

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS WAVELET

3.1 Introducción

La necesidad de representar señales con diferentes frecuencias para caracterizar un medio estratificado con capas de distinto grosor, llevo a Morlet (1970) implementar el concepto de wavelet; el origen del concepto está en la Ingeniería Geofísica en el estudio de señales sísmicas, más adelante Grossman (1981) y Meyer (1985) lo formalizan matemáticamente.

La transformada wavelet tienes varias ventajas frente al análisis de Fourier, caracterizando eficientemente señales locales no estacionarias y de rápida transitoriedad. Su primera aproximación es por la transformada de Fourier por Ventanas (Transformada de Gabor), el cual mapea la señal en una representación *tiempo-escala* con grandes inconvenientes al mantener el soporte de la ventana constante durante todo el análisis.

El análisis wavelet es una herramienta matemática que descompone una señal temporal en una suma de señales temporales; cada una de estas tiene diferentes escalas en diferentes niveles de resolución que surgen al dilatar y desplazar una función temporal denominada Wavelet (*ondeleta*) Madre, esto permite el análisis con diferentes niveles de detalle dando lugar al *análisis multiresolución*.

Las aplicaciones de esta herramienta son muy extensas y su desarrollo es implementado en disciplinas muy diferentes como lo son la prospección geofísica y la medicina. En éste capítulo presentamos la *Transformada Wavelet continua y discreta*, sus relaciones con el *factor de escala*, el *análisis multiresolución* y la *wavelet madre Morlet*. Al manejar señales no estacionarias la interpretación wavelet requiere de la comprensión de herramientas estadísticas como lo son los *Métodos de Montecarlo*.

3.2 Función de Escala

Se puede construir una base ortogonal en el espacio vectorial V_j por medio de dilataciones y traslaciones discretas de una función $\varphi(t)$ denominada función de escala, además esta función es unitaria para formar una base ortonormal.

Al proyectar una función original $f(t) \in L^2(R)$ en la base ortonormal generada por la función de escala desplazada, estamos realizando una correlación entre la función $f(t)$ y la función de escala $\varphi(t)$ muestreada a intervalos enteros.

La función de escala básica es dilatada por un factor de escala 2^j y desplazada por un factor de escala discreto de traslación k , dividida por la raíz del factor 2^j para ser unitario:

$$\varphi_{i,k}(t) = 2^{-i/2} \varphi(2^{-i}t - k) \quad (3.1).$$

El resultado de la correlación entre $f(t)$ y $\varphi(t-k)$ es una aproximación de menor detalle de la misma función $f(t)$; la proyección forma un subespacio vectorial $V_0 \in L^2(R)$, que contiene todas las aproximaciones de $f(t)$ generadas por el conjunto ortonormal $\{\varphi(t-k)\}$.

V_0 es una base ortonormal con un paso de traslación entero, a continuación se generan las siguientes bases ortonormales V_1, V_2, \dots, V_i ; con la función de escala dilatada y con un paso de traslación $2^1, 2^2, \dots, 2^i$, respectivamente. Finalmente formamos un conjunto de bases ortonormales pertenecientes a la misma función de escala $V_i \in L^2(R)$.

El conjunto de subespacios V_i es el resultado de las proyecciones $f(t)$ sobre el conjunto de bases ortonormales en $L^2(R)$, cada subespacio V_i contiene todas las posibles aproximaciones de $f(t)$; el subespacio V_i pertenece a la base ortonormal de la función de escala en el nivel de resolución i , de esta manera, $\varphi(t)$ genera los espacios del *análisis multiresolución* (Sheng, 1996).

Todas las aproximaciones $f(t)$ son generadas por el mismo factor de escala en distintas resoluciones, establecido esto, las aproximaciones deben de ser equivalentes y los espacios de aproximación V_i pueden ser deducidos por una dilatación, teniendo toda la información el nivel de mayor resolución, así entonces V_i es un subespacio de V_{i-1} :

$$f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{i+1} \text{ (menor resolución)}$$

$$f(t) \in V_i$$

$$f(2t) \in V_{i-1} \text{ (mayor resolución)}.$$

3.3 Análisis Multiresolución

El Análisis Multiresolución se utiliza para estudiar señales en múltiples bandas de frecuencia; consiste en una secuencia de subespacios cerrados V_i en $L^2(\mathbf{R})$ (Sheng, 1996), cuando la resolución i tiende a menos infinito la función aproximada debe de converger a la función original:

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \subset L^2(\mathbf{R}),$$

de modo que:

$$V_{i \rightarrow -\infty} = L^2(\mathbf{R}) \text{ (incremento de resolución)}$$

$$V_{i \rightarrow +\infty} = \mathbf{0} \text{ (decremento de resolución)}.$$

Con señales de alta frecuencia el análisis multiresolución proporciona alta resolución en tiempo y baja en frecuencias, de manera contraria, con señales de baja frecuencia ofrece alta resolución en frecuencias y baja resolución temporal.

