



APUNTES DE

MECANICA DE MATERIALES

(PRIMER CURSO)

*Francisco Robles F.V.
Oscar M. González C.
Roberto Meli P.*



() () () () () ()

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA CIVIL, TOPOGRAFICA Y GEODESICA
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS



FACULTAD DE INGENIERIA

NOTA PRELIMINAR

En estos apuntes se pretende cubrir el material que se enseña en los cursos de Mecánica de Materiales de la carrera de Ingeniería Civil en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M.

Se ha procurado combinar la teoría con las aplicaciones prácticas y se ha puesto énfasis en los aspectos de la Mecánica de Materiales de más interés para el ingeniero civil. Así los conceptos fundamentales de la Mecánica de Materiales se deducen a partir del estudio del comportamiento de los elementos estructurales usuales. Estos conceptos se aplican entonces al dimensionamiento de estos elementos en los materiales más comunes (acero, concreto reforzado, mampostería, madera).

En el desarrollo de los apuntes se tuvo presente que al finalizar el curso el alumno debe ser capaz de dimensionar estructuras isostáticas sencillas, conociendo las cargas que actúan sobre ellas.

Se ha incluido ejemplos resueltos y comentados que ilustran y aclaran los conceptos expuestos en el texto. Al final de la mayoría de las secciones se hacen sugerencias sobre lecturas complementarias. Estos se han escogido por la claridad de la exposición, procurando que estén a un nivel fácilmente accesible para el lector.

Se ha reducido a un mínimo el material meramente informativo o descriptivo, que se hace obsoleto rápidamente y que no contribuye a la formación del estudiante.

I N D I C E

I. INTRODUCCION Y CONCEPTOS BASICOS

1. LA MECANICA DE MATERIALES Y LA INGENIERIA ESTRUCTURAL

Francisco Robles F.V. y
Oscar M. González Cuevas

2. CONCEPTOS BASICOS PARA DIMENSIONAMIENTO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES (Pág. 10)

2.1 Características acción respuesta (10), 2.2.- Resistencia, factor de seguridad y esfuerzos permisibles (11), 2.3.- Condiciones de servicio y límites tolerables (13), 2.4.- Aplicación del concepto acción-respuesta a un caso particular (13)

Francisco Robles F.V. y
Oscar M. González Cuevas

II.

3. CARGA AXIAL EN ELEMENTOS CORTOS

3.1.- Introducción (16), 3.2.- Comportamiento (16), 3.3.- Esfuerzo y deformación, 3.4.- Características de los materiales obtenidos a partir de las gráficas esfuerzo-deformación unitaria (22), 3.5.- Conceptos generales sobre dimensionamiento (32), 3.6.- Miembros de acero (36), 3.7.- Elementos de concreto reforzado (54), 3.8.- Elementos de mampostería (81), 3.9.- Miembros de madera (101).

Oscar M. González Cuevas
Francisco Robles F.V.
Roberto Meli Piralla

- Ejercicios resueltos (Pág. 148)
- Ejercicios propuestos (Pág. 168)

G- 601705

1. LA MECÁNICA DE MATERIALES Y LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL

Francisco Robles F. V. y
Oscar M. González Cuevas

Una de las ramas principales de la Ingeniería Civil es la Ingeniería Estructural, cuya finalidad es el diseño y la construcción de estructuras. Para tener una idea del campo que abarca la Mecánica de Materiales es útil bosquejar brevemente el proceso de diseño estructural. (No se comentarán aquí los aspectos constructivos de la Ingeniería Estructural, que son materia de los cursos de construcción).

Una estructura puede concebirse como un sistema, es decir, como un conjunto de partes o componentes que se combinan en una forma ordenada para cumplir una función dada. La función puede ser: salvar un claro, como en los puentes; encerrar un espacio, como en los distintos tipos de edificios; o contener un empuje, como en los muros de retención, tanques o silos. La estructura debe cumplir la función a la que está destinada, con un grado de seguridad razonable y de manera que en las condiciones normales de servicio tenga un comportamiento adecuado. Además, deben tenerse en cuenta otros requisitos, tales como mantener el costo dentro de límites económicos y satisfacer determinadas exigencias estéticas.

En el desempeño de la función a la que está destinada, la estructura estará sujeta a una serie de acciones o cargas que debe ser capaz de soportar. La función esencial de un puente, por ejemplo, es salvar un claro, facilitando el paso de vehículos sobre un obstáculo. Para realizar esta función la estructura deberá ser capaz de resistir no solamente el peso de los vehículos sino también su peso propio, así como los efectos de acciones tales como el viento, los sismos y el empuje del

agua. Consideraciones semejantes se pueden hacer a propósito de un edificio, una presa o cualquier otra estructura.

Lo que se busca, entonces, en el diseño estructural es crear estructuras que tengan un comportamiento adecuado bajo las acciones a las que pueden quedar sujetas. Esto implica un conocimiento de la relación que existe entre las acciones que obran sobre la estructura, las características geométricas de ésta y los materiales de que está construida, y las respuestas de la estructura ante las acciones, es decir, su comportamiento. El problema del diseño estructural se ilustra esquemáticamente en la fig 1.1.

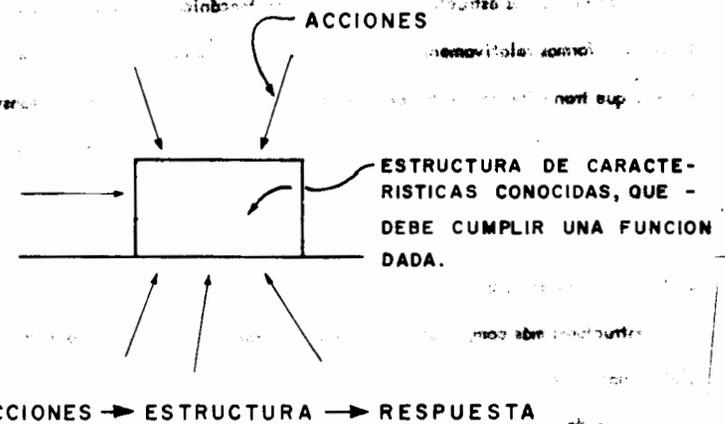


Fig. 1.1 Representación esquemática del problema de diseño estructural.

La Mecánica de Materiales se apoya en la Estática y la Dinámica, que estudian el equilibrio de los cuerpos rígidos y proporcionan herramientas para determinar las acciones internas (fuerzas axiales, momentos flexionantes o torsionantes y fuerzas cortantes) producidas por las acciones o fuerzas externas. El estudiante de Mecánica de Materiales debe estar familiarizado con lo esencial de las disciplinas mencionadas. Debe tener los conceptos de carga axial, momento y fuerza cortante lo suficientemente claros para que no presente problemas el trazo de diagramas que representen la variación de las diversas acciones internas a lo largo de los ejes de un elemento estructural sencillo, producidas en él por un determinado sistema de fuerzas o acciones externas. En otras palabras, debe ser capaz de analizar elementos estructurales isostáticos sencillos.

Los elementos estructurales estudiados en Mecánica de Materiales suelen limitarse a formas relativamente simples. Son elementos estructurales típicos el tensor, que transmite cargas de compresión; la viga, que transmite cargas transversales a su eje; la losa, que distribuye cargas que actúan transversalmente al plano formado por sus dimensiones mayores; y el muro, que resiste cargas verticales al mismo tiempo que cargas horizontales que pueden actuar tanto en su plano como normales a él. Estos elementos a veces se presentan aislados, pero generalmente forman parte de estructuras más complejas. El problema de analizar estas estructuras más complejas, para el cual no son suficientes las herramientas que proporciona la Estática, queda fuera de los programas usuales de Mecánica de Materiales. Se trata en los cursos que en los programas de la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. se denominan Análisis Estructural. Es claro que los métodos de dimensionamiento estudiados

en los cursos de Mecánica de Materiales son aplicables a estructuras de cualquier grado de complejidad.

El problema global del diseño estructural se estudia en el curso que lleva el mismo nombre y que sigue al primer curso de Análisis. En este curso se analizan las finalidades del diseño, se comparan los diversos criterios de diseño, y se estudian las distintas formas y sistemas estructurales y las fuerzas o acciones que deben considerarse en su proyecto.

Como resumen de las consideraciones se presenta a continuación una breve descripción de las asignaturas del área de Ingeniería Estructural en el programa de estudios actualmente en vigor (1980) en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M. para la carrera de Ingeniero Civil. A través de esta descripción puede apreciarse la relación entre la Mecánica de Materiales y las demás asignaturas del área (fig. 1.2).

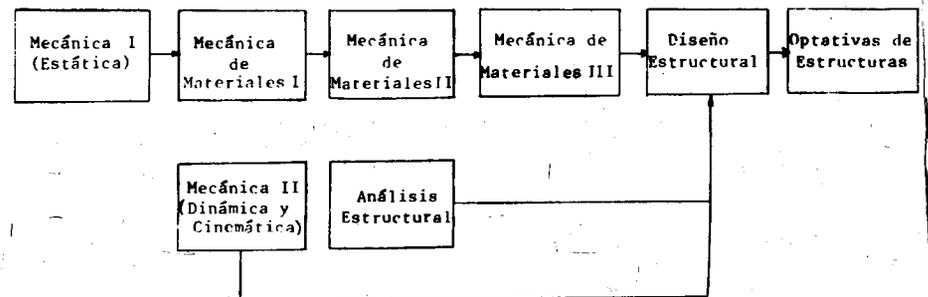


Fig. 1.2 Materias del campo de Ingeniería Estructural de la Facultad de Ingeniería U.N.A.M.

Al diseñar una estructura para que cumpla una determinada función, el proyectista se ve confrontado con todo un conjunto de problemas. ¿Qué forma estructural será la más adecuada? ¿Un arco? ¿Un marco rígido? ¿Una estructura colgante? ¿Qué material es el más apropiado? Elegida una forma estructural deberán cuantificarse las acciones que se supone actuarán sobre ella. Después será necesario escoger las dimensiones de los diversos componentes de la estructura de manera que ésta pueda cumplir su función con una probabilidad razonable de que no quede fuera de servicio durante su vida útil por rotura o por alguna otra causa, como, por ejemplo, la deformación excesiva. Todos estos problemas deben resolverse dentro de ciertas limitaciones económicas y estéticas.

Uno de los problemas fundamentales del diseño, entonces, es el dimensionamiento, es decir, la determinación de las dimensiones que deben tener los elementos que forman las estructuras. Para ello deberán conocerse las propiedades mecánicas de los materiales utilizados en su fabricación y deberá contarse con modelos matemáticos que idealicen las relaciones entre estas propiedades, la geometría de los elementos estructurales y los efectos producidos por las acciones que actúan sobre ellos. Es precisamente la Mecánica de Materiales (*) la disciplina que aporta los conocimientos y herramientas requeridos para el dimensionamiento de elementos estructurales. De ahí su importancia en el diseño estructural. (El problema del dimensionamiento se trata con más detalle en el tema titulada "Conceptos básicos para el dimensionamiento de elementos estructurales").

(*) Otros nombres utilizados para designar el campo cubierto por esta materia son: Resistencia de Materiales, Mecánica Estructural, Comportamiento de Materiales, Mecánica de los Sólidos, etc.

En los cursos de Mecánica de Materiales, con que se inicia la secuencia de cursos de Ingeniería Estructural, se estudian las propiedades de los materiales más comúnmente utilizados en la construcción y el comportamiento de elementos estructurales hechos de estos materiales y se desarrollan métodos para su dimensionamiento.

Al finalizar los cursos de Mecánica de Materiales se considera que el alumno debe ser capaz de dimensionar estructuras sencillas isostáticas, conocidas las cargas que actúan sobre ellas.

En el curso de Análisis Estructural I se estudian los métodos fundamentales utilizadas para analizar estructuras hiperestáticas, sujetas a sistemas de cargas conocidas. Se supone que en este curso se aplican los métodos de dimensionamiento estudiados en los cursos de Mecánica de Materiales a alguna de las estructuras analizadas con el fin de aplicar los conocimientos adquiridos y de hacer resaltar la interacción que existe entre el análisis y el dimensionamiento.

El proceso completo del diseño de sistemas estructurales se estudia en el curso de Diseño Estructural. Se incluye la cuantificación de las diversas acciones externas que deben soportar las estructuras, la elección de tipo estructural, el análisis de los efectos de las fuerzas externas sobre la estructura, es decir, la determinación de las acciones internas, y el dimensionamiento de los elementos estructurales. Se integran aquí los conocimientos adquiridos en los cursos anteriores. Al terminar el curso el alumno debe poder diseñar estructuras hiperestáticas sencillas de acero, concreto reforzado, mampostería o madera. (Se entiende por "diseño" el proceso completo mediante el cual se crea una estructura. El término "dimensionamiento" se refiere a la parte del diseño cuya finalidad es determinar las dimen-

siones de los miembros estructurales).

Siguen al curso de Diseño Estructural varias materias optativas en que el alumno tiene la oportunidad de profundizar los conocimientos adquiridos en los cursos anteriores.

REFERENCIAS

1. E. P. Popov, "Introducción a la Mecánica de Sólidos", Editorial Limusa, México, 1976.
2. K. H. Gerstle, "Basic Structural Design", Mc Graw-Hill, -- Nueva York, 1967.
3. F. R. Shanley, "Mecánica de Materiales", Mc Graw-Hill de -- México, México, 1971.
4. F. B. Seely y J. O. Smith, "Resistencia de Materiales", -- UTEHA, México, 1967.
5. S. P. Timoshenko y J. M. Gere "Mechanics of materials", Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1972.
6. F. L. Singer, "Resistencia de materiales", Harper and Row Ediciones del Castillo, Madrid, 1971.
7. J. N. Cernica, "Resistencia de materiales", CECSA, México, 1968.
8. E. Torroja, "Razón y ser de los tipos estructurales".

2. CONCEPTOS BASICOS PARA EL DIMENSIONAMIENTO DE ELEMENTOS

ESTRUCTURALES

Francisco Robles F. V. y
Oscar M. González Cuevas

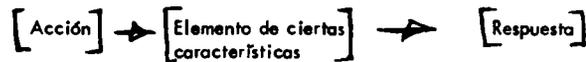
2.1 CARACTERISTICAS ACCION-RESPUESTA

El dimensionamiento de elementos estructurales consiste en la determinación de las dimensiones y características que estos requieren para cumplir una cierta función con un grado de seguridad razonable y de manera que su comportamiento bajo condiciones de servicio o de trabajo (*) sea satisfactorio. Para ello hace falta conocer las relaciones que existen entre las características de los elementos estructurales, las fuerzas o solicitaciones que deben soportar y los efectos producidos en los elementos por dichas fuerzas. En otras palabras, es necesario conocer las características acción-respuesta del elemento por dimensionar.

Las solicitaciones que obran sobre un elemento estructural son las fuerzas o acciones a las que está sujeto. Entre éstas se encuentran, por ejemplo, el peso propio, las cargas vivas, los cambios de temperatura y los hundimientos diferenciales. La respuesta de un elemento estructural es su comportamiento bajo una determinada acción. Puede expresarse como deformación, agrietamiento, durabilidad, vibración. Desde luego, la respuesta es función de las características del elemento estructural considerado.

(*) Por "condiciones de servicio o de trabajo" se entiende las condiciones de carga que se supone serán las existentes durante el uso normal de una estructura. Los elementos del sistema de piso de un aula, por ejemplo, en condiciones de servicio, deberán soportar, además de un peso propio, el peso de los muebles y alumnos que se considere existirán normalmente en el aula. El concepto de seguridad se aclara en el inciso 2.2.

Si se conocen las relaciones



para todas las combinaciones posibles de acciones y características de un elemento estructural se tendrá una base racional para establecer un método de dimensionamiento.

En estos apuntes se pretende proporcionar herramientas para describir las relaciones acción-respuesta y establecer modelos matemáticos que las idealicen. Se estudiarán únicamente las combinaciones de acciones y características de elementos estructurales usualmente consideradas en el dimensionamiento. Evidentemente el estudio de las características acción-respuesta de los elementos estructurales requiere el conocimiento de las propiedades de los materiales que los constituyen. El concepto de acción-respuesta es también aplicable al estudio de las propiedades de los materiales.

2.2 RESISTENCIA, FACTOR DE SEGURIDAD Y ESFUERZOS PERMISIBLES

La primera condición que debe satisfacer un elemento estructural es que sea suficientemente resistente. En términos de las características acción-respuesta, se puede definir la resistencia de un elemento estructural a una acción determinada, como el valor máximo que dicha acción puede alcanzar. Una vez determinada la resistencia a una cierta acción se compara este valor máximo con el valor correspondiente bajo las condiciones de servicio. De esta comparación se origina el concepto de factor de seguridad o factor de carga. De un modo rudimentario, éste puede definirse como el cociente entre la resistencia y el valor estimado de la acción

correspondiente bajo las condiciones de servicio.

Al dimensionar un elemento estructural se debe procurar que tenga un factor de seguridad razonable. Mediante este factor se trata de tomar en cuenta la incertidumbre sobre los efectos de ciertas acciones y sobre los valores usados en varias etapas del proceso. Entre las principales incertidumbres se pueden mencionar el desconocimiento de las solicitaciones reales y su distribución, la validez de las hipótesis y simplificaciones utilizadas en el análisis, la diferencia entre el comportamiento real y el supuesto, y la discrepancia entre los valores reales de las dimensiones y de las propiedades de los materiales con los especificados.

Una forma indirecta de dimensionar elementos estructurales de manera que tengan un margen de seguridad razonable consiste en mantener los esfuerzos producidos por las solicitaciones de trabajo o de servicio por debajo de unos esfuerzos permisibles. Estos esfuerzos permisibles o de trabajo se especifican como una fracción de la resistencia de los materiales a la acción considerada. Los esfuerzos permisibles se fijan con base en la experiencia de manera que la seguridad y el comportamiento de los elementos sean adecuados. Un inconveniente de este método de dimensionamiento, comúnmente denominado de esfuerzos de trabajo, es que el grado de seguridad no es uniforme, ya que no puede medirse en todos los casos el factor de seguridad por la relación entre las resistencias de los materiales y los esfuerzos permisibles. En otras palabras, la relación entre la resistencia del material y los esfuerzos de trabajo no es siempre igual a la relación entre la resistencia del elemento y su solicitación de servicio.

El procedimiento de dimensionamiento al que se tiende en la actualidad es el a veces llamado plástico. Los elementos se dimensionan para que tengan una resistencia determinado. El procedimiento consiste en multiplicar las solicitaciones de servicio por un factor de carga y obtener así la resistencia que debe darse al elemento para contar con la seguridad deseada. En estos apuntes se ilustrará la aplicación de los criterios de dimensionamiento descritos.

2.3 CONDICIONES DE SERVICIO Y LIMITES TOLERABLES

A semejanza con el problema de resistencia, para garantizar que una estructura tenga un comportamiento aceptable bajo condiciones de servicio se comparan los valores de las respuestas (deformaciones, agrietamiento, durabilidad), correspondientes a las acciones estimadas, con ciertos límites prestablecidos, que la experiencia ha indicado son satisfactorios.

2.4 APLICACION DEL CONCEPTO ACCION-RESPUESTA A UN CASO PARTICULAR

Considérese el voladizo mostrado en la fig. 2.1 que está sujeto a la acción de una carga vertical P que varía desde un valor nulo hasta aquel que produce el colapso. La característica acción-respuesta más inmediata es la curva carga-deflexión, presentada también en la figura.

En términos de esta característica es posible definir cuatro etapas en el comportamiento del voladizo:

- Una etapa inicial elástica, donde las cargas son proporcionales a las deformaciones. Normalmente se pretende que bajo las condiciones permanentes de servicio (excluyendo las cargas de corta duración como viento o sismo), la estructura se encuentre en esta etapa. La carga de servicio se ha marcado en la figura como P_s y la deformación correspondiente como Z_s .
- Una etapa intermedia donde la relación carga-deformación ya no es lineal.
- Una etapa plástica, donde se producen deformaciones relativamente grandes para incrementos pequeños o nulos de las cargas. La resistencia P_r se encuentra en esta etapa. Debido a la forma de la curva es difícil establecer cual es la deformación correspondiente a la resistencia.
- Una etapa inestable, caracterizada por una rama descendente hasta el colapso, donde a mayores deformaciones la carga disminuye.

Carga P

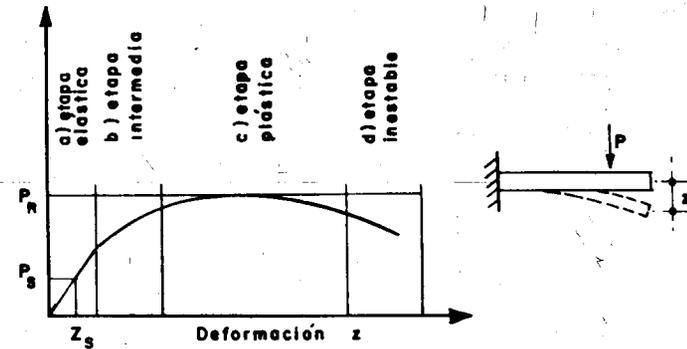


Fig. 2.1 Característica carga-deformación.

De la ilustración se puede definir el factor de seguridad como el cociente P_r/P_s . La estructura tendrá una resistencia adecuada si este factor es mayor que un valor predeterminado considerado como aceptable.

Para investigar si el comportamiento bajo condiciones de servicio es satisfactorio se deberá comparar el valor de la deformación correspondiente a P_s con ciertos valores prestablecidos que se estimen tolerables, de acuerdo con experiencias anteriores.

Es interesante hacer notar que en la etapa plástica, a una variación muy pequeña de la carga corresponde una variación importante en la deformación de la estructura. Por lo tanto, si las acciones en esta etapa se determinan a partir de las deformaciones, errores importantes en la estimación de éstas producirán sólo variaciones insignificantes en el valor de la acción. Por el contrario, es difícil predecir en esta etapa el valor de la deformación que corresponderá a una carga determinada.

El ejemplo anterior muestra claramente que es conveniente conocer las relaciones acción-respuesta correspondientes a una variación de P desde un valor nulo hasta el que produce el colapso. Esta información permite conocer el grado de seguridad de la estructura y estimar el intervalo de carga bajo el cual el voladizo se comportará satisfactoriamente.

3. ELEMENTOS CORTOS SOMETIDOS A CARGAS AXIALES

Oscar M. González Cuevas
Francisco Robles F. V.
Roberto Meli Piralla

3.1 INTRODUCCION

Existen algunas estructuras cuyos miembros o elementos se encuentran sometidos a cargas axiales de tensión o de compresión. Por ejemplo, los miembros de armaduras con uniones articuladas, los tirantes, algunos sistemas de cables, etc. En este capítulo se presentan métodos para dimensionar este tipo de elementos. También se presenta una descripción del comportamiento de especímenes de ensayo sometidos a cargas axiales. Del estudio de dicho comportamiento se deducen las principales características de los materiales estructurales y se introducen los conceptos de esfuerzo y de deformación unitaria. Estos conceptos se utilizan en otros capítulos para el dimensionamiento de miembros sometidos a otras acciones o a combinaciones de acciones.

No se incluyen elementos en los que existen efectos de esbeltez importantes, o sea, elementos sometidos a cargas de compresión y cuya relación altura/lado sea lo suficientemente grande para que los llamados momentos de segundo orden sean de magnitud considerable, o para que rija la inestabilidad por pandeo.

3.2 COMPORTAMIENTO

El comportamiento bajo cargas axiales se estudia generalmente sometiendo a especímenes de ensayo a cargas de tensión o compresión. El tipo de espécimen y las características del ensayo varían según el material del elemento. Para cada material, existen especímenes estándar, o sea, especímenes cuyas dimensiones y procedimientos

de fabricación están definidos, y ensayos en los que se han especificado el método de sujeción del espécimen en la máquina de ensayo, la duración del ensayo, etc. Las normas de ensayo más usadas en nuestro medio son las de la Dirección General de Normas de la Secretaría de Industria y Comercio (DGN) y las de la American Society for Testing and Materials (ASTM).

Con el fin de ilustrar en qué consiste un ensayo y el tipo de información que se obtiene de los mismos se describe a continuación el ensayo a tensión de una barra de acero (fig 3.1). El ensayo se efectúa en una barra de aproximadamente 50 cm. de longitud, la cual se coloca en una máquina provista de mordazas que la sujetan y le transmiten una fuerza axial de tensión. La máquina está provista también de un sistema para medir la magnitud de la carga aplicada en un instante cualquiera.

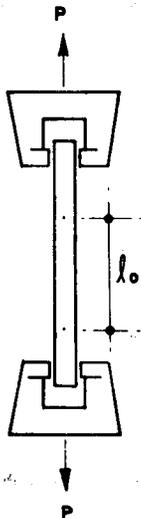


Fig. 3.1 Esquema de un ensayo de tensión.

Para realizar el ensayo, se va aplicando carga de manera continua al espécimen, y se miden los alargamientos de la porción de espécimen con longitud de medición, correspondientes a diferentes valores de la carga aplicada. Se obtiene de esta manera una gráfica carga-deformación como la representada esquemáticamente en la fig 3.2.

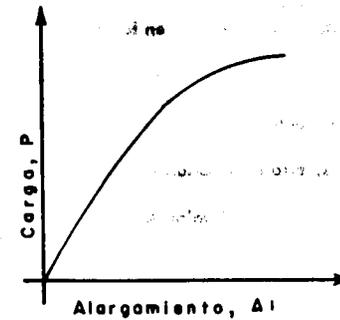


Fig. 3.2 Gráfica carga-alargamiento

En forma similar a la descrita anteriormente, pueden realizarse ensayos en compresión axial, en los cuales se miden los acortamientos correspondientes a distintos valores de la carga. Estos ensayos se realizan en especímenes cuya relación altura/lado o altura/diámetro es del orden de dos o tres, como máximo, para evitar problemas de esbeltez. En algunos materiales, las gráficas compresión-acortamiento son similares a las gráficas tensión-alargamiento, mientras que en otros son completamente diferentes.

Las cargas que se miden en ensayos como los descritos anteriormente dependen de las características del material y del tamaño de la sección transversal del espécimen de ensaye. Las deformaciones, a su vez, dependen del material y de la longitud de medición que se elija; mientras mayor sea esta longitud de medición, - mayores serán las deformaciones.

Con objeto de obtener gráficas que permitan estudiar las características de los materiales, independientemente de la sección transversal del espécimen de ensaye y de la longitud de medición, se acostumbra transformar las gráficas carga-deformación en gráficas esfuerzo-deformación unitaria. Estos últimos parámetros son adimensionales y, por la tanto, las gráficas esfuerzo-deformación unitaria son iguales para un mismo material independientemente de las características del espécimen de ensaye. En la sección 3.3 se presentan los conceptos de esfuerzo y de deformación unitaria y la forma en que se obtienen a partir de la carga y de las deformaciones medidas en los ensayos. Las características de los materiales que se obtienen de las gráficas esfuerzo-deformación, los detalles más importantes de estas gráficas, y la forma de las gráficas para los materiales más usados en ingeniería civil se presentan en la sección 3.4

3.3 ESFUERZO Y DEFORMACION

3.3.1 Esfuerzo

Supóngase que en una barra sometida a una carga axial de tensión se hace un corte perpendicular al eje de la barra fig 3.3-a. Por equilibrio de las fuerzas que actúan en dirección paralela al eje, en la sección transversal deben existir fuerzas por unidad de área como las mostradas en la fig 3.3-b. Estas fuerzas por unidad de área reciben el nombre de esfuerzos.

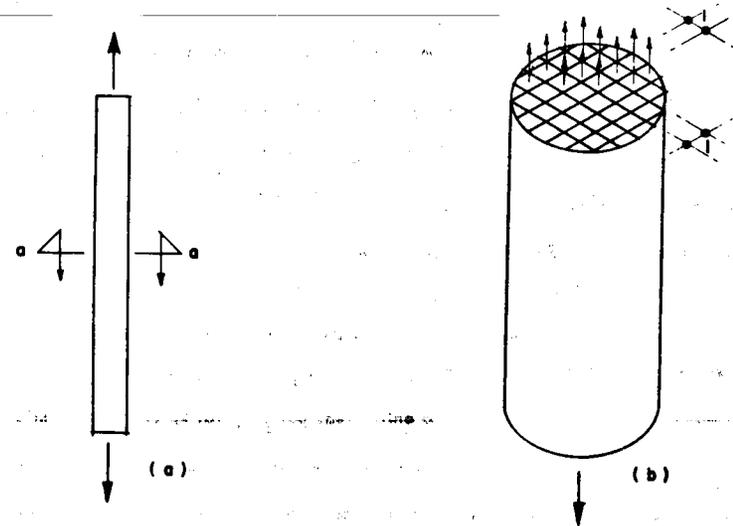


Fig. 3.3 Concepto de esfuerzo.

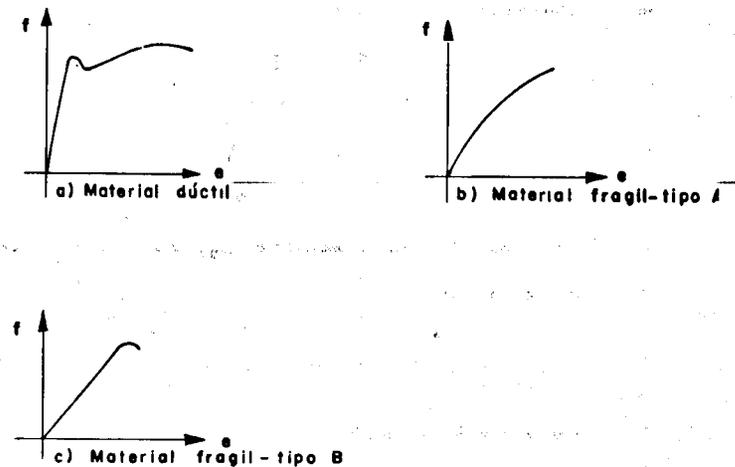


Fig. 3.4 Curvas típicas, esfuerzo deformación unitaria.

En el caso de cargas axiales, son iguales entre sí y se dice, entonces, que el estado de esfuerzos es uniforme. Para calcular la magnitud de los esfuerzos en este caso, - basta dividir la carga aplicada entre el área de la sección transversal. Por lo tanto, los esfuerzos se pueden calcular con la ecuación

$$f = \frac{P}{A} \quad (3.1)$$

donde P es la carga axial y A es el área de la sección transversal. Los esfuerzos - tienen unidades de fuerza dividida entre área, por ejemplo, kg/cm^2 o ton/m^2 . - Al deformarse el espécimen de ensayo cuando se aplica la carga axial, la sección transversal aumenta de área si la carga es de compresión o disminuye si es de ten- sión. El valor de A en la ecuación 3.1 suele ser el área de la sección antes de -- aplicar la carga. Las gráficas esfuerzo-deformación analizadas en la sección 3.4 - son las obtenidas de esta manera.

3.3.2 Deformación unitaria

La deformación unitaria, o deformación por unidad de longi- tud, se obtiene dividiendo el acortamiento o alargamiento medido en un instante - dado entre la longitud inicial de medición. Por lo tanto, si el cambio de longitud es Δl y la longitud inicial de medición es l_0 , la deformación unitaria se pue- de calcular con la ecuación

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.2)$$

Las deformaciones unitarias son adimensionales ya que tanto Δl como l_0 tienen unidades de longitud.

3.3.3 Gráficas esfuerzo-deformación unitaria

Las gráficas carga-deformación mencionadas en la sección 3.2 pueden transformarse en gráficas esfuerzo-deformación unitaria aplicando las ecua- ciones 3.1 y 3.2. Para ello, se calculan los valores de f y de g correspondien- tes a varios puntos de la gráfica carga-deformación. Las gráficas esfuerzo-deforma- ción unitaria tienen la misma forma que las gráficas carga-deformación, pero tienen la ventaja, como se mencionó anteriormente, de que los valores numéricos no depen- den de las características del espécimen de ensayo o de la longitud inicial de medi- ción.

3.4 CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES OBTENIDAS A PARTIR DE LAS GRÁFICAS ESFUERZO-DEFORMACIÓN UNITARIA

3.4.1 Características generales

En la fig 3.4 se presentan curvas esfuerzo-deformación unitaria típicas. En la fig 3.4-a se muestra la curva esfuerzo-deformación unitaria de mate- riales dúctiles, como algunos aceros. Un material es dúctil si se producen grandes - deformaciones antes de que ocurra la rotura del espécimen, y es frágil si las deforma- ciones son pequeñas en el momento de la rotura. La curva de la fig 3.4-b es típica de materiales frágiles como el concreto. Para algunos materiales frágiles no-metáli- cos, como varios tipos de plásticos, la curva esfuerzo-deformación unitaria del tipo de la mostrada en la fig 3.4-c.

Observando los diagramas de la fig 3.4 se concluye que hay una considera- - ble variación en las curvas esfuerzo-deformación unitaria de los distintos materiales usados en ingeniería. Sin embargo, en los dos diagramas de las figs 3.4-a y c -- existe una etapa inicial con una relación esfuerzo-deformación unitaria lineal. La porción recta inicial de estas curvas se puede representar por la ecuación

$$f = E \epsilon \quad \text{o} \quad E = \frac{f}{\epsilon}$$

En la ecuación 3.3, el valor de E es la pendiente de la línea recta y se denomina módulo de elasticidad o módulo de Young. Tiene unidades de fuerza - dividida entre longitud al cuadrado, por ejemplo, kg/cm^2 .

La relación esfuerzo-deformación representada por la ecuación 3.3 se conoce como Ley de Hooke, debido a que el científico inglés del siglo XVII Robert Hooke fue el primero en observar y registrar esta característica básica para muchos materiales. La ley de Hooke representa una relación esfuerzo-deformación bastante importante ya que los análisis de esfuerzos y deformaciones, y el diseño de la mayor parte de las construcciones están basados sobre esta ley simple del comportamiento de materiales. Cuando la gráfica esfuerzo-deformación de un material cumple con la ley de Hooke se dice que su comportamiento es lineal. Si al descargar el espécimen, éste recupera toda su deformación, el comportamiento es elástico. Un material puede tener un comportamiento lineal pero no elástico y viceversa, aunque en muchos casos la etapa lineal es también elástica.

También en la fig 3.4 se observa que dentro de los diagramas esfuerzo-deformación existen dos etapas generales: una etapa inicial prácticamente lineal y elástica, en la cual se aplica la ley de Hooke, y una etapa de comportamiento inelástico, en la que las deformaciones llegan a ser grandes y la ley de Hooke no es aplicable. Las etapas elástica e inelástica se ilustran en la fig 3.5-a.

Una característica distintiva de la etapa inelástica es que si se descarga el espécimen, como se muestra en la fig 3.5-b, se tiene una deformación permanente. Si el espécimen se vuelve a cargar, la relación esfuerzo-deformación coincide con la relación esfuerzo-deformación de la descarga.

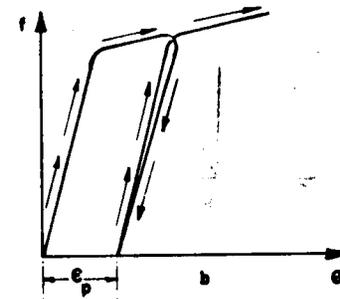
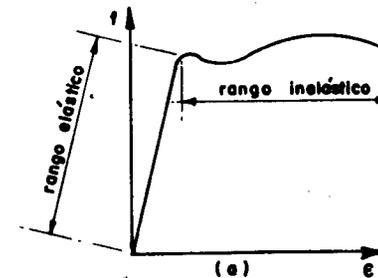


Fig 3.5 Deformaciones elástica e inelástica

Cuando en la etapa inelástica, las deformaciones unitarias aumentan bajo un esfuerzo constante, se dice que el material tiene un comportamiento plástico. En la fig 3.6-a se muestra la gráfica esfuerzo-deformación unitaria de un material con una etapa inicial elástica y una etapa posterior plástica. Los materiales con gráficas de este tipo reciben el nombre de elasto-plásticos; cuando solo tienen la etapa inicial,

se llaman materiales elásticos (fig 3.6-b); y si sólo tienen la etapa final, se conocen como materiales plásticos (fig 3.6-c). Las gráficas elásticas, plásticas y elasto-plásticas son gráficas ideales, ya que los materiales reales tienen gráficas que difieren de éstas. Sin embargo, en muchos casos las diferencias entre las gráficas reales y las ideales son pequeñas y pueden utilizarse las gráficas ideales para representar en forma aproximada el comportamiento de los materiales.



Fig 3.6 Gráficas ideales esfuerzo-deformación unitaria

3.4.2 Propiedades mecánicas obtenidas de las curvas esfuerzo-deformación unitaria

Límite de proporcionalidad. Es el esfuerzo a partir del cual el esfuerzo ya no es proporcional a la deformación unitaria, o sea, a partir del cual la gráfica -- esfuerzo-deformación unitaria ya no es lineal. Este valor está representado por el punto a en la fig 3.7-a. La determinación exacta del límite de proporcionalidad es bastante complicada ya que el cambio de la etapa elástica a la inelástica es gradual y la localización exacta del punto de transición no es fácil de definir.

Límite elástico. Es el esfuerzo máximo que puede ser aplicado a un material sin que se produzcan deformaciones inelásticas permanentes al retirar la carga. Este valor está representado por el punto b en la fig 3.7-a. Si el espécimen se carga más allá del límite elástico, la deformación no desaparece completamente al retirar la carga, o sea que el espécimen no recobra su longitud inicial. Con frecuencia es imposible detectar una diferencia entre los límites proporcional y elástico. Debido a que es difícil en la práctica determinar los límites proporcional y elástico, se recurre frecuentemente a otros límites definidos en forma convencional como se indica a continuación.

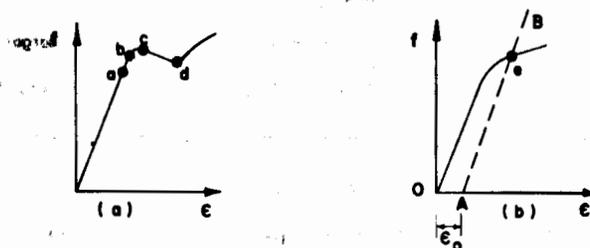


Fig 3.7 Algunos puntos característicos de las curvas esfuerzo deformación

Límite de fluencia. Es el esfuerzo que corresponde a la transición de la -- etapa elástica a la inelástica y que se define por un cambio brusco en el movimiento de la aguja indicadora de carga de la máquina de ensaye o por alguna construcción geométrica arbitraria. El primer método se usa en materiales cuya gráfica esfuerzo-deformación unitaria se aproxima a una gráfica elastoplástica como la de la fig 3.6-a. En estos materiales el cambio en el movimiento de la aguja de carga se

identifica perfectamente. Algunos materiales de este tipo presentan dos límites de fluencia, uno superior y otro inferior, como se muestra en la fig 3.7-a (puntos c y d). En estos casos suele considerarse el límite inferior como límite de fluencia. El segundo método se utiliza en materiales cuya gráfica esfuerzo-deformación unitaria no presenta un cambio bien definido de la zona elástica a la inelástica. El método más comúnmente usado para definir el límite de fluencia en estos casos consiste en trazar una recta paralela a la parte recta del diagrama esfuerzo-deformación unitaria a partir de una deformación ϵ_0 definida en forma arbitraria (fig 3.7-b) y considerar que el límite de fluencia es la intersección de esta paralela con el diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Los valores más usados de la deformación ϵ_0 varían de 0.001 a 0.0035. Los materiales a los que se aplica este segundo método se conocen como materiales sin límite de fluencia definido.

Rigidez. Es una medida de la resistencia de un material a deformarse. Para los materiales A y B, con los diagramas esfuerzo-deformación ilustrados en la fig 3.8-a, la rigidez del primero es mayor que la del segundo ya que la deformación ϵ_A es menor que ϵ_B para el mismo esfuerzo. La rigidez bajo carga axial se puede medir por medio del módulo de elasticidad o módulo de Young, E . En la fig 8-a, puesto que ϵ_A es menor que ϵ_B , entonces $E_A = \frac{f}{\epsilon_A}$ es mayor que $E_B = \frac{f}{\epsilon_B}$, o sea que, a mayor módulo de elasticidad, mayor rigidez del material. Comparando el acero estructural con $E_{ac} = 2.0 \times 10^6$ kg/cm² y el aluminio con $E_{al} = 0.7 \times 10^6$ kg/cm² resulta que el acero tiene una rigidez aproximadamente tres veces mayor que la del aluminio; esto es, el acero se deforma aproximadamente una tercera parte de lo que se deforma el aluminio para el mismo esfuerzo.

Para materiales con diagramas esfuerzo-deformación no lineales, como los de la fig 3.8-b, la pendiente de la curva esfuerzo-deformación varía y no se puede definir el módulo de elasticidad como lo correspondiente a la parte recta del diagrama. Para estos materiales, se definen los tres siguientes valores como medidas de la rigidez.

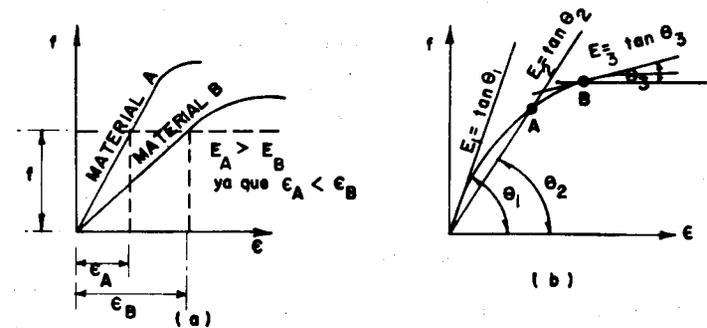


Fig 3.8 Determinación de la rigidez

- La pendiente de la curva esfuerzo-deformación en el origen, denominado módulo tangente inicial y que tiene un valor igual a $E_1 = \tan \theta_1$
- La pendiente de la línea que une al origen con un punto determinado A fijado arbitrariamente sobre la curva esfuerzo-deformación, denominado módulo secante, que tiene como valor $E_2 = \tan \theta_2$
- La pendiente de la tangente a la curva esfuerzo-deformación en un determinado punto B, denominado módulo tangente, con valor igual a $E_3 = \tan \theta_3$

Módulo de Poisson. Es otra medida de las características de deformación de -

dimensiones unitarias sujeto a tensión, como se ilustra en la fig 3.9. Debido a que las dimensiones del elemento son unitarias, los alargamientos y acortamientos son iguales a las deformaciones unitarias como puede deducirse de las ecuaciones 3.1 y 3.2. Se puede ver en la fig 3.9 que a la deformación unitaria longitudinal ϵ en tensión le acompaña una deformación unitaria transversal de acortamiento ϵ' . Si, por el contrario, actuase un esfuerzo de compresión se presentaría un alargamiento transversal. El módulo de Poisson se define como

$$\mu = \frac{-\epsilon'}{\epsilon} \quad (3.4)$$

El módulo de Poisson es una medida de la rigidez del material en dirección normal a la de aplicación del esfuerzo.

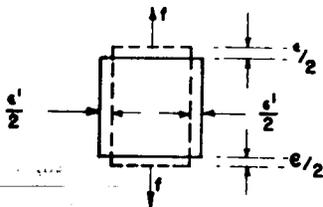


Fig 3.9 Determinación del módulo de Poisson

Resistencia. Es el esfuerzo máximo que resiste un espécimen. En la fig 3.10 se indica la resistencia, f_r , para tres tipos de gráficas esfuerzo-deformación unitaria. Obsérvese que cuando la gráfica tiene una rama descendente, la resistencia no coincide con el esfuerzo de falla.

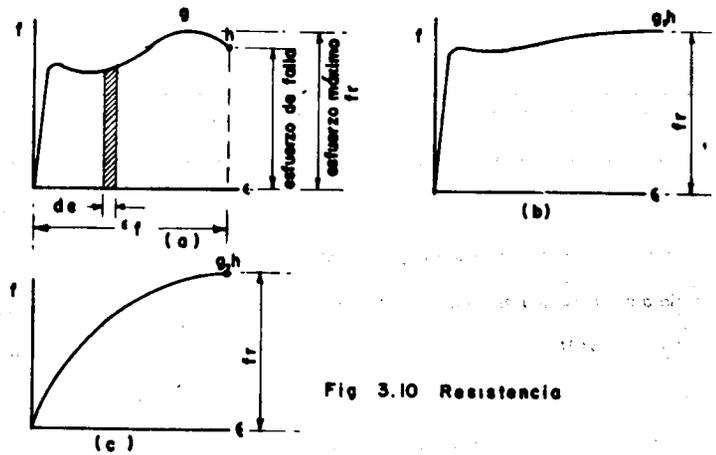


Fig 3.10 Resistencia

Ductilidad. Es una medida de la capacidad de un material para deformarse en la etapa inelástica. La medida usual de la ductilidad bajo carga axial es el porcentaje de alargamiento o acortamiento correspondiente a la falla. Esto es, si l_f representa la longitud medida en el instante de la falla y l_0 , la longitud inicial, el porcentaje de alargamiento es

$$\delta = \frac{l_f - l_0}{l_0} \times 100 \quad (3.5)$$

Un material con alta ductilidad permite deformaciones considerables antes de que falle. Esto es importante en situaciones en las que se presentan cargas excepcionales que exceden a las cargas de fluencia.

3.4.3 Variabilidad e índices de resistencia

Las propiedades mecánicas de los materiales descritas en las secciones anteriores son de naturaleza variable; es decir, que si se efectúa el mismo ensayo repetidas veces en especímenes del mismo material se obtienen resultados diferentes en cada ensayo. Las diferencias en resultados dependen de la uniformidad del material, del tipo de ensayo, de las condiciones del equipo de laboratorio, de la propiedad mecánica que se trate de determinar y de otros factores. El estudio de la variabilidad de las propiedades mecánicas se hace utilizando las técnicas de probabilidad y estadística.

Debido a esta variabilidad en los resultados de los ensayos, para evaluar las diversas propiedades mecánicas de un material no basta con efectuar un solo ensayo. Es necesario hacer varios ensayos en muestras seleccionadas de acuerdo con las técnicas de muestreo y determinar tanto la tendencia central de los resultados como la dispersión de los mismos. Una de las medidas más usuales de la tendencia central es el promedio. Para medir el grado de dispersión se recurre por lo común a la desviación estándar o al coeficiente de variación. Para fines de diseño, se puede tomar en cuenta la variabilidad de las propiedades de los materiales, especificando la probabilidad de obtener resultados de ensayos inferiores a un valor prestablecido.

Es común que alguna de las propiedades mecánicas de un material se considere como representativa o indicativa del comportamiento general de dicho material bajo determinado tipo de sollicitaciones o acciones. Cuando esto sucede, las propiedades mecánicas se denominan índices. Los índices más usados son aquellos que relacionan las características generales de un material con su resistencia, y reciben el nombre de índices de resistencia. Obsérvese que no siempre el índice de resistencia de un mate-

rial es la resistencia definida en la fig 3.10. Por ejemplo, en el caso del acero, el índice de resistencia usado más frecuentemente, es el límite de fluencia, ya que este valor permite predecir mejor el comportamiento de elementos estructurales de acero que la resistencia. En otros materiales el índice de resistencia sí coincide con la resistencia, como en el caso del concreto simple, en el que el índice de resistencia es su resistencia a la compresión.

Los índices de resistencia deben poder determinarse por procedimientos de ensayo sencillos y relativamente baratos. Un factor esencial es que la variabilidad de la propiedad mecánica usada como índice sea lo menor posible.

3.5 CONCEPTOS GENERALES SOBRE DIMENSIONAMIENTO

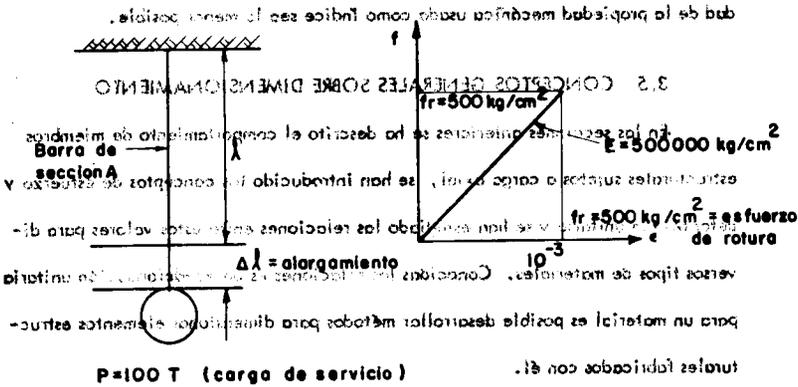
En las secciones anteriores se ha descrito el comportamiento de miembros estructurales sujetos a carga axial, se han introducido los conceptos de esfuerzo y deformación unitaria y se han estudiado las relaciones entre estos valores para diversos tipos de materiales. Conocidas las relaciones esfuerzo-deformación unitaria para un material es posible desarrollar métodos para dimensionar elementos estructurales fabricados con él.

El propósito esencial del dimensionamiento es determinar las dimensiones de los elementos estructurales de manera que resistan las fuerzas que actúan sobre ellos con un margen de seguridad adecuado. Como se indicó en la sección 2.2 existen dos enfoques fundamentales al problema de dimensionamiento. Según un criterio, llamado criterio de resistencia o criterio plástico, los elementos se dimensionan para que tengan una determinada resistencia, superior a la carga de servicio que deban soportar. Según el otro criterio, se determinan las dimensiones del elemento de manera que los esfuerzos producidos por las cargas de trabajo sean inferiores a unos es-

fuerzas permisibles, que son una fracción de la resistencia del material a la acción considerada. La aplicación de estos dos enfoques de dimensionamiento se ilustran en el siguiente ejemplo sencillo.

Sea un miembro que debe soportar una carga $P = 100$ ton, fabricado de un material cuya gráfica esfuerzo-deformación se conoce (fig 3.11).

Considerando que el índice de resistencia de los elementos de la estructura debe ser igual a uno, el factor de seguridad n se define como el cociente de la resistencia a tensión del material y la fuerza de trabajo.



Como se indica en la sección 3.2, existen los elementos estructurales de manera que la resistencia de los elementos de la estructura sea igual a uno.

Fig. 3.11 Elemento sujeto a tensión fabricado de un material elástico.

Para determinar la resistencia a tensión de un elemento de la estructura, se debe determinar la dimensión del elemento de manera que la resistencia a tensión sea igual a uno.

Criterio de resistencia

Se trata aquí de escoger una sección que tenga una resistencia prefijada. Si, por ejemplo, se desea disponer de un factor de seguridad igual a dos, el elemento debería ser capaz de soportar una carga $P_r = 2P$. Es decir, el elemento debería ser capaz de soportar una carga dos veces mayor que la carga de servicio.

Considerando que el índice de resistencia de los elementos de la estructura debe ser igual a uno, el factor de seguridad n se define como el cociente de la resistencia a tensión del material y la fuerza de trabajo.

Debido a esta variabilidad en los resultados de los ensayos, para evaluar los esfuerzos permisibles de un material, se utiliza el cociente de la resistencia a tensión y el factor de seguridad.

$$A = \frac{200\,000\text{ kg}}{500\text{ kg/cm}^2} = 400\text{ cm}^2$$

Según los datos de la gráfica esfuerzo-deformación del material, el esfuerzo permisible f_r es igual a la mitad del esfuerzo máximo que soporta el material.

Criterio de esfuerzos permisibles o esfuerzos de trabajo

En este caso se pretende definir el área de la sección de manera que el esfuerzo a que está sujeto el miembro bajo condiciones de servicio quede debajo de un límite aceptable. En el ejemplo, para contar con el mismo grado de seguridad que con el criterio de resistencia, el esfuerzo permisible bajo condiciones de servicio debe ser igual a la mitad del esfuerzo máximo que soporta el material.

Así:

$$f = \frac{1}{n} f_r = \frac{1}{2} \times 500 = 250\text{ kg/cm}^2$$

El área de la sección A se determina dividiendo la carga de servicio P entre el esfuerzo permisible f .

El área de la sección requerida sería

$$A = \frac{P}{f} = \frac{100\,000}{250} = 400 \text{ cm}^2$$

En este caso, por tratarse de un material de comportamiento lineal, los resultados numéricos fueron idénticos. Debe observarse que esta coincidencia no siempre puede lograrse, ya que, como se indicó en la sección 2.2, la relación entre la resistencia del material y los esfuerzos de trabajo no es siempre igual a la relación entre la resistencia del elemento y la carga de servicio. Esto es lo que sucede, por ejemplo, con materiales de comportamiento no lineal.

Revisión de la deformación

A veces es necesario verificar que algún aspecto del comportamiento de un elemento estructural bajo las cargas de servicio cumpla determinada limitación. Así, puede ser necesario comprobar si la deformación del elemento es inferior a un valor que se considere aceptable. En el ejemplo, podría ser necesario investigar si el alargamiento es excesivo.

Puesto que el material es elástico el alargamiento puede determinarse aplicando la ley de Hooke. Así:

$$E = \frac{f}{\epsilon} \quad (\text{Ley de Hooke})$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} ; \quad f = \frac{P}{A}$$

Sustituyendo:

$$\Delta l = \frac{Pl}{AE} = \frac{100\,000 \text{ kg} \times 300 \text{ cm}}{400 \text{ cm}^2 \times 500\,000 \text{ kg/cm}^2}$$

$$\Delta l = \underline{0.15 \text{ cm}}$$

Este alargamiento se compararía con el valor que se haya considerado aceptable. Sucede a veces que las dimensiones de un elemento estructural son determinadas por una limitación de deformación en lugar de los requisitos de resistencia.

_____ ° _____ ° _____

En las secciones siguientes se ilustrará la aplicación de los principios generales que se acaban de exponer al dimensionamiento de elementos de diversos materiales sometidos a cargas axiales.

3.6 MIEMBROS DE ACERO

En esta sección se considerarán únicamente miembros sujetos a cargas axiales de tensión, en cuyo comportamiento no influye la esbeltez. Los miembros sujetos a cargas axiales de compresión en los que los efectos de esbeltez intervienen en forma importante, se estudiarán en otro lugar.

3.6.1 Fabricación del acero

El componente básico del acero es el hierro. Este no se encuentra en estado puro en la naturaleza, sino bajo la forma de óxidos de distintas clases llamados minerales de hierro. Para obtener acero es necesario someter los minerales de hierro a una serie de procesos para eliminar impurezas y obtener la aleación requerida. Esta serie de procesos consiste esencialmente en lo siguiente. Se mezcla el mineral de hierro con carbón de coque y piedra caliza, y se introduce la mezcla en un alto horno donde es sometido a temperaturas elevadas. A la mezcla fundida se le inyecta aire, con la que se reducen los óxidos de hierro. El producto resultante, llamado arrabio o hierro de primera fusión, contiene entre otras impurezas aproximadamente 3 por ciento de carbono, 1.5 por ciento de sílice y cantidades menores de manganeso y fósforo. Este material es poco apropiado para aplicaciones estructurales por su fragilidad.

Para obtener un material más dúctil es necesario eliminar la mayor cantidad de impurezas posible y lograr un contenido adecuado de carbono. Los métodos más comúnmente utilizados para conseguir esto son el Siemens-Martin, de "hogar abierto", el Bessemer, en el que se emplea un recipiente inclinable llamado convertidor, y los sistemas a base de hornos eléctricos. Las impurezas se eliminan quemándolas con aire introducido en la masa fundida. Se obtiene así hierro casi puro. Para lograr las características resistentes requeridas se agrega carbono, y en ciertos casos, otros elementos. El resultado de esta etapa son elementos de acero relativamente grandes denominados lingotes.

Para obtener las distintas modalidades del acero utilizado para fines estructurales, los lingotes deben ser sometidos a diversos tratamientos. Así se obtienen - placas, perfiles estructurales y una gran parte de las varillas de refuerzo para concreto por laminación en caliente. Otros elementos son sujetos a diversos tratamientos en frío que mejoran la resistencia del acero. Los tratamientos en frío suelen consistir en procesos de estiramiento o torcido. En esta forma, por ejemplo, se fabrican - las varillas de alta resistencia para refuerzo de concreto así como el acero para presfuerzo.

3.6.2 Propiedades mecánicas del acero

Gráficos esfuerzo-deformación

Las características más importantes del acero se desprenden de las curvas - esfuerzo-deformación obtenidas mediante ensayos de tensión efectuados sobre probetas estándar. Es importante referir los ensayos a probetas estándar, puesto que los resultados difieren según el tamaño y la forma de éstas. (Se considera que las curvas esfuerzo-deformación en compresión tienen la misma forma que las de tensión). La American Society for Testing and Materials establece las características que deben tener las probetas según el tipo de acero por estudiar. En la fig 3.12 se muestran - probetas típicas utilizadas para ensayos de acero. Tanto el área como la longitud - sobre la que se miden los alargamientos son estándar.

Los aceros usados en la construcción pueden dividirse en dos grupos: los que tienen un límite de fluencia definido y los que no lo tienen. Pertenecen al primer - grupo los aceros laminados en caliente y al segundo los trabajados en frío (estirados, torcidos, etc.). En la fig 3.13 se muestra una curva esfuerzo-deformación típica para un acero laminado en caliente. La gráfica mostrada está ligeramente deformada con

objeto de que puedan distinguirse más fácilmente sus rosgos característicos principales.

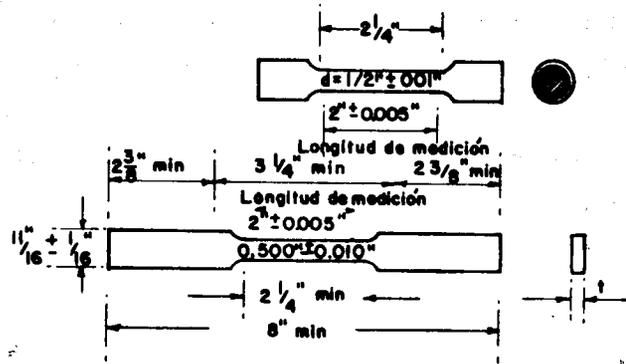


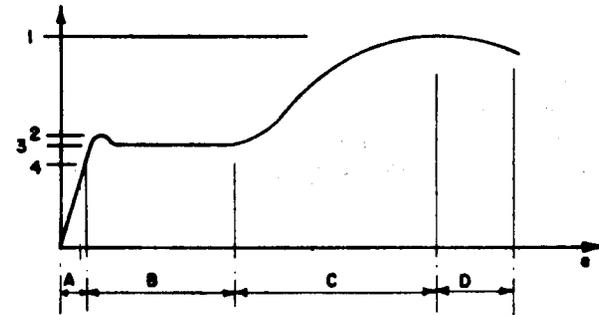
Fig 3.12 Probetas para ensayos de acero

En la gráfica esfuerzo-deformación del acero laminado en caliente se distinguen las siguientes cuatro regiones, en cada una de las cuales el comportamiento del material es diferente del que tiene en los demás: zona elástica, zona plástica, zona de endurecimiento por deformación y zona de estrangulamiento y fractura.

Las gráficas esfuerzo-deformación de los aceros trabajados en frío no exhiben una zona de fluencia horizontal. En la fig 3.14 se muestra una curva de esta clase.

Propiedades mecánicas

El módulo de elasticidad (E_0), correspondiente a las porciones rectas de las curvas esfuerzo-deformación varía poco según el tipo de acero y puede tomarse igual a $2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$. (El valor $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ es también usual.)



1.-Esfuerzo máximo, 2.-Límite de fluencia superior
3.-Límite de fluencia inferior 4.-Límite de proporcionalidad A.-Rango elástico B.-Flujo plástico C.-Endurecimiento por deformación D.-Estrangulamiento y fractura

Fig 3.13 Gráfica esfuerzo-deformación unitaria de un acero laminado

Los límites de proporcionalidad y elástica difieren poco entre sí, de tal manera que, para fines prácticos se acostumbra considerar que son iguales.

La forma de definir el límite de fluencia es distinta según la clase de acero. En los aceros laminados en caliente la zona de fluencia está claramente definida -- (fig 3.13). En algunos casos puede distinguirse un límite de fluencia superior y uno inferior. Cuando esto sucede suele considerarse únicamente el límite de fluencia inferior. Sin embargo son comunes los aceros en los que se distingue un solo esfuerzo de fluencia. En aceros trabajados en frío, que no tienen límite de fluencia definido, suele fijarse un límite de fluencia convencional que indica dónde la curva esfuerzo-deformación cambia de pendiente en forma apreciable. Una recomendación típica -

consiste en considerar como límite de fluencia el esfuerzo correspondiente a una deformación unitaria permanente de 0.002. El significado de esto puede apreciarse en la fig 3.14.

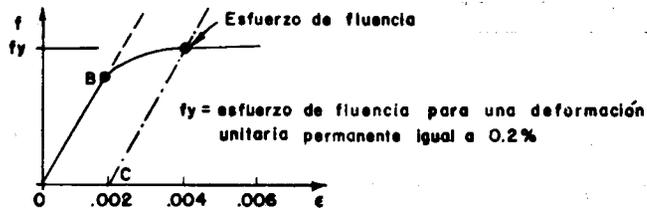


Fig 3.14 Gráfica esfuerzo-deformación de un acero trabajado en frío

Variabilidad e Índice de resistencia

El Índice de resistencia más comúnmente utilizada para identificar un acero es el esfuerzo de fluencia. El empleo de este índice, así como de las demás características de los diagramas esfuerzo-deformación, en la predicción del comportamiento de elementos estructurales tiene limitaciones, puesto que las condiciones reales de uso de la estructura pueden no corresponder a las condiciones en que se efectúan los ensayos estándar. Los ensayos se efectúan bajo ciertas condiciones de velocidad. Debe esperarse por lo tanto que las resistencias de los elementos estructurales varíen según las condiciones de carga mencionadas, lo que debe tenerse en cuenta al establecer correlaciones entre los índices de resistencia y el comportamiento probable de los elementos estructurales. Así, las temperaturas bajas y la deformación rápida tienden a aumentar el esfuerzo de fluencia y la resistencia, pero disminuyen la ductilidad. A temperaturas altas sucede lo contrario.

También es significativa la geometría de los perfiles estructurales. Los elementos pequeños tienden a tener esfuerzos de fluencia y resistencias mayores que los grandes.

El acero es un material más variable en sus propiedades de lo que a veces se supone. Esto se puede apreciar en la fig 3.15 donde se muestra un histograma de los esfuerzos de fluencia de 697 varillas de acero de refuerzo para concreto, con un diámetro nominal de media pulgada. El esfuerzo de fluencia nominal de las varillas fue de 4000 kg/cm². El coeficiente de variación correspondiente al lote ensayado fue 9.1 por ciento.

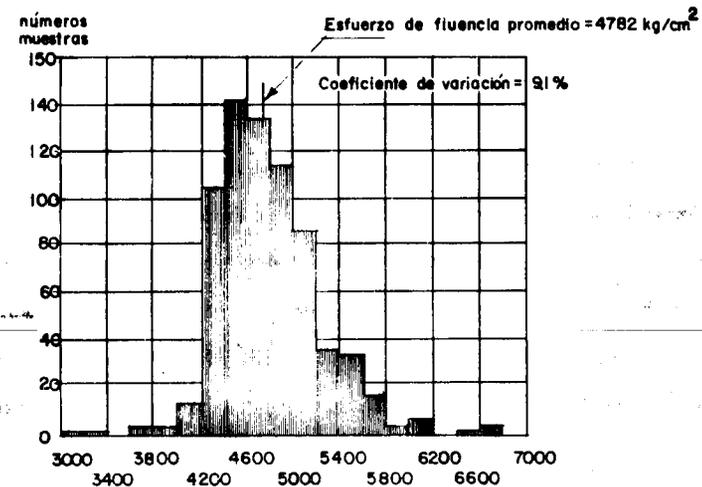


Fig 3.15 Histograma de los esfuerzos de fluencia de 697 varillas de 1/2" de diámetro nominal (esfuerzo nominal = 4000 kg/cm²)

Módulo de Poisson

Varía entre 0.25 y 0.33.

Ductilidad

El acero es un material muy dúctil. En un acero laminado en caliente, por ejemplo, la deformación unitaria en la falla puede llegar a ser de 150 a 200 veces la correspondiente a la fluencia. Por lo común, la ductilidad del acero disminuye al aumentar su resistencia y el contenido de carbono. Los tratamientos en frío -- también suelen disminuir la ductilidad. El proyectista debe recordar que al usar aceros de muy alta resistencia está sacrificando ductilidad.

Una medida usual de la ductilidad del acero es el porcentaje de alargamiento en la ruptura, medida sobre una longitud estándar. Los datos de porcentaje de alargamiento deben ir siempre acompañados de las longitudes de medición respecto a las cuales fueron determinados. Las longitudes especificadas son muy variables. Mientras que para alambres de presfuerzo a veces se considera una longitud de solo 10 diámetros, para acero para perfiles estructurales es común una longitud de 20 cm. Los valores típicos del porcentaje de alargamiento varían entre 5 y 20%.

Otros índices son la deformación correspondiente a la falla, la amplitud de la zona de fluencia (en aceros laminados en caliente), y, para varillos de refuerzo de concreto, el radio de doblado admisible.

Coefficiente de dilatación térmica

Para cálculos de efectos de temperatura suele considerarse un valor promedio

$6.5 \times 10^{-6} / ^\circ C$.

Soldabilidad

Una de las propiedades más útiles del acero es la posibilidad de unir elementos estructurales de este material por medio de soldadura.

Resistencia a la corrosión

La resistencia a la corrosión de la mayoría de los aceros utilizados para fines estructurales es baja. Esto significa la necesidad de proporcionar protección a las estructuras de acero expuestas a agentes corrosivos tales como el oxígeno, el vapor de agua, los sulfuros y otros. La protección puede consistir en algún tratamiento superficial o en la aleación con algún elemento que comunique propiedades anticorrosivas al acero.

Resistencia a los incendios

Aunque el acero es un material incombustible, sus propiedades resistentes se deterioran considerablemente bajo temperaturas altas. Por lo tanto, es necesario proteger las estructuras de acero contra los efectos de los incendios. Para mejorar la resistencia del acero al fuego puede protegerse con revestimientos de concreto, yeso, vermiculita, asbesto y ciertas pinturas especiales.

3.6.3 Aplicaciones estructurales del acero

El acero es uno de los materiales estructurales más usados a pesar de su alto costo volumétrico. Su alta resistencia específica* y su reducido coeficiente económico-resistente** en tensión lo hacen especialmente útil en ele-

* La resistencia específica es una medida de la eficiencia estructural de un material. Se puede definir como la relación entre la resistencia del material, en kg/cm^2 , y su peso volumétrico, en kg/cm^3 .

** El coeficiente económico-resistente de un material es el costo del material necesario para soportar una carga unitaria en una longitud unitaria.

mentos sujetos a este tipo de esfuerzo. Sus propiedades no se alteran significativamente con el tiempo, como sucede con otros materiales. Su elasticidad bajo cargas relativamente altas elimina los problemas de deformaciones permanentes de servicio. Los elementos de acero se prestan a la prefabricación, lo que disminuye los tiempos de construcción. Las estructuras de acero pueden fácilmente ampliarse o modificarse y cuando es necesario demolerlas se recupera una parte de su valor inicial vendiendo las piezas como chatarra o para ser utilizadas en nuevas estructuras.

La facilidad con que la mayor parte de los aceros usados en la construcción pueden soldarse permite la formación de secciones compuestas de varios perfiles, simplifica las conexiones entre elementos, y facilita las modificaciones de edificios terminados.

De las breves consideraciones anteriores, resultan evidentes los múltiples aspectos ventajosos del acero como material de construcción. Sin embargo existen también algunos inconvenientes.

El proceso de laminación mediante el cual se fabrican los elementos estructurales de acero así como el aspecto tosco de muchos tipos de conexiones entre miembros, imponen ciertas limitaciones estéticas.

Una desventaja grave es el alto costo de conservación. El costo de pintar las estructuras metálicas periódicamente para evitar la corrosión puede ser importante. Al costo de conservación se suma el costo relativamente elevado de las pólizas de seguro por la escasa resistencia del acero a los efectos de los incendios.

Hay una desventaja que se deriva de una ventaja. La alta resistencia del acero hacen que las secciones requeridas por resistencia resulten pequeñas. Debido

a esto las relaciones de esbeltez son altas de manera que en elementos sujetos a compresión son frecuentes los problemas de pandeo.

A continuación se describen las principales formas en que se utiliza el acero en la construcción de estructuras.

Acero para placas y perfiles laminados estructurales

Los aceros utilizados para la fabricación de placas y perfiles estructurales suelen obtenerse por procesos de laminación en caliente y por lo tanto tienen un límite de fluencia definido. Los valores usuales del límite de fluencia varían entre 2300 a 3500 kg/cm². Sin embargo hay algunos aceros con aleaciones o tratamientos especiales, que alcanzan resistencias mayores.

Los tipos comunes en México son el A-36 (denominación ASTM) y el FM-295 (denominación Aceros Monterrey), cuyas características principales se muestran en la Tabla 3.1

Tabla 3.1.- CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE DOS ACEROS TIPICOS

Tipo	Esfuerzo de fluencia (kg/cm ²)	Resistencia a tensión (kg/cm ²)	Porcentaje mínimo de deformación en una probeta con longitud de medición de 20 cm.
A - 36	2530	4200 - 5600	20
FM-295	2950	4220 - 5980	19

En la fig 3.16 se muestran algunos perfiles y placas comúnmente usados en México. En la fig 3.17 se presentan algunos tipos de secciones compuestas que se pueden fabricar con ellos.

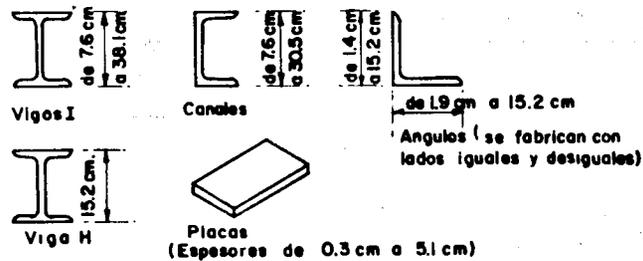


Fig 3.16 Perfiles y placas comúnmente utilizados en México

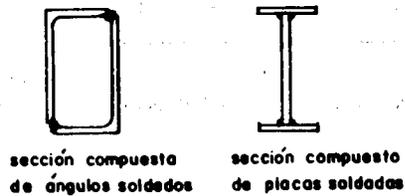


Fig 3.17 Algunos tipos de secciones compuestas

Recientemente se ha empezado a utilizar también una lámina delgada trabajada en frío para la fabricación de perfiles ligeros. Estos perfiles se obtienen mediante dobleces de lámina. En la fig 3.18 pueden apreciarse algunas secciones típicas. El acero utilizado es un acero trabajado en frío con resistencia última de 4400 kg/cm² y un límite de fluencia convencional de 3500 kg/cm², aproximadamente.

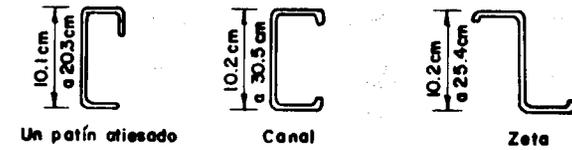


Fig 3.18 Perfiles ligeros

Tubos

Los tubos de acero tienen muchas aplicaciones estructurales de interés. Los diámetros más comunes en México varían de 8.9 cm a 32.4 cm, y los espesores, de 0.55 cm a 2.54 cm. Las características del acero utilizado son muy variables.

Barras para concreto reforzado

El acero para reforzar concreto se utiliza en distintas formas. La más común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminada en caliente como de acero trabajado en frío.

En las figs 3.19 y 3.20 se muestran curvas de ambos tipos de acero típicas de varillas europeas.

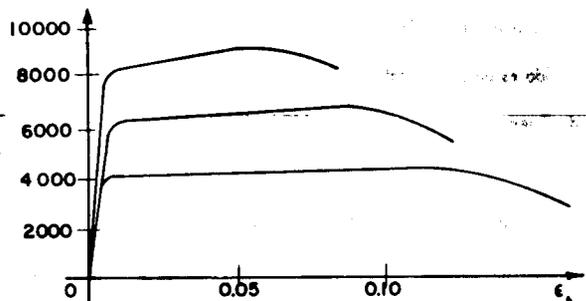


Fig 3.20 Gráficas esfuerzo-deformación de aceros trabajados en frío para barras de refuerzo

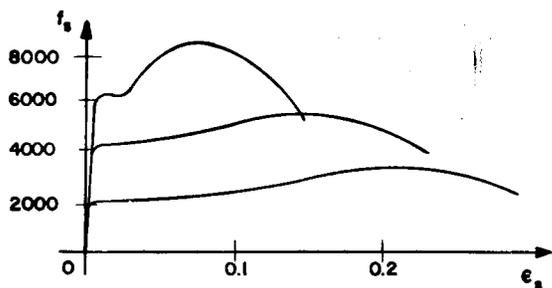


Fig 3.19 Gráficas esfuerzo-deformación de aceros laminados en caliente para barras de refuerzo

Los diámetros usuales de las varillas producidas en México varían de 1/4" a 1 1/2". Algunos productores han fabricado varilla corrugada de 5/16". Todas las varillas, con excepción del alambón de 1/4", tienen corrugaciones en la super-

ficie para mejorar su adherencia con el concreto. La tabla 3.2 proporciona datos sobre las características principales de varillas de refuerzo, así como la nomenclatura usada para identificarlas.

TABLA 3.2 DIAMETROS, PESOS, AREAS Y PERIMETROS DE VARILLAS

Barra Núm.	Diámetro Plg	mm	Peso kg/m	Area cm ²	Perimetro cm
2	1/4	6.3	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.384	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.557	0.71	2.98
4	1/2	12.7	0.996	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.560	1.99	5.00
6	3/4	16.1	2.250	2.87	6.00
7	7/8	11.1	3.034	3.87	6.97
8	1	25.4	3.975	5.07	7.98
9	1 1/8	28.6	5.033	6.42	8.98
10	1 1/4	31.8	6.225	7.94	9.99
12	1 1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

En México se cuenta con una variedad relativamente grande de acero de refuerzo. Las varillas laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2300 hasta 4200 kg/cm². El acero trabajado en frío alcanza límites de fluencia de 4000 a 6000 kg/cm².

Se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo de losas, muros y algunos elementos prefabricados. Estas mallas están formadas por olambres lisos - unidos por puntos de soldadura en las intersecciones. El acero es del tipo trabajado en frío, con esfuerzos de fluencia del orden de 5 000 kg/cm². El espaciamiento de las varillas varía de 5 a 40 cm y los diámetros de 2 a 7 mm aproximadamente. En algunos países, en lugar de alambres lisos, se usan alambres con algún tipo de irregularidad superficial para mejorar la adherencia.

El acero que se usa en estructuras presforzadas es de resistencia francamente superior a la de los aceros descritos anteriormente. Su resistencia varía entre - - 14 000 y 22 000 kg/cm² y su límite de fluencia, definido por el esfuerzo correspondiente a una deformación permanente de 0.002, entre 12 000 y 19 000 kg/cm².

3.6.4 Dimensionamiento de miembros de acero sujetos a tensión axial

Introducción

El acero es especialmente apropiado para la fabricación de elementos sujetos a tensión, por su alta resistencia a este tipo de esfuerzo y su elevado módulo de elasticidad. El diseño de miembros de acero sujetos a tensión es uno de los problemas de diseño más sencillos. Como no existen problemas de pandeo en miembros de tensión, muchas veces el dimensionamiento se reduce a encontrar o seleccionar una sección con área suficiente para soportar la carga de diseño sin que se exceda el esfuerzo - permisible de tensión en ninguna fibra de la sección transversal del miembro. La - sección requerida puede calcularse por medio de la ecuación

$$A_s = \frac{T}{f_s} \quad (3.6)$$

en donde

$$A_s = \text{área necesaria (cm}^2\text{)}$$

$$T = \text{carga de trabajo o carga de servicio (kg)}$$

$$f_s = \text{esfuerzo permisible en tensión (kg/cm}^2\text{)}$$

El criterio de dimensionamiento expuesto es el "elástico", de esfuerzos - - "permisibles" o "de trabajo", que fue descrita en la sección 3.5. Como se indicó en esta sección, puede también utilizarse un criterio de resistencia, consistente en diseñar la pieza de manera que puede resistir la carga de trabajo que debe soportar, multiplicada por un factor de carga conveniente. Se considera que la resistencia a tensión de un miembro de acero, T_r está dado por la ecuación

$$T_r = A_s f_y \quad (3.7)$$

en donde f_y es el esfuerzo de fluencia del acero.

