



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA.

**ANALISIS DE SISTEMAS POR MEDIO DE LA
RESPUESTA EN FRECUENCIA.**

FACULTAD DE INGENIERÍA.

APUNTE
209

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



605348

G.- 605348

FACULTAD DE INGENIERIA

CONSULTA

Capítulo 10

*ANALISIS DE SISTEMAS POR MEDIO
DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA*

FACULTAD DE INGENIERIA

605348

Caja 209

y 3

Ej. 3

CONSULTA

tarea ardua.

G- 605348



FACULTAD DE INGENIERIA

1. Introducción

Para el diseño y análisis de sistemas de control es necesario contar con un modelo de la planta. Se ha visto en capítulos anteriores que cuando esta es lineal, invariable con el tiempo y se halla inicialmente en reposo, la salida correspondiente a una entrada cualquiera puede obtenerse con base en la respuesta a impulso del sistema $h(t)$, en la función de transferencia $H(s)$ o en las ecuaciones en variables de estado que representan al sistema.

Sin embargo, en la práctica el logro de estos modelos puede no ser tan sencillo. Considérese, por ejemplo, la obtención de la función de transferencia del circuito de la fig 1, que representa un amplificador operacional; aun cuando las conexiones y los parámetros significativos de sus componentes sean conocidos, la determinación de $H(s)$ a partir de un modelo analítico es una

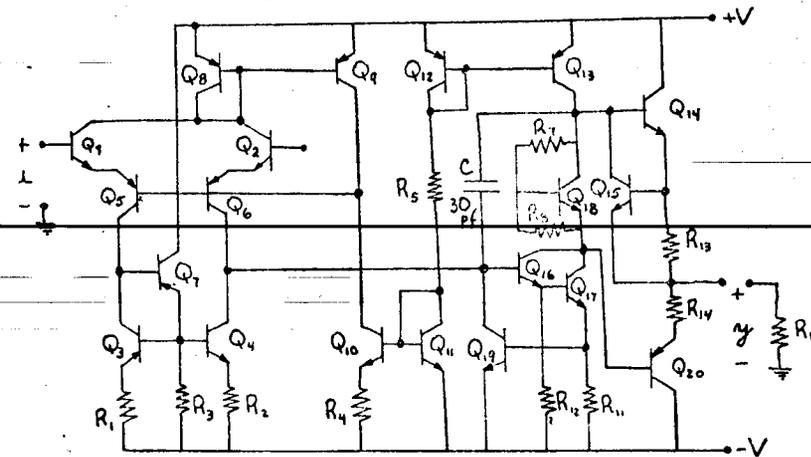


Fig 1 Esquema de un amplificador operacional

Un procedimiento alternativo es obtener experimentalmente la respuesta a impulso (o la respuesta a escalón), y utilizarla para modelar el sistema y predecir los efectos de la inserción del circuito de la fig 1 en un sistema mayor. Este método, como se demostrará en el ejemplo siguiente, es útil únicamente si se cuenta con instrumentos de excitación y medición suficientemente exactos.

Ejemplo 1

Considérense dos sistemas, A y B con las siguientes funciones de transferencia:

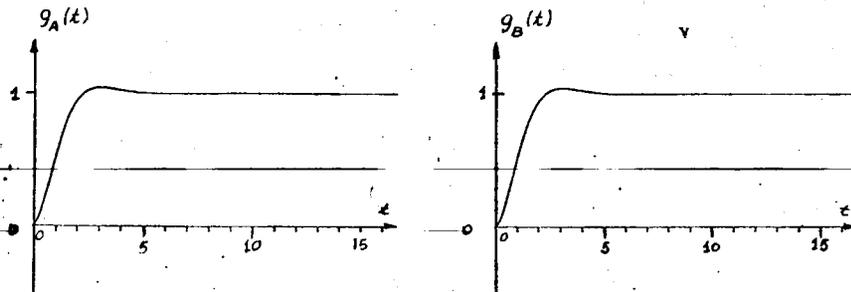
$$H_A(s) = \frac{2}{(s^2 + 2s + 2)} ; H_B(s) = \frac{2}{(.04s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Las correspondientes respuestas a escalón unitario son:

$$g_A(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)} \right\} = 1 + \sqrt{2} e^{-t} \text{sen}(t - 135^\circ)$$

$$g_B(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{40}{s(s^2 + 2s + 2)(s + 20)} \right\} = 1 - \sqrt{2} e^{-20t} + 1.471 e^{-t} \text{sen}(t - 139^\circ)$$

Aunque las expresiones para $H_A(s)$ y $H_B(s)$ difieren mucho, las respuestas a escalón son prácticamente iguales; la máxima diferencia $\frac{e^5}{\sqrt{2}} \approx 0.25$. Así pues, de medirse la respuesta a escalón con un instrumento de 2 por ciento de precisión, sería difícil discriminar entre ambos sistemas con base en esta medición.



a) Respuesta a escalón del sistema A b) Respuesta a escalón del sistema B

Fig 2 Respuestas a escalón

No obstante lo anterior, al colocar el sistema A en una malla de realimentación como la de la fig 3a se tiene un siste-

ma estable, habiendo en cambio, una oscilación autosostenida de frecuencia $\omega = 7.21$ al introducir en su lugar el sistema B.

Se produce dicha oscilación por que el sistema de malla abierta de la fig 3b al ser excitado con

$$e_2(t) = \text{sen}(7.21 t)$$

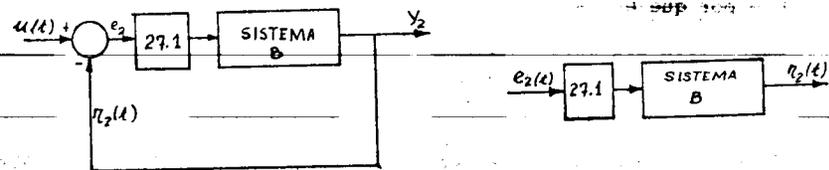
produce una salida

$$y_2(t) = r_2(t) = \text{sen}(7.21 t)$$

y como

$$u_2(t) = e_2(t) - r_2(t)$$

es factible tener en el sistema realimentado una entrada $u(t) = 0$ y una salida senoidal, habiendo, por tanto, inestabilidad.



a) Sistema realimentado unitariamente b) Sistema sin realimentar

Fig 3

En caso de encajar en el arreglo de la fig 3b al sistema A excitándolo

con $e(t) = \text{sen}(7.21 t)$, la salida $y_1(t)$ sería $[.047 \text{sen}(7.21 t - 16.09^\circ)]$ y en este caso no es necesaria mucha precisión para distinguir entre $y_1(t)$ y $y_2(t)$.

En este capítulo se presentará un método, basado en la respuesta a excitaciones senoidales, para representar a sistemas estables lineales e invariables con el tiempo, el cual es particularmente adecuado para la obtención de modelos a partir de datos experimentales.

La caracterización a lograrse se denomina respuesta en frecuencia del sistema y es equivalente a evaluar $H(s)$ a lo largo del eje imaginario $s = j\omega$.

El método que será estudiado en este capítulo recibe su nombre por que es factible obtener $H(j\omega_0)$ a partir de la respuesta asintótica del sistema cuando la entrada es una función senoidal de frecuencia ω_0 .

La respuesta en frecuencia presenta las siguientes ventajas sobre las caracterizaciones anteriormente estudiadas:

- Los modelos experimentales basados en la respuesta en frecuencia suelen ser más fidedignos que los resultantes de la respuesta a impulso o a escalón
- La dimensionalidad del sistema tiene menos influencia en la complejidad de los análisis al usar respuesta en frecuencia que al emplear el patrón de polos y ceros, o la representación de variables de

estado

- Algunos análisis, tales como el de estabilidad, no requieren que las funciones de transferencia sean racionales
- Los criterios de diseño utilizados suelen ser más fáciles de manejar

2. Respuesta permanente y transitoria

Como ya se mencionó, la respuesta en frecuencia se denomina así debido a que la salida $y(t)$ de un sistema estable, lineal e invariable a una excitación $\text{sen}\omega_0 t$ tiende asintóticamente a*

$$y(t) = M(\omega_0) \text{sen}[\omega_0 t + \phi(\omega_0)]$$

$M(\omega_0)$ y $\phi(\omega_0)$ están relacionados con la función de transferencia $H(s)$ en la siguiente forma:

Si $H(j\omega_0)$ se expresa en su forma rectangular como

$$H(j\omega_0) = X(\omega_0) + j Y(\omega_0)$$

entonces

$$M(\omega_0) = \sqrt{X^2(\omega_0) + Y^2(\omega_0)}$$

$$\phi(\omega_0) = \text{tg}^{-1} [Y(\omega_0)/X(\omega_0)]$$

Con esa definición, y recordando que $e^{j\phi} = \cos\phi + j \text{sen}\phi$, $H(j\omega_0)$ puede expresarse también en la forma

* Esto es $\lim_{n \rightarrow \infty} [y(t + \frac{2\pi n}{\omega_0})] = M(\omega_0) \text{sen}[\omega_0 t + \phi(\omega_0)]; 0 \leq t \leq 2\pi/\omega_0$

$$H(j\omega_0) = M(\omega_0) e^{j\phi(\omega_0)}$$

donde M y ϕ se llaman, respectivamente, la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia*.

El siguiente ejemplo ilustra la representación de un sistema mediante la respuesta en frecuencia.

Ejemplo 2

Sea la función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

Por tanto

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Las partes real e imaginaria de la respuesta en frecuencia

son:

$$X(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad Y(\omega) = \frac{-\omega}{a^2 + \omega^2}$$

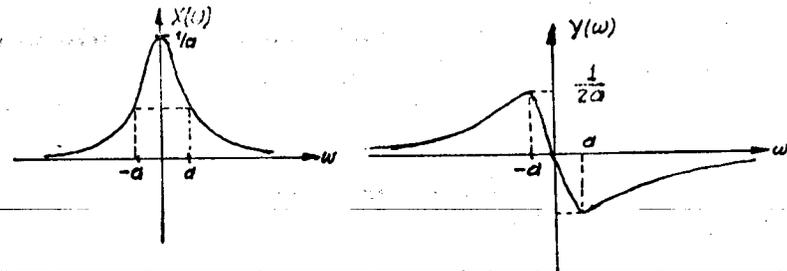
y la magnitud M y la fase ϕ :

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \quad \phi(\omega) = -\text{tg}^{-1}(\omega/a)$$

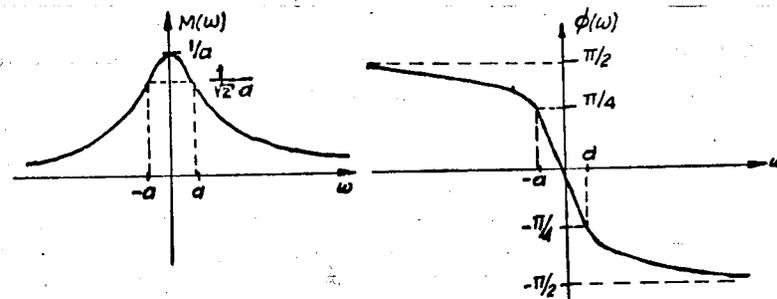
Las gráficas de $X(\omega)$, $Y(\omega)$, $M(\omega)$ y $\phi(\omega)$ vs ω se muestran

en la fig 4.

* El número complejo $M e^{j\phi}$ se representará como $M \angle \phi$ en la misma forma que en el cap 6.



a) Forma cartesiana



b) Forma polar

Fig 4. Gráficas de la respuesta en frecuencia de

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

De la figura anterior puede notarse que X y M son funciones pares de ω , o sea $X(j\omega) = X(-j\omega)$ y $M(j\omega) = M(-j\omega)$, mientras que Y y ϕ son impares, esto es $Y(j\omega) = -Y(-j\omega)$ y $\phi(j\omega) = \phi(-j\omega)$. Esta propiedad, cierta para cualquier función de transferencia permite la caracterización de $H(j\omega)$ utilizando solamente el intervalo $\omega \geq 0$.

El siguiente ejemplo ilustra la relación entre la respuesta en frecuencia y la respuesta a una excitación senoidal.

Ejemplo 3

Considérese un sistema lineal e invariable, en reposo en $t = 0$, con función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s + a}$$

siendo $a > 0$ (condición necesaria para estabilidad).

Si se aplica la entrada $u_1(t) = \text{sen} \omega_0 t$, la salida $y(t)$, de acuerdo con el $\sqrt{6}$, es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+a} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right\}$$

Mediante la evaluación gráfica y de acuerdo al patrón de polos y ceros (fig 5), se determina que

$$y(t) = \frac{\omega_0}{a^2 + \omega_0^2} e^{-at} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \text{sen}(\omega_0 t - \phi)$$

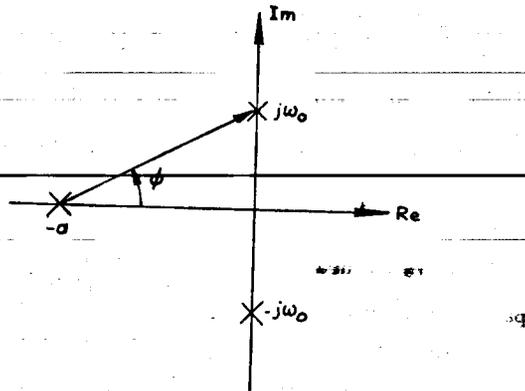


Fig 5. Patrón de polos y ceros de $\frac{1}{s+a} \cdot \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

La salida $y(t)$ puede descomponerse como la suma de dos términos:

$$y_1(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} e^{-at}$$

y

$$y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega_0^2}} \text{sen}(\omega_0 t - \phi)$$

El término $y_1(t)$ se llama respuesta transitoria porque, como $a > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$. A la función periódica $y_2(t)$ se le llama respuesta permanente.

Debe notarse que como

$$-\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega_0}{a} \right) = \angle H(j\omega)$$

y

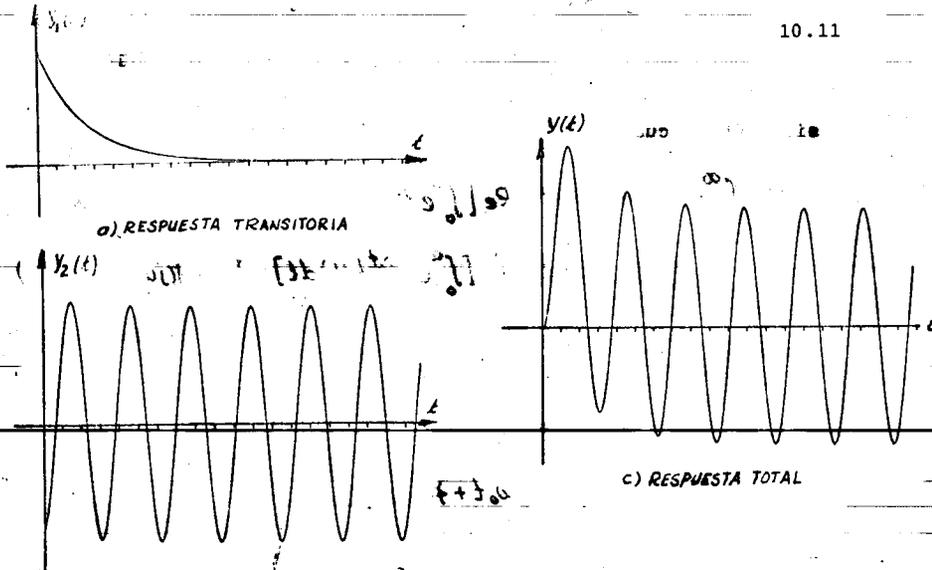
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + a^2}}$$

la respuesta permanente del ejemplo es

$$y_2(t) = |H(j\omega)| \text{sen}[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$$

Las diversas respuestas se muestran en la fig 6

En general cuando un sistema lineal, estable e invariable (no necesariamente en reposo), se excita con una entrada senoidal, su respuesta consta de dos partes: una función senoidal (respuesta permanente) y otra que tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$ (respuesta transitoria). Esta última depende de las con



$$y(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t h(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

Introduciendo dos nuevas variables $w(t)$ y $z(t)$

$$w(t) = e^{At} x_0$$

$$z(t) = \int_0^t h(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau$$

la ec 1 queda como

$$y(t) = w(t) + z(t)$$

La estabilidad del sistema implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} = 0$; por tanto, $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$

La integral de convolución que define a $z(t)$ puede expresarse como la diferencia entre dos integrales, una de cero a infinito y la otra de t a infinito, esto es:

$$z(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau - \int_t^{\infty} h(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$y(t)$ puede describirse como

$$y(t) = w(t) + \underbrace{\int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega_0 \tau d\tau}_{C_1} \sin \omega_0 t + \underbrace{\int_0^{\infty} h(\tau) \sin \omega_0 \tau d\tau}_{C_2} \cos \omega_0 t + \underbrace{\int_t^{\infty} -h(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau}_{z(t)}$$

CONSULT

Fig 6. Respuestas transitoria y permanente a las condiciones iniciales.

Para comprender las relaciones entre respuesta a impulso, respuesta en frecuencia, estado inicial y respuesta transitoria, considérese el siguiente sistema:

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

$$x(0) = x_0$$

Como e^{At} es la matriz de transición, la respuesta a impulso $h(t)$ está dada por la expresión

$$h(t) = c e^{At} b$$

y cuando la entrada es $u(t) = \sin \omega_0 t$,

la respuesta $y(t)$ está dada por (sec 2.4, cap 6)

(1)

$$-b(s-a) \sin \omega_0 t + \dots$$

La función $z_1(t)$ tiende a cero conforme $t \rightarrow \infty$. Esto se demuestra observando que

$$\left| \int_t^\infty h(\tau) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_t^\infty |h(\tau)| d\tau$$

y que la respuesta a impulso de un sistema estable es absolutamente integrable, esto es

$$\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Entonces se tendrá que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty |h(\tau)| d\tau = 0$$

Reuniendo los resultados anteriores, la salida $y(t)$ puede representarse como

$$y(t) = w(t) + z_1(t) + y_1(t)$$

donde $y_1(t)$ es periódica y de la forma

$$y_1(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

además, tanto $w(t)$ como $z_1(t)$ tienden a cero conforme el tiempo crece.

Así pues, $y_1(t)$ es la respuesta permanente, siendo la transitoria la suma de $z_1(t)$ y $w(t)$.

Los coeficientes C_1 y C_2 de la respuesta permanente obedecen las

(1), 2

siguientes ecuaciones:

$$C_1 = \int_0^\infty h(t) \cos \omega_0 t dt = \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty e^{-j\omega_0 t} h(t) dt \right] = \operatorname{Re} [H(j\omega_0)] = X(\omega_0)$$

$$C_2 = \int_0^\infty h(t) \sin \omega_0 t dt = \operatorname{Im} \left[\int_0^\infty e^{-j\omega_0 t} h(t) dt \right] = \operatorname{Im} [H(j\omega_0)] = Y(\omega_0)$$

o sea que la respuesta permanente puede escribirse como

$$y_1(t) = X(\omega_0) \sin \omega_0 t + Y(\omega_0) \cos \omega_0 t = M(\omega_0) \sin[\omega_0 t + \phi(\omega_0)]$$

$$= |H(j\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \angle H(j\omega_0)]$$

En vista de lo anterior, es factible obtener experimentalmente la respuesta en frecuencia de un sistema mediante la aplicación de una senoidal de amplitud unitaria. La magnitud de $H(j\omega)$ será la amplitud de la respuesta permanente, y su ángulo el defasamiento entre la respuesta permanente y la entrada.

Como la parte transitoria de la respuesta a una senoide de frecuencia ω_0 está dada por

$$w(t) + z_1(t) = e^{At} x_0 - \int_t^\infty e^{A(t-\tau)} b \sin \omega_0(t-\tau) d\tau$$

es posible encontrar un estado inicial x_0 , tal que la anule.

En efecto, como

$$w(t) + z_1(t) = e^{At} \left[x_0 - \int_t^\infty e^{A(\tau-t)} b \sin \omega_0(t-\tau) d\tau \right]$$

al realizar el cambio de la variable de integración

$$\sigma = \tau - t$$

se obtiene

$$w(t) + z_1(t) = e^{At} \left[x_0 + \int_0^\infty e^{A\sigma} b \sin \omega_0 \sigma d\sigma \right]$$

de ahí que cuando se hace la selección

$$\underline{x}_0 = \underline{x}^0 = -\int_0^{\infty} e^{A\sigma} \underline{b} \operatorname{sen} \omega_0 \sigma d\sigma$$

se logra el resultado deseado.

Una manera alternativa de expresar la condición inicial \underline{x}^0

se basa en la relación

$$-\int_0^{\infty} e^{A\sigma} \underline{b} \operatorname{sen} \omega_0 \sigma d\sigma = \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} e^{A\sigma} \underline{b} e^{-j\omega_0 \sigma} d\sigma \right]$$

pero de acuerdo a lo tratado en la sec 3.1 cap 3 se tiene que

$$\int_0^{\infty} e^{A\sigma} \underline{b} e^{-j\omega_0 \sigma} d\sigma = (\underline{I}s - \underline{A})^{-1} \underline{b} \Big|_{s=j\omega_0}$$

y por tanto

$$\underline{x}_0 = \operatorname{Im} [j\omega_0 \underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{b}$$

Ejemplo 4

Considérese el sistema representado por las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

al cual se le aplica la entrada $u(t) = \operatorname{sen} 4t$.

El valor de \underline{x}^0 que anula la respuesta transitoria estará dado por

$$\underline{x}^0 = \operatorname{Im} [j4\underline{I} - \underline{A}]^{-1} \underline{b} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 4j & -1 \\ 16 & 4j+17 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} \frac{16}{68j} \\ \frac{4}{68} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{17} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En la fig 7 se muestra la respuesta $y(t)$ para diferentes

valores de \underline{x}_0 donde se observa que la respuesta transitoria disminuye a medida que la condición inicial se aproxima a \underline{x}^0 .

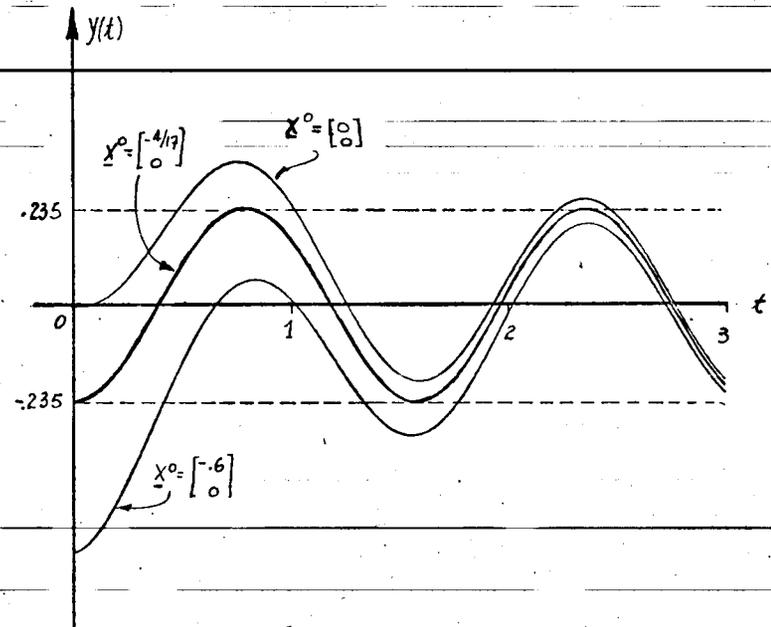


Fig 7. Respuesta $y(t)$ para algunos valores de las condiciones iniciales.

3. Propiedades de $H(j\omega)$

3.1 Relación entre respuesta en frecuencia y respuesta a impulso

La respuesta en frecuencia de un sistema estable contiene toda la información pertinente al mismo desde el punto de vista de entrada-salida; es la función de transferencia evaluada en el eje imaginario. Para demostrar esto, es suficiente probar que la respuesta a impulso $h(t)$ puede calcularse a partir de $H(j\omega)$.

En el cap 7 se vio que un sistema era estable si y solo si su respuesta a impulso era absolutamente integrable, esto es

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

esta condición implica que para $\sigma > 0$, se cumple que

$$\int_0^{\infty} |h(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

por tanto, el semiplano derecho del plano complejo (incluyendo el eje imaginario) pertenece a la región de convergencia de la transformada de Laplace de $h(t)$ (Apéndice A). Siendo este el caso, $h(t)$, la transformada ^{inversa} de Laplace de $H(s)$, puede obtenerse como

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} H(j\omega) d\omega$$

Entonces, basta conocer $H(j\omega)$ [$H(s)$ evaluada en el eje imaginario] para caracterizar al sistema.

Aunque existen métodos numéricos eficientes para obtener $h(t)$ a partir de $H(j\omega)$, en general no es necesario efectuar dicha transformación por la presencia de métodos de diseño de sistemas realimentados que utilizan solamente conceptos de respuesta en frecuencia, siendo más común en la práctica dar especificaciones en el dominio de frecuencia que en el del tiempo.

