



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Características de la generación y
detección de la modulación polibinaria en
un sistema óptico utilizando el modulador
Mach - Zehnder**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero en Telecomunicaciones

P R E S E N T A

Rafael Monzón Rodríguez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ramón Gutiérrez Castrejón



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2018

JURADO ASIGNADO:

Presidente: **ING. MARGARITA BAUTISTA GONZÁLEZ**

Vocal: **DR. RAMÓN GUTIÉRREZ CASTREJÓN**

Secretario: **M.I. JUVENTINO CUELLAR GONZÁLEZ**

1 er. Suplente: **M.I. ERNESTO RAMÍREZ CRUZ**

2 do. Suplente: **DR. DANIEL ENRIQUE CEBALLOS HERRERA**

TUTOR DE TESIS:

DR. RAMÓN GUTIÉRREZ CASTREJÓN

FIRMA

Introducción

Antecedentes

En la actualidad se estudian distintos formatos de modulación avanzados con el fin de hacer un uso eficiente del ancho de banda, lo que permitiría transmitir una gran cantidad de información a través de canales a grandes distancias. Existen formatos de modulación con eficiencia espectral grande como DPSK (modulación por desplazamiento diferencial de fase, Differential Phase Shift Keying) y QAM (modulación de amplitud en cuadratura, Quadrature Amplitude Modulation); sin embargo, tienen la desventaja de tener una implementación complicada.

Por otra parte, esquemas de modulación como *duobinario* han demostrado ser una excelente alternativa para conseguir una mayor eficiencia espectral que la que se encuentra en los esquemas tradicionales de modulación de amplitud NRZ (Non Return to Zero), presentando además la característica de ser tolerante a la dispersión cromática y una decodificación sencilla [1]. A pesar de ser una modulación con características claramente establecidas, esquemas de modulación polibinario con más de 3 niveles (caso duobinario) no han sido analizados a fondo para poder identificar oportunidades de mejora para los actuales sistemas de comunicaciones.

Planteamiento del problema

El crecimiento exponencial en la demanda de información representa una dificultad a corto plazo en los actuales sistemas de comunicaciones. Satisfacer esta demanda es en sí el problema. El fenómeno '*Capacity Crunch*' [2] se refiere a que en algún punto cercano la capacidad máxima que podrían ofrecer los sistemas actuales de comunicaciones será insuficiente para cubrir la creciente necesidad en transmisión de datos que demanda la sociedad. Por esta razón surge la necesidad de implementar nuevas ideas para atacar este problema. En la actualidad se han desarrollado ideas muy interesantes como la multiplexación por división espacial (*Spatial Division Multiplexing, SDM*); esta idea parte del hecho de desarrollar nuevos tipos de fibra que permitan enviar más datos, entre estas nuevas ideas se encuentra la fibra multinúcleo [3], la cual permite multiplicar la información que se envía al utilizar cada núcleo de esta nueva fibra.

Otra solución se encuentra en utilizar formatos avanzados de modulación que tengan una alta eficiencia espectral. Este parámetro es de mucho interés en los sistemas WDM (multiplexado por división de onda, Wavelength Division Multiplexing), ya que entre más alta sea la eficiencia espectral de un formato de modulación, mayor será la cantidad de canales que se podrán enviar en un ancho de banda determinado. El presente trabajo pretende estudiar esta solución al analizar las características de la modulación polibinaria en un sistema de comunicaciones óptico.

Propuesta de tesis

Debido a que las señales polibinarias en el dominio óptico han sido poco exploradas, se pretende analizar su funcionamiento utilizando un modulador Mach – Zehnder (en la sección 1.1 se hablará sobre este tema). Posteriormente, con base a los resultados obtenidos, se buscará realizar un análisis matemático que permita calcular la probabilidad de error de cada señal polibinaria.

Conocer las características de las señales polibinarias permitirá realizar comparaciones con la finalidad de detectar los puntos fuertes y débiles de este formato de modulación.

Objetivo

Implementar numéricamente un sistema óptico que ocupe modulación polibinaria para lograr una alta eficiencia espectral, las características de dicho sistema serán del tipo “back – to – back”, es decir, todo el análisis se concentrará en la *transición eléctrica – óptica – eléctrica* sin utilizar fibra óptica.

Aportes de esta tesis

La principal aportación de este trabajo se encuentra en un método para generar señales polibinarias a través de un filtro analógico y otro digital. Es importante destacar el uso del modulador Mach – Zehnder, debido a que este dispositivo permite crear dos variaciones por cada señal que ingresa al operarlo en punto de cuadratura y nulo.

Un punto importante en esta investigación fue el uso de un modelo que permita cuantificar la confiabilidad en la transmisión de información. Este trabajo presenta el desarrollo de un modelo Gaussiano que permite obtener la probabilidad de error en un sistema de 5 niveles descrito en términos de una función $Q(x)$ (esta función es descrita en la sección 3.1.2).

Justificación.

La modulación polibinaria ofrece ventajas muy importantes que pueden ser aprovechadas para contrarrestar la problemática de las limitantes actuales en la capacidad en los sistemas de comunicaciones ópticas.

Uno de sus atractivos más interesantes, que justifica el análisis de esta modulación, se encuentra en su alta eficiencia espectral, esta es posible ya que este esquema de modulación permite enviar información utilizando anchos de banda estrechos por cada canal, esto implica tener más canales de comunicación en un ancho de banda determinado en un sistema WDM.

Existe una relación entre el ancho de banda y los efectos perjudiciales de la dispersión cromática [4], entre más grande sea el ancho de banda, peores serán los efectos de este tipo de dispersión. Por tanto, el uso de la modulación polibinaria ofrece la ventaja de que al ocupar menos ancho de banda por cada canal, los efectos nocivos de la dispersión cromática serán menores, por esta razón se suele hablar de la tolerancia a la dispersión cromática en los sistemas de comunicaciones polibinarios.

Por último, un aspecto que destaca de este tipo de modulación sobre otros, es la simplicidad de su receptor. Para recuperar la señal basta con realizar detección directa de la señal modulada en amplitud. No es necesario involucrarse con la complejidad del receptor de otros formatos de modulación coherentes con alta eficiencia espectral para lograr decodificar la señal.

Descripción del trabajo

En el capítulo 1 se presentan los elementos básicos de un sistema de comunicaciones óptico con la finalidad de ofrecer un panorama general de las acciones que se realizan en cada uno de ellos. Se hace énfasis en las características importantes en el presente trabajo al describir aspectos como los puntos de operación del modulador. Por último, se describe la relación entre la eficiencia espectral y los sistemas WDM.

En el capítulo 2 se introducen diversos aspectos teóricos necesarios para la comprensión de la modulación polibinaria. Se resalta la importancia del precodificador en este formato de modulación. Después se explican las señales polibinarias en el dominio eléctrico. Es presentada la relación entre la señal polibinaria y el modulador Mach – Zehnder. Posteriormente se muestra la demodulación de la señal polibinaria a través del decodificador módulo 2 y como se establecen los umbrales de decisión. Finalmente, se presentan los resultados a través de los diagramas de ojo obtenidos para señales duobinarias (tres niveles) y polibinarias (5 niveles) para uno de los tipos de filtrado paso bajas y considerando dos puntos de operación del modulador Mach – Zehnder (punto de cuadratura y nulo). Además, se incluye una discusión respecto a los eventos más llamativos observados en el comportamiento de las distintas señales polibinarias obtenidas.

En el capítulo 3 se expone de manera clara los conceptos utilizados para el modelado de la probabilidad de error en un sistema de comunicaciones. Después se definen las probabilidades a priori de cada esquema de modulación polibinario de acuerdo a lo planteado en la teoría y mediante simulaciones se valida. Posteriormente, se muestra el desarrollo matemático a través de un gaussiano para el cálculo de la probabilidad de error en un sistema polibinario de 3 y 5 niveles, explicando paso a paso cómo determinarlo. Por último, se introduce un modelo general de probabilidad de error para una señal polibinaria con niveles impares utilizando una notación propia.

En el capítulo 4 se realiza una comparación y discusión respecto al desempeño en términos del BER (tasa de bits erróneos, Bit Error Rate) y eficiencia espectral de las distintas señales polibinarias analizadas en este trabajo.

Referencias de la introducción

- [1] M. Joint, G. Bosco, A. Carena, V. Curri, P. Poggiolini, “*Fundamental performance limits of optical duobinary*”, Optics Express 19601, Vol. 16, No. 24, 2008.
- [2] A.D. Ellis, N. Mac Suibhne, D. Saad, D. N. Payne, “*Communication networks beyond the capacity crunch*”, The Royal Society Publishing, 2016.
- [3] Tetsuya Hayasji, Toshiki Taru, Takuji Nagashima, Osamu Shimawaka, Takasbi Sasaki, Eisuke Sasaoka, “*Multi-core Fiber for High-Capacity Long Haul Spatially-Multiplexed Transmission*”, Sei Technical Review, 2013.
- [4] D. Penninckx, L. Pierre, J. P. Thiery, B. Clesca, M. Chbat, J.L. Beylat, “*Relation between spectrum bandwidth and the effects of chromatic dispersion in optical transmissions*”, Electronic Letters Online, 1996.

Contenido

Introducción	3
Antecedentes	3
Planteamiento del problema	3
Propuesta de tesis.....	3
Objetivo	4
Aportes de esta tesis.....	4
Justificación.....	4
Descripción del trabajo	5
Índice de figuras.	9
Índice de tablas	10
Lista de acrónimos.	11
1. Sistemas ópticos de comunicaciones	12
1.1 Componentes de un sistema óptico de comunicaciones.....	12
1.1.1 Equipo transmisor.....	12
1.1.2 Canal de transmisión	17
1.1.3 Receptores ópticos.....	19
1.2 Sistemas WDM.....	20
2. Señales polibinarias	24
2.1 Modulación polibinaria.	24
2.1.1 Precoder.....	26
2.1.2 Generación de la señales polibinarias	27
2.2 Generación de señales ópticas polibinarias mediante modulador Mach - Zehnder	32
2.3 Demodulación de señales polibinarias	34
2.3.1 Decoder MÓDULO 2.....	34
2.3.2 Umbrales de decisión para señales polibinarias ($M = 3$ y $M = 5$)	36
2.4 Variantes de señales ópticas polibinarias ($M = 3$ y $M = 5$) analizadas en este trabajo	37
3. Modelos de probabilidad de error para modulaciones polibinarias	45
3.1 Conceptos básicos para el cálculo de la probabilidad de error.....	45
3.1.1 Función de densidad de probabilidad Gaussiana	45
3.1.2 Función $Q(x)$	46
3.1.3 Modelo de probabilidad de error para señales de dos niveles (binarias)	47

3.2 Distribución de niveles para probabilidades a priori	48
3.3 Modelo de probabilidad de error para una señal polibinaria de 3 niveles	51
3.4 Modelo de probabilidad de error para una señal polibinaria de 5 niveles	55
3.5 Modelo de probabilidad de error general para una señal polibinaria de M niveles	56
4. Evaluación del desempeño para diversos esquemas en modulación polibinaria.....	61
4.1 Filtro Polibinario o enfoque analógico	61
4.2 Filtro Delay-And-Add o enfoque digital.....	65
4.3 Resumen y discusión de los resultados	69
5. Conclusiones.....	72
Trabajo a futuro	74
Apéndices.....	75
A Expresión para hallar umbrales dependiendo del número de niveles N del sistema	75
B Código de MATLAB de precodificador de un sistema polibinario	77

Índice de figuras.

Fig. 1.1 Modulador óptico diferencial de doble brazo Mach – Zehnder	14
Fig. 1.2 Curva característica de potencia y campo eléctrico	15
Fig. 1.3 Punto de operación y constelación del punto de cuadratura	16
Fig. 1.4 Punto de operación y constelación del punto nulo	17
Fig. 1.5 Curva de atenuación en fibra monomodo	18
Fig. 1.6 Dispersión cromática en fibra SMF – 28	19
Fig. 1.7 Sistema WDM.....	21
Fig. 2.1 Esquema de generación de señales polibinarias	28
Fig. 2.2 Filtro delay-and-add para generación de 3 amplitudes (señal duobinaria)	29
Fig. 2.3 Filtro delay-and-add para generación de M niveles.....	29
Fig. 2.4 Comparación de niveles para 3 y 5 amplitudes (filtro delay-and-add)	30
Fig. 2.5 Filtro duobinario	31
Fig. 2.6 Cambio en la forma de los pulsos de NRZ a duobinario	31
Fig. 2.7 Comparación de niveles para 3 y 5 amplitudes (filtro polibinario).....	32
Fig. 2.8 Valores de la curva de campo eléctrico para un MZM.....	33
Fig. 2.9 Diagramas de ojo de señal duobinaria, puntos de operación en cuadratura y nulo.....	33
Fig. 2.10 Umbrales de decisión en señales polibinarias.....	36
Fig. 2.11 Punto de muestreo propuesto para la señal Polibinaria – C (modificada)	39
Fig. 2.12 Distribución de los niveles teóricos	39
Fig. 2.13 Distribución de niveles observada en simulaciones	40
Fig. 2.14 Comparación de señal Duobinaria – C y señal Polibinaria – C modificada	41
Fig. 3.1 Función Q(x).....	46
Fig. 3.2 Probabilidades condicionales para 2 niveles.....	48
Fig. 3.3 Constelaciones en dominio óptico y eléctrico (receptor) de la señal Polibinaria – N.....	51
Fig. 3.4 Probabilidades condicionales para 3 niveles.....	52
Fig. 3.5 Probabilidades condicionales para 5 niveles.....	55
Fig. 4.1 Diagrama de ojo Duobinaria-C.....	62
Fig. 4.2 Diagrama de ojo Polibinario-C	63
Fig. 4.3 Diagrama de ojo Duobinario-N.....	64
Fig. 4.4 Diagrama de ojo Polibinario-N	65
Fig. 4.5 Comparación de señales polibinarias generadas por filtro delay –and- add.....	66
Fig. 4.6 Diagrama de ojo Duobinaria-C.....	66
Fig. 4.7 Diagrama de ojo Polibinario-C	67
Fig. 4.8 Diagrama de ojo Duobinario-N.....	68
Fig. 4.9 Diagrama de ojo Polibinario-N	69

Índice de tablas

Tabla 2-1	Señales polibinarias en el receptor generadas por el MZM operado en cuadratura ..	38
Tabla 2-2	Señales polibinarias en el receptor generadas por el MZM operado en nulo	42
Tabla 3-1	Combinaciones de niveles para $M = 5$	49
Tabla 3-2	Probabilidades a priori obtenidas en simulaciones.....	50
Tabla 3-3	Valores de M y sus respectivas variables auxiliares r_M	56
Tabla 3-4	Definición de ΔM	57
Tabla 3-5	Probabilidad de error total de señales polibinarias.....	59
Tabla 4-1	Desempeño de las señales.....	70

Lista de acrónimos.

BER – Bit Error Rate (Tasa de bits erróneos)

DC – Direct Current (Corriente directa)

DEMUX – Demultiplexor

DPSK – Differential Phase Shift Keying (modulación por desplazamiento diferencial de fase)

EDFA – Erbium Doped Fiber Amplifier (Amplificador de fibra dopado con erbio)

fdp – función de densidad de probabilidad

GVD – Group Velocity Dispersion (Dispersión de la velocidad de grupo)

IM/DD – Intensity Modulation/Direct Detection (Modulación de intensidad/Detección directa)

ISI – Inter Symbol Interference (Interferencia entre símbolos)

LASER – Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation (Amplificación de luz por emisión estimulada de radiación)

LED – Light Emitting Diode (Diodo emisor de luz)

LPF – Low Pass Filter (Filtro paso-bajas)

MUX – Multiplexor

MZM – Mach Zehnder Modulator (Modulador Mach – Zehnder)

NRZ – Non Return to Zero (No retorno a cero)

PM – Phase Modulation (Modulación de fase)

QAM – Quadrature Amplitude Modulation (modulación de amplitud en cuadratura)

RZ – Return to Zero (Retorno de fase)

WDM – Wavelength Division Multiplexing (Multiplexación por division de longitud de onda)

1. Sistemas ópticos de comunicaciones

Los sistemas ópticos de comunicaciones han demostrado ser medios fiables para transmitir información. Desde sus orígenes, durante la década de los 60's, la invención del láser fue uno de los factores clave que impulsó el interés y uso de la fibra óptica como medio de comunicaciones [1].

Anteriormente, para amplificar las señales ópticas era necesario realizar una conversión eléctrica - óptica - eléctrica, sin embargo, en la década de los 90's se utilizó una nueva tecnología de amplificadores totalmente ópticos como el amplificador óptico de fibra óptica dopado con Erbio (EDFA). Gracias a estos avances fue posible la transmisión de información a través de grandes enlaces que permitieron la conexión entre continentes por medio de cables submarinos [2]. Durante esa misma década se logró aumentar la capacidad de las redes ópticas mediante el uso de la tecnología WDM al multiplexar múltiples señales ópticas en distintas longitudes de onda a través de una misma fibra óptica [3].

La evolución de los sistemas ópticos de comunicaciones ha permitido conformar enlaces de alta capacidad; sin embargo, se requiere mayor investigación y desarrollo de nueva tecnología para conseguir mejorarlos.

En este capítulo se abordan los elementos contenidos en un sistema óptico de comunicaciones, se hace énfasis en la forma de operar del modulador óptico – eléctrico Mach - Zehnder, ya que este dispositivo junto con el fotodetector son los responsables de definir las características de generación y detección presentes en las variaciones de amplitud de la señal de información.

Finalmente se describe el esquema de multiplexación por división en longitud de onda (WDM) utilizado en los sistemas de comunicaciones ópticos y se establece la relevancia que tiene el concepto de eficiencia espectral para aprovechar de manera más eficaz el ancho de banda que ofrece la fibra óptica.

1.1 Componentes de un sistema óptico de comunicaciones

Un sistema óptico de comunicaciones de manera general por un equipo transmisor, un medio de transmisión de la información (fibra óptica) y un equipo receptor. En el transmisor se encuentra la etapa de adaptación de la señal de información a transmitir a través de la fibra óptica, para lograrlo, se tiene que llevar a cabo una transición eléctrica – óptica. La fibra óptica es un medio que ofrece pocas pérdidas de energía (potencia) para transportar información, además de ser inmune a la interferencia electromagnética, en comparación a otros sistemas de transmisión basados en señales eléctricas. Por último, en el equipo receptor se tiene un fotodetector que se encarga de realizar la conversión óptico-eléctrica de la señal de información propagada en la fibra óptica. Una vez que la señal se encuentra en el dominio eléctrico, la señal pasa por una etapa de amplificación y por un circuito de decisión para recuperar la información original.

1.1.1 Equipo transmisor

El transmisor se integra por una fuente lumínica que pasa a través de un dispositivo modulador cuya operación es controlada por la información eléctrica que viene codificada con algún formato de modulación. Las fuentes de luz más utilizadas en los sistemas ópticos de comunicaciones son

los LED y los diodos láseres de semiconductores. Debido a su implementación sencilla, costo y por poseer un ancho de banda grande de su espectro de emisión, los LED se utilizan en enlaces cortos de unos cuantos kilómetros. Mientras que los diodos láser son utilizados en enlaces de larga distancia debido a un mejor acoplamiento de la luz, mejor conversión eléctrica-óptica y a diferencias de los LED, poseer un ancho de banda angosto en su espectro de emisión.

Una parte importante del transmisor es la conversión de la señal eléctrica a una señal óptica. Para lograr la conversión eléctrica-óptica de la señal de información en la etapa de modulación, se tienen dos principales métodos:

- **Modulación directa:** La potencia óptica de un láser se modifica directamente por la corriente de entrada que alimenta al láser. Una de sus ventajas es que su implementación es simple, como su nombre lo indica, la transición de variaciones eléctricas a variaciones ópticas es “directa” debido a que la única acción que se realiza es prender y apagar al láser dependiendo de la señal eléctrica; sin embargo, la lentitud de este proceso es una desventaja muy importante (se utiliza abajo de los 3 [GHz]).
- **Modulación externa:** En este método, un dispositivo externo es utilizado para modular la intensidad/fase de una fuente de luz. Éste funciona como un switch que prende y apaga la señal dependiendo de la información que se transmita a través de él. Entre sus ventajas se encuentra la rapidez para procesar la información modulada (mucho más rápido en comparación con la modulación directa), y también puede ser utilizado con láseres de alta potencia. Entre sus desventajas se encuentra el costo de estos dispositivos, además de que requieren circuitos de modulación RF de alta potencia para operarlos, los cuales pueden llegar a ser complejos.

Los moduladores externos son capaces de procesar datos con gran rapidez, este trabajo pretende aprovechar esa característica para analizar señales de 10 Gbps, por esta razón se profundizará el análisis en este tipo de moduladores.

De acuerdo a las propiedades de los materiales que son usados para modular haces de luz, los moduladores externos pueden dividirse en dos grupos: moduladores absorbentes y moduladores refractivos. Los absorbentes cambian el coeficiente de absorción del material, mientras que los refractivos cambian el índice de refracción para modular las señales.

Los moduladores Mach – Zehnder (MZM) se encuentran en el grupo de moduladores refractivos. El índice de refracción es un parámetro que compara la velocidad de la luz en el vacío con la velocidad en el medio; cuando la propagación de la luz en el medio es más lenta, el índice de refracción es mayor a la unidad.

Modulador Mach – Zehnder

Un modulador óptico de fase puede ser fabricado como un dispositivo óptico al unir una guía de onda óptica en un sustrato óptico – eléctrico. Aprovechando la propiedad que presentan algunos medios materiales de cambiar su índice de refracción al aplicarles una diferencia de potencial, se puede afectar el índice de refracción efectiva de la guía de onda, de esta forma es posible modular la fase del campo eléctrico que entra al dispositivo [4].

La figura 1.1 muestra un modulador diferencial Mach - Zehnder de doble brazo (*dual-drive*), en el que ambos brazos pueden modular la fase de manera independiente, en contraste a un MZM de un sólo brazo (*single-drive*).

