TECNICAS DE OPTIMACION

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

Técnicas De Optimación

M. en C. Benito Marín Pinillos

DIVISION DE INGENIERIA MECANICA E INDUSTRIAL
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

Se agradece a las siguientes personas su ayuda para la edición de esta obra:

Ing. Carlos Sanchez Mejia V.
M. en I. Enrique Galván Arévalo
M. en C. Marcia A. Gonzalez Osuna
Ing. Héctor O. Estrada Otero
Ing. Ana María Martínez Huidobro

PROLOGO

El presente trabajo tiene el objeto de proporcionar al alumno del Curso de Técnicas de Optimación, el material básico de referencia y consulta para un adecuado seguimiento del curso.

Incluye la totalidad de los temas de la materia, pero es necesario que el alumno realice trabajos de investigación para complementarlos, además de resolver ejercicios variados sobre cada tema y consultar la bibliografía proporcionada en clase.

No se pretende que sea un trabajo concluído, por lo que, para futuras ediciones, los comentarios de profesores y alumnos serán de gran valía.

M. en C. Benito Marín Pinillos.

Marzo de 1994

CAPITULO I

INTRODUCCION

I.1.- ANTECEDENTES.

Es por todos conocido el rápido desarrollo que han experimentado, durante el presente siglo, el tamaño y la complejidad de las organizaciones humanas. Por ejemplo, el tamaño de las empresas modernas, implica que las decisiones administrativas pueden tener un efecto sobre grandes cantidades de capital y gran número de personas. Los errores pueden ser tremendamente costosos y una sola decisión equivocada puede requerir años para rectificarse.

El cambio revolucionario sufrido por las organizaciones humanas, ha traído como consecuencia la división del trabajo y la segmentación de las responsabilidades administrativas en estas organizaciones. Gran parte de los componentes de una organización han tendido a crecer dentro de un plan relativamente autónomo; debido a que cada uno de ellos tiene sus propias metas, han perdido, por lo tanto, la visión de cómo sus actividades y objetivos se comparan con los de la organización . Lo que es bueno para un componente, frecuentemente es perjudicial para algún otro. Es asi que, en una empresa, por ejemplo, existen las siguientes tendencias:

Producción.- Pocas líneas de productos y grandes corridas de producción (grandes inventarios).

Ventas. - Abundantes y variados inventarios.

Finanzas.- Minimizar inventarios.

Personal. - Producir inventarios solamente durante los períodos flojos (mantener producción constante).

¿Cuál es en realidad la mejor política para la organización? Es aquí donde entra en acción la investigación de operaciones.

La investigación de operaciones siempre toma el punto de vista general de la organización e intenta llegar a soluciones óptimas, o sea la mejor solución para la organización. Esta solución no siempre es la óptima para sus componentes por separado. En algunos casos, la ejecución de un proyecto ocasiona efectos laterales, que si no son analizados adecuadamente, disminuyen su beneficio (p. ej. problemas ecológicos), por lo cual es importante considerar la magnitud real del sistema considerado.

La investigación de operaciones involucra estudios de grupo, es decir, agrupa a toda clase de expertos en sus estudios. Esto es debido al aspecto tan general que toma la misma y al hecho de que sería imposible que un especialista en investigación de operaciones cuente con todos los conocimientos necesarios para atacar los diversos problemas que se presentan en el análisis de sistemas de gran magnitud, por lo que requiere de los demás expertos, a quienes él coordina. Si bien la investigación de operaciones no sustituye los conocimientos particulares en una rama de la ciencia ó técnica, si en cambio ayuda a integrar esos conocimientos con los de otras ramas. La metodología de la investigación de operaciones de ninguna manera sustituye los conocimientos específicos en ramas particulares.

Otro de los aspectos que favoreció el desarrollo de la investigación de operaciones, es el hecho de que el ritmo de la empresa moderna es tal que las decisiones se requieren más rapidamente que nunca; el posponer la acción puede poner en una decidida ventaja a un competidor.

No es sorprendente que el aumento en la dificultad de tomar las decisiones haya requerido de esfuerzos para dar a esta actividad una base más objetiva y rutinaria. La investigación de operaciones forma parte de este esfuerzo.

Desde el punto de vista de la investigación de operaciones, una decisión es una recomendación de que se lleve a cabo un curso de acción particular que afecta al sistema. Quien toma la decisión, intenta que el sistema sea más "efectivo" para alcanzar las metas de la organización.

Generalmente, la medida de efectividad tiene unidades características asociadas con ella (pesos, etc.), pero a veces son adimensionales (probabilidad de destruir un blanco durante un ataque aéreo).

Los orígenes de la investigación de operaciones datan de hace muchos años, cuando se hizo el intento de usar un acercamiento científico en la administración de las organizaciones. Sin embargo, estos orígenes fueron aislados y faltos de coordinación; no fué sino hasta la segunda guerra mundial cuando la complejidad de las operaciones militares hizo surgir lo que hoy se conoce por investigación de operaciones. A causa de la guerra hubo la necesidad de distribuir, de manera eficiente, materiales escasos a las distintas operaciones militares, y dentro de éstas, a las actividades que las componían. Para el efecto se reunió un gran número de científicos para que realizaran una investigación de las operaciones militares.

Debido al éxito logrado en el aspecto militar, la industria se fue interesando en este campo. Los investigadores descubrieron que la industria sufría de los mismos problemas básicos que los militares.

Una vez iniciadas las técnicas de la investigación de operaciones, atrajeron la atención de numerosos investigadores, quienes lograron desarrollarlas a grandes pasos. Las técnicas desarrolladas contribuyeron a empujar la rápida carrera que llevaba la investigación de operaciones, de aquí que para 1950 muchas de las técnicas hubiesen alcanzado un grado de desarrollo extraordinario.

En la misma época en que se perfeccionaban las técnicas de la investigación de operaciones, también se lograron grandes avances en el diseño de computadoras, lo que facilitó la utilización de las mismas, debido a la gran cantidad de computación requerida por la investigación de operaciones.

Aunque no existe una definición correcta para la investigación de operaciones, podemos decir que se aplica a problemas que conciernen a la conducción y coordinación de operaciones o actividades dentro de una organización.

La investigación de operaciones se aplica extensamente en el campo de los negocios, el militar, la industria, el gobierno, hospitales, comunicaciones, transporte, etc.

El método de análisis empleado es el del método científico, esto es, la investigación de operaciones introduce el razonamiento científico creativo dentro de las propiedades fundamentales de las operaciones. Dewey, a principios de siglo, indicó que la solucion de un problema consiste en dar respuesta a las siguientes preguntas:

1)¿ cual es el problema?

2)¿ cuales son las alternativas?

3)¿ cual alternativa es mejor?

Las herramientas con las que cuenta la investigación de operaciones, son las siguientes:

a) La programación lineal ha sido usada con éxito en problemas de asignación de personal, mezclado de materiales, distribución y transportación, así como en políticas de inversión.

b) La programación dinámica ha tenido éxito en la planeación de gastos de propaganda, distribución del esfuerzo de ventas y planeación de la producción.

c) Los fenómenos de espera se han aplicado a problemas de congestionamiento de tráfico, reparación de maquinaria, planeación de tráfico aéreo y diseño de presas.

Otras de las herramientas de la investigación de operaciones son:

d) Teorías de juegos.

e) Simulación.

f) Teoría de inventarios.

g) Teoría de redes.

En la actualidad existen dos organizaciones en Estados Unidos que agrupan gente interesada en la investigación de operaciones:

The Operations Research Society of America, que edita la revista Operations Research.

The Institute of Management Science, que edita la revista Management Science.

I.2.- METODOLOGIA.

Aunque no existe una secuencia fija de pasos a seguir en un estudio de investigación de operaciones, podemos analizar el procedimiento dentro de un problema típico.

a) Formulación del problema. En la práctica, los problemas surgen de una manera vaga, razón por la cual es necesario estudiar el sistema bajo consideración y definir exactamente el problema, indicando claramente cuales son los objetivos, las restricciones y qué es lo que se puede hacer: interrelaciones existentes, alternativas posibles, limitación del tiempo, etc. Se ve que la formulación es crucial, pues es imposible obtener buenos resultados partiendo de un mal planteamiento. De aquí que en cuanto surjan nuevos aspectos durante el desarrollo del estudio, la formulación debe ser revisada para ver si no ha cambiado.

Se debe tener cuidado, ya que aunque se mencionó que el objetivo principal era la solución óptima para toda la organización, existen casos en que el problema afecta a una sola sección y el incluir todas las demás complica terriblemente el problema.

b) Construcción del modelo matemático (muchas veces es éste el paso más sencillo). Consiste en la reformulación del problema, de manera tal, que sea conveniente para analizarlo. En este paso representamos matemáticamente el sistema bajo estudio.

Un modelo matemático es una representación idealizada de la realidad, expresada en términos de símbolos matemáticos.

Por ejemplo, en programación lineal podemos representar las *n* varables de decisión, cuyo valor se va a determinar, como: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La medida compuesta de efectividad (llamada función objetivo) (p. ej. ganancia), se expresa entonces como una función matemática así:

$$Z = 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \ldots + 2x_n$$

Las restricciones a las variables de decisión también se expresan matemáticamente:

$$3x_1 + 8x_2 + \ldots - 3x_n \leq 100$$

El modelo matemático quedaría, en este caso, como escoger los valores de las variables de decisión tales que maximicen la función objetivo, siempre y cuando se cumplan las restricciones.

El modelo matemático ayuda a revelar relaciones importantes de causa y efecto, señalando de esta forma cualquier dato adicional que pudiera ser de importancia para el estudio.

Debe tenerse en cuenta que el modelo matemático es una abstracción de la realidad y como tal no puede incluir hasta el más mínimo detalle, lo cual complicaría innecesariamente el problema. Por otro lado, el excluir efectos colaterales que están fuertemente correlacionados con la decisión por efectuarse, afecta grandemente el resultado.

Un buen modelo es aquel que predice los efectos de las diferentes alternativas con suficiente exactitud como para poder realizar una buena decisión.

Cuando existe más de una función objetivo, estas deberán transformarse y combinarse en una sola función objetivo compuesta. El costo del estudio y el retraso deben también ser considerados.

c) Obtener una solución del modelo. Aquí debemos aclarar que, aunque existen modelos matemáticos que conducen a una solución óptima, dicha solución es sólo óptima con respecto al modelo empleado y es posible que esta solución no sea la mejor para el problema real. De aquí que, si el modelo está bien formulado, la solución obtenida deberá ser una buena aproximación a la solución del problema real.

Muchas veces la solución obtenida se emplea como datos para formular nuevamente el problema y así, mediante una serie de ciclos, se obtiene una mejor solución.

d) Probar el modelo y su solución. No importa que tan bueno parezca nuestro modelo, siempre se debe probar. El primer paso consiste en verificar errores obvios o detalles pasados por alto.

Prueba retrospectiva. Cuando es aplicable, consiste en analizar la historia de la compañía y encontrar qué hubiese pasado de haberse aplicado este modelo. Este método puede mostrar fallas en el modelo y asi modificarlo. Una gran desventaja de este método, es que utiliza los mismos datos con ayuda de los cuales se desarrolló el modelo. Otra falla es que las condiciones pueden haber cambiado y que los datos pasados ya no representen las condiciones futuras.

Otra prueba consiste en decir que no se aplique el modelo hasta dentro de seis meses y observar qué hubiese pasado en este lapso de haberse aplicado el modelo, pero para entonces las condiciones pueden haber cambiado.

e) Establecer control sobre la solución. Este paso se usa sólo cuando el modelo desarrollado se va a usar repetidamente, debido a que las condiciones (datos) pueden estar variando constantemente.

Este paso puede incluir el descubrir los parámetro críticos, (aquellos cuyo cambio puede afectar significativamente la solución). Esto se efectúa mediante el análisis de sensibilidad.

Una vez descubiertos los parámetros críticos, se puede establecer un método estadístico para detectar cambios significativos en los mismos.

Cuando se descubre un cambio en un parámetro crítico, es necesario ajustar la solución al nuevo valor.

f) Implementación.- El grupo de investigadores debe participar activamente en esta fase, con objeto de supervisar que la solución obtenida sea convertida con exactitud en un procedimiento operativo.

Los pasos a seguir son:

1) Se comunica a la administración la solución obtenida.

2) La administración y los investigadores comparten, conjuntamente, la responsabilidad de poner esta solución en operación.

3) Adiestramiento del personal involucrado en la solución.

4) Retroalimentación.

CAPITULO II

METODOS MATEMATICOS DE CALCULO

II-1.- MATRICES.

Definición II-1.-

Una matriz es un arreglo rectangular de números escalares.

Denominaremos por "m" el número de renglones y por "n" el número de columnas de una matriz.

Una matriz con "m" renglones y "n" columnas, se conoce como una matriz m x n.

Una matriz n x n se dice que es de orden n.

Tenemos entonces que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 14 \\ 1 & 5 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

es una matriz 3 x 4 y

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

es una martiz 3 x 2

A los números que integran el arreglo rectangular, se les denomina "elementos de la matriz". Es así que los números: 4, 3, 1, 7, 2, 5, 8, 6, 12, 1, 14, 3, son los elementos de la matriz A, mientras que: 4, 8, 7, 5, 3, 9, son los elementos de la matriz B.

Las matrices las denominaremos con letras mayúsculas y a los elementos correspondientes de la matriz con la misma letra, pero minúscula, seguida de 2 subíndices, el primero de los cuales representa el renglón al que el elemento corresponde, mientras que el segundo indica la columna.

Es así que los elementos de la matriz A serán a_{ij}, por ejemplo:

$$a_{13} = 8; \qquad a_{24} = 14; \qquad a_{33} = 12$$

En términos generales podemos representar una matriz como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Algunos autores utilizan $A = [a_{ij}] = \| a_{ij} \| = \| a_{ij} \|_{mxn}$

Obsérvese que la letra particular que aparece como subíndice es indiferente, y la posición es lo importante.

Con las anteriores convenciones, a_{ij} es un escalar y $\| a_{ij} \|$ es una matriz. Nótese que mientras los elementos a_{ij} y a_{kl} pueden no ser iguales, se considera que las matrices $\| a_{ij} \|$ y $\| a_{kl} \|$ son idénticas.

Una matriz no posee ningún valor numérico (a diferencia de su determinante).

Sin embargo, es conveniente realizar ciertas manipulaciones con los arreglos de números; es así que se han desarrollado reglas que permiten realizar operaciones con matrices, las cuales son análogas a las operaciones aritméticas.

Definición II-2

Sean: $A = \| a_{ij} \|$ y $B = \| b_{ij} \|$

dos matrices. Se dice que A y B son "iguales", esto es $A = B$, sí y solo sí todos y cada una de los elementos correspondientes son iguales. Es decir, A y B tienen exactamente los mismos componentes ($a_{ij} = b_{ij}$ para todos los valores de i y de j).

De lo anterior es claro que para que $A = B$, es necesario que ambas matrices tengan el mismo número de renglones, así como el mismo número de columnas entre sí.

Definición. II-3

La diagonal principal de una matriz $\| a_{ij} \|$ es el conjunto de elementos $\{a_{11} \ldots . a_{tt}\}$ donde $t = \min \{m, n\}$.

Definición. II-4

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada de orden n, en la cual los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son cero.

Definición. II-5

La operación de multiplicar una matriz por un número k, se efectúa multiplicando cada una de los elementos de la matriz por k.

Así:

$$kA = \| ka_{ij} \| = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1j} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2j} & \ldots & ka_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \ldots & ka_{ij} & \ldots & ka_{in} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mj} & \ldots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

donde A puede tener cualquier disposición de sus elementos.

Ejemplo II-1

$$5 \begin{bmatrix} 8 & 4 & 13 & 7 \\ 1 & 0 & 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 65 & 35 \\ 5 & 0 & 45 & 10 \end{bmatrix}$$

Definición. II-6

Para "sumar" dos matrices A y B (que deben tener el mismo número de renglones y de columnas entre sí), solamente es necesario sumar los elementos correspondientes de ambas, lo cual puede quedar representado en la siguiente forma:

$$A + B = \| a_{ij} + b_{ij} \|$$

Ejemplo. II-2

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & 7 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & 4 \\ 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Definición. II-7

La resta de dos matrices A y B podemos interpretarla como la suma de la matriz A con la matriz C donde $C = kB = (-1)\,B$.

Así, tenemos:

$$A - B = A + C = A + (-1)\,B = \| a_{ij} - b_{ij} \|$$

nuevamente, A y B deben de tener el mismo número de renglones y columnas entre sí.

Ejemplo. II-3

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ -7 & 1 & 8 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -1 & 10 \\ 3 & 7 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -13 \\ -10 & -6 & 12 \\ 7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Definición. II-8 (Multiplicación)

Para encontrar el elemento c_{ij} en el renglón i y la columna j de la matriz resultante de multiplicar A por B, es necesario multiplicar cada elemento del renglón i de A por el elemento correspondiente de la columna j de B y sumar estos productos; observese que la multiplicación de dos matrices está definida si y solo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, (nótese que el número de renglones de A y de columnas de B puede ser cualquiera).

En general, si:

$$\| a_{ij} \|_{m \times n} \quad \text{y} \quad \| b_{ij} \|_{n \times r}$$

su producto será:

$$C = AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \right]_{m \times r} = \left[c_{ij} \right]_{m \times r}$$

Ejemplo. II-4

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La operación de multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir:

$$AB \neq BA$$

Ejemplo. II-5

a.-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$$

En la mayoría de los casos en que A B está definida, B A no lo está.

b.-

La multiplicación BA de las matrices del ejemplo **II-4** no está definida.

Nota. II-1

La división entre matrices no está definida.

Definición. II-9

Se llama matriz cero o nula a aquella matriz de cualquier orden cuyos elementos son todos "cero". Se representa por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \phi$$

Ejercicio II-1

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.- $A = D$ porque $a_{11} = d_{11} = 3$; $a_{12} = d_{12} = 4$; $a_{13} = d_{13} = 4$; etc.

2.- $B \neq C$ porque $b_{ij} \neq c_{ij}$

3.- La diagonal principal de A es $\{3, 6, 3\}$

La diagonal principal de B es $\{5, 2, 2\}$

4.- A es una matriz de orden 3.

5.- B es una matriz 3 x 4 .

C es una matriz 4 x 3.

6.- E es una matriz diagonal

7.- $\mathbf{kB} = 3B = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 9 & 18 \\ 21 & 6 & 15 & 3 \\ 3 & 9 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

8.- $\mathbf{A} + D = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 2 & 12 & 14 \\ 14 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$A + B$ no está definida.

9.- $\mathbf{A} - E = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

A - C no está definida.

10.- $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 104 & 43 & 43 \\ 79 & 24 & 40 \\ 29 & 4 & 19 \end{bmatrix}$

BF no está definida.

11.- $\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 47 & 37 & 34 & 38 \\ 29 & 32 & 23 & 30 \\ 29 & 24 & 21 & 25 \\ 71 & 41 & 48 & 47 \end{bmatrix}$

Vemos que $B\,C \neq C\,B$

Las matrices satisfacen las siguientes leyes:

1.- $OA = \varnothing$

2.- $1\,A = A$

3.- $A + \varnothing = A$

4.- $A - A = \varnothing$

5.- $A + B = B + A$

6.- $A\,(B + C) = AB + AC$

7.- $(A + B)\,C = AC + BC$

8.- $(A + B) + C = A + (B + C)$

9.- $A\,(BC) = (AB)\,C$

leyes que se satisfacen siempre y cuando las operaciones propuestas estén bien definidas.

Definición II-10

Dada la matriz A, la matriz A^T, obtenida de A intercambiando los renglones por las columnas en A, se llama la matriz transpuesta de A. Si $A^T = \|a_{ij}'\|$, el elemento a_{ij}' que aparece en el renglón i y la columna j de A^T, es el elemento a_{ji} que aparece en el renglón j columna i de A.

Ejemplo II-6

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Para obtener la transpuesta de una matriz, no es necesario que ésta sea cuadrada.

Propiedades de la matriz transpuesta:

$$(A\,B)^T = B^T A^T$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Definición II-11

La matriz adjunta es aquella matriz cuadrada formada por los cofactores de la transpuesta de la matriz cuadrada dada. Se escribe A^I

Ejemplo II-7

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$
A^{\Gamma} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} \qquad A^{\Gamma} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 12 & -10 & -3 \end{bmatrix}
$$

Definición II-12

La matriz identidad (I), es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son todos unos.

$$
I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}
$$

La matriz identidad tiene las siguientes propiedades:

$$
I\,A = A = A\,I
$$

donde I tiene el número apropiado de renglones y columnas en cada caso, de forma tal que la operación de multiplicación quede definida.

Definición II-13

Cuando una matriz la subdividimos en varias matrices más pequeñas, a éstas se les conoce con el nombre de submatrices.

Ejemplo II-8

$$
A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
$$

donde:

1) $a_{11} = a_{11}$ 3) $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$

2) $A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$ 4) $A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$

Es posible realizar las operaciones usando las submatrices, en lugar de hacerlo elemento por elemento. Debe estar claro que es solamente posible en el caso en que la subdivisión sea tal que las operaciones estén definidas, en caso contrario no se logrará nada con subdividir la matriz.

Ejemplo II-9

Sea:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \hdashline b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{siendo:} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} b_1 + A_{12} B_2 \\ A_{21} b_1 + A_{22} B_2 \end{bmatrix}$$

Una clase de matrices que tiene un papel muy importante, es aquella que cuente con un solo renglón o con una sola columna. Tales matrices se conocen con el nombre de vectores.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{(es un vector renglón)}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

es un vector columna y lo denominaremos:

$$\{ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \}$$

Los vectores son importantes en la teoría de matrices, debido a que cualquier matriz m x n puede ser subdividida ya sea en m vectores renglón o en n vectores columna, con lo cual se pueden analizar importantes propiedades de las matrices.

Si tenemos que:

$$\beta = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots\dots + C_m x_m = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i$$

donde las C_i son constantes, se dice que β es una combinación lineal de las x_i. También decimos que β es linealmente dependiente de las x_i, si β puede ser expresada como una combinación lineal de las x_i.

Una expresión de la forma $\sum_{i=1}^{m} C_i x = 0$ se llama una relación lineal entre las x_i. Una relación donde todas las $C_i = 0$, se conoce como una relación lineal trivial; una relación en la cual cuando menos uno de los coeficientes es diferente de cero, se conoce como una realción lineal no trivial.

Definición II-14

Se dice que un conjunto de vectores son linealmente dependientes si existe una relación lineal no trivial entre ellos. En caso contrario, el conjunto es linealmente independiente. Debe notarse que cualquier conjunto de vectores que incluya el vector cero es linealmente independiente.

Si un conjunto $\{x_i\}$ de vectores es linealmente dependiente, entonces existe una relación lineal no trivial de la forma $\sum_{i=1}^{m} C_i x_i = 0$ (no necesariamente única). En la relación anterior, existe cuando menos un coeficiente diferente de cero, sea éste C_k, entonces:

$$x_k = \sum_{i \neq k} (-C_k^{-1} C_i) x_i$$

que es uno de los vectores del conjunto $\{x_i\}$, es una combinación lineal de los otros.

Si un conjunto $\{x_i\}$ de vectores se sabe que es linealmente independiente y se obtiene una relación lineal $\sum_{i=1}^{m} C_i x_i = 0$, podemos entonces concluir que todas las $C_i = 0$.

Es claro que el concepto de independencia lineal de un conjunto no tendría sentido si un vector del conjunto pudiera incluirse un número arbitrario de veces en una posible relación.

Sin embargo, si un conjunto de vectores es dado, diferenciando los vectores en el conjunto, es una inconveniencia el insistir en que todos los vectores listados sean distintos. La carga de contar el número de veces que un vector puede aparecer en una relación es transferida al conjunto de subíndices. Por cada subíndice en el conjunto de subíndices, requerimos que uno y solo uno de los vectores sea listado, permitiendo la posibilidad de que varios subíndices sean utilizados para identificar el mismo vector. Entonces, el conjunto:

$$\{x_1, x_2\} \text{ en donde } x_1 = x_2$$

es linealmente dependiente. Tenemos entonces, que el concepto de independencia lineal de un conjunto es más bien una propiedad de la forma de poner los subíndices en el conjunto que del conjunto mismo. Deberíamos referirnos a la dependencia lineal de un conjunto numerado en lugar de la dependencia lineal de un conjunto.

Ejemplo. II-10

Sea: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

donde:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 1, 0) \\ x_2 &= (1, 0, 1) \\ x_3 &= (0, 1, 1) \\ x_4 &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

entonces, el conjunto X es linealmente dependiente, ya que:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

por lo tanto:

$$x_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$$

Sin embargo, cualquier subconjunto de tres de los cuatro vectores es linealmente independiente.

Ejemplo. II-11

Sea: $Y = \{y_1, \; y_2, \; y_3, \; y_4\}$

donde:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (1, \; 1, 0, 1) \\
y_2 &= (1, -1, 1, 1) \\
y_3 &= (2, \; 2, 1, 2) \\
y_4 &= (0, \; 1, 0, 0)
\end{aligned}
$$

Para encontrar la dependencia o independencia lineal del conjunto, formamos la relación:

$$a(1, 1, 0, 1) - b(1, -1, 1, 1) + c(2, 2, 1, 2) + d(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Se busca si la relación es trivial o no (si a. b. c. ó d es $\neq 0$, los vectores son dependientes).

$$
\begin{aligned}
a + b + 2c \quad &= 0 \quad .....(1) \\
a - b + 2c + d &= 0 \quad .....(2) \\
b + c \quad &= 0 \quad .....(3) \\
a + b + 2c \quad &= 0 \quad .....(4)
\end{aligned}
$$

de (3): $b = -c$

en (1): $a + b - 2b = 0$ de donde $a = b$

en (2): $a - a - 2a + d = 0$ de donde $d = 2a$

Si hacemos $a = 1$ (valor arbitrario $\neq 0$), obtenemos:

$$(1,1,0,1) + (1,-1,1,1) - (2,2,1,2) + 2(0,1,0,0) = (0,0,0,0)$$

de donde el conjunto Y es linealmente dependiente.

Ejemplo. II-12

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (1,0,0,1) \\
w_2 &= (0,1,0,1) \\
w_3 &= (0,0,1,1) \\
w_4 &= (1,1,1,1)
\end{aligned}
$$

$$a(1,0,0,1) + b(0,1,0,1) + c(0,0,1,1) + d(1,1,1,1) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{array}{lr}
a \qquad\qquad\quad + d = 0 & \ldots\ldots (1)\\
\quad b \qquad\quad + d = 0 & \ldots\ldots (2)\\
\qquad\quad c + d = 0 & \ldots\ldots (3)\\
a + b + c + d = 0 & \ldots\ldots (4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{de } (1): & a = -d\\
\text{de } (2): & b = -d\\
\text{de } (3): & c = -d\\
\text{en } (4): & -d - d - d + d = 0 \qquad => \; d = 0
\end{array}$$

de donde el conjunto de vectores es linealmente independiente.

Definición II.15

El mayor número de vectores linealmente independientes que puede ser encontrado dentro de un conjunto de vectores, se conoce como el rango del conjunto.

Ejemplo. II-13

En el ejemplo II-10, el rango del conjunto de vectores $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es 3, pues $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$ y $\{x_1, x_2, x_4\}$ son linealmente independientes.

En el ejemplo II-11, el rango del conjunto de vectores $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ es 3 pues $\{y_1, y_2, y_4\}$ es linealmente independiente.

En el ejemplo II-12, el rango del conjunto de vectores $\{w_1, w_2, w_3, y\ w_4\}$ es 4.

Para encontrar el rango de un conjunto de vectores, se hace la prueba de dependencia lineal y si el conjunto resulta linealmente independiente entonces el rango es igual al número de vectores considerados. Si resulta linealmente dependiente, eliminamos cualquiera de los vectores que en el paso anterior hubiera resultado con un coeficiente diferente de 0 y se vuelve a repetir la prueba de dependencia lineal, volviendo a iniciar el ciclo anterior.

Denominaremos por ρ al rango de una matriz.

Ejemplo. II-14

Sea:

$$S = \{ s_1, s_2, s_3 \}$$

donde:

$$s_1 = (3, 7, 1)$$
$$s_2 = (6, 14, 2)$$
$$s_3 = (2, 0, 3)$$

determinar el rango del conjunto S.

Formando una relación lineal con los 3 vectores, obtenemos:

$$a(3, 7, 1) + b(6, 14, 2) + c(2, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

de donde:

$$\begin{aligned} 3a + 6b + 2c &= 0 \quad \ldots.(1) \\ 7a + 14b &= 0 \quad \ldots.(2) \\ a + 2b + 3c &= 0 \quad \ldots.(3) \end{aligned}$$

de (1) – 3(3):

$$-7c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

en (1):

$$3a + 6b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1/2a$$

si:

$$a = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -1/2$$

por lo tanto:

$$s_1 - 1/2 s_2 = 0$$

y el conjunto S es L.D. y $\rho < 3$ $\therefore$ se elimina s_1 ó s_2 (pero no s_3), por tener coeficientes $\neq 0$ en la relaciòn lineal no trivial obtenida.

Eliminando s_2 y obteniendo la nueva relaciòn lineal:

$$a(3, 7, 1) + b(2, 0, 3) = (0, 0, 0)$$

de donde:

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 0 \quad \ldots.(1) \\ 7a &= 0 \quad \ldots.(2) \\ a + 3b &= 0 \quad \ldots.(3) \end{aligned}$$

de (2):

$$a = 0$$

en (1):

$$b = 0$$

por lo que el subconjunto $\{ s_1 , s_2 \}$ es L.I. y $\rho = 2$

Teorema. II-1

Cualesquiera $n + 1$ vectores, en un espacio vectorial de n dimensiones, son linealmente dependientes.

Ejemplo. II-15

El caso visto en el ejemplo II-10 anterior.

Definición. II-16

Se dice que un subconjunto de vectores linealmente independientes es la base del conjunto de vectores a que el mismo pertenece, cuando todos y cada uno de los vectores del conjunto original son una combinación lineal de los vectores en este subconjunto.

Una base no necesariamente es única

Ejemplo. II-16

En el ejemplo II-10, el subconjunto $\{x_1,x_2,x_3\}$ es una base del conjunto $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ ya que:

$$x_4 = \frac{x_1+x_2+x_3}{2} = \frac{(1,1,0)+(1,0,1)+(0,1,1)}{2} = (1,1,1)$$

y además el subconjunto es linealmente independiente.

Asimismo, $\{x_1,x_2,x_4\}$ es otra base de dicho conjunto, ya que:

$$x_3 = 2x_4 - x_2 - x_1 = (2,2,2) - (1,0,1) - (1,1,0) = (0,1,1)$$

Ejemplo. II.17

En el ejemplo II-11, el subconjunto $\{y_1, y_2, y_4\}$ es una base del conjunto: $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, ya que:

$$y_3 = y_1 - y_2 + 2y_4 = (1,1,0,1) - (1,-1,1,1) + (0,2,0,0) = (2,2,1,2)$$

En el ejemplo II-14, el subconjunto $\{s_1, s_3\}$ es una base del conjunto S, ya que:

$$s_1 = s_1$$

$$s_2 = 2s_1$$

$$s_3 = s_3$$

Teorema II.2

Un subconjunto de r vectores linealmente independientes, tomados de un conjunto de vectores, es una base del mismo si y sólo sí el conjunto tiene rango r.

Demostración:

$\Rightarrow$

Si el conjunto tiene rango r, por definición,un subconjunto de r vectores linealmente independientes tiene que ser una base, ya que r es el máximo número de vectores linealmente independientes y todos los demás serán combinaciones lineales de éstos.

$\Leftarrow$

Supongamos que el conjunto tiene rango $r + 1$, esto implica que existen $r + 1$ vectores linealmente independientes en el conjunto; de donde r vectores no bastan para formar el $r + 1$ -avo vector mediante combinaciones lineales; por lo tanto tenemos una contradicción.

Teorema. II-3

Si un conjunto de n vectores tiene una base con un número finito de elementos, entonces todas las demás bases, en caso de existir, son finitas y cuentan con el mismo número de elementos.

Teorema. II-4

Un conjunto de n vectores en un espacio vectorial de n dimensiones, es una base sí y solo sí es linealmente independiente.

Definición. II-17

El rango de los renglones de una matriz, es el rango del conjunto de sus vectores renglón. El rango de las columnas de una matriz es el rango del conjunto de sus vectores columna.

Ejemplo. II-18

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{ll} \rho_r = 3 & \text{(ver ejemplo II-11)} \\ \rho_c = 3 & \text{(a simple vista se ve la dependencia entre las columnas 1 y 4)} \end{array}$$

Teorema. II.5

El rango de los renglones y el rango de las columnas de una matriz son iguales. Es por esto que solamente se habla del rango ρ de una matriz.

Dada una matriz A, diferente de la matriz cero, ¿cuándo existe una matriz A^{-1} ,llamada el inverso de A, tal que:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I\,?$$

Si A no es una matriz cuadrada, entonces nunca existe tal matriz A^{-1}, de donde sólo una matriz cuadrada puede tener inverso. Esto es debido a que A^{-1} debería tener diferente número de renglones en cada caso para que los productos $A\,A^{-1}$ y A^{-1} A estuviesen definidos.

Si A es una matriz cuadrada entonces *existen ocasiones* en que esta matriz tiene inverso.

Definición II-18

Una matriz se llama no singular si su rango iguala tanto el número de sus renglones como el número de sus columnas, en caso contrario se llama singular. De aquí que solo las matrices cuadradas puedan ser no singulares.

Definición II-19

Una matriz m x m se llama no singular si sus vectores columna son linealmente independientes.

Una matriz es no singular si y sólo si su determinante es diferente de cero.

Teorema. II-6

a) Si A es no singular, existe una matriz no singular A^{-1}, llamada inverso de A, tal que $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$

b) Si A es no singular y B es una matriz para la cual ya sea $A\,B = I$ ó $B\,A = I$, entonces $B = A^{-1}$.

c) Sólo las matrices no singulares tienen inversos.

Teorema. II-7

Si A y B son no singulares, entonces:

a) A B es no singular.

b) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$

c) A^{-1} es no singular.

d) $(A^{-1})^{-1} = A$

e) Para $a \neq 0$, (a A) es no singular y $(a\,A)^{-1} = a^{-1}\,A^{-1}$

Teorema II-8

El rango de una matriz (no necesariamente cuadrada) no se altera si ésta se multilplica por una matriz no singular.

Ejemplo II-19

Si: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ entonces $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Comprobación:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Existen varios métodos para invertir una matriz:

Método 1.-

a) Obtener el valor del determinante de la matriz.

b) Obténganse los valores de los cofactores de la matriz.

c) Divídanse los valores de los cofactores entre el valor del determinante.

d) Colóquese el valor obtenido en (c) en la posición transpuesta del cofactor correspondiente.

Ejemplo II-20

En el ejemplo anterior:

$$|A| = 18 + 24 + 24 - 27 - 16 - 24 = -1$$

dado que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{+\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} \\ \dfrac{-\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{+\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-1} \\ \dfrac{+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-1} & \dfrac{+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{18-16}{-1} & -\dfrac{12-12}{-1} & \dfrac{8-9}{-1} \\ -\dfrac{12-12}{-1} & \dfrac{6-9}{-1} & -\dfrac{4-6}{-1} \\ \dfrac{8-9}{-1} & -\dfrac{4-6}{-1} & \dfrac{3-4}{-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo II-21

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| = -5 + 4 = -1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{-1} & -\dfrac{-4}{-1} \\ -\dfrac{1}{-1} & \dfrac{5}{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Método 2.

Este método es similar al anterior, solamente difiere en la secuencia de pasos y en la forma de proceder y dice así:

La inversa de una matriz puede escribirse:

$$A^{-1} = \frac{A^{\Gamma}}{|A|}$$

Ejemplo II-22

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\Gamma} = \begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0 - 24 - 6 - 0 - 60 - 6 = -96$$

Nótese que:

$$|A|\, I = A\, A^{T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-96}\begin{bmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -10 & 3 & -22 \\ 6 & -21 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{-1}{8} \\ \frac{5}{48} & \frac{-1}{32} & \frac{11}{48} \\ \frac{-1}{16} & \frac{7}{32} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}$$

Los dos métodos anteriores resultan demasiado complejos para hacerlos a mano cuando el número de elementos de la matriz se incrementa.

Método 3.

Este método proporciona el inverso de una matriz cuando ésta es no singular, en caso de que la matriz sea singular, este método proporciona lo que se conoce como matriz en forma Hermite Normal. Describiremos el método con la ayuda de un ejemplo:

a) Se pone una matriz I después de A.

$$[\,A\, I\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se busca el primer vector columna como un vector $\{1, 0, 0\}$, mediante operaciones elementales de las matrices, esto es:

1.- Multiplicar un renglón de A por un escalar $\neq 0$

2.- Sumar el múltiplo de un renglón a otro.

3.- Intercambiar dos renglones.

Aplicando lo anterior obtendriamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Se busca dejar el segundo vector columna como $\{0, 1, 0\}$ mediante operaciones elementales.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

d) Hacer lo mismo para el tercer vector columna.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

e) Se elimina la matriz I que ocupa el lado izquierdo, quedando así la matriz inversa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación:

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema. II-9

El inverso de una matriz es único.

Sin entrar en detalles ni forma de obtenerla, describiremos a continuación lo que se conoce como la Forma Hermite de una matriz.

Sea ρ el rango de una matriz A (singular),donde el número de vectores del conjunto que la compone es mayor que ρ.

Denominaremos por k_1, k_2....., k_ρ los subíndices de los vectores que forman la base.

Se dice que la matriz A está en forma Hermite $A' = K^{-1} A$, (donde K^{-1} no es el inverso de A), cuando tiene la forma:

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} & & & \text{col } k_1 & & & \text{col } k_2 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{1,k_1+1} & \dots & 0 & a'_{1,k_2+1} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{2,k_2+1} & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

la cual satisface las siguientes condiciones:

a) Existe cuando menos un elemento diferente de cero en cada uno de los primeros ρ renglones de A' y los elementos en los restantes $(m - \rho)$ renglones son cero.

b) El primer elemento diferente de cero que aparece en el renglón i ($i \leq \rho$) es un uno que aparece en la columna k_i, donde $k_1 < k_2 < \dots < k_\rho$.

c) En la columna k_i el único elemento $\neq 0$ es un uno en el renglón i

.

Teorema II -10

Una matriz A tiene rango ρ, si cuando menos uno de sus menores de orden ρ es diferente de cero, mientras que todos los menores de orden $(\rho + 1)$, si existen, son cero. Una matriz nula se dice que tiene rango 0.

II-2.- ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS

Sean las siguientes ecuaciones con tres variables:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \;\dots(\alpha)$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \;\dots(\beta)$$

El conjunto ordenado de valores $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, se dice que es una solución de α (ó de β), debido a que si se sustituyen estos valores en lugar de x_1, x_2, x_3 en la primera ecuación (ó en la segunda), se produce la identidad $2 \equiv 2$ (ó $7 \equiv 7$). La solución (3, 2, 1,) se dice que satisface la ecuación α (β).

Supongamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Este sistema de ecuaciones también puede ser representado en forma compacta así:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \text{para } (i = 1, \ldots, m)$$

ó en forma matricial:

$$A X = B$$

en donde:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix} ; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}
$$

de donde cualquier observación que hagamos respecto a las matrices, corresponderá también al sistema de ecuaciones lineales, ya que aquellas son únicamente su representación.

Definición II-20

Una solución para la i-ava ecuación, es un conjunto ordenado de números $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, tal que:

$$a_{i1} x'_1 + a_{i2} x'_2 + \ldots + a_{in} x'_n = b_i$$

Definición II-21

Un conjunto ordenado de números se dice que es una solución de un sistema de ecuaciones, sí y solo sí es una solución para todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Definición II-22

Dadas las matrices A y B, la matriz aumentada A, B de un sistema de ecuaciones lineales, se define como:

$$\mathbf{A}, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Hemos hablado de una solución al sistema de ecuaciones, debido a que éste puede no poseer una solución única, así como no tener ninguna en absoluto.

Definición II-23

Un sistema de ecuaciones que tenga solución (única o no) se llama consistente. En caso contrario es inconsistente.

Definición II-24

Si en un sistema de ecuaciones una ecuación es un combinación lineal de las otras, se dice que esta última es dependiente de las otras. La ecuación dependiente se llama redundante.

Definición II-25

Un sistema que no contiene redundancias se llama independiente.

Un sistema lineal es claramente inconsistente, si es posible el encontrar una combinación lineal de las ecuaciones del sistema que que tenga la siguiente forma:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \ldots\ldots + 0\,x_n = d \quad \text{donde } d \neq 0$$

Definición II-26

Un sistema canónico, con un subconjunto ordenado de variables llamadas básicas, es un sistema tal, que para cada i, la i-ava variable básica tiene un coeficiente unitario en la i-ava ecuación, y un coeficiente cero en todas las demás.

Definición II-27

Dos sistemas se llaman equivalentes si un sistema puede ser derivado del otro insertando o eliminando ecuaciones redundantes.

Teorema II-10

Sistemas equivalentes tienen el mismo conjunto de soluciones.

Teorema II-11

El sistema de ecuaciones lineales simultáneas A X = B tiene solución (una o varias) sí y solo sí el rango de A es igual al rango de la matriz aumentada A, B. Siempre que una solución exista, todas las soluciones pueden ser expresadas en términos de ν = n − ρ parámetros independientes, donde ρ es el rango de A.

Justificación:

Dado que $\rho_{[A,B]} < \rho_{[A]}$ es imposible,

entonces:

$$\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} + 1$$

es la única otra posibilidad, ya que solo aumentamos un nuevo vector. En caso de de ser cierta esta igualdad, esto significa que el vector B es linealmente independiente de los vectores columna de A; pero esta independencia lineal es imposible, debido a que B es una combinación lineal A X de los mismos. Es por esto que debemos tener: $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]}$

Dado que $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]}$, existen dos posibilidades:

1.- $\rho_{[A]}$ = n, o sea su valor máximo (aquí m = n). En este caso, el sistema de ecuaciones tendrá exactamente una solución. Recordemos que A X = B y que $\rho_{[A]}$ = n, por lo que observamos que nuestro conjunto de vectores es una base (T-II-2) del sistema y A es no singular, por lo tanto A^{-1} A X = A^{-1} B y X = B', con la cual x_i aparece solo en la i-ésima ecuación igualada al valor de su solución, que en este caso es única.

2.- $\rho_{[A]} < n$. Aquí existirán $\rho_{[A]}$ vectores independientes y $\nu = n - \rho_{[A]}$ vectores dependientes (o parámetros independientes), a los cuales puede ser asignado cualquier valor arbitrario sin que el valor escogido impida que exista una solución para los vectores en la base, de aquí que en esta situación existan una infinidad de soluciones para el sistema de ecuaciones.

Esto es debido a que A' X = B' es tal que A' está en forma hermite. Recordamos que x_{ki} aparece sólo en la i-ava ecuación, además coeficientes diferentes de cero aparecen sólo en las primeras ρ ecuaciones. Dado que x_{ki} aparece en una sola ecuación con coeficiente uno, a las restantes $n - \rho$ incógnitas se les puede dar valores arbitrarios para obtener los valores de x_{ki} correspondientes.

Es importante el hacer notar que cuando $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} = r$, donde $r < m$, entonces tenemos que $(m - r)$ de nuestras ecuaciones deberán ser combinaciones lineales de las otras r. De aquí que $(m - r)$ ecuaciones redundantes pueden ser eliminadas sin que esto afecte a la ó las soluciones.

Métodos de solución.-

Caso 1.- $m = n$ y A es no singular. (Solución única)

a) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]}$

En este caso empleamos el método de eliminación de Gauss Jordan, para el cual se procede como sigue:

Elimínese la primera variable de todas las ecuaciones menos de una (que usualmente es la primera), esto se efectúa sumando algebraicamente un múltiplo adecuado, en cada caso, de esta ecuación, a cada una de las demás ecuaciones, eliminando la ecuación original y considerando, en su lugar, la ecuación que resultó de sumar algebraicamente el multiplo de la ecuación con la variable en turno a la ecuación eliminada. La ecuación que quedó con la primera variable debe de dividirse entre el coeficiente de ésta, con el objeto de que la misma quede con coeficiente uno; a continuación, se procede en forma análoga, a fin de eliminar la segunda variable de todas las ecuaciones menos una (usualmente la segunda).

Repítase la operación hasta que las n variables aparezcan en solo una de las ecuaciones; al llegar a este paso, cada una de las n ecuaciones debe contener exactamente una de estas variables ya que: $A^{-1} A X = A^{-1} B$, de donde $X = B'$. La solución deseada se lee directamente en las ecuaciones resultantes.

b) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} + 1$

En este caso, el sistema de ecuaciones no tine ninguna solución, debido a que el sistema es inconsistente. Este caso no puede presentarse.

Ejemplo II-23

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 22 \quad \ldots\ldots (1) \\
-x_1 + 3x_2 &= 9 \quad \ldots\ldots (2) \\
4x_2 - x_3 &= 10 \quad \ldots\ldots (3)
\end{aligned}
$$

Eliminamos x_1 de todas las ecuaciones menos de la primera.

Esto se logra sumando (1/2) veces la ecuación (1) a la ecuación (2) y sustituyendo la ecuación obtenida (2'), en lugar de la ecuación original (2). A continuación, dividimos la ecuación (1) entre el coeficiente de x_1, para obtener la ecuación (1'). La ecuación (3) queda igual pues no contiene x_1.

Obtenemos :

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11 \ldots (1') \quad \text{donde} \quad (1') = 1/2\ (1) \\
2x_2 + 2x_3 &= 20 \ldots (2') \quad \text{donde} \quad (2') = 1/2\ (1) + (2) \\
4x_2 - x_3 &= 10 \ldots (3') \quad \text{donde} \quad (3') = (3)
\end{aligned}
$$

El siguiente paso consiste en eliminar x_2 de todas menos de la segunda ecuación. Empezamos por dividir entre dos la segunda ecuación para obtener x_2 con coeficiente unitario.

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 11 \ldots\ldots (1') \\
x_2 + x_3 &= 10 \ldots\ldots (2'') \\
4x_2 - x_3 &= 10 \ldots\ldots (3')
\end{aligned}
$$

Hacemos ahora que x_2 sólo aparezca en la segunda ecuación:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_3 &= 21 \ldots (1'') \quad \text{donde} \quad (1'') = (1') + (2'') = (1') + 1/2\ (2') \\
x_2 + x_3 &= 10 \ldots (2'') \quad \text{donde} \quad (2'') = 1/2\ (2') \\
-5x_3 &= -30 \ldots (3'') \quad \text{donde} \quad (3'') = (3') - 4(2'') = (3') - 4/2(2')
\end{aligned}
$$

Finalmente, eliminamos x_3 de todas las ecuaciones menos de la tercera. Para esto, hacemos primero que el coeficiente de x_3 en la ecuación (3'') sea unitario. dividiendo dicha ecuación entre (−5).

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad 3x_3 &= 21 \quad \ldots\ldots (1'') \\
x_2 + x_3 &= 10 \quad \ldots\ldots (2'') \\
x_3 &= 6 \quad \ldots\ldots (3''')
\end{aligned}
$$

y ahora eliminamos x_3 de (1'') y (2'')

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3 \ldots (1''') \qquad \text{donde } (1''') = (1'') - 3(3''') = (1'') + 3/5\,(3'') \\
x_2 &= 4 \ldots (2''') \qquad \text{donde } (2'') = (2'') - (3''') = (2'') + 1/5\,(3'') \\
x_3 &= 6 \ldots (3''') \qquad \text{donde } (3'') = -1/5\,(3'')
\end{aligned}
$$

de donde vemos que la solución buscada será:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 6$$

o en forma vectorial:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 6)$$

Otra alternativa es la de resolver el sistema de ecuaciones utilizando las matrices. En este caso tendríamos:

$$
\begin{aligned}
A\,X &= B \\
A^{-1}\,AX &= A^{-1}\,B \\
X &= B'
\end{aligned}
$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -6 - 16 + 2 = -20$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{-20} & \frac{14}{-20} & \frac{-12}{-20} \\ \frac{-1}{-20} & \frac{-2}{-20} & \frac{-4}{-20} \\ \frac{-4}{-20} & \frac{-8}{-20} & \frac{4}{-20} \end{bmatrix}$$

$$B' = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & \frac{-14}{20} & \frac{12}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{4}{20} \\ \frac{4}{20} & \frac{8}{20} & \frac{-4}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{66}{20} - \frac{126}{20} + \frac{120}{20} \\ \frac{22}{20} + \frac{18}{20} + \frac{40}{20} \\ \frac{88}{20} + \frac{72}{20} - \frac{40}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

y $X = B'$ será:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Caso 2.- Cuando $m \neq n$ y/o A es singular

a) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} + 1$

Ya vimos que en este caso no hay solución. Cuando se aplica el método de Gauss-Jordan, se obtendrá una ecuación en la cual el lado izquierdo se habrá hecho cero, mientras que el lado derecho será diferente de cero, es decir, nuestro sistema es inconsistente.

b) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} = n$

Aquí: $m > n$ (puesto que $\rho = n$)

En este caso tenemos $(m - n)$ ecuaciones redundantes, las cuales serán totalmente eliminadas por el método de Gauss-Jordan, de forma tal que la solución única será identificada igual que antes (caso 1a).

c) $\rho_{[A,B]} = \rho_{[A]} = r < n$

En este caso existen un número infinito de soluciones, y cuando el método de Gauss-Jordan ha sido completado, se obtendrá una matriz de coeficientes en forma canónica, es decir, cada una de las r variables habrá quedado en solo una de las ecuaciones y cada una de las r ecuaciones contendrá exactamente una de estas variables. Sin embargo, cada una de las otras $(n - r)$ variables se habrán desvanecido o permanecerán en algunas de las ecuaciones. Es así que cualquier solución obtenida asignando valores arbitrarios a las $(n - r)$ variables y después identificando los vectores correspondientes a las otras r variables, será una solución al sistema de ecuaciones.

La transferencia de estas (n − r) variables al lado derecho. dejará las r variables como una función de los parámetros independientes.

Ejemplo II-24

Caso 2(a) (ejemplo II.12).

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)\\ x_2 \qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)\\ x_3 &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)\\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \end{aligned}$$

eliminando x_1 de (2), (3), y (4)

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1')\\ x_2 \qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2')\\ x_3 &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3')\\ x_2 + x_3 &= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4') \end{aligned}$$

eliminando x_2 de (1'), (3'), y (4')

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1'')\\ x_2 \qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2'')\\ x_3 &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3'')\\ x_3 &= -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (4'') \end{aligned}$$

eliminando x_3 de (4''):

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1''')\\ x_2 \qquad\qquad &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2''')\\ x_3 &= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (3''')\\ 0 &= -2 \ldots\ldots\ldots\ldots (4''') \end{aligned}$$

La ecuación (4''') es la ecuación mencionada, que hace que nuestro sistema lineal sea inconsistente.

Ejemplo II-25.

Caso 2(b) (ejemplo II.11).

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = 1 & \dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ x_1 - x_2 + x_3 & = 1 & \dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = 2 & \dots\dots\dots\dots\dots (3) \\ x_2 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (4) \end{array}$$

eliminando x_1 de (2) y (3):

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = 1 & \dots\dots\dots\dots\dots (1') \\ -2x_2 + x_3 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (2') \\ x_3 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (3') \\ x_2 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (4') \end{array}$$

eliminando x_2 de (1') y (4'):

$$\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_3 & = 1 & \dots\dots\dots\dots\dots (1'') \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (2'') \\ x_3 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (3'') \\ \frac{1}{2}x_3 & = 0 & \dots\dots\dots\dots\dots (4'') \end{array}$$

eliminando x_3 de (1''), (2'') y (4''):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = 1 & \\ x_2 & = 0 & \\ x_3 & = 0 & \\ 0 & = 0 & \text{ecuación redundante mencionada} \end{array}$$

Ejemplo II-26

Caso 2 (c).

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 & = & 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 4 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & -3 \\ 11x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 11 \end{array}$$

La matriz aumentada será:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 2 & -3 \\ 11 & 6 & 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

multiplicando el renglón 1 por (1/4) y sumando múltiplos de este renglón a las demás ecuaciones, tendremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -7 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

multiplicando el renglón 2 por (-1) y sumando múltiplos adecuados de este renglón a los demás, llegamos a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

finalmente obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como obtuvimos toda una hilera de ceros, la ecuación (4) era redundante, de donde el sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 1 \\ x_2 \qquad - 3x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 \\ x_2 &= 2 + 3x_4 \\ x_3 &= -3 - 2x_4 \\ x_4 &= \qquad x_4 \end{aligned}$$

donde x_4 es el parámetro independiente y

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 2, -3, 0) + (-1, 3, -2, 1)x_4$$

será la solución expresada en forma vectorial.

CAPITULO III

PROGRAMACION LINEAL

DEFINICIONES Y TEOREMAS

Definición .- III.1.-

Uniendo dos puntos cualesquiera $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ y $(x''_1, x''_2, \ldots, x''_n)$ existe una colección de puntos, conocidos con el nombre de "segmento lineal", tales que:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1' + (1-\lambda)x_1'', \lambda x_2' + (1-\lambda)x_2'', \ldots, \lambda x_n' + (1-\lambda)x_n'')$$

en donde $0 \leq \lambda \leq 1$

Ejemplo III.-1

Sean:

$$(x'_1, x'_2) = (2, 6)$$

$$(x''_1, x''_2) = (4, 3)$$

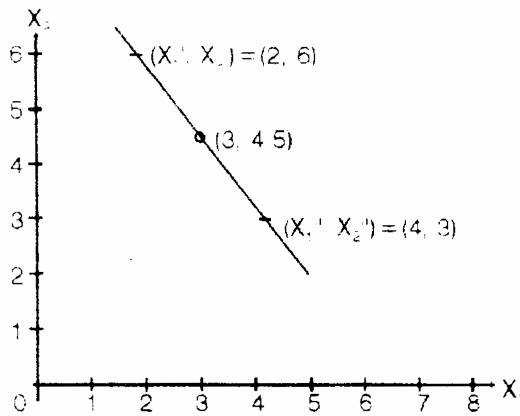
el segmento lineal será la colección de puntos:

$$(x_1, x_2) = (2\lambda + 4(1-\lambda), 6\lambda + 3(1-\lambda))$$

Si $\lambda = 0$: $(x_1, x_2) = (4, 3)$

Si $\lambda = 1$: $(x_1, x_2) = (2, 6)$

Si $\lambda = 0.5$: $(x_1, x_2) = (3, 4.5)$



Definición III.2

Un conjunto convexo es una colección de puntos tales, que para cualesquiera dos puntos en la colección, el segmento lineal que los une está por completo también en la colección.

Ejemplo III-2

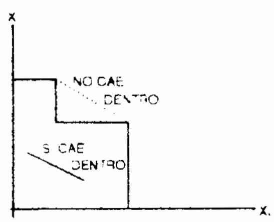


FIGURA III-1.
Este no es un conjunto convexo.

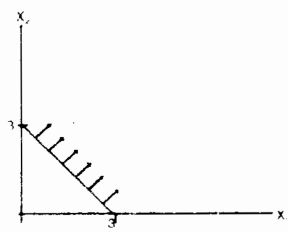


FIGURA III-2.
El conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $3x_1 + 3x_2 \geq 9$ es un conjunto convexo.

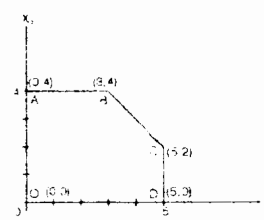


FIGURA III-3.
Este conjunto es convexo, ya que es imposible encontrar dos puntos cuyo segmento lineal caiga fuera del conjunto.

Teorema III-1

El conjunto de puntos comunes a dos o más conjuntos convexos, es en sí convexo.

Definición III-3

Un punto extremo de un conjunto convexo, es un punto en el conjunto, el cual no cae en ningún segmento lineal que una cualesquiera otros dos puntos en el conjunto.

Geométricamente, un punto extremo es una esquina.

En la figura III-3 los puntos extremo son: (0,0), (0,4), (3,4), (5,2), (5,0).

La función de la programación lineal es la de distribuir recursos (ó riquezas de cualquier clase) escasos, entre diferentes actividades en competencia y el realizar esto de una manera óptima.

La programación lineal se aplica en donde se debe llevar a cabo un cierto número de actividades, pero existen limitaciones en la cantidad de recursos o en el modo de utilizarlos que nos impiden desarrollar cada actividad de la manera que se considera más efectiva. En tales situaciones queremos distribuir los recursos disponibles entre las actividades, de tal forma que se optimice la efectividad total.

Con el objeto de poder llegar a una decisión óptima, todas las combinaciones posibles de distribuir los recursos a las actividades deben de ser analizadas.

Existe la alternativa de enumerar todas las posibilidades que existen de distribuir los recursos a las actividades (en el caso finito). Desgraciadamente, esta enumeración es excesivamente larga en problemas prácticos (cálculo combinatorio: existen 7! formas de hacer 7 parejas de baile, una muchacha para cada muchacho). El problema es generalmente más complicado para el caso contínuo.

Al resolver problemas de programación lineal, se consideran medidas de efectividad total tales como: ganancia, costos, cantidades producidas, etc.

En el caso de programación lineal, generalmente las restricciones se expresan en términos de "no más que", "no menos que", "cuando menos" y "cuando más" y por lo tanto casi siempre son representadas por desigualdades o por un sistema de desigualdades.

Un modelo matemático que describe el problema en cuestión es siempre utilizado en programación lineal.

La palabra lineal, significa que todas las relaciones hacen intervenir las variable en el primer grado.

En términos generales, la programación lineal puede ser utilizada para problemas de optimización, en los cuales las siguientes condiciones se satisfacen:

a) Debe de existir un objetivo, tal como ganancia, que debe ser optimizado y el cual puede ser expresado como, o representado por, una función lineal.

b) Deben existir restricciones en la cantidad o forma de lograr el objetivo y estas restricciones deben poder expresarse como un sistema de igualdades o de desigualdades lineales.

Actulmente se está haciendo énfasis en el desarrollo de la programación no lineal, debido a que los modelos lineales son insuficientes para describir muchas situaciones del mundo real.

III-1.- MODELOS

Los modelos son representaciones de la realidad.

Generalmente, se pueden construir modelos que son mucho más simples que la realidad, pero que aún se pueden utilizar para predecir y explicar los fenómenos con alto grado de exactitud. La razón estriba en que, a pesar de que se suele necesitar de gran cantidad de variables para predecir un fenómeno con exactitud perfecta, sólo un pequeño número de éstas son las responsables de la mayor parte de la exactitud. La clave está en encontrar las variables correctas y la relación entre ellas.

III-1.1.- Tipos de modelos

Generalmente, la Ciencia utiliza 3 tipos de modelos:

1) Icónicos

2) Analógicos

3) Simbólicos (ó matemáticos)

1) **Modelos Icónicos.** Aquí el modelo "se parece" a aquello que representa (es una imagen). Las propiedades fundamentales de la situación real se representan mediante esas mismas propiedades, generalmente a través de un cambio de escala. Algunos ejemplos serian: fotografías, dibujos, mapas y "modelos a escala".

La transformación en la escala de las propiedades representadas, tiene un objeto económico y de facilidad de uso.

Este tipo de modelos son particularmente útiles para representar situaciones estáticas, o dinámicas en un momento específico de tiempo, pero son generalmente difíciles de usar para representar situaciones dinámicas, tales como la operación de una fábrica.

2) **Modelos análogicos.** Aquí se usa un grupo de propiedades para representar otro grupo de propiedades. P. ej. un sistema hidráulico puede ser utilizado como un análogico de un sistema eléctrico.

En general, los analógicos son menos específicos, menos concretos, pero más fáciles de manipular que los icónicos. Se pueden usar fácilmente para representar situaciones dinámicas (procesos o sistemas).

3) **Modelos Simbólicos o Matemáticos.** Aquí se utilizan letras, números y otros tipos de símbolos para representar variables, y las relaciones entre ellas. De aquí que sean los modelos más generales y más abstractos de todos, pero los más fáciles de manipular experimentalmente.

III-1.2.- Tipos de modelos matemáticos

A) **Cuantitativos y cualitativos:**

1) Cualitativos.- Se ocupan de las cualidades o propiedades de los componentes. Hay muchos problemas que no pueden cuantificarse debido a uno o más de los siguientes motivos: técnicas inadecuadas de medición, necesidad de muchas variables, algunas variables desconocidas o relaciones demasiado complejas para representarse en forma cuantitativa.

2) Cuantitativos.- Cuando construimos un modelo matemático e insertamos símbolos para representar constantes y variables, llamamos a ésto un modelo cuantitativo.

B) **Estándar y hechos a la medida:**

1) Estándar.- Se usan modelos estándar para describir las técnicas que han llegado a asociarse con la Investigación de Operaciones. Para usar esas técnicas, se insertan los números apropiados de un problema específico en el modelo estándar para obtener una respuesta.

2) A la Medida.- Se obtienen cuando se usan los conceptos básicos de las diversas disciplinas (especialmente las matemáticas), para construir un modelo que se ajuste al problema de que se trata.

C) **Estáticos y dinámicos:**

1) Estáticos.- Se ocupan de determinar una respuesta para una serie especial de condiciones fijas, que probablemente no cambiarán significativamente a corto plazo. Un modelo estático dará por resultado la mejor solución, basada en esa condición estática.

2) Dinámico.- Está sujeto al factor de tiempo, que desempeña un papel esencial en la secuencia de las decisiones. Independientemente de cuales hayan sido las decisiones anteriores, el modelo dinámico nos permite encontrar las decisiones óptimas para los períodos que quedan todavía en el futuro.

D) **Probabilísticos y determinísticos:**

1) Probabilísticos.- Se basan en la probabilidad y la estadística y se ocupan de incertidumbres futuras.

2) Determinísticos.- La atención se enfoca en aquellas situaciones en las que, al tener en cuenta los factores críticos, se supone que son cantidades determinadas o exactas (es decir, no contienen consideraciones probabilísticas).

Nosotros usaremos modelos: estáticos, determinísticos, estandár y cuantitativos cuando veamos el modelo matemático de Programación Lineal.

III-2.- MODELO MATEMATICO EN LA PROGRAMACION LINEAL

Generalmente, un modelo matemático de programación lineal implica la maximización o minimización de una función lineal de un conjunto de variables no negativas, sujeta a un conjunto de desigualdades también lineales, que relacionan a las variables.

En nuestro curso, trataremos con problemas que comprenden la maximización de la función objetivo, siendo hasta más tarde que veamos como se trabaja cuando se trata de minimizarla.

No existe una norma en cuanto a tratar el problema como un caso, ya sea de maximización o minimización, por lo que ambos casos se encuentran en la literatura.

Es necesario aclarar que no es ésta una diferencia básica que implique que el tratamiento dado a un problema en un caso, tenga un tratamiento completamente diferente en otro, sino que por el contrario, el tratamiento es el mismo (salvo las diferencias debidas a Max. o Min.). Existe, además, una relación uno a uno entre los dos problemas (problema dual).

El punto de vista de la programación lineal, es el de considerar un sistema como factible de ser descompuesto en una serie de funciones elementales llamadas "actividades". La cantidad de cada actividad se llama "nivel de la actividad" y lo representaremos por el valor que toman las variables x_j.

La forma general del modelo matemático de programación lineal, será:

Encontrar: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (los niveles de n actividades), tales que maximicen la función lineal:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_jx_j + \ldots\ldots + c_nx_n$$

que llamaremos "función objetivo", satisfaciendo las m restricciones lineales:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{1j}\,x_j + \ldots\ldots + a_{1n}\,x_n \le b_1$$
$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{2j}\,x_j + \ldots\ldots + a_{2n}\,x_n \le b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{ij}\,x_j + \ldots\ldots + a_{in}\,x_n \le b_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots\ldots + a_{mj}\,x_j + \ldots\ldots + a_{mn}\,x_n \le b_m$$

tales que los niveles de actividad sean positivos o nulos, es decir:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots\ldots,\ x_n \ge 0$$

donde (a_{ij}), (c_j) y (b_i) son constantes conocidas.

La misma generalización utilizando matrices, sería:

Dado $A = \| a_{ij} \|$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ y $C = [\, c_1, c_2, \ldots, c_n \,]$, el problema general de programción lineal, es el de encontrar una o varias $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ no negativas, que maximicen:

$$Z = CX$$

sujeta a la condición de que: $AX \le B$

Z se conoce como la función objetivo y las desigualdades *lineales* en AX $\geq$ B se llaman restricciones *lineales.*

De aquí en adelante se supondrá que el modelo está en la forma general, a menos que se especifique de otra manera.

III-2.1.- Intrepretación del modelo matemático de programación lineal.

Consideraremos n actividades que están compitiendo por la obtención de ciertos recursos escasos.

Se mencionó que x_j representa la intensidad (o nivel) que tomará la actividad j, como por ejemplo la cantidad de mesas tipo j que debera producir un carpintero que hace varios modelos de mesas, pero que está limitado respecto a la cantidad de madera que puede conseguir.

Z representará la medida total de efectividad (el valor de la función objetivo). La función objetivo deberá ser escogida de tal forma que refleje el dato que nos interesa maximizar (como por ejemplo utilidades).

C_j es el incremento que se obtendrá en el valor de la función objetivo (Z), por cada unidad que x_j se incremente. Por ejemplo C_j puede representar la ganancia obtenida al vender una mesa tipo j.

Hemos ya mencionado que existen recursos escasos que nos impiden desarrollar cada actividad de la manera que se considera más efectiva. Sea "m" el número de recursos escasos. La forma que la programación lineal utiliza para indicar en que forma están restringidos cada uno de los recursos, es por medio de una desigualdad.

Debe tenerse mucho cuidado de no incurrir en ecuaciones redundantes, con objeto de evitar más trabajo del necesario.

Cuando se incurre en ecuaciones redundantes, el método de solución las elimina, pero existe el peligro de que en lugar de este tipo de ecuaciones formemos un sistema inconsistente.

b_i es la cantidad del recurso i con que contamos para surtir a las n actividades.

a_{ij} es la cantidad del recurso i que es consumida por cada unidad de actividad j.

Vemos entonces, que las desigualdades no tienen otro significado que el de indicar matemáticamente que la suma de las cantidades de recurso escaso i utilizado en las n actividades, deberá ser menor o igual que la cantidad del mismo de que se dispone.

III-2.2.- Ejemplos de formulación.

Ejemplo III-3.

Supóngase que se tienen n posibles productos (actvidades), los cuales podemos producir. Nos intresa saber cuáles de ellos y en qué cantidades debemos producirlos. Representaremos las cantidades a producir de cada una de ellos, por:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$$

Para producir estos n productos tenemos que hacer uso de m operaciones.

Supóngase que la ganancia que obtendremos de cada producto es conocida por nosotros y que está representada por:

$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$$

donde:

c_1 = ganancia obtenida al producir una unidad del producto 1

c_2 = ganancia obtenida al producir una unidad del producto 2

etc.

Representaremos por Z la ganancia total obtenida de todos los productos producidos.

Es claro ahora que nuestro objetivo será el de maximizar nuestra ganancia total. Sin embargo, generalmente existen consideraciones prácticas que limitan las cantidades x_j que pueden ser producidas, limitando a su vez la ganancia que podemos obtener de la producción, como por ejemplo el hecho de que nuestra planta tiene capacidades fijas y finitas para nuestras m operaciones, es decir, tenemos capacidades disponibles que son:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$$

También conocemos la cantidad de cada operación que cada uno de los productos requiere, de aquí que conozcamos que cada unidad del producto j que produzcamos requerirá a_{ij} minutos en la operación i, donde:

$$(j = 1, 2, \ldots, n) \ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Vemos que el problema es el de escoger cuidadosamente las cantidades de cada producto ($x_1, x_2, \ldots x_n$) que debemos producir, si deseamos que C X sea tan grande como sea posible.

Construyamos nuestro modelo matemático, el cual en nuestro caso deberá coincidir con nuestro modelo general dado con anterioridad.

Tratamos de encontrar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para:

maximizar $\quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_j x_j + \ldots\ldots + c_n x_n$

y vemos que estamos sujetos a las siguientes restricciones:

$$
\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1j} x_j + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2j} x_j + \ldots\ldots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots\ldots + a_{ij} x_j + \ldots\ldots + a_{in} x_n \leq b_i \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mj} x_j + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \leq b_m
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots\, n$$

Vemos que los elementos en la columna j representan, cada uno, la capacidad usada de la operación i por el producto j.

