



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**CONTROL DE MODOS DESLIZANTES EN UN
MOTOR DE CORRIENTE DIRECTA.**

**T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TIULO DE:
INGENIERO ELECTRICO – ELECTRONICO
P R E S E N T A :
JOSE LUIS MATA LEDESMA**



ASESOR: DR. LEONID FRIDMAN

CIUDAD UNIVERSITARIA

2005

Agradecimientos:

A Dios por que me ha permitido vivir este gran sueño que es la vida, por su amor y bondad inmerecida de tenerla, gracias Dios por todo y todo.

A ti madrecita que siempre has estado conmigo, tu paciencia, tu bondad, tu amor y el ser simplemente tú, me han hecho un hombre gracias Mama...

A la *U.N.A.M.* como no te voy a querer..., aquí se forjan los grandes mexicanos.

Al Dr. Leonid Fridman Goldreich y al Ing. Rafael Iriarte, por su infinita paciencia, amabilidad y facilidades prestadas para este trabajo.

Al M.C. Alberto Sánchez Moreno, como agradecerte el amor a la ciencia que me enseñaste por siempre "maestro".

A mis amigos y compañeros del grupo de control de modos deslizantes, que siempre me motivaron y no me dejaron renunciar; ahora siguen ustedes, gracias Abel, Vidal, Jorge, Alejandro y Ariatne.

Dedicatorias:

A mis sobrinos: Bere, Uri y Tuty, espero que algún día puedan ver la tesis de su tío, aquí donde yo estudie.

A mi amigo, Adolfo, tu lo sabes bien siempre seremos amigos....

A mi hermano, Toño, espero que esto ya no sea puro cuento de Walt Disney....

A todos mis amigos y compañeros que disfrutamos y vivimos este bello sueño de ser un estudiante de esta gran *Facultad*...

A ti que siempre estuviste conmigo siempre y por siempre desde el día que nací, y desde el día que naciste; lo conozco, lo he vivido, como lo podré olvidar, es un bello recuerdo, ...gracias al amor ...*Tu no dices mas*...

En memoria:

De mi Abuelita, Fabiana, de seguro estarías muy orgullosa de mí, gracias Abue...

De todos aquellos que alguna vez caminamos juntos en la vida, es un poquito de mí para ustedes, gracias a todos, gracias Dios por permitirme cumplir este sueño....

Dios nos bendiga siempre.....

Me siento vivo.....10/05/05

Índice general

Introducción:

| | |
|--|----|
| Presentación. | iv |
| Motivación. | v |
| Formulación del problema y contribuciones. | v |
| Objetivo general. | vi |
| Objetivos específicos. | vi |
| Contenido de la tesis. | vi |

| | |
|---|----------|
| Capítulo 1 Teorías de control clásicas. | 1 |
| 1.0.- Introducción. | 2 |
| 1.1.- Sistemas de control en lazo cerrado. | 2 |
| 1.2.- Modelado de sistemas físicos. | 3 |
| 1.2.1.- Función de transferencia. | 3 |
| 1.3.- Sistemas de primer orden. | 4 |
| 1.4.- Sistemas de segundo orden. | 5 |
| 1.5.- Respuesta en la frecuencia de funciones de transferencia. | 8 |
| 1.6.- Variables de estado. | 10 |
| 1.7.- Técnica de control proporcional integral derivativo <i>PID</i> . | 11 |
| 1.7.1.- Control proporcional <i>P</i> . | 12 |
| 1.7.2.- Control integral <i>I</i> . | 12 |
| 1.7.3.- Control proporcional integral <i>PI</i> . | 13 |
| 1.7.4.- Control proporcional derivativo <i>PD</i> . | 14 |
| 1.7.5.- Control proporcional integral derivativo <i>PID</i> . | 15 |
| 1.7.6.- Control proporcional integral derivativo <i>PID</i> en tiempo discreto. | 16 |
| 1.7.7.- Reglas de sintonización en controladores <i>PID</i> . | 18 |
| 1.8.- Modelos de sistemas no lineales. | 20 |
| 1.8.1.- Características no lineales. | 21 |
| 1.8.2.- Plano de fase. | 23 |

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 2 Modelo de un motor de corriente directa. | 25 |
| 2.0.- Introducción. | 26 |
| 2.1.- Principio de operación de la maquina de corriente directa. | 26 |
| 2.1.1.- Descripción del funcionamiento de un motor de corriente directa. | 27 |
| 2.1.2.- Modelo de los parámetros mecánicos del motor. | 28 |
| 2.2.- Formas de Operación de un motor de corriente directa. | 29 |
| 2.2.1.- Motor con conexión en derivación. | 30 |
| 2.2.2.- Motor con conexión en serie. | 31 |
| 2.2.3.- Motor con conexión compuesta. | 33 |
| 2.2.3.1.- Motor compuesto con conexión en derivación corta. | 33 |
| 2.2.3.2.- Motor compuesto con conexión en derivación larga. | 34 |
| 2.2.4.- Motor compuesto con conexión en excitación independiente. | 36 |
| 2.2.4.1.- Motor con excitación independiente controlado por armadura. | 36 |
| 2.2.4.2.- Motor con excitación Independiente controlado por campo. | 40 |
| 2.3.- Métodos de identificación de parámetros. | 41 |
| 2.4.- Determinación de el modelo matemático para el modulo <i>TY36A</i> . | 44 |
| 2.4.1.- Procedimiento experimental. | 45 |
| 2.5.- Resultados experimentales. | 48 |
| 2.5.1.- Análisis de resultados. | 48 |

Índice General

| | |
|---|-----|
| Capítulo 3 Control de modos deslizantes | 51 |
| 3.0.- Introducción. | 52 |
| 3.1.- Sistemas de control de estructura variable y modos deslizantes. | 52 |
| 3.2.- Propiedades de los modos deslizantes. | 57 |
| 3.3.- Formulación matemática de los modos deslizantes. | 58 |
| 3.3.1.- Regularización. | 59 |
| 3.3.2.- Método del control equivalente. | 65 |
| 3.3.3.- Condiciones de existencia de los modos deslizantes. | 67 |
| 3.4.- Conceptos de diseño. | 69 |
| 3.4.1.- Desacoplamiento. | 70 |
| 3.4.2.- Forma regular. | 71 |
| 3.4.3.- Invarianza respecto a perturbaciones. | 73 |
| 3.5.- Introducción al control de modos deslizante de orden superior. | 74 |
| 3.5.1.- Algoritmo de control <i>twisting</i> . | 76 |
| | |
| Capítulo 4 Simulaciones | 80 |
| 4.0.- Introducción. | 81 |
| 4.1.- Verificación del modelo experimental. | 81 |
| 4.2.- Sintonización de <i>Ziegler-Nichols</i> para el motor caracterizado. | 83 |
| 4.3.- Control de velocidad del motor empleando modos deslizantes. | 85 |
| 4.3.1.- Control de corriente. | 86 |
| 4.3.2.- Control de velocidad. | 87 |
| 4.4.- Estructura integrada para el control de velocidad. | 90 |
| 4.5.- Control de velocidad con modelo de orden reducido. | 95 |
| 4.6.- Control de velocidad empleando el algoritmo <i>twisting</i> . | 98 |
| | |
| Capítulo 5 Conclusiones | 107 |
| 5.1.- Tabla de resultados. | 108 |
| 5.2.- Análisis de las simulaciones. | 108 |
| 5.3.- Aportaciones para trabajos futuros. | 111 |
| | |
| Apéndice A Conceptos de control | 112 |
| A.1.- Solución de la ecuación en variables de estado. | 113 |
| A.2.- Relación entre variables de estado y la función de transferencia. | 115 |
| A.3.- Transformación del plano 's' al plano 'z'. | 115 |
| A.4.- Método isoclino. | 118 |
| A.5.- Representación en el plano de fase de sistemas de segundo orden. | 119 |
| A.6.- Controlabilidad y observabilidad. | 123 |
| A.7.- Criterios de estabilidad. | 125 |
| | |
| Apéndice B Tablas de datos experimentales y programas | 129 |
| B.1.- Tabla de datos del motor <i>TY36A</i> de <i>Electrónica Venneta</i> . | 130 |
| B.2.- Tabla de resultados experimentales de la respuesta escalón. | 131 |
| B.3.- Programa para graficar las respuestas escalón de forma experimental. | 132 |
| B.4.- Programa de respuesta escalón de $3[V]$ para los diferentes modelos. | 132 |
| B.5.- Programa del control <i>PID</i> y respuesta en lazo abierto. | 133 |
| | |
| Bibliografía. | 134 |

Introducción

Presentación:

Dado que el control automático aporta los medios para conseguir un comportamiento óptimo de los sistemas dinámicos, mejorar la productividad, simplificar el trabajo de operaciones manuales repetitivas y rutinarias se han logrado grandes avances de la teoría y práctica del control automático. Tal como aquel primer logro significativo en el control automático que fue el regulador de velocidad centrífuga de *James Watt*, para el control de velocidad de su máquina de vapor en el siglo *XVIII*. *Minorsky*, *Hazen* y *Nyquist* entre otros aportaron trabajos importantes en las etapas iniciales del desarrollo del control. En 1922 *Minorsky* trabajó en controladores automáticos para el guiado de embarcaciones, y mostró que la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932 *Nyquist* diseñó un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado, a partir de la respuesta en lazo abierto a entradas senoidales en estado estacionario. En 1934 *Hazen* quien introdujo el término servomecanismo para los sistemas de control de posición, analizó el diseño de los servomecanismos con relevador capaces de seguir con precisión una entrada cambiante. En la década de los cuarenta, los métodos de la respuesta en frecuencia (*especialmente los diagramas de Bode*) hicieron posible que los ingenieros diseñaran sistemas de control lineales en lazo cerrado que cumplieran los requisitos de comportamiento. A finales de la década de los cuarenta y principios de la década de los cincuenta, se desarrolló por completo el método del lugar de las raíces propuesto por *Evans*. Los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces los cuales forman el núcleo de la teoría clásica; conducen a sistemas estables que satisfacen un conjunto más ó menos arbitrario de requisitos de comportamiento. En general, estos sistemas son aceptables pero no óptimos desde ningún punto de vista. Desde el final de la década de los cincuenta, el énfasis en los problemas de diseño de control se ha desplazado del diseño de uno de los posibles sistemas que funcione adecuadamente al diseño óptimo respecto de algún criterio.

Conforme las plantas modernas con muchas entradas y salidas se vuelven más complejas, la descripción de un sistema de control moderno requiere de una gran cantidad de ecuaciones. La teoría de control clásica, que trata de los sistemas de una entrada y una salida, pierde su potencialidad cuando se trabaja con sistemas con entradas y salidas múltiples. Hacia la década de los sesenta debido a la disponibilidad de las computadoras digitales fue posible el análisis en el dominio del tiempo y la síntesis a partir de variables de estados; se ha desarrollado algoritmos y técnicas para manejar la precisión, peso y costo con aplicaciones militares, espaciales e industriales. Durante los años comprendidos entre 1960 y 1980, se investigó a fondo el control óptimo de sistemas determinísticos como estocásticos, así como el control adaptable y con aprendizaje de sistemas complejos; desde 1980 hasta la actualidad, los avances en la teoría de control moderna se centraron en el control robusto, control H_∞ y temas relacionados. Aunque las computadoras digitales se han hecho más baratas y compactas, se usan como parte integral de los sistemas de control. El control de modos deslizantes es una técnica desarrollada en la ex *Unión Soviética* e introducida al mundo occidental en 1977 por el *Dr. V. Utkin*, este tipo de control tiene la ventaja de ser robusto pudiendo aplicarse a sistemas no lineales siendo, en alguna medida insensible a la variación de los parámetros del sistema mecánico que se desee controlar, así como a las perturbaciones externas a las que pueda estar sujeto. Esta técnica ha tenido resultados satisfactorios al aplicarse en sistemas electromecánicos, en particular en motores eléctricos.

Introducción

En la formulación de cualquier problema de control habrá típicamente discrepancias entre la planta real y el modelo matemático para el diseño del controlador. Los ingenieros deben asegurarse de que el controlador resultante tenga la habilidad de producir los niveles de desempeño requeridos en la práctica sin importar la diferencia entre la planta y el modelo. Esto ha llevado a un fuerte interés en el desarrollo de métodos de control robusto. Una de las formas más efectivas de abordar el diseño de controladores robustos es el control con modos deslizantes *CMD*. La ley de control con modos deslizantes es una ley de control discontinuo que asegura la existencia de los movimientos deslizantes en la superficie de conmutación. Existen tres ventajas principales en este tipo de control; primeramente, la dinámica en malla cerrada es totalmente insensible a señales con incertidumbre a las que pudiera estar sujeto el sistema; en segundo lugar, el comportamiento de la dinámica del sistema puede ajustarse por la selección particular de la superficie de conmutación, y tercero, el problema del diseño de la superficie de conmutación es de un orden reducido. Actualmente los algoritmos de *CMD* se han convertido en uno de los algoritmos líderes en el control robusto.

Motivación:

La ingeniería de control es una disciplina que al igual que muchas otras, cambia y se mejora continuamente, la velocidad con la que cambia supera a los programas de los planes de estudio de las universidades, la ingeniería de control en la *U.N.A.M.* no escapa de este fenómeno, el análisis de las técnicas de control de modos deslizantes es una parte del estudio sobre el control moderno, el análisis e implementación de estas técnicas modernas para su estudio en sistemas clásicos de control, es una tarea exhaustiva y laboriosa, pero necesaria para darnos cuenta de los alcances que tienen estas técnicas de control moderno. El presente trabajo pretende establecer, desde un punto de vista académico, de investigación y con un enfoque orientado hacia el aprendizaje; un análisis comparativo, presentando ventajas y desventajas, complicaciones y simplificaciones entre la teoría de control tradicional *PID* y la teoría de control de modos deslizantes.

Formulación del problema y contribuciones:

El esquema de control *PID* basado en la teoría clásica, para un motor de corriente directa controlado por armadura, requiere el conocimiento del modelo matemático que represente la planta a controlar, además para establecer un control óptimo para dicho planta se emplea una parte de la teoría clásica el método de *Ziegler-Nichols*, el desempeño y eficiencia de dicho control puede ser bueno, pero en algunos servomecanismos necesitamos un control bastante robusto que garantice su estabilidad y mayor tiempo de respuesta, por tal motivo se realiza el análisis de una planta real a través de los algoritmos de modos deslizantes clásicos y de orden superior empleando simulaciones computacionales para su análisis; con lo cual podremos establecer una base teórica para una siguiente etapa del proyecto de investigación que consiste en la implementación del sistema a través de un sistema de procesamiento digital.

Objetivo general:

Obtener un modelo matemático de una planta real, *motor de corriente directa controlado por armadura*, realizar simulaciones con algoritmos de *CMD* y obtener una comparación con una técnica clásica, control *PID*.

Objetivos específicos.

- a) Obtener un modelo matemático de un motor de corriente directa.
- b) Comparar el modelo matemático experimental con el modelo teórico de dicho motor.
- c) Realizar simulaciones de dicho modelo matemático, con leyes de control clásicas *PID* de algoritmos en *CMD* clásicos y una ley en *CMD* de orden superior, conocido como el algoritmo *twisting*.
- d) Realizar una tabla de comparaciones con los resultados de las simulaciones para establecer resultados que se deberán obtener en una implementación real.

Contenido de la tesis:

La presente tesis se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo se tiene un estudio, de la técnica de control *PID* y su reglas de sintonización a través de las formulaciones de *Ziegler-Nichols*, se hace una revisión de los tipos de sistemas y las formas de representación de los sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, así como sus respuestas en la variable tiempo, se hace una introducción del control no lineal y la representación en el plano de fase. En el capítulo dos se realiza un estudio del motor de corriente directa, su funcionamiento, descripción, formas de conexión y características principales, se hace una revisión de los métodos de identificación de parámetros y su clasificación, se determina de forma experimental con la respuesta al escalón un modelo matemático para el modulo de laboratorio *TY36A* motor de corriente directa controlado por armadura. En el capítulo tres se examina el control de modos deslizantes se explican conceptos como sistemas de estructura variable, las propiedades de los modos deslizantes, se realiza un desarrollo matemático explicando las propiedades de los modos deslizantes, se realiza una introducción a los modos deslizantes de orden superior y su formulación matemática, se explica el algoritmo de control *twisting* incluyendo la demostración de su convergencia y robustez. En el capítulo cuatro se realizan simulaciones para nuestro motor de corriente directa a través de la herramienta de *Matlab* conocida como *simulink*; estas simulaciones desarrollan técnicas de control *PID* empleando las reglas de sintonización de *Ziegler-Nichols*, se realizan simulaciones del control de modos deslizantes, empleando una estructura en cascada, una estructura integrada, un modelo reduciendo el orden de la planta y por ultimo una simulación empleando el algoritmo de orden superior *twisting*, para controlar la velocidad de salida. El capítulo cinco muestra los resultado de las simulaciones a través de una tabla comparativa, donde se muestran datos como sobrepaso, tiempos donde se alcanza la estabilidad y las variables que intervienen, se dan las conclusiones respecto al análisis de los algoritmos de modos deslizantes y el control clásico *PID*. En el apéndice *A* se explican los planes de fase para sistemas de segundo orden, conceptos de observabilidad y controlabilidad, además de un análisis de estabilidad desde el punto de vista clásico y de *Lyapunov*, en el apéndice *B* se añaden las tablas de datos tomados en el laboratorio de control de la *Facultad de Ingeniería*, el análisis de unidades, tablas de datos del fabricante y se anexan algunos programas que se emplearon para simular las respuestas de la planta en el control *PID*.

Capítulo 1

“Teorías de control clásicas”

Objetivos:

- Revisar el concepto de sistemas de control en lazo cerrado.
- Analizar la representación matemática de sistemas físicos en función de transferencia y en variables de estado.
- Analizar la técnica de control *PID* y las reglas de sintonización de *Ziegler-Nichols*.
- Describir las características de los sistemas no lineales.
- Analizar la representación de sistemas en el plano de fase.

Palabras y conceptos clave:

- Sistema de control.
- Función de transferencia.
- Variables de estado.
- Control *PID*.
- Sistema no lineal.

1.0.- Introducción.

Un sistema de control automático compara el valor efectivo de salida de una planta con el valor deseado, determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor final pequeño, la forma en que el control automático produce la señal de control recibe el nombre de acción de control. La mayoría de los controles automáticos usan como fuente de potencia la electricidad o un fluido a presión que puede ser aceite o aire. También pueden clasificarse los controles automáticos según su tipo de energía usada en su funcionamiento en: controles neumáticos, controles hidráulicos y controles eléctricos. El tipo de control a usar depende de la naturaleza de la planta y sus condiciones de funcionamiento, inclusive consideraciones de seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, precisión, peso, tamaño y otros factores.

En este capítulo se introducen conceptos, tales como malla cerrada, controlador *PID*, variables de estado, respuesta de sistemas lineales, y su representación en el plano de fase, con el fin de obtener las ideas básicas de control necesarias para el motor de corriente directa a analizar.

1.1.-Sistemas de control en lazo cerrado.

Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de control en lazo cerrado. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado el controlador se alimenta con la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación, la cual puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas o integrales; con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control para reducir el error del sistema.

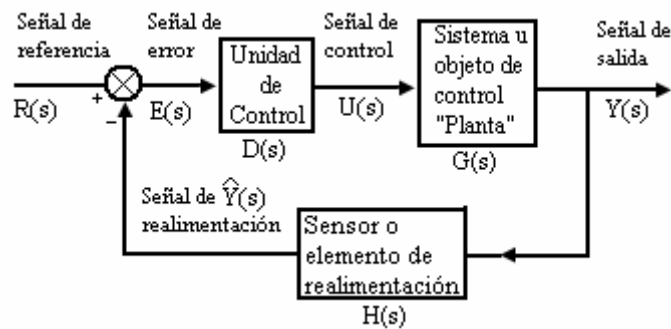


Figura (1.1) Diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado.

De la *figura (1.1)* tenemos que la planta $G(s)$ así como los elementos de medición de un sistema $H(s)$ son fijos, es decir, no se pueden alterar para ejecutar la acción de control, solo nos queda modificar la manera en que manipulamos las señales dentro del lazo. En la figura se muestra las diferentes señales que son empleadas para fines de control; primeramente esta una señal de referencia $R(s)$, la cual es la excitación necesaria para que el sistema trabaje, seguida de la señal de error $E(s)$, que es la diferencia entre el valor de operación deseado $R(s)$ y el estado real de la salida $\hat{Y}(s)$ y por ultimo la señal de control $U(s)$ que es aquella que le indica a los elementos finales de control la forma en que deben actuar. De la *figura (1.1)* se ha incluido un bloque adicional $D(s)$ que sirve como el elemento de decisión o controlador, que no fue determinado en el proceso de modelado, y que puede tomar diversas formas.

1.2.- Modelado de sistemas físicos.

Un requisito básico en el desarrollo de la mayoría de las estrategias de control es la obtención de un modelo matemático para la planta. El proceso de diseño se continúa normalmente con el desarrollo de un modelo del sistema completo que también incluye los dispositivos del controlador y de potencia. Aunque el controlador puede implementarse como un sistema continuo o discreto, la planta es con frecuencia un sistema continuo. Así todo el sistema o una parte crítica requiere la aplicación de un modelo continuo. Como la parte continua de un sistema normalmente incluye elementos que almacenan energía, el modelo debe reflejar de forma precisa las características de comportamiento estático y dinámico de un sistema dinámico continuo. La construcción del modelo matemático a partir de un modelo determinado puede ser relativamente sencilla. Esto se debe a que el comportamiento de los componentes de la mayoría de los sistemas de ingeniería, se rigen por las leyes naturales; en general la mayoría de los enfoques de modelado pertenecen a unos de dos grupos de métodos; los que se basan en consideración formales de causa y efectos físicos en los componentes de los sistemas, y los que consideran otros fenómenos. En el segundo grupo se encuentran los métodos de equilibrio de energía (*Lagrange*), basados en la ley de conservación de la energía.

1.2.1. Función de transferencia.

El modelo matemático de un sistema lineal puede incluir cualquier orden de derivada de la excitación o respuesta incluyendo términos de orden cero, pero los términos aparecen como una combinación lineal de las derivadas de excitación y de la respuesta. Si una ecuación diferencial lineal se expresa en términos de una única variable $y(t)$ con una única excitación $x(t)$ tenemos.

$$a_0 y + a_1 \dot{y} + \dots + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_n y^{(n)} = a_0 x + b_1 \dot{x} + \dots + b_{m-1} x^{(m-1)} + b_m x^{(m)} \quad (1.1)$$

$(n \geq m)$

La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada de *Laplace* de la salida y la transformada de *Laplace* de la entrada, cuando todas las condiciones iniciales son cero.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.2)$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en ‘s’. Si la potencia mas alta en ‘s’ en el denominador de la función de transferencia es igual a n , el sistema se denomina sistema de n -ésimo orden. De la misma forma como se puede tener una representación de una función de transferencia en un dominio continuo, es posible realizar una representación en tiempo discreto empleando una representación de un modelo matemático de un sistema lineal a través de ecuaciones en diferencias.

$$a_p y(k) + a_{p-1} y(k-1) + \dots + a_0 y(k-n) = b_q x(k) + b_{q-1} x(k-1) + \dots + b_0 x(k-m) \quad (1.3)$$

La función de transferencia de este sistema es el cociente de la transformada ‘z’ de la salida y la transformada ‘z’ de la entrada cuando todas las condiciones iniciales son cero.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_q + b_{q-1}z^{-1} + \dots + b_0z^{-m}}{a_p + a_{p-1}z^{-1} + \dots + a_0z^{-n}} \quad (1.4)$$

La relación que existe entre la transformada de Laplace y la transformada ‘z’ es la siguiente donde T es el periodo de muestreo para la función discreta ⁽¹⁾.

$$z = e^{sT} \quad (1.5)$$

1.3- Sistemas de primer orden.

Un sistema en lazo cerrado de primer orden esta descrito por un polo localizado en $s=-1/T$, tal como se muestra en la figura (1.2), la correspondiente función de transferencia es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{sT + 1} = \frac{1/T}{s + 1/T} \quad (1.6)$$

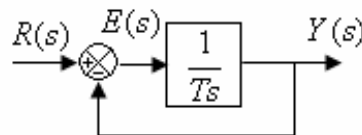


Figura (1.2) Diagrama de bloques de un sistema de primer orden.

Si $r(t)$ es una función escalón unitario tendremos que la salida esta dada por:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(Ts + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (1.7)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación (1.7) se tiene.

$$y(t) = 1 - e^{-t/T}; t \geq 0 \quad (1.8)$$

La ecuación plantea que la salida $y(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria, una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $y(t)$ es que para $t=T$, el valor de $y(t)$ es 0.632 o que la respuesta $y(t)$ alcanzo el 63.2% de su cambio total. Esto se aprecia con facilidad sustituyendo $t=T$ en $y(t)$, tal como se observa en la figura (1.3).

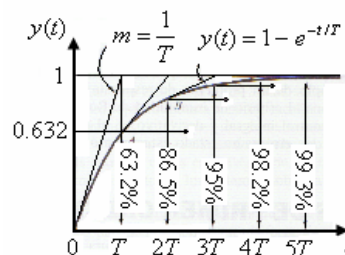


Figura (1.3) Respuesta escalón para un sistema de primer orden.

(1) En el apéndice (A.3) se muestra la transformación del plano ‘s’ al plano ‘z’.

Conforme es más pequeña la constante de tiempo T , mas rápida es la respuesta del sistema. Otra característica importante de la curva de respuesta exponencial es que la pendiente de la línea tangente en $t=0$ es $1/T$, ya que.

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (1.9)$$

La salida alcanzara el valor final en $t=T$, si mantuviera su velocidad de respuesta inicial a partir de la ecuación (1.9), se observa que la pendiente de la curva de respuesta $y(t)$ disminuye de forma monótona de $1/T$ en $t=0$ a cero en $t=\infty$. El tiempo de asentamiento, t_s se define como el tiempo que se requiere para que se asiente la respuesta a un escalón en un porcentaje específico normalmente entre el 2% y 5% del valor final. Por lo que el tiempo de asentamiento para una respuesta escalón al 2% requiere de 4 constantes de tiempo T y para un 5% requiere de 3 constantes de tiempo T .

Para otras entradas tales como la rampa e impulso la respuesta en el tiempo esta dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} y(t) &= t - T + Te^{-t/T}; t \geq 0 && \text{Rampa} \\ y(t) &= 1 - e^{-t/T}; t \geq 0 && \text{Escalón} \\ y(t) &= \frac{1}{T} e^{-t/T}; t \geq 0 && \text{Impulso} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Una comparación de las respuestas del sistema para estas tres entradas indica que la respuesta a la derivada de una señal de entrada se obtiene diferenciando la respuesta del sistema para la señal original. Esta es una propiedad de los sistemas lineales en el tiempo.

1.4- Sistemas de segundo orden.

Un sistema en lazo cerrado de segundo orden tiene la siguiente estructura en un diagrama de bloques, tal como se muestra en la figura (1.4).

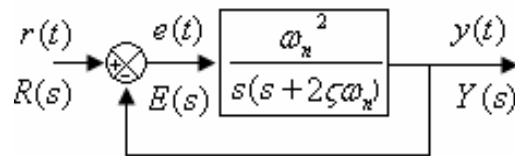


Figura (1.4) Sistema de segundo orden con realimentación unitaria.

Donde su función de transferencia para una entrada escalón unitario tiene la siguiente forma.

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (1.9)$$

De la solución de la ecuación de segundo orden y definiendo los siguientes parámetros tenemos:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\alpha \pm j\omega_d \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \zeta\omega_n \\ \omega_d &= \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Gráficamente podemos representar estos términos en el plano complejo ‘s’, donde se colocan geoméricamente las raíces de la ecuación (1.10).

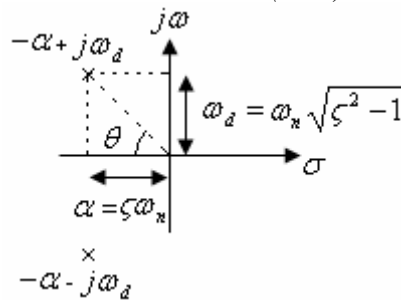


Figura (1.5) Representación de las raíces de la ecuación (1.9) en el plano ‘s’.

- ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema.
- α es el factor de amortiguamiento del sistema.
- ω_d es la frecuencia natural de oscilación del sistema.
- ζ es el factor de amortiguamiento relativo del sistema.

El comportamiento del sistema de segundo orden se puede describir en términos de los parámetros ζ y ω_n ; a continuación se muestran los casos posibles que pueden ocurrir de acuerdo a estos parámetros.

- **Subamortiguado;** ($0 < \zeta < 1$). $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ ($-\zeta\omega < 0$)

Su correspondiente respuesta en el tiempo:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \right) \quad (1.12)$$

Su diagrama de polos y ceros así como su respuesta en el tiempo, se muestran en la figura (1.6).

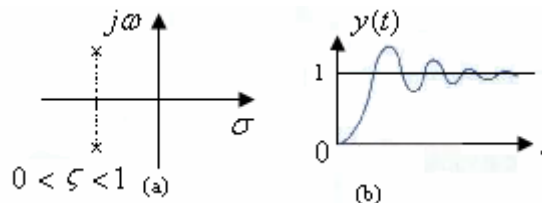


Figura (1.6) Sistema de segundo orden subamortiguado. a) Diagrama de polos y ceros del sistema. b) Respuesta en el tiempo.

- **Criticamente Amortiguado;** ($\zeta=1$). $s_{1,2} = -\omega_n$

Su correspondiente respuesta en el tiempo:

$$y(t) = 1 + e^{-\omega_n t} (\omega_n t - 1) \tag{1.13}$$

Su diagrama de polos y ceros así como su respuesta en el tiempo, se muestran en la *figura (1.7)*.

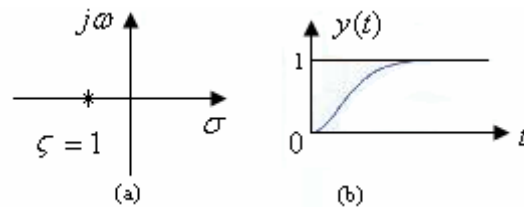


Figura (1.7) Sistema de segundo orden amortiguado. *a)* Diagrama de polos y ceros del sistema. *b)* Respuesta en el tiempo.

- **Sobreamortiguado;** ($\zeta > 1$). $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Su correspondiente respuesta en el tiempo:

$$y(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{-\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} - \frac{e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} \right) \tag{1.14}$$

Su diagrama de polos y ceros así como su respuesta en el tiempo, se muestran en la *figura (1.8)*.

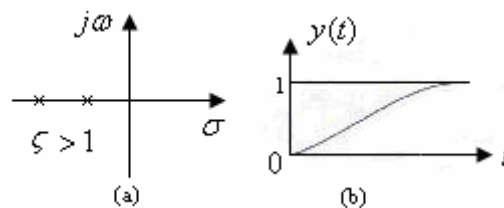


Figura (1.8) Sistema de segundo orden sobreamortiguado. *a)* Diagrama de polos y ceros del sistema. *b)* Respuesta en el tiempo.

- **No amortiguado;** ($\zeta=0$). $s_{1,2} = \pm j\omega_n$

Su correspondiente respuesta en el tiempo es:

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t) \tag{1.15}$$

Su diagrama de polos y ceros así como su respuesta en el tiempo, se muestran en la *figura (1.9)*.

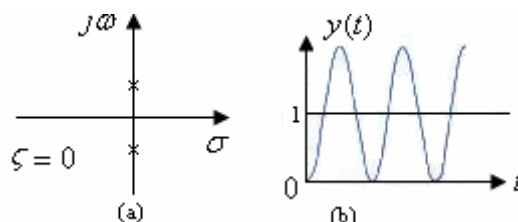


Figura (1.9) Sistema de segundo orden no amortiguado. *a)* Diagrama de Polos y ceros del sistema. *b)* Respuesta en el tiempo.

- **Negativamente Amortiguado;** ($\zeta < 0$). $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ($-\zeta\omega > 0$)

Su correspondiente respuesta en el tiempo es:

$$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right) \quad (1.16)$$

Su diagrama de polos y ceros así como su respuesta en el tiempo, se muestran en la *figura (1.10)*.

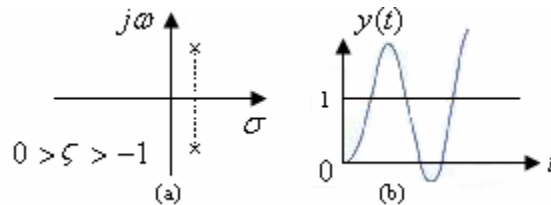


Figura (1.10) Sistema de segundo orden negativamente amortiguado. *a)* Diagrama de Polos y ceros del sistema. *b)* Respuesta en el tiempo.

El análisis de la respuesta de segundo orden se puede visualizar en la *figura (1.11)* la cual muestra la respuesta escalón para diferentes valores de ζ .

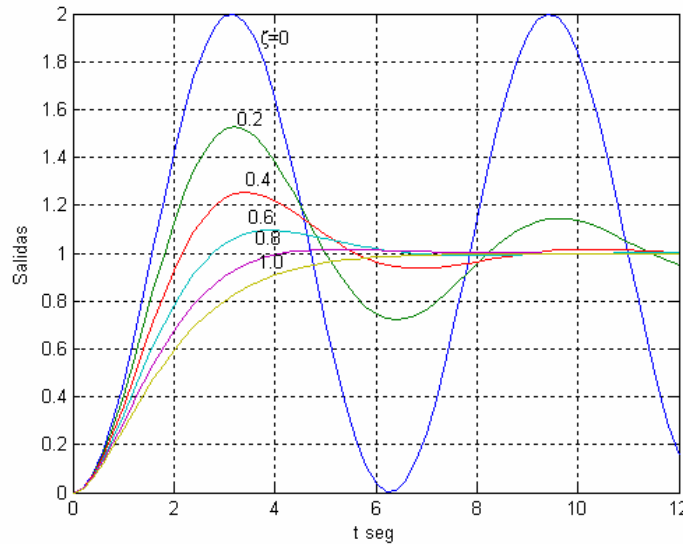


Figura (1.11) Curvas de comportamiento a una entrada escalón unitario de un sistema de segundo orden para diferente valores de ζ .

1.5.- Respuesta en la frecuencia de funciones de transferencia.

El análisis de la respuesta en frecuencia se emplea en la identificación y diseño de sistemas dinámicos, esto se basa en el hecho siguiente; si una señal senoidal de frecuencia ω_0 se aplica a un sistema continuo, lineal, invariante en el tiempo y estable, la respuesta es un transitorio mas una señal senoidal en régimen permanente, de la misma frecuencia de la entrada ω_0 . Las señales de entrada y de salida se pueden expresar como fasores y la función de transferencia en algebra fasorial se define como el fador de la salida dividido por el fador de entrada; la magnitud y el ángulo de esta razón se describen como la ganancia y desplazamiento de fase, respectivamente; si una función de transferencia en algebra de fasores describe la relación de fasores para todas

las frecuencias, la relación constituye una función de respuesta en frecuencia y la función contiene suficiente información para construir un modelo de sistema lineal.

Los modelos de *Laplace* y las del algebra de fasores presentan gran similitud. Los modelos de función de transferencia se pueden convertir de un método al otro simplemente sustituyendo ' $j\omega$ ' por ' s ', la posibilidad de intercambiar variables esta limitada a las funciones de transferencia.

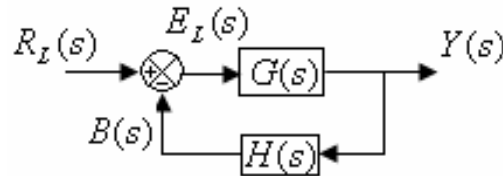


Figura (1.12) Sistema con un único lazo.

Si la descripción de un sistema se reduce a un único lazo como el mostrado en la figura (1.12) las funciones de transferencia para el camino directo y la realimentación se denotan como $G(j\omega)$ y $H(j\omega)$, respectivamente. La función de transferencia en lazo abierto es entonces $G(j\omega)H(j\omega)$. La magnitud de la función en lazo abierto es:

$$M(\omega) = \frac{\|B(j\omega)\|}{\|E_L(j\omega)\|} = \|G(j\omega)H(j\omega)\| \quad (1.17)$$

Y el ángulo de fase es:

$$\phi(\omega) = \angle B(j\omega) - \angle E_L(j\omega) = \angle [G(j\omega)H(j\omega)] \quad (1.18)$$

Empleando la notación fasorial.

$$G(j\omega)H(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (1.19)$$

Podemos decir exactamente lo mismo de la respuesta en frecuencia de un sistema discreto, lineal y estable. Si el sistema tiene una función de transferencia $M(z)$, definimos la magnitud y la fase de ' z ' tomando valores alrededor del círculo unitario $M(e^{j\omega T}) = M(\omega T)e^{j\phi(\omega T)}$. Si se le aplica al sistema discreto una senoide de amplitud unidad, en estado estacionario las muestras de la respuesta están en senoide de la misma frecuencia con amplitud $M(\omega_o T)$ y fase $\phi(\omega_o T)$. Entonces definimos la respuesta en frecuencia de un sistema discreto de función de transferencia $M(z)$ a senoides de frecuencia ω_o como $M(e^{j\omega_o T})$.

La función de transferencia senoidal, es una función compleja de la frecuencia ω , la cual se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro. En general se usan tres representaciones gráficas de las funciones de transferencia senoidales.

- 1.- El diagrama de *Bode* o diagrama logarítmico.
- 2.- El diagrama de *Nyquist* o diagrama polar.
- 3.- El diagrama de *Nichols* o diagrama de magnitud logarítmica contra la fase.

1.6 Variables de estado.

El estado de un sistema dinámico es el conjunto de variables más pequeño, de forma que el conocimiento de estas variables en $t=t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determinan completamente el comportamiento del sistema en cualquier instante $t \geq t_0$. Se denomina variables de estado al conjunto linealmente independiente de variables que se utilizan para especificar el estado de un sistema. Las variables de un sistema dinámico son las variables que constituyen el menor conjunto de variables que determinan el estado del sistema dinámico, si al menos se necesitan ‘ n ’ variables, entonces tales ‘ n ’ variables son un conjunto de variables de estado. Si se emplean ‘ n ’ variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces esas ‘ n ’ variables se pueden considerar como las ‘ n ’ componentes de un vector x . Este vector se denomina vector de estado, el cual determina el estado del sistema $x(t)$ en cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$. Para sistemas dinámicos continuos y de parámetros concentrados la representación matemática del estado del sistema se puede expresar mediante una ecuación diferencial matricial de primer orden de la forma:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.20}$$

Y las salidas del sistema, como una ecuación algebraica.

$$y(t) = g(x(t), u(t), t) \tag{1.21}$$

La representación matemática en el espacio de estados, para sistemas dinámicos, lineales, continuos y de parámetros concentrados e invariantes con el tiempo.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1.22}$$

Donde:

- $x(t)$: es el vector de estado del sistema y es de dimensión n .
- $u(t)$: es el vector de entradas aplicadas al sistema y es de dimensión r .
- $y(t)$: es el vector de salidas producidas por el sistema y es de dimensión m .
- A, B, C, D : son las matrices de coeficientes constantes y son de orden $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ y $m \times r$, respectivamente.

Se describe el espacio de estado como el espacio matemático de n -dimensión cuyas coordenadas son variables de estado ⁽²⁾.

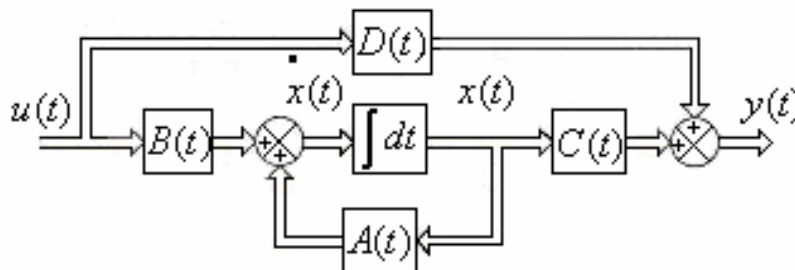


Figura (1.13) Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados.

(2) la solución de la ecuación de variables de estado se presenta en el apéndice (A.1)

En los sistemas dinámicos lineales en tiempo discreto el espacio de estados ‘ x ’ es un espacio vectorial de n dimensiones, la representación matemática de este tipo de sistemas muestreados es la siguiente.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \tag{1.23}$$

Donde:

- $x(k)$: es el vector de estado del sistema y es de dimensión n .
- $u(k)$: es el vector de entradas aplicadas al sistema y es de dimensión r .
- $y(k)$: es el vector de salidas producidas por el sistema y es de dimensión m .
- A, B, C, D : son las matrices de coeficientes constantes y son de orden $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$ y $m \times r$, respectivamente.

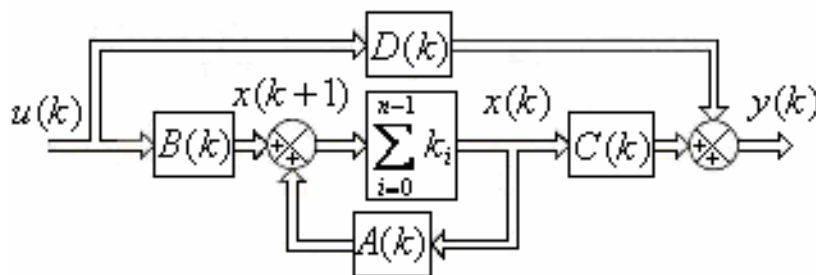


Figura (1.14) Diagrama de bloques del sistema de control lineal muestreado en el tiempo representado en el espacio de estados.

1.7.- Técnica de control proporcional integral derivativo *PID*.

La utilidad de los controladores *PID* esta en que se pueden aplicar en forma casi general a la mayoría de los sistemas de control. En particular, cuando el modelo matemático de la planta no se conoce y, por lo tanto, no se pueden emplear métodos de diseño analíticos. En el campo de los sistemas para control procesos, los esquemas de *PID* básicos y modificados han demostrado su utilidad para aportar un control satisfactorio, aunque tal vez en muchas situaciones específicas no aporten un control óptimo.

Para plantas lineales e invariantes en el tiempo se analizan las acciones de control que resultan de utilidad en el control; dado que la acción principal en el control realimentado es reducir la señal de error $e(t)$ a cero es decir:

$$e(t) = r(t) - \bar{y}(t) \tag{1.24}$$

Donde:

$r(t)$: es la señal de referencia o punto ajustable.

$\bar{y}(t)$: es el valor medido de la variable controlada.

Aunque en la ecuación (1.24) se indica que el punto de ajuste puede variar con el tiempo, en la mayoría de los problemas de control de procesos ésta se mantiene constante por periodos de tiempo muy prolongados.

1.7.1.- Control proporcional P.

Para un controlador con acción de control proporcional, la relación entre la entrada y la salida del controlador $u(t)$ y la señal de error $e(t)$ es:

$$u(t) = K_p e(t) \tag{1.25}$$

La figura (1.15) muestra el diagrama de bloque de la acción proporcional.

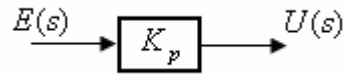


Figura (1.15) Diagrama de bloques de la acción de control de acción proporcional.

En términos del método de *Laplace*.

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \tag{1.26}$$

La ganancia del controlador K_p es ajustable y normalmente se sintoniza (*se ajusta*) después de que el controlador se ha instalado y se pone en servicio. Para controladores de propósito general, K_p es adimensional. Esta situación se presentara si u y e tienen las mismas unidades o se pueden expresar como números entre 0 y 100 lo cual es conveniente para un despliegue gráfico o para software de control por computadora. Algunos controladores, especialmente modelos antiguos, tienen un ajuste de banda proporcional en lugar de ganancia del controlador. La banda proporcional PB en porcentaje se define como:

$$PB = \frac{100\%}{K_p} \tag{1.27}$$

Esta definición es aplicable solo si K_p es adimensional. Una banda proporcional pequeña corresponde a una ganancia de controlador grande, mientras que un valor grande de PB implica un valor de K_p pequeño; se dice que el controlador se satura cuando la salida alcanza un límite físico, ya sea $p_{m\acute{a}x.}$ o $p_{m\acute{i}n.}$ Una desventaja inherente del control proporcional es su incapacidad para eliminar los errores en estado estable que se presentan después de un cambio en el punto de ajuste o una perturbación de carga sostenida; en principio, la diferencia de *offset* entre el punto de ajuste y la variable controlada se puede eliminar mediante el reajuste manual del punto de ajuste o la polarización después de que se presenta dicha diferencia; sin embargo este enfoque tiene el inconveniente de requerir la intervención del operador y el nuevo valor de este se debe encontrar normalmente a prueba y error.

1.7.2- Control integral I.

En un controlador con acción integral, el valor de la salida del controlador $u(t)$ se cambia a una razón proporcional a la señal de error $e(t)$, es decir:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \quad \text{o} \quad u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \tag{1.28}$$

Donde K_i es una constante ajustable. La función de transferencia del controlador integral es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (1.29)$$

El control integral introduce un polo en el origen del sistema.

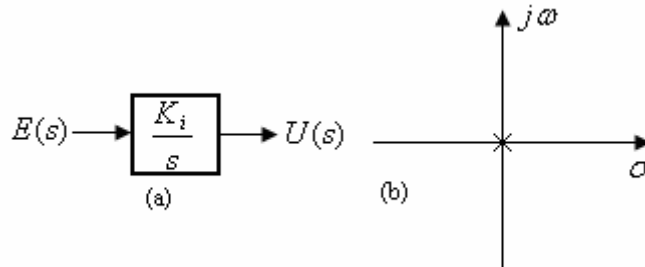


Figura (1.16) a) Diagrama de bloques de la acción de control integral I . b) Diagrama de polos y ceros del control I .

La acción integral se utiliza ampliamente debido a que proporciona una ventaja práctica importante, la eliminación del *offset*. Analizando la ecuación (1.28). Si el proceso está en su estado estable, entonces la señal de error $e(t)$ y la salida del controlador $u(t)$ son constantes, pero la ecuación (1.28) implica que $u(t)$ cambiara con el tiempo hasta que $e(t)=0$. De esta manera, cuando se emplea la acción integral, $u(t)$ alcanzara un valor que haga que el error en estado estable sea cero, después de que se presente un cambio en el punto de ajuste o una perturbación de carga sostenida. Esta situación deseable se presenta a menos que la salida del controlador o el elemento final de control se sature (*alcance un valor límite*) y se mantenga ahí, incapaz de traer de regreso la variable controlada al valor deseado del punto de ajuste. En este caso, la saturación persiste debido a que la perturbación o cambio en el punto de ajuste está más allá del rango de la variable manipulada. Mientras que la eliminación del *offset* es un objetivo importante de control, el controlador integral de la ecuación, rara vez se utiliza solo puesto la pequeña acción de control se presenta hasta que la señal de error se ha mantenido por algún tiempo. La acción del control integral introduce un polo en el origen al sistema de lazo abierto.

1.7.3- Control proporcional integral PI .

Un control proporcional más un integral PI introduce un polo y un cero en la función del camino directo, y una idealización sitúa el polo en el origen. Este controlador es aplicable a situaciones que requieren una mejora en el comportamiento en estado estacionario.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt \quad (1.30)$$

Obteniendo la transformada de *Laplace* con condiciones iniciales iguales a cero entonces la función de transferencia adoptará la siguiente forma:

$$u(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p(s + \alpha)}{s} \quad (1.31)$$

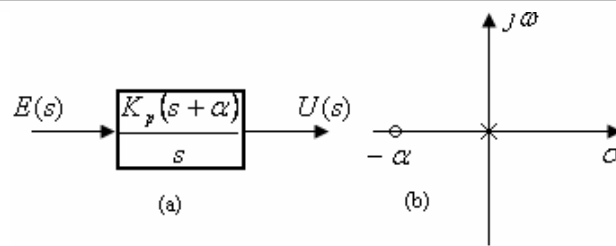


Figura (1.17) a) Diagrama de bloques de la acción de control proporcional integral *PI*.
 b) Diagrama de polos y ceros del control *PI*.

Donde $\alpha = K_i/K_p$. La expresión en términos de K_p y α es útil cuando se considera una variación en la ganancia con una localización del cero fijada, en esta situación K_i debe variar en proporción a K_p . La función del integrador aumenta el número de tipo introduciendo un polo en el origen del plano ‘s’, el aumento en el número de tipo viene acompañado por un aumento en el orden del sistema y un cambio en el carácter de la respuesta natural. Dependiendo de la función de la planta, la introducción de un polo en lazo abierto en el origen del plano ‘s’ puede introducir complicaciones no deseadas con respecto a la consecución del criterio del comportamiento deseado. Sin embargo la presencia del cero que le acompaña, es generalmente útil para mantener un comportamiento transitorio aceptable. Hay también ciertas situaciones en las que el controlador *PI* se puede utilizar para satisfacer las especificaciones en estado estacionario, de forma que auxilie en el problema de estabilidad.

1.7.4.- Control proporcional derivativo *PD*.

La acción de control derivativa es otra de las acciones de control cuyo uso es de utilidad en el control de sistemas, sin embargo, debe ir acompañada de otra de las acciones de control y no puede ser aplicada sola. La definición de este tipo de control indica que la señal de control $u(t)$ es proporcional a las variaciones de la señal de error. Una expresión que indica el comportamiento de este control en el dominio del tiempo es la siguiente.

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \tag{1.32}$$

En esta última ecuación se hace evidente que si la señal de error tiene un valor constante, el control adopta una actitud pasiva aún cuando el error sea diferente de cero. Por esta razón, la acción derivativa siempre va acompañada por la acción de control proporcional, integral o ambas. Una de las características más importantes y a la vez peligrosas del control derivativo es su efecto de anticipación. Suponiendo que se tiene un sistema que se encuentra en estado estacionario ⁽³⁾, si repentinamente se presenta una señal de error que varía rápidamente aunque de amplitud moderada, entonces la acción derivativa actuará tan severamente como rápido sea el cambio en la señal de error tratando de eliminarlo. Si además se conecta un control proporcional, el control proporcional actuaría moderadamente debido a la amplitud del error, mientras que un control puramente integral tardaría tiempo en enterarse de la presencia del error. Es por esta razón que a la acción derivativa se le conoce también como control de anticipación. Sin embargo, si la constante de acción derivativa K_d no se calcula adecuadamente, entonces la magnitud de la señal de control será de tal amplitud que puede llevar a saturación al elemento final de control e incluso dañarlo.

(3) Por estado estacionario se entiende que el sistema está en equilibrio, es decir, que la entrada $r(t)$ y la salida $c(t)$ son iguales, por consiguiente, el error es cero y la acción de control no cambia.

La representación en el tiempo de este tipo de control es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \tag{1.33}$$

Y la función de transferencia:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s \tag{1.34}$$

Donde:

K_p es la constante de acción proporcional.

K_d es la constante de acción derivativa.

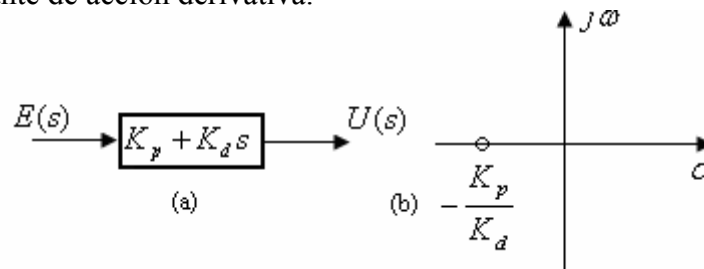


Figura (1.18) a) Diagrama de bloques de la acción de control proporcional derivativa PD. b) Diagrama de polos y ceros del control PD.

Si analizamos un poco la función de transferencia del control PD ecuación (1.33) observamos que este introduce un cero en $s = -K_p/K_d$. El cero del control PD por lo general se ubica sobre un polo indeseado de lazo abierto y tiende a modificar considerablemente el comportamiento del sistema hablando en términos de la estabilidad, velocidad y exactitud del mismo. Este tipo de control es muy severo, por lo tanto, cuando se usa es conveniente complementar la acción de control con un controlador PI para satisfacer adecuadamente las especificaciones de error.