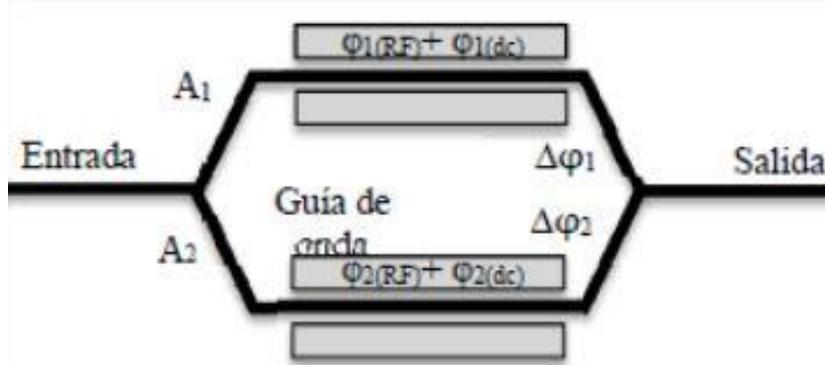


Fig. 1.1 Modulador óptico diferencial de doble brazo Mach – Zehnder [5]

La modulación de fase $\phi_{PM}(t)$ es una función de la longitud de onda λ , la longitud del electrodo l_{el} (longitud de interacción) y el cambio del índice de refracción efectivo $\Delta n_{eff}(t)$. Cuando sólo se considera el efecto Pockels¹, el comportamiento del cambio en el índice de refracción puede ser asumido como lineal cuando se le aplica un voltaje externo $u(t)$.

$$\phi_{PM}(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n_{eff}(t) \cdot l_{el} \sim u(t) \quad (1.1)$$

El voltaje necesario para alcanzar un desfase de 180° (π [rad]), se representa como V_π . Entonces, la relación entre el campo eléctrico de entrada $E_{in}(t)$ y el campo eléctrico modulado en fase de salida $E_{out}(t)$, cuando se omite la constante de cambio de fase óptica del modulador, queda definido a través de la siguiente expresión:

$$E_{out}(t) = E_{in}(t) \cdot e^{j\phi_{PM}(t)} = E_{in}(t) \cdot e^{j\frac{u(t)}{V_\pi}\pi} \quad (1.2)$$

El funcionamiento del modulador Mach - Zehnder es el siguiente: la luz que entra al dispositivo es dividida a cada brazo del modulador que tiene su respectivo modulador de fase. Después de que ambos brazos del modulador Mach – Zehnder adquieren alguna diferencia de fase respecto a la otra, los campos ópticos se recombinan. Los escenarios posibles en este punto pueden llevar a que la interferencia sea desde constructiva hasta destructiva, dependiendo de la diferencia de fase relativa. Sin considerar pérdidas por inserción, la función de transferencia del MZM es la siguiente:

$$\frac{E_{out}(t)}{E_{in}(t)} = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\phi_1(t)} + e^{j\phi_2(t)}) \quad (1.3)$$

En (1.3), $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ representan los cambios de fase del brazo superior y inferior del MZM. Para un valor determinado de voltaje de conducción se obtiene un cambio de fase π en el brazo superior e inferior, $V_{\pi 1}$ y $V_{\pi 2}$, respectivamente, y con los voltajes de conducción $u_1(t)$ y $u_2(t)$.

¹ El efecto Pockels es un fenómeno en el cual el índice de refracción de un medio se modifica de manera proporcional al campo eléctrico aplicado.

Cuando se opera el MZM en modo *push-push*, se induce un cambio de fase idéntico en ambos brazos, es decir $\phi(t) = \phi_1(t) = \phi_2(t)$ (esto ocurre bajo las condiciones $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ y $V_\pi = V_{\pi 1} = V_{\pi 2}$), en este caso se logra una modulación pura de fase. La relación entre la entrada eléctrica y el campo óptico de salida queda dada por (1.2) como una simple modulación de fase (Phase Modulation, PM). Por otro lado, cuando uno de los brazos posee un cambio de fase negativo respecto al otro brazo (con las condiciones $\phi_1(t) = -\phi_2(t)$ y $u(t)/2 = u_1(t) = -u_2(t)$ y $V_\pi = V_{\pi 1} = V_{\pi 2}$), el MZM es operado en modo *push-pull* y se logra una modulación en amplitud libre de chirp. La relación entre los campos de entrada y de salida es entonces la siguiente:

$$E_{out}(t) = E_{in}(t) \cdot \cos\left(\frac{\Delta\phi_{MZM}(t)}{2}\right) = E_{in}(t) \cdot \cos\left(\frac{u(t)}{2V_\pi}\pi\right) \quad (1.4)$$

Donde, $\Delta\phi_{MZM}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = 2\phi_1(t)$ es la diferencia de fase inducida entre los campos del brazo superior e inferior. Al elevar al cuadrado (1.4), la función de transferencia del MZM obtenida es la siguiente:

$$\frac{P_{out}(t)}{P_{in}(t)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(\Delta\phi_{MZM}(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{u(t)}{V_\pi}\pi\right) \quad (1.5)$$

Se debe remarcar que $u(t)$ fue definida de tal manera que si $u(t) = V_\pi$ se induce un cambio de fase de π para PM, así como un cambio de fase de π en la función de transferencia del MZM cuando se opera en modo *push-pull*.

El modo *push-pull* resulta conveniente para obtener una modulación en amplitud libre de chirp, en este trabajo se aprovecha esta característica.

Curva de la función de transferencia de campo eléctrico y potencia del MZM

Al graficar la función de transferencia de campo eléctrico descrita por la ecuación (1.4) y la curva de la función de transferencia de potencia dada por la ecuación (1.5) se obtiene la figura 1.2

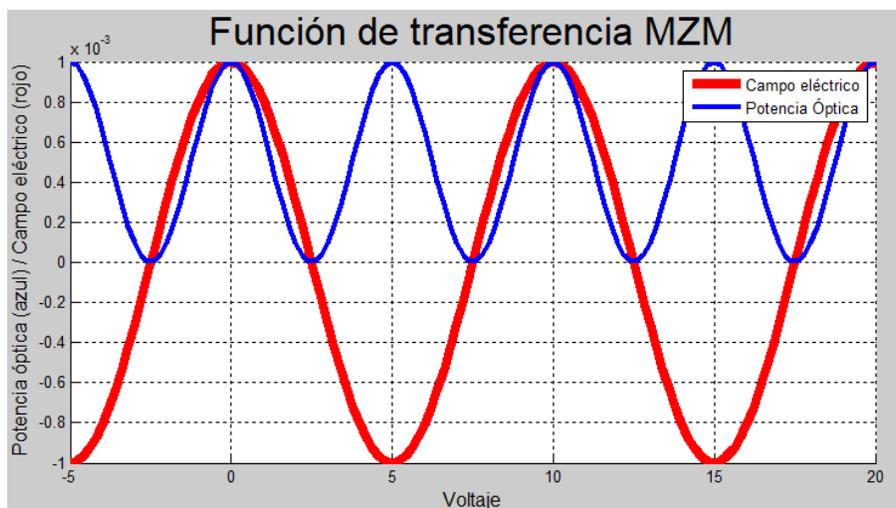


Fig. 1.2 Curva característica de potencia (azul) y campo eléctrico (rojo)

En esta figura, la curva de color azul representa la potencia óptica contra voltaje, mientras que la curva roja representa el campo eléctrico contra voltaje.

A partir de estas curvas es posible trabajar al MZM en el punto de cuadratura o en punto nulo; la diferencia para operar en uno u otro dependerá del segmento de la curva de potencia que se establezca como punto de trabajo.

En ambos casos, partiendo del hecho de que se conoce la curva de potencia, se elige un punto de operación representado por una señal de DC (también es conocido como voltaje de sesgo) sobre la cual va montada una señal modulada en RF con determinada amplitud pico a pico que llega hasta los dos extremos de la región de trabajo. El punto de operación elegido y la amplitud pico a pico de la señal RF dependerán si se desea trabajar en punto nulo o cuadratura.

Existen distintos materiales como el Niobato de Litio (LiNbO3), Arseniuro de Galio (GaAs) y Fosforo de Indio (InP) con los que un modulador Mach Zehnder puede ser fabricado. Como se mencionó en un principio, las características del dispositivo dependerán del material utilizado para su construcción.

Operación del modulador Mach – Zehnder en punto de cuadratura.

Para lograr modulación en amplitud, el MZM debe ser operado en cuadratura, con un voltaje de sesgo o *bias* de $-V_{\pi} / 2$ y una modulación pico a pico de V_{π} .

En la figura 1.3 del lado izquierdo se muestra el segmento de curva para operar en cuadratura (punto de operación), mientras que del lado derecho se ve su constelación. Los tres puntos están alineados únicamente en la parte real del plano complejo, por lo tanto, todas sus amplitudes están en fase.

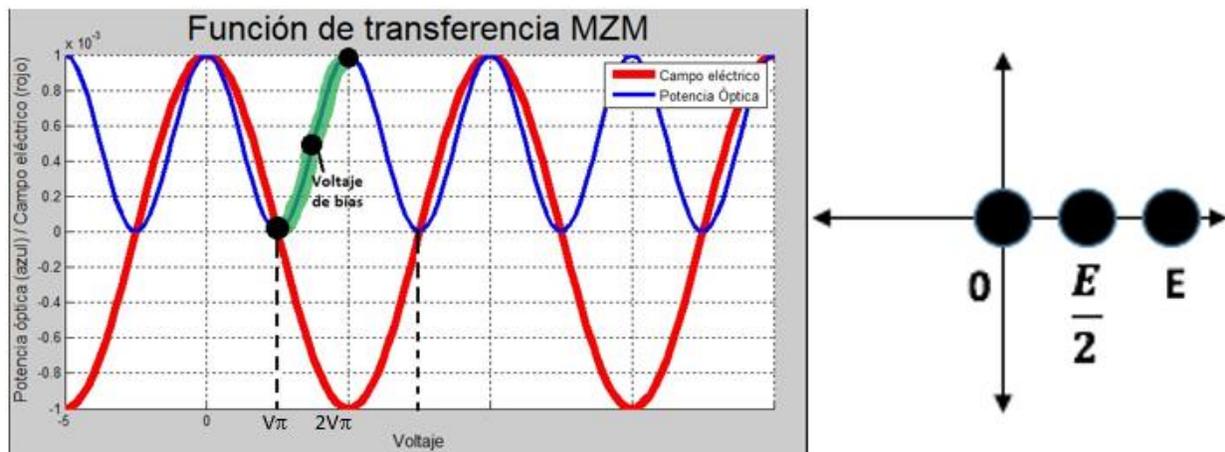


Fig. 1.3 Punto de operación y constelación del punto de cuadratura [fuente propia]

Operación del modulador Mach – Zehnder en punto nulo.

Por otra parte, cuando el MZM se opera en punto nulo, el voltaje de bias se encuentra en $-V_{\pi}$ con una modulación pico a pico de $2V_{\pi}$, y por eso un cambio de fase de π (180°) ocurre cuando se cruza el punto nulo de transmisión. De esta forma, el MZM puede ser utilizado como un modulador binario de fase (0° y 180°) y como modulador de amplitud y fase.

En la figura 1.4 (lado izquierdo), se muestra el punto de operación para operar en punto nulo. En el lado derecho está su constelación, los tres puntos se encuentran divididos por el eje imaginario (eje vertical); la diferencia con el caso anterior es que ahora existe un desfase ya que un punto se encuentra en 180° y otro está en 0° .

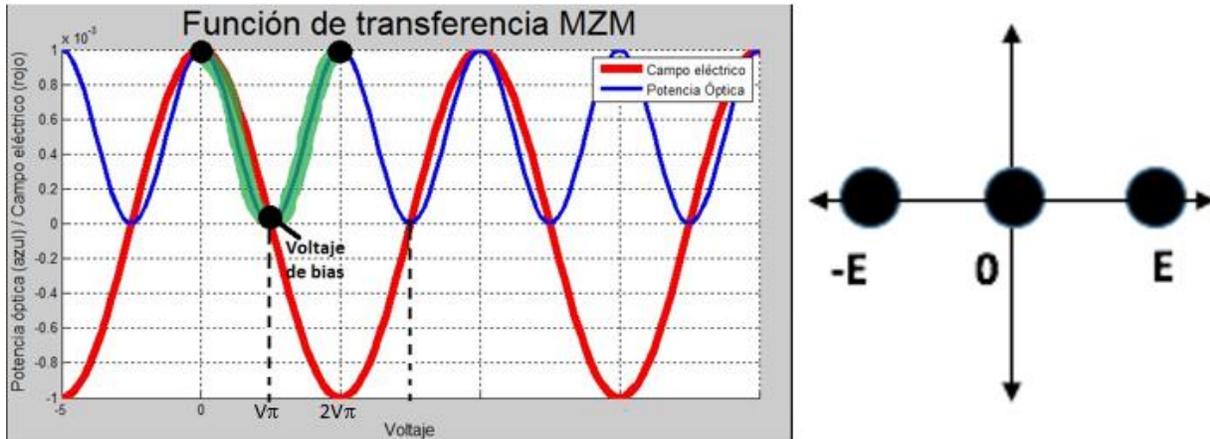


Fig. 1.4 Punto de operación y constelación del punto nulo [fuente propia]

1.1.2 Canal de transmisión

Fibra óptica.

La finalidad de un canal de comunicaciones es transportar la señal óptica del transmisor al receptor sin distorsionarla. La mayoría de los sistemas de comunicaciones ópticos utilizan fibras de sílice para transmitir luz con pérdidas tan pequeñas como 0.2 dB/km; sin embargo, es importante recordar que las pérdidas en la fibra dependen de la longitud de onda donde se trabaja. La figura 1.5 muestra la curva característica de pérdidas en la fibra SMF – 28 dependiendo de la longitud de onda donde se trabaja. Un aspecto importante es determinar la distancia entre amplificadores o repetidores en un enlace, ya que su correcto posicionamiento beneficia al costo de amplificadores y repetidores. Para lograr esto es necesario conocer el valor de atenuación para determinada longitud de onda.

En el diseño de redes ópticas la dispersión en la fibra es un parámetro que debe ser controlado, ya que provoca el ensanchamiento de los pulsos conforme éstos se propagan. Si los pulsos ópticos se propagan fuera de su espacio de bit (bit slot), la señal se verá degradada y será más propensa a confundir bits en la recepción. El problema de la dispersión es más severo en las fibras multimodo [6] (con valores típicos cercanos a 10 ns/km).

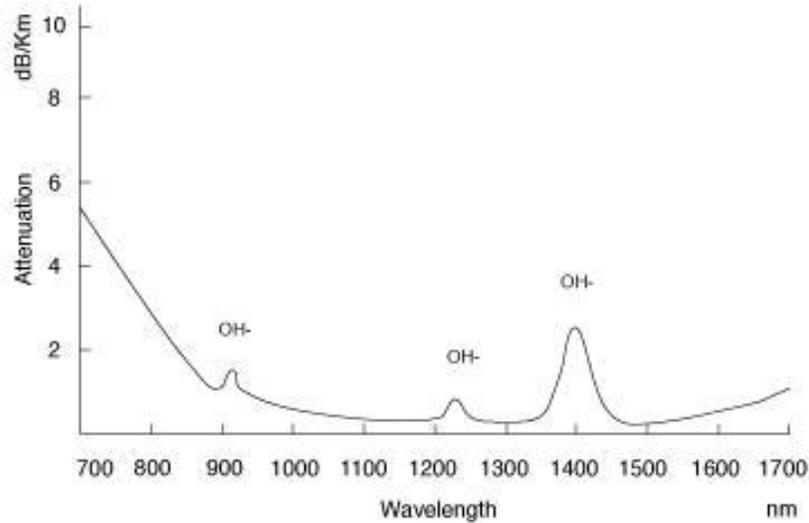


Fig. 1.5 Curva de atenuación en fibra monomodo [7]

La fibra monomodo posee pocas pérdidas, además, en esta guía de onda no existe dispersión multimodal, sólo está presente la dispersión cromática. Estas características son aprovechadas para utilizarla en enlaces de larga distancia.

Dispersión cromática.

Este parámetro es un punto muy importante cuando se manejan fibras mono modo, ya que en fibras SMF-28 su valor es considerable (17 ps/(km-nm) alrededor de una longitud de onda de 1550 nm) y repercute en la calidad de la señal transmitida a lo largo de la fibra.

Consideremos una fibra mono-modo de longitud L . Un componente espectral en la frecuencia ω llegará a la salida de la fibra con un retraso $T = L/v_g$ donde v_g es la velocidad de grupo, definida como:

$$v_g = (d\beta/d\omega)^{-1} \quad (1.6)$$

Utilizando $\beta = \tilde{n}k_0 = \tilde{n}\omega/c$ en (1.6), se puede ver que $v_g = c/\tilde{n}_g$, donde \tilde{n}_g es el índice de grupo dada por:

$$\tilde{n}_g = \tilde{n} + \omega(d\tilde{n}/d\omega)$$

La dependencia de la velocidad de grupo con la frecuencia causa ensanchamiento en los pulsos por la diferencia espectral de los componentes del pulso disperso durante la propagación, por lo que dichos componentes no llegan simultáneamente a la salida de la fibra.

Si $\Delta\omega$ es la anchura espectral del pulso, la extensión del ensanchamiento del pulso para una fibra dada una longitud L está dada por [8]:

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\omega = L \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \Delta\omega = L\beta_2 \Delta\omega \quad (1.7)$$

El parámetro β_2 es conocido como dispersión de la velocidad de grupo (GVD, Group Velocity Dispersion), y determina cuanto se ha ensanchado un pulso óptico al ser propagado a lo largo de la fibra.

En un sistema de comunicaciones ópticas, el ensanchamiento $\Delta\omega$ es determinado por el rango de longitudes de onda $\Delta\lambda$ emitidos por la fuente óptica. Es común por tanto utilizar $\Delta\lambda$ en lugar de $\Delta\omega$.

Utilizando $\omega = 2\pi c / \lambda$ y $\Delta\omega = (-2\pi c / \lambda^2)\Delta\lambda$ la ecuación (1.7) puede ser reescrita como:

$$\Delta T = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{L}{v_g} \right) \Delta\lambda = DL\Delta\lambda$$

Donde

$$D = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2$$

D es el parámetro de dispersión y es expresado en unidades ps/(km·nm)

La dispersión cromática depende del tipo de fibra que se utilice y de la frecuencia (longitud de onda) de operación. La figura 1.6 muestra su comportamiento en la fibra SMF-28

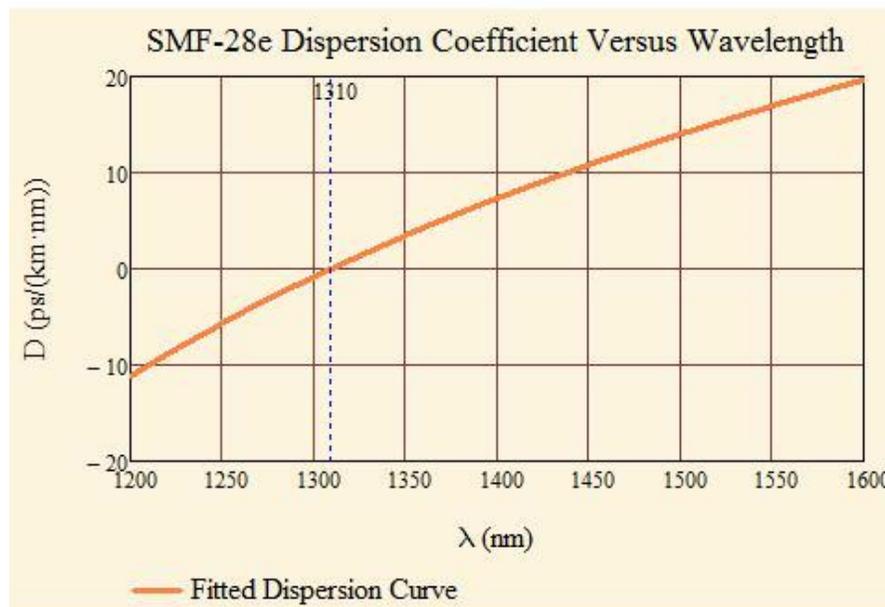


Fig. 1.6 Dispersión cromática en fibra SMF – 28 [9]

1.1.3 Receptores ópticos

Un receptor óptico convierte de regreso la señal del dominio óptico al dominio eléctrico al ser recibida al final de la fibra óptica. El receptor consiste en un acoplador, un fotodiodo y un demodulador. El acoplador es un dispositivo que concentra la luz recibida, la prepara para que

el fotodiodo reciba la señal de la mejor forma evitando posibles pérdidas durante la transición óptica a eléctrica.

Los fotodiodos reciben la señal óptica y la transforman en una señal eléctrica. Un parámetro típico de los fotodiodos es la responsividad (medida en A/W); de manera general, este parámetro indica cuánta corriente eléctrica es generada por el fotodiodo dada una potencia óptica recibida. Entre mejor sea la transformación de fotones (dominio óptico) a electrones (dominio eléctrico) más alto será el valor de la responsividad.

La responsividad depende de la longitud de onda (teniendo un valor pico en λ_{pico}), por ende la selección de un fotodiodo depende de la longitud de onda en la que se desee trabajar.

$$I_{PD} = R(\lambda) \cdot P \quad (1.8)$$

Donde:

$R(\lambda)$ es la responsividad del fotodiodo.

I_{PD} es la corriente generada por el fotodiodo al incidir potencia óptica.

P es la potencia óptica incidente.

La tasa de detección de fotones y la corriente I_{PD} generada son proporcionales al cuadrado del campo eléctrico (es decir $|E|^2$), ya que el fotodiodo es un dispositivo de ley cuadrada [10].

Existen dos esquemas para recibir señales: la detección coherente implica recibir amplitud y fase/frecuencia. Requiere de otros componentes además del fotodiodo para poder detectar la señal y por tanto su implementación es difícil. El otro esquema se llama Modulación de Intensidad/Detección Directa (IM/DD), y es más sencillo de implementar porque sólo se coloca un fotodiodo que recibe la amplitud de la señal. En este trabajo, nos avocaremos a la detección directa.

La meta del demodulador es recuperar la información original. En el caso de detección directa, el demodulador va a recibir distintos niveles de amplitud, y por ende debe diferenciar entre cada nivel, y al reconocer cada nivel, asocia cada nivel a un bit 0 o a un bit 1.

1.2 Sistemas WDM

Un sistema WDM se compone de un multiplexor óptico (MUX) que combina múltiples haces de luz diferentes (también se refieren a ellos como longitudes de onda λ), a través de una sola fibra óptica para transmitir la señal combinada y un demultiplexor óptico (DEMUX) para separar cada haz de luz transmitido recibido de la fibra. La figura 1.7 ilustra estos componentes.

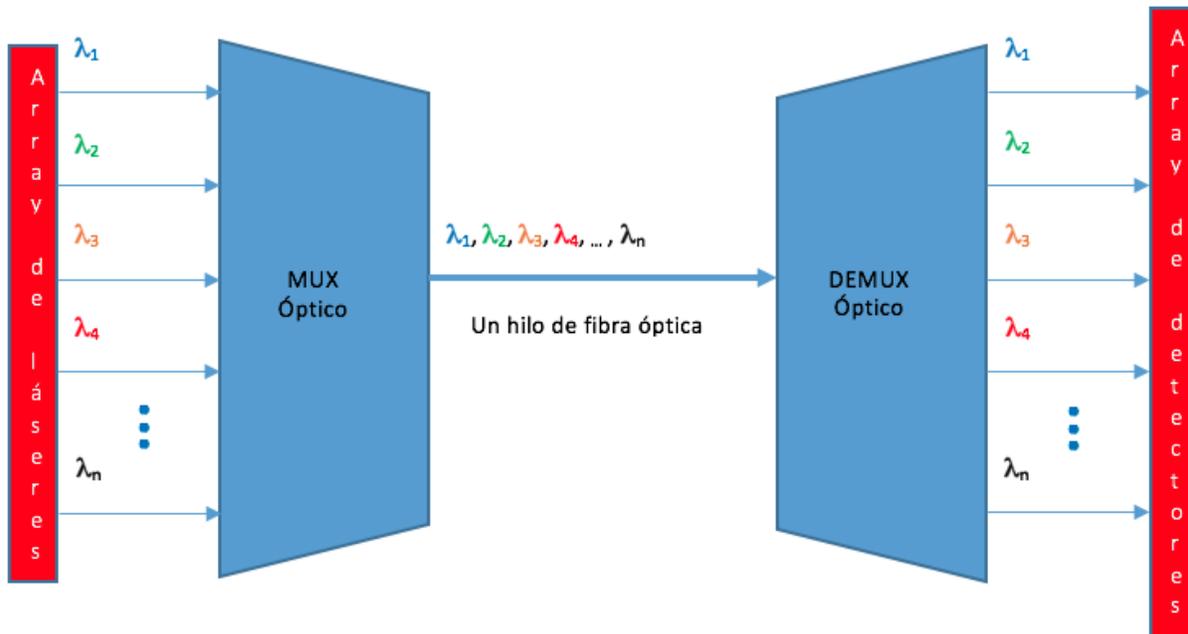


Fig. 1.7 Sistema WDM [fuente propia]

Los sistemas WDM explotan aún más el ancho de banda de la fibra óptica para transportar la información en los enlaces punto a punto. Antes de que apareciera esta tecnología para enviar múltiples haces de luz era necesario tener un hilo de fibra óptica por cada transmisor.

