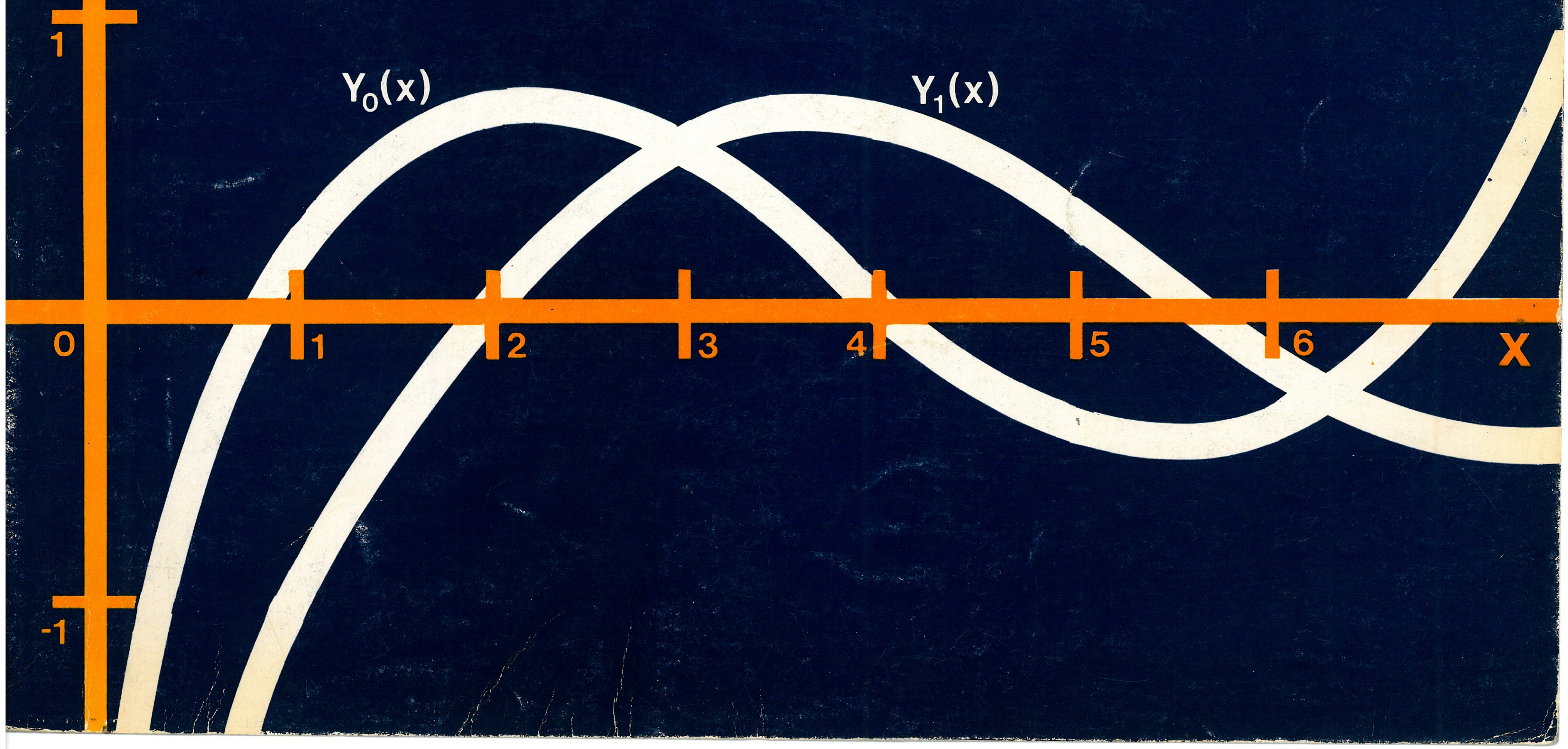
facultad de ingeniería unam

arnulfo andrade
pablo garcía
felipe oregel
erik castañeda

apuntes de cálculo diferencial e integral



APUNTES DE CALCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL

APUNTES DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

1234567890 BDM-82 8013456792

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó en septiembre de 1982
en Bolea de México, S. A.
Calle 3 No. 9-A
Naucalpan de Juárez
C'P. 53370 Edo. de México

Se tiraron 5 050 ejemplares

P R O L O G O

El desarrollo de las matemáticas ha sido fundamental en el progreso científico y tecnológico de los últimos cien años.

Entre las ramas de las matemáticas se encuentra el cálculo diferencial e integral, que involucra numerosas ideas relacionadas con velocidades, razones de variación, optimización, cálculo de áreas, volúmenes y otros conceptos indispensables en ingeniería y en otros campos del conocimiento.

Los orígenes del cálculo se remontan a los griegos, hace más de dos mil años, quienes pretendían determinar el área de una cierta región con un procedimiento que denominaron método de exhaución, que consistía en inscribir una región poligonal en la región dada y repetir el procedimiento tomando polígonos con mayor número de lados cada vez.

En el siglo XVI con la introducción de nuevos símbolos algebraicos, revivió el interés por dicho método y se descubrieron muchos resultados con los trabajos de Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal y Wallis entre otros.

