



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Comparación de Acciones
Sísmicas de Diseño
Considerando Interacción
Dinámica Suelo-Estructura**

TESIS

Que para obtener el título de

Ingeniero Civil

P R E S E N T A

Edgar Jesús Galindo García

DIRECTOR DE TESIS

Agustín Deméneghi Colina



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

Índice

Índice	i
Introducción	1
Objetivo.....	3
Alcances	3
Organización del Trabajo (Resumen).....	4
1 Dinámica de Sistemas Oscilatorios de Un Grado de Libertad (1GDL)	9
1.1 Movimiento Armónico Simple (MAS)	10
1.2 Representación de Oscilaciones Armónicas.....	14
1.2.1 Representación Trigonométrica.....	14
1.2.2 Representación Mediante Números Complejos.....	15
1.2.3 Representación de Otros Parámetros de Desplazamiento	18
1.3 Análisis de Sistemas Osciladores Dinámicos.....	19
1.3.1 Vibraciones Libres	19
1.3.2 Vibración Libre No Amortiguada.....	22
1.3.3 Vibraciones Libres Amortiguadas.....	24
1.3.4 Vibraciones Forzadas por Cargas Armónicas.....	29
1.3.5 Vibraciones No Amortiguadas Forzadas por Cargas Armónicas.....	29
1.3.6 Vibraciones Amortiguadas Forzadas Por Cargas Armónicas.....	32
1.3.7 Vibración en la Base de un Sistema de 1GDL.....	36
2 Propagación de Ondas en un Material Visco-Elástico	38
2.1 Ecuaciones Constitutivas de Un Material Visco-Elástico	38
2.2 Ecuación de Movimiento En Coordenadas Cartesianas	40
2.3 Ecuaciones de Movimiento para el Cuerpo de Kelvin-Voight.....	41
2.4 Ondas P.....	43
2.5 Ondas S.....	44
2.6 Celeridad de ondas de cuerpo.....	44
3 Respuesta Dinámica del Subsuelo	47
3.1 Efectos de sitio	47
3.2 Análisis de respuesta unidimensional del suelo.....	49
3.3 Respuesta de un estrato de suelo uniforme sobre roca rígida	51
3.4 Determinación de los periodos fundamentales de vibración de un estrato de suelo modelado como un cuerpo de Kelvin-Voight sobre roca elástica	53
3.5 Determinación de los periodos de resonancia de suelos estratificados (Método de Zeevaert)	60
3.6 Determinación del periodo fundamental del terreno según las NTC-DS del RCDF.....	64
4 Espectros de Respuesta Elástica	70

4.1	Integral de Convolución o de Duhamel	71
4.2	Espectros de desplazamiento.....	74
4.3	Espectros de velocidad y pseudo-velocidad	74
4.4	Espectros de aceleración y pseudo-aceleración	76
4.5	Espectros de Diseño	77
4.5.1	Espectros de diseño considerados en el MDOC-DS de CFE	77
4.5.2	Espectros de diseño considerados en las NTC-DS del RCDF.....	79
4.5.3	Espectros de diseño considerados en el Anexo A.....	82
4.6	Espectros envolventes de Diseño de Zeevaert.....	82
4.6.1	Espectros envolventes	85
5	Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE).....	89
5.1	Definición del problema	89
5.2	División de las componentes de la IDSE.....	90
5.3	Enfoques de análisis	93
5.3.1	Método directo (<i>Direct approach</i>).....	93
5.3.2	Método indirecto (indirect approach)	96
5.4	Funciones de impedancia dinámica.....	98
6	Método del Anexo A de las NTC-DS del RCDF-2004	101
6.1	Antecedentes históricos del Anexo A de las NTC-DS del RCDF	101
6.2	Modelo completo para las NTC-DS del RCDF del 2004	102
6.3	Oscilador de reemplazo para el modelo completo.....	109
6.4	Periodo y Amortiguamiento para el Modelo Simplificado.....	111
6.5	Funciones de impedancia	115
6.5.1	Analogía del sistema suelo-cimentación con un sistema de 1GDL.....	115
6.5.2	Frecuencias críticas	118
6.5.3	Cimentación tipo cajón	119
6.6	Ductilidad.....	120
6.6.1	Factor de comportamiento sísmico Q	121
6.6.2	Ductilidad efectiva del sistema de reemplazo elastoplástico Q	121
6.6.3	Factor de reducción de resistencia por ductilidad Q'	123
6.6.4	Factor de reducción por ductilidad Q' en suelos blandos.....	126
6.6.5	Factor de reducción por ductilidad efectivo Q'	126
6.7	Reducción por sobrerresistencia, R	127
6.7.1	Máxima deformación inelástica	128
6.7.2	Máxima deformación inelástica efectiva en el contexto de oscilador de reemplazo	128
6.8	Cortante basal	129

7	Ejercicio de aplicación y análisis de resultados	131
7.1	Planteamiento del problema de aplicación	131
7.2	Procedimiento.....	132
7.3	Análisis de resultados	144
8	Conclusiones	156
	Apéndices	I
A.1	Discusiones	I
A.1.1	Sistemas de Múltiples Grados de Libertad (MGDL).....	I
A.1.2	Notación de Esfuerzos	III
A.1.3	Notación de Deformaciones.....	III
A.1.4	Funciones de impedancia del anexo A de las NTC-DS2004	V
A.2	Datos del Planteamiento del Problema de Apliación.....	IX
A.3	Parámetros del ejercicio de aplicación.....	XII
A.4	Espectro de diseño de las NTC-DS-2004.....	XIII
A.5	Cortante basal y fuerzas de entrepiso para el método estático.....	XIV
A.6	Ejemplo: Aplicación del método de Zeevaert.....	XV
A.7	Periodo fundamental por el método del anexo A	XVII
A.8	Periodo fundamental por el método de Zeevaert.....	XVIII
A.9	Funciones de impedancia, periodo y amortiguamiento efectivos para el método del anexo A XX	
A.10	Espectro de diseño del anexo A	XXIV
A.11	Cortante basal y fuerzas de entrepiso para el método del anexo A.....	XXVI
A.12	Funciones de impedancia, periodo y amortiguamiento efectivos para el método de Zeevaert XXVIII	
A.13	Espectros de diseño envolventes de Zeevaert.....	XXXII
A.14	Fuerzas de entrepiso y cortante basal para el método de Zeevaert.....	XXXIV
A.15	Comparación de acciones sísmicas	XXXVI
	Bibliografía	XXXVII

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está dedicado a la memoria de mi abuela paterna: **María Guadalupe Nieves García León**; quien ha estado conmigo y me ha dado fuerza a lo largo de toda mi vida... Descanse en paz.

Tengo mucho que agradecer a todas las personas que me han acompañado y apoyado, principalmente a quienes lo han hecho en el transcurso de esta última década de mi vida.

Quiero primeramente agradecer a mis **sinodales** por darse tiempo para hacer un seguimiento de este trabajo y darme retroalimentación acerca de la mejor forma de proceder en su realización.

Especialmente, quiero agradecer a mi **Director de tesis, el M.I. Agustín Deméneghi Colina**, a quien reconozco indiscutiblemente, como el mejor profesor de la carrera de ingeniería civil en la Facultad de Ingeniería de la UNAM, por su entrega total a su profesión y por hacer sus clases tan interesantes, amenas y sencillas de entender. Agradezco también su calidad humana, su disposición y su paciencia para aclarar mis dudas y las de mis compañeros. Pero principalmente porque durante el tiempo que tardé en desarrollar este trabajo, siempre me recibió con ánimo y calidez. Ha sido un tremendo honor para mí conocerlo y haber aprendido con usted. Agradezco también a **la UNAM** —mi alma mater— por haberme admitido en sus aulas y permitirme vivir la experiencia de ser un puma en desarrollo desde la preparatoria y por abrirme las puertas a todos sus hermosos e inigualables recintos de ciencia, cultura y conocimiento.

A **mi familia**, porque todo lo que he logrado en mi vida lo debo a su apoyo incondicional. A **mi Papá, José Luis Galindo García** y **mi mamá, María Elena García Figueroa**. Sin ustedes literalmente no tendría nada; les agradezco todo su apoyo, comprensión y su paciencia, sobre todo en este último año, que aunque ha sido todo un reto, su ánimo, cariño y perseverancia se han reflejado en mí y me impulsan

hacia adelante. A **mis hermanos** José Iván y María Valeria, por ser mis cómplices de toda la vida, por estar conmigo todo el tiempo y nunca alejarse de mí, por alegrarme y darme ánimo constante, por sus consejos y por nunca perder la fe en mí. A mis **Tíos, primos y sobrinos**, por interesarse en mí e impulsarme a ser mejor cada día, y por el interés que tuvieron en motivarme para que pudiera terminar este trabajo lo antes posible. Quiero hacer un agradecimiento especial a mi primo **Onofre Galindo Huerta** y a mi hermana Valeria, por haber compartido un poco de su conocimiento para que yo pudiera llevar a buen fin mi trabajo de tesis.

A mis amigos: De la universidad, por reiterarme el valor de la amistad y el trabajo en equipo y por todas las amenas veces que pasamos juntos las noches en vela, igual para festejar que para trabajar. A la **B+3**, por acompañarme desde prácticamente toda la vida, cerca o a la distancia, porque siempre me siento acompañado sabiendo que nos recordamos aunque no siempre nos podamos ver. A la **IMK**, porque comparte conmigo el orgullo de ser pumas y egresados de la prepa 9, por todas las divertidas aventuras que vivimos de jóvenes y por todo el tiempo que llevamos unidos. A los **Quetzales**, por permitirme ser parte de su “familia por elección”. En fin, a todas las personas que no nombré explícitamente, pero que en algún momento han tocado mi vida, pues les debo toda mi gratitud y mi amor incondicional pues de cierta forma fueron parte del impulso que me llevó a terminar mi tesis de licenciatura.

Todos ustedes estarán siempre en mi mente y en mi alma...
¡Gracias totales!

Atte: **Edgar Jesús Galindo García**
"Por mi raza hablará el espíritu"
Ciudad Universitaria, UNAM
Abril, 2018

Introducción

En la zona central del eje neovolcánico transmexicano, se encuentra una de las ciudades más grandes del mundo actual. La leyenda de su fundación nos es familiar a todos los mexicanos, pues está plasmada en nuestro escudo nacional. Esta leyenda recuerda que la presente fue construida sobre un inmenso lago desecado, al interior de la cuenca endorreica del valle de México. Su crecimiento, desordenado y progresivo, consecuencia de la explosión demográfica y la insuficiencia de planeación urbana, ha provocado grandes problemas, (como el incremento en la demanda de recursos hídricos, la disminución de áreas naturales protegidas, la contaminación, y en épocas resientes, el incremento de la corrupción y la inseguridad). Éstos y otros más, son estudiados por especialistas de diferentes áreas para proponer soluciones que disminuyan el impacto que tales problemas tienen en la vida de quienes habitan... la gran ciudad de México.

El problema que se aborda en el presente trabajo, a diferencia de los ya mencionados, los cuales son cotidianos, es latente y muchas veces es pasado por alto; pero cuya aparición transitoria puede causar tanto o más daño que el ocasionado por muchos de ellos. El problema de la alta vulnerabilidad sísmica al que la Ciudad de México está sujeta, fue puesto de manifiesto recientemente por el sismo del 19 de septiembre de 2017, y aunque a corto plazo es poco probable que se presente un evento sísmico tan destructivo, no se debe olvidar el riesgo latente al que continúa estando expuesta nuestra ciudad.

La alta intensidad con que los sismos acometen sobre la ciudad de México y sus construcciones, se debe a que ésta se encuentra relativamente cerca de zonas de alta sismicidad; (es decir, zonas generadoras de temblores con un alta tasa de actividad sísmica) y a que está fundada sobre depósitos de arcilla blanda de origen lacustre de espesor considerable, los cuales, a causa de su gran flexibilidad, funcionan como un inmenso filtro acústico que modifica las características de contenido de frecuencias y duración del movimiento del terreno rocoso, así como su amplitud; a esta modificación de las características de la oscilación causada por el sismo, debida al contraste de rigidez entre los depósitos de suelo y el lecho de roca que los subyace, se le conoce como **efectos de sitio**. Aunado a este hecho, la flexibilidad del suelo modifica la forma en que responden las estructuras ante un sismo, o cualquier otra acción dinámica, al mismo tiempo que la estructura modifica la respuesta que tendría el suelo si la estructura no estuviera presente. Al conjunto de efectos que producen que la respuesta de la estructura sea función de la respuesta del suelo, al mismo tiempo que la respuesta del suelo es función de la respuesta de la estructura, se conoce como **interacción suelo-estructura**.

El modelo para análisis sísmico comúnmente empleado para evaluar el orden de magnitud de las acciones que pueden desarrollarse sobre sus elementos durante los sismos que tienen una probabilidad no despreciable de ocurrir a lo largo de la vida útil de la edificación, se elabora bajo la hipótesis de que la estructura está embebida dentro de un medio infinitamente rígido, lo cual sólo es admisible cuando la estructura es soportada por suelo poco flexible. Pero ese no es el caso para la ciudad de México; por lo tanto, al realizar el análisis dinámico de la manera tradicional, se pueden estar cometiendo errores no despreciables en la determinación del orden de magnitud de las acciones para las que se pretende diseñar una estructura. La propuesta que se estudiará para paliar la inexactitud de esta hipótesis es la aplicación de un modelo ligeramente más complejo, que toma en consideración explícita la flexibilidad del suelo, así como la interacción entre el suelo,

la cimentación y la superestructura, como un sistema que es afectado en conjunto por la acción sísmica. La aplicación de este tipo de análisis, es un paso fundamental en la valoración del orden de magnitud de las acciones a las que puede someterse un edificio a lo largo de su vida útil y de este modo, efectuar el dimensionamiento estructural, que dará como resultado, construcciones modernas con un equilibrio racional entre seguridad, funcionalidad y economía.

El diseño sísmico de estructuras es un proceso interactivo que se divide en dos etapas:

1. Análisis de las fuerzas internas que se desarrollan en los elementos de la configuración estructural, apropiadamente seleccionada en función del tipo de cargas que deba soportar y el uso al que se vaya a destinar
2. Dimensionamiento de los elementos estructurales para que sean capaces de comportarse mecánicamente como fue previsto en la fase de análisis

En el presente trabajo se realiza el análisis sísmico, sin llegar a la fase de dimensionamiento, con el fin de realizar una comparativa, tomando como variables de control las ordenadas espectrales, los cortantes basales y las fuerzas de entrepiso, determinadas mediante los métodos del anexo A de las NTC-DS y el método de Zeevaert que toman explícitamente en cuenta la flexibilidad del suelo, y las que se determinan por el método convencional de análisis sísmico, mediante el método estático de las NTC-DS, que considera a la estructura soportada en una base rígida, pero admitiendo implícitamente los efectos de sitio conforme a la regionalización sísmica de la cuenca.

El método del anexo A y el método de Zeevaert, toman explícitamente en cuenta la flexibilidad del suelo, mediante el modelo del oscilador de reemplazo, que es un oscilador de 1GDL soportado sobre base rígida, que representa las características dinámicas de la estructura analizada, vibrando en su modo fundamental de vibración sobre un depósito de suelo flexible. Por lo que se incrementa el periodo y amortiguamiento efectivos de dicho oscilador con respecto a los que tendría la estructura si estuviera soportada en una base rígida. Se considera además el efecto de la ductilidad estructural; sin embargo, como el oscilador de reemplazo representa la flexibilidad en serie del suelo y la estructura, y puesto que para fines de diseño el suelo no debe tomar deformaciones inelásticas, el valor de la ductilidad en el oscilador de reemplazo es menor que en la estructura. Por otra parte, la reducción de las fuerzas sísmicas por ductilidad, que se ve afectada por los efectos de sitio, pero no por los de IDSE, depende de la relación entre el periodo fundamental de la estructura y el del suelo.

Como el método de Zeevaert no contempla una metodología para determinar las funciones de impedancia dinámica, ni el grado de amortiguamiento admisible, ni la reducción de las acciones sísmicas por efectos de la ductilidad estructural, en este trabajo se utiliza el mismo proceso que se establece para el método del anexo A. Ello se justifica porque ambos métodos ocupan el modelo del oscilador de reemplazo. Debido a esto, la diferencia entre el método del anexo A y el método de Zeevaert se limita a la forma en que se determinan las características dinámicas fundamentales del depósito de suelo blando (el método del anexo A utiliza el método de Gómez, basado en el cociente de Rayleigh, según una formulación energética y el método de Zeevaert emplea un método desarrollado por el mismo autor, basado en la compatibilidad de distorsiones). Además, ambos espectros de diseño, los establecidos por el anexo A y los del método de Zeevaert, toman en cuenta el periodo fundamental del suelo, la aceleración máxima en la superficie del terreno, el incremento del amortiguamiento estructural por efectos de la IDSE y la reducción de las ordenadas espectrales por efecto de la ductilidad estructural, pero son distintos entre sí.

El método estático y el método del anexo A, son procedimientos estándar estipulados por la reglamentación oficial, mientras que el análisis por el método de Zeevaert representa un procedimiento alternativo, que redundará en una mayor seguridad estructural y un mayor costo de la edificación, si sus resultados son mayores a los establecidos por la normatividad oficial, pero será poco conservador y más económico, si las acciones determinadas fueran menores a las marcadas por la normatividad oficial.

Objetivo

OBJETIVO GENERAL

- ✓ Observar la variación de las acciones de diseño que se obtienen al realizar un análisis sísmico, considerando los efectos de la flexibilidad del suelo que la soporta y la interacción entre el suelo y la estructura, y deducir en qué casos es importante contemplar tales efectos para su diseño óptimo.

OBJETIVOS PARTICULARES

- ✓ Describir los principios esenciales en que se fundamenta la dinámica estructural y la dinámica de suelos.
- ✓ Presentar una visión de conjunto de los conceptos en que se basa el análisis sísmico considerando la interacción suelo-estructura, así como la importancia que tiene este efecto en el estudio de edificaciones sujetas a cargas dinámicas.
- ✓ Exponer los principios en que se basó el doctor Leonardo Zeevaert para el desarrollo del método que se aplicará al problema específico de la tesis.
- ✓ Exponer los principios en los que se basaron los doctores Javier Avilés y Eduardo Pérez-Rocha en el desarrollo del método del anexo A de las NTC-DS, que se aplicará al problema específico de la tesis.
- ✓ Desarrollar un problema específico, a guisa de ejercicio de aplicación, empleando los métodos de Zeevaert y del anexo A de las NTC-DS, para comparar los resultados así obtenidos, con los derivados de la aplicación del método de análisis estático convencional, del cuerpo principal de las NTC-DS.
- ✓ Explicar, al respecto del punto anterior, en qué casos es oportuno utilizar cada uno de los métodos aplicados y justificar la razón de que así sea.

Alcances

Este trabajo describe los conceptos básicos de la dinámica de vibraciones y de la IDSE, así como el cálculo y comparación de las ordenadas espectrales, cortante basal y las fuerzas de entrepiso, (como variables de control) que se determinan conforme a los dos métodos en estudio (método del anexo A de las NTC-DS y el método de Zeevaert) que toman explícitamente en cuenta los efectos de la flexibilidad del suelo (efectos de sitio y de IDSE), en contraposición al método estático, que considera implícitamente los efectos de sitio y no contempla los efectos de IDSE, por lo que fungirá como experimento testigo, para finalmente comentar los resultados obtenidos.

En los tres métodos se admite el teorema de superposición de causas y efectos; es decir, son métodos lineales, así que la ductilidad estructural, por ser un efecto no lineal, se toma en cuenta a partir de la reducción de las ordenadas espectrales correspondientes. Los efectos de sitio se admiten mediante una modificación de las ordenadas espectrales en función del periodo

fundamental del terreno y los efectos de la IDSE se evalúan a través la reducción de las ordenadas espectrales causada por el incremento del amortiguamiento estructural y con el alargamiento del periodo fundamental de vibración de la estructura.

Se espera que este trabajo funcione como documento de consulta para alumnos de licenciatura, especialidad o maestría, que quieran tener a la mano un texto introductorio y de fácil asimilación a los conceptos básicos de la dinámica estructural y dinámica de suelos, así como de los conceptos elementales de mecánica de vibraciones en los que se basa el análisis sísmico de estructuras en general, y en particular del análisis de interacción dinámica suelo-estructura. Por esta razón los primeros capítulos de la tesis, son un resumen de los conceptos fundamentales que se deben conocer para poder introducirse en la materia, por lo que se espera que las personas con poco o ningún conocimiento previo sobre el tema tengan la posibilidad de estudiarlo sin ningún problema.

Organización del Trabajo (Resumen)

Este trabajo se divide en 8 capítulos de los cuales: los primeros 4 están relacionados con los conceptos fundamentales de la dinámica estructural y dinámica de suelos que son necesarios para que un alumno de nivel licenciatura, de la carrera de ingeniería civil, comprenda cabalmente las implicaciones de los efectos de IDSE. La segunda parte del capítulo 4 y los capítulos 5 y 6 Definen los efectos de IDSE y exponen la forma en que se incluyen en el análisis sísmico convencional y su correlación con otros efectos sísmicos que deben ser considerados en este análisis. Finalmente, el capítulo 7 es un ejercicio de aplicación que contiene además el análisis de los resultados que ahí se obtienen, mientras que en el capítulo 8 se exponen las conclusiones que se consiguen al elaborar este trabajo.

En el [CAPÍTULO 1](#), titulado "Dinámica de sistemas oscilatorios de un grado de libertad (1GDL)", se exhibe la notación matemática usada comúnmente en la representación del movimiento armónico simple (MAS) de un oscilador de 1GDL que pertenece a un medio y se utiliza la analogía con la notación matemática empleada para representar el movimiento circular uniforme (MCU) de una partícula que gira alrededor de un eje, para esclarecer los distintos modos de representación del movimiento armónico simple; a saber: representación trigonométrica, representación compleja y representación vectorial. También se Expone el concepto de medio de una onda mecánica y presenta una analogía con el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) de una rueda que gira sin deslizar, para distinguir la diferencia entre velocidad de oscilación de una partícula del medio y celeridad de propagación de una onda que se extiende a través de las partículas de todo el material, para deducir que la ecuación de movimiento de una onda es función del tiempo y de su posición en el espacio. La discusión del tema de la propagación de onda se profundiza en el capítulo 2 de este trabajo. Al final, mediante el análisis de la vibración de osciladores de 1GDL se exponen los conceptos fundamentales relacionados con la mecánica clásica, en que se sustenta la dinámica tanto de suelos como de estructuras. Ello representa el punto de partida para comprender conceptos más específicos que se exponen en los siguientes capítulos. Para complementar lo anterior, el [APÉNDICE A.1.1](#) de este trabajo es una extrapolación de los conceptos definidos en el primer capítulo al análisis de sistemas con múltiples grados de libertad (MGDL).

En el [CAPÍTULO 2](#), titulado "Propagación de ondas en un material visco elástico" se reconoce que los materiales geológicos que estudia la dinámica de suelos, por su naturaleza, difieren de sus contrapartes estructurales, pues mientras que la mayoría de las estructuras puede ser fácilmente idealizada por un conjunto de masas discretas con fuentes discretas de rigidez, los materiales

geológicos no lo permiten. Por tal razón, estos últimos deben ser tratados como un medio continuo y su respuesta a perturbaciones dinámicas debe ser estudiada en el contexto de la propagación de ondas.

En el capítulo anterior se presentó someramente la definición de medio de una onda mecánica y su celeridad de propagación, pero aquí se hace énfasis en el comportamiento flexible de tal medio y de las distintas leyes reológicas que representan su respuesta ante cargas dinámicas, centrándose especialmente en la definición de las ecuaciones constitutivas que representan el comportamiento de un cuerpo viscoelástico (cuerpo de Kelvin-Voight). En pos de la simplicidad del contenido de este capítulo, los [APÉNDICES A.1.2 Y A.1.3](#) brindan un repaso de las notaciones de esfuerzos y deformaciones utilizadas en el estudio de la mecánica del medio continuo, que sirven de suplemento en las formulaciones matemáticas de los conceptos definidos. Además se emplea la fórmula de la segunda ley de Newton en función de la variación de momentum, para igualar las fuerzas inerciales que son función de la masa del sistema, con las fuerzas externas que se ejercen por la propagación de la onda a través de un elemento diferencial de volumen, y así definir las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas de una onda que transita al interior de un cuerpo. Esta ecuación de movimiento es una condición de equilibrio que se debe cumplir independientemente de las leyes reológicas que rigen el comportamiento del medio continuo, homogéneo e isótropo; sin embargo, se considera que el material es puramente elástico para definir los dos tipos de ondas de cuerpo que existen; es decir, las ondas que producen una deformación volumétrica o isótropa, con movimiento de las partículas del medio en dirección de la propagación de onda, que por ser las más rápidas se conocen como ondas primarias u ondas P, y las que producen una deformación desviadora o de cizalla a volumen constante, con desplazamiento de partículas en dirección transversal a la dirección de propagación de onda, que por ser más lentas que las ondas P se conocen como ondas secundarias u ondas S. Finalmente, se utiliza la definición de onda estacionaria para formular las ecuaciones para obtener la celeridad de ondas P y ondas S, así como la relación que existe entre ellas y los parámetros intrínsecos del medio (como su densidad, rigidez y relación de Poisson).

En el [CAPÍTULO 3](#), titulado "Respuesta dinámica del subsuelo" se muestra que las intensidades máximas probables que se presentan en un sitio específico para un periodo de retorno dado, siguen una ley de atenuación, que entre otros factores, depende de la distancia del sitio a las fuentes generadoras de temblores. Sin embargo, cuando el suelo local es muy blando, llegan a suscitarse intensidades excepcionales que no concuerdan con la ley de atenuación normal en función de la distancia; por lo que se introduce el concepto de efectos de sitio. Estos son representados por la función de transferencia entre la superficie y el lecho de roca que lo subyace. La cual se determina analíticamente mediante el modelo unidimensional de propagación de ondas, al interior de un medio homogéneo caracterizado por dos parámetros: el periodo fundamental del depósito de suelo blando (T_s) y la celeridad de propagación de ondas S (C_s) a través del mismo. Este modelo se emplea en el análisis unidimensional de la respuesta de un estrato de suelo en el [CAPÍTULO 7](#), para describir tanto la amplificación dinámica del movimiento sísmico causado por los efectos de sitio, como para determinar las funciones de impedancia que rigen el comportamiento de la interfaz cimentación-estructura.

Posteriormente se evalúa la función de transferencia de dos modelos, el primero, un estrato homogéneo elástico soportado sobre un lecho de roca que se comporta como un elemento rígido. Con éste se presenta la obtención de los periodos fundamentales de los modos de vibrar del

depósito de suelo blando. El segundo es el modelo de un depósito de suelo que se comporta como un cuerpo de Kelvin-Voight, mientras que el lecho de roca se supone perfectamente elástico. A partir de este modelo se presenta la influencia del amortiguamiento en la disipación de la energía transmitida hacia la superficie del terreno y se distingue entre amortiguamiento material, por radiación y geométrico, para apreciar su influencia en el análisis unidimensional. Finalmente se presenta el método de Zeevaert, que es un método basado en la compatibilidad de deformaciones para determinar los parámetros T_s y C_s de un depósito de suelo estratificado, que servirá para representar el depósito de suelo homogéneo equivalente que se utilizará en el ejercicio de aplicación del [CAPÍTULO 7](#). Además se estudia el método de Gómez, que está basado en una formulación energética, que recurre al cociente de Rayleigh para aproximar el periodo fundamental del terreno. Empero, si con este valor se pretende obtener la celeridad de ondas S del manto de suelo homogéneo equivalente, al ser una formulación energética, pueden deducirse valores de celeridad que estén fuera del intervalo en que varían las de la estratigrafía. Este método es el prescrito por el anexo A de las NTC-DS del RCDF-2004, por lo que también se usa en el [CAPÍTULO 7](#) para modelar la masa de suelo homogéneo equivalente.

En el [CAPÍTULO 4](#), titulado "Espectros de respuesta elástica" se comenta la diferencia entre dos formas de representación gráfica usuales en el análisis de un sistema dinámicamente excitado; a saber: historia de respuesta y espectro de respuesta. Luego se explica la importancia de la integral de Duhamel en la determinación analítica o numérica, de los espectros de respuesta a partir de la historia de excitación en la base, y se desarrollan matemáticamente las expresiones para el cálculo de: desplazamiento relativo espectral, velocidad relativa espectral y aceleración total espectral. Además, se discuten los conceptos de pseudo-velocidad relativa espectral y pseudo-aceleración total espectral, así como su relación con el desplazamiento relativo espectral.

Después de estudiar los diferentes espectros de respuesta causados por un evento sísmico específico, se define el espectro de diseño, que es utilizado en el análisis y diseño de estructuras, por ser una representación "suavizada" de varios espectros de respuesta representativos del comportamiento dinámico de la zona. A continuación se estudia el procedimiento de construcción de los cuatro principales espectros de diseño aplicables a estructuras soportadas en el suelo blando de la CDMX y los parámetros que intervienen en dicha construcción. Los dos primeros (Los del MDOC-DS de la CFE y los del cuerpo principal de las NTC-DS), se comparan entre ellos y con la envolvente suavizada de espectros de respuesta representativos de la sismicidad real de los depósitos blandos de la cuenca del valle de México. Los otros dos (los del anexo A de las NTC-DS y los espectros envolventes de Zeevaert), que consideran explícitamente la influencia del periodo fundamental de vibración del depósito de suelo blando, se emplearán en esta tesis para el desarrollo del ejercicio de aplicación del [CAPÍTULO 7](#).

En el [CAPÍTULO 5](#), titulado "Interacción Dinámica Suelo-Estructura", se presentan los conceptos que componen el marco teórico del tema neurálgico de este trabajo. Comenzando por la definición de problemas de interacción suelo-estructura (ISE) y Planteando la distinción entre los problemas estáticos (IESE) y dinámicos (IDSE). A continuación, se reseña la clasificación de los efectos más importantes a considerar durante el estudio de los problemas de IDSE: los efectos cinemáticos, nombrados así porque dependen de la rigidez de la estructura y son independientes de su masa, y los efectos inerciales, llamados a propósito de estudiar las fuerzas inerciales desarrolladas por la estructura al interactuar con el suelo flexible que la soporta. Posteriormente se presentan los dos enfoques para el análisis de los problemas de IDSE: el método Directo y el método indirecto

o de subestructura, prestando atención a puntos clave, como la definición de elementos de frontera, indispensables para el buen funcionamiento de un modelo desarrollado bajo el método directo, o las funciones de impedancia, que se utilizan cuando se modela la respuesta del sistema recurriendo al método indirecto. Además se soslaya un tercer enfoque, conocido como método del macro-elemento, que continúa en desarrollo, por lo que sólo se insinúa someramente.

En el [CAPÍTULO 6](#), titulado "Método del anexo A de las NTC-DS del RCDF-2004", se realiza primeramente una reseña histórica del anexo A, que ha sido desarrollado con el fin de tomar explícitamente en consideración los efectos de la flexibilidad de suelo (efectos de sitio y efectos de IDSE). Posteriormente se estudia a detalle el modelo del oscilador de reemplazo sobre base rígida que representa las características fundamentales del sistema acoplado de parámetros discretos simplificado, que se utilizará al desarrollar el método de Zeevaert y el método del anexo A de las NTC-DS en el ejercicio de aplicación del [CAPÍTULO 7](#). Para obtener las funciones de impedancia dinámica que representan la flexibilidad del suelo en el modelo de parámetros discretos simplificado, en este capítulo se presenta el procedimiento estipulado por las NTC-DS para su valoración.

Puesto que en análisis sísmico es necesario considerar la ductilidad y la sobrerresistencia estructural en el estado límite de falla ante el sismo de diseño, se estudia la forma en que tales efectos son tomados en consideración dentro del contexto del oscilador de reemplazo sobre base rígida. Finalmente se presenta el concepto de factor de interacción que se utiliza para calcular la respuesta del oscilador de reemplazo sobre base rígida, que toma en cuenta los efectos de IDSE, a partir de la estructura supuesta sobre base rígida analizada por el método estático, que forma parte del cuerpo principal de las NTC-DS.

En el [CAPÍTULO 7](#) titulado "ejercicio de aplicación y análisis de resultados", se aplica la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, con el fin de calcular la ordenada espectral, el cortante basal y las fuerzas de entrepiso (variables de control), a partir de una estructura tipo, según el método estático (ME) del capítulo 8 de las NTC-DS, que se comparan con las determinadas al aplicar las modificaciones estipuladas por el anexo A de las mismas normas (MA), y con las obtenidas al aplicar el método de Zeevaert (MZ). Como el ME no admite los efectos de la IDSE y sólo admite implícitamente los efectos de sitio, funcionará como experimento testigo, marcando las acciones sísmicas que la legislación oficial exige para la evaluación de la resistencia requerida por una estructura, para ser juzgada razonablemente segura ante las sollicitaciones sísmicas a las que se puede ver expuesta durante su vida útil.

Dentro de las modificaciones al modelo causadas por la flexibilidad de la base de la estructura que incluyen los métodos MA y MZ están: el incremento del periodo efectivo de vibración de la estructura ($T_e < \widetilde{T}_e$) y del amortiguamiento efectivo ($\xi_e < \widetilde{\xi}_e$), la reducción del valor del factor de comportamiento sísmico ($Q < \widetilde{Q}$), así como la modificación de los valores del factor de reducción por ductilidad de las fuerzas cortantes ($Q' \neq \widetilde{Q}'$), que sucede por efectos de sitio, independientemente de que se admitan o no los efectos de la IDSE, cuando el periodo de la estructura es parecido al del sitio ($T_e / T_s < 2$).

Con el cortante basal calculado, se deduce el factor de interacción para el MZ y el MA, y se determina la distribución de las fuerzas de entrepiso para los tres métodos. Finalmente, se comparan entre sí los resultados obtenidos para los métodos MA y MZ, con los del ME, para

concebir conclusiones al respecto. Con este fin, se admite que la estructura puede ser considerada elástica (E) o dúctil (D) y que el oscilador puede representar a la estructura vibrando en su modo fundamental de vibración sobre base rígida (BR), considerando implícitamente los efectos de sitio, o puede considerarse el oscilador de reemplazo que representa al modelo acoplado (IDSE), que admite explícitamente los efectos de sitio y de la IDSE. De modo que se obtienen cuatro combinaciones del comportamiento del modelo de la estructura y su base: estructura elástica sobre base rígida (BR-E), estructura dúctil sobre base rígida (BR-D), estructura elástica que considera los efectos de la flexibilidad del suelo (IDSE-E) y estructura dúctil que considera los efectos de la flexibilidad del suelo (IDSE-D). Estas cuatro combinaciones se utilizan para clasificar los resultados de los métodos MA, MZ y ME, de manera que sea fácil identificar a qué comportamiento se refiere cada uno de ellos y así poder ordenarlos para entender mejor sus implicaciones.

En el **CAPÍTULO 8** titulado "Conclusiones" se resumen las ideas fundamentales de los capítulos que componen el marco teórico y se presentan las conclusiones que resultan de confrontar la teoría con los resultados del ejercicio de aplicación.

A raíz del sismo del 19 de septiembre de 2017 que provocó daños principalmente en la zona sur de la CDMX y en la zona metropolitana, se aceleró la publicación de la nueva versión de las NTC, entre las que se encuentran las relacionadas con el diseño sísmico. Es importante señalar que esta nueva versión no se desarrolló como una serie de normas de emergencia, sino que ya se tenía proyectada desde hacía casi 4 años, pues ya desde el año 2014, a 10 años de su última modificación y debido a la celeridad del avance tecnológico, se detectó la necesidad de su renovación. Esto se corrobora porque la versión actualizada del reglamento de construcción se publicó en la Gaceta Oficial de la Ciudad de México el día 20 de noviembre del 2017 y por ende se asevera que el sismo sólo fue un catalizador para su actualización.

A diferencia de la variación poco significativa que habían tenido las NTC-DS en su versión 2004, con respecto a sus antecesoras de 1993, en esta ocasión los cambios en el formato y los criterios de diseño se transformaron radicalmente y no pueden pasar desapercibidos. Debido a lo anterior, y dado que el planteamiento y elaboración de este trabajo se verán afectados por dichas modificaciones, se presenta en el apéndice A.1.5 de este trabajo la sinopsis de las reformas más prominentes y se ponderan sus repercusiones. Igualmente, se aclara que en el subcapítulo 4.5 se utilizó la versión del MDOC-DS del 2008 que fue actualizado en el año 2015. Con todo, las actualizaciones que surgieron fueron más centradas en la modificación de la base de datos de los coeficientes sísmicos que se obtienen de la aplicación PRODISIS, dejando constatare el procedimiento de construcción del espectro de diseño, mismo que se mantiene como un espectro transparente que se modifica por los mismos coeficientes que se enumeran en el subcapítulo 4.5 para obtener el espectro de diseño. Además, se utilizó la parte de comentarios del MDOC-2008 para la definición de algunos conceptos y comprobación de fórmulas que también permanecen independientes del desarrollo de nuevas tecnologías o procesos constructivos.

1 Dinámica de Sistemas Oscilatorios de Un Grado de Libertad (1GDL)

Con el propósito de conocer los conceptos básicos de la dinámica de vibraciones que son indispensables para el estudio tanto de la dinámica estructural como de la dinámica de suelos, a continuación se presenta el estudio de un sistema oscilatorio discreto de 1GDL. Así, en el [APÉNDICE A.1.1](#), se hace una transición natural al caso de un sistema de múltiples grados de libertad (MGDL).

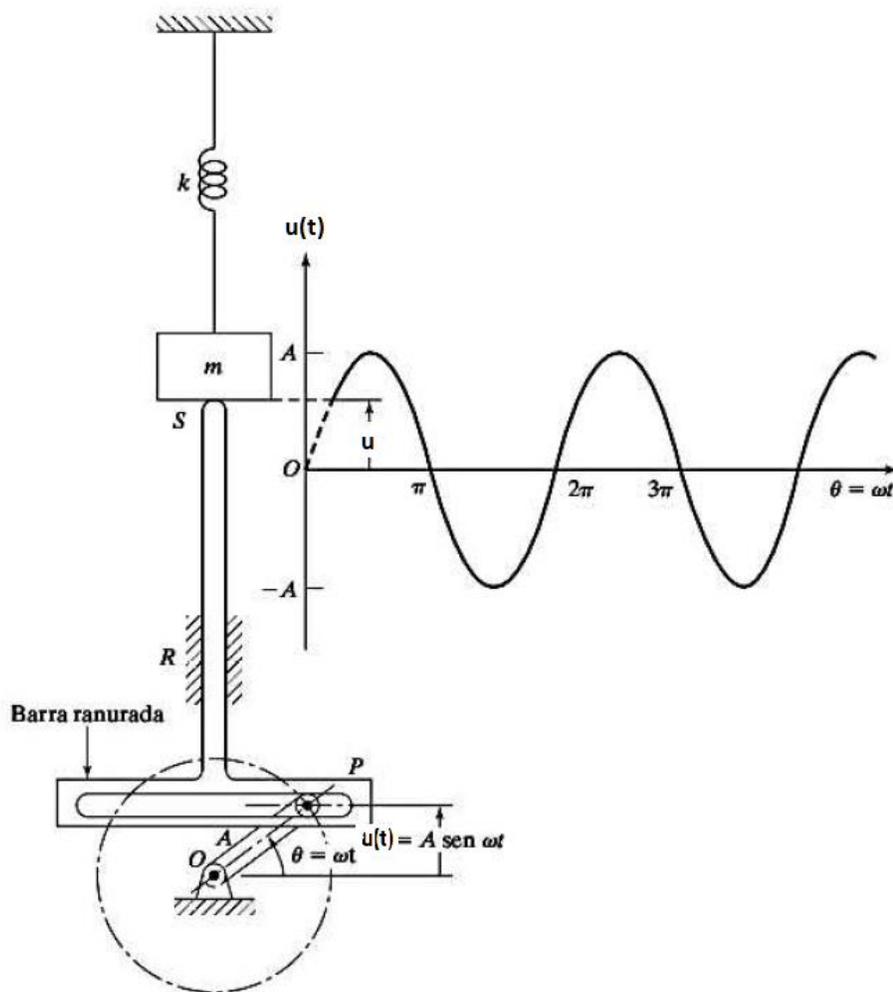


Figura 1.1: Mecanismo de yugo escocés (Singiresu, 2012)

Un sistema se mueve con un grado de libertad cuando en un instante cualquiera, su configuración deformada está determinada por un solo parámetro, el cual es función del tiempo (Colindares, 1983). En consecuencia con esta definición, en el sistema de un grado de libertad es posible un modo de vibrar, en el de dos grados de libertad son posibles dos modos de vibrar y el de n grados de libertad, tendrá n modos de vibrar. A un sistema cuya deformada está dada por una cantidad de parámetros n que tiende a infinito, se considera que es un sistema continuo, en vez de uno discreto, por lo que la deformada de este tipo de sistemas estará dada por la ecuación de la elástica en función del tiempo (ver SUBCAPÍTULO 2.2).

1.1 Movimiento Armónico Simple (MAS)

El movimiento oscilatorio puede repetirse con regularidad como en el caso de un péndulo simple, o desplegar una irregularidad considerable, como en el caso del movimiento de la tierra durante un sismo (Singiresu, 2012). El tipo de movimiento oscilatorio más sencillo sucede cuando la fuerza de restitución F_x es directamente proporcional al desplazamiento δ_x con respecto al equilibrio, según la **EC. 1.20: LEY DE HOOKE**. Si esto sucede, la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, que se abrevia MAS (Young & Freedman, 2009).

Independientemente del tipo de vibración de que se trate, Todos los fenómenos de oscilatorios tienen una característica común, la cual es muy interesante: la capacidad de ser representados como la sumatoria de una serie infinita de funciones armónicas conocida como serie de Fourier (ver (Kramer, 1996)) y conformado así una **combinación lineal** de funciones, que hacen las veces de vectores, los cuales al ser multiplicados por sendos escalares y sumados entre sí, dan como resultante la función desplazamiento de interés.

Una **función armónica**, es aquella por medio de la cual se describe el desplazamiento de un oscilador de 1GDL que vibra con MAS. Es representada gráficamente por un desplazamiento sinusoidal a una frecuencia constante. Sus características más significativas, pueden ser definidas por tres cantidades: amplitud (A), frecuencia angular (ω) y ángulo de fase (ϕ). Estas tres características serán definidas a continuación con ayuda de la analogía entre el **movimiento armónico simple (MAS)** y el **movimiento circular uniforme (MCU)**.

En la **FIGURA 1.1**, se muestra un mecanismo de yugo escocés. En la parte inferior de esta figura, podemos observar una barra de longitud A , que gira alrededor del punto O . En el extremo contrario, vemos la manivela P , que se desliza dentro de la barra ranurada del eslabón, cuyo eje vertical describe un movimiento de vaivén, dirigido por la guía vertical en R . Cuando la manivela de longitud A , se mueve con MCU a una velocidad ω , Entonces el extremo S del eje vertical del eslabón jala y empuja la masa m , que se mueve con MAS, desplazándose de su posición media una distancia u en el tiempo t , dada por la función:

$$u(t) = A \cdot \sin(\theta) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.1}$$

Este movimiento, se muestra por medio de la curva sinusoidal en la **FIGURA 1.1**. De esta manera, la velocidad de la masa m en función del tiempo estará dada por:

$$\frac{du(t)}{dt} = \dot{u}(t) = \omega A \cdot \cos(\omega t) \quad \text{Ec. 1.2}$$

Su aceleración en cambio, se expresa como:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = \ddot{u}(t) = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.3}$$

Es importante observar que:

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 \cdot u(t)$$

Es decir, la aceleración es directamente proporcional al desplazamiento y siempre tiene dirección hacia la posición media. Una vibración con esas dos características, es congruente con la definición

previamente dada del MAS, ya que si la masa se mantiene constante y la magnitud de la fuerza es proporcional al desplazamiento, la magnitud de la aceleración, también lo es.

De regreso a la FIGURA 1.1, observamos que el círculo que dibuja el punto P al desplazarse, de modo que la componente del desplazamiento proyectada sobre el eje vertical, coincide con el desplazamiento de la masa m , se denomina **círculo de referencia**. En un instante de tiempo t , el vector \overline{OP} del origen al punto de referencia P , forma un ángulo θ con el eje $+x$. Al girar P en el círculo de referencia con rapidez angular constante ω , el vector \overline{OP} gira con la misma rapidez angular. Un vector giratorio así definido se denomina **fasor**.

El módulo del vector fasor es igual al radio del círculo de referencia, que a su vez es igual a la amplitud del movimiento oscilatorio de la masa m y que se distingue en la FIGURA 1.1 por la letra A . En sí, la **amplitud** se define como el desplazamiento máximo desarrollado por el oscilador armónico, es decir, la masa m , con respecto a la posición media de desplazamiento, esta última coincide para todos los tipos de osciladores armónicos con la posición de reposo inicial.

El tiempo en el que el fasor da una revolución completa, es decir 2π radianes, se llama en el MCU, **velocidad angular**, se mide en radianes por segundo y se representa con la letra ω . Su análogo en el MAS, es conocido como **frecuencia angular**; a diferencia de la velocidad angular, se define como la razón en radianes por segundo en que el oscilador armónico completa un ciclo de vaivén completo. Por ser análogo a la velocidad angular, es igualmente representado por la letra ω y al ser multiplicado por 2π radianes da la **frecuencia lineal**, comúnmente representada por la letra f , la cual es la razón a la cual vibra el oscilador armónico en unidades de ciclos por segundo (Hz).

En la FIGURA 1.1 se puede observar que si el ángulo θ que forma el fasor con el eje $+x$ es cero, la historia de desplazamientos, es decir la gráfica $u(t)$ vs t del MAS, inicia en el origen, por lo que el ángulo $\theta = \omega \cdot t$, como lo indica la EC. 1.1. Sin embargo, Cuando existe un desplazamiento angular inicial entre el fasor y el eje $+x$ al inicio de la historia de desplazamientos, se dice que hay un desfase en la gráfica sinusoidal, que se considera positivo si el desplazamiento inicial es positivo, y negativo cuando el desplazamiento inicial es negativo. En este caso, el ángulo debe ser corregido por $\theta = \omega \cdot t + \phi$. En la FIGURA 1.2 se muestra la influencia del ángulo de fase ϕ en el desplazamiento de la gráfica sinusoidal.

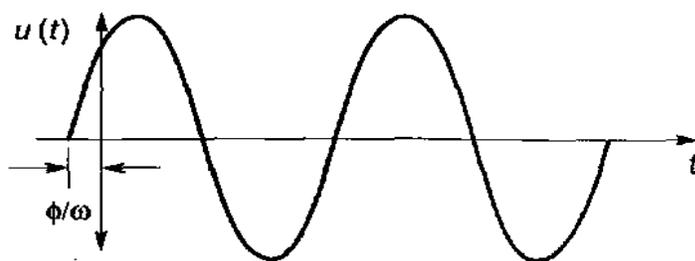


Figura 1.2: influencia del ángulo de fase en la posición de la gráfica sinusoidal (Kramer, 1996).

Por consiguiente, el **ángulo de fase** ϕ en MAS, se define como el coeficiente de desfaseamiento de la gráfica sinusoidal con respecto al origen del plano cartesiano. Mientras que para el MCU, el ángulo de fase ϕ es el desplazamiento inicial del fasor a partir del eje horizontal en coordenadas polares, antes de que se inicie el MCU.

Una **onda mecánica** (*mechanic wave*)¹ es una perturbación que viaja por un material al que se denomina medio de la onda. Al viajar por el medio, las partículas que lo constituyen, se desplazan con MAS a partir de su posición de equilibrio estático, ya sea en la misma dirección en que se propaga la onda (**ondas longitudinales**) o en algún sentido ortogonal a la dirección de propagación de dicha onda (**ondas transversales**) (ver FIGURA 2.3).

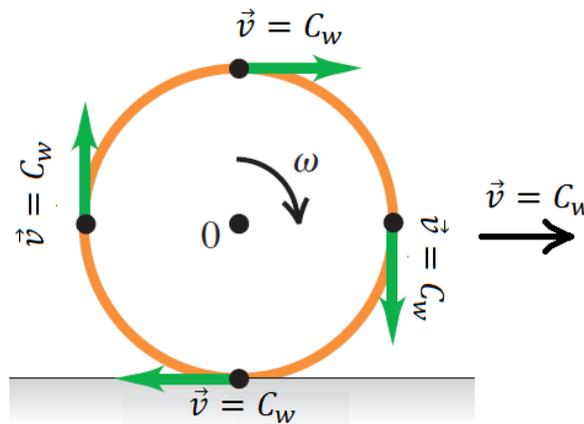


Figura 1.3: rotación de una rueda en torno a su centro de masa rodando sin deslizamiento. La celeridad del borde debe ser igual a la celeridad del centro de masa. (Young & Freedman, 2009).

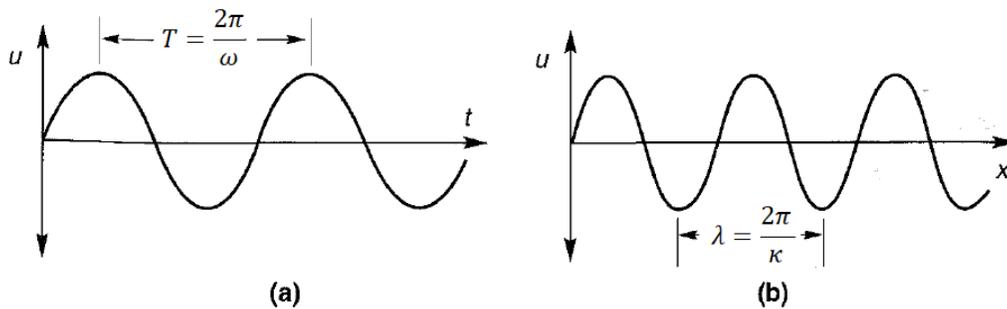


Figura 1.4: Desplazamiento de una onda. A) Como función del tiempo. b) Como función de la posición a lo largo de un eje. (Kramer, 1996)

Cuando se estudia el MAS de una partícula —perteneciente al medio por el que transita una onda— como si se tratara de un oscilador de 1GDL, se determina la velocidad con que oscila tal partícula, $\dot{u}(t)$. En cambio, si se desea estudiar la velocidad con que se propaga la onda a través de las

¹ No todas las ondas son mecánicas. Las ondas electromagnéticas —que incluyen la luz, las ondas de radio, las radiaciones infrarrojas y ultravioleta, y los rayos X— pueden propagarse incluso en el espacio vacío, donde no hay un medio.

partículas del medio, entonces se determina la celeridad de onda (C_w). En consecuencia, el estudio se relaciona con el **movimiento rectilíneo uniforme (MRU)** con que avanza el frente de la onda dentro del medio. (Ver FIGURA 1.3).

Para estudiar la propagación del frente de onda como la relación entre movimiento circular uniforme (MCU) del vector fasor y movimiento rectilíneo uniforme (MRU) con que se propaga la perturbación, en base a la analogía entre MCU Y MAS de la FIGURA 1.1, se puede imaginar al círculo equivalente como una rueda de radio A y velocidad angular ω que rueda sin deslizarse, con una celeridad lineal C_w , que viaja sobre una línea recta, como se ve en la FIGURA 1.3, de donde se desprende que la celeridad es igual a la distancia recorrida por el círculo de referencia, al dar una revolución completa, en un periodo de tiempo T .

$$C_w = A \cdot \omega \quad \text{Ec. 1.4}$$

La celeridad con que se desplaza el círculo equivalente sobre dicha recta, se conoce como **celeridad de propagación de onda**, que es la magnitud escalar de la velocidad con que se mueve la onda en una dirección dentro del medio.

Por otra parte, la longitud recorrida por el círculo de referencia al girar una revolución completa con MCU, es igual al perímetro de dicho círculo. Análogamente, en el MAS, sería la distancia que una onda recorre en un lapso de tiempo $T = 2\pi/\omega$, igual al periodo de onda.

$$\lambda = 2\pi A \quad \text{Ec. 1.5}$$

A esta distancia se le llama **longitud de onda**² (λ), y es igual a la distancia entre dos crestas o dos valles continuos, cuando se grafica la configuración deformada del medio sobre la dirección de transmisión de tal perturbación ($u = f(x)$). (Ver FIGURA 1.4.B)

Si el periodo de onda (T) es la distancia entre dos crestas o dos valles consecutivos, cuando se grafica la amplitud de la onda en función del tiempo ($u = f(t)$), y si la longitud de onda (λ) tiene el mismo significado cuando la amplitud de onda se grafica en función de la posición a lo largo de la trayectoria de propagación de la misma ($u = f(x)$), entonces se puede definir una constante κ que sea a la longitud de onda λ , como ω es al periodo T , (ver FIGURA 1.4). Esta constante se llama número de onda (κ), y es igual a la cantidad de oscilaciones en radianes por unidad de longitud (rad/m), que desarrolla la onda en una distancia especificada. Por lo tanto:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Ec. 1.6}$$

Lo anterior lleva a la conclusión de que la configuración de una onda es simultáneamente función de la posición a lo largo de la trayectoria de propagación y del tiempo en que sea determinada; es decir, $u = f(x, t)$ (ver Ec. 2.9, Ec. 2.10 y Ec. 2.11).

² En este trabajo la notación λ también se ocupa, para expresar un valor característico o eigenvalor, y la constante de Lamé. Se debe tener cuidado para no confundir tales notaciones.

1.2 Representación de Oscilaciones Armónicas

Existen varias formas de representar los parámetros de desplazamiento (posición, velocidad y aceleración) de un oscilador armónico en función del tiempo, entre las que se encuentran la representación vectorial, la representación por medio de funciones armónicas (senos y cosenos), también conocida como trigonométrica y la representación por medio de números complejos. Para fines del presente trabajo, únicamente se ostentará sobre la representación trigonométrica y la representación por medio de números complejos; que, servirán para explicar conceptos más avanzados en capítulos posteriores. Independientemente de que se exprese en forma vectorial, trigonométrica o compleja, existen **dos casos matemáticamente equivalentes de visualización del MAS** (ver FIGURA 1.6) los cuales son:

- 1) Considerando el MAS como la suma de las proyecciones de dos vectores rotatorios sobre uno de los ejes cartesianos. (ver FIGURA 1.6.a y FIGURA 1.15)
- 2) Considerando el MAS como un solo vector rotatorio desfasado un ángulo inicial ϕ , proyectado sobre uno de los ejes cartesianos. (ver FIGURA 1.6.b y FIGURA 1.17)

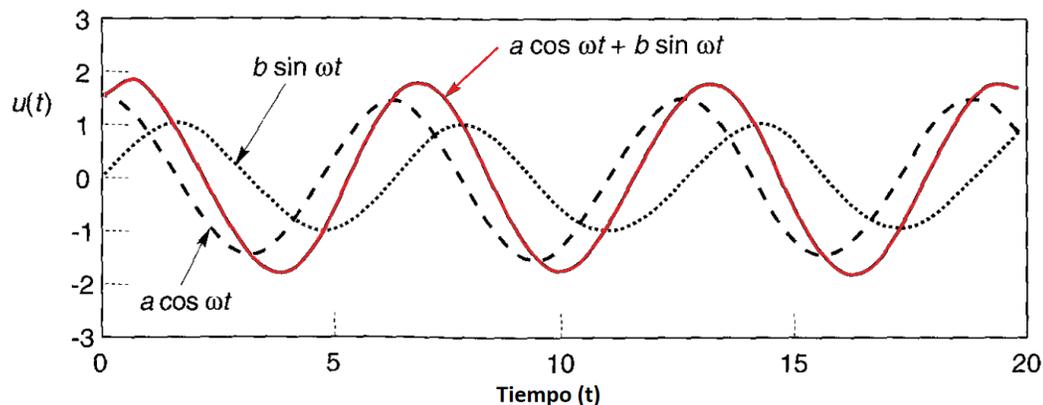


Figura 1.5: la suma de funciones seno y coseno de igual frecuencia, producen una función sinusoidal de igual frecuencia. La fase y amplitud del de esta función depende de las amplitudes de las funciones seno y coseno. (Kramer, 1996).

1.2.1 Representación Trigonométrica

En lo siguiente, presentaremos las diferencias que implica el uso de una u otra forma de visualización del MAS, utilizando para ello funciones armónicas (trigonométricas).

Caso 1:

La primera forma de visualizar el MAS, es como la suma de una función seno (impar) y una función coseno (par), como se muestra a continuación:

$$u(t) = a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t) \quad \text{Ec. 1.7}$$

Como se observa en la FIGURA 1.5, la suma de las funciones seno y coseno es también una función armónica que oscila con frecuencia ω . Sin embargo, su amplitud no es la simple suma de las amplitudes de las otras dos funciones y su máximo no ocurre al mismo tiempo que en aquellas.

Este caso se puede visualizar como un par de vectores rotatorios como se ilustra en la FIGURA 1.6.A. En ella se puede observar que el primer sumando es la proyección vertical de un vector de magnitud a , mientras que el segundo sumando es la proyección vertical de un vector de magnitud b ; Como $\cos(\theta) = \sin(\theta + 90^\circ)$, el vector rotatorio de magnitud a debe estar 90° adelantado al vector de magnitud b .

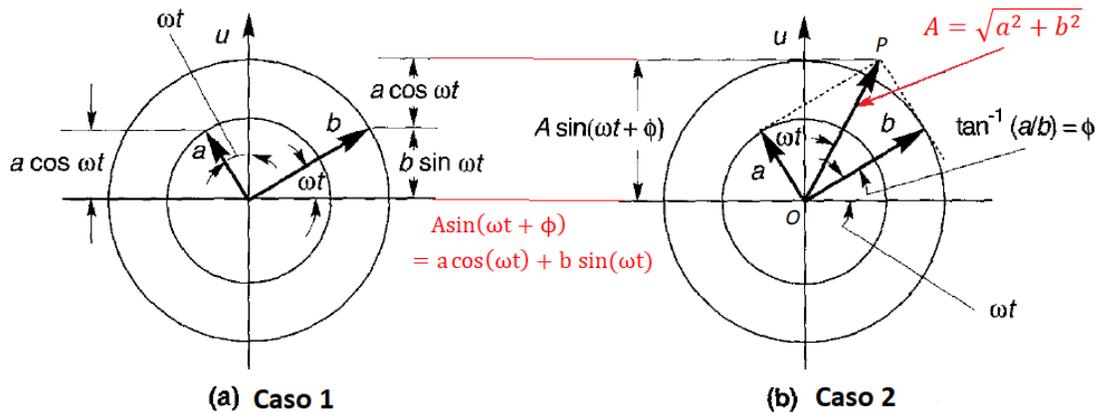


Figura 1.6; representación de MAS como vectores rotatorios. a) Suma de componentes verticales de los vectores rotatorio a y b . b) Componente vertical de la resultante de la suma de los vectores rotatorio a y b . (Kramer, 1996).

Caso 2:

La segunda forma en que se visualiza que el MAS, es considerando la suma de los vectores a y b , como se muestra en la FIGURA 1.6.B. La longitud del vector resultante debe ser $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$ y debe adelantarse a b con un ángulo $\phi = \tan^{-1}(a/b)$. Por lo tanto, la componente vertical de la resultante es:

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad \text{Ec. 1.8}$$

Donde $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$ es la amplitud y $\phi = \tan^{-1}(a/b)$ es el ángulo de fase. Como se puede notar, esta ecuación, es la misma que la EC. 1.1, si el ángulo ϕ es igual a cero.

1.2.2 Representación Mediante Números Complejos

La descripción trigonométrica del MAS emplea funciones que son fáciles de visualizar; Empero, para la mayoría de los análisis dinámicos, el uso de notación trigonométrica lleva a ecuaciones muy largas y confusas. En esos casos, el análisis se vuelve más simple cuando el desplazamiento es descrito mediante el uso de notación compleja. (El adjetivo "compleja", indica que se utilizan variables complejas, y no que la notación sea particularmente complicada de entender) (Kramer, 1996). Esta notación será continuamente empleada en la comprobación de algunas fórmulas de los siguientes capítulos de este trabajo.

Caso 1:

Cuando el MAS se visualiza como se hizo para deducir la EC. 1.7, la representación en notación compleja, se deduce a partir de la notación trigonométrica, utilizando la ley de Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

Ec. 1.9: Ley de Euler

Esta última ecuación, permite demostrar que:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad \sin(\alpha) = -i \cdot \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2} \quad \text{Ec. 1.10}$$

Substituyendo esto último en la EC. 1.7 y reagrupando, obtenemos:

$$\frac{a - ib}{2} \cdot e^{i\theta} + \frac{a + ib}{2} \cdot e^{-i\theta} \quad \text{Ec. 1.11}$$

Donde: $\theta = \omega \cdot t$, $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$

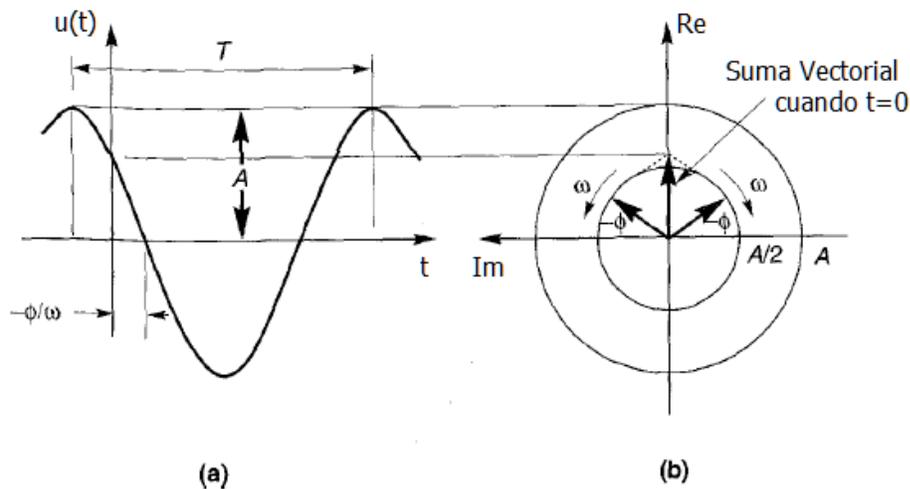


Figura 1.7: Representación gráfica de dos vectores de magnitud $A/2$ que giran en sentidos opuestos para representar el MAS. Notar que el ángulo de fase es medido a partir del eje horizontal en dirección de la rotación del vector (Kramer, 1996).

Esta forma de representación, es análoga a la de la EC. 1.7, por lo que también se puede visualizar como un par de vectores rotatorios en un diagrama de Argand³. El diagrama de la FIGURA 1.7, permite demostrar cómo es que esta notación compleja describe el MAS. Aunque el eje real es usualmente orientado horizontalmente, un giro de 90° al diagrama, ayuda a mostrar que en el diagrama de Argand, el término $e^{i\omega t}$ es representado por un vector de magnitud unitaria, rotando en dirección contraria a las manecillas del reloj a una velocidad angular ω . El término $e^{-i\omega t}$ puede ser por lo tanto representado por un vector de magnitud unitaria rotando en dirección a favor de las manecillas del reloj, con velocidad angular $-\omega$. En correspondencia con lo anterior, el primer término de la EC. 1.11 puede ser entendido como un vector que rota en dirección contraria a las manecillas del reloj, con una parte real igual a $a/2$ y una parte imaginaria igual a $b/2$; mientras que el segundo término, se entiende como un vector que rota en dirección contraria al anterior;

³ Un diagrama de Argand representa los números complejos de manera gráfica, con sus componentes ortogonales iguales a la parte imaginaria y a la parte real respectivamente.

es decir, en dirección de las manecillas del reloj, con una componente real igual a $a/2$ y con una parte imaginaria igual a $-b/2$. Como se puede ver en la FIGURA 1.7, la resultante de la suma de las partes imaginarias se cancela, mientras que la parte real se suma, formando así la gráfica del MAS que se puede ver en la FIGURA 1.7a.

Caso 2:

Para representar al vector de posición \overline{OP} , de magnitud A , de la FIGURA 1.6b, Llamamos a sus componentes horizontal y vertical, a y b respectivamente; entonces, el vector de posición \overline{OP} puede ser representado como un número complejo, como se muestra a continuación:

$$\overline{OP} = a + i \cdot b \quad \text{Ec. 1.12}$$

Donde $a = A \cdot \cos(\theta)$, $b = A \cdot \sin(\theta)$ e $i = (-1)^{1/2}$

Cuando el vector de posición \overline{OP} gira en función del tiempo y llamamos θ al ángulo que forma con el eje $+x$, entonces el vector \overline{OP} se representa de la siguiente manera:

$$\overline{OP} = A \cdot \cos(\theta) + i \cdot A \cdot \sin(\theta) = A \cdot [\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)] \quad \text{Ec. 1.13}$$

Donde: $\theta = \omega \cdot t + \phi$

Desarrollando ambos términos en serie de Maclaurin, tenemos que:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(i^2)^k \cdot \theta^{2k}}{(2k)!} \right); \quad i = \sqrt[2]{-1} \quad \text{Ec. 1.14}$$

$$\begin{aligned} i \cdot \sin(\theta) &= i \cdot \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right) = i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(i^2)^k \cdot \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \cdot \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad i = \sqrt[2]{-1} \end{aligned} \quad \text{Ec. 1.15}$$

Sustituyendo la EC. 1.14 y EC. 1.15 en la EC. 1.13 tenemos que:

$$u(t) = A \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(i^2)^k \cdot \theta^{2k}}{(2k)!} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1} \cdot \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = A \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \cdot \theta)^k}{k!} \right] \quad \text{Ec. 1.16}$$

Observamos que la serie resultante, es igual a la expansión en serie de Maclaurin de $e^{i \cdot \theta}$, por lo que podemos expresar al vector \overline{OP} como:

$$\overline{OP} = A \cdot e^{i \cdot \theta} \quad \text{Ec. 1.17}$$

Esta función representa al vector rotacional, pero como sólo interesa la expresión del MAS, dada por la componente b (componente imaginaria), entonces:

$$\text{Im}[\overline{OP}] = A \cdot \text{Im}[e^{i \cdot \theta}] = A \cdot \sin(\theta) \quad \text{Ec. 1.18}$$

Donde: $\theta = \omega \cdot t + \phi$; lo que dirige nuevamente a la [EC. 1.1](#) cuando $\theta = \omega t$.

1.2.3 Representación de Otros Parámetros de Desplazamiento

Como se mencionó en el [SUBCAPÍTULO 1.1](#), para describir el movimiento de un oscilador armónico, es necesario no solo describir la posición de éste en función del tiempo, sino también otros parámetros, como la velocidad y la aceleración con que se desplaza.

Tabla 1-1: Representación trigonométrica y Compleja de los parámetros de desplazamiento de MAS. A) En función de un vector. B) En función de dos vectores.

Parámetro	Representación Trigonométrica	Representación Compleja
<i>Posición</i>	A) Caso 1: $a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$ B) Caso 2: $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$	A) Caso 1: $\frac{a - ib}{2} \cdot e^{i\omega t} + \frac{a + ib}{2} \cdot e^{i\omega t}$ B) Caso 2: $A \cdot \text{Im}[e^{i(\omega t + \phi)}]$
<i>Velocidad</i>	A) Caso 1: $-a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) + b\omega \cdot \sin(\omega t)$ B) Caso 2: $A\omega \cdot \cos(\omega t + \phi)$	A) Caso 1: $\frac{b + ia}{2} \omega \cdot e^{i\omega t} + \frac{b - ia}{2} \omega e^{i\omega t}$ B) Caso 2: $A \cdot \text{Im}[i\omega \cdot e^{i(\omega t + \phi)}]$
<i>Aceleración</i>	A) Caso 1: $-a\omega^2 \cdot \cos(\omega t) - b\omega^2 \cdot \sin(\omega t)$ B) Caso 2: $-A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi)$	A) Caso 1: $\frac{-a + ib}{2} \omega^2 \cdot e^{i\omega t} + \frac{-a - ib}{2} \omega^2 \cdot e^{i\omega t}$ B) Caso 2: $-A\omega^2 \cdot \text{Im}[e^{i(\omega t + \phi)}]$

Para no volver muy engorroso el estudio de los parámetros de velocidad y aceleración, bastará con definir a la velocidad, como la razón a la que cambia la posición de un oscilador armónico con respecto al tiempo; mientras que la aceleración es la razón a la que varía la velocidad del mismo oscilador en función del tiempo. En términos de cálculo diferencial, la velocidad es la derivada de la función Posición vs. Tiempo, mientras que la aceleración es la derivada de la función Velocidad vs. Tiempo y a la vez, la segunda derivada de la función Posición vs. Tiempo. Con estas definiciones, se muestran en la [TABLA 1-1](#) las fórmulas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo, para los dos casos de representación del MAS que se han definido en el [SUBCAPÍTULO 1.2](#) y para las dos notaciones que hemos empleado.

De la [TABLA 1-1](#) podemos apreciar dos características muy importantes, que se muestran gráficamente en la [FIGURA 1.8](#).

1. La amplitud de la velocidad y la aceleración, es proporcional a la amplitud del desplazamiento.
2. Las gráficas de desplazamiento, velocidad y aceleración, están fuera de fase entre ellas; de tal modo que la velocidad se adelanta al desplazamiento $\pi/2$ rad, o 90° , mientras que la aceleración se adelanta a la velocidad en la misma proporción.

Estas características permiten expresar al MAS, en una **gráficas tripartita**, en la que el movimiento puede ser totalmente descrito en función de frecuencia y amplitud de desplazamiento, velocidad y aceleración, todo al mismo tiempo, por un solo punto de la gráfica. Es importante recalcar que estas relaciones sólo aplican para MAS y no para otros tipos de movimiento oscilatorio (Kramer, 1996).

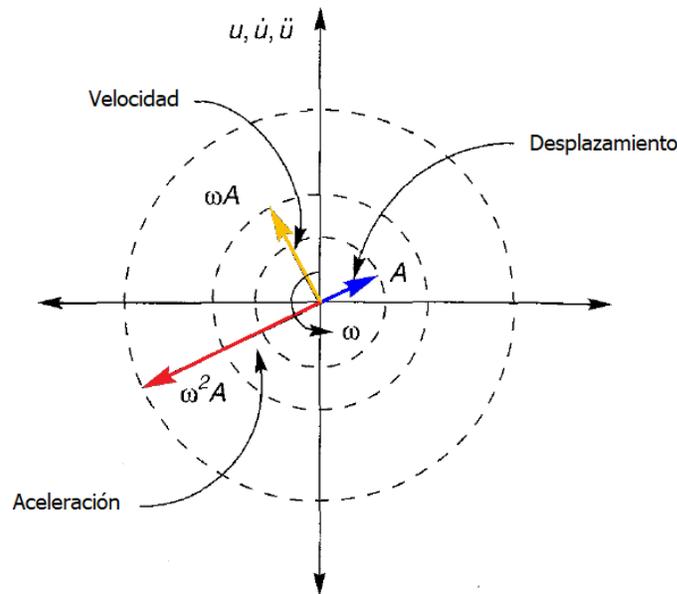


Figura 1.8: Representación como vectores rotatorios del desplazamiento, velocidad y aceleración.

1.3 Análisis de Sistemas Osciladores Dinámicos

1.3.1 Vibraciones Libres

Un caso de análisis particular de un sistema de 1GDL se presenta cuando se le da un desplazamiento inicial δ_0 a la masa, para posteriormente soltarla y dejarla vibrar libremente, entonces se dice que la masa entra en **vibración libre**; es decir, ninguna fuerza externa actúa en el sistema.

Comúnmente un sistema vibratorio incluye, como se ve en el diagrama de la ILUSTRACIÓN 1-1, un medio por el cuál almacena energía potencial (**resorte** o elasticidad), un medio para conservar energía cinética (**masa** o inercia) y un medio por el cual la energía aportada por el ambiente al sistema se disipa gradualmente (**amortiguador**) (Singiresu, 2012). La vibración de un sistema implica la transformación de su energía potencial en energía cinética y de ésta en potencial, de forma alternante.

Considerando un **sistema de 1GDL**, como el de la FIGURA 1.9, se trata de un cuerpo de masa m , unido a una base firme por medio de una barra de cierta rigidez lateral k y un amortiguador definido por una constante c , la cual es proporcional a la velocidad con que se desplaza la masa.

Cuando el sistema está sujeto a un movimiento de vibración libre amortiguada, la masa entrará en oscilación y se generarán sobre ella tres tipos de fuerzas (Meli, 1985); El comportamiento de las tres fuerzas lineales se muestra en la FIGURA 1.10. Estas fuerzas son:

- a) La **fuerza de inercia**, que de acuerdo con el **principio de D'Alambert**⁴ es proporcional a la masa m y a la aceleración total que ésta sufre, $\ddot{u}(t)$.

$$F_i = m \cdot \ddot{u}(t) \qquad \text{Ec. 1.19: Principio de D'Alambert}$$

- b) La **fuerza de rigidez lateral** que se genera en la columna al ser desplazada con respecto al terreno. Suponiendo que la respuesta de la columna se mantiene dentro de un intervalo lineal, dicha fuerza será igual al producto del desplazamiento relativo de la masa con respecto al suelo, por la rigidez lateral de la columna, k .

$$F_r = k \cdot u \qquad \text{Ec. 1.20: Ley de Hooke}$$

- c) La **fuerza de amortiguamiento** que trata de restablecer el equilibrio de la estructura en vibración. Esta fuerza puede considerarse proporcional a la velocidad de la masa $\dot{u}(t)$. al factor de proporcionalidad c , se le llama coeficiente de amortiguamiento (Aunque en la teoría de mecánica de fluidos se le conoce como coeficiente de viscosidad).

$$F_a = c \cdot \dot{u}(t) \qquad \text{Ec. 1.21: Ley de Newton}$$

La ecuación de movimiento (equilibrio dinámico), FIGURA 1.9b da lugar a la siguiente expresión:

$$F_i = -F_r - F_a \xrightarrow{\text{despejando}} \qquad \text{Ec. 1.22: Equilibrio Dinámico}$$

$$F_i + F_r + F_a = 0$$

Substituyendo Ec. 1.19, Ec. 1.20 y Ec. 1.21 en Ec. 1.22 da como resultado:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \qquad \text{Ec. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL}$$

La Ec. 1.23, es la misma ecuación de equilibrio dinámico, pero escrita como una ecuación diferencial ordinaria, homogénea, de segundo orden, cuyo polinomio característico es:

$$m \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + k = 0 \qquad \text{Ec. 1.24}$$

Las raíces de ese polinomio característico son:

⁴ El principio de D'Alambert, establece que un sistema puede ser puesto en estado de equilibrio dinámico agregando a las fuerzas externas, una fuerza de equilibrio, comúnmente conocida como fuerza de inercia (PAZ, 1992)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Ec. 1.25:
Raíces

Como se puede observar, la Ec. 1.25 se puede escribir en notación de números complejos como:

$$\lambda_{1,2} = a \pm b \cdot i \quad \text{Ec. 1.26}$$

Dónde: a es la parte real y b es la parte imaginaria de ambas raíces. Observe que en todos los casos, una raíz es conjugada de la otra.

Finalmente, la solución de la Ecuación diferencial ordinaria de este tipo es (Zill, 2009):

$$u(t) = C_1 \cdot e^{a \cdot t} \cos(b \cdot t) + C_2 \cdot e^{a \cdot t} \sin(b \cdot t) \quad \text{Ec. 1.27: solución de la EDO de equilibrio dinámico}$$

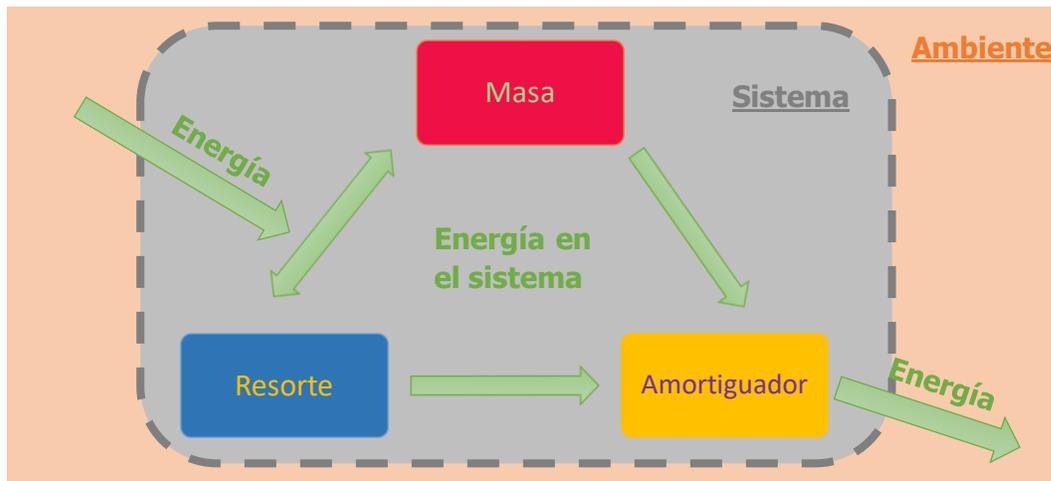


Ilustración 1-1: Representación del flujo de energía en un oscilador armónico simple.

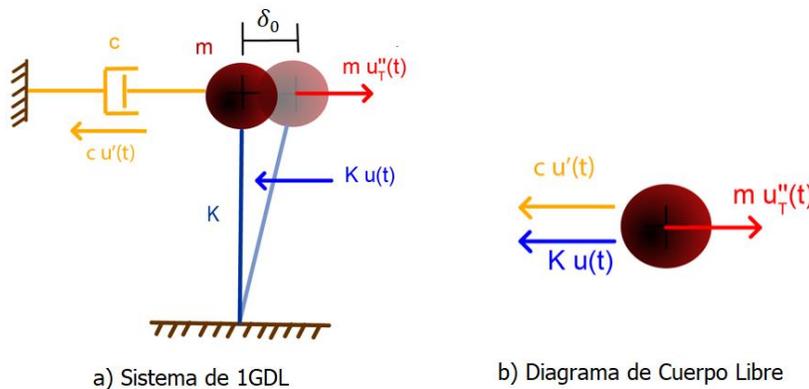


Figura 1.9: Oscilador dinámico con Movimiento Libre Amortiguado. A) Oscilador dinámico con sus tres componentes. B) DCL del Oscilador dinámico.

(Deméneghi, Puebla, & Sanginés, *Vibraciones de sistemas de un grado de libertad*, 2003)

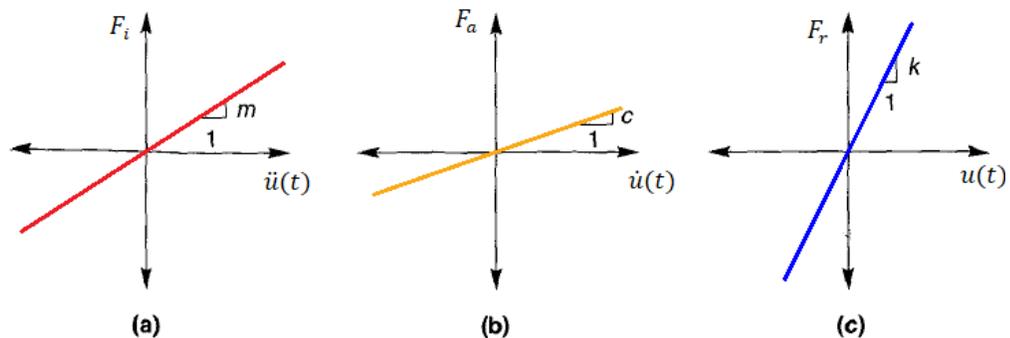


Figura 1.10: Variación de a) Fuerza inercial. b) Fuerza elástica. c) Fuerza de amortiguamiento viscoso. Con respecto a la aceleración, velocidad y desplazamiento, respectivamente (Kramer, 1996).

1.3.2 Vibración Libre No Amortiguada

Si el coeficiente c del amortiguador es igual a cero, implica que la energía aportada por el ambiente al sistema al desplazar la masa a partir del equilibrio estático, se conserva dentro del sistema; en otras palabras, la suma de energía potencial más energía cinética, es en todo momento igual a la energía inicialmente aportada al sistema. A los movimientos vibratorios de este tipo, se les conoce como **Movimiento vibratorio no amortiguado** (ILUSTRACIÓN 1-2).



Ilustración 1-2: Ecuación de la energía para sistemas excitados con Movimiento Vibratorio Libre No Amortiguado.

Cuando el movimiento oscilatorio es libre y no amortiguado, la Ec. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL se reduce a:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

Ec. 1.28: EDO de equilibrio dinámico para Vibración Libre No Amortiguada

Esta ecuación se suele dividir por unidad de masa, por lo que queda como:

$$\ddot{u}(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = 0 \tag{Ec. 1.29}$$

Mientras que las raíces del polinomio característico (Ec. 1.25) se reducen a:

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i \tag{Ec. 1.30}$$

Donde i , es la unidad de los números imaginarios. En términos de la [EC. 1.26](#), $a = 0$ y $b = \sqrt{k/m}$. Este valor, concuerda con la frecuencia angular del sistema, por lo que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Ec. 1.31: Frecuencia angular}$$

Como se observa, esta frecuencia angular, depende de las características propias del sistema, mas no de las características del impulso que se le dé; por lo que es independiente de tal impulso. A este parámetro, se le conoce como **frecuencia angular natural** y es un parámetro intrínseco del sistema. Con esta definición, la [EC. 1.29](#) queda como:

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 1.32}$$

Y la solución de la EDO ([EC. 1.27](#)), queda como:

$$u(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + C_2 \cdot \sin(\omega_0 t) \quad \text{Ec. 1.33}$$

Cuando consideramos las siguientes condiciones de frontera:

$$u(0) = \delta_0 \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad \text{Ec. 1.34}$$

Las constantes C_1 y C_2 valen:

$$C_1 = \delta_0 \quad C_2 = v_0/\omega_0 \quad \text{Ec. 1.35}$$

Por lo que la [EC. 1.33](#) queda como:

$$u(t) = \delta_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t) \quad \text{Ec. 1.36}$$

La respuesta de éste sistema, es mostrada en la [FIGURA 1.11](#).

La misma [EC. 1.36](#) se puede escribir en términos de la [EC. 1.8](#) como:

$$u(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{Ec. 1.37}$$

Donde:

$$A = \sqrt{\delta_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{Es la amplitud del movimiento} \quad \text{Ec. 1.38}$$

$$\text{Y } \phi = \tan^{-1} \left(\frac{\delta_0 \omega_0}{v_0} \right) \quad \text{Es el ángulo de fase} \quad \text{Ec. 1.39}$$

La solución de la ecuación de movimiento de un sistema no amortiguado que se desplaza en vibración libre, indica que la respuesta del sistema depende del desplazamiento y la velocidad inicial que se le impongan. Se puede notar que la amplitud permanece constante con el tiempo. Lo cual ocurre porque no existe pérdida de energía, razón por la cual, el desplazamiento podría continuar por siempre. Obviamente, los sistemas no amortiguados son irreales; sin embargo,

algunos sistemas pueden tener un coeficiente de amortiguamiento tan bajo, que su respuesta durante cortos periodos de tiempo, puede ser aproximada a la de un sistema no amortiguado.

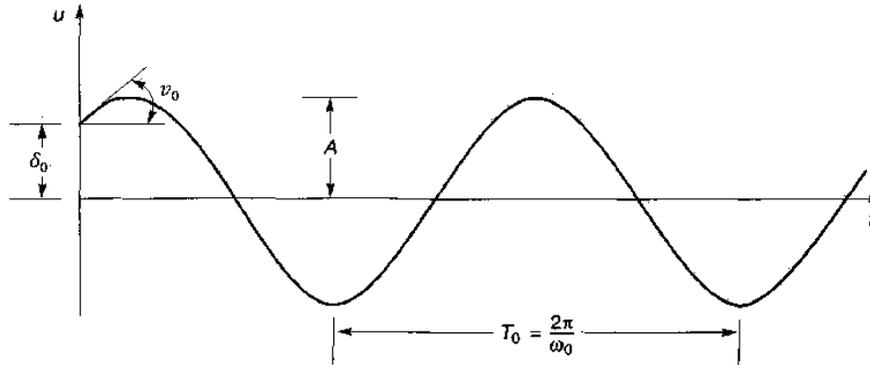


Figura 1.11: Historia de desplazamientos para una vibración libre no amortiguada, con desplazamiento inicial δ_0 y velocidad inicial v_0 (Kramer, 1996).