Existen dos criterios importantes que deben considerarse para operar WDM, éstos son: ancho de banda y diafonía.

- El ancho de banda es el rango en longitud de onda relacionado a una fuente óptica. Este parámetro debe cuidarse mediante una correcta separación entre canales para evitar interferencia. Los diodos láser poseen anchos muy estrechos (decenas de nanómetros), mientras que los LED tienen anchos más grandes (de diez a veinte veces más grande que los diodos láser).
- La diafonía es la cantidad de potencia que se acopla de un canal a otro. La cantidad de diafonía intercanal tolerable depende de la aplicación, sin embargo, en general un nivel de -30 dB se considera aceptable [11]

Una forma de medir el aprovechamiento del ancho de banda en un sistema de comunicaciones óptico WDM es mediante el cálculo de la eficiencia espectral; este parámetro se define como el cociente entre la tasa de bits y el ancho de banda del canal transmitido y se representa con la letra η , y queda definido como [12]:

$$\eta = \frac{R}{BW}$$

Donde:

R es la tasa de bits cruda [bits/s]

BW es el ancho de banda del canal [Hz]

η es la eficiencia espectral [bits/s/Hz]

Los sistemas RZ poseen una eficiencia espectral baja ya que el espectro en frecuencia de los canales es muy ancho. La eficiencia espectral de los sistemas NRZ se encuentra alrededor de 1 [bits/s/Hz]. Existen reportes que indican que la eficiencia de los sistemas duobinarios es dos veces más grande que NRZ [13] y de ahí el interés por estudiarlos en este trabajo.

Referencias

- [1] K. C. Kao and G.A. Hockham.; “A. Werts, *Onde Electr.*”, IEEE, 1996.
- [2] Hiroharu Wakabayashi, Shu Yamamoto, “*Transoceanic Optical Submarine Cable Systems Using Optical Amplifiers*”, OSA, 1992.
- [3] Biswanath Nykherjee, “*WDM Optical Communication Networks: Progress and Challenges*”, IEEE, 2000.
- [4] Matthias Seimetz, “*High-order modulation for optical fiber transmission*”, Second Edition, Springer
- [5] Gustavo Adolfo Puerto – Leguizamón, Carlos Arturo Suárez-Fajardo, “*Analytical model of signal generation for radio over fiber systems*”, DYNA, 2014, figura 1, Modulador MZ con control doble.
- [6] Mahdiah B. Shemirani, Joseph M. Kahn, “*Higher-Order Modal Dispersion in Graded – Index Multimode Fiber*”, Journal of Lightwave Technology, December 2009
- [7] Vivek Alwayn, “*Fiber – Optic Technologies*”, Cisco, Figure 3-12, Attenuation Versus Wavelength
Recuperado en: www.ciscopress.com/articles/article.asp?p=170740&seqNum=6
- [8] Govind P. Agrawal, “*Fiber-Optic Communication Systems*”, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- [9] Mark Biegert, “*Optical Fiber Dispersion Formula – Where Did This Come From?*”, Figure 5, Plot of the Corning Dispersion Formula
Recuperado en: mathscinotes.com/2012/04/optical-fiber-dispersion-formula-where-did-this-come-from/
- [10] Philip C.D. Hobbs, “*Building Electro-Optical, Making It All Work*”, Second Edition, John Wiley & Sons
- [11] Gerd Keiser, “*Optical Fiber Communications*”, Second Edition, McGraw-Hill
- [12] Joseph M. Kahn, “*Spectral Efficiency Limits and Modulation/Detection Techniques for DWDM Systems*”, IEEE, 2004.
- [13] Ilya Luybomirsky, “*Advanced Modulation Formats for Ultra-Dense Wavelength Division Multiplexing*”, University of California, White paper

2. Señales polibinarias

En este capítulo se presentan los conceptos teóricos necesarios para modular y demodular señales polibinarias.

Se remarca la importancia del *precodificador* (*precoder*) en un sistema óptico de comunicaciones para lograr una decodificación óptima. Después, se realiza un análisis para explicar las diferencias observadas en la señal detectada al operar un MZM en cuadratura o en punto nulo para generar señales polibinarias. Posteriormente, se expone cómo funciona un decodificador (decoder) módulo 2 y cómo se recupera la trama de bits. Finalmente, se presentan dos tablas analizando cada punto de operación del MZM con las variantes de la señal polibinaria producidas. De manera general se discute lo más llamativo que se observó en estas simulaciones.

2.1 Modulación polibinaria.

La modulación polibinaria es un esquema que permite transmitir R bits/segundo usando menos de R/2 Hz de ancho de banda. La eficiencia espectral de NRZ es menor, debido a que requiere un ancho de banda de R Hz para transmitir R bits/segundo [1].

El primer criterio de Nyquist dice que para poder transmitir R bits/segundo sin tener interferencia entre símbolos (ISI), se requiere que el ancho de banda mínimo del pulso transmitido sea de R/2 Hertz [2].

Por lo tanto, los pulsos polibinarios presentarían interferencia entre símbolos (ISI). Sin embargo, dado que al ensanchar los pulsos en el dominio del tiempo conlleva a espectros de frecuencia más estrechos. La relación proporcional entre la dispersión cromática y el ancho de banda de una señal [3] permite que este formato de modulación sea robusto ante la dispersión cromática.

En la modulación polibinaria se realiza una correlación previa de bits, después se seleccionan en grupos de bits para realizar una suma entre ellos y con ello obtener una señal de múltiples amplitudes.

El procedimiento anterior para una señal duobinaria de tres niveles se representa por la siguiente expresión:

$$x_k = a_k + a_{k-1} \quad (2.1)$$

Donde el subíndice k indica el estado actual del bit y $k - 1$ indica un estado anterior del bit.

a_k es la secuencia original de bits

x_k representa las amplitudes generadas en la señal duobinaria.

Ejemplo de correlación de bits para una señal duobinaria.

Se transmite una secuencia de bits a_k , donde $k = 0, 1, 2, \dots, 11$

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	k=10	k=11
a_k	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1

2.1.1 Precoder

La función del *precoder* es evitar la propagación de errores, un *precoder* cambia el orden de una **trama original de bits** “ a_k ”. La precodificación en duobinario se realiza mediante la operación XOR entre el bit actual a_k y el bit anterior a_{k-1} en el instante **k**

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \quad (2.3)$$

En general, la **trama precodificada** “ b_k ” depende del número M de niveles de la señal polibinaria, **M es un número impar mayor o igual a tres** [6].

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \oplus b_{k-2} \oplus \dots \oplus b_{k-(M-2)} \quad (2.4)$$

Si $M = 3$ en (2.4) se obtiene la expresión del precoder duobinario (2.3)

La precodificación diferencial permite decodificar la secuencia a_k al tomar una decisión individual sobre cada muestra recibida. De esta manera se elimina la dependencia con las decisiones previas que puedan tener un error [4]. Así, la principal razón de implementar una precodificación en el sistema es evitar la propagación de un error en el proceso de decodificación de una señal polibinaria, brindándole robustez al sistema.

Ejemplo de una precodificación de señal polibinaria de 5 niveles

Si $M = 5$ en la expresión del precoder (2.4), la precodificación se realiza por medio de la siguiente expresión:

$$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \oplus b_{k-2} \oplus b_{k-3}$$

donde:

a_k es la secuencia original.

b_k es la secuencia precodificada.

Por ejemplo, si se desea precodificar la siguiente trama a_k :

$$a_k = [0 \ 1 \ 1]$$

La elección del primer valor de los elementos $b_{k-1}, b_{k-2}, b_{k-3}$ es propuesta con un valor de 0 lógico (si se prueban distintas combinaciones, sólo existen cambios en los primeros bits, no obstante, la secuencia original se conserva).

En la **primera iteración (k = 0)** se tiene que hacer la operación XOR entre los elementos $a_k, b_{k-1}, b_{k-2}, b_{k-3}$, estos elementos se encuentran marcados en color rojo en la siguiente tabla. El resultado del elemento b_k en $k = 0$ es marcado en color verde, su valor es 0.

	k - 3	k - 2	k - 1	k = 0	k = 1	k = 2
a_k				0	1	1
b_k	0	0	0	0	?	?

En la **segunda iteración (k = 1)**, la operación XOR se desplaza. Se toman los elementos (0, 0, 0, 1). El resultado es el elemento marcado en color verde b_k en $k = 1$, su valor es 1.

	k - 3	k - 2	k - 1	k = 0	k = 1	k = 2
a_k				0	1	1
b_k	0	0	0	0	1	?

Este proceso se repite para la **tercera iteración (k = 2)**.

	k - 3	k - 2	k - 1	k = 0	k = 1	k = 2
a_k				0	1	1
b_k	0	0	0	0	1	0

El resultado de la trama precodificada b_k se obtiene tomando los resultados de cada iteración marcados en color verde. Para la secuencia $a_k = [0 \ 1 \ 1]$ el resultado es entonces:

$$b_k = [0 \ 1 \ 0]$$

Al realizar la operación que describe al *precoder* (2.4) el resultado continúa siendo una secuencia de unos y ceros. Se necesita realizar una suma de los elementos previamente precodificados para producir una señal polibinaria de niveles impares " c_k " [6].

$$c_k = b_k + b_{k-1} + b_{k-2} + \dots + b_{k-(M-2)} \quad (2.5)$$

Existen dos formas de generar múltiples niveles en señales eléctricas polibinarias [5] tal como se propone en (2.5). A partir de este punto se utilizarán los colores azul y rojo para representarlas.

2.1.2 Generación de la señales polibinarias

La creación de múltiples niveles en una señal polibinaria se realiza a través de una etapa de filtrado. Al realizar una investigación del estado del arte sobre la generación de señales polibinarias se encontraron dos formas de implementarlo que son equivalentes [4].

La primera forma para generar múltiples niveles es a través de un **filtro digital Add-And-Delay**. La segunda forma es por medio de un **filtro analógico paso-bajas**. La figura 2.1 muestra ambos casos.

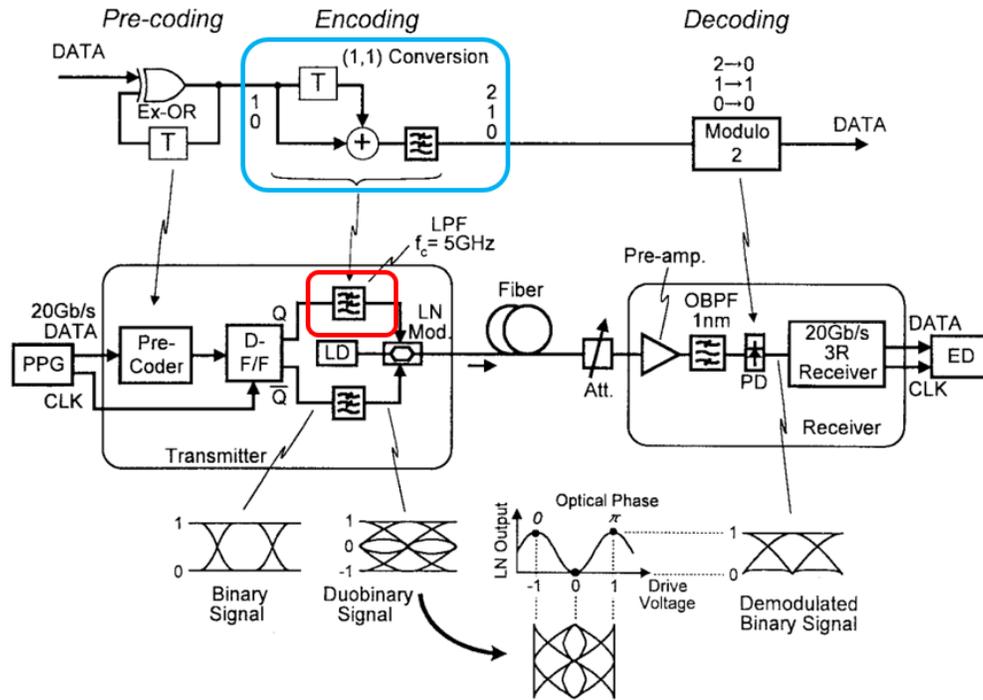


Fig. 2.1 Esquema de generación de señales polibinarias; en la parte superior se observa al filtro delay-and-add + LPF (azul), y en la parte inferior su equivalente el filtro analógico paso bajas (rojo) [5]

Filtro digital Delay-And-Add

En 1963, Adam Lender mostró que es posible transmitir $2W$ símbolos/s con cero ISI, usando un ancho mínimo de banda teórico de W Hertz. Lender usó una técnica llamada señalización duobinaria, conocida también como codificación correlativa [7].

La idea detrás de la técnica duobinaria consiste en introducir una cantidad controlada de interferencia entre símbolos (ISI) en la señal en lugar de buscar eliminarlo completamente. Al introducir interferencia correlativa entre los pulsos, y al cambiar el procedimiento de detección haciendo uso de la correlación de bits y niveles es posible eliminar la interferencia para conseguir la transmisión de $2W$ símbolos.

En el caso de duobinario se requiere un filtro digital con un retardo para cada bit entrante. Para cada bit que entra al filtro se realiza la suma de los dos bits y el resultado de esta suma es una amplitud generada como lo establece la ecuación (2.5). En la figura 2.2 se muestran las tres posibles salidas en duobinario ($M = 3$), éstas son representadas mediante los números 0, 1 y 2. El filtro digital suele estar acompañado de un filtro paso bajas analógico. La función del segundo filtro es retirar el exceso de ancho de banda [8].

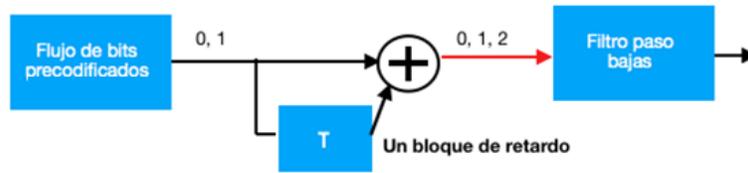


Fig. 2.2 Filtro *delay-and-add* para generación de 3 amplitudes (señal duobinaria)

Las señales con amplitudes generadas de número impar mayores al caso anterior reciben el nombre de señal polibinaria. La creación de la señal polibinaria se logra a través de un filtro digital que incluya “ $M - 2$ ” bloques de retardo. Recuerdese que **M es un número impar de niveles mayor o igual a 3, $M = 3$ la señal es conocida como duobinaria**. Utilizando esta condición se generan M amplitudes en el sistema. En la figura 2.3 se muestra este escenario.

Para cada bit que entra al filtro se realiza la suma del bit actual con los bits que se encuentren en los bloques de retardo, el resultado de esta suma es una amplitud generada. De esta manera se lleva a cabo una correlación entre el bit entrante y la amplitud generada. A cada bit le corresponde una amplitud de la señal polibinaria.

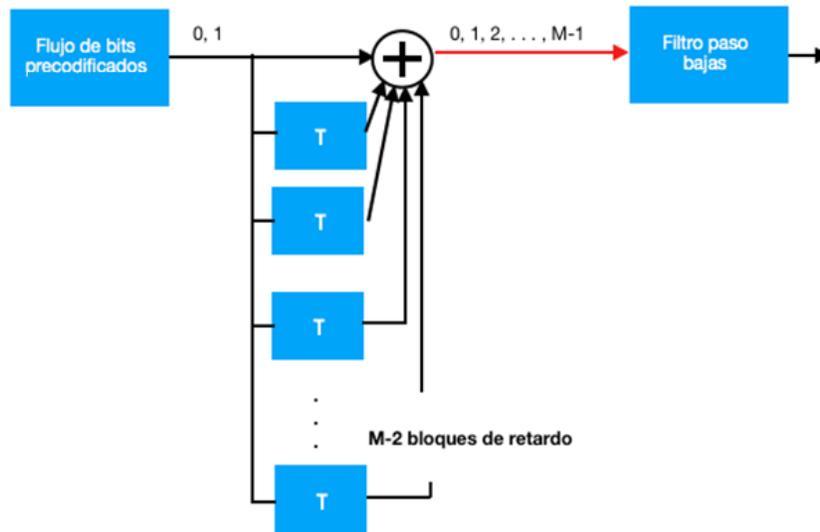


Fig. 2.3 Filtro *delay-and-add* para generación de M niveles

Se decidió concentrar el análisis realizado en esta tesis únicamente los casos de 3 y 5 amplitudes generadas. Esto se debe a que entre más niveles se generen, la detección de la magnitud en el receptor se vuelve menos tolerante a distorsiones, siendo más propenso a confundir bits, por lo que no resultaría de interés práctico. Además, el estudio de los casos de 3 y 5 niveles es suficiente para entender tanto lo teoría como los procesos que se requieren para transmitir y recibir una secuencia de bits.

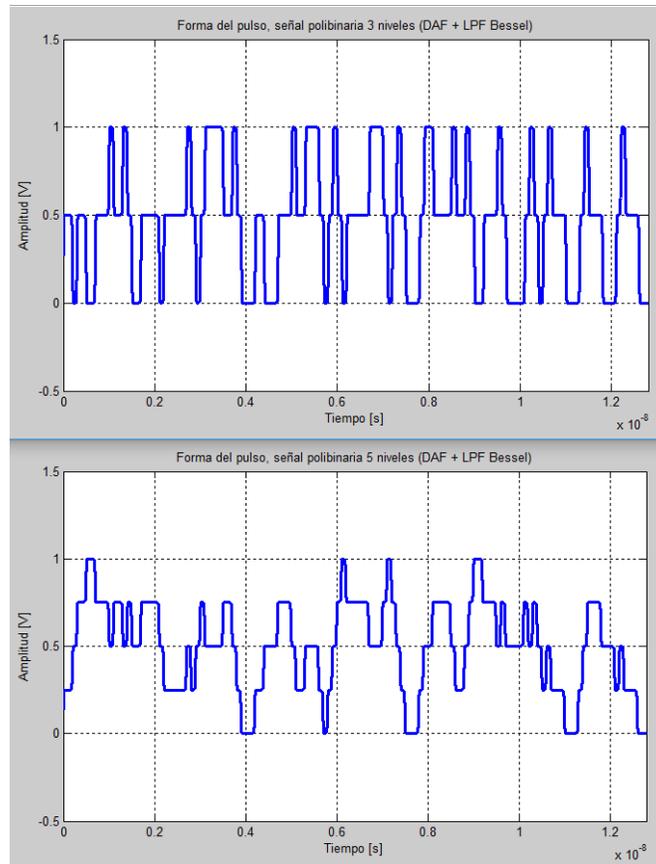


Fig. 2.4 Comparación de niveles para 3 y 5 amplitudes (*filtro delay-and-add*)

Para la realización del ejemplo que a continuación se presenta, se consideró una señal de 128 bits transmitidos a una tasa de 10 Gbps con una etapa de filtrado con frecuencia de corte de 5 [GHz]

Se observó que los niveles de amplitud ubicados en los extremos de la señal generada se vuelven cada vez menos probables de ocurrir conforme se generan más niveles. La figura 2.4 muestra del **lado izquierdo** una señal duobinaria, mientras que del **lado derecho** se encuentra una señal polibinaria de 5 niveles. Las amplitudes ubicadas en los extremos superior e inferior ocurren con menor frecuencia en la señal polibinaria.

Filtro Polibinario

Por lo general se utiliza un filtro Bessel paso bajas de quinto orden que tenga un ancho de banda igual a un cuarto de la tasa de transmisión ($B/4$, B es la tasa transmitida) en el transmisor para generar una señal duobinaria [9].

En la literatura el término “filtro duobinario” se refiere a un filtro paso bajas (*Low Pass Filter*, LPF) analógico con el cual se generan 3 amplitudes con una frecuencia de corte de alrededor del 25% de la tasa de bits transmitida [5].

A diferencia del *filtro delay-and-add*, este sistema sólo requiere un filtro paso bajas con la frecuencia de corte antes mencionada para producir señales duobinarias, por lo que su

implementación es más simple. En la figura 2.5 se presenta un diagrama de bloques del proceso anterior.

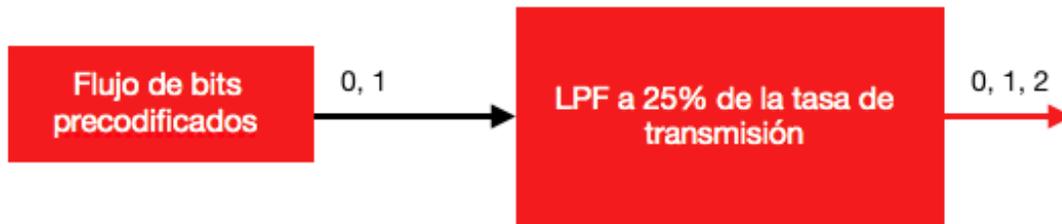


Fig. 2.5 Filtro duobinario

La generación de una señal eléctrica de 3 niveles mediante un filtro paso bajas no sólo es más efectiva respecto al costo, sino que también presenta una mejor tolerancia a la dispersión cuando la señal se propaga a lo largo de una fibra óptica [10].

En este formato, el sistema depende directamente del ancho de banda del filtro paso bajas que se utiliza para modificar la forma de los pulsos de la señal eléctrica, generando múltiples niveles. En la figura 2.6 se muestra cómo se modifican los pulsos de una señal de 2 niveles (parte superior) a una de 3 niveles (inferior) tras haber pasado por el filtro LPF.