Este método, llamado más tarde cálculo integral, recibió su mayor impulso en el siglo XVII con Isaac Newton (1642 - 1727) y W. Gottfried Leibniz (1646 - 1716) y en el siglo XIX Cauchy y Riemann le dieron una base matemática firme.

El problema geométrico de determinar la recta tangente a una curva en un punto determinado, dio origen al cálculo diferencial, que apareció en el siglo XVII a través de los estudios del matemático francés Pierre Fermat, que estableció ideas rudimentarias relacionadas a la noción de derivada.

El primero en conectar los dos problemas geométricos inherentes al cálculo diferencial y al cálculo integral fue Isaac Barrow (1630 - 1677), aunque quienes comprendieron y promovieron su importancia fueron Newton y Leibniz.

En los planes de estudio de todas las licenciaturas que se imparten en la Facultad de Ingeniería de la U.N.A.M., se incluye este curso de cálculo diferencial e integral.

En estos apuntes se pretende cubrir el programa de la asignatura de cálculo diferencial e integral aprobado por el H. Consejo Técnico de la Facultad el 21 de octubre de 1981.

En los primeros cinco capítulos se tratan los conceptos de función, límite, derivada, así como aplicaciones de los mismos.

En el capítulo VI se presentan la integral definida y la integral indefinida complementadas por los principales teoremas del cálculo integral.

El capítulo VII abarca el estudio de las funciones logarítmica y exponencial, además se hace un breve análisis del teorema de L'Hôpital y de las integrales impropias.

En el capítulo VIII se ven los principales métodos de integración y algunas aplicaciones de la integral definida, terminando con el concepto de ecuaciones diferenciales y su solución para algunos tipos sencillos.

Al final se proporciona una bibliografía, con ayuda de la cual se pueden ampliar y profundizar los temas de esta asignatura.

El mejoramiento de estos apuntes podrá lograrse con ayuda de las críticas y sugerencias de profesores y alumnos, por lo que agradeceremos las aportaciones que se hagan llegar a la coordinación de la materia con el objeto de mejorar futuras ediciones.

Expresamos nuestro reconocimiento a los señores profesores, ingenieros:

ARNULFO ANDRADE DELGADO
PABLO GARCIA Y COLOME
FELIPE OREGEL SANCHEZ
ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

por su valiosa intervención en la elaboración de estos apuntes, así como a las licenciadas:

IRMA HINOJOSA FELIX
MARIA CUAIRAN RUIDIAZ

por su colaboración en la adaptación pedagógica de los mismos.

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS BASICAS

C O N T E N I D O

CAPITULO I FUNCIONES

CAPITULO II LIMITES

CAPITULO III LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES

CAPITULO VI LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CAPITULO VII FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL E INTEGRALES IMPROPIAS

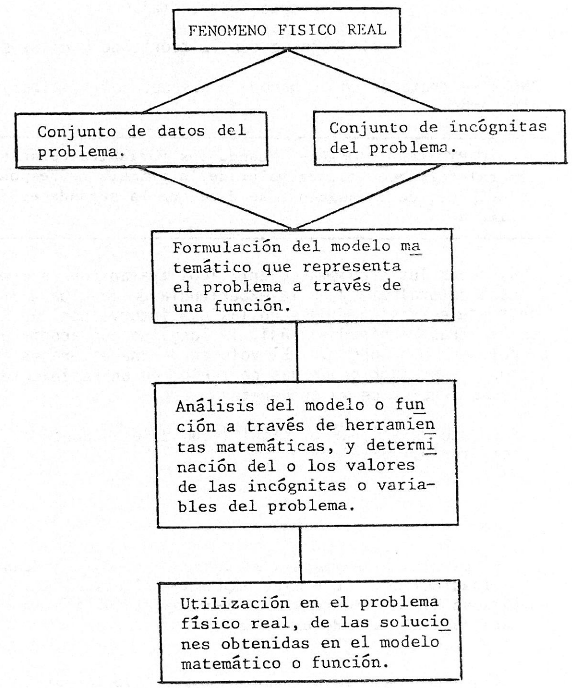
CAPITULO VIII METODOS DE INTEGRACION Y APLICACIONES

CAPITULO I FUNCIONES

INTRODUCCION

El presente capítulo se dedica al estudio del concepto de función, que constituye una base fundamental para el Cálculo Diferencial e Integral. La importancia de este concepto radica en el hecho de que multitud de fenómenos físicos de la vida real pueden ser representados por un modelo matemático donde figuran todas aquellas magnitudes variables que intervienen en el fenómeno. Estos modelos matemáticos son analizados mediante diversas herramientas, como por ejemplo las que proporciona el Cálculo Diferencial e Integral, con el fin de determinar la solución de un problema específico.

El siguiente diagrama ilustra el ordenamiento lógico de un problema físico cualquiera, desde el fenómeno mismo hasta el planteamiento del modelo matemático que lo representa y el análisis y la solución del mismo.