De hecho se desarrolla una tensión mayor puesto que el esfuerzo de rotura es bastante mayor que el esfuerzo de fluencia. Sin embargo esta capacidad adicional se desprecia en la práctica, por estar asociada con deformaciones muy grandes.

Las consideraciones que siguen se refieren al criterio elástico. Es fácil extenderlas a un criterio de resistencia.

Tipos de miembros

Las secciones más comúnmente utilizadas para formar miembros de tensión son soleras, ángulos solos o en pares, canales y secciones I, o combinaciones diversas -

de estos perfiles. En secciones formadas por varios perfiles, es recomendable unir las piezas con placas o soleras colocadas cada 1.5 m, aproximadamente, para evitar golpeteo y para mantener alineadas a las secciones. Estas piezas no contribuyen a la resistencia del miembro y suelen detallarse por especificación.

Las secciones formadas por perfiles laminados son más fáciles de conectar y manejar que los tensores y cables. Estos últimos elementos tienden a colgarse por su falta de rigidez, de manera que es necesaria prever alguna manera de tensarlos, por ejemplo, por medio de templadores. Los cables están adquiriendo gran importancia en estructuras colgantes para techos y puentes.

Esfuerzos permisibles y factores de carga

Para recomendaciones sobre los esfuerzos permisibles y factores de carga para dimensionar elementos sujetos a tensión, véanse el Manual de Aceros Monterrey y - las demás referencias sobre estructuras de acero al final del capítulo. Un valor típico es $0.6 f_y$, donde f_y es el esfuerzo de fluencia.

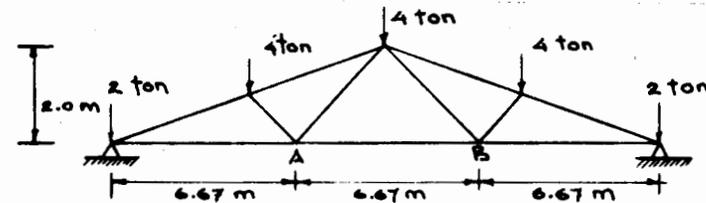
Requisitos de esbeltez

La rigidez transversal de los elementos sujetos a tensión es muy variable. - Los cables, por ejemplo, no tienen rigidez alguna. Sin embargo, hay casos en que es conveniente contar con cierta rigidez por motivos constructivos y de funcionamiento. Por ejemplo, en los elementos de armaduras sujetos a tensión se especifica una rigidez arbitraria mínima que suele definirse en función de la relación de esbeltez, l/r , donde l es la longitud libre del elemento y r es el radio de giro - dado por $\sqrt{I/A}$, siendo I el momento de inercia y A el área de la sección.

EJEMPLO 3.1 DIMENSIONAMIENTO DE UN ELEMENTO SOMETIDO A TENSION AXIAL

DATOS

Se pide dimensionar el miembro AB



Uniones Soldadas, Acero A-36 ($f_y = 2530 \text{ Kg/m}^2$)
Esfuerzo permisible: $f_t = 0.6 f_y$
Esbeltez permisible: $l/r = 240$

SOLUCION

Resolviendo la armadura por un método conocido se encuentra que el miembro AB trabaja con una fuerza de tensión de 20.0 ton

Cálculo del área necesaria

$$A = \frac{T}{f_t} ; A = \frac{2000}{1530} = \underline{\underline{13.20 \text{ cm}^2}}$$

Del Manual Monterrey

L 4" x 5/16" tiene un área de $15.48 \text{ cm}^2 > 13.20$
y un radio de giro = 3.15

Revisión por esbeltez

$$\frac{l}{r} = \frac{6.67}{3.15} = \underline{\underline{211}} < 240$$

El valor de r se calcula para el sentido más desfavorable de la sección del miembro. Los valores de la relación de esbeltez dados por las diversas normas varían entre 200 y 300.

Efecto de agujeros

Los miembros de acero se integran en las estructuras por medio de uniones soldadas o por medio de remaches o tornillos. En el primer caso, la sección de los miembros no se reduce en las uniones; en cambio en el segundo caso, los agujeros para los remaches o tornillos disminuyen la sección de los miembros. Para tomar en cuenta esta disminución, se han establecido reglas empíricas que pueden encontrarse en los reglamentos de construcción de acero. En estos apuntes sólo se consideran miembros en los que no es necesario hacer reducciones de sección por efecto de agujeros.

3.7 ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO

3.7.1 Introducción

El concreto reforzado es una combinación de concreto simple y acero. El concreto simple es un material económico con una resistencia a la compresión relativamente alta pero con escasa resistencia a tensiones. Su resistencia a tensión es tan reducida que nunca se utiliza en miembros bajo este tipo de acción. En algunas ocasiones se utiliza para formar miembros que deben transmitir fuerzas de compresión. Estos miembros o columnas de concreto simple no son muy frecuentes en la práctica ya que es necesario hacerlos bastante robustos para evitar efectos de esbeltez y de eccentricidades accidentales que puedan dar origen a esfuerzos de tensión, como se verá en una sección posterior.

La falta de resistencia a tensión del concreto simple puede remediarse por medio de un refuerzo de barras de acero convenientemente distribuidas. El refuerzo de acero puede aprovecharse también para aumentar la resistencia a compresión de una sección de concreto simple.

Para estudiar el comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a cargas axiales es necesario conocer las propiedades tanto del concreto simple como del acero de refuerzo. Las principales propiedades del acero de refuerzo se reseñaron en el inciso 3.6.3. En los incisos siguientes se describirán las del concreto simple. Posteriormente se estudia el comportamiento de elementos de concreto reforzado sometidos a cargas axiales, haciendo énfasis en el efecto de cargas axiales de compresión, ya que es poco frecuente usar este material en elementos sujetos a tensión. Se presentan también algunas indicaciones sobre dimensionamiento de columnas de concreto reforzado. Las columnas de concreto simple pueden considerarse como un caso particular de las columnas de concreto reforzado en que el área de acero de refuerzo es nula.

3.7.2 Naturaleza del concreto simple

El concreto simple es el material que se obtiene al mezclar cemento portland, agregados pétreos y agua en cantidades convenientes.

Cuando se mezclan cemento portland y agua en cantidades aproximadamente iguales se obtiene un material de consistencia plástica llamada pasta de cemento. Con el tiempo, el cemento y el agua reaccionan químicamente y la pasta de cemento empieza a perder su consistencia plástica y a ganar resistencia. Esta reacción se de-

sarrolla con desprendimiento de calor que recibe el nombre de calor de hidratación. Cuando la pasta de cemento ha perdido su consistencia plástica se dice que ha fraguado. El tiempo de fraguado a lapso que transcurre desde el momento en que se mezclan los materiales hasta el momento en que la pasta ha fraguado varía de 4 a 6 horas, aproximadamente, según el tipo de cemento y la proporción de la mezcla. Después del fraguado, la pasta de cemento continúa aumentando su resistencia o endureciendo durante varios meses o inclusive años enteros. Si a la pasta de cemento en estado plástico se añade agregado fino, como arena, y agregado grueso, como grava o piedra triturada, la pasta de cemento llena los huecos dejados por las partículas de agregados y, al endurecer, se forma una piedra artificial que es el concreto.

El concreto es uno de los materiales de construcción más usados en ingeniería civil. Entre las ventajas del concreto se pueden señalar las siguientes: alta resistencia a la compresión, durabilidad, resistencia al intemperismo, resistencia a incendios y facilidad de fabricación. Además, como el concreto se coloca en estado plástico, es relativamente fácil fabricar elementos de cualquier forma geométrica. Las desventajas más importantes del concreto son su alto peso volumétrico, aproximadamente 2.4 ton/m^3 , su baja resistencia a la tensión y los cambios volumétricos que sufre con el tiempo.

3.7.3 Propiedades mecánicas del concreto endurecido

Resistencia e índices de resistencia

La resistencia del concreto depende esencialmente de la resistencia de sus componentes, de su proporción relativa y de la adherencia que se desarrolla entre

ellos. Además, influyen de manera importante la forma y tamaño del espécimen de ensayo, la velocidad de ensayo, la fricción entre el espécimen y las cabezas de las máquinas de ensayo, y muchos otros factores. Por lo tanto es especialmente importante definir índices de resistencia como medida de la calidad del concreto. Estos índices pueden diferir notablemente de la resistencia del concreto en estructuras.

El índice de resistencia más comúnmente usado en concreto es la resistencia a compresión de un cilindro de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura ensayada bajo condiciones estándar. La curva esfuerzo-deformación que se obtiene en un ensayo de este tipo tiene la forma aproximada mostrada en la fig 3.21. El esfuerzo correspondiente a la carga máxima es el índice de resistencia a compresión que se denomina usualmente f'_c y se presenta para valores de la deformación unitaria cercanos a 2 milésimas. Debido a la heterogeneidad del concreto y a las variaciones naturales en su proceso de fabricación, la variabilidad del índice de resistencia a compresión es mayor que la variabilidad que se observa en materiales como el acero o el aluminio que se fabrican bajo condiciones más controladas. Cuando el concreto se fabrica en plantas de premezclado bajo buenas condiciones de control y supervisión, el coeficiente de variación de la resistencia a la compresión es del orden de 15 por ciento y cuando se fabrica en obra con supervisión de grado intermedio es del orden de 20 o 25 por ciento.

Factores que afectan la resistencia del concreto

Se mencionó al principio de esta sección que la resistencia del concreto depende de muchos factores. Entre los más significativos se encuentra la edad y la re-

lación que agua-cemento, que se analizan a continuación. Otros factores son los efectos de la velocidad de carga, la velocidad de deformación, la esbeltez y el tamaño del espécimen.

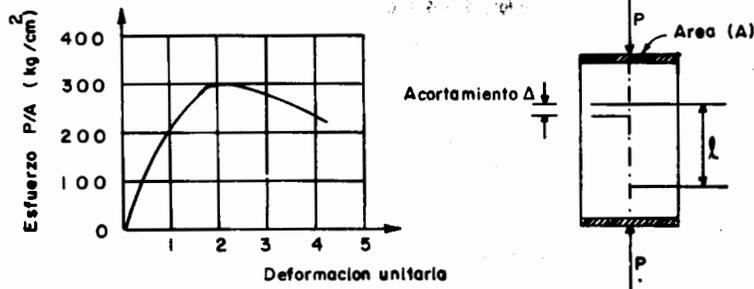


Fig 3.21 Curva esfuerzo-deformación en compresión axial de un espécimen sujeto a carga de corta duración

a) Efecto de la edad

Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su capacidad de carga con la edad. Este proceso de hidratación puede ser más o menos efectivo, según sean las condiciones de intercambio de agua con el ambiente después del calado. Por lo tanto, el aumento de capacidad de carga del concreto depende de las condiciones de curado a través del tiempo.

El aumento de resistencia con la edad depende también del tipo de cemento, sobre todo a edades tempranas. La fig 3.22 muestra el aumento de resistencia con la edad para cilindros de 15 x 30 cm, hechos con cemento normal (tipo I), y de alta resistencia inicial (tipo III), que son los dos tipos comúnmente empleados en estructuras de concreto reforzado. Después de los primeros tres meses el aumento en resistencia es relativamente pequeño.

b) Efecto de la relación agua/cemento

La resistencia del concreto depende de la relación agua/cemento: a mayor relación agua/cemento, menor resistencia. En la fig. 3.23 se presentan curvas esfuerzo-deformación correspondientes a distintas relaciones.

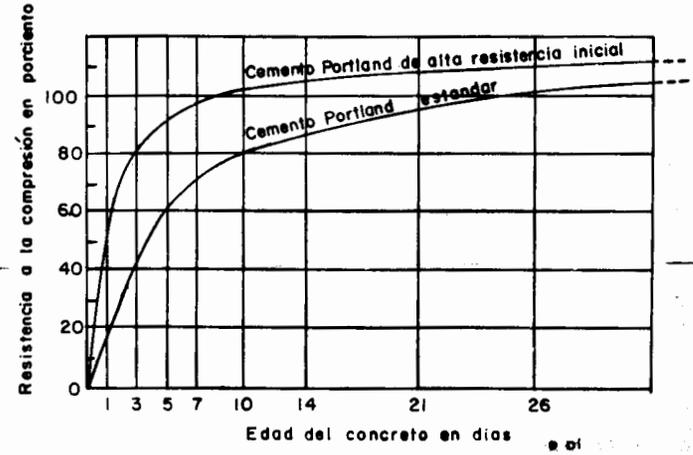


Fig 3.22 Variación de la resistencia con la edad

Resistencia del concreto a esfuerzos combinados

Se han hecho numerosas investigaciones sobre la resistencia del concreto a esfuerzos combinados, pero los resultados difieren notablemente entre sí, especialmente en el caso de elementos sujetos a esfuerzos biaxiales. En estos apuntes se estudia únicamente la resistencia bajo estados triaxiales de esfuerzo, la cual se utilizará posteriormente para el diseño de columnas zunchadas.

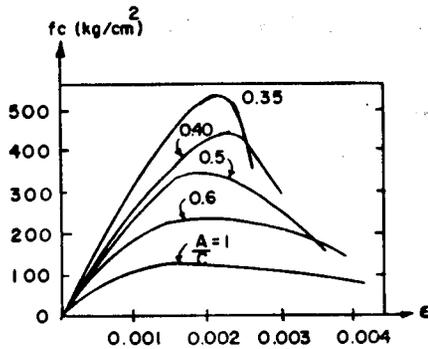


Fig 3.23 Efecto de la relación agua-cemento

La resistencia del concreto a compresión triaxial se ha determinado empleando dispositivos como el mastrado esquemáticamente en la fig 3.24. El espécimen se rodea de aceite a presión y al mismo tiempo se aplica una carga axial hasta la falla. Los resultados experimentales indican que el esfuerzo axial, f_1 , es una función de la presión de confinamiento, f_2 , que puede representarse aproximadamente por la ecuación

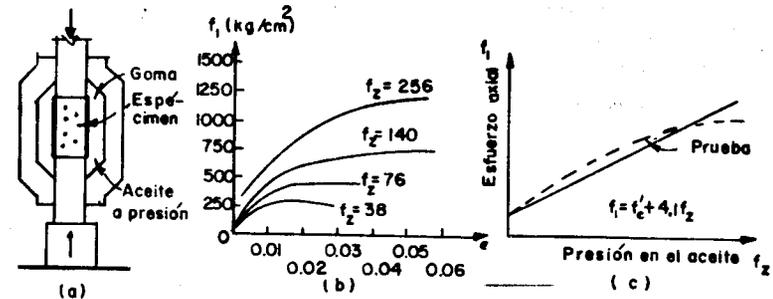


Fig 3.24 Compresión triaxial

Módulo de elasticidad

Aunque el concreto no es propiamente un material elástico, a veces es conveniente definir un módulo de elasticidad de manera convencional. Existen dos métodos para definir el módulo de elasticidad del concreto; el estático y el dinámico. El método más común es el estático que consiste en aplicar incrementos de carga a un espécimen para determinar la gráfica esfuerzo-deformación. Una vez determinado esta gráfica, se obtiene el módulo calculando la pendiente de una tangente a la gráfica en un punto determinado o de una secante entre dos puntos dados. El procedimiento más generalizado consiste en determinar la pendiente entre el punto de la gráfica correspondiente a una deformación unitaria de 0.0005 y el punto correspondiente a un esfuerzo del 50 por ciento del esfuerzo máximo (fig. 3.25). El Reglamento del Distrito Federal de 1976 da una recomendación empírica que permite estimar el módulo de elasticidad del concreto de peso normal (mayor o igual a 2 ton/m³) E_c , en función de su resistencia. Lo supone igual a $10,000 \sqrt{f'_c}$, en Kg/cm². Para concreto ligero, se determinará experimentalmente.

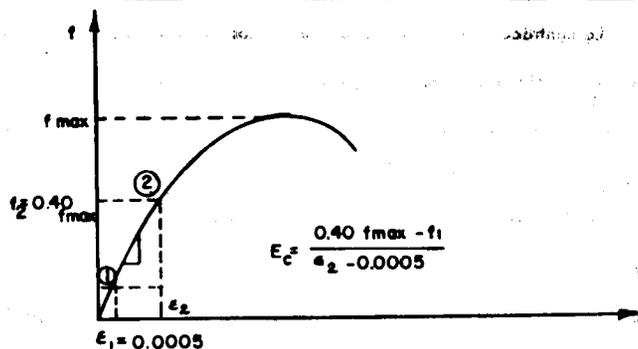


Fig 3.25 Determinación del módulo estático

Módulo de Poisson

Tiene un valor comprendido entre 0.15 y 0.20.

Efectos del tiempo en el concreto endurecido

Cuando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una deformación inicial. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo aún cuando no se incremente la carga.

Las deformaciones que ocurren en el concreto con el tiempo se deben esencialmente a dos causas: contracción y flujo plástico.

La fig 3.26 muestra una curva típica deformación-tiempo de un espécimen de concreto bajo carga constante. La forma de la curva y las magnitudes relativas son aproximadamente las mismas, sea la acción de flexión, compresión, tensión, o torsión. En el eje vertical se muestra la deformación, y en el eje horizontal, el tiempo, ambas variables en escala aritmética.

Se puede ver que al aplicar la carga en un tiempo relativamente pequeño el concreto sufre una deformación inicial, que para efectos prácticos se puede considerar como instantánea. Si se mantiene la carga, el concreto sigue deformándose, con una velocidad de deformación grande al principio, que disminuye gradualmente con el tiempo.

Aunque para efectos prácticos puede considerarse que la curva tiende a ser asintótica respecto a una horizontal, se ha comprobado que la deformación sigue aumentando aún después de muchos años. Sin embargo, aproximadamente el 90 por ciento de la deformación total ocurre durante el primer año de aplicación de la carga.

Si en cierto momento se descarga el espécimen se produce una recuperación instantánea, seguida de una recuperación lenta. La recuperación nunca es total; siempre queda una deformación permanente.

En la fig 3.26 la curva de trazo continuo representa las deformaciones de un espécimen sujeto a una carga constante, la cual es retirada después de cierto tiempo. La línea de trazo interrumpido presenta las deformaciones con el tiempo en un espécimen sin carga. Las ordenadas de esta curva son las deformaciones debidas a contracción. Las diferencias entre las ordenadas de las dos curvas representan deformaciones debidas a flujo plástico.

Para efectos de diseño estructural no basta con conocer las deformaciones iniciales o instantáneas. En muchos casos interesa aún más estimar la magnitud de la deformación total incluyendo los efectos del tiempo. En vigas sujetas a carga constante se han observado deflexiones totales dos a cinco veces mayores que las medidas inmediatamente después de aplicada la carga.

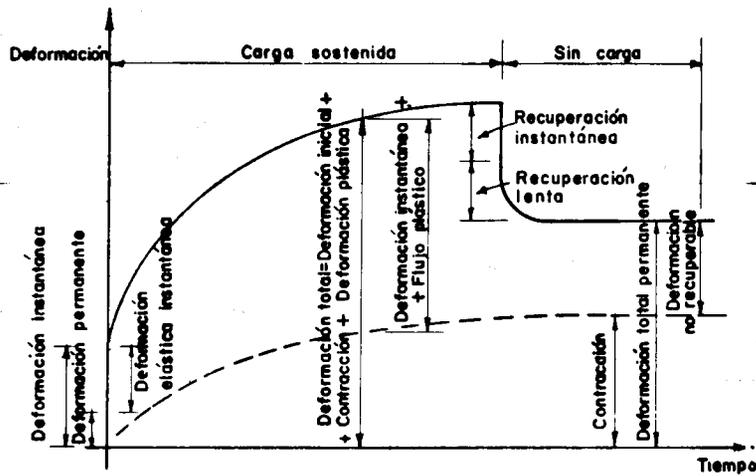


Fig 3.26 Curva típica deformación-tiempo

Contracción.— Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el contenido de agua del concreto a lo largo del tiempo. El agua de la mezcla se va evaporando y se va usando en la hidratación del cemento. Esto produce cambios volumétricos en la estructura interna del concreto, que a su vez producen deformaciones.

Los factores que más afectan la contracción son la cantidad original de agua en la mezcla y las condiciones ambiente, especialmente a edades tempranas. Como generalmente un concreto de alta resistencia tiene menos agua que uno de baja resistencia, el primero se contraerá menos que el segundo. Asimismo, un concreto en un ambiente húmedo se contraerá menos que en un ambiente seco.

Para la misma relación agua/cemento la contracción varía con la cantidad de pasta por unidad de volumen. Una mezcla rica en pasta (cemento más agua) se contraerá más que una pobre.

La contracción tiende a producir esfuerzos debidos a las restricciones al libre desplazamiento del elemento que existen comunmente en la realidad. Si el concreto pudiera encogerse libremente, la contracción no produciría ni esfuerzos, ni grietas.

Si el curado inicial del concreto se hace muy cuidadosamente, disminuirá el efecto de la contracción. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010. Normalmente la mayor parte de la deformación por contracción ocurre en los primeros meses.

Flujo plástico.— El flujo plástico es un fenómeno que se produce debido a la aplicación de una carga. Existen varias teorías que tratan de describir el mecanismo de este fenómeno, pero hasta ahora ninguno explica satisfactoriamente todos los efectos observados. El fenómeno es uno de deformación bajo carga continua, debido a un acomodamiento interno de las partículas que ocurre simultáneamente con la hidratación del cemento.

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga, hasta niveles del orden del 50 por ciento de la resistencia. Para niveles mayores la relación no es ya proporcional.

Como el flujo plástico se debe en gran parte a deformaciones de la pasta de cemento, la cantidad de ésta por unidad de volumen es una variable importante en las deformaciones. En la fig 3.26 se observa que la deformación debida al flujo plástico aumenta con la duración de la carga. También se ha observado que para un mismo nivel de carga, las deformaciones disminuyen al aumentar la edad a que ésta se aplica.

Otros factores que afectan las deformaciones por flujo plástico son las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, las proporciones de la mezcla, y la humedad ambiente.

3.7.4 Miembros de concreto reforzada sometidos a tensión axial

Cuando un miembro de concreto reforzado con barras de acero es sometido a una carga de tensión axial creciente, el concreto se agrieta a niveles de carga bajos. A partir del momento en que se presenta el agrietamiento la fuerza de tensión es soportada exclusivamente por el acero de refuerzo, siendo nula la contribución del concreto a la resistencia. Por esta razón el concreto reforzado se utiliza poco en miembros estructurales sujetos a tensión axial. Sin embargo, a veces se recurre a miembros de esta clase, como en los tirantes de concreto reforzada para cargar el sistema de piso de puentes de arco, o para tomar el peso de marcos y arcos.

Por tratarse de elementos poco comunes en la práctica, no se estudian en estos apuntes.

3.7.5 Miembros de concreto reforzado sometidos a compresión axial

Introducción

Existen dos tipos básicos de columnas de concreto reforzada: las de estribos y las zunchadas. En las de estribos, el refuerzo transversal está formado por anillos cerrados colocados a distancias relativamente grandes de acuerdo con las reglas que se resumen más adelante. En las zunchadas, el refuerzo transversal consiste en varillas helicoidales con un paso pequeño de manera que se logra un efecto confinante.

Resistencia

En la fig 3.27 se muestran las características carga-deformación de columnas cortas de concreto reforzado; es decir, columnas en las que los efectos de esbeltez son despreciables. En el diseño práctica el caso teórico de carga axial pura se presenta raras veces ya que los reglamentos suelen obligar a tener en cuenta siempre cierta excentricidad. Sin embargo, es interesante considerar esta condición de carga como caso límite y porque a veces se utiliza el valor de la capacidad correspondiente en fórmulas de diseño.

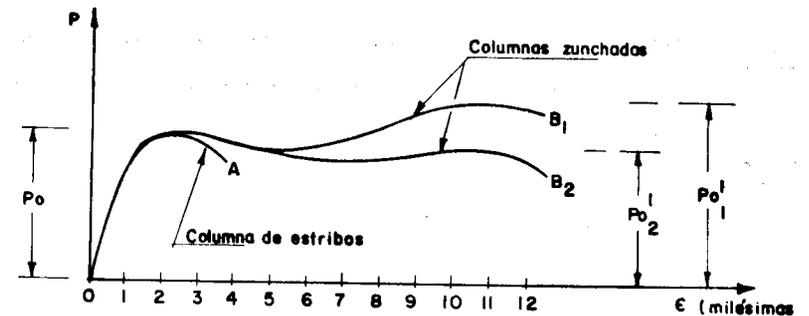


Fig 3.27 Características carga-deformación de columnas cortas

La curva A corresponde a una columna de estribos. La resistencia P_o está dada por la ecuación

$$P_o = f'_c A_c + A_s f_y \quad (3.9)$$

en donde A_c representa el área de concreto; es decir, el área total de la sección transversal menos el área ocupada por las varillas de refuerzo longitudinal. Normalmente esta área es muy pequeña y puede utilizarse el área total de la sección, A_g , en lugar de la del concreto solo. A_s es el área del acero longitudinal, ---
 $f_c^* = 0.85 f_c^*$ si $f_c^* \leq 250 \text{ Kg/cm}^2$ o igual a $(1.05 - \frac{f_c^*}{1250})f_c^*$ si $f_c^* < 250 \text{ Kg/cm}^2$,
 $f_c^* = 0.8 f_c'$, f_c' es la resistencia del concreto, y f_y , el esfuerzo de fluencia del acero.

El comportamiento de columnas zunchadas está representado por las curvas B de la fig. 3.27. Inicialmente, hasta llegar al primer máximo, el comportamiento es igual al de una columna de estribos. Poco después se desprende el recubrimiento, pero empieza a sentirse el efecto confinante del zuncho, gracias al cual la columna puede seguir tomando carga. Cuando el confinamiento es suficiente, se alcanza un segundo máximo superior al primero, que puede calcularse con la expresión :

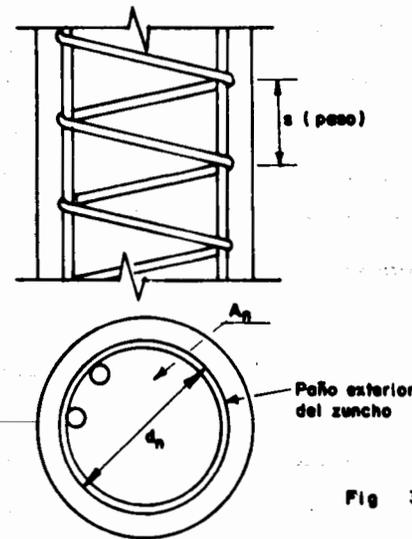
$$P_o' = f_c^* A_n + A_s f_y + 2p' f_y A_n \quad (3.10)$$

A_n es el área del núcleo de concreto limitado por el paño exterior del zuncho (fig. 3.28). f_y es el esfuerzo de fluencia del acero del zuncho. p' es el porcentaje volumétrico del zuncho que se obtiene dividiendo el volumen de una vuelta de zuncho, supuesta en un plano, entre el volumen de la parte tributaria del núcleo, es decir, de un cilindro de sección igual a A_n y de altura igual al paso del refuerzo helicoidal, s . Así,

$$p' = \frac{d_n a_s}{d_n^2 s} = \frac{4a_s}{s d_n}$$

El significado de los símbolos se aclara en la fig. 3.28.

Se puede considerar que la resistencia en compresión axial de un miembro zunchado de concreto reforzado, se obtiene de la contribución de cuatro factores: el concreto del núcleo, el acero longitudinal, el concreto del recubrimiento y el refuerzo helicoidal. Las contribuciones de estos dos últimos factores no pueden existir simultáneamente, ya que el refuerzo helicoidal actúa en forma apreciable sólo cuando la deformación longitudinal del elemento es igual o mayor que la que produce la caída del recubrimiento.



- a_s = Área de la sección del zuncho
- A_n = Área del núcleo
- d_n = Diámetro del núcleo medido hasta el paño exterior del zuncho
- s = Paso del zuncho

Fig 3.28 Columna zunchada

Los reglamentos de construcción suelen fijar el valor de p' de manera que el refuerzo helicoidal correspondiente aporte una contribución a la resistencia ligeramente mayor que la del recubrimiento. En otras palabras, el zuncho sustituye al --

recubrimiento cuando éste se desprende. Por lo tanto, la ec (3.9) es también aplicable a columnas zunchadas, ya que no se permite asignar al refuerzo helicoidal una contribución mayor. El valor de p_1 no será menor que:

$$p_1 = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_n} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y}, \text{ ni que } 0.12 \frac{f'_c}{f_y} \quad (3.12)$$

donde A_g representa el área total de la sección y los demás símbolos ya son conocidos.

En las ecuaciones 3.9 a 3.12 se han usado los términos f'_c y f_y para designar la resistencia del concreto y el límite de fluencia del acero, respectivamente. Para fines de diseño, y para tomar en cuenta la variabilidad en las propiedades mecánicas de los materiales, f'_c y f_y son valores nominales que se especifican de manera que se cumpla con algún requisito estadístico de resistencia. Los ejemplos y aplicaciones que se presentan en estos apuntes están basados en las recomendaciones del Reglamento del Distrito Federal de 1976 según los cuales para efectos de diseño deben usarse valores reducidos de la resistencia del concreto y del límite de fluencia del acero, los cuales tienen por objeto tomar en cuenta tanto la variabilidad de los materiales como la calidad de la mano de obra.

El esfuerzo reducido para el concreto según el Reglamento del Distrito Federal, f^*_c , se determina mediante la siguiente ecuación:

$$f^*_c = 0.8 f'_c \quad (3.13)$$

f'_c es la resistencia nominal del concreto.

Cuando se usan las resistencias reducidas, la resistencia a carga axial de una columna de estribos se calculan con la ecuación:

$$P_{RO} = F_R (F^*_c A_c + A_s f_y) \quad (3.14)$$

donde F_R es un factor de reducción de la resistencia, que valdrá 0.85 en flexo-compresión cuando el núcleo esté confinado con un zuncho que cumpla con el requisito especificado por las expresiones 3.12, y también cuando el elemento falle en tensión; si el núcleo no está confinado y la falla es en compresión, F_R se supondrá igual a 0.75.

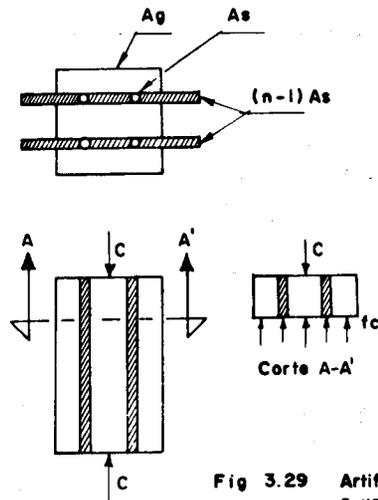
Esfuerzo bajo condiciones de servicio. Método de la sección transformada.

Se presentan a veces elementos estructurales formados por dos o más materiales. Los esfuerzos producidos en cada uno de los materiales por una carga externa pueden determinarse partiendo de condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones. El método seguido cuando los materiales son elásticos comúnmente se denomina método de la sección transformada.

La aplicación del método se ilustra aquí con un elemento de concreto reforzado, probablemente el ejemplo más común del empleo de una combinación de dos materiales para fines estructurales. Puede procederse en forma análoga para combinaciones de otros materiales.

Para ciertos aspectos del dimensionamiento de elementos de concreto reforzado a veces es necesario investigar los esfuerzos producidos en el acero por una carga como en el acero por una carga externa a nivel de servicio o de trabajo. Bajo niveles de carga relativamente bajas, como sucede en el uso de las cargas de servicio, el comportamiento del concreto puede considerarse aproximadamente elástico.

Este artificio consiste en convertir la sección de concreto reforzado en una sección homogénea, sustituyendo el acero por un concreto hipotético equivalente, o viceversa. Considérese, por ejemplo, un elemento sujeto a compresión como el mostrado en la fig 3.29



A_g = Área total (sin descontar el área ocupada por el acero de refuerzo)

A_s = Área del acero de refuerzo

f_c = Esfuerzo del concreto

C = Fuerza de compresión

$n = E_s/E_c$ = Relación modular

E_s = Módulo de elasticidad del acero de refuerzo

E_c = Módulo de elasticidad del concreto

Fig 3.29 Artificio de la sección transformada aplicado a un miembro de concreto reforzado sujeto a compresión

Por condiciones de equilibrio se obtiene

$$P = f_c A_c + f_s A_s \quad (3.15)$$

donde f_c y f_s son respectivamente los esfuerzos en el concreto y el acero, y A_c y A_s , las áreas de concreto y acero.

Las deformaciones unitarias del concreto y del acero serán

$$\epsilon_c = \frac{f_c}{E_c} \quad \text{y} \quad \epsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$

siendo E_c y E_s los módulos de elasticidad correspondientes. Puesto que la adherencia impide que se presenten resbalamientos relativos entre ambos materiales, sus deformaciones unitarias deberán ser iguales. Por lo tanto,

$$\epsilon_c = \epsilon_s \quad \text{y} \quad \frac{f_c}{E_c} = \frac{f_s}{E_s}$$

Si se llama, n , a la relación entre los módulos, E_s/E_c , la relación entre los esfuerzos del concreto y del acero puede expresarse como sigue:

$$f_s = \frac{E_s}{E_c} f_c; \quad f_s = n f_c \quad (3.16)$$

Si se desea obtener el esfuerzo del concreto, la ec 3.15 puede escribirse -

$$P = f_c A_c + n f_c A_s$$

de donde puede despejarse f_c :

$$f_c = \frac{P}{A_c + n A_s} \quad (3.17)$$

El denominador del segundo término de esta ecuación es el área transformada de la sección, integrada por el área neta de concreto y el área de acero multiplicada por la relación modular.

Sin cometer mucho error puede usarse el área total, A_g , sin descontar el espacio ocupado por las varillas, en lugar del área neta, A_c . El área transformada, teniendo en cuenta que $A_c = A_g - A_s$, puede expresarse en función de A_g -- como sigue:

$$A_g - A_s + n A_s = A_g + (n - 1) A_s$$

y la ec. 3.17 se convertirá en

$$f_c = \frac{P_c}{A_g + (n-1) A_s} \quad (3.18)$$

El área puede expresarse en función del porcentaje de acero, p , que en este caso se define como la relación A_s/A_g . Así, considerando que $A_s = p A_g$, se obtiene: $A_g + (n-1) A_s = A_g + (n-1) p A_g = A_g [1 + (n-1) p]$ (3.19)

Sustituyendo en la ec. 3.18 resulta

$$f_c = \frac{P}{A_g [1 + (n-1) p]} \quad (3.20)$$

El esfuerzo en el acero, f_s , se puede obtener de la relación dada por la ec. 3.16. En la fig. 3.29 se muestra una representación gráfica del área de acero transformada en concreto.

También es posible transformar la sección en una sección equivalente de acero, usando razonamientos análogos a los anteriores.

La validez de las expresiones obtenidas está condicionada a la precisión con que se conozca la relación modular, n . Este valor depende del módulo de elasticidad del concreto, E_c , cantidad que para un mismo concreto varía notablemente según el nivel de carga, la edad y otros factores.

Requisitos del acero longitudinal

El porcentaje de acero mínimo, referido a la sección total de la columna, suele limitarse a valores del orden de uno por ciento. Los porcentajes máximos admisibles llegan a ocho por ciento en algunos reglamentos, aunque refuerzos tan al-

altos casi siempre implican dificultades constructivas. Además se suele especificar que el diámetro mínimo que puede utilizarse en columnas es el correspondiente a varillas del No. 5. En columnas rectangulares de estribos debe usarse un mínimo de cuatro varillas y en columnas zunchadas, un mínimo de seis varillas.

Las varillas pueden colocarse en haces o paquetes formados por grupos de dos, tres y a veces cuatro varillas, si se respetan las recomendaciones que al respecto hacen los reglamentos.

Requisitos del acero transversal.

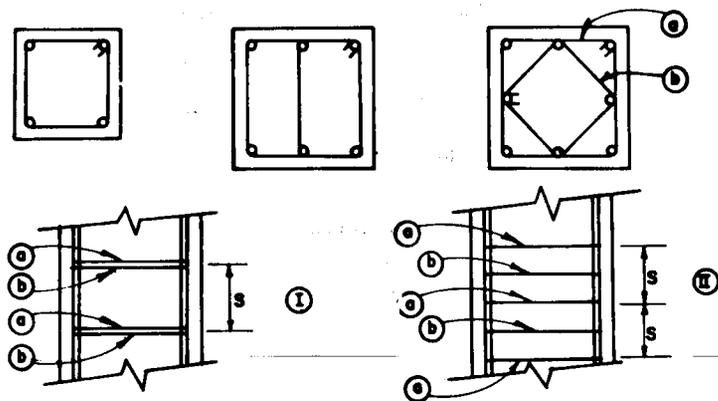
En columnas de estribos, estas generalmente se detallan de manera que cada varilla o haz de varillas longitudinales quede en un ángulo de estribo. Se entiende por estribo el conjunto de elementos requeridos para lograr esto. En la Fig. 3.30 se muestran algunos ejemplos.

En columnas zunchadas la separación libre entre dos vueltas consecutivas debe ser por lo menos igual a 1.5 veces al tamaño máximo del agregado, pero no mayor de 7 cms.

Excentricidades accidentales

Se indicó antes que la carga axial es una condición de carga ideal que no

existe en las estructuras reales. Aunque a veces las idealizaciones para análisis no las tienen en cuenta, siempre existen excentricidades debidas a defectos constructivos, momentos producidos por condiciones de distribución de carga viva no consideradas y otras causas. Reconociendo esto, muchos reglamentos de concreto establecen que toda columna debe dimensionarse teniendo en cuenta cierta excentricidad accidental fijada arbitrariamente, aunque el análisis indique que ésta es pequeña o inexistente. Esto significa que todas las columnas se dimensionan como elementos sujetos a flexo-compresión.



Nota: Cuando es necesario usar juegos de estribos, pueden colocarse en un lecho como en I, o pueden repartirse en la separación máxima especificada, como en II

Fig. 3.30 Detalles de refuerzo transversal en columnas de estribos

Ejemplo 3.2 Columna circular de concreto con refuerzo helicoidal sometida a una carga axial de compresión.

En este ejemplo se ilustran tres cosas: la determinación de la resistencia o carga axial de una columna circular de geometría y refuerzo conocidas, la determinación de esfuerzos por el método de la sección transformada y el dimensionamiento del refuerzo helicoidal.

La relación de acero a concreto de la sección dada, p , es igual a 0.0245, y, por lo tanto, está comprendido entre los límites usuales.

La resistencia se determinó de acuerdo con el criterio del Reglamento del Distrito Federal de 1976. No se tuvo en cuenta el concreto desplazado por el acero.

El cálculo de esfuerzos se hizo para una carga bastante menor que la resistencia de manera que la hipótesis de un comportamiento elástico implícito en el método de la sección transformada es razonable.

La separación calculada para la espiral o refuerzo helicoidal fue 4.9 cms.

Este valor cumple las limitaciones mencionadas para el refuerzo transversal ya que :

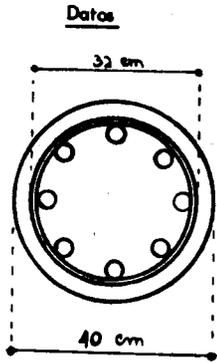
$$4.9 - \beta \text{ ref. helic.} = 4.9 - 0.8 = 4.1 < 7 \text{ cms.}$$

Además la separación libre es mayor que 1.5 veces el tamaño máximo del agregado si se considera que este es de $3/4" = 1.9 \text{ cms}$:

$$4.9 - \beta \text{ ref. helic.} = 4.9 - 0.8 = 4.1 > 1.5 \times 1.9 = 2.9 \text{ cms.}$$

Ejemplo 3.2

Columna circular de concreto con refuerzo helicoidal sometida a carga axial de compresión.



Datos

Refuerzo vertical

8 vs No. 7 ($a_s = 3.87 \text{ cm}^2$)

Refuerzo transversal

Espiral No. 2.5 ($a_s = 0.49 \text{ cm}^2$)

$f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$

$f_y = f_{y1} = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

$E_c = 10,000 \sqrt{200} \text{ Kg/cm}^2$

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Determinación de la resistencia a carga axial de compresión. (Criterio Reglamento D.D.F. - 1976).

Cálculo de constantes.

$f_c^* = 0.8 f_c = 160 \text{ Kg/cm}^2 < 250 \text{ Kg/cm}^2$

$f_c^* = 0.85 f_c^* = 136 \text{ Kg/cm}^2$

Resistencia

$P_{RO} = [f_c^* A_g + A_s f_y] F_R \quad E_c (3.14)$

$P_{RO} = [136 \times \frac{\pi}{4} \times 40^2 + 8 \times 3.87 \times 4000] 0.85$
 $= [170900 + 123800] 0.85 = 250500 \text{ Kg}$

$P_{RO} = 250.5 \text{ ton.}$

Investigación de Esfuerzos por el método de la Sección Transformada.

Considérese que se desea determinar los esfuerzos producidos en el concreto y el acero por una carga $P = 170 \text{ ton.}$

$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2000000}{10000 \cdot 200} = \frac{14}{200}$

$A_g = \frac{\pi}{4} (40)^2 = 1256 \text{ cm}^2$

$\rho = \frac{A_s}{A_g} = \frac{8 \times 3.87}{1256} = 0.0245$

$f_c = \frac{P}{A_g [1 + (n-1) \rho]} \quad E_c (3.20)$

$= \frac{170000}{1256 [1 + 13 (0.0245)]} = f_c = 103 \text{ Kg/cm}^2$

$f_s = n f_c \quad E_c (3.16)$

$= 14 \times 103$

$f_s = 1440 \text{ Kg/cm}^2$

Determinación del paso del refuerzo helicoidal.

$p_1 = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_n} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_{y1}} \quad E_c (3.12)$

$= 0.45 \left[\frac{20^2}{16^2} - 1 \right] \frac{200}{4000} = 0.0126 > 0.12 \frac{f'_c}{f_y} = 0.006$

$p_1 = \frac{4a_s}{S d_n} ; s = \frac{4a_s}{p_1 d_n} \quad E_c (3.11)$

$S = \frac{4 \times 0.49}{0.0126 \times 32}$

$S = 4.9 \text{ cms.}$

Observaciones sobre dimensionamiento

En el ejemplo 3.2 se ilustró la revisión de la resistencia de una sección de concreto de características conocidas. El dimensionamiento implica la elección de las dimensiones de la sección y de la cantidad de refuerzo. Cuando el criterio de dimensionamiento es el de resistencia, como suele suceder en el diseño de estructuras de concreto reforzada, se trata de encontrar una sección que soporte la carga de servicio con un margen de seguridad adecuado; es decir la resistencia proporcionada debe ser igual a la carga de servicio o trabajo multiplicado por un factor de carga, que suelen especificar los reglamentos.

Si se sigue el criterio del Reglamento del Distrito Federal y se hace caso omiso de la existencia de posibles excentricidades accidentales, el dimensionamiento puede basarse en la ec (3.14). Se aprecia que puede haber muchas soluciones a un problema dado ya que son múltiples las combinaciones de áreas de concreto y acero posibles. Un camino puede consistir en elegir un valor razonable de la relación p y determinar el área de concreto correspondiente. En la práctica suelen escogerse las dimensiones del concreto de manera que sean múltiplos de cinco.

3.8 ELEMENTOS DE MAMPOSTERIA

3.8.1 Conceptos generales

Se entiende por mampostería el material de construcción que resulta de la combinación de piedras o piezas naturales o artificiales con un mortero que las une para formar un conjunto monolítico.

La mampostería tiene considerable resistencia a la compresión pero es débil en tensión, lo mismo que el concreto simple. Como éste, se presta a la construcción de estructuras en las que las solicitaciones

no producen tensiones importantes.

Los propiedades mecánicas de la mampostería son más variables y difíciles de predecir que las de los otros materiales estructurales mencionados en este capítulo. Esto es debido al poco control que se tiene sobre las propiedades de los materiales componentes y sobre los procedimientos de construcción empleados.

Una de las dificultades del tratamiento racional de la mampostería es que ésta puede estar formada por una gran variedad de materiales de propiedades muy distintas. Sin embargo, las características básicas del compartamiento se mantienen iguales para los diferentes materiales, aunque los valores cuantitativos dependen de las propiedades de los componentes; éstas se estudiarán brevemente en la siguiente sección.

3.8.2 Propiedades de los materiales componentes

Los morteros

Los morteros son mezclas plásticas aglomerantes que resultan de combinar arena y agua con un material cementante que puede ser cemento, cal, yeso, o una mezcla de estos materiales.

Las principales propiedades de los morteros son su resistencia a la compresión y tensión, adherencia con la piedra, módulo de elasticidad, trabajabilidad, rapidez de fraguado, e impermeabilidad. Otra característica importante es su retención de agua, es decir, su capacidad para evitar que la pieza absorba el agua necesaria para el fraguado del mortero. El índice de resistencia más generalmente aceptado es la resistencia a compresión obtenida en un cubo de 5 cm de lado.

Las propiedades mecánicas de los morteros son muy variables y dependen principalmente del tipo de cementante utilizado y de la relación arena / cementante.

Los morteros a base de cal son de baja resistencia a compresión, del orden de 1 a 10 kg/cm². Sólo excepcionalmente se alcanzan resistencias mayores. El módulo de elasticidad es del orden de 3 000 kg/cm² y el peso volumétrico de 2 ton/m³. Las mezclas que se obtienen son muy trabajables, de fraguado lento y con buena retención de agua. El fraguado lento es favorable en cuanto permite preparar una mezcla para toda una jornada de trabajo, pero es perjudicial en cuanto la resistencia de la mampostería se desarrolla lentamente.

Los morteros de cemento tienen resistencias a la compresión mucho más altas que los de cal: entre 40 y 200 kg/cm². El módulo de elasticidad varía entre 10 000 y 50 000 kg/cm² y el peso volumétrico es de aproximadamente 2.1 ton/m³. Estos morteros son de fraguado rápido; una mezcla puede usarse como máximo 40 a 60 minutos después de fabricada. Son menos trabajables que los de cal y su retención de agua es menor que en los morteros de cal.

Los morteros de yeso tienen resistencias muy bajas, fraguado muy rápido y sólo se usan en modalidades constructivas especiales.

Los morteros que contienen más de un material cementante se conocen como morteros bastardos o mixtos. Son ampliamente usados los morteros con cemento y cal ya que reúnen las ventajas de los dos materiales dando lugar a mezclas de buena resistencia y trabajabilidad. También se usan cementantes premezclados, como los llamados cementos de albañilería que contienen cemento, cal y aditivos plastificadores. Otro mortero mixto es la mezcla de cal, arena y arcilla usada para pegar adobes.

Para fines estructurales la relación arena a cementante recomendable está entre 2.5 y 3 ya que se obtienen así mezclas de buena resistencia, buena adherencia con la piedra y baja contracción.

La variabilidad en las resistencias que se obtiene para un proporcionamiento dado es considerable debido a que la dosificación se hace por volumen y sin controlar la cantidad de agua. El coeficiente de variación se encuentra entre 20 y 30%.

La tabla 3.3 muestra algunos proporcionamientos recomendados para su empleo en elementos estructurales y las resistencias mínimas que deben obtenerse para cada proporcionamiento.

TABLA 3.3 PROPORCIONAMIENTOS RECOMENDADOS PARA MORTERO EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Tipo de mortero	Partes de cemento	Partes de cemento de albañilería	Partes de cal	Partes de arena	f _c ^a , valor mínimo admisible de la resistencia en compresión, en kg/cm ²
I	1	0 a 1/2	0 a 1/4	No menos de 2.25 ni más de 3 veces la suma de cementantes en volumen	125
II	1	1/2 a 1	1/4 a 1/2		75
III	1		1/1 a 1 1/4		40

Las piedras naturales

Las unidades de piedra se utilizan sin labrar o labradas.

En México suelen distinguirse los siguientes tipos de mampostería de acuerdo con la forma en que ha sido labrada la piedra (fig 3.31):

- Mampostería de primera. La piedra se labra en paralelepípedos regulares con su cara expuesta de forma rectangular. Las unidades de piedra de este tipo reciben el nombre de sillares.
- Mampostería de segunda. La piedra se labra en paralelepípedos de forma variable siguiendo la configuración natural con que llega de la cantera.
- Mampostería de tercera. La piedra se utiliza en la forma irregular con que llega de la cantera, aunque procurando que la cara expuesta sea aproximadamente plana.



Fig 3.31 Tipos de mampostería

Las piedras utilizadas tienen propiedades muy variables. En la tabla 3.4 se dan características aproximadas de algunas piedras comúnmente usadas en la construcción.

TABLA 3.4 PROPIEDADES MECANICAS DE PIEDRAS NATURALES

PIEDRA	Peso volumétrico seco (T/m^3)	Resistencia a compresión (kg/cm^2)	Resistencia tensión en flexión (kg/cm^2)	Módulo de elasticidad (kg/cm^2)
Areniscas	1.75 - 2.65	150 - 3200	60 - 120	40 000- 200 000
Basaltos (piedra brava)	2.30 - 3.00	800 - 5800	200 - 300	100 000- 300 000
Granito natural	2.40 - 3.20	800 - 3000	100 - 200	400 000- 500 000
Mármol	2.40 - 2.85	300 - 3000	35 - 200	900 000

La forma de la curva carga-deformación es variable según el tipo de piedra; en general el comportamiento no es lineal. Los módulos de elasticidad dados en la tabla 3.4 son módulos tangentes iniciales o correspondientes a niveles de esfuerzos bajos.

Las piedras artificiales

Existe una gran variedad de piedras artificiales que se utilizan en la construcción. Estas difieren entre sí tanto por la materia prima utilizada, como por las características geométricas de las piezas y por los procedimientos de fabricación empleados.

Las materias primas más comunes son el barro, el concreto, con agregados normales o ligeros, y la arena con cal. Los procedimientos de construcción son muy variados: desde los artesanales, como el cocido en horno para los tabiques comunes, hasta los muy industrializados (vibrocompactación, para los bloques de concreto, y extrusión, para el bloque hueco de barro). La forma es prismática pero con distintas relaciones entre las dimensiones. Las piezas pueden ser macizas o con huecos verticales u horizontales.

La resistencia de las piedras artificiales se determina por el ensaye de una pieza o de una mitad de ella. Por lo tanto los especímenes de ensaye son muy diferentes de manera que es difícil establecer comparaciones entre materiales distintos. Particularmente importante es la esbeltez de la pieza que influye en la restricción al desplazamiento lateral proporcionada por las cabezas de la máquina de ensaye.

La forma irregular de las piezas impide muchas veces definir su resistencia real sobre el área neta del material. Esto es imposible, por ejemplo, en piedras con huecos horizontales. Por esto es usual definir la resistencia sobre el área bruta, es decir, el área dada por las dimensiones exteriores.

La tabla 3.5 proporciona características representativas de las propiedades mecánicas de las piezas de uso más frecuente. La

tabla da rangos de valores de pesos volumétricos medios, resistencias medias a compresión y coeficientes de variación de las resistencias obtenidas de muestras de piezas fabricadas por distintos productores. Puede apreciarse que incluso para un tipo dado de piedra existen variaciones grandes en las resistencias promedio y en el control de calidad, reflejado por los coeficientes de variación, de los productos de diversa procedencia.

Dos materiales no mencionados en la tabla 3.5, pero de indudable importancia, son el adobe y el tabique de suelo-cemento.

El adobe es un material de gran importancia en el medio rural. Se trata de un tabique de barro sin cocer, mezclado con fibras de distintos tipos (estiércol, paja, hojas, etc) y secado al aire libre. Su resistencia es del orden de 15 kg/cm^2 ó menor, y los tamaños más usuales son $8 \times 30 \times 40 \text{ cm}$ y $8 \times 20 \times 40 \text{ cm}$.

El tabique de suelo-cemento es un material que se ha empezado a desarrollar recientemente y que parece de interés por su bajo costo. Se fabrica mezclando suelos de ciertas características con cemento portland.

TABLA 3.5 CARACTERISTICAS TÍPICAS DE ALGUNAS PIEDRAS ARTIFICIALES

Observaciones

Los valores de f_p se refieren al área bruta medida y los de γ al volumen neto. Las medidas son medidas nominales dadas en cm.

Material	Geometría pieza	Resistencia a compresión f_p (kg/cm ²)	Coefficiente variación, c_v	Peso volumétrico, γ (ton/m ³)
Tabique rojo de barro recocido		35 - 115	10 - 30	1.30 - 1.50
Tabique extruido perforado verticalmente		150 - 430	11 - 25	1.65 - 1.96
		310 - 570	15 - 20	1.61 - 2.06
	(barro)	150 - 400	11 - 26	1.66 - 2.20
		420 - 570	12 - 22	2.02 - 2.13
Tabique extruido macizo (barro)		375 - 900	5 - 16	1.73 - 2.05

TABLA 3.5 (Continuación)

Material	Geometría pieza	Resistencia a compresión f_p (kg/cm ²)	Coefficiente variación, c_v	Peso volumétrico, γ (ton/m ³)
Tabique Extruido, huecos horizontales		75 - 80	13 - 18	1.25 - 1.32
	(barro)	50 - 80	16 - 30	1.69 - 1.78
Bloques de concreto:				
Ligero		20 - 50	10 - 26	0.95 - 1.21
Intermedio		20 - 80	7 - 29	1.32 - 1.70
Pesado		70 - 145	7 - 28	1.79 - 2.15
Tabicón		45 - 120	11 - 35	1.05 - 1.60
Silico Calcáreo		175 - 200	11 - 15	1.79

3.8.3 Propiedades mecánicas del conjunto piedra-mortero

Las propiedades mecánicas de la mampostería pueden deducirse ya sea del estudio de los materiales componentes, piedra y mortero, o del ensaye directo de probetas compuestas. La primera forma es evidentemente menos precisa debido al gran número de variables que intervienen en el problema y a la dificultad de tomar en cuenta la interacción entre los dos materiales.

Mucho más confiables son los resultados obtenidos del ensaye de especímenes compuestos, aunque hasta la fecha el ensaye de estos especímenes no ha sido muy usual en la práctica.

Mampostería de piedras naturales

Los resultados experimentales acerca de la resistencia en compresión de este material son muy escasos. En pruebas efectuadas en especímenes aproximadamente cúbicos de 40 cm de lado, se han obtenido resistencias del orden de 200 kg/cm^2 para la sillería y de 120 kg/cm^2 para mampostería ordinaria. Se observa que estos valores son muy inferiores a la resistencia de la piedra sola (tabla 3.4) y mayores que la resistencia del mortero.

El mecanismo de falla no está muy bien definido. La resistencia parece ser muy sensible a la calidad del mortero, al tamaño de las piedras y al espesor de las juntas. La variación de la resistencia en espe-

címenes nominalmente iguales es considerable.

Los valores obtenidos en los cubos son representativos de la resistencia en carga axial de elementos cortos en los que no hay efectos de esbeltez. Se considera que estos últimos son despreciables si la relación altura a espesor del elemento no excede de cinco.

En la tabla 3.6 se dan valores conservadores de la resistencia a compresión de la mampostería de piedras naturales clasificada como mampostería de 3a.

TABLA 3.6 RESISTENCIA EN COMPRESION DE LA MAMPOSTERIA DE PIEDRAS NATURALES (MAMPOSTERIA DE 3a.)

Tipo de mortero	f_m
Mampostería junteada con mortero de resistencia en compresión no menor que 50 kg/cm^2	20
Mampostería junteada con mortero de resistencia a compresión menor que 50 kg/cm^2	15

Mampostería de piedras artificiales

Para mampostería de piedras artificiales, la resistencia en compresión del conjunto ha sido estudiada a través del ensaye de pilas formadas por varias piezas sobrepuestas hasta alcanzar una relación altura a espesor de aproximadamente cuatro. Estos ensayes se han realizado para una gama bastante amplia de materiales usuales en el país -

Del ensaye de las pilas se han podido conocer diversas características del comportamiento las cuales se describen a continuación.

Interacción mortero-piedra

La mampostería está compuesta por dos materiales que tienen distintas características esfuerzo-deformación y que, al ser sometidos a carga axial, sufren deformaciones verticales acompañadas por una deformación transversal. Esta debe ser igual en los dos materiales ya que la fricción y la adherencia entre ellos impiden el desplazamiento relativo en las caras de contacto. El caso más común es que el mortero sea más deformable que la pieza y por lo tanto, si los dos materiales pudiesen deformarse libremente, al ser sometidos al mismo esfuerzo vertical, sufrirían las deformaciones mostradas en la fig 3.32. Por la restricción en las caras de contacto, los dos tendrán una misma deformación lateral intermedia entre las de los materiales aislados. Para adoptar el estado de deformaciones mostrado en la fig 3.32-b, el mortero sufrirá compresiones en ambas direcciones transversales quedando sometido a un estado de compresión triaxial. La pieza estará sometida a tensiones transversales más una compresión longitudinal. Si la pieza es más deformable que el mortero, el estado de esfuerzos de los dos materiales se invierte.

Por lo anterior, el material más deformable incrementará su

resistencia sobre la obtenida en un ensaye a compresión simple, ya que está sometido a compresión triaxial; por lo contrario, el material menos deformable será reducida su resistencia por las tensiones transversales.

Este comportamiento peculiar de la mampostería ha sido denominado fenómeno de junta y permite explicar cualitativamente los resultados de los ensayos, aunque no ha dado lugar a ningún método teórico de cálculo suficientemente sencillo para su aplicación práctica.

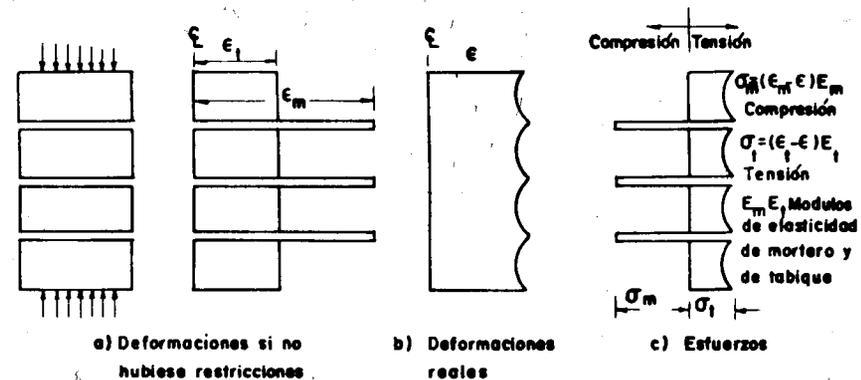


Fig 3.32 Idealización de la interacción entre mortero y piedra. Mortero más deformable que la piedra

Modos de falla. La falla de la mampostería sujeta a carga axial se presenta por aplastamiento de las piezas o por agrietamiento vertical debido a las tensiones transversales que pueden ser introducidas por el mortero. La falla nunca se produce a través del mortero,

ya que éste, por estar colocado en capas delgadas, es retenido por las piezas y su aplastamiento no causa la inestabilidad del conjunto.

La falla por aplastamiento de las piezas ocurre cuando éstas son de muy baja resistencia, y el mortero de buena calidad; también es típica de piezas con huecos horizontales.

La forma más usual de falla es a través de grietas verticales y se produce cuando el mortero es de resistencia igual o menor que la de la pieza.

Los otros tipos de falla observados incluyen los efectos de flexión y esbeltez y se discutirán posteriormente.

Variables que influyen en la resistencia. La variable que más importantemente influye en la resistencia de la mampostería es la resistencia a compresión axial de las piezas individuales.

La resistencia del mortero es significativa sólo cuando ésta es muy inferior a la de la piedra.

Cuando la succión de la piedra es muy alta se extrae del mortero, reduciéndose su resistencia y adherencia, así como la resistencia del conjunto piedra-mortero. Por esto conviene saturar las piedras que tengan mucha succión, como el tabique recocido, antes de colocarlas.

Otras variables que afectan a la resistencia son la fluidez del mortero (morteros poco fluidos no pueden colocarse en capas de espesor uniformes, lo que da origen a concentraciones de esfuerzos, el espesor de la junta (cuando las piezas son de resistencia conviene que las juntas sean delgadas, de 0.5 a 1 cm), el aparejo y la calidad de la mano de obra.

La tabla 3.7 proporciona valores conservadores de la resistencia que se obtiene en conjuntos formados por distintos tipos de pieza y de mortero. Cuando se cuenta con información experimental adecuada pueden utilizarse valores mayores.

TABLA 3.7 RESISTENCIA EN COMPRESION DE LA MAMPOSTERIA, DE PIEDRAS ARTIFICIALES f_m^* , PARA ALGUNOS TIPOS DE PIEZA

Tipo de pieza	Valores de f_m^* en kg/cm^2		
	Mortero tipo I** $f_b^* \geq 125 \text{kg/cm}^2$	Mortero tipo II** $75 \leq f_b^* < 125 \text{kg/cm}^2$	Mortero tipo III** $40 \leq f_b^* < 75 \text{kg/cm}^2$
Tabique de barro recocido	15	15	15
Bloque de concreto tipo pesado*	20	15	15
Tabicón de concreto	20	15	15
Tabique hueco de barro extruido (huecos verticales)* ($f_p^* \geq 120 \text{kg/cm}^2$)	40	40	30

*Resistencia sobre área bruta; la relación área neta-bruta no será menor de 0.45.

** Ver Tabla 3.3

Relación esfuerzo-deformación. La relación esfuerzo-deformación registrada en ensayos de pilas sujetas a compresión tiene una pendiente aproximadamente constante hasta la falla; sólo para piezas y morteros de muy baja resistencia la curva tiende a ser parabólica. La rigidez del conjunto es generalmente menor que la de las piezas y la del mortero consideradas independientemente.

La fig 3.33 muestra curvas típicas obtenidas de los ensayos.

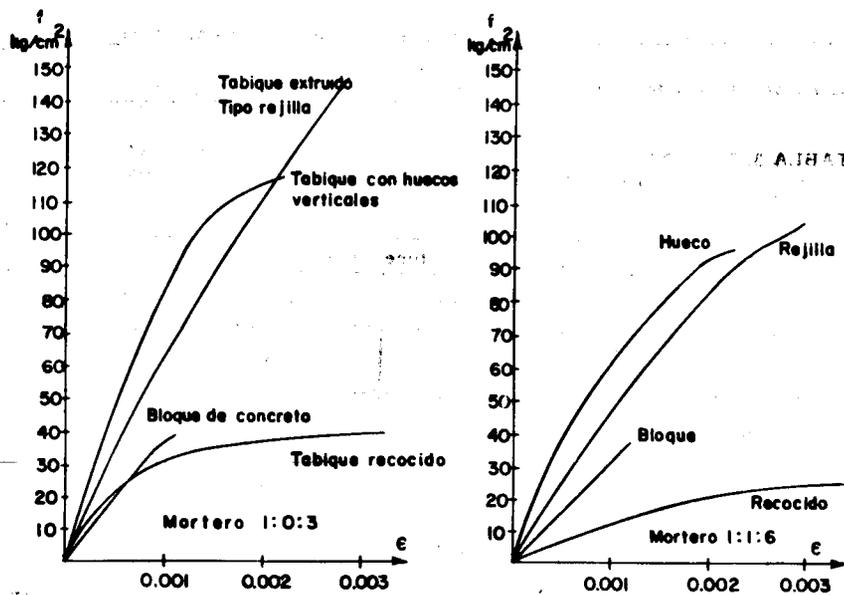


Fig 3.33 Curvas típicas esfuerzo-deformación para mampostería

Los módulos de elasticidad secantes dependen de la resistencia de la pieza y en menor grado de la calidad del mortero. Se han propuesto las siguientes expresiones aproximadas para el módulo de elasticidad

$$E = 400 f_m^*$$

para piezas de barro

$$E = 600 f_m^*$$

para piezas de concreto

f_m^* = la resistencia de la mampostería (Ver tablas 3.6 y 3.7)

Cuando las cargas se aplican en forma sostenida el módulo de elasticidad baja especialmente para las piezas de concreto. Se ha propuesto que para ambos tipos de pieza se emplee la relación

$$E = 250 f_m^*$$

3.8.4 Método simplificado de dimensionamiento de muros de mampostería

Las proporciones de los muros de mampostería, sobre todo las de las de piedras artificiales, son tales, que rara vez son despreciables los efectos de esbeltez. Asimismo las características constructivas de los muros casi siempre implican alguna excentricidad. El dimensionamiento de muros esbeltos y sometidos a excentricidades se estudia en forma rigurosa en secciones posteriores de estos apuntes. En esta sección se propone un método simplificado que es aplicable cuando los efectos de esbeltez y excentricidad no son importantes. El método consiste en dimensionar los muros como si estuvieran su-

jetos únicamente a carga axial, pero considerando una resistencia a compresión reducida. Para aplicar el método simplificado deben cumplirse las siguientes condiciones:

- a) Las deformaciones de los extremos superior e inferior del muro en la dirección normal al plano de éste, están restringidas por el sistema de piso o por otros elementos.
- b) No hay excentricidades importantes en la carga axial aplicada, como las que pueden ser debidas a falta de alineamiento de muros de pisos superiores o a la existencia de voladizos que transmitan momento al muro.
- c) La relación altura a espesor del muro no excede de 20.

Si se cumplen estas condiciones la carga vertical que resiste un muro puede determinarse con la siguiente expresión:

$$P_R = F_r F_E f_m^* A_t \quad (3.21)$$

en que

A_t es el área transversal bruta del muro

f_m^* es la resistencia en compresión de la mampostería. (Las tablas 3.6 y 3.7 dan algunos factores conservadores).

F_r es un factor de reducción de resistencia que se toma igual a 0.6 y tiene en cuenta la variabilidad en la resistencia de la mampostería.

F_E es un factor reductivo por excentricidad y esbeltez que se toma como 0.7 para muros interiores que soporten claros aproximadamente simétricos en ambos lados y como 0.6 para muros extremos o con claros asimétricos y para ca-

sos en que la relación cargas vivas a cargas muertas excede de uno. Para muros que estén ligados a muros transversales con una separación no mayor de 3 m los valores de c se tomarán como 0.8 y 0.7 respectivamente.

La carga resistente así calculada se comparará con la carga de servicio o trabajo multiplicada por un factor de carga adecuado. Se aprecia que el criterio de dimensionamiento aplicado es de resistencia.

Ejemplo 3.3. - Revisión de muros de mampostería

La estructura del ejemplo consiste en muros de tabique rojo que soportan una losa de concreto perimetralmente apoyada. Se comprueba fácilmente que se cumplan las condiciones que deben existir para poder aplicar el método simplificado para dimensionamiento de muros que se ha expuesto.

Para determinar la carga que la losa transmite a los muros se ha dividido la losa en zonas tributarias de los distintos muros trazando líneas a 45° por las esquinas de los rectángulos en la forma indicada en el croquis de la planta de la estructura. Este procedimiento es el comúnmente utilizado para distribuir la carga de losas perimetralmente apoyadas. Por simple inspección se comprueba que los tramos más desfavorables son los B1 - C1 (ó B3 - C3) y B2 - C2, por lo que la revisión se ha limitado a ellos.

La carga sobre los muros en estudio, procedente de la losa, es trapecial. En el ejemplo se ha considerado que se reparte uniformemente en todo el tramo analizado, hipótesis que la experiencia indica es razonable.

La única diferencia en el cálculo de la resistencia de los muros se encuentra en el valor de F_E que se toma igual a 0.7 para el muro interior y 0.6 para el muro exterior, donde es lógico esperar una mayor excentricidad.

Se comprueba que la resistencia de ambos muros es ampliamente suficiente.

3.9 MIEMBROS DE MADERA

3.9.1 Consideraciones generales sobre la madera como material de construcción

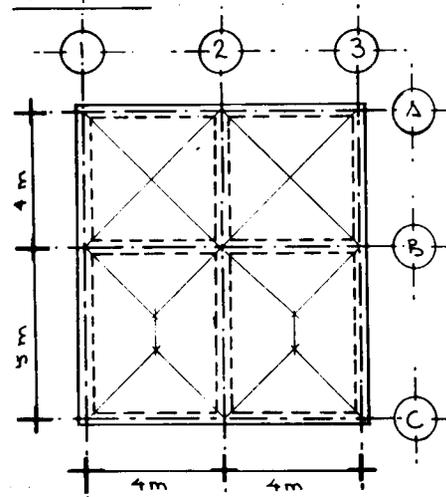
La madera fue el primer material de que dispuso el hombre con resistencias comparables a la tensión y a la compresión. Por ser un material vivo constituye un recurso natural renovable cuya explotación puede ser de gran interés para la economía nacional.

Son muchas las características de la madera que la hacen atractiva como material de construcción. Es relativamente fácil de trabajar con herramientas sencillas, lo que permite una gran diversidad de secciones y formas. Su variada textura natural tiene cualidades deco-

EJEMPLO 3.3

REVISIÓN DE MUROS DE MAMPOSTERÍA

DATOS



Muros de tabique rojo de 14 CM

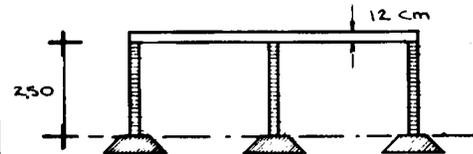
Losa de concreto

Peso volumétrico concreto : 2.4 ton/m³

Peso volumétrico mampostería : 1.8 ton/m³

Carga viva : 250 Kg/m²

Factor de carga = 1.4



DETERMINACIÓN RESISTENCIA REQUERIDA

Carga losa por m²

Carga viva

Peso propio : 0.12 x 2.4

0.25 ton/m²

0.29

w_l = 0.54 ton/m²

EJEMPLO 3.3 (Continuación)

Peso muro por m²

$$W_m = 1.8 \times 0.14 = 0.25 \text{ ton/m}^2$$

Resistencia requerida para el muro B1-C1

$$\text{Losas: } \frac{1}{2} (5+1) 2 \times 0.54 = 3.24$$

$$\text{Muro: } 5 \times 2.5 \times 0.25 = \frac{3.12}{6.36} \text{ ton}$$

$$P_R \text{ requerida} = 1.4 \times 6.36 = 8.90 \text{ ton}$$

Resistencia requerida para el muro B2-C2

$$\text{Losas: } (5+1) 2 \times 0.54 = 6.48$$

$$\text{Muro: } 5 \times 2.5 \times 0.25 = \frac{3.12}{9.60}$$

$$P_R \text{ requerida} = 1.4 \times 9.60 = 13.44 \text{ ton}$$

DETERMINACION RESISTENCIA

DISPONIBLE

Muro B1-C1

$$F_r = 0.6$$

$$F_E = 0.6$$

$$f_m^* = 15 \text{ Kg/cm}^2 \text{ (Tabla 3.7)}$$

$$A_T = 14 \times 500 = 7000$$

EJEMPLO 3.3 (Continuación)

$$P_R = F_r F_E f_m^* A_T \quad \text{Ec. (3.21)}$$

$$= 0.6 \times 0.6 \times 15 \times 7000$$

$$= 37800 \text{ Kg} = \underline{37.8} \text{ ton} > 8.9$$

Muro B2-C2

$$F_r = 0.6$$

$$F_E = 0.7$$

$$f_m^* = 15$$

$$A_T = 7000 \text{ cm}^2$$

$$P_R = F_r F_E f_m^* A_T \quad \text{Ec. (3.21)}$$

$$= 0.6 \times 0.7 \times 15 \times 7000$$

$$= 44100 \text{ Kg} = \underline{44.1} \text{ ton} > 13.44$$

rativas muy apreciadas. Puede ser pintada fácilmente. Su durabilidad en condiciones adecuadas, es considerable, aunque no tan notable como la de los materiales pétreos. Su resistencia específica es superior a las del acero y del concreto reforzado.

Como desventajas pueden mencionarse las siguientes. Aunque en su estado natural la madera se presenta en formas prismáticas rectas, que se prestan a la fácil elaboración de elementos estructurales como vigas y columnas, sus escuadrías y longitudes son limitadas. En ciertos ambientes su durabilidad deja que desear. Es susceptible a los ataques de algunos hongos e insectos. Sufre cambios volumétricos con las variaciones de humedad. Sus propiedades resistentes son muy variables. Su resistencia a los incendios es inferior a la del concreto aunque comparable a la del acero, si no superior. Su deformabilidad es mayor que la de otros materiales. Las cargas de larga duración producen deformaciones permanentes.

La madera se utiliza para miembros sujetos a cargas axiales tanto de compresión como de tensión. En las secciones siguientes se estudia el comportamiento de la madera bajo dichas acciones. Para entender este comportamiento así como las propiedades mecánicas de la madera es útil conocer su estructura y composición. Por otra parte es evidente que el estudio de sus procesos de desarrollo y crecimiento contribuirá a una mejor comprensión de las características de su estructura. Por ello en la siguiente sección se presentan unas

nociones elementales de estos aspectos. Posteriormente se cambiarán los principales factores que influyen en la resistencia de la madera a tensión y a compresión y se presentarán algunas nociones sobre el dimensionamiento de miembros de madera sometidos a estas acciones.

3.9.2 Composición, desarrollo y estructura de la madera

Un árbol está integrado por raíz, tronco, ramas y hojas (fig 3.34). La madera, como se denomina al material orgánico de que esencialmente están formados los árboles, está constituida por un conjunto de células huecas de forma tubular, comúnmente llamadas "fibras".

Las células, en su mayoría, están orientadas en dirección paralela al árbol. En longitud pueden variar de uno a ocho milímetros. Su dimensión transversal es aproximadamente cien veces menor que su longitud. Además de las células o fibras verticales existen otras células llamadas "rayos" o células radiales por la forma en que están orientadas. Su función consiste en la unión de las diversas partes del árbol para el movimiento de las sustancias alimenticias. Así, en forma esquemática puede uno imaginarse la madera como un haz de células tubulares, orientadas en dirección paralela al eje del árbol, con otros haces radiales de tubos más pequeños, orientados en dirección perpendicular al haz longitudinal, que en su mayoría van de la médula a la corteza. Los haces radiales se intercalan entre las células

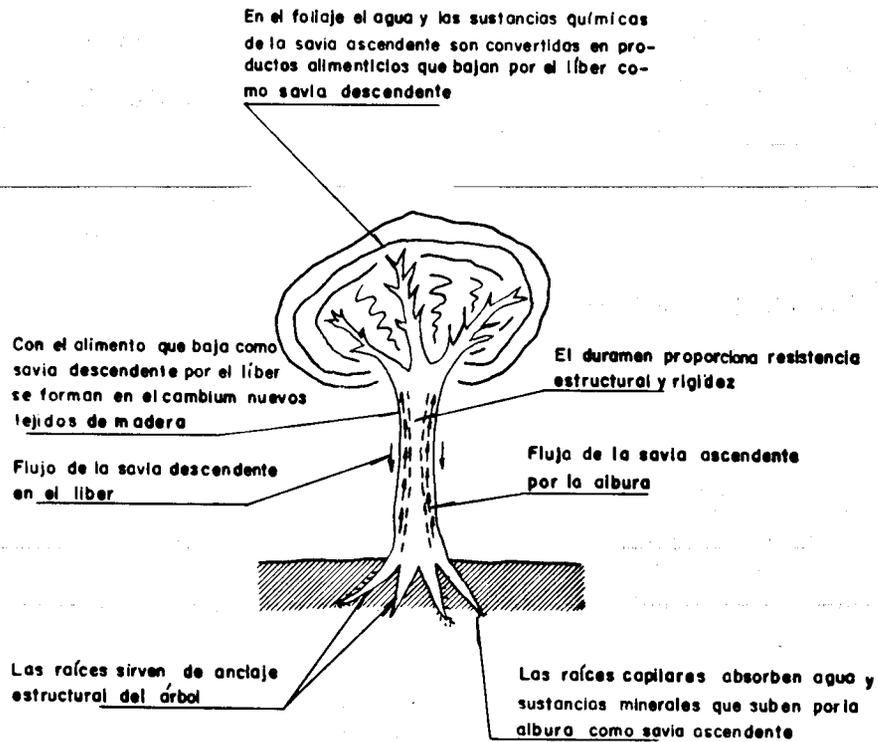


Fig 3.34 Crecimiento del árbol (ver también fig 3.35)

longitudinales (fig 3.35).