Los índices de desempeño en el dominio de la frecuencia, que se presentarán más adelante, están basados fundamentalmente en criterios de estabilidad.

3.2 Simetría

En el ejemplo 2 se hizo notar que la respuesta en frecuencia del sistema en cuestión cumplía con las siguientes condiciones de simetría

$$\text{i) } \begin{aligned} X(\omega) &= X(-\omega) \\ Y(\omega) &= -Y(-\omega) \end{aligned}$$

$$\text{ii) } \begin{aligned} M(\omega) &= M(-\omega) \\ \phi(\omega) &= -\phi(-\omega) \end{aligned}$$

y se mencionó, sin demostrarlo, que las propiedades anteriores son válidas para cualquier sistema cuya respuesta a impulso sea una función real. A continuación se demostrará únicamente la propiedad i) de simetría, porque es fácil demostrar la propiedad ii) al expresar M y ϕ como funciones de X y de Y . Usando las definiciones de $X(\omega)$ y $Y(\omega)$ se observan las siguientes relaciones

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} [\cos(\omega t)] h(t) dt = \int_0^{\infty} \cos(-\omega t) h(t) dt = X(-\omega)$$

$$Y(\omega) = \int_0^{\infty} [\sin(\omega t)] h(t) dt = - \int_0^{\infty} \sin(-\omega t) h(t) dt = -Y(-\omega)$$

lo que coincide con la condición i), la cual puede reexpresarse como

$$H(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = X(-\omega) - jY(-\omega) = \bar{H}(-j\omega)$$

o bien

$$H(j\omega) = \bar{H}(-j\omega)$$

en donde \bar{H} representa el complejo conjugado de H .

4. Representaciones gráficas de $H(j\omega)$

Las tres maneras gráficas más comunes de representar la función $H(j\omega)$ son:

- i) La traza polar, en la que se grafica $X(\omega)$ vs $Y(\omega)$ con la frecuencia ω como parámetro.
- ii) los diagramas de Bode, que consisten en dos gráficas: en una se presenta $20 \log M(\omega)$ vs $\log \omega$, y en la otra $\phi(\omega)$ vs $\log \omega$.
- iii) el diagrama de Nichols, en el que se grafica $\log M(\omega)$ vs $\phi(\omega)$, usando ω como parámetro.

Las tres representaciones gráficas contienen la misma información; sin embargo, sus trazados especiales hacen que cada una sea particularmente adecuada a un fin como se verá en secciones posteriores.

Ejemplo 5 Considérese un sistema cuya función de transferencia es

$$H(s) = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

En la fig 8 se presenta su traza polar o sea $X(\omega)$ vs $Y(\omega)$. Como

$$H(j\omega) = \frac{5}{-\omega^2 + 6j\omega + 5} = \frac{5[(5-\omega^2) - 6j\omega]}{(5-\omega^2)^2 + 36\omega^2}$$

entonces

$$X(\omega) = \frac{5(5-\omega^2)}{(5-\omega^2)^2 + 36\omega^2}$$

y

$$Y(\omega) = \frac{-30\omega}{(5-\omega^2)^2 + 36\omega^2}$$

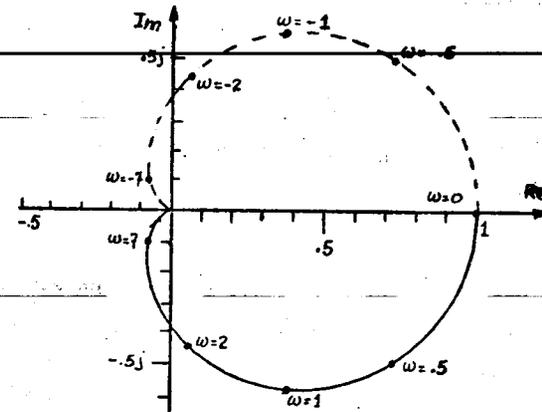


Fig 8. Gráfica polar de $\frac{5}{(s+1)(s+5)}$

En la fig 9 se muestran los diagramas de Bode de la función $H(s)$

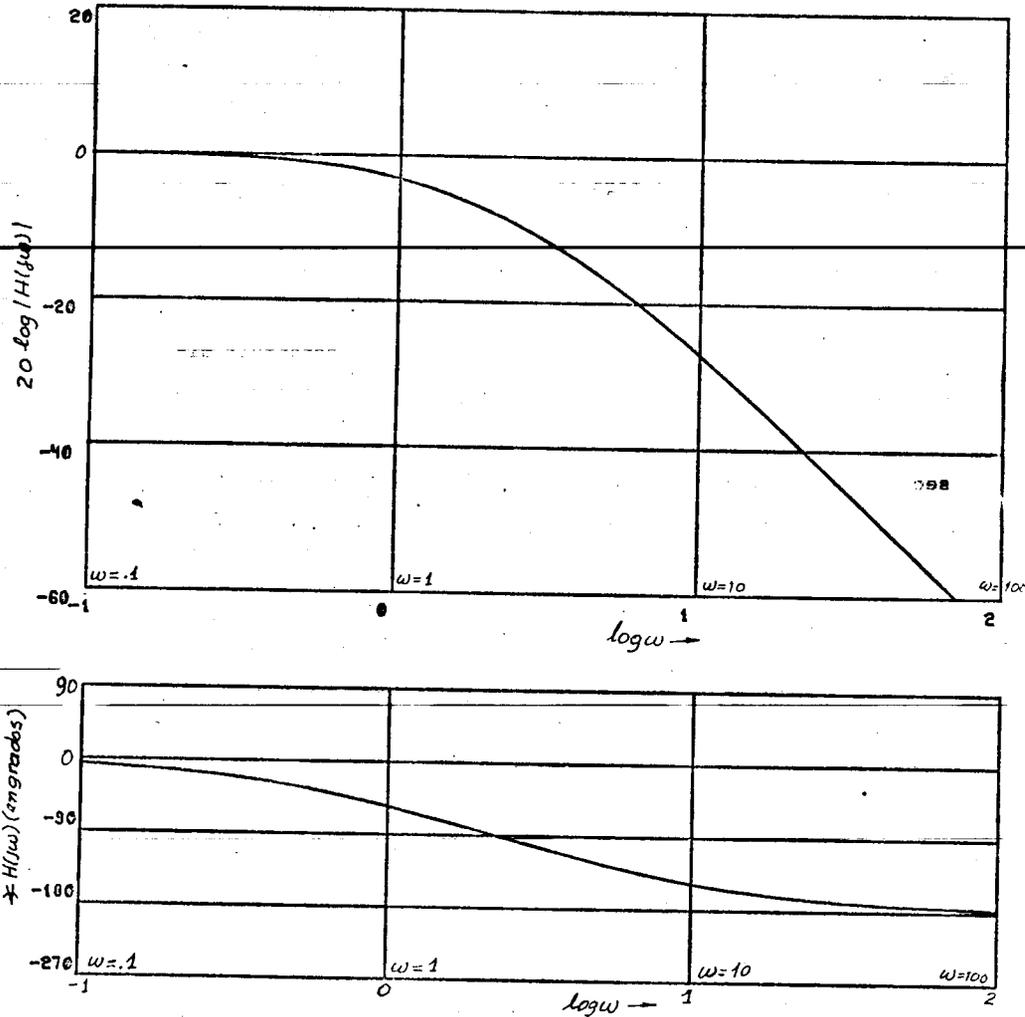


Fig 9. Diagramas de Bode de la función $\frac{5}{(s+1)(s+5)}$

Por último, en la fig 10 se presenta el diagrama de Nichols de la función $H(s)$

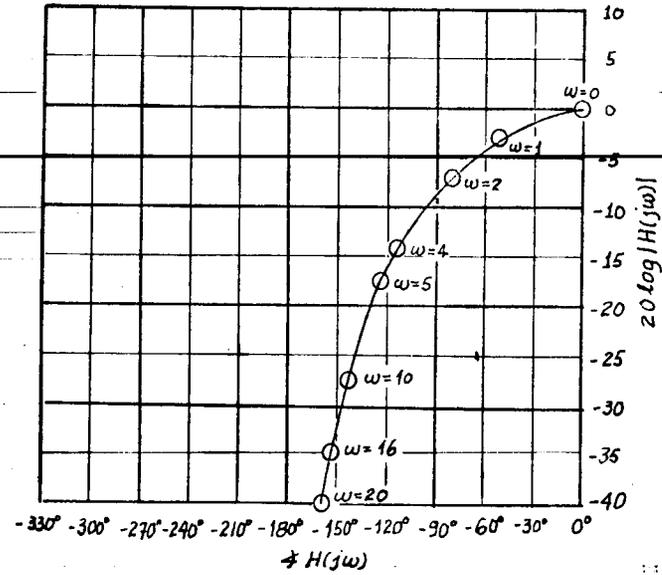


Fig 10. Diagrama de Nichols de la función $\frac{5}{(s+1)(s+5)}$

5. Traza polar

La traza polar, también llamada de Nyquist, representa en coordenadas rectangulares el lugar geométrico de $H(j\omega)$ para valores $-\infty < \omega < \infty$, o sea, la gráfica de $V(\omega)$ vs $X(\omega)$, usando $\frac{y}{x}$ como parámetro (fig 8). Conviene señalar que dicha gráfica puede construirse si se conocen la magnitud y el ángulo de $H(j\omega)$; esto es

$|H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ en la forma indicada en la fig 11.

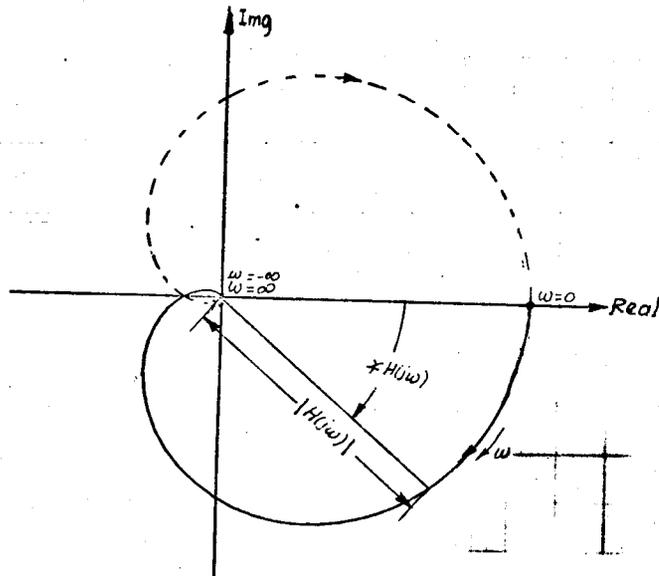


Fig 11 Traza polar de $H(j\omega)$, en donde se indican

$$|H(j\omega)| \quad \angle H(j\omega)$$

Por cumplirse la igualdad*

$$H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)}$$

solo es necesario conocer $H(j\omega)$ para $\omega > 0$.

En las figuras 8 y 11 la traza polar para frecuencias negativas (trazo punteado) es la imagen espejo sobre el eje real de

* \bar{H} indica el complejo conjugado de H

la traza para frecuencias positivas (trazo firme). La flecha sobre la traza indica el sentido en que ω crece.

5.1 Construcción de la traza polar

Los datos necesarios para construir la gráfica polar de una función de transferencia de un sistema pueden obtenerse de resultados experimentales o analíticos. En ambos casos, por lo general, se elaboran primero las gráficas de Bode, que serán presentadas más adelante. Sin embargo es posible construir directamente la gráfica polar de un sistema a partir del diagrama de polos y ceros usando los métodos presentados en el cap 7, sec 6. Para calcular $|H(j\omega)|$ solo es necesario efectuar el producto de las distancias del punto $j\omega$ a los ceros y dividir dicho producto por las distancias de $j\omega$ a cada uno de los polos. Similarmente, $\angle H(j\omega)$ se evalúa como la suma de los ángulos desde los ceros ^{a $j\omega$} menos la suma de los ángulos ^{desde} los polos. Para ilustrar la construcción de la gráfica polar a partir del patrón de polos y ceros se presentan dos ejemplos.

Ejemplo

Considérese la función de transferencia $H(s) = \frac{s+6}{(s+3)(s+1)}$

cuyo patrón de polos y ceros se muestra en la fig 12. Cualitativamente se pueden hacer las siguientes observaciones: para valores de ω cercanos a cero, $|H(j\omega)|$ será aproximadamente igual a 2;

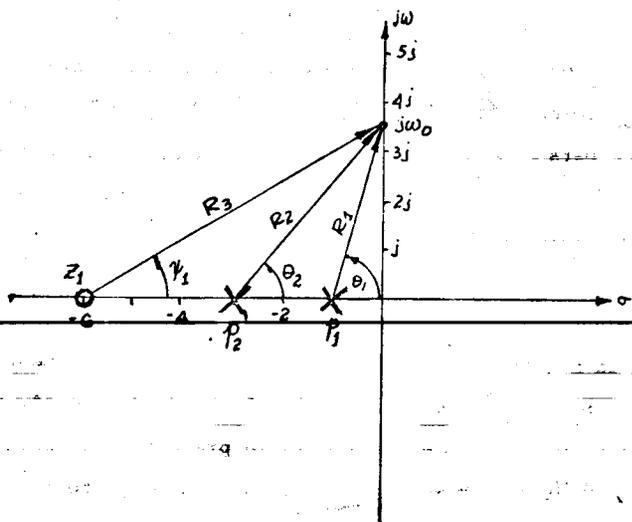


Fig 12. Patrón de polos y ceros de $\frac{s+6}{(s+3)(s+1)}$

a medida que w crece, pero aún de valor pequeño, el ángulo de $\angle H(jw)$ será esencialmente $-\theta_1$ (los otros ángulos θ_2 y ψ_1 son prácticamente iguales a cero); por otra parte la magnitud irá disminuyendo a medida que w aumenta. Cuando $w=1$, $\angle H(jw)$ será algo

menor que -45° ($\theta_1=45^\circ$ y $\theta_2-\psi_1 > 0$). Cuando w es aproximadamente

igual a seis, el ángulo $\angle H(jw) = \psi_1 - \theta_2 - \theta_3 \approx 45^\circ - 80^\circ - 90^\circ = -125^\circ$

mientras que la magnitud será $|H(jw)| = \frac{R_3}{R_1 R_2} = \frac{6\sqrt{2}}{6 \cdot 6} \approx .24$

Por último cuando $w \rightarrow \infty$, $\angle H(jw)$ se aproximará a -90°

($\psi_1 - \theta_2 - \theta_3 = 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -90^\circ$) mientras que la magnitud tenderá a cero. En la fig 13 se presentan $|H(jw)|$ y $\angle H(jw)$ para diversos valores de w junto con la traza polar correspondiente.

w	$ H(jw) $	$\angle H(jw)$
0	2	0°
.5	1.77	-31°
1	1.36	-54°
2	.78	-78.7°
3	.5	-90°
6	.21	-99°
10	.11	-98.5°
∞	0	-90°

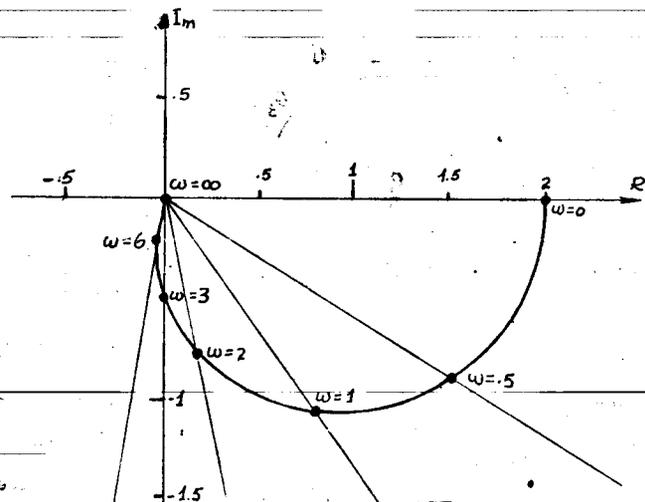


Fig 13. Traza polar de $\frac{s+6}{(s+3)(s+1)}$

Ejemplo

Considérese ahora que $H(s) = \frac{240(s-1)}{(s+4)(s^2 + s + 54.25)}$

cuyo patrón de polos y ceros se muestra en la fig 14.

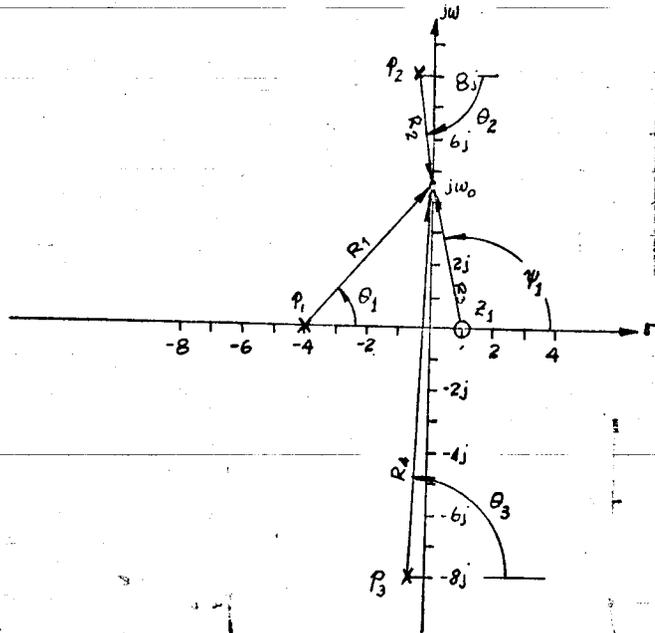


Fig 14. Patrón de polos y ceros de $\frac{240(s+1)}{(s+4)(s^2+s+64.25)}$

En este caso, un análisis cualitativo conduce a las siguientes conclusiones: para valores pequeños de ω el ángulo será de 180° , y la magnitud $\frac{60}{64.25} \approx 1$; cuando ω crece ψ_1 disminuye más rápido de lo que θ_1 crece y los ángulos θ_2 y θ_3 se cancelan; por tanto, el ángulo $\angle H(j\omega)$ será menor de 180° ; por otra parte la magnitud aumentará porque el punto $j\omega$ se aleja más rápido del cero que de los polos. Cuando ω está cerca del valor 4 se tendrá $\theta_1 \approx 45^\circ$, $\psi_1 \approx 100^\circ$, $\theta_2 + \theta_3 \approx 0$, o sea que el ángulo total será $\approx 55^\circ$. La magnitud para este caso es 5 aproximadamente. Cuando el punto $j\omega$, sobre el eje imaginario, pasa en frente del po-

lo complejo p_2 ocurre un cambio brusco en el ángulo; para $\omega \approx 7$ el ángulo es prácticamente cero ($\psi_1 \approx 90^\circ$, $\theta_3 \approx 90^\circ$, $\theta_2 + \theta_3 \approx 0^\circ$), mientras que para $\omega \approx 8$ el ángulo de la función de transferencia es -60° y para $\omega \approx 9$ el $\angle H(j\omega)$ es -120° ($\psi_1 \approx \theta_3 \approx 90^\circ$, $\theta_2 \approx 60^\circ$, $\theta_3 \approx 0^\circ$). La magnitud también sufre un cambio drástico en las proximidades de $\omega=8$ porque allí la distancia al polo p_2 es mínima, el valor de $|H(j\omega)|$ es $\frac{240R_3}{R_1R_2R_4} = \frac{240 \times 8}{8 \times 5 \times 16} \approx 30$; para valores de $\omega > 8$ la magnitud va disminuyendo a medida que ω aumenta y como hay dos polos más que ceros el ángulo tenderá a -180° . Como en el ejemplo anterior, en la fig 15 se presenta una tabla de $|H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ para diversos valores de ω junto con la gráfica polar de $H(j\omega)$.

ω	$ H(j\omega) $	$\angle H(j\omega)$
0	.93	-180°
1	1.3	-120°
4	3.6	54.3°
7	12.5	13.2°
8	27.	-54.5°
9	11.6	-121.4°
20	.7	-162.4°
∞	0	-180°

de la tabla y q ab : .9 .5i pit

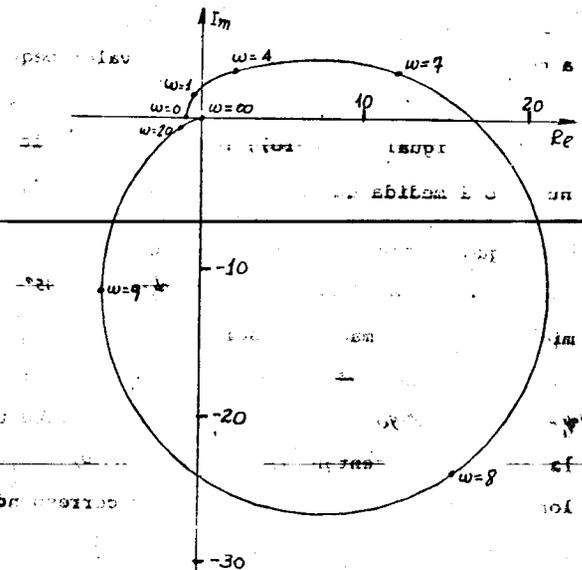


Fig 15. Traza polar de $\frac{240(s-1)}{(s+4)(s^2+s+64.25)}$

A continuación se presentará el criterio de estabilidad de Nyquist, el cual brinda información no solo sobre la estabilidad o inestabilidad de un sistema realimentado, sino también acerca de la calidad de su comportamiento.

5.2 Criterio de estabilidad de Nyquist. Preliminares

El criterio de Nyquist, aplicado a la traza polar, establece la estabilidad de un sistema realimentado a partir de la respuesta en frecuencia de sus componentes.

Considérese, por ejemplo, un sistema como el de la fig 16 donde $H(s)$ no tiene polos en el semiplano $\text{Re}(s) \geq 0$

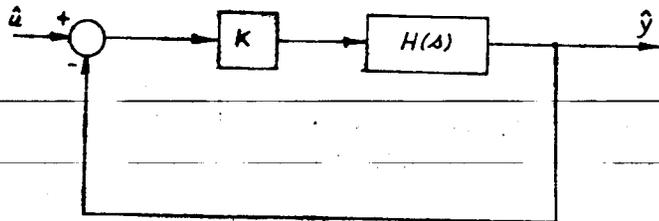


Fig 16. Sistema unitariamente realimentado

mediante el criterio en cuestión, se pueden determinar los valores de K para los cuales el sistema es estable, conociendo únicamente $H(j\omega)$.

Suponiendo que $H(s)$ es una función racional, la función de transferencia del sistema realimentado es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{KH(s)}{1+KH(s)} = \frac{K \frac{q(s)}{p(s)}}{1 + K \frac{q(s)}{p(s)}} = \frac{Kq(s)}{p(s) + Kq(s)}$$

Los polos de $Y(s)/U(s)$ coinciden con los ceros de $1+KH(s)$

Ahora bien; usando la teoría de variable compleja, y en particular el teorema llamado principio del argumento, puede determinarse el número de ceros de $1+KH(s)$ en $\text{Re}(s) \geq 0$ si se conoce la traza polar de $1+KH(j\omega)$

Para entender el citado principio se necesitan introducir los conceptos de puntos interiores, puntos exteriores, encierros, etc.

5.3 Puntos interiores y puntos exteriores

Considérese una curva cerrada, C , en el plano complejo. Si esta curva no se cruza sobre sí misma, se dice que es simple* y ^{si} además es de longitud finita, se llama rectificable. En las figuras 17 y 18 se muestra una curva simple y una no simple, respectivamente.