1.3.3 Vibraciones Libres Amortiguadas

Cuando un sistema oscila **en movimiento vibratorio amortiguado**, una parte de la energía aportada por el ambiente, se disipa en cada ciclo de vibración y se le debe reemplazar por una fuente externa para que se mantenga en un estado de vibración estable. Sin embargo, si se le permite oscilar en **vibración libre**, Esta oscilación va disminuyendo en amplitud, poco a poco, hasta llegar nuevamente al equilibrio estático. Esto implica que la energía del sistema, igual a la adición de la energía cinética más la energía potencial, es menor o igual a la energía inicialmente aportada al sistema (ILUSTRACIÓN 1-3).

$$\text{Energía potencial} + \text{Energía Cinética} \leq \text{Energía aportada por el ambiente}$$

Ilustración 1-3: Ecuación de la energía para sistemas excitados con Movimiento Vibratorio No Amortiguado.

La inecuación anterior, puede convertirse en una ecuación agregando una "variable flotante", que absorba la disminución de la energía dentro del sistema. A esta variable flotante, se le llamará energía disipada o energía amortiguada (Ilustración 1-4). De esta manera, pasado un tiempo, la adición de la energía cinética y la energía potencial, que inicialmente fuera igual a la energía total aportada al sistema, se volverán cero; mientras que la energía amortiguada será igual a la energía total entregada inicialmente por el ambiente al sistema.

$$\text{Energía potencial} + \text{Energía Cinética} + \text{Energía Amortiguada} = \text{Energía aportada por el ambiente}$$

Ilustración 1-4: Ecuación de la energía para sistemas excitados con Movimiento Vibratorio No Amortiguado.

Cuando el movimiento oscilatorio es libre y amortiguado, la Ec. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL se escribe como:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 1.40}$$

Que al dividirse entre la masa, resulta:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{u}(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 1.41: EDO de equilibrio dinámico para Vibración Libre Amortiguada}$$

Las raíces del polinomio característico son entonces:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \text{Ec. 1.42}$$

El término que queda dentro de la raíz se conoce en álgebra como discriminante, y es representado por la letra I . En términos matemáticos se expresa como:

$$I = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} \quad \text{Ec. 1.43}$$

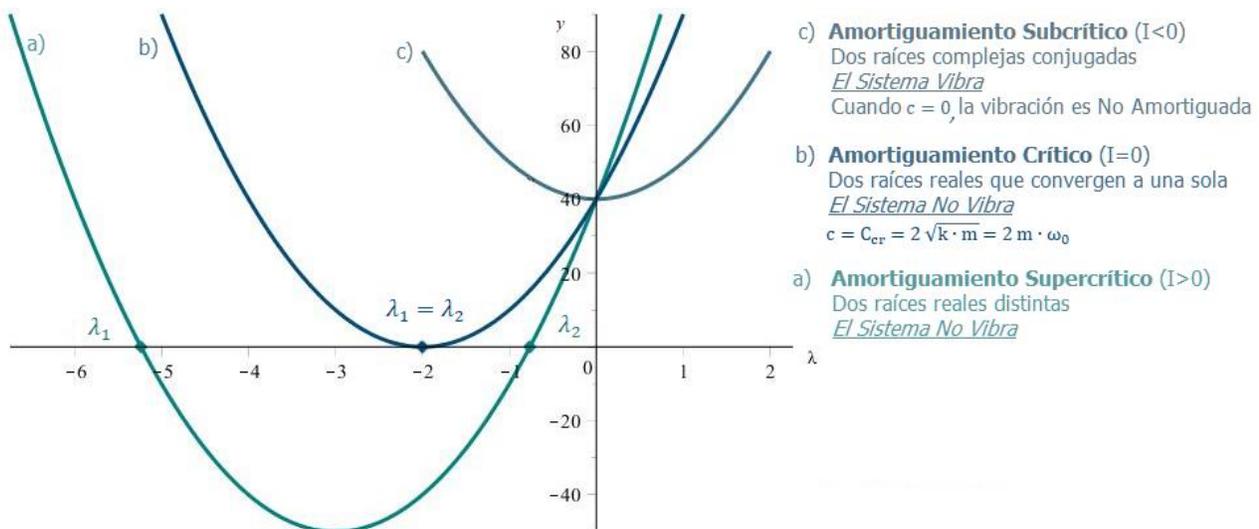


Figura 1.12: Representación gráfica de ecuaciones de segundo grado. a) dos raíces reales distintas; $I > 0$. b) dos raíces que convergen a una; $I = 0$. c) dos raíces complejas conjugadas.

La importancia del discriminante radica en que según su valor, las raíces de la ecuación de segundo grado, dadas por el polinomio característico, que es representado gráficamente por una parábola, pueden ser, según sea el caso:

- Dos raíces reales distintas ($I > 0$)
- Dos raíces reales iguales; es decir, las dos raíces convergen en una misma ($I = 0$)
- Dos raíces Complejas conjugadas ($I < 0$)

Estos tres casos se muestran gráficamente en la FIGURA 1.12. En ella, se aprecia una parábola (a), que se desplaza verticalmente hacia arriba, de manera que sus raíces λ_1 y λ_2 se aproximan entre sí hasta converger en una sola (b), para posteriormente convertirse en raíces complejas (c).

La EDO de equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL que se desplaza en vibración libre amortiguada, también puede presentar tres casos, según sea el valor del discriminante del polinomio característico:

Caso 1: Dos raíces reales diferentes

Cuando sucede que el polinomio característico de la EDO de equilibrio dinámico tiene dos raíces reales distintas, se dice que el sistema tiene un **amortiguamiento supercrítico**. En estas condiciones el sistema, al ser desplazado de su posición de equilibrio, no oscila, sino que vuelve a su posición equilibrada cuando se le desplaza y suelta, pero de manera muy lenta. Este fenómeno ocurre cuando el amortiguamiento c es alto. Por ende, la solución de la Ec. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL se expresa como sigue:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

Al respecto de este caso, no se abundará más, pues como ya se dijo, los sistemas con amortiguamiento supercrítico no vibran.

Caso 2: Una raíz real

Cuando sucede que el polinomio característico tiene dos raíces reales iguales, se dice que el sistema tiene **amortiguamiento crítico**; en estas condiciones, el sistema tampoco oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta. El valor de las raíces del polinomio característico es:

$$\lambda_{1,2} = -c/2m$$

En consecuencia, la solución de la Ec. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL se formula como sigue:

$$u(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot (C_2 \cdot t + C_1) \tag{Ec. 1.44}$$

Que es el producto de la ecuación de una recta por una ecuación exponencial. Para las condiciones de frontera:

$$u(0) = \delta_0 \quad \text{y} \quad \dot{u}(0) = 0$$

Las constantes C_1 y C_2 valen:

$$C_1 = \delta_0 \quad \text{Y} \quad C_2 = -\lambda \cdot \delta_0$$

Con lo cual, la Ec. 1.44 queda como:

$$u(t) = \delta_0 \cdot e^{-\frac{c}{2m} \cdot t} \cdot \left(1 + \frac{c}{2m} \cdot t\right) \tag{Ec. 1.45}$$

En este caso el coeficiente c , se denomina amortiguamiento crítico, y se expresa C_{cr} Como:

$$C_{cr}/2m = \sqrt{k/m} = \omega_0$$

Entonces la Ec. 1.45 queda como:

$$u(t) = \delta_0 \cdot e^{-\omega_0 \cdot t} \cdot (1 + \omega_0 \cdot t) \quad \text{Ec. 1.46}$$

El valor para el cual el amortiguamiento es crítico, se determina igualando el discriminante Ec. 1.43 con cero y despejando:

$$\left(\frac{C_{cr}}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \xrightarrow{\text{despejando}} \frac{C_{cr}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \xrightarrow{\text{despejando } C_{cr}}$$

$$C_{cr} = 2\sqrt{m \cdot k} = 2m \cdot \omega_0 \quad \text{Ec. 1.47: amortiguamiento crítico}$$

Al igual que la frecuencia natural, el coeficiente de amortiguamiento crítico es una característica intrínseca del sistema, porque depende de las características del sistema y no de las propiedades de la excitación que se le impongan.

Caso 3: Dos raíces complejas conjugadas

En este caso, se dice que el sistema tiene un **amortiguamiento subcrítico**. En estas condiciones, el sistema se mantiene en vibración exponencialmente decreciente; es decir, la masa, después de ser desplazada una distancia δ_0 continúa oscilando, aunque cada vez con menor intensidad hasta que finalmente llega a su estado inicial de reposo.

El tener amortiguamiento subcrítico, implica que el coeficiente c , es siempre menor que el crítico, por lo que se le suele expresar como una fracción de éste en la forma siguiente:

$$\xi = \frac{c}{C_{cr}} \quad \text{Ec. 1.48}$$

Sabemos que el amortiguamiento crítico es $C_{cr} = 2 \cdot \sqrt{m \cdot k}$ por lo que la **relación o razón de amortiguamiento subcrítico** se puede expresar también como:

$$\xi = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{m \cdot k}} \quad \text{Ec. 1.49: Razón de amortiguamiento}$$

Para que el sistema sea subamortiguado, este parámetro debe mantenerse en el intervalo donde $1 \geq \xi \geq 0$ ya que $\xi = 0$ denota un sistema no amortiguado que no deja de vibrar, mientras que $\xi = 1$ denota un sistema críticamente amortiguado que no vibra.

En este caso, la Ec. 1.23 dividida por unidad de masa queda como:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{u}(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 1.50}$$

Substituyendo las Ec. 1.49 y Ec. 1.31 en la Ec. 1.50:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \cdot \dot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 1.51}$$

La Ec. 1.51 es la misma que la Ec. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL, sólo que dividida por unidad de masa y escrita en términos de los parámetros ω_0 y ξ , que como se ha venido comentando, son parámetros intrínsecos del sistema.

Para este caso, las raíces del polinomio característico de la [Ec. 1.23](#): EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL son números complejos conjugados, y valen:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \cdot i$$

$$\lambda_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \cdot i$$

Estas mismas raíces se pueden escribir en términos de los parámetros característicos ω_0 y ξ según la [Ec. 1.51](#) como:

$$\lambda_1 = -\xi \cdot \omega_0 + \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot i$$

$$\lambda_2 = -\xi \cdot \omega_0 - \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot i$$

Así, la solución de la [Ec. 1.51](#) se expresa como sigue:

$$u(t) = C_1 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t) + C_2 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \sin(b \cdot t) \quad \text{Ec. 1.52}$$

Donde: $a = -\xi \cdot \omega_0$ y $b = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$

En la ecuación anterior, en la definición de b , se puede ver que el parámetro $\sqrt{1 - \xi^2}$ funciona como un factor de disminución que modifica la frecuencia natural de vibración, ω_0 ; por lo que a la frecuencia de vibración amortiguada del sistema, la definiremos como:

$$\omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{Ec. 1.53: Frecuencia circular amortiguada}$$

Además se observa que el factor a , de la [Ec. 1.52](#) es el exponente de decaimiento de una función exponencial, que representa, según la [FIGURA 1.13](#), la asíntota de la amplitud de la oscilación.

Cuando se consideran las siguientes condiciones de frontera:

$$u(0) = \delta_0 \quad \text{Y} \quad \dot{u}(0) = v_0$$

Las constantes C_1 y C_2 valen:

$$C_1 = \frac{v_0 + \xi \cdot \omega_0 \cdot \delta_0}{\omega_d}$$

$$C_2 = \delta_0$$

Por lo que la [Ec. 1.51](#) queda como:

$$u(t) = e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \left(\frac{v_0 + \xi \cdot \omega_0 \cdot \delta_0}{\omega_d} \cdot \sin(\omega_d t) + \delta_0 \cdot \cos(\omega_d t) \right) \quad \text{Ec. 1.54}$$

La respuesta en vibración libre de un sistema subamortiguado es mostrada en la [FIGURA 1.13](#). Note el decaimiento exponencial de la amplitud del desplazamiento con el tiempo

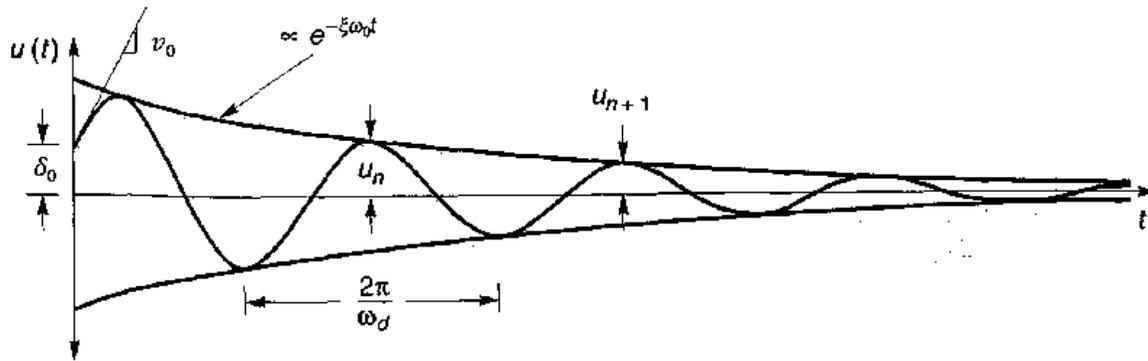


Figura 1.13: Historia de desplazamientos en vibración libre de un sistema subamortiguado, con desplazamiento inicial u_0 y velocidad inicial \dot{u}_0 . (Kramer, 1996).

1.3.4 Vibraciones Forzadas por Cargas Armónicas

Se dice que un sistema de 1GDL entra en **vibración forzada** cuando existe alguna fuerza externa $Q(t)$ que actúa sobre él. La carga dinámica puede proceder de diferentes tipos de fuente y puede ser periódica o no periódica. Para problemas de dinámica de suelos y de estructuras, una forma de carga armónica simple que es muy importante estudiar, es:

$$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.55}$$

Donde:

Ω Es la frecuencia a la que la carga es aplicada

Q_0 Es la amplitud de la carga aplicada

En los siguientes dos subtemas, se abordará el tema de la respuesta de sistemas no amortiguados y sistemas amortiguados (subamortiguados), excitados por la carga definida en la [Ec. 1.55](#).

1.3.5 Vibraciones No Amortiguadas Forzadas por Cargas Armónicas

La Ecuación diferencial ordinaria para un sistema no amortiguado sujeto a tal carga armónica es:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = Q_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.56: EDO de equilibrio dinámico para Vibración Forzada No Amortiguada}$$

La **solución general** para esta ecuación de movimiento está dada por la suma de dos componentes, (ver [ILUSTRACIÓN 1-5](#)) la **solución complementaria** (del caso homogéneo, en el que el lado derecho de la ecuación es igual a cero), más la **solución particular** (la cual debe satisfacer el lado derecho de la [Ec. 1.56](#)). (Kramer, 1996). Esto es conocido en Álgebra lineal como una variedad lineal ([Solar & Speziale, 1985](#)); es decir, un a estructura algebraica general, cuya solución es igual a la adición de un vector "solución complementaria", obtenida de la estructura homogénea asociada, más un vector solución particular" que modifica el vector "solución complementaria", hasta hacerlo coincidir con el vector "solución completa" de la estructura general, como se muestra en la [ILUSTRACIÓN 1-5](#):



Ilustración 1-5: Conformación de la solución general a partir de la ecuación particular más la solución homogénea.

En el caso de vibraciones forzadas no amortiguadas, la ecuación homogénea está dada por [Ec. 1.28](#):

$$m \cdot \ddot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0$$

Así que la solución complementaria está dada por la [Ec. 1.33](#):

$$u_c(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + C_2 \cdot \sin(\omega_0 t)$$

La porción de la respuesta descrita por la solución complementaria es aquella que resulta de la condición inicial del sistema. Ésta consiste de un movimiento armónico simple oscilando a la frecuencia natural del sistema.

La solución particular, describe la porción de la respuesta causada por la carga externa. Esta porción de la respuesta puede asumirse que es de la misma forma, y estar en fase con la carga armónica, por lo tanto:

$$u_p(t) = U_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \tag{Ec. 1.57}$$

Donde: U_0 es la amplitud de la respuesta harmónica.

Substituyendo la ecuación [Ec. 1.57](#) en la [Ec. 1.56](#) dividida entre la rigidez, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{m}{k} \cdot \ddot{u}_p(t) + u_p(t) &= \frac{Q_0}{k} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \Rightarrow \\ -\frac{m}{k} \cdot \Omega^2 \cdot U_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + U_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) &= \frac{Q_0}{k} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \end{aligned} \tag{Ec. 1.58}$$

Substituyendo $\omega_0^2 = k/m$ y despejando U_0 tenemos:

$$U_0 = \frac{Q_0/k}{1 - (\Omega^2/\omega_0^2)} = \frac{Q_0/k}{1 - \beta^2} \tag{Ec. 1.59}$$

Donde $\beta = \Omega/\omega_0$ es conocido como **razón de sintonía** (*Tuning ratio*).

Entonces, la solución general del desplazamiento puede ser obtenida a partir de la combinación de la solución particular [Ec. 1.57](#) y la complementaria [Ec. 1.33](#).

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{Q_0/k}{1 - \beta^2} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \tag{Ec. 1.60}$$

Cuando consideramos las condiciones de frontera:

$$u(0) = \delta_0 \quad \text{Y} \quad \dot{u}(0) = v_0$$

Las constantes C_1 y C_2 valen:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega_0} - \frac{Q_0 \cdot \beta}{k \cdot (1 - \beta^2)}$$

$$C_2 = \delta_0$$

Por lo tanto, la solución general de la [Ec. 1.56](#) es:

$$u(t) = \left[\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{\beta}{(1 - \beta^2)} \right] \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + \delta_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{Q_0/k}{1 - \beta^2} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.61}$$

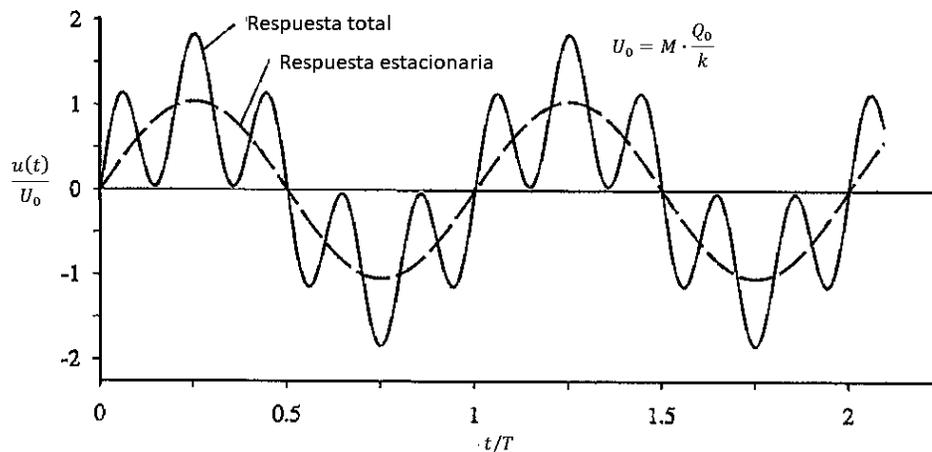


Figura 1.14: Historia de desplazamientos de un sistema no amortiguado de 1GDL. (Chopra, 2007).

Un ejemplo de la historia de desplazamientos que puede desplegar un sistema no amortiguado de 1GDL es mostrada en la [FIGURA 1.14](#).

Es interesante considerar el caso cuando el sistema está inicialmente en reposo; es decir, cuando sus condiciones de frontera son: $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$. Para tal caso, la respuesta está dada por:

$$u(t) = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \cdot (\sin(\Omega \cdot t) - \beta \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)) \quad \text{Ec. 1.62}$$

Lo cual indica que la respuesta tiene dos componentes. Una, acaece como respuesta a la carga aplicada y ocurre con la frecuencia de ésta (Ω); mientras que la otra es un efecto de vibración libre inducido por la condición inicial, esta ocurre con la frecuencia natural de vibración del sistema (ω_0) ([Kramer, 1996](#)).

Además es útil distinguir que el término Q_0/k en la [Ec. 1.62](#) representa el desplazamiento que sufriría la masa si la carga Q_0 se aplicara estáticamente según la [Ec. 1.20: LEY DE HOOKE](#). Por otra parte, el término $1/(1 - \beta^2)$ puede ser visto como un **factor de magnificación dinámica** (M) que describe la magnitud con que se modifica el desplazamiento estático a causa de la carga armónica. El factor de magnificación varía con la razón de sintonía, β , como se muestra en la

FIGURA 1.15⁵. Se nota que la amplitud del desplazamiento es mayor que el desplazamiento estático para frecuencias de carga menores a $\Omega = \sqrt{2} \cdot \omega_0$. A frecuencias altas de carga, la amplitud de desplazamiento es menor que la del desplazamiento estático y puede ser muy pequeño a altas frecuencias. En cambio, la respuesta de un sistema no amortiguado de 1GDL se vuelve extremadamente grande cuando la frecuencia de la carga Ω se aproxima a la frecuencia natural de vibración del sistema ω_0 . Cuando una carga armónica es aplicada con la frecuencia natural de un sistema no amortiguado de 1GDL, la respuesta tiende a infinito indicando la **resonancia del sistema**. No obstante, Como los sistemas no amortiguados no existen en la realidad, el estado de resonancia como tal, nunca es verdaderamente alcanzado. El concepto de razón de sintonía que relaciona la frecuencia de la carga con la frecuencia natural del sistema es muy importante, como es evidenciado por su gran influencia en la respuesta del sistema (Kramer, 1996).

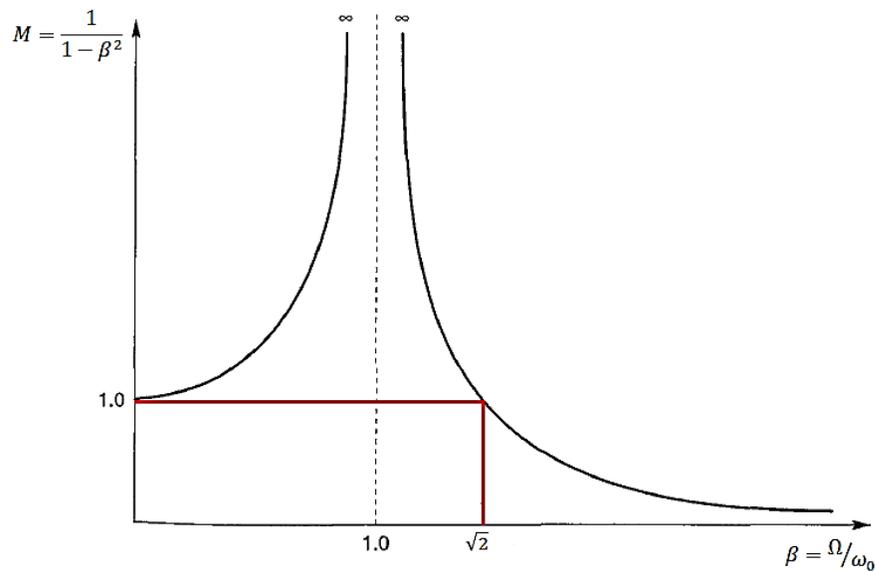


Figura 1.15: Variación del factor de magnificación (M) con respecto a la relación de sintonía (β) para sistemas no amortiguados de 1GDL. (Kramer, 1996).

1.3.6 Vibraciones Amortiguadas Forzadas Por Cargas Armónicas

El caso más general de sistemas de 1GDL excitados dinámicamente que se estudiará, es el de un sistema en vibración forzada amortiguada; de hecho, todos los casos estudiados anteriormente pueden ser vistos como casos particulares de este. Ya que sus ecuaciones pueden obtenerse estableciendo uno o varios de los términos de la ecuación de movimiento que se determinará para este caso, en cero. Pese a lo anterior, no fue en vano haber revisado todos los demás casos, pues su análisis sirvió para definir varios de los conceptos fundamentales en los que se basa la dinámica de suelos y de estructuras que servirán para comprender mejor capítulos posteriores del presente trabajo.

⁵ la gráfica de la FIGURA 1.15 y FIGURA 1.17 está en valor absoluto debido a que no importa el signo, sino la magnitud del factor de amplificación

La ecuación diferencial ordinaria de movimiento dinámico de un sistema amortiguado de 1GDL, forzada por una carga armónica del tipo $Q_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$, puede ser escrita en términos de masa unitaria como sigue:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{u}(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = \frac{Q_0}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.63: EDO de equilibrio dinámico para Vibración Forzada Amortiguada}$$

Al usar las relaciones $2\xi\omega_0 = c/m$ y $\omega_0^2 = k/m$ la ecuación anterior puede ser reescrita en función de ω_0 como:

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \cdot \dot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = \frac{Q_0}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.64}$$

La solución complementaria representa la respuesta del sistema en vibración libre amortiguada, la cual fue expresada para un sistema subamortiguado por la EC. 1.52:

$$u_c(t) = C_1 \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t) + C_2 \cdot e^{-\xi \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_d \cdot t)$$

Como la respuesta de un sistema subamortiguado de 1GDL está generalmente fuera de fase con respecto a la carga armónica aplicada, la solución particular debe de ser de la forma:

$$u_p(t) = C_3 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + C_4 \cos(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.65}$$

Que al substituirse en la EC. 1.64, queda como:

$$\ddot{u}_p(t) + 2\xi\omega_0 \cdot \dot{u}_p(t) + \omega_0^2 \cdot u_p(t) = \frac{Q_0}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad \text{Ec. 1.66}$$

Al desarrollar y simplificar esta expresión, tenemos:

$$\begin{aligned} [C_3\omega_0^2 - C_3\Omega^2 - 2C_4\xi\omega_0\Omega] \cdot \sin(\Omega t) + [C_4\omega_0^2 - C_4\Omega^2 - 2C_3\xi\omega_0\Omega] \cos(\Omega t) \\ = \frac{Q_0}{m} \cdot \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad \text{Ec. 1.67}$$

Una forma de obtener los valores de las constantes C_3 y C_4 de la EC. 1.67 es que:

- a) Cuando $\Omega t = 0 + n \cdot \pi$; donde $n = 0, 1, \dots \infty$ es cualquier número entero positivo, Entonces:

$$(2\xi\Omega\omega_0) \cdot C_3 + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot C_4 = 0$$

- b) Cuando $\Omega t = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$; donde $n = 0, 1, \dots \infty$ es cualquier número entero positivo, Entonces:

$$(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot C_3 - (2\xi\Omega\omega_0) \cdot C_4 = \frac{Q_0}{m}$$

Las ecuaciones de los incisos a) y b) anteriores, forman un sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya solución es:

$$C_3 = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

$$C_4 = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

Con todo esto, la solución general de la ecuación dinámica de vibración forzada de un sistema amortiguado de 1GDL se puede expresar como la suma de la solución particular (Ec. 1.65) más la ecuación complementaria (Ec. 1.52) de la siguiente manera:

$$u(t) = u_p(t) + u_c(t) \Rightarrow$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cdot [C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)]$$

$$+ \frac{Q_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\Omega t) - 2\xi\beta \cos(\Omega t)] \quad \text{Ec. 1.68}$$

Donde las constantes C_1 y C_2 dependen de las condiciones iniciales de frontera.

Hay algunas características de importancia que es indispensable advertir con respecto de esta solución. En primer lugar, que la solución complementaria (la cual representa el efecto de las condiciones iniciales) decae exponencialmente con el tiempo. La solución complementaria describe, por lo tanto, una **respuesta transitoria** causada por el requerimiento de satisfacer las condiciones iniciales. Después de que la respuesta transitoria se extingue, sólo **el estado estacionario** descrito por la solución particular permanece (ver FIGURA 1.16). El estado estacionario ocurre con la frecuencia de la carga armónica aplicada, pero fuera de fase respecto a esta.

Para simplificar la ecuación anterior, escribiremos el término entre corchetes del estado estacionario de la Ec. 1.68 como:

$$(1 - \beta^2) \sin(\Omega t) - 2\xi\beta \cos(\Omega t) = A \sin(\Omega t + \phi)$$

Donde:

$$A = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (-2\xi\beta)^2}}$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$$

Además observamos que para este caso, el **factor de magnificación dinámica** definido anteriormente para el caso de vibración de un sistema no amortiguado de 1GDL sometido a una carga armónica, vale:

$$M = \frac{A}{Q_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (-2\xi\beta)^2}} \quad \text{Ec. 1.69}$$

Por lo que la ecuación Ec. 1.68 se puede escribir en la forma

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \cdot [C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t)] + A \cdot \sin(\Omega t + \phi) \quad \text{Ec. 1.70}$$

Cuando el sistema amortiguado de 1GDL parte del reposo a un estado de vibración forzada por una carga armónica; es decir, cuando las condiciones iniciales son:

$$u(0) = 0 \quad \text{Y} \quad \dot{u}(0) = 0$$

Las constantes C_1 y C_2 valen:

$$C_1 = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{Q_0}{k} \cdot M^2 \cdot 2\xi\beta = A \cdot M \cdot 2\xi\beta$$

$$C_2 = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{\Omega}{\omega_d} \cdot \frac{\beta^2 - 1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} = \frac{Q_0}{k} \cdot \frac{\Omega}{\omega_d} \cdot M^2 \cdot (\beta^2 - 1) = A \cdot M \cdot \frac{\Omega}{\omega_d} \cdot (\beta^2 - 1)$$

Por lo que la [Ec. 1.70](#) se reduce a:

$$u(t) = A \cdot \left\{ e^{-\xi\omega_0 t} \cdot M \cdot \left[2\xi\beta \cdot \sin(\omega_d t) + \frac{\Omega}{\omega_d} \cdot (\beta^2 - 1) \cos(\omega_d t) \right] + \sin(\Omega t + \phi) \right\} \quad \text{Ec. 1.71}$$

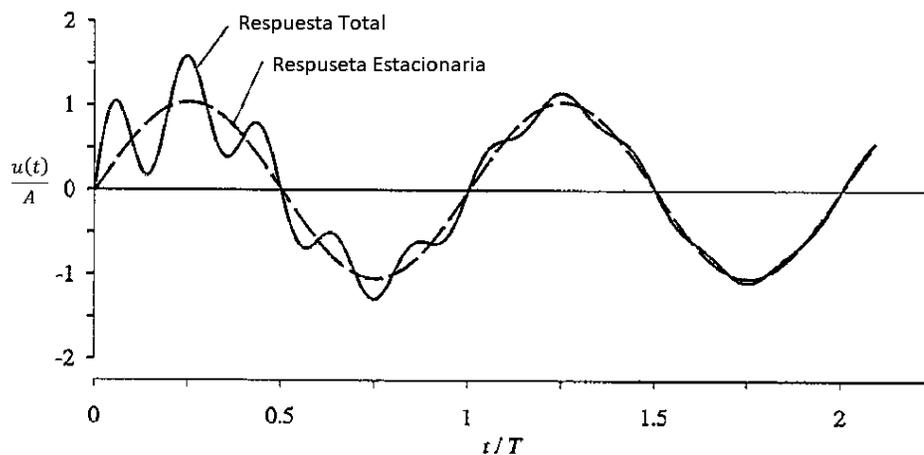


Figura 1.16: Respuesta transitoria y Respuesta total de un sistema amortiguado en vibración forzada por una carga armónica. (Chopra, 2007).

La influencia de la razón de sintonía puede ser ilustrada mediante el uso del factor de magnificación dinámica, nuevamente definido como la razón entre la amplitud del desplazamiento dinámico vs el desplazamiento estático [Ec. 1.69](#).

La variación del factor de magnificación (M), con la razón de sintonía (β) y la razón de amortiguamiento (ξ), es mostrada en la [FIGURA 1.17.a](#). La razón de amortiguamiento (ξ) influencia el valor pico del factor de magnificación (M) así como también la forma de las curvas M vs β , las cuales se ensanchan y aplanan a medida que se incrementa el grado de amortiguamiento del sistema⁶ (ξ). De hecho el factor de magnificación tiende a infinito (estado de resonancia) sólo

⁶ En consecuencia, aunque un sistema con bajo amortiguamiento puede producir grandes magnificaciones con una razón de sintonía cercana a 1, éste exhibirá magnificaciones importantes dentro de un rango de frecuencias muy pequeño en comparación con el de un sistema con mayor amortiguamiento.

para $\xi = 0$ y $\beta = 1$ (FIGURA 1.15). Para razones de amortiguamiento distintas de cero, existe un factor de magnificación máximo:

$$M_{max} = \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{\omega_0}{\omega_d} \quad \text{Ec. 1.72}$$

Lo cual ocurre cuando la razón de sintonía $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Para excitaciones armónicas el ángulo de fase (ϕ) también varía tanto con la razón de amortiguamiento crítico (ξ), como con la razón de sintonía (β), como se muestra en la FIGURA 1.17.b.

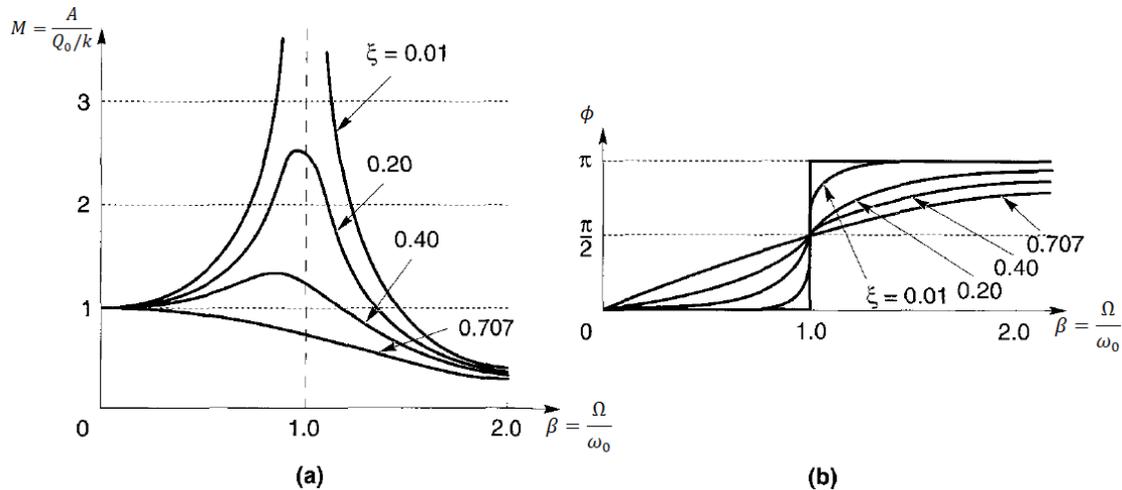


Figura 1.17: Variación de a) factor de magnificación dinámica con respecto a la razón de sintonía. b) ángulo de fase con respecto a la razón de sintonía. Ambos para diferentes gados de amortiguamiento. (Kramer, 1996).

1.3.7 Vibración en la Base de un Sistema de 1GDL

Para problemas de ingeniería, la carga dinámica suele ser resultado de la vibración de la base del sistema, en vez de originarse por la aplicación directa de una fuerza externa sobre la estructura. Para evaluar la respuesta de tales sistemas, es necesario desarrollar una ecuación de equilibrio para la carga causada por la vibración de la base. Considerando el sistema amortiguado de 1GDL de la FIGURA 1.18.a, cuando se sujeta a la oscilación de su base, $u_b(t)$, se deformará en una configuración que puede verse representada en un instante en particular (t) como se muestra en la FIGURA 1.18.b. el desplazamiento total de la masa, $u_T(t)$, puede ser separado en la suma de dos componentes: el desplazamiento de la base $u_b(t)$ y el desplazamiento de la masa relativo a la base, $u(t)$. La fuerza inercial dependerá de la aceleración total de la masa $u_T(t)$, mientras que las fuerzas elástica y de amortiguamiento, serán afectadas únicamente por el desplazamiento $u(t)$ y velocidad $\dot{u}(t)$ relativos de la masa respecto a su base. Utilizando la notación de la FIGURA 1.18.b, la EC. 1.23: EDO de Equilibrio dinámico de un oscilador de 1GDL, puede ser escrita como:

$$m \cdot \ddot{u}_T(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 1.73}$$

Pero como $\ddot{u}_T(t) = \ddot{u}_b(t) + \ddot{u}(t)$ entonces:

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = -m \cdot \ddot{u}_b(t) \quad \text{Ec. 1.74 EDO de equilibrio dinámico para Vibración Forzada Amortiguada para un sistema sujeto a vibración en su base}$$

En otras palabras, la respuesta del sistema a la vibración de la base es equivalente a la respuesta que el sistema tendría si su base estuviera fija y la masa fuera excitada por una carga externa de valor $Q(t) = -m \cdot \ddot{u}_b(t)$. Por tanto, cualquier solución para la respuesta de un sistema sujeto a carga externa, puede ser utilizada para evaluar la reacción del sistema sujeto a vibración en su base. (Kramer, 1996).

En conclusión, se puede afirmar que las fuerzas desarrolladas en un sistema excitado en su base, como sucedería por ejemplo durante un sismo, son fuerzas inerciales, desarrolladas como respuesta al movimiento de la base de la estructura y que dependen de su propia masa. Por otro lado, si el sistema fuera excitado directamente sobre sus masas, como lo haría por ejemplo si la carga fuera causada por acción del viento sobre la estructura, las fuerzas serían externas; es decir, independientes de la masa del sistema.

Los principios abordados en este primer capítulo, pueden ser extrapolados fácilmente al caso de osciladores de MGD, para lo que es útil comprender los conceptos expuestos en el APÉNDICE A.1.1.

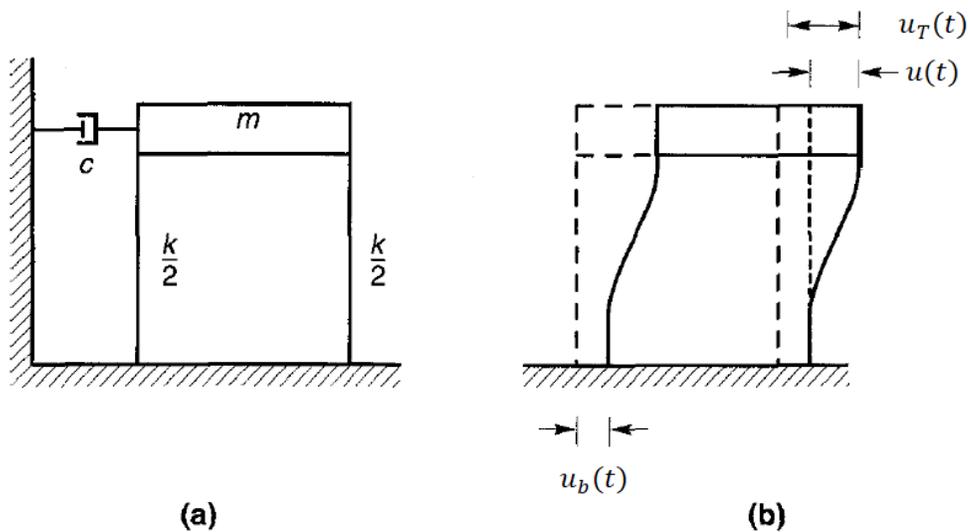


Figura 1.18: Sistema amortiguado de 1GDL sujeto a vibración en la base. (Kramer, 1996).

2 Propagación de Ondas en un Material Visco-Elástico

Es la naturaleza constante de los materiales geológicos que estudia la dinámica de suelos y la ingeniería sísmica geotécnica el diferir de sus contrapartes estructurales. Mientras que la mayoría de las estructuras puede ser fácilmente idealizada por un conjunto de masas discretas con fuentes discretas de rigidez, los materiales geológicos no lo permiten. En consecuencia, estos últimos deben ser tratados como un medio continuo, mientras que su respuesta a perturbaciones dinámicas debe ser descrita en el contexto de la propagación de ondas⁷ (Kramer, 1996), (Wolf & Deeks, 2004).

El **comportamiento flexible** (*compliant behavior*) de un material, como puede ser un estrato de suelo, se estudia en mecánica de medio continuo con base en distintas leyes reológicas de relación Esfuerzo vs. Deformación vs. Tiempo, como son: modelo elástico (se deforma según la ley de Hooke), modelo plástico (se deforma según la ley de Newton), modelo elastoplástico o de Kelvin-Voight, que representa el comportamiento de un modelo elástico y otro plástico actuando en paralelo, el modelo de Maxwell, que al igual que el modelo de Kelvin-Voight es una combinación de un modelo plástico y otro elástico, pero actuando en serie, o el modelo de Burgers, que representa un modelo de Kelvin-Voight y otro de Maxwell, trabajando en serie. Existen otros tipos de relaciones esfuerzo vs. Deformación para representar distintos tipos de comportamiento reológico, aunque estos son los más estudiados.

2.1 Ecuaciones Constitutivas de Un Material Visco-Elástico

La viscoelasticidad es el estudio de las relaciones esfuerzo-deformación-tiempo que existen en el comportamiento mecánico de los materiales. Conocer tales relaciones es importante en el diseño de obras construidas con materiales cuyas propiedades cambia con el tiempo y en los que la variación de la magnitud de las cargas influye en forma significativa. Este comportamiento difiere notablemente del que exhiben materiales que se pueden modelar aceptablemente por cuerpos idealmente elásticos o idealmente viscosos, ya que son materiales que se comportan como distintas combinaciones de ambos. El modelo más común para representar el comportamiento de estos materiales es el modelo de Kelvin o mejor conocido como modelo de Kelvin-Voight (Deméneghi, Sanginés, & Magaña del toro, 1986). A lo largo del presente subtema, este último será el centro de nuestro estudio.

El **modelo de Kelvin-Voight** se visualiza como el conjunto en paralelo de un modelo elástico (cuerpo de Hooke), representado por un resorte de constante elástica (E o G) y un modelo meramente plástico (cuerpo de Newton), representado por un amortiguador viscoso con constante de viscosidad o amortiguamiento (η o μ o c). Ver FIGURA 2.1.A.

⁷ Con la intención de apoyar el estudio de la dinámica de medio continuo que se tratará a continuación, son de utilidad los conceptos de los APÉNDICES A.1.2 y A.1.3 que son un repaso de las notaciones de esfuerzos y deformaciones utilizados comúnmente en la dinámica del medio continuo.

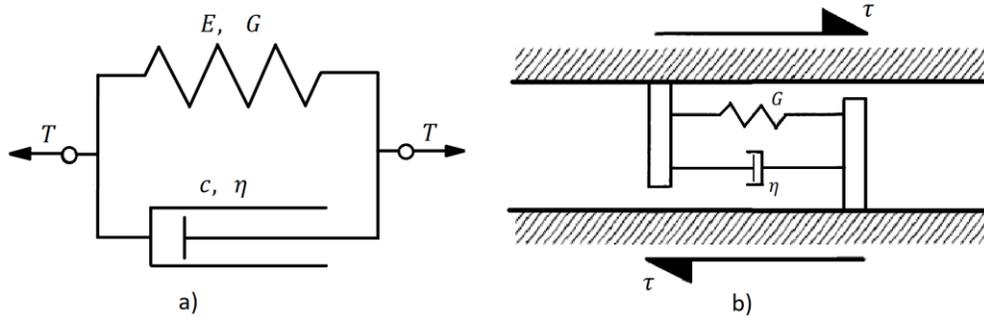


Figura 2.1: Modelo analógico del cuerpo de Kelvin. a) Modelo a compresión (Levi, 1982), b) Modelo en cortante (Kramer, 1996)

Si se aplica una fuerza de tensión T a ambos lados del modelo como en la FIGURA 2.1.A, entonces esta fuerza se distribuye entre el resorte y el amortiguador; en consecuencia, por equilibrio de fuerzas tendríamos:

$$T = T_H + T_N \quad \text{Ec. 2.1}$$

Donde los subíndices H y N hacen alusión al cuerpo de Hooke y al cuerpo de Newton respectivamente. Dividiendo la Ec. 2.1 entre el área, queda como:

$$\sigma = \sigma_H + \sigma_N \quad \text{Ec. 2.2}$$

La relación esfuerzo vs. Deformación del cuerpo de Hooke está definida como:

$$\sigma_H = E \cdot \varepsilon \quad \text{Ec. 2.3}$$

Mientras que la relación esfuerzo vs deformación del cuerpo de Newton está definida como:

$$\sigma_N = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad \text{Ec. 2.4}$$

Por lo que substituyendo la Ec. 2.3 y la Ec. 2.4 en la Ec. 2.2 queda como

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad \text{Ec. 2.5}$$

Donde ε es la **deformación unitaria en el resorte**, mientras que $\dot{\varepsilon}$ es la **velocidad de deformación unitaria en el amortiguador**. Por compatibilidad de deformaciones, la deformación en el resorte es igual a la deformación en el amortiguador. A la Ec. 2.5 se le conoce como **ecuación constitutiva del cuerpo de Kelvin-Voight**; ésta es una ecuación diferencial cuya solución es la relación esfuerzo vs deformación que rige en dicho modelo.

Voight consideró que las componentes de esfuerzo en un sólido son la suma de dos términos: el primero proporcional a la deformación unitaria y el segundo proporcional a la velocidad de deformación unitaria (este último para tomar en cuenta la disipación de energía). Las relaciones esfuerzo-deformación para un cuerpo de Kelvin sobre un elemento diferencial de volumen (dv) que se encuentra en equilibrio estático, como el de la FIGURA A.2 quedan como (Deméneghi, Sanginés, & Magaña del toro, 1986):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \lambda \cdot \varepsilon_v + \lambda' \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + 2G \cdot \varepsilon_x + 2\eta \cdot \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \\ \sigma_{yy} = \lambda \cdot \varepsilon_v + \lambda' \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + 2G \cdot \varepsilon_y + 2\eta \cdot \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \\ \sigma_{zz} = \lambda \cdot \varepsilon_v + \lambda' \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + 2G \cdot \varepsilon_z + 2\eta \cdot \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} + \eta \cdot \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} \\ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} + \eta \cdot \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} \\ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} + \eta \cdot \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{Ec. 2.6 Relaciones Esfuerzo vs. Deformación para un cuerpo de Kelvin}$$

Donde:

$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ Es la deformación volumétrica unitaria

$\lambda = \nu \cdot E / [(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)]$ Es la constante de Lamé para la componente elástica

Y λ' es la constante de Lamé para la componente viscosa, no tiene ningún significado físico.

2.2 Ecuación de Movimiento En Coordenadas Cartesianas

Dado el elemento diferencial de volumen en equilibrio dinámico de la FIGURA 2.2, la sumatoria de fuerzas externas no balanceadas en la dirección $+x$ vale:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \left[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz \right] dx dy + \left[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right] dx dz + \left[\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot dx \right] dy dz \\ &\quad - \tau_{zx} \cdot dx dy - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz - \sigma_{xx} \cdot dy dz \\ &\quad \xrightarrow{\text{simplificando}} \\ \Sigma F_x &= \left[\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] \cdot dV \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.7}$$

Donde $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ es el diferencial de volumen.

Utilizando la segunda ley de Newton en función de la variación de momentum y despreciando todas las fuerzas de masa excepto la inercial,⁸ la fuerza interna neta en la dirección $+x$ vale:

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= dm \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \Sigma F_x &= \rho \cdot dV \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.8}$$

Donde $dm = \rho \cdot dV$ es el diferencial de masa.

Igualando las fuerzas internas y externas (Ec. 2.7 y Ec. 2.8) tenemos que:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \quad \text{Ec. 2.9}$$

⁸ las **fuerzas de masa** son fuerzas inerciales internas, que como su nombre lo indica dependen de la masa de un cuerpo al ser expuesta a una aceleración, como pueden ser el peso propio, electromagnéticas, centrífugas o centrípetas, etc.

La Ec. 2.9 establece el equilibrio entre las fuerzas externas no balanceadas aplicadas a los extremos del cubo en la dirección del eje x (Lado derecho), que deben igualar a la fuerza de inercia inducida por la aceleración de la masa del elemento (Lado izquierdo). (Kramer, 1996).

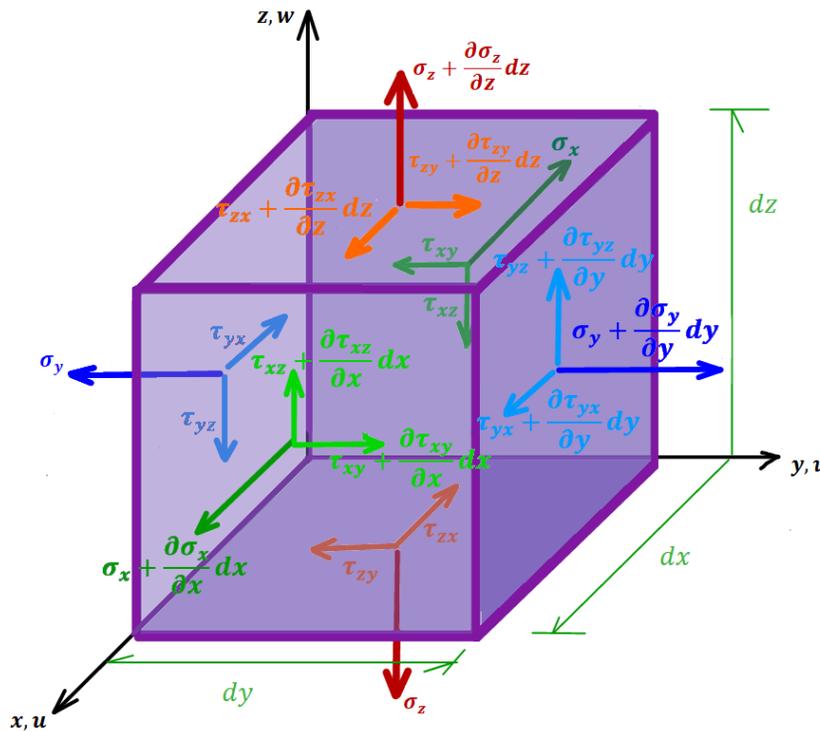


Figura 2.2: Estado de esfuerzos en un elemento dV sujeto a equilibrio Dinámico en un tiempo específico (t). (Deméneghi, Sanginés, & Magaña del toro, 1986)

Procediendo de forma análoga en las direcciones y y z se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \quad \text{Ec. 2.10}$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \quad \text{Ec. 2.11}$$

Las Ec. 2.9, Ec. 2.10 y Ec. 2.11 son **ecuaciones de movimiento** que se deben cumplir para cualquier clase de material.

2.3 Ecuaciones de Movimiento para el Cuerpo de Kelvin-Voight

Para obtener las ecuaciones de movimiento de una onda que viaja por un medio que se rige por una ley esfuerzo vs deformación vs tiempo que se ajusta al modelo de Kelvin-Voight, se debe substituir en las últimas ecuaciones del capítulo anterior (Ec. 2.9 Ec. 2.10 y Ec. 2.11), la serie de **relaciones esfuerzo-deformación para un cuerpo de Kelvin** (Ec. 2.6). De momento, sólo se presenta la obtención de la ecuación de movimiento en la dirección del eje x ; Aunque las ecuaciones para los ejes y y z se pueden obtener de manera análoga. Sea la Ec. 2.9 La componente de la ecuación de movimiento en coordenadas cartesianas que corresponde al eje x y reemplazando las Ec. 2.6 **Relaciones Esfuerzo vs. Deformación para un cuerpo de Kelvin**:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\lambda + \lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \varepsilon_x \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right\} \gamma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right\} \gamma_{zx}$$

Ec. 2.12

Considerando además las **relaciones deformación vs desplazamiento** (EC. A.8, EC. A.9, EC. A.10 y EC. A.11 del APÉNDICE A.1.3 de este trabajo) y reagrupando, la EC. 2.12 queda como:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[\lambda + \lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right\} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

reagrupando →

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \nabla^2 u$$

Ec. 2.13

En consecuencia, la ecuación diferencial de movimiento en coordenadas cartesianas, específica para un elemento diferencial de volumen que pertenece a un medio continuo que se comporta como un cuerpo de Kelvin-Voight, es:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \nabla^2 u$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \nabla^2 v$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left\{ \left[\lambda + \lambda' \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + \left[G + \eta \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] \cdot \nabla^2 w$$

Ec. 2.14

Considerando que el material es puramente elástico; es decir, que el amortiguamiento asociado con la parte plástica de la EC. 2.14 es nulo, dicha ecuación queda como:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \{ \lambda + G \} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x} + G \cdot \nabla^2 u$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \{ \lambda + G \} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y} + G \cdot \nabla^2 v$$

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \{ \lambda + G \} \cdot \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z} + G \cdot \nabla^2 w$$

Ec. 2.15

En el interior de un medio continuo infinito, isótropo y homogéneo, se pueden encontrar dos soluciones a la ecuación de movimiento, las cuales se deducirán en los siguientes dos subtemas y que son las ecuaciones de movimiento para ondas longitudinales de compresión y dilatación, que provocan un cambio de volumen en el interior del medio continuo (FIGURA 2.3.A) y las ecuaciones de movimiento para ondas de cizalla o cortante, que provocan una deformación del medio continuo que se desarrolla a volumen constante FIGURA 2.3.B. Por ser ondas que se producen al interior de la masa del material, suelen llamarse en conjunto, **ondas de cuerpo**.

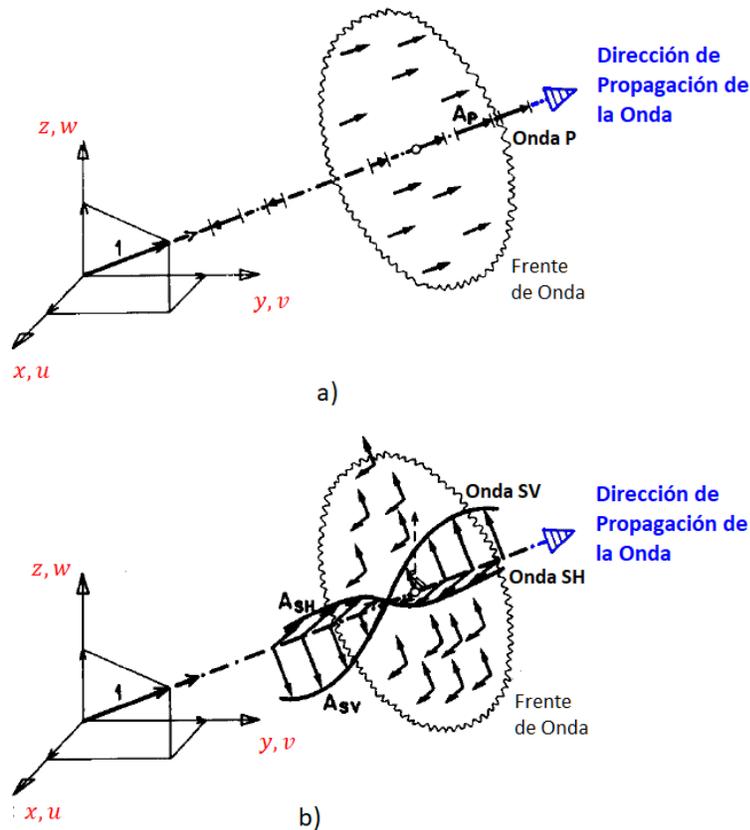


Figura 2.3: Desplazamiento asociado con las ondas de cuerpo. a) Ondas Longitudinales P. b) Ondas transversales S. (Wolf J. , 1985)

2.4 Ondas P

Considerando un movimiento en el que no se presenta rotación, según el ANEXO A.1.3:

$$\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dy} = \frac{dv}{dz}, \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx}, \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dy} \quad \text{Ec. 2.16}$$

La Ec. 2.15 se reduce entonces a:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \{\lambda + 2G\} \cdot \nabla^2 u \\ \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \{\lambda + 2G\} \cdot \nabla^2 v \\ \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \{\lambda + 2G\} \cdot \nabla^2 w \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.17}$$

Las ondas representadas por esta ecuación de movimiento, son conocidas como ondas irrotacionales que requieren que el material sea compresible, pues $\epsilon_v \neq 0$. Por lo tanto, también son llamadas ondas de dilatación o compresión. Como se demostrará más adelante, este tipo de ondas son siempre más veloces que las ondas S, por lo que además suelen nombrarse ondas primarias o simplemente ondas P.

Cada una de las relaciones de la [Ec. 2.17](#) es una componente ortogonal que describe el desplazamiento de una onda independientemente de las otras dos componentes. Las partículas de las ondas irrotacionales se mueven en la dirección de propagación de la onda, por lo que requieren un cambio de volumen del suelo. A grandes distancias a partir del epicentro, pueden ser consideradas ondas planas que son función de la coordenada en la dirección de propagación ([Zeevaert, 1983](#)).

2.5 Ondas S

Considerando ahora un desplazamiento a volumen constante, según el [ANEXO A.1.3](#):

$$\frac{d\varepsilon_v}{dx} = \frac{d\varepsilon_v}{dy} = \frac{d\varepsilon_v}{dz} = 0 \quad \text{Ec. 2.18}$$

Esto implica exclusivamente una distorsión angular y rotación del material, en tal caso, obtenemos a partir de la [Ec. 2.15](#) la siguiente ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \cdot \nabla^2 u \\ \rho \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G \cdot \nabla^2 v \\ \rho \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= G \cdot \nabla^2 w \end{aligned} \quad \text{Ec. 2.19}$$

Las ondas representadas por esta ecuación de movimiento, son conocidas como ondas rotacionales, que generan esfuerzos cortantes en la masa del material. Por tal razón, también son llamadas ondas de cizalla o cortante. Como se mostrará más adelante, este tipo de ondas, son siempre más lentas que las ondas P, por lo que asimismo suelen denominarse ondas secundarias o simplemente ondas S.

Al igual que en el caso anterior, cada una de las relaciones de la [Ec. 2.19](#) es una componente ortogonal que describe el desplazamiento de una onda independientemente de las otras dos componentes. El movimiento de las ondas de cortante se restringe a un plano perpendicular a la dirección de propagación, y el volumen del suelo permanece constante durante la distorsión. ([Zeevaert, 1983](#)).

Las ondas S son comúnmente divididas en dos tipos, o resueltas en dos componentes perpendiculares. Las ondas SH son ondas S en las que el desplazamiento de las partículas ocurre solo en un plano horizontal. Las ondas SV son aquellas en las que el movimiento de sus partículas se da en un plano vertical. Una onda S dada, con movimiento arbitrario de sus partículas puede ser representada como la suma vectorial de sus componentes SH y SV ([Kramer, 1996](#)).

2.6 Celeridad de ondas de cuerpo

Las [Ec. 2.17](#) y [Ec. 2.19](#), son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que se pueden expresar en la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ec. 2.20}$$

La solución general para este tipo de ecuaciones está dada por una onda estacionaria⁹.

$$u(x, t) = f_1(x - C_w t) + f_2(x + C_w t) \quad \text{Ec. 2.21}$$

Al derivar esta ecuación con respecto a t y con respecto a x y substituir en la Ec. 2.20 se observa que se satisfacen idénticamente. Las dos funciones f_1 y f_2 que componen la Ec. 2.21 son dos ondas que se transmiten a partir de la dirección positiva y negativa del eje x con una celeridad de onda constante C_w (Levi, 1982). Para demostrarlo, consideremos una de las dos funciones que componen la solución general $u(x, t)$. Por ejemplo, $f_2(x - C_w t)$, suponiendo que en el instante $t = t_0$ esta función está representada por la curva de trazo continuo que aparece en la FIGURA 2.4. Después de un intervalo de tiempo Δt , el argumento de f_2 se vuelve $x - C_w(t_0 + \Delta t)$ y la función misma queda invariada, siempre que incremente todas las abscisas en $x = x + C_w \cdot \Delta t$, ya que:

$$f_2 = [(x + C_w \Delta t) - C_w(t_0 + \Delta t)] = f_2(x - C_w \cdot t_0)$$

De la expresión anterior se deduce que f_2 es una función que avanza en la dirección del eje $+x$. De la misma manera, es comprobable que la función f_1 es una función que retrocede en la dirección del eje $-x$.

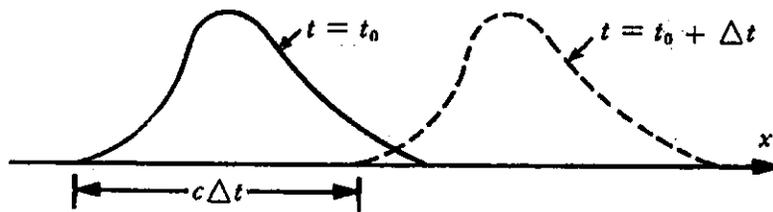


Figura 2.4: Desplazamiento de una componente de onda elástica unidimensional. (Levi, 1982)

Dicho lo anterior, la Ec. 2.17 se puede expresar como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ \frac{\lambda + 2G}{\rho} \right\} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ec. 2.22}$$

En otras palabras, la celeridad de las ondas P es:

$$C_p^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \Rightarrow C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad \text{Ec. 2.23 Celeridad de las ondas P}$$

⁹ Una onda estacionaria se forma por la interferencia de dos ondas con igual amplitud, longitud de onda (o frecuencia) que avanzan en sentido opuesto a través de un medio. El nombre de onda estacionaria proviene de la aparente inmovilidad de los nodos (puntos fijos). Comúnmente las ondas estacionarias son causadas por el fenómeno de resonancia, en el que las ondas estacionarias surgen debido a la interferencia entre las ondas reflejadas de regreso y hacia adelante dentro del medio que son producidas con la frecuencia resonante del medio oscilador. (YOUNG & FREEDMAN, 2009)

Por otro lado, la Ec. 2.19 se expresa como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ \frac{G}{\rho} \right\} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{Ec. 2.24}$$

En otras palabras, la celeridad de las ondas S es:

$$C_s^2 = \frac{G}{\rho} \Rightarrow C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{Ec. 2.25 Celeridad de las ondas S}$$

Al substituir el valor de la constante de Lamé (λ) en la Ec. 2.23 y considerando la Ec. 2.25 obtenemos la relación de las dos celeridades de onda como:

$$C_p = \sqrt{\frac{2 \cdot (1 - \nu)}{1 - 2\nu}} \cdot C_s \quad \text{Ec. 2.26 Celeridad de las ondas P}$$

Se puede observar que los dos sistemas de ondas de cuerpo generados en el interior de la masa de suelo por el movimiento sísmico, en el foco, son independientes entre sí, ya que viajan a diferentes velocidades. Es interesante notar que la celeridad de las ondas irrotacionales es función de la relación de Poisson (ver Ec. 2.26). Mientras ν se aproxima a 0.5 (es decir, cuando el suelo se vuelve incompresible; $\varepsilon_v = 0$) (Beer P. & Jonston, 2012), el denominador de la Ec. 2.26 tiende a cero y la celeridad de las ondas P tiende a infinito. En roca, se puede suponer $\nu \approx 0.25 - 0.3$; En suelos saturados, este valor es cercano a 0.5, por lo que la celeridad de las ondas P se hace extremadamente grande.

Por su parte, la celeridad de las ondas de corte es función únicamente de la rigidez del suelo e independiente de la relación de Poisson. En consecuencia, la precisión práctica que se obtiene en problemas donde se presentan ondas de cortante es mayor que la mostrada en aquellos problemas donde es necesario calcular la relación de Poisson de la masa de suelo. Además, si el subsuelo es saturado, el desplazamiento producido por las ondas P es considerablemente menor que el producido por las ondas S. Por lo tanto, en ingeniería sísmica las ondas que más daños producen en estructuras cimentadas sobre suelos no consolidados, son las ondas de cortante. En suelos saturados no consolidados se puede observar que la componente vertical no tiene importancia práctica, cuando el epicentro está localizado a gran distancia del lugar observado. (Zeevaert, 1983). Ergo, las ondas más importantes para el ejercicio de la ingeniería sísmica son las ondas de cuerpo P y S. Además de las ondas de cuerpo irrotacionales (ondas P) o incompresibles (ondas S), que se transmiten en el interior del medio, existen ondas que se desarrollan a causa de la transición que sucede en las fronteras entre materiales con diferentes características dinámicas y por la interacción entre las ondas de cuerpo al arribar al borde del medio por el que transitan, a las que se nombra genéricamente **ondas de superficie**. Estas pueden seguir distintas leyes de equilibrio dinámico, pero las dos principales se conocen como ondas Rayleigh (R) y Love (L). Estas ondas son de poca importancia práctica en el análisis sísmico, por lo que en no se volverán a mencionar. Para abundar acerca de las características de tales ondas, se remite a (Kramer, 1996).

3 Respuesta Dinámica del Subsuelo

Cuando una falla rompe bajo la superficie de la tierra, las ondas de cuerpo (Ondas P y S) creadas por tal fractura, viajan a través del interior de la corteza terrestre en todas direcciones. El movimiento del terreno así descrito, se considera formado por la superposición de vibraciones armónicas con distintas frecuencias provenientes del foco donde se originó el sismo, que van modificando su contenido de frecuencias al reflejarse y refractarse en la interfaz entre los diversos materiales geológicos.

Las mayores amplificaciones dinámicas que sufre el movimiento del terreno suelen presentarse donde los contrastes de rigidez de los suelos son muy pronunciados. Esto ocurre generalmente cerca de la superficie libre, especialmente en áreas de depósitos sedimentarios o valles aluviales. Las interfaces horizontales entre estratos y las irregularidades laterales producen un fenómeno de difracción múltiple de ondas sísmicas, que genera interferencias constructivas y destructivas, que a su vez, provocan amplificaciones y atenuaciones, respectivamente (Kramer, 1996).

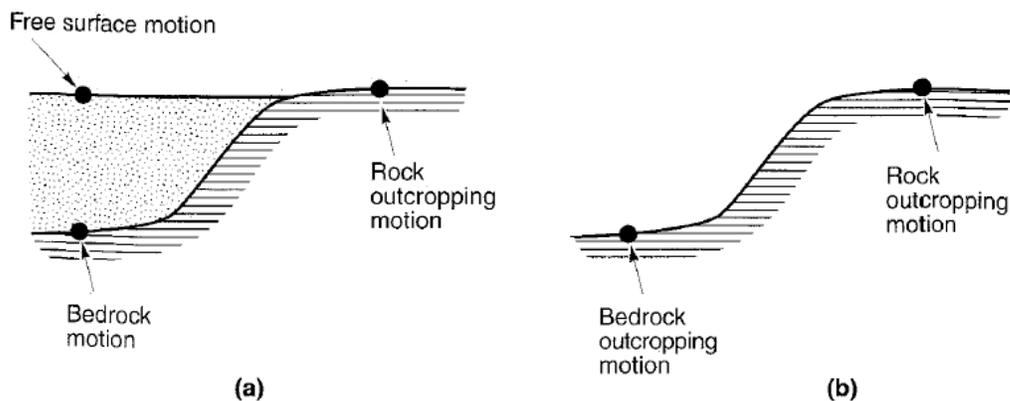


Figura 3.1: Nomenclatura para respuesta de suelo. (a) suelo sobreyaciendo a la roca madre. (b) Roca madre sin estrato de suelo sobre yaciéndola. (Kramer, 1996)

Antes de iniciar la descripción de cualquier modelo de respuesta dinámica del suelo, es oportuno definir algunos términos utilizados para representar el movimiento del subsuelo. Con referencia a la FIGURA 3.1.a, el movimiento en la superficie del estrato de suelo es el **movimiento en campo libre** (*free Surface motion*). El movimiento en la base del depósito de suelo (que es igual al de la parte superior del macizo rocoso), es el **movimiento del lecho rocoso** o **movimiento del macizo rocoso** (*bedrock motion*). El movimiento en algún lugar donde la roca madre está expuesta a la superficie, es llamado **movimiento del afloramiento rocoso** (*rock outcropping motion*). Si el depósito de suelo no estuviera presente, como en el caso de la FIGURA 3.1.b, el movimiento de la parte superior del lecho rocoso, sería el **movimiento del lecho rocoso en afloramiento** o **movimiento del macizo rocoso en afloramiento** (*bedrock outcropping motion*).

3.1 Efectos de sitio

Las condiciones locales del subsuelo pueden afectar considerablemente el movimiento sísmico y con ello la respuesta estructural. Los así llamados efectos de sitio producen significativas

variaciones espaciales del movimiento del terreno, incluyendo amplificaciones y/o atenuaciones de su intensidad, así como modificaciones de su duración y contenido de frecuencias; las cuales tienen una influencia determinante en la respuesta estructural ante sismos. (Mena & Pérez-Rocha, 2008).

Para conocer el grado de riesgo de una región en función de la sismicidad, se recurre a la regionalización sísmica, que en el caso del territorio mexicano, fue dividida tradicionalmente en cuatro niveles; aunque actualmente, ha sido posible definir nuevas y más precisas formas de representar dicho riesgo —Sobre esto se abundará en el SUBTEMA 4.5.1—. Sin embargo, con la clasificación tradicional del territorio, no se encontrarían representadas realmente algunas áreas, generalmente valles aluviales, antiguas zonas lacustres, etc. donde el comportamiento del terreno será marcadamente diferente. Por ejemplo, para el caso del sismo de septiembre de 1985 en México, el mapa de isosistas muestra dos áreas, (Ciudad de México y Ciudad Guzmán, Jalisco), cuyas intensidades máximas difieren con respecto a las isosistas que la rodean FIGURA 3.2.

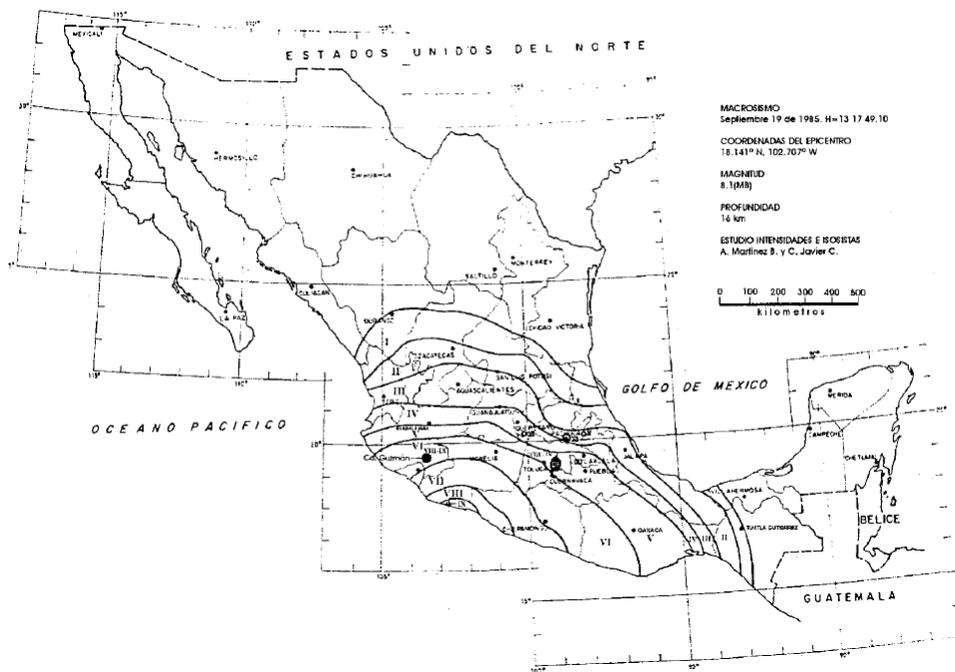


Figura 3.2: Isosistas del sismo del 19 de Septiembre de 1985. (CENAPRED, 1999)

Se conoce como **efecto de sitio** a la respuesta sísmica del terreno con características significativamente distintas en amplitud, duración o contenido de frecuencias de un área relativamente reducida, con respecto al entorno regional. En otras palabras, puede decirse que el efecto de sitio es aquella condición bajo la cual se llegan a observar intensidades sísmicas notablemente distintas y bien localizadas sin que haya una correlación con la atenuación normal de la energía sísmica con la distancia. (CENAPRED, 1999).

Existen además, **efectos sísmicos excepcionales** que no dependen de las aceleraciones; estos son esencialmente los debidos a inestabilidad del suelo sobre el que está desplantada la estructura. Por ejemplo, los fenómenos de licuación que ocurren cuando arenas poco densas

saturadas, por efectos de la vibración producida por el sismo, incrementan la presión de poro, reduciendo consecuentemente el esfuerzo normal efectivo entre las partículas de arena, perdiendo así su fricción interna y comportándose como un líquido, con lo cual su capacidad de carga se vuelve casi nula, dando lugar a fuertes hundimientos e inclusive al volteo de las estructuras sobre ellas desplantadas. Otros ejemplos son los derrumbes o deslizamientos de laderas que pueden arrasar con ellos las construcciones, así como los movimientos relativos de los bordes de una falla que pueden provocar rupturas en una estructura que las cruce. Estos Efectos son causados por el sismo y comúnmente son confundidos con los efectos de sitio; sin embargo, La forma de protegerse contra estos fenómenos no es diseñar las estructuras para que los absorba o resista, sino reducir la probabilidad de que estos se presenten, con tratamientos previos de los suelos o evitando construir en zonas particularmente críticas (Meli, 1985). Es por esto, que aunque son efectos debidos al sismo provocados por las condiciones locales del terreno, no se les clasifica como efectos de sitio. En conclusión, sólo se consideran efectos de sitio, todos aquellos debidos a las condiciones geológicas locales que influyen en la magnitud de las acciones sísmicas que la estructura debe soportar y que por lo tanto influyen en el diseño sísmico de la misma.

3.2 Análisis de respuesta unidimensional del suelo

Como se mencionó anteriormente, las ondas de cuerpo que se producen en el foco sísmico atraviesan diferentes materiales geológicos. Puesto que la velocidad de propagación de ondas P y ondas S es una característica intrínseca del material, y pensando que los materiales más superficiales por lo general tienen una menor velocidad de propagación de onda que la de materiales inferiores, las trayectorias inclinadas de las ondas de cuerpo que alcanzan una frontera horizontal, son usualmente refractadas hacia una dirección cada vez más próxima a la vertical, hasta que al llegar a la superficie, pueden considerarse, para fines prácticos, totalmente verticales **FIGURA 3.3. El análisis unidimensional de la respuesta del suelo**, está basado en la hipótesis de que todas las interfaces entre las diferentes capas de suelo son horizontales, y que la respuesta de un depósito de suelo es predominantemente causada por ondas SH propagadas desde la roca madre subyacente, en dirección vertical¹⁰. Además, se considera que tanto la superficie del macizo rocoso, como la del estrato de suelo, se extienden infinitamente en dirección horizontal. Los procedimientos basados en esta asunción han demostrado predecir la respuesta del suelo en razonable concordancia con la respuesta medida en muchos casos. (Kramer, 1996).

Durante el sismo de Mayo de 1962 registrado en la Ciudad de México, con una magnitud aproximada de 7 a 7.25 en la escala de Richter y epicentro aproximadamente a 30 km en dirección suroeste de la costa de Guerrero, e hipocentro aproximadamente a 20 km de profundidad, se observó que las ondas sísmicas fueron transmitidas a través de la roca firme del fondo de la cuenca del valle de México a los sedimentos saturados del suelo blando de origen lacustre. Por esta razón, las ondas longitudinales (ondas P), por ser ondas de compresión y dilatación que requieren un cambio de volumen, no fueron transmitidas con grandes amplitudes a la masa de arcillas, ya que al estar saturadas no pueden tener un cambio instantáneo en su volumen; por lo

¹⁰ Esto se justifica para temblores que provengan de focos cercanos, pues en este caso las ondas arriban a la superficie con dirección sensiblemente vertical. Para temblores lejanos esta hipótesis es cuestionable; Sin embargo, para fines prácticos se puede usar conservadoramente, ya que las amplificaciones que se presentan para incidencias oblicuas siempre son menores a las obtenidas con el modelo de propagación vertical. (Mena & Pérez-Rocha, 2008).

tanto, sólo las ondas que se propagan a volumen constante (Ondas S), producen importantes desplazamientos en los sedimentos a causa de la distorsión del estrato de subsuelo. Además, en este caso, las ondas de superficie producen desplazamientos que son despreciables en comparación con aquellos generados por las ondas de cortante. (Zeevaert, 1983).

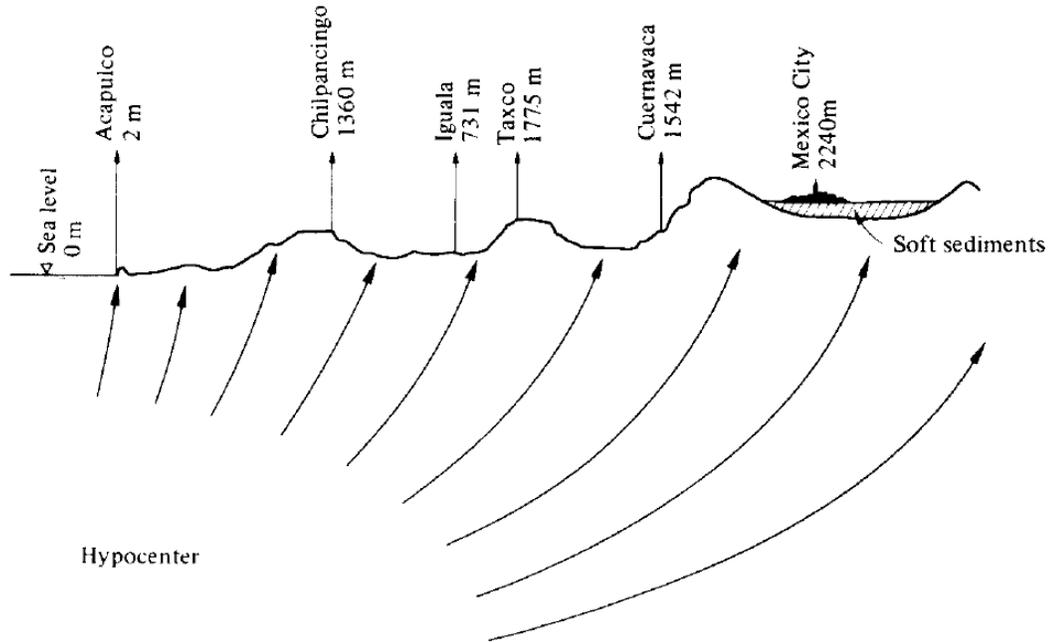


Figura 3.3: Trayectoria de las ondas sísmicas aproximándose al Valle de México. (Zeevaert, 1983)

Las aceleraciones que producen mayores daños en las estructuras son las horizontales; mientras que las verticales son de amplitud apreciable sólo en sitios cercanos al epicentro y producen solicitaciones severas sólo en algunas formas estructurales específicas. (Meli, 1985). Por ello se puede concluir que las hipótesis en las que se basa el modelo unidimensional, se cumplen con suficiente precisión para el análisis del subsuelo en el valle de México.

Para evaluar los efectos de la amplificación del movimiento sísmico en depósitos de suelo, sería deseable conocer la **función de transferencia del sitio**. La determinación experimental de esta, consiste en el cociente espectral entre el movimiento en la superficie del terreno y el movimiento en la base de la formación de suelo. Para ello se utilizan los espectros de Fourier de ambos movimientos. En ausencia de registros sísmicos, la función de transferencia suele determinarse con el **modelo unidimensional de propagación de ondas**. Este modelo es el más empleado en ingeniería sísmica para estudiar los efectos de sitio

La respuesta de un depósito de suelo ante excitación sísmica, es función de varios factores que están relacionados con la geometría y las propiedades dinámicas de los materiales que conforman el depósito. Para fines prácticos, esta complejidad puede reducirse si los efectos de sitio se relacionan exclusivamente con dos parámetros que miden las características más relevantes de la formación de suelo: el periodo dominante de vibración (T) y la velocidad media de propagación del sitio (C_s). Para esto, en la práctica se recurre usualmente a una aproximación que consiste en

reemplazar el perfil estratigráfico, por un estrato simple con velocidad media y periodo dominante iguales a los de la estratigrafía real. Esta idealización es adecuada para formaciones estratificadas sensiblemente horizontales que responden esencialmente como un manto homogéneo.

3.3 Respuesta de un estrato de suelo uniforme sobre roca rígida

Considerando una capa uniforme, linealmente elástica e isótropa de suelo, que sobreyace un depósito de roca infinitamente rígida como se muestra en la FIGURA 3.4, La ecuación de onda SH que se propaga verticalmente atravesando un cuerpo elástico se puede obtener a partir de la primera de las EC. 2.19 como:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{Ec. 3.1}$$

El resultado de esta ecuación diferencial puede representarse en forma exponencial como:

$$u(z, t) = A \cdot e^{i(\omega t + \kappa z)} + B \cdot e^{i(\omega t - \kappa z)} \quad \text{Ec. 3.2}$$

Donde ω es la frecuencia circular de la oscilación armónica del suelo, $\kappa = \omega/C_s$ es el número de onda y C_s es la celeridad de las ondas de corte que atraviesan el estrato de suelo.

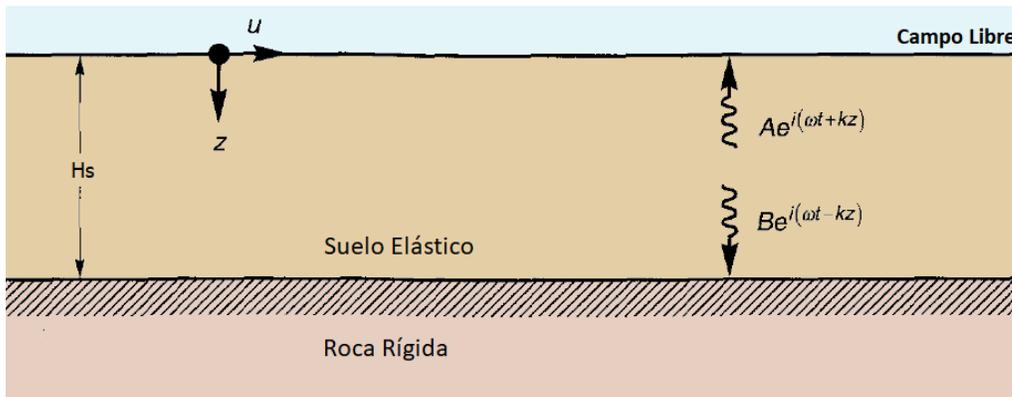


Figura 3.4: Depósito linealmente elástico, isótropo y homogéneo de espesor H_s subyacente por roca rígida. (Kramer, 1996).

Al igual que la EC. 2.21, la EC. 3.2 es la adición de dos ondas que viajan en sentidos opuestos, con A como la amplitud de una onda que viaja en sentido hacia arriba (dirección $-z$) y B es la amplitud de una onda que viaja en dirección hacia abajo (dirección $+z$) (Ver FIGURA 3.4).

A la altura de la superficie libre ($z = 0$), el esfuerzo cortante y consecuentemente la deformación cortante deben desaparecer; en otras palabras, La condición de frontera que debe cumplir la EC. 3.1, es que en la superficie libre existe un punto de inflexión de la configuración deformada del estrato de suelo. En lenguaje matemático se escribe como:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(0, t) = G \cdot \gamma_{xz}(0, t) = G \cdot \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = 0 \\ \therefore \frac{\partial u(0, t)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.3}$$

Substituyendo la [Ec. 3.2](#) en la [Ec. 3.3](#) se tiene:

$$i\kappa \cdot (A \cdot e^{i\kappa(0)} - B \cdot e^{-i\kappa(0)}) \cdot e^{i\omega t} = 0 \xrightarrow{\text{despejando } A} A = B \quad \text{Ec. 3.4}$$

Con este resultado obtenemos que:

$$u(z, t) = 2A \cdot \frac{e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}}{2} \cdot e^{i\omega t} = 2A \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos(\kappa z) \quad \text{Ec. 3.5}$$

Lo cual representa una onda estacionaria de amplitud $2A \cdot \cos(\kappa z)$. La onda estacionaria es producida por la interferencia constructiva entre dos ondas (una viajando hacia arriba y otra hacia abajo), que se muestran en la [FIGURA 3.4](#). De este modo, la onda estacionaria tiene una configuración fija en función de la profundidad. La [Ec. 3.5](#) puede ser utilizada para definir la **función de transferencia** que describe la razón de amplitud de desplazamientos en cualesquiera dos puntos dentro de la capa de suelo. Eligiendo estos dos puntos para que coincidan con la base ($z = Hs$) y la parte superior del estrato ($z = 0$), la función de transferencia queda como:

$$F_1(\omega) = \frac{u_{max}(0, t)}{u_{max}(Hs, t)} = \frac{2A \cdot e^{i\omega t}}{2A \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos(\kappa Hs)} = \frac{1}{\cos(\kappa Hs)} \quad \text{Ec. 3.6}$$

Dado que $\kappa = \omega/C_s$ la [Ec. 3.6](#) se puede reescribir como

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega Hs}{C_s}\right)} \quad \text{Ec. 3.7}$$

El módulo de la función de transferencia es la función de amplificación:

$$F_a = |F_1(\omega)| = \sqrt{\{Re[F_1(\omega)]\}^2 + \{Im[F_1(\omega)]\}^2} = \frac{1}{\left|\cos\left(\omega \cdot Hs/C_s\right)\right|} \quad \text{Ec. 3.8}$$

Lo que significa que el desplazamiento en la superficie es siempre mayor o igual que el transmitido por la capa de roca (ya que el denominador no puede ser nunca menor que 1) y a ciertas frecuencias tiende a infinito. En consecuencia, $|F_1(\omega)|$ es la razón de amplitud entre el movimiento en campo libre y el movimiento del macizo rocoso. Siendo que en este caso la roca madre es rígida, el movimiento del macizo rocoso es igual al movimiento del macizo rocoso en afloramiento.

