UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

PROBLEMARIO DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES II.

M. EN C. MARCIA GONZÁLEZ OZUNA

1979

A L A L U M N O

Este trabajo fue desarrollado con el propósito de ayudar al alumno de Investigación de Operaciones II en el estudio y la comprensión de las aplicaciones de la materia. Contiene una serie de problêmas resueltos y una serie de problemas propuestos similares, para cuatro de los temas que se ven durante el semestre.

Aquí, al igual que en los apuntes desarrollados para la misma materia, deseo aclarar que de ninguna manera sustituyen la consulta de los libros recomendados, ni eximen al alumno de su obligación de ampliar sus conocimientos con la lectura de publicaciones sobre el tema.

Este trabajo es un primer intento que con el tiempo espero completar y corregir. Cualquier comentario y colaboración de parte del lector interesado serán bienvenidos.

Agradezco a M.I. Ramón Arce Rincón su colaboración en la revisión de este material.

Marcia González Osuna

Marzo, 1979.

C A D E N A S   D E   M A R K O V .

1.- Establece si las siguientes matrices son cadenas de Markov o no, y por qué

a) $\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/8 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1/7 & 6/7 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1/7 & 6/7 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

Solución.- a) NO --el segundo renglón no suma 1.

b) NO --no es una matriz cuadrada.

c) NO --no se admiten probabilidades negativas.

d) SI --cumple con las características.

2.- Determina los tipos de estados en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Solución.- $\{0,1\}$: estados recurrentes, forman un conjunto cerrado.

$\{2\}$: estado absorbente, es conjunto cerrado.

$\{3,4\}$: estados transitorios.

3.- Cada año una persona cambia su auto por uno nuevo. Escoge siempre entre marcas Ford, Chrysler y Rambler. Si tiene Ford escoge Chrysler; si tiene Chrysler le da igual comprar otro Chrysler, un Rambler o un Ford; y si tiene Rambler lo cambia por cualquiera de los otros dos.

a) ¿Es este proceso una Cadena de Markov ?

b) Si es, encuentra la probabilidad de que tenga Ford en 1975, Chrysler en 1976 y Rambler en 1974, si se sabe que en 1973 tiene un Ford.

c) Interpreta en palabras $a_C^{(3)}$ y $a_R^{(4)}$.

Solución.- a) El proceso cumple con las condiciones de Cadenas de Markov :

i) Las probabilidades de trancisión son estacionarias pues la probabilidad de escoger un Ford, un Chrysler o un Rambler dado que tiene una de esas marcas, no cambia de un año a otro.

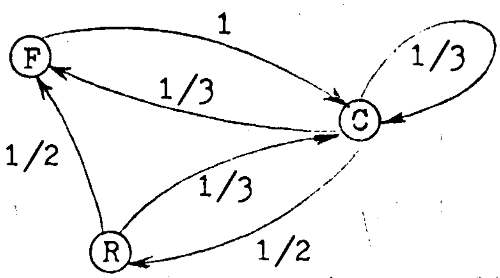
ii) La propiedad Markoviana se cumple, el que escoja una marca determinada sólo depende del carro que tiene este año y no de los que tuvo en años anteriores.

iii) Se pueden definir las probabilidades iniciales como :

$$P(X_0 = F) = 1, \quad P(X_0 = C) = 0, \quad P(X_0 = R) = 0.$$

donde F=Ford, C=Chrysler, R=Rambler.

b) Podemos representar el proceso por la siguiente gráfica:



La matriz de transición será :

$$\begin{array}{c|ccc} & F & C & R \\ \hline F & 0 & 1 & 0 \\ C & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ R & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}$$

Multiplicando la matriz por sí misma, obtenemos

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/18 & 11/18 & 1/9 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = P^2P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/18 & 11/18 & 1/9 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/18 & 11/29 & 1/9 \\ 14/54 & 29/54 & 11/54 \\ 11/36 & 17/36 & 2/9 \end{bmatrix}$$

Las probabilidades que se piden están en los términos de estas matrices :

P(Ford en 1975 / Ford en 1973) = $p_{FF}^{(2)}$ = 1/3

P(Chrysler en 1976 / Ford en 1973) = $p_{FC}^{(3)}$ = 1/9

P(Rambler en 1974 / Ford en 1973) = p_{FR} = 0

c) La interpretación es la siguiente :

$a_C^{(3)}$ = la probabilidad de tener un Chrysler en 1976 sin importar que marca se ha tenido antes.

$a_R^{(4)}$ = la probabilidad de taner un Rambler en 1977 sin importar que marca se ha tanido antes.

4.- Supón que una red de comunicaciones transmite números en un sistema binario, es decir, 0 o 1. Al pasar por la red existe una probabilidad q de que el número que se reciba en la siguiente estación sea incorrecto. Sea X_0 el número que entra al sistema; X_1 el número registrado después de la primera transmisión; X_2 el número registrado después de la segunda transmisión; ...

a)Di si este proceso es una cadena de Markov.

b)Si es, encuentra la matriz de transición de un paso.

c)Encuentra $P(X_2 = 1 / X_0 = 1)$, es decir, la probabilidad de que si entra un 1, se registre correctamente después de la segunda transmisión.

d)Encuentra las probabilidades de estado estable.

Solución.- Los estados posibles de este sistema son $\{0,1\}$.

Par definición X_n = Número registrado en la transmisión n.

Además tenemos las siguientes probabilidades

P(número incorrecto) = q ,

P(número correcto) = $p = 1-q$.

El número de estaciones en este caso es irrelevante, los mensajes en binario pueden transmitirse de muchas maneras, el número de transmisiones puede considerarse infinito.

así, tenemos :

a) El proceso es una cadena de Markov :

i) la probabilidad de equivocarse no cambia con el número de transmisiones, por lo tanto las probabilidades de transición son estacionarias.

ii) el que el número registrado en la transmisión n sea correcto o incorrecto depende sólo del número registrado en la transmisión n-1 , por lo tanto cumple con la propiedad markoviana.

iii) Se pueden establecer las probabilidades iniciales, por ejemplo, como

$P(X_0 = 1) = 1/2, \quad P(X_0 = 0) = 1/2.$

b) La matriz de transición de un paso es

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \end{array}$$

c) Si el primer número transmitido fue $X_o = 1$, entonces

$P(X_2 = 1 \,/\, X_0 = 1) = p_{11}^{(2)}$

tenemos ahora que obtener la matriz de transición en dos pasos o simplemente el término numérico correspondiente a la probabilidad que buscamos.

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p^2+q^2 & 2pq \\ 2pq & q^2+p^2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$p_{11}^{(2)} = q^2 + p^2$$

d) la matriz P es una matriz doblemente estocástica, por lo tanto

$$\pi_1 = \pi_2 = 1/2.$$

6.- Supón que el que llueva mañana depende de las condiciones del clima en los dos últimos días, es decir, si llovió ayer y hoy, mañana llueve con probabilidad p_0; si llovió ayer pero no hoy, mañana llueve con probabilidad p_1; si no llovió ayer y hoy sí, mañana llueve con probabilidad p_2; y si no llovió ayer ni llueve hoy, mañana lluve con probabilidad p_3. ¿Cómo harías que este proceso sea una cadena de Markov ? Define los estados y da la matriz de transisción con las probabilidades p_1, $1-p_1$, p_2, $1-p_2$, p_3 ...

Solución.- Una condición de las cadenas de Markov es que el estado futuro sólo dependa del estado presente y no de algún otro estado anterior, en este caso dependemos de dos estados el presente y el anterior; para definir un proceso de Markov podemos combinar las posibilidades de los dos días y definir los estados de la siguiente manera :

Edos.	Definición
0 :	lluvia ayer, lluvia hoy
1 :	lluvia ayer, no lluvia hoy
2 :	no lluvia ayer, lluvia hoy
3 :	no lluvia ayer, no lluvia hoy

Así, pasaremos del estado 0 al estado 1 si llovió ayer, llueve hoy y mañana no llueve, del estado 2 al estado 0 si no llovió ayer, hoy llueve y mañana también llueve, etc. En otras palabras, las combinaciones de eventos posibles formarán los estados (definidos de la misma forma) de la siguiente transición.