En el párrafo anterior, cuando se dice que el control PD es severo, se refiere a que si se sustituye el control PD para obtener una nueva función de transferencia de lazo abierto $D(s)G(s)H(s)$ donde $D(s)$ es el control PD, $G(s)$ es la planta y $H(s)$ es la retroalimentación a través de los elementos de medición de la salida de la planta. Así la ecuación característica de lazo cerrado $1 + D(s)G(s)H(s) = 0$ es el conjunto de todas las posibles soluciones de la misma cambiará considerablemente respecto a las soluciones de la ecuación característica sin el control incluido $1 + G(s)H(s) = 0$.

1.7.5.- Control proporcional integral derivativo PID.

La ecuación de este controlador es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int_0^t e(t) dt \tag{1.35}$$

Y la función de transferencia es:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s + K_i \frac{1}{s} \tag{1.36}$$

La solución de la de la ecuación (1.36), ubica los ceros que introduce el control.

$$s = -\frac{K_p}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{K_p^2 - 4K_d K_i} \tag{1.37}$$

Si se analiza la ubicación de los ceros del control *PID* se observa que cuando la constante de acción derivativa se ajusta a cero, se tiene un control *PI* como el de la ecuación (1.31). El hecho de que el control *PID* introduzca dos ceros en la función de transferencia de lazo abierto tiene como consecuencia que se alteren totalmente las trayectorias que siguen las soluciones de la ecuación característica $1+D(s)G(s)H(s)=0$ respecto a las que seguían en la ecuación característica del sistema original $1+G(s)H(s)=0$. Generalmente el valor de las constantes de acción integral K_i y derivativa K_d es pequeño en comparación con la constante de acción proporcional K_p . La figura (1.19), muestra el patrón de distribución de los ceros (*la ubicación de los ceros del control PID se encuentra sobre el eje real*) y el polo que introduce el control *PID* donde s_1 y s_2 están dados por la ecuación (1.37).

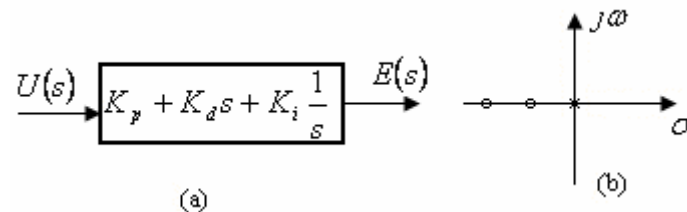


Figura (1.19) a) Diagrama de bloques de la acción de control proporcional integral derivativa *PID*. b) Diagrama de polos y ceros del control *PID*.

1.7.6.- Control proporcional integral derivativo *PID* en tiempo discreto.

Al considerar el algoritmo *PID* en tiempo continuo y donde $M(s)$ y $E(s)$ son, respectivamente, la variable manipulada y de error.

$$\frac{M(s)}{E(s)} = G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \tag{1.38}$$

El modelo de tiempo continuo para esta ley es:

$$m(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(t) + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right] + m(0) \tag{1.39}$$

Para obtener una integración digitalmente, empleamos la técnica de integración trapezoidal, tal como se muestra en la figura (1.20).

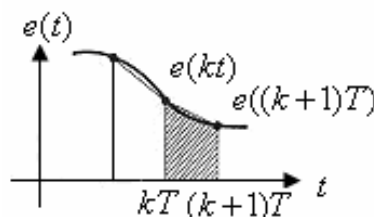


Figura (1.20) Regla trapezoidal para la integración numérica.

Sea $m(kT)$ la integral de $e(t)$. Entonces según la *figura (1.20)*, el valor de la integral para $t = (k+1)T$ es igual al valor de kT más el área añadida desde kT hasta $(k+1)T$, por lo que:

$$m[(k+1)T] = m(kT) + \frac{T}{2} \{e[(k+1)T] + e(kT)\} \quad (1.40)$$

Tomando la transformada ‘z’, obtenemos:

$$zM(z) = M(z) + \frac{T}{2} [zE(z) + E(z)] \quad (1.41)$$

Por lo que:

$$\frac{M(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \left[\frac{z+1}{z-1} \right]$$

Dado que las funciones de transferencia en control se obtienen de las ecuaciones diferenciales, lo inverso a la integración por lo que la función de transferencia final es:

$$H_T(z) = \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} \right] \quad (1.42)$$

Esta última expresión es la función de transferencia de un integrador discreto. Para diferenciar digitalmente una función $e(t)$; la *figura (1.21)* ilustra un método.

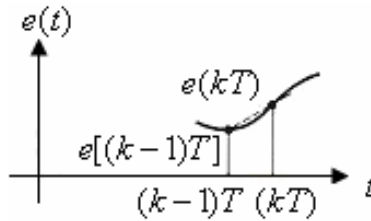


Figura (1.21) Diferenciación numérica.

La pendiente de $e(t)$ en $t=kT$ es aproximadamente igual a la pendiente de la línea recta que conecta $e[(k-1)T]$ con $e(kT)$. Entonces según la *figura (1.21)*, siendo $m(kT)$ la derivada de $e(t)$ en $t=kT$, se puede escribir:

$$m(kT) = \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \quad (1.43)$$

Por lo que:

$$\frac{M(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{Tz} \quad (1.44)$$

La función de transferencia del controlador en el dominio ‘z’ es.

$$G_c(z) = K_p + K_i \frac{2}{T} \left[\frac{z-1}{z+1} \right] + K_d \left[\frac{z-1}{Tz} \right] \quad (1.45)$$

El controlador *PID* discreto, ofrece una ventaja, si por alguna razón, el periodo de muestreo T debe cambiarse después de que el diseño del sistema ha sido completado para un determinado T en el que se tiene una diferenciación e integración precisas para un valor diferente de T en el que se presenten diferenciación e integración precisas, las ganancias K_p , K_i y K_d no cambiarán, por lo que no es necesario un nuevo diseño. Otra forma de escribir la ecuación (1.45) es.

$$m_k = K_p \left[e_k + \frac{T}{T_i} \sum_{i=0}^k e_i + \frac{T_d}{T} (e_k - e_{k-1}) \right] + m_B \quad (1.46)$$

Esta última expresión se conoce como algoritmo de posición por que el valor calculado es la variable manipulada real, lo cual representa en muchos casos una posición del actuador. La necesidad de inicializar el algoritmo de la posición; esto es de alimentar de alguna manera la posición del actuador inicial m_B , puede ser una desventaja para este controlador, el conocimiento de m_B es necesario para una transición suave del control.

1.7.7- Reglas de sintonización en controladores *PID*.

La figura (1.22) muestra un control *PID* de una planta. Si se puede obtener un modelo matemático de la planta, es posible aplicar diversas técnicas de diseño con el fin de determinar los parámetros del controlador que cumpla las especificaciones del transitorio y del estado estacionario del sistema en lazo cerrado.

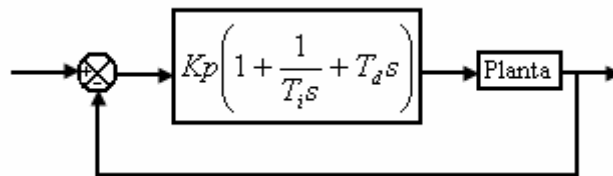


Figura (1.22) Control PID en una planta.

Si la planta es tan complicada que no se puede obtener su modelo matemático y tampoco es posible realizar un método analítico para el diseño de un controlador *PID*. En este caso se debe recurrir a procedimientos experimentales para la sintonía del controlador *PID*. Para seleccionar los parámetros del controlador, que cumplan con especificaciones de comportamiento dadas, esto se conoce como sintonía del controlador. *Ziegler* y *Nichols* sugirieron estas reglas para sintonizar los controladores *PID* (Es decir las constantes asociadas a las acciones proporcional, integral y derivativa), basándose en las características de la respuesta transitoria de una planta dada. Existen dos métodos los cuales se describen a continuación:

- **Curva de reacción.** La respuesta de la planta a una entrada escalón unitario se obtiene de manera experimental, tal como se observa en la figura (1.23).

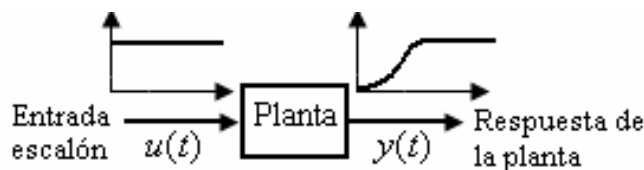


Figura (1.23) Respuesta a un escalón unitario de una planta

Si la planta no contiene integradores ni polos dominantes complejos conjugados, la curva de respuesta escalón unitario puede tener una forma de ‘S’ tal como se observa en la figura (1.24).

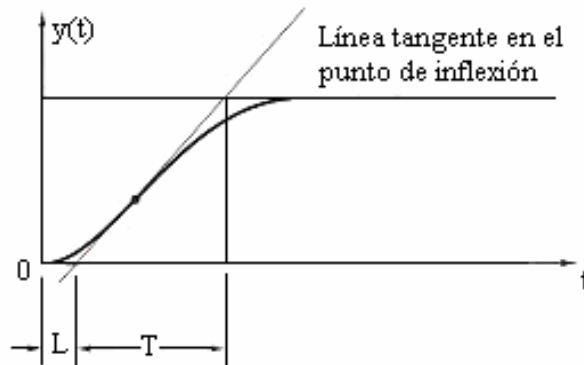


Figura (1.24) Curva de respuesta en forma de ‘S’.

Este método se puede aplicar si la respuesta muestra la respuesta de esta forma. Esta curva se caracteriza por dos parámetros: el tiempo de retardo L y la constante de tiempo T . El tiempo de retardo y la constante de tiempo se determinan dibujando una recta tangente en el punto de inflexión de la curva con forma de ‘S’ y determinando las intersecciones de esta tangente con el eje del tiempo y con la línea $y(t)=K$, tal como se muestra en la figura (1.24). En este caso, la función de transferencia se aproxima mediante un sistema de primer orden con un retardo del modo siguiente.

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1} \tag{1.47}$$

Ziegler y Nichols sugirieron establecer los valores K_p , T_i y T_d , de acuerdo con la formulas que se muestran en la tabla (1.1) siguiente:

| Tipo de Controlador | K_p | T_i | T_d |
|---------------------|-------------------|-----------------|--------|
| P | $\frac{T}{L}$ | ∞ | 0 |
| PI | $0.9 \frac{T}{L}$ | $\frac{L}{0.3}$ | 0 |
| PID | $1.2 \frac{T}{L}$ | $2L$ | $0.5L$ |

Tabla (1.1) Regla de sintonía de Ziegler y Nichols basado en la curva de reacción .

El controlador *PID* sintonizado mediante el primer método de las reglas de Ziegler y Nichols produce:

$$G_c(s) = Kp \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) = 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s} \tag{1.48}$$

Por lo tanto el controlador *PID* tiene un polo en el origen y un doble cero en $s=-1/L$.

- **Oscilaciones sostenidas o última ganancia.** En este método se fija $T_i = \infty$ y $T_d = 0$. Usando solo la acción de control proporcional, se incrementa K_p desde cero hasta un valor crítico K_{cr} , en donde la salida presente oscilaciones sostenidas. (Si la salida no presenta oscilaciones sostenidas para cualquier valor que pueda tomar K_p , entonces este método no se puede aplicar). Así, la ganancia crítica K_{cr} y el periodo P_{cr} correspondiente se determinan experimentalmente figura (1.25).

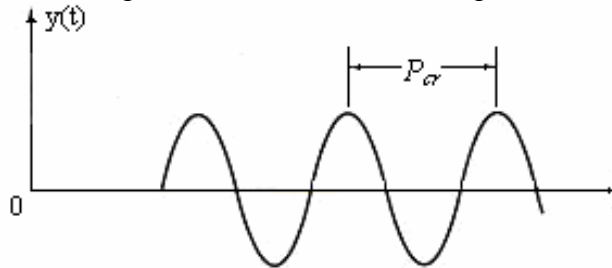


Figura (1.25) Oscilación sostenida con periodo P_{cr} .

Ziegler y Nichols sugirieron que se establecieran los valores de K_p , T_i y T_d de acuerdo con la formulas que se muestran en la tabla (1.2).

| Tipo de Controlador | K_p | T_i | T_d |
|---------------------|--------------|-----------------------|---------------|
| P | $0.5K_{cr}$ | ∞ | 0 |
| PI | $0.45K_{cr}$ | $\frac{1}{1.2}P_{cr}$ | 0 |
| PID | $0.6K_{cr}$ | $0.5P_{cr}$ | $0.125P_{cr}$ |

Tabla (1.2) Regla de Sintonización de Ziegler y Nichols basado en la ganancia crítica K_{cr} y periodo crítico P_{cr} .

El controlador PID sintonizado mediante el segundo método de las reglas de Ziegler y Nichols produce:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 0.6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}} + 0.125P_{cr} s \right) \quad (1.49)$$

$$G_c(s) = 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s} \quad (1.50)$$

Por tanto, el controlador PID tiene un polo en el origen y un doble cero en $s = -4/P_{cr}$.

1.8.- Modelos de sistemas no lineales.

Todos los sistemas están sujetos a conducta no lineal inherente en algún nivel de excitación. Por ejemplo, las restricciones se imponen sobre la magnitud máxima de las variables (tales como tensión, corriente y velocidad) y por las diferentes limitaciones del dispositivo. Además, un sistema puede incorporar fenómenos físicos que aclaran la conducta no lineal con señales de pequeño o medio rango. Así la operación anticipada puede cubrir una región que se caracteriza como cuasilineal, no lineal, lineal a tramos, etc., y el modelo del sistema puede abarcar la caracterización.

Si un modelo es lineal, la determinación de la estabilidad y otras características del comportamiento (*elongación, tiempo de asentamiento, etc.*), está determinado por el modelo. Sin embargo, si el modelo es no lineal, el carácter de comportamiento es también sensible a la magnitud de la excitación y se añade una dimensión adicional al estudio de la conducta del sistema. Un modelo es lineal si tiene un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales que lo representen. Con un modelo lineal los parámetros del sistema se suponen que son independientes del nivel de excitación y se observa la propiedad de superposición. Si una o más de las ecuaciones no es lineal no se cumple la superposición y el modelo se caracteriza como no lineal. Ciertas propiedades interesantes de los sistemas no lineales se hacen aparentes cuando se estudian sus funciones de respuesta. Con el carácter del comportamiento sensible al nivel de excitación, y un sistema no lineal puede ser estable en una región de operación e inestable en otra así, la estabilidad debe especificarse en la vecindad de un punto de operación particular. Para analizar este concepto, la estabilidad ⁽⁴⁾ se evalúa típicamente en la proximidad de una condición potencialmente estática conocida como un estado de equilibrio. Un modelo no lineal puede tener más de un estado de equilibrio. Como una transición de estabilidad a inestabilidad la cual puede ocurrir en un cambio en el nivel de la señal, puede existir una excitación en la cual las condiciones para una oscilación en estado estacionario se desdoble en un nivel de señal específico. Este es un fenómeno no lineal descrito como una oscilación de ciclo límite y la amplitud se determina por los parámetros del modelo del sistema. El estudio del fenómeno del ciclo de límite da un panorama de la conducta oscilatoria que complementa una visión limitada que se alcanza con la hipótesis de linealidad global. Un ciclo límite aparece en el espacio de estado como una trayectoria cerrada aislada y si existe más de una de estas dos trayectorias cada una representa el potencial para engendrar una variación periódica. Dependiendo de la excitación, el sistema puede cambiar entre modos de conductas inestables y estables o cambios de modo oscilatorio a otro. A continuación se relaciona algunas propiedades características de los sistemas no lineales:

- No se observa la superposición y la respuesta en estado estacionario a una entrada senoidal se ve como una forma de onda no senoidal.
- Los diferentes criterios de comportamiento (*incluyendo estabilidad*) dependen del modelo del sistema y del nivel de excitación.
- Se puede presentar una oscilación para que la amplitud bajo condiciones de estado estacionario esta determinada por los parámetros del sistema.
- Un sistema puede tener más de un estado de equilibrio y más de un modo de oscilación.

1.8.1.- Características no lineales.

A continuación se describen diversas formas de no linealidades que se encuentran a menudo, estas suelen denominarse no linealidades rápidas, significando con ello que el modo de operar cambia rápidamente comparándolo con el tiempo de respuesta del sistema. Con una no linealidad rápida, los polos y ceros asociados con la función de transferencia se desplazan rápidamente en el plano ‘s’, por lo que no pueden considerárseles como fijos durante un intervalo de tiempo que es el orden del tiempo de respuesta del sistema.

(4) El concepto y criterios de estabilidad son analizados detenidamente en el apéndice (A.7).

1. **Fricción de Coulomb, precarga o relevador.** La fuerza de *Coulomb* existe en todo sistema físico con movimiento de deslizamiento. Esta presente en las escobillas y colector de un motor, entre engranajes apretados y cojinetes. La fuerza de fricción es de magnitud constante y siempre de dirección opuesta al movimiento, aparece una discontinuidad en el instante que se invierte el movimiento. Una precarga tiene la misma característica que una fricción de *Coulomb* en que la fuerza puede variar de más a menos, la precarga se emplea a menudo para eliminar el arrastre de una posición neutral. Un relevador de dos posiciones (*sin posición de desconexión*) daría una salida, positiva o negativa según la posición del relevador. Esta característica produciría una oscilación continua en un sistema de control. Un sistema que contenga cualquiera de estas no linealidades puede ser representado por dos ecuaciones lineales. La ecuación que deba aplicarse depende de la entrada en tal momento, este tipo de acción se observa en la *figura (1.26)*

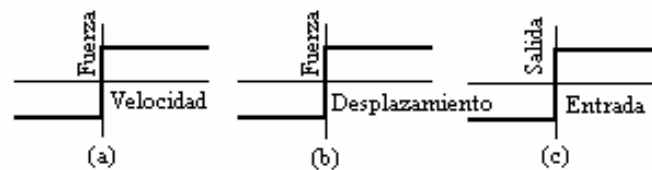


Figura (1.26) No linealidades en escalón. *a)* Fricción de Coulomb. *b)* Carga previa. *c)* Relevador ideal.

2. **Zona muerta, relevador con zona muerta, holgura e histéresis.** Una zona muerta es un margen de valores de la entrada para el que no hay salida, suele llamarse también umbral, trozo llano o espacio muerto, si se añade una zona muerta a un relevador ideal se reduce la oscilación de los contactos del relevador. Una holgura da lugar a una zona muerta. La zona muerta se hace sentir cada vez que hay una inversión en la entrada. Con una entrada cíclica, la salida tiene la variación en curva cerrada.

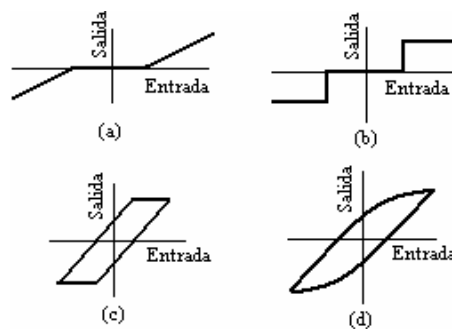


Figura (1.27) Características con zona muerta. *a)* Zona muerta. *b)* Relevador con zona muerta. *c)* Holguras con entrada cíclica. *d)* Histéresis.

La holgura esta asociada comunmente a los engranajes y tiene influencia desestabilizadora. La holgura produce una forma de histéresis, como la asociada en los circuitos magnéticos. Debido a la característica del magnetismo remanente el trazado de la salida respecto a la entrada tiene valores múltiples. Para entradas cíclicas de amplitud constante la salida tiene dos valores para cada valor de entrada, tal como se observa en la *figura (1.27)*.

3. **Saturación o limitación.** Muchos componentes son lineales hasta cierto valor de la señal de entrada. Para entradas mayores la salida puede no crecer proporcionalmente y puede alcanzar un valor máximo. Aunque el cambio de la pendiente de la

característica puede ser gradual, puede hacerse una aproximación suponiendo que la curva esta formada por segmentos rectilíneos, tal sistema se observa lineal a tramos, tal como se observa en la (figura 1.28).

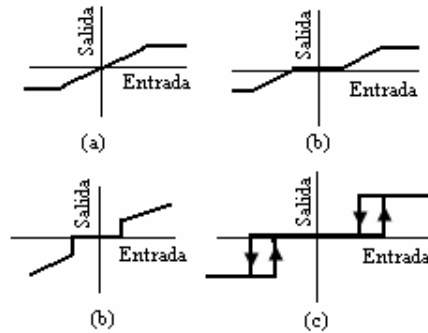


Figura (1.28) a) Saturación. b) Zona muerta y saturación. c) Zona muerta con salida lineal fuera de ella. d) Relevador con zona muerta e histéresis.

1.8.2.- Plano de fase.

Con dos o más variables de estado, es algunas veces útil considerar un espacio de estados *n-dimensional* en el que cada coordenada describe la magnitud de una variable de estado. El estado de sistema en cualquier instante de tiempo es un punto en el espacio de estados y la respuesta natural genera una trayectoria única a través del espacio del estado. Si el número de variables de estado es mayor que tres, se requieren múltiples gráficas que incorporan un número reducido de variables. Sin embargo, si se considera un modelo de segundo o tercer orden se puede visualizar una trayectoria definitiva en un sistema de coordenadas con dos o tres dimensiones. Si un modelo de sistema es de segundo orden, el espacio de estados se convierte en el plano de estados con la variable de estado x_2 representada frente a la variable x_1 . Una representación especial del plano de estado es conocido como plano de fase ⁽⁵⁾, el cual se crea si el modelo esta descrito de forma que \dot{x}_2 es igual a $-x_1$. El carácter de la respuesta se puede investigar a través de una región en el espacio de fases considerando distintos estados iniciales diferentes y la grafica aumentada revela un retrato de plano de fases. Se determina una trayectoria que típicamente comienza en $t=0$ y finaliza en $t=\infty$. Aunque cada punto sobre la trayectoria corresponde a un momento de tiempo específico, la trayectoria muestra una variable dependiente respecto de otra variable dependiente; así la variable independiente (*tiempo*) no es necesariamente una característica explícita. La ausencia de información temporal se resuelve algunas veces anotando el tiempo correspondiente en ciertos puntos discretos sobre la trayectoria.

El conocimiento que se puede obtener al estudiar una trayectoria en el plano de fase es dependiente del modelo del sistema y si se hace particularmente significativo cuando se utiliza para visualizar las formas de conducta dependientes de la región que pueden ocurrir con un modelo no lineal. En la figura (1.29) se muestran algunos ejemplos de fenómenos no lineales tal como son visualizados en el plano de fase, en la figura (1.29 a) so observa un ciclo límite estable y en la figura (1.29 b) se observa un ciclo límite inestable.

(5) El método isoclino para la representación del plano de fase y la representación de sistemas de segundo orden se explican en los apéndices (A.4) y (A.5).

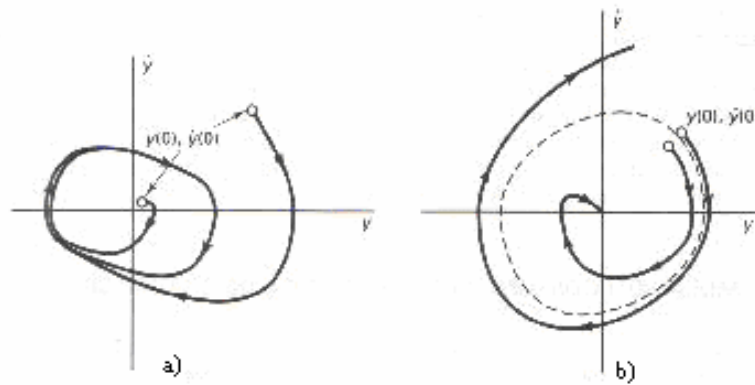


Figura (1.29) a) Ciclo límite estable. b) Ciclo límite inestable.

El ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada y su grafica es obviamente un fenómeno diferente de la estabilidad marginal.

Con la estabilidad marginal de un sistema lineal una sucesión de pequeños cambios en el estado inicial produce correspondientemente pequeños cambios en la trayectoria cerrada y se puede crear un continuo de trayectorias cerradas. Como no hay trayectorias cerradas aisladas, no son ciclos límite.

El ciclo límite inestable mostrando con una línea punteada en la *figura (1.29 b)* define una oscilación solo si el estado inicial esta exactamente sobre la trayectoria y no hay una perturbación externa. Con el ciclo límite inestable, es aparente que un estado inicial que no esta exactamente sobre la trayectoria produce una que diverge del camino del ciclo límite. En la *figura (1.30 a)* se tiene la respuesta de un sistema lineal a tramos. El retrato en el plano de fase con mas de un estado de equilibrio, como el que se muestra en la *figura (1.30 b)* ilustra una situación en la cual una ligera variación en el estado inicial puede originar que la trayectoria finalice en un estado de equilibrio diferente.

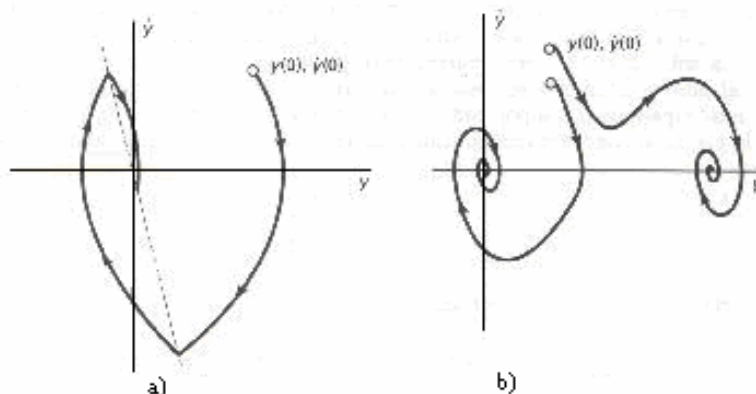


Figura (1.30) a) Respuesta lineal a tramos. b) Un sistema con más de un estado de equilibrio.

Capítulo 2

“Modelo de un motor de corriente directa”

Objetivos:

- Describir el principio de operación de un motor de corriente directa.
- Analizar y describir las formas de operación de un motor de corriente directa.
- Describir las principales formas de identificación de parámetros para la identificación de sistemas.
- Obtener un modelo matemático para el modulo *TY36A* del laboratorio de control analógico de la *Facultad de Ingeniería*.

Palabras y conceptos clave:

- Parámetros de un motor de corriente directa.
- Motor controlado por armadura.
- Respuesta al escalón.
- Modelo experimental de primer orden.

2.0.- Introducción.

En este capítulo se analizará el funcionamiento del motor de corriente directa controlado por armadura, y en un caso particular se determinó el modelo matemático, para un motor de imanes permanentes controlado por armadura, en función de transferencia obteniendo un modelo experimental de primer orden. Para dicho objetivo se realizaron pruebas con el motor de imanes permanentes, módulo *TY36A/EV* y el módulo de control *G36A* del laboratorio de control analógico de la *Facultad de Ingeniería*; las tablas de resultados se muestran en el *Apéndice B*, así como los datos técnicos del motor en estudio. El motor de cualquier servo es la parte más importante de un actuador, los motores de ahora son ligeros, eficientes y casi libres de mantenimiento. Los motores son clasificados como motor de pasos, motor de inducción de reluctancia, motor de imanes permanentes y motor de control vectorial.

2.1.-Principio de operación de la máquina de corriente directa.

El principio de operación de una máquina de corriente directa se puede ejemplificar con el siguiente modelo de una máquina elemental, como el mostrado en la *figura (2.1.a)*, en la cual se muestra una bobina de armadura de una vuelta, de la cual cada uno de los lados se designan por a y a' y que terminan en los segmentos S_1 y S_2 del conmutador, las escobillas b_1 y b_2 están montadas en el conmutador y están conectadas a las terminales de la armadura T_1 y T_2 tal como se muestra en la *figura (2.1.a)*; para una rotación en el sentido de las manecillas del reloj, cuando la bobina de la armadura está en la posición mostrada en la *figura (2.1.b)*, la polaridad de la fuerza electromotriz inducida de acuerdo con la ley de *Lenz*, es tal como para dirigir una corriente en el lado a , de la bobina hacia el observador y en el lado de la bobina a' lejos del observador, como se designa por las marcas del punto y la cruz. En el instante en que el ángulo θ entre los ejes magnéticos del estator y el rotor son cero o π , el voltaje inducido en la bobina de la armadura es cero.

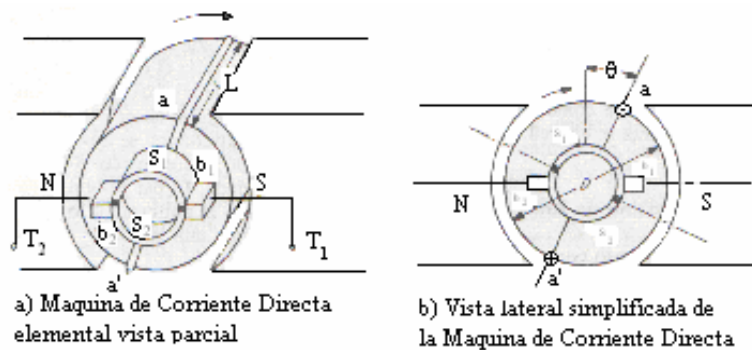


Figura (2.1) Cortes de una máquina de corriente directa.

Cuando el espesor de las escobillas se desprecia, la escobilla b_1 va siempre montada en ese segmento que conecta al lado de la bobina bajo el polo magnético sur S y la escobilla b_2 en ese segmento que conecta al lado de la bobina bajo el polo magnético norte N ; dando como resultado, para las polaridades consideradas de rotación, la escobilla b_1 es siempre positiva, y la escobilla b_2 es siempre negativa. En la operación como motor la corriente entra a la bobina de la armadura a través de la escobilla positiva y la acción del conmutador es tal, durante una rotación completa, como para mantener a la corriente en el lado de bobina bajo el polo del campo sur S dirigida fuera del

observador, mientras que aquella en el otro lado de la bobina que esta bajo el polo del campo norte N , esta dirigida hacia el observador. Consecuentemente el par se desarrolla en la dirección de las manecillas del reloj a lo largo de una revolución completa de la armadura, excepto en esos instantes cuando la corriente en la bobina de la armadura se invierte, es decir, cuando $\theta=0$ y $\theta=\pi$, que ocurre cuando un segmento conmutador reemplaza al otro segmento bajo una escobilla dada. El par resulta de la fuerza ejercida por un campo de densidad de flujo B uniforme a lo largo de la longitud l de un conductor recto que conduce una corriente I como se expresa por el producto vectorial.

$$f = Il \times B \quad (2.1)$$

Cuando se aloja en una ranura, la misma relación de fuerza es válida si el conductor se considera como un filamento excepto que los componentes principales de la fuerza se ejercen en el hierro en la región del filamento.

2.1.1.- Descripción del funcionamiento de un motor de corriente directa.

Para su funcionamiento el motor de corriente directa depende de su operación en la rotación de un embobinado, llamado el embobinado de armadura, en un campo magnético producido por un embobinado estacionario llamado embobinado de estator también conocido como el embobinado de campo. El estator consiste de un cilindro metálico (*yugo del estator*) en el cual van alojados los enrollamientos del estator que pueden ser de imanes permanentes o enrollamientos sobre una placa de hierro que al estar polarizados me producen el campo magnético. El embobinado de armadura consiste de un número de bobinas usualmente idénticas colocadas en ranuras uniformemente distribuidas alrededor de la periferia del hierro del rotor, las bobinas están interconectadas a través del conmutador compuesto por un número de barras, algunas veces llamadas segmentos del conmutador, que están aisladas entre si. El conmutador gira con la armadura, el conmutador sirve para rectificar el voltaje inducido y la corriente de armadura; el número de polos usados en un motor de corriente directa es función del valor nominal del voltaje y la corriente de la máquina; mientras mayor sea el voltaje para un diámetro dado de la armadura, menor será el número de polos. Esto es necesario para proveer un espacio para el mayor número de barras conmutadoras requeridas para el voltaje más alto, ya que hay usualmente tantos juegos de escobillas como hay de polos, y el espacio entre juegos de escobillas adyacentes es el mismo que el existente entre polos adyacentes; motores de una alta corriente requieren un número mayor de polos con el fin de poder conducir la corriente. En la *figura (2.2)* se muestran un diagrama de la distribución de las partes del motor de corriente directa.

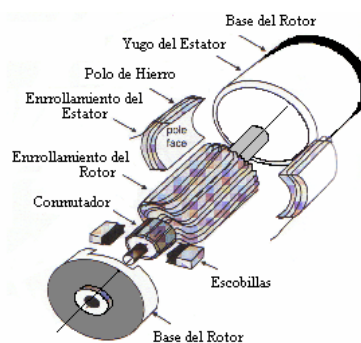


Figura (2.2) Partes de un motor de corriente directa.

2.1.2.- Modelo de los parámetros mecánicos del motor.

En un motor de corriente directa como el que empleamos se tiene acoplado una carga mecánica, en un sistema como este, el giro del motor depende de parámetros como la inercia de la carga y la resistencia proveniente de amortiguadores y elementos rígidos.

- **Momento de Inercia.** La figura (2.3) muestra la aplicación de un torque sobre un cuerpo que posee un momento de inercia J a través de una barra que representa el eje de un motor. El resultado, es un desequilibrio que se manifiesta como un cambio en la posición, la velocidad y la aceleración angulares (θ, ω, α); la sumatoria de torques, determina que el único estímulo es proporcionado por el par proporcionado por el motor T_m , el cual es directamente proporcional a la aceleración angular α del eje. Este par mecánico producido por el momento de inercia J desaparece cuando $d\omega/dt=0$, y esto se presenta en condiciones de estado permanente.

$$T_m = T_J = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2.2}$$



Figura (2.3) Momento de inercia.

- **Resistencia por rigidez.** La figura (2.4) muestra el caso de una barra empotrada sobre la que se aplica un torque externo, la propiedad de la barra, de recuperar su posición angular original, luego de la torsión que se le causa, se define como un torque de restitución, este torque es directamente proporcional al ángulo girado. Si K_r es la constante de restitución del sistema.

$$T_m - K_r\theta = J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} \tag{2.3}$$

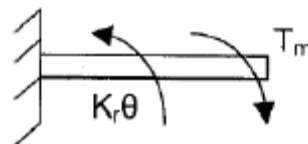


Figura (2.4) Resistencia por rigidez.

- **Resistencia por amortiguamiento.** En la figura (2.5) se muestra un elemento acoplado, al eje del motor, que se desliza sobre un líquido viscoso, lo que determina la existencia de un torque resistivo que es proporcional a la velocidad angular con cual se efectúa el movimiento del eje.

$$T_m - f \frac{d\theta_m}{dt} = J \frac{d^2\theta_m}{dt^2} \tag{2.4}$$

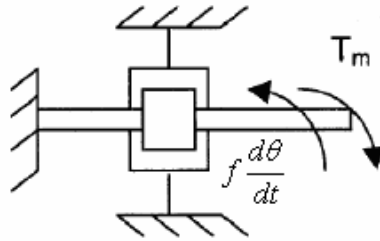


Figura (2.5) Resistencia por amortiguamiento.

De la ecuación anterior f es la constante de proporcionalidad entre la velocidad angular del eje y la resistencia que ofrece la sustancia viscosa sobre la que este se desliza.

2.2.- Formas de operación de un motor de corriente directa.

La mayoría de los motores de corriente directa que se emplean en los sistemas de control, pueden modificar la velocidad de un motor fácilmente, y de igual forma es posible modificar la dirección de rotación con un sencillo cambio de polaridad del voltaje aplicado. Los motores de corriente directa presentan diversas características de respuesta según la forma de excitación, de modo que esta particularidad es la que define la clasificación que a continuación muestro.

- Con excitación en derivación.
- Con excitación en serie.
- Con excitación compuesta
 1. Acumulativa.
 2. Diferencial.
- Con excitación Independiente.

Como se observa en las figura (2.6) las bobinas del campo y de la armadura pueden estar devanadas en derivación paralela, en serie, en forma compuesta o excitadas por separado; por lo general, los motores de los sistemas de control están excitados en forma separada y se les controla variando el voltaje del campo V_f en tanto que se mantiene constante la corriente de armadura i_a (es decir el control de campo), o al variar el voltaje de la armadura V_a mientras se mantiene constante la corriente del campo i_f (es decir el control de la armadura).

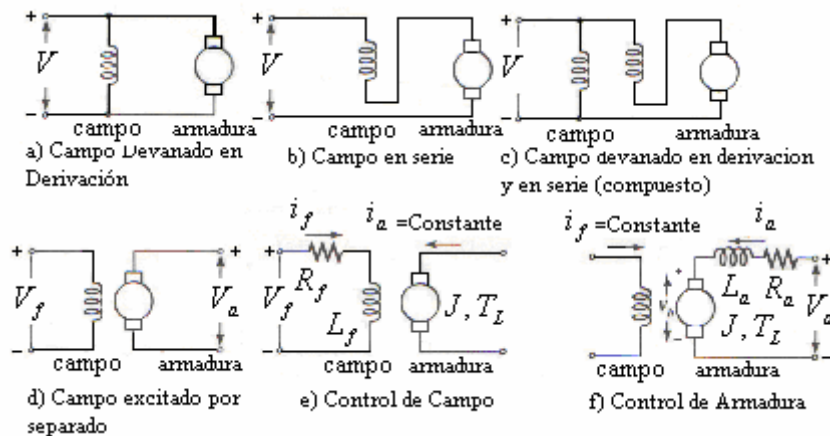


Figura (2.6) Diversas formas de conexión de un motor de corriente directa.

2.2.1.- Motor con conexión en derivación.

El esquema de conexión de un motor con conexión en derivación es la que se muestra en la *figura (2.7)*. El cual al cerrar el interruptor X , se aplica un voltaje V_t al campo y a la armadura del motor simultáneamente y este comienza a acelerar para llegar después a conseguir su velocidad de estado permanente. Si se desea conseguir alguna variación en esta, se puede variar a R_{arr} o R_e ⁽⁶⁾, para conseguir tal fin. Sin embargo, la velocidad no se modifica notoriamente si se varía V_t puesto que cualquier cambio de este voltaje produce efectos contrarios tanto en el campo como en la armadura, de tal forma que los dos tienden a anularse y no afectan sensiblemente a esta. Por consiguiente este tipo de motor no se le puede controlar su velocidad con variaciones de V_t , siendo esta la razón por la cual no se emplea en sistemas de control retroalimentados, pues no existe una forma efectiva de que a través de V_t tengamos la respuesta deseada.

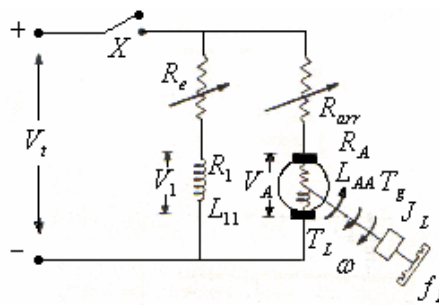


Figura (2.7) Motor con conexión en derivación.

Donde:

- J_m = Momento de inercia del motor $[Kg \times m^2]$
- f_m = Coeficiente de fricción viscosa del motor $[N \times m \text{ s/rad}]$
- J_L = Momento de inercia de la carga $[Kg \times m^2]$
- f_L = Coeficiente de fricción de la carga $[N \times m \text{ s/rad}]$
- T_L = Par de carga externo $[N \times m / A]$
- T_g = Par generado $[N \times m \text{ s/rad}]$
- ω = Velocidad (variable) $[rad/s]$

Sin embargo; este motor posee características que lo hacen adecuado en aplicaciones donde no hay necesidad de trabajar con sistemas retroalimentados; por ejemplo donde se requiere mover cargas en donde se desee mantener la velocidad más o menos constante, o bien en donde se desee mantener un control manual de la misma; condición que se consigue con solo variar R_e o R_{arr} manualmente; realizando un análisis matemático de este tipo de motor tenemos:

$$V_1(s) = (R_1 + sL_{11})I_1(s) \tag{2.5}$$

El voltaje en las terminales de armadura esta dado por:

$$V_A(s) = (R_A + sL_{AA})I_A(s) + \mu_{A1}I_1(s)\omega(s) \tag{2.6}$$

(6) El valor de R_e o R_{arr} es de algunos cuantos ohms, debido a la alta corriente que deben soportar.

En la cual se tiene que la fuerza contraelectromotriz se define por:

$$E(s) = \mu_{A1} I_1(s) \omega(s) \quad (2.7)$$

Matricialmente tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + sL_{11} & 0 \\ \mu_{A1} & R_A + sL_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Finalmente despejando $\omega(s)$ de la ecuación (2.6) obteniendo.

$$\omega(s) = \frac{V_A(s) - (R_A + sL_{AA})I_A(s)}{\mu_{A1}I_1(s)} \quad (2.9)$$

De la ecuación (2.9) observamos los efectos opuestos que se tienen sobre la velocidad en las variaciones de V_A , ya que $V_A = V_1$. Las ecuaciones de equilibrio en los pares de este motor son:

$$\text{par electromagnético: } T_g = \mu_{A1} I_1(s) I_A(s) \quad (2.10)$$

$$\text{par mecánico: } T_m = Js\omega(s) + f\omega(s) + T_L(s) \quad (2.11)$$

Ya que en todo momento se tiene $T_g = T_m$, por eso en cualquier instante tenemos que.

$$\mu_{A1} I_1(s) I_A(s) = Js\omega(s) + f\omega(s) + T_L(s) \quad (2.12)$$

En este tipo de motores no se tiene mucho caso el obtener una función de transferencia para algún estudio dinámico del mismo, ya que cualquier variación de V_A no producirá cambios sensibles en ω debido a los efectos contrarios de V_1 y V_A .

2.2.2.- Motor con conexión en serie.

El motor en serie es útil en aplicaciones donde se necesita tener un gran par de arranque como es el caso de grúas o montacargas, la figura (2.8) muestra el esquema de conexión de este tipo de motor.

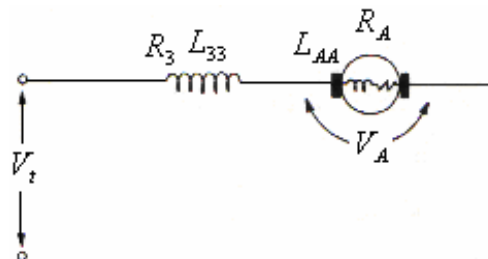


Figura (2.8) Motor en conexión en serie.

Realizando un análisis matemático de este motor para el campo se tiene:

$$V_3(s) = (R_3 + sL_{33})I_3(s) \quad (2.13)$$

Y en la armadura tenemos:

$$V_A(s) = (R_A + sL_{AA})I_A(s) + \mu_{A3}I_3(s)\omega(s) \quad (2.14)$$

Matricialmente tenemos:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_3 + sL_{33} & 0 \\ \mu_{A3}\omega & R_A + sL_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

De acuerdo al par electromagnético tenemos:

$$T_g = \mu_{A3}I_3(s)I_A(s) \quad (2.16)$$

Pero tenemos: $I_3=I_A=I$; por lo tanto.

$$T_g(s) = \mu_{A3}I^2 \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) nos indica que este tipo de motor posee un par electromagnético demasiado grande; condición que lo hace totalmente diferente a los demás motores. Además tenemos:

$$V_t = V_3 + V_A = [(R_3 + R_A) + s(L_{33} + L_{AA}) + \mu_{A3}\omega(s)]I(s) \quad (2.18)$$

Por lo tanto:

$$\omega(s) = \left[\frac{V_3 + V_A}{I(s)} - (R_3 + R_A) - s(L_{33} + L_{AA}) \right] \frac{1}{\mu_{A3}} \quad (2.19)$$

Despreciando los efectos de L_{33} y L_{AA} se tiene.

$$\omega(s) = \frac{1}{\mu_{A3}} \left[\frac{V_3 + V_A}{I(s)} - (R_3 + R_A) \right] \quad (2.20)$$

Debido a que R_3 y R_A son resistencias pequeñas, la velocidad dependerá casi totalmente de $I(s)$, si la corriente es grande entonces la velocidad será baja y si la corriente es chica la velocidad será muy elevada. Por lo cual se debe tener cuidado en el uso de estos motores y debemos asegurarnos de no operarlos en vacío, pues pueden llegar a desbocarse, las aplicaciones de este motor deben asegurar un mínimo de carga en el motor para mayor seguridad en su uso. El motor en serie es uno de los más difíciles de analizar matemáticamente, pues además de las no linealidades inherentes en todas las máquinas por efectos de saturación, se presenta una condición mas, en este caso, se debe a que el par electromagnético es función del cuadrado de la corriente, lo cual es definitivamente una no linealidad natural. No es posible conseguir una función de transferencia para realizar un análisis dinámico, debido a que no existen relaciones lineales en sus variables de tal forma que nos aseguren un resultado satisfactorio.

2.2.3.- Motor con conexión compuesta.

Un motor se dice que está conectado en derivación corta cuando el campo en derivado se conecta directamente en paralelo con las terminales de la armadura y el devanado en serie se encuentra en serie con esa combinación. Ahora bien, si el devanado en derivado se conecta en paralelo con la combinación en serie de la armadura y campo serie, se dice que la conexión es derivación larga. Por otra parte, cuando el campo en derivado se conecta a una fuente independiente y la armadura se conecta en serie con el devanado serie, entonces se dice que la máquina es compuesta con excitación independiente.

La forma de conectar a los devanados en derivación y en serie, trae como consecuencias que los flujos producidos por ellos se sumen o resten; si los flujos se suman entre sí, entonces se llama conexión aditiva o integral, si por el contrario los flujos se restan, entonces se llama conexión sustractiva o diferencial.

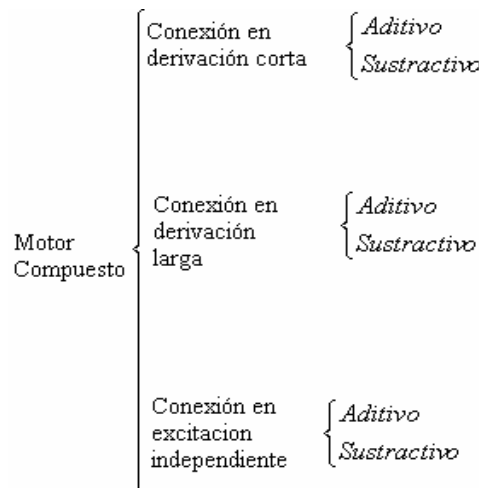


Figura (2.9) Posibles combinaciones de un motor en conexión compuesta.

2.2.3.1.- Motor compuesto con conexión en derivación corta.

De la *figura (3.10)*, observamos las diferentes disposiciones para el motor con conexión en derivación corta; la *figura (3.10.a)* muestra la conexión en derivación corta aditiva y la *figura (3.10.b)* muestra la conexión en derivación sustractiva.

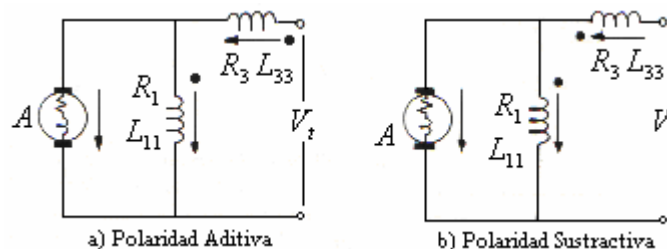


Figura (2.10) Motor de corriente directa con conexión compuesta con derivación corta.

Basándonos en la *figura (2.10)* podemos plantear la siguiente ecuación de circuitos.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ +V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + sL_{11} & \pm sL_{13} & 0 \\ \pm sL_{13} & R_3 + sL_{33} & 0 \\ +\mu_{A1}\omega & \pm \mu_{A3}\omega & +R_A + sL_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Por otra parte también de la *figura (2.10)* surgen otras ecuaciones y donde los signos superiores corresponden al caso de la polaridad aditiva, y los inferiores al caso de la polaridad negativa.

$$V_t = V_1 + V_3 \quad (2.22)$$

$$V_A = V_1 \quad (2.23)$$

$$V_A(s) = +\mu_{A1}I_1\omega(s) \pm \mu_{A3}I_3\omega(s) + (R_A + sL_{AA})I_A(s) \quad V_A = V_1 \quad (2.24)$$

$$T_g = +\mu_{A1}I_1I_A \pm \mu_{A3}I_3I_A \quad V_A = V_1 \quad (2.25)$$

$$T_g = T_m = Js\omega(s) + f\omega(s) + T_L(s) \quad (2.26)$$

De la ecuación (2.24) obtenemos.

$$\omega(s) = \frac{V_A(s) - (R_A + sL_{AA})I_A(s)}{+\mu_{A1}I_1 \pm \mu_{A3}I_3} \quad (2.27)$$

De la *ecuación (2.27)* podemos concluir para que exista la posibilidad de regular la velocidad en este tipo de motor, se necesita saber la fuerza que tienen los devanados de campo en derivado y serie; y de las *ecuaciones (2.25)* y *(2.26)*, podemos justificar el por que este motor puede invertir el giro de rotación.

2.2.3.2.- Motor compuesto con conexión en derivación larga.

De acuerdo a la *figura (2.11)*, tendremos las ecuaciones de circuitos para el motor en derivación larga, donde ahora se tiene que $I_A=I_3$.

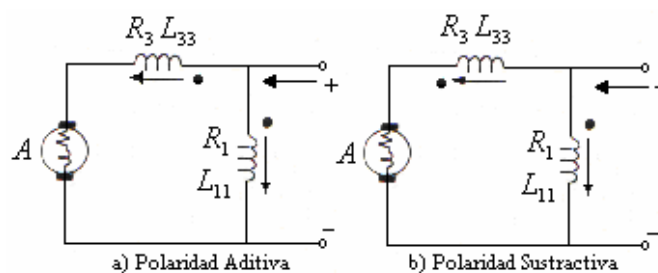


Figura (2.11) Motor de corriente directa con conexión compuesta con derivación larga.

Ecuaciones de circuitos para el motor compuesto en derivación larga

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_3 \\ +V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + sL_{11} & \pm sL_{13} & 0 \\ \pm sL_{13} & R_3 + sL_{33} & 0 \\ +\mu_{A1}\omega & \pm \mu_{A3}\omega & +R_A + sL_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

El motor compuesto tiene diversas aplicaciones, este motor se emplea principalmente por sus cualidades de regulación de velocidad, además debido al doble signo de la posibilidad de conectar el campo serie en tal forma, que su fuerza magnetomotriz se suma a la del campo derivado (*excitación compuesta acumulativa*) o bien, que la fuerza magnetomotriz serie se oponga a la del campo derivado (*excitación compuesta diferencial*). El motor compuesto acumulativo es el más empleado actualmente en sistemas como elevadores, grúas y montacargas.

- **Motor compuesto acumulativo.** El nombre de este motor es porque el campo en serie se conecta de tal forma que ayuda al campo derivado, en esta máquina las características de la velocidad y el par son intermedios entre la de los motores en derivado y en serie, sin embargo, no se presentan en el las condiciones de peligro de la velocidad en vacío que se tienen con un motor en serie, pues aunque no tengamos carga, existe al menos un flujo que es el producido por el campo en derivado, el cual da una velocidad máxima de operación segura en vacío. Conforme aumentamos la carga, el campo en serie aumenta, produciéndole incremento en el flujo total y la velocidad se reduce. Naturalmente estas características no son necesarias en algunas aplicaciones, pero en otras como elevadores, en las grúas, o en general donde la capacidad extra en el par producido por el devanado en serie sea deseable.
- **Motor compuesto diferencial.** Cuando el campo en serie se opone al campo en derivado, se dice que el motor tiene características diferenciales, en estas condiciones nuestra máquina se comporta de forma distinta, pues al ir incrementando la carga aumenta el campo serie, y se va delimitando el flujo total, con lo cual la velocidad tiende a aumentar. Sin embargo, se puede hacer que el devanado en serie tenga exactamente las vueltas necesarias como para elevar la velocidad en la misma proporción que se reduce al incrementar la carga, y obtener así un motor de velocidad muy constante. Esta buena característica no se aprovecha adecuadamente, pues si la carga se incrementa demasiado, entonces el flujo total tiende a anularse y la máquina podría desbocarse. Si tomamos en cuenta que un motor en derivado o con excitación independiente tiene muy buena regulación de velocidad, no tiene caso arriesgarse a usar un motor compuesto diferencial sólo por esta característica.