Desde el punto de vista de su composición química, la madera está constituida principalmente por carbono (50 por ciento), hidrógeno (6 por ciento), y oxígeno (43 por ciento). Existen también muestras de otros elementos en una proporción inferior a uno por ciento. Los porcentajes dados son valores promedio. Estos elementos forman dos compuestos básicos: la celulosa, en una proporción de 50 a 60 por ciento, y la lignina, en una proporción de 20 a 35 por ciento. Además existen otros carbohidratos y algunas sustancias minerales.

La celulosa es un polímero natural. Cada cadena de células está constituida por varios miles de unidades moleculares de la forma $C_6H_{10}O_5$. La celulosa, que tiene una estructura cristalina, forma el esqueleto de las paredes de las fibras de la madera. Los cristales de celulosa están ligados entre sí por la lignina, sustancia amorfa de composición muy compleja a base de combinaciones de carbohidratos, que rigidiza la estructura interna de las fibras y actúa como cementante uniéndolas entre sí.

Si se considera una sección transversal del tronco se distinguen, en general, las partes que pueden apreciarse en las figs 3.35 y 3.36. En la fig 3.35 se describen brevemente las características y funciones de cada una de estas partes.

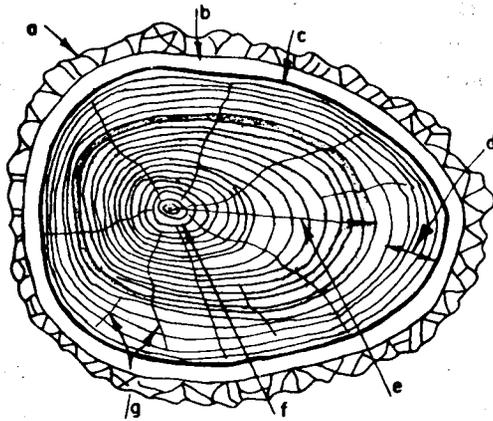


Fig 3.35 Sección transversal de un árbol

- a) Corteza exterior formada por tejidos muertos, que sirve de capa protectora.
- b) Líber o corteza interior por donde circula la savia descendente que alimenta el proceso de crecimiento, que tiene su origen en el cambium.
- c) Cambium capa microscópica inmediatamente interior al liber, donde se forman las células nuevas de madera y corteza.
- d) Albura parte activa del tronco, por donde circula la savia ascendente desde la raíz hasta las hojas.
- e) Duramen parte inactiva del tronco que proporciona soporte estructural al árbol. Generalmente de color más oscuro que la albura.
- f) Médula la parte más antigua del tronco, donde se originan las ramas.
- g) Rayos o células radiales que unen las diversas partes del árbol para el movimiento de las sustancias alimenticias.

Células tubulares con pared delgada de madera de primavera Células tubulares con pared gruesa de madera de verano

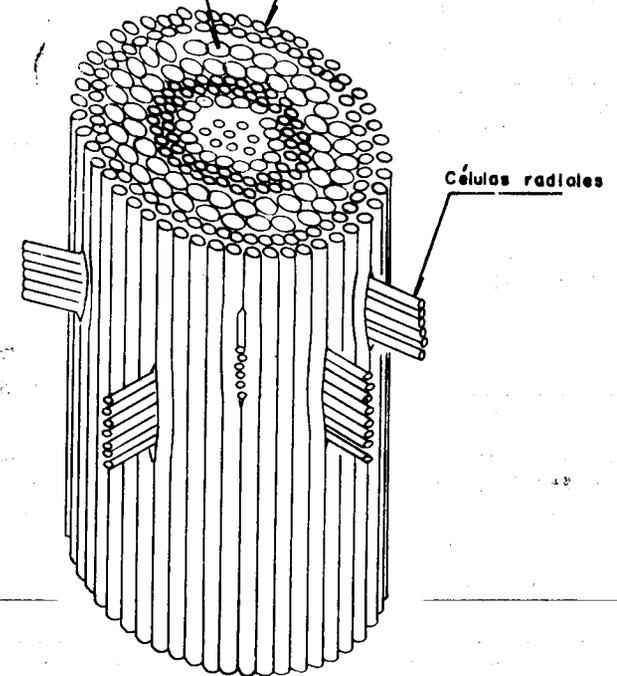


Fig 3.36 Representación esquemática de la estructura de la madera

Las raíces del árbol desempeñan una doble función: por una parte sirven de anclaje y, por otra, absorben humedad y diversas sustancias químicas del suelo, en solución.

El tronco es el elemento de soporte de las ramas y el follaje y además proporciona un sistema de comunicación en doble sentido. Así el líquido absorbido por las raíces sube por la albura, como savia ascendente hasta las ramas y las hojas, donde es convertido en alimento por un complejo proceso en el que interviene el fenómeno de fotosíntesis. Los productos formados por las hojas bajan, como savia descendente, por el líber para alimentar el proceso de crecimiento.

El proceso de crecimiento consiste en el nacimiento y desarrollo de nuevas células en el cambium y en los extremos de las raíces y de las ramas. Al formarse la madera nueva se va incorporando a las capas ya existentes al interior del cambium. Este incremento de material va empujando la corteza hacia fuera. En la sección transversal de la fig 3.35 se observa una serie de anillos concéntricos que van desde la médula o centro del árbol hasta la corteza. Cada uno de estos anillos corresponde al crecimiento de un año y por ello suelen llamarse "anillos de crecimiento anual". En cada anillo suelen distinguirse dos capas. La interior, denominada "madera de primavera" o "madera temprana" se desarrolla durante la primera parte de la época de crecimiento.

Sus células o fibras son relativamente grandes y de pared delgada. La capa exterior, que constituye la madera de verano o madera tardía tiene células de menor dimensión transversal pero con paredes más gruesas, lo que le da mayor densidad y resistencia. Su colorido es más oscuro que el de la madera de primavera. Los anillos anuales se distinguen únicamente en las maderas de las zonas templadas donde las variaciones de clima de una estación a otra ocasionan variaciones importantes en las características del proceso de crecimiento, que prácticamente se interrumpe durante el invierno. En las maderas de regiones tropicales, donde las condiciones climáticas son más uniformes y el crecimiento es homogéneo, los anillos no se aprecian.

Parte de las células que van formando el tronco de un árbol permanecen activas durante cierto tiempo, participando en el proceso vital. Estas células vivas se encuentran en la región del tronco denominada albura, por donde circula la savia ascendente (fig 3.35). A medida que el árbol va creciendo las células de la parte interior de la albura se van volviendo inactivas y se convierten en duramen o madera de corazón, cuya función es exclusivamente la de proporcionar soporte estructural al árbol. En general el duramen se distingue fácilmente de la albura por su color más oscuro. Desde el punto de vista de resistencia, la albura y el duramen son parecidos. Sin embargo la madera del duramen es más duradera que la de la albura porque es menos susceptible a los agentes que pro

vocan la putrefacción.

En el centro del tronco se encuentra la médula, la parte más antigua del árbol, donde se inició el proceso de crecimiento y donde tienen su origen las ramas.

El exterior del tronco está protegido por la corteza, capa protectora compuesta de tejidos muertos.

Las características de la estructura y del proceso de crecimiento que acaban de describirse en forma esquemática son aplicables de una manera general a la mayoría de las especies de árboles. Un examen más detenido conduce a la clasificación de las especies de árboles productores de madera en dos grandes grupos: el de las coníferas, o árboles de hoja perenne, como los pinos y los cedros, y el de las latifoliadas o frondosas, o árboles de hoja caduca, como el encino, la caoba y el guanacastle. (No es correcto clasificar las latifoliadas como maderas "duras" y a las coníferas como maderas "suaves" o "blandas", como a veces se hace, ya que hay especies de coníferas con madera más dura que la de algunas especies de latifoliadas, y viceversa). Entre las diferencias más importantes entre las maderas de los dos grupos, pueden citarse las siguientes. Las fibras de las latifoliadas son más cortas que las de las coníferas. Los anillos de crecimiento se distinguen más fácilmente y son más amplios en las coníferas que en las latifoliadas. Existen también diferencias en las estructuras y las funciones de las células

cuyo estudio queda fuera del alcance de este texto.

En la literatura sobre madera se encuentra con frecuencia la expresión grano de la madera, que se usa con acepciones diversas. Así, por ejemplo, se habla de madera de grano fino o cerrado, o de grano grueso, según la separación de los anillos de crecimiento. También se utiliza para describir la orientación de las fibras respecto a los lados de una pieza, distinguiéndose entre madera de grano recto o de grano atravesado (fig 3.37).

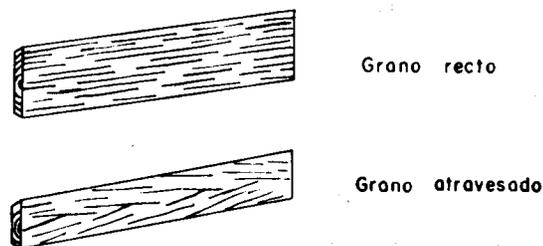


Fig 3.37 Grano de la madera

3.9.3 Propiedades mecánicas

Consideraciones Generales

La estructura peculiar de la madera, descrita en la sección anterior, explica su naturaleza heterogénea y anisótropa. En efecto, sus características físicas varían de un punto a otro y sus características resistentes varían según la dirección considerada. La madera puede idealizarse como un material ortotrópico en el que se --

distinguen tres direcciones mecánicas o estructurales, perpendiculares entre sí, que coinciden con las direcciones longitudinal, radial y tangencial del árbol, en la forma indicada en la fig. 3.38.

Por lo tanto, con rigor sería necesario considerar tres juegos de propiedades mecánicas, uno por cada eje. Sin embargo, las propiedades en los sentidos tangencial y radial no difieren significativamente de manera que para los efectos prácticos del diseño de estructuras de madera basta distinguir entre propiedades paralelas al grano o la fibra y propiedades perpendiculares al grano.

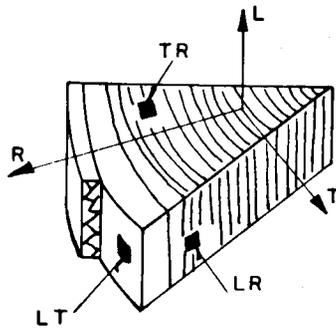


Fig 3.38 Principales direcciones mecánicas de la madera

Eje longitudinal (L).- Paralelo al eje del árbol.
Eje tangencial (T).- Perpendicular al eje longitudinal y tangencial a los anillos de crecimiento.
Eje radial (R).- Perpendicular a los ejes longitudinal y tangencial

Las relaciones esfuerzo-deformación de la madera son muy variables según la especie, la forma en que se hace el ensaye, el tipo de acción a que está sujeta, las características de crecimiento y otros factores. En general, cualquiera que sea el tipo de esfuerzo, la forma de las gráficas esfuerzo-deformación son semejantes a la que se muestra cualitativamente en la fig 3.39. La primera parte de la gráfica es prácticamente recta de manera que puede suponerse proporcionalidad directa entre esfuerzos y deformaciones, como en un material elástico ideal. A partir del límite de proporcionalidad, que suele corresponder a un esfuerzo relativamente alto, las relaciones esfuerzo-deformación dejan de ser lineales.

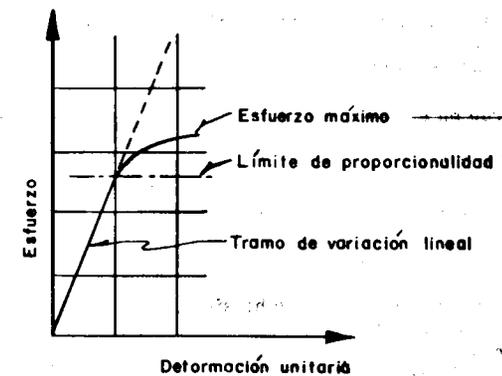


Fig 3.39 Diagrama esfuerzo-deformación típico para la madera

Factores que influyen en el comportamiento mecánico de la madera

La resistencia y el comportamiento de la madera bajo diversas acciones mecánicas es muy variable. A continuación se analizan los principales factores que afectan las propiedades resistentes de la madera.

Densidad. - Uno de los factores que más influye en la resistencia de la madera es su densidad o peso volumétrico. Por ello a veces se toma la densidad como un índice confiable de la resistencia. (Para efectos comparativos la densidad suele determinarse para un contenido estándar de humedad. Véase el inciso siguiente que trata sobre la influencia del contenido de humedad).

Contenido de humedad. - El contenido de humedad se define como el peso del agua expresado como un porcentaje del peso de la madera secada en horno. En el árbol vivo puede llegar a ser del orden de 200%. Una gran parte del contenido de humedad de la madera verde en el árbol vivo corresponde a agua libre en las cavidades de las células. El agua libre se pierde por evaporación al ser cortado el árbol. Las paredes de las células, sin embargo, siguen reteniendo una cantidad bastante importante de humedad. La condición en que toda el agua libre ha sido eliminada mientras que las paredes de las células aun están saturadas se llama punto de saturación de las fibras. El contenido de humedad correspondiente a esta condición varía entre 25% y 30%. Para contenidos de humedad superiores al del punto de saturación, la resistencia permanece cons-

tante. Sin embargo, cuando por medio del secado se reduce el contenido de humedad a un nivel inferior al correspondiente al punto de saturación de las fibras la mayoría de las propiedades resistentes de la madera mejora. Esto se debe principalmente a dos causas: (1) el fortalecimiento de la estructura y (2) el incremento en la cantidad de material por unidad de volumen debido a la contracción originada por el secado.

Puesto que la madera es un material higroscópico su contenido de humedad depende del medio ambiente en que se encuentre. Así una pieza de madera absorbe o desprende humedad hasta que su contenido de humedad se encuentra en equilibrio con el de la atmósfera. El contenido de humedad correspondiente a esta condición de equilibrio se llama contenido de humedad de equilibrio: es siempre proporcional al peso la madera secada en horno. En la ciudad de México el contenido de humedad en equilibrio de la madera es de alrededor del 10% y varía \pm 4% de acuerdo con la temperatura y humedad relativa del medio ambiente en las diferentes épocas del año.

Para efectos de elección de esfuerzos permisibles suele distinguirse entre madera "seca" y madera "húmeda". En los Estados Unidos se dice que una madera está seca cuando el contenido de humedad es inferior a 15%. El valor recomendado en los códigos ingleses es 18%.

Inclinación del grano. - La resistencia disminuye cuanto mayor es la inclinación del grano con respecto a la dirección longitudinal de la pieza. Esto es evidente en vista de la naturaleza anisotrópica de la madera que hace que sus características mecánicas sean muy distintas según los ejes considerados.

Nudos. - Los nudos tienen su origen en la formación de las ramas en el tronco del árbol vivo. Disminuyen la resistencia porque producen discontinuidades en unas fibras y alteran la orientación de otras (fig 3.40).

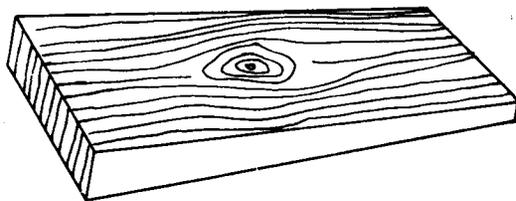


Fig 3.40 Discontinuidades y alteraciones en la orientación de las fibras producidas por un nudo.

Alabeo. - Las piezas de madera cortada pueden estar alabeadas, como se indica en lo fig 3.41, lo que puede afectar su resistencia en forma desfavorable.

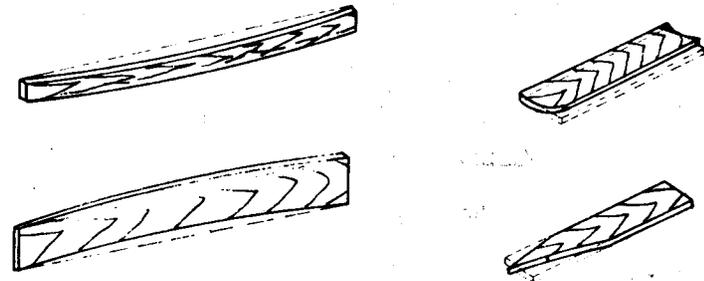


Fig 3.41 Tipos de alabeo en piezas de madera

Rajaduras. - Son separaciones longitudinales entre las fibras. Pueden ser de diversos tipos. Las más importantes son las rajaduras anulares que siguen la curvatura de los anillos de crecimiento y se originan en el árbol vivo, y las rajaduras radiales,

perpendiculares a los anillos de crecimiento, que son producidas por defectos de secado consistentes en una eliminación demasiado rápida de la humedad (fig 3.42). Las rajaduras afectan de manera particular la resistencia a esfuerzos rasantes. Son especialmente perjudiciales cuando se presentan en la zona de esfuerzos cortantes máximos de vigas y en los detalles de conexión de los extremos de elementos sujetos a tensión.

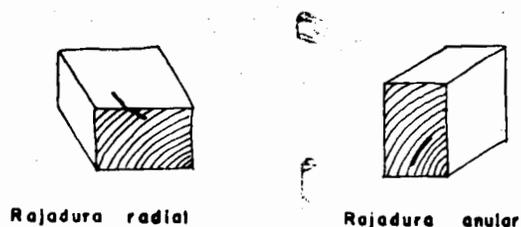


Fig 3.42 Rajaduras de madera

Temperatura. - La resistencia de la madera disminuye en forma aproximadamente lineal al aumentar la temperatura. No es recomendable que la madera se encuentre en condiciones de servicio a temperaturas superiores a unos 50°C puesto que estas temperaturas pueden ocasionar daños permanentes.

Duración de la carga. - La resistencia de la madera disminuye considerablemente con la duración de la carga. Cuanto mayor la duración de la aplicación de una carga, menor será el valor que debe alcanzar la carga para producir la falla. Todavía

no se ha comprobado si existe un límite de duración tal que una pieza sujeta a carga ya no se rompa. Bajo carga sostenida la deformación de la madera sigue aumentando durante cierto tiempo hasta que se estabiliza o se rompe el espécimen.

3.9.4 Comportamiento de la madera ante cargas axiales

Métodos de ensaye

Para obtener información sobre el comportamiento y la resistencia de la madera se recurre a dos tipos de ensaye.

En el tipo más común se utilizan probetas de sección pequeñas (2 cm x 2 cm ó 2 pulgadas x 2 pulgadas) de madera escogida de manera que no contenga nudos ni rajaduras y que el grano sea recto. Las pruebas se hacen en condiciones estándar de temperatura, contenido de humedad y duración de la carga. Este tipo de prueba proporciona información sobre la madera limpia de defectos y es útil para la comparación de las propiedades de distintas especies. Los valores permisibles de diseño se basan fundamentalmente en los valores que se obtienen de ellas (sec 3.9.5). Puesto que las propiedades de la madera varían según el sentido considerado, para conocer el comportamiento ante tensión o compresión es necesario hacer ensayos aplicando la carga axial tanto paralela como perpendicularmente a las fibras.

La información obtenida del ensaye de probetas pequeñas "limpias" es de utilidad limitada puesto que los resultados no re-

gistran el efecto de características como los nudos, la inclinación del grano y las rajaduras, que afectan seriamente a la resistencia de la madera. Para investigar la influencia de estas características sobre la resistencia es necesario recurrir al ensayo a escala natural de piezas estructurales sujetas a distintas condiciones de carga. Evidentemente este tipo de pruebas proporciona información más completa que la que resulta del ensayo de probetas pequeñas "limpias". Sin embargo son costosas y en situaciones prácticas no suele ser posible realizarlas. Por lo tanto, el procedimiento que se suele seguir para establecer valores de diseño, consiste en corregir los valores obtenidos de los ensayos de probetas "limpias" con base en la información obtenida de los ensayos a escala natural disponibles y en la experiencia acumulada sobre comportamiento de estructuras de madera reales. Los criterios usuales en la determinación de esfuerzos permisibles de diseño se describen con más detalle en la sec 3.9.5.

Comportamiento bajo tensión

La máxima resistencia a tensión de la madera se presenta en sentido paralelo a las fibras, es decir el sentido en que están dispuestas las cadenas de moléculas de celulosa. En el sentido transversal a las fibras la resistencia a tensión es mucho menor debido a la naturaleza tubular de las células, que las hace muy deformables en esta dirección, y a la facilidad con que se despegan las cadenas de moléculas cuando se sujetan a esfuerzos transver-

sales puede ser hasta cuarenta veces menor que la resistencia a tensión longitudinal. En la fig 3.43 se muestra una curva esfuerzo-deformación típica para tensión en sentido paralelo a las fibras. Se observa que el comportamiento es elástico hasta esfuerzos relativamente altos. El módulo de elasticidad en el sentido transversal es de 1/12 a 1/20 del módulo en sentido longitudinal.

Comportamiento bajo compresión

Con excepción de algunas maderas duras en las que las resistencias en compresión y tensión de la madera son del mismo orden, la resistencia a compresión de las maderas en dirección paralela a la fibra varía aproximadamente de la mitad a la tercera parte de su resistencia a tensión en el mismo sentido. Esta diferencia puede explicarse por la influencia de fenómenos de pandeo en las fibras individuales de la madera, cuyo comportamiento puede equipararse al de una columna. En la fig 3.43 se aprecia una curva esfuerzo deformación-típica de la madera sujeta a compresión longitudinal. Se observa que el comportamiento en compresión es fundamentalmente elástico, como en el caso de la tensión, y que el módulo de elasticidad es el mismo para los dos tipos de esfuerzos. Sin embargo puede comprobarse que el comportamiento en compresión es algo más dúctil que en tensión, siendo mayor la diferencia entre las deformaciones unitarias correspondientes al límite de proporcionalidad y el esfuer-

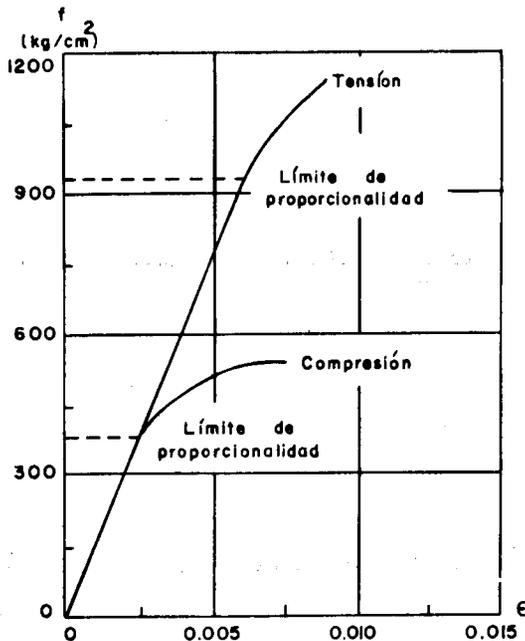


Fig 3.43 Curvas típicas esfuerzo-deformación en tensión y compresión paralelos a las fibras obtenidas de ensayos de probetas pequeñas "limpias"

zo último.

La resistencia última a compresión en sentido transversal es semejante a su resistencia en sentido longitudinal. Sin embargo, para poder desarrollar la resistencia última es necesario aplastar las células hasta que desaparezcan los huecos. Estas deformaciones altas impiden el aprovechamiento estructural de la resistencia última teóricamente disponible. Por este motivo para efectos prácticos suele considerarse que la resistencia a compresión en sentido transversal es de sólo un 20 por ciento, aproximadamente, de la resistencia longitudinal. Dada la gran deformabilidad bajo compresión transversal el módulo elástico correspondiente es muy bajo: según algunos autores puede ser del orden de la centésima parte del módulo longitudinal.

3.9.5 Esfuerzos permisibles para dimensionamiento

El criterio de dimensionamiento más comúnmente utilizado en el diseño de estructuras de madera es el de esfuerzos permisibles o de trabajo.

La magnitud de los esfuerzos permisibles dependerá fundamentalmente de la variabilidad de las características resistentes, el contenido de humedad, la duración de la carga, los defectos naturales de la madera y el grado de seguridad con que se quiera contar.

A continuación se comentan las recomendaciones sobre esfuerzos permisibles de algunos reglamentos típicos.

Recomendaciones de los reglamentos de los Estados Unidos, Inglaterra y Canadá

Los criterios seguidos en los reglamentos de estos tres países son parecidos. En esencia se basan en las consideraciones siguientes.

Para llegar a los esfuerzos permisibles para diseño se establecen primero unos "esfuerzos básicos" que se definen como los esfuerzos que con un margen de seguridad adecuado puede resistir permanentemente la madera verde (es decir, con un contenido de humedad superior al correspondiente al punto de saturación de las fibras), limpia (sin rajaduras ni nudos) y de grano recto.

Los esfuerzos básicos se obtienen a partir de los resultados de ensayos efectuados con probetas pequeñas limpias, generalmente de madera verde. (Recuérdese que por probeta "limpia", o "clear", en inglés se entiende una probeta de madera de grano recto, libre de nudos y rajaduras). En algunos casos se usan especímenes de madera seca (menos de un 15 por ciento a un 18 por ciento de humedad). Los resultados de estos ensayos se corrigen para tener en cuenta los distintos factores que afectan la resistencia y el comportamiento en condiciones de servicio. Los principales factores son la variabilidad de la resistencia, el contenido de humedad, el efecto de la duración

de la carga, la forma y el tamaño de la pieza estructural considerada y el grado de seguridad requerido.

El esfuerzo básico puede considerarse como un esfuerzo permisible de diseño para madera libre de defectos, es decir para una madera limpia ("clear"). En general es necesario tener en cuenta el efecto de la presencia de rajaduras, y nudos y la influencia de la inclinación del grano reduciendo el valor del esfuerzo básico. Esto se hace clasificando la madera de acuerdo con la importancia de los defectos que contenga y reduciendo los esfuerzos básicos de acuerdo con los dictados de la experiencia y los resultados disponibles en ensayos a escala natural. Los manuales dan valores permisibles de diseño, para distintas especies, obtenidos en esta forma. Suelen darse juegos de valores distintos según sea húmeda o seca la condición de uso. Son aplicables para lo que se define como duración "normal" de la carga: es decir, 10 años. Los esfuerzos permisibles pueden aumentar en caso de cargas de corta duración.

Especificaciones para estructuras de madera de la Secretaría de Obras Públicas (1968)

Es una compilación de recomendaciones americanas y alemanas adaptadas a las condiciones de nuestro medio.

Recomendaciones del Reglamento del Distrito Federal

Este reglamento considera varios "grados" de madera de acuerdo con el número y tipo de sus defectos naturales. La clasificación propuesta se basa en la norma C-18-46, de la Dirección Gene

ral de normas de la Secretaría de Industria y Comercio.

En lugar de fijar esfuerzos permisibles para cada tipo de madera, - como hacen algunas normas, éstos se hacen depender del peso volumétrico. Se recomiendan valores mínimos para el caso en que no se disponga de datos sobre pesos volumétricos. Los valores son aplicables para madera seca y cargas de larga duración. Para prever duraciones cortas de carga así como los efectos de la humedad y de la intemperización, se recomiendan diversos factores de corrección.

3.9.6 Propiedades diversas

Durabilidad

La madera en condiciones adecuadas puede tener una duración mayor que la que se le suele atribuir. Un ejemplo clásico es el de las armaduras de la Basílica de San Pablo, en Roma, todavía en servicio después de más de diez siglos. Sin embargo, la durabilidad de la madera no es comparable a la de materiales como las piedras naturales y algunas piedras artificiales.

Como se indicó en la sec. 3.9.1, la madera es muy susceptible a la alternancia entre humedad y sequedad y a la acción de ciertos hongos e insectos. Para mejorar la durabilidad de la madera, se puede recurrir a diversos tratamientos como la impregnación con creosota, la inmersión en sustancias preservativas como el cloruro de zinc, o el uso de pinturas con sustancias especiales.

Resistencia a los incendios

Aunque la madera es un material combustible, su comportamiento bajo la acción de los incendios no es muy peligroso como podría pensarse. Las estructuras de madera con elementos de escuadrías robustas, no se derrumban en la primera fase de un incendio como puede suceder con una estructura metálica. Puede mejorarse la resistencia a los incendios, impregnando con sustancias como el fosfato de amonio o el ácido bórico o pintando con pinturas especiales.

Cambios volumétricos

Por temperatura. - Son pequeños y no suele ser necesario considerarlos en la mayoría de los cálculos estructurales.

Por variaciones en el contenido de humedad. - La madera experimenta cambios volumétricos para contenidos de humedad entre 0 y el punto de saturación de las fibras. Para contenidos de humedad superiores al correspondiente al punto de saturación de las fibras no se registran cambios de volumen. La contracción máxima se produce en dirección tangencial a los anillos de crecimiento. Es menor en la dirección radial y despreciable en sentido longitudinal. Los cambios volumétricos producidos por las variaciones en contenido de humedad son bastante más importantes que los debidos a variaciones térmicas y sus efectos deben tenerse en cuenta en el diseño.

Peso volumétrico

El peso volumétrico de las maderas comunes secadas al aire, varía entre 400 y 850 kg/m³. Algunas maderas tropicales llegan a tener pesos del orden de 1000 kg/m³.

3.9.7 Maderas mexicanas: características y escuadrías comunes

Las maderas mexicanas son de una gran variedad. Pueden dividirse en tres grandes grupos:

- 1) Las coníferas, como el oyamel y el pino, que son las más comunmente usadas en obras civiles, especialmente para obras falsas y cimbras.
- 2) Las maderas de árboles de hoja caduca, como la encina y el roble, más pesadas y resistentes que la mayoría de las coníferas y,
- 3) Las especies tropicales, de gran resistencia y dureza, muy apreciadas para ebanistería y acabados aparentes.

En la tabla 3.8 se dan esfuerzos permisibles para cargas axiales y módulos de elasticidad recomendados por la Secretaría de Obras Públicas para algunas maderas mexicanas ("Especificaciones para estructuras de madera", Dirección General de Proyectos de Vías Terrestres, SOP, 1968).

TABLA 3.8 ESFUERZOS PERMISIBLES Y MODULOS DE ELASTICIDAD PARA DIVERSAS ESPECIES DE MADERA RECOMENDADOS POR SOP (Valores en kg/cm²)

ESPECIE	cali- dad	Paralelamente a la fibra		Compresión normal a la fibra	Módulo de elasticidad
		tensión	compresión		
Pino blanco, pino lacio	1a	65	60	18	85 000
	2a	55	50	18	85 000
Pino prieto, pino real, cedro	1a	75	70	20	90 000
	2a	65	60	20	90 000
Encino	1a	100	95	25	100 000
	2a	85	75	25	100 000
Zapotillo	1a	110	100	25	110 000
	2a	95	80	25	110 000

Los esfuerzos de la Tabla 3.8 fueron determinados con criterios semejantes a los americanos. Las calidades se basan en las normas de clasificación de SOP. Los esfuerzos permisibles dados son aplicables para maderas en estructuras bajo cargas de duración normal (10 años), con cualquier contenido de humedad, pero en un ambiente seco. Para otras condiciones deben hacerse los ajustes que recomienda SOP. La SOP no recomienda valores para tensión normal a las fibras. Estas pueden tomarse del orden de 3 a 4 kg/cm².

Las escuadrías más comunes son las siguientes:

	<u>Sección</u>
Vigas	4" x 8", 3" x 6"

Tablones	más de 2" de espesor
Tabla o duela	menos de 2" de espesor
Polines	4" x 4"

Las dimensiones dadas son nominales. Al dimensionar debe tenerse en cuenta que las dimensiones reales son menores. Esto puede hacerse sea trabajando por esfuerzos permisibles reducidos por este concepto, sea reduciendo las dimensiones de la sección y utilizando los esfuerzos permisibles sin reducir.

En algunas obras civiles, como en las estructuras para puentes provisionales o para muelles marítimos se utilizan escuadras mayores que las dadas anteriormente. En ocasiones, sobre todo para elementos verticales, los troncos se emplean en su forma natural, sin aserrar.

Las longitudes usuales varían según la escuadría. Los polines, por ejemplo, suelen tener de tres a cinco metros, mientras que las vigas pueden tener longitudes mayores.

3.9.8 Aplicaciones especiales de la madera

La madera tiene inconvenientes que imponen ciertas limitaciones a su utilidad como material estructural: fundamentalmente su naturaleza anisótropa y la falta de uniformidad de sus propiedades resistentes. Para obviar estos inconvenientes y abrir nuevos campos de aplicación a la madera, la técnica moderna ha buscado nuevas

formas de utilizarla. Dos realizaciones relativamente recientes son el triplay y la madera laminada y encolada. Las características principales de estos dos materiales se describen en las secciones siguientes.

Triplay

El triplay, o madera contrachapada, se obtiene cortando madera ablandada por maceración en capas delgadas que luego se unen a presión con aglutinantes.

Las capas, generalmente de 3 a 5 en número, se pegan de manera que las fibras de cada capa queden normales respecto a las de las capas contiguas. En esta forma se obtienen placas con un espesor que suele variar entre 1/4" y 5/8", fácilmente manejables, de gran resistencia y buena apariencia. Al combinar las capas que forman el triplay de manera que la orientación de las fibras de las diversas capas sean normales entre sí, se obtiene un material prácticamente isótropo en el plano, es decir, con características análogas en las direcciones longitudinal y transversal.

Madera laminada y encolada

Los elementos laminados están formados por tablas encoladas, con sus fibras en la misma dirección. Las tablas varían en espesor de 5/8" a 1-3/4. Cada tabla puede ser de longitud relativamente pequeña. Para obtener piezas de dimensiones importantes las

tablas de cada capa se pueden unir a tope. Como la cola utilizada en las juntas es por lo menos tan fuerte como la madera misma, el comportamiento de piezas laminadas es semejante al de piezas macizas.

En el diseño de elementos laminados se suelen admitir esfuerzos permisibles mayores que los usuales para elementos macizos. Esto se funda en las consideraciones siguientes:

- 1) Se cuenta con una mayor uniformidad gracias a la selección de las tablas utilizadas.
- 2) Existe una mayor dispersión de los defectos naturales. Como las tablas son de espesor pequeño, la influencia de los defectos es menor que en las piezas de madera maciza. La presencia de un nudo, por ejemplo, afecta únicamente a una de las tablas del conjunto laminado.
- 3) El secado es uniforme y completo gracias al pequeño espesor de las tablas. En piezas macizas de dimensiones grandes, por el contrario, el secado con frecuencia es imperfecto.

3.9.9 Dimensionamiento de miembros de madera sujetos a tensión

La tensión de trabajo que puede soportar un miembro de madera se calcula por medio de la ecuación.

$$T = A_n f_{tp} \quad (3.22)$$

donde T es la tensión que puede soportar el miembro en condiciones de servicio, A_n es el área neta o efectiva de la sección considerada y f_{tp} es el esfuerzo permisible de tensión paralelo a las fibras.

El área neta se define como la sección total menos las reducciones debidas a ranuras o agujeros para pernos o tornillos. La capacidad del miembro estará regida por la capacidad de la sección que tenga el área neta mínima.

Debe tenerse en cuenta que es frecuente que las dimensiones de un miembro en tensión no estén determinadas por la resistencia a tensión de la madera, como se indicó en el párrafo anterior, sino por los esfuerzos rasantes o de aplastamiento que se presentan en los detalles de conexión. En la fig 3.44 se ilustra un problema típico.

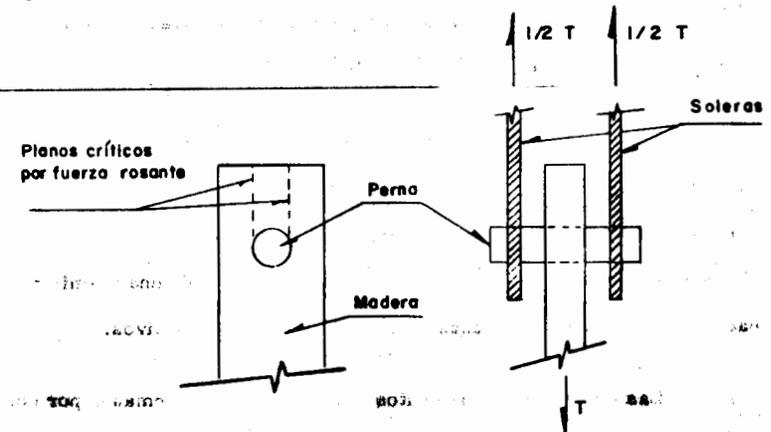


Fig 3.44 Conexión en miembro de madera sujeto a tensión

Una manera de evitar las reducciones de capacidad que caracterizan a la mayoría de los detalles de conexión, consiste en realizar la unión por medio de adhesivos. Este procedimiento se ha utilizado en las conexiones de miembros de armaduras.

3.9.10 Dimensionamiento de miembros de madera sometidos a compresión

Los miembros de madera sometidos a compresión se construyen de manera que las fibras queden paralelas a la acción de compresión.

Los miembros de madera sujetos a compresión pueden clasificarse en tres tipos:

- a) Macizos
- b) De sección compuesta
- c) De elementos espaciados

Las columnas macizas o simples están formadas por una sola pieza (fig 3.45-a).

Las de sección compuesta están formadas por varias piezas ligadas entre sí (fig 3.45 b). La unión puede hacerse por medio de clavos, pijas o pernos dispuestos según recomendaciones empíricas. Un caso particular de este tipo de miembro son las columnas laminadas, constituidas por piezas unidas por medio de adhesivos.

Las columnas de elementos espaciados están formadas por dos

o más piezas, con los ejes longitudinales paralelos, y ligadas por empaques y pernos o conectores (fig 3.45-c). Las características de los empaques de unión se establecen en los diversos reglamentos.

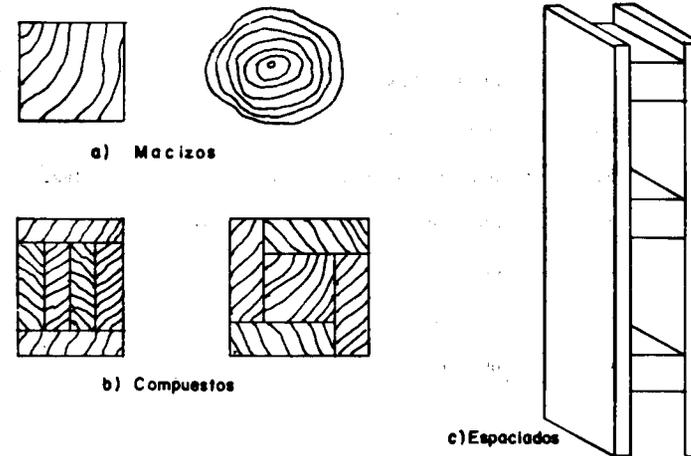


Fig 3.45 Tipos de miembros en compresión

Cuando un miembro de madera sometido a compresión es relativamente corto el efecto de esbeltez es poco significativo, la falla es por aplastamiento y se desarrolla prácticamente toda la resistencia a compresión de la madera. El Reglamento DDF-76, por ejemplo, teniendo esto en cuenta, permite desprestigiar el efecto de esbeltez para valores de

$$\frac{KL}{d} \leq \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}}$$

donde L es la longitud libre de pandeo en columnas, o longitud entre soportes laterales en vigas; K es el valor que define la longitud efectiva de un elemento en compresión, dado en la tabla 3.9; d es la dimensión transversal de la columna paralela al plano de flexión; E es el módulo de elasticidad; y f_{cp} es el esfuerzo permisible en compresión paralela a las fibras.

Como valores de f_{cp} , pueden tomarse los de la tabla 3.8 o los de la tabla 3.10, ajustados de acuerdo a las condiciones de uso del caso.

TABLA 3.9

Valores de K

Condiciones de apoyo en los extremos del elemento	K
los dos fijos, sin desplazamiento lateral	0.65
uno fijo y uno articulado, sin desplazamiento lateral	0.80
los dos fijos, con desplazamiento lateral	1.20
los dos articulados, sin desplazamiento lateral	1.00
uno fijo y otro libre	2.00

A reserva de tratar el tema más ampliamente en una sección posterior de estos apuntes dedicada a los efectos de esbeltez, se presentan a continuación las recomendaciones del Reglamento DDF-76 que permitan tener en cuenta estos efectos de una manera empírica,

Se debe revisar que en la sección crítica de una pieza maciza se cumpla que

$$\frac{P}{A_n} + \frac{P}{A_n} \cdot \frac{C_D \beta}{d_e} \leq 1 \quad (3.23)$$

donde f_{cd} = esfuerzo de diseño en compresión paralelo a las fibras, dado por:

$$f_{cd} = \frac{0.30 E}{(KL/b)^2} \leq f_{cp} \quad (3.24)$$

Además

P = fuerza normal de compresión en condiciones de servicio.

A_n = área neta de la sección transversal final del elemento.

$\frac{KL}{b}$ = relación máxima de esbeltez.

b = dimensión transversal normal al plano de flexión considerado del elemento.

$$\beta = 1 \quad \text{cuando} \quad \frac{KL}{b} \leq \sqrt{0.3E/f_{cp}}$$

$$\beta = 1.25 \text{ cuando } \frac{KL}{b} > \sqrt{0.3E/F_{cp}}$$

e = excentricidad de la carga P; $e_{\min} = 0.1$ (b ó d).

d_e = dimensión de la sección transversal en dirección de la excentricidad e.

$$C_f = 0.81 \frac{d^2 + 922}{d^2 + 568}; \text{ d en cm.; } C_f = 1 \text{ para } d \leq 30 \text{ cm}$$

$$f_{bd} = f_{bp}, \text{ cuando } C_s \leq 10; C_s = 1.4 \sqrt{\frac{dL}{b^2}}$$

f_{bd} = esfuerzo de diseño en flexión =

$$= f_{bp} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{C_s}{C_k} \right)^3 \right]$$

$$\text{cuando } 10 < C_s \leq C_k = \sqrt{\frac{3}{5} \frac{E}{F_{bp}}}$$

$$f_{bd} = \frac{0.40E}{C_s^2}, \text{ cuando } C_k < C_s \leq 50$$

L = longitud entre soportes que evitan el pandeo.

f_{bp} = esfuerzo permisible en flexión (ver tabla 3.10).

TABLA 3.10

ESFUERZOS PERMISIBLES* EN KG/CM²; CONDICION

VERDE

SOLICITACION	SELECTA	PRIMERA	SEGUNDA	TERCERA
flexión y tensión	80	60	30	20
compresión paralela a la fibra	70	50	25	17
compresión perpendicular a la fibra	14	14	9	7
cortante paralelo a la fibra	14	14	7	5
módulos de elasticidad (x10 ⁹)				
medio	70	70	70	70
mínimo	40	40	40	40

* recomendado por el RDF-76

Ejemplo 3.4.- Dimensionamiento de los miembros de una armadura de madera

La armadura del ejemplo es de un tipo a veces usado en techos para vivienda. Se indica que para formarla se usará madera de un solo espesor, 2". (Se considera que este espesor es efectivo, por lo que no se hacen reducciones) - Por lo tanto las escuadrías requeridas se proporcionan manteniendo constante el ancho y ajustando el peralte de la pieza

para obtener el área necesaria. El usar madera de un solo espesor simplifica los detalles de unión. Las piezas se acoplan de manera que su espesor quede normal al plano de la armadura.

Para el dimensionamiento del miembro en tensión se tomó como área neta el área total de la sección, ya que se indica que las uniones se efectuarán con detalles que no reducirán el área de la sección.

Para dimensionar el miembro en compresión se investigó si era significativo el efecto de esbeltez.

Se supuso una sección de 5 x 15 cm. Para revisar la esbeltez se utilizó la dimensión de 15cm ya que se considera que en el sentido de la dimensión menor el miembro está restringido de manera que no existe peligro de pandeo. Como longitud del miembro se tomó la longitud entre nudos de armadura, ya que éstos proporcionan sujeción.

La relación longitud a dimensión en el sentido de posible pandeo fue 13,5 que es menor que $\sqrt{0,3E/f_{cp}} = 20,5$, por lo que los efectos de esbeltez no son importantes.

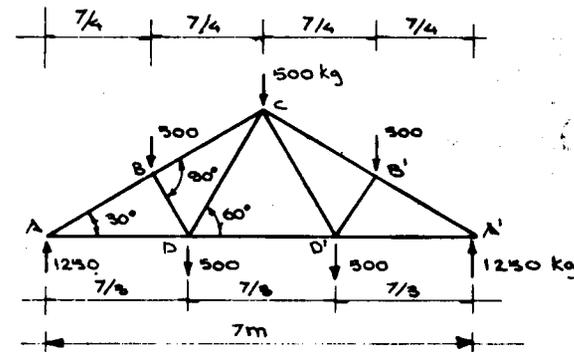
Con la sección supuesta se llegó a un valor de 1,01, el cual prácticamente es la unidad, por lo que la sección, con que se partió, es aceptable.

Ejemplo 3.4

DIMENSIONAMIENTO MIEMBROS DE UNA ARMADURA DE MADERA

DATOS

Dimensionar los miembros sujetos a máxima tensión y a máxima compresión



Esfuerzos permisibles:

tensión:	$f_{tp} = 60 \text{ kg/cm}^2$
compresión:	$f_{cp} = 50 \text{ kg/cm}^2$
$E =$ módulo de elasticidad	$= 70\,000 \text{ kg/cm}^2$
K	$= 1.0$
f_{bp}	$= 60 \text{ kg/cm}^2$

Considerar que los miembros están restringidos -- contra el pandeo en el sentido normal a la armadura, y que están unidos por medios que no reducen la sección efectiva.

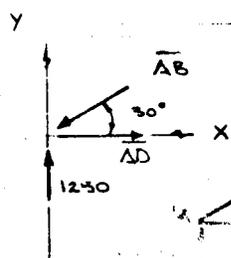
Usar tablón de 2" con el espesor perpendicular al plano de la armadura.

EJEMPLO 3.4 (Continuación)

2

ANÁLISIS ARMADURA

NUDO A



$$\sum F_y = 0$$

$$1250 - \overline{AB} \sin 30^\circ = 0$$

$$\overline{AB} = 1250 \times 2 = \underline{2500 \text{ Kg}}$$

(Compresión)

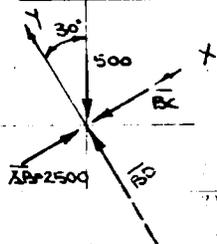
$$\sum F_x = 0$$

$$\overline{AD} - \overline{AB} \cos 30^\circ = 0$$

$$\overline{AD} = 2500 \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{2160 \text{ Kg}}$$

(Tensión)

NUDO B



$$\sum F_y = 0$$

$$\overline{BD} - 500 \cos 30^\circ = 0$$

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 500 = \underline{433 \text{ Kg}}$$

(Compresión)

$$\sum F_x = 0$$

$$2500 - \overline{BC} - 500 \sin 30^\circ = 0$$

$$\overline{BC} = 2500 - 500 \times \frac{1}{2}$$

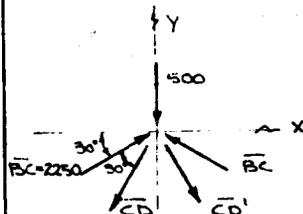
$$\overline{BC} = 2500 - 250 = \underline{2250 \text{ Kg}}$$

(Compresión)

EJEMPLO 3.4 (Continuación)

3

NUDO C



Por simetría

$$\overline{CD} = \overline{CD'} ; \overline{BC} = \overline{BC'}$$

$$\sum F_y = 0$$

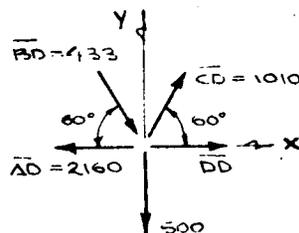
$$2 \times 2250 \cos 60^\circ - 500 - 2 \overline{CD} \cos 30^\circ = 0$$

$$4500 \times \frac{1}{2} - 500 - 2 \overline{CD} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\overline{CD} = \underline{1010 \text{ Kg}}$$

(tensión)

NUDO D



$$\sum F_x = 0$$

$$\overline{DD'} - 2160 + 433 \cos 60^\circ + 1010 \cos 60^\circ = 0$$

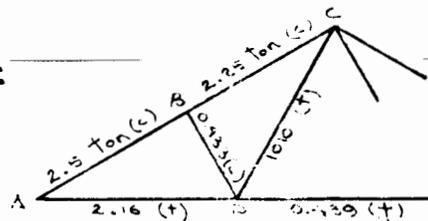
$$\overline{DD'} = 2160 - 433 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 1010$$

$$\overline{DD'} = \underline{439 \text{ Kg}}$$

(tensión)

EJEMPLO 3.4 (Continuación) 4

Resumen:



DIMENSIONAMIENTO
Miembro con tensión máxima

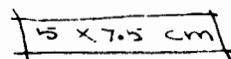
Miembro \bar{AD} , $T = 2160 \text{ Kg}$

$$A_n = \frac{T}{f_{tp}} = \frac{2160}{60} = 36 \text{ cm}^2 \quad (A_n = \text{area neta})$$

$$A_n = bd; \quad b = 15 \text{ cm}$$

$$d = \frac{36}{5} = 7.2 \text{ cm} = 7.5 \text{ cm.}$$

Usar sección de



miembro con compresión máxima

miembro AB; $C_{AB} = 2500 \text{ Kg}$

suponer una sección de $10 \text{ cm.} \times 5 \text{ cm.}$

$$A = 75.0 \text{ cm}^2$$

$$b = 5 \text{ cm.}$$

$$d = 15 \text{ cm.}$$

$$K = 1.0$$

$$L = 202 \text{ cm}$$

$$\text{relación de esbeltez} = \frac{KL}{d} = \frac{1(202)}{15} = 13.47$$

$$C < \sqrt{\frac{0.3 E}{f_{cp}}} = \sqrt{\frac{0.3 (70000)}{50}} = 20.5$$

como $\frac{KL}{d} = 13.47 < 20.5$ entonces puede considerarse que los efectos de esbeltez no son importantes.

$$B = 1.0$$

$$e = 0.1 (15) = 1.5 \text{ cm}$$

$$d_e = 15 \text{ cm.}$$

$$C_f = 1.0 \quad (d < 30 \text{ cm.})$$

$$C_s = 1.4 \sqrt{\frac{15 \cdot (202)}{5^2}} = 15.4 > 10$$

$$C_k = \sqrt{\frac{3}{5} \frac{70000}{60}} = 26.5 > C_s = 15.4$$

$$f_{bd} = 60 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{15.40}{26.5} \right) \right] = 57.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_{cd} = \frac{0.30 (70000)}{(13.5)^2} = 115.2 \text{ kg/cm}^2 > f_{cp}$$

$$\therefore f_{cd} = 50$$

Sustituyendo:

$$\frac{2500}{75.0} + \frac{2500 \cdot 6 \cdot (1.5) \cdot (1.0)}{75.0 \cdot 15} = \frac{50.0}{(57.7) \cdot (1)}$$

$$0.66 + 0.35 = 1.01 \approx 1.00$$

(ligeramente escasa)

\(\therefore\) se puede adoptar la sección de 5 cm. x 15 cm.

EJEMPLOS RESUELTOS

(CARGA AXIAL)

REFERENCIAS

Conceptos fundamentales de mecánica de materiales

- 1.- E. P. Popov, "Introducción a la Mecánica de Sólidos" (secciones 1-1, - 1-2, 1-3, 3-1, 3-2, 3-5, 3-6, 3-8, 3-9, 4-1, 4-2, 4-3, 4-6, 4-7, -- 4-12, 4-13, 4-14, 4-15, 4-16, 4-17), Editorial Limusa, S. A., México 1976.
- 2.- S. P. Timoshenko y J. M. Gere, "Mechanics of Materials" (secciones - 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.8), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, - 1972.
- 3.- F. L. Singer, "Resistencia de Materiales" (Secciones 1-1, 1-2, 1-3, -- 1-5, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4) Harper and Row, Nueva York, 1971.
- 4.- J. N. Cernica "Resistencia de Materiales" (1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 1-7, 1-8), CECSA, México, 1968.

Probabilidad y Estadística

- 1.- Alberto Moreno Bonett y Francisco J. Jauffred, "Elementos de probabilidad y Estadística" Representaciones y servicios de Ingeniería, México, - 1969.
- 2.- Octavio Rascón y Augusto Villarreal, "Introducción a probabilidades y Estadística", Instituto de Ingeniería de la UNAM, México, 1972.

Elementos estructurales de acero

- 1.- J. C. McCormack, "Structural Steel Design" (capítulos 1, 2, 3), International Text Book Co., Scranton, Pa., (última edición).
- 2.- "Manual para constructores, Cía. Fundidora de Fierro y Acero de Monterrey, S. A.", Monterrey, 1965.
- 3.- "Compendio del Manual AHMSA para Ingenieros", Altos Hornos de México, S. A., México, 1971.
- 4.- De Buen López de Heredia O., "Estructuras de Acero", Editorial Limusa, 1980.

Elementos estructurales de concreto

- 1.- "Aspectos fundamentales del concreto reforzado" (capítulo 1-4), O.M. Glez. Cuevas, F. Robles F. V., Juan Casillas G. de L., R. Díaz de Cossío, Limusa Wiley, México, 1973.

- 2.- P. M. Ferguson, "Reinforced Concrete Fundamentals (3ra. edición) (capítulo 1; secciones 14.1, 14.2, 14.3), John Wiley and Sons, Nueva York, --- 1973.
- 3.- G. Winter y A. H. Nilson, "Design of Concrete Structures" (capítulos 1, 2, 5), McGraw-Hill, Nueva York, 1972.
- 4.- Park R. y Paulay T., "Estructuras de concreto reforzado", Limusa, México.

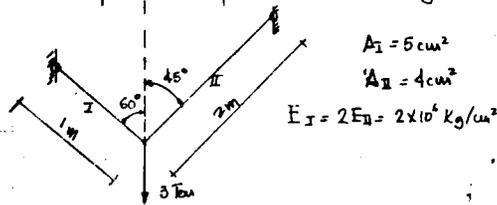
Elementos estructurales de madera

- 1.- H. J. Hanson, "Diseño moderno de estructuras de madera" (capítulos 1-4, - 6-7), CECSA, México, 1969.
- 2.- Lewis A. Hill, Jr., "Fundamentos de diseño estructural Acero, Concreto y Madera", Representaciones y servicios de Ingeniería, S. A.

Elementos estructurales de mampostería.

- 1.- S. Sahlin, "Structural Masonry", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., - 1971.

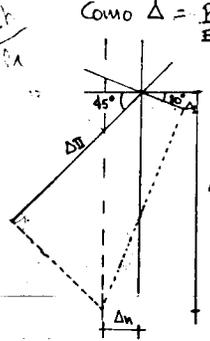
Problema 1- Para el sistema mostrado determinar a) los esfuerzos normales en las barras I y II y b) los desplazamientos vertical y horizontal del punto de aplicación de la carga (Punto A)



Solución: Por $\sum F_y = 0$ $T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 45^\circ = 3$ (1)
 Por $\sum F_x = 0$ $T_1 \sin 60^\circ = T_2 \sin 45^\circ$ (2)
 De (2) $T_1 = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} T_2 = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} T_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} T_2$ (3)

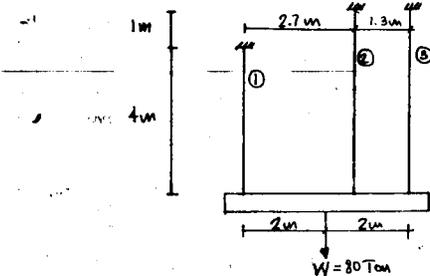
Sustituyendo en (1) a T1 $T_2 \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + T_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \therefore T_2 = 2.69 \text{ Ton}$
 Sustituyendo T2 en (3) $T_1 = 2.20 \text{ Ton}$

Como $\Delta = \frac{PL}{EA}$ para las barras I y II se tiene:
 $\Delta I = \frac{2.2 \times 10^3 \times 1 \times 10^2}{2 \times 10^4 \times 5} = 0.022 \text{ cm}$
 $\Delta II = \frac{2.69 \times 10^3 \times 2 \times 10^2}{1 \times 10^4 \times 4} = 0.1345 \text{ cm}$

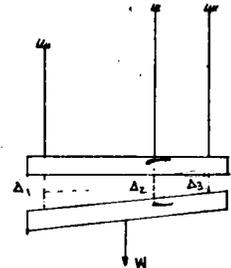


De geometría $\Delta I = \Delta v \cos 60^\circ - \Delta h \sin 30^\circ$ (1)
 $\Delta II = \Delta v \cos 45^\circ + \Delta h \cos 45^\circ$ (2)
 De (1) $\Delta v = \frac{\Delta I + \Delta h \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$
 Sustituyendo en (2) $\Delta II = \frac{(\Delta I + \Delta h \cos 30^\circ) \cos 45^\circ}{\cos 60^\circ} + \Delta h \cos 45^\circ$
 $\Delta h = \frac{\cos 60^\circ \Delta II - \Delta I}{(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)} = 0.0535 \text{ cm}$
 $\Delta v = \frac{0.022 + 0.0535 (\frac{\sqrt{3}}{2})}{0.5} = 0.137 \text{ cm}$

Problema la placa infinitamente rígida A cuyo peso total uniformemente distribuido es de 80 000 kg esta soportada por tres tensores de la misma sección transversal y del mismo material. Determinar la parte de la carga que soporta cada tensor.



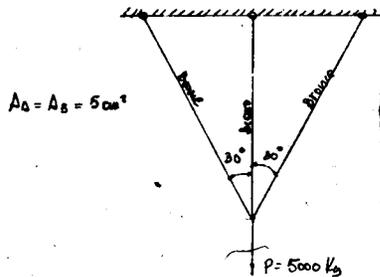
Solución: Por $\sum F_y = 0$ $T_1 + T_2 + T_3 = W$ (1)
 Por $\sum M_0 = 0$ $2.7T_2 + 4T_3 = 2W$ (2)
 Por compatibilidad de deformaciones



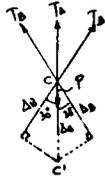
$\Delta_2 = \Delta_1 - \frac{(\Delta_1 - \Delta_3) 2.7}{4}$
 $\Delta_2 = \frac{1}{4} (1.3 \Delta_1 + 2.7 \Delta_3)$
 Como $\Delta = \frac{PL}{EA}$ y $EA_1 = EA_2 = EA_3$

$5T_2 = \frac{1}{4} (4 \times 1.3T_1 + 5 \times 2.7T_3)$
 $20T_2 = 5.2T_1 + 13.5T_3$ (3)
 Haciendo simultáneas (ecuaciones (1), (2) y (3))
 $T_1 + T_2 + T_3 = W$
 $2.7T_2 + 4T_3 = 2W$
 $5.2T_1 - 20T_2 + 13.5T_3 = 0$
 Se obtiene: $T_1 = 32.108 \text{ Ton}$; $T_2 = 24.284 \text{ Ton}$
 $T_3 = 23.608 \text{ Ton}$

Problema 3 Tres varillas de la misma sección transversal ($A = 5 \text{ cm}^2$) situadas en un mismo plano, como se muestra en la figura soportan una carga de 5000 kg. Si para el acero $E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ y para el bronce $E = 8.4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$, encontrar: a) los esfuerzos en cada una de las varillas b) El desplazamiento vertical del punto de aplicación de la carga.



Solución: Por simetría las fuerzas en las barras de bronce son iguales



Por $\sum F_{iy} = 0 \quad 2 T_B \cos 30^\circ + T_A = P \quad (1)$

De la figura de la izquierda.

$\Delta_A \cos 30^\circ = \Delta_B$

Como $\Delta = \frac{PL}{EA} \quad \frac{T_A L_A}{A_A E_A} \cos 30^\circ = \frac{T_B L_B}{A_B E_B}$

Como $L_B = \frac{L_A}{\cos 30^\circ} \quad \frac{T_A L_A}{A_A E_A} \cos 30^\circ = \frac{T_B L_A}{A_B E_B \cos 30^\circ}$

$\frac{T_A E_B}{E_A} (\cos 30^\circ)^2 = T_B \quad \therefore T_B = 0.3 T_A$

Sustituyendo T_B en (1)

$(2(0.3) \sqrt{3} + 1) T_A = 5000$

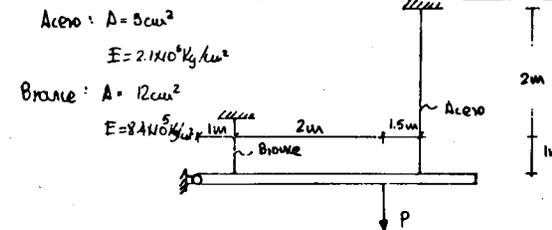
$T_A = 5290.3 \text{ Kg}$

$T_B = 987.1 \text{ Kg} \quad \therefore T_A = \frac{5290.3}{5} = 658.06 \text{ Kg/cm}^2$

$T_B = 197.82 \text{ Kg/cm}^2$

$\Delta = \frac{5290.3 \times 100}{2.1 \times 10^6 \times 5} = 0.099 \text{ cm}$

Problema 4 Una barra rígida de peso despreciable esta articulada en un extremo y soportada por dos varillas, una de bronce y otra de acero como se muestra en la figura. Determinar la carga máxima P que puede aplicarse al sistema sin exceder el esfuerzo de 700 kg/cm² en el bronce ni el de 1250 kg/cm² en el acero.



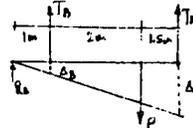
Acero: $A = 5 \text{ cm}^2$

$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

Bronce: $A = 12 \text{ cm}^2$

$E = 8.4 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

Solución: Por $\sum M_A = 0 \quad 3P = T_B + 4.5 T_A \quad (1)$



De la figura de la izquierda

$\frac{\Delta_A}{4.5} = \frac{\Delta_B}{1} \quad \therefore \Delta_A = 4.5 \Delta_B$

Como $\Delta = \frac{PL}{EA} = \frac{T L}{E A}$

$T_A \frac{300}{2.1 \times 10^6} = 4.5 T_B \frac{100}{8.4 \times 10^5}$

$T_A = \frac{T_B (4.5)(2.1)}{3(0.84)} = 3.75 T_B$

Dado a T_A su valor max

$T_B = \frac{1250}{3.75} = 333.33 \text{ Kg/cm}^2 < 700 \text{ Kg/cm}^2$

Por tanto $T_B = 12(333.33) = T_B A_B =$

$T_B = 3(1250)$

Sustituyendo estos valores en (1)

$3P = 12(333.33) + 4.5(3)(1250)$

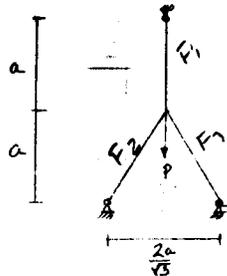
$P = 6958.33 \text{ Kg}$



ESCUELA DE INGENIERIA

$(2(0.3) \cos 30^\circ + 1) T_A = 5000$

Problema 5 Calcular el área de la sección transversal de las barras del sistema mostrado. Todas las barras son del mismo material y tienen la misma área. El esfuerzo normal máximo en todo el sistema es de 1000 kg/cm^2 al aplicar la carga $P = 20 \text{ Ton}$



Solución: Por equilibrio $\Sigma F_x = 0$
 $F_2 \sin 30^\circ - F_3 \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow F_2 = F_3$
 Por $\Sigma F_y = 0$
 $F_1 + 2F_2 \cos 60^\circ = P \Rightarrow F_1 + \sqrt{3}F_2 = P \quad (1)$

Por compatibilidad de deformaciones; de la figura de la izquierda

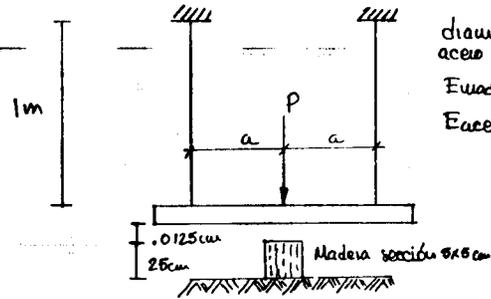
$\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_1 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_1$
 Como $\Delta = \frac{PL}{EA}$ $\frac{F_2(2a)}{\sqrt{3}AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{F_1(2a)}{AE}$ $3F_1$

$F_2 = \frac{3}{4} F_1$
 Sustituyendo en (1) a F_2 $F_1 + 2\sqrt{3}F_1 = P$

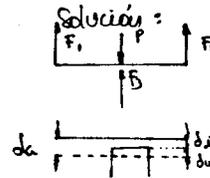
$F_1 = \frac{4P}{4+3\sqrt{3}}$ $F_2 = \frac{3P}{4+3\sqrt{3}}$
 $F_1 = 8.699 \text{ Ton}$ $F_2 = 6.525 \text{ Ton}$

Como $\sigma_{max} = 1000 \text{ kg/cm}^2$
 $A = \frac{8699}{1000} = 8.699 \text{ cm}^2$

Problema 6 Para la estructura cuya configuración inicial se muestra en la figura determinar los esfuerzos normales en la columna corta de madera y en las varillas de acero al aplicar la carga P de 5.5 Ton . Suponga que la barra AB es infinitamente rígida y desprecie su peso propio.



diámetro de varillas de acero $d = 1.26 \text{ cm}$
 $E_{mud} = 10^5 \text{ kg/cm}^2$
 $E_{acero} = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$



Por simetría $F_1 = F_2$
 Por $\Sigma F_y = 0$ $F_1 + F_2 + F_3 = P$
 $2F_1 + F_3 = P \quad (1)$

Por compatibilidad de deformaciones
 $\delta_{acero} = \delta_{madera} + \delta_{mud} = \delta_{madera} + 0.0125 \quad (2)$

$\delta_a = \frac{F_1 L_1}{A_1 E_1}$ $\delta_m = \frac{F_3 L_m}{A_m E_m}$ $A_a = \pi \left(\frac{1.26}{2}\right)^2 = 1.227 \text{ cm}^2$

$A_m = 5 \times 5 - 25 \text{ cm}^2$ (Sustituyendo δ_m en (2))

$\frac{F_1 (100)}{1.227 (2.1) \times 10^6} = 0.0125 + \frac{P - 2F_1}{25 (10)^5 (1)}$

$\frac{100 F_1}{25.77 \times 10^6} - \frac{P - 2F_1}{10^5} = 0.0125$

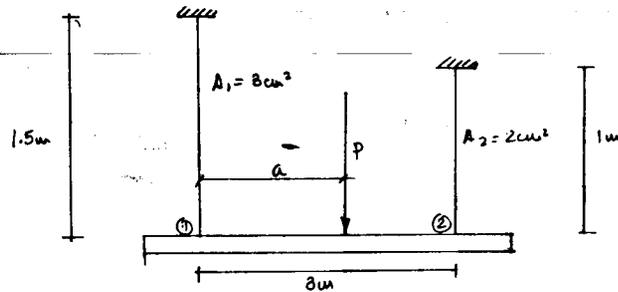
$100 F_1 - 25.77 P + 51.54 F_1 = 0.0125 (25.77) 10^6$

$F_1 = \frac{173.953 \cdot 10}{151.54} = 1147.89$ $\sigma_{acero} = \frac{1147.89}{1.227} = 935.4 \text{ kg/cm}^2$

$F_3 = 5500 - 2(1147.89) = 3204.22$ $\sigma_{madera} = \frac{3204.22}{25} = 128.17 \text{ kg/cm}^2$

Problema 7 Se tiene una barra rígida, sostenida por dos tirantes según el dibujo y datos anexos.

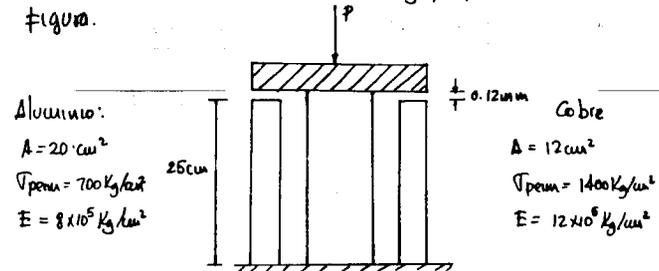
a) ¿Dónde se debe aplicar P para que la barra permanezca horizontal?
b) ¿Cuánto se deforman los tirantes si $P = 4000 \text{ kg}$?



Solución:

Por equilibrio $\Sigma M_0 = 0$
 $3 R_2 = P a$
 Por $\Sigma M_1 = 0$
 $3 R_1 = P(3-a)$
 Por condición de deformación del problema
 $\Delta = \delta_2$
 Como $\Delta = \frac{PL}{EA}$
 $\frac{P a (100)}{300 E (2)} = \frac{P (300-a) (150)}{300 E (2)}$
 $\frac{a}{300} (50) = \frac{300-a}{300} (50)$
 $a = \frac{300}{2} = 150 \text{ cm}$
 Si $P = 4000 \text{ kg}$ $\Delta = \frac{4000 \left(\frac{300-150}{300}\right) (150)}{2 \times 10^5 (8)} = 0.05 \text{ cm}$

Problema 8 En el hueco de un tubo de aluminio se introdujo una barra de cobre 0.12 mm más larga que aquel. Determinar la máxima carga que se puede aplicar al sistema mediante una placa de rigidez infinita si se tienen las dimensiones y propiedades indicadas en la figura.



Aluminio:
 $A = 20 \text{ cm}^2$
 $\sigma_{perm} = 700 \text{ kg/cm}^2$
 $E = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

Cobre
 $A = 12 \text{ cm}^2$
 $\sigma_{perm} = 1400 \text{ kg/cm}^2$
 $E = 12 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$

Solución:

$$\delta_c = \delta_a + 0.012$$

$$\frac{\sigma_c (25.012)}{12 \times 10^5} = \frac{\sigma_a (25)}{9 \times 10^5} + 0.012$$

$$\sigma_c (200.096) = \sigma_a (300) + 115200$$

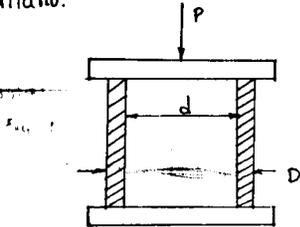
$$\sigma_c = \frac{300 \sigma_a}{200.096} + \frac{115200}{200.096}$$

$$\sigma_c = \frac{300(700)}{200.096} + \frac{115200}{200.096} > 1400$$

$$\therefore \sigma_a = \frac{200.096 \sigma_c - 115200}{300} = 549.9$$

$$P_{max} = 549.9(20) + 1400(12) = 27796 \text{ kg}$$

Problema 9 Un cilindro de acero y un tubo de cobre están comprimidos entre los platos de una prensa como se ilustra en la figura. Determinar los esfuerzos en el acero y en el cobre así como el acortamiento unitario.



Solución: Por condición de equilibrio:

$$P_{acero} + P_{cobre} = P \quad (1)$$

Por compatibilidad de deformaciones

$$E_{acero} = E_{cobre} \quad \frac{\sigma_a}{E_a} = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

$$\therefore \sigma_a = \frac{E_a}{E_c} \sigma_c \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\frac{E_a}{E_c} \sigma_c \frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \sigma_c = P$$

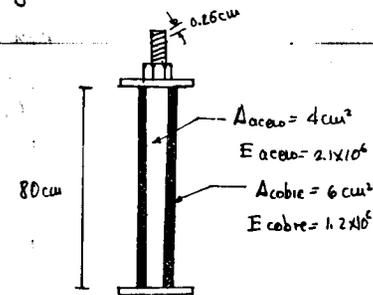
$$\sigma_c \left[\frac{E_a}{E_c} \frac{\pi d^2}{4} + \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} \right] = P$$

$$\sigma_c = \frac{4P}{\pi \left[d^2 \left(\frac{E_a}{E_c} - 1 \right) + D^2 \right]}$$

$$\sigma_a = \frac{E_a}{E_c} \frac{4P}{\pi \left[\left(\frac{E_a}{E_c} - 1 \right) d^2 + D^2 \right]}$$

$$\epsilon = \frac{4P}{\pi E \left[d^2 \left(\frac{E_a}{E_c} - 1 \right) + D^2 \right]}$$

Problema 10 Una barra de acero situada en el interior de un tubo de cobre, como se muestra en la figura, tiene un extremo roscado con un paso de 0.25 cm. Determinar los esfuerzos que se originan en ambos metales cuando la fuerza, después de colocarla "a tope" se hace girar media vuelta.



Solución: $\Delta l = \frac{0.25}{2} = \Delta l_{\text{tubo}} \quad T_{\text{torquillo}} = C_{\text{tubo}} = P$

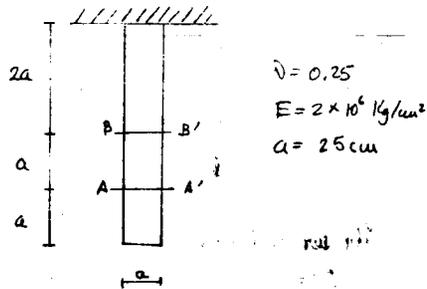
$$\frac{P l}{E_a A_a} + \frac{P l}{E_c A_c} = 0.125$$

$$P = \frac{0.125}{\frac{l}{A_a E_a} + \frac{l}{E_c A_c}} = \frac{0.125}{\frac{80}{10^6 \left(\frac{1}{2.1 \times 6} + \frac{1}{1.2 \times 6} \right)}} = 6058 \text{ Kg}$$

$$\sigma_a = \frac{6058}{4} = 1514.5 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_c = \frac{6058}{6} = 1009.67 \text{ Kg/cm}^2$$

Problema 11. Una pieza de la figura de sección cuadrada, soporta una carga P debido a la cual y a su peso propio, su dimensión transversal sufre una disminución total de $.000015$ en la sección $\Delta-A'$ y de $.00002$ en la $B-B'$. ¿Cuanto valen la carga P , el peso volumétrico γ y la deformación longitudinal total?



Solución:

$$E_{A-A'} = \frac{E \delta_{A-A'}}{\delta} = \frac{1.5 \times 10^{-5}}{0.5} = \frac{P + \gamma a^3}{E a^2}$$

$$P + \gamma a^3 = 1.5 \frac{E a^3}{\delta} \times 10^{-5} \quad (1)$$

$$E_{B-B'} = \frac{E \delta_{B-B'}}{\delta} = \frac{2 \times 10^{-5}}{0.5} = \frac{P + 2\gamma a^3}{E a^2}$$

$$P + 2\gamma a^3 = 2 \frac{E a^3}{\delta} \times 10^{-5} \quad (2)$$

Restando (2) de (1) $\gamma a^3 = 0.5 \frac{E a^3}{\delta} \times 10^{-5}$ $\gamma = 0.5 \frac{E a^3}{\delta a^3} \times 10^{-5} = 0.0001 \frac{E}{\delta}$

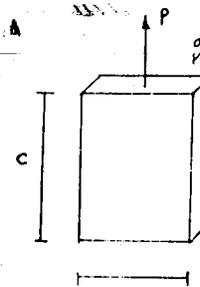
Sustituyendo en (1)

$$P = (1.5 - 0.5) \frac{E a^3}{\delta} \times 10^{-5} = \frac{E a^3}{\delta} \times 10^{-5} = 200 \text{ Kg}$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{P(x) dx}{EA} = \frac{10^{-5}}{E a^2} \int_0^{2a} \left(\frac{E a^3}{\delta} + 0.5 \frac{E a^3}{\delta a^3} x \right) dx = \frac{10^{-5}}{E a^2} \int_0^{2a} (a + 0.5x) dx$$

$$\Delta l = \frac{10^{-5}}{E a^2} \left[ax + \frac{0.5x^2}{2} \right]_0^{2a} = \frac{10^{-5}}{E a^2} \left[4a^2 + 0.5 \left(\frac{4a^2}{2} \right) \right] = \frac{1 \times 10^{-5}}{0.25} = 3.2 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

Problema 12. Para el elemento mostrado, se conoce su módulo de elasticidad E y su deformación transversal Δb , se pide obtener el valor del módulo de Poisson ν , el ancho b y la variación de volumen ΔV en función de P , a , Δb , Δa y Δc



Solución: $\nu = \frac{E'}{E}$ $\nu = \frac{\Delta b (ab) E}{b P}$ $\nu = \frac{a E \Delta b}{P}$

$$\nu = -\frac{\epsilon'}{\epsilon} = -\frac{\Delta b c}{b \Delta c} \quad b = \frac{\Delta b c}{\nu \Delta c}$$

$$\Delta V = V_f - V_i \quad V_i = abc$$

$$V_f = (a - \Delta a) (b - \Delta b) (c + \Delta c)$$

$$\therefore \Delta a = E \epsilon_a \quad ; \quad \Delta b = E \epsilon_b \quad ; \quad \Delta c = E \epsilon_c$$

$$\text{y } E \epsilon_a = E \epsilon_b = E \epsilon_c = \nu$$

$$V_f = (1 - \nu \epsilon_c) a (1 - \nu \epsilon_c) b (1 + \nu \epsilon_c) c$$

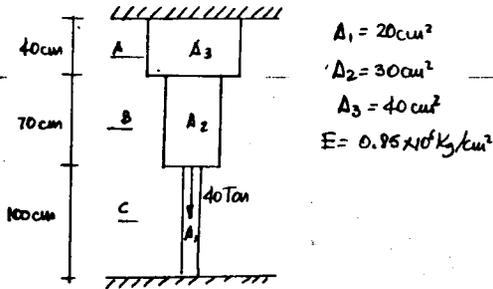
$$V_f = (1 - 2\nu \epsilon_c + \nu^2 \epsilon_c^2 + \epsilon_c - 2\nu \epsilon_c^2 + \nu^2 \epsilon_c^2) abc$$

Como ϵ_c es pequeña los términos de orden mayor se desprecian

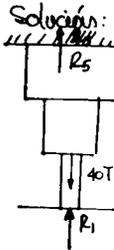
$$\Delta V = (1 - 2\nu) E_c V = (1 - 2\nu) \frac{P abc}{a b E}$$

$$\Delta V = \frac{(1 - 2\nu) P c}{E}$$

Problema 13 Para el elemento mostrado determinar: a) las reacciones en los empotramientos b) los esfuerzos normales en las secciones A, B y C.



