S-2} + \frac{4}{(S-2)^2}\}$$

$$y = -7L\{\frac{1}{S-1}\} + 4L\{\frac{1}{S-2}\} + 4L\{\frac{1}{(S-2)^2}\}$$

$$y = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t} \qquad \text{L.c.d.e.}$$

4.1.10 Usando transformada de Laplace resuelva la siguiente ecuación diferencial ordinaria con coeficientes variables

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \qquad y(0+) = 1,\ y(\pi) = 0,\ y'(0+) = c$$

Solución:

Tomando transformada de Laplace a cada término

$$-\frac{d}{ds}\left(S^2 y - Sy(0+) - y'(0+)\right) + 2\{Sy - y(0+)\} - \frac{d}{ds}y = 0$$

$$-\frac{d}{ds}\left(S^2 y - S(1) - C\right) + 2(Sy - 1) - \frac{d}{ds}y = 0$$

$$-S^2 y' - \cancel{2Sy} + 1 + \cancel{2Sy} - 2 - y' = 0$$

factorizando

$$-(S^2 + 1)y' + 1 = 0$$

$$y' = \frac{1}{(S^2 + 1)}$$

$$dy = \frac{ds}{S^2 + 1}$$

integrando

$$y = -\tan^{-1}(S) + A$$

Como $y \to 0$ cuando $S \to \infty$, entonces $A = \frac{\pi}{2}$

Luego

$$y = -\tan^{-1}(S) + \frac{\pi}{2}$$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{S}\right)$$

antitransformando, se tiene

$$y = \frac{\operatorname{Sen} t}{t}$$

veremos si satisface la condición $y(\pi) = 0$

$$y(\pi) = \frac{Sen\ \pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Por lo tanto

$y = \frac{Sen\ t}{t}$ es la solución correcta

4.1.11 Usando transformada de Laplace resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X' - 2X + 3Y = 0$$

$$Y' \ Y + 2X = 0$$

Considerando las siguientes condiciones iniciales

$$X(0) = 8 \quad Y(0) = 3$$

Solución:

Tomando transformada de Laplace o cada término del sistema de ecuaciones se tiene

$$Sx - 8 - 2x + 3y = 0$$

$$Sy - 3 - y + 2x = 0$$

ó

$$(1) \quad (S - 2)x + 3y = 8$$

$$(2) \quad 2x + (S - 1)y = 3$$

Resolviendo los $ecs(1)$ y (2) simultáneamente se obtiene

$$x = \frac{5}{S + 1} + \frac{3}{S - 4}$$

$$y = \frac{5}{S + 1} - \frac{2}{S - 4}$$

antitransformando se obtiene

$$\left.\begin{aligned} X &= L^{-1}\{x\} = 5e^{-t} + 3e^{4t} \\ Y &= L^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t} \end{aligned}\right\} \qquad L.c.d.e.$$

4.1.12 Usando transformada de Laplace, resuelva la siguiente ecuación diferencial parcial

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$, $U(X,0) = 3\, Sen\, 2\pi X$, $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = 0, 0<X<1$, $t>0$

considere las constantes C_1 y C_2 de la solución de la ecuación transformada, iguales a cero

Solución:

Tomando transformada de Laplace a cada término de la ecuación diferencial, se tiene

$$S\,u - U(X,0) = \frac{d^2 u}{dX^2}$$

$$\frac{d^2 u}{dX^2} - S\,u = U(X,0)$$

aplicando las condiciones iniciales se tiene

$$\frac{d^2 u}{dX^2} - S\,u = 3\, Sen\,(2\pi X)$$

esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria y cuya solución es

$$u = C_1\, e^{\sqrt{s}\, X} + C_2\, e^{\sqrt{s}\, X} + \frac{3}{S+4\pi^2}\, Sen\, 2\pi X$$

pero, considerando $C_1 = C_2 = 0$, se tiene

$$u = \frac{3}{S+4\pi^2}\, Sen\, 2\pi X$$

Antitransformando, se obtiene

$$U(x,t) = 3e^{-4\pi^2 t} \operatorname{Sen} 2\pi x \qquad \text{L.c.d.e.}$$

4.2 Problemas propuestos

4.2.1 Comprobar que las funciones $f_1 = x$ y $f_2 = x^2$ son ortogonales en el $(-1,1)$

4.2.2 Considere las siguientes funciones

$$f_1(x) = x \quad , \qquad f_2(x) = 3X^2 - 1 \quad , \qquad f_3(x) = 5X^3 - 3X$$

determine si constituyen un sistema ortogonal en el intervalo $(-1,1)$

4.2.3 Demostrar que $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sqrt{2}\, \operatorname{Cos} 2\pi n x$ y $f_3(x) = \sqrt{2}\, \operatorname{Sen} 2n\pi x$ donde $n = 1, 2, \ldots\ldots$, son una base ortogonal en el intervalo $(0,1)$

4.2.4 Determinar los factores por los que hay que multiplicar a las siguientes funciones X, X^2, X^3 para que el sistema sea normal en el intervalo $(-1,1)$. Escriba el sistema ortonormal que así se obtiene.