La matriz queda como sigue :

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 1-p_1 \\ p_2 & 1-p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1-p_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Establece si las siguientes matrices son cadenas de Markov o no, y por que.

a) $\begin{matrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} 1/5 & 4/5 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} 1/7 & -6/7 \\ 3/4 & 1/4 \end{matrix}$

2.- Determina los tipos de estados y si hay conjuntos cerrados en la siguiente matriz

$$P = \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 00 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

3.- Se hizo una investigacion de mercado sobre tres marcas de refrescos en polvo X, Y, Z. Cada vez que un cliente compra refresco existe la posibilidad de que compre la misma marca o cambie a otra. Del estudio se obtuvieron las siguientes estimaciones expresadas en fracciones decimales :

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{marca que compra} \\
 & & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\
\begin{array}{c}\text{marca} \\ \text{que} \\ \text{compro}\end{array} & \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} .7 & .2 & .1 \\ .3 & .5 & .2 \\ .3 & .3 & .4 \end{array}\right]
\end{array}
$$

En este momento se estima que 30 % de la gente compra la marca X, 20 % la marca Y y 50 % la marca Z. ¿ Cuál será la distribución de los clientes entre las marcas dos períodos después ?

4.- Una partícula se mueve sobre un círculo a través de los punto 0, 1, 2, 3 y 4. La partícula empieza en el punto 0. Cada paso se mueve un lugar a la derecha (sentido horario) con probabilidad de 2/3 y a la izquierda con probabilidad de 1/3.

a) Justifica el que este proceso sea una cadena de Markov.

b) Encuentra la matriz de transición.

c) Explica en palabras $p_{XZ}^{(2)}$ y da su valor numérico

d) Obtén las probabilidades de estado estable.

L I N E A S D E E S P E R A .

1.- Los carros llegan a la ventanilla de un autobanco de acuerdo a un proceso Poisson con media de 5 por hora. El espacio que el banco proporciona delante de la ventanilla incluyendo el carro que se atiende es suficiente para 4 carros. Otros carros pueden esperar fuera de este espacio. El tiempo que la cajera tarda en despachar un cliente sigue una distribución exponencial con media de 10 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el que llega tenga que esperar fuera de este espacio ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente pueda ir directamente a la ventanilla cuando llega ?

c) ¿Cuánto tiempo se espera que un cliente tenga que esperar para llegar a la ventanilla ?

d) ¿Pondrías otra ventanilla ? ¿Por qué ?

Solución.- Este problema se ajusta a las características del Modelo Básico. Los parámetros tienen los siguientes valores :

Unidad de tiempo: hora

$\lambda = 5$ cl/hr

$1/\mu = 10$ min $\Rightarrow \mu = 6$ cl/hr

$s = 1$

a) P(esperar fuera) = P(haya 4 carros o más)

= 1 - P(haya 0,1,2 o 3 carros)

$= 1 - (P_0+P_1+P_2+P_3) = 1-.518 = .482$

b) P(llegar directo a la ventanilla) =

$= P(\text{no haya nadie})$

$= P_0 = .167$

c) El tiempo que un cliente tendrá que esperar es "el tiempo de espera esperado", es decir

$W_q = \lambda/\mu(\mu - \lambda) = 5/6(6-5) = 5/6 = 0.83$ hrs.

d) Se tendrían que analizar los costos, pero en cuanto a servicio es necesario poner otra ventanilla, pues casi la mitad del tiempo (48 %) está lleno el espacio proporcionado por el banco y el tiempo de espera (casi una hora) es excesivo.

2.- Los carros en una carretera llegan a una caseta de cobro automática de manera aleatoria con una tasa madia de 90 carros por hora. El tiempo para pasar la caseta sigue una distribución exponencial con tasa media de 38 segundos. Los automovilistas se quejan de una larga espera y las autoridades están dispuestas a disminuir el tiempo promedio de paso a 30 segundos cambiando el dispositivo por uno nuevo, pero sólo se justificaría el cambio si en el sistema actual el número de carros esperado excede a 5, y si además el porcentaje de tiempo que la nueva caseta estaría vacía no es mayor al 10 %. ¿ Qué recomendarías a las autoridades ?

Solucion.- El sistema tiene las características del Modelo Básico. Los parámetros son los siguientes :

Unidad de tiempo : hora

$\lambda = 90$ c/hr

$1/\mu = 38$ seg $\Rightarrow$ $\mu = 94.7$ c/hr

$1/\mu' = 30$ seg $\Rightarrow$ $\mu' = 120$ c/hr

donde μ' = tiempo promedio de paso con el dispositivo nuevo.

$s = 1$, en ambos casos.

El número esperado de carros en el sistema se definió como L. El porcentaje de tiempo que la caseta está vacía se definió como P_0 (la frecuencia con que sucede que no hay nadie).

Así, con λ y μ tenemos

$$L = \lambda/(\mu - \lambda) = 90/\ 4.7 = 19.15 > 5$$

En este caso la caseta tiene un número esperado de carros mayor que 5, por lo tanto se justifica el cambio.

Con λ y μ' tenemos

$$P_0 = 1 - \rho' = 1 - 90/120 = .25 > .10$$

Con el nuevo dispositivo la caseta estaría vacía el 25 % > 10 % del tiempo, por lo tanto no se justifica el cambio.

Recomendación : NO CAMBIARLO bajo esa política, ya que se pide que se cumplan las dos condiciones a la vez y una de ellas no se cumple. Se deberá hacer otro estudio o cambiar la política para poder tomar una decisión.

3.- Consideremos de nuevo la carretera del problema anterior pero supongamos esta vez que la llegada promedio de carros ha aumentado a 600 carros por hora y que ahora hay 3 casetas automáticas de pago que permiten el paso de carros a un promedio de 15 segundos. Con la información que proporcionan los valores de P_0, L, W, L_q y W_q explica como se como se comporta el sistema.

Solucion.- En este caso también tenemos las características del Modelo Básico, pero con los siguientes parámetros :

unidad de tiempo : minuto

$\lambda = 10$ c/min

$\mu = 4$ c/min

s = 3

Haciendo cálculos con las fórmulas apropiadas *

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} (1 - \lambda/s\mu)^{-1} \right]^{-1} =$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{2} \frac{(10/4)^n}{n!} + \frac{(10/4)^3}{3!} (1 - 10/12)^{-1} \right]^{-1} = 0.04494$$

* El valor de P_0 puede obtenerse con una buena aproximación de gráficas que existen. Podemos citar a Hillier & Lieberman, "Operations Research", "nd. Edition.(pag. 401). Esto simplificaría los cálculos.

$$L_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)^2} = \frac{0.4494(10/4)^3(10/12)}{3!\ (1-10/12)^2} = 3.511 \text{ carros}$$

$$W_q = L_q/\lambda = 3.511/10 = 0.3511 \text{ min}$$

$$W = W_q + 1/\mu = .3511 + .25 = .6011 \text{ min}$$

$$L = L_q + \lambda/\mu = 3.511 + 10/4 = 6.01124 \text{ carros}$$

Como se puede observar de los valores anteriores el sistema (las casetas de pago) están vacías el 45 % del tiempo, el tiempo de espera hasta que pasan es apenas poco más de medio minuto, y hay en promedio un carro por caseta esperando pasar. Parecería que el servicio es excesivo pero siendo una caseta de pago tal vez los costos sean inferiores a los ingresos y en ese caso el sistema se clasificaría como uno de muy buen servicio.

4.- La sala de espera en el consultorio de un doctor tiene 4 lugares para que los pacientes se sienten a esperar. El doctor encuentra más fácil no trabajar por citas, asi que los pacientes llegan aleatoriamente con una tasa media de uno cada 15 minutos. El tiempo que el doctor tarda en atender a los pacientes puede ajustarse a una distribución exponencial con media de 12 minutos. Los pacientes que al llegar encuentran el consultorio lleno, siempre deciden no esperar y pasar con otro doctor de la clínica donde se encuentra el consultorio.

a) ¿Cuánto tiempo en promedio esperan los pacientes para ver al doctor ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llega encuentre un lugar para sentarse ?

c) ¿Qué porcentaje de pacientes se van con otro doctor ?

Solución.- Este sistema se ajusta al modelo de Línea de Espera Finita.

unidad de tiempo : hora

$\lambda = 4$ p/hr

$\mu = 5$ p/hr

$s = 1$

$M = 5$

a) El tiempo promedio de espera para ver al doctor es el tiempo de espera esperado en la cola.

$$W_q = L_q/ = (L - (1-P_0))/ = (1.869 -(1-.271))/4$$
$$= 0.285 \text{ horas} = 17.1 \text{ min}$$

b) es la probabilidad de que haya a lo mas 4 pacientes en el consultorio, incluyendo el que esta viendo el doctor.

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 =$$
$$= .271 + .217 + .173 + .139 + .111 = .911$$

es decir, el 91 % del tiempo los pacientes encuentran un lugar para esperar.

c) el porcentaje corresponde a la probabilidad de que haya 5 pacientes en total en el consultorio.

$$P_5 = .089$$

es decir, solo el 8.9 % de los pacientes se pierden.

