

## Capítulo 3 Marco teórico.

### 3.1 Conceptos fundamentales

El propósito de los estudios eléctricos, es determinar la distribución de la resistividad en el subsuelo tomando mediciones en la superficie. A partir de estas medidas, se puede estimar la resistividad real del subsuelo. La resistividad del terreno, está relacionada con varios parámetros geológicos, tales como el contenido mineral, de fluidos, porosidad y grado de saturación de agua en la roca (Loke, 2001).

### 3.2 Ecuaciones fundamentales

Telford (1990) define las ecuaciones de Maxwell que rigen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos, como:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.2)$$

En el caso de corriente estacionaria, las ecuaciones se reducen a:

$$\nabla \times E = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times H = J \quad (3)$$

La ecuación (2), indica que el campo eléctrico es conservativo o irrotacional; por lo que se puede expresar como el gradiente de un campo potencial V:

$$E = -\nabla V \quad (4)$$

Considerando un flujo de corriente continua en un medio isótropo y homogéneo. Si  $\delta A$  es un elemento de la superficie y J es la densidad de

corriente en amperes por metro cuadrado, entonces la corriente que pasa a través de  $\delta A$  es  $J \cdot \delta A$ . La densidad de corriente  $J$  y el campo eléctrico están relacionados a través de la ley de Ohm:

$$J = \sigma E \quad (5)$$

Donde  $E$  está expresada en Volts por metro y  $\sigma$  es la conductividad del medio en Siemens por metro  $\left(\frac{S}{m}\right)$ .

Como se muestra en la ecuación (4), el campo eléctrico es el gradiente de un potencial escalar. Entonces se tiene:

$$J = -\sigma \nabla V \quad (6)$$

Se conoce que  $\nabla \cdot J = 0$ , por lo tanto

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0 \quad (7)$$

Al desarrollar:

$$\nabla \sigma \cdot \nabla V + \sigma \nabla^2 V = 0 \quad (8)$$

Si  $\sigma$  es constante, el primer término desaparece y se tiene la ecuación de Laplace, donde el potencial es armónico

$$\nabla^2 V = 0 \quad (9)$$

Existen dos condiciones de frontera que se deben de mantener entre cualquier contacto entre dos regiones de distinta conductividad. Dichas condiciones de frontera para interfaces donde  $\sigma$  y  $\mu$  cambian abruptamente son:

- El campo eléctrico tangencial a la interface es continuo  $n \times (E_1 - E_2) = 0$ .
- La densidad de corriente normal a la interface es continua  $n \cdot (\sigma_1 E_1 - \sigma_2 E_2) = 0$

Estas condiciones son válidas cuando no existe carga libre o corriente en la interface. En este caso el potencial  $V$  también es continuo sobre la interface, debido a que no se está llevando a cabo trabajo al mover la carga de un lado a otro. Éstas pueden volver a escribirse de la siguiente forma:

$$E_{x1} = E_{x2} \quad \text{y} \quad \sigma_1 E_{z1} = \sigma_2 E_{z2} \quad (10)$$

Donde  $x$  y  $z$  son los ejes tangencial y normal, respectivamente, a la interface. Siendo  $E_{x1}$  la componente tangencial del medio 1, y así consecutivamente. Se obtiene por resultado:

$$V_1 = V_2 \quad (11)$$

### 3.3 Principio del método

En la compilación de Knödel (2007) se define el principio del método. Los métodos de resistividad de corriente directa utilizan fuentes artificiales de corriente para producir un campo de potencial eléctrico en el terreno. La corriente se introduce al terreno a través de electrodos puntuales ( $C_1$ - $C_2$ ) y el campo potencial es medido utilizando otros dos electrodos (los electrodos de potencial  $P_1$ - $P_2$ ).

El fin de generar un campo potencial y medirlo es determinar la distribución espacial de la resistividad (o su recíproco la conductividad) en el terreno como se observa en la Figura 3.1.