4.2.5 Resolver la siguiente ecuación integral

$$\int_0^x \frac{x}{\xi}\, y(\xi)\, d\xi + y(x) = X^2$$

4.2.6 Resolver la siguiente ecuación integral

$$Y(t) = t + 2\int_0^t \mathrm{Cos}(t-u)\,Y(u)\,du$$

4.2.7 Hallar la transformada de Fourier de la siguiente función

$$F(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

4.2.8 Hallar la transformada de Laplace de las funciones siguientes

a) $F(t) = t^2 + at + b$

b) $F(t) = e^{at+b}$

c) $F(t) = \mathrm{Sen}(2n\pi t/T)$

4.2.9 Resolver la siguiente ecuación integral

$$\int_0^t \frac{Y(u)\,du}{\sqrt{t - u}} = \sqrt{t}$$

4.2.10 Resolver la siguiente ecuación integral

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/3}}\,du = t(i + t)$$

4.2.11 Usando transformada de Laplace resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

a) $y''(t) + 4y(t) = 9t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 7$

b) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 125t^2,\ y(0) = y'(0) = 0$

c) $y'' + ty' - y = 0,\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

d) $ty'' + (1 - 2t)y' - 2y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2$

e) $ty'' + (t - 1)y' - y = 0,\quad y(0) = 5,\quad y(\infty) = 0$

4.2.12 Usando transformada de Laplace resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

a) $\begin{cases} y' + 2z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \end{cases}$, si $y(0) = 3,\ y'(0) = -2,\ z(0) = 0$

b) $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = \operatorname{Sen} t \\ y'' + 2z' + y = 0 \end{cases}$, si $y(0) = y'(0) = z(0) = 0$

4.2.13 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales parciales

a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial X^2}$, $u(0,t) = 0,\ u(5,t) = 0,$

$u(X,0) = 10 \operatorname{Sen} 4\pi X$

b) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial X^2}$, $y(0,t) = 0,\ y(2,t) = 0,\ y(X,0)$

$= 20 \operatorname{Sen} 2\pi X - 10 \operatorname{Sen} 5\pi X$

5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

5.1 Problemas resueltos

5.1.1 Integrar la ecuación $y'' - xy' - y = x^2$ para $x = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, transformandola en una ecuación de Volterra de segunda especie. Expresar la integral como un desarrollo en serie de potencias.

Solución:

$$y'' - xy' - y = x^2$$

$$y'' = xy' + y + x^2$$

de donde

$$p(x) = x, \quad q(x) = 1 \quad y \quad r(x) = x^2$$

haciendo $y'' = Z(x)$ se obtiene la ecuación de Volterra,

esto es $Z(x) = \int_0^x \Big[P(x) + (x - \xi)q(x) \Big] Z(\xi)d\xi + r(x)$

$$Z(x) = \int_0^x (2x - \xi)Z(\xi)d\xi + x^2$$ (ecuación de Volterra de 2a. especie)

integrando

$$y'' = Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)$$

donde

$\alpha_0(x) = r(x)$, $\alpha_1(x) = -\int_0^x K(x,\xi)\alpha_0(\xi)d\xi$, $\alpha_2(x)$ $= -\int_0^x K(x,\xi)\alpha_1(\xi)d\xi$, etc

luego

$$\alpha_0(x) = x^2$$

$$\alpha_1(x) = -\int_0^x (2x - \xi)\xi^2 d\xi = -\left[2x\,\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^4}{4}\right]_0^x = -\frac{5}{12}\,x^4$$

$$\alpha_2(x) = \frac{5}{12}\int_0^x (2x - \xi)\,\xi^4 d\xi = \frac{5}{12}\left[2x\,\frac{\xi^5}{5} - \frac{\xi^6}{6}\right]_0^x = \frac{7}{72}\,x^6$$

de donde

$$y'' = x^2 - \frac{5}{12}\,x^4 + \frac{7}{72}\,x^6 - \ldots..$$

$$y' = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^7}{72} - \ldots..$$

$$y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{72} + \frac{x^8}{576} - \ldots.. \qquad \text{L.c.d.e.}$$

5.1.2. Dada la ecuación $x^2y'' + xy' + (x^2 - 9)y = 0$ transformarla en autoadjunta

Solución:

Para convertir la ecuación anterior en autoadjunta se necesita multiplicarla por $H(x) = \frac{1}{A(x)}\,exp\int\frac{B(x)}{A(x)}\,dx$.