5.- Una estación de servicio tiene una sola bomba de gasolina. Los carros llegan a cargar con una distribución Poisson con tasa media de uno cada 3 minutos. Sin embargo si la bomba se está usando, el cliente puede preferir irse a otra gasolinera. En particular, si hay n carros en total la probabilidad de que un cliente que llega se vaya es de n/4 para n = 1, 2, 3, 4. El tiempo de servicio por carro tiene una distribución exponencial con media de 3 minutos.

a) Construye un diagrama de tasas para este sistema.

b) Obtén la distribución de probabilidad de estado estable para el número de carros en la gasolinera.

c) Encuentra el tiempo de espera esperado en el sistema para aquellos carros que se quedan.

Solución.- Este sistema no se ajusta a ningún modelo de los desarrollados. Construiremos un modelo específico para este problema.

unidad de tiempo : hora

$1/\mu = 3$ min/cl $\Rightarrow$ $\mu = 20$ cl/hr

s = 1

λ varía según el número de carros en la gasolinera, los valores que adquiere son los siguientes :

$\lambda_0 = \lambda = 20$ cl/hr

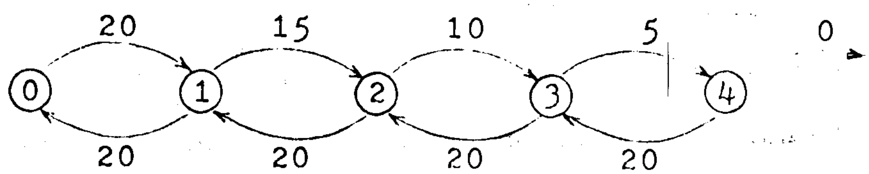
$\lambda_1 = \lambda - \frac{1}{4}\lambda = 15$ cl/hr

$\lambda_2 = \lambda - \frac{1}{2}\lambda = 10$ cl/hr

$\lambda_3 = \lambda - \frac{3}{4}\lambda = 5$ cl/hr

$\lambda_4 = \lambda - \lambda = 0$ cl/hr

a) El diagrama de tasas queda como sigue :



y nunca habrá más de 4 carros incluyendo el que están atendiendo, pues la probabilidad de que un cliente se vaya si n=4 es 1, por lo tanto en este caso todos se van.

b) Para obtener la distribución de probabilidad tendremos que determinar los factores C_n.

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_n}{(\mu)^n} \quad , \quad n = 1,2,3,4, \quad \text{y} \quad C_n = 0 \text{ para } n > 4.$$

entonces, $C_1 = 1$, $C_2 = 3/4$, $C_3 = 3/8$, $C_4 = 15/16$.

Como sabemos, las probabilidades de estado estable se determinan a partir de $P_n = C_n P_0$. Determinando P_0

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \right)^{-1} = \left(1 + \sum_{n=0}^{4} C_n \right)^{-1} = (65/16)^{-1}$$

$$= 16/65 = .246$$

Así, $P_1 = C_1 P_0 = .246$

$P_2 = C_2 P_0 = .185$

$$P_3 = C_3P_0 = .092$$
$$P_4 = C_4P_0 = .231$$

entonces los valores de P_n obtenidos son la distribución de probabilidad para el número de clientes en el sistema.

c) El tiempo de espera esperado para los clientes que se quedan está definido como W. Como no podemos trabajar con ningún modelo tendremos que calcularlo. Sabemos que $W = L / \lambda$. λ varía, así que tenemos que obtener $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{4} nP_n =$$
$$= 20(.246)+15(.246)+10(.185)+5(.092)+0(.231)$$
$$= 10.92 \text{ cl/hr en promedio.}$$

por otro lado, tenemos

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{4} nP_n =$$
$$= 0(.246)+1(,246)+2(.185)+3(.092)+4(.231)$$
$$= 1.82 \text{ clientes en promedio}$$

entoces de nuestras relaciones básicas resulta :

$W = L / \bar{\lambda} = 1.82/10.92 =.167$ hr $= 10$ min en promedio.

que es el tiempo que buscamos.

6.- Supón que se tienen M máquinas trabajando, los cuales sufren descomposturas de manera aleatoria con tasa media λ. Hay s mecánicos que dan servicio a cada máquina descompuesta. El tiempo que necesita un mecánico para la reparación tiene distribución exponencial con parámetro μ. Supón que el costo de cada mecánico es de \$c por hora y que la utilidad bruta de una máquina operando es de \$p por hora. ¿Cómo determinarías el número de mecánicos que minimiza el costo total (o maximiza la utilidad) ?

Solución.- El modelo que se ajusta en este caso es el de Fuente Limitada, de manera que de hacer calculos los haríamos con las fórmulas de este modelo.

El costo por mecánico es de \$c por hora, entonces el costo por proporcionar el servicio sera \$c×s. (A más servicio mayor costo).

Si la utilidad de una máquina operando es \$p por hora, el costo del tiempo que tarda una máquina descompuesta en poder volver a producir (descompuesta esperando reparación y en reparación) será justamente \$p por hora (es decir, nos cuesta lo que no produce). Entonces el costo esperado de las máquinas descompuestas sera \$p×L. (a más servicio menor L y por lo tanto menor costo).

Como se observa, existe un"trueque"entre el costo de servicio y el costo de máquinas descompuestas. Si aumentamos el número de mecánicos tendremos menor costo por espera pero mayor costo por servicio. De cualquier manera el costo total es la suma de estos dos costos. Es evidente que si calculamos este costo total para s=1, s=2, s=3, ... el valor de s que resulte en el menor valor de este costo total será el número de mécanicos que necesitamos para obtener un mínimo.

Nota: Obviamente solo tendremos que calcular el"costo total esperado"para un número finito de diferentes valores de s ya que primero irá disminuyendo el costo y después se incrementará, o simplemente aumentará todo el tiempo y s=1 es el valor que buscamos, o disminuirá todo el tiempo y s=M es lo mejor ya que s > M sería absurdo.

7.- Se tiene que decidir entre dos mecánicos para atender 10 máquinas en una fábrica. Al primero (A) se le pagaría \$3.00 la hora y puede reparar un promedio de 5 máquinas por hora. El segundo (B) cobra \$5.00 la hora pero puede reparar las máquinas con una tasa media de 8 por hora. Suponiendo que las máquinas se descomponen de acuerdo a una distribución Poisson con media de 15 min cada una, que una máquina descompuesta cuesta \$8.00 la hora y que el tiempo de servicio esta distribuído exponencialmente, ¿ cuál mecánico debe contratarse para minimizar el costo total esperado ?

(Para simplificar calculos supon que $P_{0A}=.007$ y $P_{0B}=.3$)

Solución.- El modelo que podemos usar es el de Fuente Limitada con los siguientes parámetros :

unidad de tiempo : hora

$\lambda = 4$ m/hr	C_A = \$3.00 por hr
μ_A = 5 m/hr	C_B = \$5.00 por hr
μ_B = 8 m/hr	C_W = \$8.00 por hr

s = 1, en ambos casos

Suponiendo que las probabilidades de n=0 máquinas en el sistema (descompuestas) estan dadas por esas cantidades en cada caso (de hecho estas probabilidades son mucho mas pequeñas), el costo total esperado será igual al costo por servidor multiplicado por el número de servidores (en estos casos uno) más el costo de tener una máquina descompuesta por hora multiplicado por el número esperado de máquinas descompuestas.

Del modelo sabemos que

$$L = M - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0) + (1 - P_0)$$

entonces

$$L_A = 10 - 2.25(1-.007) + (1-.007)$$
$$= 10 - 2.23 +.993 = 8.76 \text{ máquinas en promedio}$$

$$L_B = 10 - 3(1-.3) + (1-.3)$$
$$= 10 - 2.1 + .7 = 8.6 \text{ máquinas en promedio}$$

asi

$$E(CT)_A = C_A + C_W L_A = 3 + 8(8.76) = 73.08 \text{ \$/hr}$$

$$E(CT)_B = C_B + C_W L_B = 5 + 8(8.6) = 73.80 \text{ \$/hr}$$

El costo menor resulta al contratar al mecanico A.

Nota : En realidad la diferencia es tan pequena debido a la gran aproximacion que se tomo en los valores de P_0.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- Una copiadora es usada y operada por gentes de la oficina en que se encuentra. Los trabajos a copiar varían en tamaño (número de copias del original y número de originales), pero el tiempo de copiado está distribuído exponencialmente con media de 10 trabajos por hora. Generalmente las necesidades de uso son aleatorias a través de las 8 horas de trabajo al día, y llegan con una tasa media de uno cada 12minutos. Varias gentes han notado que se forma a veces una cola y han decidido estudiar el comportamiento del sistema. Encuentra :

a) la utilización del equipo

b) el porcentaje de veces que una persona que llega a sacar copias tiene que esperar

c) el tiempo de espera esperado para obtener las copias

d) la probabilidad de que el que quiere copias las pueda sacar inmediatamente.

