CAPÍTULO 2

ANÁLISIS DE FOURIER

2.1 Introducción

El análisis de Fourier juega un papel central en el tratamiento de señales, su contexto inicial para el estudio de la disipación del calor en un medio sólido, pronto lo llevaron al desarrollo de soluciones para la ecuación de Laplace y la ecuación de Onda. Algunas señales muestran componentes periódicos que se repiten a intervalos fijos; estos son estudiados convenientemente por el análisis armónico basado en la serie de Fourier. Para el estudio en Ciencias de la Tierra es evidente que señales de esta naturaleza son solo ideales, pues no es común encontrar señales estacionarias, de manera que, al utilizar la serie y transformada de Fourier debemos de tener en mente todas las consideraciones necesarias para no generar resultados o interpretaciones erróneos. En el presente capítulo abordamos el tratamiento y análisis de Fourier, desarrollando sus distintas expresiones, presentando sus propiedades hasta llegar a la optimización por la FFT y la transformada de Gabor.

2.2 Señales

Una señal es una representación de una medición o percepción de una o más variables; puede ser una cantidad física que se encuentra en función del tiempo o del espacio, o una cantidad adimensional como el registro de la varianza de un conjunto de datos normalizados. Matemáticamente una señal se expresa como función de una o más variables independientes y se pueden clasificar de acuerdo a distintas características de las cuales presento algunas:

- Según el número de variables

Señales multicanales: tienen en común registrar la misma variable, puede ser por venir de fuentes distintas o por utilizar múltiples sensores.

Señales multidimensionales: registran más de una variable independiente.

- Según su adquisición

Señales análogas: señales continuas, donde la variable independiente se encuentra definida para cualquier instante del dominio (registro de la señal por un sistema análogo).

Señales digitales: señales donde la función toma solo valores específicos definidos por la variable independiente, generalmente con un espaciamiento constante (señales registradas por un sistema digital).

- Según la cantidad de información que se dispone

Señales deterministas: señales, en la cual, su función de transferencia es conocida, se pueden expresar correctamente por una función matemática o regla de correspondencia, se conoce con certeza su evolución en el futuro.

Señales aleatorias: Señales que evolucionan de forma impredecible (no parece existir alguna regla de correspondencia que permita conocer la evolución), se conoce solo el comportamiento durante el registro, ignorando totalmente su pasado y su futuro.

- Según su periodicidad

Señales periódicas: señales en las que a intervalos bien definidos dentro del dominio, la variable dependiente toma exactamente los mismos valores.

Señales aperiódicas: señales en los cuales la variable dependiente se considera transitoria en cualquier intervalo del dominio.

- Según su contenido energético

Señales de energía finita: señales con elementos infinitos, en los cuales la integral de su función elevada al cuadrado y evaluada de menos infinito hasta infinito se encuentra definida.

Señales de potencia media: señales que tienen energía infinita de las cuales se puede definir una potencia media.

En este trabajo se estudiaron señales transitorias y digitales; hasta el momento consideramos que la naturaleza de la señal de rayos cósmicos es *cuasi-estacionaria* y los GLE´s son de naturaleza *estocástica*, de manera que no conocemos con certeza cuales son los parámetros que controlan la regla de correspondencia. Para afrontar el estudio tenemos que comprender el análisis de Fourier que se desarrolla con consideraciones que abordaremos en este capítulo.

2.3 Series de Fourier

Las series de Fourier describen señales periódicas como una combinación lineal de exponenciales complejas, multiplicados por factores de peso que determinan la contribución relativa de cada componente a la señal original; con esta herramienta podemos analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial. La combinación lineal permite que operaciones en el dominio del tiempo se conserven en el dominio de las frecuencias. Al conjunto de expansiones en series de Fourier se denomina base ortogonal.

