

## 4. Análisis y proceso de datos

### 4.1. Análisis dimensional

#### Dimensionalidad geoelectrica y direccionalidad

Como se sabe,  $Z_{ij}$  representa al tensor de impedancia, con el cual se puede tener un acercamiento de la distribución de la conductividad en el subsuelo, por lo que al estudiar la dimensionalidad se puede recopilar datos de las características de las estructuras. Así, teniendo esta información, se puede generar un modelo que se ajuste a los rasgos geológicos generales del área de estudio. Una vez realizado el estudio dimensional se procede a efectuar un estudio direccional, el cual indica la dirección preferencial de las estructuras en el subsuelo, siempre y cuando el análisis arroje una dimensión 2D.

En el caso de 1-D:

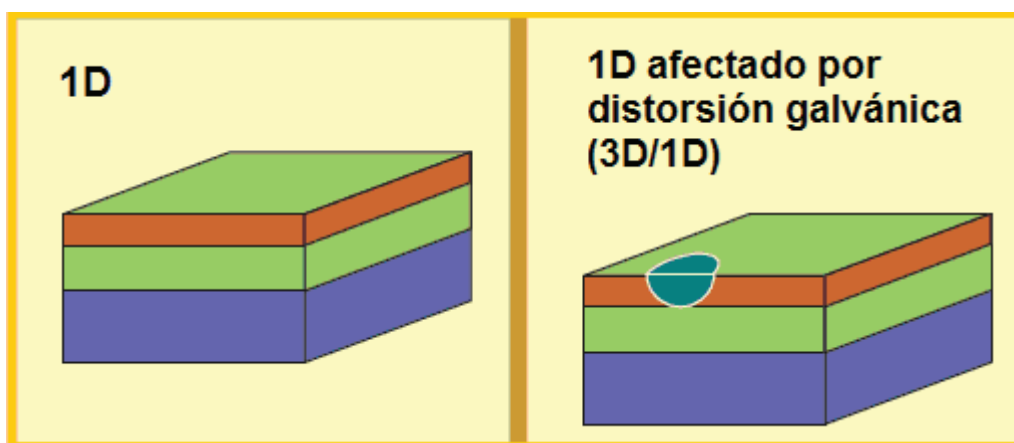


Figura 17. Modelo geoelectrico 1D (Martí, 2006).

Para este caso en específico, la conductividad varía en una sola dirección, la profundidad. La diagonal principal,  $Z_{xx}$  y  $Z_{yy}$  del tensor de impedancia, es cero para el campo eléctrico

y magnético, para la diagonal contraria, la pareja ortogonal  $Z_{xy}$  y  $Z_{yx}$  del campo eléctrico y magnético, es igual en magnitud pero con signo contrario.

$Z_{obs} = Z_{iD} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ -Z_{yx} & 0 \end{bmatrix}$  debe de cumplir con las siguientes condiciones, para la diagonales principal  $Z_{xx} = Z_{yy} = 0$ , y para l antidiagonal  $Z_{xy} = -Z_{yx}$  (Bahr, 1988).

Para el caso de 2-D se tiene:

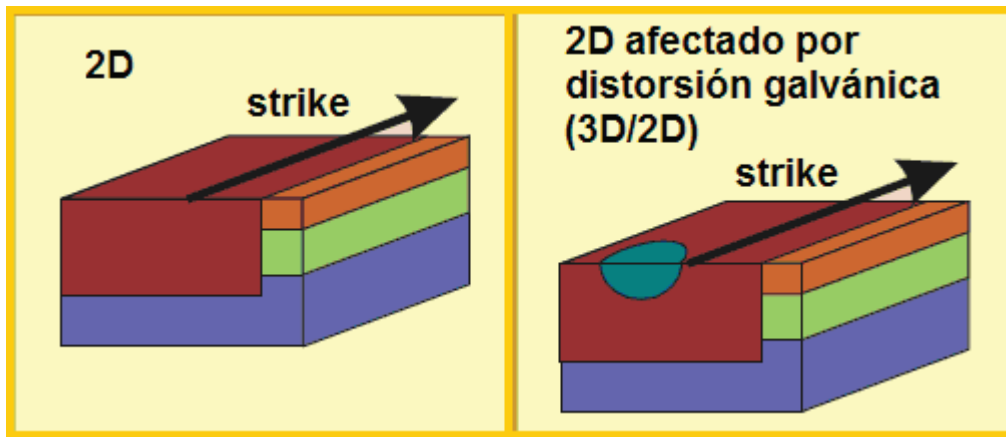


Figura 18. Modelo geoelectrica 2D, fallas y diques son rasgos de este tipo de modelo. El *strike* es la dirección preferencial de la estructura geológica (Martí, 2006).