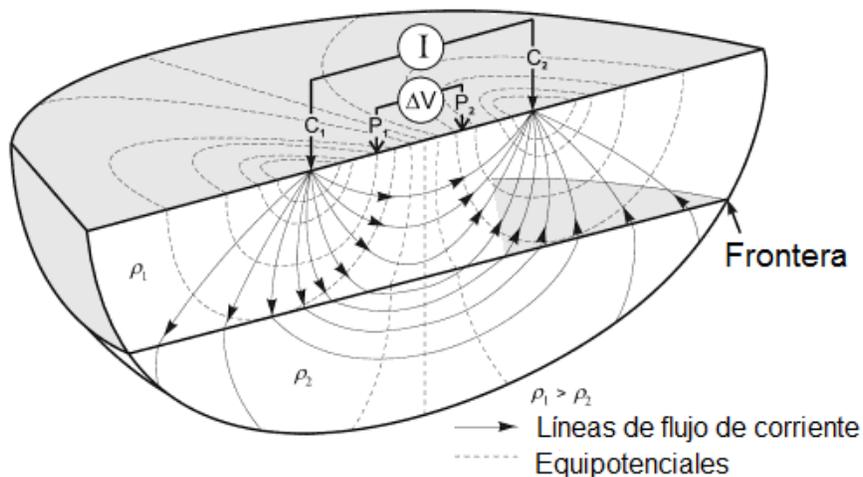


Figura 3.3.1 Principio del método con un arreglo de cuatro electrodos (Knödel, 2007)

### 3.4 Electrodo de corriente en tierra homogénea

Considerando un electrodo en la superficie de una tierra homogénea e isótropa que se extiende al infinito en dirección descendente con una resistividad  $\rho$  (Figura 3.2). Se describe una semiesfera de radio  $r$  y espesor  $dr$  alrededor del electrodo (Parasnis, 1997).

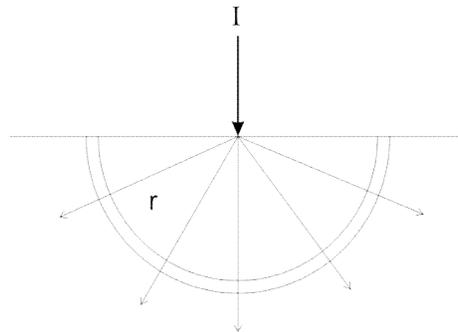


Figura 3.2 Electrodo de corriente en tierra homogénea (Parasnis, 1997)

Por simetría, la corriente en cualquier punto de la semiesfera se encontrará sobre el radio. Si la corriente total que pasa a través del electrodo hacia el suelo es  $I$  y el potencial es  $dV$  sobre la coraza se puede escribir

$$dV = -\frac{I\rho dr}{2\pi r^2} \quad (12)$$

Al integrar se obtiene el potencial a una distancia  $r$  desde donde se encuentra la fuente de la corriente.

$$V = \frac{I\rho}{2\pi r} + C \quad (13)$$

Donde  $C$  es una constante arbitraria. Si  $V$  es igual a cero cuando  $r = \infty$ , entonces  $C = 0$  por lo que:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi r} \quad (14)$$

En la práctica se utilizan dos electrodos en la superficie, uno positivo (A), que envía la corriente al suelo, y otro negativo (B), que colecta la corriente de regreso (Figura 3.3). El potencial total en cualquier punto P en el terreno será:

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \quad (15)$$

Donde  $r$  y  $r'$  son las distancias de P a los dos electrodos.

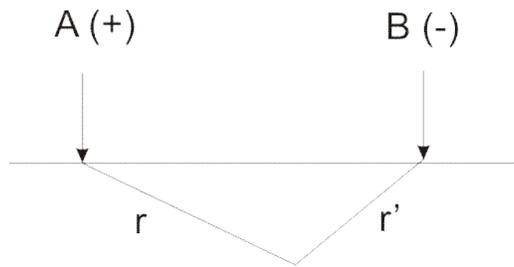
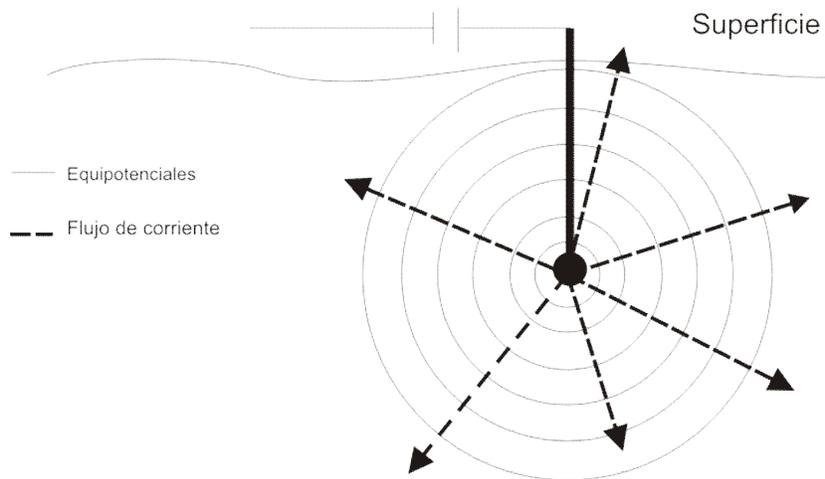