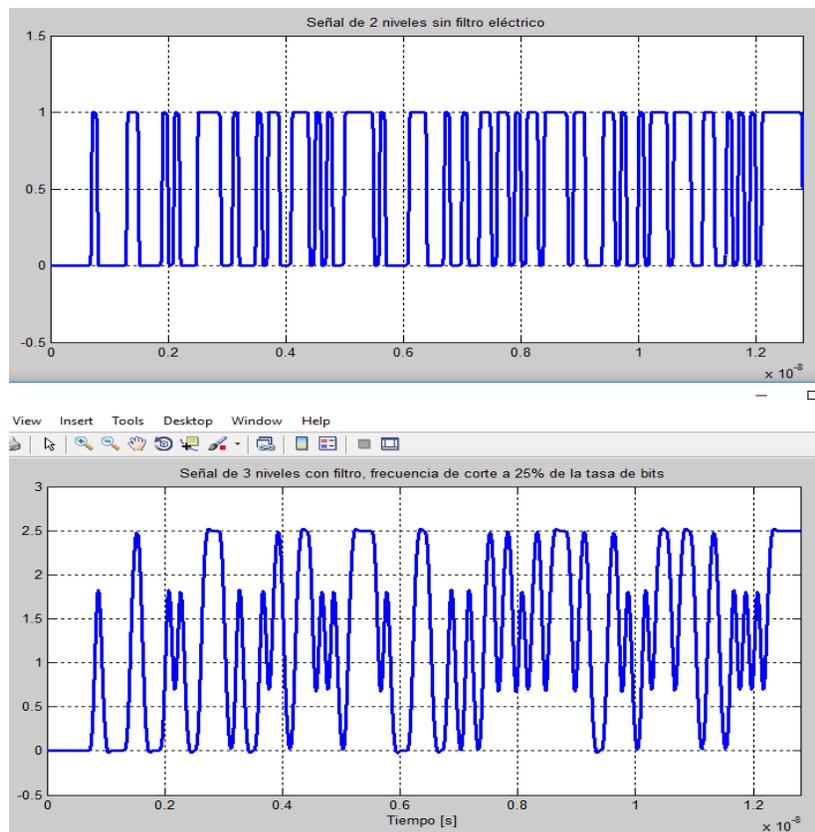


Fig. 2.6 Cambio en la forma de los pulsos de NRZ (superior) a duobinario (inferior)

Para la generación de más niveles se utilizan filtros paso bajas con anchos de banda más pequeños. Por ejemplo, para generar una señal polibinaria de 5 niveles se sugiere utilizar un ancho de banda de alrededor de una quinta parte de la tasa de transmisión [11].

Debido a que la generación de señales con más amplitudes a través de este filtro implica únicamente modificar la frecuencia de corte a valores más pequeños, se propone un nuevo nombre para designar a esta etapa de filtrado. En este trabajo se usa el nombre de "filtro polibinario" para referirse a este tipo de filtro. Recuérdese que para lo que se refiere a este enfoque se utiliza el color rojo, lo que permite organizar mejor la presentación de nuestro trabajo.

La simulación de esta etapa de filtrado (Fig. 2.7), se consideró una señal de 128 bits transmitidos a una tasa de 10 Gbps con una frecuencia de corte del filtro paso bajas de 2.5 [GHz] para la señal duobinaria de 3 niveles y de 1.8 [GHz] para la señal polibinaria de 5 niveles, los bits transmitidos fueron los mismos para ambos casos.

Al comparar las dos señales generadas se observó que algunos pulsos de la señal polibinaria habían disminuido un poco su tamaño comparadas con el caso duobinario que no sufrió un cambio drástico en su amplitud. La figura 2.7 muestra los pulsos de ambas señales, del lado izquierdo se encuentra la señal duobinaria y del derecho está la señal polibinaria.

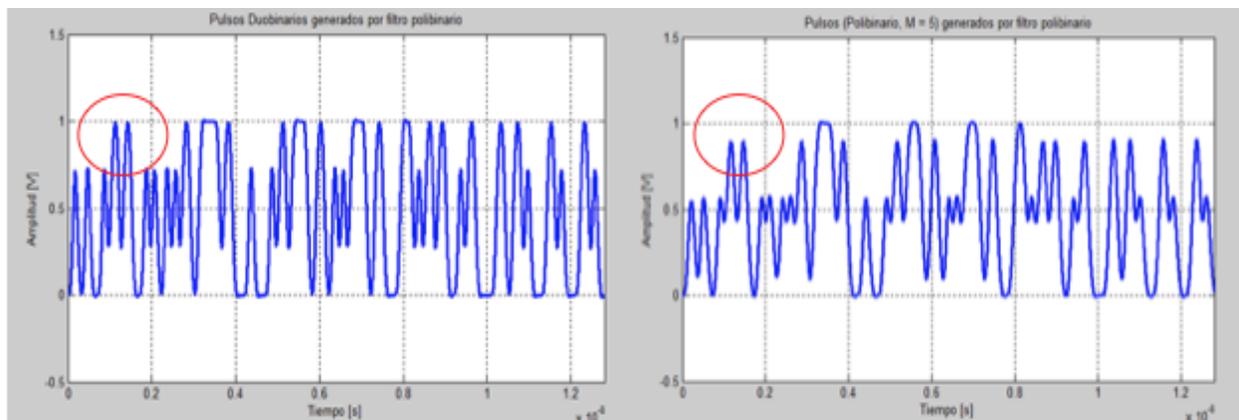


Fig. 2.7 Comparación de niveles para 3 y 5 amplitudes (*filtro polibinario*)

Este efecto ayuda a explicar el comportamiento de la decodificación en señal polibinaria generada por este filtro, sin embargo, este tema se abordará más adelante en este capítulo.

2.2 Generación de señales ópticas polibinarias mediante modulador Mach - Zehnder

En el capítulo 1 se expuso el hecho de que existen dos puntos de operación para el MZM, también se mencionó que los fotodiodos son dispositivos de ley cuadrada. La figura 2.8 muestra la función de transmisión del campo eléctrico (óptico) cuando se utiliza un interferómetro tipo Mach-Zehnder como modulador óptico. La línea roja corresponde al campo, mientras que la potencia se expresa con la línea azul.

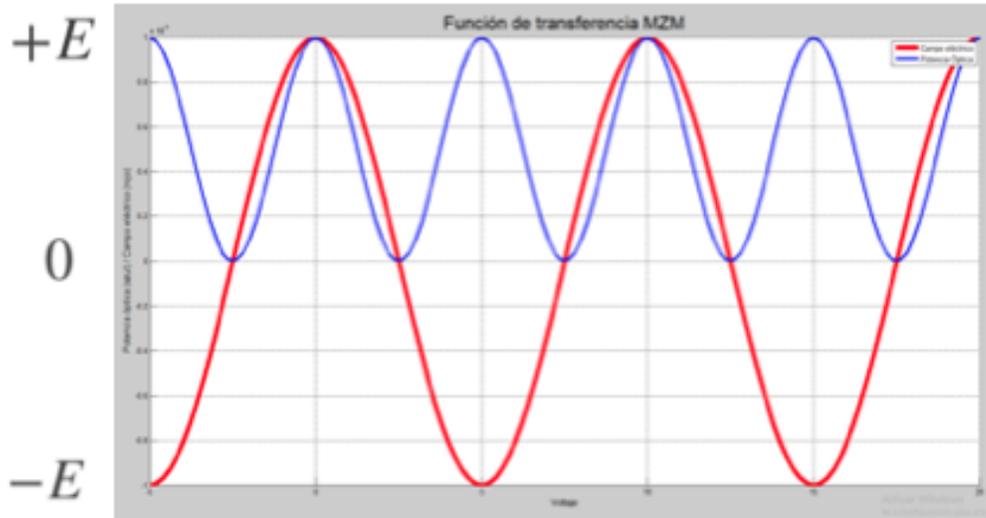


Fig. 2.8 Valores de la curva de campo eléctrico para un MZM

Dependiendo del punto de trabajo (curvas verdes de los punto de operación cuadratura y nulo, figuras 1.3 y 1.4), el interferómetro se comporta de manera diferente y por tanto la señal generada en el dominio óptico será distinta. Por otro lado, debido a las características del fotodiodo que se emplea en el receptor, el número de niveles recibido en el dominio eléctrico puede ser menor a los niveles enviados.

En la figura 2.9, en color azul se muestra el diagrama de ojo de la señal eléctrica duobinaria en el transmisor que se utiliza para controlar el MZM. A partir de este punto el detector recibe una señal dependiendo si se operó el MZM en punto de cuadratura o nulo. Estas señales se muestran a la derecha. En la imagen cada círculo negro representa un nivel en la señal. Nótese mientras el diagrama de ojo de la señal óptica cuando se opera en cuadratura reproduce bastante bien a la señal eléctrica que le da origen, el diagrama de ojo cuando el MZM se opera en punto nulo sólo tiene dos niveles.

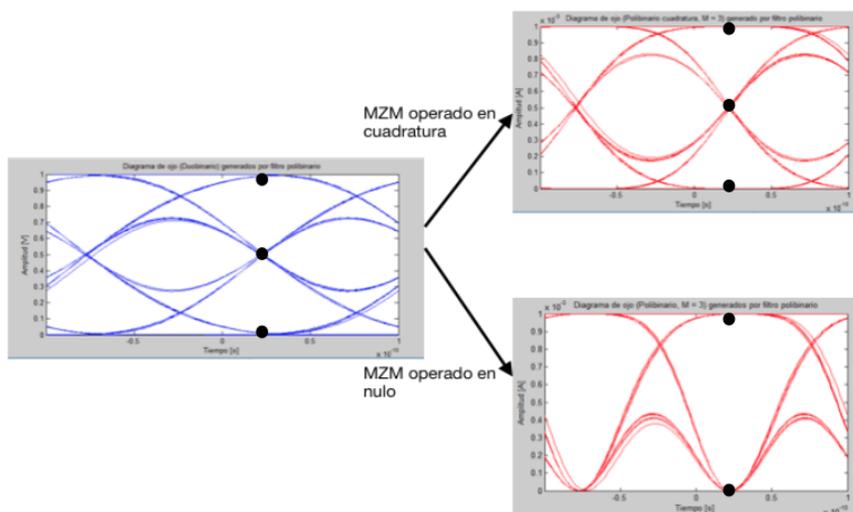


Fig. 2.9 Diagramas de ojo de señal duobinaria, puntos de operación en cuadratura y nulo

Niveles ópticos de la señal polibinaria transmitida y recibida al operar el modulador Mach – Zehnder en punto de cuadratura.

Si existe una señal de tres niveles a la entrada del modulador, en el caso de cuadratura después de que el modulador ha llevado la señal al dominio óptico **en el transmisor** se tienen tres niveles ópticos ubicados en $\{ 0, E/2, E \}$.

Debido a que el fotodiodo opera por ley cuadrada y detecta de la forma $|E|^2$, se tienen los siguientes tres niveles eléctricos **en el receptor** $\{ 0, |E/2|^2, |E|^2 \}$.

Si la señal es de cinco niveles, se observaría un comportamiento similar al caso anterior, en el transmisor los puntos ópticos están ubicados en $\{ 0, E/4, E/2, 3E/4, E \}$.

Por lo cual se tienen cinco niveles en el receptor $\{ 0, |E/4|^2, |E/2|^2, |3E/4|^2, |E|^2 \}$.

Niveles ópticos de la señal polibinaria transmitida y recibida al operar el modulador Mach – Zehnder en punto nulo.

Si se tiene una señal eléctrica de tres niveles antes del modulador en el dominio óptico después del modulador también se tiene una señal de tres niveles ópticos ubicados en $\{ -E, 0, E \}$.

Sin embargo, la diferencia con el punto de cuadratura es que después de pasar por el fotodiodo sólo se tienen dos niveles en la recepción, ya que los valores de **-E y E** son detectados como $|E|^2$ en el fotodiodo, por lo que sólo aparecen los dos niveles $\{ 0, |E|^2 \}$.

Si se genera una señal eléctrica de cinco niveles, se tienen cinco niveles ópticos ubicados en $\{ -E, -E/2, 0, E/2, E \}$, por lo que en el fotodiodo sólo se reciben tres niveles en $\{ 0, |E/2|^2, |E|^2 \}$.

2.3 Demodulación de señales polibinarias

La demodulación de una señal polibinaria requiere que el sistema sea capaz de diferenciar las diferentes amplitudes recibidas.

El concepto del ‘decoder módulo 2’ presenta una idea para la decodificación de la señal en la que cada amplitud recibida dependiendo de su magnitud es convertida a un bit en particular.

La precodificación previa que se vio en la sección 2.1 elimina la dependencia con un bit anterior para la decodificación de un bit actual. De esta manera, si existe un error en la detección se evita una propagación en cadena a los bits posteriores.

2.3.1 Decoder MÓDULO 2.

Para regresar a la secuencia de bits original a_k se necesita aplicar la operación módulo 2 [6]

$$a_k = c_k \text{ mod } 2 \quad (2.6)$$

A continuación se recordará el concepto matemático de la operación “módulo” para explicar con más facilidad la idea detrás de este decodificador.

Para expresar la idea de la operación 'división', se puede escribir cada uno de sus términos de la siguiente manera:

$$n = m \cdot r + s$$

Donde:

- n es el dividendo
- m es el divisor
- r es el cociente
- s es el residuo

La operación módulo queda definida de la siguiente forma:

$$n \bmod m = s$$

Así que cuando se divide un número n entre un número m , el resultado de aplicar la operación módulo a dichos términos es el residuo s de dicha división.

En la modulación polibinaria se generan M amplitudes, recordando que **M es un número impar mayor o igual a 3**. Vale la pena mencionar que es más común encontrar la palabra "nivel" en lugar de "amplitud" cuando se describe al decoder MÓDULO 2.

En este tipo de modulación un "nivel" representa una determinada amplitud recibida. La amplitud más baja generada por la modulación es representada por el "nivel 0", la siguiente se denomina "nivel 1", está lógica continua hasta tener la amplitud máxima con el "nivel $M-1$ ".

La amplitud recibida puede referirse a corriente si se detecta directamente a través de un fotodiodo o puede ser voltaje al utilizar un amplificador de transimpedancia a la salida del fotodiodo.

Ejemplo

Si $M = 3$, las 3 amplitudes detectadas en el fotodiodo (**0, $A/2$, A**), se representan mediante los 3 niveles (0, 1, 2).

Nivel '2' --- $> A$

Nivel '1' --- $> \frac{1}{2} \cdot A$

Nivel '0' --- $> 0 \cdot A$

Al aplicar la operación MÓDULO 2 a cada nivel se regresa a una trama de unos y ceros, de esta forma se decodifica la información.

Niveles: 0, 1 y 2.

$$2 \bmod 2 = 0$$

$$1 \bmod 2 = 1$$

$$0 \text{ mod } 2 = 0$$

2.3.2 Umbrales de decisión para señales polibinarias ($M = 3$ y $M = 5$)

Para diferenciar cada nivel de la señal duobinaria o polibinaria, se utilizan umbrales de decisión. La función de un umbral de decisión es actuar como un límite entre dos amplitudes diferentes de la señal recibida.

En el **apéndice A** se sugiere una forma para colocar umbrales dependiendo del número de niveles del formato de modulación. Se considera que las amplitudes generadas son equidistantes una con la otra. Por este motivo se recomienda utilizar esta idea únicamente en sistemas que no presenten mucha distorsión.

En el caso de la modulación polibinaria, un bit '1' o '0' está asociado a un nivel conforme al decodificador módulo 2. La trama de unos y ceros se obtiene cuando se diferencia cada nivel por medio de umbrales de decisión.

En la **figura 2.10** se muestra la decodificación de las señales polibinarias, el nivel más alto ' $M - 1$ ' posee la magnitud más grande, mientras que nivel 0 posee una amplitud más baja. Tener amplitudes diferentes para cada nivel permite diferenciarlos. La colocación de los umbrales sigue lo expuesto en el apéndice A1.

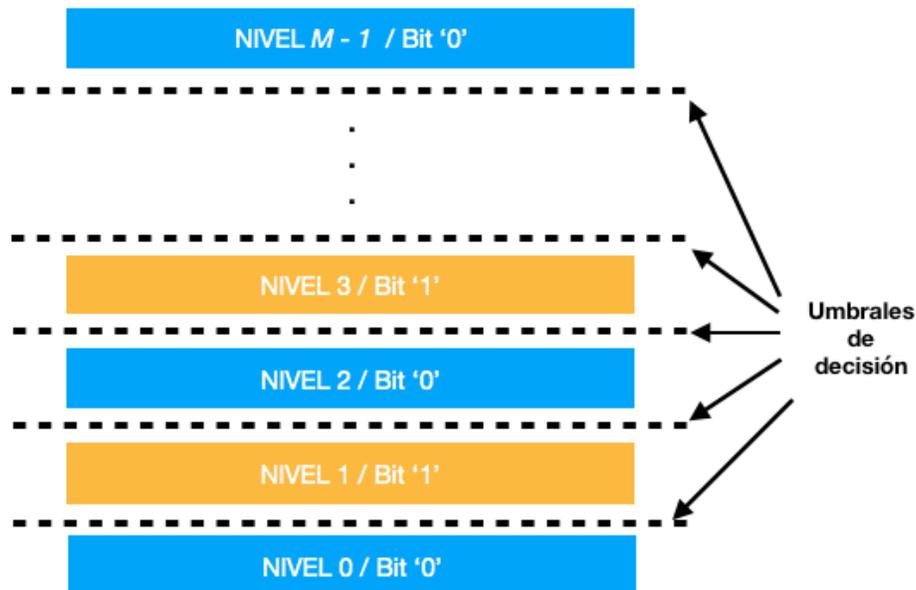


Fig. 2.10 Umbrales de decisión en señales polibinarias [fuente propia]

Idealmente, las amplitudes recibidas siempre caerían en el mismo lugar, de tal forma que distinguirlas una con otra sería muy sencillo. No obstante, esto no ocurre en la realidad; las amplitudes recibidas tienden a variar, no todas se colocan en la misma posición al ser detectadas. Estas perturbaciones se deben a fenómenos aleatorios como el ruido.

Cada nivel corresponde a un valor de amplitud que puede ser recibida. Cuando se diseña un sistema se busca que las afectaciones a la señal sean mínimas para evitar que una amplitud se

mueva a una zona de detección que no le corresponde y sea detectada de manera errónea. Este aspecto se analizará posteriormente en el capítulo 4.

2.4 Variantes de señales ópticas polibinarias (M = 3 y M = 5) analizadas en este trabajo

Durante el desarrollo teórico se vio que el *precoder* y el *decoder* están relacionados para una correcta decodificación. La relación entre la señal polibinaria y el punto de operación del MZM es esencial para entender cómo es generada y detectada cada variante de este formato de modulación.

En las simulaciones realizadas se generaron señales de 3 y 5 niveles. Se utilizaron filtros *delay-and-add* y *polibinario* para su creación. Se operó al MZM en los puntos de cuadratura y nulo. Bajo estas condiciones se generaron ocho variantes polibinarias.

Por medio del software MATLAB se generó una señal NRZ a una tasa de transmisión de 10 Gbps, la información fue precodificada de acuerdo a la ecuación (2.4). Se probaron los dos filtros analizados (digital y analógico) para generar una señal multinivel impar.

Señales polibinarias con Mach – Zehnder operando en punto de cuadratura.

Al operar en **punto de cuadratura**, el MZM tuvo un V_{π} de 2.5 [V]. El voltaje de bias se ubicó en 3.75 [V] con un voltaje pico a pico de 2.5 [V]. Se ignoraron las pérdidas de inserción del MZM y se mantuvo una responsividad en el fotodiodo igual a 1.

Bajo estas condiciones se detectaron las duobinarias y polibinarias de la **tabla 2-1**, que permite estructurar los diferentes casos analizados en este trabajo cuando se utiliza el MZM en el punto de cuadratura. Se utilizó el color azul para representar al bit '0' y al color amarillo para representar el bit '1' en la decodificación de cada sistema. Se reutilizaron líneas punteadas para representar a los umbrales de decisión. En este punto se recuerda que el color azul representa al *filtro delay-and-add* y el color rojo representa al *filtro polibinario*, estos elementos serán utilizados en las siguientes tablas. Se menciona que las señales *Duobinarias* poseen 3 niveles y las señales *Polibinarias* generadas en este trabajo poseen 5 niveles.

Asimismo, para identificar a las señales analizadas en la tabla, se utilizará un guion seguido de una letra ce mayúscula ("- C") después de la señal descrita para indicar fue obtenida de un modulador Mach – Zehnder operando en punto de cuadratura.

Esta nueva nomenclatura se utilizará para denotar a este tipo de señales polibinarias y será utilizada en los siguientes capítulos de este trabajo.

Tabla 2-1 Señales polibinarias en el receptor generadas por el MZM operado en cuadratura

Punto de cuadratura			
Señal generada	Filtro	Precoder	Diagrama de ojo y umbrales
Duobinaria - C	Delay-and-add de 1º orden + LPF a 50% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$	
Duobinaria - C	Bessel LPF 5to. orden, con corte a 25% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$	
Polibinaria - C	Delay-and-add de 3º orden + LPF a 50% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \oplus b_{k-2} \oplus b_{k-3}$	
Polibinaria - C ²	Bessel LPF 5to. orden, con corte a 18% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$	

² Esta señal polibinaria se comportó como una señal duobinaria, por esa razón posee el mismo precoder, en las siguientes páginas se analiza lo observado.

De acuerdo a lo que se presenta en la tabla, el comportamiento descrito por las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) para el precoder, generación de niveles y decoder módulo 2, respectivamente, se cumplió en tres de las cuatro señales presentadas. Éstas fueron **Duobinaria-C**, **Duobinaria-C** y **Polibinaria-C**. Las señales con este comportamiento se componen de M niveles con $M-1$ umbrales de decisión en el demodulador (por ejemplo, si la señal es polibinaria con 5 niveles, se requieren 4 umbrales para decodificar).

Sin embargo, tras un exhaustivo análisis de las señales polibinarias, se observó que la señal **Polibinaria - C** no es equivalente a la señal **Polibinaria - C**, ya que no detecta utilizando un detector módulo 2 para 5 niveles con cuatro umbrales, como la señal **Polibinaria - C**.

Al comenzar el análisis de esta señal **Polibinaria - C** se partió del hecho que la decodificación necesitaría cuatro umbrales de decisión para obtener la trama de bits original ya que existe un artículo que así lo sugiere [12]. Sin embargo, se descubrió que este no es el caso y de ahí que se investigara cómo se podría detectar correctamente la señal. Esta representa una de las contribuciones más importantes de esta tesis.

En la figura 2.11 se muestra la idea del párrafo anterior. A diferencia de la señal **Polibinaria-C** presentada en la tabla 2.1, la señal de esta figura posee una frecuencia de corte del 16% de la tasa de transmisión con un filtro de orden 6. Estos cambios se realizaron a fin de obtener una reproducción más parecida al diagrama de ojo presentado en el citado artículo.