El análisis hace uso de filtros con diferentes frecuencias de corte analizando la señal a distintas escalas; consiste básicamente en aproximar una función $f(t)$ con diferentes niveles de resolución, descomponiendo el espacio de la función en una secuencia de subespacios.

La idea central es, que con ayuda de la función de escala tomemos información de la variación de la señal con resolución 2^{-i} , y de esta forma modelar la señal con proyecciones ortogonales sobre espacios vectoriales de diferente resolución.

3.4 Wavelet Madre

La función de escala no es completa a cualquier nivel de resolución, porque se pierde información en el proceso de aproximación al proyectar una función $f(t)$ sobre la función de escala ortonormal $\varphi(t)$ (Sheng, 1996); para obtener la información complementaria se utilizan proyecciones sobre otras funciones llamadas *wavelets*.

De manera similar a la función de escala, las wavelets son formadas a partir de una wavelet madre por dilataciones y traslaciones:

$$\psi_{i,k}(t) = 2^{-i/2}\psi(2^{-i}t - k) \quad (3.2)$$

Las traslaciones de la wavelet madre pueden formar una base ortonormal (transformada wavelet discreta) para cada escala i , cumpliendo al mismo tiempo ser un conjunto ortogonal $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$ con el conjunto formado por la función de escala $\varphi(2^{-i}t - k)$ en el mismo nivel de resolución; la expresión matemática que describe esta condición es el producto puto:

$$\langle \varphi_{i,k}, \psi_{i,n} \rangle = 2^{-i} \int \varphi(t - k)\psi(t - n)dt = 0 \quad (3.3)$$

donde $k, n \in \mathbb{Z}$.

La función matemática prototipo denominada wavelet madre debe satisfacer dos condiciones:

1. Ser finita en tiempo

Esta condición se representa por una integral en el dominio temporal que evalúa la cantidad de energía estableciendo un valor positivo definido:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt < +\infty \quad (3.4).$$

La función que genera la onda debe de cumplir con la condición de admisibilidad en el dominio de las frecuencias, donde C es llamada *constante de admisibilidad*. Para ser admisible como una

wavelet, esta función debe tener un promedio cero y debe estar localizada tanto en el espacio de frecuencia como en el tiempo (Farge, 1992):

$$C = \int \frac{|\psi(w)|^2}{|w|} dw < +\infty.$$

2. tener valor medio nulo

Expresa que la función wavelet madre debe de ser oscilante:

$$\int \psi(t) dt = 0.$$

Las condiciones para generar una wavelet madre no restringen de manera drástica las funciones que se pueden utilizar como base generadora; por tal motivo varios autores han propuesto diferentes ondículas. El criterio para elegir la wavelet madre se encuentra en función del objetivo del análisis, el comportamiento de la señal y de lo que se pretende observar.

Proyectando la función $f(t)$ sobre la base ortonormal generada por las wavelets realizamos la correlación entre $f(t)$ y $\psi(t)$ que, de igual manera que la función factor de escala, muestrea la función a intervalos discretos; el resultado de estas proyecciones es el subespacio W_i abarcado por $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$.

Como la base wavelet y la base función de escala son ortogonales entre si dentro del mismo nivel, se cumple que: el subespacio W_i es el complemento ortogonal del subespacio V_i , además, los dos subespacios están contenidos en el subespacio de mayor resolución V_{i-1} resultando ser, la suma directa de W_i y V_i (Misiti-Oppenheim, 2003).

3.5 Transformada Wavelet Continua

La Transformada Wavelet se define como la descomposición de una función $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$ que forman una base.

$$W_f(s, \tau) = \int f(t)\psi^*(t)dt \quad (3.5).$$

Donde ψ^* representa el complejo conjugado de ψ , esto para eliminar la parte imaginaria.

La base es generada por la dilatación s y la traslación τ de la wavelet madre definida como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right),$$

donde el factor de escala s y el factor de traslación τ son variables continuas; con esta transformación la función unidimensional en el dominio del tiempo es mapeada en un espacio bidimensional mediante las variables (s, τ) .