Es importante notar que mientras $\omega \cdot Hs/C_s$ se aproxima a $n\pi - \pi/2$ (donde $n \in \mathbb{N}$), el denominador de la [Ec. 3.8](#) se aproxima a cero y entonces el valor de la función de amplificación se torna infinito, implicando resonancia. Como se recordará del [SUBCAPÍTULO 1.3.6](#)¹¹, las frecuencias fundamentales del estrato de suelo homogéneo son calculadas como:

$$\omega_n = \frac{C_s}{Hs} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (2n - 1) \quad \text{Ec. 3.9}$$

¹¹ la frecuencia de excitación Ω para la que se alcanza la resonancia en un sistema de 1GDL, está relacionada con la frecuencia fundamental de éste (ω_1) mediante la razón de sintonía $\beta = 1$. De manera similar se demuestra que para un sistema homogéneo de MGDL, el valor de las frecuencias fundamentales modales, están relacionadas con los valores armónicos de $\beta = 1/(2n - 1)$

Y en consecuencia, los periodos fundamentales del estrato de suelo son:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{4Hs}{C_s(2n-1)} \quad \text{Ec. 3.10}$$

De igual forma, la longitud de onda del n-esimo modo de vibrar del estrato de suelo es:

$$\lambda_n = \frac{4Hs}{2n-1} \quad \text{Ec. 3.11}$$

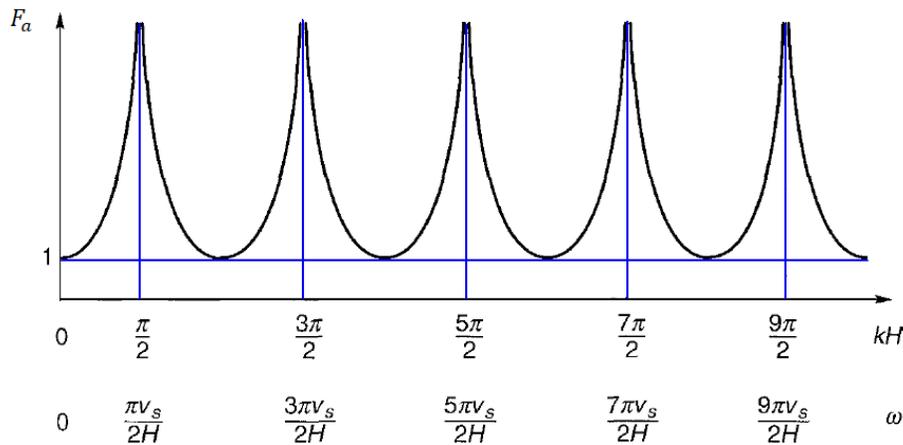


Figura 3.5: influencia de la frecuencia de vibración en la respuesta estacionaria de un estrato de suelo Isótropo, homogéneo, linealmente elástico. (Kramer, 1996).

El comportamiento de la función de amplificación se muestra en la FIGURA 3.5. Con este sencillo modelo, se demuestra que la respuesta de un depósito de suelo es altamente dependiente de la frecuencia del movimiento en la base y que las frecuencias para las cuales ocurren fuertes amplificaciones, dependen únicamente de la geometría (espesor Hs) y las propiedades del material (celeridad de propagación de ondas C_s) de la capa de suelo.

3.4 Determinación de los periodos fundamentales de vibración de un estrato de suelo modelado como un cuerpo de Kelvin-Voight sobre roca elástica

Obviamente, la amplificación no restringida predicha por el modelo descrito en el SUBCAPÍTULO 3.3, no puede ocurrir físicamente, porque tal análisis asume que no existe disipación de energía en el suelo. Dado que el amortiguamiento está presente en todos los materiales, entonces se obtendrían resultados más realistas al aplicar el análisis unidimensional considerando amortiguamiento. Supóngase pues, que este modelo tiene como sistema de referencia a la coordenada z en sentido vertical, positiva hacia abajo, con la superficie libre del estrato en $z = 0$, y la interfaz entre el estrato y el semiespacio en $z = Hs$. Entonces el modelo sería como se muestra en la FIGURA 3.6, si se toma en consideración que el lecho de roca se comporta como un medio perfectamente elástico, que por definición no cuenta con ningún tipo de amortiguamiento.

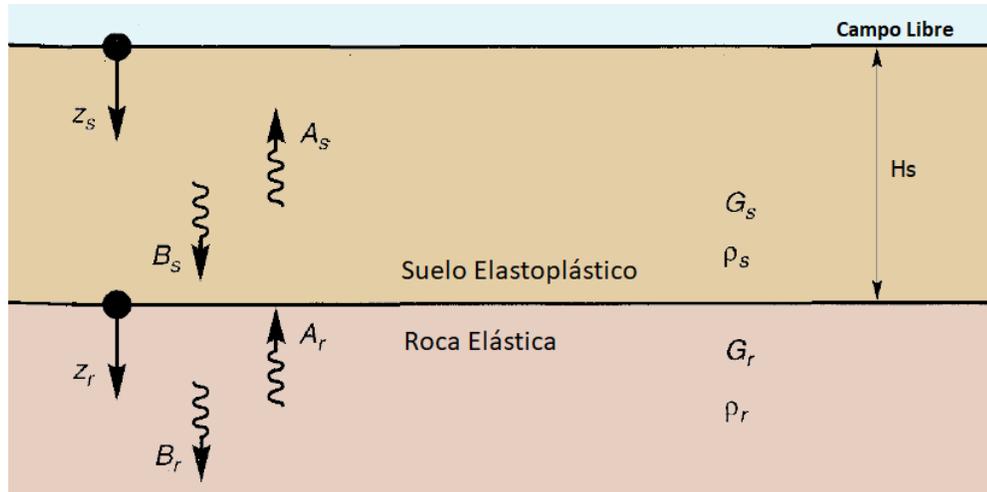


Figura 3.6: Nomenclatura para el caso de un estrato de suelo sobreyaciendo un semiespacio de roca elástica. (Kramer, 1996)

Asumiendo que el suelo tiene las características de resistencia al corte de un cuerpo de Kelvin-Voight, la ecuación de onda SH ($\varepsilon_v = 0$) que se propaga verticalmente por un cuerpo elástico-plástico, se puede obtener a partir de la primera de las Ec. 2.14 como:

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \eta \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \quad \text{Ec. 3.12}$$

La solución de esta ecuación diferencial es una onda estacionaria que tiene la siguiente forma:

$$u(z, t) = A \cdot e^{i(\omega t + \kappa^* z)} + B \cdot e^{i(\omega t - \kappa^* z)} \quad \text{Ec. 3.13}$$

Donde:

κ^* = Número de onda complejo, con parte real κ_1 y parte imaginaria κ_2 .

Para un cuerpo visco-elástico, se puede demostrar que la razón de **amortiguamiento material** es dependiente de la frecuencia. Sin embargo, como la disipación de energía en los suelos es de tipo histerética (independiente de la frecuencia), el módulo de cortante complejo¹², se puede expresar de forma independiente de tal frecuencia como se muestra a continuación (Kramer, 1996):

$$G^* = G \cdot (1 + i2\xi) \quad \text{Ec. 3.14}$$

Así, para valores pequeños de ξ , los términos de segundo orden son casi nulos ($\xi^2 \approx 0$), por lo que la celeridad compleja de onda cortante, se puede expresar como:

¹² el módulo de cortante es complejo porque pertenece a un modelo elástico de constante de rigidez compleja que engloba al resorte y al amortiguador. A partir de este parámetro se definen las otras propiedades complejas (número de onda y celeridad) (ver (KRAMER, 1996))

$$C_s^* = \sqrt{\frac{G^*}{\rho}} \Rightarrow \sqrt{\frac{G \cdot (1 + i2\xi)}{\rho}} \Rightarrow \sqrt{\frac{G \cdot (1 + i\xi)^2 + (i\xi)^2}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{G}{\rho}} \cdot (1 + i\xi) \Rightarrow$$

$$\therefore C_s^* = C_s \cdot (1 + i\xi)$$

Ec. 3.15

Entonces, el número de onda complejo para pequeños valores de ξ es:

$$\kappa^* = \frac{\omega}{C_s^*} \Rightarrow \frac{\omega}{C_s \cdot (1 + i\xi)} \Rightarrow \frac{\omega}{C_s \cdot (1 + i\xi)} \cdot \left(\frac{1 - i\xi}{1 - i\xi} \right) \Rightarrow \frac{\omega \cdot (1 - i\xi)}{C_s \cdot (1 - (i\xi)^2)}$$

$$\therefore \kappa^* = \kappa \cdot (1 - i\xi)$$

Ec. 3.16

Si la roca fuera rígida, su movimiento no sería afectado por el desplazamiento o incluso la presencia del estrato de suelo que la sobreyace. En otras palabras, estaría actuando como una frontera fija, parecida a un empotramiento. Cualquiera de las ondas que viajara hacia abajo en el suelo sería completamente reflejada de regreso hacia la superficie por la capa de roca rígida; en consecuencia, atrapando toda la energía de la onda dentro de la masa de suelo.

En este caso, donde la roca es elástica, las ondas de esfuerzo cortante que se transmiten desde la superficie hacia abajo a través de la capa de suelo y alcanzan la interfaz suelo-roca, serán reflejadas sólo parcialmente; mientras que parte de su energía cruzará la interfaz para continuar su viaje hacia el interior del lecho rocoso. Si la roca se extiende a gran profundidad (lo bastante como para que las ondas reflejadas desde cualquier interfaz con un material más profundo sean incapaces de retornar a ella, lo suficientemente rápido, o con suficiente amplitud como para influenciar la respuesta del depósito de suelo), la energía elástica de estas ondas será efectivamente removida de la capa de suelo. Ésta es una forma de **amortiguamiento geométrico** o mejor dicho, **amortiguamiento por radiación**, el cual causa que las amplitudes de movimiento en la superficie libre sean menores que las que se presentan para el caso de materiales soportados sobre roca rígida.

Considerando el caso de un estrato de suelo sobreyaciendo un semiespacio de roca como el de la FIGURA 3.6, si los subíndices r y s se refieren al lecho rocoso y al estrato de suelo respectivamente, los desplazamientos debidos a ondas SH propagándose en dirección vertical en cada uno de los materiales pueden ser representados como:

$$u_s(z_s, t) = A_s \cdot e^{i(\omega t + \kappa_s^* z_s)} + B_s \cdot e^{i(\omega t - \kappa_s^* z_s)} \quad \text{Ec. 3.17}$$

$$u_r(z_r, t) = A_r \cdot e^{i(\omega t + \kappa_r^* z_r)} + B_r \cdot e^{i(\omega t - \kappa_r^* z_r)} \quad \text{Ec. 3.18}$$

Otras dos condiciones de frontera que se deben de cumplir son las siguientes:

- a) A la altura de la superficie libre ($z_s = 0$), el esfuerzo cortante debe desaparecer; por lo tanto:

$$A_s = B_s$$

Ec. 3.19

b) Compatibilidad de desplazamientos en la interfaz suelo-roca

$$u_s(Hs, t) = u_r(0, t) \quad \text{Ec. 3.20}$$

c) Compatibilidad de esfuerzos en la interfaz suelo-roca

$$\tau_s(Hs, t) = \tau_r(0, t) \quad \text{Ec. 3.21}$$

Como consecuencia de la Ec. 3.19, la Ec. 3.17 queda como:

$$u_s(z_s, t) = A_s \cdot (e^{i\kappa_s^* z_s} + e^{-i\kappa_s^* z_s}) \cdot e^{i\omega t} = 2A_s \cdot e^{i\omega t} \cdot \cos(\kappa^* z_s) \quad \text{Ec. 3.22}$$

Al substituir la Ec. 3.22 en la Ec. 3.20 tenemos:

$$A_s \cdot (e^{i\kappa_s^* Hs} + e^{-i\kappa_s^* Hs}) = (A_r + B_r) \quad \text{Ec. 3.23}$$

Considerando la Ec. 3.22 conjuntamente con la Ec. 3.21, además de la definición del esfuerzo cortante ($\tau_{zx} = G \cdot \partial u / \partial z$) se obtiene:

$$\frac{G_s \cdot \kappa_s^*}{G_r \cdot \kappa_r^*} \cdot A_s \cdot (e^{i(\kappa_s^* Hs)} - e^{-i(\kappa_s^* Hs)}) = (A_r - B_r) \quad \text{Ec. 3.24}$$

Donde la razón:

$$\frac{G_s \cdot \kappa_s^*}{G_r \cdot \kappa_r^*} = \frac{\rho_s \cdot C_{s_s}^*}{\rho_r \cdot C_{r_s}^*} = \frac{\rho_s \cdot C_{s_s} \cdot (1 + i\xi_s)}{\rho_r \cdot C_{r_s} \cdot (1 + i\xi_r)} = \alpha_z^* \quad \text{Ec. 3.25}$$

Se conoce como **razón de impedancia compleja** “*complex impedance ratio*”. En donde ρ_s Es la densidad del suelo, ρ_r es la densidad de la roca, C_{s_s} es la celeridad de ondas S del estrato de suelo, C_{r_s} es la celeridad de ondas S de la roca.

Resolviendo simultáneamente las Ec. 3.23 y Ec. 3.24 se determina que:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{2} A_s [(1 + \alpha_z^*) \cdot e^{i\kappa_s^* Hs} + (1 - \alpha_z^*) \cdot e^{-i\kappa_s^* Hs}] \\ B_r &= \frac{1}{2} A_s [(1 - \alpha_z^*) \cdot e^{i\kappa_s^* Hs} + (1 + \alpha_z^*) \cdot e^{-i\kappa_s^* Hs}] \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.26}$$

Al suponer una onda cortante propagándose de manera vertical con amplitud A_0 , viajando hacia arriba a través de la roca, si el suelo no estuviera presente, como en la FIGURA 3.1.b, el efecto de superficie libre en el lecho rocoso en afloramiento, produciría un **movimiento del lecho rocoso en afloramiento**, de amplitud¹³ $A_r = 2A_0$; es decir, el doble de la amplitud con la que contaba inicialmente. Con el suelo presente, considerando la primera de las Ec. 3.26, el movimiento en campo libre debe ser:

¹³ Para obtener este valor, se utiliza la ecuación Ec. 3.18, considerando que el macizo rocoso está en afloramiento, por lo que se debe cumplir la condición de frontera de $\tau_r(0, t) = 0$, con lo que $A_r = B_r$ y $u_r(z_r, t) = 2A_r \cdot \cos(\kappa_r^* \cdot z_r) \cdot e^{i\omega t}$ por lo que la amplitud de la onda, cuando $z_r = 0$ es $2A_r$. En otras palabras, el doble de amplitud que el de la onda incidente proveniente del espacio semi-infinito.

$$2A_s = \frac{4A_0}{(1 + \alpha_z^*) \cdot e^{i\kappa_s^* Hs} + (1 - \alpha_z^*) \cdot e^{-i\kappa_s^* Hs}} \quad \text{Ec. 3.27}$$

Definiendo la función de transferencia como la razón entre la amplitud de desplazamiento de la superficie del suelo contra el movimiento de la roca en afloramiento:

$$F_2(\omega) = \frac{A_s}{A_r} = \frac{2}{(1 + \alpha_z^*) \cdot e^{i\kappa_s^* Hs} + (1 - \alpha_z^*) \cdot e^{-i\kappa_s^* Hs}} \quad \text{Ec. 3.28}$$

Que al utilizar la ley de Euler (Ec. 1.9) se puede escribir como:

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\cos(\kappa_s^* Hs) + i \cdot \alpha_z^* \cdot \sin(\kappa_s^* Hs)} \Rightarrow \quad \text{Ec. 3.29}$$

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega Hs}{C_{s_s}^*}\right) + i \cdot \alpha_z^* \cdot \sin\left(\frac{\omega Hs}{C_{s_s}^*}\right)} \quad \text{Ec. 3.30}$$

El módulo de esta función de transferencia no puede ser expresado en forma muy compacta cuando existe amortiguamiento en el suelo. Sin embargo, para ilustrar el efecto tan importante que tiene la elasticidad del lecho de roca, se puede expresar el factor de amplificación para suelo no amortiguado como:

$$F_{a2} = |F_2(\omega, \xi = 0)| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\kappa_s Hs) + \alpha_z^2 \cdot \sin^2(\kappa_s Hs)}} \quad \text{Ec. 3.31}$$

Es importante notar de la Ec. 3.31, que aun cuando el suelo no cuente con amortiguamiento material ($\xi = 0$), el efecto de la flexibilidad de la roca representada por la relación de impedancia ($\alpha_z^* > 0$) sobre el comportamiento del factor de amplificación (F_{a2}), es muy similar; ya que impide que el denominador de dicho factor se vuelva cero. En esta ecuación, se puede notar la similitud entre los efectos del amortiguamiento material del suelo y la elasticidad de la roca, al comparar la configuración de las curvas de factor de amplificación de la FIGURA 3.8, con la configuración de aquellas de la FIGURA 3.7. Igualmente, se puede demostrar que cuando la relación de impedancias es ($\alpha_z^* = 0$), que ocurre solamente si la celeridad de ondas S en la roca es ($C_{r_s}^* = G_r^* \approx \infty$) que implica que la roca es infinitamente rígida, la Ec. 3.29 queda como:

$$F_3(\omega) = \frac{1}{\cos(\kappa_s Hs + i(-\xi \kappa_s Hs))} \quad \text{Ec. 3.32}$$

Utilizando la identidad $|\cos(a + ib)| = \sqrt{\cos^2(a) + \sinh^2(b)}$ se obtiene:

$$|F_3(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\kappa_s \cdot Hs) + \sinh^2(-\xi \cdot \kappa_s \cdot Hs)}} \quad \text{Ec. 3.33}$$

Y ya que para valores pequeños $\sinh^2(x) \approx x^2$, el factor de amplificación queda como

$$|F_3(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\kappa_s \cdot Hs) + (\xi \cdot \kappa_s \cdot Hs)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\omega \cdot Hs}{C_s}\right) + \left(\frac{\xi \cdot \omega \cdot Hs}{C_s}\right)^2}} \quad \text{Ec. 3.34}$$

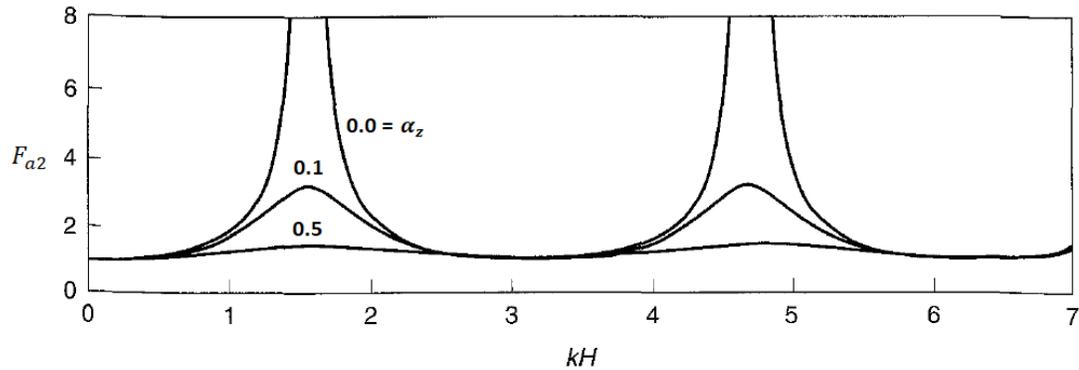


Figura 3.7: Efecto de la relación de impedancia sobre el factor de amplificación para el caso de suelo sin amortiguamiento material, considerando únicamente amortiguamiento geométrico. (Kramer, 1996).

En la FIGURA 3.8 se observa que el factor de amplificación es únicamente función del amortiguamiento material; es decir, que la función de amplificación descrita por la Ec. 3.34, considera que el lecho rocoso es completamente rígido y que únicamente el amortiguamiento del propio material actúa sobre él.

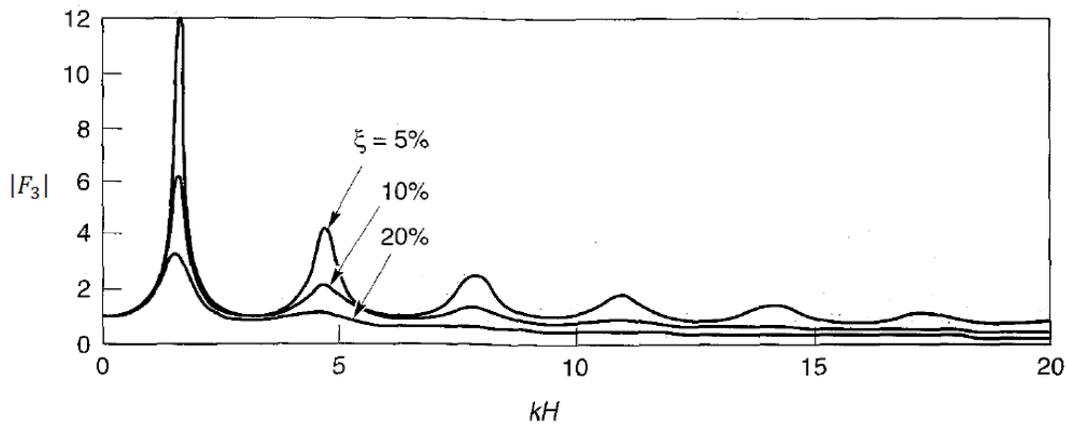


Figura 3.8: respuesta de un estrato de suelo en estado estacionario, linealmente elástico considerando únicamente amortiguamiento material. (Kramer, 1996).

En las ecuaciones anteriores (Ec. 3.31 y Ec. 3.34), se aprecia que las amplificaciones máximas en un estrato de suelo dependen tanto del **amortiguamiento material** (\$\xi\$), como del **amortiguamiento por radiación** (geométrico), representado por el contraste de impedancias (\$\alpha_z^*\$). Se puede señalar que conforme la frecuencia aumenta, los efectos del amortiguamiento geométrico (FIGURA 3.7) se mantienen constantes, mientras que los efectos del amortiguamiento

material (FIGURA 3.8) aumentan. Para la frecuencia fundamental, es mayor la influencia del amortiguamiento geométrico, y a medida que la frecuencia se incrementa, el amortiguamiento material se va volviendo cada vez más representativo. (Mena & Pérez-Rocha, 2008). Por lo tanto se afirma que el amortiguamiento del suelo es histerético y por definición independiente de la frecuencia de excitación, mientras que el amortiguamiento geométrico, depende de la frecuencia de excitación a tal grado que para frecuencias altas, el amortiguamiento geométrico es exiguo.

Como la amplificación pico del factor de amplificación decae al incrementar la frecuencia de vibración, la mayor amplificación ocurrirá con la frecuencia natural más baja, también conocida como frecuencia fundamental.

$$\omega_0 = \frac{\pi \cdot C_s}{2H_s} \quad \text{Ec. 3.35}$$

El periodo de vibración correspondiente a la frecuencia fundamental es el periodo fundamental:

$$T_s = \frac{(2\pi)}{\omega_0} = \frac{4H_s}{C_s} \quad \text{Ec. 3.36}$$

Este periodo depende del espesor y la celeridad de las ondas S del estrato de suelo, e indica el periodo de vibración con el cual se espera que se presenten las mayores amplificaciones.

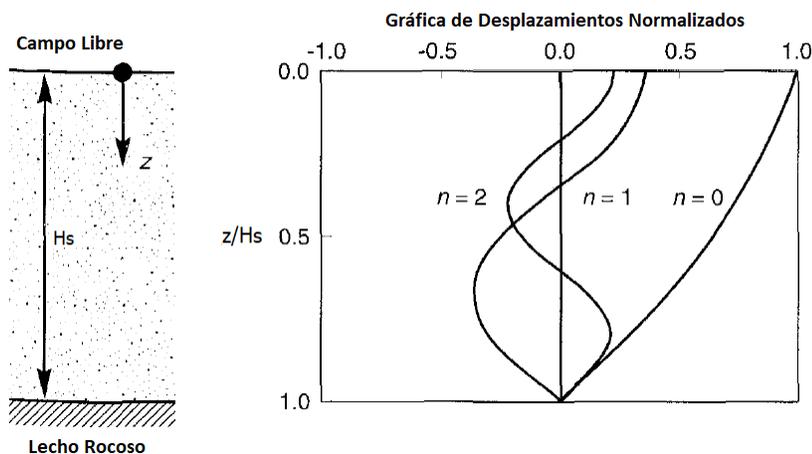


Figura 3.9: patrón de desplazamiento para una onda estacionaria para los tres primeros modos de vibrar ($n=1, 2, 3$) para una capa de suelo con $\xi=5\%$. Los desplazamientos están normalizados por el máximo desplazamiento a la frecuencia fundamental

Con cada frecuencia natural, surge una onda estacionaria en el estrato de suelo. La configuración deformada normalizada de estas ondas, también conocida como **configuración modal** (*modal shape*), para las primeras tres frecuencias fundamentales está mostrada en la FIGURA 3.9. Se puede observar que los desplazamientos están en fase para todas las profundidades en el primer modo, pero esto no se cumple para los modos superiores. A frecuencias por arriba de la fundamental, parte del depósito de suelo puede estar moviéndose en una dirección mientras que otras partes pueden estar moviéndose en la dirección contraria.

3.5 Determinación de los periodos de resonancia de suelos estratificados (Método de Zeevaert)

Para calcular las propiedades dinámicas (C_s y T_s) del estrato de suelo homogéneo equivalente que se emplea para realizar el análisis del modelo unidimensional de propagación de ondas, se estudian en este subcapítulo y el siguiente un par de modelos que utilizan procedimientos "paso a paso" para resolver la ecuación diferencial de movimiento de las ondas.

El algoritmo que se presenta a continuación fue desarrollado por el Dr. Leonardo Zeevaert para la evaluación del esfuerzo cortante sísmico, al mismo tiempo que se calculan los desplazamientos del suelo (configuración deformada), cuando la columna estratigráfica vibra bajo el efecto de una onda con frecuencia circular específica (ω).

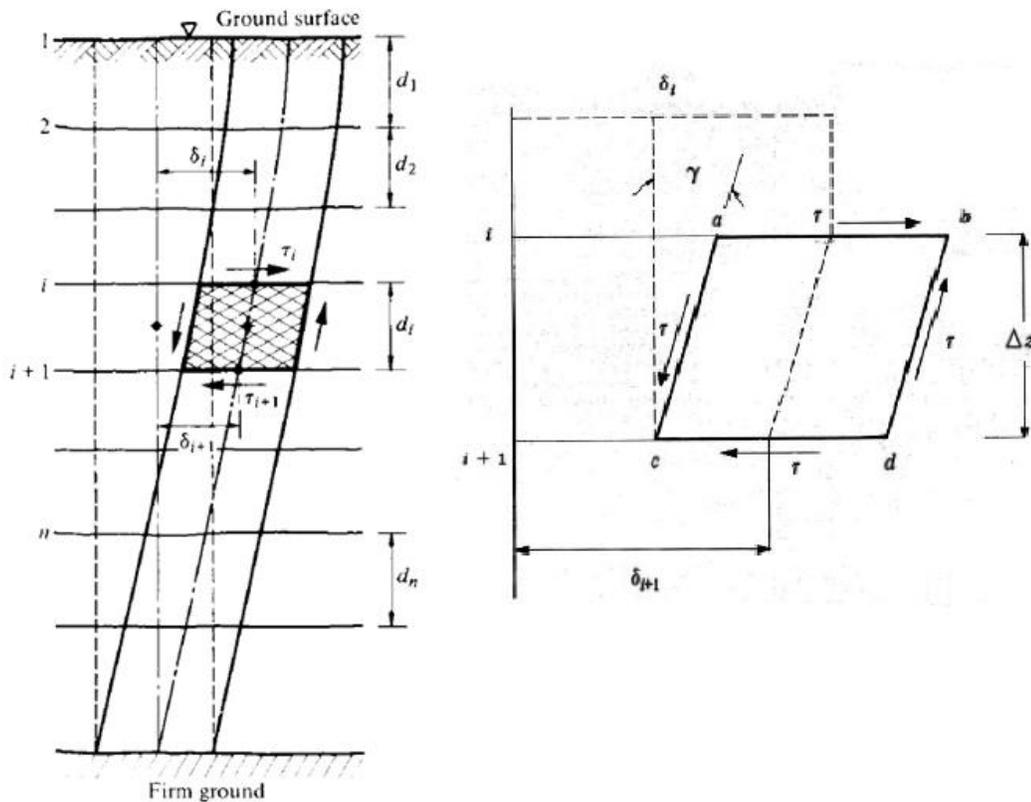


Figura 3.10: Desplazamiento horizontal relativo de un elemento diferencial de la columna de suelo con área unitaria. (Zeevaert, 1983)

Comúnmente los instrumentos de obtención de registros sísmicos son instalados en la superficie libre del terreno o cerca de ella, donde es más sencillo y económico instalarlos en vez de excavar para situarlos directamente en el lecho de roca. Por eso surge un problema práctico de gran interés: aquel que involucra la determinación del movimiento en el lecho rocoso a partir del movimiento en campo libre prescrito. Tal proceso es llamado **proceso de deconvolución** (*deconvolution process*). En resumen, se puede decir que en el análisis por deconvolución se tiene como dato de entrada el movimiento en la superficie libre del terreno (sobre el estrato); mientras que en el análisis de entrada en la base, como su nombre lo indica, se tiene como dato

inicial el movimiento en la interface entre el suelo y el lecho de roca (bajo el estrato). La desventaja de los métodos de deconvolución es que previo al análisis se debe filtrar el registro de entrada, a modo de disminuir la influencia que puedan tener las ondas de superficie. En consecuencia, el método de Zeevaert es un método de deconvolución, donde se trata al suelo como un oscilador de varios grados de libertad, similar al estudiado en el APÉNDICE A.1.1, el cual se basa en las siguientes hipótesis:

- El lecho de roca base del depósito es totalmente rígido.
- Las deformaciones son generadas exclusivamente por ondas de corte horizontal de propagación vertical (ondas SH).
- Las deformaciones son perfectamente elásticas.
- Los desplazamientos horizontales de los estratos se deben exclusivamente a su deformación por cortante, no interviniendo, en consecuencia, ningún efecto debido a la flexión.
- La masa de los estratos que constituyen la formación de suelo, se concentran en el punto superior medio de cada uno de ellos.
- Las características mecánicas del suelo, así como la distribución y espesor del mismo, son conocidas y se mantienen aproximadamente constantes en un área suficientemente extensa como para prescindir del efecto de confinamiento que pudieran ocasionar los estratos vecinos con características diferentes.

Como se verá más adelante (SUBCAPÍTULO 4.4), despreciando los efectos del amortiguamiento material, la máxima aceleración que se puede presentar en un estrato de suelo en función de su periodo fundamental (o de su frecuencia circular natural), está dada por:

$$|S_a| = \omega^2 \cdot |S_d|$$

Donde:

S_a = máxima aceleración

S_d = máximo desplazamiento

Ec. 3.37

A continuación se presenta el desarrollo matemático de las ecuaciones que servirán para la evaluación del orden de magnitud de las deformaciones (δ) y de los esfuerzos cortantes (τ) en la masa de suelos. Considerando la FIGURA 3.10 con un área unitaria ($A_r = 1$):

En un elemento diferencial de suelo como el de la FIGURA 3.10, se tiene:

$$\gamma = \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{h_i} \quad \text{Ec. 3.38: Deformación angular unitaria}$$

Mientras que:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_i - \tau_{i+1}}{2} \quad \text{Ec. 3.39: Esfuerzo cortante promedio}$$

Recordando la relación $G_i = \tau_i / \delta_i$ y substituyendo los valores anteriores:

$$\gamma = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2G_i} \quad \text{Ec. 3.40}$$

Por lo tanto:

$$\delta_i - \delta_{i+1} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2G_i} \cdot h_i \Rightarrow$$

$$\delta_{i+1} = \delta_i - \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2G_i} \cdot h_i \quad \text{Ec. 3.41}$$

La fuerza de inercia máxima se da para la frecuencia natural del depósito de suelo, según el espectro de pseudoaceleración; además, $S_d = \delta_1$ es el desplazamiento máximo en la superficie del terreno, por lo que considerando la Ec. 3.37:

$$\tau_{i+1} - \tau_i = m \cdot \omega_{ns}^2 \cdot S_d \Rightarrow (\rho_{s_i} \cdot h_i \cdot Ar) \cdot \omega_{ns}^2 \cdot \left(\frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{2}\right) \quad \text{Ec. 3.42}$$

Substituyendo el valor de Ec. 3.42 en la Ec. 3.41:

$$\delta_{i+1} = \delta_i - \left(\tau_i + \rho_{s_i} \cdot h_i \omega_{ns}^2 \cdot \left(\frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{2}\right) + \tau_i\right) \cdot \left(\frac{h_i}{2G_i}\right) \quad \text{Ec. 3.43}$$

Que se puede reescribir Como:

$$\delta_{i+1} = \delta_i - \frac{\tau_i h_i}{G_i} - \frac{\rho_{s_i} \cdot h_i^2 \cdot \omega_{ns}^2}{4G_i} \cdot \delta_i - \frac{\rho_{s_i} \cdot h_i^2 \cdot \omega_{ns}^2}{4G_i} \cdot \delta_{i+1} \quad \text{Ec. 3.44}$$

Despejando δ_{i+1} y llamando $N_i = \rho_{s_i} \cdot h_i^2 \cdot \omega_{ns}^2 / 4G_i$

$$\delta_{i+1} = \delta_i \cdot \frac{1 - N_i}{1 + N_i} - \frac{1}{1 + N_i} \cdot \frac{\tau_i}{G_i} \cdot h_i \quad \text{Ec. 3.45}$$

Llamando $A_i = \frac{1 - N_i}{1 + N_i}$ y $B_i = \left(\frac{1}{1 + N_i}\right) \cdot \left(\frac{h_i}{G_i}\right)$ entonces:

$$\delta_{i+1} = A_i \cdot \delta_i - B_i \cdot \tau_i \quad \text{Ec. 3.46: Desplazamientos}$$

Considerando que $C_i = \rho_{s_i} h_i \omega_{ns}^2 / 2$ entonces:

$$\tau_{i+1} = C_i \cdot (\delta_i + \delta_{i+1}) + \tau_i \quad \text{Ec. 3.47: Esfuerzo Cortante}$$

Igual que en los subtemas anteriores, se considera que el eje Z tiene dirección vertical hacia abajo y su origen está en la superficie libre del estrato de suelo. Las condiciones de frontera que se deben cumplir en el modelo del suelo blando son las siguientes:

En la superficie del estrato no existe esfuerzo cortante y el desplazamiento del terreno es máximo e igual al desplazamiento (S_d), que según la Ec. 3.37 es igual a $S_d = S_a / \omega_{ns}^2$. Para el periodo del suelo que se esté analizando ($T = 2\pi / \omega_{ns}$).

$$Z = 0$$

$$\tau_0 = 0$$

$$\delta_0 = S_d = S_a / \omega_{ns}^2$$

Mientras que en la base del depósito de suelo (parte superior del estrato rocoso), se deben de cumplir las siguientes condiciones:

$$Z = Hs \qquad \tau_n = \tau_{max} \qquad \delta_n = 0$$

Por otra parte, podemos decir que el periodo fundamental de vibración de un elemento diferencial se puede calcular, según (Zeevaert, 1983), como:

$$\Delta T_i = \frac{4h_i}{(C_s)_i} \qquad \text{Ec. 3.48}$$

Donde: $(C_s)_i$ es la celeridad de onda promedio en un estrato de espesor h_i

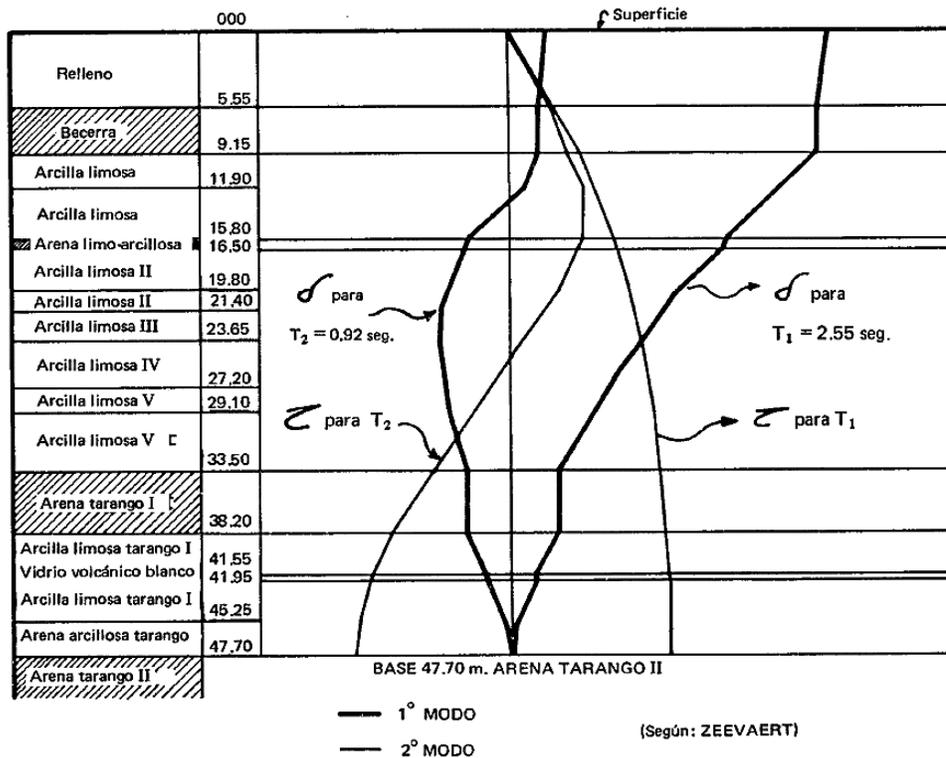


Figura 3.11: esfuerzo cortante y desplazamiento sísmico de un estrato de suelo típico de la ciudad de México. (Colindares, 1983)

La cantidad ΔT_i representa el periodo de resonancia fundamental de un estrato que experimenta reflexión de onda; es decir, el periodo de resonancia que se tiene cuando una onda cortante con longitud de onda $\lambda = 4h_i$ atraviesa y es reflejada en este estrato; armónicos superiores del periodo de resonancia también pueden ocurrir para ondas de longitud $\lambda_n = 4h_i / (2n - 1)$. Los valores de ΔT_i también representan el tiempo requerido para que una onda de celeridad $(C_s)_i$ viaje a través del estrato de espesor h_i . Además se pueden estudiar otros periodos resonantes mediante la adición de los valores ΔT_i de varios estratos, con lo que tendríamos:

$$T_n = 4 \sum_{i=0}^n \frac{h_i}{(C_s)_i} \qquad \text{Ec. 3.49}$$

La **Ec. 3.49** depende del promedio de celeridades y sirve como una primera aproximación al método iterativo. Posteriormente se siguen haciendo aproximaciones hasta que se cumplan las condiciones de frontera del método de las distorsiones. En ocasiones otros periodos de resonancia pueden ser igualmente importantes, como se muestra en la **FIGURA 3.11** proveniente del análisis del **APÉNDICE A.6**.

Cuando el depósito es estratificado, las ondas cortantes generadas en la base del estrato de suelo, viajan hacia arriba hasta la superficie libre, poniendo en resonancia parcial algún estrato o suma de estratos de espesor compatible con la longitud de la onda que atraviesa y es reflejada dentro de este. Tal fenómeno se logra apreciar en la superficie del terreno, por lo que se puede estudiar a partir del espectro de desplazamientos o de pseudoaceleraciones, calculado a partir del acelerograma registrado durante algún evento sísmico.

Actualmente se puede resolver el problema de la determinación de la respuesta de suelos estratificados mediante el uso de funciones de transferencia y factores de amplificación como los desarrollados para los dos subtemas anteriores, los cuales, además de todo, pueden considerar la flexibilidad del lecho rocoso. Posiblemente a causa de su complejidad, estos métodos eran imposibles de aplicar en la práctica hace algunas décadas, debido principalmente a la capacidad de las computadoras de la época.

3.6 Determinación del periodo fundamental del terreno según las NTC-DS del RCDF

El enfoque que actualmente se utiliza para determinar el periodo fundamental de vibración del suelo fue propuesto por el Ing. Alejandro Gómez Hernández durante el XII congreso de Ingeniería Estructural organizado por la Sociedad Mexicana de Ingenieros Estructuristas (SMIE) en la ciudad de León Guanajuato, México, en el año 2000. Éste se basa en el cociente de Rayleigh y se determina de la forma que se explica a continuación (**Gómez, 2010**), (**Deméneghi, 2001**).

Se considera un depósito de suelo de altura H_s con un elemento de volumen $dV = A \cdot dz$, situado a una altura z , donde la energía potencial de deformación por unidad de volumen vale:

$$\frac{dEp}{dV} = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} G(z) \gamma^2 = \frac{1}{2} G(z) \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2$$

En un volumen de suelo $A \cdot dz$, la energía de deformación o energía potencial es:

$$dEp = \frac{1}{2} G(z) \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 A dz$$

Por lo que, La energía potencial en todo el depósito de espesor H_s , para una configuración deformada cualquiera vale (**Mena & Pérez-Rocha, 2008**):

$$Ep = \frac{1}{2} \int_0^{H_s} G(z) A \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 dz \tag{Ec. 3.50}$$

Mientras que la energía cinética del elemento de área A y de espesor dz toma el valor:

$$dEc = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho_s(z) \cdot A dz \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2$$

Por lo que la energía cinética de todo el estrato de espesor H_s está dada por la siguiente expresión:

$$Ec = \frac{1}{2} \int_0^{H_s} \rho_s(z) \cdot A \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right|^2 dz \quad \text{Ec. 3.51}$$

Donde:

H_s Espesor de la estratigrafía

W Desplazamiento lateral dependiente de z y t

$G(z)$ Módulo de rigidez al corte del suelo en función de la profundidad

A Área transversal unitaria normal al eje z

$\rho_s(z)$ Densidad de la masa del suelo en función de la profundidad

El principio de conservación de la energía implica que despreciando el amortiguamiento, la máxima energía potencial debe ser igual a la máxima energía cinética dentro del estrato, por lo que igualando las ecuaciones [Ec. 3.50](#) y [Ec. 3.51](#) resulta:

$$\int_0^{H_s} G(z) \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 dz = \int_0^{H_s} \rho_s(z) \left| \frac{\partial W}{\partial t} \right|^2 dz \quad \text{Ec. 3.52}$$

Según [EL CAPÍTULO 1.1](#), para un MAS, la relación entre la máxima velocidad y el máximo desplazamiento es igual a:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \omega W \quad \text{Ec. 3.53}$$

Reemplazando la [Ec. 3.53](#) en la ecuación [Ec. 3.52](#) y despejando:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^{H_s} G(z) \left| \frac{\partial W}{\partial z} \right|^2 dz}{\int_0^{H_s} \rho_s(z) W^2 dz} \quad \text{Ec. 3.54}$$

La [Ec. 3.54](#) se conoce como el **cociente de Rayleigh**. Ésta puede aplicarse a cualquier aproximación de la configuración modal (W), para estimar razonablemente la frecuencia natural (ω) de un modo en particular¹⁴.

Suponiendo que se conocen los desplazamientos horizontales en los nudos de un estrato de espesor h_n y el desplazamiento a la profundidad z , como se observa en la [FIGURA 3.12](#).

$$W(Z) = W_{n-1} + \frac{z - z_{n-1}}{h_n} \cdot (W_n - W_{n-1})$$

Expandiendo esta expresión tenemos:

¹⁴ Los programas de análisis estructural suelen utilizar el método del cociente de Rayleigh, o el método de Ritz, para calcular las frecuencias y configuraciones modales de las estructuras de MGD.L.

$$W(Z) = W_{n-1} + \frac{z - z_{n-1}}{h_n} \cdot W_n - \frac{z - z_{n-1}}{h_n} \cdot W_{n-1}$$

Reuniendo los términos W_{n-1} queda:

$$W(Z) = \frac{z - z_{n-1}}{h_n} \cdot W_n + \frac{h_n - z + z_{n-1}}{h_n} \cdot W_{n-1}$$

Como $h_n + z_{n-1} = z_n$, finalmente obtenemos:

$$W(z) = \frac{z - z_{n-1}}{h_n} \cdot W_n + \frac{z_n - z}{h_n} \cdot W_{n-1} \quad \text{Ec. 3.55}$$

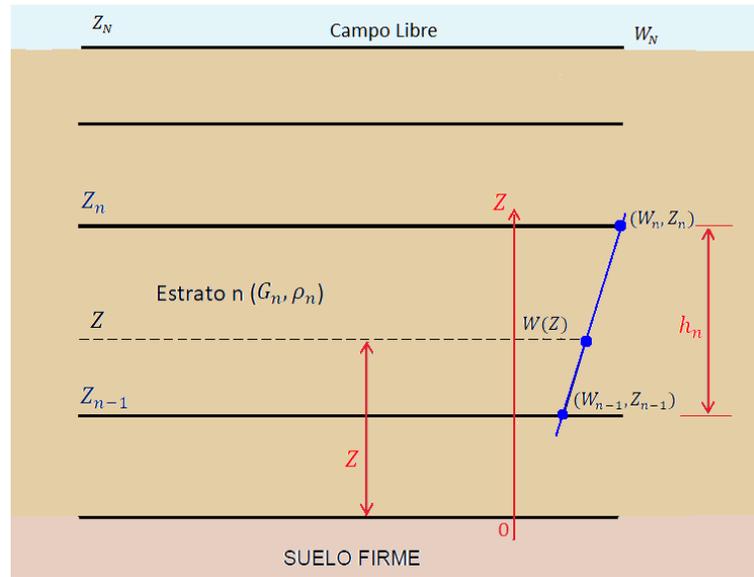


Figura 3.12: Estrato de espesor h_n a una distancia z_{n-1} de la roca basal. (Deméneghi, 2001)

Derivando con respecto a z la Ec. 3.55:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \quad \text{Ec. 3.56}$$

Substituyendo los valores de las Ec. 3.56 y Ec. 3.55 en la Ec. 3.54 tendríamos:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \left(G_n \cdot \int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right|^2 dz \right)}{\sum_{n=1}^N \left(\rho_n \cdot \int_{z_{n-1}}^{z_n} \left| \frac{z - z_{n-1}}{h_n} \cdot W_n + \frac{z_n - z}{h_n} \cdot W_{n-1} \right|^2 dz \right)} \quad \text{Ec. 3.57}$$

Resolviendo la integral en el numerador de la Ec. 3.57:

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left(\frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right)^2 dz \Rightarrow \left(\frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right)^2 \cdot (z_n - z_{n-1}) \Rightarrow \left(\frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right)^2 \cdot h_n \Rightarrow$$

Con lo que queda como:

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left(\frac{W_n - W_{n-1}}{h_n} \right)^2 dz = \frac{(W_n - W_{n-1})^2}{h_n} \quad \text{Ec. 3.58}$$

Mientras que resolviendo la integral en el denominador de la [Ec. 3.57](#):

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left(\frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{z_n - z}{h_n} W_{n-1} \right)^2 dz \Rightarrow \frac{1}{h_n^2} \int_{z_{n-1}}^{z_n} (z(W_n - W_{n-1}) + z_n W_{n-1} - z_{n-1} W_n)^2 dz$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$a = (z(W_n - W_{n-1}) + z_n W_{n-1} - z_{n-1} W_n)^2 \quad \therefore da = (W_n - W_{n-1}) \cdot dz$$

Substituyendo e integrando:

$$\frac{1}{h_n^2 \cdot (W_n - W_{n-1})} \int_{z_{n-1}}^{z_n} (a)^2 da \Rightarrow \frac{[(z(W_n - W_{n-1}) + z_n W_{n-1} - z_{n-1} W_n)^3]_{z_{n-1}}^{z_n}}{3 \cdot h_n^2 \cdot (W_n - W_{n-1})} \Rightarrow$$

Evaluando los límites de integración y simplificando se obtiene

$$\frac{(W_n^3 - W_{n-1}^3) \cdot (z_n - z_{n-1})^3}{3 \cdot h_n^2 \cdot (W_n - W_{n-1})}$$

Como $h_n = (z_n - z_{n-1})$ y expandiendo la diferencia de los cubos ($W_n^3 - W_{n-1}^3$):

$$\frac{(W_n - W_{n-1})(W_n^2 + W_n \cdot W_{n-1} + W_{n-1}^2) \cdot h_n^3}{3 \cdot h_n^2 \cdot (W_n - W_{n-1})}$$

Y simplificando, para finalizar da como resultado:

$$\int_{z_{n-1}}^{z_n} \left(\frac{z - z_{n-1}}{h_n} W_n + \frac{z_n - z}{h_n} W_{n-1} \right)^2 dz = \frac{h_n}{3} (W_n^2 + W_n \cdot W_{n-1} + W_{n-1}^2) \quad \text{Ec. 3.59}$$

Substituyendo las ecuaciones [Ec. 3.58](#) y [Ec. 3.59](#) en [Ec. 3.57](#) resulta:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \left(G_n \cdot \frac{(W_n - W_{n-1})^2}{h_n} \right)}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{\rho_n \cdot h_n}{3} (W_n^2 + W_n \cdot W_{n-1} + W_{n-1}^2) \right)} \quad \text{Ec. 3.60}$$

Por otra parte, según la [Ec. A.9](#) del [APÉNDICE A.1.3](#), sabemos que la deformación angular unitaria del n-esimo estrato de espesor h_n es igual a:

$$\gamma_n = \Delta W_n / \Delta z_n = (W_n - W_{n-1}) / h_n$$

Y está relacionada con el esfuerzo cortante del estrato mediante:

$$\gamma_n = \tau_n / G_n$$

Por lo que con estas dos relaciones, podemos determinar la deformación lateral ΔW_n como:

$$\Delta W_n = W_n - W_{n-1} = \frac{\tau_n}{G_n} \cdot h_n \quad \text{Ec. 3.61}$$

Además, si aplicamos un esfuerzo lateral unitario $\tau_n = 1$ al n-esimo estrato de una columna de suelo estratificada con N estratos, la deformación total al nivel n es W_n , cuyo valor es la suma de las deformaciones individuales de cada uno de los estratos por debajo de este, que para el modo fundamental de vibración, se puede expresar como:

$$W_n = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i} \quad \text{Ec. 3.62}$$

Considerando el mismo esfuerzo lateral unitario ($\tau_n = 1$) y substituyendo la Ec. 3.62 en la Ec. 3.61 se determina que:

$$\begin{aligned} W_{n-1} &= W_n - \frac{h_n}{G_n} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i} - \frac{h_n}{G_n} \Rightarrow \\ W_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} \end{aligned} \quad \text{Ec. 3.63}$$

Substituyendo las Ec. 3.62 y Ec. 3.63 en la Ec. 3.60 queda de la siguiente forma:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right)}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{\rho_n \cdot h_n}{3} \cdot \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i} \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \frac{h_i}{G_i} \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} \right] + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{G_i} \right]^2 \right\} \right)}$$

Considerando que el término $\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right)$ es una constante, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\omega^2 = \frac{3}{\frac{\left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right) \right]^2}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right)} \cdot \sum_{n=1}^N \rho_n \cdot h_n \cdot \frac{1}{\left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right) \right]^2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{G_i} \right) \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{G_i} \right) \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_i}{G_i} \right) \right] + \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_i}{G_i} \right) \right]^2 \right\}}$$

Que simplificando:

$$\omega^2 = \frac{3}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right) \sum_{n=1}^N (\rho_n \cdot h_n \cdot \{X_n^2 + X_n \cdot X_{n-1} + X_{n-1}^2\})} \quad \text{Ec. 3.64}$$

Donde:

$$X_n = \frac{W_n}{W_N} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{G_i} \right)}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n} \right)}$$

Según la [Ec. 3.36](#) el periodo fundamental del sitio T_s vale:

$$T_s = \frac{(2\pi)}{\omega_0} = \frac{4Hs}{C_s}$$

Entonces:

$$T_s = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n}\right) \sum_{n=1}^N \left(\frac{\rho_n \cdot h_n}{3} (X_n^2 + X_n \cdot X_{n-1} + X_{n-1}^2)\right)} \quad \text{Ec. 3.65}$$

Para determinar las propiedades de un depósito de suelo homogéneo equivalente al estratificado, con espesor $Hs = h_1$ y celeridad de ondas $S_{s1} = \sqrt{G_1/\rho_1}$, utilizando la [Ec. 3.65](#) obtenemos:

$$T_s = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{h_1}{C_{s1}} \approx 3.3276 \cdot \frac{h_1}{C_{s1}} \quad \text{Ec. 3.66}$$

Esto indica que el cosiente de Rayleigh da un valor bastante aproximado, mas no presiso, pero según la [Ec. 3.36](#), el periodo fundamental de un depósito homogéneo de espesor h_1 debe ser: $T_s = 4h_1/C_{s1}$. En consecuencia, se ajusta la [Ec. 3.65](#) reemplazando la constante $2\pi/\sqrt{3}$ por 4 quedando:

$$T_s = \frac{4}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n}\right) \sum_{n=1}^N (\gamma_{sn} \cdot h_n \cdot (X_n^2 + X_n \cdot X_{n-1} + X_{n-1}^2))} \quad \text{Ec. 3.67}$$

Donde:

$$X_n = \frac{W_n}{W_N} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{h_i}{G_i}\right)}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n}\right)} ; W_N = \sum_{n=1}^N \left(\frac{h_n}{G_n}\right) = cte. \quad \text{Ec. 3.68}$$

Las [Ec. 3.67](#) y [Ec. 3.68](#) se recomiendan en el **anexo A de las NTC-2004 del RCDF** para la evaluación del periodo fundamental de vibración del suelo. Con este método se obtiene una aproximación fidedigna del periodo dominante del terreno. Empero, pueden obtenerse valores de celeridad de ondas (C_s) fuera del intervalo en que varían las de la estratigrafía real, ya que no se trata de un método basado en el promedio de velocidades o lentitudes, sino en una formulación energética. (Mena & Pérez-Rocha, 2008)

4 Espectros de Respuesta Elástica

En todos los estudios relacionados con análisis de vibraciones mecánicas, incluyendo las vibraciones debidas a sismos, se hallan dos representaciones distintas de la respuesta de un sistema causada por la excitación dinámica, que plasman las características más importantes de la respuesta de dicho sistema; estas son **la historia de respuesta en el tiempo** “*time-history response*” y los **espectros de respuesta** “*response spectra*”.

Según el SUBCAPÍTULO 1.1 la **historia de respuesta** de un sistema, representa la magnitud de un parámetro (E.G. desplazamiento, velocidad, aceleración, fuerza o algún otro), en función del tiempo, presentado en una gráfica cuyo eje de las abscisas mide el tiempo a partir de un instante de interés, que normalmente coincide con el instante en que inicia el movimiento fuerte debido a sismo; mientras que las ordenadas muestran la variación del parámetro en estudio.

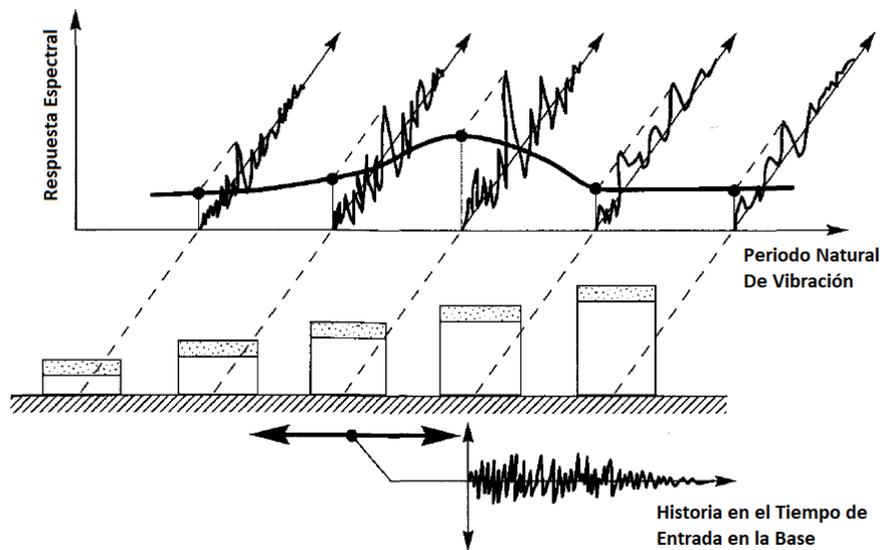


Figura 4.1: Espectro de respuesta espectral de aceleración. La respuesta se obtiene graficando la aceleración espectral contra el periodo de vibración del sistema de 1GDL. (Kramer, 1996)

Por otro lado, el **espectro de respuesta**, es la representación gráfica del valor máximo de la historia de respuesta del sistema, expresada en términos de algún parámetro de interés, producida por una acción dinámica específica (E.G. un sismo, un impulso, etc.), sobre un sistema de 1GDL con periodo de vibración variable y razón de amortiguamiento ξ constante. En estos gráficos se representa en las abscisas el periodo de la estructura T o la frecuencia angular ω ; mientras que en las ordenadas se representa la respuesta máxima, en valor absoluto¹⁵, de la historia de respuesta en el tiempo de un sistema de 1GDL (Crisafulli & Villafañe, 2007).

¹⁵ Se utiliza el valor absoluto, puesto que los parámetros que se grafican son cantidades vectoriales; en consecuencia, el signo de éstas indica el sentido del vector, pero no modifica ni su magnitud ni su trayectoria, y ya que lo que interesa es la magnitud máxima del parámetro, a lo largo de una dirección específica, el sentido de aplicación de la acción no es preponderante.

En la FIGURA 4.1 se presenta gráficamente el procedimiento para obtener un espectro de respuesta de aceleración, que inicia aplicando una historia de excitación en la base a un sistema de 1GDL de periodo creciente y se calcula la historia de respuesta del sistema en función del tiempo. Posteriormente, se encuentra el valor máximo en valor absoluto alcanzado en cada una de las estructuras con periodo T y se van colocando como puntos del espectro de respuesta. En esta figura es importante observar que aunque el periodo del sistema de 1GDL va variando, el coeficiente de amortiguamiento es el mismo durante todo el proceso. Este es el proceso que se sigue para determinar los espectros de los SUBCAPÍTULOS 4.2, 4.3 y 4.4.

4.1 Integral de Convolución o de Duhamel

En muchas situaciones prácticas la historia de excitaciones dinámicas no es ni armónica ni periódica. En consecuencia, se deseará estudiar la respuesta dinámica de un sistema de 1GDL a excitaciones que varían arbitrariamente con el tiempo. Un resultado general para sistemas lineales de 1GDL es la integral de Duhamel. (Chopra, 2007).

A diferencia de la serie de Fourier, que descompone la historia de cargas periódicas en una serie de funciones armónicas (en función de la frecuencia), para subsiguientemente calcular las respuestas (también armónicas) de la estructura y finalmente determinar la sumatoria de todas ellas para obtener la respuesta total del sistema, la integral de Duhamel transforma una historia de cargas no periódicas, en una serie de funciones delta de Dirac (en función del tiempo) y evalúa individualmente la respuesta de cada una, y a al final las adiciona para obtener la respuesta total del sistema. (Ver FIGURA 4.3)



Figura 4.2: Función de carga Pulso de Dirac. (Kramer, 1996)

Una carga de magnitud muy grande que actúa por un periodo finito de tiempo, es llamada **fuerza impulsora** (*impulsive force*). (Ver FIGURA 4.2). Cuando la duración de dicha carga se aproxima a cero, la magnitud de la fuerza tiende a infinito; sin embargo, la magnitud del impulso, definida como la integral en el tiempo de la función que la representa, se mantiene igual a la unidad. Tal fuerza, cuando $t_1 \rightarrow 0$, es llamada **impulso unitario** (*unit impulse*). La **función delta de Dirac** (*Dirac Delta Function*) define matemáticamente un impulso unitario centrado en $t = \tau$.

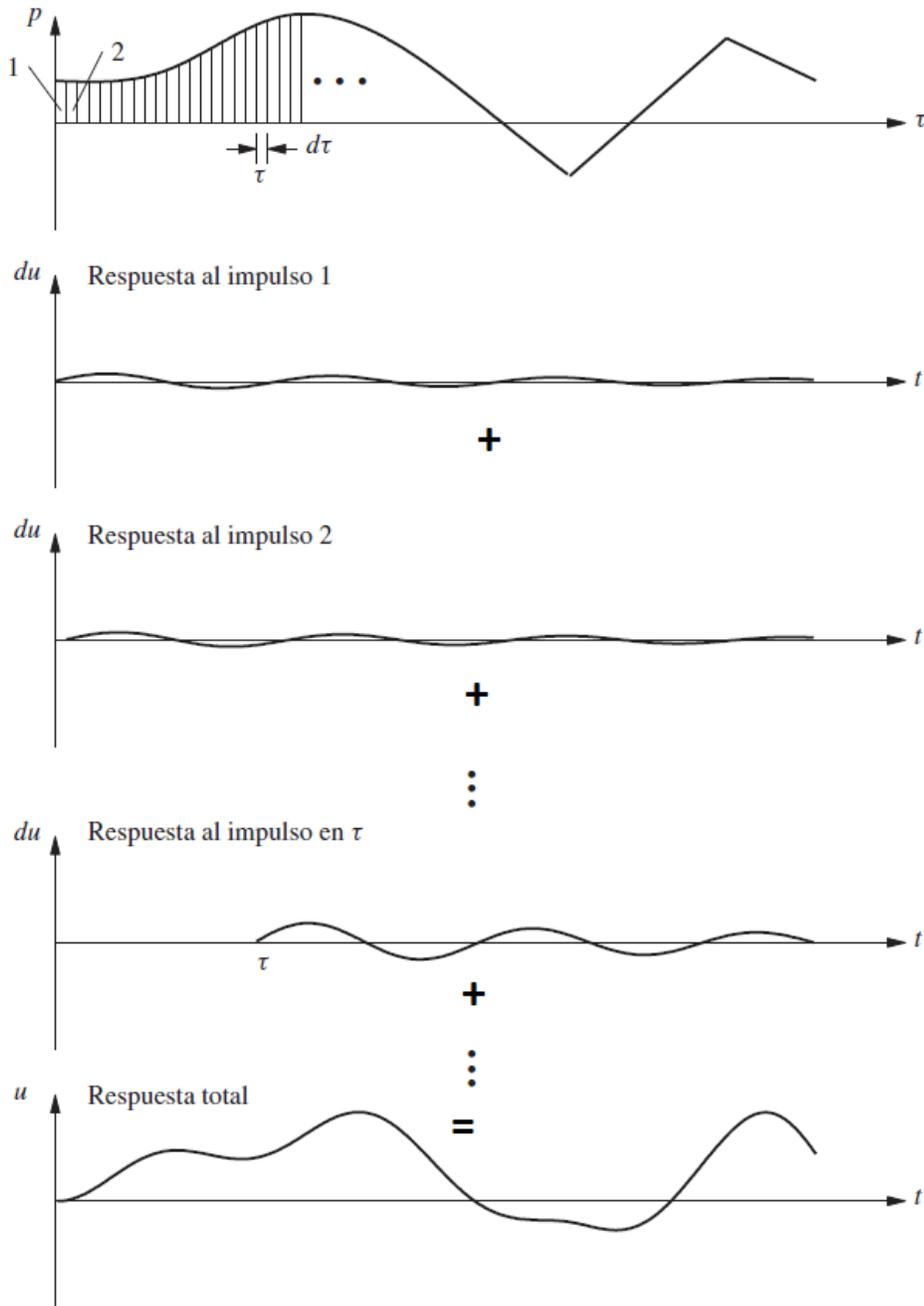


Figura 4.3: Pulso con duración $d\tau$ ocurriendo en el instante $t = \tau$ (a). Respuestas a los pulsos individuales y respuesta total del sistema (b). (Kramer, 1996) Y (Chopra, 2007).

La respuesta estacionaria de un sistema de 1GDL a una función impulso es de la forma de la Ec. 1.52 (respuesta de un sistema en vibración libre amortiguada):

$$u(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (C_1 \sin(\omega_d t) + C_2 \cos(\omega_d t))$$

Con vibración libre cuando $t > t_1$; es decir, después de aplicar el impulso.

Las constantes (C_1 y C_2) se calculan en este caso a partir de las siguientes condiciones de frontera: $u(0) = 0$ y $\dot{u}(0) = Q_0 t_1 / m$. Con lo cual:

$$C_1 = Q_0 t_1 / \omega_d m \quad C_2 = 0$$

Por lo que la respuesta del sistema de 1GDL queda dada como:

$$u(t) = e^{-\xi \omega_0 t} \left(\frac{Q_0 t_1}{\omega_d m} \cdot \sin(\omega_d t) \right) \quad \text{Ec. 4.1}$$

La historia de una carga dinámica cualquiera, puede ser entendida entonces, como un tren de pulsos diferenciales como el anterior, cada uno de duración infinitesimal (como en la FIGURA 4.3). Observando alguno de estos pulsos, el cual tiene duración $d\tau$ que ocurre cuando $t = \tau$, la respuesta estacionaria que causa un instante después, cuando $t = \tilde{t}$ está dada por una ecuación de la forma:

$$u_i(\tilde{t}) = e^{-\xi \omega_0 (\tilde{t} - \tau)} \left(\frac{Q_0(\tau) d\tau}{m \omega_d} \right) \sin(\omega_d (\tilde{t} - \tau)) \quad \text{Ec. 4.2}$$

La respuesta inducida por el tren completo de pulsos de carga, puede obtenerse mediante la sumatoria de las respuestas de todos los pulsos individuales hasta el tiempo $t = \tilde{t}$, como se muestra gráficamente en la FIGURA 4.3; es decir:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_d} \sum_{i=1}^n Q(\tau_i) e^{-\xi \omega_0 (\tilde{t} - \tau_i)} \sin(\omega_d (\tilde{t} - \tau_i)) d\tau \quad \text{Ec. 4.3}$$

Donde n es el número total de pulsos para llegar hasta $t = \tilde{t}$. Cuando $d\tau$ se aproxima a cero, la sumatoria se vuelve integral con la cual la respuesta total se puede calcular como:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^{\tilde{t}} Q(\tau) e^{-\xi \omega_0 (\tilde{t} - \tau)} \sin(\omega_d (\tilde{t} - \tau)) d\tau \quad \text{Ec. 4.4: Forma general de la Integral de Duhamel}$$

La Ec. 4.4 describe la respuesta de un sistema lineal y es conocida como integral de Duhamel. Es muy difícil de resolver analíticamente debido a que las funciones de carga $Q(\tau)$ que interesan estudiar, comúnmente son bastante complejas, pero puede ser integrada numéricamente por una variedad de procedimientos distintos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que su aplicación está restringida a sistemas lineales

Si se considera que $Q(\tau)$ es una función de la historia de carga de entrada en la base del sistema de 1GDL como se vio en el SUBCAPÍTULO 1.3.7, entonces, $Q(\tau) = -m \cdot \ddot{u}_b(\tau)$ es el sistema de fuerzas inerciales aplicado a la masa del sistema. Suponiendo además que para las construcciones usuales (con factores de amortiguamiento ξ entre 2 y 10 %), la diferencia entre la frecuencia amortiguada ω_d y la frecuencia propia del sistema ω_0 es despreciable (error menor del 0.5%). Entonces, la Ec. 4.4 puede expresarse como:

$$u(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\tilde{t}} \ddot{u}_b(\tau) e^{-\xi\omega_0(\tilde{t}-\tau)} \sin(\omega_0(\tilde{t}-\tau)) d\tau$$

Ec. 4.5: Forma analítica de la integral de Duhamel

La integral de Duhamel puede ser representada también por la siguiente expresión:

$$u(t) = \frac{\text{sen}(\omega_0 \tilde{t})}{\omega_0 e^{\xi\omega_0 \tilde{t}}} \int_0^{\tilde{t}} \ddot{u}_b(\tau) e^{\xi\omega_0 \tau} \cos(\omega_0 \tau) d\tau - \frac{\text{cos}(\omega_0 \tilde{t})}{\omega_0 e^{\xi\omega_0 \tilde{t}}} \int_0^{\tilde{t}} \ddot{u}_b(\tau) e^{\xi\omega_0 \tau} \text{sen}(\omega_0 \tau) d\tau$$

Ec. 4.6: Forma numérica de la Integral de Duhamel

La Ec. 4.6 se consigue a partir de la Ec. 4.5, aplicando transformaciones trigonométricas correspondientes al seno de la diferencia y separando la función exponencial. Como se dijo, la solución de la Ec. 4.6 se elabora numéricamente, por lo que es preciso adoptar un intervalo de integración adecuado (normalmente $\Delta t = 0.01s$ a $0.05s$).

4.2 Espectros de desplazamiento

Con la Ec. 4.5 o Ec. 4.6, es posible calcular la **historia de desplazamientos relativos** de un sistema de 1GDL con periodo $T = 2\pi/\omega_0$ y amortiguamiento ξ . Es importante recalcar que los desplazamientos relativos no son iguales a los desplazamientos totales, pues como se muestra en la FIGURA 1.18, el desplazamiento total es igual a:

$$u_T(t) = u_b(t) + u(t)$$

Donde: $u_b(t)$ es el desplazamiento en la base, $u(t)$ es el desplazamiento relativo entre la masa y la base y $u_T(t)$ es el desplazamiento total de la masa. No obstante, los desplazamientos relativos son los que importan, pues según el SUBCAPÍTULO 1.3.7, los desplazamientos que producen los esfuerzos internos de los elementos estructurales que se van a analizar, son precisamente estos. Así que una vez determinada la historia en el tiempo de los parámetros de respuesta elástica, se procede a buscar los valores máximos (en valor absoluto) y determinar las ordenadas del **espectro de desplazamientos relativos** S_D .

$$S_D = \max|u(t)| \quad \text{Ec. 4.7}$$

Para construir un espectro completo, se repite el procedimiento anterior para estructuras con distintos periodos T ; normalmente los espectros se grafican considerando un rango de periodos de vibración que varía aproximadamente entre 0 a 3.0s o 0 a 5.0s, que comprende la mayoría de las estructuras comunes. Las curvas se construyen para valores constantes del factor de amortiguamiento ξ , por ejemplo, 2% o 5%. (Crisafulli & Villafañe, 2007).

4.3 Espectros de velocidad y pseudo-velocidad

La **historia de velocidad relativa de la masa** del sistema de 1GDL con respecto al suelo, se calcula derivando con respecto al tiempo la Ec. 4.5, aplicando el Teorema de Leibniz (para derivar el producto de dos funciones), y se obtiene:

$$\dot{u}(t) = \int_0^{\tilde{t}} \ddot{u}_b(\tau) e^{-\xi\omega_0(\tilde{t}-\tau)} \cos(\omega_0(\tilde{t}-\tau)) d\tau - \xi \int_0^{\tilde{t}} \ddot{u}_b(\tau) e^{-\xi\omega_0(\tilde{t}-\tau)} \sin(\omega_0(\tilde{t}-\tau)) d\tau$$

Ec. 4.8: Función analítica de velocidad relativa

Una alternativa, más conveniente desde el punto de vista práctico, de obtener la historia de velocidad relativa, es derivando numéricamente la función de desplazamiento obtenida previamente con la [Ec. 4.6](#). Este procedimiento conduce a resultados correctos si se adopta un intervalo de tiempo para la derivación lo suficientemente pequeño (usualmente se emplea el mismo intervalo de tiempo Δt adoptado para la integración de la [Ec. 4.6](#)). Una vez determinada la historia en el tiempo de los parámetros de respuesta elástica, se buscan los valores máximos (en valor absoluto) y se obtienen las ordenadas del **espectro de velocidad relativa** S_V .

$$S_V = \max|\dot{u}(t)|$$

Ec. 4.9

Para construir un espectro completo, se repite el procedimiento descrito en el subcapítulo anterior para estructuras con distintos periodos T , y cada una de las curvas se construye para valores constantes del factor de amortiguamiento ξ . Las construcciones civiles comunes exhiben factores de amortiguamiento $\xi < 10\%$, con valores típicos entre el 2% y 7%, dependiendo del material, tipología estructural, nivel de sollicitación, etc. Este hecho permite realizar ciertas simplificaciones, que no tienen una fundamentación matemática rigurosa, pero que son útiles en la práctica ([Crisafulli & Villafañe, 2007](#)):

En base a consideraciones energéticas, se puede afirmar que en un sistema lineal y elástico no amortiguado, la energía que el sismo entrega a la estructura se transforma energía cinética y energía potencial (de deformación) y no existe disipación de energía (Ver [ILUSTRACIÓN 1-2](#)). Para este caso particular, el valor máximo de la energía cinética tiene que ser igual al máximo de la energía de deformación elástica; es decir:

$$\max(E_{cin}) = \max(E_p) \Rightarrow \frac{m \cdot (\dot{u}_{max})^2}{2} = \frac{k \cdot (u_{max})^2}{2}$$

Ec. 4.10

A partir de la ecuación anterior se define una velocidad máxima que no es exactamente igual a la obtenida derivando el desplazamiento en función del tiempo, debido a que en este caso no se considera el amortiguamiento del sistema. Por ser un valor aproximado se le denomina **pseudo-velocidad**. ([Crisafulli & Villafañe, 2007](#)).

$$\dot{u}_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot u_{max} \Rightarrow \dot{u}_{max} = \omega_0 \cdot u_{max}$$

Ec. 4.11

Con el concepto de espectro en mente, se define la **pseudo-velocidad espectral** S_{pV} en función del espectro de desplazamiento relativo, de acuerdo con la expresión:

$$S_{pV} = \omega_0 \cdot S_D$$

Ec. 4.12: Relación entre pseudo-velocidad y desplazamiento relativo

Se puede demostrar que para sistemas con bajo amortiguamiento las diferencias numéricas entre la velocidad espectral ([Ec. 4.8](#)), y la pseudo-velocidad espectral ([Ec. 4.12](#)) son despreciables (salvo

para el caso de periodos de vibración muy grandes). Estas diferencias aumentan a medida que se incrementa el amortiguamiento y pueden llegar al orden del 20% para estructuras con $\xi = 0.20$. (Crisafulli & Villafañe, 2007).

4.4 Espectros de aceleración y pseudo-aceleración

Para calcular la **historia de aceleraciones** se deriva la EC. 4.8. Sin embargo, siguiendo este procedimiento se obtendría la aceleración relativa $\ddot{u}(t)$, dado que $u(t)$ es el desplazamiento relativo. No obstante, para efectos de diseño sismorresistente interesa determinar la fuerza de inercia actuante, sobre la masa del sistema de 1GDL, que está relacionada con la aceleración total $\ddot{u}_T(t)$. Por esta razón, la aceleración total se determina con la EC. 1.73 dividida entre la masa:

$$\ddot{u}_T(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{u}(t) + \frac{k}{m} \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 4.13}$$

Al usar las relaciones $2\xi\omega_0 = c/m$ y $\omega_0^2 = k/m$ la ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$\ddot{u}_T(t) + 2\xi\omega_0 \cdot \dot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t) = 0 \quad \text{Ec. 4.14}$$

Despejando $\ddot{u}_T(t)$ se concluye que:

$$\ddot{u}_T(t) = -[2\xi\omega_0 \cdot \dot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t)] \quad \text{Ec. 4.15: Función de aceleración total}$$

Remplazando en la EC. 4.15 las EC. 4.5 y EC. 4.8, se consigue la **historia de aceleración total** $\ddot{u}_T(t)$. Y una vez determinada la historia en el tiempo de los parámetros de respuesta elástica, se seleccionan los valores máximos (en valor absoluto) y se extraen las ordenadas del **espectro de aceleración total** S_A .

$$S_A = \max|\ddot{u}_T(t)| \quad \text{Ec. 4.16}$$

Volviendo nula la razón de amortiguamiento ξ , en la EC. 4.15, queda reducida a:

$$\ddot{u}_T(t) = -\omega_0^2 \cdot u(t) \quad \text{Ec. 4.17: Función de pseudo-aceleración total}$$

Como se puede intuir, La aceleración total calculada con la EC. 4.15 no es exactamente igual a la calculada con la EC. 4.17, porque en su determinación se han despreciado las fuerzas de amortiguamiento viscoso y por ello se la llama **pseudo-aceleración**. Aplicando el concepto de espectros y de acuerdo con la EC. 4.17, se define el **espectro de pseudo-aceleración** S_{pA} , en función del espectro de desplazamiento relativo S_D :

$$S_{pA} = \omega_0^2 \cdot S_D \quad \text{Ec. 4.18}$$

La comparación entre valores de aceleración y pseudo-aceleración suelen indicar que las diferencias numéricas son poco significativas desde el punto de vista ingenieril. Por lo tanto, la EC. 4.17 puede usarse sin inconvenientes en aplicaciones prácticas. (CRISAFULLI & VILLAFÑE, 2007)

Combinando las EC. 4.18 y EC. 4.12 se halla la relación que vincula pseudo-aceleración y pseudo-velocidad:

$$S_{pA} = \omega_0 \cdot S_{pV}$$

Ec. 4.19

Si bien Las Ecuaciones Ec. 4.7, Ec. 4.12, Ec. 4.18 y Ec. 4.19, son aproximadas, permiten relacionar los tres espectros (desplazamiento relativo, pseudo-velocidad y pseudo-aceleración) mediante expresiones simples, de modo que conociendo uno de ellos, se pueden calcular fácilmente los otros dos espectros. Cuando estas ecuaciones fueron desarrolladas, hace algunas décadas, resultaron de gran utilidad porque todos los cálculos se realizaban manualmente. En la actualidad, su importancia es relativa, pues existen herramientas computacionales que permiten calcular rápidamente cualquier tipo de espectros, sin necesidad de recurrir a expresiones aproximadas. (Crisafulli & Villafañe, 2007).

4.5 Espectros de Diseño

Para tomar en cuenta el peligro sísmico, frecuentemente se recurre al uso de espectros de diseño que dependen, entre otros aspectos, de la cercanía del sitio a las fuentes generadoras de temblores y de las condiciones locales del terreno. (Mena & Pérez-Rocha, 2008). Mientras que el **espectro de respuesta** (*Response spectra*) es altamente irregular, los **espectros de diseño** (*Design Spectra*), se obtienen mediante la suavización, promedio o envolvente de múltiples espectros de respuesta procedentes de sendos eventos sísmicos, por lo que son generalmente continuos y homogéneos. El uso de espectros de diseño reconoce implícitamente la incertidumbre con que se determinan las propiedades tanto del suelo como de la estructura; evitando así las fluctuaciones inesperadas del espectro con las variaciones en el cálculo del periodo fundamental del sistema.

Los espectros de diseño que se definen en los códigos están formados por una serie de líneas o curvas, las cuales pueden expresarse mediante ecuaciones simples. Los espectros de diseño de aceleración suelen presentar una rama lineal creciente (con origen en el valor de aceleración máxima del terreno), luego una zona de aceleración constante, o meseta espectral, con un valor 2 a 3 veces superior a la aceleración máxima del terreno y finalmente una o más curvas decrecientes. (Crisafulli & Villafañe, 2007).

4.5.1 Espectros de diseño considerados en el MDOC-DS de CFE

En ediciones anteriores del manual de diseño de obras civiles (MDOC) para diseño por sismo (DS) de la CFE, la regionalización sísmica del territorio mexicano se dividía en cuatro zonas (ver FIGURA 4.4) y tres tipos de terreno en función de dos parámetros: el periodo dominante del sitio y la celeridad de propagación de ondas de corte; se proporcionaba además una forma funcional del espectro de Diseño de cinco parámetros consignados en una tabla, en que se atendía la zona sísmica y el tipo de terreno. Con esta regionalización se sentó las bases del diseño sísmico óptimo (Mena & Pérez-Rocha, 2008). Esta forma de proceder, se continuó empleando hasta la edición de 1993 de este manual. Para la versión del 2008 y la actual (versión 2015), la regionalización sísmica se modificó, entre otros aspectos, debido a los avances recientes en materia de sismología y sismicidad, así como por los avances en la tecnología computacional y su accesibilidad.

En las nuevas versiones, los espectros de diseño sísmico varían en forma continua dentro del territorio mexicano ajustándose así a la mayoría de las condiciones del terreno comunes en la práctica. Estos espectros son transparentes, es decir, carecen de reducciones ajenas al peligro sísmico. Es por esto que habrá de tomarse en cuenta por separado el **tipo de estructura** (por

ejemplo: puentes, presas, edificios), la **importancia de la estructura** (calificada en el Manual como: **B** Estructuras en que se requiere un grado de seguridad convencional, **A** Estructuras en que se requiere un grado de seguridad alto y **A+** Estructuras que requieren un grado de seguridad extrema, (definida únicamente para zonas de alta sismicidad)) y, para los estados límite de colapso, las reducciones por **ductilidad** y **sobrerresistencia**. Para esto, En el MDOC-DC de la CFE, se incluye una aplicación de cómputo denominada PRODISIS (Programa de Diseño Sísmico). Mediante el cual se puede localizar cualquier sitio de interés en función de las coordenadas geográficas y de la importancia estructural FIGURA 4.5.

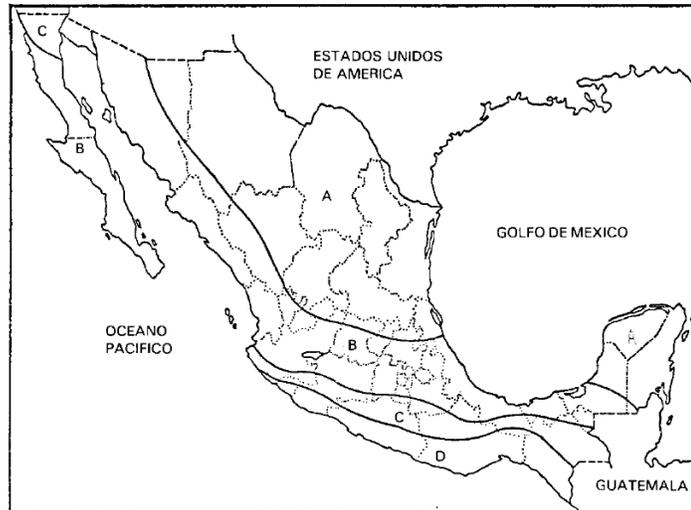


Figura 4.4: Regionalización sísmica de México según el MDOC de CFE 1993. (Meli, 1985).

Debido a que son transparentes, los espectros de diseño de la versión actual pueden parecer significativamente mayores que los propuestos en el capítulo de diseño por sismo de la edición de 1993. Empero, Los espectros de la versión actual admiten algunas reducciones debidas a la sobrerresistencia estructural en forma explícita. Los espectros así reducidos son equiparables a los recomendados en el pasado (Mena & Pérez-Rocha, 2008).

Los factores que toman en cuenta las condiciones del terreno distintas al peligro sísmico, son seis y se clasifican en tres subgrupos: de terreno rocoso, de comportamiento lineal y de comportamiento no lineal. Los **factores de terreno rocoso** son la aceleración máxima del terreno en roca que se determina mediante PRODISIS y se obtiene de un análisis de peligro sísmico en el sitio y el factor de distancia al sitio que es un indicador de la distancia relativa a las fuentes sísmicas, en función de la intensidad de la aceleración. Por otra parte, **los factores de comportamiento lineal** del suelo son el factor de sitio que es un coeficiente con el que se obtiene la aceleración máxima en la superficie del suelo a partir de la aceleración máxima en roca y el factor de respuesta con el que se obtiene la respuesta espectral máxima de la estructura a partir de la aceleración máxima del suelo. Finalmente, con **los factores de comportamiento no lineal** se toman en cuenta los efectos de la no linealidad de los geo-materiales; es decir, una reducción en la velocidad efectiva de propagación de ondas en el suelo y un aumento en el amortiguamiento (Jaime, Juárez, & Flores, 2012), por ello las ordenadas espectrales de aceleración en función del periodo estructural $s_A(T_e)/g$, expresadas como fracción de la gravedad dependen de un **factor**

de amortiguamiento β , que permite modificar las ordenadas del espectro de diseño debido a valores de amortiguamiento estructural diferentes a 5%, o bien, debidos a los efectos de interacción suelo– estructura.