Otro problema que hace poco usual este motor es el hecho de que en el periodo de arranque del mismo, se debe poner en corto circuito el devanado en serie, pues la gran corriente de arranque tiende a hacer tan grande el mismo campo que podría anular el efecto del campo en derivado y llegar a cambiar el sentido del flujo, con lo cual se provocaría el giro del motor en una dirección contraria a la que deseamos.

2.2.4.- Motor compuesto con conexión en excitación independiente.

Para este motor las ecuaciones del modelo de circuitos son exactamente las mismas que se encontraron para las conexiones en derivación corta y larga, solo que ahora se tiene a $I_A=I_3$, e I_f es completamente independiente.

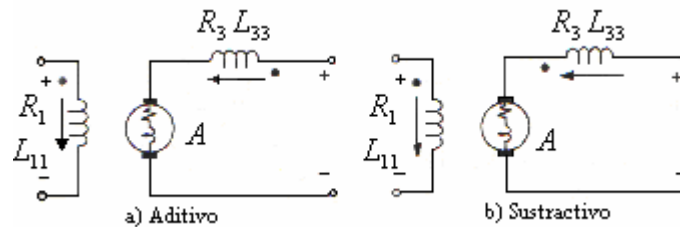


Figura (2.12) Motor de corriente directa con excitación independiente.

2.2.4.1.-Motor con excitación independiente controlado por armadura.

Este motor se fabrica para excitarse en derivación, solamente que en esta modalidad se usa una fuente pequeña de capacidad y voltaje para suministrar una corriente de excitación constante, y una fuente de la capacidad de la armadura y de voltaje controlado para alimentar a esta otra parte; las fuentes pueden ser baterías o cualquier otro tipo de fuente de corriente directa. La *figura (2.13)* muestra el esquema elemental de un motor de corriente directa con excitación independiente controlado por armadura.

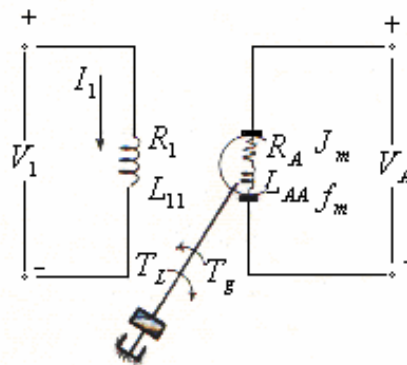


Figura (2.13) Motor de corriente directa con excitación independiente controlado por armadura.

Donde:

- J_m = Momento de inercia del motor $[Kg \times m^2]$
- J_L = Momento de inercia de la carga $[Kg \times m^2]$
- f_m = Coeficiente de fricción viscosa del motor $[N \times m \text{ s/rad}]$
- f_L = Coeficiente de fricción viscosa de la carga $[N \times m \text{ s/rad}]$
- T_L = Par externo de carga $[N \times m / A]$

Para este motor las ecuaciones en el modelo de circuitos en el dominio de Laplace:

En el campo:

$$V_1(s) = I_1(s)(R_1 + sL_{11}) \tag{2.29}$$

En la armadura:

$$V_a(s) = (R_a + sL_{AA})I_A(s) + \mu_{A1}I_1(s)\omega(s) \quad (2.30)$$

Donde definimos la fuerza contraelectromotriz:

$$E = \mu_{A1}I_1\omega = \lambda_0\omega = f.c.e.m \quad (2.31)$$

Siendo ω la velocidad angular instantánea en $[rad/s]$. Agrupando en forma matricial tenemos.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + sL_{11} & 0 \\ \mu_{A1}\omega(s) & R_A + sL_{AA} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

La ecuación matricial corresponde totalmente a la parte eléctrica, pero dado que un motor es un dispositivo electromecánico, por lo cual necesitamos formular expresiones para el equilibrio de pares mecánicos y eléctricos que en cualquier momento tendremos siempre que el par electromagnético sea igual al par mecánico.

$$T_g = K_\tau I_A(s) \quad (2.33)$$

Sí

$$T_g = T_m \quad (2.34)$$

$$T_m = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega \pm T_L \quad (2.35)$$

Pero como la carga gira a la misma velocidad que el motor, tenemos:

$$J = J_m + J_L \quad (2.36)$$

y

$$f = f_m + f_L \quad (2.37)$$

Por lo tanto tendremos que:

$$T_g = T_m = K_\tau I_A(s) = (J_m + J_L)s\omega(s) + (f_m + f_L)\omega(s) \pm T_L(s)$$

Resultando:

$$T_g = T_m = Js\omega(s) + f\omega(s) \pm T_L(s) \quad (2.38)$$

Despejando la corriente de la ecuación (2.32) se tiene.

$$I_A(s) = \frac{\begin{bmatrix} R_1 + sL_{11} & V_1(s) \\ \mu_{A1}\omega(s) & V_A(s) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} R_1 + sL_{11} & 0 \\ \mu_{A1}\omega(s) & R_A + sL_{AA} \end{bmatrix}} = \frac{V_A(s)(R_1 + sL_{11}) - V_1(s)(\mu_{A1}\omega(s))}{(R_1 + sL_{11})(R_A + sL_{AA})} \quad (2.39)$$

Tenemos; que la corriente de armadura y como consecuencia el par y la velocidad están en función de dos variables, de $V_A(s)$ y $V_I(s)$. Esta condición hace frecuente el empleo de este tipo de motores para sistemas de control retroalimentados, lo usual es que uno de estos voltajes permanezca constante y solamente se realice control por el otro. Para el caso en el que la máquina se controle por la armadura tenemos que V_I es constante y V_A es variable, para este caso tendremos:

$$I_A(s) = \frac{V_A(s)}{R_A + sL_{AA}} - \frac{V_1 \mu_{A1}}{R_1} \left(\frac{\omega(s)}{R_A + sL_{AA}} \right) \quad (2.40)$$

Dado que:

$$\lambda_0 = \frac{V_1 \mu_{A1}}{R_1}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.33) el resultado de la ecuación (2.40), se tiene. Para un motor con excitación independiente controlado por armadura que:

$$K_\tau \left[\frac{V_A(s)}{R_A + sL_{AA}} - \lambda_0 \left(\frac{\omega(s)}{R_A + sL_{AA}} \right) \right] = Js\omega(s) + f\omega(s) \pm T_L(s)$$

$$K_\tau [V_A(s) - \lambda_0 \omega(s)] = (R_A + sL_{AA}) [Js\omega(s) + f\omega(s) \pm T_L(s)]$$

$$K_\tau V_A(s) - K_\tau \lambda_0 \omega(s) = (R_A + sL_{AA}) [Js + f] \omega(s) \pm (R_A + sL_{AA}) T_L(s)$$

∴

$$K_\tau V_A(s) \pm (R_A + sL_{AA}) T_L(s) = [(R_A + sL_{AA}) [Js + f] + K_\tau \lambda_0] \omega(s)$$

Por lo tanto tenemos, que la función de transferencia que relaciona la velocidad con el voltaje de entrada $V_A(s)$, para un motor con excitación independiente controlado por armadura es:

$$\frac{\omega(s)}{V_A(s)} = \frac{\frac{K_\tau}{JL_{AA}}}{s^2 + s \left[\left(\frac{R_A}{L_{AA}} \right) + \frac{f}{J} \right] + \frac{R_A f}{JL_{AA}} + \frac{K_\tau \lambda_0}{JL_{AA}}} \quad (2.41)$$

Por otra parte la función de transferencia que relaciona la velocidad con el par de carga $T_L(s)$, para el mismo motor, es de acuerdo.

$$\frac{\omega(s)}{T_L(s)} = \frac{\mp \left(\frac{R_A}{JL_{AA}} + \frac{s}{J} \right)}{s^2 + s \left[\left(\frac{R_A}{L_{AA}} \right) + \frac{f}{J} \right] + \frac{R_A f}{JL_{AA}} + \frac{K_\tau \lambda_0}{JL_{AA}}} \quad (2.42)$$

Para las ecuaciones anteriores, un aumento o reducción de $V_A(s)$, traerá como consecuencia un aumento o reducción de $\omega(s)$. Sin embargo de la ecuación (2.42) tenemos que un aumento en el par T_L producirá una reducción en la velocidad, e inversamente una reducción del par de cargas T_L producirá un aumento de velocidad. En estudios prácticos se deben de considerar los dos efectos en el cual hay que considerar el efecto de las dos variables $V_A(s)$ y $T_L(s)$ para realizar análisis mas precisos de un motor; empleando la teoría de control podemos emplear la superposición de causas y efectos, de manera que trabajemos primero con la ecuación (2.41) suponiendo la inexistencia del par carga T_L , para luego trabajar con la ecuación (2.42) considerando como si no tuviéramos voltaje $V_A(s)$ y $T_L(s)$ al mismo tiempo. Una representación en diagramas de bloques, de las funciones de transferencia son:

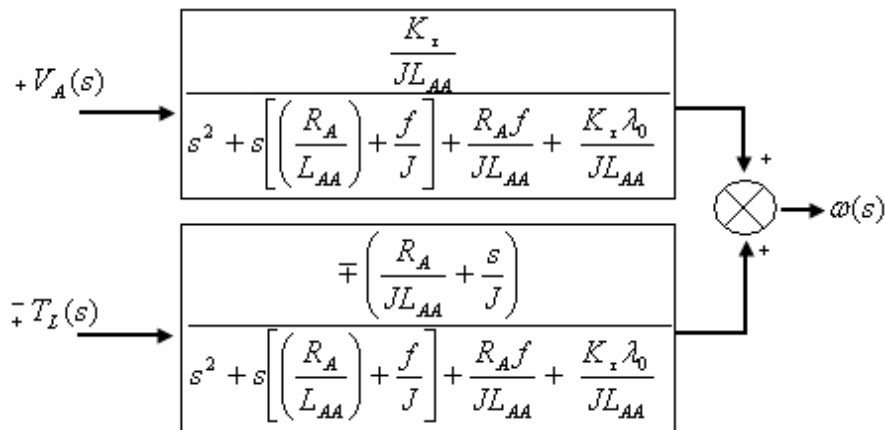


Figura (2.14) Diagrama de bloques de funciones de transferencia para el motor de corriente directa con excitación independiente controlado por armadura.

Dado que:

$$V_A(s) = \lambda_0 \omega(s) + (R_A + sL_{AA})I_A(s) \tag{2.43}$$

$$I_A(s) = \frac{V_A(s) - \lambda_0 \omega(s)}{R_A + sL_{AA}}$$

Y además:

$$T_g = T_m = K_r I_A(s) = Js\omega(s) + f\omega(s) \pm T_L(s)$$

Por lo tanto el diagrama de bloques tiene la forma.

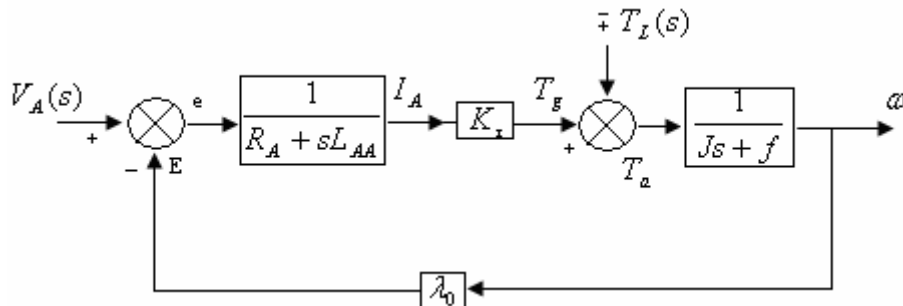


Figura (2.15) Diagrama de bloques para el motor de corriente directa con excitación independiente controlado por armadura.

Del diagrama se observa que al aumentar el par de carga T_L el par de aceleración $T_a = T_g - T_L$ se hace menor. La velocidad se reduce con lo cual la *f.c.e.m* (E) también se reduce, y por tanto, la señal de error $e = V_A - E$ se incrementa provocando que la corriente de armadura I_A aumente, igual que el par eléctrico generado. Esto último produce un aumento en T_a . Como consecuencia se produce un aumento de velocidad que compensa en parte la reducción de ella previamente obtenida, si la carga se redujera, la velocidad tendería a aumentar inmediatamente y el motor se autocontrolaría para dar como resultado final que la velocidad tendería a reducirse a la velocidad original; una conclusión interesante es observar que un control de velocidad a través de la armadura produce resultados satisfactorios de regulación de velocidad por su propia cuenta, sin embargo, no es del todo precisa por tal motivo es necesario contar con un sistema de retroalimentación recurriendo a otros dispositivos.

2.2.4.2.- Motor con excitación independiente controlado por el campo.

Para analizar un motor de control sobre el campo consideramos que V_A es constante, y como $V_A = (R_A + sL_{AA})I_A + \mu_{A1}I_1(s)\omega(s)$, tenemos, que si se mantiene constante V_A , entonces, si la carga aumenta tiende a disminuir $\omega(s)$, y por tanto a disminuir $E = \mu_{A1}I_1\omega(s) = \lambda_0\omega(s)$; por lo que el término $(R_A + sL_{AA})I_A(s)$ tiende a aumentar por la acción de un incremento en I_A , lo que significa que al mantener V_A , no indica que I_A también permanezca constante. Para una perspectiva de análisis debemos suponer que con algún recurso mantendremos constante I_A , por lo cual se supone que V_A e I_A son constantes. De la ecuación (2.29) y (2.38) tenemos:

$$V_1(s) = I_1(s)(R_1 + sL_{11}) \quad \text{y} \quad T_g = Js\omega(s) + f\omega(s) \pm T_L(s)$$

$$I_1(s) = \frac{V_1(s)}{R_1 + sL_{11}}$$

$$T_g = \mu_{A1}I_1I_A = K_\tau I_1(s) = Js\omega(s) + f\omega(s) \pm T_L(s)$$

$$\frac{K_\tau V_1(s)}{R_1 + sL_{11}} = (Js + f)\omega(s) \pm T_L(s)$$

Obteniendo:

$$K_\tau V_1(s) = (R_1 + sL_{11})(Js + f)\omega(s) \pm (R_1 + sL_{11})T_L(s) \quad (2.44)$$

Por lo tanto la función de transferencia que relaciona a la velocidad con la entrada V_1 es:

$$\frac{\omega(s)}{V_1(s)} = \frac{K_\tau}{(R_1 + sL_{11})(Js + f)} = \frac{\frac{K_\tau}{JL_{11}}}{s^2 + s\left(\frac{R_1}{L_{11}} + \frac{f}{J}\right) + \frac{R_1f}{JL_{11}}} \quad (2.45)$$

Por otra parte, la función de transferencia que relaciona la velocidad con el par de carga T_L es.

$$\frac{\omega(s)}{T_L(s)} = \frac{\mp 1}{Js + f} = \frac{\mp 1}{\left(s + \frac{f}{J}\right)} \quad (2.46)$$

Por lo cual tenemos que si la velocidad se reduce por un aumento de carga, el voltaje V_f debe aumentar, para provocar un aumento de corriente I_f , que sea lo suficientemente grande para generar un par mayor que se requiera para hacerle frente a la carga, esto es debido a que $T_g = \mu_{A1} I_f I_A = K_f I_f(s)$ y como la I_A es constante, I_f es la única que debe de aumentar, una representación en diagramas de bloques para este motor es la que se muestra en la *figura (2.16)*.

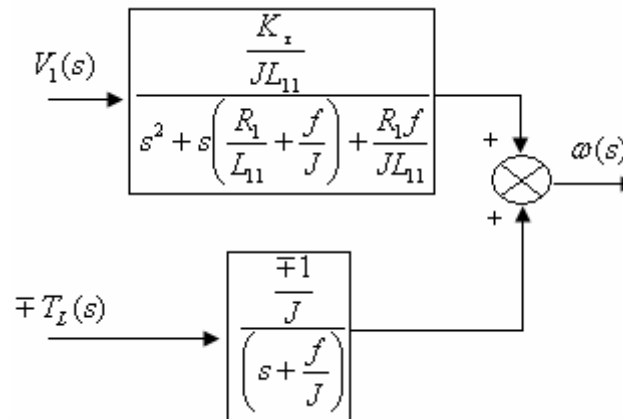


Figura (2.16) Diagrama de bloques de la función de transferencia para un motor de corriente directa controlado por el campo.

2.3.- Métodos de identificación de parámetros.

En la actualidad, cada vez más, el trabajo de un ingeniero consiste en la realización de modelos matemáticos. Los modelos son utilizados en áreas tan distintas como: control, supervisión, predicción, simulación y optimización, las estrategias actuales de diseño de controladores pueden clasificarse en dos grupos: control convencional y control avanzado. El control convencional consistente en el control: manual, *PID*, de relación, en cascada, en avance o retardo de fase. El 90% de los controladores de procesos industriales son actualmente controladores convencionales.

Las estrategias de control pueden dividirse en tres grupos: técnicas de control convencionales (*control desacoplado, control selectivo, control con compensación de retardo puro*), técnicas de control basadas en modelos numéricos (*control predictivo, control adaptable, control robusto, control con modelo interno*) y técnicas de control basadas en conocimiento (*sistemas expertos, control neuronal, control difuso*). Tanto para la utilización de técnicas de diseño convencionales como técnicas avanzadas y especialmente las basadas en modelos, es necesario un modelo numérico preciso del proceso estudiado. Se denomina identificación a la técnica de construir un modelo a partir de las variables medidas del proceso: entradas o variables de control, salidas o variables controladas y, posiblemente, perturbaciones.

En principio y con el objetivo de modelizar se pueden proponer tres formas distintas de utilizar los métodos de identificación:

1. Hacer distintas aproximaciones para estructurar el problema: seleccionar las señales de interés, observar la dependencia entre ellas, estudiar el grado de linealidad del proceso.

2. Construir un modelo que describa el comportamiento entre las entradas y las salidas, prescindiendo del comportamiento físico. Hay distintas formas de abordar el problema, según se consideren modelos no paramétricos o modelos paramétricos.
3. Utilizar los datos para determinar los parámetros no conocidos del modelo físico obtenido a base del estudio de propiedades y leyes físicas del proceso estudiado. En este caso se debe estimar solamente los valores de los parámetros no conocidos. Para ello se recurre a ensayos de comportamiento o pruebas físicas y/o a la utilización de técnicas de optimización.

Hay varias formas de clasificar los modelos matemáticos deterministas o estocásticos, dinámicos o estáticos, de parámetros distribuidos o concentrados, lineales o no lineales, y de tiempo continuo o tiempo discreto.

- **Determinísticos**, ya que se quiere estudiar la relación entre la entrada y la salida con una parte no modelizable o no conocida (*estocástica*).
- **Dinámicos**, porque el objetivo es conocer el comportamiento dinámico de un proceso.
- **De parámetros concentrados**, no se considera la variación en función del tiempo de las constantes asociadas al modelo.
- **Lineales o no lineales**, se hace mayor énfasis a las técnicas de identificación de modelos lineales, las cuales pueden ser utilizadas en el caso de sistemas no lineales.
- **Tiempo continuo o tiempo discreto**, se propone describir técnicas para la identificación de modelos en tiempo discreto y continuo.

Debemos dejar claros varios aspectos en cuanto a la construcción de un modelo; un modelo se desarrolla siempre a partir de una serie de aproximaciones e hipótesis y, por lo tanto, es una representación parcial de la realidad.

- Un modelo se construye para una finalidad específica y debe ser formulado para que sea útil a dicho fin.
- Un modelo tiene que ser por necesidad un compromiso entre la simplicidad y la necesidad de recoger los aspectos esenciales del sistema en estudio.

Los métodos de identificación pueden clasificarse también en función de los modelos obtenidos, de esta forma podríamos diferenciar entre: técnicas de identificación no paramétricas, obteniéndose modelos no paramétricos, y técnicas de identificación paramétricas, que conducen modelos paramétricos; dentro de las denominadas técnicas de identificación no paramétricas podemos citar como más importantes.

- **Análisis de la respuesta transitoria**. Se basa en la obtención de la respuesta del sistema a un impulso o a un escalón. Las señales de prueba a utilizar en este

caso son un impulso ó un escalón, respectivamente, y la salida registrada da el modelo correspondiente.

- **Análisis de la correlación.** Es un método en el dominio del tiempo, útil para sistemas lineales y con señales continuas o discretas. Como resultado del mismo se obtiene la función de correlación entre las variables de interés y, como caso especial, una función de pesos.
- **Técnicas en el dominio de la frecuencia.** Son empleadas directamente para estimar la respuesta en frecuencia del sistema. Dentro de las técnicas frecuenciales podemos diferenciar entre el análisis de *Fourier* y el análisis espectral.

Todas ellas son aplicables en el caso de considerar procesos lineales o linealizables. Para su utilización no se debe suponer ningún tipo de estructura para el modelo y los resultados obtenidos son de tipos gráfico los cuales pueden ser más o menos fáciles de interpretar. En el caso de métodos de identificación paramétricos, se debe tener en cuenta una cierta estructura para el modelo. Los parámetros del modelo se calculan minimizando ciertos criterios de error entre el modelo y el proceso. En general podemos distinguir entre dos tipos de técnicas.

- **Técnicas en el dominio de la frecuencia.** Las cuales minimizan el error entre la respuesta frecuencial real del proceso y la respuesta frecuencial del modelo.
- **Técnicas en el dominio del tiempo.** Las cuales minimizan el error temporal, error de predicción o error de salida, entre el modelo y el proceso. Forman parte de este grupo los métodos de identificación paramétricos clásicos y con redes neuronales.

Ambas pueden ser utilizadas tanto para la estimación de los parámetros de modelos continuos como discretos. En general, las etapas a seguir para identificar un modelo paramétrico son.

1. **Diseño del experimento de identificación.** En esta primera etapa es necesario decidir, entre otros aspectos; el tipo de señales de excitación, el mejor periodo para la adquisición de datos, la cantidad de datos necesarios.
2. **Observación y mejora de la calidad de los datos capturados.** Antes de utilizar los métodos de estimación de parámetros es necesario; observar y reparar los datos erróneos, filtrar las altas frecuencias, eliminar offsets y tendencias.
3. **Determinación de la estructura del modelo.** En esta etapa es necesario definir el tipo de modelos a utilizar; continuos o discretos, lineales o no lineales, regresiones lineales o redes neuronales. Y si es necesario adoptar un procedimiento para determinar el orden del modelo.
4. **Estimación de los parámetros.** Etapa la mayoría de las veces muy relacionada con la anterior, en ella se presenta el problema de decidir el método o métodos de estimación de parámetros que se va a utilizar para calcular el valor de los

mismos. En general se puede escoger entre dos técnicas distintas: en el dominio temporal y en el dominio frecuencial.

5. **Validación del modelo.** Es la etapa en la que debe preguntarse si el modelo identificado es suficientemente representativo del proceso estudiado. En el se debe definir un criterio para evaluar la calidad. Generalmente se dispone de varios modelos candidatos y debe escogerse uno de ellos basándose en algún criterio.

2.4.- Determinación del modelo matemático para el modulo TY36A.

Empleando la respuesta escalón, podemos obtener la respuesta transitoria de nuestro motor de corriente directa controlado por armadura modulo TY36A. Este método tiene la particularidad de ser muy conocido y ampliamente estudiado, a continuación se explica el modelado de la planta en base a sus parámetros y su dinámica.

Tomando en consideración que el motor trabaja en el vacío es decir $T_L=0$, y despreciando el valor de L_{AA} ⁽⁷⁾, obtenemos el siguiente diagrama de bloques, mostrado en la figura (2.17).

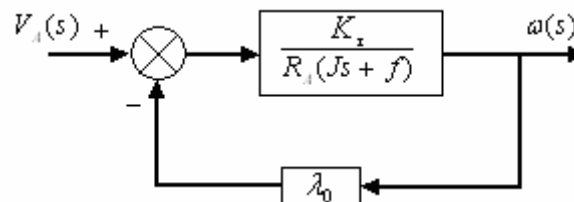


Figura (2.17) Diagrama de bloques reducido de la función de transferencia de voltaje de armadura y velocidad.

De donde:

$$\frac{\omega(s)}{V_A(s)} = \frac{\frac{K_\tau}{R_A J}}{s + \frac{R_A f + K_\tau \lambda_0}{R_A J}} \quad (2.47)$$

Definiendo las siguientes expresiones:

$$\alpha = \frac{K_\tau}{R_A J} \quad (2.48)$$

$$\beta = \frac{R_A f + K_\tau \lambda_0}{R_A J} \quad (2.49)$$

Obtenemos.

$$\frac{\omega(s)}{V_A(s)} = \frac{\alpha}{s + \beta} \quad (2.50)$$

(7) Se desprecia el valor de la inductancia de armadura L_{AA} , debido a que la constante mecánica la es mayor que la constante eléctrica y esta no afecta significativamente al modelo. Sin embargo la consideramos en el capítulo cuatro en el modelo en variables de estado.

Si V_A es un voltaje de corriente directa tenemos que $V_A(s) = \frac{V_A}{s}$ por lo que la respuesta en ω en función de la señal de excitación V_A es:

$$\omega(s) = \left(\frac{\alpha}{s + \beta} \right) \frac{V_A}{s} \quad (2.51)$$

Empleando fracciones parciales se tiene:

$$\omega(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \beta} \quad (2.52)$$

$$A = -B$$

$$A = \frac{\alpha}{\beta} V_A \quad (2.53)$$

Obteniéndose como solución:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{\beta} V_A \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \beta} \right) \quad (2.54)$$

Y su respectiva solución en el tiempo es.

$$\omega(t) = \frac{\alpha}{\beta} V_A (1 - e^{-\beta t}) \quad (2.55)$$

2.4.1.- Procedimiento experimental.

El modulo *G36A* permite estudiar de modo teórico y experimental los transductores de velocidad y posición angular y de las técnicas de control automático de dichas magnitudes. Consiste de un panel sinóptico en donde se hallan reproducidos el esquema electrónico de cada uno de los bloques que componen el circuito, las conexiones entre los diferentes bloques y los puntos de medición. En la *figura (2.18)* se muestra el serigrafiado del modulo; en el cual se observan diez bloques que comprenden otros tantos circuitos y un modulo de conexión a la unidad externa *TY36A*, las fuentes de alimentación necesarias para el modulo son de $\pm 12 [V]$ para la parte de control y una de $+30 [V]$ para la potencia. Las tensiones de $\pm 12 [V]$ deben suministrar una corriente de al menos $0.5 [A]$ y la de $+30 [V]$ una corriente mínima de $1.5 [A]$.

La unidad *TY36/EV* *figura (2.19)* consta de un motor de corriente continua de imanes permanentes ⁽⁸⁾ en cuyo eje van sujetados, en uno de sus extremos una dinamo taquimétrica y un disco de sectores opacos y otros transparentes, que se utiliza en asociación con un conjunto fototransmisor-fotorreceptor, como transductor de velocidad y en el otro extremo, un motorreductor que permite reducir la velocidad angular de rotación, un sistema de visualización de la posición angular y un potenciómetro para detectarla.

(8) Los datos del motor se encuentran el apéndice (B.1)

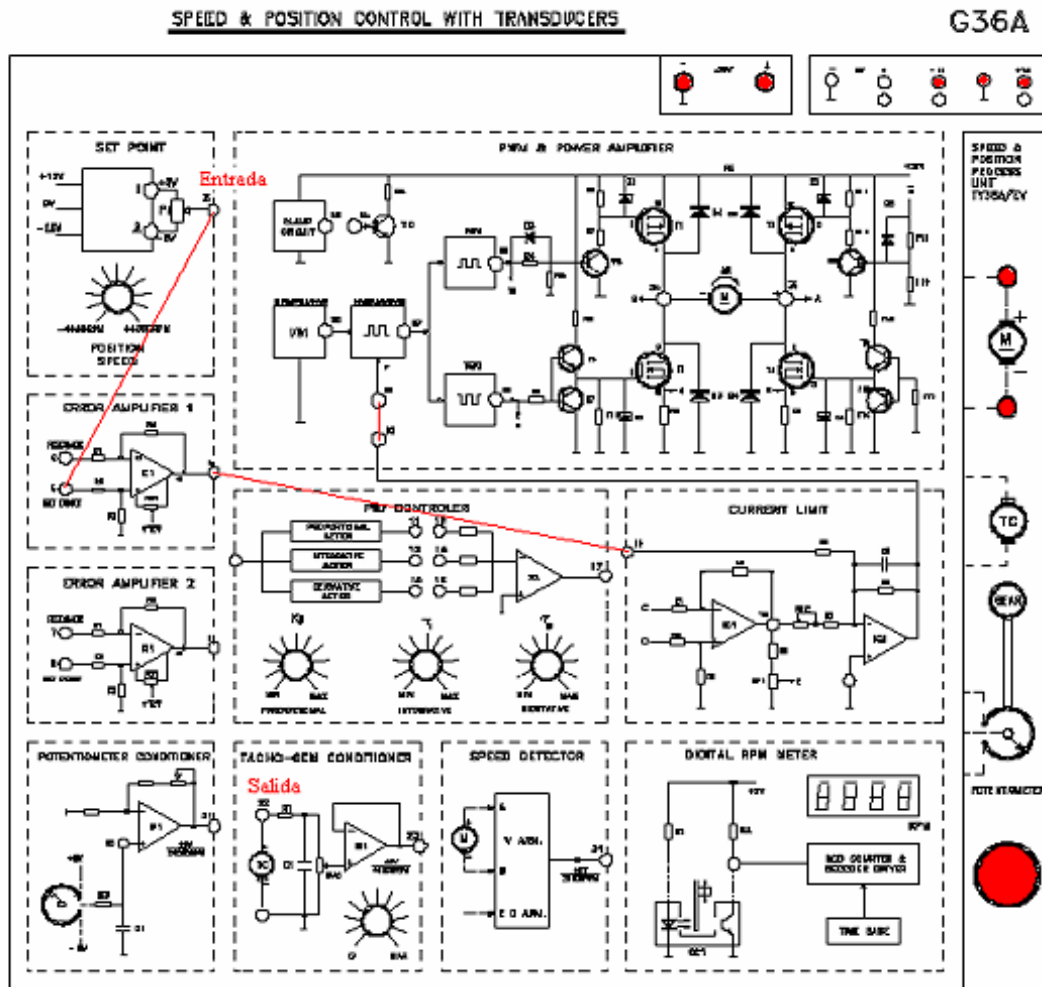


Figura (2.18) Diagrama de conexiones del módulo G36A.

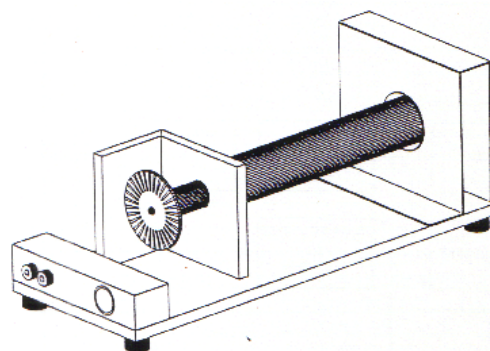


Figura (2.19) Unidad TY36A.

La unidad taquímetrica consta de un campo magnético, el cual lo realiza un imán permanente en forma de U cuyas expansiones polares están dispuestas cara a cara, si consideramos una vuelta del inducido que gire a la velocidad angular ω , dicha vuelta esta atravesada por un flujo variable según la relación:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t) \tag{2.56}$$

Por lo que la tensión en los extremos de la vuelta vale.

$$e = -d\theta / dt = \theta_0 \omega \text{sen}(\omega t) \quad (2.57)$$

Cuyo valor máximo es proporcional a la velocidad angular. En realidad el dinamo esta constituido por un estator en el cual se encuentra el imán permanente y un rotor alrededor del que se hallan arrolladas N vueltas separadas $2\pi/N$. Las N vueltas se rematan con un colector de laminas y las tensiones senoidales inducidas se extraen por medio de dos escobillas en un tiempo correspondiente a $2\pi/N\omega$. En la *figura (2.20)* se muestran la salida de tensión al variar la velocidad angular, en la cual se observa que tanto la amplitud como la ondulación dependen de ω .

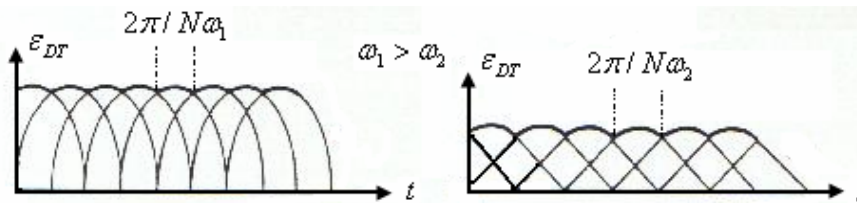


Figura (2.20) Salida de tensión proporcional a la frecuencia.

Además de una componente de continua proporcional a ω , se sobrepone una componente de alterna cuya componente fundamental esta caracterizada por una pulsación proporcional a $N \times \omega$ y cuya amplitud es inversamente proporcional a N . El parámetro fundamental de una dinamo taquimétrica es la constante taquimétrica que es la relación entre la tensión de salida de la dinamo y la velocidad de rotación, esta tiene unidades de $[Volt/rad \times s^{-1}]$ y se expresa del modo siguiente:

$$K_T = \varepsilon_{DR} / \omega \quad (2.58)$$

Y también se puede expresar en $[V/RPM]$ empleando la siguiente relación:

$$K_T [V / rad \times s^{-1}] = \frac{2\pi}{60} K_T [V / RPM] \quad (2.59)$$

Para la unidad *TY36A* la constante taquimétrica vale: $K_T = 2.8 [mV \times s / rad]$.

En el desarrollo experimental se realizaron pruebas manteniendo el lazo abierto, para obtener los parámetros de la planta, a través de la respuesta escalón, empleando los módulos de control de velocidad del laboratorio de control analógico *G36A* y *TY36A* conectando dichos módulos tal como se muestra en la *figura (2.18)*.

- a) Conectar la planta a la fuente de alimentación con las polarizaciones indicadas de $\pm 12 [V]$ para los circuitos digitales, y de $+30 [V]$ para la parte de potencia del modulo.
- b) De la salida del “*SET POINT*” (*Borne 3*) conectar al amplificador de error (*Borne 5*), el cual nos dará una señal de corriente directa variable para la excitación en lazo abierto de la planta *TY36A*.
- c) Conectar la planta *Modulo TY36A* al modulo de control *G36A* colocando el cable *DIN-7* para las lecturas del tacómetro para el circuito medidor de

- velocidad, además de conectar en los bornes correspondientes la polarización del motor proveniente del modulo *G36A*.
- d) De la salida del amplificador de error borne (6), conectar al borne (18) limitador de corriente, y puentear los bornes (29) y (30).
 - e) De la salida del Tacogenerador (Borne 22) conectar el osciloscopio y el graficador para obtener la respuesta al escalón Verificar que la resolución del graficador y el osciloscopio sea la adecuada en la escala de tiempo y voltaje $5000 [mV/cm]$
 - f) Antes de comenzar la operación es necesario ajustar el voltaje proveniente del bloque del “*SET-POINT*”, para tener diferentes entradas escalón de voltaje, en las cuales se empleo valores separados $0.5 [V]$ de diferencia.

2.5.- Resultados experimentales.

Se aplico varias entradas escalón a la planta de las cuales se realizaron 15 mediciones para cada entrada de valor se hizo un promedio en los valores redondeando a la cifra mas significativa y tomando como resolución la mitad de la mínima escala; en el (*Apéndice B2*) se muestra la tabla de resultados experimentales completa de los valores promedios de las mediciones.

2.5.1.- Análisis de resultados.

Partiendo de la *ecuación (2.51)*, analizaremos los resultados obtenidos experimentalmente *figura (2.21)* por lo cual para las diversas entradas, escalón nosotros podemos obtener, los valores de α y β .

Dado que la respuesta obtenida en nuestras mediciones son las generadas en el borne (22) y corresponden a señales de voltaje, es decir $V_{sal}(\omega)$ empleamos la constante taquimétrica para tener las siguientes relaciones:

$$\omega(rad / s) = \frac{V_{sal}[V]}{0.0028[V \times s / rad]} \tag{2.60}$$

$$\omega(rad / s) = \frac{2\pi}{60} \omega(RPM) \tag{2.61}$$

En la *tabla (2.1)* se presentan los valores promedios de las mediciones, y los valores en porcentajes de la respuesta escalón, así como los tiempos de levantamiento al 63.2% de la respuesta en estado estable.

| Voltaje Entrada | Voltaje Salida | Voltaje al 63.2% | Tiempo al 63.2% | Vel. Salida | Vel. al 63.2% | Vel. Salida | Vel. al 63.2% |
|-----------------|----------------|------------------|-----------------|-------------|---------------|-------------|---------------|
| [V] | [V] | [V] | [s] | [RPM] | [RPM] | [rad/s] | [rad/s] |
| 3 | 6.95 | 4.3924 | 0.525 | 2305 | 1456.76 | 241.37883 | 152.5514216 |
| 3.5 | 8 | 5.056 | 0.5 | 2700 | 1706.4 | 282.7431 | 178.6936392 |
| 4 | 9.2 | 5.8144 | 0.525 | 3075 | 1943.4 | 322.01298 | 203.5122002 |
| 4.5 | 10.4 | 6.5728 | 0.5125 | 3460 | 2186.72 | 362.33005 | 228.9925895 |
| 5 | 11.5 | 7.268 | 0.5125 | 3845 | 2430.04 | 402.64712 | 254.4729788 |

Tabla (2.1) Resultados obtenidos experimentalmente para los parámetros de la unidad *TY36A*.

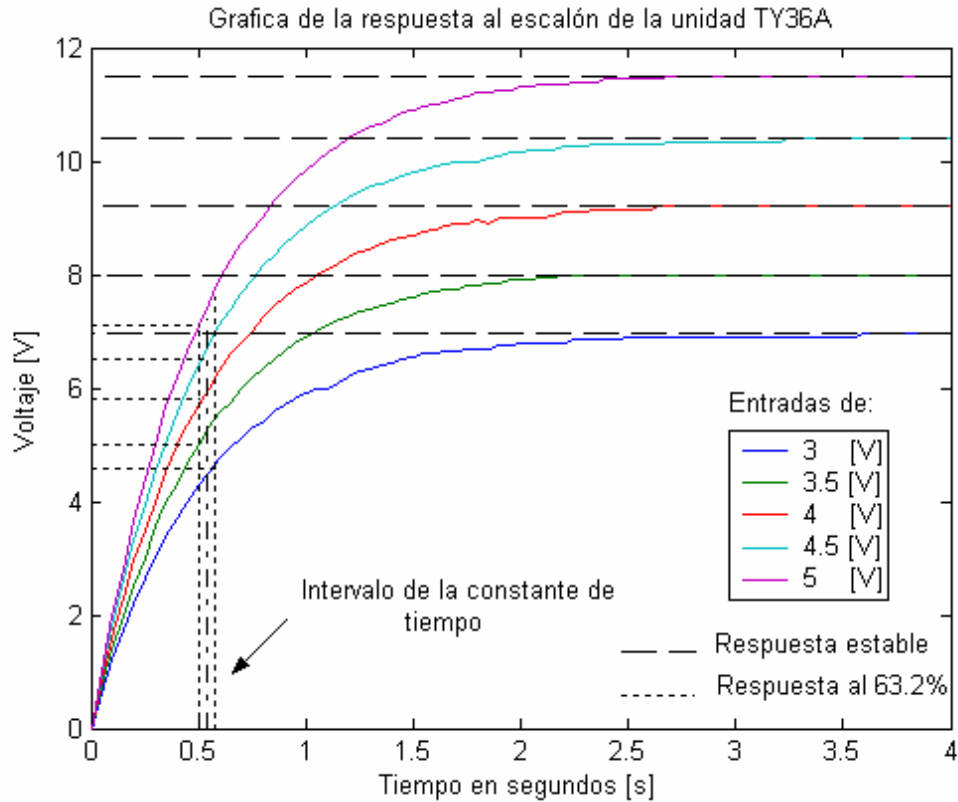


Figura (2.21) Respuesta a diversas entradas escalón de la planta TY36A.

Ahora analizando las siguientes condiciones para las diversas entradas; sabemos que cuando se obtiene la condición estable:

$$\omega(t \rightarrow \infty)_{ES} = V_A \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.62}$$

Por lo que podemos escribir la siguiente relación:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega(t)_{ES}}{V_A} \tag{2.63}$$

Y para $t=t_0$, cuando la respuesta se encuentra al 63.2% de su respuesta en estado estable:

$$\omega(t_0)_{63.2\%} = V_A \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t_0}) \tag{2.64}$$

Combinando la ecuación (2.59) con la ecuación (2.60) obtenemos.

$$\beta = \frac{-\ln\left(1 - \frac{\omega(t_0)_{63.2\%}}{\omega(t)_{ES}}\right)}{t_0} \tag{2.65}$$

$$\alpha = \beta \frac{\omega(t)_{ES}}{V_A} \tag{2.66}$$

Así obtenemos los siguientes parámetros para las diversas entradas escalón y considerando la velocidad angular en $[rad/s]$.

| Voltaje Entrada | Tiempo al 63.2% | Parametro $[\alpha/\beta]$ | Parametro $[\beta]$ | Parametro $[\alpha]$ |
|-----------------|-----------------|----------------------------|---------------------|----------------------|
| [V] | [s] | $[1/V*s]$ | $[1/s]$ | $[1/V*s^2]$ |
| 3 | 0.525 | 80.45961056 | 1.9 | 152.8732601 |
| 3.5 | 0.5 | 80.78374286 | 2 | 161.5674857 |
| 4 | 0.525 | 80.50324375 | 1.9 | 152.9561631 |
| 4.5 | 0.5125 | 80.51778815 | 1.95 | 157.0096869 |
| 5 | 0.5125 | 80.52942367 | 1.95 | 157.0323762 |

Tabla (2.2) Parámetros de la planta para diversas entradas escalón.

Considerando las dos primeras cifras significativas después del punto decimal así, como la incertidumbre tomando el valor absoluto del valor mas distante a nuestro valor obtenido tenemos que los valores α y β promedios son:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= 156.28 \pm 5.26 [1/V \times s^2] \\ \hat{\beta} &= 1.94 \pm 0.06 [s^{-1}] \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) &= 80.56 \pm 0.22 [1/V \times s] \end{aligned} \tag{2.67}$$

En el dominio de *Laplace* las *ecuaciones* (2.50) y (2.51) se pueden escribir como:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{156.28}{s + 1.94} \tag{2.68}$$

$$\omega(s) = \left(\frac{156.28}{s + 1.94} \right) \left(\frac{V_A}{s} \right) \tag{2.69}$$

Por lo tanto nuestra *ecuación* (2.55) en función del tiempo y considerando la constante taquimétrica es.

$$\omega(t) = V_A \times [769.3 \times (1 - e^{-1.94t}) \pm 2.1] [RPM] \tag{2.70}$$

$$\omega(t) = V_A \times [80.56 \times (1 - e^{-1.94t}) \pm 0.22] [rad / s] \tag{2.71}$$

$$V_{sal}(\omega) = V_A \times [2.3 \times (1 - e^{-1.94t}) \pm 0.05] [Volts] \tag{2.72}$$

Capítulo 3

“Control de modos deslizantes”

Objetivos:

- Comprender en que consiste un sistema de estructura variable.
- Describir las propiedades de los modos deslizantes.
- Realizar la formulación matemática de los modos deslizantes.
- Describir los principios de los modos deslizantes de orden superior.
- Describir el algoritmo *twisting* y su formulación matemática.

Palabras y conceptos clave:

- Modos deslizantes.
- Sistemas de estructura variable.
- Superficie deslizante.
- Control equivalente.
- *Chattering*.
- Modos deslizantes de orden superior.
- Algoritmo *twisting*.

3.0.- Introducción.

En el primer capítulo se analizaron las técnicas de control clásicas y en el capítulo dos se obtuvo un modelo matemático para el motor a controlar, en este capítulo se analizará a fondo una técnica del control robusto, el “Control de Modos Deslizantes” la cual es una de las técnicas con mayor desarrollo durante los últimos veinte años de investigación desde su aparición. El término modo deslizante aparece primero en el contexto de sistemas de la estructura variable, debido a que es el modo operacional principal para esta clase de sistemas de control. Prácticamente todos los métodos para los sistemas de estructura variable son basados en la introducción deliberada de modos deslizantes que juegan un papel excepcional en desarrollos teóricos y en aplicaciones prácticas. Debido su propiedad de reducción de orden, su insensibilidad a las perturbaciones y variaciones de los parámetros de la planta; el control de modos deslizantes es una herramienta eficaz para controlar plantas con una alta complejidad con dinámicas que operan bajo condiciones de incertidumbre lo cual es común para muchos procesos tecnológicos.

3.1.- Sistemas de control de estructura variable y modos deslizantes.

Los sistemas de control de estructura variable *SCEV* como el nombre lo sugieren son una clase de sistemas en que la ley de control se cambia deliberadamente durante el proceso de control de acuerdo con algunas reglas definidas, las cuales dependen del estado del sistema; con el propósito de ilustrar lo antes mencionado analicemos el siguiente doble integrador dado por la ecuación (3.1):

$$\ddot{y}(t) = u(t) \quad (3.1)$$

Considere el efecto de usar realimentación en la ley de control.

$$u(t) = -ky(t) \quad (3.2)$$

Donde k es un escalar estrictamente positivo. Podemos analizar el comportamiento del sistema en el plano de fase dibujando velocidad contra la posición. Sustituyendo la acción de control en la ecuación (3.1), y multiplicando la ecuación resultante por \dot{y} , obtenemos:

$$\dot{y} \ddot{y} = -k \dot{y} y \quad (3.3)$$

Integrando esta última expresión podemos obtener la relación entre la velocidad y posición dada por la siguiente expresión:

$$\dot{y}^2 + ky^2 = c \quad (3.4)$$

Donde c representa una constante de integración, que es el resultado de las condiciones iniciales y es estrictamente positivo. En el caso especial cuando $k=1$, la ecuación generalmente representa un círculo con centro en el origen y radio \sqrt{c} .

Consideremos la ley de control dada por.

$$u(t) = \begin{cases} -k_1 y(t) & \text{si } -y \dot{y} < 0 \\ -k_2 y(t) & \text{otra condición} \end{cases} \quad (3.5)$$

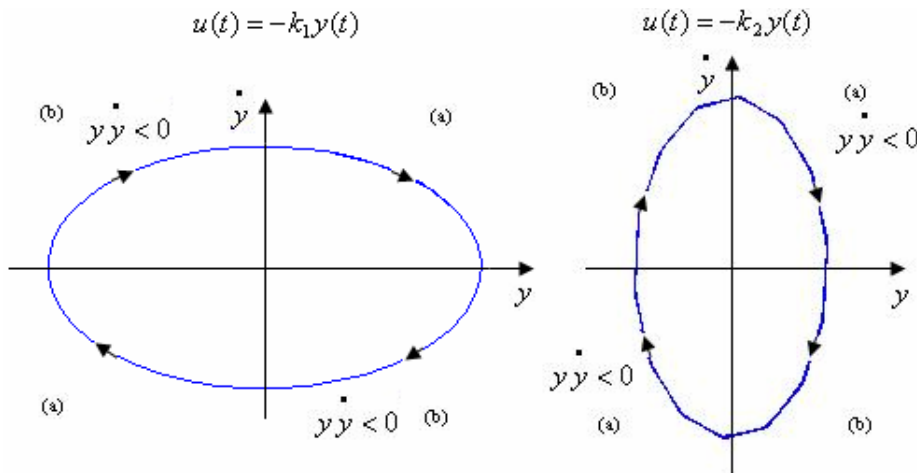


Figura (3.1) Plano de fase de un oscilador armónico simple.

Donde $0 < k_1 < k_2$, el plano de fase (y, \dot{y}) es dividido por la ley de conmutación dividiéndolo en cuatro cuadrantes separados por ejes como se muestra en la figura (3.1); la ley de control $u = -k_2 y$, solo tendrá efecto en los cuadrantes señalados en la región (a). En esta región, la distancia del origen hacia los puntos del plano de fase disminuyen a lo largo de la trayectoria del sistema; del mismo modo en la región (b). Cuando la ley de control $u = -k_1 y$, esta en operación, la distancia del origen hacia los puntos del plano de fase disminuyen a lo largo de la trayectoria del sistema; el plano de fase del sistema de lazo cerrado se encuentra bajo una ley de control de estructura variable u la cual se obtiene empalmando ambas regiones de los planos de fases de la figura (3.1), de esta forma se obtiene un plano de fase en forma de una espiral que converge hacia el origen y el movimiento resulta ser asintóticamente estable, tal como se aprecia en la figura (3.2).

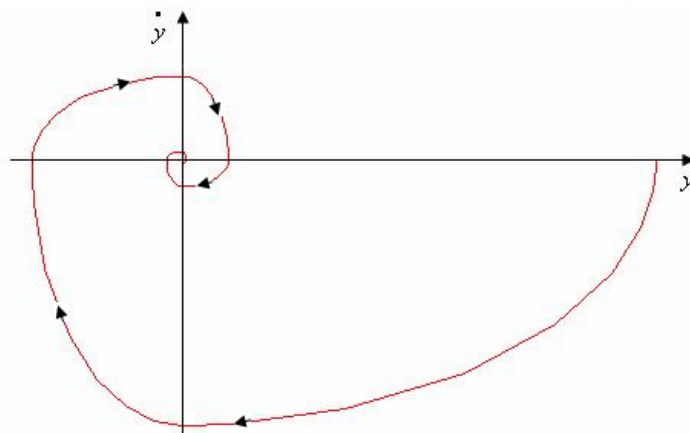


Figura (3.2) Plano de fase del sistema bajo SCEV.

Esto se puede verificar matemáticamente considerando la siguiente función de Lyapunov.

$$V(y, \dot{y}) = y^2 + \dot{y}^2 \quad (3.6)$$

A través del teorema de *Pitágoras*, el cual me representa el cuadrado de la distancia de cualquier punto (y, \dot{y}) , al origen del plano de fase y desde el punto de vista físico representa la energía del sistema, la derivada en el tiempo de $V(y, \dot{y})$, a través del lazo cerrado las trayectorias están dadas por.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2 \dot{y} \ddot{y} + 2 \dot{y} \ddot{\dot{y}} \\ &= 2 \dot{y}(\ddot{y} + \ddot{\dot{y}}) = 2 \dot{y}(y + u) \\ &= \begin{cases} 2 \dot{y} y(1 - k_1) & \text{Si } \dot{y} < 0 \\ 2 \dot{y} y(1 - k_2) & \text{Si } \dot{y} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta función es siempre negativa, debido a que los valores de y y \dot{y} tenderán a cero y por lo tanto la distancia al origen es siempre decreciente. A manera de conclusión podemos observar los siguientes resultados.

- De manera independiente, ninguno de los dos controles proporciona estabilidad al sistema.
- El criterio de elección fue el producto de la posición y su velocidad.
- El valor de las constantes k_1 y k_2 determinan la estabilidad del sistema.
- Eligiendo apropiadamente regiones de cada control se logra la estabilidad deseada.

Un resultado más significativo, empleando una ley de estructura variable esta dado por:

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{Si } s(y, \dot{y}) > 0 \\ 1 & \text{Si } s(y, \dot{y}) < 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Donde la función de conmutación esta definida por:

$$s(y, \dot{y}) = m y + \dot{y} \quad (3.9)$$

Donde m es un escalar positivo, la razón para usar el termino función de conmutación es claro cuando en la *ecuación (3.9)* se utiliza para decidir cual estructura de control es empleada en cualquier punto (y, \dot{y}) en el plano de fase; la *ecuación (3.8)* se puede escribir de la siguiente manera.

$$u(t) = -\text{sgn}(s) \quad (3.10)$$

Donde $\text{sgn}()$ es la función signum, la cual exhibe la siguiente propiedad.

$$s \cdot \text{sgn}(s) = |s| \tag{3.11}$$

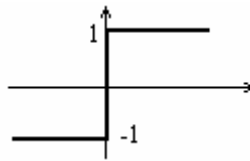


Figura (3.3) Función signum.