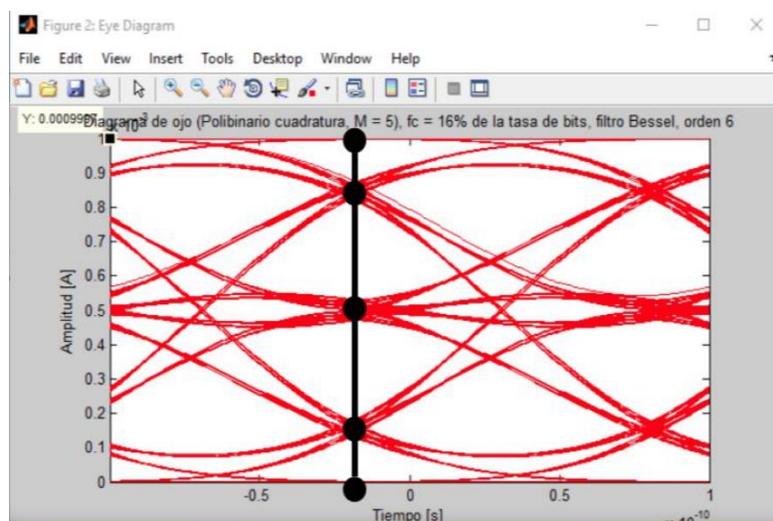


Fig. 2.11 Punto de muestreo propuesto para la señal **Polibinaria - C** (modificada) en el artículo citado

A fin de realizar una decodificación utilizando cuatro umbrales se requiere que los niveles se distribuyan de la manera siguiente, como lo muestra la figura 2.12

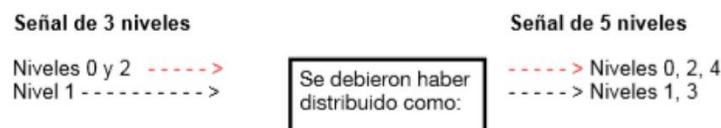


Fig. 2.12 Distribución de los niveles teóricos de acuerdo a lo propuesto en el artículo [6]

Lo descrito anteriormente no ocurrió, no fue posible regresar a la trama original utilizando esta decodificación. Se probaron dos casos, se usó el precoder descrito en la ecuación (2.1) para $M = 5$ y $M = 7$. Para ambos casos se probó decodificar con un decoder módulo 2 de cuatro umbrales en el punto de muestreo mostrado anteriormente. No se logró ninguna decodificación exitosa.

Se probaron otras configuraciones para precoder y decoder en el sistema. Se encontró que para regresar a la secuencia original de bits era necesario utilizar la misma configuración del precoder y decoder que un sistema de 3 niveles, por lo que la señal **Polibinaria – C** en realidad se puede considerar como una función duobinaria modificada, cuyo ancho de banda es más estrecho y que por ende aparentemente presenta más niveles, cuando en realidad solamente son tres niveles (como en el caso de la **Duobinaria-C**).

Para explicar esto, es importante analizar la forma de los pulsos en la transición de 3 a 5 niveles generados por el **filtro polibinario** planteado en la figura 2.4

Por la manera en que se detectaron los bits de la señal se pudo ver que la distribución de los niveles ocurrió de acuerdo a la figura 2.13

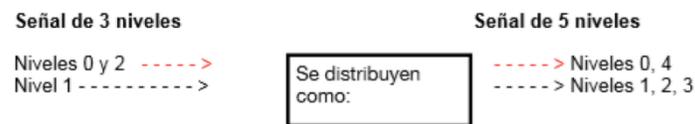


Fig. 2.13 Distribución de niveles observada en simulaciones

Recordemos que para decodificar una señal de 3 niveles se requiere un decoder módulo 2 de dos umbrales de decisión, en la cual los niveles 0 y 2 (niveles ubicados en los extremos) son asociados a un bit '0', y el nivel 1 (nivel ubicado en el centro) es asociado a un bit '1'.

Al hacer una analogía, se distingue el comportamiento descrito en el párrafo anterior para la señal **Polibinaria-C**. En este sistema de 5 niveles, los niveles 0 y 4 ubicados en los extremos siguen asociados al bit '0', mientras que los niveles centrales 1, 2 y 3 están asociados al bit '1'. De esto se concluyó que la señal se comporta como una duobinaria a pesar de tener un diagrama de ojo diferente.

Otra particularidad que se distinguió de la señal **Polibinaria-C** fue la similitud de su diagrama de ojo con la señal **Duobinaria-C**. En la figura 2.14 se exhiben los diagramas de ojo de ambas señales comenzando por el lado izquierdo con el **filtro digital** y del lado derecho el **filtro polibinario**.

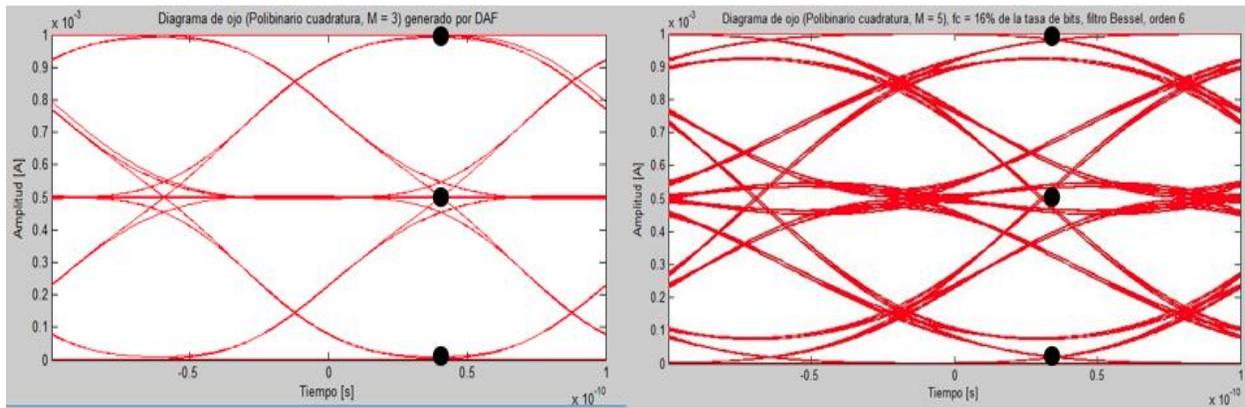


Fig. 2.14 Comparación de señal *Duobinaria – C* y señal *Polibinaria – C modificada*

Señales polibinarias con Mach – Zehnder operando en punto nulo.

Posteriormente, se analizaron las señales detectadas al operar el MZM en **punto nulo**. Se respetaron las condiciones descritas para la operación en el punto de cuadratura. Se realizaron únicamente cambios en la configuración del MZM. El modulador tuvo un V_{π} de 2.5 [V]. El voltaje de bias se ubicó en 5 [V] con un voltaje pico a pico de 5 [V].

La **tabla 2-2** muestra los resultados obtenidos.

De manera similar a lo expuesto en la tabla 2-1, se decidió usar una nueva nomenclatura para identificar a este nuevo grupo de señales polibinarias. Se utilizará un guion seguido de una letra ene mayúscula (“- N”) después de la señal descrita para indicar fue obtenido al operar el modulador Mach – Zehnder en punto nulo.

La nueva nomenclatura descrita será utilizada a lo largo de este trabajo para indicar señales polibinarias que sean generadas de esta manera.

Tabla 2-2 Señales polibinarias en el receptor generadas por el MZM operado en nulo

Punto nulo			
Señal generada	Filtro	Precoder	Diagrama de ojo
Duobinaria - N	Delay-and-add de 1º orden + LPF a 50% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$	
Duobinaria - N	Bessel LPF, con corte a 25% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$	
Polibinaria - N	Delay-and-add de 3º orden + LPF a 50% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1} \oplus b_{k-2} \oplus b_{k-3}$	
Polibinaria - N ³	Bessel LPF, con corte a 18% de la tasa de transmisión	$b_k = a_k \oplus b_{k-1}$	

³ Se observó que cuando el modulador Mach – Zehnder es operado en punto nulo, el comportamiento de la señal polibinaria es el mismo que duobinario, tal como ocurrió al operarlo en cuadratura.

En la sección 2.2 se mostró que operar en punto nulo implica que el detector recibirá menos niveles que los producidos en la señal del transmisor. Por consiguiente, el decoder módulo 2 expresado en la ecuación (2.5) no siempre fue el adecuado para todas las señales de la tabla 2.2.

De los cuatro casos el único demodulador que utilizó dicho decoder fue el de la señal **Polibinaria - N**. En esta señal se detectaron 3 niveles y fueron necesarios dos umbrales de decisión para decodificar.

Las tres señales restantes (**Duobinaria-N**, **Duobinaria-N**, **Polibinaria-N**) generaron 2 niveles de amplitud y requirieron un umbral de decisión para decodificar. Como se observa en la tabla 2.2, si la amplitud es alta se decodifica como un bit '0', si es baja, se decodifica como un bit '1'. De esto se concluyó que se requiere un decoder módulo 2 con la salida negada para una correcta decodificación.

Por otra parte, el precoder no cambió respecto a la operación del MZM en cuadratura cuando se operó en punto nulo. Se observó que el uso del precoder en la generación de la señal eléctrica es indistinto de la operación del MZM.

Finalmente, el comportamiento de los casos **Polibinaria C** y **Duobinaria-C** descritos anteriormente se repitió en punto nulo. Es decir, la señal **Polibinaria - N** necesitó el mismo precoder y decoder que la señal **Duobinaria - N**. Los diagramas de ojo de ambas señales nuevamente son muy parecidos. Esto nuevamente va en contra de lo que originalmente se había pensado, es decir, se supondría que la señal **Polibinaria - N** tendría tres niveles, cuando en realidad solamente presenta dos niveles (y consecuentemente solamente se requiere un umbral de decisión). Por tanto, desde el punto de vista práctico la señal **Polibinaria - N** se puede considerar una señal **Duobinaria-N** con un ancho de banda ligeramente más estrecho y un diagrama de ojo mejor formado.

Referencias

- [1] A. Lender, "Correlative digital communication techniques", IEEE Trans. Commun., Vol. COM-12, pp. 128-135, 1964.
- [2] Nyquist, H., "Certain factors affecting telegraph speed". Bell System Tech. J., vol.3, pp. 324-346, 1924.
- [3] D. Penninckx, L. Pierre, J. P. Thiery, B. Clesca, M. Chbat, J.L. Beylat, "Relation between spectrum bandwidth and the effects of chromatic dispersion in optical transmissions", Electronic Letters Online, 1996.
- [4] Hari Shankar, "Duobinary Modulation For Optical Systems", Inphi Corporation.
- [5] Takashi Ono, Yutaka Yano, Kiyoshi Fukuchi, Toshiharu Ito, Hiroyuki Yamazaki, Masayuki Yamaguchi, Katsumi Emura, "Characteristics of Optical Duobinary Signals in Terabit/s Capacity, High-Spectral Efficiency WDM Systems", IEEE, 1998.
- [6] Sheldon, Walklin, "Multilevel Signaling for Increasing the Reach of 10 Gb/s Lightwave Systems", IEEE, 1999
- [7] Bernard Sklar, "Digital Communications. Fundamentals and Applications", Second Edition, Prentice Hall.
- [8] Vegas Olmos JJ, Monroy IT, Madsen P, Suhr LF, Cimoli B, et al., "Challenges in Polybinary Modulation for Bandwidth Limited", Journal of Lasers, Optics & Photonics, 2016.
- [9] A. Rahman, M. Broman, M. Howieson, "Optimum Low Pass Filter Bandwidth for Generating Duobinary Signal for 40 Gb/s Systems", Thin Film Technology Corp.
- [10] Y.C. Lu, J. Chen, K.M. Feng, P.C. Yeh, T.Y. Huang, W.R. Peng, M.F. Huang, C.C. Wei, "Improved SPM tolerance and cost-effective phase modulation duobinary transmission over 230 km standard single-mode fiber using a single Mach - Zehnder modulador", IEEE Photon. Techno, 2002.
- [11] Vegas Olmos, J. J., Cavallero, F. J. V., & Tafur Monroy, I. "Analog Filter Design Rules for Multilevel Polybinary Signaling Generation", Optical Society of America, 2014
- [12] Vegas Olmos, J. J., Suhr, L. F., Li, B., & Tafur Monroy, I., "Five-level polybinary signaling for 10 Gbps data", Optics Express, 2013

3. Modelos de probabilidad de error para modulaciones polibinarias

Los pulsos que viajan a través de un canal de comunicaciones se ven afectados por distintos efectos como la atenuación, interferencia inter-símbolo, ruido proporcionado por el sistema de transmisión y recepción, distorsiones debidas a efectos no lineales, etc. Estos fenómenos ocasionan que las amplitudes de los pulsos sufran variaciones que pueden provocar errores en la recepción de la información.

Para determinar cuál bit se recibe en un determinado tiempo, se utilizan umbrales de decisión, lo que permite efectuar el proceso de detección de manera óptima.

Si el canal de comunicaciones genera mucha distorsión, el receptor puede confundir bits; en otras palabras, se detectan bits erróneos. Para cuantificar esto y así conocer el desempeño que tiene un determinado sistema de comunicación, se utilizan modelos matemáticos a fin de representar los errores. Este capítulo se enfoca en el desarrollo matemático utilizando un modelo Gaussiano para hallar la probabilidad de error en un sistema de comunicaciones con modulación polibinaria.

Se comienza con los conceptos teóricos involucrados en este tipo de expresiones como la función de densidad de probabilidad Gaussiana y la función $Q(x)$ que describe el área bajo esta curva correspondiente. Posteriormente, se realiza el desarrollo de la expresión necesaria para el cálculo de la probabilidad de error para 3 niveles. Debido a que el desarrollo de la probabilidad de error para 5 niveles es muy similar, en ese apartado únicamente se presenta la ecuación respectiva a este caso. Por último, se presenta una expresión general de probabilidad de error para un formato de modulación con M niveles impares.

3.1 Conceptos básicos para el cálculo de la probabilidad de error

La probabilidad de error se calcula a través de una función de densidad de probabilidad (a partir de ahora *fdp*) Gaussiana que considera las posibles variaciones de una amplitud recibida en el receptor. Los datos estadísticos son utilizados para modelar la fdp Gaussiana, caracterizada por los siguientes parámetros: La media (representada por μ) es una medida de tendencia central y representa por sí misma a todo el conjunto; la desviación estándar (representada por σ) es una medida de dispersión de los datos respecto a la media; la varianza (representada por σ^2) es otra medida de dispersión y se obtiene al elevar al cuadrado el valor de la desviación estándar.

3.1.1 Función de densidad de probabilidad Gaussiana.

La fdp Gaussiana es continua y se define como:

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} \quad (3.1)$$

donde μ, σ^2 son, respectivamente, la media y la varianza. El factor $1/\sqrt{2\pi}\sigma_n$ es necesario para que el área bajo toda la curva sea unitaria.

Si se integra la función (3.1) en el intervalo $(-\infty, \infty)$ el área total es unitaria [1].

Se maneja la versión normalizada de la función (3.1) para poder utilizar integrales con valores tabulados como la función $Q(x)$ o la función de error complementario $erfc(x)$. Para normalizar la función basta con evaluar la fdp gaussiana con **media μ_n en 0** y **desviación estándar σ_n en 1**:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.2)$$

3.1.2 Función $Q(x)$

La **fdp Gaussiana normalizada** tiene una solución numérica cuando se integra en el intervalo (x, ∞) , el valor de la integral depende de la variable x puede encontrarse en tablas. Las condiciones descritas anteriormente definen a una integral conocida como función $Q(x)$. Esta función permite calcular el área de la fdp Gaussiana normalizada en el intervalo mencionado anteriormente.

La función $Q(x)$ está definida de la siguiente forma:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.3)$$

La figura 3.1 muestra gráficamente el área bajo la curva correspondiente a la función $Q(x)$

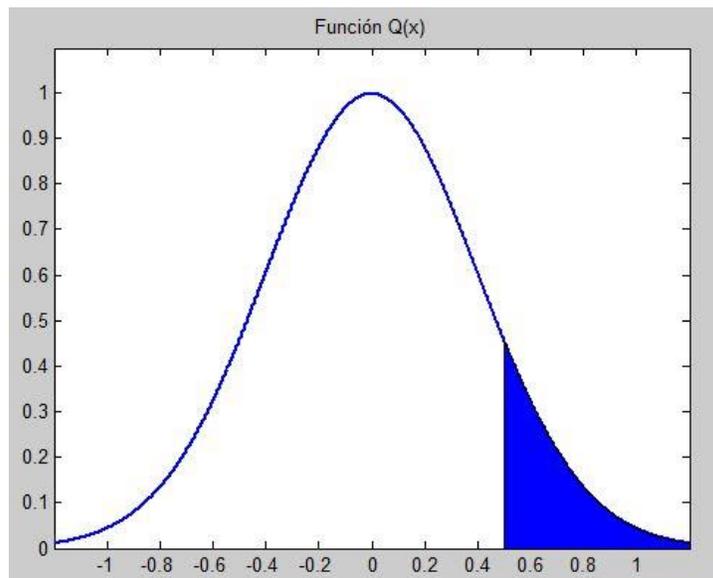


Fig. 3.1 Función $Q(x)$

El área total de la fdp Gaussiana es unitaria

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 \quad (3.4)$$

Además, utilizando la propiedad de las integrales se pueden separar los límites de integración

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que el área de la integral del lado izquierdo cuyos límites van de $(-\infty, \infty)$ es unitaria y que del lado derecho se encuentra la definición de la función $Q(x)$ cuyo intervalo va de (x, ∞) , entonces, despejando la integral cuyos límites van de $(-\infty, x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - Q(x) \quad (3.6)$$

3.1.3 Modelo de probabilidad de error para señales de dos niveles (binarias).

A continuación se presenta un conocido modelo para calcular la probabilidad de error.

Una **transmisión binaria** envía “ceros” y “unos” en forma de pulsos de amplitudes 0 y A, respectivamente.

En el caso de dos niveles se utiliza un umbral de decisión γ , el cuál se coloca normalmente a la mitad de la amplitud (es decir en $A/2$). Si las amplitudes recibidas se encuentran abajo del umbral entonces se dice que se recibió un cero. Caso contrario, si las amplitudes recibidas se encuentran arriba del umbral entonces se dice que se recibió un uno.

Los modelos de probabilidad de error están compuestos por la probabilidad a priori y por la probabilidad condicional, la siguiente expresión representa la probabilidad de error total para el caso de dos niveles

$$p_{error} = p_0 p_{\epsilon 0} + p_1 p_{\epsilon 1} \quad (3.7)$$

Donde:

p_0 es la probabilidad a priori del nivel 0

p_1 es la probabilidad a priori del nivel 1

$p_{\epsilon 0}$ es la probabilidad condicional dado que se envió un bit ‘0’ pero se recibió un bit ‘1’.

$p_{\epsilon 1}$ es la probabilidad condicional dado que se envió un bit ‘1’ pero se recibió un bit ‘0’.

Las probabilidades a priori son aquellas probabilidades “evidentes”; éstas permiten saber cómo se distribuyen las amplitudes en un formato de modulación dado. En el caso de dos niveles, la probabilidad de que aparezca un bit ‘0’ o un bit ‘1’ se considera igual, ya que sólo se tienen dos posibilidades, representando el peor de los escenarios. Bajo esta condición se dice que es un caso equiprobable.

En la figura 3.2 la fdp Gaussiana de color azul corresponde a la amplitud 0 relacionada con el bit ‘0’, mientras que la fdp Gaussiana de color verde corresponde a la amplitud A relacionada con el bit ‘1’. Ambas curvas se separan por un umbral (línea punteada), de tal manera que todas las amplitudes recibidas del lado derecho del umbral se consideran como bit ‘1’ y del lado izquierdo del umbral se consideran como bit ‘0’

La probabilidad condicional es la probabilidad de que el receptor confunda un bit. Por lo que la probabilidad condicional $p_{\epsilon 0}$ representa la probabilidad de que se envíe un bit '0' pero se reciba un '1' (área azul de la figura 3.2). Mientras que la probabilidad condicional $p_{\epsilon 1}$ representa la probabilidad de que se envíe un bit '1' pero se reciba un '0' (área verde de la misma figura).

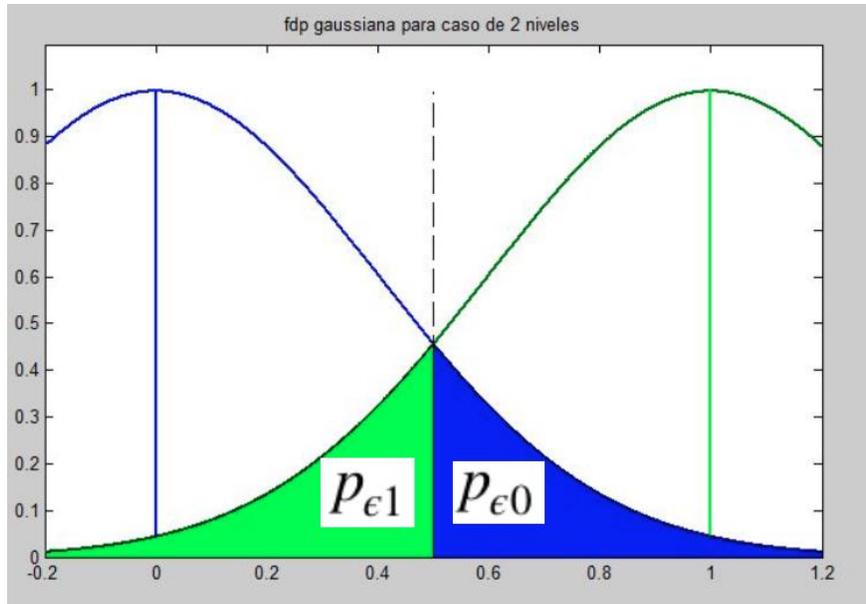


Fig. 3.2 Probabilidades condicionales (áreas sombreadas) para 2 niveles.

El modelo encontrado en la mayoría de la literatura para una señal de dos niveles considera que las desviaciones estándar de las dos fdp Gaussianas son iguales. Además, se considera que la distribución de bits '0' y '1' es la misma, por lo que las probabilidades a priori son equiprobables con un valor de 1/2 para cada una. La expresión de probabilidad de error para dos niveles que cumplen con estas consideraciones es [1]:

$$p_{error} = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.8)$$

3.2 Distribución de niveles para probabilidades a priori

La distribución de los niveles (amplitudes) en una modulación polibinaria muestra que los niveles de amplitud máximo y mínimo ocurren con menor frecuencia en comparación con las amplitudes centrales [2].

Dicho comportamiento puede ser explicado mediante la expresión

$$c_k = b_k + b_{k-1} + b_{k-2} + \dots + b_{k-(M-2)} \quad (3.9)$$

M es el número de niveles de la señal polibinaria

c_k representa el nivel de amplitud de la señal polibinaria, $c_k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$

b_k es la secuencia precodificada

Remarcando el hecho que b_k puede tomar únicamente dos valores, al reescribir c_k de la expresión (3.9) como una suma de dichos valores, donde “0/1” represente que cada término de b_k puede ser un bit “0” o un bit “1”, se tiene lo siguiente:

$$c_k = \underset{\substack{\swarrow \\ b_k}}{0/1} + \underset{\substack{\swarrow \\ b_{k-1}}}{0/1} + \underset{\substack{\swarrow \\ b_{k-2}}}{0/1} + \dots + \underset{\substack{\swarrow \\ b_{k-(n-2)}}}{0/1}$$

(3.10)

Si se considera el caso de cinco niveles $M = 5$ en (3.9), entonces

$$c_k = b_k + b_{k-1} + b_{k-2} + b_{k-3}$$

Al reescribir esa expresión considerando los posibles casos, se tiene

$$c_k = 0/1 + 0/1 + 0/1 + 0/1$$

(3.11)

Por lo que la modulación polibinaria de 5 niveles, c_k puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4 para las amplitudes. Con base a lo anterior, existen 16 posibles combinaciones de (3.11) tal como se observa en la tabla 3-1

Tabla 3-1 Combinaciones de niveles para $M = 5$

b_k	b_{k-1}	b_{k-2}	b_{k-3}	c_k
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	2
0	1	0	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	0	2
0	1	1	1	3
1	0	0	0	1
1	0	0	1	2
1	0	1	0	2
1	0	1	1	3
1	1	0	0	2
1	1	0	1	3
1	1	1	0	3
1	1	1	1	4

En la última columna de la tabla 3-1, se utilizaron colores para diferenciar la ocurrencia de un nivel con otro.