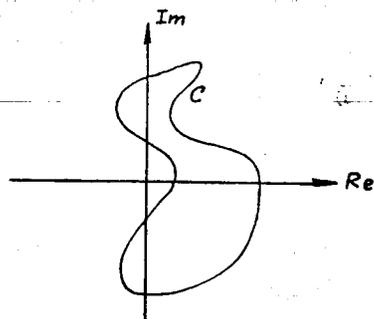


Fig 17. Curva cerrada simple

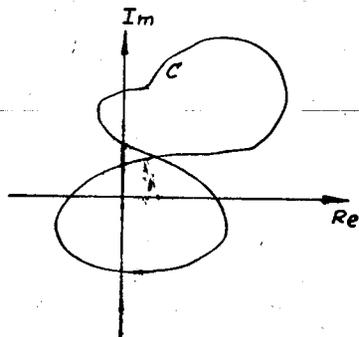


Fig 18. Curva cerrada no simple

Cualquier curva cerrada simple y rectificable, llamada también de Jordan, divide al plano complejo en dos conjuntos: uno acotado y otro no acotado. Los puntos pertenecientes al

* Más formalmente, si C se define como el conjunto de todos puntos del plano complejo $Z(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$ donde α y β son funciones continuas del intervalo $[0,1]$ a los números reales, entonces la curva es cerrada si $Z(0) = Z(1)$; exceptuando estos valores de t , si $t_1 \neq t_2$ implica que $Z(t_1) \neq Z(t_2)$, se dice que la curva es simple.

al primero se les denomina puntos interiores de C , y a los del conjunto no acotado puntos exteriores. En la fig 19 se muestra el interior y el exterior de una curva cerrada simple y rectificable,

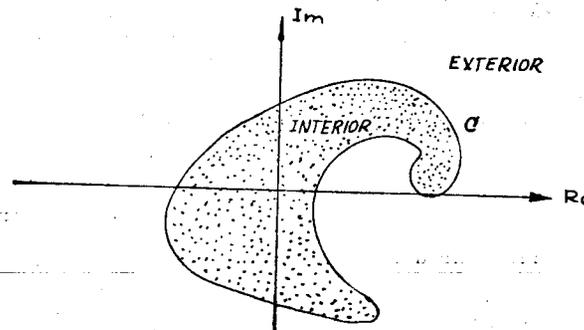


Fig 19. Interior y exterior de una curva cerrada simple y rectificable

A las curvas de Jordan se les puede asociar una dirección. Se dice que una curva está positivamente orientada si al tomar la dirección de la curva, los puntos inmediatamente a la izquierda de ellas son interiores. En caso contrario se dice que la curva está negativamente orientada. En la figs 20 y 21 se ilustran estos conceptos

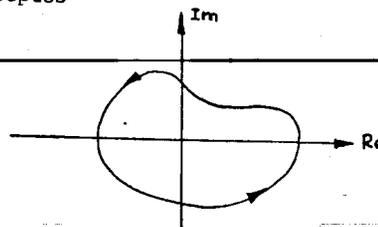


Fig 20. Curva positivamente orientada

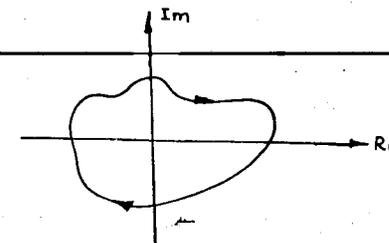


Fig 21. Curva negativamente orientada

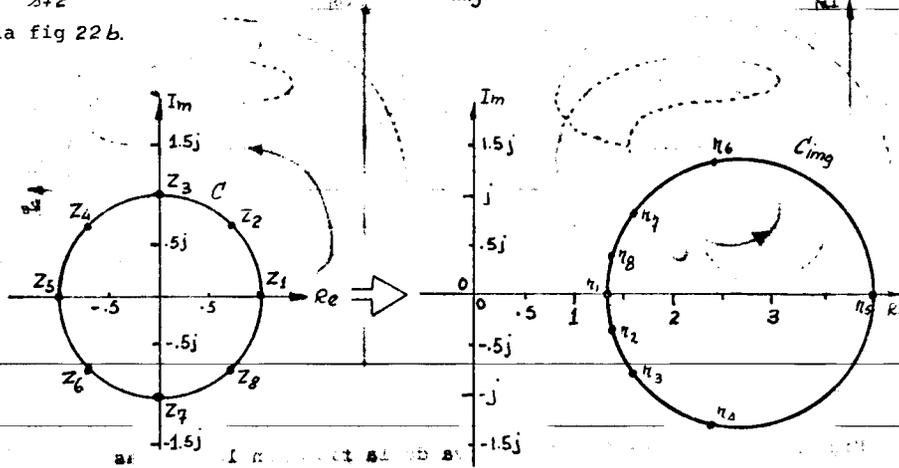
Si $F(s)$ es una función de la variable compleja s , se define la imagen de la curva C , denotada por C_{img} como el conjun-

to de todos los puntos k del plano complejo tales que

y z es algún punto de la curva C . Para que esta transformación se encuentre bien definida es necesario que la función F sea analítica* en la curva C , y en este caso, si C es cerrada y orientada, la imagen C_{img} también tendrá estas dos características.

5.3 Ejemplo 6

Considérese la curva de Jordan C de la fig 22a. Si $F(s)$ es $\frac{4}{s+2}$, entonces la curva imagen C_{img} es la que aparece en la fig 22b.



a) Curva cerrada C b) Imagen bajo la transformación

mación $\frac{4}{s+2}$

Fig 22

* Una función $F(s)$ es analítica en el punto s_0 si ahí existen sus derivadas de cualquier orden. Cuando $F(s)$ es racional, esta definición equivale a que s_0 no sea un polo de $F(s)$.

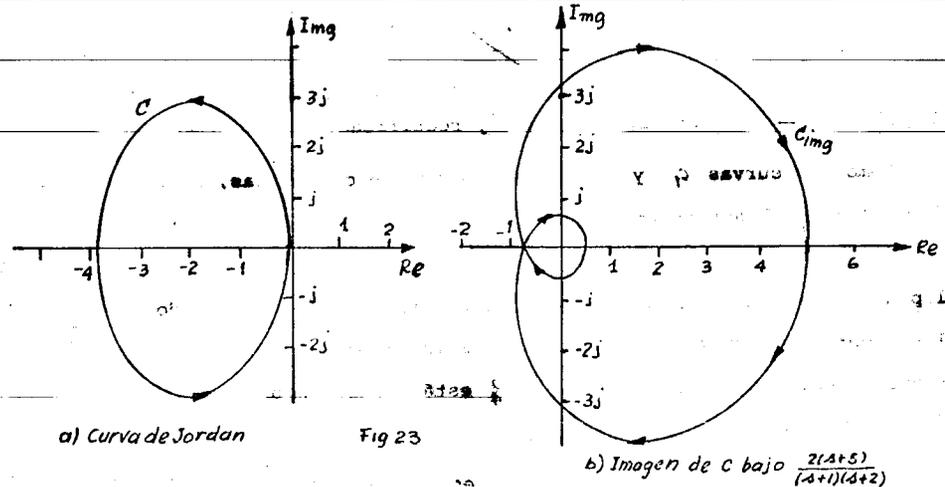
Para ilustrar la transformación, a continuación se presenta la correspondencia entre algunos puntos de C y los de la curva imagen C_{img}

punto $z_1 = 1$	punto $w_1 = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3} = 1.333.$
punto $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$	punto $w_2 = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)+2} = 1.38 - .36j$
punto $z_3 = j$	punto $w_3 = \frac{4}{j+2} = 1.6 - .8j$
punto $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j)$	punto $w_4 = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+j)+2} = 2.38 - 1.3j$
punto $z_5 = -1$	punto $w_5 = \frac{4}{-1+2} = 4$

En el ejemplo anterior tanto la curva C como su imagen eran curvas simples positivamente orientadas, pero puede suceder, como se ilustrará en el siguiente ejemplo, que la imagen de una curva de Jordan no es necesariamente simple.

5.4 Ejemplo 7

Considérese la función $F(s) = \frac{2(s+5)}{(s+1)(s+2)}$ y la curva de Jordan de la fig 23a. La curva imagen C_{img} , de la fig 23b no es una curva simple.



a) Curva de Jordan

Fig 23

b) Imagen de C bajo $\frac{2(s+5)}{(s+1)(s+2)}$

Los conceptos de punto interior y exterior pueden aplicarse a curvas no simples porque estas pueden descomponerse en varias curvas de Jordan de modo tal que cada segmento de la curva original pertenezca a una y solo una de las curvas de la descomposición. Si un punto es interior a m curvas positivamente orientadas, e interior a n curvas negativamente orientadas y $n = m - n$ entonces se dice que es interior n veces (o está encerrado n veces) la curva. De acuerdo con la definición anterior, n puede ser un número negativo.

5.5 Ejemplo 8

En la fig 24 se muestra una curva C , orientada pero no simple, la que puede descomponerse en las curvas simples que se muestran en la fig 25.

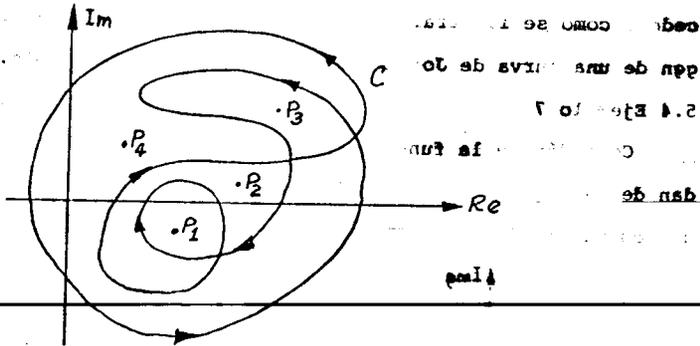


Fig 24. Una curva cerrada, orientada y rectificable pero no simple

Como las curvas C_1 y C_2 son positivamente orientadas, mientras que C_3 y C_4 son negativamente orientadas, se puede obtener la interioridad de los puntos P_1, \dots, P_4 con respecto a la curva C . El punto P_1 es interior a C_2, C_3 y C_4 , por tanto está encerrado -1 vez por la curva C ; el punto P_2 es interior a C_2 y C_4 por lo que se halla encerrado 0 veces y P_4 está encerrado una vez.

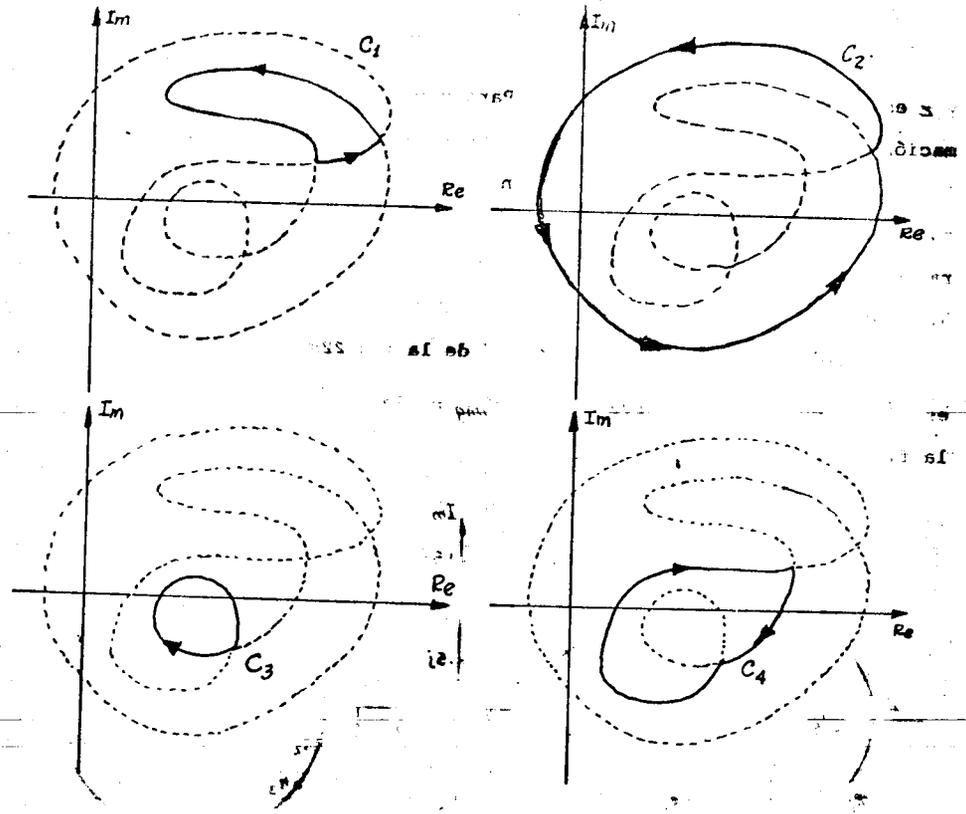


Fig 25. Descomposición de la curva de la fig 24 en las curvas simples C_1, C_2, C_3 y C_4

Con las definiciones anteriores puede, entonces, enunciarse el principio del argumento.

5.7 Principio del argumento

Si C es una curva de Jordan positivamente orientada, $F(z)$ es una función racional y analítica en C , y C_{img} es la imagen de C bajo $F(z)$, entonces el punto $0 \neq z_0$ estará encerrado N^* veces por C_{img} , en donde $N^* = Z - P$ cuando Z y P son el número de ceros y

de polos de $F(s)$, respectivamente, que están en el interior de C

En el teorema anterior, si C está negativamente orientada, entonces $N^* = P - Z$. Para ilustrar el principio del argumento se presentarán dos ejemplos.

Ejemplo 9

Tómese la función $F(s) = \frac{2(s+1)}{(s-1)(s-2)}$ y el camino rectangular de la fig 26a. De acuerdo con el principio del argumento, la imagen de C encerrará al origen -1 vez, pues en el interior de C , $F(s)$ tiene dos polos y un cero, esto es $N^* = Z - P = 1 - 2 = -1$. En efecto en la fig 26b se aprecia que C_{img} encierra al origen -1 vez.

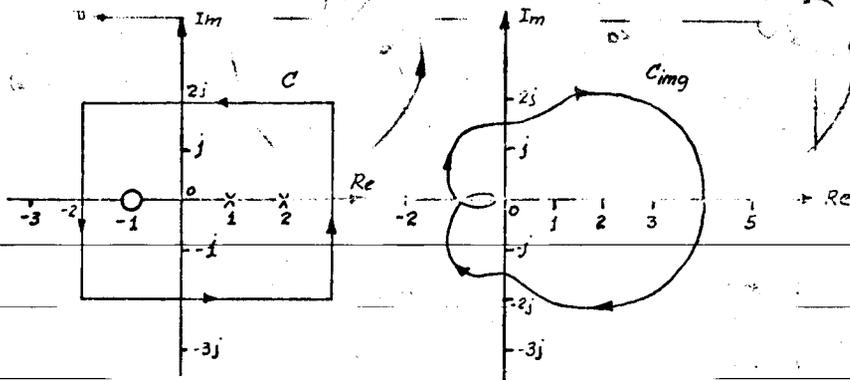


Fig 26. Ilustración del principio del argumento.

Ejemplo 10

Supóngase que la función $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{2(s+4)}$ y la curva C de la fig 27a. Como en el interior de C existe igual número de polos que de ceros, el origen del plano complejo está encerrado 0 veces por C_{img} , la imagen de C bajo la transformación $F(s)$ (fig 27b). Una consecuencia casi inmediata del principio del

argumento es el criterio de estabilidad de Nyquist, mediante el cual, como ya se mencionó, es posible determinar si un sistema realimentado es estable, conociendo de la malla abierta tan solo la respuesta en frecuencia y el número de polos con parte real positiva.

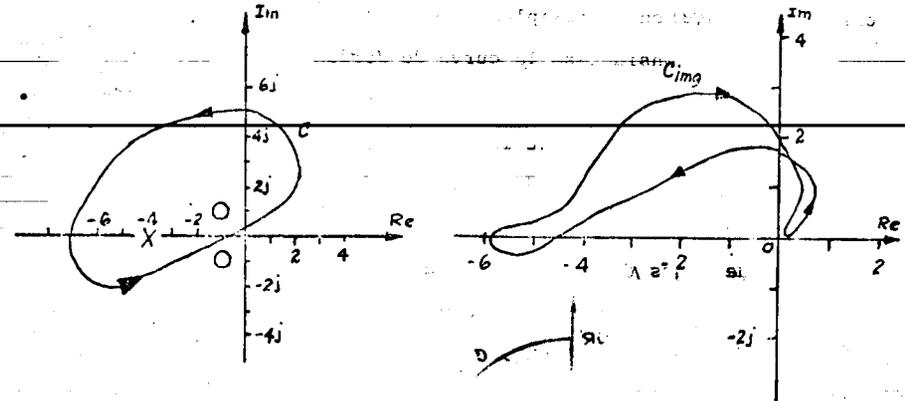


Fig 27. Ilustración del principio del argumento.

5.8 Criterio de estabilidad de Nyquist

El criterio de estabilidad de Nyquist indica, a partir de la traza polar de $1/H(s)$ si los sistemas realimentados, como los de la fig 28 son o no estables.

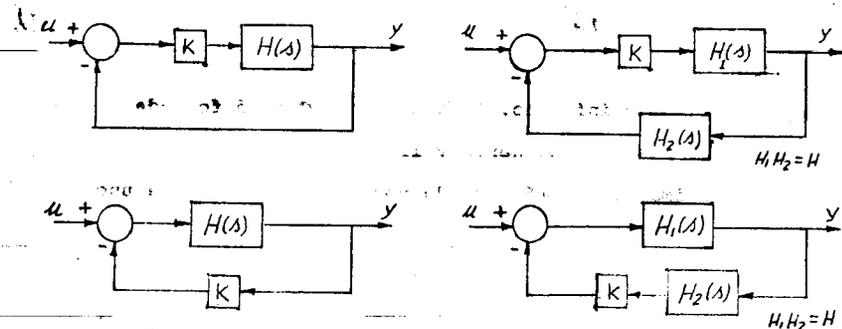


Fig 28. Algunos tipos de sistemas realimentados

Como el número de polos de $\frac{G(s)}{1+KH(s)}$ en cierta región es igual

al número de ceros de $1+KH(s)$ en la misma, para determinar la estabilidad de sistemas con este tipo de funciones de transferencia se dará un criterio enfocado a obtener el número de ceros de $1+KH(s)$ en el semiplano $Re[s] \geq 0$.

Para ello considérese la curva de Jordan C , negativamente orientada, que se muestra en la fig 29. Si $H(s)$ es una función que no tiene polos en el eje imaginario y además $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \alpha < \infty$ (el caso complementario será examinado más adelante), la curva imagen de C bajo la transformación $1+KH(s)$ encerrará al origen un número de veces N^* igual a la diferencia entre el número

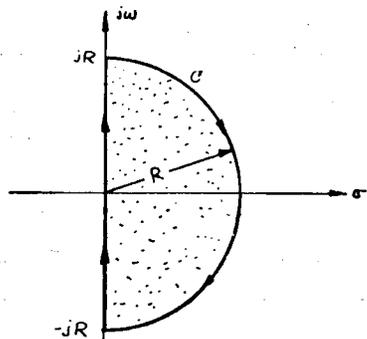


Fig 29. Curva de Jordan usada en el criterio de estabilidad de Nyquist

de polos y ceros de $1+KH(s)$ que están en el interior de C ($N^* = P-Z$).

Nótese que dicho interior coincide con el semiplano $Re[s] \geq 0$, a medida que R tiende a infinito. Como la curva C está formada por dos partes: i) el eje imaginario y ii) un semicírculo de radio R , la curva imagen estará formada por la imagen de cada uno de estos segmentos. La del primero es $1+KH(j\omega)$ y la del segundo, el punto $1+K\alpha$, pues se está haciendo la suposición que

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \alpha$. En la figura 30 se ilustran los pasos necesarios

para obtener la curva imagen de C bajo la transformación $1+KH(s)$

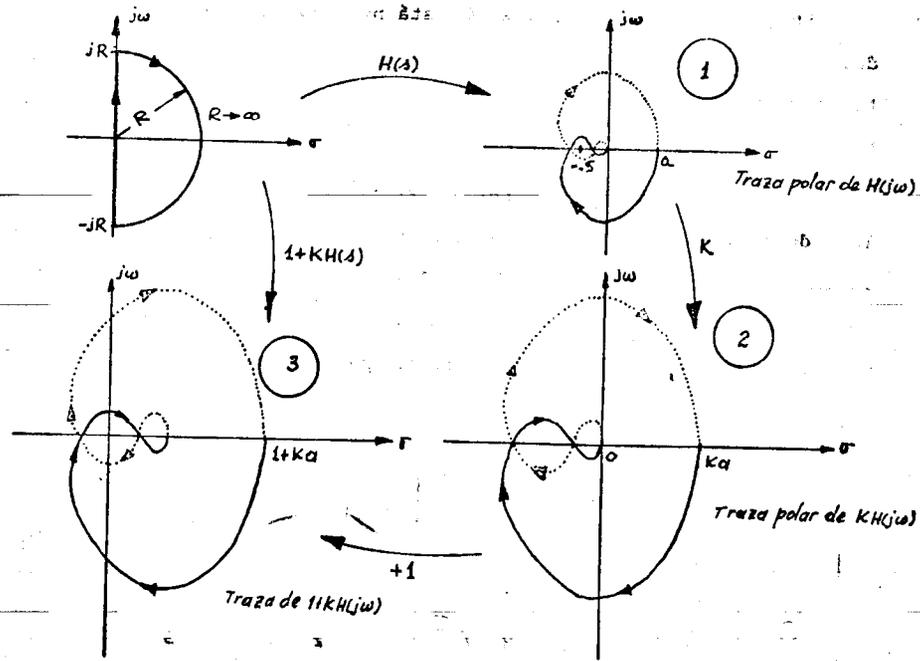


Fig 30. Construcción de la curva imagen de C bajo la transformación $1+KH(s)$

A partir del número de veces que está encerrado el origen por C_{img} , N^* (en la fig 30 son dos) y el número de polos de $1+KH(s)$ en el interior de C , es posible determinar el número de ceros (Z) de $1+KH(s)$ que están dentro de la región sombreada de la fig 29 que, como ya se comentó, coincide con el semiplano $Re[s] \geq 0$ cuando $R \rightarrow \infty$. En caso que $H(s)$ sea una función racional, los polos de $1+KH(s)$ coinciden con los de $H(s)$ y de esta forma a partir del conocimiento de $H(j\omega)$ y el número de polos de $H(s)$ con $Re[s] \geq 0$

se determina el número de ceros de $1+KH(s)$ que tienen parte real positiva ($Z=P-N^*$).

El método indicado en la fig 30 tiene el inconveniente de que para cada valor de K habría necesidad de redibujar la gráfica de $1+KH(j\omega)$. Sin embargo, como i) tanto los polos como los ceros de $1+KH(s)$ coinciden con los de $\frac{1}{K}+H(s)$ y ii) el número de veces que la curva imagen de bajo la transformación $\frac{1}{K}+H(s)$ encierra al origen es el mismo que el número de veces que la imagen de C bajo la transformación $H(s)$, encierra al punto $-\frac{1}{K}$, es posible determinar N^* para cualquier valor de K , directamente de la traza polar de $H(j\omega)$. Así en el caso de la fig 30, para el valor de $K=2$, se concluye que N^* es 2, observando el número de encierros del punto $-\frac{1}{K}$ por la traza polar de $H(j\omega)$.

Ahora bien, si en vez de calcular N^* para un valor de K , como el número de encierros en el sentido positivo matemático del punto $-\frac{1}{K}$, se calcula N , el número de encierros en el sentido de las manecillas del reloj, la fórmula que lo relaciona con P , el número de polos de $H(s)$ con parte real positiva, y Z , el número de ceros con parte real positiva de $1+KH(s)$ es

$$Z = N + P$$

Este resultado es conocido como *criterio de estabilidad de Nyquist*

Ejemplo 11

Supóngase el sistema de la fig 31, en donde

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s+1.75)(s^2 + .25s + .56)}$$

no tiene polos en el semiplano derecho. Se desea indagar para qué valores de K es el sistema realimentado estable. Usando el

método presentado en la sec 5.1 de este capítulo es posible

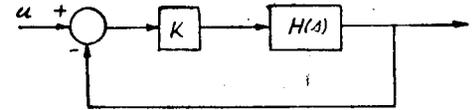


Fig 31. Un sistema realimentado

construir la gráfica polar que se muestra en la fig 32; ahí se distinguen cuatro segmentos del eje real de acuerdo con el número de encierros N

A si $-\infty < -\frac{1}{K} < -1$ se tiene $N=0$

B si $-1 < -\frac{1}{K} < 0$ se tiene $N=2$

C si $0 < -\frac{1}{K} < 1$ se tiene $N=1$

D si $1 < -\frac{1}{K} < \infty$ se tiene $N=0$

Para determinar los valores de K que satisfacen las desi-

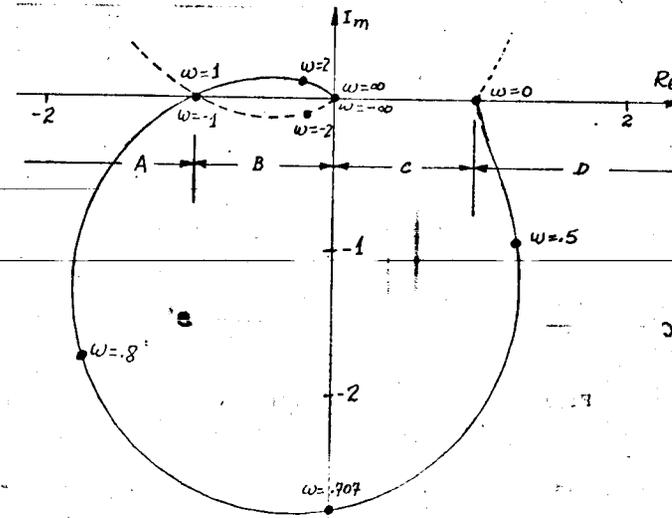


Fig 32. Trazo polar de $\frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$

gualdades anteriores es útil recurrir a la gráfica de $-\frac{1}{K}$ vs K como se muestra en la fig 33.