La ecuación (3.8) puede ser usada para el control del doble integrador, para valores grandes de \dot{y} el plano de fase se obtiene uniendo las trayectorias parabólicas de las leyes de control constitutivas, tal como se observa en la figura (3.4).

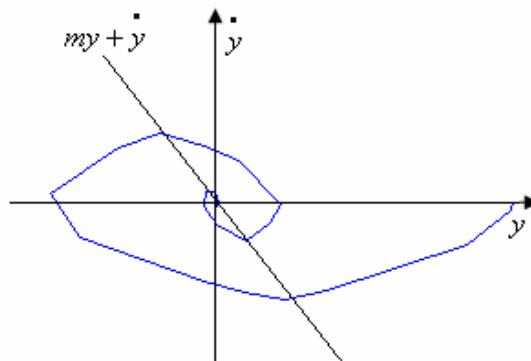


Figura (3.4) Plano de fase del sistema.

La ecuación de la línea recta representa el conjunto de puntos para los cuales $s(y, \dot{y}) = 0$; en este caso la línea recta atraviesa el origen con una pendiente de $-m$, ahora para valores de \dot{y} que satisfagan la desigualdad $m|\dot{y}| < 1$, tenemos:

$$s \dot{s} = s(m \dot{y} + \ddot{y}) = s(m \dot{y} - \text{sgn}(s)) < |s|(m|\dot{y}| - 1) < 0 \tag{3.12}$$

Lo cual también se puede expresar:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \tag{3.13}$$

Por consecuencia cuando $m|\dot{y}| < 1$, la trayectoria del sistema esta sobre un lado u otro de la línea.

$$\ell_s = \left\{ (y, \dot{y}) : s(y, \dot{y}) = 0 \right\} \tag{3.14}$$

Intuitivamente, existe una alta frecuencia de conmutación entre las dos diferentes estructuras de control repetidamente cruzando la línea ℓ_s ; Idealmente una vez interceptada, el control conmutado mantiene la trayectoria de estado de la planta en la

superficie para el tiempo siguiente y la trayectoria de estado de la planta se desliza por la superficie, esto es suponiendo una frecuencia infinita de conmutación, para que este verificando constantemente el estado de la planta y sus perturbaciones, lo cual se considera un modo deslizante ideal cuando la trayectoria de estado de la planta controlada es igual a la trayectoria deseada en cada $t \geq t_1$ para cualquier t_1 , esto requiere una velocidad infinita de conmutación. Esto último no es posible ya que en sistemas reales, un controlador conmutado tiene imperfecciones que limitan la conmutación a una frecuencia finita por lo cual se convierte en un problema para el sistema el cual se le denomina *chattering*, en el cual las trayectorias que representan al sistema oscilan en un vecindario de la superficie de conmutación. Matemáticamente para una frecuencia infinita de conmutación el movimiento podría quedar atrapado o restringido a lo largo de la línea ℓ_s la cual satisface la ecuación diferencial obtenida cambiando $s(y, \dot{y}) = 0$; a saber:

$$\dot{y}(t) = -my(t) \tag{3.15}$$

esto representa una reducción de orden y las trayectorias deslizarán a lo largo de la línea al origen. Tal como se muestra en la *figura (3.5)*.

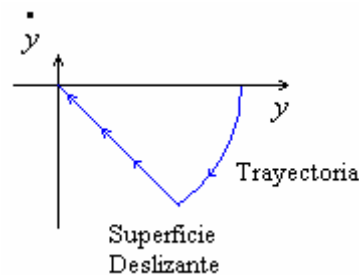


Figura (3.5) Plano de fase de un modo deslizante

Tal comportamiento dinámico es descrito como modo deslizante ideal y la línea ℓ_s es la superficie deslizante. Durante el movimiento deslizante. El comportamiento del sistema se reduce y es independiente del control. La acción de control que garantiza que se satisfagan las condiciones de la *ecuación (3.13)* se puede escribir como.

$$s \dot{s} < 0 \tag{3.16}$$

La cual es referida como condición de existencia, analizando esta condición para un sistema de primer orden se hace que el error y la derivada del error sean de signos contrarios $s \dot{s} < 0$, es decir que tiendan el error a cero, ya que si este último es positivo y la derivada negativa (*la variación del error negativa*), implica que el error tiende a disminuir, acercándose a cero, de igual manera cuando el error es negativo y la derivada del mismo positiva. Esto es posible con una función conmutada, definiendo (*y forzando*) la derivada del error en el sistema a ser de signo contrario al error, esto también se puede lograr con una gran cantidad de funciones, mas se selecciona una función que consiste de una función *sign*, por que de esta manera se tienen solo dos posibles salidas, esto implica una ganancia muy grande de la señal de entrada. Logrando eliminar todas

las perturbaciones y llegar al punto donde el error se hace cero, alcanzando la superficie de deslizamiento. El hacer que el error sea cero (*la variable que definimos como error*), nos indica que llegamos a la superficie prediseñada al comportamiento que deseamos del sistema así el control deja de ser esta función *sign*, para cambiar a una nueva ecuación que definirá el comportamiento del sistema desde este momento y hasta que se alcance el punto deseado. Es por esto que se llama control conmutado, por que el control cambia de función de acuerdo al valor de la planta.

3.2.- Propiedades de los modos deslizantes.

Ahora analizaremos con más detalle las propiedades de los modos deslizantes ideales y la acción de control necesaria para mantenerlos, para tal efecto consideremos nuevamente el doble integrador *ecuación (3.1)*, y la ley de control dada por la *ecuación (3.8)*, el plano de fase se muestra en la *figura (3.6)* la cual proviene de el comportamiento en lazo cerrado cuando $m=1$. Y las condiciones iniciales están dadas por $y = 1, \dot{y} = 0$. Las dos etapas naturales de la dinámica son fácilmente observables; el movimiento inicial es una trayectoria parabólica rumbo a la superficie deslizante, después se tiene un movimiento a través de la línea $\dot{y} = -y$, hacia el origen.

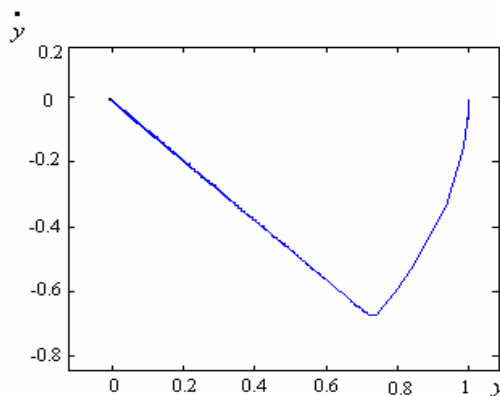


Figura (3.6) Plano de fase del modo deslizante.

La acción de control asociada con esta simulación esta dada en la *figura (3.7)*, en la cual se puede ver que el deslizamiento toma lugar después de 0.732 segundos cuando la alta frecuencia de conmutación toma lugar. Una interpretación de la señal de control de la *figura (3.7)*, puede ser dado en términos del promedio ó comportamiento en baja frecuencia.

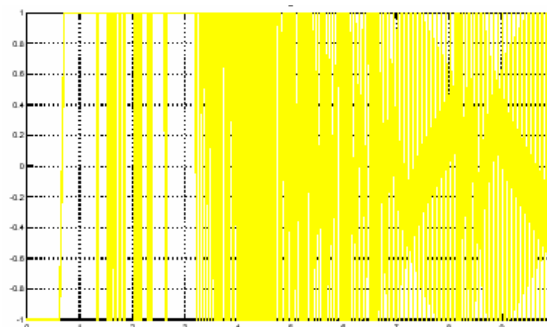


Figura (3.7) Acción de control conmutado.

Como se expuso en el principio, el propósito de la acción de control es la de garantizar que las trayectorias sean conducidas y forzadas hacia ℓ_s , analizando la relación entre la acción de control y la salida de la planta, supongamos que para un tiempo t_s , la superficie de conmutación es alcanzada y un modo deslizante toma lugar siguiendo que la función de conmutación satisface $s(t)=0$, para todo $t>t_s$, lo cual implica que $\dot{s}(t) = 0$ para todo $t \geq t_s$, de manera que las ecuaciones (3.1) y (3.8).

$$\dot{s}(t) = m \dot{y}(t) + u(t) \tag{3.17}$$

Y de esta manera cuando $\dot{s}(t) = 0$ para todo $t \geq t_s$, y de la ecuación (3.17), la ley de control que mantiene el movimiento sobre ℓ_s es.

$$u_{eq}(t) = -m \dot{y}(t) \tag{3.18} \quad (t \geq t_s)$$

Esta ley de control es referida como acción de control equivalente; esta señal de control no es la que se aplica a la planta, pero si podemos considerar que es un promedio de la señal de control discontinua, y se puede obtener aplicando un filtro pasabajas a esta señal de control.

$$\tau \dot{u}_a(t) + u_a(t) = u(t) \tag{3.19}$$

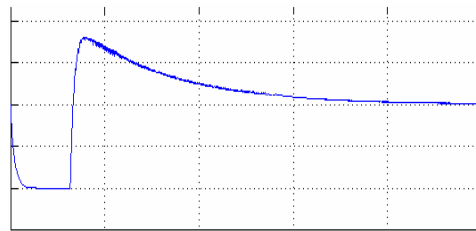


Figura (3.8) Control equivalente

La figura (3.8) muestra $u_a(t)$ asociado al control equivalente cuando la constante $\tau=0.04$, La señal de control aplicada a la planta se puede entender que esta compuesta de componentes de baja y alta frecuencia de tal forma que.

$$u(t) = \underbrace{u_a(t)}_{baja} + \underbrace{(u(t) - u_a(t))}_{alta} \tag{3.20}$$

3.3.- Formulación matemática de los modos deslizantes:

Considere el sistema lineal invariante en el tiempo con una entrada de control dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{3.21}$$

Donde: $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathcal{R}^{n \times 1}$. Sin perder generalidad, suponemos que la matriz A es de rango completo, u es el control conmutado que en nuestro caso $u=Ms\text{ign}(s)$ con $s=cx$, $c=[c_1, c_2, \dots, c_n]$. El problema por resolver es sintetizar una ley de control que obligue al estado a ser llevado al origen.

3.3.1.- Regularización.

El primer problema matemático en el contexto de nuestro plan para emplear modos deslizantes para diseñar sistemas de control realimentado, es la descripción matemática de sus movimientos. Esto surge debido a discontinuidades en las entradas del control y por tanto en los lados derechos de las ecuaciones diferenciales de movimiento. Para sistemas discontinuos, la ecuación diferencial (3.21) se puede escribir por conveniencia como.

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (3.22)$$

De tal forma que $f : \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ es discontinua con respecto al vector de estado, Desde un punto de vista clásico de la teoría de las ecuaciones diferenciales no son aplicables las condiciones de *Lipschitz* que nos garantizan la existencia de una solución única, esto asume que existe un escalar L tal que.

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad (3.23)$$

Cuando cualquier función satisface las condiciones de *Lipschitz* es necesariamente continua, se puede adoptar una alternativa para aproximarse, en la practica los modos deslizantes ideales no son alcanzables debido a imperfecciones como atrasos, histéresis y dinámicas no modeladas, de tal forma que los métodos convencionales no pueden ser aplicables, el siguiente paso es emplear diferentes métodos de regularización ó remplazar el problema original por uno estrechamente similar para que los métodos familiares puedan aplicarse. Para sistemas con controles discontinuos, la regularización aproximada tiene una interpretación física simple. La incertidumbre del comportamiento del sistema en las superficies discontinuas aparecen a causa de que las ecuaciones de movimiento.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t, u) & \forall x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m & \quad (3.24) \\ u_i &= \begin{cases} u_i^+(x, t) & s_i(x) > 0 \\ u_i^-(x, t) & s_i(x) < 0 \end{cases} & (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son un modelo ideal el cual abandona factores no ideales como pequeñas imperfecciones de los dispositivos interruptores (*retraso, histéresis, pequeñas constantes de tiempo*), dinámicas no modeladas de sensores y actuadores, que se tienen que incorporar en el modelo del sistema; se asumen parámetros pequeños que caracterizan a todos estos factores para tender a cero. Si él límite de las soluciones existe cuando las incertidumbres tienden a cero, entonces la solución a las ecuaciones describen el modo deslizante ideal.

Un procedimiento límite es el método de *regularización* por derivación de las ecuaciones de modo deslizante en sistemas con control discontinuo. Para analizar este método consideremos un sistema lineal de tiempo invariable con una entrada de control, una función relevadora escalar que es una combinación lineal de los componentes de estado; tal como se presenta en la *ecuación* (3.21). Las trayectorias de estado pueden ser orientadas en una dirección hacia el plano conmutado $s(x)=0$ en el espacio de estado

$x^T=(x_1,x_2,\dots,x_n)$; de tal forma que el modo deslizante ocurre tal como se observa en la (figura 3.9).

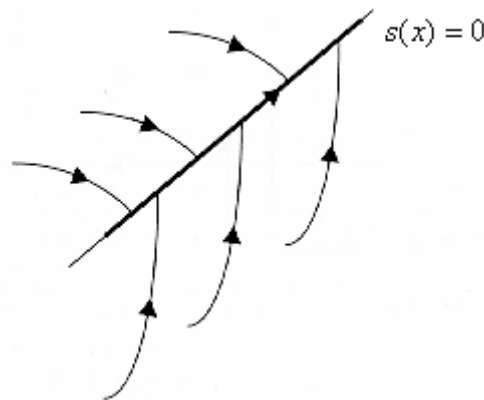


Figura (3.9) Modo deslizante en un sistema lineal

Siguiendo el procedimiento de regularización, las pequeñas imperfecciones de un dispositivo conmutado se toman en cuenta. Si un dispositivo relevado es implementado con una lazo de histéresis de ancho 2Δ tal como se observa en la figura (3.10), entonces las trayectorias de estado oscilan en una vecindad Δ del plano conmutado tal como se observa (figura 3.11).

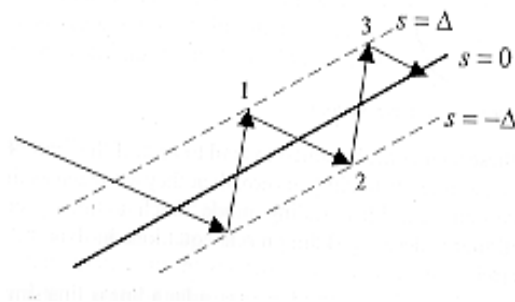
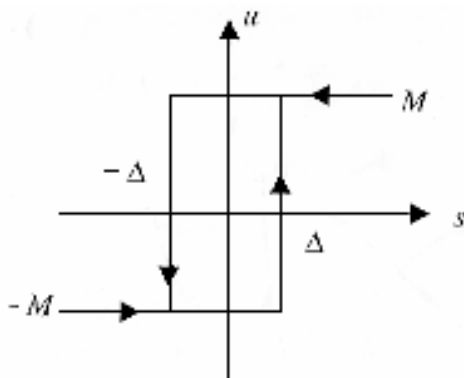


Figura (3.10) Relevador con histéresis. **Figura (3.11)** Oscilaciones en una vecindad de la superficie de conmutación.

El valor de Δ se supone muy pequeño tal que las trayectorias de estado puedan ser aproximadas por líneas rectas con vectores de velocidad de estado constantes $Ax + bM$ y $Ax - bM$ en la vecindad de algún punto x en el plano $s(x)=0$.

Calculando intervalos de tiempo Δt_1 y Δt_2 e incrementos Δx_1 y Δx_2 en el vector de estado para transiciones del punto 1 al punto y del punto 2 al punto 3, respectivamente:

$$\Delta t_1 = \frac{-2\Delta}{\dot{s}} = \frac{-2\Delta}{cAx + cbM}$$

$$\Delta x_1 = (Ax + bM)\Delta t_1 = (Ax + bM) \frac{-2\Delta}{cAx + cbM}$$

De manera similar para el segundo intervalo.

$$\Delta t_2 = \frac{2\Delta}{\dot{s}^-} = \frac{2\Delta}{cAx - cbM}$$

$$\Delta x_2 = (Ax - bM)\Delta t_2 = (Ax - bM) \frac{2\Delta}{cAx - cbM}$$

Suponiendo que el control deslizante existe en el sistema ideal, por consiguiente los valores s y \dot{s} , tienen signos opuestos es decir $\dot{s}^+ = cAx + cbM < 0$ y $\dot{s}^- = cAx - cbM > 0$. Lo que implica que ambos intervalos de tiempo son positivos, la velocidad promedio dentro del intervalo de tiempo $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, se puede encontrar como.

$$\dot{x}_{prom} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = Ax - (cb)^{-1} bcAx$$

Nuestro siguiente paso del procedimiento de regularización implica que el ancho de lazo de histéresis Δ debe tender a cero; no es necesario calcular $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \dot{x}_{prom}$ el procedimiento límite fue realizado implícitamente cuando suponemos que las trayectorias de estado son líneas rectas y las velocidades de estado son constantes. Esta es la razón por la cual \dot{x}_{prom} no depende de Δ . Por lo tanto un modelo más exacto del modo deslizante en el plano $s(x)=0$ es gobernado por:

$$\dot{x} = \left(I_n - (cb)^{-1} bc \right) Ax \tag{3.25}$$

Con el estado inicial $s(x(0))=0$ y donde I_n es una matriz identidad. Por lo tanto de las ecuaciones (3.21) y (3.25) se tiene que:

$$\dot{s} = c \left(I_n - (cb)^{-1} bc \right) Ax \equiv 0$$

Por lo tanto las trayectorias de estado del modo deslizante están orientadas a lo largo del plano de conmutación. La condición $s(x(0))=0$ nos permite que reduzcamos el orden del sistema en una unidad. Para obtener la ecuación de modo deslizante de $n-1$ orden, uno de los componentes del vector de estado, puede ser x_n , puede ser encontrado como una función de orden $n-1$ componentes y sustituido en el sistema (3.25). Finalmente, la última ecuación para x_n puede ser omitida. Para un sistema de orden arbitrario con control escalar.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x, f \in \mathbb{R}^n, u(x) \in \mathbb{R} \tag{3.26}$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & s(x) > 0 \\ u^-(x) & s(x) < 0 \end{cases}$$

Los componentes del vector f , las funciones escalares $u^+(x), u^-(x)$ y $s(x)$ son continuas y lisas; y $u^+(x) \neq u^-(x)$. Suponemos que el modo deslizante ocurre en la superficie $s(x)=0$ y ahora tratamos de derivar las ecuaciones de movimiento sobre la superficie usando el método de regularización. Nuevamente, dejamos que el control discontinuo sea implementado con algunas imperfecciones; conocemos el control para tomar uno de los dos valores de los extremos, $u^+(x)$ ó $u^-(x)$, y los puntos discontinuos son aislados en el tiempo. Dando como un resultado que la solución existe en el sentido convencional y no importa si tratamos con pequeña histéresis, retraso de tiempo ó constantes de tiempo que fueron ignoradas en el modelo ideal. Como en el sistema (3.24) con imperfección de histéresis, los vectores de velocidad de estado $f^+ = f(x, u^+)$ y $f^- = f(x, u^-)$ los suponemos constantes para algún punto x en la superficie $s(x)=0$ en un intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$. Donde el intervalo de tiempo consistente de dos juegos de intervalos Δt_1 y Δt_2 tal que $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, $u = u^+$ para el tiempo del juego Δt_1 y $u = u^-$ para el tiempo del juego Δt_2 . Entonces el incremento del vector de estado después del intervalo de tiempo Δt es:

$$\Delta x = f^+ \Delta t_1 + f^- \Delta t_2$$

Y la velocidad de estado promedio es:

$$\dot{x}_{prom} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^-$$

Donde $\mu = \Delta t_1 / \Delta t$ es el tiempo relativo del control para tomar el valor u^+ y $(1 - \mu)$ es el tiempo relativo para tomar el valor u^- , $0 \leq \mu \leq 1$. Para obtener el vector \dot{x} , el tiempo Δt deberá tender a cero. Sin embargo, no necesitamos realizar este procedimiento límite, el cual se esconde en nuestra suposición que los vectores de velocidad de estado son constantes con intervalos de tiempo Δt , por consiguiente la ecuación:

$$\dot{x} = \mu f^+ + (1 - \mu) f^- \tag{3.27}$$

Representa el movimiento durante el modo deslizante. Desde que las trayectorias de estado durante el modo deslizante, están en la superficie $s(x)=0$, el parámetro μ debe ser seleccionado tal que el vector de velocidad de estado del sistema (3.27) este en el plano tangencial para esta superficie.

$$\dot{s} = grad[s(x)] \dot{x} = grad[s(x)] [\mu f^+ + (1 - \mu) f^-] = 0 \tag{3.28}$$

Con $grad[s(x)] \dot{x} = [\partial s / \partial x_1 \dots \partial s / \partial x_n]$

La solución a (3.28) es dada por:

$$\mu = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} \quad (3.29)$$

Substituyendo la ecuación (3.29) en (3.27) resulta en la ecuación de modo deslizante.

$$\dot{x} = f_{sm}, \quad f_{sm} = \frac{\text{grad}(s) \cdot f^-}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^+ - \frac{\text{grad}(s) \cdot f^+}{\text{grad}(s) \cdot (f^- - f^+)} f^- \quad (3.30)$$

Esta última ecuación representa el movimiento en el modo deslizante con condición inicial $s[x(0)] = 0$. Observamos que el modo deslizante ocurre en la superficie $s(x) = 0$, por consiguiente las funciones s y \dot{s} tienen signos diferentes en la vecindad de la superficie tal como se muestra en la figura (3.12) y $s^+ = (\text{grad})f^+ < 0$, $s^- = (\text{grad})f^- > 0$. Como sigue de la ecuación (3.29), la condición $0 \leq \mu \leq 1$ se sostiene para el parámetro μ . Es fácil verificar la condición $\dot{s} = (\text{grad}_s) f_{sm} = 0$, para las trayectorias de sistema (3.30) y para mostrar ellos se confinan a la superficie deslizante $s(x) = 0$. Como puede esperarse, la substitución directa de $\text{grad } s = c$, $f^+ = Ax + bu^+$ y $f^- = Ax + bu^-$ en (3.30) resulta en la ecuación de modo deslizante (3.25) derivada para el sistema lineal (3.21) con plano de discontinuidad $s(x) = cx = 0$, vía regularización de histéresis.

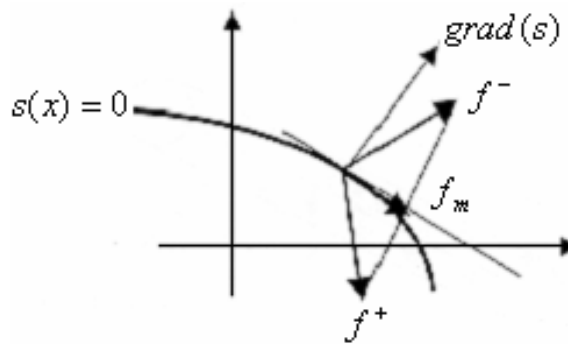


Figura (3.12) Ecuación de modo deslizante por el método regularización.

El método es construido para encontrar la solución a una superficie discontinua por ecuaciones diferenciales con términos discontinuos de lado primer miembro de la ecuación. En este método, los extremos de todos los vectores de velocidad de estado en la vecindad de un punto en una superficie discontinua deben ser complementados por un mínimo conjunto convexo y el vector de velocidad de estado del movimiento deslizante debe pertenecer a este conjunto. En nuestro caso hay dos puntos, los extremos de los vectores f^+ y f^- , y el mínimo conjunto convexo es la línea recta que conectan sus extremos. La ecuación de esta línea es exactamente el lado derecho de la ecuación (3.27). La intersección de la línea con el plano tangencial define el vector de velocidad de estado en el modo deslizante, del primer miembro de la ecuación de modo deslizante.

El concepto general de regularización abarca una clase más amplia de imperfecciones (*como aproximación continua de una función discontinua*) y modos deslizantes en la intersección de varias superficies este concepto es el de regularización vía capa del límite. Consideremos un sistema arbitrario con un vector de control como el que se muestra en la ecuación (3.24). Los componentes del vector $s(x)^T = [s_1(x) \dots s_m(x)]$ son m funciones continuas y la i -ésima componente del control sufre discontinuidades en la i -ésima superficie $s_i(x)=0$. El modo deslizante puede ocurrir en la superficie $s(x) = 0$. Para obtener las ecuaciones de modo deslizante, el control ideal en (3.24) es reemplazado por un nuevo control \tilde{u} . Debido a esta sustitución, las trayectorias no son confinadas para la superficie $s(x)=0$ pero corren en su capa de límite de anchura $\Delta > 0$ tal como se muestra en la figura (3.13).

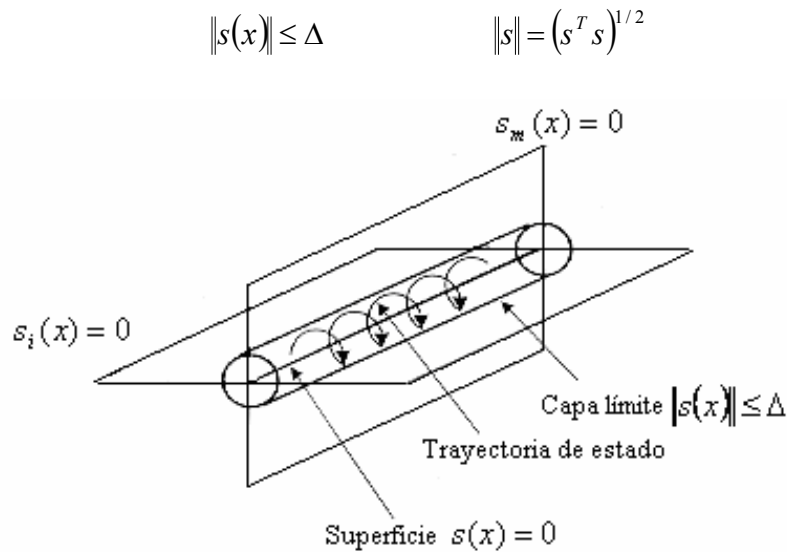


Figura (3.13) Método de capa límite para modos deslizantes.

Las imperfecciones tomadas en cuenta en el control \tilde{u} no son especificadas y solo se sabe que la solución para (3.24) existe en el sentido convencional. Como una regla, las imperfecciones en la vida real pertenecen a esta clase (*incluyendo histéresis, retraso de tiempo y pequeñas constantes de tiempo ignoradas en el modelo ideal*). La idea central del método de regularización de capa del límite es como sigue: sí el límite de la solución para (3.24), con $u = \tilde{u}$ y la anchura de la capa del límite tiende a cero, existe, es única y no depende del tipo de imperfecciones y de la forma en que Δ tiende a cero, es decir es independiente del procedimiento del límite.

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} x(t, \Delta) = x^*(t) \tag{3.31}$$

Entonces la función $x^*(t)$ es tomada como la solución para (3.24) como el modo deslizante ideal. Por otra parte, debemos reconocer que las ecuaciones de movimiento más allá de la superficie de discontinuidad no nos permiten derivar inequívocamente las ecuaciones para el movimiento en la superficie.

3.3.2.- Método del control equivalente.

Hasta ahora hemos supuesto que el vector de estado inicial de sistema (3.24) se encuentra en la intersección de todas las superficies en la superficie discontinua $s(x)=0$, y el modo deslizante ocurre con las trayectorias de estado confinadas a esta superficie para $t>0$. Donde el movimiento en el modo deslizante implica $s(x)=0$ para $t>0$, podemos asumir que $ds/dt = \dot{s} = 0$ es correcto. Por tanto, en adición a $s(x)=0$ y la derivada respecto al tiempo, $\dot{s}(x)=0$ puede ser usada para caracterizar las trayectorias de estado durante el modo deslizante. El control de frecuencia de conmutación infinita u es un obstáculo por usar métodos convencionales, pasando por alto las discontinuidades del control y calculando el vector u tal que la derivada respecto al tiempo del vector en las trayectorias de estado de (3.24) sean igual a cero.

$$\dot{s}(x) = G \cdot f(x, u) = 0 \tag{3.32}$$

Donde $G = (\partial s / \partial x)$ es una matriz $m \times n$ con el gradiente de funciones $s_i(x)$ como filas. Una solución a la ecuación algebraica (3.32) es la solución $u_{eq}(x)$ la cual será llamada el control equivalente. Esta función continua es sustituida por el control discontinuo u en el sistema original (3.24).

$$\dot{x} = f(x, u_{eq}) \tag{3.33}$$

Para las condiciones iniciales $s(x(0)) = 0$, en relación a la ecuación (3.32) se tiene que el movimiento es gobernado por (3.33) y será a lo largo de las trayectorias de estado en la superficie $s(x) = 0$, así como para el modo deslizante en el sistema (3.24). La ecuación (3.33) es tomada como la ecuación de modo deslizante en la intersección de las superficies m de discontinuidad $s_i(x) = 0$, ($i=1, \dots, m$). El procedimiento para derivar la ecuación será llamado método de control equivalente.

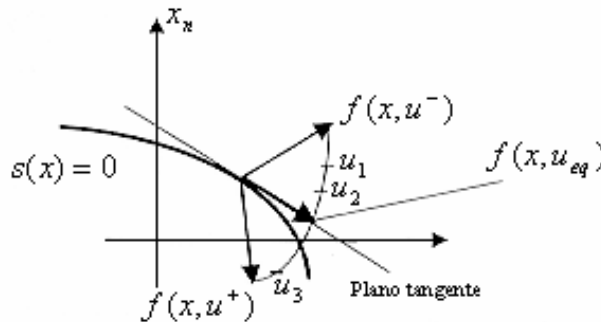


Figura (3.14) Método de control equivalente para sistemas no lineales con control escalar

Desde un punto de vista geométrico, el método de control equivalente significa reemplazar el control discontinuo en la intersección de las líneas conmutadas por un control continuo tal que el vector de velocidad de estado queda en la superficie tangencial. Por ejemplo en el sistema con control escalar de la ecuación (3.26); este vector puede ser encontrado como la intersección del plano tangencial y del sitio $f(x, u)$ con control u corriendo de u^- a u^+ tal como se muestra en la figura (3.14). El punto de intersección define el control equivalente u_{eq} y el lado derecho $f(x, u_{eq})$ en la ecuación de modo deslizante.

El lado derecho de la ecuación $f(x, u_{eq})$ de movimiento resultante del método de control equivalente no coinciden como es muestra en las figuras (3.12) y (3.14). Son iguales si el sistema (3.26) con control escalar es lineal con respecto al control $f(x, u) = f_0(x) + b(x)u$ (donde f_0 y b son vectores n -dimensionales). Luego el sitio $f(x, u)$ del método de control equivalente figura (3.14) con un conjunto mínimo convexo será el mismo. La diferencia refleja el hecho de que existen diferentes caminos de regularización para diferentes ecuaciones de modo deslizante en sistemas con funciones no lineales de entrada de control en las ecuaciones de movimiento. Procediendo a analizar un sistema de control de la forma (3.34) se procede manera similar al sistema (3.24), cada superficie $s_i(x)=0$ es el conjunto de puntos de discontinuidad para el correspondiente componente del control u_i .

$$\dot{x} = f(x) + B(x)u \quad x, f(x) \in \mathcal{R}^n, B(x) \in \mathcal{R}^{n \times m}, u(x) \in \mathcal{R}^m \quad (3.34)$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & s(x) > 0 \\ u^-(x) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{doble componente}) \quad s(x)^T = [s_1(x) \dots s_m(x)]$$

La ecuación (3.32) del método de control equivalente, para un sistema como (3.33), es de la forma:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \quad \text{donde} \quad G = (\partial s / \partial x) \quad (3.35)$$

Asumiendo que la matriz GB no es singular para cualquier x , podemos encontrar el control equivalente $u_{eq}(x)$ como la solución a (3.35):

$$u_{eq}(x) = -(G(x)B(x))^{-1} G(x)f(x)$$

Substituyendo $u_{eq}(x)$ en (3.34), tenemos que la ecuación de modo deslizante es:

$$\dot{x} = f(x) - B(x)(G(x)B(x))^{-1} G(x)f(x) \quad (3.36)$$

La ecuación (3.36) es tomada como la ecuación de modo deslizante en la superficie $s(x) = 0$, para saber si es un modelo ‘correcto’ del movimiento en el modo deslizante, empleamos el método de regularización basado en la introducción de capa del límite para la superficie $s(x)=0$. Para los sistemas afines (3.34), la ecuación de modo deslizante es encontrada únicamente en la construcción del método y esta coincide con (3.36) resultando en el método de control equivalente. Esta declaración se prueba bajo suposiciones generales relacionadas con la suavidad y proporción de crecimiento para las funciones f , B , u^+ , u^- , y s . De acuerdo con estos resultados, del procedimiento límite de (3.31), significa que cualquier solución en la capa del límite $x(t, \Delta)$ tiende a una solución $x^*(t)$ de la ecuación (3.36) indiferente al tipo de imperfección que causa el movimiento en la capa del límite e indiferente de la forma en que la capa del límite es reducida a cero. Formalmente, el método de control equivalente puede ser aplicado a sistemas que son no lineales con respecto al control.

Cualitativamente, el resultado anterior se puede explicar en términos de un diagrama de bloques tal como se muestra el sistema (3.35) en la figura (3.15). En complacencia con el método de control equivalente, la derivada respecto al tiempo de \dot{s} es normalmente igual a cero (3.35) para el movimiento en una capa límite, s es un valor pequeño de orden Δ pero s toma valores finitos y no tiende a cero con Δ .

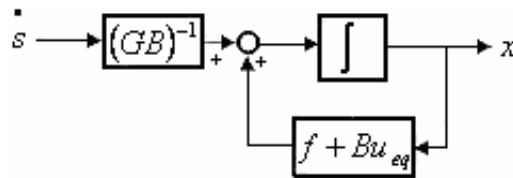


Figura (3.15) Método de control equivalente para sistemas afines.

Esto significa que el control real no satisface a la ecuación (3.35) y puede ser encontrada como:

$$u = u_{eq} + (GB)^{-1} \dot{s}$$

La ecuación de movimiento en la capa límite es gobernada por.

$$\dot{x} = f + Bu_{eq} + (GB)^{-1} \dot{s}$$

Esto difiere de la ecuación deslizante ideal (3.36) por el término adicional $(BG)^{-1} \dot{s}$. En términos de diagramas de bloques cualquier sistema dinámico puede ser representado como una serie de integradores y es natural asumir que una salida de cada uno de ellos puede ser estimada por un límite superior de la integral de una entrada. En nuestro caso la entrada es \dot{s} y su integral s tiende a cero con $\Delta \rightarrow 0$. Por consiguiente la respuesta de esta entrada tiende a cero. Esto explica por que la solución con capa límite reducida a cero tiende al mismo resultado como la solución a la ecuación derivada usando el control equivalente. Las singularidades de las ecuaciones del modo deslizante en sistemas afines explican por que se tiene la mayor atención a esta clase en teoría de control de modo deslizante. En aplicaciones prácticas los sistemas más comunes son aquellos que son no lineales con respecto al vector de estado y lineales con respecto a la entrada del control.

3.3.3.- Condiciones de existencia de los modos deslizantes.

Si el modo deslizante exhibe las propiedades dinámicas deseadas, el control debe ser diseñado tal que se fuerza este movimiento. Donde la desviación de la superficie de conmutación s y su derivada respecto al tiempo deben tener signos opuestos en la vecindad de una superficie de discontinuidad $s = 0$.

$$\lim_{s \rightarrow +0} \dot{s} < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow -0} \dot{s} > 0 \tag{3.37}$$

Para la existencia del modo deslizante en una intersección de un conjunto de superficies de discontinuidad $s_i(x) = 0$, ($i = 1, \dots, m$), no es necesario cumplir desigualdades (3.37) para cada uno de ellos. Se ha mostrado que las trayectorias de los sistemas convergen en la superficie $s^T = [s_1, \dots, s_m] = 0$ y lo alcanzan después de un intervalo de tiempo finito. El termino ‘converge’ significa que tratamos con el problema

de estabilidad del origen en un subespacio m -dimensional (s_1, \dots, s_m) , por consiguiente las condiciones de existencia pueden ser formuladas en términos de la teoría de estabilidad. A continuación, se examinará las condiciones para que el modo deslizante exista en sistemas afines (3.34). Para derivar las condiciones, necesitamos analizar la estabilidad de la proyección de movimiento en el subespacio s gobernado por la ecuación diferencial.

$$\dot{s} = Gf + GBu \tag{3.38}$$

El control de la ecuación (3.34)

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & s(x) > 0 \\ u^-(x) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{doble componente}) \quad s(x)^T = [s_1(x) \dots s_m(x)]$$

Puede ser representado como: $u(x) = u_0(x) + U(x)\text{sign}(s)$ (3.39)

Donde $u_0 = \frac{1}{2}(u^+(x) + u^-(x))$, $U(x)$ es una matriz diagonal con elementos $U_i(x) = \frac{1}{2}(u_i^+(x) - u_i^-(x))$, para $i=1, \dots, m$ y la señal del control discontinuo toma la forma de una función de señal de doble componente:

$$\text{sign}(s)^T = [\text{sign}(s_1) \dots \text{sign}(s_m)] \tag{3.40}$$

Entonces la proyección de movimiento en el subespacio s es gobernada por.

$$\dot{s} = d(x) - D(x)\text{sign}(s) \quad \text{con} \quad d = Gf + GBu_0, \quad D = -GBU \tag{3.41}$$

Para encontrar las condiciones de estabilidad del origen $s=0$ para el sistema no lineal (3.41), de tal forma que el modo deslizante exista, tendremos que seguir la metodología estándar para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales, trataremos de encontrar una función de Lyapunov⁽⁹⁾. Al mismo tiempo, debemos recordar que el lado derecho en la ecuación de movimiento es discontinuo y no definido en los puntos donde los argumentos de las funciones de signo son iguales a cero.

Definición (3.1): El conjunto $S(x)$ en la superficie $s(x)=0$ es el dominio del modo deslizante si, para el movimiento gobernado por la ecuación (3.45); el origen en el subespacio s es asintóticamente estable con convergencia en tiempo finito para cada x de $S(x)$.

Definición (3.2): La superficie $s(x)=0$ es llamada superficie deslizante si el modo deslizante existe en cada punto, es decir $S(x) = \{x: s(x)=0\}$.

Teorema (3.1): Si la matriz D en la ecuación $\dot{s} = -D\text{sign}(s)$, es positiva definida $D + D^T > 0$. Entonces el origen $s=0$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable con convergencia en tiempo finito.

(9) En el apéndice (A.7) se estudian las funciones de Lyapunov

3.4.- Conceptos de diseño.

Los modos deslizantes son gobernados por un sistema de orden reducido dependiendo de las ecuaciones de algunas superficies de discontinuidad. La primera etapa del diseño es la selección de las superficies discontinuas tal que el movimiento deslizante exhiba las propiedades deseadas. Los métodos de la teoría de control convencional, como estabilización, colocación de los eigenvalores y optimización dinámica, pueden ser aplicados en esta etapa. La segunda etapa es encontrar el control discontinuo para forzar el modo deslizante en la intersección de las superficies seleccionadas en la primera etapa. El segundo problema es la reducción de orden, donde la dimensión de esta es igual al número de superficies de discontinuidad, que usualmente es igual a la dimensión del control. Dividir el movimiento global en dos movimientos de dimensiones menores, el primer movimiento precede al modo deslizante con un intervalo de tiempo finito y el segundo movimiento es el modo deslizante con las propiedades deseadas. Esto simplifica el procedimiento de diseño considerablemente; además los modos deslizantes son insensibles con respecto a parámetros de la planta y perturbaciones que son desconocidos.

3.4.1.- Desacoplamiento.

Para sistemas de la forma.

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \quad x, f \in \mathfrak{R}^n, B(x) \in \mathfrak{R}^{n \times m}, u(x) \in \mathfrak{R}^m \quad (3.42)$$

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x, t) & s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & s(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{doble componente}) \quad s(x)^T = [s_1(x) \dots s_m(x)]$$

Para obtener la ecuación del modo deslizante en la superficie $s(x)=0$ bajo la suposición que la matriz GB (matriz $G=\{\partial s/\partial x\}$ con filas como gradientes de los componentes del vector s) no es singular, el control equivalente $u_{eq}(x, t) = -(G(x)B(x, t))^{-1}G(x)f(x, t)$; debe ser sustituido en (3.42) por el control $u(x)$ para producir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_{md}(x, t) \\ f_{md}(x, t) &= f(x, t) - B(x, t)(G(x)B(x, t))^{-1}G(x)f(x, t) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Cuando $s(x)=0$ en el modo deslizante, el sistema de m ecuaciones algebraicas puede ser resuelto con respecto a m componentes del vector de estado constituyendo el subvector x_2 .

$$x_2 = s_0(x_1), x_2 \in \mathfrak{R}^m, x_1 \in \mathfrak{R}^{n-m} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} \quad y \quad s(x) = 0$$

Remplazando x_2 por $s_0(x_1)$, las primeras $n-m$ ecuaciones de (3.43) producen una ecuación de modo deslizante de orden reducido.

$$\dot{x}_1 = f_{1md}(x_1, s_0(x_1), t), \quad f_{md}^T(x, t) = f_{md}^T(x_1, x_2, t) = \begin{bmatrix} f_{1md}^T(x_1, x_2, t) & f_{2md}^T(x_1, x_2, t) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

La ecuación de movimiento (3.44) depende de la función $s_0(x_1)$, en la ecuación de la superficie de discontinuidad. La función $s_0(x_1)$ puede ser tomada como un control m -dimensional para sistemas de orden reducido. El problema de diseño no es convencional, desde los primeros miembros de (3.43) y (3.44) depende no solo de la ecuación de la superficie de discontinuidad, también de la pendiente de la matriz G . Si una clase de funciones $s(x)$ es preseleccionada, funciones lineales ó funciones en forma de series finitas, entonces ambos $s(x)$, G y por consiguiente los lados derechos en (3.44) dependen del conjunto de parámetros seleccionados cuando diseñamos las dinámicas deseadas del movimiento deslizante. La segunda etapa del procedimiento de diseño es la selección del control discontinuo forzando el modo deslizante en la superficie $s(x)=0$ que fue escogido en la primera etapa. Las condiciones para que el modo deslizante exista son equivalentes a la condición de estabilidad de la proyección de movimiento en el subespacio s :

$$\dot{s} = Gf + GBu$$

Con una convergencia de tiempo finita. Generalmente hablando, la matriz $-(GB + (GB)^T)$ no es definida positiva, por tanto la estabilidad no puede ser provista por incremento de los elemento de la matriz U . Sea la función definida positiva:

$$V = 0.5s^T s > 0$$

Una función candidata de Lyapunov. Así la derivada respecto al tiempo de las trayectorias del sistema queda de la forma:

$$\dot{V} = s^T Gf + s^T GBu \tag{3.45}$$

Suponiendo que la matriz GB no es singular, podemos seleccionar el control como una función discontinua:

$$u = -U(x)\text{sign}(s^*) \text{ con } s^* = (GB)^T s \tag{3.46}$$

Donde $U(x)$ es una función escalar positiva del estado. Entonces (3.45) es de la forma:

$$\dot{V} = s^T Gf - U|s^*|$$

Donde $|s^*| = (s^*)^T \text{sign}(s^*)$, o $\dot{V} = (s^*)^T (GB)^{-1} Gf - U|s^*|$ (3.47)

Ya que $|s^*| \geq \|s^*\|$ debido a $\sum_{i=1}^m |s_i^*| \geq \left(\sum_{i=1}^m (s_i^*)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ de (3.47) se obtiene que:

$$\dot{V} \leq |s^*| |(GB)^{-1} Gf| - U|s^*| \tag{3.50}$$

Si se conoce una estimación superior $F \geq |(GB)^{-1} Gf|$, entonces $\dot{V} < 0$ para $U > F$, el movimiento es asintoticamente estable y el modo deslizante es forzado en el sistema. Así el intervalo de tiempo precediendo al modo deslizante es finito y puede ser disminuido incrementando la magnitud $U(x)$ del control discontinuo. El modo deslizante

ocurre en la superficie $s^*=0$. La transformación (3.46) no es singular, por consiguiente las superficies $s=0$ y $s^*=0$ coinciden y el modo deslizante toma lugar en la superficie $s=0$, que fue seleccionada para el diseño del movimiento deslizante con las propiedades deseadas. El proceso de diseño ha sido descompuesto en dos subproblemas independientes de dimensiones menores m y $n-m$. La descomposición es posible por que las ecuaciones de modo deslizante no dependen del control sino dependen de la ecuación de la superficie deslizante. Cuando se diseña una superficie de conmutación, una restricción debe ser tomada en cuenta: la matriz GB no debe ser singular. El conocimiento exacto de los parámetros de la planta y las perturbaciones (*vector f y matriz B*) no es necesario, es suficiente el conocimiento de un límite superior F para forzar el modo deslizante en la superficie $s^*=0$. La matriz $B(x, t)$ es necesaria para calcular el vector s^* en (3.46) Sin embargo, el rango de variación del parámetro en la matriz $B(x, t)$ puede ser encontrado tal que el modo deslizante pueda ser forzado sin el conocimiento exacto de estos parámetros.

3.4.2.- Forma regular.

Las dos etapas del proceso de diseño:

- Selección de una superficie de conmutación.
- Encontrar el control que fuerce el modo deslizante en esta superficie.

Se puede simplificar estas etapas empleando la forma regular, para sistemas de la forma (3.42) y esta consiste de dos bloques:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2, t) \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, t) + B_2(x_1, x_2, t)u \end{aligned} \quad (3.51)$$

Donde $x_1 \in \mathcal{R}^{n-m}$, $x_2 \in \mathcal{R}^m$ y B_2 es una $m \times m$ matriz no singular, $\det(B_2) \neq 0$. El primer bloque no depende del control, y la dimensión del segundo bloque coincide con la dimensión del control. El diseño es realizado en dos etapas también. Primero, el vector de estado x_2 de dimensión m es manejado como el control del primer bloque y diseñado como una función del estado x_1 del primer bloque en correspondencia con algún criterio de desempeño.

$$x_2 = -s_0(x_1) \quad (3.52)$$

Otra vez tratamos con un problema de diseño de orden reducido. En la segunda etapa, el control discontinuo es seleccionado para forzar el modo deslizante en la superficie.

$$s(x_1, x_2) = x_2 + s_0(x_1) = 0 \quad (3.53)$$

Después el modo deslizante ocurre en la superficie deslizante (3.52), la condición (3.53) es sostenida y el movimiento adicional en el sistema es gobernado por la ecuación diferencial:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1 - s_0(x_1), t) \quad (3.54)$$

Con las propiedades dinámicas deseadas.

El diseño del control discontinuo puede ser desarrollado usando los métodos $x^T = [x_1^T \ x_2^T]$, $f^T = [f_1^T \ f_2^T]$, $B^T = [0_{m \times (n-m)} \ B_2^T]$, $G = [G_1 \ I_m]$.

Donde $G_1 = \{\partial s_0 / \partial x_1\}$ es una $m \times (n-m)$ matriz. Tenemos las siguientes características para el diseño en forma regular:

1. En contraste a (3.43) y (3.44), la ecuación de modo deslizante no depende de la matriz pendiente G , que es el problema de diseño en su primera etapa de diseño convencional de control m -dimensional x_2 en un sistema $(n-m)$ -dimensional con vector de estado x_1 .
2. El cálculo del control equivalente para encontrar la ecuación de modo deslizante no es necesario.
3. Se mantiene la condición $\det(GB) = \det(B_2) \neq 0$. (Esta condición es necesaria para forzar el modo deslizante en la superficie preseleccionada $s(x)=0$).
4. El modo deslizante es invariante con respecto a las funciones f_2 y B_2 en el segundo bloque.

Estas características sugieren que debemos encontrar una transformación de coordenadas reduciendo el sistema afín al original (3.42) a la forma regular (3.51) antes de diseñar el control de modo deslizante. Ahora suponiendo un sistema de la forma:

$$\dot{x} = f(x, t) + b(x, t)u \quad x \in \mathfrak{R}^n, u \in \mathfrak{R}, f^T = [f_1 \dots f_n] \quad (3.55)$$

$b(x, t)$ es un vector n -dimensional con componentes $b_i(x, t)$, $i=1, \dots, n$. Suponemos que el más pequeño de ellos, deja ser $b_n(x, t)$, el cual es diferente de cero para cualquier x y t : $b_n(x, t) \neq 0$ y es una solución para un sistema auxiliar de orden $(n-1)$

$$dx_i/dx_n = b_i/b_n \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.56)$$

Donde x_i es un conjunto de funciones: $x_i = \varphi_i(x_n, t)$ ($i = 1, \dots, n-1$), introduciendo la transformación de coordenadas no singular:

$$y_i = x_i - \varphi_i(x_n, t) \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (3.57)$$

De acuerdo a las ecuaciones (3.55) a (3.57), las ecuaciones de movimiento con respecto al nuevo vector de estado $(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)$ son de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \dot{x}_i - \frac{d\varphi_i(x_n, t)}{dx_n} \dot{x}_n \\ &= \dot{x}_i - \frac{dx_i}{dx_n} \dot{x}_n = f_i + b_i u - \frac{b_i}{b_n} (f_n + b_n u) \\ &= f_i - \frac{b_i}{b_n} f_n \quad (i = 1, \dots, n-1) \\ \dot{x}_n &= f_n + b_n u. \end{aligned}$$

Remplazando x_i por $y_i + \varphi_i(x_n)$, lleva a las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f^*(y, x_n, t) \\ \dot{x} &= f_n(y, x_n) + b_n^*(y, x_n, t)u \end{aligned} \quad (3.58)$$

Donde y y f^* son vectores n -dimensionales, y f_n^* y b_n^* son funciones escalares. El sistema con respecto a y y x_n esta en la forma rectangular (3.51) con un orden $(n-1)$ y un bloque de primer orden. Para un caso particular, con b_i dependiendo solo de una coordenada x_n , la transformación de estado puede ser encontrada, de la siguiente forma.

$$y_i = x_i - \int_0^{x_n} \frac{b_i(\gamma, t)}{b_n(\gamma, t)} d\gamma \quad (3.59)$$

El sistema con respecto a las nuevas variables esta en la forma rectangular (3.58) también.

3.4.3.- Invarianza respecto a perturbaciones.

Considerando un control con parámetros variantes en el tiempo y que operan en la presencia de perturbaciones. Las entradas de referencia dadas pueden tratarse como perturbaciones, si las desviaciones de las variables del control de las entradas son incluidas en el vector de estado. Sean las variable x_i y sus derivadas de tiempo $x_i^{i-1} = \dot{x}_i$, $i=2, \dots, n$, las componentes de un vector de estado en un espacio canónico, entonces las ecuaciones de movimiento de un sistema de una-entrada una-salida en el espacio canónico son de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= -\sum_{i=1}^n a_i(t)x_i + f(t) + b(t)u \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (3.60)$$

Donde $a_i(t)$ y $b(t)$ son parámetros límite con rango conocido $|a_i(t)| \leq a_{i0}$, $|b(t)| \geq b_0$; $f(t)$ es una perturbación límite $|f(t)| \leq f_0$ con a_{i0} , b_0 , f_0 siendo escalares conocidos. Sea el control una función de estado discontinuo:

$$u = -(\alpha|x| + M)sign(s) \quad |x| = -\sum_{i=1}^n |x_i|, \quad |x| = -\sum_{i=1}^n c_i x_i$$

Donde α , M , c_i son valores constantes y $c_n = 1$. Se calcula la derivada de tiempo de la función s como:

$$\dot{s} = \sum_{i=1}^n (c_{i-1} - a_i)x_i - b(\alpha|x| + M)sign(s) \quad \text{con } c_0 = 0$$

La condición para que el estado alcance el plano $s=0$ en el espacio del estado y para que el modo deslizante exista, ecuación (3.37), si se cumplen:

$$b_0\alpha > \max(c_i - 1 - a_{i0}) \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{y } b_0M > f_0$$

Después de un intervalo de tiempo finito, el modo deslizante ocurre en el plano $s=0$.

Para obtener la ecuación de modo deslizante, $x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i$, debe ser sustituido en la ecuación $(n-1)$ del sistema (3.60) y la última debe ser despreciada.