Se observa que los niveles 0 y 4 ocurren una sola vez, los niveles 1 y 3 son generados en cuatro ocasiones y el nivel 2 se presenta en 6 ocasiones.

Para calcular la probabilidad a priori, basta con realizar el cociente entre el número de ocurrencias de cada nivel y el número total de combinaciones posibles.

Las probabilidades a priori de cada nivel son 1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16 para los niveles 0, 1, 2, 3, 4 respectivamente. Lo más llamativo son los numeradores de los cocientes (1, 4, 6, 4, 1), estos números coinciden con los coeficientes binomiales para el caso $(a + b)^4$.

De acuerdo al Dr. Adam Lender, la probabilidad a priori de cada nivel asumiendo que la distribución de bits '0' y '1' es la misma está determinada por [2]:

$$p_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \binom{n-1}{k} \tag{3.12}$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$

Se puso a prueba la expresión (3.12). Se consideró una señal binaria pseudoaleatoria (PRBS) de 4096 bits. Mediante un programa de MATLAB se pudo realizar el cálculo de ocurrencia de los distintos niveles de la señal polibinaria mediante umbrales de decisión y conociendo el total de bits enviados se calculó la distribución de cada nivel.

Utilizando la notación expresada en las tablas 2-1 y 2-2 se obtuvieron los resultados de la tabla 3-2

Tabla 3-2 Probabilidades a priori obtenidas en simulaciones

Probabilidades a priori de la señal	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
Duobinaria - C	1/4	2/4	1/4	X	X
Duobinaria - C	1/4	2/4	1/4	X	X
Polibinaria - C	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
Polibinaria - C	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4
Duobinaria - N	1/2	1/2	X	X	X
Duobinaria - N	1/2	1/2	X	X	X
Polibinaria - N	6/16	8/16	2/16	X	X
Polibinaria - N	1/2	1/2	X	X	X

En el capítulo anterior se vio que la señal **Polibinaria-C** se comporta como una duobinaria. Al observar sus probabilidades a priori nuevamente se detectó esta conducta.

Las probabilidades a priori de los extremos en esta señal poseen el valor de 1/4. Las probabilidades a priori de los niveles centrales son 1/8, 1/4 y 1/8, que al sumarse dan como resultado 2/4, este número es el mismo si se observa la probabilidad a priori del nivel central en las señales duobinarias para operación en punto de cuadratura de la tabla anterior.

Es importante resaltar que las probabilidades a priori de la señal **Polibinaria – N**, no son 1/4, 1/2, 1/4. Esto se debe a que la configuración del MZM está en punto nulo.

Para explicar este suceso, se requieren los conceptos vistos en el capítulo 2.2 en relación al punto de operación del MZM y la señal polibinaria.

En la figura 3.3 se muestra la constelación de la señal en punto de cuadratura para 5 niveles en el dominio óptico y una segunda constelación con los 3 niveles recibidos por el fotodiodo en el dominio eléctrico.

Los 5 niveles ópticos poseen la distribución planteada por A. Lender, es decir, las probabilidades a priori para cada nivel son 1/16, 4/16, 6/16, 4/16, 1/16.

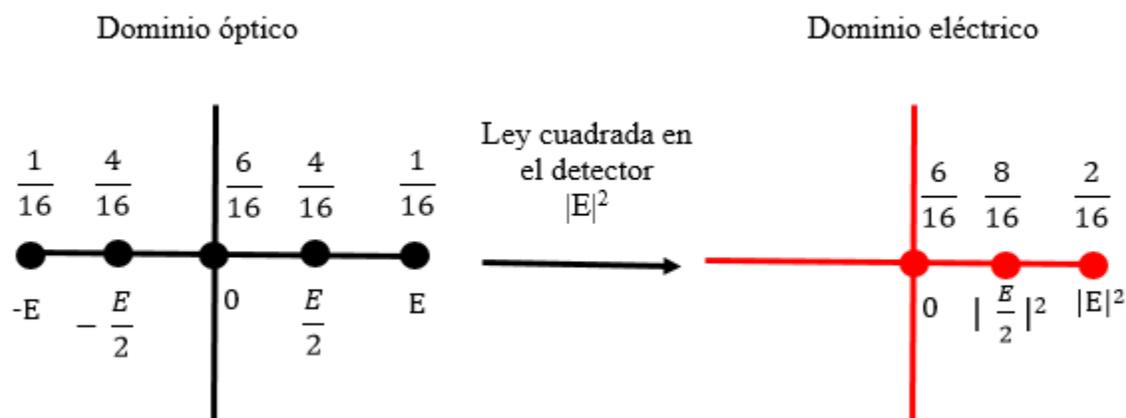


Fig. 3.3 Constelaciones en dominio óptico y eléctrico (receptor) de la señal **Polibinaria – N**

En la figura anterior, del lado izquierdo (dominio óptico) los niveles $-E$ y E son detectados como $|E|^2$ en el lado derecho (dominio eléctrico); la probabilidad a priori del nivel detectado surge de la suma de los dos niveles anteriores, es decir $1/16 + 1/16 = 2/16$.

De la misma forma, para los niveles $-E/2$ y $E/2$ la probabilidad a priori del nivel detectado $|E/2|^2$ es igual a $4/16 + 4/16 = 8/16$.

El nivel de amplitud 0 del dominio óptico es detectado de la misma forma en el dominio eléctrico, por lo que su probabilidad a priori de 6/16 se conserva.

Se concluyó que la distribución descrita por A. Lender se cumple únicamente en las señales operadas en cuadratura.

3.3 Modelo de probabilidad de error para una señal polibinaria de 3 niveles

La probabilidad de error total para 3 niveles se modela de la siguiente manera:

$$p_{error} = p_0 \cdot p_{\epsilon 0} + p_1 \cdot p_{\epsilon 1} + p_2 \cdot p_{\epsilon 2} \tag{3.13}$$

Donde:

p_0 es la probabilidad a priori del nivel 0

p_1 es la probabilidad a priori del nivel 1

p_2 es la probabilidad a priori del nivel 2

p_{e0} es la probabilidad condicional dado que se envió un bit '0' pero se recibió un bit '1'.

p_{e1} es la probabilidad condicional dado que se envió un bit '1' pero se recibió un bit '0'.

p_{e2} es la probabilidad condicional dado que se envió un bit '0' pero se recibió un bit '1'.

Cada término de la expresión (3.13) se encuentra conociendo cómo se distribuye cada nivel en el formato de modulación para determinar la probabilidad a priori de cada nivel. Se requiere el cálculo de áreas de las fdp del modelo Gaussiano para conocer las probabilidades condicionales.

Las probabilidades a priori de cada sistema polibinario fueron descritas en la sección anterior. Sin embargo, se observó que en las señales polibinarias de 5 niveles las probabilidades a priori no son siempre las mismas para todos los casos. Por esta razón se prefiere dejarlas expresadas de manera simbólica a cada una en lugar de colocar un valor.

El siguiente análisis se enfoca en calcular las probabilidades condicionales.

Definiendo como:

μ_0, σ_0 la media y desviación estándar de la fdp Gaussiana del nivel 0 respectivamente.

μ_1, σ_1 la media y desviación estándar de la fdp gaussiana del nivel 1 respectivamente.

μ_2, σ_2 la media y desviación estándar de la fdp Gaussiana del nivel 2 respectivamente.

γ_0 el umbral de decisión que separa a las fdp Gaussianas del nivel 0 y 1.

γ_1 el umbral de decisión que separa a las fdp Gaussianas del nivel 1 y 2.

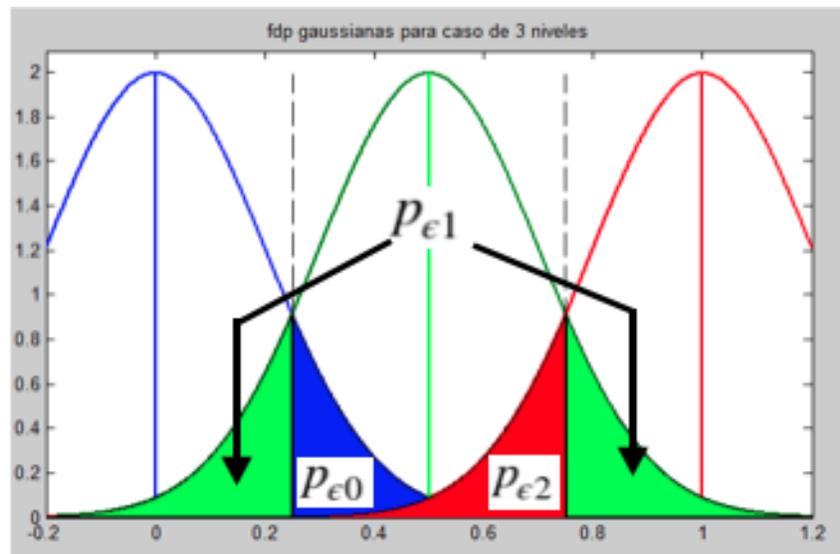


Fig. 3.4 Probabilidades condicionales (áreas sombreadas) para 3 niveles.

Se calculan las probabilidades condicionales representadas por las áreas mostradas en la figura 3.3

Cálculo de la probabilidad condicional p_{e0}

Se integra la fdp Gaussiana del nivel 0 desde el umbral γ_0 hasta infinito

$$p_{\epsilon 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu_0}{\sqrt{2}\sigma_0}\right)^2} dx \quad (3.14)$$

Se realiza un cambio de variable en (3.14) para que la integral se asemeje a la función Q(x).

$$\text{Cambio de variable: } z = \frac{x-\mu_0}{\sigma_0}$$

$$\text{Por lo tanto } dz = \frac{dx}{\sigma_0} \quad (3.15)$$

Despejando dx de (3.15)

$$dx = dz \cdot \sigma_0$$

Se cambian los límites de integración respecto a la nueva variable z

Límite superior: Si x es infinito, z es infinito.

Límite inferior: Si x es γ_0 , z es $\frac{\gamma_0-\mu_0}{\sigma_0}$

Se reescribe (3.14) en términos de la variable z

$$p_{\epsilon 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\gamma_0-\mu_0}{\sigma_0}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.16)$$

La expresión (3.16) se asemeja a la definición de la función Q descrita en (3.3)

Por lo tanto

$$p_{\epsilon 0} = Q\left(\frac{\gamma_0-\mu_0}{\sigma_0}\right) \quad (3.17)$$

Cálculo de la probabilidad condicional $p_{\epsilon 1}$

Definiendo la probabilidad condicional $p_{\epsilon 1}$ como la suma de las dos áreas que invade a las fdp de nivel 0 y nivel 2.

$$p_{\epsilon 1} = p_{\epsilon 1_{\text{izquierdo}}} + p_{\epsilon 1_{\text{derecho}}} \quad (3.18)$$

El área definida por $p_{\epsilon 1_{\text{izquierdo}}}$ abarca la integral de la fdp gaussiana del nivel 1 desde menos infinito hasta γ_0

$$p_{\epsilon 1_{\text{izquierdo}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{\gamma_0} e^{-\left(\frac{x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2} dx \quad (3.19)$$

Nuevamente se realiza un cambio de variable en (3.19) para que la integral se asemeje a la función Q(x) y se reescribe la integral en términos de la nueva variable z

$$p_{\epsilon 1_{\text{izquierdo}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\gamma_0-\mu_1}{\sigma_1}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (3.20)$$

La integral planteada anteriormente (3.20) coincide con la integral de la ecuación (3.6). En ambos casos se considera el límite de integración desde menos infinito hasta un valor x en el límite superior.

El resultado de la ecuación (3.6) es $1 - Q(x)$, por lo tanto para (3.20) el área total se expresa

$$p_{\epsilon 1_{\text{izquierdo}}} = 1 - Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \quad (3.21)$$

La propiedad $Q(-x) = 1 - Q(x)$ [3], permite reescribir (3.21) de una manera más sencilla

$$p_{\epsilon 1_{\text{izquierdo}}} = Q\left(\frac{\mu_1 - \gamma_0}{\sigma_1}\right) \quad (3.22)$$

Por otro lado, el área definida por $p_{\epsilon 1_{\text{derecho}}}$ considera el área bajo la curva de la **fdp Gaussiana de nivel 1** desde γ_1 hasta infinito.

$$p_{\epsilon 1_{\text{derecho}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\gamma_1}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma_1}\right)^2} dx \quad (3.23)$$

El procedimiento de la expresión anterior (3.23) es el mismo que la integral (3.14). El resultado final en términos de la función $Q(x)$ es

$$p_{\epsilon 1_{\text{derecho}}} = Q\left(\frac{\gamma_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \quad (3.24)$$

Cálculo de la probabilidad condicional $p_{\epsilon 2}$

Se integra la **fdp Gaussiana del nivel 2** desde menos infinito hasta el umbral γ_1

$$p_{\epsilon 2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_{-\infty}^{\gamma_1} e^{-\left(\frac{x-\mu_2}{\sqrt{2}\sigma_2}\right)^2} dx \quad (3.25)$$

El procedimiento para la integral anterior (3.25) es el mismo que para la integral (3.19), por lo que se escribe únicamente el resultado final

$$p_{\epsilon 2} = Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right) \quad (3.26)$$

Se sustituyen los resultados de las probabilidades condicionales $p_{\epsilon 0}$, $p_{\epsilon 1}$ y $p_{\epsilon 2}$ en el modelo original de probabilidad total de error planteado en (3.13)

$$p_{\text{error}} = p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + p_1 \left[Q\left(\frac{\mu_1 - \gamma_0}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] + p_2 \cdot Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right) \quad (3.27)$$

3.4 Modelo de probabilidad de error para una señal polibinaria de 5 niveles

La probabilidad de error total para 5 niveles se expresa

$$p_{error} = p_0 \cdot p_{\epsilon 0} + p_1 \cdot p_{\epsilon 1} + p_2 \cdot p_{\epsilon 2} + p_3 \cdot p_{\epsilon 3} + p_4 \cdot p_{\epsilon 4} \quad (3.28)$$

La figura 3.4 muestra las probabilidades condicionales a través de 5 colores diferentes (verde, azul, rojo, cian, púrpura).

Definiendo como:

μ_0, σ_0 la media y desviación estándar de la fdp Gaussiana del nivel 0 respectivamente.

μ_1, σ_1 la media y desviación estándar de la fdp gaussiana del nivel 1 respectivamente.

μ_2, σ_2 la media y desviación estándar de la fdp Gaussiana del nivel 2 respectivamente.

μ_3, σ_3 la media y desviación estándar de la fdp gaussiana del nivel 3 respectivamente.

μ_4, σ_4 la media y desviación estándar de la fdp Gaussiana del nivel 4 respectivamente.

γ_0 el umbral de decisión que separa a las fdp Gaussianas del nivel 0 y 1.

γ_1 el umbral de decisión que separa a las fdp Gaussianas del nivel 1 y 2.

γ_2 el umbral de decisión que separa a las fdp Gaussianas del nivel 2 y 3.

γ_3 el umbral de decisión que separa a las fdp Gaussianas del nivel 3 y 4.

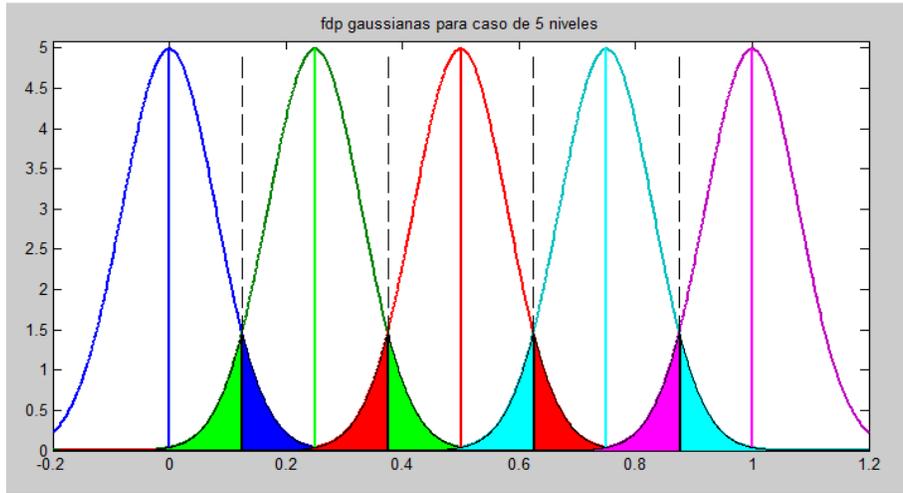


Fig. 3.5 Probabilidades condicionales para 5 niveles

El procedimiento para hallar las probabilidades condicionales de la igualdad anterior (3.28) es muy similar al caso de 3 niveles en (3.13). Por esta razón, sólo se coloca el resultado final para este caso

$$p_{error} = p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + p_1 \left[Q\left(\frac{\mu_1 - \gamma_0}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] + \dots$$

$$\dots + p_2 \left[Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right) + Q\left(\frac{\gamma_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \right] + p_3 \left[Q\left(\frac{\mu_3 - \gamma_2}{\sigma_3}\right) + Q\left(\frac{\gamma_3 - \mu_3}{\sigma_3}\right) \right] + p_4 \cdot Q\left(\frac{\mu_4 - \gamma_3}{\sigma_4}\right) \quad (3.29)$$

Las expresiones de probabilidad de error total descritas en la tesis [4] utilizan la función **erfc(x)** en lugar de la función **Q(x)**. No obstante, existe una equivalencia entre ambas funciones [5]:

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (3.30)$$

Al utilizar la equivalencia anterior se pueden reescribir los términos en función $Q(x)$ planteados en este trabajo en las expresiones planteadas en [4] descritas en términos de la función $\operatorname{erfc}(x)$.

3.5 Modelo de probabilidad de error general para una señal polibinaria de M niveles

Se propone una expresión general que permite obtener la probabilidad de error total para formatos de modulación con niveles impares en términos de la función $Q(x)$ utilizando un modelo Gaussiano.

Recordando que **M** es un número impar mayor o igual a 3.

$$M = 2k + 1 \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Se define una variable auxiliar " r_M ", el subíndice de esta variable es el impar número M. Esta comienza en 3 cuando **M es igual a 3**, aumenta a 4 cuando **M es 5**, sigue con 5 cuando **M vale 7** y así sucesivamente. La tabla 3-3 muestra a la variable r_M con su correspondiente valor de M

Tabla 3-3 Valores de M y sus respectivas variables auxiliares r_M

Número de niveles M	Variable auxiliar r_M
3	$r_3 = 3$
5	$r_5 = 4$
7	$r_7 = 5$
9	$r_9 = 6$

Se realiza la diferencia entre el número de niveles M y su respectiva variable r_M , el resultado de la diferencia se define como " Δ_M ". Los resultados son expresados en la tabla 3-4

Tabla 3-4 Definición de Δ_M

Diferencia de niveles M con variable auxiliar r_M y su resultado $\Delta_M = M - r_M$
$\Delta_3 = 3 - 3 = 0$
$\Delta_5 = 5 - 4 = 1$
$\Delta_7 = 7 - 5 = 2$
$\Delta_9 = 9 - 6 = 3$

Se utiliza a Δ_M como superíndice de la siguiente expresión de probabilidad de error total general. Los símbolos μ , σ , γ representan las medias, desviaciones estándar y umbrales respectivamente.

$$\begin{aligned}
 p_{error} = & p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + \sum_{n=1}^{\Delta_M} p_{2n} \left[Q\left(\frac{\mu_{2n} - \gamma_{2n-1}}{\sigma_{2n}}\right) + Q\left(\frac{\gamma_{2n} - \mu_{2n}}{\sigma_{2n}}\right) \right] + \dots \\
 & \dots + \sum_{m=0}^{\Delta_M} p_{2m+1} \left[Q\left(\frac{\mu_{2m+1} - \gamma_{2m}}{\sigma_{2m+1}}\right) + Q\left(\frac{\gamma_{2m+1} - \mu_{2m+1}}{\sigma_{2m+1}}\right) \right] + p_{M-1} \cdot Q\left(\frac{\mu_{M-1} - \gamma_{M-2}}{\sigma_{M-1}}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

p_{2n} representa a la familia de probabilidades a priori con subíndice par, excluyendo a los extremos p_0 y p_{M-1}

p_{2m+1} representa a la familia de probabilidades a priori con subíndice impar.

Ejemplo de la expresión general para el caso de 3 niveles.

Se comprueba un caso de (3.31) tomando en cuenta la señal de 3 niveles (duobinaria). El desarrollo de la expresión de probabilidad de error de 3 niveles fue realizado en la sección 3.3, por lo que el resultado final debe coincidir con la expresión dada en (3.27)

Datos.

- Número de niveles **M = 3**

- Diferencia entre el número de niveles M y su variable auxiliar r_M correspondiente $\Delta_3 = 0$. Por lo tanto el superíndice de las sumatorias es 0.

$$\begin{aligned}
 p_{error} = & p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + \sum_{n=1}^0 p_{2n} \left[Q\left(\frac{\mu_{2n} - \gamma_{2n-1}}{\sigma_{2n}}\right) + Q\left(\frac{\gamma_{2n} - \mu_{2n}}{\sigma_{2n}}\right) \right] + \dots \\
 & \dots + \sum_{m=0}^0 p_{2m+1} \left[Q\left(\frac{\mu_{2m+1} - \gamma_{2m}}{\sigma_{2m+1}}\right) + Q\left(\frac{\gamma_{2m+1} - \mu_{2m+1}}{\sigma_{2m+1}}\right) \right] + p_{3-1} \cdot Q\left(\frac{\mu_{3-1} - \gamma_{3-2}}{\sigma_{3-1}}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

La sumatoria que acompaña a la familia de probabilidades a priori de la forma p_{2n} en (3.32) no tiene sentido, ya que el subíndice empieza en 1 y termina en 0, esto es $\sum_{n=1}^0$. Se concluye que todos los términos relacionados a p_{2n} no existen en este caso.

Por otra parte, el resultado de la sumatoria de la familia de probabilidades a priori de la forma p_{2m+1} existe ya que $\sum_{n=a}^a n = a$, así que al simplificar

$$p_{error} = p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + p_1 \left[Q\left(\frac{\mu_{2 \cdot 0+1} - \gamma_{2 \cdot 0}}{\sigma_{2 \cdot 0+1}}\right) + Q\left(\frac{\gamma_{2 \cdot 0+1} - \mu_{2 \cdot 0+1}}{\sigma_{2 \cdot 0+1}}\right) \right] + p_2 \cdot Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right)$$

Continuando la simplificación de la expresión anterior se llega al siguiente resultado

$$p_{error} = p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + p_1 \left[Q\left(\frac{\mu_1 - \gamma_0}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] + p_2 \cdot Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right) \quad (3.33)$$

Puede verificarse que la expresión obtenida (3.33) coincide con el resultado expuesto en (3.27), por tanto, la expresión es válida para este caso.