En este caso, la conductividad varía a lo largo de una dirección horizontal y en dirección de la profundidad, es decir,  $Z_{xx}$  y  $Z_{yy}$ , son iguales en magnitud pero contrarios en signo y  $Z_{xy}$  y  $Z_{yx}$  son de signo contrario y de valores diferentes (Bahr, 1988).

$$Z_{obs} = Z_{2D} = R \begin{bmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{bmatrix} R^T$$

Vozoff (1991), dice que para el caso en el que los ejes  $x$  y  $y$  se encuentran alineados a lo largo de la dirección de las unidades geoelectricas debe de cumplir con  $Z_{xx} = Z_{yy} = 0$  pero

se debe de considerar que  $Z_{xy} \neq -Z_{yx}$  en ningún caso son diferentes a lo largo la de dirección de las unidades geoelectricas cumple con  $Z_{xx} = -Z_{yy} \neq 0$ .

En el caso de 3-D:

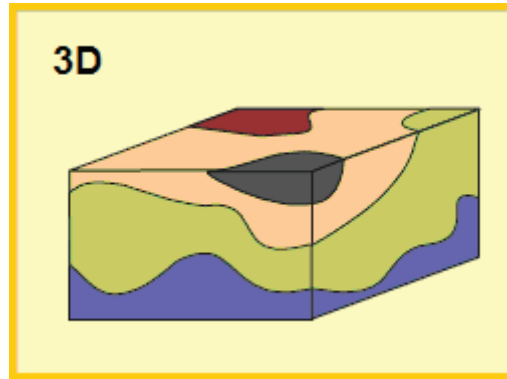


Figura 19. Modelo Geoelectrico 3D (Martí, 2006).

Para el caso de la Figura 19, la conductividad varía a lo largo de los “defectos” o cuerpos que se encuentren en el medio, aquí se habla más bien de intrusivos masivos o deformaciones que hacen que el medio se comporte anisotrópicamente en todas direcciones, provocando que la señal se distorsione.

$$Z_{obs} = Z_{3D} = R \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} R^T \text{ y } Z_{xx} \neq Z_{yy} \neq Z_{xy} \neq Z_{yx}, \text{ donde } R \text{ es la matriz de rotación y}$$

está definida como  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  y representa la rotación en  $\theta$  grados de un plano en

sentido antihorario, representando la rotación de manera concisa, de tal forma que con esto se pueda hacer un buen análisis dimensional de las estructuras caracterizadas bajo la premisa de 3D, por lo tanto R representa al tensor de impedancias en términos de la dirección de la estructura geoelectrica (Simpson y Bahr, 2005.)

## 4.2. Parámetros del Análisis dimensional.

Invariantes

Los invariantes rotacionales, pertenecen al tensor de impedancia por lo que son operadores que tendrán un mismo valor independientemente de la dirección en que se hayan hecho las mediciones.

Los invariantes son linealmente independientes son siete (Szarka y Menvielle, 2007), de los cuales dos tienen la función de calcular la impedancia efectiva mediante los componentes de la diagonal y antidiagonal del tensor de impedancias:

$$Z_1 = (Z_{xy} - Z_{yz}) / 2 \quad (36)$$

$$Z_1 = (Z_{xx} - Z_{yy}) / 2 \quad (37)$$

El tercero es el cálculo del determinante:

$$Z \det(Z) = (Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}Z_{yx}) / 2 \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(Z_{xy} - Z_{yx}), \operatorname{Im}(Z_{xy} - Z_{yx}), \\ & \operatorname{Re}(Z_{xx} + Z_{yy}), \operatorname{Im}(Z_{xx} + Z_{yy}), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\det(\operatorname{Re}(Z)), \det(\operatorname{Im}(Z)) \text{ y } \operatorname{Im}(\det(z))$$

Una de las razones para usar los invariantes es que se usan las curvas de resistividad aparente que se orientan en dos direcciones diferentes, desarrollándose en sentido contrario al *static shift*, cuando se calcula cerca de inhomogeneidades, por lo que los invariantes de la impedancia se pueden interpretar como un modelo 1D puesto que, para interpretar un modelo 1D, este se debe de modelar estación por estación lo cual es idóneo para este caso.