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_i + 1 \quad (i=1, \dots, n-2) \\ \dot{x}_{n-1} &= -\sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i \end{aligned}$$

La ecuación de modo deslizante es invariante para las variaciones de los parámetros de la planta y la perturbación, y sus dinámicas son determinadas por las raíces de la ecuación característica.

$$p^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2} + \dots + c_2p + c_1 = 0$$

La cual puede ser formada por una opción apropiada de coeficientes c_i en las ecuaciones de la superficie de conmutación. Sin embargo, las dificultades técnicas involucradas en la obtención de las derivadas de tiempo de la salida de la planta x_i son el mayor obstáculo para la implementación de tales modos deslizantes específicos. Al mismo tiempo, por medios escalares y control de vector, los modos deslizantes invariantes pueden ser forzados en los espacios cuyas coordenadas no sólo puedan ser derivadas, pero las variables físicas arbitrarias también. Formulando las condiciones de invarianza para sistemas afines arbitrarios de la forma (3.42).

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u + h(x, t) \tag{3.61}$$

Donde el vector $h(x, t)$ caracteriza perturbaciones y variaciones de parámetros que no deben afectar las dinámicas del sistema de realimentación. Conforme al método de control equivalente la solución a $\dot{s} = G(f + Bu + h) = 0$ con respecto al control, $u_{eq} = -(GB)^{-1}G(f + h)$ debe ser sustituido en la ecuación del sistema (3.61) para producir:

$$\dot{x} = f - B(GB)^{-1}Gf + (I_n - B(GB)^{-1}G)h \tag{3.62}$$

sea el rango $(B(x, t))$ un subespacio formado por los vectores base de la matriz $B(x, t)$ para cada punto (x, t) . El modo deslizante es invariante con respecto al vector $h(x, t)$ si: $h(x, t) \in \text{rango}(B(x, t))$; esta última condición significa que existe el vector $\gamma(x, t)$ tal que.

$$h(x, t) = B(x, t)\gamma(x, t). \tag{3.63}$$

La sustitución directa del vector $h(x, t)$ en la forma (3.63) en (3.62) demuestra que el movimiento deslizante en cualquier superficie $s(x)=0$ no depende de la perturbación del vector $h(x, t)$.

3.5.- Introducción al control de modos deslizante de orden superior.

Una de las aproximaciones efectivas para el control bajo incertidumbres es la descomposición forzada de un sistema de control bajo la imposición de una superficie en las variables de fase. Si la superficie es escogida apropiadamente, se puede compensar la influencia de la incertidumbre en el sistema. La calidad del control del sistema depende directamente de la precisión del mantenimiento de la superficie. Así pues, el problema es el mantenimiento en la superficie, lo cual es comúnmente

solucionado usando coeficientes grandes de amplificación. Los modos deslizantes en los sistemas de control son caracterizados por acciones de control discontinuas en el tiempo. El mantenimiento exacto en la superficie es logrado con una frecuencia infinita de conmutación. La superficie implica que el punto de la fase pertenece a una variable en el plano fase de un sistema de control cerrado. Un modo deslizante común de primer orden *MDPO* corresponde a una discontinuidad del campo vectorial de las velocidades de fase con la variable de superficie. Las curvas de fase se aproximan a la variable de superficie desde varias direcciones con vectores de velocidad que cruzan la variable de superficie. Los modos deslizantes de segundo orden también se dan en sistemas dinámicos discontinuos. Tal modo surge en los puntos de la variable de la superficie en los cuales cualquier vector de velocidad de fase es tangente a la variable. La intuición sugiere que para pequeños retardos de conmutación un modo deslizante de segundo orden puede proveer una alta exactitud del mantenimiento de la superficie comparado con un *MDPO*. Si la frecuencia de conmutación es limitada, entonces la exactitud del sostenimiento en la superficie es de segundo orden o de mayor orden con respecto al intervalo de tiempo entre las conmutaciones, en lugar de primer orden como es lo usual. Esta consideración motivo el estudio de tales modos deslizantes. Tal como se desarrollo en los modos deslizantes tradicionales ó de primer orden *MDPO*, donde el diseño del controlador se consigue en dos etapas; primeramente la superficie deslizante es diseñada y a continuación el control es diseñado para forzar las trayectorias del sistema a mantenerse en la superficie deslizante lo cual es definido como $s=0$, lo cual asegura que se mantendrá en el *MDPO* la variable deslizante se selecciona de tal manera que.

- Se tiene una dinámica de orden cero a la salida del sistema con respecto a la salida (*la superficie deslizante, s*) exhibe este comportamiento deseado.
- Se tiene un grado relativo menos uno respecto al control.

El control actúa primero sobre la derivada con respecto al tiempo de la superficie deslizante \dot{s} para conservar las trayectorias del sistema en el conjunto $s=0$. Esencialmente el control discontinuo actúa sobre la primera derivada de s , extendiendo estas consideraciones de los *MDPO*, se han desarrollado métodos para tener modos deslizantes de orden superior *MDOS* el control actúa sobre las derivadas de orden superior de la superficie deslizante.

Definición (3.3): el conjunto deslizante de *r-ésimo* orden, es aquel que cumple.

$$s^{r-1} = s^{r-2} = s^{r-3} = \dots = \ddot{s} = \dot{s} = s = 0 \tag{3.63}$$

El cual es en realidad una condición *r*-dimensional sobre la dinámica del sistema.

Definición (3.4): Se tiene un modo deslizante de *r-ésimo* orden cuando el sistema esta contenido en el *r-ésimo* conjunto de orden deslizante, entonces el movimiento del sistema se dice que es de *r-ésimo* orden deslizante. Por ejemplo, el caso de un modo deslizante de orden dos corresponde a una acción sobre la segunda derivada de la superficie deslizante \ddot{s} , y el conjunto deslizante esta definido como:

$$\dot{s} = s = 0$$

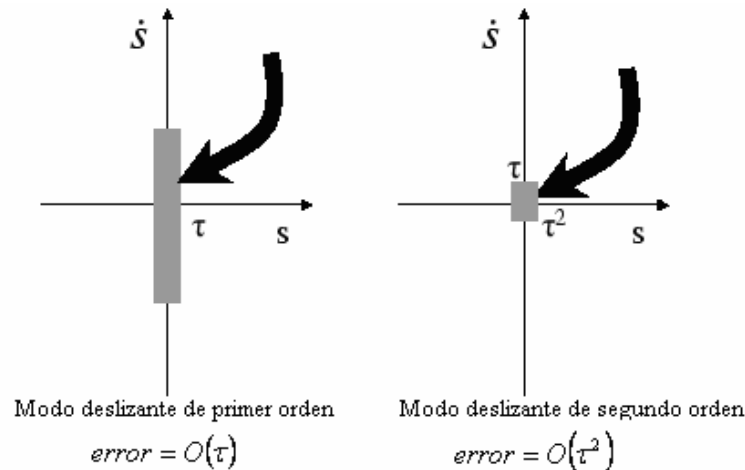


Figura (3.16) Representación geométrica de conjuntos deslizantes.

Una superficie deslizante, tendrá grado relativo uno con respecto a una entrada, dos ó más. En caso del grado uno relativo, se puede aplicar un modo deslizante clásico, pero para el segundo orden se pueden proporcionar controladores que pueden resolver ó aliviar uno de los problemas que se presentan en los MDPO el ‘chattering’ el cual es un fenómeno de señales oscilantes de frecuencia y amplitud finita que aparece en las implementaciones en los MDPO debido a la rápida conmutación del controlador en que en los MDPO excitan las características dinámicas que no se toman en cuenta para modelar del lazo de control; es decir la ‘dinámica sin modelar’ esto ultimo puede referirse a sensores y actuadores que no se toman en cuenta para el modelado del proceso debido a que estos son significativamente más rápidos que la dinámica principal del sistema. Una forma más para evitar ese problema es la utilización de algoritmos de control por MDPO a continuación explicare un algoritmo de control conocido como *twisting* el cual empleare en simulaciones posteriores.

3.5.1.- Algoritmo de control *twisting*.

El algoritmo *twisting* a sido desarrollado para dar solución a los sistemas de segundo orden preservando las propiedades de los modos deslizantes tradicionales, garantizando de esta manera la estabilidad frente a perturbaciones externas, así como la solución a la variación de parámetros, así como la solución para evitar el efecto de *chattering*, debido al cambio de la dinámica en la vecindad de la superficie de conmutación. De esta forma se obtiene una estabilidad asintótica ó amortiguada en tiempo finito. Históricamente el algoritmo *twisting* fue el primer controlador de segundo orden; las trayectorias ejecutan un número infinito de rotaciones cuando convergen en tiempo finito al origen. Las magnitudes de las rotaciones a lo largo de los ejes de rotación así como el tiempo decrecen en progresión geométrica. Sean las coordenadas locales $y_1 = s$ y $y_2 = \dot{s}$, entonces el controlador de segundo orden es de la forma $\ddot{s} = \varphi(t, x) + \gamma(t, x)u$ asumiendo las condiciones: $|\varphi| \leq \Phi, 0 < \Gamma_m \leq \gamma \leq \Gamma_M, \Phi > 0$; y la condición sobre $|u| \leq 1$.

$$u(t) = \begin{cases} -V_m \text{sign}(y_1) & \text{sí } y_1 y_2 \leq 0 \\ -V_M \text{sign}(y_2) & y_1 y_2 > 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

Las condiciones suficientes que debe de cumplir para que exista convergencia de tiempo finita sobre la superficie deslizante son ⁽¹⁰⁾.

$$\begin{aligned}
 V_M &> V_m \\
 V_m &> \frac{4\Gamma_M}{s_0} \\
 V_m &> \frac{\Phi}{\Gamma_m} \\
 \Gamma_m V_M - \Phi &> \Gamma_M V_m + \Phi
 \end{aligned}
 \tag{3.65}$$

Ahora consideremos un sistema trivial bajo el control twisting de la forma.

$$\ddot{x} = -b_1 \text{sign}(x) - b_2 \text{sign}(\dot{x})
 \tag{3.66}$$

Podríamos considerar físicamente como un sistema mecánico con masa unitaria, fricción de *Coulomb* $-b_2 \text{sign}(\dot{x})$, y control de posición $-b_1 \text{sign}(x)$, Esta claro que el termino de fricción puede tener la condición $b_1 > b_2 > 0$.

Proposición (3.1): La solución de (3.66) converge al origen en un tiempo finito.

Demostración: El campo vectorial de la ecuación (3.66) es el que se describe en la figura (3.17)

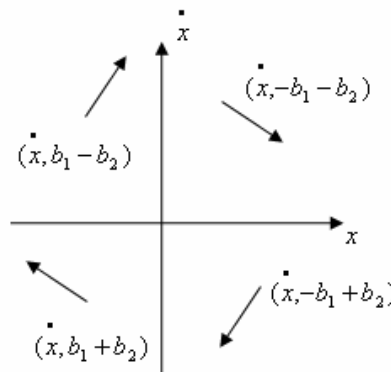


Figura (3.17) Campo vectorial para un sistema trivial bajo el control *twisting*.

La solución de (3.66) cruza el eje x en un tiempo finito; suponemos por simplicidad que las condiciones iniciales son: $x=0, \dot{x} = x_0 > 0$ y $t=0$, entonces la trayectoria se encuentra en el semiplano derecho ($x > 0$). Sean x_0, x_1, x_1 puntos de la trayectoria de la ecuación (3.66); las trayectorias de la ecuación están definidas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\dot{x})}{dx} &= \frac{-b_1 - b_2}{\dot{x}}; x > 0, \dot{x} > 0 \\
 \frac{d(\dot{x})}{dx} &= \frac{-b_1 + b_2}{\dot{x}}; x > 0, \dot{x} < 0
 \end{aligned}
 \tag{3.67}$$

(10) Condiciones dadas por: [S.V.Emelyanov].

Calculando la solución para (3.67) con $x > 0$ empezando desde el punto $(x_1, 0)$ esta determinado por.

$$x = x_1 - \frac{\dot{x}^2}{2(b_1 + b_2)}; \dot{x} > 0 \tag{3.68}$$

$$x = x_1 - \frac{\dot{x}^2}{2(b_1 - b_2)}; \dot{x} \leq 0$$

Para la parte superior del semiplano derecho $(0, \dot{x}_0)$ y para la parte inferior del semiplano derecho se tiene $(0, \dot{x}_1)$ y tenemos $2(b_1 + b_2)x_1 = \dot{x}_0^2$ y $2(b_1 - b_2)x_1 = \dot{x}_1^2$ correspondiente; por consecuencia.

$$\left| \frac{\dot{x}_1}{\dot{x}_0} \right| = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}} = q < 1 \tag{3.69}$$

Extendiendo la trayectoria en el semiplano izquierdo $x < 0$ y razonando de manera similar.

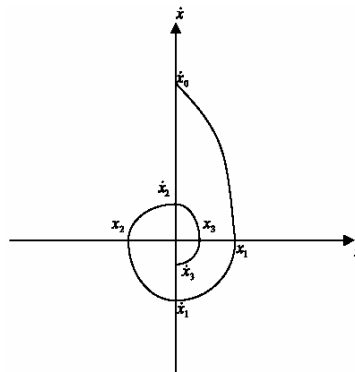


Figura (3.18) Trayectoria del algoritmo twisting

Ahora se estima la convergencia en tiempo finito, la trayectoria real consiste de un numero infinito de segmentos que pertenecen a los semiplanos $x > 0$ y $x < 0$. Ahora estimaremos un tiempo t_1^+ sobre la parte de nuestro sistema (3.66), en la trayectoria \dot{x}_0, x_1 . Partiendo de la ecuación (1) se puede obtener que:

$$\dot{x}(t) = -(b_1 + b_2)t + \dot{x}_0 \tag{3.70}$$

Entonces $\dot{x}(t_1^+) = 0 \rightarrow t_1^+ = \frac{\dot{x}_0}{(b_1 + b_2)}$

Ahora para t_1^- correspondiente a x_1, \dot{x}_1 , se puede calcular:

$$x(t) = -\frac{(b_1 - b_2)t^2}{2} + x_1$$

$$x(t_1^-) = 0 \rightarrow t_1^- = \sqrt{\frac{2x_1}{b_1 - b_2}} = \sqrt{\frac{1}{(b_1 - b_2)(b_1 + b_2)}} \dot{x}_0 \tag{3.71}$$

Esto significa que para el intervalo de tiempo:

$$t_1 = t_1^+ + t_1^- = \eta q \dot{x}_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{(b_1 - b_2)(b_1 + b_2)}} + \frac{1}{(b_1 - b_2)} \right] \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}} \dot{x}_0 \quad (3.72)$$

Correspondiente a la trayectoria $\dot{x}_0 \ x_1 \ \dot{x}_1$, como consecuencia el intervalo de tiempo se puede calcular como:

$$t_i = \eta \left| \dot{x}_{i-1} \right| = \eta q^{i-1} \dot{x}_0 \quad (3.73)$$

Para la correspondiente trayectoria $\dot{x}_{i-1} \ x_i \ \dot{x}_i$, en este caso garantiza la total convergencia en el tiempo así como robustez.

$$T = \sum_{l=1}^{\infty} t_l = \sum_{l=1}^{\infty} \eta \left| \dot{x}_{l-1} \right| = \sum_{l=1}^{\infty} \eta q^{l-1} \dot{x}_0 = \frac{\eta \dot{x}_0}{1 - q}, \quad \text{con } |q| < 1 \quad (3.74)$$

Capítulo 4

“Simulaciones”

Objetivos:

- Verificar el modelo matemático del motor *TY36A*.
- Aplicar las reglas de sintonización de *Ziegler-Nichols* y obtener un control *PID* para el motor *TY36A*.
- Realizar simulaciones del controlador *PID* en el editor de *Matlab* y obtener la respuesta en el tiempo.
- Realizar simulaciones empleando control de modos deslizantes, para una estructura en cascada, estructura integrada, reduciendo el orden del modelo y con el algoritmo *twisting* con diferentes tiempos de muestreo.

Palabras y conceptos clave:

- Respuesta al escalón.
- Sintonización para un control *PID*.
- *Simulink* de *Matlab*.
- Estructuras en cascada, integrada y modelo de orden reducido.
- Tiempo de muestreo.

4.0.- Introducción.

En este capítulo se aplicaran las técnicas de control analizadas anteriormente a través de la realización de simulaciones a través de las herramientas de programación que ofrece *Matlab* y el ambiente de simulación conocido como *simulink* de *Matlab*; el cual es una herramienta muy poderosa si deseamos conocer el comportamiento de algún sistema. *Matlab* es un ambiente de simulación y programación matemática de alto rendimiento, integra cómputo, visualización, y programación en un ambiente de fácil uso donde se expresan problemas y soluciones en notación matemática familiar, sus usos típicos incluyen matemática y cálculo de algoritmos, desarrollo de adquisición de datos, simulación, visualización científica y de aplicación de gráfica. En este capítulo se realizaron las simulaciones para nuestro motor donde se verifica el modelo obtenido experimentalmente con el modelo matemático teórico con los parámetros que proporciona el fabricante; se aplica una regla de sintonización para obtener el control *PID* y se realizan simulaciones con este control, después se realizan simulaciones empleando el modelo teórico en variables de estado para el control de modos deslizantes tradicionales *MDPO*, empleando una estructura en cascada y después una estructura integrada, después se analiza un modelo de orden reducido para nuestro motor, de acuerdo a lo señalado en el capítulo tres y por último se realizan simulaciones empleando modos deslizantes de orden superior *MDOS* con el algoritmo *twisting*, en este capítulo se ve la aplicación de algunos conceptos clave del control de modos deslizantes como superficies deslizantes, condiciones de existencia, sistemas de orden reducido y se analiza también cómo la manipulación de algunos parámetros de simulación pueden mejorar este control como son el tiempo de muestreo, las constantes de las superficies deslizantes, así como algunos efectos no deseados como el *chattering* y como se puede disminuir su efecto.

4.1.-Verificación del modelo experimental.

A continuación realizaremos la verificación del modelo experimental obtenido con la respuesta escalón tal como se presentó en la *sección (2.5)*. Por una parte consideraremos las expresiones teóricas con los datos que proporciona el fabricante del módulo de control experimental *Electrónica Venneta* para la unidad *TY36A*, y obtendremos la expresión de segundo orden, considerando la inductancia de armadura, después se obtendrá una expresión de primer orden despreciando la inductancia de armadura con los datos proporcionados por el fabricante y por último consideraremos el modelo experimental modelo de primer orden que se obtuvo con la respuesta al escalón, una vez que se tengan estas expresiones se calculará el porcentaje de error experimental para los modelos obtenidos. La tabla completa de datos del módulo *TY36A* motor a imanes permanentes se encuentra en el (*Apéndice B1*); se hizo la consideración que la unidad *dinamo-taquimétrica*, tiene un acoplamiento en paralelo con el motor de corriente directa, algunos datos proporcionados por el fabricante son:

| Dato | Valor | Unidades | Descripción |
|-------------|----------------------|------------------------|----------------------------------|
| R_A | 5 | [Ω] | Resistencia de armadura |
| f | 1×10^{-4} | [$N \times m$ s/rad] | Coefficiente de fricción viscosa |
| K_τ | 46×10^{-3} | [$N \times m$ /A] | Constante de f.e.m. |
| λ_0 | 2.8×10^{-3} | [Vxs/rad] | Constante de par |
| J | 6×10^{-5} | [$kg \times m^2$] | Momento de inercia del rotor |
| L_A | 2.8 | [mH] | Inductancia de armadura |

Tabla (4.1) Parámetros de la planta proporcionados por el fabricante.

Modelo de segundo orden del motor de corriente directa sin despreciar la inductancia de armadura (L_{AA}).

$$\frac{\omega(s)}{V_A(s)} = \frac{\frac{K_\tau}{JL_{AA}}}{s^2 + s\left[\frac{R_A}{L_{AA}} + \frac{f}{J}\right] + \frac{R_A f}{JL_{AA}} + \frac{K_\tau \lambda_0}{JL_{AA}}} = \frac{273809.52}{s^2 + 1787.38s + 3742.85} \quad (4.1)$$

Modelo de primer orden despreciando la inductancia de armadura en la expresión anterior.

$$\frac{\omega(s)}{V_A(s)} = \frac{\frac{K_\tau}{R_A J}}{s + \frac{R_A f + K_\tau \lambda_0}{R_A J}} = \frac{\alpha}{s + \beta} = \frac{153.33}{s + 2.096} \quad (4.2)$$

Modelo de primer orden obtenido experimentalmente, en el cual se considera la inductancia de armadura despreciable.

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{\alpha}{s + \beta} = \frac{156.28}{s + 1.94} \quad (4.3)$$

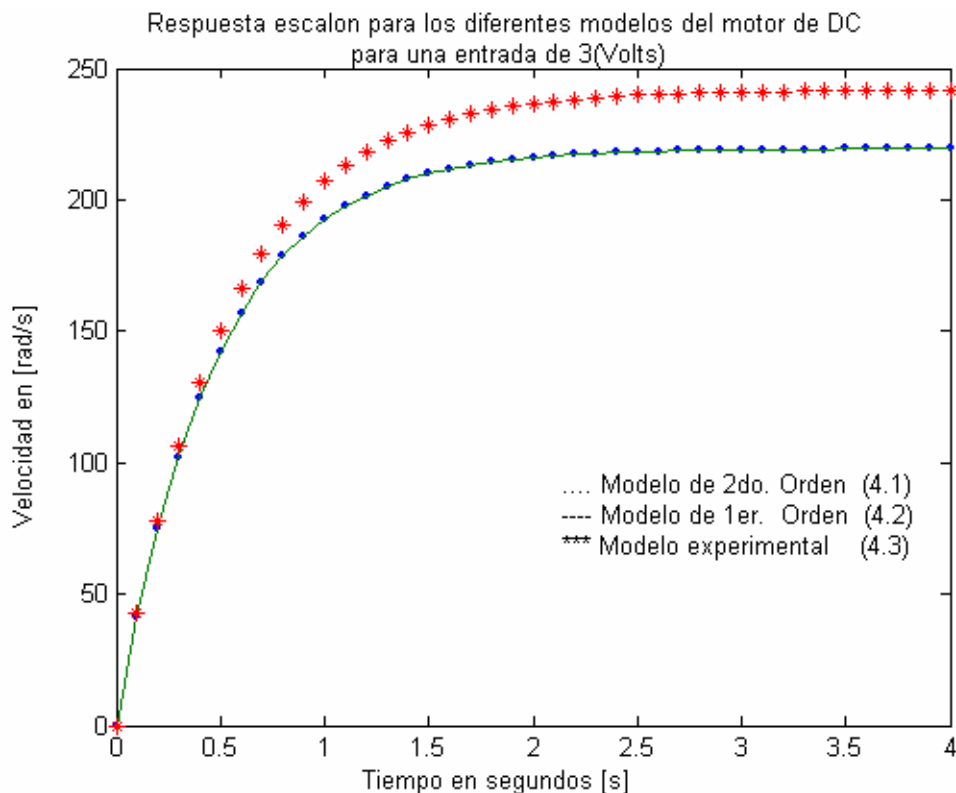


Figura (4.1) Respuesta a un escalón de 3[V] para las expresiones (4.1) a (4.3).

Tomando como base el modelo experimental calculamos el porcentaje de error que presentan nuestros modelos teóricos de primer y segundo orden, en la respuesta en estado estable, tenemos:

Para el modelo de segundo orden:

$$\%e_{ss} = \frac{|\omega_{fe} - \omega_{fi}|}{\omega_{fe}} \times 100 = \frac{|241.25 - 220.5|}{241.25} \times 100 = 8.6\% \quad (4.4)$$

Para el modelo de primer orden.

$$\%e_{ss} = \frac{|\omega_{fe} - \omega_{fi}|}{\omega_{fe}} \times 100 = \frac{|241.25 - 222.5|}{241.25} \times 100 = 7.7\% \quad (4.5)$$

Calculando el porcentaje de error del modelo teórico de primer orden expresión (4.2) respecto al modelo experimental de primer orden expresión (4.3) con relación a los parámetros α y β obtenidos.

$$\%e_{\alpha} = \frac{|\alpha_{\text{exp}} - \alpha_{\text{teo}}|}{\alpha_{\text{exp}}} \times 100 = \frac{|156.28 - 153.333|}{156.28} \times 100 = 1.885\% \quad (4.6)$$

$$\%e_{\beta} = \frac{|\beta_{\text{exp}} - \beta_{\text{teo}}|}{\beta_{\text{exp}}} \times 100 = \frac{|1.94 - 2.096|}{1.94} \times 100 = 8.04\% \quad (4.7)$$

Observamos que el porcentaje de error es menor del 10% por lo cual podemos aceptar los valores teóricos como aceptables para nuestro modelo matemático; ahora realizando un modelo matemático en variables de estado tomando los valores proporcionados por el fabricante y considerando como variables de estado a $x_1 = I_A(t)$ y $x_2 = \omega(t)$, tenemos que para nuestro motor de corriente directa el modelo es:

$$\begin{aligned} \frac{dI_A}{dt} &= -\frac{R_A}{L_A} I_A(t) - \frac{\lambda_0}{L_A} \omega(t) + \frac{1}{L_A} u(t) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_{\tau}}{J} I_A(t) - \frac{f}{J} \omega(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nuestro modelo en variables de estado tal como se presenta en la sección (1.6) es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1785.41 & -1 \\ 766.66 & -1.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 357.14 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (4.9)$$

El cual es una aproximación muy aceptable del modelo experimental y este modelo será el que ocupare en simulaciones posteriores cuando se requiera emplear el modelo en esta notación.

4.2.- Sintonización de Ziegler-Nichols para el motor caracterizado.

A continuación empleando el método de la curva de reacción Ziegler-Nichols, el cual se analizo en la sección (1.7.7) se obtendrá el controlador PID mas adecuado para nuestro motor de corriente directa; Una de las características más importantes de la

regla de *Ziegler-Nichols* es que el máximo sobrepaso es de 25%, y en base a esto están calculados los valores de las constantes de los controles P , D e I . El diagrama de bloques a implementar para nuestro motor de corriente directa es el que se muestra en la *figura (4.2)*, donde el valor de K pertenece a nuestro transductor de salida con la relación entre el voltaje de salida con la velocidad angular medida y su respectiva relación en la etapa de potencia valor de (n), para efecto de nuestras simulaciones es el $K=n(2.8mV \times s/rad)$ siendo $n= 4.5$.

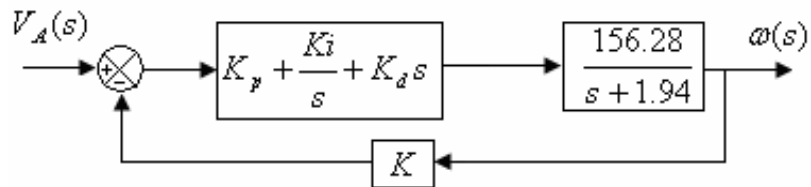


Figura (4.2) Diagrama de bloques del control PID para el motor caracterizado.

De las gráficas tomadas del motor en lazo abierto para una entrada escalón y sin carga, tomamos el punto de inflexión de las gráficas que se obtuvieron para el motor (*el punto de inflexión esta dado por la característica de inercia del motor en el arranque*), los valores que se encontraron fueron:

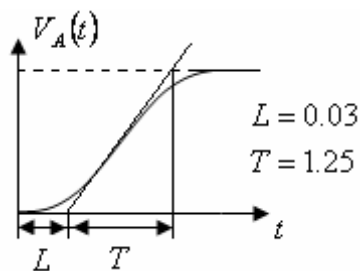


Figura (4.3) Valores (L y T) en la respuesta escalón del motor.

Empleando la *tabla (1.1)*, diseñamos nuestro controlador PID , tal como se presenta en la *ecuación (4.9)*.

$$G_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) = 0.6T \frac{\left(s + \frac{1}{L} \right)^2}{s} \quad (4.9)$$

Donde.

$$K_p = 1.2 \frac{T}{L} = 1.2 \frac{1.25}{0.03} = 52.08$$

$$T_i = 2L = 0.06$$

$$T_d = 0.5L = 0.015$$

Por lo que nuestra ecuación del controlador PID esta dada por:

$$G_{PID}(s) = 52.08 \left(1 + \frac{1}{0.06s} + 0.015s \right) = 52.08 + \frac{868}{s} + 0.7812s \quad (4.10)$$

Donde: $K_p= 52.08$, $K_d= 0.7812$, $K_i= 868$ y $K= 4.5$

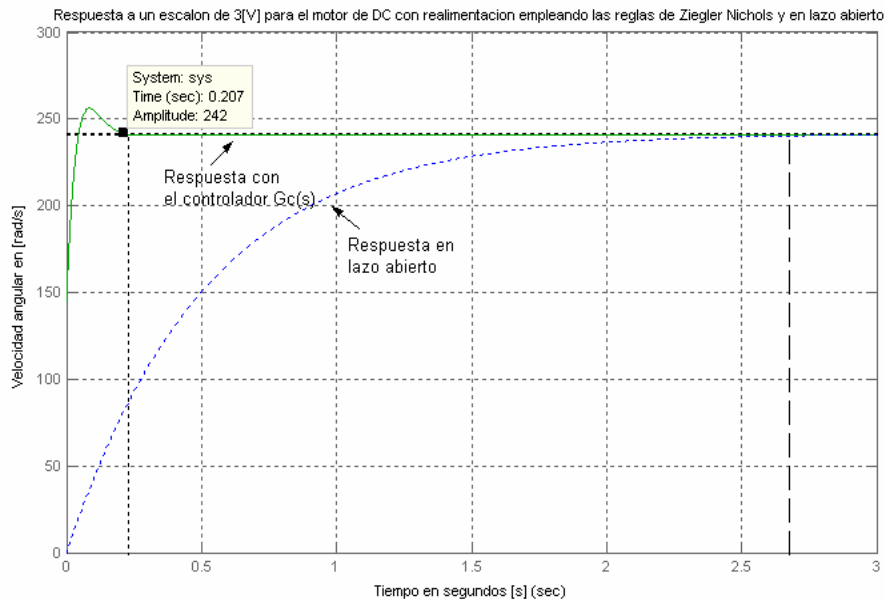


Figura (4.4) Gráfica de la respuesta del motor de corriente directa con un control *PID* aplicando la curva de reacción de *Ziegler-Nichols* y su respuesta en lazo abierto.

Se observa que la respuesta estable se obtiene en $0.207 [s]$ el cual es un valor muy bueno tomando en consideración que nuestro motor en lazo abierto alcanza esta respuesta estable en aproximadamente $2.6 [s]$ (*Tomando cinco constantes de tiempo*), se observa un sobrepaso de 7.88% el cual no es mayor al 10% , el cual se puede considerar aceptable en alguna aplicación, sin embargo este es el precio que se debe pagar por utilizar este tipo de controlador. En el (*Apéndice B5*) se anexan los programas que describen estas simulaciones y estos resultados.

4.3.- Control de velocidad del motor empleando modos deslizantes.

Para controlar la velocidad de un motor de corriente directa es preferible emplear un control con estructura en cascada, en el cual se tenga un lazo interno de control de corriente y un lazo externo que controle la velocidad. La salida del control u puede ser continua o discontinua, la cual depende de la potencia de salida del motor, a baja potencia el sistema puede emplear un control continuo. Sistemas de alta potencia requieren de un control discontinuo, tal vez en la forma de modulación en ancho pulso *PWM*. El esquema a implementar para controlar el motor es el que se muestra en la *figura (4.5)*:

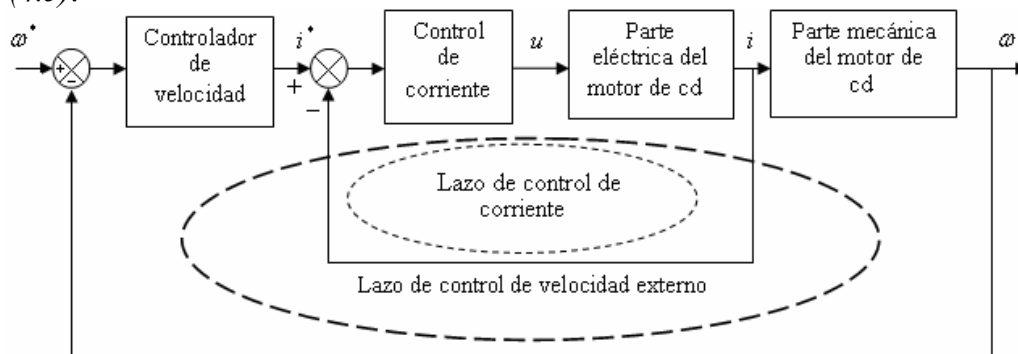


Figura (4.5) Estructura en cascada para un motor de corriente, empleando modos deslizantes.

A partir del modelo matemático del motor ecuación (4.8) y de la tabla (4.1), podemos introducir nuestro modelo matemático en variables de estado.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1785.41 & -1 \\ 766.66 & -1.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 357.14 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

Que tiene la forma necesaria para introducir el par de ecuaciones en el espacio de estados del *simulink*. Por tanto. En *simulink* $A = [-R/L \ -\lambda_o/L; \ K_\tau J \ -B/J] = [-1785.41 \ -1; \ 766.66 \ -1.666]$; $B = [1/L \ 0; \ 0 \ 0] = [357.14 \ 0; \ 0 \ 0]$; $C = [1 \ 0; \ 0 \ 1]$ y $D = [0 \ 0; \ 0 \ 0]$.

4.3.1.- Control de corriente.

Consideremos el lazo interno de corriente en el cual se tiene la siguiente superficie de conmutación.

$$s = i^* - i \tag{4.11}$$

La cual considera el error entre la corriente real medida y la corriente de referencia i^* ; se diseña el control discontinuo como:

$$u = u_o \text{sign}(s) \tag{4.12}$$

Donde u_o es el voltaje aplicado. Para aplicar modos deslizantes u_o se debe seleccionar tal que $s \dot{s} < 0^{(11)}$, para esto:

$$\begin{aligned} s \dot{s} &= s \left[\frac{di^*}{dt} - \left(\frac{-R}{L} i - \frac{\lambda_o}{L} \omega + \frac{1}{L} u_o \right) \right] < 0 \\ s \dot{s} &= \frac{di^*}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{\lambda_o}{L} \omega - \frac{1}{L} u_o < 0 \\ -\frac{1}{L} u_o &< -\frac{di^*}{dt} - \frac{R}{L} i - \frac{\lambda_o}{L} \omega \\ \therefore u_o &> \left| L \frac{di^*}{dt} + Ri + \lambda_o \omega \right| \end{aligned} \tag{4.13}$$

Examinando la *desigualdad* (4.13); si la corriente de referencia es constante el voltaje de enlace u_o que se necesita para forzar el control de modo deslizante deber ser mas alto que el voltaje que el poco voltaje en la resistencia de armadura mas la parte inducida, por otra parte la corriente de referencia no puede variar arbitrariamente, su derivada con relación al tiempo debe limitarse para asegurar la existencia del modo deslizante, para un voltaje de enlace dado. Por lo que en la simulación, se debe cuidar que el voltaje que apliquemos u_o sea mayor que la *expresión* (4.13).

(11) Condición de existencia de los modos deslizantes (véase capítulo tres)

4.3.2.- Control de velocidad.

Para este caso, la etapa de control de corriente se comporta como una fuente de corriente, ya que la corriente a la salida será igual a la de entrada, esto ocurre si asumimos que la constante de tiempo eléctrica es mucho menor que la constante mecánica de tiempo del motor; o para sistemas donde la dinámica de la respuesta del control de velocidad no es un problema crítico, se pueden emplear cualquier técnica de control ya sea lineal o no lineal, por ejemplo un *PID* pero sin discontinuidades como el control de modos deslizantes, si se emplea un control discontinuo, implicaría que la derivada de la corriente deseada tiende a infinito, lo cual hace que no sea posible el seguimiento de i^* y esto no cumpliría con la condición (4.13) para cualquier valor de u_0 . Para el control de la velocidad se considera un control proporcional derivativo de estabilidad exponencial es decir:

$$c(\omega^* - \omega) + (\dot{\omega}^* - \dot{\omega}) = 0 \tag{4.14}$$

Donde c es una constante positiva y determina la rapidez de convergencia, de la ecuación mecánica del motor en (4.8), se puede despejar $\dot{\omega}$ y sustituir en (4.14) teniendo el siguiente desarrollo.

$$c(\omega^* - \omega) + (\dot{\omega}^* - \frac{k_t}{J} i^* + \frac{f\omega}{J}) = 0$$

$$\frac{k_t i^*}{J} = c(\omega^* - \omega) + \dot{\omega}^* + \frac{f}{J} \omega$$

$$i^* = \frac{J}{k_t} c(\omega^* - \omega) + \frac{J}{k_t} \dot{\omega}^* + \frac{f}{k_t} \omega \tag{4.15}$$

Todo este esquema de control se acomoda en la forma en que se observa en la *figura* (4.6), para su simulación en el *simulink* sustituyendo los respectivos valores de las constantes.

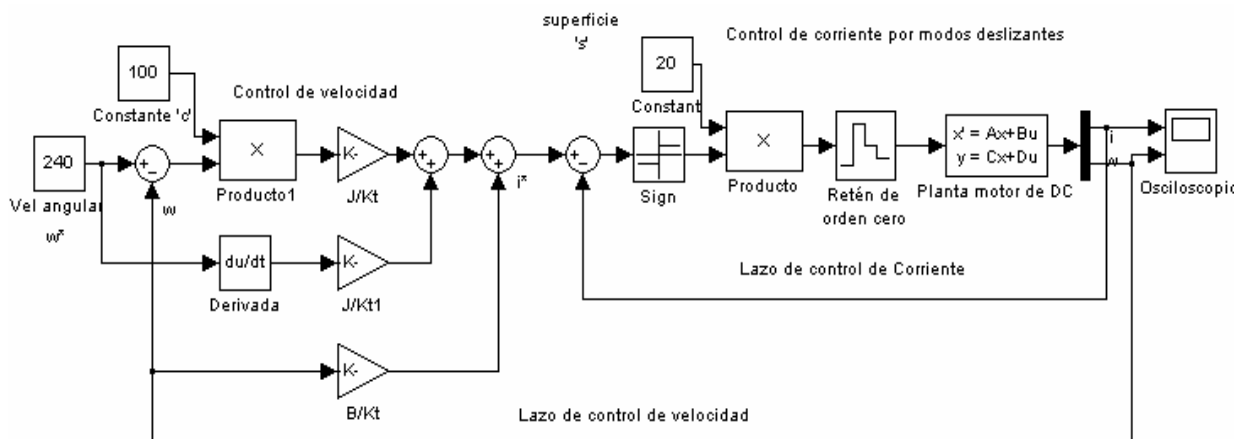


Figura (4.6) Diagrama en *simulink* del control en estructura en cascada.

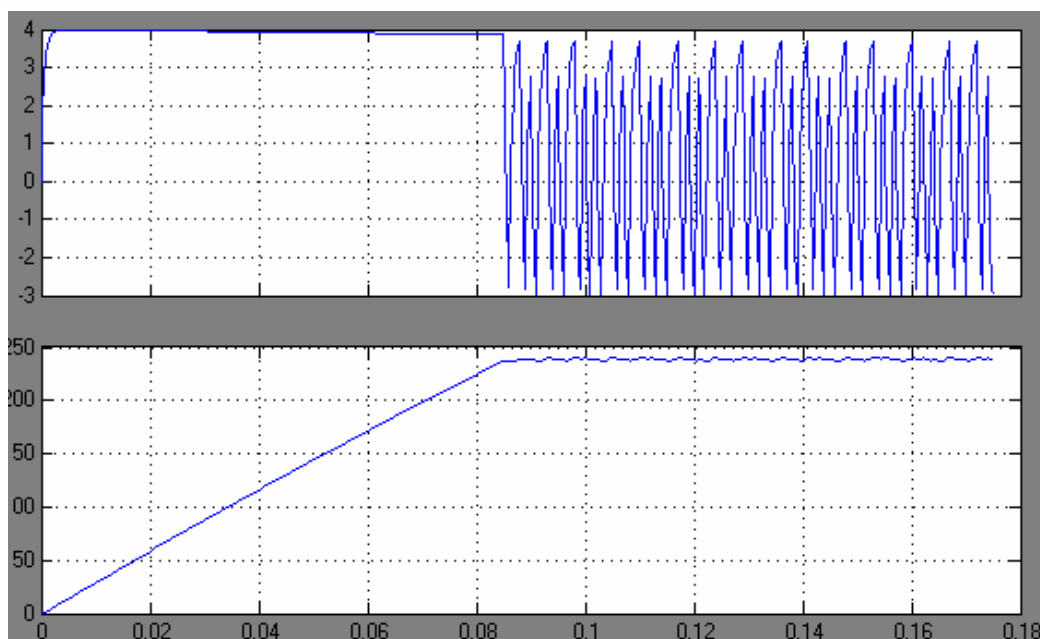


Figura (4.7) Simulación; gráfica superior corriente [A], inferior velocidad [rad/s].

En la figura (4.7) se muestra los valores de i y ω , resultantes de la simulación de la figura (4.6), con condiciones iniciales $i = 0$ y $\omega = 0$, $\omega^* = 240$ [rad/s], $c = 100$, tiempo de muestreo = 1 [ms] y $u_o = 20$ [V]. Obsérvese como ω no alcanza a ser completamente 240 [rad/s], esto es debido a un alto tiempo de muestreo; observe que se alcanza el valor cercano de 240 [rad/s] en un tiempo de 0.085 [s].

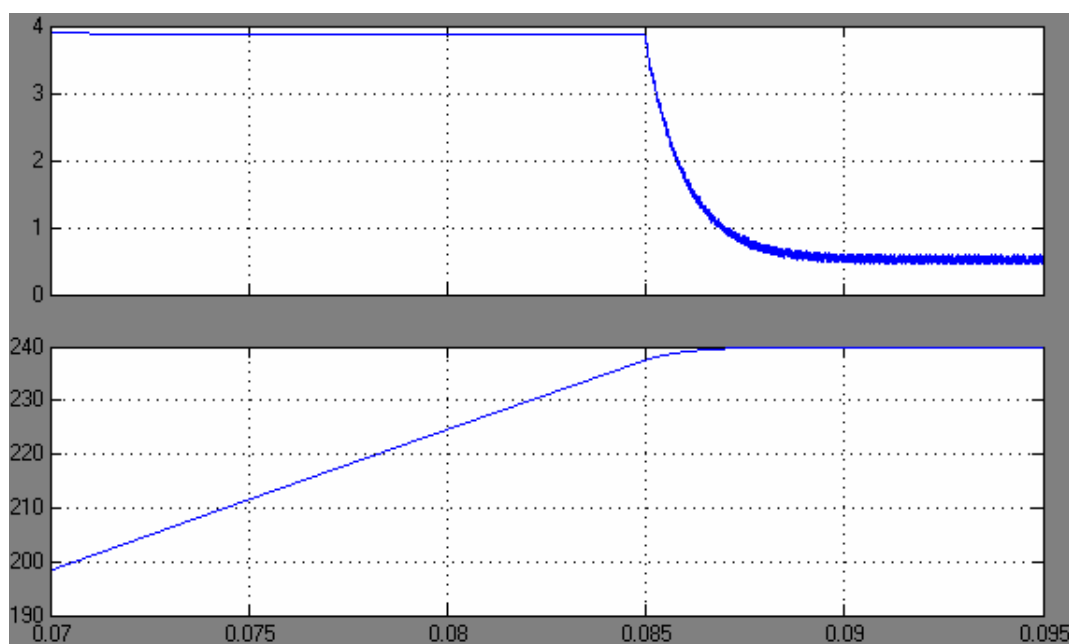


Figura (4.8) Simulación; gráfica superior corriente [A], inferior velocidad [rad/s]

En la figura (4.8) se muestra la simulación con los mismos parámetros de la figura (4.8), pero con un tiempo de muestreo menor de 10 [μ s]. Obsérvese la mejoría con respecto a la figura (4.8). Aquí ω si alcanza el valor de ω^* y la corriente se estabiliza más.

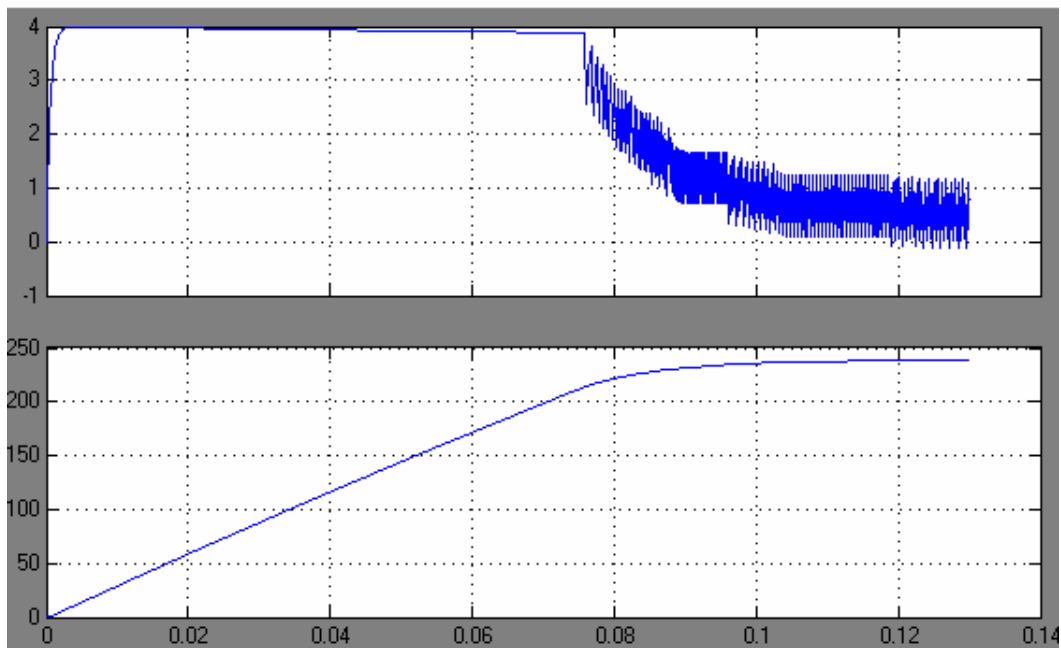


Figura (4.9) Simulación; gráfica superior corriente [A], inferior velocidad [rad/s].

En la figura (4.9) se muestra la simulación con los mismos parámetros de la figura (4.7), pero con una constante c de 10. Obsérvese como la estabilidad se alcanza en un tiempo de 0.12 [s]. el cual es un valor mayor que el de la figura (4.8).

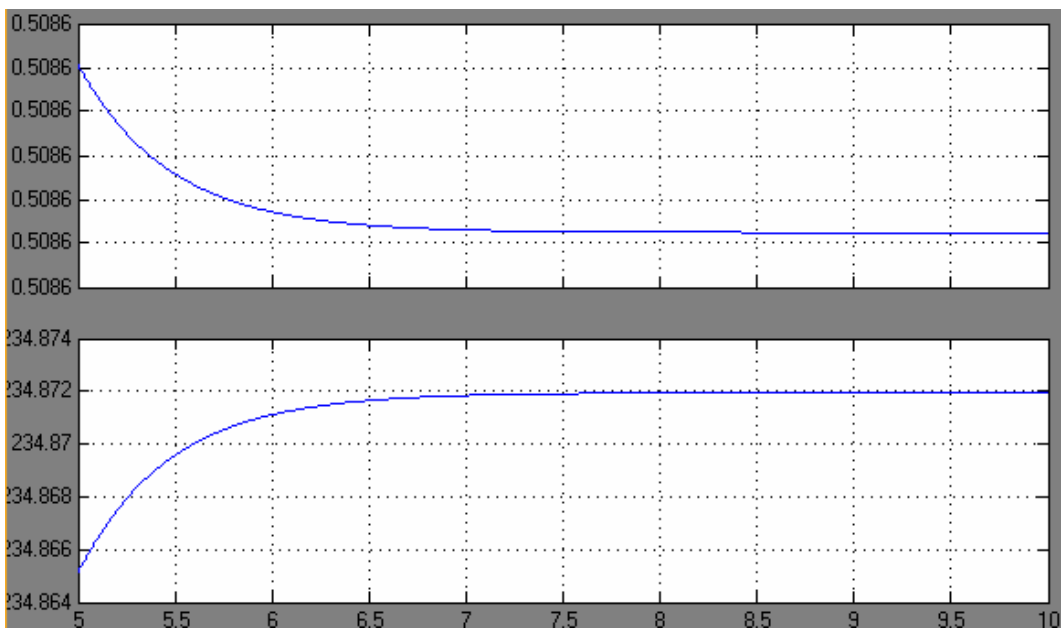


Figura (4.10) Simulación; gráfica superior corriente [A], inferior velocidad [rad/s]

Finalmente en la figura (4.10) se muestra la simulación con los mismos parámetros de la figura (4.9) pero con $u_o = 3.2$ [V]. Obsérvese que ω nunca alcanza ω^* , debido a que no se cumple con la condición de Modos Deslizantes $s s < 0$.

4.4.- Estructura integrada para el control de velocidad.

Para este tipo de control representaremos nuestro modelo matemático de la forma regular tal como se analizo en la *sección (3.4.2)*; esta estructura es empleada para superar algunos de los problemas que puede tener la estructura en cascada, como su implementación física, y las dinámicas no modeladas que se presentan en el control de corriente, se propone a partir del principio de control de modo deslizante en el cual se puede seguir una trayectoria de velocidad dada, en el cual el control de corriente de cierta manera esta implícito. Las ventajas de emplear una estructura integrada son una rápida dinámica de respuesta y una alta robustez con respecto a las perturbaciones que se presenten en los subsistemas eléctricos y mecánicos.

Sean $\omega^*(t)$ la velocidad de referencia y $e = \omega^* - \omega$ el error en la medición de la velocidad y definimos las variables de estado $x_1 = e = \omega^* - \omega$ y $x_2 = \dot{e}$. Para aplicar este control se requiere un modelo matemático de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu \end{aligned} \tag{4.16}$$

Del modelo matemático de motor tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i - \frac{\lambda_o}{L}\omega \\ \dot{\omega} &= \frac{k_t}{J}i - \frac{f}{J}\omega \end{aligned} \tag{4.17}$$

Donde las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= e = \omega^* - \omega \\ x_2 &= \dot{e} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ahora, bien:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{e} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Tenemos.