En lo que sigue de este capítulo se definirá fundamentalmente el concepto de función y se estudiarán los diferentes tipos de funciones reales de variable real como base del cálculo diferencial e integral.

I.1 FUNCION REAL DE VARIABLE REAL

I.1.1 CONCEPTO DE FUNCION

El concepto de función en general puede presentarse siguiendo dos diferentes puntos de vista. Aquí se analizará de las dos formas para tener un criterio más amplio de él. A estos dos puntos de vista se les puede identificar con los siguientes nombres:

a) Concepto tradicional.

b) Enfoque con la teoría de conjuntos.

Ahora se tratarán por separado y después se enfatizará la equivalencia entre ambos.

CONCEPTO TRADICIONAL.- Cuando dos variables están relacionadas en tal forma que a cada valor de la primera corresponde un valor y sólo uno de la segunda, se dice que la segunda es función de la primera.

Casi todos los problemas científicos tratan con cantidades y relaciones de esta naturaleza, y en la experiencia de la vida diaria, se presentan constantemente situaciones en las que intervienen magnitudes que dependen de otras magnitudes. Así, la longitud que adopte un resorte depende del peso que soporte. El volumen de una esfera es función de su diámetro. La presión de un gas contenido en un recipiente de volumen constante es función de su temperatura, etc.

Con objeto de aclarar el significado de este concepto se pueden citar los siguientes ejemplos:

Ejemplo I.1

Una partícula se mueve a lo largo de un eje horizontal con una velocidad uniforme de 8 m/s, empezando el movimiento en cero y desplazándose hacia la derecha. Determinar la distancia recorrida por la partícula al cabo de un tiempo dado.

Denotando con S la distancia (metros) de la partícula al origen en cualquier instante, y con t al tiempo (segundos) transcurrido desde que el movimiento comenzó, se tiene que S y t son las variables que intervienen en el problema.

Evidentemente S depende de t. Así, al cabo de 5 segundos, la partícula habrá recorrido 40 metros, es decir que si t = 5 segundos, entonces S = 40 metros. (Véase figura I.1).

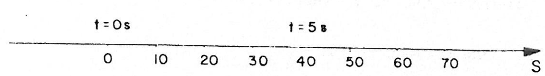


Figura I.1

La tabla siguiente muestra los valores de S que corresponden a algunos valores de t.

t, s	0	5	10	15	20	25	30
S, m	0	40	80	120	160	200	240

Tabla I.1

La fórmula mediante la cual se obtiene el valor de S para cada valor de t es $S = 8t$. Esta expresión describe exactamente cómo el valor de la variable S depende del valor de la variable t. Esta variable, cuyo valor puede fijarse a voluntad recibe el nombre de variable independiente, y la otra, cuyo valor depende del valor que se le asigna a la independiente, se llama variable dependiente.

NOTACION.- Si en una expresión funcional x es la variable independiente y y es la variable dependiente, se acostumbra escribir $y = f(x)$ para representar la función en cuestión y se lee:

y es igual a f de x

Aquí $f(x)$ indica que x es la variable independiente y f representa simbólicamente las operaciones a efectuar con cada valor de x para obtener el correspondiente valor de y.

En principio la letra f, inicial de función, se emplea en la notación indicada en forma típica, pero pueden emplearse distintas letras para discriminar diferentes funciones de la misma variable independiente, como $g(x)$, $P(x)$, $\phi(x)$, etc.

Durante todo el desarrollo de un proceso, un mismo símbolo de funcionalidad indicará una misma ley de dependencia entre las variables dependiente e independiente, es decir, que una misma notación $y = f(x)$ indicará las mismas operaciones por ejecutar con cada valor de x que se tome para calcular el valor de y que le corresponde. Así:

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \text{etc.}$$

Ejemplo I.2

Sea:

$$f(x) = x^2 - 9x + 14$$

Se tendrá:

$$f(0) = (0)^2 - 9(0) + 14 = 14$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 9(-1) + 14 = 24$$

$$f(3) = (3)^2 - 9(3) + 14 = -4$$

$$f(a) = a^2 - 9a + 14$$

$$f(b+1) = (b+1)^2 - 9(b+1) + 14$$

$$= b^2 - 7b + 6$$

Ejemplo I.3

Hacer ver que:

$$f(a) - f(-a) = 0$$

si:

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$$

en efecto:

$$f(a) = a^4 - 3a^2 + 5 \quad y \quad f(-a) = a^4 - 3a^2 + 5$$

luego:

$$f(a) - f(-a) = 0$$

Ejemplo I.4

Dada $g(x) = a^x$

hacer ver que:

$$g(z+1) - g(z) = (a-1)\,g(z)$$

efectivamente:

$$g(z+1) = a^{z+1} \quad y \quad g(z) = a^z$$

luego:

$$g(z+1) - g(z) = a^{z+1} - a^z = a^z\,a - a^z$$

$$= a^z(a-1) = (a-1)\,g(z)$$

Para que una expresión $y = f(x)$ sea función real de variable real es necesario que y sea real para todo valor real de x, y que a cada valor de la variable independiente x corresponda uno y sólo un valor de la variable dependiente y.