Figura 4.5: Localización del sitio de interés mediante PRODISIS. (Jaime, Juárez, & Flores, 2012).

4.5.2 Espectros de diseño considerados en las NTC-DS del RCDF

En las normas técnicas complementarias (NTC) de diseño por sismo (DS) del reglamento de construcción del distrito federal (RCDF-2004), la zonificación que se emplea es la misma que la del Art. 170 del RCDF (Zona I “Zona de lomas”, Zona II “Zona de transición”, Zona III “Zona de lago”). Adicionalmente, la zona III se divide en cuatro subzonas (III_a, III_b, III_c, III_d). Ver FIGURA 4.6. El mismo reglamento, en el artículo 139, define la clasificación de las estructuras como:

- Grupo A: Edificaciones cuya falla estructural podría constituir un peligro significativo por contener sustancias explosivas o tóxicas, así como edificaciones cuyo funcionamiento es esencial a raíz de una emergencia urbana.
- Grupo B: Edificaciones comunes no incluidas en el Grupo A, las cuales se subdividen en:
 - Subgrupo B1: Edificaciones de más de 30m de altura o con más de 6,000 m² de área total construida, ubicadas en las zonas I y II a que se alude en el artículo 170 de este Reglamento, y construcciones de más de 15m de altura o más de 3,000 m² de área total construida, en zona III. Edificios que tengan locales de reunión que puedan alojar más de 200 personas, templos, salas de espectáculos, así como anuncios autosoportados, anuncios de azotea y estaciones repetidoras de comunicación celular y/o inalámbrica.
 - Subgrupo B2: Las demás de este grupo.

Los espectros de diseño para estas normas se obtienen de la tabla 3.1 de las NTC-DS según la zona que le corresponda, así se obtienen espectros de diseño de aceleración en función del

periodo de la estructura $a(T)/g$ expresados como fracción de la gravedad. Dichos espectros se constituyen por los siguientes parámetros:

T , es el **periodo natural** de interés de la estructura. c , es el **coeficiente sísmico**, y es el índice más importante de la acción sísmica que emplea el RCDF tanto para análisis estático como dinámico. Este coeficiente es una cantidad adimensional que define la fuerza cortante horizontal que actúa en la base de un edificio como una fracción del peso total del mismo, W . a_0 es la **aceleración del terreno**, q factor que afecta al coeficiente sísmico en la rama de periodos largos y depende de r y T_b , finalmente r es el **coeficiente que define la curva del espectro en la parte de periodos largos**. Los valores de c , a_0 , T_a , T_b y r , dependen de la zona en que se encuentre la estructura. El valor de c que aparece en esa tabla corresponde a las construcciones del Tipo B, para las del Tipo A, c incrementará su valor en un 50%.

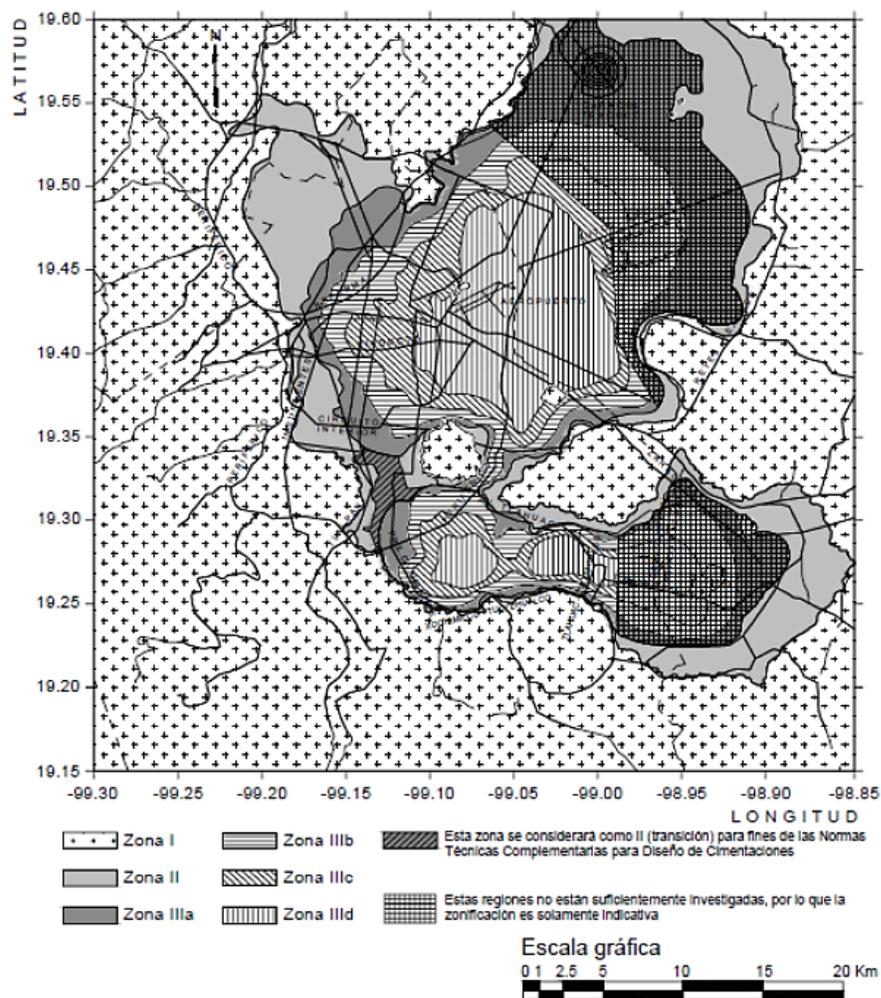


Figura 4.6: Zonificación sísmica de la CDMX según el RCDF-2004.

Existen tres factores que van a modificar las ordenadas del espectro de diseño:

El Factor de reducción (Q'): es un factor que reduce las ordenadas espectrales y que depende del periodo de la estructura T_e y el factor de comportamiento sísmico Q . Se utiliza para reducir

las fuerzas sísmicas aplicadas a la estructura e incrementar los desplazamientos calculados debido al **comportamiento dúctil** de la estructura. (Ver [SUBCAPÍTULO 6.6.3](#)).

El **Factor de comportamiento sísmico** (Q): es un factor que puede definirse en dos direcciones ortogonales por separado, según sean las propiedades de ésta en dicha dirección, como se verá en el [SUBCAPÍTULO 6.6.1](#). Este factor puede tomar los valores de 4, 3, 2, 1.5 o 1 según si se cumplen las condiciones que se especifican en el reglamento.

El **factor de regularidad** de la estructura Fr : es un factor que modifica el valor del factor de reducción. Según si la estructura es regular, irregular o fuertemente irregular. Este factor puede tomar los valores de 0.9, 0.8 o 0.7, siempre y cuando al multiplicar el valor del factor de regularidad Fr por el factor de reducción Q' , este último no sea menor que 1.

Con base en el estudio de ([Jaime, Juárez, & Flores, 2012](#)), a continuación se realiza una comparativa de las principales características de los espectros de diseño de las NTC-DS del RCDF y del MDOC-DS de CFE, en contraposición a la envolvente de los espectros de sitio obtenida a partir de datos experimentales del análisis de respuesta sísmica del suelo. Como resultado de su estudio, estos autores obtuvieron la gráfica de la [FIGURA 4.7](#). De donde se desprende que el procedimiento que se sigue en el Manual de CFE (2008), permite definir espectros de diseño sísmico para cualquier parte de la República Mexicana. Mientras que el RCDF únicamente permite calcular espectros de diseño para el territorio de la Ciudad de México. ([Jaime, Juárez, & Flores, 2012](#)).

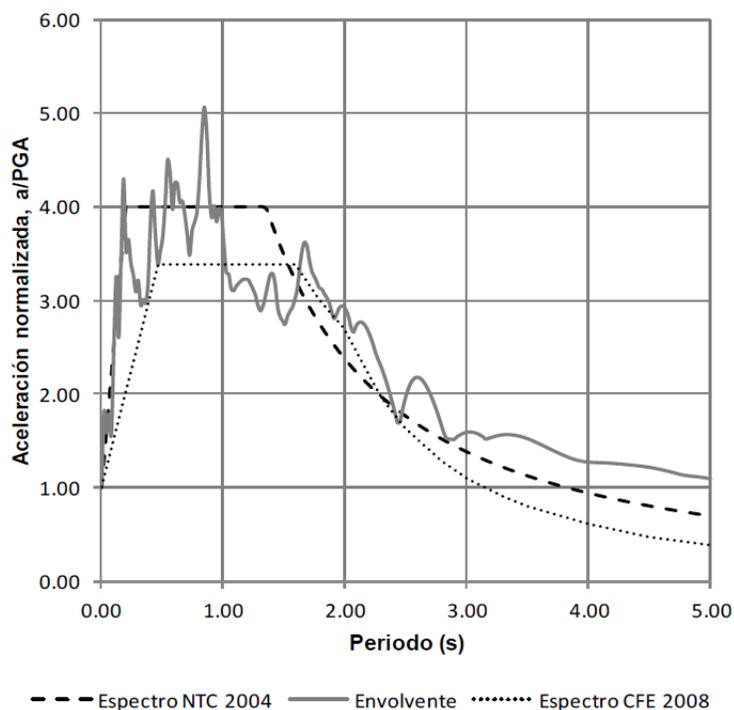


Figura 4.7: Espectros de NTC-DS (2004), MDOC-DC (2008) y envolvente de espectros de sitio calculada a partir de datos experimentales (Jaime, Juárez, & Flores, 2012).

En la FIGURA 4.7, se observa que el espectro del RCDF y la envolvente de espectros de sitio coinciden mejor entre ellos que con el espectro del Manual de CFE. Además, la construcción del espectro de respuesta del RCDF es muy sencilla y expedita; mientras que el Procedimiento del manual de CFE y de la envolvente de espectros de sitio, es más compleja y requiere más datos que deben obtenerse con el consecuente mayor costo. (Jaime, Juárez, & Flores, 2012).

4.5.3 Espectros de diseño considerados en el Anexo A

Adicionalmente, el anexo A de las NTC-DS de RCDF indica que: Para el diseño sísmico de estructuras ubicadas en las zonas II y III será permisible tener en cuenta explícitamente los efectos de sitio y la interacción suelo–estructura.

Con este propósito, se calcula un **factor de reducción por amortiguamiento suplementario** β , que es un factor utilizado para escalar el valor del amortiguamiento del conjunto distinto del clásico de 5% del crítico. La forma de β está basada en los resultados de (Rosenblueth & Reséndiz, 1988) sobre el efecto del amortiguamiento en la ordenada espectral máxima. Es interesante notar que las ordenadas espectrales para periodos naturales muy corto y largo son independientes de los valores de ξ , tal como lo impone la dinámica estructural. Este valor se determina según se describe en la *sección A.6* del reglamento, para la determinación de las ordenadas espectrales a , las cuales también dependen de los siguientes factores:

El **coeficiente de aceleración del terreno** a_0 , el **coeficiente sísmico** c , el **coeficiente** k , que es una variable que se utiliza para calcular el **factor de reducción por ductilidad** Q' , y los **periodos característicos** T_a y T_b cuyos valores se obtendrán en función del periodo dominante del sitio, usando las expresiones del *apartado A.3 del anexo*, las cuales dependen del **periodo del sitio** T_s y **finalmente de la variable** p , la cual es usada tanto para el cálculo de las ordenadas espectrales, a , como del factor de reducción por ductilidad Q' .

Al igual que en el caso sin interacción descrito en el cuerpo de las normas, las ordenadas espectrales se pueden ver reducidas por los siguientes factores:

El **factor de comportamiento sísmico** Q , que se define igual que para el cuerpo de las normas.

El **factor de reducción por ductilidad** Q' , que en este caso depende también de β y k .

También se le aplica otro factor, el **factor de sobrerresistencia** R ; el cual afecta a la ordenada espectral calculada al igual que como lo hace el factor de reducción por ductilidad Q' . (ver [SUBCAPÍTULO 6.7](#))

En el último párrafo del **apartado A.3**, se indica que las ordenadas espectrales que resultan de la aplicación de las expresiones contenidas en el mismo, son aplicables a las estructuras del grupo B, y habrán de ser multiplicadas por 1.5 para estructuras del grupo A.

4.6 Espectros envolventes de Diseño de Zeevaert

Los espectros envolventes definidos por el Dr. Leonardo Zeevaert, fueron desarrollados en base al estudio de los registros de los movimientos del terreno obtenidos en la zona centro de la ciudad de México empleando un sismógrafo japonés SMAC, durante los sismos del 11 y 19 de mayo de 1962, los cuales fueron reportados en (Zeevaert, 1963) y son observados en la FIGURA 4.8 y FIGURA 4.9. La componente vertical no se muestra en estas figuras, ya que se consideró

significativamente más pequeña que las componentes horizontales. Aparentemente, esto puede ser debido a la condición saturada de los depósitos de limo-arcilloso lacustre.

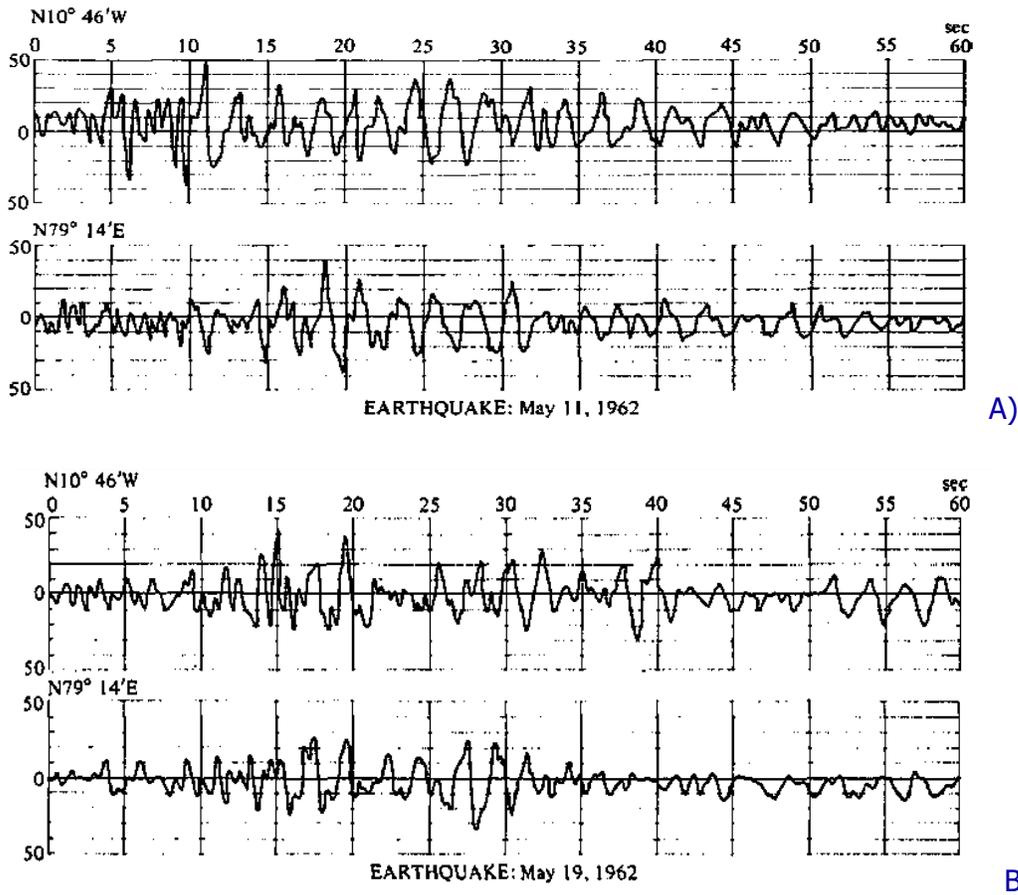


Figura 4.8: Historia de aceleración para dos rumbos ortogonales horizontales, registrada en la alameda central (Sitio PA), A) del sismo del 11 de mayo de 1962. B) del sismo del 19 de mayo de 1962. (Zeevaert, 1983)

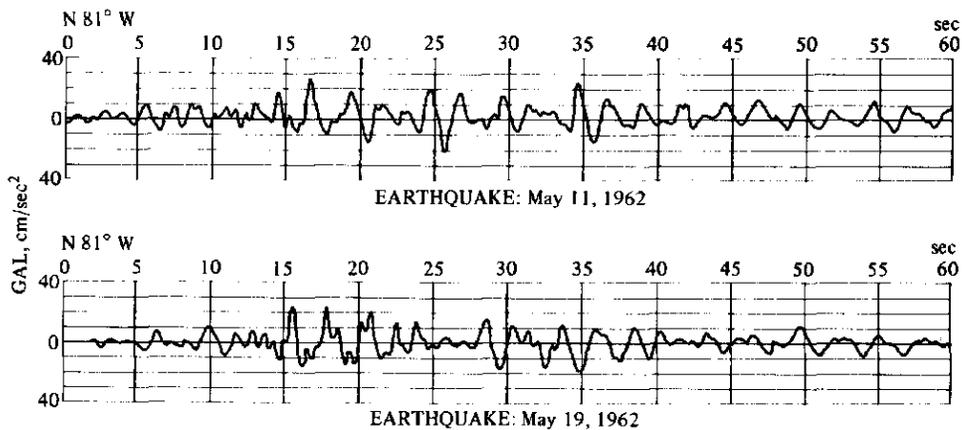


Figura 4.9: Historia de aceleraciones registrado en la cimentación de la torre Latinoamericana (Sitio LA), con Rumbo N 81°0' W para los sismos del 11 y 19 de mayo de 1962. (Zeevaert, 1983)

Los acelerogramas registrados para la parte central de la ciudad de México muestran una **aceleración máxima del suelo en el orden de $a_{max} = 49 \text{ cm/s}^2$ para un periodo de onda de 2.5s** el 11 de mayo, **y $a_{max} = 37 \text{ cm/s}^2$ para un periodo de 2.1s** el 19 de mayo en el parque de la alameda. La TABLA 4-1 muestra los periodos de máxima aceleración y los observados en los acelerogramas de los sismos del 11 y 19 de mayo de 1962, para la superficie del terreno en el parque de la alameda (Sitio PA) y a 12 m de profundidad, en la base de la cimentación de la torre latinoamericana (Sitio TLA).

Tabla 4-1 Aceleraciones máximas en dos rumbos ortogonales para los sitios PA y TLA

Estación:	Sitio PA				Sitio TLA			
Rumbo:	N 10°46' W		N 79°14' E		N 9° E		N 81° W	
Fecha	a_m	T	a_m	T	a_m	T	a_m	T
11/05/1962	49	2.5	40	2.2	19	2.2	25	2.4
19/05/1962	37	2.1	34	2.2	23	2.3	24	2.6

Es necesario conocer los periodos fundamentales del depósito de suelo blando, que provocan las mayores amplificaciones del movimiento de dicho depósito respecto al movimiento del lecho de roca subyacente. Mientras que la historia de aceleraciones del terreno puede variar sustancialmente de un sismo a otro, incluso si se registren en el mismo sitio, el espectro de respuesta, ya sea de pseudoaceleración (S_a) o de desplazamiento relativo (S_d), conservan una configuración más o menos homogénea para los diversos sismos sondeados en un mismo lugar. Los espectros de pseudoaceleración registrados en el centro de la ciudad de México durante los sismos de mayo de 1962, sobre la superficie del terreno en el parque de la alameda (Rumbo N 79°14' E) y a 12 m de profundidad, en la cimentación de la torre latinoamericana (Rumbo N 81°0' W), se muestran en la FIGURA 4.10 y la FIGURA 4.11. En la referencia (Zeevaert, 1983), no se muestran los espectros del sitio AP para el rumbo ortogonal a N 79°14' E; es decir, Rumbo N10°46' W, que cuentan con aceleraciones máximas superiores a las del rumbo estudiado en la FIGURA 4.10, como se corrobora en la TABLA 4-1.

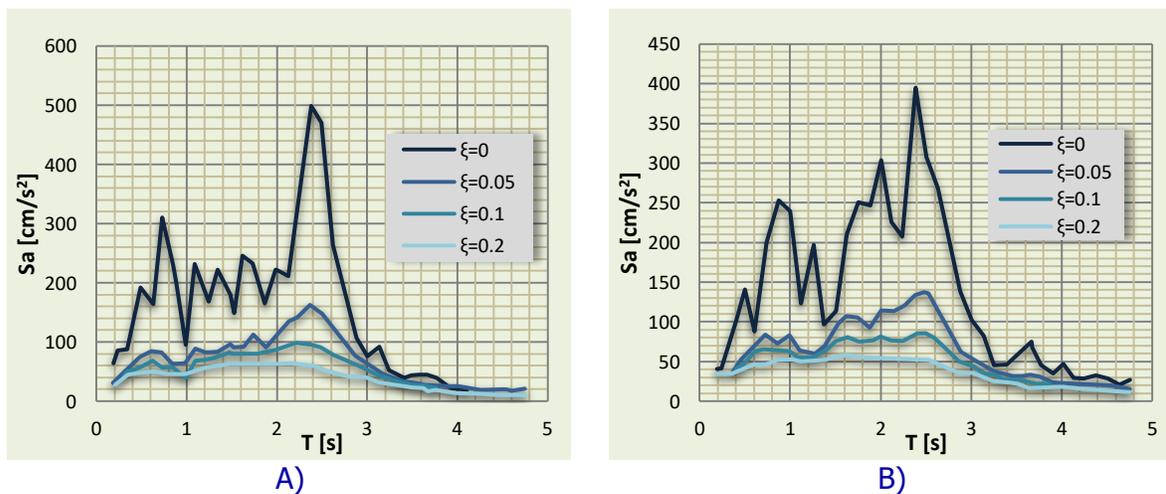


Figura 4.10 Espectros de pseudoaceleración registrados en el sitio PA con Rumbo N 79°14' E. A) Para el sismo del 11 de mayo de 1962, $a_{m\acute{a}x} = 40 \text{ cm/s}^2$ B) para el sismo del 19 de mayo de 1962, $a_{m\acute{a}x} = 34 \text{ cm/s}^2$. (Zeevaert, 1983)

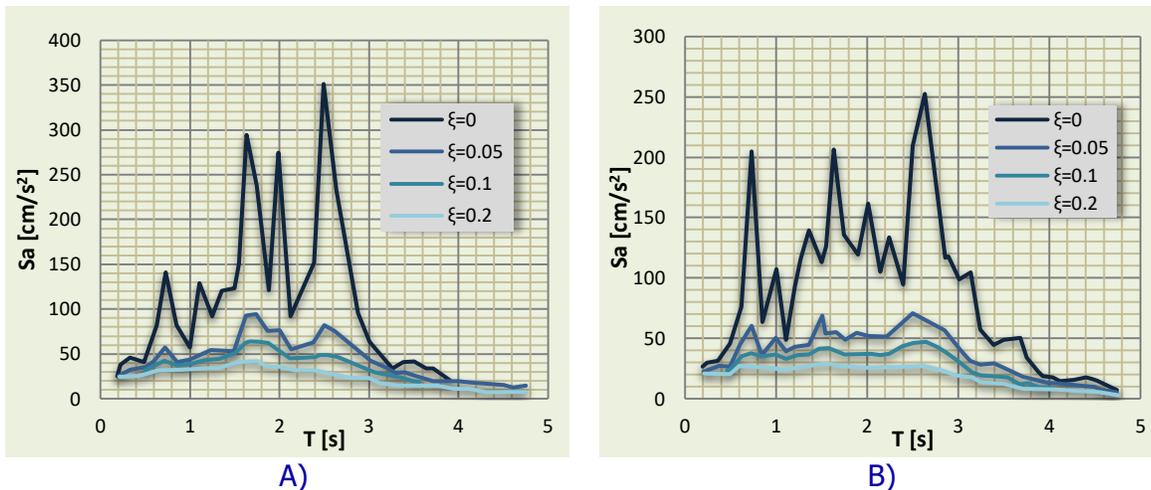


Figura 4.11: Espectro de pseudoaceleración registrado en el sitio TLA con Rumbo N 81°0' E. A) Para el sismo del 11 de mayo de 1962, $a_{m\acute{a}x} = 25\text{cm/s}^2$ B) para el sismo del 19 de mayo de 1962, $a_{m\acute{a}x} = 24\text{cm/s}^2$. (Zeevaert, 1983)

4.6.1 Espectros envolventes

Por medio de los espectros de pseudoaceleración de la FIGURA 4.10 y FIGURA 4.11, Zeevaert planteó que puede construirse un espectro envolvente para uso general, con diferentes grados de amortiguamiento $\xi = 5\%, 10\%, 20\%$, En función del valor $f_a = S_a/a_m$ llamado **factor de amplificación**. Los espectros formados de esa manera, se exhiben en la FIGURA 4.12. En la FIGURA 4.13.A a FIGURA 4.13.C se muestra cómo los espectros de la FIGURA 4.12 son envolventes de los espectros de la FIGURA 4.10 y FIGURA 4.11 divididos entre la aceleración máxima de cada uno de ellos. Se interpreta que las partes del espectro que parecen saltar de manera arbitraria, se deben a la envolvente para la otra dirección en estudio, cuyos espectros no se presentan en este trabajo. Otras respuestas para valores intermedios de amortiguamiento, pueden ser interpoladas a partir de estos, aproximadamente, cuando se conoce el factor de amplificación f_a para cierta región sísmica. Por consiguiente, llamando m a la masa del sistema cimentación-estructura, la fuerza sísmica horizontal en el centro de masa del sistema es:

$$V_B = m \cdot S_a \quad \text{Ec. 4.20}$$

Para un espectro de respuesta de aceleración se puede registrar una **aceleración máxima en la superficie del suelo** a_m por consiguiente:

$$V_B = m \cdot \left(\frac{S_a}{a_m}\right) \cdot a_m \quad \text{Ec. 4.21}$$

Donde el espectro de respuesta se puede visualizar en términos de S_a/a_m que representa el **factor de amplificación** de la aceleración; esto es:

$$f_a = \frac{S_a}{a_m} \quad \text{Ec. 4.22}$$

Por lo que la Ec. 4.20 puede ser expresada como:

$$V_B = f_a \cdot m \cdot a_m \quad \text{Ec. 4.23}$$

La FIGURA 4.12 muestra la envolvente de espectros de respuesta de pseudoaceleración para el centro de la ciudad de México.

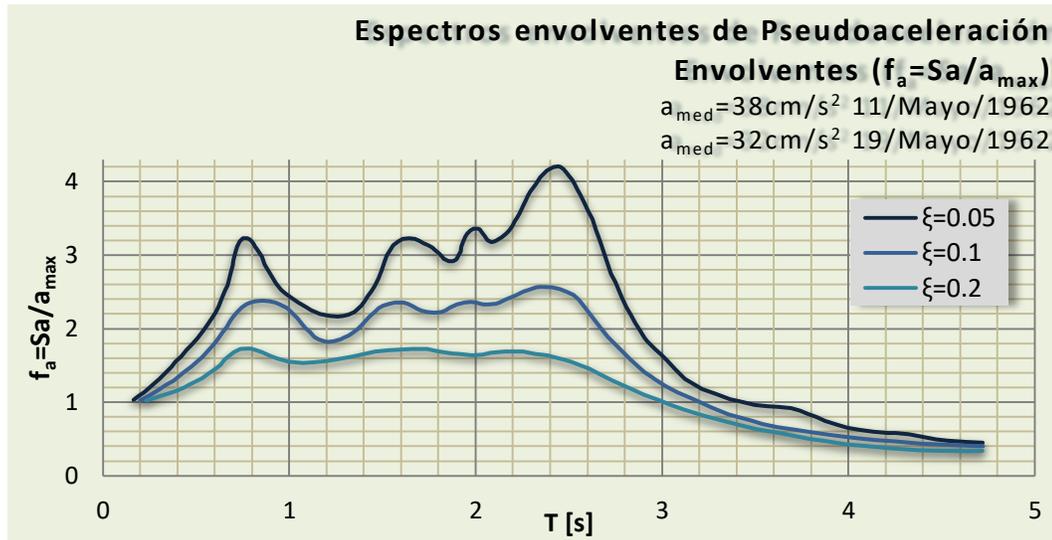


Figura 4.12: Envolvente de las pseudoaceleraciones registradas en el centro de la Ciudad de México durante los sismos de mayo de 1962, en el sitio PA, para diferentes valores de la razón de amortiguamiento. (Zeevaert, 1983)

Debe notarse que cada espectro tiene ciertos valores pico que representan la resonancia de la estructura con el subsuelo. En el caso de la CDMX se ha dibujado los factores de amplificación f_a observados, en función de la razón de amortiguamiento, para los periodos correspondientes al primer y segundo modo de vibrar del suelo (ver FIGURA 4.14). El Dr. Leonardo Zeevaert comparó estos valores con informes de otros lugares, especialmente con de la Ciudad de San Salvador, California; Con lo que obtuvo las correlaciones presentadas en la FIGURA 4.14. Con lo que llegó a la conjetura de que aparentemente, bajo la salvedad de más estudios al respecto, los factores de amplificación son independientes de las características del suelo, siempre y cuando éste sea uniforme y actúe como un oscilador entre la superficie libre y el lecho de roca que lo subyace. Estos valores, sin embargo, pueden mostrar características representativas de las áreas sísmicas en cuestión. En conclusión, para el centro de la CDMX, los factores de amplificación que se proponen (Zeevaert, 1980) son:

- $f_{a1} = 10.59 \cdot \xi^{-0.61}$ Para el primer modo de vibrar del suelo (T_{s1})
- $f_{a2} = 6.42 \cdot \xi^{-0.47}$ Para el segundo modo de vibrar del suelo (T_{s2})

Llamando T_{s1} al periodo dominante del suelo, el espectro envolvente de respuesta sísmica se construye en términos de f_a contra la relación \tilde{T}_e/T_{s1} para diferentes grados de amortiguamiento de la estructura $\tilde{\xi}_e$ como muestra la FIGURA 4.16. En el sitio de estudio se observó que el primer y segundo modo de vibración son $T_1 = 2.5s$ y $T_2 = 0.8s$, lo que concuerda con los puntos de quiebre de las gráficas de la FIGURA 4.16; es decir, $2.5/2.5 = 1$ y $0.8/2.5 = 0.32$. En la FIGURA 4.15 se advierte que estas gráficas de espectros de diseño, son espectros suavizados a partir de los espectros envolventes de la FIGURA 4.12.

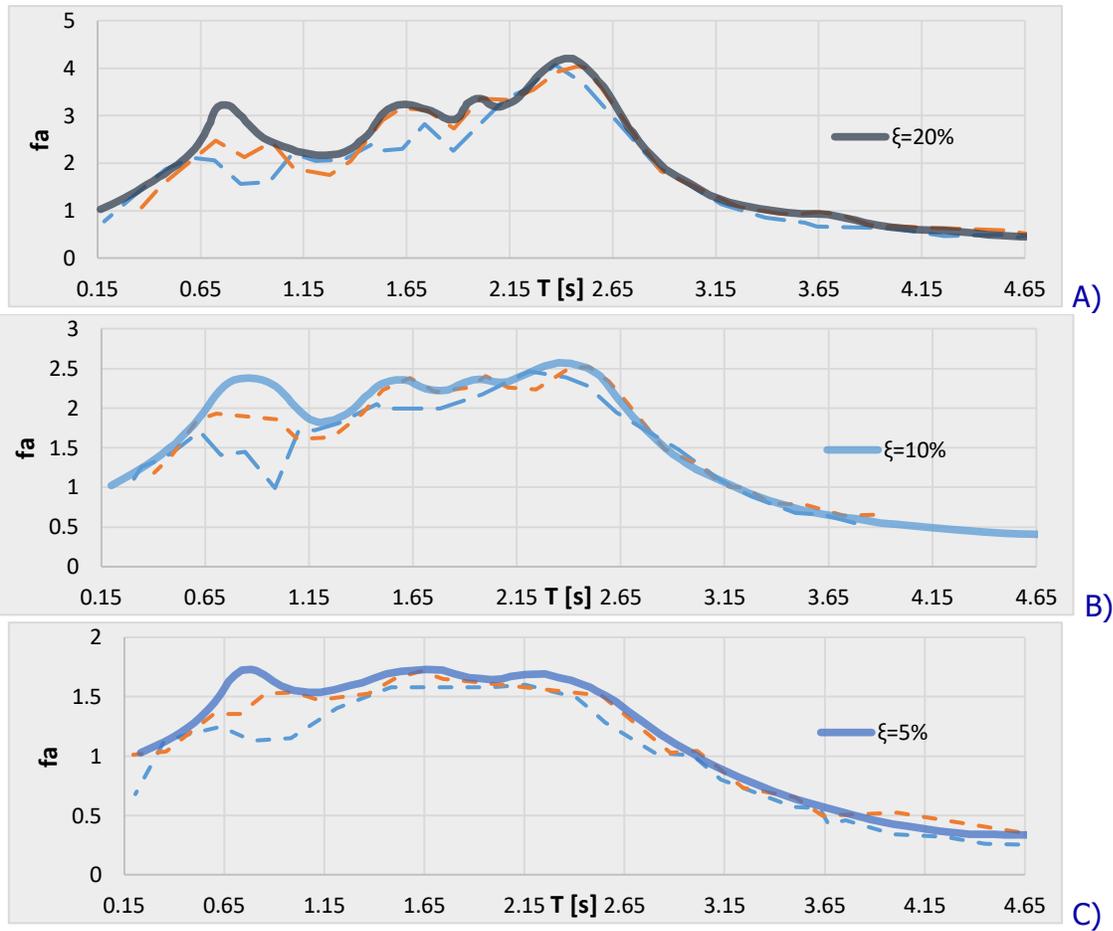


Figura 4.13: Comparación entre la Figura 4.12 y las Figura 4.10 y Figura 4.11. A) para $\xi = 20\%$, B) para $\xi = 10\%$ y D) para $\xi = 5\%$

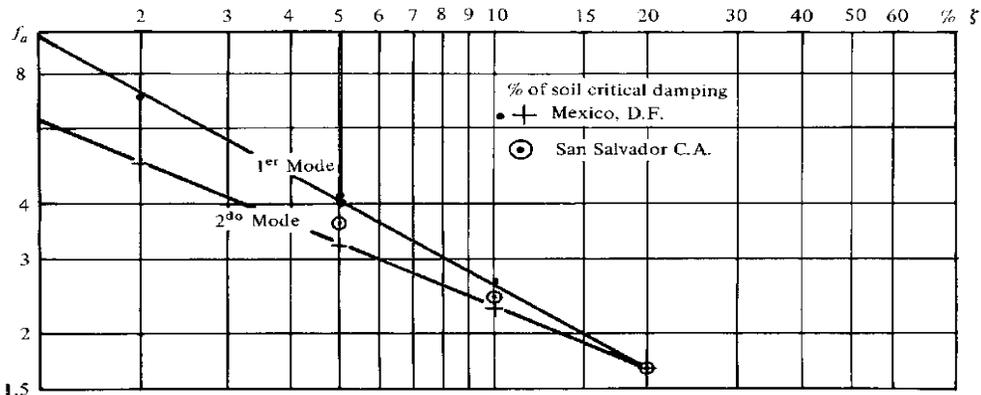


Figura 4.14: Factores de amplificación vs razón de amortiguamiento crítico en porcentaje para el primer y segundo modo de vibrar del suelo, comparando los resultados obtenidos para el Distrito Federal, Mx. y la ciudad de San Salvador, Ca. (Zeevaert, 1980).

Por consiguiente, para determinar el valor de $f_a = S_a/a_m$, para cierto periodo de vibración de la estructura y su cimentación \tilde{T}_e será necesario conocer el periodo dominante del suelo T_{s1} , que se

calculará con los métodos presentados en los SUBCAPÍTULOS 3.5 o 3.6 de este trabajo. Así también será necesario asignar un valor a la aceleración máxima a_m de la superficie del terreno (En este trabajo se toman los valores de a_0 propuestos en el anexo a de las NTC-DS). Además, se hace necesario determinar los periodos y amortiguamiento crítico equivalentes del sistema cimentación-estructura \tilde{T}_e y $\tilde{\xi}_e$ (Zeevaert, 1983). Por consiguiente, conociendo \tilde{T}_e/T_{s1} y $\tilde{\xi}_e$ se entra al **espectro envolvente de respuesta sísmica normalizado** (Espectro de diseño) y se encuentra el valor del factor de amplificación, f_a , FIGURA 4.16. Así pues, con la aceleración máxima de la superficie del suelo $a_{m\acute{a}x}$ asignada, puede estimarse la fuerza cortante sísmica V_B que actúa en el centro de masa del edificio.

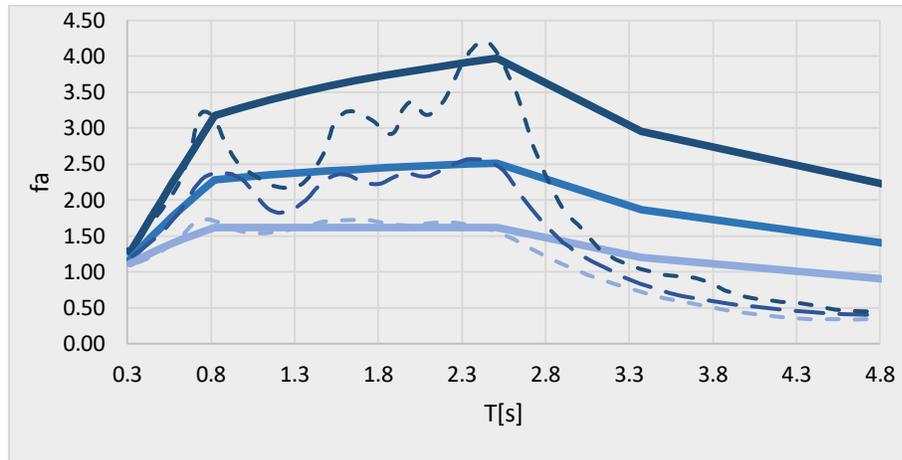


Figura 4.15: Comparación de los espectros de envolventes de Zeevaert, de la Figura 4.12, con los espectros de diseño adimensionales de la Figura 4.16.

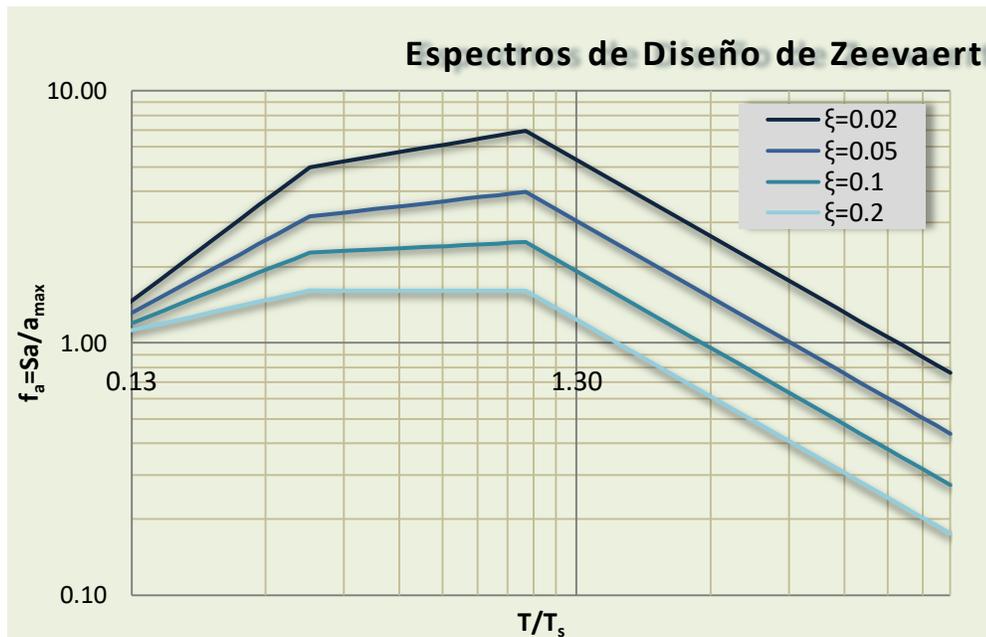


Figura 4.16: espectros envolventes de respuesta sísmica normalizados. (Zeevaert, 1980)

5 Interacción Dinámica Suelo-Estructura (IDSE)

5.1 Definición del problema

El término interacción suelo-estructura (ISE) es comúnmente utilizado para denotar una categoría particular de problemas de acoplamiento a lo largo de la superficie de un elemento de la estructura en contacto con el suelo que la rodea; (por ejemplo, una cimentación somera o una estructura de retención de tierras). En estos casos, el sistema de fuerzas actuante a lo largo de la interfaz, no puede ser determinado sin considerar simultáneamente el campo de las deformaciones y los desplazamientos a lo largo de ésta. Los problemas de ISE, son en consecuencia sinónimo de problemas de acoplamiento; pues existe una correlación entre "acciones" (por ejemplo esfuerzos de contacto) y "reacciones" (por ejemplo desplazamiento) en la interfaz suelo-estructura, por lo cual la primera sólo puede ser determinada conjuntamente con la segunda. En lenguaje matemático, los problemas de ISE pueden ser planteados mediante una ecuación integral donde la función incógnita es, para este ejemplo, el esfuerzo de contacto. En consecuencia, el término "interacción" es indicativo de la perspectiva con que se manejan esta clase de fenómenos, donde la magnitud de la acción depende de la magnitud de la reacción y viceversa. La solución de un problema de ISE requiere una idealización del comportamiento de dos subsistemas: "la estructura" y el "suelo"; así como de las "condiciones de frontera de la interfaz". (Lai & Martinelli, 2013).

Los fenómenos de interacción suelo-estructura son comúnmente clasificados en dos categorías: la Dinámica (IDSE) y la Estática (IESE). El tema de la IESE no es concerniente al tema de este trabajo, sin embargo es interesante conocer la diferencia básica entre el estudio Estático y Dinámico de la interacción suelo-estructura para diferenciarlos: Por un lado, El problema de interacción estática suelo-estructura (IESE) está relacionado con la determinación de los esfuerzos de contacto y las deformaciones, ambos desarrollados, a lo largo de la interfaz entre la estructura y el suelo que la soporta, ocasionados por cargas estáticas. Comúnmente son resueltos mediante métodos de viga flotante, conocidos también como métodos de Winkler. Una de las mayores deficiencias de estos métodos es su incapacidad para considerar la resistencia a cortante del suelo debido a que la deformación de cada uno de los resortes es independiente. Esta deficiencia fue superada en parte en el modelo de IESE postulado por Zeevaert, mediante la introducción de un módulo de influencia, que al igual que en el método de las flexibilidades de Hardy Cross, funciona como un coeficiente de transferencia que mide la influencia de una carga ejercida en un punto de la interfaz suelo-cimentación, sobre otras partes del mismo cuando están vinculadas entre sí.

Por su parte, La **interacción dinámica suelo-estructura "IDSE"** (*Dynamic Soil-Structure Interaction*) consiste en un conjunto de efectos cinemáticos e inerciales producidos en la estructura y el suelo, como resultado de la deformabilidad de éste ante las excitaciones sísmicas. La interacción modifica las propiedades dinámicas relevantes que tendría la estructura supuesta con base indeformable, así como las características del movimiento del suelo en la vecindad de la cimentación. Debido a la excepcional deformabilidad de las arcillas de la ciudad de México, los efectos de sitio e interacción suelo-estructura que se presentan durante temblores intensos alcanzan niveles muy superiores a los usuales en otras ciudades asentadas sobre depósitos de suelo blando (Reséndiz & Roesset, 1986).

La gran diferencia que existe entre el análisis de la respuesta estructural considerando o no la interacción con el suelo, se debe a que La mayoría de los diseños estructurales se realizan bajo

el supuesto de que los elementos estructurales están empotrados al nivel de la cimentación, por lo que a ese nivel, no es posible que experimenten translación, asentamiento o rotación. Las estructuras excitadas por vibraciones sísmicas del suelo, desarrollan fuerzas internas que inducen cortante basal y momentos flexionantes a la altura de la interfaz suelo-estructura. Si el sistema suelo-cimentación es flexible, estas fuerzas internas inducen desplazamientos y rotaciones en la base de la estructura. Para sistemas estructurales extremadamente flexibles, los desplazamientos y las rotaciones de la cimentación pueden llegar a ser pequeñas comparadas con aquellas desarrolladas en la superestructura y pueden ser despreciadas. Por el contrario, para estructuras muy rígidas, los movimientos de la cimentación pueden representar una contribución importante a la flexibilidad del sistema de conjunto y por ende, ignorar estos efectos, puede guiar a cometer errores apreciables en la evaluación de la respuesta de la estructura ante acciones dinámicas. (Lai & Martinelli, 2013).

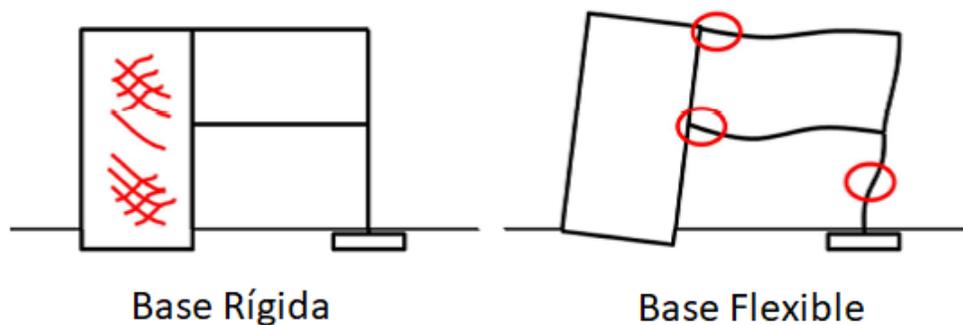


Figura 5.1: comparación entre la respuesta del sistema estructural caracterizado por un suelo rígido (izquierda) o por un suelo flexible (derecha). (Lai & Martinelli, 2013).

Para ilustrar cualitativamente la disparidad tan significativa que puede producirse al considerar o no la IDSE en algunos sistemas estructurales, se utiliza un ejemplo obtenido de (Lai & Martinelli, 2013). Con referencia a la FIGURA 5.1, se presenta una estructura conformada por un muro de cortante conectado a un marco flexible. Para el primer caso, donde se considera que el suelo es altamente rígido, el muro de cortante (sensible a las cargas) se agrieta totalmente, mientras el marco adosado a él, sujeto a pequeños desplazamientos, queda perfectamente intacto. En el segundo caso, la rotación del muro de cortante inducida por la flexibilidad de la base, disminuye la demanda de resistencia en el muro, provocando grandes desplazamientos en el marco adosado a él; por lo que no ocurre ningún daño en el muro de cortante, sin embargo, se desarrollan grietas importantes a lo largo de los elementos del marco. Según (BIELAK & JENNINGS, 1973), los efectos de la IDSE están más relacionados con la rigidez relativa entre el suelo y la estructura que con la flexibilidad del suelo como tal.

5.2 División de las componentes de la IDSE

Para empezar, es muy importante distinguir los efectos de sitio de los efectos de la IDSE, porque los primeros ocurrirán estando la estructura presente o no; Por ende, estos efectos no tienen nada que ver con la estructura o sus propiedades. Por ejemplo, la variación de la historia de movimiento debido a la diferencia de rigidez entre el lecho rocoso y los estratos de suelo estudiada en el

SUBCAPÍTULO 3 se debe únicamente a efectos de sitio, pues no dependen en forma alguna de la presencia de la estructura en el lugar.

Los efectos de la IDSE suelen clasificarse como efectos inerciales y efectos cinemáticos. Los efectos de **interacción cinemática** (*kinematic interaction, "KI"*), se deben a que si el edificio está embebido a una profundidad significativa dentro del terreno, estará sujeto a los movimientos de éste en su base y en las paredes laterales de la porción enterrada. Por lo que debido a la discontinuidad provocada por el contraste de rigidez entre el suelo y la estructura, el movimiento del terreno en las proximidades de la estructura es modificado. Esto sucede porque los movimientos del terreno varían con la profundidad bajo la superficie del terreno y mientras más profundo sea el enterramiento, serán menores las aceleraciones desarrolladas en la base y disminuirá la respuesta de la estructura. Conjuntamente, la rigidez de la cimentación impide que el terreno se ajuste a las deformaciones del **movimiento en campo libre** (*free-field motion, "FFM"*), causando la difracción de las ondas en la proximidad del cimiento, lo cual da lugar a un movimiento distinto bajo la cimentación, llamado **movimiento de entrada en la base** (*foundation input motion "FIM"*). Estos efectos dependen de la geometría y el empotramiento de la cimentación, la estratigrafía del subsuelo, las propiedades cinemáticas del FFM y del ángulo de incidencia de las ondas sísmicas. Si el cimiento es suficientemente rígido, la interacción cinemática se manifiesta en el prorrato de losa (una reducción de los movimientos de traslación de la cimentación y filtrado de los componentes de alta frecuencia de la excitación sísmica), así como el acoplamiento de los grados de libertad de desplazamiento de la cimentación que genera el cabeceo y la torsión de la cimentación, como se muestra en la FIGURA 5.3.

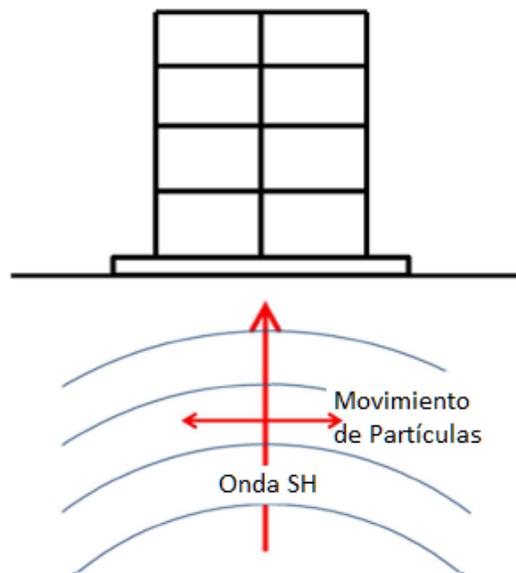


Figura 5.2: Edificio con cimentación superficial sujeta a ondas SH de propagación vertical. (Lai & Martinelli, 2013)

Haciendo referencia a la FIGURA 5.2, el caso de interacción cinemática nula se puede ejemplificar considerando que la estructura se construyese en la superficie del depósito de suelo (es decir, sobre una cimentación somera) y fuera alcanzada por ondas S de propagación vertical. En ese

caso, Como la cimentación no está intrusionando en el suelo, la rigidez de la cimentación no interactuaría con la de éste, por lo que el FFM no se modifica por la interacción inercial y el FIM del sistema, es igual al FFM. En conclusión, la interacción cinemática únicamente ocurrirá en el caso de que la rigidez de la cimentación interfiera con el desplazamiento en campo libre del terreno.

A continuación se describirá el fenómeno enunciado por (Seed, 1986) como prorrato de losa, el cual es un efecto de interacción cinemática, ya que es dependiente del contraste de rigideces entre la cimentación y el suelo, además de ser independiente de su masa. También se aprovecha para hacer énfasis en el fenómeno de **acoplamiento cruzado de los modos de vibración**, que es otro de los efectos cinemáticos de la IDSE. Considerando la cimentación embebida de la FIGURA 5.3.A, cuando se sujeta a ondas S de propagación vertical con una longitud de onda igual a la profundidad de desplante, se desarrolla un movimiento de rotación de la cimentación con respecto a un eje perpendicular al plano en que actúan las fuerzas resultantes, causando en consecuencia el cabeceo de la cimentación, al mismo tiempo que provoca un movimiento de vaivén; dado que las amplitudes máximas de los movimientos en los puntos de la cimentación no ocurrirán simultáneamente, se deduce que las amplitudes de los movimientos en el cimiento serán algo menores que las máximas que se habrían desarrollado en el suelo en el mismo punto si no hubiera existido el edificio; es decir, en campo libre. Esto sucede porque el centroide de la cimentación no corresponde con la ubicación del centro de aplicación de la fuerza resultante, por lo que cualquier reacción en la base debida a la aplicación de una fuerza horizontal fuera del centroide de la cimentación, genera un momento que induce rotación en la base y viceversa. A este efecto se le conoce como **acoplamiento cruzado de los modos de vibración** (*Cross coupling vibration modes*). A una frecuencia mayor, como la mostrada en la FIGURA 5.3.B, la longitud de onda es tal que la rotación es inhibida porque la fuerza resultante en las paredes de la cimentación es nula, logrando así, el efecto de un amortiguamiento geométrico.

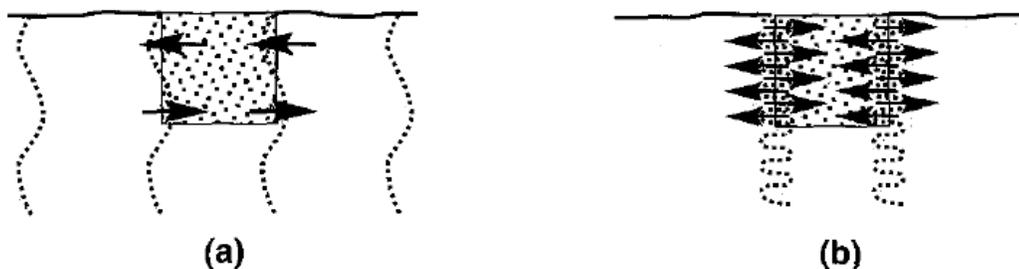


Figura 5.3: excitación de vibración de cabeceo en una cimentación embebida inducida por ondas S de propagación vertical. a) A ciertas frecuencias las fuerzas no balanceadas provocan el cabeceo de la cimentación; b) a otras frecuencias, el cabeceo se suprime. (Kramer, 1996).

Por otra parte, los efectos de **interacción inercial** (*Inertial interaction, "II"*), son todos aquellos debidos al acoplamiento dinámico del sistema suelo-cimentación-estructura, así como a las fuerzas inerciales que se desarrollan como resultado de la interacción; por ende, están relacionadas tanto con la masa del edificio, como con la masa de suelo circunvecino.

En estas condiciones el suelo puede disipar energía de vibración por medio de radiación de las ondas sísmicas hacia afuera de la estructura y mediante deformación inelástica del material. En

todo caso, las propiedades inerciales y disipativas del sistema suelo-cimentación provoca que la respuesta de la cimentación sea función de la frecuencia. Además, se incrementa el periodo natural de la estructura como consecuencia de la deformabilidad del suelo, que incrementa los grados de libertad cinemáticos y al aumento en el coeficiente de amortiguamiento, debido al amortiguamiento geométrico. Sin embargo, no es posible determinar *a-priori* si la interacción inercial tiene siempre un efecto favorable en la respuesta dinámica de una estructura (Lai & Martinelli, 2013). Estos efectos se manifiestan como cambios en las presiones de contacto en la interfaz suelo-cimentación, así como la deformación en el suelo y la estructura. Este aspecto es el más complejo y más ampliamente estudiado de la IDSE.

El caso de interacción inercial nula, se da cuando la estructura se modela como si estuviera empotrada en una base rígida. Consecuentemente, las características dinámicas de la estructura y su respuesta a la excitación dinámica, son inherentes únicamente a esta misma. Los modelos de una estructura considerando la interacción inercial o no, se muestran en la FIGURA 5.4.

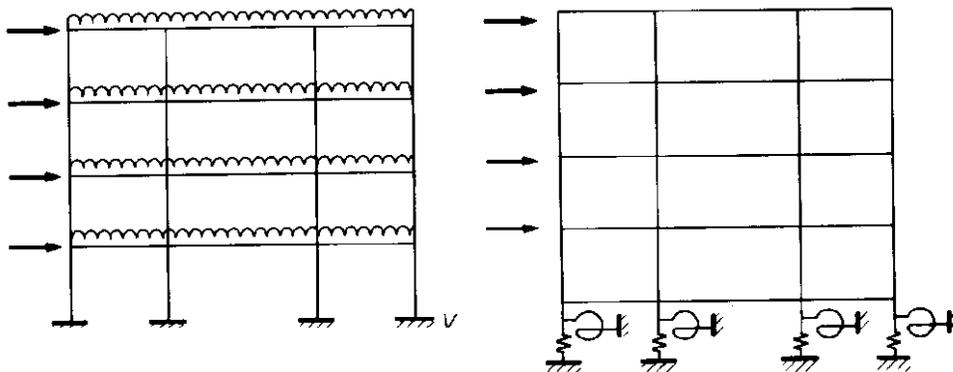


Figura 5.4: modelos para el análisis de la respuesta del edificio. a) considerando suelo rígido (base empotrada). b) considerando suelo flexible (base flexible). (Modificado de (Meli, 1985)).

5.3 Enfoques de análisis

Los Enfoques generales comúnmente empleados para realizar un análisis de interacción dinámica suelo-estructura, pueden ser clasificados en dos categorías: **métodos directos** (*Direct approaches*) y **Métodos indirectos** o **Métodos de subestructura** (*indirect approaches or substructure approaches*). Las principales características de ambos Enfoques serán descritas a continuación. Existe un tercer enfoque, del que no se abundará en este texto, conocido como **macro-elemento** (*Macro-element*), que es un concepto reciente e innovador (al menos para la ingeniería geotécnica) para la solución de problemas de IDSE admitiendo comportamiento no lineal de la estructura, el suelo o ambos, que toma ventaja de los méritos individuales de los métodos directo y de subestructura; sin heredar sus deficiencias (Lai & Martinelli, 2013).

5.3.1 Método directo (*Direct approach*)

En el método directo, el volumen del suelo y la estructura son ambos parte del mismo modelo (FIGURA 5.5) el cuál es analizado en un solo paso utilizando una de las muchas técnicas de discretización numérica; por mencionar algunas, **Método del elemento finito FEM** (*Finite*

Element Method), **Método del elemento espectral SEM** (*Spectral Element Method*), **Método de diferencias finitas FDM** (*finite difference method*), **Método de elementos de frontera BEM** (*Boundary Element Method*), etc. Por ejemplo, para el método de elemento finito (FEM) el suelo puede ser modelado con **elementos sólidos tridimensionales** (*Solid Elements*) y la estructura como **elementos barra** (*frame elements*). La ecuación de movimiento, puede ser entonces escrita como:

$$[M_{tot}] \cdot \{\ddot{U}_{tot}\} + [K^*] \cdot \{U_{tot}\} = -[M_{tot}] \cdot \{\ddot{U}_b\} \quad \text{Ec. 5.1}$$

Donde:

$\{\ddot{U}_b\}$ Representa el vector de los desplazamientos de campo libre aplicados en la base del modelo

$[M_{tot}]$ Y $[K^*] = [K] \cdot (1 + 2\xi i)$ son respectivamente las matrices de masa y rigidez compleja del sistema global (incluye el suelo y la estructura)

$\{\ddot{U}_{tot}\}$ Y $\{U_{tot}\}$ son respectivamente los vectores de aceleración y desplazamiento del sistema.

Es importante notar la similitud entre esta ecuación y la EC. 1.74. En sí las diferencias se reducen a que la ecuación está dada, en el caso de la EC. 5.1, para un sistema de MGD, además, la matriz de rigidez $[K^*]$ es una matriz de números complejos que considera dentro de sí tanto la rigidez como el amortiguamiento del sistema, además el vector historia de aceleraciones en la base $\{\ddot{U}_b\}$ es el movimiento del lecho rocoso.

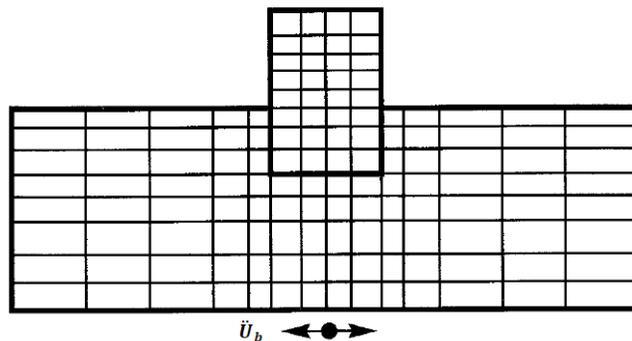


Figura 5.5: Análisis directo de interacción suelo-estructura. El sistema completo es modelado, mientras el movimiento en campo libre es aplicado en los límites de éste y su respuesta es determinada en un solo paso. (Kramer, 1996).

La EC. 5.1 es válida tanto para análisis lineal como no lineal. El método directo permite tomar en cuenta algunas no-linealidades geométricas, como el despegue de la cimentación en la interfaz suelo-cimentación y brechas formadas en la interfaz suelo-pilote. Con esta técnica, la interacción suelo-estructura y sus fenómenos asociados son considerados automáticamente en un solo paso.

El método directo puede ser, hablando en términos de cálculo, muy oneroso, según el tamaño del modelo, las leyes constitutivas adoptadas para describir la respuesta dinámica del subsuelo y los elementos de la estructura, el tipo de condiciones de frontera en la interfaz suelo-estructura, etc. Para que los resultados del análisis sean significativos, el método directo requiere además, una caracterización geométrica detallada de los depósitos del suelo.

Durante la simulación numérica, una vez que la estructura es alcanzada por las ondas sísmicas, se convierte en un sistema oscilatorio, por consiguiente las ondas emitidas desde la interfaz suelo-fundación serán eventualmente propagadas hacia afuera en un medio semi-infinito. Las dimensiones máximas de los objetos en un modelo de elemento finito están controladas por el rango de frecuencias y la celeridad de propagación de las ondas, por lo que la única forma de disminuir el número de elementos a discretizar, es minimizar el tamaño de la región simulada. **Fronteras adsorbentes artificiales** (*Artificial adsorbing boundaries*) se introducen a una distancia apropiada a partir de la estructura para simular correctamente la radiación de energía en un medio continuo. Para resolver este problema pueden ser adoptadas varias técnicas. Según (Wolf J. , 1985), las fronteras más comúnmente utilizadas en el análisis de elementos finitos se dividen en tres grupos (ver FIGURA 5.6):

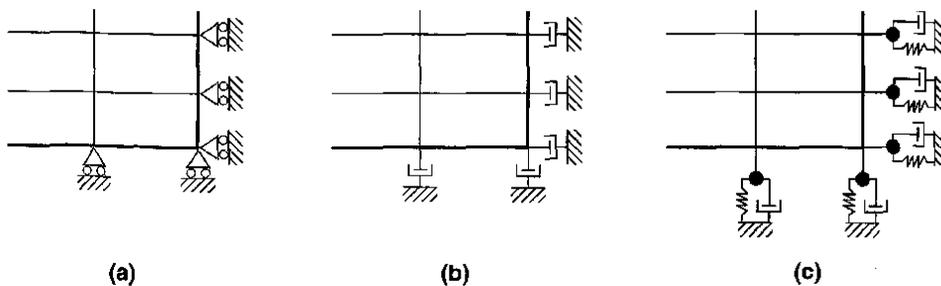


Figura 5.6: tipos de elementos de frontera: a) frontera elemental b) frontera local c) frontera consistente. (Kramer, 1996).

Fronteras elementales (*Elementary Boundaries*): para estas se pueden especificar condiciones de desplazamiento nulo o esfuerzo nulo. Estas son útiles para modelar la superficie del suelo de manera apropiada, ya que ahí se presenta una condición de esfuerzo nulo. Sin embargo, para fronteras laterales o inferiores, las características de reflexión perfecta pueden atrapar la energía en la malla del modelo que en realidad debería ser radiada hacia el infinito. El **efecto de caja** (*box effect*) resultante, puede producir severos errores en el análisis de la interacción suelo-estructura. No obstante, si las fronteras materiales son colocadas suficientemente lejos de la zona de interacción, el efecto de la reflexión de ondas puede ser desvanecido por el amortiguamiento material.

Fronteras locales (*local Boundaries*): un amortiguador puede ser utilizado para simular una región semi-infinita para el caso de ondas de incidencia normal a la frontera. El uso de amortiguadores es una forma común de representar una frontera local. El valor del coeficiente del amortiguador necesario para absorber perfectamente la energía depende del ángulo de incidencia de la onda impuesta. Como las ondas comúnmente chocan en la frontera con diferentes ángulos de incidencia, un amortiguador con un coeficiente específico siempre reflejará una parte de la energía de la onda. Algunas dificultades adicionales surgen cuando ondas de superficie tocan la frontera; ya que como su velocidad de fase depende de la frecuencia, se necesitaría un amortiguador con coeficiente en función de la fase para absorber toda la energía. El efecto de la reflexión desde fronteras locales puede ser reducido incrementando la distancia entre la frontera y la región de interés.

Fronteras consistentes (*consistent boundaries*). Las fronteras que son capaces de absorber todos los tipos de ondas de cuerpo y de superficie, independientemente de su ángulo de incidencia se llaman fronteras consistentes. Estas pueden representarse por matrices de rigidez en función de la frecuencia, obtenidas a partir del método de elemento de frontera "BEM" o de una **ecuación integral de frontera** (*boundary integral equation*).

5.3.2 Método indirecto (indirect approach)

En el **método de la subestructura** (*substructure approach*) o **método indirecto** (*indirect approach*) como también se le conoce, el problema de IDSE es resuelto descomponiendo el sistema completo en dos subsistemas cuya respuesta se determina de manera independiente. Separando así los efectos causados por la **interacción cinemática** de aquellos debidos a la **interacción inercial**. La respuesta del sistema completo se obtiene entonces a partir de la aplicación del teorema de superposición, por lo que el método es aplicable únicamente a sistemas lineales.

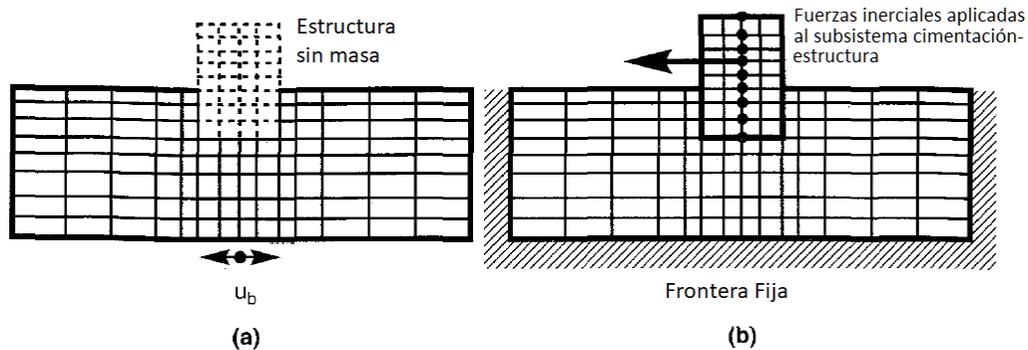


Figura 5.7: a) análisis de interacción cinemática. b) análisis de interacción inercial. La masa de la estructura en la interacción inercial es mostrada como si estuviera concentrada su centro. (Kramer, 1996).

El método de la subestructura es rutinariamente utilizado en el cálculo de cargas en cimentaciones debidas tanto a excitaciones externas como sísmicas. El método es computacionalmente asequible y bastante flexible. Como no requiere una reapiación de la totalidad de las etapas del procedimiento, pueden estudiarse varias propuestas o realizarse modificaciones al proyecto analizado sin más inconveniente. La respuesta sísmica completa del sistema se calcula por medio de la ejecución de los tres pasos siguientes:

1. Solución del problema de interacción cinemática. Es decir, llevar a cabo la evaluación de las modificaciones del campo de ondas sísmicas inducido por la presencia de la cimentación con respecto a los **movimientos del suelo en campo libre** (*FFM*). Esta labor permite calcular lo que suele llamarse **excitación** o **movimiento de entrada en la base** (*FIM*)
2. Cálculo de la matriz de impedancia dinámica en función de la frecuencia, que representa la respuesta dinámica del sistema suelo-cimentación, el cual se considera separado de la superestructura. Esta matriz contiene valores complejos y en general es completamente poblada a causa del acoplamiento existente entre los seis grados de libertad de la cimentación (tres traslacionales y tres rotacionales).

3. Calcular la respuesta dinámica del sistema completo sujeto a la excitación de entrada en la base (*FIM*), calculado en el paso 1. Este análisis es llevado a cabo mediante la conexión del modelo de la superestructura con el subsistema suelo-cimentación, a través de la matriz de impedancia dinámica dependiente de la frecuencia, calculada en el paso 2. La interacción inercial es tomada en cuenta en este paso. El análisis dinámico del sistema completo puede ser llevado a cabo usando el conocido **método del espectro de respuesta RSM** (*Response spectrum method*) o el **método de la historia en el dominio del tiempo THM** (*time-history method*).

De los tres pasos anteriores, el primero se refiere al estudio de los efectos de la interacción cinemática, mientras que los siguientes dos son dedicados al estudio de los efectos de la interacción inercial. En el paso 1 anterior, la excitación de entrada en la base debida únicamente a la interacción cinemática, puede ser calculada asumiendo una cimentación y una superestructura sin masa (*FIGURA 5.7.A*). En consecuencia, la rigidez de la cimentación junto con la del suelo, forman la matriz de rigidez para este sistema; mientras que la matriz de masa coincide con la del suelo. Consecuentemente, la ecuación de movimiento del sistema excitado por el movimiento en campo libre puede ser escrita como sigue:

$$[M_s] \cdot \{\ddot{U}_{cin}\} + [K^*] \cdot \{U_{cin}\} = -[M_s] \cdot \{U_b\} \quad \text{Ec. 5.2}$$

$[M_s]$ Es la matriz masa del suelo, es decir, la matriz de masa del sistema global (superestructura-cimentación-suelo) después de haber asumido que la masa de la superestructura y de la cimentación son cero.

$[k^*]$ Es la matriz de rigidez compleja del sistema global

$\{U_{cin}\}$ Se refiere al vector de desplazamiento cinemático que expresa los desplazamientos relativos en la base del sistema.

$\{U_b\}$ Se refiere al vector de desplazamientos en la base del modelo, que coincide con la interfaz entre el depósito de suelo y el lecho de roca

Observe la similitud entre la *Ec. 5.2* y la *Ec. 1.74*. Se puede notar que los movimientos de entrada en la base son análogos; es decir $\{U_b\} = u_b$, por lo tanto, $\{U_{cin}\} = u(t)$. En consecuencia, el movimiento de entrada sobre la estructura $\{U_{fim}\} = u_r$ queda como:

$$\{U_{fim}\} = \{U_b\} + \{U_{cin}\} \quad \text{Ec. 5.3}$$

Por otra parte, en el paso 3 anterior, se calcula la respuesta inercial del sistema global a la excitación producida por las fuerzas inerciales desarrolladas en la estructura, al someterse a la excitación de entrada en la base $\{U_{fim}\}$ (*FIGURA 5.7.B*), por lo que se debe resolver la siguiente ecuación:

$$[M_{tot}] \cdot \{\ddot{U}_{in}\} + [K^*] \cdot \{U_{in}\} = -[M_{str}] \cdot \{U_{fim}\} \quad \text{Ec. 5.4}$$

$[M_{tot}]$ Es la matriz de masa global del sistema

$[M_{str}]$ Es la matriz de masa global del sistema, asumiendo que el suelo no tiene masa

$[k^*]$ Es la matriz de rigidez compleja del sistema global

$\{U_{fim}\} = \{U_b\} + \{U_{cin}\}$ Representa la excitación de entrada de la cimentación

$\{U_{in}\}$ Es el vector de desplazamiento inercial relativo al movimiento de la base

Observando nuevamente la similitud entre la [Ec. 5.4](#) y la [Ec. 1.74](#), Se puede notar ahora que la historia de movimiento de entrada en la base, es igual al movimiento de entrada en la base de la [FIGURA 1.18](#); es decir $\{U_{fim}\} = u_b$, por lo tanto, $\{U_{in}\} = u(t)$.

Una demostración de que el método de la subestructura es correcto (para el caso de sistemas lineales) está dado por la suma de las [Ec. 5.2](#) y [Ec. 5.4](#) que expresa la superposición de los efectos cinemáticos e inerciales representados por las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} [M_{tot}] \cdot \{\ddot{U}_{in}\} + [M_s] \cdot \{\ddot{U}_{cin}\} + [K^*] \cdot (\{U_{cin}\} + \{U_{in}\}) \\ = -([M_s] + [M_{str}]) \cdot \{\ddot{U}_b\} - [M_{str}] \cdot \{\ddot{U}_{cin}\} \end{aligned} \quad \text{Ec. 5.5}$$

Como: $(\{U_{cin}\} + \{U_{in}\}) = U_{tot}$
 $([M_s] + [M_{str}]) = M_{tot}$

La ecuación resulta:

$$[M_{tot}] \cdot \{\ddot{u}_{tot}\} + [K^*] \cdot \{u_{tot}\} = -[M_{tot}] \cdot \{\ddot{u}_b(t)\}$$

Que es la [Ec. 5.1](#). q.e.d.

Si la cimentación es rígida, el suelo puede ser reemplazado por una serie de resortes equivalentes y amortiguadores en el análisis de interacción inercial (Paso 2). Entonces el análisis de interacción inercial, debe ser desarrollado aplicando las fuerzas inerciales a las masas de la estructura o aplicando el movimiento de entrada en la base a los soportes; en realidad, los dos métodos son matemáticamente equivalentes, como se vio en el [SUBCAPÍTULO 1.3.7](#). Varias investigaciones, en relación al modelado analítico, numérico y experimental, han producido una variedad de técnicas para la evaluación de las constantes de resortes y amortiguadores para diversos sistemas de cimentación. Al respecto se abundará a continuación.

5.4 Funciones de impedancia dinámica

El aspecto clave del análisis dinámico de la IDSE por el método de subestructura, es el cálculo de las relaciones fuerza vs desplazamiento en los nodos a lo largo de la interfaz suelo-cimentación. Bajo la asunción de respuesta lineal del suelo, cimentación rígida y con masa despreciable, el desplazamiento de cada nodo de la interfaz suelo-cimentación, puede ser calculado a partir de la respuesta dinámica del sistema de cimentación global. Para tal sistema, la respuesta en estado estacionario a fuerzas y momentos armónicos externos puede ser calculada una vez que la matriz de función de impedancia dinámica $S(\Omega)$ es determinada para la frecuencia (Ω) de interés.

Para cada grado de libertad, la **impedancia o rigidez dinámica** (*Dynamic Impedance*), se define, según ([Gazetas, 1991](#)), como la razón entre la **acción armónica** (fuerza $p(t)$ o momento $M(t)$ aplicado) y el estado estacionario de la **respuesta armónica** (desplazamiento $u(t)$ o rotación $\theta(t)$ resultante) al centro de la base de la cimentación. Por ejemplo, para el modo de oscilación vertical ([FIGURA 5.8](#)), la fuerza armónica $p(t)$ y el desplazamiento $u(t)$ pueden ser escritos, utilizando la notación de números complejos como sigue:

$$p_z(t) = P_z^* \cdot e^{i\Omega t} \quad \text{Ec. 5.6 Acción armónica}$$

$$u_z(t) = U_z^* \cdot e^{i\Omega t} \quad \text{Ec. 5.7 Respuesta armónica}$$

Donde U_z^* y P_z^* son por lo general números complejos y Ω es la frecuencia de la excitación y la respuesta armónica en estado estacionario.

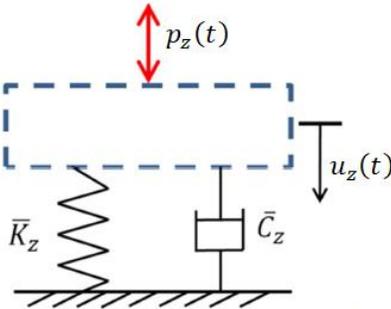


Figura 5.8: Función de impedancia dinámica para una cimentación rígida, sin masa, oscilando verticalmente. (Lai & Martinelli, 2013).

La impedancia dinámica es descrita matemáticamente por la siguiente relación:

$$S_z(\Omega) = \frac{p_z(t)}{u_z(t)} = \bar{K}_z + i\Omega\bar{C}_z \quad \text{Ec. 5.8}$$

Donde \bar{K}_z y \bar{C}_z son función de la frecuencia de excitación armónica Ω . El término \bar{K}_z es la **rigidez dinámica** (*Dynamic stiffness*) y representa la rigidez y la inercia del suelo. El coeficiente del amortiguador \bar{C}_z refleja el fenómeno de disipación de energía en el suelo, el cual está compuesto por dos mecanismos: el amortiguamiento por radiación y el amortiguamiento material, que se estudiaron en el [SUBCAPÍTULO 3.4](#).

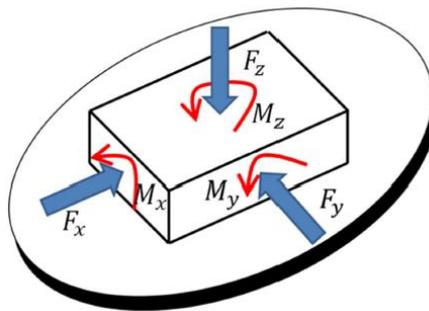


Figura 5.9: Modos de vibración de una cimentación somera y grados de libertad asociados. (Lai & Martinelli, 2013).

Las funciones de impedancia dinámicas asociadas a los otros modos de vibración pueden ser derivadas siguiendo un método similar. Como fue mostrado por (Gazetas, 1991), En una cimentación somera hay un total de seis diferentes impedancias dinámicas correspondientes a los seis grados de libertad independientes que caracterizan su movimiento (FIGURA 5.9). Los coeficientes asociados a la diagonal principal de la matriz de impedancia dinámica son definidos como:

1. S_z = Impedancia vertical para el movimiento actuante en la dirección vertical
2. S_y = Impedancia del movimiento de vaivén transversal para el movimiento horizontal en la dirección corta
3. S_x = Impedancia de movimiento de vaivén longitudinal para el movimiento horizontal en la dirección larga
4. S_{rx} = impedancia de cabeceo para movimiento rotacional alrededor del eje x
5. S_{ry} = impedancia de cabeceo para movimiento rotacional alrededor del eje y
6. S_{rz} = impedancia torsional para oscilación rotacional alrededor del eje z

En cimentaciones embebidas en el suelo, la matriz de impedancia dinámica de 6x6 es una matriz simétrica no diagonal, pues algunos grados de libertad de la cimentación están en acoplamiento cruzado. Estos efectos, por lo general son despreciables en cimentaciones someras, pero su magnitud se incrementa en correlación directa con el aumento de la profundidad de desplante.

Para cimentaciones someras o profundas, Existen varios métodos distintos para obtener la matriz de impedancia dinámica, entre las cuales se enumeran las siguientes:

1. Métodos analíticos basados en **técnicas de transformación integral**¹⁶ (*Integral Transform Techniques*)
2. Métodos de modelado numérico avanzado, que utilizan el método de elemento de frontera (BEM), o el método de elemento finito (FEM), que hoy en día son adoptados para resolver directamente problemas de IDSE por el método directo (ver [SUBCAPÍTULO 5.3.1](#)). Con lo que se hace del cálculo de la matriz de impedancia dinámica un ejercicio superfluo
3. Métodos híbridos que combinan métodos analíticos y de elementos finitos
4. Uso de correlaciones empíricas desarrolladas en base a soluciones aproximadas y rigurosas y en los resultados de análisis numéricos avanzados
5. Métodos simplificados, como el modelo de cono, que utiliza el enfoque de la mecánica de materiales en lugar de la formulación complicada de la elastodinámica tridimensional, para representar las características elásticas, inerciales y disipativas del suelo bajo una cimentación circular, en torno al eje longitudinal de un cono truncado semi-infinito, elástico, con su ápex localizado a una altura z_0 a partir de la superficie del suelo. El método es muy versátil, ya que puede ser igualmente utilizado para simular la respuesta dinámica de cimentaciones sobre un semi-espacio compuesto de varias capas de suelo, en el que las ondas reflejadas y refractadas son tomadas en cuenta a través de la introducción de su propio cono. (Wolf & Deeks, 2004).

¹⁶ Algunas transformadas integrales, como la transformada de Fourier o la transformada de Laplace, se utilizan para resolver problemas matemáticos que son difíciles de resolver de manera algebraica en su representación original. Una transformada integral mapea una ecuación desde su dominio original en otro dominio. Manipular y resolver el problema en el dominio objetivo puede ser mucho más sencillo que la manipulación y solución en el dominio original. La solución es posteriormente mapeada de regreso a su dominio original con la operación inversa de la transformación integral. La transformada integral funciona porque está basada en el concepto de la **"factorización espectral"** (*spectral factorization*) sobre bases ortonormales. Se llama factorización espectral al proceso de expandir una función de su representación "estándar" a una suma de funciones base ortonormales, adecuadamente escaladas (Wikipedia, 2015).

6 Método del Anexo A de las NTC-DS del RCDF-2004

En el capítulo anterior se describieron de manera cualitativa los conceptos primordiales de la teoría de la interacción dinámica suelo-estructura. A continuación se presentará la forma en que tal teoría es aplicada al diseño de estructuras en la Ciudad de México según el anexo A de las NTC-DS del RCDF-2004. Aprovechando este mismo capítulo para comentar sus antecedentes históricos y estudiar el modelo e hipótesis implícitas en éste. Las cuales han sido ampliamente comentadas en los trabajos de: (AVILÉS & PÉREZ-ROCHA, 1996), (AVILÉS & PÉREZ-ROCHA, 1998), (AVILÉS & PÉREZ-ROCHA, 2003), (AVILÉS & PÉREZ-ROCHA, 2004), (MENA & PÉREZ-ROCHA, 2008), entre otros.

6.1 Antecedentes históricos del Anexo A de las NTC-DS del RCDF

El anexo A de las NTC-DS, apareció por primera vez en la edición de las NTC-DS de 1987. Su principal intención fue dar un primer paso en la consideración explícita de los efectos de interacción suelo-estructura, limitando esta última a contemplar sus efectos en el periodo fundamental y en el modo fundamental de vibración de la estructura. También se pretendió reconocer la dependencia de los espectros en cada zona con respecto al periodo dominante más largo del terreno. Dado que solo en las zonas II y III del Distrito Federal estos efectos son significativos, se excluyó la aplicación del anexo a estructuras cimentadas en la zona I (ROSENBLUETH & GÓMEZ, 1987).

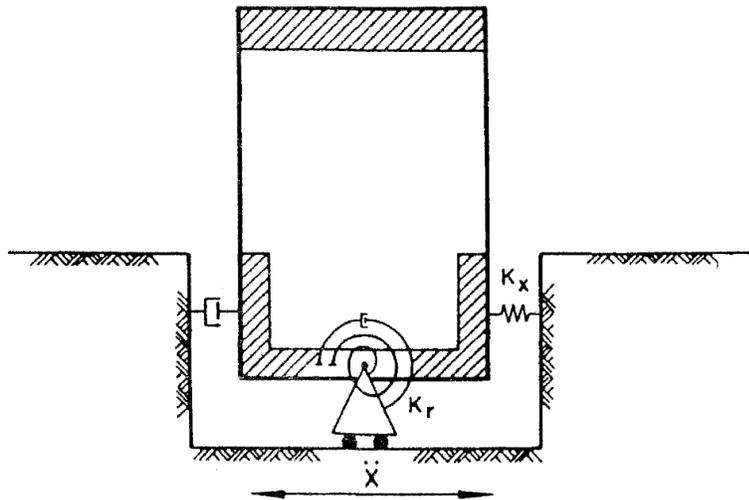


Figura 6.1: sistema idealizado suelo-estructura estudiado en las NTC-DS de año 1987. (Rosenblueth & Gómez, 1987).