El lado izquierdo de las desigualdades representa el uso total del recurso i, mientras que el derecho nos indica la capacidad total disponible para la operación i.

La restricción $x_j \geq 0$, solo nos indica que es imposible el producir cantidades negativas de producto j.

Ejemplo III-4

Supongamos que una máquina puede fabricar, por semana, 400 artículos del producto 1 ó 300 artículos del producto 2. Si la producción se cambia de 1 a 2 ó viceversa durante la semana, se pueden fabricar un total de 600 artículos. La ganancia de las ventas de 1 es de \$2.00 por artículo; la ganancia de las ventas de 2 es de \$5.00 por artículo. Queremos determinar la cantidad x_1 que deberá fabricarse del producto 1 y la cantidad x_2 que debe fabricarse del producto 2, para que nuestra ganancia sea máxima.

Solución:

$$\text{maximizar} \qquad Z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a :

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 400 \\ x_2 &\leq 300 \\ x_1 + x_2 &\leq 600 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo III-5

Un carpintero elabora mesas, sillas, escritorios y libreros y desea saber qué cantidad de cada una de ellos deberá producir, con objeto de maximizar sus ganancias, dado que cuenta con un suministro limitado de madera de dos tipos y una mano de obra también limitada. Cuenta con 1500 m^2 de madera número 1, 1000 m^2 de madera número 2 y 800 hrs-hombre. Existen también ciertos compromisos que él ha contraído para la fabricación de algunos muebles. Los datos de fabricación son los siguientes:

Las mesas consumen 5 m^2 de madera número 1 y 2 m^2 de madera número 2, así como 3 hrs-hombre. El carpintero se comprometió a fabricar 40 de estas mesas para un cliente. La ganancia obtenida por mesa es $12.00.- Puede vender las que produzca.

Las sillas consumen: 1 m^2 de madera número 1, 3 m^2 de madera número 2 y requieren de 2 hrs-hombre. Existe el compromiso de entregar 130 de ellas. El carpintero sabe que puede vender todas las sillas que produzca. La gananciaa por silla es de $5.00.

Los escritorios llevan 9 m^2 de madera número 1, 4 m^2 de madera número 2, necesitándose de 5 hrs-hombre. Existe un compromiso por 30 de ellos. Vende todo lo que pueda producir de este producto. Ganancia $15.00 por escritorio.

Los libreros utilizan 12 m^2 de madera número 1, 1 m^2 de madera número 2, y llevan 10 hrs-hombre. El sabe que solo puede vender como máximo 10 libreros. Ganancia $10.00.

Cuando el caso lo amerite, conviene siempre poner los datos en forma de tabla, con lo cual se nos facilita la formulación del modelo matemático.

Cantidad que produciremos	Artículo	m^2 madera del # 1 consumida	m^2 madera del # 2 consumida	horas/hombre consumidas	Consideraciones de venta	Ganancia
x_m	mesas	5	2	3	≥ 40	12
x_s	sillas	1	3	2	≥ 130	5
x_e	escritorios	9	4	5	≥ 30	15
x_l	libreros	12	1	10	≤ 10	10
disponible		1500	1000	800		

Nuestro modelo quedará entonces como:

Maximizar

$$Z = 12x_m + 5x_s + 15x_e + 10x_l \qquad (0)$$

sujeto a:

(mad. #1)	$5x_m + x_s + 9x_e + 12x_l$	≤ 1500	(1)
(mad. #2)	$2x_m + 3x_s + 4x_e + x_l$	≤ 1000	(2)
(hrs/hombre)	$3x_m + 2x_s + 5x_e + 10x_l$	≤ 800	(3)
(comp. mesas)	x_m	≥ 40	(4)
(comp. sillas)	x_s	≥ 130	(5)
(comp. escrit.)	x_e	≥ 40	(6)
(max. vta. lib.)	x_l	≤ 10	(7)
(no negativ.)	x_l	≥ 0	

Nótese que las restricciones 4, 5 y 6, automáticamente implican que $(x_m, x_s, x_e) \geq 0$.

Ejemplo III-6.-

Una compañía fabrica dos clases de cinturones de piel. El cinturón A es de alta calidad, y el B es de baja calidad. La ganancia respectiva por cinturón es de \$0.40 y \$0.30. Cada cinturón de tipo A requiere el doble del tiempo de fabricación que el que usa el del tipo B, y si todos los cinturones fueran de tipo B, la compañía podría fabricar 1,000 al día. El abastecimiento de piel es suficiente únicamente para 800 cinturones diarios (A y B combinados). El cinturón A requiere una hebilla elegante, de las que solamente se dispone de 400 diarias. Se tienen únicamente 700 hebillas al día para el cinturón B. Establezca las ecuaciones de Programación Lineal para el problema, si queremos tener la mayor utilidad posible.

Solución.-

Sea: x_1 = No. de cinturones tipo A fabricados al día.
x_2 = No. de cinturones tipo B fabricados al día.

El modelo matemático será:

$$\text{Max } Z = 0.40x_1 + 0.30x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 400 \quad \text{(hebillas A)} \\ x_2 &\leq 700 \quad \text{(hebillas B)} \\ x_1 + x_2 &\leq 800 \quad \text{(piel)} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 1000 \quad \text{(tiempo)} \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo III-7.-

Uno de los problemas clásicos en Programación Lineal es el problema de la dieta. El objetivo es determinar las cantidades de ciertos alimentos que deben ser comidos para cumplir con determinados requerimientos nutritivos, a un mínimo costo. Supóngase que por el momento nos limitamos a leche, carne y huevos, y a las vitaminas A, C y D. Sabemos que el número de miligramos de cada una de las vitaminas que contiene cada unidad de alimento son los que se indican en la tabla:

VITAMINA	LITRO DE LECHE	KILO DE CARNE	DOCENA DE HUEVOS	REQUERIMIENTOS DIARIOS MINIMOS
A	1	1	10	1 mg.
C	100	10	10	50 mg.
D	10	100	10	10 mg
COSTO	$10.00	$110.00	$50.00	

Formular el modelo matemático de Programación Lineal para este problema.

Solución.-

Sea: x_l = No. de litros de leche.
x_c = No. de kilos de carne.
x_h = No. de docenas de huevos.

entonces tendremos:

$$\text{Min. } Z = 10x_l + 110x_c + 50x_h$$

s.a.

$$
\begin{aligned}
x_l + x_c + 10x_h &\geq 1 \\
100x_l + 10x_c + 10x_h &\geq 50 \\
10x_l + 100x_c + 10x_h &\geq 10 \\
(x_l, x_c, x_h) &\geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo III-8.-

Un individuo, cuyo negocio es mezclar whisky, importa tres grados: A, B y C. Los combina de acuerdo con recetas que especifican los porcentajes máximo o mínimo de los grados A y C en cada mezcla. Estos % se dan en la siguiente tabla:

MEZCLA	ESPECIFICACION	PRECIO POR BOTELLA
Blue Dot	No menos de 60% de A No más de 20% de C	$6.80
Highland Fling	No más de 60% de C No menos de 15% de A	$5.70

la provisión de los 3 whiskys básicos, junto con sus costos, se presenta a continuación:

WHISKY	MAXIMA CANTIDAD DISPONIBLE, BOTELLAS/DIA	COSTO POR BOTELLA
A	2.000	$7.00
B	2.500	$5.00
C	1.200	$4.00

Formule el modelo matemático de P.L., si el individuo desea maximizar sus ganancias.

Solución.-

Sea : x_{11} = cantidad de A usada para Blue Dot.
x_{12} = cantidad de B usada para Blue Dot.
x_{13} = cantidad de C usada para Blue Dot.
x_{21} = cantidad de A usada para Highland Fling.
x_{22} = cantidad de B usada para Highland Fling.
x_{23} = cantidad de C usada para Highland Fling.

Una cantidad $(x_{11} + x_{12} + x_{13})$ de Blue Dot se produce y se vende por \$6.80 $(x_{11} + x_{12} + x_{13})$.

Una cantidad $(x_{21} + x_{22} + x_{23})$ de Highland Fling se produce y se vende por \$5.70 $(x_{21} + x_{22} + x_{23})$.

Las cantidades totales de cada ingrediente utilizado serán: $(x_{11} + x_{21})$ de A, $(x_{12} + x_{22})$ de B y $(x_{13} + x_{23})$ de C.

El modelo matemático será entonces:

$$\text{Max. } Z = 6.80\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 5.70\,(x_{21} + x_{22} + x_{23})$$
$$- 7\,(x_{11} + x_{21}) - 5\,(x_{12} + x_{22}) - 4\,(x_{13} + x_{23})$$

s.a.

las disponibilidades:

$$x_{11} + x_{21} \leq 2,000$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 2,500$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 1,200$$

las especificaciones para Blue Dot:

$$x_{11} \geq 0.60\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \quad \text{ó} \quad -2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} \leq 0$$
$$x_{13} \leq 0.20\,(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \quad \text{ó} \quad - x_{11} - x_{12} + 4x_{13} \leq 0$$

las especificaciones para Highland Fling:

$$x_{23} \leq 0.60\,(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \quad \text{ó} \quad - 3x_{21} - 3x_{22} + 2x_{23} \leq 0$$
$$x_{21} \geq 0.15\,(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \quad \text{ó} \quad -17x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} \leq 0$$

y las condiciones de no negatividad:

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$
$$(j = 1, 2, 3)$$

III-3.- CARACTERISTICAS QUE DEBE TENER UN PROBLEMA PARA SER RESUELTO POR PROGRAMACION LINEAL.

Todo problema de programación lineal hace una serie de suposiciones con respecto al problema real, las cuales deben ser satisfechas para que nuestra solución sea representativa de la solución real.

Las condiciones que SIEMPRE deben buscarse para poder aplicar programación lineal a un problema real son las siguientes:

1.- Proporcionalidad.

2.- Aditividad.

3.- No negatividad

Aunque las anteriores condiciones son las básicas para poder establecer un modelo de programación lineal, en este curso estableceremos otras dos que son necesarias para poder aplicar los métodos que veremos, sin que esto signifique que no existan técnicas que puedan resolver problemas de programación lineal que no satisfagan las condiciones adicionales 4 y 5 (estas técnicas solo serán mencionadas en nuestro curso).

Las condiciones adicionales son:

4.- Divisibilidad.

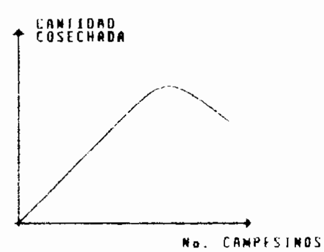
5.- Determinismo.

III-3.1.- Proporcionalidad.

En el modelo de programación lineal se exige que tanto la función objetivo como la utilización de los recursos sean proporcionales al nivel de la actividad. Con ésto queremos decir que si lo que deseamos es duplicar el nivel de las actividades, bastará con duplicar las cantidades que intervienen para el nivel unitario.

En el ejemplo III-5, vemos que si producimos una mesa, consumiremos 3 horas hombre, mientras que si producimos 5 consumiremos 3 x 5 = 15 hrs-hm. (caso de proporcionalidad al nivel de la actividad en la utilización de los recursos). Asimismo, al producir una mesa ganamos $12.00, mientras que al producir 5 ganaremos 5 x 12 = $60.00 (caso de proporcionalidad al nivel de la actividad en la función objetivo).

Se debe estar prevenido para aquellos casos en que el problema parece tener todas las características de proporcionalidad, pero que no lo es. Por ejemplo: el caso por todos conocido de un terreno que se desea cultivar; si un campesino lo cultiva, se obtendrá una cosecha de "x" toneladas, si lo cosechan 10 campesinos se obtendrá una cosecha de "10x" toneladas, pero si lo cultivan 100 campesinos, lo más probable es que no se obtenga una cosecha de "100x" toneladas (rendimiento decreciente). La producción suele tener una curva de la siguiente forma:

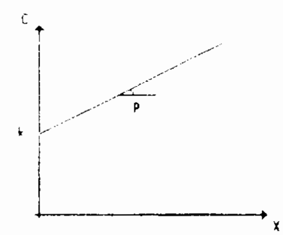


sin embargo, este problema simula a primera vista ser proporcional, aun cuando no lo es en todo su rango.

Existen ocasiones en que a propósito se asume que existe proporcionalidad, aunque la suposición no concuerde con la realidad. Estas suposiciones son válidas, siempre y cuando se calculen los efectos que dicha suposición tendrá en el resultado y se sepa que no lo afectará en forma apreciable, sino que la aproximación lograda servirá a los propósitos del programador.

En otras ocasiones, existen actividades que sólo son lineales sobre un intervalo determinado, p. ej. el costo de puesta en marcha hace que el costo de producción no sea lineal en cero; para poder considerar estas actividades en programación lineal, debemos estar seguros que el nivel de dicha actividad estará siempre dentro del intervalo correcto.

$$C = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ k + px & \text{si } x>0 \end{cases}$$



III-3.2.- Aditividad.

La aditividad presupone que la medida total de efectividad y la utilización de recursos resultantes de la operación conjunta de las actividades, debe igualar las sumas respectivas de éstas cantidades resultante de la operación individual de las actividades.

Vemos que sólo la presencia conjunta de la proporcionalidad y la aditividad, pueden garantizar la linealidad de que hablamos ya con anterioridad. La presencia de una sola de las dos condiciones, sin embargo, no la garantiza.

La principal causa de la no-linealidad es la presencia de interacciones entre las diferentes actividades, es decir, la operación de una actividad no es independiente de la operación de otra u otras actividades y al variar el (o los) nivel (es) de esta (s) última (s), indirectamente modificamos el nivel de la primera.

Supongamos que una compañía precisa de una instalación generadora de vapor para poder efectuar su proceso productivo. Al mismo tiempo utiliza el vapor de salida para calentar cierto material. Suponiendo que el costo de producir el vapor exclusivamente para el proceso productivo fuese $c_1 x_1$ y que el costo de calentar el material por un proceso independiente del vapor fuese $c_2 x_2$, el costo total sería $c_1 x_1 + c_2 x_2$ (existirá linealidad), pero dado que el material no es calentado por medio de un proceso independiente, sino usando el vapor de salida, el costo total de operar ambas actividades será:

$$c_1 x_1 \neq c_1 x_1 + c_2 x_2$$

III-3.3.- No negatividad.

Mientras que cualquier múltiplo positivo de una actividad es posible, cantidades negativas para una actividad no son posibles.

Por ejemplo, supongamos el caso de una transportacion de cierto producto. Aquí es imposible el transportar cantidades negativas de dicho producto.

III-3.4.- Divisibilidad.

En infinidad de problemas, los cuales satisfacen las tres primeras condiciones y son por lo tanto aptos de ser resueltos por programación lineal, nos encontramos con que las variables de decisión tienen sentido únicamente cuando toman valores enteros. Por ejemplo, asignar aviones a diferentes rutas que deben ser cubiertas.

El procedimiento que trataremos más adelante en el curso no conduce (salvo en raras excepciones), a valores enteros para las variables de decisión, razón por la cual, al aplicar este método de solución, debemos permitir que la solución esté expresada en valores fraccionarios.

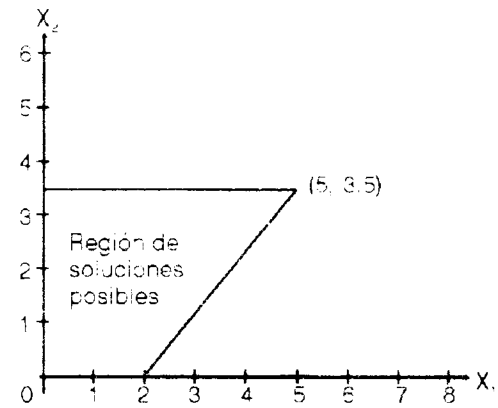
Existen ocasiones en las cuales es absolutamente necesario el obtener una respuesta en valores enteros (número de edificios que debemos construir). Cuando éste es el caso, existen dos procedimientos para resolver el problema:

a) Utilizando programación lineal de enteros. Este método garantiza la obtención del valor óptimo entero buscado, pero cuenta con el inconveniente de que la obtención de valores enteros para nuestra solución es una restricción dificil de manejar matemáticamente.

el problema:

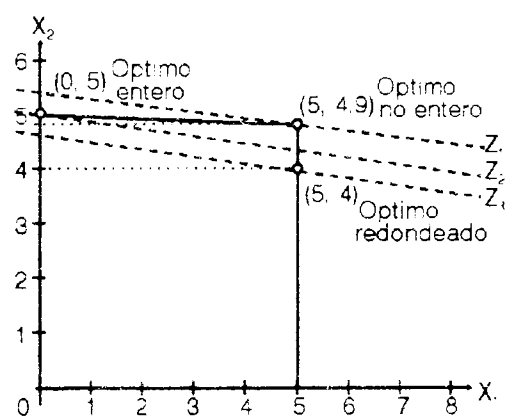
a) Utilizando programación lineal de enteros. Este método garantiza la obtención del valor óptimo entero buscado, pero cuenta con el inconveniente de que la obtención de valores enteros para nuestra solución es una restricción difícil de manejar matemáticamente.

b) Utilizando programación lineal normal y redondeando los valores obtenidos a sus valores enteros mas próximos. Las ventajas de este



método son obvias. Las desventajas, sin embargo, llegan a ser en extremo importantes en algunas ocasiones, ya que:

i) La solución de enteros obtenida al redondear la solución puede no ser factible. Por ejemplo:



Al redondear (5, 3.5) a (5,3) ó a (5,4) nos damos cuenta de que ninguna de las dos es factible.

III-3.5.- Determinismo

Uno de los problemas más comunes en la aplicación práctica de programación lineal es la dificultad de determinar el valor correcto de los parámetros del modelo (a_{ij}, b_i y c_j), los cuales dijimos con anterioridad que deberían ser constantes conocidas. Sin embargo, los valores que estos parámetros toman, a menudo están afectados por eventos aleatorios imposibles de predecir, ya que estos coeficientes, en general, se utilizan en modelos para seleccionar un curso de acción futura, razón por la cual los mismos suelen ser predicción de condiciones futuras.

Es entonces necesario, para aplicar los métodos que veremos, el poder determinar, con razonable confiabilidad, los valores de dichas constantes.

Consideraciones.

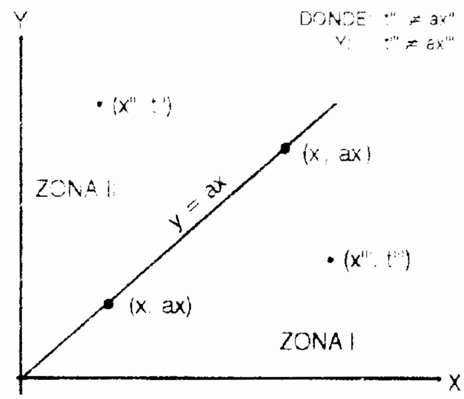
Es de suma importancia el tener presente las suposiciones de aproximaciones que se están utilizando y se debe estar siempre plenamente convencido de que las mismas están justificadas, ya que es difícil encontrar un problema que se ajuste 100% a las condiciones de la programación lineal.

Cuando las suposiciones son adecuadas, el modelo de programación lineal es la más apegada representación existente del problema y conducirá a una recomendación razonable respecto al curso de acción.

III-4.- IGUALDADES Y DESIGUALDADES

La ecuación $y = ax$ (la cual es una relación lineal), representa una línea recta de pendiente "a".

Cualquier solución (x, ax) para la ecuación $y = ax$, será un punto que cae exactamente sobre dicha recta y cualquier pareja (x, t) que no sea una solución para esta ecuación, será un punto que no cae sobre la recta. Es decir, cualquier solución de la ecuación $y = ax$, será un par de números (x, y), tales que para un valor dado de x (sea x_0), el valor de y (sea y_0) será "a" veces mayor.



Una desigualdad puede ser representada por medio de los siguientes símbolos: $(>)$, $(<)$, $(\geq)$, $(\leq)$.

El símbolo $>(<)$, significa que el valor de la variable localizada a la izquierda es mayor (menor) que el valor de la variable localizada a la derecha.

Así: $y > ax$ $(y < ax)$ significa que y es mayor (menor) que "a" veces el valor de x, es decir, esta desigualdad se satisface por los puntos localizados en la zona II (zona I).

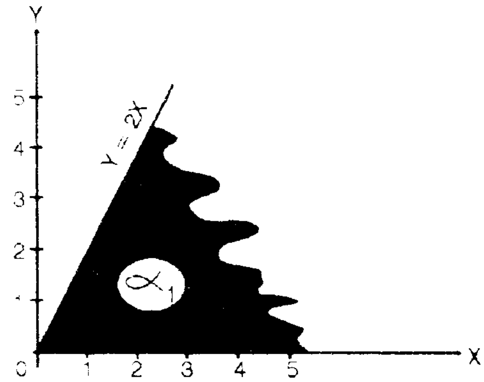
El símbolo $\geq(\leq)$, significa que el valor de la variable situada a la izquierda es mayor o igual (menor o igual) que el valor de la variable a la derecha. La desigualdad $y \geq ax$ $(y \leq ax)$ nos indica que para un valor dado de x, y es mayor o igual (menor o igual) que "a" veces el valor de x. También se dice que y es CUANDO MENOS (CUANDO MAS) igual a "a" veces el valor de x. Esta desigualdad se satisface por aquellos puntos en la zona II (zona I) y la línea $y = ax$.

Ejemplo III-9.-

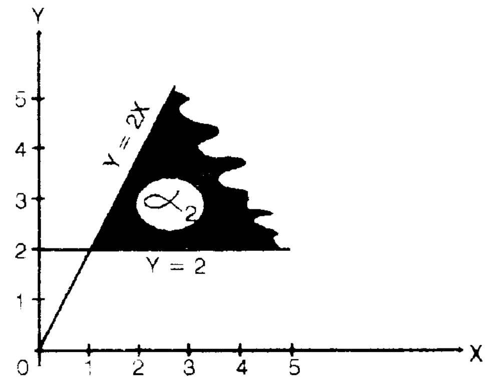
Sea el sistema de desigualdades siguientes:

$$
\begin{aligned}
y - 2x &\leq 0 \text{ ...... (1)} \\
y &\geq 2 \text{ ...... (2)} \\
8y + 6x &\leq 48 \text{ ...... (3)}
\end{aligned}
$$

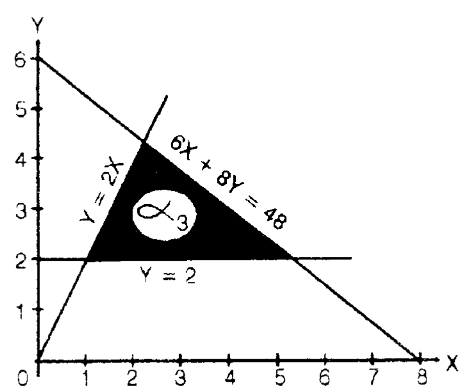
Las soluciones que satisfacen la desigualdad (1), serán las situadas en la zona (α_1).



Las soluciones que satisfaces las desigualdades (1) y (2), serán las situadas en la zona (α_2).



Las soluciones que satisfacen las desigualdades (1). (2) y (3). serán las situadas en la zona (α_3).



III-5.- METODO SIMPLEX.

Los problemas de programación lineal a menudo cuentan con un gran número de variables y restricciones, y la importancia de un método eficiente para obtener una solución es de suma importancia.

El método simplex es el procedimiento utilizado para resolver problemas de programación lineal. Fue desarrollado por Jorge Dantzig en 1947 y presentado en 1949. Este fue el primer método que permitió atacar, ordenadamente y con un procedimiento rutinario, los problemas de programación lineal que antes habian sido muy dificiles de resolver.

Este método es un procedimiente algebráico que progresivamente se acerca a la solución óptima mediante un proceso iterativo bien definido, hasta que finalmente esta se alcanza.

Debido a las características de este método, éste es apropiado para su utilización en las computadoras, aunque estas últimas utilizan, por lo general, lo que se conoce como Método Simplex Revisado, el cual veremos más adelante. El método Simplex es extremadamente simple y mediante éste nos es posible resolver problemas moderadamente complejos a mano. Sin embargo, el fundamento que existe detrás del método es más complicado.

III-6.- TERMINOLOGIA EN PROGRAMACION LINEAL.

Definición III-4.-

Una solución es un conjunto de n valores para las n x'_js de las restricciones.

Definición III-5.-

Región de soluciones posibles es aquel conjunto de vectores que satisfacen todas las restricciones.

Definición III-6.-

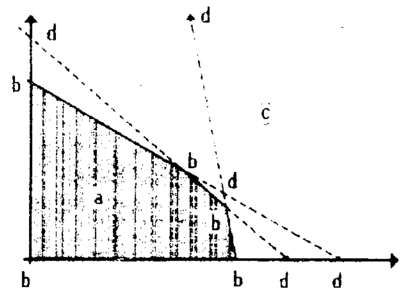
Una solución factible (o posible), es cualquier solución (vector) que satisface todas las restricciones, es decir, cualquier vector de la región de soluciones posibles. Si existe una solución factible para un problema, éste se dice que es factible.

Definición III-7.-

Una solución básica factible es aquella que corresponde con un punto extremo de la región de soluciones posibles.

Una solución básica no factible es aquella que corresponde con la intersección de dos ó más restricciones, fuera de la región de soluciones factibles.

Una solución básica factible es el conjunto de "m" cantidades x_i ($x \geq 0$) y de "n-m" cantidades x_i ($x_i = 0$), que satisfacen el sistema de restricciones.



a) Soluciones factibles (N° ∞)

b) Soluciones básicas factibles (5)

c) Soluciones no factibles (N° ∞)

d) Soluciones básicas no factibles (5)

Definición III-8.-

Una solución óptima, es la mejor de todas las soluciones factibles, esto es, aquella que maximiza la función objetivo.

Una solución óptima es aquel vector X_o, tal que $CX_o \geq CX$ para todas las soluciones (vectores) X factibles.

III-7.- PROPIEDADES DE LA PROGRAMACION LINEAL SOBRE LAS QUE SE BASA EL METODO SIMPLEX.

Suponiendo que existan soluciones factibles y que tenemos un máximo finito, entonces un problema de programación lineal debe tener las siguientes propiedades:

1) El conjunto de soluciones factibles es un conjunto convexo.

2) Si existe cuando menos una solución factible, entonces también existe cuando menos una solución basica factible.

3) $1 \leq$ número de soluciones básicas factibles $< \infty$. Es decir, el número de soluciones básicas factibles es finito.

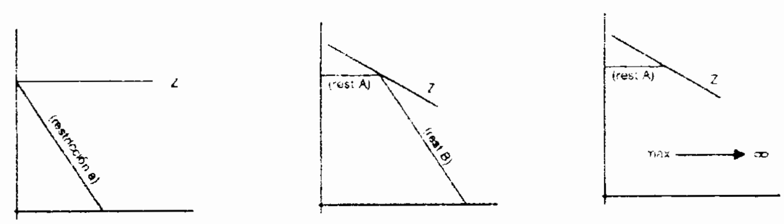
4) Cuando menos una de las soluciones óptimas (en caso de existir varias), es una solución básica factible.

Debe quedar claro que una solución óptima no necesita ser una solución básica factible (es decir un punto extremo). Esto sucede cuando son varias las soluciones factibles que maximizan la función objetivo, o sea, existe un segmento lineal de soluciones que la maximizan y en este segmento lineal solo los puntos extremos son las soluciones básicas factibles, las demas son soluciones factibles pero no básicas. La propiedad 4 dice que cuando menos una de las soluciones óptimas será una solución básica factible, pero no dice nada sobre las demás (en caso de que existan).

La situación anterior la estudiaremos durante el curso, cuando tratemos el punto de soluciones múltiples para un problema de programación lineal (tema III-12.8).

El significado de la propiedad 1 queda claro con el ejemplo III-2 visto cuando se definió un conjunto convexo, (en donde se vio que una desigualdad es un conjunto convexo) y del teorema visto a continuación.

La propiedad 2 está fundamentada en el hecho de que tenemos un máximo finito, razón por la cual tendremos por lo menos un par de restricciones (a, b) que nos limiten nuestra región de soluciones posibles, impidiendo que alguna de ellas se vaya al infinito. El significado de ésta propiedad es el de que el número de soluciones básicas factibles es estrictamente positivo.



La propiedad 3 surge del hecho de que también es finito el número de las restricciones y por lo tanto el número de sus intersecciones o puntos extremos.

La propiedad 4 provee la base fundamental del Método Simplex, ya que nos indica que sólo un número finito de soluciones, las básicas factibles (de entre el número infinito de soluciones factibles) necesitan ser investigadas, con objeto de llegar a localizar una solución óptima. De aquí que una solución óptima pueda ser siempre encontrada examinando únicamente cada una de las soluciones básicas factibles y eligiendo aquella que de un valor mayor a Z.

A pesar de que las soluciones básicas factibles existen en número finito, en la mayoría de los casos su número es muy grande, razón por la cual resulta poco eficiente buscar entre todas ellas hasta encontrar la solución óptima.

Es aquí donde entra en acción el Método Simplex, el cual, además de que solo examina los puntos extremos de la región de soluciones factibles, realiza su búsqueda de una manera óptima, ya que no examina a todos ellos, sino que parte de una solución inicial, a partir de la cual busca otra mejor y así sucesivamente hasta encontrar el óptimo.

III-8.- INTERPRETACION GEOMETRICA DEL METODO SIMPLEX

Utilizaremos un ejemplo para dar esta interpretación geométrica.

Ejemplo III-10.-

Sea el modelo de programación lineal siguiente:

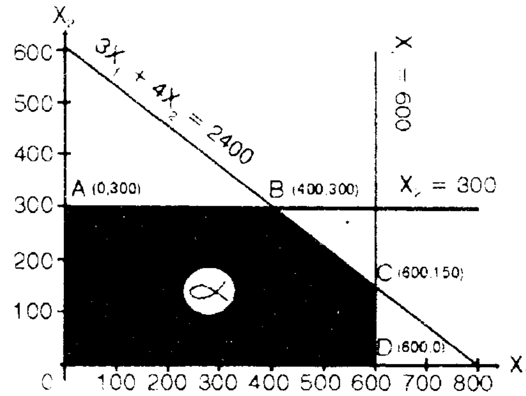
$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{rrll} x_1 & & \leq \ldots\ldots\ 600 & (1) \\ & x_2 & \leq \ldots\ldots\ 300 & (2) \\ 3x_1 & + 4x_2 & \leq \ldots\ldots\ 2400 & (3) \\ x_1 & & \geq \ldots\ldots\ 0 & (4) \\ & x_2 & \geq \ldots\ldots\ 0 & (5) \end{array}\right\} (\mathrm{I})$$

el cual, como puede apreciarse, representa un problema en el plano (x_1, x_2), lo que nos permite representarlo gráficamente.

El primer paso en el método gráfico es el de representar todos aquellos valores que son permitidos por las restricciones. El sistema de desigualdades lineales que constituyen las restricciones resulta en el conjunto convexo de puntos dado por el polígono OABCD. Cualquier punto (x, y) dentro de este polígono (región α) satisface el sistema de desigualdades (I). Al polígono OABCD le llamaremos región de soluciones factibles.



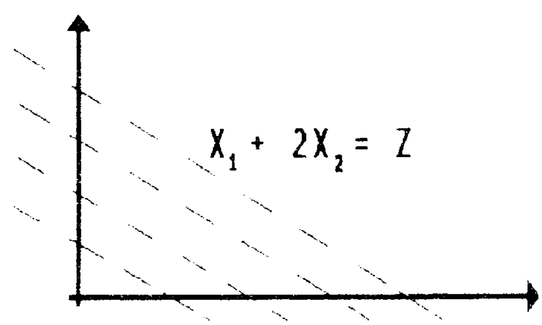
Podemos notar que los puntos extremos (soluciones básicas factibles) de nuestra región (α) son:

0 = (0,0); A = (0,300); B = (400,300); C = (600,150); y D = (600,0)

Las soluciones básicas no factibles (intersecciones de nuestras rectas en zona no factible) son: (0,600), (600,300) y (800,0), asi como las 2 intersecciones de las paralelas en el infinito.

Vemos que la región α cuenta con un número infinito de puntos, los cuales son soluciones a nuestro problema. El problema de programación lineal entonces, es el de seleccionar de entre este número infinito de puntos, aquel o aquellos puntos(x^*_1,x^*_2) que maximicen la función objetivo $Z = x_1 + 2x_2$.

La función $Z = x_1 + 2x_2$ es una familia de rectas con un parámetro (Z), esto es, la función representa una familia de rectas paralelas (de pendiente −1/2), tales que el valor de Z aumenta a medida que la recta se aleja del origen.



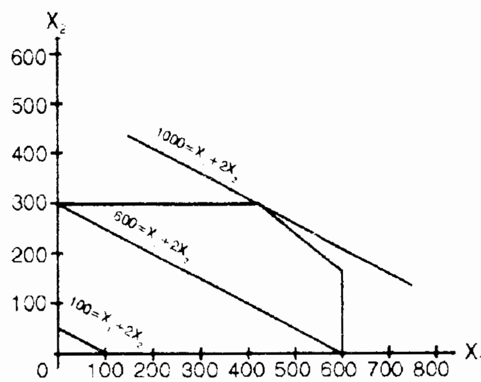
El problema puede ser pensado como el de determinar aquella línea, de entre la familia de rectas $x_1 + 2x_2 = Z$, que está más lejos del origen, pero que aún contiene cuando menos un punto dentro, o en la frontera del polígono OABCD.

Como primer intento, hagamos $Z = 100$ y veamos si existen valores (x_1, x_2) dentro de la región de soluciones posibles que nos den ese valor de Z. Vemos que cualquier punto de la recta dentro de la región de soluciones factibles nos da este valor de Z y que es aún posible alejarnos del orígen sin salirnos de nuestro polígono.

Probamos con $Z = 600$, nuevamente un segmento de la línea $x_1 + 2x_2 = 600$ cae en la región α, por lo que el valor máximo permisible para Z será cuando menos 600. Aún podemos alejarnos más del origen.

Finalmente, la recta $1000 = x_1 + 2x_2$ será la que satisfaga la condición de ser la más alejada del origen, conteniendo cuando menos un punto en la frontera de α. Este punto será la solución óptima buscada.

$$(x^*_1, x^*_2) = (400, 300)$$



Supongamos que cambiamos nuestra función objetivo a $Z = 3x_1 + 4x_2$; en este caso las dos soluciones básicas factibles (400, 300) y (600, 150) y todas las soluciones factibles (no básicas) situadas en el segmento lineal que une estos dos puntos, hubiesen sido soluciones óptimas (caso de soluciones múltiples mencionado antes).

El gran inconveniente del método gráfico es que no puede ser usado con más de tres variables y en ocasiones aún en este caso es muy complicado.

Gráficamente lo que el Método Simplex realiza es lo siguiente:

1) Localiza un vértice como punto de partida.

2) Examina las aristas del vértice, para ver si al moverse por una de ellas, hasta el siguiente vértice adyacente, se aumenta el valor de Z. Si el recorrido sobre las aristas no aumenta el valor de Z, el vértice en el cual estamos situados maximiza Z. Si al recorrer al menos una arista se aumenta el valor de Z, se pasa al paso tres.
3) Se escoge una de las aristas a lo largo de las cuales aumenta el valor de Z y se sigue sobre ella hasta alcanzar el siguiente vértice adyacente.
4) Se repiten los pasos 2 y 3 hasta que el valor de Z ya no pueda aumentarse.

La posibilidad de no llegar nunca a una solución óptima queda descartada, debido a las características del método de solución, ya que el paso 2 exige que siempre se pase a una solución mejor, con lo cual evitamos el caer en círculos de cálculo, además, debido a la propiedad tres, sólo es un número finito de pasos el requerido para llegar hasta una solución óptima.

La propiedad 1 nos garantiza que, al estar en un vértice y no poder pasar a otro adyacente que incremente el valor de Z, habremos llegado a la solución óptima.

III-9.- INTERPRETACION ALGEBRAICA DEL METODO SIMPLEX.-

Con objeto de poder ejecutar algebraicamente los pasos vistos en la interpretación geométrica, el Método Simplex se basa en el hecho de que todo problema lineal que contiene desigualdades, puede convertirse en un problema que no tenga más que ecuaciones, mediante la introducción de variables suplementarias llamadas variables de holgura.

Es claro el hecho de que las variables de holgura son las deficiencias que existen cuando las desigualdades originales se mantienen.

La desigualdad:

$$x_1 \leq 600 \text{ .... (I)}$$

nos indica que x_1 puede tener una deficiencia para llegar a igualar el valor de 600. Si esta deficiencia la llamamos x_3 (variable de holgura), tendremos que $x_3 \geq 0$ si es que x_1 satisface la desigualdad original; podemos por lo tanto sustituir la desigualdad (I) por:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 600 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Similarmente:

$$x_2 \leq 300 \text{ se reemplaza por } x_2 + x_4 = 300$$
$$x_4 \geq 0$$

y

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400 \text{ se reemplaza por } 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 2400$$
$$x_5 \geq 0$$

Considerando los anteriores reemplazamientos, nuestro modelo de programación lineal del ejemplo III-10, puede ser escrito como sigue:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + 2x_2$$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 600 \\ x_2 + x_4 = 300 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 2400 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0;\ x_5 \geq 0 \end{array}\right\} (\alpha)$$

sistema que es completamente equivalente al original, sólo que más apropiado para su manipulación algebraica.

Es importante hacer notar que las variables de holgura son únicamente un artificio para llegar a la solución óptima y que pueden tener o no un significado físico en problemas individuales.

Al transformar un sistema de desigualdades en un sistema de igualdades equivalentes, habremos formado un sistema de ecuaciones con n variables y m ecuaciones, donde $n > m$ (pues $n = m + k$ en el caso general, donde k = número de variables originales y m = número de variables de holgura agregadas).

Recordemos de lo visto en sistemas de ecuaciones lineales, que lo que tenemos es un sistema que cuenta con un número infinito de soluciones, ya que al resolver el sistema de ecuaciones, contamos con m variables que habrán quedado en sólo una de las m ecuaciones y tendremos, además, $n - m$ variables que aparecerán en varias de las ecuaciones, variables a las que se les puede asignar valores arbitrarios para obtener una de las soluciones de las restantes m variables.

Definición III-9.-

La solución obtenida al resolver el sistema de ecuaciones por m variables en términos de las restantes $(n - m)$ variables, asignándoles un valor de cero a estas últimas, se conoce como una solución básica. Si el valor de cada una de las m variables es ≥ 0, tendremos una solución básica factible.

Si el valor de cada una de las m variables es >0, tendremos una solución básica factible no degenerada.

Las m variables escogidas se denominan como "basicas" o como las variables en la base. Las $(n - m)$ variables restantes se conocen como variables no básicas.

Ejemplo III-11.-

La solución:

$$x_1 = 600 \qquad x_3 = 0$$
$$x_2 = 300 \qquad x_4 = 0$$
$$x_5 = -600$$

es una solución básica no factible para el modelo de nuestro ejemplo anterior.

La solución:

$$x_1 = 600 \qquad x_3 = 0$$
$$x_2 = 150 \qquad x_5 = 0$$
$$x_4 = 150$$

es una solución básica factible no degenerada para el mismo ejemplo.

En forma semejante podemos obtener el valor de las restantes 8 soluciones básicas.

El Método Simplex no puede iniciarse mas que con un sistema cuyas ecuaciones están siempre en forma canónica.

III-10.- RUTINA DEL METODO SIMPLEX.-

Paso 1.-

Se convierten las m desigualdades restrictivas a m ecuaciones, insertando variables de holgura no negativas x_{n-m+i} $(i = 1, 2, ..., m)$, una en cada restricción. Seleccione estas nuevas variables como las variables básicas iniciales. Vaya al paso 4.

Justificación.

El hacer cero todas las variables originales y considerar a todas las variables de holgura como las variables básicas, tiene por objeto el proporcionar una solución básica factible inicial obvia, ya que esta solución está en forma canónica.

La selección de una solución básica factible no es restrictiva a la forma mencionada, ya que es posible el seleccionar un subconjunto diferente de variables para que formen la base. El inconveniente de este método, es el de que entonces el sistema de ecuaciones ya no esta en forma canónica para las variables en la base, razón por la cual debemos de efectuar dicha transformación para poder tener la solución deseada (cosa que no fue necesaria en el método anterior), existiendo la posibilidad de que, después de haber ejecutado el trabajo de transformación para tener la solución deseada, descubramos que dicha solución no es factible (alguna $b_i < 0$) y que sea necesario hacer un nuevo intento.

Las variables de holgura se usan para encontrar una solución básica factible inicial rápidamente y por lo tanto no son indispensables en aquellos casos en que tengamos ecuaciones o exista una solución básica factible que sea obvia para nuestras ecuaciones.

En general, la solución básica factible inicial para el Método Simplex será siempre:

$$x_j = 0 \quad \text{para } j = 1,2, \ldots, n-m$$
$$x_{n-m+i} = b_i \quad \text{para } i = 1,2, \ldots, m$$

y la solución básica factible en la etapa t está relacionada con la solución básica factible en la etapa t + 1 de la siguiente manera: Una de las variables no básicas en la etapa t, toma un valor diferente en la etapa t + 1 y se denomina "variable de entrada". Para compensar, una de las variables básicas en la etapa t se hace cero en la etapa t + 1 y se denomina "variable de salida".

Las otras variables no básicas de valor cero se mantienen en cero; las otras variables básicas no nulas, en general, siguen siendo diferentes de cero (aunque su valor puede variar). Lo anterior es equivalente a pasar a un vértice adyacente de nuestro conjunto de soluciones posibles, que incremente el valor de Z.

Paso 2.-

Determine la nueva variable básica entrante (x_e), la cual deberá ser aquella variable no básica, en la función objetivo actual, que satisfaga la condición:

$$C'_e = \max C'_j > 0$$

cuando dicha función se encuentra en la forma:

$$Z = C'_1 x_1 + C'_2 x_2 + \ldots + C'_n x_n \ldots \text{(I)}$$

Justificación.

C'_j significa el coeficiente actual de la variable x_j en la función objetivo.

Es importante recordar siempre que x_e es la variable nula, en la solución básica factible actual, que va a tomar un valor no nulo en la siguiente iteración.

La regla de selección para x_e también puede ser expresada así: x_e será aquella variable no básica en Z que cuente con el mayor coeficiente entre aquéllos con signo positivo, estando Z en la forma indicada en (I). Esto se debe a que si $C'_e = \max C'_j > .0$, al incrementar x_e, el valor de Z parece incrementarse más rápidamente que incrementando cualquier otra variable.

El motivo de introducir x_e a la base, es que si cuando menos existe un coeficiente C'_j que sea positivo en la ecuación (I), entonces es posible (suponiendo que todas las $b_i > 0$) el construir una nueva solución básica factible con un valor mayor para Z. Esta nueva solución puede ser obtenida incrementando el valor de una de las variables no básicas (x_e) y ajustando los valores de las variables básicas de acuerdo con este cambio.

Existen otros métodos para seleccionar x_e (selección arbitraria, probando el efecto producido en el valor de Z por cada variable), pero la regla que utiliza el Método Simplex, ha demostrado, en la práctica, que casi siempre requiere de menos iteraciones para llegar a la solución óptima.

Debe notarse que aunque así lo parezca, la variable x_e no necesariamente es la que más incrementa el valor de Z, debido a que las restricciones pueden impedir que su valor aumente tanto como con variables con coeficientes menores, como puede apreciarse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo III-12.-

$$
\begin{aligned}
Z &= 3x_1 + x_2 \\
& \quad\; x_1 \qquad\;\; \leq 1 \\
& \qquad\qquad x_2 \;\leq 100
\end{aligned}
$$

Aquí se selecciona $x_e = x_1$ y sin embargo no es la variable que más incrementa el valor de Z.

Paso 3.-

Determine la variable básica (x_s) que dejará la base. La selección de la variable de salida se determina, en general, por la selección de la variable de entrada (x_e), junto con las restricciones. Se escogerá como x_s a aquella variable básica cuyo valor se hará negativo primero, cuando el valor de la variable básica entrante (x_e) se incrementa.

Justificación.

Debe quedar claro que x_s es aquella variable no nula (básica) que se va hacer cero (no básica) en la siguiente iteración.

Algebraicamente podemos interpretar el paso 3 como sigue:

Sea:

Z'_0 = valor actual de Z.

$$\left.\begin{array}{l} a'_{ie} = \text{coeficiente actual de } x_e \text{ en la ecuacion (i)} \\ b_i = \text{término constante actual en la ecuación (i)} \end{array}\right\} i = 1,\ldots,n$$

Dado que C'_e ha sido escogida positiva, es claro que el valor de x_e deberá ser tan grande como sea posible, con objeto de hacer el valor de Z tan grande como sea posible. Lo único que evita que x_e tome un valor infinitamente grande, es la posibilidad de hacer que el valor de una de las variables básicas actuales se haga negativo.

De nuestro sistema general, vemos que si construimos una solución en la cual x_e tome un valor positivo y donde todas las demas variables no básicas sigan siendo cero, las variables básicas se ajustarán en la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_{b1} = b'_1 - a'_{1e}\, x_e \\ x_{b2} = b'_2 - a'_{2e}\, x_e \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{bi} = b'_i - a'_{ie}\, x_e \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{bm} = b'_m - a'_{me}\, x_e \\ Z = Z'_0 + c'_e\, x_e \end{array}\right\} (II)$$

Del sistema de ecuaciones (II), vemos que el límite superior para el valor que podrá tomar x_e en la ecuación (i) será:

$$x_e \leq \begin{cases} \Phi_i = \infty & \text{si } a'_{ie} \leq 0 \\ \Phi_i = \dfrac{b'_i}{a'_{ie}} & \text{si } a'_{ie} > 0 \end{cases}$$

sea:

$$\Phi = \min \Phi_i$$

es decir, si cuando menos una a'_{ie} es positiva, no será posible incrementar el valor de x_e indefinidamente, porque cuando

$$x_e > \frac{b'_i}{a'_{ie}}$$

el valor de la x_{bi} se volverá negativo. Si $a'_{ie} > 0$ para más de un valor de i, entonces el menor de dichos coeficientes (cuyo subíndice correspondiente al renglón llamaremos p) determinará el mayor valor posible para x_e, bajo la suposición de no negatividad. Es decir, determínese aquella ecuación (i = p) cuyo límite superior sea el menor y escójase la variable básica actual en dicha ecuación como la variable de salida. Por lo tanto, x_s será aquella variable básica en la ecuación (i) para la que Φ_i adquiere su valor mínimo no negativo (Φ). El valor que tomará x_e (x^*_e) al entrar en la base será:

$$x^*_e = \frac{b'_p}{a'_{pe}} = \min_{a'_{ie} > 0} \frac{b'_i}{a'_{ie}} \geq 0$$

Debe notarse que para obtener Φ_i no es necesario formar el sistema de ecuaciones (II), sino que se puede obtener directamente del sistema actual.

Paso 4.-

Determínese la nueva solución básica factible. Para lograr esto, resuélvanse las variables básicas en términos de las variables no básicas (es decir, forme un sistema canónico para la nueva base), utilizando para el efecto el método de eliminación de Gauss-Jordan y haciendo cero todas las variables no básicas.

Justificación.

Cabe hacer notar que, en la transformación mencionada en el paso 4, se debe incluir también la función objetivo, con objeto de que Z quede expresada únicamente en función de las nuevas variables no básicas.

La razón de transformar la función objetivo, para que esté solo en función de variables no básicas al pasar del ciclo t al t + 1, es debido a que la función objetivo del ciclo t:

a) No contendrá la variable x_s, que en el ciclo t + 1 ya no es básica.

b) Contendrá n–m–1 de las variables no básicas del ciclo t + 1, pero con diferentes coeficientes de los que tendrá en un ciclo posterior.

c) Contendrá la variable x_e, que en el ciclo t + 1 ya es básica.

Las consecuencias de los incisos anteriores son:

a) Al no contener la función objetivo una de las variables no básicas, no podemos juzgar el efecto que la misma tendría sobre el valor de Z al incrementar su valor.

b) Este hecho nos impide observar si alguna de las variables no básicas pudiera incrementar el valor de Z, pues los valores C'_j cambián del ciclo t al t + 1, además de que algunos cambián de ser positivos a negativos y viceversa.

c) Este punto nos hace que no podamos determinar el efecto de introducir una variable no básica a la base en el siguiente ciclo, ya que este hecho puede afectar el valor de x_e (en el ciclo t + 1), la cual es ahora básica, con lo cual es imposible predecir el efecto neto sobre Z, ya que, en general, los valores de las variables básicas son afectadas por los cambios en la base.

Paso 5.-

Prueba la optimalidad de la solución obtenida, para lo cual se revisa la función objetivo (estando ésta en función exclusivamente de las variables no básicas) para conocer si el valor de Z puede aún ser aumentado incrementando el valor de alguna de estas variables (no básica). Recordemos que el valor de Z podrá ser incrementado, siempre y cuando alguna de las variables no básicas tenga signo positivo, estando la función objetivo en la forma de la ecuación (I) del paso 2.

Si todos los coeficientes son no positivos, debemos terminar aquí pues nuestra solución es óptima. Si aún existe algún coeficiente positivo, regrésese al paso 2..

Apliquemos los pasos anteriores a nuestro ejemplo III-10:

1a. Iteración.

Paso 1.-

Obtenemos el sistema de ecuaciones (α), encontrado anteriormente en el ejemplo (pag. 70).

Seleccionemos a x_3, x_4, y x_5 como las variables básicas de nuestra iteración primera y a x_1 y x_2 como las variables no básicas.

Expresando nuestra, solución en términos de los parámetros independientes (variables no básicas) según las ecuaciones (II), tenemos:

$$x_3 = 600 - x_1$$
$$x_4 = 300 \qquad - x_2$$
$$x_5 = 2400 - 3x_1 - 4x_2$$

dado que a la variables no básicas les hemos asignado un valor cero, obtenemos la siguiente solución básica inicial:

variables básicas	variables no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_4 = 300$	$x_2 = 0$
$x_5 = 2400$	
$Z = 0$	

o en forma vectorial:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 600, 300, 2400) \qquad Z = 0$$

La anterior es una solución básica factible no degenerada que corresponde al punto extremo $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Automáticamente hemos satisfecho el paso 4 y debido a que existen $C_j > 0$, el paso 5 nos indica seguir con el paso 2.

Paso 2.-

Puesto que $Z = x_1 + 2x_2$

vemos que tanto x_1 como x_2 tienen coeficientes positivos. Tendremos que:

$$C_e = \max(1, 2) = C_2$$

por lo que escogemos a x_2 como nuestra variable básica entrante.

Es decir:

$$x_e = x_2$$

Paso 3.-

Para determinar la variable de salida x_s, utilizamos el sistema de ecuaciones (II) y obtenemos:

$$x_3 = 600 - x_1 \qquad \text{.........(1)}$$
$$x_4 = 300 \qquad - x_2 \qquad \text{.........(2)}$$
$$x_5 = 2400 - 3x_1 - 4x_2 \qquad \text{.........(3)}$$

De las anteriores ecuaciones podemos obtener que:

El valor de x_3 no se verá afectado al incrementar x_2, por lo cual, por lo que respecta a esta variable,podemos incrementar x_2 hasta el infinito y x_3

nunca se volverá negativa (x_1 sigue siendo cero). ($\varphi_1 = \infty$)

De la ecuacion (2), vemos que lo máximo que podemos incrementar x_2 es 300, antes de que x_4 se vuelva negativa. ($\varphi_2 = 300$)

La ecuación (3) nos indica que lo máximo que podemos incrementar x_2 es 600, antes de que x_5 se vuelva negativa. ($\varphi_3 = 600$)

Debido a que φ_2 es la menor de las φ_i, x_4 será la que permitirá un menor aumento en el valor de Z y será ésta la variable que deberá dejar de base.

Tendremos ahora a x_2, x_3 y x_5 como variables básicas.

Paso 4.-

Para obtener una solución canónica para la nueva base, partimos de nuestro sistema canónico pasado y aplicamos el método Gauss-Jordan.

Partimos de nuestras ecuaciones, dispuestas en la siguiente forma:

$$\begin{array}{lllllll} Z - x_1 - 2x_2 & & & & = & 0 & \ldots\ldots(0) \\ x_1 & + x_3 & & & = & 600 & \ldots\ldots(1) \\ x_2 & & + x_4 & & = & 300 & \ldots\ldots(2) \\ 3x_1 + 4x_2 & & & + x_5 & = & 2400 & \ldots\ldots(3) \end{array}$$

Eliminando x_2 de todas menos de la segunda ecuación, tendremos:

$$\begin{array}{lllllllll} (0) + 2(2) = (0') & Z - x_1 & & & + 2x_4 & & = & 600 & \ldots\ldots(0') \\ (1) = (1') & x_1 & & + x_3 & & & = & 600 & \ldots\ldots(1') \\ (2) = (2') & & x_2 & & + x_4 & & = & 300 & \ldots\ldots(2') \\ (3) - 4(2) = (3') & 3x_1 & & & - 4x_4 & + x_5 & = & 1200 & \ldots\ldots(3') \end{array}$$

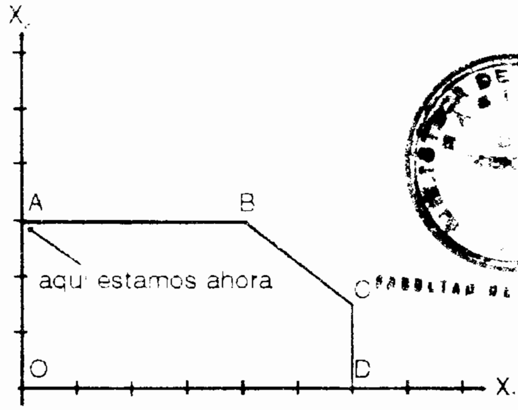
ordenando nuestros elementos, obtendremos:

$$\begin{array}{llllll} Z - x_1 + 2x_4 & & & & = & 600 \\ x_1 & + x_3 & & & = & 600 \\ x_4 & & + x_2 & & = & 300 \\ 3x_1 - 4x_4 & & & + x_5 & = & 1200 \end{array}$$

de aquí que la segunda solución básica factible será:

variables básicas	variables no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_2 = 300$	$x_4 = 0$
$x_5 = 1200$	
$z = 600$	

Geométricamente, lo que hemos hecho es movernos a lo largo de la arista OA hasta el vértice A = (0 , 300)



Paso 5.-

De los resultados obtenidos con anterioridad, observamos que hemos mejorado, pero surge ahora la pregunta: ¿ podemos aún seguir mejorando, o hemos llegado al valor máximo que podemos obtener ?

Debido a que nuestra función objetivo es:

$$Z = 600 + x_1 - 2x_4$$

observamos que aumentando el valor de x_1 (es decir, haciendo a x_1 básica), podemos aumentar el valor de Z; de aquí que nuestra solución no sea óptima y debamos seguir adelante con otra iteración del procedimiento.

2a. Iteración:

Paso 2.-

Observemos que:

$$Z = 600 + x_1 - 2x_4$$

de donde podemos darnos cuenta que $C_1 \geq 0$, por lo que incrementando el valor de x_1 aumentaremos el valor de Z por lo tanto:

$$x_e = x_1$$

Paso 3.-

En la explicación del paso 3. se mencionó que no era necesario formar el sistema de ecuaciones (II) para obtener φ. En la primera iteración si formamos dicho sistema de ecuaciones, pero en ésta segunda iteración lo haremos directamente de nuestras ecuaciones, que es la forma en que normalmente se hace.

De la ecuación (1'):

$$\phi_1 = \frac{b_1}{a'_{11}} = \frac{600}{1} = 600 \qquad \rightarrow \; x_1 \leq 600$$

De la ecuación (2'):

$$a'_{21} \leq 0 \rightarrow \phi_2 = \infty \text{ es decir: } x_1 \leq \infty$$

De la ecuación (3'):

$$\phi_3 = \frac{b_3}{a'_{31}} = \frac{1200}{3} = 400 \qquad \rightarrow \; x_1 \leq 400$$

Vemos que el mínimo límite superior (ϕ) está en la ecuación $i = 3$ (es decir $\phi = 400$). Esto implica que $p = 3$ y como la variable básica en la ecuación (3) es x_5, tendremos:

$$x_s = x_5$$

Generalmente, el cálculo de las ϕ_i se hace a la derecha de nuestras ecuaciones para ahorrar espacio.

Tendremos que nuestra solución básica factible actual será:

básicas	no básicas
x_1	x_4
x_2	x_5
x_3	

Paso 4.-

Obtengamos ahora una forma canónica para nuestra nueva base con ayuda del método Gauss-Jordan:

$$\begin{array}{lllllll}
Z & + 2/3x_4 & & & + 1/3x_5 & = & 1000 \\
 & 4/3x_4 & + x_3 & & - 1/3x_5 & = & 200 \\
 & x_4 & & + x_2 & & = & 300 \\
x_1 & - 4/3x_4 & & & + 1/3x_5 & = & 400
\end{array}$$

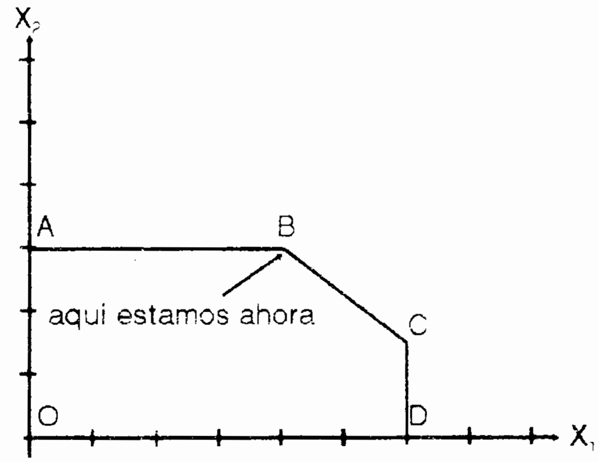
Ordenando las variables:

$$
\begin{array}{llllllll}
Z & +\ 2/3x_4 & +\ 1/3x_5 & & & & = 1000 & \ldots\ldots(0'') \\
 & 4/3x_4 & -\ 1/3x_5 & +\ x_3 & & & = 200 & \ldots\ldots(1'') \\
 & x_4 & & & +\ x_2 & & = 300 & \ldots\ldots(2'') \\
 & -\ 4/3x_4 & +\ 1/3x_5 & & & +\ x_1 & = 400 & \ldots\ldots(3'')
\end{array}
$$

y la nueva solución básica factible será:

variables básicas	variables no básicas
$x_1 = 400$	$x_4 = 0$
$x_2 = 300$	$x_5 = 0$
$x_3 = 200$	
$Z = 1000$	

Geométricamente, lo que hemos hecho es movernos a lo largo de la arista AB hasta el vértice B = (400,300).



Paso 5.-

Tenemos que nuestra función objetivo es:

$$Z = 1000 - 2/3x_4 - 1/3x_5$$

de donde vemos que ninguno de los coeficientes es positivo, por lo que no es posible aumentar el valor de Z incrementando el valor de alguna de estas variables, lo cual nos indica que hemos llegado a la solución óptima, ésta es:

$Z^* = 1000 \qquad x^*_4 = 0$

$x^*_1 = 400 \qquad x^*_5 = 0$

$x^*_2 = 300$

$x^*_3 = 200$

valores que coinciden con los obtenidos por el método gráfico.

III-11.- METODO DEL PIVOTE

Con objeto de ahorrar trabajo, se suele emplear el método del pivote, el cual utiliza la representación matricial de nuestro problema y básicamente usa la misma secuencia de pasos anteriores, solo que ahorra escritura.

1.- Arreglar las ecuaciones de forma que las x_j correspondientes en cada ecuación aparezcan en la misma columna (trátese todas las ausencias de x_j como ceros).

Denomínense por P_j al vector columna correspondiente a la variable x_j ($j=1,2,\ldots,n$) y P_0 al vector columna correspondiente a las constantes b_i.

Matricialmente:

$$x_j P_j = x_j \begin{Bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{Bmatrix}$$

por lo cual podemos representar a nuestro modelo matemático general como:

Maximizar $Z = CX$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j \leq P_0$$

2.- Colóque los vectores columna P_j de una manera sistemática.

Esto se efectúa haciendo uso de una tabla como la que sigue:

P_1	P_2	P_3	...	P_j	...	P_n	P_0
a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	a_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	a_2
.	.	.	...	.	...	.	.
.	.	.	...	.	...	.	.
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	...	a_{ij}	...	a_{in}	a_i
.	.	.	...	.	...	.	.
.	.	.	...	.	...	.	.
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	a_m

Debe notarse que las ecuaciones se pueden obtener simplemente multiplicando cada uno de los coeficientes en las columnas P_j por la x_j correspondiente y leyendo horizontalmente. Con objeto de facilitar las identificaciones durante el curso del procedimiento, se insertan, además, las columnas v.b. (variables básicas), No. de ecuación, una columna para Z y una para ϕ_i.

Para nuestro ejemplo:

v.b	No. Ec.	Z	x_1 P_1	x_2 P_2	x_3 P_3	x_4 P_4	x_5 P_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	-1	-2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	600	∞
x_4	2	0	0	1	0	1	0	300	300
x_5	3	0	3	4	0	0	1	2400	600

Se usan los mismos pasos dados para la rutina simplex.

Paso 1.- Ya está

Paso 2.- $x_e = x_2$ (pues -2 es el menor coeficiente de la función objetivo).

Paso 3.- Se consideran sólo las ecuaciones donde $a_{ie} > 0$ ($a_{i2} > 0$ en el ejemplo), excluyendo $i = 0$ y se obtienen los cocientes:

$\phi_i = \frac{b_i}{a_{ie}} = \frac{b_i}{a_{i2}}$ correspondientes, para obtener la $i = p$ que nos indicará el renglón correspondiente a x_s ($\phi = \min \phi_i$). Las ϕ_i se colocan en la columna a la extrema derecha. Márquese con un círculo el elemento a_{pe} (a_{22} en nuestro ejemplo, ya que $\phi_2 < \phi_3$, de donde $p = 2$ y la variable correspondiente a la segunda ecuación es x_4, por lo que $x_s = x_4$).

Paso 4.- En una nueva tabla, cambiese x_4 por x_2 en la columna v.b. y póngase la ecuación $i = p$ (ecuación correspondiente a x_s) dividida entre a_{Pe} (es decir entre el coeficiente de nuestro primer pivote) en la nueva tabla. En nuestro caso $a_{Pe} = 1$, por lo que obtendremos:

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0							
x_3	1							
x_2	2	0	0	1	0	1	0	300
x_5	3							

ahora elimínese la variable x_2 de las ecuaciones en las cuales aparece:

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i	
Z	0	1	-1	0	0	2	0	600		nva(0)=ant(0)+2ant(2)
x_3	1	0	1	0	1	0	0	600	600	nva(1)=ant(1)
x_2	2	0	0	1	0	1	0	300	∞	
x_5	3	0	3	0	0	-4	1	1200	400	nva(3)=ant(3)-4ant(2)

y nuestra nueva solución básica será:

variables básicas	variables no básicas
$x_3 = 600$	$x_1 = 0$
$x_2 = 300$	$x_4 = 0$
$x_5 = 1200$	
$Z = 600$	

Paso 5.- Revise la ecuación (0) para ver si existe algún coeficiente negativo. Vemos que $C_1 = -1$, por lo tanto nuestra solución aún no es óptima y se requiere otra iteración. En nuestra siguiente iteración $x_e = x_1$ y $x_s = x_5$, con lo que obtendremos la tabla:

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	
Z	0	1	0	0	0	2/3	1/3	1000	nva(0) = ant(0) +1/3 ant(3)
x_3	1	0	0	0	1	4/3	-1/3	200	nva(1) = ant(1) - 1/3 ant(3)
x_2	2	0	0	1	0	1	0	300	nva(2) = ant(2)
x_1	3	0	1	0	0	-4/3	1/3	400	nva(3) = 1/3 ant(3)

como nuestra ecuación (0) no tiene ya ningún coeficiente negativo, nuestra solución será óptima:

variables básicas	variables no básicas
$x_1^* = 400$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 200$	
$Z^* = 1000$	

Ejercicio III-1.-

Sea el problema de programación lineal siguiente:

Maximizar $Z = 2x_1 + 5x_2$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad & \leq 4 \\ x_2 & \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 & \leq 8 \\ x_1 \quad\quad\quad & \geq 0 \\ x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

utilice el método del pivote para encontrar la solución óptima.

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	-2	-5	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4	∝
x_4	2	0	0	1	0	1	0	3	3
x_5	3	0	1	2	0	0	1	8	4

variables básicas	no básicas
$x_3 = 4$	$x_1 = 0$
$x_4 = 3$	$x_2 = 0$
$x_5 = 8$	
$Z = 0$	

$x_e = x_2$

$x_s = x_4$

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	-2	0	0	5	0	15	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	4	4
x_2	2	0	0	1	0	1	0	3	∝
x_5	3	0	1	0	0	-2	1	2	2

variables básicas	no básicas
$x_2 = 3$	$x_1 = 0$
$x_3 = 4$	$x_4 = 0$
$x_5 = 2$	
$Z = 15$	

$x_e = x_1$

$x_s = x_5$

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0	1	0	0	0	1	2	19
x_3	1	0	0	0	1	2	−1	2
x_2	2	0	0	1	0	1	0	3
x_1	3	0	1	0	0	−2	1	2

variables básicas	no básicas
$x_1^* = 2$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 3$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 2$	
$Z^* = 19$	

Ejercicio III-2.-

$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 2x_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	−3	−2	0	0	0	0	
x_3	1	0	−1	1	1	0	0	2	∝
x_4	2	0	1	2	0	1	0	10	10
x_5	3	0	2	−1	0	0	1	10	5

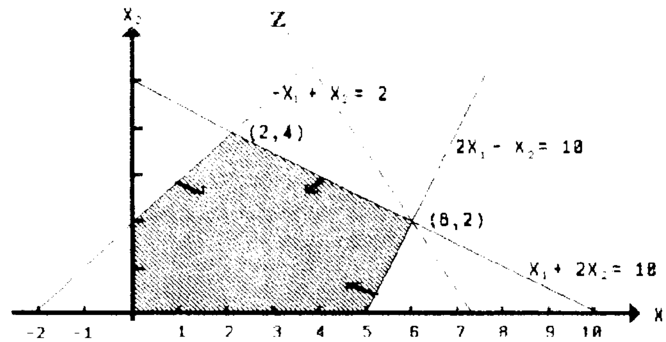
variables básicas	no básicas
$x_3 = 2$	$x_1 = 0$
$x_4 = 10$	$x_2 = 0$
$x_5 = 10$	
$Z = 0$	

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	0	-7/2	0	0	3/2	15	
x_3	1	0	0	1/2	1	0	1/2	7	14
x_4	2	0	0	5/2	0	1	-1/2	5	2
x_1	3	0	1	-1/2	0	0	1/2	5	∝

variables básicas	no básicas
$x_3 = 7$	$x_2 = 0$
$x_4 = 5$	$x_5 = 0$
$x_1 = 5$	
$Z = 15$	

v.b	No. Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0	1	0	0	0	7/5	4/5	22
x_3	1	0	0	0	1	-1/5	3/5	6
x_2	2	0	0	1	0	2/5	-1/5	2
x_1	3	0	1	0	0	1/5	2/5	6

variables básicas	no básicas
$x_3^* = 6$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 2$	$x_5^* = 0$
$x_1^* = 6$	
$Z^* = 22$	



III-12.- COMPLICACIONES

En muchas ocasiones, nos encontramos que al construir nuestro modelo matemático, éste aparece con algunas variaciones respecto al modelo general que hemos analizado hasta el momento.

A continuación veremos cuales son las variaciones más comunmente encontradas y las trataremos individualmente, sin que ello implique que no se pueden presentar varias de ellas simultáneamente, en cuyo caso se aplican, en forma sucesiva, los métodos que se describirán para solucionar estas variaciones.

Las variaciones más comunes son:

1.- Minimización.

2.- Desigualdad con sentido invertido.

3.- Constantes negativas ($b_i < 0$).

4.- Igualdades.

5.- Variables no restringidas en signo.

6.- Empate para entrar como variables básicas.

7.- Empate para dejar la base (degeneración).

8.- Soluciones múltiples.

9.- Ausencia de soluciones posibles.

10.- Solución óptima sin límite.