Una característica de los invariantes es que al ser usados no es posible distinguir entre un modo TE o un modo TM, ya que la dirección de estos modos no es considerada dentro de los invariantes al igual que no se requiere considerar al *static shift* o hacer otras correcciones (Jiracek, 1990; Martí et al., 2004).

### Asimetría

La asimetría del tensor de impedancias da información acerca del medio geológico, puesto que arroja información de la posible bidimensionalidad del medio, estableciendo la condición de que un medio bidimensional debe de cumplir con que A debe de ser mucho menor a 1.

$$A = \frac{|Z_{xx} + Z_{yy}|}{|Z_{xy} - Z_{yx}|} \ll 1 \quad (40)$$

Si A es mucho menor a uno, no existe distorsión en el tensor de impedancias, de tal manera que se puede modelar como 1D, al igual que si los valores de A variaran de una frecuencia a otra dando como resultado un denominar pequeño  $Z_{xy} \approx Z_{yx}$  haciendo que A tienda a infinito por lo que también se podría modelar como 1D. Por el contrario si A es estable y no mayor a 0.4 se podría modelar como 2D (Bahr y Groom, 1992).

La asimetría está dada por dos constantes que surgen de la rotación de los ejes respecto al *strike*, esta rotación arrojando constantes las cuales no se ven alteradas por la rotación y por lo tanto no influye en su valor.

$$\begin{aligned} Z_{xx} + Z_{yy} &= C_1 \\ Z_{xy} - Z_{yx} &= C_2 \end{aligned} \quad (41)$$

Existe un parámetro llamado sesgo ( $\alpha$ ), el cual se obtiene de las constantes anteriores  $C_1$  y  $C_2$  siendo  $\alpha = \frac{C_1}{C_2}$ , el cual arroja información del grado de tridimensionalidad del modelo, por ejemplo si  $C_1=0$ , esto indica que se trata de un modelo 1D o 2D (Vozoff, 1972).

### Elipticidad

Otra propiedad del tensor de impedancias, es la elipticidad de la impedancia, siendo un valor que va con la dirección del eje de medición, es decir es una cantidad que vale cero para el caso en el que se tiene un modelo 1D también si es un modelo 2D en dirección del *strike* sobre los eje x-y (Vozoff, 1972).

Está dado por:

$$\beta(\theta) = \frac{Z_{xx}(\theta) - Z_{yy}(\theta)}{Z_{xy}(\theta) + Z_{yx}(\theta)} \quad (42)$$

En general esta propiedad se usa para saber si el medio se comporta como 3D, cuando el valor es diferente de cero o la dirección del *strike* está rotada.

El tamaño de la dimensionalidad 3D es la diferencia entre el eje principal de dirección, obtenido por el tensor de impedancias rotado y los obtenidos del campo horizontal y vertical, llamado en la literatura como *tipper skew*, este sesgo es cero siempre y cuando la parte real y la imaginaria de  $H_z$  sea coherente con la misma componente horizontal, de la estructura 2D (Vozoff, 1972).

$$TipperSkew = \frac{(A_r^2 + B_r^2) \tan^{-1}(A_r / B_r) - (A_i^2 + B_i^2) \tan^{-1}(A_i / B_i)}{T} \quad (43)$$

## Diagramas Polares

De la descomposición del tensor de impedancias es posible obtener información respecto a la dimensionalidad del medio, como se ha visto con anterioridad no es posible discernir muy bien entre 1D y 2D. En el caso de los diagramas polares, esta discriminación de modelos es llevada a un plano más gráfico mediante la representación de círculos o elipses de los valores que pueda tomar  $\theta$  de la descomposición de la impedancia. Estos diagramas representan el módulo de las componentes de la impedancia en función del ángulo de rotación, en un rango de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  para hacer la interpretación de la dimensionalidad.