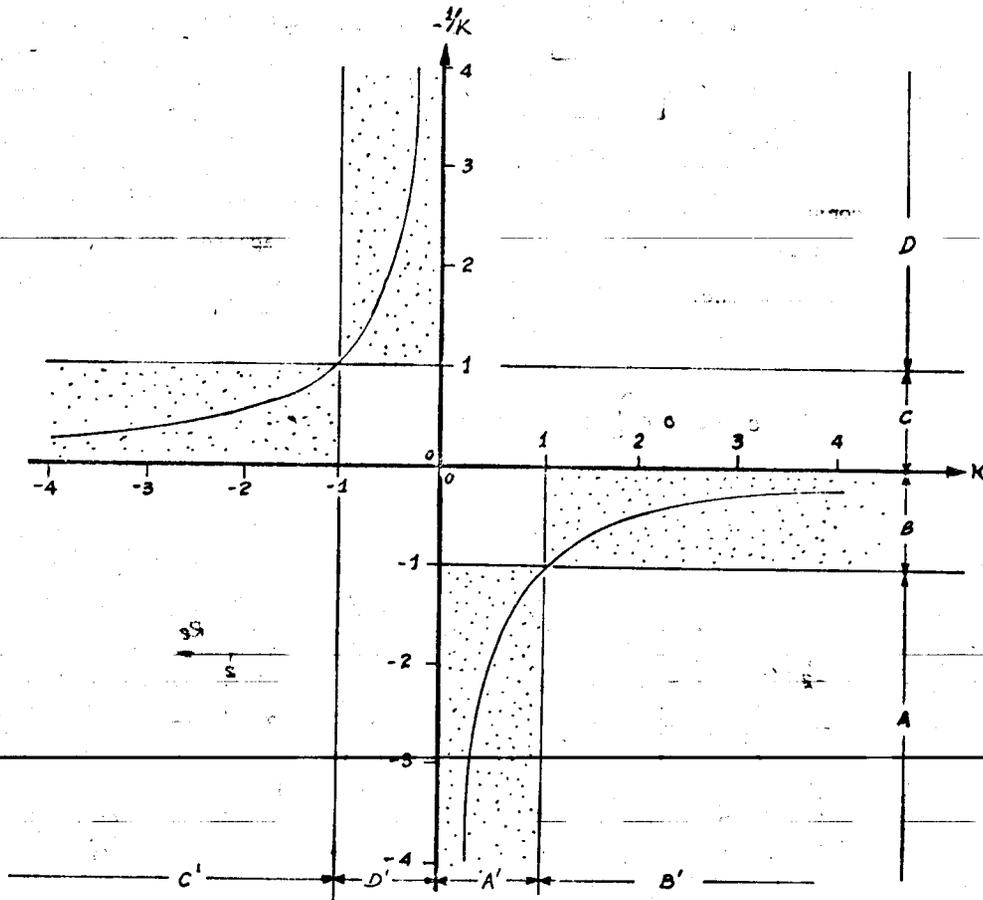


Fig 33. Gráfica para resolver desigualdades del tipo $\alpha < -\frac{1}{K} < \beta$

En dicha gráfica es fácil determinar qué valores de K satisfacen desigualdades del tipo $\alpha < -\frac{1}{K} < \beta$. Así por ejemplo, si $-\frac{1}{K}$

pertenece al intervalo C (eje vertical), K pertenece al intervalo C' (eje horizontal). De esta forma, para el ejemplo en cuestión se concluye que para

$$-\infty < K < -1, N=1$$

$$-1 < K < 0, N=0$$

$$0 < K < 1, N=0$$

$$1 < K < \infty, N=2$$

Como $H(s)$ no tiene polos con parte real positiva, $P=0$, y de acuerdo con el criterio de Nyquist se obtienen los siguientes resultados

$$\text{para } -\infty < K < -1, Z = P+N = 0 + 1 = 1$$

$$-1 < K < 1, Z = P+N = 0 + 0 = 0$$

$$1 < K < \infty, Z = P+N = 0 + 2 = 2$$

lo cual indica que la función de transferencia del sistema realimentado tendrá un polo con parte real positiva para valores de K menores que -1 , ningún polo con parte real positiva (sistema estable) para valores de K entre -1 y 1 y dos polos con parte real positiva para valores de K mayores que 1 . Los resultados anteriores se confirman por medio del lugar geométrico (positivo y negativo) que aparece en la fig 34.

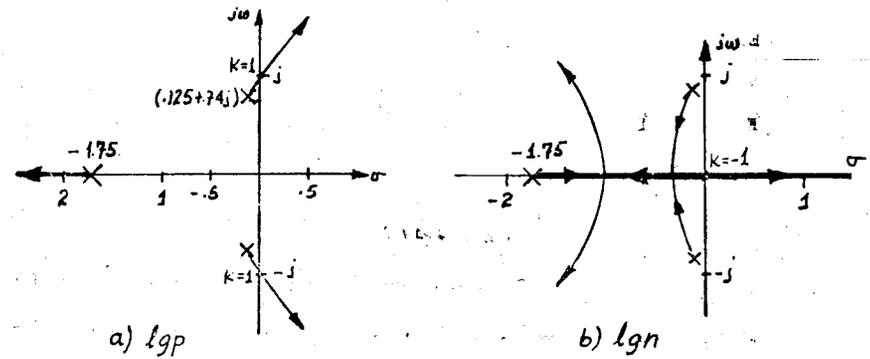


Fig 34. Lugar geométrico de

$$\frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Conviene hacer notar que la transición de 0 a 2 encierros ocurre para el valor de $K=1$ y para la frecuencia $\omega=1$, datos que pueden obtenerse indistintamente del lugar geométrico, la traza polar o el criterio de Routh.

Ejemplo 12

Se desea determinar los valores de K para que el sistema realimentado de la fig 35 sea estable, cuando la función de

transferencia $H(s)$ es $\frac{s^2 + 19s + 90}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{(s+9)(s+10)}{(s+1)^3}$

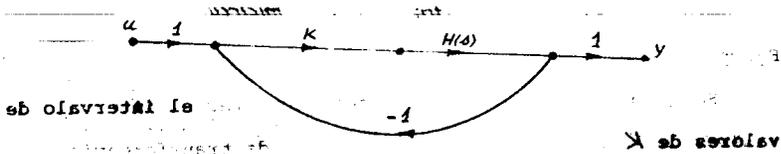


Fig 35. Reograma de un sistema realimentado

La gráfica polar de $H(j\omega)$ que se muestra en la fig 36 divide al eje real en cinco segmentos. Utilizando el mismo procedimiento del ejemplo anterior se concluye que

$N = 0$ para $0 < K < .342$

$N = 2$ para $.342 < K < 1.236$

$N = 0$ para $1.236 < K < \infty$

$N = 1$ para $-\infty < K < -.011$

$N = 0$ para $-.011 < K < 0$

Como todos los polos de $H(s)$ están en el semiplano izquierdo, $P=0$, por tanto el criterio de Nyquist se reduce a $Z=N$. El número de polos con $Re\{s\} > 0$ del sistema realimentado para los diversos valores de K es

$-\infty < K < -.011, \quad Z = 1$

$-.011 < K < .342, \quad Z = 0$

$.342 < K < 1.236, \quad Z = 2$

$1.236 < K < \infty, \quad Z = 0$

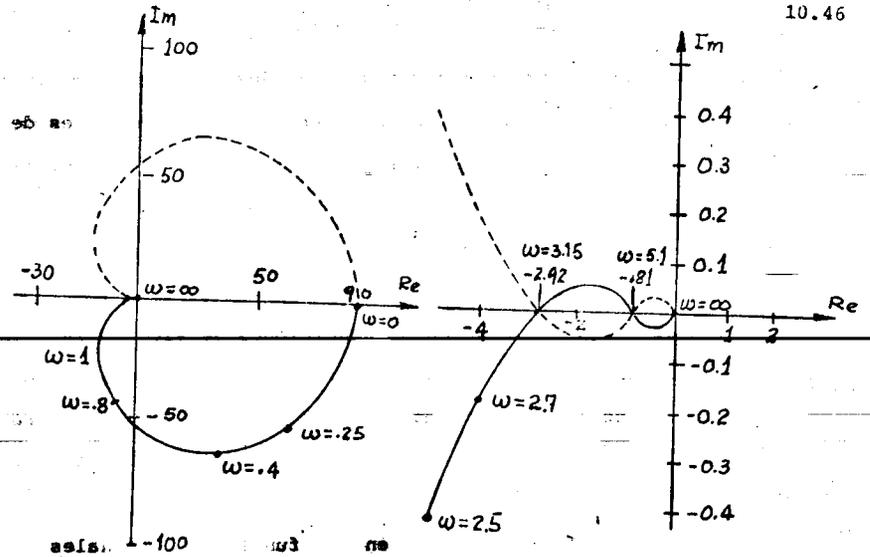


Fig 36. Trazo polar del sistema

El lugar geométrico positivo del sistema (fig 37) confirma estos resultados. Inicialmente ($K=0$) el sistema es estable y al aumentar K dos polos cruzan el eje imaginario ($Z=2$) y posteriormente regresan al semiplano izquierdo, siendo estable el sistema para valores de K mayores que 1.24.

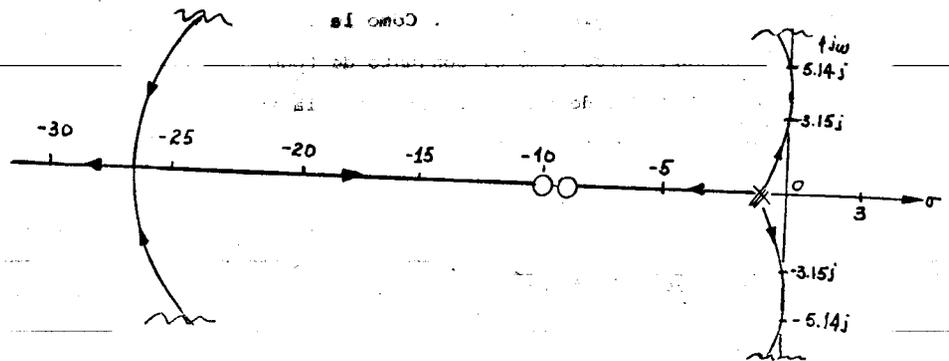


Fig 37. lgp del sistema $\frac{(s+9)(s+10)}{(s+1)^3}$

5.8.1 Funciones de transferencia no acotadas en el eje imaginario

Al definir la curva C que encierra las singularidades de $H(s)$ en el semiplano derecho (fig 29) se ha hecho dos suposiciones:

- i) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = \alpha < \infty$
- ii) $H(s)$ carece de polos sobre el eje imaginario.

Cuando una o ambas de estas condiciones se violan, la curva C que encierra al semiplano derecho debe modificarse. A continuación se explicará cómo efectuar esta modificación para cada caso.

Caso i)

Esta situación se presenta en las funciones racionales cuando el orden del numerador es mayor que el del denominador. Si $H(s)$ se expresa como

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + a_{m-2} s^{m-2} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_0}; \quad m > n$$

se comportará como $a_m s^{m-n}$ conforme $|s| \rightarrow \infty$ y por tanto la imagen de la semicircunferencia de radio R bajo la transformación $H(s)$ no será un solo punto y por ello habrá necesidad de complementar la gráfica polar de $H(j\omega)$. Como la circunferencia de radio R puede expresarse como el conjunto de todos los puntos $Re^{j\theta}$ en donde θ varía de 90° a -90° (fig 38) la imagen correspondiente bajo la transformación $H(s) \approx a_m s^{m-n}$ estará dada por

$$a_m (Re^{j\theta})^{m-n} = a_m R^{m-n} e^{j\theta(m-n)}$$

en donde

$$-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

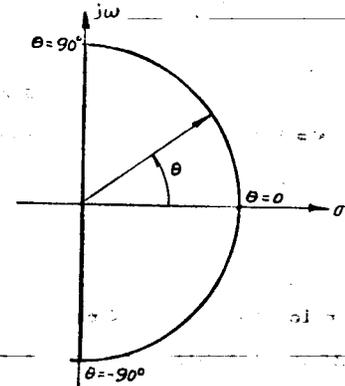


Fig 38. Parametrización del semicírculo

Ejemplo 13

Sea $H(s) = \frac{2(s+1)(s+3)}{s+2}$. Se desea encontrar el intervalo de valores de K para los cuales la función de transferencia

$\frac{H(s)}{1+KH(s)}$ tiene todos sus polos en el semiplano $Re\{s\} < 0$.

Como

$$H(s) = \frac{2(s^2 + 4s + 3)}{s + 2} = 2s + 4 - \frac{2}{s + 2}$$

se comporta como $2s$ en la medida en que $|s| \rightarrow \infty$; la imagen de C bajo la transformación $H(s)$ estará compuesta por la gráfica polar de $H(j\omega)$ y el conjunto de todos los puntos $2Re^{j\theta}$ cuando θ varía de 90° a -90° . En la fig 39 se muestra este resultado y de ahí puede concluirse que $\frac{H(s)}{1+KH(s)}$ tiene un polo en el semiplano $Re\{s\} > 0$ para $-\frac{1}{3} < K < 0$.

Caso ii) Polos en el eje imaginario

Si $H(s)$ tiene un polo en el eje imaginario, $s = j\omega$, no es posible aplicar directamente el criterio de Nyquist porque se violaría la restricción de que $H(s)$ debe ser analítica en la curva C . Por ello esta se modifica dándole una pequeña vuelta a los polos imaginarios para dejarlos completamente fuera (o den-

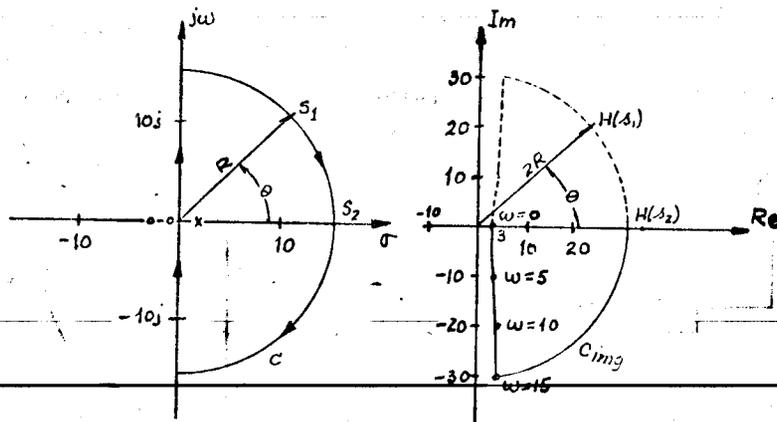


Fig 39. Traza polar de $2s+4 - \frac{2}{s+2}$

tro) del interior de C . Cuando los polos imaginarios se dejan dentro, debe tenerse presente incluirlos en el número de polos P de la fórmula $Z = P + N$.

Ejemplo 14

Se desea saber para qué valores de K el sistema cuya función de transferencia es $\frac{H(s)}{1+KH(s)}$ es estable, para el caso en que

$H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$. La fig 40a muestra una curva C que deja fuera el polo en el eje imaginario (localizado en $s=0$). Se mues-

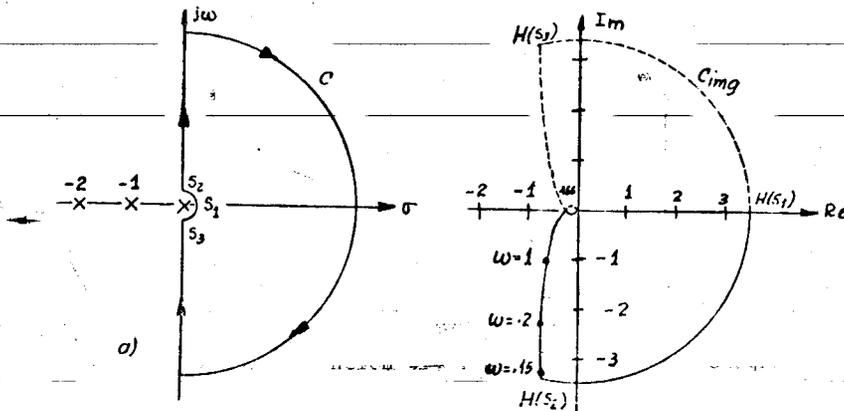


Fig 40. Curva C y C_{img}

tra además la imagen correspondiente C_{img} .

Al analizar la fig 40 se concluye que el sistema $\frac{H(s)}{1+KH(s)}$ es estable para $0 < K < 6$; para valores de K en el intervalo $[6, \infty)$ el sistema tiene dos polos en el semiplano derecho (porque C_{img} encierra dos veces al punto $-\frac{1}{K}$). Para valores negativos de K el sistema es siempre inestable, porque C_{img} encierra una vez al eje positivo real (lo que equivale a $K < 0$)

El criterio de Nyquist, como ya se mencionó, es también aplicable a sistemas con funciones de transferencia no racionales. La demostración de esta aseveración será omitida en este texto. El siguiente ejemplo ilustra su utilización en una de esas situaciones.

Ejemplo 15

Supóngase que se cuenta con un sistema de control que consta de un controlador, una planta y un sensor. Un diagrama esquemático del sistema aparece en la fig 41.

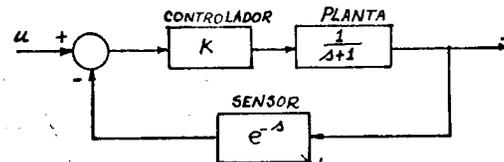


FIG 41. Diagrama de bloques de un sistema de control

La función de transferencia del sistema realimentado es

$$\frac{K}{s+1} \frac{1}{1 + K \frac{e^{-s}}{s+1}}$$

Se desea saber el intervalo de valores de K para el cual el sistema es estable. Como el denominador es $1 + K \frac{e^{-s}}{s+1}$, se tomará como $H(s)$ a la función $\frac{e^{-s}}{s+1}$. Para construir el diagrama polar

CONSULTA

correspondiente es preciso notar que

$$\left| \frac{e^{-j\omega}}{j\omega+1} \right| = \left| \frac{1}{j\omega+1} \right| ; \angle \left(\frac{e^{-j\omega}}{j\omega+1} \right) = \left[\angle \left(\frac{1}{j\omega+1} \right) \right] - \omega$$

o sea que a cada punto de la traza polar de $\frac{1}{j\omega+1}$ se le debe sumar el ángulo de $e^{-j\omega}$ que es $-\omega$.

El diagrama polar de $H(j\omega)$ se muestra en la fig 42 . De ahí

ATL

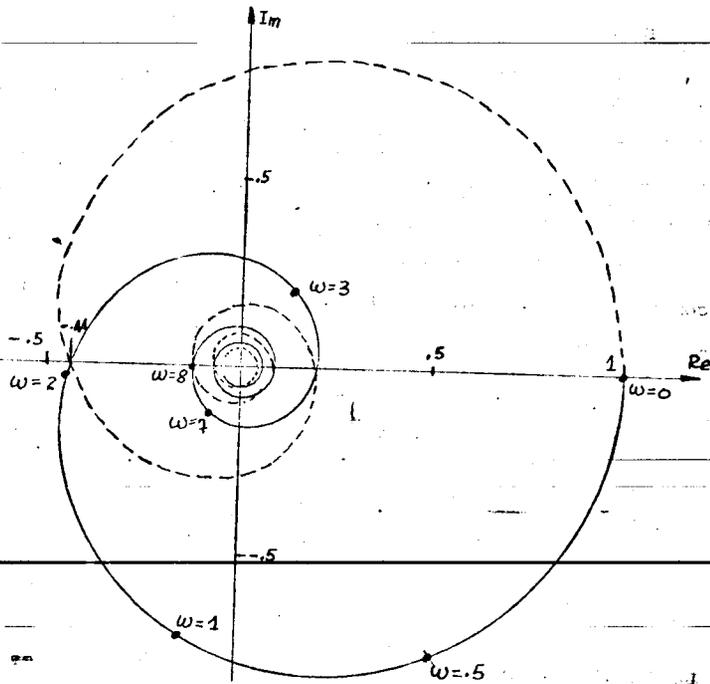


Fig 42. Diagrama polar de $\frac{e^{-j\omega}}{j\omega+1}$. Se concluye que el sistema será estable para valores de K en el intervalo $-1 < K < 2.75$

6. Grado de estabilidad

En la sección anterior se demostró que un sistema realimentado, como el de la fig 43, es estable si la traza polar de

$H(j\omega)G(j\omega)$ no encierra la punto -1 y $H(s)G(s)$ no tiene polos con parte real positiva.

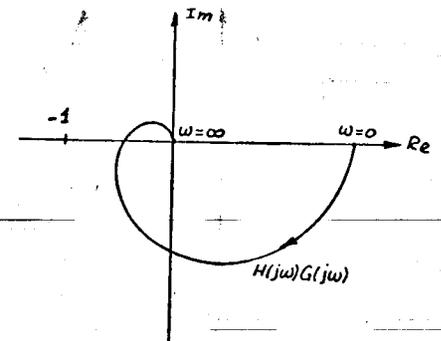
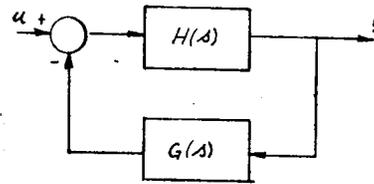


Fig 43. Sistema realimentado

De este resultado es factible pensar en definir " el grado de estabilidad" de un sistema realimentado con base en qué "tan próxima" está la gráfica polar de $H(j\omega)G(j\omega)$ de encerrar al punto -1. Así, al comparar las gráficas polares de $H_A(j\omega)G_A(j\omega)$ y $H_B(j\omega)G_B(j\omega)$ (fig 44) resultaría natural decir que el sistema

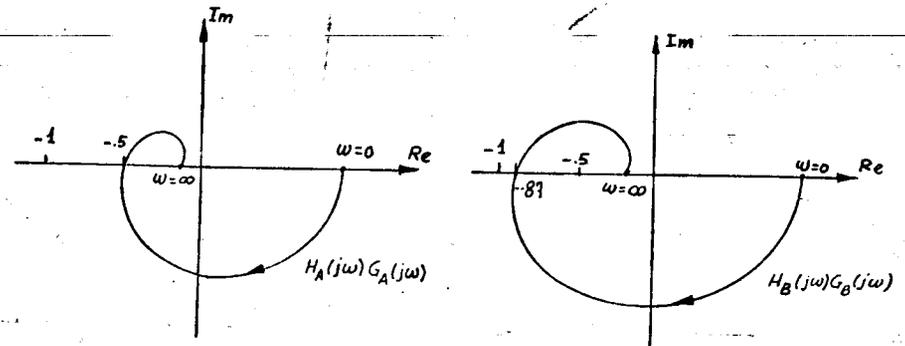


Fig 44. Gráficas polares de dos sistemas

con función de transferencia $\frac{H_A(s)}{1+H_A(s)G_A(s)}$ es "más estable" que el sistema $\frac{H_B(s)}{1+H_B(s)G_B(s)}$. También parece adecuado considerar al sistema $\frac{H_C(s)}{1+H_C(s)G_C(s)}$ "más estable" que $\frac{H_D(s)}{1+H_D(s)G_D(s)}$, cuando las trazas polares de $H_C(j\omega)G_C(j\omega)$ y $H_D(j\omega)G_D(j\omega)$ son las que apa-

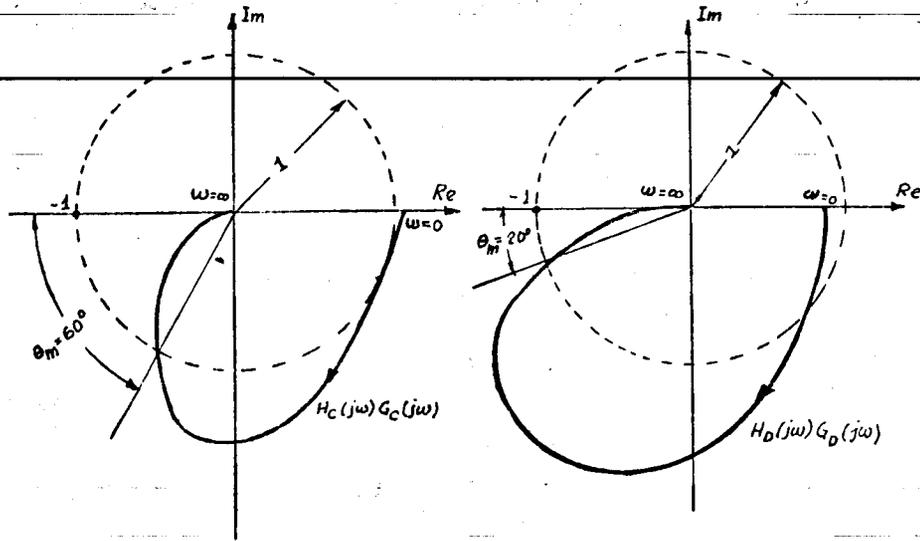


Fig 45. Trazas polares de dos sistemas

recen en la fig 45. Por las razones anteriores se han establecido medidas de la cercanía de la traza polar al punto -1. Una de ellas es el margen de ganancia (G_m) y la otra el margen de fase (ϕ_m). La primera corresponde al mínimo factor por el cual habría que multiplicar $H(s)G(s)$ para que el sistema se vuelva inestable;

dicho factor es igual al negativo inverso del valor en el cual la traza polar cruza el eje real. En la fig 44 se observa que el margen de ganancia del sistema $\frac{H_A(s)}{1+H_A(s)G_A(s)}$ es $G_m = \frac{-1}{-0.5} = 2$ mientras que el de $\frac{H_B(s)}{1+H_B(s)G_B(s)}$ es $G_m = \frac{-1}{-0.87} = 1.15$. Entre mayor sea el margen de ganancia, más estable será el sistema realimentado. Cuando en este se cuenta con una ganancia K_o como es el caso de las figs 4 a y 4 b, el margen de ganancia se obtiene de la siguiente forma:

$$(-\alpha) G_m = \frac{-1}{K_o} \Rightarrow G_m = \frac{1}{\alpha K_o}$$

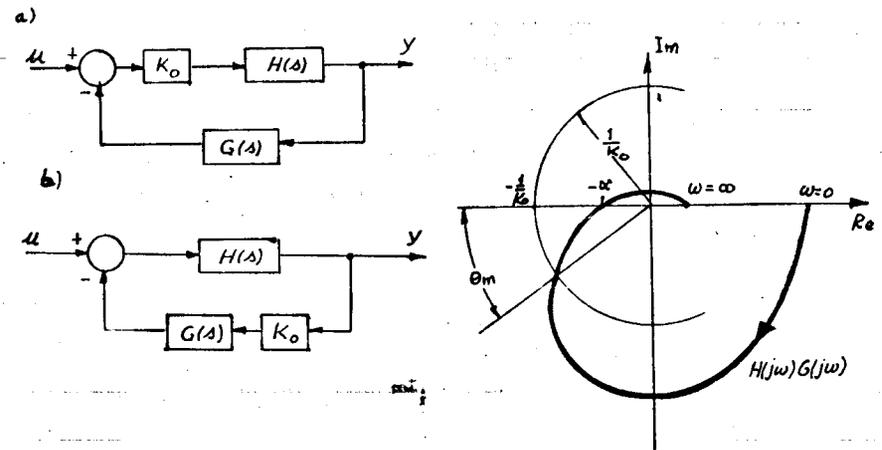


Fig 46. Sistemas realimentados y su gráfica polar

El margen de fase, que es otra medida del grado de estabilidad, corresponde a la mínima fase que debe sumarse al ángulo $\angle H(j\omega)G(j\omega)$ para que el sistema sea inestable; corresponde a su vez al ángulo que debe girarse la traza polar para que encierre al punto -1. La manera de establecerlo es encontrando la intersección de la circunferencia, de radio unitario y centro en el origen, con la traza polar, dibujando un vector que parte

del origen y llega a la intersección encontrada, y midiendo el ángulo ϕ_m (margen de fase) que forman este vector y el eje real negativo. De la fig 45 se deduce que el margen de fase ϕ_m de $\frac{H_c(s)}{1+H_c(s)G_c(s)}$ es 0° y el de $\frac{H_D(s)}{1+H_D(s)G_D(s)}$ es de 0° . Como en el caso del margen de ganancia, entre mayor sea el de fase, más estable será el sistema. Para los sistemas de la fig 46 el margen de fase se obtiene con el procedimiento descrito pero usando un círculo de radio $\frac{1}{K_o}$.