Ejemplo I.5

La expresión $y = \pm\sqrt{x}$ no representa una función ya que para cada valor positivo de x existen dos valores para y. Así, si $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$; si $x_2 = 4$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$.

Sin embargo, si específicamente se establece que los valores de la variable dependiente y sean positivos, entonces con $y = +\sqrt{x}$ $(x > 0,\ y > 0)$ se tiene una función. Lo mismo pasaría con la expresión $y = -\sqrt{x}$ $(x > 0,\ y < 0)$.

ENFOQUE CON LA TEORIA DE CONJUNTOS.- Como este enfoque del concepto de función está basado en la teoría de conjuntos, entonces antes de establecerlo, se recordarán algunos conceptos básicos.

Cuando en un conjunto se dispone de un criterio que permite saber qué elemento es anterior y cuál posterior, se dice que el conjunto es ordenado.

Ejemplo I.6

Los siguientes conjuntos son ordenados:

a) El conjunto C de todos los números primos mayores que 2 y menores que 17, considerados en orden ascendente.

$$C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$$

b) El conjunto B de las vocales en el orden usual de enunciación.

$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

Dos conjuntos ordenados son iguales si tienen los mismos elementos y en el mismo orden.

CONJUNTO PRODUCTO.- Sean A y B dos conjuntos. Si se colectan todas las parejas ordenadas (a, b) en donde el primer elemento a pertenece a A y el segundo elemento b pertenece a B, entonces esta colección de parejas ordenadas forma un conjunto que se denota por:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

y que se llama *producto cartesiano de* A y B.

Al producto cartesiano de un conjunto por sí mismo se le denota como:

$$A \times A = A^2; \quad B \times B = B^2$$

Ejemplo I.7

Dados los conjuntos:

$$A = \{0,\ 1,\ 2\},\ B = \{3,\ 4\}\ \text{y}\ C = \{5,\ 6\}$$

calcular:

$$A \times B,\ B \times A,\ B \times C\ \text{y}\ C^2$$

Solución

$$A \times B = \{(0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4)\}$$

$$B \times A = \{(3,\ 0),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 0),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2)\}$$

$$B \times C = \{(3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (4,\ 6)\}$$

$$C \times C = C^2 = \{(5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\}$$

Nota: Como se observa, el producto cartesiano no es conmutativo, es decir $A \times B \neq B \times A$.

Para representar gráficamente un producto cartesiano se sigue como convención tomar como abscisas a los elementos del primer conjunto y como ordenadas a los elementos del segundo conjunto.

Ejemplo I.8

Sean los conjuntos:

$$A = \{x|x \text{ es un entero; } -3 \leq x \leq 3\}$$

$$B = \{y|y \text{ es un entero; } -4 \leq y \leq 4\}$$

representar gráficamente A x B

Solución

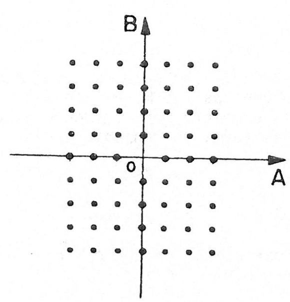


Figura I.2

Ejemplo I.9

Sean los conjuntos:

$$A = \{x|x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{y|y \in \mathbb{R};\ -3 \leq y \leq 3\}$$

representar gráficamente A x B

Solución

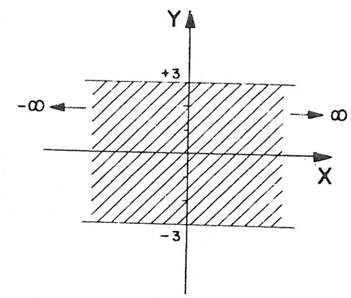


Figura I.3

RELACION BINARIA.- Si se tienen dos conjuntos A y B sus elementos se pueden relacionar de varias formas:

Relación multiforme.- Cuando se relaciona cada elemento del conjunto A con uno o varios elementos del conjunto B. (Véase figura I.4).

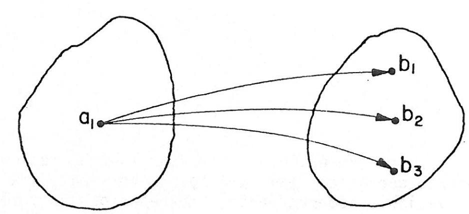


Figura I.4

Relación uniforme o unívoca.- Cuando uno o varios elementos de A se asocian con un solo elemento de B. (Véase figura I.5).

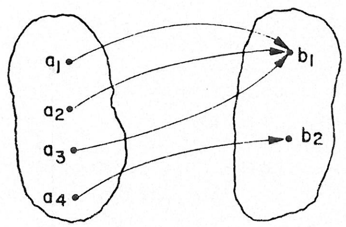


Figura I.5

Relación biunívoca o uno a uno.- Cuando a cada elemento de A se asocia un elemento de B y sólo uno. (Véase figura I.6).