2.- Considera un sistema de líneas de espera al que los clientes llegan de acuerdo a una distribución Poisson con media de 10 clientes por hora y el tiempo de servicio sigue una distribución exponencial con media de .167 hr

Cuantos servidores se deben proporcionar si se quiere

a) que el número esperado de clientes en el sistema sea menor que 3 ?

b) que el tiempo de espera esperado en el sistema no exceda a 20 minutos ?

3.- Es necesario determinar cuanto espacio de almacén para materiales en proceso debe asignarse a un centro de trabajo en una nueva fábrica. Se sabe que se tendrán llegadas Poisson con media λ y que el tiempo para realizar el trabajo tiene una distribución exponencial con parámetro $1/\mu$.

a) Si cada trabajo requiere un metro cuadrado de espacio en el suelo del almacén, ¿ cuánto espacio debe proporcionarse para que los trabajos que esperan puedan acomodarse dentro por lo menos el 90 % del tiempo ?

b) Si cada trabajo requiere dos metros cuadrados en el suelo en el almacén, ¿ cuál será la probabilidad de que haya 1 o 2 trabajos esperando afuera si contamos con M metros cuadrados ?

4.- En la universidad se cuenta con un servicio de asesoria para alumnos de los cursos de computación en el centro de cálculo. La limitación es que el salón de asesoria permite únicamente que haya hasta 4 alumnos esperando, los alumnos que al llegar encuentren lleno deberán buscar al profesor de la materia para sus consultas. Los estudiantes llegan al salón de asesoria aleatoriamente con una tasa promedio de 4 por hora. El tiempo que tardan con el asesor sigue una exponencial con tasa media de 10 min. La cantidad de alumnos inscritos en cursos de computación es lo suficientemente grande como para poder considerar una fuente de entrada infinita.

a) ¿ Qué probabilidad tiene un alumno de poder esperar al asesor cuando va a pedir ayuda ?

b) ¿ Qué tiempo esperan en promedio para poder corregir sus errores y volver a correr su programa ?

c) ¿ En promedio, cuántos alumnos ve el asesor que lo están esperando ?

5.- Se tiene una peluquería a la que los clientes llegan de manera aleatoria con tasa media de 8 por hora. El corte de pelo toma un promedio de 20 minutos y podemos suponer que este tiempo sigue una distribución exponencial. Se cuenta con dos peluqueros y solo 3 sillas para esperar. Cuando ambos peluqueros están ocupados pero no hay clientes esperando un cuarto de los clientes que llegan no entra por no querer esperar. Similarmente, cuando hay un cliente esperando un tercio de las llegadas se van, cuando hay dos personas esperando la mitad de los clientes se pierden y si están las tres sillas de espera ocupadas todos los que llegan se van.

a) Da el diagrama de tasas que representa este sistema.

b) Da la distribución del número de clientes en el sistema.

c) ¿Qué porcentaje de tiempo sucede que hay más de una persona esperando que se desocupe un peluquero ?

d) ¿Cuánto tiempo se espera que la gente tenga que esperar desde que llega hasta que sale peluqueado ?

6.- El gerente de mantenimiento de una fabrica debe decidir cuantos mecanicos contratar para dar servicio a 9 maquinas minimizando los costos totales. Las maquinas se descomponen con un tiempo medio entre descomposturas de 6 horas y estos tiempos siguen una distribucion exponencial. El tiempo de reparacion tiende a seguir la misma distribucion y tiene una media de 8 horas. Cuando una maquina esta descompuesta el tiempo perdido tiene un valor de $200 la hora. Cada mecanico cobra $320 al dia (supondremos 8 horas de trabajo al dia). Cual es el numero de mecanicos que el gerente debe contratar ?

7.- El dueño de un autolavado compuesto de máquinas que operan a base de monedas está pensando añadir una aspiradora también accionada por monedas de $5, para aspirar el interior de de los carros. El tiempo de servicio de la aspiradora es constante, es decir, cada moneda de $5 hara que la aspiradora funcione por espacio de 5 minutos. Las llegadas de los clientes tienen una distribución Poisson con media de 10 por hora. Antes de tomar una decisión, el dueño desea tener idea de como se comportará el sistema. ¿ Qué puedes decirle al dueno ?

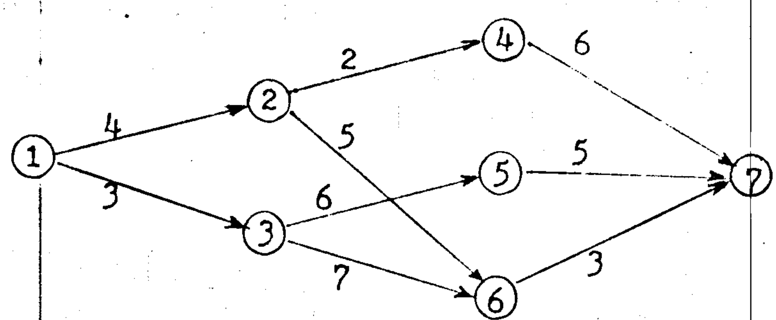
8.- Considera un sistema de colas con un solo servidor. Se ha observado que este servidor parece trabajar más rapido conforme aumenta el número de clientes y que el patrón de aumento parece ajustarse al modelo de tasas dependientes del estado del sistema. Aún más, se estima que el tiempo de servicio esperado es de 3 minutos cuando hay una sola persona mientras que es de dos minutos cuando hay 5. Determina el coeficiemte de presión c para este modelo. Obtén los factores C_n y los valores de P_0 y L.

9.- Considera un sitema con llegadas Poisson, tiempos de servicio Erlang y un servidor. Si k=2, λ=3 y $1/\mu$ = .25 hr, obtén toda la información disponible. Que pasaría si se tuviera una cola **finita** donde el máximo número de clientes que se permiten es 2 ? Obtén la información que puedas y compara los resultados con los correspondientes para la distribución exponencial para los tiempos de servicio.

Nota: Los ultimos tres problemas no tienen un equivalente en los problemas resueltos. El alumno debe solo sustituir valores en los modelos pertinentes y obtener resultados numericos, es por esto que no se incluyeron problemas del tipo en los que tienen solucion.

PROGRAMACION DINAMICA.

1.- Supongamos que en la siguiente red los números sobre los arcos indican el tiempo t_{ij} que se necesita para ir del lugar i al lugar j. Encuentra la ruta óptima que minimiza el tiempo toltal para ir del lugar 1 al lugar 7.



Solución.- Planteamiento :

Etapas: jornadas de viaje, $n = 1,2,3$.

Estados: determinados por el lugar

s_n = lugar en que estamos al iniciar la etapa n

Decisión: x_n = destino inmediato

Dinámica: el estado inicial de la etapa n+1 será el lugar al que decidimos irnos (destino inmediato) en la etapa n, así

$$s_{n+1} = x_n$$

Contribución: t_{ij} = tiempo de traslado de i a j

Objetivo: minimizar el tiempo total.

Rel. Rec.: $f_n(s_n,x_n)$ = tiempo acumulado de la etapa n en adelante, si estamos en el lugar s_n, decidimos ir a x_n, y seguimos una política óptima..

entonces, $f_n(s_n, x_n) = t_{s_n, x_n} + f^*_{n+1}(s_{n+1})$

es decir, $f^*_n(s_n) = \min\limits_{x_n} \left\{ t_{s_n, x_n} + f^*_{n+1}(x_n) \right\}$

con $f^*_4(s_4) = f^*_4(7) = 0$, ya que después de la etapa 3 no se emplea más tiempo, ya llegamos al destino final.