$A_1 = 20 \text{ cm}^2$
 $A_2 = 30 \text{ cm}^2$
 $A_3 = 40 \text{ cm}^2$
 $E = 0.95 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$



Dado que $A_3 = 2A_1$ y $1.5A_1 = A_2$

De la figura de la izquierda aplicando $\Delta = \frac{PL}{EA}$

$$\frac{R_1 L_1}{A_1 E} = \frac{R_5 L_2}{E A_2} + \frac{R_5 L_3}{A_3 E}$$

Por equilibrio $\Sigma F_y = 0 \quad R_1 + R_5 = P \quad (1)$

$$\frac{R_1 (100)}{A_1} = \frac{R_5}{A_2} \left(\frac{70}{1.5} + \frac{40}{2} \right)$$

$$100 R_1 = 66.66 R_5$$

$$1.5 R_1 = R_5 \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$R_1 + 1.5 R_1 = 40 \quad \therefore R_1 = \frac{40}{2.5} = 16 \text{ Ton}$$

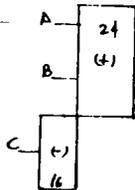
$$R_5 = 24 \text{ Ton}$$

$$\sigma_A = \frac{24000}{40} = 600 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{24000}{30} = 800 \text{ Kg/cm}^2$$

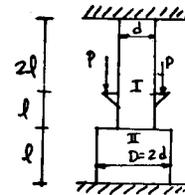
$$\sigma_C = \frac{-16000}{20} = -800 \text{ Kg/cm}^2$$

DFN



Problema 14 Encuentre el diámetro de las secciones transversales I y II del sistema mostrado para que resista las cargas aplicadas P satisfactoriamente.

$P = 26 \text{ Ton}$
 $\sigma_t = 20 \text{ Kg/cm}^2$
 $\sigma_c = 40 \text{ Kg/cm}^2$



Solución: Por ser cilíndricas las secciones I y II

$$A_I = \pi \frac{d^2}{4} \quad A_2 = \pi \frac{(2d)^2}{4} = \pi \frac{4d^2}{4}$$

$$A_2 = 4A_1$$

Por equilibrio de fuerzas de acuerdo a la figura de la izquierda $R_2 + R_1 = 2P \quad (1)$

$$\frac{R_2 (2l)}{A_2 E} = \frac{R_1 l}{A_1 E} + \frac{R_1 l}{A_1 E} \quad (2)$$

Sustituyendo en (2) A_1 y A_2

$$\frac{2R_2 (4)}{\pi d^2} = \frac{R_1}{\pi d^2} + \frac{R_1 (4)}{\pi d^2}$$

$$8R_2 = 5R_1 \quad R_1 = \frac{8}{5} R_2$$

Sustituyendo en (1)

$$R_2 + \frac{8}{5} R_2 = 2P \quad \therefore R_2 = \frac{10P}{13} = 20 \text{ Ton}$$

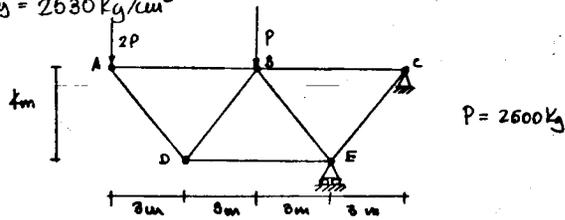
$$R_1 = 36 \text{ Ton}$$

$$\text{Como } P = \sigma A \quad \frac{20000 (4)}{20 \pi} = d_i^2 = 1273.24; \quad d_i = 35.6$$

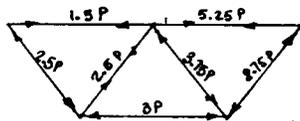
$$\frac{(36000 (4))}{40 \pi} = d_c^2 = 1145.90 = (3.15)^2 \quad d_c = 33.95$$

$$R_{\text{req}} d_i = 85.69 \text{ cm}$$

Problema 15 Empleando el criterio de esfuerzos permisibles, encontrar el área de la sección requerida para las barras AB y BC de la armadura mostrada empleando acero A-36 con $F_y = 2530 \text{ Kg/cm}^2$



Solución: Resolviendo la armadura, se tiene como resultado:



Si $P = 2500 \text{ Kg}$

Con $F_t = 1518 \text{ Kg/cm}^2$

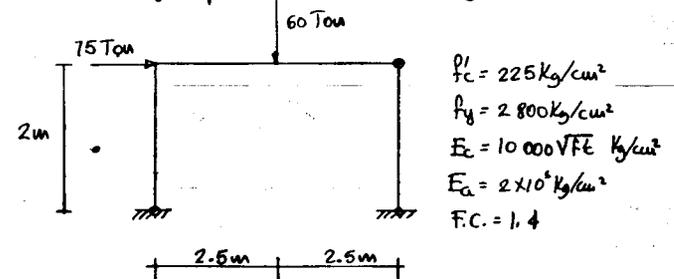
$T_{AB} = 2500(1.5) = 3750 \text{ Kg}$

$A_{AB} = \frac{3750}{1518} = 2.47 \text{ cm}^2$

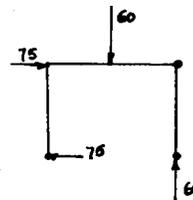
$T_{BC} = 2500(5.25) = 13125 \text{ Kg}$

$A_{BC} = \frac{13125}{1518} = 8.65 \text{ cm}^2$

Problema 16 Suponiendo que no hay problemas de inestabilidad diseñar la columna biarticulada del marco de la figura, la sección debe ser cuadrada y el porcentaje de acero igual a 2.5%



Solución:



$P_u = 60 \times 1.4 = 84 \text{ Ton} = 0.85 f'_c A_c + f_y A_s$

$A_s = \rho A_c = 0.025 A_c$

$P_u = 84000 = A_c (0.85 f'_c + \rho f_y) = A_c [0.85(225) + 0.025(2800)]$

$A_c = \frac{84000}{212.25} = 395.76 \text{ cm}^2 \quad d = \sqrt{A_c} \approx 20 \text{ cm}$

$A_c = 20^2 = 400 \text{ cm}^2 ; A_s = 0.025(400) = 10 \text{ cm}^2$

$f_c = \frac{P}{A_c(1+\rho)}$

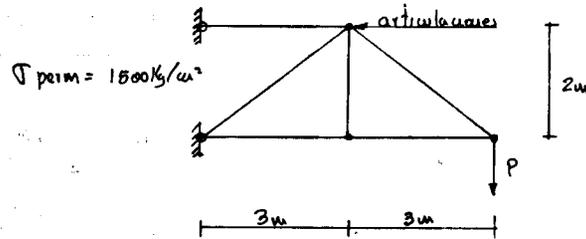
$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^4}{10^4 \sqrt{225}} = \frac{20}{1.5}$

los esfuerzos de trabajo son:

$f_c = \frac{60000}{400(1 + 20 \times 0.025)} = \frac{60000}{440} = 136.36 \text{ Kg/cm}^2$

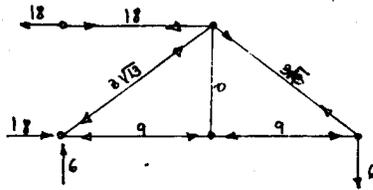
$f_s = n f_c = \frac{20}{1.5} (136.36) = 1819.18 \text{ Kg/cm}^2$

Problema 17 Si la carga P que soporta la armadura del croquis es de 6 Ton, diseñar la cuerda superior utilizando angulos de acero (uno solo o dos espaldas con espaldas)



$\sigma_{perm} = 1500 \text{ kg/cm}^2$

Solución:



$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{18000}{1500} = 12 \text{ cm}^2$

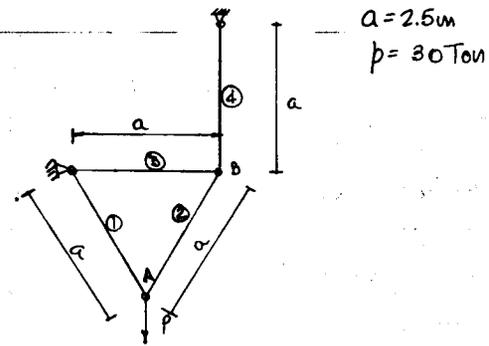
Con dos ángulos de $2\frac{1}{2}'' \times 2\frac{1}{2}'' \times 7/16''$

$A = 12.62 \text{ cm}^2$

O un ángulo de $3'' \times 2'' \times 7/16''$

$A = 12.9 \text{ cm}^2$

Problema 18 Para el sistema mostrado calcular el área de las secciones transversales de las barras 1, 2, 3 y 4. Emplee acero A-36 y $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$. Considere el esfuerzo permisible en compresión igual al de tensión.



$a = 2.5 \text{ m}$
 $P = 30 \text{ Ton}$



Solución: Por equilibrio en el nudo A

$$\sum F_x = 0 \quad +T \text{ sen } 30^\circ = T_2 \text{ sen } 30^\circ \quad T_1 = T_2$$

$$\sum F_y = 0 \quad 2T_1 \text{ cos } 30^\circ = P \quad T_1 = \frac{P}{\sqrt{3}}$$



Por equilibrio en el nudo B

$$\sum F_x = 0; T_3 = T_2 \text{ sen } 30^\circ = \frac{P}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{P}{2\sqrt{3}}$$

$$\sum F_y = 0$$

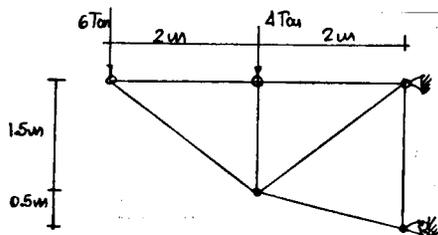
$T_4 = T_2 \text{ cos } 30^\circ = \frac{P}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P}{2}$
Como $\sigma_c = 0.6 \sigma_t = 1518 \text{ kg/cm}^2$

$A_1 = A_2 = \frac{P}{\sqrt{3} \sigma_t} = \frac{30000}{\sqrt{3} (1518)} = 11.41 \text{ cm}^2$

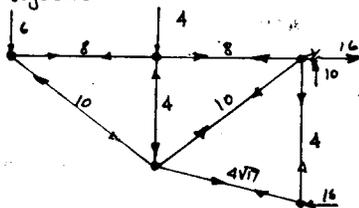
$A_3 = \frac{P}{2\sqrt{3} \sigma_c} = \frac{30000}{2\sqrt{3} (1518)} = 5.705 \text{ cm}^2$

$A_4 = \frac{P}{2 \sigma_c} = \frac{30000}{2 (1518)} = 9.811 \text{ cm}^2$

Problema 19 ha armadura de la figura con el sistema de cargas mostrado. Será hecha con acero A-36 siguiendo las especificaciones del AISC. Determine el área de la sección transversal requerida en cada una de las barras sometidas a fuerzas internas de tensión.



Solución: Después de efectuar el análisis se obtienen los resultados siguientes:



$$\text{Como } f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_t = 0.6 f_y = 1520 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{Aplicando } A_i = \frac{P_i}{f_t}$$

$$A_{AB} = A_{BC} = \frac{8000}{1520} = 5.26 \text{ cm}^2$$

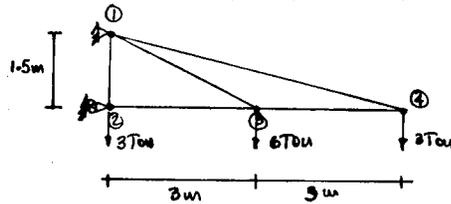
$$A_{DC} = \frac{10000}{1520} = 6.58 \text{ cm}^2$$

$$A_{CE} = \frac{4000}{1520} = 2.63 \text{ cm}^2$$

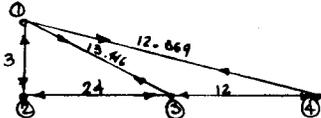
EJERCICIOS

(CARGA AXIAL)

Problema Para sostener el techo de un pequeño estudio deportivo se emplea una armadura como la mostrada. Si el sistema de cargas es el indicado y la armadura se hará en acero A-36 ($f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$), determine el área de la sección transversal requerida en cada una de las barras para que la armadura tenga un comportamiento adecuado. Considere los esfuerzos en tensión, y en compresión iguales.



Solución: Al resolver la estructura se obtiene lo siguiente:



$f_c = 0.6 f_y = 0.6 (2530) = 1518 \text{ kg/cm}^2$

Aplicando $A_i = \frac{P_i}{f_c}$

$A_{12} = \frac{3000}{1518} = 1.976 \text{ cm}^2$

$A_{13} = \frac{13416}{1518} = 8.838 \text{ cm}^2$

$A_{14} = \frac{12669}{1518} = 8.349 \text{ cm}^2$

$A_{32} = \frac{24000}{1518} = 15.81 \text{ cm}^2$

$A_{34} = \frac{12000}{1518} = 7.905 \text{ cm}^2$

1.- A continuación se dan los datos correspondientes a un ensayo 2 tensión de un alambre de 0.22 cms. de diámetro. El instrumento para medir alargamientos marcaba una longitud inicial de $L_0 = 15 \text{ cms}$. Trace la curva esfuerzo-deformación unitaria y establezca el límite de fluencia.

Carga Kg	Alargamiento cm		
		80	0.0170
		90	0.0190
10	0.0008	100	0.0220
20	0.0020	110	0.0255
30	0.0038	120	0.0245
40	0.0060	130	0.043
50	0.0085	135	0.075
60	0.0110	140	0.125
70	0.0140	145	0.200
		148	0.350

2.- Una placa de acero de 244 cms x 266 cms por 0.635 cms. de espesor se sujeta a una carga uniformemente distribuida P_x en la dirección x, y P_y en la dirección y. Si el cambio total en longitud de la condición no deformada en la dirección x es 0.195 cms. y en la dirección y es 0.22 cms. ¿Cuáles serán P_x y P_y en ton/cm? Sea $E = 2.2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, y $G = 8.44 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ (Ver figura).

Resp.: $P_x = 1.36$ $P_y = 1.143$

3.- Una placa de acero de 5 cms x 25 cms x 1.25 cms se sujeta a esfuerzos uniformemente distribuidos a lo largo de sus caras (Ver figura). a) Si $P_y = 288 \text{ Kg/cm}^2$ y $P_x = 2880 \text{ Kg/cm}^2$, ¿Qué cambio en espesor ocurre debido a la aplicación de estos esfuerzos? b) Para causar el mismo cambio en espesor como en (a) - por P_x solamente ¿Cuál debe ser su magnitud?

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 \quad \nu = 0.25$$

$$\text{Resp. a) } \epsilon_s = 3.7714 \times 10^{-4}$$

$$\text{b) } P_x = 3 \frac{168 \text{ Kg}}{\text{cm}^2}$$

4-5.- Determinar los desplazamientos δ de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores P y los esfuerzos normales en las secciones transversales de las barras elásticas. Para las barras I y II tómense iguales su área y su módulo de elasticidad.

6.- Determinar los desplazamientos δ_x, δ_y del Punto A indicado en la figura y los esfuerzos en las barras I, II y III. Tómesese $E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$, $d_I = 2 \text{ cm}$, $d_{II} = 2 \text{ cms}$, $d_{III} = 3 \text{ cms}$. (d = diámetro).

$$\text{Resp. } \begin{array}{l} \delta_x = 5.4 \text{ mm} \quad \sigma_{II} = 1300 \text{ kg/cm}^2 \\ \delta_y = 1.8 \text{ mm} \quad \sigma_I = 900 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{III} = 1200 \text{ kg/cm}^2 \end{array}$$

7.- Para la siguiente armadura ¿Cuánto debe valer el área de la sección transversal de las barras para que soporten la condición de carga mostrada? Esfuerzo permisible = $|\sigma|$

$$\sqrt{\text{compresión}} \cdot \sqrt{\text{tensión}} = |\sigma|$$

$$\text{Resp. } A_I = A_{II} = \frac{P}{\sqrt{2}|\sigma|} \quad \therefore A_{III} = \frac{P}{2\sqrt{3}|\sigma|}$$

$$A_{IV} = \frac{P}{2|\sigma|}$$

8.- Encuentre lo mismo que se pide en el problema 7. Para las barras I, II y III.

$$\text{Resp.: } A_I = A_{II} = A_{III} = \frac{P}{|\sigma|}$$

9.- Encuentre el valor de P si las barras tienen un esfuerzo permisible de 1200 Kg/cm^2 y un área en su sección transversal de 2 cm^2 .

$$\text{Resp.: } P = 900 \text{ Kg}$$

10.- Calcule el valor de P si las barras tienen un esfuerzo permisible de 2000 Kg/cm^2 y una área en su sección transversal de 4 cm^2 para las diagonales y de 2 cm^2 para la barra horizontal.

$$\text{Resp.: } P = 8 \text{ ton.}$$

11.- Considerando el efecto de Peso Propio determine el alargamiento de la longitud a bajo el efecto de la carga P . Peso específico del material = γ

$$\text{Resp.: } \Delta l_{\text{total}} = \frac{a}{E} \left[\frac{P}{A} + \gamma \left(l - \frac{a}{2} \right) \right]$$

12.- Las dimensiones de un cono recto circular cortado apoyado sobre una base rígida se indican en la figura. Determine el acortamiento que sufre por efecto de su peso propio. Peso específico del material = γ . (Considere el origen de los ejes coordenados en el vértice del cono extendido).

$$\text{Resp.: } \Delta l = \frac{160}{E} (\gamma)$$

13.- En el sistema mostrado, encuentre los esfuerzos normales en los elementos I, II y III.

$$\text{Resp.: } \begin{array}{l} \sigma_I = -800 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{II} = 800 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{III} = 600 \text{ kg/cm}^2 \end{array}$$

14-15.- En los sistemas mostrados encuentre los esfuerzos normales en las barras I y II.

16.- Calcular las dimensiones de las secciones transversales de los elementos del sistema. Si el esfuerzo permisible de los elementos es de $\sigma_{perm} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$.

Resp.: $d = 3.33 \text{ cm}$.

17.- La Portland Cement Association ha propuesto una expresión para dibujar la curva esfuerzo-deformación unitaria ($\sigma - \epsilon$) para un elemento de concreto sometido a carga axial:

$$\sigma = \frac{E_c \epsilon}{1 + \left(\frac{E_c \epsilon_0}{\sigma_0} - \frac{n}{n-1} \right) \frac{\epsilon}{\epsilon_0} + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^n}$$

donde:

$$P_{sp} = \frac{\text{Vol. reb. trans.}}{\text{Vol. concreto}} = \frac{4 A_{sp}}{(d)S}$$

$$\omega = \frac{d-s}{d} \frac{P_{sp} f_y}{f'_c}$$

$$\epsilon_0 = 0.002 (1 + B\omega)$$

$$\sigma_0 = f'_c (1 + A\omega)$$

$$n = 0.0143 f'_c$$

$$E_c = 10,000 \sqrt{f'_c}$$

A_{sp} = área de un alambre del refuerzo transversal.

d = diámetro del núcleo
 s = separación entre estribos o paso del zuncho.

refuerzo transversal	A	B
Estribos	0.4	3.5
zuncho	0.84	6.45

Empleando las expresiones de la PCA calcule y dibuje la curva del concreto para la sección mostrada en la figura.

- Ignorando el refuerzo transversal.
 - Para un refuerzo espiral con $\phi = \frac{3}{8}$ y un paso de 10 cms.
 - Para un refuerzo con estribos $\phi = \frac{3}{8}$ con una separación de 10 cm.
- Nata: (Haga las 3 figuras en una sola hoja para compararlas).

Resp.:

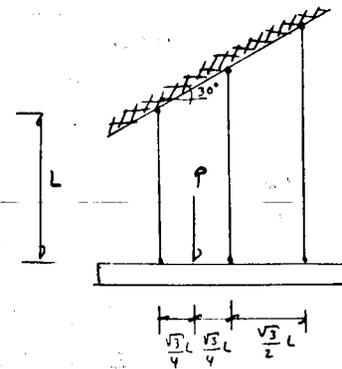
CASO	ϵ_0	$\sigma_0 [\text{Kg/cm}^2]$
a)	0.002	250
b)	0.0032	270.32
c)	0.0026	259.94

$$n = 3.375; E_c = 158,114 \text{ Kg/cm}^2$$

$$d = 34 \text{ cm}$$

Comente lo que observa en las gráficas.

18.- Sobre una barra de rigidez infinita que está sostenida por tres cables, como se muestra, se aplica una P. Si el comportamiento de los cables es elástico lineal y sus áreas son iguales, encuentre los alargamientos y las fuerzas en ellas.



$$E = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

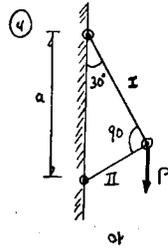
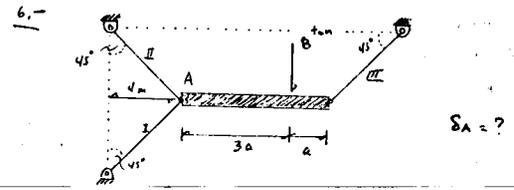
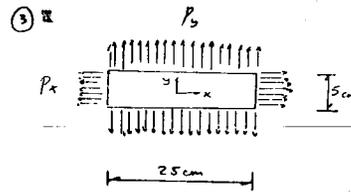
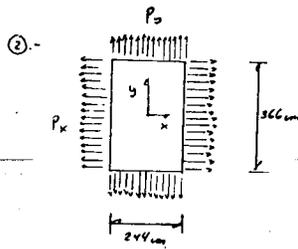
$$A = 5 \text{ cm}^2$$

$$L = 2 \text{ m}$$

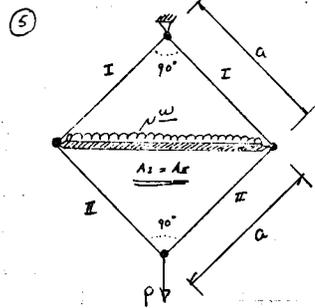
$$P = 20 \text{ tons.}$$

Resp.: $\Delta_1 = 4.89 \text{ cm}$ $R_1 = 12.22 \text{ tons}$
 $\Delta_2 = 3.24 \text{ cm}$ $R_2 = 5.56 \text{ tons}$
 $\Delta_3 = 1.78 \text{ cm}$ $R_3 = 2.22 \text{ tons}$

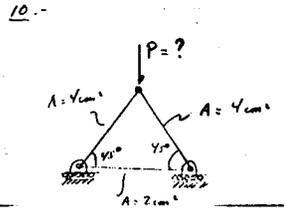
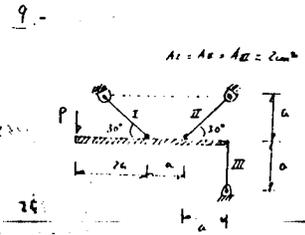
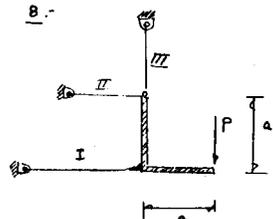
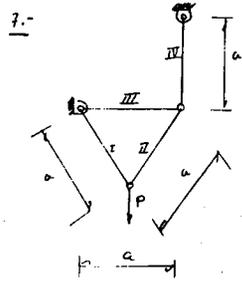
Figuras



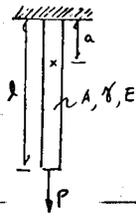
Resp. $\delta_y = \frac{P a}{8 E} \left[\frac{3\sqrt{3}}{A_I} + \frac{1}{A_{II}} \right]$
 $\delta_x = \frac{P a}{8 E} \left[\frac{3}{A_I} - \frac{\sqrt{3}}{A_{II}} \right]$
 $v_I = \frac{P}{A_I} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$
 $v_{II} = \frac{P}{A_{II}} \left(\frac{1}{2} \right)$



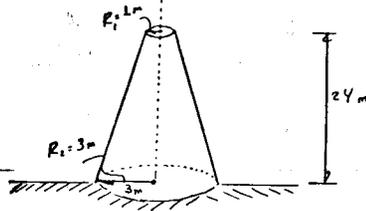
Resp. $v_I = \frac{P + \sqrt{3} W a}{\sqrt{2} A_I}$
 $v_{II} = \frac{P}{A_{II}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
 $\delta = \frac{a}{8 E} \left[\frac{2P + \sqrt{3} W a}{A} \right]$



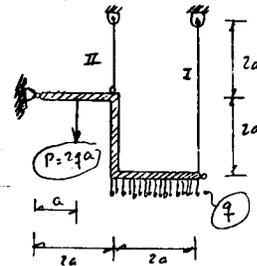
11.-



12.-



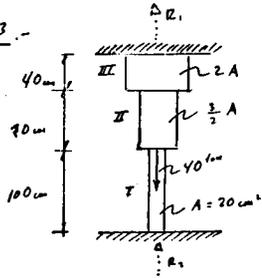
15.-



$A_I = 2 \text{ cm}^2$
 $A_{II} = 1 \text{ cm}^2$
 $a = 1 \text{ m}$
 $q = 15 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$

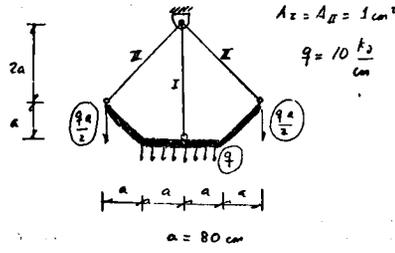
Resp. $R_I = 2.4 \text{ ton}$
 $R_{II} = 1.2 \text{ ton}$ } $V_I = V_{II}$

13.-



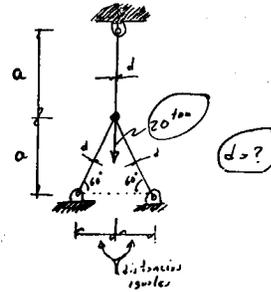
Resp: $V_I = -800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
 $V_{II} = 800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
 $V_{III} = 600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

14.-

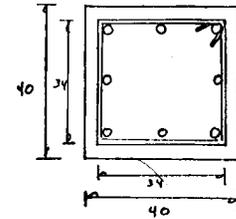


Resp $V_I = 1,164 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
 $V_{II} = 875 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

16.-



17.-



$f_x = 250 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$
 $f_y = 4200 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

TEMA III. T O R S I O N

Marco Antonio Alvarez Salís

José Manuel Covarrubias

1. Introducción (Pág. 178)
2. Diagramas de momento torsionante (Pág. 180)
3. Conceptos fundamentales (Pág. 184)
4. Esfuerzos y deformaciones debidas a torsión (Pág. 190)
5. Problemas hiperestáticos (Pág. 207)
6. Miembros sujetos a torsión con sección transversal no circular (Pág. 213)
7. Analogía de la membrana (Pág. 220)
8. Miembros de pared delgada sujetos a torsión (Pág. 224)
9. Ejemplos (Pág. 228)
10. Esfuerzos y deformaciones debidas a torsión en el rango inelástico (Pág. 230)
11. Analogía del montón de arena (Pág. 232)
12. Ejemplos (Pág. 233)
13. Superposición de esfuerzo, cortantes en barras de sección circular (Pág. 236)
14. Ejercicios propuestos (Pág. 242)

1.- INTRODUCCION

Un elemento (barra, flecha, viga) está sometida a torsión simple cuando en sus secciones transversales aparecen solamente momentos torsionantes internos, es decir, momentos que se encuentran -- contenidos en el plano de la sección. Generalmente estos momentos torsionantes internos (T_1) son consecuencia de los momentos torsionantes externos (T_e) aplicados alrededor de su eje longitudinal, y donde el resto de las componentes de fuerza (fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante) son nulas, (ver Fig. 1) además --- $T_e + T_1 = 0$.

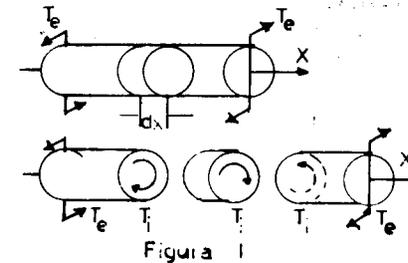


Figura 1

Los momentos torsionantes externos se transmiten al elemento, generalmente, en los lugares donde se colocan poleas, ruedas dentadas, vigas con voladizo, etc.. En la Fig. 2 se muestra una flecha cilíndrica con una polea en cada extremo, en cada polea actúa un par provocado por dos fuerzas iguales, paralelas y opuestas. El momento torsionante o torque de cada par es igual el producto de cualquiera de las dos fuerzas por la distancia que las separa, esto --- es, $T_1 = 2R P_1$, $T_2 = 2r P_2$. Para cumplir con el equilibrio se debe tener que $T_1 + T_2 = 0$ por lo que se desprende que $T_1 = T_2$ en magnitud, pero de sentidos opuestos de giro. Las unidades de el momento torsionante, T , son ton-m ó kg-m ó kg-cm, o escrito en su forma dimensional (T) = (FL).

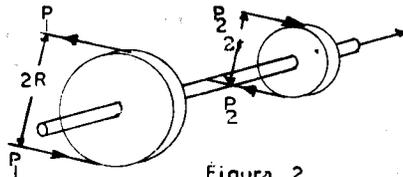


Figura 2

Hay que notar que cuando el plano de la carga transversal no pasa por el centroide de la sección transversal de una viga, además de los momentos torsionantes internos se originan otras fuerzas internas como son las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, este caso se presenta en vigas que soporten marquesinas o muros colocados excéntricamente, vigas de eje curvo, vigas en balcón o en esquina, etc. (ver Fig. 3).

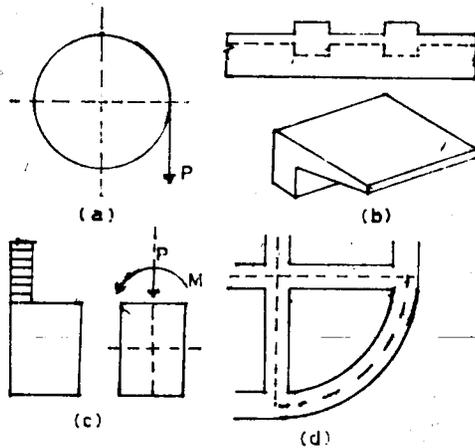


FIGURA 3

El caso de torsión simple es poco frecuente en la práctica, ya que, regularmente se presenta acompañado de fuerza cortante y flexión. Sin embargo, para calcular la resistencia de un elemento su-

jeto a esfuerzos de torsión combinados con esfuerzos de flexión y/o cortante (como se verá más adelante) es necesario conocer primeramente el comportamiento y la resistencia de dicho elemento sujeto a torsión simple.

En la práctica, la mayoría de los miembros que están sometidos a torsión (flechas de transmisión en motores, tubos de torsión en equipos de potencia, etc.) son predominantemente de sección transversal circular ya sea ésta sólida o tubular, por lo que gran parte del material aquí tratado está enfocado a la solución de este tipo de elementos, en donde mayor aplicación tienen los resultados obtenidos. El caso de secciones sólidas no circulares sometidas a torsión se tratará con ciertas limitaciones. Se estudiará la resistencia de tubos de pared delgada sometidos a torsión cualquiera que sea la forma de su sección transversal. Se tratarán también las concentraciones de esfuerzos debidas a cambios bruscos de sección en flecha de sección circular. Se hará mención de las analogías de la membrana y del montón de arena para estudiar la resistencia de elementos sujetos a torsión, de sección transversal cualquiera, en los rangos elástico y plástico respectivamente. Al final se tratará lo relativo a la superposición de esfuerzos cortantes. El problema de torsión será resuelto primeramente para el rango elástico.

2.- CONSTRUCCION DE LOS DIAGRAMAS DE MOMENTO TORSIONANTE.

APLICACION DEL METODO DE SECCIONES.

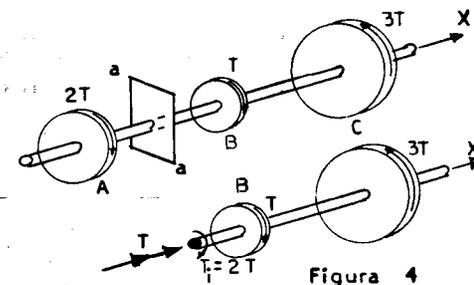


Figura 4

En la Fig. 4 está representada una barra solicitada por los 3 momentos torsionantes externos indicados y se pide encontrar el valor del momento torsionante interno en el plano a-a. Si se conviene la dirección del eje X como se muestra en la Fig. 4, el momento torsionante interno en el corte a-a es positivo de acuerdo con la regla del tornillo de rosca derecha. Al construir el diagrama de los momentos torsionantes es necesario atenerse a esta convención para determinar los signos de los momentos torsionantes. En lo sucesivo, se recurrirá principalmente a las representaciones planas en lugar de las isométricas, por ser las primeras más sencillas. Los momentos torsionantes internos y externos se representarán con una línea con dos círculos en sus extremos, uno de ellos contendrá un punto que indicará la punta de la flecha (hacia el lector) y el otro una cruz, que representará el final de la flecha (saliendo de el lector) como se muestra en la Fig. 5.

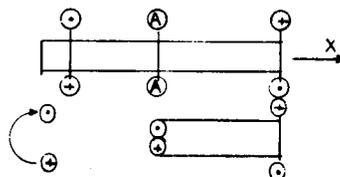


Figura 5

Volviendo a la Fig. 4, para calcular los momentos torsionantes internos, T_1 , que aparecen en las secciones de la barra, bajo la acción de momentos torsionantes externos o de una carga transversal se emplea el método de las secciones. Para aplicar dicho método se deben seguir

los pasos indicados a continuación:

- 1.- Verificar el equilibrio del sistema en su totalidad.
- 2.- Aislar un miembro individual o una parte de un determinado arreglo de elementos estructurales o mecánicos. Tal miembro o parte es representado mediante un diagrama de cuerpo libre en el que se indican todas las fuerzas que actúan sobre él, incluyendo las reacciones de los soportes y el peso propio (aquí se considera, salvo que se especifique lo contrario, que los miembros son "ligeros" sin peso o que están soportados a intervalos adecuados para hacer el efecto de flexión por su propio peso - despreciable, las fuerzas axiales que pueden actuar también si simultáneamente son excluidas por el momento).uesto que un cuerpo estable en reposo está en equilibrio, cualquier parte de él debe estar en equilibrio.
- 3.- Se emplean las ecuaciones de la Estática para la determinación

de las reacciones (en torsión simple, para miembros estáticamente determinados, solo se requiere una ecuación $\sum M_x = 0$, donde el eje X está alojado a lo largo del eje centroidal del miembro). Aplicando estas ecuaciones al miembro en su totalidad o parte de él se encuentran las fuerzas resistentes internas desarrolladas en el miembro (T_1) necesarias para balancear las fuerzas aplicadas externamente (T_0). Las fuerzas externas (T_0) e internas (T_1) son iguales en magnitud pero actúan en sentidos opuestos. En problemas estáticamente indeterminados (hiperestáticos), la Estática es complementada con consideraciones cinemáticas (compatibilidad de deformaciones y condiciones de frontera).

- 4.- En el punto donde se desea conocer la magnitud de las fuerzas, se traza mentalmente una sección perpendicular al eje del elemento y una porción del mismo a un lado u otro de la sección es totalmente removida.
- 5.- En la sección investigada se determina el sistema de fuerzas interno necesario para mantener la parte aislada del miembro en equilibrio. En general, este sistema de fuerzas consiste de una fuerza axial, dos fuerzas cortantes, dos momentos flexionantes y un momento torsionante (para el problema que se está tratando $N=V=M=0$). Estas cantidades N, V, M y T se encuentran aislando la parte aislada como cuerpo libre.
- 6.- Resuelto correctamente el sistema de fuerzas en la sección deseada, los esfuerzos se determinan utilizando las fórmulas que se establecerán.
- 7.- Si se conoce la magnitud del esfuerzo máximo en una sección, se puede proporcionar el material necesario para tal sección o, recíprocamente, si se conocen las propiedades físicas de un material, se puede seleccionar un miembro del tamaño adecuado.
- 8.- En otros problemas el conocimiento de la deformación de un miembro en una sección arbitraria, causada por las fuerzas internas, permite predecir la deformación de la estructura en conjunto y por tanto, si es necesario, diseñar miembros que no se deformen o "cuelguen" excesivamente.

La secuencia dada es enteramente general y aplicable a cualquier tipo de problema donde se deseen conocer las fuerzas internas.

La habilidad para pronosticar la naturaleza de las cantidades calculadas es esencial. Todas las cantidades consideradas en mecá-

nica de materiales tienen un significado físico definido, muchas de las cuales pueden ser interpretadas esquemáticamente. Los diagramas de cuerpo libre ayudan a esto enormemente.

Para ilustrar la distribución y la magnitud de los momentos torsionantes a lo largo de un elemento, se construye el diagrama de estos momentos. Su construcción es análoga a la de los diagramas de fuerza axial en los casos de tensión y compresión. Para los momentos torsionantes no existe un acuerdo único sobre los signos admitido por todos, puede seguirse cualquier convención, lo verdaderamente importante es respetarla en todo el procedimiento. Aquí, de acuerdo con la convención elegida (regla del tornillo de rosca derecha), se dibujarán las ordenadas de los momentos positivos hacia arriba.

El diagrama de momentos torsionantes del miembro mostrado en la Fig. 4 queda como se muestra en la Fig. 6.

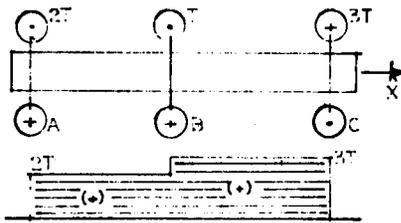


FIGURA 6

Es importante subrayar -- que, en los lugares donde se aplican los momentos torsionantes externos las ordenadas del diagrama de momentos varían bruscamente en una magnitud igual a la del momento torsionante externo aplicado. A la sección donde se localiza el máximo esfuerzo cortante debido a torsión, se le denomina sección crítica. De lo anterior se ve que para un miembro de sección transversal constante, el máximo momento torsionante interno causa el esfuerzo máximo e impone la condición crítica sobre el material. En la investigación de la resistencia de un miembro a torsión, tienen que ser examinadas varias secciones para poder determinar el momento torsionante interno mayor. En la Fig. 6 la sección crítica está en cualquier punto entre B y C, ya que es una barra de sección transversal constante.

Si el miembro sometido a torsión varía en dimensiones de su sección transversal a lo largo de su eje longitudinal, es más difícil decidir donde se encuentran los esfuerzos máximos a que está suje-

to el material. Por tanto, pueden tener que ser investigadas y calculados los esfuerzos en distintas secciones para determinar la sección crítica. Estas situaciones son análogas al caso de una barra cargada axialmente. Más adelante se obtendrán las fórmulas necesarias para calcular los esfuerzos como una función del momento torsionante interno y de las dimensiones de la sección transversal.

Si en un elemento actúan cargas transversales que originan la torsión del mismo y estas cargas son conocidas (Fig. 3), se calculan previamente los momentos torsionantes externos originados por estas cargas y, enseguida se determinan los momentos torsionantes internos y se construyen los diagramas correspondientes como se indicó con anterioridad.

En la Fig. 7 se dan algunos ejemplos de sollicitación de la barra por momentos torsionantes externos y los diagramas de momentos torsionantes correspondientes.

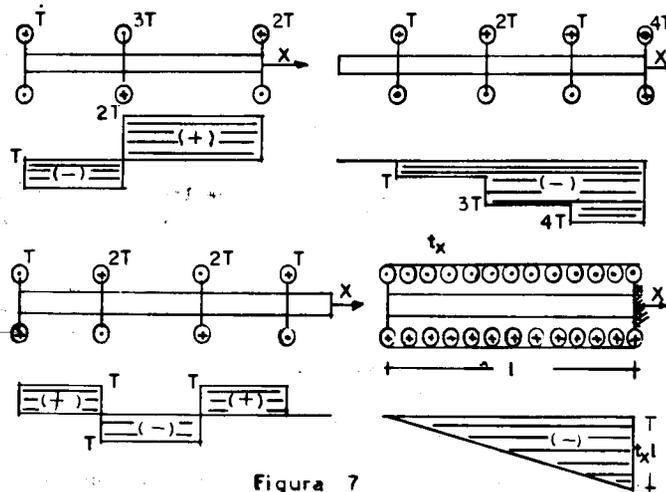


Figura 7

3.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES

3.1.- RELACION ENTRE E, G y J

Para obtener la relación existente entre E, G y J considérese - la Fig. 8 en la que se muestran los esfuerzos cortantes en un ele-

mento y los planos en que actúan (AB, BC, CD, DA). En los planos - inclinados actúan esfuerzos tanto normales como cortantes. Los esfuerzos normales máximos (σ_1, σ_2) aparecen en los planos principales, sus magnitudes y direcciones se calculan de acuerdo con las siguientes fórmulas.

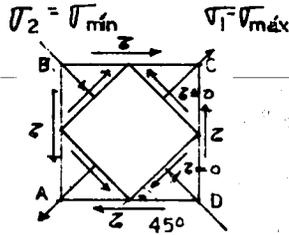


FIGURA 8

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

como en el caso de torsión $\sigma_x = \sigma_y = 0$, se deduce que $\tan 2\theta_p = \infty$ y por tanto los planos principales tienen una inclinación $\theta_p = 45^\circ$ con respecto a los del corte (Fig. 8) y los esfuerzos principales son $\sigma_{1,2} = \pm \tau$

es decir, de la misma magnitud de los esfuerzos cortantes que actúan en los planos de corte. Uno de los esfuerzos principales es de tensión y el otro de compresión.

Si se considera el elemento ABCD de la Fig. 9, rectangular antes de la deformación, después de la deformación adquirirá la forma AB'C'D (AD se considera fijo). A la magnitud CC' = ΔS se le denomina deformación absoluta o total en cortante, y a la relación $\Delta S/a = \tan \gamma$, deformación unitaria en cortante. Puesto que la deformación es pequeña, se admite que las tangentes de los ángulos pequeños son iguales a los ángulos mismos medidos en radianes, entonces $\tan \gamma = \gamma$, donde γ es la variación del ángulo α del elemento y se mide, como ya se dijo antes, en radianes.

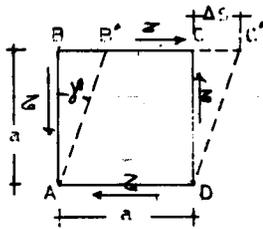


FIGURA 9

Se ha comprobado mediante ensayos en diferentes materiales que, cuando la fuerza no excede un cierto valor, se verifica la siguiente relación lineal $\tau/\gamma = G$ que expresa la Ley de Hooke para la fuerza cortante (nótese la analogía con $\sigma/\epsilon = E$ para fuerza axial). La constante G se denomina módulo de elasticidad al cortante, también se le conoce como módulo de rigidez o coeficiente de elasticidad transversal.

Conociendo γ , se puede determinar la deformación absoluta en cortante, entonces

$$\Delta S = \gamma a = (\tau/G)a = (F\tau)/(AG) \quad \text{ya que } F = A\tau$$

donde F es la fuerza que actúa en la cara BC y A es el área de esa cara (se admite que los esfuerzos cortantes se distribuyen uniformemente sobre el área en que actúan).

Si se calcula la energía potencial (EP) del cortante, que será igual al trabajo desarrollado por la fuerza F que actúa sobre la cara BC, se tiene

$$(EP) = W = (F \Delta S)/2 = (F^2 a)/(2GA)$$

y la energía potencial unitaria (por unidad de volumen) será entonces

$$v = (EP)/V = (F^2 a)/(2GA^2 a) = (\tau)^2/(2G)$$

donde $\tau = F/A$ y $V = Aa$

La energía potencial unitaria puede también calcularse como el trabajo desarrollado por los esfuerzos normales principales, esto es,

$$v = (1/(2E))(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2)$$

como $\sigma_1 = \tau$ y $\sigma_2 = -\tau$ se tiene que

$$v = (\tau^2(1 + \mu))/E$$

Como la magnitud de la energía no depende de la orientación de las caras del elemento, al igualar los segundos miembros de las ecuaciones de la energía potencial unitaria se encuentra que:

$$\tau^2/(2G) = (\tau^2(1 + \mu))/E$$

de donde se obtiene la relación entre el módulo de rigidez G y el módulo de elasticidad E como:

$$G = E/(2(1 + \mu))$$

donde μ = Módulo de Poisson. Para materiales isotrópicos esta relación es válida para todo tipo de estados de esfuerzos.

En la TABLA UNO se dan los valores de E, G y μ para los materiales más comúnmente usados en elementos sometidos a torsión.

3.2.- MOMENTO POLAR DE INERCIA DE LA SECCION TRANSVERSAL CON RESPECTO A UN EJE PERPENDICULAR A ELLA, MODULO DE SECCION POLAR.

Al resolver problemas relacionados con la torsión surgirá la -

necesidad de operar con ciertas características geométricas de las secciones transversales de los elementos, como son el momento polar de inercia (J) y el módulo de sección polar o módulo de sección en la torsión (S_p).

Se denomina momento polar de inercia de la sección a la característica geométrica definida por la integral

$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

siendo ρ la distancia del área dA al punto (polo) (Fig. 10), respecto al cual se calcula el momento polar de inercia, este siempre es

positivo. El módulo de sección polar (S_p) se obtiene dividiendo el momento polar de inercia de la sección entre la distancia existente entre el polo y la fibra más alejada de la sección, entonces,

$$S_p = J/c$$

Como se apuntó anteriormente, la mayoría de los elementos sometidos a torsión tienen sección circular sólida o tubular, entonces, se calcularán los momentos polares de

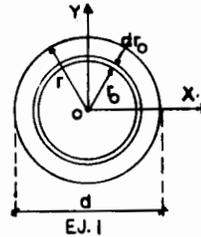
inercia para secciones con ese forma.

TABLA UNO

Material	E	μ	G
Acero	2x10 ⁶ -2.2x10 ⁶	0.25-0.33	8x10 ⁵
Cobre	1x10 ⁶ -1.2x10 ⁶	0.31-0.34	4x10 ⁵
Bronce	1.2x10 ⁶	0.32-0.35	4.5x10 ⁵
Latón	1x10 ⁶ -1.2x10 ⁶	0.32-0.42	4x10 ⁵
Aluminio	0.75x10 ⁶ -0.8x10 ⁶	0.32-0.36	2.8x10 ⁵
Hierro fundido	0.75x10 ⁶ -1.6x10 ⁶	0.23-0.27	4.7x10 ⁵

Ejemplo 1.- Determine el momento polar de inercia de la sección circular sólida mostrada, así como el módulo de sección polar.

Solución.- El momento polar de inercia se calcula a partir de un anillo elemental, entonces



$$J = \int_A \rho^2 dA \quad \text{donde } \rho^2 = r^2 \quad \text{y } A = \pi r^2$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$J = \int_0^r r^2 2\pi r dr = 2\pi \int_0^r r^3 dr = \frac{2\pi}{4} r^4 \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2}$$

entonces $J = \frac{\pi d^4}{32}$

La integral puede también valorarse como,

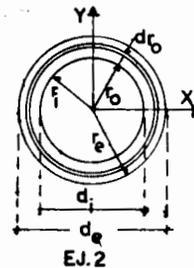
$$J = 2\pi \int_0^{d/2} r^3 dr = \frac{2\pi r^4}{4} \Big|_0^{d/2} = \frac{2\pi d^4}{64}, \quad \text{entonces } J = \frac{\pi d^4}{32}$$

El módulo de sección polar, siendo r ó d/2 la distancia máxima entre el polo y la fibra extrema, será

$$S_p = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2} \quad \text{o} \quad S_p = \frac{2\pi d^4}{32d} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Ejemplo 2.- Determine el momento polar de inercia y el módulo de sección polar del anillo circular mostrado.

Solución.- El momento polar de inercia se calcula, al igual que en el problema anterior, a partir de un anillo elemental, esto es



$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 2\pi r dr = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr = \frac{2\pi}{4} \Big|_{r_1}^{r_2} r^4$$

$$= \frac{\pi}{2} (r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \right] r_2^4$$

$$= \frac{\pi}{2} (r_2^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2) = \frac{\pi}{2} (r_2^2 + r_1^2)(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)$$

si $r_2 - r_1 = t$ donde t = espesor

entonces $J = \frac{\pi}{2} (r_2^2 + r_1^2)(r_2 + r_1)t$

y si $r_2 \approx r_1$, el momento polar de inercia es aproximadamente

$$J \approx 2\pi r^3 t \quad \text{para anillos de pared delgada.}$$

En forma similar al ejemplo anterior al cambiar los límites de la integral r_1 y r_2 por $d_1/2$ y $d_o/2$ respectivamente, queda que

$$J = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32} d_o^4 \left[1 - \left(\frac{d_i}{d_o}\right)^4 \right]$$

y el módulo de sección polar queda como

$$S_p = \frac{\pi}{2} r_o^4 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_o} \right)^4 \right] \quad \text{y} \quad S_p = \frac{\pi r_o^3}{2} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_o} \right)^4 \right]$$

$$S_p = \frac{2\pi d_o^4}{32 d_o} \left[1 - \left(\frac{d_i}{d_o} \right)^4 \right] \quad \text{y} \quad S_p = \frac{\pi d_o^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d_i}{d_o} \right)^4 \right]$$

3.3.- RELACION ENTRE MOMENTO TORSIONANTE, POTENCIA Y VELOCIDAD ANGULAR.

Se ha apuntado también que los miembros sometidos a momentos torsionantes son usados ampliamente para transmitir potencia. A continuación se establecerá una fórmula para la conversión de CV (caballos de vapor) en un momento torsionante actuando en el elemento o flecha. Generalmente, en los problemas de ingeniería se da por conocida la potencia (le potencia es el trabajo efectuado en la unidad de tiempo) que transmite la flecha y su velocidad angular expresada en revoluciones por minuto (rpm). La unidad de potencia más usada en el sistema MKS es el caballo de vapor (CV) que desarrolla un trabajo de 75 kg-m por segundo (736 watts-segundo) o 75 x 60 = 4 500 kg-m por minuto. Si el ángulo girado en una revolución es 2π y una flecha gira a N rpm y la potencia es igual al momento torsionante multiplicado por el ángulo, medido en radianes, a través del cual el momento torsionante gira por unidad de tiempo, entonces, la potencia es igual a 2πTN kg-m por minuto, y el trabajo desarrollado es 2πTN kg-m por minuto. Igualando esto para los CV suministrados, se tiene

CV (75)(60) (kg-m por min) = 2πTN (kg-m por minuto)

$$T = \frac{4\,500\,CV}{2\pi N} = 716.2 \frac{CV}{N} \quad \text{kg-m}$$

$$T = 716.2 \frac{CV}{N} \quad \text{kg-m}$$

Si 1 CV = 0.736 Kilowatts kw = potencia en kilowatts

$$T = (716.2 \text{ kw}) / (0.736 \text{ N}) = 974.2 \text{ kw} / N \quad \text{kg-m}$$

esta ecuación convierte los CV transmitidos a la flecha en un momento torsionante constante.

4.- CALCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES DEBIDOS A TORSION EN BARRAS DE SECCION CIRCULAR.

La solución al problema de torsión para una barra de sección transversal circular fué obtenida por Charles A. Coulomb, alrededor del año 1775.

4.1.- HIPOTESIS BASICAS.

Para establecer una relación entre el momento torsionante interno y los esfuerzos surgidos en miembros con secciones circulares sólidas o tubulares, es necesario hacer varias hipótesis. Hipótesis que en la práctica han comprobado su veracidad. Estas, en adición a la homogeneidad del material, son las que siguen:

1ª.- Una sección plana perpendicular al eje de un miembro circular permanece plana después que los momentos torsionantes son aplicados, esto es, los planos paralelos normales al eje de la barra no se tuercan o distorsionan.

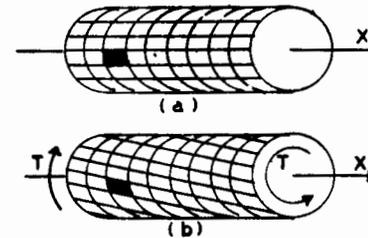


Figura 11

2ª.- En un miembro circular sometido a momento torsionante, las deformaciones unitarias provocadas por cortante, γ, varían linealmente a partir del eje centroidal.

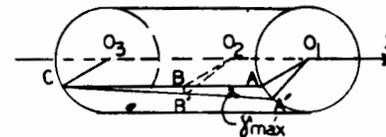


Figura 12

Esta suposición se ilustra en la Fig. 12 y significa que un plano imaginario AO₁O₃C se transforma en el plano A'O₁O₃C cuando se aplica el momento torsionante. Entonces, si se considera fijo el radio O₃C, los radios iniciales O₂B y O₁A giran a las nuevas posiciones O₂B' y O₁A' respectivamente. Estos radios permanecen rectos.

Se recalca que estas hipótesis son válidas solamente para miembros...

bros con secciones circulares sólidas o tubulares tanto en el rango elástico como en el inelástico.

3^a.- Como consecuencia de lo anterior, el esfuerzo cortante es proporcional a la deformación unitaria en cortante.

Las dos primeras hipótesis son difíciles de justificar plenamente en forma directa en el interior de un miembro, pero después de deducir las fórmulas de esfuerzo y deformación basadas en ellas se encuentra una congruencia incuestionable entre las magnitudes calculadas y las medidas directamente. Además la validez de las fórmulas puede ser rigurosamente demostrada por los métodos de la Teoría de la Elasticidad.

4.2.- CALCULO DE ESFUERZOS DEBIDOS A TORSION

En el caso elástico, como el esfuerzo es proporcional a la deformación y esta varía linealmente a partir del centro, entonces, los esfuerzos varían linealmente a partir del eje centroidal de un miembro circular. Los esfuerzos inducidos por las deformaciones supuestas son esfuerzos cortantes y están contenidos en un plano perpendicular al eje del miembro en el punto donde se desea conocerlos. La variación del esfuerzo cortante es ilustrada en la Fig. 13. A diferencia del caso de una barra cargada axialmente, este esfuerzo no es de intensidad uniforme. El máximo esfuerzo cortante ocurre en los puntos más alejados del centro O y es designado $Z_{m\acute{a}x}$. Estos puntos, tales como el punto C están localizados en la periferia de la sección transversal a una distancia c del centro. Como consecuencia de la variación lineal de esfuerzos, el esfuerzo cortante en cualquier punto arbitrario B localizado a una distancia ρ del centro O es

$$Z_B = (\rho/c) Z_{m\acute{a}x}$$

Los esfuerzos cortantes en las secciones transversales se

orientan en cada punto perpendicularmente a el radio variable ρ .

Conociendo la ley de distribución de los esfuerzos cortantes -

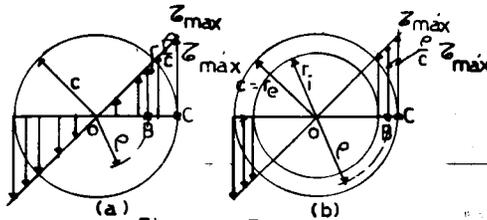


Figura 13

es fácil ya determinar su magnitud partiendo de la condición de equilibrio $T_o + T_1 = 0$.

El momento torsionante interno será igual a la suma de todos los momentos provocados en el plano perpendicular al eje del miembro por las fuerzas infinitesimales actuando a una distancia ρ variable del centro O en el área total A, entonces

$$T_1 = \int_A \frac{\rho Z_{m\acute{a}x}}{c} dA = \int_A \frac{\rho^2}{c} Z_{m\acute{a}x} dA$$

$\frac{\text{esfuerzo}}{\text{área}}$
 $\frac{\text{brazo}}{\text{área}}$

momento torsionante interno = T_1

$$\frac{Z_{m\acute{a}x}}{c} \int_A \rho^2 dA = T_1 \quad \text{donde } \int_A \rho^2 dA = J$$

entonces $T_1 = \frac{Z_{m\acute{a}x}}{c} J$ y en consecuencia $Z_{m\acute{a}x} = \frac{T c}{J}$

$$[Z_{m\acute{a}x}] = \frac{[FL][L]}{[L^4]} = [FL^{-2}] \quad Z = (T \rho)/J \text{ para cualquier punto.}$$

donde T es el momento torsionante interno en la sección, J el momento polar de inercia y c la distancia entre el polo y la fibra extrema. Esta es la famosa fórmula de torsión deducida por Coulomb. Nótese la similitud con la fórmula de la escuadría $\sigma_{m\acute{a}x} = (Mc)/I$, que también puede ser escrita como $\sigma_{m\acute{a}x} = M/S$, donde S es el módulo de sección elástico. Análogamente se puede escribir la fórmula de torsión como:

$$Z_{m\acute{a}x} = \frac{T c}{J} \quad \text{ó} \quad Z_{m\acute{a}x} = \frac{T}{S_p}$$

los esfuerzos cortantes no solo actúan en las secciones transversales, sino que también en las secciones longitudinales. Para comprender el problema, considérese un elemento cilíndrico infinitesimal, como el mostrado en la Fig. 14 b, aislado del miembro de la Fig. 14 a. Los esfuerzos cortantes que actúan en las secciones transversales son conocidos al aplicar la fórmula de torsión y sus direcciones coinciden con la dirección del momento torsionante interno (esto será entendido claramente por el lector), sobre el plano paralelo contiguo de un elemento en forma de disco, estos esfuerzos actúan en direcciones opuestas. Estos esfuerzos no pueden existir solos como se desprende de la ley de reciprocidad de los esfuerzos

cortantes, y esfuerzos cortantes numericamente iguales con la misma variación en intensidad deben actuar sobre los planos axiales -

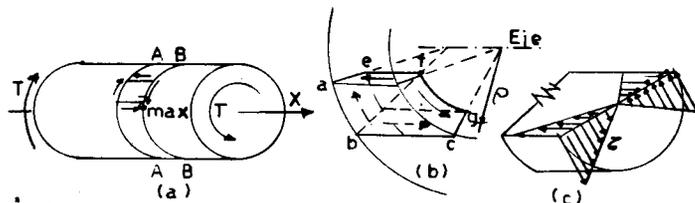


Figura 14

(tales como los planos aef y bcf de la Fig. 14 b) para cumplir con los requisitos de equilibrio estático del elemento. La variación de los esfuerzos cortantes sobre los planos mutuamente perpendiculares es mostrada en la Fig. 14 c donde parte del miembro ha sido removida para los propósitos de ilustración. Debe notarse que los esfuerzos cortantes máximos, como se muestran esquemáticamente en la Fig. 14 a, realmente actúan sobre planos perpendiculares a el eje de la barra y planos pasando a través del eje de la barra. La representación mostrada es puramente esquemática. La superficie exterior de una barra está libre de todos los esfuerzos. Además, en las secciones inclinadas aparecen esfuerzos cortantes y normales. Los esfuerzos normales principales (Fig. 15 a) son los que presen-

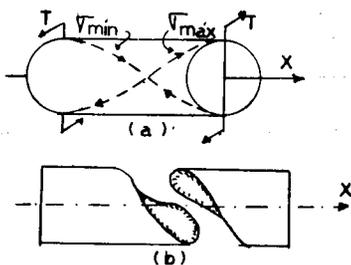


Figura 15

tan mayor interés, y se calculan, como se indicó ya, con la expresión

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

y la inclinación de los planos con

$$\tan 2\theta_p = \frac{-2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Como $\sigma_x = \sigma_y = 0$

$$\sigma_1 = \tau_{\text{máx}} = \tau$$

$$\sigma_2 = \tau_{\text{mín}} = -\tau \quad \text{y}$$

$$\theta_{p1} = 45^\circ ; \quad \theta_{p2} = 135^\circ$$

La existencia de los esfuerzos antes mencionados se comprueba.

al ensayar a torsión flechas de materiales frágiles, como el hierro fundido, que se destruyen por un plano (mejor dicho, una superficie helicoidal) inclinado 45° con relación al eje de la flecha (Fig. 15 b), es decir, en los planos donde actúan los esfuerzos normales principales, o de materiales anisotrópicos como la madera que tiene una resistencia relativamente baja al cortante a lo largo de las fibras y por eso la destrucción de la probeta durante el ensayo comienza por la formación de grietas longitudinales (Fig. 16).

La existencia de esfuerzos normales principales (tensión y compresión) en los planos inclinados, durante la torsión, puede ilustrarse de manera más tangible



Figura 16

dibujando sobre la superficie de un cilindro de material elástico una serie de cuadrados que durante la torsión se convierten en rombos (Fig. 17)

cuyos ejes principales se orientan a 45° respecto a las generatrices. En la dirección de los ejes mayores del rombo ocurre un alargamiento y en la dirección de los ejes menores una compresión.

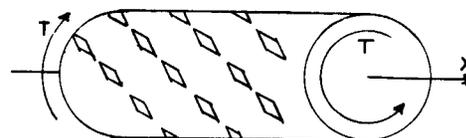


Figura 17

El esfuerzo cortante permisible en torsión cuando se trata de cargas estáticas, regularmente varía entre el 50 y el 60 % del esfuerzo permisible en tensión para el

material, esto es, 0.5 o $0.6 \tau_t$, y cuando se trata de cargas dinámicas llega a ser hasta de $0.4 \tau_t$. Estos esfuerzos permisibles dependen de la información disponible de ensayos y de la aplicación propuesta.

4.3.- CALCULO DE DEFORMACIONES. ANGULO DE ROTACION.

De acuerdo con las hipótesis 1 y 2 enunciadas en el punto 4.1 se deducirá la expresión para encontrar el ángulo de rotación en flechas sometidas a esfuerzos originados por la torsión. El interés en este problema tiene importancia por tres hechos: Primero, es importante predecir la rotación de una flecha por sí misma, ---

puesto que a veces no es suficiente con solo diseñarla para resistir los esfuerzos inducidos, sino que también se debe deformarse excesivamente. Segundo, las magnitudes de las rotaciones angulares son necesarias en el análisis de vibración torsional en maquinaria, -- aunque este tema se es tratado aquí. Finalmente, la rotación angular de miembros es necesaria para tratar con problemas de torsión estáticamente indeterminados, los que se discutirán más adelante.

Considérese el elemento diferencial de un miembro con longitud dx mostrado en la Fig. 18. La línea o "fibra" AB inicialmente paralela al eje pasa a la posición AB' después que el momento torsionante es aplicado, al mismo tiempo que el radio OE permanece recto y gira un pequeño ángulo $d\phi$ a una nueva posición OE'. Todo lo anterior en virtud de las hipótesis 1 y 2 del punto 4.1. Denotando el ángulo pequeño BAB' por γ_{\max} , de la geometría de la figura se tiene que:

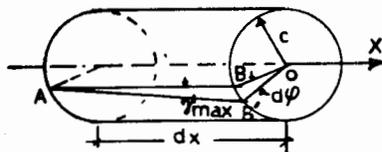


Figura 18

$$\text{arc } BB' = \gamma_{\max} dx \quad \text{o} \quad \text{arc } BB' = c d\phi.$$

Como γ_{\max} y $d\phi$ son pequeños, están medidos en radianes, y,

$$\gamma_{\max} dx = c d\phi \quad \text{entonces} \quad (d\phi/dx)c = \gamma_{\max}$$

Si γ_{\max} es proporcional a τ_{\max} , ya que $\gamma_{\max} = \tau_{\max} / G$ y

$$\tau_{\max} = (Tc)/J, \quad \text{entonces} \quad \gamma_{\max} = (Tc)/(JG) \quad \text{y}$$

$$\frac{d\phi}{dx} c = \frac{Tc}{JG} \quad \text{simplificando} \quad \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{JG}$$

A $d\phi/dx = \theta$ se le conoce como ángulo de rotación unitario o rotación angular y es el ángulo de rotación relativo entre dos secciones contiguas separadas una distancia unitaria, generalmente su magnitud está dada en radianes por metro de longitud.

Para encontrar el ángulo de rotación total entre dos secciones cualesquiera A y B sobre una flecha, deben de ser sumados los giros de todos los elementos diferenciales. Entonces, la expresión general para el ángulo de rotación total en cualquier sección, para una flecha de material linealmente elástico es:

$$\phi = \int_0^x \frac{T(x)}{J(x)G} dx + C_1$$

la constante C_1 es el ángulo de rotación en radianes en el origen. El momento torsionante interno T y el momento polar de inercia J , pueden variar a lo largo de la longitud de la flecha. La dirección del ángulo de rotación coincide con la dirección del momento torsionante aplicado y está dado en radianes. Si se desea conocer el valor del ángulo de rotación en grados bastará multiplicar el valor obtenido en radianes por $180/\pi$.

Para flechas de motores que transmiten potencia, la magnitud θ se escoge en función del destino de la flecha y de sus dimensiones. Para flechas de dimensiones medias se recomienda $\theta = 0.5^\circ$ por metro de longitud.

4.4.- CONCENTRACIONES DE ESFUERZOS

Las expresiones deducidas en 4.3 y 4.2 son aplicables a secciones circulares sólidas o tubulares mientras el material se comporte elásticamente y las áreas de las secciones transversales permanezcan razonablemente constantes. Si el diámetro de la sección varía gradualmente se obtienen soluciones satisfactorias, pero si la configuración de la sección transversal o longitudinal de la flecha varía bruscamente tiene lugar una concentración de esfuerzos. Relacionando el esfuerzo cortante máximo verdadero al esfuerzo máximo obtenido con la expresión deducida en 4.2 se obtiene un factor o coeficiente de concentración de esfuerzos debidos a torsión, K , -- que se determina por los métodos de la Teoría de la Elasticidad. -- Los factores de concentración de esfuerzos solo dependen de la geometría del miembro. En la Fig. 19 se presenta una gráfica para hallar el valor teórico de K en el caso de torsión de una flecha formada por dos partes unidas con un chaflán concavo circular de radio r , en función de las relaciones D/d y $2r/d$. Finalmente, de la definición de K , el esfuerzo cortante máximo real es obtenido como:

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{J}$$

donde el esfuerzo cortante $(Tc)/J$ es obtenido para la flecha de menor diámetro.

Se puede observar en la gráfica que para valores pequeños de la relación $2r/d$ el valor K crece considerablemente. Para disminuir

el efecto de la concentración de esfuerzos se deben evitar cambios súbitos en la configuración de la sección empleando, en los lugares de variación escalonada del diámetro de la sección, **chamflenes** cóncavos con el máximo radio, r , posible.

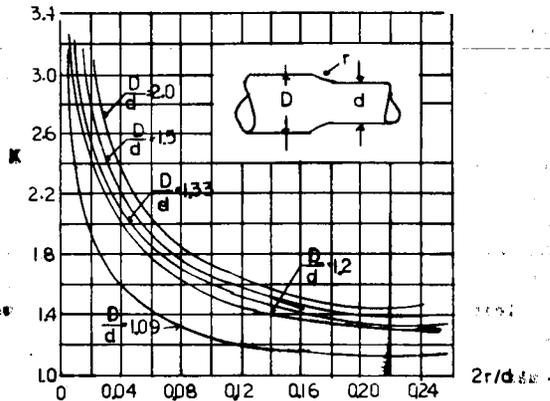


Figura 19

4.5.- PRINCIPALES TIPOS DE PROBLEMAS SOBRE EL CALCULO DE RESISTENCIAS DE ELEMENTOS SOMETIDOS A TORSION.

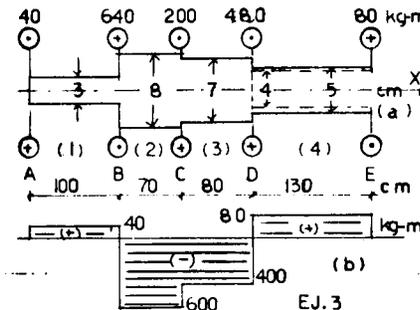
- 1.- Comprobar la resistencia de un elemento, es decir, conocido el sistema de cargas (momentos torsionantes) y las dimensiones de el elemento, calcular los esfuerzos y deformaciones reales y compararlos con los permisibles. Los esfuerzos y deformaciones reales no deben diferir de los permisibles en $\pm 5\%$. Desde el punto de vista de la resistencia es inadmisibles un sobreesfuerzo superior a este porcentaje y si el esfuerzo o deformación es inferior al permisible en una magnitud superior a la indicada, quiere decir que se tiene un gasto excesivo de material.
- 2.- Calcular (conocido el sistema de cargas, el esfuerzo y la deformación permisibles) las dimensiones requeridas para la sección transversal del elemento.
- 3.- Calcular la magnitud del momento torsionante permisible conociendo las dimensiones del elemento y el esfuerzo y la deformación permisibles.

4.6.- EJEMPLOS.

En la solución de problemas relacionados con la torsión se tendrá en cuenta lo siguiente:

- a) Los requerimientos de las ecuaciones de equilibrio son empleados para determinar el momento torsionante interno o resistente ($\Sigma M_x = 0$)
- b) En la torsión, la deformación por cortante y los esfuerzos cortantes son proporcionales a la distancia al eje del elemento.
- c) Las propiedades de los materiales son empleadas en la forma de la Ley de Hooke para relacionar la variación de deformaciones unitarias supuesta con los esfuerzos, $\gamma = \tau/G$.

Ejemplo 3.- En el eje cilindrico de sección transversal variable con las dimensiones indicadas y sujeto a los momentos torsionantes mostrados en la figura. Determinar a) el máximo esfuerzo cortante en el eje y decir entre que secciones ocurre y b) el ángulo de rotación en grados entre los dos extremos. $G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$



Solución.- a) Conviene que el momento torsionante es positivo si su sentido, de acuerdo con la regla del tornillo de rosca derecha, coincide con el del eje X y negativo si sucede lo contrario. (En los ejemplos subsiguientes se seguirá esta misma convención). Primero se verifica el equilibrio del eje haciendo $\Sigma M_x = 0$.

$$40 - 640 + 200 + 480 - 80 = 720 - 720 = 0$$

El diagrama de momentos torsionantes queda como se muestra.

Hecho lo anterior se determinan los esfuerzos cortantes máximos en las distintas secciones del eje de acuerdo con la expresión $\tau_{máx} = (Tc)/J$ o $\tau_{máx} = T/S_p$ para localizar la sección donde ocurre el esfuerzo cortante máximo, entonces,

$$\tau_{máx}_{AB} = \tau_{máx}(1) = \frac{T_1}{S_{p1}} = \frac{16 \times 40 \times 100}{\pi (3)^3} = 754.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\begin{aligned}\tau_{\text{máx}_{BC}} &= \tau_{\text{máx}_{(2)}} = \frac{T_2}{S_{p_2}} = \frac{16 \times 600 \times 100}{\pi (8)^3} = 596.8 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{\text{máx}_{CD}} &= \tau_{\text{máx}_{(3)}} = \frac{T_2}{S_{p_3}} = \frac{16 \times 400 \times 100}{\pi (7)^3} = 593.9 \text{ kg/cm}^2 \\ \tau_{\text{máx}_{DE}} &= \tau_{\text{máx}_{(4)}} = \frac{T_4}{S_{p_4}} = \frac{16 \times 80 \times 100}{\pi 5^3 (1 - (4/5)^4)} = 552.1 \text{ kg/cm}^2\end{aligned}$$

El esfuerzo cortante máximo tiene una magnitud de 754.5 kg/cm² y ocurre en el segmento (1) entre las secciones A y B del eje.

b) Para encontrar el ángulo de rotación entre los extremos se emplea la expresión: $\varphi = \int_a^b \frac{T(x) dx}{J(x) G}$, cambiando los límites de integración en los puntos donde T o J cambien su valor bruscamente e integrando de izquierda a derecha se tiene que:

$$\varphi_{EA} = \int_A^E \frac{T(x) dx}{J(x) G} = \int_A^B \frac{T_1 dx}{J_1 G} + \int_B^C \frac{T_2 dx}{J_2 G} + \int_C^D \frac{T_3 dx}{J_3 G} + \int_D^E \frac{T_4 dx}{J_4 G}$$

Si el valor de G es constante y el de dx integrado es la longitud de cada segmento de eje comprendido entre los límites de cada integral, se puede escribir

$$\varphi_{EA} = \int_A^E \frac{T(x) dx}{J(x) G} = \frac{1}{G} \left[\frac{T_1 L_1}{J_1} + \frac{T_2 L_2}{J_2} + \frac{T_3 L_3}{J_3} + \frac{T_4 L_4}{J_4} \right]$$

Sustituyendo los literales por sus valores numéricos se tiene,

$$\varphi_{EA} = \frac{32}{\pi (8 \times 10^5)} \left[\frac{4000 \times 100}{(3)^4} - \frac{60000 \times 70}{(8)^4} - \frac{40000 \times 80}{(7)^4} + \frac{8000 \times 130}{5 (1 - 0.8)^4} \right]$$

$$\varphi_{EA} = \frac{32}{\pi (8 \times 10^5)} [4 \ 938.27 - 1 \ 025.39 - 1 \ 332.78 + 2 \ 818.43]$$

$$\varphi_{EA} = \frac{32}{\pi (8 \times 10^5)} [5 \ 398.53] = 0.068736 \text{ radianes}$$

en grados $\varphi_{EA} = 0.068736 \times (180/\pi) \approx 3.94^\circ$

$$\varphi_{EA} = 3^\circ 56' 17''$$

Se nota que en este caso la deformación (ángulo de rotación) excede la deformación permisible recomendada.

Conviene rediseñar el eje proponiendo secciones cuya deformación - esté dentro de los límites permisibles. Siendo este un ejemplo ilustrativo para la obtención de esfuerzos y deformaciones su solución queda tal como está indicada.

Ejemplo 4.- Sea una flecha de sección circular hueca de material linealmente elástico, de longitud L y diámetro exterior $d_e = 12$ cm y diámetro interior $d_i = 9$ cm. Determine el diámetro mínimo d_s para una flecha circular sólida del mismo material para reemplazar la flecha hueca, de tal forma que en la nueva flecha ni el esfuerzo máximo ni el ángulo de rotación excedan las cantidades correspondientes en el diseño original. Determine también la relación -- existente entre sus pesos y anote lo que observa.

Solución.- Diferenciando con los subíndices s y t a las flechas sólida y tubular respectivamente. En este problema se tienen dos condiciones, una de resistencia y otra de deformación por lo que se aplicarán las expresiones

$$\tau_{\text{máx}_s} = \tau_{\text{máx}_t} \quad \dots (1) \quad \text{y} \quad \varphi_s = \varphi_t \quad (2)$$

de (1) se tiene $(T c_s)/J_s = (T c_t)/J_t$ como el par aplicado es el mismo entonces

$$S_{p_s} = S_{p_t}$$

$$(\pi/2) c_s^3 = (\pi/2) c_t^3 (1 - (c_i/c_e)^4)$$

$$c_s^3 = 6^3 (1 - (4.5/6)^4) = 216(0.6835938) = 147.66$$

$$c_s = \sqrt[3]{147.66} \approx 5.285 \text{ cm} \quad \text{entonces} \quad d_s = 10.57 \text{ cm}$$

de (2)

$$\frac{TL}{J_s G} = \frac{TL}{J_t G}$$

donde T, L, G, son los mismos valores en ambas flechas, por lo que - los momentos polares de inercia respectivos deben de ser iguales - para que el ángulo de rotación se conserve el mismo.

$$J_s = J_t \quad (\pi/2) c_s^4 = (\pi/2) c_t^4 (1 - (c_i/c_e)^4)$$

$$c_s^4 = 6^4 (1 - (4.5/6)^4) = 1296(0.6836) = 885.94$$

$$c_s = \sqrt[4]{885.94} = 5.455 \text{ cm, entonces} \quad d_s = 10.91 \text{ cm}$$

Para cumplir con las condiciones de resistencia y deformación simultáneamente debe elegirse la flecha circular sólida con diámetro $d_s = 10.91$ cm.