Para un buen comportamiento de un sistema se recomienda, con base en la experiencia en sistemas de bajo orden, que el margen de fase se encuentre entre 30° y 60° y el margen de ganancia sea mayor que 2.

Otra medida del grado de estabilidad, llamado factor de resonancia, es la distancia mínima de la traza polar al punto -1 . Se determina por el radio del círculo de centro en -1 y tangente a la gráfica polar (fig 47). Un análisis más detallado de esta medida se encuentra en la sección 8.1

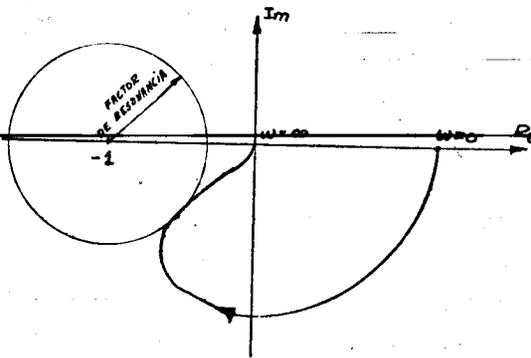


Fig 47. Factor de resonancia

7. Trazas de Bode. Introducción

Otra manera de representar gráficamente la respuesta en frecuencia de un sistema es por medio de las trazas de Bode. Estas representan en forma gráfica el logaritmo de la magnitud ($\log |H(j\omega)|$) y el ángulo $\angle H(j\omega)$ vs $\log \omega$.

El motivo de su gran uso se debe a que a partir de ella

- i) Es fácil manipular las funciones de transferencia de sistemas compuestos por bloques en cascada.
- ii) Se pueden obtener con facilidad otras gráficas, como la polar y la de Nichols
- iii) Son sencillas de dibujar en caso que $H(s)$ esté factorizada en forma adecuada
- iv) Pueden usarse para el diseño de sistemas realimentados cuando las especificaciones están dadas en función de márgenes de fase y de ganancia
- v) Son usadas para representar resultados experimentales.

Considérense dos sistemas en cascada, cuyas funciones de transferencia son $H_1(s)$ y $H_2(s)$ (fig 48). La respuesta en fre-

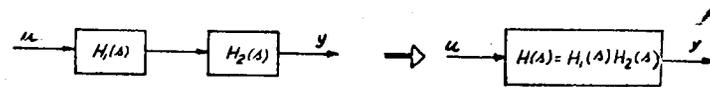


Fig 48. Dos sistemas en cascada

cuencia del sistema compuesto, $H(j\omega)$, está relacionada con $H_1(j\omega)$ y $H_2(j\omega)$ (las respuestas en frecuencia de las componentes) mediante la expresión

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega)$$

Al representar en forma polar las respuestas en frecuencia que aparecen en la fórmula anterior, esto es

$$H(j\omega) = M e^{j\phi} ; H_1(j\omega) = M_1 e^{j\phi_1} ; H_2(j\omega) = M_2 e^{j\phi_2}$$

se obtiene la siguiente relación

$$H(j\omega) = M e^{j\phi} = [M_1 e^{j\phi_1}] [M_2 e^{j\phi_2}] = M_1 M_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

de tal suerte que $|H(j\omega)| = M_1 M_2$ y al tomar logaritmos, se logra

$$\log |H(j\omega)| = \log M_1 + \log M_2 = \log |H_1(j\omega)| + \log |H_2(j\omega)|$$

A su vez el ángulo

$$\angle H(j\omega) = \phi = \phi_1 + \phi_2 = \angle [H_1(j\omega)] + \angle [H_2(j\omega)]$$

De los resultados anteriores se desprende que al contar

con sistemas en cascada, es conveniente disponer de la respuesta en frecuencia de cada elemento en forma logarítmica, ya que el logaritmo de la respuesta en frecuencia del bloque resultante será la suma de los logaritmos de las componentes.

Las trazas de Bode fueron utilizadas inicialmente por ingenieros en comunicaciones. A consecuencia de ello ha persistido la nomenclatura propia de esa rama de la ingeniería. Algunos de los términos usados son: octava, década y decibel. Estos se describen a continuación:

a) Octava. Entre las frecuencias ω_1 y ω_2 hay una octava si $\omega_2 = 2\omega_1$. Este nombre se debe a que la frecuencia ω_2 corresponde a un sonido de ocho notas fundamentales más alto que ω_1 .

b) Década. Entre ω_1 y ω_2 hay una década si $\omega_2 = 10\omega_1$.

c) Del, decibel. La intensidad de un sonido se mide logarítmicamente según su potencia. Al decuplarse la potencia de un sonido, se dice que la intensidad ha ascendido un bel. Un decibel (abreviado db) es la décima parte de un bel.

Como la potencia de un sonido es proporcional al cuadrado de la amplitud de vibración, al aumentar diez veces ésta, aumenta cien

veces la potencia, y su intensidad sube

$$\log(100) = 2 \text{ bels o sea } 20 \text{ db}$$

La fórmula para obtener la magnitud de una cantidad M en db es

$$M(\text{db}) = 20 \log M$$

7.1 Método para dibujar las trazas de Bode

Supóngase que $H(j\omega)$ es el producto de n factores

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) H_2(j\omega) \dots H_n(j\omega)$$

al tomar el logaritmo de $|H(j\omega)|$ resulta

$$\log |H(j\omega)| = \log |H_1(j\omega)| + \log |H_2(j\omega)| + \dots + \log |H_n(j\omega)|$$

$$\angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) + \dots + \angle H_n(j\omega)$$

Como consecuencia de esto, al descomponer $H(j\omega)$ como el producto de una serie de factores, la gráfica $\log |H|$ vs $\log \omega$ será la suma de las trazas log-log individuales de los factores $H_k(j\omega)$, tanto para las magnitudes como para los ángulos.

En esta sección se dará un método para dibujar las trazas de Bode de cierta clase de funciones de transferencia. Se supondrá, por el momento, que la función de transferencia está expresada como un producto de cinco tipos de factores:

- término constante, K
- polos o ceros en el origen, $(\frac{1}{s^n}, s^m)$; $n, m = 1, 2, \dots, l$
- polos y ceros en el eje real, del tipo $\frac{1}{s + p}$ y $s + z$, respectivamente

- polos y ceros complejos del tipo $\frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ y $s^2 + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_n^2} s + 1$, respectivamente

- retraso de T unidades de tiempo (función de trans-

ferencia igual a e^{-sT}).

Se supondrá inicialmente que tanto los polos como los ceros de $H(s)$ están localizados en la mitad izquierda del plano complejo. Esta restricción será relajada en la sección 7.2.

Debe hacerse hincapié en que los factores correspondientes a los polos y ceros dados en los incisos c) y d) deben estar en la forma

$$\left(\frac{s}{p_c} + 1\right) ; \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)$$

$$\left(\frac{s}{c_c} + 1\right) ; \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)$$

de tal suerte que cada factor valga 1 para $s=0$. Así la función

$$\text{de transferencia } H(s) = \frac{100(s+10)}{(s+1)(s^2+10s+20)}$$

se factoriza como

$$H(s) = \frac{50\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{(s+1)\left(\frac{s^2}{20} + 0.5s + 1\right)}$$

La forma para encontrar las trazas de Bode de cada componente se describen a continuación.

- 1) Término constante, K

En escala log-log K posee una fase de 0° y una magnitud de $20 \log K$ db (fig 49)

- 2) Polos y ceros en el origen

El factor correspondiente a un cero de orden m en el origen es s^m , siendo la respuesta de frecuencia correspondiente $(j\omega)^m$

La representación polar de la respuesta en frecuencia de este factor es

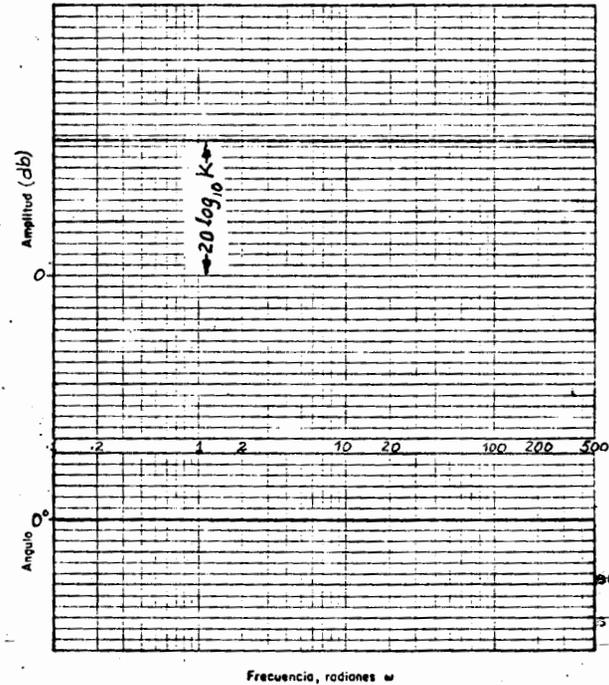


Fig 49 Trazas de Bode de un término constante K

$$(j\omega)^m = |\omega|^m \angle m \cdot 90^\circ$$

por lo que, tomando logaritmos, la magnitud es $m \log \omega$ y la fase $m \cdot 90^\circ$. En la fig 50 se muestran las gráficas de Bode.

501-201

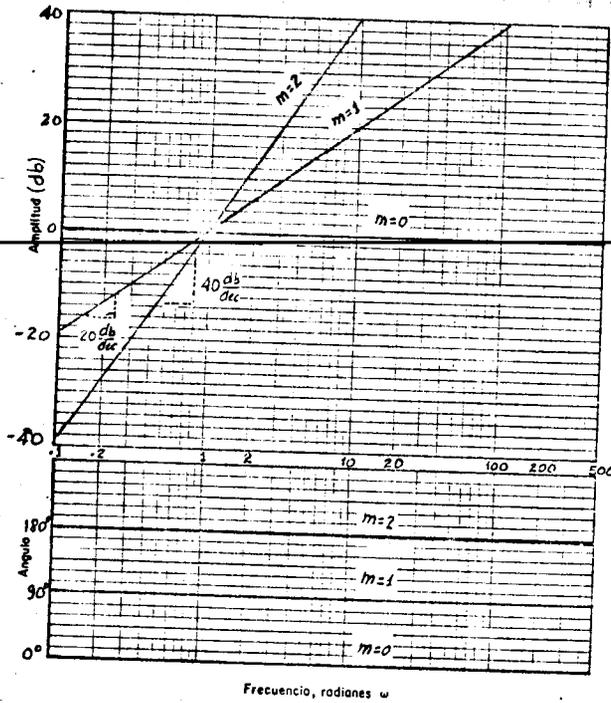


Fig 50 Gráfica de Bode (magnitud y fase) para Δ^m

La traza correspondiente a la magnitud en db es una recta que pasa, en $\omega=1$ ($\log \omega=0$), por 0 db, con una pendiente de 20 mdb/década (6 m db por octava, ya que $20 \log 2$ es aproximadamente igual a 6). La traza de la fase es una recta horizontal a 90°

En el caso de polos de orden n en el origen al tenerse

un factor del tipo $1/s^n$, las trazas de magnitud y fase, son como las del caso anterior pero como signo cambiado como se indica en la fig 51. Este se debe al hecho de que

$$\log\left(\frac{1}{s^n}\right) = -\log s^n$$

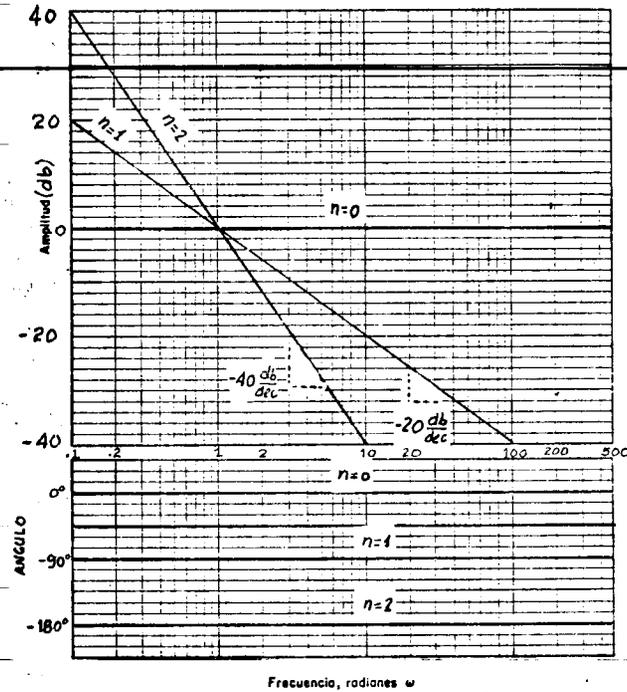


Fig 51. Gráficas de Bode de $\frac{1}{\Delta^n}$

0=1

3) Polos y ceros en el eje real

Se describirá ahora el caso de un polo en el eje real negativo.

Este factor es de la forma $\frac{1}{\frac{s}{p_1} + 1}$ $p_1 > 0$

Las partes real e imaginaria de la función de transferencia son

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p_1}} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 + 1} + \frac{\frac{j\omega}{p_1}}{\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 + 1}$$

por lo que su magnitud y su fase son respectivamente:

$$M = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 + 1}} \quad ; \quad \phi = -\text{tg}\left(\frac{\omega}{p_1}\right)$$

Considérese primero el término M . Para valores de ω tales que

$\left|\frac{\omega}{p_1}\right| \ll 1$, el término $\sqrt{\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 + 1} \approx 1$

por lo que, la magnitud puede aproximarse por $M \approx 1$ para $\left|\frac{\omega}{p_1}\right| \ll 1$

En cambio, para valores de $\left|\frac{\omega}{p_1}\right| \gg 1$ el término $\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 + 1$ será casi igual a $\frac{\omega^2}{p_1^2}$ por lo que

$$M \approx \frac{1}{\omega/p_1} \text{ para } \left|\frac{\omega}{p_1}\right| \gg 1$$

La gráfica de la magnitud puede aproximarse por

$$M = \begin{cases} 1 & \text{para } \left|\omega/p_1\right| \ll 1 \Rightarrow M(\text{db}) \approx 20 \log 1 = 0 \\ \frac{1}{\omega/p_1} & \text{para } \left|\omega/p_1\right| \gg 1 \Rightarrow M(\text{db}) \approx 20 \log(\omega/p_1) \end{cases}$$

Esta representación aproximada se muestra en escala log-log en la fig 52.

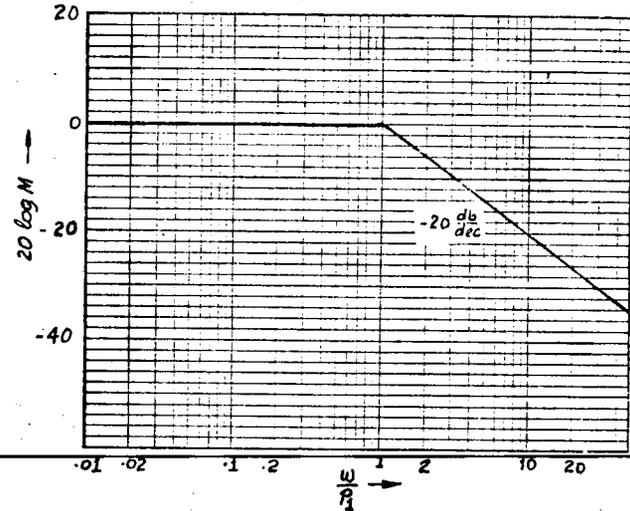


Fig 52 Representación aproximada de 20 log M

La gráfica exacta de la magnitud M , vs ω/p_1 , en escala log-log se muestra en la fig 53.

Puede verse que, para $\frac{\omega}{p_1} \gg 1$, la curva se aproxima asin-

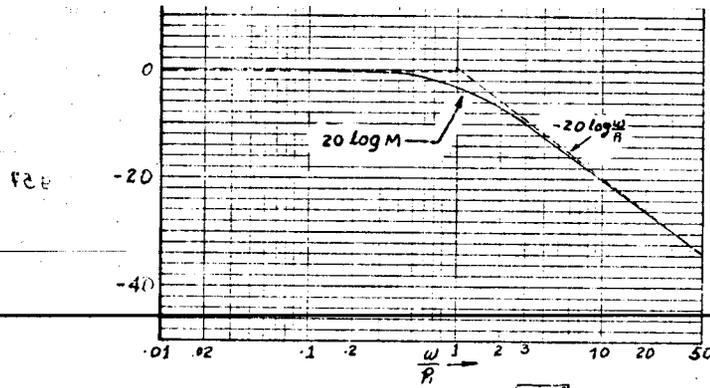


Fig 53. Gráfica de $-20 \log \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{R^2}}$ y su aproximación

tóticamente a la recta correspondiente a $20 \log(\frac{\omega}{R})$, y que para $\frac{\omega}{R} \ll 1$, la curva se acerca asintóticamente a una recta horizontal en 0 db. La frecuencia $\omega = R$ se llama frecuencia de quiebre. El error máximo ^{ocurre} cuando $\frac{\omega}{R} = 1$ y es $20 \log \sqrt{1+1} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3$ db. Para $\frac{\omega}{R} = 10$ y $\frac{\omega}{R} = 0.1$ el error es 0.1db. Una octava arriba y una octava abajo el error es de 1db

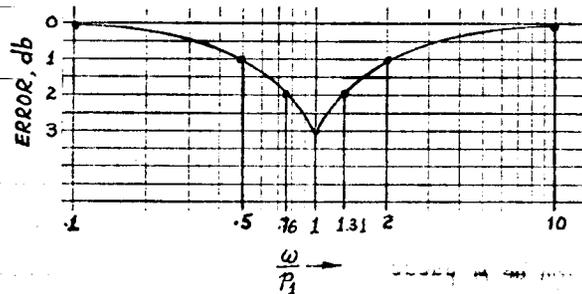


Fig 54. Gráfica del error entre $M(\omega)$ y su aproximación

La siguiente figura muestra la curva de fase de esta función de transferencia.

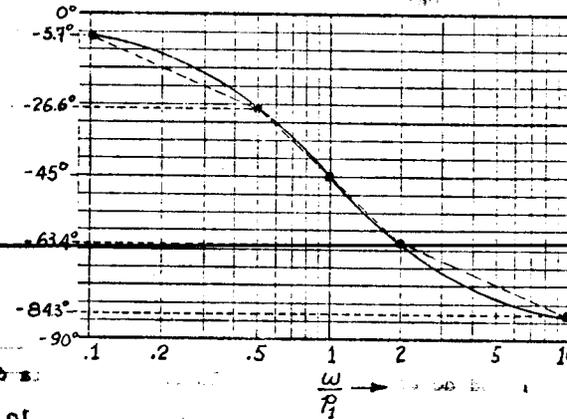


Fig 55 Gráfica de $\phi = -\text{tg}^{-1}(\frac{\omega}{R})$ vs. $\frac{\omega}{R}$

La gráfica de la fig 55 tiene una fase de -45° en el punto $\frac{\omega}{R} = 1$. Además, exhibe una simetría alrededor del punto $(\omega/R = 1, \phi = -45^\circ)$ simetría que es consecuencia de la identidad trigonométrica

$$\text{arctg}(a) = 90^\circ - \text{arctg}(\frac{1}{a})$$

Una manera de aproximar la curva fase- $\log(\omega/R)$ por segmentos de recta es la mostrada en la fig 55, formada por los siguientes segmentos:

- i) Una recta que va del punto $(\omega/R = 0.1, \phi = -5.7^\circ)$ al punto $(\omega/R = 0.5, \phi = -26.6^\circ)$.
- ii) Una recta que va de $(\omega/R = 0.5, \phi = -26.6^\circ)$ hasta $(\omega/R = 2, \phi = -63.4^\circ)$
- iii) Una recta que va de $(\omega/R = 2, \phi = -63.4^\circ)$ hasta $(\omega/R = 10, \phi = -84.3^\circ)$.

El error de esta aproximación en el intervalo $0.1 \leq \frac{\omega}{p_1} \leq 10$ es menor que 3.6° . Una forma menos exacta pero más sencilla es aproximarla a una recta desde 0° una década antes de $\omega/p_1 = 1$ hasta -90° una década después.

Considérese ahora el caso de un factor de la forma

$$H(s) = \left(\frac{s}{p_1} + 1\right) \quad (\text{un cero en el eje real})$$

La magnitud y la fase de su respuesta en frecuencia son:

$$M(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{p_1}\right)^2 + 1}, \quad \phi(\omega) = \arctg(\omega/p_1)$$

La magnitud de este término es la inversa de la del término correspondiente a un polo en la misma posición, por lo que su magnitud en db será la negativa de la magnitud del polo. Similarmen- te, la fase será la fase del polo tomada con signo opuesto.