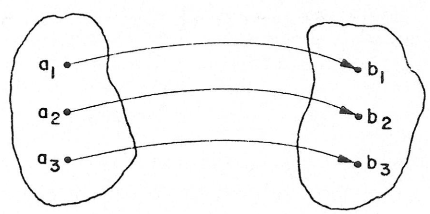


Figura I.6

> **Definición:** Una relación binaria R o simplemente una relación consiste en:
>
> 1. Un conjunto A
> 2. Un conjunto B
> 3. Una proposición P que es falsa o verdadera para toda pareja ordenada (a, b) de A x B

Una relación R de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano A x B.

El *dominio* de la relación R de A x B es el conjunto de las primeras coordenadas de las parejas en R y el *recorrido, rango o imagen* es el conjunto de las segundas coordenadas.

Simbólicamente una relación se puede escribir como sigue:

$$R = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B;\ P(x, y)\}$$

En esta expresión P(x, y) representa la proposición que resulta falsa o verdadera para las parejas ordenadas de A x B.

Ejemplo I.10

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$,

encontrar las siguientes relaciones dando dominio (D) y recorrido (R).

$$R_1 = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B;\ y = x\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B;\ x + y = 3\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B;\ x^2 + y^2 = 5\}$$

El producto cartesiano A x B viene dado por:

$$A \times B = \{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$$

Por lo que las relaciones pedidas, de acuerdo a sus proposiciones, serán:

$R_1 = \{(1,1),(2,2)\}$	$D = \{1,2\}$	$R = \{1,2\}$
$R_2 = \{(1,2),(2,1),(3,0)\}$	$D = \{1,2,3\}$	$R = \{0,1,2\}$
$R_3 = \{(1,2),(2,1)\}$	$D = \{1,2\}$	$R = \{1,2\}$

RELACION IDENTICA.- Es aquella relación definida en los reales cuya proposición asocia valores iguales en las parejas ordenadas, es decir, que equivale a escribir $y = x$.

La representación gráfica de una relación, al igual que para el producto cartesiano, consiste en llevar las parejas ordenadas a un sistema de ejes coordenados con los primeros elementos de las parejas como abscisas y los segundos elementos como ordenadas.

Ejemplo I.11

Sea la relación idéntica $R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; y = x\}$. Su representación gráfica será una recta que pasa por el origen y forma con el eje X un ángulo de 45°.

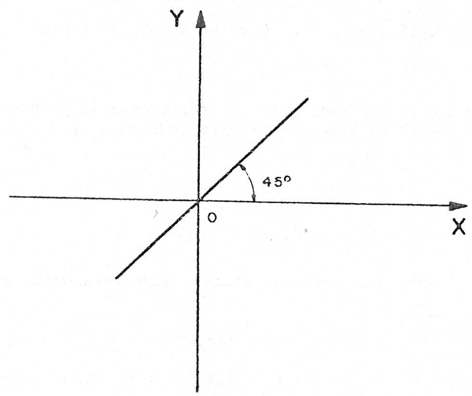


Figura I.7

Ejemplo I.12

Sea la relación definida en los reales

$R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; y < x - 1\}$. Su representación será:

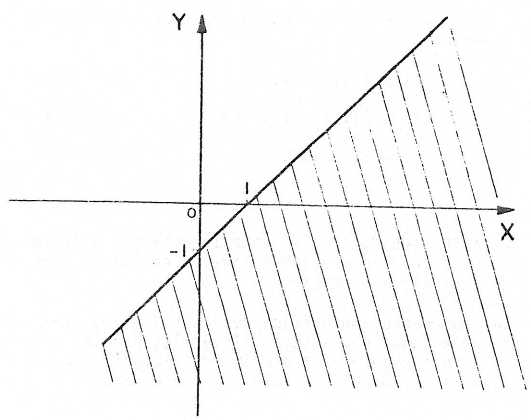


Figura I.8

Ejemplo I.13

Sea la relación definida en los reales

$R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 = 16\}$. Su representación será:

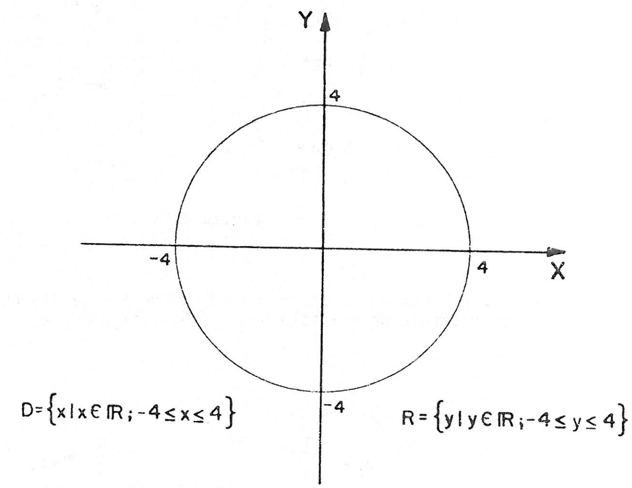


Figura I.9

DEFINICION DE FUNCION: Una función es una terna formada por:

a) Un primer conjunto llamado *dominio de la función*.

b) Un segundo conjunto llamado *codominio de la función*.

c) Una regla de correspondencia que tiene las siguientes propiedades:

1. Por medio de esta regla de correspondencia a todo elemento del dominio de la función se le puede asociar un elemento del codominio.