En todos los casos anteriores aún es posible utilizar el método simplex, sólo que será necesario efectuar ligeros ajustes en nuestro modelo. Los ajustes necesarios se tratarán en cada caso particular.

III.-12.1.- Minimización

Esta complicación se puede tratar en dos formas diferentes:

a) En aquellos casos en que deseamos minimizar nuestra función objetivo, ya no tiene sentido incrementar el valor de aquella variable no básica que más aumente el valor de Z, sino ahora deberemos buscar la forma de disminuir su valor. Es por esto que el ajuste al método simplex en este caso será:

Se escogerá como variable entrante (x_e), aquella variable no básica que disminuirá más rapidamente el valor de Z cuando adquiere un valor positivo.

La variable de salida (x_s) se escogerá en la misma forma que antes.

La prueba de optimalidad, consistirá en revisar si el valor de Z puede aún ser disminuido al incrementar el valor de una variable no básica (estando la función objetivo sólo en función de estas variables).

b) Supongamos que tenemos:

$$Z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

que representa nuestra función objetivo, la cual deseamos minimizar.

Si recordamos que:

$$f = -(-f)$$

y que si: $f \downarrow \rightarrow (-f) \uparrow$

tendremos que: $\min f = -[\max(-f)]$

por lo que el minimizar una función objetivo, sujeta a una serie de restricciones, es completamente equivalente a maximizar el negativo de la función, sujeta a las mismas restricciones, con la salvedad de que el mínimo valor de Z buscado, será igual al negativo del máximo valor de Z encontrado.

Ejemplo III.-13.-

Supongamos que tenemos el siguiente modelo:

$$\text{Min } Z = -x_1 - 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

para resolverlo, multiplicamos la función objetivo por (−1), con lo cual obtenemos:

$$\text{Max } -Z = x_1 + 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

y lo resolvemos aplicando el método general visto con anterioridad:

v.b	No. Ec	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	−1	−2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	8	∝
x_4	2	0	3	2	0	1	0	30	15
x_5	3	0	−1	3	0	0	1	12	4

v.b.	v.n.b.
$-Z = 0$	$x_1 = 0$
$x_3 = 8$	$x_2 = 0$
$x_4 = 30$	
$x_5 = 12$	

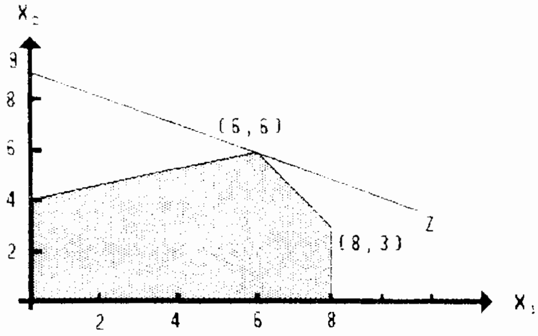
v.b	No. Ec	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
Z	0	1	−5/3	0	0	0	2/3	8	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	8	8
x_4	2	0	11/3	0	0	1	−2/3	22	6
x_2	3	0	−1/3	1	0	0	1/3	4	∝

v.b.	v.n.b.
$-Z = 8$	$x_1 = 0$
$x_3 = 8$	$x_5 = 0$
$x_4 = 22$	
$x_2 = 4$	

v.b	No. Ec	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0	1	0	0	0	5/11	4/11	18
x_3	1	0	0	0	1	−3/11	2/11	2
x_1	2	0	1	0	0	3/11	−2/11	6
x_2	3	0	0	1	0	1/11	3/11	6

v.b.	v.n.b.
$-Z = 18$	$x_4 = 0$
$x_3 = 2$	$x_5 = 0$
$x_1 = 6$	
$x_2 = 6$	

Tenemos entonces, que Max Z = − Min (-Z) = 18



Ejemplo III.-14.-

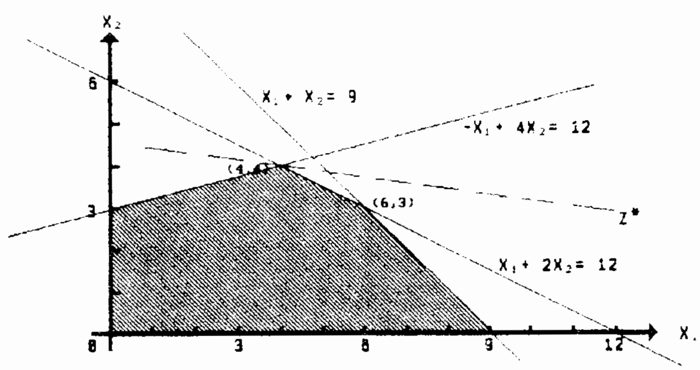
Obtener la solución óptima para el siguiente modelo de programación lineal:

$$\text{Min } Z = -x_1 - 8x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución:



para poderlo resolver, multiplicamos por (-1) la función objetivo, y obtenemos:

$$\text{Max } -Z = x_1 - 8x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 9 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

modelo que podemos resolver en la forma general:

v.b	No. Ec	-Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ
Z	0	1	-1	-8	0	0	0	0	
x_3	1	0	-1	4	1	0	0	12	3
x_4	2	0	1	2	0	1	0	12	6
x_5	3	0	1	1	0	0	1	9	9

v.b.: $-Z = 0$, $x_3 = 12$, $x_4 = 12$, $x_5 = 9$

v.n.b.: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

v.b	No. Ec	-Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ
Z	0	1	-3	0	2	0	0	24	
x_2	1	0	-1/4	1	1/4	0	0	3	$\propto$
x_4	2	0	3/2	0	-1/2	1	0	6	4
x_5	3	0	5/4	0	-1/4	0	1	6	24/5

v.b.: $-Z = 24$, $x_2 = 3$, $x_4 = 6$, $x_5 = 6$

v.n.b.: $x_1 = 0$, $x_3 = 0$

v.b	No. Ec	-Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0	1	0	0	1	2	0	36
x_2	1	0	0	1	1/6	1/6	0	4
x_1	2	0	1	0	-1/3	2/3	0	4
x_5	3	0	0	0	1/6	-5/6	1	1

v.b.: $-Z^* = 36$, $x_2^* = 4$, $x_1^* = 4$, $x_5^* = 1$

v.n.b.: $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$

III-12.2.- Desigualdad Con Sentido Invertido

Tenemos este caso cuando alguna desigualdad se encuentra en la forma $\geq$.

Cuando es éste el caso, la solución es muy simple y consiste en multiplicar ambos lados de la desigualdad por (−1), operación por medio de la cual invertimos el sentido de la desigualdad.

Ejemplo III-15.-

En el caso del ejemplo del carpintero (ejemplo III-5), teníamos:

$$x_s \geq 130 \;\ldots\ldots\; (1)$$

multiplicando ambos lados de la desigualdad por (−1), tendremos ahora:

$$-x_s \leq -130 \;\ldots\ldots\; (2)$$

en donde las desigualdades (1) y (2) son equivalentes.

Ejemplo III-16.-

Con objeto de aclarar el porqué se invierte la desigualdad al multiplicar por (−1), veamos un ejemplo numérico:

$$7 > 5$$
$$-7 < -5$$

En la mayoría de los casos, este método soluciona la complicación 2, pero para ello incurre en una nueva complicación, la de constantes no positivas ($-b_i$), complicación que también puede ser resuelta según veremos más adelante (tema III-12.3).

En nuestros ejemplos obtuvimos:

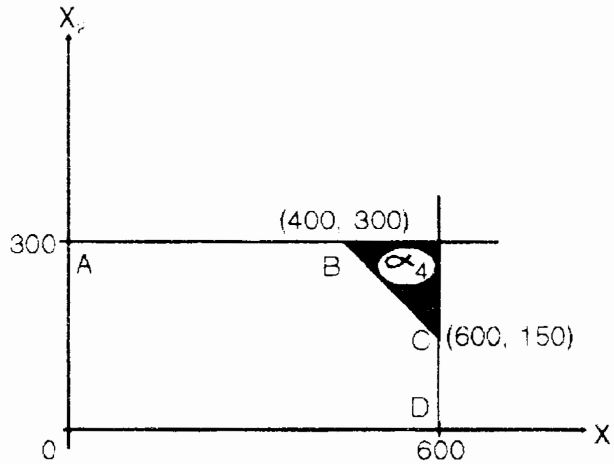
$$b_1 = -130$$
$$b_2 = -5$$

De lo anterior podemos concluir, que cuando nos encontramos con desigualdades del tipo ≥, las deberemos invertir multiplicando ambos lados de la desigualdad por (−1), para tener nuestro problema en la forma general, que ya sabemos resolver (excepto que tengamos ahora nuevas complicaciones, las que será necesario corregir también hasta obtener la forma general).

Ejemplo III-17.-

Consideremos nuevamente nuestro ejemplo III-10, sólo que modificando una de sus restricciones, de forma que tengamos:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = x_1 + 2x_2\\
&\text{s.a.}\\
&\qquad x_1 \qquad\quad \le 600\\
&\qquad\qquad\quad x_2 \le 300\\
&\qquad 3x_1 + 4x_2 \ge 2400\\
&\qquad (x_1, x_2) \ge 0
\end{aligned}
$$



La región de soluciones factibles, será ahora la región α_4.

Utilizando el método descrito con anterioridad, obtendremos:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } \quad Z = x_1 + 2x_2\\
&\text{s.a.}\\
&\qquad x_1 \qquad\quad \le 600\\
&\qquad\qquad\quad x_2 \le 300\\
&\qquad -3x_1 - 4x_2 \le -2400\\
&\qquad (x_1, x_2) \ge 0
\end{aligned}
$$

Eliminemos ahora las desigualdades, introduciendo variables de holgura:

$$
\left.
\begin{array}{rrrrrrl}
Z & -x_1 & -2x_2 & & & & = 0\\
 & x_1 & & +x_3 & & & = 600\\
 & & x_2 & & +x_4 & & = 300\\
 & -3x_1 & -4x_2 & & & +x_5 & = -2400\\
 & & & & & x_j & \ge 0
\end{array}
\right\} \quad \begin{array}{l} (\mathrm{I}) \\ \\ (j = 1, 2, \ldots, 5) \end{array}
$$

Del sistema de ecuaciones (I), vemos que ya no tenemos una solución básica factible inicial obvia (pues $x_5 < 0$), por lo que deberemos de corregir esta nueva complicación según el método que se explica más adelante.

Debe notarse que el hecho de que hayamos puesto un ejemplo en el cual al corregir la complicación 2 caemos en la 3, no significa que éste sea el caso siempre, pues es posible encontrar problemas en donde no suceda ésto. Lo único que nos enseña el ejemplo es que es el caso más fácil de encontrar.

Saul I. Gauss ha presentado un método para hacer mínimo el número de variables negativas, en un conjunto de restricciones con varias desigualdades del tipo $\geq$.

Veremos el método por medio de un ejemplo:

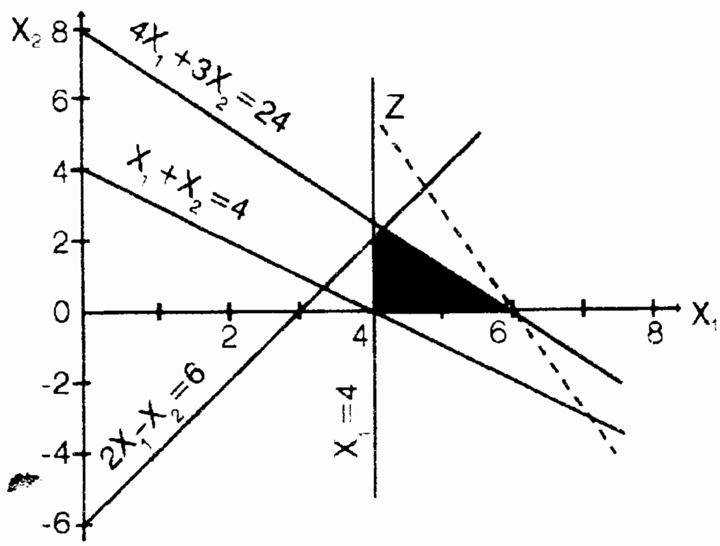
Ejemplo III-18.-

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 - x_2 &\geq 6 \\ x_1 &\geq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

La región de soluciones factibles para este modelo será:



Introduciendo las variables de holgura para formar un sistema de ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{array}{lllllllll}
Z & -3x_1 & -\ x_2 & & & & & = & 0 \ldots\ldots(0) \\
 & \ \ x_1 & +\ x_2 & -\ x_3 & & & & = & 4 \ldots\ldots(1) \\
 & 2x_1 & -\ x_2 & & -\ x_4 & & & = & 6 \ldots\ldots(2) \\
 & \ \ x_1 & & & & -\ x_5 & & = & 4 \ldots\ldots(3) \\
 & 4x_1 & +\ 3x_2 & & & & +\ x_6 & = & 24 \ldots\ldots(4)
\end{array}$$

cambiando de signo las ecuaciones (1), (2) y (3), tendremos:

$$\begin{array}{lllllllll}
Z & -3x_1 & -\ x_2 & & & & & = & 0 \ldots\ldots(0) \\
 & -\ x_1 & -\ x_2 & +\ x_3 & & & & = & -4 \ldots\ldots(1) \\
 & -2x_1 & +\ x_2 & & +\ x_4 & & & = & -6 \ldots\ldots(2) \\
 & -\ x_1 & & & & +\ x_5 & & = & -4 \ldots\ldots(3) \\
 & 4x_1 & +\ 3x_2 & & & & +\ x_6 & = & 24 \ldots\ldots(4)
\end{array}$$

Examinando las b_i y selecionando aquella restricción con la b_i más negativa, la restamos de las demás restricciones que tienen b_i negativas. En nuestro ejemplo, restamos la ecuación (2) de la (1) y la (3), por lo que obtenemos:

$$\begin{array}{lllllllll}
Z & -3x_1 & -\ x_2 & & & & & = & 0 \ldots\ldots(0) \\
 & \ \ x_1 & -2x_2 & +\ x_3 & -\ x_4 & & & = & 2 \ldots\ldots(1) \\
 & -2x_1 & +\ x_2 & & +\ x_4 & & & = & -6 \ldots\ldots(2) \\
 & \ \ x_1 & -\ x_2 & & -\ x_4 & +\ x_5 & & = & 2 \ldots\ldots(3) \\
 & 4x_1 & +\ 3x_2 & & & & +\ x_6 & = & 24 \ldots\ldots(4)
\end{array}$$

en donde vemos que podemos utilizar a x_3 x_5 y x_6 como variables básicas iniciales, y que sólo la ecuación (2) nos quedaría sin variable básica inicial obvia.

Para encontrar la solución inicial, aplicaremos el procedimiento que veremos en la complicación III-12.4 (Igualdades en las restricciones)

III-12.3.- Valores Negativos para b_i.-

Cuando es este caso, después de eliminar la desigualdad, tendremos que ya no existe una solución básica factible inicial obvia. Para obtener una, podemos aplicar cualquiera de los siguientes procedimientos:

a) Seleccionar otra base diferente de la de las variables de holgura y obtener un sistema canónico para ella. El inconveniente de este procedimiento es el mismo que se encontró para esta forma de obtener una solución básica factible inicial en el paso 1 de la rutina del método simplex (posibilidad de volver a obtener una solución básica no factible, con el consiguiente trabajo extra).

b) Introducir una variable artificial (una variable artificial es diferente a una variable de holgura), la cual entra restándose en aquellas ecuaciones en donde existe una constante negativa y usar esta variable artificial como la variable básica inicial para esta ecuación.

Si tenemos:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq -b_i \ (b_i > 0)$$

introducimos primero una variable de holgura para eliminar la desigualdad y a continuación la variable artificial mencionada, con lo cual obtenemos:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_h - x_a = -b_i$$

cambiando signos:

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n - x_h + x_a = +b_i$$

para cumplir con las condiciones del método simplex, deberemos agregar:

$$x_a \geq 0$$

Ejemplo III-19.-

Consideremos el sistema de ecuaciones (I) del ejemplo III-17, donde la ecuación (3) debe de ser tratada para obtener una variable básica factible inicial:

Tenemos:

$$-3x_1 - 4x_2 + x_5 = -2400$$

haciendo $x_a = x_6$

$$-3x_1 - 4x_2 + x_5 - x_6 = -2400$$

cambiando signos:

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 2400$$

debido a que todas las demás ecuaciones se mantienen sin cambios, la solución básica factible inicial será ahora:

básicas	no básicas
$Z = 0$	$x_1 = 0$
$x_3 = 600$	$x_2 = 0$
$x_4 = 300$	$x_5 = 0$
$x_6 = 2400$	

El problema que surge al aplicar este método, es el de haber modificado nuestro problema original al agregar una variable de holgura y una variable artificial con signos contrarios, ya que $x_6 - x_5$ puede tomar cualquier valor arbitrario (desde $-\alpha$ hasta α), con lo cual, el resultado neto es la eliminación operativa de la restricción original en donde surgió este cambio. Esto trae consigo un agrandamiento del conjunto de soluciones posibles, como es claro en el siguiente ejemplo:

Ejemplo III-20.-

Sea:

$$3x_1 + 4x_2 \geq 2400 \text{ ....(1)}$$

la cual se transforma a:

$$3x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 2400 \text{ ....(2)}$$

si hacemos:

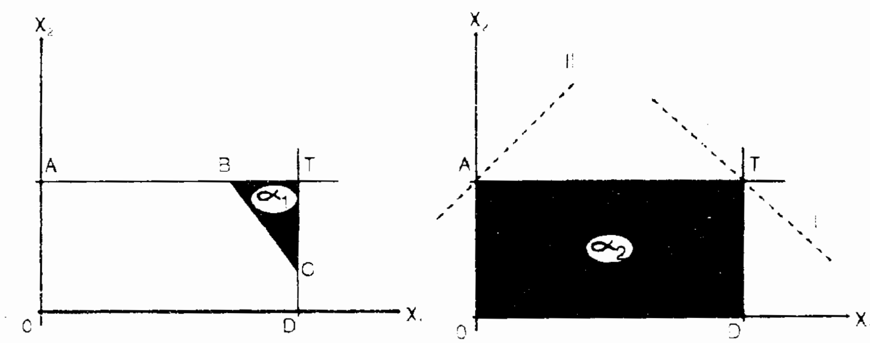
$$3x_1 + 4x_2 = 1000$$

habremos ya roto la restricción (1); sin embargo si hacemos

$$x_6 - x_5 = 1400$$

cumpliremos la ecuación (2).

De lo anterior, es claro que es posible cumplir con la ecuación modificada sin satisfacer la restricción original. Gráficamente tendremos:



De la representación gráfica del ejemplo anterior, podemos observar que una solución óptima para el problema revisado, que sea factible para el problema original, será también una solución óptima para éste (ya que $\alpha_1 \subset \alpha_2$). Ejemplo: el punto T cuando la función objetivo es la de nuestro problema general. (recta l).

Existe la posibilidad de que la solución óptima para el problema revisado no sea factible para el original (p.e. el punto A con una función objetivo como la recta II), en cuyo caso, al solucionar la complicación 3, habremos hecho que la solución óptima obtenida no corresponda a nuestro problema original. Es por esto que el método simplex introduce un procedimiento que fuerza el valor de las variables artificiales a cero, por lo que nuevamente volvemos al problema original y la solución óptima que se obtenga de esta forma, sí será la que corresponde a éste último.

El procedimiento que emplea el Método Simplex, es el asignar una penalidad muy grande a las soluciones factibles del problema revisado que no coincidan con las del problema original (soluciones en la región $\alpha_2 - \alpha_1$). La forma de asignar dicha penalidad es introduciendo $-Mx_a$ a la función objetivo, estando ésta en la forma $Z = c_1x_1 + ... + c_nx_n$, de tal forma que si $x_a \neq 0$, el valor de Z disminuye enormemente (M representa un número muy grande).

El método anterior se conoce como el método De la Gran M.

El método simplex se aplica al problema modificado hasta obtener la solución óptima del mismo. Al llegar a esta solución tendremos alguno de los siguientes casos:

a) Ninguna variable artificial está en la base final. En este caso, la solución obtenida para el problema modificado corresponde a la solución óptima del problema original.

b) Alguna (s) variable (s) aparece (n) en la base óptima del problema modificado con valor mayor que cero. Cuando esta situación se presenta, el problema original no tiene solución (no tiene soluciones factibles).

c) Alguna (s) variable (s) aparece (n) en la base óptima del problema modificado con el valor igual a cero (solución degenerada). Esta solución también corresponde a la solución óptima del problema original.

Ejemplo III-21.-

Sea el problema representado por el sistema de ecuaciones (I) visto en el ejemplo III-17.

Solucionando la complicación de localizar una variable básica factible inicial para la ecuación (3) e introduciendo $-Mx_6$ en la función objetivo, tenemos que nuestro problema se presenta ahora así:

$$
\begin{aligned}
Z - x_1 - 2x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + Mx_6 &= 0 \;\ldots\ldots(0)\\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 600 \;\ldots\ldots(1)\\
+ x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 300 \;\ldots\ldots(2)\\
3x_1 + 4x_2 \quad + \qquad - x_5 \quad + x_6 &= 2400 \;\ldots\ldots(3)
\end{aligned}
$$

Notamos que aún no es posible aplicar la rutina simplex, debido a que Z aún está expresada en función de una variable básica (x_6), por lo que eliminándola obtenemos:

$$
\begin{aligned}
(0') &= (0) - M(3) \ldots & Z - (3M+1)\,x_1 - (4M+2)\,x_2 \qquad + Mx_5 &= -2400M\\
(1') &= (1) \ldots\ldots\ldots\ldots & x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 600\\
(2') &= (2) \ldots\ldots\ldots\ldots & x_2 \quad + x_4 \qquad &= 300\\
(3') &= (3) \ldots\ldots\ldots\ldots & 3x_1 \quad + 4x_2 \qquad - x_5 + x_6 &= 2400
\end{aligned}
$$

Aplicando la rutina simplex tenemos:

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ
Z	0	1	-(3M + 1)	-(4M + 2)	0	0	M	0	-2400M	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	600	∞
x_4	2	0	0	1	0	1	0	0	300	300
x_6	3	0	3	4	0	0	-1	1	2400	600

v.b	v.n.b.
$Z = -2400M$	$x_1 = 0$
$x_3 = 600$	$x_2 = 0$
$x_4 = 300$	$x_5 = 0$
$x_6 = 2400$	

$x_e = x_2$ pues $-(4M+2) < -(3M+1)$

$x_s = x_4$

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ
Z	0	1	-(3M + 1)	0	0	(4M + 2)	M	0	-600(2M-1)	
x_3	1	0	1	0	1	0	0	0	600	600
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	300	∞
x_6	3	0	3	0	0	-4	-1	1	1200	400

v.b	v.n.b.
$Z = -600(2M-1)$	$x_1 = 0$
$x_3 = 600$	$x_4 = 0$
$x_2 = 300$	$x_5 = 0$
$x_6 = 1200$	

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ
Z	0	1	0	0	0	2/3	-1/3	1/3(3M + 1)	1000	
x_3	1	0	0	0	1	4/3	1/3	-1/3	200	600
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	300	∞
x_1	3	0	1	0	0	-4/3	-1/3	1/3	400	∞

v.b	v.n.b.
$Z = 1000$	$x_4 = 0$
$x_3 = 200$	$x_5 = 0$
$x_2 = 300$	$x_6 = 0$
$x_1 = 400$	

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
Z	0	1	0	0	1	2	0	M	1200
x_5	1	0	0	0	3	4	1	-1	600
x_2	2	0	0	1	0	1	0	0	300
x_1	3	0	1	0	1	0	0	0	600

v.b	v.n.b.
$Z^* = 1200$	$x_3^* = 0$
$x_5^* = 600$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_6^* = 0$
$x_1^* = 600$	

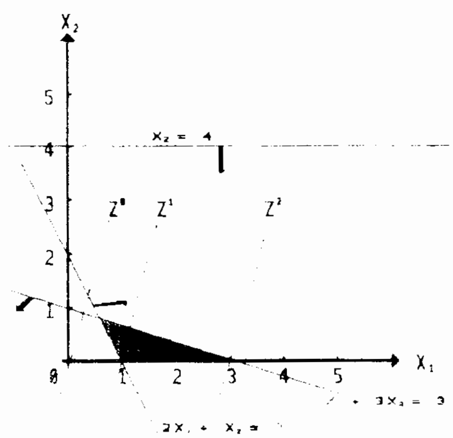
Cuando un problema que contiene variables artificiales se resuelve en una computadora, el método de la Gran M suele crear errores de redondeo (debido al gran valor que se asigna a M), razón por la cual se utiliza el método de las Dos Fases, que también tiene por objeto el hacer cero el valor de las variables artificiales.

Ejemplo III-22.-

$$\text{Max } Z = 3x_1 - x_2$$

s.a.

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$



Quitando las desigualdades e introduciendo la variable artificial, obtendremos:

$$\text{Max } Z = 3x_1 - x_2 - Mx_6$$

s.a.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad\quad + x_5 \qquad &= 4 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots 6) \end{aligned}$$

En forma de tablero:

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
Z	0	1	-3	1	0	0	0	M	0
x_6	1	0	2	1	-1	0	0	1	2
x_4	2	0	1	3	0	1	0	0	3
x_5	3	0	0	1	0	0	1	0	4

Poniéndolo en forma canónica:

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ_i
Z	0	1	-(2M+3)	-(M-1)	M	0	0	0	-2M	
x_6	1	0	2	1	-1	0	0	1	2	1
x_4	2	0	1	3	0	1	0	0	3	3
x_5	3	0	0	1	0	0	1	0	4	∝

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ_i
Z	0	1	0	5/2	-3/2	0	0	(M+3/2)	3	
x_1	1	0	1	1/2	-1/2	0	0	1/2	1	∝
x_4	2	0	0	5/2	1/2	1	0	-1/2	2	4
x_5	3	0	0	1	0	0	1	0	4	∝

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
Z*	0	1	0	10	0	3	0	M	9
x_1*	1	0	1	3	0	1	0	0	3
x_3*	2	0	0	5	1	2	0	-1	4
x_5*	3	0	0	1	0	0	1	0	4

III-12.4.- Igualdades en las Restricciones

En aquellos casos en que exista una igualdad en alguna(s) de las rstricciones, es claro que ya no será necesario introducir una variable de holgura en ellas, pues ya no existe desigualdad que eliminar. Cuando éste es el caso, nos encontramos nuevamente con el problema de que no existe una variable básica inicial obvia para esta ecuación (según el paso 1 de la rutina simplex).

Existen tres formas alternativas de corregir esta complicación:

a) Escoger otra base cualquiera. Este método ya se explicó anteriormente que es poco eficiente y requiere más trabajo que los demás métodos.

b) En aquellos casos en que exista una desigualdad, es siempre posible el reemplazarla por dos desigualdades con los mismos elementos que la ecuación y signos de desigualdad con sentidos contrarios entre si. Es decir:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \qquad (1)$$

puede ser reemplazada por:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \end{array}\right\} \quad (2)$$

siendo (1) y (2) equivalentes.

Una vez que hemos puesto nuestras restricciones en forma de desigualdades, ya sabemos cómo debemos de proceder para poder aplicar la Rutina Simplex.

c) Introduciendo una variable artificial en cada una de las igualdades localizadas en las restricciones.

Podemos observar que aquella ecuación (p. ej. ec. (1) del método (b)), a la que agregamos una variable artificial ($x_a \geq 0$), quedará transformada por este hecho en una desigualdad, ya que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_a = b_i \quad (x_a \geq 0)$$

puede escribirse como:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

con lo cual es claro que utilizando el método (c), también (al igual que el método (b) del caso 3) modificaremos el problema original, por lo que es necesario volver a él, obligando a las variables artificiales a tener un valor cero, para lo cual se emplea el método de la Gran M visto en la complicacion III-12.3

Este método de resolver la complicación 4 suele, en general, ser más práctico que los dos anteriores.

Cabe hacer la aclaración de que en caso de que no exista ninguna solución básica factible para el problema original, esto se verá reflejado al no ser posible hacer cero el valor de las variables artificiales al final del procedimiento. Cuando éste sea el caso, vemos que no existe una solución óptima para el problema original, debido a que no hay solución básica factible para éste.

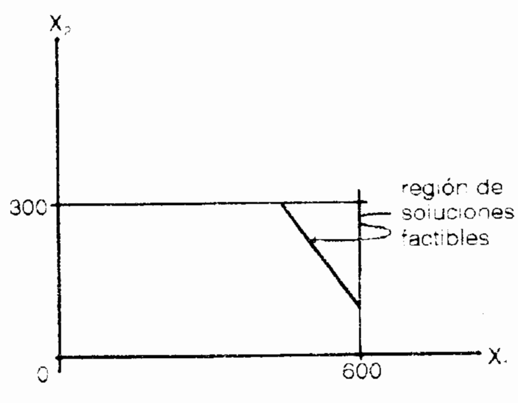
Ejemplo III.23.-

Sea el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

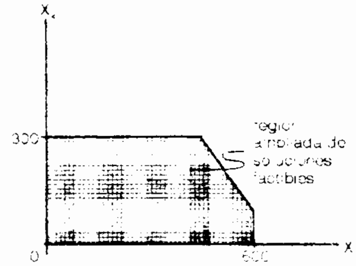
s.a.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 600 \\ x_2 &\leq 300 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2400 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$



aplicando el método (c) tendremos:

$$
\begin{array}{rcl}
Z - x_1 - 2x_2 & = & 0 \\
x_1 + x_3 & = & 600 \\
x_2 + x_4 & = & 300 \\
3x_1 + 4x_2 - x_5 & = & 2400
\end{array}
$$



donde x_3 y x_4 son variables de holgura y x_5 es variable artificial.

Usando el método de la Gran M tendremos:

$$
\begin{array}{rcl}
Z - x_1 - 2x_2 + Mx_5 & = & 0 \\
x_1 + x_3 & = & 600 \\
x_2 + x_4 & = & 300 \\
3x_1 + 4x_2 - x_5 & = & 2400
\end{array}
$$

eliminando las variables básicas de la función objetivo:

$$
\begin{array}{rcll}
Z - (3M+1)x_1 - (4M+2)x_2 & = & -2400\,M & \phi_i \\
x_1 + x_3 & = & 600 & \infty \\
x_2 + x_4 & = & 300 & 300 \\
3x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 2400 & 600
\end{array}
$$

v.b	v.n.b.
$Z = -2400M$	$x_1 = 0$
$x_3 = 600$	$x_2 = 0$
$x_4 = 300$	
$x_5 = 2400$	

$$x_e = x_2$$
$$x_s = x_4$$

$$
\begin{array}{rcll}
Z - (3M+1)x_1 + (4M+2)x_4 & = & -600(2M-1) & \phi_i \\
x_1 + x_3 & = & 600 & 600 \\
+ x_2 + x_4 & = & 300 & \infty \\
3x_1 - 4x_4 + x_5 & = & 1200 & 400
\end{array}
$$

v.b		v.n.b.
$Z = -600(2M-1)$		$x_1 = 0$
$x_3 = 600$		$x_4 = 0$
$x_2 = 300$		
$x_5 = 1200$		

$$x_e = x_1$$

$$x_s = x_5$$

$$\begin{array}{lllllll}
Z & & & + 2/3x_4 & + (M+1/3)x_5 & = & 1000 \\
 & & + x_3 & + 4/3x_4 & - 1/3x_5 & = & 200 \\
 & + x_2 & & + x_4 & & = & 300 \\
x_1 & & & - 4/3x_4 & + 1/3x_5 & = & 400
\end{array}$$

v.b	v.n.b.
$Z^* = 1000$	$x_4^* = 0$
$x_3^* = 200$	$x_5^* = 0$
$x_2^* = 300$	
$x_1^* = 400$	

Ejemplo III-24.-

Resolviendo ahora el ejemplo III-18, tenemos:

$$\begin{array}{llllllll}
Z - 3x_1 & - x_2 & & & & & = & 0 \;........(0) \\
x_1 & - 2x_2 & + x_3 & - x_4 & & & = & 2 \;........(1) \\
-2x_1 & + x_2 & & + x_4 & & & = & -6 \;........(2) \\
x_1 & - x_2 & & - x_4 & + x_5 & & = & 2 \;........(3) \\
4x_1 & + 3x_2 & & & & + x_6 & = & 24 \;........(4)
\end{array}$$

introduciendo una variable artificial x_7 en la ec. (2) y penalizando la función objetivo, obtenemos:

$$\begin{array}{lllllllll}
Z - 3x_1 & - x_2 & & & & & + Mx_7 & = & 0 \;........(0) \\
x_1 & - 2x_2 & + x_3 & - x_4 & & & & = & 2 \;........(1) \\
-2x_1 & + x_2 & & + x_4 & & & - x_7 & = & -6 \;........(2) \\
x_1 & - x_2 & & - x_4 & + x_5 & & & = & 2 \;........(3) \\
4x_1 & + 3x_2 & & & & + x_6 & & = & 24 \;........(4)
\end{array}$$

formando ahora un sistema canónico:

$$
\begin{array}{lllllllll}
Z - (2M + 3)x_1 & + (M-1)x_2 & & + Mx_4 & & & & = -6M & \ldots\ldots(0)\\
x_1 & - 2x_2 & + x_3 & - x_4 & & & & = 2 & \ldots\ldots(1)\\
2x_1 & - x_2 & & - x_4 & & & + x_7 & = 6 & \ldots\ldots(2)\\
x_1 & - x_2 & & - x_4 & + x_5 & & & = 2 & \ldots\ldots(3)\\
4x_1 & + 3x_2 & & & & + x_6 & & = 24 & \ldots\ldots(4)
\end{array}
$$

el cual ya podemos resolver:

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0	ϕ_i
Z	0	1	−(2M + 3)	(M−1)	0	M	0	0	0	−6M	
x_3	1	0	1	−2	1	−1	0	0	0	2	2
x_7	2	0	2	−1	0	−1	0	0	1	6	3
x_5	3	0	1	−1	0	−1	1	0	0	2	2
x_6	4	0	4	3	0	0	0	1	0	24	6

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0	ϕ_i
Z	0	1	0	−(M + 4)	0	−(M + 3)	(2M + 3)	0	0	−2M + 6	
x_3	1	0	0	−1	1	0	−1	0	0	0	α
x_7	2	0	0	1	0	1	−2	0	1	2	2
x_1	3	0	1	−1	0	−1	1	0	0	2	α
x_6	4	0	0	7	0	4	−4	1	0	16	16/7

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0	ϕ_i
Z	0	1	0	0	0	1	−5	0	(M + 4)	14	
x_3	1	0	0	0	1	1	−3	0	1	2	α
x_2	2	0	0	1	0	1	−2	0	1	2	α
x_1	3	0	1	0	0	0	−1	0	1	4	α
x_6	4	0	0	0	0	−3	10	1	−7	2	1/5

v.b	Ec. No	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0	ϕ
Z	0	1	0	0	0	-1/2	0	1/2	M + 1/2	15	
x_3	1	0	0	0	1	1/10	0	3/10	−11/10	13/5	26
x_2	2	0	0	1	0	2/5	0	1/5	−2/5	12/5	6
x_1	3	0	1	0	0	-3/10	0	1/10	3/10	21/5	α
x_5	4	0	0	0	0	-3/10	1	1/10	-7/10	1/5	α

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0
Z*	0	1	0	5/4	0	0	0	3/4	M	18
x_3*	1	0	0	-1/4	1	0	0	1/4	−1	2
x_4*	2	0	0	5/2	0	1	0	1/2	−1	6
x_1*	3	0	1	3/4	0	0	0	1/4	0	6
x_5*	4	0	0	3/4	0	0	1	1/4	−1	2

IIII-12.5.- Variables no Restringidas en Signo.

En aquellos casos poco frecuentes, en que los niveles de actividad en un problema de programación lineal pueden tomar cualquier valor, positivo o negativo, nos encontramos con que la condición de no negatividad, establecida por el Método Simplex, no se cumple, razón por la cual es necesario solucionar esta complicación antes de poder aplicar la rutina simplex. La condición de no negatividad puede ser restablecida en nuestro problema, cambiando la (s) variable(s) no restringida(s) en signo por una diferencia de dos variables no negativas.

Entonces, si:

$$-\alpha \leq x \leq \alpha$$

podemos hacer:

$$x = y - z$$

donde:

$$y \geq 0$$

$$z \geq 0$$

y sustituir el nuevo valor de x en todas aquellas partes en donde aparezca dentro de nuestro modelo. Este cambio no modificará en nada nuestro modelo, ya que si $x \leq 0$ hacemos $y = 0$ y $z \geq 0$, mientras que si $x \geq 0$ hacemos $y \geq 0$ y $z = 0$.

Ejemplo III-25.-

Supongamos que nuestro ejemplo III-10 lo modificamos, quitando la restricción $x_1 \geq 0$.

Si hacemos $x_1 = y_1 - z_1$, donde $y_1 \geq 0$ y $z_1 \geq 0$, entonces nuestro ejemplo se puede expresar así:

$$\text{Max } z = y_1 - z_1 - 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} y_1 - z_1 \quad\quad & \leq 600 \\ x_2 & \leq 300 \\ 3y_1 - 3z_1 + 4x_2 & \leq 2400 \\ (y_1, z_1, x_2) & \geq 0 \end{aligned}$$

problema que coincide ahora con nuestro modelo general, por no contar ya con ninguna complicación, por lo cual puede ser resuelto utilizando directamente la rutina simplex, como lo hicimos con el problema original.

III-12.6.- Empate para entrar como variable básica.

Al encontrarnos resolviendo un problema de programación lineal, empleando para ello la rutina simplex, en alguna de las iteraciones del mismo, podemos encontrar que dos o más variables tengan el mismo coeficiente positivo máximo en la función objetivo. Cuando éste es el caso, surge la duda de cual de ellas será la indicada para entrar en la base, ya que ambas satisfacen las condiciones establecidas en el paso 2 de dicha rutina.

Esta complicación se resuelve seleccionando arbitrariamente, entre las variables en empate, la que deberá ocupar la base.

Ejemplo III-26.-

Si:

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

entonces x_1 y x_2 estarán empatadas para entrar en la base, pero si tenemos que:

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

entonces $x_e = x_3$ y no existirá empate.

III-12.7.- Degeneración

Cuando al aplicar el paso 3 de la rutina simplex nos encontramos con que $\varphi = \varphi_i = \varphi_k = \ldots$ esto es, con que varias variables se hacen cero simultaneamente cuando x_e se incrementa, tenemos un empate para dejar la base (degeneración).

Cuando es este el caso, se escoge arbitrariamente cualquiera de las variables en empate para ser la variable de salida.

El efecto de tener un empate en la variable de salida, es que todas las variables en el empate que no sean escogidas para dejar la base quedarán con un valor de cero en la siguiente iteración, durante la cual tendremos que $\varphi_t = 0$ (para t = aquelllas i's correspondientes a las ecuaciones conteniendo las variables en empate); con lo cual las variables en empate continuarán siendo candidatas para dejar la base en esta nueva iteración, haciendo además que la nueva variable entrante no pueda tomar un valor mayor que cero, con lo que el valor de Z permanecerá sin cambio respecto a la iteración anterior.

De lo anterior, cabe señalar que si existe degeneración, es posible tener una secuencia de iteraciones que no aumenten en nada el valor de Z, y ha sido probado por Hoffman (1951) y por Beale (1955) que la rutina simplex, en este caso, puede conducir a una recurrencia del mismo conjunto de variables básicas después de k iteraciones (y después de 2k iteraciones, etc. indefinidamente). De aquí que sea evidente que ya no es posible el seguir manteniendo que el método simplex necesariamente terminará en un número finito de iteraciones. A pesar de los ejemplos construidos por Hoffman y por Beale, el caso de círculos viciosos mencionado no ocurre en la práctica, razón por la cual las reglas que existen para resolver el caso de degeneración son casi siempre ignoradas, pues aún en el caso de volver al mismo conjunto de variables básicas, se pueden salir del círculo vicioso cambiando la selección de x_s con respecto al ciclo anterior.

Ejemplo III-27.-

Modificando nuestro ejemplo III-10 y escribiendo:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 1200$$

en lugar de:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

tendremos:

$$\begin{array}{lllllll}
Z - x_1 - 2x_2 & & & & = & 0 & \varphi \\
x_1 & + x_3 & & & = & 600 & \alpha \\
x_2 & & + x_4 & & = & 300 & 300 \\
3x_1 + 4x_2 & + & & + x_5 & = & 1200 & 300
\end{array}$$

donde :

$$x_e = x_2$$

pero ahora:

$$\phi = \phi_1 = \phi_2 = 300$$

osea que ahora x_s puede ser x_4 ó x_5

Escogemos x_4 arbitrariamente

$$\begin{array}{lllllll} Z & -x_1 & & & +2x_4 & & = 600 \\ & x_1 & & +x_3 & & & = 600 \\ & & x_2 & & +x_4 & & = 300 \\ & 3x_1 & & & -4x_4 & +x_5 & = 0 \end{array}$$

básicas	no básicas
$x_2=300$	$x_1=0$
$x_3=600$	$x_4=0$
$x_5=0$	
$Z=600$	

y obtenemos una solución degenerada (pues $x_5=0$), con lo que se vé que la variable en empate que no resultó escogida para dejar la base quedó con un valor de cero.

Como la solución anterior no es aún óptima, hacemos:

$$x_e = x_1$$

pero como ya dijimos, tenemos que:

$$\phi = \phi_3 = 0$$

debido a que x_1 no puede aumentar su valor sin hacer a x_5 negativa y por lo tanto:

$$x_s = x_5$$

y obtenemos:

$$\begin{array}{llllll} Z & & & 2/3x_4 & +1/3x_5 & = 600 \\ & & +x_3 & +4/3x_4 & -1/3x_5 & = 600 \\ & +x_2 & & +x_4 & & = 300 \\ x_1 & & & -4/3x_4 & +1/3x_5 & = 0 \end{array}$$

básicas	no básicas
$x_1^*=0$	$x_4^*=0$
$x_2^*=300$	$x_5^*=0$
$x_3^*=600$	
$Z^*=600$	

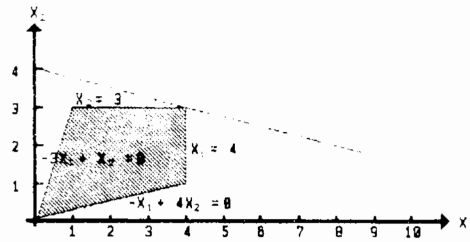
y los valores de la solución óptima coinciden con la iteración anterior, debido a que x_1 no pudo tomar un valor mayor que cero,con lo cual el valor de Z tampoco pudo aumentar.

Ejemplo III-28.-

$$\text{Max } Z = x_1 + 4x_2$$

s.a.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 4x_2 &\geq 0 \\
x_1 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 3 \\
-3x_1 + x_2 &\leq 0 \\
(x_1, x_2) &\leq 0
\end{aligned}
$$



v.b	Ec No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ_i
Z	0	1	−1	−4	0	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	−4	1	0	0	0	0	α
x_4	2	0	1	0	0	1	0	0	4	α
x_5	3	0	0	1	0	0	1	0	3	3
x_6	4	0	−3	1	0	0	0	1	0	0

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ
Z	0	1	−13	0	0	0	0	4	0	
x_3	1	0	−11	0	1	0	0	4	0	α
x_4	2	0	1	0	0	1	0	0	4	4
x_5	3	0	3	0	0	0	1	−1	3	1
x_2	4	0	−3	1	0	0	0	1	0	α

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ_i
Z	0	1	0	0	0	0	13/3	−1/3	13	
x_3	1	0	0	0	1	0	11/3	1/3	11	33
x_4	2	0	0	0	0	1	−1/3	1/3	3	9
x_1	3	0	1	0	0	0	1/3	−1/3	1	α
x_2	4	0	0	1	0	0	1	0	3	α

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
Z^*	0	1	0	0	0	1	4	0	16
x_3^*	1	0	0	0	1	−1	4	0	8
x_6^*	2	0	0	0	0	3	−1	1	9
x_1^*	3	0	1	0	0	1	0	0	4
x_2^*	4	0	0	1	0	0	1	0	3

III-12.8.- Soluciones Múltiples.-

Este caso aparece cuando la función objetivo, en su valor máximo factible, coincide en más de un punto con los linderos de la región de soluciones factibles, teniéndose por lo tanto, todo un segmento lineal de soluciones óptimas , compuesto éste por soluciones básicas factibles y por soluciones no básicas factibles, todas ellas maximizando el valor de Z.

Cuando tenemos un segmento lineal de soluciones óptimas, pueden existir factores intangibles que favorezcan a alguna de ella (p. ej. problemas de personal, facilidad de almacenamiento, satisfacción de cliente, etc.), por lo que es de interés el descubrir cuándo estamos en ésta situación.

La indicación que el método simplex suministra cuando existe un número infinito de soluciones óptimas, es haciendo que algunas de las variables no básicas que aparecen en la función objetivo (en donde ya todos los coeficientes son tales que no se puede aumentar el valor de Z) aparezcan con un coeficiente cero en ella, coeficiente que nos indicará que si introducimos esa variable a la base, el valor de Z no se alterará y seguiremos teniendo una solución óptima con la nueva base.

Ejemplo III-29.-

Sea:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$$

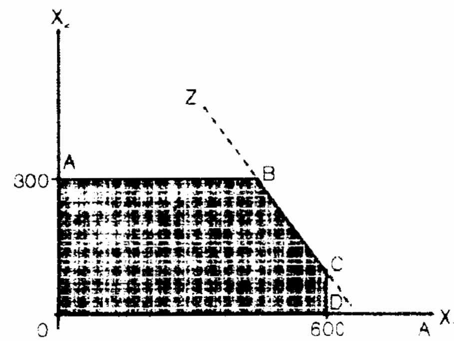
s.a.

$$x_1 \leq 600$$

$$x_2 \leq 300$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$



De la representación gráfica es claro que cualquier punto sobre el segmento lineal BC será una solución óptima.

Resolviendo el modelo llegamos finalmente a:

$$\begin{array}{llllllll}
Z & & & + & 0x_4 & + & x_5 & = 2400 \\
 & & x_3 & + & 4/3x_4 & - & 1/3x_5 & = 200 \\
 & x_2 & & + & x_4 & & & = 300 \\
x_1 & & & - & 4/3x_4 & + & 1/3x_5 & = 400
\end{array}$$

básicas	no básicas
$x_1^* = 400$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 300$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 200$	
$Z^* = 2400$	

Como todos los coeficientes de las variables no básicas en Z son positivos, hemos llegado a una solución óptima, la cual cuenta con la particularidad de que $C_4 = 0$, lo cual nos indica que existen más soluciones óptimas. Para encontrarlas hacemos $x_e = x_4$ y obtenemos:

$$\begin{array}{lllllllll}
Z & & + & 0x_3 & & & + & x_5 & = 2400 \\
 & & + & 3/4x_3 & + & x_4 & - & 1/4x_5 & = 150 \\
 & x_2 & - & 3/4x_3 & & & + & 1/4x_5 & = 150 \\
x_1 & & + & x_3 & & & & & = 600
\end{array}$$

básicas	no básicas
$x_1^* = 600$	$x_3^* = 0$
$x_2^* = 150$	$x_5^* = 0$
$x_4^* = 150$	
$Z^* = 2400$	

solución que también es óptima y que cuenta con el mismo valor para Z que la obtenida en la iteración anterior.

Si efectuamos una nueva iteración, regresaremos a la primera solución óptima obtenida (pues x_3 ahora es la que tiene coeficiente cero), por lo tanto sólo existen 2 soluciones básicas factibles óptimas (puntos B y C en la representación gráfica), mientras que existirán un número infinito de soluciones no básicas factibles óptimas (segmento BC en la representación gráfica) que pueden expresarse como:

$$(x_1^*, x_2^*) = [400\lambda + 600(1-\lambda), 300\lambda + 150(1-\lambda)] \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

III-12.9.- Ausencia de Soluciones Factibles

Cuando una solución básica factible inicial no fue obvia y tuvimos que introducir variables artificiales cuyo valor no es reducido a cero al obtener la solución óptima, ésto es una indicación de que no existen soluciones factibles para el problema original.

Cuando en un problema obtenemos nuestra solución óptima, siempre debemos comprobar que sea factible, sustituyendo los valores obtenidos en las restricciones para ver si se cumplen.

III-12.10.- Solución Optima Sin Límite.

Cuando en el momento de obtener φ vemos que $\varphi_i = \infty$ para toda i, esto indica que la variable x_e puede aumentar su valor todo lo que se quiera sin hacer negativa ninguna de las variables básicas. De aquí que no exista ninguna variable x_s y que el valor de Z pueda aumentar sin límite. En aquellas ocasiones en que nos encontramos con este caso en un problema real, es bueno el revisar que no hayamos omitido ninguna restricción y que nuestro modelo matemático esté bien formulado.

III-13.- METODO DE LAS DOS FASES.-

También conocido como el Método Simplex de las Dos Fases.

Muchos problemas encontrados en la práctica, a menudo tienen una forma canónica fácilmente obtenible y se puede inmediatamente construir una gran variedad de soluciones básicas iniciales (p. ej. cuando el problema está en la forma general, la que se obtiene al usar las variables de holgura). Cuando este es el caso, la fase I del procedimiento no es necesaria, es decir, la fase I sirve única y exclusivamente para encontrar una solución básica factible inicial para la fase II mediante la utilización del Método Simplex, o bién para descubrir que el sistema no tiene soluciones factibles.

Otros problemas encontrados en la práctica no proveen una forma canónica factible inicial. Esto sucede cuando no tenemos variables de holgura, o cuando éstas tienen coeficientes negativos. Utilizando la fase I podemos encontrar una solución factible inicial (si existe).

Una de las ventajas de este método, es el que no es necesario saber nada (matemáticamente) respecto al problema, ya que este método descubre redundancias e inconsistencias.

III-13.- Descripción del Proceso.

Aquí suponemos que la función objetivo está siendo maximizada.

A) Arréglese el sistema original de ecuaciones de forma tal que todas las constantes b_i sean positivas o cero, cambiando en caso necesario los signos en ambos lados de la ecuación correspondiente.

B) Auméntese el sistema para que incluya un conjunto básico de variables artificiales o de error: $x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$, ..., $x_{n+m} \geq 0$, de tal forma que se convierta en:

$$
(1)\ldots\left\{\begin{array}{lllr}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\
\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & \quad \cdot & & \cdot \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n & & + x_{n+i} & = b_i \\
\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & & \quad \cdot & \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m
\end{array}\right\} b_i \geq 0
$$

$$
(2)\ldots \; -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n \qquad + Z = 0
$$

$$
x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots n+m)
$$

C) (Fase I). Usese el Método Simplex para encontrar una solución a (1) y (2), la cual minimice la suma de las variables artificiales, denotada como W:

$$
(3)\ldots \qquad x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+i} + \dots + x_{n+m} = W
$$

o lo que es lo mismo, que Max (−W).

La ecuación (3) se conoce como la ecuación de " no factibilidad ".

El sistema canónico factible inicial para la fase I, se obtiene seleccionando como variables básicas a: x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i}, ..., x_{n+m}, Z y (− W) y eliminando estas variables (excepto W) de la ecuación (3), para lo que se resta la suma de las primeras m ecuaciones (1) a la ecuación (3), obteniendose:

$$
\begin{array}{lllr}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & + x_{n+2} & & = b_2 \\
\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & \quad \cdot & & \cdot \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n & & + x_{n+i} & = b_i \\
\quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot & & \quad \cdot & \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & & + x_{n+m} & = b_m \\
\hline
-c_1x_1 - c_2x_2 + \dots + c_nx_n & & + Z & = 0 \\
d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n & & -W & = -W_0
\end{array} \quad b_i \geq 0
$$

donde

$$
b_i \geq 0
$$

y:

$$d_j = -(a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{mj}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$-w_0 = -(b_1 + b_2 + \ldots + b_m)$$

siendo la solución básica factible inicial:

$$\left.\begin{array}{r} x_{n+i} = b_i \\ x_j = 0 \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

D) Si Max (-W) = min W > 0, esto implica que no existe una solución factible para el problema y el procedimiento termina. Si por el contrario, Max (-W) = Min W = 0, iníciese la fase II, para lo cual:

a) Se dejan de considerar todas aquellas variables no básicas x_j cuyos coeficientes $d'_j \neq 0$ en la ecuación final modificada de W.

b) Reemplazando la forma lineal de W (modificada por las varias eliminaciones) por la forma lineal de Z como la función objetivo; eliminando primero de la ecuación Z todas las variables básicas (lo cual se suele ir haciendo a la vez que se trabaja con la ecuación de W en la fase I).

E) (Fase II). Aplique el Método Simplex a la forma canónica factible ajustada obtenida de la fase I, para obtener la solución que Max. (Min) el valor de Z, o una clase de soluciones tales que $Z \rightarrow \propto$ $(Z \rightarrow -\propto)$.

Veamos el porqué del paso D (a):

En ocasiones en que el sistema original contiene redundancias, y a menudo cuando se presenta la situación de que una o más de las variables artificiales resultan variables básicas degeneradas en la solución de la fase I, estas variables artificiales serán acarreadas a lo largo de la fase II. De aquí que sea necesario que sus valores en la fase II nunca excedan de cero. Para ver porqué, nótese que la forma de W al finalizar la fase I satisface:

$$d'_1 x_1 + d'_2 x_2 + \ldots + d'_{n+m} x_{n+m} = W - W'_0$$

donde:

$$d'_j \geq 0 \text{ y } W'_0 = 0$$

si es que una solución factible existe. Para factibilidad: W = 0, por (3), lo que significa que cada x_j correspondiente a una $d'_j \geq 0$ debe ser cero; de aquí que tales x_j puedan ser igualadas a cero y dejarse ya de considerar.

Ejemplo III-30.-

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 15 \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 \qquad &= -20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso A.-

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso B.-

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad\quad &= 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 \qquad\qquad + x_6 \quad &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 10 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso C (Fase I).-

$$\text{Min } W \qquad - x_5 - x_6 - x_7 = 0$$

es decir:

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Max } -W & & & & & + x_5 & + x_6 & + x_7 & = 0 \\
 & Z - x_1 & - 2x_2 & - 3x_3 & + x_4 & & & & = 0 \\
 & x_1 & + 2x_2 & + 3x_3 & & + x_5 & & & = 15 \\
 & 2x_1 & + x_2 & + 5x_3 & & & + x_6 & & = 20 \\
 & x_1 & + 2x_2 & + x_3 & + x_4 & & & + x_7 & = 10
\end{array}
$$

en forma de tabla:

v.b	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	PO
W	0'	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Z	0	0	1	-1	-2	-3	1	0	0	0	0
x_5	1	0	0	1	2	3	0	1	0	0	15
x_6	2	0	0	2	1	5	0	0	1	0	20
x_7	3	0	0	1	2	1	1	0	0	1	10

poniendola en forma conónica para la ec. (0'):

v.b	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	PO	ϕ_i
W	0'	1	0	-4	-5	-9	-1	0	0	0	-45	
Z	0	0	1	-1	-2	-3	1	0	0	0	0	
x_5	1	0	0	1	2	3	0	1	0	0	15	5
x_6	2	0	0	2	1	5	0	0	1	0	20	4
x_7	3	0	0	1	2	1	1	0	0	1	10	10

v.b	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	PO	ϕ_i
W	0'	1	0	-2/5	-16/5	0	-1	0	9/5	0	-9	
Z	0	0	1	1/5	-7/5	0	1	0	3/5	0	12	
x_5	1	0	0	-1/5	7/5	0	0	1	-3/5	0	3	15/7
x_3	2	0	0	2/5	1/5	1	0	0	1/5	0	4	20
x_7	3	0	0	3/5	9/5	0	1	0	-1/5	1	6	10/3

v.b	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0	ϕ
W	0'	1	0	-6/7	0	0	−1	16/7	3/7	0	-15/7	
Z	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	15	
x_2	1	0	0	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7	∝
x_3	2	0	0	3/7	0	1	0	-1/7	2/7	0	25/7	∝
x_7	3	0	0	6/7	0	0	1	-9/7	4/7	1	15/7	15/7

v.b	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	P_0
W	0'	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
Z	0	0	1	-6/7	0	0	0	16/7	-4/7	-1	90/7
x_2	1	0	0	-1/7	1	0	0	5/7	-3/7	0	15/7
x_3	2	0	0	3/7	0	1	0	-1/7	2/7	0	25/7
x_4	3	0	0	6/7	0	0	1	-9/7	4/7	1	15/7

Paso D.-

Se ve que Min W = 0, por lo que el problema original tiene solución y podemos iniciar la fase II, para lo cual eliminamos la ec. (0'), así como las columnas correspondientes a x_5, x_6, x_7, y −W.

Paso E (Fase II).-

v.b.	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_o	ϕ
Z	0	1	-6/7	0	0	0	90/7	
x_2	1	0	-1/7	1	0	0	15/7	∝
x_3	2	0	3/7	0	1	0	25/7	25/3
x_4	3	0	6/7	0	0	1	15/7	15/6

v.b.	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_o
Z*	0	1	0	0	0	1	15
x_2*	1	0	0	1	0	1/6	5/2
x_3*	2	0	0	0	1	-1/2	35/14
x_1*	3	0	1	0	0	7/6	15/6

Ejemplo III-31.-

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2$$

s.a.

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 - x_4 = 2$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 0$$

cambiando la función objetivo:

$$\text{Max } -Z = -x_1 - x_2$$

e introduciendo variables artificiales x_5 y x_6 y la ecuación de no factibilidad:

$$\text{Min } W = x_5 + x_6 \quad \text{ó} \quad \text{Max } -W = -x_5 - x_6$$

obtenemos:

$$
\begin{aligned}
-W \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_5 + x_6 &= 0 \\
Z + x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\
x_1 - x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 1 \\
x_1 \qquad\quad - x_4 \qquad + x_6 &= 2
\end{aligned}
$$

en forma de tabla:

v.b.	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	ϕ_i
W	0'	1	0	-2	1	1	1	0	0	-3	
Z	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	
x_5	1	0	0	1	-1	-1	0	1	0	1	1
x_6	2	0	0	1	0	0	-1	0	1	2	2

v.b.	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_o	ϕ_i
W	0'	1	0	0	-1	-1	1	2	0	-1	
Z	0	0	1	0	2	1	0	-1	0	-1	
x_1	1	0	0	1	-1	-1	0	1	0	1	∞
x_6	2	0	0	0	1	1	-1	-1	1	1	1

v.b.	Ec. No.	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
W	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
Z	0	0	1	0	0	-1	2	1	-2	-3
x_1	1	0	0	1	0	0	-1	0	1	2
x_2	2	0	0	0	1	1	-1	-1	1	1

v.b.	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_0	φ
Z	0	1	0	0	-1	2	-3	
x_1	1	0	1	0	0	-1	2	∞
x_2	2	0	0	1	1	-1	1	1

v.b.	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_0
Z*	0	1	0	1	0	1	-2
x_1*	1	0	1	0	0	-1	2
x_3*	2	0	0	1	1	-1	1

En aquellos casos en que el problema original cuenta con algunas restricciones que están en la forma original, no es necesario agregar tantas variables artificiales como restricciones tenemos, ya que la base inicial puede estar formada, parcialmente, con los vectores unitarios correspondientes a las variables de holgura de estas ecuaciones, formándose el resto de la misma con la introducción de variables artificiales en aquellas restricciones en donde sea necesario. La fase I funciona, igual que antes, haciendo que la ecuación de W contenga sólo la suma de las variables artificiales utilizadas y minimizandola; si Min W > 0, el problema original no tiene soluciones factibles, pero si Min W $= 0$ se va a la fase II.

Ejemplo III-32.- (Ejemplo III-23)

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 600 \\ x_2 &\leq 300 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2400 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

introduciendo variables de holgura x_3 y x_4, así como la variable artificial x_5, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
Z - x_1 - 2x_2 \quad &= 0\\
x_1 + x_3 \quad &= 600\\
x_2 + x_4 \quad &= 300\\
3x_1 - 4x_2 + x_5 &= 2400\\
(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\geq 0
\end{aligned}
$$

Fase I

Introducimos la ecuación de no factibilidad (Max –W):

$$
\begin{aligned}
-W + x_5 &= 0\\
Z - x_1 - 2x_2 \quad &= 0\\
x_1 + x_3 \quad &= 600\\
x_2 + x_4 \quad &= 300\\
3x_1 + 4x_2 + x_5 &= 2400
\end{aligned}
$$

v.b	Ec. No.	–W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
W	0'	1	0	–3	–4	0	0	0	–2400	
Z	0	0	1	–1	–2	0	0	0	0	
x_3	1	0	0	1	0	1	0	0	600	∝
x_4	2	0	0	0	1	0	1	0	300	300
x_5	3	0	0	3	4	0	0	1	2400	600

v.b	Ec. No.	–W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ_i
W	0'	1	0	–3	0	0	4	0	–1200	
Z	0	0	1	–1	0	0	2	0	600	
x_3	1	0	0	1	0	1	0	0	600	600
x_2	2	0	0	0	1	0	1	0	300	∝
x_5	3	0	0	3	0	0	–4	1	1200	400

v.b	Ec. No	-W	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
W	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Z	0	0	1	0	0	0	2/3	1/3	1000
x_3	1	0	0	0	0	1	4/3	-1/3	200
x_2	2	0	0	0	1	0	1	0	300
x_1	3	0	0	1	0	0	-4/3	1/3	400

Como Max (-W) = Min W = 0, entonces el problema original si tiene soluciones factibles y pasamos a la fase II:

v.b.	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	P_o
Z*	0	1	0	0	0	2/3	1000
x_3*	1	0	0	0	1	4/3	200
x_2*	2	0	0	1	0	1	300
x_1*	3	0	1	0	0	-4/3	400

Aunque no es obvio, el método de la Gran M es en sí un método de las Dos Fases y ambos procedimientos, aplicados a un problema, tienen la misma secuencia de soluciones básicas factibles (con la posible excepción de cuando ocurre un empate en x_6 en el método de las Dos Fases). Por lo tanto, ambos procedimientos son esencialmente equivalentes desde un punto de vista de cómputo y existe poca base para escoger entre uno y otro.

Cuando se utiliza una computadora digital, la tendencia ha sido seleccionar el método de las Dos Fases, únicamente para evitar el error de redondeo ocasionado por la manipulación de los grandes valores asignados a M.

Ejemplo III-33

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

s.a.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

introduciendo v.h. = (x_3, x_4, x_5), v.a. = (x_6) y la ecuación de no factibilidad, obtenemos:

Fase I

v.b	Ec. No.	$-W$	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
W	0'	1	0	0	0	0	0	0	1	0
Z	0	0	1	−1	−1	0	0	0	0	0
x_3	1	0	0	3	2	1	0	0	0	20
x_4	2	0	0	2	3	0	1	0	0	20
x_6	3	0	0	1	2	0	0	−1	1	2

escribiendolo en forma canónica:

v.b	Ec. No.	$-W$	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0	ϕ
W	0'	1	0	−1	−2	0	0	1	0	−2	
Z	0	0	1	−1	−1	0	0	0	0	0	
x_3	1	0	0	3	2	1	0	0	0	20	10
x_4	2	0	0	2	3	0	1	0	0	20	20/3
x_6	3	0	0	1	2	0	0	−1	1	2	1

v.b	Ec. No.	$-W$	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	P_0
W	0'	1	0	0	0	0	0	0	1	0
Z	0	0	1	−1/2	0	0	0	−1/2	1/2	1
x_3	1	0	0	2	0	1	0	1	−1	18
x_4	2	0	0	1/2	0	0	1	3/2	−3/2	17
x_2	3	0	0	1/2	1	0	0	−1/2	1/2	1

Fase II.- Eliminamos la ecuación de W y la columna x_6:

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ
Z	0	1	-1/2	0	0	0	-1/2	1	
x_3	1	0	2	0	1	0	1	18	9
x_4	2	0	1/2	0	0	1	3/2	17	34
x_2	3	0	1/2	1	0	0	-1/2	1	2

v.b	Ec. No	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ
Z	0	1	0	1	0	0	-1	2	
x_3	1	0	0	-4	1	0	3	14	14/3
x_4	2	0	0	-1	0	1	2	16	8
x_1	3	0	1	2	0	0	-1	2	∞

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0	ϕ
Z	0	1	0	-1/3	1/3	0	0	20/3	
x_5	1	0	0	-4/3	1/3	0	1	14/3	∞
x_4	2	0	0	5/3	-2/3	1	0	20/3	4
x_1	3	0	1	2/3	1/3	0	0	20/3	10

v.b	Ec. No.	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	P_0
Z	0	1	0	0	1/5	1/5	0	8
x_5^*	1	0	0	0	-1/5	4/5	1	10
x_2^*	2	0	0	1	-2/5	3/5	0	4
x_1^*	3	0	1	0	3/5	-2/5	0	4

III-14.- PROBLEMAS.-

A) USANDO EL METODO GRAFICO RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1.- Utilizando el método gráfico, encuentre la región de soluciones factibles para el siguiente sistema, indique el tipo de soluciones obtenidas (Básica factible, básica no factible, etc.).

$$3x_1 + x_2 \geq 8$$
$$4x_1 + x_2 \leq 19$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 7$$

2.- Por el método gráfico encuentre la región de soluciones factibles y el óptimo para el siguiente modelo. Indique las soluciones factibles, no factibles, básicas factibles y básicas no factibles.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 20$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 25$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

3.- Un fabricante desea producir dos artículos en cantidades x_1 y x_2. Cada artículo requiere del uso de materiales, mano de obra y equipo en las cantidades mostradas en la siguiente tabla. También se especifica la disponibilidad.

	x_1	x_2	Disponibilidad
Material	5	4	100
M. De Obra	3	8	172
Equipo	3	1	53

Si la ganancia está dada por $Z = x_1 + 2x_2$, encuentre la región de soluciones factibles, no factibles, el máximo, soluciones básicas factibles y básicas no factibles.

4.- Por el método gráfico encuentre la región de soluciones factibles y el óptimo de los sistemas siguientes. Indique todas las soluciones básicas factibles y no factibles.

a) $$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.a.} \quad -2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$-x_1 + x_2 \geq -3$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad -1/2x_1 - x_2 &\geq 1 \\ 2/3x_1 + 2x_2 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 5 \\ x_1 \qquad &\leq 5 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

5.- Utilice el método gráfico para resolver el siguiente problema.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 44 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

B) USANDO EL METODO SIMPLEX RESUELVA LOS SIGUIENTES EJERCICIOS

1.-

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \text{s.a.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 18 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq 16 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 14 \\ (x_1, x_2, x_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

2.-

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.a.} \quad 8x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &\leq 30 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &\leq 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 &= 8 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\geq 0 \end{aligned}$$

3.-
$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z = \; & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.} \; & x_1 \leq 4 \\
& x_2 \leq 6 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& (x_1, x_2) \geq 0
\end{aligned}
$$

4.- Considere el problema:

$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z = \; & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.} \; & 2x_1 + 4x_2 \leq 22 \\
& -x_1 + 4x_2 \leq 10 \\
& 2x_1 - x_2 \leq 7 \\
& x_1 - 3x_2 \leq 1 \\
& (x_1, x_2) \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Resuelva este problema en forma gráfica. Indique los puntos extremos.

b) Resolverlo mediante el método del Pivote.

5.-
$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z = \; & 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\
\text{s.a.} \; & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\
& (x_1, x_2, x_3) \geq 0
\end{aligned}
$$

6.-
$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z = \; & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a.} \; & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\
& -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \geq 6 \\
& (x_1, x_2) \geq 0
\end{aligned}
$$

7.-
$$
\begin{aligned}
\text{Max } Z = \; & x_1 + x_2 \\
\text{s.a.} \; & -x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -2x_1 + x_2 \geq -5 \\
& x_1 + x_2 \leq 10 \\
& (x_1, x_2) \geq 0
\end{aligned}
$$

8. $\text{Max } Z = 2x_1 + 5x_2$

s.a.
$$x_1 - 2x_2 \geq 10$$
$$4x_1 + 5x_2 \geq 20$$
$$x_1 \leq 7$$
$$x_2 \leq 4$$

9.- $\text{Max } Z = 3x_1 + 4x_2$

s.a.
$$-2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$-x_1 + x_2 \geq -3$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

10.- $\text{Min } Z = 3x_1 + 5x_2$

s.a.
$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 18$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

11.- $\text{Min } Z = 3x_1 + 2x_2$

s.a.
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2/3x_1 + x_2 \geq 1$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

12.- $\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 - x_3$

s.a.
$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 5$$
$$-4x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$

NOTA: No hay restricción de no negatividad de las variables.

a) Resuelvase por el método simplex

b) Formulese este problema de tal forma que las variables sólo puedan tomar valores positivos $[(x_1, x_2, x_3) \geq 0]$ y resuelva por el método simplex.