En este trabajo se consideró que la probabilidad de error encontrada es equivalente al BER (tasa de bit erróneo, *Bit Error Rate*) de la señal.

La ecuación que relaciona el BER (Bit Error Rate) y al factor Q en las señales

$$Q = \sqrt{2} \cdot \text{erfcinv}(2BER) \quad (3.34)$$

A continuación se presenta la tabla 3-5 con los modelos de probabilidad de error total correspondientes a cada variante polibinaria. Esta tabla complementa la tabla 3-2 donde se mostraron las probabilidades a priori encontradas en las simulaciones.

Tabla 3-5 Probabilidad de error total de señales polibinarias

Señal	Probabilidad de error para señal de 2 niveles
Duobinaria – N	$p_{error} = \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\frac{Q}{\sqrt{2}}\right)$
Duobinaria – N	
Polibinaria – N	
Probabilidad de error para señal de 3 niveles	
Duobinaria – C	$p_{error} = p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + p_1 \left[Q\left(\frac{\mu_1 - \gamma_0}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] + p_2 \cdot Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right)$
Duobinaria – C	
Polibinaria – N	
Probabilidad de error para señal de 5 niveles	
Polibinaria – C	$p_{error} = p_0 \cdot Q\left(\frac{\gamma_0 - \mu_0}{\sigma_0}\right) + p_1 \left[Q\left(\frac{\mu_1 - \gamma_0}{\sigma_1}\right) + Q\left(\frac{\gamma_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) \right] + \dots$ $\dots + p_2 \left[Q\left(\frac{\mu_2 - \gamma_1}{\sigma_2}\right) + Q\left(\frac{\gamma_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) \right] + p_3 \left[Q\left(\frac{\mu_3 - \gamma_2}{\sigma_3}\right) + Q\left(\frac{\gamma_3 - \mu_3}{\sigma_3}\right) \right] + \dots$ $\dots + p_4 \cdot Q\left(\frac{\mu_4 - \gamma_3}{\sigma_4}\right)$
Polibinaria – C	

Se remarca el hecho de que la señal **Polibinaria-C** fue modelada como una señal de 5 niveles en las tablas 3-2 y 3-5. Esto se debe en parte a que en el capítulo 2 se analizó la distribución mediante los niveles 0, 1, 2, 3, 4 para estas señales. Se pudo ver que los niveles 0 y 4 ubicados en los extremos decodifican como bit '0'. Mientras que los niveles 1, 2, 3 ubicados en el centro decodifican como bit '1'.

Por otra parte, la tabla 2-1 mostró que para decodificar esta señal se requieren únicamente dos umbrales de decisión. Esto puede llevar a la idea de que un modelo de 3 niveles es el más adecuado para analizarla. Sin embargo, debido a la distorsión producida en el centro del diagrama de ojo, modelarla de esa forma no resulta conveniente debido a una gran desviación estándar en la señal. Esta situación se retomará nuevamente en el siguiente capítulo.

Por esta razón se decidió utilizar un modelo de 5 niveles para esta señal y de esta manera fueron presentados los resultados en este capítulo.

Referencias.

[1] Stremler Ferrel G., *“Introducción a los sistemas de comunicación”*, Tercera Edición, Pearson Addison Wesley, págs. 482-484, 547-551

[2] Adam Lender, *“Correlative Digital Communication Techniques”*, IEEE vol. 12 pp. 45-53, 1964.

[3] *“Q function and error function”*, April 2006, Recuperado en: www.comlab.hut.fi/studies/1140/Q-function.pdf

[4] Rodríguez Gaytan, Julio Augusto, *“Tesis: Modelado y simulación de transmisión de señales ópticas con modulación polibinaria a través de enlaces de fibra óptica”*, págs. 82-83, 88-90, 2018.

[5] Mathworks, *“Q function (qfunc)”*, 2018,
Recuperado en: <https://la.mathworks.com/help/comm/ref/qfunc.html>

4. Evaluación del desempeño para diversos esquemas en modulación polibinaria

En este capítulo se probaron distintas configuraciones con el fin de ajustar las condiciones del sistema para transmitir una señal de forma óptima. Se consideró como óptimo un filtro paso bajas con frecuencia de corte tan pequeña como fuera posible siempre y cuando presentara un BER aceptable.

La notación utilizada en el capítulo presente para referirse a cada señal se encuentra en las tablas 2.1 y 2.2 del capítulo dos de este trabajo.

Se decidió dividir las ocho variantes generadas a través de dos bloques, el primer bloque consta de todas las señales generadas por el **filtro polibinario**, el segundo se conforma de las señales creadas por el **filtro delay-and-add**. Por cada bloque, primero se muestran los resultados obtenidos al operar el MZM en cuadratura y después los del MZM operado en punto nulo.

Esta manera de presentar los resultados es con el fin de comparar el rendimiento de una configuración (filtro) contra otra.

4.1 Filtro Polibinario o enfoque analógico

La creación de niveles mediante un filtro Bessel paso bajas depende de la frecuencia de corte del filtro. El filtro con frecuencia de corte reducido provoca que los pulsos se ensanchen en el dominio del tiempo (creado Interferencia Inter-Símbolo, ISI), por consecuencia en el dominio de la frecuencia se tienen espectros más estrechos.

Para lograr una señal de 3 niveles se requiere una frecuencia de corte en el filtro de aproximadamente una cuarta parte del valor de la tasa de transmisión del sistema. Para lograr una señal de 5 niveles se necesita una frecuencia de corte en el filtro de alrededor de una quinta parte de la tasa de transmisión.

Si el MZM es operado en punto de cuadratura la señal de 5 niveles se comportará como una señal operada en cuadratura de 3 niveles en el receptor. De la misma forma, si el MZM es operado en punto nulo, la señal de 5 niveles se comportará como una señal operada en nulo de 3 niveles en el detector.

En las siguientes señales se consideró una señal PRBS de 4096 bits transmitidos a una tasa de 10 Gbps.

Duobinaria - C

Se probaron distintas configuraciones tomando como base una frecuencia de corte alrededor de 2.5 [GHz] (cuarta parte de la tasa de transmisión), modificando este valor con cambios de 0.1 en 0.1 [GHz]. Con esta consideración, se aumentó la frecuencia de corte, sin embargo, no se obtuvo ningún cambio notorio, el valor de BER continuó siendo muy alto. No obstante, al disminuir la frecuencia de corte, el valor del BER empeoraba, esto se reflejó en una mayor distorsión en la señal detectada.

Debido a que el desempeño del sistema con un filtro paso bajas con frecuencia de corte de 2.5 [GHz] obtuvo un BER de 0 en la simulación. El BER comenzaba a aumentar conforme la frecuencia de corte del filtro era menor, se optó por no realizar cambios en el sistema para este caso.

Se usó un filtro Bessel paso bajas de quinto orden con frecuencia de corte al 25% de la tasa de transmisión para la generación de una señal de 3 niveles.

Los resultados fueron un BER de $9.5412 \cdot 10^{-107}$ con un factor Q de 21.9141 utilizando el punto de muestreo en el diagrama de ojo de la figura 4.1

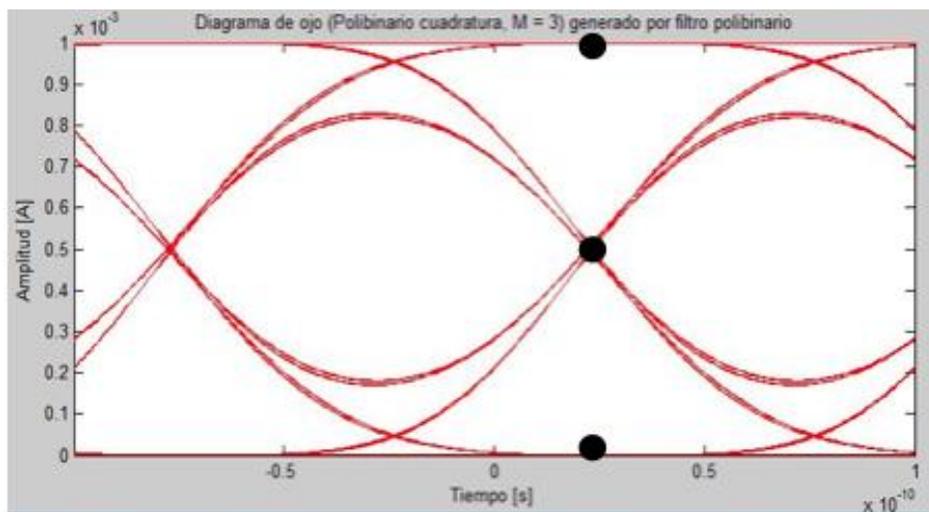


Fig. 4.1 Diagrama de ojo **Duobinaria-C**

Polibinario - C

Se pudo constatar que la generación de 5 amplitudes mediante el filtro polibinario ocurre cuando se tiene una frecuencia de corte de alrededor de 2 [GHz]; sin embargo, existen reportes con buenos resultados que consideran un corte al 18% de la tasa de bits transmitida.

La relación entre un corte más pequeño en la frecuencia del filtro paso bajas y una señal más distorsionada continua presente. Este evento continua estando presente en la generación de 5 niveles ya que al probar un corte de 1.7 [GHz] se notó un deterioro en el BER además de tener más distorsión en la señal. Al modificar el orden del filtro, se obtuvo menor distorsión en el punto de muestreo con un filtro de quinto orden comparado con uno de cuarto y sexto orden.

Luego de probar distintas configuraciones, se decidió utilizar un filtro Bessel paso bajas de quinto orden con una frecuencia de corte del 17% de la tasa de transmisión. Teniendo como resultado un BER aceptable para un sistema óptico de comunicaciones del orden de 10^{-12} .

A pesar de que para decodificar la señal basta con colocar dos umbrales (mismo comportamiento que duobinario) que cubran los niveles centrales 1, 2, 3. Resulta inconveniente implementar un modelo que permita calcular la probabilidad de error en ese punto. La señal de 5 niveles recibida

presenta mucha distorsión en esa zona y por tanto los valores de BER resultan ser muy altos. Por tanto, se consideraron dos casos para este análisis. Se realizó el cálculo de la probabilidad de error modelada como una señal de 3 y 5 niveles en el punto de muestreo antes mencionado. Los resultados obtenidos no fueron los mejores debido a la gran desviación estándar presentada en cada caso.

Se optó por modificar ligeramente el punto de muestreo para calcular la probabilidad de error tal como se muestra en la figura 4.2. Se realizó un conteo de bits (*bit counting*) y se encontró que en este nuevo punto era posible recuperar la secuencia original de bits. Con base a lo anterior, se decidió usar ese punto de muestreo, ya que arrojaba mejores resultados utilizando el modelo probabilístico de 5 niveles.

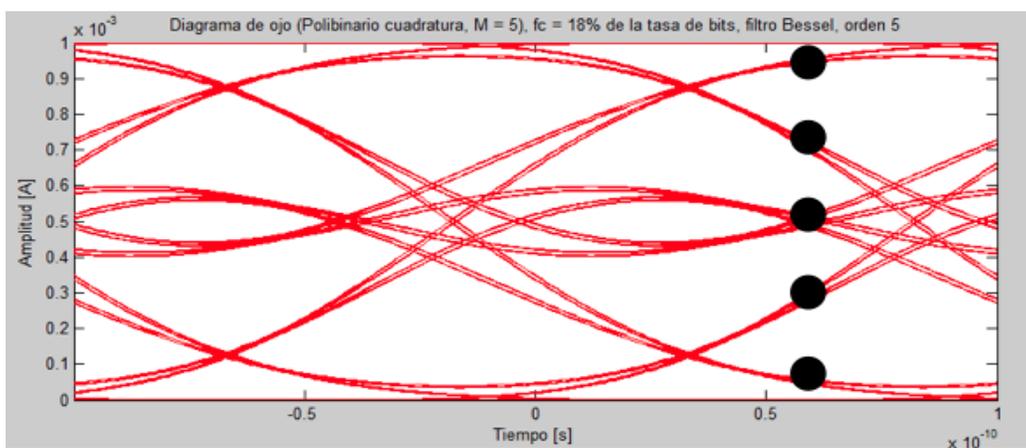


Fig. 4.2 Diagrama de ojo **Polibinario-C**

Bajo estas condiciones se logró un BER de $1.3703 \cdot 10^{-12}$ con un factor Q de 6.9904

Duobinario-N

Para el análisis que corresponde a la modulación en el punto nulo, se aumentó el orden del filtro de orden 5 a 6. De esta forma se observó un mejor resultado en la simulación. El dispositivo utilizado fue un filtro Bessel paso bajas de sexto orden con corte a 25% de la tasa de transmisión. La ventaja de esta configuración se encuentra en una decodificación sencilla. Como ya se ha mencionado, al operar en punto nulo una señal de 3 niveles es posible detectarla como una señal de 2 niveles. Así, la detección es similar al formato NRZ, con la única diferencia que los bits detectados se encuentran negados a comparación de ese formato de modulación. Se comprobó que la señal detecta como un bit '0' cuando la amplitud es recibida arriba del umbral de decisión y en caso contrario, se detecta un bit '1'. La distribución de los bits fue equiprobable, por lo que esta particularidad no presenta problema alguno y puede ser corregida, si así se desea, al momento de realizar la precodificación.

Al realizar el cálculo de la probabilidad de error se consideró el modelo de probabilidad de error para 2 niveles. Se utilizó el punto de muestreo mostrado en la figura 4.3. Con esto, se consiguió un BER de 0 con un factor Q de 402.3424

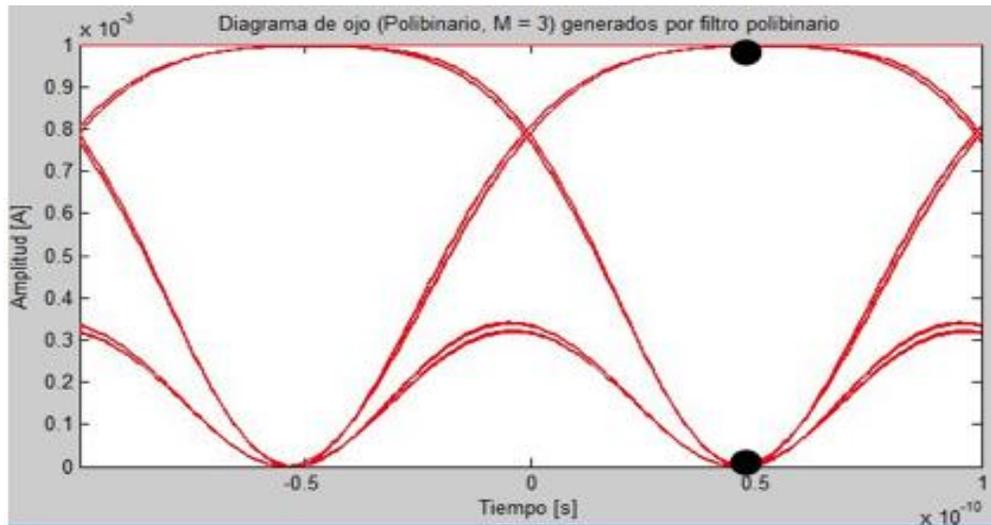


Fig. 4.3 Diagrama de ojo **Duobinario-N**

Polibinario-N

En el capítulo dos se mostró que el comportamiento de esta versión del **filtro polibinario** fue similar a la versión del **filtro Add-And-Delay** de 3 niveles operada en nulo. La señal resultante es de 2 niveles, por lo que sólo se requiere un umbral para recuperar la secuencia original de bits.

Respecto al desempeño de la señal, este caso mostró el mismo comportamiento que una señal NRZ: entre más abierto se encuentre su diagrama de ojo, menor es el BER calculado. Cuando se optimizó el sistema se buscó lograr esta condición de la mejor manera posible.

Se probaron distintas frecuencias de corte con variaciones de 1% de la tasa de bits y se varió el orden del filtro Bessel. En este caso, cambiar el orden del filtro a 4 o 6 no mostró ninguna mejoría.

Se encontró que persiste el compromiso entre la BER y la eficiencia espectral del sistema al hacer más estrecho el corte del filtro: cuanto más estrecho sea el corte peor será la BER. Visualmente esto se aprecia con un diagrama de ojo que tiende a cerrarse.

El mejor sistema encontrado en las simulaciones utilizó un filtro Bessel de orden cinco con corte a 18% de la tasa de bits. El diagrama de ojo de la señal se encuentra en la figura 4.4. Con las características antes mencionadas se obtuvo un BER de $4.4362 \cdot 10^{-77}$ con un factor Q de 18.5455.

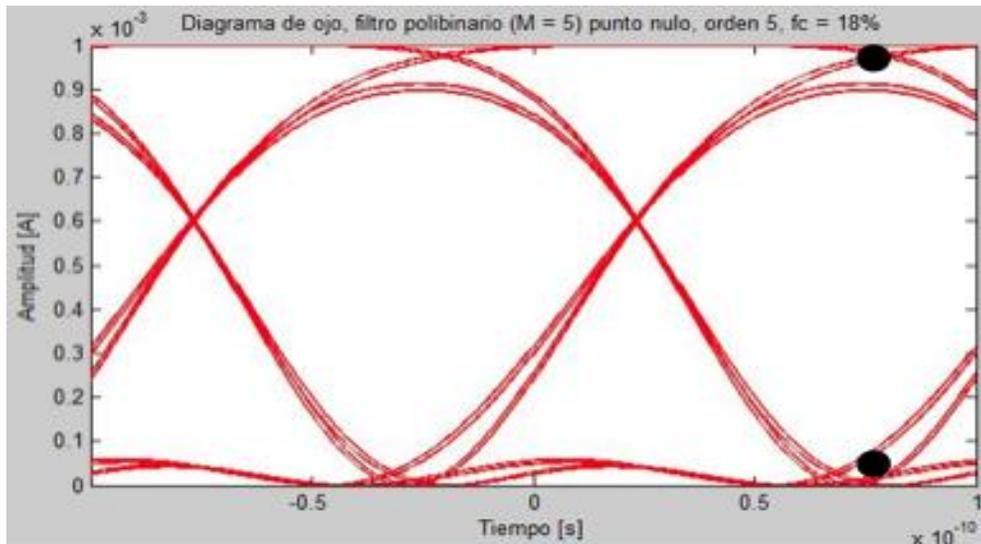


Fig. 4.4 Diagrama de ojo **Polibinario-N**

4.2 Filtro Delay-And-Add o enfoque digital

En esta configuración, la generación de niveles se realiza mediante el **filtro delay-and-add** a diferencia del **filtro polibinario**, en donde la generación de la señal es realizada directamente por un corte estrecho en el filtro paso bajas. Sin embargo, este tipo de configuraciones van acompañadas de un filtro paso bajas. Las señales mostradas en la tabla 2.1 y tabla 2.2 utilizan un filtro paso bajas con una frecuencia de corte del 50% de la tasa de transmisión. En las señales resultantes no se observó una distorsión apreciable, por lo que su BER fue alta.

Se buscó optimizar mediante un corte más pequeño de este segundo filtro para compararlo con la característica principal del **filtro polibinario**. Se encontró que en todos los casos de este filtro, sin importar si se operaba en cuadratura o en punto nulo, existe un compromiso más severo entre la BER y el corte del filtro paso bajas. Esta relación también se observó en el **filtro polibinario**. Sin embargo, este tipo de señales se distorsiona más fácilmente con el filtro paso bajas y de ahí su importancia.

En la figura 4.5 se muestra una señal **Polibinaria-C** con distintas frecuencias de corte. Entre más pequeño sea el corte del filtro se creará una señal más distorsionada. Al tener una señal distorsionada la desviación estándar aumenta y esto repercute en un peor BER. Se observó que modificar el orden del filtro a 4 o 6 no beneficia al desempeño del sistema.

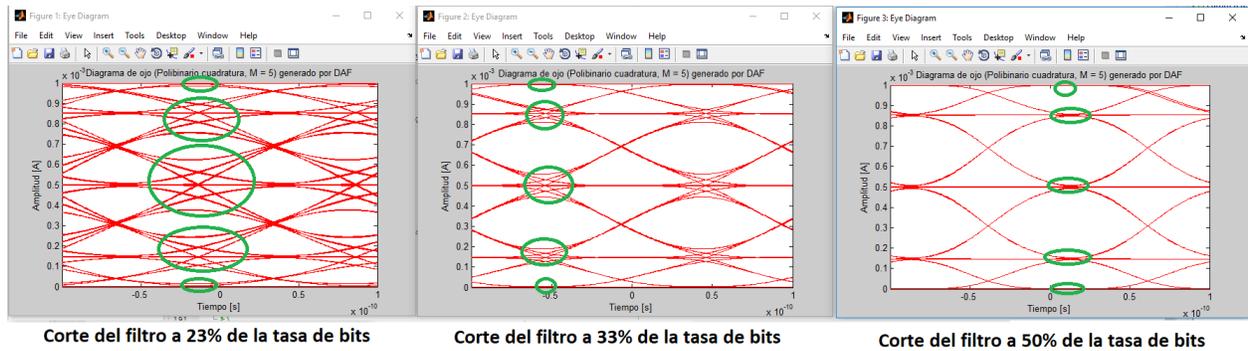


Fig. 4.5 Comparación de señales polibinarias generadas por *filtro delay-and-add*

De este comportamiento se concluye que el *filtro delay-and-add* no permite utilizar frecuencias de corte tan pequeñas como el 17% de la tasa de transmisión conseguida en el filtro polibinario.

Dado el comportamiento observado en los *filtros delay-and-add* se buscó la frecuencia de corte más baja del segundo filtro paso bajas con la cual se pudiera obtener un BER aceptable para sistemas ópticos de comunicaciones del orden igual o menor a 10^{-12} .

Se consideró una señal PRBS de 4096 bits transmitidos a una tasa de transmisión 10 Gbps.

Duobinario-C

Este filtro produce la señal duobinaria a través de un filtro delay-and-add de primer orden. La señal posee 3 niveles de amplitud y requiere dos umbrales de decisión para decodificar la señal.