Figura 3.3 Electrodo puntuales en superficie (Parasnis, 1997)

### **3.5 Electrodo de corriente enterrado en una tierra homogénea e isótropa**

En este caso, el electrodo se encuentra dentro de un pozo o enterrado. El circuito de corriente se completa con otro electrodo, generalmente en la superficie, pero lo suficientemente alejado para que su influencia sea despreciable, como se denota en la Figura 3.4 (Parasnis, 1997)



**Figura 3.4 Electrodo de corriente enterrado**

Telford (1990) define las ecuaciones de este caso particular. A partir de la simetría del sistema, el potencial será función solamente de  $r$ , donde  $r$  es la distancia del primer electrodo. Bajo estas consideraciones, la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas se simplifica a:

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \left(\frac{2}{r}\right) \frac{dV}{dr} = 0 \quad (16)$$

Al multiplicar por  $r^2$  e integrar:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2} \quad (17)$$

Al integrar de nuevo:

$$V = -\frac{A}{r} + B \quad (18)$$

Donde  $A$  y  $B$  son constantes. Dado que  $V = 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ , tenemos  $B = 0$ . La corriente fluye de manera radial hacia afuera en todas las direcciones a

partir del electrodo. Por lo tanto la corriente total que atraviesa una superficie esférica está dada por:

$$I = 4\pi r^2 J \quad (19)$$

De las ecuaciones (6) y (15)

$$I = -4\pi r^2 \sigma \frac{dV}{dr} = -4\pi \sigma A = -4\pi \sigma A \quad (19a)$$

Por lo tanto

$$A = -\frac{I\rho}{4\pi} \quad (20)$$

Donde queda

$$V = \left(\frac{I\rho}{4\pi}\right) \frac{1}{r} \quad \text{o} \quad \rho = \frac{4\pi rV}{I} \quad (21)$$

Los equipotenciales son ortogonales a las líneas de flujo de la corriente, y son superficies esféricas dadas por  $r = \text{constante}$ .

### **3.6 Resistividad aparente**

Orellana (1972) define este parámetro de la siguiente forma. Considerando en primer lugar un subsuelo homogéneo de resistividad  $\rho$  en cuya superficie se coloca un dispositivo eléctrico AMN (Figura 3.5).

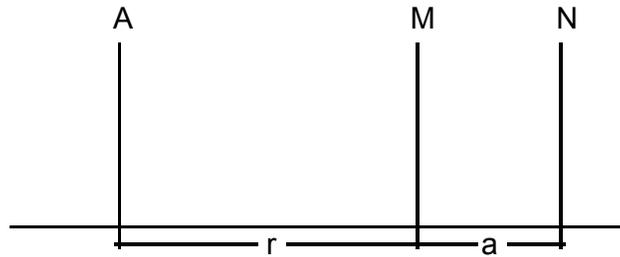


Figura 3.5 Arreglo AMN

El electrodo A está conectado a un generador y el campo eléctrico que produce se estudia por medio de los electrodos M y N que están conectados a un voltímetro que mide la diferencia de potencial que aparece entre ellos. Los tres electrodos están alineados. El electrodo B, que cierra el circuito de A se supone lo suficientemente alejado de los demás para que no influya en las observaciones (electrodo en el “infinito”). Entonces sí,  $AM=r$  y  $MN=a$ , según la ecuación

$$U_N^M = \frac{I\rho}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I\rho}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (22)$$