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{e} = \dot{\omega}^* - \dot{\omega} = \dot{\omega}^* - \frac{k_t}{J}i + \frac{f}{J}\omega \\ \dot{x}_2 &= \ddot{e} = \ddot{\omega}^* - \frac{k_t}{J}\dot{i} + \frac{f}{J}\dot{\omega} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* - \frac{k_t}{J}\left(\frac{u}{L} - \frac{R}{L}i - \frac{\lambda_o}{L}\omega\right) + \frac{f}{J}\dot{\omega} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* - \frac{k_t}{JL}u + \frac{k_t R}{JL}i + \frac{\lambda_o k_t}{JL}\omega + \frac{f}{J}\dot{\omega} \end{aligned}$$

Para obtener el formato (4.16) sustituimos en la expresión anterior el valor de i despejado de la ecuación mecánica de (4.17) y sumamos y restamos ciertas cantidades dando el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* - \frac{k_t}{JL} u + \frac{k_t R}{JL} \left(\frac{J}{k_t} \dot{\omega} + \frac{f}{k_t} \omega \right) + \frac{\lambda_o k_t}{JL} \omega + \frac{f}{J} \dot{\omega} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{\omega}^* - \frac{k_t}{JL} u + \frac{R}{L} \dot{\omega} + \frac{Rf}{JL} \omega + \frac{\lambda_o k_t}{JL} \omega + \frac{f}{J} \dot{\omega} - \frac{\lambda_o k_t}{JL} \omega^* + - \frac{\lambda_o k_t}{JL} \omega^* - \frac{R}{L} \dot{\omega}^* + \frac{R}{L} \dot{\omega}^* \\ \dot{x}_2 &= - \frac{k_t \lambda_o}{JL} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \ddot{\omega}^* + \frac{R}{L} \dot{\omega}^* + \frac{\lambda_o k_t}{JL} \omega^* + \frac{Rf}{JL} \omega + \frac{f}{J} \dot{\omega} - \frac{k_t}{JL} u \end{aligned} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) ya cumple con el formato (4.16), las constantes son:

$$a_1 = - \frac{k_t \lambda_o}{JL} = - \frac{(0.046)(0.0028)}{(0.00006)(0.0028)} = -766.66$$

$$a_2 = - \frac{R}{L} = \frac{5}{0.0028} = -1785.41$$

$$b = \frac{k_t}{JL} = \frac{0.046}{(0.00006)(0.0028)} = 273809.52$$

$$\frac{Rf}{JL} = \frac{(5)(0.0001)}{(0.00006)(0.0028)} = 2976.19$$

$$\frac{f}{J} = \frac{0.0001}{0.00006} = 1.66$$

Entonces el modelo final para simulación con el formato (4.16) es.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -766.66x_1 - 1785.41x_2 + \ddot{\omega}^* + 1785.41 \dot{\omega}^* + 766.66\omega^* + 2976.19\omega + 1.66 \dot{\omega} - 273809.52u \end{aligned}$$

Donde $f(t) = \ddot{\omega}^* + 1785.41 \dot{\omega}^* + 766.66\omega^* + 2976.19\omega + 1.66 \dot{\omega}$; para el espacio de estados del *simulink* $A = [0 \ 1; -766.66 \ -1785.41]$, $B = [0 \ 0; 0 \ 1]$, $C = [1 \ 0; 0 \ 1]$ y $D = [0 \ 0; 0 \ 0]$; ahora se diseña la superficie de conmutación:

$$s = cx_1 + x_2 = cx_1 + \dot{x}_1 = 0 \quad (4.19)$$

Donde c es una constante positiva que determina la convergencia y el control es:

$$u = u_o \text{sign}(s)$$

Empleando la condición de modos deslizantes es $s \dot{s} < 0$, por lo tanto.

$$\begin{aligned} \dot{s} s &= \dot{s}(cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu_o) < 0 \\ cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) - bu_o &< 0 \\ bu_o &> cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t) \\ u_o &> \frac{1}{b} |cx_1 - a_1 x_1 - a_2 x_2 + f(t)| \end{aligned} \quad (4.20)$$

Por lo que en la simulación, si se quiere un buen control, se deberá tener en cuenta la condición anterior. Todo este esquema de control se acomoda en la forma en que se observa en la figura (4.11), para su simulación en el *simulink* sustituyendo los respectivos valores de las constantes.

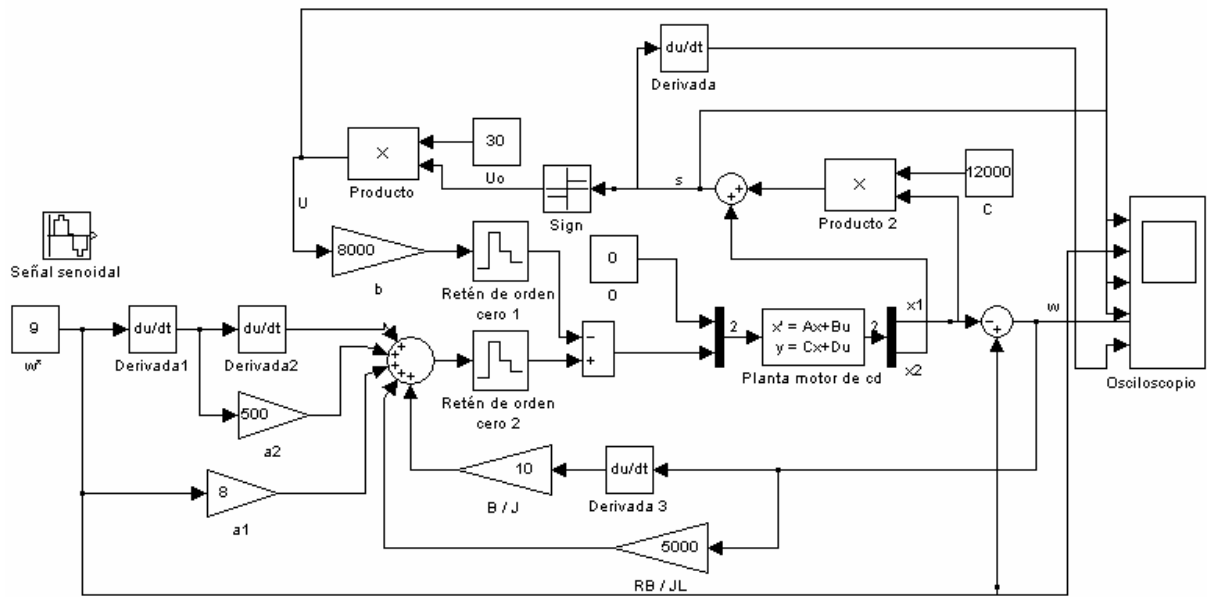


Figura (4.11) Diagrama en *simulink* del control en estructura integrada.

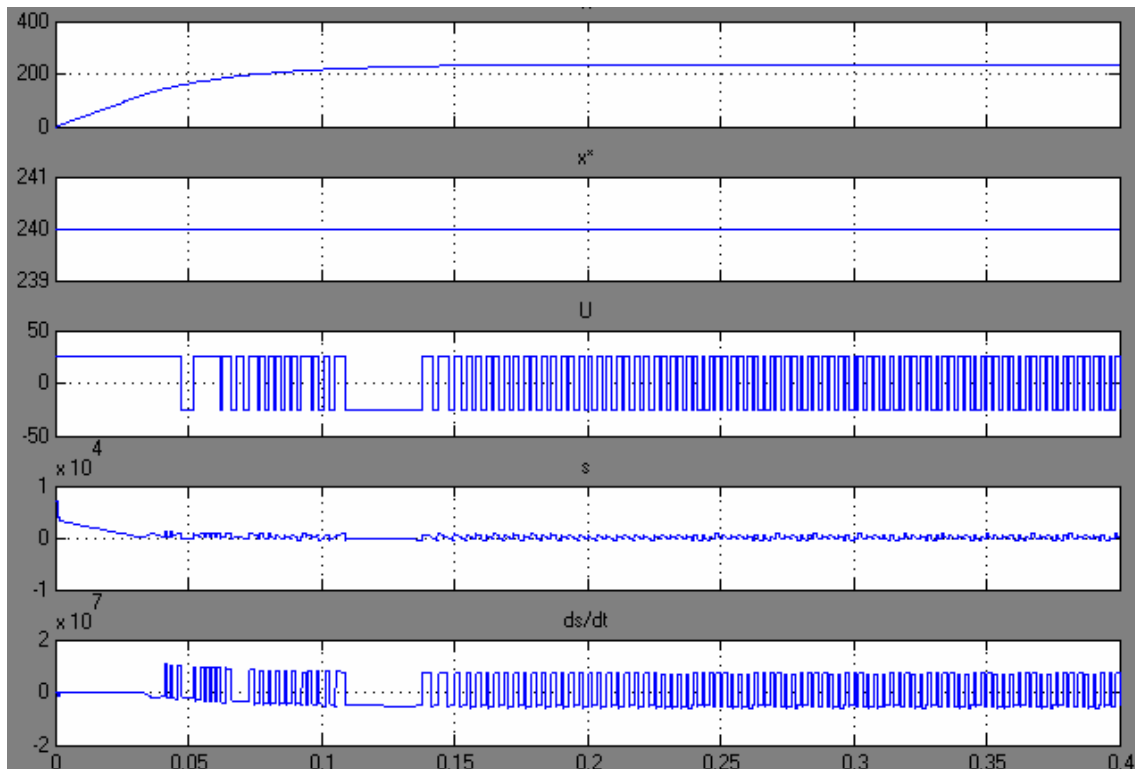


Figura (4.12) Simulación gráfica *a)* velocidad de salida *b)* velocidad de referencia *c)* superficie *s* *d)* derivada de la superficie 's'.

En la *figura (4.12)*, se muestra la curva de comportamiento de ω con los siguientes parámetros $c = 30$, ω inicial = $240 [rad/s]$, $\omega^* = 240 [rad/s]$, tiempo de muestreo de $1[ms]$ y $u_o = 20 [V]$.

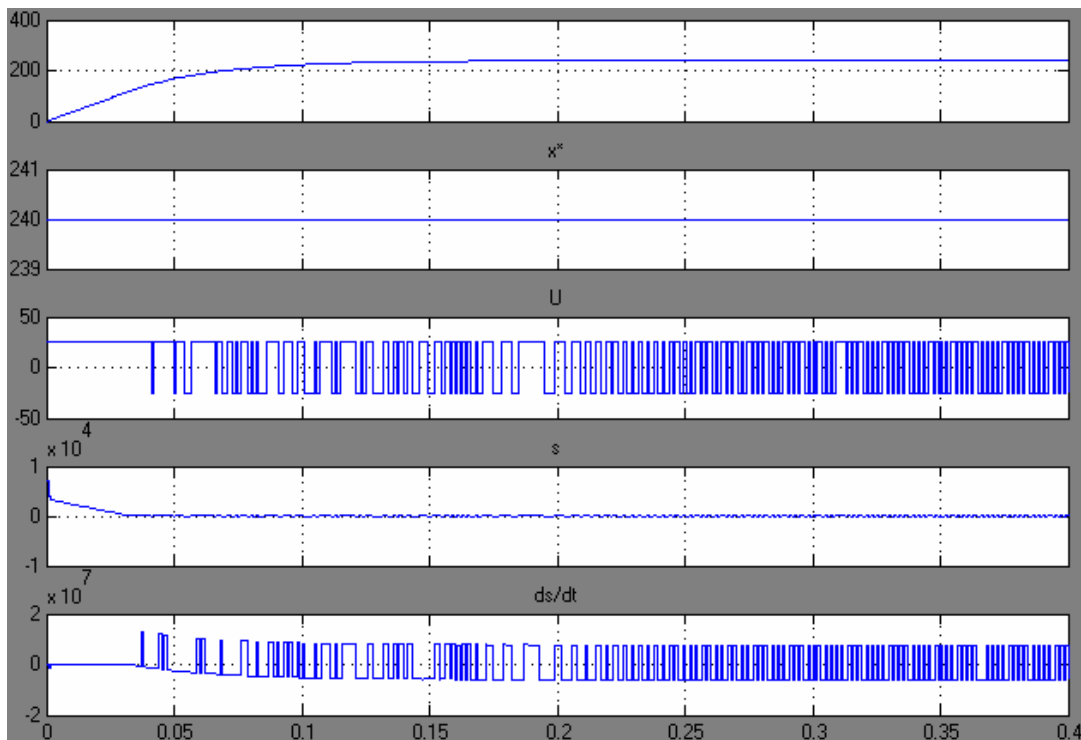


Figura (4.13) Simulación gráfica *a)* velocidad de salida *b)* velocidad de referencia *c)* superficie ‘s’ *d)* derivada de la superficie ‘s’.

La *figura (4.13)* es prácticamente la *figura (4.12)* pero con un tiempo de muestreo de $10 [\mu s]$. Obsérvese como con un tiempo de muestreo menor se alcanza ω^* y se logra mejor estabilidad.

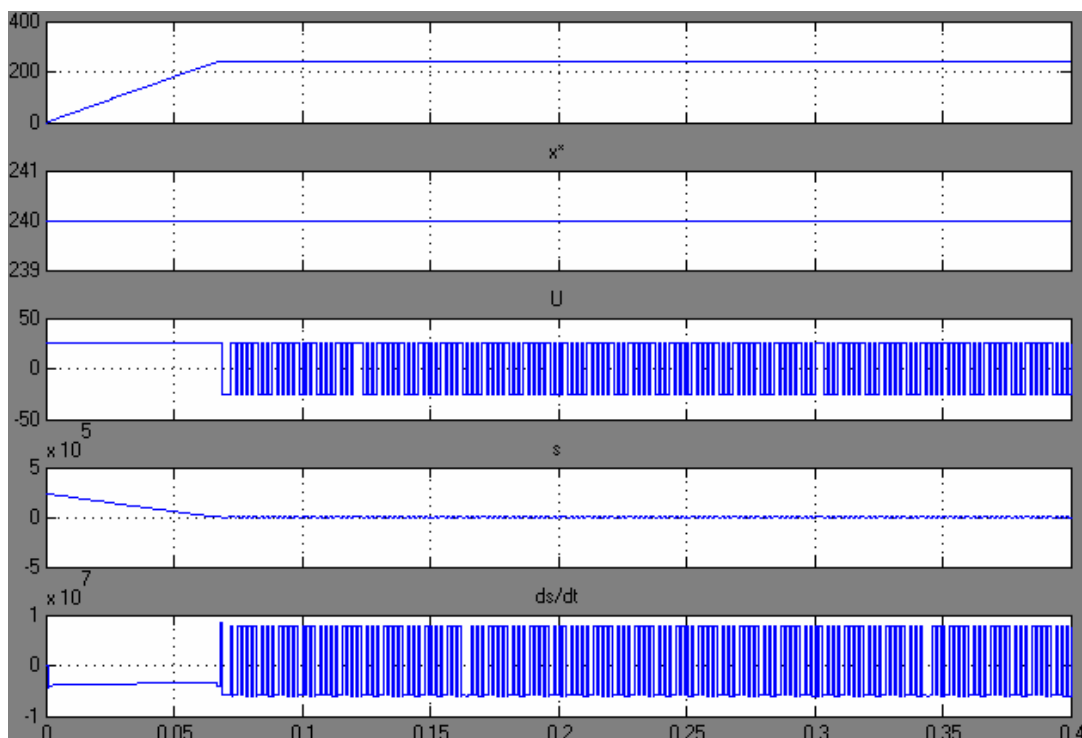


Figura (4.14) Simulación gráfica *a)* velocidad de salida *b)* velocidad de referencia *c)* superficie ‘s’ *d)* derivada de la superficie ‘s’.

La figura (4.14) es prácticamente la figura (4.13) pero con una constante $c = 10000$. Obsérvese que mientras con una $c = 30$ se alcanza ω^* en $0.15 [s]$ aproximadamente, con una c mayor de 10000 este tiempo de convergencia se disminuye a $0.07 [s]$.

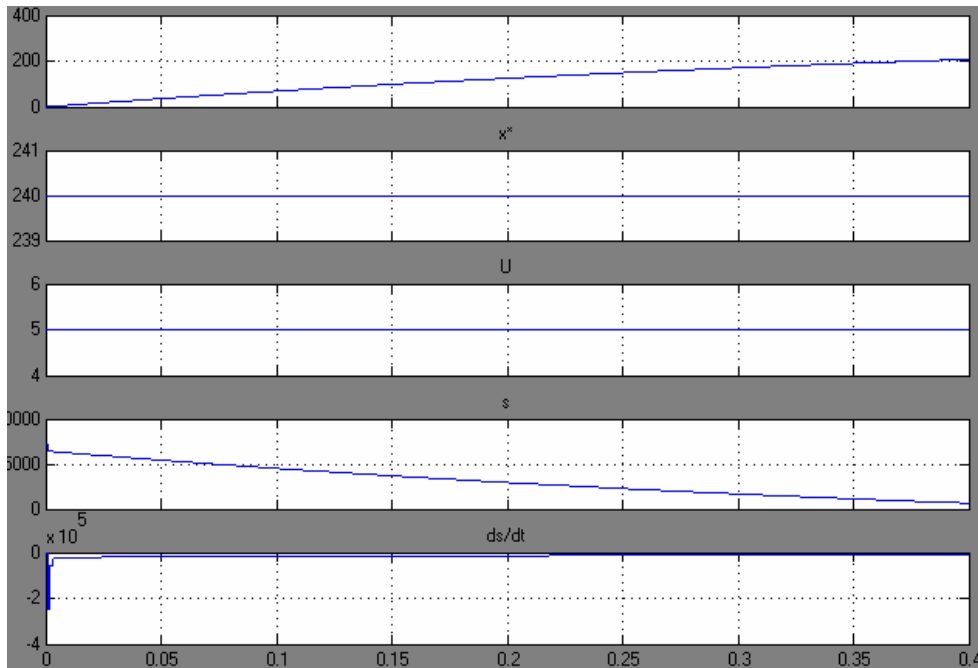


Figura (4.15) Simulación gráfica a) velocidad de salida b) velocidad de referencia c) superficie ‘s’ d) derivada de la superficie ‘s’.

La figura (4.15) es prácticamente la misma figura (4.14) pero con un control $u_o = 2 [V]$, que no cumple con la condición de modos deslizantes. Obsérvese que ω nunca alcanzara a ω^*

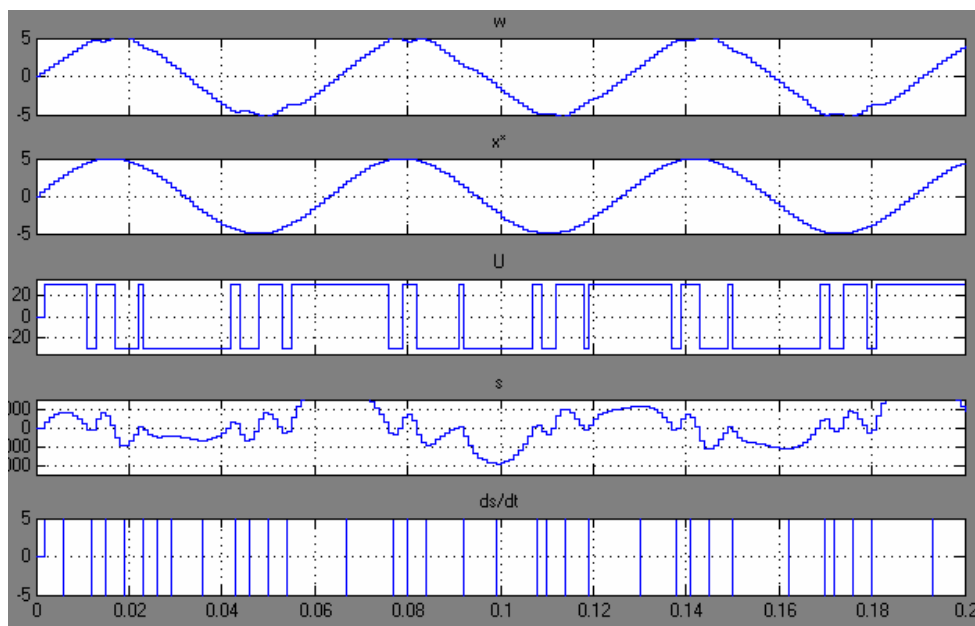


Figura (4.16) Simulación gráfica con referencia una señal senoidal a) velocidad de salida b) velocidad de referencia c) superficie ‘s’ d) derivada de la superficie ‘s’.

En la *figura (4.16)* se puso como ω^* una forma de onda senoidal, y se muestra la forma de onda de ω^* y ω , ω^* es lógicamente la onda más suave. Los parámetros fueron $\omega_{inicial} = 0$, $c = 10000$, $u_o = 20 [V]$, tiempo de muestreo de $1 [ms]$.

4.5.- Control de velocidad con modelo de orden reducido.

El control de velocidad en un motor de corriente directa que se han estudiado requiere que se controle la corriente de motor ó el control de la aceleración de motor. Sin embargo, algunos sistemas industriales han empleado relevadores para controlar los motores de corriente directa basados en la medida de velocidad. A continuación diseñaremos un control de modos deslizantes simplificado, basado en la medida de la velocidad; los métodos del control propuestos pueden resolver a menudo el problema del *chattering*. El movimiento mecánico de un motor de corriente directa es normalmente es muy más lento que la dinámica electromagnética por lo que se supone que $L \approx 0$ de esta manera se reduce el sistema quedando de primer orden, utilizándose la misma condición de control. Suponiendo que el error de velocidad es: $\omega_e = \omega^* - \omega$ podemos reescribir las ecuaciones del modelo matemático del motor.

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= u - Ri - \lambda_o \omega \\ J \frac{d\omega}{dt} &= k_t i - \tau_l \end{aligned}$$

$$\text{Se supone que el error de la velocidad es: } \omega_e = \omega^* - \omega \Rightarrow \omega = \omega^* - \omega_e \quad (4.21)$$

Sustituyendo el valor de (4.21) en las ecuaciones del motor y tomando en cuenta que $\tau_l = f\omega$; se tiene que:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= u - Ri - \lambda_o (\omega^* - \omega_e) \\ J \left(\frac{d\omega^*}{dt} - \frac{d\omega_e}{dt} \right) &= k_t i - \tau_l \\ L \frac{di}{dt} &= u - Ri - \lambda_o (\omega^* - \omega_e) \\ J \frac{d\omega_e}{dt} &= -k_t i + \tau_l + J \dot{\omega}^* \end{aligned} \quad (4.23)$$

tomando en cuenta la consideración anterior podemos suponer que $L = 0$ y despejamos la i de la primer ecuación de (4.23):

$$i = -\frac{\lambda_o}{R} (\omega^* - \omega_e) + \frac{1}{R} u \quad (4.24)$$

se sustituye (4.24) en la última ecuación de (4.23).

$$J \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{k_t \lambda_o}{R} (\omega^* - \omega_e) - \frac{k_t}{R} u + \tau_l + J \dot{\omega}^* \quad (4.25)$$

La ecuación (4.25) es el modelo de orden reducido del motor de corriente directa. El controlador es diseñado como:

$$u = u_o \text{sign}(\omega_e) \tag{4.26}$$

Desarrollando (4.25)

$$\dot{\omega}_e = -\frac{k_t \lambda_o}{JR} \omega_e + \frac{k_t \lambda_o}{JR} \omega^* + \frac{1}{J} \tau_l + \dot{\omega}^* - \frac{k_t}{JR} u \tag{4.27}$$

Para la condición de modos deslizantes $\omega_e \dot{\omega}_e < 0$.

$$\omega_e \dot{\omega}_e = \omega_e \left[-\frac{k_t \lambda_o}{JR} \omega_e + \frac{k_t \lambda_o}{JR} \omega^* + \frac{1}{J} \tau_l + \dot{\omega}^* - \frac{k_t}{JR} u \right] < 0$$

$$u_o > \left| \lambda_o \omega + \frac{\tau_l R}{k_t} + \frac{JR}{k_t} + \dot{\omega}^* \right| \tag{4.28}$$

Para simulación en *simulink*, la ecuación (4.27) es el espacio de estados con los términos que no contienen ω_e como entradas. Se sustituyen los parámetros del motor y la ecuación (4.27) queda de la siguiente forma:

$$\dot{\omega}_e = -\frac{(46 \times 10^{-3})(2.8 \times 10^{-3})}{(6 \times 10^{-5})(5)} \omega_e + \frac{(46 \times 10^{-3})(2.8 \times 10^{-3})}{(6 \times 10^{-5})(5)} \omega^* + \frac{1}{(6 \times 10^{-5})} \tau_l + \dot{\omega}^* - \frac{(46 \times 10^{-3})}{(6 \times 10^{-5})(5)} u$$

$$\dot{\omega}_e = -0.43\omega_e + 0.43\omega^* + 16666.66\tau_l + \dot{\omega}^* - 153.33u \tag{4.29}$$

Para *simulink* $A = -0.43, B = 1, C = 1, D = 0$.

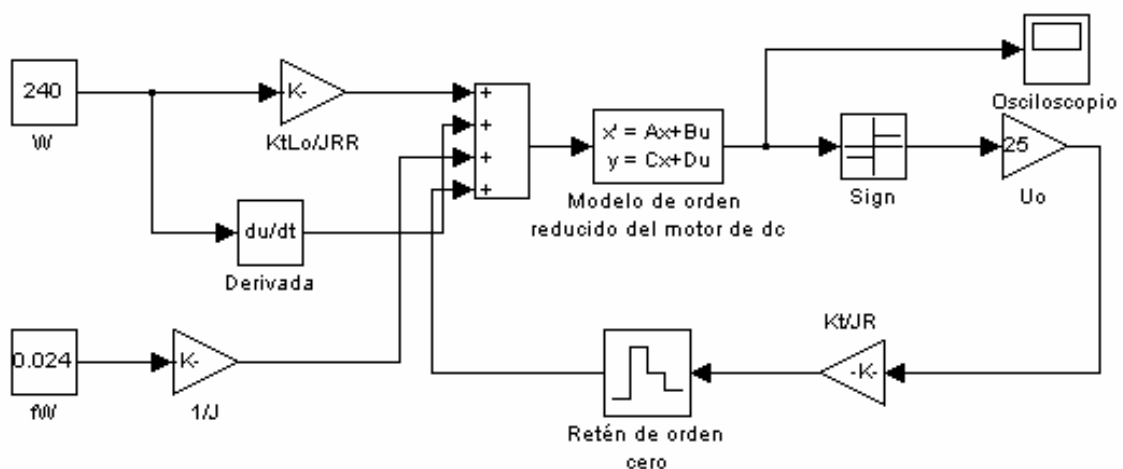


Figura (4.17) Diagrama a bloques del control con modelo reducido.

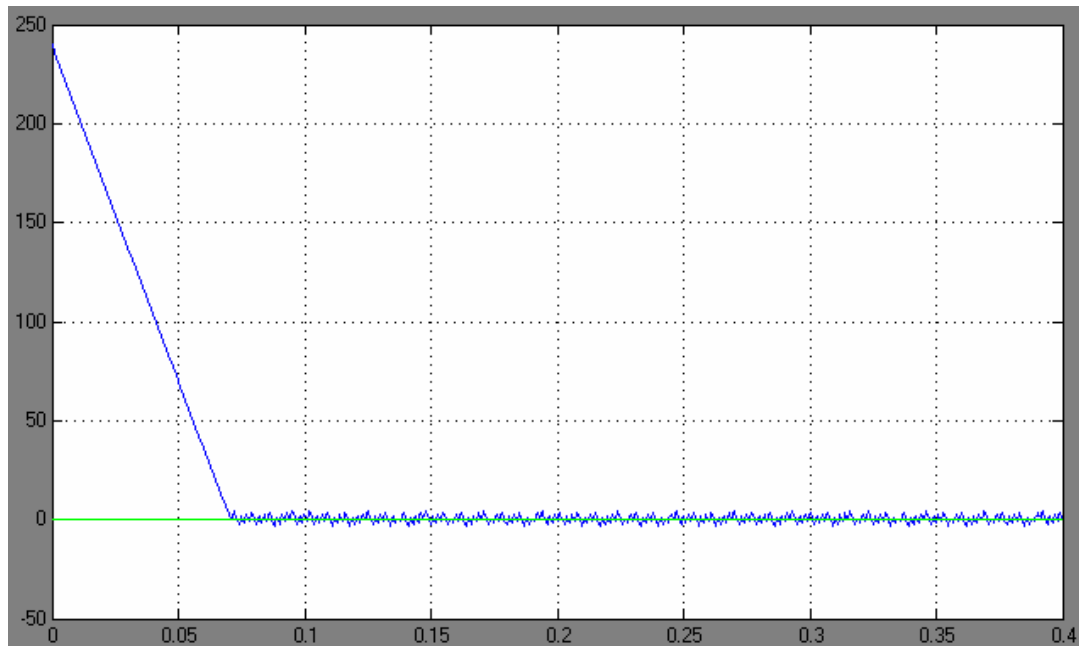


Figura (4.18) Simulación gráfica con ω_e a la salida con u_0 de 25 [V].

La *figura (4.18)* muestra la simulación de este tipo de control con los siguientes parámetros: tiempo de muestreo de 1 [ms], $\omega^* = 240$ [rad/s], ω_e inicial = 240 [rad/s], $\tau_l = 0.024$ [Nm], $u_o = 25$ [V]. se observa que se alcanza la respuesta estable en casi 0.075 [s]. Se observa que se tiene un alto grado de *chattering* aunque se tiene un buen tiempo de asentamiento.

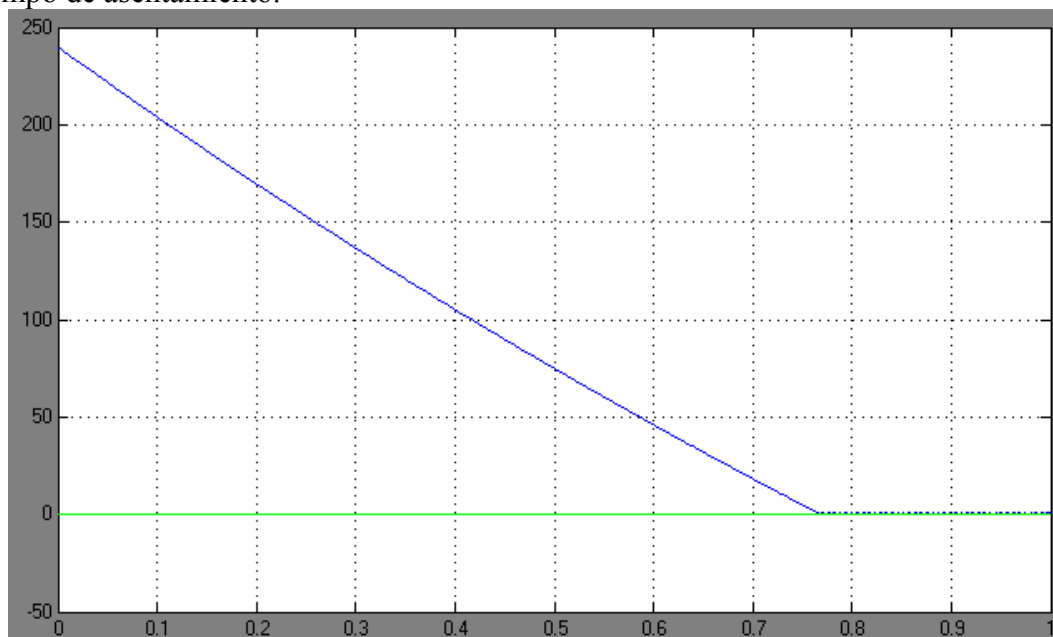


Figura (4.19) Simulación gráfica con ω_e a la salida con u_0 de 5 [V].

La *figura (4.19)* muestra la simulación de este tipo de control con los siguientes parámetros: tiempo de muestreo de 10 [μ s], $\omega^* = 240$ [rad/s], ω_e inicial = 240 [rad/s], $\tau_l = 0.024$ [Nm], $u_o = 5$ [V]. Se observa que se alcanza la respuesta estable en 0.78 [s]; además el control u_o es suficiente y el error ω_e alcanza el valor de cero, con un cierto grado menor de *chattering* que en el caso anterior.

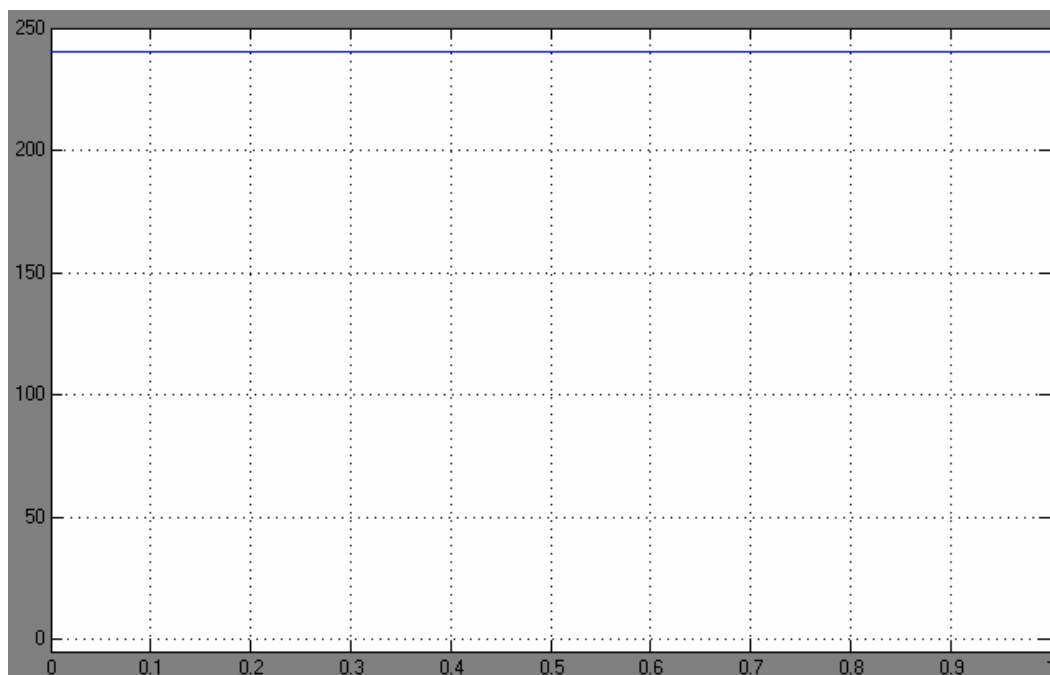


Figura (4.20) Simulación gráfica con ω_e a la salida con u_0 de 1 [V].

La *figura (4.20)* muestra la simulación de este tipo de control con los siguientes parámetros: tiempo de muestreo de 1 [ms], $\omega^* = 240$ [rad/s], $\omega_{e\text{ inicial}} = 240$ [rad/s], $\tau_l = 0.024$ [Nm], $u_0 = 1$ [V]. Obsérvese que el control u_0 no es suficiente y el error en ω se mantiene en 240 [rad/s]

Como se observó en las simulaciones algunas dinámicas no tomadas en cuenta en el lazo cerrado pueden resultar en el fenómeno del *chattering*. Una solución es emplear modos deslizantes de orden superior a continuación se presenta un algoritmo de control conocido como *twisting* que reduce el fenómeno de *chattering* y se tiene mejor robustez.

4.6.- Control de velocidad empleando el algoritmo *twisting*.

El algoritmo de control *twisting* tiene la siguiente forma:

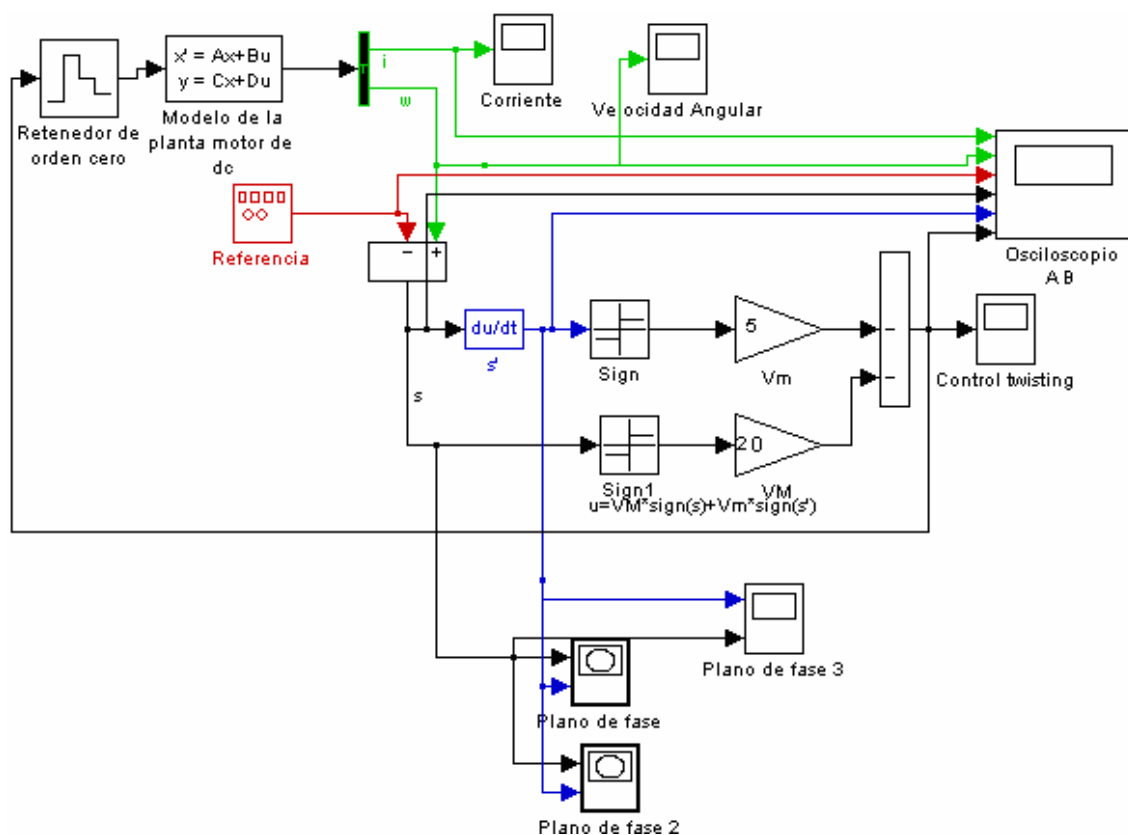
$$\dot{u} = \begin{cases} -u & |u| > 1 \\ -\alpha_m \text{sign}(s) & \text{con } s \dot{s} \leq 0, |u| \leq 1 \\ -\alpha_M \text{sign}(\dot{s}) & s \dot{s} > 0, |u| \leq 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

Para este algoritmo se deben cumplir las condiciones [S. V. Emelyanov]

$$\begin{aligned} \alpha_M &> \alpha_m > 0 \\ \alpha_m &> \frac{C_0}{K_m} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Este algoritmo requiere para su implementación de dos niveles de voltaje, en este caso α_m y α_M . C_0/K_m se puede interpretar como el valor del voltaje de referencia es

decir el u_0 usado en el control por modos deslizantes tradicional *MDPO*. Para el presente trabajo de tesis se considera $\alpha_m =$ Voltaje de referencia. En las condiciones $|u| \leq 1$ y $|u| \geq 1$ de (4.30), el control está normalizado a 1, es decir que en lugar de 1, se puede considerar el voltaje máximo que se pueda aplicar al motor, es decir: $|u| \leq u_{max}$ y $|u| \geq u_{max}$. Aquí, u se interpreta como el voltaje equivalente continuo que puede controlar el sistema, es decir que el primer renglón de (4.30) en el caso de motores no se aplica, ya que es para casos que no se pueden lograr ya que se tendría que aplicar un voltaje para el cual tal vez no habría una fuente suficientemente grande para suministrarlo. Los renglones 2 y 3 de (4.30) son lo esencial del algoritmo. En el renglón 3 se observa que se aplica un voltaje extra al nominal, esta condición es la que hace la diferencia con el control por modos deslizantes tradicional *MDPO*; ya que este valor extra hace que el control tenga más robustez contra las perturbaciones y más estabilidad, así como mayor rapidez de respuesta. La figura (4.21) muestra el diagrama de bloques de este algoritmo para nuestro motor de corriente directa a caracterizar.



La figura (4.21) Diagrama a bloques con el algoritmo *twisting*.

La forma necesaria para introducir el par de ecuaciones en el espacio de estados, en *simulink* $A = [-R/L \ -\lambda_o/L; K_\tau J \ -B/J] = [-1785.41 \ -1; 766.66 \ -1.666]$; $B = [1/L \ 0; 0 \ 0] = [357.14 \ 0; 0 \ 0]$; $C = [1 \ 0; 0 \ 1]$ y $D = [0 \ 0; 0 \ 0]$. Para las siguientes gráficas se utilizó un voltaje V_m de 25[V] y un V_m de 15[V], se analizan los casos para diferentes tiempos de muestreo.

- a) Tiempo de muestreo de 1 m[s]
- b) Tiempo de muestreo de 200 [μs]
- c) Tiempo de muestreo de 100 [μs]

a) *Tiempo de muestreo de 1 [ms].*

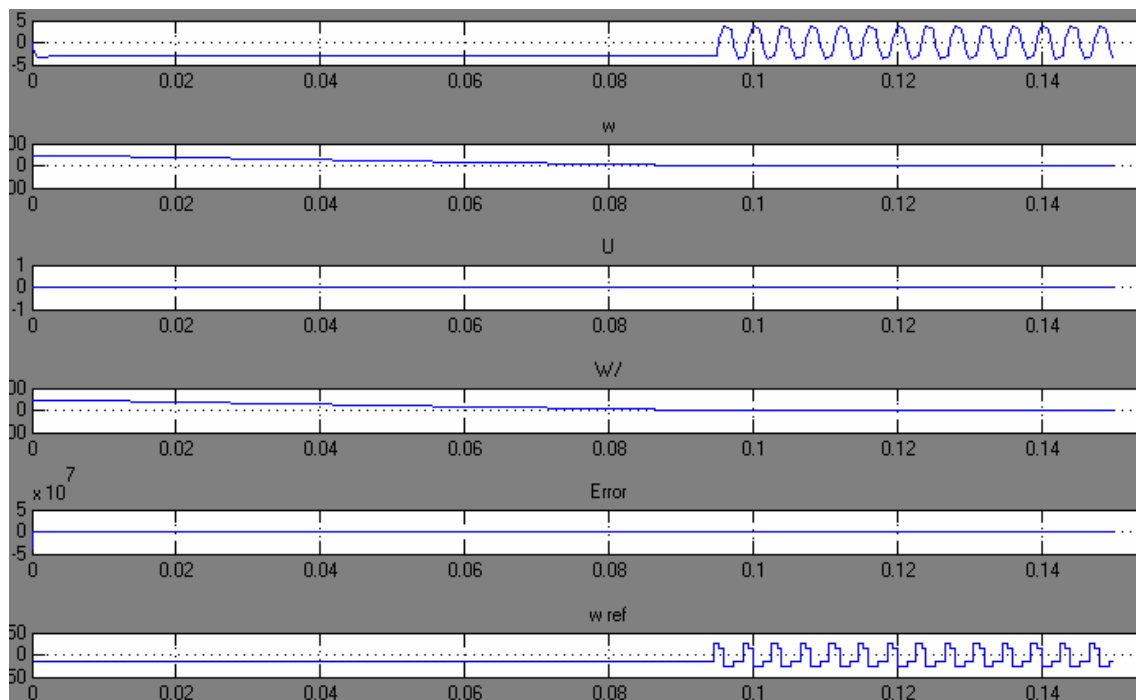


Figura (4.22) Simulación gráfica con: a) corriente de salida, b) velocidad de salida, c) velocidad de referencia, d) señal de ‘s’, e) señal de ‘ \dot{s} ’, f) señal de control.

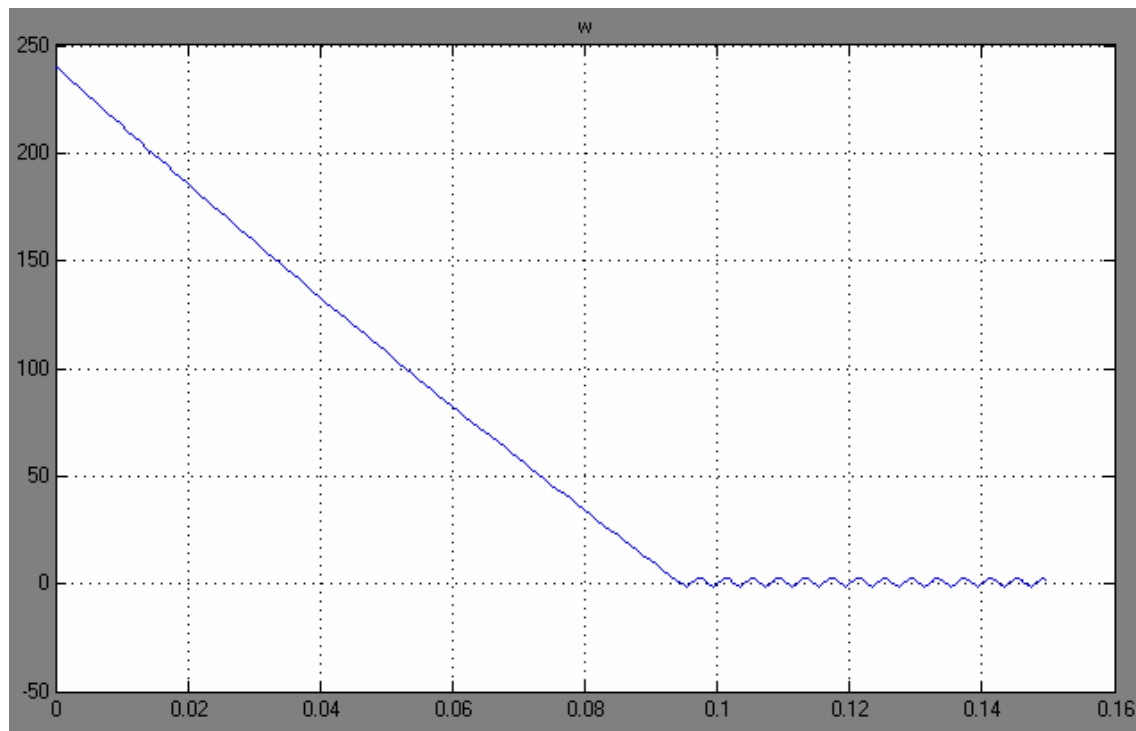


Figura (4.23) Velocidad de salida donde se observa un *chattering* por el tiempo de muestreo.

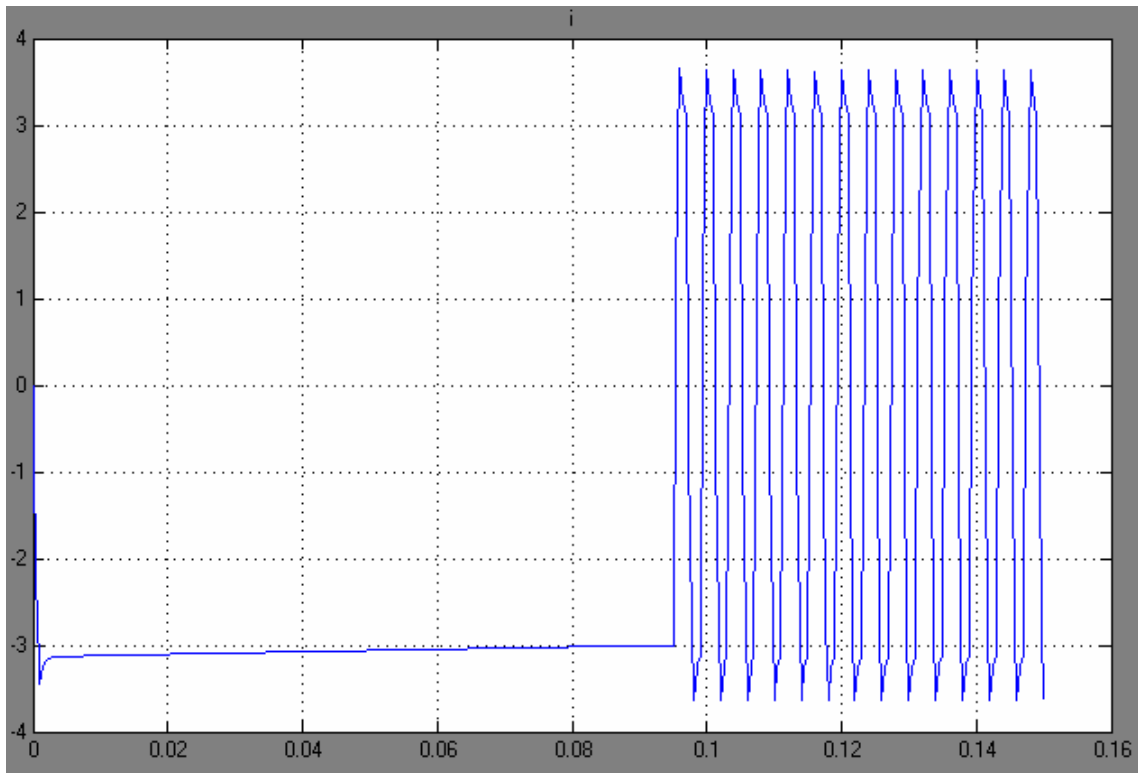


Figura (4.24) Corriente de salida en donde se observa un gran número armónicos debido al *chattering*.

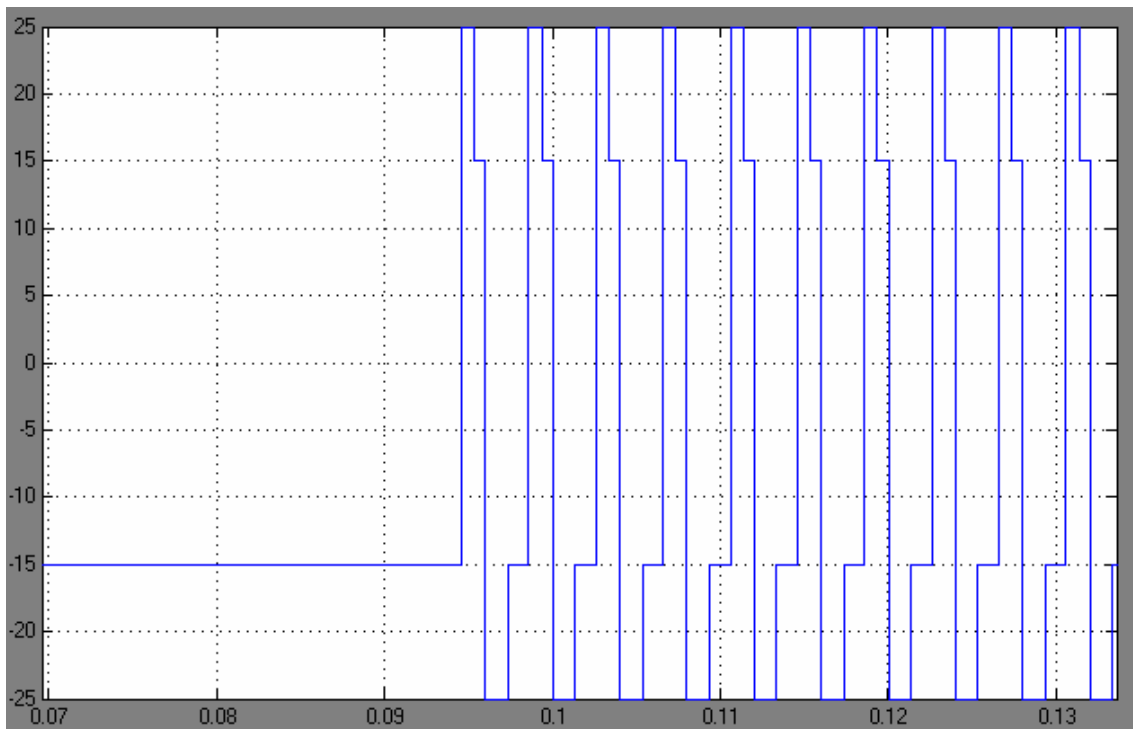


Figura (4.25) Señal de control en el cual se distinguen los dos niveles de voltaje.

b) Tiempo de muestreo 200 [μs]

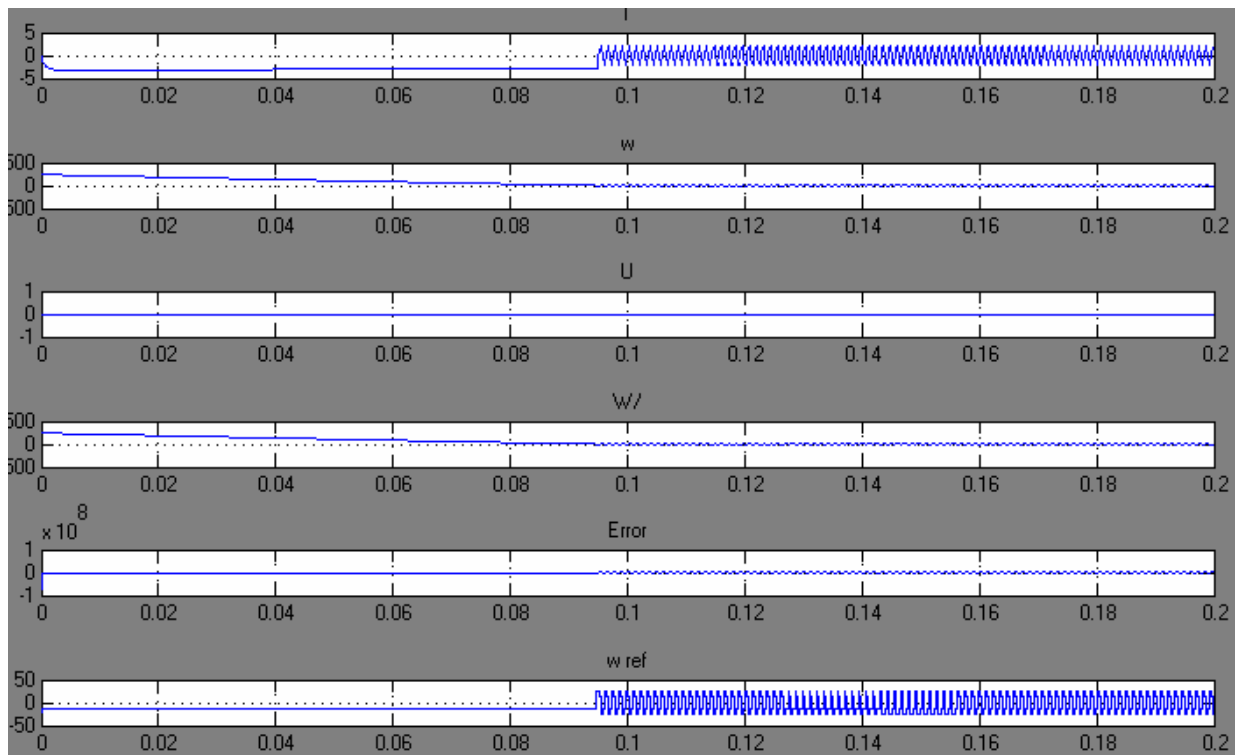


Figura (4.26) Simulación gráfica con: *a)* corriente de salida, *b)* velocidad de salida, *c)* velocidad de referencia, *d)* señal de ‘s’, *e)* señal de ‘ \dot{s} ’, *f)* señal de control.