El comportamiento de un diagrama polar para 1D es el siguiente:

Las componentes de la diagonal principal del tensor de impedancias  $|Z_{xx}|$  será cero para todos los ángulos denotándolo como un punto y la antidiagonal describirá un círculo perfecto.

Para un diagrama 2D, las componentes de la diagonal principal describen un trébol de cuatro hojas con ceros en la dirección del *strike* y en la perpendicular, mientras que en la antidiagonal se describe una elipse con el eje mayor en la dirección del *strike* (o la dirección perpendicular).

Para el caso en que se trate de un modelo 3D se tiene que las componentes de la diagonal principal describen un trébol de cuatro hojas desiguales, mientras que la antidiagonal describe una elipse deformada, cabe mencionar que no siempre es posible discriminar entre un modelo 2D y 3D mediante los diagramas polares debido a la distorsión de los datos o la complejidad del medio.

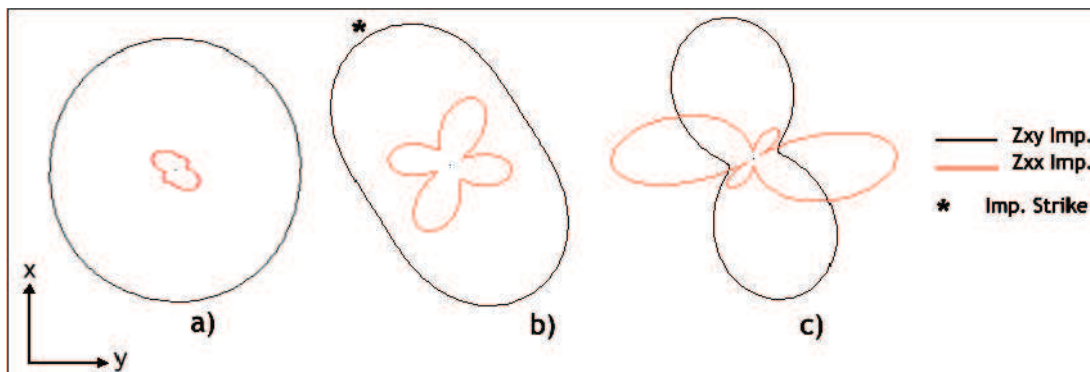


Figura 20. Modelo de diagramas polares. a) 1D, b) 2D y c) 3D (Acosta, 2007).

### 4.3. Análisis de Direccionalidad

Vozoff (1972) hace una observación en cuanto a la topografía, ya que características topográficas pueden causar distorsiones similares a las causadas por las heterogeneidades de resistividad, si bien estas distorsiones se pueden modelar, es mejor evitarlas si es posible, ya que si el relieve es más del 10% de la distancia entre electrodos, la distorsión se presenta con mayor grado.

Si el medio geológico en el que se va a trabajar llegase a presentar un comportamiento bidimensional, existirá una dirección preferencial de las estructuras principales, si esta dirección coincide con alguna de las direcciones de medición de los campos electromagnéticos, se podrá hablar de dos modos de descomposición o polarización, por lo tanto si se considera la geología, ésta dictará algunas de las características que se deberán tener en cuenta a la hora de la adquisición y orientación del equipo, ya que existirán dos modos para la orientación de las bobinas, los modos TE y TM (Simpson y Bahr, 2005).

Para aclarar este concepto, a continuación se hace una breve descripción de esta descomposición:

$$Z_{2D} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{xy} \\ Z_{yx} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z_{TE} \\ Z_{TM} & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

En la geología siempre existirá una dirección principal de orientación de las estructuras, llamada comúnmente *strike*, si esta dirección coincide con alguna de las direcciones de las mediciones del campo electromagnético se puede hablar de dos modos de polarización.

$$\text{Modo TE} \begin{cases} Z_{xy} = Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} \\ Z_{xx} = Z_{yy} = 0 \end{cases} \quad (45)$$

$$\text{Modo TM} \begin{cases} Z_{yx} = Z_{TM} = \frac{E_y}{H_x} \\ Z_{xx} = Z_{yy} = 0 \end{cases} \quad (46)$$