13.- Considerese el problema.

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z = \; & 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 \\
\text{s.a.} \; & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\
& x_3 + 2x_4 \leq 10 \\
& x_1 - x_2 + x_4 \geq -5 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 20 \\
& x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

NOTA: No hay restricción de no negatividad para x_4

a) Reformule este problema y dé la fórmulación en forma estándar.

b) Construya el tablero inicial simplex, usando el método de la Gran M, identifique la correspondiente solución básica factible inicial.

c) Resuelva el problema usado en método de la Gran M.

d) Resuelva el problema usando el método de las Dos Fases.

C) FORMULE Y RESUELVA LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

1.- Un fabricante de zapatos desea producir 3 nuevos modelos (A, B, C), en cantidades x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Cada modelo requiere el uso de material, mano de obra y equipo.

El modelo A requiere 8 unidades de material, 5 minutos de tiempo de mano de obra y 6 minutos de tiempo de equipo; el modelo B requiere 10 unidades de material, 8 minutos de tiempo de mano de obra y 6 minutos de tiempo de equipo; el modelo C requiere 6 unidades de material, 10 minutos de tiempo de mano de obra y 8 minutos de tiempo de equipo.

Si se dispone de 2000 unidades de material, 8 horas de tiempo de mano de obra y 6.25 horas de tiempo de equipo; ¿ Qué cantidad debe fabricarse de cada modelo para maximizar las ganancias si éstas son \$10 para A, \$15 para B, \$8 para C ?

2.- Un granjero planea criar pollos, pavos y patos. El tiene una instalación para solo 200 aves y desea limitar el número de pavos a un máximo de 25; el número de pavos y de patos no debe exceder de 100.

Las ganacias estimadas son: \$8, \$12 y \$16 por cada pollo, pato y pavo respectivamente.

¿ Qué cantidad de cada ave debe criar el granjero para maximizar su ganancia ?

NOTA: Utilice el método del Pivote.

3.- Una empresa cuenta con 1000 toneladas de mineral b_1, 2000 toneladas de mineral b_2 y 500 toneladas de mineral b_3. A partir de dichos minerales pueden extraerse y fundirse los productos 1, 2 y 3. La empresa desea determinar la cantidad de cada producto que debe fabricar, a partir de los minerales aprovechables, para obtener el máximo provecho de la operación.

Las condiciones sobre los minerales son las siguientes:

El producto 1 precisa 5 ton. de b_1,10 de b_2 y 10 de b_3 por unidad.

El producto 2 precisa 5 ton. de b_1, 8 de b_2 y 5 de b_3 por unidad.

El producto 3 precisa 10 ton. de b_1, 5 de b_2 y 0 de b_3 por unidad.

El fabricanate obtendrá \$100 de beneficio por unidad de producto 1,\$200 por unidad de producto 2 y \$50 por unidad de producto 3.

(Use el método del Pivote para encontrar la solución)

4.- Un panadero tiene en bodega una provisión de harina, leche, huevos y levadura. Desea determinar cuánto debe elaborar de cada producto (pan, pasteles y galletas). La información de que se dispone se muestra en la siguiente tabla:

MATERIA PRIMA	REQUERIMIETO DE MATERIA PRIMA EN CADA PRODUCTO			DISPONIBILIDAD DE MATERIA PRIMA
	Pan	Pasteles	Galletas	
Harina(kg)	12	16	8	200
Leche(lts)	2	3	1	40
Huevos	4	6	4	100
Levadura	2	1	2	30
UTILIDAD($)	3	5	6	

El panadero desea saber que catidad de pan, pasteles y galletas producir para obtener una ganancia máxima.

5.- Cuatro comidas son compradas en cantidades x_1, x_2, x_3, x_4; su contenido de calorias, vitaminas, carbohidratos y su preciu por unidad están dados en la siguiente matriz:

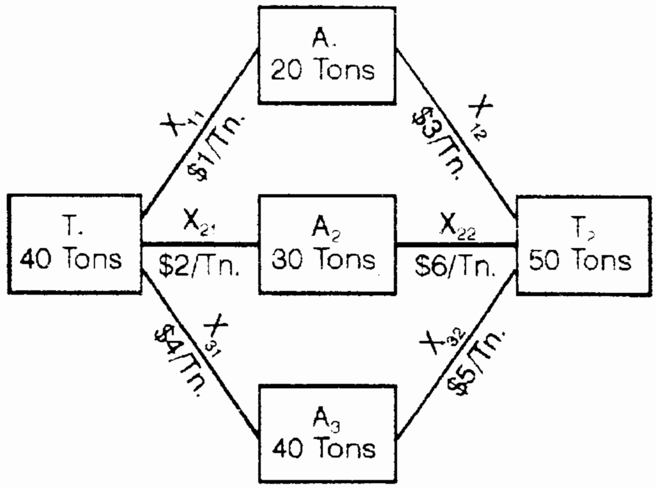
	1	2	3	4
Calorias	2	0	1	3
Vitaminas	0	2	1	2
Carbohidratos	1	0	1	2
Precio	4	10	12	15

Los requerimientos mínimos de calorías son 15 unidades; los requerimientos mínimos de vitaminas son 8 unidades; como máximo pueden consumirse 13 unidades de carbohidratos. ¿ Qué cantidad de cada comida debe de ser comprada para satisfacer estos requerimientos y minimizar el costo total ?

6.- Un fabricante desea producir 2 artículos A y B, en cantidades x_1 y x_2 respectivamente. Cada artículo requiere el uso de material, mano de obra y equipo. El artículo A requiere de 5 unidades de material, 3 minutos de tiempo de mano de obra y 3 minutos en tiempo de equipo; el artículo B requiere 4 unidades de material, 8 minutos de mano de obra y 1 minuto de tiempo de equipo. Si se dispone de 100 unidades de material, 4 horas de tiempo de mano de obra y 3.5 horas de equipo; las ganancias en el artículo A son el doble que en el B. Encontrar la máxima ganancia.

D) FORMULE LOS SIGUIENTES PROBLEMAS.

1.- Una compañía tiene tres almacenes A_1, A_2, A_3 y dos tiendas de ventas al por menor T_1, T_2. Las demandas en las tiendas al por menor y el inventario en los almacenes, se muestran en la siguiente figura. Los costos de envío por tonelada también se muestran en la misma.



La compañía desea determinar la manera de realizar los envíos en forma tal que minimice los costos totales de envío, satisfaga las demandas de las tiendas de menudeo y no se excedan los inventarios en los almacenes.

2.- Supongase que Inglaterra, Francia y España produce todo el trigo, cebada y avena del mundo. La demanda mundial para el trigo requiere 125 millones de hectáreas para poder ser satisfecha. SImilarmente, 60 millones de hectáreas se requieren para el cultivo de la cebada y 75 millones de hectáreas para la avena. El total de tierra disponible para éstos propósitos, al igual que las horas de trabajo requeridas para trabajar cada hectárea, así como su costo por unidad, se dan en las siguientes tablas:

	Total de tierra disponible (Millones de has.)	Horas de trabajo requeridas para trabajar una hectarea de: TRIGO	CEBADA	AVENA
Inglaterra	70	18	15	12
Francia	110	13	12	10
España	80	16	12	16

	Costo por hora de trabajo al sembrar		
	TRIGO	CEBADA	AVENA
Inglaterra	$3.0	$2.7	$2.3
Francia	$2.4	$3.0	$2.5
España	$3.3	$2.8	$2.1

El problema radica en querer distribuir el uso de la tierra en cada país, de tal manera que se satisfaga la demanda mundial y se minimice el costo total de trabajo.

3.- El despachador de una compañía de carga aérea controla 8 aviones del tipo I, 15 aviones del tipo II y 11 aviones del tipo III. Las capacidades, en miles de toneladas, son las siguientes: 45 los del tipo I; 7 los del tipo II y 5 los del tipo III.

Los aviones deben ser despachados a las ciudades A y B. Para el día de hoy requerimos en la ciudad A 20,000 toneladas y 28,000 toneladas en la ciudad B; la capacidad del avión que no se aproveche no tiene valor.

Un avión puede volar sólo una vez durante el día.

El costo de enviar un avión de la terminal a cada ciudad se da en la siguiente tabla:

	TIPO I	TIPO II	TIPO III
Ciudad A	23	15	1.4
Ciudad B	58	20	3.8

Sea x_1, x_2 y x_3 el número de aviones de cada tipo enviados a la ciudad A y y_1, y_2, y_3 el número de aviones enviados a la ciudad B. Determinar el plan de embarque para un costo total mínimo.

4.- Supongase que el Departamento de Policía ha pronosticado la demanda de carros patrulla en la Cd. de México para el período que empieza a las 12 hrs. del día 31 de diciembre y termina a las 12 hrs. del día 1° de enero.

Las 24 horas han sido divididas en periodos de 4 hrs. y la demanda, tanto en carro patrulla como en personal motorizado (2 personas por patrulla), están dados a continuación:

Hora del día	Carros Patrulla	Personal Motorizado
12-16	300	600
16-20	400	800
20-24	500	1000
24- 4	600	1200
4- 8	400	800
8-12	200	400

El personal motorizado sólo puede trabajar 8 horas consecutivas y se cuenta con un total de 4,000 individuos. Formule un programa lineal que encuentre el mínimo personal requerido para satisfacer la demanda cada 4 horas.

5.- La compaía SOMEX produce refrigeradores, estufas y lavadoras. Durante el año entrante se espera que las ventas sean las siguientes:

PRODUCTO	TRIMESTRE			
	1	2	3	4
Refrigeradores	2000	1500	3000	1000
Estufas	1500	1500	1000	1500
Lavadoras	1000	3000	1500	3000

La compañía desea planear su producción para que cada trimestre satisfaga los requerimientos de demanda.

La gerencia ha decidido que el nivel de inventario para cada producto sea menos de 100 unidades al final de cada trimestre. Al principio del primer trimestre no existe inventario de ningún producto.

Durante un trimestre sólo se tienen 8500 horas de producción disponibles. Un refrigerador requiere 0.5 hrs., una estufa 2 hrs. y una lavadora 1.5 hrs. de tiempo de producción. Los refrigeradores no pueden fabricarse en el cuarto trimestre, ya que se piensa crear una nueva línea de producción.

Supóngase que cada artículo dejado en inventario al final de un trimestre incurre en un costo de $5 por llevarlo en inventario. La compañía desea una programación de su producción que satisfaga las demandas de cada trimestre, los requerimientos de inventarios y que mantenga los costos por llevar el inventario a su mínimo valor.

Sea R_t, E_t, L_t, el número de refrigeradores, estufas y lavadoras fabricadas en el periodo t.

Formule este problema como uno de programación lineal.

CAPITULO IV

TRANSPORTE Y ASIGNACION

IV-1.- PROBLEMA DE TRANSPORTE.-

Una importante clase de programas lineales, cuyo origen es físico y económico, puede ser formulado en términos de una red compuesta por puntos (nodos) conectados por rutas (arcos), sobre los cuales se efectúa un transporte (flujo).

El clásico problema de transportación surge cuando se debe determinar un plan óptimo de embarque que:

a) Se origina en fuentes de suministro (almacenes), donde existe disponible un determinado inventario fijo de un artículo.

b) Son mandados directamente a su destino final, en donde existe la necesidad de una cantidad fija del artículo.

c) Agotan los inventarios y satisfacen las demandas, esto es, la demanda total iguala la oferta total.

d) Y finalmente, el costo total debe satisfacer una función objetivo lineal, es decir, el costo de cada embarque es proporcional a la cantidad embarcada y el costo total es la suma de los costos individuales.

La técnica de transportación es aplicable a aquella subclase de problemas de programación lineal, en los cuales los requerimientos y recursos se expresan en términos de sólo un tipo de unidad.

La forma estándar de este problema fue formulada por primera vez por Frank L. Hitchcock (1941), en un artículo llamado "The Distribution of a Product From Several Sources to Numerous Localities."

Es importante hacer notar que muchos problemas que no tienen ninguna relación con la transportación, se ajustan al modelo matemático del problema de transporte.

Notación:

Supóngase que m almacenes (orígenes) contienen varias cantidades de un artículo que debe ser distribuido a n ciudades (destinos). Específicamente, el origen (i) debe deshacerse de la cantidad a_i (exactamente), mientras que la ciudad (j) debe recibir, exactamente, una cantidad b_j.

Debido al punto (c) tenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Además de los números a_i y b_j, que deben ser no negativos, se nos dá un conjunto de números c_{ij} (no restringidos en signo). El número c_{ij} representa el costo (en caso de ser positivo) o la ganancia (si es negativo), de embarcar una cantidad unitaria desde el orígen (i) hasta el destino (j).

El problema estriba en determinar el número x_{ij} de unidades que deben ser embarcadas desde (i) hasta (j), de tal forma que se agoten los inventarios y que las necesidades sean cubiertas, todo ello a un costo mínimo.

La estructura especial de la matriz es evidente cuando las ecuaciones se escriben en forma estándar.

$$\begin{array}{llllllllllll}
x_{11}+ & x_{12}+\dots+ & x_{1n} & & & & & & & & & =a_1 \\
& & & x_{21}+ & x_{22}+\dots+x_{2n} & & & & & & & =a_2 \\
& & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
& & & & & & & x_{m1}+ & x_{m2}+\dots+x_{mn} & & & =a_m \\
x_{11}+ & & & x_{21}+ & & & \dots & x_{m1} & & & & =b_1 \\
& x_{12}+ & & & x_{22}+ & & & \dots & x_{m2} & & & =b_2 \\
& & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & & \vdots \\
& & x_{1n}+ & & & x_{2n}+ & & & \dots & & x_{mn} & =b_n
\end{array}$$

$$C_{11}x_{11}+C_{12}x_{12}+\dots+C_{1n}x_{1n}+C_{21}x_{21}+C_{22}x_{22}+\dots+C_{2n}x_{2n}+\dots+C_{m1}x_{m1}+C_{m2}x_{m2}+\dots+C_{mn}x_{mn}=Z$$

En forma concisa tendremos:

Encontrar x_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m ; j = 1,2,\ldots,n)$, de forma tal que se minimice:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} = Z$$

sujeto a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para toda } (i,j)$$

La causa de que este tipo de problemas sea factible de un tratamiento especial, es el hecho de que $a_{ij} = 0$ ó 1 para toda (i,j).

Cuando la condición (c) no se satisface, entonces es necesario el introducir un origen o un destino figurado, según sea el caso, para que tome el faltante y se satisfaga dicha condición

A diferencia del problema de programación lineal común, aquí tenemos que si todas las a_i y todas las b_j son enteros, debe existir una solución óptima que consista únicamente de enteros.

Cuando se presenta un problema de este tipo, generalmente sólo se requiere conocer los costos C_{ij} y las cantidades a_i y b_j, las cuales se suelen presentar en la siguiente forma:

		Destino					
		1	2	3	...	n	disponible
O	1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	...	C_{1n}	a_1
r	2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	...	C_{2n}	a_2
i	.	.	.	.	...	.	.
g	.	.	.	.	...	.	.
e	.	.	.	.	...	.	.
n	m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	...	C_{mn}	a_m
Requerido		b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Tabla A.

Una importante característica de este problema, es que el modelo puede ser abreviado en la forma de una arreglo rectangular. como se muestra a continuación:

		Destino				
		1	2	...	n	disponible
o	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	a_1
r	2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	a_2
i	.	.	.	...	.	.
g	.	.	.	...	.	.
e	.	.	.	...	.	.
n	m	x_{m1}	x_{m2}	..	x_{mn}	a_m
	requerido	b_1	b_2		b_n	

Tabla B.

Las tablas A y B se pueden combinar de tal forma que el renglón (i), columna (j), muestre los valores de x_{ij} y de C_{ij}, con lo que tendremos:

		Destino				
		1	2	...	n	disponible
o	1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
r	2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
i g	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
e n	m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
	requerido	b_1	b_2	...	b_n	

En cualquier etapa del algoritmo, el cuadrado (i,j) contiene C_{ij} y x'_{ij} (valor numérico actual asignado a x_{ij}). La ausencia de tal número implica que x_{ij} es no-básica y por lo tanto de valor cero. Las variables básicas de valor cero se muestran como ceros, (no como ausencias). Los cuadrados en la extrema derecha y en la parte inferior contienen lo totales.de los renglones o de las columnas respectivamente.

Cada renglón y columna del arreglo representa una ecuación. Específicamente:

Las ecuaciones renglón son: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ (i = 1, 2, ..., m)

Las ecuaciones columna son: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (j = 1, 2, ..., n)

Con objeto de que estas ecuaciones continúen siendo satisfechas debemos mantener la suma de las entradas en cada renglón y columna igual al total del renglón o columna correspondiente (a_i ó b_j) que aparecen en los cuadros a la extrema derecha e inferiores.

Ejemplo IV-1.-

Una compañía de motores tiene 5 clientes, a los cuales les manda motores desde 3 diferentes almacénes. Los 5 clientes se identifican como J, K, L, M, N, mientras que los 3 almacenes son P, Q, R. Los costos de los almacenes son idénticos, de aquí que los costos pertinentes sean los costos variables de embarque a cada uno de los clientes. La tabla de costos es como sigue:

Origen		Destino J	K	L	M	N
	P	20	10	15	10	8
	Q	15	30	5	12	14
	R	18	15	20	7	19

Los requerimientos de los clientes son los siguientes:

J	100 unidades	Total 580 unidades.
K	70 unidades	
L	140 unidades	
M	180 unidades	
N	90 unidades	

Unidades disponibles de los almacenes:

P	200 unidades	Total 650 unidades
Q	300 unidades	
R	150 unidades	

Utilizando para este problema la forma general del modelo matemático de programación lineal, tendremos:

$$
\begin{aligned}
\text{Min } Z = {} & 20x_{PJ} + 10x_{PK} + 15x_{PL} + 10x_{PM} + 8x_{PN} \\
& + 15x_{QJ} + 30x_{QK} + 5x_{QL} + 12x_{QM} + 14x_{QN} \\
& + 18x_{RJ} + 15x_{RK} + 20x_{RL} + 7x_{RM} + 19x_{RN}
\end{aligned}
$$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_{JP} + x_{JQ} + x_{JR} & = 100 \\
x_{KP} + x_{KQ} + x_{KR} & = 70 \\
x_{LP} + x_{LQ} + x_{LR} & = 140 \\
x_{MP} + x_{MQ} + x_{MR} & = 180 \\
x_{NP} + x_{NQ} + x_{NR} & = 90 \\
x_{JP} + x_{KP} + x_{LP} + x_{MP} + x_{NP} & \leq 200 \\
x_{JQ} + x_{KQ} + x_{LQ} + x_{MQ} + x_{NQ} & \leq 300 \\
x_{JR} + x_{KR} + x_{LR} + x_{MR} + x_{NR} & \leq 150 \\
x_{ij} \geq 0 \text{ para todas } i \text{ y } j &
\end{aligned}
$$

Para formular este problema como uno de transporte, hacemos:

Origen i = Almacén i (i = P,Q,R)
Destino j = Cliente j (j = J,K,L,M,N)
x_{ij} = Cantidad embarcada del almacén (i) al cliente (j)
C_{ij} = Costos unitarios asociados con x_{ij}
a_i = Unidades disponibles en el almacén (i)
b_j = Unidades requeridas por el cliente (j)

Nuestra tabla quedará ahora:

Destino

Origen		J	K	L	M	N	cliente ficticio S	Disponible
	P	x_{PJ} 20	x_{PK} 10	x_{PL} 15	x_{PM} 10	x_{PN} 8	x_{PS} 0	200
	Q	x_{QJ} 15	x_{QK} 30	x_{QL} 5	x_{QM} 12	x_{QN} 14	x_{QS} 0	300
	R	x_{RJ} 18	x_{RK} 15	x_{RL} 20	x_{RM} 7	x_{RN} 19	x_{RS} 0	150
	Requerido	100	70	140	180	90	50-580 = 70	650

Nótese que S es un cliente ficticio, con objeto de satisfacer la condición (c).

En este ejemplo introdujimos x_{ij} en la parte superior izquierda del cuadrado (i, j). Cuando se resuelve el problema x_{ij} se cambia por su valor y el símbolo x_{ij} no aparece ni siquiera en la primera tabla. Aquí hemos introducido el símbolo como una representación de que en su lugar debemos poner el valor correspondiente.

Ejemplo IV-2.-

La compañía ACE de computadoras ha entrenado 85 hombres para dar servicio a sus computadoras y los tienen localizados en la siguiente forma:

Monterrey	20	técnicos
Guadalajara	13	técnicos
Mex. D.F.	36	técnicos
Puebla	16	técnicos
Total	85	técnicos

Los 16 técnicos de Puebla no pueden dar servicio a la nueva computadora X-540 debido a falta de entrenamiento.

Cuatro clientes llaman solicitando servicio:

Pérez necesita	12	técnicos
López necesita	23	técnicos
Ramírez necesita	21	técnicos
Suárez necesita	29	técnicos
Total	85	técnicos

Pérez y López tienen instaladas computadoras X-540 y por lo tanto no se les puede dar servicio desde Puebla. Los costos variables conectados con la asignación de los técnicos de las distintas localidades a los clientes son:

	Pérez	López	Ramírez	Suárez
Monterrey	8	7	4	7
Guadalajara	10	3	6	8
México, D.F.	7	9	4	5
Puebla	–	–	8	6

Plantear el problema como uno de programación lineal y luego como uno de transporte, con objeto de determinar la asignación óptima de técnicos a los clientes que minimice el costo total.

$$\text{Min } Z = 8x_{MP} + 7x_{ML} + 4x_{MR} + 7x_{MS} + 10x_{GP} + 3x_{GL} + 6x_{GR} + 8x_{GS} + 7x_{DP} + 9x_{DL} + 4x_{DR} + 5x_{DS} + Mx_{PP} + Mx_{PL} + 8x_{PR} + 6x_{PS}$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
x_{MP} + x_{GP} + x_{DP} + x_{PP} &= 12 \\
x_{ML} + x_{GL} + x_{DL} + x_{PL} &= 23 \\
x_{MR} + x_{GR} + x_{DR} + x_{PR} &= 21 \\
x_{MS} + x_{GS} + x_{DS} + x_{PS} &= 29 \\
x_{MP} + x_{ML} + x_{MR} + x_{MS} &= 20 \\
x_{GP} + x_{GL} + x_{GR} + x_{GS} &= 13 \\
x_{DP} + x_{DL} + x_{DR} + x_{DS} &= 36 \\
x_{PP} + x_{PL} + x_{PR} + x_{PS} &= 16 \\
x_{ij} \geq 0 \text{ para todas } i \text{ y } j
\end{aligned}
$$

La tabla apropiada para el planteamiento como problema de transporte será:

Destino

		P	L	R	S	Disponible
Origen	M	x_{MP} 8	x_{ML} 7	x_{MR} 4	x_{MS} 7	20
	G	x_{GP} 10	x_{GL} 3	x_{GR} 6	x_{GS} 8	13
	D	x_{DP} 7	x_{DL} 9	x_{DR} 4	x_{DS} 5	36
	P	x_{PP} M	x_{PL} M	x_{PR} 8	x_{PS} 6	16
	requerido	12	23	21	29	85

En este caso conviene notar que como los requerimientos son iguales a las disponibilidades, no hizo falta introducir ninguna variable figurada (o de holgura).

Notamos también que dos de lo caminos no pueden ser usados debido a que ningún técnico puede ser mandado de (P) a (P) o a (L).

El problema de caminos inusables pude hacerse que ajuste con nuestro problema general, considerándolos como caminos usables, pero asignándoles un alto costo (Método de la Gran M) y reteniéndolos en la matriz. Si la solución se intenta a mano, la Gran M puede no usarse, pero es indispensable cuando la solución utiliza otros medios.

En el problema de transporte, definimos las variables básicas factibles igual que lo hicimos antes con el problema de programación lineal general, sólo que aquí la solución se efectúa directamente en el arreglo rectangular que hemos planteado.

Vemos que en un problema de transporte tenemos (m + n) ecuaciones (m orígenes y n destinos). Si empleamos el criterio desarrollado con anterioridad al cubrir el problema de programación lineal general, deberíamos tener que nuestras soluciones básicas factibles no degeneradas deben contar con (m + n) variables mayores que cero (m + n entradas diferentes a cero en nuestro arreglo rectangular). Esta consideración resulta de la omisión de una nueva restricción, con la cual contamos ahora, que es:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

y como :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad \text{para } (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad \text{para } (j = 1, 2, \ldots, n)$$

tendremos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad \text{para } j = n$$

$$= b_n$$

de donde vemos que una de las (m + n) ecuaciones puede ser obtenida de las (m + n–1) ecuaciones restantes y nuestro conjunto de ecuaciones es dependiente, pues existe una relación lineal entre las ecuaciones.

De lo anterior vemos que una solución básica factible no degenerada debe contar con (m + n – 1) entradas diferentes a cero en nuestro arreglo rectangular.

Definición IV-1.-

Un conjunto de entradas en un arreglo rectangular se dice que ocupan "posiciones independientes", si es imposible formar círculos cerrados recorriendo dichas entradas.

Las condiciones para que una solución básica factible no degenerada exista son las siguientes:

1.- Que satisfaga las restricciones.
2.- Exactamente $(m + n-1)$ entradas mayores que cero.
3.- Entradas en posiciones independientes (si no, no es básica).

IV-1.1.- Solución inicial.-

A) Método de la esquina noroeste:

Habiendo encontrado la tabla inicial, el siguiente paso es el determinar una solución básica factible inicial. Para esto se usa el Método de la Esquina Noroeste. (Nombre dado por Charnes y Cooper en 1953), método también desarrollado por Jorge Dantzig.

Como candidata para la primera variable básica, escójase cualquier x_{ij} (generalmente x_{11}) y hágase su valor tan grande como las restricciones (renglón y columna) lo permitan, esto es, haga:

$$x_{ij} = \min\ [a_i\ ,\ b_j]$$

Caso 1.-

Si $a_i < b_j$, entonces a todas las demás variables en el renglón (i) se les asigna el valor cero y serán no básicas. Elimínese el renglón (i) y redúzcase el valor de b_j a $(b_j - a_i)$, y procédase en forma similar para valuar una variable en el arreglo rectangular reducido, compuesto de los $(m-1)$ renglones y n columnas restantes.

Caso 2.-

Si $a_i > b_j$, entonces la columna (j) se elimina y a_i se reemplaza por $(a_i - b_j)$. Se procede con el arreglo reducido en forma similar a la descrita en el caso 1.

Caso 3.-

Si $a_i = b_j$, elimínese ya sea el renglón o la columna pero NO AMBOS. Sin embargo, si varias columnas pero solo un renglón quedan en el arreglo reducido, entonces elimínese la columna (j). En caso contrario procédase al revés.

Continúe en esta forma, paso a paso, alejándose de la esquina noroeste, hasta que finalmente obtenga un valor para la celda sureste.

Esta regla selecciona tantas variables básicas como haya columnas mas renglones menos uno (m + n–1), debido a que en el paso final quedan un renglón y una columna, los cuales son ambos eliminados.

Aplicando el método anterior al ejemplo IV-1:

		J (2)	K (5)	L (11)	M (14)	N	S	
(8)	P	$100^{(1)}$ 20	$70^{(4)}$ 10	$30^{(7)}$ 15	10	8	0	$200^{(3)}$ $100^{(6)}$ 30
(17)	Q	15	30	$110^{(10)}$ 5	$180^{(13)}$ 12	$10^{(16)}$ 14	0	$300^{(12)}$ $190^{(15)}$ 10
(20)	R	18	15	20	7	$80^{(19)}$ 9	$70^{(22)}$ 0	$150^{(21)}$ 70
		100	70	140 $110^{(9)}$	180	90 $80^{(18)}$	70	650

Los pasos seguidos para la obtención de la asignación mostrada fueron:

Paso 1.-

Se traza la matriz 3 x 6 junto con los requisitos de renglones, de columnas y los costos apropiados.

Paso 2.-

Escogemos $x_{11} = x_{PJ}$ como primera variable básica

Aquí min $[a_i, b_j] = \min[200, 100] = b_1 = 100$

$\Rightarrow x_{11} = 100$ (1)

Eliminamos la columna 1 (2)

Reemplazamos a_1 por $a'_1 = (a_1 - b_1) = (200 - 100) = 100$ (3)

caso 1

Paso 3.-

Escogemos $x_{12} = x_{PK}$ como la segunda variable básica

Min $[a'_1, b_2] = \min[100, 70] = b_2 = 70$

$\Rightarrow x_{12} = 70$ (4)

Eliminamos la columna 2 (5)

Reemplazamos a'_1 por $a''_1 = (a'_1 - b_2) = (100 - 70) = 30$ (6)

Paso 4.-

Escogemos $x_{13} = x_{PL}$ como la tercera variable básica

Min $[a''_1, b_3] = \min[30, 140] = a''_1 = 30$

$\Rightarrow x_{13} = 30$ (7)

Eliminamos el renglón 1 (8)

Reemplazamos b_3 por:

$b'_3 = (b_3 - a''_1) = (140 - 30) = 110$ (9)

Paso 5.-

Escogemos $x_{23} = x_{QL}$ como la cuarta variable básica

Min $[a_2, b'_3] = \min[300, 110] = b'_3 = 110$

$\Rightarrow x_{23} = 110$ (10)

Eliminamos la columna 3 (11)

Reemplazamos a_2 por $a'_2 = (a_2 - b'_3) = (300-110) = 190$ (12)

Paso 6.-

Escogemos $x_{24} = x_{QM}$ como la quinta variable básica

Min $[a'_2, b_4] = \min[190, 180] = b_4 = 180$

$\Rightarrow x_{24} = 180$ (13)

Eliminamos la columna 4 (14)

Reemplazamos a'_2 por $a''_2 = (a'_2 - b_4) = (190 - 180) = 10$ (15)

Paso 7.-

Escogemos $x_{25} = x_{QN}$ como la sexta variable básica

Min $[a''_2, b_5] = \min[10, 90] = a''_2 = 10$

$\Rightarrow x_{25} = 10$ (16)

Eliminamos el renglón 2 (17)

Reemplazamos b_5 por $b'_5 = (b_5 - a''_2) = (90-10) = 80$ (18)

Paso 8.-

Escogemos $x_{35} = x_{RN}$ como la séptima variable básica

Min $[a_3, b'_5] = \min[150, 80] = b'_5 = 80$

$\Rightarrow x_{35} = 80$ (19)

Eliminamos la columna 5 (20)

Reemplazamos a_3 por $a'_3 = (a_3 - b'_5) = (150 - 80) = 70$ (21)

Paso 9.-

Solo queda $x_{36} = x_{RS}$ para ser la octava variable básica

Como comprobación, deberemos tener que $a'_3 = b_5$

$\Rightarrow x_{36} = 70$ (22)

Nuestra tabla muestra ahora la solución básica factible inicial.

Para obtener el costo de la solución básica factible encontrada, multiplicamos el valor de cada asignación por su correspondiente costo unitario y sumamos. Así obtenemos:

$$Z = (20 \times 100) + (10 \times 70) + (15 \times 30) + (5 \times 110) + (12 \times 180) + (14 \times 10) + (19 \times 80) + (0 \times 70)$$

$$Z = 7520$$

Podemos notar que nuestra solución:

1) Satisface todas las restricciones (inherente en el método de solución).
2) Tiene 8 entradas mayores que cero (esto es $m + n-1 = 3 + 6-1 = 8$) incluyendo la del destino figurado.
3) No existen circulos cerrados (pues el método de solución solo se mueve a la derecha y abajo).

Tenemos entonces que nuestra solución intermedia es básica factible no degenerada.

La única complicación que puede surgir usando este método, es que hagamos menos de $(m + n-1)$ entradas diferentes de cero (solución degenerada), lo cual sucede cuando la cantidad disponible y la cantidad requerida, en un paso dado, se agoten simultaneamente. Este problema lo trataremos más adelante.

B) Método de Aproximación de Voguel:

A pesar de que la regla de la esquina noroeste tiene la gran ventaja de ser extremadamente sencilla, generalmente no suministra una solución cercana a la óptima, razón por la cual se han desarrollado otros métodos que proporcionan soluciones iniciales que requieren de un menor número de iteraciones para llegar a la óptima, si bien necesitan de un poco más de esfuerzo. Uno de ellos es el Método de Aproximación de Voguel, que se basa en el uso de "diferencias", asociadas con cada renglón y columna de la tabla de costos. Una "diferencia", renglón o columna, se define como la diferencia aritmética entre el elemento más pequeño y el siguiente más pequeño en ese renglón o columna. Esta cantidad nos indica la penalidad unitaria mínima en que se incurriría si fallamos en hacer la asignación a la celda con costo mínimo en ese renglón o columna. De aquí que este procedimiento, en forma repetitiva, efectúe la asignación factible máxima en la celda de menor costo del renglón o columna sobrante que tenga la mayor diferencia.

Debido a que una asignación ya afectuada no es cambiada, el procedimiento termina tan pronto como la oferta y la demanda total se agotan.

Los paso a seguir son los siguientes:

1) Construya la tabla de costos y requerimientos y vaya al paso 3.
2) Use la tabla de costos y requerimientos para el problema que queda después de que las asignaciones previas (tanto ceros como positivas) han sido efectuadas.
3) Calcule cada diferencia renglón y cada diferencia columna.
4) Seleccione el renglón o columna con la mayor diferencia (en los empates se escoge cualquiera en forma arbitraria).
5) Asigne tanto como sea posible a la celda con menor costo en ese renglón o columna.
6) Asigne ceros a todas las demás celdas de aquel renglón o columna en la cual la oferta o la demanda se agote.
7) Efectúe la única asignación factible en todos aquellos renglones o columnas que ya tengan sólo una celda sin asignación.
8) Elimine todos aquellos renglones o columnas totalmente asignados y ya no los tome en cuenta en las iteraciones posteriores. Si ya no existen renglones o columnas sin asignaciones, pare, pues ha terminado; en caso contrario vaya al paso 2.

Aplicando el Método de Aproximación de Voguel al Ejemplo IV-1, tendríamos:

	J	K	L	M	N	S		
P	20	10	0 15	10	8	0	200	8
Q	15	30	140 5	12	14	0	300	5
R	18	15	0 20	7	19	0	150	7
	100	70	140	180	90	70		
	3	5	10	3	6	0		
			⇑					

	J	K	M	N	S		
P	20	10	10	8	0^{0}	200	8
Q	15	30	12	14	0^{70}	160	12 ⇐
R	18	15	7	19	0^{0}	150	7
	100	70	180	90	70		
	3	5	3	6	0		

	J	K	M	N		
P	20	10	10	8	200	2
Q	15	30	12	14	90	2
R	18^{0}	15^{0}	7^{150}	19^{0}	150	8 ⇐
	100	70	180	90		
	3	5	3	6		

	J	K	M	N		
P	20	10^{70}	10	8	200	2
Q	15	30^{0}	12	14	90	2
	100	70	30	90		
	5	20	2	6		
		⇑				

	J	M	N		
P	20	10	8^{90}	130	2
Q	15	12	14^{0}	90	2
	100	30	90		
	5	2	6		
			⇑		

	J	M		
P	20^{10}	10^{30}	40	10 ⇐
Q	15^{90}	12^{0}	90	3
	100	30		
	5	2		

Cabe aclarar que con práctica todos los pasos se pueden hacer en la misma tabla.

Los pasos anteriores nos dan la siguiente solución:

	J	K	L	M	N	S	
P	10	70		30	90		200
	20	10	15	10	8	0	
Q	90		140			70	300
	15	30	5	12	14	0	
R				150			150
	18	15	20	7	19	0	
	100	70	140	180	90	70	

$$C = 5020$$

Vemos que 5020 < 7520 (método de la Esquina Noroeste)

IV-1.2.- Procedimiento de solución.-

La optimalidad, al igual que antes, se puede investigar examinando la función objetivo para buscar valores negativos de c'_{ij}, estando ésta en función solamente de variables no básicas. Tenemos:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1,2,3,\dots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1,2,3,\dots,n)$$

que pueden ser expresadas como:

$$0 = a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

$$0 = b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad (j = 1,2,\dots,n)$$

múltiplos de estas ecuaciones, conteniendo la variable básica correspondiente con coeficiente unitario, se pueden sumar o restar a la función objetivo para eliminar las variables básicas de ella. LLamemos u_i ($i = 1,2,\dots,m$) al múltiplo de la ecuación renglón (i) y v_j ($j = 1,2,\dots,n$) al múltiplo de la ecuación columna (j).

Tenemos entonces:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} v_j \left(b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - u_i - v_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j$$

y para obtener coeficientes de cero para las variables básicas en Z, deberemos tener:

$$C_{rs} = u_r + v_s$$

para cada variable básica x_{rs}

Como el número de u_i's más el número de v_j's $= (m + n)$ y sólo tenemos $(m + n - 1)$ variables básicas, una de las u_i ó v_j puede tomar un valor arbitrario (p. ej. cero). Para ahorrar trabajo se escoge el renglón o columna que contenga más variables básicas.

En nuestro ejemplo (marcando las celdas básicas con diagonales), tendremos:

TABLA (A)

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	100 / 20	70 / 10	30 / 15	10	8	0	200 / 0
Q	15	30	110 / 5	180 / 12	10 / 14	0	300 / −10
R	18	15	20	7	80 / 19	70 / 0	150 / −5
v_j	100 / 20	70 / 10	140 / 15	180 / 22	90 / 24	70 / 5	

Escogemos el renglón uno como la ecuación redundante y hacemos $u_1 = 0$, con lo cual inmediatamente obtenemos (recordando que $C_{rs} = u_r + v_s$): $v_1 = 20$, $v_2 = 10$ y $v_3 = 15$

Como $C_{23} = C_{QL} = 5$ y $v_3 = 15 \Rightarrow u_2 = -10$

Como $C_{24} = C_{QM} = 12$ y $u_2 = -10 \Rightarrow v_4 = 22$

Como $C_{25} = C_{QN} = 14$ y $u_2 = -10 \Rightarrow v_5 = 24$

Como $C_{35} = C_{RN} = 19$ y $v_5 = 24 \Rightarrow u_3 = -5$

Como $C_{36} = C_{RS} = 0$ y $u_3 = -5 \Rightarrow v_6 = 5$

Una vez que todas las u_i y v_j se han calculado, estamos en posibilidad de aplicar el criterio Simplex de optimalidad. Para esto obtenemos el valor de C'_{ij} para todas aquellas celdas correspondientes a las variables no básicas x_{ij}, anotando el valor obtenido en la parte superior derecha de la casilla correspondiente. Nuestra solución será óptima si:

$$C'_{ij} \geq 0 \quad \text{para toda } (i, j)$$

es decir si:

$$C_{ij} - u_i - v_j \geq 0 \text{ para toda } (i, j)$$

ó

$$C_{ij} \geq u_i + v_j \quad \text{para toda } (i, j)$$

por otro lado, si para alguna s y t

$$C'_{st} < 0$$

es decir si:

$$C_{st} < u_s + v_t$$

entonces es posible obtener una nueva solución básica que disminuya el valor de Z, aumentando el valor de la variable no básica x_{st}. Si existen varias $C'_{ij} < 0$, se escogerá como la variable entrante a aquella que corresponda a la casilla con el menor valor de $C'_{ij} < 0$ (debido a que será esta variable la que parece disminuir el valor de Z más rápidamente). Expresandolo de otra forma, tendremos que :

$$x_e = x_{st}$$

donde x_{st} será aquella variable para la que:

$$C'_{st} = C_{st} - u_s - v_t = \min_{(i,j)} [(c_{ij} - u_i - v_j) < 0]$$

$$= \min_{(i,j)} c'_{ij} < 0$$

Encerramos c'_{st} en un círculo para indicar que es la celda correspondiente a x_e

TABLA (B)

	J	K	L	M	N	S	u_i
P				12 10	−16 8	−5 0	200 0
Q	5 15	30 30				5 0	300 −10
R	3 18	10 15	10 20	−10 7			150 −5
V	100 20	70 10	140 15	180 22	90 24	70 5	

$$Z = -12x_{PM} - 16x_{PN} - 5x_{PS} + 5x_{QJ} + 30x_{QK} + 5x_{QS} + 3x_{RJ} + 10x_{RK} + 10x_{RL} - 10x_{RM} +$$
$$0 \times 200 - 10 \times 300 - 5 \times 150 + 20 \times 100 + 10 \times 70 + 15 \times 140 +$$
$$22 \times 180 + 24 \times 90 + 5 \times 70$$
$$Z = -12x_{PM} - 16x_{PN} - 5x_{PS} + 5x_{QJ} + 30x_{QK} + 5x_{QS} + 3x_{RJ} + 10x_{RK} + 10x_{RL} - 10x_{RM} +$$
$$+7520$$

Como $C'_{PN} = C'_{15} = -16 < C'_{ij}$ para toda (i,j), esta celda será la correspondiente a la variable básica entrante y $x_e = x_{15}$.

Debe notarse que el trabajo efectuado sobre la tabla (B) puede efectuarse directamente sobre la tabla (A), aquí no se hizo sólo por hacer más claro el procedimiento.

La variable saliente se determina en la misma forma que en el problema de Programación Lineal general, es decir, la que llega a cero primero cuando x_e se incrementa. Así, introducimos el símbolo $+\theta$ en la celda (s,t), para indicar que un valor llamado θ se le asignará a la variable no básica $x_{st} = x_e$, a fin de convertirla en básica. A continuación suponemos que $x_{st} = \theta$ y se ajustan simbólicamente las entradas básicas para seguir cumpliendo las restricciones. Para este fin, pondremos $+\theta$ en algunas variables básicas y $-\theta$ en otras, y nada en las restantes.

Conviene hacer notar que cuando hacemos $x_e = \theta$, habremos introducido con esto una entrada no independiente, ya que ahora existirá un circuito cerrado que parte de x_e y regresa a x_e. Las entradas en las cuales cambia de dirección dicho circuito,serán las que se verán afectadas por un $+\theta$ ó un $-\theta$ según sea el caso, a fin de mantener la validez de las restricciones.

Aplicando lo anterior a nuestro ejemplo, obtendremos:

TABLA (C)

	J	K	L	M	N	S	
P	100 / 20	70 / 10	$30-\theta^{(4)}$ / 15	10	$+\theta^{(1)}$ / 8	0	200
Q	15	30	$110+\theta^{(3)}$ / 5	180 / 12	$10-\theta^{(2)}$ / 14	0	300
R	18	15	20	7	80 / 19	70 / 0	150
	100	70	140	180	90	70	

Paso 1.- Introducimos $+\theta$ en la celda (1.5) correspondiente a la variable x_e.

Paso 2.- Vemos que la restricción N de la columna 5 ya no se satisface, por lo tanto ponemos $-\theta$ en (2,5) [si lo hacemos en (3,5) entonces ya no podemos formar un circuito de entradas básicas que regrese a la celda (1,5)].

Paso 3.- Como la restricción Q ya no se satisface, escribimos $+\theta$ en (2,3) [si lo hacemos en (2,4) no podremos formar un circuito de entradas básicas que regrese a la celda (1,5)].

Paso 4.- Como la restricción L ya no se satisface, escribimos $-\theta$ en (1,3), con lo cual hemos cerrado el circuito y terminado de anotar θ's.

También aquí debe notarse que el trabajo efectuado sobre la tabla (C) pudo haberse efectuado sobre la tabla (A). Nuevamente se separó para hacer más claro el ejemplo.

Una vez que todas las θ se han puesto, reemplazamos θ por aquel valor que haga cero primero algunas de las variables básicas. Esto es, θ toma el valor x_{qn} correspondiente al valor menor de las variables básicas a las cuales se les adjudicó $-\theta$, de forma tal que $x_{qn} - \theta$ se haga cero. Así, tenemos que: $x_{qn} = x_s$.

Usando el valor de θ así determinado, todas las variables básicas se recomputan para obtener la nueva solución básica.

Se repite el ciclo cuantas veces sea necesario.

Es importante hacer notar que si estamos minimizando el valor de Z, su valor deberá disminuir en cada iteración (o mantenerse igual en caso de degeneración). Si por algún motivo aumentara de valor, esto es un indicio de que hemos cometido un error.

En nuestro ejemplo, tenemos que aquellas entradas básicas a las cuales les asignamos $-\theta$, fueron:

$30 - \theta$ celda (1,3)

$10 - \theta$ celda (2,5)

Vemos por lo tanto que $x_s = x_{QN} = x_{25}$ y que $\theta = 10$. Sustituyendo el valor de θ en nuestra tabla obtenemos:

<u>2ª solución</u>

TABLA (D)

	J	K	L	M	N	S	
P	100 / 20	70 / 10	20 / 15	10	10 / 8	0	200
Q	15	30	120 / 5	180 / 12	14	0	300
R	18	15	20	7	80 / 19	70 / 0	150
	100	70	140	180	90	70	

$$Z = (100 \times 20) + (70 \times 10) + (20 \times 15) + (10 \times 8) + (120 \times 5) + (180 \times 12) + (80 \times 19) + (70 \times 0)$$
$$= 7360.$$

Empezando nuevamente el ciclo, obtendremos:

TABLA (E)

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	100 / 20	70 / 10	$20-\theta$ / 15	−12 / 10	$10+\theta$ / 8	11 / 0	200 / 0
Q	5 / 15	30 / 30	$120+\theta$ / 5	$180-\theta$ / 12	16 / 14	21 / 0	300 / −10
R	−13 / 18	−6 / 15	−6 / 20	$+\theta$ −26 / 7	$80-\theta$ / 19	70 / 0	150 / 11
v_j	100 / 20	70 / 10	140 / 15	180 / 22	90 / 8	70 / −11	

Como $C'_{34} = -26 < C'_{ij}$ para toda (i,j), entonces :

$$X_{34} = X_{RM} = X_e$$

Al introducir θ en la celda (3,4) y formar el circuito, tendremos que las entradas básicas a las cuales se les asigna $-\theta$ son:

$20-\theta$ celda (1,3)

$180-\theta$ celda (2,4)

$80-\theta$ celda (3,5)

Vemos entonces que :

$$X_S = X_{PL} = X_{13}$$

y que:

$$\theta = 20$$

Sustituyendo el valor de θ, obtendremos la tabla (F).

<u>3ª solución.</u>

TABLA (F)

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	$100-\theta$ / 20	70 / 10	26 / 15	14 / 10	$30+\theta$ / 8	11 / 0	200 / 0
Q	$+\theta$ −21 / 15	4 / 30	140 / 5	$160-\theta$ / 12	−10 / 14	−5 / 0	300 / 16
R	−13 / 18	−6 / 15	20 / 20	$20+\theta$ / 7	$60-\theta$ / 19	70 / 0	150 / 11
v_j	100 / 20	70 / 10	140 / −11	180 / −4	90 / 8	70 / −11	

$Z = (100 \times 20) + (70 \times 10) + (30 \times 8) + (140 \times 5) + (160 \times 12) + (20 \times 7) +$
$(60 \times 19) + (70 \times 0) = 6840$

$$X_e = X_{21}$$

$$\theta = 60$$

$$X_s = X_{35}$$

Prosiguiendo en la misma forma, obtendremos la solución óptima al llegar a la 7ª solución, la cual será:

TABLA (G)

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	5	70	10	30	90	10	200
	20	10	15	10	8	0	0
Q	100	20	140	2	6	60	300
	15	30	5	12	14	0	0
R	6	8	18	150	14	3	150
	18	15	20	7	19	0	-3
	100	70	140	180	90	70	
v_j	15	10	5	10	8	0	

$Z = (70 \times 10) + (30 \times 10) + (90 \times 8) + (10 \times 0) + (100 \times 15) + (140 \times 5) +$
$(60 \times 0) + (150 \times 7) = 4970.$

Vemos que esta solución es óptima, debido a que $C'_{ij} > 0$ para toda (i,j).

IV-1.3.- Degeneración en el problema de transporte.-

Una solución degenerada en el problema de transporte, se reconoce en que los valores de una o más de las asignaciones en nuestra tabla son cero.

Supongamos el ejemplo anterior, sólo variando la 1ª disponibilidad de 200 a 180 y el tercer requerimiento de 140 a 120.

Nuestra solución inicial será :

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	10 15	 10	 8	 0	180
Q	 15	 30	110 5	180 12	10 14	 0	300
R	 18	 15	 20	 7	80 19	70 0	150
	100	70	120	180	90	70	

$$Z = 7220$$

Como no hemos modificado los costos, nuestros C'_{ij} deberán ser los mismos que en el ejemplo anterior y la celda (1,5) corresponderá a la variable de entrada, con lo que obtenemos:

	J	K	L	M	N	S	
P	100 20	70 10	$10-\theta$ 15	 10	$+\theta$ 8	 0	180
Q	 15	 30	$110-\theta$ 5	180 12	$10-\theta$ 14	 0	300
R	 18	 15	 20	 7	80 19	70 0	150
	100	70	120	180	90	70	

de donde vemos que x_{13} y x_{25} están empatadas para dejar la base. Seleccionamos arbitrariamente una de ellas (x_{25} en nuestro caso) y a la no seleccionada (x_{13}), para indicar que sigue siendo básica, le asignamos un valor (ε) infinitesimal y esta variable se manipula como cualquier otra asignación, con la salvedad de que :

$$t + \varepsilon \begin{cases} t \text{ si } t > 0 \\ \varepsilon \text{ si } t=0 \end{cases}$$

obtenemos entonces:

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	100 20	70 10	$\varepsilon - \theta$ 15	−12 10	$10+\theta$ 8	11 0	180 0
Q	5 15	30 30	$120+\theta$ 5	$180-\theta$ 12	16 14	21 0	300 −10
R	−13 18	−6 15	−6 20	$+\theta$ -26 7	$80-\theta$ 19	70 0	150 11
v_j	100 20	70 10	120 15	180 22	90 8	70 −11	

$$Z = 7060$$

$$x_e = x_{34}$$

$$x_s = x_{13}$$

$$\theta = \varepsilon$$

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	$100-\theta$ 20	70 10	26 15	14 10	$10+\theta$ 8	11 0	180 0
Q	$+\theta$ -21 15	4 30	120 5	$180-\theta$ 12	−10 14	−5 0	300 16
R	−13 18	−6 15	20 20	$\varepsilon+\theta$ 7	$80-\theta$ 19	70 0	150 11
v_j	100 20	70 10	120 −11	180 −4	90 8	70 −11	

$$Z = 7060$$

$$x_e = x_{QJ}$$

$$x_s = x_{RN}$$

$$\theta = 80$$

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	$20-\theta$ / 20	70 / 10	5 / 15	−7 / 10	90 / 8	θ −10 / 0	180 / 0
Q	$80+\theta$ / 15	25 / 30	120 / 5	$100-\theta$ / 12	11 / 14	−5 / 0	300 / −5
R	8 / 18	15 / 15	20 / 20	$80+\theta$ / 7	21 / 19	$70-\theta$ / 0	150 / −10
	100	70	120	180	90	70	
v_j	20	10	10	17	8	10	

$$Z = 5380$$
$$x_e = x_{PS}$$
$$x_s = x_{PJ}$$
$$\theta = 20$$

	J	K	L	M	N	S	u_i
P	10 / 20	70 / 10	15 / 15	3 / 10	90 / 8	20 / 0	180 / 0
Q	100 / 15	15 / 30	120 / 5	$80-\theta$ / 12	1 / 14	θ −5 / 0	300 / 5
R	8 / 18	5 / 15	20 / 20	$100+\theta$ / 7	11 / 19	$50-\theta$ / 0	150 / 0
	100	70	120	180	90	70	
v_j	10	10	0	7	8	0	

$$Z = 5180$$
$$x_e = x_{QS}$$
$$x_s = x_{RS}$$
$$\theta = 50$$

	J	K	L	M	N	S	u
P	5 20	70 10	10 15	θ −2 10	90 8	20 − θ 0	180 0
Q	100 15	20 30	120 5	30 − θ 12	6 14	50 + θ 0	300 0
R	8 18	10 15	20 20	150 7	16 19	5 0	150 −5
v_j	100 15	70 10	120 5	180 12	90 8	70 0	

$$Z = 4930$$

$$X_e = X_{PM}$$

$$X_s = X_{PS}$$

$$\theta = 20$$

	J	K	L	M	N	S	u
P	7 20	70 10	12 15	20 10	90 8	2 0	180 0
Q	100 15	18 30	120 5	10 12	4 14	70 0	300 2
R	8 18	8 15	20 20	150 7	14 19	5 0	150 −3
v_j	100 13	70 10	120 3	180 10	90 8	70 −2	

$$Z^* = 4890$$

Se puede observar que el procedimiento es el mismo que en el caso no degenerado hasta llegar a la solución óptima.

Si ε no hubiese quedado eliminada durante las iteraciones intermedias y apareciera en la solución óptima, simplemente eliminamos la ε que aparezca en ésta, asignándole a esa variable básica un valor de cero.

TRANSPORTE

El cuadro es equivalente al modelo matemático:

$$\text{Min}Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

A1 $\quad x_{ij} = \min a_i \text{ o } b_j$

A2

Si $\begin{cases} a_i < b_j \ (1) \\ b_j < a_i \ (2) \end{cases}$

eliminar $\begin{cases} \text{renglón} \quad i \ (1) \\ \text{columna} \quad j \ (2) \end{cases}$

y actualizar $\begin{cases} a_i \cdot b_j \quad (1) \\ b_j \cdot a_i \quad (2) \end{cases}$

A3 En la última celda...

$(x_{mn}) = a'_m = b_n$

DATOS — CUADRO INICIAL — METODO DE LA ESQUINA NOROESTE / METODO DE APROX. DE VOGEL — **SOLUCION INICIAL**

Se da
- Un Nº de Origenes = m
- Un Nº de Destinos = n
- El costo variable de cada transporte

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Se verifica:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Nota: En caso contrario, se aumenta un renglón o una columna (que modificará la m o la n) de Origen o Destino figurados, cuyos costos serán iguales a CERO por ser ficticios, quedando:
OFERTA = DEMANDA

- B1 Calcular c/dif. renglón y c/dif. columna
- B2 Seleccionar la > dif. Empate, cualquiera
- B3 Asignar lo más posible a la celda con < costo en el renglón o columna de la > diferencia.
- B4 Asignar CEROS al resto del renglón o columna cuya oferta o demanda se agota.
- B5 Actualizar a_i y b_j correspondientes a la celda de < costo en el renglón o columna de la > diferencia.
- B6 Efectuar la unica asignación posible en todos aquellos renglones o columnas que sólo tengan una celda sin asignación.
- B7 No quedan renglones o columnas sin asignación.

Z — Z — Z MIN

1ª ITERACION — 2ª ITERACION — K-AVA ITERACION

APLICACION DEL CRITERIO SIMPLEX DE OPTIMALIDAD

C1 Se encuentra las U_i y V_j haciendo $U_r = 0$ (U_r = renglón con mas variables básicas). Se utiliza la relación: $C_{ij} = U_i + V_j$ para las celdas básicas.

C2 Se determinan todas las Cij para toda (i,j) de las Variables No Basicas. Se utiliza la relación: $C_{ij} - U_i + V_j = C'_{ij}$

C3 Se determina $x_e = \min C'_{ij} < 0$

C4 Se determina x_s

C4A Haciendo $x_e = +\theta$

C4B Cerrando un "circuito" y ajustando sus entradas básicas con $-\theta$ y $+\theta$ en sus esquinas

C4C Reemplazando θ por el valor que haga "0" primero a alguna(s) V.B. del "circuito" se encuentra X_s

C5 Se recomputan las otras Variables Básicas (V.B.) del circuito. ←→ Se calcula el Valor de Z para esta iteración

C6 Se repite el ciclo hasta que no haya $C_{ij} < 0$ ←→ Nota: El valor de Z deberá disminuir en cada iteración o mantenerse = en caso de degeneración.

IV.-2.- PROBLEMA DE LA ASIGNACION.-

Existen casos especiales del problema de transporte, los cuales presentan ventajas de computación adicionales sobre éste, razón por la cuál se han desarrollado métodos especiales de cálculo para estos casos. Una de las situaciones más comunes, es aquella que se conoce como "problema de la Asignación", el cual es el caso más sencillo de todos los problemas de programación lineal.

El problema de la asignación es un caso especial del modelo de transporte, en el que existe una matriz cuadrada ($m = n$), con cada una de las restricciones de disponibilidad y cada uno de los requerimientos iguales a la unidad ($a_i = 1$ y $b_j = 1$ para toda i y j).

Un problema típico es aquel de asignar personas a diferentes trabajos, en donde tenemos tantos trabajos como personas y cada persona debe asignarse a sólo un trabajo. A una persona i se le asigna el trabajo j con un costo C_{ij}.

En el caso anterior:

(1) $$\ldots x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la persona i efectúa el trabajo j} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

El problema consiste en determinar como se debe realizar la asignación, con objeto de minimizar la suma de todos los productos $C_{ij}\, x_{ij}$ (costos).

En nuestro modelo matemático de programación lineal, debido a que a cada persona se le puede asignar solo un trabajo, tendremos que:

(2) $$\ldots \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (i = 1,2,\ldots, n)$$

y debido que a cada trabajo se le asigna solo una persona:

(3) $$\ldots \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2,\ldots, n)$$

El objetivo del problema de asignación es el de escoger las x_{ij} que satisfagan (1) (2) y (3), en tal forma que el costo total

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

sea minimizado.

La condición (1) hace, en ocasiones, que el problema pueda ser muy difícil de resolver, debido a que esta condición asigna a x_{ij} un rango desconectado, compuesto de valores discretos.

EJEMPLO IV-3.-

Una compañía tiene cuatro máquinas y cuatro trabajos para hacer. A cada máquina le tomaría un día hacer cualquiera de los trabajos ¿Cuál es la mejor asignación de los trabajos a las máquinas ?, suponiendo que los costos de ejecutar cada uno de los trabajos en cada máquina son los siguientes (matriz de efectividad):

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	10	16	12	8
M_2	8	12	15	12
M_3	15	13	13	11
M_4	12	15	10	7

Vemos que si intentamos resolver el problema utilizando nuestro modelo general de programación lineal, obtendremos un modelo cuya matriz de coeficientes es enorme

$$
\begin{array}{l}
X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 1 \\
X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 1 \\
X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1 \\
X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} = 1 \\
X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} = 1 \\
X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} = 1 \\
X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} = 1 \\
X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} = 1
\end{array}
$$

Puede deducirse que la matriz de coeficientes crecerá aún más cuando el problema crece.

Si intentamos resolverlo usando el modelo de transporte, obtendremos:

	T1	T2	T3	T4	
M1	1 / 10	0 / 16	12	8	1
M2	8	1 / 12	15	12	1
M3	15	0 / 13	1 / 13	11	1
M4	12	15	0 / 10	1 / 7	1
	1	1	1	1	4

Utilizando este método, es probable que se requieran muchas iteraciones para llegar a la solución óptima y no conviene intentarlo, debido a que existe otro procedimiento más sencillo.

Teorema IV-1.-

Si en un problema de asignación sumamos o restamos una constante a cada elemento de un renglón (o columna) en la matriz de efectividad, entonces una asignación que hace mínima la efectividad total en una matriz, también minimizará la efectividad total de la otra matriz.

Demostración intuitiva:

Si restamos A unidades de cada elemento del renglón (i), tendremos que como cada solución posible debe tener exactamente una asignación en el renglón (i), el costo total para la nueva matriz será siempre exactamente A unidades menor que el que hubiésemos obtenido con la matriz original. De aquí que la solución que minimice el costo total para una matriz, deberá también minimizar el costo total para la otra.

Utilizando el teorema anterior, podemos transformar nuestra matriz original de costos en una que consista de elementos positivos o nulos. Una solución óptima consistirá en hacer las asignaciones a los elementos con valor de cero.

El procedimiento de solución estriba, precisamente, en obtener una matriz modificada como la mencionada.

Definición IV-2.-

Un conjunto de ceros se dice independiente, si no existen dos (o más) ceros del conjunto considerado en la misma columna o en el mismo renglón.

La técnica de solución consiste en reducir la matriz de costos hasta encontrar un conjunto de n ceros independientes, uno en cada renglón y en cada columna. Este conjunto (no necesariamente único), proporciona una solución óptima para el problema de asignación considerado.

IV.-2.1.- Procedimiento sistemático.-

Paso 1.-

A todos los elementos del renglón (i) se les resta el elemento más pequeño de dicho renglón.

En nuestro ejemplo, escogemos el número más pequeño del primer renglón y lo restamos de cada uno de los elementos de dicho renglón. El resultado es:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	8	4	0
M_2	8	12	15	12
M_3	15	13	13	11
M_4	12	15	10	7

Supongamos ahora que hemos asignado un trabajo a cada máquina, cualquiera que sea la asignación que hayamos hecho, el costo de la misma con la nueva matriz, será $ 8.00 menor que con la matriz anterior.

Procedemos ahora a restar el elemento mínimo en cada renglón restante de todos los elementos de su renglón, para obtener:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	8	4	0
M_2	0	4	7	4
M_3	4	2	2	0
M_4	5	8	3	0

Paso 2.-

Si todavía no hemos obtenido una matriz que posea cuando menos un cero en cada renglón y cuando menos un cero en cada columna, procedemos a restar el elemento mínimo en cada columna que aún no tenga ceros, de cada uno de los elementos de esa columna; obtenemos así:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	6	2	0
M_2	0	2	5	4
M_3	4	0	0	0
M_4	5	6	1	0

Notemos que en tanto nuestra matriz conste de elementos positivos o ceros, la efectividad total no puede ser negativa para ninguna asignación. En consecuencia, si podemos escoger una asignación que tenga un total de cero, no puede haber asignación alguna con un total menor.

Dada alguna matriz con algunos ceros y todos sus elementos no negativos, ¿como buscamos la asignación máxima entre los ceros?

Paso 3.-

A) Examine los renglones sucesivamente hasta que encuentre uno de ellos que tenga exactamente un cero no marcado. Márquelo con un cuadrito

( ) ya que ahí se efectuará una asignación. Marque con una X todos los otros ceros en la misma columna para indicar que no se pueden usar para hacer otras asignaciones.

B) Examínese a continuación las columnas para encontrar ceros no marcados (uno exactamente), los que se marcarán con un cuadrito ( ) y con una X todos los demás ceros no marcados en el renglón correspondiente.

C) Repítase (A) y (B) sucesivamente hasta que una de dos situaciones ocurra:

a) Ya no hay ceros sin marcar

b) Los ceros que quedan sin marcar son cuando menos dos en cada renglón o columna.

Si lo que resulta es el caso (a), tenemos una asignación máxima (que puede no ser completa).

Si resulta el caso (b), podemos usar el ingenio y/o tanteos para localizar una asignación máxima.

Sea una asignación máxima obtenida de la situación (a) o a partir de la situación (b), podemos decir que si se tiene una asignación en cada renglón, esta asignación máxima es una solución completa del problema original (caso I) y hemos terminado. Si no se tiene una asignación en cada renglón, nos enfrentamos con el problema de modificar la matriz de efectividad mediante sumas o restas, (caso II). Vaya al paso 4.

Volviendo a nuestro ejemplo :

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	2	6	2	$\boxed{0}^{(1)}$
M_2	$\boxed{0}^{(2)}$	2	5	4
M_3	4	$\boxed{0}^{(3)}$	$\cancel{0}^{(3)}$	$\cancel{0}^{(1)}$
M_4	5	6	1	$\cancel{0}^{(1)}$

(1) por (A)
(2) por (A)
(3) por (B)

Vemos que tenemos la situación (a), que cae dentro del caso II y lo dejamos pendiente hasta que veamos el paso 4.

Ejemplo IV.- 4

Supongamos que tenemos la siguiente matriz de efectividad, a la cual ya le han sido aplicados los pasos uno y dos y se le desea aplicar el paso tres:

7	0	5	4	3
0	0	3	8	6
0	6	0	3	0
0	1	0	7	0
4	3	0	0	0

1º paso por (A)

7	0	5	4	3
0	0	3	8	6
0	6	0	3	0
0	1	0	7	0
4	3	0	0	0

2º paso por (A)

7	0	5	4	3
0	0	3	8	6
0	6	0	3	0
0	1	0	7	0
4	3	0	0	0

3º paso por (B)

7	0	5	4	3
0	0	3	8	6
0	6	0	3	0
0	1	0	7	0
4	3	0	0	0

4º paso (caso b) tanteos

7	0	5	4	3
0	0	3	8	6
0	6	0	3	0
0	1	0	7	0
4	3	0	0	0

final (asignación máxima y completa)

7	0	5	4	3
0	0	3	8	6
0	6	0	3	0
0	1	0	7	0
4	3	0	0	0

Nota.-

a) Es posible que exista más de una asignación máxima.

b) No es necesario escribir repetidamente la matriz. Pueden hacerse todos los pasos en la misma.

Paso 4.-

Este paso sólo es necesario cuando llegamos al caso II del paso 3, debido a que entonces hemos llegado a una asignación máxima (obtenida de la situacion (a) o a partir de la situación (b)), la cual no constituye una solución completa. Para agregar ceros adicionales se usan las siguientes reglas:

Empezando con la asignación máxima obtenida:

a) Se marcan todos los renglones en los que no se ha hecho una asignación.

b) Se marcan las columnas que no han sido marcadas y que tienen <u>ceros</u> (asignados o no) en los renglones marcados.

c) Se marcan los renglones que aún no están marcados y que tienen <u>asignaciónes</u> en las columnas marcadas.

d) Se repiten los pasos (b) y (c) hasta que termina la cadena de marcas.

e) Se trazan líneas a través de todos los renglones <u>no</u> marcados y a través de todas las columnas marcadas. (deberemos obtener tantas líneas como asignaciónes teníamos.)

f) Se examinan los elementos que no tienen una línea que pase por ellos y se resta el menor de ellos de <u>todos</u> los elementos de la matriz que <u>no tienen una línea</u> que pase por ellos. Se suma además este elemento a cada uno de los localizados en la intersección de dos líneas. Se dejan los elementos sobrantes de la matriz sin cambio. Olvide las asignaciones anteriores y vuelva al paso 3.

Aplicando lo anterior al ejemplo que dejamos pendiente:

	T_1	T_2	T_3	T_4	
M_1	2	6	2	$\boxed{0}$	←(3)por(c)
M_2	$\boxed{0}$	2	5	4	
M_3	4	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	
M_4	5	6	1	$\cancel{0}$	←(1)por(a)
				↑ (2)por(b)	

2	6	2	$\boxed{0}$	←
$\boxed{0}$	2	5	4	por (e)
4	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	por (e)
5	6	1	$\cancel{0}$	←
			↑ por (e)	

* por (f)

1*	5*	1*	0	volvemos	1	5	1	$0^{(1)}$	(1) por (A)
0	2	5	5*	al paso 3	$0^{(2)}$	2	5	5	(2) por (A)
4	0	0	1*	y obtene-	4	$0^{(4)}$	$0^{(3)}$	1	(3) por (A)
4*	5*	0*	0	mos:	4	5	$0^{(3)}$	$0^{(1)}$	(4) por (B)

Vemos que hemos obtenido una asignación máxima y completa.

$$C^{*} = 8 + 8 + 13 + 10 = 39$$

Ejemplo IV-5.-

En una fábrica de aparatos eléctricos se tienen 3 máquinas, 2 de las cuales pueden realizar tres trabajos diferentes (uno a la vez) y una cuatro. La máquina 1 puede emplearse para los trabajos: A, B, C y D, la 2 para los trabajos: A, B, y D y la 3 para los trabajos: A, B, y C. Debido a diferencias en las máquinas y en la habilidad de sus operarios, los costos de realizar estas tareas varían de acuerdo con la máquina. Estos se presentan en la siguiente tabla:

	M (1)	M (2)	M (3)
A	10	16	12
B	8	12	15
C	15	-	13
D	12	15	-

Se requiere asignar los trabajos a las máquinas, de tal forma que el costo total sea mínimo.