Algunas convenciones que aún se conservan en el modelo son: los efectos de IDSE sólo son representativos en la respuesta del modo fundamental de la estructura, por lo que su estudio se limita a éste, los efectos de acoplamiento entre los modos de vibrar de cabeceo y desplazamiento horizontal de la cimentación, son despreciables y tampoco se consideran los efectos de interacción cinemática ni la torsión sísmica. En adición, se optó por ignorar los efectos de la interacción en el amortiguamiento (lo que introduce errores del lado de la seguridad en el cálculo de la respuesta

sísmica) y en la ductilidad (lo que induce errores del lado de la inseguridad). La razón por la que se justificaron dichas simplificaciones, fue que para entonces no se contaba con antecedentes ni estudios que dieran idea de las implicaciones de estos efectos en la zona del valle de México. En general, el modelo estudiado en esa época era como el que se presenta en la FIGURA 6.1. A diferencia del modelo actual, este modelo consideró que la masa de la cimentación es admisible. Como no se considera el efecto de interacción cinemática, la modificación a las ordenadas espectrales fue más bien relacionada con los efectos de sitio y el alargamiento del periodo de la estructura. Para una explicación más detallada acerca de la aplicación y las fórmulas empleadas en aquella época, se recomienda al lector interesado consultar las NTC-DS de 1987, así como las publicaciones del Instituto de Ingeniería (ROSENBLUETH & GÓMEZ, 1987) y (Rosenblueth & Reséndiz, 1988).

6.2 Modelo completo para las NTC-DS del RCDF del 2004

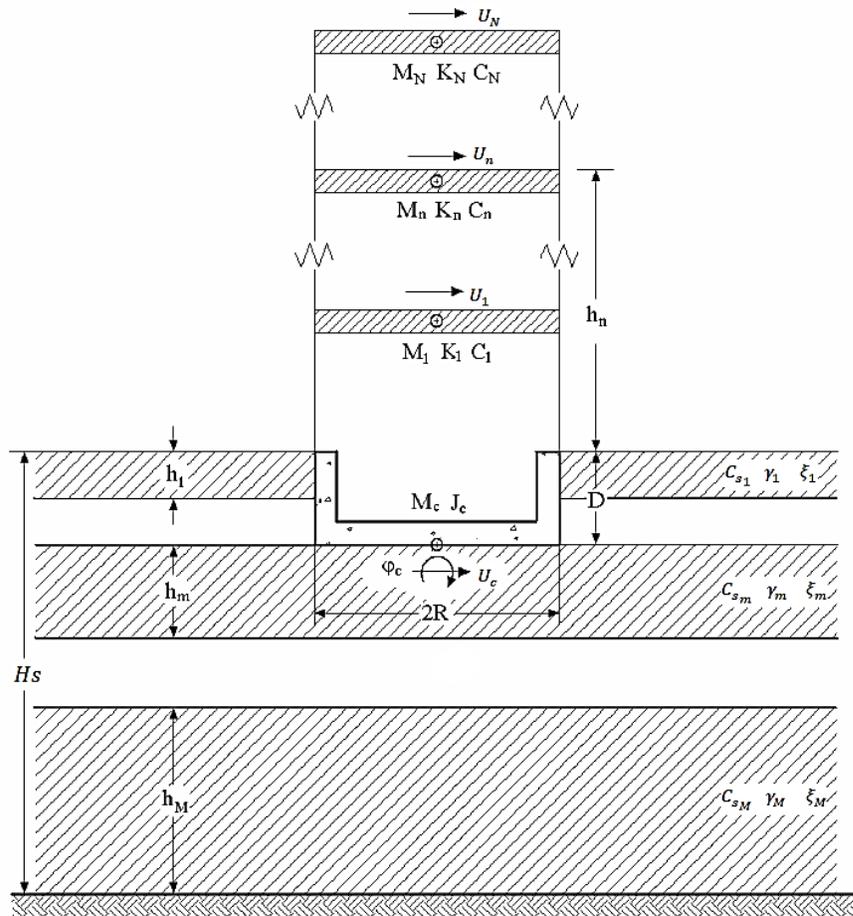


Figura 6.2: Sistema suelo-estructura completo. (Mena & Pérez-Rocha, 2008)

A continuación se presentará el modelo y la metodología de aplicación del anexo A de las NTC-DS actuales. Aunque en general se pretende utilizar la misma notación que la utilizada en las NTC-DS, de ser necesario ésta se modificará para llevar una congruencia con la notación utilizada en los capítulos anteriores de este trabajo. Considerando una estructura de MGD, con una cimentación a base de cajón de cimentación de forma rectangular, inmersa en un depósito de

suelo flexible de espesor potente y estratificado, que a su vez es soportado por un semiespacio de roca elástica, el **modelo completo suelo-cimentación-estructura**, debería ser como se muestra en la FIGURA 6.2.

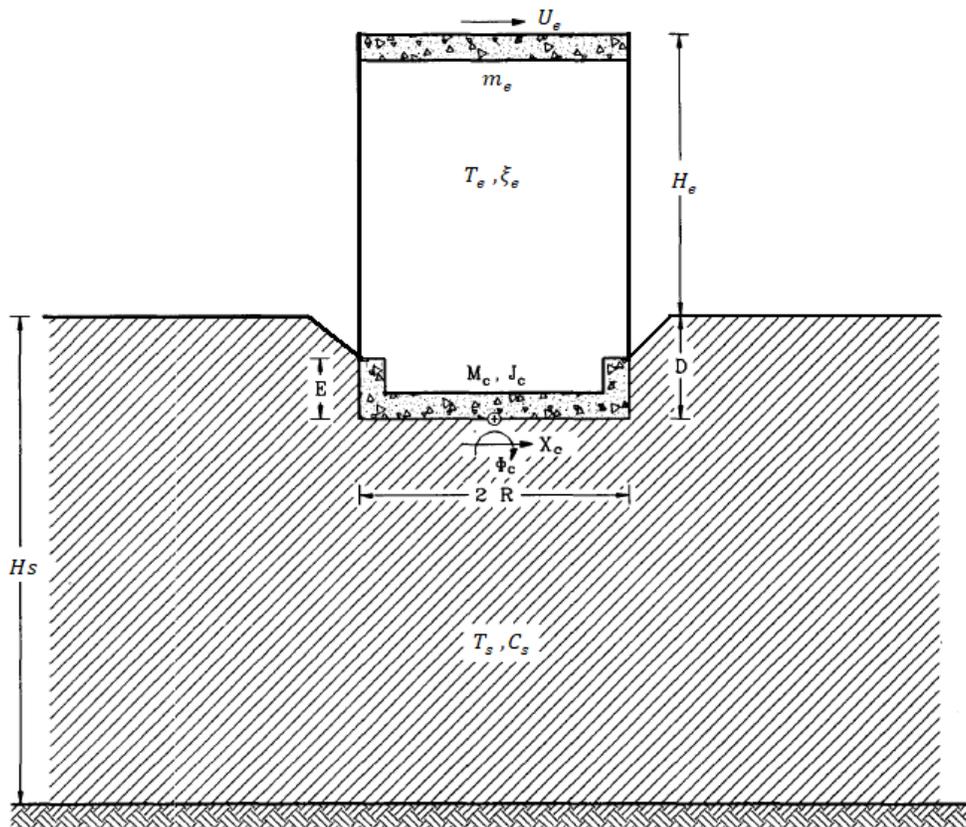


Figura 6.3: Modelo idealización del sistema suelo-estructura. (Avilés & Pérez-Rocha, 1996)

Debido a las características de amortiguamiento no proporcional del sistema, éste posee modos no clásicos de vibración; es decir, sus modos de vibrar no existen necesariamente en el dominio real, sino en el complejo (BOTERO, 2002). No obstante, en (Avilés & Pérez-Rocha, 1996) se estudió un modelo en el que se consideran únicamente los efectos de interacción inercial, por lo que el movimiento de entrada en la base del sistema (FIM) es igual al movimiento en campo libre (FFM). Bajo la asunción de comportamiento estructural lineal, sólo se consideran los efectos de la interacción en la modificación del periodo y amortiguamiento del sistema. Según (Bielak & Jennings, 1973), se considera que los efectos de IDSE sólo son significativos en el primer modo de vibración de la estructura, siempre que su modo fundamental sobre base rígida se parezca a una recta que pasa por su base, lo cual ocurre en la mayoría de los casos prácticos; mientras que la contribución de los modos superiores se determina como se establece para estructuras sin interacción. Por lo tanto, según el **anexo A de las NTC-DS**, cualquier respuesta estructural (fuerza cortante, desplazamiento lateral, momento de volteo, u otras), calculada para la condición de base rígida, se multiplicará por el factor de interacción \tilde{V}_0/V_0 para obtener la respuesta modificada por interacción (ver SUBCAPÍTULO 6.8 de este trabajo). Los desplazamientos laterales modificados por efectos de IDSE, se calcularán como se especifica en relación con el análisis estático y Las

respuestas modales se combinarán con criterios similares a los establecidos para estructuras sin interacción, a fin de obtener la respuesta total del sistema.

Si la estructura de MGDL responde esencialmente como un oscilador de 1GDL soportado por una **cimentación circular equivalente** a la real y si el depósito de suelo se sustituye por un **manto de suelo homogéneo equivalente**, caracterizado por tener T_s y C_s iguales a los del depósito estratificado real como se mostró en el **CAPÍTULO 3**, el **modelo idealizado del sistema suelo-estructura**, puede representarse como se muestra en la **FIGURA 6.3**. Los parámetros que caracterizan este modelo son:

Parámetros de la estructura

- m_e Masa de la estructura equivalente
- H_e Altura de la estructura equivalente
- T_e Periodo fundamental de la estructura considerada con base rígida
- ξ_e Amortiguamiento de la estructura considerada con base rígida

Parámetros de la cimentación

- m_c Masa de la cimentación
- J_c Momento polar de inercia de masa de la cimentación
- R Radio de la cimentación circular equivalente
- D Profundidad de desplante o enterramiento de la cimentación
- E Profundidad de las paredes de la cimentación en contacto con el suelo

Parámetros del suelo

- H_s Altura del estrato homogéneo equivalente de suelo
- T_s Periodo fundamental del estrato homogéneo equivalente del suelo
- G_s Módulo de rigidez al cortante
- γ_s Densidad de suelo
- C_s Celeridad de ondas de corte del suelo
- ξ_s Amortiguamiento del estrato de suelo
- ν_s Relación de Poisson del suelo

La masa m_e y altura H_e efectivas correspondientes al modo fundamental, se obtienen al igualar el cortante basal y momento de volteo modales de la estructura de N-GDL soportada en base rígida, con los valores respectivos de un oscilador de 1GDL con el mismo periodo. Lo que conduce a las siguientes expresiones contenidas en las normas:

$$m_e = \frac{(\sum_{i=1}^N m_i \cdot \varphi_i)^2}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \varphi_i^2} \tag{Ec. 6.1}$$

$$H_e = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \varphi_i \cdot h_i}{\sum_{i=1}^N m_i \cdot \varphi_i} \tag{Ec. 6.2}$$

Donde:

- m_i = Masa del modo fundamental de la estructura supuesta sobre base rígida correspondiente al i-esimo piso.
- φ_i = Amplitud del modo fundamental de la estructura supuesta sobre base rígida correspondiente al i-esimo piso.
- h_i = Altura del modo fundamental de la estructura supuesta sobre base rígida correspondiente al i-esimo piso.

Cuando se utilice el método estático de análisis sísmico, los valores de la masa y altura efectivas pueden aproximarse como:

$$\begin{aligned} m_e &= 0.7m_{tot} & \text{Ec. 6.3} \\ H_e &= 0.7H_{tot} \end{aligned}$$

Excepto para edificaciones de un solo nivel en que:

$$\begin{aligned} m_e &= m_{tot} & \text{Ec. 6.4} \\ H_e &= H_{tot} \end{aligned}$$

Siendo m_{tot} y H_{tot} la masa y altura total de la edificación considerada sobre base indeformable.

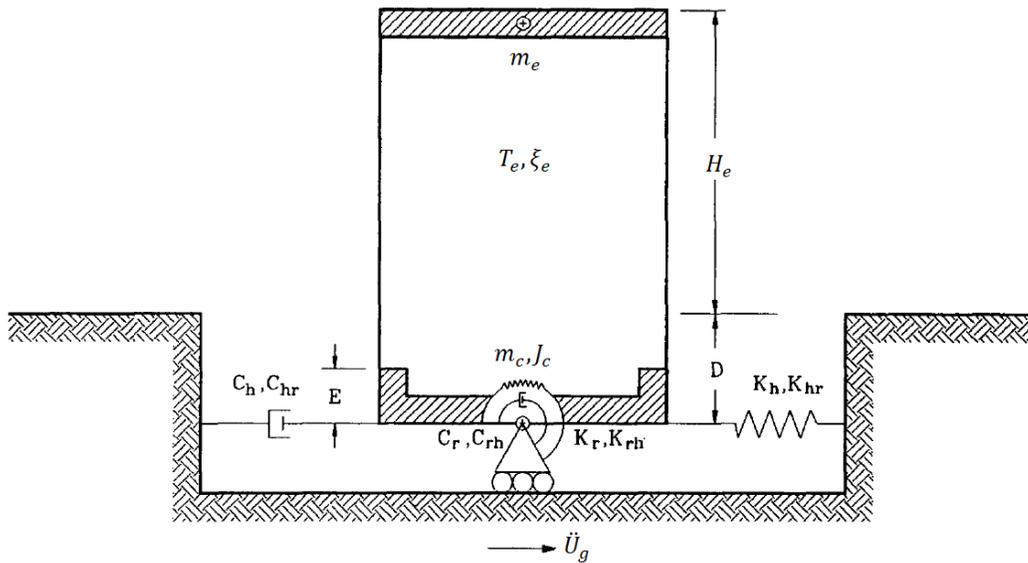


Figura 6.4 Modelo idealizado de parámetros discretos. (Avilés & Pérez-Rocha, 1996)

Substituyendo el suelo por las impedancias (resortes y amortiguadores) que lo representan, el sistema así idealizado se llama **modelo idealizado de parámetros discretos** que se muestra en la FIGURA 6.4, el cual consta de tres grados de libertad, uno relacionado con la deformación de la estructura y dos relacionados con la deformación de la interfaz suelo-cimentación:

- Deformación de la estructura**
- Desplazamiento horizontal** (*Swaying*) de la base de la cimentación
- Cabeceo** (*Rocking*) de la cimentación en torno al centro de su base

La ecuación de movimiento para cada uno de los modos analizados se calcula a continuación en base a la configuración de desplazamientos y diagramas de cuerpo libre de cada uno de ellos.

a) Para el modo (a) Deformación de la estructura

El desplazamiento total de la estructura para este modo es:

$$u_T = u_g + u_e + u_c + (H_e + D) \cdot \Theta$$

Donde:

u_T = Desplazamiento total de la estructura

u_g = Desplazamiento en campo libre (FFM) de suelo, que para este modelo es igual al movimiento de entrada en la base (FIM).

u_e = Desplazamiento en la parte superior de la estructura, debido a la deformación de esta

u_c = Desplazamiento de la base de la cimentación, debido al movimiento horizontal de su base

$(H_e + D) \cdot \Theta$ = Desplazamiento en la parte superior de la estructura, debido al movimiento de cabeceo

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio dinámico para este modo de vibrar se puede escribir como:

$$\begin{aligned} m_e \cdot \ddot{u}_T + c_e \cdot \dot{u}_e + k_e \cdot u_e &= 0 \Rightarrow \\ m_e \cdot (\ddot{u}_g + \ddot{u}_e + \ddot{u}_c + (H_e + D) \cdot \ddot{\Theta}) + c_e \cdot \dot{u}_e + k_e \cdot u_e &= 0 \Rightarrow \\ m_e (\ddot{u}_e + \ddot{u}_c + (H_e + D) \cdot \ddot{\Theta}) + c_e \cdot \dot{u}_e + k_e \cdot u_e &= -m_e \cdot \ddot{u}_g \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.5}$$

Donde $\omega_e = \sqrt{k_e/m_e}$, $c_e = 2\omega_e m_e \xi_e$ y $T_e = 2\pi/\omega_e$. Por lo que:

$$\begin{aligned} k_e &= 4\pi^2 \left(\frac{m_e}{T_e^2} \right) \\ c_e &= 4\pi \xi_e \left(\frac{m_e}{T_e} \right) \end{aligned}$$

b) Para el modo (b) desplazamiento horizontal de la base de la cimentación

El desplazamiento total de la estructura para este modo es:

$$u_T = u_g + u_c + (E/2) \cdot \Theta$$

Siendo E la altura de las paredes en contacto con el suelo. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio dinámico para este modo de vibrar se puede escribir como:

$$\begin{aligned} m_c \cdot \ddot{u}_T + c_h \cdot \dot{u}_c + c_{hr} \cdot \dot{\Theta} + k_h \cdot u_c + k_{hr} \cdot \Theta &= 0 \Rightarrow \\ m_c \cdot (\ddot{u}_g + \ddot{u}_c + (E/2) \cdot \ddot{\Theta}) + c_h \cdot \dot{u}_c + c_{hr} \cdot \dot{\Theta} + k_h \cdot u_c + k_{hr} \cdot \Theta &= V_B \Rightarrow \\ m_c \cdot (\ddot{u}_c + (E/2) \cdot \ddot{\Theta}) + c_h \cdot \dot{u}_c + c_{hr} \cdot \dot{\Theta} + k_h \cdot u_c + k_{hr} \cdot \Theta - V_B &= -m_c \cdot \ddot{u}_g \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.6}$$

Donde:

$V_B = -m_e \cdot (\ddot{u}_g + \ddot{u}_e + \ddot{u}_c + (H_e + D) \cdot \ddot{\Theta})$ Es el cortante basal aplicado en la base de la cimentación debido a la fuerza inercial de la masa de la estructura

c) Para el modo (c) cabeceo de la cimentación

El giro total de la estructura respecto al centro de su base, para este modo, es:

$$\Theta_T = \Theta + (E/2)(u_g + u_c)$$

Por lo tanto, la ecuación de equilibrio dinámico para este modo de vibrar se puede escribir como:

$$J_c \cdot \ddot{\Theta}_T + c_r \cdot \dot{\Theta} + c_{rh} \cdot \dot{u}_c + k_r \cdot \Theta + k_{rh} \cdot u_c = M_B \Rightarrow$$

$$J_c \cdot \left(\ddot{\Theta} + \frac{m_c}{J_c} \left(\frac{E}{2} \right) (\ddot{u}_g + \ddot{u}_c) \right) + c_r \cdot \dot{\Theta} + c_{rh} \cdot \dot{u}_c + k_r \cdot \Theta + k_{rh} \cdot u_c - M_B = 0 \Rightarrow$$

$$J_c \cdot \ddot{\Theta} + m_c(E/2) \cdot \ddot{u}_c + c_r \cdot \dot{\Theta} + c_{rh} \cdot \dot{u}_c + k_r \cdot \Theta + k_{rh} \cdot u_c - M_B = m_c(E/2) \cdot \ddot{u}_g \quad \text{Ec. 6.7}$$

Donde:

$M_B = V_B \cdot (H_e + D)$ Es el momento que se produce al trasladar la fuerza inercial V_B desde el centro de masa de la superestructura hasta la base de la cimentación.

Asumiendo que el sistema idealizado es excitado por la aceleración armónica $\ddot{u}_g = \ddot{U}_g \cdot e^{-i\Omega t}$, con amplitud constante \ddot{U}_g y frecuencia Ω , las translaciones y rotaciones armónicas de los modos de vibrar del sistema en estado estacionario son representados por:

Tabla 6-1

	Modo (a)	Modo (b)	Modo (c)
Desplazamiento	$u_e = U_e \cdot e^{-i\Omega t}$	$u_c = U_c \cdot e^{-i\Omega t}$	$\Theta = \theta \cdot e^{-i\Omega t}$
Velocidad	$\dot{u}_e = (i\Omega)U_e \cdot e^{-i\Omega t}$	$\dot{u}_c = (i\Omega)U_c \cdot e^{-i\Omega t}$	$\dot{\Theta} = (i\Omega)\theta \cdot e^{-i\Omega t}$
aceleración	$\ddot{u}_e = (-\Omega^2)U_e \cdot e^{-i\Omega t}$	$\ddot{u}_c = (-\Omega^2)U_c \cdot e^{-i\Omega t}$	$\ddot{\Theta} = (-\Omega^2)\theta \cdot e^{-i\Omega t}$

Donde U_e , U_c y θ son las amplitudes de respuesta armónica en estado estacionario de cada uno de los tres modos de vibrar y Ω es la frecuencia angular de vibración de la fuerza armónica actuante. Como se observa de la EC. 1.71 del SUBCAPÍTULO 1.3.6, la respuesta estacionaria a una carga armónica, es también armónica, con frecuencia angular igual a la de excitación.

Las ecuaciones EC. 6.5, EC. 6.6 y EC. 6.7 permiten establecer el equilibrio del sistema idealizado en el dominio de la frecuencia. De esta manera, utilizando la síntesis de Fourier para descomponer la historia de aceleraciones de un sismo dado en una serie de excitaciones armónicas, se puede determinar la respuesta a cada una de esas componentes y superponerlas para obtener la respuesta total del sistema idealizado a la excitación sísmica, según el método de subestructura presentado en el SUBCAPÍTULO 5.3.2.

Substituyendo las relaciones de desplazamiento, velocidad y aceleración de la TABLA 6-1, en las ecuaciones de equilibrio dinámico para cada modo de vibrar del sistema idealizado (EC. 6.5, EC. 6.6 y EC. 6.7), resulta:

a) Para el modo (a):

$$m_e(\ddot{u}_e + \ddot{u}_c + (H_e + D) \cdot \ddot{\Theta}) + c_e \cdot \dot{u}_e + k_e \cdot u_e = -m_e \cdot \ddot{u}_g \Rightarrow$$

$$\{m_e(-\Omega^2)[U_e + U_c + (H_e + D)\theta] + c_e(i\Omega)U_e + k_e U_e\} \cdot e^{-i\Omega t} = -m_e \cdot \ddot{U}_g e^{-i\Omega t} \Rightarrow$$

$$m_e(-\Omega^2)[U_e + U_c + (H_e + D)\theta] + c_e(i\Omega)U_e + k_e U_e = -m_e \cdot \ddot{U}_g \quad \text{Ec. 6.8}$$

b) Para el modo (b):

$$\begin{aligned}
 & m_c \cdot (\ddot{u}_c + (E/2) \cdot \ddot{\Theta}) + c_h \cdot \dot{u}_c + c_{hr} \cdot \dot{\Theta} + k_h \cdot u_c + k_{hr} \cdot \Theta - V_B = -m_c \cdot \ddot{u}_g \Rightarrow \\
 & \left\{ m_c(-\Omega^2) \left[U_c + \left(\frac{E}{2} \right) \theta \right] + (i\Omega)[c_h U_c + c_{hr} \theta] + k_h U_c + k_{hr} \theta \right. \\
 & \quad \left. + [(-\Omega^2)m_e(U_e + U_c + (H_e + D)\theta) + m_e \cdot \ddot{U}_g] \right\} \cdot e^{-i\Omega t} = -m_c \cdot \ddot{U}_g e^{-i\Omega t} \Rightarrow \\
 & (-\Omega^2) \left\{ m_c \left[U_c + \left(\frac{E}{2} \right) \theta \right] + m_e [U_e + U_c + (H_e + D)\theta] \right\} + (i\Omega)[c_h U_c + c_{hr} \theta] \\
 & \quad + k_h U_c + k_{hr} \theta = -(m_e + m_c) \cdot \ddot{U}_g e^{-i\Omega t} \qquad \text{Ec. 6.9}
 \end{aligned}$$

c) Para el modo (c)

$$\begin{aligned}
 & J_c \cdot \ddot{\Theta} + m_c(E/2) \cdot \ddot{u}_c + c_r \cdot \dot{\Theta} + c_{rh} \cdot \dot{u}_c + k_r \cdot \Theta + k_{rh} \cdot u_c - M_B = m_c(E/2) \cdot \ddot{u}_g \Rightarrow \\
 & \left\{ (-\Omega^2) \left[J_c \theta + m_c \left(\frac{E}{2} \right) U_c \right] + (i\Omega)[c_r \theta + c_{rh} U_c] + [(-\Omega^2)m_e(U_e + U_c + (H_e + D)\theta) + m_e \cdot \ddot{U}_g] \right. \\
 & \quad \left. \cdot (H_e + D) \right\} e^{-i\Omega t} = -m_c \left(\frac{E}{2} \right) \ddot{U}_g e^{-i\Omega t} \Rightarrow \\
 & (-\Omega^2) \left\{ J_c \theta + m_c \left(\frac{E}{2} \right) U_c + m_e(H_e + D)[U_e + U_c + (H_e + D)\theta] \right\} \\
 & \quad + (i\Omega)[c_r \theta + c_{rh} U_c] + k_r \theta + k_{rh} U_c \\
 & \quad = - \left(m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2} \right) \right) \ddot{U}_g \qquad \text{Ec. 6.10}
 \end{aligned}$$

Las tres ecuaciones anteriores (EC. 6.8, EC. 6.9 y EC. 6.10) se pueden disponer en un arreglo matricial, similar a lo explicado en el APÉNDICE A.1.1 para sistemas de MGD, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{bmatrix} k_e & 0 & 0 \\ 0 & k_h & k_{hr} \\ 0 & k_{rh} & k_r \end{bmatrix} + (i\Omega) \begin{bmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_h & c_{hr} \\ 0 & c_{rh} & c_r \end{bmatrix} \right. \\
 & \left. + (-\Omega^2) \begin{bmatrix} m_e & m_e & m_e(H_e + D) \\ m_e & m_e + m_c & m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2} \right) \\ m_e(H_e + D) & m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2} \right) & m_e(H_e + D)^2 + J_c \end{bmatrix} \right\} \\
 & \cdot \begin{Bmatrix} U_e \\ U_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_e \\ m_e + m_c \\ m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2} \right) \end{Bmatrix} \cdot (-\ddot{U}_g) \qquad \text{Ec. 6.11}
 \end{aligned}$$

Donde:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_e & 0 & 0 \\ 0 & k_h & k_{hr} \\ 0 & k_{rh} & k_r \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_h & c_{hr} \\ 0 & c_{rh} & c_r \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_e & m_e & m_e(H_e + D) \\ m_e & m_e + m_c & m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2}\right) \\ m_e(H_e + D) & m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2}\right) & m_e(H_e + D)^2 + J_c \end{bmatrix}$$

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_e \\ m_e + m_c \\ m_e(H_e + D) + m_c \left(\frac{E}{2}\right) \end{Bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} U_e \\ U_c \\ \theta \end{Bmatrix}$$

Por lo que la ecuación matricial se puede escribir en forma resumida como:

$$([K] + i\Omega \cdot [C] - \Omega^2 \cdot [M]) \cdot \{U\} = -\ddot{U}_g \cdot \{m\}$$

Esta ecuación matricial representa un sistema lineal de ecuaciones algebraicas complejas, el cual puede ser resuelto con procedimientos estándar de eliminación gaussiana. (Avilés & Pérez-Rocha, 1996) Utilizaron el periodo T_{res} y el amortiguamiento ξ_{res} del sistema idealizado en estado de resonancia, como parámetros característicos que determinan la respuesta del oscilador de reemplazo, que se estudiará en el SUBCAPÍTULO 6.3.

6.3 Oscilador de reemplazo para el modelo completo

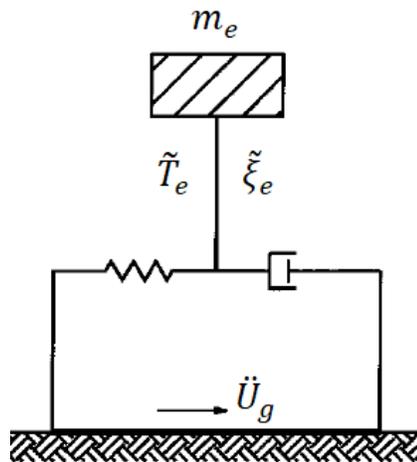


Figura 6.5 Oscilador de reemplazo sobre base rígida sujeta al movimiento en campo libre. (Avilés & Pérez-Rocha, 1998)

Aún con las simplificaciones realizadas al modelo en el SUBCAPÍTULO 6.2, el sistema idealizado carece de modos naturales clásicos de vibración, lo que sigue impidiendo que se realice un análisis del sistema mediante superposición modal convencional (BOTERO, 2002). Para propósitos prácticos y para evitar las complicaciones causadas por el amortiguamiento no proporcional, es más conveniente recurrir al uso de espectros de respuesta elásticos de campo libre, en combinación

con las propiedades dinámicas relevantes de la estructura sobre base rígida, modificada por efectos de IDSE. (Avilés & Pérez-Rocha, 2004).

La analogía con un **oscilador de 1GDL de reemplazo sobre base rígida** (de la FIGURA 6.5) ha sido utilizada ampliamente en estudios de IDSE. El modelo es muy sencillo: se trata de que los efectos de interacción inercial pueden ser suficientemente aproximados por una estructura de 1GDL de reemplazo, soportada sobre una base rígida con un periodo fundamental \tilde{T}_e y amortiguamiento $\tilde{\xi}_e$, tal que su respuesta resonante, se presente con la misma amplitud y a la misma frecuencia que la del sistema acoplado original. Además, el sistema de reemplazo tiene la misma masa y altura efectivas (m_e y H_e) que el sistema de la FIGURA 6.4.

En el SUBCAPÍTULO 1.3.6 se observa que la respuesta de un oscilador de 1GDL sujeto a una excitación armónica en estado estacionario; es decir, cuando la respuesta transitoria se ha disipado, está dada por el factor de magnificación (Ec. 1.69):

$$M = F(\Omega) = \frac{\tilde{\omega}_e^2 \cdot U_e}{\ddot{U}_g} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}$$

Este factor de magnificación representa la **función de transferencia del oscilador de reemplazo**, que depende de la razón de sintonía (β) y la razón de amortiguamiento (ξ), como se ilustra en la FIGURA 1.17.A. De esta figura se observa cómo la función de transferencia se aplanan y ensanchan conforme se incrementa la razón de amortiguamiento. En el mismo subcapítulo, se explicó que para razones de amortiguamiento diferentes de cero, la respuesta máxima (estado de resonancia), ocurre cuando $\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ y está dada por (Ec. 1.72):

$$M_{max} = \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Con lo anterior se puede establecer que el periodo efectivo (\tilde{T}_e) del oscilador de reemplazo, debe ser tal que se presente el estado de resonancia, al ser excitado por una acción armónica con la misma frecuencia $\Omega_{res} = 2\pi/T_{res}$ que provocaría la resonancia del sistema acoplado, calculada a partir de la función de transferencia del modelo del SUBCAPÍTULO 6.4:

$$\tilde{\beta}_e = \frac{\Omega_{res}}{\tilde{\omega}_e} \Rightarrow \frac{\tilde{T}_e}{T_{res}} = \sqrt{1 - 2\tilde{\xi}_e^2}$$

De donde se obtiene:

$$\tilde{T}_e = \sqrt{1 - 2\tilde{\xi}_e^2} \cdot T_{res} \quad \text{Ec. 6.12}$$

Donde:

\tilde{T}_e = Periodo del oscilador elástico de reemplazo sobre base rígida

T_{res} = Periodo resonante del modelo acoplado de parámetros discretos simplificado

Mientras que el amortiguamiento efectivo del oscilador de reemplazo, se obtiene igualando la respuesta máxima del sistema acoplado, con la respuesta máxima del oscilador de reemplazo:

$$F_{res} = F(\Omega_{res}) = M_{max} = \frac{1}{2\tilde{\xi}_e \cdot \sqrt{1 - \tilde{\xi}_e^2}}$$

Despejando $\tilde{\xi}_e$ se obtiene:

$$\tilde{\xi}_e^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{F_{res}^2 - 1}{F_{res}^2} \right)^{1/2} \right) \quad \text{Ec. 6.13}$$

Las Ec. 6.12 y Ec. 6.13 representan los parámetros característicos del oscilador de reemplazo.

6.4 Periodo y Amortiguamiento para el Modelo Simplificado

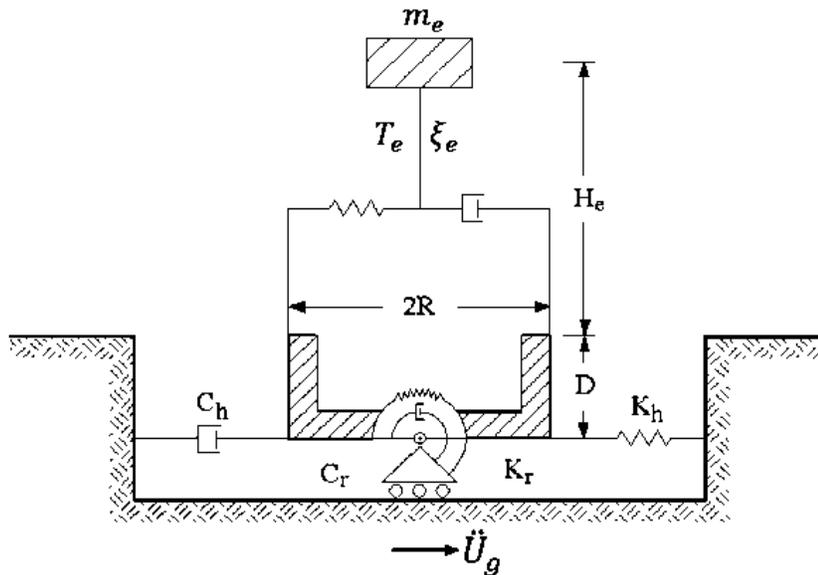


Figura 6.6: Modelo acoplado de parámetros discretos simplificado. (Avilés & Pérez-Rocha, 2004)

Antes de proceder a igualar la respuesta resonante del modelo riguroso al que se llamó modelo idealizado de parámetros discretos con la del oscilador de reemplazo, se deben realizar algunas simplificaciones adicionales al modelo idealizado. De esta manera, el modelo idealizado de parámetros discretos de la FIGURA 6.4, se convierte en el **modelo acoplado simplificado de parámetros discretos** (FIGURA 6.6), al que se referirá solamente como **modelo o sistema acoplado**:

a) Representación del movimiento del terreno

El movimiento del terreno está compuesto únicamente por ondas SH de propagación vertical. Como se desprecian los efectos de interacción cinemática, el movimiento de entrada en la base de la cimentación (FIM) será el movimiento en campo libre (FFM).

b) Modelo del suelo

El suelo se modela como un estrato homogéneo equivalente con celeridad de ondas S (C_s), módulo de elasticidad al cortante (G), relación de Poisson (ν) y densidad (γ) constantes a lo largo de todo

el espesor del depósito de suelo. En consecuencia, este manto homogéneo e isótropo tiene un periodo fundamental de vibración y un espesor iguales a los del depósito de suelo estratificado original. Además, se considera que el suelo en las inmediaciones de la cimentación se mantiene esencialmente en el intervalo lineal y elástico.

Posteriormente, ese depósito de suelo homogéneo es reemplazado por las funciones de impedancia relacionadas con los dos grados de libertad adicionales de la estructura en interacción con el suelo; a saber: translación horizontal o movimiento de vaivén y cabeceo. Según el [SUBCAPÍTULO 5.4](#), las impedancias de acoplamiento de los modos de traslación-rotación son despreciables para cimentaciones someras, por ello no se admiten en el modelo; Es decir, se desprecian las funciones de impedancia de los modos de vibrar del movimiento horizontal debido al efecto de cabeceo y movimiento de cabeceo inducido por el movimiento de vaivén ($k_{rh} = k_{hr} = c_{rh} = c_{hr} = 0$).

c) Modelo de la estructura y su cimentación

En la estructura y su cimentación es en donde se hacen las principales y más grandes simplificaciones con respecto al modelo idealizado. Por un lado, la estructura se sigue representando por un oscilador de 1GDL. Por otro lado, el cajón de cimentación es reemplazado por una cimentación circular equivalente sin masa y totalmente rígida. El radio de la cimentación circular R_m , será el radio de un círculo equivalente con igual área (R_A) que el cajón de cimentación cuando se considere el movimiento en vaivén e igual momento de inercia (R_I) cuando se considere el movimiento de cabeceo. Además, se considera que tanto la masa, como el momento de inercia de masa de la cimentación son despreciables ($m_c = J_c = 0$) y las paredes de la cimentación están totalmente en contacto con el suelo ($E = D$) (ver, [SUBCAPÍTULO 6.5](#)).

Estas simplificaciones, se justifican por las conclusiones del estudio paramétrico de ([AVILÉS & PÉREZ-ROCHA, 1996](#)), y por simplicidad en el desarrollo de las fórmulas de diseño del anexo A de las NTC-DS. Con ellas, la ecuación matricial de desplazamiento del modelo acoplado ([Ec. 6.11](#)) queda como sigue:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} k_e & 0 & 0 \\ 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & k_r \end{bmatrix} + (i\Omega) \begin{bmatrix} c_e & 0 & 0 \\ 0 & c_h & 0 \\ 0 & 0 & c_r \end{bmatrix} \right. \\ & + (-\Omega^2) \left. \begin{bmatrix} m_e & m_e & m_e(H_e + D) \\ m_e & m_e & m_e(H_e + D) \\ m_e(H_e + D) & m_e(H_e + D) & m_e(H_e + D)^2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} U_e \\ U_c \\ \theta \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} m_e \\ m_e \\ m_e(H_e + D) \end{pmatrix} \cdot (-\ddot{U}_g) \end{aligned} \quad \text{Ec. 6.14}$$

Si se dividen los primeros dos renglones de esta matriz entre $\Omega^2 \cdot m_e$ y el tercero entre $\Omega^2 \cdot m_e(H_e + D)$, considerando las siguientes igualdades:

Para el modo (b) desplazamiento horizontal de la base de la cimentación:

$\omega_h^2 = k_h/m_e$ Es la frecuencia circular natural de vibración para el modo (b) asumiendo que la estructura es rígida

$\xi_h = c_h/2\omega_h m_e$ Es la razón de amortiguamiento del modo (b) considerando simultáneamente el amortiguamiento geométrico y material del suelo

Para el modo (c) cabeceo de la cimentación:

$\omega_r^2 = k_r/m_e \cdot (H_e + D)^2$ Es la frecuencia circular natural de vibración para el modo (c) asumiendo que la estructura es rígida

$\xi_r = c_r/2\omega_r m_e \cdot (H_e + D)^2$ Es la razón de amortiguamiento del modo (c) considerando simultáneamente el amortiguamiento geométrico y material del suelo

Entonces la ecuación matricial queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_e^2}{\Omega^2} (1 + i2\xi'_e) - 1 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{\omega_h^2}{\Omega^2} (1 + i2\xi'_h) - 1 & -1 \\ -1 & -1 & \frac{\omega_r^2}{\Omega^2} (1 + i2\xi'_r) - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_e \\ U_c \\ \theta \end{Bmatrix} = -\frac{\ddot{U}_g}{\Omega^2} \quad \text{Ec. 6.15}$$

Donde:

$$\xi'_e = (\Omega/\omega_e)\xi_e$$

$$\xi'_h = (\Omega/\omega_h)\xi_h$$

$$\xi'_r = (\Omega/\omega_r)\xi_r$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones complejas de la [Ec. 6.15](#), se obtiene la pseudoaceleración para el primer modo de vibrar:

$$\omega_e^2 \cdot U_e = -\ddot{U}_g \left[1 + i2\xi'_e - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_h^2} \cdot \frac{1 + 4\xi'_e \xi'_h + i2(\xi'_e - \xi'_h)}{1 + 4\xi_h'^2} - \frac{\Omega^2}{\omega_r^2} \cdot \frac{1 + 4\xi'_e \xi'_r + i2(\xi'_e - \xi'_r)}{1 + 4\xi_r'^2} \right]^{-1} \quad \text{Ec. 6.16}$$

Por otra parte, asumiendo que el oscilador de reemplazo ([FIGURA 6.5](#)), con frecuencia circular natural $\tilde{\omega}_e$ y amortiguamiento $\tilde{\xi}_e$, es sujeto a la misma excitación de la base que el modelo acoplado simplificado, la pseudoaceleración estructural en estado estacionario es dada por:

$$\tilde{\omega}_e^2 \cdot \tilde{U}_e = -\ddot{U}_g \left(1 - \frac{\Omega^2}{\tilde{\omega}_e^2} + i2\tilde{\xi}_e \cdot \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_e} \right)^{-1} \quad \text{Ec. 6.17}$$

Tomando en consideración que la masa de la estructura es igual en ambos sistemas (el acoplado y el de reemplazo), la frecuencia y el amortiguamiento efectivos del sistema de reemplazo, pueden ser obtenidos al igualar las partes real e imaginaria de las [Ec. 6.16](#) y [Ec. 6.17](#) para la condición de resonancia; es decir, cuando $\Omega_{\text{res}} = \tilde{\omega}_e$. Con lo que se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_e^2} = \frac{1}{\omega_e^2} + \frac{1}{\omega_h^2} \cdot \frac{1 - 4\xi'_e \xi'_h}{1 + 4\xi_h'^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \cdot \frac{1 - 4\xi'_e \xi'_r}{1 + 4\xi_r'^2} \quad \text{Ec. 6.18}$$

$$\tilde{\xi}_e = \xi'_e + \frac{\tilde{\omega}_e^2}{\omega_h^2} \cdot \frac{\xi'_h - \xi'_e}{1 + 4\xi_h'^2} + \frac{\tilde{\omega}_e^2}{\omega_r^2} \cdot \frac{\xi'_r - \xi'_e}{1 + 4\xi_r'^2} \quad \text{Ec. 6.19}$$

Según (Mena & Pérez-Rocha, 2008), al despreciar los valores de segundo orden en los amortiguamientos, las ecuaciones Ec. 6.18 y Ec. 6.19 se pueden escribir como sigue:

$$\frac{1}{\tilde{\omega}_e^2} = \frac{1}{\omega_e^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_r^2} \quad \text{Ec. 6.20}$$

$$\tilde{\xi}_e = \xi_e \frac{\tilde{\omega}_e^2}{\omega_e^2} + \xi_h \frac{\tilde{\omega}_e^2}{\omega_h^2} + \xi_r \frac{\tilde{\omega}_e^2}{\omega_r^2} \quad \text{Ec. 6.21}$$

Estos autores indican que los amortiguamientos del suelo para los distintos modos de vibración de la cimentación, son más elevados que el amortiguamiento de la estructura, en especial el amortiguamiento en traslación. Por esta razón y con bases empíricas, se propuso la siguiente fórmula para el cálculo de la razón de amortiguamiento efectivo para el oscilador de reemplazo, la cual viene en las normas:

$$\tilde{\xi}_e = \xi_e \left(\frac{T_e}{\tilde{T}_e} \right)^2 + \frac{\xi_h}{1 + 2\xi_h^2} \left(\frac{T_h}{\tilde{T}_e} \right)^2 + \frac{\xi_r}{1 + 2\xi_r^2} \left(\frac{T_r}{\tilde{T}_e} \right)^2 \quad \text{Ec. 6.22}$$

Mientras que el periodo efectivo del oscilador de reemplazo se calcula como:

$$\tilde{T}_e = (T_e^2 + T_h^2 + T_r^2)^{1/2} \quad \text{Ec. 6.23}$$

Esta última ecuación proviene de la Ec. 6.20.

En las ecuaciones Ec. 6.22 y Ec. 6.23 anteriores:

$T_h = 2\pi \left(m_e / k_h \right)^{1/2}$ Es el periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo se pudiera trasladar horizontalmente

$\xi_h = \pi c_h / \tilde{T}_e k_h$ Es la razón de amortiguamiento para el modo de traslación

$T_r = 2\pi \left(m_e \cdot (H_e + D)^2 / k_r \right)^{1/2}$ Es el periodo natural que tendría la estructura si fuera infinitamente rígida y su base sólo se pudiera trasladar horizontalmente

$\xi_r = \pi c_r / \tilde{T}_e k_r$ Es la razón de amortiguamiento para el modo de cabeceo

Donde los parámetros k_h y k_r representan las rigideces de la cimentación en la dirección que se analiza la estructura: k_h es la rigidez de traslación, definida como la fuerza horizontal necesaria para producir un desplazamiento armónico unitario del cimiento, mientras que k_r es la rigidez de rotación, definida como el momento necesario para producir una rotación unitaria armónica del cimiento. Además, c_h y c_r representan los amortiguamientos del suelo en los modos de traslación horizontal y rotación respectivamente. c_h Es la fuerza requerida para producir una velocidad armónica unitaria del cimiento en traslación horizontal, y que c_r es el momento necesario para producir una velocidad armónica unitaria del mismo en rotación (ver SUBCAPÍTULO 6.5).

Es de importancia fundamental, puntualizar que por consistencia, los valores de ξ_e , ξ_h y ξ_r , así como ω_h y ω_r , deben ser evaluados para $\Omega = \tilde{\omega}_e$. Pero como $\tilde{\omega}_e$ no es un valor que se conozca a priori, es necesario iniciar un proceso iterativo para determinarlo, a partir de $\Omega = \omega_e$, para calcular la frecuencia resonante del sistema. El hecho de que $\tilde{\omega}_e$ y ξ_e sean determinados en la resonancia y a continuación evaluados sobre todo el rango de frecuencias, se debe a que de esta manera se obtiene un buen acuerdo entre la respuesta del sistema acoplado y la del oscilador de reemplazo en el dominio de la frecuencia, sobre un amplio intervalo de frecuencias a ambos lados de la resonante, excepto para estructuras muy cuadradas o sobre suelos muy blandos; para estos casos, la función de transferencia del sistema acoplado no puede ser ajustada correctamente con aquella de un oscilador sobre base fija (Avilés & Pérez-Rocha, 1996). Esto se debe al ensanchamiento que se presenta en la gráfica de la función de transferencia cuando el contraste de rigidez entre el suelo y la estructura es muy significativo; es decir, cuando el amortiguamiento del suelo es significativamente no proporcional. Sin embargo, según (Avilés & Pérez-Rocha, 2004), no se espera que esto suceda comúnmente en la práctica.

6.5 Funciones de impedancia

La definición y características de las funciones de impedancia dinámica utilizadas para considerar la flexibilidad del suelo en un análisis de IDSE por el método de subestructura, fueron comentadas en el SUBCAPÍTULO 5.4. Ahora, sólo queda por comentar la manera en que se obtienen las fórmulas de la tabla A.2 del anexo A de las NTC-DS y la sección A.6.4 del mismo anexo (APÉNDICE 0 De este trabajo).

6.5.1 Analogía del sistema suelo-cimentación con un sistema de 1GDL

El significado matemático y físico de las funciones de impedancia del suelo, puede ilustrarse empleando una analogía con la función de transferencia de un sistema discreto de 1GDL. Para esto, supóngase la ecuación de equilibrio dinámico de un oscilador elemental, Ec. 1.40:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = Q(t)$$

Donde:

M , C y K son respectivamente la masa, el amortiguamiento y la rigidez del oscilador

$Q(t)$ y $u(t)$ corresponden a la fuerza y desplazamiento armónicos del oscilador

Para una excitación armónica $Q(t) = Q_0 \cdot e^{i\Omega t}$, se tiene en el estado estacionario una respuesta también armónica, con la misma frecuencia que la excitación, $u(t) = U_0 \cdot e^{i\Omega t}$. En estas condiciones, la ecuación anterior se escribe como:

$$(K + i\Omega C - \Omega^2 M)U_0 = Q_0 \quad \text{Ec. 6.24}$$

Donde: Ω es la frecuencia de la excitación armónica $Q(t)$

Si las **rigideces dinámicas** se definen matemáticamente como en el SUBCAPÍTULO 5.4, físicamente, en el modelo, representan los resortes y amortiguadores equivalentes al suelo en torno a la cimentación como se observa en la FIGURA 6.8. Por lo que se obtiene:

$$\tilde{S}(\Omega) = \frac{Q_0}{U_0} = (K - \Omega^2 M) + i \cdot (\Omega C) \quad \text{Ec. 6.25}$$

Esta ecuación muestra que la rigidez dinámica de un oscilador, $\tilde{S}(\Omega)$, es una función compleja dependiente de la frecuencia de excitación. La función de impedancia del oscilador se acostumbra presentar en términos de la rigidez estática y de los coeficientes de impedancia dependientes de la frecuencia, de la siguiente manera:

$$\tilde{S}(\Omega) = K_0 \cdot (\hat{k} + i\Omega\hat{c}) \quad \text{Ec. 6.26}$$

Donde:

$$\hat{k} = 1 - (\Omega/\omega_0)^2$$

$$\hat{c} = 2\xi/\omega_0, \text{ siendo } \omega_0 \text{ la frecuencia natural y } \xi \text{ el amortiguamiento del oscilador}$$

Los parámetros \hat{k} y \hat{c} se conocen como coeficientes de rigidez y de amortiguamiento del oscilador respectivamente. Para el oscilador de 1GDL, \hat{k} decrece con la frecuencia y se hace nulo para la frecuencia natural ω_0 , en tanto que \hat{c} , permanece constante. La Ec. 6.26 implica que la función de rigidez dinámica $\tilde{S}(\Omega)$ puede expresarse como el producto de la rigidez estática K_0 y de un factor dinámico complejo $(\hat{k} + i\Omega\hat{c})$ que engloba las características de inercia y amortiguamiento del sistema; para la frecuencia cero, el factor dinámico se reduce a la unidad real y por tanto la rigidez dinámica coincide con la estática.

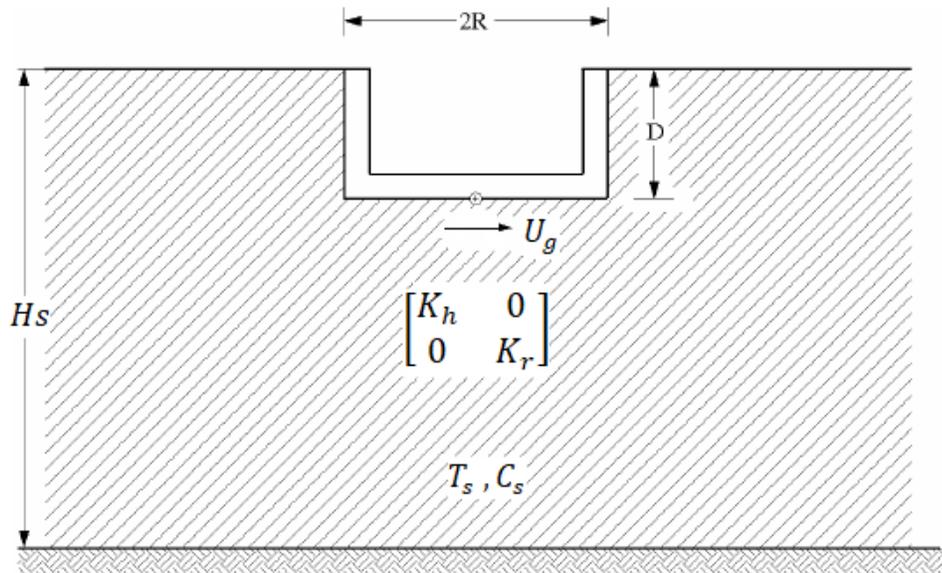


Figura 6.7 Sistema suelo-cimentación. (Mena & Pérez-Rocha, 2008)

Dejando de lado la analogía con el oscilador de 1GDL, la rigidez dinámica del **sistema suelo-cimentación** de la FIGURA 6.7, puede expresarse con una función compleja dependiente de la frecuencia de excitación, de la forma:

$$\tilde{S}_m = K_m^0 [k_m(\Omega) + i\Omega c_m(\Omega)] (1 + i2\xi_s) \quad \text{Ec. 6.27}$$

Donde m indica el modo de vibración de la cimentación ($m = r$ si se considera el modo de cabeceo ó $m = h$ si se considere el modo de desplazamiento horizontal); K_m^0 es la rigidez estática para el modo estudiado, k_m y c_m son los coeficientes de impedancia para el modo en estudio y El factor

de normalización $(1 + i2\xi_s)$ permite aislar el efecto del amortiguamiento material en los coeficientes de rigidez y de amortiguamiento, según el principio de correspondencia (Wolf & Deeks, 2004).

La función de impedancia del sistema suelo-cimentación se puede adimensionalizar en términos de la frecuencia adimensional η_m , de la siguiente manera:

$$\tilde{S}_m = K_m^0 [k_m(\eta_m) + i \cdot \eta_m \cdot c_m(\eta_m)] (1 + i \cdot 2\xi_s) \quad \text{Ec. 6.28}$$

Donde $\eta_m = \Omega \cdot R_m / C_s$ es la **frecuencia adimensional** de la onda usada comúnmente en dinámica de vibraciones (Ver Ec. 3.7), que relaciona la frecuencia de excitación con el cociente entre una longitud característica de la cimentación y la celeridad de propagación de ondas S , $m = h$ ó r , indica el modo de vibrar de la cimentación, que puede ser de traslación o rotación, dependiendo del subíndice.

Dichas frecuencias adimensionales están relacionadas con las frecuencias críticas que se estudian en el SUBCAPÍTULO 6.5.2 y las fórmulas del ANEXO 0. R_m Es el radio de un círculo equivalente a la superficie neta de la cimentación, como se indicó en el SUBCAPÍTULO 6.4 INCISO C), con igual área A , o igual momento de inercia I con respecto a su eje centroidal de rotación perpendicular a la dirección de análisis, tal que:

$$R_h = R_{hr} = (A/\pi)^{1/2} \text{ Para los modos de traslación horizontal y acoplado y}$$

$$R_r = (4I/\pi)^{1/4} \text{ Para el modo de cabeceo}$$

Si K_m representa el resorte y C_m el amortiguador, equivalentes del sistema suelo-cimentación, FIGURA 6.8, la rigidez dinámica del suelo se expresa en congruencia con la Ec. 6.26 como:

$$\tilde{S}_m = K_m(\eta_m) + i\eta_m C_m(\eta_m) \quad \text{Ec. 6.29}$$

Entonces, igualando las partes real e imaginaria de las Ec. 6.28 y Ec. 6.29, se encuentran finalmente, las siguientes relaciones:

$$K_m(\eta_m) = K_m^0 (k_m - 2\xi_s \eta_m c_m) \quad \text{Ec. 6.30}$$

$$C_m(\eta_m) = \frac{K_m^0 \cdot (\eta_m c_m + 2\xi_s k_m)}{\eta_m} \quad \text{Ec. 6.31}$$

El término K_m representa un resorte lineal que expresa tanto la rigidez como la inercia del suelo; la dependencia de la frecuencia se debe a su influencia en la inercia, ya que la rigidez del suelo es esencialmente independiente de la frecuencia. Por otra parte, el término C_m representa un amortiguador viscoso que expresa el amortiguamiento geométrico del suelo, mientras que el amortiguamiento material del suelo interviene tanto en el amortiguador, como en el resorte. El primero depende de la frecuencia y se debe a la radiación de ondas, el segundo, es básicamente independiente de la frecuencia y se debe al comportamiento histerético del material del suelo.

La rigidez dinámica del suelo así definida está restringida a modelos elástico-lineales. No obstante, una forma práctica de tener en cuenta aproximadamente el comportamiento no lineal del suelo,

consiste en estimar sus propiedades de rigidez y amortiguamiento, para que sean compatibles con las deformaciones causadas por el FFM en base a un modelo apropiado en función de los resultados de pruebas de campo y laboratorio para el rango de deformaciones esperadas en el suelo (Avilés & Pérez-Rocha, 2004). Las no-linealidades debidas a deformaciones inelásticas pueden despreciarse, ya que para fines de diseño, se debería satisfacer el requisito práctico de evitar la deformación inelástica en el contacto suelo-cimentación, ya que en caso de ser significativos, el edificio sufriría una rotación o giro permanente y perdería su verticalidad (Zeevaert, 1980).

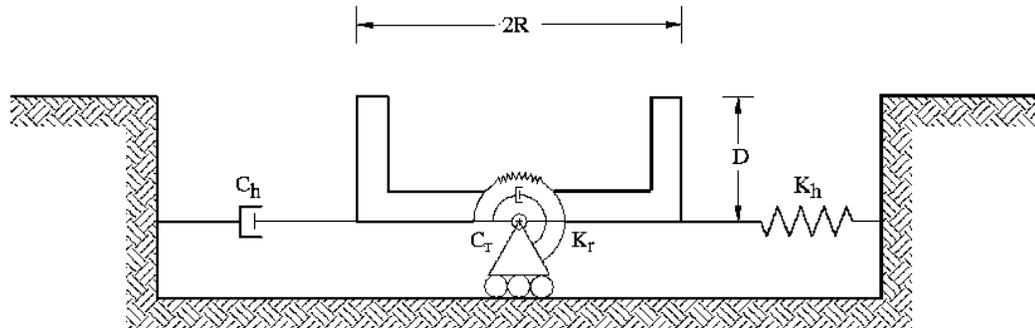


Figura 6.8 Resortes y amortiguadores equivalentes del suelo. (Mena & Pérez-Rocha, 2008)

6.5.2 Frecuencias críticas

Según (Avilés & Pérez-Rocha, 2004), para un depósito de suelo existen **frecuencias críticas** por debajo de las cuales el amortiguamiento por radiación no es activado (ver FIGURA 5.3). Este efecto es más evidente para el modo de cabeceo, que para el de traslación horizontal, como se aprecia en la FIGURA 6.9 (LADO DERECHO) para una cimentación enterrada en un estrato somero. Este efecto está relacionado con el fenómeno de prorrato de losa estudiado en el SUBCAPÍTULO 5.2.

Para frecuencias menores que la primera resonante del estrato, los valores del amortiguamiento son muy bajos, ya que reflejan la pérdida de energía sólo por amortiguamiento material histerético; el amortiguamiento por radiación es prácticamente nulo en este intervalo. Destacan también las reducciones de los coeficientes de rigidez k_r con la frecuencia de excitación debido a la influencia que dicha frecuencia tiene en las fuerzas inerciales desarrolladas en la masa del suelo; así como las oscilaciones de los coeficientes de rigidez k_h y amortiguamiento c_h debido a la resonancia con las frecuencias naturales del suelo.

Estas **frecuencias críticas** para un estrato uniforme, están en función de las **frecuencias fundamentales en vibración transversal**, si se trata de oscilaciones de la cimentación en traslación horizontal, o de las **frecuencias fundamentales en vibración vertical**, si se trata de oscilaciones de la cimentación en cabeceo. Esto se debe a que las oscilaciones de traslación horizontal generan principalmente ondas S, mientras que las de cabeceo originan primordialmente ondas P. Las frecuencias fundamentales adimensionales para ondas de corte y compresión están dadas por:

$$\eta_s = \frac{\omega_s \cdot R_h}{C_s} = \frac{\pi \cdot R_h}{2 \cdot H_s} \quad \text{Ec. 6.32}$$

$$\eta_p = \frac{\omega_p \cdot R_h}{C_s} = \eta_s \cdot \left(\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right)^{1/2} \quad \text{Ec. 6.33}$$

En el ANEXO 0 se presentan las expresiones para calcular las funciones de impedancia del suelo según las NTC-DS. En ellas se desprecian las condiciones de contacto entre el suelo y las paredes de la cimentación; por ejemplo, la separación de las paredes en el caso de cajones de cimentación. Los coeficientes de amortiguamiento dados en esta tabla presentan saltos alrededor de las frecuencias resonantes del estrato, que reflejan el efecto de las frecuencias críticas en el amortiguamiento por radiación (FIGURA 6.9).

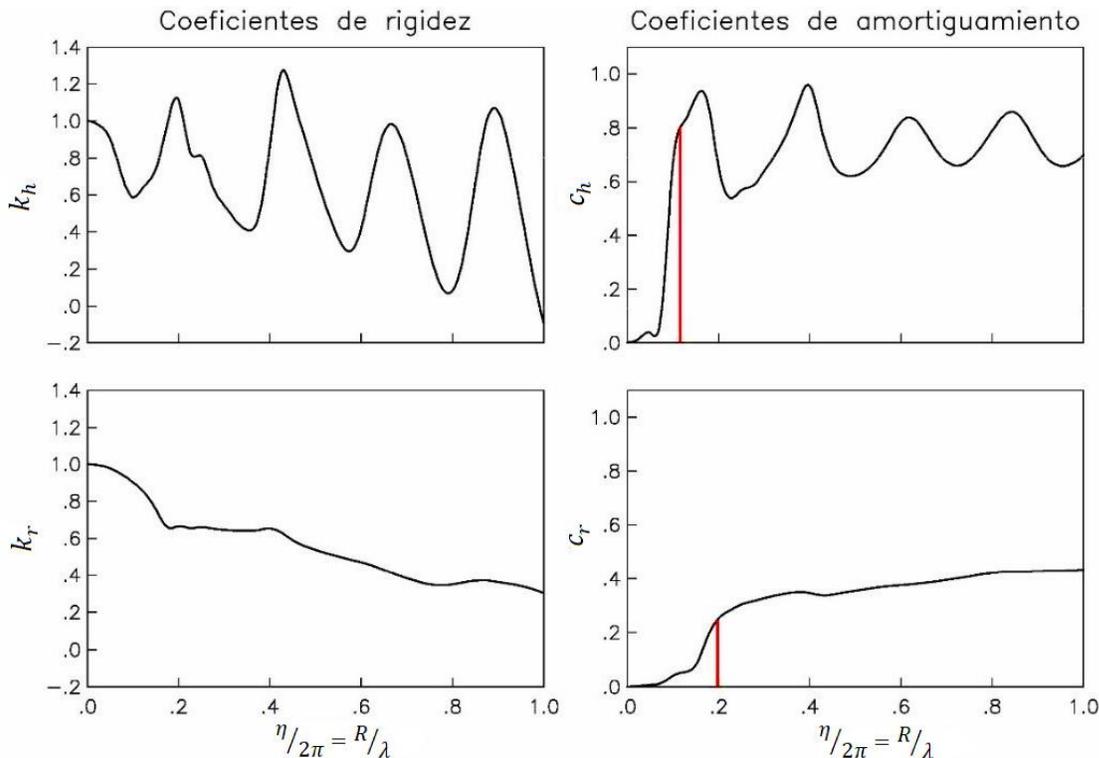


Figura 6.9: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento para los modos de traslación horizontal (arriba) y cabeceo (abajo), para una cimentación enterrada en un estrato somero. (Avilés & Pérez-Rocha, 2004)

6.5.3 Cimentación tipo cajón

Dependiendo del tipo de cimentación, los valores de los resortes elásticos y amortiguadores viscosos en sustitución del suelo, pueden calcularse con las expresiones que se consignan en el ANEXO 0. Dichas expresiones están basadas en los resultados reportados por (Gazetas, 1991). En esta tabla se consideró además, que debido al gran contraste de rigidez entre el manto superficial y el lecho rígido en que se apoya, el error que se introduce al despreciar el efecto de la deformabilidad de este último en el cálculo de las rigideces dinámicas, es tan insignificante, que puede compensarse usando un amortiguamiento del suelo ligeramente mayor que su valor real.

Los criterios especificados se aplican directamente a losas o cajones de cimentación, así como a cimentaciones a base de zapatas corridas con dimensión mayor en la dirección de análisis, siempre que posean suficiente rigidez y resistencia como para suponer que se desplazan como cuerpo rígido. En el presente trabajo se estudia la aplicación del método del anexo A de las NTC-DS al análisis de una estructura soportada sobre un cajón de cimentación, por lo que se omiten comentarios al respecto de la utilización de las fórmulas consignadas en el ANEXO 0 para el análisis de estructuras soportadas sobre una serie de zapatas aisladas o pilotes.

6.6 Ductilidad

En los criterios para diseño sismorresistente, se consigna que los sismos severos llegan a imponer a las estructuras sollicitaciones tan elevadas y de carácter tan aleatorio, que terminaría siendo antieconómico diseñarlas para resistir sin daño alguno los sismos intensos con periodo de retorno considerablemente grande. Por lo anterior, en diseño sismorresistente se debe aceptar una probabilidad mayor de que ocurran daños, que la esperada ante las acciones convencionales, si se quiere evitar una inversión inicial excesiva en la estructura. Por las razones anteriores, los criterios de diseño sismorresistente especificados por los reglamentos actuales, reconocen que su objetivo es limitar la probabilidad de un colapso ante sismos intensos, aun a costa de daños severos, mientras que sólo para sismos moderados se espera que la estructura permanezca intacta. (Meli, 1985).

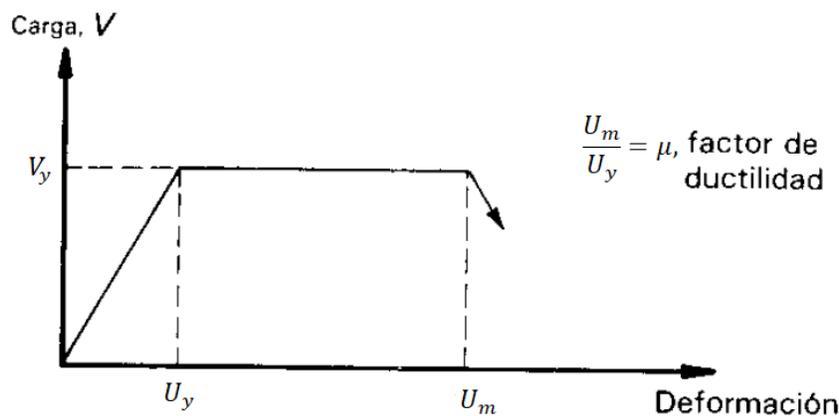


Figura 6.10: Comportamiento elasto-plástico de una estructura. (Meli, 1985).

En la teoría de la mecánica de materiales, estos se clasifican como dúctiles o frágiles, según sean los esfuerzos y deformaciones ejercidos sobre ellos al momento de su falla. Se considera que un material es dúctil cuando es capaz de resistir deformaciones considerablemente superiores a su límite elástico sin fracturarse. Comúnmente, la capacidad de carga o resistencia nominal de un material, o mejor dicho en este caso, la resistencia de una estructura, es determinada como el esfuerzo máximo que ésta puede soportar de forma que al retirar la carga no se presenten deformaciones permanentes (Hibbeler, 2011); sin embargo, Ante acciones dinámicas como las ejercidas por los sismos, al llegar cerca de su máxima capacidad de carga, el comportamiento de la estructura se vuelve no lineal y la mayoría de las estructuras pueden ser llevadas a deformaciones inelásticas varias veces superiores a las que corresponden al comienzo de la etapa no lineal, o a aquella para la que se alcanza por primera vez la carga máxima.

El sistema no lineal más estudiado es el elastoplástico (como el estudiado en el [SUBCAPÍTULO 2.1](#)) en este, el comportamiento es lineal hasta una carga máxima, y posteriormente, la capacidad de carga se mantiene constante hasta una deformación μ veces la de fluencia, después de lo cual ocurre el colapso. Según la [FIGURA 6.10](#), el factor de ductilidad se define como la relación entre la deformación última que soporta la estructura antes del colapso U_m y la deformación elástica máxima U_y , de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{U_m}{U_y} \quad \text{Ec. 6.34}$$

Las ecuaciones diferenciales que rigen el equilibrio dinámico de sistemas elásticos siguen siendo válidas, aun cuando el comportamiento es no-lineal, pero su solución puede obtenerse únicamente mediante procedimientos iterativos que consideran el comportamiento lineal durante pequeños intervalos de carga (procedimientos "paso a paso" en el dominio del tiempo).

6.6.1 Factor de comportamiento sísmico Q

No todo el exceso de la capacidad de la **estructura inelástica sobre base rígida** ante sismo con respecto a la calculada se debe a comportamiento dúctil. La mayoría de las estructuras posee reservas de capacidad ante cargas sísmicas no consideradas en el diseño convencional (ver [SUBCAPÍTULO 6.7](#)). En vista de ello, la manera de caracterizar las estructuras de acuerdo con su capacidad para absorber energía es por medio del factor de comportamiento sísmico Q , que no solamente depende de la estructuración y ductilidad, sino que también refleja reservas en capacidad estructural que actualmente no se pueden considerar explícitamente. ([Mena & Pérez-Rocha, 2008](#)). Este factor es una constante intrínseca de la configuración estructural, por lo que no depende de las propiedades dinámicas de la estructura o las condiciones de apoyo de su base.

Como se comentó en el [SUBCAPÍTULO 4.5.2](#), En el factor de comportamiento sísmico Q , las NTC-DS reconocen que es común en una estructura compleja, tener en una dirección de análisis dada, distintos sistemas estructurales resistiendo cargas laterales, o que la estructuración cambie en elevación; por ello, se establece que para fines de diseño, la reducción en la dirección de análisis debe ser uniforme, y por lo tanto, se tomará el valor mínimo de Q que corresponde a los diversos entresijos y sistemas sismorresistentes de la estructura en la dirección de análisis. Además, se reconoce que es común que en una estructura se utilicen dos sistemas estructurales con distintas capacidades de deformación lateral en direcciones ortogonales, por lo que en estos casos se podrá utilizar distintos valores de Q para cada dirección ortogonal.

6.6.2 Ductilidad efectiva del sistema de reemplazo elastoplástico \tilde{Q}

En el anexo A de las NTC-DS, se presentan los lineamientos que se deben seguir para considerar los efectos de la ductilidad y la sobrerresistencia en la determinación de la respuesta inelástica del oscilador de reemplazo. Estos lineamientos están basados en las conclusiones del estudio paramétrico de ([Avilés & Pérez-Rocha, 2003](#)). En dicho artículo, los autores aplican las fórmulas que se presentan a continuación para determinar Los espectros de resistencia reducidos por ductilidad efectiva del oscilador de reemplazo inelástico, en contraposición a los espectros de resistencia del modelo acoplado, similar al del [SUBCAPÍTULO 6.2](#), pero considerando que el comportamiento de la estructura se rige por una ley elastoplástica. Los resultados de este artículo se emplean en ([Avilés & Pérez-Rocha, 2004](#)) para demostrar el grado de precisión con que las

fórmulas del anexo A de las NTC-DS, modelan el comportamiento no lineal, tomando en consideración efectos de sitio y de IDSE. Así, la respuesta no lineal del **sistema acoplado inelástico**, se considera aproximadamente igual a la del **oscilador de reemplazo dúctil**, caracterizado por los parámetros \tilde{T}_e y $\tilde{\xi}_e$ y el factor de ductilidad efectiva \tilde{Q} , que se define a continuación.

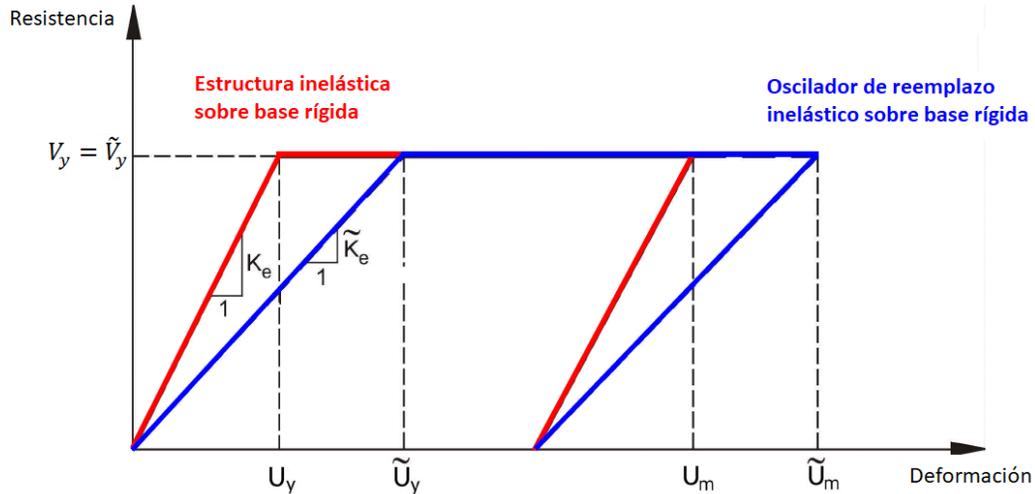


Figura 6.11: Relaciones fuerza-deformación para la estructura sobre base rígida (color rojo) y el oscilador de reemplazo (color azul), considerando comportamiento elastoplástico. (Avilés & Pérez-Rocha, 2003)

Las relaciones fuerza-deformación para los elementos resistentes de una estructura inelástica sobre base rígida y del oscilador de reemplazo inelástico, se muestran en la FIGURA 6.11. En estos diagramas de resistencia, U_y y \tilde{U}_y denotan la deformación de fluencia de la estructura inelástica y del oscilador de reemplazo inelástico respectivamente, mientras que U_m y \tilde{U}_m indican las deformaciones máximas absolutas correspondientes. Entonces, los factores de ductilidad se definen en cada sistema como:

$$Q = U_m / U_y \text{ y } \tilde{Q} = \tilde{U}_m / \tilde{U}_y \tag{Ec. 6.35}$$

Dado que la resistencia de fluencia del oscilador de reemplazo inelástico es igual a la de la estructura inelástica, la deformación de fluencia de ambos sistemas se relaciona mediante:

$$U_y = \frac{\tilde{K}_e}{K_e} \cdot \tilde{U}_y \tag{Ec. 6.36}$$

Donde:

$$\tilde{K}_e = 4\pi^2 m_e / \tilde{T}_e^2$$

Considerando que $T_e = 2\pi \sqrt{m_e / K_e}$, la EC. 6.36 puede escribirse de manera alterna como:

$$U_y = \frac{T_e^2}{\tilde{T}_e^2} \tilde{U}_y \tag{Ec. 6.37}$$

La **capacidad de disipación de energía por deformación plástica** del oscilador de reemplazo y de la estructura inelástica sobre base rígida, deben ser idénticas. Entonces, igualando la disipación de energía plástica de ambos sistemas, se tiene:

$$(\tilde{U}_m - \tilde{U}_y)\tilde{V}_y = (U_m - U_y) \cdot v_y \quad \text{Ec. 6.38}$$

Considerando que $\tilde{V}_y = V_y$ y recurriendo a las definiciones de Q y \tilde{Q} de la Ec. 6.35, se tiene que la ductilidad efectiva del sistema es:

$$\tilde{U}_y(\tilde{Q} - 1) = U_y(Q - 1) \quad \text{Ec. 6.39}$$

Sustituyendo la Ec. 6.37 en la Ec. 6.39 y despejando:

$$\tilde{Q} = \frac{T_e^2}{\tilde{T}_e^2}(Q - 1) + 1 \quad \text{Ec. 6.40}$$

La **ductilidad efectiva** \tilde{Q} , a diferencia de la ductilidad disponible (o **ductilidad permisible**) Q , es la expresión que controla el comportamiento plástico (no lineal) del oscilador de reemplazo inelástico. De acuerdo con la Ec. 6.40, $1 \leq \tilde{Q} \leq Q$, lo que implica que la ductilidad efectiva \tilde{Q} será igual a la ductilidad permisible Q para suelo infinitamente rígido ($\tilde{T}_e = T_e$ para $C_s = \infty$) (es decir, cuando no se consideran los efectos de IDSE) e igual a la unidad para suelo infinitamente flexible ($\tilde{T}_e = \infty$ para $C_s = 0$).

(Avilés & Pérez-Rocha, 2003) Han mostrado que la reducción de la ductilidad por interacción ante excitación sísmica es predicha eficientemente con esta expresión, excepto para periodos naturales extremadamente cortos, ya que existen algunas diferencias para estructuras esbeltas en la región de periodos cortos, que no tienen consecuencias prácticas importantes, puesto que tales estructuras normalmente son muy flexibles y por lo tanto caen en la región de periodos largos del espectro.

Puesto que $\tilde{Q} < Q$, se puede pensar en la aparición de un daño estructural menor debido a Los efectos de IDSE; sin embargo, según se desprende de la Ec. 6.38, no es así, pues ambas ductilidades implican un nivel de daño exactamente igual, ya que se acepta que la deformación plástica que el oscilador de reemplazo inelástico acumula durante los ciclos de histéresis, es similar a la de la estructura inelástica supuesta sobre base rígida Ec. 6.38.

6.6.3 Factor de reducción de resistencia por ductilidad Q'

Los procesos de análisis sismorresistente de estructuras comunes en la práctica, están basados en el teorema de superposición, por lo que sólo son admisibles los efectos lineales. No obstante, los efectos de la ductilidad estructural no son lineales, y por lo tanto no pueden ser evaluados directamente. Entonces, para integrar los efectos de la no linealidad estructural en el modelo lineal, se recurre al artificio de sustituir al oscilador elastoplástico, que representa a la estructura inelástica vibrando en su modo fundamental, por un oscilador elástico asociado, cuyas leyes esfuerzo-deformación se relacionan como se muestra en la FIGURA 6.12, de modo que la deformación máxima U_m ($\mu = Q$) y la resistencia de fluencia V_y ($\mu = Q$) de la **estructura inelástica**, se determinen a partir de la **estructura elástica asociada** (U_m ($\mu = 1$) y V_m ($\mu =$

1)). Donde Q es la ductilidad disponible o permisible de la estructura elastoplástica. En el contexto de las NTC-DS, este valor se llama **factor de comportamiento sísmico** (ver SUBCAPÍTULO 6.6.1).

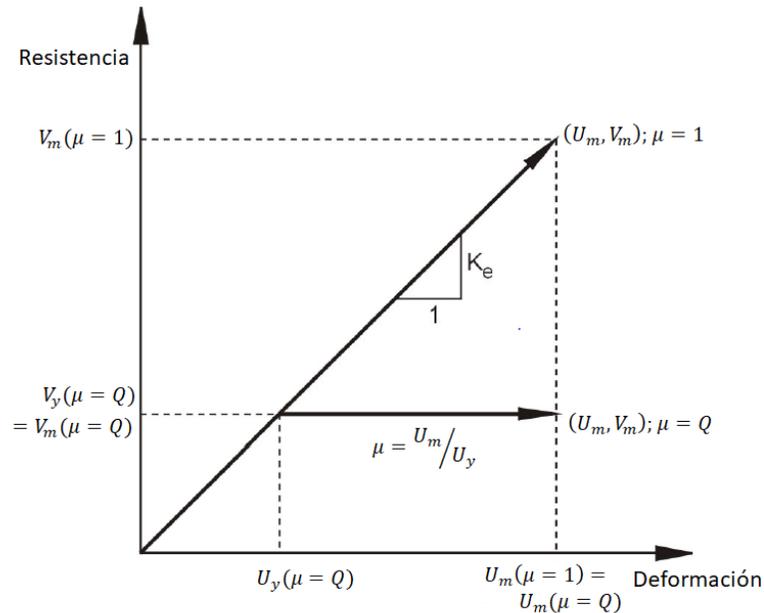


Figura 6.12: Relaciones Fuerza-Deformación para la estructura elastoplástica y la estructura elástica asociada con la misma rigidez inicial. (Avilés & Pérez-Rocha, 2003).

Con tal artificio, la resistencia inelástica (V_y) de la estructura con ductilidad permisible Q , es prescrita al reducir la resistencia calculada para la estructura elástica asociada (V_m), dividiéndola entre un factor de **reducción de resistencia** Q' por efecto de la ductilidad, (que es función de Q y del periodo de la estructura). Por lo tanto, según la FIGURA 6.12:

$$Q' = \frac{V_m}{V_y} = \frac{V_m(\mu = 1)}{V_y(\mu = Q)} \quad \text{Ec. 6.41}$$

Así pueden obtenerse, **espectros elastoplásticos de diseño** para distintos factores de ductilidad, al reducir las ordenadas de los **espectros de diseño elásticos**. Esta reducción es posible porque los sistemas elásticos disipan la energía aportada por el movimiento sísmico únicamente mediante amortiguamiento viscoso, mientras que los sistemas inelásticos disipan energía por amortiguamiento histerético, que es más eficiente que el viscoso. Los límites impuestos por la teoría elastodinámica al factor Q' son: $Q' = 1$ si $T_e = 0$ y $Q' = Q$ si $T_e = \infty$, sin importar los valores de amortiguamiento y ductilidad. Pero no hay indicaciones teóricas acerca de los valores de Q' para periodos naturales intermedios.

Al respecto, (MELI, 1985) presenta un estudio en el que se realizaron análisis "paso a paso" de sistemas elastoplásticos de 1GDL ante acelerogramas de diversa índole, y se comparó su comportamiento con el de sistemas elásticos con el mismo periodo, amortiguamiento y rigidez iniciales, con el objetivo de encontrar cuál es la capacidad de carga que requiere el sistema inelástico para resistir el sismo en cuestión, sin que se exceda su deformación de falla, aunque se sobrepase el intervalo elástico. La FIGURA 6.13 muestra los resultados del estudio, como la relación

entre la capacidad de carga del sistema inelástico y la del sistema lineal asociado $1/Q' = V_y/V_m$, para diversos factores de ductilidad μ , del sistema inelástico. Las líneas punteadas representan el promedio de los valores obtenidos del análisis con varios acelerogramas registrados en terreno duro. Se aprecia que la capacidad de carga necesaria para el sistema inelástico, se reduce μ veces con respecto al elástico asociado, excepto en sistemas de periodo muy corto en los que la reducción se hace cada vez menor, hasta llegar a la unidad cuando el periodo de la estructura es cero.

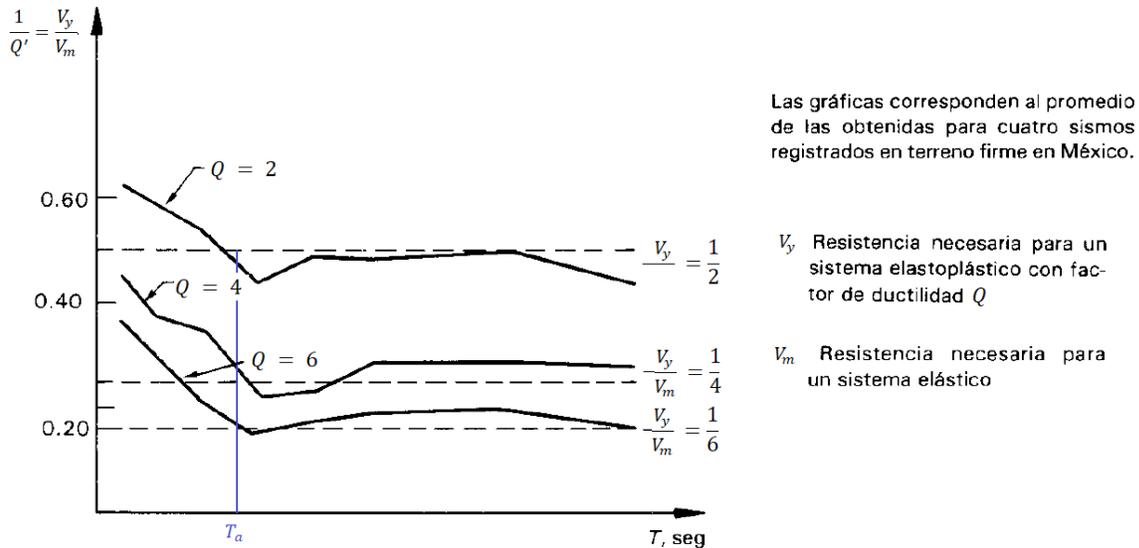


Figura 6.13: Relación entre la demanda de resistencia requerida para sistemas inelásticos y las necesarias para sistemas elásticos asociados con las mismas propiedades iniciales, para resistir un mismo grupo de sismos. (Meli, 1985).

Los resultados anteriores permiten llegar a la conclusión de que: "si un sistema inelástico es capaz de desarrollar un factor de ductilidad μ durante un sismo, puede diseñarse para que tenga una resistencia a cargas laterales que se obtiene reduciendo la ordenada espectral calculada para un sistema elástico asociado (con el mismo periodo, amortiguamiento y rigidez inicial), multiplicándolas por el factor $1/\mu$, excepto cuando se trata de sistemas con periodo muy corto, en que el factor de reducción varía desde $Q' = 1/\mu$ para un periodo $T = T_a$, hasta $Q' = 1$ cuando $T = 0$ ". De este modo se concluye que:

$$Q' = \frac{V_m}{V_y} = \frac{V_m (\mu = 1)}{V_y (\mu = Q)} = Q \quad \text{Ec. 6.42}$$

Según (AVILÉS & PÉREZ-ROCHA, 2003), esta regla de reducción (conocida como **regla de igual desplazamiento**, que fue propuesta por Veletzos y Newmark en 1960), es la regla más difundida para el cálculo del factor de reducción, aunque no admite las condiciones de soporte en la base de la estructura. La forma en la que se calcula el factor Q' considerando la estructura soportada sobre base flexible, se describirá a continuación, en el SUBCAPÍTULO 6.6.4. Si $\mu = Q$, los valores obtenidos del estudio ilustrado en la FIGURA 6.13, son algunos de los que se especifican en el SUBCAPÍTULO 4.5.2, que son válidos cuando el sistema estructural está soportado sobre base rígida.