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X(n) e^{\frac{i2\pi nt}{T}} \qquad (2.1)$$

$$X(n) = \frac{1}{T}\int_{t1}^{t1+T} x(t)\, e^{\frac{-i2\pi nt}{T}} dt \qquad (2.2)$$

En las ecuaciones anteriores presentamos la serie de Fourier en su forma exponencial; desarrollando la exponencial compleja y reagrupando los términos tenemos sus representaciones trigonométricas:

- Primera forma trigonométrica

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C\,(n) cos\left[\frac{2\pi nt}{T} + \phi(n)\right] \qquad (2.3)$$

donde

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{t1}^{t1+T} x(t)dt$$

$$C_n = 2|X(n)|$$

$$\phi(n) = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{X(n)\}}{Re\{X(n)\}}\right].$$

- Segunda forma trigonométrica

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A(n)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + B(n) sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \qquad (2.4)$$

donde

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{t1}^{t1+T} x(t)dt$$

$$A(n) = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t1+T} x(t)\cos\left(\frac{2\pi \mathrm{nt}}{\mathrm{T}}\right)\mathrm{dt}$$

$$B(n) = \frac{2}{T}\int_{t1}^{t1+T} x(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{dt}.$$

A partir de los coeficientes de Fourier ($C_0, A_{0,}, C_n, A_n, B_n$), es posible obtener la representación en frecuencias de una señal. La gráfica de estos coeficientes en función de su índice armónico se denomina espectro; existen dos tipos de gráficos, uno de amplitudes y otro de fases; mientras el espectro de amplitud es una representación de los factores de peso, el espectro de fase indica su ubicación (la posición de una onda con respecto a otra); para el caso de señales continuas y periódicas el espectro será discreto y no periódico extendiéndose infinitamente hacia ambos lados en el eje de frecuencias. El espectro de amplitud es una función par o simétrica mientras que el espectro de fase es una función impar o asimétrica.

2.3.1 Señales Periódicas y Discontinuas

Si *x(t)* es continuo entonces las series convergen uniformemente a *x(t),* de otra manera, si existen discontinuidades, la series convergerán en todo punto excepto en la discontinuidad, teniendo un salto en su valor medio (Oppenheim, 1998).

2.3.2 Condiciones de Dirichlet

Las señales que pueden descomponerse en series de Fourier cumplen con un conjunto de condiciones suficientes pero no necesarias (Howell, 2001).

1. *x(t)* debe de ser absolutamente integrable en un periodo $\int_{t1}^{t1+T}|x(t)|dt$.
2. *x(t)* tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo de tiempo finito.
3. *x(t)* tiene un número finito de discontinuidades en un periodo de tiempo finito.
4. *x(t)* debe de ser periódica.

2.3.3 Efecto de Gibbs

La reconstrucción a partir de series de Fourier de señales discontinuas produce el denominado efecto de Gibbs; consiste en la aparición de un pico en el punto de la discontinuidad, incluso al utilizar un gran número de armónicos el efecto es evidente.

Una función periódica con discontinuidades tiene por espectro un conjunto infinito de armónicos; al tratar de reconstruir la señal utilizando N armónicos estamos truncando la función, este truncamiento hace evidente el efecto de Gibbs (aunque en realidad el fenómeno se debe a la discontinuidad en la señal y no al truncamiento).

2.3.4 Señales Continuas y no Periódicas

Retomando el análisis de señales periódicas, sus armónicos son variables discretas de tal forma que el número de armónico está en función de la frecuencia fundamental:

$$f_0 = \frac{1}{T},$$

donde el periodo *T* es finito; basándonos en la expresión anterior si tenemos *T*→∞*,* el eje de frecuencias se vuelve una variable continua de elementos diferenciales:

$$\frac{1}{T} \to df.$$

De esta manera la sumatoria que representaba la serie de Fourier se vuelve una integral.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi ft} dt \right] e^{i2\pi ft} dt \quad (2.5).$$

Esta integral cumple de igual manera las condiciones de Dirichlet excepto la condición de periodicidad, denominada una condición débil (Howell, 2001).

2.4 Transformada de Fourier

Dada una función *f(t)* absolutamente integrable, la transformada de Fourier está definida como:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(iwt)}dt = \langle e^{-(iwt)}, f(t)\rangle \quad (2.6)$$

donde w=$2\pi f$.