Mecanismo numérico :

para n = 3

s_3	$f^*_3(s_3)$	x^*_3
4	6	7
5	5	7
6	3	7

para n = 2

s_2 \ x_2	$f_2(s_2,x_2)$: 4	5	6	$f^*_2(s_2)$	x^*_2
2	8	-	8	8	4,6
3	-	11	10	10	6

para n = 1

s_1 \ x_1	$f_1(s_1,x_1)$: 2	3	$f^*_1(1)$	x^*_1
1	12	13	12	2

La ruta por la que el tiempo de recorrido es mínimo es:

$$x^*_1 = 2, \quad x^*_2 = \begin{cases} 4, & x^*_3 = 7 \\ 6, & x^*_3 = 7 \end{cases} \quad \text{con tiempo mínimo} = 12$$

es decir, las rutas óptimas son:

1 ----> 2 ----> 4 ----> 7

1 ----> 2 ----> 6 ----> 7

2.- La encargada de las elecciones municipales de cierta comunidad está haciendo planes para organizar las próximas elecciones para presidente municipal. Ella puede disponer de los servicios de 6 voluntarios para trabajar en 4 casillas electorales y quiere asignarlos de manera que se maximice la efectividad. Supone que es ineficiente asignar a un mismo voluntario a más de una casilla, pero sí está dispuesta a dejar una o más casillas sin gente si esto se considera lo mejor. La siguiente tabla muestra las medidas de efectividad en cuanto al aumento en la popularidad del partido, para las diferentes asignaciones en número de voluntarios.

	Casillas			
#de vol.	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	20	25	18	28
2	42	45	39	47
3	60	57	61	65
4	75	65	78	74
5	85	70	90	80
6	90	73	95	85

Determina cuantos de los 6 voluntarios deben asignarse a cada una de las 4 casillas electorales.

Solución.- Planteamiento :

Etapas: las cuatro casillas, $n = 1,2,3,4$.

Estados: determinados por el número de voluntarios

s_n = número de voluntarios disponibles al iniciar la etapa n (al asignar a la casilla n).

Decisión: x_n = número de voluntarios asignados a la casilla n

Dinámica: los voluntarios disponibles en la etapa n+1 serán los que se tienen en la etapa n menos los que se asignaron a esa casilla, así

$$s_{n+1} = s_n - x_n$$

Contribución: $g_n(x_n)$ = efectividad obtenida de asignar x_n voluntarios a la casilla n.

Objetivo: maximizar la efectividad total.

Rel. Rec.: $f_n(s_n,x_n)$ = efectividad acumulada de la etapa n en adelante, si disponemos de s_n voluntarios, decidimos asignar x_n voluntarios a la casilla n y seguimos una política óptima.

así, $$f_n(s_n,x_n) = g_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_{n+1})$$

es decir, $$f^*_n(s_n) = \max_{x_n} \left\{ g_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_n - x_n) \right\}$$

con $f^*_5(s_5) = 0$ ya que no se obtiene ganancia en efectividad de una quinta casilla que no existe

Mecanismo numérico :

para n = 4

s_4	$f^*_4(s_4)$	x^*_4
0	0	0
1	28	1
2	47	2
3	65	3
4	74	4
5	80	5
6	85	6

para n = 3

$s_3 \backslash x_3$	$f_3(s_3,x_3)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	28	18	-	-	-	-	-	28	0
2	47	46	39	-	-	-	-	47	0
3	65	65	67	61	-	-	-	67	2
4	74	83	86	89	78	-	-	89	3
5	80	92	104	108	106	90	-	108	3
6	85	98	113	126	125	118	95	126	3

para n = 2

$s_3 \backslash x_3$	$f_2(s_2,x_2)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
1	28	25	-	-	-	-	-	28	0
2	47	53	45	-	-	-	-	53	1
3	67	72	73	57	-	-	-	73	2
4	89	92	92	85	65	-	-	92	2,1
5	108	114	112	104	93	70	-	114	1
6	126	133	134	124	112	98	73	134	2

para n = 1

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1,x_1)$ 0	1	2	3	4	5	6	$f_1^*(6)$	x_1^*
6	134	134	134	133	128	113	90	134	0,1,2

de las tablas vemos que los valores óptimos de la variables de decisión son :

$$x_1^* = \begin{cases} 0, & x_2^* = 2, \quad x_3^* = 3, \quad x_4^* = 1 \\ 1, & x_2^* = 1, \quad x_3^* = 3, \quad x_4^* = 1 \\ 2, & x_2^* = \begin{cases} 2, & x_3^* = 0, \quad x_4^* = 2 \\ 1, & x_3^* = 2, \quad x_4^* = 1 \end{cases} \end{cases}$$

3.- Una compañía editorial desea poner 6 "stands" de promoción en 4 cines importantes de la localidad. La medida de eficiencia en este caso está dada por el número de gentes que debido al stand se interesen en las publicaciones de la compañía. Esta medida se da en la siguiente tabla para el número x_n de stands que se mandan al cine n. Se debera asignar al menos un stand a cada cine.

		Stands					
		1	2	3	4	5	6
Cines	1	50	60	70	75	77	90
	2	45	50	55	60	65	70
	3	52	55	65	70	72	77
	4	80	80	80	82	90	90

Si el objetivo es maximizar el número total de gentes interesadas, ¿cuántos stands deben mandarse a cada cine?

Solución.- Planteamiento :

Etapas: los cines, n = 1,2,3,4

Estados: determinados por el número de stands

s_n = número de stands disponibles al iniciar la asignación del cine n.

Decision: x_n = número de stands asignados al cine n

Dinamica: los stands disponibles para el cine n+1 serán los que teníamos para el cine n menos los que asignamos a ese cine, así

$s_{n+1} = s_n - x_n$

Contribución: $p_n(x_n)$ = ganancia obtenida en número de gentes, al asignar x_n stands al cine n.

Objetivo: maximizar el número total de gentes interesadas.

Rel. Rec.: $f_n(s_n,x_n)$ = número acumulado de gentes del cine n al último, si tenemos s_n stands al asignar al cine n, decidimos asignar la x_n stands y seguimos una política óptima.

entonces, $f_n(s_n,x_n) = p_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_{n+1})$

es decir, $f^*_n(s_n) = \max\limits_{x_n} \; p_n(x_n) + f^*_{n+1}(s_n-x_n)$

con $f^*_5(s_5) = 0$ pues no tenemos un quinto cine en el cual hacer promoción.

Mecanismo numérico:

para n = 4

s_4	$f^*_4(s_4)$	x^*_4
1	80	1
2	80	1,2
3	80	1,2,3

la restricción de al menos un stand a cada cine no nos permite llegar con más de 3 stands al último cine que analizamos.

para n = 3

s_3 \ x_3	$f_3(s_3,x_3)$ 1	2	3	$f^*_3(s_3)$	x^*_3
2	132	55	-	132	1
3	132	135	65	135	2
4	132	135	145	145	3

nuevamente la restrición nos exige al menos dos stands (para poder asignar uno en n=4) y no podemos diponer de más de 4, pues ya asignamos 2 antes.

para n = 2

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2,x_2)$ 1	2	3	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
3	177	-	-	177	1
4	175	182	-	182	2
5	182	185	187	187	3

en este punto, está claro por qué los estados iniciales posibles son los que marca la columna de s_n.

para n = 1

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1,x_1)$ 1	2	3	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
6	237	242	247	247	3

la solución óptima, es decir la asignacion de stands que se debe hacer para lograr el objetivo es:

$$x_1^* = 3, \quad x_2^* = 1, \quad x_3^* = 1, \quad x_4^* = 1$$

o sea que deberemos asignar 3 stands al cine 1, 1 al cine 2, 1 al 3 y 1 al 4 para obtener un máximo de 247 gentes interesadas en las publicaciones.

4.- Considera el problema de cargar un navío con N tipos diferentes de artículos. Cada artículo i tiene un peso w_i y un valor v_i $(i=1,2,3,\ldots,N)$. El peso máximo de la carga es W. Se quiere determinar la carga más valiosa que no exceda el peso máximo del navío. Da el planteamiento del problema.

Solución.- Plantemiento :

Etapas: los diferentes artículos, $n=1,2,3,\ldots,N$

Estados: determinados por el peso

s_n = peso disponible todavía en el navío al iniciar la etapa n (al analizar el artículo n).

Decisión: x_n = número de artículos del tipo n que decidimos cargar.

Definiciones necesarias:

$w_n x_n$ = peso de los artículos del tipo n.

$v_n x_n$ = valor de los artículos del tipo n.

Dinamica: como lo que nos restringe es el peso y eso es lo que determina el estado inicial, el cambio que sufre el estado del sistema será el peso disponible en una etapa menos lo que pesan los artículos del tipo de esa etapa, así

$$s_{n+1} = s_n - w_n x_n$$

Contribución: $v_n x_n$ tal como se definió.

Objetivo: maximizar el valor total de la carga.

Rel.Rec. $f_n(s_n,x_n)$ = valor acumulado de la carga del artículo n al último, dado que disponemos de s_n unidades de peso en el navío, decidimos cargar x_n artículos del tipo n y seguimos una política optima.

entonces, $f_n(s_n,x_n) = v_n x_n + f^*_{n+1}(s_{n+1})$

por lo tanto, $f^*_n(s_n) = \max_{x_n} \left\{ v_n x_n + f^*_{n+1}(s_n - w_n x_n) \right\}$

con $f^*_{N+1} = 0$ ya que como no existe un artículo del tipo N+1, no podemos ponerlo en la carga y obtener algun valor de el.