Solución.-

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	10	16	12	0
B	8	12	15	0
C	15	M	13	0
D	12	15	M	0

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	2	4	0	0
B	0	0	3	0
C	7	M	1	0
D	4	3	M	0

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	2	4	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
B	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3	$\cancel{0}$
C	7	M	1	$\boxed{0}$
D	4	3	M	$\cancel{0}$

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	2	4	0	1
B	0	0	3	1
C	6	M	0	0
D	3	2	M	0

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	2	4	$\boxed{0}$	1
B	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3	1
C	6	M	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
D	3	2	M	$\cancel{0}$

	M(1)	M(2)	M(3)	M(F)
A	$\boxed{0}$	2	$\cancel{0}$	1
B	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	5	3
C	4	M	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$
D	1	$\cancel{0}$	M	$\boxed{0}$

$C^* = 10 + 12 + 13 + 0 = 35$

Ejemplo IV-6.-

Encontrar la asignación para costo mínimo.

7	14	4	3	5	1
2	6	9	6	7	1
9	8	12	10	5	1
4	5	7	9	6	1
0	5	6	7	8	1
1	1	1	1	1	

4	11	1	0	2
0	4	7	4	5
4	3	7	5	0
0	1	3	5	2
0	5	6	7	8

4	10	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2
$\boxed{0}$	3	6	4	5
4	2	6	5	$\boxed{0}$
$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	2	5	2
$\cancel{0}$	4	5	7	8

7	10	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2
$\cancel{0}$	$\cancel{0}$	3	1	2
7	2	6	5	$\boxed{0}$
3	$\boxed{0}$	2	5	2
$\boxed{0}$	1	2	4	5

8	11	0	0	2
0	0	2	0	1
8	3	6	5	0
3	0	1	4	1
0	1	1	3	4

$$C^{*} = 4 + 6 + 5 + 5 + 0 = 20$$

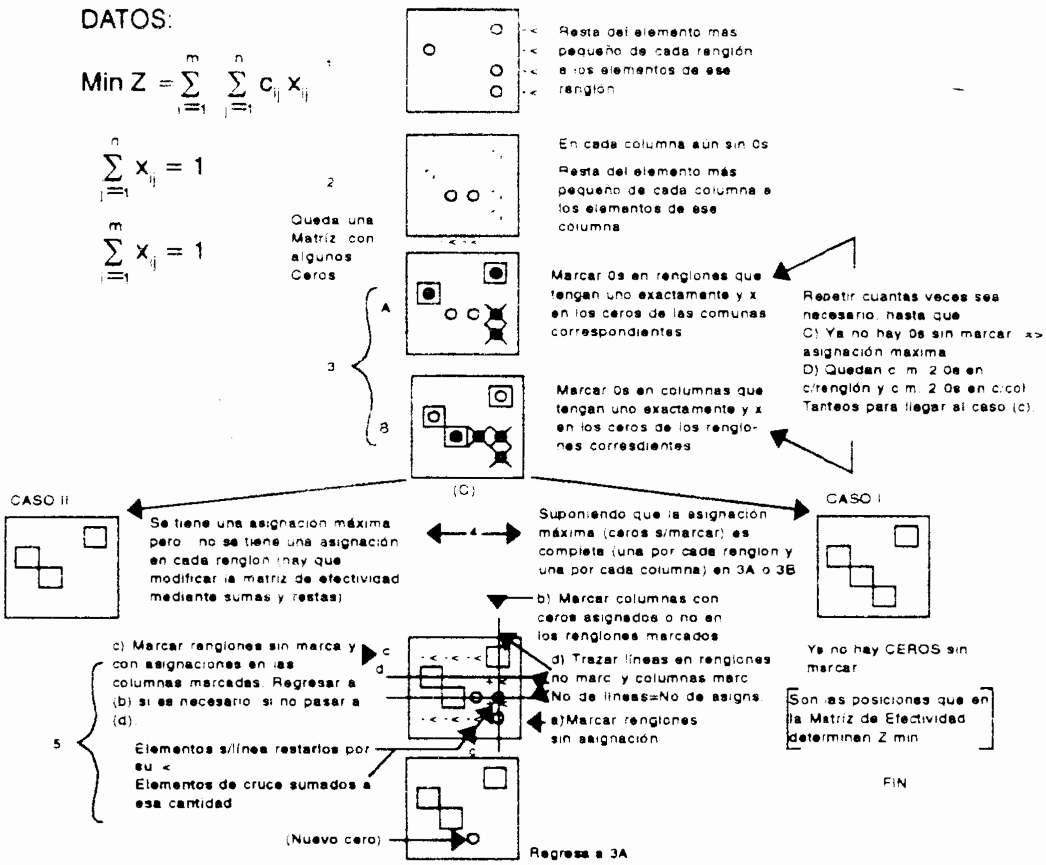
ASIGNACION

DATOS:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$



IV-3.- EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1.- Considere que un problema de transporte tiene la siguiente tabla de requerimientos y costos :

		Destino		
		1	2	Disponibilidad
CLASE	1	6	4	2
	2	8	5	4
	Demanda	3	3	

a) Resuelva este problema por el método del transporte.

b) Reformule este problema como un problema general de programación lineal y resuelva por el método Simplex.

2 Tres refienerías disponen del gas requerido para abastecer 4 ciudades. Los datos se dan a continuación:

		Ciudad				
		1	2	3	4	GAS DISPONIBLE
REFINERIA	1	4	7	9	10	8
	2	6	4	3	6	10
	3	9	6	4	8	6
REQUERIMIENTOS		5	3	8	4	

Determine la política óptima para efectuar el transporte.

3.- Para el siguiente problema de transporte; ¿Forman los elementos { (1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)}un conjunto básico ?

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	9	16	4	11	19	8
2	8	6	8	12	8	10
3	1	12	3	23	6	30
b_j	5	4	9	8	22	

a) En caso afirmativo, encuentre la solución correspondiente. Iniciando con esta solución, encuentre todas las soluciones óptimas del problema.

b) Si a_3 cambia a $30 + \delta$ y b_4 cambia a $8 + \delta$, encuentre el rango de valores de δ para los que la solución óptima encontrada sigue siendo óptima.

c) Volviendo al problema original (con $\delta = 0$), encuentre el rango de valores de C_{12}, para los que la primera solución básica factible óptima siga siendo óptima. ¿Cuál será la solución óptima cuando C_{12} cambia a 2?

d) Volviendo al problema original (con $\delta = 0$ y $C_{12} = 16$), encuentre el rango de valores de C_{35} para los que la solución inicial básica factible obtenida sigue siendo óptima ¿Cual será una solución óptima cuando C_{35} cambia a 20 ?

4.- Use los elementos: { (1,4), (2,3), (2,4), (3,2), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3),} como solución inicial básica para $\delta = 0$ y resuelva el problema:

i \ j	1	2	3	4	5	a_i
1	6	11	14	11	4	$3+\delta$
2	7	17	9	10	5	15
3	9	5	7	18	0	14
4	9	13	13	15	7	10
b_j	3	$9+\delta$	14	7	9	

¿Para qué rango de valores de δ la solución básica óptima obtenida continúa siendo óptima ?

5.- Considere el problema de transporte, teniendo la siguiente tabla de requerimentos y costos.

		Destino					
		1	2	3	4	5	Disponibilidad
ORIGEN	1	8	6	3	7	5	20
	2	5	M	8	4	7	30
	3	6	3	9	6	8	30
	4	0	0	0	0	0	20
Demanda		25	25	20	10	20	

a) Obtenga la solución básica factible inicial siguiendo el método de la esquina noroeste.

b) Obtenga la solución básica factible inicial siguiendo el método de Aproximaciones de Vogel.

c) Compare los valores de la función objetivo para esas soluciones. Escoja la mejor y obtenga la solución óptima.

6.- a) Resuelva el siguiente problema cuando ($\lambda = 0$) y obtenga 2 soluciones óptimas:

i \ j	1	2	3	a_i
1	5	$14-2\lambda$	7	15
2	6	7	8	20
3	$14+\lambda$	$24-3\lambda$	9	4
b_j	7	11	21	

b) Resuelva también para cualquier valor $\lambda \geq 0$

7.- El total de requerimientos en el mercado excede la cantidad de material disponible en la planta. Las deficiencias deben ser cubiertas con importación. Todos los mercados tienen las mismas prioridades. Determine qué cantidad de la demanda en cada mercado debe ser cubierta por cada planta, con el fin de utilizar los materiales disponibles a un costo mínimo de transporte.

		Mercado					Disponibilidad en la planta
		1	2	3	4	5	(tons)
PLANTA	1	3	9	5	6	7	10
	2	2	1	8	10	13	25
	3	3	12	6	5	2	13
	4	1	9	14	3	2	33
Requerimientos en el mercado (tons)		30	22	17	19	12	

8.- Una firma que produce un solo producto, tiene tres plantas y cuatro clientes. Las tres plantas producirán 3000, 5000 y 4000 unidades respectivamente, durante el siguiente período de tiempo. La firma tiene un contrato para vender 4000 unidades al cliente 1, 300 unidades al cliente 2 y cuando menos 1000 unidades al cliente 3. Los clientes 3 y 4 quieren comprar la mayor cantidad posible de nuestro producto. El beneficio neto asociado al embarque de una unidad de la planta i al cliente j, se da en la siguiente tabla:

		CLIENTE 1	2	3	4
PLANTA	1	65	63	62	64
	2	68	67	65	62
	3	63	60	59	60

La directiva desea saber cuántas unidades deben venderse a los clientes 3 y 4 y cuántas unidades deben enviarse de cada planta a cada cliente, con el fin de maximizar el beneficio.

a) Formule este problema como uno de transporte, al construir de forma apropiada una tabla de requerimientos y costos .

b) Resuelva el problema formulado en (a).

9.- Encuentre la asignación de costo mínimo para las siguientes matrices de efectividad:

	1	2	3	4
A	7	8	3	6
B	4	6	1	5
C	9	9	7	4
D	2	5	6	7

	1	2	3	4	5
A	2	4	6	8	5
B	3	5	7	9	1
C	6	7	9	4	3
D	3	5	4	7	4
E	4	3	4	3	4

	1	2	3	4	5
A	6	5	-	3	7
B	6	2	4	3	5
C	-	7	2	3	1
D	7	5	4	6	6
E	9	3	1	-	5

	1	2	3	4
A	4	1	3	5
B	3	9	1	3
C	7	3	2	2
D	6	1	4	7
E	5	4	3	3

CAPITULO V

TEORIA DUAL

V.1.-PROBLEMA DUAL

Para cada problema de programación lineal, existe otro problema de programación lineal muy estrechamente relacionado con él, al cual se le denomina DUAL. Al problema original le denominaremos de aquí en adelante PRIMO.

Sea el siguiente caso:

Problema primo.-

$$(0)\quad \text{Max } Z_x = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots\ldots + C_jx_j + \ldots\ldots + C_nx_n$$

s. a.

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1j}x_j & + \ \ldots & + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
(2) & a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2j}x_j & + \ \ldots & + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{i1}x_1 + & a_{i2}x_2 + & \ldots & + a_{ij}x_j & + \ \ldots & + a_{in}x_n & \leq b_i \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(m) & a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \ldots & + a_{mj}x_j & + \ \ldots & + a_{mn}x_n & \leq b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,\ldots\ldots,n) \qquad (n)$$

OJO:–b_i puede ser negativa y está permitida.

El problema dual correspondiente, se obtiene asociando a cada restricción una variable y a cada variable una restricción, trasponiendo los renglones y las columnas de coeficientes en las restricciones, intercambiando el papel de los coeficientes de la función objetivo y las constantes, invirtiendo las desigualdades y minimizando en lugar de maximizar.

Problema primo	Problema dual
Restricción	Variable
Variable	Restricción

Es decir, existe una variable por cada una de las restricciones primas y una restricción dual por cada una de las variables primas.

La relación primo-dual podemos representarla por medio de la siguiente tabla:

		PRIMO					$\leq$
	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	Min
D y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}	b_1
U y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}	b_2
A $\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
L y_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
$\geq$ y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}	b_m
Max	c_1	c_2	...	c_j	...	c_n	

de donde resulta claro que:

Problema Dual.-

(0) $\quad \text{Min } Zy = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_i y_i + \dots + b_m y_m$

s. a.

(1) $\quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{i1} y_i + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1$

(2) $\quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{i2} y_i + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2$

$\vdots$

$\quad a_{1j} y_i + a_{2j} y_2 + \dots + a_{ij} y_i + \dots + a_{mj} y_m \geq c_j$

$\vdots$

(n) $\quad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{in} y_i + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3,\dots\dots,m)$$

Ejemplo V-1.-

$$\text{Max } Z_x = x_1 + 2x_2$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &\leq 600 \\ x_2 &\leq 300 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 2400 \\ x_j &\geq \quad 0 \qquad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

el problema dual correspondiente sera:

$$\text{Min } z_y = 600y_1 + 300y_2 + 240y_3$$

s. a

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad + 3y_3 &\geq 1 \\ y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ y_i &\geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

El tratamiento de algunas complicaciones encontradas en el problema primo es como sigue :

a) Si el problema primo tiene una restricción que es una igualdad (sea la ecuación i), entonces obtendremos un problema dual igual que antes, sólo que y_i será ahora no restringida en signo.

b) Si x_j no está restringida en signo, el problema dual sólo se modificará haciendo que la restricción (j) sea una igualdad.

En general, las siguientes leyes de correspondencia se aplican entre el problema primo y el dual:

PRIMO	DUAL
Función objetivo (Max Z_x)	Términos constantes
Términos constantes	Función objetivo (Min Z_y)
Matriz de coeficientes	Matriz de coeficientes transpuesta.
Relación:	Variable:
Desigualdad (i): $\leq$	$y_i \geq 0$
Ecuación (i) : $=$	y_i no restringida en signo
Variable:	Relación:
$x_j \geq 0$	Desigualdad (j) : $\geq$
x_j no restringida en signo	Ecuación (j) : $=$

Ejemplo V-2.-

Problema primo.-

$$\text{Max } Z_x = x_1 + x_2 + x_3$$

s. a

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 \quad\quad &\leq 3 \\ 2x_2 - x_3 &\geq 4 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \geq 0$; x_3 no restringida en signo.

Problema dual.-

$$\text{Min } Z_y = 5y_1 + 3y_2 - 4y_3$$

s. a

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 \quad\quad &\geq 1 \\ -3y_1 - 2y_2 - 2y_3 &\geq 1 \\ 4y_1 \quad\quad + y_3 &= 1 \end{aligned}$$

y_1 no restringida en signo; $(y_2, y_3) \geq 0$

Debido a que el problema dual es también un problema de programación lineal, deberá contar a su vez con un problema dual.

Teorema V-1.-

El dual del dual es el primo. Es decir, la relación entre el problema primo y su dual es simétrica.

Del teorema anterior, es claro que no tiene importancia a cuál de los dos problemas se le llama primo y a cuál dual.

A continuación veremos las propiedades y relaciones existentes entre el problema primo y su dual.

Siempre que para poner en forma general el problema primo sea necesario cambiar el signo de la funcion objetivo, asi mismo se cambiará el signo de todas las ecuaciones que existan en las restricciones. El objeto de esta transformacion, es dejar el dual de tal forma, que al obtener el dual del dual volvamos a la forma original de la cual partimos.

Ejemplo V-3.-

$$\text{Min } Z_x = x_1 + x_2 + x_3$$

s.a

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\ 2x_2 - x_3 &\geq 4 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \,; \end{aligned}$$

poniéndolo en forma general.

$$\text{Max} - Z_x = -x_1 - x_2 - x_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\ -2x_2 + x_3 &\leq -4 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \,; \end{aligned}$$

obtenemos el dual:

$$\text{Min} - Z_y = -5y_1 + 3y_2 - 4y_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &\geq -1 \\ 3y_1 - 2y_2 - 2y_3 &\geq -1 \\ -4y_1 + y_3 &= -1 \\ (y_2, y_3) &\geq 0 \,; \end{aligned}$$

obteniendo el dual de éste dual obtenemos:

$$\text{Max} -Z_x = -x_1 - x_2 - x_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= -5 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\ -2x_2 + x_3 &\leq -4 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \,; \end{aligned}$$

que es el mismo modelo del que partimos.

V-2-. COMPLEMENTALIDAD.-

Lema V-1.-

Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ son soluciones factibles del problema primo y dual respectivamente, entonces:

$$Z_x \leq Z_y$$

Prueba.-

$$Z_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \qquad \text{[pues } c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \text{ en el dual]}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \qquad \text{[cambiando solo } x_j \text{ y } y_i \text{]}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = Z_y \qquad \text{[pues } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ en el primo]}$$

lo que queda demostrado.

Tenemos entonces que, debido a que la rutina simplex automáticamente identifica la solución básica dual complementaria, al resolver un problema (primo o dual) automáticamente estaremos resolviendo el otro.

Veamos como el Método Simplex identifica las soluciones básicas complementarias en general.

Notación.-

Supongamos que el conjunto inicial de ecuaciones para resolver el problema primo es:

$$(\alpha) \ldots \begin{cases} Z_x - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{para } (i = 1, 2, 3, \ldots, m) \end{cases}$$

Sea $c'_j = (z_j - c_j)$ el coeficiente de x_j en la ecuación (0) actual, obtenida por el Método Símplex ($j = 1,2,3,\ldots,n+m$).

Del sistema de ecuaciones (α), vemos que los coeficientes de las variables de holgura en la función objetivo original son cero ($c_j = 0$ para $j = n+1,\ldots,n+m$).

De acuerdo con la anterior notación, nuestra función objetivo, cuando hayamos obtenido la solución óptima, puede representarse como:

$$Z_x + (z_1^* - c_1)x_1 + (z_2^* - c_2)x_2 + \dots + (z_n^* - c_n)x_n + z^*_{n+1}x_{n+1} + \dots + z^*_{n+m}x_{n+m} = Z^*$$

Comparando la función objetivo original con la función objetivo final, queda claro que z_j^* es la cantidad neta que hemos modificado el coeficiente ($-c_j$) de la función original, mediante la rutina Simplex, para obtener el nuevo coeficiente de x_j en la función objetivo final.

Vemos entonces, que si $j > n$ ($j = n + i$), z^*_j nos indica el número de veces que la ecuación (i) ha sido sumada (directa o indirectamente) a la ecuación (0) original durante el proceso de ejecutar el Método Simplex. Esto es debido a que en la ecuación (0) original se tiene $c_{n+i} = 0$ y el conjunto de ecuaciones original tiene x_{n+i} con coeficiente = 1 en la ecuación (i) y cero en todas las demás.

Cabe aclarar que z^*_j (para $j > n$) no indica que la ecuación (i) haya sido sumada directamente (en un paso) a la ecuación (0) z^*_j veces; esta cifra sólo no indica que el resultado final de sumarle algún múltiplo de la ecuación (i) en algunos pasos y restarle algún múltiplo de la misma en otros, tiene el resultado indicado. Esta suma algebraica pudo haberse efectuado por medio de otra ecuación, a la cual se le había sumado antes la ecuación (i).

Lema V-2.-

a) $Z_x^* = \sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i}\, b_i$

• pues z^*_{n+i} = No. de veces que la ecuación (i) se suma a la ec.(0). Como $Z_x = 0$ originalmente, su valor lo obtiene de las sumas de las ecuaciones (i) que se le hacen hasta llegar a la solución óptima.

b) $z_j^* = \sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i}\, a_{ij}$ ⟶ para ($j = 1, 2, \dots, n$)

número de veces que la ecuación (i) se sumó a la ecuación (0) por el coef. de x_j en las ecuaciones (1) a (m).

Teorema V-2.-

Tan pronto hayamos encontrado la solución óptima (usando la rutina Simplex) para el problema primo. entonces estamos en posición de obtener la solución óptima del dual. El valor de la variable dual (i), es igual al coeficiente de la variable de holgura (i) del problema primo en la ecuación (0). Así:

$$y^*_i = z^*_{n+i} \quad \text{para } (i = 1,2,\ldots,m)$$

Prueba.-

Para probarlo debemos demostrar que la solución $(y_1, y_2, \ldots, y_m) = (z^*_{n+1}, z^*_{n+2}, \ldots z^*_{n+m})$ es factible para el problema dual y que además es óptima.

a) ¿es factible?

i) ¿es no negativa?

$z^*_{n+i} \geq 0$ para (i = 1,2,....,m)

debido al criterio para tener optimalidad en el Método Simplex.

ii) ¿satisface las restricciones?

Sabemos que:

$(z^*_j - c_j) \geq 0$ para (j = 1,2.....,n)

debido al criterio para tener optimalidad en el Método Simplex.

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i} a_{ij} - c_j \right) \geq 0 \qquad [\text{ por el lema V-2.b }]$$

de donde observamos que la solución es factible, debido a que:

$$\sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i} a_{ij} \geq c_j$$

es decir, $z^*_{n+i} = y^*_i$ cumple con las restricciones

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq c_j \quad \text{para toda } j.$$

b) ¿Es esta una solución óptima?

Por lema V-1: $Z_x \leq Z_y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ para cualquier solución dual factible pero el lema V-2. a dice:

$$Z_x^* = \sum_{i=1}^{m} z_{n+i}^* \, b_i$$

por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{n+i}^* \, b_i \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$$

pero por suposición:

$$y_i^* = z_{n+i}^*$$

como hemos alcanzado el límite inferior, nuestra solución es óptima.

L.Q.Q.D

Introduzcamos ahora variables de holgura para el problema dual, con lo cual obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Teorema V-3.- Teorema Dual.-

Suponiendo que soluciones factibles finitas existen, tanto para el problema primo como para el dual, entonces:

a) existe una solución óptima finita para ambos, la cual satisface:

b) $Z_x^* = Z_y^*$

Prueba .-

a) El lema V-1 dice que $Z_x \leq Z_y$, lo cual implica que existe una solución óptima finita para ambos problemas (pues max $Z_x \leq Z_y$ y min $Z_y \geq Z_x$).

b) Por el teorema V-2: ($y_i^* = z_{n+i}^*$) tenemos que:

$$Z_y^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = \sum_{i=1}^{m} b_i z_{n+i}^* \quad \ldots (\alpha)$$

del lema V-2.a:

$$Z_x^* = \sum_{i=1}^{m} b_i z_{n+i}^* \quad \ldots (\beta)$$

de (α) y (β):

$$Z_x^* = Z_y^*$$

Teorema V-4.-

Suponiendo que hemos obtenido una solución óptima para el problema primo usando el Simplex, entonces el valor óptimo de la variable j de holgura del problema dual, es igual al coeficiente de la variable j original del problema primo en la ecuación (0) final. Es decir :

$$y^*_{m+j} = (z^*_j - c_j) \quad \text{para } (j = 1,2,\ldots,n)$$

Prueba.-

$$z^*_j = \sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i}\, a_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad [\text{ por el lema V-2.b }]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y^*_i\, a_{ij} \qquad (\alpha) \quad [\text{ por el teorema V-2 }]$$

Por definición:

$$y^*_{m+j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y^*_i - c_j \qquad (\beta) \quad \text{para } (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Sustituyendo (α) en (β):

$$y^*_{m+j} = (z^*_j - c_j) \qquad \text{L.Q.Q.D.}$$

Corolario V-1.-

a) $y^*_i = 0$ siempre que $x^*_{n+i} > 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

b) $y^*_{m+j} = 0$ siempre que $x^*_j > 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

Prueba .-

Si tenemos que $x^*_k > 0$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ esto implica que x^*_k es una variable básica y por lo tanto $(z^*_k - c_k) = 0$

Si tenemos que $x^*_{n+i} > 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ esto implica que x^*_{n+i} es una variable básica, por lo que : $z^*_{n+i} = 0$

Por teorema V-2: ($y^*_i = z^*_{n+i}$) se prueba (a)

Por teorema V-4: ($y^*_{m+j} = z^*_j - c_j$) se prueba (b)

Como el dual es el primo:

$$x_j^* = 0 \quad \text{siempre que} \quad y_{m+j}^* > 0 \quad \text{para } (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{n+i}^* = 0 \quad \text{siempre que} \quad y_i^* > 0 \quad \text{para } (i = 1,2,\ldots,m)$$

La relación existente entre las dos soluciones óptimas, se conoce con el nombre de holgura complementaria .

Teorema V-5.-

Supóngase que existen soluciones factibles finitas para el primo y el dual. Sea $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ una solución básica factible no óptima y $(z_j - c_j)$ el coeficiente correspondiente de x_j en la ecuación (0), $(j = 1,2,\ldots,n+m)$.

Considere la siguiente solución básica **no factible** para el dual:

$$y_i = z_{n+i} \qquad \text{para } (i = 1,2,\ldots,m)$$
$$y_{m+j} = z_j - c_j \qquad \text{para } (j = 1,2,\ldots,n)$$

entonces:

$$Z_x = Z_y$$

es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Prueba.-

Usando la demostración del lema V-2 y por el teorema V-2, pero sin hacer alusión a la optimalidad, obtenemos que :

$$Z_x = \sum_{i=1}^{m} z_{n+i} b_i$$

$$Z_y = \sum_{i=1}^{m} z_{n+i} b_i$$

de donde:

$$Z_x = Z_y$$

Ejemplo V-4.-

Consideremos nuevamente nuestro ejemplo III-10:

Iteración	(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) Sol. básica factible [Ecuación (0)]	(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5) Sol. básica dual complementaria	Z_x	Z_y
1	(0.0.600.300.2400) $[Z_x - x_1 - 2x_2 = 0]$	(0.0.0.-1.-2) $[Z_y\ 600y_1 - 300y_2 - 2400y_3 = 0]$	0	0
2	(0.300.600.0.1200) $[Z - x_1 + 2x_4 = 600]$	(0.2.0.-1.0)	600	600
3	(400.300.200.0.0) $[Z + 2/3x_4 + 1/3x_5 = 1000]$	(0.2/3.1/3.0.0)	$Z^*_x = 1000$	$Z^*_y = 1000$

Es conveniente notar que en la iteración 1 tenemos una solución básica factible no óptima para el primo, mientras que, para el dual, tenemos una solución **no** factible pero **si** básica que es "mejor que la óptima dual".

Veamos, por medio de una representación esquemática, la relación que existe entre el problema primo y su dual.

	PRIMO	DUAL	
	$\text{Max } Z_x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\text{Min } Z_y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$	
	soluciones primas no factibles pero mejores que óptimas	Soluciones básicas duales no óptimas pero factibles	
Z^*_x	Soluciones básicas primas factibles pero no óptimas	Soluciones duales no factibles pero mejores que óptimas	Z^*_y

Al trabajar con las soluciones del primer cuadrante, estamos al mismo tiempo trabajando con las soluciones del segundo cuadrante.

Al trabajar con las soluciones del tercer cuadrante, estamos al mismo tiempo trabajando con las soluciones del cuarto cuadrante.

V-3.- METODO SIMPLEX DUAL.-

Este método trata directamente con soluciones básicas **no** factibles (mejores que el óptimo) y trabaja para obtener soluciones básicas factibles. Las soluciones complementarias, en el problema dual, son básicas factibles, pero no óptimas y se mueven hacia la optimalidad.

Aplicamos este método cuando, para obtener una solución básica factible inicial, es necesario introducir muchas variables artificiales (cuyo valor deberá llegar a cero), razón por la cual puede ser más conveniente el comenzar con una solución no factible (mejor que la óptima) y aplicar el Método Simplex Dual.

Otra aplicación frecuente, es en el caso del ánalisis post-óptimo, cuando se introducen cambios en el modelo que hacen que la solución óptima obtenida para el problema original ya no sea factible para el revisado, siendo entonces más rápido aplicar el Método Simplex Dual, partiendo de ésta última solución, que utilizar el Método Simplex para resolver, desde el principio, el problema revisado.

V-3.1.- Metodología del Método Simplex Dual.-

En el método Simplex Dual trabajamos siempre con $c'_j \geq 0$ para toda j y tratamos de Max Z, hasta el momento en que todas las b_i sean ≥ 0, en que hemos alcanzado la solución óptima.

Introdúzcanse variables de holgura (donde se requieren), para obtener un sistema de ecuaciones. Se localiza una solución básica tal, que los coeficientes en la ecuación (0) sean cero para las variables básicas y no negativos para las variables no básicas. (Vaya al paso 4).

Paso I.-

Determine la nueva variable básica saliente: seleccione la variable básica correspondiente al renglón r para el cual $b'_r = \min b_i < 0$ (nótese que esto es equivalente a determinar la variable básica entrante en el problema dual, ya que la variable con el valor más negativo, corresponde al mayor coeficiente negativo en la ecuación (0) del problema dual.)

Paso 2.-

Determine la nueva variable básica entrante (correspondiente a la columna e): seleccione la variable no básica cuyo coeficiente en la ecuación (0) llega primero a cero cuando un múltiplo creciente de la ecuación (r), conteniendo la variable básica saliente, se suma a la ecuación (0). Esto se logra revisando las variables no básicas con coeficientes negativos en esta ecuación (r) y seleccionando aquella que forme el cociente menor al dividir su coeficiente en la ecuación (0) entre el valor absoluto del coeficiente en esa ecuación. Así, tenemos que: $\frac{c_e}{|a_{re}|} = \min \frac{c_j}{|a_{rj}|}$ para $a_{rj} < 0$. Esto es equivalente a determinar la variable básica saliente en el problema dual. El coeficiente en la ecuación (0) que se hace cero primero, corresponde a la variable en el problema dual cuyo valor se hace cero primero al incrementar el valor de la variable entrante.

Paso 3.-

Determine la nueva solución básica (igual que en el Simplex, usando el Gauss-Jordan).

Paso 4.-

Determine si esta solución es factible (y por lo tanto óptima) ; revise si todas las variables básicas son no negativas (todas las $b_i \geq 0$); si lo son, pare, se ha llegado a la solución óptima, en caso contrario vaya al paso 1.

Se ve que el Método Simplex Dual, procede de tal forma como si el Método Simplex estuviese siendo aplicado a las soluciones básicas complementarias en el problema dual, sólo que se decide primero qué variable dejará la base y luego se decide qué variable no básica se introducirá en ella.

Ejemplo V-5.-

$$\text{Max } Z = -600x_1 - 300x_2 - 2400x_3$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 3x_3 &\geq 1 \\ x_2 + 4x_3 &\geq 2 \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

Nótese que el dual de este problema es nuestro ejemplo clásico, con la excepción de que aquí estamos Max. en lugar de Min.

La solución será:

$$\begin{aligned} z + 600x_1 + 300x_2 + 2400x_3 \qquad\qquad &= 0 \\ -x_1 \qquad\quad - 3x_3 + x_4 \qquad &= -1 \\ -x_2 - 4x_3 \qquad + x_5 &= -2 \end{aligned}$$

Nótese que la función objetivo parece indicar optimalidad, pero nuestra solución no es factible, ya que :

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_4 = -1 \\ x_2 = 0 & x_5 = -2 \\ x_3 = 0 & Z = 0 \end{array}$$

vemos que :

$x_s = x_5$ pues $b_2 = \min\limits_{bi<0} b$ es decir $(-2 < -1)$

$x_e = x_2$ pues $(300/1 < 2400/4)$

y obtenemos:

$$\begin{array}{rcccccl} z + 600x_1 & & + 1200x_3 & & + 300x_5 & = & -600 \\ - x_1 & & - 3x_3 & + x_4 & & = & -1 \\ & x_2 & + 4x_3 & & - x_5 & = & 2 \end{array}$$

y nuestra solución básica será ahora :

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0 & x_4 = -1 \\ x_2 = 2 & x_5 = 0 \\ x_3 = 0 & Z = -600 \end{array}$$

en este paso:

$x_s = x_4$ pues $(b_i = \min\limits_{bi<0} b_i)$

$x_e = x_3$ pues $(1200/3 < 600/1)$

con lo que llegamos a :

$$\begin{array}{rcccccl} Z + 200x_1 & & & + 400x_4 & + 300x_5 & = & -1000 \\ 1/3x_1 & & + x_3 & - 1/3x_4 & & = & 1/3 \\ - 4/3x_1 & + x_2 & & + 4/3x_4 & - x_5 & = & 2/3 \end{array}$$

y la solución básica será:

$$
\begin{array}{ll}
x_1^* = 0 & x_4^* = 0 \\
x_2^* = 2/3 & x_5^* = 0 \\
x_3^* = 1/3 & Z_x^* = -1000
\end{array}
$$

solución que, al ser factible, es automáticamente óptima.

La solución óptima para el problema dual será:

$$
\begin{array}{ll}
y_1^* = 400 & x_4^* = 0 \\
y_2^* = 300 & y_5^* = 0 \\
y_3^* = 200 & Z_y^* = 1000
\end{array}
$$

solución que es igual a la obtenida usando el método Simplex para el dual de este problema.

Ejemplo V-6.-

Resolver el siguiente problema usando el método Simplex Dual:

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\text{Max } Z = & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 & -x_4 & -5x_5 & & \\
\text{s.a.} & x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq & -3 \\
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & \leq & -2 \\
 & x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -3x_5 & \leq & 4 \\
 & & & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) & & & \geq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrrrl}
Z & +3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_4 & +5x_5 & & & & = 0 \\
 & x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & & = -3 \\
 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & & +x_7 & & = -2 \\
 & x_1 & +x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -3x_5 & & & +x_8 & = 4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x_s = x_6 \\
x_e = x_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Z & +\,5x_1 & & & +\,3x_4 & +\,7x_5 & +\,2x_6 & & & = & -6 \\
 & -1/2x_1 & +\,x_2 & -\,1/2x_3 & -\,1/2x_4 & -\,1/2x_5 & -\,1/2x_6 & & & = & 3/2 \\
 & -3/2x_1 & & -\,1/2x_3 & +\,1/2x_4 & +\,1/2x_5 & -\,1/2x_6 & +\,x_7 & & = & -1/2 \\
 & 3/2\,x_1 & & -5/2\,x_3 & +\,5/2x_4 & -\,5/2x_5 & +\,1/2x_6 & & +\,x_8 & = & 5/2
\end{array}
$$

$$x_s = x_7$$

$$x_e = x_3$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Z & +\,5x_1 & & & +3x_4 & +\,7x_5 & +\,2x_6 & & & = -6 & \phi \\
 & -\,2x_1 & +\,x_2 & & & & -\,x_6 & +\,x_7 & & = \;1 & 1 \\
 & 3x_1 & & +\,x_3 & -\,x_4 & -\,x_5 & +\,x_6 & -\,2x_7 & & = \;1 & \infty \\
 & 9x_1 & & & & -\,5x_5 & +\,3x_6 & -\,5x_7 & +\,x_8 & = \;5 & \infty
\end{array}
$$

como el coeficiente de $x_7 = 0$, entonces existen soluciones múltiples. Se aplica ahora el Simplex:

$$x_e = x_7$$

$$x_s = x_2$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
Z & +\,5x_1 & & & -\,3x_4 & +\,7x_5 & +\,2x_6 & & & = -6 \\
 & -\,2x_1 & +\,x_2 & & & & -\,x_6 & +\,x_7 & & = \;1 \\
 & -\,x_1 & +\,2x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & -\,x_5 & -\,x_6 & & & = \;3 \\
 & -\,x_1 & +\,5x_2 & & & -5x_5 & -\,2x_6 & & +\,x_8 & = 10
\end{array}
$$

(*).-NOTA.-Si al no darnos cuenta de que: $\frac{0}{1/2} < \frac{5}{3/2}$ al iniciar la segunda iteración, hubiésemos tomado:

$$x_s = x_7$$

$$x_e = x_1$$

$$
\begin{array}{lllllllllll}
Z & & -\,5/3x_3 & +\,14/3x_4 & +\,26/3x_5 & +\,1/3x_6 & +\,10/3x_7 & & = & -23/3 & \phi \\
 & x_2 & +\,2/3x_3 & -\,2/3x_4 & -\,2/3x_5 & -\,1/3x_6 & -\,1/3x_7 & & = & 5/3 & 5/2 \\
x_1 & & +\,1/3x_3 & -\,1/3x_4 & -\,1/3x_5 & +\,1/3x_6 & -\,2/3x_7 & & = & 1/3 & 1 \\
 & & -\,3x_3 & +\,3x_4 & -\,2x_5 & & -\,x_7 & +\,x_8 & = & 2 & \infty
\end{array}
$$

$$x_e = x_3$$
$$x_s = x_1$$

$$\begin{array}{lllllllllll}
Z & +5x_1 & & & +3x_4 & +7x_5 & +2x_6 & & & = & -6 \\
& -2x_1 & +x_2 & & & & -x_6 & +x_7 & & = & 1 \\
& 3x_1 & & +x_3 & -x_4 & -x_5 & +x_6 & -2x_7 & & = & 1 \\
& 9x_1 & & & & -5x_5 & +3x_6 & -5x_7 & +x_8 & = & 5
\end{array}$$

Con lo que el problema se hubiese alargado innecesariamente.

Ejemplo V-7.-

Primo

$$\text{Max } Z_x = x_1 + 4x_2 + 5x_3$$
s.a.
$$\begin{array}{rl}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \leq 2 \\
3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 9 \\
-2x_1 + x_2 + 8x_3 & \leq 16 \\
(x_1, x_2, x_3) & \geq 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
& Z & -x_1 & -4x_2 & -5x_3 & & & & = & 0 \\
(y_1) & & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x4 & & & = & 2 \\
(y_2) & & 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & = & 9 \\
(y_3) & & -2x_1 & +x_2 & +8x3 & & & +x_6 & = & 16
\end{array}$$

$$x_e = x_3$$
$$x_s = x_4$$

$$\begin{array}{llllllllll}
& Z & +2/3x_1 & -2/3x_2 & & +5/3x_4 & & & = & 10/3 \\
(y_6) & & +1/3x_1 & +2/3x_2 & +x_3 & +1/3x_4 & & & = & 2/3 \\
(y_2) & & +7/3x_1 & -1/3x_2 & & -2/3x_4 & +x_5 & & = & 23/3 \\
(y_3) & & -14/3x_1 & -13/3x_2 & & -8/3x_4 & & +x_6 & = & 32/3
\end{array}$$

$$x_e = x_2$$
$$x_s = x_3$$

	Z	$+\ x_1$		$+\ x_3$	$+\ 2x_4$			$=\ 4$
(y_5)		$1/2x_1$	$+x_2$	$+\ 3/2x_3$	$+1/2x_4$			$=\ 1$
(y_2)		$5/2x_1$		$+\ 1/2x_3$	$-\ 1/2x_4$	$+x_5$		$=\ 8$
(y_3)		$-\ 5/2x_1$		$+\ 13/2x_3$	$-\ 1/2x_4$		$+x_6$	$=15$

Dual:

$$\text{Min } Z_y = 2y_1 + 9y_2 + 16y_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 - 2y_3 &\geq 1 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 &\geq 4 \\ 3y_1 + 2y_2 + 8y_3 &\geq 5 \\ (y_1, y_2, y_3) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Max } Z_y = -2y_1 - 9y_2 - 16y_3$$

	Z	$+2y_1$	$+9y_2$	$+16y_3$				$=\ 0$
(x_1)		$-\ y_1$	$-3y_2$	$+2y_3$	$+y_4$			$=-1$
(x_2)		$-2y_1$	$-\ y_2$	$-\ y_3$		$+\ y_5$		$=-4$
(x_3)		$-3y_1$	$-2y_2$	$-8y_3$			$+\ y_6$	$=-5$

$$y_s = y_6$$
$$y_e = y_1$$

	Z		$+23/3y_2$	$+32/3y_3$			$+2/3y_6$	$=-10/3$
(x_1)			$-\ 7/3y_2$	$+14/3y_3$	$+y_4$		$-1/3y_6$	$=\ 2/3$
(x_2)			$1/3\ y_2$	$+13/3y_3$		$+y_5$	$-2/3y_6$	$=-\ 2/3$
(x_4)		y_1	$+2/3y_2$	$+\ 8/3y_3$			$-1/3y_6$	$=\ 5/3$

$$y_s = y_5$$
$$y_e = y_6$$

	Z		$+\ 8y_2$	$+\ 15y_3$		$+\ y_5$		$=-4$
(x_1)			$-\ 5/2y_2$	$+\ 5/2y_3$	$+y_4$	$-1/2y_5$		$=\ 1$
(x_3)			$-\ 1/2y_2$	$-\ 13/2y_3$		$-3/2y_5$	$+y_6$	$=\ 1$
(x_4)		y_1	$+\ 1/2y_2$	$+\ 1/2y_3$		$-1/2y_5$		$=\ 2$

V-4.-INTERPRETACION ECONOMICA.-

La reciente introducción de la programación lineal en la economía parece ser un anacronismo. Parecerá lógico que hubiese comenzado alrededor de 1758, cuando los economistas comenzaron a describir los sistemas económicos en términos matemáticos. Un crudo ejemplo de un modelo matemático de programación lineal puede ser encontrado en el "Tableau Economique" de Quesnay. Sin embargo, no fué sino hasta los 1930's en que se comenzó la explotación del modelo de tipo lineal en economía.

La mayor parte de los economistas matemáticos se ocuparon con el análisis de problemas teóricos, asociados con la posibilidad de equilibrio económico y eficiencia distributiva, bajo condiciones competitivas y monopolísticas. Para tales estudios, encontraron el uso de funciones convexas clásicas, con derivadas continuas, más convenientes para las demostraciones de condiciones de estabilidad que utilizando funciones basadas en desigualdades lineales.

Hasta esos días, el mundo económico usaba el modelo económico para describir, en una forma "cualitativa" en lugar de "cuantitativa", las supuestas interelaciones dentro de un sistema.

La inspiración del modelo general de programación lineal, fué completamente independiente a los desarrollos anteriores y tuvo un propósito diferente. Surgió de las necesidades de programación empíricas de la fuerza aérea y de la posibilidad de generalizar la estructura práctica simple del modelo de Leontief para este propósito.

La mayor contribución de Leontief, fue la construcción de un modelo <u>cuantitativo</u> de la economía americana, con el propósito de trazar el impacto de la política gubernamental y de las tendencias del consumidor sobre un gran número de industrias, embebidas en una compleja serie de interrelaciones.

Cabe hacer notar que el obstáculo para el desarrollo de modelos cuantitativos era la ausencia de computadores, lo cual limitaba el modelo a 20 ecuaciones con 20 incógnitas.

Para 1940, el análisis de regresión se empezaba a utilizar para medir fenómenos económicos. Este hecho dió nuevo impulso a los modelos cuantitativos.

El punto focal del análisis de consumo producción, es una disposición de coeficientes llamados "la matriz consumo-producción" ó "tabla económica". Una columna de esta matriz representa los requerimientos de consumo de varios artículos para la producción de otro particular artículo con valor de un peso.

Existe exactamente una columna para cada artículo producido en la economía.

Vemos entonces que la producción de un artículo, corresponde al concepto de una actividad en el modelo de programación Lineal. Si los factores de consumo que aparecen en un renglón de la matriz se multiplican por el total correspondiente a la producción de las industrias que compran, los totales horizontales representan la distribución del valor monetario de las compras entre las industrias proveedoras. De aquí que el modelo haga posible, no sólo el determinar la relación de producción para satisfacer la demanda directa, sino que también traza los efectos indirectos de los gastos gubernamentales sobre cada industria.

En 1947 T.C. Hoopmans atrajo la atención de los economistas hacia el potencial de los modelos de programación lineal, usando para ello los modelos de transporte.

En 1951, Dorfman expresó, en términos de programación lineal, la teoría económica de una empresa bajo condiciones competitivas y monopolísticas y comparó la aplicabilidad de esta teoría con el tradicional análisis marginal.

El número de aplicaciones prácticas continúa creciendo y se usa la programación lineal para estudiar industrias específicas.

Mirando ahora en nuestro modelo dual, podemos distinguir los siguientes puntos:

C_j está dada en pesos por unidad de actividad (j), pues dijimos que era el costo (o ganancia) de operar la actividad (j).

a_{ij} está dada en unidades de recurso (i) por una unidad de actividad (j), por lo tanto y deberá estar dado en pesos por unidad de recurso (i), puesto que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$$

Debido a las unidades que tiene y_i, se le conoce como "el precio unitario del recurso (i)", esto es, y_i representa el valor IMPLICITO que el recurso tiene para el que lo utiliza.

Así, $a_{ij}\, y_i$, cuyas unidades son:

$$\frac{\text{unidad de recurso (i)}}{\text{unidad de actividad (j)}} \quad \frac{\$}{\text{unidad de recurso (i)}} = \frac{\$}{\text{unidad de actividad (j)}}$$

representa el costo de operar la actividad (j) en la parte correspondiente al recurso (i).

Tenemos así que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ representará el costo implícito total de operar la actividad (j).

Dado que y_i es un valor intrínseco y $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ el costo de operar la actividad (j), vemos que, dependiendo de la eficiencia con que operamos nuestra actividad, consumiremos más o menos recursos para la misma producción, de aquí que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$$

es decir, que cuando utilizemos nuestros recursos en la forma más eficiente, será cuando como máximo podamos obtener c_j , pues si no utilizamos bien el recurso, su costo implícito será mayor que la ganacia o costo c_j.

El objetivo dual $Z_y = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$, establece que el precio de los recursos, debe ser fijado de tal forma que se minimice el costo implícito total al usuario, por lo tanto, y_i^* representa el valor implícito real por unidad del recurso respectivo.

El valor implícito del recurso (i) es cero ($y_i^* = 0$) cuando el suministro de ese recurso no se agota debido a las actividades (esto es, $x_{n+i} > 0$) (corolario V-1).

Si consideramos las leyes de la oferta y la demanda en economía, vemos que cuando un artículo tiene una oferta excesiva, su precio debe ser cero; en este caso tenemos lo que se conoce como artículos libres (por ejemplo el aire).

El corolario V-1, también nos indica que el valor implícito de los recursos necesarios para una unidad de actividad (j), iguala a la ganancia unitaria, siempre que la actividad (j) se opere a un nivel positivo ($x_j^* > 0$) .

$$y_{m+j}^* = 0 \text{ , así que: } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$$

De aquí que una actividad no será usada, si el valor implícito de los recursos requeridos excede la ganancia derivada de la actividad.

En realidad, lo que y_i^* representa, es el valor marginal del recurso (i), ya que y_i^* es la tasa mediante la cual la ganancia se incrementa (decrece) si la cantidad de recurso (i) fuese incrementada (disminuida) sobre un rango dado (al rango de b sobre el cual la base óptima original no se cambia y por lo tanto $y_i^* = z_{n+i}^*$ no se cambia).

V-5.- CONCLUSIONES.-

De todo lo visto con anterioridad, ha quedado claro que al resolver un problema de programación lineal, podemos escoger entre trabajar con el problema original (primo) o con su dual. Debido a que, como regla general, el número de iteraciones requerido para resolver un problema de programación lineal es igual a una o una y media veces el numero de restricciones, nosotros podemos, mediante una selección adecuada, facilitar la computación, especialmente en aquellos casos en que existe una marcada diferencia en el número de renglones para cada uno de los dos problemas.

V-6.- PROGRAMACION LINEAL DE ENTEROS.-

Surgió de la necesidad de resolver problemas en los cuales se requiere una solución entera (p.ej. asignar hombres a las máquinas).

Lo usual, en la mayoría de los casos, es utilizar el Método Simplex (ignorando las restricciones de enteros), para luego redondear la solución a valores enteros. Aunque esto resulta adecuado en algunas ocasiones, en muchas otras, la solución obtenida después de redondear la solución óptima no entera, puede no ser factible.

Ejemplo V-8.-

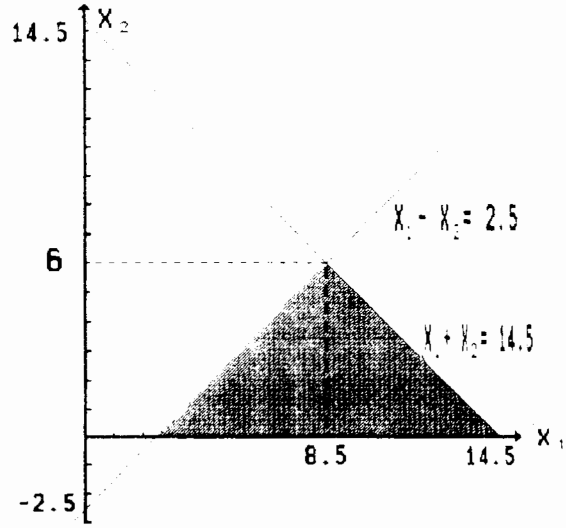
Sean las siguientes restricciones:

$$x_1 - x_2 \geq 2.5$$
$$x_1 + x_2 \leq 14.5$$

y que mediante el Método Simplex hemos obtenido la solución óptima siguiente:

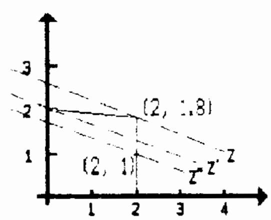
$$x_1^* = 8.5$$
$$x_2^* = 6$$

En este problema es imposible redondear x_1 ni a 8, ni a 9 y obtener una solución factible, la cual puede ser obtenida solamente si también cambiamos el valor de x_2. Es lógico que las complicaciones aumenten con el número de restricciones.



Otro problema estriba en que la solución redondeada puede estar muy lejos de la solución óptima de enteros.

Ejemplo V-9.-



(2,1.8) = sol. óptima fraccionaria.

(2,1) = sol. óptima redondeada.

(0,2) = sol. óptima de enteros.

El algorítmo que se utiliza para obtener soluciones óptimas de enteros, es a grandes rasgos el siguiente:

Se resuelve el problema, ignorando las restricciones de enteros, en la forma normal y si resulta una solución óptima que satisfaga las restricciones de enteros, esta solución resuelve el problema original. Si resulta una solución no entera, se modifica el problema original, agregándole una nueva restricción que elimine algunas soluciones no enteras (incluyendo la solución óptima fraccionaria obtenida), pero ninguna de las enteras. La obtención de esta restricción es el punto clave del algoritmo. Se vuelve a resolver el nuevo problema y si se obtiene una solución óptima de enteros, hemos terminado, en caso contrario, volvemos a agregar una nueva restricción con las características de la anterior. Finalmente se deberá llegar a una solución óptima de enteros.

V-7.- EJERCICIOS PROPUESTOS.-

Problema 1.-

Los resonadores de cristal de cuarzo son altamente estables y son usados en la industria electrónica para circuitos controlados de baja frecuencia y filtros de ondas. La Compañía de Cristal del D.F., es una pequeña firma que procesa barras de cuarzo naturales y sintéticas para producir elementos de cristales de cuarzo. Estos son pequeñas tiras de ciertas dimensiones, bañadas en oro-plata y herméticamente selladas en sobres metálicos o de vidrio. El tipo de cristal se conoce con el nombre de la abcisa específica del plano atómico del cual es cortado, por ejemplo AT, BT y CT. Las operaciones de los fabricantes son: cortar, bañar (en oro ó plata) y envasar. La producción específica y la información del costo se pueden ver en la siguiente tabla :

UNIDAD DE TIEMPO DE MANUFACTURA (HORAS)

Tipo de cristal	cortar	bañar	envasar	ganancia por unidad
AT	.10	.05	.07	$ 0.21
BT	.24	.12	.09	$ 0.48
CT	.25	.21	.12	$ 0.60

Las capacidades de las operaciones de manufactura son: 80 hrs. para cortar, 60 hrs. para bañar y 50 hrs. para envasar.

Formule el problema en términos de programación lineal si se desea maximizar la utilidad. Formule el dual e interprete. Dé el primo y el dual en un solo tablero.

Problema 2.-

La compañía Manufacturera M.E.M. planea agregar un nuevo producto a su producción presente. Habrá dos diferentes modelos de este producto, el modificado y el estándar. El modelo estándar se puede producir en cualquiera de sus tres plantas: A,B y C. Sin embargo el modificado se puede producir sólo en B y C. El modelo estándar requerirá 6 horas hombre de trabajo en A, 3 en B y 4 en C. El modelo modificado requerirá 4 horas hombre en B y 5 en C. El total de horas hombre disponible para el producto son: 2000 en A, 6000 en B y 4000 en C. El salario por hora en estas plantas es de:

$ 15.00 en A. $ 30.00 en B y $ 20.00 en C. El material y otros costos directamente relacionados con la producción de estos modelos, son de $100.00 para el estándar y $ 150.00 para el modificado. La compañía planea vender el modelo estándar en $ 300.00 y el modificado en $ 400.00. El departamento de Investigación de Mercados de la compañía reporta que no se debe esperar vender más de 2000 unidades del estándar y 1500 unidades del modificado.

Formule este problema como uno de Programación Lineal si se desea maximizar la utilidad. Formule el dual y dé una interpretación. Dé la formulación del primo y el dual en un solo tablero.

Problema 3.-

Una compañía produce un artículo cuya demanda varía mes con mes. La materia prima y la disponibilidad de mano de obra presentan variaciones estacionales. La información necesaria se presenta a continuación.

mes	Costo de Mano de Obra ($/ton de art.)		Disponibilidad de Mat. Prima (ton)	Demanda del Artículo (ton)	Precio de Materia Prima ($/ton)
	Tiempo normal	Tiempo extra			
1	40	60	600	400	180
2	40	60	450	700	180
3	40	60	425	600	180
4	60	90	1200	900	250
5	60	90	1300	900	250
6	60	90	1600	900	250
7	60	90	1600	800	250
8	60	90	1500	600	250
9	60	90	1300	800	250
10	40	60	500	1200	300
11	40	60	500	1100	300
12	40	60	500	1400	300

Para producir una unidad de producto se requiere media unidad de materia prima. Durante los meses 10, 11, 12, 1, 2, 3, la compañía puede contratar, como máximo, una cantidad de mano de obra suficiente para producir 1200 y 600 tons. por mes durante tiempo normal y tiempo extra respectivamente. En los meses 4, 5, 6, 7, 8, 9, estas capacidades de trabajo son 800 y 500 tons. respectivamente. La producción de un mes puede ser vendida en cualquier tiempo del siguiente mes o más tarde. Los costos de almacenaje son de $ 10 por tonelada de producto almacenado de un mes al siguiente. La materia prima no puede ser almacenada, por lo que esta debe utilizarse en el mismo mes en el que se adquiere. Las operaciones empiezan en el mes 1, con una existencia de 50 ton. del producto. Al final del mes 12, la compañía debe tener una existencia de al menos 50 toneladas del producto. Determine una programación óptima de la producción, a través de la formulación de un modelo de programación lineal que minimice el costo total.

Formule el dual. Dé una interpretación del problema dual.

Problema 4.-

Una compañía produce un pequeño componente para un producto industrial y lo distribuye a 5 fabricantes mediante un proyecto de "entrega" fijo de 25 pesos por unidad. Los pronósticos de venta indican que las entregas del mes serán de 2700 unidades para el fabricante 1, 2700 unidades para el fabricante 2, 9000 unidades para el fabricante 3, 4500 unidades para el fabricante 4, 3600 unidades para el fabricante 5.

Las capacidades de producción mensual son de 4500 unidades en la planta 1, 9000 en la planta 2 y 11250 en la planta 3. Los costos directos de producir cada unidad son de $ 20.00 en la planta 1, $ 10.00 en la planta 2 y 18.00 en la planta 3.

Los costos de transportar una unidad de la planta al fabricante son los siguientes:

	Fabricante 1	Fabricante 2	Fabricante 3	Fabricante 4	Fabricante 5
Planta 1	$0.5	$0.7	$1.1	$1.5	$1.6
Planta 2	$0.8	$0.6	$1.0	$1.2	$1.5
Planta 3	$1.0	$0.9	$0.9	$1.0	$1.6

Formula un modelo de programación lineal para encontrar la producción óptima en cada planta y para ver cuántos componentes manda cada planta a cada fabricante para minimizar el costo total. Exprese su dual.

Problema 5.-

La contadora Lucía B. de una Cía. publicitaria, ha anunciado que puede distribuir inversiones publicitarias de sus clientes por medio de la programación lineal. Su manera de actuar es identificar varios auditorios con los cuales su cliente se quiere comunicar, tal como adolescentes, matrimonios jóvenes, el grupo geriátrico, etc. Sea i el i-ésimo auditorio. El cliente debe especificar un nivel deseado de exposición E para cada auditorio i. Entonces, cada medio de publicidad (como Selecciones, un spot comercial de televisión en la noche, un aviso a colores en el periódico dominical, etc.) se evalúa por su efectividad en cada una de las categorías de auditorio identificadas. Sea j el j-ésimo medio publicitario y a_{ij} la efectividad evaluada para el i-ésimo auditorio de distribuir un peso al j-ésimo medio.

Cada variable de decisión se denota por x_j, la cual representa el total de pesos destinados al j-ésimo medio de publicidad durante la campaña de programación. El objetivo de su cliente es minimizar el total de gasto publicitario, pero cumpliéndose los niveles deseados de exposición del producto.

i) Supongamos que hay cuatro auditorios y cinco medios de publicidad. Escriba el modelo de programación lineal requerido para la descripción anterior.

ii) Formule e interprete el problema dual.

Problema 6.-

El Departamento de Policía Xochimilco tiene el siguiente requerimiento mínimo diario de policías hombres y mujeres:

Horas del día (reloj de 24 horas)	Período	Número mínimo de policías requeridos durante el periodo
2–6	1	22
6–10	2	55
10–14	3	88
14–18	4	110
18–22	5	44
22–2	6	33

Nota: *Se considera que el período 1 sigue inmediatamente después del período 6.*

Cada persona trabaja 8 horas consecutivas. Sea x_f el número de personas que empiezan a trabajar en el periodo f todos los dias. El departamento de policia desea obtener una asignación diaria que emplee el menor número posible de policias, tomando en cuenta que se cumplan todos los requerimientos.

Formular un modelo de programación lineal, de tal manera que se obtenga una asignación óptima. Exprese su dual y trate de darle una interpretación.

Problema 7.-

Proporcione el dual del siguiente modelo:

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4$$

s.a.

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 10 \\
+ 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &\leq 12 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad &\geq -6 \\
6x_1 \quad + x_4 &\leq 15 \\
x_i &\geq 0 \qquad (i = 1,2,3)
\end{aligned}$$

Problema 8.-

Para el siguiente modelo:

a) construya el dual correspondiente.

b) obtenga las soluciones correspondientes no factibles para el dual (para cada iteración) tal que: $Z_x = Z_y$

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned}
x_1 \quad &\leq 4 \\
x_2 &\leq 6 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18
\end{aligned}$$

Para el siguiente modelo:

a) obtenga el dual.

b) proporcione la solución utilizando el método Simplex Dual.

c) compare con la solución gráfica.

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

Problema 9.-

Considere el problema:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 8x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1,2) \end{aligned}$$

a) Obtener el problema dual.

b) Resuelva gráficamente el problema primo y el problema dual. Identifique las esquinas que den soluciones basicas factibles y no factibles para ambos problemas.

c) Use la información obtenida en el inciso (b) y construya una tabla en la que se listen las soluciones básicas para estos problemas (primo y dual).

d) Resuelva el problema primo por el método Simplex. Después de cada iteración identifique la solución básica factible para este problema y la solución básica complementaria para el problema dual.

Problema 10.-

Considere el siguiente modelo:

$$\text{Max } Z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

s.a.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 17 \\ -2x_1 + 4x_2 &\leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leq 10 \\ x_i &\geq 0 \quad (i=1,2,3) \end{aligned}$$

a) Obtenga el óptimo usando el método Simplex.

b) ¿Cual es el modelo dual correspondiente?

c) ¿Cuál es la solucion óptima para el problema dual? Use el Método Simplex Dual

Problema 11.-

Usando notación matricial (capítulo I), si el problema primo es maximizar CX sujeto a $AX \leq B$ y $X \geq 0$, entonces el problema dual será minimizar B^TY sujeto a $A^TY \geq C^T$ y $Y \geq 0$

Use solo esta información de la teoría dual para probar cada uno de los siguientes enunciados:

a) El dual del dual es el problema primo.

b) Si el problema primo es maximizar CX sujeto a $AX = B$, y $X \geq 0$, entonces el problema dual será minimizar B^T sujeto a $A^TY \geq C^T$ (con "Y" no restringida en signo).

c) Si el problema primo (como se dá en el enunciado del problema) tiene solución óptima no acotada, el problema dual no tiene solución factible.

CAPITULO VI

METODO SIMPLEX REVISADO

VI-1.- PROCEDIMIENTO.-

El Método Simplex Revisado es una versión especial del Método Simplex y también fue desarrollado por G.B. Dantzig y sus colaboradores de la Rand Corporation.

En tanto que cada iteración del Método Simplex requiere que una nueva tabla sea calculada y almacenada (proceso poco eficiente al ser implementado en una computadora digital, por la gran cantidad de memoria requerida para almacenar cifras que no son útiles para decisiones posteriores), el Método Simplex Revisado, diseñado para obtener exactamente las mismas cosas que el Simplex original, sólo calcula y almacena las piezas de información relevantes en cada iteración, por lo que este procedimiento, al ser más conveniente, es el que se utiliza en las computadoras digitales. Con este método se optimiza el tiempo de máquina y se permite, dada una capacidad limitada de memoria, la solución de problemas más grandes que con el uso del Simplex original.

La idea básica detrás del Método Simplex Revisado, es el uso de un conjunto de números llamados "multiplicadores simplex" o "precios", junto con la inversa de la base, utilizados para generar directamente, partiendo de las ecuaciones originales, la información precisa requerida para las decisiones de esa iteración. Si consideramos que es común que 90% o más de coeficientes cero existan en los datos originales. es evidente la bondad del método al requerirse muchas menos multiplicaciones.

La información relevante en cada iteración es la siguiente:

a) Los coeficientes de las variables no básicas en la función objetivo (ecuación 0).

b) Los coeficientes que tenga la variable que entrará en la base (x_e), en todas las otras ecuaciones de las restricciones (ecs. 1,2,.....,m).

c) El lado derecho de las ecuaciones (b_i) para ($i = 1,2,....,m$).

A pesar de la eficiencia de este método, para cálculos manuales se recomienda el uso del Método Simplex Original.

El Método Simplex Revisado utiliza explícitamente operaciones con matrices, por lo que describiremos el problema usando notación matricial.

Existen dos versiones de este método, cuya única diferencia es la manera en que la matriz inversa se almacena. Estas son:

1) La forma explícita

2) La forma de producto

Recordamos que nuestro modelo matemático de programación lineal, una vez introducidas las variables de holgura, puede ser representado como:

(1) ... $\text{Max } Z = CX$ ó ($\text{Max } Z - CX = Z_o$)

sujeto a:

(2) $$\sum_{j=1}^{n} x_j P_j = P_o$$

(3) $$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,...,n)$$

donde:

$$P_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad P_o = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

y: $[a_{ij}, b_i, c_j]$ son constantes.

El Método Simplex requiere que m de los vectores P_j sean independientes.

Sea:

$$[\, P_{B1},\, P_{B2},\, \dots,\, P_{Bm} \,]$$

tal conjunto de vectores independientes, ellos forman una base B del conjunto de vectores $(P_1, P_2, \dots\dots, P_n)$.

$$(4) \dots \quad B = [P_{B1}, P_{B2}, \dots, P_{Bm}] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} \dots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

La anterior matriz B, se obtiene eliminando las columnas correspondientes a los coeficientes de las variables no básicas en la matriz [A, I], obtenida al introducir las variables de holgura al sistema original y formar uno canónico para ellas.

Las variables básicas serían entonces :

$$X_B = \{ x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm} \}$$

y el sistema original quedaría representado por :

$$(P_{B1}, P_{B2}, \dots, P_{Bm}) \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = BX_B = P_o$$

debido a que todas las variables no básicas valen cero y las eliminamos de consideración.

En general, una forma canónica se obtiene premultiplicando ambos lados de las ecuaciones (2) por B^{-1}, esto es:

$$(5) \dots (B^{-1}P_1)x_1 + (B^{-1}P_2)x_2 + \dots + (B^{-1}P_n)x_n = B^{-1}P_o$$

ó:

$$(6) \dots \overline{P_1}x_1 + \overline{P_2}x_2 + \dots + \overline{P_n}x_n = \overline{P_o}$$

donde:

$$(7) \ldots \begin{cases} B^{-1}P_j = \overline{P_j} \\ B^{-1}P_o = \overline{P_o} \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

son las "representaciones" de P_j y P_o en términos de la base. Nótese que debido a que $B^{-1}B = I$, tenemos que:

$$\overline{P_{Bi}} = B^{-1} P_{Bi} = U_i$$

donde U_i es un vector unitario, con un uno en el elemento (i) y ceros en los demás. Pero ésto, por definición, significa que la ecuación (6) está en forma canónica con variables básicas :

$$X_B = \left\{x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}\right\}$$

La solución básica se obtiene haciendo todas las variables no básicas $x_j = 0$, por lo que el valor de las variables básicas estará dado por :

$$U_1 x_{B1} + U_2 x_{B2} + \ldots + U_m x_{Bm} = \overline{P_o}$$

entonces :

$$X_B = B^{-1}P_o = \overline{P_o}$$

Los factores de costo c'_j se obtienen eliminando x_{Bi} $(i = 1, 2, \ldots, m)$ de la ecuación Z.

Definamos el siguiente vector renglón:

$$\gamma = [\, c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm} \,]$$

teniendo en cuenta que estos coeficientes se toman con el signo que tengan del lado derecho de la ecuación (0).

Si premultiplicamos ambos lados de la ecuación (6) por γ , obtendremos:

$$(8) \ldots (\gamma \overline{P_1})x_1 + (\gamma \overline{P_2})x_2 + \ldots + (\gamma \overline{P_n})x_n = (\gamma \overline{P_o})$$

donde:

$$(\gamma \overline{P_j}) = \text{cte.}$$

en especial:

$$\gamma \overline{P_{Bi}} = \gamma U = c_B$$

de forma que la ecuación (8) tiene los mismos coeficientes para las variables básicas que la ecuación (1) ; de aquí que sumando la ecuación (8) a la (1) eliminamos las variables básicas, obteniendo:

$$Z + (-c_1 + \gamma \overline{P_1})x_1 + (-c_2 + \gamma \overline{P_2})x_2 + \ldots + (-c_n + \gamma \overline{P_n})x_n = Z_o + (\gamma \overline{P_o})$$

donde:

$$\begin{aligned} c_j' &= -c_j + \gamma \overline{P_j} = -c_j + \gamma(B^{-1} P_j) \\ &= -c_j + (\gamma B^{-1}) P_j \\ &= -c_j + \pi P_j \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que c_j toma el signo que tiene del lado derecho de la ec. (0) y que es afectado por el (-1) que tiene en esta ecuación.

Tenemos entonces que:

$$(9) \ldots \quad \pi = \gamma B^{-1} \qquad \text{(ver lema V-2b)}$$

lo que implica que los coeficientes c_j' son obtenidos restando de c_j una suma ponderada de los coeficientes $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, donde los factores (iguales para todos los valores de j), son los m componentes $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ de π.

Los elementos π_i del vector π, se conocen como los multiplicadores simplex y se definen como los números tales que la suma ponderada obtenida de multiplicar la 1a. ecuación del sistema original por π_1, la 2a. por π_2 etc. y sumando, eliminará, cuando se reste de la ec. (0) original, las variables básicas y conducirá a la ecuación (0) modificada actual.

Lo anterior queda claro si multiplicamos la ec. (9) por B:

$$\pi B = \gamma B^{-1} B = \gamma$$

es decir:

$$\pi (P_{B1}, P_{B2}, \ldots, P_{Bm}) = (c_{B1}, c_{B2}, \ldots, c_{Bm})$$

y en particular:

$$\pi P_{Bi} = c_{Bi} \qquad \text{(ver lema V-2b)}$$

De nuevo, la solución básica es óptima si todas las $c_j' \geq 0$. De no ser así, entonces una solución mejorada es buscada. Para estos se escoge "e" de tal forma que :

$$c'_e = \min c'$$

e incrementando el valor de x_e tanto como sea posible, hasta el valor $x_e = x^*_e$, en donde algún componente "p" del vector ($\overline{P_o} - \overline{P_e}\, x_e$) cambie de signo, mientras que los demás siguen no negativos.

Los componentes de $\overline{P_o}$, $\overline{P_e}$, así como "p", se definen de la siguiente manera:

$$\overline{P_o} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b'_n \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{P_e} = \begin{bmatrix} a'_{1e} \\ a'_{2e} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_{ne} \end{bmatrix} \quad ; \quad x^*_e = \frac{b'_p}{a'_{pe}} = \min_{a'_{ie}>0} \frac{b'_i}{a'_{ie}}$$

de aquí que P_{Bp} es reemplazado en la base por P_e para formar la base B* del siguiente ciclo.