De manera similar la transformada inversa de Fourier está dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{(iwt)}dw \qquad (2.7).$$

2.4.1 Propiedades

La transformada de Fourier es una función continua y compleja, y cumple con un número de propiedades (Vetterli y Kovačević, 1995):

- Linealidad: puesto que la transformada de Fourier es un producto interno se sigue inmediatamente la propiedad de linealidad del producto interno

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(w) + \beta G(w).$$

- Simetría: si *F(w)* es la transformada de Fourier de *f(t)* entonces

$$f(t) \leftrightarrow 2\pi F(-w).$$

- Traslación: el cambio en el tiempo por t_0 resulta en una multiplicación por un factor de fase en el dominio de Fourier

$$f(t - t_0) \leftrightarrow e^{-(iwt_0)}F(w).$$

Por el contrario un cambio en la frecuencia resulta una modulación por un complejo exponencial en el dominio del tiempo

$$e^{-(iwt_0)}f(t) \leftrightarrow F(w-w_0).$$

- Escala: un cambio de escala en tiempo se encuentra asociado a un escalado inverso en frecuencias

$$f(at) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{w}{a}\right).$$

- Diferenciación: la derivada en tiempo resulta una multiplicación en frecuencias

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = (iw)^n F(w),$$

y la derivada en frecuencias está dado por

$$(-jt)^n f(t) = \frac{d^n F(w)}{dw^n}.$$

- Momento: si llamamos m_n al enésimo momento de *f(t)* entonces (Vetterli y Kovačević, 1995):

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt\,,\ \ n = 0,1,2,3\ldots,$$

el teorema del momento en el dominio de Fourier está dado por

$$(-jt)^n m_n = \frac{d^n F(w)}{dw^n}|_{w=0}, \qquad n = 0,1,2,3\ldots,$$

- Convolución: la convolución de dos funciones *f(t)* y *g(t)* viene dada por

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.8),$$

esta operación es denotada por $h(t) = f(t) * g(t)$, además se puede demostrar que la propiedad es simétrica $h(t) = g(t) * f(t)$.

En el dominio de las frecuencias la convolución está definida como una multiplicación, obteniendo la transformada de la ecuación 2.8 resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-(iwt)}dt \quad (2.9).$$

Cambiando el orden de integración y utilizando la propiedad de traslación llegamos a una multiplicación en el dominio frecuencial.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)e^{-(iwt)}dt\right]d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-(iw\tau)}G(w)d\tau = F(w)G(w) \quad (2.10)$$

$$H(w) = F(w)G(w) \quad (2.11).$$

2.4.2 Fórmula de Parseval

La transformada de Fourier es una transformación ortogonal y se satisface la conservación de la energía (Andreas, 2006).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)G(w)dw \quad (2.12).$$

Para el caso en el que *f(t)=g(t)*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(w)|^2 dw \quad (2.13),$$

donde el factor 1/2π viene de la definición de la transformada de Fourier.

La relación de Parseval puede evaluar de igual manera la potencia contenida en una señal a parir de los coeficientes de sus correspondientes series de Fourier

$$P = \frac{1}{T}\int_T [x(t)]^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} [X(k)]^2.$$

2.5 Señales Discretas y Periódicas

Es posible reemplazar una señal continua por una discreta, de esta manera tendremos una sucesión de muestras en lugar de la señal completa. La digitalización de una señal *h(t)* se realiza multiplicando ésta por un tren de impulsos unitario $\delta_k(t)$, de periodo T (intervalo de muestreo); la consecuencia de éste proceso se puede observar en el dominio de las frecuencias. Aplicando el Teorema de Convolución podemos definir:

$$h(t)\delta_k(t) \leftrightarrow H(f) * \Delta_{\mathrm{k}}(\mathrm{f}) \qquad (2.14),$$

ésta operación hace que la función *h(t)* se describa sobre los impulsos a intervalos constantes de $\Delta_{\mathrm{k}}(\mathrm{f})$; como el tren de impulsos está definido en un dominio infinito el resultado es una función periódica en el dominio de las frecuencias.

2.5.1 Teorema del Muestreo

El teorema establece que una señal se muestrea de manera que cumple la condición de Nyquits; esta condición dice que la frecuencia de muestreo tiene que ser mayor que la máxima frecuencia contenida en la señal, de otra manera no se capturará la señal por completo.

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} \ .$$

Esto significa que para cada valor Δt empleado en el muestreo de una señal el espectro que describe es diferente; para recuperar la señal tenemos que muestrear con una frecuencia mayor o igual a la frecuencia de Nyquits.