2. Ningún elemento del dominio ha de quedarse sin su asociado en el codominio.

3. Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

FUNCION REAL DE VARIABLE REAL.- Hasta ahora se ha tratado el concepto de función en forma general, o sea, no se ha hecho restricción alguna sobre la naturaleza de los elementos de las parejas ordenadas que la forman. En el presente curso se tratará con funciones donde los elementos que intervienen pertenecen al conjunto de los números reales. Esto quiere decir que tanto la primera coordenada como la segunda serán números reales.

Teniendo en cuenta que se tratará con el conjunto de los números reales y con subconjuntos de él, conviene presentar algunos aspectos importantes de los sistemas numéricos.

NUMEROS NATURALES.- Son los que sirven para contar: 1, 2, 3, 4, ..., es decir, son los enteros positivos. El conjunto de los números naturales es cerrado respecto a la adición y a la multiplicación, lo que significa que dichas operaciones efectuadas con números naturales dan siempre como resultado números naturales.

Obsérvese que el conjunto de los números naturales no es cerrado respecto a la sustracción, ya que no todas las restas entre números naturales dan como resultado números naturales.

NUMEROS ENTEROS.- El conjunto de los números enteros está formado por todos los enteros positivos, los enteros negativos y el cero ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

Este conjunto es cerrado respecto a las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. Las sumas, restas y productos de números enteros dan como resultado números enteros, pero no todos los cocientes de enteros son enteros, o sea que el conjunto de números enteros no es cerrado respecto a la división.

NUMEROS RACIONALES.- Son todos los números que pueden escribirse en la forma p/q en que p y q son números enteros y $q \neq 0$. Es decir, que el conjunto de los números racionales está formado por todas las fracciones cuyo numerador y denominador son números enteros y el denominador no es cero.

Los números enteros y por consiguiente los números naturales son casos particulares de números racionales, ya que basta dividir cualquiera de ellos entre uno para que queden escritos en la forma p/q.

El conjunto de los números racionales es cerrado respecto a la adición, sustracción, multiplicación y división.

NUMEROS IRRACIONALES.- Son todos aquellos números que no pueden escribirse como el cociente de dos enteros p/q. Estos números como $\sqrt{2}, \pi$, e, etc., pueden ser identificados como los que tienen decimales ilimitados no periódicos.

El conjunto de los números reales está formado por la unión del conjunto de los números racionales y el de los irracionales. El siguiente cuadro sinóptico muestra la clasificación de los números reales.

- NUMEROS REALES
  - Racionales
    - Enteros
      - Naturales
      - Cero
      - Enteros negativos
    - Fraccionarios
  - Irracionales

I.1.2 INTERVALOS

Tal y como se ha considerado el conjunto $\mathbb{R}$, se trata del conjunto de los números reales no restringido. Frecuentemente es necesario considerar solamente un subconjunto de $\mathbb{R}$, es decir, que se tiene que restringir este conjunto, lo cual se lleva a cabo mediante los intervalos, que son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

A continuación se presentan los nueve tipos de intervalos que pueden presentarse, cuatro de ellos finitos y cinco infinitos.

INTERVALOS FINITOS.- Se llama intervalo abierto determinado por los números reales a y b tales que $a < b$, al conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b. Este intervalo se denota (a, b) en donde a y b son los extremos del intervalo.

$$(a, b) = \{x | x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$$

A veces este intervalo se escribe simplemente como: $a < x < b$. Obsérvese que en un intervalo abierto (a, b) los propios extremos a y b no forman parte del mismo. Suele llamarse amplitud del intervalo (a, b) a la diferencia $b - a$.

Geométricamente el intervalo abierto (a, b) queda representado por el conjunto de todos los puntos de un eje numérico x comprendidos entre los puntos que representan a los extremos a y b, como se ve en la figura I.10.

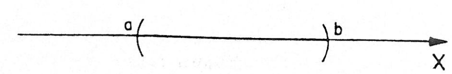


Figura I.10

El intervalo cerrado determinado por los números reales a y b donde $a < b$, es el conjunto de todos los números reales x tales que $a \leq x \leq b$ y se denota como $[a, b]$

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$$

Evidentemente en un intervalo cerrado $[a, b]$, los extremos a y b forman parte del intervalo y la diferencia $b - a$ es la amplitud del intervalo.

La representación geométrica del intervalo cerrado $[a, b]$ está constituida por el conjunto de todos los puntos de un eje numérico X comprendidos entre los puntos a y b, incluyendo a éstos. (Véase figura I.11).

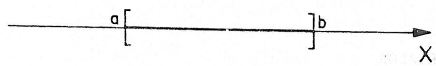


Figura I.11

Se conocen como intervalos semiabiertos los siguientes:

Intervalo semiabierto por la izquierda:

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$$

que geométricamente se representa en la figura I. 12.