Así pues, las asíntotas de la magnitud del término $H(s) = 1 + \frac{s}{p_1}$ son como se muestra en la fig 56

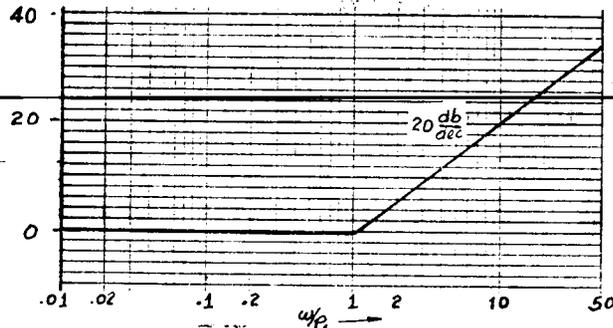


Fig 56 Asíntotas de un cero en el eje real

4) Polos y ceros complejos = ϕ

El siguiente tipo de factor a considerar es el de un par de polos complejos de la forma

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}, \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

cuya localización en el plano complejo es la mostrada en la fig 57

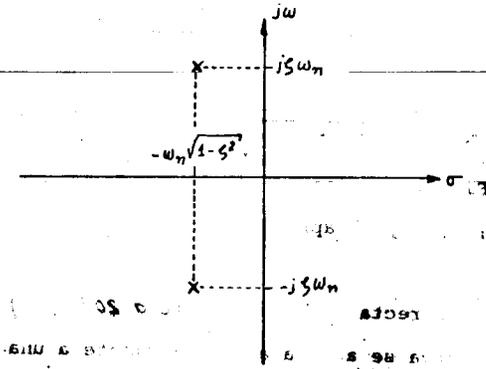


Fig 57 Localización de los polos de

$$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

Como la respuesta de frecuencia es

$$H(j\omega) = \frac{1}{-(\omega/\omega_n)^2 + 2j\zeta(\omega/\omega_n) + 1}$$

la magnitud y la fase valdrán, respectivamente

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega/\omega_n)^4 - 2(1 - 2\zeta^2) + 1}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

de la expresión de M puede notarse que

- i) Cuando $|\omega/\omega_n| \ll 1$, $M \approx 1$
 ii) Cuando $|\omega/\omega_n| \gg 1$, $M \approx \frac{1}{(\omega/\omega_n)^2}$

y por tanto, si $|\omega/\omega_n| \ll 1$, la gráfica de Bode de la magnitud podrá aproximarse por la recta $20 \log M = 20 \log 1 = 0$, y para $|\omega/\omega_n| \gg 1$ se podrá aproximar por $20 \log M = 20 \log \left[\frac{1}{(\omega/\omega_n)^2} \right]$ que es igual a $-40 \log (\omega/\omega_n)$.

Así, en la gráfica de magnitud de Bode resultan dos asíntotas: una recta horizontal en 0 db para $|\omega/\omega_n| \ll 1$ y una recta con una pendiente -40 db/década (-12 db/octava) para $|\omega/\omega_n| \gg 1$ tal como se indica en la fig 58. La traza para ζ pequeñas (polos cerca del eje imaginario, el ángulo varía rápidamente al pasar frente al polo y para ζ cercanas a 1 el ángulo varía lentamente. La fig 59 muestra las gráficas de Bode (magnitud y fase) para un polo complejo, según diversos valores de ζ

En el caso de un cero complejo, los diagramas de Bode de magnitud y de fase cambian simplemente de signo con respecto a los diagramas para un polo complejo, por lo que no se mostrarán.

La frecuencia $\omega = \omega_n$ será llamada frecuencia de corte

En los párrafos anteriores se encontró la influencia de

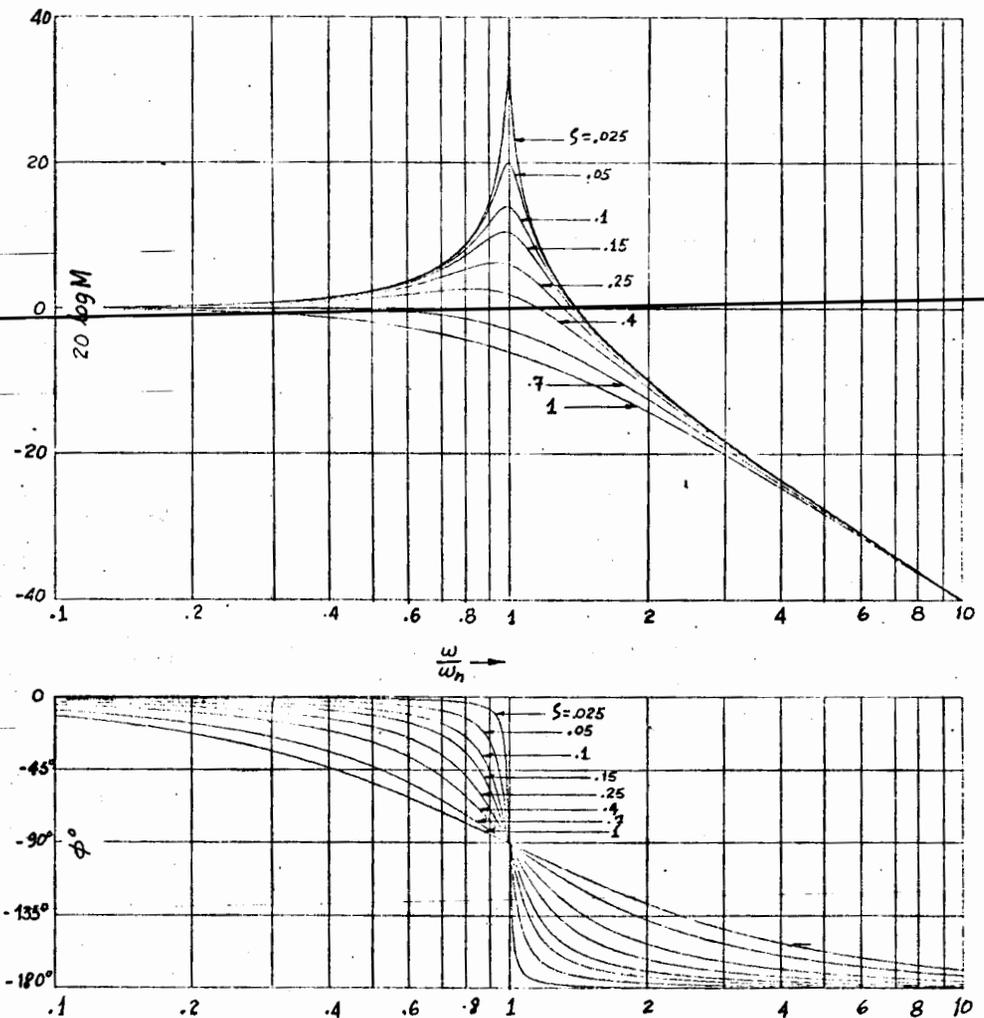


Fig 59. Diagramas de Bode, magnitud y fase para un polo complejo

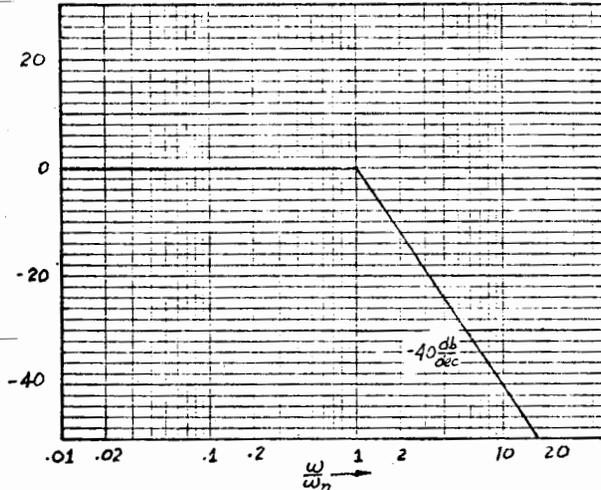


Fig 58. Asíntotas para la magnitud de $H(j\omega) = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta j\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$

ω_n en la traza de magnitud de Bode para dos polos complejos y a continuación se hará lo propio con ζ . Para eso se localizará primero el máximo de la función $M(\omega)$, por lo que es necesario encontrar los valores de ω que hacen $\frac{dM}{d\omega} = 0$. Obteniendo la derivada correspondiente se llega al resultado:

$$\omega_{max} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Esta frecuencia será llamada frecuencia de resonancia. Se puede ver que solo habrá resonancia en los casos que $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Sustituyendo el valor de la frecuencia de resonancia en la expresión de M resulta que

$$M_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Ha de notarse que la magnitud M_{max} (factor de resonancia)

depende únicamente de ζ y que decrece monótonicamente con ζ . En la sección B se analizará en forma más general el concepto de frecuencia de resonancia.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las reglas anteriores en la obtención de las gráficas de Bode.

Ejemplo 16 Se tiene la función de transferencia de un sistema de control, que es

$$H(s) = \frac{49(s+1)(s+10)}{(s^2+6s+49)s}$$

se desean obtener las curvas de Bode.

Procedimiento

a) Se ponen los factores en forma apropiada

$$H(s) = \frac{10(s+1)\left(\frac{s}{10} + 1\right)}{s\left[\left(\frac{s}{7}\right)^2 + \frac{6}{49}s + 1\right]}$$

b) Se hace una clasificación de factores, ordenándolos según las frecuencias de quiebre de las asíntotas de magnitud:

Factor	Asíntota de magnitud	quiebre	Característica de fase
10	Horizontal, a $20\log 10 = 20$ db	no hay	0°
$1/s$	Desciende a -20 db/década	no hay	-90°
$s+1$	Inicialmente a 0 db, después $+20$ db/década	$\omega=1$	varía de 0° a 90°
$(s/10)+1$	Inicialmente a 0 db, después $+20$ db/década	$\omega=10$	varía de 0° a 90°
$\frac{1}{\left(\frac{s}{7}\right)^2 + \frac{6}{49}s + 1}$	Inicialmente 0 db, después -40 db/década	$\omega=7$	varía de 0° a -180°

manera de hacerlo es añadir a los términos correspondientes a los polos (o ceros) en el eje real (términos del tipo $\frac{1}{(s/\omega_1)+1}$ o $[(s/\omega_1)+1]$ quitando (o añadiendo) 3 db en $\omega=\omega_1$ y .01 db en las frecuencias $\omega=10\omega_1$ y $\omega=.1\omega_1$. Los términos provenientes de polos o ceros complejos suelen necesitar más puntos de corrección.

5) Retardo de tiempo

Algunos elementos de sistemas de control se caracterizan por retrasar cierto tiempo la salida con respecto a la entrada. Si el retraso se encuentra en la trayectoria entrada-salida, al cambiar ésta repentinamente hay un período "muerto" antes de que la salida sea afectada por el cambio. Este tipo de retardo de tiempo ocurre, por ejemplo, en sistemas donde hay transporte de material (bandas transportadoras, tuberías, etc) , en los que aparecen fenómenos de propagación de ondas (radar, sistemas acústicos etc) , en los que la medición toma cierto tiempo antes de ser procesada (analizadores espectrales) y otros.

La fig 62 muestra un sistema para detectar la diferencia de material que se envía por un oleoducto, en el que la entrada es cierta concentración de trazadores radioactivos en el punto A y la salida es la lectura de un contador Geiger situado en el punto B a 20 km de distancia. El material en el oleoducto tar-

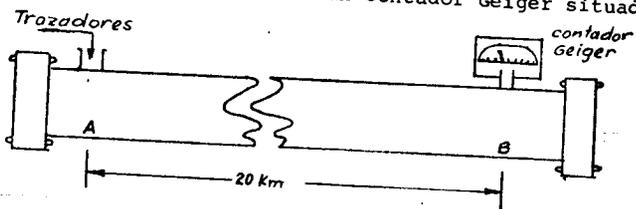


Fig 62 . Sistema con retardo de tiempo

el punto B a 20 km de distancia. El material en el oleoducto tar-

da un tiempo T en viajar del punto A al punto B. Si se supone que no hay difusión del material radioactivo, un par típico de curvas entrada y salida al sistema serían las que aparecen en la fig 63

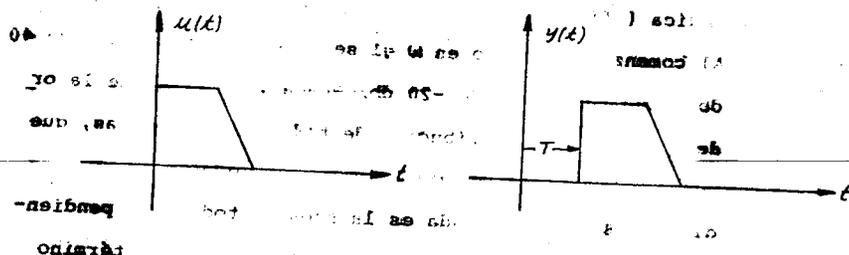


Fig 63 Curvas de entrada y salida en un sistema con retardo

Un retardo de T segundos tiene una característica de entrada salida dada por

$$y(t) = u(t-T)$$

y por tanto su respuesta al impulso es

$$h(t) = \delta(t-T)$$

y la función de transferencia

$$\hat{H}(s) = \frac{\hat{y}(s)}{\hat{u}(s)} = e^{-sT}$$

De ahí que la respuesta en frecuencia sea

$$H(j\omega) = e^{-j\omega T}$$

pudiéndose expresar en la forma

$$H(j\omega) = 1 \angle -\omega T$$

Entonces, la magnitud logarítmica del retardo de tiempo es igual a 0 db, y su ángulo de fase es

$$\angle H(j\omega) = -\omega T \text{ (radianes)} = -57.3 \omega T \text{ (grados)}$$

la que se muestra en la fig 64

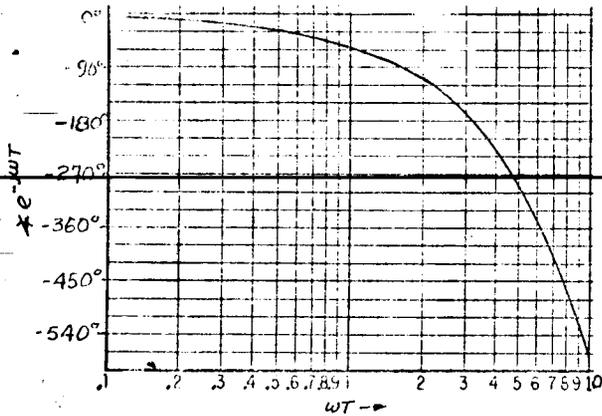


Fig 64 .Traza de Bode del ángulo de fase de e^{-sT}

Ejemplo 17

Si se desea reducir, a un nivel dado, la humedad h de un material a granel, se puede utilizar un sistema como el que a continuación se describe. Inicialmente el material, almacenado en una tolva, se introduce continuamente a un horno, mediante una banda transportadora, como se muestra en la fig 65. La hu

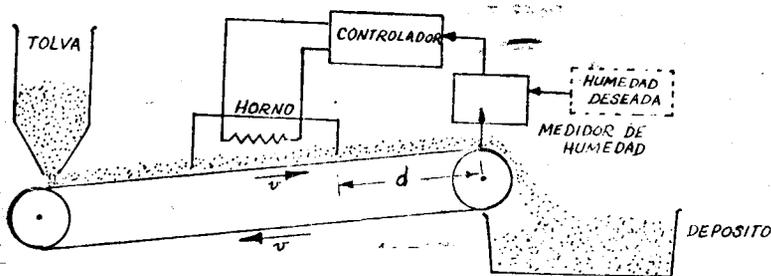


Fig 65. Sistema reductor de humedad

medad es detectada a cierta distancia d de la salida del horno, mediante un instrumento de medición, cuyo voltaje V_h es comparado con una señal de referencia V_r . La diferencia $(V_r - V_h)$ se aplica a un controlador, compuesto de un amplificador electrónico con efecto de reposición, cuyo voltaje de salida regula los tiristores que alimentan a las resistencias del horno, modificando así el calor Q que se introduce al sistema. La banda transportadora se desplaza a una velocidad v , constante. El tiempo que tarda el material en viajar de la salida del horno hasta el punto de medición causa un retardo de tiempo inherente al sistema.

El diagrama de bloques de un modelo linealizado del sistema se muestra en la fig 66

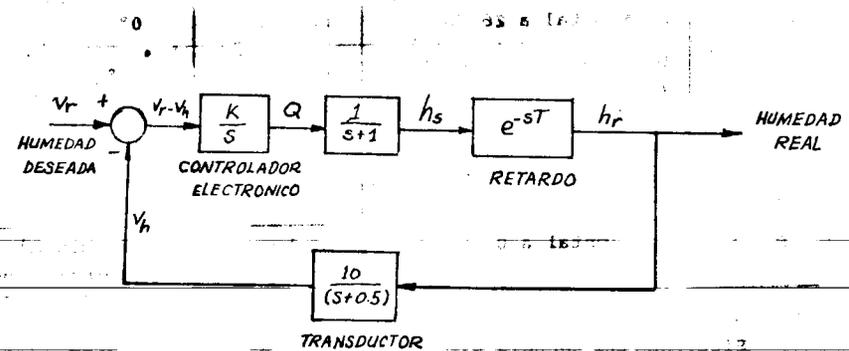


Fig 66. Diagrama de bloques del sistema

Se desea encontrar el valor de K para que el sistema de control tenga un margen de fase de 45° cuando menos y un margen de ganancia superior o igual a 2 (6 db).

Como fué explicado en la sec 6 es necesario encontrar las trazas de Bode de la función de transferencia de $H(s)G(s)$ que en el caso que nos ocupa es

$$H(s)G(s) = \frac{10 e^{-sT}}{s(s+1)(s+0.5)}$$

Cuando la velocidad de la banda es 1 m/seg y la distancia a la salida del horno, el punto de medición es 10 m la respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega)G(j\omega) = \frac{20e^{-j\omega(10)}}{j\omega(j\omega+1)\left(\frac{j\omega}{0.5}+1\right)}$$

porque $T = d/v = 10$ seg.

Al hacer una clasificación de factores, ordenándolos según las frecuencias de corte, se tendrá:

Factor	Asíntota de magnitud	Corte	Fase
K_0	Horizontal a 26 db	no hay	0°
$1/j\omega$	Desciende con -20 db/dc y pasa por $\omega=1$	no hay	-90°
$1/(j\omega+1)$	Inicialmente 0 db, después -20 db/década	$\omega=0.5$	de 0° a 90°
$1/(j\omega+1)$	Inicialmente 0 db, después -20 db/década	$\omega=1$	de 0° a 90°
$e^{-10j\omega}$	Horizontal a 0 db	no hay	varía con ω $-57.3\omega T = -573\omega$

Si siguiendo una secuencia similar a la del ejemplo anterior

se obtiene la gráfica de la fig 67 donde puede apreciarse el efecto del retraso sobre la curva de fase.

Antes de continuar conviene establecer la mancha en que se determinan los márgenes de ganancia y fase a partir de las trazas de Bode*. Como el primero corresponde (ver Sec 6) al factor mínimo por el

* Se hace la suposición que tanto la traza de magnitud como la de fase son monótonicamente decrecientes con ω

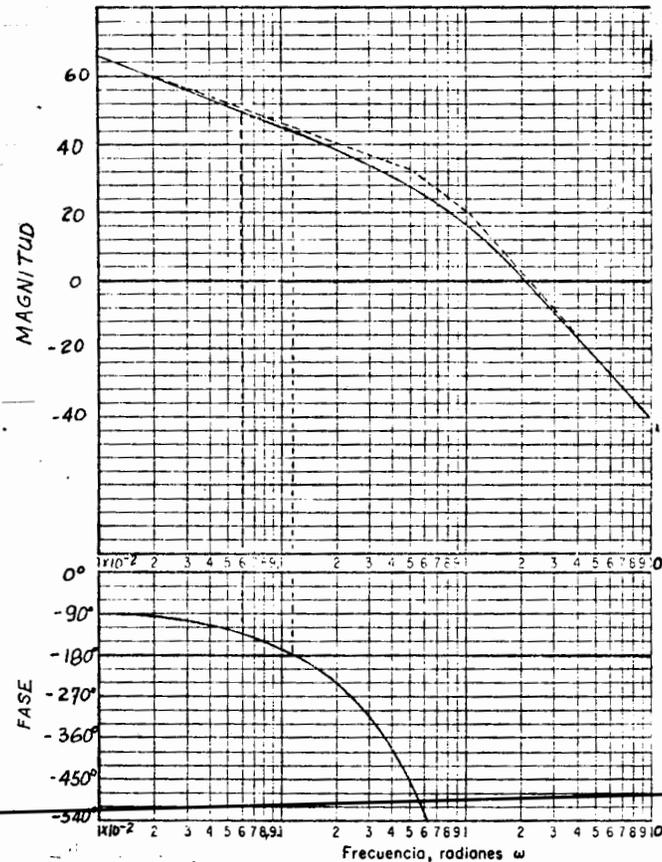


Fig 67. Trazas de Bode para $\frac{20e^{-10j\omega}}{j\omega(j\omega+1)\left(\frac{j\omega}{0.5}+1\right)}$



FACULTAD DE INGENIERIA

que para multiplicar la ganancia $|G(j\omega)|$ en el sistema realimentado para que la traza polar llegue al punto -1 (que tiene magnitud 0 db y $\angle -180^\circ$), el margen de ganancia no es otra cosa que la cantidad (en db) que habría que desplazar $|H(j\omega)G(j\omega)|$ en db para que al ángulo de -180° le correspondiera una magnitud de 0 db (fig 68). Por otra parte, el margen de fase es el mínimo ángulo que habría que sumar a $\angle H(j\omega)G(j\omega)$ para que la traza polar encierre al punto -1 ($0\text{ db}, -180^\circ$), entonces corresponde a la diferencia entre $\angle H(j\omega_0)G(j\omega_0)$ y -180° en donde ω_0 es tal que $|H(j\omega_0)G(j\omega_0)| = 1$ (0 db)

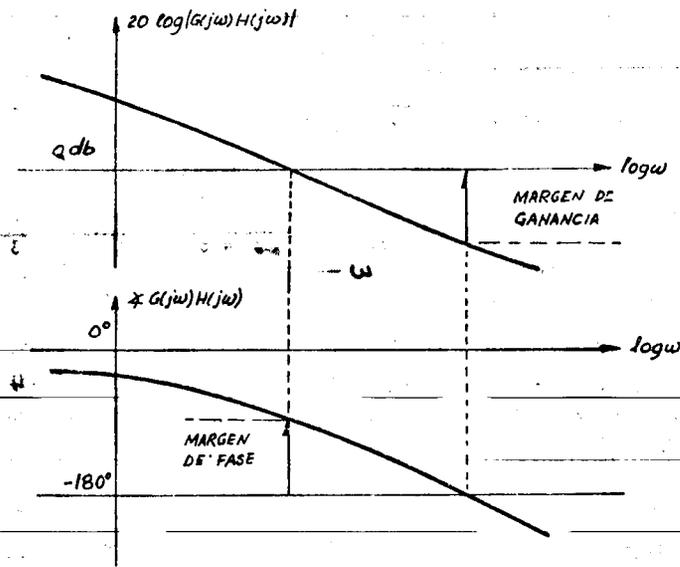


Fig 68. Margenes de fase y ganancia en las trazas de Bode

De las anteriores consideraciones y una vez obtenida las trazas de Bode del ejemplo en cuestión, se indagará cual de las dos restricciones (margen de fase o margen de ganancia) es más severa.

i) Margen de ganancia. La gráfica de fase de Bode indica

que para $\omega = 0.114$ la fase total vale -180° . Para esta misma frecuencia, la ganancia del sistema vale 43 db siendo así, para que el margen de ganancia sea cuando menos 6 db , la magnitud deberá decrecerse por lo menos una cantidad $43 - (-6) = 49\text{ db}$.

ii) Margen de la fase. El diagrama de fase de Bode indica que para $\omega = 0.06$ la fase del sistema vale $135^\circ = (180^\circ - \text{margen de fase})$. A esta frecuencia corresponde una magnitud de 50 db . Entonces, para que el sistema tenga una ganancia de 0 db , es necesario disminuir la ganancia del sistema por lo menos 50 db .

Como la restricción del margen fase es la más fuerte ($50 > 49$) habrá que bajar en 50 db la ganancia del sistema.