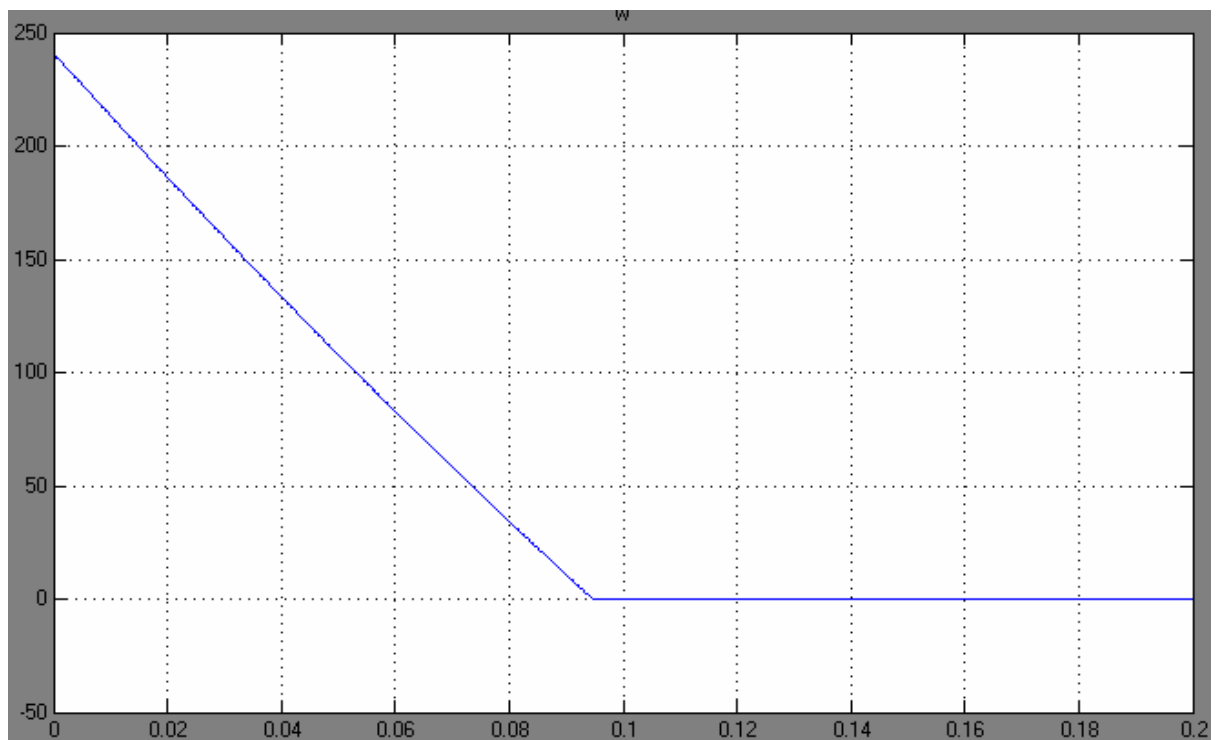


Figura (4.27) Velocidad de salida donde prácticamente no se observa el fenómeno de *chattering* en comparación con la gráfica (4.23)

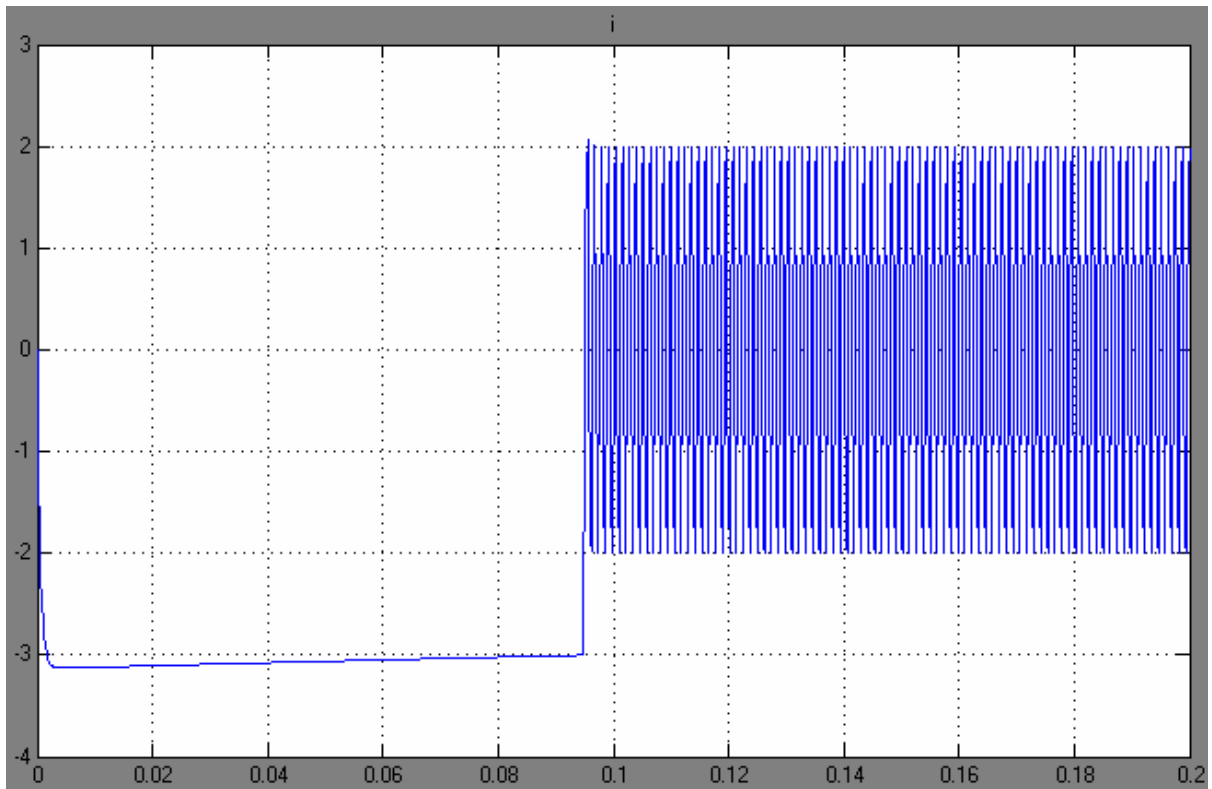


Figura (4.28) Corriente de salida en donde se observa un gran número armónico pero la magnitud disminuye en comparación con la gráfica (4.24).

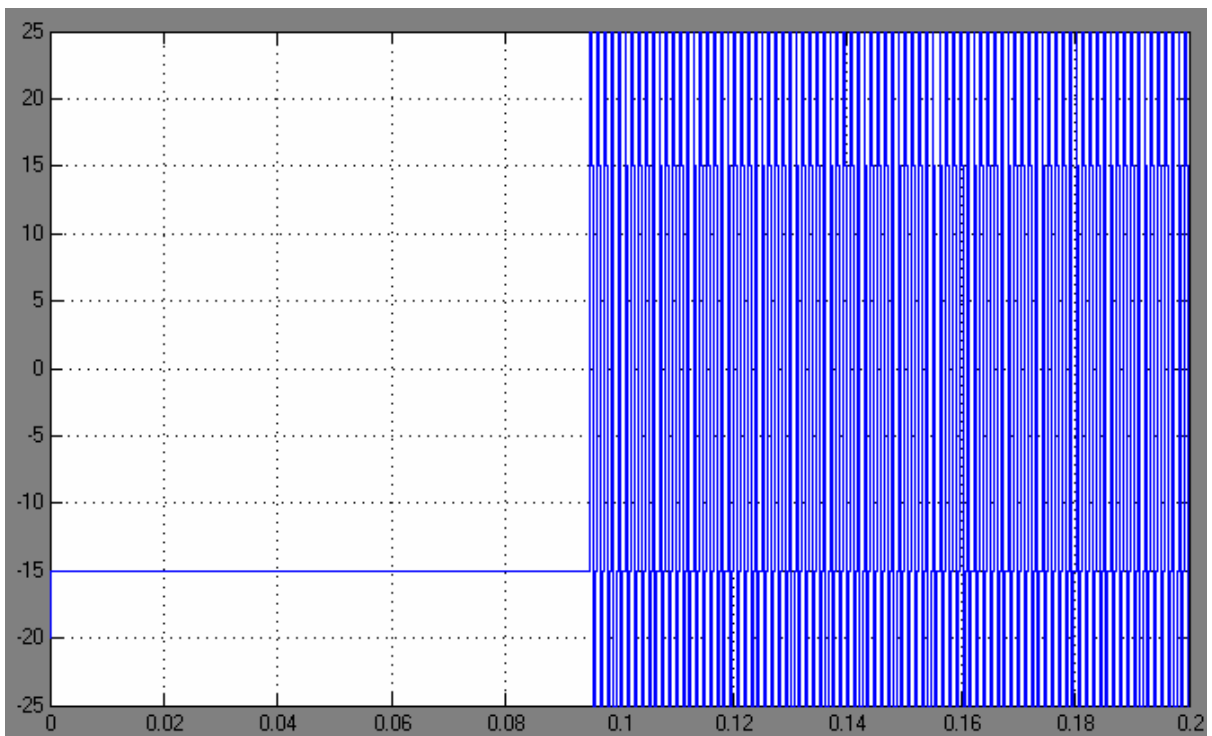


Figura (4.29) Señal de control en el cual se distinguen los dos niveles de voltaje se observa que el control conmuta más rápido que en (4.25) debido al tiempo de muestreo.

b) Tiempo de muestreo de 100 [μs].

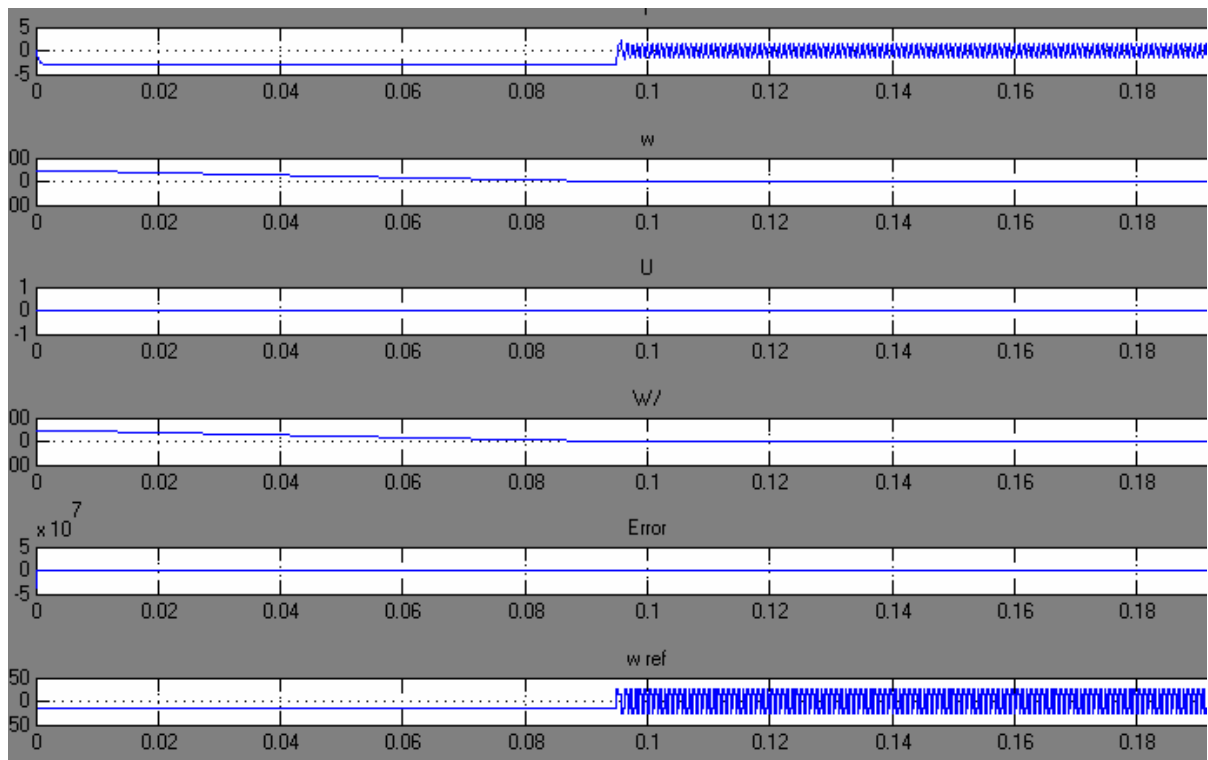


Figura (4.30) Simulación gráfica con: a) corriente de salida, b) velocidad de salida, c) velocidad de referencia, d) señal de ‘s’, e) señal de ‘s’, f) señal de control.

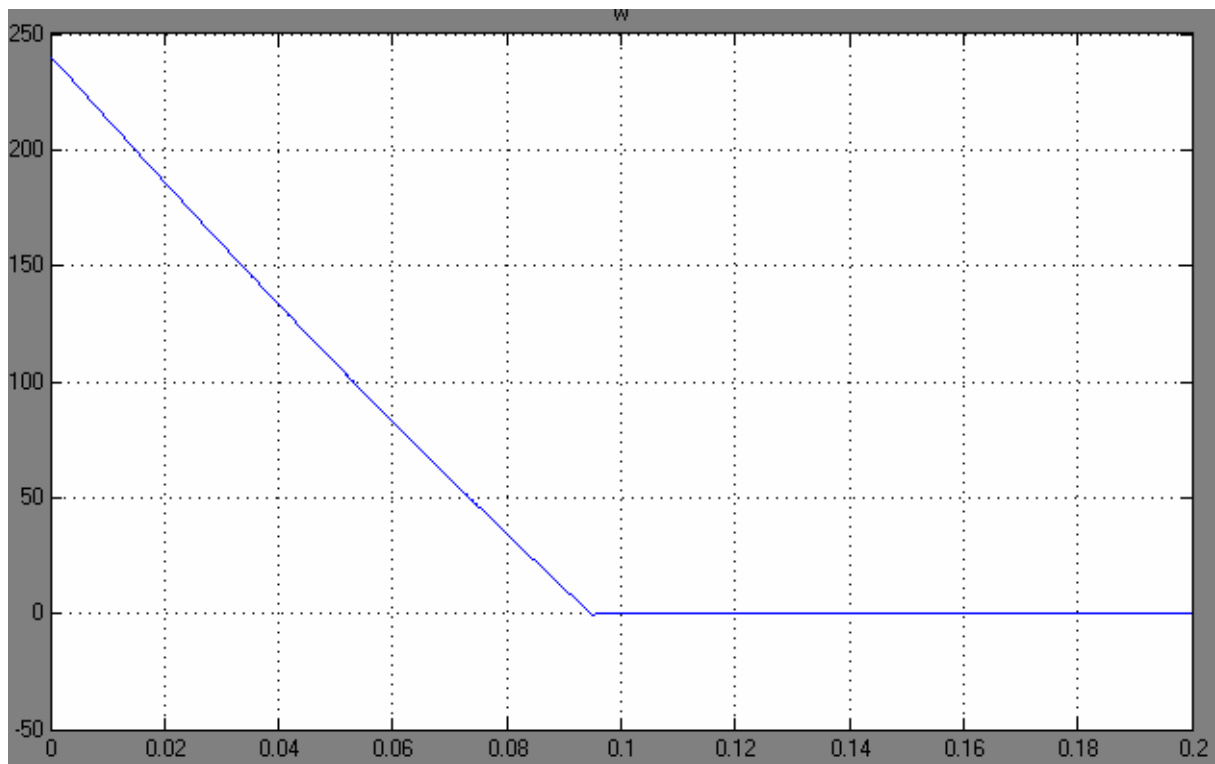


Figura (4.31) Velocidad de salida donde se observa un *chattering* prácticamente nulo por el tiempo de muestreo en comparación con la gráfica (4.27).

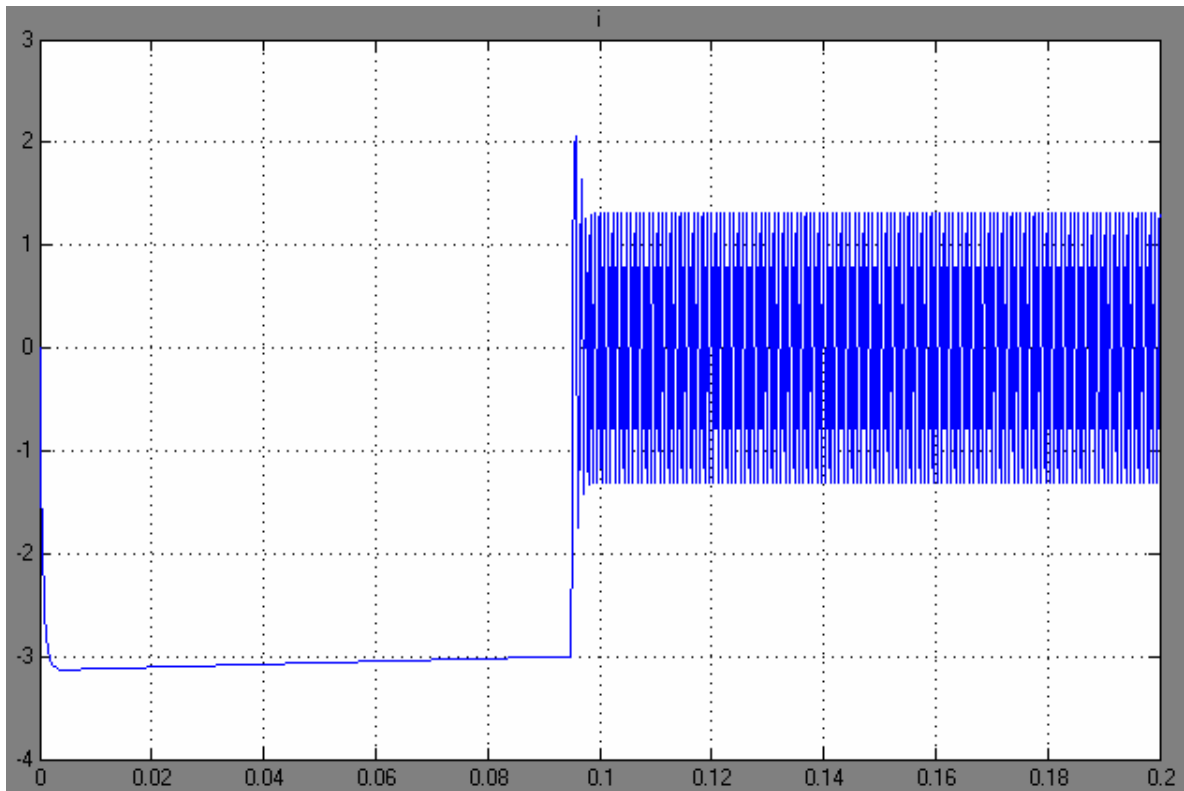


Figura (4.32) Corriente de salida en donde se observa una gran número armónicos pero disminuyen en magnitud en comparación a los de la gráfica (4.28).

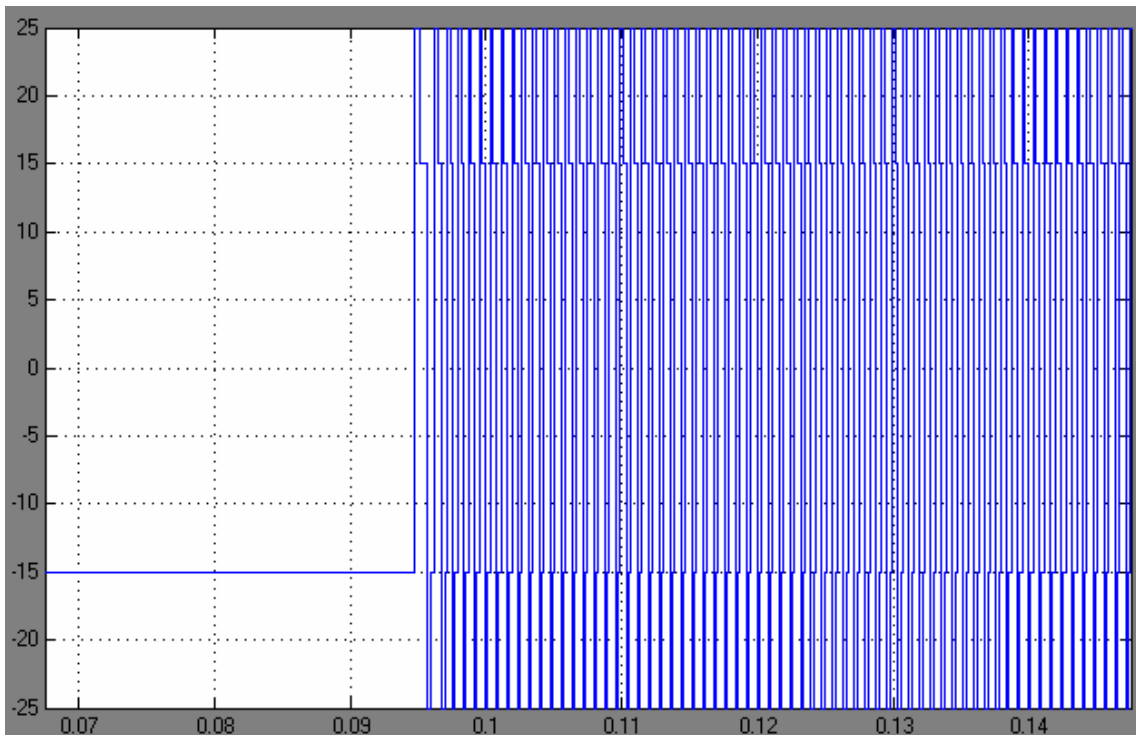


Figura (4.33) Señal de control en el cual se distinguen los dos niveles de voltaje se observa que el control conmuta más rápido que (4.29) debido al tiempo de muestreo.

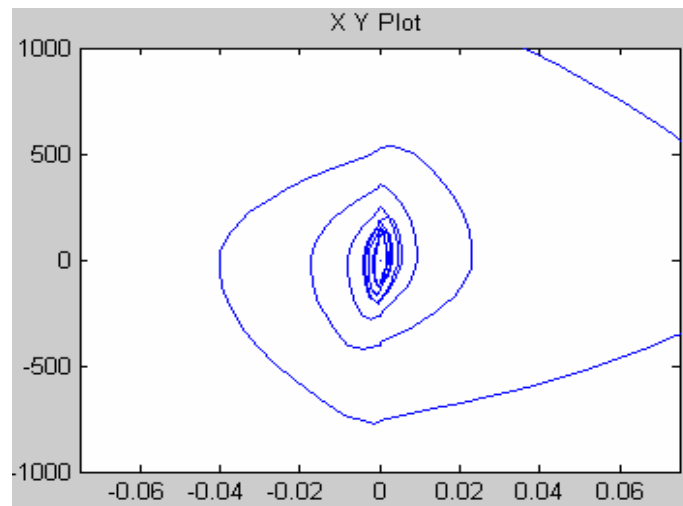


Figura (4.34) Plano de fase de s y \dot{s} .

En las figuras (4.23), (4.27) y (4.31); se observa un tiempo de asentamiento de aproximadamente $0.09 [s]$; con condiciones iniciales de $240 [rad/s]$, y corriente de $0 [A]$. Se hicieron pruebas con voltajes de V_M y V_m mayores lo cual en forma teórica nos reduce aun mucho más ese tiempo de asentamiento. En las figuras (4.24), (4.28) y (4.32); se observan los armónicos generados por el algoritmo de control estos se deben al tiempo de muestreo, al aumentar el tiempo de muestreo estos armónicos disminuyen en magnitud; para este algoritmo se le puede dar a seguir una trayectoria de referencia, con una dinámica mayor que las dadas tradicionalmente, en la cual el controlador no presenta mayor problema. En la figura (4.34) se observa como converge el algoritmo al origen tal como se predice en la sección (3.5) al graficar s y \dot{s} .

Se observa una rápida dinámica de respuesta por parte del controlador; una limitante de este algoritmo es que se necesita la medición directa de posición y velocidad y de dos valores de voltaje para su implementación, tal como se muestra en el diagrama de *simulink*, para implementaciones reales significa cálculo y computo de derivadas a través algún método numérico, una ventaja es que reduce el fenómeno de *chattering* que presenta ruido en forma de armónicos en nuestro control, la única limitante a la que se puede enfrentar es la de aumentar el tiempo de muestreo ya que aquí solo se presento el caso de tomar 1000 , 5000 y $10,000$ muestras por segundo lo cual ocupa tiempo en calculo del procesador a emplear para un control en una implementación real.

Capítulo 5

“Conclusiones”

Objetivos:

- Realizar una tabla de comparación de los distintos tipos de control simulados.
- Analizar cada una de las simulaciones y hacer comparaciones entre ellas.
- Discutir en base a las simulaciones cuales son las mejores técnicas para controlar nuestro motor de corriente directa.
- Plantear algunas de las posibles implementaciones para poder realizar un control de modos deslizantes.

Palabras clave:

- *Chattering.*
- Robustez.
- Algoritmo *twisting.*
- Procesador digital de señales *PDS.*
- Aplicaciones.

5.1.- Tabla de resultados.

Los resultados de las simulaciones obtenidas en el capítulo cuatro se muestran en la *tabla (5.1)*, los resultados muestran una alta convergencia para la respuesta en lazo cerrado, con lo que se puede proseguir a realizar las comparaciones de cada uno de los métodos analizados en las simulaciones y su posible implementación en un sistema de control real.

| Control | Tiempo de estabilización [s] | Sobrepaso [%] | Robustez | Tiempo de muestreo | Chattering |
|--------------------------|------------------------------|---------------|----------|--------------------|------------|
| PID (Ziegler-Nichols) | 0.2 | 7.8 | limitada | No aplica | No aplica |
| Estructura en cascada | 0.085 | No es notable | Si | 10 microsegundos | Alto |
| Estructura Integrada | 0.07 | No es notable | Si | 10 microsegundos | Medio |
| Modelo de orden reducido | 0.075 | No es notable | Si | 10 microsegundos | Medio |
| Algoritmo Twisting | 0.095 | No es notable | Si | 1 microsegundo | bajo |

Tabla (5.1) Resultados de las simulaciones obtenidas.

5.2.- Análisis de las simulaciones.

El modelo matemático obtenido de forma experimental es muy cercano a los modelos teóricos de segundo y primer orden obtenidos de forma teórica, realizando las comparaciones en base a la respuesta escalón con un voltaje de $3[V]$ de entrada; se tiene que para el modelo de segundo orden el modelo obtenido experimentalmente tiene un error del 8.6% , y para el modelo de primer orden despreciando la inductancia de armadura se tiene un error del 7.6% . Este resultado muestra que nuestro modelo matemático es válido y se pueden emplear los parámetros proporcionados por el fabricante, el porcentaje de error de el polo y cero con relación a el modelo teórico con el experimental es de 8.04% y 1.88% , respectivamente, con lo que podemos concluir que para una implementación real se tiene reconocido un modelo de primer orden que muestra el comportamiento del motor *TY36A* de la marca *Venneta*.

Los resultados de las simulaciones muestran que para el controlador *PID* obtenido a través de la curva de reacción de *Ziegler-Nichols*, muestra una gran desventaja en comparación con el control de modos deslizantes, además que para su implementación se tiene que atender a mediciones sobre los valores T y L , las cuales fueron tomadas directamente, esto trae en sí errores de precisión y confiabilidad, aun así se logro una simulación de este control con buenos resultados, el problema mas notorio que se presenta es un sobrepaso menor al 10% el cual aparecerá con este tipo de controladores debido a que así es marcado en las reglas de sintonización, Este sobrepaso puede afectar en alguna aplicación en la que se desea minimizar esta acción, ya que si el sobrepaso dura suficiente tiempo puede afectar el buen funcionamiento de el equipo que se este controlando; además se tiene que para efectuar este tipo de controladores de manera real, se tienen que adecuar sobre el sistema con circuitos electrónicos tales como integradores y diferenciadores, empleando tal vez amplificadores operacionales, lo cual no es muy versátil si se desea cambiar de técnica de control o se pueden emplear un control *PID* discreto, cuyo programa dependerá de los parámetros del tiempo de muestreo T y del tipo de procesador que se emplee.

Los resultados de las simulaciones para el control de modos deslizantes muestran una alta velocidad de convergencia así como un tiempo de asentamiento en tiempo finito y no se presenta el sobrepaso que se tiene en el control *PID*.

El principal problema que se tiene cuando se emplea una *estructura en cascada* es que el control se aplica directamente sobre la corriente esto puede generar problemas en la implementación real, ya que los actuadores deben soportar altas corrientes de conmutación en un período de tiempo muy pequeño, pudiendo dañar el equipo y el motor después de un determinado tiempo de uso, la simulación que proporciona un tiempo de asentamiento de $0.085 [s]$ lo cual mejora las condiciones de respuesta del controlador *PID* es la que se muestra en la *figura (4.8)* cuando el periodo de muestreo es de $10 [\mu s]$ y la constante c del control es de 100 , en esta gráfica se observa un *chattering* no muy grande en la corriente debido a la alta frecuencia de conmutación y el período de muestreo; al variar el valor de c se observa que podemos modificar el tiempo de convergencia para nuestra velocidad objetivo, esto es por mover la pendiente de nuestra superficie deslizante, así mismo se observa que se modifica el *chattering* otra situación que también se tiene que analizar es que para la implementación real de este tipo de control se debe de disponer de un procesador que puedan procesar $100,000$ muestras por segundo esto es muy difícil de obtener aun con procesadores digitales de señales pero esta ultima condición nos garantiza reducir satisfactoriamente el fenómeno del *chattering* presente en las simulaciones.

Empleando una *estructura integrada* se tiene un tiempo de estabilización de $0.07 [s]$, cuando empleamos una constante de $c=10,000$ y un tiempo de muestreo de $10 [\mu s]$, esta se observa en la *figura (4.14)* de igual forma no se observa sobrepaso alguno; de igual forma al variar la pendiente de la superficie deslizante se tiene una convergencia mayor es decir aumenta el tiempo de asentamiento, para bajos periodos de muestreo se observa el fenómeno de *chattering* pero en menor proporción cuando empleamos el control con una estructurada en cascada además que el control se realiza sobre la velocidad en vez de la corriente esto garantiza que no se dañara al motor o equipo a emplear; de igual forma que en el caso anterior el procesador a emplear debe procesar $100,000$ muestras por segundo y empleamos una dificultad para su realización.

Para la simulación con *modelo de orden reducido* empleamos la dinámica mecánica del motor por ser mas lenta que la eléctrica es decir el valor de la inductancia de armadura lo aproximamos a cero y reducimos el sistema a un modelo de primer orden; se tiene para este tipo de control se tiene un buen tiempo de estabilidad de $0.075 [s]$ cuando empleamos la condición de u_0 de $25 [V]$ con un periodo de muestreo de $10 [\mu s]$, tal como se observa en la *figura (4.19)* se observa un nivel medio *chattering* del mismo orden que los anteriores modos deslizantes tradicionales. De igual forma su principal dificultad para su realización esta en el hecho de poder procesar $100,000$ muestras por segundo.

El control de modos deslizantes tradicionales tiene una buena respuesta en el control de velocidad, su tiempo para alcanzar el valor de referencia esta en el orden de 300% mejor que empleando un control *PID* además que no se presenta el sobrepaso, pero se debe cuidar cuando se maneja una estructura en cascada ya que para un periodo de muestreo muy bajo se puede presentar altos picos de corriente que puede afectar a nuestro motor. En la estructura integrada se deben emplear altas constante en la pendiente de la superficie deslizante, además el principal problemas al emplear *MDPO* es el procesar en todos los casos $100,000$ muestras por segundo lo cual requiere de técnicas que el procesador que empleemos tenga la suficiente capacidad en lograr este objetivo; otro problema a resolver es el fenómeno de *chattering* que de igual forma ocurre por el muestreo y la conmutación del control.

Si se desea disminuir el efecto del *chattering*⁽¹²⁾ la mejor opción es el control de modos deslizantes de orden superior *MDOS* con el algoritmo *twisting*⁽¹³⁾ se conservan las propiedades de los modos deslizantes tradicionales tales como la convergencia en tiempo finito y la insensibilidad a las perturbaciones; que en el control *PID* no posee ya que depende de que no se tengan perturbaciones ya sea internas o externas que puedan romper el punto de estabilidad del sistema así como su convergencia asintótica; con el uso del algoritmo *twisting* empleado se llega en un tiempo finito a un estado estable y se esta protegido contra diversas perturbaciones y variaciones en los parámetros dinámicos del sistema por la garantía que ofrecen los modos deslizantes, por lo que se tiene un control robusto en todo el sistema con una rápida respuesta ante cualquier cambio, la exactitud de los algoritmos de modos deslizantes esta supeditada a la amplitud de los vectores de control, ya que el tiempo de asentamiento es proporcional a estos. El plano de fase de la trayectoria *twisting* figura (4.34) muestra la convergencia a cero de las

variables de estado del sistema s y \dot{s} . En la figura (4.33) se muestran los vectores de control aplicado dado que V_M es de 25 y V_m es de 15 según nuestra estructura de control, donde los vectores de control se están alternando no solo en dos valores positivo y negativo de una misma magnitud como se emplea en el control por modos deslizantes tradicionales que limita la capacidad de respuesta ante perturbaciones, sino que los vectores de control son de dos magnitudes diferentes, una V_M con la suficiente amplitud para lograr una rápida estabilización de la planta y además proporciona un mayor margen de tolerancia a perturbaciones y V_m , debe tener la suficiente amplitud para controlar el sistema dinámico de la planta bajo condiciones normales de operación. De acuerdo con el tiempo de muestreo de 1 [ms] se alcanza el tiempo de asentamiento en 0.09 [s] tal como se tiene en las figuras (4.22) a (4.25) se observa un *chattering* debido a que el tiempo de muestreo es muy alto y una cantidad de armónicos de una amplitud considerable en la corriente los cuales pueden provocar problemas al sistema. Al aumentar el tiempo de muestreo a 200 [μs] tal como se tiene en las figuras (4.26) a (4.29) se reduce notablemente el *chattering* así como disminuye la amplitud de los armónicos presentados en la corriente. Al aumentar el tiempo de muestreo a 100 [μs] tal como se tiene en las figuras (4.30) a (4.33) se tiene un mejor resultado ya que el fenómeno de *chattering* se reduce considerablemente además que los armónicos presentados en la corriente son de menor amplitud por lo que empleando este control con este tiempo de procesamiento se tiene el mejor resultado disminuyendo el *chattering* así como la amplitud en los armónicos de corriente. El esfuerzo que realiza el control es grande, teóricamente de una frecuencia infinita, esto es una limitante, pero empleando un procesador lo suficientemente poderoso como un *PDS* para procesar hasta 10,000 muestras que son las requeridas para implementar este algoritmo. Una desventaja del algoritmo *twisting* es que se deben tener dos niveles de voltaje así como se debe tener la medición de s y \dot{s} el cual es un costo que hay que pagar por emplearlo. El tiempo de muestreo es una variable que determina en forma directa la estabilidad general de nuestro control de modos deslizantes, ya que el tiempo de asentamiento es proporcional al tiempo de muestreo, si este es muy grande causa el *chattering* aun cuando se tengan modos deslizantes de orden superior.

(12) *chattering*: este fenómeno conocido normalmente como castaño en su traducción al español describe el fenómeno de señales oscilantes de frecuencia y amplitud finita, que aparece en las implementaciones en modos deslizantes debido a la rápida conmutación del controlador en modos deslizantes excitando las características dinámicas sin modelar del lazo de control. Y también puede surgir debido a la implementación digital mediante procesadores con frecuencias de muestreo que permiten su discretización.

5.3.- Aportaciones para trabajos futuros.

Para la implementación de nuestros algoritmos de control se tiene pensada en una estructura que nos permita controlar digitalmente nuestras señales por tal motivo se considera el siguiente diagrama de bloques que me representa el esquema básico de control en malla cerrada del sistema a controlar.

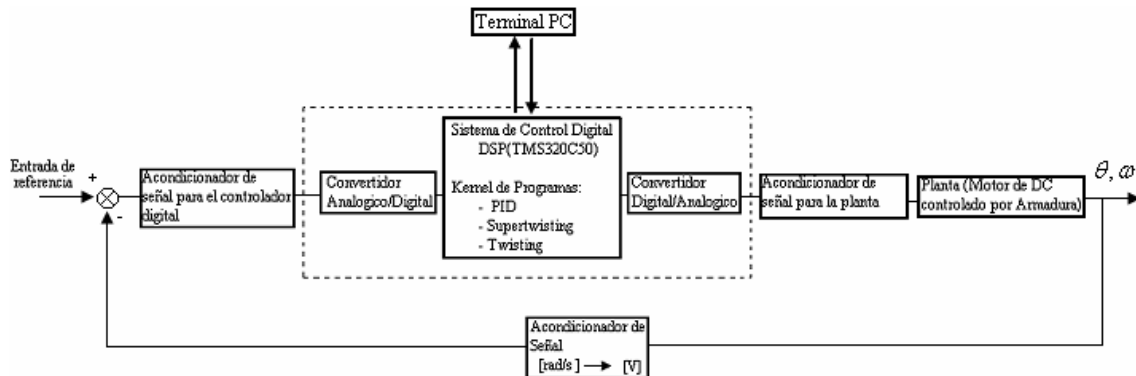


Figura (5.2) Esquema básico del sistema de control a implementar.

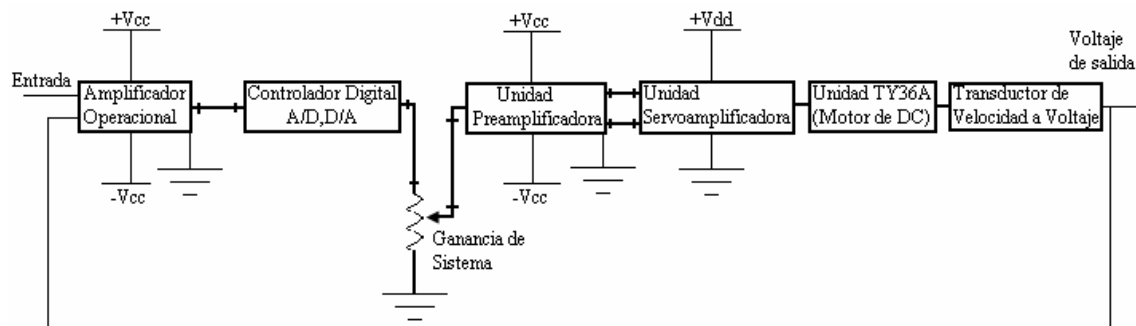


Figura (5.3) Esquema del hardware del sistema.

En la figura (5.2) representa el diagrama de bloques del sistema de control y la figura (5.3) la configuración del hardware del sistema se esta estudiando la implementación un controlador digital mediante un procesador digital de señales un PDS TSM320C50 de la compañía Texas Instruments, debido a que se conoce su estructura y funcionamiento, adicionalmente el procesador tiene multiplicación por hardware y soporte en software disponible, se cuenta con una PC como terminal para inicializar el sistema, cambiar los parámetros si se desea, comprobar de la operación del sistema y así sucesivamente. Se cuentan además en los laboratorio de control de la Facultad de Ingeniería con tarjetas de adquisición de datos de la compañía National Instruments PCI6036E que emplea el ambiente grafico de Labview el cual puede soportar las configuraciones realizadas en simulink, ganando tiempo en programación e implementación; se cuenta además para investigaciones futuras los algoritmos de control se desarrollaran mediante una tarjeta procesamiento y control DS1103 de la compañía DSPACE para desarrollar mediante el ambiente de Matlab los algoritmos de control estudiados y en base a las simulaciones que se tienen verificar estos resultados en forma experimental.

(13) *twisting*: es un algoritmo de control de segundo orden desarrollado para dar solución a los sistemas de segundo orden conservando las propiedades de los MDPO además de eliminar el fenómeno de castaño, su forma es una espiral que converge en tiempo finito al punto estable.

Índice general

Introducción:

| | |
|--|----|
| Presentación. | iv |
| Motivación. | v |
| Formulación del problema y contribuciones. | v |
| Objetivo general. | vi |
| Objetivos específicos. | vi |
| Contenido de la tesis. | vi |

| | |
|---|----------|
| Capítulo 1 Teorías de control clásicas. | 1 |
| 1.0.- Introducción. | 2 |
| 1.1.- Sistemas de control en lazo cerrado. | 2 |
| 1.2.- Modelado de sistemas físicos. | 3 |
| 1.2.1.- Función de transferencia. | 3 |
| 1.3.- Sistemas de primer orden. | 4 |
| 1.4.- Sistemas de segundo orden. | 5 |
| 1.5.- Respuesta en la frecuencia de funciones de transferencia. | 8 |
| 1.6.- Variables de estado. | 10 |
| 1.7.- Técnica de control proporcional integral derivativo <i>PID</i> . | 11 |
| 1.7.1.- Control proporcional <i>P</i> . | 12 |
| 1.7.2.- Control integral <i>I</i> . | 12 |
| 1.7.3.- Control proporcional integral <i>PI</i> . | 13 |
| 1.7.4.- Control proporcional derivativo <i>PD</i> . | 14 |
| 1.7.5.- Control proporcional integral derivativo <i>PID</i> . | 15 |
| 1.7.6.- Control proporcional integral derivativo <i>PID</i> en tiempo discreto. | 16 |
| 1.7.7.- Reglas de sintonización en controladores <i>PID</i> . | 18 |
| 1.8.- Modelos de sistemas no lineales. | 20 |
| 1.8.1.- Características no lineales. | 21 |
| 1.8.2.- Plano de fase. | 23 |

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 2 Modelo de un motor de corriente directa. | 25 |
| 2.0.- Introducción. | 26 |
| 2.1.- Principio de operación de la maquina de corriente directa. | 26 |
| 2.1.1.- Descripción del funcionamiento de un motor de corriente directa. | 27 |
| 2.1.2.- Modelo de los parámetros mecánicos del motor. | 28 |
| 2.2.- Formas de Operación de un motor de corriente directa. | 29 |
| 2.2.1.- Motor con conexión en derivación. | 30 |
| 2.2.2.- Motor con conexión en serie. | 31 |
| 2.2.3.- Motor con conexión compuesta. | 33 |
| 2.2.3.1.- Motor compuesto con conexión en derivación corta. | 33 |
| 2.2.3.2.- Motor compuesto con conexión en derivación larga. | 34 |
| 2.2.4.- Motor compuesto con conexión en excitación independiente. | 36 |
| 2.2.4.1.- Motor con excitación independiente controlado por armadura. | 36 |
| 2.2.4.2.- Motor con excitación Independiente controlado por campo. | 40 |
| 2.3.- Métodos de identificación de parámetros. | 41 |
| 2.4.- Determinación de el modelo matemático para el modulo <i>TY36A</i> . | 44 |
| 2.4.1.- Procedimiento experimental. | 45 |
| 2.5.- Resultados experimentales. | 48 |
| 2.5.1.- Análisis de resultados. | 48 |

Índice General

| | |
|---|-----|
| Capítulo 3 Control de modos deslizantes | 51 |
| 3.0.- Introducción. | 52 |
| 3.1.- Sistemas de control de estructura variable y modos deslizantes. | 52 |
| 3.2.- Propiedades de los modos deslizantes. | 57 |
| 3.3.- Formulación matemática de los modos deslizantes. | 58 |
| 3.3.1.- Regularización. | 59 |
| 3.3.2.- Método del control equivalente. | 65 |
| 3.3.3.- Condiciones de existencia de los modos deslizantes. | 67 |
| 3.4.- Conceptos de diseño. | 69 |
| 3.4.1.- Desacoplamiento. | 70 |
| 3.4.2.- Forma regular. | 71 |
| 3.4.3.- Invarianza respecto a perturbaciones. | 73 |
| 3.5.- Introducción al control de modos deslizante de orden superior. | 74 |
| 3.5.1.- Algoritmo de control <i>twisting</i> . | 76 |
| | |
| Capítulo 4 Simulaciones | 80 |
| 4.0.- Introducción. | 81 |
| 4.1.- Verificación del modelo experimental. | 81 |
| 4.2.- Sintonización de <i>Ziegler-Nichols</i> para el motor caracterizado. | 83 |
| 4.3.- Control de velocidad del motor empleando modos deslizantes. | 85 |
| 4.3.1.- Control de corriente. | 86 |
| 4.3.2.- Control de velocidad. | 87 |
| 4.4.- Estructura integrada para el control de velocidad. | 90 |
| 4.5.- Control de velocidad con modelo de orden reducido. | 95 |
| 4.6.- Control de velocidad empleando el algoritmo <i>twisting</i> . | 98 |
| | |
| Capítulo 5 Conclusiones | 107 |
| 5.1.- Tabla de resultados. | 108 |
| 5.2.- Análisis de las simulaciones. | 108 |
| 5.3.- Aportaciones para trabajos futuros. | 111 |
| | |
| Apéndice A Conceptos de control | 112 |
| A.1.- Solución de la ecuación en variables de estado. | 113 |
| A.2.- Relación entre variables de estado y la función de transferencia. | 115 |
| A.3.- Transformación del plano 's' al plano 'z'. | 115 |
| A.4.- Método isoclino. | 118 |
| A.5.- Representación en el plano de fase de sistemas de segundo orden. | 119 |
| A.6.- Controlabilidad y observabilidad. | 123 |
| A.7.- Criterios de estabilidad. | 125 |
| | |
| Apéndice B Tablas de datos experimentales y programas | 129 |
| B.1.- Tabla de datos del motor <i>TY36A</i> de <i>Electrónica Venneta</i> . | 130 |
| B.2.- Tabla de resultados experimentales de la respuesta escalón. | 131 |
| B.3.- Programa para graficar las respuestas escalón de forma experimental. | 132 |
| B.4.- Programa de respuesta escalón de $3[V]$ para los diferentes modelos. | 132 |
| B.5.- Programa del control <i>PID</i> y respuesta en lazo abierto. | 133 |
| | |
| Bibliografía. | 134 |

Introducción

Presentación:

Dado que el control automático aporta los medios para conseguir un comportamiento óptimo de los sistemas dinámicos, mejorar la productividad, simplificar el trabajo de operaciones manuales repetitivas y rutinarias se han logrado grandes avances de la teoría y práctica del control automático. Tal como aquel primer logro significativo en el control automático que fue el regulador de velocidad centrífuga de *James Watt*, para el control de velocidad de su máquina de vapor en el siglo *XVIII*. *Minorsky*, *Hazen* y *Nyquist* entre otros aportaron trabajos importantes en las etapas iniciales del desarrollo del control. En 1922 *Minorsky* trabajó en controladores automáticos para el guiado de embarcaciones, y mostró que la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones diferenciales que describen el sistema. En 1932 *Nyquist* diseñó un procedimiento relativamente simple para determinar la estabilidad de sistemas en lazo cerrado, a partir de la respuesta en lazo abierto a entradas senoidales en estado estacionario. En 1934 *Hazen* quien introdujo el término servomecanismo para los sistemas de control de posición, analizó el diseño de los servomecanismos con relevador capaces de seguir con precisión una entrada cambiante. En la década de los cuarenta, los métodos de la respuesta en frecuencia (*especialmente los diagramas de Bode*) hicieron posible que los ingenieros diseñaran sistemas de control lineales en lazo cerrado que cumplieran los requisitos de comportamiento. A finales de la década de los cuarenta y principios de la década de los cincuenta, se desarrolló por completo el método del lugar de las raíces propuesto por *Evans*. Los métodos de respuesta en frecuencia y del lugar de las raíces los cuales forman el núcleo de la teoría clásica; conducen a sistemas estables que satisfacen un conjunto más ó menos arbitrario de requisitos de comportamiento. En general, estos sistemas son aceptables pero no óptimos desde ningún punto de vista. Desde el final de la década de los cincuenta, el énfasis en los problemas de diseño de control se ha desplazado del diseño de uno de los posibles sistemas que funcione adecuadamente al diseño óptimo respecto de algún criterio.

Conforme las plantas modernas con muchas entradas y salidas se vuelven más complejas, la descripción de un sistema de control moderno requiere de una gran cantidad de ecuaciones. La teoría de control clásica, que trata de los sistemas de una entrada y una salida, pierde su potencialidad cuando se trabaja con sistemas con entradas y salidas múltiples. Hacia la década de los sesenta debido a la disponibilidad de las computadoras digitales fue posible el análisis en el dominio del tiempo y la síntesis a partir de variables de estados; se ha desarrollado algoritmos y técnicas para manejar la precisión, peso y costo con aplicaciones militares, espaciales e industriales. Durante los años comprendidos entre 1960 y 1980, se investigó a fondo el control óptimo de sistemas determinísticos como estocásticos, así como el control adaptable y con aprendizaje de sistemas complejos; desde 1980 hasta la actualidad, los avances en la teoría de control moderna se centraron en el control robusto, control H_∞ y temas relacionados. Aunque las computadoras digitales se han hecho más baratas y compactas, se usan como parte integral de los sistemas de control. El control de modos deslizantes es una técnica desarrollada en la ex *Unión Soviética* e introducida al mundo occidental en 1977 por el *Dr. V. Utkin*, este tipo de control tiene la ventaja de ser robusto pudiendo aplicarse a sistemas no lineales siendo, en alguna medida insensible a la variación de los parámetros del sistema mecánico que se desee controlar, así como a las perturbaciones externas a las que pueda estar sujeto. Esta técnica ha tenido resultados satisfactorios al aplicarse en sistemas electromecánicos, en particular en motores eléctricos.

En la formulación de cualquier problema de control habrá típicamente discrepancias entre la planta real y el modelo matemático para el diseño del controlador. Los ingenieros deben asegurarse de que el controlador resultante tenga la habilidad de producir los niveles de desempeño requeridos en la práctica sin importar la diferencia entre la planta y el modelo. Esto ha llevado a un fuerte interés en el desarrollo de métodos de control robusto. Una de las formas más efectivas de abordar el diseño de controladores robustos es el control con modos deslizantes *CMD*. La ley de control con modos deslizantes es una ley de control discontinuo que asegura la existencia de los movimientos deslizantes en la superficie de conmutación. Existen tres ventajas principales en este tipo de control; primeramente, la dinámica en malla cerrada es totalmente insensible a señales con incertidumbre a las que pudiera estar sujeto el sistema; en segundo lugar, el comportamiento de la dinámica del sistema puede ajustarse por la selección particular de la superficie de conmutación, y tercero, el problema del diseño de la superficie de conmutación es de un orden reducido. Actualmente los algoritmos de *CMD* se han convertido en uno de los algoritmos líderes en el control robusto.