VI-1.1 Transformación del ciclo K al K + 1.-

El último paso en el proceso Simplex, es el transformar la tabla simplex pivoteando en a'_{pe} . Aquí lo que se utiliza , en lugar de ésto, es el inverso de la nueva base para ajustar ligeramente las representaciones de P_j y P_o, dadas en términos de la "vieja" base B por:

$$B^{-1}\, P_j = \overline{P_j}$$

$$B^{-1}\, P_o = \overline{P_o}$$

para obtener su nueva representación en términos de la nueva base B*.

Dado que :

$$\overline{P_j} = B^{-1}\, P_j$$

entonces:

$$P_j = B\,\overline{P_j}$$

de donde:

$$(10) \ldots P_e = [P_{B1}, P_{B2}, \ldots, P_{Bm}] \begin{bmatrix} a'_{1e} \\ a'_{2e} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a'_{me} \end{bmatrix}$$

$$= P_{B1}a'_{1e} + P_{B2}a'_{2e} + \ldots + P_{Bp}a'_{pe} + \ldots + P_{Bm}a'_{me}$$

donde:

$$\{ a'_{1e}, a'_{2e}, \ldots, a'_{me} \}$$

es la representación de P_e en términos de B.

Despejando P_{Bp} de la ecuación (10):

$$P_{Bp} = -P_{B1}\frac{a'_{1e}}{a'_{pe}} - P_{B2}\frac{a'_{2e}}{a'_{pe}} - \ldots - P_e\frac{1}{a'_{pe}} - \ldots - P_{Bm}\frac{a'_{me}}{a'_{pe}}$$

es decir:

$$P_{Bp} = P_{B1}k_1 + P_{B2}k_2 + \ldots + P_ek_e + \ldots + P_{Bm}k_m = B^*K$$

en donde:

$$K = \{ k_1, k_2, \ldots, k_p, \ldots, k_m \}$$

$$B^* = [P_{B1}, P_{B2}, \ldots, P_e, \ldots, P_{Bm}]$$

y

$$k_i = \frac{-a'_{ie}}{a'_{pe}} \qquad (i \neq p),$$

$$k_p = \frac{1}{a'_{pe}}$$

Para las demás P_{Bi} ($i \neq p$), podemos representar P_{Bi} trivialmente en términos de B^*:

$$P_{Bi} = P_{B1}\,0 + \ldots + P_e\,0 + \ldots + P_{Bi}\,1 + \ldots + P_{Bm}\,0 = B^*U_i$$

de tal forma que la relación entre la "vieja" y la "nueva" base está dada por:

$$B = [\, P_{B1}, P_{B2}, \dots , P_{Bm} \,] = B^* [\, U_1, U_2, \dots , K, \dots , U_m \,]$$

multiplicando por B^{-1} a la derecha y por $(B^*)^{-1}$ a la izquierda en ambos lados de la ecuación, obtenemos la relación entre el inverso de la nueva base y el inverso de la base previa, es decir :

$$(B^*)^{-1}\, B\, B^{-1} = (B^*)^{-1}\, B^*[\, U_1 , U_2 , \dots , K , \dots , U_m] \,B^{-1}$$

$$(11) \dots\dots\dots\dots (B^*)^{-1} = [\, U_1 , U_2 , \dots , K , \dots , U_m] \,B^{-1}$$

en donde:

$$(12) \dots[\, U_1 , U_2 , \dots , K , \dots , U_m] = \begin{bmatrix} 1 & & & k_1 & & \\ & 1 & & k_2 & & \\ & & \ddots & \vdots & & \\ & & & k_p & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & \vdots & 1 & \\ & & & k_m & & 1 \end{bmatrix}$$

y vemos que la nueva inversa es el producto de una matriz elemental por el inverso de la base anterior.

Definición VI-1.-

Una matriz que difiere de la matriz identidad en solo una columna (renglón), se llama matriz elemental.

Teorema VI-1.-

La inversa de una matriz elemental es también elemental.

Si ahora multiplicamos ambos miembros de la ecuación (11) a la derecha por cualquier P_j , podremos obtener la representación de P_j en términos de la nueva base, partiendo de su representación en términos de la vieja base.

Partiendo de:

$$\overline{P}_j = B^{-1} P_j$$

y premultiplicando ambos miembros por la matriz elemental obtenida anteriormente:

$$[U_1, U_2, \dots, K, \dots, U_m]\overline{P}_j = [U_1, U_2, \dots, K, \dots, U_m]\, B^{-1} P_j$$

$$(13) \dots P_j^* = [U_1, U_2, \dots, K, \dots, U_m]\, \overline{P}_j = (B^*)^{-1} P_j$$

Si escribimos la matriz (12) como la suma de una matriz identidad y una elemental, tendremos:

$$[U_1, U_2, \dots, K, \dots, U_m] = [U_1, U_2, \dots, U_p, \dots, U_m] + [0, \dots, K - U_p, \dots, 0]$$

y de la ecuación (11):

$$(B^*)^{-1} = [U_1, U_2, \dots, U_p, \dots, U_m]B^{-1} + [0, 0, \dots, K - U_p, \dots, 0]\, B^{-1}$$

por lo que :

$$(14) \dots (B^*)^{-1} = B^{-1} + [\,0, 0, \dots, \overline{K}, \dots, 0\,]\, B^{-1}$$

donde:

$$\overline{K} = K - U_p = \begin{bmatrix} \overline{k}_1 \\ \overline{k}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{k}_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{k}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_p - 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_m \end{bmatrix}$$

Llamando β a los renglones de B^{-1}, es decir:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

entonces la ecuación (14) queda:

$$(B^*)^{-1} = B^{-1} + [0, 0, \ldots, \overline{K}, \ldots, 0] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$(15) \ldots\ldots\ldots (B^*)^{-1} = B^{-1} + \overline{K}\beta_p$$

en donde se ve que $(B^*)^{-1}$ difiere de B^{-1} por una matriz $\overline{K}\beta_p$, que es el producto de un vector columna $\overline{K}$ y de un vector renglón β_p. Entonces:

$$\overline{K}\beta_p = \begin{bmatrix} \overline{k}_1 \\ \overline{k}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{k}_m \end{bmatrix} [\ \beta_{p1}, \beta_{p2}, \ldots, \beta_{pm}\ ]$$

Sea:

$$B^{-1} = [\ \beta_{ij}\ ]$$

entonces el elemento (i , j) de $\overline{K}\ \beta_p$ es simplemente $\overline{k}_i\ \beta_{pj}$. De aquí que para formar el elemento (i , j) de $(B^*)^{-1}$, sumamos $\overline{k}_i\ \beta_{pj}$ a β_{ij} es decir :

(16) .... $(B^*)^{-1} = [\ \beta_{ij}\ ] + [\ \overline{k}_i\ \beta_{pj}\ ]$

Finalmente, para formar la nueva representación de los vectores, partiendo de la vieja, tenemos (de la ec. (13) y la (15)):

$$\overline{P^*_j} = (B^*)^{-1} P_j = (B^{-1} + \overline{K}\beta_p)\, P_j$$

$$= B^{-1} P_j + (\overline{K}\beta_p)\, P_j$$

$$= \overline{P}_j + \overline{K}a'_{pj} \qquad\qquad (\text{pues } \beta_p P_j = a'_{pj})$$

donde a'_{pj} es el valor del componente p en la representación de P_j en términos de B. Así, el nuevo $\overline{P^*_j}$ difiere del anterior $\overline{P}_j$ en un vector proporcional a $\overline{K}$; el factor de proporcionalidad es el componente "p" de $\overline{P}_j$

Las relaciones (11) y (16) son dos formas de expresar la nueva inversa en términos de la vieja. La relación (16) requiere, en general, de m^2 cambios en los componentes de B^{-1} , mientras que la (11) muestra que el proceso de obtener $(B^*)^{-1}$ de B^{-1}, multiplicándola por la matriz elemental (12), requiere sólo del conocimiento de los "m" componentes del vector K y su localización en la columna "p" de la matriz, con lo que se consigue un notable ahorro de memoria.

Se ve que puede ser computacionalmente conveniente el representar la inversa de la base como el producto de matrices elementales. Comenzando con la base inicial, la cual es una matriz identidad, la inversa de la 2a. base es también una matriz elemental, pero la inversa de la 3a.base y las subsecuentes, excepto en casos fortuitos, no son matrices elementales. Sin embargo, podemos redefinir el problema después de la 1a. iteración, de tal manera que la 2a. base sea tratada como una base original para el nuevo problema. Con esto, la 3a. base y su inversa son matrices elementales, en términos de la 2a. En la misma forma, cada base es una matriz elemental en términos de la inmediata precedente.

Teorema VI-2.-

Cualquier base, o su inversa, puede ser representada como un producto de matrices elementales.

Sea E_1 la inversa de la 2a. base con respecto a la 1a. y E_2 la inversa de la 3a. base respecto a la 2a. y así sucesivamente (E representa una matriz elemental). Entonces, la inversa de la base después de "w" iteraciones es:

$$B^{-1} = E_w E_{w-1} \dots E_1$$

La multiplicación por B^{-1} es hecha multiplicando la secuencia de matrices elementales al mismo tiempo.

Ejemplo VI-1.- (ver ej. III-10)

Resolver el siguiente modelo utilizando la forma de producto del Método Simplex Revisado:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = x_1 + 2x_2 \\ &\text{s.a.} \\ &\qquad x_1 \qquad\quad \leq 600 \\ &\qquad\qquad x_2 \leq 300 \\ &\qquad 3x_1 + 4x_2 \leq 2400 \\ &\qquad (x_1, x_2) \geq 0 \end{aligned}$$

aquí:

$$[A, I] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix}$$

1a. Iteración:

Paso 1.-

Seleccionamos la base inicial:

$$\{x_B\}_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

Obtenemos γ_1 :

$$\gamma_1 = [\,0, 0, 0\,]$$

Paso 3.-

Obtenemos B^{-1} :

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

Calculando los multiplicadores simplex, obtenemos:

$$\pi_1 = \gamma_1 B_1^{-1} = [\,0, 0, 0\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0, 0, 0\,]$$

Paso 5.-

Calculamos ahora $c'_j = \pi_1 P_j - c_j$ para las variables no básicas (x_1, x_2) :

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{matrix} P_1 & P_2 \end{matrix} & & \begin{matrix} c_1 & c_2 \end{matrix} & & \begin{matrix} c'_1 & c'_2 \end{matrix} \\ [\,0, 0, 0\,] & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & - & [\,1, 2\,] & = & [\,-1, -2\,] \end{array}$$

Paso 6.-

Seleccionamos la variable de entrada:

$$c'_e = \min c'_j < 0 = c'_2 = -2 \qquad \therefore \qquad x_e = x_2$$

Paso 7.-

Determinamos $\overline{P_e}$:

$$\overline{P_e} = \overline{P_2} = B_1^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

Encontramos $\overline{P_o}$:

$$(\overline{P_o})_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

Seleccionamos la variable de salida :

$$\Phi = \min \Phi_i = \min_{a'_{ie} > 0} \frac{b'_i}{a'_{ie}} = \frac{b'_p}{a'_{pe}} = 300 \qquad \text{y } x_s = x_4 \ (p = 2)$$

Paso 10.-

Obtenemos ahora el valor de la función objetivo:

$$\overline{Z}_1 = \gamma_1 (\overline{P_o})_1 = [\,0, 0, 0\,] \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix} = 0$$

Resumiendo la información (no forma parte del método), obtenemos:

γ_1	$\{x_B\}_1$	$(\overline{P_o})_1$	B_1 x_3	x_4	x_5	B_1^{-1}			$\overline{P_e} = \overline{P_2}$	$(x_e = x_2)$
0	x_3	600	1	0	0	1	0	0	0	
0	x_4	300	0	1	0	0	1	0	1	pivote $(x_s = x_4)$
0	x_5	2400	0	0	1	0	0	1	4	

Paso 11.-

Actualizando, tenemos:

$$a'_{pe} = a'_{22} = 1$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\ \\ \dfrac{1}{a'_{pe}} \\ \\ -\dfrac{a'_{3e}}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{12}}{a'_{22}} \\ \\ \dfrac{1}{a'_{22}} \\ \\ -\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{0}{1} \\ 1 \\ -\dfrac{4}{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

Obtenemos la matriz elemental E_1 :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

2a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{ x_B \}_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_2 = [\, 0, 2, 0 \,]$$

Paso 3.-

De acuerdo a la relación (11), tenemos:

$$(B_1^*)^{-1} = \underset{*}{\underline{B_2^{-1} = E_1 I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_2 = \gamma_2 (B_1^*)^{-1} = \underset{*}{\underline{\gamma_2 B_2^{-1} =}} \gamma_2 E_1 = [\, 0, 2, 0 \,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = [\, 0, 2, 0 \,]$$

Paso 5.-

Calculando $\pi_2 P_j - c_j = c'_j$ para las variables no básicas (x_1, x_4):

$$
[0,2,0]\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_1 & P_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} - \overset{c_1 \; c_2}{[1,0]} = \overset{c'_1 \; c'_4}{[-1,2]}
$$

Paso 6.-

$$c'_e = c'_1 = -1 \qquad \Rightarrow x_e = x_1$$

Paso 7.-

$$\overline{P}_e = \overline{P}_1 = \underset{*}{\underline{B_2^{-1} P_1}} = E_1 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

$$(\overline{P}_0)_2 = \underset{*}{\underline{B_2^{-1} P_0}} = E_1 P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 1200 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

$$\phi = \phi_3 \qquad \Rightarrow x_s = x_5 \qquad (\overset{*}{p} = 3)$$

Paso 10.-

$$\overline{Z}_2 = \gamma_2 (\overline{P}_0)_2 = [0, 2, 0] \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 1200 \end{bmatrix} = 600$$

Resumiendo:

γ_2	$\{x_B\}_2$	$(\overline{P}_0)_2$	E_1			B_2			* B_2^{-1}			$\overline{P}_e = \overline{P}_1$	$(x_e = x_1)$
				K_1		x_3	x_2	x_5					
0	x_3	600	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	
2	x_2	300	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	
0	x_5	1200	0	-4	1	0	4	1	0	-4	1	3	pivote $(x_s = x_5)$

* Usada sólo en la forma explícita.

Paso 11.-

Actualizando:

$$a'_{pe} = a'_{31} = 3$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\ -\dfrac{a'_{2e}}{a'_{pe}} \\ \dfrac{1}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{0}{3} \\ \dfrac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ 0 \\ \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

3a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{ x_B \}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_3 = [\ 0, 2, 1\ ]$$

Paso 3.-

$$(B_2^*)^{-1} = \underset{*}{\underline{B_3^{-1}}} = E_2 E_1 I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_3 = \underset{*}{\underline{\gamma_3 B_3^{-1}}} = \gamma_3 E_2 E_1 I = [\ 0, 2, 1\ ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [\ 0, 2, 1\ ] \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1/3 \end{bmatrix} = [\ 0, 2/3, 1/3\ ]$$

Paso 5.-

Calculamos $c'_j = \pi_3 P_j - c_j$ para las variables no básicas (x_4 , x_5).

$$\begin{array}{ccccc} & \begin{array}{cc} P_4 & P_5 \end{array} & c_4\, c_5 & & c'_4 \;\; c'_5 \\ [\,0,\, 2/3,\, 1/3\,] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -\;[\,0,\, 0\,] & = & [\,2/3,\, 1/3\,] \end{array}$$

Paso 6.-

Como todos los coeficientes $c'_j \geq 0 \Rightarrow$ hemos llegado a la solución óptima.

Paso 7.-

No se necesita ya.

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_3 = \underbrace{B_3^{-1}\, P_0}_{*} = E_2\, E_1\, P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 300 \\ 2400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

No se necesita ya.

Paso 10.-

$$\overline{Z_3} = \gamma_3 (\overline{P_0})_3 = [\,0,\, 2,\, 1\,] \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{bmatrix} = 1000$$

Resumiendo:

Solución Optima

γ_3	$\{x_B\}_3$	$(\bar{P}_0)_3$	E_2			B_3			B_3^{-1} *			v.b.	v.n.b
					k_2	x_3	x_2	x_1					
												$z^* = 1000$	$x_4^* = 0$
0	x_3	200	1	0	-1/3	1	0	1	1	4/3	-1/3	$x_3^* = 200$	$x_5^* = 0$
1	x_2	300	0	1	0	0	1	0	0	1	0	$x_2^* = 300$	
2	x_1	400	0	0	1/3	0	4	3	0	-4/3	1/3	$x_1^* = 400$	

* usada sólo en la forma explícita.

Para comprobar la solución, la comparamos con la solución obtenida en el ejemplo III-10 y vemos que son iguales.

NOTA.- Es importante señalar que en este ejemplo se ha incluido información que no pertenece al método en sí, pero que se puso con objeto de hacer más claros los pasos. En este método sólo se almacenan las matrices originales [A,I], [P_0] y [C,O] y en cada iteración sólo se agrega a la memoria el vector K y la posición que ocupa dentro de la matriz. Para trabajo manual, resulta más claro y conveniente trabajar con la forma explícita, en la cual el procedimiento es el mismo, sólo que con él sí se va trabajando con la inversa actual, en lugar de con su equivalente.

$B^{-1} = E_w E_{w-1} \ldots E_1$ (ver * en el ejemplo).

Ejemplo VI-2.-

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 3 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ (x_1, x_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

aquí:

$$[A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{x_B\}_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_1 = [\,0, 0, 0\,]$$

Paso 3.-

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_1 = \gamma_1 B_1^{-1} = [\,0, 0, 0\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0, 0, 0\,]$$

Paso 5.-

Calculamos $c'_j = \pi_1 P_j - c_j$ para las variables no básicas (x_1, x_2):

$$\begin{array}{cccc} & P_1 \;\; P_2 & c_1 \;\; c_2 & c'_1 \;\; c'_2 \\ [\,0,0,0\,] & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & - [\,2, 3\,] & = [\,-2, -3\,] \end{array}$$

Paso 6.-

$$c'_e = c'_2 = -3 \quad \Rightarrow x_e = x_2$$

Paso 7.-

$$\overline{P_e} = \overline{P_2} = B_1^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_1 = B_1^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

$$\phi = \phi_3 \qquad \Rightarrow x_s = x_5 \qquad (p = 3)$$

Paso 10.-

$$\overline{Z} = \gamma_1 P_0 = [\,0, 0, 0\,] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Resumiendo:

γ_1	$\{x_B\}_1$	$(\overline{P_0})_1$	B_1			B_1^{-1}			$\overline{P_e} = \overline{P_2}$	$(x_e = x_2)$
			x_3	x_4	x_5					
0	x_3	3	1	0	0	1	0	0	1	
0	x_4	4	0	1	0	0	1	0	1	
0	x_5	2	0	0	1	0	0	1	2	pivote $(x_s = x_5)$

Paso 11.-

Actualizando $a'_{pe} = a'_{32} = 2$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\[2ex] -\dfrac{a'_{2e}}{a'_{pe}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{12}}{a'_{32}} \\[2ex] -\dfrac{a'_{22}}{a'_{32}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{32}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\[2ex] -\dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

2a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{x_B\}_2 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_2 = [\,0\,,0\,,3\,]$$

Paso 3.-

$$(B_1^*)^{-1} = \underset{*}{\underline{B_2^{-1}}} = E_1\, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_2 = \underset{*}{\underline{\gamma_2 B_2^{-1}}} = \gamma_2 E_1 = [\,0, 0, 3\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = 0, 0, 3/2$$

Paso 5.-

Calculando $c'_j = \pi_2 P_2 - c_j$ para las variables no básicas $(x_1\,, x_5)$:

$$\begin{array}{ccc} & P_1 \quad P_5 & \quad c_1 \; c_5 \qquad\quad c'_1 \;\; c'_5 \\ [\,0, 0, 3/2\,] & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & - [\,2, 0\,] = [\,-7/2,\; 3/2\,] \end{array}$$

Paso 6.-

$$c'_e = c'_1 = -7/2 \qquad \Rightarrow x_e = x_1$$

Paso 7.-

$$\overline{P_e} = \overline{P_1} = \underbrace{B_2^{-1} P_1}_{*} = E_1 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 9/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_2 = \underbrace{B_2^{-1} P_0}_{*} = E_1 P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

$$\phi = \phi_2 = 2/3 \quad \Rightarrow x_s = x_4 \quad (p = 2)$$

Paso 10.-

$$\overline{Z_2} = \gamma_2 (\overline{P_0})_2 = [\,0, 0, 3\,] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

Resumiendo:

γ_1	$\{x_B\}_2$	$(\overline{P_0})_2$	E_1		k_1	B_2 x_3	x_4	x_2	B_2^{-1} *			$\overline{P_e} = \overline{P_2}$	$(x_e = x_2)$
0	x_3	2	1	0	−1/2	1	0	1	1	0	−1/2	3/2	
0	x_4	3	0	1	−1/2	0	1	1	0	1	−1/2	9/2	pivote $(x_s = x_4)$
3	x_2	1	0	0	1/2	0	0	2	0	0	1/2	−1/2	

* usado sólo en la forma explícita.

Paso 11.-

Actualizando:

$$a'_{pe} = a'_{22} = 9/2 \quad (p = 2)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{pe}} \\[2ex] -\dfrac{a'_{3e}}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{12}}{a'_{22}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{22}} \\[2ex] -\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{2}{9} \\[2ex] \dfrac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 1 \end{bmatrix}$$

3a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{ x_B \}_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_3 = [\, 0, 2, 3 \,]$$

Paso 3.-

$$\underset{*}{\underline{\quad B_3^{-1}}} = E_2 E_1 I = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/9 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_3 \underset{*}{\underline{= \gamma_3 B_3^{-1}}} = \gamma_3 E_2 E_1 = [\, 0, 2, 3 \,] \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/9 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= [\,0,2,3\,]\begin{bmatrix}1 & -1/3 & -1/3\\ 0 & 2/9 & -1/9\\ 0 & 1/9 & 4/9\end{bmatrix} = [\,0,\ 7/9,\ 10/9\,]$$

Paso 5.-

Calculamos $c'_j = \pi_3 P_j - c_j$ para las variables no básicas (x_4 , x_5):

$$\begin{array}{cccc} & \begin{array}{cc} P_4 & P_5 \end{array} & \begin{array}{cc} c_4 & c_5 \end{array} & \begin{array}{cc} c'_4 & c'_5 \end{array} \\ [\,0,\ 7/9,\ 10/9\,] & \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} & -\ [\,0,0\,] & =\ [\,7/9,\ 10/9\,] \end{array}$$

Paso 6.-

Como todos los coeficientes $c'_j > 0 \Rightarrow$ hemos llegado a la solución óptima.

Paso 7.-

No se necesita.

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_3 = \underbrace{B_3^{-1}P_0}_{*} = E_2E_1P_0 = \begin{bmatrix}1 & -1/3 & 0\\ 0 & 2/9 & 0\\ 0 & 1/9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -1/3 & -1/3\\ 0 & 2/9 & -1/9\\ 0 & 1/9 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2/3\\ 4/3\end{bmatrix}$$

Paso 9.-

Ya no se necesita.

Paso 10.-

$$\overline{Z_3} = \gamma_3 (\overline{P_0})_3 = [\,0,2,3\,]\begin{bmatrix}1\\ 2/3\\ 4/3\end{bmatrix} = 16/3$$

Resumiendo.

												Solución Optima	
γ_3	$\{x_B\}_3$	$(\bar{P}_0)_3$		E_2			B_3			B_3^{-1} *		v.b	v.n.b
				K_2		x_3	x_1	x_2					
												$z^* = 16/3$	$X_4^* = 0$
0	x_3	1	1	−1/3	0	1	1	1	1	−1/3	−1/3	$X_3^* = 1$	$X_5^* = 0$
2	x_1	2/3	0	2/9	0	0	4	1	0	2/9	−1/9	$X_1^* = 2/3$	
3	x_2	4/3	0	1/9	1	0	−1	2	0	1/9	4/9	$X_2^* = 4/3$	

* usado sólo en la forma explícita.

VI-2.- METODO SIMPLEX REVISADO USANDO FASE I Y FASE II.-

Si la matriz original de coeficientes, después de eliminar las desigualdades, aun no contiene una matriz identidad de orden "m" como una submatriz, y si una base factible es desconocida, utilice la fase I, usando variables artificiales, tal y como se vio en el Método Simplex de las dos fases. Proceda igual que se indicó para ese tema, minimizando primero la suma "W" de las variables artificiales. Si el Min. $W = 0$, se pasa a la fase II, mientras que si el Min. $W \neq 0$, entonces el problema no tiene soluciones factibles.

Ejemplo VI-3.-

$$\text{Max. } Z = -3x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - x_5$$

s.a.

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 &= 20 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\geq 0 \end{aligned}$$

introduciendo las variables artificiales (x_6, x_7) y haciendo de W la función objetivo, tenemos:

$$\text{Min. } W = x_6 + x_7$$

$$\text{Max.} -W = -x_6 - x_7$$

con lo que el sistema queda:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Max. } -W & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 + x_7 & = 0 \\
 & Z + 3x_1 - x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 & = 0 \\
 & \quad 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 & = 20 \\
 & \quad x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 \qquad + x_7 & = 8
\end{array}
$$

FASE I:

1a. Iteración.-

Paso 1.-

$$\{x_B\}_1 = \begin{bmatrix} Z \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_1 = [\,0\,, -1\,, -1\,]$$

Paso 3.-

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_1 = \gamma_1 B_1^{-1} = [\,0, -1, -1\,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\,0, -1, -1\,]$$

Paso 5.-

Calculamos $d'_j = \pi_1 P_j - d_j$ para las v.n.b. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$[\,0, -1, -1\,] \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 13 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} - [\,0, 0, 0, 0, 0\,] = [\,-6, 5, -18, 3, -2\,]$$

Paso 6.-

$$d'_e = d'_3 = -18 \qquad \Rightarrow \quad x_e = x_3$$

Paso 7.-

$$\overline{P_e} = \overline{P_3} = B_1^{-1} P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_1 = B_1^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

$$\phi = \min. \phi_i = \phi_2 = 20/13 \quad \Rightarrow x_s = x_6 \quad (p=2)$$

Paso 10.-

$$\overline{w_1} = \gamma_1 (\overline{P_0})_1 = [\, 0, -1, -1 \,] \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = -28$$

Resumiendo:

γ_1	$\{x_B\}_1$	$(\overline{P_0})_1$	B_1			B_1^{-1}			$\overline{P_e} = \overline{P_3}$	$(x_e = x_3)$
			Z	x_6	x_7					
0	Z	0	1	0	0	1	0	0	-7	
1	x_6	20	0	1	0	0	1	0	13	pivote $(x_s = x_6)$
1	x_7	8	0	0	1	0	0	1	5	

Paso 11.-

$$a'_{pe} = a'_{23} = 13$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{pe}} \\[2ex] -\dfrac{a'_{3e}}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{7}{13} \\[2ex] \dfrac{1}{13} \\[2ex] -\dfrac{5}{13} \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 7/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix}$$

2a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{X_B\}_2 = \begin{bmatrix} Z \\ X_3 \\ X_7 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_2 = [0, 0, -1]$$

Paso 3.-

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 7/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix} = E_1 I$$

Paso 4.-

$$\pi_2 = \gamma_2 B_2^{-1} = \gamma_2 E_1 = [0, 0, -1] \begin{bmatrix} 1 & 7/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix} = [0, 5/13, -1]$$

Paso 5.-

Calculamos $d'_j = \pi_2 P_j - d_j$ para las v.n.b. $(x_1, x_2, x_4, x_5, x_6)$

$$[0, 5/13, -1] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - [0, 0, 0, 0, -1]$$

$$= [12/13, -7/13, 3/13, -8/13, 18/13]$$

Paso 6.-

$$d'_e = d'_5 = -8/13 \quad \Rightarrow x_e = x_5$$

Paso 7.-

$$\overline{P_e} = \overline{P_5} = B_2^{-1} P_5 = E_1 P_5 = \begin{bmatrix} 1 & 7/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/13 \\ 1/13 \\ 8/13 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_2 = B_2^{-1} P_0 = E_1 P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 7/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140/13 \\ 20/13 \\ 4/13 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

$$\phi = \min \phi_i = \phi_3 = 1/2 \quad \Rightarrow x_s = x_7 \qquad (p = 3)$$

Paso 10.-

$$\overline{w_2} = \gamma_2 (\overline{P_0})_2 = [\,0, 0, -1\,] \begin{bmatrix} 140/13 \\ 20/13 \\ 4/13 \end{bmatrix} = -4/13$$

Resumiendo:

γ_2	$\{x_B\}_2$	$(\overline{P_0})_2$	E			B_2			B_2^{-1}			$\overline{P_e} = \overline{P_5}$	$(x_e = x_5)$
				K_1		Z	x_3	x_7					
0	Z	140/13	1	7/13	0	1	−7	0	1	7/13	0	20/13	
0	x_3	20/13	0	1/13	0	0	13	0	0	1/13	0	1/13	
1	x_7	4/13	0	−5/13	1	0	5	1	0	−5/13	1	8/13	pivote $(x_s = x_7)$

Paso 11.-

$$a'_{pe} = a'_{35} = 8/13$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\[2ex] -\dfrac{a'_{2e}}{a'_{pe}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{20/13}{8/13} \\[2ex] -\dfrac{1/13}{8/13} \\[2ex] \dfrac{13}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{20}{8} \\[2ex] -\dfrac{1}{8} \\[2ex] \dfrac{13}{8} \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20/8 \\ 0 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 13/8 \end{bmatrix}$$

3a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{x_B\}_3 = \begin{bmatrix} Z \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_3 = [\,0\,,0\,,0\,]$$

Paso 3.-

$$B_3^{-1} = E_2\,E_1\,I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20/8 \\ 0 & 1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 13/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7/13 & 0 \\ 0 & 1/13 & 0 \\ 0 & -5/13 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -20/8 \\ 0 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & -5/8 & 13/8 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_3 = \gamma_3\,B_3^{-1} = [\,0,0,0\,] \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & -5/8 & 13/8 \end{bmatrix} = [\,0,0,0\,]$$

Paso 5.-

$$d'_j = \pi_3 P_j - d_j \text{ para las v.n.b. } (x_1, x_2, x_4, x_6, x_7)$$

$$[\,0, 0, 0\,] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [\,0, 0, 0, -1, -1\,] = [\,0, 0, 0, 1, 1\,]$$

Paso 6.-

Como todos los coeficientes $d'_j > 0$, hemos llegado a la solución óptima para la fase I.

Paso 7.-

No se necesita por ahora.

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_3 = B_3^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 1/8 & -1/8 \\ 0 & -5/8 & 13/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

No se necesita por ahora.

Paso 10.-

$$\overline{w}_3 = \gamma_3 (\overline{P_0})_3 = [\,0, 0, 0\,] \begin{bmatrix} 10 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 0$$

Resumiendo:

γ_3	$\{x_B\}_3$	$(\bar{P}_0)_3$		E_2			B_3			B_3^{-1}	
					K_2	Z	x_3	x_5			
0	Z	10	1	0	-20/8	1	-7	1	1	3/2	-20/8
0	x_3	3/2	0	1	-1/8	0	13	1	0	1/8	-1/8
0	x_5	1/2	0	0	13/8	0	5	1	0	-5/8	13/8

Como Min. W = 0, eliminamos el primer renglón y la columna correspondiente a Z (la 1a.) de la matriz inversa, e iniciamos la fase II (eliminando x_6 y x_7).

FASE II:

4a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{x_B\}_4 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_4 = [\,7\,, -1\,]$$

Paso 3.-

$$B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 \\ -5/8 & 13/8 \end{bmatrix}$$

(se obtuvo eliminando la 1a. columna y el primer renglón de B_3^{-1})

Paso 4.-

$$\pi_4 = \gamma_4 B_4^{-1} = [\,7, -1\,] \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 \\ -5/8 & 13/8 \end{bmatrix} = [\,3/2, -5/2\,]$$

Paso 5.-

$$c'_j = \pi_4 P_j - c_j \text{ para las v.n.b. } (x_1, x_2, x_4):$$

$$[\,3/2, -5/2\,] \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - [\,-3, 1, -3\,] = [\,8, -9/2, 5/2\,]$$

Paso 6.-

$$c'_e = c'_2 = -9/2 \qquad \Rightarrow x_e = x_2$$

Paso 7.-

$$\overline{P_e} = \overline{P_2} = B_4^{-1}\, P_2 = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 \\ -5/8 & 13/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/8 \\ 7/8 \end{bmatrix}$$

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_4 = B_4^{-1}\, P_0 = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 \\ -5/8 & 13/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

$$\phi = \phi_2 = 4/7 \qquad \Rightarrow x_s = x_5$$

Paso 10.-

$$\overline{Z_4} = \gamma_2\, (\overline{P_0})_4 = [\,7, -1\,] \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 10$$

Resumiendo:

γ_4	$\{x_B\}_4$	$(\overline{P_0})_4$	E_3	E_3: k_3	B_4: x_3	B_4: x_5	B_4^{-1}	B_4^{-1}	$\overline{P_e} = \overline{P_2}$	$(x_e = x_2)$
7	x_3	3/2	1	−1/8	13	1	1/8	−1/8	−3/8	
−1	x_5	1/2	0	13/8	5	1	−5/8	13/8	7/8	$(x_s = x_5)$

$E_3 = E_2$ eliminando la 1a. columna y el 1er. renglón.

Paso 11.-

$$a'_{pe}\, a'_{22} = 7/8$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{1e}}{a'_{pe}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{pe}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{12}}{a'_{22}} \\[2ex] \dfrac{1}{a'_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3/8}{7/8} \\[2ex] \dfrac{1}{7/8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\[2ex] 8/7 \end{bmatrix}$$

Paso 12.-

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3/7 \\ 0 & 8/7 \end{bmatrix}$$

5a. Iteración:

Paso 1.-

$$\{x_B\}_5 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 2.-

$$\gamma_5 = [\,7,\ 1\,]$$

Paso 3.-

$$B_5^{-1} = E_4\, B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3/7 \\ 0 & 8/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 \\ -5/8 & 13/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 & 4/7 \\ -5/7 & 13/7 \end{bmatrix}$$

Paso 4.-

$$\pi_5 = \gamma_5\, B_4^{-1} = [\,7,\ 1\,] \begin{bmatrix} -1/7 & 4/7 \\ -5/7 & 13/7 \end{bmatrix} = [\,-12/7\,,\ 41/7\,]$$

Paso 5.-

$$c'_j = \pi_5 P_j - c_j \qquad \text{para las v.n.b. } (x_1, x_4, x_5):$$

$$[\,-12/7\,,\ 41/7\,] \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - [\,-3\,,\ -3\,,\ -1\,]$$

$$= [\,-19/7\,,\ -17/7\,,\ 29/7\,] + [\,3\,,\ 3\,,\ 1\,] = [\,2/7\,,\ 4/7\,,\ 36/7\,]$$

Paso 6.-

Como todos los coeficientes $c'_j \geq 0$, hemos llegado a la solución óptima.

Paso 7.-

Ya no se necesita.

Paso 8.-

$$(\overline{P_0})_5 = B_5^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} -1/7 & 4/7 \\ -5/7 & 13/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$$

Paso 9.-

Ya no se necesita.

Paso 10.-

$$\overline{Z_5} = \gamma_5 (\overline{P_0})_5 = [\,7,\ 1\,] \begin{bmatrix} 12/7 \\ 4/7 \end{bmatrix} = 88/7$$

Resumiendo:

γ_5	$\{x_B\}_5$	$(\overline{P_0})_5$	E_4		B_5		B_5^{-1}	
				k_4	x_3	x_2		
7	x_3	12/7	1	3/7	13	−4	−1/7	4/7
1	x_2	4/7	0	8/7	5	−1	−5/7	13/7

solución óptima

v.b.	v.n.b.
$Z^* = 88/7$	$x_1^* = 0$
$x_3^* = 12/7$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 4/7$	$x_5^* = 0$

CAPITULO VII

ANALISIS DE SENSIBILIDAD Y POST OPTIMO.

VII.1. INTRODUCCION

El término análisis de sensibilidad se aplica al estudio del efecto que, sobre la solución óptima de un problema de Programación Lineal, pueden tener los cambios de valor de los parámetros del modelo (c_j , a_{ij} , b_i).

Hasta ahora hemos considerado que los parámetros del modelo eran constantes conocidas, sin embargo, para muchos problemas prácticos, puede suceder que estas constantes, o sean estimaciones del valor real, o bien varíen su valor con el tiempo.

El análisis de sensibilidad es importante por varias razones:

a) La estabilidad de la solución óptima ante cambios de los parámetros puede ser crítica. En algunas ocasiones, antes de tomar alguna decisión, debemos ver como reacciona el modelo al variar algún parámetro original. Por ejemplo, una ligera variación de un parámetro puede conducir a una gran diferencia desfavorable en el valor de la solución óptima, mientras que un gran cambio en otro parámetro puede conducir sólo a un pequeño cambio. Si la solucion óptima es realmente sensible a cambios en ciertos parámetros, un cuidado muy especial se debe tener al estimarlos, así como al seleccionar una solución que sea apropiada para sus valores más probables. Por ejemplo, en ciertas situaciones industriales, en las cuales existen algunas variaciones inherentes al proceso o a los materiales no considerados en el modelo, puede ser deseable separarse un poco de la solución óptima, con objeto de obtener una solución que requiera menos modificaciones esenciales ante estos cambios.

b) Los valores de las constantes (a_{ij}), (c_j) y/o (b_i), pueden ser "controlables" hasta cierto punto, en cuyo caso deseamos conocer los efectos que resultarían de cambios en sus valores.

c) Aunque los valores de los parámetros del modelo no sean controlables, las estimaciones de sus valores pueden ser solamente "aproximaciones", haciendo entonces importante el conocer para que rangos de estos valores la solución obtenida será aún óptima.

d) Existen ocasiones en que se hace necesario introducir cambios en el modelo original, ya sea porque se descubren errores u omisiones, o bien porque disponemos de nueva información que indica que las estimaciones de los valores de los parámetros deben ser revisadas.

Una vez localizados los parámetro críticos, se pueden establecer métodos estadísticos para determinar el momento en el que varían estos parámetros y poder hacer los ajustes necesarios en nuestro modelo.

Las técnicas que veremos en este capítulo, hacen innecesaria la resolución del problema desde el principio cada vez que un pequeño cambio se efectúa en el modelo. En lugar de esto, dada la solución óptima anterior y su correspondiente sistema de ecuaciones, se determina si la misma base sigue siendo óptima o no, y en el caso de ya no serlo, usarla como punto de partida para llegar rápidamente a la nueva solución óptima.

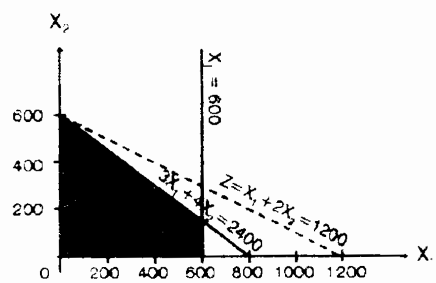
Ejemplo VII-1.-

Sea el modelo del ejemplo III-10, al cual se le ha eliminado la 2a. restricción (con objeto de facilitar el graficado del problema dual). Obtendremos la solución óptima para el primo y el dual y nos servirá como ejemplo ilustrativo para los cambios de parámetros que estudiaremos más adelante.

Max. $Z = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 600 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 2400 \\ (x_1, x_2) &\leq 0 \end{aligned}$$



introduciendo las variables de holgura:

$$
\begin{array}{rcl}
Z - x_1 - 2x_2 & = & 0 \ldots (0) \\
x_1 + x_3 & = & 600 \ldots (1) \\
3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 2400 \ldots (2)
\end{array}
$$

$$x_e = x_2$$
$$x_s = x_4$$

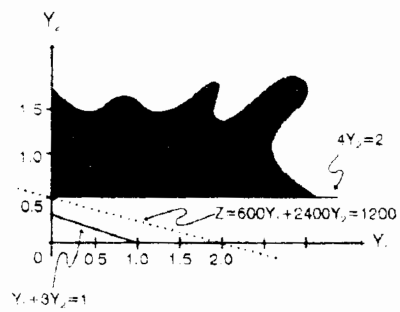
Ecuación			v.b.	v.n.b.
$Z + 1/2x_1 + 1/2x_4 = 1200$	...	(0')	$Z^* = 1200$	$x^*_1 = 0$
$x_1 + x_3 = 600$	...	(1')	$x^*_3 = 600$	$x^*_4 = 0$
$3/4x_1 + x_2 + 1/4x_4 = 600$	...	(2')	$x^*_2 = 600$	

El dual correspondiente será:

Min. $z_y = 600y_1 + 2400y_2$

s.a.

$$
\begin{array}{rcl}
y_1 + 3y_2 & \geq & 1 \\
4y_2 & \geq & 2 \\
(y_1, y_2) & \geq & 0
\end{array}
$$



introduciendo variables de holgura :

$$
\begin{array}{rcl}
Z_y - 600y_1 - 2400y_2 & = & 0 \\
y_1 + 3y_2 - y_3 & = & 1 \\
4y_2 - y_4 & = & 2
\end{array}
$$

y la solución óptima final sería (según indican los coeficientes de la ec. (0) final en el problema primo):

v.b	v.n.b.
$Z^*_y = 1200$	$y^*_1 = 0$
$y^*_2 = 1/2$	$y^*_4 = 0$
$y^*_3 = 1/2$	

VII-2.- CAMBIO EN C_j CUANDO X^*_j ES NO BASICA.-

Supongamos el caso de un cambio en c_j a un nuevo valor $\overline{c}_j$, siendo x^*_j variable no básica, después de que la solución óptima para el problema original ha sido obtenida. A pesar del cambio, la solución óptima original sigue siendo factible, dado que las restricciones no han cambiado, por lo que lo único que procede averiguar es si la nueva solución sigue siendo óptima o no.

Para tener una solución óptima, se debe cumplir que $(z^*_j - c_j) \geq 0$ para todos los valores de j en la nueva función objetivo final.

Debido a que sólo el coeficiente de x_j ha cambiado de $(z^*_j - c_j)$ a $(z^*_j - \overline{c}_j)$, solo es necesario revisar que este coeficiente siga siendo no negativo. De aquí que si $(z^*_j - \overline{c}_j) \geq 0$, la solución anterior es aún óptima; en caso contrario escogemos a x_j como variable de entrada y continuamos con el Método Simplex hasta que la nueva solución óptima se encuentre.

Es decir :

sea: $\Delta c_j = \overline{c}_j - c_j$ la cantidad que variará c_j

de donde:

$$\overline{c}_j = c_j + \Delta c_j \ldots (\alpha)$$

Dado que x^*_j es variable no básica, para que la solución óptima lo siga siendo, deberemos tener:

$$(z^*_j - \overline{c}_j) \geq 0$$

de (α):

$$z^*_j - (c_j + \Delta c_j) \geq 0 \ldots (\beta)$$

por lo que mientras :

$$z^*_j - c_j \geq \overline{c}_j - c_j = \Delta c_j$$

la solución anterior se mantiene óptima. Notese que Δc_j no tiene límite inferior.

Es conveniente indicar que la solución prima seguirá siendo óptima en tanto la solución dual siga siendo factible.

Ejemplo VII-2.-

Supongamos que la función objetivo del ejemplo VII-1, se cambia a:

$$\text{Max. } Z_x = 5/4x_1 + 2x_2$$

¿será la solución anteior $(x^*_1 = 0, x^*_2 = 600, x^*_3 = 600, \text{ y } x^*_4 = 0)$ aún óptima?

Aquí:

$$(z^*_1 - c_1) = 1/2$$
$$c_1 = 1$$
$$\overline{c}_1 = 5/4$$

Debido a que :

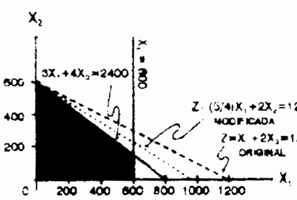
$$(z^*_1 - \overline{c}_1) = (z^*_1 - c_1) - (\overline{c}_1 - c_1) = 1/2 - (5/4 - 1) = 1/4$$

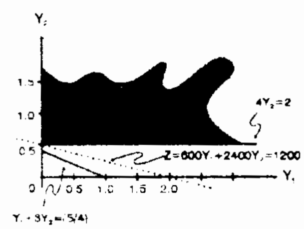
vemos que el nuevo coeficiente de x^*_1 en la función objetivo final modificada, sigue siendo positivo; la solución anterior sigue siendo óptima.

En el dual $y^*_1 = 0$ y $y^*_2 = 1/2$ satisfacen la restricción modificada:

$$y_1 + 3y_2 \geq 5/4$$

por lo que la solución es factible y por lo tanto óptima.





v.b.	v.n.b.
$Z_y^* = 1200$	$y_1^* = 0$
$y_2^* = 1/2$	$y_4^* = 0$
$y_3^* = 1/4$	

Ejemplo VII-3.-

Supongamos que la función objetivo del ejemplo VII-1 se cambia a:

$$\text{Max. } Z_x = 7/2x_1 + 2x_2$$

¿será la solución anterior ($x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 600$, $x^*_3 = 600$ y $x^*_4 = 0$) aún óptima?

Aquí :

$$(z^*_1 - c_1) = 1/2$$
$$c_1 = 1$$
$$\overline{c}_1 = 7/2$$

Debido a que :

$$(z^*_1 - \overline{c}_1) = (z^*_1 - c_1) - \Delta c_1 = 1/2 - (7/2 - 1) = -2$$

vemos que la solución anterior ya no es óptima y el sistema nos queda:

deseable separarse un poco de la solución óptima, con objeto de obtener una solución que requiera menos modificaciones esenciales ante estos cambios.

b) Los valores de las constantes (a_{ij}), (c_j) y/o (b_i), pueden ser "controlables" hasta cierto punto, en cuyo caso deseamos conocer los efectos que resultarían de cambios en sus valores.

c) Aunque los valores de los parámetros del modelo no sean controlables, las estimaciones de sus valores pueden ser solamente "aproximaciones", haciendo entonces importante el conocer para que rangos de estos valores la solución obtenida será aún óptima.

d) Existen ocasiones en que se hace necesario introducir cambios en el modelo original, ya sea porque se descubren errores u omisiones, o bien porque disponemos de nueva información que indica que las estimaciones de los valores de los parámetros deben ser revisadas.

Una vez localizados los parámetro críticos, se pueden establecer métodos estadísticos para determinar el momento en el que varían estos parámetros y poder hacer los ajustes necesarios en nuestro modelo.

Las técnicas que veremos en este capítulo, hacen innecesaria la resolución del problema desde el principio cada vez que un pequeño cambio se efectúa en el modelo. En lugar de esto, dada la solución óptima anterior y su correspondiente sistema de ecuaciones, se determina si la misma base sigue siendo óptima o no, y en el caso de ya no serlo, usarla como punto de partida para llegar rápidamente a la nueva solución óptima.

Ejemplo VII-1.-

Sea el modelo del ejemplo III-10, al cual se le ha eliminado la 2a. restricción (con objeto de facilitar el graficado del problema dual). Obtendremos la solución óptima para el primo y el dual y nos servirá como ejemplo ilustrativo para los cambios de parámetros que estudiaremos más adelante.

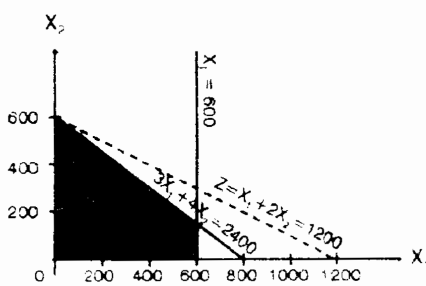
Max. $Z = x_1 + 2x_2$

s.a.

$$x_1 \leq 600$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

$$(x_1, x_2) \leq 0$$



VII-3.- CAMBIO EN C_j CUANDO X^*_j ES BASICA.-

Supongamos ahora el caso de un cambio en c_j a un nuevo valor $\overline{c}_j$, después de que la solución óptima para el problema original ha sido obtenida, pero ahora x^*_j es variable básica. Dado lo anterior, aunque la solución óptima original sigue siendo factible, el coeficiente de x^*_j en la ecuación (0) final modificada ha sido cambiada de cero a $(c_j - \overline{c}_j)$, pues $(z^*_j - \overline{c}_j) = (z_j - c_j) + (c_j - \overline{c}_j) = 0 + (c_j - \overline{c}_j)$, con lo que las variables básicas ya no quedan en forma canónica y es preciso eliminar este coeficiente $\neq 0$ de una de ellas en la función objetivo, para lo cual se debe restar $(c_j - \overline{c}_j)$ veces la ecuación final que contiene a x_j como variable básica de la ecuación (0). Una vez que hemos obtenido nuevamente la forma canónica para nuestra base, podemos aplicar la prueba de optimalidad (inspeccionando los coeficientes de las variables en la función objetivo para ver si todos son ≥ 0); en caso de ya no tener optimalidad, el Método Simplex debe continuarse a partir de la anterior solución óptima (que seguirá siendo solución básica factible) y su correspondiente sistema de ecuaciones modificado, hasta llegar a la nueva solución óptima.

Para una variable en la base final, un cambio Δc_j en su coeficiente original, afecta a todas las c'_j (para toda j fuera de la base), debido a que :

$$c'_j = (z_j - c_j) = \gamma \overline{P}_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} C_{B_i} a'_{ij} - c_j \quad \text{(ver Método Simplex Revisado)}$$

Supongamos que un cambio ΔC_{B_k} ocurre para la variable básica final x_k, entonces, para que la última solución siga siendo óptima, se debe cumplir que :

$$\sum_{i=1}^{m} C_{B_i} a'_{ij} + a'_{kj} \Delta C_{B_K} - c_j \geq 0$$

ó:

$$a'_{kj} \Delta C_{B_k} \geq -(z_j - c_j)$$

por lo que para aquellas $a'_{kj} > 0$:

$$\Delta C_{B_k} \geq \frac{-(z_j - c_j)}{a'_{kj}}$$

y para aquellas $a'_{kj} < 0$:

$$\Delta C_{B_k} \leq \frac{-(z_j - c_j)}{a'_{kj}}$$

y podemos notar que para $a'_{kj} = 0$, no afecta el coeficiente.

Por lo tanto:

$$\max_{a'_{kj}>0} \frac{-(z_j - c_j)}{a'_{kj}} \leq \Delta C_{B_k} \leq \min_{a'_{kj}<0} \frac{-(z_j - c_j)}{a'_{kj}} \text{(para toda j fuera de la base)}$$

Ejemplo VII-4.-

Supongamos que en el ejemplo VII-1 cambiamos el coeficiente de x_2 a 1/2 (del lado derecho), ¿será la solución original aún óptima?

Aquí:

$$c_2 = 2 \quad y \quad \bar{c}_2 = 1/2$$

y el nuevo coeficiente de x_2 en la función objetivo final será:

$$(c_2 - \bar{c}_2) = (2 - 1/2) = 3/2$$

y el sistema quedará ahora así:

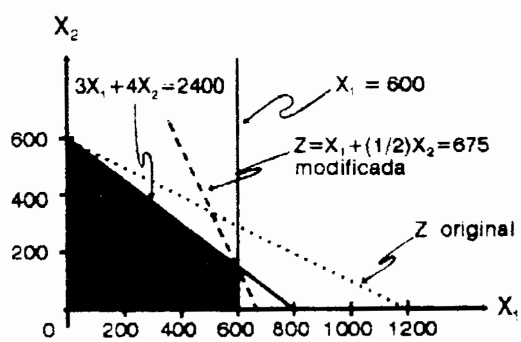
$$\begin{aligned} Z + 1/2x_1 + 3/2x_2 \quad\quad + 1/2x_4 &= 1200 \\ x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 600 \\ 3/4x_1 + \quad x_2 \quad\quad + 1/4x_4 &= 600 \end{aligned}$$

el cual ya no está en forma canónica. Eliminando x_2 de la función objetivo, obtendremos:

$$\begin{array}{lr} Z - 5/8x_1 \quad\quad + 1/8x_4 = 300 & \phi_i \\ x_1 \quad + x_3 \quad\quad = 600 & 600 \\ 3/4x_1 + x_2 \quad + 1/4x_4 = 600 & 800 \end{array}$$

solución que no es óptima, por lo que volvemos a aplicar el Método Simplex:

$$x_e = x_1$$
$$x_s = x_3$$



$$\begin{aligned} Z \quad\quad & + 5/8x_3 + 1/8x_4 = 675 \\ x_1 \quad & + \quad x_3 \quad\quad\quad = 600 \\ x_2 & - 3/4x_3 + 1/4x_4 = 150 \end{aligned}$$

Ejemplo VII-5.-

Determinar cuáles serían los límites dentro de los cuales podrían variar c_2 y c_3 para que la solución obtenida en el ejemplo VII-1 no deje de ser óptima.

Para c_2:

$$\max\left[\frac{-1/2}{3/4}, \frac{-1/2}{1/4}\right] \leq \Delta c_2 \leq \infty$$

por lo tanto:

$$-2/3 \leq \Delta c_2 \leq \infty$$

Para c_3 :

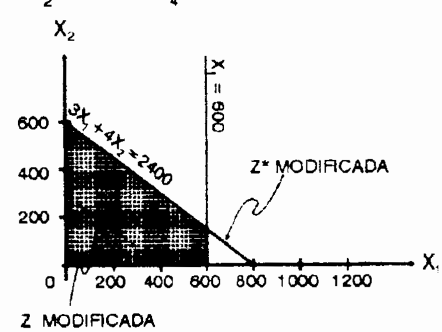
$$\max\left[\frac{-1/2}{1}\right] \leq \Delta c_3 \leq \infty$$

por lo tanto :

$$-1/2 \leq \Delta c_3 \leq \infty$$

Si hacemos $\Delta c_2 = -2/3$, tendríamos nuestro sistema original de la siguiente forma:

$Z - x_1 - 4/3x_2$	$= 0$	ϕ_i
$x_1 + x_3$	$= 600$	∞
$3x_1 + 4x_2 + x_4$	$= 2400$	600



dejando una forma canónica para x_2 y x_3 :

$$\begin{aligned} Z \quad\quad\quad\quad & + 1/3x_4 = 800 \\ x_1 \quad + x_3 \quad & \quad\quad\quad = 600 \\ 3/4x_1 + x_2 \quad & + 1/4x_4 = 600 \end{aligned}$$

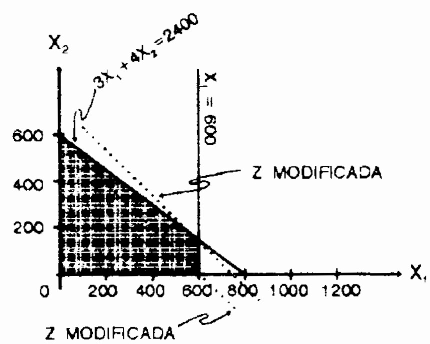
el mismo resultado hubiésemos obtenido si a la ec.. (0') final original le restamos $(c_2 - \bar{c}_2) = (2 - 4/3) = 2/3$ veces la ec. (2'), sin considerar la v.b. x_2. Observamos que $\bar{c'}_1 = 0$, con lo que estamos en el límite tal y como nos lo indicó nuestro rango.

Si hacemos $\Delta c_3 = -1$, tendríamos nuestro sistema original de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 + x_3 \quad &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 \quad &= 600 \\ 3x_1 + 4x_2 \quad + x_4 &= 2400 \end{aligned}$$

dejando una forma canónica para x_2 y x_3 :

$$\begin{aligned} Z - 1/2x_1 \quad + 1/2x_4 &= 600 \\ x_1 \quad + x_3 \quad &= 600 \\ 3/4x_1 + x_2 \quad + 1/4x_4 &= 600 \end{aligned}$$



el mismo resultado hubiésemos obtenido si a la eccuación (0') final original le restamos $(c_3 - \bar{c'}_3) = (0 - (-1)) = 1$ veces la ec. (1'), sin considerar la v.b. x_3. Observamos que la solución anterior ya no es óptima (pues hicimos $\Delta c_3 < -1/2$) y habrá que seguir aplicando el Simplex.

$$x_e = x_1$$
$$x_s = x_3$$

$$\begin{aligned} Z \quad + 1/2x_3 + 1/2x_4 &= 900 \\ x_1 \quad + \quad x_3 \quad &= 600 \\ x_2 - 3/4\, x_3 + 1/4x_4 &= 150 \end{aligned}$$

VII-4.- CAMBIO EN b_i.-

Supongamos ahora que, una vez obtenida la solución óptima, nos damos cuenta que el valor de b_i ha cambiado en Δb_i hasta un nuevo valor $\bar{b}_i$. Dado que al cambiar b_i por $\bar{b}_i$ no se afecta más que el lado derecho de las ecuaciones, los coeficientes $(z^*_j - c_j)$ seguirán siendo ≥ 0, sin embargo, el vector P_o sí cambiará, pudiéndose presentar 2 situaciones:

a) Todos los nuevos valores de los componentes de P_o siguen siendo positivos, en cuyo caso la solución anterior sigue siendo óptima.

b) Algun(os) nuevo(s) valor(es) de los componentes del vector P_o es (son) negativo(s), en cuyo caso la solución óptima anterior ya no es factible y habrá que aplicar el Método Simplex Dual para obtener la nueva solución óptima.

De lo anterior, es claro que, cuando cambiemos el valor de b_i a $\bar{b}_1$, lo único que procede investigar es si la solución modificada sigue siendo factible.

Sea:

$a^*_{k,n+i}$ = coeficiente de x_{n+i} en la ecuación final k (k = 1,2,...,m)

b^*_k = lado derecho de la ecuación final k (k = 1,2,...,m)

Dado que x_{n+i} , que es la variable de holgura correspondiente a la ecuación asociada con b_i, aparece con coeficiente unitario en ella y cero en todas las demás, es fácil saber qué múltiplos de b_i han sido sumados, directa o indirectamente, al lado derecho de las demás ecuaciones y este múltiplo es $a^*_{k,n+i}$ para $k \neq i$.

Por lo tanto tendremos:

$$b^*_k = \sum_{i=1}^{m} a^*_{k,n+i}\, b_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

que es la cantidad sumada al lado derecho de la ecuación k, por lo que si b_i se cambia a $\bar{b}_i$,

$$a^*_{k,n+i}\, \Delta b_i = a^*_{k,n+i}\, (\bar{b}_i - b_i) \qquad (k=1,2,\ldots,m)$$

debe ser sumado al lado derecho de la ecuación k final previa, con objeto de obtener el nuevo conjunto de ecuaciones final. Lo anterior es válido para la función objetivo, cambiando solamente $a^*_{k,n+i}$ por z^*_{n+i} .

Suponiendo que un cambio $\Delta b_i = (\bar{b}_i - b_i)$ocurre en la ecuación (1), entonces, para que la solución última siga siendo factible, se debe cumplir que:

$$b'_i + a^*_{k,n+i}\,\Delta b_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

para $a^*_{k,n+i} > 0$:

$$\Delta b_i \geq \frac{-b_i}{a^*_{k,n+i}}$$

y para $a^*_{k,n+i} < 0$:

$$\Delta b_i \leq \frac{-b'_i}{a^*_{k,n+i}}$$

de donde:

$$\max_{a^*_{k,n+i} > 0} \frac{-b'_i}{a^*_{k,n+i}} \leq \Delta b_i \leq \min_{a^*_{k,n+i} < 0} \frac{b'_i}{a^*_{k,n+i}}$$

Ejemplo VII-6.-

Supongamos que cambiamos b_2 de 2400 a 400 en el ejemplo VII-1. Determinar la nueva solución óptima.

El sistema de ecuaciones final se modificará a:

$$\begin{aligned}
Z + 1/2x_1 \qquad\qquad + 1/2x_4 &= 1200 + 1/2(400 - 2400) = 200 \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 600 \\
3/4x_1 + x_2 \qquad + 1/4x_4 &= 600 + 1/4(400 - 2400) = 100
\end{aligned}$$

que sigue siendo óptima.

Los límites entre los que puede variar b_2 serían:

$$\max.\left[\frac{-600}{0}, \frac{-600}{1/4}\right] \leq \Delta b_i \leq \infty$$

$$-2400 \leq \Delta b_i \leq \infty$$

Ejemplo VII-7.-

Si b_2 cambia ahora de 2400 a −400, entonces:

$$\begin{aligned}
Z + 1/2x_1 \qquad\qquad + 1/2x_4 &= 1200 + 1/2(-400 - 2400) = -200 \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 600 \\
3/4x_1 + x_2 \qquad + 1/4x_4 &= 600 + 1/4(-400 - 2400) = -100
\end{aligned}$$

por lo que ahora la nueva solución es básica no factible mejor que la óptima y debemos aplicar el Método Simplex Dual.

En este caso el problema original no tiene soluciones básicas factibles, por lo que en el Simplex Dual no hay variable de entrada.

VII-5.- CAMBIO EN a_{ij} CUANDO X^*_j ES NO BASICA.-

Si ahora suponemos que tenemos un cambio en el valor de a_{ij} a $\bar{a}_{ij}$ ($\Delta a_{ij} = \bar{a}_{ij} - a_{ij}$)($j = 1,2,\ldots,n$) y que ya contábamos con la solución óptima para el caso original, será evidente que este cambio solo puede afectar a los coeficientes de x^*_j en el sistema de ecuaciones, permaneciendo inalterables, respecto al caso original, todos los correspondientes a las demás variables. Dado lo anterior y que x^*_j es no básica, la solución óptima original deberá seguir siendo factible y lo único que procede averiguar es si sigue siendo óptima o ya no, para lo cual solo revisamos el nuevo coeficiente de x^*_j en la ec.(0) final. Si sigue siendo positivo, la solución anterior sigue siendo óptima, pero si ahora ya es negativo, partimos de la solución óptima original y escogemos a x_j como variable de entrada, aplicando el Método Simplex hasta llegar a la nueva solución óptima.

Siguiendo un razonamiento análogo al utilizado en el caso 3, para la obtención de b^*_k, tendremos aquí que:

$$a^*_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a^*_{k,n+i}\, a_{ij} \qquad \text{para} \quad (k = 1,2,\ldots,m) \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

de donde podemos concluir que:

$$a^*_{k,n+i}\, \Delta a_{ij} = a^*_{k,n+i}\, (\bar{a}_{ij} - a_{ij})$$

deberá ser sumado al actual coeficiente de x_j en la ecuación final (k) [$k = 1,2,\ldots,m$], con objeto de obtener el nuevo coeficiente corregido. Para la ec.(0):

$$z^*_{n+i}\, (\bar{a}_{ij} - a_{ij})$$

se sumará al actual coeficiente de x_j.

La obtención de los límites de variación para a_{ij} , es un poco más complicada que para los casos anteriores y no los determinaremos.

Ejemplo VII-8.-

Supongamos que el coeficiente a_{21} del ejemplo VII-1 se cambia a $\bar{a}_{21} = 1$. Determinar si la solución óptima original lo sigue siendo y en caso negativo obtener la nueva solución óptima.

Como el cambio se lleva a cabo en la segunda restricción, donde x_4 es la variable básica original y observando el sistema de ecuaciones final del ej. VII-1, obtenemos:

$$z^*_4 = 1/2$$

y las $a^*_{k,\,n+i}$ serán:

$$a^*_{14} = 0$$
$$a^*_{24} = 1/4$$

y:

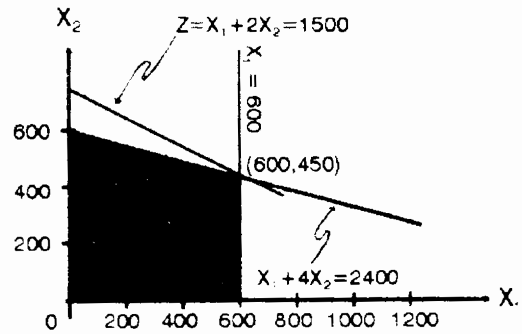
$$\Delta a_{ij} = (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) = (\bar{a}_{21} - a_{21}) = (1 - 3) = -2$$

por lo que el nuevo sistema de ecuaciones final quedará:

$$\begin{aligned} Z + [1/2 + 1/2(-2)]x_1 \qquad\qquad & + 1/2x_4 = 1200 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad & \qquad\;\; = 600 \\ [3/4 + 1/4(-2)]x_1 + x_2 \qquad & + 1/4x_4 = 600 \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} Z \;\; - 1/2x_1 \qquad\qquad & + 1/2x_4 = 1200 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad & \qquad\;\; = 600 \\ 1/4x_1 \;\; + x_2 \qquad & + 1/4x_4 = 600 \end{aligned}$$



como la nueva solución ya no es óptima, aplicamos nuevamente el Método Simplex:

$$x_e = x_1$$
$$x_s = x_3$$

$$\begin{aligned} Z \quad\quad & + 1/2x_3 + 1/2x_4 = 1500 \\ x_1 \quad & + \quad x_3 \quad\quad\quad = 600 \\ x_2 \; & - 1/4x_3 + 1/4x_4 = 450 \end{aligned}$$

v.b.	v.n.b.
$Z^* = 1500$	$X^*_3 = 0$
$X^*_1 = 600$	$X^*_4 = 0$
$X^*_2 = 450$	

En caso de que después del cambio la solución anterior siga siendo óptima, ningún paso adicional debe llevarse a cabo.

VII-6.- CAMBIO EN a_{ij} CUANDO X^*_j ES BASICA.-

En este caso, al ser $x_j > 0$, todos sus coeficientes que resultan modificados en el sistema de ecuaciónes final, son relevantes para determinar los efectos de un cambio en a_{ij}, mismo que puede alterar, tanto los valores de los coeficientes de la función objetivo, como los valores de las variables, por lo que la nueva solución puede ser no factible y/o puede ser no óptima.

El 1er. paso consiste en encontrar los nuevos coeficientes para x^*_j en cada una de las ecuaciones finales. Lo anterior se efectúa en la forma descrita para el caso anterior, es decir $a^*_{k,n+i}\ \Delta a_{ij}$ deberá ser sumado al actual coeficiente de x^*_j en la ecuación (k) final $(k = 1,2,...,m)$ y $z^*_{n+i}\ \Delta a_{ij}$ deberá ser sumado al coeficiente de x^*_j en la ecuación (0) final. En esta forma se obtiene el sistema modificado por el cambio introducido en a_{ij}. Debido a que x^*_j es variable básica, debemos volver a dejar un sistema canónico, en el cual esta variable aparezca con coeficiente unitario en aquella ecuación para la cual es variable básica y cero en todas las demás. Lo anterior origina cambios, tanto en la ecuación (0) final, como en el vector P^*_0 de términos constantes. Las posibles variantes que pueden resultar son:

a) El vector $\overline{P^*_0}$, correspondiente a los términos constantes, sigue siendo positivo en todos sus elementos y el vector de coeficientes correspondiente a la ec.. (0) modificada $\bar{C}^*$ también es positivo en todos sus elementos; en este caso la nueva solución es todavía óptima. Es decir:

$$\text{si } \bar{P}^*_0 \geq 0 \text{ y } \bar{C}^* \geq 0 \Rightarrow \text{solución óptima}$$

b) Si $P^*_0 \geq 0$, pero la función objetivo ya no indica optimalidad, se debe aplicar el Método Simplex, a partir del sistema de ecuaciones recién obtenido, hasta obtener la nueva solución óptima.

c) Si la función objetivo indica optimalidad ($\bar{C}^* \geq 0$), pero la solución no es factible, se aplicará el Método Simplex Dual para llegar a la nueva solución factible y por lo tanto óptima.

d) Si la solución no es factible y la función objetivo no indica optimalidad, se puede considerar otra base, o bien volver a comenzar desde el principio.

Ejemplo VII-9.-

Supongamos que el coeficiente $a_{22} = 4$ del ejemplo VII-1 se cambia a $\bar{a}_{22} = 2$. Determinar si la solución óptima original lo sigue siendo y en caso negativo obtener la nueva solución.