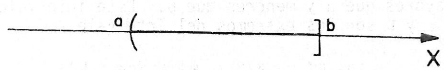


Figura I.12

Intervalo semiabierto por la derecha:

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$$

que geométricamente se representa en la figura I.13.

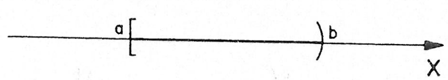


Figura I.13

INTERVALOS INFINITOS.- Los intervalos infinitos son los siguientes, en donde $x \in \mathbb{R}$:

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Las representaciones geométricas de estos intervalos se deducen fácilmente de lo anterior.

Recordando los conceptos de producto cartesiano y de relación como un subconjunto de aquél, se puede decir que las relaciones uniformes o unívocas y las relaciones biunívocas son funciones. Es por ello que se puede afirmar que una funcion f de un conjunto A a un conjunto B, es un subconjunto del conjunto producto $A \times B$.

De lo expuesto en las propiedades de la regla de correspondencia y de lo dicho anteriormente se confirma que toda función es una relación, pero no toda relación es función. Las relaciones multiformes no son funciones.

La representación esquemática de una función es la que se observa en la figura I.14.

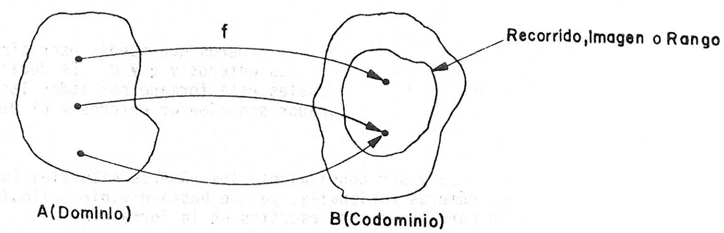


Figura I.14

NOTACION.- Como una función no es más que un tipo especial de relación, puede emplearse la notación de las relaciones para representar funciones.

Entonces una función puede expresarse *por comprensión* así:

$$f = \{(x, y) \mid x \in A;\ y = f(x)\}$$

O bien puede expresarse en algún caso escribiendo todas las parejas ordenadas que la forman y sería, *por extensión*:

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

Por otro lado, si A es el primer conjunto (dominio), B el segundo conjunto (codominio) y f la regla de correspondencia, se denota por:

$$f : A \rightarrow B$$

y se lee f *es una función de* A *en* B o bien f *es una función que mapea* A *en* B.

Entonces, si una terna (A, B, f) es una función, es decir, si f: A→B, para cada elemento a ∈ A tiene que existir uno y solamente un elemento de B que la regla f asocie al elemento de A. Este único elemento de B se denota por f(a), f de a, y se le llama *imagen de* a *en el codominio bajo la función* f. Al conjunto de imágenes se le conoce como *recorrido, rango o imagen de la función.*

Por lo tanto, para que exista una función, ningún elemento de A debe quedarse sin su asociado en B y además debe asociarse con uno y sólo un elemento de B.

Ejemplo I.14

Sea la relación

$$R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R};\ x^2 + y^2 = 4\}$$

Se observa que no se trata de una función ya que al despejar y, el doble signo de la raíz cuadrada implica que a cada elemento del dominio le corresponden dos elementos del codominio, uno positivo y uno negativo. Esto se observa claramente en la figura I.15.

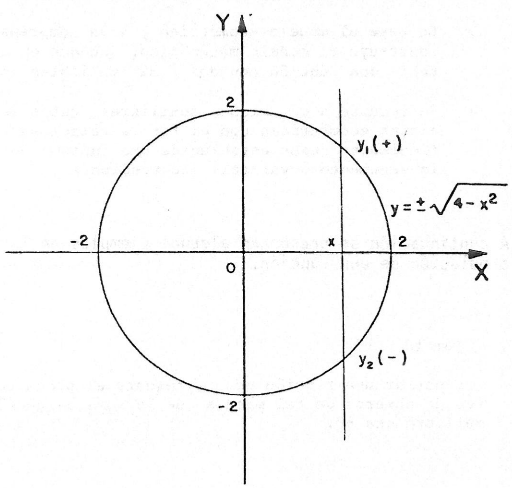


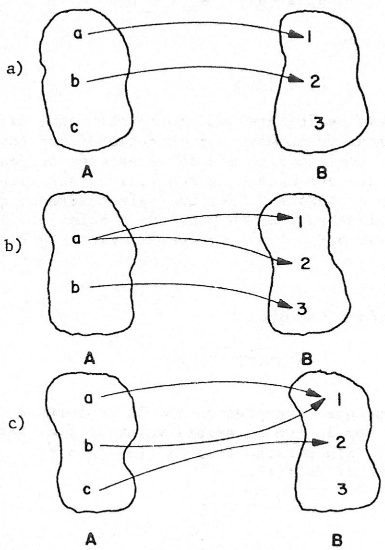
Figura I.15.

De este ejemplo se puede deducir que la condición geométrica para que una relación sea función, es que toda recta paralela al eje Y debe cortar a la gráfica en un solo punto.