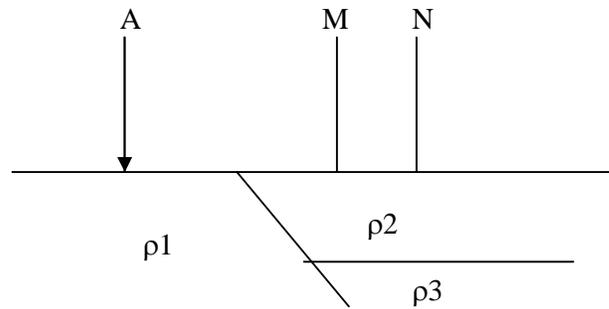
Se tiene

$$\Delta V = U_N^M = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+a} \right) = \frac{\rho I}{2\pi} \frac{a}{r(r+a)} \quad (22a)$$

Despejando  $\rho$  resulta:

$$\rho = 2\pi \frac{r(r+a)}{a} \frac{\Delta V}{I} \quad (22b)$$

Esta fórmula puede utilizarse para calcular la resistividad  $\rho$  de un subsuelo homogéneo, si se miden las magnitudes que aparecen en el segundo miembro.



**Figura 3.6 Subsuelo heterogéneo.**

Considerando que el subsuelo no es homogéneo como se muestra en la Figura 3.6. Si se efectúan las mediciones pertinentes y se llevan los datos obtenidos a la fórmula anterior resultará una resistividad ficticia  $\rho_a$  que en general no será igual a la  $\rho_1$  que corresponde a la zona del electrodo A, ni a la  $\rho_2$  que se halla bajo los electrodos M y N, sino que dependerá de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  y de las distancia  $r$  y  $a$ . Esta resistividad tampoco puede considerarse como promedio ni como media ponderada de las 3 resistividades presentes pues puede ocurrir que sea mayor o menor a todas ellas. Esta resistividad ficticia  $\rho_a$  que se obtiene aplicando a los datos obtenidos sobre un medio heterogéneo la expresión correspondiente a medio homogéneo, es la resistividad aparente. Esta es la variable experimental que expresa los resultados de las mediciones en la mayoría de los métodos geoelectricos y la que se toma como base para la interpretación. Las dimensiones de la resistividad aparente, en virtud de su definición, son las mismas que para la resistividad, y su unidad será también ohm.m

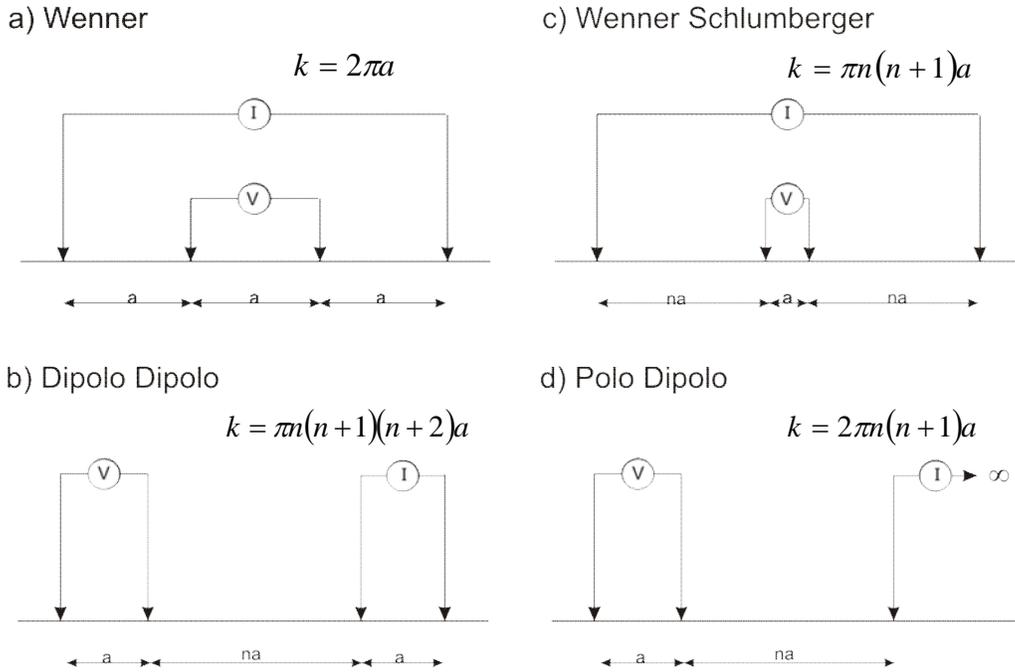


Figura 3.7 Diferentes arreglos de electrodos (Milsom, 2003).