En este caso

$A(x) = x^2$ y $B(x) = x$, sustituyendo se tiene

$$H(x) = \frac{1}{x^2}\,exp\int\frac{x}{x^2}\,dx = \frac{1}{x^2}\,exp\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{x^2}\,e^{\ln x}$$

$$H(x) = \frac{1}{x}$$

Finalmente la ecuación autoadjunta es

$$x\,y'' + y' + \left(x - \frac{9}{x}\right)y = 0 \qquad \text{L.c.d.e.}$$

5.1.3. Dada la ecuación $y'' + (x - 1)^3 y = 0$, decir:

a) Si tiene características oscilantes en el intervalo $(0, 1)$

b) Si una característica posee un cero en $x = 2$, cuantos más puede tener en $(2, 6)$

Solución:

a) En $(0, 1)$ no tiene características oscilantes porque $(x - 1)^3 \leq 0$

b) En $(2, 6)$ se tiene $1 \leq (x - 1)^3 \leq 125$

por otro lado la distancia mínima entre ceros será

$$\frac{\pi}{\sqrt{125}} \leq \delta \leq \pi \qquad \text{ó} \qquad 0.281 \leq \delta \leq 3.1416$$

de donde $\delta = 2.86$

luego

$$\frac{4}{2.86} = 1.40 \qquad \ldots\ldots, \qquad \frac{4}{.281} = 14.23$$

puede tener entre 1 y 14 ceros más.

5.1.4 Calcular el valor aproximado de la función de Bessel del índice 2 $\{J_2(x)\}$ en $x = 2$ (usar los 3 primeros términos).

Solución:

$$Jn\ (x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{2!\,\Gamma(n+3)} - \ldots\ldots\right]$$

luego

$$J_2(2) \simeq \left(\frac{1}{2}(2)\right)^2 \left[\frac{1}{\Gamma(2+1)} - \frac{\left(\frac{2}{2}\right)^2}{1!\,\Gamma(2+2)} + \frac{\left(\frac{2}{2}\right)^4}{2!\,\Gamma(2+3)}\right]$$

$$J_2(2) \cong (1)\left[\frac{1}{\Gamma(3)} - \frac{1}{\Gamma(4)} + \frac{1}{2\Gamma(5)}\right]$$

$$J_2(2) \cong \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{2.4!}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$$

$J_2(2) \cong 0.354$ L.c.d.e.

5.1.5 Hallar los eigenvalores y las correspondientes eigenfunciones de $y'' - 2Xy' + \lambda y = 0$, con las condiciones de que éstas son polinomios del tipo

$y = 1 + C_1X + C_2X^2 + \ldots + C_nX^n$

Solución:

Si $y = 1 + C_1X + C_2X^2 + \ldots\ldots + C_nX^n$

$y' = C_1 + 2C_2X + 3C_3X^2 + \ldots\ldots\ldots$

$y'' = 2C_2 + 6C_3X + 12C_4X^2 + \ldots\ldots.$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene:

$$2C_2 + \lambda + \{(\lambda - 2)C_1 + 6C_3\}X + \{(\lambda - 4)C_2 + 12C_4\}X^2 + \ldots = 0$$

o sea

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - 2k)C_k + (k+1)(k+2)C_{k+2} = 0$$

de donde

$$C_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+1)(k+2)} C_k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

tomando en cuenta que $C_0 = 1$ y $C_1 = 0$, los eigenvalores para $\lambda = 2n$ (n es entero) son:

$K = 0 \qquad C_2 = -\frac{2n}{2}(1) = -n$

$K = 1 \qquad C_3 = 2\,\frac{1-n}{(2)(3)}(0) = 0$

$K = 2 \qquad C_4 = 2\,\frac{2-n}{3.4}\,(-n) = n\left(\frac{n-2}{6}\right)$

$K = 3 \qquad C_5 = 2\,\frac{3-n}{4.5}\,(0) = 0$

$K = 4 \qquad C_6 = 2\,\frac{4-n}{5.6}\left(\frac{n(n-2)}{6}\right) = \frac{n(n-2)(n-4)}{90}$

Finalmente las eigenfunciones son

$$y = 1 - nX^2 + \frac{n(n-2)}{6}X^4 + \frac{n(n-2)(n-4)}{90}X^6 + \dots \qquad \text{L.c.d.e.}$$

5.1.6 Calcular el eigenvalor de la ecuación siguiente

$$\phi(X) = \lambda \operatorname{Sen} X \int_0^{2\pi} \operatorname{Sen}\xi\, \phi(\xi)\, d\xi$$

que tiene un núcleo de Goursat.