Para una distribución 2D, la relación entre la dirección del campo primario y el rumbo del contacto define dos modos (ecuaciones, 45 y 46), para el caso en el que el campo eléctrico primario,  $E_x$  es perpendicular al rumbo, se define una polarización H, la cual no presenta variaciones en el campo magnético horizontal ( $H_y$ ) sobre el contacto y a demás la densidad de corriente, es continua y si el campo eléctrico horizontal es paralelo al rumbo entonces se define una polarización E, el campo eléctrico horizontal  $E_x$ , cambia continuamente a través de la interfase; es decir  $E_x$  es paralelo al rumbo y no hay cargas inducidas, a demás el campo magnético horizontal  $H_y$  cambia sobre el contacto, en oposición a la polarización H, la densidad de corriente cambia continuamente a través de la interfase, y finalmente la corriente inducida en el contacto genera un campo magnético vertical en la cercanía del contacto (Barbesi, 2005).

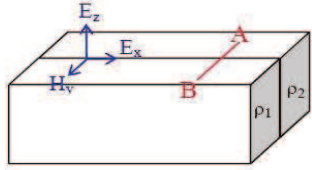
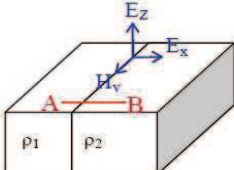
	Modo TE o polarización E	Modo TM o polarización H								
<b>Resistividad Aparente</b>	Decae de forma continua sobre el contacto. Este decaimiento se hace más rápido si la frecuencia aumenta.	Decae de forma abrupta sobre el contacto. La tasa de decaimiento se determina por el skin-depth								
<b>Diferencia de fase</b>	 <p style="text-align: center;"><math>\rho_1 &gt; \rho_2</math></p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>Izquierda del perfil AB</td> <td>Derecha del perfil AB</td> </tr> <tr> <td><math>\sigma</math> aumenta <math>\Phi &gt; 45^\circ</math></td> <td><math>\rho</math> aumenta <math>\Phi &lt; 45^\circ</math></td> </tr> </table>	Izquierda del perfil AB	Derecha del perfil AB	$\sigma$ aumenta $\Phi > 45^\circ$	$\rho$ aumenta $\Phi < 45^\circ$	 <p style="text-align: center;"><math>\rho_1 &gt; \rho_2</math></p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>Izquierda del perfil AB</td> <td>Derecha del perfil AB</td> </tr> <tr> <td><math>\rho</math> increases <math>\Phi &lt; 45^\circ</math></td> <td><math>\sigma</math> increases <math>\Phi &gt; 45^\circ</math></td> </tr> </table>	Izquierda del perfil AB	Derecha del perfil AB	$\rho$ increases $\Phi < 45^\circ$	$\sigma$ increases $\Phi > 45^\circ$
Izquierda del perfil AB	Derecha del perfil AB									
$\sigma$ aumenta $\Phi > 45^\circ$	$\rho$ aumenta $\Phi < 45^\circ$									
Izquierda del perfil AB	Derecha del perfil AB									
$\rho$ increases $\Phi < 45^\circ$	$\sigma$ increases $\Phi > 45^\circ$									

Figura 21. Comparación de la respuesta de los Modelos TE y TM, representadas como resistividades aparentes (Barbesi, 2005).

En general, el modo TE se asocia a conductores aislados, mientras que el TM es capaz de modelar los límites donde aparecen los principales cambios de resistividades, para obtener los beneficios de ambos modelos el mejor resultado, se encuentra cuando se combinan ambos modos TE y TM. Esto en parte es causada por el hecho, de que el modo TE y el

modo TM responden diferente a los modelos de conductividad específica y en parte porque existen inconsistencias entre el modelo 2D y el 3D, en la realidad (Pedersen y Engels, 2005).

#### Análisis direccional

Una vez realizado el estudio dimensional se procede a efectuar un estudio direccional, el cual indica la dirección preferencial de las estructuras en el subsuelo, esto siempre y cuando el análisis dimensional arroje una dimensión 2D, si no, no tiene sentido realizar el análisis direccional.