6.6.4 Factor de reducción por ductilidad Q' en suelos blandos

Para estructuras soportadas sobre suelos flexibles, la relación entre Q y Q' no son tan sencillas como las obtenidas en el subcapítulo anterior. En (Ordaz & Pérez-Rocha, 1998) se muestra que cuando el periodo de la estructura T_e es similar al periodo del suelo T_s , los efectos de sitio producen que los factores de reducción de resistencia Q' , sean mayores a los contemplados por la regla presentada en el SUBCAPÍTULO 6.6.3. Por lo que han propuesto que cuando este efecto sea admisible, la forma de la función Q' depende del factor de ductilidad admisible Q y del cociente entre el desplazamiento espectral elástico de la estructura supuesta sobre base rígida, $S_d(T_e)$, y el desplazamiento máximo del suelo, D_g , por lo que proponen la relación:

$$Q' = 1 + (Q - 1) \cdot \left(\frac{S_d(T_e)}{D_g} \right)^\alpha \quad \text{Ec. 6.43}$$

Esta ecuación toma en consideración los efectos de sitio, más no los efectos de IDSE. En realidad, la *fórmula A.9 del apartado A.3 del anexo A de las NTC-DS*, que define la manera en la que se calcula el valor de Q' , es una versión simplificada de esta relación, la cual admite que debido a la flexibilidad del suelo, Q' puede ser mayor que Q , si la estructura se soporta en suelo blando.

6.6.5 Factor de reducción por ductilidad efectivo \tilde{Q}'

Para incluir los efectos de IDSE en el factor de reducción de resistencia, la forma de Q' para el caso de base flexible (Ec. 6.43), en el contexto del oscilador de reemplazo sobre base rígida sería:

$$\tilde{Q}' = 1 + (\tilde{Q} - 1) \cdot \left(\frac{\tilde{S}_d(\tilde{T}_e, \tilde{\xi}_e)}{D_g} \right)^\alpha \quad \text{Ec. 6.44}$$

Donde: \tilde{S}_d representa el desplazamiento elástico del oscilador de reemplazo inelástico.

La influencia de la IDSE en el factor de reducción de resistencia \tilde{Q}' fue analizada en (Avilés & Pérez-Rocha, 2003). Al comparar la función $\tilde{Q}'(\tilde{T}_e, \tilde{\xi}_e)$ para el oscilador de reemplazo inelástico, calculada aproximadamente según la Ec. 6.44, con la obtenida para el sistema acoplado inelástico mediante el cociente entre los espectros de resistencia elásticos e inelásticos calculados rigurosamente. Así se concluyó que si bien la representación no es perfecta, la regla reproduce satisfactoriamente las tendencias de la solución rigurosa. También se observó que los valores de \tilde{Q}' se reducen conforme se incrementa la influencia de la IDSE, hasta el punto en que $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$, lo cual ocurre porque el periodo de la estructura se corre a la región espectral de periodos largos, donde aplica la regla de igual desplazamiento.

Los efectos de la IDSE en las demandas de resistencia se traducen en incrementos o reducciones de las resistencias V_y necesarias para cumplir con una demanda de ductilidad específica Q . Tales efectos son principalmente influenciados, en orden de importancia, por los siguientes parámetros del sistema:

- a) La relación de esbeltez de la estructura
- b) La rigidez relativa entre el suelo y la estructura
- c) El enterramiento relativo de la cimentación
- d) La profundidad relativa del estrato.

En consecuencia, en el oscilador de reemplazo, las demandas de resistencia son mayores que las esperadas en la estructura sobre base rígida ($\tilde{V}_y > V_y$), cuando el periodo de la estructura es menor que el del sitio ($T_e < T_s$), son menores a las esperadas en la estructura sobre base rígida ($\tilde{V}_y > V_y$), cuando el periodo de la estructura es mayor que el del sitio ($T_e > T_s$) y Son iguales a los de la estructura supuesta sobre base rígida ($\tilde{V}_y \approx V_y$), cuando el periodo de la estructura es considerablemente mayor que el del sitio ($T_e/T_s > 2$); en consecuencia, en este último caso los efectos de IDSE son despreciables, aunque son muy significativos para los otros dos casos.

6.7 Reducción por sobrerresistencia, R

La **resistencia nominal** de la estructura es aquella con que ninguna sección fluye. Aunque en la realidad, algunas secciones fluirán ante el sismo de diseño, y los requisitos normativos están orientados a que las demandas de ductilidad en estas secciones no sobrepasen su capacidad. Sin embargo, el comportamiento global de la estructura no es estrictamente elastoplástico, particularmente en estructuras con materiales que exhiben degradaciones de rigidez y/o de resistencia importantes, como el concreto reforzado y la mampostería. Sólo lo sería en estructuras hechas con materiales como el acero, si no se presentan fallas súbitas por fractura o pandeo y si todas las secciones fluyeran al mismo tiempo, lo que puede ocurrir sólo en estructuras de pocos grados de libertad. Por lo tanto, **la resistencia real** de la estructura es superior a la nominal. A la diferencia entre la resistencia nominal y la real, se le llama **sobrerresistencia**.

Teóricamente, la sobrerresistencia debería tomarse en cuenta al evaluar las resistencias y no como un factor de reducción de las cargas. Sin embargo, esto implicaría cambios profundos en los criterios de análisis estructural y llevaría, casi seguramente, a la obligatoriedad del uso de métodos inelásticos de análisis. Es por ello que, se sigue aplicando la sobrerresistencia como un factor reductor del lado de las acciones.

Existen diversas fuentes de sobrerresistencia. Por un lado, los valores nominales de las resistencias de los materiales son, por definición, generalmente menores que sus resistencias reales. Por otro lado, muchos de los modelos que se emplean para evaluar las resistencias tienen simplificaciones del lado de la seguridad. Pero una de las fuentes más grandes de sobrerresistencia es el mismo procedimiento de diseño que se utiliza en las disposiciones reglamentarias. Es decir, la sobrerresistencia depende de muchos factores, entre los cuales se encuentran el sistema estructural empleado, el grado de hiperestaticidad, el detallado estructural y la variabilidad de las propiedades índice de los materiales con el tiempo y con la velocidad de aplicación de la carga. Aún no se dispone de suficientes estudios como para calcular la sobrerresistencia en función de unos pocos parámetros estructurales. Por lo que, en los reglamentos de diseño sísmico sólo se proponen valores indicativos. (Mena & Pérez-Rocha, 2008)

De acuerdo con el enfoque que se ha seguido para tratar el comportamiento no lineal de la estructura, los espectros inelásticos de diseño se construyen reduciendo los espectros elásticos de diseño. En las normas, el factor de reducción de resistencia se define en realidad como el producto $Q' \cdot R$, donde Q' es el factor de reducción por ductilidad y R el factor de reducción por sobrerresistencia (ver SUBCAPÍTULO 4.5.3). Por su naturaleza, este factor no depende de las condiciones de sitio ni de la IDSE, sino de la estructura misma, razón por la que su valor es el mismo, ya sea para el oscilador de reemplazo inelástico, para el sistema inelástico sobre base

rígida, o para el sistema inelástico sobre base rígida; y como no forma parte de la reducción por ductilidad, no influye en la magnitud de los desplazamientos resultantes.

6.7.1 Máxima deformación inelástica

Partiendo de la definición del factor de reducción de resistencia (Ec. 6.42), se tiene que:

$$Q' = \frac{V_m(\mu = 1)}{V_y(\mu = Q)} = \frac{K_e \cdot S_d(\mu = 1)}{K_e \cdot S_d(\mu = Q)/Q}$$

Donde K_e es la rigidez lateral de la estructura elástica asociada, $U_m = S_d(\mu = 1)$ es el máximo desplazamiento obtenido del espectro de diseño elástico y $U_y = S_d(\mu = Q)/Q$ es el máximo desplazamiento inelástico obtenido del espectro de diseño elástico reducido por ductilidad, con lo que se concluye que:

$$S_d(\mu = Q) = S_d(\mu = 1) \cdot \frac{Q}{Q'} \quad \text{Ec. 6.45}$$

Que se puede escribir como:

$$S_d(\mu = Q) = Q \cdot \left[\frac{S_d(\mu = 1)}{Q'} \right] \quad \text{Ec. 6.46}$$

Esta ecuación establece que los desplazamientos elásticos calculados con espectros de respuesta reducidos por ductilidad $S_d(\mu = 1)/Q'$ deben multiplicarse por Q para obtener los desplazamientos inelásticos necesarios.

6.7.2 Máxima deformación inelástica efectiva en el contexto de oscilador de reemplazo

Siguiendo un razonamiento similar al del SUBCAPÍTULO 6.7.1, en el contexto del oscilador de reemplazo inelástico, se llega a la Ec. 6.46, salvo que se reemplaza Q' por \tilde{Q}' . de modo que:

$$\tilde{S}_d(\mu = \tilde{Q}) = \tilde{Q} \cdot \left[\frac{\tilde{S}_d(\mu = 1)}{\tilde{Q}'} \right] \quad \text{Ec. 6.47}$$

Según la definición del factor de ductilidad (Ec. 6.34), en la estructura sobre base rígida $U_y = U_m/Q$ y, en el oscilador de reemplazo sobre base rígida $\tilde{U}_y = \tilde{U}_m/\tilde{Q}$. Substituyendo estos valores en la Ec. 6.37, a partir de la cual se obtuvo la Ec. 6.40, se tiene:

$$\frac{U_m \cdot \tilde{Q}}{\tilde{U}_m \cdot Q} = \frac{T_e^2}{\tilde{T}_e^2} \quad \text{Ec. 6.48}$$

Considerando comportamiento elastoplástico, la deformación máxima de la estructura supuesta sobre base rígida es $U_m = S_d(\mu = Q)$, mientras que la deformación máxima del oscilador de reemplazo es $\tilde{U}_m = \tilde{S}_d(\mu = \tilde{Q})$. Que al sustituirse en la Ec. 6.48 resulta:

$$\frac{S_d(\mu = Q) \cdot \tilde{Q}}{\tilde{S}_d(\mu = \tilde{Q}) \cdot Q} = \frac{T_e^2}{\tilde{T}_e^2} \quad \text{Ec. 6.49}$$

Despejando $S_d(\mu = Q)$ de la Ec. 6.49:

$$S_d(\mu = Q) = \tilde{S}_d(\mu = \tilde{Q}) \frac{T_e^2}{\tilde{T}_e^2} \cdot \frac{Q}{\tilde{Q}} \quad \text{Ec. 6.50}$$

Esta expresión representa alternativamente la [Ec. 6.40](#) que controla el comportamiento inelástico del oscilador de reemplazo. La correlación entre S_d y \tilde{S}_d obedece a que según la [FIGURA 6.11](#), la equivalencia entre el oscilador de reemplazo inelástico y la estructura inelástica sobre base rígida, se sostiene para la resistencia de fluencia $V_y = \tilde{V}_y$ y la deformación plástica $(U_m - U_y) = (\tilde{U}_m - \tilde{U}_y)$, pero no para la deformación de fluencia $U_y \neq \tilde{U}_y$ y, entonces tampoco para la deformación máxima $(U_m = S_d) \neq (\tilde{S}_d = \tilde{U}_m)$. Puesto que la flexibilidad del oscilador de reemplazo inelástico refleja la rigidez en serie del suelo y de la estructura, la deformación total del oscilador de reemplazo incluye los componentes de deformación que se desarrollan en la estructura, más los desarrollados en el suelo. La validez de la [Ec. 6.50](#) se confirma numéricamente con los resultados del artículo de ([Avilés & Pérez-Rocha, 2003](#)), donde al comparar la respuesta exacta del sistema acoplado inelástico con la respuesta aproximada del oscilador de reemplazo inelástico, se concluye que son casi idénticas. Los desplazamientos inelásticos resultan ser menores que los elásticos en el intervalo de periodos naturales donde Q' es mayor que Q , como se desprende de la [Ec. 6.45](#). La IDSE reduce los desplazamientos en ambos sistemas, así como la diferencia entre ellos, al grado de llegar a ser casi iguales en el caso de mayor interacción (cuando $Q' = Q$ y $T_s \gg T_e$).

6.8 Cortante basal

De acuerdo con las NTC-DS-2004, si se opta por el análisis estático, con la alternativa de tomar en cuenta el periodo fundamental de vibración del terreno, el cortante basal de la estructura inelástica sobre base rígida está dado por:

$$V_B = \frac{a}{Q'} \cdot W_0 \quad \text{Ec. 6.51}$$

Donde a es la ordenada espectral elástica para el periodo y amortiguamiento de la estructura inelástica; es decir, sólo se contempla los efectos de sitio, pero no los de IDSE. La contribución de los modos superiores de vibración queda considerada implícitamente al emplear el peso total de la estructura W_0 en lugar de su peso efectivo $W_e = 0.7 \cdot W_0$. Si se consideran los efectos de IDSE, el cortante basal modificado por interacción es igual a:

$$\tilde{V}_B = \frac{a}{Q'} W_0 - \left(\frac{a}{Q'} - \frac{\tilde{a}}{\tilde{Q}'} \right) W_e \quad \text{Ec. 6.52}$$

Donde \tilde{a} es la ordenada espectral elástica para el periodo \tilde{T}_e y amortiguamiento $\tilde{\xi}_e$ efectivos del oscilador de reemplazo inelástico. El segundo término de esta expresión representa la reducción del cortante basal por efectos de IDSE en el modo fundamental de vibración. El signo de este término puede ser negativo, con lo que en lugar de una reducción habrá un incremento del cortante basal, esto puede llegar a suceder si el periodo del oscilador de reemplazo inelástico cae en la zona de periodos cortos del sistema y el efecto del incremento en el amortiguamiento no es suficiente para mitigar el efecto de incremento del cortante basal debido al alargamiento del periodo estructural.

En la *sección A.6.1 del anexo A de las NTC-DS* se establecen un par de límites que pretenden restringir los resultados del uso del oscilador de reemplazo, de modo que no lleguen a ser demasiado permisivos para fines de diseño. Estos límites son:

- El valor calculado para el amortiguamiento efectivo del oscilador de reemplazo no puede tomarse menor que 5% del crítico de la estructura sobre base rígida. Con ello se está reconociendo de manera implícita el amortiguamiento adicional por interacción cinemática. Además de impedir que las ordenadas espectrales sean mayores que sus valores de base rígida en caso de que el amortiguamiento disminuya.
- La máxima corrección permisible del cortante basal por IDSE se limita a $\pm 25\%$ del valor calculado para la condición de base rígida.

Cualquier respuesta estructural (fuerza cortante, desplazamiento lateral, momento de volteo, u otras) calculada para la condición de base rígida se multiplicará por el factor \widetilde{V}_B/V_B para obtener la respuesta modificada por interacción, siendo $V_B = a' \cdot W_0$, la fuerza cortante basal de la estructura con base indeformable. Si el peso efectivo se aproxima como $W_e = 0.7 \cdot W_0$, dividiendo la [Ec. 6.51](#) entre [Ec. 6.52](#), el factor de interacción se reduce a:

$$\frac{\widetilde{V}_B}{V_B} = 0.3 + 0.7 \cdot \frac{\widetilde{a}}{a} \cdot \frac{Q'}{\widetilde{Q}'} \quad \text{Ec. 6.53}$$

Los efectos de interacción en sistemas dúctiles (inelásticos) son diferentes de los que se observan en sistemas elásticos. En [\(Avilés & Pérez-Rocha, 2004\)](#) se demuestra que el factor de interacción se incrementa (mayor demanda de resistencia estructural) en la región espectral de periodos cortos y se reduce (menor demanda de resistencia estructural) en la región espectral de periodos medios; mientras que para periodos largos, \widetilde{V}_B/V_B tiende a uno, independientemente del valor de la ductilidad. Esto significa que los efectos de IDSE en la ductilidad son despreciables en ese intervalo.

También se confirma que la influencia de la ductilidad es nula en estructuras infinitamente rígidas, pero muy significativa para periodos naturales cortos. Además, se puede notar que mientras los mayores incrementos en las demandas de resistencia ocurren en sistemas dúctiles (no lineales), las mayores reducciones suceden en sistemas elásticos (lineales). De lo anterior se puede concluir que la interacción resulta ser desfavorable cuando el periodo de la estructura es menor que el periodo del sitio; en caso contrario, las estructuras se benefician de ella, especialmente ante comportamiento estructural elástico.

En consecuencia se concluye que: Los efectos combinados del alargamiento del periodo estructural, el aumento del amortiguamiento y la reducción de la ductilidad, harán que la respuesta de la edificación considerando IDSE sea menor o mayor que su valor de base rígida, dependiendo de las características de la excitación sísmica y del sistema acoplado.

Independientemente de la región del espectro donde caiga el periodo de la estructura, la modificación del amortiguamiento y de la ductilidad, se traducen en el incremento de la deformación estructural.

7 Ejercicio de aplicación y análisis de resultados

Por ser este un ejercicio académico, dispuesto a elucubrar las características del modelo utilizado para la determinación de los efectos de la IDSE, mediante el estudio de las variables de control (fuerzas de entrepiso y cortante basal), se utiliza un perfil estratigráfico representativo de la zona II definida en el reglamento, junto con un edificio tipo, lo cual servirá para cumplir los objetivos perseguidos en este trabajo.

7.1 Planteamiento del problema de aplicación

Utilizando los requerimientos planteados por el reglamento de construcción del Distrito Federal en su versión 2004 (*RCDF-2004*), en conjunto con las normas técnicas complementarias para diseño sísmico (*NTC-DS*) del mismo, se realizará el análisis sísmico del sistema suelo-cimentación que se describe en seguida:

La fundación del edificio es un cajón de cimentación de planta rectangular con dimensiones de 20m por 30.6m, que resulta en un área de 612m². Este cajón de cimentación está desplantado a 3m respecto al nivel de superficie del terreno.

La estratigrafía del terreno se muestra en el croquis de elevación. Ésta concuerda con las características propias de la zona de transición o zona II, en la que los depósitos profundos de suelo se encuentran a 20m de profundidad o menos, y que está constituida predominantemente por estratos arenosos y limo-arenosos intercalados con capas de arcilla lacustre de espesor variable que pueden fluctuar entre decenas de centímetros a pocos metros, según el *artículo 170 del RCDF y el apartado 4 de las NTC-DS del RCDF 2004*. El nivel de agua freática (NAF) se determinó a 2m de profundidad; la estratigrafía puede dividirse, para fines del análisis geotécnico, en tres estratos principales que en total forman un manto de suelo blando que se extiende a 13m bajo la superficie del terreno, hasta alcanzar un depósito potente de arena muy compacta con una celeridad de propagación de ondas $S, C_s > 700m/s$, por lo que se considera demasiado rígido como para tomarlo en cuenta dentro del análisis. No se tienen datos de los valores del amortiguamiento ni de la relación de Poisson de los estratos del suelo, por lo que según la *sección A.6.4 del anexo A de las NTC-DS*, se considerará que $\xi_s = 0.03$ y $\nu = 0.45$.

Por otra parte, el estructurista facilitó la siguiente información sobre el inmueble, con la cual se realizó el croquis: se trata de una estructura cuya planta tipo cuenta con 4 crujías de 5m en la dirección corta y 6 crujías de 5.1m en la dirección larga. En alzado, el edificio cuenta con 6 niveles con altura de entrepiso de 3.5m, que resulta en una altura total de 21m a partir del nivel del terreno, por lo que según la *sección 2.2 de las NTC-DS* se puede utilizar el método estático para su análisis. Es un edificio de uso mixto, de viviendas y oficinas, con un área construida de 3672m² en total, que según el *Art. 139 del RCDF*, se clasifica como una estructura del grupo B2.

La estructura cumple con las condiciones de regularidad tanto en planta como en elevación, estipuladas en el *apartado 6 de las NTC-DS*, por lo que el valor del factor de regularidad que le corresponde para el análisis estático es $FI = 1$. La estructuración es a base de losas planas de concreto colado en sitio y marcos de concreto reforzado que no cumplen con todos los requisitos para ser considerados dúctiles, por lo que según la *sección 5.3 de las NTC-DS*, le corresponde un factor de comportamiento sísmico $Q = 2$.

La estructura transmite al terreno una carga por unidad de área de 83kPa (ya considerando el peso del cajón de cimentación). Además, se sabe que el periodo fundamental de la estructura es de $T_e = 0.8s$ en su lado largo, el cual se analiza a continuación mediante lo dispuesto en el **anexo A de las NTC-DS**, y los resultados así obtenidos, se comparan con los determinados a través de la aplicación del **método de Zeevaert** y a su vez, estos dos, se comparan con los resultados que se obtendrían aplicando el **método estático** del *apartado 8 de las mismas normas*, sin considerar la flexibilidad del suelo.

7.2 Procedimiento

1. Parámetros de la estructura:

Los parámetros listados en la tabla "parámetros del oscilador sobre base rígida" del **APÉNDICE A.3** se obtienen del planteamiento del problema, junto con las limitaciones y simplificaciones aplicadas al modelo del anexo A. En consecuencia con la *sección A.6 del anexo A de las NTC-DS*, "cuando se considere el método estático, la altura efectiva del edificio para el oscilador de reemplazo se tomará como $\widetilde{H}_e = 0.7 \cdot H_0$ de la altura total del edificio"; mientras que según la *sección A.6.II del anexo A de las NTC-DS*, "el peso efectivo de la estructura se toma como $\widetilde{W}_e = 0.7 \cdot W_0$ ". Esta reducción considera la masa y altura del modo fundamental de vibración de la estructura, que se obtienen igualando el cortante basal y momento de volteo modales de la estructura de N-GDL, con los valores respectivos para el oscilador de reemplazo. El amortiguamiento considerado es el que se ocupa para la determinación de los espectros de diseño del cuerpo de las NTC-DS-2004, según la *sección A.6.I del anexo A de las NTC-DS*.

2. Determinación de las ordenadas espectrales por el método estático (ME)

Se decidió determinar primero el valor del cortante basal de la estructura supuesta sobre base rígida, según lo establecido en *El apartado 8 de las NTC-DS*. La edificación se encuentra en la zona II (zona de transición), por lo que los parámetros que expresan la forma del espectro de diseño son los siguientes: $c = 0.32$ $a_0 = 0.08$ $T_a = 0.2$ $T_b = 1.35$ $r = 1.33$

En consecuencia, el espectro de diseño es:

$$a = \begin{cases} 0.08 + (0.32 + 0.08) \cdot \left(\frac{T}{0.2}\right), & T < 0.2 \\ 0.32, & T \in [0.2, 1.35] \\ 0.32 \cdot \left(\frac{1.35}{T}\right)^{1.33}, & T > 1.35 \end{cases}$$

$$\therefore a = 0.32$$

En el **APÉNDICE A.4** de este trabajo se muestra la gráfica de este espectro y la ordenada espectral reducida por ductilidad, necesaria para obtener el cortante basal y las fuerzas de entrepiso.

Los factores de reducción de la ordenada espectral son definidos en las *secciones 4.1 y 6.4 de las NTC-DS*. Estos son el factor de reducción por ductilidad Q' y el factor de irregularidad FI , (que en este caso es igual a la unidad). Ambos factores se multiplican entre sí y su producto se utiliza para dividir la ordenada espectral elástica determinada inicialmente.

$$Q' = \begin{cases} 1 + \frac{T}{0.2}, T < 0.2 \\ 2, T \geq 0.2 \end{cases} \Rightarrow \therefore Q' = 2$$

Aplicando la reducción de la ordenada espectral obtenemos que:

$$a' = \frac{a}{FI \cdot Q'} \Rightarrow \frac{0.32}{1 \cdot 2} \Rightarrow \therefore a' = 0.16[1/g]$$

Se ha considerado que el peso de la estructura está distribuido entre sus 6 niveles de manera homogénea, por lo que el peso total del edificio es $W_0 = 50,796 [kN]$.

En la distribución de fuerzas cortantes de entrepiso que admite el análisis estático según el *apartado 8 de las NTC-DS*, se supone que la estructura vibra en su modo fundamental y que la rigidez de todos los entrepisos es aproximadamente uniforme y, en consecuencia también lo es su configuración modal, por eso, este método no puede determinar de manera apropiada la distribución de las fuerzas cuando la configuración modal, del modo fundamental de la estructura, es distinta de la lineal; aunque esto se cubre con el factor de regularidad en planta según se establece en el *apartado 6 de las NTC-DS*. Por lo tanto, para la determinación de las fuerzas de entrepiso a diferentes niveles de una estructura, se supondrá un conjunto de fuerzas horizontales actuando sobre cada uno de los puntos donde se supongan concentradas las masas. Cada una de estas fuerzas se tomará igual al peso de la masa que corresponde, multiplicado por un coeficiente proporcional a h_i ; siendo h_i , la altura de la masa en cuestión sobre el desplante. Con este propósito, el *apartado 8 de las NTC-DS* tiene dos opciones:

- Utilizar las fuerzas máximas calculadas como función del coeficiente sísmico reducido por ductilidad ($c/Q'FR$), como se indica en la *sección 8.1* de dichas normas, o
- Podrán adoptarse fuerzas cortantes menores que las calculadas según el inciso anterior, siempre que se tome en cuenta el valor del periodo fundamental de vibración de la estructura, calculado aproximadamente, o mediante métodos dinámicos. Con este propósito, las NTC-DS proponen la *fórmula 8.2* para determinar de manera aproximada el periodo fundamental de la estructura.

Esta última opción se subdivide en dos casos:

- Cuando $T_e \leq T_b$, se procederá como en la *sección 8.1 de las normas*, pero de forma que la relación V_B/W_0 sea igual a a/Q' , calculándose a y Q' como se especifica, respectivamente, en los *apartados 3 y 4 de las NTC-DS*.
- Cuando $T_e \geq T_b$, cada una de las fuerzas laterales se calculan con la *fórmula 8.3* de dichas normas. Esta ecuación considera que las estructuras de periodo largo son a su vez muy flexibles, por lo tanto, se debe considerar la influencia de los modos superiores de vibrar de la estructura.

Por las características de la estructura de este ejemplo, se utiliza el *inciso b) de la sección 8.2 de las NTC-DS*, ya que $T_e \leq T_b$. Los resultados del análisis realizado, se muestran en el [APÉNDICE A.5](#). En ellos se desatienden los efectos de la excentricidad accidental y la participación del 30% de la acción en la dirección ortogonal. Esto se debe a que la intención de este ejercicio es determinar la fuerza cortante basal V_B debida a una sola componente, obtenida al admitir

explícitamente los efectos de la flexibilidad del suelo. Del [APÉNDICE A.5](#) se obtiene que el cortante basal, por el método estático de las NTC-DS es:

$$\therefore V_B = 8127.36 \text{ [kN]}$$

Los desplazamientos de entrepiso no se calculan, ya que no se conocen las rigideces de entrepiso de la edificación analizada. Si estos fueran obtenidos, se debería tener en cuenta las limitaciones de la *sección 8.6 de las NTC-DS*, sobre los efectos geométricos de segundo orden; es decir, los momentos y cortantes adicionales provocados por las cargas verticales al obrar sobre la estructura deformada.

3. Parámetros de la cimentación:

En la tabla titulada "parámetros de la cimentación circular equivalente" del [APÉNDICE A.3](#), se determinan los parámetros de la cimentación con masa y momento de inercia de masa nulos y con paredes infinitamente rígidas, como se explicó en el [SUBCAPÍTULO 6.4](#) de este trabajo. Además, esta cimentación cuenta con un radio R_A que implica que el área de la cimentación equivalente es igual a la de la cimentación real. Asimismo, se calcula un radio R_I , que considera que el momento de inercia de área de la cimentación equivalente, es igual al de la cimentación real. Para determinar ambos radios, se aplican las *fórmulas A.26 y A.27 del subcapítulo A.6.7 del anexo A de las NTC-DS*. Estos valores se utilizarán para determinar los coeficientes de las funciones de impedancia.

4. Parámetros del suelo:

Los parámetros de la tabla "Parámetros del estrato de suelo homogéneo equivalente" del [APÉNDICE A.3](#), son utilizados para representar el depósito de suelo estratificado por medio de un depósito homogéneo equivalente, según el método de Gómez. Algunos datos se obtienen del planteamiento del problema y la tabla de resultados de la exploración geotécnica del [APÉNDICE A.2](#). La profundidad del depósito homogéneo no cambia respecto a la del depósito estratificado. La densidad, peso específico, celeridad de ondas S y módulo de cortante del suelo, se calculan por promedio ponderado en función de la profundidad de los estratos; mientras que la relación de Poisson y el amortiguamiento del suelo, son los prescritos en la *sección A.6.4 del anexo A de las NTC-DS*. El periodo del suelo es el que se determina con el método de Gómez, expuesto en el [SUBCAPÍTULO 3.6](#). Los resultados de la tabla mencionada, son calculados como se solicita en las NTC-DS; que por ser de observación oficial, marcan las magnitudes admisibles de los parámetros en el análisis.

5. Parámetros de interacción suelo-cimentación-estructura

Los parámetros mostrados en la tabla "Parámetros adimensionales del sistema" del [APÉNDICE A.2](#), son los que más influyen en la forma en que la IDSE afecta a la estructura y, son definidos en ([Avilés & Pérez-Rocha, 1996](#)). En orden de aparición, estos son: la rigidez relativa entre el suelo y la estructura, la relación de esbeltez de la estructura, la relación de enterramiento de la cimentación y, la profundidad relativa del estrato de suelo blando.

Según la *sección A.6 del anexo A de las NTC-DS*, los efectos de la IDSE se pueden despreciar si el valor inverso de la rigidez relativa es mayor o igual a 2.5; es decir, cuando la rigidez del suelo es significativamente mayor a la de la estructura. En este caso:

$$(H_s \cdot T_e) / (H_e \cdot T_s) = 1 / 1.2843 = 0.77$$

Por lo tanto, los efectos de IDSE no son despreciables.

6. Cálculo del periodo fundamental de vibración del suelo

El periodo fundamental de vibración del depósito de suelo estratificado, se calcula con las *fórmulas A.3 y A.4, de la sección A.3 del anexo A de las NTC-DS* según el método de Gómez y por el método de las deformaciones de Zeevaert; ambos estudiados en este trabajo, en los subcapítulos 3.6 y 3.5 respectivamente.

a) Método del anexo A:

Los resultados para el método del Gómez se resumen a continuación:

$$T_s = 0.909 \text{ s} \quad C_s = 60.713 \text{ m/s} \quad \gamma_s = 14.154 \text{ kN/m}^3 \quad G_s = 5229.231 \text{ kPa}$$

Como se observa en el **INCISO 4** de este subcapítulo, el periodo fundamental del depósito de suelo homogéneo equivalente, que se considera preciso, es el que se determina a partir del método del anexo A de las NTC-DS. La forma en que se calculan estos datos se muestra de manera tabular en el **APÉNDICE A.77**.

b) Método de Zeevaert:

Los resultados para el método de Zeevaert se resumen en la tabla del **APÉNDICE 08**. Estos fueron obtenidos a partir del proceso presentado en el **SUBCAPÍTULO 3.5**. La determinación de la celeridad de ondas se calcula por medio de la **EC. 3.36**. Los valores de γ_s y G_s son iguales en ambos métodos, pues fueron determinados por promedios ponderados en función del espesor del estrato.

Del estudio del ejemplo mostrado en el **APÉNDICE A.6**, se observó que el método de Zeevaert llega a perder algo de precisión cuando el depósito de suelo se subdivide en pocas dovelas y su confiabilidad aumenta conforme se incrementa el número de estas. De tal manera que variando el número de dovelas para determinar el periodo del depósito de suelo homogéneo equivalente, mediante el método de Zeevaert se obtienen los siguientes resultados:

Para 3 dovelas que coinciden con la profundidad de cada uno de los estratos (primera tabla del APÉNDICE 08):

$$T_s = 0.881 \text{ s} \quad C_s = 59.014 \text{ m/s} \quad \gamma_s = 14.154 \text{ kN/m}^3 \quad G_s = 5229.231 \text{ kPa}$$

Para 13 dovelas de 1 m cada una (Segunda tabla del APÉNDICE 08):

$$T_s = 0.900 \text{ s} \quad C_s = 57.778 \text{ m/s} \quad \gamma_s = 14.154 \text{ kN/m}^3 \quad G_s = 5229.231 \text{ kPa}$$

Se aprecia que el periodo determinado mediante el método de Zeevaert es menor que el obtenido con las fórmulas del anexo A, pero son bastante similares entre sí, de tal manera, que para 13 dovelas (como se muestra en la segunda y tercera tablas del **APÉNDICE 08**), son realmente cercanos el uno al otro. En este caso, para el método de Zeevaert se consideran correctos los datos calculados para 13 dovelas; es decir, $T_s = 0.900 \text{ s}$ y $C_s = 57.778 \text{ m/s}$.

7. Determinación del periodo fundamental y el amortiguamiento del oscilador de reemplazo y las funciones de impedancia

Dado que las funciones de impedancia dependen del periodo del sistema suelo-cimentación, al mismo tiempo que éste es dependiente de las funciones de impedancia, según el SUBCAPÍTULO 6.4, estos datos se deben determinar al mismo tiempo mediante un procedimiento iterativo, según se muestra en el APÉNDICE A.9 de este trabajo, utilizando las fórmulas resaltadas en color azul del APÉNDICE 0 de este trabajo, que es una copia de la *tabla A.2 del anexo A de las NTC-DS*.

Este proceso inicia con las características de la estructura de reemplazo de 1GDL supuesta sobre base rígida, la cimentación circular equivalente y el estrato de suelo homogéneo equivalente, que se determinaron en los incisos 1, 3 y 4 de este subcapítulo; es decir, la primera iteración se hace considerando que $\tilde{T}_e = 0.8s$ y $\tilde{\xi}_e = 0.05$.

A continuación se calculan las frecuencias adimensionales para las ondas P y S, mediante la EC. 6.32 y EC. 6.33, junto con las frecuencias adimensionales para los modos de vibración en translación horizontal y cabeceo, según la EC. 6.28. Con esos valores se calculan los coeficientes de K_m^0 , k_m y c_m de esta última ecuación, mediante las fórmulas del APÉNDICE 0 de este trabajo.

Posteriormente se determinan los valores de C_m y K_m según las EC. 6.30 y EC. 6.31. Que se utilizan para calcular los valores de los periodos y fracciones de amortiguamiento para los modos de vibrar en cabeceo y translación horizontal, según las siguientes relaciones: $T_m = (2\pi) \cdot \sqrt{m_e/K_m}$ y $\xi_m = (\pi C_m)/(\tilde{T}_e K_m)$, que se obtienen de las EC. 1.31 y EC. 1.49, considerando que $T = 2\pi/\omega$.

Finalmente se utilizan las EC. 6.22 y EC. 6.23 para determinar un nuevo valor del amortiguamiento $\tilde{\xi}_e$ y periodo \tilde{T}_e efectivos del oscilador de reemplazo, que se comparan con los valores al inicio de la iteración. Este proceso se repite hasta que se comprueba que los valores de amortiguamiento $\tilde{\xi}_e$ y periodo \tilde{T}_e efectivos no cambian significativamente. Para este ejemplo en particular, se realizaron 4 repeticiones para que el procedimiento iterativo convergiera. Con lo cual se obtuvieron los siguientes resultados:

El periodo efectivo resultó ser $\tilde{T}_e = 1.071s$. Este periodo se utilizará para la determinación de las ordenadas espectrales para el método del anexo A de las NTC-DS. Este se determina mediante la composición de los periodos para los tres modos de vibrar del modelo simplificado de parámetros discretos, según la *fórmula A.20* de la *sección A.6.3 del anexo A de las NTC-DS*, que coincide con la EC. 6.23 de este trabajo.

- El periodo de vibración para el modo de deformación estructural: $T_e = 0.8s$
- El periodo de vibración para el modo de desplazamiento horizontal: $T_h = 0.41s$
- El periodo de vibración para el modo de cabeceo: $T_r = 0.58s$

El amortiguamiento efectivo que se obtuvo fue $\tilde{\xi}_e = 0.091$. Este se determina mediante la composición de las razones de amortiguamiento para los tres modos de vibrar del modelo simplificado de parámetros discretos, según la *fórmula A.23* de la *sección A.6.3 del anexo A de las NTC-DS*, que coincide con la EC. 6.22 de este trabajo. Sin embargo, según los límites indicados en el SUBCAPÍTULO 6.8, el amortiguamiento efectivo no puede ser menor que 0.05. El valor obtenido del factor de amortiguamiento efectivo se utilizará para la determinación de las ordenadas espectrales por el método del anexo A de las NTC-DS.

- El amortiguamiento para el modo de deformación estructural: $\xi_e = 0.05$
- El amortiguamiento para el modo de desplazamiento horizontal: $\xi_h = 0.246$
- El amortiguamiento para el modo de cabeceo: $\xi_r = 0.132$

8. Determinación de las ordenadas espectrales por el método del anexo A de las NTC-DS

Según *la sección A.1 del anexo A de las NTC-DS*, "para el diseño sísmico de estructuras ubicadas en las zonas II y III será permisible tener en cuenta explícitamente los efectos de sitio y la interacción suelo–estructura. Cuando así se proceda se aplicarán al cuerpo principal de las Normas las disposiciones que contiene el Anexo A. En todos los aspectos que no cubre el Anexo son aplicables las demás disposiciones del Cuerpo de las Normas".

Como se puede observar en el [APÉNDICE A.10](#), para este caso, la forma del espectro de diseño está regida por el periodo fundamental de vibración del suelo bajo la edificación, el cual fue determinado en el [SUBINCISO A\)](#) del inciso 5 de este subcapítulo ($T_s = 0.909s$), mientras que la influencia de la zona está restringida al parámetro λ , el cual puede tomar dos valores según se diseñe para la zona II o III ($\lambda = 0.5$ o $\lambda = 0.6$). Dicha variable afecta directamente al parámetro β , que a su vez depende de la relación entre amortiguamiento estructural y el efectivo, y es llamado factor de reducción por amortiguamiento suplementario¹⁷.

Para determinar el valor del factor de interacción (\tilde{V}_B/V_B) del que se habló en el [SUBCAPÍTULO 6.8](#), se construyen dos curvas del espectro de diseño (Ver [APÉNDICE A.10](#)): con la primera se calcula la ordenada espectral de la estructura tomando en cuenta el periodo fundamental de vibración del suelo, pero para el periodo de la estructura sin interacción. En otras palabras, se consideran los efectos de sitio, pero no los efectos de la IDSE. En la segunda curva, en cambio, se admite tanto el periodo fundamental de vibración del suelo, como los parámetros efectivos con que se toman en cuenta los efectos de la IDSE; a saber: ($\tilde{T}_e, \tilde{\xi}_e, \tilde{Q}_e$).

a) Primera curva del espectro de diseño ($T_s = 0.909s, T_e = 0.8s, \xi_e = 0.05, Q = 2$)

Para obtener los datos del espectro de diseño, se utilizan las fórmulas y reducciones a las ordenadas espectrales que se marcan en las *secciones A.3 y A.6.1 del anexo A de las NTC-DS*.

- Ordenada espectral para $T = 0$

$$a_0 = \begin{cases} 0.1 + 0.15(T_s - 0.5), & T_s \in (0.5, 1.5] s \\ 0.25, & T_s \geq 1.5 s \end{cases} \Rightarrow \therefore a_0 = 0.161 \left[\frac{1}{g} \right]$$

- Coeficiente sísmico

$$c = \begin{cases} 0.28 + 0.92(T_s - 0.5), & T_s \in (0.5, 1.5] s \\ 1.2, & T_s \in (1.5, 2.5] s \\ 1.2 - 0.5(T_s - 0.5), & T_s \in (2.5, 3.5] s \\ 0.7, & T_s > 3.5 s \end{cases} \Rightarrow \therefore c = 0.656 \left[\frac{1}{g} \right]$$

- Periodo de inicio de la meseta espectral

¹⁷ Debe tenerse precaución de no confundir este coeficiente con la razón de sintonía, para la cual también se asignó la letra β como símbolo para su representación.

$$T_a = \begin{cases} 0.2 + 0.65(T_s - 0.5), & T_s \in (0.5, 1.5]s \\ 1.5, & T_s \in (1.5, 2.5]s \\ 4.75 - T_s, & T_s \in (2.5, 3.5]s \\ 0.85, & T_s > 3.5s \end{cases} \Rightarrow \therefore T_a = 0.466 s$$

- Periodo de fin de la meseta espectral

$$T_b = \begin{cases} 1.35, & T_s > 3.5s \\ 1.2 \cdot T_s, & T_s > 3.5s \\ 4.2, & T_s > 3.5s \end{cases} \Rightarrow \therefore T_b = 1.35 s$$

- Coeficiente K para el cálculo de p

$$k = \begin{cases} 2 - T_s, & T_s \in (0.5, 1.65]s \\ 0.35, & T_s > 1.65s \end{cases} \Rightarrow \therefore k = 1.091$$

- Coeficiente p

$$p = k + (1 - k) \cdot \left(\frac{T_b}{T}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\therefore p = 1.091 + (-0.091) \cdot \left(\frac{1.35}{T}\right)^2$$

- Factor de reducción por amortiguamiento suplementario
Según la *sección A.6.1 del anexo A de las NTC-DS*, para la primera curva, $\beta = 1$
- Espectro de diseño y ordenada espectral no reducida

$$a = \begin{cases} 0.161 - 0.495 \left(\frac{T}{0.466}\right), & T < 0.466 s \\ 0.656, & T \in [0.466, 1.35]s \\ 0.554 \cdot p \cdot \left(\frac{1.35}{T}\right)^2, & T \geq 1.35s \end{cases} \Rightarrow \therefore a = 0.656 \left[1/g\right]$$

- Factor de reducción por ductilidad

$$Q' = \begin{cases} 1 + 2.05514 \cdot T, & T < 0.466 s \\ 1.957, & T \in [0.466, 1.35]s \\ 1 + 0.9574 \sqrt{p}, & T \geq 1.35s \end{cases} \Rightarrow \therefore Q' = 1.957$$

- Factor de reducción por sobrerresistencia

$$R = \begin{cases} \frac{10}{4 + \sqrt{\frac{T}{0.466s}}}, & T \leq 0.466s \\ 2, & T > 0.466s \end{cases} \Rightarrow \therefore R = 2$$

- Cálculo de la ordenada reducida

$$a' = \frac{a}{R \cdot Q'} \Rightarrow \therefore a' = 0.1676 \left[1/g\right]$$

- b) Segunda curva del espectro de diseño** ($T_s = 0.909s$, $\tilde{T}_e = 1.07s$, $\tilde{\xi}_e = 0.091$, $\tilde{Q} = 1.559$)

Como el valor del periodo de vibración del suelo es el mismo en ambos casos, la ordenada espectral para $T = 0$ (a_0), el coeficiente sísmico (c), el periodo de inicio de la meseta espectral (T_a), el periodo de fin de la meseta espectral (T_b), el coeficiente k para el cálculo de p , así como el coeficiente p , son iguales a los del caso anterior, no se repite su proceso de cálculo.

- Factor de reducción por amortiguamiento suplementario
Según la *sección A.6.1 del anexo A de las NTC-DS*

$$\beta = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\xi}_e}{\xi_e}\right)^\lambda, \tilde{T}_e \leq T_b \\ 1 + \left(\left(\frac{\tilde{\xi}_e}{\xi_e}\right)^\lambda - 1\right) \cdot \left(\frac{T_b}{\tilde{T}_e}\right), \tilde{T}_e > T_b \end{cases}$$

Donde $\lambda = 0.5$ y 0.6 para las zonas II y III, respectivamente.

$$\beta = \left(\frac{0.05}{0.091}\right)^{0.5} \Rightarrow \therefore \beta = 0.741$$

- Espectro de diseño y ordenada espectral no reducida

$$\tilde{a} = \begin{cases} 0.161 - 0.698 \cdot T, T < 0.466 s \\ 0.486, T \in [0.466, 1.35)s \\ 0.8866 \cdot p / T^2, T \geq 1.35s \end{cases} \Rightarrow \therefore \tilde{a} = 0.486$$

- Factor de reducción por ductilidad

$$\tilde{Q}' = \begin{cases} 1 + 0.989 \cdot T, T < 0.466 s \\ 1.46, T \in [0.466, 1.35)s \\ 1 + 0.46\sqrt{p}, T \geq 1.35s \end{cases} \Rightarrow \therefore \tilde{Q}' = 1.46$$

- Factor de reducción por sobrerresistencia

$$R = \begin{cases} \frac{10}{4 + \sqrt{\frac{T}{0.466s}}}, T \leq 0.466s \\ 2, T > 0.466s \end{cases} \Rightarrow \therefore R = 2$$

- Cálculo de la ordenada reducida

$$\tilde{a}' = \frac{a_{ef}}{R \cdot Q'} = \frac{0.486}{2 \cdot 1.46} \Rightarrow \therefore \tilde{a}' = 0.168 \left[\frac{1}{g} \right]$$

c) Cálculo del factor de interacción

A continuación se calcula el factor de interacción (\tilde{V}_B/V_B) del [SUBCAPÍTULO 6.8](#). El cual se determina según la *fórmula A.15* y como se especifica en la *sección A.6.1 del anexo A de las NTC-DS*:

$$V_B = a' \cdot W_0 \Rightarrow 0.168 \cdot 50796[kN] \Rightarrow \therefore V_B = 8515.535[kN]$$

Mientras que:

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_B &= V_B - (a' - \widetilde{a}') \cdot W_e \Rightarrow 8515.535[kN] - (0.168 - 0.167) \cdot 35557.2[kN] \Rightarrow \\ &\therefore \widetilde{V}_B = \mathbf{8475.316[kN]}\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\frac{\widetilde{V}_B}{V_B} = \frac{8475.316[kN]}{8515.535[kN]} \Rightarrow \therefore \widetilde{V}_B / V_B = \mathbf{0.9953}$$

Los resultados tabulares para la determinación de las ordenadas espectrales de las dos curvas, se pueden ver en el [APÉNDICE A.10](#). La determinación de las fuerzas de entrepiso modificadas por interacción se muestra en el [APÉNDICE A.11](#); En la primera tabla de este anexo se calculan las fuerzas de entrepiso distribuyendo el cortante basal obtenido de la gráfica 1, que sólo considera los efectos de sitio, conforme a la **sección A.5 de las NTC-DS** y se ejecuta de manera análoga a como se haría para una estructura analizada mediante el método estático, por lo que se puede observar su gran similitud con la tabla del [APÉNDICE A.5](#), para las fuerzas de entrepiso para la estructura soportada sobre base rígida.

En la segunda tabla del [APÉNDICE A.11](#), se utilizan las fuerzas obtenidas en la tabla anterior para obtener las fuerzas de entrepiso modificadas por interacción. Esto se hace afectando las fuerzas determinadas en la tabla del [APÉNDICE A.5](#), por el factor de interacción.

9. Determinación de las ordenadas espectrales por el método de Zeevaert

En la determinación de las ordenadas espectrales calculadas mediante el método de Zeevaert, se utilizan los datos que se obtuvieron en el [SUBINCISO B\)](#) del inciso 5 de este subtema para el estrato homogéneo de suelo; es decir: $T_s = 0.900 s$ $C_s = 57.778 m/s$

a) Determinación de la aceleración máxima del terreno

Los espectros adimensionales de Zeevaert dependen del periodo fundamental de vibración del suelo T_{s1} y de la aceleración máxima del terreno a_m . Esta última coincide con los valores de la ordenada espectral para una estructura infinitamente rígida; es decir, con un periodo $T_e = 0$. Este valor puede ser calculado a partir de la definición del parámetro a_0 del anexo *A de las NTC-DS*, el cual depende del periodo fundamental del suelo, según la *Ec. A.1* de dicho anexo. Por lo que la aceleración máxima en la superficie del terreno es:

$$a_m = a_0 \cdot g \Rightarrow 0.16 \cdot 9.81[m/s^2] \Rightarrow \therefore a_m = \mathbf{1.57[m/s^2]}$$

Ya que las ordenadas espectrales se modifican con la aceleración máxima, se alcanza la conclusión primordial de que, aunque los espectros envolventes de Zeevaert se obtuvieron para la zona centro de la cuenca del valle de México, estos pueden escalar su tamaño para representar la amplificación sísmica que se presenta en otras zonas de la ciudad de México, siempre y cuando el primer y segundo periodos de vibración del suelo tengan entre sí una relación aproximadamente igual a:

$$T_{s2}/T_{s1} = 0.8s/2.5s = 0.327$$

En el [APÉNDICE 08](#) se muestra la determinación del segundo periodo del terreno calculado con el método de Zeevaert, el cual es $T_{s2} = 0.283 s$, que tiene una relación con el periodo fundamental de:

$$T_{s2}/T_{s1} = 0.283s/0.900s = 0.314$$

Por lo que existe una variación del 4.15% con respecto al valor esperado de 0.327, lo cual concuerda con muy buena precisión.

b) Cálculo del periodo y amortiguamiento efectivos

Para este método, los efectos de la IDSE eran considerados, combinando el periodo de vibración de la estructura en los modos de deformación estructural y cabeceo, además de considerar el estrato de suelo heterogéneo real. Estos se calculaban mediante una aproximación del método de interacción estática suelo-estructura (IESE) desarrollado por el mismo Zeevaert. La complejidad de tal método en la obtención del periodo de la estructura acoplada, no se justifica, puesto que no considera el modo de desplazamiento horizontal, ni los modos de acoplamiento cruzado. Es por ello que en éste trabajo, se propone en su lugar, utilizar el modelo del oscilador de reemplazo en la obtención del periodo efectivo, mediante las funciones de rigidez dinámica calculadas con las fórmulas de la tabla del [APÉNDICE 0](#), que es una copia de la *tabla A.2 del anexo A de las NTC-DS*.

El método de Zeevaert no especifica la forma en que se selecciona el grado de amortiguamiento apropiado para el modelo de la estructura, por lo que se optará por utilizar la *fórmula A.23 del anexo A de las NTC-DS* en el cálculo del amortiguamiento efectivo.

Las funciones de impedancia que se desarrollarán conforme al método del anexo A, dependen del periodo fundamental de vibración del suelo y la celeridad de propagación de ondas S ; por lo que al utilizar el método de Zeevaert, en vez del método de Gómez, el cálculo de las funciones de impedancia se puede revisar en el [APÉNDICE A.12](#). Para ello, fueron necesarias 4 iteraciones para obtener el periodo y amortiguamiento efectivos del oscilador de reemplazo, de manera que:

$$T_s = 0.900 s \quad C_s = 57.778 m/s \quad \tilde{T}_e = 1.075s \quad \tilde{\xi}_e = 0.092$$

Al igual que en el método del anexo A, en este caso se construyeron dos gráficas del espectro de diseño; una que contempla sólo los efectos de sitio y otra que además contempla los de la IDSE. De esta manera, se podrá determinar un factor de interacción como en aquél método. En este caso, los valores de T_a y T_b no son precisamente los límites de la meseta espectral, sino los puntos de quiebre del espectro de diseño. Estos se calculan como:

$$T_a = 0.327 \cdot T_s \Rightarrow \cdot 0.29s \quad \text{y} \quad T_b = T_s \Rightarrow \cdot 0.9s$$

Como se puede observar, estos valores corresponden de manera muy aproximada con los periodos de los dos primeros modos de vibrar del estrato de suelo y ambos son menores a sus homólogos calculados para el método del anexo A en el [SUBINCISO A\)](#) del inciso 8 de este subcapítulo; lo que significa que la meseta espectral de los espectros de Zeevaert, se corre hacia la izquierda en relación a la del espectro del anexo A, como se observa en el [APÉNDICE A.15](#). Para la construcción de los espectros de Zeevaert, los únicos factores que se precisan son: a_{max} , \tilde{T}_e , $\tilde{\xi}_e$, T_a y T_b , por lo que una vez calculados, se puede proceder a deducir las ordenadas espectrales.

c) Ordenada espectral para la primera gráfica ($T_s = 0.900 s, T_e = 0.8s, \xi_e = 0.05$):

A continuación se calculan las ordenadas espectrales elásticas (no reducidas) a partir de los espectros envolventes de diseño de Zeevaert:

$$T_e/T_s = 0.889$$

$$f_a = 3.827$$

$$S_a = 6.009[m/s^2]$$

$$a = \frac{S_a}{g} = \frac{6.009[m/s^2]}{9.81[m/s^2]} \Rightarrow \therefore a = 0.612 [1/g]$$

Estos cálculos se presentan en la primera tabla del APÉNDICE A.13 de este trabajo.

d) Ordenada espectral para la segunda gráfica ($T_s = 0.900 s, \tilde{T}_e = 1.075 s, \tilde{\xi}_e = 0.092$)

$$\tilde{T}_e/T_s = 1.194$$

$$\tilde{f}_a = 2.22$$

$$\tilde{S}_a = 3.486[m/s^2]$$

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{S}_a}{g} = \frac{3.486[m/s^2]}{9.81[m/s^2]} \Rightarrow \therefore \tilde{a} = 0.355 [1/g]$$

Estos cálculos se presentan en la segunda tabla del APÉNDICE A.13 de este trabajo.

Los espectros de este método son elásticos y no se especifica la forma en que se puede aplicar una reducción por ductilidad. Por eso, en el presente trabajo, se considera la reducción por ductilidad de la forma en que lo marca el *anexo A de las NTC-DS*; ya que estas fórmulas consideran los efectos de sitio sobre la ductilidad, como se vio en el SUBCAPÍTULO 6.6.5. Por lo tanto, el factor de reducción por ductilidad sobre base rígida se modifica según se establece en el anexo A de las normas. Este depende a su vez de las cantidades, $\tilde{Q}, T_s, T_a, T_b, \beta, k$ y p . Así que antes de determinar su valor, se obtienen los de aquellas cantidades.

e) Reducción por ductilidad Para la ordenada espectral de la gráfica 1 con ($T_s = 0.900 s, T_e = 0.8s, \xi_e = 0.05, Q = 2$)

Los valores de las constantes que rigen al factor de comportamiento sísmico, calculadas según se establece en la *sección A.3 del anexo A de las NTC-DS*, para la primera gráfica son:

$$k = 1.1$$

$$\beta = 1$$

$$p = 1.1 - (0.185/T^2)$$

- Entonces el factor de reducción por ductilidad es:

$$Q' = \begin{cases} 1 + 3.2398 \cdot T, T < 0.2943 s \\ 1.953, T \in [0.2943, 0.9]s \\ 1 + 0.953\sqrt{p}, T \geq 0.9s \end{cases} \Rightarrow \therefore Q' = 1.953$$

- Además, el factor de sobrerresistencia:

$$R = \begin{cases} \frac{10}{4 + \sqrt{\frac{T}{0.2943s}}}, T \leq 0.2943s \\ 2, T > 0.2943s \end{cases} \Rightarrow \therefore R = 2$$

- Mientras que la ordenada reducida resulta:

$$a' = \frac{a}{Q \cdot R} = \frac{0.612}{1.953 \cdot 2} \Rightarrow \therefore a' = 0.1566 \text{ [1/g]}$$

Por lo que se concluye que:

$$S'_a = a' \cdot g = 0.1566 \cdot 9.81 \text{ [m/s}^2] \Rightarrow \therefore S'_a = 1.5367 \text{ [m/s}^2]$$

f) Reducción por ductilidad para la ordenada espectral de la gráfica 2 ($T_s = 0.900 \text{ s}$, $\tilde{T}_e = 1.075 \text{ s}$, $\tilde{\xi}_e = 0.092$)

Los Valores de las constantes que rigen al factor de reducción por ductilidad son los mismos, excepto que se sustituye el factor de comportamiento sísmico Q , por el factor de comportamiento sísmico efectivo \tilde{Q} . Además, como el amortiguamiento se incrementa, el factor de reducción por amortiguamiento suplementario es diferente de la unidad ($\beta \neq 1$); por ello:

$$\tilde{Q} = \frac{T_e^2}{\tilde{T}_e^2} (Q - 1) + 1 \Rightarrow \therefore \tilde{Q} = 1.558$$

- El coeficiente β en este caso se calcula como:

$$\beta = \begin{cases} \left(\frac{\tilde{\xi}_e}{\xi_e}\right)^\lambda, \tilde{T}_e \leq T_b \\ 1 + \left(\left(\frac{\tilde{\xi}_e}{\xi_e}\right)^\lambda - 1\right) \cdot \left(\frac{T_b}{\tilde{T}_e}\right), \tilde{T}_e > T_b \end{cases}$$

Para la zona II el parámetro λ vale $\lambda = 0.5$, por lo que:

$$\beta = 1 + \left[\left(\frac{0.05}{0.092}\right)^{0.5} - 1\right] \cdot \frac{0.9s}{1.075s} \Rightarrow \therefore \beta = 0.779$$

- El factor de reducción por ductilidad efectivo \tilde{Q}' , se calcula como:

$$\tilde{Q}' = \begin{cases} 1 + 1.5956 \cdot T, T < 0.2943 \text{ s} \\ 1.4696, T \in [0.2943, 0.9] \text{ s} \\ 1 + 0.4696 \sqrt{p}, T \geq 0.9 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow \therefore \tilde{Q}' = 1.476$$

- Por otro lado, el factor de sobrerresistencia es:

$$R = \begin{cases} \frac{10}{4 + \sqrt{\frac{T}{0.2943s}}}, T \leq 0.2943s \\ 2, T > 0.2943s \end{cases} \Rightarrow \therefore R = 2$$

- Mientras que la ordenada espectral reducida por ductilidad resulta:

$$\tilde{a}' = \frac{\tilde{a}}{Q' \cdot R} = \frac{0.355}{1.476 \cdot 2} \Rightarrow \therefore \tilde{a}' = \mathbf{0.1202}$$

Por lo que se concluye que la aceleración máxima es:

$$\tilde{S}_a' = \tilde{a}' \cdot g = 0.1202 \cdot 9.81 [m/s^2] \Rightarrow \therefore \tilde{S}_a' = \mathbf{1.1794 [m/s^2]}$$

g) Cortante basal y factor de interacción

Según la [Ec. 4.20](#) de este trabajo, la fuerza cortante basal de la estructura sobre base rígida se calcula como:

- Para la primera gráfica

$$V_B = a' \cdot W_0 = 0.1566 \cdot 50796.0 [kN] \Rightarrow \therefore V_B = \mathbf{7956.9356 [kN]}$$

Mientras que la fuerza cortante basal del oscilador de reemplazo sobre base rígida es:

- Para la segunda gráfica

$$\begin{aligned} \tilde{V}_B &= V_B - (a' - \tilde{a}') \cdot W_e = 7956.9356 - (0.1566 - 0.1202) \cdot 35557.2 [kN] \Rightarrow \\ &\therefore \tilde{V}_B = \mathbf{6661.823 [kN]} \end{aligned}$$

Y según la [sección A.6.1 del anexo A de las NTC-DS](#), el factor de interacción queda como:

$$\frac{\tilde{V}_B}{V_B} = \frac{6661.823 [kN]}{7956.9356 [kN]} \Rightarrow \therefore V_B / \tilde{V}_B = \mathbf{0.837}$$

Que está dentro del rango de restricción del [CAPÍTULO 6.8](#). Por otra parte, las fuerzas cortantes se calculan igual que con el método del anexo A de las NTC-DS. Estos resultados se muestran en las tablas del [APÉNDICE A.14](#). En la primera, se calculan las fuerzas de entrepiso distribuyendo el cortante basal obtenido de la gráfica 1, que sólo considera los efectos de sitio. Esto se realiza conforme a la [sección A.5 de las NTC-DS](#) y se ejecuta de análogamente a como se haría para una estructura analizada por el método estático. Por lo que se aprecia una gran similitud con la tabla del [APÉNDICE A.5](#). En la segunda tabla del [APÉNDICE A.14](#) se afectan las fuerzas obtenidas en la anterior, por el factor de interacción para determinar las fuerzas de entrepiso modificadas por los efectos de la IDSE.

7.3 Análisis de resultados

A continuación se analizan los resultados del ejercicio del subcapítulo anterior, comparando los resultados del método del anexo A (**MA**) y el método de Zeevaert (**MZ**), los cuales consideran explícitamente la IDSE, junto con los resultados obtenidos del método estático (**ME**) contenido en las NTC-DS, el cual desprecia los efectos de la IDSE, por lo que fungirá como experimento testigo¹⁸.

¹⁸ Según ([ARANA, 1976](#)), Un experimento testigo es aquel que se realiza en presencia de todos los factores experimentales, salvo la variable de interés que se está investigando, con la finalidad de ver hasta qué grado puede haber afectado al

En este trabajo, los parámetros de comparación utilizados son los obtenidos del análisis mediante el método estático (ME), ya que éste determina las acciones que la legislación oficial exige que se adopten en la evaluación de la resistencia requerida por una estructura para ser considerada razonablemente segura, ante las sollicitaciones sísmicas a las que se puede ver expuesta durante su vida útil. Además, el análisis sísmico se hace suponiendo el comportamiento de la estructura como una viga de cortante; es decir, todas las acciones se aplican de manera perpendicular a su eje transversal y en esa misma dirección se desarrollan sus respuestas. En la aplicación de este modelo, como muestra la **ILUSTRACIÓN 7-1**, se asumen dos comportamientos reológicos distintos en la estructura (comportamiento elástico **(E)** y comportamiento dúctil **(D)** o elastoplástico). Además, el suelo que soporta la estructura, puede asumirse como una base rígida **(BR)**, [por lo que no interactúa con la estructura], o puede asumirse como una base flexible **(IDSE)**, [por lo que el suelo se deforma junto con la edificación y se deben tomar en cuenta los efectos de la interacción]. Lo anterior permite hacer cuatro combinaciones del comportamiento del modelo de análisis sísmico, como se muestra en la **ILUSTRACIÓN 7-1**:

- Estructura elástica sobre base rígida **(BR-E)**
- Estructura elástica sobre base flexible **(IDSE-E)**
- Estructura dúctil sobre base rígida **(BR-D)**
- Estructura dúctil sobre base flexible **(IDSE-D)**

Estos cuatro modelos se utilizarán para clasificar los resultados de los métodos **MA**, **MZ** y **ME**, de manera que sea fácil identificar a qué comportamiento se refiere cada uno de ellos y así poder ordenarlos para entender sus implicaciones.

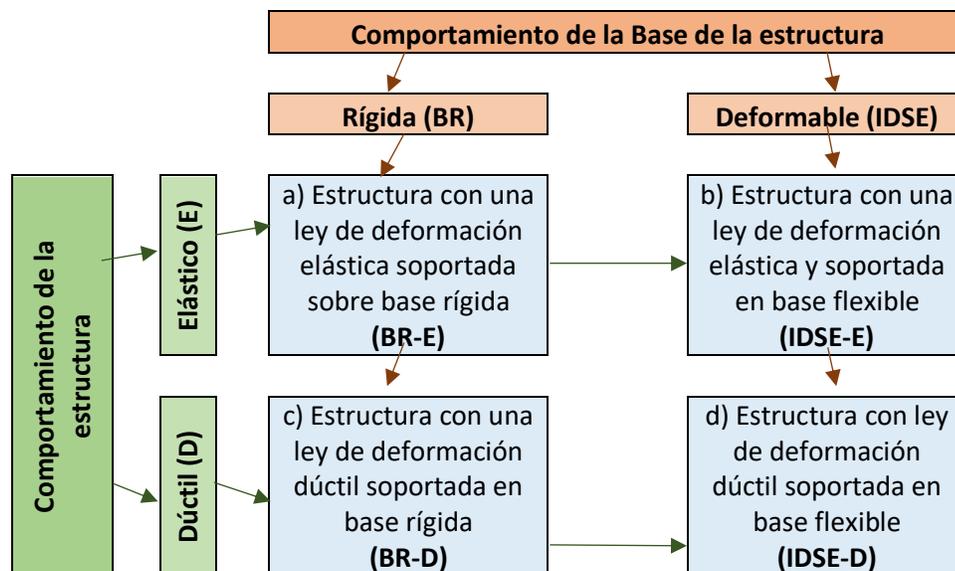


Ilustración 7-1: Posibles combinaciones de comportamiento estructural y comportamiento de la base en un modelo de análisis estructural

experimento la presencia de una variable adicional, o puede ser el que se desarrolla en condiciones normales y que se compara con otro, al que se le ha alterado una variable. (En el presente trabajo, la variable de interés es la IDSE).

1) Estrato de suelo homogéneo equivalente

En este trabajo se determinan las propiedades del estrato de suelo homogéneo equivalente: para el **MZ**, se utiliza el método desarrollado por el mismo autor, que se trató en el **SUBCAPÍTULO 3.5**, mientras que para el **MA**, se utiliza el método de Gómez, que se estudió en el **SUBCAPÍTULO 3.6**. El **ME**, al no considerar la flexibilidad del suelo, no requiere la determinación de un estrato de suelo equivalente y se limita considerar los efectos de sitio a través de lo prescrito por la *tabla 3.1 de las NTC-DS*.

Los valores de la razón de amortiguamiento del suelo y relación de Poisson son los propuestos en la *sección A.6.4 del anexo A de las NTC-DS* ($\xi = 0.03$ y $\nu = 0.45$) y el valor de los demás parámetros se obtiene de la tabla de resultados de la exploración geotécnica del **APÉNDICE A.2**. La celeridad de ondas S de los estratos que componen el depósito heterogéneo de suelo, se calcularon con la **Ec. 2.25** y la del estrato homogéneo, se calcula como un promedio ponderado de estos valores, para el método de Gómez y mediante la **Ec. 3.36** para el método de Zeevaert.

En la **TABLA 7-1** se comparan los valores que caracterizan al estrato homogéneo de suelo equivalente calculado por el **MZ** y por el método de Gómez que se aplica al **MA**, donde se percibe que la diferencia entre ambos, se debe a la modificación del periodo fundamental de vibración del suelo y la celeridad de ondas S calculada, según se muestra en las gráficas de la **ILUSTRACIÓN 7-2**. Aunque para fines de ingeniería su discrepancia es poco significativa.

Tabla 7-1 Estrato homogéneo de suelo equivalente

Método:	MA	MZ
H_s [m]	13	13
T_s [s]	0.909	0.9
C_s [m/s]	60.713	57.778
γ_s [kN/m ³]	14.154	14.154
G_s [kPa]	5229.231	5229.231
ν	0.45	0.45
ξ_s	0.03	0.03
a_0 [1/g]	0.161	0.16

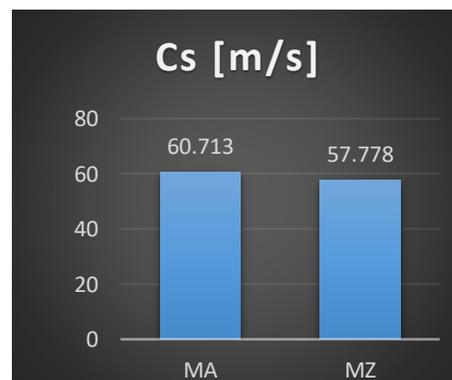


Ilustración 7-2 Comparación de periodo fundamental y celeridad de ondas S del estrato de suelo homogéneo equivalente según los métodos MZ y MA.

2) Comportamiento elástico de la estructura soportada sobre base rígida (BR-E)

Para este modelo se utiliza el espectro elástico considerando los efectos de sitio, sin contemplar los efectos de IDSE. Por lo que se utiliza el periodo y razón de amortiguamiento sobre base rígida para calcular la ordenada espectral. Tampoco se toma en cuenta la reducción de la ordenada por ductilidad. Además, se utiliza el peso total de la estructura en la determinación del cortante basal, que aunque no se utiliza para fines de diseño, ya que implica una resistencia muy alta, (difícil de alcanzar y antieconómica), se presenta a continuación simplemente para fines del análisis de los resultados. Aunque no se considera la flexibilidad del suelo, en los métodos MA y MZ, la ordenada espectral depende del periodo fundamental del terreno.

En la TABLA 7-2 se muestran los datos para los métodos **MA**, **MZ** y **ME**. Se observa que las primeras tres columnas son iguales para los tres métodos, pero las ordenadas espectrales y fuerzas de cortante basal son muy distintas entre sí, sobre todo para el método estático, que al no considerar explícitamente los efectos de sitio, da una ordenada elástica mucho menor que la de los otros dos métodos (Ver ILUSTRACIÓN 7-3).

Tabla 7-2: Estructura elástica sin considerar IDSE (BR-E)

Método:	MA	MZ	ME
W_0 [kN]	50796	50796	50796
T_e [s]	0.8	0.8	0.8
ξ_e	0.05	0.05	0.05
a	0.656	0.612	0.32
V_B [kN]	33322.17	31087.15	16254.72



Ilustración 7-3 Ordenada espectral (a) y cortante basal (V_B) de la estructura elástica supuesta sobre base rígida (BR-E) para los tres métodos de diseño.

3) Comportamiento plástico de la estructura soportada sobre base rígida (BR-D)

Para el modelo BR-D, que toma en cuenta la ductilidad, se utilizan los valores calculados en el inciso anterior, pero la ordenada espectral se reduce como se indica en las normas, pues aunque el MZ no contempla una manera de considerar la reducción por ductilidad, es aplicable el método

que se ocupa en las NTC-DS. Además, aunque no se considera la flexibilidad del suelo, en los métodos MA y MZ, la reducción por ductilidad y la ordenada espectral, dependen del periodo fundamental del terreno.

En la TABLA 7-3 los datos de las primeras filas son iguales para los tres métodos, sin embargo, el factor de reducción por ductilidad Q' es distinto en los dos primeros casos, pues considera la flexibilidad del suelo como se vio en el SUBCAPÍTULO 6.6.4. Por otro lado, el factor de sobrerresistencia no se considera en el ME, y en su lugar se ocupa el factor de reducción por irregularidad, que por ser igual a la unidad no tiene mayor implicación en este ejemplo. En la ILUSTRACIÓN 7-4 se observa cómo se modifica la ordenada y el cortante basal, dejando al MZ como el menos conservador de los tres, aunque en términos de magnitud, los resultados de los tres métodos son muy similares.

Tabla 7-3 Estructura dúctil sobre suelo rígido (BR-D)

Método	MA	MZ	ME
W_0 [kN]	50796	50796	50796
T_e [s]	0.8	0.8	0.8
ξ_e	0.05	0.05	0.05
Q	2	2	2
R o FI	2	2	1
Q'	1.957	1.953	2
a'	0.168	0.1566	0.16
V_B [kN]	8515.530	7956.93	8127.36

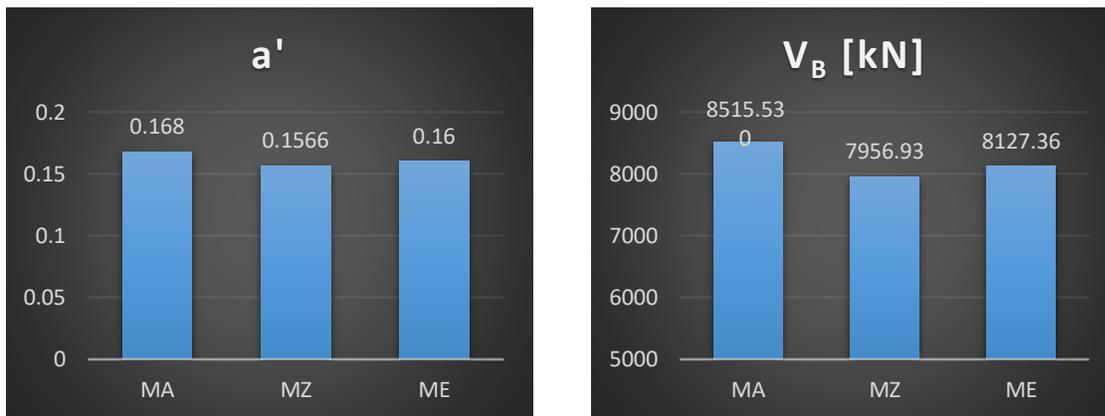


Ilustración 7-4: Ordenada espectral reducida y cortante basal de la estructura dúctil sobre suelo rígido (BR_D)

4) Comportamiento elástico de la estructura soportada sobre base flexible (IDSE- E)

Al considerar la flexibilidad de la base de la estructura se superan los alcances del ME, por lo que en este inciso y en los siguientes, sólo se comparan los resultados de los métodos MA y MZ.

En el modelo IDSE-E se utiliza el espectro elástico admitiendo explícitamente los efectos de sitio y de IDSE. En consecuencia, se utiliza el periodo y razón de amortiguamiento efectivos calculados

mediante iteraciones para ambos métodos, en el cálculo de la ordenada espectral. No se toma en cuenta la reducción de la ductilidad estructural y se utiliza el peso efectivo de la estructura en la determinación del cortante basal. El coeficiente de interacción se calcula sólo con fines de comparación entre la fuerza cortante de los modelos IDSE-E y BR-E. Según la TABLA 7-4, este último sale del rango del límite del SUBCAPÍTULO 6.8 para el método MZ, Aunque como este valor no es el que se aplicará en la determinación de las acciones de diseño, este hecho no tiene mayor relevancia. En la TABLA 7-4 y en la ILUSTRACIÓN 7-5 se ve que las ordenadas espectrales son menos semejantes que en el modelo BR-E, y lo mismo sucede con la fuerza de cortante en la base de la estructura.

Tabla 7-4 Estructura elástica sobre base flexible (IDSE-E)

Método:	MA	MZ
\widetilde{W}_e [kN]	35557.2	35557.2
\widetilde{T}_e [s]	1.071	1.075
T_e [s]	0.8	0.8
T_r [s]	0.583	0.589
T_h [s]	0.41	0.41
$\widetilde{\xi}_e$	0.091	0.092
ξ_e	0.05	0.05
ξ_r	0.132	0.128
ξ_h	0.246	0.265
$\widetilde{\alpha}$	0.486	0.355
\widetilde{V}_B [kN]	27277.452	21948.9516
\widetilde{V}_B/V_B	0.8186	0.7060

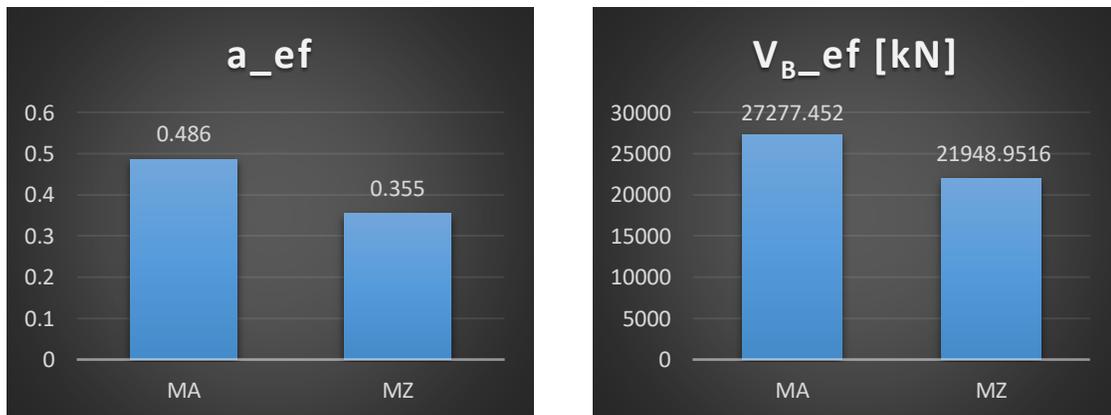


ILUSTRACIÓN 7-5: ORDENADA ESPECTRAL NO REDUCIDA Y CORTANTE BASAL DE LA ESTRUCTURA ELÁSTICA SOBRE SUELO FLEXIBLE (IDSE-E)

En la ILUSTRACIÓN 7-6 se muestra que los periodos y amortiguamientos de cada modo del sistema acoplado, son prácticamente idénticos en ambos métodos (seguramente debido a que el periodo y celeridad de ondas S del estrato homogéneo también son sensiblemente similares, como se expuso en el INCISO 0 de este subcapítulo). El periodo de vibración más largo en el modelo de

parámetros discretos, es el modo de vibración de deformación estructural, mientras que el mayor amortiguamiento se debe al modo de vibrar en translación horizontal. Lo inverso sucede para el menor periodo y el menor amortiguamiento, en conclusión, entre más flexible se comporte el sistema ante un modo de vibración, desarrolla un menor grado de amortiguamiento.

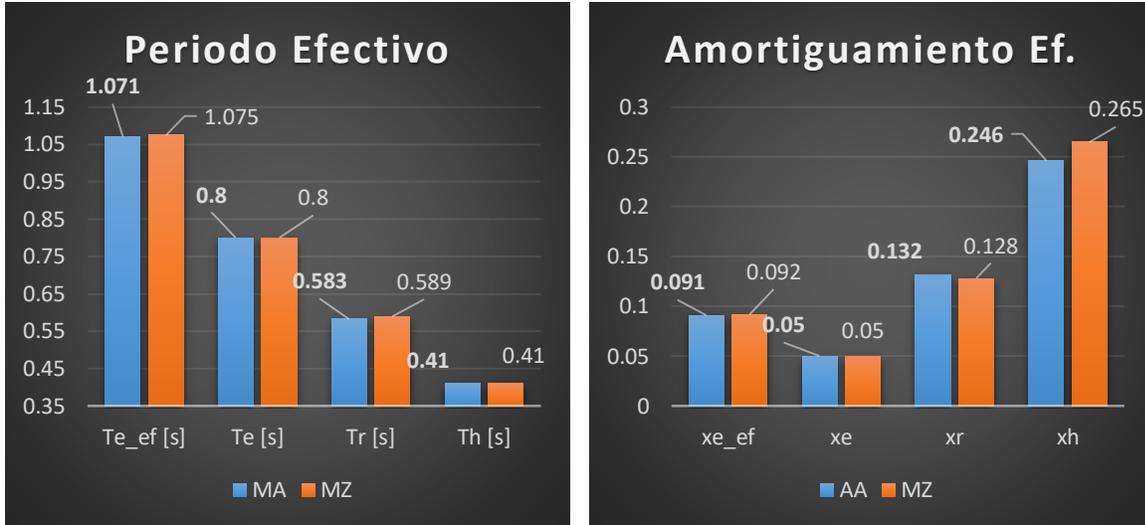
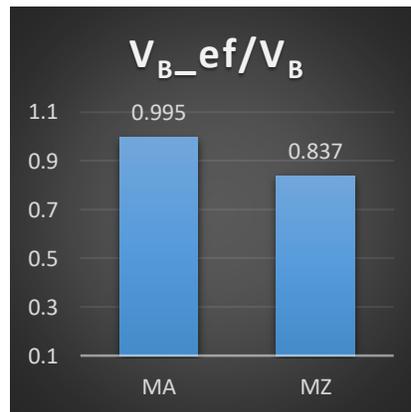


Ilustración 7-6: Periodo y Amortiguamiento Efectivos para ambos modelos de suelo flexible (IDSE-E e IDSE-D)

5) Comportamiento plástico de la estructura soportada sobre base flexible (IDSE-D)

Tabla 7-5

Método:	MA	MZ
\tilde{W}_e [kN]	35557.2	35557.2
\tilde{T}_e [s]	1.07	0.175
$\tilde{\xi}_e$	0.091	0.092
\tilde{Q}	1.559	1.558
R	2	2
\tilde{Q}'	1.559	1.476
$\tilde{\alpha}'$	0.167	0.1202
\tilde{V}_B [kN]	8475.316	6661.823
\tilde{V}_B/V_B	0.995	0.837



Los valores de este modelo, mostrados en la TABLA 7-5, son los que se presentan como resultado de la gráfica 2 para ambos métodos (MA y MZ), y el coeficiente de interacción de la TABLA 7-5 es el que se utiliza en los anexos A.11 y A.14 para calcular las fuerzas de entrepiso con interacción. Las ordenadas espectrales son reducidas y se aplica el factor de comportamiento sísmico efectivo \tilde{Q} , que como se dijo en el SUBCAPÍTULO 6.6.2 representa un mismo nivel de daño en el oscilador de reemplazo dúctil sobre base flexible, que el que ocurre para Q en la estructura dúctil desplazada sobre base rígida (Ver ILUSTRACIÓN 7-7).

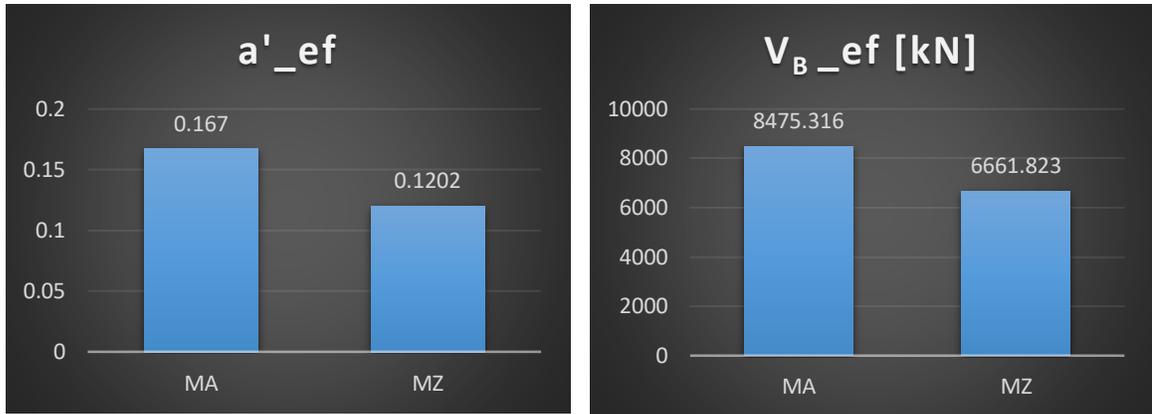


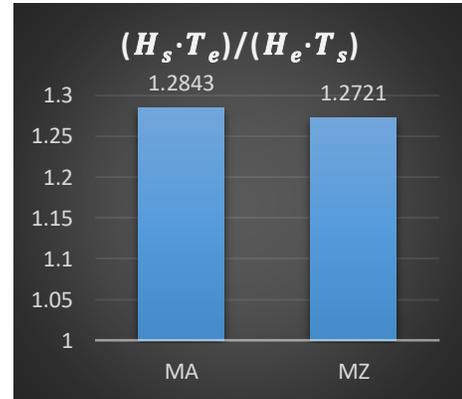
Ilustración 7-7: ordenada espectral y cortante basal de los modelos IDSE-D para los métodos MA y MZ

6) Parámetros de IDSE

Según la *sección A.6 del anexo A de las NTC-DS*, se considera que los efectos de IDSE se pueden despreciar si la rigidez relativa entre el suelo y la estructura es mayor o igual a 2.5; es decir, cuando la rigidez del suelo es notablemente mayor que la de la estructura, es por esto que tal factor se grafica en la *Tabla 7-6*.

Tabla 7-6: Parámetros de los métodos MA y MZ que representan los efectos de la IDSE

Método:	MA	MZ
$(H_s \cdot T_e)/(H_e \cdot T_s)$	1.2843	1.2721
η_s	1.686	1.686
η_p	6.293	6.293
η_x	1.348	1.412
η_r	1.517	4.589
K_x^0 [kN/m]	850110.93	849344.46
C_x^0 [kN · s/m]	71243.36	77065.12
k_r [kN · m/rad]	132092694.9	129357322
C_r [kN · m · s/rad]	5953509.27	5652471.07



Otros parámetros de la Tabla "parámetros adimensionales del sistema" del *APÉNDICE A.2* llegan a ser importantes en la justificación de los efectos que la IDSE tiene sobre la estructura del ejercicio en estudio. Por ejemplo, se muestra que la altura relativa de la edificación se aproxima a uno, lo que implica que es una estructura demasiado cuadrada. Además, la profundidad relativa del depósito de suelo blando también tiende a la unidad, y esto puede llevar a pensar que aunque la rigidez del suelo es muy parecida a la de la estructura, ésta no se verá tan afectada por los efectos de IDSE, pues debido a su geometría es poco propensa a estos efectos; además, para las dimensiones del edificio, El depósito de suelo blando es comparativamente poco profundo.

7) Comparación de los factores de comportamiento sísmico Q y factor de reducción por ductilidad Q'

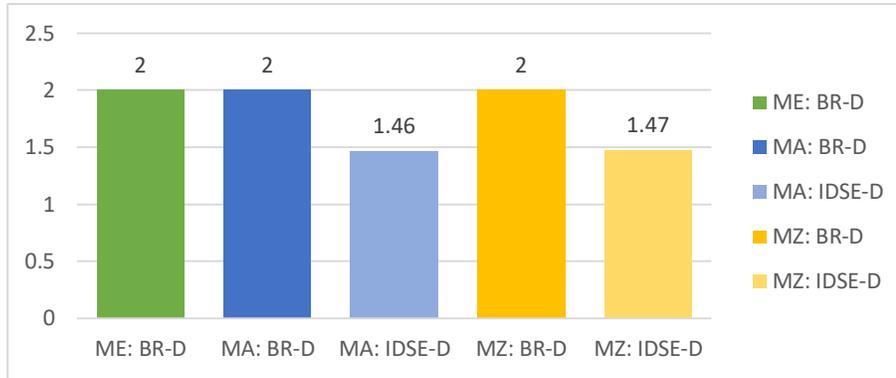


Ilustración 7-8: Valores del factor Q para los métodos ME, MA y MZ, considerando la estructura sobre base rígida y los efectos de IDSE.