En la compilación hecha por Knödel (2007) se define que en las mediciones de resistividad, pueden utilizarse los siguientes métodos de operación:

- Perfilaje o Calicata
- Sondeo Eléctrico Vertical (SEV)
- Tomografía de Resistividad Eléctrica (TRE)

El método de sondeo convencional, consta en mantener fijo el punto central del arreglo y cambiar la apertura de los electrodos, para interpretar los valores de la resistividad aparente obtenidos en este estudio, se asume que la superficie está constituida por capas horizontales. En este caso, la resistividad del subsuelo cambia solo con la profundidad, pero no cambia en la dirección horizontal, se utiliza un modelo unidimensional. (Figura 3.8a)

Los métodos de perfilaje o calicata, se utilizan para detectar cambios laterales de resistividad sobre un perfil a una profundidad de investigación constante, que está determinada por el espaciamiento entre electrodos. Este método es ideal para detectar contactos geológicos verticales o inclinados. Los resultados se interpretan de manera cualitativa (Figura 3.8b).

La finalidad de un SEV, es averiguar la distribución vertical de resistividades bajo el punto sondeado. La mayor eficacia del método, corresponde al caso en que los SEV se efectúan sobre un terreno compuesto por capas lateralmente homogéneas, en lo que respecta a la resistividad y limitada por planos paralelos a la superficie del terreno. Los datos obtenidos pueden interpretarse de manera cualitativa y cuantitativa, con la segunda se obtienen modelos de resistividades, cuyas fronteras son capas geoelectricas, pero no necesariamente de fronteras litológicas.

Los estudios de tomografía eléctrica 2D, proveen información sobre estructuras complejas con variaciones de resistividad, tanto lateral como vertical.

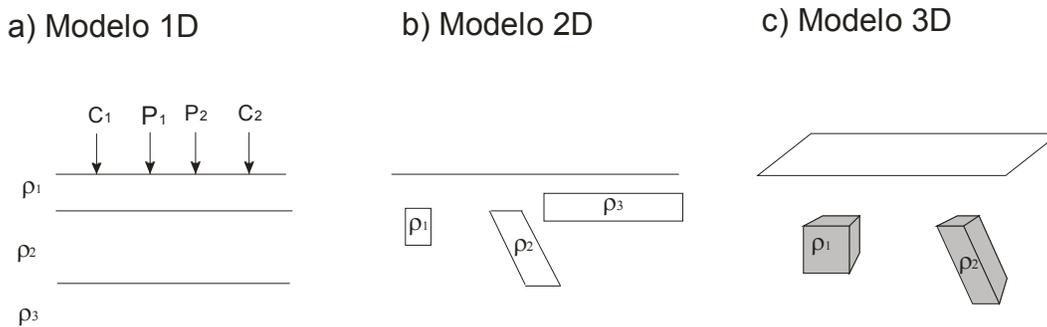


Figura 3.8 Modelos utilizados en la interpretación de medidas de resistividad (Loke, 2001)

### 3.7 Relación entre resistividad y geología

Loke (2001) discute la relación entre resistividad y geología donde afirma que los estudios de resistividad dan una imagen de la distribución de resistividad del subsuelo. Para convertir esa imagen en una estructura geológica, es necesario conocer como varía este parámetro en los diferentes tipos de materiales que constituyen el subsuelo y en las estructuras geológicas del área bajo estudio. En la Tabla 3.1, se observa que las rocas ígneas y metamórficas típicamente, tienen altos valores de resistividad. La resistividad de estas rocas depende mucho del grado de fracturación que posee, y del porcentaje de agua que rellena las fracturas del terreno.