Solución:

$\phi(X) = \lambda b \operatorname{Sen} X$

con

$$b = \int_0^{2\pi} \operatorname{Sen}\xi\,\phi(\xi)\,d\xi = \int_0^{2\pi} \operatorname{Sen}\xi\,(\lambda b \operatorname{Sen}\xi)\,d\xi$$

$$b = \lambda b \int_0^{2\pi} \operatorname{Sen}^2\xi\, d\xi = \frac{1}{2}\lambda b\Big[\xi - \operatorname{Sen}\xi \operatorname{Cos}\xi\Big]_0^{2\pi}$$

$$b = \frac{1}{2}\lambda b(2\pi - 0 - 0 + 0) = \pi\lambda b$$

luego

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \qquad \text{L.c.d.e.}$$

5.2 Problemas propuestos

5.2.1 a) Integrar la ecuación $y'' - 2Xy' - y = X$ para $X = 0$, $y = 0$, $y' = 0$, transformandola en una ecuación de Volterra de 2a. especie

b) Expresar la integral en un desarrollo en serie de potencias

5.2.2 Transformar la ecuación $X y'' + (1 - X)y' + y = 0$ en autoadjunta

5.2.3 Dada la ecuación $y'' + \frac{y}{X - 2} = 0$, decir:

a) Si tiene características oscilantes en el intervalo $(0, 1)$

b) Si una característica tiene un cero en $X = 3$, cuantos puede tener en $(3, 11)$ como máximo y como mínimo

5.2.4 Calcular el valor aproximado de la función de Bessel de índice 3 $J_3(X)$ en $X = 1$ (use solo los 3 primeros términos)

5.2.5 Hallar los eigenvalores y las correspondientes eigenfunciones de $y'' - X y' + \lambda y = 0$, con las condiciones de que estas son polinomios del tipo $y = 1 + C_1 X + C_2 X^2 + \ldots$ $\ldots + C_n X^n$

5.2.6 Calcular el eigenvalor de la ecuación siguiente

$$\phi(X) = 2\lambda \cos X \int_0^{2\pi} \cos\xi\, \phi(\xi)\, d\xi$$

5.2.7 Comprobar que $y = \frac{1}{6}(-X^3 + 9X^2 - 18X + 6)$ es una eigenfunción de la ecuación de Laguerre, dada por la siguiente expresión

$$X y'' + (1 - X) y' + 3 y = 0$$

5.2.8 Comprobar que el polinomio de Hermite de grado 4 esta dado por la siguiente expresión

$$H_4 = 16X^4 - 48X^2 + 12$$

5.2.9 Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en: hiperbólicas, parabólicas o elípticas.

a) $2 \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} - \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 3 \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

c) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial y} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

d) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} - 4 \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0$

e) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial y} + \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0$

6. GEOMETRIA DIFERENCIAL

6.1 Problemas Resueltos

6.1.1 Encontrar la ecuación de la tangente a la curva $X = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ en el punto $t = 1$

Solución:

Por definición la línea tangente esta dada por

$$y = X(t) + KX'(t), -\infty < k < \infty \tag{5.1}$$

luego, en este caso

$$y = X(1) + KX'(1) \tag{5.2}$$

$$X(1) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{K}$$

$$X'(1) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}$$

Sustituyendo en (5.2) se tiene

$$y = (1 + K)\hat{i} + (1 + 2K)\hat{j} + (1 + 3K)\hat{K}, \ -\infty < K < \infty \quad \text{l.c.d.e.}$$

6.1.2 Encontrar la ecuación del plano osculador a la hélice, dado por $X = \cos t\,\hat{i} + \operatorname{Sen} t\,\hat{j} + t\hat{K}$, en el punto $t = \frac{\pi}{2}$

Solución:

Por definición el plano osculador esta dado por la expresión:

$$(y - X)X'\ X'' = 0, \tag{5.3}$$

para este caso, se tiene

$$(y - X(\tfrac{\pi}{2}))X'(\pi/2)\,X''(\pi/2) = 0 \tag{5.4}$$

pero

$$X(\tfrac{\pi}{2}) = \hat{J} + \tfrac{\pi}{2}\hat{K}$$

$$X'(\tfrac{\pi}{2}) = -\hat{i} + \hat{K}$$

$$X''(\tfrac{\pi}{2}) = -\hat{J}$$

Sustituyendo en (5.4) se obtiene

$$(y - \hat{J} - \tfrac{\pi}{2}\hat{K})(-\hat{i} + \hat{K})(-\hat{J}) = 0$$

Recordando las propiedades del triple producto escalar se obtiene

$$y_1 + y_3 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{L.c.d.e.}$$

6.1.3 Hallar la curvatura a lo largo de la curva

$$X = (3t - t^3)\hat{i} + 3t^2\hat{J} + (3t + t^3)\hat{K} \tag{5.5}$$

Solución:

La curvatura esta dada porla siguiente expresión

$$|K| = \frac{|X' \times X''|}{|X'|^3} \tag{5.6}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, se tiene

$$|K| = \frac{|[(3-3t^2)\hat{i}+6t\hat{J}+(3+3t^2)\hat{K}]\times[(-6t)\hat{i}+6\hat{J}+6t\hat{K}]|}{|(3-3t^2)\hat{i}+6t\hat{J}+(3+3t^2)\hat{K}|^3}$$

$$|K| = \frac{18|(t^2-1)\hat{i}-2t\hat{J}+(1+t^2)\hat{K}|}{27|(1-t^2)\hat{i}+2t\hat{J}+(1+t^2)\hat{K}|^3}$$

finalmente, se obtiene

$$K = \frac{1}{3(1+t^2)^2} \qquad \text{L.c.d.e.}$$

6.1.4 Hallar la torsión a lo largo de la curva

$$X = (3t-t^3)\hat{i}+3t^2\hat{j}+(3t+t^3)\hat{k}$$

Solución:

La torsión se obtiene empleando la siguiente fórmula

$$T = \frac{X'X''X'''}{|X'\times X''|^2} \qquad (5.7)$$

La expresión (5.7) tambien se puede expresar como

$$T = \frac{(X'\times X'').X'''}{|X'\times X''|^2} \qquad (5.8)$$

Sustituyendo en la ec. anterior y haciendo uso del problema (5.1.3) se tiene

$$T = \frac{18\left[(t^2-1)\hat{i}-2t\hat{j}+(1+t^2)\hat{k}\right].6\left[-\hat{i}+\hat{k}\right]}{(18)^2|(t^2-1)\hat{i}-2t\hat{j}+(1+t^2)\hat{k}|^2}$$

$$T = \frac{6(-t^2+1-0+1+t^2)}{18|(t^2-1)\hat{i}-2t\hat{j}+(1+t^2)\hat{k}|^2}$$

$$T = \frac{6\times 2}{18|(t^2-1)\hat{i}-2t\hat{j}(1+t^2)\hat{k}|^2}$$

$$T = \frac{6\times 2}{18\times 2(t^2+1)^2}$$

$$T = \frac{1}{3(t^2+1)^2} \qquad l.c.d.e.$$

6.1.5 Encontrar la ecuación del plano normal a la curva

$X = t\hat{i}+t^2\hat{j}+t^3\hat{k}$, en el punto $t=1$

Solución:

La ecuación del plano normal esta dada por la siguiente expresión

$$(y-X)\cdot X' = 0 \qquad (5.9)$$

Sustituyendo en la ec (5.9) se tiene

$$(y - X(1))\cdot X'(1) = 0$$

pero:

$$X(1) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$X'(1) = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

Sustituyendo estos valores en la ec. anterior se tiene

$$\{y-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = 0$$

ó

$$y_1\hat{i}+y_2\hat{j}+y_3\hat{k}) - (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) \cdot (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = 0$$

$$(y_1-1)\hat{i} +(y_2-1)\hat{j} +(y_3-1)\hat{k} \cdot (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = 0$$

desarrollando el producto punto se obtiene

$$y_1-1+2(y_2-1)+3(y_3-1) = 0$$

$$y_1-1+2y_2-2+3y_3-3 = 0$$

finalmente la ecuación del plano normal es

$$y_1+y_2+y_3 = 6 \qquad L.q.d.e.$$

6.1.6 Encontrar la envolvente de la familia de parábolas representadas por la siguiente expresión

$$(X-2C)^2 + y^2 - C^2 = 0 \qquad (5.10)$$

Solución:

Se procede a derivar la ec (5.10) con respecto al parámetro C,

$$2X + 8C - 2C = 0$$

$$2X + 6C = 0$$

de donde:

$$C = -\frac{X}{3}$$

Sustituyendo el valor de C en la ec (5.10) se obtiene la ecuación de la envolvente, resultando ser el eje de las $X(y = 0)$.