En el caso de estudio, según el tipo de estructuración, el factor de comportamiento sísmico que le corresponde a la estructura analizada es $Q = 2$. Este valor es el mismo cuando se desprecian los efectos de la IDSE y decrece en el contexto del oscilador de reemplazo, independientemente del método aplicado; por lo que $\tilde{Q} < Q$ en todos los casos donde se consideren los efectos de la IDSE. Además, \tilde{Q} disminuye entre mayor sea la flexibilidad del oscilador de reemplazo con respecto a la de la estructura sobre base rígida; por ello, según la ILUSTRACIÓN 7-8, el factor de \tilde{Q} es ligeramente mayor para el MZ que para el MA. Aun así, siendo que el periodo efectivo del oscilador de reemplazo en ambos métodos es tan similar, la diferencia entre los factores \tilde{Q} en ambos métodos es intrasendente.

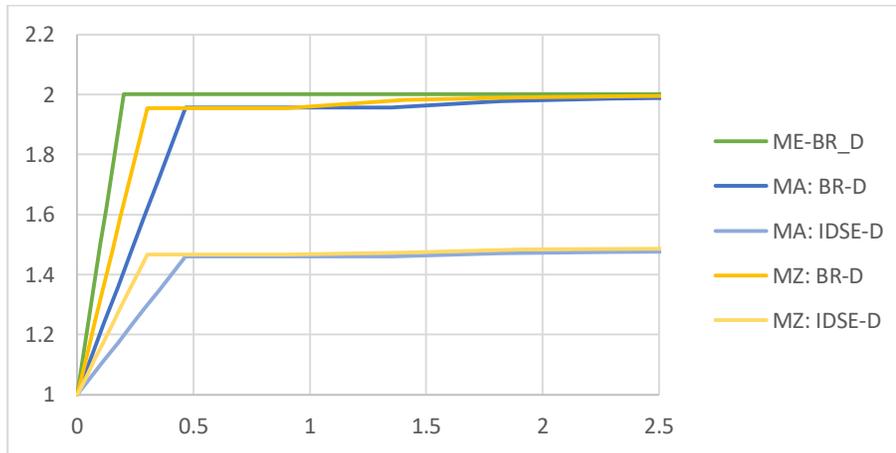


Ilustración 7-9: Factor Q' para los métodos ME, MA y MZ considerando efectos de sitio e IDSE

Por otra parte, en la ILUSTRACIÓN 7-9 se observa que para $T_e = 0$, $Q' = 1$, independientemente del método empleado o si se considera o no la flexibilidad del suelo. En el caso de estudio, el periodo de la estructura es ligeramente menor que el periodo fundamental de vibración del suelo, ya sea que se ocupe el MA o el MZ:

$$T_e = 0.8s < 0.91s \approx 0.9s = T_s$$

En consecuencia, según el [SUBCAPÍTULO 6.6.5](#), cuando esto sucede, el valor de Q' se reduce respecto al de base rígida. Este efecto es provocado por los efectos de sitio y no por los efectos de IDSE, pero para este intervalo, si $Q' < Q$ implica que la reducción del cortante basal sería menor que si la estructura se desplantara sobre terreno firme, en donde se aplica la regla de igual desplazamiento ($Q' = Q$). Por lo tanto, en este ejemplo, descartar los efectos de la flexibilidad del suelo en la ductilidad, podría ser anticonservador. Este efecto se aprecia en la [ILUSTRACIÓN 7-9](#), en donde los valores de Q' son menores que los de Q y los valores de \bar{Q}' son menores que los de \bar{Q} . El primer punto de quiebre de la gráfica es T_a en todos los casos, y el valor de Q' tiende rápidamente al valor de la ductilidad correspondiente, apenas se supera el límite T_b . Esto coincide con lo dicho en el [SUBCAPÍTULO 6.6.5](#) donde se explica que $Q' \rightarrow Q$, cuando el cociente $T_e/T_s > 2$; es decir, en la región de periodos largos del espectro, aplica la regla de igual desplazamiento. Esto sucede cuando $T = 1.8s$, por lo que según se observa, cuando $T = 2.5s$, $Q' \approx Q$.

8) Comparación de los espectros de diseño

En el [APÉNDICE A.15](#) se muestra la comparación de los espectros de los tres métodos estudiados. En él se presentan en trazo grueso los espectros para los modelos de comportamiento estructural elástico que no consideran reducción por ductilidad o sobrerresistencia (modelos BR-E e IDSE-E), con trazo delgado los espectros reducidos por ductilidad y sobrerresistencia (modelos BR-D e IDSE-D), que representan respectivamente: la gráfica 1 (de trazo delgado y color azul con línea continua) y grafica 2 (de trazo delgado y color naranja con línea discontinua), a partir de las que se calculan los cortantes basales con los que se determina el factor de interacción en los métodos MA y MZ. También se representan, en color azul y línea continua, los espectros que modelan condiciones de base rígida (BR-E y BR-D) y con color anaranjado y línea discontinua los espectros que modelan las condiciones de base flexible (IDSE-E e IDSE-D). Finalmente se trazó una línea vertical de color rojo que señala el periodo del espectro sobre base rígida y otra de color verde, paralela a la anterior, que indica el periodo efectivo modificado por IDSE, para los espectros de los métodos MA y MZ.

Se debe tener en mente que en el reglamento, los espectros de diseño de las NTC-DS son elásticos; es decir, se establecen para una estructura elástica soportada sobre base rígida (**modelo BR-E**), y se utilizan los artificios descritos en los [SUBCAPÍTULOS 6.3 y 6.6](#) para evaluar las acciones de diseño para los otros tres modelos de la [ILUSTRACIÓN 7-1](#).

En el [APÉNDICE A.15](#) se observa que las ordenadas de la meseta del espectro elástico del ME, son aproximadamente la mitad de las ordenadas máximas de los métodos MZ y MA. Además, la meseta del espectro elástico del ME es más amplia que la de los métodos que consideran explícitamente los efectos de sitio. Lo anterior puede deberse a las mayores incertidumbres que genera el no considerar el periodo fundamental del terreno en la determinación de las acciones sísmicas. Por otro lado, los espectros reducidos por ductilidad (color azul y línea delgada), al menos para el ejemplo en estudio, llevan a resultados similares cuando sólo se consideran los efectos de sitio, a la vez que guardan similitud con los espectros reducidos por ductilidad que consideran los efectos de IDSE (línea delgada de trazo discontinuo y color anaranjado). Como se ha comentado, el método ME no admite la modificación de amortiguamiento y alargamiento del periodo efectivos por IDSE, por lo que la modificación de la ordenada espectral se debe exclusivamente a la reducción por ductilidad y factor de irregularidad.

En la gráfica de los espectros de diseño del método MA, el espectro con las ordenadas más altas, es el que corresponde al modelo BR-E (trazo grueso de color azul). La diferencia entre este espectro y el correspondiente al modelo IDSE-E, (línea gruesa de color naranja con trazo discontinuo) se debe fundamentalmente a la disminución de las ordenadas causada por el incremento en el amortiguamiento efectivo del sistema. En esta ilustración, la distancia entre las líneas roja y verde, es igual al incremento del periodo estructural por efectos de IDSE. Finalmente, en la parte inferior de esta imagen, se ubican los espectros para los modelos BR-D en línea delgada de color azul e IDSE-D en línea delgada color anaranjado de trazo discontinuo, con los cuales se evalúan las ordenadas espectrales de las gráficas 1 y 2 del [APÉNDICE A.10](#).

La razón por la que ambos espectros están sobrepuestos, es que la reducción por ductilidad al espectro del modelo BR-E, que transforma las ordenadas a las del modelo BR-D, es muy semejante, en este ejemplo, a la reducción que el mismo modelo BR-E, sufre al reducirse primero por efectos de amortiguamiento efectivo para obtener el espectro del modelo IDSE-E, y posteriormente reducirlo aún más, por efectos de ductilidad efectiva al modelo IDSE-D y en consecuencia las ordenadas calculadas a partir de ambas gráficas son muy similares (ver [APÉNDICE A.15](#)). Si el incremento del periodo efectivo hubiera sido tal que éste superara la meseta espectral, la reducción por IDSE hubiera sido importante, pero como no es el caso, la diferencia de las ordenadas espectrales de ambas gráficas resulta ser de una milésima.

Finalmente, en los espectros de diseño del método MZ, la reducción por ductilidad del espectro del modelo BR-E, con la que se calcula el espectro del modelo BR-D (gráfica 1), no llega a ser tan grande como la disminución que se aplica por amortiguamiento efectivo y por ductilidad efectiva para elaborar el espectro del modelo IDSE-D. Por consecuencia, la disimilitud entre las gráficas 1 y 2 del método de Zeevaert es más notable que para el método MA. Aun así, se distingue una superposición de los periodos muy cortos y muy largos en los espectros del MZ y esto implica que la IDSE no tiene gran preponderancia en el ejemplo de estudio, para los métodos MA y MZ. Esto se justifica porque según la [Tabla 7-6](#) la rigidez del suelo es apenas mayor que la de la estructura; además, como ya se comentó, la estructura tiene una relación de esbeltez ligeramente mayor a uno en la dirección analizada, por lo que la estructura es muy cuadrada, y esto le confiere bastante estabilidad y disminuye la repercusión del fenómeno de la IDSE sobre sí misma.

En este método, el incremento del periodo estructural por efectos de IDSE basta para que el periodo efectivo de la estructura sobrepase el segundo punto de quiebre del espectro de Zeevaert, llegando a la zona donde se comienzan a reducir las ordenadas espectrales, ergo, las ordenadas evaluadas en las gráficas 1 y 2 llegan a ser algo distintas entre sí.

9) **Fuerzas de entrepiso, cortante basal y factor de interacción**

En la [ILUSTRACIÓN 7-10](#) se grafican las fuerzas cortantes de entrepiso y los cortantes basales obtenidos con los tres métodos de análisis utilizados en este trabajo, que se calculan en los [APÉNDICES 0, A.11 y A.14](#). En ella se aprecia que para el método ME, que no considera efectos de IDSE, se calculó un solo cortante basal, correspondiente al modelo BR-D, con el espectro del [APÉNDICE A.4](#); mientras que para los métodos MA y MZ, se determinan dos: el primero, que considera los efectos de sitio y la ductilidad de la estructura supuesta sobre base rígida (modelo BR-D), que se toma de las primeras gráficas de los [APÉNDICES A.10 y A.13](#) respectivamente, y el segundo, que supone la estructura soportada por una base flexible (modelo IDSE-D), quees el de las segundas gráficas de los mismos apéndices.

Debido a la carencia de información precisa de la distribución de masas y rigideces del sistema, se suponen equitativas para los tres métodos. De modo que las fuerzas de entrepiso se distribuyen en función de la altura respecto al nivel de la base de la estructura, para que la sumatoria de todas ellas sea igual a la fuerza de cortante basal. Además, se aprecia que las mayores fuerzas calculadas son las determinadas mediante el MA, que admiten los efectos de sitio y la ductilidad. Estas últimas no son modificadas de manera sensible al considerar los efectos de IDSE, siendo el factor de interacción $\tilde{V}_B/V_B = 0.995$, por lo que al considerar la similitud entre las fuerzas resultantes del método MA y el ME, en este ejemplo, puede considerarse poco justificable el incremento en la precisión de los resultados que se obtienen al considerar los efectos de la IDSE, tomando en cuenta el incremento en la complejidad de los cálculos realizados para su evaluación.

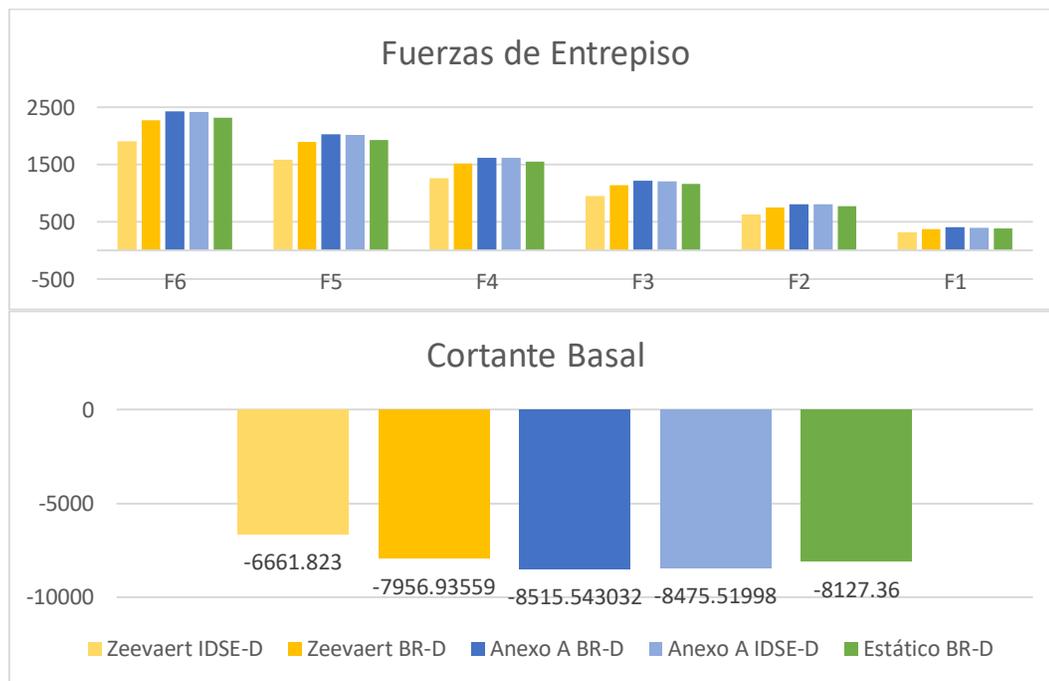


Ilustración 7-10

Las menores fuerzas se obtuvieron por el MZ, reconociendo los efectos de sitio e IDSE; que a su vez son menores a las calculadas por el mismo cuando se desatiende la flexibilidad de la base. A raíz de ello, el factor de interacción para el MZ resulta $\tilde{V}_B/V_B = 0.837$, que es significativo en comparación con el del MA; por ello, los efectos de la IDSE se pueden suponer, para el MZ, razonablemente significativos, con lo que el incremento en la precisión de los resultados es justificable, sin importar el aumento en la complejidad de los cálculos. Sin embargo, dado que el MZ no es un método contenido en la normatividad oficial, y las fuerzas calculadas por éste son menores a las calculadas por los métodos oficiales (MA y MZ), el análisis puede devenir en un resultado poco conservador, e incluso del lado de la inseguridad; por lo que a pesar de que puede resultar en un diseño más económico, se concluye que el resultado de este método es inadmisibles como método alternativo de análisis estructural. Aparte, comparando los resultados de los métodos MZ y MA con los obtenidos con el ME, se aprecia que el MA repercute en un incremento del cortante basal y las fuerzas de entrepiso respecto a las calculadas por el ME; mientras que el MZ resulta en la disminución de tales fuerzas, a pesar de estar ligados al mismo problema.

8 Conclusiones

CAPÍTULO 1

Un **oscilador de 1GDL** está compuesto por 3 elementos:

- Un **resorte** que representa la **energía potencial** almacenada por el sistema, cuya fuerza de restitución, según la **ley de Hooke**, es proporcional al desplazamiento por la constante de rigidez del sistema, de tal manera que: $F_r(t) = k \cdot u(t)$
- Una **masa** que representa la **energía cinética** del sistema, cuya fuerza de inercia, según el **principio de D’Alambert**, es directamente proporcional la variación de velocidad del sistema, según una constante de proporcionalidad iguala la masa tal que: $F_i(t) = m \cdot \dot{u}(t)$
- Una fuerza que representa la **disipación de energía** inicialmente aportada al sistema, cuyo amortiguamiento es viscoso y se representa por un **amortiguador** cuya fuerza, según la **ley de Newton**, es directamente proporcional a la velocidad, multiplicada por la constante de amortiguamiento viscoso; es decir: $F_a(t) = c \cdot \dot{u}(t)$

Cuando se le aporta al sistema un monto de energía inicial y se le permite oscilar libremente, estas tres fuerzas están en equilibrio y se dice que el sistema presenta una **oscilación libre**. Cuando la historia de cargas es representada por una fuerza dinámica ejercida directamente sobre la masa, o por una historia de desplazamientos en la base, se denomina **oscilación forzada**.

Cuando el sistema oscila libremente y no disipa energía, su oscilación se presenta siempre con la misma frecuencia. Esta frecuencia es una característica intrínseca del sistema a la que se llama **frecuencia fundamental**. ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$)

Cuando se admite la disipación de energía, el sistema puede disipar más energía que la aportada inicialmente, por lo tanto no vibra y entonces se denomina **sistema sobreamortiguado**. Cuando la disipación de energía es tal que permite la oscilación del sistema, se dice que el sistema es **subamortiguado**. En la frontera entre el comportamiento sobreamortiguado y subamortiguado, existe una constante de amortiguamiento, con la que se disipa exactamente la misma cantidad de energía que fue aportada al sistema, de modo que no oscila. Esa constante es un parámetro intrínseco del sistema y se le llama **amortiguamiento crítico** ($C_{cr} = 2\sqrt{m \cdot k}$). Por ende, al sistema se le refiere como **críticamente amortiguado**.

Cuando la oscilación es forzada, presenta una respuesta inicial proveniente de la solución complementaria de la EDO homogénea asociada, la cual desaparece rápidamente, por lo que se llama **respuesta transitoria**. Al mismo tiempo, se conserva otra parte de la respuesta que es proporcional al coeficiente de magnificación dinámica del sistema. A esta parte de la respuesta se le llama **respuesta estacionaria** y es una solución particular, que ocurre con la frecuencia de excitación de la carga y fuera de fase con respecto a la acción, cuando el sistema es amortiguado, o en fase con ella cuando el sistema no presenta amortiguamiento. Cuando la frecuencia de excitación es similar a la fundamental del sistema, se dice que éste entra en **resonancia** y el factor de magnificación alcanzará su valor máximo; de tal manera que cuando el sistema cuenta con un coeficiente de amortiguamiento nulo, la magnificación de la respuesta tiende a infinito.

El movimiento de un oscilador de 1GDL se puede representar indistintamente mediante funciones trigonométricas, funciones exponenciales o mediante vectores rotatorios. Por ello se nombran **representación trigonométrica, exponencial o vectorial**.

Un sistema oscilador de 1GDL se puede sujetar a una acción dinámica aplicada directamente a su masa (por ejemplo la fuerza del viento), lo que desarrollaría una serie de fuerzas inerciales que resisten el cambio del estado de movimiento inicial; por lo tanto, las fuerzas internas en la estructura son iguales a la suma algebraica de las fuerzas ejercidas y las fuerzas inerciales. Por otra parte, si el oscilador de 1GDL es sometido a una acción dinámica en su base (por ejemplo un sismo), las fuerzas inerciales procuran regresar a la estructura a su posición de equilibrio; por lo tanto estas fuerzas deben ser igualadas por las fuerzas internas desarrolladas en los elementos del sistema. Esto implica que dos acciones dinámicas pueden tener un origen y efectos físicos distintos sobre el sistema.

CAPÍTULO 2

En un medio continuo, se puede aplicar La segunda ley de Newton en función de la variación de momentum para obtener la **ecuación de equilibrio dinámico en coordenadas cartesianas**, que se debe cumplir para cada elemento diferencial del medio, al ser excitado por una perturbación. Dicha ecuación es una condición de equilibrio independiente de la ley reológica que rija el comportamiento del medio continuo.

Existen dos tipos de ondas que se pueden desarrollar al interior de un medio continuo. Las que provocan el movimiento longitudinal de las partículas del medio respecto a la dirección en que se propagan, se llaman ondas de compresión y dilatación, porque provocan deformaciones que modifican el volumen de la región del medio por donde transitan; por ser más rápidas que las otras, se les nombra también ondas primarias o simplemente **ondas P**. La ecuación de propagación de las ondas P se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio dinámico en coordenadas cartesianas, al considerar que la rotación de las partículas del medio es nula $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$. Es por ello que a estas ondas también se les conoce como ondas irrotacionales.

El otro tipo de ondas provocan el movimiento transversal de las partículas con respecto a la dirección en que se propaga la perturbación, generando deformaciones que no modifican el volumen del medio, sólo lo distorsionan provocando esfuerzos desviadores, por lo que se les llama ondas de cizalla, que por ser más lentas que las ondas P, son conocidas también como ondas secundarias o simplemente **ondas S**. La ecuación de propagación de las ondas S se obtiene a partir de la ecuación de equilibrio dinámico en coordenadas cartesianas, al considerar que el volumen de las partículas del medio permanece constante $d\varepsilon_v/dx = d\varepsilon_v/dy = d\varepsilon_v/dz = 0$. Es por ello que a estas ondas se les conoce como ondas incompresibles.

Cuando estas ondas se propagan por un **medio elástico**, se irradian infinitamente por todo el medio; empero, en la realidad esto no sucede, por lo que el medio suele modelarse como un **material viscoelástico**, donde la parte viscosa representa el amortiguamiento del material del que se compone el medio. Este cuenta con una razón de amortiguamiento que depende de la frecuencia de excitación; pero dado que en los problemas reales, el amortiguamiento de los suelos es de tipo histerético, que por su naturaleza es independiente de la frecuencia, entonces se utiliza un **coeficiente de viscosidad equivalente** en función de la frecuencia, de tal manera que la razón de amortiguamiento se mantenga constante.

La **celeridad** con que se propagan las ondas P y las ondas S a través de un depósito de suelo es una característica intrínseca del estrato, lo que la vuelve un parámetro fundamental en el

modelado matemático del depósito como un medio continuo. Como en el **modelo unidimensional de propagación de ondas**.

CAPÍTULO 3

Se conoce como **efecto de sitio** a la respuesta sísmica del terreno con características significativamente distintas en amplitud, duración o contenido de frecuencias de un área relativamente reducida respecto al entorno regional, sin que haya una correlación con la atenuación normal de la energía sísmica con la distancia. Estos efectos se caracterizan porque **influyen en el diseño sísmico** de la estructura.

Existen además, **efectos sísmicos excepcionales** debidos a las condiciones geológicas, que son causados esencialmente por inestabilidad del suelo y, aunque son efectos provocados por las condiciones locales del terreno, no se les clasifica como efectos de sitio, porque **no influyen en el diseño sismorresistente** de la estructura; sino que se busca reducir la probabilidad de que estos se presenten.

La **función de transferencia** del terreno se emplea en la determinación de la modificación de la intensidad sísmica provocada por los efectos de sitio. Esta se determina **experimentalmente**, mediante el cociente espectral entre el movimiento en la superficie del terreno y el movimiento en la base de la formación de suelo. Para ello se utilizan los espectros de Fourier de ambos movimientos. En ausencia de registros sísmicos, la función de transferencia se determina **analíticamente** con el modelo unidimensional de propagación de ondas.

El **modelo unidimensional de propagación de ondas** se emplea en el análisis de la respuesta de un estrato de suelo para representar tanto la amplificación dinámica del movimiento sísmico causado por los efectos de sitio, como para determinar las funciones de impedancia que rigen el comportamiento de la interfaz cimentación-estructura. Este se basa en tres hipótesis que, se cumplen con suficiente precisión para el análisis del subsuelo en el valle de México. A saber:

- Todas las interfaces entre las diferentes capas de suelo son horizontales
- La respuesta de un depósito de suelo es predominantemente causada por ondas SH propagadas desde la roca madre subyacente, en dirección vertical
- Tanto la superficie del macizo rocoso, como la del estrato de suelo, se extienden infinitamente en dirección horizontal

Este modelo considera que los efectos de sitio se relacionan exclusivamente con dos parámetros que miden las características más relevantes de la formación de suelo: el periodo dominante de vibración (T_s) y la velocidad media de propagación de ondas S (C_s). Por lo que se reemplaza el perfil estratigráfico, por un **medio continuo, homogéneo, e isótropo equivalente**, con parámetros C_s y T_s iguales a los de la estratigrafía real.

El movimiento en la superficie del terreno calculado mediante la función de transferencia, determinada a través del modelo unidimensional de propagación de ondas, se nombra **movimiento en campo libre (FFM)**.

Durante un evento sísmico se presentan tres medios de disipación de la energía aportada al sistema cimentación-estructura que se deben distinguir para admitirlas adecuadamente en el modelo y simulación del problema: amortiguamiento material, por radiación y geométrico. El

amortiguamiento geométrico surge cuando la energía específica (energía por unidad de volumen) decrece mientras la onda se dispersa por el material. La reducción causa que la amplitud de la onda decrezca con la distancia, incluso cuando la energía total pudiera permanecer constante, por lo que la reducción es de origen puramente geométrico.

La **razón de impedancias** α_z^* es una medida de la capacidad de una frontera entre dos medios para refractar y reflejar ondas mecánicas; además, es un parámetro que rige la magnitud del **amortiguamiento por radiación** en la frontera entre dos medios, que depende tanto de la densidad ρ_s (relacionada con la masa del sistema, y por lo tanto, con las fuerzas inerciales), como por la celeridad de propagación de ondas C_{s_s} (relacionada con la rigidez del suelo y por lo tanto, con las fuerzas de restitución), cuya parte compleja está regida por la razón de amortiguamiento ξ de dos medios que se unen en la frontera. Análogamente, se puede imaginar como la "permeabilidad al paso de ondas" del límite entre dos medios; pero a diferencia del coeficiente de permeabilidad hidráulico, este valor es distinto cuando se va del medio 1 al medio 2, que cuando se va en dirección inversa.

En materiales reales, parte de la energía elástica de la onda es convertida en calor. La conversión se acompaña del decrecimiento en la amplitud de la onda. El **amortiguamiento viscoso**, por su simplicidad matemática, es comúnmente empleado para representar este tipo de disipación de la energía; pero puesto que el amortiguamiento en suelos es independiente de la frecuencia de excitación, el coeficiente de viscosidad se mantiene dependiente de la frecuencia, de tal modo que la razón de amortiguamiento (ξ) del suelo, permanezca constante.

Tanto el **método de Zeevaert**, como el de **Gómez**, pueden ser usados para aproximar el periodo fundamental de un depósito de suelo estratificado, que será utilizado para elaborar el modelo de propagación unidimensional de ondas.

La diferencia fundamental entre el método de Zeevaert y el método de Gómez es que el primero está basado en el principio del **promedio de celeridades** y el de **compatibilidad de distorsiones**, mientras que el de Gómez, es una formulación energética, basada en el **cociente de Rayleigh**, que usa una aproximación estática para el modo fundamental del depósito estratificado y hace una corrección empírica para predecir correctamente el valor del periodo fundamental de un manto homogéneo. Debido a lo anterior, el método de Zeevaert llega a aproximar mejor la **velocidad de propagación de ondas S** a través del depósito estratificado, mientras que el método de Gómez puede llegar a determinar valores que pueden caer fuera del rango de las que se presentan en la práctica. Sin embargo, se considera que el método de Gómez da una mejor aproximación del **periodo fundamental del depósito de suelo estratificado**, aunque como se muestra en el ejercicio de aplicación del **CAPÍTULO 7**, la diferencia entre los valores obtenidos, no es significativa.

Al aplicar el **método de Zeevaert**, se requiere conocer a priori el movimiento en la superficie del terreno, por lo que se precisa determinar la magnitud de la aceleración máxima que se pueda suscitar en la superficie libre del terreno; este valor sólo influye en la magnitud de los desplazamientos y esfuerzos calculados en la masa de suelos, pero no influye en el valor del periodo fundamental resultante. Además, con este método, se empieza el cálculo a partir de la superficie del terreno. Por el contrario, el método de Gómez no determina ni la magnitud de los esfuerzos, ni el orden de desplazamientos que se pudieran presentar en la masa de suelos, y el

cálculo se inicia a partir de la interfaz entre el estrato más profundo y el lecho de roca que la subyace.

En el método de Zeevaert, la determinación del periodo fundamental del suelo está influido por el número de "dovelas" o substratos en que se divide el perfil estratigráfico del depósito en estudio, mientras que para el método de Gómez esto no influye en absoluto.

Algunas ventajas del método de Zeevaert son: que por basarse en el principio de las distorsiones, se obtiene además del periodo de vibración del estrato, la configuración de esfuerzos y deformaciones del modo de vibrar del depósito de suelo estratificado. Igualmente, se pueden calcular estos parámetros para modos superiores de vibración del depósito de suelo.

El método del promedio de lentitudes fue el método oficialmente utilizado en la evaluación del periodo fundamental tanto para el MDOC, como en el anexo A de las NTC-DS, hasta que se postuló el método de Gómez en el año 2000. En la actualidad existen métodos "paso a paso" que pueden admitir incluso la flexibilidad del macizo rocoso, aunque esta puede tener una influencia despreciable en depósitos blandos de espesor potente. La aplicación de tales métodos es muy demandante, así que requiere de una computadora para hacer práctica su aplicación.

CAPÍTULO 4

Cuando se ejerce una historia de **acciones** en función del tiempo (representadas como desplazamiento, velocidades de desplazamiento, aceleraciones, fuerzas, etc.) a un sistema de 1GDL, la **historia de respuesta en el tiempo** del sistema, puede representar la magnitud de la respuesta en función de cualquier parámetro que se desee estudiar (E.G. desplazamiento, velocidad, aceleración, etc.).

La representación gráfica del valor máximo de la historia de respuesta en el tiempo (en valor absoluto), expresada en términos de algún parámetro de interés, producido por una acción dinámica ejercida sobre un sistema elástico de 1GDL, con periodo de vibración (T) variable y razón de amortiguamiento (ξ) constante, se denomina **espectro de respuesta** del sistema.

La **integral de Duhamel** transforma la historia de acciones no periódicas, en una serie de funciones delta de Dirac (en función del tiempo) y evalúa individualmente la respuesta a cada una para sumarlas y así obtener la respuesta total, en términos de **desplazamiento relativo** con respecto a la base del sistema; estos últimos son los que producen las fuerzas de restitución que impulsan a la masa del sistema hacia su posición de equilibrio. Esta integral se puede presentar en forma numérica o algebraica.

La ordenada del espectro de respuesta del sistema de 1GDL calculado a partir de la **historia de respuesta de desplazamiento relativo** en función del tiempo, que resulta de la integral de Duhamel, se denomina ordenada de desplazamiento relativo espectral (S_d). Y a partir de un conjunto de pares ordenados (T, S_d) se puede obtener el **espectro de respuesta de desplazamiento relativo**.

Si se integra la ecuación de Duhamel, tanto la expresión numérica como la algebraica representarán la **historia de velocidades relativas**, cuyo valor máximo se nombra ordenada espectral de velocidad relativa (S_v) y por lo tanto, de manera análoga al espectro de desplazamiento relativo, se puede obtener aquí el **espectro de respuesta de velocidad relativa**.

Si en lugar de obtener el espectro de velocidades relativas a partir de la integración de la expresión de Duhamel, se considera que el amortiguamiento del sistema es pequeño, se obtiene el espectro de velocidad relativa aproximado, al multiplicar la ordenada espectral de desplazamiento relativo por la frecuencia circular del sistema, por lo que al espectro así definido se le llama **espectro de pseudo-velocidad** ($S_{pv} = \omega \cdot S_d$).

Como lo que interesa en el análisis sísmico son las aceleraciones totales del sistema de 1GDL, entonces la **historia de respuesta elástica de aceleración total** en función del tiempo, se obtiene de la expresión $\ddot{u}_T(t) = -[2\xi \cdot \dot{u}(t) + \omega_0^2 \cdot u(t)]$; donde $u(t)$ y $\dot{u}(t)$ son respectivamente las expresiones derivadas de la integral de Duhamel para la historia de desplazamientos y velocidades relativas. A partir de esta expresión se determinan las ordenadas espectrales (S_a) necesarias para obtener el **espectro de respuesta de aceleración total**.

Si en lugar de la expresión del párrafo anterior, se calcula la ordenada espectral de aceleración como el producto de la ordenada de pseudovelocidad por la frecuencia circular del sistema, entonces se tienen la **ordenada espectral de pseudoaceleración** ($S_{pa} = \omega \cdot S_{pv} = \omega^2 \cdot S_d$), la cual es aproximadamente igual a la ordenada de aceleración total, cuando el amortiguamiento del sistema es bajo.

Los **espectros de diseño** son generalmente obtenidos mediante la suavización, promedio o envolvente de múltiples **espectros de respuesta** calculados a partir de sendos eventos sísmicos. Los espectros que se presentan en los códigos están formados por una serie de líneas y curvas, que pueden expresarse mediante ecuaciones simples. Los espectros de diseño de aceleración suelen presentar una rama lineal creciente (con origen en el valor de aceleración máxima del terreno), luego una zona de aceleración constante o meseta espectral, con un valor entre 2 y 3 veces la aceleración máxima de terreno, y finalmente una o más curvas decrecientes.

Los **espectros de diseño del MDOC-DS** son transparentes; es decir, carecen de reducciones ajenas al peligro sísmico. Este manual clasifica las estructuras según su **importancia estructural** como: B (estructuras que requieren un grado de seguridad convencional), A (Estructuras en que se requiere un grado de seguridad alto) y A+ (Estructuras que requieren un grado de seguridad extrema, definida únicamente para zonas de alta sismicidad). A partir de la posición geográfica y el grado de importancia estructural, el programa **PRODISIS** determina el **espectro transparente** aplicable a la región deseada. Los espectros del MDOC-DS admiten algunas reducciones debidas a la **sobrerresistencia estructural** en forma explícita, clasificadas como **Factores de terreno rocoso** (aceleración máxima del terreno y factor de distancia al sitio), **Factores de comportamiento lineal del suelo** (factor de efectos de sitio y factor de respuesta estructural) y **Factores de comportamiento no lineal del suelo** (reducción en la velocidad efectiva de propagación de ondas y factor de aumento en el amortiguamiento). Por lo tanto, estos toman en cuenta explícita y aisladamente los efectos de sitio y de incremento de amortiguamiento del suelo causado por **efectos de IDSE**.

Los **espectros de diseño de las NTC-DS** agrupan las estructuras según su importancia estructural como Grupo A y Grupo B según el **Art. 139 del RCDF**. Además, los parámetros de construcción de los espectros de diseño se constriñen a una tabla en función de la zonificación del terreno de la cuenca, que según el **Art. 170 Del RCDF**, son Zona I (Zona de lomas), Zona II (Zona de transición), Zona III (Zona del lago); esta última a su vez se subdivide en cuatro

subzonas (IIIa, IIIb, IIIc, IIIId). Cabe señalar que mediante esta zonificación las NTC-DS toman implícitamente en consideración los **efectos de sitio**, pero no los **efectos de IDSE**. Estos espectros sólo admiten reducciones relacionadas con la irregularidad en planta y alzado, la sobrerresistencia, la configuración estructural del edificio y su comportamiento dúctil; estos son el factor de comportamiento sísmico (Q), el factor de reducción (Q') y el factor de regularidad (Fr).

A diferencia de los espectros del MDOC-DS que permiten determinar espectros de diseño para cualquier región dentro el territorio mexicano, las NTC-DS sólo contemplan la zona de la cuenca del valle de México.

Los espectros de diseño de las NTC-DS representan con mejor precisión las solicitaciones máximas probables que se pudieran presentar durante un sismo en la zona de la cuenca del valle de México, que los del MDOC-DS. Lo que significa que por ser más particulares, están mejor ajustados.

La construcción del espectro de diseño de las NTC-DS es más fácil y requiere de menos datos para su elaboración que el del MDOC-DS. Lo que permite cálculos más eficaces a menor costo.

El anexo A de las NTC-DS indica que para el diseño sísmico de estructuras ubicadas en las zonas II y III, será permisible tomar en cuenta explícitamente los **efectos de sitio** y **de IDSE**. Por ello, la configuración de los **espectros de diseño del anexo A** dependen del periodo dominante del terreno (T_s) y se permiten valores de la razón de amortiguamiento mayores del tradicional ($\xi > 5\%$).

Para utilizar los espectros del anexo A de las NTC-DS se debe utilizar las propiedades del **oscilador de reemplazo sobre base rígida**, caracterizado por los parámetros $\tilde{\xi}$, \tilde{T} y \tilde{Q} definidos en el **CAPÍTULO 6** de este trabajo. Los factores que modifican las ordenadas de estos espectros son el factor de comportamiento sísmico Q y \tilde{Q} , el factor de reducción (Q' y \tilde{Q}') y el factor de sobrerresistencia (R).

Los **espectros envolventes de respuesta sísmica normalizados** del doctor Leonardo Zeevaert fueron calculados a partir de los espectros envolventes de pseudo-aceleración registrados durante los sismos del 11 y 19 de mayo de 1962 sobre la superficie del terreno en el parque de la alameda central, que corresponden a la Zona IIIb según las NTC-DS.

Estos espectros normalizados tienen por abscisa la relación entre el periodo fundamental de la estructura y del terreno (T/T_s), mientras que sus ordenadas representan el **factor de amplificación** del terreno ($f_a = S_a/a_{max}$); por lo que se pueden escalar en función de la aceleración máxima del terreno —que depende del periodo de retorno del sismo máximo que se contemple y de la zonificación sísmica— para representar la amplificación sísmica de otras zonas de la cuenca del valle de México, siempre que el primer y segundo periodos de vibración del suelo tengan entre sí una relación aproximadamente igual a $T_{s2} / T_{s1} = 0.327$. Además, los espectros están graficados para diferentes valores de la razón de amortiguamiento.

Últimamente, como los espectros de Zeevaert permiten tener en cuenta tanto el periodo fundamental del terreno, como el amortiguamiento del conjunto cimentación-estructura, distinto del convencional de 5%, es ideal para admitir explícitamente tanto los **efectos de sitio** como los **efectos de IDSE**, en la misma forma en que los toma el anexo A de las NTC-DS. Por lo tanto, la diferencia entre el método de Zeevaert y el método del anexo A se limitará a la forma en que se

define el manto de suelo homogéneo equivalente y el espectro de diseño que se utiliza. Puesto que en este trabajo, los dos se basan en el mismo modelo del **oscilador de reemplazo elastoplástico de 1GDL**.

Los espectros envolventes de respuesta normalizados del doctor Leonardo Zeevaert, se obtuvieron únicamente para un sitio excitado por dos eventos sísmicos de magnitud media; sin embargo, es posible que si se corrige su configuración, para distintas zonas y con una muestra representativa de eventos sísmicos suscitados en la región de estudio, pudieran representar de forma bastante precisa la respuesta estructural de la localidad, incluso tan bien como los espectros del anexo A.

Actualmente los **espectros de diseño oficiales**, son los del MDOC-DS y de las NTC-DS. Estas últimas son las de observación obligatoria en la CDMX, por lo que cualquier espectro que determine una respuesta mayor a la de las normas, dará un **diseño más conservador**, pero también más costoso, mientras que una respuesta menor, implicará una estructura más económica pero que **no cumple con los requisitos de seguridad estructural** estipulados por el RCDF.

CAPÍTULO 5

La **interacción dinámica suelo-estructura (IDSE)**, consiste en un conjunto de efectos cinemáticos e inerciales producidos en la estructura y el suelo, como resultado de la deformabilidad de éste ante las excitaciones sísmicas. La interacción modifica las propiedades dinámicas relevantes que tendría la estructura supuesta con base indeformable, así como las características del movimiento del suelo en la vecindad de la cimentación.

Tanto los efectos de IDSE como los de sitio son incitados por la flexibilidad del suelo; no obstante, los efectos de sitio se presentan independientemente de que exista una estructura sobre el terreno, mientras que los efectos de IDSE, como es de esperarse, sólo se presentan cuando existe una estructura desplantada en el terreno. Los efectos de IDSE se dividen a su vez en efectos de **interacción cinemática (KI)** e **interacción inercial (II)**.

Los **efectos de la KI** son causados por el contraste de rigidez en la interfaz suelo-cimentación, que modifica las características del movimiento en campo libre (**FFM**), calculado mediante el modelo unidimensional de propagación de ondas del **CAPÍTULO 3**. Este fenómeno es independiente de la masa del sistema suelo-cimentación-estructura y depende únicamente de sus propiedades geométricas y cinemáticas. Al movimiento modificado que actúa efectivamente sobre la estructura, se nombra movimiento de entrada en la base (**FIM**). En otras palabras, El efecto general de la KI es la transformación del FFM en el FIM. Este efecto se compone a su vez por el amortiguamiento de los componentes de alta frecuencia del FFM causado por el **prorrato de losa**, la disminución de las amplitudes del FFM y la aparición de un **componente de cabeceo** inducido por el fenómeno de **acoplamiento de los modos de vibrar** de la cimentación respecto a su base. Estos últimos dos efectos son directamente proporcionales a la profundidad de enterramiento.

El fenómeno de **KI nula** se presentaría en el caso hipotético de que la rigidez de la cimentación no interactuara con la del suelo que la rodea. Lo que podría ocurrir por ejemplo, si la cimentación se desplantara sobre el terreno y el FFM estuviera compuesto exclusivamente por ondas SH de propagación vertical.

Los **efectos de la II** son provocados por el comportamiento dinámico del sistema acoplado suelo-cimentación-estructura, así como por las fuerzas inerciales desarrolladas a causa de tal interacción. Por ende, están relacionados con la masa del edificio y con la masa del suelo circunvecino. Los efectos generales de la II son: el **incremento del periodo de vibración de la estructura**, causado por el aumento de los grados de libertad cinemáticos y, el **incremento del amortiguamiento** del sistema acoplado suelo-estructura, causado al reconocer el acoplamiento entre el amortiguamiento material de la estructura con su homólogo del suelo por un lado, y por otro, la admisión del amortiguamiento por radiación hacia afuera de la estructura. En todo caso, las propiedades inerciales y disipativas del sistema suelo-cimentación, provocan que la respuesta de la cimentación sea función de la frecuencia y que la amplitud de sus desplazamientos se incremente significativamente con respecto a los que se tendrían sobre base rígida.

El caso de **II nula** se da cuando la estructura se modela como si estuviera empotrada sobre una base rígida. Consecuentemente, las características dinámicas de la estructura y su respuesta a la excitación, son inherentes únicamente a esta misma.

El modelo que emplea el anexo A y el método de Zeevaert en el **CAPÍTULO 7** para admitir los efectos de IDSE, sólo considera los efectos de la II; mas no los de KI, puesto que se espera que estos últimos resulten en un FIM con una componente rotacional y otra de desplazamiento horizontal, que dará como resultado, en la mayoría de los casos, una respuesta estructural menos conservadora que la causada por el FFM, además de que admitir los efectos de la KI complicaría el proceso de cálculo de las acciones correspondientes.

Los **Enfoques** generales empleados comúnmente para realizar un análisis de IDSE, pueden ser clasificados en dos categorías: **métodos directos** y **Métodos indirectos o de subestructura**.

En el **método directo**, el volumen del suelo y la estructura, son ambos parte del mismo modelo; que se analiza en un solo paso, utilizando alguna técnica de discretización numérica. Este enfoque es válido tanto para análisis lineal como no lineal. Con esta técnica, los fenómenos asociados a la IDSE son considerados automáticamente en un solo paso. Este método puede ser, hablando en términos computacionales, muy oneroso. Además, para que los resultados del análisis sean significativos, se requiere una caracterización detallada de los depósitos del suelo, lo que vuelve indispensable ejecutar un bien elaborado grupo de estudios de campo y laboratorio para alimentar el modelo computacional.

La parte fundamental del modelado mediante el método directo es la introducción de un grupo de **fronteras adsorbentes artificiales**, que representen los límites del modelo para simular adecuadamente la radiación de energía en un medio continuo. Las fronteras más utilizadas en el análisis de elementos finitos se dividen en tres grupos: Fronteras elementales, Fronteras locales y Fronteras consistentes.

En el **método de la subestructura** o **método indirecto**, el problema de IDSE es resuelto descomponiendo el sistema completo en dos subsistemas cuya respuesta se determina de manera independiente. Separando así los efectos causados por la KI de los debidos a la II. Este método se basa en el teorema de superposición, por lo que el método se limita a sistemas lineales. Este método puede ser computacionalmente asequible y bastante flexible. Como no requiere una reaplicación de la totalidad de las etapas del procedimiento, es más fácil estudiar varias propuestas o realizarse modificaciones al proyecto ya analizado.

Tanto el método del anexo A como el método de Zeevaert, se basan en el "métodos de subestructura", para poder evaluar por separado los efectos de la II y de la KI, que por sustentarse en el principio de superposición de causas y efectos, sólo son factibles en el rango de comportamiento lineal del sistema; entonces, ninguno de los dos métodos considera efectos no lineales, a excepción de la **ductilidad del edificio**, que se admite mediante el artificio de sustituir la estructura de comportamiento elastoplástico, por una estructura asociada de comportamiento elástico, sujeta a cargas reducidas respecto a su valor elástico y desplazamientos iguales a los de la estructura elastoplástica original.

En el método de subestructura, la respuesta del sistema se ejecuta en tres pasos:

1. Resolver del problema de KI; es decir, transformar el FFM en el FIM
2. Calcular la matriz de impedancia dinámica
3. Evaluar la respuesta dinámica del sistema completo sujeto al FIM calculado en el paso (1), mediante la conexión del subsistema de la superestructura con el subsistema suelo-cimentación, representado por la matriz de impedancia dinámica dependiente de la frecuencia, calculada en el paso (2). Con esto se toma en cuenta la II.

La parte fundamental del modelado mediante el método indirecto es la determinación de las **funciones de impedancia dinámicas**. La determinación de tales funciones se hace bajo la hipótesis de respuesta lineal del suelo, cimentación rígida y carente de masa. Para cada grado de libertad, la impedancia o rigidez dinámica, se define como la razón entre la acción armónica (fuerza $p(t)$ o momento $M(t)$ aplicado) y el estado estacionario de la respuesta armónica (desplazamiento $u(t)$ o rotación $\theta(t)$ resultante) al centro de la base de la cimentación.

Estas funciones son complejas y dependen de la frecuencia de la excitación. Su parte real representa la rigidez del sistema y la parte compleja representa el amortiguamiento del sistema, según el **principio de correspondencia**. Físicamente, en el modelo, constituyen los resortes y amortiguadores cuyas constantes de rigidez y viscosidad son función de la frecuencia y son utilizados para representar la flexibilidad, inercia y amortiguamiento del suelo. En la **constante de rigidez del resorte**, se agrupan las propiedades de rigidez e inercia del suelo; entonces su dependencia de la frecuencia se debe a las propiedades de inercia, puesto que la rigidez del sistema es independiente de la frecuencia de excitación. Por su parte, la **constante del amortiguador viscoso**, representa el amortiguamiento por radiación que toma lugar si se admite la flexibilidad del suelo y depende de la frecuencia de excitación. Finalmente, el amortiguamiento material, de tipo histerético y por ende independiente de la frecuencia, influye tanto en la constante del resorte como en la constante del amortiguador, según la [Ec. 6.27](#).

Para cimentaciones someras o profundas, existen varios **métodos para obtener las funciones de impedancia dinámica**, como: Métodos analíticos basados en técnicas de transformación integral, Métodos basados en el modelado numérico avanzado, Métodos híbridos que combinan métodos analíticos y de elementos finitos, Uso de correlaciones empíricas desarrolladas en base a soluciones tanto aproximadas como rigurosas y en los resultados de análisis numéricos avanzados o Métodos simplificados, como el modelo de cono. De todos esos métodos, el más adecuado para evaluar las funciones de impedancia en un problema específico, será que mejor refleje la forma de la interfaz suelo-cimentación, El monto de enterramiento de la estructura, la naturaleza del perfil estratigráfico, la forma de vibrar y la frecuencia o frecuencias de excitación.

CAPÍTULO 6

El anexo A de las NTC-DS apareció por primera vez en la versión de las **normas de 1987**, su principal objetivo es admitir explícitamente los **efectos de la flexibilidad del suelo** en el diseño sismorresistente; es decir, los efectos de sitio y los de IDSE.

Como en las especificaciones del anexo A, se desprecian los efectos de la KI, el FIM se iguala al FFM. Por lo tanto, todos los efectos de la IDSE se relacionan con la II. Los efectos de la KI pueden considerarse implícitamente al permitir que el amortiguamiento efectivo sea sutilmente mayor que el calculado, logrando así el mismo efecto neto.

Cuando se consideran los efectos de la flexibilidad del suelo según el **procedimiento de las NTC-DS**, se realizan una serie de simplificaciones al sistema suelo-cimentación-estructura:

- El **depósito de suelo** estratificado se sustituye por un manto de suelo homogéneo equivalente. (En este trabajo se ocupan dos métodos para determinar las propiedades dinámicas de dicho depósito homogéneo: el método de Gómez y el método de Zeevaert). Esta simplificación permite calcular los espectros de diseño en función del periodo fundamental del depósito de suelo; con lo que se toman en consideración los efectos de sitio. (En este trabajo se emplean además dos espectros de diseño diferentes que toman en consideración el periodo fundamental del terreno: los del anexo A y los espectros envolventes normalizados de Zeevaert). Al mismo tiempo, con las propiedades mecánicas del depósito de suelo homogéneo equivalente, se calculan las funciones de impedancia que representan la flexibilidad del suelo. (Como el método de Zeevaert no cuenta con indicaciones para calcular las funciones de impedancia dinámica, en este trabajo son determinadas como se estipula en el anexo A de las NTC-DS, pero utilizando el método de Zeevaert para caracterizar al estrato de suelo homogéneo equivalente).
- La **cimentación** se sustituye por una cimentación circular equivalente, infinitamente rígida y carente de masa, con igual área para el modo de vibrar en translación horizontal e igual momento de inercia para el modo de vibrar en cabeceo. (Esta simplificación aplica para los dos métodos estudiados en este trabajo)
- La **superestructura** de MGDL se sustituye por un oscilador de 1GDL con masa y altura efectivas (m_e y H_e), calculadas como se estipula en el anexo A de las NTC-DS e igual periodo y amortiguamiento que la superestructura soportada en base rígida, vibrando en su modo fundamental. (Esta simplificación aplica para los dos métodos en estudio en este trabajo).

Estas simplificaciones, se justifican por las conclusiones del estudio paramétrico de (Avilés & Pérez-Rocha, 1996) y por simplicidad en el desarrollo de las fórmulas de diseño del anexo A de las NTC-DS. Así que al acoplar las funciones de impedancia, que representan físicamente los resortes y amortiguadores, con la cimentación circular equivalente y el oscilador de 1GDL que simboliza a la estructura vibrando en su modo fundamental sobre base rígida, se obtiene el **modelo acoplado de parámetros discretos simplificado** de la FIGURA 6.6. Este modelo cuenta con tres grados de libertad independientes, puesto que no considera el acoplamiento de los modos de vibrar de la cimentación (translación horizontal y cabeceo); esta simplificación es adecuada para cimentaciones someras.

Debido a que el amortiguamiento del suelo es por lo general mucho mayor que el de la estructura, el modelo acoplado resulta tener un **amortiguamiento no proporcional**, por lo que carece de **modos clásicos de vibración** y por ende, su respuesta no se puede evaluar mediante

superposición modal convencional. Por ello se recurre al uso de espectros de respuesta elásticos de campo libre, evaluados para el **modelo del oscilador de reemplazo de 1GDL** de la **FIGURA 6.5**, con periodo fundamental \tilde{T}_e y amortiguamiento $\tilde{\xi}_e$, tal que su respuesta resonante, se presente con la misma amplitud y a la misma frecuencia que la del sistema acoplado que representa. (Este modelo se ocupa al aplicar el método de Zeevaert y el método del anexo A de las NTC-DS.)

La frecuencia resonante del sistema acoplado no es un valor que se conozca a priori, por lo que se debe realizar un **proceso iterativo** para determinarlo, iniciando a partir de $\Omega = \omega_e$. Esto resulta en que las funciones de impedancia adquieren un valor fijo, lo cual se justifica porque así se obtiene un buen acuerdo entre la respuesta del sistema acoplado y la del oscilador de reemplazo, sobre un amplio intervalo de frecuencias a ambos lados de la resonante.

El modelo del oscilador de reemplazo es apropiado en la mayoría de los casos, pero se deben tener en cuenta algunas limitaciones:

- **Cuando el modo fundamental de la estructura dista mucho de parecer a una recta**, algunos modos superiores de vibrar pueden ser afectados significativamente por la IDSE, y su participación debería ser tomada en consideración.
- **Cuando el contraste de rigidez entre el suelo y la estructura es muy pronunciado**, el amortiguamiento del suelo está significativamente fuera de proporción con respecto al de la estructura. Por lo que su función de transferencia se aplana y ensancha, tornándose disímil a la de un oscilador de 1GDL sobre base rígida.

Las funciones de impedancia presentadas en el **APÉNDICE 0**, se desarrollaron bajo la hipótesis de que la cimentación del edificio es similar a un cajón o una losa de cimentación de área circular, infinitamente rígido y carente de masa; no obstante, se pueden admitir algunas consideraciones adicionales, que permitan adecuar los criterios de este método al estudio de estructuras soportadas por cimentaciones someras a base de zapatas aisladas o corridas, e incluso para analizar cimentaciones profundas a base de pilas o pilotes, en que se puede incluso admitir los efectos de grupo y otros efectos de la IDSE que son inherentes a este tipo de cimentaciones; sin embargo, en este trabajo únicamente se hace énfasis en el tipo de cimentación que se emplea en el desarrollo del ejemplo de aplicación del **CAPÍTULO 7**.

En la cuenca del valle de México, debido al gran contraste de rigidez entre el depósito de suelo blando y los depósitos rígidos que lo soportan, el error que se introduce al omitir el efecto de la deformabilidad de este en el cálculo de las **rigideces dinámicas**, es tan insignificante, que puede compensarse usando un amortiguamiento del suelo ligeramente mayor que su valor real. La rigidez dinámica del suelo así definida, está restringida a modelos elástico-lineales. No obstante, el suelo se comporta de manera no lineal, por lo que se deben estimar sus propiedades de rigidez y amortiguamiento mediante ensayos de campo y laboratorio, para el grado de deformaciones esperadas en campo libre. Las no linealidades debidas a la deformación inelástica se desprecian, porque para fines de diseño, se previene la aparición de este tipo de deformaciones en la interfaz suelo-cimentación, pues enunciarían una inclinación o desplome permanente de la estructura.

El análisis de estructuras para diseño sismorresistente se realiza linealmente; es decir, se admite el teorema de superposición. Sin embargo, se suele tomar en cuenta de manera explícita la ductilidad estructural, que es un efecto no lineal, por lo que se utiliza un **oscilador elástico**

asociado con la estructura inelástica, con el que se toman en cuenta los efectos no lineales. Si se ocupa este enfoque, las fuerzas elásticas calculadas en el oscilador elástico, se reducen (dividiéndolas entre el **factor de reducción por ductilidad** Q') y los desplazamientos calculados con las fuerzas reducidas resultantes, se incrementan (multiplicándolos por el **factor de comportamiento sísmico** Q). En otras palabras, se puede afirmar que la resistencia de un sistema se puede analizar elásticamente, con lo que se estaría admitiendo que la estructura es elástica y apenas se supera su resistencia última V_m ($\mu = 1$), tiene una falla frágil. O se puede analizar bajo el supuesto de que la estructura es elastoplástica y, una vez alcanzado su punto de fluencia, es capaz de deformarse inelásticamente de modo que su deformación última al momento de la falla es Q veces mayor que la deformación de fluencia; es decir, $U_m = Q \cdot U_y$. Esto significa que hay dos resistencias distintas que satisfacen la condición de soportar el sismo de diseño; aunque la segunda implica daño estructural. Ambas resistencias se relacionan entre sí mediante: V_y ($\mu = Q$) = $Q' \cdot V_m$ ($\mu = 1$)

El valor del **factor de comportamiento sísmico** Q , es una **constante intrínseca de la configuración estructural**; es decir, depende del material con que se construye, la configuración y distribución de sus elementos estructurales, las características de las uniones entre elementos estructurales, el procedimiento constructivo aplicado, etc. por lo tanto, no depende de las propiedades dinámicas de la estructura o las condiciones de apoyo de su base.

Para tomar en consideración la ductilidad de la estructura en el modelo del oscilador de reemplazo sobre base rígida, se utiliza un oscilador de reemplazo elastoplástico sobre base rígida, con una **ductilidad efectiva** \tilde{Q} , equivalente a la **ductilidad permisible** Q de la estructura sobre base rígida. Esta ductilidad efectiva representa un daño estructural semejante al que sufriría la estructura si no se consideraran los efectos de IDSE; sin embargo, cuando se utiliza el oscilador de reemplazo, se admite que parte de su flexibilidad representa la del suelo, el cual, forzosamente debe mantenerse en el rango elástico. En consecuencia, el factor de ductilidad \tilde{Q} , admite que el comportamiento no lineal es causado únicamente por la estructura sin que el suelo tome deformaciones inelásticas; en otras palabras, la capacidad dúctil de la estructura, se mantiene constante, independientemente de los efectos de la IDSE y efectos de sitio.

Puesto que $\tilde{Q} < Q$, se puede pensar en la aparición de un daño estructural menor debido a los efectos de IDSE; sin embargo, según se desprende de la [Ec. 6.38](#), no es así, pues ambas ductilidades implican un nivel de daño exactamente igual, ya que se acepta que la deformación plástica que el oscilador de reemplazo inelástico acumula durante los ciclos de histéresis, es similar a la de la estructura inelástica supuesta sobre base rígida [Ec. 6.38](#).

En contraste, la reducción de la demanda de resistencia Q' , sí se ve afectada por la flexibilidad del suelo, pero no por los efectos de IDSE. Por esta razón, la fórmula para la reducción por ductilidad aplicada a los espectros de diseño del anexo A de las NTC-DS, es la misma cuando sólo se consideran los efectos de sitio, que cuando se consideran además los efectos de IDSE. Con la distinción de que cuando se consideran únicamente efectos de sitio, se admite la ductilidad Q , porque se analiza la estructura supuesta sobre base rígida y el factor de reducción es Q' ; pero cuando se toman en cuenta los efectos de IDSE, se utiliza la ductilidad \tilde{Q} , porque se analiza el oscilador de reemplazo y el factor de reducción es \tilde{Q}' .

Las implicaciones de la admisión de los efectos de la ductilidad en el contexto del oscilador de reemplazo, son influenciados, en orden de importancia por: La relación de esbeltez de la estructura, La rigidez relativa entre el suelo y la estructura, el enterramiento relativo de la cimentación y la profundidad relativa del estrato. Se pueden presentar tres casos distintos en función de la relación entre el periodo de la estructura soportada sobre base rígida y el periodo del suelo que la subyace: Si $(T_e < T_s)$ entonces: $(\tilde{V}_y > V_y)$, Si $(T_e < T_s)$, entonces $(\tilde{V}_y < V_y)$ y si $(T_e/T_s > 2)$, entonces $(\tilde{V}_y \approx V_y)$. Una de las condiciones para determinar el factor de comportamiento sísmico efectivo \tilde{Q} , $\tilde{V}_y = V_y$, así que la modificación de la resistencia al considerar la flexibilidad del suelo, está relacionada con el cambio del factor de reducción sísmica \tilde{Q}' y no con la disminución del factor de comportamiento sísmico.

Una vez determinado el valor del factor de reducción, las deformaciones calculadas por efectos de la ductilidad estructural, se determinan igual, ya sea que se admita o no los efectos de IDSE, multiplicando los valores de desplazamiento calculados para la resistencia reducida, por el valor de ductilidad que le corresponde según sea el caso (Q o \tilde{Q}').

La correlación entre S_d y \tilde{S}_d obedece a que según la FIGURA 6.11, la equivalencia entre el oscilador de reemplazo inelástico y la estructura inelástica sobre base rígida, se sostiene para la resistencia de fluencia $V_y = \tilde{V}_y$ y la deformación plástica $(U_m - U_y) = (\tilde{U}_m - \tilde{U}_y)$, pero no para la deformación de fluencia $U_y \neq \tilde{U}_y$ y, entonces tampoco para la deformación máxima $(U_m = S_d) \neq (\tilde{S}_d = \tilde{U}_m)$. Puesto que la flexibilidad del oscilador de reemplazo inelástico refleja la rigidez en serie del suelo y de la estructura, la deformación total del oscilador de reemplazo incluye los componentes de deformación que se desarrollan en la estructura, más los desarrollados en el suelo.

Los efectos combinados del alargamiento del periodo estructural $\tilde{T}_e > T_e$, el aumento del amortiguamiento $\tilde{\xi}_e > \xi_e$ y la reducción de la ductilidad $\tilde{Q} < Q$, harán que la respuesta de la edificación considerando IDSE sea menor o mayor que su valor de base rígida, dependiendo de las características de la excitación sísmica y del sistema acoplado. Pero siempre se traduce en el incremento de la deformación estructural, independientemente de la región del espectro donde caiga el periodo de la estructura ($\tilde{S}_d > S_d$).

La interacción resulta ser desfavorable cuando el periodo de la estructura es menor que el periodo del sitio $T_e < T_s$; en caso contrario, las estructuras se benefician de ella, especialmente cuando se considera el comportamiento estructural elástico.

Como la incursión de la estructura en su rango inelástico (dúctil) durante un evento sísmico extremo implica daño estructural y deformaciones importantes de la estructura, esta debe ser revisada para evitar que la falla de sus elementos o los de la cimentación sea de tipo frágil.

Los desplazamientos inelásticos serán menores que los elásticos en el intervalo de periodos naturales donde Q' es mayor que Q , como se desprende de la Ec. 6.44. La IDSE reduce los desplazamientos en ambos sistemas, así como la diferencia entre ellos, al grado de llegar a ser casi iguales en el caso de mayor interacción (cuando $Q' = Q$).

Aunque Zeevaert no explica cómo tomar en cuenta los efectos de la ductilidad estructural, dado que las alteraciones al espectro elástico en el método del Anexo A por tales efectos, provienen de

la modificación del modelo del oscilador de reemplazo, estos cambios son enteramente compatibles con la teoría de Zeevaert, por lo que se permite la aplicación de las mismas a los espectros elásticos de este método.

El factor de interacción se calcula como se especifica en el anexo A de las NTC-DS. En dicho método, se calcula un cortante basal para la estructura supuesta sobre base rígida (V_B), considerando los efectos de sitio, pero no los de IDSE y otro cortante basal, para el oscilador de reemplazo soportado sobre base rígida que considere ambos efectos (\widetilde{V}_B). Estas fuerzas cortantes admiten sendos factores de reducción por ductilidad (Q' y \widetilde{Q}') y la reducción por sobre resistencia. En el **CAPÍTULO 7** de este trabajo, se ocupan dos gráficas del espectro de diseño, porque una representa la respuesta de la estructura supuesta sobre base rígida y otra la del oscilador de reemplazo. Las diferencias entre ellas, se deben a que en la gráfica 2 el factor de amortiguamiento suplementario es diferente de la unidad, cuando el amortiguamiento efectivo es diferente de 0.05 ($\beta \neq 1, \xi > 5\%$). También a que $Q \neq \widetilde{Q}$. Estas diferencias se admiten también cuando se utiliza el oscilador de reemplazo en el método de Zeevaert. El factor de interacción afecta cualquier respuesta estructural calculada para la estructura sobre base rígida, y así determina la respuesta en el oscilador de reemplazo que considera los efectos de IDSE.

El cortante basal del oscilador de reemplazo puede ser mayor o menor que el de la misma estructura considerando únicamente los efectos de sitio, pero tal alteración en valor del cortante basal está limitada por dos restricciones prescritas en las normas: una dice que el valor del cortante basal del oscilador de reemplazo debe restringirse a $\pm 25\%$ del valor del cortante de la estructura sobre base rígida. Y la otra dice que el valor del amortiguamiento efectivo no debe ser menor que el de la estructura sobre base rígida, con lo que se impide que la ordenada espectral del oscilador de reemplazo sea mayor que su valor para la estructura supuesta sobre base rígida.

CAPÍTULO 7

En el ejercicio de aplicación del **CAPÍTULO 7** se estudian tres métodos para determinar las ordenadas espectrales y las respectivas fuerzas de cortante basal y de entrepiso debidas a una sola componente ortogonal, que serán las variables de control. Los tres son métodos estáticos, por lo que la diferencia entre ellos es que el **método del anexo A (MA)** y el **método de Zeevaert (MZ)**, representan a la estructura vibrando en su modo fundamental, pero tomando en cuenta la modificación a sus características dinámicas, a causa de la flexibilidad del suelo; es decir, consideran explícitamente los efectos de sitio y los de IDSE. Mientras que el **método estático (ME)**, solo considera los efectos de sitio de manera implícita; por lo que en este caso funge como experimento testigo.

Las modificación en las características dinámicas que se incluyen en el modelo del oscilador de reemplazo que se utiliza en los métodos MA y MZ, con respecto a los que tendría la estructura supuesta sobre base rígida del ME, son: el incremento del periodo efectivo de vibración de la estructura ($T_e < \widetilde{T}_e$) y del amortiguamiento efectivo ($\xi_e < \widetilde{\xi}_e$), la reducción del valor del factor de comportamiento sísmico ($Q < \widetilde{Q}$), así como la modificación de los valores del factor de reducción por ductilidad de las fuerzas cortantes ($Q' \neq \widetilde{Q}'$), que sucede por efectos de sitio, independientemente de que se admitan o no los efectos de la IDSE, cuando el periodo de la estructura es parecido al del sitio ($T_e / T_s < 2$).

El manto de suelo homogéneo se calcula para el MZ, por el método del mismo autor, mientras que para el MA, se utiliza el método de Gómez. El ME, al no considerar la flexibilidad del suelo, no requiere la determinación de un estrato de suelo equivalente y se limita considerar los efectos de sitio a través de lo prescrito en la tabla 3.1 de las NTC-DS.

En la **ILUSTRACIÓN 7-2** se advierte que para fines de diseño, las modificaciones del periodo fundamental y la celeridad de propagación de ondas S, del manto de suelo homogéneo equivalente calculado según el MZ y el MA, es poco significativa. Como estas dos características tienen una estrecha relación con las magnitudes de las funciones de impedancia, que a su vez rigen la modificación del periodo y amortiguamiento efectivos del oscilador de reemplazo, se espera que la modificación de las variables de control calculadas en ambos métodos, se relacionen principalmente con la forma del espectro de diseño que se ocupa en cada método. Esto se corresponde con los resultados de la **ILUSTRACIÓN 7-6**, donde se aprecia que para los métodos MA y MZ, El periodo y amortiguamiento efectivos son tan similares entre sí que no se distingue su diferencia.

En este trabajo, los parámetros adimensionales con los que se evalúa la influencia de los efectos de la IDSE sobre la estructura, se muestran en la tabla "parámetros adimensionales del sistema" del **APÉNDICE A.2** para el MA, pero dado que las características del modelo son prácticamente iguales para los métodos MA y MZ, estos valores son representativos de ambos métodos. De ahí se concluye que: aunque la rigidez relativa entre el suelo y la estructura es tal que los efectos de IDSE se vuelven considerables, la estructura, en la dirección de análisis, es muy cuadrada y la profundidad relativa del depósito de suelo blando es semejante a la unidad. Esto lleva a pensar que aunque la rigidez del suelo es muy parecida a la de la estructura, ésta no se verá tan afectada por los efectos de IDSE, pues debido a su geometría es poco susceptible a tales efectos.

Cuando se utiliza el **modelo BR-E** se admite el comportamiento elástico de la estructura y los efectos de sitio. El método ME los considera implícitamente según la zonificación de la cuenca del valle de México, mientras que los métodos MZ y MA admiten estos efectos explícitamente al reconocer la influencia del periodo fundamental del sitio en el cálculo de la ordenada espectral. En este caso no se reconocería la ductilidad de la estructura, por lo que la resistencia requerida para resistir las acciones que se determinan, resulta ser muy alta, difícil de alcanzar y antieconómica. Como en realidad los tres métodos en estudio son métodos estáticos, la influencia de los modos superiores de vibración se admite implícitamente al considerar el peso total W_0 de la estructura en vez del peso efectivo W_e .

Cuando se utiliza el **modelo BR-D**, la ductilidad admisible Q , por ser una variable intrínseca de la estructuración, es la misma para los tres métodos en estudio, incluso cuando se sabe que el MZ no especifica una forma de tomar en consideración la ductilidad estructural. Además, en los métodos MA y MZ, el factor de reducción por comportamiento dúctil Q' es afectado por la relación entre el periodo de la estructura y el del sitio (T_e/T_s). Como en el caso de estudio el periodo de la estructura resulta menor que el del terreno en ambos métodos, entonces el factor de reducción por ductilidad decrece con respecto al valor que tendría si se aplicara la regla de igual desplazamiento; por lo que despreciar este efecto, es anticonservador. Las ordenadas reducidas por este método son las que se determinan de la

gráfica 1 del APÉNDICE A.10 para el MA y APÉNDICE A.13 para el MZ, con las que se determina el cortante basal V_B .

Cuando se utiliza el **modelo IDSE-E** se admiten los efectos de sitio y los de la IDSE, por lo que se superan los alcances del ME, pero aún no se toma en cuenta la ductilidad estructural. Este modelo representa el oscilador de reemplazo sobre base rígida, con peso, altura, periodo y amortiguamiento efectivos. Como consecuencia de la hipótesis de comportamiento elástico, al igual que el modelo BR-E, el cortante basal calculado es extremadamente grande, aunque el valor de las ordenadas espectrales es menor en el modelo IDSE-E que en el modelo BR-E, debido principalmente al incremento en el amortiguamiento; aunque para el ejercicio de aplicación, el MZ tiene una reducción adicional debido a que el periodo efectivo supera la meseta espectral, lo que provoca que las ordenadas espectrales difieran entre sí de manera más acentuada que en el método MA.

En ambos métodos (el MA y el MZ), el periodo efectivo es mayor que el periodo de los modos individuales del sistema acoplado, mientras que el amortiguamiento efectivo es aproximadamente un promedio de los modos individuales. Además, se observa que entre mayor es el periodo de uno de los modos, mayor será su rigidez y menor su grado de amortiguamiento.

En el MZ, los efectos de IDSE eran considerados, combinando el periodo de vibración de la estructura en los modos de deformación estructural y cabeceo, además de considerar el estrato de suelo heterogéneo real. Estos se calculaban mediante una aproximación estática del método de interacción estática suelo-estructura (IESE) desarrollado por Zeevaert. La complejidad de tal método en la obtención del periodo de la estructura acoplada, no se justifica; puesto que no considera el modo de desplazamiento horizontal, ni los modos de acoplamiento cruzado, además, para fines prácticos se vuelve muy engorroso. Es por ello que en éste trabajo, se propone en su lugar, utilizar el oscilador de reemplazo del MA, para obtener el periodo y amortiguamiento efectivo, a través de las funciones de impedancia. El MZ no especifica la forma en que se selecciona el grado de amortiguamiento apropiado para el modelo de la estructura, por lo que se optará por utilizar la fórmula Ec. 6.22 en el cálculo del amortiguamiento efectivo.

Al considerar el **modelo IDSE-D** se toma en cuenta la ductilidad estructural y los efectos de la flexibilidad del suelo (efectos de sitio y de IDSE).

La superposición de los espectros de los modelos BR-D e IDSE-D para los métodos MA y MZ observada en el APÉNDICE A.15, se debe a que las ordenadas del modelo BR-E se afectan por un factor de reducción por ductilidad menor que el esperado por la regla de igual desplazamiento; es decir $Q' < Q$, mientras que el modelo IDSE-E, primero percibe una gran disminución al considerar el amortiguamiento efectivo, y luego sufre una disminución menor a la esperada en base rígida, al tomar en cuenta el valor de la ductilidad efectiva; es decir: $\bar{Q}' < \bar{Q} < Q$. La diferencia de las ordenadas espectrales de los modelos BR-D e IDSE-D, para el MZ es ligeramente más pronunciada porque el periodo efectivo del modelo IDSE-D, logra superar la meseta espectral.

Es curioso observar que a final de cuentas, la meseta espectral de los modelos BR-D e IDSE-D, de los métodos MA y MZ, tienen ordenadas espectrales muy similares entre sí, que también

son muy parecidas a las del modelo BR-D del método ME; es decir, como el periodo efectivo se mantiene en el mismo orden de magnitud en todos los casos, hubiera sido más fácil emplear desde un principio el método estático, que para fines de ingeniería, resultaría ser un diseño suficientemente seguro y en cumplimiento con las disposiciones oficiales. Este punto se puede explicar porque como se ha recalado, la influencia de los efectos de IDSE, está relacionada con la rigidez relativa entre el suelo y la estructura, pero no es el único factor que determina la importancia de estos en el diseño. En el caso de estudio, la forma cuadrada de la estructura y la profundidad relativa del depósito blando de suelo que tiende a la unidad, terminan por suprimir la importancia de los efectos de IDSE.

La diferencia observada en las variables de control (cortante basal y fuerzas de entrepiso), presentada en la **ILUSTRACIÓN 7-10**, indica que el MZ resulta en las acciones modificadas más bajas (menores que las del ME) y las acciones modificadas según el MA son las más altas (superiores a las del ME) de modo que aunque la variación es pequeña entre todos ellos, desprestigiar los efectos de la IDSE, puede estar ligeramente del lado de la inseguridad, según los resultados del MA, por otra parte, dado que el MZ no es un método oficial, las acciones de diseño calculadas para este método, se quedarían cortas en cuanto a la seguridad estructural que proporcionan, aunque si se recalibra la configuración de los espectros del MZ, posiblemente llegaría a representar una opción de diseño válida.

En este ejemplo se consideró el lado largo de la estructura; pero se puede esperar que los efectos de IDSE serían más importantes en la dirección ortogonal, puesto que es más esbelta y en consecuencia menos rígida, a la vez que el momento de inercia de su base disminuye.

Todo esto lleva a reconocer la importancia del criterio ingenieril, puesto que los resultados del ejercicio de aplicación demuestran que aún en suelo blando, no siempre los efectos de IDSE son significativos, y no basta con calcular la rigidez relativa del suelo y la estructura para determinar a priori si los efectos de IDSE influirán en el diseño. Además, admitir los efectos de la IDSE redundaría en la aplicación de estudios geofísicos de las propiedades dinámicas del suelo que tornaría el diseño, en un proceso muy oneroso, que no se justificaría para estructuras comunes (del grupo B). Por eso el reglamento, además del método estático y el dinámico, admite un método de análisis sísmico simplificado que resulta suficiente para la estimación de la seguridad estructural apropiada para edificios simples a base de muros de cortante.

APÉNDICE A.1.5

Aunque las especificaciones de las NTC-DS se han modificado, la importancia de este trabajo sigue vigente, puesto que las definiciones y conceptos permanecen independientemente de cualquier reforma legal, además se presenta un ejemplo sencillo y académicamente útil para practicar y explicar de forma intuitiva los conceptos tocantes a la elaboración de espectros de diseño en función del periodo fundamental del sitio (como se implementa en las nuevas NTC-DS) y las implicaciones del uso del oscilador de reemplazo en la determinación de acciones sísmicas que tomen en consideración los efectos de la IDSE. Asimismo, la utilización de espectros de diseño en función del periodo fundamental del terreno es importante en zonas como la del valle de México, donde los efectos de sitio son significativos, y en que debido a la extracción de agua del subsuelo, las propiedades dinámicas de los estratos blandos cambian con el tiempo a medida que se consolidan los estratos arcillosos.



Apéndices

A.1 Discusiones

A.1.1 Sistemas de Múltiples Grados de Libertad (MGDL)

En la mayoría de los sistemas reales, el movimiento de las masas no puede ser expresado por una sola variable y deben visualizarse como sistemas de múltiples grados de libertad (MGDL). En varios aspectos, la respuesta de sistemas de MGDL es similar a la respuesta para el caso de sistemas de 1GDL, por lo que los procedimientos para analizarlos también son análogos a los del caso de sistemas de 1GDL. Aunque los grados de libertad adicionales complican el álgebra, los procedimientos son conceptualmente muy similares. De hecho, un método bastante útil para la determinación de la respuesta de sistemas lineales de MGDL (Método modal espectral), permite que su respuesta sea calculada como la suma de las respuestas individuales de una serie de sistemas de 1GDL (Kramer, 1996).

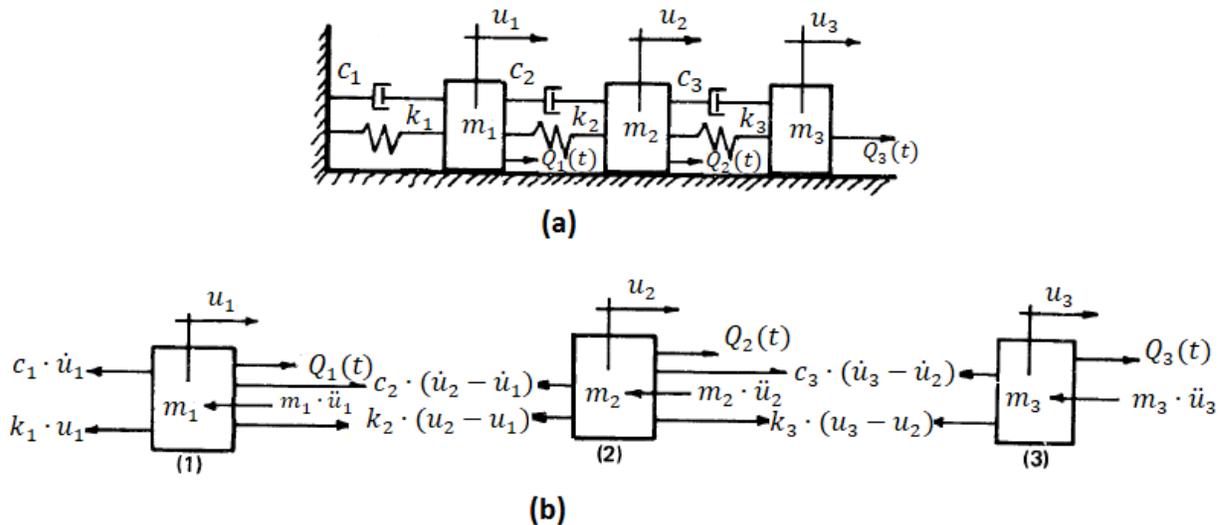


Figura A.1: sistema de tres grados de libertad (a). DCL de cada una de las masas (b). (Colindares, 1983)

En la evaluación de la respuesta de un sistema de MGDL, el equilibrio dinámico de todas las masas se asegura simultáneamente. Para la estructura idealizada de tres masas interconectadas, de la FIGURA A.1A, que cuenta con 3-GDL (uno por cada una de las masas en translación horizontal), para cada una de ellas, las fuerzas externas aplicadas deben ser balanceadas por las fuerzas inerciales, cinemáticas y elásticas:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1(t) + c_1 \cdot \dot{u}_1(t)k_1 - c_2 \cdot [{}_1\Delta_2\dot{u}(t)] - k_2 \cdot [{}_1\Delta_2u(t)] \\ = Q_1(t) \xrightarrow{\text{desarrollando}}$$

Ec. A.1

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1(t) + c_1 \cdot \dot{u}_1(t)k_1 - c_2 \cdot [\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)] - k_2 \cdot [u_2 - u_1] \\ = Q_1(t)$$

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2(t) + c_2 \cdot [{}_1\Delta_2 \dot{u}(t)] + k_2 \cdot [{}_1\Delta_2 u(t)] - c_3 \cdot [{}_2\Delta_3 \dot{u}(t)] - k_3 \cdot [{}_2\Delta_3 u(t)] = Q_2(t) \xrightarrow{\text{desarrollando}}$$

Ec. A.2

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2(t) + c_2 \cdot [\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)] + k_2 \cdot [u_2 - u_1] - c_3 \cdot [\dot{u}_3 - \dot{u}_2] - k_3 \cdot [u_3(t) - u_2(t)] = Q_2(t)$$

$$m_3 \cdot \ddot{u}_3(t) + c_3 \cdot {}_2\Delta_3 \dot{u}(t) + k_3 \cdot {}_2\Delta_3 u(t) = Q_3(t) \xrightarrow{\text{desarrollando}}$$

Ec. A.3

$$m_3 \cdot \ddot{u}_3(t) + c_3 \cdot [\dot{u}_3(t) - \dot{u}_2] + k_3 \cdot [u_3(t) - u_2] = Q_3(t)$$

Reacomodando las [EC. A.1](#), [EC. A.2](#) y [EC. A.3](#), se forman las ecuaciones de equilibrio dinámico para cada masa, ([FIGURA A.1B](#)) quedando como:

$$m_1 \cdot \ddot{u}_1(t) + (c_1 + c_2) \cdot \dot{u}_1(t) + (k_1 + k_2) \cdot u_1(t) - c_2 \cdot \dot{u}_2(t) - k_2 \cdot u_2(t) = Q_1(t)$$

Ec. A.4: equilibrio masa 1

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2(t) + (c_2 + c_3) \cdot \dot{u}_2(t) + (k_2 + k_3) \cdot u_2(t) - c_3 \cdot \dot{u}_3 - k_2 \cdot u_1 - c_2 \cdot \dot{u}_1 - k_3 \cdot u_3 = Q_2(t)$$

Ec. A.5: equilibrio masa 2

$$m_3 \cdot \ddot{u}_3(t) + c_3 \cdot \dot{u}_3(t) + k_3 \cdot u_3(t) - c_3 \cdot \dot{u}_2(t) - k_3 \cdot u_2(t) = Q_3(t)$$

Ec. A.6: equilibrio masa 3

Este es un sistema de tres ecuaciones que se puede disponer en una tabla como la que se muestra a continuación para formar un arreglo matricial:

	aceleración			velocidad			desplazamiento		
Subíndice:	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
Ec.1	m_1	0	0	$c_1 + c_2$	$-c_2$	0	$k_1 + k_2$	$-k_2$	0
Ec.2	0	m_2	0	$-c_2$	$c_2 + c_3$	$-c_3$	$-k_2$	$k_2 + k_3$	$-k_3$
Ec. 3	0	0	m_3	0	$-c_3$	c_3	0	$-k_3$	k_3

Es decir:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \dot{u}_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(t) \\ Q_2(t) \\ Q_3(t) \end{bmatrix}$$

En notación matricial se escribe como:

$$M \cdot \ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + K \cdot U(t) = Q_0(t)$$

Ec. A.7

Los sistemas de MGDL también responden al movimiento de la base, en cuyo caso la ecuación matricial es fácilmente desarrollada de forma análoga al [SUBCAPÍTULO 1.3.7](#).

A.1.2 Notación de Esfuerzos

El esfuerzo en un punto sobre un plano cualquiera de un sólido, no actúa realmente de forma normal a ese plano, sino que cuenta con dos componentes, la normal y la cortante. Considerando un pequeño elemento cúbico de volumen dV , con un vértice justo en el origen de un sistema cartesiano ([FIGURA A.2](#)), actuarán sobre sus caras un total de nueve componentes de esfuerzo ([Kramer, 1996](#)).

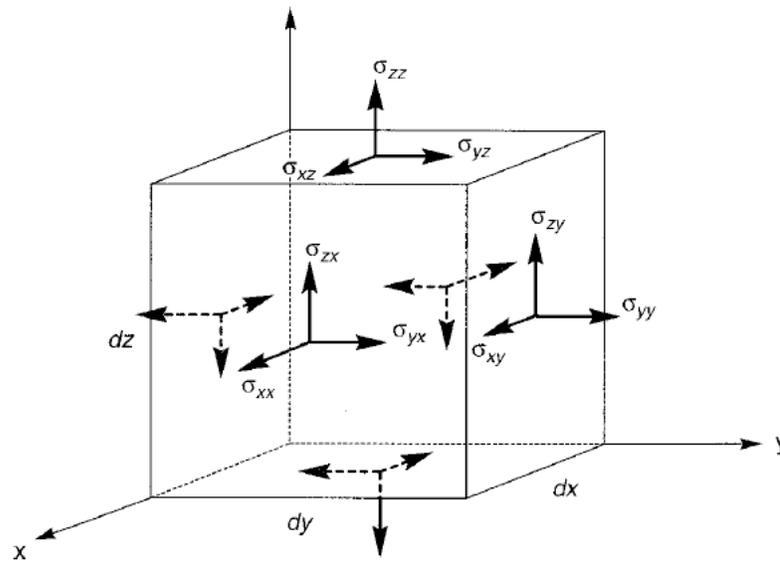


Figura A.2: Estado de esfuerzos sobre un sólido en equilibrio de volumen $dV=dx \cdot dy \cdot dz$. (Kramer, 1996).