El sistema original es ahora:

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 600 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 &= 2400 \end{aligned}$$

aquí, como el cambio se efectuó en la 2a. restricción, donde x_4 es la variable básica inicial, entonces:

$$z^*_4 = 1/2 \; ; \; a^*_{14} = 0 \; ; \; a^*_{24} = 1/4 \text{ y } \Delta a_{ij} = \Delta a_{22} = (\bar{a}_{22} - a_{22}) = (2 - 4) = -2$$

por lo que el nuevo sistema de ecuaciones final será ahora:

$$\begin{aligned}
Z - 1/2x_1 + \quad 1/2(-2)x_2 \quad + 1/2x_4 &= 1200\\
x_1 \quad + x_3 \quad &= 600\\
3/4x_1 + [1 + 1/4(-2)]x_2 \quad + 1/4x_4 &= 600
\end{aligned}$$

es decir:

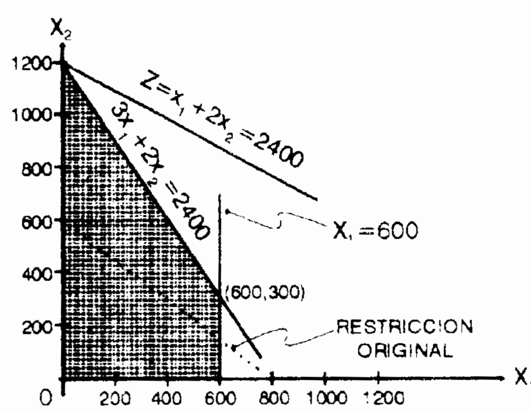
$$\begin{aligned}
Z + 1/2x_1 - x_2 \quad + 1/2x_4 &= 1200\\
x_1 \quad + x_3 \quad &= 600\\
3/4x_1 + 1/2x_2 \quad + 1/4x_4 &= 600
\end{aligned}$$

de donde, para obtener la nueva solución, debemos volver a tener un sistema canónico para v.b. = (x_2, x_3). Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
Z + 2x_1 \quad + x_4 &= 2400\\
x_1 \quad + x_3 \quad &= 600\\
3/2x_1 + x_2 \quad + 1/2x_4 &= 1200
\end{aligned}$$

v.b.	v.n.b.
$Z^* = 2400$	$x^*_1 = 0$
$x^*_3 = 600$	$x^*_4 = 0$
$x^*_2 = 1200$	

Gráficamente tenemos:



Ejemplo.-VII-10.-

Sea el siguiente modelo matemático:

$$\text{Max. } Z = x_1 + 3x_2$$

s.a.

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$(x_1, x_2) \geq 0$$

cuya solución óptima es:

$$\begin{array}{lllll} Z & & + x_3 & + 2x_4 & = 14 \\ & x_2 & + 1/2x_3 & + 1/2x_4 & = 4 \\ x_1 & & - 1/2x_3 & + 1/2x_4 & = 2 \end{array}$$

v.b.	v.n.b.
$Z^* = 14$	$X^*_3 = 0$
$X^*_2 = 4$	$X^*_4 = 0$
$X^*_1 = 2$	

a) Si el coeficiente $a_{21} = 1$ se cambia por $\bar{a}_{21} = 3$. Determinar si la solución óptima original lo sigue siendo y en caso contrario obtener la nueva solución.

Como el cambio se lleva a cabo en la 2a. restricción, en donde x_4 es la variable básica inicial, entonces:

$$z^*_4 = 2;\ a^*_{14} = 1/2\ ;\ a^*_{24} = 1/2$$

y:

$$\Delta a_{ij} = (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) = (\bar{a}_{21} - a_{21}) = (3 - 1) = 2$$

por lo que el nuevo sistema de ecuaciones final será:

$$
\begin{aligned}
Z + \quad 2(2)x_1 \quad & + x_3 + 2x_4 = 14 \\
1/2(2)x_1 + x_2 & + 1/2x_3 + 1/2x_4 = 4 \\
[1 + 1/2(2)]x_1 \quad & - 1/2x_3 + 1/2x_4 = 2
\end{aligned}
$$

simplificando:

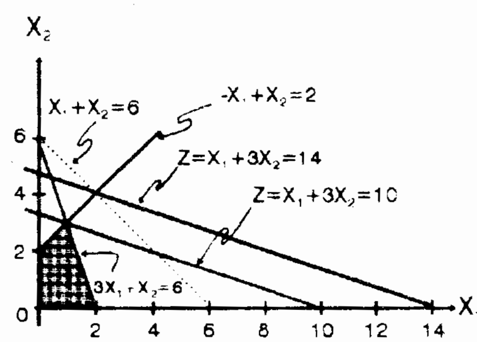
$$
\begin{aligned}
Z + 4x_1 \qquad & + x_3 + 2x_4 = 14 \\
x_1 + x_2 & + 1/2x_3 + 1/2x_4 = 4 \\
2x_1 \qquad & - 1/2x_3 + 1/2x_4 = 2
\end{aligned}
$$

formando nuevamente el sistema canónico para v.b. = (x_1,x_2), obtendremos:

$$
\begin{aligned}
Z \qquad & + 2x_3 + x_4 = 10 \\
x_2 & + 3/4x_3 + 1/4x_4 = 3 \\
x_1 \qquad & - 1/4x_3 + 1/4x_4 = 1
\end{aligned}
$$

v. b.	v. n.b
$Z^* = 10$	$x_3^* = 0$
$x_2^* = 3$	$x_4^* = 0$
$x_1^* = 1$	

Gráficamente tendremos:



b) Si el coeficiente $a_{12} = 1$ se cambia por $\bar{a}_{12} = 1/4$, determinar si la solución óptima original lo sigue siendo y en caso contrario obtener la nueva solución.

Como el cambio se lleva a cabo en la 1a. restricción, donde x_3 es la variable básica inicial, entonces:

$$z^*_3 = 1 \; ; \; a^*_{13} = 1/2 \; ; \; a^*_{23} = -1/2$$

y:

$$\Delta a_{ij} = (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) = (\bar{a}_{12} - a_{12}) = (1/4 - 1) = -3/4$$

por lo que el nuevo sistema de ecuaciones final será:

$$
\begin{array}{lrcl}
Z & 1(-3/4)x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 14 \\
 & [1+1/2(-3/4)]x_2 + 1/2x_3 + 1/2x_4 & = & 4 \\
 & x_1 \;-\; 1/2(-3/4)x_2 - 1/2x_3 + 1/2x_4 & = & 2
\end{array}
$$

simplificando:

$$
\begin{array}{lrcl}
Z & -3/4x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 14 \\
 & 5/8x_2 + 1/2x_3 + 1/2x_4 & = & 4 \\
 & x_1 + 3/8x_2 - 1/2x_3 + 1/2x_4 & = & 2
\end{array}
$$

formando nuevamente un sistema canónico para v.b. = (x_1,x_2), obtendremos:

$$
\begin{array}{lrcl}
Z & 8/5x_3 + 13/5x_4 & = & 94/5 \\
 & x_2 + 4/5x_3 + 4/5x_4 & = & 32/5 \\
 & x_1 \quad - 4/5x_3 + 1/5x_4 & = & -2/5
\end{array}
$$

v. b.	v. n.b.
$Z = 94/5$	$x_3 = 0$
$x_2 = 32/5$	$x_4 = 0$
$x_1 = -2/5$	

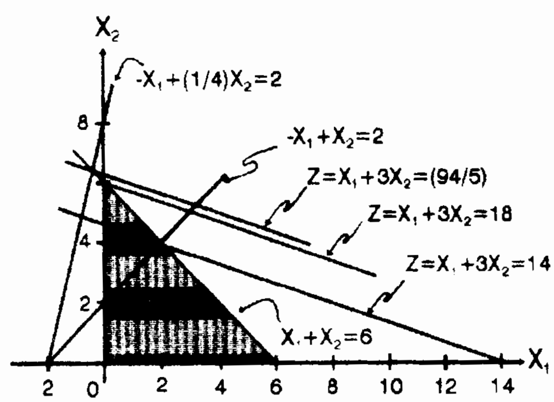
vemos que la solución es no factible, mientras que la función objetivo parece indicar optimalidad (caso c), por lo que aplicamos el Metodo Simplex Dual:

$$x_S = x_1$$
$$x_e = x_3$$

$$
\begin{array}{rcl}
Z + 2x_1 \qquad\qquad + 3x_4 & = & 18 \\
x_1 + x_2 \qquad + x_4 & = & 6 \\
-5/4x_1 \qquad + x_3 - 1/4x_4 & = & 1/2
\end{array}
$$

v. b.	v. n.b.
$Z^* = 18$	$x_1^* = 0$
$x_2^* = 6$	$x_4^* = 0$
$x_3^* = 1/2$	

Graficamente tendremos:



VII-7.- ADICION DE UNA NUEVA RESTRICCION.-

Si por alguna omisión, o bien porque las condiciones del sistema han cambiado (p. ej. el gobierno impuso restricciones a la importación de ciertos componentes, o se presentaron cambios en las condiciones del mercado que antes no existían, etc.), se hace necesario introducir una nueva restricción cuando el modelo ya ha sido resuelto, su efecto solamente puede ser el de eliminar soluciones anteriormente factibles, incluyendo, tal vez, la solución óptima original, sin que exista la posibilidad de añadir alguna nueva, por lo que el valor de Z debe permanecer constante o bien disminuir.

Las 2 posibilidades que se pueden presentar en este caso son:

a) La solución óptima original es factible para la nueva restricción, en cuyo caso seguirá siendo óptima para el sistema modificado.

b) La solución óptima original no satisface la nueva restricción. En este caso, la nueva restricción debe ser agregada al sistema de ecuaciones final obtenido para el problema original, para lo cual y en el caso de una desigualdad, se le agrega a ésta la variable de holgura correspondiente, misma que será la variable básica para esa ecuación desde ese momento y se eliminan de ella todas las demás variables básicas, con objeto de tener un sistema canónico.

   Como la solución original no satisface la nueva restricción, esto se verá reflejado en que, al obtener el sistema canónico, la variable de holgura recientemente introducida (que actúa como variable básica), tendrá un valor negativo. Como la función objetivo sigue indicando optimalidad y la solución es ahora no factible, deberemos aplicar el Método Simplex Dual para obtener la nueva solución óptima.

   En caso de que la nueva restricción amerite la introducción de una variable artificial, ésta deberá tomar las funciones de variable básica para esa ecuación, pero deberá penalizarse su existencia dentro de la base mediante el Método de la Gran M, por lo que al formar el sistema canónico deberemos eliminarla de la función objetivo.

Ejemplo VII-11.-

Supongamos que al modelo matemático del ejemplo VII-1 se le agrega la restricción:

$$x_2 \leq 400 \quad \ldots (3)$$

¿ Como se afectará la solución óptima ahí obtenida?

Teníamos que la solución óptima era:

$$x^*_1 = 0 \; ; \; x^*_2 = 600 \; ; \; x^*_3 = 600 \; ; \; x^*_4 = 0 \text{ y } Z^* = 1200$$

de donde es claro que ésta no satisface la nueva restricción (pues $x^*_2 = 600$), por lo que deberemos agregar al sistema final de ecuaciones la siguiente ecuación:

$$x_2 + x_5 = 400 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

donde:

$$x_5 = \text{variable de holgura.}$$

obteniendose:

$$\begin{array}{lllllll}
Z + 1/2x_1 & & & + 1/2x_4 & & = 1200 & \ldots (0) \\
x_1 & & + x_3 & & & = 600 & \ldots (1) \\
3/4x_1 & + x_2 & & + 1/4x_4 & & = 600 & \ldots (2) \\
 & x_2 & & & + x_5 & = 400 & \ldots (3)
\end{array}$$

formando el nuevo sistema canónico para v.b. = (X_2, X_3, X_5), tendremos:

$$\begin{array}{llllll}
Z & + 1/2x_1 & & & + 1/2x_4 & & = 1200 \\
 & x_1 & & + x_3 & & & = 600 \\
 & 3/4x_1 & + x_2 & & + 1/4x_4 & & = 600 \\
 & -3/4x_1 & & & - 1/4x_4 & + x_5 & = -200
\end{array}$$

v. b.	v. n.b
$Z^* = 1200$	$x_1 = 0$
$x_3 = 600$	$x_4 = 0$
$x_2 = 600$	
$x_5 = -200$	

como la solución es no factible, pero la función objetivo parece indicar optimalidad, aplicamos el Método Simplex Dual:

$$x_S = x_5$$

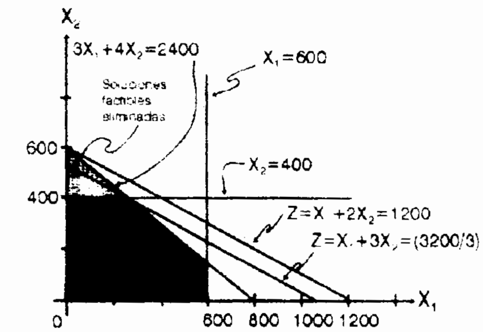
$$x_e = x_1$$

con lo que obtenemos:

$$\begin{array}{llllll}
Z & & & + 1/3x_4 & + 2/3x_5 & = 3200/3 \\
 & & x_3 & - 1/3x_4 & + 4/3x_5 & = 1000/3 \\
 & x_2 & & & + x_5 & = 400 \\
x_1 & & & + 1/3x_4 & - 4/3x_5 & = 800/3
\end{array}$$

v. b.	v. n.b
$Z^* = 3200/3$	$x_5^* = 0$
$x_3^* = 1000/3$	$x_4^* = 0$
$x_2^* = 400$	
$x_1^* = 800/3$	

Graficamente tendremos:



VII-8.- ADICION DE UNA NUEVA VARIABLE.-

Si una vez obtenida la solución óptima, descubrimos que hemos omitido alguna actividad que pudiera ser atractiva, o bien surge la oportunidad de poder llevar a cabo alguna otra no considerada anteriormente, será necesario agregar al modelo aquella nueva variable (que llamaremos x_A), que nos representa la nueva actividad bajo consideración, junto con sus respectivos coeficientes en la función objetivo y en las restricciones.

Nuevamente, en este caso también existen 2 posibles alternativas:

a) Que la solución óptima original, junto con la nueva variable igualada a cero (v.n.b.), sea todavía óptima. Al ser la nueva variable una no básica, los coeficientes de las demás variables en el sistema de ecuaciones final original, permanecerán inalterados, con lo cual la solución dual complementaria ($y^*_i = z^*_{n+i}$) seguirá siendo la misma, ya que el único cambio que se producirá en el modelo dual será la adición de una nueva restricción, o sea la correspondiente a la nueva variable prima. En este caso, la solución dual complementaria satisface la nueva restricción del modelo dual y la solución prima original sigue siendo óptima.

b) Que la solución óptima original, junto con la nueva variable igualada a cero (v.n.b.), ya no sea óptima. Esto se descubre porque la solución dual complementaria ($y^*_i = z^*_{n+i}$) ya no satisface la nueva restricción, que se agregó al modelo dual al introducir la nueva variable en el problema primo. Cuando este es el caso, se toma la solución prima, anteriormente óptima, como punto de partida y se aplica nuevamente el Método Simplex (considerando como $x_e = x_A$), hasta llegar a la nueva solución óptima, para lo cual es necesario, primero, determinar cuales serán los coeficientes de la nueva variable en el sistema de ecuaciones final (c'_A y a'_{iA} para $i=1,2,...,m$).

Debido a que al introducir la nueva variable le hemos dado un tratamiento de v.n.b. en la solución óptima original, la obtención de sus coeficientes en el sistema final modificado se hace mediante el procedimiento indicado en los puntos 1 (cambios de c_j cuando x^*_j es no básica) y 4 (cambios en a_{ij} cuando x^*_j es no básica), en los cuales los valores originales de c_A y a_{iA} $(i = 1,2,\ldots,m)$ son ceros.

i) Por lo que toca al coeficiente de x_A en la función objetivo final (c'_A), que dijimos era cero, se le resta $(\bar{c}_A - c_A) = \bar{c}_A$ (pues $c_A = 0$), por lo que al cambio en c_A se refiere [ec.(β) del punto 1]; además, se le debe sumar:

$$z^*_{n+i}(\bar{a}_{iA} - a_{iA}) = z^*_{n+i}\bar{a}_{iA} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

pues $a_{iA} = 0$, por lo que los cambios en a_{iA} $(i = 1,2,\ldots,m)$ le afectan. O sea:

$$\bar{c}_A' = c_A' - \bar{c}_A + \sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i}\,\bar{a}_{iA} = -\bar{c}_A + \sum_{i=1}^{m} z^*_{n+i}\,\bar{a}_{iA}$$

ii) Respecto a los coeficientes de x_A en las restricciones finales del sistema modificado, se obtendrán sumando:

$$\sum_{i=1}^{m} a^*_{k,n+i}\,(\bar{a}_{iA} - a_{iA}) = \sum_{i=1}^{m} a^*_{k,n+i}\,\bar{a}_{iA} \quad (k = 1,2,\ldots,m)\ [\text{pues } a_{iA} = 0]$$

al coeficiente actual de x_A en la ecuación final k $(k = 1,2,\ldots,m)$ [que vale cero para todas las ecuaciones]. O sea:

$$\bar{a}_{iA} = a_{iA} + \sum_{i=1}^{m} a^*_{k,n+i}\,\bar{a}_{iA} = \sum_{i=1}^{m} a^*_{k,n+i}\,\bar{a}_{iA} \quad (k = 1,2,\ldots,m)$$

Ejemplo VII-12.-

Supongamos que el modelo matemático del ejemplo VII-1 se modifica agregándole x_5, para quedar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= x_1 + 2x_2 + 6x_5 \\ \text{s.a.} & \\ x_1 + x_5 &\le 600 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_5 &\le 2400 \\ (x_1, x_2, x_5) &\ge 0 \end{aligned}$$

como aquí $A = 5$, tendremos:

$$\begin{array}{llll} c_5 = 0 & a_{15} = 0 & a_{25} = 0 & z^*_3 = 0 \quad z^*_4 = 1/2 \\ c'_5 = 0 & a'_{15} = 0 & a'_{25} = 0 & \\ \bar{c}_5 = 6 & \bar{a}_{15} = 1 & \bar{a}_{25} = 8 & \end{array}$$

y las $a^*_{k,n+1}$ son:

$$\text{para } k=1: \quad a^*_{13} = 1 \quad y \quad a^*_{14} = 0$$
$$\text{para } k=2: \quad a^*_{23} = 0 \quad y \quad a^*_{24} = 1/4$$

Lo primero que debemos hacer es comprobar si nos encontramos en el caso (a) o en el caso (b), para lo cual debemos revisar si la nueva solución :

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 600, 0)$$

es todavía óptima.

El único cambio que tendremos en el modelo dual será la adición de la restricción:

$$y_1 + 8y_2 \geq 6$$

Debido a que la solución óptima dual original era:

$$(y_1^*, y_2^*) = (0,1/2)$$

vemos que ésta ya no satisface la nueva restricción, por lo que la solución ahora ya no es factible y por lo tanto la solución prima tampoco es óptima (caso b).

Modificando el sistema de ecuaciones final original para que incluya a x_5, obtendremos:

$$\begin{aligned}
Z + 1/2x_1 \quad & + 1/2x_4 + [-6+0(1)+1/2(8)]x_5 = 1200 \\
x_1 + x_3 \quad & + \quad [1(1)+0(8)]x_5 = 600 \\
3/4x_1 + x_2 \quad & + 1/4x_4 + \quad [0(1)+1/4(8)]x_5 = 600
\end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{array}{lcrl}
Z + 1/2x_1 + 1/2x_4 - 2x_5 & = & 1200 & \phi_i \\
x_1 + x_3 + x_5 & = & 600 & 600 \\
3/4x_1 + x_2 + 1/4x_4 + 2x_5 & = & 600 & 300
\end{array}$$

aplicando nuevamente el Método Simplex, obtendremos:

$$x_e = x_5$$
$$x_s = x_2$$

$$\begin{aligned}
Z + 5/4x_1 + x_2 + 3/4x_4 &= 1800 \\
5/8x_1 - 1/2x_2 + x_3 - 1/8x_4 &= 300 \\
3/8x_1 + 1/2x_2 + 1/8x_4 + x_5 &= 300
\end{aligned}$$

v. b.	v. n.b
$Z^* = 1800$	$x_1^* = 0$
$x_3^* = 300$	$x_2^* = 0$
$x_5^* = 300$	$x_4^* = 0$

Gráficamente no lo podemos representar pues tenemos 3 dimensiones.

CAPITULO VIII

TEORIA DE REDES

Hace apenas unos años que la Investigación de Operaciones comenzó a utilizar, como una de sus herramientas, el Análisis de Redes, el cual sólo había sido utilizado hasta entonces en Ingeniería Eléctrica. El análisis de Redes se ha empleado son éxito en el estudio de sistemas de transporte y comunicaciones, en la teoría de la información, así como en la planeación y control de proyectos.

La teoría de redes puede abarcar muchísimos problemas, sin embargo, en nuesto curso nos limitaremos al estudio de 4 de ellos:

a) Flujo Máximo.- Consiste en encontrar la distribución de flujos, en una red que conecta una fuente con un destino, de tal manera que se maximice el flujo total a través de la red.

b) Localización de la Ruta más Corta.- Se debe localizar el camino más corto, desde un origen hasta un destino, utilizando una red que los conecta.

c) Mínima Longitud de una Red de Comunicaciones.- Se seleccionan aquellas ramas de la red que tiene la longitud total menor, a la vez que suministran una vía de comunicación entre cada pareja de nodos.

d) Planeación y Control de Proyectos.- Se utiliza para medir y controlar el progreso de un proyecto.

VIII -1.- REDES.-

Definición VIII-1.-

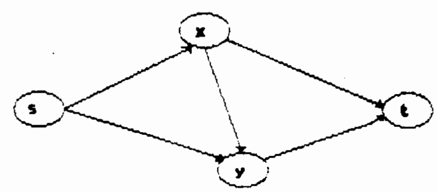
Una red dirigida o gráfica lineal dirigida G = (N ; A), consiste de una colección de N elementos x, y, w, ... , junto con un subconjunto A de los pares ordenados (x, y), (x, w), ... , tomados de N. Los elementos en N se llaman indistintamente: nodos, vértices, puntos de unión o simplemente puntos; los miembros de A se conocen como: arcos, uniones, ramas o aristas.

Nosotros usaremos la terminología nodo-arco.

Una red puede ser representada seleccionando un punto correspondiente a cada nodo x de N y dirigiendo una flecha de x hasta y, si es que el par ordenado (x, y) está en A [(x, y)) $\in$ A].

Ejemplo VIII-1.-

Sea una red que consta de 4 nodos: (s,x,y,t) y 5 arcos: (s,x), (s,y), (x,y), (x,t), y (y,t). Dibujar la red.



Esta red se dice dirigida, debido a que cada arco involucra una orientación específica.

Vemos que en la anterior red dirigida, el arco (s, x) $\in$ A, mientras que el (x, s) $\notin$ A.

Es posible también la existencia de redes no dirigidas, en las cuales el conjunto A consiste de pares no ordenados de nodos. Asi mismo, se pueden encontrar redes mixtas, en las cuales algunos arcos están dirigidos y otros no.

En nuestro curos eliminaremos las siguientes posibilidades:

a) Arcos (x, x), que conduzcan desde un nodo x hasta él mismo, razón por la cual todos los arcos que consideraremos se supondrán de la forma (x, y) con x $\neq$ y.

b) La existencia de arcos múltiples que unan x con y, por lo que todas nuestras redes contendrán un arco, como máximo, que vaya de un nodo a otro.

En forma simplista podemos tener:

Definición VIII-2..-

Una gráfica lineal consiste de un conjunto de puntos de unión llamados nodos, cada uno de los cuales está unido a algunos o todos los demás por medio de arcos.

Definición VIII-3.-

Se considera como una red a una gráfica lineal en la cuál existe algún tipo de flujo en sus arcos.

A continuación se listan algunos ejemplos de sistemas que satisfacen la definición de red, mismos que podemos encontrar a nuestro alrededor:

Nodos	Arcos	Flujo
Intersecciones	Carreteras	Vehículos
Centros de trabajo	Rutas de manejo de materiales	Trabajos
Oficina de Correos	Rutas de transpote	Correspondencia
Estaciones telefonicas	Líneas Telefónicas	Mensajes
Estaciones de Metro	Túneles	Personas

Definción VIII-4.-

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$), una secuencias de diferentes nodos de una red, tal que (x_i, x_{i+1}) es un arco para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$, entonces la secuencia de nodos arcos:

$$x_1, (x_1, x_2), x_2, (x_2, x_3), x_3, \dots, (x_{n-1}, x_n), x_n$$

se llama "cadena". Si se estipula además que $x_1 = x_n$, entonces la cadena se llama ciclo (dirigido o no, según sea el caso de la red).

Ejemplo VIII-2.-

En la figura del ejemplo VIII-1, la cadena s, (s, x), x, (x, t), t, conduce desde "s" hasta "t". Esta red no contiene ni un solo ciclo dirigido. Si la red fuese no dirigida, entonces tendríamos varios ciclos, entre ellos:

s, (s, x), x, (x, y), y, (y, s), s

Definición VIII-5.-

Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ una secuencia de nodos diferentes, los cuales tienen la propiedad de que ya sea (x_i, x_{i+1}) ó (x_{i+1}, x_i) es un arco (i = 1, 2, ..., n-1). Restringiendo para cada i solo una de las 2 posibilidades, llamamos a la secuencia de nodos y arcos resultante, un "camino" desde x_1 hasta x_n. Nuevamente si $x_1 = x_n$ tenemos un ciclo.

Vemos entonces que un camino difiere de una cadena, en que el primero permite la posibilidad de recorrer un arco en un sentido opuesto a su orientación, al ir desde x_1 hasta x_n.

Definición VIII-6.-

Dada una red (N;A), se puede formar la matriz de incidencia nodo-arco de la siguiente forma: enumere los nodos de la red verticalmente y los arcos en forma horizontal y anote, en la columna correspondiente al arco (x, y), un 1 en el renglón del nodo "x" y un −1 en el renglón correspondiente a "y", poniendo ceros en el resto de la columna.

Ejemplo VIII-3.-

La red del ejemplo VIII-1, tiene la siguiente matriz de incidencia:

$$\begin{array}{c} \\ s \\ x \\ y \\ t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (s,x) & (s,y) & (x,y) & (x,t) & (y,t) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

de donde puede apreciarse que toda la información respecto a la estructura de una red dirigida ésta representada en esta matriz.

Definición VIII-7.-

Una red se llama "conectada" si existe un "camino" que conecta cada par de nodos.

Ejemplo VIII-4.-

La red del ejemplo VIII-1, es una red conectada, pero dejaría de serlo si quitásemos los arcos (s, x) y (s, y).

Definición VIII-8.-

Un "árbol" es una red conectada G = (N; A), la cual no contiene ningún ciclo.

Es claro que un árbol tiene la propiedad de que existe un camino o una cadena única que una cada par de nodos.

Definición VIII-9.-

Una red, conectada o no, la cual no contiene ciclos, se llama un "bosque". Cada pieza conectada del bosque, es un árbol si se considera como una red independiente.

Teorema VIII-1.-

Una red G = (N, A) con "n" nodos, es un árbol si tiene (n-1) arcos y ningún ciclo (es decir, es una red conectada).

Efectuando la demostración por inducción, tenemos:

El teorema es evidentemente cierto para 2 nodos. Supongamoslo cierto para 2, 3, ..., n-2, n-1, debemos demostrar que es cierto para "n" nodos.

Lema VIII-1.-

Bajo la hipótesis del teorema VIII-1, existe cuando menos un nodo que es un final, es decir, un punto "p" con solo un arco (p, q) que lo conecta al resto de la red.

Demostración del lema VIII-1:

Para encontrar un nodo que sea un final, comience seleccionando cualquier nodo, sea p_1; este nodo está unido cuando menos a otro nodo, sea p_2, mediante un solo arco (de no ser este el caso, eliminando cualquier arco (p_i, p_j) que una un par de los restantes n-1 nodos, obtendríamos n-2 arcos sin ciclos). Por nuestra suposición inductiva, esto formaría un árbol, por lo que existiría una cadena de arcos uniendo p_i con p_j. Adjuntando el arco (p_i, p_j) a esta cadena, formaríamos un ciclo, lo cual sería contrario a nuestra suposición. Debido a que existe un arco entre p_1 y p_2, muévase a p_2 a lo largo del arco (p_1, p_2). Pase a p_3 a lo largo de otro arco. (en caso de ser posible). Dado que el número de nodos es finito y no existen ciclos, procediendo de esta manera llegaremos a un punto "p" que sea un final con solo un arco (q, p) uniendolo al resto de la red.

Prueba del Teorema VIII-1:

Si el nodo final y su único arco se eliminan, la red resultante tendrá (n-1) nodos y (n-2) arcos y debido a que no contienen ciclos, está conectada por la suposición inductiva. Si el punto "p" eliminado y su arco (q, p) se insertan, será posible el conectar a "p" a cualquier otro nodo vía el nodo "q", con lo cual probamos que una red con "n" nodos, (n-1) arcos y sin ciclos está conectada y por lo tanto es un árbol.

De hecho, cualquier pareja de las 3 condiciones:

a) G está conectada.

b) G no tiene ciclos.

c) $|A| = |N| - 1$

implica la tercera y caracteriza a G como un árbol.

Definición VIII-10.-

Dada una red $G = (N; A)$, supóngase que cada arco $(x, y) \in A$ tiene asociado con él un número real no negativo $c(x, y)$. Llamamos a $c(x, y)$ la "capacidad" del arco (x, y); intuitivamente, $c(x, y)$ puede pensarse como la representación de la máxima cantidad de algún artículo que puede llegar a "y", procedente de "x", por unidad de tiempo.

La capacidad de un arco no orientado es igual en ambas direcciones $[c(x, y)]$, mientras que en un arco orientado, es $c(x, y)$ en la dirección de orientación y cero en la contraria.

Ignoraremos en nuestro curso lo posibilidad de nodos con capacidad de flujo restringida.

Definición VIII-11.-

Un nodo se llama "fuente", si cada uno de sus arcos está orientado de tal forma que el flujo sale de él. Un nodo se llama "destino", si cada uno de sus arcos está orientado de tal forma que el flujo entra a él. Así, las fuentes pueden considerarse como las generadoras de flujo, mientras que los destinos serán los absorbentes del mismo.

Definición VIII-12.-

Si:

$$x \in N$$

sea $A(x)$, (antes x), el conjunto de todas las $y \in N$ tales que $(y, x) \in A$:

$$A(x) = \{ y \in N \mid (y, x) \in A \}$$

similarmente, sea $D(x)$, (después de x), el conjunto de todas las $y \in N$ tales que $(x, y) \in A$:

$$D(x) = \{ y \in N \mid (x, y) \in A \}$$

VIII-2.- FLUJO MAXIMO.-

Considere una red que conecta 2 nodos (una fuente y un destino), por medio de varios nodos intermedios. Supóngase que el flujo que llega a un nodo es igual al flujo que sale de él (conservación del flujo), para todos aquellos nodos que no sean la fuente y el destino. Supongamos que un flujo f(x,y) por unidad de tiempo va del nodo "x" al nodo "y"; este flujo necesariamente tendrá que ser menor o igual a la capacidad c(x,y) del arco. Es decir:

$$f(x,y) \leq c(x,y) \text{ para todas las } (x,y) \in A \ldots (1)$$

Sea la fuente (f) y el destino (d). Un flujo estático de valor F de "f" a "d", satisface las desigualdades y ecuaciones lineales:

$$\sum_{y \in D(x)} f(x,y) - \sum_{y \in A(x)} f(y,x) = \begin{Bmatrix} F \text{ si } x = f \\ O \text{ si } x \neq f,d \\ -F \text{ si } x = d \end{Bmatrix} \ldots (2)$$

por lo que si el flujo neto que sale de "x" se define como:

$$\sum_{y \in D(x)} f(x,y) - \sum_{y \in A(x)} f(y,x)$$

entonces, las ecuaciones (2) puede ser expresadas como: el flujo neto que sale de la fuente es F y el flujo neto que "sale" del destino es –F (o el flujo neto que entra al destino es F), mientras que el flujo neto que sale de un nodo intermedio es cero. Una ecuación de este último tipo, se llama ecuación de conservación de flujo.

Dado un flujo F, llamamos f(x,y) al flujo en el arco (x,y). Cada flujo en el arco (x,y), ocurre precisamente en 2 ecuaciones de (2) y tiene un coeficiente de 1 en la ecuación correspondiente al nodo "x" y un coeficiente –1 en la ecuación correspondiente al nodo "y". En otras palabras, la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones (2), independientemente de la columna de F, es la matriz de incidencia nodo-arco de la red.

Sabemos que:

$$F = \sum_{y \in D(f)} f(f,y) = \sum_{x \in A(d)} f(x,d)$$

y que deseamos maximizar F (en cualquiera de sus 2 formas). Es claro que el problema de flujo maxímo en una red, puede ser formulado como un problema de programación lineal. Es decir:

$$\text{Max } F = \sum_{y \in D(f)} f(f,y)$$

s.a.

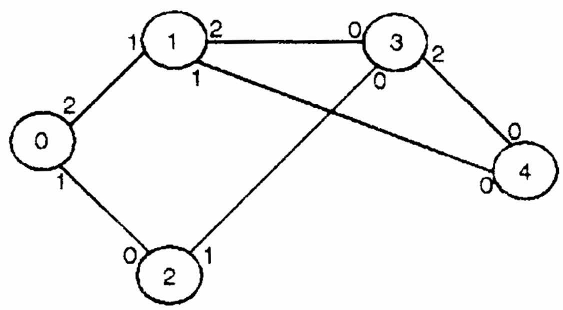
$$\sum_{y \in D(x)} f(x,y) - \sum_{y \in A(x)} f(y,x) = 0 \qquad \text{para} \neq (f,d)$$

$$0 \leq f(x,y) \leq c(x,y) \qquad \text{para cada arco } (x,y)$$

sin embargo, es posible desarrollar un procedimiento de solución más eficiente, como veremos más adelante.

Ejemplo VIII-4.-

Sea la siguiente red:



en donde las capacidades de flujo c(x,y) en cada dirección, se muestran mediante los números en los arcos correpondientesque están situados cerca del nodo en el cual el flujo puede originarse. Por ejemplo:

$$c(0,1) = 2$$
$$c(1,0) = 1$$
$$c(2,3) = 1$$

Deseamos determinar el flujo factible en cada arco, que maximice el flujo total F que sale de "0" (o que entra en 4).

Un primer intento, nos conduce a descubrir que un flujo factible sería uno de 2 por $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. La asignación del flujo anterior parece ser la máxima posible, por lo que a simple vista parece ser que $F_{max} = 2$. Más adelante veremos si esta solución es o no correcta, ya que pueden existir otros flujos factibles que conduzcan a un mayor valor de F.

Definición VIII-13.-

Un "corte" C en (N; A), que separe (f) y (d), es cualquier conjunto de arcos dirigidos, que contenga cuando menos un arco de cada cadena con capacidad de flujo mayor que cero, que una la fuente y el destino.

Definición VIII-14.-

El valor de "corte" ó "capacidad del corte" C, es la suma de las capacidades de los arcos del corte.

Definición VIII-15.-

SI (N;A) es una red y si F es un flujo entre (f) y (d) en (N; A), entonces c(x, y) − f(x, y) es la "capacidad residual" del arco (x, y) con respecto a F.

Teorema VIII-2.-

Este teorema se conoce con el nombre de Teorema del Flujo Máximo-Mínimo Corte y dice así:

Para cualquier red, el valor del flujo máximo de (f) a (d), es igual a la mínima capacidad de corte de todos aquellos cortes que separan (f) y (d).

VIII-2.1 Método de Solución para el Flujo Máximo.-

PASO 1.- Encuentre un camino, entre la fuente y el destino, que tenga capacidad de flujo > 0. Si no existe ninguno, los flujos netos asignados hasta ese momento constituyen un flujo máximo (óptimo).

PASO 2.- Inspeccione el camino encontrado en el paso 1 para encontrar el arco que tenga la menor capacidad de flujo; denomine esta capacidad c*. Incremente el flujo es este camino en c*.

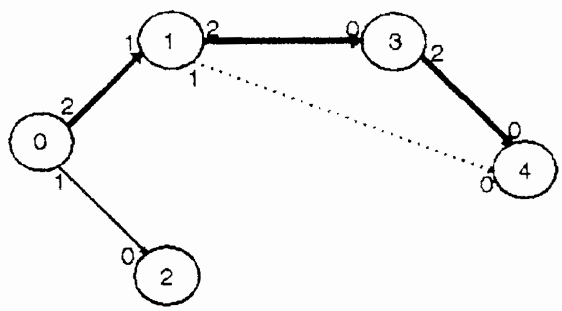
PASO 3.- Disminuya en c* la capacidad de flujo de cada arco en el camino en el sentido del flujo. Incremente en c* la capacidad de flujo de cada arco del camino en sentido contrario al flujo asignado. Regrese al paso 1.

El paso 1 puede llegar a ser muy laborioso, razón por la cual se ha desarrollado un procedimiento sistemático, que nos permite encontrar dicho camino en una forma sencilla y que consiste en formar un árbol de todos los nodos que pueden ser alcanzados desde la fuente, mediante caminos de capacidad de flujo mayor que cero. Es decir:

Comience determinando todos aquellos nodos que pueden ser alcanzados desde la fuente, siguiendo un solo arco con capacidad de flujo > 0 que salga de (f). Para cada uno de estos nodos que fueron alcanzados, determine todos los nuevos nodos (aquellos aún no alcanzados con anterioridad), que puedan ser alcanzados desde ese nodo, a lo largo de un arco con capacidad de flujo > 0. Repita este procedimiento, sucesivamente, con los nuevos nodos que vayan siendo alcanzados. El resultado será la formación de un árbol de todos los nodos que pueden ser alcanzados desde la fuente, a lo largo de caminos con capacidad de flujo > 0. Por lo tanto, este procedimiento identificará un camino con capacidad de flujo > 0 entre la fuente y el destino, si es que existe cuando menos uno.

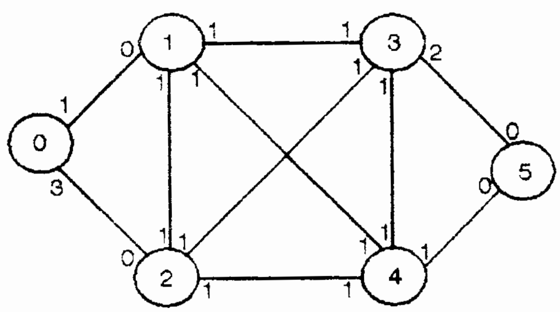
Ejemplo VIII-5.-

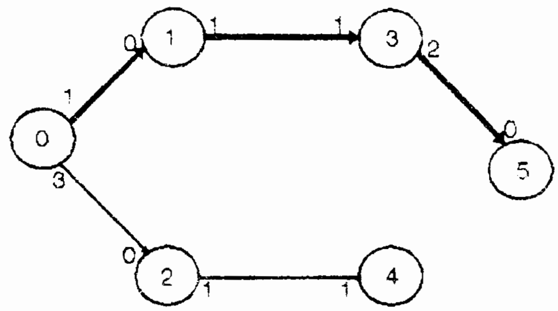
Encontrar un camino con capacidad de flujo > 0 entre la fuente y el destino para la red del ejemplo VIII-4.



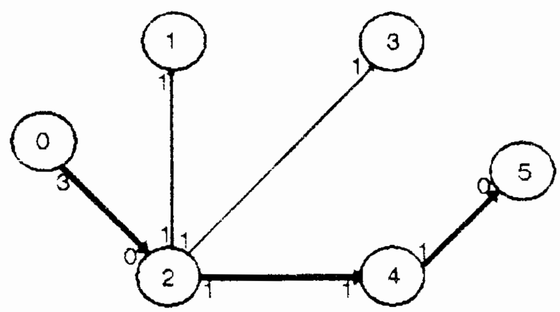
Ejemplo VIII-6.-

Encontrar un camino con capacidad de flujo > 0 entre la fuente y el destino para la siguiente red:

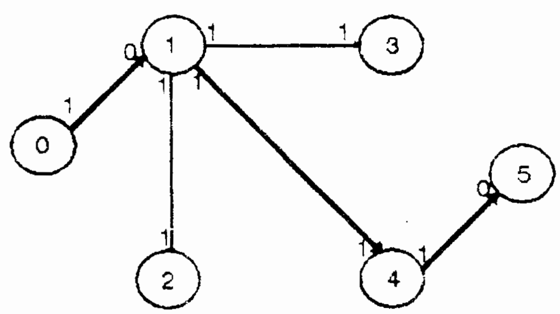




o bien:



o bien:



La busqueda de nuevos caminos con capacidad de flujo > 0, que unan (f) y (d), no es ya necesaria cuando llegamos a un valor F que corresponda a la mínima capacidad de corte de todos aquellos cortes que separan (f) de (d), de acuerdo con el teorema VIII-2, ya que este nos garantiza haber llegado a un flujo máximo.

El paso 2 es evidente, ya que no es posible hacer circular por el camino encontrado un flujo mayor que c*, ya que de hacerlo así, violaríamos las capacidades de flujo de cuando menos un arco (el correspondiente a la capacidad c*), siendo entonces el flujo asignado no factible.

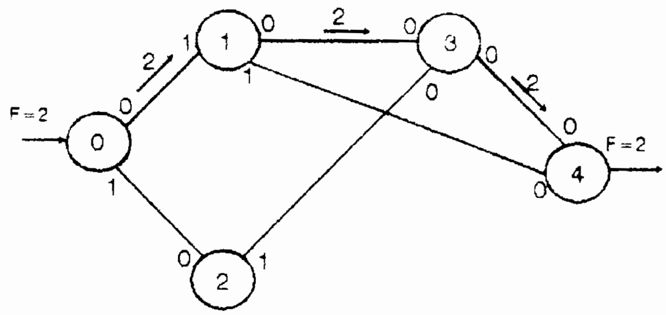
La 1a. parte del paso 3, tiene por objeto actualizar la capacidad residual de los arcos considerados, para poder buscar nuevos caminos con capacidad de flujo > 0, si aún existen. La 2a. parte, tiene por objeto poder cancelar, total o parcialmente, algun flujo ya asignado a algún otro arco, por podersele asignar otra ruta que nos permita incrementar más el flujo total. Es decir, puede suceder que un flujo asignado originalmente a través de un arco, pudiera haber circulado a través de otro arco y que al hacerlo por este particular, impida que otro flujo pueda hacerlo: sin embargo, de poderlo cambiar al otro, abrimos nuevos caminos para incrementar nuestro flujo total.

Ejemplo VIII-7.-

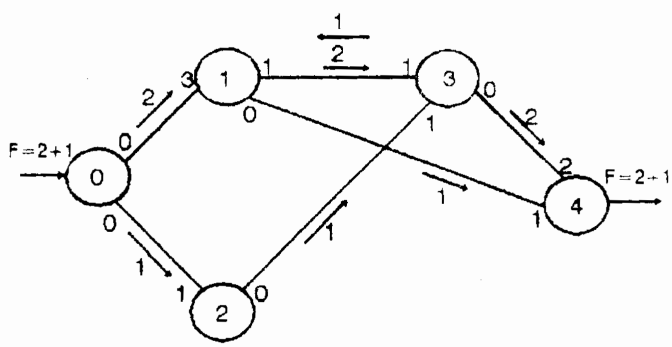
Aquí se ve la necesidad de modificar las capacidades de flujo en sentido opuesto a éste para poder tener el flujo máximo.

Sea la red del ejemplo VIII-4, a la cual le hemos asignado un flujo de 2 por $0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Sin efectuar la modificación propuesta en la 2a. parte del paso 3, obtendremos:



de donde podemos observar que ya no quedan caminos con capacidad de flujo > 0, por lo que nos conduciría a concluir que $F_{max} = 2$, lo cual es totalmente falso, según podemos observar a continuación si efectuamos la modificación propuesta:



obteniendo así un $F_{max} = 3$, que es el correcto.

Ejemplo VIII-8.-

Apliquemos el método de solución recien descrito a la red del ejemplo VIII-6, en donde deseamos encontrar el flujo máximo que dicha red puede transportar entre "0" y "5". Supóngase un flujo inicial $f(x, y) = 0$.

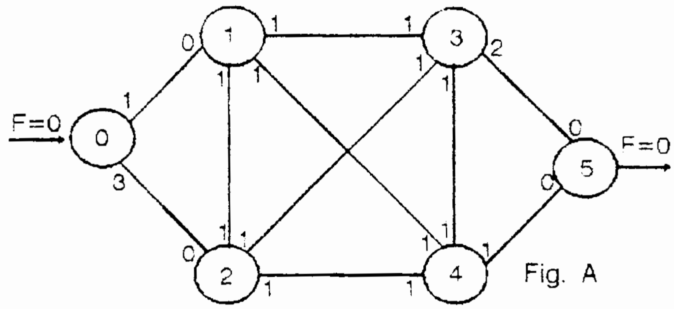


Fig. A

Paso 1.-

Encontramos un camino entre la fuente y el destino que tenga capacidad de flujo > 0. La fig. B nos representa un posible árbol con capacidades de arco > 0, que conecta todos los nodos desde el nodo "0"

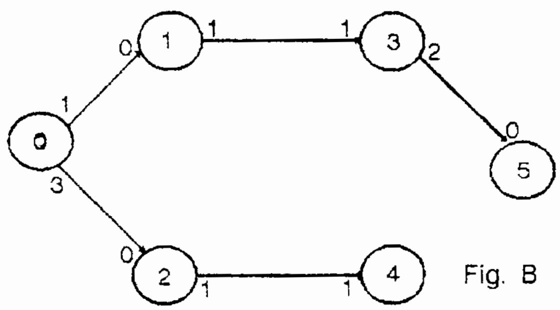


Fig. B

Paso 2.-

En el camino encontrado en el paso 1, vemos que el arco (0,1), junto con el (1, 3), tienen la mínima capacidad de flujo, por lo que $c^*_1 = 1$. El flujo puede ser incrementado, a través del camino (0, 1, 3, 5,), a $f_1 = 1$, flujo con el cual los arcos (0, 1) y (1, 3) se saturan (fig. C)

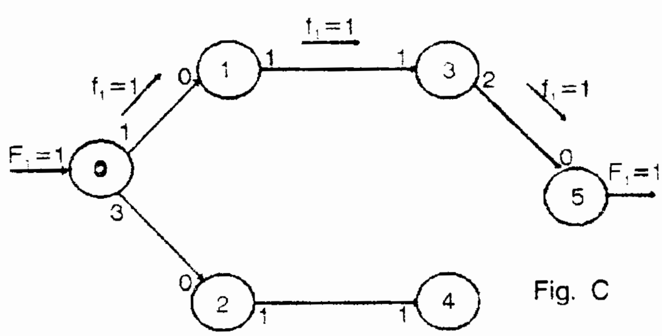


Fig. C

Paso 3.-

Ajustamos las capacidades de flujo de acuerdo con el flujo asignado, disminuyendo en 1 las capacidades a lo largo del camino (0, 1, 3, 5) y aumentando en 1 la capacidad en sentido inverso (fig. D).

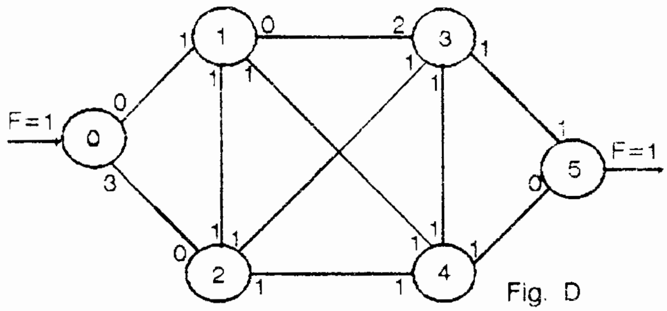
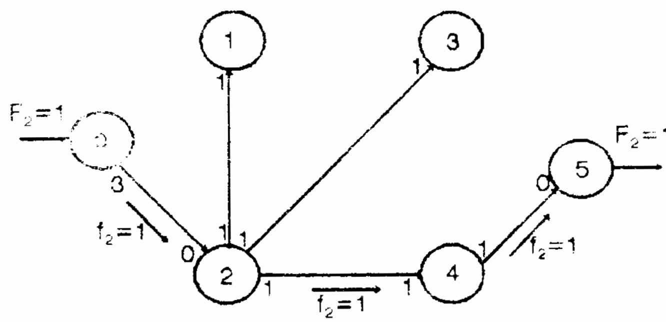


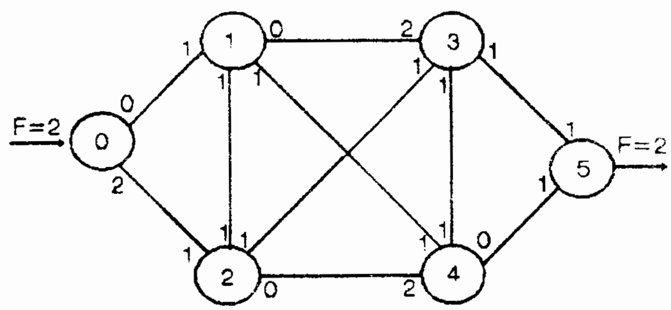
Fig. D

es decir, $c'(i, j) = c(i, j) - f$, y $c'(j, i) = c(j, i) + f$, para todos los arcos (i, j) en el camino escogido.

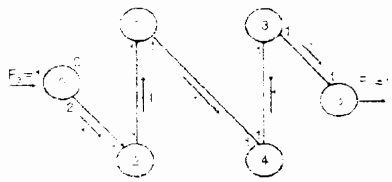
Pasos 1 y 2.- ($c_2^* = 1$)



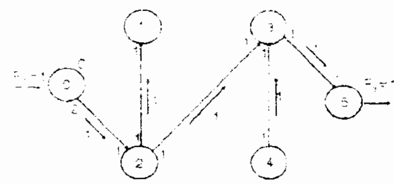
Paso 3.- ($F = F_1 + F_2$)



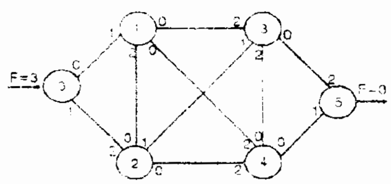
Pasos 1 y 2.- ($c_3^* = 1$)



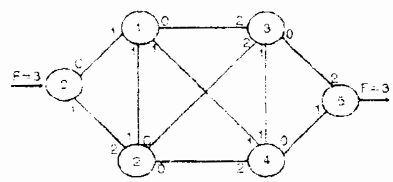
O BIEN: Pasos 1 y 2.- ($c_3^* = 1$)



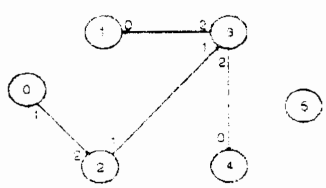
Paso 3.- ($F = F_1 + F_2 + F_3$)



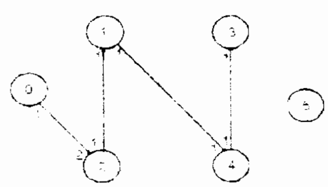
Paso 3.- ($F = F_1 + F_2 + F_3$)



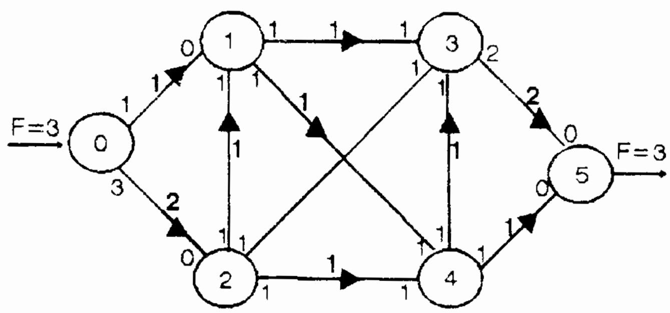
Paso 1.-



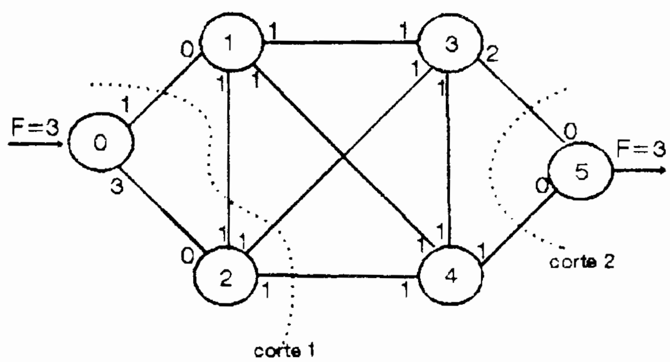
Paso 1.-



Dado que no es posible llegar al destino, el proceso termina y hemos encontrado un flujo máximo $F_{max} = 3$, que circula en la siguiente forma a través de la red:



Recordando el Teorema VII-2, que nos indica que el flujo máximo es igual a la mínima capacidad de corte de todos aquellos cortes que separan a "f" y "d" y que la capacidad de cualquier corte nos dá un límite superior para el flujo en la red, vemos que es lo que sucede en nuestro ejemplo:

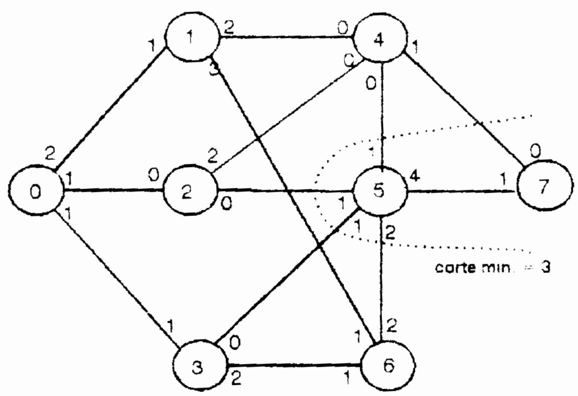


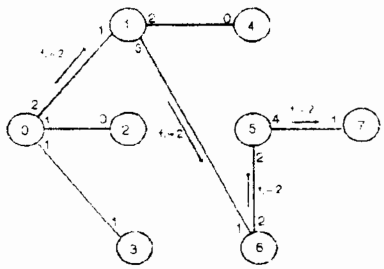
efectuando el corte 1 mostrado, vemos que su capacidad de corte es 4, mientras que efectuando el corte 2, vemos que su capacidad de corte es 3. Dado que no podemos encontrar ningún corte con capacidad menor a 3, el flujo máximo deberá ser 3, tal y como se obtuvo anteriomente. De haber afectuado este paso con anterioridad, nos hubiéramos evitado el último paso 1.

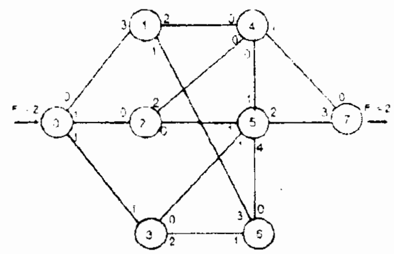
Es evidente que la optimalidad se ha alcanzado cuando existe un corte en la red actual cuya capacidad es cero, respecto a las capacidades de flujo residuales actuales. Por ejemplo, si efectuamos el corte 2 en la red resultante de la aplicación del paso 3 último, vemos que la capacidad es cero.

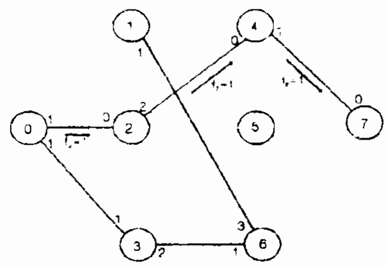
Ejemplo VIII-9.-

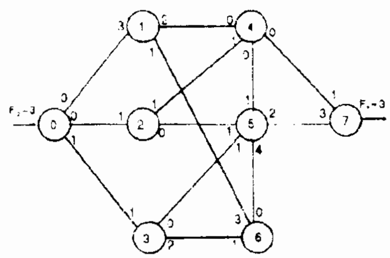
Encontrar el flujo máximo entre el nodo 0 y el 7.

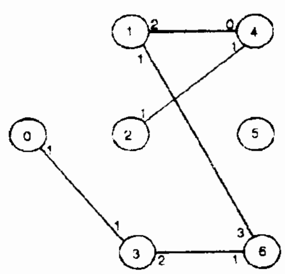


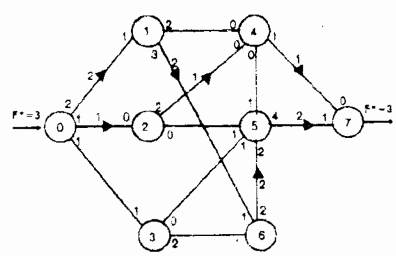












VIII-3.-RUTA MAS CORTA.-

Los problemas de ruta, involucran la localización de un camino a través de una red, desde una fuente hasta un destino, que minimice (ó maximice) alguna función de una propiedad de los arcos del camino seleccionado (generalmente distancia)

Los problemas de ruta son ampliamente utilizados en sistemas de transporte y de comunicaciones, pero también se presentan en una gran variedad de otros campos, tales como:

a) En la determinación del orden en el cual debemos producir una variedad de productos, en una instalación común de producción, de tal forma que se minimice la suma de los costos de puesta en marcha.

b) En la determinación de un subconjunto de tareas, dentro de un conjunto interrelacionado de las mismas, cuyo tiempo de terminación fija el tiempo mínimo total para la terminación del conjunto.

VIII-3.1.- Método de Solución para la Ruta Más Corta.

Existen varios procedimientos, bastante similares, para la obtención de soluciones óptimas al problema de la ruta más corta. Nosotros trataremos aquí los 3 más cortos y simples.

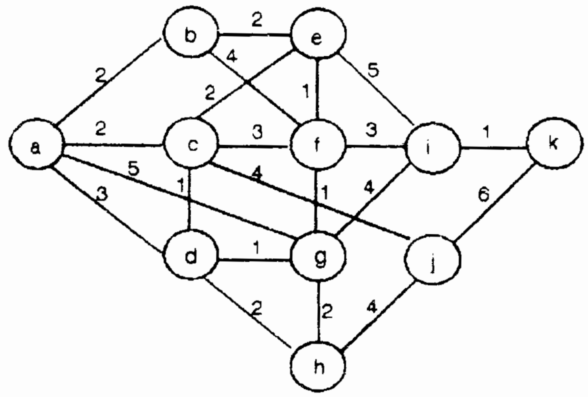
Método 1.-

Este método fue propuesto por G. J. Minty en 1957 y es aplicable para el caso de redes no dirigidas. Simplemente construya un modelo de hilo de la red, en el cual las longitudes de los pedazos de hilo sean proporcionales a las longitudes de los arcos. Tome la fuente con una mano y el destino con la otra y jale, los hilos que queden tensos indicarán los arcos correspondientes a la ruta más corta

Método 2.-

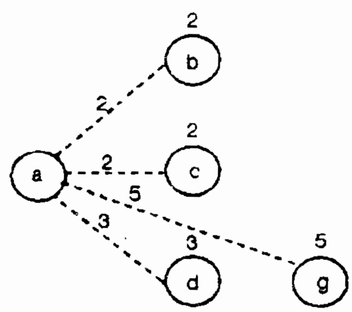
Este método consiste en un procedimiento gráfico. Para describirlo haremos uso del siguiente ejemplo:

Ejemplo VIII-10.-



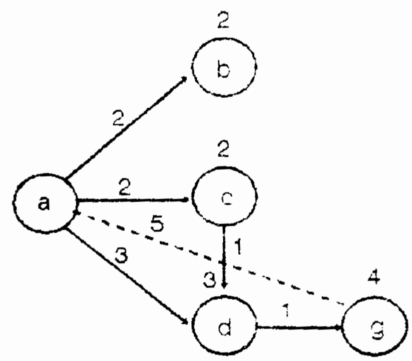
Paso 1.-

Empezando en el origen "a", dibuje en forma punteada todos los arcos por medio de los cuales se puede ir desde "a" a cualquier otro nodo, e inserte las distancias directas desde "a" en cada uno de los nodos:



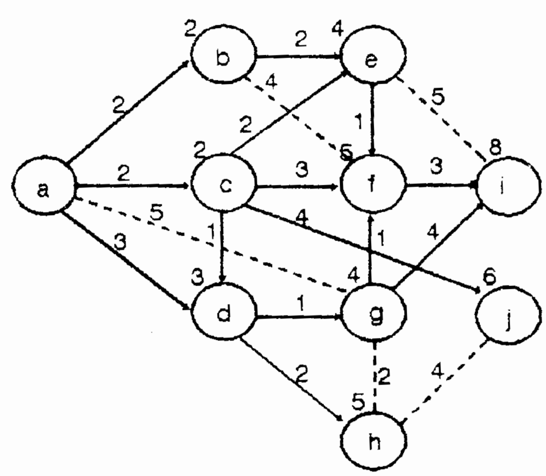
Paso 2.-

Si existen arcos que conecten cualesquiera de los nodos obtenidos en el paso 1, determine, para cada arco, si la ruta indirecta desde "a" es o no más corta que la directa. Dibuje la ruta más corta con línea sólida y deje la línea punteada para la más larga. Indique la distancia más corta encima de cada nodo. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede apreciar que es factible ir de "a" a "g", a través de "d", a un menor "costo" que directamente. Además, se puede ir a "d" directamente o a través de "c". En este caso de empate, marque ambas rutas con líneas sólidas.



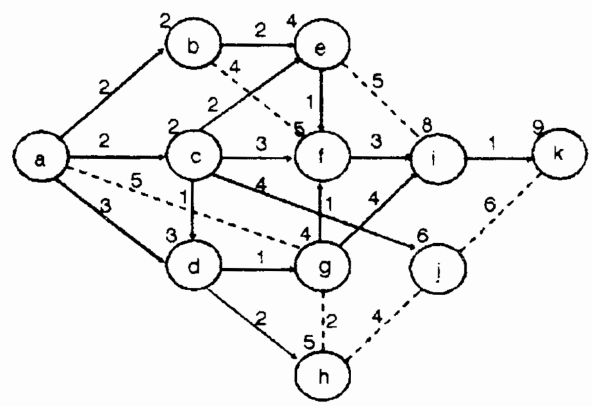
Paso 3,.-

Agregue todos los nodos que puedan ser alcanzados, partiendo de los nodos considerados en el paso 2 y repita ese paso con respecto a ellos. Inserte las distancias:



Paso 4.-

Continue en la misma forma hasta completar la red. Las líneas sólidas, en la siguiente figura, muestran las rutas más cortas que pueden ser tomadas desde "a" hasta cualquier otro punto. Nótese que existen alternativas.



Método 3.-

Este metodo, es la forma algebraica del método gráfico descrito con anterioridad y la esencia del procedimiento estriba en que, partiendo del origen, se va alejando del mismo, identificando en forma sucesiva la ruta más corta a cada uno de los nodos de la red, en orden ascendente de dichas distancias más cortas desde el origen, razón por la cual el problema queda resulto cuando se alcanza el destino.

Se supone aquí que:

a) Se puede escribir sin ningún problema, para cada nodo, los arcos que conducen a otros nodos, esto en orden creciente de su longitud.

b) No representa esfuerzo alguno el ignorar un arco de la lista, si es que éste conduce a un nodo cuya distancia ha sido asignada con anterioridad.

c) En la etapa "k" (k = 1, 2, ...) del proceso de cómputo, se conocen los (k–1) nodos que están más cercanos al origen (excluyendo éste), a través de cadenas de conexión de mínima longitud, así como las rutas y distancias más cortas correspondientes. Llámese a este conjunto de k puntos "S" o "nodos originales". Todos los demás nodos, que no están en el conjunto S, los llamaremos "nodos nuevos".

Dada la información anterior, ¿ de que manera identificamos el nodo que tiene la k-ava menor distancia al origen, a través de su ruta más corta ?, es decir, ¿ cuál de los nodos nuevos está más cercano al origen ?. Para calificar como candidato, un nodo nuevo debe estar conectado mediante un solo arco a alguno de los nodos en S (nodos originales), ya que de estar conectado a través de algún otro nodo nuevo, este último estaría más cerca del origen que el primero. Además, el nodo nuevo considerado, deberá ser el que se encuentra a menor distancia del nodo original de entre todos los nodos (en caso de ser varios), que se encuentran unidos a él mediante un solo arco.

Debido a que el conjunto S contiene k nodos originales y sólo consideramos el nodo nuevo más cercano a cada uno de ellos, existen, cuando más, k candidatos para ser el nodo nuevo más cercano al origen.

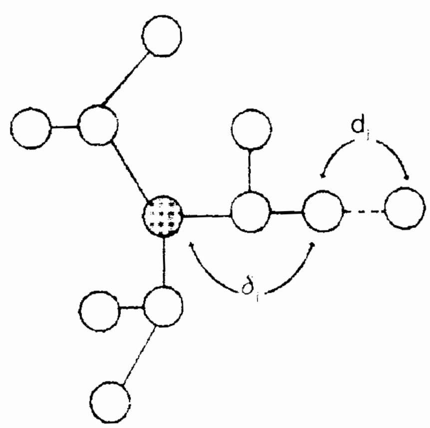
Para seleccionar el candidato ganador, procédase así:

1) Sea "i" un nodo en S

2) Sea δ_i su mínima distancia al origen.

3) Sea j_i el nodo más cercano a "i" y que no está en S (si es que existe).

4) Sea d_i su distancia desde "i".



Seleccionese j_s (por estar cercano a S) como el nodo (k + 1), donde:

$$(\alpha) \ldots\ldots \delta_s + d_s = \min(\delta_i + d_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

en donde $(\delta_i + d_i)$ es la distancia, a lo largo de la ruta correpondiente, del origen a cada nodo candidato.

En caso de empates, escójanse todos los nuevos nodos en empate a un mismo tiempo.

La anterior selección, implica que el camino más corto hasta j_s desde el origen (con una distancia $\delta_s + d_s$), pasa por el nodo "s". Para ver más claro esto, considerese cualquier otro camino entre j_s y el origen. Eventualmente, dicho camino deberá llegar a algún nodo "i" en S, desde algún nodo "j" que no está en S (donde j puede ser j_s). Suponemos que las distancias a lo largo del camino desde j_s hasta j son no negativas, de tal forma que la distancia total hasta el origen, a lo largo del camino, no es menor que $(\delta_i + d_i)$; sin embargo por (α):

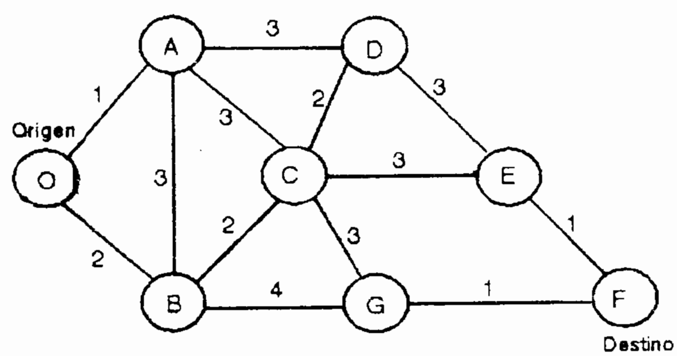
$$\delta_i + d_i \geq \delta_s + d_s$$

Puede notarse que, para obtener el nodo candidato a entrar a S, se requiere un máximo de k comparaciones; por lo tanto, en una red con "n" nodos, no se requieren más de $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$ comparaciones. En la práctica, el número de comparaciones puede ser considerablemente menor, debido a que después de varias etapas, uno o varios de los nodos en S solo tenga arcos que conduzcan a nodos en S.

Por lo tanto, para encontrar la ruta más corta desde el origen hasta el destino, se debe repetir el procedimiento anterior para encontrar el k-avo nodo más cercano al origen, en forma sucesiva para k = 1, 2, 3, ..., hasta que el nodo destino sea alcanzado.

Ejemplo VIII-11.-

Encuentre la distancia más corta entre el origen y el destino para la siguiente red:



Elabore, para cada nodo, una lista de los arcos que salen de ese nodo, en orden ascendente de sus longitudes. No es necesario incluir los arcos que entran al origen o que salen del destino, si sólo se desea calcular la ruta más corta entre estos dos, pero los segundos sí deben incluirse, si lo que se desea es calcular la ruta más corta entre el origen y el resto de los nodos.

O	A	B	C	D	E	F	G
OA–1	AB–3	BC–2	CB–2	DC–2	EF–1		GF–1
OB–2	AC–3	BA–3	CD–2	DA–3	EC–3		GC–3
	AD–3	BG–4	CA–3	DE–3	ED–3		GB–4
			CE–3				
			CG–3				

k = 0

El conjunto S consiste inicialmente sólo del nodo O [$S_0 = \{0\}$].

k = 1

Debido al paso anterior, sólo el nodo O es nodo original, por lo que solamente la columna "O" debe tomarse en cuenta (ya que indica las distancias de todos los nodos que están directamente conectados a él). Rápidamente se descubre que el nodo A es el más cercano y por lo tanto es el candidato seleccionado para entrar a formar parte de S [$S_1 = \{O,A\}$].