Las rocas sedimentarias, comúnmente son más porosas y tienen un alto contenido de agua, lo que normalmente hace disminuir los valores de resistividad.

Los suelos húmedos y el agua en el terreno tienen valores aún más bajos. En los suelos arcillosos, las resistividades son normalmente menores que las correspondientes al suelo arenoso. Sin embargo, se destaca que existe una superposición en los valores de resistividad de las diferentes clases de rocas y suelos. Esto es debido a que este parámetro depende de un número de factores, tales como la porosidad, el grado de saturación de agua y la concentración de sales disueltas.

La resistividad del agua del terreno varía desde 10 a 100 Ohm·m, dependiendo de la concentración de sales disueltas. El valor bajo del agua de mar se debe al alto contenido de sal (Loke, 2001).

**Tabla 3.1 Resistividades de las rocas más comunes (Loke, 2001)**

Material	Resistividad (Ohm·m)	Conductividad (Siemens)
Rocas ígneas y metamórficas		
Granito	$5 \times 10^3 - 10^6$	$10^{-6} - 2 \times 10^{-4}$
Basalto	$10^3 - 10^6$	$10^{-6} - 10^{-3}$
Pizarra	$6 \times 10^3 - 4 \times 10^6$	$2 \times 10^{-8} - 1.7 \times 10^{-3}$
Mármol	$10^2 - 2.5 \times 10^8$	$4 \times 10^{-9} - 10^{-2}$
Esquisto	$20 - 2 \times 10^3$	$5 \times 10^{-4} - 0.05$
Cuarcita	$10^2 - 2 \times 10^8$	$5 \times 10^{-9} - 10^{-2}$
Rocas sedimentarias		
Arenisca	$8 - 4 \times 10^3$	$2.5 \times 10^{-4} - 0.125$
Limolita	$50 - 4 \times 10^2$	$2.5 \times 10^{-3} - 0.02$
Suelos y agua		
Arcilla	1-100	0.01-1
Aluvión	10-800	$1.25 \times 10^{-3} - 0.1$
Agua subterránea	10-100	0.01-0.1
Agua de Mar	0.2	5

### **3.8 Arreglo Wenner**

El arreglo Wenner es relativamente sensitivo a cambios verticales en la resistividad del subsuelo, debajo del centro del arreglo, sin embargo, es menos sensible a cambios horizontales en la resistividad del subsuelo (Figura 3.7a). En general este arreglo es confiable para determinar cambios verticales, (como estructuras horizontales), pero relativamente malo para detectar cambios horizontales (estructuras verticales estrechas) (Loke, 2001). Para un estudio de profundidad los electrodos son separados manteniendo un centro fijo. En la TRE el espaciamento se mantiene constante y los cuatro electrodos se mueven sobre la línea de estudio, aumentando el espaciamento  $n \times a$  donde  $n$  es el nivel de estudio (Telford, 1990).

### **3.9 Arreglo Dipolo-Dipolo**

Este arreglo es ampliamente usado a causa del bajo acoplamiento entre la corriente y los circuitos potenciales. El espaciamiento entre los electrodos, C1-C2, es determinado como "a" al igual que la distancia entre los electrodos potenciales P1-P2. Este arreglo tiene otro factor denominado "n" como se observa en la Figura 3.7b.

Para estudios con este arreglo, el espaciamiento "a" se mantiene inicialmente fijo y el factor "n" se aumenta a fin de aumentar la profundidad de investigación. Así el dispositivo Dipolo-Dipolo, es muy sensible a cambios de resistividad horizontal, pero relativamente insensible a cambios verticales, de modo que es útil en estructuras verticales, tales como diques y cavidades, pero relativamente malo para determinar estructuras horizontales tales como diquestratos o capas sedimentarias (Loke, 2001).

### **3.10 Arreglo Wenner Schlumberger**

Este es una configuración híbrida entre los dispositivos Wenner y Schlumberger. Una forma modificada del dispositivo Schlumberger con un espaciamiento constante se muestra en la figura 3.7c; el factor "n" es la relación entre la distancia de los electrodos C1-P1 (o P2-C2) y el par potencial P1-P2. La sensibilidad para el Wenner-Schlumberger, es ligeramente diferente al Wenner, esto significa que este conjunto es moderadamente sensible a estructuras horizontales y verticales. En áreas en donde ambos tipos de estructuras geológicas son esperadas, este conjunto puede ser utilizado convenientemente (Loke, 2001).