5.- Para producir un cierto artículo es necesario procesarlo en dos máquinas diferentes. El funcionamiento de las dos está sujeto a una probabilidad. Existe la posibilidad de comprar algunas máquinas de repuesto para que trabajen mientras se reparan las descompuestas pero el presupuesto esta limitado a $10 (en miles). La siguiente tabla da la probabilidad de funcionamiento para cada tipo de máquina si se tienen 1,2 ó 3 de cada una y el costo de comprar la segunda y la tercera (es decir, 1 ó 2 de repuesto).

x_i=# de máquinas tipo i	Tipo de Maquina 1		Tipo de Maquina 2	
	$C_1(x_1)$	$P_1(x_1)$	$C_2(x_2)$	$P_2(x_2)$
1	0	.60	0	.50
2	3	.70	5	.60
3	5	.90	7	.80

Se quiere determinar el número de máquinas de cada tipo que deben comprarse para maximizar la probabilidad de producir el artículo.

Solución.- Planteamiento :

Etapas: los tipos de máquinas, n = 1,2.

Estados: determinados por el presupuesto

s_n = presupuesto disponible al iniciar la etapa n

Decisión: x_n = número de máquinas del tipo n que decidimos comprar.

Dinámica: como el presupuesto determina los estados del sistema, el cambio que sufre el estado inicial de una etapa a otra se puede describir en términos del dinero gastado, entonces

$$s_{n+1} = s_n - C_n(x_n)$$

donde $C_n(x_n)$ es el costo de compra de x_n máquinas del tipo n.

Contribución: $P_n(x_n)$ = la probabilidad de funcionamiento. La contribución en este caso es en forma de producto de probabilidades, puesto que se quiere que las máquinas funcionen al mismo tiempo (eventos simultáneos).

Objetivo: maximizar el producto de las probabilidades, o lo que es lo mismo, la probabilidad de producir el artículo.

Rel.Rec.: $f_n(s_n, x_n)$ = probabilidad de que funcionen las máquinas n,n+1,...a la última, dado que tenemos s_n pesos, decidimos comprar x_n máquinas del tipo n y seguimos una política óptima.

entonces, $$f_n(s_n, x_n) = P_n(x_n) \cdot f^*_{n+1}(s_{n+1})$$

o sea, $$f^*_n(s_n) = \max_{x_n} \left\{ P_n(x_n) \cdot f^*_{n+1}(s_n - C_n(x_n)) \right\}$$

con $f^*_3(s_3) = 1$ pues la máquina 3 que no existe seguro funciona.

Mecanismo numérico :

para n=2

s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2
$0 \leqslant s_2 \leqslant 4$	.50	1
$4 \leqslant s_2 \leqslant 6$	.60	2
$7 \leqslant s_2 \leqslant 10$	.80	3

Nótese que para poder producir el artículo debemos tener al menos una máquina de cada tipo pero esto se asegura puesto que no cuesta la primera máquina, así podemos hablar de comprar una máquina aunque de hecho ya la tengamos.

para n=1

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(s_1,x_1)$ 1	2	3	$f_1^*(10)$	x_1^*
10	.48	.56	.54	.56	2

La solución óptima es comprar dos máquinas del tipo 1, nos quedan \$7 (miles) para la segunda etapa, el segundo renglón de la tabla para n=2 nos dice que debemos comprar 3 máquinas del tipo 2 con un costo de \$7, dicho de otra manera

$$x_1^* = 2, \qquad x_2^* = 3$$

esto nos da una probabilidad máxima de funcionamiento de .56 que es lo más alto que podemos obtener con \$10 .

6.- Supón que juegas tirando un dado legal. Cada tirada puedes apostar dos fichas, todo lo que tienes o no apostar. Si obtienes 4,5 o 6 en el dado, ganas la apuesta; si obtienes 3, ni ganas ni pierdes (te regresan tu apuesta); si sale 1 ó 2, pierdes. comenzando con tres fichas,¿cuál es la política óptima de apuesta que maximiza la probabilidad de tener 6 o más fichas después de 2 jugadas?

Solución.- Planteamiento :

Etapas: las jugadas, $n = 1,2$.

Estados: determinados por el número de fichas.

s_n = número de fichas disponibles para apostar en la jugada n.

Decisión: x_n = número de fichas apostadas en la jugada n.

Contribución: en este caso la contribución no queda explicita, simplemente ocurre la jugada n+1 teniendo un cierto número de fighas con una cierta probabilidad (de ganar, perder o quedar a mano)

Dinámica: el cambio que sufre el sistema está dado por el cambio en el número de fichas, así

$$s_{n+1} = \begin{cases} s_n + x_n & \text{(con probabilidad 1/2, de ganar)} \\ s_n & \text{(con probabilidad 1/6, de quedar igual)} \\ s_n - x_n & \text{(con probabilidad 1/3,de perder)} \end{cases}$$

Objetivo: maximizar la probabilidad de tener 6 o más fichas después de 2 jugadas. Nótese que el el planteamiento cambia si se quiere maximizar el número de fichas o la probabilidad de ganar.

Rel. Rec.: $f_n(s_n,x_n)$ = probabilidad acumulada de tener 6 o más fichas de la jugada n en adelante dado que tenemos s_n fichas, apostamos x_n y seguimos una política óptima.

entonces,

$$f_n(s_n,x_n) = (1/2)f^*_{n+1}(s_n+x_n)+(1/6)f^*_{n+1}(s_n)+(1/3)f^*_{n+1}(s_n-x_n)$$

donde $$f^*_n(s_n) = \max_{x_n} \left\{ f_n(s_n,x_n) \right\}$$

y $$f^*_3(s_3) = \begin{cases} 0, \text{ si } s_3 \quad 6 \text{ (perdiste la apuesta)} \\ 1, \text{ si } s_3 \quad 6 \text{ (ganaste)} \end{cases}$$

Mecanismo numérico :

para n = 2

$s_2 \backslash x_2$	$f_2(s_2,x_2)$: 0	1	2	3	4	5	6	$f^*_2(s_2)$	x^*_2
0	0	-	-	-	-	-	-	0	-
1	0	0	-	-	-	-	-	0	-
3	0	-	0	1/2	-	-	-	1/2	3
5	0	-	1/2	-	-	1/2	-	1/2	2,5
6	1	-	2/3	-	-	-	2/3	1	0

para n = 1

$s_1 \backslash x_1$	$f_1(3,x_1)$ 0	2	3	$f_1^*(3)$	x_1^*
3	1/2	1/3	7/12	7/12	3

La política óptima será apostar las 3 fichas en la primera jugada, existen tres resultados posibles:

ganar, en cuyo caso tenemos 6 fichas para la segunda jugada y la tabla dice que ya no apostamos, ya ganamos la apuesta

quedar igual, en cuyo caso apostamos de nuevo las tres fichas y tenemos una probabilidad en esta jugada, de 1/2 de ganar

perder, en este caso tenemos 0 fichas y ya no hay manera de ganar, perdimos la apuesta

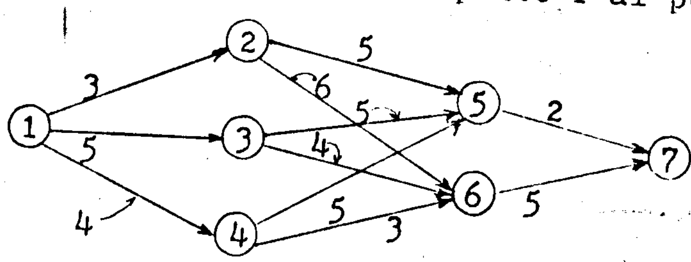
Podríamos resumir esta política óptima de la siguiente forma

$$x_1^* = 3, \begin{cases} \nearrow \text{si } s_2 = 6, & x_2^* = 0 \\ \longrightarrow \text{si } s_2 = 3, & x_2^* = 3 \\ \searrow \text{si } s_2 = 0, & x_2^* = 0 \end{cases}$$

Nota: se debe observar que este es un problema cuya estructura es probabilística, el problema número 5 no es de este tipo, habla de probabilidades pero el resultado queda perfectamente determinado, no en la forma de dependencia de resultados anteriores, así el 5 es determinístico y este probabilístico.

P R O B L E M A S   P R O P U E S T O S .