Las wavelet generadas tienen diferente escala y ubicación conservando la misma forma, cuando $s > 1$ las wavelets son dilatadas, de manera contraria cuando $s < 1$ las wavelets son contraídas.

Ya definida la *ondícula* y con el análisis multiresolución, obtenemos una representación de variaciones rápidas en el dominio del tiempo en bandas de frecuencias grandes y de baja resolución; recíprocamente a variaciones temporales lentas le corresponden bandas de frecuencias estrechas y de alta resolución.

La cobertura simultánea de los dominios frecuencial y temporal realiza una descomposición en bandas, donde los intervalos de tiempo y frecuencia son fijos a cada nivel de descomposición pero distintos en el nivel siguiente; en cada nivel se forman rectángulos de área $\Delta f \Delta t$ constante correspondiente a la resolución del dominio.

A baja frecuencia los rectángulos son pequeños en altura pero muy anchos por lo que tenemos una buena resolución en frecuencia y al mismo tiempo una mala resolución temporal, por el contrario, en altas frecuencias los rectángulos son pequeños en su ancho pero grandes en altura lo que refleja la pérdida de resolución en frecuencia pero entrega una mejor ubicación temporal (figura 3.1).

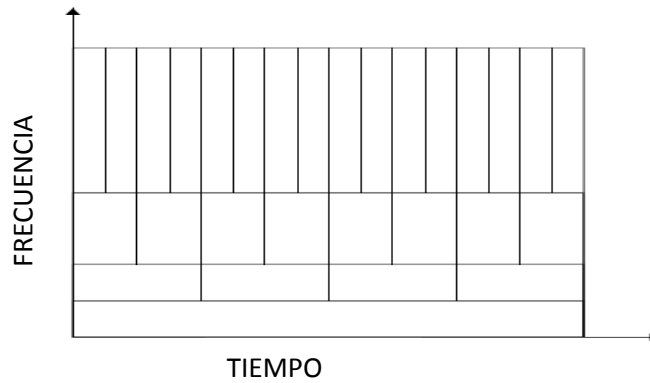


Figura 3.1 Dominio tiempo-frecuencia efectuado por la transformada wavelet.

3.6 Transformada Wavelet Discreta

De manera similar al análisis de Fourier, la transformada wavelet continua tiene su versión discreta; al definir una wavelet madre continua que va a mapear una función $f(t)$ continua pero con un factor de escala y traslación discreto, resulta una serie de coeficientes y es llamada descomposición en *Series Wavelet* (Sheng, 1996).

$$f(t) = \sum_s \sum_\tau W_f(s, \tau) \psi_{s, \tau}(t) \quad (3.6)$$

Las wavelets discretas son funciones wavelets continuas con factor de escala y traslación discretos, estos pueden ser expresados como:

$$s = s_0^i \quad \tau = k\tau_0 s_0^i,$$

donde i, k son números enteros y s_0 es un paso fijo de dilatación ($s_0 > 1$).

El paso de traslación se encuentra en función del paso de dilatación, de esta forma la correspondencia de escalas es uniforme, generando escalas pequeñas para pasos de tiempo pequeños y escalas grandes para pasos de tiempo grandes. La ecuación correspondiente a las wavelets discretas se expresa de la siguiente forma:

$$\psi_{s, \tau}(t) = s_0^{-\frac{i}{2}} \psi \left(s_0^{-i} (t - k\tau_0 s_0^i) \right) = s_0^{-\frac{i}{2}} \psi (s_0^{-i} t - k\tau_0) \quad (3.7)$$

Si se elige $s_0 = 2$ y $\tau=1$, la base $\psi_{s,\tau}(t)$ constituye una base ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ con buenas propiedades de localización *tiempo-frecuencia* (Zarantonello, 1997).

Con la base ortonormal, una función con energía finita $f(t)$, puede ser reconstruida como la suma de los coeficientes wavelets discretos $W_f(s, \tau)$ multiplicado por las funciones de la base $\psi_{s,\tau}(t)$. Una descomposición wavelet no posee información redundante y representa a la señal de forma unívoca de manera que se cumple (Sheng, 1996):

$$\int \psi(t)_{i,j}^* \psi(t)_{m,n} dt = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i = m, j = n \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

En cada nivel de resolución son generadas dos bases ortonormales, una por el factor de escala y otra correspondiente a la función wavelet; de acuerdo con el análisis multiresolución podemos definir la siguiente expresión:

$$\varphi(t) = \sum_k p(k) \varphi(2t - k),$$

donde se expresa que $\varphi(t) \in V_0$ puede ser representada como combinación lineal de la suma ponderada del conjunto de mayor resolución $\{\varphi(2t - k)\} \in V_{-1}$, en otras palabras, $\varphi(t)$ es proyectado en un espacio de mayor resolución; $p(k)$ es llamado coeficiente de *inter-escala* representando una secuencia correspondiente a un filtro paso bajo discreto (Sheng, 1996).