6.1.7 Encontrar la envolvente de la familia de círculos de radio unitario, cuyos centros se encuentran sobre el eje X; representados por la siguiente ecuación:

$$(X - C)^2 + y^2 = 1 \qquad (5.11)$$

Solución:

Se procede a derivar la ec (5.11) con respecto a C, obteniendose

$$2X - 2C = 0$$

de donde

$$C = X$$

Sustituyendo el valor de C en la ec (5.11) se obtiene

$$y^2 = 1$$

ó

$$y = \pm 1$$

Lo cual indica que la envolvente son las rectas

$y = 1$ y $y = -1$

6.1.8 Obtener la envolvente de la familia de esferas representadas por la siguientes ecuación

$$X^2 + y^2 + (Z - C)^2 - 1 = 0 \qquad (5.12)$$

Solución:

Derivando la ec (5.12) con respecto al parámetro C se obtiene

$$-2(Z - C) = 0$$

de donde

$$C = Z$$

Sustituyendo el valor de C en la ec (5.12) se obtiene la envolvente

$$X^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad L.c.d.e.$$

que es la ecuación de un cilindro circular recto con radio unitario y cuyo eje es el eje Z.

6.2 Problemas Propuestos

6.2.1 Encontrar la ecuación de la tangente a la curva

$$X = (1 + t)\hat{i} - t^2\hat{j} + (1 + t^3)\hat{k}$$

en el punto $t = 1$.

6.2.2 Demostrar que una curva es una línea recta si todas sus tangentes son paralelas

6.2.3 Para la hélice $X = \cos t$, $y = \operatorname{Sen} t$, $Z = t$, hallar la ecuación del plano osculador en el punto (1,0,0)

6.2.4 Hallar la curvatura a lo largo de la curva

$X = a(\cos t)\hat{i} + a(\operatorname{Sen} t)\hat{J} + b\,t\,\hat{K},\ a > 0,\ b\,t\,0$

6.2.5 Hallar la curvatura a lo largo de la curva

$X = (t - \operatorname{Sen} t)\hat{i} + (1 - \cos t)\hat{J} + t\hat{K}$

6.2.6 Hallar la torsión a lo largo de la curva

$X = (t - \operatorname{Sen} t)\hat{i} + (1 - \cos t)\hat{J} + t\hat{K}$

6.2.7 Encontrar la ecuación del plano normal a la curva

$X = (1 + t)\hat{i} - t^2\hat{J} + (1 + t^3)\hat{K}$

en el punto $t = 1$

6.2.8 Para la hélice $X = \cos t$, $y = \operatorname{Sen} t$, $Z = t$, encontrar la ecuación del plano normal en el punto (1,0,0)

6.2.9 Encontrar la envolvente de la familia de circulos dados por la siguiente ecuación $(X - 2C)^2 + y^2 - C^2 = 0$

6.2.10 Encontrar la envolvente de la familia de elipses dadas por la siguiente ecuación

$$\frac{X^2}{C^2} + \frac{y^2}{(1-C)^2} = 1$$

6.2.11 Encontrar la envolvente de la familia de esferas con radio unitario y centro en el plano X, y representadas por la siguiente ecuación

$$(X - C_1)^2 + (y - C_2)^2 + Z^2 - 1 = 0$$

SOLUCION DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO 1

1.2.1 $\theta = 157°36'30''$

1.2.2 $rot(x,\ r,\ \alpha) = \left(\frac{\partial U_\alpha}{\partial r} - \frac{\partial U_r}{\partial \alpha}\right)\bar{e}_x + \left(\frac{\partial U_x}{\partial \alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial x}\right)\bar{e}_r + \left(\frac{\partial U_r}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial r}\right)\bar{e}_\alpha$

1.2.3 $\bar{n} = \frac{2i}{\sqrt{21}} - \frac{4j}{\sqrt{21}} - \frac{k}{\sqrt{21}}$

1.2.6 $div(U_x) = -\ rot\ U$

1.2.7 $\oint_s \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) d_s = 0$

1.2.8 $\int_{s_2} x(y+5z)\,d_s \Big/ \int_{s_1} x(y+5z)\,d_s = 4$

1.2.9 $Madic = \frac{5}{2}\ \rho\pi R^2$

1.2.10 $\sigma x = 0.51\ Kgf/m^2\ ,\ \sigma y = -\ 0.21\ Kgf/m^2\ ,\ \sigma xy = 0.09\ Kgf/m^2$