Siendo la relación de las áreas directamente proporcional a la relación de los pesos, entonces se tiene

$$\frac{W_t}{W_s} = \frac{A_t}{A_s} = \frac{(\pi/4)(d_e^2 - d_i^2)}{(\pi/4)(d_s^2)} = \frac{12^2 - 9^2}{(10.91)^2} = \frac{144 - 81}{119.03} = \frac{63}{119.03}$$

$$(W_t/W_s) = 0.53$$

el peso de la flecha tubular es el 53 % de la flecha sólida y por tanto más ligera y económica.

La relación obtenida es para el caso de igual deformación en flechas de secciones sólida y tubular en torsión. También se puede obtener la relación entre los pesos de flechas de secciones sólida y tubular para el caso de igual resistencia a torsión. A continuación se verá cómo obtener estas relaciones en su forma general para:

A) el caso de igual resistencia a la torsión para secciones circulares sólidas y tubulares

$$\text{si } c_s = \sqrt[3]{c_e^3 (1 - (c_1/c_e)^4)}$$

para la condición de igual resistencia a la torsión, y si los pesos son proporcionales a las áreas de las secciones transversales, se tiene

$$A_s = \pi c_s^2 = \pi c_e^2 \sqrt[3]{(1 - (c_1/c_e)^4)^2} \quad \text{y} \quad B$$

$$A_t = \pi(c_e^2 - c_1^2) = \pi c_e^2 (1 - (c_1/c_e)^2)$$

entonces, si se denomina con n a la relación existente entre el radio interior y el exterior de la flecha hueca, esto es $n = c_1/c_e$ y relacionando el área de la sección tubular a el área de la sección sólida se tiene también la relación de pesos. Haciendo lo dicho anteriormente se llega a:

$$\frac{A_t}{A_s} = \frac{\pi c_e^2 (1 - n^2)}{\pi c_e^2 \sqrt[3]{(1 - n^4)^2}} = \frac{1 - n^2}{\sqrt[3]{(1 - n^4)^2}} = \frac{W_t}{W_s}$$

para la condición de igual resistencia.

y B) para la condición de igual deformación se tiene:

$$c_s = \sqrt[4]{c_e^4 (1 - n^4)} \quad \text{y} \quad A_s = \pi c_s^2 \sqrt{(1 - n^4)^2}$$

entonces

$$\frac{A_t}{A_s} = \frac{\pi c_e^2 (1 - n^2)}{\pi c_e^2 \sqrt{(1 - n^4)^2}} = \frac{(1 - n^2)}{\sqrt{(1 - n^4)^2}} = \frac{W_t}{W_s}$$

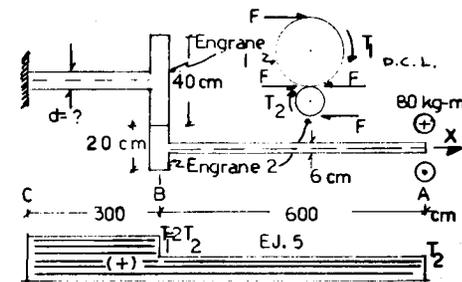
En la tabla que se muestra están dados los valores de W_t/W_s

para algunos valores de la relación $n = c_1/c_e$ para los casos de igual resistencia e igual deformación.

Condición	n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Igual Resistencia	W_t/W_s	1	.990	.961	.915	.854	.783	.702	.612	.511	.387
Igual Deformación	W_t/W_s	1	.990	.960	.914	.851	.775	.686	.585	.468	.324

Donde se advierte que el empleo de flechas tubulares de pared delgada permite una importante economía de material.

Ejemplo 5.- Dos engranes están conectados a dos flechas de acero como se muestra esquemáticamente. La flecha AB tiene un diámetro de 6 cm, el engrane 1 tiene un diámetro de 40 cm y el engrane 2 tiene un diámetro de 20 cm. Si en el extremo C de la flecha BC está impedido el giro y en el extremo A es aplicado un momento torsionante de 80 kg-m. Determine el diámetro de la flecha BC si el esfuerzo cortante permisible es de 850 kg/cm² y el giro total entre A y C está limitado a 5°. $G = 8 \times 10^5$ kg/cm².



Solución.- Verificando el equilibrio del sistema.

$T_1 = 40 \text{ F}$ $T_2 = 20 \text{ F}$ entonces $T_1 = 2 T_2$ y

$T_2 = T_A = 8000 \text{ kg-cm}$ $T_1 = T_C$

$T_B = -T_1 + T_2$ entonces $T_C + T_B + T_A = 0$

$T_1 - T_1 + T_2 - T_2 = 0$

Al igual que en el ejemplo 4 se tienen aquí dos condiciones, una de resistencia y otra de deformación.

$Z_{\text{máx}} = (Tc)/J$ (1) y

$\phi = (TL)/(JG)$ (2)

se tiene que $\phi_A = \phi_{A1} + \phi_{A2}$

donde ϕ_{A1} = giro debido al giro del engrane 1, y,

ϕ_{A2} = giro debido al momento torsionante aplicado en A --- considerando el engrane 2 fijo,

y de la geometría del diagrama de cuerpo libre $\phi_{A1} = 2\phi_{A2}$

Entonces para la condición de resistencia, de (1)

$Z_{\text{máx}} = Z_{\text{perm}} = 850 = \frac{Tc}{J} = \frac{2T_2}{8p} = \frac{2 \times 16000}{\pi c^3}$

$c^3 = \frac{2 \times 16000}{850 \pi} = 11.984$ $c = \sqrt[3]{11.984} = 2.29 \text{ cm}$

de donde $d = 4.58 \text{ cm}$ y para la condición de deformación permisible.

$\phi_{AC} = 2\phi_{A2} + \phi_{A1} = 5^\circ$

$5^\circ \times \frac{\pi}{180} = 2 \frac{2T_2 \times 300}{(\pi/2)c^4 \times 8 \times 10^5} + \frac{T_2 \times 600}{(\pi/2)3^4(8 \times 10^5)}$

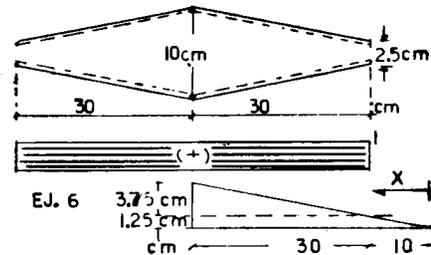
$c^4 = \left[\frac{8 \times 8000 \times 300}{\pi \times 8 \times 10^5} \right] \left[\frac{5 \pi}{180} - \frac{8000 \times 600 \times 2}{\pi(81)8 \times 10^5} \right]^{-1}$

$c^4 = \frac{7.63944}{0.040109} = 190.465$; $c = \sqrt[4]{190.465} = 3.715 \text{ cm}$

de donde $d = 7.43 \text{ cm}$

Para cumplir con ambas condiciones se elige la flecha con diámetro $d = 7.43 \text{ cm}$.

Ejemplo 6.- Un tubo de sección cónica hueca de un material linealmente elástico está sometido a torsión y tiene las dimensiones mostradas. Determinar la rotación relativa de los extremos debida a un momento torsionante unitario.



Estos cálculos son frecuentemente requeridos en análisis de vibraciones.

Supóngase que las hipótesis usuales de deformación en flechas circulares prismáticas sometidas a torsión son aplicables.

El espesor de la pared del tubo a todo lo largo es de $1.27/\pi \text{ cm}$. $G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Solución.- Para obtener la variación del diámetro de la sección en la longitud del tubo, se hace una regla de tres, se tiene

$\frac{3.75}{30} = \frac{5}{X}$ de donde $X = \frac{5}{3.75} \times 30 = 40$

y $\frac{3.75}{30} = \frac{c}{X}$ entonces $c = \frac{1}{8} X$

Considerando que $J = 2\pi c^3 t = 2\pi \left(\frac{X}{8}\right)^3 \frac{1.27}{\pi} = \frac{2.54 X^3}{8}$

Si $\phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{J(x) G} = 2 \int_{10}^{40} \frac{dx}{\frac{2.54 X^3}{8} G} = \frac{2}{G} \int_{10}^{40} \frac{8^3}{2.54 X^3} dx$

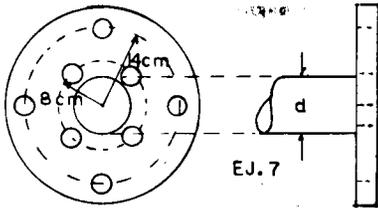
$= \frac{2(512)}{G(2.54)} \left[-\frac{1}{2X^2} \right]_{10}^{40} = \frac{512}{2.54 G} \left[-\frac{1}{1600} - \frac{1}{100} \right]$

$= \frac{512}{2.54 G} [0.009375] = \frac{1.8897637}{G} = \frac{1.8897637}{8 \times 10^5}$

= 0.0000023 radianes

Ejemplo 7.- Un acoplamiento de acero está forjado integralmente con la flecha, después se le maquinan 8 agujeros para tornillos

de 2 cm de diámetro como se muestra. a) Si este acoplamiento operará a 240 rpm, ¿cuántos caballos de vapor, CV, pueden ser transmitidos a través de los tornillos?. Supóngase que la capacidad de los tornillos depende de el esfuerzo cortante permisible de 600 kg/cm². b) Usando el mismo esfuerzo permisible que el empleado para los tornillos, ¿cuál sería el diámetro d de la flecha principal para un diseño balanceado?. c) Determine asimismo las dimensiones de una flecha hueca cuyo diámetro interior es 8/10 del exterior para las mismas condiciones. d) ¿Cuál es la relación entre los ángulos de rotación de esas dos flechas?. Nota. Concentre el área de los tornillos en sus centros.



Solución.-
 $A_{\text{tornillo}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (2)^2}{4}$
 $= 3.1416 \text{ cm}^2$
 $4 A_{\text{tornillo}} = 12.5664 \text{ cm}^2$

a) La fuerza que forma cada tornillo es igual a:

$$F_{\text{tornillo}} = A_{\text{tornillo}} \times \tau$$

Si se considera que el esfuerzo cortante máximo actúa en el radio $r_1 = 14 \text{ cm}$, entonces el esfuerzo cortante que actúa en el radio $r_2 = 8 \text{ cm}$, es igual a $\frac{r_2}{r_1} \tau_{\text{máx}}$.

De acuerdo con lo anterior la fuerza tangencial que toma cada tornillo del radio $r_1 = 14 \text{ cms}$, es:

$$3.1416 \times 600 = 1885 \text{ kg y}$$

la fuerza tangencial total en ese radio es $1885 \times 4 = 7540 \text{ kg}$. \therefore (4=No. de tornillos en ese radio)

En igual forma la fuerza tangencial que toma cada tornillo del radio $r_2 = 8 \text{ cm}$, es:

$$\frac{3.1416 \times 8 \times 600}{14} = 1077 \text{ kg y}$$

la fuerza tangencial en ese radio es:

$$1077 \times 4 = 4308 \text{ kg}$$

El momento torsionante que puede ser transmitido por lo tornillos es:

$$T = \sum (F \times r) = 7540 \times 14 + 4308 \times 8 = 105560 + 34464 = 140024 \text{ kg-cm}$$

$$CV = \frac{TN}{716.2}$$

$$CV = \frac{(140024) 240}{716.2} = 469.22 \text{ cv}$$

469.22 C.V. son los que pueden ser transmitidos a través de los tornillos.

$$b) \text{ Si } \tau_{\text{máx}} = \frac{T C}{J} = \frac{T}{S P} = 600 \text{ Kg/cm}^2 \Rightarrow \frac{2 T}{\pi C^3} = 600; \quad C^3 = \frac{2 T}{600 \pi}$$

$$C^3 = \frac{2(140024)}{600} = 148.57 \text{ cm}^3 \text{ y } C = \sqrt[3]{148.57} = 5.30 \text{ cm}$$

$$C = 5.30 \text{ cm y } d = 10.60 \text{ cm} \quad c) \tau_{\text{máx}} = \frac{T}{S P} = \frac{2 T}{\pi C^3 (1 - \alpha^4)} = 600$$

$$C^3 = \frac{2 T}{600 \pi (1 - (0.8)^4)} \quad C^3 = \frac{2(140024)}{600 \pi (1 - 0.4096)} = 251.64$$

$$C = \sqrt[3]{251.64} = 6.31 \text{ cm. } C_e = 6.31 \text{ cm } d_e = 12.62 \text{ cm}$$

$$d) \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{J_2}{J_1} = \frac{(\pi/2) C_2^4 (1 - (0.8)^4)}{(\pi/2) C_1^4} = \frac{(6.31)^4 (0.5904)}{(5.3)^4} = \frac{935.474}{789.048}$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = 1.186$$

La rotación de la flecha tubular es el 118.6% de la rotación de la flecha sólida.

Ejemplo 8.- Encuentre el radio requerido para el chaflán de la unión de una flecha de 15 cm de diámetro con otra de 10 cm de diámetro si la flecha transmite 125 CV a 100 rpm y el máximo esfuerzo cortante está limitado a 560 kg/cm².

Solución.- Para este problema $\tau_{\text{máx}} = K \frac{T c_1}{J_1}$ y

$$T = \frac{716.2 \text{ CV}}{K} \text{ entonces } T = (716.2 \times 125)/100 = 895.25 \text{ kg-m}$$

$$\text{Si } \tau_{\text{máx}} = K \frac{T c_1}{J_1} \text{ entonces } K = \frac{\tau_{\text{máx}} J_1}{T c_1} = \tau_{\text{máx}} \frac{S_{P1}}{T}$$

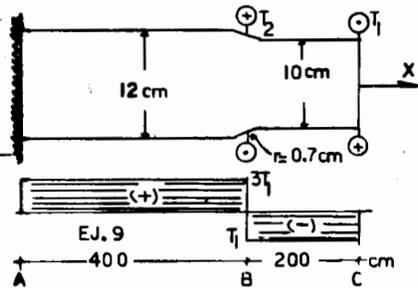
$$K = \frac{560}{895.25} \times \frac{\pi}{46} \times (10)^3 = 1.23$$

El factor de concentración de esfuerzos es función de las relaciones D/d y $2r/d$, y aquí $D/d = (15)/(10) = 1.5$ entonces de la figura 19, con los valores de K y D/d conocidos se obtiene que aproximadamente $2r/d \approx 0.27$ y

$$r = (0.27 \times 10)/2 = 1.35 \text{ cm}$$

Ejemplo 9.- En una flecha escalonada sometida a la acción de dos momentos torsionantes T_1 y T_2 , donde $T_2 = 4T_1$, y con las di-

Dimensiones mostradas. Determinar el máximo esfuerzo cortante en el



escalón de la flecha si el giro en C está limitado a 3° . $G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Solución.- Verificando el equilibrio del sistema.

$$\sum M_x = 0 ; T_A + T_B + T_C = 0$$

$$T_A - T_2 + T_1 = 0$$

$$T_A = 4T_1 - T_1 = 3T_1$$

$$D/d = 12/10 = 1.2$$

$$2r/d = 2(0.7)/10 = 0.14$$

De la Fig. 19 se obtiene que $K = 1.4$

$$\phi_C = \int_0^L \frac{T(x) dx}{J(x) G} = 3^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{T_1}{G} \left[\frac{3(400)^3}{\pi (12)^4} - \frac{1(200)^3}{\pi (10)^4} \right]$$

$$\phi_C = 0.05236 = \frac{T_1}{8 \times 10^5} [0.5894627 - 0.2037183]$$

$$\phi_C = 0.05236 = \frac{T_1}{8 \times 10^5} [0.38574] \text{ , entonces}$$

$$T_1 = 1.08589 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\text{Si } \tau_{\text{máx}} = K \frac{T_1 c_1}{J_1} = 1.4 \frac{T_1}{\pi d^3} = 1.4 \frac{108589 \times 16}{\pi d^3}$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1.4(108589)16}{\pi (10)^3} = 774.25 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{\text{máx}} = 774.25 \text{ kg/cm}^2$$

5.- PROBLEMAS HIPERESTATICOS.

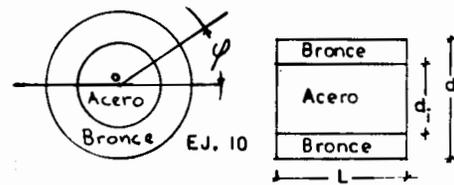
En la práctica frecuentemente se presentan problemas que no pueden ser resueltos solamente por las ecuaciones de equilibrio. En esos problemas el número de incógnitas es superior al de las ecuaciones de equilibrio, por lo que estas deben ser complementadas con ecuaciones basadas en consideraciones de la geometría de deformación, esto es, usando las condiciones de compatibilidad de deformaciones. En los problemas hiperestáticos o indeterminados estáticamente, ciertos elementos están sometidos a un estado de esfuer-

zos o deformación en forma conjunta, esto permite plantear el número de ecuaciones adicionales necesarias para igualar el número de ecuaciones con el de incógnitas.

En el caso de elementos sujetos a torsión se presentan problemas indeterminados estáticamente cuando se tiene, por ejemplo, una flecha compuesta de dos materiales distintos colocados concéntricamente sujeta a un momento torsionante y donde se desea conocer la magnitud del momento torsionante que soporta cada material, o también, el caso de una flecha doblemente empotrada sometida a momentos torsionantes y donde se desea conocer la magnitud de los momentos torsionantes en los empotramientos.

La solución de este tipo de problemas será ilustrada con tres ejemplos.

Ejemplo 10.- Una flecha circular de acero está insertada dentro de un tubo de bronce para formar una sección de dos materiales, los que se comportan como una sola unidad como se muestra.



Si debido a la aplicación de un momento torsionante T_1 en las fibras exteriores de la flecha aparece un esfuerzo de 600 kg/cm^2 , donde $d_1 = 15 \text{ cm}$, $d_e = 25 \text{ cm}$, ¿cuál es la magnitud del momento torsionante T_1 ?

b) Si la flecha tiene una longitud $L = 100 \text{ cm}$, ¿cuál será el ángulo de rotación debido a el par T_1 ? c) Si el bronce soporta 1.3 veces el momento torsionante que soporta el acero, encuentre la relación entre los diámetros exterior e interior del tubo de bronce. Para el acero $G_a = 8.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, y para el bronce $G_b = 4.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$.

Solución.- a) El momento torsionante total soportado por la sección compuesta es igual a la suma de los momentos torsionantes soportados por cada material, entonces,

$$T_1 = T_a + T_b \dots \dots (1)$$

esta es la ecuación proporcionada por la Estática que, como puede apreciarse, no permite resolver el problema ya que se tienen dos incógnitas (T_a y T_b). Habrá entonces que plantear una ecuación --

complementaria basada, en este caso, en la igualdad de deformaciones para tener tantas ecuaciones como incógnitas. Esta ecuación será:

$$\varphi_a = \varphi_b \dots\dots(2) \quad \text{donde}$$

$$\varphi = \frac{TL}{JG} \dots\dots\dots(3)$$

ya que ambos materiales se comportan como una sola unidad. Apoyándose en lo antes dicho, se tiene:

de (2) $\frac{T_a L}{J_a G_a} = \frac{T_b L}{J_b G_b}$ y $\frac{T_a}{T_b} = \frac{J_a G_b}{J_b G_a}$ haciendo

operaciones se llega a

$$\frac{T_a}{T_b} = \frac{G_a (\pi/32) d_1^4}{G_b (\pi/32) d_1^4 (d_e/d_1)^4 - 1} = \frac{G_a}{G_b ((d_e/d_1)^4 - 1)}$$

$$= \frac{8.1 \times 10^5}{4.5 \times 10^5 ((25/15)^4 - 1)} = \frac{8.1}{4.5 ((1.67)^4 - 1)} = \frac{8.1}{30.22}$$

$$\frac{T_a}{T_b} = 0.268$$

entonces $T_a = 0.268 T_b$ ó $T_b = 3.73 T_a$

y sustituyendo en (1) $T_1 = T_a + 3.73 T_a = 4.73 T_a \dots\dots(4)$

de (4) $T_a = 0.2114 T_1$ y $T_b = 0.7886 T_1$

Si el esfuerzo máximo cortante se localiza en la fibra extrema, esto es, en el bronce, se tiene que:

$$\tau_{\max} = (T_b)/(S_{pb}) \quad \text{y} \quad T_b = \tau_{\max} S_{pb}$$

$$0.7886 T_1 = 600 \frac{\pi}{16} d_e^3 (1 - (d_1/d_e)^4) = \frac{600 \pi (25)^3}{16} (1 - (\frac{15}{25})^4)$$

$$T_1 = \frac{600 \pi (25)^3}{16 (0.7886)} (1 - (0.6)^4) = 2\,031\,759.7 \text{ kg} \cdot \text{cm} \quad 0$$

$$T_1 = 20\,317.597 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad \text{ó} \quad T_1 = 20.3176 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

b) de (2) $\varphi_a = \varphi_b$

y el ángulo de rotación se puede calcular para cualquier material

indistintamente, ya que, al trabajar como una sola unidad, es el mismo. Aquí, por sencillez en las operaciones, se calculará para el acero.

$$\varphi_a = \varphi_b = \frac{T_1 L}{J_a G_a} = \frac{2\,031\,759.7 \times 100(32)}{\pi (15)^4 \times 8 \times 10^5} = 0.0511 \text{ radianes}$$

$$\varphi_a = \varphi_b = 0.0511 (180/\pi) = 2.928^\circ$$

c) Si $T_b = T_a (1.3)$ de (2) $\varphi_a = \varphi_b$ se tiene,

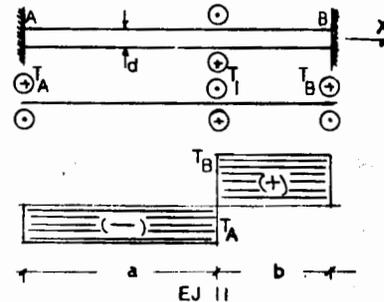
$$\frac{T_a L}{J_a G_a} = \frac{1.3 T_a L}{J_b G_b}; \quad \text{entonces} \quad \frac{J_b G_b}{J_a G_a} = 1.3 \quad \text{y}$$

$$1.3 = \frac{G_b (\pi/32) d_e^4 (1 - (d_1/d_e)^4)}{G_a (\pi/32) d_1^4} = \frac{4.5 \times 10^5 d_e^4 (0.8704)}{8.1 \times 10^5 d_1^4}$$

$$1.3 = \frac{d_e^4}{d_1^4} (0.4835); \quad \frac{d_e^4}{d_1^4} = \frac{1.3}{0.4835} = 2.068$$

entonces $\frac{d_e}{d_1} = \sqrt[4]{2.068} = 1.2 \quad \frac{d_e}{d_1} = 1.2$

Ejemplo 11. - Una barra de sección circular sólida constante - está empotrada en ambos extremos y está sometida a el momento torsionante T_1 como se muestra.



a) Suponiendo que el material tiene un comportamiento linealmente elástico, determinar las reacciones en los empotramientos A y B.

Solución. - La barra debe estar en equilibrio bajo la acción de el momento torsionante T_1 y los momentos torsionantes reactivos T_A y T_B , de donde,

$$T_A + T_B = T_1 \dots\dots(1)$$

Para resolver el problema se necesita otra ecuación además de la(1), esta ecuación puede ser planteada igualando la deformación

en el punto de aplicación de T_1 , al integrar tanto por la izquierda como por la derecha, esto es,

$$\frac{T_A a}{J G} = \frac{T_B b}{J G} \dots\dots\dots(2)$$

de (1) se tiene que

$$T_A = T_1 - T_B \quad \text{y} \quad (T_1 - T_B) a = T_B b$$

$$T_1 a = T_B (a + b) \quad \text{entonces,}$$

$$T_B = \frac{a}{a + b} T_1 \quad \text{y} \quad T_A = \frac{b}{a + b} T_1$$

Este problema puede ser también resuelto haciendo uso del principio o método de superposición, también conocido como método de las fuerzas. Este método es usado en problemas elásticos donde las deformaciones son pequeñas y establece que; el esfuerzo o la deformación unitaria resultante en una estructura (o parte de ella) sometida a varias fuerzas, es la suma algebraica de los efectos de cada una de las fuerzas, cuando estas son aplicadas una por una separadamente.

Para lograr la solución del problema por el método mencionado se siguen los pasos indicados a continuación:

1º.- El problema estáticamente indeterminado es reducido a uno determinado quitando las reacciones redundantes, esto es, el exceso de incógnitas sobre el número de ecuaciones disponibles, cuidando la estabilidad del sistema determinado elegido.

2º.- El problema determinado es resuelto para a) el sistema de cargas real aplicado y, b) para una fuerza unitaria aplicada en el punto y en la dirección en que se desea conocer la redundante (una vez para cada redundante o incógnita), obteniendo en cada caso los elementos mecánicos y los diagramas que sean necesarios, y

3º.- Se plantean las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones correlacionando las deformaciones producidas por las soluciones de los casos a) y b) del paso anterior. Estas ecuaciones son solucionadas para así obtener los valores de las redundantes.

Planteados ya el procedimiento a seguir, el problema será resuelto por el método de las fuerzas.

Para que el sistema sea isostático (estáticamente determinado) la redundante en A es quitada. Enseguida se resuelve de acuerdo con los incisos a y b del paso 2.

Como el ángulo de rotación en A es cero la ecuación de compatibilidad de deformaciones será también igualada a cero. La ecuación quedará integrada por la suma algebraica de las deformaciones causadas por los sistemas de carga real y unitario e igualada a cero, esto es,

$$\phi_A = \phi_{T_1} + \phi_{T_A} = 0 \quad \text{entonces}$$

$$\text{si} \quad \phi = \int_0^L \frac{T(x) dx}{J(x) G}$$

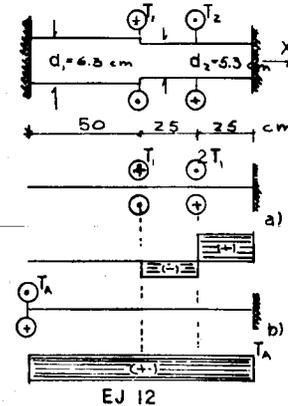
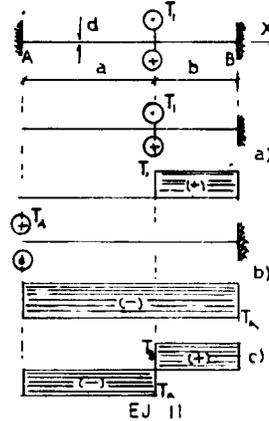
$$\frac{T_1 b}{J G} - \frac{T_A (a + b)}{J G} = 0$$

$$\text{de donde} \quad T_A = \frac{T_1 b}{a + b}$$

T_B es obtenido aplicando la ecuación de equilibrio (1).

El método generalmente no es usado cuando la sección transversal es constante. Sin embargo cuando las secciones son variables el método resulta insuperable.

Ejemplo 12.- Una flecha circular sólida de bronce formada por dos tramos de diferente sección transversal está empotrada en ambos extremos y le son aplicados dos momentos torsionantes $T_1 = 360 \text{ kg-cm}$ y $T_2 = 720 \text{ kg-cm}$ como se muestra. Determine el momento torsionante en A. Suponga que el comportamiento del material es linealmente elástico. $G_b = 4.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$. Desprecie las concentraciones de esfuerzos.



MECANICA DE MATERIALES I

PRIMER CURSO

Solución.- El problema se resolverá por el método de las fuerzas. Se tiene que;

$$T_2 = 2 T_1$$

$$J_1 = (\pi/32)d_1^4 = (\pi/32)(6.3)^4 = 154.65 \text{ cm}^4.$$

$$J_2 = (\pi/32)d_2^4 = (\pi/32)(5.3)^4 = 77.464 \text{ cm}^4$$

donde se observa que $J_1 \neq 2J_2$

En la figura se muestra la solución de los pasos 1 y 2, la ecuación del paso 3 es :

$$\phi_A = -\frac{T_1 \times 25}{J_2 G} + \frac{T_1 \times 25}{J_2 G} + \frac{T_A \times 50}{G} \left[\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right] = 0$$

Como se observa, los dos primeros términos suman cero y en el tercer término del primer miembro que queda igualado a cero el único elemento que puede tomar el valor cero es T_A , por tanto $T_A = 0$. El diagrama de momentos torsionantes final es igual al diagrama de la figura a).

6.- CALCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES DEBIDOS A TORSION EN EL RANGO ELASTICO EN MIEMBROS CON SECCION TRANSVERSAL SOLIDA NO CIRCULAR.

El cálculo de los esfuerzos cortantes debidos a torsión en barras con sección transversal sólida no circular representa un problema bastante complicado que no puede ser resuelto por los métodos de la Mecánica de materiales, haciéndose necesario resolverlo por los métodos de la Teoría de la Elasticidad. Esto se debe a que en el caso de una sección no circular las dos primeras hipótesis establecidas en 4.1 no son válidas, pues en este tipo de barras, durante la torsión, las secciones transversales no permanecen planas sino que se alabean y, en consecuencia, la distribución de las deformaciones unitarias, γ , varía notablemente en la sección transversal. Con un experimento sencillo hecho con una barra de sección rectangular (Fig. 20 a) puede demostrarse lo anterior. Al efectuar el experimento se observa que las distorsiones de los elementos rectangulares sobre la sección transversal son máximas en los puntos medios de los lados largos y (casi) nulos en los esquinas (Fig. 20 b). Como consecuencia de la Ley de Hooke, los esfuer-

Los cortantes son máximos en los puntos medios de los lados largos y nulos en las esquinas. Esta situación de esfuerzo nulo en las esquinas puede ser explicada considerando un elemento infinitesimal en la esquina de la sección (Fig. 20 c) donde actúa un esfuerzo cortante, Z , en dirección perpendicular al radio OA, este esfuerzo puede ser resuelto en dos componentes de esfuerzo paralelas a los lados de la sección, es evidente que esas componentes de acuerdo con la ley de reciprocidad de los esfuerzos cortantes deben aparecer junto con esfuerzos cortantes que actúan sobre las superficies exteriores (debido a que los esfuerzos cortantes siempre se presentan en pares actuando sobre planos mutuamente perpendiculares). Esto último es imposible

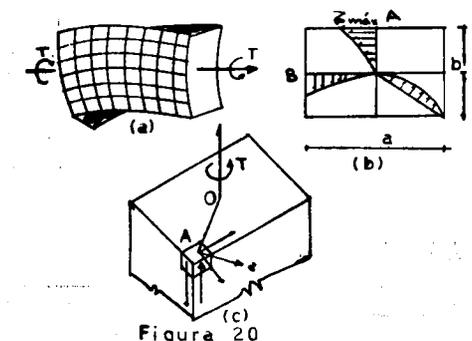


Figura 20

puesto que, como se angó anteriormente, las superficies exteriores de la barra están libres de todos los esfuerzos, y, por tanto el esfuerzo cortante, Z , es en las esquinas cero.

En la Fig. 20(b) se muestra la distribución de esfuerzo cortante en una sección rectangular, obtenida por los métodos de la Teoría de la Elasticidad.

Así pues, como se observa en la Fig. 20, al determinar los ángulos de distorsión es necesario tener en cuenta no solamente el ángulo de rotación mutuo entre las secciones sino también la distorsión local relacionada con el alabeo de las secciones. El problema se complica más aún por el hecho de que en barras prismáticas, a diferencia de las barras circulares, los esfuerzos dependen no solamente de una variable (ρ) sino que dependen de dos (x e y).

A continuación se hará una breve presentación del método empleado en la Teoría de la Elasticidad para la solución del problema de torsión en barras de sección sólida no circular. Los resultados finales, obtenidos por tal método, para algunas secciones serán dados.

La solución a el problema de torsión en barras de sección sólida no circular con pares aplicados en sus extremos fué dada por Barre de Saint-Venant en 1855, por lo que tal problema es también conocido como problema de Saint-Venant.

Guiado por la solución encontrada por Coulomb para barras circulares en torsión, Saint-Venant supuso que la deformación de una barra prismática sometida a torsión consistía de: (a) rotaciones de las secciones transversales de la barra como en el caso de una barra circular, más, (b) el alabeo de las secciones transversales. Tomando el origen del sistema de coordenadas en un extremo de la barra (Fig. 21) los desplazamientos correspondientes a la rotación de las secciones, según las direcciones de los ejes $X(u)$ e $Y(v)$, son respectivamente,

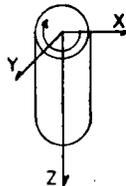


Figura 21

$$u = -\theta zy \quad \text{y} \quad v = \theta zx \quad \dots\dots\dots(1)$$

donde θz es el ángulo de rotación de la sección transversal a una distancia z del origen.

El alabeo de las secciones transversales está definido por la función

$$w = \theta \psi(x,y) \quad \dots\dots\dots(2)$$

En la Teoría de la Elasticidad se demuestra por las condiciones de equilibrio que:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0 \quad \text{y}$$

$$\tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad \text{y} \quad \tau_{yz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad \dots\dots(3)$$

Donde G es el módulo de elasticidad al cortante y θ es el ángulo que gira la barra por unidad de longitud.

La función $\psi(x,y)$ que define el alabeo de la sección transversal debe de satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

y, de acuerdo con las condiciones de frontera, los esfuerzos cortantes τ_{xz} y τ_{yz} pueden calcularse con las expresiones

$$z_{xz} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{y} \quad z_{yz} = - \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \dots\dots(5)$$

donde θ es una función de x e y , denominada función de esfuerzos. Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (3) y (5) se puede escribir:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = G\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - y \right) \quad ; \quad - \frac{\partial \theta}{\partial x} = G\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + x \right) \quad (6)$$

donde derivando la primera con respecto a y , la segunda con respecto a x y restando la derivada de la segunda a la derivada de la primera se encuentra que la función de esfuerzos, θ , debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = F \quad \dots\dots\dots(7)$$

donde $F = - 2G\theta$.

Además por las condiciones de frontera, la función de esfuerzos, θ , debe ser constante (o nula) a lo largo del borde de la sección transversal de la barra. En Teoría de la Elasticidad se han encontrado funciones que satisfacen estas condiciones para diferentes formas de la sección transversal.

Una vez determinada la función de esfuerzos, θ , el momento torsionante resistente de la barra puede calcularse, como se demuestra también en la Teoría de la Elasticidad, por medio de la expresión

$$T = 2 \iint \theta \, dx \, dy \quad \dots\dots\dots(8)$$

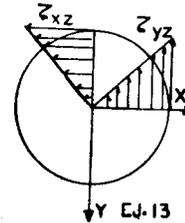
Concluyendo, la determinación de la distribución de esfuerzos en la sección transversal de una barra torsionada consiste en encontrar la función θ que satisface la ecuación (7) y sea cero en las fronteras.

El desarrollo completo de este método puede consultarse en cualquier texto de Teoría de la Elasticidad.

Como ilustración se obtendrá la distribución de esfuerzos en la sección transversal de una barra circular por este método, y se observará que la solución dada por Coulomb al problema de torsión en este tipo de barras es la exacta.

Ejemplo 13.- Resuelva el problema de torsión para una flecha

de sección circular sólida. Determine el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de rotación. Compare los resultados con los del punto 4.



Solución.- La ecuación de la frontera de la sección transversal está dada por la expresión

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ; \quad \text{esto es,} \quad x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

que también puede ser escrita como

$$r^2 \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 \right) = 0$$

Tomando la función de esfuerzos, θ , como

$$\theta = A r^2 \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 \right) \quad \dots\dots(a)$$

donde A es una constante. Debe cumplirse que en la frontera sea cero y también la ecuación (7), y entonces aplicando la ecuación (7) se obtiene el valor de A .

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 2A \quad ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 2A \quad ; \quad 2A + 2A = F \quad \text{y} \quad A = \frac{F}{4}$$

entonces la ecuación (a) queda escrita de la siguiente manera

$$\theta = \frac{Fr^2}{4} \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 \right) \quad \dots\dots\dots(b)$$

la magnitud de F es obtenida al aplicar la ecuación (8)

$$T = 2 \iint \theta \, dx \, dy = 2 \iint \frac{Fr^2}{4} \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 \right) \, dx \, dy = \frac{Fr^2}{2} \left[\frac{1}{r^2} \iint x^2 \, dx \, dy + \frac{1}{r^2} \iint y^2 \, dx \, dy - \iint dx \, dy \right]$$

donde $\iint x^2 \, dx \, dy = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $\iint y^2 \, dx \, dy = I_x = \frac{\pi r^4}{4}$

$\iint dx \, dy = \pi r^2$ al sustituir estos valores la expresión queda escrita como

$$T = \frac{Fr^2}{2} \left[\frac{\pi r^2}{4} + \frac{\pi r^2}{4} - \pi r^2 \right] = \frac{Fr^2}{2} \left[- \frac{\pi r^2}{2} \right] = - \frac{Fr^4}{4} \quad \dots\dots(c)$$

y $F = - \frac{4T}{\pi r^4} \quad \dots\dots(d)$

al sustituir (d) en (b) se llega a :

$$\theta = - \frac{T}{\pi r^2} \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 \right) \dots\dots\dots(e)$$

Aplicando las ecuaciones (5) se obtienen τ_{xz} y τ_{yz} ,

entonces $\tau_{xz} = \frac{d\theta}{dy} = - \frac{2Ty}{\pi r^4}$; $\tau_{yz} = - \frac{d\theta}{dx} = \frac{2Tx}{\pi r^4} \dots(f)$

sustituyendo $x = y = r =$ distancia entre el eje y la fibra extrema en cualquiera de las expresiones (f) se obtiene el valor absoluto del esfuerzo cortante máximo que es

$$\tau_{m\acute{a}x} = (2Tr)/(\pi r^4) = (Tr)/(\pi r^4/2) = (Tr)/J = T/S_p .$$

El ángulo de rotación unitario resulta de sustituir en la expresión (d) el valor $\theta = - 2G\theta$, esto es,

$$- 2G\theta = - \frac{4T}{\pi r^4} , \text{ entonces, } \theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{2T}{G\pi r^4} = \frac{T}{JG}$$

Se observa que los valores obtenidos para $\tau_{m\acute{a}x}$ y θ por las teorías de Saint-Venant y Coulomb coinciden y, por tanto, la solución dada al problema de torsión en el punto 4 es la exácta.

Como se dijo con anterioridad la solución del problema de torsión en barras prismáticas presenta un mayor grado de dificultad que en barras circulares, por lo que solamente se hará enseguida una presentación de los resultados finales, para algunas formas de la sección transversal, obtenidos por los métodos de la Teoría de la Elasticidad.

Sección rectangular.- En la Fig. 20 b se tiene que

$$\tau_A = \tau_{m\acute{a}x} = \frac{T}{\alpha ab^2} ; \tau_B = \eta \tau_{m\acute{a}x} ; \varphi = \frac{TL}{\beta G ab^3}$$

$$S_{Pr} = \alpha ab^2 \quad J_r = \beta a b^3$$

donde T es el momento torsionante aplicado, a el lado mayor y b el lado menor del rectángulo. Los valores de los coeficientes $\alpha, \beta,$ y η dependen de la relación a/b . Algunos de esos valores están dados en la TABLA DOS.

Como se ve en la tabla dos, para secciones rectangulares delgadas, cuando a/b > 10 los valores de α y β se aproximan a un ter-

cio (1/3) y el de η a 0.742

Para perfiles compuestos por rectángulos largos y finos ----- (a/b >> 10) la característica geométrica J_r se puede calcular con la expresión

$$J_r = \lambda \frac{1}{3} \sum ab^3$$

donde λ es un coeficiente que depende de la forma de la sección. Algunos valores de λ se dan en la TABLA TRES

El esfuerzo cortante máximo se presenta en el rectángulo con mayor ancho, b, y su valor se determina con la expresión

$$\tau_{m\acute{a}x} = (T b_{m\acute{a}x})/J_r$$

y el ángulo de rotación se determina con

$$\varphi = \frac{TL}{J_r G}$$

Aquí se nota que el valor de J_r para estos perfiles (con paredes delgadas y sección abierta) es muy pequeño comparado con el de J para barras de sección circular sólida de igual área, es por esto que se debe evitar que las barras de sección abierta trabajen a torsión.

TABLA DOS.- Coeficientes para torsión de una barra rectangular .

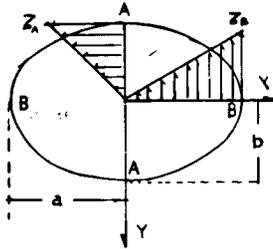
a/b	1.0	1.2	1.5	1.75	2.0	2.5	3.0
α	0.208	0.219	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267
β	0.1406	0.166	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263
η	1.000	0.944	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753

a/b	4.0	5.0	6.0	8.0	10.0	20.0	∞
α	0.282	0.291	0.299	0.307	0.312	0.319	0.333
β	0.281	0.291	0.299	0.307	0.312	0.319	0.333
η	0.745	0.744	0.743	0.742	0.742	0.742	0.742

TABLA TRES. - Coeficientes λ para perfiles

Tipo de sección	angular	doble Te	Te	Canal
λ	1.0	1.2	1.15	1.12

Sección elíptica.- Los esfuerzos cortantes y el ángulo de rotación se calcularán con las expresiones



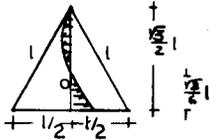
$$\tau_A = \tau_{\text{máx}} = \frac{2T}{\pi ab^2}$$

$$\tau_B = \frac{2T}{\pi a^2 b}$$

$$\phi = \frac{T(a^2 + b^2)L}{\pi a^3 b^3 G}$$

El significado de las literales a y b está indicado en la figura.

Sección triángulo equilátero.- Los esfuerzos cortantes máximos se presentan en los puntos medios de los lados y se calculan con la expresión;



$$\tau_{\text{máx}} = \frac{20T}{l^3}$$

y el ángulo de rotación con

$$\phi = \frac{80 TL}{G l^4 \sqrt{3}}$$

7.- NOCIONES SOBRE LA ANALOGIA DE LA MEMBRANA

Como la solución matemática del problema de torsión en barras prismáticas es bastante complicada, se hizo necesario el desarrollo de métodos indirectos para su estudio. Uno de esos métodos es el de la analogía de la membrana, introducido en 1903 por el ingeniero alemán L. Prandtl.

El método de la analogía de la membrana está basado en lo siguiente: Independientemente de la forma de la sección transversal de la barra en cuestión, la ecuación diferencial parcial que debe ser resuelta para el problema de torsión elástica es matemáticamente análoga a la ecuación diferencial parcial que hay que resolver en el problema del equilibrio de una membrana delgada, tal como -- una película de jabón, ligeramente estirada por encima de un agujero geoméricamente semejante a la sección de la barra en estudio, sometida a una tensión unitaria, S , por unidad de longitud en sus bordes y a una presión uniformemente distribuida, q , en una de sus

caras. Considérese el elemento infinitesimal $abcd$ de la Fig. 22. - Las fuerzas de tensión que actúan en los lados ad y bc tienen, en el caso de deflexiones pequeñas de la membrana, una resultante dirigida hacia abajo con un valor

$$- S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy$$

de la misma manera, las fuerzas de tensión que actúan en los lados ab y dc tienen como resultante

$$- S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy$$

y la presión uniforme que actúa en el área $abcd$ tiene una resultante igual a

$$+ q dx dy$$

La ecuación diferencial parcial de equilibrio del elemento es

$$S \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx dy + S \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dx dy + q dx dy = 0$$

de la cual simplificando se llega a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{q}{S} \dots\dots\dots(A)$$

Comparando las ecuaciones (A) y (7) se concluye que ambos problemas son idénticos, pues la ecuación (A) resulta igual a la (7) si se sustituye z por ϕ y q/S por $2G\theta$. Por lo tanto, de las deflexiones de la membrana, z , se pueden obtener los valores de la función de esfuerzos, ϕ , si el segundo miembro de la ecuación (A) es sustituido por $2G\theta$. El momento torsionante resistente puede obtenerse sustituyendo ϕ por z en la ecuación (8), y se tiene que

$$T = 2 \iint z dx dy \dots\dots\dots(B)$$

Esta ecuación indica que el momento torsionante, T , resistido por la sección es el doble del volumen comprendido entre la membrana y el plano X-Y (ver figura 22).

Las líneas de igual deformación en la membrana se representan por "curvas de nivel". Tomando cualquier punto B sobre la membrana (Fig. 22) se traza por él la tangente de máxima pendiente (normal a la "curva de nivel" en ese punto), y aplicando los métodos de la

Teoría de la Elasticidad se pueden demostrar las siguientes conclusiones :

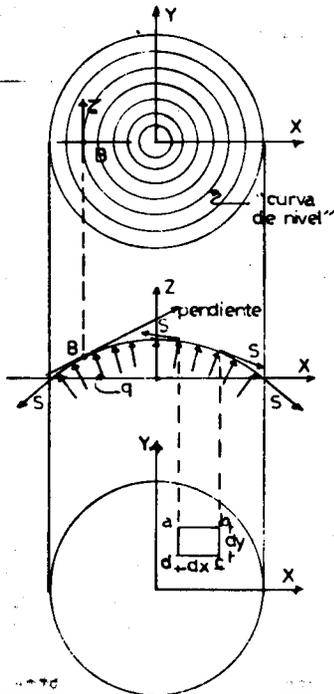


Figura 22

1ª.- El esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección es proporcional a la pendiente en el mismo punto de la membrana deformada (estirada) (Fig. 22). El esfuerzo cortante máximo actúa en los puntos donde las "curvas de nivel" están más próximas.

2ª.- La dirección del esfuerzo cortante en cualquier punto forma ángulo recto con la pendiente de la membrana en el mismo punto. Es decir, es tangente a la "curva de nivel" que pasa por ese punto y, en consecuencia, dicha curva representa también la línea de igual esfuerzo cortante en la sección (Fig. 22).

3ª.- El momento torsionante resistente es igual a dos veces el volumen encerrado entre la membrana deformada y su plano original.

La analogía de la membrana es una herramienta mental muy útil para comparar los esfuerzos y momentos torsionantes resistidos por diferentes secciones.

Por ejemplo, todas las secciones mostradas en la Fig. 23 soportan, aproximadamente, el mismo momento torsionante ya que el volumen encerrado por las membranas correspondientes es casi el mismo en todos los casos. En las secciones (c), (d) y (e) se "siente" que al trazar las "curvas de nivel" éstas se acumularán en las esquinas, por tanto, en estos puntos se presentarán concentraciones de esfuerzo.

El momento torsionante resistente para estas secciones es, aproximadamente, la suma de los momentos torsionantes resistentes de los rectángulos componentes.

En el caso de secciones no sólidas, con uno o más huecos, esta analogía puede ser presentada como sigue; las áreas A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) en las membranas, correspondientes a los huecos en la sección de la barra torsionada, son cubiertas por placas absolutamente rígidas, de peso despreciable, que son "pegadas" a la membrana sin deformar. Al aplicar la presión uniforme, q , las placas A_i se mueven paralelamente a su posición original y la membrana queda como se muestra en la Fig. 24. Todo lo anotado anteriormente es válido para este caso.

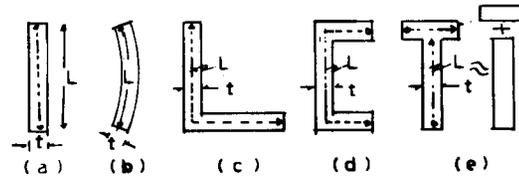


Figura 23

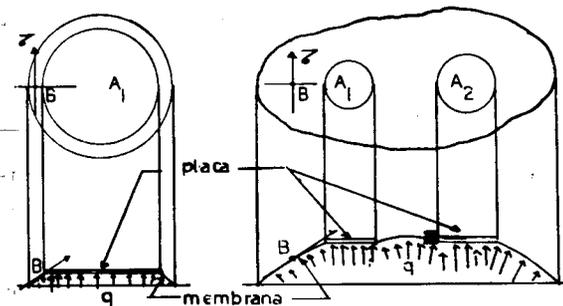


Figura 24

8.- CALCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES DEBIDOS A TORSION EN MIEMBROS DE PARED DELGADA CON SECCION TRANSVERSAL CERRADA Y ABIERTA.

En la construcción de máquinas, y sobre todo en la construcción de aeronaves, frecuentemente se hace necesario resolver el problema de torsión para las piezas denominadas de paredes delgadas. La característica geométrica particular de estas piezas es que su espesor es muy pequeño en comparación con las otras dimensiones de su sección transversal. Esta puede ser cerrada o abierta.

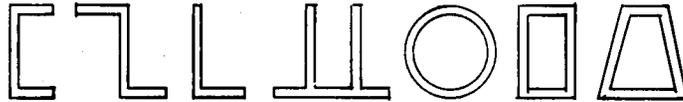


Figura 25

En la figura 25 se muestran algunas formas típicas de la sección transversal.

A diferencia de los miembros de sección transversal sólida no circular los miembros de pared delgada, cualquiera que sea su forma, pueden ser analizados de una manera relativamente simple para obtener la magnitud de los esfuerzos y deformaciones causados por la aplicación de un momento torsionante.

La distribución de los esfuerzos cortantes en la sección transversal de los miembros de pared delgada se establece fácilmente --

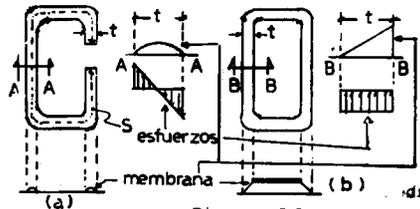


Figura 26

por medio de la analogía de la membrana (ver la Fig. 26). En (a) se observa que la tangente a la membrana, aproximadamente en el centro de el espesor de la pared, cambia de signo, y se admite que los esfuerzos cortantes varían linealmente desde el centro del espesor.

En (b) la tangente a la membrana se puede considerar constante, y en consecuencia los esfuerzos cortantes permanecen uniformes dentro del espesor de la pared. En seguida se deducirán las fórmulas correspondientes para el esfuerzo cortante y el ángulo de rotación en tales miembros, se empezará por los de sección transversal abierta.

A) Miembros de pared delgada con sección transversal abierta.

Si en la Fig. 26(a) se "extiende" la sección transversal para convertirla en un rectángulo, la forma de la membrana y, por tanto, los esfuerzos cortantes no variarán considerablemente. Es decir, los esfuerzos cortantes antes y después de "extendida" la sección serán aproximadamente los mismos. Los esfuerzos y deformaciones se calcularán de acuerdo con las fórmulas anotadas en el punto 6 para secciones rectangulares. Como en este caso $a/b \gg 10$, $\alpha = \beta = 1/3 = 0.333$, entonces:

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{3T}{t^2 s} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{3TL}{Gt^3 s}$$

donde t es el espesor de la pared (el lado menor b), y s la longitud del contorno de la sección transversal (el lado mayor a).

Cuando se trata de miembros de paredes delgadas con sección transversal como la mostrada en la Fig. 27 y no puede ser "extendida" y transformada en un rectángulo se opera de la manera siguiente:

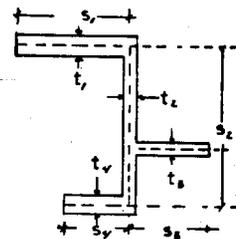


Figura 27

Los denominadores ($t^2 s$) y ($t^3 s$) de las expresiones anteriores son obtenidos como se indica a continuación,

$$t^2 s = \sum_{i=1}^n t_i^2 s_i = (t_1^2 s_1 + t_2^2 s_2 + t_3^2 s_3 + \dots + t_n^2 s_n)$$

donde ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) y ($n = \text{número de segmentos}$)

$$t^3 s = \sum_{i=1}^n t_i^3 s_i = (t_1^3 s_1 + t_2^3 s_2 + t_3^3 s_3 + \dots + t_n^3 s_n)$$

entonces al sustituir estos valores se llega a :

$$Z = \frac{3T}{\sum_{i=1}^n t_i^2 s_i} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{3TL}{G \sum_{i=1}^n t_i^3 s_i}$$

De la analogía de la membrana se desprende que los esfuerzos cortantes máximos actúan en el segmento de mayor espesor, de ahí que

$$Z_{\text{máx}} = \frac{3T t_{\text{máx}}}{\sum_{i=1}^n t_i^3 s_i} \quad \delta \quad Z_{\text{máx}} = \frac{T t_{\text{máx}}}{J_r}$$

como se anotó en el punto 6 .

Para calcular el máximo esfuerzo cortante en cualquier segmento i es válida la expresión siguiente:

$$Z_i = Z_{\text{máx}_i} = \frac{3T_i}{t_i^2 s_i} = \frac{3 T t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^3 s_i}$$

Este método es aproximado ya que no toma en consideración las concentraciones de esfuerzos en las esquinas entrantes. Para evitar las concentraciones de esfuerzos altas las esquinas entrantes se redondean.

B) Miembros de pared delgada con sección transversal cerrada.

Aquí solo se estudiarán secciones cerradas con un solo hueco. Considérese una sección cerrada, tubular, de forma arbitraria con espesor de las paredes variable (Fig. 28 a) sometida a un momento torsionante T . Como se anotó antes, el esfuerzo cortante es uniforme dentro del espesor de la pared. Aislando un elemento infinitesimal de longitud dx (Fig. 28 b) y distancia entre 1 y 2 arbitraria, este elemento debe estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4 , que son obtenidas al multiplicar el esfuerzo cortante por el área respectiva en que actúa, entonces si se hace $\sum F_x = 0$ resulta que:

$$F_1 = F_3; \text{ pero } F_1 = Z_1 t_1 dx \quad \text{y} \quad F_3 = Z_2 t_2 dx \quad \text{y } t_1 \text{ es diferente de } t_2. \quad t_1 \neq t_2$$

Si se considera a la esquina A (Fig. 28 b) se nota que, de --

acuerdo con la ley de reciprocidad de los esfuerzos cortantes, $Z_1 = Z_3$, y en la esquina B $Z_2 = Z_4$, además se advierte que -- $Z_1 t_1 = Z_2 t_2 = Z_3 t_3 = q = \text{constante}$. Si $(Z) = (FL^{-2})$ y $(t) = (L)$ entonces $(q) = (FL^{-1})$. Esto establece que el producto Zt no varía a lo largo del contorno cerrado de la sección. Si se hace una

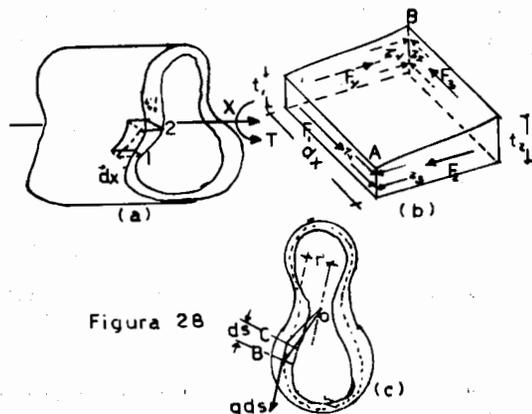


Figura 28

analogía con el gasto hidráulico constante $(Q=A_n v)$ que fluye por un canal de sección rectangular con ancho de plantilla variable, en los tramos de menor ancho (espesor) de plantilla, las velocidades (esfuerzos) serán mayores y viceversa. A causa de esta analogía la cantidad q ha sido llamada flujo de cortante.

Considerando la sección transversal del tubo (Fig. 28 c) se observa que: el flujo de cortante, q , multiplicado por la longitud infinitesimal, ds , del perímetro da como resultado una fuerza, $q ds$, por diferencial de longitud, que multiplicada por la distancia r a un punto conveniente O , proporcione la contribución de esa longitud al momento torsionante resistente. Integrando a lo largo de la línea central de la pared del tubo, la expresión para el momento torsionante resistente total queda como :

$$T = \int r q ds$$

En vez de efectuar la integración, el problema se puede abordar de otra manera. De la Fig. 28(c) se observa que el producto $r ds$ es dos veces el área del triángulo OCB, por tanto la integral completa es dos veces el área completa A^* limitada por la línea central de la pared del contorné. En consecuencia,

$$T = 2 A^* q \quad \delta \quad q = T/2A^*$$

esta ecuación, conocida como fórmula de Bredt que fué quien la desarrolló, es sólo aplicable a tubos de pared delgada.

El esfuerzo cortante en cualquier punto del contorna, si

$$Zt = q, \text{ es}$$

$$Z = q/t \quad \text{y} \quad Z_{\text{máx}} = q/t_{\text{mín}}$$

esta expresión es también aplicable en el rango inelástico si el espesor, t , es constante.

Para material linealmente elástico el ángulo de rotación en secciones tubulares puede ser encontrado haciendo uso del principio de la conservación de la energía. Como el tubo en sí es un resorte lineal, el trabajo externo es $(T\theta)/2$. La energía de deformación interna para un tubo de longitud unitaria de acuerdo a lo visto en el punto 3.1 es:

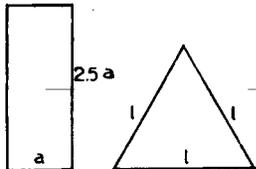
$$\int_V \frac{Z^2}{2G} dV \quad \text{Entonces}$$

$$\frac{1}{2} T\theta = \frac{1}{2} T \frac{d\varphi}{dx} = \int_V \frac{Z^2}{2G} dV = \frac{1}{2G} \int \frac{T^2}{4 A^* t^2} t ds$$

$$\text{entonces,} \quad \theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{4 A^* t^2 G} \int \frac{ds}{t}$$

9.- EJEMPLOS

Ejemplo 14.- Una barra rectangular de un material linealmente elástico, con las dimensiones mostradas, será reemplazada por una barra con sección transversal en forma de triángulo equilátero del mismo material. Determine la dimensión mínima del lado, l , tal que para el momento torsionante aplicado, T , ni el máximo esfuerzo cor



EJ 14

tante ni el ángulo de rotación excedan las cantidades correspondientes en el diseño original.

Solución.- Asignando los subíndices r y t a las secciones rectangular y triangular respectivamente. Se tienen que cumplir dos condiciones, una de resistencia y otra de deformación. Entonces,

A) Para la condición de resistencia

$$Z_{\text{máx}_r} = Z_{\text{máx}_t}$$

$$\frac{T}{\alpha a b^2} = \frac{20 T}{l^3}$$

$$l^3 = 20 \alpha (2.5 a)^2 a^2$$

$$l^3 = 20(0.258)2.5^3 a^3$$

$$l = \sqrt[3]{12.9} = 3.6 a$$

B) Para la condición de deformación

$$\varphi_r = \varphi_t$$

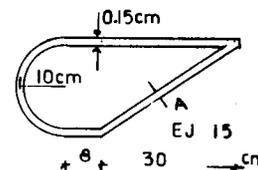
$$\frac{TL}{\beta a b^3 G} = \frac{80 TL}{G l^4 \sqrt{3}}$$

$$l^4 = \frac{80}{\sqrt{3}} \beta (2.5 a)^3 a^3$$

$$l = \sqrt[4]{28.75} = 2.32 a$$

La condición que rige es la de resistencia, entonces la dimensión l de la nueva flecha que se tomará es $l = 3.6 a$

Ejemplo 15.- Para la barra que tiene la sección transversal



EJ 15

mostrada encuentre el máximo esfuerzo cortante y el ángulo de rotación unitario debido a un momento torsionante aplicado $T = 1200 \text{ kg-cm}$ para los casos (a) sección totalmente cerrada y (b) considerando que tiene un corte en A.

$$G = 8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

Solución.- (a)

$$A^* = (\pi (10)^2)/2 + 20(8) + 20(30)/2 \quad \text{cm}^2$$

$$A^* = 157.08 + 160 + 300 = 617.08 \text{ cm}^2$$

$$T_{\text{máx}} = Z_y S_p$$

$$q = \frac{T}{2A_s} = \frac{1\,200}{2(617.08)} = 0.972 \text{ kg/cm}$$

$$Z_{\text{máx}} = \frac{q}{t} = \frac{0.972}{0.15} = 6.48 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta = \frac{T}{4 A_s^2 G} \int \frac{ds}{t}$$

donde $\int ds = \text{perímetro} = \pi(10) + 38 + 8 + \sqrt{(20)^2 + (30)^2} =$
 $= 31,416 + 46 + 36,056 = 113,472 \text{ cm}$

$$\theta = \frac{1\,200}{4(617.08)^2 \times 8 \times 10^5} \frac{113,472}{0.15} = \frac{1,361664 \times 10^5}{1\,827\,780,9 \times 10^5}$$

$$\theta = 0.000000745 \text{ radianes/metro}$$

(b) $a = s = \text{perímetro} = 113,472 \text{ cm} \quad b = t = 0.15 \text{ cm}$

$$Z_{\text{máx}} = \frac{3 T}{t^2 s} = \frac{3(1\,200)}{(0.15)^2 (113,472)} = 1\,410 \text{ kg/cm}^2$$

$$\theta = \frac{3 T}{G t^3 s} = \frac{3(1\,200)}{(0.15)^3 (113,472) 8 \times 10^5} = 0.01175 \text{ rad/m}$$

La comparación de los resultados obtenidos en estos dos incisos muestra las ventajas de las barras de pared delgada de sección cerrada sobre las de sección abierta cuando trabajan a torsión.

10.- CALCULO DE ESFUERZOS Y DEFORMACIONES DEBIDOS A TORSION EN FLECHAS CIRCULARES EN EL RANGO INELASTICO.

Se ha visto que en el caso de barras circulares en torsión -- elásticas, donde la Ley de Hooke es válida, mientras los esfuerzos no sean superiores al límite proporcional las fórmulas para calcular el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de rotación unitario -- son respectivamente :

$$Z_{\text{máx}} = \frac{T}{S_p} \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dx} = \theta = \frac{T}{JG}$$

y la magnitud del momento torsionante elástico máximo que puede resistir la sección transversal se obtiene al igualar el esfuerzo máximo con el esfuerzo de fluencia, es decir,

sin embargo, este no es el momento torsionante límite para un material elasto-plástico donde es posible un aumento del momento torsionante debido a el incremento de los esfuerzos cortantes en los anillos interiores de la sección que están menos solicitados. Para este caso las hipótesis básicas planteadas en el punto 4.1 son aplicables. Para investigar el caso de torsión elasto-plástica (o inelástica) es necesario disponer del diagrama esfuerzo cortante--deformación unitaria ($Z-\gamma$) del material en cuestión. Algunos diagramas $Z-\gamma$, obtenidos en experimentos con tubos de pared delgada sometidos a torsión, son mostrados en la Fig. 29 junto con su correspondiente distribución de esfuerzos. Los esfuerzos son determinados a partir de la deformación unitaria. Por ejemplo, si en un anillo interior la deformación unitaria es $\frac{a}{r}$, el esfuerzo correspondiente es encontrado con ayuda del diagrama $Z-\gamma$. El procedimiento es aplicable a barras integradas con tubos concéntricos de diferentes materiales de los que se conoce su diagrama $Z-\gamma$. Para una flecha hecha de un material linealmente elástico, la solución es tan solo un caso particular de este método.

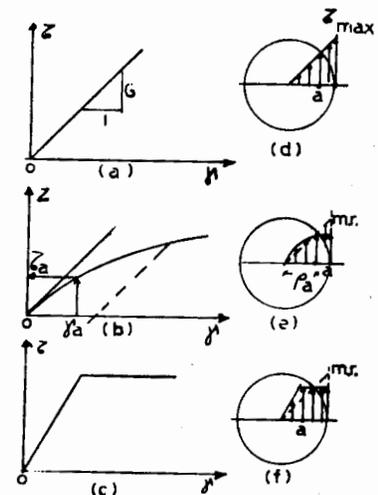


Figura 29

esto es:

$$T_u = \int (Z(dA)) \rho$$

Conocida la ley de distribución del esfuerzo cortante la magnitud del momento torsionante resistente se encuentra al igual que en el punto 4.2,

Para la evaluación de esta integral pueden ser empleados procedimientos gráficos o analíticos.

Si una barra es esforzada dentro del rango inelástico y luego es liberada del momento torsionante aplicado, todos los anillos imaginarios se recuperan elásticamente pero la diferencia en las trayectorias de la deformación unitaria causa un endurecimiento permanente del material y originan esfuerzos y deformaciones residuales. Aunque la fórmula de torsión elástica no es aplicable a este caso es usada a veces para calcular un esfuerzo máximo ficticio para el momento torsionante último que sirve como un índice tosco de la resistencia última de un material en torsión y es llamado módulo de ruptura (m.r.) (ver las líneas punteadas sobre las figuras 29(d), (e) y (f)).

En los tubos de pared delgada la distribución de esfuerzos está muy cerca del módulo de ruptura, independientemente de las propiedades mecánicas del material (Fig. 30), es por esta razón que los

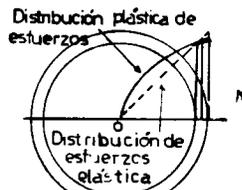


Figura 30

experimentos con tubos de pared delgada son ampliamente usados en la determinación de los diagramas $Z-\gamma$. La diferencia entre el módulo de ruptura y el esfuerzo cortante máximo de la distribución realida la magnitud del esfuerzo residual.

El ángulo de rotación unitario en una barra circular sólida o tubular en el rango inelástico puede ser calculado como

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_{m\acute{a}x}}{c} = \frac{\gamma_a}{\rho_a}$$

En esta expresión debe ser usada la máxima deformación unitaria en c o la deformación en ρ_a , determinada a partir del diagrama $Z-\gamma$. El ángulo de rotación unitario residual estará dado, al igual que el esfuerzo residual, por la diferencia entre los ángulos de rotación unitarios en los rangos inelástico y elástico.

11.- ANALOGIA DEL MONTÓN DE ARENA PARA TORSION INELASTICA EN MIEMBROS SOLIDOS CON SECCION TRANSVERSAL CUALQUIERA.

La analogía del montón de arena es una extensión de la analo-

gía de la membrana y es aplicable a materiales elasto-plásticos o plásticos. Si se conoce el diagrama $Z-\gamma$ de un material y el momento torsionante aplicado a la barra se incrementa hasta que el material alcanza su límite e esfuerzo de fluencia. El esfuerzo es constante en toda la zona en la que el material fluye. Como el esfuerzo cortante en un punto cualquiera es proporcional a la pendiente de la membrana en ese punto entonces dicha pendiente debe ser constante en toda la zona en la que el material fluye, esto equivale a que la membrana se vaya deformando hasta alcanzar la posición límite indicada con línea punteada en la Fig. 31. Cuando el material fluye en toda la sección transversal de la barra la membrana se transforma

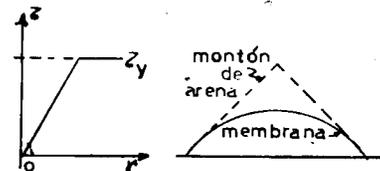


Figura 31

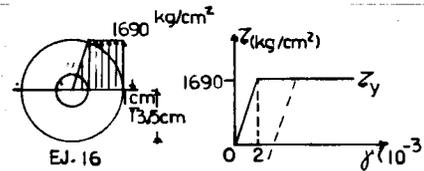
en un montón de arena con pendiente constante: de aquí el nombre de la analogía. Por ejemplo, en el caso de una barra de sección circular se forma un cono recto, o una pirámide sobre una base poligonal. Todas las conclusiones a las que se llega con la analogía de la membrana son válidas para la analogía del montón de arena.

de la membrana se transforma en un montón de arena con pendiente constante: de aquí el nombre de la analogía. Por ejemplo, en el caso de una barra de sección circular se forma un cono recto, o una pirámide sobre una base poligonal. Todas las conclusiones a las que se llega con la analogía de la membrana son válidas para la analogía del montón de arena.

12.- EJEMPLOS

Ejemplo 16.- Una barra de acero de sección circular sólida de 7 cm de diámetro es torsionada, y, un corchón elástico de 2 cm de

diámetro permanece en el interior (ver figura). Si las propiedades del material pueden ser idealizadas como se muestra, ¿qué esfuerzo y rotación residuales permanecerán después que se li-



bere del momento torsionante aplicado? .

Solución.- El módulo de ruptura es igual a m.r. = $Z_{m\acute{a}x} = \frac{56}{J}$

donde $T = \int Z \rho dA$

$$\gamma \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e = \frac{T}{JG} \quad ; \quad \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{in} = \frac{T_0}{J_0 G}$$

Primero se determina la magnitud del momento torsionante aplicado, entonces,

$$T_u = \int z \rho dA = \int_0^c 2\pi z \rho^2 d\rho = \int_0^c \left(\frac{\rho}{c} Z_y \right) 2\pi \rho^2 d\rho + \int_1^{3.5} Z_y (2\pi \rho^2 d\rho) = 2\pi Z_y \left[\int_0^c \rho^3 d\rho + \int_1^{3.5} \rho^2 d\rho \right] = 2\pi Z_y \left[\left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^c + \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_1^{3.5} \right]$$

$$= 2\pi Z_y \left[\frac{1}{4} + \frac{(3.5)^3}{3} - \frac{1}{3} \right] = 2\pi (1690)(0.25 + 14.29 - 0.333) = 2\pi (1690)14.21 = 150890.41 \text{ kg-cm}$$

Nótese la pequeñez de la contribución de la primera integral. y

$$m.r. = Z_{máx} = \frac{T \rho}{J} = \frac{T}{S_p} = \frac{(150890.41)2}{\pi (3.5)^3} = 2240 \text{ kg/cm}^2$$

entonces $Z_{res} = m.r. - Z_y = 2240 - 1690 = 550 \text{ kg/cm}^2$

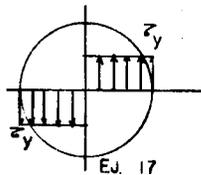
Para calcular la rotación residual se tiene,

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{in} = \frac{T_0}{J_0 G} = \frac{0.002}{1} = 0.002 \text{ rad/cm}$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e = \frac{T}{JG} = \frac{2(150890.41)}{\pi (3.5)^4 \times 8.45 \times 10^5} = 0.000756 \text{ rad/cm}$$

$$\theta_{res} = \theta_{in} - \theta_e = 0.002 - 0.000756 = 0.001244 \text{ rad/cm}$$

Ejemplo 17.- Para un material idealmente plástico el estado límite es aquél en el cual los esfuerzos en todos los puntos de la sección son iguales al límite de fluencia. Déterminese el valor del momento torsionante resistente para ese estado límite. Solución.- Se tiene que



Ej. 17

$T_u = \int_A \rho Z_y dA$
realizando la integral se llega a,

$$T_u = Z_y \int_0^r 2\pi \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi r^3 Z_y \quad ; \quad \text{si } T_0 = Z_{máx} S_p$$

entonces la cantidad $2/3 \pi r^3 = S_{pp}$ se le denomina módulo de sección plástico de la sección transversal en la torsión y es el equivalente al módulo de sección polar en la torsión elástica. Para una sección tubular de radio exterior r_e y radio interior r_i el módulo de sección plástico de la sección transversal en la torsión es

$$S_{pp} = \frac{2}{3} \pi r_e^3 (1 - (r_i/r_e)^3)$$

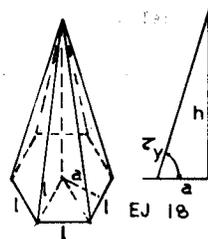
Comparando los momentos torsionantes límites en los casos inelástico y elástico, se encuentra que,

$$\frac{T_u}{T_{máx_e}} = \frac{S_{pp} Z_y}{S_p Z_y} = \frac{2\pi r^3}{3} \frac{2}{\pi r^3} = \frac{4}{3}$$

el momento torsionante límite cuando se consideran las deformaciones plásticas es mayor que el momento torsionante límite cuando se toman en cuenta solamente las deformaciones elásticas en una tercera parte. Los ensayos demuestran que el valor de T obtenido con la fórmula coincide muy bien con su valor experimental.

Ejemplo 18.- Haciendo uso de la analogía del montón de arena

determine el momento torsionante último resistente para una barra de sección transversal hexagonal, de longitud de lado l.



Solución.- El montón de arena forma una pirámide regular con base hexagonal como se muestra.

1º.- $Z_y = h/a = (2h)/(1\sqrt{3})$

2º.- $T_u = 2 \text{ vol}$ y $\text{vol} = (1/3)Eh$

donde $B = (P_e)/2$ $P = \text{perímetro}$

$$h = (1/2) \sqrt{3} Z_y$$

$$T_u = \frac{2}{3} \left[\frac{6 l^2 \sqrt{3}}{4} \right] \frac{1}{2} \sqrt{3} Z_y$$

$$T_u = \frac{3}{2} l^3 Z_y$$

13.- SUPERPOSICION DE ESFUERZOS CORTANTES EN BARRAS DE SECCION CIRCULAR.

En la construcción de máquinas son muy frecuentes las piezas que trabajan a esfuerzos de torsión y flexión combinados. Un ejemplo típico de ellas lo constituyen las flechas de diversas máquinas.

La superposición de esfuerzos se basa en el principio de superposición, por lo que se principia calculando por separado los esfuerzos debidos a la torsión y los originados por la flexión.

Durante la flexión aparecen en las secciones transversales de la barra esfuerzos normales, que son máximos en las fibras extremas, y que se calculan con la expresión

$$\sigma_{\text{máx}} = (M c)/I \quad \delta \quad \tau_{\text{máx}} = M/S$$

así como también esfuerzos cortantes, que alcanzan su valor máximo en el eje neutro, y que se calculan con la expresión

$$\tau = \frac{V Q}{I t}$$

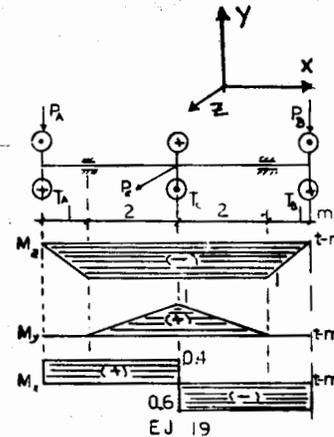
En las secciones circulares, en general, estos esfuerzos cortantes son insignificantes en comparación con los esfuerzos cortantes debidos a la torsión.

Durante la torsión surgen esfuerzos cortantes en las secciones transversales, que son máximos en las fibras extremas, y que se calculan como ya se anotó

$$\tau = T/S_p = (T c)/J = (T c)/(2I)$$

El problema de la superposición de esfuerzos cortantes en una barra de sección circular se ilustrará con un ejemplo.

Ejemplo 19.- La flecha mostrada en la figura está sometida a la acción de dos fuerzas verticales P_A y P_B , una horizontal P_C y tres momentos torsionantes exteriores T_A , T_B y T_C . El esfuerzo cortante permisible es $\tau_p = 750 \text{ kg/cm}^2$. Se pide calcular el diámetro mínimo para la condición de resistencia.



- $P_A = P_B = P_C = 1 \text{ ton} = 1000 \text{ kg}$
- $T_A = 0.4 \text{ t-m} = 40\,000 \text{ kg-cm}$
- $T_B = 1.0 \text{ t-m} = 100\,000 \text{ kg-cm}$
- $T_C = 0.6 \text{ t-m} = 60\,000 \text{ kg-cm}$

Solución.- Se verifica el equilibrio del sistema (está en equilibrio).

Se trazan los diagramas de momento correspondientes. Se determina la posición de la sección crítica. Se encuentra la magnitud de los esfuerzos existentes y se superponen.

Enseguida se hará la deducción de la expresión general

que permite calcular la resistencia en barras circulares sujetas a torsión y flexión combinadas.

Los esfuerzos a que está sometida la sección se calculan, como ya se dijo antes.

Teniendo en cuenta que cuando una flecha está sometida a flexión en dos planos perpendiculares el momento equivalente es igual a

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad \text{y que } J = 2I$$

Como los esfuerzos normales y cortantes son magnitudes vectoriales, al superponerlos hay que tener mucho cuidado con los valores dados para sollicitación simple.