### **3.11 Arreglo Polo Dipolo**

La configuración Polo Dipolo, también tiene cobertura horizontal buena, pero tiene una fortaleza de señal significativamente más alta, comparada con el dispositivo Dipolo-Dipolo y no es tan sensible al ruido telúrico como la configuración Polo-Polo.

Diferente a las otras configuraciones comunes, el conjunto Polo – Dipolo, es un dispositivo asimétrico (Figura 3.7d) y sobre estructuras simétricas las anomalías de resistividad aparente en la pseudosección son asimétricas.

En algunas situaciones, la asimetría en los valores de resistividad aparente podría influir en el modelo obtenido después de la inversión.

### 3.12 Tomografía Eléctrica

En aplicaciones geológicas, los estudios de tomografía normalmente emplean arreglos de electrodos, en la superficie para la toma de datos. La técnica de medición involucra la medición sobre una línea con una separación constante entre electrodos “a”, la cual se va incrementando con cada toma de datos sucesiva “nxa” donde n indica el nivel como se muestra esquemáticamente en el Figura 3.9. Esto se debe a que al incrementar la separación entre electrodos la profundidad de penetración aumenta, y las resistividades aparentes obtenidas se pueden graficar como una pseudosección, la cual refleja cualitativamente la variación espacial de la resistividad (Loke, 2001).

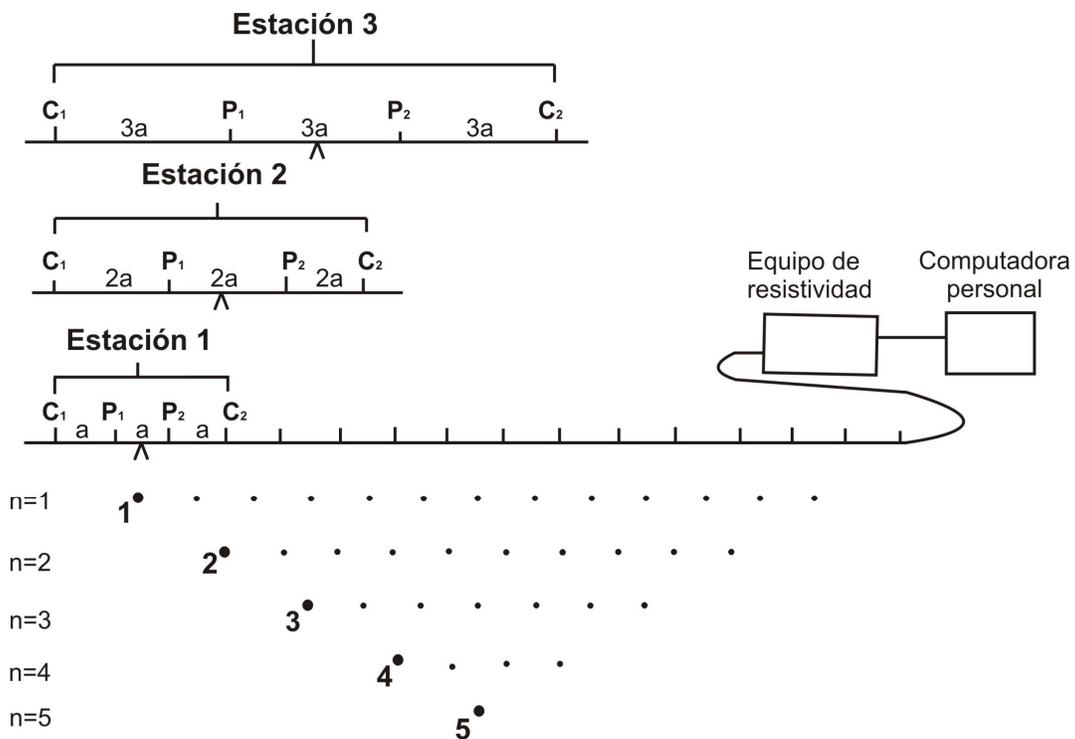


Figura 3.9 Secuencia de mediciones para la construcción de una pseudosección (Loke, 2001).