$Z_{ij}$  representa al tensor de impedancia, con el cual se puede tener un acercamiento de la distribución de la conductividad en el subsuelo, de tal manera que con la impedancia se pueden conocer las estructuras involucradas en el subsuelo en términos de la resistividad eléctrica del medio, de tal forma que teniendo esta información se puede generar un modelo que se ajuste a los rasgos geológicos generales del área de estudio.

Para ello se asume que la dirección de las estructuras, respecto a la dirección de medición del campo magnético se encuentran a un ángulo  $\theta$ , el cual representa la desviación entre estos dos valores, por lo que se lleva a cabo una rotación de los ejes, esto debido a que ambas mediciones están en distintos sistemas cartesianos y con esta rotación ambas mediciones se llevan al mismo plano (Simpson y Bahr, 2005).

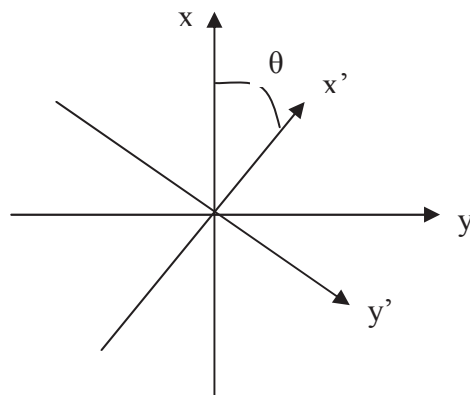


Figura 22. Rotación de ejes, respecto a la dirección de medición del campo magnético.

El cálculo matemático para el cálculo del valor de  $\theta\alpha$ , involucra la multiplicación de la matriz del tensor de impedancia con una matriz de rotación,  $\beta$ , quedando expresado de la siguiente forma (Simpson y Bahr, 2005):

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ y } \beta^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (47)$$

Teniendo esto, se puede expresar tanto el campo eléctrico como el magnético de la siguiente forma:

$$\left. \begin{matrix} E' = \beta E \\ B' = \beta E \end{matrix} \right\} \therefore \beta E = Z' \beta \left( \frac{B}{\mu_0} \right) \Rightarrow Z' = \beta Z \beta^T \quad (48)$$

Desarrollando lo anterior, se llegan a obtener valores simplificados de la impedancia, de los cuales al ser rotados se obtienen valores de los invariantes.

La forma cuantitativa correspondiente a la ecuación de soluciones de Swift (1967), en las que las expresiones para  $Z_{xy}(\theta)$  y  $Z_{yx}(\theta)$  se derivan con respecto de  $\theta$  para obtener un ángulo  $\theta\alpha$  que maximice la expresión, a cada frecuencia obtener los valores máximos y mínimos, derivados de  $\theta$ , para obtener un ángulo  $\theta\alpha$ , para el caso de 2D se tiene que derivar respecto a  $\theta$ , e igualando a 0, la siguiente expresión (Vozoff, 1972):

$$\tan 4\theta\alpha = \frac{(Z_{xx} - Z_{yy})(Z_{xy} + Z_{yx})^* + (Z_{xx} + Z_{yy})^*(Z_{xy} + Z_{yx})}{|Z_{xx} - Z_{yy}|^2 - |Z_{xy} + Z_{yx}|^2} \quad (49)$$

Se obtienen los valores máximos y mínimos, para  $Z$ .

$$\begin{aligned} |Z'_{xy}(\theta\alpha)|^2 + |Z'_{yx}(\theta\alpha)|^2 &= \text{maximo} \\ |Z'_{xx}(\theta\alpha)|^2 + |Z'_{yy}(\theta\alpha)|^2 &= \text{minimo} \end{aligned} \quad (50)$$

Existen una serie de descomposiciones, como la de Groom y Bailey (1989), LaTorraca et al. (1986), Bahr (1988), entre otros, que permiten conocer el valor del ángulo sin recurrir al análisis de Swift (1967), pero no se abordarán en este trabajo.

#### **4.4. Inversión**

El problema de la inversión consiste en estimar los valores que representen de mejor manera a las estructuras geoelectricas que se está caracterizando. En el caso del MT, la respuesta electromagnética del medio, es un efecto no lineal, por lo que el problema se ataca mediante un método iterativo, llamado máxima verosimilitud o inversión estocástica.