Se buscó un sistema que cumpliera con la condición de BER propuesta. La condición se cumplió utilizando un filtro Bessel paso bajas de orden cinco con frecuencia de corte a 31% de la tasa de transmisión, la señal generada se muestra en la figura 4.6. La BER obtenida fue $1.792 \cdot 10^{-13}$ con un factor Q de 7.2704

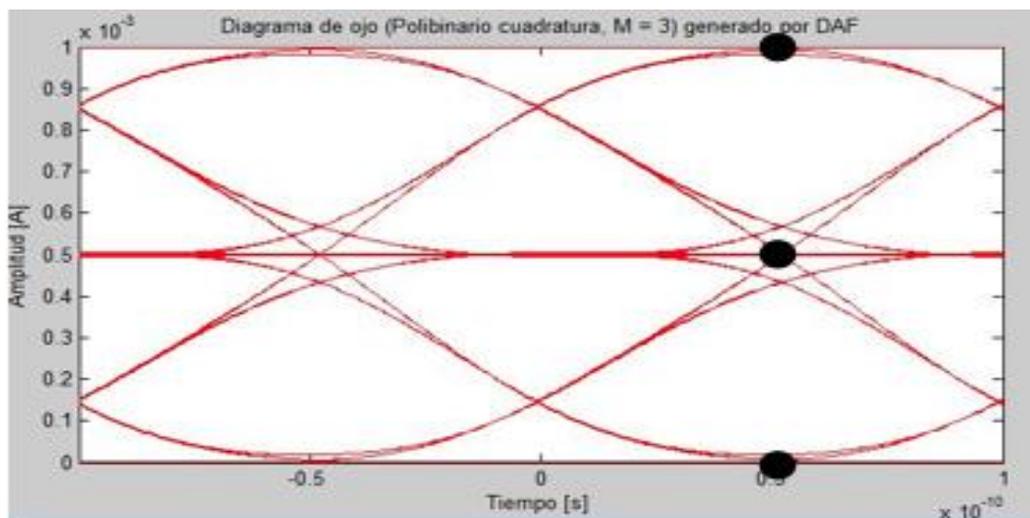


Fig. 4.6 Diagrama de ojo *Duobinario-C*

Polibinario-C

La señal polibinaria es creada mediante un **filtro delay-and-add** de tercer orden. En el capítulo 2 se comprobó que esta señal se comporta como lo plantean distintos artículos referentes al tema. Esta señal de 5 niveles requiere cuatro umbrales de decisión para decodificar.

El sistema utilizado ocupó un filtro Bessel paso bajas de quinto orden con una frecuencia de corte del 32% de la tasa de transmisión. La BER obtenido fue $3.6058 \cdot 10^{-12}$ con un factor Q de 6.8534 bajo las características dadas en la figura 4.7.

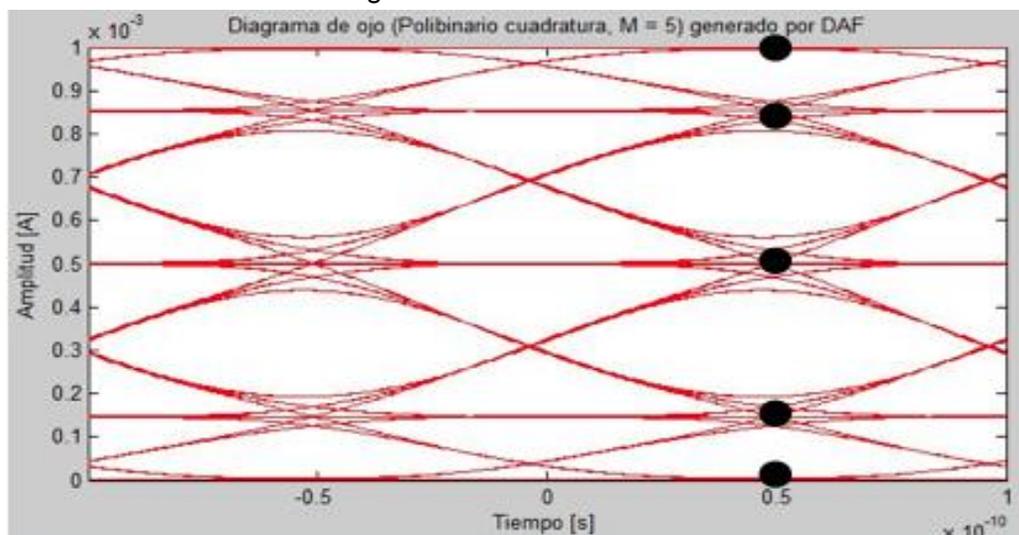


Fig. 4.7 Diagrama de ojo **Polibinario-C**

Duobinario-N

De acuerdo a lo que ya se ha explicado, la señal detectada después de operar al MZM en punto nulo muestra menos niveles que la generada en el transmisor. Tiene dos niveles de amplitud y requiere un solo umbral de decisión para la decodificación.

Se utilizó un filtro Bessel paso bajas de quinto orden con frecuencia de corte al 22% de la tasa de transmisión. El BER obtenido fue $3.3011 \cdot 10^{-12}$ con un factor Q de 6.8660 con el punto de muestreo de la figura 4.8.

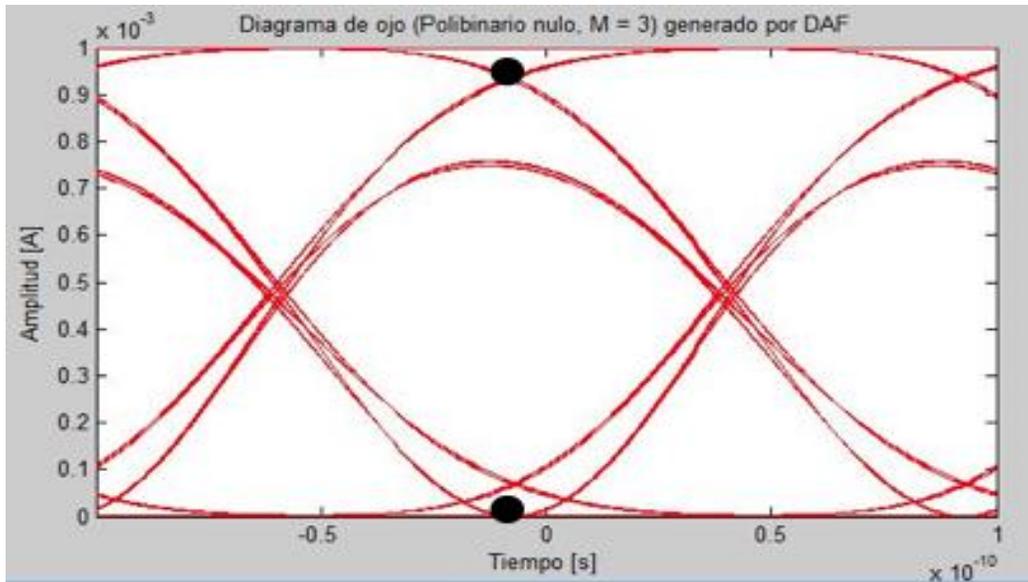


Fig. 4.8 Diagrama de ojo *Duobinario-N*

Polibinario-N

Para esta configuración, los 3 niveles detectados requieren dos umbrales de decisión. Se observó que a pesar de que el diagrama de ojo es similar a *Duobinario-C*, la distribución de los niveles es diferente.

Se notó una diferencia con las probabilidades a priori planteadas por Adam Lender, las probabilidades a priori encontradas en la sección 3.2 mediante MATLAB fueron 6/16, 8/16, 2/16 para los tres niveles generados, en esta misma sección se explica porque estas probabilidades a priori tienen ese valor.

A pesar de que los valores no coinciden con lo descrito en con las probabilidades a priori planteadas por A. Lender del capítulo 3, se conserva una distribución de los niveles más concentrada en el centro, estas probabilidades a priori ocurrieron utilizando una tasa de 10 Gbps, transmitiendo una secuencia PRBS de 2^{12} bits.

Se ocupó un filtro Bessel de orden cinco con una frecuencia de corte al 34% de la tasa de transmisión. El BER obtenida fue $1.2639 \cdot 10^{-13}$ con un factor Q de 7.3174 en el punto de muestreo mostrado en la figura 4.9

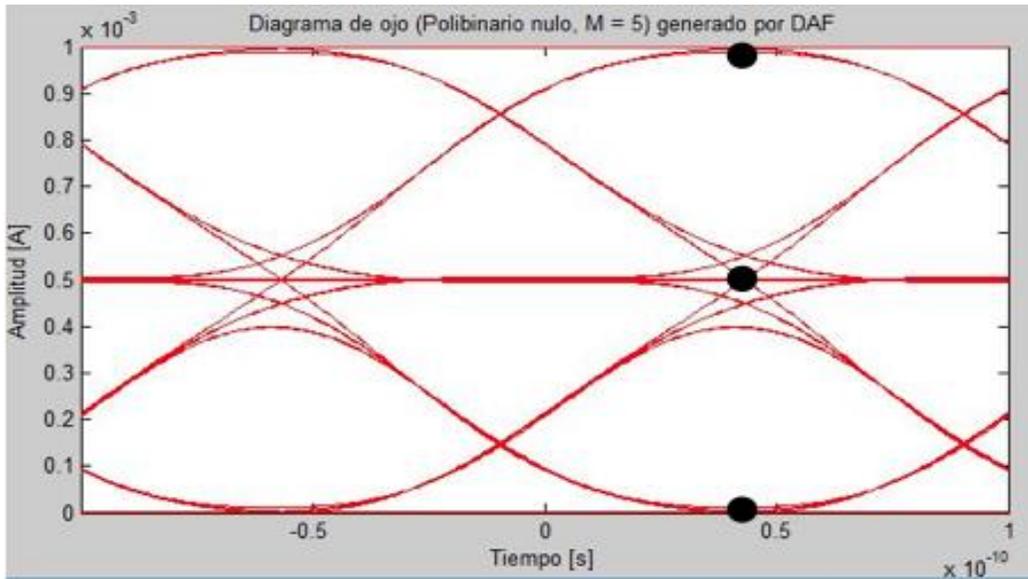


Fig. 4.9 Diagrama de ojo Polibinario-N

4.3 Resumen y discusión de los resultados

Finalmente se recopilan los resultados obtenidos. Se ordenó la información respecto a la frecuencia de corte del filtro paso bajas en la tabla 4.1.

En la siguiente tabla se utilizará la definición de eficiencia espectral dada en (1.9), como el cociente entre la tasa de bits transmitida (en las simulaciones se utilizó una R igual a 10 Gbps) y el ancho de banda delimitado por el filtro paso-bajas de cada señal:

$$\eta = \frac{R}{BW}$$

Una mayor eficiencia espectral implica un mejor aprovechamiento del ancho de banda en un sistema WDM ya que es posible colocar más canales de transmisión dentro del mismo (esto se debe a que cada canal utiliza menos ancho de banda). De esta manera se logra un aumento en la capacidad del sistema.

Tabla 4-1 Desempeño de las señales

Posición	Señal	Orden del filtro paso bajas	Frecuencia de corte del filtro Bessel paso bajas	Factor Q	Eficiencia espectral [bits/s/Hz]
1	Polibinario-N	5	1.7 [GHz]	18.5455	5.88
2	Polibinario-C	5	1.8 [GHz]	6.9904	5.55
3	Duobinario-N	5	2.2 [GHz]	6.8666	4.54
4	Duobinario-N	6	2.5 [GHz]	402.3424	4
5	Duobinario-C	5	2.5 [GHz]	21.9141	4
6	Duobinario-C	5	3.1 [GHz]	7.2704	3.22
7	Polibinario-C	5	3.2 [GHz]	6.8505	3.12
8	Polibinario-N	5	3.4 [GHz]	7.3174	2.94

Por último, se realiza una comparación entre las características de ambos sistemas.

El **filtro polibinario** requiere un solo filtro para producir señales polibinarias. Por otra parte, el **filtro delay-and-add** es utilizado para generar múltiples niveles, sin embargo, este tipo de configuraciones van acompañadas de un filtro paso bajas para aprovechar más el ancho de banda; esto implica utilizar dos filtros en el sistema.

La implementación para el **filtro polibinario** es más sencilla que la del **filtro delay-and-add**. La configuración del sistema para la señal polibinaria de 5 niveles utiliza el mismo precodificador y decodificador que la señal duobinaria. No se requiere ningún cambio adicional en el sistema para manejar cualquiera de estas dos versiones.

En contraste, un sistema con **filtro delay-and-add** requiere realizar cambios en el precodificador y decodificador dependiendo del tipo de señal manejada (puede ser duobinaria o polibinaria). En estos sistemas una señal con un mayor número de niveles necesita precodificadores y decodificadores cada vez más complejos.

En la tabla 4.1 se expone que las señales del **filtro polibinario** utilizan un menor espacio debido al corte estrecho en el filtro Bessel paso bajas, esto resulta conveniente al obtener una mayor eficiencia espectral. No obstante, se observó que al operar el MZM en cuadratura la distorsión producida aumenta en la señal **Polibinario-C**, esto se ve reflejado en un factor Q más bajo a comparación de la señal **Duobinario-C**. Al operar el MZM en punto nulo se observó el comportamiento anterior en las señales **Polibinario-N** y **Duobinario-N**; con la diferencia de que estas señales sufren menor distorsión, por lo que su factor Q es más alto que sus contrapartes operadas en cuadratura.

Por otro lado, a pesar de que las señales del **filtro delay-and-add** fueron acortadas mediante el segundo filtro paso-bajas que utiliza su configuración. Se pudo observar que la frecuencia de corte no puede ser tan pequeña como la del **filtro polibinario**.

El desempeño del factor Q bajo las condiciones expuestas en el presente capítulo del **filtro-delay-and-add** se encuentra cerca del límite de una transmisión aceptable para un sistema óptico de comunicaciones. Por otra parte, la mayoría de los sistemas del **filtro polibinario** se encuentra por arriba de ese límite.

De esta manera si se busca un mejor desempeño en el **filtro delay-and-add** se requiere una frecuencia de corte en el filtro más grande. Por lo tanto, en ese escenario la eficiencia espectral sería menor para estos sistemas, la recompensa por este sacrificio es un factor Q más grande. Con base a la tabla 4.1, se concluye que en estos sistemas resulta más conveniente utilizar una señal de 3 niveles en lugar de una de 5 para obtener una mayor eficiencia espectral.

La señal **Polibinario-N** tuvo un gran desempeño respecto a las otras variantes presentadas en este trabajo. Además de poseer la eficiencia espectral más alta, se encontró que la distorsión al operar el MZM en punto nulo no afecta mucho a la señal recibida a diferencia de la misma señal operada en punto de cuadratura (**Polibinario-C**). Debido a esta característica, la señal operada en nulo posee una buena calidad, esto se refleja con un factor Q elevado.

Una ventaja que sobresale de la posición uno en la tabla 4-1 es su precodificación y decodificación.

La precodificación requiere la expresión más corta de todos los sistemas analizados ya que comparte la misma que la señales duobinarias, esta expresión se encuentra en la ecuación (2.3) del capítulo 2.

La decodificación también es sencilla, esto se debe a que sólo es necesario un umbral de decisión para regresar a la secuencia original de bits. Por otra parte, la mayoría de las variantes presentadas en esa tabla necesitan una decodificación más compleja al requerir más umbrales de decisión en el sistema. Debido a las cualidades descritas anteriormente se concluye que la señal **Polibinario-N** es una buena opción para ser implementada en un sistema óptico de comunicaciones.

5. Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo de investigación fue haber implementado mediante la programación de Matlab de un sistema de transmisión de datos back-to-back basado en la modulación polibinaria que fue capaz de operar a una tasa de transmisión de 10 Gb/s. Esto permitió conocer las características de generación y detección polibinaria y establecer un mecanismo para poder medir su rendimiento en términos de la tasa de bits erróneos dentro de un sistema óptico de comunicaciones. Se destacan los siguientes puntos que se pueden concluir de todo el trabajo desarrollado:

- a) En este trabajo se encontró que la generación de señales polibinarias mediante el **filtro polibinario** posee una distribución de niveles diferente a las obtenidas con un **filtro delay-and-add**.
- b) Se determinó que las señales polibinarias generadas por el **filtro polibinario** requieren el mismo precodificador que las señales duobinarias para funcionar apropiadamente. El decodificador (el cual depende del punto de operación del Mach-Zehnder, puede ser cuadratura o nulo) necesario para las señales polibinarias generadas por este filtro no necesita ninguna modificación respecto al decodificador de las señales duobinarias. Las señales polibinarias generadas por el **filtro delay-and-add** son diferentes, ya que éstas sí requieren cambios en el transmisor y receptor respecto a las señales duobinarias para funcionar correctamente.
- c) Este trabajo presenta un análisis matemático para el cálculo de las probabilidades a priori para cada una de las variantes analizadas en la generación de señales polibinarias. Se verificó mediante simulaciones que la expresión que predice las probabilidades a priori en una señal polibinaria planteada por A. Lender es correcta en la mayoría de los casos, aunque se encontró que existen algunas excepciones. Además, por primera vez se ofreció una explicación a casos especiales en los cuales las probabilidades a priori de las señales polibinarias no son iguales a las previstas por A. Lender. Siendo estos casos los correspondientes a la señal **Polibinario-C** y la señal **Polibinario-N**.
- d) Se aportan los modelos de probabilidad de error para señales polibinarias de 3 y 5 niveles en términos de la función $Q(x)$. En cada modelo se utilizaron las probabilidades a priori encontradas por medio de simulaciones. Además, este trabajo introduce un modelo Gaussiano de probabilidad de error general para señales de niveles impares. Estos modelos permiten obtener la probabilidad de error en una transmisión considerando a las probabilidades a priori de manera simbólica. Debido a que en este trabajo se encontró que pueden existir señales con la misma cantidad de niveles pero con una distribución diferente de bits, esto significa que las probabilidades a priori en un sistema de "M" niveles no siempre serán las mismas para todos los casos.

- e) La eficiencia espectral de las señales polibinarias es mayor que la de las señales duobinarias en el **filtro polibinario**, sin embargo, la distorsión producida en el filtro también aumenta, disminuyendo consecuentemente el BER de la señal. Esto debe ser considerado en el diseño de un sistema que utilice este formato de modulación. En contraste, se encontró que respecto a la eficiencia espectral en el **filtro delay-and-add** es más conveniente utilizar una señal duobinaria que una polibinaria, esto se debe a que la distorsión provocada por el filtro paso bajas al utilizar una frecuencia de corte cada vez más pequeño hace que la detección sea menos propensa a errores cuando se tienen más niveles en la señal.

- f) Se encontró que la operación de señales en punto nulo ofrece una versión más sencilla de decodificar en comparación de la operación en cuadratura, además de presentar menor distorsión. Estas características resultan atractivas para su implementación en un sistema óptico de comunicaciones real.

Trabajo a futuro

En las simulaciones presentadas en este trabajo sólo fue considerada la influencia del filtro Bessel paso bajas en la generación de las señales, por lo que sería deseable observar la influencia de otros factores como el ancho de banda del modulador Mach – Zehnder.

Se podría continuar este trabajo mediante el análisis del desempeño de este tipo de señales respecto a la dispersión cromática cuando viajen por la fibra óptica. A su vez, también es importante observar cómo afectarían los efectos no lineales a este formato de modulación.

Debido a que en el presente trabajo las condiciones de las simulaciones fueron en su mayor parte ideales para comprender cómo funciona, el siguiente paso recae en tener más consideraciones en los dispositivos del sistema óptico de comunicaciones en vista de obtener una simulación más apegada a la realidad.

Apéndices

A Expresión para hallar umbrales dependiendo del número de niveles N del sistema

La siguiente expresión permite obtener todos los umbrales necesarios, cada uno con su valor correspondiente, conociendo únicamente **el número de niveles N de amplitud** de la señal de interés.

Se considera que el sistema no cuenta con ninguna distorsión, también se toma en cuenta el hecho de que las amplitudes generadas están separadas de maneras iguales. La posición de los umbrales se encuentra exactamente a la mitad de dos amplitudes generadas por un sistema de modulación.

Para comenzar su desarrollo, es necesario definir un número n con subíndice k cuyo valor es igual a k , es decir:

$$n_k = k \quad k = 0,1,2,3,\dots,N-1$$

Para obtener el número correcto de umbrales γ , es necesario acortar el límite del subíndice k por un elemento, de esta manera al definir un nuevo subíndice k' se tiene lo siguiente:

$$\gamma_{k'} = k' \quad k' = 0,1,2,3,\dots,N-2$$

Se realiza la media de la suma de dos amplitudes vecinas $\frac{n_{k'}}{N-1} \cdot A$ y $\frac{n_{k'+1}}{N-1} \cdot A$, para poder obtener umbrales de decisión

$$\gamma_{k'} = \frac{\frac{n_{k'}}{N-1} + \frac{n_{k'+1}}{N-1}}{2} \cdot A \quad (\text{A.1})$$

Simplificando (A.1):

$$\gamma_{k'} = \frac{n_{k'} + n_{k'+1}}{2(N-1)} \cdot A \quad (\text{A.2})$$

donde A es la amplitud máxima recibida.

Se observa que el numerador " $n_{k'} + n_{k'+1}$ " de (A.2) sólo genera números impares empezando en uno. Por lo que se **reescribe dicha expresión de una manera más sencilla**:

$$\gamma_{k'} = \frac{2k'+1}{2(N-1)} \cdot A \quad (\text{A.3})$$

Donde:

$$k' = 0,1,2,\dots,N-2$$

N: Número de niveles de la señal modulada.

A: Amplitud máxima de la señal generada.

Las ecuaciones (A.2) y (A.3) son expresiones equivalentes. **(A.3) es la expresión final** para colocar umbrales en el sistema.

Ejemplo de la expresión (A.3) para 5 niveles.

Datos.

N = 5.

Valores del subíndice k'

$k' = 0, 1, 2, 3$

Cálculo de umbrales γ

Primer umbral $k' = 0$

$$\gamma_0 = \frac{2(0) + 1}{2(4)} \cdot A = \frac{1}{8} \cdot A = 0.125 \cdot A$$

Segundo umbral $k' = 1$

$$\gamma_1 = \frac{2(1) + 1}{2(4)} \cdot A = \frac{3}{8} \cdot A = 0.375 \cdot A$$

Tercer umbral $k' = 2$

$$\gamma_2 = \frac{2(2) + 1}{2(4)} \cdot A = \frac{5}{8} \cdot A = 0.625 \cdot A$$

Cuarto umbral $k' = 3$

$$\gamma_3 = \frac{2(3) + 1}{2(4)} \cdot A = \frac{7}{8} \cdot A = 0.875 \cdot A$$

B Código de MATLAB de precodificador de un sistema polibinario

```
%Código del 'precoder'
bitStream = [1 0 1 1 0 1 1]
m = 1; %Número de ceros para arreglo 'b13', cada cero representa a los
elementos 'k-1', 'k-2', 'k-3', . . . , 'k-(M-2)'
b13 = zeros(1,m);

precodedData = []; %Arreglo vacío que guardará la trama precodificada

for n=1:length(bitStream) %Este ciclo recorre uno por uno los elementos de la
trama original de bits
xorWindow = [b13 bitStream(n)]; %Este arreglo toma '1 + m' elementos y les
aplicará XOR a cada uno

initial = xorWindow(1); %Esta variable se usará para actualizar su valor en el
siguiente ciclo y realizar operaciones XOR entre cada elemento

    for i=2:length(xorWindow) %Ciclo for que realiza XOR entre todos los
elementos del array 'xorWindow'
        initial = xor(xorWindow(i),initial); %Aquí se realiza la operación XOR
entre cada elemento
    end
    precodedData = [precodedData initial]; %Aquí se guarda la trama
precodificada

    %Las siguientes dos líneas sirven para actualizar el arreglo 'b13'
    b13(1) = []; %Elimina primer elemento del arreglo
    b13(end+1) = initial; %Agrega el resultado de la XOR de b13 al final, hace
esto una vez por ciclo
end
```