Matemáticamente el teorema del muestreo se expresa de la siguiente manera (Brigham, 1988):

$$h(t)\delta_k(t) = h(t)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\Delta t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k\Delta t)\,\delta(t-k\Delta t) = h_m(t) \qquad (2.15),$$

donde $h_m(t)$ representa la señal muestreada en tiempo; con una convolución se puede realizar la misma operación en el dominio de las frecuencias.

Si la señal *h(t)* en el dominio de las frecuencias es de ancho de banda limitada, es decir:

$$H(f) = \begin{cases} \neq 0; |f| < f_N \\ = 0; |f| > f_N \end{cases},$$

la función *h(t)* muestreada con Δt=1/2f_N, puede ser reconstruida a partir de sus valores muestreados *h(k*Δt*)* por la siguiente expresión.

$$h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{h}(\mathrm{k}\Delta t) \frac{\sin(2\pi f_N t)}{2\pi f_N t} \quad (2.16).$$

El teorema del muestreo se basa estrictamente en la suposición que la señal *h(t)* sea limitada en banda, esto sucede solo si su duración en tiempo es infinito (Brigham,1988).

2.5.2 Fenómeno de Aliasing

Este fenómeno es una consecuencia del muestreo, y se da en el dominio temporal; dado que el número de muestras considerado en el tren de impulsos es infinito, digitalmente se hace necesario truncarlos a un número finito, este proceso se lleva a cabo con una función rectangular que entrega N muestras; el fenómeno de Aliasing disminuye mientras el número de muestras incrementa.

2.6 Serie de Fourier Discreta

Una señal discreta puede ser representada por sus espectros de amplitud y fase, estos dos elementos de análisis se encontraran limitados por una banda de frecuencias f_N.

Una señal periódica con periodo N tal que *x(n)=x(n+N),* puede ser representada por una serie de Fourier, esta serie contiene N funciones exponenciales y se expresa como:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{\frac{i2\pi kn}{N}} \quad (2.17),$$

donde

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \quad (2.18).$$

Los coeficientes discretos de Fourier son cíclicos con periodo N, desarrollando la exponencial compleja y reagrupando términos podemos representar las expresiones en su primer y segunda forma trigonométrica.

- Primera forma trigonométrica

$$x(n) = C_0 + \sum_{k=1}^{L} C\,(k)cos\left[\frac{2\pi kn}{N} + \phi(k)\right] \quad (2.19)$$

$$C_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$C(k) = 2|X(k)|$$

$$\phi(k) = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{X(k)\}}{Re\{X(k)\}}\right].$$

- Segunda forma trigonométrica

$$x(n) = A_0 + \sum_{k=1}^{L}\left[A(k)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + B(k)\sin(\frac{2\pi kn}{N})\right] \quad (2.20),$$

dónde:

$$A_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$$A(k) = \frac{2}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

$$B(k) = \frac{2}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right).$$

Los coeficientes discretos de Fourier están dados por $C_0, C_K A_0, A_k, B_k,$ (dependiendo de su forma trigonométrica); la dimensión L está en función del número de muestras contenidas en la señal; de acuerdo a la frecuencia de Nyquits solo es necesario la mistad de los armónicos para la reconstrucción de la señal temporal, de manera que L es diferente si se trata de una señal con un número N de muestras par o impar.

$$L = \begin{cases} \frac{N}{2} & ; \quad N\ par \\ \frac{N-1}{2} & ; \quad N\ impar \end{cases}.$$

Señales periódicas y discretas arrojan un espectro periódico y discreto, esto resulta al contemplar el periodo fundamental que es el número de muestras por el intervalo de muestreo.

2.7 Transformada Discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier surge al tender el periodo fundamental (definido anteriormente) al infinito, esto sucede al tratar con señales transitorias y suponer una discretización desde menos infinito hasta infinito.

Para programar este tipo de señales se consideran transitorias y finitas, de esta forma evitamos el concepto de infinito definiendo la transformada de Fourier de la siguiente forma:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \qquad k = 0,1,2,3,\dots,N-1 \quad (2.21),$$

y su respectiva transformada inversa como:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{i2\pi kn}{N}}\ n = 0,1,2,3,\dots,N-1 \quad (2.22).$$

De manera similar al desarrollar la exponencial compleja y reacomodando los términos se pueden expresar en sus diferentes formas trigonométricas.