Al ser un método iterativo, éste hace que el punto en el espacio de parámetros, maximice la probabilidad conjunta de ajuste de los datos observados y de acuerdo con el modelo previo, va variando hasta encontrar un modelo que se ajuste con los valores reales y los valores inferidos, quedando estos dos dentro de las condiciones de frontera preestablecidas.

En ocasiones se fuerza el modelo para dar el mejor ajuste de los datos, pero esto puede empujar al modelo en una región poco probable de su espacio de parámetros, por lo que se sugiere utilizar el máximo espacio de probabilidad de la solución que implica la probabilidad conjunta tanto del ajuste de datos como el ajuste del modelo. Cuando los datos y el modelo previo se considera que tienen las estadísticas de Gauss, el modelo ha encontrado una solución.

El centro de la inversión, es la matriz de sensibilidad o análisis de sensibilidad, que está determinada por un análisis de perturbación, el cual a una falta de perturbación del medio genera soluciones que satisfacen las ecuaciones de Maxwell, para poder modelar la inversión (Theodore y Randall, 1989).

##### **Inversión 1D**

Para poder interpretar un sitio como 1D se debe de procesar cada uno de los puntos de adquisición y a partir de ahí, crear las secciones de las cuales se va hacer la interpretación final, para ello al tratar los datos estos tienen cierta incertidumbres, ya que en general los datos obtenidos en campo casi siempre muestran efectos de distorsión, por lo que los elementos de la diagonal no serán despreciables y la suma de los elementos de la anti diagonal no serán igual a cero. Y como los datos se interpretan como un modelo 1D,

hay muchas posibilidades para la combinación de los ocho grados de libertad del tensor de impedancia en cada frecuencia al igual que para los dos grados que pueden ser ajustados para 1D.

Una ventaja del modelado 1D es que los detalles más finos pueden ser modelados pero para ellos estos detalles (efectos) deben verse en toda una serie de estaciones para poder decir con confianza que representan verdaderas variaciones de profundidad en la conductividad y que no están dominados por los efectos secundarios causados por estructuras 2D o 3D (Pedersen y Engels, 2005).

### Inversión 2D

Una inversión 2D, puede ser modelada de diferentes formas, cada una de ellas puede presentar un mejor ajuste del modelo, las más comunes son los modos TE, TM y TE + TM. Los modos TE y TM tienen características independientes y puede mejorar la variación de la conductividad lateral de manera individual, haciendo que dependiendo el modo que se esté usando y el medio en que se implemente estos van a resaltar características diferentes del medio. Por lo general, el modo TE realza mejor a conductores, mientras que el modo TM realza mejor los resistivos, también se pueden modelar parámetros invariantes tal como el determinante del tensor de impedancias, por mencionar alguno (Pedersen y Engels, 2005).

La mejor forma de hacer perceptibles los efectos de la resistividad o conductividad el medio es mediante la combinación de los modos TE y TM, donde el conductor y el resistivo se visualizan con mejor claridad que de manera independiente.

La conductividad en ambos modos se presenta de la siguiente manera: en el modo TM presenta una respuesta de carga estática pues, las cargas se acumulan en la parte superior del modelo, esto hace presente el efecto de *static shift* en la parte superior, para el modo TE, consiste puramente en la respuesta inductiva, sin cargas eléctricas, las inhomogeneidades laterales existentes en un modelo 2D apenas perturban las respuesta de

este modelo, por lo menos en las frecuencias para las que la longitud de la escala del inductivo es mucho mayor que la escala de las heterogeneidades.

La complejidad del problema inverso se refleja también cuando se hace un intento para adaptarse a los modos TE y TM simultáneamente, si el mundo real puede ser bien descrito por una organización regional 2D, la inversión simultánea de los modos TE y TM puede ser muy exitosa si sólo se utiliza la fase del modo TE. Sin embargo, en muchos casos, la inversión simultánea de ambos modos, lleva a la falta de resolución de la inversión del modo TM, porque el modo 2D es incompatible con los datos del modelo real en 3D, y el modelo que mejor se ajusta está representado por un modelo común que debe de satisfacer estrictas limitaciones basadas en 2D (Pedersen y Engels, 2005).