Se sabe que los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 se obtienen, para este caso, con la expresión

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

y el ángulo de inclinación de los planos principales con

$$\tan 2\theta_p = \frac{-2\tau}{\sigma}$$

así también el esfuerzo cortante en los planos principales de corte está dado por

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2} \leq \tau_p$$

sustituyendo en esta última expresión las expresiones correspondientes para σ y Z , operando y simplificando se llega a

$$Z_{\text{máx}} = Z_{1,2} = Z_p = \left| \frac{+ \sqrt{M^2 + T^2}}{- \frac{S_p}{S_p}} \right|$$

$$Z_{\text{máx}} = Z_p = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + T^2}$$

despejando de esta expresión el valor de d se tiene el diámetro de la sección determinado para la condición de resistencia. Esto es.

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi Z_p} \sqrt{M^2 + T^2}}$$

Y para el problema a resolver

$$\sqrt{M^2 + T^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (0.6)^2} = \sqrt{2.36} = 1.53623 \text{ ton-m}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16(153.623)}{750}} = \sqrt[3]{1.043.2} = 10.145 \text{ cm}$$

Para cuando se presentan combinaciones de esfuerzos debidos a cargas axiales y torsión, en forma similar, se llega a,

$$Z_{1,2} = Z_p = \sqrt{\left(\frac{H}{A}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{S_p}\right)^2}$$

14.- NOTACIÓN

A	Área, área de la sección transversal
A*	Área encerrada por la línea central de la pared del contorno en tubos de pared delgada.
a	Lado largo en secciones rectangulares, semieje mayor de la elipse
b	Ancho, lado corto en secciones rectangulares, semieje menor de la elipse.
c	Distancia del centro de torsión a la fibra extrema
d	Diámetro.

E	Módulo de elasticidad en tensión o compresión
F	Fuerza
G	Módulo de elasticidad al cortante
h	Altura, profundidad de la viga
I_x, I_y	Segundo momento, momento de inercia del área de la sección transversal con respecto a los ejes X e Y.
J, J _r	Momento polar de inercia del área de la sección transversal con respecto a un eje perpendicular a ella.
K, kw	Factor de concentración de esfuerzos, kilowatts
L, l	Longitud, lado
M	Momento flexionante
N	Número de revoluciones por minuto, fuerza axial
n	Relación entre los radios interior e exterior a exterior en barras circulares huecas
P	Fuerza, carga concentrada.
p	carga distribuida por unidad de longitud, presión
q	Flujo de cortante, presión unitaria
R, r	Radio.
S	Módulo de sección elástico
S _p , S _{pp}	Módulo de sección polar, módulo de sección plástica en la torsión.
S	Tensión unitaria, distancia a lo largo de una curva.
T	Torque, Momento torsionante, per
T _i , T _e	Momento torsionante interno, externo.
t	espesor ancho
V	Fuerza cortante, volumen
x, y, z	Coordenadas de un punto.
α, β, γ	Angulo, coeficiente
ϵ	Deformación unitaria en cortante
μ	Módulo de Poisson
σ	Esfuerzo normal
CV	Caballo de vapor
rpm	revoluciones por minuto

15.- BIBLIOGRAFIA.

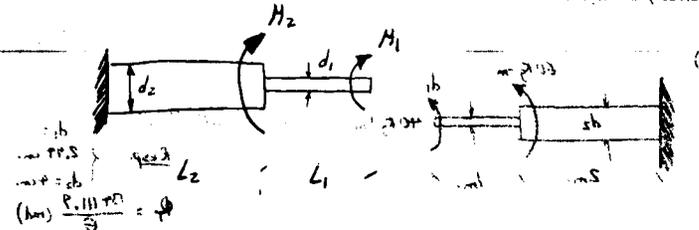
- 1.- Introduction to mechanics of solids.- Egor P. Popov.- Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1968.
- 2.- Resistencia de materiales.- V.I. Feodosiev.- Editorial MIR, Moscú, 1972.
- 3.- Resistencia de materiales.- P. Stiovin.- Editorial MIR, Moscú, 1968.
- 4.- Strength of materials, third edition.- John W. Breneman.- McGraw-Hill Book Company.- 1965.
- 5.- Theory of Elasticity, third edition.- S.P. Timoshenko and J.N. Goodier.- McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. 1970.
- 6.- Theory of Elasticity.- M. Filonenko-Borodich.- Editorial MIR, Moscú, 1968.

16.- REFERENCIAS

- a) Resistencia de materiales.- J.N. Cernica.- CECSA, México, 1968
- b) Resistencia de materiales.- F.L. Singer.- Harper and Row, Nueva York, 1971.
- c) Mechanics of materials.- S.P. Timoshenko y J.M. Gere.- Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1972.
- d) Resistencia de materiales.- F.R. Shanley.- McGraw-Hill de México, México, 1971.
- e) Resistencia de materiales.- F.B. Seely y J.O. Smith.- LITEHA, México, 1967.

Ejemplo:

Para la viga de la figura, encuentre $\frac{M_2}{M_1}$ si $\frac{L_2}{L_1} = a$. Halle también el ángulo total de giro. Las 2 barras son de sección circular.



$$J = \frac{M_T r}{\tau}, \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\frac{M_T d}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow d^3 = \frac{M_T}{2} \left(\frac{16}{\pi} \right)$$

$$d_1^3 = \frac{M_1}{2} \frac{16}{\pi}$$

$$d_2^3 = \frac{M_1 + M_2}{2} \frac{16}{\pi}$$

$$\left(\frac{d_2}{d_1} \right)^3 = \frac{M_1 + M_2}{M_1} = 1 + \frac{M_2}{M_1}$$

$$\frac{M_2}{M_1} = a^3 - 1$$

$$\phi_2 = \frac{M_1 + M_2}{\pi d_2^4} \frac{L_2}{G}$$

$$\phi = \frac{M_1}{\pi d_1^4} \frac{L_1}{G}$$

$$\phi_T = \phi_1 + \phi_2 = \frac{32}{\pi G} \left[\frac{M_1 L_1}{d_1^4} + \frac{(M_1 + M_2) L_2}{d_2^4} \right]$$

$$= \frac{32 M_1 L_1}{\pi G d_1^4} \left[1 + \frac{a^3 \left(\frac{L_2}{L_1} \right)}{\left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4} \right]$$

$$\phi_T = \frac{32 M_1 L_1}{\pi G d_1^4} \left[1 + \frac{L_2}{a L_1} \right]$$

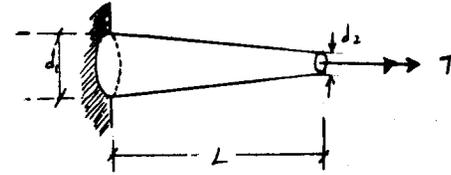
EJERCICIOS

Calcular las dimensiones necesarias de las secciones transversales de las barras y el ángulo total de torsión.

a)

$d_1 = ?$
 $d_2 = ?$
 $Z_{max} = 800 \text{ Kg/cm}^2$
 Resp. $\begin{cases} d_1 = 2.44 \text{ cm} \\ d_2 = 4 \text{ cm} \end{cases}$
 $\phi_T = \frac{13411.9}{G} \text{ (rad)}$

Un eje cónico macizo de acero está rígidamente empotrado por un extremo y sometida a un par de torsión, T, en el otro. Halle la rotación angular del extremo libre si $d_1 = 15 \text{ cm}$, $d_2 = 5 \text{ cm}$, $L = 50 \text{ cm}$ y $T = 30,600 \text{ Kg-cm}$. Suponga -- que son aplicables las hipótesis usuales de la deformación de ejes prismáticos o de sección circular sometidas a torsión $G = 8.72 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$.



Resp.: $\phi = 0.262^\circ$

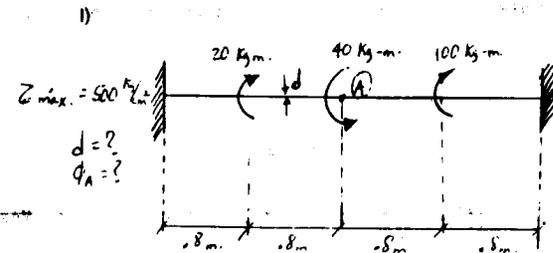
b)

$Z_{max} = 600 \text{ Kg/cm}^2$
 Sección ①: $d_1 = ?$
 Sección ②: $a = ?$
 Resp. $\begin{cases} a = 2.88 \text{ cm} \\ d_1 = 2.44 \text{ cm} \end{cases}$
 $\phi = \frac{6211.35}{G} \text{ (rad)}$

Determine las magnitudes indicadas en los siguientes problemas :

c)

$M_1 = 4 \text{ Kg-m}$
 $d = ?$
 Resp. $d = 1.01 \text{ cm}$



Resp.: $\begin{cases} d = 3.44 \text{ cm} \\ \phi_A = \frac{6163.0}{G} \end{cases}$

II)

$M = 2 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

$Z_{\text{máx.}} = 250 \text{ kg/cm}^2$

$d = ?$

$\phi_A = ?$

Resp.: $\phi_A = 0$

III)

$M = 20 \text{ kg}\cdot\text{m}$

$3M$

$Z_{\text{máx.}} = 800 \text{ kg/cm}^2$

$b = ?$

$\phi_A = ?$

Resp.: $\phi_A = 0$

IV)

$Z_{\text{I}} = 200 \text{ kg/cm}^2$

$Z_{\text{II}} = ?$

Resp.: $Z_{\text{II}} = 271 \text{ kg/cm}^2$

Una barra hecha de dos materiales (1 y 2) está sujeta a un momento torsionante. Determine los esfuerzos en cada uno de los materiales.

Resp.: $\tau_i = \frac{16 T G_i d_i}{\pi [(G_2 - G_1) d_2^4 + G_1 d_1^4]}$

$d_2 = D - (D - d) \frac{x}{L}$

A la viga de la figura de sección circular uniforme, se le aplica una rotación en la sección A. Obtener el diagrama de momentos torsionantes, si -----

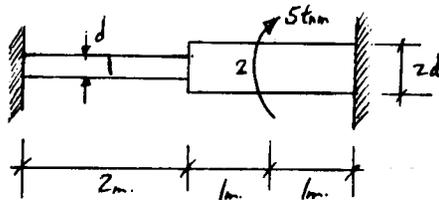
$G = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

$\phi = 12^\circ$

Resp.: $M_{T1} = 2.6 \text{ tons}\cdot\text{m}$

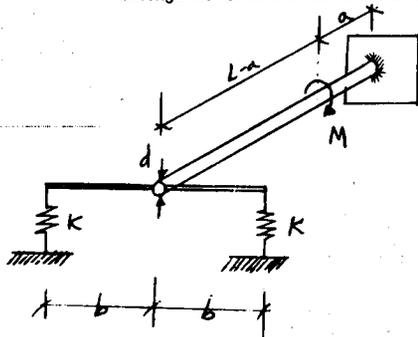
$M_{T2} = 10.4 \text{ tons}\cdot\text{m}$

Considere la barra de la figura, compuesta de dos materiales, y de sección variable. Si el giro máximo permitido es de 5° ¿Cuál debe ser el diámetro d ? Entonces calcule el esfuerzo máximo que se presenta en la barra. Tome $G_1 = 1 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ y $G_2 = 2.5 \times 10^4 \text{ Kg/cm}^2$



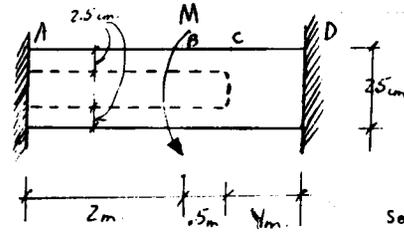
Resp.: $d = 11 \text{ cm}$
 $G_{máx.} = 1920 \text{ Kg/cm}^2$

Considere una barra empotrada en un extremo y ligada a un par de resortes blásticos lineales de rigidez K por medio de dos barras infinitamente rígidas como se muestra en la figura. Si la barra se somete a un momento torsionante M , obtenga las reacciones sobre la barra.



Resp.: $R = \frac{Ma}{2bL + \frac{GJ}{Kb}}$

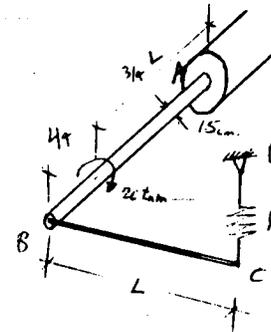
1 Determine el momento torsionante M sobre la barra mostrada en la figura, si el esfuerzo cortante permisible es de 100 Kg/cm^2 y el giro máximo es de 3° . Tome $G = 10^4 \text{ Kg/cm}^2$



Secciones circulares

Resp.: $M = 1.68 \text{ ton.m.}$

Determine las reacciones en A y D, si la barra B-C es infinitamente rígida y el resorte C-D tiene rigidez $K = 1 \text{ ton/cm}$. Tome $G = 10^9 \text{ Kg/cm}^2$



TEMAS IV y V

FLEXION Y DEFORMACIONES POR FLEXION

Oscar M. González Cuevas
Francisco Robles Fernández
Carlos Javier Mendoza

1.1	Introducción (Pág. 249)	
1.2.1	Conceptos Introdutorios (Pág. 251)	
1.2.2	Deformaciones Unitarias (Pág. 254)	
1.2.3	Esfuerzos en vigas de materiales elásticos y lineales (Pág. 259)	
1.2.3.a	Vigas de sección compuesta de materiales no homogéneos (Pág. 281)	
1.2.4	Flexión de vigas de materiales no lineales (Pág. 282)	
1.2.4.a	Flexión asimétrica (Pág. 294)	
1.2.5	Diagramas momento-rotación y carga-deflexión (Pág. 302)	
1.2.5.1	Cálculo de pendientes y deflexiones por integración (Pág. 305)	
1.2.5.2	Cálculo de pendientes y deflexiones mediante el principio de la viga conjugada (Pág. 310)	
1.2.5.3	Cálculo de pendientes y deflexiones por los teoremas área-momento (Pág. 324)	
Apéndice A		Pág. 351
Apéndice B		Pág. 353
Ejercicios Resueltos (flexión)		Pág. 355
Ejercicios propuestos (flexión)		Pág. 363
Ejercicios resueltos (Def. por flexión)		Pág. 370
Ejercicios propuestos (Def. por flexión)		Pág. 386

1. TEORIA DE VIGAS

Oscar M. González Cuevas
Francisco Robles
Carlos Javier Mendoza

1.1 INTRODUCCION

Las vigas son elementos estructurales cuya función primordial es resistir cargas perpendiculares a su eje longitudinal. Las acciones internas más importantes que producen estas cargas son momentos flexionantes y fuerzas cortantes, aunque las vigas pueden estar sometidas también a momentos torsionantes y fuerzas normales.

Por lo común, uno de las dimensiones de las vigas, su longitud, es mucho mayor que sus otras dos dimensiones, su ancho y su peralte. En algunas ocasiones, el peralte es de dimensión comparable con la longitud, y las vigas reciben el nombre de vigas de gran peralte o vigas diafragma. El estudio de este último tipo de vigas no se incluye en estos apuntes.

En la mayoría de las estructuras de ingeniería civil, las vigas se usan para soportar cubiertas y losas de entresijos o azoteas. Las cargas se transmiten a las vigas a través de las losas, y las vigas las transmiten a su vez, a las columnas o muros. Las vigas se emplean también para soportar maquinaria, equipo o grúas viajeras; en puentes; en cimentaciones; etc. Únicamente se estudian aquí vigas isostáticas.

El efecto de los momentos flexionantes sobre las vigas se estudia en la sección

denominada "Teoría de Flexión". Se analizan en dicha sección tanto la resistencia como las deformaciones de vigas sometidas únicamente a flexión simétrica. En la siguiente sección se presentan métodos para determinar la resistencia de vigas a fuerza cortante, sin considerar el efecto combinado de esta acción con el de otras acciones. Se estudia en forma simplista la flexión simétrica. Después se hace un estudio del efecto combinado de momento flexionante y fuerza cortante.

Los conceptos básicos presentados en estas secciones se utilizan en las secciones siguientes para estudiar el dimensionamiento de vigas de madera y concreto. Los vigas de acero, que presentan problemas especiales debidos al efecto de pandeo, se estudian en otro capítulo.

1.2 TEORIA DE FLEXION

1.2.1 Conceptos introductorios

El comportamiento en flexión de elementos estructurales se ha estudiado experimentalmente ensayando especímenes simplemente apoyados y sujetos a dos cargas concentradas, generalmente en los tercios del claro (fig 1.1-a). Como puede verse en los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes mostrados en las figs 1.1-b y 1.1-c, el claro central de este tipo de espécimen se encuentra bajo la acción de momento flexionante únicamente.

Se acostumbra medir en los ensayos la carga que se va aplicando a los especímenes, P , la deflexión en el centro del claro, Δ , y en otras secciones de la viga, y , en ocasiones, la rotación que experimenta la viga entre sus dos extremos, θ (fig 1.1-d). Conocida la carga aplicada, P , y la distancia entre los apoyos y los puntos de aplicación de carga, a , puede calcularse el valor del momento en la zona central, M , correspondiente a diferentes valores de P . Con los datos obtenidos en los ensayos, o sea, con los valores de P, M, Δ y θ , se trazan diagramas carga-deflexión ($P-\Delta$) y momento-rotación ($M-\theta$), los cuales representan el comportamiento

del espécimen de ensaye. En la fig 1.2 se presentan ejemplos de estos diagramas.

El conocimiento de los diagramas carga-deflexión y momento-rotación es importante para fines de diseño estructural, ya que indican la carga o el momento flexionante que pueden resistir estos elementos y las deflexiones y rotaciones correspondientes a diferentes valores de la carga aplicada.

Los diagramas carga-deflexión y momento-rotación pueden obtenerse experimentalmente para casi cualquier tipo de elemento estructural. Sin embargo, esto no resulta práctico por lo laborioso y caro que sería efectuar ensayos en todos los casos en que se fuesen a diseñar elementos a flexión. Por lo tanto, se han desarrollado métodos para calcular analíticamente los diagramas, haciendo ciertas hipótesis sencillas y suponiendo conocidas ciertas características de los materiales con que se fabrican los elementos. En las secciones siguientes de este capítulo se describen estos métodos.

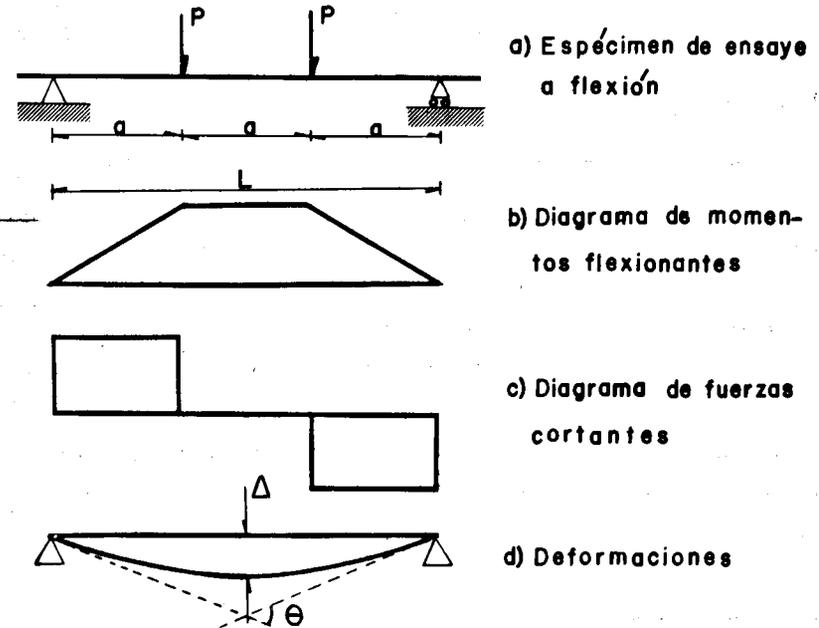


Fig. I.1 Ensaye de flexión típico

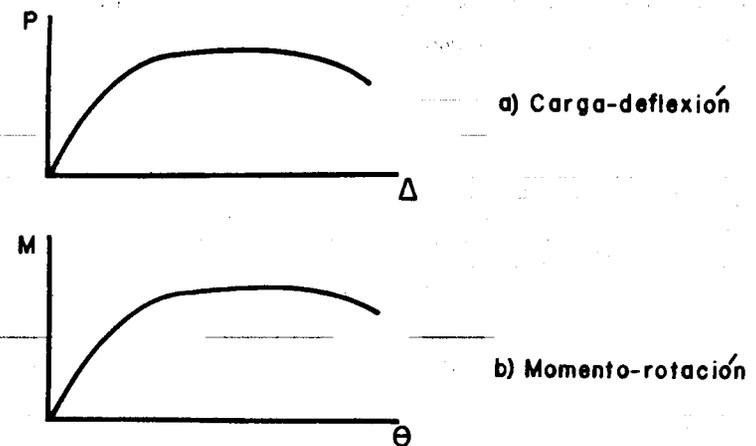
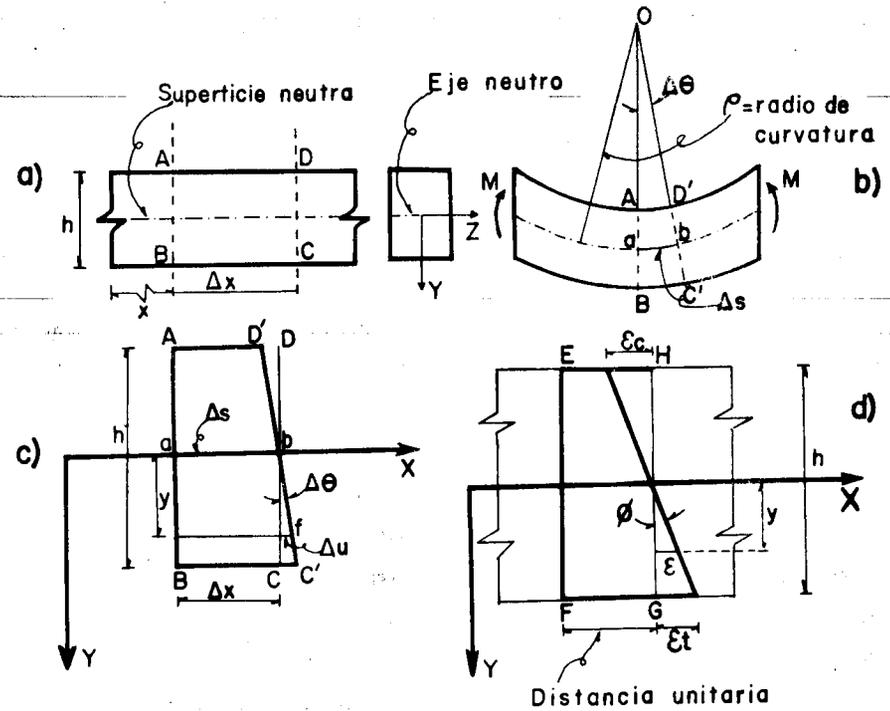


Fig. I.2 Diagramas típicos obtenidos en ensayos de flexión

1.2.2 Deformaciones unitarias, rotaciones y curvaturas

En esta sección se introducen conceptos que se usan posteriormente para calcular diagramas carga-deflexión y momento-rotación. Para ello se analiza el mecanismo de deformación de una viga sujeto a flexión pura y a partir de este mecanismo se obtienen importantes relaciones entre deformaciones unitarias, curvaturas y rotaciones.

Considérese que en la zona central del espécimen de ensaye de la fig 1.1 se hacen dos cortes en las secciones A-B y C-D (fig 1.3-a), distantes entre sí una longitud Δx . Antes de aplicar los cargos P, el eje longitudinal de la viga es recto, como se muestra en la fig 1.3-b, en la que se ve que las fibras de la zona superior de la viga se acortan, o sea, sufren deformaciones de compresión, y las fibras de la zona inferior se alargan, o sea, sufren deformaciones de tensión. Existen algunas fibras que, como puede apreciarse en la figura, no se acortan ni se alargan; es decir, no sufren deformaciones. La superficie en que están contenidas estas fibras que no se deforman se llama superficie neutra y su intersección con una sección transversal de la viga se llama el eje neutro de esa sección.



$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (1.1)$$

$$\phi = \frac{1}{y} \frac{\Delta u}{\Delta s} \quad (1.4)$$

$$\phi = \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \quad (1.2)$$

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{y} \frac{du}{dx} \quad (1.5)$$

$$\Delta \theta = \frac{\Delta u}{y} \quad (1.3)$$

$$\phi = \frac{\epsilon}{y} \quad (1.6)$$

Fig 1.3. Deformaciones en la zona central Del espécimen de la fig 1.1.

En la fig 1.3-b se ha señalado la posición que ocupan en la viga deformada las secciones transversales A-B y C-C. Se puede ver que estas secciones, que originalmente eran paralelas, forman ahora un ángulo $\Delta\theta$ que es la rotación relativa entre las dos secciones. Por conveniencia, se ha elegido la sección A-B como aquella que permanece en un plano vertical al deformarse la viga. La nueva posición de los puntos D y C se ha indicado con índice (D' y C').

Es importante observar en las figs 1.3-b y 1.3-c que las secciones A-B y D-C se han trazado como líneas rectas después de la deformación de la viga. Esto se ha hecho aceptando una hipótesis usual en la teoría de flexión de vigas, la cual establece que las secciones que son planas antes de la deformación continúan siendo planas después de la deformación. Esta hipótesis fue formulada por Navier a principios del siglo XIX y se conoce con el nombre de hipótesis de las secciones planas. Ha sido confirmada experimentalmente para materiales usuales.

En la fig 1.3-c se muestra el segmento de viga ABC'D' en forma amplificada ^{(la posición/} y se muestra también ^{de la sección} C'-D' antes de la deformación de la viga -- (C-D). En esta figura se ha señalado con Δu la deformación que sufre una fibra cualquiera situada a una distancia y del eje neutro. Si se divide esta deformación Δu entre la separación original entre las dos secciones, Δx , se obtiene la deformación unitaria promedio de la fibra considerada.

Si la separación Δx se hace tender a cero y se toman límites, la deformación unitaria de una sección de la viga (fig 1.3-d) se puede expresar como

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dy} \quad (1.1)$$

Puesto que las deformaciones Δu son mayores cuanto más alejados del eje neutro se encuentran las fibras longitudinales de la viga, las deformaciones unitarias máximas se alcanzan en las caras superior e inferior de la viga. Las deformaciones unitarias, ϵ , pueden interpretarse físicamente como los acortamientos y alargamientos que sufren las fibras entre dos secciones separadas entre sí una distancia

unitaria (fig 1.3-d). Las unidades de estos acortamientos y alargamientos son las mismas unidades de la separación unitaria entre las dos secciones. Las deformaciones unitarias, ϵ , son adimensionales puesto que son el cociente de dos longitudes, como indica la ecuación (1.1).

Si se divide la rotación relativa de las secciones A-B y C-D entre su separación, Δs , se obtiene la rotación promedio por unidad de longitud, que recibe el nombre de curvatura y se representa con la letra ϕ .

$$\phi = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad (1.2)$$

Δs es la longitud del arco, a la altura del eje neutro, comprendido entre las secciones A B y C' D' de la viga deformada. En este inciso la curvatura se considera con valor absoluto.

El recíproco de la curvatura recibe el nombre de radio de curvatura, ρ . Como $\rho = \frac{\Delta s}{\Delta\theta}$, su significado físico es el mostrado en la fig 1.3-b. En la sección 1.2.4 se demuestra que la curvatura y el radio de curvatura son constantes si el momento flexionante es constante y si no varían las características geométricas y mecánicas de la viga a lo largo de su eje.

Por semejanza entre los triángulos aOb (fig 1.3-b) y CbC' (fig 1.3-c), el ángulo CbC' es igual al ángulo $\Delta\theta$.

Ahora bien, de la fig (1.3-c) se deduce que

$$\Delta\theta = \frac{\Delta u}{y} \quad (1.3)$$

Sustituyendo la ecuación (1.3) en la ecuación (1.2).

$$\phi = \frac{1}{y} \frac{\Delta u}{\Delta s} \quad (1.4)$$

Puesto que las deformaciones verticales de la viga son pequeñas, el arco es prácticamente igual a la cuerda y por lo tanto Δs es prácticamente igual a Δx ,

y puede sustituir en la ecuación (1.4). Si se hace esta sustitución y la separación Δx se hace tender a cero, la curvatura en una sección transversal, queda expresada por la ecuación:

$$\phi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{y} \frac{du}{dx} \quad (1.5)$$

Pero como se ve en la ecuación (1.1) el término du/dx es la deformación unitaria ϵ . Sustituyendo en la ecuación (1.5) se obtiene

$$\phi = \frac{\epsilon}{y} \quad ; \quad \epsilon = \phi y \quad (1.6)$$

Esta ecuación indica que la curvatura de una sección es igual a la deformación unitaria de una fibra cualquiera, ϵ , dividida entre la distancia de la fibra al eje neutro, y . La curvatura, ϕ , se puede interpretar físicamente como la rotación entre dos secciones separadas entre sí una distancia unitaria (fig 1.3-d). Sus unidades son $(L)^{-1}$ puesto que es el cociente de una cantidad adimensional (ϵ) entre una longitud (y). En cambio, las rotaciones son adimensionales (radiantes) puesto que son el cociente de dos longitudes como puede verse en la ecuación (1.3).

La ecuación 1.6 muestra que las deformaciones unitarias longitudinales, ϵ , son directamente proporcionadas a la curvatura y a la distancia y del eje neutro.

Con la convención de ejes adoptada, para fibras situadas debajo del eje neutro la distancia y es positiva y la deformación unitaria es positiva (tensión). Para fibras situadas arriba del eje neutro se invierten los signos

1.2.3 Esfuerzos en vigas de materiales elásticos y lineales. Fórmula de la esquadria

Considérese una viga de material lineal y elástico (fig 1.4-a), de sección transversal cualquiera, pero simétrica respecto al eje vertical (fig 1.4-b), y supóngase que por efecto de un momento flexionante, M , la viga se deforma de tal manera que la fibra superior sufre una deformación unitaria de compresión, ϵ_c , y la fibra inferior, una deformación unitaria de tensión, ϵ_t . Si se admite la hipótesis de las secciones planas, mencionada anteriormente, el diagrama de deformaciones unitarias en una sección transversal será lineal, como se muestra en la fig 1.4-c. El eje neutro está localizado a distancias c_1 y c_2 de las caras superior e inferior de la viga, respectivamente. El diagrama de esfuerzos resulta también lineal como se muestra en la fig 1.4-d, puesto que existe una relación lineal entre deformaciones unitarias y esfuerzos, según lo indica la curva esfuerzo-deformación del material (fig 1.4-a). El esfuerzo en una fibra cualquiera es $f = E\epsilon$, siendo ϵ la deformación unitaria correspondiente a esa fibra. Siguiendo las convenciones de signo del inciso anterior, los esfuerzos de tensión son positivos y los de compresión, negativos.

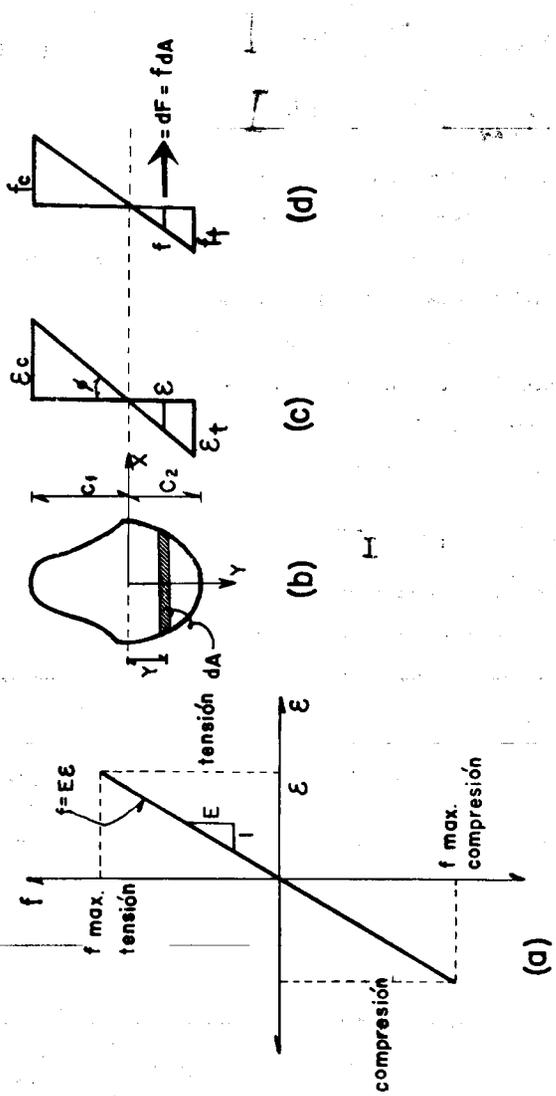


Fig 1.4. Relaciones esfuerzo-deformación en una sección de material elástico

La fuerza de compresión o tensión, dF , en una franja diferencial cualquiera situada a una distancia y del eje neutro, como la indicada en la fig 1.4-b, es igual al producto del área de la franja, dA , por el esfuerzo al nivel de la franja, f . Por lo tanto,

$$dF = f dA = E \cdot \epsilon \cdot dA \quad (1.7)$$

La suma de las fuerzas de compresión y de tensión en la sección transversal se puede encontrar integrando la ecuación (1.7) entre los límites $y = -c_1$ y $y = c_2$:

$$C + T = \int_{-c_1}^{c_2} E \cdot \epsilon \cdot dA$$

Para que la sección esté en equilibrio, la fuerza de compresión, C , debe ser igual y de signo contrario a la de tensión, T . Por lo tanto, la integral debe ser igual a cero:

$$\int_{-c_1}^{c_2} E \cdot \epsilon \cdot dA = 0$$

Esta integral se puede escribir también en la siguiente forma:

$$\int_{-c_1}^{c_2} E \frac{\epsilon}{y} y dA = 0$$

El término ϵ/y es constante ya que por triángulos semejantes en la fig.

1.4-c se obtiene:

$$\frac{\epsilon}{y} = \frac{\epsilon_c}{c_1} = \frac{\epsilon_t}{c_2} = \text{constante}$$

Sacando los términos constantes del integrando:

$$E \frac{E}{Y} \int_{-c_1}^{c_2} y dA = 0$$

Para que se cumpla esta ecuación, la integral debe ser nula puesto que los términos constantes no lo son. Por lo tanto,

$$\int_{-c_1}^{c_2} y dA = 0 \quad (1.8)$$

Esta integral representa el momento estático o momento de primer orden de la sección transversal respecto al eje neutro e indica que dicho momento es nulo. Para que se cumpla esta condición, el eje neutro debe coincidir con el eje centroidal de la sección, ya que el momento estático de un área sólo es nulo respecto a su eje centroidal.

Una vez conocida la posición del eje neutro, puede calcularse el momento resistente de la sección tomando momentos de las fuerzas dF respecto al eje neutro:

$$M = \int_{-c_1}^{c_2} y dF = \int_{-c_1}^{c_2} y f dA = \int_{-c_1}^{c_2} y E \epsilon dA = \int_{-c_1}^{c_2} E \frac{\epsilon}{Y} y^2 dA$$

Puesto que el término E/Y es constante, según se demostró anteriormente, esta integral se puede escribir de la manera siguiente:

$$M = \frac{E \epsilon}{Y} \int_{-c_1}^{c_2} y^2 dA = \frac{f}{Y} I \quad (1.9)$$

donde I representa el momento de inercia o momento de segundo orden de la sección transversal del elemento ^{respecto} a su eje centroidal, que es igual precisamente a

$$\int_{-c_1}^{c_2} y^2 dA$$

El momento máximo que puede resistir una sección transversal se obtiene cuando el esfuerzo f en la fibra más alejada del eje neutro es igual al esfuerzo máximo, f_{max} , que resiste el material en un ensayo de tensión o compresión uni-

axial (fig 1.4-a). Por lo tanto,

$$M_{max} = \frac{(f_{max})_{compr}}{c_1} I \quad (1.10)$$

$$M_{max} = \frac{(f_{max})_{tens}}{c_2} I \quad (1.11)$$

Estas ecuaciones indican que la resistencia del elemento puede alcanzarse de dos maneras. Si el término $(f_{max})_{compr} / c_1$ es menor que el término $(f_{max})_{tens} / c_2$, la falla ocurre en compresión, y, en caso contrario, la falla ocurre en tensión. Las ecuaciones 1.10 y 1.11 se conocen con el nombre de fórmulas de flexión o fórmulas de la escuadría.

La ecuación (1.9) se utiliza también para encontrar el esfuerzo en cualquier punto a que se encuentra sujeto al material cuando se conoce el momento flexionante que actúa sobre un elemento. Despejando el término f de dicha ecuación:

$$f = \frac{M}{I} y \quad (1.12)$$

Como el esfuerzo máximo es el que se presenta en la fibra más alejada del eje neutro, se puede encontrar dicho esfuerzo sustituyendo el término y por el término c que representa la distancia del eje neutro a la fibra más alejada.

Se obtiene:

$$f = \frac{M}{I} c \quad (1.13-a)$$

El término $1/c$ es constante para una sección transversal dada. Se representa usualmente con la letra S y se conoce con el nombre de módulo de sección.

La ecuación (1.13-a) puede escribirse por lo tanto:

$$f = \frac{M}{S} \quad (1.13-b)$$

Si la sección no es simétrica con respecto al eje neutro, existirá un módulo de sección para cada cara, como sucede en el ejemplo 1.3.

El momento M que aparece en las ecuaciones anteriores es positivo cuando produce compresión en la parte superior de la viga, y, de acuerdo con la convención de ejes, la distancia y es positiva hacia abajo (fig 1.5 y Apéndice B).

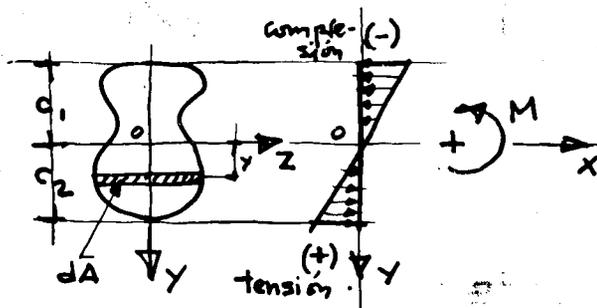


Fig 1.5 Convención de signos.

La curvatura de la sección transversal, según se ha visto anteriormente, es (fig 1.4-c):

$$\phi = \frac{\epsilon}{y} \quad (1.6)$$

Puesto que para un material elástico, $\epsilon = f/E$,

$$\phi = \frac{f}{Ey}$$

Según la ecuación 1.12:

$$\frac{f}{y} = \frac{M}{I}$$

Por lo tanto, la curvatura puede calcularse con la siguiente ecuación:

$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right| \quad (1.14)$$

Como se indicó anteriormente, no se establecerá por el momento convención respecto al signo de la curvatura, considerándose únicamente su valor absoluto.

El diagrama momento-curvatura para un elemento de material elástico será, por lo tanto, como el que se muestra en la fig 1.6.

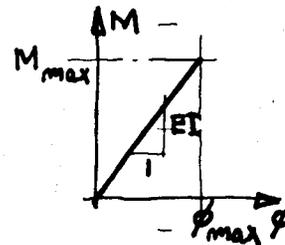


Fig 1.6 Diagrama M-phi para el caso de materiales lineales y elásticos

En los ejemplos 1.1 a 1.4 se presentan diversas aplicaciones de la fórmula de la escuradría y del módulo de sección. En algunos casos se ilustra el cálculo de curvaturas. Los datos de los ejemplos se han formulado de manera que resulta evidente dónde los esfuerzos son de tensión y dónde de compresión.

Ejemplo 1.1.- Se trata en este ejemplo de determinar el momento máximo que puede resistir una sección de un material homogéneo y elástico, conocidas las características geométricas de la sección y las relaciones esfuerzo-deformación del acero. El material considerado tiene resistencias diferentes según se trate de esfuerzos de tensión y compresión. Es necesario, entonces, calcular el momento resistente correspondiente a cada una de las dos formas de falla posibles. Regirá el valor menor. La curvatura determinada es la que corresponde a este valor. Como

la sección es asimétrica y el momento de inercia utilizado en la fórmula de la escuadría es el centroidal, fue necesario determinar primero la posición del eje neutro y calcular entonces el momento de inercia correspondiente a este eje, lo que se hizo recurriendo al teorema de los ejes paralelos.

Ejemplo 1.2.- Este ejemplo es uno de revisión en que se pide encontrar los esfuerzos máximos que un sistema de fuerzas dado produce en una viga de sección conocida. También se pide la curvatura en la sección de momento máximo. La sección de momento máximo se localiza fácilmente con la ayuda del diagrama de cortante, ya que los máximos se presentan donde los cortantes son nulos. Los cálculos para la obtención de los diagramas de fuerza cortante y momento se basan en la aplicación de principios elementales de estática y no se han incluido aquí. Las consideraciones sobre el momento de inercia hechas en el ejemplo 1.1 son también aplicables aquí.

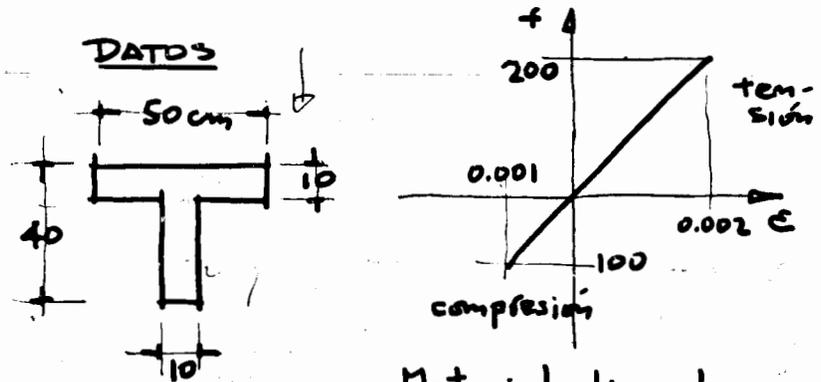
Ejemplo 1.3.- Muchas veces es útil emplear la fórmula de la escuadría en función del módulo de sección. En este ejemplo se ilustra el cálculo de los módulos de sección de una sección triangular y su aplicación al cálculo de esfuerzos.

Ejemplo 1.4.- Este es también un ejemplo de revisión, como el ejemplo 1.2, aunque el planteo es diferente. Se trata aquí de determinar la carga uniforme que puede soportar una viga de sección conocida sin que se excedan unos esfuerzos de tensión y compresión dados. En el ejemplo se supone que los esfuerzos admisibles de tensión y compresión son iguales. Como en el ejemplo 1.2, las ecuaciones donde se presentan los momentos máximos se determinaron con la ayuda de los diagramas de fuerza cortante.

Vigas de sección compuesta de materiales no homogéneos. (Ver pág

291

EJEMPLO 1.1 CALCULO MOMENTO RESISTENTE / Y CURVATURA DE UNA SECCION T POR MEDIO DE LA FORMULA DE LA ESCUADRIA



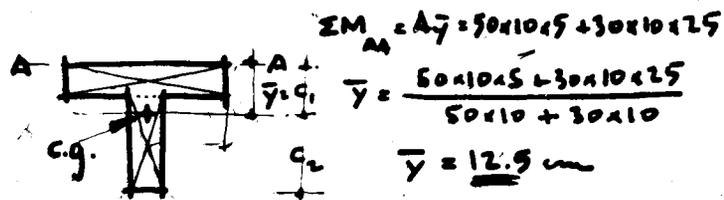
Material lineal y elástico

Se pide :

- Determinar el momento máximo que puede resistir la sección dada sin que se excedan los esfuerzos indicados. (Considerar que el momento se aplica de manera que la fibra superior es la comprimida.)
- Determinar la curvatura correspondiente al momento calculado en a).

EJEMPLO (1.1) (Continuación)

2

Posición del eje neutroMomento de inercia centroidal

$$I = \frac{50 \times 10^3}{12} + 500(12.5 - 5)^2 + \frac{10 \times 30^3}{12} + 300(25 - 12.5)^2$$

$$I = \underline{102\,570 \text{ cm}^4}$$

Momentos resistentes en tensión y compresión

En tensión: (Ec 1.11)

$$M_t = \frac{(f_{max})_{tens} I}{c_2} = \frac{200 \times 102\,570}{27.5}$$

$$= 745\,000 \text{ kg-cm}$$

EJEMPLO (1.1) (Continuación)

3

En compresión: (Ec 1.10)

$$M_c = \frac{(f_{max})_{comp} I}{c_1} = \frac{100 \times 102\,570}{12.5}$$

$$= 820\,000 \text{ kg-cm}$$

$M_t < M_c$ ∴ el momento máximo que puede resistir la sección es

$$M_{max} = 745\,000 \text{ kg-cm}$$

Curvatura

$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right| \quad (\text{Ec 1.14})$$

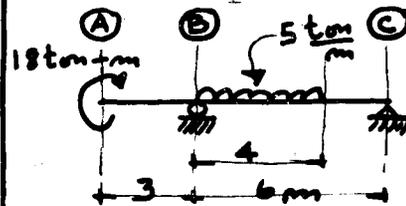
$$E = \frac{f}{\epsilon} = \frac{100}{0.001} = 100\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right| = \left| \frac{7.45 \times 10^5 \text{ kg-cm}}{10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 1.0257 \times 10^5 \text{ cm}^4} \right|$$

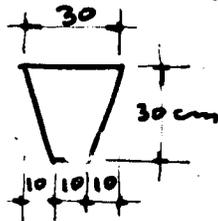
$$\phi = \left| 7.27 \times 10^{-5} \right|$$

EJEMPLO 1.2 CALCULO DE ESFUERZOS NORMALES DEBIDOS A FLEXION EN UNA VIGA DE SECCION TRAPEZIAL

DATOS



$$E = 1\,500\,000 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$$

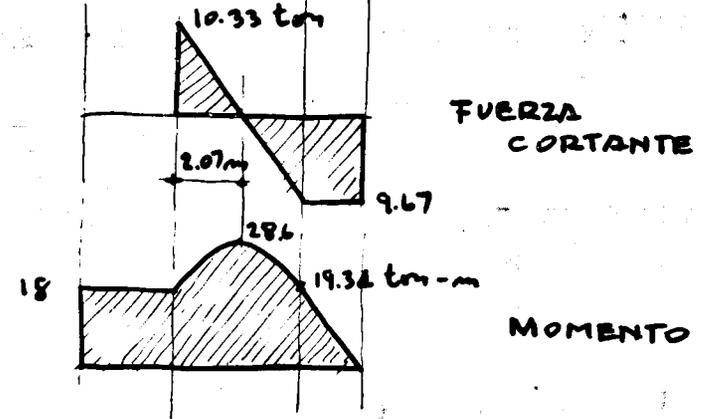
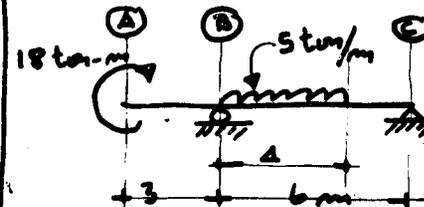


Se pide:

- Determinar los diagramas de fuerza cortante y de momento de la viga.
- Calcular los esfuerzos en las fibras superior e inferior en la sección donde el momento sea máximo.
- Calcular la curvatura en la sección de momento máximo.

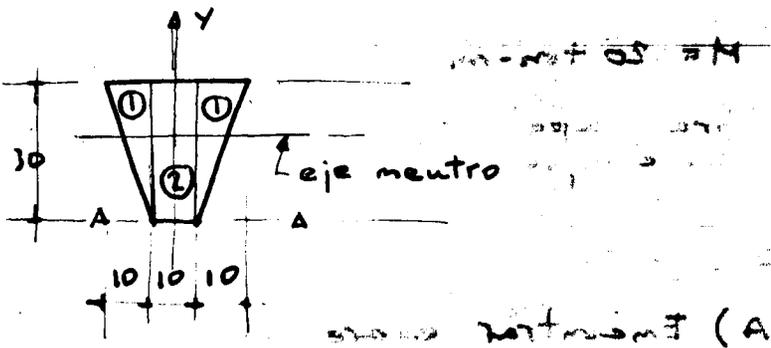
EJEMPLO 1.2 (Continuación)

DIAGRAMAS



EJEMPLO (1.2) (Continuación) 3

MOMENTO DE INERCIA



Posición eje neutro

Tomando momentos con respecto al eje A-A:

Parte	A	y'	Ay'
①	$10 \times 30 = 300$	20	6000
②	$10 \times 30 = 300$ 600 cm ²	15	4500 10500 cm

$$\bar{y} = \frac{10500}{600} = \underline{\underline{17.5 \text{ cm}}}$$

EJEMPLO (1.2) (Continuación) 4

Cálculo del momento de inercia

Parte	$y' - \bar{y}$	$A(y' - \bar{y})^2$	I_0
①	2.5	1875	$\frac{1}{36} \times 20 \times 30^3 = 15000$
②	-2.5	1875	$\frac{1}{12} \times 10 \times 30^3 = 22500$
	0	23750	37500

$$I = 3750 + 37500 = \underline{\underline{41250 \text{ cm}^4}}$$

CALCULO DE ESFUERZOS

$$f = \frac{M}{I} y$$

Fibra superior:

$$f_s = \frac{28.6 \times 10^5 \times 12.5}{41250} = \underline{\underline{866 \text{ kg/cm}^2}} \text{ (compresión)}$$

Fibra inferior:

$$f_i = \frac{28.6 \times 10^5 \times 17.5}{41250} = \underline{\underline{1215 \text{ kg/cm}^2}} \text{ (tensión)}$$

EJEMPLO (1.2) (Continuación)

5

CURVATURA

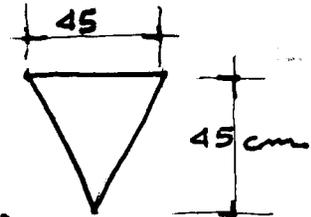
$$\phi = \left| \frac{M}{EI} \right|$$

$$= \left| \frac{28.6 \times 10^5 \text{ kg-cm}}{1.5 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \times 4.125 \times 10^3 \text{ cm}^4} \right|$$

$$\phi = \left| \frac{0.463 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-1}}{\quad} \right|$$

EJEMPLO (1.3) MODULOS DE SECCION
DE UNA SECCION TRIANGULARDATOS

$$M = 20 \text{ ton-m}$$

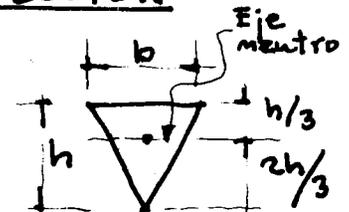
(fibra superior
en compresión)Se pide:

- A) Encontrar expresiones generales para los módulos de sección.
- B) A partir de las expresiones obtenidas en A, calcular los esfuerzos producidos en la sección dada por $M = 20 \text{ ton-m}$.

A) MODULOS DE SECCION

$$S = \frac{I}{c}$$

$$I_A = \frac{bh^3}{36}$$



EJEMPLO (1.3) (Continuación)

2

Para la fibra superior:

$$S_s = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{h}{3}} = \frac{bh^2}{12}$$

Para la fibra inferior:

$$S_i = \frac{\frac{bh^3}{36}}{\frac{2h}{3}} = \frac{bh^2}{24}$$

b) CALCULO DE ESFUERZOS

$$f = \frac{M}{S}$$

Para la fibra superior:

$$S_s = \frac{bh^2}{12} = \frac{45 \times 45^2}{12} = 7560 \text{ cm}^3$$

EJEMPLO (1.3) (Continuación)

3

$$f_s = \frac{M}{S_s} = \frac{-20 \times 10^5 \text{ kg-cm}}{7560 \text{ cm}^3} = \underline{\underline{264 \text{ kg/cm}^2}} \text{ (Compresión)}$$

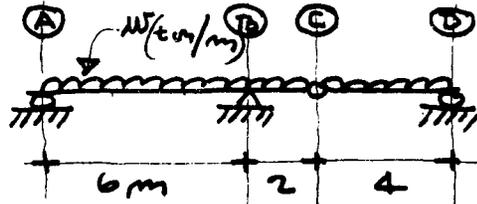
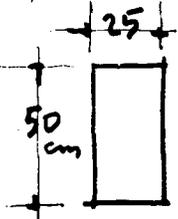
Para la fibra inferior:

$$S_i = \frac{bh^2}{24} = \frac{45 \times 45^2}{24} = 3780 \text{ cm}^3$$

$$f_i = \frac{M}{S_i} = \frac{20 \times 10^5 \text{ kg-cm}}{3780 \text{ cm}^3} = \underline{\underline{528 \text{ kg/cm}^2}} \text{ (Tensión)}$$

EJEMPLO (1.4) CALCULO DE LA CARGA UNIFORME QUE PUEDE SOPORTAR UNA VIGA

DATOS



Esfuerzo admisible en tensión y compresión:

$$f = 150 \text{ kg/cm}^2$$

Se pide:

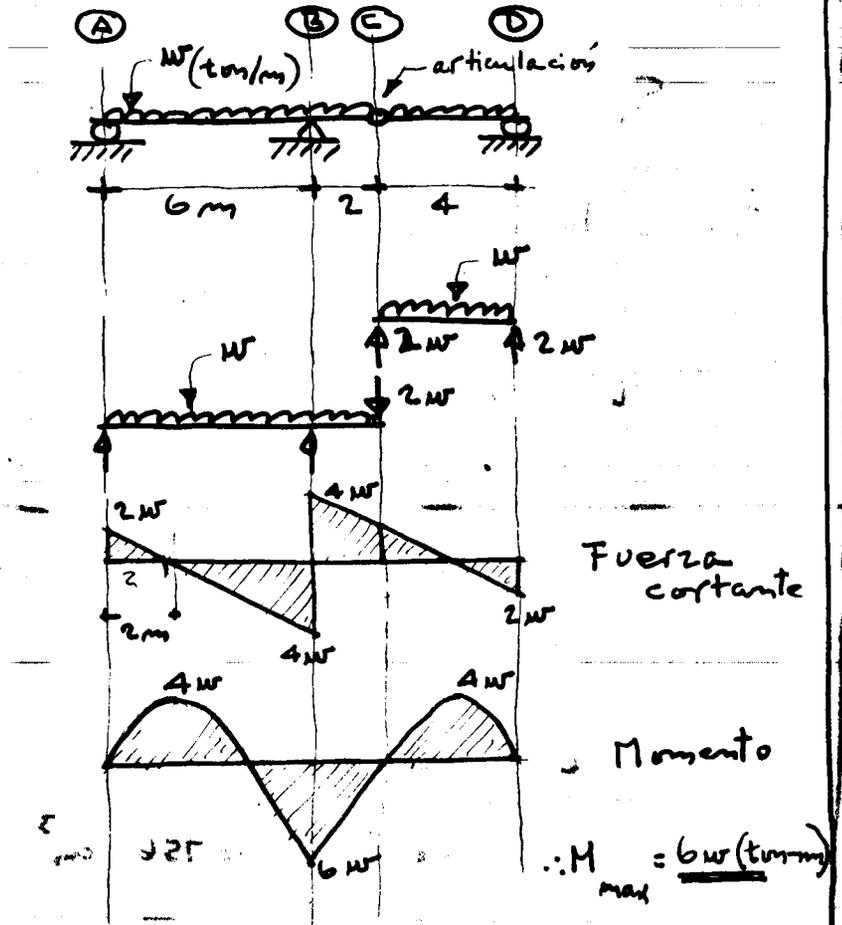
Encontrar la carga w que puede soportar la viga sin que se exceda el esfuerzo dado.

DIAGRAMAS DE MOMENTO Y FUERZA CORTANTE

(Ver siguiente hoja.)

EJEMPLO (1.4) (Continuación)

DIAGRAMAS DE MOMENTO Y FUERZA CORTANTE



EjemPlo 1.4 (Continuación)

3

MOMENTO QUE RESISTE LA SECCION PARA $f = 150 \text{ kg/cm}^2$

$$M_R = fS$$

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{25 \times 50^2}{6} = 10400 \text{ cm}^3$$

$$M_R = 150 \times 10400 = 1\,560\,000$$

trasm. como $M_R = 15.6 \text{ tm-m}$ kg-cm

CALCULO DE W

$$M_{max} = M_R$$

$$bW = 15.6$$

$$W = 2.6 \frac{\text{tm}}{\text{m}}$$

1.2.3.4 Vigas de sección compuesta de materiales no homogéneos

A veces se utilizan materiales no homogéneos para formar lo que suele llamarse vigas de sección compuesta. Así puede combinarse la madera con el acero o el acero con el concreto. En la fig 1.6 bis se muestran algunas secciones compuestas típicas. En todas ellas debe lograrse que las superficies de contacto entre materiales distintos no presentan deslizamientos relativos.

Las secciones compuestas de materiales elásticos sometidos a flexión pueden analizarse con base en los principios fundamentales expuestos en las secciones anteriores. En ellos se basa el método de la sección transformada, que se expone en la sección 3.3 en relación con la investigación de esfuerzos en vigas de concreto reforzado, el tipo de sección compuesta más común. En ^{los} ejemplos 3.3 y 3.4 se ilustra la aplicación del método a vigas de esta clase.

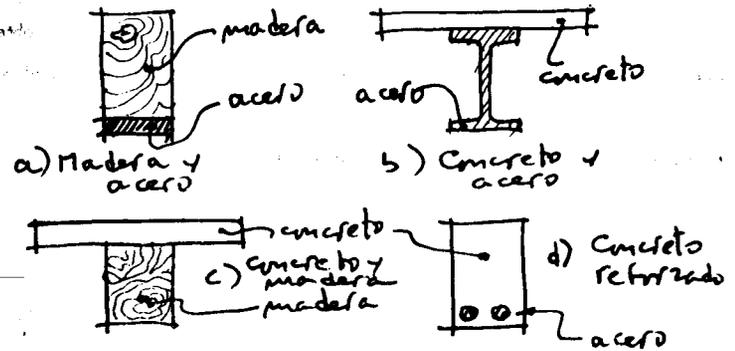


Fig 1.6 bis - Ejemplos de secciones compuestas

1.2.4 Flexión en vigas de materiales no lineales

Supóngase que en el ensayo a flexión de un elemento como el mostrado en la fig 1.1 se miden en un instante dado la carga aplicada, P , la deformación unitaria en la fibra superior, ϵ_c , y la deformación unitaria en la fibra inferior, ϵ_t . (Existen instrumentos de laboratorio, tanto mecánicos como eléctricos, diseñados especialmente para medir deformaciones unitarias.) A partir de estos datos pueden calcularse el momento flexionante aplicado al elemento en la zona central, $M = Pa$ (fig 1.1) y la curvatura de una sección transversal situada en dicha zona, $\phi = (\epsilon_c + \epsilon_t)/h$ (fig 1.3). Si se repite el procedimiento para otros valores de la carga aplicada, se obtienen varios valores de M y ϕ , los cuales definen una gráfica como la mostrada en la fig 1.7, que recibe el nombre de diagrama momento-curvatura. Cada punto del diagrama corresponde a distintos valores de las deformaciones ϵ_c y ϵ_t , lo cual se ha indicado con los diagramas de deformaciones unitarias mostrados en la figura.

Los diagramas momento-curvatura son importantes porque sirven para obtener diagramas momento-rotación y carga-deflexión, los cuales se utilizan en el diseño de elementos, como se mencionó en la sección 1.2.1. Además, un diagrama de este tipo indica cuál es el momento máximo que puede resistir la sección transver-

sal de un elemento, como se ve en la fig 1.7. A continuación se presentan métodos para obtener diagramas momento-curvatura cuando se conocen los diagramas es fuerza-deformación del material obtenidos en ensayos de tensión o compresión axial.

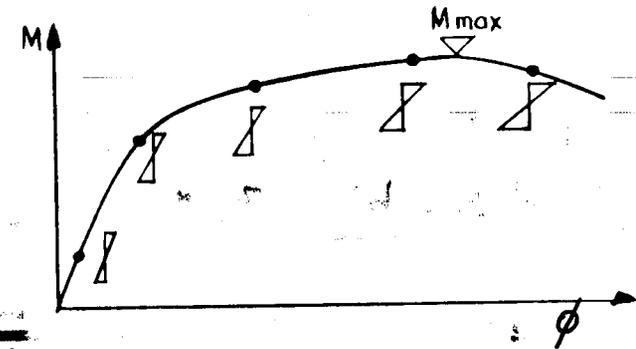


Fig 1.7 Diagrama momento-curvatura

Supóngase, para fines de ilustración, que se trata de obtener el diagrama momento-curvatura de un elemento de sección rectangular, de 10 cm de ancho y 20 cm de altura, fabricado con un material cuya gráfica esfuerzo-deformación se muestra en la fig 1.8. Un procedimiento para obtener el diagrama $M-\phi$ es el siguiente.

- Supóngase un valor de la deformación unitaria en la fibra superior, ϵ_c , (fig 1.3-d) que esté comprendido en el rango de valores de la fig 1.8. Para fines de ilustración, supóngase que se eligió el valor $\epsilon_{c1} = 0.003$ mostrado en la fig 1.9-a.
- Supóngase un valor de la profundidad del eje neutro, c_1 . En este ejemplo se eligió $c_1 = 7.5$ cm, como se muestra en la fig 1.9-a.
- Calcúlese, por triángulos semejantes o gráficamente, el valor de la deformación unitaria al nivel medio de cada una de las franjas en que se ha dividido la sección transversal (fig 1.9-a). Esto puede hacerse a partir de los valores de ϵ_{c1} y c_1 , y de la distancia desde el centroide de la franja a la cara superior de la viga. Por ejemplo, el valor de la deformación unitaria al nivel medio de la franja inferior es:

$$\epsilon_c = \epsilon_{a1} \frac{12.5 - 0.5 \times 1.25}{7.5} = \frac{0.003 \times 11.9}{7.5} = 0.00476$$

valor mostrado en la fig. 1.9-a.

Generalmente, es suficiente dividir en cinco o seis franjas la zona de compresión, y en otro tanto, la zona de tensión.

- d) Para cada valor de las deformaciones unitarios de la fig 1.9-a, determínese el esfuerzo correspondiente en el diagrama esfuerzo-deformación del material mostrado en la fig 1.8. Los esfuerzos correspondientes se muestran en la fig 1.9-c. Por ejemplo, a la deformación de 0.00476 calculada en el inciso anterior, corresponde un esfuerzo de 310 kg/cm² en la gráfica de la fig 1.8. Como puede verse, determinan un diagrama de esfuerzos - cuya forma es semejante a la del diagrama de la fig 1.8
- e) Calcúlense las fuerzas de compresión mostradas en la fig 1.9-d. Cada una de estas fuerzas es igual al esfuerzo promedio en la franja multiplicado por el peralte de la franja y por el ancho de la sección transversal de la viga. Por ejemplo, la fuerza correspondiente a la tercera franja de la fig 1.9-d se calculó de la siguiente manera:

$$\frac{320 \times 1.25 \times 10}{1000} = 4.0 \text{ tm}$$

- f) Calcúlense las fuerzas C y T, fig 1.9-d, que son las resultantes de las fuerzas de compresión y tensión de todas las franjas.
- g) Compárense entre si las fuerzas C y T. Si son iguales, la sección transversal de la viga está en equilibrio de fuerzas horizontales, y se pasa a calcular el momento flexionante como se describe en el párrafo (h). Si no son iguales, como en el caso de la fig. 1.9, la sección transversal no es-

tá en equilibrio. Debe suponerse un nuevo valor de la profundidad del eje neutro, c_1 , y repetir el procedimiento desde el párrafo (b) cuantas veces sea necesario hasta que las fuerzas C y T sean iguales o, más correctamente, hasta que la diferencia entre las fuerzas C y T sea muy pequeña (menor - del 5% del valor de la menor de las fuerzas, aproximadamente). En la fig 1.10 se muestra otro tanteo del mismo problema en el cual la diferencia entre las fuerzas C y T es suficientemente pequeña.

- h) Cuando la sección transversal esté en equilibrio, se calcula el momento flexionante, multiplicando cada una de las fuerzas de compresión y tensión en las franjas de la fig 1.10-d por su distancia al eje geométrico de la viga. Este cálculo se muestra en las figs 1.10-e y 1.10-f.
- i) Una vez que se haya encontrado la profundidad del eje neutro para la cual está en equilibrio la sección transversal de la viga, calcúlese la curvatura de la sección, ϕ , dividiendo la deformación unitaria, ϵ_c , supuesta en el párrafo (a), entre la profundidad del eje neutro correspondiente al equilibrio, c_1 . Por ejemplo, para el caso de la fig 1.10, la curvatura de la sección transversal es:

$$\phi = \frac{0.003}{9.5} = 0.000315 \text{ cm}^{-1}$$

El momento obtenida en la etapa (h) y la curvatura obtenida en la etapa (i) definen un punto del diagrama momento-curvatura de la fig 1.7. Pueden obtenerse otros puntos suponiendo otros valores de ϵ_c en la etapa (a) del procedimiento descrito anteriormente, hasta tener un número suficiente para definir la forma del diagrama M - ϕ .

En la fig 1.11 se muestra el diagrama momento curvatura obtenido de la manera anterior para la sección de 10 x 20 cm y el material con la gráfica esfuerzo - deformación de la fig 1.8. Se muestran también los estados de deformaciones para los puntos con los que se definió el diagrama. El momento flexionante resistente de

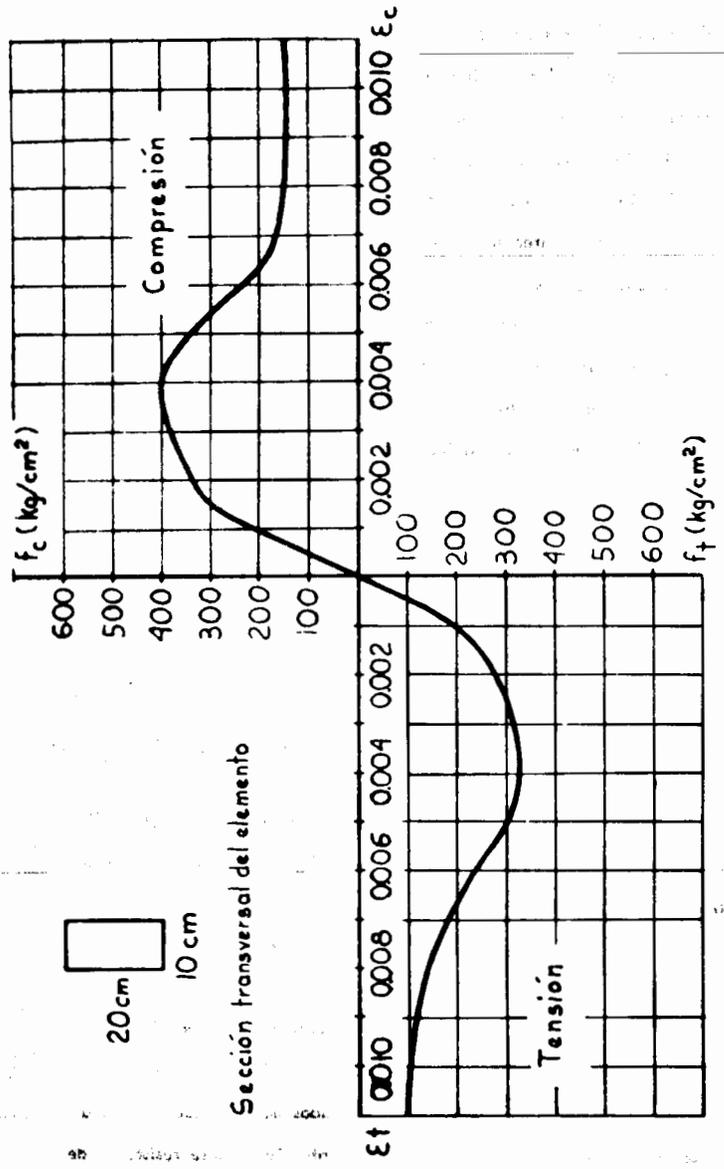


Fig 1.8 Curva esfuerzo - deformación supuesto en el ejemplo

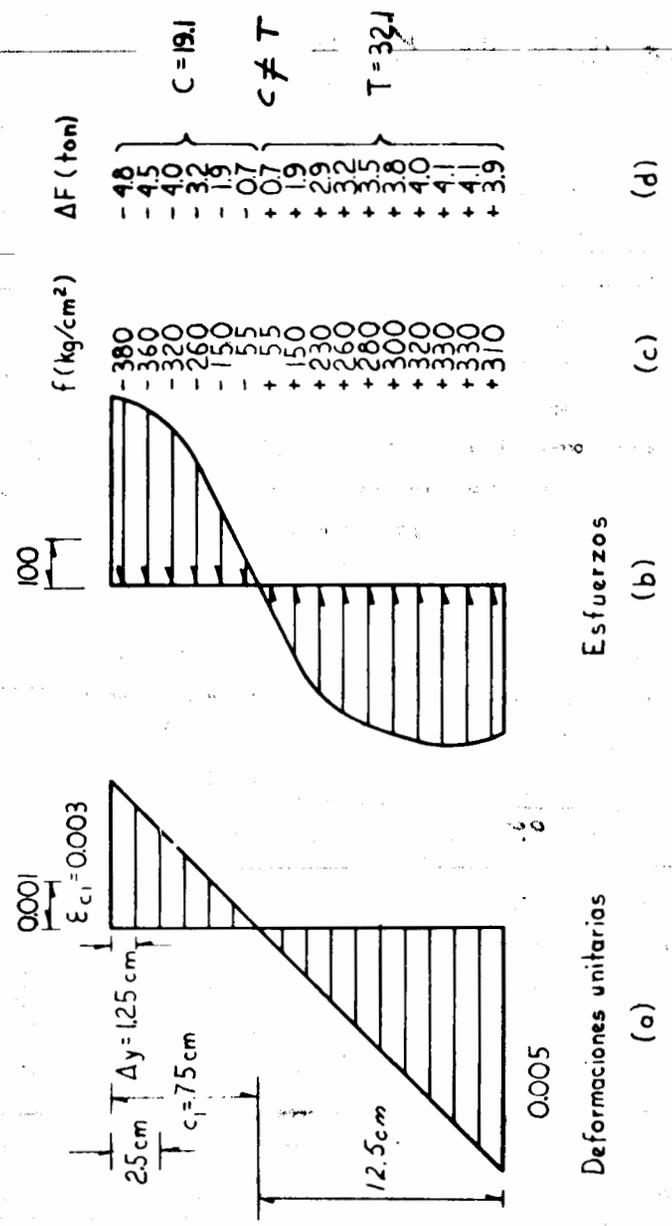
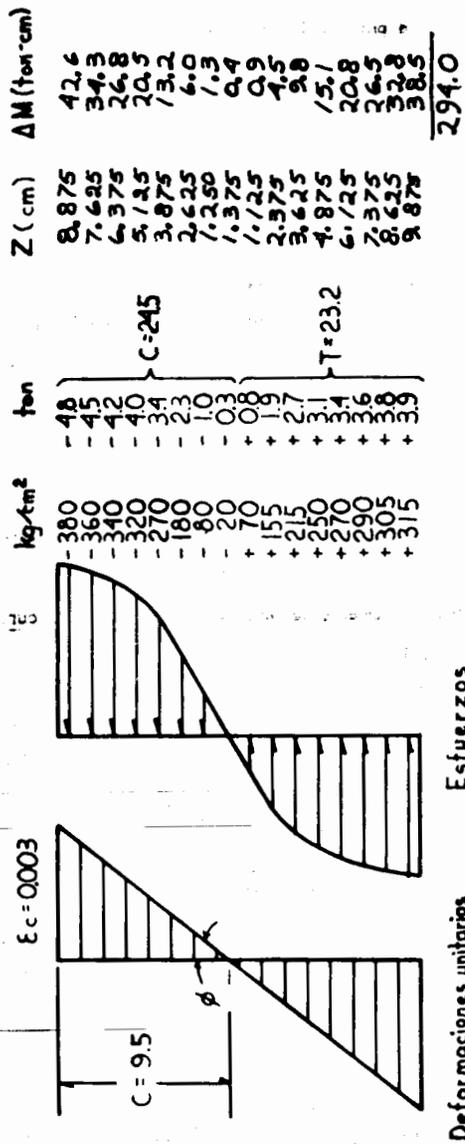


Fig 1.9 Obtención de las fuerzas de compresión y tensión a partir de un diagrama de deformación unitarias



$M = 294.0 \text{ ton-cm}$
 $\phi = \frac{0.003}{9.5} = 0.000315 \text{ cm}^{-1}$

Fig 1.10 Obtención del momento y la curvatura a partir de un diagrama de deformaciones unitarias

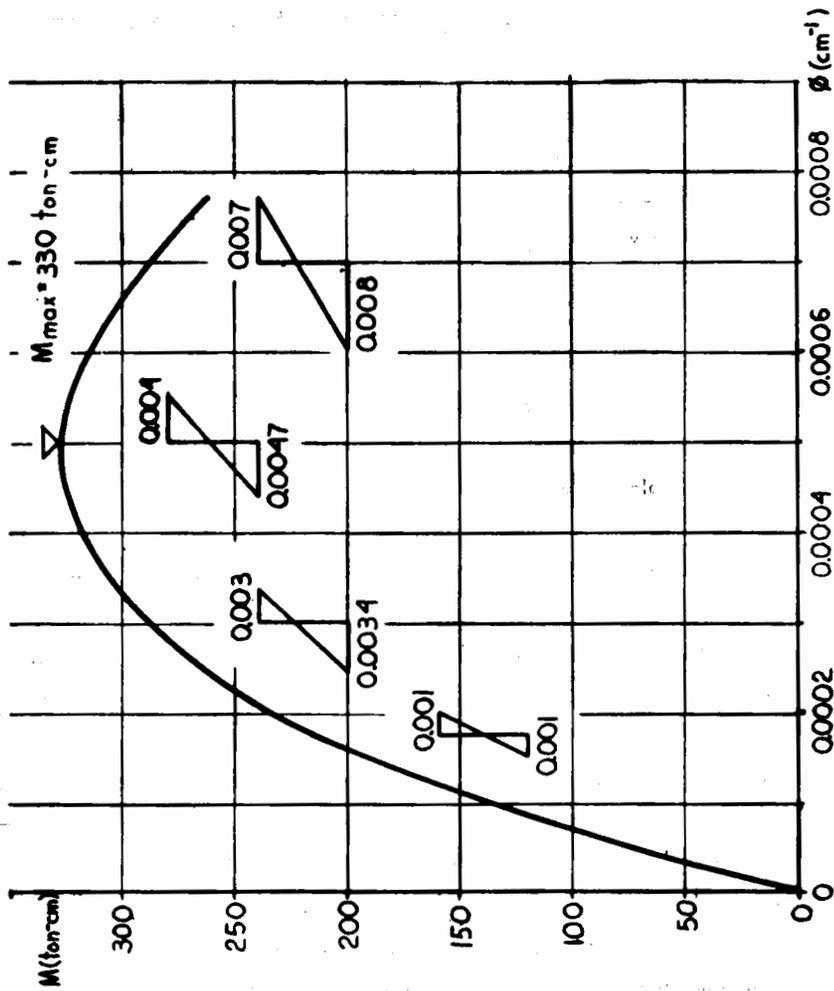


Fig 1.11 Diagrama M - φ

la sección transversal es de 3.3 ton-m

Pueden presentarse los tres siguientes casos de diagramas momento-curvatura:

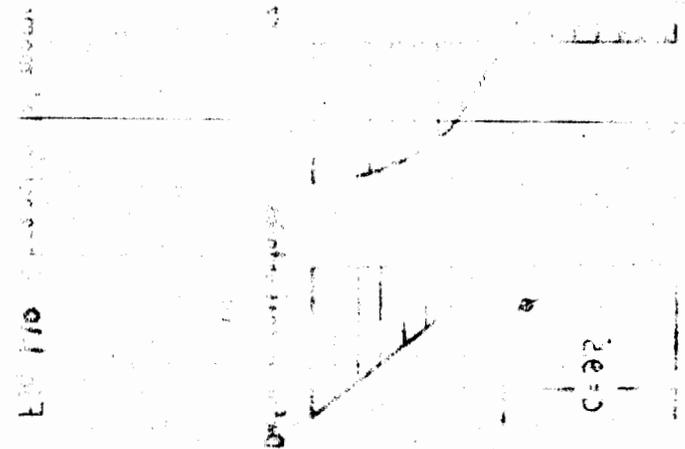
- a) El diagrama momento-curvatura presenta una rama descendente y un punto de momento máximo al iniciarse esta rama. Este es el caso de la fig 1.11 y se presenta esquemáticamente en la fig 1.12-a.
- b) Se alcanza la deformación unitaria máxima en compresión del material sin que se presente una rama descendente y sin que se alcance la deformación máxima en tensión del material. En este caso, el diagrama momento-curvatura y la distribución de deformaciones unitarias al alcanzarse la resistencia son como los mostrados en la fig 1.12-b.
- c) Se alcanza la deformación unitaria máxima en tensión sin que se presente la rama descendente del diagrama $M - \phi$ y sin que se alcance la deformación unitaria máxima en compresión. Este caso se ilustra en la fig 1.12-c.