1.- Suponiendo que la siguiente red nos da la cantidad de material transportado m_{ij} del lugar i al lugar j, da la política óptima para maximizar la cantidad de material que puede mandarse del punto 1 al punto 7.



2.- El Seguro Social tiene un programa nuevo de técnicas en orientación para ayudar a los pacientes que llegan a realizar sus trámites y quire distribuirlas de la mejor manera. Dispone de 7 técnieas que por lo pronto va a colocar para prueba en 3 clínicas. La efectividad que estas técnicas pueden rendir se ha medido en relacion al número de pacientes, sus necesidades y el grado de desorientación que hay en ellos. La siguiente tabla muestra esta medida si se colocan x_i técnicas a la clínica i.

		Técnicas						
		1	2	3	4	5	6	7
Clí-	1	5	10	15	25	35	50	55
ni-	2	3	6	12	18	60	30	30
cas	3	20	35	45	55	30	65	65

¿ Cuántas técnicas deben colocarse en cada una de las tres clínicas para maximizar la ayuda ?

3.- Supon que en el problema de cargar un navío (problema # 4) N = 3 tipos diferentes de artículos y el peso y el valor estan dados en la siguiente tabla.

TIPO	VALOR	PESO (tons)
A	20	1
B	50	3
C	40	2

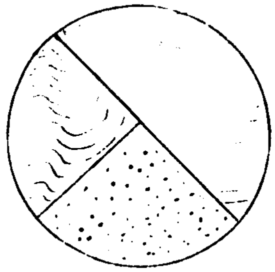
Obtén el número de artículos de cada tipo que deben manderse para maximizar el valor de la carga.

4.- Considera el problema de diseñar un sistema electrónico que consta de 4 componentes dispuestas en serie de manera que si una falla, todo el sistema falla. La confiabilidad dèl sistema puede mejorarse instalando unidades paralelas en cada componente. La siguiente tabla da la probabilidad $p_i(x_i)$ de que la componente i funcione si se instalan x_i unidades paralelas en la componente i (x_i=1,2,3) y el costo $c_i(x_i)$ de instalar x_i unidades paralelas en la componente i. La rpobabilidad de que el sistema funcione es el producto de de las probabilidades de que las respectivas componentes funcionen (por que?). Se cuenta con un máximo de $100 para la compra de las unidades paralelas. ¿Cuántas unida des paralelas deben instalarse en cada componente para maximizar la probabilidad de funcionamiento del sistema?

unid. parl.	comp.1 $p_1(x_1)$	$c_1(x_1)$	comp.2 $p_2(x_2)$	$c_2(x_2)$	comp.3 $p_3(x_3)$	$c_3(x_3)$	comp.4 $p_4(x_4)$	$c_4(x_4)$
1	.70	10	.50	20	.70	10	.60	20
2	.80	20	.70	40	.90	30	.70	30
3	.90	30	.80	50	.95	40	.90	40

5.- Supón que tienes $5 para apostar. La apuesta se lleva a cabo tirando una moneda, si sale águila ganas, si sale sol pierdes. ¿Cuál es la política óptima de apuesta para maximizar la probabilidad de tener exactamente $7 después de 3 jugadas ?

6.- Supón que vas a jugar un juego de azar. La ficha para apostar cuesta $5 y dispones de $25. El juego se llava a cabo con un dispositivo parecido a la ruleta, en el que hay 3 zonas como se muestra en la figura.



la zona es la mitad del círculo.

la zona es 1/4 del círculo

la zona es 1/4 del círculo

Si la bolita cae en la zona pierdes la apuesta. Si cae en la zona te pagan 1 a 1, y si cae en la zona te pagan 2 a 1. ¿ Cuál será la política óptima que maximice la probabilidad de duplicar el dinero que tienes después de cuatro apuestas ?

7.- Resuelve el siguiente problema de programación lineal por programación dinámica

$$\text{Max} \quad Z = x_1^2 - 3x_1 + 4x_2 - x_2^2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \quad 3$$

$$x_1 , x_2 \quad 0$$

8.- Un estudiante quiere formular su plan de estudios en cuanto a las materias optativas que va a estudiar durante los 5 años de su carrera. Necesita cada año aprobar una de 3 materias para poder inscribirse el siguiente año. Las probabilidades de aprobar estan dadas por $p_i(x_i)$ si su decisión fue inscribirse en la materia x_i durante el ano i. Por supuesto no puede acreditar nada el ano i+1 si no acreditó la materia del año i. Da el plantemiento del problema formulando la relación recursiva que maximiza la probabilidad total de que este estudiante complete su carrera.

I N V E N T A R I O S .

1.- Supón que la demanda D para una refacción de avión tiene una distribución exponencial con parámetro 1/50, es decir

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} 1/50\ e^{-\xi/50}, & \xi \geq 0 \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Este avión queda obsoleto en un año, así que toda la producción de la refaccion deberá hacerse ahora. El costo de producción en este momento es de \$1,000 por unidad (osea, c=\$1,000), pero se vuelve \$10,000 por unidad si se produce después,(esto es, p=\$10,000). El costo por almacenaje cargado al exceso de producción después del final del período de venta es de \$100 por unidad. Determina el número de partes necesario.

Solucion.- De los datos del problema tenemos :

λ = parámetro de la distribución = 1/50

c = 1,000

h = 100

p = 10,000

La demanda es exponencial negativa así que podemos emplear el resultado correspondiente dado en el modelo de un solo período:

$$y^* = -\lambda \ln\left(\frac{c+h}{p+h}\right) = -50 \ln\left(\frac{1000+100}{10000+100}\right)$$

$$= -50 \ln(1100/10100) = -50 \ln(0.1089108)$$

$$= -50(-2.21723) = 110.86$$

$y^* \cong 111$ partes o refacciones.

2.- Los pastelitos Merinola se distribuyen a las misceláneas diariamente. El costo de producción de un pastelito es de 40¢. La compañía los vende a las misceláneas \$1.00 siempre y cuando la tienda los venda el mismo día Los pastelitos que no se vendieron los recoje la compañía Merinola que tiene manera de venderlos a 30¢ si son viejos (de uno o más días). Este valor de recuperación representa el costo por almacenaje (h=-30¢). El costo por demanda insatifecha se estima en 65¢ por pastelito. Si la demanda tiene una distribución uniforme entre 1,000 y 2,000 pastelitos, encuentra el número óptimo de pastelitos que debe producirse diariamente.

Solución.- Los costos son los siguientes

$c = 40$

$h = -30$

$p = 65$

Las características del problema se ajustan al modelo de un solo período con demanda uniforme sin costo fijo. La distribución de la demanda es

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} 1/1000, & 1000 \leq \xi \leq 2000 \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

El resultado que podemos emplear es $\Phi(y^*) = \dfrac{p-c}{p+h}$

por lo tanto tenemos que obtener la función de distribución acumulada para la demanda.

$$\int_{1000}^{y} \frac{1}{1000}\, d\xi = \left.\frac{\xi}{1000}\right|_{1000}^{y} = \frac{y-1000}{1000}$$

por lo tanto,

$$\Phi(y) = \begin{cases} \dfrac{y-1000}{1000}, & 1000 \leq y \leq 2000 \\ 0, & y \leq 1000 \\ 1, & y \geq 2000 \end{cases}$$

entonces,

$$\Phi(y^*) = \frac{y^* - 1000}{1000} = \frac{p-c}{p+h} = \frac{65-40}{65+(-30)} = 5/7$$

despejando y^* de $(y^* - 1000)/1000 = 5/7$, tenemos

$$y^* = 5000/7 + 1000 = 1714.28$$

$\therefore \quad y^* = 1700$ pastelitos diarios.

3.- Considera un modelo de inventarios de un solo período con $h = \$2.00$, $p = \$5.00$ y $c = \$1.00$. La función de densidad de la demanda esta dada por

ξ	0	1	2	3	4	5
$\varphi(\xi)$	.10	.20	.25	.20	.15	.10

Encuentra el valor óptimo y^* y da la política de producción suponiendo un inventario inicial de una unidad.

Solución.- En este caso podemos usar los resultados del modelo de un solo período sin costo fijo y demanda uniforme

Así, $\dfrac{p - c}{p + h} = (5 - 1)/(5 + 2) = 4/7 = 0.57$

por ortro lado,

$$\begin{aligned}
\Phi(0) &= 0.10 \\
\Phi(1) &= 0.10 + 0.20 = 0.30 < 0.57 \\
\Phi(2) &= 0.30 + 0.25 = 0.55 < 0.57 \\
\Phi(3) &= 0.55 + 0.20 = 0.75 > 0.57
\end{aligned}$$

$\therefore$ y^* está entre 2 y 3 unidades, más cerca de 2 que de 3, entonces

$$y^* = 2$$

la política óptima estará dada por:

si el inventario inicial es mayor que 2 ordenamos $2 - x$ unidades, si es menor que 2 no ordenamos nada. En este caso ordenamos $2-1 = 1$.