2.8 Transformada Rápida de Fourier

La implementación de la transformada de Fourier involucra *NxN* multiplicaciones y sumas complejas; para cada uno de los *N* valores de *k* es necesaria *N* multiplicaciones por *x(n*) y *N-1* sumas de resultados (ecuación 2.21).

El algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) permite reducir el número de operaciones en $Nlog_2N$ (Gaberson, 2003); basándose en las propiedades de separabilidad, simetría y periodicidad se elimina información redundante; podemos calcular la transformada de Fourier de dos variables por la aplicación sucesiva de la trasformada de Fourier de una variable.

$$w_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k \; simetría$$

$$W_N^{k+\frac{N}{2}} = W_N^k \; periodicidad$$

$$W_N = e^{-i2\pi/N}$$

$$N = 2^n$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0,1,2,3, \dots, N-1.$$

El algoritmo trabaja de forma eficiente cuando la señal es una potencia de dos, con un análisis cuidadoso podemos dividir la transformada de Fourier en una parte par y otra impar:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}.$$

En la ecuación anterior podemos observar que la transformada de Fourier discreta de *N* elementos se convierte en la transformada de dos series de *N/2* elementos; estas series se pueden sub-dividir a su vez en dos partes y continuar con esta acción hasta la etapa log_2N, finalmente tenemos Nlog_2N sumas complejas. Este proceso de descomposición es llamado *decimación*, y se puede realizar en tiempo o en frecuencias, la diferencia de trabajar la decimación en frecuencias es dividir los datos en los primeros N/2 y los últimos N/2 frecuencias.

2.9 Transformada de Gabor

Para el análisis de señales estacionarias la transformada de Fourier es una herramienta con perfecta resolución en frecuencias; para el caso de señales cuasi-estacionarias y no estacionaria es necesario conocer la ubicación temporal de las frecuencias, y es exactamente, donde el análisis de Fourier tiene ciertas limitantes que se hacen necesarias resolver.

Gabor (1946) enfrentó el problema proponiendo utilizar la transformada de Fourier por ventanas; el objetivo de esta transformada es modular una onda finita y trasladarla; con éste concepto tratamos de dividir la señal en segmentos temporales donde consideramos que la señal es estacionaria, calculando en estas porciones la transformada de Fourier clásica.

Matemáticamente la transformada de Fourier por ventanas tiene la siguiente expresión:

$$TFV(t,w) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)h(\tau - t)e^{-i\varepsilon t}dt \quad (2.23).$$

Consideramos que *h(t)* es una función ventana de valores reales ubicada en tiempo y modulada por ε.

2.9.1 Principio de Incertidumbre de Heisenberg

El concepto nace en un fenómeno físico al tratar de conocer el momento y la posición exacta de una partícula; éste principio aplicado al análisis de señales dice que no podemos saber la representación exacta *tiempo-frecuencia*.

Utilizando el principio de incertidumbre de Heisemberg sabemos que existe un compromiso entre el tiempo y la frecuencia, esto es, que no podemos tener una alta resolución simultáneamente para ambos dominios, por lo cual, debemos de elegir qué resolución es más conveniente para nuestro estudio al mapearla en el plano *tiempo-frecuencia*.

La transformada de Gabor tiene la limitante de mantener constate el soporte de la ventana durante todo el análisis; al elegir el tamaño de la ventana, estamos decidiendo tener buena resolución en tiempo si la ventana es pequeña, o buena resolución en frecuencias si la ventana es grande. La transformada de Gabor también se encuentra en la literatura como Transformada Corta de Fourier (STFT por sus siglas en inglés).

En el siguiente capítulo presentamos las bases de la Transformada Wavelet, que de igual manera propone una representación *tiempo-frecuencia* para una señal no estacionaria, proporcionando de manera simultánea la ubicación temporal de las frecuencias contenidas en la señal. A diferencia de la STFT, la transformada Wavelet analiza la señal con diferentes resoluciones para diferentes frecuencias, utilizando un soporte de ventana variable y el concepto del *análisis multiresolución*.