$\sigma yz = 0.12\ Kgf/m^2\ ,\ \sigma zx = 0.03\ Kgf/m^2$

1.2.11 $\nabla^2\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{2}{r^4}$

CAPITULO 2

2.2.1 $Z = \frac{1}{2}\,(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\mathrm{Sen}\,\frac{7}{6}\pi)$

2.2.2 $Z_0 = 1 + 2i \quad , \quad Z_1 = -1 - 2i$

2.2.3 $Z_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad Z_1 = -1 \quad , \quad Z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2.2.4 $V^2 = -4(u-1)$ y $V^2 = -16(u-4)$ son las ecuaciones de las parábolas que limitan la imagen de la banda en el plano ω

2.2.5 $Z_1 = -i\ln(3.73\,i) \quad , \quad Z_2 = -i\ln(.27\,i)$

2.2.7 $\oint_S \frac{5Z^3 + 3Z + 3}{(Z-i)^3}\,dZ = -30\pi$

2.2.8 $\theta = 0$

2.2.9 $f = -\frac{2 + 2iZ}{Z + i(1 - 4Z)} \quad , \quad f(1+i) = \frac{2}{2+5i}$

2.2.11 $\oint_C \frac{3Z^2 + 7Z + 1}{(Z-2)^2}\,dZ = 38\pi i$

CAPITULO 3

3.2.1 $f(Z) = -(Z - \frac{\pi}{2}) + \frac{(Z - \frac{\pi}{2})^3}{3!} - \frac{(Z - \frac{\pi}{5})^5}{5!} + \ldots\ldots$

3.2.2 $f(Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \frac{Z^4}{4} + \ldots\ldots$

3.2.3 $f(Z) = 1 - Z + \frac{Z^2}{2!} - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^4}{4!} - \frac{Z^5}{5!} + \ldots\ldots$

3.2.4 a) $f(Z) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9}Z - \frac{1}{27}Z^2 - \frac{1}{81}Z^3 - \ldots\ldots$

b) $f(Z) = \frac{3}{Z} + \frac{3}{Z^2} + \frac{9}{Z^3} + \frac{27}{Z^4} + \ldots\ldots$

3.2.5 a) $f(Z) = -\frac{1}{2}Z - \frac{3}{4}Z^2 - \frac{7}{8}Z^3 - \frac{15}{16}Z^4 - \ldots\ldots$

b) $f(Z) = -\frac{1}{Z} - \frac{3}{Z^2} - \frac{7}{Z^3} - \frac{15}{Z^4} - \ldots\ldots$

3.2.6 $f(Z) = \ldots\ldots - \frac{2}{Z^5} - \frac{4}{Z^4} + \frac{2}{Z^3} + \frac{4}{Z^2} - \frac{2}{Z} + 1 - \frac{Z}{2} + \frac{Z^2}{4} - \frac{Z^3}{8} + \ldots\ldots$

3.2.7 $f(Z) = -\frac{12}{Z^2} - \frac{6}{Z} - 9 - \frac{15}{2}Z - \frac{33}{4}Z^2 - \frac{63}{8}Z^3 - \ldots\ldots$

3.2.8 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{Zt}\, dZ}{Z^2(Z^2 + 2Z + 2)} = \frac{t-1}{2} + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t$

3.2.10 $\oint_C \frac{e^Z\, dZ}{\cosh Z} = 8\pi i$

3.2.11 a) $\int_0^\infty y^3 e^{-2y}\, dy = 3/8$, b) $\int_0^\infty u^{3/2} e^{-3u}\, du = \sqrt{3\pi}/36$,

c) $\int_0^\infty y^2 e^{-2y^2}\, dy = \sqrt{2\pi}/16$

3.2.13 $f(X) = -\frac{2}{\pi}\left(Sen\,\frac{\pi}{2}t + Sen\,\pi t + \frac{1}{3}\,Sen\,\frac{3}{2}\pi t + \frac{1}{5}\right.$

$\left. Sen\,\frac{5}{2}\pi t + \frac{1}{3}\,Sen\,3\pi t + \ldots\ldots\ldots\right)$

3.2.14 a) $f(X) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 - Cos\,n\pi}{n}\right) Sen\,\frac{n\pi x}{2}$

b) $f(X) = -\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 - Cos\,n}{n^2}\right) Cos\,\frac{n\pi x}{4}$

c) $f(X) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(Cos\,n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\,Cos\,\frac{n\pi x}{3} -$