De manera similar la wavelet madre $\psi(t)$ puede ser desarrollada en la base ortonormal de la función de escala en el subespacio de mayor resolución $\{\varphi(2t - k)\} \in V_{-1}$, generando su símil $q(k)$.

$$\psi(t) = \sum_k q(k) \varphi(2t - k).$$

En este caso $q(k)$ corresponde al coeficiente de *inter-escala* que define un filtro discreto pasa-alto (Sheng, 1996). Las relaciones combinan elementos de la función de escala y la función wavelet, permitiendo a la función wavelet estar en función de la misma función de escala.

3.7 Descomposición Wavelet Piramidal

Consideremos una función $f(t) \in V_0$, que se puede reconstruir como la sumatoria de los coeficientes discretos c_0 multiplicados por la función de escala continua trasladada tal que:

$$c_0(k) = \langle f, \varphi_{0,k} \rangle = \int f(t)\varphi(t-k)dt \quad (3.8),$$

donde $f(t)$ es la combinación lineal siguiente:

$$f(t) = \sum_k c_0 \varphi(t-k) \quad (3.9).$$

El subespacio ortogonal V_0 puede ser considerado como la suma directa de los subespacios ortogonales de menor resolución V_1 y W_1 , de modo que $f(t)$ está descrito por la combinación lineal de funciones $v_1 \in V_1$ y $w_1 \in W_1$.

$$f = f(P_1 + Q_1)$$

$$f = \sum_n c_1(n)\varphi_{1,n} + \sum_n d_1(n)\psi_{1,n},$$

donde

$$fP_1 = \sum_n c_1(n)\varphi_{1,n} \quad (3.10)$$

$$fQ_1 = \sum_n d_1(n)\psi_{1,n}$$

De modo que calculando el producto interno para f y fP_1 se tiene:

$$\langle \varphi_{1,n}, f \rangle = \langle \varphi_{1,n}, fP_1 \rangle \quad (3.11),$$

despejando c_1 de 3.10 y relacionando con 3.11 llegamos a:

$$c_1(n) = \langle \varphi_{1,n}, f \rangle = \langle \varphi_{1,n}, fP_1 \rangle.$$

Retomando la combinación lineal inicial 3.9 de mayor resolución tenemos:

$$c_1(n) = \sum_k \langle \varphi_{1,n} \varphi_{0,k} \rangle c_0(k).$$

De donde observamos que el coeficiente de menor resolución c_1 contiene elementos de c_0 y del cual el producto interno se puede calcular como:

$$\langle \varphi_{1,n}, \varphi_{0,k} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \int \varphi(t-k) \varphi\left(\frac{t}{2} - n\right)$$

del cual se puede demostrar que (Sheng, 1996):

$$c_1(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k p(k-2n) c_0(k)$$

De manera similar se comporta el complemento d_1 de los coeficientes wavelets discretos

$$d_1(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k q(k-2n) c_0(k).$$

La descomposición anterior se puede continuar hasta la resolución que se desee; de modo que es posible llegar a una expresión general:

$$P_{i-1}f = P_i f + Q_i f = \sum_n \varphi_{i,n} c_i(n) + \sum_n \psi_{i,n} d_i(n) \quad (3.12)$$

$$c_i(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k p(k-2n) c_{i-1}(k)$$

$$d_i(n) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_k q(k-2n) c_{i-1}(k)$$

En esta descomposición en Series wavelet, la función de escala y las bases wavelet son continuas, mientras que los coeficientes de aproximación $c_i(n)$ y los coeficientes wavelet $d_i(n)$ son discretos (Sheng, 1996).

Con la implementación recursiva de filtros pasa altas y pasa bajas es posible desarrollar los coeficientes $c_i(n), d_i(n)$; el algoritmo que realiza esta operaciones es conocido como algoritmo de Mallat (Sheng, 1996).