Motivación:

La ingeniería de control es una disciplina que al igual que muchas otras, cambia y se mejora continuamente, la velocidad con la que cambia supera a los programas de los planes de estudio de las universidades, la ingeniería de control en la *U.N.A.M.* no escapa de este fenómeno, el análisis de las técnicas de control de modos deslizantes es una parte del estudio sobre el control moderno, el análisis e implementación de estas técnicas modernas para su estudio en sistemas clásicos de control, es una tarea exhaustiva y laboriosa, pero necesaria para darnos cuenta de los alcances que tienen estas técnicas de control moderno. El presente trabajo pretende establecer, desde un punto de vista académico, de investigación y con un enfoque orientado hacia el aprendizaje; un análisis comparativo, presentando ventajas y desventajas, complicaciones y simplificaciones entre la teoría de control tradicional *PID* y la teoría de control de modos deslizantes.

Formulación del problema y contribuciones:

El esquema de control *PID* basado en la teoría clásica, para un motor de corriente directa controlado por armadura, requiere el conocimiento del modelo matemático que represente la planta a controlar, además para establecer un control óptimo para dicho planta se emplea una parte de la teoría clásica el método de *Ziegler-Nichols*, el desempeño y eficiencia de dicho control puede ser bueno, pero en algunos servomecanismos necesitamos un control bastante robusto que garantice su estabilidad y mayor tiempo de respuesta, por tal motivo se realiza el análisis de una planta real a través de los algoritmos de modos deslizantes clásicos y de orden superior empleando simulaciones computacionales para su análisis; con lo cual podremos establecer una base teórica para una siguiente etapa del proyecto de investigación que consiste en la implementación del sistema a través de un sistema de procesamiento digital.

Objetivo general:

Obtener un modelo matemático de una planta real, *motor de corriente directa controlado por armadura*, realizar simulaciones con algoritmos de *CMD* y obtener una comparación con una técnica clásica, control *PID*.

Objetivos específicos.

- a) Obtener un modelo matemático de un motor de corriente directa.
- b) Comparar el modelo matemático experimental con el modelo teórico de dicho motor.
- c) Realizar simulaciones de dicho modelo matemático, con leyes de control clásicas *PID* de algoritmos en *CMD* clásicos y una ley en *CMD* de orden superior, conocido como el algoritmo *twisting*.
- d) Realizar una tabla de comparaciones con los resultados de las simulaciones para establecer resultados que se deberán obtener en una implementación real.

Contenido de la tesis:

La presente tesis se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo se tiene un estudio, de la técnica de control *PID* y su reglas de sintonización a través de las formulaciones de *Ziegler-Nichols*, se hace una revisión de los tipos de sistemas y las formas de representación de los sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto, así como sus respuestas en la variable tiempo, se hace una introducción del control no lineal y la representación en el plano de fase. En el capítulo dos se realiza un estudio del motor de corriente directa, su funcionamiento, descripción, formas de conexión y características principales, se hace una revisión de los métodos de identificación de parámetros y su clasificación, se determina de forma experimental con la respuesta al escalón un modelo matemático para el modulo de laboratorio *TY36A* motor de corriente directa controlado por armadura. En el capítulo tres se examina el control de modos deslizantes se explican conceptos como sistemas de estructura variable, las propiedades de los modos deslizantes, se realiza un desarrollo matemático explicando las propiedades de los modos deslizantes, se realiza una introducción a los modos deslizantes de orden superior y su formulación matemática, se explica el algoritmo de control *twisting* incluyendo la demostración de su convergencia y robustez. En el capítulo cuatro se realizan simulaciones para nuestro motor de corriente directa a través de la herramienta de *Matlab* conocida como *simulink*; estas simulaciones desarrollan técnicas de control *PID* empleando las reglas de sintonización de *Ziegler-Nichols*, se realizan simulaciones del control de modos deslizantes, empleando una estructura en cascada, una estructura integrada, un modelo reduciendo el orden de la planta y por ultimo una simulación empleando el algoritmo de orden superior *twisting*, para controlar la velocidad de salida. El capítulo cinco muestra los resultado de las simulaciones a través de una tabla comparativa, donde se muestran datos como sobrepaso, tiempos donde se alcanza la estabilidad y las variables que intervienen, se dan las conclusiones respecto al análisis de los algoritmos de modos deslizantes y el control clásico *PID*. En el apéndice *A* se explican los planes de fase para sistemas de segundo orden, conceptos de observabilidad y controlabilidad, además de un análisis de estabilidad desde el punto de vista clásico y de *Lyapunov*, en el apéndice *B* se añaden las tablas de datos tomados en el laboratorio de control de la *Facultad de Ingeniería*, el análisis de unidades, tablas de datos del fabricante y se anexan algunos programas que se emplearon para simular las respuestas de la planta en el control *PID*.

Apéndice A

“Conceptos de control”

A.1.- Solución de las ecuaciones de estado.

Al aplicar una transformación de *Laplace* al sistema representado en variables de estado dado por la ecuación (1.22) se obtiene:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow sX(s) - x(0) = AX(s) - BU(s)$$

La resolución de la ecuación de $X(s)$ se obtiene a través de la transformación de *Laplace* de la expresión; $(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$ con lo que su solución es:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1)$$

Simplificando la notación podemos sustituir la expresión $(sI - A)^{-1} = \phi(s)$ por lo que podemos escribir: $X(s) = \phi(s)x(0) + \phi(s)BU(s)$ podemos definir como la matriz de transición de la siguiente manera:

$$\phi(t) = \ell^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (2)$$

Si la entrada es cero, el modelo del sistema es $\dot{x}(t) = Ax(t)$, y la solución es $x(t) = \phi(t)x(0)$, por lo que la primera derivada de $\phi(t)$ debe ser igual a $A\phi(t)$ y $\phi(0) = I$, es decir la matriz de transición es similar a la matriz exponencial e^{At} . Es decir $\phi(t) = e^{At}$, y su representación en series de potencias es:

$$\phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \quad (3)$$

Sabemos que $u(t)$ es un conjunto no específico de funciones de entrada, sin embargo, una expresión que incluye una integral de convolución se puede emplear para visualizar una solución general en el dominio del tiempo cuando se tiene la condición de $t=0$, esta dada por.

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t - \lambda)Bu(\lambda)d\lambda \quad (4)$$

Algunas de las propiedades de la matriz de transición de estados son.

- $\phi(0) = I$;
- $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$;
- $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$, para cualquier $t_0 < t_1 < t_2$;
- $[\phi(t)]^k = \phi(kt)$, para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

La solución de las ecuaciones de estado dada por la ecuación (4) se usa solo cuando se tiene condiciones iniciales nulas, para condiciones diferentes a las nulas empleamos las propiedades de la matriz de transición de estados y obtenemos para las condiciones $t=t_0$, la siguiente solución:

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \lambda)Bu(\lambda)d\lambda \quad (5)$$

Apéndice A

Cuando la matriz de transición de estados es determinada, el vector de salida puede ser expresado como una función de las condiciones iniciales y el vector de entradas por la sustitución del resultado de la *ecuación (5)* en la *ecuación (1.22)*; donde obtenemos como solución el siguiente resultado:

$$y(t) = C\phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C\phi(t - t_0)Bu(\lambda)d\lambda + Du(t) \quad (6)$$

Analizando para sistemas dinámicos lineales en tiempo discreto; de la *ecuación (1.23)* si tomamos como instante inicial $t_0=kT$, y se toma en cuenta el intervalo $kT \leq t < (k+1)T$, se cumple que: $u(\lambda)=u(kT)=\text{constante}$, se tiene entonces:

$$x(t) = \phi(t - kT)x(kT) + \Theta(t - kT)u(kT) \quad (7)$$

Donde se tiene:

$$\Theta(t - kT) = \int_{kT}^t \phi(t - \lambda)Bd\lambda \quad (8)$$

De la *ecuación (28)* se puede obtener la evolución continua de las variables de estado en el intervalo $kT \leq t < (k+1)T$ y que sólo es valida en este intervalo de muestreo ya que solo en el se mantiene constante $u(kT)$. Se puede hacer el siguiente análisis para $t=(k+1)T$ en la *ecuación (7)* con lo cual se obtiene:

$$x[(k+1)T] = \phi(T)x(kT) + \Theta(T)u(kT) \quad (9)$$

Donde se tiene que $\phi(T) = e^{AT}$, de $n \times n$; y donde $\Theta(T)$ se obtiene calculando:

$$\Theta(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \phi[(k+1)T - \lambda]Bd\lambda \quad (10)$$

Haciendo el cambio de variable $\tau=(k+1)T-\lambda$, la expresión se convierte en:

$$\Theta(T) = \int_0^T \phi(\tau)Bd\tau \quad (11)$$

Por otra parte tenemos de la *ecuación (1.23)* que la solución en diferencias esta dada por la expresión.

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j) \quad (12)$$

Esta ultima expresión nos permite encontrar el vector de estado en el instante 'k', en función del estado inicial $x(0)$ y de la secuencia de entradas $\{u(0), u(1), \dots, u(k-1)\}$. El resultado anterior se puede obtener de igual forma empleado la transformación al plano 'Z' por analogía al caso continuo podemos definir la matriz de transición discreta como $\phi(k)=A^k$ que cumple las siguientes propiedades.

- $\phi(0) = I$
- $\phi(k+1) = A\phi(k)$
- $\phi(k - k_0) = A^{k-k_0}$

Donde el término $A^k x(0)$ de la *ecuación (12)* constituye la respuesta libre del sistema, correspondiente a la solución de la *ecuación homogénea* $x(k+1)=Ax(k)$; por

otra parte el termino: $\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bu(j)$; constituye la respuesta forzada del sistema discreto. El desarrollo anterior se generaliza para el caso que $k=k_0$, correspondiente a $t=t_0 \neq 0$ del caso continuo, donde la solución de la ecuación de estado (1.23) esta dada por:

$$x(k) = \phi(k - k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \phi(k - 1 - j - k_0)Bu(j) \quad (13)$$

Donde de igual forma que en el caso continuo cuando se conoce la matriz de transición, el vector de salida puede ser expresado como una función de las condiciones iniciales y el vector de entradas por la sustitución del resultado de la ecuación (13) en la ecuación (1.23); donde obtenemos de solución el siguiente resultado.

$$y(k) = C\phi(k - k_0)x(k_0) + C \sum_{j=k_0}^{k-1} \phi(k - 1 - j - k_0)Bu(j) + Du(k) \quad (14)$$

A.2.- Relación entre variables de estado y la función de transferencia.

Si un sistema con función de transferencia dado por la ecuación (1.2) y su representación en el espacio de estados dado por la ecuación (1.22) empleando la transformada de Laplace para ambas ecuaciones de estado y encontrado la relación entre la entrada y la salida obtenemos.

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D]U(s) \quad (15)$$

La cual es la expresión de la función de transferencia en términos de A, B, C y D ; el termino $(sI - A)$, es igual al polinomio característico de $G(s)$. Es decir, los valores propios de A son idénticos a los polos de $G(s)$. Para un sistema lineal de parámetros concentrados muestreado en el tiempo como el de la ecuación (1.23). De igual forma que en el caso continuo, si empleamos la transformada 'Z' en ambas ecuaciones de estado tenemos que la función de transferencia en términos de A, B, C y D , es:

$$Y(z) = [C(zI - A)^{-1} + D]U(z) \quad (16)$$

donde el termino $(zI - A)$, es igual al polinomio característico de $G(z)$, sus valores propios de A son idénticos a los polos de $G(z)$.

A.3.- Transformación del plano 's' al plano 'z'.

Para poder realizar un análisis para sistemas lineales de parámetros concentrados y muestreados en el tiempo, empleamos el plano 'z', que para utilizarlo debemos realizar una transformación la cual nos permitirá obtener a partir del lugar geométrico de las raíces en el plano 's', su lugar geométrico en el plano 'z', esto se logra empleando la relación de transformación de la ecuación (1.5); para esto consideramos la transformación de la porción de plano de la izquierda de la banda primaria del plano 's' en el plano 'z', tal como se muestra en la figura (A.1).

$$z = e^{sT} = e^{\sigma} e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \text{sen} \omega T = 1 \angle \omega T \quad (17)$$

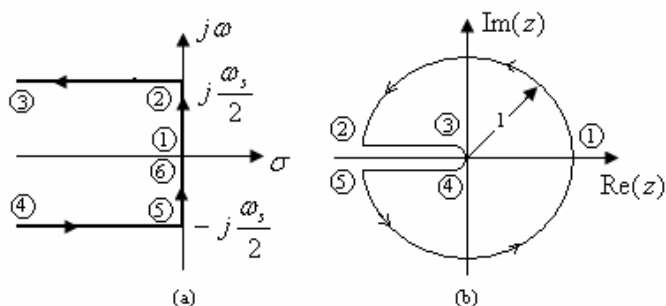


Figura (A.1) Transformación de la banda primaria. a) Plano 's'. b) Plano 'z'.

Para poder tener una buena representación de la información del sistema a discretizar empleamos el teorema de muestreo de *Shannon* que dice que cualquier señal que contenga uno o más componentes oscilatorios, el intervalo máximo de muestreo que puede usarse sin perder información fundamental es la mitad del periodo del componente oscilatorio mas rápido es decir que $f_s/2=f_{max}$ es decir $\omega_s/2=\omega_{max}$. Puesto que para $\omega=\omega_s T$, $\omega T=\pi$, entonces el eje $j\omega$ entre $-j(\omega_s/2)$ y $+j(\omega_s/2)$ se convierte en el plano de círculo unitario, en realidad cualquier porción del eje $j\omega$ de longitud ω_s , se convierte en el círculo unitario en el plano 'z'. La porción del plano de la mitad derecha de la banda primaria se convierte en el exterior del círculo unitario, y la porción de plano de la mitad de la izquierda de la banda primaria se convierte en el interior del círculo unitario; La región estable del plano 's' es la mitad del mismo, la región estable del plano 'z' es el interior del círculo unitario. El lugar geométrico a amortiguamiento constante en el plano 's' se convierte en círculos en el plano 'z'. El lugar geométrico a frecuencia constante en el plano 's' se convierte en radios; *figura (A.2)*

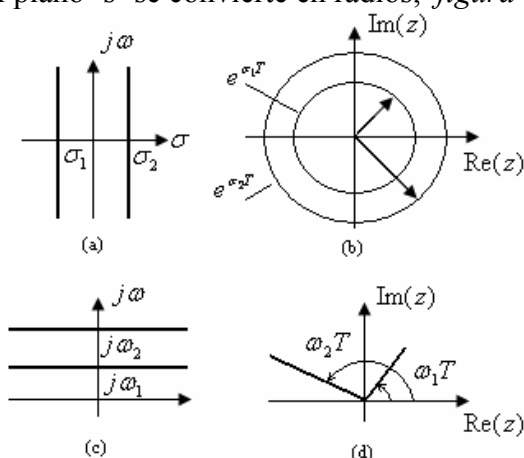


Figura (A.2) Amortiguamiento real. a) Plano 's'. b) plano 'z' Frecuencia natural. c) Plano 's'. d) plano 'z'.

Las características de una función temporal muestreada en los instantes de muestreo son las mismas que los de la función temporal antes del muestreo, la *figura (A.3)* nos muestra la correspondencia de posiciones de polos entre el plano 's' y el plano 'z', donde las características de la respuesta son función de s y T , para un sistema en que los polos de plano 's' se presentan de la forma $s = \sigma \pm j\omega$; estos polos resultan de la forma $k_1 e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$ de la respuesta transitoria del sistema. Cuando se presenta el muestreo, estos polos del plano 's' se convierten en polos en el plano 'z'.

$$z = e^{sT} \Big|_{s=\sigma \pm j\omega} = e^{\sigma T} e^{\pm j\omega T} = e^{\sigma T} \angle \pm \omega T = r \angle \pm \theta \quad (18)$$

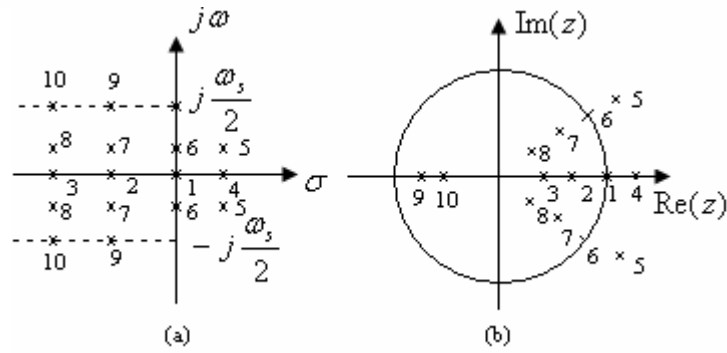


Figura (A.3) Posiciones de polos correspondientes. a) Plano 's'. b) plano 'z'.

De este modo las raíces de la ecuación característica que aparecen para $z = r \angle \pm \theta$; se convierten en término de la respuesta transitoria de la forma.

$$k_1 e^{\sigma k T} \cos(\omega k T + \phi) = k_1 (r)^k \cos(\theta k + \phi) \quad (19)$$

Para un sistema de segundo orden de la forma: $G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$; que tiene los polos: $s_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2}$; los polos equivalentes en el plano 'z' se convierten:

$$z = e^{sT} \Big|_{s_{1,2}} = e^{-\zeta\omega T} \angle \pm \omega T \sqrt{1-\zeta^2} = r \angle \pm \theta \quad (20)$$

Por consiguiente:

$$e^{-\zeta\omega T} = r \Rightarrow \zeta\omega T = -\ln(r) \quad (21)$$

También:

$$\omega T \sqrt{1-\zeta^2} = \theta \quad (22)$$

De esta última expresión obtenemos:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{-\ln(r)}{\theta} \quad (23)$$

Resolviendo para ζ tenemos:

$$\zeta = \frac{-\ln(r)}{\sqrt{\ln^2(r) + \theta^2}} \quad (24)$$

Encontramos ω substituyendo este último resultado en y obtenemos:

$$\omega = \frac{1}{T} \sqrt{\ln^2(r) + \theta^2} \quad (25)$$

La constante de tiempo, τ , de los polos viene dada por:

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega} = \frac{-T}{\ln(r)} \quad (26)$$

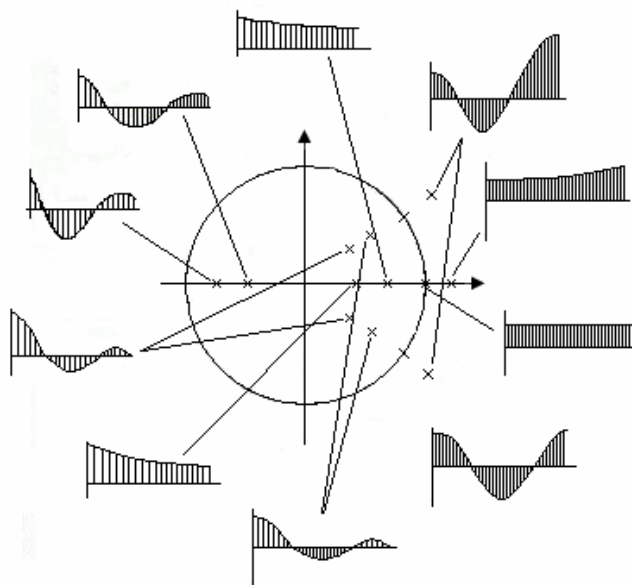


Figura (A.4) Posiciones de polos correspondientes en el plano 'z' y su respuesta en el tiempo.

A.4.- Método isoclino

Este método sirve para poder construir de manera rápida las trayectorias de fase de un sistema de segundo orden, el cual consiste en encontrar una familia de curvas con la misma pendiente en el plano de estado, llamadas isoclinas. Las trayectorias se trazan entonces tangentes a estas curvas. Si tenemos un sistema como el descrito de la siguiente forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \dots\dots (a)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \dots\dots (b)$$
(27)

Si dividimos la ecuación (27 b) entre la ecuación (27 a), eliminamos la variable tiempo, y a su vez si igualamos este resultado a una constante, con lo cual obtenemos las trayectorias de estado, al ir variando la pendiente en cada punto arbitrario que escojamos, matemáticamente obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} = c$$
(28)

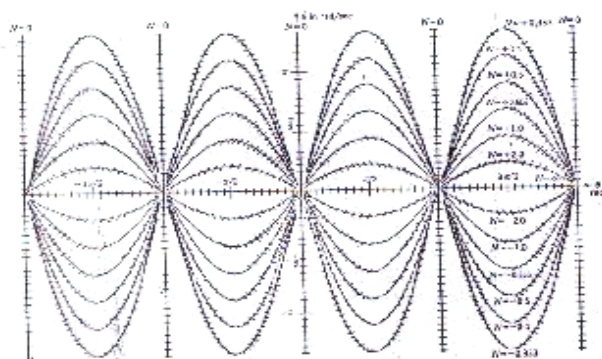


Figura (A.5) Isoclinas y plano de fase para un péndulo

A.5.- Representación en el plano de fase de sistemas de segundo orden.

La ecuación diferencial que representa un sistema de segundo orden es la siguiente:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega \dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (29)$$

Asignado las variables de estado podemos escribir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 - 2\zeta\omega x_2 \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega \end{bmatrix} \quad (30)$$

Donde los eigenvalores son determinados por:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega - j\omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta\omega + j\omega\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (31)$$

La solución general en el tiempo de este sistema para diferentes valores de ζ y ω es:

$$y(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (32)$$

La curva de la trayectoria para cualquier punto en el plano x_1, x_2 esta dado por:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = -\omega \frac{\omega x_1 + 2\zeta\omega x_2}{x_2} \quad (33)$$

Realizando la siguiente asignación para $x_2 = mx_1$, entonces tenemos: $\dot{x}_2 = m \dot{x}_1$, la ecuación anterior se puede escribir de la siguiente forma:

$$m = -\omega \frac{\omega + 2\zeta m}{m} \Rightarrow m^2 + 2\zeta m + \omega^2 = 0 \quad (34)$$

este último resultado es similar a la ecuación característica de la *ecuación (30)*, si ahora hacemos un análisis para diferentes condiciones.

- **Centro;** $\zeta=0, \omega^2>0$. El sistema se reduce a la expresión $\dot{x}_2 + \omega^2 x_1 = 0$, si multiplicamos esta ultima expresión por x_2 y resolviendo obtenemos:

$$x_2^2 + \omega^2 x_1^2 = c^2 \quad (35)$$

resolviendo para diferentes valores de 'c' se observa elipses con centro en el origen *figura (A.6)*; físicamente estas trayectorias representan la estabilidad marginal, en donde cada curva tiene una energía potencial y permanece en ella a menos que se le aplique una excitación externa que la mueva de su trayectoria.

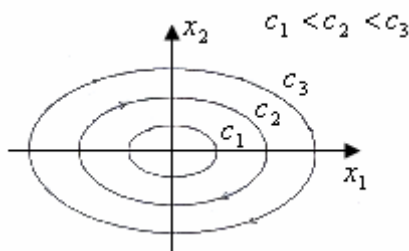


Figura (A.6) Centro.

Apéndice A

El periodo de oscilación del sistema se puede calcular realizando la integral correspondiente en la trayectoria para un desplazamiento dentro de la misma, dando como resultado:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (36)$$

y la solución en el tiempo tiene la forma:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (37)$$

- **Focos;** $|\zeta| < 1, \omega^2 > 0$. Para realizar el análisis tenemos que realizar el siguiente cambio de coordenadas para poder obtener las trayectorias de este tipo de sistemas, por lo que realizamos $x_2 = z x_1$ y $dx_2 = z dx_1 + x_1 dz$, lo cual nos permite escribir la ecuación (33) como:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_2}{x_1} &= -\omega \frac{\omega x_1 + 2\zeta x_2}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{\omega} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\omega}{z} + 2\zeta \Rightarrow -z \frac{dx_2}{dx_1} = \omega^2 + 2\zeta \omega z \\ \Rightarrow -z \frac{(z dx_1 + x_1 dz)}{dx_1} &= \omega^2 + 2\zeta \omega z \Rightarrow -\frac{x_1}{dx_1} z dz = z^2 + 2\zeta \omega z + \omega^2 \end{aligned}$$

Obteniendo como resultado:

$$\therefore -\frac{dx_1}{x_1} = \frac{z dz}{z^2 + 2\zeta \omega z + \omega^2} \quad (38)$$

Resolviendo esta última ecuación obtenemos:

$$(x_2 + \zeta \omega x_1)^2 + \omega^2 (1 - \zeta^2) x_1^2 = c^2 \exp \left[\frac{2\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{ang} \tan \left(\frac{x_2 + \zeta \omega x_1}{x_1 \omega \sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \right] \quad (39)$$

Realizando un cambio de coordenadas obtenemos:

$$z_1^2 + z_2^2 = c^2 \exp \left[\frac{2\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \operatorname{ang} \tan \frac{z_2}{z_1} \right] \quad (40)$$

Cuya matriz de transformación es:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \sqrt{1 - \zeta^2} & 0 \\ \zeta \omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Reescribiendo en coordenadas polares tenemos.

$$z_1 = r \cos \phi \quad (42)$$

$$z_2 = r \operatorname{sen} \phi$$

$$r = c \exp \left[\frac{\zeta \phi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right] \quad (43)$$

Apéndice A

La trayectoria en el plano z_1, z_2 , es una espiral logarítmica, si $1 > \zeta > 0$, el radio decrece hasta cero y el ángulo ϕ se mueve en sentido de las manecillas del reloj; este es el caso de un punto focal estable, *figura (A.7 a)*, cuando tenemos la condición $0 > \zeta > -1$, el valor de $|\xi|$ el radio se incrementa desde cero, conforme aumenta el tiempo y el ángulo ϕ se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj. En este caso decimos que tenemos un punto focal inestable, *figura (A.7 b)*.

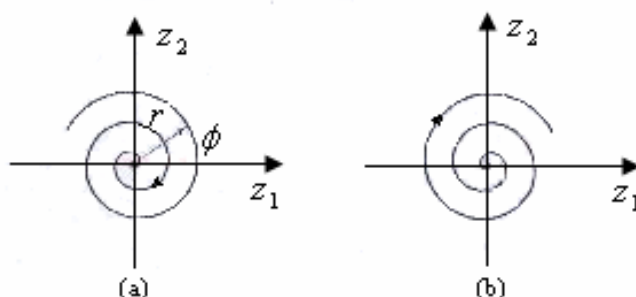


Figura (A.7) Focos. *a)* Estable. *b)* Inestable.

- **Nodo:** $|\zeta| > 1, \omega^2 > 0$. En esta situación el origen es un punto nodal, en el cual existen dos trayectorias que son dos líneas rectas *figura (A.8)*, donde las curvas de estas trayectorias están dadas por las raíces de la *ecuación (34)*, para poder realizar un análisis de este tipo de solución realizamos una transformación: $z = M^{-1}x$, que algebraicamente esta dada por:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 & 1 \\ -s_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Empleando esta ultima transformación y para el caso de un punto nodal, la forma normal de las ecuaciones es:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= s_2 z_1 \\ \dot{z}_2 &= s_1 z_2 \end{aligned} \quad (45)$$

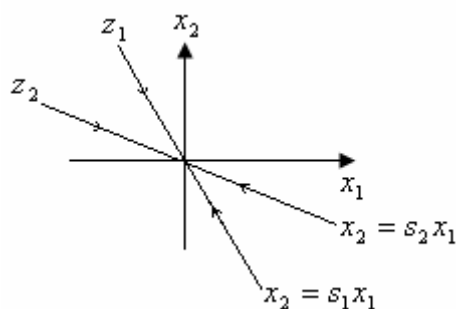


Figura (A.8) Líneas rectas en el punto singular de nodo

Eliminado la variable temporal obtenemos:

$$\frac{dz_2}{z_2} = \frac{s_1}{s_2} \frac{dz_1}{z_1} \quad (46)$$

Finalmente obtenemos que las trayectorias en el plano z_1, z_2 están descritas por:

$$z_2 = c(z_1)^{s_1/s_2} \quad (47)$$

Apéndice A

Para el caso que se tenga un valor de $\xi > 1$ y $s_1 < s_2 < 0$, se tiene que $s_1/s_2 > 1$, este caso corresponde a un nodo estable *figura (A.9 a)*; para el caso que se tenga $\xi < -1$ y $s_2 > s_1 > 0$; se tiene que $1 > s_1/s_2 > 0$, el cual corresponde a un nodo inestable *figura (A.9 b)*.

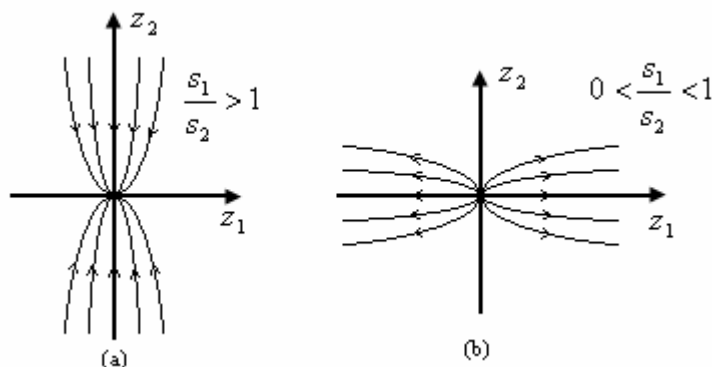


Figura (A.9) Punto Singular Nodo. *a)* Estable. *b)* Inestable.

- **Punto Silla;** $\omega^2 < 0$. Si el signo de la ganancia de la salida del lazo de realimentación se cambia, el punto singular se convierte en lo que es conocido como un punto silla; para este caso la ecuación característica se convierte en:

$$s^2 + 2\zeta|\omega|s - |\omega^2| = 0 \tag{48}$$

Donde sus correspondientes eigenvalores son:

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta|\omega| - |\omega|\sqrt{\zeta^2 + 1} \\ s_2 &= -\zeta|\omega| + |\omega|\sqrt{\zeta^2 + 1} \end{aligned} \tag{49}$$

Donde observamos una raíz real positiva y una raíz real negativa, empleando la misma transformación que en el caso anterior, la forma normal resultante de las ecuaciones es la misma que la *ecuación (45)*, las líneas rectas características en el plano z_1, z_2 se muestran en la *figura (A.10)*; las curvas características para el caso que $\zeta/\omega > 0$, entonces $s_1/s_2 < -1$, se muestra en la *figura (A.11 a)*, y cuando $\zeta/\omega < 0$ entonces $-1 < s_1/s_2 < 0$, se muestra en la *figura (A.11 b)*.

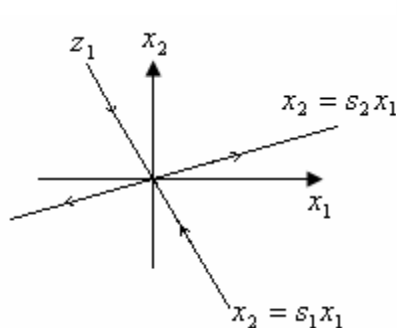


Figura (A.10) Líneas rectas en el punto silla.

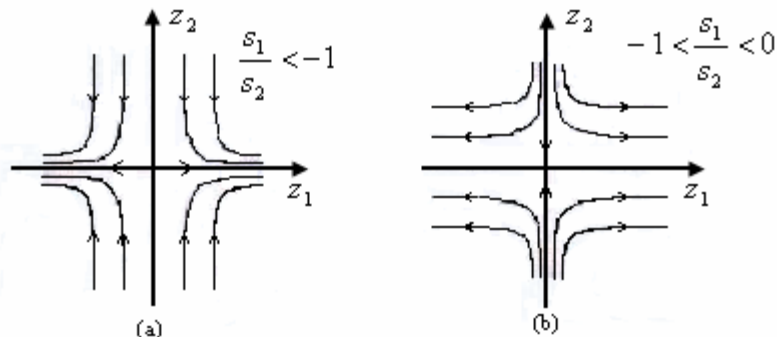


Figura (A.11) Punto silla.

A.6.- Controlabilidad y observabilidad.

Se dice que un sistema es controlable en el tiempo t_0 , si se puede llevar desde cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado, mediante un vector de control sin restricciones, en un intervalo de tiempo finito. Se dice que un sistema es observable en el tiempo t_0 si, con el sistema en el estado $x(t_0)$, es posible determinar este estado a partir de la observación de salida durante un intervalo de tiempo finito. Los conceptos de controlabilidad y observabilidad, juegan un papel importante en el diseño en el espacio de estados. Las condiciones de controlabilidad y observabilidad determinan la existencia de una solución completa para un problema de diseño de un sistema de control. Considere un sistema en tiempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{50}$$

En donde x = vector de estados; u = señal de control; $A = n \times n$ y $B = n \times l$. Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación $\dot{x} = Ax + Bu$ es de estado controlable en $t=t_0$ si es posible construir una señal de control sin restricciones que transfiera un estado inicial a cualquier estado final en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$. Si todos los estados son controlables, se dice que el sistema de estado completamente controlable.

Para la condición de una controlabilidad completa del estado. Sin perder la generalidad, suponemos que el estado final es el origen en el espacio de estados y que el tiempo inicial es cero, ó $t_0 = 0$. La solución de la ecuación (50) es:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Aplicando la definición de controlabilidad completa se tiene:

$$x(t_1) = e^{At_1} x(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

Se tiene: $x(0) = -\int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$; empleando la definición de la matriz de transición de estados se tiene:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \tag{51}$$

Donde definimos:

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$$

La ecuación (50) se convierte en:

$$x(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Si el sistema es de estado completamente controlable entonces, entonces dado cualquier estado inicial $x(0)$ la ecuación (52) debe satisfacerse. Esto requiere que el rango de la matriz $n \times n$. $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ sea completo.

A partir de este resultado, establecemos la condición para la controlabilidad completa del estado de la forma siguiente. El sistema obtenido mediante la ecuación (50) es de estado completamente controlable si y solo si los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ son linealmente independientes, a la matriz de $n \times n$. $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ es de rango completo.

El resultado recién obtenido se extiende al caso en el que el vector de control u es de dimensión r , se demuestra que la condición para la controlabilidad completa del estado es que la matriz de $n \times nr$ sea de rango n , o que contenga n vectores columna linealmente independientes. La matriz $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ se denomina, por lo común, matriz de controlabilidad.

Se dice que el sistema es completamente observable si el estado $x(t_0)$ se determina a partir de la observación de $y(t)$ durante un intervalo de tiempo finito, $t_0 \leq t \leq t_1$. Por tanto, el sistema es completamente observable si todas las transiciones del estado afectan eventualmente a todos los elementos del vector de salida. El concepto de observabilidad es útil al resolver el problema de reconstruir variables de estado no medibles a partir de variables que si lo son en el tiempo mínimo posible, en la practica, la dificultad que se encuentra con el control mediante realimentación del estado es que algunas de las variables de estado no son accesibles para una medición directa. Por lo que es necesario estimar las variables de estado no medibles para construir las señales de control. Para un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (53)$$

Donde su solución esta dada por:

$$y(t) = Ce^{At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du \quad (54)$$

Como las matrices A, B, C y D son conocidas al igual que $u(t)$, los últimos términos de la última ecuación son cantidades conocidas. Por lo que se pueden restar del valor observado de $y(t)$.

Apéndice A

Observabilidad completa de sistemas en tiempo continuo, para el sistema descrito anteriormente se tiene que:

$$y(t) = Ce^{At} x(0)$$

De la matriz exponencial tenemos:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0)$$

Es decir:

$$y(t) = \alpha_0(t)Cx(0) + \alpha_1(t)CAx(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t)CA^{n-1}x(0) \quad (55)$$

Así el sistema es completamente observable, dada la salida $y(t)$ durante un intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$, $x(0)$ se determina únicamente a partir de la ecuación (55), por lo que se requiere que el rango de la matriz sea $mn \times n$.

$$\begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sea n , a partir de este análisis, se puede expresar la condición para la observabilidad completa del modo siguiente. El sistema dado por (53) es completamente observable si y solo si la matriz $n \times nm$ $\begin{bmatrix} C^* & A^* C^* & \dots & (A^*)^{n-1} C^* \end{bmatrix}$, es de rango completo, o tiene n vectores columna linealmente independientes. Esta matriz se llama matriz de observabilidad.

A.7.- Criterios de estabilidad.

En el lenguaje común, la palabra estable (*del latín stabilis*) significa constante, permanente. Como concepto físico se introdujo en la mecánica, donde se utiliza aplicado sobre todo a una posición de equilibrio de una partícula, cuerpo o sistema mecánico. Tal posición se denomina estable si el cuerpo o partícula retorna a esa posición original después de moverlo separándolo ligeramente de la misma. En otras palabras un sistema es estable si su respuesta debida a una condición interna o una entrada acotada, es también acotada.

La estabilidad del sistema puede ser considerada desde dos puntos de vista:

- Sistema al que no se le aplica entrada, sin embargo su estado inicial es distinto de cero, en este caso se habla de estabilidad interna.
- Sistema al que se aplica una entrada y su estado inicial es cero, en este caso se habla de estabilidad externa.

Apéndice A

Para sistemas lineales, la estabilidad puede ser caracterizada a partir de su modelo matemático o función de transferencia. La estabilidad en sistemas lineales en invariantes con el tiempo esta caracterizada completamente por los valores característicos de la matriz A del modelo en variables de estado o por las raíces de la ecuación característica del modelo o por las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia; existen varios procedimientos para determinar si un sistema es o no estable, entre los que se encuentran:

a) Caso continuo.

- Criterio de *Routh*.
- Criterio de *Routh – Hurwitz*.
- Lugar geométrico de las raíces.
- Diagramas de *Bode*.
- Criterio de *Nyquist*.

b) Caso Discreto

- Criterio de *Schur – Cohn*.
- Criterio de *Jury*.
- Criterio de *Routh – Hurwitz* modificado
- Criterio de *Jury* alterno
- Criterio de *Nyquist*.
- Lugar geométrico de las raíces

Para un polinomio en el plano 's' de grado n descrito mediante la expresión

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-2} s^2 + a_{n-1} s + a_n \quad (56)$$

En este polinomio esta contenido toda la información referente a las características dinámicas y de estabilidad de un sistema lineal e invariante con el tiempo. Este polinomio se puede obtener a partir del modelo matemático del sistema (*ecuación diferencial de orden n*) ó bien del modelo en variables de estado, de la forma:

$$P(s) = \det[sI - A] \quad (57)$$

• **Condiciones para la estabilidad de sistemas en tiempo continuo:**

La respuesta a impulso del sistema debe ser absolutamente integrable, esto es:

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = M \quad (58)$$

Donde $M < \infty$; esta es la condición general de estabilidad desde el punto de vista de una entrada acotada produce una salida acotada, *BIBO* en forma general, la respuesta del sistema puede ser escrita de la siguiente manera:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t} \quad (59)$$

Donde:

- c_i para $i=1,2,3,\dots,n$ son constantes
- s_i para $i=1,2,3,\dots,n$ son las raíces (*frecuencias naturales del sistema*), del polinomio característico, $P(s)=0$.

Puesto que 's' es en general un número complejo, esto es $s_i = \gamma_i + j\beta_i$, la condición de estabilidad es:

$$\operatorname{Re}\{s_i\} < 0 \Rightarrow \gamma_i < 0$$

A partir de esta condición es posible establecer la zona de estabilidad en el plano de Gauss (*plano complejo*). La zona de estabilidad no incluye el eje imaginario. Las condiciones para que el polinomio $P(s)$ tenga raíces con parte real menor que cero.

- a) Todos los coeficientes del polinomio, a_i para $i=1,2,3,\dots,n$ deben existir, esto es, deben ser diferentes de cero.
- b) Todos los coeficientes del polinomio debe de ser positivos.

Estas condiciones son necesarias más no suficientes.

• **Criterio de Lyapunov para la estabilidad de sistemas.**

Existen muchos enfoques para el análisis de la estabilidad de los sistemas de control invariantes en el tiempo. Sin embargo, para los sistemas no lineales y/o los sistemas variantes con el tiempo, el análisis de la estabilidad resulta muy difícil o imposible. El análisis de estabilidad de *Lyapunov* es un método que se aplica para encontrar respuestas a las preguntas sobre la estabilidad de los sistemas no lineales. Se dice que un estado de equilibrio es estable en el sentido de *Lyapunov* si para cualquier ε escalar positiva existe una δ escalar positiva tal que $\|x(t_0)\| < \delta$ que implique que $\|x(t)\| < \varepsilon$, $t \geq t_0$. Tal como se observa en la *figura (A.12)*. En otras palabras, cualquier trayectoria que se inicie en cualquier punto $x_0 = x(t_0)$ dentro de la región hiperesférica de radio δ permanece siempre en la región hiperesférica de radio ε . Un punto de equilibrio es asintóticamente estable si (1) es estable y (2) $x(t) \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$, esto es, que cada trayectoria que parte del interior de la región δ converja al origen a medida que el tiempo progrese indefinidamente. Por ultimo un estado de equilibrio es inestable si no es estable: Existe un $0 < \varepsilon < R$ tal que para cada $\varepsilon > \delta > 0$ haya un $\|x(t_0)\| < \delta$ y $\|x(t_1)\| \geq \varepsilon$ para algún $t_1 > t_0$. El punto de equilibrio es completamente inestable si esta condición persiste para cada trayectoria dentro de la región δ .

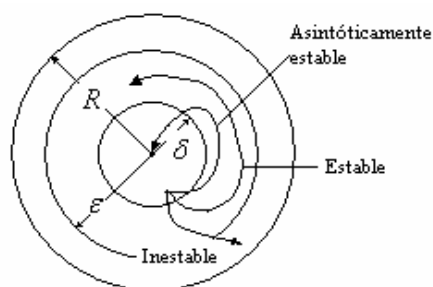


Figura (A.12) Estabilidad en el sentido de *Lyapunov*.

- **Teorema de estabilidad de Lyapunov.** Si existe una función de Lyapunov $V(x)$ en alguna región S alrededor del origen, entonces este origen es estable para toda $x(t_0)$ contenida en S .
- **Teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov.** Si existe una función de Lyapunov $V(x)$ en alguna región S alrededor del origen y si además, $dV(x)/dt$ a lo largo de una trayectoria es definida positiva en S , el origen es asintóticamente estable.
- **Función de Lyapunov.** Una función escalar candidata $V(x)$ se convierte en una función de Lyapunov si $V(x)$ es definida positiva y si $dV(x)/dt$ a lo largo de una trayectoria es definida negativa o semidefinida negativa en una región S .

Una función escalar $V(x)$ es definida positiva si:

1. $V(0)=0$
2. $V(x)$ es positiva a través de alguna región de espacio de estado S fuera del origen eso es $V(x)>0, x \in S, x \neq 0$;
3. $V(x)$ es continua a través de S , y
4. $V(x)$ tiene primeras derivadas parciales continuas respecto de x_i esto es,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n \text{ son continuos}$$

Si la condición (2) se debilita para $V(x) \geq 0$ mas que para $V(x) > 0$, entonces $V(x)$ es semidefinida positiva. De modo similar, invirtiendo el signo de desigualdad en la condición (2), esto es, $V(x) < 0$ ó $V(x) \leq 0, x \in S, x \neq 0$, se obtiene la definición para la negativa definida o semidefinida negativa $V(x)$. Finalmente por la derivada de tiempo $dV(x)/dt$ a lo largo de una trayectoria de un sistema, entendemos:

$$\frac{d}{dt} V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dots & \dot{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

o bien:

$$\frac{d}{dt} V(x) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^T \cdot \text{grad}(V(x)) = (f(x))^T \cdot \text{grad}(V(x)) \quad (60)$$

Donde, se supone que existe, ya que $V(x)$ tiene primeras derivadas parciales continuas respecto a toda x_i .

Apéndice B

**“Tablas de datos
experimentales y programas”**

Apéndice B

B.1.- Tabla de datos del motor *TY36A* de *Electrónica Venneta*.

- *Incluyendo la unidad dinamo-taquimétrica y el motor de corriente directa:*

| Dato | Valor | Unidades | Descripción |
|-------------|---------------------|----------------------|---|
| R_A | 5 | [Ω] | Resistencia de armadura |
| f | $1 \cdot 10^{-4}$ | [N×m s/rad] | Coefficiente de fricción viscosa |
| K_τ | $46 \cdot 10^{-3}$ | [V×s/rad] | Constante de f.e.m. |
| λ_0 | $2.8 \cdot 10^{-3}$ | [N×m /A] | Constante de par |
| J | $6 \cdot 10^{-5}$ | [kg×m ²] | Momento de Inercia rotorica |
| L_A | 2.8 | [mH] | Inductancia de armadura |
| | 0.18 | [N×m] | Par de pico |
| | 25 | [V] | Tensión nominal |
| | 4000 | [RPM] | Velocidad Nominal |
| | B14 | | Forma constructiva |
| | IP 54 | | Ejecución |
| | Ferrita | | Imanes Permanentes |
| | Clase F | | Aislamiento |
| | 0.4 | [Kg] | Peso |
| | $60 \cdot 10^{-3}$ | [N×m] | Par max de sobrecarga |
| | $40 \cdot 10^{-3}$ | [N×m] | Par max continuativo de rotor bloqueado |

- *Reductor Epicycloidal:*

| | |
|------------------|----------|
| Reduccion | 50 |
| numero de etapas | 2 |
| rendimiento | 0.72 |
| par maximo | 125[Nm] |
| peso | 0.21[Kg] |

- *Análisis de unidades para los parámetros α y β*

Parámetro α :

$$\alpha = \frac{\left[\frac{N \times m}{A} \right]}{\left[\Omega \right] \left[kg \times m^2 \right]} = \frac{\left[\frac{Kg \times m^2}{A \times s^2} \right]}{\left[kg \times m^2 \times \Omega \right]} = \frac{1}{\left[A \times \Omega \times s^2 \right]} = \frac{1}{\left[V \times s^2 \right]}$$

Parámetro β :

$$\beta = \frac{\left[\Omega \right] \left[N \times m \frac{s}{rad} \right] + \left[\frac{N \times m}{A} \right] \left[V \frac{s}{rad} \right]}{\left[\Omega \right] \left[Kg \times m^2 \right]} = \frac{\left[\Omega \times kg \times \frac{m^2}{s^2} \times \frac{s}{rad} \right]}{\left[\Omega \times Kg \times m^2 \right]} = \frac{1}{s \times rad} = \frac{1}{s}$$

B.3.- Programa para graficar las respuestas escalón de forma experimental.

```
%.....Programa que grafica las respuestas a la entrada.....
%.....escalón de los datos experimentales .....(11/12/04)

load 'time.csv'
x=time;
load 'new1.csv'
y1=new1;
load 'new2.csv'
y2=new2;
load 'new3.csv'
y3=new3;
load 'new4.csv'
y4=new4;
load 'new5.csv'
y5=new5;
plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4,x,y5)
title('Grafica de la respuesta al escalon de la unidad TY36A');
xlabel('Tiempo en segundos [s]');
ylabel('Voltaje [V]');
```

B.4.- Programa de respuesta escalón de 3[V] para los sistemas.

```
%..... Programa en el cual se obtiene la respuesta escalón.....
%.....para el modelo teórico de 2do. Orden, modelo teórico de 1er. Orden y el modelo
%.....experimental del motor de corriente directa.....
%.....modulo TY36A..... (15/02/2005).....

Ra=5; La=0.0028; f=0.0001; Kt=0.046; Ke=0.0028; J=0.00006;
t=0:0.1:4;
num1=[Kt/(J*La)];
den1=[1 ((Ra/La)+(f/J)) ((Ra*f+Kt*Ke)/(J*La))];
printsys(num1,den1,'s')
y1=3*step(num1,den1,t);
num2=[Kt/(Ra*J)];
den2=[1 ((Ra*f+Kt*Ke)/(Ra*J))];
printsys(num2,den2,'s')
y2=3*step(num2,den2,t);
num3=[156.28];
den3=[1 1.94];
printsys(num3,den3,'s')
y3=3*step(num3,den3,t);
plot(t,y1,'.',t,y2,'-',t,y3)
grid
title('Respuesta escalón para los diferentes modelos del motor de DC para una entrada
de 3(Volts)')
xlabel('Tiempo en segundos [s]')
ylabel('Velocidad en [rad/s]')
```


B.5.- Programa del control (PID) y respuesta en lazo abierto.

```
% Programa que obtiene la respuesta a través del primer método de
% Ziegler-Nichols, para el motor de DC, en estudio.....(20/02/05)

t=0:0.0001:3;
Kp=52.08;
Ti=0.06;
Td=0.015;
K=0.01245;
a=156.28;
b=1.94;

%Definiendo nuestro controlador (PID) de la forma [a*s^2+b*s+c]/s
numc=[Kp*Td Kp Kp/Ti];
denc=[0 1 0];
printsys(numc,denc,'s');

%Definiendo el modelo del motor de DC de la forma [a/s+b]
num1=[0 a];
den1=[1 b];
printsys(num1,den1,'s');
figure(1)
step(3*num1,den1,t);
hold
grid

%Obteniendo la convolución del controlador  $G_c(s)$  y el modelo del motor
num2=conv(numc,num1);
den2=conv(denc,den1);
printsys(num2,den2,'s');

%Definiendo el acondicionador de salida para obtener el voltaje de realimentación
num3=[0.01245];
den3=[1];
printsys(num3,den3,'s');

%Cerrando el lazo de realimentación para obtener la función de transferencia
[num,den]=feedback(num2,den2,num3,den3);
printsys(num,den,'s');
step(3*num,den,t);
hold
title('Respuesta a un escalón de 3[V] para el motor de DC con realimentación
empleando las reglas de Ziegler Nichols y en lazo abierto');
xlabel('Tiempo en segundos [s]');
ylabel('Velocidad angular en [rad/s]');
```

Bibliografía:

1. **Yasundo Takashi, Michael J. Rabins, David M. Auslander,**
Control and Dynamic Systems; Ed. Adisson Wesley, 2ª Edición, E.U.A.,1972
2. **John J. D' Azzo,**
Sistemas Realimentados de Control (Análisis y Síntesis), Ed. Paraninfo, 4ª Edición, España,1989.
3. **Charles L. Phillips, H. Troy Nagle Jr.,**
Sistemas de Control Digital Análisis y Diseño, Ed. Mc. Graw Hill, Mexico,1988.
4. **Bernard Friedland,**
Control System Design an introduction to Space Methods, Ed. Mc Graw Hill, 2ª Edición, E.U.A.,1987.
5. **John E. Gibson,**
Nonlinear Automatic Control, Ed. Mc Graw Hill, México, 1972.
6. **H.K. Khalil,**
Nonlinear Systems, Ed. Mc-Graw Hill, 3ª Edición, E.U.A., 2000.
7. **Francisco Rodríguez R.,**
Dinámica de Sistemas Físicos, Ed. Trillas, México 1988.
8. **Vadim Utkin, Jürgen Guldner and Jingxin Shi,**
Sliding Mode Control in Electromechanical Systems, Ed. Taylor & Francis, E.U.A., 1999.
9. **Christopher Edwards and Sarah K. Spurgeon,**
Sliding Mode Control Theory and Application, Ed.Taylor & Francis, E.U.A., 1999.
10. **Wilfird Perruquetti and Jean Piere Barbot,**
Sliding Mode Control in Engineering, Ed. Marcel Derker, E.U.A., 2002.
11. **Yasuhiko Dote,**
Servomotor and Motion Control using Digital Signal Processors, Ed. Prentice Hall, E.U.A., 1990.
12. **Jame B. Dabney and Thomas L. Harman,**
The student Edition of Simulink dynamic System Simulation for Matlab, Edit. Prentice Hall.
13. **R. S. Sirio and H.C. Radha Krishna,**
Mediciones Mecánicas, Ed. Limusa, México, 1986.
14. **Federico A. Rodríguez Soldevilla,**
Dinámica de Maquinas, Ed. Limusa, México, 1982.
15. **Anibal Ollero Baturone,**
Control por Computadora Descripción interna y diseño optimo, Ed. Alfa-Omega, México, 1991.
16. **Eronini Umez-Eronini,**
Dinámica de Sistemas y Control. Ed. Thomson Learning, México, 2001.
17. **Katsuhiko Ogata,**
Ingeniería de Control Moderna, Ed. Prentice Hall, 4ª. Edición, México 2003.
18. **Joseph J. Distefano, Allen R. Stubberud and Ivan J. Williams,**
Retroalimentación y Sistemas de Control; Ed. Mc. Graw-Hill, México, 1980.
19. **Paul H. Lewis and Chang Yang,**
Sistemas de Control en Ingeniería, Ed. Prentice Hall, México, 1999.
20. <http://verona.fi-p.unam.mx/~lfridman>