4.- La demanda semanal de un producto se estima que está dada por

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{5}(\xi - 1), & 1 \leq \xi \leq 6 \\ 0, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

El costo del producto es de \$75 , el costo de almacenaje es \$5 y el costo por faltante es \$15. Usando el factor de descuento $\alpha = .95$, encuentra la política óptima de inventario para este problema de horizonte infinito.

Solución.- Queremos, por los resultados del modelo

$$\frac{dL(y)}{dy} + c(1 - \alpha) = 0$$

para obtener y^*, donde

$$L(y) = p\int_y^{\infty}(\xi-y)\varphi_D(\xi)d\xi + h\int_0^y(y-\xi)\varphi_D(\xi)d\xi$$

con $p = 15$, $h = 5$, $c = 75$, $\alpha = 0.95$ y sustituyendo estos costos en la ecuación de $L(y)$ y resolviendo, obtenemos

$$L(y) = 15\int_y^6(\xi - y)\frac{1}{5}(\xi - 1)d\xi + 5\int_1^y(y-\xi)\frac{1}{5}(\xi-1)d\xi$$

$$= 3(18 - 12y + y^3/3 - y^2 - y/2 - 1/6)$$

$$= y^3 - 3y^2 - 37.5y + 53.5$$

derivando tenemos

$$\frac{dL(y)}{dy} = 3y^2 - 6y - 37.5$$

de la formula se obtiene

$$3y^2 - 6y - 37.5 + 75(1-0.95) = 0$$

y despejando y de esta ecuación de segundo grado,

$$y = \frac{6 \pm 441}{6} = \frac{6 \pm 21}{6}$$

tomando, por supuesto, el valor positivo

$$y^* = 4.5$$

por lo tanto, cada período debe tenerse $y^* = 4.5$ productos aproximadamente, es decir debe ordenarse la cantidad que falta para tener, digamos 5 productos (ya que ordenar medio no es factible) si el inventario al principio de la semana es menor que 5, si es mayor , no ordenamos nada.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1.- La compañía ABC tiene una demanda aleatoria D para un determinado tipo de máquina. Esta demanda tiene una distribución exponencial con parámetro 1/20. Este tipo de máquina no será producida con las mismas características en los siguientes años, por lo que toda la producción para abastecer a los distribuidores este año debe hacerse ahora. El costo de producción es de $1000 por unidad pero este costo aumenta a $1500 si se produce sobre pedido después. El costo de almacenaje cargado al final del período es $15 por unidad. Determina el número óptimo de piezas que hay que producir.

2.- Un vendedor de tortas distribuye su producto diariamente a los puestos de fritangas de Cd, Universitaria. El costo deproducir una torta es de $1.30, el vendedor las vende a los puestos a $2.50, Las tortas que no se vendieron las recoje y en la noche en otra zona, las puede vender a $0.90. El costo por no cubrir la demanda se estima en $1.40 por torta que pidieron y no se tenía, Si la demanda tiene una distribución uniforme entre 1000 y 1800 tortas encuentra el número óptimo de producción diaria para el vendedor.

3.- La demanda mensual del producto "RB-40" de una fábrica de herramientas se estima que sigue una distribución como la siguiente:

$$\varphi_D(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{3}(\xi - 1), & 1 \leq \xi \leq 4 \\ 0, & \text{en otra parte} \end{cases}$$

El costo de este producto es de \$35 , el costo de almacenaje es \$4 y el costo por faltante por producto cada período es \$20 . Usando el factor de descuento $\alpha = .995$ encuentra la política óptima para el control de inventarios de este problema de horizonte infinito.

5.- Un sistema de inventarios de un solo período tiene un costo de almacenamiento por unidad de \$7 . El costo de producción de cada pieza es de \$1 , Cada vez que existe faltante en producción se estima un costo para la compañía de \$5 por pieza. Encuentra el valor óptimo y* y da la política óptima suponiendo un inventario inicial de 2 unidades. La densidad de la probabilidad para la demanda esta dada en la siguiente tabla:

ξ	0	1	2	3	4	5
$\varphi(\xi)$	.10	.15	.23	.20	.13	.07

RELACION DE ALUMNOS CON REGISTRO EN LA BIBLIOTECA

ENTA	NOMBRE	REGISTRO	ANTERIOR	CECAFI
2227	GARCIA CASTILLO JESUS EDUARDO	3242	05540	
5222	GARCIA CASTILLO JOSE LUIS	3243	01188	001188
3766	GARCIA CASTILLO SERGIO ARTURO	3244	05803	005803
5996	GARCIA CELIS EFRAIN	3245	01413	001413
4157	GARCIA CERDA ROSA FCA	3246	08730	008730
9329	GARCIA CHARGOY VICTOR MANUEL A	3247	09012	009012
4872	GARCIA CHAVEZ JERONIMO	3248	03003	003003
2203	GARCIA CHAVEZ JOEL	3249	94445	
3993	GARCIA CHIAPAS J LUIS	3250	09215	009215
5300	GARCIA COLIN FRANCISCO	3251	09655	009655
0821	GARCIA COLLAZO RICARDO	3252	05490	005490
7786	GARCIA CORONA ENRIQUE	3253	03506	
8423	GARCIA CORREA VICTOR TONATIUH	3254	08554	008554
4225	GARCIA CORS SERRANO JOSE ANTONIO	3255	04594	
9657	GARCIA CORTES EDGAR	3256	03351	003351
6872	GARCIA CORTES RICARDO	3257	02892	002892
5115	GARCIA CRUZ ADOLFO	3258	08922	008922
5707	GARCIA CRUZ FRANCISCO ARMANDO	3259	07726	
9727	GARCIA CRUZ IRMA	3260	00752	000752
9141	GARCIA CRUZ JOSE FEDERICO	3261	03458	
7695	GARCIA CRUZ JULIO	3262	00510	000510
8355	GARCIA CUEVAS ANA ISABEL	3263	06825	006825
2767	GARCIA DE ANDA AGUSTIN	3264	05978	
4638	GARCIA DE LA CADENA RAMIREZ C M	3265	03567	003567
6876	GARCIA DE LA CADENA RAMIREZ D	3266	08676	
4195	GARCIA DE LA MERCED JAVIER A	3267	05179	005179
9261	GARCIA DE LA ROSA NAZARIO	3268	00307	
1511	GARCIA DE LEON CAMARENA MARISA	3269	04672	004672
7758	GARCIA DE LEON MA DE LOURDES	3270	05444	
7566	GARCIA DE LEON MARTINEZ EUGENIO	3271	09202	
5670	GARCIA DE LUNA ADRIAN	3272	02789	
4285	GARCIA DEL GALLEGO MARIANO	3273	07382	
3890	GARCIA DIAZ MA TERESA	3274	05803	
6196	GARCIA DIAZ ROSA LOURDES	3275	06381	006381
5039	GARCIA DOMINGUEZ AMBROSIO ADOLFO	3276	01437	
6551	GARCIA DOMINGUEZ JOSE EDUARDO	3277	03981	
7638	GARCIA ENRIQUEZ ALEJANDRO	3278	08285	008285
9223	GARCIA ESPINOSA LIZ PATRICIA	3279	00307	
1296	GARCIA ESPINOSA VICTOR SERGIO	3280	00395	000395
6889	GARCIA ESTRADA ARMANDO	3281	02892	
5511	GARCIA FERNANDEZ GALICIA CARLOS	3282	00402	000402
0717	GARCIA FIGUEROA MARTINEZ PEDRO A	3283	04232	
783	GARCIA FIGUEROA SIMITRIO	3284	03301	003301
511	GARCIA FLORES JUAN CARLOS	3285	04846	
98	GARCIA FLORES ROGELIO	3286	07835	
631	GARCIA FLORES RUBEN EDUARDO	3287	05716	
919	GARCIA FRANCISCO RAMON	3288	00446	
7418	GARCIA FUENTES ADRIAN OCTAVIO	3289	09221	009221
9020	GARCIA FUENTES HORACIO	3290	08729	008729
2417	GARCIA FUENTES JAIME ALEJANDRO	3291	03638	
0436	GARCIA GALVEZ HUMBERTO	3292	07289	007289
4231	GARCIA GAMA EDUARDO GABRIEL	3293	05422	005422
860	GARCIA GARCIA ARTURO	3294	09093	
249	GARCIA GARCIA ARTURO	3295	03543	003543