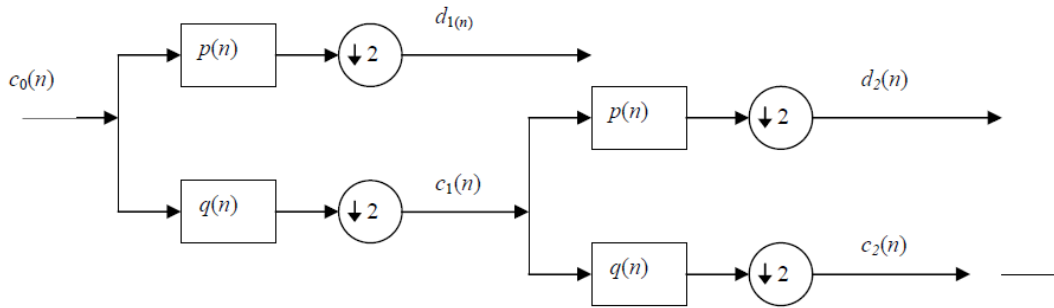


Figura 3.2 Esquema de la descomposición en series wavelet.

3.8 Momentos de Desvanecimiento

El concepto de momentos de desvanecimiento es un parámetro que nos permite conocer la forma de la wavelet (suavidad); el orden de la transformada wavelet está dado por el número de momentos de desvanecimiento que existan. El i -ésimo momento se calcula como (Vetterli y Kovačević, 1995):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)t^n dt = 0 \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (3.13),$$

El mayor orden que puede alcanzar $\psi(t)$ es N , el primer momento es con N igual a cero

3.9 Wavelet Morlet

El ejemplo clásico de una wavelet de tiempo continuo es la wavelet Morlet, definido como una onda senoidal compleja que contiene una envolvente gaussiana:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2jw_0 t} e^{-t^2/2} \quad (3.14)$$

$$\Psi(w) = e^{-(w-w_0)^2/2}.$$

El factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ se utiliza para que la función cumpla con $|\psi(t)|=1$; en otra parte, la frecuencia central w_0 , se sustituye por el segundo máximo del conjunto $\psi(t)$, esto se debe a que el primero no cumple con la condición de admisibilidad, al utilizar una escala diádica tenemos como frecuencia central:

$$w_0 = \pi \sqrt{\frac{2}{\ln 2}} = 5.336$$

Con esto notamos que la wavelet no es admisible para $\Psi(w)|_{w=0} \neq 0$ (Vetterli y Kovačević, 1995).

La wavelet madre Morlet la utilizamos en el presente trabajo porque consideramos que entrega buenas características sobre la oscilación de los periodos en la señal de RCG; a diferencia de un wavelet madre tipo Haar que describe cambios bruscos adecuada para discontinuidades.

3.10 Espectro de Potencia Wavelet

La transformada wavelet puede contener una parte real y otra imaginaria (Wavelet Morlet), de la misma forma que se realiza en la transformada de Fourier, podemos definir una amplitud y una fase; la potencia se define como el cuadrado del valor absoluto de la transformada wavelet:

$$P = |W_f(s, \tau)|^2.$$

La normalización de la función wavelet madre en cada escala nos dice que su integral de la misma función madre elevada al cuadrado es uno, de ésta forma, en cada escala la energía es unitaria y además nos brinda la oportunidad de comparar wavelets madre distintas.

El interés de nuestro análisis se enfoca a la distribución temporal de la potencia espectral. Con un análisis cualitativo describiremos la distribución de potencia en la señal de RCG, la imagen de salida es en realidad un arreglo marcial de valores complejos que analizaremos en un capítulo posterior cuantitativamente por medio del *Análisis de Componentes Principales*.

El Espectro Global Wavelet (EGW) es el promedio en cada nivel de resolución, el espectro teórico utilizado es el ruido rojo por ajustarse a los cambios continuos de frecuencia en la señal (Torrence y Compo, 1998)

3.11 Cono de Influencia y Niveles de Significancia

Es la región donde los efectos de borde llegan a ser importantes (Torrence y Compo, 1998), estos efectos se presentan por tener la consideración en la transformada de Fourier de que las señales son cíclicas; para disminuir esto se rellena con ceros los bordes de la señal hasta la siguiente potencia de dos para después removerse; la implementación de los ceros produce discontinuidades generando errores en los extremos de la señal, de igual manera la potencia wavelet al inicio y al final de los bordes decae por un factor de e^{-2} (Torrence y Compo, 1998), por lo tanto la información fuera de esta región no es clara para la interpretación.

Si asumimos que la serie de tiempo tiene un espectro de potencia promedio (respecto al espectro de Fourier de ruido rojo), un pico en el espectro de potencia wavelet superior al espectro anterior lo asumimos como característica verdadera con cierto porcentaje de confianza (o cierto nivel de significancia).

La confiabilidad dentro del cono de influencia y en el espectro Global Wavelet se encuentra definido con el 95% de confianza.