$\frac{6\,Cos\,n\pi}{n\pi}\,Sen\,\frac{n\pi x}{3}$

CAPITULO 4

4.2.2 *Si*

4.2.4 $\phi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}X$, $\phi_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}X^2$, $\phi_3 = \frac{\sqrt{7}}{2}X^3$

4.2.5 $y(X) = X^2\left(1 - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{6} - \frac{X^3}{24} + \frac{X^4}{120} - \ldots\ldots\right)$

$= X^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{X^n}{(n+1)!}$

4.2.6 $y(t) = t + 2 + 2(t-1)e^t$

4.2.7 $f(X) = \frac{4(X\,Cos\,X - Sen\,X)}{X^3}$

4.2.8 a) $f(S) = \frac{2}{S^3} + \frac{a}{S^2} + \frac{b}{S}$

b) $f(S) = \dfrac{e^{b}}{S - a}$

c) $f(S) = \dfrac{2n\pi}{T}\left\{\dfrac{1}{S^2 + \left(\dfrac{2n\pi}{T}\right)^2}\right\}$

4.2.9 $y(t) = \dfrac{1}{2}$

4.2.10 $y(t) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\, t^{1/3}\,(3t + 2)$

4.2.11 a) $y(t) = 3t + 2\,\mathrm{Sen}\,2t$

b) $y(t) = 25t^2 + 40t + 22 + 2e^{2t}(2\,\mathrm{Sen}\,t - 11\,\mathrm{Cos}\,t)$

c) $y(t) = t$

d) $y(t) = e^{2t}$

e) $y(t) = 5\,e^{-t}$

4.2.12 a) $y(t) = 2 + \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{3}{2}\,\mathrm{Sen}\,t + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,t$

$Z(t) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{3}{2}\,\mathrm{Sen}\,t - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,t$

b) $y(t) = \dfrac{1}{9}\,e^{-t} + \dfrac{4}{45}\,e^{2t} - \dfrac{1}{5}\,\mathrm{Cos}\,t - \dfrac{2}{5}\,\mathrm{Sen}\,t + \dfrac{1}{3}\,t\,e^{-t}$

$Z(t) = \dfrac{1}{9}e^{-t} - \dfrac{1}{9}e^{2t} + \dfrac{1}{3}\,te^{-t}$

4.2.13 a) $U(X, t) = 10\,e^{-32\pi^2 t}\;\mathrm{Sen}\,4\pi X$

b) $U(X, t) = 20\,\mathrm{Sen}\,2\pi X\,\mathrm{Cos}\,6\pi t - 10\,\mathrm{Sen}\,5\pi X\,\mathrm{Cos}\,15\pi t$

CAPITULO 5

5.2.1 a) $Z(X) = \int_0^x (3X-\xi)Z(\xi)d\xi + X$

b) $y = \frac{1}{6}X^3 + \frac{7}{120}X^5 + \frac{11}{720}X^7 + \ldots\ldots$

5.2.2 $Xe^{-x}y'' + (1-X)e^{-x}y' + e^{-x}y = 0$

5.2.3 a) No

b) 0 Como mínimo y 2 como máximo

5.2.4 $J_3(1) \cong 0.01956$

5.2.5 $y = 1 - \frac{n}{2!}X^2 - \frac{n(2-\lambda)}{4!}X^4 - \frac{n(2-\lambda)(4-\lambda)}{6!}X^6 - \ldots\ldots$

5.2.6 $\lambda = 1/2\pi$

5.2.9 a) hiperbólica

b) elíptica

c) parabólica

d) parabólico

e) hiperbólica

CAPITULO 6

6.2.1 $y = (2 + K)\hat{\imath} - (1 + 2K)\hat{\jmath} + (2 + 3K)\hat{k}$

6.2.3 $y - z = 0$

6.2.4 $|K| = a/(a^2 + b^2)$

6.2.5 $|K| = (1 + 4\,sen^4(t/2))^{1/2} / (1 + 4\,sen^2(t/2))^{3/2}$

6.2.6 $T = -1/(1 + 4\,sen^4(t/2))$

6.2.7 $y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 0$

6.2.8 $y + z = 0$

6.2.9 $y^2 = \frac{x^2}{3}$

6.2.10 $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

6.2.11 Los planos $z = 1$ y $z = -1$

Esta obra se terminó de imprimir en Junio de 1995 en

GRUPO IMPRESOR MANSUA, S.A. DE C.V.

La supervisión de la obra estuvo a cargo de la
Lic. Ma. Guadalupe Castro Díaz
El tiraje fue de 200 Ejemplares