Donde las componentes de esfuerzo se denotan como se en la [FIGURA A.2](#), siendo *la primera y segunda letra del subíndice, la dirección del esfuerzo mismo y el eje normal al plano sobre el cual actúa*. Así, σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{zz} , son esfuerzos normales, mientras que las otras 6 componentes representan esfuerzos tangenciales (cortantes). Por equilibrio de momentos, —condición necesaria para que el elemento de la [FIGURA A.2](#) esté en equilibrio—, se requiere que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Lo cual significa que sólo se requieren seis componentes independientes de esfuerzo para definir el estado (Tensor) de esfuerzos de un elemento que forma parte de un medio continuo.

A.1.3 Notación de Deformaciones

El elemento infinitesimal de la [FIGURA A.2](#) de la sección anterior, puede ser deformado de tres maneras básicas, a partir del desplazamiento de alguno o varios de los vértices que la componen: puede desplazarse de su posición original, puede rotar respecto a su posición original o puede ser

distorsionado a partir de su forma original. A partir de la proyección bidimensional mostrada en la FIGURA A.3, se pueden definir, en primera, las **deformaciones unitarias normales o longitudinales** como:

$$\varepsilon_{xx} = du/dx \quad \varepsilon_{yy} = dv/dy \quad \varepsilon_{zz} = dw/dz \quad \text{Ec. A.8}$$

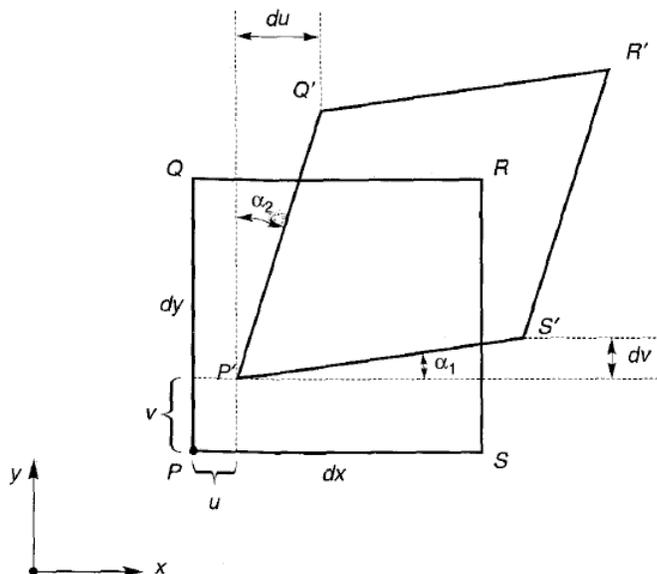


Figura A.3: Elemento infinitesimal cuadrado de área $dA=dx \cdot dy$ sujeto a deformación plana. (Kramer, 1996).

En segunda, las **deformaciones cortantes** como: $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \alpha_1 + \alpha_2$; para pequeñas distorsiones, los ángulos pueden ser tomados iguales a sus tangentes, por lo tanto la relación entre deformación cortante y su desplazamiento se toman como:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= dv/dx + du/dy & \gamma_{xz} = \gamma_{zx} &= dw/dx + du/dz \\ \gamma_{zy} = \gamma_{yz} &= dv/dz + dw/dy \end{aligned} \quad \text{Ec. A.9}$$

En tercera, la **rotación con respecto al eje normal al plano** (eje z) está dada en la FIGURA A.3 por la relación: $\Omega_z = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$. Por lo tanto, las relaciones de rotación con respecto a los ejes x, y, z, están dadas para deformaciones pequeñas como:

$$\Omega_x = \left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz} \right) / 2 \quad \Omega_y = \left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} \right) / 2 \quad \Omega_z = \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \right) / 2 \quad \text{Ec. A.10}$$

Adicionalmente, se define la **deformación volumétrica**, como la suma de las deformaciones unitarias normales a cada uno de los ejes como: $\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$, en otras palabras:

$$\varepsilon_v = du/dx + dv/dy + dw/dz \quad \text{Ec. A.11}$$

A.1.4 Funciones de impedancia del anexo A de las NTC-DS2004

CIMENTACIONES SOMERAS	$K_m = K_m^o (k_m - 2\zeta \eta_m c_m)$ y $C_m = K_m^o (\eta_m c_m + 2\zeta k_m)$ / ω , $m = x, y, r$ $\omega =$ frecuencia de interés	Parámetros de frecuencia: $\eta_m = \omega R_m / V_s$; donde $V_s = 4H_s / T_s$ y $R_v = R_x$ $\eta_s = \pi R_x / 2H_s$ $\eta_p = \sqrt{2(1-\nu)} / (1-2\nu) \pi R_r / 2H_s$	Coeficiente de Amortiguamiento
Modo de Vibración	Rigidez Estática	Coeficiente de Rigidez	Coeficiente de Amortiguamiento
Horizontal	$K_x^o = \frac{8 G R_x}{2-\nu} \left(1 + \frac{R_x}{2 H_s} \right) \left(1 + \frac{2 D}{3 R_x} \right) \left(1 + \frac{5 D}{4 H_s} \right)$	$k_x = 1$	$c_x = \frac{0.65 \zeta \eta_{xs}}{1 - (1-2\zeta) \eta_{xs}^2}$; si $\eta_{xs} = \eta_r / \eta_s \leq 1$ $c_x = 0.576$; si $\eta_{xs} = \eta_r / \eta_s > 1$
Vertical	$K_y^o = \frac{4 G R_y}{1-\nu} \left(1 + 1.28 \frac{R_y}{H} \right) \left(1 + 0.5 \frac{D}{R_y} \right) \left[1 + \left(0.85 - 0.28 \frac{D}{R_y} \right) \frac{D/H}{1-D/H} \right]$	$k_y = 1$	$c_y = 0$; si $\eta_v < \eta_p$ $c_y = 0.85 \frac{1 + 1.85(1-\nu) D/R_y}{1 + 0.5 D/R_y}$; si $\eta_v \geq \eta_p$
Cabeceo	$K_r^o = \frac{8 G R_r^3}{3(1-\nu)} \left(1 + \frac{R_r}{6 H_s} \right) \left(1 + \frac{2 D}{R_r} \right) \left(1 + 0.71 \frac{D}{H_s} \right)$	$k_r = 1 - 0.2 \eta_r$	$c_r = \frac{0.5 \zeta \eta_{rp}}{1 - (1-2\zeta) \eta_{rp}^2}$; si $\eta_{rp} = \eta_r / \eta_p \leq 1$ $c_r = 0.3 \eta_r^2 / (1 + \eta_r^2)$; si $\eta_{rp} = \eta_r / \eta_p > 1$
CIMENTACIONES CON PILOTES	$K_m = K_m^o k_m$ y $C_m = 2K_m^o c_m / \omega$; $m = x, y$ $\omega =$ frecuencia de interés	Parámetros de frecuencia: $\eta = \omega d / V_s$; donde $V_s = 4 H_s / T_s$ $\eta_s = \pi d / 2 H_s$ $\eta_p = 3.4 \eta_s / \pi (1-\nu)$	Coeficiente de Amortiguamiento
Modo de Vibración	Rigidez Estática	Coeficiente de Rigidez	Coeficiente de Amortiguamiento
Horizontal	$K_x^o = d E_s \left(\frac{E_p}{E_s} \right)^{0.21}$	$k_x = 1$	$c_x = 0.8 \zeta$; si $\eta \leq \eta_s$ $c_x = 0.8 \zeta + 0.175 (E_p/E_s)^{0.17}$; si $\eta > \eta_s$
Vertical	$K_y^o = 1.9 d E_s \left(\frac{L}{d} \right)^{0.67}$	$k_y = 1$; si $L/d < 15$ $k_y = 1 + \sqrt{\eta}$; si $L/d \geq 50$ Interpolar linealmente para $15 \leq L/d < 50$	$c_y = 0$; si $\eta \leq \eta_p$ $c_y = \frac{0.413 \left(\frac{L}{d} \right)^{0.33}}{1 + \nu} \left(1 - e^{-(E_p/E_s)(L/d)^2} \right)^{0.8} \eta$ Interpolar linealmente para $\eta_p < \eta \leq 1.5 \eta_p$

A.1.5 Comentarios sobre las NTC-DS-2017

Los reglamentos para el diseño de estructuras son generalmente documentos legales que tienen como función proteger a la sociedad contra el colapso o mal funcionamiento estructural de las construcciones, con un grado de protección congruente con las consecuencias de las posibles fallas y con el costo de incrementar la seguridad estructural. Los requisitos marcados por el RCDF y las NTC son circunstanciales y se mantienen en actualización constante con la finalidad de incluir los avances en el conocimiento de las estructuras y el surgimiento de nuevos materiales y nuevos procesos y modalidades en la construcción, así como de nuevas tecnologías computacionales para su análisis.

A raíz de la última modificación a las NTC-DS, algunos puntos del planteamiento y la elaboración de este trabajo y en especial del ejemplo de aplicación del capítulo 7 pueden estar fuera de vigencia. No obstante, siendo que este trabajo se inició cuando aún estaban en vigencia las NTC-DS-2004, se realiza una reflexión de las modificaciones más significativas contenidas en las NTC-DS-2017 que amplían a los alcances de las normas de diseño en general, y en particular, de las que pudieron influir sobre este trabajo. Se excluyen comentarios acerca de los efectos sísmicos que no se estudian en el ejemplo de aplicación del capítulo 7, como son: efectos bidireccionales, torsión sísmica, distorsiones de entrepiso, efectos de segundo orden y todos aquellos para los que se necesita información específica de la rigidez de entrepiso del edificio.

En la versión de las NTC-DS del 2017 se percibe que finalmente se admitió el uso generalizado de los recursos computacionales, que por su gran desarrollo se han convertido en una tecnología cotidiana y accesible, situación que, aunque hace una década ya se vislumbraba, aún no era suficientemente reconocida. Respecto a este punto se los requerimientos generales de las NTC-DS, exigen que se incluya en el modelo numérico tridimensional de la estructura, los elementos no estructurales que pudieran participar de manera importante en la respuesta sísmica. En la misma sección de criterios generales, se enfatiza que el diseño de cimentaciones tiene el propósito de evitar la falla de los elementos estructurales de la cimentación y la aparición de estados límite de falla que pudieran presentarse en el suelo circunvecino. Por ello, las fuerzas de diseño para las que se debe diseñar la cimentación no se reducen por el factor de sobrerresistencia del que se habla en el subcapítulo 6.4 de esta tesis, puesto que la consecuencia de la falla parcial o total de la cimentación es más crítica y difícil de reparar que la falla estructural. Además, como se comentó en ese subcapítulo, teóricamente la sobrerresistencia debería tomarse en cuenta al evaluar las resistencias y no como un factor de reducción de las cargas y por lo tanto no debe reducir las acciones sobre la cimentación.

Debido al interés del actual gobierno en la persecución de la resiliencia de la ciudad ante desastres, evidenciada por la Ley para la Reconstrucción, Recuperación y Transformación de la Ciudad de México en una cada vez más resiliente, se ha escuchado hablar de la edificación de estructuras resilientes; es decir, que además de soportar el sismo de diseño con un daño aceptable para el inmueble, este se debe estructurar de tal manera que los daños se presenten en elementos predefinidos desde la etapa de diseño, los cuales deben ser de fácil acceso y en dado caso, de fácil desmontaje y montaje, para su posterior reforzamiento o reconstrucción.

En lo referente a la zonificación sísmica, se mantiene la zonificación geotécnica para el efecto del cumplimiento de algunos requisitos, como por ejemplo el de separación de edificios colindantes; pero para la construcción de los espectros de diseño, se maneja la zonificación en función de curvas de isoperiodos que representan el periodo más largo de vibración del suelo, que se pueden consultar en el Sistema de Acciones Sísmicas de Diseño "SASID". Al que se puede acceder en la página ww.SASID.df.gob.mx. En esa base de datos se calculan los parámetros para la construcción del espectro elástico en función el sitio de la construcción, así como los factores de reducción por

VII

comportamiento sísmico, Q' , y por sobre-resistencia, R que reconocen la capacidad dúctil de la estructura, dichos espectros son aplicables para los métodos estático y dinámico modal. En lo referente a la clasificación de la importancia estructural, los grupos A y B se subdividen en A1 al que le corresponde un incremento de la ordenada espectral de 50%, A2 al que le corresponde un incremento de la ordenada espectral del 30% y los subgrupos B1 y B2 a los que no les corresponde ningún incremento de la ordenada espectral.

Tal vez el cambio más importante realizado en la nueva versión de las NTC-DS, es que se presenta una definición explícita que permite valorar cuándo se considera un diafragma como rígido y permite también una línea de acción para valorar las fuerzas sísmicas actuantes y el comportamiento de dicho diafragma, cuando se considere flexible. esto es muy valioso desde el punto de vista de la admisión racional en el análisis de sistemas de losa construidos con métodos constructivos modernos, que en años anteriores se vieron orillados a realizar investigaciones para justificar que podían conformar diafragmas rígidos, como es el caso de los sistemas de vigueta y bovedilla. Además, se dispone un procedimiento para calcular las aceleraciones de piso, y otro para el cálculo de la respuesta sísmica de apéndices y elementos no estructurales que anteriormente se obviaban en el diseño.

En lo referente a los métodos de análisis aplicables, se deroga el método simplificado de análisis sísmico del capítulo 7 de la versión 2004 y ahora las estructuras se diseñarán, en general, con alguno de los métodos de análisis dinámico del capítulo 6 (método modal o método no lineal paso a paso), mientras que el método estático queda relegado a estructuras simples que cumplan con la serie de estrictos requisitos que se examinan más adelante en este texto. Además, el método dinámico no lineal paso a paso se torna obligatorio para estructuras altas según la tabla 2.1.1. El SASID puede proveer los acelerogramas adecuados para la aplicación del método dinámico paso a paso, que aunque ya se admitía como método de diseño en la versión 2004, era poco accesible en su aplicación. Además, cabe resaltar que con este método se pueden tomar en cuenta explícitamente el comportamiento no lineal del modelo de la estructura, el suelo, las acciones sísmicas y la respuesta de los materiales y más aún, con un modelo adecuado, se puede realizar la evaluación directa de los efectos de IDSE por el método directo. Cuando el suelo del sitio de construcción es anómalo; es decir, que el periodo predominante del sitio calculado por el método de Gómez (que se mantiene en el reformado anexo A de las NTC-DS-2017), difiera en más de 25% del planteado en el SASID para ese mismo sitio, el espectro de diseño debe calcularse a partir de los espectros de peligro sísmico uniforme del movimiento de diseño en la zona de lomas. Los criterios para realizar estos estudios y la definición y determinación de los espectros de peligro uniforme se detallan en el reformado Anexo A de las NTC-DS-2017.

En la nueva versión de las normas, el factor de comportamiento sísmico Q depende del material y la configuración de la estructura según las tablas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3. El factor de reducción de las ordenadas espectrales por ductilidad Q' son las que anteriormente se aplicaban en el anexo A de las NTC-DS-2004 que dependían, entre otros parámetros, del periodo fundamental del suelo y que toma en cuenta los efectos de sitio, pero no los efectos de la IDSE, según lo que se comentó en el subcapítulo 6.6.4. Para el ejemplo del capítulo 7, la estructura sigue cumpliendo los requisitos de ductilidad, lo que implica una estructura regular.

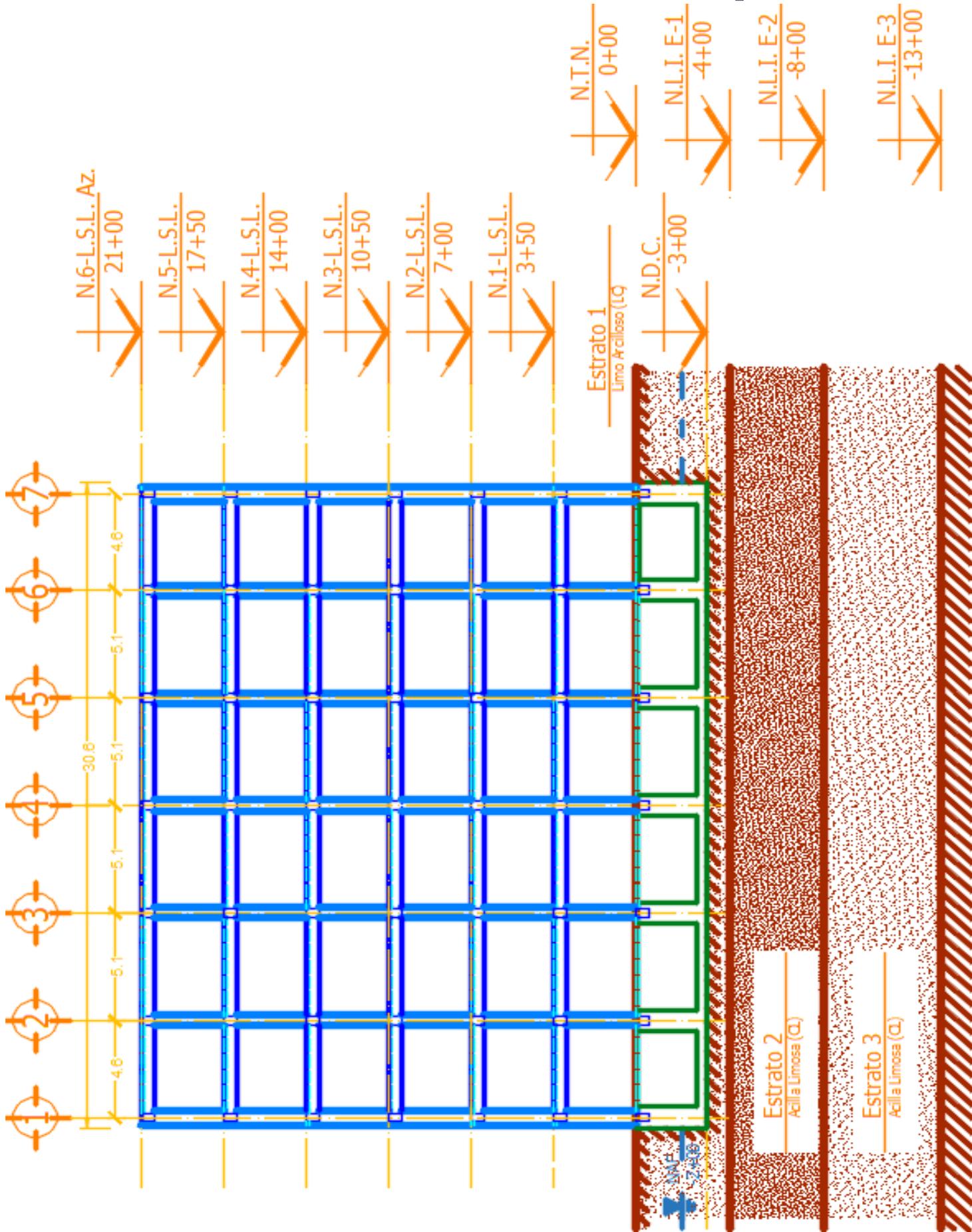
El edificio descrito en el capítulo 7 cumple con los requisitos del apartado 7.1 del cuerpo de las nuevas normas para poder ser analizado por el método estático, pero en este caso el espectro de diseño del método estático depende del periodo fundamental de vibración del suelo, por lo que se espera que el espectro de diseño pudiera ser parecido al del modelo BR-D cuando no se consideran los efectos de la IDSE, para el método MA (como se muestra en el apéndice A.14).

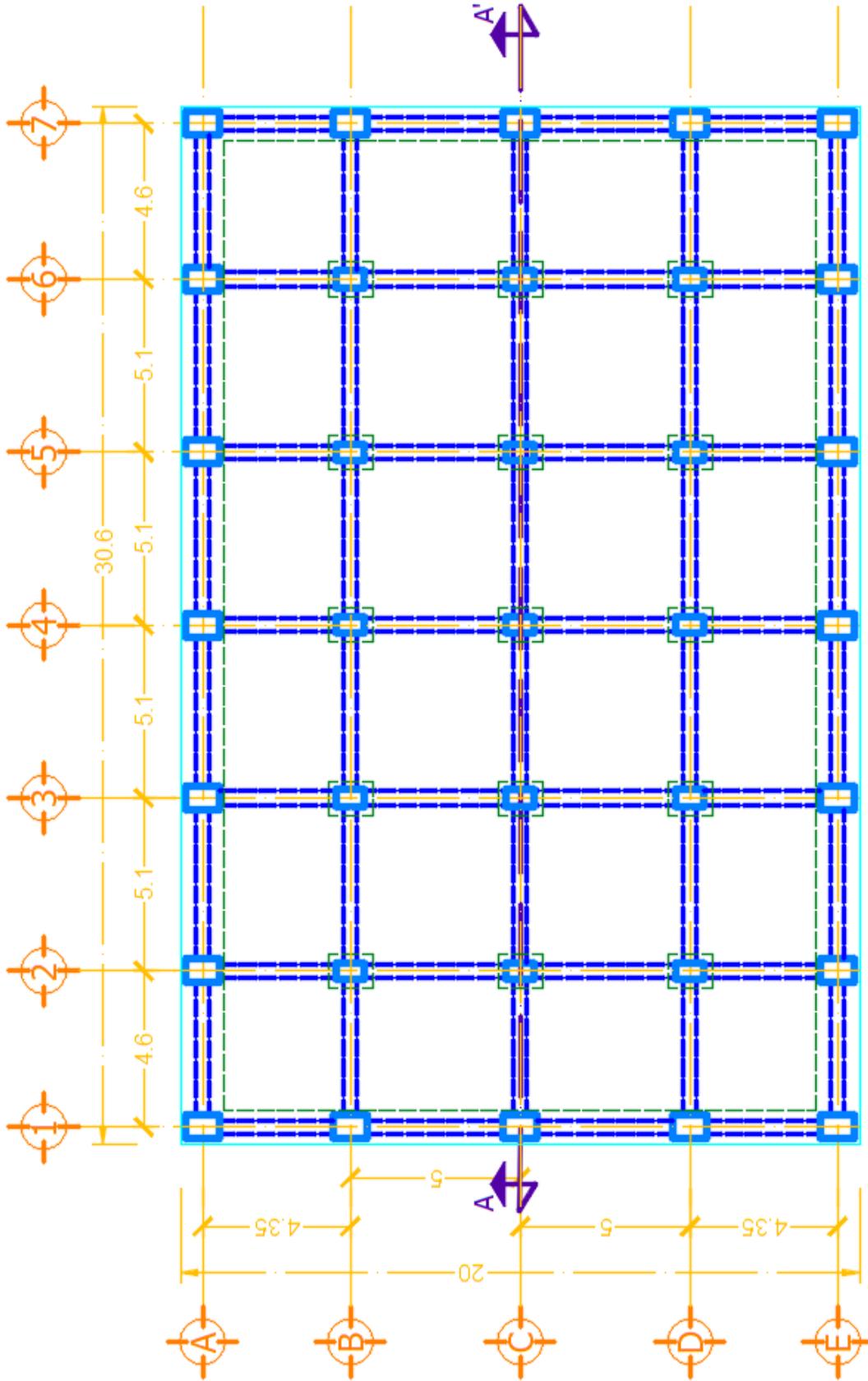
El factor de sobrerresistencia se calcula en función de los factores k_1 y k_2 y de un factor de sobrerresistencia base R_0 . En el ejemplo de aplicación del capítulo 7 este factor siempre resultó en todos los casos $R=2$, pero es de esperarse que según los nuevos criterios se vea reducido.

Tomando en cuenta la definición de los factores de construcción del espectro sísmico en función del periodo dominante del suelo, los incisos a) b) y c) de la sección 7.3 de las NTC-DS-2017, son idénticos a los de la sección 8.2 de las NTC-DS-2004. En consecuencia, la distribución de fuerzas calculadas con la nueva versión de las normas es similar a la de la versión anterior.

El anexo A de la versión del 2004, que se emplea en este trabajo, pasa casi en su totalidad a formar parte del cuerpo principal de las normas, excepto por la modificación en la definición de algunos parámetros, quedando lo referente a los efectos de la IDSE en el capítulo 8 de la nueva versión, donde se presenta el procedimiento para tomar en cuenta no sólo la interacción inercial, sino también la interacción cinemática. Esta última se admite determinando los espectros de sótano calculados con el método descrito en el anexo A de las NTC-DS-2017. Con el fin de evaluar la importancia de los efectos de interacción cinemática, se definen dos parámetros adimensionales en las ecuaciones 8.1 y 8.2, tal que si se cumplen las desigualdades que representan, se puede desprestigiar los efectos de la interacción cinemática. Al aplicar estas dos inecuaciones con los parámetros del ejercicio de aplicación del capítulo 7 de este trabajo, se observa que sería admisible la evaluación de la interacción cinemática. En la versión actual, debido a que los efectos de interacción cinemática se admiten explícitamente, se derogó el límite que restringía el amortiguamiento efectivo del oscilador de reemplazo para que no pudiera ser menor que el de la estructura supuesta sobre base rígida, aunque se mantiene el límite que restringe la modificación de las acciones de diseño por efectos de IDSE a $\pm 25\%$. Por otra parte, además del anexo A de las NTC-DS, en esta nueva versión se presenta el anexo B de las NTC-DS, que habla de los aisladores sísmicos y marca algunas medidas concernientes a su modelado y análisis. Las fórmulas para determinar el periodo y amortiguamiento efectivos del oscilador de reemplazo sobre base rígida del capítulo 6.3 de este trabajo se presentan en el apartado 8.2.3 del capítulo 8 de las NTC-DS, mientras que la tabla A.2 del anexo A de las NTC-DS-2004, se convierte en la tabla 8.2.1 de las NTC-DS-2017, la cual se divide en dos páginas, una para las cimentaciones someras y otra para las cimentaciones piloteadas. Un par de estas fórmulas se modificaron ligeramente, aunque dichas modificaciones no cambian el procedimiento de diseño. Lo que sí es importante observar es que el primer término de la fórmula para el amortiguamiento efectivo del oscilador de reemplazo en las NTC-DS-2004, el cofactor del cociente entre periodo de la estructura y el efectivo, estaba elevado al cubo y los otros dos cofactores están elevados al cuadrado, mientras que en las NTC-DS-2017 todos los cofactores son elevados al cuadrado. Esto se trata de una corrección que es importante analizar puesto que este mismo error ha permanecido vigente en el reglamento desde el año 2004.

A.2 Datos del Planteamiento del Problema de Apliación





PL-T
A.2

Croquis de Planta Tipo

Esc. N/A cotas en metros



Tabla de Resultados de la Exploración Geotécnica				
Estrato	Profundidad de Muestreo <i>Z [m]</i>	Espesor del Estrato <i>h [m]</i>	Peso Eespecífico <i>γ [kN/m³]</i>	Módulo de Rigidez Cortante <i>G[kN/m²]</i>
1	0	4	17	5100
2	4	4	14	5220
3	8	5	12	5340
4	13	N/A	N/A	N/A

Simbología	
Clave	Nombre
N.P.T.	Nivel de Piso Terminado
N.A.F.	Nivel de Agua Freática
N.B.	Nivel de Banqueta
N.L.I.E.	Nivel de Lecho Inferior del Estrato
N.L.S.L.	Nivel de Lecho Superior de Losa
N.D.C.	Nivel de Desplante de la Cimentación

Notas	
1.	Nivel de Agua Freática (NAF)=-2m
2.	Por debajo del Estrato 3 hay un manto de arena muy compacta de profundidad indefinida con una rigidez tal que no es necesario tomarlo en consideración en el cálculo del periodo fundamental de vibración del suelo
3.	el cuadro de simbología aplica para los croquis PL-T y EL-T y para la tabla de características mecánicas del perfil estratigráfico

A.3 Parámetros del ejercicio de aplicación

Parámetros de la Estructura Sobre Base Rígida	
W_0	50796 kN
W_e	35557.2 kN
m_e	3624.587 Ton
H_e	14.7 m
T_e	0.8 s
ξ_e	0.05

Parámetros de la Cimentación	
m_c	0.000 Ton
J_c	0.000 m ² kg
L	30.600 m
B	20.000 m
A	612.000 m ²
I_y	47754.360 m ⁴
R_A	13.957 m
R_{Iy}	15.703 m
D	3.000 m

Parámetros del Estrato de Suelo Homogéneo	
H_s	13 m
γ_s	14.153846 kN/m ³
ρ_s	1.4427978 kg/m ³
G	5229.2308 kPa
C_s	60.713 m/s
ν_s	0.45
T_s	0.9086476 s
ξ_s	0.03

Parámetros Adimensionales del Sistema	
$H_e \cdot T_s / H_s \cdot T_e$	1.2843
H_e / R_A	1.0532
D / R_A	0.2149
H_s / R_A	0.9314

A.4 Espectro de diseño de las NTC-DS-2004

T	Q'	a'
0.000	1.0	0.080
0.025	1.1	0.098
0.050	1.3	0.112
0.075	1.4	0.124
0.100	1.5	0.133
0.125	1.6	0.142
0.150	1.8	0.149
0.175	1.9	0.155
0.200	2.0	0.160
0.315	2.0	0.160
0.430	2.0	0.160
0.545	2.0	0.160
0.660	2.0	0.160
0.775	2.0	0.160
0.800	2.0	0.160
1.005	2.0	0.160
1.120	2.0	0.160
1.235	2.0	0.160
1.350	2.0	0.160
1.821	2.0	0.107
2.292	2.0	0.079
2.763	2.0	0.062
3.233	2.0	0.050
3.704	2.0	0.042

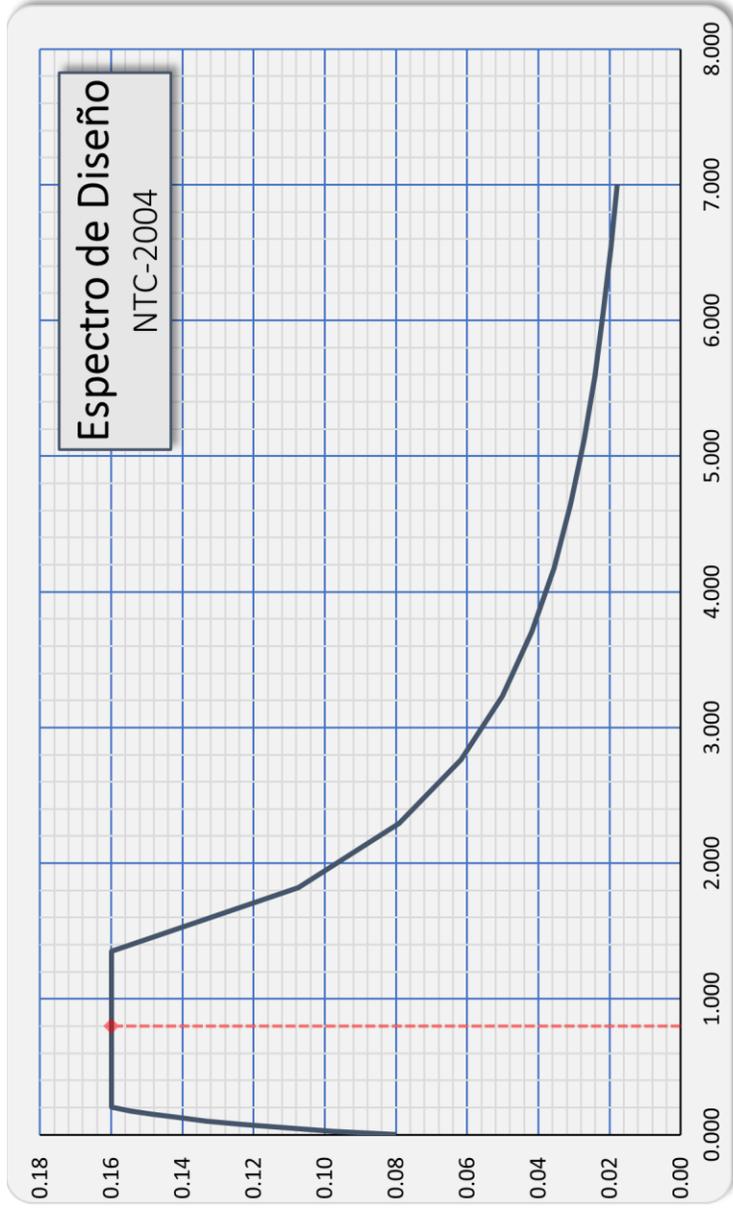
Te= 0.800 s

Grupo: B

a' = 0.160 1/g

F.I.	Q
1	2

ZONA	c	a0	Ta	Tb	r
II	0.32	0.08	0.2	1.35	1.33



A.5 Cortante basal y fuerzas de entrepiso para el método estático

ZONA	Tb	a0	r
II	1.35	0.08	1.33

q	k1	k2
2.01	0.14	-0.01

Te [s]	a'[1/g]	He [m]	Niveles
0.8	0.16	21	6

inciso b) De la sección 8.2 de las NTC-DS: $T_e \leq T_b$

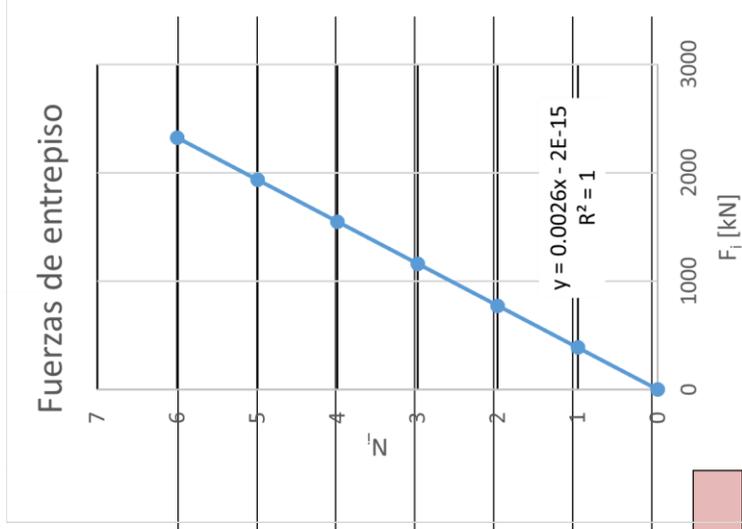
Nivel	hi[m]	Wi[kN]	F[kN]
6	21	8466	2322.103
5	17.5	8466	1935.086
4	14	8466	1548.069
3	10.5	8466	1161.051
2	7	8466	774.034
1	3.5	8466	387.017
0	0	0	0.000

$V_B =$

8127.360 [kN]

$Z_G =$

15.167 [m]



A.6 Ejemplo: Aplicación del método de Zeevaert

i	Z m	h _i m	S _s 1	W _n %	γ ton/m ³	ρ ton*s ² /m ⁴	G ton/m ²	(C _s) _h m/s	ΔT s	T s
1	0	0	2.6	55	1.66	0.169	1000	76.87	0.289	
2	5.55	5.55	2.6	85	1.5	0.153	2000	114.37	0.126	
3	9.15	3.6	2.35	300	1.17	0.119	280	48.45	0.227	
4	11.9	2.75	2.6	300	1.17	0.119	280	48.45	0.322	
5	15.8	3.9	2.35	42	1.77	0.180	700	62.29	0.045	
6	16.5	0.7	2.35	320	1.16	0.118	360	55.18	0.239	
7	19.8	3.3	2.35	200	1.24	0.126	470	60.98	0.105	
8	21.4	1.6	2.35	200	1.24	0.126	470	60.98	0.148	
9	23.65	2.25	2.35	273	1.18	0.120	470	62.51	0.227	
10	27.2	3.55	2.35	248	1.2	0.122	720	76.72	0.099	
11	29.1	1.9	2.35	300	1.17	0.119	720	77.70	0.227	
12	33.5	4.4	2.6	42	1.77	0.180	4000	148.89	0.126	
13	38.2	4.7	2.4	174	1.27	0.129	980	87.01	0.154	
14	41.55	3.35	2.26	30	1.75	0.178	2000	105.88	0.015	
15	41.95	0.4	2.4	171	1.25	0.127	1120	93.75	0.141	
16	45.25	3.3	2.4	168	1.28	0.130	2500	138.42	0.071	
17	47.7	2.45								

A.7 Periodo fundamental por el método del anexo A

Datos de la cimentación							
arena muy compacta	n	d _i m	Z _i m	γ kN/m ³	ρ ton/m ³	G kPa	(C _s) _i m/s
arcilla limosa sensitiva	1	5.0	5.0	12.00	1.22	5340.00	66.07
arcilla limosa sensitiva	2	4.0	9.0	14.00	1.43	5220.00	60.48
limo arcilloso sensitivo	3	4.0	13.0	17.00	1.73	5100.00	54.25
		13.0					

Cálculos								
arena muy compacta	n	d _i /G _i kN/m	Σ(d _i /G _i) m/kPa	x _i	γ _i *d _i kPa	(γ _i *d _i)*(x _i ² +x _i *x _{i-1} +x _{i-1} ²) kN/m	d _i *G _i kN*m	d _i *(C _s) _i m ² /s
arcilla limosa sensitiva	1	0.00094	0.0009	0.377	60	8.505	26700	330.358
arcilla limosa sensitiva	2	0.00077	0.0017	0.685	56	48.621	20880	241.917
limo arcilloso sensitivo	3	0.00078	0.0025	1.000	68	146.427	20400	216.998
		0.00249			184	203.553	67980	789

T _s	0.909	s	γ _s	14.154	kN/m ³
C _s	60.713	m/s	G _s	5229.231	kPa

A.8 Período fundamental por el método de Zeevaert

Método de Zeevaert (3 Dovelas)

Datos: $T = 0.881$ s
 $Sa = 100$ m/s² $\omega = 7.131$ rad/s

i	Z m	h_i m	γ kN/m ³	ρ ton/m ³	G kPa	$(C_s)_i$ m/s	ΔT s	T s	N_i	A_i	B_i	C_i	δ_i m	τ_i kPa
1	0.0	0.0	17	1.733	5100	54.25	0.295		0.069	0.871	0.001	176.225	1.967	0.00
2	4.0	4.0	14	1.427	5220	60.48	0.265	0.862	0.056	0.895	0.001	145.126	1.712	648.36
3	8.0	4.0	12	1.223	5340	66.07	0.303		0.073	0.864	0.001	155.493	1.061	1050.92
4	13.0	5.0											0.000	1215.98

Limo arcilloso sensitivo
 arcilla limosa sensitiva
 arcilla limosa sensitiva
 arena muy compacta

Ts	0.881 s	γ_s	14.154 kN/m ³
Cs	59.014 m/s	Gs	5229.231 kPa

Método de Zeevaert (13 Dovelas)

Datos:

$T_2 = 0.283$ s

$Sa = 100$ m/s²

$\omega_2 = 22.169$ rad/s

i	Z m	h _i m	γ kN/m ³	ρ ton/m ³	G kPa	(C _s) _i m/s	ΔT s	T s	N _i	A _i	B _i	C _i	δ _i m	τ _i kPa
1	0.0	0.0	17	1.733	5100	54.25	0.074		0.042	0.920	0.000	425.818	0.20	0.00
2	1.0	1.0	17	1.733	5100	54.25	0.074		0.042	0.920	0.000	425.818	0.19	166.35
3	2.0	1.0	17	1.733	5100	54.25	0.074		0.042	0.920	0.000	425.818	0.14	306.03
4	3.0	1.0	17	1.733	5100	54.25	0.074		0.042	0.920	0.000	425.818	0.07	396.66
5	4.0	1.0	14	1.427	5220	60.48	0.066		0.034	0.935	0.000	350.674	-0.01	423.70
6	5.0	1.0	14	1.427	5220	60.48	0.066		0.034	0.935	0.000	350.674	-0.09	390.43
7	6.0	1.0	14	1.427	5220	60.48	0.066	0.862	0.034	0.935	0.000	350.674	-0.15	306.40
8	7.0	1.0	14	1.427	5220	60.48	0.066		0.034	0.935	0.000	350.674	-0.20	182.54
9	8.0	1.0	12	1.223	5340	66.07	0.061		0.028	0.945	0.000	300.578	-0.22	34.95
10	9.0	1.0	12	1.223	5340	66.07	0.061		0.028	0.945	0.000	300.578	-0.22	-96.09
11	10.0	1.0	12	1.223	5340	66.07	0.061		0.028	0.945	0.000	300.578	-0.19	-216.62
12	11.0	1.0	12	1.223	5340	66.07	0.061		0.028	0.945	0.000	300.578	-0.14	-313.42
13	12.0	1.0	12	1.223	5340	66.07	0.061		0.028	0.945	0.000	300.578	-0.07	-375.91
14	13.0	1.0							0.028	0.945	0.000	300.578	0.00	-397.23

Limo arcilloso sensitivo

arcilla limosa sensitiva

arcilla limosa sensitiva

arena muy compacta

Ts	0.283 s	γ_s	14.154 kN/m ³
Cs	183.468 m/s	Gs	5229.231 kPa

A.9 Funciones de impedancia, periodo y amortiguamiento efectivos para el método del anexo A

Iteración	1
Te_ef	0.800 s
ωe_ef	5.864 rad/s

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
		ηs	ηx	1.348 ηxs	0.799 ηrp
ωe_ef	5.864 rad/s	6.293	ηr	1.517 ηrp	0.241

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos	
Te	0.8 s ξe 0.05
Tx	0.410 s ξx 0.246
Tr	0.583 s ξr 0.132
Te_ef	1.071 s ξe_ef 0.091

Modo de vibración	Rigidez estática
Horizontal	Kx_0 852803.49 kN/m
Cabeceo	Kr_0 189704669.28 kN*m/rad

coef. de rigidez		coef. de amort.	
kx	1.000	cx	0.0390
kr	0.697	cr	0.0038

Modo de vibración Horizontal	
Kx	850110.93 kN/m
Cx	71243.36 kN*s/m

Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	132092694.91 kN*m/rad
Cr	5953509.27 kN*m*s/rad

Iteración		2	
Te_ef	1.103 s		
we_ef	5.695 rad/s		

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos			
Te	0.8 s	ξ_e	0.05
Tx	0.410 s	ξ_x	0.238
Tr	0.579 s	ξ_r	0.135
Te_ef	1.069 s	ξ_{e_ef}	0.091

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
we_ef	5.695 rad/s	hs	hx	hxs	0.776
		hp	hr	hrp	0.234

Modo de vibración		Rigidez estática		coef. de rigidez		coef. De amort.	
Horizontal	Kx_0	852803.49	kN/m	kx	1.000	cx	0.0349
Cabeceo	Kr_0	189704669.28	kN*m/rad	kr	0.705	cr	0.0037

Modo de vibración Horizontal	
Kx	850464.97 kN/m
Cx	68858.04 kN*s/m

Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	133761133.67 kN*m/rad
Cr	6153741.31 kN*m*s/rad

Iteración	3
Te_ef	1.069 s
we_ef	5.876 rad/s

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
we_ef	5.876 rad/s	hs	hx	hxs	0.801
		hp	hr	hrp	0.242

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos			
Te	0.8 s	ξ_e	0.05
Tx	0.410 s	ξ_x	0.246
Tr	0.583 s	ξ_r	0.132
Te_ef	1.071 s	ξ_{e_ef}	0.091

Modo de vibración	Rigidez estática	
Horizontal	Kx_0	852803.49 kN/m
Cabeceo	Kr_0	189704669.28 kN*m/rad

coef. de rigidez		coef. de amort.	
kx	1.000	cx	0.0394
kr	0.696	cr	0.0038

Modo de vibración Horizontal	
Kx	850083.60 kN/m
Cx	71437.51 kN*s/m

Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	131976592.00 kN*m/rad
Cr	5940064.77 kN*m*s/rad

Iteración		4	
Te_ef	1.071 s		
we_ef	5.864 rad/s		

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
we_ef	5.864 rad/s	hs	hx	hx	hxs
		hp	hr	hrp	hrp

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos			
Te	0.8 s	ξ_e	0.05
Tx	0.410 s	ξ_x	0.246
Tr	0.583 s	ξ_r	0.132
Te_ef	1.071 s	ξ_{e_ef}	0.091

Modo de vibración		Rigidez estática	
Horizontal	Kx_0	852803.49	kN/m
Cabeceo	Kr_0	189704669.28	kN*m/rad

coef. de rigidez		coef. De amort.	
kx	1.000	cx	0.0390
kr	0.697	cr	0.0038

Modo de vibración Horizontal	
Kx	850110.93 kN/m
Cx	71243.36 kN*s/m

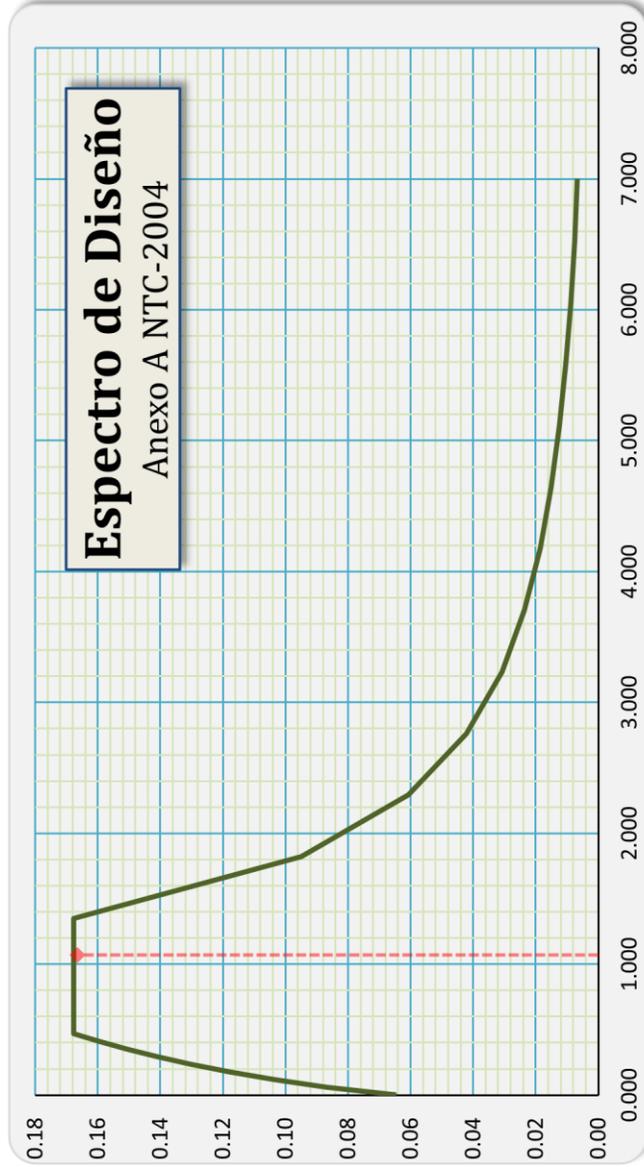
Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	132092694.91 kN*m/rad
Cr	5953509.27 kN*m*s/rad

A.10 Espectro de diseño del anexo A

T	a	p	Q'	R	a'
0.000	0.161	0.000	1.000	2.500	0.065
0.058	0.223	0.000	1.120	2.297	0.087
0.116	0.285	0.000	1.239	2.222	0.104
0.175	0.347	0.000	1.359	2.168	0.118
0.233	0.409	0.000	1.479	2.124	0.130
0.291	0.471	0.000	1.598	2.087	0.141
0.349	0.533	0.000	1.718	2.055	0.151
0.408	0.594	0.000	1.838	2.026	0.160
0.466	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
0.554	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
0.643	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
0.731	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
0.800	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
0.908	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
0.996	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
1.085	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
1.173	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
1.262	0.656	0.000	1.957	2.000	0.168
1.350	0.656	1.000	1.957	2.000	0.168
1.821	0.376	1.041	1.977	2.000	0.095
2.292	0.241	1.059	1.985	2.000	0.061
2.763	0.168	1.069	1.990	2.000	0.042

Ts	Te	Te_ef	ξ_{e_ef}	Q	Q_ef	a'	Q'-ef	a'_ef
0.909	0.8	1.07	0.091	2	NA	0.168	NA	NA

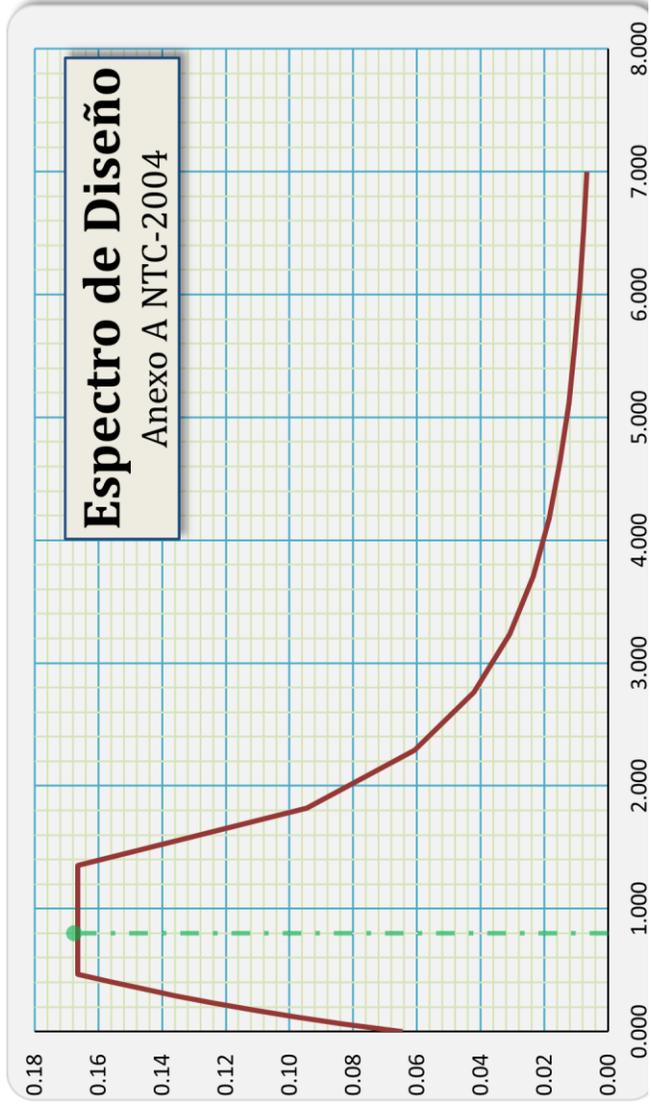
Zona	Ts	c	a0	Ta	Tb	k	λ	β
Zona II	0.909	0.656	0.161	0.466	1.350	1.091	0.500	1



T	a_ef	p	Q'_ef	R	a'_ef
0.000	0.161	0.000	1.000	2.500	0.065
0.058	0.202	0.000	1.058	2.297	0.083
0.116	0.243	0.000	1.115	2.222	0.098
0.175	0.283	0.000	1.173	2.168	0.111
0.233	0.324	0.000	1.230	2.124	0.124
0.291	0.365	0.000	1.288	2.087	0.136
0.349	0.405	0.000	1.346	2.055	0.147
0.408	0.446	0.000	1.403	2.026	0.157
0.466	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
0.554	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
0.643	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
0.731	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
0.820	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
0.908	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
0.996	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
1.070	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
1.173	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
1.262	0.486	0.000	1.461	2.000	0.167
1.350	0.486	1.000	1.461	2.000	0.167
1.821	0.278	1.041	1.470	2.000	0.095
2.292	0.179	1.059	1.474	2.000	0.061
2.763	0.124	1.069	1.476	2.000	0.042
3.233	0.091	1.075	1.478	2.000	0.031

Ts	Te	Te_ef	ξ_{e_ef}	Q	Q_ef	a'	Q'_ef	a'_ef
0.909	0.8	1.07	0.091	2	1.559	0.168	1.461	0.167

Zona	Ts	c	a0	Ta	Tb	k	λ	β
Zona II	0.909	0.656	0.161	0.466	1.350	1.091	0.500	0.741



A.11 Cortante basal y fuerzas de entrepiso para el método del anexo A

ZONA	a0	r
II	0.08	1.33

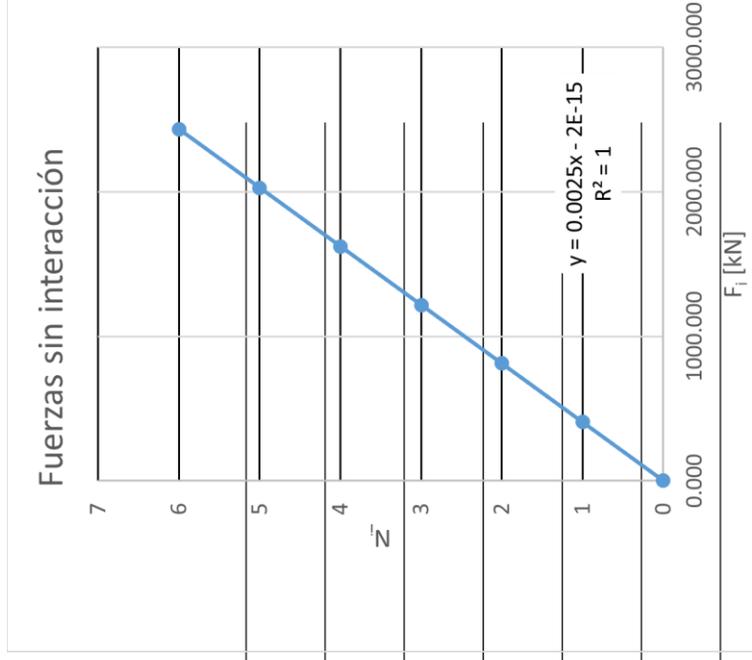
Tb
1.35

q	k1	k2
2.01	0.14	-0.01

He [m]	Ts [s]	Te [s]	a' [1/g]	Niveles
21	0.909	0.8	0.168	6

inciso a) De la sección A.5 de las NTC-DS: $T_e \leq T_b$

Nivel	hi[m]	Wi[kN]	Fi[kN]
6	21	8466	2433.012
5	17.5	8466	2027.510
4	14	8466	1622.008
3	10.5	8466	1216.506
2	7	8466	811.004
1	3.5	8466	405.502
0	0	0	0.000

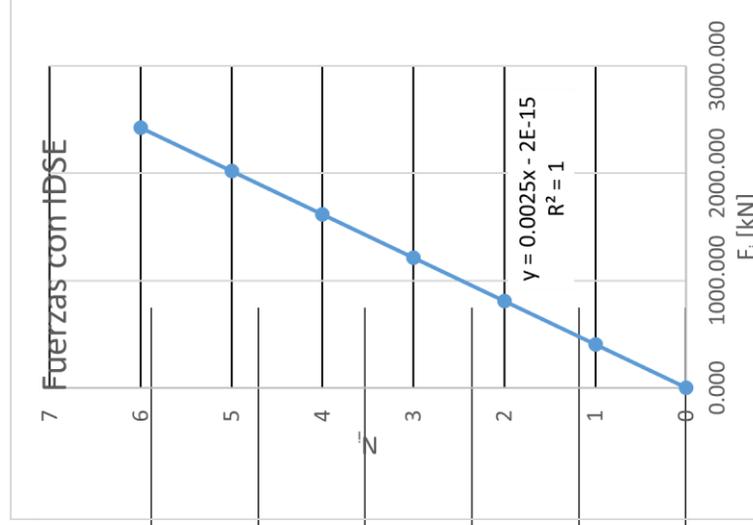


$V_B = 8515.543$ [kN]

$Z_G = 15.167$ [m]

$V_{B,ef}/V_B = 0.995$

Nivel	hi[m]	Fi[kN]	F _{i,ef} [kN]
6	21	2433.01229	2421.577
5	17.5	2027.51025	2017.981
4	14	1622.0082	1614.385
3	10.5	1216.50615	1210.789
2	7	811.004098	807.192
1	3.5	405.502049	403.596
0	0	0	0.000



$V_{B,ef} = 8475.520 \text{ [kN]}$

$Z_G = 15.167 \text{ [m]}$

A.12 Funciones de impedancia, periodo y amortiguamiento efectivos para el método de Zeevaert

Iteración	1
Te_ef	0.800 s
we_ef	7.854 rad/s

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
we_ef	7.854 rad/s	hs	hx	hx	hxs
		hp	hr	hr	hrp

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos			
Te	0.8 s	xe	0.05
Tx	0.424 s	xx	1.840
Tr	0.643 s	xr	0.108
Te_ef	1.110 s	xe_ef	0.089

Modo de vibración	Rigidez estática	
Horizontal	Kx_0	852803.49 kN/m
Cabeceo	Kr_0	189704669.28 kN*m/rad

coef. de rigidez		coef. de amort.	
kx	1.000	cx	0.5760
kr	0.573	cr	0.0057

Modo de vibración Horizontal	
Kx	796885.59 kN/m
Cx	518184.26 kN*s/m

Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	108578897.99 kN*m/rad
Cr	4138188.21 kN*m*s/rad

Iteración		2
Te_ef	1.110	s
we_ef	5.660	rad/s

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional				
we_ef	5.660	rad/s	hs	hx	hxh	hrp
			1.686	1.367	0.811	0.244

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos		
Te	0.8	s
Tx	0.410	s
Tr	0.584	s
Te_ef	1.072	s
xe	0.05	
xx	0.251	
xr	0.131	
xe_ef	0.091	

Rigidez estática	
Horizontal	Kx_0 852803.49 kN/m
Cabeceo	Kr_0 189704669.28 kN*m/rad

coef. de rigidez		coef. De amort.	
kx	1.000	cx	0.0414
kr	0.692	cr	0.0039

Modo de vibración Horizontal	
Kx	849909.95 kN/m
Cx	72698.37 kN*s/m

Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	131275605.25 kN*m/rad
Cr	5860188.03 kN*m*s/rad

Iteración	3
Te_ef	1.072 s
we_ef	5.859 rad/s

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
we_ef	5.859 rad/s	hs	hx	hxs	0.839
		hp	hr	hrp	0.253

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos		
Te	0.8 s	xe 0.05
Tx	0.410 s	xx 0.267
Tr	0.589 s	xr 0.128
Te_ef	1.075 s	xe_ef 0.092

Modo de vibración	Rigidez estática	
Horizontal	Kx_0	852803.49 kN/m
Cabeceo	Kr_0	189704669.28 kN*m/rad

coef. de rigidez	coef. De amort.	
kx	1.000	cx 0.0484
kr	0.682	cr 0.0040

Modo de vibración Horizontal	
Kx	849294.79 kN/m
Cx	77463.77 kN*s/m

Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	129210905.69 kN*m/rad
Cr	5637241.66 kN*m*s/rad

Iteración	4
Te_ef	1.075 s
we_ef	5.845 rad/s

Frecuencia angular		Parámetros de frec. Adimensional			
we_ef	5.845 rad/s	hs	hx	hx	hxs
		hp	hr	hrp	hrp

cálculo de periodo efectivo y amortiguamiento efectivos			
Te	0.8 s	xe	0.05
Tx	0.410 s	xx	0.265
Tr	0.589 s	xr	0.128
Te_ef	1.075 s	xe_ef	0.092

Modo de vibración	Rigidez estática	
Horizontal	Kx_0	852803.49 kN/m
Cabeceo	Kr_0	189704669.28 kN*m/rad

coef. de rigidez		coef. De amort.	
kx	1.000	cx	0.0479
kr	0.682	cr	0.0040

Modo de vibración Horizontal	
Kx	849344.46 kN/m
Cx	77065.12 kN*s/m

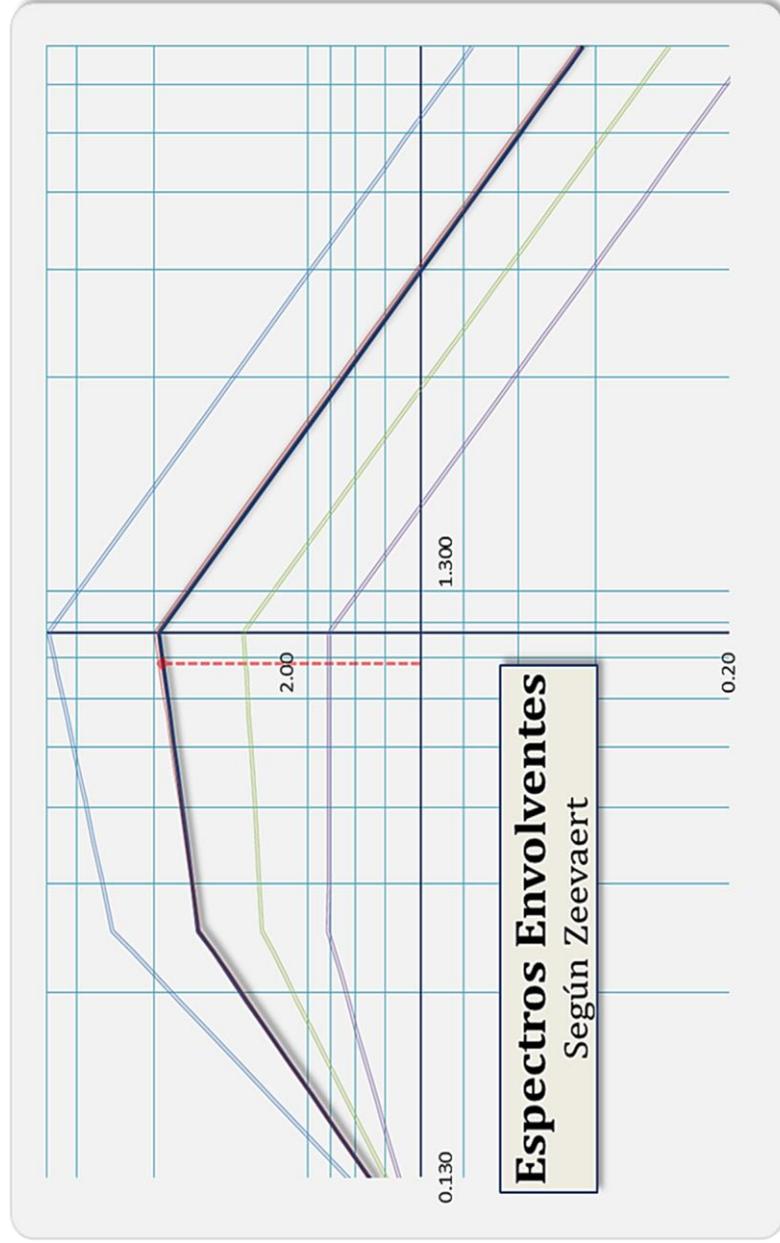
Modo de vibración en Cabeceo	
Kr	129357321.82 kN*m/rad
Cr	5652471.07 kN*m*s/rad

A.13 Espectros de diseño envolventes de Zeevaert

T/T_s	T	f_a
0.126	0.113	1.273
0.151	0.136	1.516
0.176	0.159	1.758
0.201	0.181	1.998
0.227	0.204	2.237
0.252	0.226	2.475
0.277	0.249	2.712
0.302	0.272	2.948
0.327	0.294	3.183
0.394	0.355	3.293
0.462	0.415	3.391
0.529	0.476	3.477
0.596	0.537	3.555
0.664	0.597	3.626
0.731	0.658	3.691
0.798	0.718	3.752
0.865	0.779	3.808
0.889	0.800	3.827
1.000	0.900	3.912
1.667	1.500	2.339
2.333	2.100	1.667
3.000	2.700	1.294
3.667	3.300	1.057

T_{sl}	T_{ef}	ζ_{ef}	f_a	a_m [m/s ²]
0.9	0.8	0.05	3.827	1.570

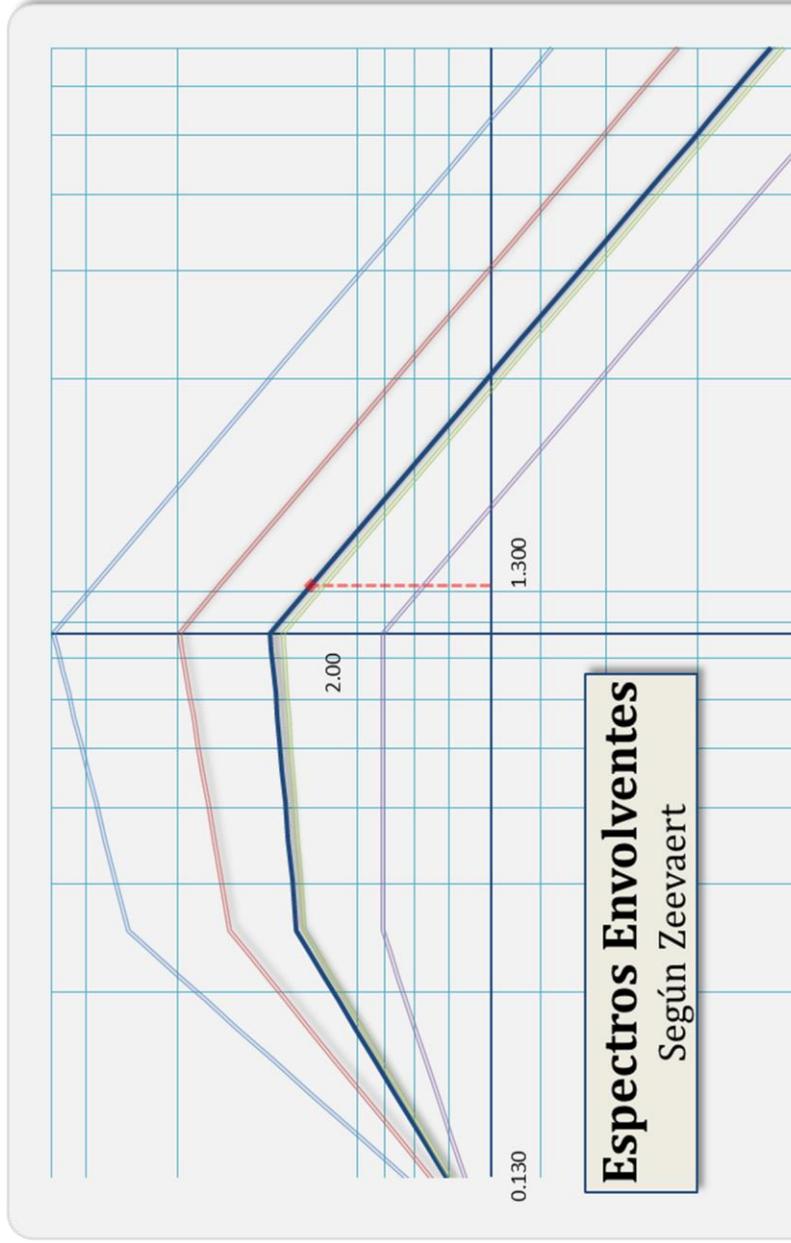
S_a [m/s ²]
6.009



T/T_s	T	f_a
0.126	0.113	1.194
0.151	0.136	1.360
0.176	0.159	1.518
0.201	0.181	1.671
0.227	0.204	1.817
0.252	0.226	1.959
0.277	0.249	2.098
0.302	0.272	2.232
0.327	0.294	2.364
0.394	0.355	2.409
0.462	0.415	2.449
0.529	0.476	2.485
0.596	0.537	2.516
0.664	0.597	2.544
0.731	0.658	2.570
0.798	0.718	2.594
0.865	0.779	2.616
0.933	0.839	2.636
1.000	0.900	2.656
1.194	1.075	2.220
2.333	2.100	1.130
3.000	2.700	0.877
3.667	3.300	0.716
4.333	3.900	0.605

T_{s1}	$T_{e\text{-}ef}$	$\xi_{e\text{-}ef}$	$a_m [m/s^2]$	f_a
0.9	1.075	0.092	1.570	2.220

$S_a [m/s^2]$
3.486



Espectros Envolventes
Según Zeevaert

A.14 Fuerzas de entrepiso y cortante basal para el método de Zeevaert

ZONA	a0	r
II	0.08	1.33

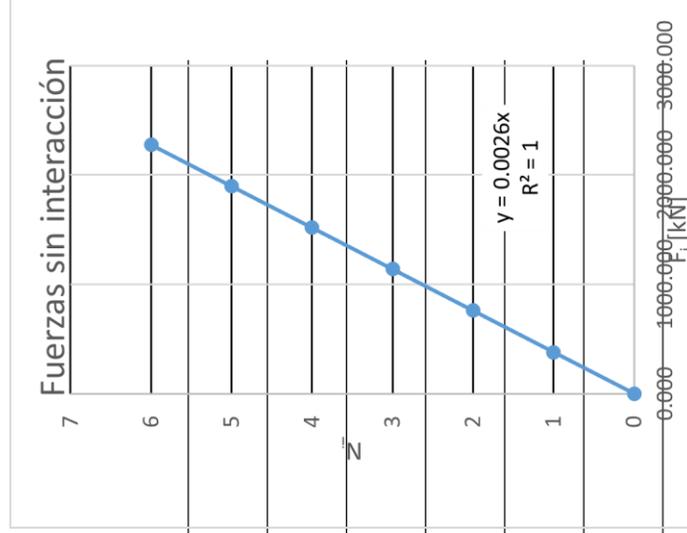
Tb
1.35

q	k1	k2
2.01	0.14	-0.01

He [m]	Ts [s]	Te [s]	a'[1/g]	Niveles
2.1	0.9	0.8	0.157	6

inciso a) De la sección A.5 de las NTC-DS: $T_e \leq T_b$

Nivel	hi [m]	Wi [kN]	Fi [kN]
6	21	8466	2273.410
5	17.5	8466	1894.508
4	14	8466	1515.607
3	10.5	8466	1136.705
2	7	8466	757.803
1	3.5	8466	378.902
0	0	0	0.000



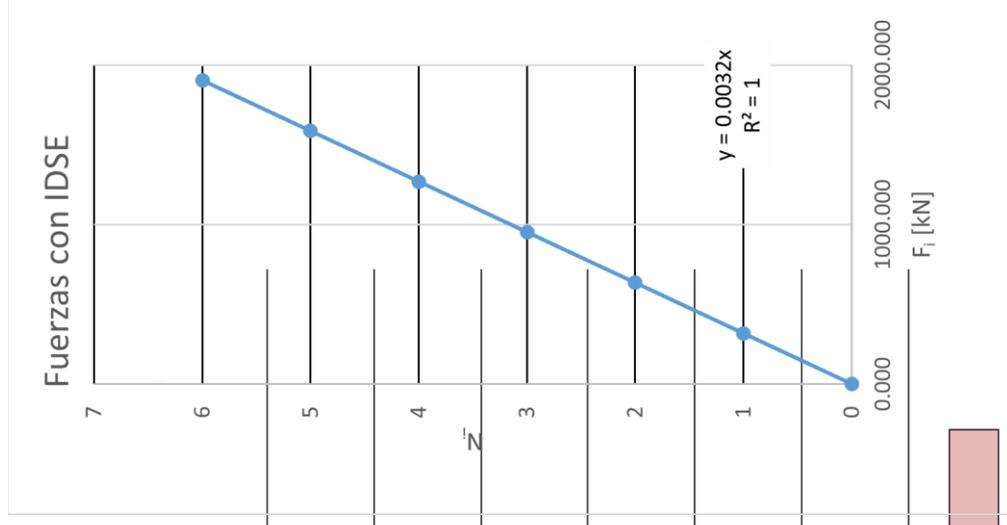
$V_B = 7956.936$ [kN]

$Z_G = 8.295$ [m]

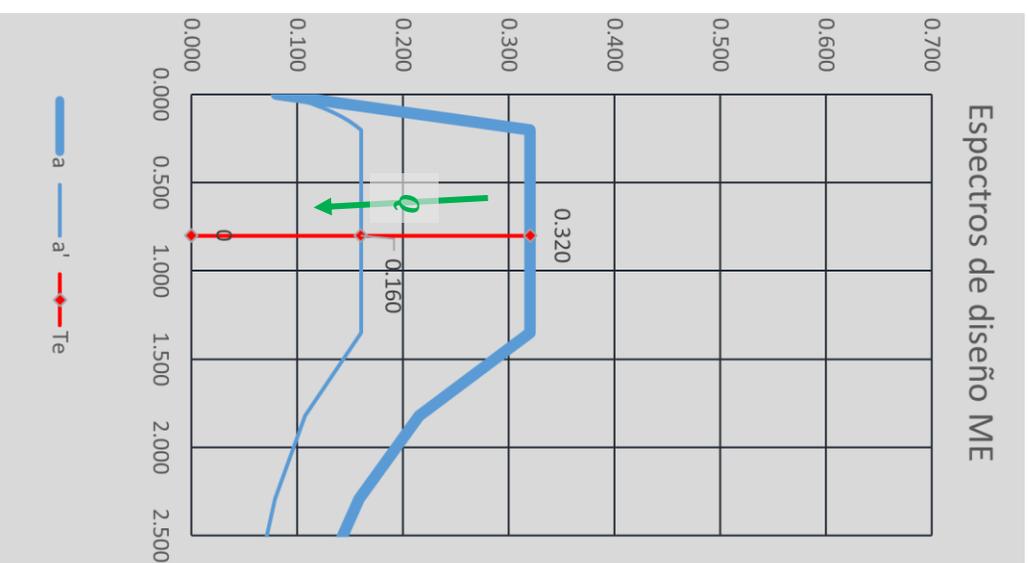
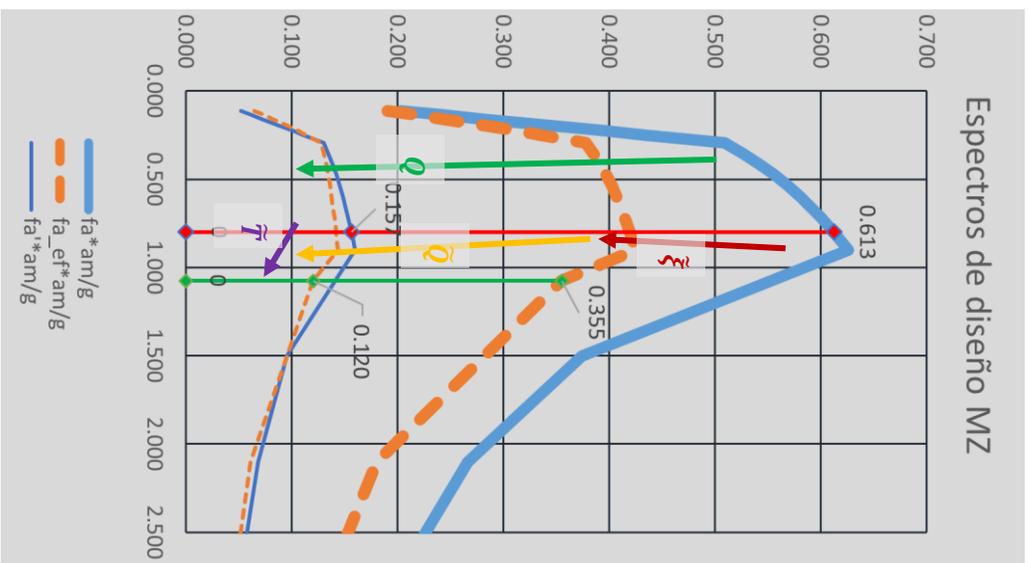
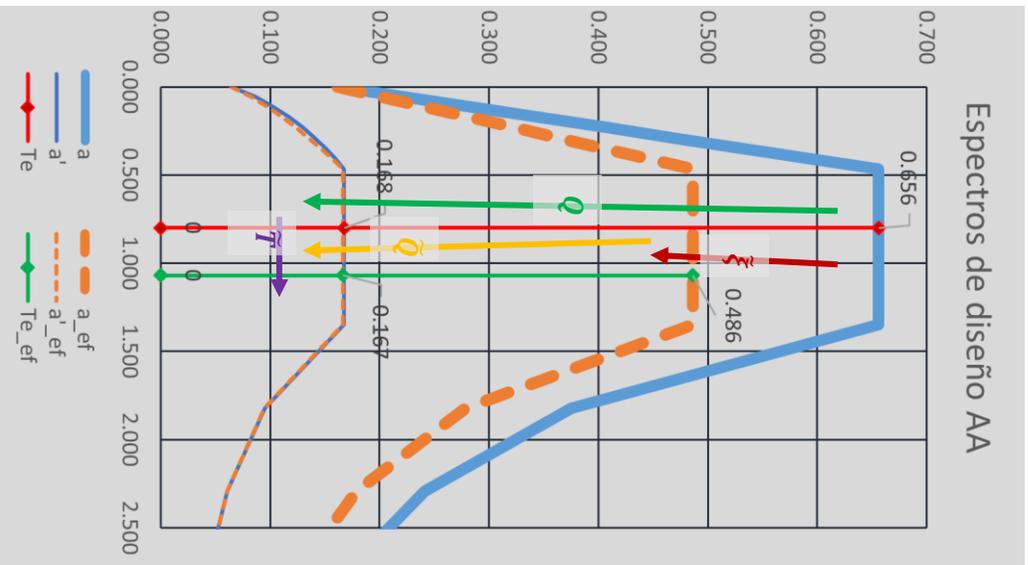
$V_{B,ef}/V_B = 0.837$

Nivel	hi[m]	Fi[kN]	Fi_ef [kN]
6	21	2273.41017	1903.378
5	17.5	1894.50847	1586.148
4	14	1515.60678	1268.919
3	10.5	1136.70508	951.689
2	7	757.80339	634.459
1	3.5	378.901695	317.230
0	0	0	0.000

$V_{B,ef} = 6661.823 \text{ [kN]}$ $Z_G = 8.295 \text{ [m]}$



A.15 Comparación de acciones sísmicas



Bibliografía

- Administración Pública del Distrito Federal. (6 de Octubre de 2004). Normas Técnicas Complementarias Para Diseño Por Sismo. *Gaceta Oficial del Distrito Federal, DÉCIMA CUARTA ÉPOCA, TOMO II*(No. 103-BIS).
- Administración Pública del Distrito Federal. (29 de Enero de 2004). Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal. *Gaceta Oficial del Distrito Federal*.
- Arana, F. (1976). *Método experimental para principiantes*. México, D.F.: Joaquín Mortiz S.A.
- Avilés, J., & Fernández S., L. R. (2008). Efectos de interacción suelo-estructura en edificios con planta baja blanda. *Revista de Ingeniería Sísmica*(No. 79), pp. 71-90.
- Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. E. (1996). Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol.15*, pp. 11-27.
- Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. E. (1998). Effects of foundation embedment during building-soil interaction. (L. John Wiley & Sons, Ed.) *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 27*, pp. 1523-1540.
- Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. E. (2003). Evaluación de efectos de interacción en resistencias inelásticas. *Revista de Ingeniería Sísmica*(No. 69), pp. 45-71.
- Avilés, J., & Pérez-Rocha, L. E. (2004). Bases para las nuevas disposiciones reglamentarias Sobre Interacción Dinámica Suelo-Estructura. *Revista de Ingeniería Sísmica*(71), 1-36.
- Beer P., F., & Johnston, E. R. (2012). *Mechanics of Materials* (sexta edición ed.). NY, EEUU: Mc Graw Hill.
- Bielak, J., & Jennings, P. (1973). Dynamics of building-soil interaction. *Bulletin of the Seismological society of America, Vol. 63*, pp. 9-48.
- Botero, J. C. (2002). Respuesta de sistemas suelo-estructura con amortiguamiento en la base. *Revista Universidad EAFIT, 38*(125), 51-61pp.
- Bruce, A. B. (1976). *Nuclear Explosions and Earthquakes*. Sn. Francisco, EEUU: Freeman and Company.
- CENAPRED. (1999). *Curso sobre diseño y construcción sismorresistente de estructuras*. México: SEGOB/SENAPRED.
- Chopra, A. K. (2007). *Dinamics of structures, Theory and applications o earthquake engineering*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson, Prentice Hall.
- Clough, R. W., & Penzien, J. (1995). *Dinamics of structures*. Berkley, California: Computers & Structures, Inc. (CSI).
- Colindares, R. (1983). *DINÁMICA DE SUELOS Y ESTRUCTURAS aplicada a la ingeniería sísmica*. México: Limusa.

- Crisafulli, F. J., & Villafañe, E. (2007). Espectros de respuesta y de diseño. *Apuntes para el curso de ingeniería sismorresistente* (pág. 25). Cuyo, Chile: Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuyo.
- Deméneghi, A. (2001). *Temas especiales de Geotécnia*. México, D.F.
- Deméneghi, A., Puebla, M., & Sanginés, H. (2003). *Vibraciones de sistemas de un grado de libertad*. México, D.F.: Facultad de Ingeniería UNAM.
- Deméneghi, A., Sanginés, H., & Magaña del toro, R. (1986). *Apuntes de Mecánica del Medio Continuo*. México: Facultad de Ingeniería, UNAM.
- Gazetas, G. (Sep. de 1991). Formulas and Charts For Impedances of Surface and Embedded Foundations. (ASCE, Ed.) *journal of geotécnical engineering*, 117(9), 1363-1381.
- Gómez, A. J. (2010). Presentación de un nuevo modelo matemático para el cálculo del periodo fundamental de vibración en suelos estratificados (AGH-2010). *XVII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural*. León, Guanajuato. México: SMIE.
- Hibbeler, C. R. (2011). *Mecánica de materiales*. CDMX, México: Person, Prentice Hall.
- Jaime, A., Juárez, S. E., & Flores, F. A. (2012). Análisis Dinámico Empleando Espectros de Diseño del RCDF y del Manual de CFE 2008. *XXVI Reunión Nacionalde Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica* (págs. 1-6). Cancún, Qintana Roo: Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica, A.C.
- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Lai, C. G., & Martinelli, M. (2013). Soil-Structure Interaction. *twenty-third session of ALERT Doctoral School* (págs. 3-45pp). Aussois, Germany: ALERT Doctoral School.
- Levi, E. (1982). *Mecánica del Medio Continuo*. México, D.F.: Limusa.
- Meli, R. (1985). *Diseño Estructural*. México, D.F.: Limusa.
- Mena, U., & Pérez-Rocha, E. (2008). *Manual de Obras Civiles, Diseño por Sísimo*. México: CFE.
- Ordaz, M., & Pérez-Rocha, L. E. (1998). Estimation of strength- reduction factors for elastoplastic systems: a new approach. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 27, 889-901.
- Paz, M. (1992). *Dinámica estructural Teoría y cálculo*. Barcelona, España: Reverté.
- Reséndiz, D., & Roesset, J. M. (1986). Soil-structure interaction in Mexico City during the 1985 earthquake. *International Conference on the 1985 Mexico Earthquakes, Factors Involved and Lessons Learned*. New York, USA: ASCE.
- Rosenblueth, E., & Gómez, R. (1987). *ES-7: Comentarios a las normas técnicas complementarias para diseño por sismo de 1987*. México, D.F.: Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Rosenblueth, E., & Reséndiz, D. (1988). ES 509: Disposiciones Reglamentarias de 1987 para tener en cuenta interacción suelo-estructura. *Series del instituto de Ingeniería*(No. 509).

- Seed, H. B. (1986). Influencia de las condiciones locales del suelo en movimientos del terreno y en daños a edificios durante sismos. *Octava Conferencia Nabor Carrillo* (pág. 187). Mazatlán, Sinaloa, México: SMIG.
- Singiresu, S. R. (2012). *Vibraciones mecánicas*. México: Pearson.
- Solar, E., & Speziale, L. (1985). *Apuntes de álgebra lineal*. México, D.F.: DCB-FI, UNAM.
- Wikipedia*. (18 de May. de 2015). Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_integral
- Wolf, J. (1985). *Dynamic Soil-Structure Interaction*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- Wolf, J. P., & Deeks, A. j. (2004). *Foundation vibration analysis*. London, England: Elsevier.
- Young, H. D., & Freedman, R. A. (2009). *Física Universitaria*. Naucalpan de Juárez, Edo. de México: Pearson.
- Zeevaert, L. (Julio de 1963). Reimpresión del boletín de la SMIS sobre las mediciones y cálculos sísmicos durante los temblores registrados en la Ciudad de México en Mayo de 1962. (U. Facultad de Ingeniería, Ed.) *Ingeniería*, Vol. XXXIII(No. 3), 199-207.
- Zeevaert, L. (1980). *Interacción Suelo Estructura de Cimentaciones*. México, D.F.: Limusa.
- Zeevaert, L. (1983). *Foundation Engineering for difficult subsoil condition*. New York, USA: Van Nostrand Reinhold Company.
- Zill, D. G. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*. México, D.F.: Cengage Learning Editores.