El procedimiento numérico descrito en esta sección resulta sumamente laborioso para efectuarlo sin ayuda de computadora, ya que cada punto del diagrama requiere una serie de tanteos hasta lograr el equilibrio de la sección transversal. Sin embargo es relativamente sencillo escribir un programa de computadora para desarrollar los cálculos, y el procedimiento tiene la ventaja de ser completamente general y aplicable cualquiera que sea la gráfica esfuerzo deformación del material. También puede generalizarse fácilmente a secciones no rectangulares. En este caso, cada una de las fuerzas parciales de compresión y tensión se obtiene multiplicando el esfuerzo promedio en la franja por el peralte de la franja y por el ancho de la sección transversal al nivel del centroide de la franja considerada.

Cuando la gráfica esfuerzo-deformación se puede definir por medio de una

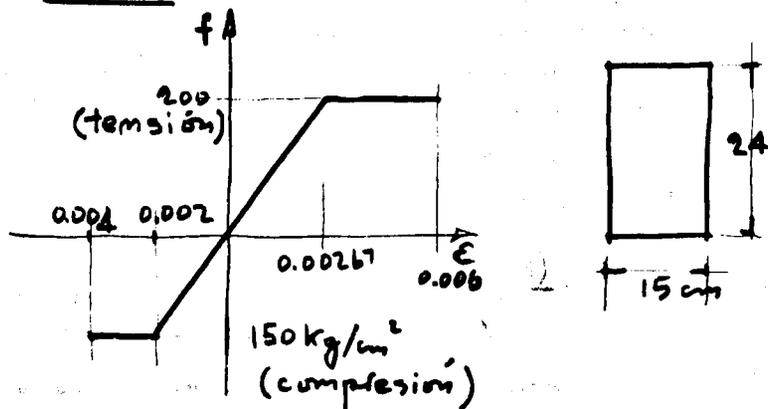
ecuación sencilla, es posible seguir un procedimiento analítico para determinar el momento que puede soportar una sección. Esto fue lo que se hizo en el inciso anterior con el caso particular de materiales de comportamiento lineal y elástico. Se dedujo en esta sección la fórmula de la escurdria, que relaciona el momento que actúa en una sección con sus características geométricas y los esfuerzos generados en ella por el momento dado. En el ejemplo 1.5 se presenta otro caso particular, el de un material elasto-plástico.

Ejemplo 1.5.- El material dado exhibe un comportamiento elasto-plástico tanto en compresión como en tensión. Sin embargo el esfuerzo y la deformación unitaria correspondientes a la rotura con distintos. Evidentemente rige la compresión. Dada la simetría de la sección y dado que los modulos de elasticidad en compresión y en tensión son iguales, el eje neutro queda a la mitad del peralte de la sección. El diagrama de deformaciones unitarias será, entonces, el mostrado en el croquis y de él y del diagrama de esfuerzo-deformación se deduce la variación de esfuerzos indicada. El momento se obtiene por estática y la curvatura, a partir de la ecuación (1.6).



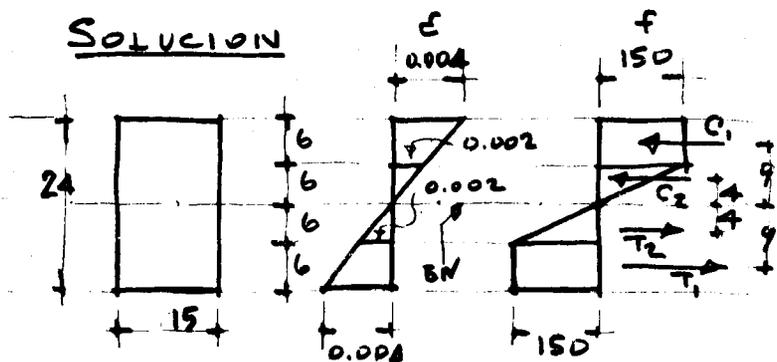
EJEMPLO (1.5) MOMENTO RESISTENTE Y CURVATURA DE UN MATERIAL ELASTO-PLÁSTICO

DATOS



Se pide: Determinar el momento resistente y la curvatura correspondiente de la sección mostrada.

SOLUCION



EJEMPLO (1.5) (Continuación)

2

Fuerzas internas

$$C_1 = T_1 = 150 \times 15 \times 6 = 13500 \text{ kg}$$

$$C_2 = T_2 = \frac{1}{2} \times 150 \times 15 \times 6 = 6750 \text{ kg}$$

Momento

$$M = 2 \times 9 \times 13500 + 2 \times 4 \times 6750$$

$$M = \underline{\underline{297000 \text{ kg-cm}}}$$

Curvatura

$$\phi = \frac{\epsilon_c}{c_c} = \frac{0.004}{12 \text{ cm}} = \underline{\underline{0.00033 \text{ cm}^{-1}}}$$

1.2.4. a FLEXION ASIMETRICA

En la sección 1.2.3 se estableció que la fórmula de la esquadria sólo puede aplicarse cuando el material es de comportamiento lineal y cuando la sección transversal del elemento es simétrica respecto al plano de carga. En secciones asimétricas respecto al plano de carga, pero simétricas respecto a un eje perpendicular al plano de cargas, existe flexión sin torsión únicamente si el plano de cargas pasa por el centro de torsión de la sección transversal, como se ilustró en la fig 1.33 para el caso de una canal. Si el plano de cargas no pasa por el centro de torsión, la sección se encuentra sometida a momento torsionante, adicionalmente a la flexión y a la fuerza cortante.

Otro caso de flexión asimétrica, es el de secciones con dos ejes de simetría pero sometidas a cargas inclinadas respecto a dichos ejes, como se muestra en la fig 1.36-a. Este problema se resuelve descomponiendo la fuerza aplicada en dos componentes que actúen en cada uno de los ejes de simetría (figs 1.36-b y 1.36-c), aplicando la fórmula de la esquadria para cada una de las dos componentes y sumando los efectos. Haciendo esto, se obtiene que el esfuerzo en un punto cualquiera de la sección transversal con coordenados y, z, es:

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}$$

$$f = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} \quad (1.50)$$

donde M_y y M_z son los momentos flexionantes alrededor de los ejes Y y Z, respectivamente, e I_y e I_z son los momentos de inercia alrededor de dichos ejes. El segundo sumando del segundo miembro representa el efecto de la carga de la fig 1.36-b y el primer sumando, el efecto de la carga de la fig 1.36-c. Si M es el momento producido por la carga P, el momento M_z es igual a $M \cos \theta$ y el momento M_y es igual a $M \sin \theta$. Por lo tanto, la ec (1.50) se puede escribir también en la forma

$$f = \frac{(M \sin \theta) z}{I_y} + \frac{(M \cos \theta) y}{I_z} \quad (1.51)$$

Se puede demostrar que la inclinación del eje neutro (fig 1.36-a) queda determinada por la ecuación

Se sabe que

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad (1.52)$$

Para secciones asimétricas, pueden aplicarse las ecuaciones 1.50 y 1.51, sustituyendo los ejes de simetría por los ejes principales de la sección, es decir, por aquellos ejes alrededor de los cuales es nulo el producto de inercia de la sección. Esto se ilustra en la fig 1.37 para el caso de una sección Z. La carga P debe descomponerse en sus componentes sobre los ejes Y y Z que en este caso son los ejes principales de la sección. Los esfuerzos pueden determinarse después con las ecs (1.50) ó (1.51). La demostración de que las ecs (1.50) y (1.51) son aplicables a secciones asimétricas cuando los ejes Y y Z son los ejes principales pueden encontrarse

en los textos de Resistencia de Materiales.

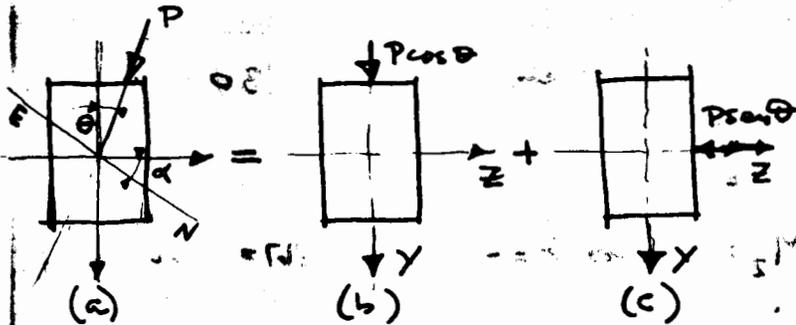


Fig 1.36 Sección simétrica con carga inclinada respecto a los ejes de simetría

Las deflexiones debidas a los momentos M_y y M_z pueden calcularse por medio de los procedimientos expuestos en las secciones 1.26, 1.27 y 1.28. Las deflexiones así calculadas se encontrarán en los planos en que actúan los momentos flexionantes correspondientes. Pueden superponerse quedando la deflexión resultante en un plano perpendicular al eje neutro.

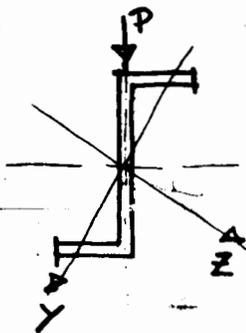


Fig 1.37 Sección asimétrica con carga inclinada respecto a los ejes principales

Ejemplo 1.17.— Se trata de encontrar los esfuerzos producidos en la sección de empotramiento de un voladizo por una carga concentrada inclinada aplicada en el extremo, así como la orientación del eje neutro correspondiente. La carga está contenida en el plano YZ.

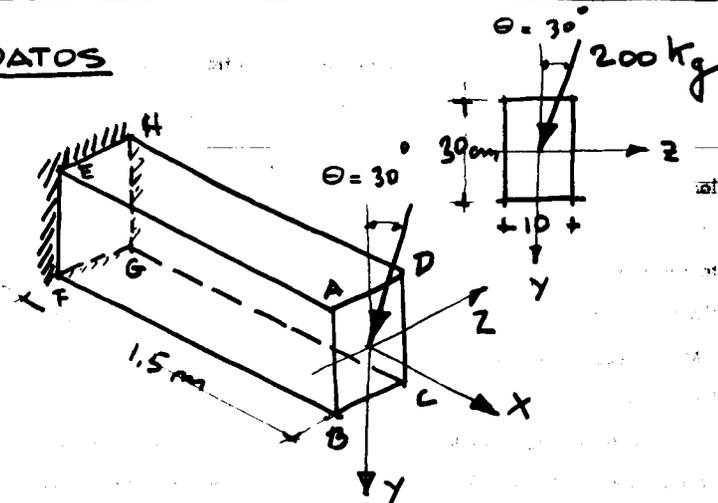
Los esfuerzos en las cuatro esquinas de la sección de empotramiento se calcularon con la ecuación (1.51). Se obtuvo primero el valor absoluto del momento producido por la carga concentrada y, en seguida, las componentes de este momento con respecto a los ejes Y y Z. Al sustituir estos valores deben utilizarse los signos correctos de los momentos. La convención de signos para el momento

$M_z = M \cos \theta$ es la expuesta en la sección 1.2.3 para la flexión producida por fuerzas contenidas en el plano XY. De acuerdo con esta convención el signo correcto de M_z es negativo. Estableciendo una convención semejante para la otra componente de flexión, $M_y = M \sin \theta$, se comprueba que el signo correcto es positivo. En caso de duda pueden deducirse los signos correctos de los esfuerzos haciendo caso omiso de las convenciones de signos, tanto para ordenadas como para momentos, y analizando el comportamiento físico de la viga. De este análisis se deduce fácilmente de qué lado producen tensiones o compresiones las dos componentes de momento.

El ángulo α entre el eje neutro y el eje Z se determinó primero por medio de la ecuación (1.52) y después definiendo dos puntos de esfuerzo nulo. Los puntos de esfuerzo nulo pueden localizarse fácilmente a partir de consideraciones geométricas. Un examen de los esfuerzos determinados para las cuatro esquinas de la sección indica que existirán puntos de esfuerzo nulo en los lados EH y FG ya que los esfuerzos en los extremos de cada lado son de signo contrario. La posición de estos puntos de esfuerzo nulo puede determinarse por semejanza de triángulos.

**EJEMPLO (1.17) VIGA EN VOLADIZO
SUJETA A FLEXION BIAXIAL**

DATOS



Se pide: Encontrar los esfuerzos en los puntos E, F, G y H, y determinar la orientación del eje neutro.

SOLUCION

$$f = \frac{M \sin \theta}{I_y} z + \frac{M \cos \theta}{I_z} y \quad E_c (1.51)$$

$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta \quad E_c (1.52)$$

EJEMPLO (1.17) (Continuación) 2

Momentos flexionantes

$$|M| = |150 \text{ cm} \times 200 \text{ kg}| = |30\,000| \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$M_y = M \sin \theta = +30\,000 \times 0.5 = +15\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

$$M_z = M \cos \theta = -30\,000 \times 0.867 = -26\,000 \text{ kg}\cdot\text{cm}$$

Momentos de inercia

$$I_y = \frac{1}{12} \times 30 \times 10^3 = 2\,500 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} \times 10 \times 30^3 = 22\,500 \text{ cm}^4$$

Constantes para cálculo de esfuerzos

$$+ \frac{M \sin \theta}{I_y} = + \frac{15\,000}{2\,500} = +6$$

$$- \frac{M \cos \theta}{I_z} = - \frac{26\,000}{22\,500} = -1.155$$

EJEMPLO (1.17) (Continuación) 3

Tabla de cálculo de esfuerzos

Punto	z	y	$\frac{(M \sin \theta) z}{I_y}$	$\frac{(M \cos \theta) y}{I_z}$	f
E	-5	-15	-30	+17	-13
F	-5	+15	-30	-17	-47
G	+5	+15	+30	-17	+13
H	+5	-15	+30	+17	+47

Cálculo del ángulo α entre el eje Z y el eje (neutro)

A) Aplicando la ec (1.52)

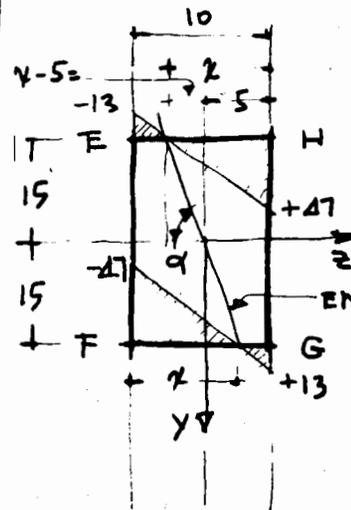
$$\tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

$$= \frac{22500}{2500} \times 0.577 = 5.18$$

$$\alpha = 79.1^\circ$$

EJEMPLO (1.17) (Continuación) 4

B) Determinando dos puntos de esfuerzo nulo



$$x = 10 \frac{47}{47+13} = 7.9$$

$$4 - 5 = 7.9 - 5 = 2.9$$

$$\tan \alpha = \frac{15}{2.9} = 5.18$$

$$\alpha = 79.1^\circ$$

1.2.5. Diagramas momento-rotación y carga-deflexión

En esta sección se presenta el uso de diagramas momento-curvatura, cuya obtención se describió en la sección anterior, para calcular analíticamente diagramas momento-rotación y carga-deflexión.

Supóngase, para fines de ilustración, que se trata de determinar el diagrama momento-rotación de una viga libremente apoyada como la mostrada en la fig 1.13. La sección transversal de la viga es constante en todo el claro, por lo que el diagrama momento-curvatura es el mismo para cualquier sección transversal.

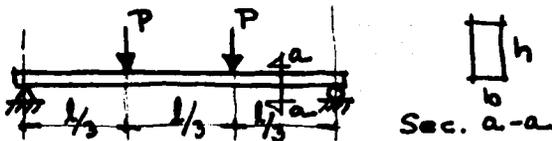


Fig. 1.13 Viga rectangular libremente apoyada, con dos cargas concentradas

Más adelante se indica cómo puede generalizarse el procedimiento para vigas cuya sección transversal varía a lo largo del claro. En la fig 1.14 se muestra el diagrama

momento-curvatura que se usará para calcular los diagramas $M-\theta$ y $P-\Delta$.

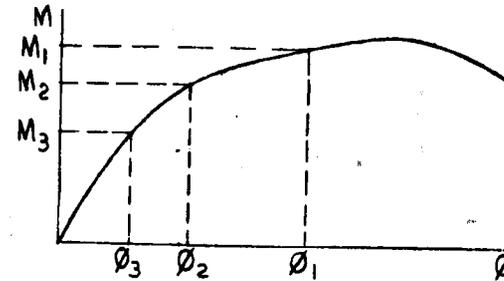


Fig 1.14 Diagrama momento-curvatura de la viga de la fig 1.13

Considérese ahora que el valor de la carga P es tal que el momento flexionante en la zona central tiene un valor M_1 , como se muestra en la fig 1.15b. En el diagrama $M-\theta$ de la fig 1.14 se ve que la curvatura correspondiente a este momento es ϕ_1 . Por lo tanto, si se traza un diagrama que muestre la distribución de curvaturas a lo largo de la viga, se tendrá una curvatura constante en esta zona (fig 1.15-c). Para obtener el diagrama de distribución de curvaturas en secciones situadas fuera de la zona central de la viga, se puede proceder de la siguiente manera. Se determina el momento en varias secciones de la viga. (Por ejemplo, en la sección 2.2 (fig 1.15-b), se tendrá un momento M_2 .) Después se encuentra la curvatura correspondiente a este momento en el diagrama momento-curvatura de la fig 1.14, la cual se traza como ordenada del diagrama de distribución de curvaturas de la fig 1.15-c. Repitiendo el procedimiento para otras secciones, por ejemplo la sección 3-3 de la fig 1.15-b, se obtiene un número suficiente de puntos para definir

el diagrama de la fig 1.15-c. Una vez determinado el diagrama de distribución de curvaturas a lo largo de la viga, el siguiente problema es determinar las rotaciones y deflexiones. Este problema puede resolverse por integración o por medio de los teoremas conocidos con el nombre de teoremas área-momento. En las secciones siguientes se describen estos métodos.

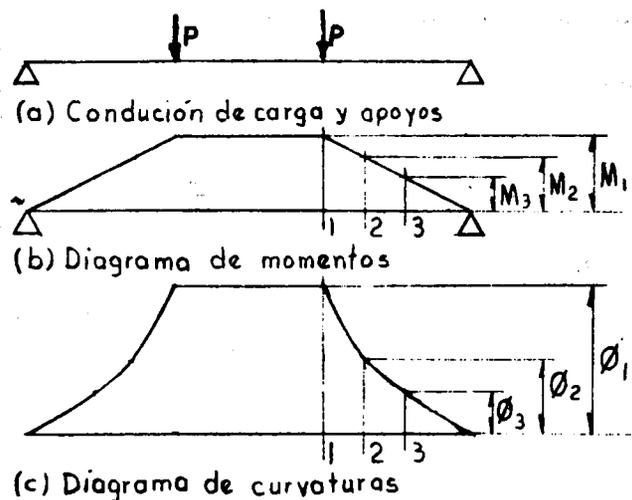


Fig 1.15 Determinación del diagrama de curvatura a lo largo de una viga

1.2.5.1 Cálculo de pendientes y deflexiones por integración. Ecuación de la elástica y relaciones fundamentales de la teoría de flexión

En los textos elementales de cálculo diferencial se demuestra que el recíproco de la curvatura, que se conoce con el nombre de radio de curvatura, ρ , de una curva cualquiera, se puede expresar con la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{1}{\phi} = \frac{[1 + (\frac{dy}{dx})^2]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (1.15)$$

El término dy/dx en la ecuación anterior es la pendiente de la curva. Debido a que en el caso de vigas las pendientes son pequeñas, el valor de $(dy/dx)^2$ es despreciable, y el numerador de la ecuación anterior se puede considerar igual a la unidad. Por lo tanto,

$$\phi = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.16)$$

A partir de esta ecuación se pueden obtener las pendientes de la viga deformada, dy/dx , y las deflexiones, y , por integración. Integrando una vez se obtienen las

$$\frac{dy}{dx} = \int \phi dx + C_3 \quad (1.17)$$

e integrando dos veces se obtienen las deflexiones

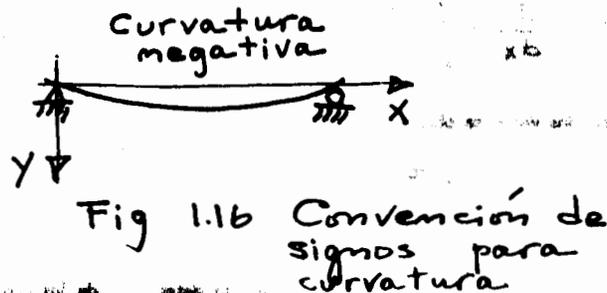
$$y = \iint \phi dx^2 + C_3x + C_4 \quad (1.18)$$

donde C_3 y C_4 son constantes de integración que se determinan de las condiciones de borde de la viga como se muestra en los ejemplos.

Una vez conocidas las pendientes dy/dx , puede calcularse la rotación entre dos secciones cualesquiera como la diferencia de pendientes entre dichas secciones. Por ejemplo, la rotación total entre los dos extremos de una viga (fig 1.1) es la diferencia de las pendientes en los extremos. En adelante, la rotación entre dos secciones cualesquiera a y b se denominará $\Delta\Theta_{ab}$, y la rotación entre una sección cualquiera a y una sección que permanece en un plano vertical se denominará Θ_a . El valor de Θ_a será, por consiguiente, igual a la pendiente en la sección a. El procedimiento de determinación de rotaciones y de flexiones descrito es práctico únicamente cuando la curvatura ϕ se puede expresar matemáticamente por medio de una ecuación sencilla, como en el caso de materiales elásticos en los que $\phi = |M/EI|$ (ec 1.14). Sustituyendo este valor de ϕ en la ecuación 1.16 se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left| \frac{M}{EI} \right| \quad (1.19)$$

La ecuación 1.14 se obtuvo en la sección 1.2.3 en términos del valor absoluto de la curvatura ya que no se hizo ninguna consideración sobre el signo de la curvatura. Es conveniente definir ahora dicho signo. De acuerdo con la convención de ejes adoptada, o sea, el eje X hacia la derecha y el eje Y hacia abajo, una



viga deformada como en la fig 1.16 con la concavidad hacia arriba tiene curvatura negativa ya que la pendiente de la curva disminuye al avanzar en la dirección positiva del eje X. Ahora bien, el momento flexionante asociado a una deformación como la mostrada en la fig 1.16 es positivo, ya que produce acortamientos en las fibras superiores y alargamientos en las fibras inferiores (fig 1.5). Por lo tanto, a un momento positivo corresponde una curvatura negativa y las ecs 1.14 y 1.19 quedan en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi = - \frac{M}{EI} \quad (1.20)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de ecuación de la elástica, ya que la forma de la viga deformada recibe el nombre de elástica cuando el material es elástico y lineal.

Sustituyendo el valor de $\phi = -M/EI$ en las ecuaciones 1.17 y 1.18 se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = - \int \frac{M}{EI} dx + C_3 \quad (1.21)$$

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = - \iint \frac{M}{EI} dx^2 + C_3 x + C_4 \quad (1.22)$$

Las ecuaciones 1.21 y 1.22 indican que las pendientes y las deflexiones pueden obtenerse mediante un proceso de integración a partir de los momentos. Los momentos, a su vez, pueden obtenerse, también por integración, a partir de las cargas. En efecto, según se estudió en los cursos de Mecánica Analítica, existen las siguientes relaciones entre carga aplicada, w , fuerza cortante, V , y momento flexionante, M :

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (1.23)$$

$$w = -\frac{dV}{dx} \quad (1.24)$$

La convención de signos para fuerza cortante que se utiliza aquí consiste en considerar que en las vigas la fuerza cortante es positiva cuando las fuerzas cortantes que actúan en los extremos de un tramo producen un giro en el sentido de las manecillas del reloj (Apéndice B). Por lo tanto la ecuación 1.24 tiene signo negativa, porque, de acuerdo con la convención de signos para cortantes, para una carga hacia abajo, que es positiva, la fuerza cortante disminuye al aumentar x.

Derivando la ecuación 1.23 y sustituyéndola en la 1.24 resulta

$$w = -\frac{d^2M}{dx^2} \quad (1.25)$$

Según estas ecuaciones, la fuerza cortante y el momento flexionante se pueden obtener por integración de las ecuaciones 1.24 y 1.25 de la siguiente manera:

$$V = -\int w dx + C_1 \quad (1.26)$$

$$M = -\iint w dx^2 + C_1 x + C_2 \quad (1.27)$$

Las constantes C_1 y C_2 son diferentes de las constantes C_3 y C_4 , y se obtienen también de las condiciones de borde como se muestra en los ejemplos.

En la fig 1.17 se resumen las ecuaciones obtenidas en esta sección, rela

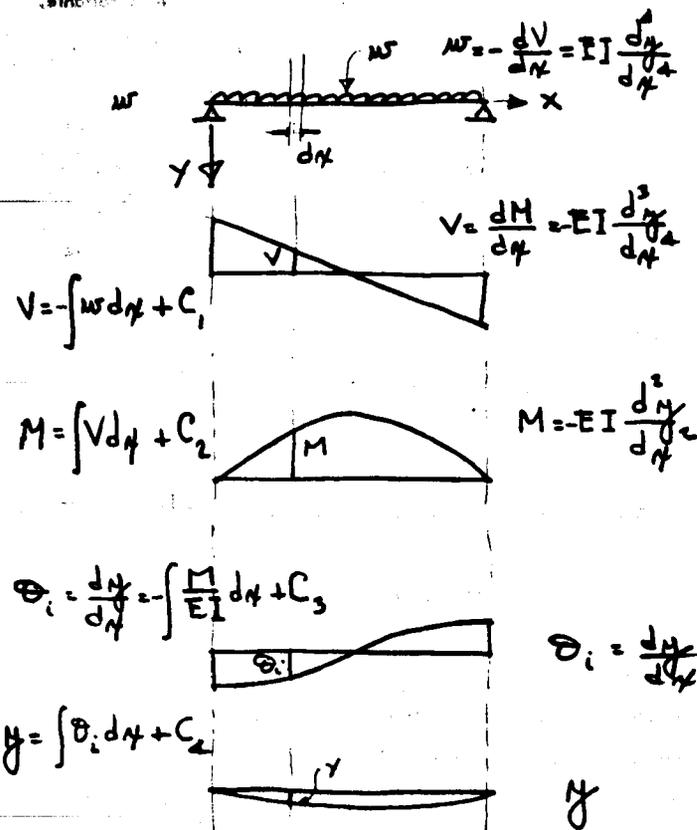


Fig 1.17 Relaciones entre carga, fuerza cortante, momento flexionante, pendiente y deflexión para una viga de material homogéneo y elástico.

cionándolas con una viga homogénea y elástica libremente apoyada. En el lado izquierdo de la figura se muestra la forma en que puede obtenerse la fuerza cortante, V , por integración de la carga, w (ec 1.26); el momento, M , por integración de la fuerza cortante, V ; la pendiente dy/dx , que según la notación adoptada puede expresarse como θ , por integración de las curvaturas M/EI ; y la deflexión, y , por integración de las pendientes. En el lado derecho de la figura se muestra, de abajo hacia arriba, la forma de obtener la pendiente, θ , el momento, M , la fuerza cortante, V , y la carga, W , por derivación sucesiva. Las relaciones del lado derecho se obtienen por derivación de las relaciones del lado izquierdo.

En el Ejemplo 1.6 se muestra la obtención de las pendientes y de las deflexiones de una viga por integración. En este ejemplo, el momento M se calculó de la manera convencional, pero pudo obtenerse también por integración usando las ecuaciones 1.26 y 1.27. Esto se ilustra en el ejemplo 1.7.

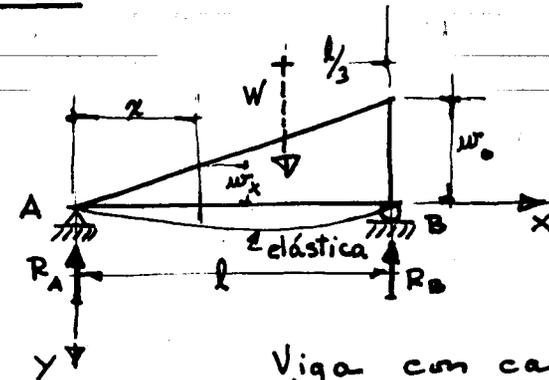
1.2.5.2 Cálculo de pendientes y deflexiones mediante el principio de la viga conjugada

Si se comparan las ecuaciones 1.21 y 1.22 con las ecuaciones 1.26 y 1.27 se puede establecer una similitud entre el cálculo de pendientes y el cálculo de fuerzas cortantes, y entre el cálculo de deflexiones y el cálculo de momentos flexionantes. En efecto, si la carga w se sustituye por el valor de M/EI , o por el valor ^{absoluto} de las curvaturas ϕ para el caso general de viga de comportamiento no lineal, y las condiciones de borde de la viga se transforman para que las constantes C_1 y C_2 resulten iguales a las constantes C_3 y C_4 , el cálculo de pendientes y deflexiones se transforma en un cálculo de fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Esta transformación se conoce con el nombre de principio de la viga conjugada y se puede expresar de la siguiente manera:

"Si se obtiene el diagrama de curvaturas, o de valores ^{absolutos} de M/EI para vigas de comportamiento lineal, y se considera que las curvaturas son cargas, las fuerzas cortantes obtenidas son en realidad las pendientes de la viga, y los momen-

EJEMPLO 1.6 CALCULO DE PENDIENTES Y DEFLEXIONES POR INTEGRACION, A PARTIR DE LA ECUACION DE MOMENTO

DATOS



Viga con carga triangular, sección constante y módulo elástico E .

Se pide: Obtener expresiones, por integración, para determinar:

- La pendiente en cualquier sección
- La deflexión en cualquier sección
- La deflexión máxima

EJEMPLO (1.6) (Continuación)

2

SOLUCIONEcuación general de la elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad \text{Ec (1.20)}$$

Obtención de la ecuación de momento

$$W = \frac{1}{2} w_0 l$$

$$R_A = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} w_0 l \right) = \frac{1}{6} w_0 l$$

$$w_x = \frac{x}{l} w_0$$

$$M = R_A x - \frac{1}{2} w_x x \left(\frac{x}{3} \right)$$

$$M = \frac{1}{6} w_0 l x - \frac{1}{6} \frac{w_0}{l} x^3 \quad (a)$$

Obtención de expresiones para cálculo de pendientes y deflexiones
(A la hoja siguiente.)

EJEMPLO (1.6) (Continuación)

3

Obtención de expresiones para cálculo de pendientes y deflexiones

Substituyendo (a) en la ec (1.20) e integrando dos veces:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{w_0 l}{6} x + \frac{w_0}{6l} x^3$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{w_0 l x^2}{12} + \frac{w_0}{24l} x^4 + C_3$$

$$EI y = -\frac{w_0 l x^3}{36} + \frac{w_0}{120l} x^5 + C_3 x + C_4$$

Cálculo de constantes:

$$\text{Si } x=0, y=0 \therefore C_4=0$$

$$\text{Si } x=l, y=0$$

$$0 = -\frac{w_0 l^4}{36} + \frac{w_0}{120l} l^5 + C_3 l$$

$$\therefore C_3 = +\frac{7w_0 l^3}{360}$$

EJEMPLO (1.6) (Continuación)

4

Sustituyendo los valores de las constantes, se obtiene:

a) Para cálculo de pendientes:

$$EI \frac{d\theta}{dx} = + \frac{w_0 x^4}{24l} - \frac{w_0 l x^2}{12} + \frac{7w_0 l^3}{360}$$

b) Para cálculo de deflexiones:

$$EI \theta = + \frac{w_0 x^5}{120l} - \frac{w_0 l x^3}{36} + \frac{7w_0 l^3}{360} x$$

c) Cálculo de la flecha máxima

La flecha es máxima cuando

$$\frac{d\theta}{dx} = 0$$

Sustituyendo en la ecuación de la pendiente:

$$0 = \frac{w_0 x^4}{24l} - \frac{w_0 l x^2}{12} + \frac{7w_0 l^3}{360}$$

EJEMPLO (1.6) (Continuación)

5

Simplificando y haciendo $x^2 = N$:

$$15N^2 - 30l^2 N + 7l^4 = 0$$

$$N = 0.27l^2$$

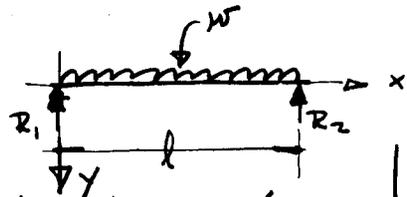
$$x = 0.52l$$

Sustituyendo en la ecuación de la deflexión:

$$\theta_{max} = \frac{1}{EI} \left[+ \frac{w_0}{120l} (0.52l)^5 - \frac{w_0}{36} (0.52l)^3 + \frac{7w_0 l^3}{360} (0.52l) \right]$$

$$\theta_{max} = + \frac{0.6065 w_0 l^4}{EI}$$

EJEMPLO (1.7) DETERMINACION DE FUERZAS CORTANTES, MOMENTOS, PENDIENTES Y DEFLEXIONES, POR INTEGRACIONES SUCESIVAS A PARTIR DE LA FUNCION DE CARGA



Viga de sección constante, con módulo elástico E, sujeta a carga uniforme.

Encontrar:

- Los diagramas y las ecuaciones para V, M, θ, δ
- La deflexión máxima
- Pendiente de la curva en el apoyo izquierdo

$$f(w) = +w$$

$$V = -\int w dx + C_1$$

$$V = -wx + C_1$$

$$\boxed{V = -wx + C_1}$$

$$M = \int V dx + C_2$$

$$M = \int (-wx + C_1) dx + C_2$$

$$\boxed{M = -\frac{wx^2}{2} + C_1x + C_2}$$

Obtención de ecuaciones

① Ecuación de la fuerza cortante

② Ecuación del momento

EJEMPLO (1.7) (Continuación) 2

$$\theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + C_3$$

$$\theta = -\int \frac{1}{EI} \left(-\frac{wx^2}{2} + C_1x + C_2 \right) dx + C_3$$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^2}{6} - \frac{C_1x}{2} - C_2 \right) + C_3} \quad \text{③}$$

Ecuación de la pendiente

$$y = \int \theta dx + C_4$$

$$y = \int \left[\frac{1}{EI} \left(\frac{wx^3}{6} - \frac{C_1x^2}{2} - C_2x \right) + C_3 \right] dx + C_4$$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI} \left(\frac{wx^4}{24} - \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_2x^2}{2} \right) + C_3x + C_4} \quad \text{④}$$

Ecuación de la deflexión (elástica)

Cálculo de constantes

Para $x = 0$

$$V = \frac{wl}{2}$$

EJEMPLO (1.7) (Continuación) 3

De (1):

$$\frac{wl}{2} = 0 + C_1 \quad ; \quad \boxed{C_1 = \frac{wl}{2}}$$

M=0

De (2):

$$0 = 0 + 0 + C_2 \quad ; \quad \boxed{C_2 = 0}$$

y=0

De (4):

$$0 = \frac{1}{EI} l^4 (0 - 0 - 0) + 0 + C_4 \quad ; \quad \boxed{C_4 = 0}$$

Para $x=l$

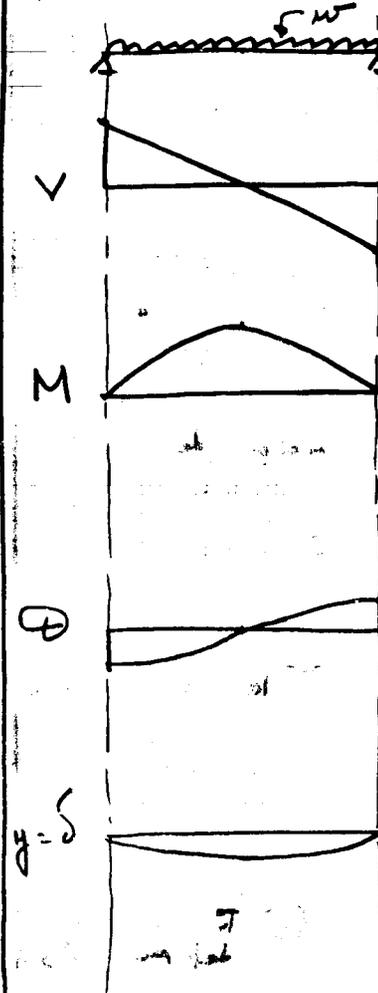
y=0

$$0 = \frac{1}{EI} \left(+ \frac{wl^4}{24} - \frac{wl}{2} \frac{l^3}{6} \right) + C_3 l + 0$$

$$C_3 = \frac{1}{EI} \left(- \frac{wl^3}{24} + \frac{wl^3}{12} \right) \quad \boxed{C_3 = + \frac{wl^3}{24EI}}$$

EJEMPLO (1.7) (Continuación) 4

Ecuaciones y diagramas



$$V = -wx + C_1$$

$$V = -wx + \frac{wl}{2}$$

$$V = w \left(-x + \frac{l}{2} \right)$$

$$M = -\frac{wN^2}{2} + C_1 N + C_2$$

$$M = -\frac{wN^2}{2} + \frac{wl}{2} N + 0$$

$$M = w \left(-\frac{N^2}{2} + \frac{l}{2} N \right)$$

$$\theta = \frac{1}{EI} \left(+ \frac{wN^3}{6} - \frac{C_1 N^2}{2} - C_2 N \right) + C_3$$

$$\theta = \frac{w}{EI} \left(+ \frac{N^3}{6} - \frac{l}{4} N^2 - 0 \right) + \frac{wl^3}{24EI}$$

$$\theta = \frac{w}{EI} \left(+ \frac{N^3}{6} - \frac{l}{4} N^2 + \frac{l^3}{24} \right)$$

$$y = \frac{1}{EI} \left(+ \frac{wN^4}{24} - \frac{C_1 N^3}{6} - \frac{C_2 N^2}{2} \right) + C_3 N + C_4$$

$$y = \frac{w}{EI} \left(+ \frac{N^4}{24} - \frac{l}{2} \frac{N^3}{6} + 0 \right) + \frac{wl^3 N}{24EI} + 0$$

$$y = \frac{w}{EI} \left(+ \frac{N^4}{24} - \frac{l}{12} N^3 + \frac{l^3}{24} N \right)$$

EJEMPLO 1.7 (Continuación)

5

Flexión máximaLa flecha es máxima para $x = \frac{l}{2}$

$$y = \frac{w}{EI} \left(+ \frac{x^4}{24} - \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{24} x \right)$$

$$y_{\max} = \frac{w}{EI} \left(+ \frac{l^4}{16 \cdot 24} - \frac{l^4}{12 \cdot 12} + \frac{l^4}{24 \cdot 24} \right)$$

$$= \frac{w}{EI} \left(\frac{+l^4 - 2l^4 + 8l^4}{384} \right)$$

$$y_{\max} = + \frac{5wl^4}{384EI}$$

Pendiente de la curva en el apoyo
12 g. v. d. b.

$$\theta_1 = \frac{w}{EI} \left(0 + 0 + \frac{113}{24} \right)$$

$$\theta_1 = + \frac{w \cdot 113}{24EI}$$

tas flexionantes son en realidad las deflexiones de la viga. La viga cargada con el diagrama de curvaturas recibe el nombre de viga conjugada.

Para que las constantes C_1 y C_2 se transformen en las constantes C_3 y C_4 , es necesario, por lo general, modificar las condiciones de apoyo de la viga original. En lo fig 1.18, cuyo uso se ilustra en el ejemplo 1.8, se muestran las condi

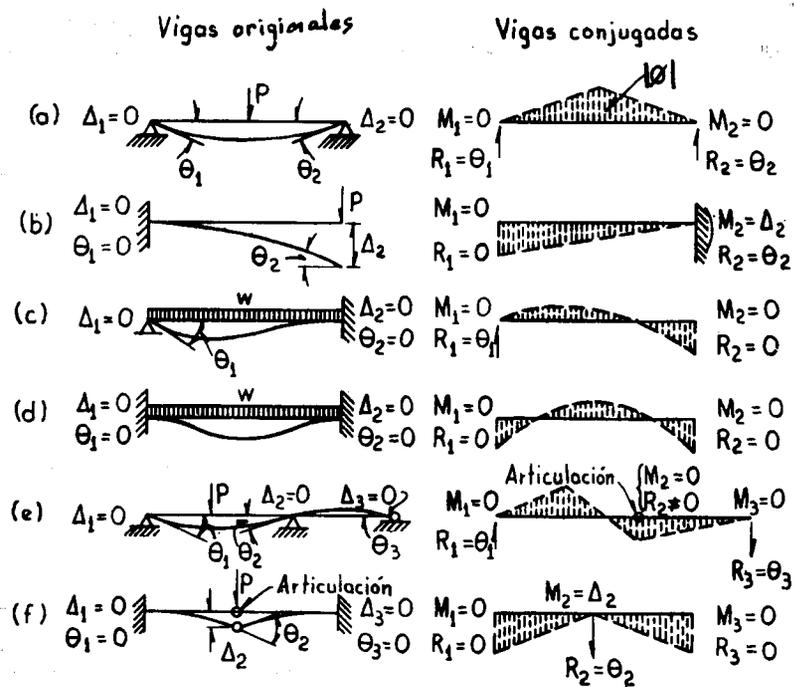


Fig. 1.18 Vigas conjugadas correspondientes a vigas reales

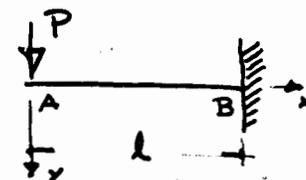
ciones de apoyo de las vigas conjugadas para diferentes condiciones de apoyo de las vigas originales. Las condiciones de apoyo de las vigas conjugadas se obtienen por inspección de las deflexiones y pendientes en los extremos de las vigas originales. Por ejemplo, en el voladizo del caso (b), el extremo de la viga conjugada debe ser un extremo libre ya que al ser nulas la deflexión y la pendiente en la viga original, no pueden existir ni momento ni fuerza cortante en la viga conjugada. Por otra parte, el extremo derecho de la viga conjugada debe tener tanto momento como fuerza cortante ya que en la viga original existen deflexión y pendiente en dicho extremo. Por lo tanto, el extremo derecho es un empotramiento en la viga conjugada.

En el ejemplo 1.8 se aplica el método de la viga conjugada a la determinación de la flecha en el extremo de un voladizo. Las condiciones de apoyo que deben considerarse en la viga conjugada pueden apreciarse en la fig 1.18. De acuerdo con las convenciones de signos que se han estado utilizando, el momento de la viga real es negativa, la carga que actúa sobre la viga conjugada es negativa y el momento producido por ésta será positivo ya que origina compresiones en la fibra superior y tensiones en la fibra inferior. Por lo tanto, las deflexiones, que son iguales a los momentos de la viga conjugada, serán también positivas, es decir hacia abajo.

EJEMPLO 1.8 CALCULO DE LA DEFLEXION EN EL EXTREMO DE UN VOLADIZO POR EL METODO DE LA VIGA CONJUGADA

DATOS

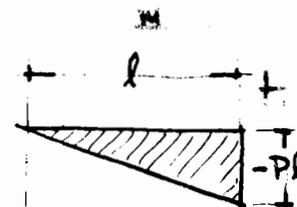
Material homogéneo y elástico. Momento de inercia constante igual a I .



Se pide: Encontrar la deflexión en el extremo del voladizo por el método de la viga conjugada.

SOLUCION:

Diagrama de momentos de la viga real



Viga conjugada (Ver fig 1.18)

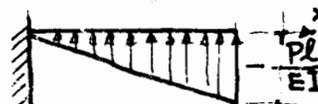
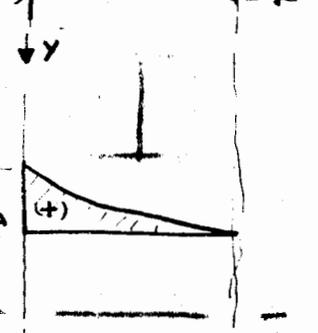


Diagrama de momentos de la viga conjugada



Momento en A: $M_{CA} = \left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{EI}\right) \frac{2l}{3}$

Deflexión

$$y = M_{CA} = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EI}$$

1.2.5.3 Cálculo de pendientes y deflexiones por los teoremas área-momento*

Supóngase que la distribución de curvaturas a lo largo de una viga sigue una ley cualquiera como la mostrada en la fig 1.19-a y considérese un segmento de viga de longitud, dx , en el que la curvatura tiene el valor ϕ . De acuerdo con la ecuación (1.2) la rotación $\Delta\theta$ entre dos secciones de una viga separadas una distancia Δx se puede calcular con la ecuación

$$\Delta\theta = \phi \Delta s$$

Tomando límites cuando Δx tiende a cero y considerando que la longitud del arco Δs es prácticamente igual a la longitud de la cuerda Δx , por ser las deformaciones pequeñas, se obtiene

$$d\theta = \phi dx \quad (1.28)$$

El término ϕdx representa el área rayada de la fig 1.19-a. Si se desea calcular la rotación entre dos secciones cualesquiera A-A y B-B (fig 1.19-a), basta integrar la ecuación (1.28) entre las secciones A-A y B-B,

$$\theta_{AB} = \int_a^b \phi dx \quad (1.29)$$

Esta integral representa el área del diagrama de distribución de curvaturas entre las secciones consideradas.

La ecuación (1.29) es la expresión matemática del primer teorema área-momento, que establece que: La rotación entre dos secciones de una viga es igual al área del diagrama de curvaturas entre las secciones consideradas.

La integración de la ecuación (1.29) resulta práctica cuando la distribu-

ción de curvaturas se puede representar con una expresión matemática sencilla o cuando dicha distribución es constante, por ejemplo, en los materiales de comportamiento elástico lineal. Si no es así, resulta conveniente un procedimiento numérico que consiste en dividir el diagrama de distribución de curvaturas en segmentos de longitud finita Δx (fig 1.20-a) y calcular el área por integración numérica, o sea,

$$\theta_{AB} = \sum_{i=1}^n \phi_i \Delta x \quad (1.30)$$

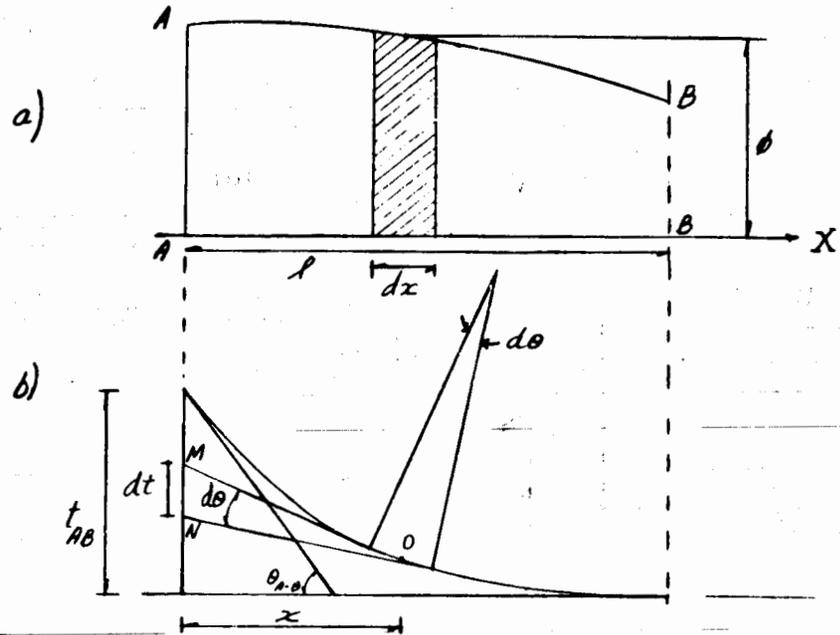


Fig 1.19 Relaciones entre curvatura, rotación y desplazamiento lineal

*Estos teoremas se conocen también con el nombre de teorema de Mohr o teoremas de Greene, por haber sido desarrollados independientemente en la misma época por los Profesores Otto Mohr y Charles E. Greene.

En este caso las rotaciones se concentran en los puntos centrales de cada intervalo como se muestra en la fig 1.20-c.

El segundo teorema área-momento permite calcular el desplazamiento lineal de una sección de la viga respecto a otra sección. Si se multiplica el ángulo $d\theta$ por la distancia del segmento dx a la sección A-A, se obtiene el desplazamiento dt , fig 1.19-b, entre los extremos del segmento diferencial,

$$dt = x d\theta \quad (1.31)$$

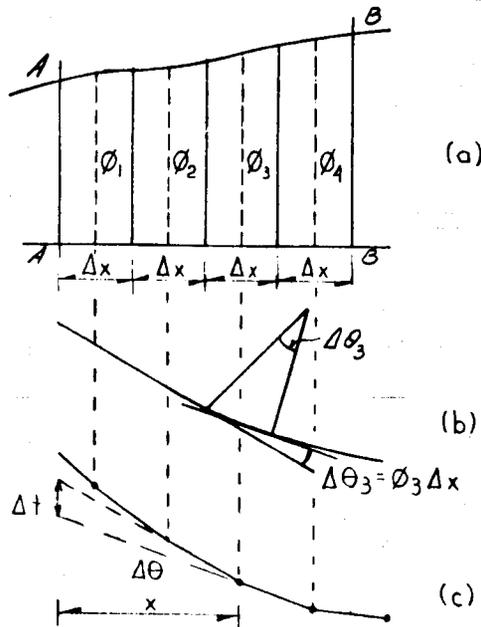


Fig 1.20 Discretización del diagrama de curvaturas

Esta ecuación es válida únicamente para desplazamientos pequeños ya que se considera que el triángulo MNO es rectángulo, a pesar de que en rigor no lo es. Las deformaciones y curvaturas de elementos reales son lo suficientemente pequeñas para aceptar esta simplificación.

Sustituyendo el valor de $d\theta$ dado por la ecuación (1.28),

$$dt = x \phi dx \quad (1.32)$$

El desplazamiento diferencial dt es producido únicamente por las curvaturas del segmento dx . El desplazamiento producido por el diagrama total de curvaturas entre las secciones A-A y B-B es:

$$t_{AB} = \int_0^l x \phi dx \quad (1.33)$$

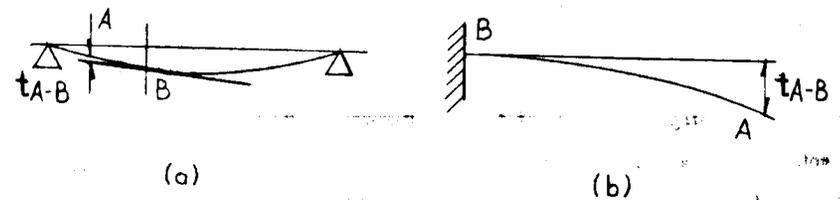


Fig 1.21 Desplazamiento lineal

Esta integral es la expresión matemática del segundo teorema área-momento que establece que: El desplazamiento lineal de un punto del eje de una viga con respecto a la tangente que pasa por otro punto es igual al momento de primer orden del área del diagrama de curvaturas comprendido entre los dos puntos con respecto al primer punto. Obsérvese que no siempre el desplazamiento lineal es igual a la deflexión o flecha de la viga. Por ejemplo, el desplazamiento t_{AB} del punto A con respecto a la tangente que pasa por B en la fig 1.21-a no es la deflexión del punto, mientras que en la fig 1.21-b sí lo es, por ser horizontal la tangente al punto B. En los ejemplos se indica cómo pueden calcularse las deflexiones a partir de los desplazamientos lineales cuando no son iguales ambas cantidades.

El cálculo de desplazamientos también puede hacerse por el procedimiento numérico descrito para el caso de rotaciones (fig 1.20). La integral de la ecuación 1.33 se sustituye por

$$t_{AB} = \sum_{i=1}^m \chi_i \phi_i \Delta x \quad (1.34)$$

En la aplicación de los teoremas de área-momento se requieren las áreas y los momentos de primer orden. Para facilitar los cálculos correspondientes, se presentan en el apéndice A las áreas y centroides de los diagramas de curvatura más comunes.

Convención de signos. Los teoremas área-momento permiten obtener la rotación de una sección respecto a otra y el desplazamiento lineal de una sección respecto a la tangente que pasa por otra sección. Es conveniente establecer y observar cuidadosamente el signo tanto de la rotación como del desplazamiento lineal. Siguiendo las convenciones de la sección 1.2.2, se establecen los siguientes criterios.

Las curvaturas, ϕ , de una sección transversal dada se consideran con el signo contrario al del momento flexionante en dicha sección. Puede haber, por lo tanto, curvaturas positivas (cuando la viga deformada es cóncava vista por abajo) y negativas (cuando la viga deformada es cóncava vista por arriba)

como se indica en la fig 1.22-a. El punto en que la curvatura cambia de signo no corresponde, por lo tanto, al punto de momento flexionante nulo; dicho punto recibe el nombre de punto de inflexión.

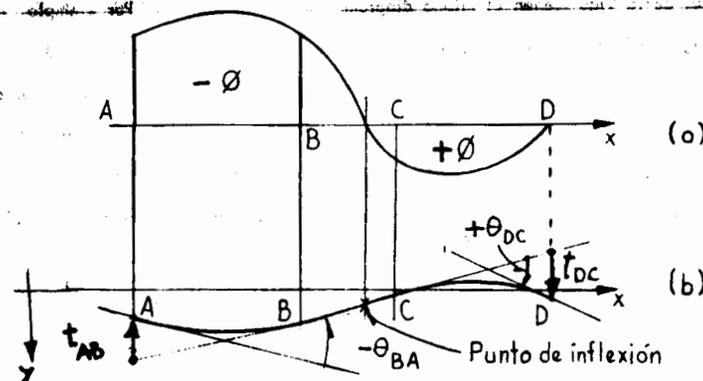


Fig 1.22 Convención de signos

La rotación relativa de una sección B con respecto a una sección A, que se representa como θ_{BA} , es negativa si el ángulo medido de la tangente en A, a la tangente en B tiene el sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, tal como el ángulo θ_{BA} de la fig 1.22-b. La rotación relativa es positiva en caso contrario, como la rotación θ_{DC} mostrada en la fig 1.22-b.

El desplazamiento lineal de un punto A respecto a la tangente que pasa por otro punto B, t_{AB} , es negativo si el punto A queda arriba de la tangente que pasa por el punto B, como el desplazamiento lineal t_{AB} de la fig 1.22-b y es positivo en caso contrario, como el desplazamiento t_{DC} de la misma figura.

Generalización a vigas de sección variable

En la sección anterior se ha supuesto que el diagrama momento-curvatura es el mismo para todas las secciones transversales de la viga, por lo que se ha podido obtener la distribución de curvaturas a lo largo del elemento directamente del diagrama de momento flexionante y del diagrama momento-curvatura.

En vigas de sección variable, sucede que no todas las secciones transversales de la viga tienen el mismo diagrama momento-curvatura. Por ejemplo, en la viga de la fig 1.23-a, las secciones transversales comprendidas entre B-B y B'-B' tienen el diagrama momento-curvatura mostrado en la fig 1.24-a, mientras que las secciones comprendidas entre A-A y B-B y entre A'-A' y B'-B', tienen el diagrama momento-curvatura mostrado en la fig 1.24-b. En este caso, las curvaturas correspondientes a los momentos mostrados en la fig 1.23-b se localizan en el diagrama M- ϕ de la fig 1.24-a para las secciones comprendidas entre B-B y B'-B', y en el diagrama M- ϕ de la fig 1.24-b para las secciones comprendidas entre A-A y B-B, y entre B'-B' y A'-A'. De esta manera se obtiene la distribución de curvaturas mostrada en la fig 1.23-c. Obsérvese que en las secciones B-B y B'-B', en que la sección transversal cambia bruscamente, se tienen dos curvaturas; una de ellas corresponde al diagrama M- ϕ de la fig 1.24-a y la otra el diagrama M- ϕ de la fig 1.24-b.

Una vez obtenido el diagrama de distribución de curvaturas a lo largo de la viga, pueden obtenerse las rotaciones y deflexiones aplicando los teoremas área-momento de la misma manera que en el caso de vigas de sección constante. Únicamente hay que observar que el proceso de integración se debe hacer por zonas en que la curvatura sea función continua. Por ejemplo, en el caso de la fig 1.23 no se puede integrar a lo largo de toda la viga sino que es necesario hacerlo entre las secciones A-A y B-B, después entre las secciones B-B y C-C, así sucesivamente.

En los ejemplos 1.9, 1.10 y 1.11 se ilustra la aplicación de los teoremas área-momento.

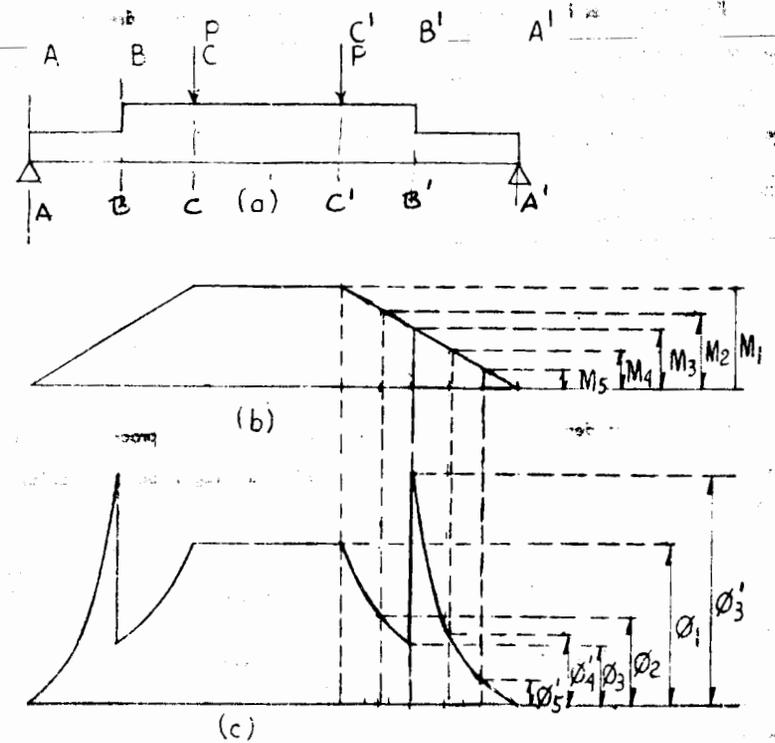


Fig 1.23 Diagrama de curvaturas en viga de sección variable

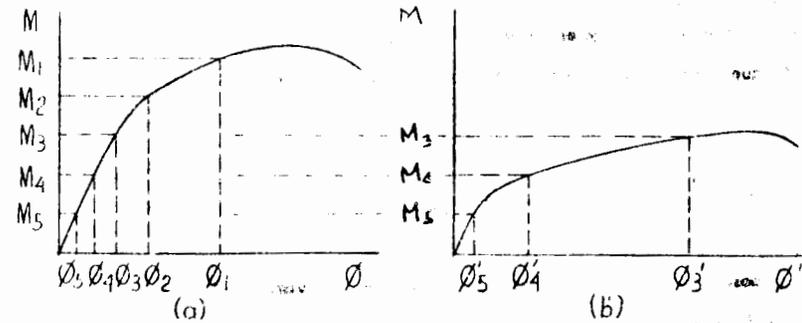


Fig 1.24 Diagramas M- ϕ

Ejemplo 1.9.- En este ejemplo se desea calcular la pendiente que tiene en el apoyo A el eje deformado de la viga, así como la deflexión que alcanza éste al centro del claro. Sabiendo que el diagrama de momento flexionante para una viga libremente apoyada y con carga uniformemente distribuida es una parábola con el valor máximo de $\frac{wl^2}{8}$, se puede determinar el diagrama de curvaturas, el cual por definición es igual el momento flexionante, con signo negativo, dividido entre la rigidez, EI. Debido a la simetría de la viga, lo tangente al eje deformado de la misma al centro del claro resulta horizontal. Conocida la pendiente en el punto B, se puede conocer la pendiente en cualquier otro punto de la viga empleando la expresión $\theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$, siendo B un punto situado a la derecha del punto A. Como el área del diagrama de curvaturas es negativa, por el primer teorema área-momento, el incremento θ_{BA} resulta negativo. El signo encontrado concuerda con el sentido del giro de la pendiente en A a la pendiente en B, que es contrario a los manecillas del reloj. De la expresión antes señalada se obtiene que la pendiente en A es positiva, siendo el valor de ésta $\frac{wl^2}{24EI}$.

La deflexión al centro del claro se puede encontrar aplicando el segundo teorema área-momento. La desviación tangencial de A respecto a B, t_{AB} , en este caso resulta igual a la deflexión de la viga, BB' , e igual al área de la mitad de la parábola $(-\frac{2}{3} \cdot \frac{wl}{8EI} \cdot \frac{l}{2})$, multiplicada por la distancia del centroide de esta área a la vertical que pasa por A $(\frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2})$.

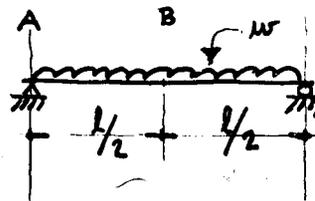
Como se puede observar, la desviación tangencial resulta negativa, lo cual concuerda con lo indicado en el diagrama.

Ejemplo 1.10.- Con este ejemplo se ilustra la aplicación de los teoremas área-momento a vigas de sección variable. Debido a que el diagrama de curvaturas es igual al de momento, con signo negativo, dividido entre EI, y siendo I variable a lo largo de la viga, el diagrama de curvaturas tendrá variaciones bruscas al cambiar I de valor.

En el problema se pide encontrar el giro, o cambio de pendiente, del eje deformado de

EJEMPLO (1.9) CALCULO DE PENDIENTES Y DEFLEXIONES EN UNA VIGA LIBREMENTE APOYADA CON CARGA UNIFORME POR AREA-MOMENTO

DATOS

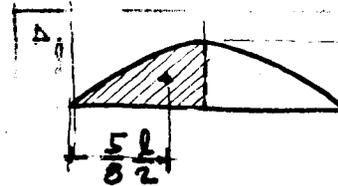


Se pide: Encontrar la pendiente en A y la deflexión en B.

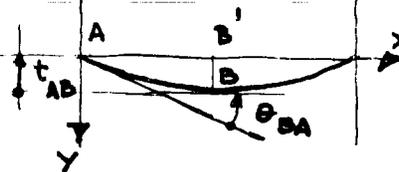
SOLUCION



$$+\frac{wl^2}{8} = \text{Momento flexionante}$$



$$-\frac{wl^2}{8EI} = \text{Curvaturas}$$



Deflexiones y pendientes

EJEMPLO (1.9) (Continuación)

2

Deflexiones y pendientes (cont.)

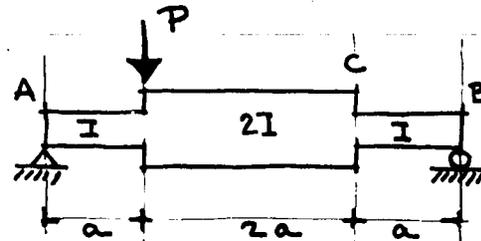
$$\theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$$

$$0 = \theta_A + \left(-\frac{wl^2}{8EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right)$$

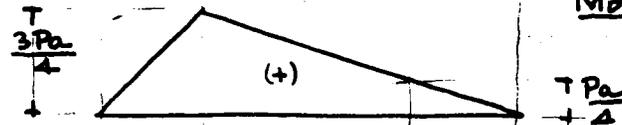
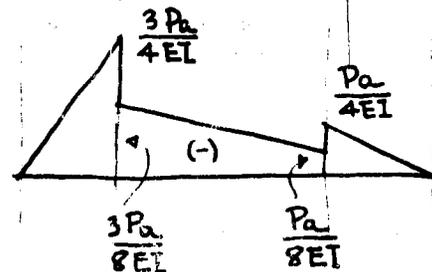
$$\theta_A = \frac{wl^3}{24EI}$$

$$BB' = t_{AB} = \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{wl}{8EI} \right) \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2}$$

$$BB' = -\frac{5}{384} \frac{wl^4}{EI}$$

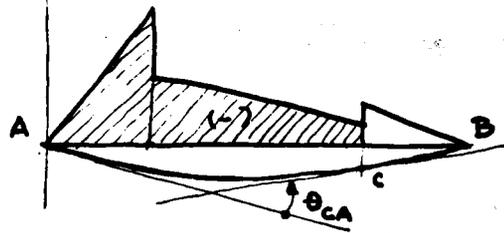
EJEMPLO (1.10) CALCULO DE GIROS Y DEFLEXIONES / MAXIMAS EN UNA VIGA CON MOMENTO DE INERCIA VARIABLE POR LOS TEOREMAS DE AREA-MOMENTODATOS

Se pide:
Determinar el giro de C respecto a A y la deflexión máxima de la viga.

SOLUCIONMomento flexionanteCurvaturas

EJEMPLO (1.10) (Continuación)

2

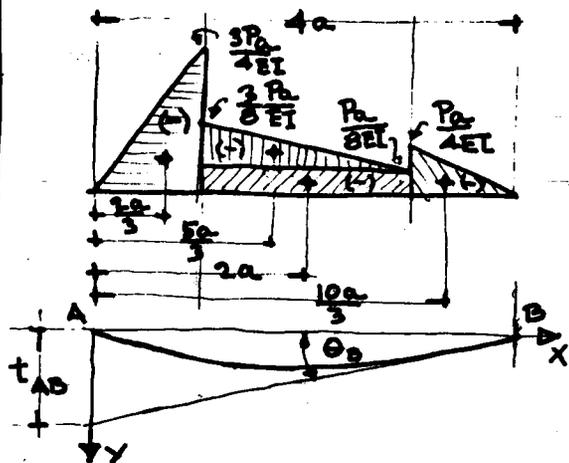


Giro

$$\theta_{CA} = -\frac{t}{2} \times \frac{3Pa}{4EI} \times a - \frac{\frac{3Pa}{8EI} + \frac{Pa}{8EI}}{2} \times 2a$$

$$\theta_{CA} = -\frac{7}{8} \frac{Pa^2}{EI}$$

Deflexión máxima



EJEMPLO (1.10) (Continuación)

3

Cálculo de $t_{AB} \times \theta_B$

$$\theta_B = \frac{t_{AB}}{4a}$$

$$t_{AB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{-3Pa}{4EI} \right) \times a \times \frac{2a}{3} + \left(\frac{-Pa}{8EI} \right) \times 2a \times 2a +$$

$$+ \frac{1}{2} \times \left(\frac{-2Pa}{8EI} \right) \times 2a \times \frac{5a}{3} +$$

$$+ \frac{1}{2} \times \left(\frac{-Pa}{4EI} \right) \times a \times \frac{10a}{3}$$

$$t_{AB} = \frac{-19Pa^3}{12EI}$$

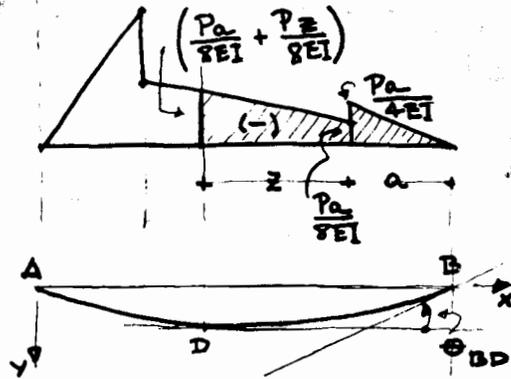
$$\theta_B = \frac{-19Pa^2}{48EI}$$

Determinación de la posición de la sección donde la tangente es horizontal

(En la hoja siguiente.)

EJEMPLO (1.10) (Continuación)

Determinación de la posición de la sección donde la tangente es horizontal



Debe cumplirse:

$$\theta_{BD} = \theta_D$$

$$\theta_{BD} = -\frac{Pa}{8EI} + \frac{Pa}{8EI} + \frac{Pa}{8EI} = z + \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{4EI} \right) a$$

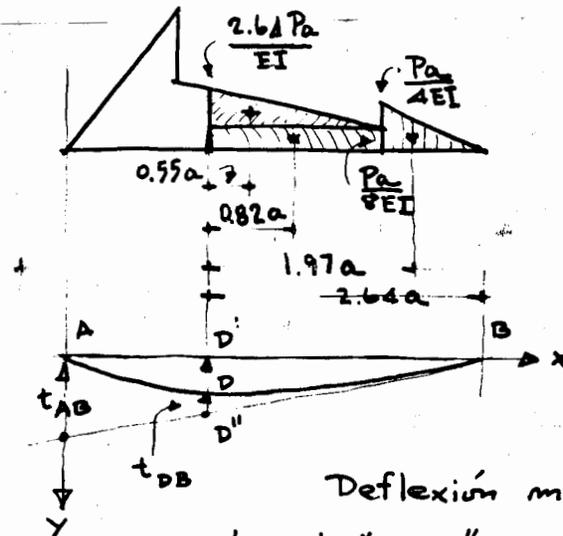
$$\frac{-19Pa^2}{48EI} = -\frac{Pa}{8EI} + \frac{Pz}{8EI} + \frac{Pa}{8EI} = z + \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{4EI} \right) a$$

$$3z^2 + 6az - 13a^2 = 0$$

$$z = 1.64a$$

EJEMPLO (1.10) (Continuación)

Cálculo de la deflexión máxima



Deflexión máxima = DD'

$$DD' = D'D'' - DD''$$

$$DD'' = \frac{t_{AB} \times 2.64a}{4a} = -\frac{19}{12} \frac{Pa^3}{EI} \times \frac{2.64a}{4a} = -1.045 \frac{Pa^3}{EI}$$

$$DD'' = t_{DB}$$

(sigue en la hoja siguiente)

EJEMPLO (1.10) (Continuación)

6

$$t_{DB} = \frac{1}{2} \left(\frac{-Pa}{4EI} \right) a \times 1.97a + \left(\frac{-Pa}{8EI} \right) \times 1.64a \times 0.82a^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1.64a}{8EI} \right) \times 1.64a \times 0.55a = -0.506 \frac{Pa^3}{EI}$$

$$DD' = 1.045 \frac{Pa^3}{EI} - 0.506 \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\text{Deflexión máxima} = \frac{0.539 Pa^3}{EI}$$

La viga al pasar del punto A al C. Por el primer teorema area-momento, este giro es igual al área del diagrama de curvatura comprendida entre las dos secciones, $-\frac{7}{8} \frac{Pa^2}{EI}$. El signo negativo de este giro concuerda con el sentido marcado en el diagrama, contrario a las manecillas del reloj, al girar la tangente en A a la tangente en C.

La flecha máxima se presenta donde la pendiente al eje deformado es nula. Para determinar su localización es necesario conocer la pendiente en un punto cualquiera de la viga. En el ejemplo se escogió el apoyo B cuya pendiente será $\theta_B = \frac{t_{AB}}{4a} = -\frac{19 Pa^2}{48EI}$. El signo negativo de la pendiente concuerda con la dirección de los ejes. Suponiendo que la flecha máxima se presenta en el punto D, la pendiente en este punto, θ_D , debe ser igual a cero y la relación $\theta_B = \theta_D + \theta_{BD}$ también debe cumplirse. Siendo $\theta_D = 0$, luego $\theta_B = \theta_{BD}$. Pero θ_{BD} , por el primer teorema area-momento, será igual al área del diagrama de curvatura comprendido entre D y B, por lo que para determinar la posición de la flecha máxima es necesario determinar el valor de z que hace el área del diagrama de curvatura igual al giro en B, resultando $z = 1.64 a$.

La deflexión máxima será igual a la distancia DD' , la cual puede obtenerse restando a la distancia $D'D''$ el valor DD'' que es la desviación tangencial t_{DB} . La distancia $D'D''$ puede encontrarse por triángulos semejantes ya que la desviación tangencial t_{AB} se conoce.

La desviación tangencial t_{DB} se encuentra aplicando el segundo teorema area-momento resultando igual a $-0.506 \frac{Pa^3}{EI}$; el signo negativo concuerda con el sentido de la desviación tangencial encontrada. La deflexión máxima resulta ser igual a $0.539 \frac{Pa^3}{EI}$. Esta deflexión se dedujo de consideraciones geométricas, por lo que no se tomó en cuenta el signo negativo de las desviaciones tangenciales.

Ejemplo 1.11.- Con este ejemplo se ilustra la forma de calcular las pendientes y las deflexiones de una viga, cuando el eje deformado de la misma presenta doble curvatura. El diagrama de curvaturas se encuentra dividiendo el valor de los momentos, con signos cambiadas, entre EI . Cuando la curvatura es positiva, el eje deformado debe ser cóncavo visto por abajo, mientras que cuando es negativo, debe ser cóncavo visto por arriba; donde la curvatura es nula habrá un punto de inflexión.

Tomando en cuenta los criterios antes expuestos se puede suponer un eje deformado como el correspondiente a la primera hipótesis de configuración. La deflexión en A se puede estimar como $A A' = A' A'' - A' A''$. El valor de $A' A''$ se puede determinar si se conoce la desviación tangencial t_{CB} , la cual se puede calcular aplicando el segundo teorema área-momento, resultando igual a $-\frac{405}{EI}$. El signo negativo de esta desviación tangencial indica que debe estar en dirección contraria a la del eje Y, por lo que la configuración del eje deformado supuesta no es correcta. Para hacer coincidir el signo negativo con la dirección de la desviación tangencial es necesario adoptar una configuración como la mostrada en la segunda hipótesis. En este caso la deflexión del punto A resulta ser $A A' = A' A'' + A A''$. El valor de $A' A''$ se determina por triángulos semejantes, una vez conocido el valor de t_{CB} . $A A''$ resulta ser la desviación tangencial t_{AB} , la cual se encuentra aplicando el segundo teorema área-momento. El signo positivo de esta desviación tangencial concuerda con la dirección encontrada que es la misma que la del eje Y. Sumando los valores se encuentra que la deflexión en A es igual a $\frac{160}{EI}$ y sabiendo que EI es igual para esta viga a 2239 t-m^2 la flecha resulta de 7 cm.

La pendiente en A se puede encontrar si se conoce la pendiente en cualquier otro punto de la viga, aplicando la ecuación $\theta_A = \theta_B + \theta_{AB}$. Para esta viga la pendiente es 1.25° respecto a la horizontal.

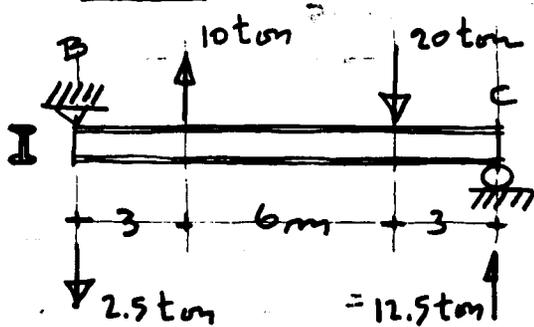
Para calcular la flecha máxima se necesita determinar primero el lugar donde la pendiente es nula. Esto puede hacerse partiendo de la ecuación $\theta_D = \theta_A + \theta_{DA}$, donde $\theta_D = 0$, θ_A es un valor ya conocido y θ_{DA} se expresa en función de x , la

distancia desde el punto de inflexión a la sección buscada, donde la pendiente es nula. Resulta una ecuación de segundo grado en x , cuya solución es 3.61 m.

El cálculo de la deflexión se efectúa teniendo en cuenta que la deflexión máxima será igual a la desviación tangencial t_{BD} , ya que la tangente que pasa por D es horizontal.