La inversión de los datos para estimar la resistividad verdadera del subsuelo, se lleva a cabo primero calculando la resistividad aparente, empleando un algoritmo de inversión de elemento finito o de diferencias finitas, lo cual proporciona un modelo de resistividad verdadera bidimensional, conocida como imagen eléctrica, después de esto se selecciona una técnica de optimización no lineal, determinar los elementos de la matriz jacobiana y resolver el sistema de ecuaciones.

De acuerdo con Tejero *et al.*, (2002) se asume un semiespacio homogéneo con una resistividad constante que contiene inhomogeneidades laterales para aproximarse al modelo de la Tierra. El modelo de la Tierra está compuesto por una serie de prismas continuos 2D (dominios). Cada dominio se asume homogéneo e infinito en la dirección y. Para tener una mejor representación de la resistividad lateral a profundidad puede ser obtenida utilizando una malla más fina. Sin embargo, la calidad de las soluciones se ve afectada por la densidad de los datos y los errores medidos.

Uno de los algoritmos más utilizados para determinar la imagen eléctrica fue el desarrollado por Loke y Barker (1995, 1996). Esta técnica está basada en un método de mínimos cuadrados que produce un modelo 2D, libre de distorsiones en la pseudosección de resistividad aparente, ocasionada por el arreglo electródico empleado. La resistividad aparente puede ser expresada en términos de una expansión de Taylor de primer orden como:

$$\rho_{ap} = F(\bar{p}) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial F(\bar{p})}{\partial p_k} \delta p_k \quad (23)$$

Donde  $\bar{p}$  es el vector de parámetros de dimensión M. Por lo tanto, la resistividad verdadera para el k-ésimo prisma es  $p_k$ , y  $F(\bar{p})$  es la función que determina la resistividad aparente. Se define la diferencia entre la resistividad observada y la calculada en el j-ésimo sitio observado de la ecuación (23) como:

$$\delta \rho_{apj} = \rho_{apj}^{obs} - \rho_{apj}^{est}$$

Donde obs es la resistividad observada y est es la estimada. La función del error cuadrático se puede definir como:

$$E^2 = \sum_{j=1}^N \delta\rho_{apj} = \sum_{j=1}^N (\rho_{apj}^{obs} - \rho_{apj}^{est})^2 \quad (24)$$

$$= \sum_{j=1}^N \left( \rho_{apj}^{obs} - F_j(\bar{p}) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_k} \delta p_k \right)^2$$

Donde N es el número de mediciones.

Despejando la función de la ecuación (24), con respecto al vector  $\bar{p}$ , queda:

$$\frac{\partial E^2}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^N \left( \rho_{apj}^{obs} - F_j(p) - \sum_{k=1}^M \frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_k} \delta p_k \right) \left( -\frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_i} \right) = 0 \quad (25)$$

Donde  $i=1, \dots, M$ . La ecuación (25) se define como la ecuación normal, que se puede mostrar de la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^M \delta p_k \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_j} \frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_i} \delta \rho_{apj} \quad (26)$$

La ecuación (26) comúnmente se expresa en forma matricial, la cual es modificada para obtener la solución en términos de  $\delta\bar{p}$ , entonces:

$$\delta\bar{p} = (J^T J + \lambda C^T C)^{-1} J \delta\bar{\rho}_{ap} \quad (27)$$

Los elementos de la matriz Jacobiana definida en la ecuación (27), son de la forma:

$$J_{jk} = \frac{\partial F_j(\bar{p})}{\partial p_k} \quad (28)$$

$\lambda$  en la ecuación (27) es un factor de amortiguamiento, y C es un filtro de achatamiento utilizado para limitar el suavizamiento de las perturbaciones en el modelo para algunos valores constantes.

El método utilizado por Loke y Barker para resolver la ecuación (28), fue utilizando un método llamado por ellos Deconvolución de Mínimos Cuadrados.

El valor de la derivada de la función  $F(\bar{p})$  es la derivada de la función potencial  $U(\bar{r})$  con respecto a la resistividad verdadera de cada prisma.