Para indicar que hemos encontrado la ruta más corta al nodo A, anote la distancia encontrada encima de la columna "A", encierre en un círculo la entrada OA–1 de la columna "O" y tache todos los arcos que entran a A de todas aquellas columnas en las que aparezcan (BA–3, CA–3, DA–3).

	1 1						
O	A	B	C	D	E	F	G
OA–1 1	AB–3	BC–2	CB–2	DC–2	EF–1		GF–1
OB–2	AC–3	~~BA–3~~ 1	CD–2	~~DA–3~~ 1	EC–3		GC–3
	AD–3	BG–4	~~CA–3~~ 1	DE–3	ED–3		GB–4
			CE–3				
			CG–3				

k = 2

Los candidatos para el 2º nodo más cercano al origen, son aquellos nuevos nodos que estén más cercanos a los nodos originales {O,A}. El nodo más cercano a O es B (por ser el único), mientras que el más cercano a A es también B (por ser el 1º no marcado de la columna "A").

Comparando sus distancias, tenemos:

Nodo B vía O – (0 + 2) = 2

Nodo B vía A – (1 + 3) = 4

Nodo C vía A – (1 + 3) = 4

Nodo D vía A – (1 + 3) = 4

por lo que seleccionamos el nodo B vía O y ahora $S_2 = \{O, A, B\}$.

Encerramos en un círculo la entrada OB–2 de la columan "O", anotamos la distancia encontrada de 2 encima de la columna "B" y tachamos todas las entradas que contengan arcos que entren a B (AB–3, CB–2, GB–4).

Como la columna "O" ha agotado todas sus entradas, ponemos una X debajo, para indicar que esta columna ya no deberá ser considerada en lo sucesivo.

	1 1	2 2					
O	A	B	C	D	E	F	G
X 2							
OA–1 1	~~AB–3~~ 2	BC–2	~~CB–2~~ 2	DC–2	EF–1		GF–1
OB–2 2	AC–3	~~BA–3~~ 1	CD–2	~~DA–3~~ 1	EC–3		GC–3
	AD–3	BG–4	~~CA–3~~ 1	DE–3	ED–3		~~GB–4~~ 2
			CE–3				
			CG–3				

<u>k = 3</u>

Buscamos ahora los nodos nuevos más cercanos a los nodos originales A y B (O ya no se considera por tener una X su columna). Estos los encontramos, mirando los arcos no marcados que se encuentran en primer lugar en las columnas correpondientes (es decir, en las columnas que ya tienen distancias). Sus distancias son:

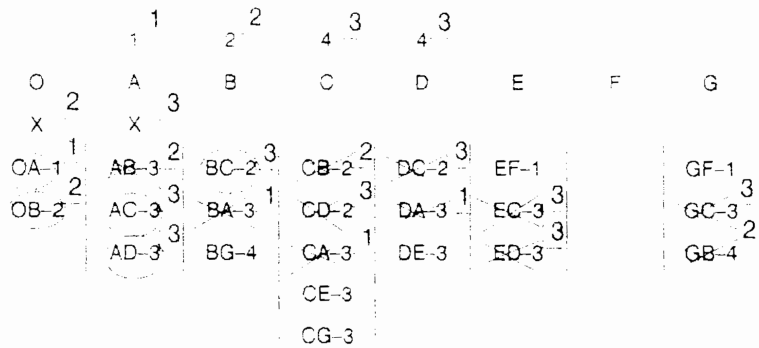
Nodo C vía A – (1 + 3) = 4

Nodo D vía A – (1 + 3) = 4

Nodo C vía B – (2 + 2) = 4

y debido al empate, selecionamos los nodos D y C (vía A o B) como nuevos miembros de S. Ahora $S_3 = \{O, A, B, C, D\}$.

Debido al empate, encerramos en un círculo las entradas AC–3 y AD–3 y la BC–2 de las columnas "A" y "B" respectivamente, anotamos la distancia de 4 encima de las columnas "C" y "D", tachamos todas los demás arcos que entren a C y a D (CD–2, DC–2, EC–3, ED–3, GC–3) y ponemos una X debajo de "A" para indicar que ya no la consideraremos mas.



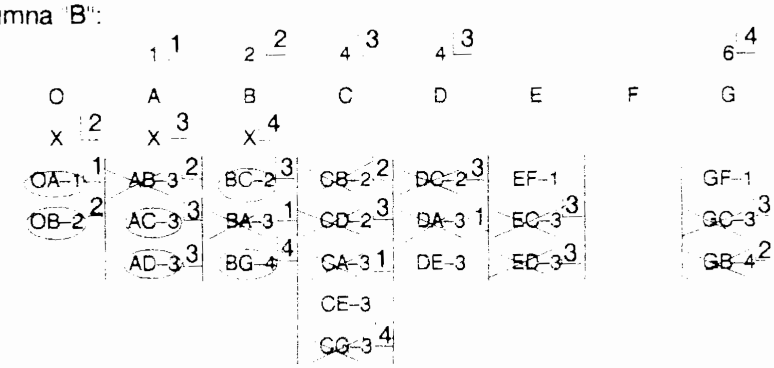
k = 4

Investigamos ahora cuál es el nodo más cercano a los nodos originales en S_3 (Los nodos "O" y "A" ya no se consideran por tener una X).

Tenemos:

Nodo G vía B – (2 + 4) = 6
Nodo G vía C – (4 + 3) = 7
Nodo E vía C – (4 + 3) = 7
Nodo E vía D – (4 + 3) = 7

por lo que selecionamos al nodo G (vía B) como nuevo nodo original. Ahora S_4 = {O, A, B, C, D, G}. Escribimos su distancia de 6 encima de la columna de "G" y encerremos en un círculo el arco BG–4, tachando todos los demás arcos no tachados que entran a G (CG–3); ponemos también una X en la columna "B":



k = 5

Comparamos:

Nodo E vía C – (4 + 3) = 7

Nodo E vía D – (4 + 3) = 7

Nodo F vía G – (6 + 1) = 7

debido al empate, seleccionamos los nodos F y E (vía CE ó DE) y escribimos su distancia de 7 encima de la columna respectiva. Encerremos en un círculo los arcos CE–3, DE–3 y GF–1 y tachamos la entrada EF–1. Ahora s_5 = {O, A, B, C, D, G, F, E}.

	1 1	2 2	4 3	4 3	7 5	7 5	6 4
O	A	B	C	D	E	F	G
X 2	X 3	X 4	X 5	X 5	X 5		X
OA–1 1	~~AB~~–3 2	BC–2 3	~~CB~~–2 2	~~DC~~–2 3	~~EF~~–1 5		GF–1 5
OB–2 2	AC–3 3	~~BA~~–3 1	~~CD~~–2 3	~~DA~~–3 1	~~EC~~–3 3		~~GC~~–3 3
	AD–3 3	BG–4 4	~~CA~~–3 1	DE–3 5	~~ED~~–3 3		~~GB~~–4 2
			CE–3 5				
			~~CG~~–3 4				

La ruta más corta entre el origen "O" y el destinos "F", puede ser encontrada partiendo del nodo F hacia atrás, siguiendo los arcos encerados en círculo. Así encontramos:

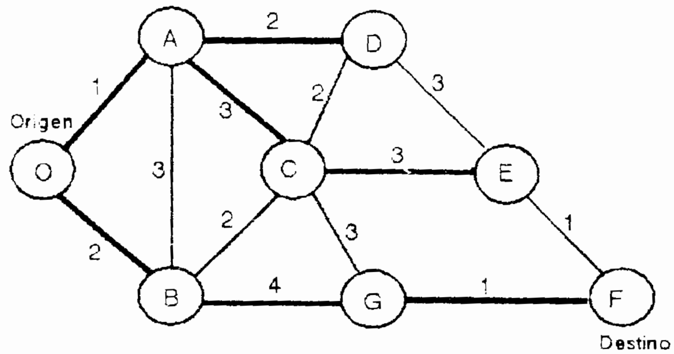
F – G – B – O

por lo que la ruta más corta entre "O" y "F" es:

OB → BG → GF

con una distancia total de 7.

La ruta más corta entre el origen y todos los demás nodos, ha sido también identificada a lo largo de los caminos OA, OB, AC, AD, BG, CE, GF (ver líneas gruesas en la siguiente figura), con alternativas BC por AC y DE por CE.



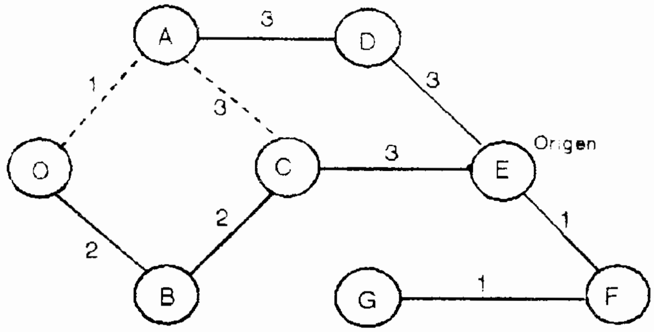
Ejemplo VIII-12.-

Encontrar la ruta más corta entre el nodo E y todos los demás en la red del ejemplo VII-11.

7 6	6 5	5 4	3 3	3 3	0 0	1 1	2 2
O	A	B	C	D	E	F	G
X 5	X 6	X 6	X 5	X 5	X 3	X 2	X 4
OA-1 5	AO-1 6	BO-2 6	CB-2 4	DC-2 3	EF-1 1	FG-1 2	GF-1 1
OB-2 4	AB-3 4	BC-2 3	CD-2 3	DA-3 5	EC-3 3		GC-3 3
	AC-3 3	BA-3 5	CA-3 5		ED-3 3		GB-4 4
	AD-3 3	BG-4 2	CG-3 2				

<u>k=0</u>

$$S_0 = [E]$$



<u>k = 1</u>

S_1 = [E,F]

<u>k = 2</u>

S_2 = [E, F, G] nodo C vía E = 0 + 3 = 3
nodo D vía E = 0 + 3 = 3
nodo G vía F = 1 + 1 = 2

<u>k = 3</u>

S_3 = [E, F, G, C, D] nodo C vía E = 0 + 3 = 3
nodo D vía E = 0 + 3 = 3
nodo C vía G = 2 + 3 = 5

<u>k = 4</u>

S_4 = [E, F, G, C, D, B] nodo B vía C = 3 + 2 = 5
nodo A vía D = 3 + 3 = 6
nodo B vía G = 2 + 4 = 6

<u>k = 5</u>

S_5 = [E, F, G, C, D, B, A] nodo O vía B = 5 + 2 = 7
nodo A vía C = 3 + 3 = 6
nodo A vía D = 3 + 3 = 6

<u>k = 6</u>

S_6 = [E, F, G, C, D, B, A, O] nodo O vía A = 6 + 1 = 7
nodo O vía B = 5 + 2 = 7

VIII-4.- MINIMO ARBOL DE EXPANSION.-

Este tipo de problema es una variación del problema de la ruta más corta.

Dada una red conectada G, con "n" nodos, se pueden ir eliminando arcos de G hasta que se obtiene un árbol; tal árbol se conoce como un árbol de expansión de G. A nosotros nos interesa encontrar, de entre todos los árboles de expansión, aquel que tenga una longitud total mínima.

Como antes, el conjunto de nodos de G y las distancias entre los pares de nodos se conocen, pero ahora no se especifican los arcos que concectan dichos nodos. En este caso, en lugar de encontrar la ruta más corta a través de una red completamente definida, el problema consiste en encontrar aquellos arcos para la red, que tengan la longitud total menor, al mismo tiempo que suministran una ruta entre cada pareja de nodos. Lo anterior se logra escogiendo los arcos, de forma tal, que la red resultante forme un árbol que conecte todos los nodos dados.

Si una red G y un árbol de extensión T de G se especifican, nos referimos a los arcos en T como "arcos del árbol" y a todos los demás como "arcos fuera del árbol".

Supóngase que cada arco (x,y) de una red conectada G, tiene asociado con él un número real a(x,y), que podemos pensar como la "longitud" de dicho arco. Supóngase que T es un mínimo árbol de expansión de G y sea: $x_1, x_2, \ldots, x_k$ la cadena de arcos del árbol T que une x_1 y x_k. Aquí (x_1, x_k) es un arco fuera del árbol T. Es claro entonces que:

$$a(x_1, x_k) \geq \max [\, a(x_1, x_2), a(x_2, x_3), \ldots, a(x_{k-1}, x_k)] \ldots (\alpha)$$

ya que de ser menor que alguno de ellos, el árbol sería más corto incluyendo (x_1, x_k) en lugar del otro.

Teorema VIII-3.-

Una condición necesaria y suficiente para que un árbol de expansión sea mínimo, es que la relación (α) se cumpla para cada arco fuera del árbol.

Este tipo de problema tiene infinidad de aplicaciones prácticas; por ejemplo, es usado en la planeación de redes de transporte, en donde los nodos serían terminales y los arcos los canales de transporte (carreteras, vías de FF.CC., etc.).

VIII-4.1.- Método de Solución para el Mínimo Arbol de Expansión

1) Seleccione un nodo arbitrariamente y conectelo al nodo más cercano.
2) Identifique aquel nodo no conectado que se encuentre más cercano a un nodo conectado; conecte estos dos nodos. Repita este paso hasta que todos los nodos hayan sido conectados.

Ejemplo VIII-13.-

Supóngase el problema del ejemplo VII-II, pero en el cual, aunque se conocen los nodos y la distancias entre ellos, aún no se han especificado los arcos. Suponga también, que las distancias no especificadas son mayores a las que si se dán.

Conviene nuevamente elaborar una lista, para cada nodo, de los arcos potenciales que pudieran salir del nodo, en orden creciente de sus distancias. Como se muestra a continuación, dicha lista es igual a la elaborada para el problema de la Ruta más Corta, excepto que aquí ya no existen ni origen ni destino, por lo que los arcos potenciales que entran a "O" o salen de "F", también se incluyen.

O	A	B	C	D	E	F	G
OA–1	AO–1	BO–2	CB–2	DC–2	EF–1	FE–1	GF–1
OB–2	AB–3	BC–2	CD–2	DA–3	EC–3	FG–1	GC–3
	AC–3	BA–3	CA–3	DE–3	ED–3		GB–4
	AD–3	BG–4	CE–3				
			CG–3				

k = 1

El primer paso se inicia seleccionando arbitrariamente cualquier nodo. Para facilitrar la comparación con el problema de la Ruta más Corta, escogeremos el nodo "O".

El nodo "A" se identifica inmediatamente como el nodo más cercano, con solo mirar la parte superior de la columna "O", por lo que el arco OA se agraga a la red. Para indicarlo, encierre las entradas OA–1 y AO–1 en un círculo y ponga una X encima de los nodos "O" y "A", para indicar que son nodos conectados.

x 1	x 1	x 2	x 3	x 4	x 7	x 6	x 5
O	A	B	C	D	E	F	G
OA-1 1	AO-1 1	BO-2 2	CB-2 3	DC-2 4	EF-1 7	FE-1 7	GF-1 6
OB-2 2	AB-3 2	BC-2 3	CD-2 4	DA-3 4	EC-3 7	FG-1 6	GC-3 5
	AC-3 3	BA-3 2	CA-3 3	DE-3 7	ED-3 7		GB-4 5
	AD-3 4	BG-4 5	CE-3 7				
			CG-3 5				

k = 2

Para identificar el nodo no conectado más cercano a alguno de los ya conectados (O y A), solamente compare las entradas superiores no marcadas para cada nodo conectado (OB–2 y AB–3). Dado que 2 < 3, OB es el siguiente arco que se agrega a la red. Para indicarlo, encierre OB–2 y BO–2 en un círculo y ponga una X encima del nodo B. Debido a que nunca debemos agrager a la red un arco que conecte 2 nodos ya conectados con anterioridad, cualquier arco potencial desde el nodo más recientemente conectado, que pudiera unirlo con los otros, debe ser eliminado de futuras consideraciones. Por lo tanto tache AB–3 y BA–3.

k = 3

El siguiente arco se obtiene comparando AC–3 y BC–2, que nos indica que BC debe ser agragado a la red. Encierre BC–2 Y CB–2 en un círculo y ponga una X encima del nodo "C", para indicar que ya está conectado. Tache AC–3 y CA–3.

k = 4

Compare ahora AD–3, BG–4 y CD–2. Se escoge CD como el nuevo arco de la red. Encerramos en un círculo CD–2 y DC–2, ponemos una X sobre "D" y tachamos AD–3 y DA–3.

k = 5

Compare BG–4, CG–3 y DE–3. Arbitrariamente, entre el empate, escogemos CG como el nuevo arco. Encierre CG–3 y GC–3 en un círculo y ponga una cruz sobre "G". Tache BG–4 y GB–4. Nótese que aquí sólo se escogió uno de los arcos en empate, el otro no recibe ninguna marca.

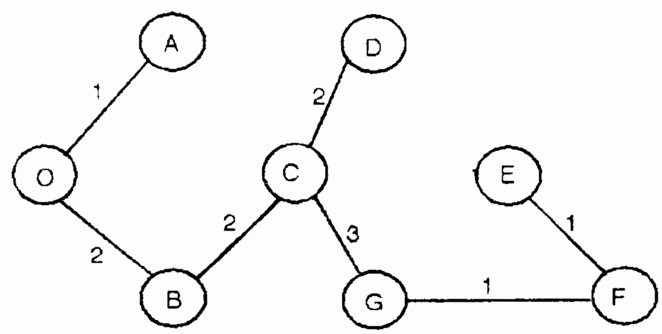
<u>k = 6</u>

Compare CE–3, DE–3 y GF–1. Seleccionamos GF como nuevo arco de la red. Encerramos GF–1 y FG–1 en un círculo y ponemos una X sobre "F".

<u>k = 7</u>

Compare CE–3, DE–3 y FE–1. Seleccione FE como nuevo arco de la red. Encerramos FE–1 y EF–1 en un círculo y ponemos una X encima de "E". Tachar CE–3, EC–3, DE–3 y ED–3.

Debido a que todos los nodos han sido ya conectados, hemos terminado. La red resultante tiene una longitud total de sus arcos igual a 12.



El mismo árbol se hubiese obtenido seleccionando otro nodo inicial. Supóngase que se selecciona el nodo "D".

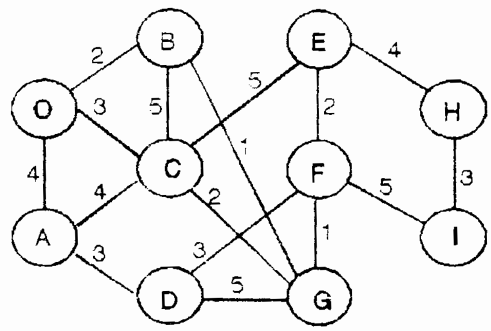
X 3	X 4	X 2	X 1	X 1	X 7	X 6	X 5
O	A	B	C	D	E	F	G
OA–1 4	AO–1 4	BO–2 3	CB–2 2	DC–2 1	EF–1 7	FE–1 7	GF–1 6
OB–2 3	~~AB–3~~ 4	BC–2 2	CD–2 1	~~DA–3~~ 4	~~EC–3~~ 7	FG–1 6	GC–3 5
	~~AC–3~~ 4	~~BA–3~~ 4	~~CA–3~~ 4	~~DE–3~~ 7	~~ED–3~~ 7		~~GB–4~~ 5
	~~AD–3~~ 4	~~BG–4~~ 5	~~CE–3~~ 7				
			CG–3 5				

con una longitud total = 12.

El mismo resultado se hubiese obtenido, cualesquiera que hubiese sido el nodo inicial.

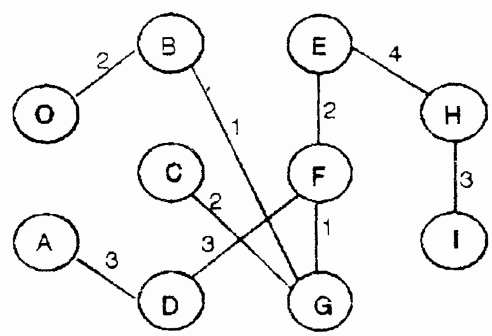
Ejemplo VIII-14.-

Obtener el mínimo árbol de expansión para la siguiente red:



1	7	1	5	6	4	3	2	8	9
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
O 1	A 7	B 2	C 5	D 7	E 4	F 3	G 2	H 9	I 9
OB-2 5	AD-3 7	BG-1 1	CG-2 5	DA-3 6	EF-2 8	FG-1 4	GB-1 3	HI-3 8	IH-3 9
OC-3 7	AO-4 7	BO-2 5	CO-3 7	DF-3 6	EH-4 5	FE-2 6	GF-1 5	HE-4	IF-5
OA-4	AC-4	BC-5	CA-4 5	DG-5	EC-5	FD-3 9	GC-2 6		
			CB-5 5			FI-5	GD-5		
			CE-5						

por lo que el mínimo árbol de expansión será:



$$L^* = 2 + 1 + 2 + 3 + 3 + 1 + 2 + 4 + 3 = 21$$

VIII-5.- PERT

La técnica de evaluación y revisión de programas, PERT (Program Evaluation and Review Technique), uno de los varios métodos de ruta crítica que existen en la actualidad, tuvo sus principios en la Gráfica de Gant. PERT se desarrollo pare el Proyecto Polaris en 1958, por la Oficina de Proyectos Especiales de la Marina de EEUU, junto con la Lockheed Aircraft Corporation y en colaboración con la Booz, Alden and Hamilton (empresa consultora en administración) y a él se le atribuye el haber adelantado la terminación del proyecto en más de 2 años.

Posteriormente la industria adoptó el PERT para ayudar en la administración de proyectos que incluyen muchas actividades interelacionadas. Actualmente se utiliza para medir y controlar el progreso de proyectos tales como: programas de construcción, programación de computadoras, preparación de cotizaciones, planeación de mantenimiento, instalación de sistemas de computadora, modificación e instalación de equipo, programas de promoción de ventas y construcción de presas.

Uno de los principales objetivos del PERT, es el determinar la probabilidad de cumplir con fechas límites especificadas. PERT, además identifica aquellas actividades que pueden ser cuellos de botella y en las que, por lo tanto, se debe vigilar más estrictamente el estar dentro del itinerario. Un tercer objetivo, es la evaluación del efecto de un cambio de recursos, de aquellas actividades menos críticas, hacia los probables cuellos de botella. Puede también evaluar el efecto de una desviación del requerimiento real de tiempo para una actividad de aquel que fue predecido.

VIII-5.1.- Pasos Seguidos para la Aplicación de Métodos de Ruta Crítica.-

Paso 1.-

Planeación del Proyecto.- Aquí se definen las actividades que forman el proyecto y la dependencia entre ellas se muestra en forma explícita como una red.

Paso 2.-

Estimación de los tiempos.- Se efectúan estimaciones de los tiempos requeridos para llevar a cabo cada una de las actividades de la red. Estas estimaciones se basan en la disponibilidad de mano de obra y equipo, así como en ciertas suposiciones que pudieran haber sido hechas en la planeación del proyecto (Paso 1).

Paso 3.-

Programación.- Los cómputos de programación, proporcionan los tiempos más próximos y más tardíos permisibles para el inicio y terminación de cada actividad y como un "sub-producto", identifican la ruta crítica a través de la red, así como la "holgura de tiempo" asociada con cada camino no crítico.

En nuestro curso sólo veremos estos 3 pasos.

Paso 4.-

Ajustes Tiempo-Costo.- Si el tiempo programado para completar el proyecto, tal y como se determinó en el paso 3, es satisfactorio, la planeación y programación del proyecto pueden estar terminados. Sin embargo, si se está interesado en determinar el costo de reducir el tiempo de terminación del proyecto, entonces se deben considerar ajustes tiempo-costo en los tiempos de ejecución para aquellas actividades en la ruta crítica o en la(s) ruta(s) casi crítica(s). En este paso se desarrollan procedimientos para reducir el tiempo de duración del proyecto, con un mínimo incremento en los costos directos del mismo, mediante la reducción de tiempo a lo largo del camino crítico, haciendolo en aquellos lugares en los cuales puede ser obtenido a un mínimo costo. Los objetivos de este paso pueden ser:

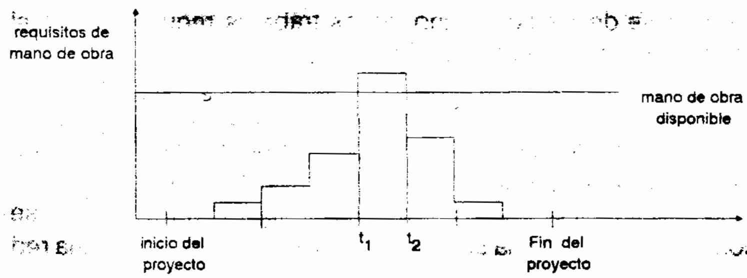
a) Encontrar el costo extra debido a la reducción del tiempo total de duración de un proyecto.

b) El programar el proyecto de tal forma que se minimice la suma de los costos directos e indirectos, es decir, el tiempo de duración del proyecto para costo mínimo.

c) Costo de programar para cumplir con un tiempo específico de duración del proyecto.

Paso 5.-

Distribución de recursos.- La factibilidad de cada programación, debe ser revisada con respecto a sus requerimientos de mano de obra y equipo. El establecimiento de una factibilidad completa para una programación específica, puede requerir de nueva planeación y programación (Pasos 1 y 3) ó ajustes tiempo-costo (Paso 4). De aquí que una solución final puede requerir la ejecución de varios ciclos de pasos 3,4 y 5.



De la figura podemos apreciar los requerimentos de mano de obra a lo largo del desarrollo de un proyecto. Si la demanda pico para este recurso particular (que ocurre en el intervalo t_1 a t_2) se juzga excesiva, los métodos de ruta crítica suministran un medio conveniente para reprogramar y replanear el proyecto para eliminar este pico. Primero, cómputos de rutina indican si la programación de ciertas actividades puede adelantarse o atrasarse sin afectar el tiempo de terminación del proyecto. Posteriormente, los métodos de ruta crítica hacen posible el simular, en una forma muy simple, los efectos de varios cambios, para determinar así una forma aceptable de eliminar la indeseada demanda pico del recurso básico.

Paso 6.-

Control del Proyecto.- Cuando la planeación y programación de la red han sido desarrollados en forma satisfactoria, se preparan en forma definitiva para su uso en el campo. El proyecto se controla, comparando el progreso logrado contra el programa, asignando y programando mano de obra y equipo y analizando los efectos de los retrasos. Cuando un cambio mayor ocurre en la programación, la red se revisa también y una nueva programación es elaborada.

Según se indicó ya, el primer paso en la utilización de métodos de ruta crítica es la identificación de todas las actividades involucradas en el proyecto, así como su representación gráfica en un diagrama de flujo o red. Este paso se conoce como la "fase de planeación". Existen 2 formas diferentes de trazar este tipo de redes:

a) Sistema de actividades en las flechas.
b) Sistema de actividades en el nodo.

Nosotros utilizaremos el primero por ser el más usado entre los industriales y constructores, lo que de ninguna manera significa que sea "el mejor". Al final nos referiremos al 2º.

Definición VIII-16.-

Una actividad se define como uno de los trabajos requeridos por el proyecto que cumple con la siguiente regla: no puede iniciarse hasta que otras actividades específicas que la preceden hayan sido completadas. Una actividad se representa mediante un arco o flecha de la red. La cola de la flecha representa el principio de la actividad y la punta su terminación. La longitud, forma o posición de la flecha no tienen importancia alguna; lo importante es la forma en que las actividades representadas con flechas se eslabonan, conjuntamente, en una secuencia de tiempo, para formar una red operacional.

Definición VIII- 17.-

Una flecha que representa una mera dependencia de una actividad con respecto a otra, se llama "actividad artificial" o "actividad fictícia". Generalmente se representan mediante flechas punteadas y tienen asociadas a ellas una estimación de tiempo de cero.

Al construir un diagrama de flechas, el planeador debe tener en cuenta las actividades requeridas y sus respectivas relaciones de tiempo, lo que puede hacerse escribiendo una lista de las actividades del proyecto. En un proyecto muy complicado, parece imposible anotar inicialmente todas sus actividades; sin embargo, las actividades adicionales aparecen a medida que se desarrolla el diagrama de flechas. En seguida, el planeador debe determinar el orden lógico de las actividades, osea la forma en que cada una de ellas se ajusta a las demás: ¿hay alguna actividad que precede, o que sigue, o que se desarrolle simultáneamente con otra actividad?. Finalmente, es necesario dibujar el diagrama de flechas para mostrar como se interrelacionan las actividades en el tiempo. El planeador debe vigilar las actividades que sean demasiado grandes o demasiado pequeñas. Es posible que una actividad de gran tamaño pueda tratarse como más de una, o que muchas pequeñas puedan combinarse en una sola.

Definición VIII- 18.-

Los puntos iniciales y finales de las actividades (y que generalmente se muestran con círculos), se llaman eventos.

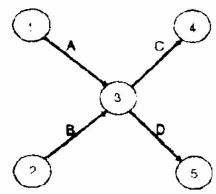
Los eventos son puntos instantáneos en el tiempo, en contraste con las actividades, que tienen una longitud de tiempo o duración.

Las cabezas de flecha indican la secuencia en la que los eventos deben desarrollarse; por lo tanto, un evento es la terminación de todas las actividades que conducen (terminan) hacia ese nodo, y ese evento debe preceder la iniciación de todas las actividades que salen (se inician) de ese nodo. El nodo hacia el que todas las actividades se dirigen y ninguna sale, es el evento correspondiente a la terminación del proyecto.

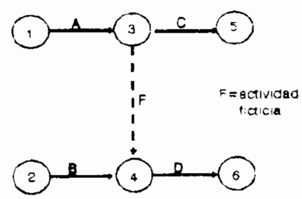
Los eventos se numeran en serie, desde el principio hasta el fin de un programa. La regla general para numerarlos, es que ningún evento puede numerarse hasta que se hayan numerado todos los eventos precedentes, es decir, no podemos numerar ningún evento hasta que hayamos numerado, primeramente, la cola de cada flecha cuya punta señala el evento. El número de la cabeza de una flecha siempre es mayor que el de su cola.

Ejemplo VIII-15.-

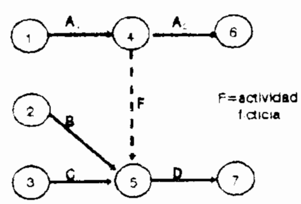
a) Las actividades A y B preceden a las C y D.



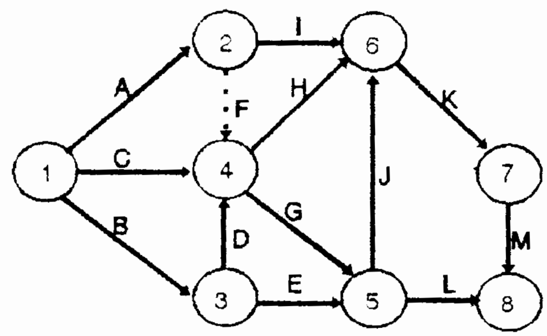
b) La actividad C depende de la actividad A, mientras que la D depende de que se terminen A y B.



c) La actividad D depende de la terminación de B y C, así como de la terminación de la 1a. mitad de A, la 2a. mitad de A es independiente de B,C y D.

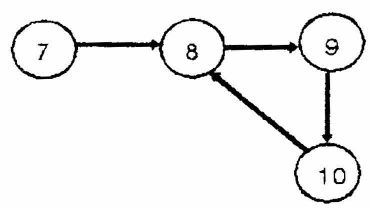


d) D depende de B
E depende de B
G depende de C,D y A
H depende de C,D y A
I depende de A
J depende de G y E
K depende de H.I y J
L depende de G y E
M depende de K



VIII-5.2.- Errores comunes.-

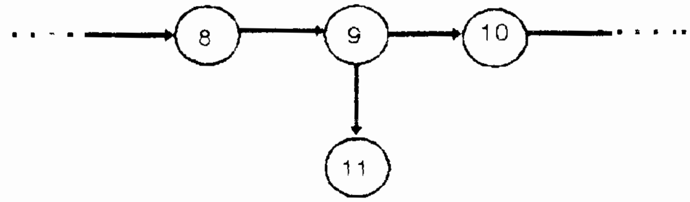
1.- No deben existir circuitos (loops).



Esto representa una situación imposible: "el evento 10 depende del evento 9, que depende del evento 8, que depende del evento 10, que depende del evento 9, ...".

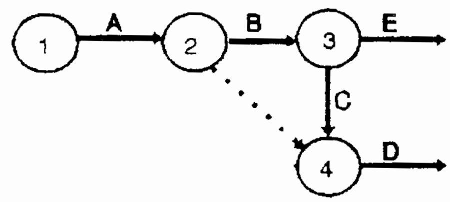
Si un circuito así aparece en nuestra red, la lógica del diagrama es incorrecta, por lo que la construcción del mismo debe volverse a examinar.

2.- Rutas cerradas tampoco deben existir.



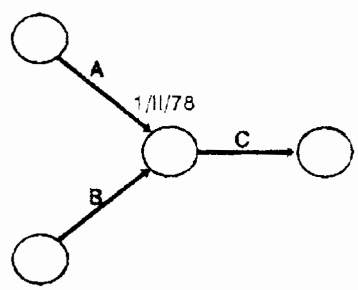
Esto también es incorrecto, ya que la actividad 9–11 se desarrolla sin ningún resultado.

3.- Es preferible el evitar actividades ficticias innecesarias.

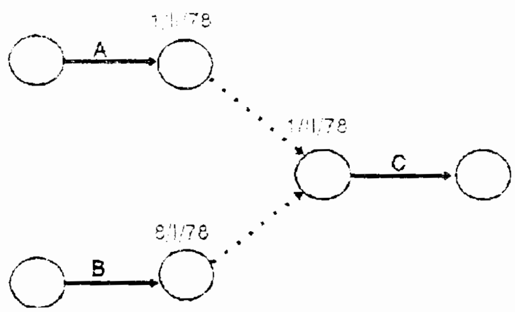


Evidentemente, la actividad D depende de C,B y A. La dependencia sobre A es clara, aún sin la actividad ficticia 2–4, la cual es redundante.

En algunas ocasiones, puede ser conveniente el introducir actividades artificiales para efectos de claridad. Supóngase que una importante fecha programada se indica en un nodo al cual convergen 2 actividades:



debido a la ambigüedad de los puntos de unión, no está claro qué es lo que esta fecha significa. ¿representa la fecha programada para completar A ó B?, ¿la terminación de A y B? ó ¿el comienzo de C?. En estos casos, unas actividades ficticias pueden ser introducidas aclarando todas las dudas:



VIII-5.3.- Estimación de tiempos.-

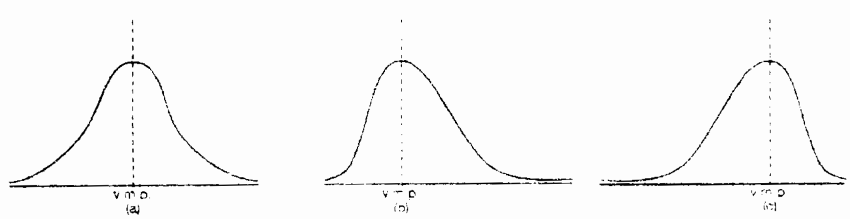
La asignación de tiempos de duración a las actividades es indispensable para completar la red PERT. ¿Debe hacerse esto basándose en el costo más bajo posible, independientemente de la longitud de tiempo requerida, o en el tiempo más corto posible, independientemente de los costos, o en algún compromiso entre los dos casos anteriores, o sobre cualquier otra base?

La versión original de PERT, hacia la suposición realista de que el tiempo requerido para llevar a cabo cada actividad en el proyecto, es realmente una variable aleatoria que cumple con alguna distribución probabilística. Sin embargo, debido a que esta suposición complica bastante el procedimiento, una versión simplificada, que considera estos tiempos como constantes predecibles, se utiliza a menudo en la práctica.

La estimación del tiempo requerido para una actividad, puede entonces estar basada en un solo valor, que es el procedimiento empleado por el CPM, o puede estar basado en un sistema de 3 estimaciones de tiempo, que es el caso del PERT, tal y como veremos más adelante.

La estadística nos muestra que la mayor parte de los grupos de datos tienden a tomar una forma de campana cuando se trazan (Distribución Normal), mientras que otras lo hacen en forma asimétrica (Distribución Beta).

v.m.p. = valor más probable



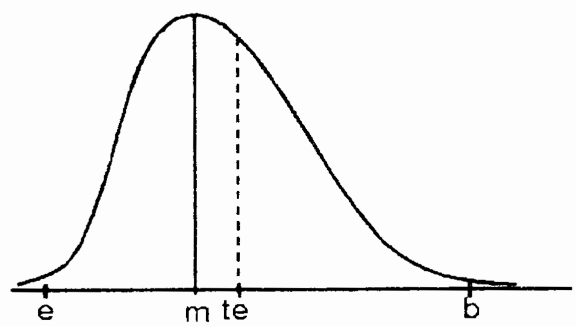
Con lo anterior en mente, es ahora evidente que, con objeto de obtener los resultados deseados, cuando se usa PERT, es necesario estimar el valor esperado (t_e) y la variancia (σ^2) de los tiempos requeridos para cada actividad.

Debido a que los conceptos de valor esperado y variancia pueden resultar demasiado complejos para aquellos individuos calificados para estimar los requerimientos de tiempo para las actividades, PERT usa un procedimiento estimativo simplificado, por medio del cual cantidades intuitivamente significativas son obtenidas, mismas que luego se convierten en estimadores del valor esperado y de la variancia. Este procedimiento consiste en la obtención de 3 estimaciones del tiempo requerido para cada actividad:

a) El tiempo "más probable", llamado "m" y que trata de representar la estimación más realista del tiempo que la actividad puede consumir.

b) El tiempo "optimista", llamado "a" y que representa el tiempo en el cual la actividad puede ser completada si todo sale excepcionalmente bien.

c) El tiempo "pesimista", llamado "b" y que representa el mayor tiempo que pudiese necesitar la actividad, bajo las más adversas circunstancias.



Como puede apreciarse al efectuar cómputos en PERT, la distribución del tiempo de duración de una actividad es meramente hipotética, debido a que no es posible efectuar un muestreo estadístico en ella. Una vez que la actividad ha sido ejecutada, el tiempo real consumido por ella, sea t^*, puede ser considerado como una muestra tomada de esta distribución hipotética. Sin embargo, todos los cómputos se efectúan con anterioridad a la ejecución de la actividad, por lo que como ya se dijo, la base de los cómputos PERT no envuelve un muestreo estadístico, sino que depende del juicio de la persona encargada de la actividad de referencia, ya que se le pide que de acuerdo a su experiencia, estime los 3 tiempos mostrados en la figura anterior (a,m y b), los que a su vez serán usados para estimar el valor esperado y la variancia de la distribución hipotética del tiempo de ejecución de la actividad.

Con objeto de obtener valores confiables para los estimadores de la duracion de la actividad, conviene tener presente lo siguiente:

a) Una de las suposiciones importantes en el Teorema del Límite Central, es la independencia de las variables aleatorias consideradas. Debido a que este Teorema es la base de los cómputos de probabilidad en PERT, los estimadores de "a", "m" y "b" deben obtenerse satisfaciendo esta condición de independencia, es decir, deben hacerse independientemente de lo que pueda ocurrir en otras actividades del proyecto, que pueden a su vez afectar la disponibilidad de mano de obra y equipo planeada para la actividad de referencia.

b) Las estimaciones de "a","m" y "b" no deben ser influenciadas por el tiempo disponible para completar el proyecto, es decir, es ilógico el revisar todas nuestras estimaciones, reduciéndolas, después de saber que la ruta crítica del proyecto es demasiado larga.

c) Con objeto de obtener una atmósfera que conduzca a la obtención de estimaciones no desviadas para "a", "m" y "b", debe dejarse bién claro que los mismos son estimaciones y no compromisos de programa.

d) En general, las estimaciones de "a","m" y "b" no deben incluir toleracias para eventos que, por ocurrir tan poco frecuentemente, no se puede pensar en ellos como variables aleatorias (p.ej. actos de la naturaleza: fuegos, huracanes, inundaciones, etc.).

e) En general, las estimaciones de "a","m" y "b" deben incluir tolerancias para eventos normalmente considerados como variables aleatorias (p.ej. los efectos del clima).

VIII-5.4.- Estimación de la media y la variancia de los tiempos de ejecución.-

La estadística nos dice que para distribuciones unimodales, la desviación estándar ($\sqrt{\text{variancia}}$), puede ser estimada, a groso modo, como 1/6 del rango de la distribución; esto es debido a que cuando menos el 89% de cualquier distribución se encuentra dentro de una distancia de 3 desviaciones estandar de la media (para la Distribución Normal este % es de 99.7+). De aquí que es factible utilizar las estimaciones de tiempo "a" y "b" para estimar la desviación estandar:

$$\sigma = 1/6(b - a)$$

Con objeto de obtener la estimación del valor esperado, tiene que ser evidente que el tiempo más probable (m) debe tener una mayor ponderación que el optimista (a) y el pesimista (b). Ciertamente, hay más probabilidad de que un programa se complete más cerca del tiempo "m" que de los otros 2 tiempos extremos. La fórmula desarrollada para el tiempo esperado de una actividad (t_e) es :

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

VIII-5.5.- Tiempo más próximo y más tardío para un evento.-

Definición VIII- 19.-

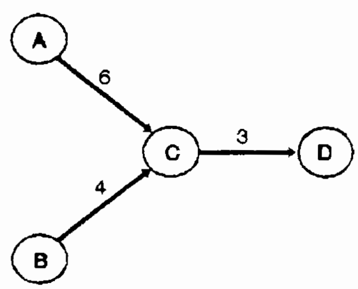
Para un evento particular, su tiempo más próximo (T_E), puede ser definido como el tiempo en el cual el evento ocurrirá si las actividades precedentes son comenzadas tan pronto como sea posible.

Definición VIII- 20.-

El tiempo más tardío para un evento (T_L), puede ser definido como la fecha más lejana en la cual el evento puede ocurrir, sin retrasar la terminación del proyecto más allá de su tiempo más próximo.

Ejemplo VIII-16.-

Considere el siguiente plan de flujo, en donde los números indican el tiempo (en meses) requerido para llevar a cabo las actividades respectivas:



Suponiendo que los estimadores de tiempo son correctos, es evidente que los eventos C y D no pueden ocurrir antes de 6 y 9 meses respectivamente, pero que la actividad BC puede ser retrasada 2 meses sin retrasar los eventos C y D. De aquí que los tiempos más próximos para los eventos C y

D son 6 y 9 respectivamente. Los tiempos más tardios para los eventos A.B.C y D son: 0.2.6 y 9 respectivamente.

Definición VIII- 21.-

La "holgura" (o tiempo de sobra) de un evento, es la diferencia entre su tiempo más tardío y su tiempo mas próximo. La holgura indica que tanto retraso puede ser tolerado en alcanzar el evento sin retrasar la terminación del proyecto.

Definición VIII-22.-

La "ruta crítica" para un proyecto puede definirse como un camino a través de la red, tal que los eventos en este camino tienen una holgura de cero.

Ejemplo VIII-17.-

La holgura para los eventos del ejemplo VIII-16 es de: 0,2,0 y 0 para los eventos A,B,C y D respectivamente. La ruta crítica para esta red sería A $\rightarrow$C $\rightarrow$D.

Al efectuar los cálculos de T_E y T_L, se siguen estas reglas:

a) Si solamente existe un camino que conduzca a un evento particular, su tiempo más próximo es la suma de los tiempos tomados por las actividades que conducen a él.

b) Si solamente existe un camino que conduzca desde un evento particular hasta el evento final, el tiempo más tardío para ese evento, es el tiempo más próximo para el evento terminal menos la suma de los tiempos tomados por las actividades en el camino indicado.

c) El tiempo más próximo de un evento al que llegan varias actividades, es el mayor de los tiempos más próximos de terminación de las activiades que convergen al evento en cuestión.

d) El tiempo más tardío para un evento del que salen varias actividades, es el menor de los tiempos más tardíos de iniciación de las actividades que salen del evento en cuestión.

e) $T_L = T_E$ para el nodo terminal.

Al efectuar los cálculos de σ^2, se siguen éstas reglas:

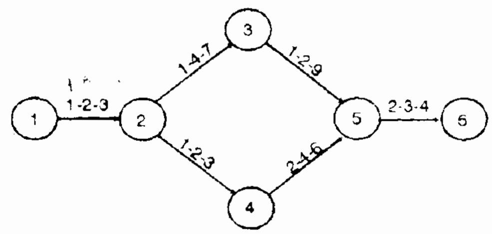
a) σ^2 para el nodo inicial de la red se supone cero.

b) σ^2 para el evento que sigue a la actividad en cuestión, se obtiene sumando la variancia de la actividad a la variancia del evento que le precede. Lo anterior para aquellos casos en que sólo una actividad conduce al evento.

c) Para eventos a los que llegan varias actividades, σ^2 se calcula a lo largo del mismo camino usado para calcular t_e, es decir, el camino más largo. En caso de empate, escoger el camino que da la mayor variancia.

Ejemplo VIII-18.-

Sea la siguiente red:



$$t_{1-2} = \frac{1+8+3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \qquad \sigma^2_{1-2} = \left[\frac{(3-1)}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$t_{2-3} = \frac{1+16+7}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \sigma^2_{2-3} = \left[\frac{(7-1)}{6}\right]^2 = 1$$

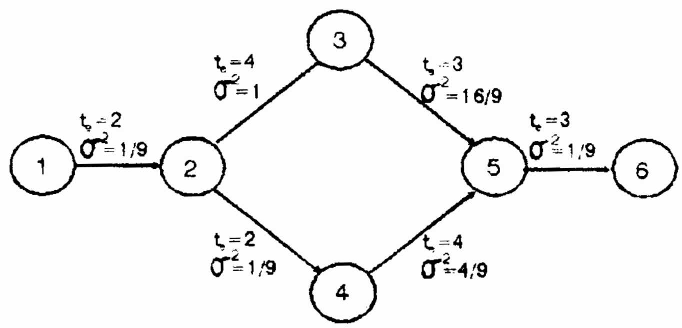
$$t_{2-4} = \frac{1+8+3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \qquad \sigma^2_{2-4} = \left[\frac{(3-1)}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$t_{3-5} = \frac{1+8+9}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad \sigma^2_{3-5} = \left[\frac{(9-1)}{6}\right]^2 = \frac{16}{9}$$

$$t_{4-5} = \frac{2+16+6}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \sigma^2_{4-5} = \left[\frac{(6-2)}{6}\right]^2 = \frac{4}{9}$$

$$t_{5-6} = \frac{2+12+4}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad \sigma^2_{5-6} = \left[\frac{(4-2)}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

Actividad	t_e	σ^2
1–2	2	1/9
2–3	4	1
2–4	2	1/9
3–5	3	16/9
4–5	4	4/9
5–6	3	1/9



	T_E		T_L		
EVENTO	valor esperado	σ^2	valor esperado	σ^2	$T_L - T_E$
1	0	0	0	27/9	0
2	2	1/9	2	26/9	0
3	6	10/9	6	17/9	0
4	4	2/9	5	5/9	1
5	9	26/9	9	1/9	0
6	12	27/9	12	0	0

De los cálculos anteriores, vemos que la ruta crítica es: 1→ 2 → 3 → 5 →6 y que el camino 2 → 4 → 5 tiene una holgura de 1. Esta ruta crítica, se obtuvo uniendo entre sí los eventos con holgura cero.

VIII-5.6.- Probabilidad de cumplir con una fecha programada (T_s).-

PERT supone que la distribución de probabilidades de los tiempos más próximos es una Distribución Normal. El fundamento para esta suposición es que el tiempo más próximo es la suma de varias variables aleatorias y la versión general del Teorema del Límite Central, implica que tal suma es aproximadamente normal bajo un gran número de condiciones.

Dada la media y la variancia, es ya un procedimiento sencillo encontrar la probabilidad de que una variable aleatoria normal (tiempo más próximo) sea menor que una cantidad especificada (tiempo programado para que ocurra el evento) (T_s). Se entra a las tablas con el valor (T_S-T_E)/σ y se lee diréctamente la probabilidad.

Ejemplo VIII-19.-

Para la red del problema VII-15 encontramos que la ruta crítica era 1–2–3–5–6. Sea T* la suma de las variables aleatorias t_e a lo largo de éste camino. Tenemos:

$$T^* = t^*_{1-2} + t^*_{2-3} + t^*_{3-5} + t^*_{5-6}$$

Media de $T^* = T_E$

$$T_E = (t_e)_{1-2} + (t_e)_{2-3} + (t_e)_{3-5} + (t_e)_{5-6}$$

$$T_E = 2 + 4 + 3 + 3 = 12$$

Variancia de $T^* = \sigma^2_{T^*} = \sigma^2_{t^*_{1-2}} + \sigma^2_{t^*_{2-3}} + \sigma^2_{t^*_{3-5}} + \sigma^2_{t^*_{5-6}}$

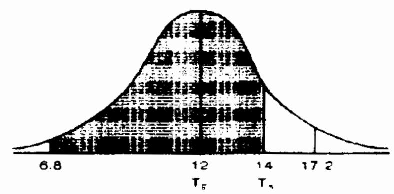
$$\sigma^2_{T^*} = 1/9 + 9/9 + 16/9 + 1/9 = 27/9 = 3$$

información con la cual podemos trazar la siguiente figura (Distribución Normal):

$$\sigma = \sqrt{3} = 1.73$$

$$T_E - 3\sigma = 12 - 5.2 = 6.8$$

$$T_E + 3\sigma = 12 + 5.2 = 17.2$$



El problema de calcular la probabilidad de cumplir con una determinada fecha especificada (p.ej. 14), es simple. La probabilidad será el área bajo la curva que está aschurada (probabilidad de que T* sea ≤ 14). Esta probabilidad puede ser leída de las áreas de la curva normal. Con objeto de que las tablas puedan aplicarse a cualquier curva normal, éstas están basadas en la desviación de la fecha programada T_s con respecto a T_E, en unidades de desviación estandar σ. LLamando "Z" a este valor:

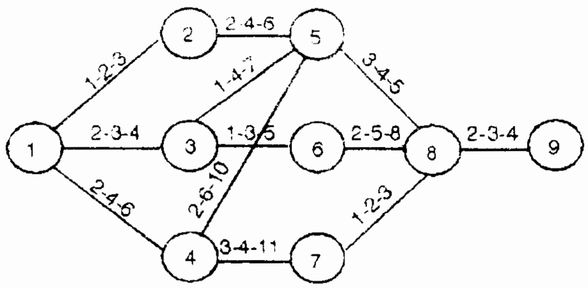
$$Z = \frac{(T_S - T_E)}{\sigma} = \frac{(14 - 12)}{1.73} = 1.16$$

Un valor de Z = 1.16, indica que la fecha programada T_S es 1.16 desviaciones estandar mayor que el valor esperado $T_E = 12$. Refiriendo este valor a la tabla, obtenemos una probabilidad de 0.877.

Entonces, suponiendo que ahora es el tiempo cero, se puede esperar que este proyecto termine al tiempo 12 y la probabilidad de que termine en o antes de la fecha programada de 14 "sin expeditar el proyecto", es aproximadamente 88%.

Ejemplo VIII-20.-

Encontrar la ruta crítica y la probabilidad de terminar el proyecto en o antes de 19 semanas.



$$t_{1-2} = \frac{1 + 8 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \qquad \sigma^2_{1-2} = \left[\frac{3-1}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$t_{1-3} = \frac{2 + 12 + 4}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad \sigma^2_{1-3} = \left[\frac{4-2}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$t_{1-4} = \frac{2 + 16 + 6}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \sigma^2_{1-4} = \left[\frac{6-2}{6}\right]^2 = \frac{4}{9}$$

$$t_{2-5} = \frac{2 + 16 + 6}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \sigma^2_{2-5} = \left[\frac{6-2}{6}\right]^2 = \frac{4}{9}$$

$$t_{3-5} = \frac{1 + 16 + 7}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \sigma^2_{3-5} = \left[\frac{7-1}{6}\right]^2 = \frac{9}{9}$$

$$t_{3-6} = \frac{1 + 12 + 5}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad \sigma^2_{3-6} = \left[\frac{5-1}{6}\right]^2 = \frac{4}{9}$$

$$t_{4-5} = \frac{2 + 24 + 10}{6} = \frac{36}{6} = 6 \qquad \sigma^2_{4-5} = \left[\frac{10-2}{6}\right]^2 = \frac{16}{9}$$

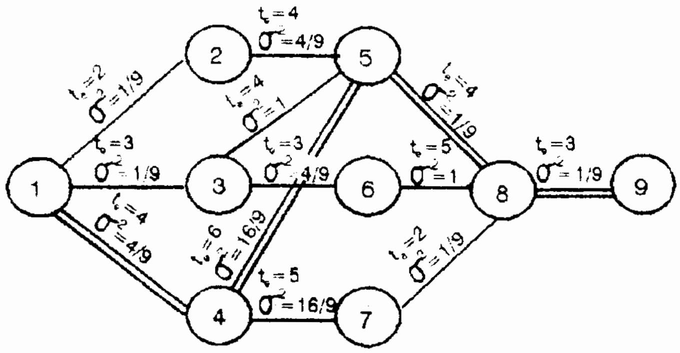
$$t_{4-7} = \frac{3 + 16 + 11}{6} = \frac{30}{6} = 5 \qquad \sigma^2_{4-7} = \left[\frac{11-3}{6}\right]^2 = \frac{16}{9}$$

$$t_{5-8} = \frac{3 + 16 + 5}{6} = \frac{24}{6} = 4 \qquad \sigma^2_{5-8} = \left[\frac{5-3}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$t_{6-8} = \frac{2 + 20 + 8}{6} = \frac{30}{6} = 5 \qquad \sigma^2_{6-8} = \left[\frac{8-2}{6}\right]^2 = \frac{9}{9}$$

$$t_{7-8} = \frac{1 + 8 + 3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \qquad \sigma^2_{7-8} = \left[\frac{3-1}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$

$$t_{8-9} = \frac{2 + 12 + 4}{6} = \frac{18}{6} = 3 \qquad \sigma^2_{8-9} = \left[\frac{4-2}{6}\right]^2 = \frac{1}{9}$$



	T_E		T_L		
EVENTO	valor esperado	σ^2	valor esperado	σ^2	$T_L - T_E$
1	0	0	0	22/9	0
2	2	1/9	6	6/9	4
3	3	1/9	6	14/9	3
4	4	4/9	4	18/9	0
5	10	20/9	10	2/9	0
6	6	5/9	9	10/9	3
7	9	20/9	12	2/9	3
8	14	21/9	14	1/9	0
9	17	22/9	17	0	0

La probabilidad de completar el proyecto en o antes de 19 semanas, se obtiene entrando a las tablas con el valor de Z, cuyo valor es el siguiente:

$$Z = \frac{19-17}{\sqrt{22/9}} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{22}} = \frac{6}{4.69} = 1.28$$

Buscando en la tabla, obtenemos una probabilidad de 0.899.

VIII-5.7.- Consideraciones.-

Siempre existe una ruta crítica para el sistema y siempre puede ser identificada trazándola a través de los eventos con holgura cero. La ruta crítica es obviamente significativa, debido a que si algún evento a lo largo de este camino requiere de más tiempo que su fecha esperada de terminación, el evento terminal puede esperarse que se retrase en un lapso igual; por lo tanto, a las actividades a lo largo de la mencionada ruta, debe asignárseles máxima prioridad. Si el tiempo más próximo esperado para el evento terminal no es satisfactorio, entonces, mejoras deben preveerse para estas actividades. Por otro lado, los eventos que no se encuentran en la ruta crítica tienen holguras positivas, por lo que pequeñas desviaciones de su fecha esperada de terminación, probablemente no afectarán a la fecha de terminación del proyecto.

El planeador tiene a su disposición varios métodos de ajuste, uno de los cuales es el intercambio de hombres, máquinas y materiales (si es que son comparables), de la ruta no crítica a la crítica. Otro método de ajuste de la red, consiste en reducir las especificaciones técnicas del proyecto (p.ej. reducir la cantidad de pruebas que requiere éste). Si las actividades pueden ordenarse de otro modo, puede ser posible acelerar la terminación del proyecto. El planeador puede aprovechar la sobreposición de las actividades. Además, el empleo del tiempo extra, proporciona flexibilidad adicional para el ajuste y la nueva planeación de la red.

Es interesante hacer notar, que el análisis de la ruta crítica está basado solamente en valores esperados, por lo tanto, existe cuando menos una pequeña probabilidad, de que otra ruta diferente de la considerada crítica, pueda volverse la más larga.

Programas muy complicados de computadora, han sido desarrollados para complementar PERT; por medio de ellos, uno puede determinar rápidamente el efecto de un cambio propuesto, o el efecto de un retraso en la programación. Esta habilidad para medir y evaluar el estado actual del proyecto, mejorando así el control administrativo, ha sido citada como uno de los mejores valores de PERT.

Numerosas técnicas similares a PERT han sido propuestas en años recientes, bajo numerosos nombres diferentes. Algunos de estos enfatizan el costo y/o el nivel de desarrollo técnico de las actividades, además de sus tiempos transcurridos. El más notable de éstos, principalmente por que no se derivó de PERT sino que se desarrolló en forma paralela con él, es CPM, el cual se ocupa de la planeación, programación y control de costos de los trabajos del proyecto.

VIII-6.- SISTEMA DE REDES CON ACTIVIDADES EN EL NODO.-

En este sistema, las actividades se representan gráficamente por los nodos, en lugar de por las flechas. Aquí, las flechas se utilizan solamente para representar la relación de dependencia entre los nodos.

Ocasionalmente, en este tipo de red, se agrega un nodo fictício, que tiene un tiempo de ejecución cero, con objeto de concentrar varias actividades en alguna relación lógica (p. ej. Inicio del proyecto o terminación del proyecto).

Las principales ventajas de este sistema son:

a) Con el sistema de actividades en el nodo, las relaciones de precedencia se muestran por medio de líneas que conectan los nodos de actividades, en lugar de tener que traer las cabezas de las flechas de todas las actividades que anteceden, a un punto común (evento), así como las colas de todas las actividades sucesoras. Por esta razón, el sistema de actividades en el nodo es más simple de construir y modificar.

b) Este tipo de red no requiere el uso de actividades fictícias, lo cual elimina problemas al trazar la red, especialmente para los principiantes.

c) Permite el uso de redes de nodos preimpresas, a las cuales sólo se les agregan las flechas de precedencia.

d) La información es presentada en una forma más compacta, haciendo que las descripciones y tiempos computados sean más fáciles de leer.

e) La numeración de las actividades es más simple, ya que solo se usa un número, con lo que la codificación de las actividades, por proyectos, habilidades de mano de obra, etc., se simplifica grandemente. Cuando se usan las actividades en las flechas, una actividad se identifica por el par de números de los eventos en los extremos de la flecha; esto crea un problema de codificación en los nodos de unión cuando las actividades que allí se reúnen requieren diferente codificación. Esto sólo puede resolverse agregando actividades fictícias, tal y como se puede ver en el ejemplo VIII-21 (b).

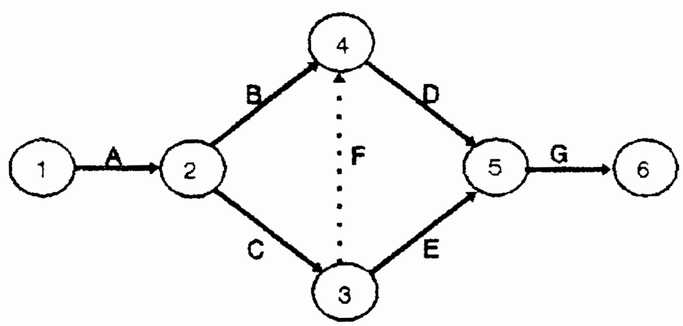
La principal desventaja de utilizar actividades en el nodo, como sistema de construir una red, es principalmente que no es un método estandar. P. ej. existen muy pocos programas de computadora para este sistema, mientras que existen muchísimos para el sistema de actividades en las flechas.

Ejemplo VIII-21.-

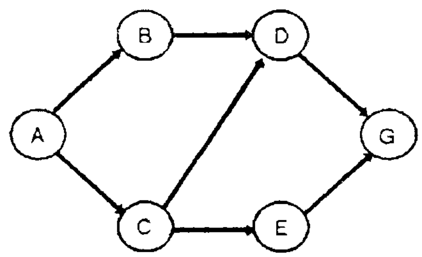
a) Considere un proyecto para planear y llevar a cabo una encuesta de mercado. El proyecto se iniciará con un estudio del propósito de la encuesta (Actividad A). Después del estudio, el personal que recogerá los datos podrá ser contratado (Actividad B) y el cuestionario para la encuesta podrá ser diseñado(Actividad C). Una vez que el personal haya sido contratado y el cuestionario diseñado, el personal puede ser entrenado en el uso del cuestionario (Actividad D). Cuando ya haya sido diseñado el cuestionario, el grupo de diseño puede seleccionar las familias que serán entrevistadas (Actividad E). Luego de haber seleccionado las familias y que el personal haya sido entrenado, la encuesta puede llevarse a cabo y los resultados analizados (actividad G).

Actividad	Depende de
B	A
C	A
D	B y C
E	C
G	D y E

i) actividades en las flechas:

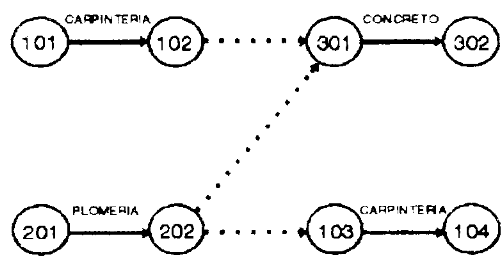


ii) actividades en los nodos:

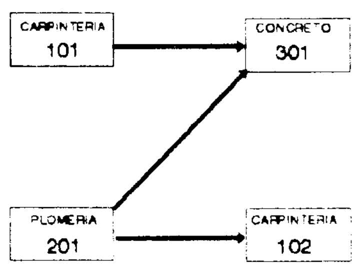


b) La carpintería se codificará con eventos de la serie 100.
La plomería se codificará con eventos de la serie de 200.
El concreto se codificará con eventos de la serie de 300.

i) Activades en las flechas:



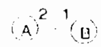
ii) actividades en el nodo:



REDES

FLUJO MAXIMO

Se tiene una red cuyos elementos son del suguiente tipo:



Nodos. A y B

Arcos Orientados: (A,B) o (B,A)

Capacidad de los arcos orientados: C(a,B) = 2 ; C(B,A) = 1

NOTA: Se va dibujando de 1 a 3

METODOLOGIA:

0.- Efectuar los cortes y determinar el que es – al Flujo MAX (T.VII-2)

1.- Encontrar un camino
   - 1.1 A partir de la Fuente se alcanzan los nodos más cercanos a traves de un arco con capacidad > 0
   - 1.2 A partir de los nodos alcanzados, se alcanzan los nodos mas cercanos a través de un arco con capacidad > 0.
   - 1.3 Se aplica 1,2 hasta llegar al destino.

2.- Asignar al camino encontrado, un flujo – a la mínima capacidad de todos sus arcos (C)

3.- Disminuir en C la capacidad de c/arco del camino

Incrementar en C* la capacidad de c/arco del camino en sentido contrario

REGRESAR AL PASO 1 HASTA QUE:

4.- No haya caminos de la fuente al destino las (C – 0) se cierran

VERIFICAR : FACTIBILIDAD

CONSERVACION DE FLUJO

5.- Se verifica el PASO 0

6.- Se anota el FLUJO MAXIMO

$T_L = T_L$ evento post - T_e act. post

b) varios caminos:

T_E = mayor T_E de las act., convergen al evento

T_L = menor T_L de las act. salen del evento

c) T_E - T_L para nodo terminal

REGLAS σ^2

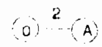
a) σ^2 = 0 para nodo inicial

b) Un camino σ^2 - σ^2 evto. ant. s2 activ. ant

c) varios caminos: σ^2 del camino usado T_E. si empate tomar σ^2 + grande

RUTA MAS CORTA

Se tiene una red cuyos elementos son del siguiente tipo:



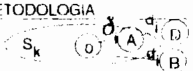
Nodos: 0 y A

Arcos: con propiedad (2) (gralmente distancia)

Nota: Se va dibujando de 2 a 3

METODOLOGIA

Se considera que:



1.- Se elabora lista de los arcos de cada nodo en orden ascendente de sus longitudes

No incluye arcos que entren al origen 0 y que salgan del destino X si lo que se busca es la R.M.C. entre 0 y X	No incluye arcos que entren a 0 si lo que se busca es la R.M.C. entre 0 y c/u de los restantes nodos.

2.- Se alcanza el nodo más cercano al origen y se cancelan todos los otros arcos que entren al nodo alcanzado. Se anota su dist. más corta al origen.

3.- Se alcanza el siguiente nodo mas cercano al origen (en caso de empate se alcanzan todos los nodos que empatan) y se cancelan las entradas a ese ó esos nodo(s) alcanzado(s). ESTE PASO SE REPITE HASTA AGOTAR LA TABLA

4.- Se leen en la tabla los arcos que conecten

El origen con el destino	El origen con cada nodo

5.- Se suman las distancias elegidas y se anota la R.M.C.

Del origen al destino	Del origen a cada nodo

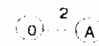
REGLAS T_E y T_L:

a) solo 1 camino

$T_E = T_E$ evento ant + T_e act. ant.

MINIMO ARBOL DE EXPRESION

Se tiene una red G cuyos elementos son del siguiente tipo:



Nodos: 0 y A

Arcos: con propiedad (2) (gralmente distancia)

Nota: Se va dibujando de 2 a 3

METODOLOGIA

1.- Se elabora lista de los arcos de cada nodo en orden ascendente de sus longitudes.

2.- Se selecciona arbitrariamente cualquier nodo.

3.- Se alcanza el nodo más cercano a uno de los nodos conectados (en caso de empate se elige uno de ellos y los otros no reciben ninguna marca) y se tachan aquellos arcos que desde el nodo mas recientemente conectado pudieran unirlo a otros que ya lo estuvieran. ESTE PASO SE REPITE HASTA AGOTAR LA TABLA.

4.- Se tiene un árbol T cuya longitud total es la mínima que puede tener cualquier árbol que alcance a todos los nodos de la red G o sea: el MINIMO ARBOL DE EXPANSION.

4.- Se obtienen de la red modificada en el paso 3: a) La media de $T^* = \sum Te$ (RUTA CRITICA)

b) La variancia de $T^* = \sum \sigma^2$ (RUTA CRITICA)

c) La desv est $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

5.- Se dibuja la distribución normal

6.- Se supone (dato) una fecha T_s y se calcula la probabilidad de cumplir en o antes

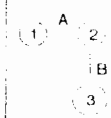
7.- Se calcula Z = $(Ts - T_E^*)/\sigma$ = U^s de desv.

TABLA

Z en:

P E R T

Se tiene una red cuyos elementos son del siguiente tipo:



Nodos: (eventos) 1,2 y 3

Arcos: (actividades) A y B (B es artificial o ficticia).

A = Act 1-2

B = Act. 2-3

METODOLOGIA

Se considera:

- b - tiempo pesimista
- TE - tiempo + aproximado
- m - tiempo + probable
- TL - tiempo mas tardio
- a - tiempo optimista
- Te - tiempo esperado
- n - numero de eventos
- v.e. - valor esperado

1.- Se obtienen los Te = (a + 4m + b)/6 de c/act

2. Se obtienen las σ^2 = $[(b-a)/6]^2$ de cada act.

1ª. Tabla ACTIVIDAD, Te, σ^2

3.- Se vacian en la red original los valores de Te y σ^2 obteniendose de esta, los datos para elaborar la 2ª tabla en el siguiente orden.

T_E Ida

- 3.1 Se listan los eventos de 1 a n
- 3.2 Se anota su v.e. acumulando
- 3.3 Se anota su σ^2 acumulando

2ª Tabla

T_L Reg

- 3.4 Se procede de "regreso" con el v.e. haciendo su valor en n = al v.e. de n obtenido en el paso 3.2 y restando hasta CERO para el evento 1 (ver reglas).
- 3.5. Se procede de "regreso" con la σ^2 haciendo su valor en n = 0 y acumulando hasta alcanzar en el evento l el valor obtenido en el paso 3.3 para el evento n. (ver reglas).
- 3.6 Se obtienen las diferencias TL -TE