EJEMPLO (1.1) CALCULO DE PENDIENTES Y DEFLEXIONES DE UNA VIGA SOMETIDA A DOS CARGAS CONCENTRADAS, POR AREA-MOMENTO

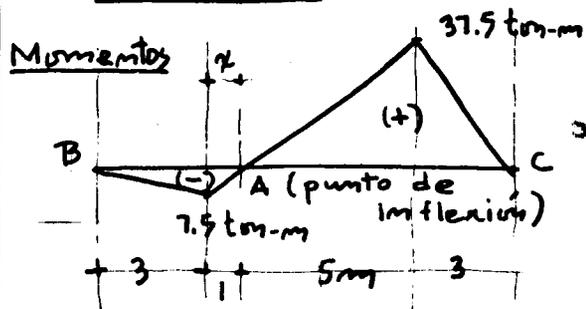
DATOS



$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 Viga I-12", pesada
 $I = 11194 \text{ cm}^4$
 $EI = 2 \times 10^6 \times 11194 \times 10^4 \text{ kg-cm}^2$
 $= 2239 \text{ ton-m}^2$

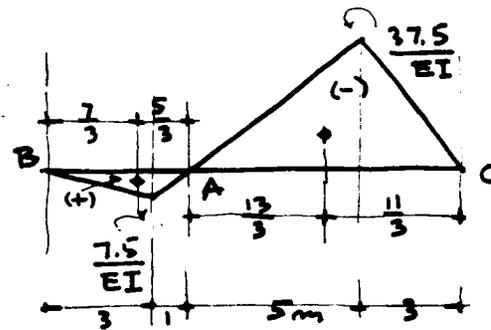
Se pide: a) Encontrar la pendiente y la deflexión en el punto de inflexión.
 b) Encontrar la deflexión máxima.

SOLUCION



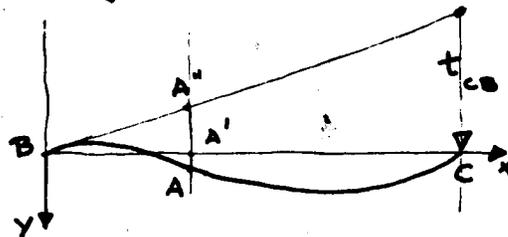
Cálculo de x:
 $\frac{4}{7.5} = \frac{6}{7.5 + 37.5}$
 $\therefore x = 1 \text{ m}$

EJEMPLO (1.1) (Continuación)



Curvaturas

Cálculo de la flecha y la desviación tangencial en A



t_{CB} hipótesis

Flecha en A = AA'

$AA' = AA'' - A'A''$

$\frac{A'A''}{4} = \frac{t_{CB}}{12} ; A'A'' = \frac{t_{CB}}{3}$

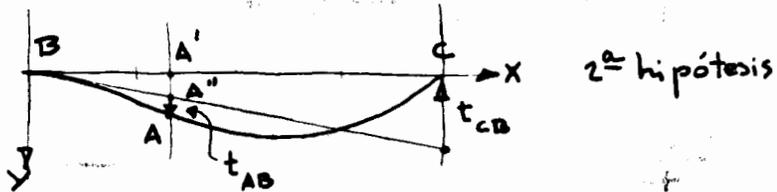
$t_{CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7.5}{EI} \times 4 \times \left(8 + \frac{5}{3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-37.5}{EI}\right) \times 8 \times \frac{11}{3}$

$t_{CB} = -\frac{405}{EI}$ (signe)

EJEMPLO (1.11) (Continuación)

3

La desviación tangencial resultó de sentido contrario al supuesto, por lo que debe ensayarse otra configuración.



$$\text{Flecha en A} = A'A'' + A''A$$

$$AA'' = t_{AB} = \frac{7.5}{EI} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{EI}$$

$$A'A'' = \frac{405}{EI} \quad (\text{Ver cálculo 1ª hipótesis.})$$

$$\begin{aligned} \text{Flecha en A} &= \frac{405}{3EI} + \frac{25}{EI} = \frac{160}{EI} \\ &= \frac{160}{2239} = 0.07 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Flecha en A} = 0.07 \text{ m}}$$

EJEMPLO (1.11) (Continuación)

4

Pendiente en B:

$$\theta_B = \frac{t_{CB}}{12} = \frac{405}{EI \cdot 12} = \frac{33.75}{EI}$$

Pendiente en A:

$$\theta_A = \theta_B + \theta_{AB} = \frac{33.75}{EI} + \frac{7.5}{EI} \times \frac{4}{2}$$

$$\theta_A = \frac{48.75}{EI} = \frac{48.75}{2239}$$

$$\boxed{\theta_A = 0.0218 \text{ radianes} = 1.25^\circ}$$

Cálculo de la deflexión máxima

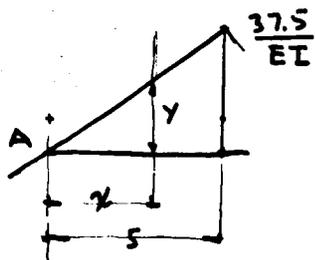
Posición de la sección donde la pendiente es nula

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{DA}$$

$$\theta_D = 0$$

$$\theta_A = \frac{48.75}{EI}$$

EJEMPLO (1.11) (Continuación) 5

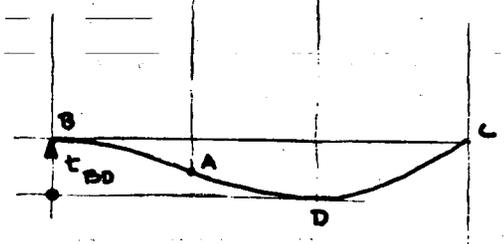
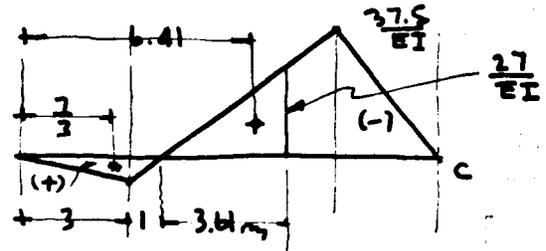


$$y = \frac{37.5}{5EI} x = \frac{7.5x}{EI}$$

$$\theta_{DA} = -\frac{7.5x \cdot x}{EI \cdot 2}$$

$$0 = \frac{48.75}{EI} - \frac{7.5x^2}{2EI}; \quad x = \underline{\underline{3.61 \text{ m}}}$$

Cálculo flecha máxima:



(sigua)

EJEMPLO (1.11) (Continuación) 6

$$t_{DD} = \frac{1}{2} \times \frac{7.5}{EI} \times 4 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{27}{EI} \times 3.61 \times 6.41$$

$$= \frac{35}{EI} - \frac{312}{EI} = -\frac{277}{EI} = -\frac{277}{2239}$$

Flecha máxima = 0.124 mm

REFERENCIAS

- 2.1.- F. Robles, O. M. González Cuevas, J.L. Trigos S., editores, "Apuntes de Mecánica de Materiales, Cuaderno 1", Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1973.
- 2.2. American Institute of Timber, Construction, "Timber Construction Manual", John Wiley and Sons, Nueva York, 1966.
- 2.3. "Especificaciones para estructuras de Madera", Secretaría de Obras Públicas, México 1968.
- 2.4. "Reglamenta de Construcciones para el Distrito Federal", México 1966.
- 2.5. R. J. Hoyle, Jr., "Wood Technology in the Design of Structures", Mountain Press Publishing Co., Missoula, Montana, 1973.
- 2.6. H. J. Honsen, "Diseño moderno de estructuras de maderas", CECSA, México 1969.
- 2.7. G. Gurfinkel, "Wood Engineering", Southern Forest Products Association, New Orleans, Louisiana, 1973.

APENDICE A

Propiedades de las secciones planas.

Notación:

\bar{x} , \bar{y} = distancia al centroide C

A = área

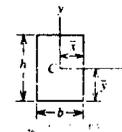
I_x , I_y = momentos de inercia respecto a los ejes x, y

I_{xy} = producto de inercia respecto a los ejes x, y

$J = I_x + I_y$ = momenta polar de inercia

I_{BB} = momento de inercia respecto al eje B-B

1. Rectángulo. (Origen de ejes en el centroide)

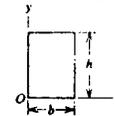


$$A = bh \quad \bar{x} = \frac{b}{2} \quad \bar{y} = \frac{h}{2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{xy} = 0 \quad J = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

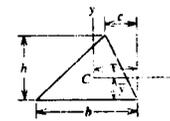
2. Rectángulo. (Origen de ejes en una esquina)



$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad I_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \quad J = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2)$$

3. Triángulo. (Origen de ejes en el centroide)

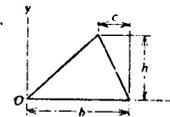


$$A = \frac{bh}{2} \quad \bar{x} = \frac{b+c}{3} \quad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \quad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b-2c) \quad J = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc - c^2)$$

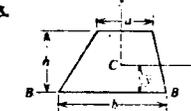
4. Triángulo. (Origen de ejes en un vértice)



$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \quad J = \frac{bh}{12}(h^2 + 3b^2 - 3bc + c^2)$$

5. Trapecio. (Origen de ejes en el centroide)

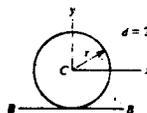


$$A = \frac{h(a+b)}{2} \quad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \quad I_{yy} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

APENDICE A (continuación) -352-

6. **Círculo.** (Origen de ejes en el centro)

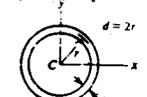


$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \quad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_{xx} = 0 \quad J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

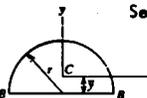
7. **Anillo circular.** (Origen de ejes en el centro)
Fórmulas aproximadas para los casos en que t sea pequeño.



$$A = 2\pi r t = \pi d t \quad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xx} = 0 \quad J = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

8. **Semicírculo.** (Origen de ejes en el centroide)

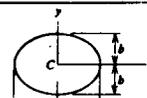


$$A = \frac{\pi r^2}{2} \quad y = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \quad I_y = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{xx} = 0 \quad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

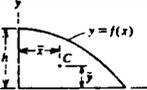
9. **Elipse.** (Origen de ejes en el centroide)



$$A = \pi ab \quad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \quad I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$$I_{xx} = 0 \quad J = \frac{\pi ab}{4} (b^2 + a^2)$$

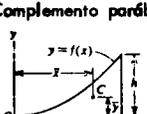
10. **Parábola.**



$$y = f(x) = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \quad x = \frac{3b}{8} \quad y = \frac{2h}{5}$$

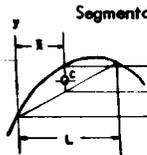
11. **Complemento parabólico.** (Origen de ejes en el vértice.)



$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \quad x = \frac{3b}{4} \quad y = \frac{3h}{10}$$

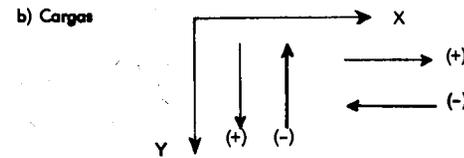
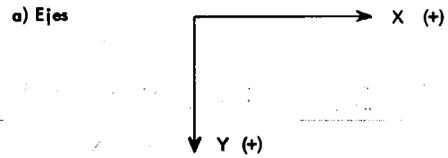
12. **Segmento parabólico.** (Origen en el extremo del segmento.)



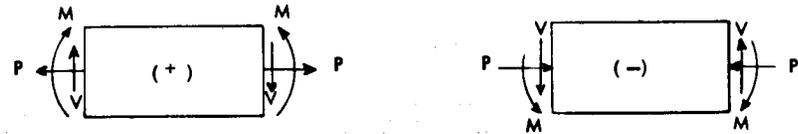
$$\bar{x} = \frac{L}{2}$$

$$A = \frac{2}{3} h L$$

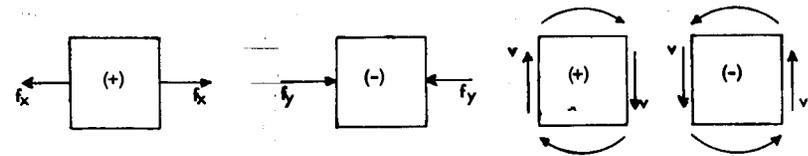
APENDICE B
Convenciones de signos



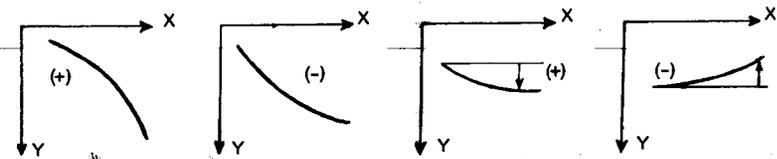
c) Carga Axial, Fuerza Cortante y Momento Flexionante.



d) Esfuerzos normales y Cortantes.

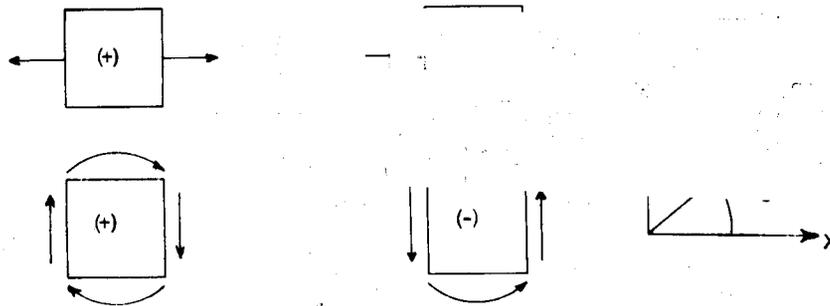


e) Pendientes y Deflexiones.

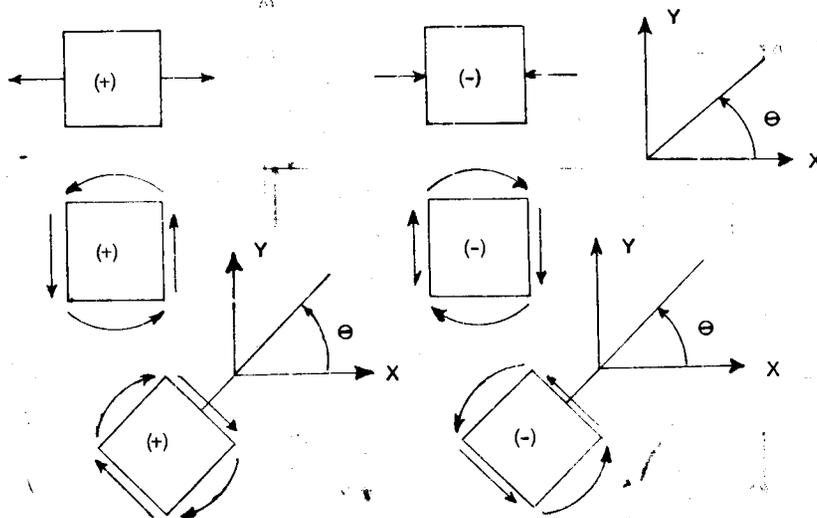


APENDICE B
(Continuación)

f) Esfuerzos en planos inclinados en miembros con cargas axiales



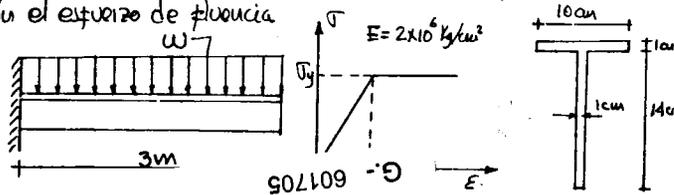
g) Esfuerzos Principales en Vigas



EJEMPLOS RESUELTOS

(FLEXION)

Problema Para la viga mostrada en la figura obtenga la magnitud máxima de la carga uniformemente repartida w que puede soportar al presentarse por primera vez en algún punto de la sección el esfuerzo de fluencia.



139 APUNTE
 línea del eje neutro

$$I = \frac{10(1)^3}{12} + 10(4.75)^2 + \frac{1(14)^3}{12} + 14(3.125)^2 = 0.9333 + 191.4 + 222.7 + 136.72$$

$$I = 557.625 \text{ cm}^4$$

$$S_s = 117.38 \text{ cm}^3 \quad S_i = 55.07 \text{ cm}^3 \quad \text{si } \sigma_y = S_i$$

$$\sigma_y = E \epsilon = 2 \times 10^6 (10^{-3}) = 2 \times 10^3 = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

$$M_{max} = S_i \sigma_y = 2000 \times 55.07 = 110142.14 \text{ kg-cm}$$

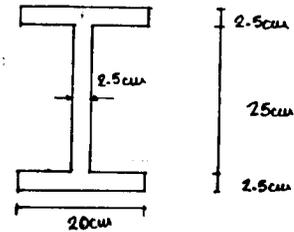
$$M_{max} = 1101.4214 \text{ kg-m} = 1.1014214 \text{ T-m}$$

$$M_{empot} = M_{max} = \frac{wL^2}{2} = \frac{w(3)^2}{2} = 1.1014214$$

$$w_{max} = \frac{2(1.1014214)}{9} = \frac{2.2028428}{9} = 0.24477367 \text{ kg/m}$$

$$w_{max} = 244.77 \text{ kg/m}$$

Problema Usando el concepto de "plasticidad ideal" (recta horizontal en la parte alta del diagrama) ($\sigma = E$ cuando $\sigma = \sigma_y$, omitiendo las deformaciones elásticas), determine: a) El valor del momento flexionante último (plástico) que puede soportar la sección transversal mostrada si $\sigma_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ b) El factor de forma (K_f o f_f) de la misma sección.



Solución:

$$I = 2 \left[\frac{20(2.5)^3}{12} + 20(2.5)(13.75)^2 \right] + \frac{2.5(25)^3}{12} = 22213.541 \text{ cm}^4$$

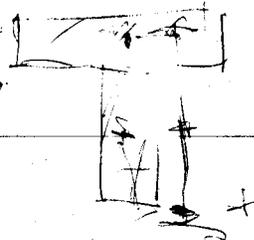
$$S = \frac{I}{c} = 1480.9027 \text{ cm}^3; \quad \frac{A}{2} = 20(2.5) + 12.5(25) = 81.25 \text{ cm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{[2.5(2.5)(6.25) + 20(2.5)(13.75)]}{81.25} = 10.865 \text{ cm}$$

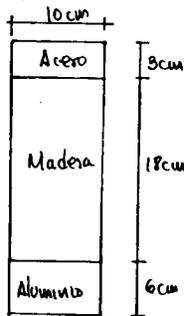
$$Z = \frac{A}{2} (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = 81.25(10.865 + 10.865) = 1765.625 \text{ cm}^3$$

$$M_p = Z \sigma_y = 1765.625(2530) = 4467031 \text{ kg-cm}$$

$$K = \frac{Z}{S} = \frac{1765.625}{1480.9027} = 1.1922625$$



Problema Una viga de prueba esta compuesta de tres materiales, acero, madera y aluminio con la sección transversal mostrada en la figura; las tres partes se hallan firmemente unidas entre sí de manera que no existe posibilidad de desplazamiento entre ellas y trabajan como una unidad. Determinar la magnitud del momento máximo que puede soportar la viga si los esfuerzos permisibles son: $\sigma_{acero} = 1200 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_{aluminio} = 800 \text{ kg/cm}^2$ y $\sigma_{madera} = 100 \text{ kg/cm}^2$; $E_{acero} = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $E_{aluminio} = 7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ y $E_{madera} = 10.5 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$



Solución:

$$\frac{E_{acero}}{E_{madera}} = 20 ; \frac{E_{aluminio}}{E_{madera}} = 6.667 \quad A = 1180 \text{ cm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{[66.67(6) + 10(18) + 200(3)]25.5}{1180} = 16.27 \text{ cm}$$

$$I_{cm} = I = \frac{(66.67)(6)^3}{12} + 400(13.27)^2 + \frac{10(18)^3}{12} + 120(1.27)^2 + \frac{200(3)^3}{12} + 600(9.23)^2$$

$$I = 128953.21 \text{ cm}^4 ; S_x = 7888.37 \text{ cm}^3 ; S_y = 11963.41 \text{ cm}^3$$

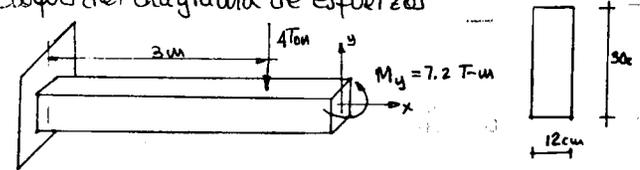
En la madera en la fibra mas alejada $S_i = 12496.495 \text{ cm}^3$

$$M_{máx} = 12496.495 \text{ kg-cm}$$

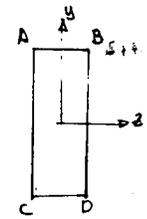
$$\sigma_{acero} = \frac{1200}{20} = 60 \quad M_{ac} = 60(11963.41) = 717804.6 \text{ kg-cm (Req)}$$

$$\sigma_{aluminio} = \frac{800}{6.67} = 120 \quad M_{al} = 120(7888.37) = 946604.64 \text{ kg-cm}$$

Problema Un cantiliver soporta el sistema de cargas esquematizado en la figura, si la sección transversal tiene las dimensiones indicadas y el peso propio de la viga es de 3 Ton en total; a) Determinar los esfuerzos máximo de tensión, y compresión; b) localizar el eje neutro; c) Dibujar un croquis del diagrama de esfuerzos



Solución. El momento en el apoyo es:



$$M = 4(3) + 3(2) = 18 \text{ T-m}$$

$$I_x = \frac{12(30)^3}{12} ; S_x = \frac{(30)^3}{15}$$

$$I_y = \frac{30(12)^3}{12} \quad S_y = \frac{30(12)^2}{6}$$

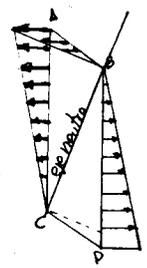
Los esfuerzos en los puntos A, B, C y D son

$$\sigma_A = \frac{1800000(15)}{(30)^3} + \frac{720000(6)}{30(12)^2} = 2000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{1800000(15)}{(30)^3} - \frac{720000(6)}{30(12)^2} = 0.0 \text{ kg/cm}^2$$

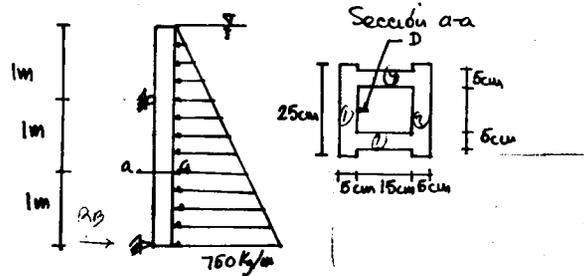
$$\sigma_C = -\frac{1800000(15)}{(30)^3} + \frac{720000(6)}{30(12)^2} = 0.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_D = -\frac{1800000(15)}{(30)^3} - \frac{720000(6)}{30(12)^2} = -2000 \text{ kg/cm}^2$$



Como $\sigma_B = \sigma_C = 0.0$ el eje neutro pasa por esos puntos

Problema En una presa de derivación una viga que forma parte de una compuerta soporta una carga hidrostática como se muestra en la figura. Obtener el esfuerzo en el punto D de la sección a-a debido al momento flexionante.



Solución: El momento flexionante en la sección a-a es:

$$M = R_A(1) - w(2)(\frac{1}{2})(2)$$

Del diagrama de la izquierda por equilibrio $\sum M_B = 0$

$$R_A(2) - \frac{750(3)(\frac{1}{2})(3)}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{750 \times 3}{4} = 563 \text{ Kg}$$

Por triángulos semejantes $\frac{750}{3} = \frac{w}{2}$

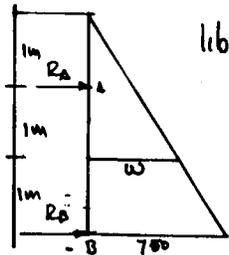
$$w = \frac{1500}{2} = 600 \text{ Kg/m}$$

$$\therefore M = 563 - \frac{500(2)}{3} = 230 \text{ Kg-m}$$

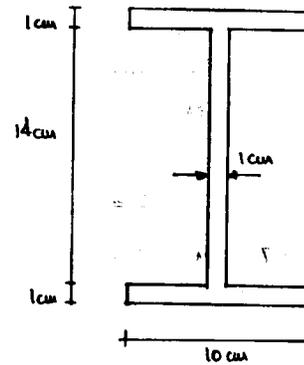
$$I = 2 \left[\frac{25(5)^3}{12} + 25 \times 5 \times 10^2 \right] + 2 \left[\frac{5(15)^3}{12} \right]$$

$$I = 25520.8 + 23125 = 28939.33 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_D = \frac{23000 \times 10}{28939.33} = 8.12 \text{ Kg/cm}^2$$



Problema Obtener para la viga cuya sección transversal se muestra, a) El máximo momento elástico M_e que soporta, b) El momento plástico M_p y el factor de forma $F_t = \frac{M_p}{M_e}$. Considere el material elasto plástico perfecto con un valor de $f_y = 2500 \text{ Kg/cm}^2$



Solución: $I = \frac{10(16)^3}{12} - \frac{9(14)^3}{12} = 3413.33 - 2058 = 1355.33 \text{ cm}^4$

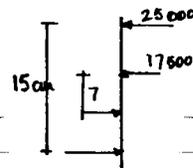
$$S = \frac{I}{8} = 169.42 \text{ cm}^3$$

$$M_e = f_y S = 2500 \times 169.42 = 423540.6 \text{ Kg-cm}$$

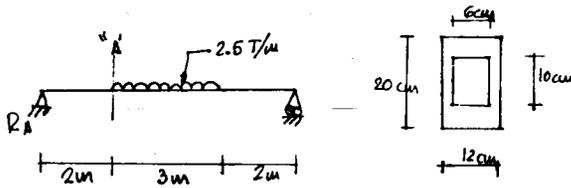
$$M_p = 25 \times 10^2 \times 15 + 1.75 \times 10^2 \times 7$$

$$M_p = (37.5 + 12.25) \times 10^4 = 49.75 \times 10^4 \text{ Kg-cm}$$

$$F_t = \frac{M_p}{M_e} = \frac{497500}{423540.6} = 1.17$$



Problema ¿Cuál es el máximo esfuerzo que ocurre en la sección "A" de una viga con las características de la figura?



Solución El momento en "A" es

$$M = R_A \times 2$$

$$\text{Por simetría } R_A = \frac{2.5 \times 3}{2} = \frac{7.5}{2}$$

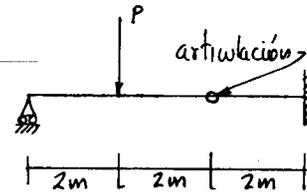
$$M = \frac{7.5}{2} \times 2 = 7.5 \text{ T-m}$$

$$I = \frac{1}{12} (12 \times 20^3 - 6 \times 10^3) = 10^3 (8 - 0.5)$$

$$I = 7.5 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

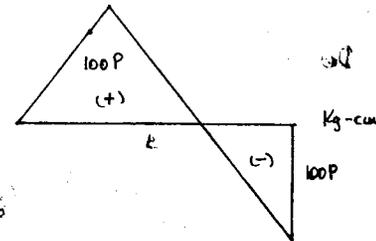
$$\sigma_{\text{max}} = \frac{7.5 \times 10^3 (10)}{7.5 \times 10^3} = 1000 \text{ Kg/cm}^2$$

Problema Calcule el valor de la carga P que puede aplicarse a la viga de la figura si el esfuerzo permisible en flexión es $\sigma = 1500 \text{ Kg/cm}^2$, y el módulo de sección elástica es $S = 2700 \text{ cm}^3$



Solución:

Diagrama de Momento flexionante.



$$M_{\text{max}} = \pm 100 P \text{ Kg-cm}$$

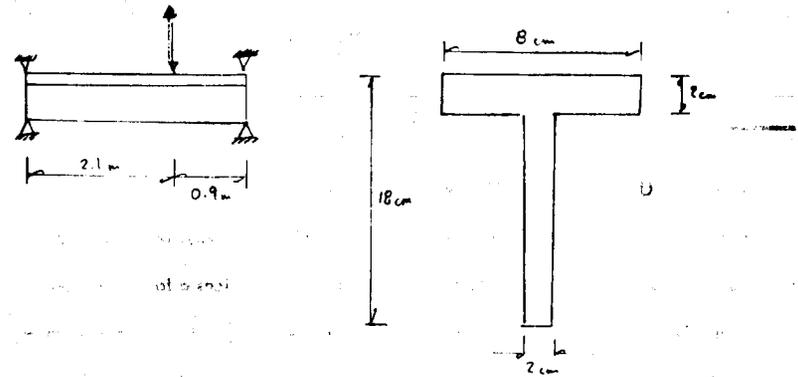
$$M = f S \Rightarrow 100 P = 1500 (2700)$$

$$P = 40500 \text{ Kg}$$

1.- La viga "T" de la figura está hecha con un material elástico lineal. Encontrar el valor más grande de la carga P que puede aplicarse si dicha carga puede actuar hacia abajo o hacia arriba. Los esfuerzos permisibles a flexión de la viga son:

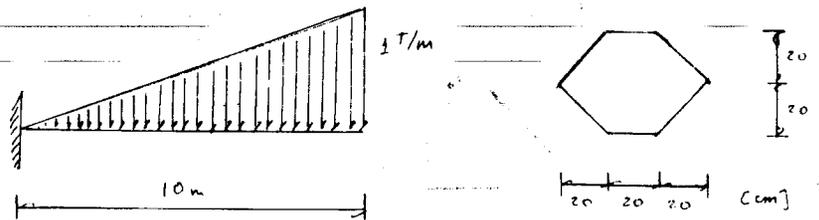
$$\sigma_t = 210 \text{ Kg/cm}^2 ; \sigma_c = 410 \text{ Kg/cm}^2$$

Resp.: $P_{MAX} = 627 \text{ Kg.}$



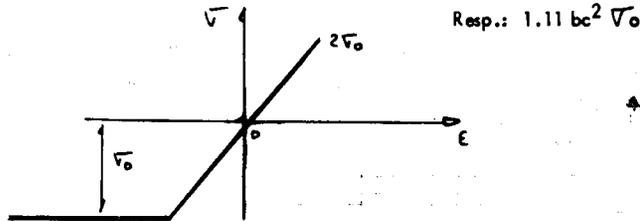
EJERCICIOS
(FLEXION)

2.- Determine el radio de curvatura en $x = 5\text{m}$.

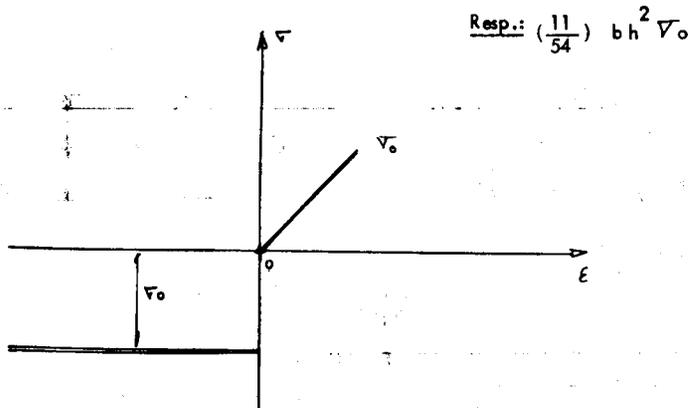


$$E = 141 \text{ ton/cm}^2$$

3.- Suponga que un material tiene un diagrama esfuerzo-deformación como se indica en la figura, con $2\sigma_0$ como su resistencia última a la tensión. Determine el momento último, M , para una viga rectangular de base b y altura $h=2c$, flexionando alrededor del eje horizontal.

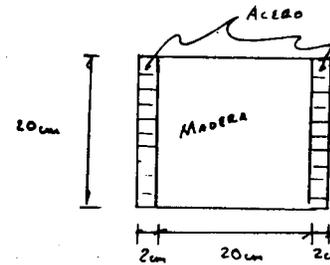


4.- Una viga de sección rectangular de dimensiones $b \times h$, se flexiona alrededor del eje horizontal de la sección. El material de la viga presenta propiedades linealmente elásticas a la tensión e idealmente plásticas a la compresión. Si el nivel de esfuerzo máximo en tensión y compresión es $|\sigma_0|$, sea, numéricamente el mismo ¿Qué momento M resiste la viga en función de σ_0 , b y h ?



5.- Una viga tiene la sección transversal compuesta como se muestra en la figura.

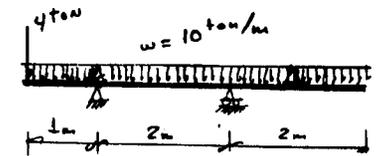
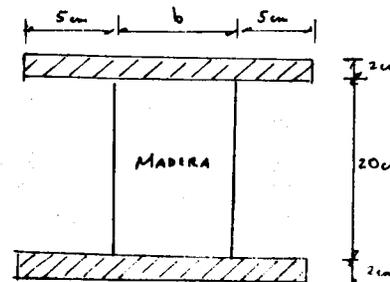
- i) Si los esfuerzos permisibles a flexión son $\sigma = 1500 \text{ Kg/cm}^2$ (acero) y $\sigma = 100 \text{ Kg/cm}^2$ (madera), encuentre el momento permisible de la sección.
- ii) Con el resultado anterior dibuje el diagrama de esfuerzos en la sección.



$E_{(acero)} = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $E_{(madera)} = 8 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

Resp.: $M_{per} = 4.8 \text{ ton.m}$.

6.- Calcule el ancho b de la viga de madera unida a dos placas de acero, como se ve en la figura, para que soporte la condición de carga mostrada. Los esfuerzos normales permisibles en la madera y el acero son $\sigma_M = 100 \text{ Kg/cm}^2$ y $\sigma_A = 2500 \text{ Kg/cm}^2$ respectivamente. Tome $E_M = 1 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$ y $E_A = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$.

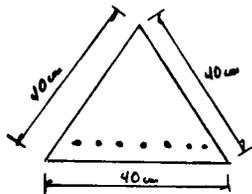


Resp $b = 10 \text{ cm}$

7.- Determinar los esfuerzos de trabajo si la sección soporta un momento de 1.5 ton-m.

$E_s = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$ $f'_c = 200 \text{ Kg/cm}^2$
 $A_s = 10 \text{ cm}^2$ $f_y = 4000 \text{ Kg/cm}^2$

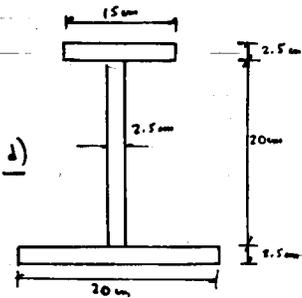
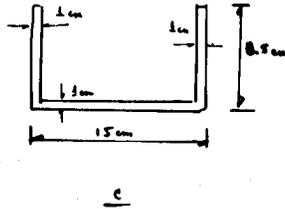
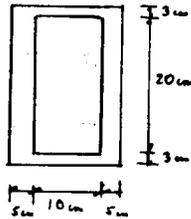
Usar el método de la sección transformada.



área de acero = 10 cm^2 ; $n = 4.6$

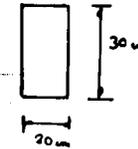
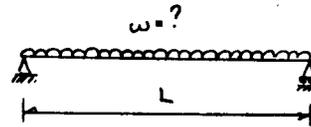
Resp.: $f_c = 101.5 \text{ Kg/cm}^2$
 $f_s = 736 \text{ Kg/cm}^2$

8.- Determine el factor de forma de las figuras siguientes:



- Resp.
- a) 1.7
 - b) 1.427
 - c) 1.81
 - d) 1.07

9.- Determinar la carga máxima resistente y la curvatura en el extremo y en el centro del claro de la siguiente viga.

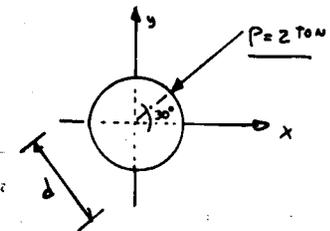
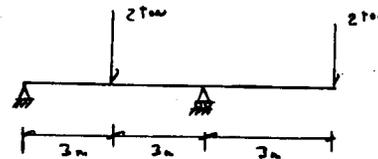


$L = 3 \text{ m}$
 $\sigma_{con} = 100 \text{ kg/cm}^2$
 $\sigma_{ten} = 200 \text{ kg/cm}^2$
 $\epsilon_{con} = 0.001$
 $\epsilon_{ten} = 0.001$
 $F. S. = 1.4$

Resp.: $w = 1.9 \frac{\text{ton}}{\text{m}}$

$\rho = 4.75 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$

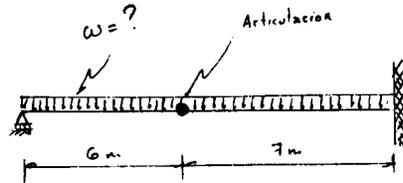
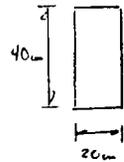
10.- Considere a la viga de la figura, homogénea y de sección transversal circular constante, sometida a un par de cargas aplicadas como se ilustra. Si el esfuerzo $\sigma_{MAX} = 300 \text{ Kg/cm}^2$, ¿Cuánto debe valer el diámetro de la sección para soportar la condición de carga?



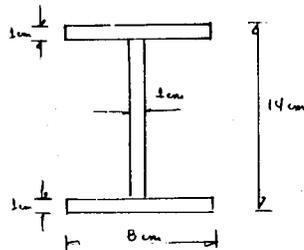
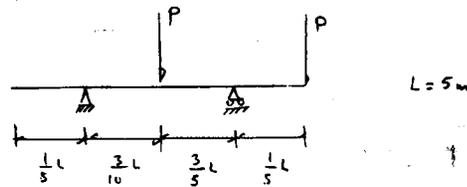
Resp.: $d = 27.3 \text{ cm}$

11.- Determinar el valor de w si el esfuerzo permisible en la viga es -----

$\sigma_{perm} = 2000 \frac{Kg}{cm^2}$. Calcular el momento máximo correspondiente en la viga.



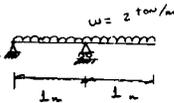
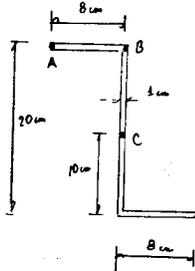
12.- Para la viga de la figura, ¿cuál es la carga P máxima si los esfuerzos permisibles son de 300 Kg/cm^2 y de 200 Kg/cm^2 , a tensión y compresión respectivamente?



Resp.: $P_{MAX} = 234.7 \text{ Kg}$.

PROBLEMAS RESUELTOS
(DEFORMACIONES)

13.- Calcule los esfuerzos máximos por flexión en los puntos A, B y C de la sección mostrada.



Resp. Inclinación de ejes principales:

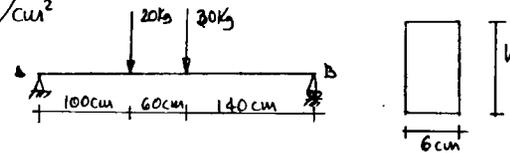
los: $\alpha = 16.4^\circ$

$V_{xA} = -542.3 \text{ Kg/cm}^2$ (compresión)

$V_{xB} = 1074.6 \text{ Kg/cm}^2$ (tensión)

$V_C = 0$

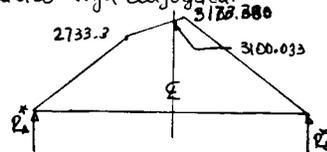
Problema Para la viga de la figura, determinar el peralte apropiado h para que soporte los cargas indicadas sin exceder de 1.0cm la flecha en el centro del claro y sin que se sobrepase el esfuerzo admisible a la flexión de 85 Kg/cm^2 y $E = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$



Solución: Resolviendo la viga; por equilibrio $\sum M_A = 0$
 $20(100) + 30(160) = 300 R_B \quad \therefore R_B = 22.667 \text{ kg}$

Por $\sum F_y = 0 \quad R_A = 27.333 \text{ kg}$

Obteniendo el diagrama de momento flexionante y aplicando viga conjugada.



Para la sección transversal $I = \frac{bh^3}{12}$
 $I = \frac{6(h)^3}{12} = 0.5 h^3$

Por $\sum M_B = 0$
 $\frac{2733.30}{EI} \times 100 \times \frac{1}{2} (100) + \frac{2733.3}{EI} (60 \times 130) + \frac{(40 \times 140)}{EI} \times \frac{140}{2} \times 140$
 $+ \frac{3173.33}{EI} \left(\frac{140}{2}\right) (206.66) = 300 R_B$
 $\therefore R_B = \frac{20624.34}{EI}$

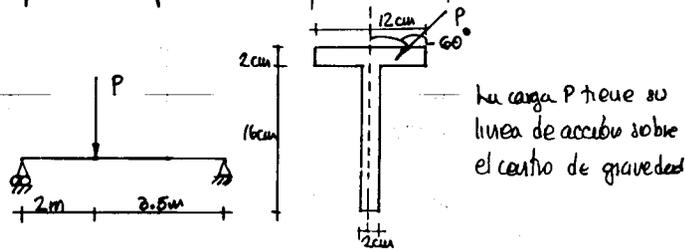
Para que la flecha sea igual a 1 cm al centro del claro

$1 = \frac{20624.34}{EI} (150) - \frac{3173.33}{EI} \left(\frac{140}{2}\right) (56.66) - \frac{3100.033}{EI} (10) (5)$
 $- \frac{73.3467}{EI} \left(\frac{10}{2}\right) 6.66 \quad \therefore .5 h^3 = 26348.465$
 $h^3 = 526.9693 \quad \therefore h = 8.08 \text{ cm}$

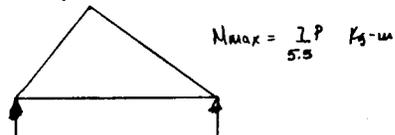
$M_{max} = 3173.33 \text{ kg-cm} \quad \sigma = \frac{M}{I} y = \frac{M(12)}{6 h^3} \frac{h}{2} = \frac{M}{h^2}$

$\therefore h^2 = \frac{M}{\sigma} = \frac{3173.33}{85} = 37.33 \quad h = 6.11 \text{ cm} \quad R_{ige}$

Problema Para la viga cargada como se muestra, si los esfuerzos permisibles son 800 Kg/cm^2 y 350 Kg/cm^2 a compresión y tensión respectivamente; determina la carga máxima que puede ser aplicada sin que tales esfuerzos se rebasen.



Solución El diagrama de momentos flexionantes



Para la sección $\bar{y} = \frac{(2 \times 12) + (16 \times 16)}{2(12 + 16)} = 6.14 \text{ cm}$

$I_x = 1801.5237 \text{ cm}^4$ $I_y = 298.67 \text{ cm}^4$

La inclinación del eje neutro es $\tan \alpha = \frac{I_x}{I_y} \tan \theta$

$\tan \alpha = 10.447$ $\alpha = 84.53^\circ$

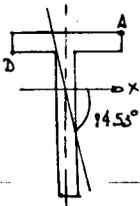
Los esfuerzos máximos ocurren en A y D

$\sigma_A = -\frac{Mx}{I_x} - \frac{My}{I_y} = -840 = -0.5 \frac{700}{5.5} P (6.14) - 0.86 \frac{700}{5.5} P (6)$

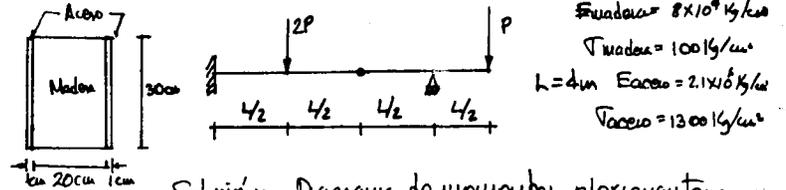
$\therefore P = 345.513 \text{ Kg}$

$\sigma_D = -\frac{Mx}{I_x} + \frac{My}{I_y} = 350 = -0.5 \frac{700}{5.5} P (4.14) + 0.86 \frac{700}{5.5} P (6)$

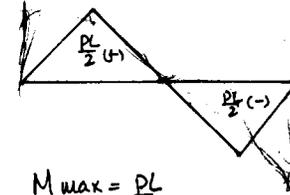
$\therefore P = 169.253 \text{ Rige}$



Problema ¿Cuál es el mayor valor que puede alcanzar la carga P en una viga con la sección, condiciones de apoyo y sistema de carga esquematizados en la figura, si los esfuerzos permisibles son los indicados?



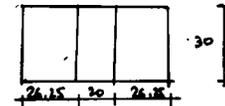
Solución: Diagrama de momentos flexionantes:



$M_{max} = \frac{PL}{2}$

$M_{resist} = \frac{\sigma T I}{y}$ $n = \frac{E_{aceo}}{E_{madera}} = 21$

Sección transformada



$I = \frac{22.5 \times 30^3}{12} = 163125 \text{ cm}^4$; $\sigma_p = \frac{P}{A} = \frac{1200}{26.25} = 45.71 \text{ Kg/cm}^2$

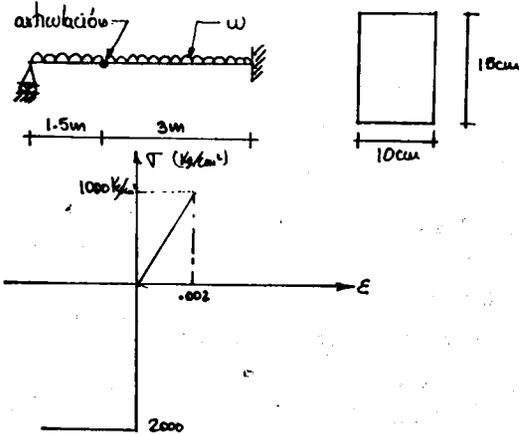
$M_r = 49.52(163125) = 8.08 \times 10^6 \text{ Kg-cm}$

$\therefore M_r = M_{max} = \frac{P(4)}{2} = 5.39 T-m$

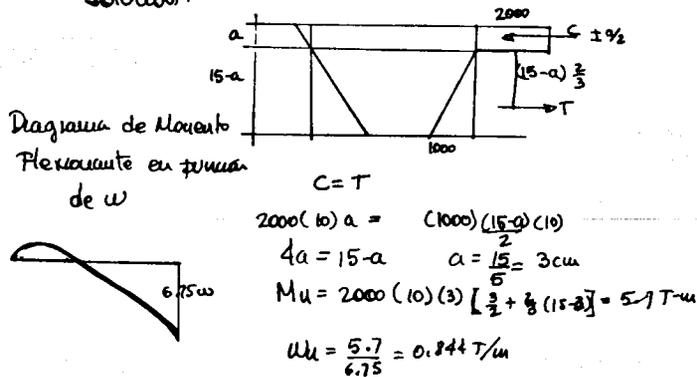
$\therefore P = \frac{5.39}{2} = 2.69 \text{ Ton}$

C <

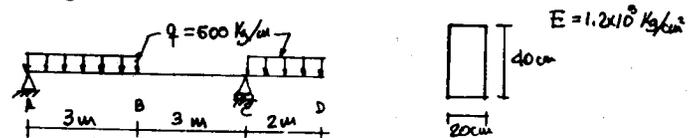
Problema Calcular el valor de la carga última w_u para la viga mostrada si el material del que esta hecha se comporta como se indica en la gráfica.



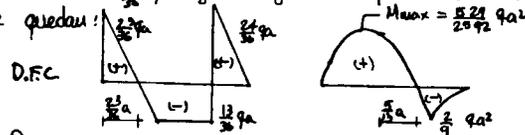
Solución:



Problema Para la viga mostrada en la figura determinar a) los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante b) la magnitud de los esfuerzos normales máximos en el punto de momento máximo; c) la magnitud de los esfuerzos cortantes máximos en un punto situado a 1.5m del apoyo izquierdo; d) las ecuaciones generales de la pendiente y el desplazamiento; e) la magnitud del desplazamiento vertical en el punto c



Solución: a) Obtener reacciones por equilibrio $\sum M_A = 0$ $q \frac{6^2}{2} + \frac{2}{3} q a \frac{1}{2} a - 2a R_D = 0$
 Considerando $a = 3 \text{ m}$ $R_D = \frac{37}{6} q a$
 Por $\sum F_v = 0$ $R_A = \frac{q(5 - \frac{37}{6})}{2}$
 Por tanto $R_D = \frac{23}{6} q a$ y los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante quedan:



Para $0 \leq x \leq a$ $V = \frac{23}{6} q a - q x$ Para $V = 0$ $x = \frac{23}{6} a$
 $M_{\text{max}} = \frac{23}{6} q a x - \frac{q}{2} x^2$ $M_{\text{max}} = q a^2 \left(\frac{529}{144} - \frac{529}{2592} \right) = \frac{5.29}{2.592} q a^2$
 $V_{x=1.5} = q a \left(\frac{23}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3} q a$ Siendo $I = \frac{20(40)^3}{12} = 106666.67 \text{ cm}^4$
 b) $\tau_{\text{max}} = \frac{M}{I} y = \frac{5.29 \times 5}{2.592} \frac{(20)^2 (20)}{106666.67} = 17.22 \text{ kg/cm}^2$

c) $\tau_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{3}{2} \frac{5}{36} (5) (300) \frac{1}{20(40)} = 0.39 \text{ kg/cm}^2$
 d) $E I v'''' = M = \frac{23}{6} q a x - \frac{q}{2} x^2 + \frac{q}{2} (x-a)^2 - \frac{q}{2} (x-2a)^2 + \frac{37}{72} (x-2a)^2 q a + 4$
 $E I v''' = \sum F_v = \frac{23}{6} q a - q x + \frac{q}{2} (x-a) - \frac{q}{2} (x-2a) + \frac{37}{72} q a$
 $E I v'' = \sum F_v = \frac{23}{6} q a - \frac{7}{24} q x + \frac{q}{24} (x-a) - \frac{q}{24} (x-2a) + \frac{37}{216} (x-2a)^2 q a + C_1$

$$\text{en } x=0 \quad y=0 = C_2 = 0$$

$$\text{y en } x=2a \quad y=0$$

$$0 = \frac{1(33)}{216} qa^4 - \frac{14}{24} qa^4 + \frac{9}{24} a^4 - 0 - 0 + 2C_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{24} qa^4 \left(-\frac{14}{24} + \frac{14}{24} - \frac{9}{24} \right) = C_1 = -\frac{19}{432} qa^4$$

Las ecuaciones son:

$$\theta = \frac{1}{EI} \left(\frac{23}{72} qa^2 x^2 - \frac{9}{24} x^3 + \frac{9}{24} (x-a)^3 - \frac{9}{24} (x-2a)^3 + \frac{27}{216} (x-2a)^3 qa - \frac{19}{432} qa^4 \right)$$

$$y = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{23}{216} qa^2 x^3 - \frac{9}{24} x^4 + \frac{9}{24} (x-a)^4 - \frac{9}{24} (x-2a)^4 + \frac{27}{216} (x-2a)^3 qa - \frac{19}{432} qa^4 x \right\}$$

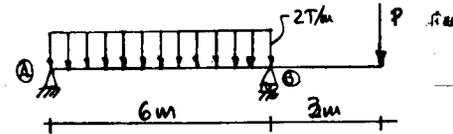
e) El desplazamiento vertical en C ($x = \frac{3}{2}a$)

Como $EI = 1.29 \times 10^6 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$

$$y_c = \frac{1}{EI} \left[4a^4 \left[\frac{23(9/2)}{216(27)} - \frac{4(9/6)}{24(81)} + \frac{6(25)}{24(27)} - \frac{16}{24(81)} + \frac{27(3)}{216(27)} - \frac{19}{432(27)} \right] \right]$$

$$y_c = \frac{1}{EI} qa^4 [-0.022346] = -0.023 \text{ cm}$$

Problema Determinar la magnitud de la fuerza P que debe aplicarse en el extremo libre de la viga de la figura, a fin de que el punto medio entre los apoyos no se desplace.



$$\text{Solución: } R_A = \frac{12(3) - P(3)}{6} = 6 - \frac{P}{2}$$

$$0 \leq x \leq 6$$

$$M = (6 - \frac{P}{2})x - 2x^2 = (6 - \frac{P}{2})x - x^2$$

$$EI y' = (6 - \frac{P}{2})x^2 - 2x^3 + C_1 = (6 - \frac{P}{2})\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + C_1$$

$$EI y = (6 - \frac{P}{2})\frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{10} + C_1 x + C_2$$

$$EI y_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$EI y_{x=6} = (6 - \frac{P}{2})\frac{6^4}{12} - \frac{6^5}{10} + 6C_1 \quad \therefore C_1 = 3P - 18$$

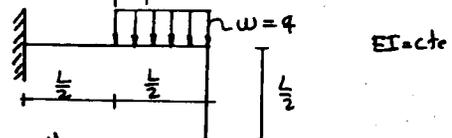
$$EI y_{x=3} = (6 - \frac{P}{2})\frac{3^4}{12} - \frac{3^5}{10} + 3(3P - 18) = 0$$

$$27 - \frac{27}{2}P - \frac{27}{10} + 9P - 54 = 0$$

$$P(9 - \frac{9}{2}) = 54 - 27 + \frac{27}{10}$$

$$P = \frac{27 + \frac{27}{10}}{9 - \frac{9}{2}} = 5 \text{ Ton}$$

Problema Para la viga de la figura, obtener: a) las ecuaciones de pendiente y desplazamiento y b) los desplazamientos vertical y horizontal del punto A. Suponga comportamiento elástico y deformaciones pequeñas.



Solución: Haciendo $a = \frac{L}{2}$

$$EI y'''' = P = -q(x-a)^0$$

$$EI y''' = -V = -q(x-a) + C_1$$

$$EI y'' = M = -\frac{q}{2}(x-a)^2 + C_1 x + C_2$$

En $x=L$; $V=0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL}{2}$; En $x=L$; $M=0 \Rightarrow C_2 = -\frac{3}{2} qL^2$

$$EI y' = EI \theta = -\frac{q}{6}(x-a)^3 + \frac{qL}{2} x^2 - \frac{3}{2} qL^2 x + C_3$$

$$EI y = \frac{q}{24}(x-a)^4 + \frac{qL}{12} x^3 - \frac{3}{4} qL^2 x^2 + C_4 x + C_5$$

En $x=0$; $\theta=0$; $y=0$; $C_3=0$ y $C_4=0$

Entonces:

a) $\theta = \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{6}(x-\frac{L}{2})^3 + \frac{qL}{2} x^2 - \frac{3}{2} qL^2 x \right]$

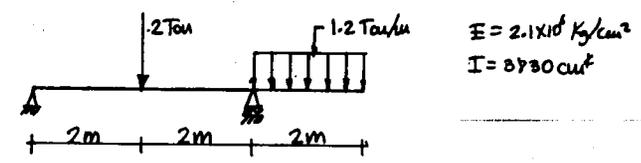
$y = \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{24}(x-\frac{L}{2})^4 + \frac{qL}{12} x^3 - \frac{3}{4} qL^2 x^2 \right]$ Para $x=L$

$\theta_{x=L} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{6} \frac{L^3}{8} + \frac{qL}{2} L^2 - \frac{3}{2} qL^2 L \right] = -\frac{7}{48} \frac{qL^3}{EI}$

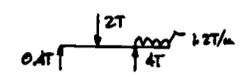
$y_{x=L} = \frac{1}{EI} \left[-\frac{q}{24} \frac{L^4}{16} + \frac{qL^4}{12} - \frac{3qL^4}{4} \right] = -\frac{41}{384} \frac{qL^4}{EI}$

b) Despl vert = $y = -\frac{41}{384} \frac{qL^4}{EI}$. Despl hor = $\theta \frac{L}{2} = -\frac{7}{96} \frac{qL^3}{EI}$

Problema Calcular el desplazamiento vertical del extremo libre de la viga con las características mostradas en la figura



Solución:



$$M = 0.4x - 2 \langle x-2 \rangle + 4 \langle x-4 \rangle - 1.2 \langle x-4 \rangle^2$$

$$EI y' = 0.2x^2 - \langle x-2 \rangle^2 + 2 \langle x-4 \rangle^2 - 0.2 \langle x-4 \rangle^3 + C_1$$

$$EI y = \frac{0.2}{3} x^3 - \frac{\langle x-2 \rangle^3}{3} + \frac{2}{3} \langle x-4 \rangle^3 - 0.05 \langle x-4 \rangle^4 + C_1 x + C_2$$

$y_{x=0} = 0$; $C_2 = 0$; $y_{x=4} = 0$

$0 = \frac{0.2}{3} (4)^3 - \frac{(2)^3}{3} + 4C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4} (\frac{8}{3} - 12) = -0.4$

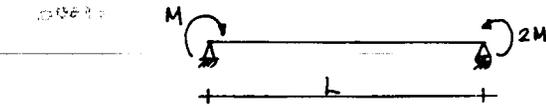
$$EI y = \frac{0.2}{3} x^3 - \frac{\langle x-2 \rangle^3}{3} + \frac{2}{3} \langle x-4 \rangle^3 - 0.05 \langle x-4 \rangle^4 - 0.4x$$

$EI y_{x=6} = \frac{0.2(6)^3}{3} - \frac{(4)^3}{3} + \frac{2(2)^3}{3} - 0.05(2)^4 - 0.4(6)$

$EI y_{x=6} = 14.4 - 6.4 + 16 - 0.8 - 2.4 = 4.8 \text{ Tou-m}^2$

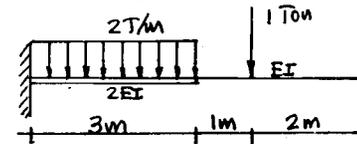
$y_{x=6} = \frac{4.8 \times 10^3 \times 10^6}{2.1 \times 10^6 \times 8780} = 0.597 \text{ cm}$

Problema Una viga con EI constante se somete a las acciones indicadas; determinar la posición y magnitud de la deflexión máxima.



Solución: $M(x) = M + \frac{M}{L}x$ $EI y' = Mx + \frac{M}{2L}x^2 + C_1$
 $EI y = \frac{M}{2}x^2 + \frac{M}{6L}x^3 + C_1x + C_2$
 $y_{x=0} = y_{x=L} \quad C_2 = 0 \quad C_1 = -M\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{2ML}{3}$
 $EI y = M\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6L} - \frac{2Lx}{3}\right]$
 $EI y' = M\left[x + \frac{x^2}{2L} - \frac{2L}{3}\right] = 0 \quad \therefore x^2 + 2Lx - \frac{4L^2}{3} = 0$
 $x = L\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)$
 $EI y_{max} = \frac{M}{6}\left[3L^2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)^3 + L^2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)^3 - 4L^2\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)\right]$
 $y_{max} = \frac{ML^2}{6EI}\left[\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)^3 + 3\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)^2 - 4\left(\sqrt{\frac{4}{3}} - 1\right)\right]$

Problema ¿Dónde se presenta la flecha máxima del cañiliver de la figura? ¿Cuánto vale?



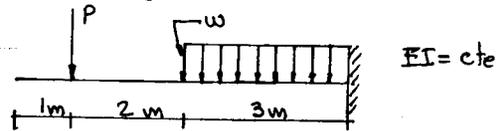
Solución:

Para $0 < x < 3$
 $2EI \frac{d^2y}{dx^2} = 13 - 7x + x^2$
 $EI y' = 13x - \frac{7}{2}x^2 + \frac{x^3}{3} + C_1$
 $EI y = \frac{13}{2}x^2 - \frac{7}{12}x^3 + \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$
 $y_{x=0} = y'_{x=0} = 0 \quad \therefore C_1 = C_2 = 0$
 $y'_{x=3} = \frac{1}{EI} \left(\frac{13(9)}{2} - \frac{7(27)}{2} + \frac{27}{3} \right) = \frac{8.25}{EI}$
 $y_{x=3} = \frac{1}{EI} \left(\frac{13(9^2)}{2} - \frac{7}{12}(27^2) + \frac{27^3}{12} \right) = \frac{16.25}{EI}$

Para $3 < x < 4$
 $EI y'' = 4 - x$
 $EI y' = 4x - \frac{x^2}{2} + C_1$
 $EI y_{x=3} = 12 - \frac{9}{2} + C_1 = 8.25$
 $C_1 = 0.75$
 $EI y = 2x^2 - \frac{x^3}{6} + 0.75x + C_2$
 $EI y_{x=3} = 2(9) - \frac{27}{2} + 0.75(3) + C_2 = 16.25$
 $C_2 = 1.125$
 $y'_{x=4} = \frac{1}{EI} \left(4(4) - \frac{4^2}{2} + 0.75 \right) = \frac{8.75}{EI}$
 $y_{x=4} = \frac{1}{EI} \left(2(16) - \frac{64}{6} + 0.75(4) + 1.125 \right) = \frac{25.41}{EI}$

Para $x > 4$
 $EI y'' = 0$
 $EI y' = C = EI y'_{x=4} = 8.75$
 $EI y = 8.75x + C_2$
 $EI y_{x=4} = 8.75(4) + C_2 = 25.41$
 $C_2 = -9.54$
 $y_{max} = \frac{1}{EI} [8.75(6) - 9.54] = \frac{42.26}{EI}$

Problema Para la viga mostrada en la figura escriba haciendo uso del método de integración directa las ecuaciones generales que permitan encontrar la pendiente y el desplazamiento para cualquier punto de el eje longitudinal de la viga.



Solución:

$$EI y^{IV} = -P \langle x-1 \rangle^0 - w \langle x-3 \rangle^0$$

$$EI y''' = -P \langle x-1 \rangle^0 - w \langle x-3 \rangle^0 + C_1 = V$$

$$EI y'' = -\frac{P}{2} \langle x-1 \rangle^2 - \frac{w}{2} \langle x-3 \rangle^2 + C_1 x + C_2 = M$$

$$EI y' = -\frac{P}{6} \langle x-1 \rangle^3 - \frac{w}{6} \langle x-3 \rangle^3 + \frac{C_1}{2} x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EI y = -\frac{P}{24} \langle x-1 \rangle^4 - \frac{w}{24} \langle x-3 \rangle^4 + \frac{C_1}{6} x^3 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

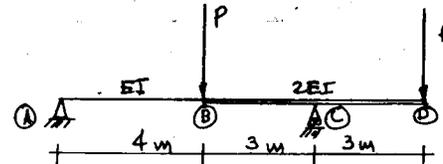
En $x=0$ $V=0 \quad \therefore C_1=0$
 En $x=0$ $M=0 \quad \therefore C_2=0$
 En $x=6$ $y'=0 \quad \therefore C_3 = \frac{1}{2}(25P + 9w)$
 En $x=6$ $y=0 \quad \therefore C_4 = -\frac{1}{2}(\frac{325P}{3} + \frac{129}{4}w)$

Entonces

$$y' = \theta = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{6} \langle x-1 \rangle^3 - \frac{w}{6} \langle x-3 \rangle^3 + \frac{1}{2}(25P + 9w)x \right]$$

$$y = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{24} \langle x-1 \rangle^4 - \frac{w}{24} \langle x-3 \rangle^4 + \frac{1}{2}(25P + 9w)x - \frac{1}{2}(\frac{325P}{3} + \frac{129}{4}w) \right]$$

Problema Empleando cualquiera de los métodos vistos en clase (integración directa, área-momento o viga conjugada) calcule la rotación y el desplazamiento vertical en el extremo libre de la viga mostrada en la figura.



Solución: Por $\Sigma M_A = 0 \quad 4P + 10P - 7R_C = 0 \quad R_C = \frac{14P}{7} = 2P$

Tramo AB

$$EI y^{IV} = 0$$

$$EI y''' = 0$$

$$EI y'' = 0$$

$$EI y' = 0$$

$$EI y = -\frac{P}{2} \langle x-4 \rangle^2 + \frac{P}{2} \langle x-7 \rangle^2 - \frac{P}{2} \langle x-10 \rangle^2 + \theta_0$$

$$EI y = -\frac{P}{12} \langle x-4 \rangle^3 + \frac{P}{6} \langle x-7 \rangle^3 - \frac{P}{12} \langle x-10 \rangle^3 + \theta_0 x + \theta_0$$

$$\text{En } x=0 \quad y_0=0 \quad \theta_0=0$$

$$\text{En } x=7 \quad y=0$$

$$EI y = -\frac{P}{12} \langle 7-4 \rangle^3 + \frac{P}{6} \langle 7-7 \rangle^3 - \frac{P}{12} \langle 7-10 \rangle^3 + \theta_0 \cdot 7 = 0$$

$$0 = -\frac{P}{12} (3)^3 + 0 - 0 + \theta_0 \cdot 7 = 0$$

$$0 = -\frac{P(27)}{12} + 7\theta_0 \quad \therefore \theta_0 = \frac{27}{7(12)} P$$

$$\theta_0 = \frac{27}{84} = \frac{9}{28} P$$

$$EI y' = -\frac{P}{4} \langle x-4 \rangle^2 + \frac{P}{2} \langle x-7 \rangle^2 - \frac{P}{4} \langle x-10 \rangle^2 + \frac{9}{28} P$$

$$EI y = -\frac{P}{12} \langle x-4 \rangle^3 + \frac{P}{6} \langle x-7 \rangle^3 - \frac{P}{12} \langle x-10 \rangle^3 + \frac{9}{28} P x$$

Cuando $x=10$

$$y' = \frac{1}{EI} \left[-\frac{P}{2} (4)^2 + \frac{P}{2} (3)^2 + \frac{9}{23} P \right]$$

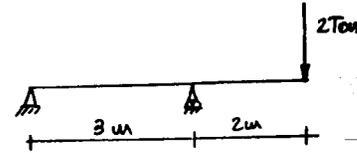
$$y' = \frac{1}{EI} \left[-P \frac{3^2}{2} + P \frac{9}{2} + \frac{9}{23} P \right] = \frac{P}{EI} \left[-\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{23} \right] = -\frac{117}{23} \frac{P}{EI}$$

$$y'_{x=0} = -\frac{117}{23} \frac{P}{EI}$$

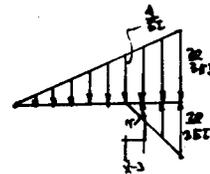
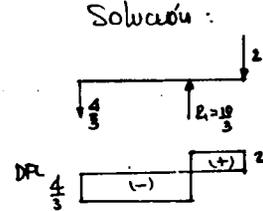
$$y = \frac{P}{EI} \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{23} (10) \right] = \frac{P}{EI} \left[-\frac{1512 + 378 + 270}{78} \right] = -\frac{P}{EI} \frac{72}{7}$$

$$y = -\frac{72}{7} \frac{P}{EI}$$

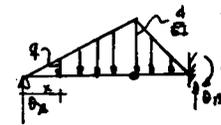
Problema Obtener la ecuación de la elástica para la viga de sección transversal constante que se muestra.



Solución:



$$\frac{20}{3EI} = \frac{f}{x=5} \quad f = \frac{10}{3EI} (x-3)$$



$$\theta_A + \theta_B = \frac{4}{EI} (5) \frac{1}{2} = \frac{10}{EI}$$

$$2\theta_A = \frac{4}{EI} (5) \Rightarrow \theta_A = \frac{2}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{10}{EI} - \frac{2}{EI} = \frac{8}{EI}$$

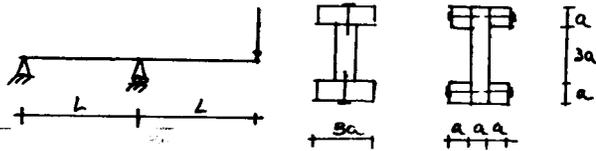
Como el momento en la viga conjugada es la flecha en la viga real

$$y = \frac{2}{EI} x - \frac{4x}{3EI} \times \frac{x}{2} = \frac{2}{EI} \left[x - \frac{1}{3} x^2 \right] \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$y = \frac{2}{EI} \left[x - \frac{1}{3} x^2 \right] + \frac{10(x-3)}{3EI} \frac{(x-3)^2}{2} \quad x$$

$$y = \frac{2}{EI} \left[x - \frac{1}{3} x^2 + \frac{5}{18} (x-3)^3 \right] \quad \text{para } 3 \leq x \leq 5$$

Problema Para la viga de la figura se han propuesto las soluciones mostradas. ¿Cuál ocupa menos clavos? Justifique su respuesta valorando el flujo de cortante en cada caso.



- Solución: Se necesitan n clavos en cada hilera, siendo

$$n = \frac{L}{s} ; s = \frac{F'}{q} ; n = \frac{Lq}{F'} = \frac{LVQ}{F'I_b} = KQ$$

Para la sección A $Q = 3a \cdot a \cdot 2a$, con dos hileras de clavos $N^{\circ} \text{ clavos} = 2 \times 6a^3k = 12Ka^3$

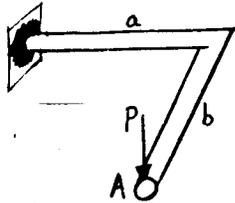
Para la sección B $Q = a \cdot a \cdot 2a$, con cuatro hileras de clavos $N^{\circ} \text{ clavos} = 4 \times 2a^3k = 8a^3k$

\therefore La solución B ocupa solo $\frac{2}{3}$ del número de clavos de la solución A

EJERCICIOS

(DEFORMACIONES)

Calcule el desplazamiento por flexión en el punto A de la barra, de la -
figura con $EI = cte.$

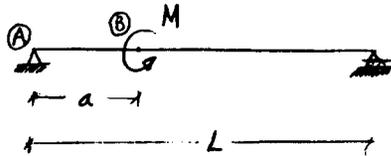


Resp.: $v = \frac{P}{3EI} (a^3 + b^3)$

A la viga de la figura, de sección transversal constante y homogénea, -
se le aplica un momento en el punto B.

Calcule el giro en el apoyo A. Si $a = L/3$ ¿Cuánto vale la flecha má-

xima ?

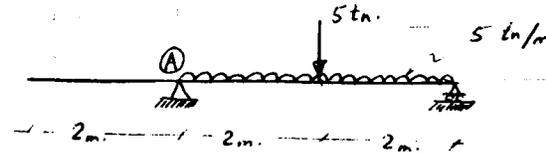


Resp.: $\theta_A = \frac{M}{6EI} (2L - 5a + 3a^2/L)$

$v_{MAX} = 0.035 \frac{ML}{EI}$

(en $x \approx 0.53 L$)

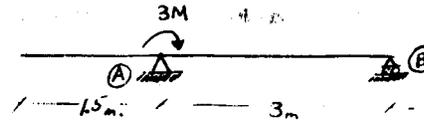
Obtenga el giro en A y diga cuál es la flecha máxima que se presenta
en la viga de la figura, $EI = cte.$



Resp.: $\theta_A = \frac{11}{6EI} \times 10^8$;

$y_{MAX} = \frac{11}{3EI} \times 10^{10}$ (Libre)

Calcule los giros en los apoyos y la flecha máxima. Tome $EI = cte.$



Resp.: $\theta_A = -\frac{311}{EI}$; $\theta_B = \frac{311}{EI}$

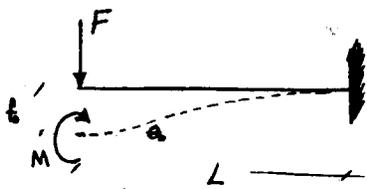
$y_{MAX} = -\frac{\sqrt{3} M}{EI}$

(Entre A y B)

$y_{MAX} = \frac{9}{2} \frac{M}{EI}$

(Ext. Libre)

Sea una viga de madera de dimensiones : $b = 15 \text{ cm}$, $h = 30 \text{ cm}$ trabajando en cuantiliver como se muestra en la figura. Determinar los valores del momento M y la fuerza F aplicadas en el extremo, para que la pendiente θ_0 sea nula y la flecha f_0 se igual a 1 cm . $E = 10,000 \text{ Kg/cm}^2$

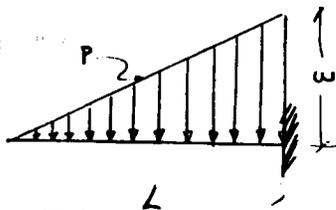


Resp.: $F = \frac{24 EI}{L^3}$

$M = \frac{6EI}{L^2}$

Determinar la ecuación de la elástica por medio de la ecuación diferencial

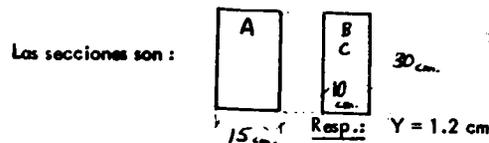
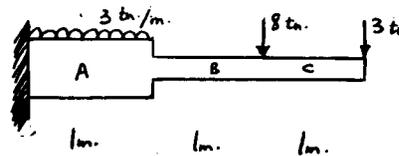
cial $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{P}{EI}$ de la siguiente viga :



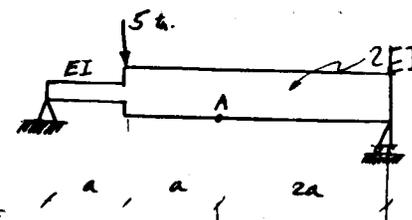
$EI = \text{cte.}$
 $w = \text{cte.}$

Resp.: $Y = \frac{-wx^5}{120EI} + \frac{wL^3x}{24EI} - \frac{wL^4}{30EI}$

Utilizando el método de la viga conjugada, encontrar la flecha en el extremo del cantiliver tomando como módulo de elasticidad $E = 1.8 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$

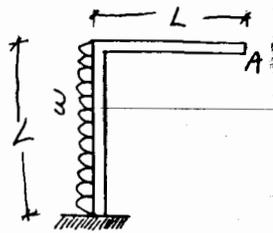


Utilizando el método del área de momentos o teoremas de Mohr, determinar el giro y deflexión en el punto A de la viga que a continuación se muestra.



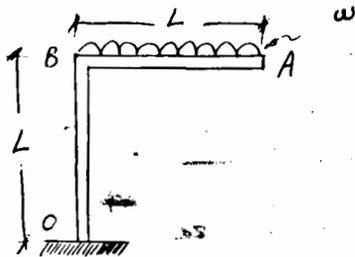
Resp.: $Y_A = \frac{25}{48} \frac{Pa^3}{EI}$
 $\theta_A = \frac{3}{32} \frac{Pa^2}{EI}$

Para la estructura mostrada encuentre desplazamiento vertical y horizontal del punto A al aplicar la carga lateral w que se observa en la figura, suponer comportamiento elástico y pequeñas deformaciones; además $EI = cte.$



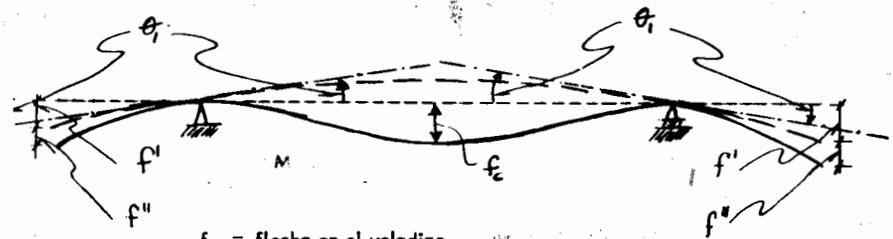
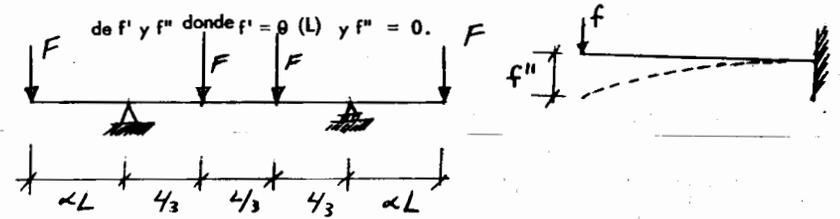
Resp.: $desp. vert. = \frac{wL^4}{6EI}$
 $desp. horiz. = \frac{wL^4}{8EI}$

Para la estructura mostrada encuentre el desplazamiento horizontal y vertical del punto A.



Resp.: $desp. horiz. = \frac{wL^4}{4EI}$
 $desp. vert. = \frac{15}{24} wL^4$

Para la viga de la figura. Encuentre la magnitud de los voladizos para que las flechas f_o y f_{centro} sean iguales. Use viga conjugada.

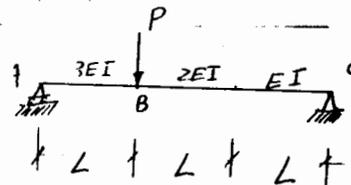


$f_o =$ flecha en el voladizo

$f_o = f' + f''$

Resp.: $\alpha = 0.236$

Determinar la deflexión en el punto B y el giro en el punto A de la viga que se muestra a continuación.



Resp.: $\Theta_A = \frac{0.26 PL^2}{EI}$

$Y = 0.222 PL^3/EI$