Las gráficas que se utilizaron tenían $K = 0\text{ db}$. Por tanto, la nueva K deberá ser:

$$0 - 50 = -50\text{ db}$$

por lo que K deberá ser igual a $.316 \times 10^{-2}$

De las trazas de Bode del sistema es fácil obtener el diagrama polar, el cual se presenta en la fig 70, en donde puede apreciarse los márgenes de fase y de ganancia para $K = .316 \times 10^{-2}$

7.2 Singularidades con parte real positiva

En esta sección se considerará el caso de trazas de Bode de sistemas que tienen singularidades parte real positiva. Para

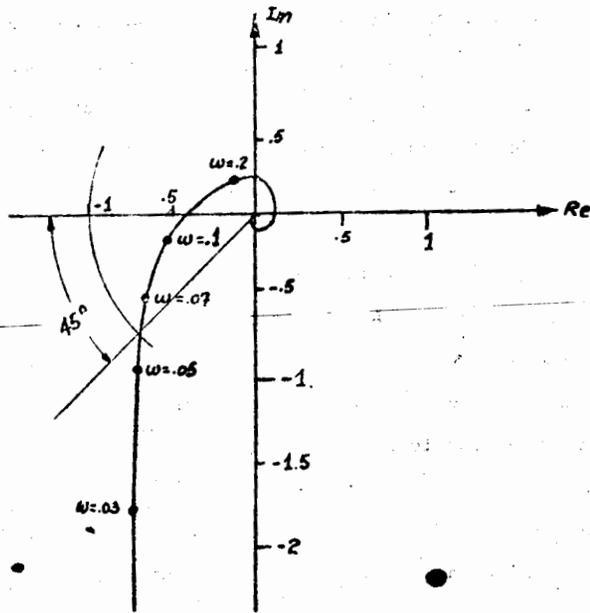


Fig 70. Traza polar de $\frac{-316 e^{-10j\omega}}{j\omega(j\omega+1)(\frac{j\omega}{0.5}+1)}$

la construcción de la traza de la magnitud se procede de manera idéntica a la descrita en la sección anterior, debido a las igualdades

$$\left| \frac{j\omega}{p} + 1 \right| = \left| -\frac{j\omega}{\omega_n} + 1 \right| = \sqrt{\frac{\omega^2}{p^2} + 1}$$

$$\left| -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right| = \left| -\frac{\omega^2}{\omega_n^2} - 2j\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + 1 \right| = \sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right]^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Sin embargo la traza de la fase es diferente. Considérese por ejemplo la diferencia de fase que existe entre $(\frac{j\omega}{p} + 1)$ y $(-\frac{j\omega}{\omega_n} + 1)$

En el primer caso la fase varía de 0° a 90° cuando ω cambia de 0 a ∞ mientras en el segundo se tiene la variación de 180° a 90° para la misma variación de ω (fig 71)

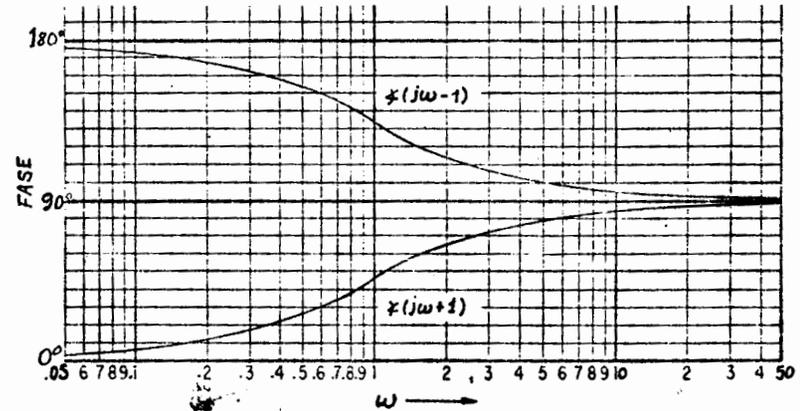


Fig 71 Variaciones de fase de $(j\omega-1)$ y $(j\omega+1)$

Cualquier factor que contenga raíces con parte real positiva puede expresarse como el producto de uno con parte real negativa por otro de magnitud unitaria para todas las frecuencias, por ejemplo

$$\frac{s}{a} - 1 = \left(\frac{s}{a} + 1 \right) \left[\frac{\frac{s}{a} - 1}{\frac{s}{a} + 1} \right]$$

$$\frac{s^2 - 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}{\omega_n^2} = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1 \right) \left[\frac{\frac{s^2}{\omega_n^2} - 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1} \right]$$

(véase fig 72)

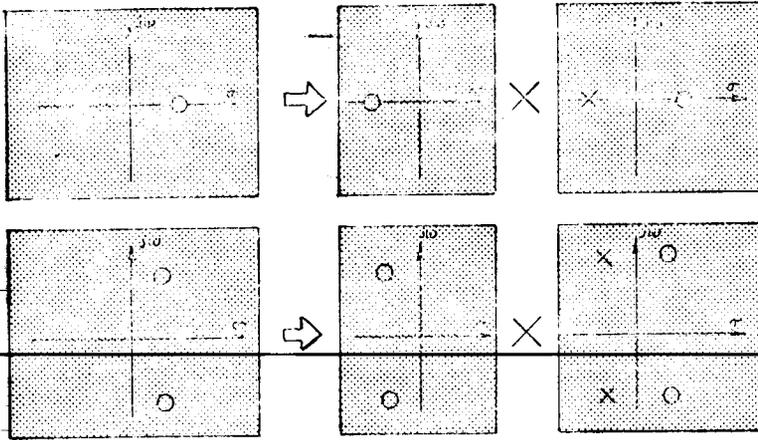


Fig 72. Composición de singularidades con parte real positiva

Al considerar la descomposición anterior la fase de un sistema que tiene polos o ceros en el semiplano $Re\{s\} > 0$ solo hace falta agregar a las curvas de fase obtenidas por los métodos de la sección anterior las de los factores de magnitud unitaria.

Considérese por ejemplo los dos sistemas representados por sus patrones de polos y ceros que aparecen en la fig 73. Las magnitudes de $H_A(j\omega)$ y $H_B(j\omega)$ son iguales para cualquier valor de ω

$$|H_A(j\omega)| = |H_B(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\sigma})^2}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\beta})^2}}$$

pero los ángulos de fase son diferentes como puede apreciarse en la fig 74. Puede notarse que la variación de la fase del sistema $H_B(s)$ que

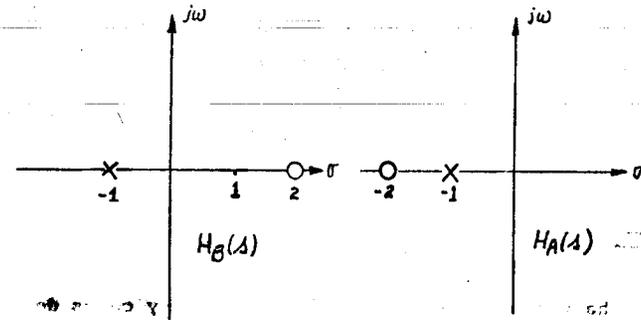


Fig 73. Patrones de polos y ceros

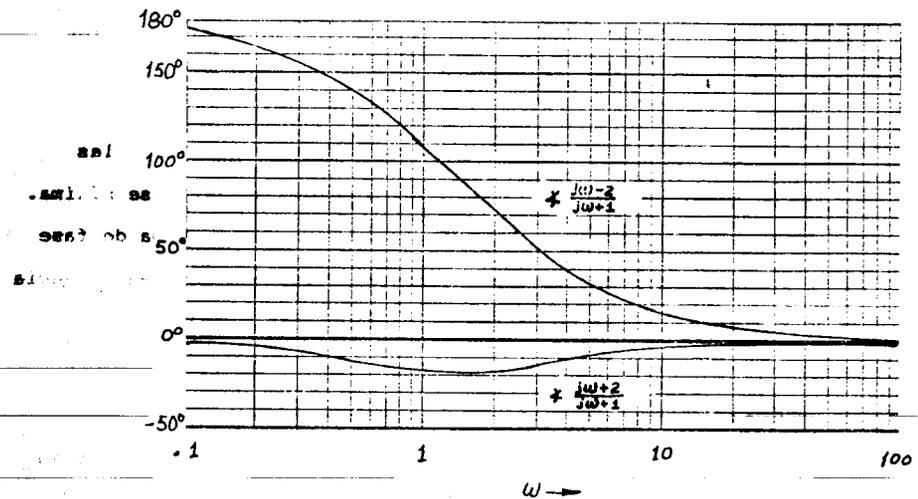


Fig 74. Trazas de fase

cuenta con un cero en el semiplano derecho es mayor que el del sistema $H_A(s)$.

De las consideraciones anteriores surge el nombre de "fase mínima" aplicado a un sistema que tiene todas sus singularidades en la parte izquierda del plano complejo, pues la variación de fase correspondiente es menor que la de otro que tenga la misma traza de magnitud pero con algunos ceros o polos en el semiplano derecho.

7.3 Determinación de la fase de un sistema a partir de su magnitud

Se ha visto como a partir de los polos y ceros de una función de transferencia es posible conocer su curva de magnitud y como los quiebres en las asíntotas están determinados por la colocación de los polos y ceros, es válido pensar que, a partir de las asíntotas de las gráficas magnitud-frecuencia, se pueden obtener los polos y los ceros del sistema.

Con esto hay una dificultad: es imposible, a partir de las curvas de magnitud, decir si los polos(o ceros) son de fase mínima. Sin embargo, si se parte de la premisa de tener un sistema de fase mínima, puede determinarse completamente la función de transferencia de un sistema, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Se desea determinar la función de transferencia de un sistema y supóngase que para ello no tiene más que un oscilador y un medidor del valor cuadrático medio. En el sistema a una entrada $\cos(\omega t)$ le corresponde una salida $B \cos(\omega t + \phi)$ y por tanto sólo se conoce B para cada valor ω (fig 75)

A la curva obtenida se le trazan las asíntotas que presentan

1. un quiebre de -40db/dec en $\omega=2$

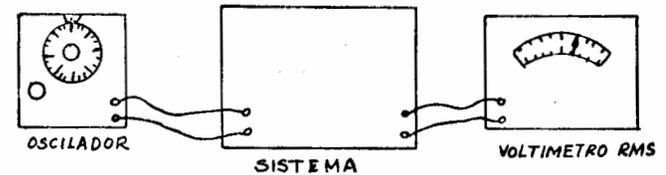


Fig 75. Sistema en cuestión

El resultado de la medición de B aparece en la fig 76

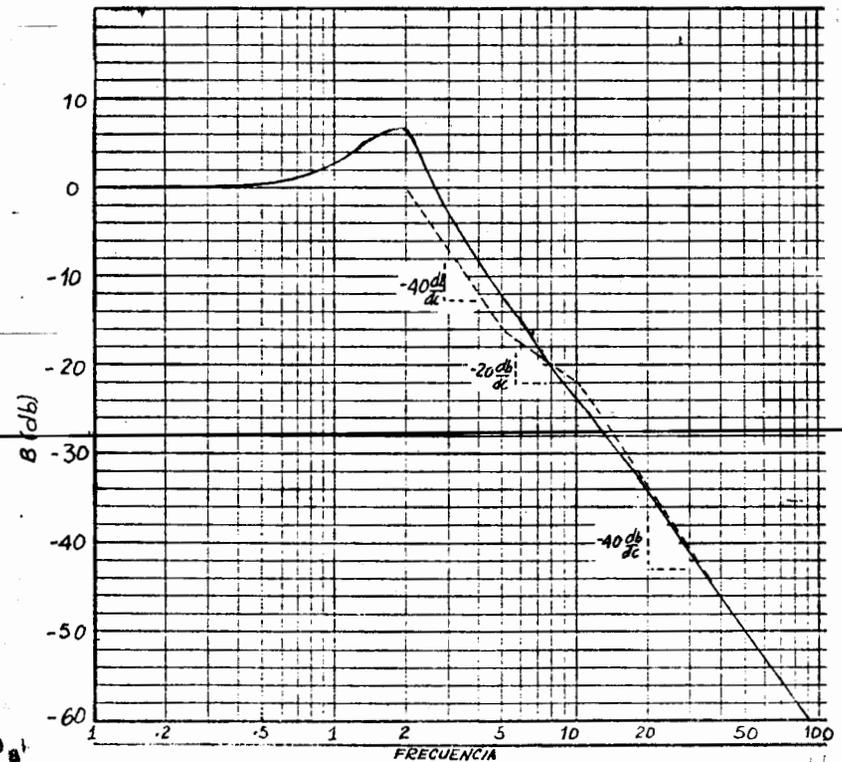


Fig 76. Amplitud B vs. frecuencia

2. un quiebre de +20db/dec en $\omega=5$
3. un quiebre de -20db/dec en $\omega=10$

Además, cuando $\omega \rightarrow 0$ la ganancia es 0db y por lo tanto $K=1$

Los hechos anteriores demuestran que

1. hay un par de polos en $\omega=2$
2. un cero en $\omega=5$
3. un polo en $\omega=10$

El coeficiente ζ de los polos (en $\omega=2$) se logra a partir del factor de resonancia. A la frecuencia de resonancia, el cero de $\omega=5$ coopera con 1db y el polo de $\omega=10$ con .2db (ver fig 76). El factor de resonancia de 8db, a los cuales descontando los db de los otros polos y ceros da que el polo doble tiene una resonancia de $(8-1+0.2)=7.2$ db. Según la fig 59 esto corresponde $\zeta=0.25$, lo que hace que el término

$$\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1} \quad \text{sea} \quad \frac{1}{\frac{s^2}{4} + 0.25s + 1}$$

y por tanto

$$H(s) = \frac{.2s + 1}{(0.25s^2 + 0.25s + 1)(.1s + 1)}$$

Es pertinente hacer el siguiente comentario.

El conocer la magnitud de la respuesta de frecuencia de un sistema (de fase mínima) nos permite conocer su fase. Algo similar pasa con la parte real X y la parte imaginaria Y de $H(j\omega)$; El conocer una de ellas es suficiente para el conocer la otra, mediante una herramienta llamada "Transformada de Hilbert". No se ela

borará sobre este tema por quedar fuera del alcance del texto.

8. Circuitos M y Circuitos N

Al diseñar un sistema de control retroalimentado es necesario conocer el comportamiento del sistema global a partir de las características de cada uno de sus elementos. Para ejemplificar lo anterior, considérese el caso de un sistema de control (fig 77) integrado por un controlador, una planta y un sensor. Si se conoce la respuesta en frecuencia de cada uno de estos elementos. ¿Cómo obtener la respuesta de frecuencia del sistema retroalimentado? ¿Cómo caracterizar su desempeño?

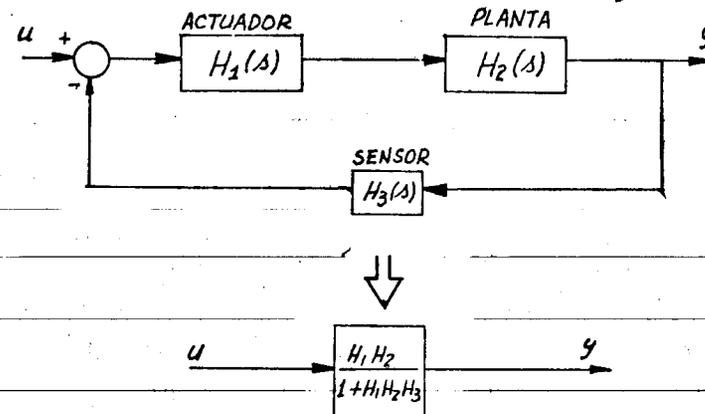
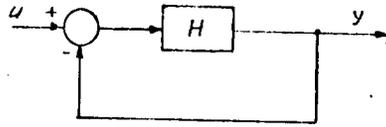


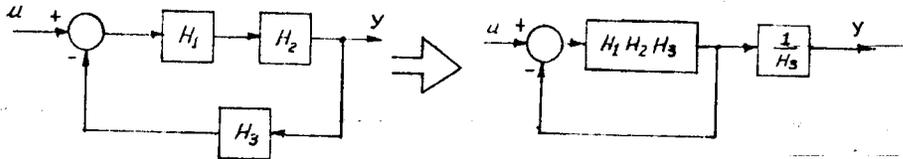
Fig 77 Un sistema retroalimentado

Para contestar la primera pregunta (obtener la respuesta de frecuencia del sistema retroalimentado), basta estudiar sistemas del tipo de la fig 78a ya que los otros pueden reducirse fácil-

mente a este caso.;



a) Sistema unitariamente realimentado



b) Reduccion de un sistema a otro unitariamente realimentado

Fig 78

Así pues, se fijará la atención a obtener la respuesta de frecuencia de $G(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)}$ en función $H(j\omega)$

Si se denota por M la magnitud de $G(j\omega)$ y θ su fase, de tal suerte que

$$G = M \angle \theta$$

y si X y Y representan las partes real e imaginaria de H , tras alguna manipulación algebraica, puede demostrarse que

$$M = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}}$$

$$\theta = \arctg\left[\frac{y}{x}\right] - \arctg\left[\frac{y}{1+x}\right]$$

Al llamar N a $\tan \theta$ y aplicar la fórmula $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + (\tan a)(\tan b)}$

resulta que

$$N = \frac{y}{x(1+x) + y^2}$$

Las fórmulas anteriores proporcionan la magnitud y el ángulo de $G(j\omega)$ en función de la parte real y la imaginaria de $H(j\omega)$

Así pues, en el plano X-Y (traza polar), el lugar geométrico de los puntos tales que $\frac{H}{1+H} = M$ está dado por la ecuación:

$$M^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

que, tras algún algebra se trans

forma en

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \left[\frac{M}{M^2-1}\right]^2$$

Esta última ecuación quiere decir que el lugar geométrico de los puntos de $M = \text{cte}$, es un círculo de radio $\frac{M}{M^2-1}$ y centro en $\left(-\frac{M^2}{M^2-1}, 0\right)$.

que tiene varias propiedades interesantes:

a) Cuando $M=1$, el radio es infinito y el centro en $(-\infty, 0)$

Esto es indeterminado. Pero de la ecuación original se obtiene $x^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2 + y^2$ o sea que el lugar geométrico de los puntos tales que $M=1$ es la recta $x = \frac{1}{2}$

b) Los círculos para magnitud $1/M$ son la imagen a espejo sobre la recta $x = \frac{1}{2}$ de los círculos para magnitud mayor que 1.

Esto se puede comprobar fácilmente sustituyendo M por $1/M$

en la ecuación del círculo (fig 79)

Volviendo al desarrollo del tema, se había logrado demostrar que

$$N = \frac{y}{x(1+x) + y^2}$$

Manipulando esta ecuación resulta

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

Y por tanto, el lugar geométrico de los puntos del plano X-Y tales que la tangente del ángulo del sistema realimentado

$\frac{H}{1+H}$ valga N , están dados por el círculo de radio $\frac{\sqrt{N^2+1}}{2N}$ y centro en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N})$ (fig 80)

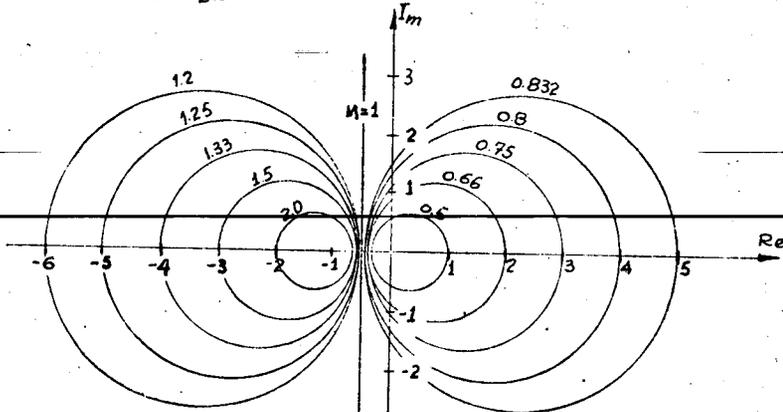


Fig 79. Circulos de M Constante

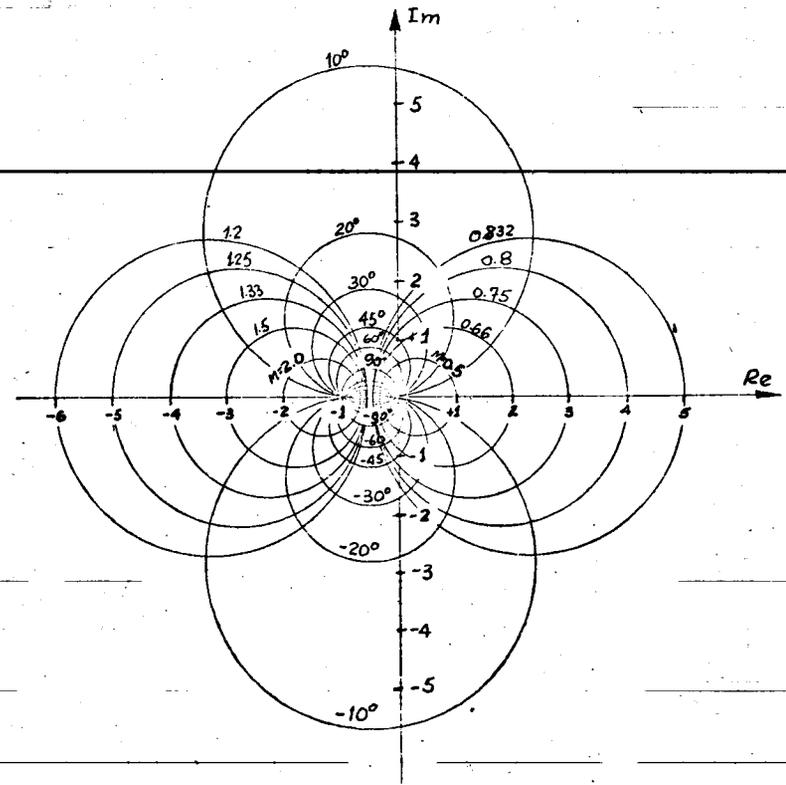


Fig 81. Carta de circulos M y N

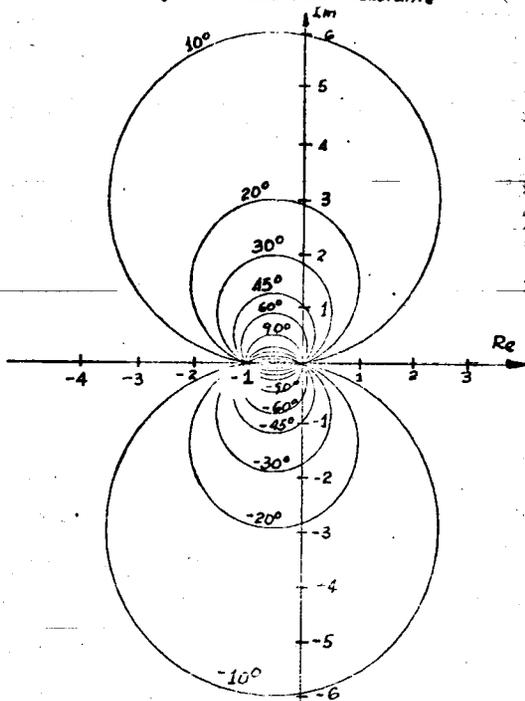


Fig 80. Circulos de N constante

Con la ayuda de una carta en donde están superpuestos los círculos M y N (fig 81) es posible transformar el punto $X+jY$ en $\frac{X+jY}{1+X+jY}$. La utilidad de esta gráfica se ilustra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 18

Considérese el sistema que tiene la función de transferencia

$$H(s) = \frac{15(s+1)}{s^2+3s+4}$$

Se desea encontrar la respuesta en frecuencia del sistema unitariamente realimentado o sea $\frac{H(j\omega)}{1+H(j\omega)}$. Al trazar la gráfica polar de $H(j\omega)$ sobre la carta de los círculos M y N (fig 82) pueden obtenerse directamente las curvas de magnitud y fase del sistema realimentado.

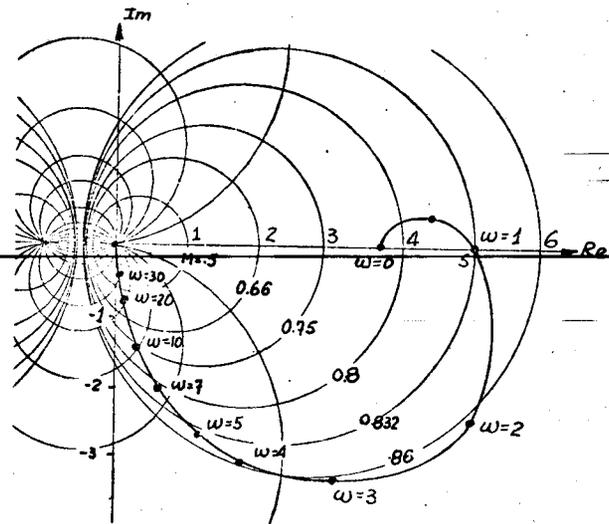


Fig 82. Traza polar de $\frac{15(j\omega+1)}{-\omega^2+3j\omega+4}$

La respuesta en frecuencia del sistema realimentado, de (Magnitud)

acuerdo a la gráfica de la fig 82, es la que aparece en la fig 83.

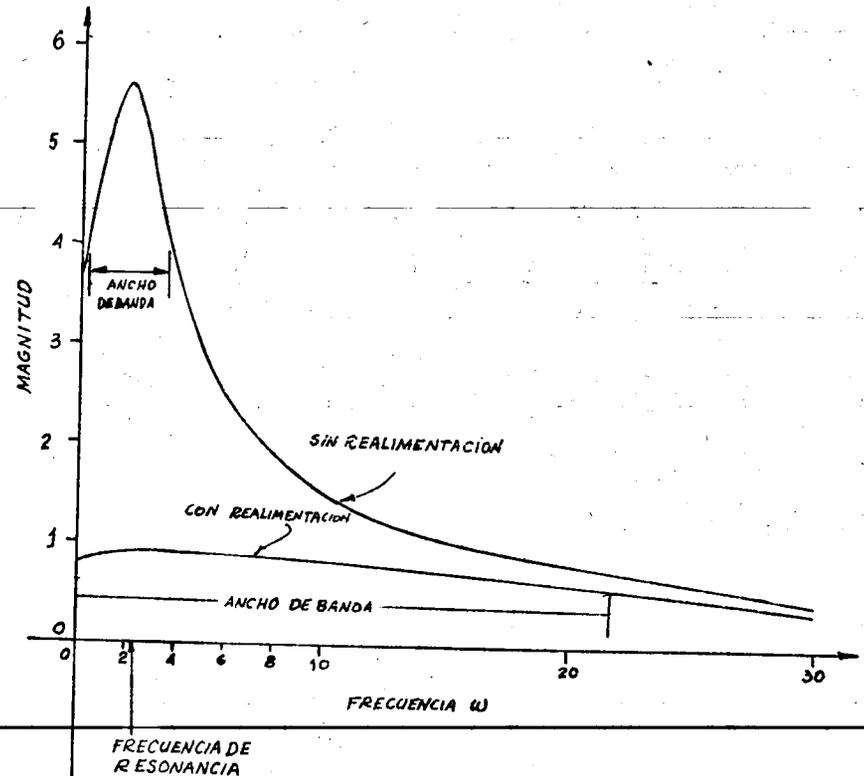


Fig 83. Magnitud de un sistema con y sin realimentación unitaria

Lógicamente, el método empleado en el ejemplo anterior no sería necesario si se contara con una expresión analítica de la función de transferencia $H(j\omega)$, pero en muchas ocasiones los datos de $H(s)$ son experimentales, y por tanto no es posible construir la función analítica que representa al sistema con realimentación unitaria.

8.1 Factor de Resonancia. Ancho de banda

Sobre la segunda pregunta planteada al comienzo de la sección 8 se tiene que el factor de resonancia y el ancho de banda son dos medidas sobre la respuesta en frecuencia de un sistema que caracterizan respectivamente, el grado de estabilidad, y su rapidez y selectividad a cierto tipo de señales.

El factor de resonancia, denotado generalmente por M_p , se define como el máximo valor absoluto de la respuesta en frecuencia de un sistema, esto es

$$M_p = \max_{\omega} |H(j\omega)|$$

En los resultados del ejemplo anterior, la magnitud M_p presentaba un máximo en $\omega = 2$. Este valor da una buena idea de qué tan estable es el sistema, ya que los poco estables dan salidas grandes a entradas pequeñas. Un valor grande de M_p está correlacionado con sobrepasos grandes y tiempos de asentamiento prolongados. La frecuencia ω a la que ocurre M_p es muy cercana a la frecuencia de oscilación libre del sistema.

El valor de M_p está determinado por el punto de tangencia de la gráfica polar y uno de los círculos M (precisamente el que corresponde a M_p). La frecuencia a la cual se presenta esta tangencia es la frecuencia de resonancia del sistema.

Sobre la otra medida, el ancho de banda, no existe una definición que satisfaga a todos los interesados. Al considerar el sistema realimentado del ejemplo anterior se observa que para frecuencias pequeñas la magnitud de la respuesta está entre 0.8 y 0.88. Para frecuencias mayores la magnitud desciende y

la respuesta es muy pequeña. Esto significa que el sistema realimentado sólo podrá responder adecuadamente a entradas con cierta gama de frecuencias. El intervalo de esta gama se llama ancho de banda y es un indicador de la rapidez del sistema, ya que aquellos que cuenta con amplios anchos de banda suelen tener bajos tiempos de levantamiento.

Si se considera que el sistema responde adecuadamente cuando la magnitud de la respuesta es M_1 , el ancho de banda puede definirse como el conjunto de frecuencias para las que $|H(j\omega)| \geq 0.707 M_1$ (o tales que la magnitud no baje más de tres decibeles de la magnitud M_1). Este número se ha tomado porque al bajar la amplitud de la señal a 0.707 de su valor original la potencia transmitida por un canal de comunicación baja a 50% y se considera entonces que su funcionamiento no es adecuado.

El ancho de banda deseable para un sistema se fija con base en un compromiso entre las señales que se desea que el sistema deje pasar (que requieren un gran ancho de banda) y las que debe bloquear (perturbaciones, generalmente de alta frecuencia, que hacen deseable un pequeño ancho de banda). De la fig 83 puede verse que el ancho de banda del sistema considerado es 8.

En la práctica es usual especificar las características de la respuesta en frecuencia de un sistema en la siguiente forma "en el intervalo de 20 Hz a 4kHz la respuesta no varía más de 10%". Es claro que este tipo de especificación puede traducirse con facilidad a ancho de banda y factor de resonancia.

9. Traza de Nichols. Carta de Nichols

La carta de los círculos M y N permite conocer la magnitud y la fase de sistemas realimentados a partir de la respuesta en frecuencia de sus componentes. Presenta sin embargo, un serio inconveniente: hay que regresar y redibujar la gráfica polar cada vez que se cambia la ganancia del sistema. Además en el caso de multiplicar dos funciones de transferencia $H_1(j\omega)$ y $H_2(j\omega)$ hay que rehacer prácticamente todos los cálculos. Estos problemas se evitan si se trabaja con logaritmos, ya que las multiplicaciones se transforman en sumas, y éstas pueden efectuarse gráficamente sin gran dificultad.

Por ello es que se utiliza ampliamente la traza de Nichols, que es la gráfica de $H(j\omega)$, utilizando como ordenada la magnitud en decibeles y como abcisa la fase en grados, teniendo la frecuencia ω como parámetro.

Similarmente a lo que se hizo con los círculos M y N y la gráfica polar, en el plano $20\log M$ -fase pueden obtenerse los lugares geométricos de los puntos de magnitud y fase constantes para el sistema unitariamente realimentado.

Si ρ es la magnitud $|H(j\omega)|$ y θ su fase, resulta que

$$X = \rho \cos \theta$$

$$Y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

y pueden sustituirse estos valores en las ecuaciones de M y N para obtener las funciones $M(\rho, \theta)$ y $N(\rho, \theta)$. En la fig 84 se muestran los puntos de M constantes y en la fig 85 los de N constante. Al combinar estas dos gráficas se logra la carta de Nichols, la que aparece en la fig 86. Su utilización se muestra a continuación.

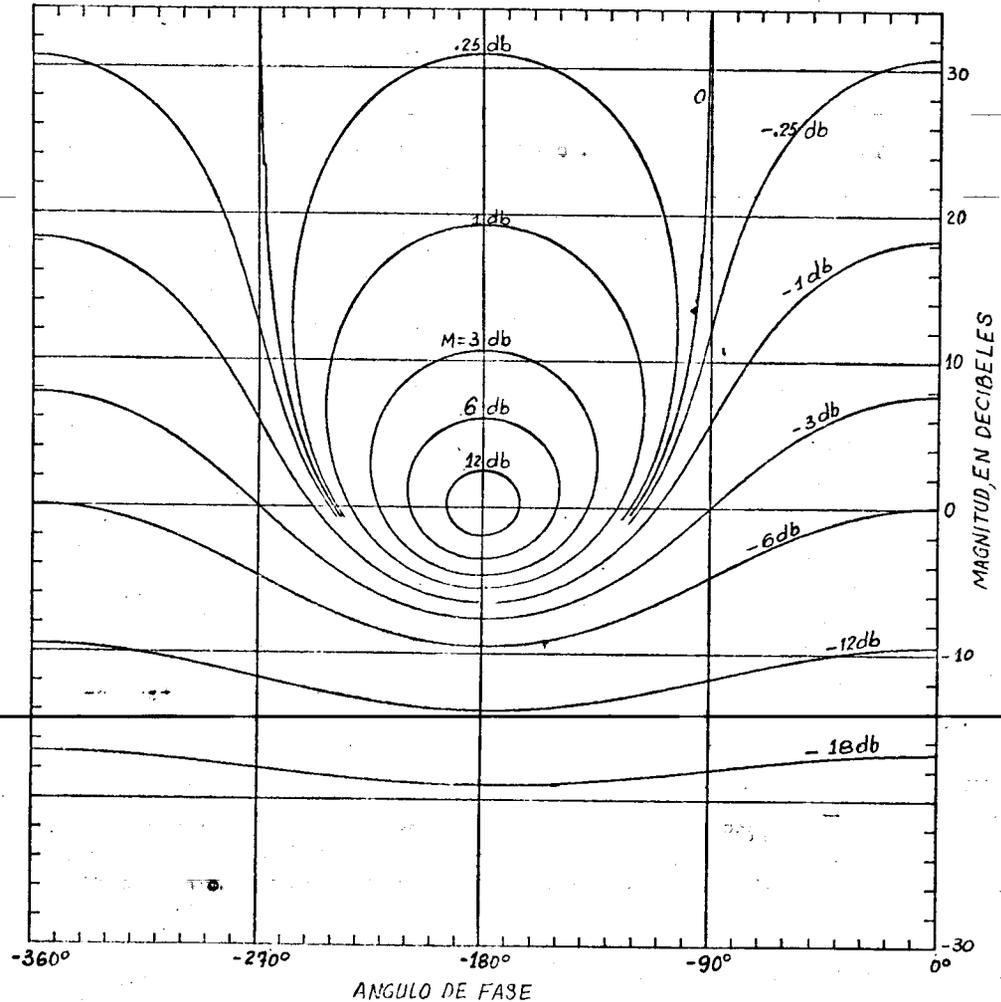


Fig 84. Curvas de M constante

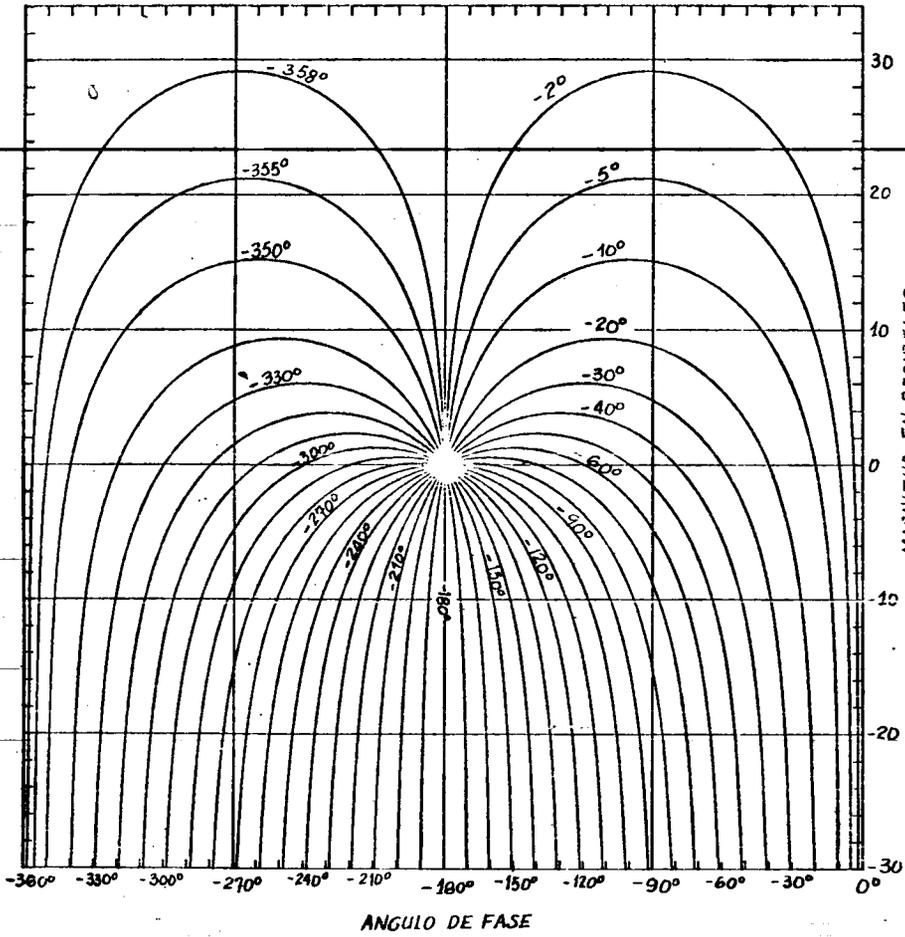


Fig 85. Curvas de N constante

Is ne (f8p) lortnoo ab amafz

100 ab eta A I

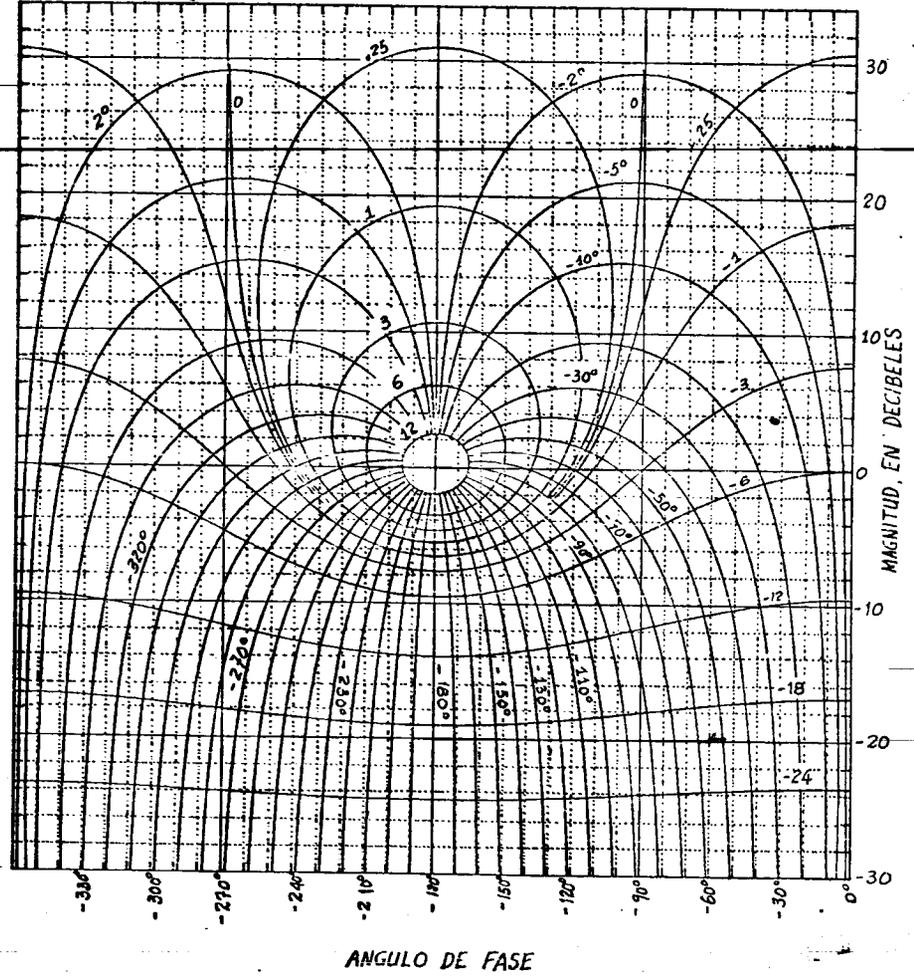


Fig 86. Carta de Nichols

Ejemplo 19

Tómese por caso un sistema de control (fig 87) en el cual $H(s)$ está dado por

$$H(s) = \frac{50}{s(s+5)(s+10)}$$

Se desea encontrar el valor de K para que el error a rampa sea mínimo, pero con la restricción de que M_p sea menor que 1.26 (2 db). Además se desea conocer para este valor de K el ancho de banda y la frecuencia de resonancia.

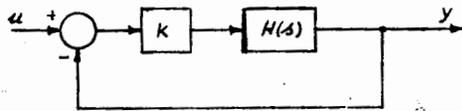


Fig 87. Sistema realimentado

El primer paso para la solución del problema es determinar las gráficas de Bode de $H(j\omega)$. Estas se muestran en la fig 88. De allí se obtiene la traza de Nichols (trazo firme fig 89). Porque al usar logaritmos, la multiplicación se

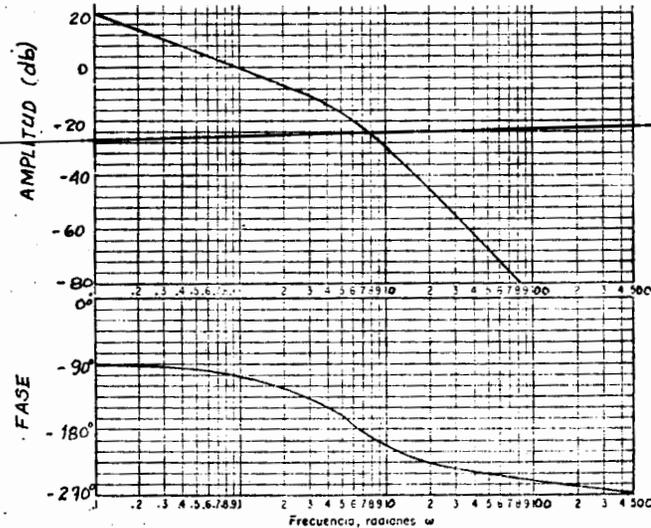


Fig 88. Trazas de Bode de $\frac{50}{s(s+5)(s+10)}$

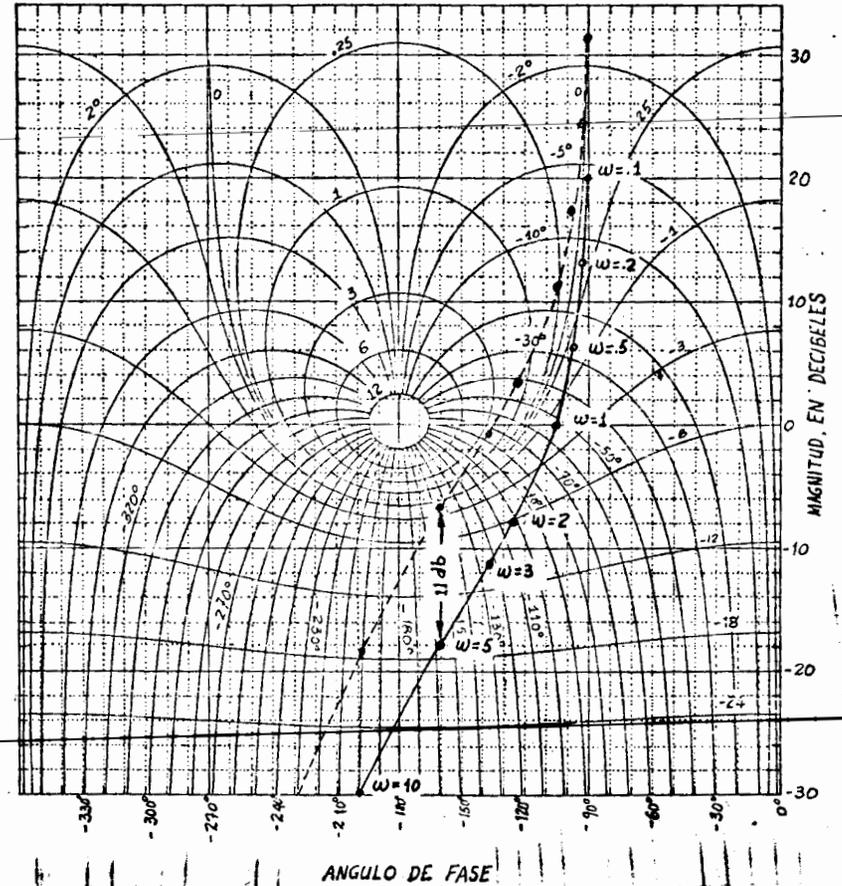


Fig 89. Trazas de Nichols de $\frac{50}{s(s+5)(s+10)}$

Fig 89. Trazas de Nichols de $\frac{50}{s(s+5)(s+10)}$

transforma en suma, para encontrar la K deseada que hace que $M_p=2$ db, se desplaza verticalmente la traza de Nichols hasta que sea tangente a la curva $M=2$ db (traza punteada). Como la traza se desplazó 11 db hacia arriba, esto equivale a multiplicar $H(j\omega)$ por $K=3.55$ (11 db) y por tanto el coeficiente de error a rampa es

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s K G H(s) = 3.55$$

La respuesta en frecuencia del sistema realimentado aparece en la fig 90. En ella puede verse que el ancho de banda es 4.8 y la frecuencia de resonancia $\omega=3$. Si se deseara aumentar el ancho de banda (desplazando hacia arriba la traza de Nichols) para lograr un sistema más rápido, se degradaría la estabilidad de sistema, al producirse un M_p excesivo.

Puede ocurrirsele al lector que si la traza de Nichols pudiera moverse por algún medio hacia la derecha, el ancho de banda podría incrementarse sin que se tuviera un factor de resonancia demasiado alto. Esto se logra por medio de métodos denominados de compensación.

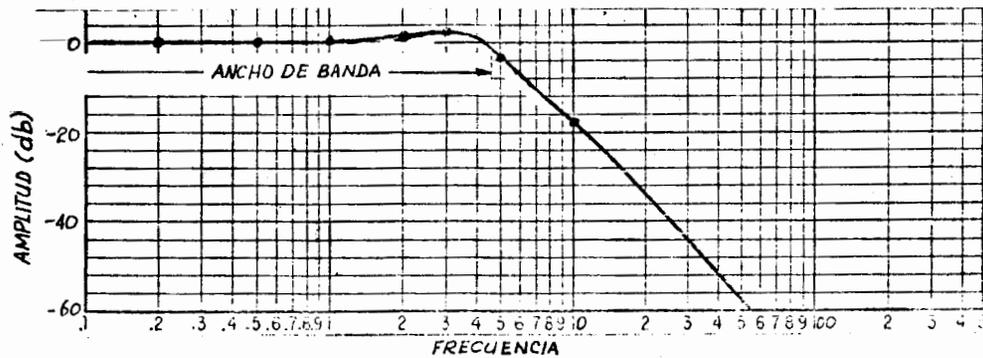


Fig 90. Traza de Bode (magnitud) del sistema realimentado con $K=3.55$

Para obtener en forma aproximada la traza de magnitud de Bode de un sistema realimentado unitariamente, a partir de la respuesta del sistema sin realimentar, es útil tomar en cuenta las siguientes relaciones

$$\left| \frac{K H(j\omega)}{1 + K H(j\omega)} \right| \approx 1 \text{ si } |K H(j\omega)| \gg 1$$

$$\left| \frac{K H(j\omega)}{1 + K H(j\omega)} \right| \approx |K H(j\omega)| \text{ si } |K H(j\omega)| \ll 1$$

De esta forma todos los puntos que se encuentran arriba de 0 db se transforman en 0 db al realizar la realimentación unitaria, y todos los puntos que se hallan abajo de 0 db permanecen invariables con la realimentación. En la fig 91 se muestra la aproximación descrita para dos valores de K.

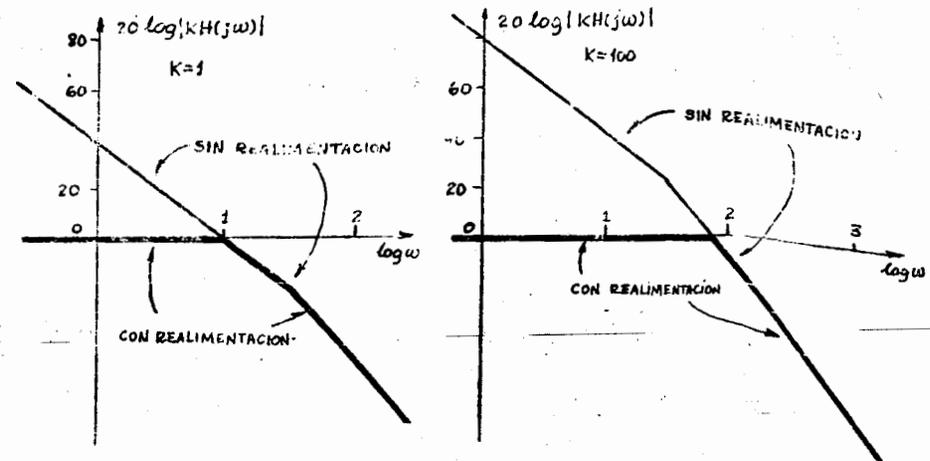


Fig 91. Aproximación de la magnitud de un sistema unitariamente realimentado

Nótese que por medio de la aproximación descrita es posible determinar en forma aproximada y con pocas manipulaciones el ancho de banda del sistema realimentado.

FACULTAD DE INGENIERIA

Coordinación de Bibliotecas

APUNTE
209

FACULTAD DE INGENIERIA UNAM.



605348

G.- 605348

Handwritten mark

Handwritten mark