Como se ha visto, en la regla de correspondencia que define una función, existe una proposición que relaciona valores de x con valores de y. A x se le conoce como la variable independiente y a y como la variable dependiente, ya que su valor (imagen) depende del valor que se tome de x.

Ejemplo I.15

En la representación de las relaciones siguientes con los diagramas de Venn, pueden verse casos de funciones y de no funciones.



a) No es función, ya que el elemento c no está relacionado con alguno de B.

b) No es función, ya que el elemento a está relacionado con dos elementos de B.

c) Sí es función, porque todo elemento de A está relacionado con uno y sólo uno de B.

Figura I.16

En resumen, una función puede escribirse de la siguiente forma:

$$f = \{(x, f(x)) \mid (\text{proposición})\}$$

en donde f(x) = y es la imagen de x de acuerdo a la proposición o regla de correspondencia que define la función. Además se puede decir que el dominio de una función es el conjunto de todos los valores que toma la variable independiente; y el recorrido, imagen o rango, el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Cabe establecer que a menos que se especifique lo contrario, el codominio será considerado como el conjunto de todos los reales ($\mathbb{R}$).

Para ilustrar los conceptos anteriores se presentan los siguientes ejemplos:

Ejemplo I.16

Sea la función dada por $f(x) = +\sqrt{5-x}$

El dominio (D_f) estará dado por:

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ x \leq 5\}$$

El recorrido (R_f) es el conjunto de todos los números reales no negativos, es decir:

$$R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R};\ y \geq 0\}$$

o bien

$$R_f = [0, \infty)$$

De este ejemplo se infiere una importante convención. Cuando una función se defina únicamente por la regla de correspondencia, se considera como dominio el conjunto de valores reales de la variable independiente que hacen que sea real la variable dependiente. En dicho ejemplo, como se tiene una raíz cuadrada, que será real solamente si el subradical es positivo o nulo, el dominio se obtuvo de considerar $5 - x \geq 0$. Lo cual implica $x \leq 5$.

Ejemplo I.17

Dada la función f tal que:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

puede observarse que la expresión que la representa no está definida para $x = 2$, por lo que no existe valor de $f(x)$ para $x = 2$; de ahí que $2 \notin D_f$. Sin embargo $f(x)$ es real si $x \neq 2$. Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 2$, hay un valor de $f(x)$.

$$f(a) = \frac{a^2 - 4}{a - 2}$$

Por lo tanto, el dominio será $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R};\ x \neq 2\}$

o bien

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

El recorrido está constituido por todos los valores de y que corresponden a los valores de x del dominio.

$$R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R};\ y \neq 4\}$$

o bien

$$R_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

I.1.3 FORMULACION DE FUNCIONES

Las funciones no son más que modelos matemáticos que representan algún fenómeno físico de la vida real. El planteamiento del modelo matemático, es decir, la formulación de la función es el primer paso en la solución de un problema y ante este tipo de situaciones se encontrará en multitud de ocasiones, el estudiante de alguna carrera de ingeniería.

No existen reglas precisas ni un método general para el planteamiento de funciones que representen algún fenómeno. La recomendación en este sentido sería identificar cuáles son los datos, variables e incógnitas del problema en primer lugar, y después proceder a encontrar alguna relación entre los datos e incógnitas del problema a través de símbolos matemáticos (variables dependientes e independientes, representadas mediante letras). Un agrupamiento adecuado de los datos e incógnitas, así como el trazo auxiliar de una gráfica o diagrama son de especial ayuda en la formulación de funciones para resolver un problema determinado.

A continuación se pretende dar una secuencia más formal para formular alguna función, y después se presentan algunos problemas ilustrativos.

1. Se debe tener una total comprensión del problema que se presenta, identificando claramente qué magnitudes son constantes, cuáles las variables y, sobre todo, cuál de estas últimas es la que va a definir la función que se quiere formular.
2. Se procede a trazar un diagrama o modelo geométrico que sea representativo del problema en cuestión.
3. En base al modelo geométrico y a la comprensión del problema se construye el modelo matemático, (aunque en un principio se trate de una función con dos o más variables independientes).
4. Se recurre a ecuaciones auxiliares, datos del problema o condiciones geométricas con el fin de relacionar las variables y que finalmente quede establecida una función en términos de un solo argumento o variable independiente.

A continuación se presentan algunos ejemplos en los cuales se pide la formulación de una función.

Ejemplo I.18

Encontrar una función que represente el producto de todos los pares de números de tal manera que la suma de un número y el triple del otro sea 60.

Solución

Si se representa un número con x y otro con y, el producto se puede escribir como:

$$P = x\,y \qquad \ldots.(a)$$

Pero de acuerdo a las condiciones establecidas:

$$x + 3y = 60 \qquad \ldots.(b)$$

Despejando en (b) y sustituyendo en (a):

$$f(x) = \frac{x\,(60 - x)}{3}$$

Ejemplo I.19

Encontrar una expresión que defina el volumen de un cilindro circular recto, inscrito en un cono circular recto con un radio de 5 m., y una altura de 12 m., en función únicamente del radio del cilindro.

Solución

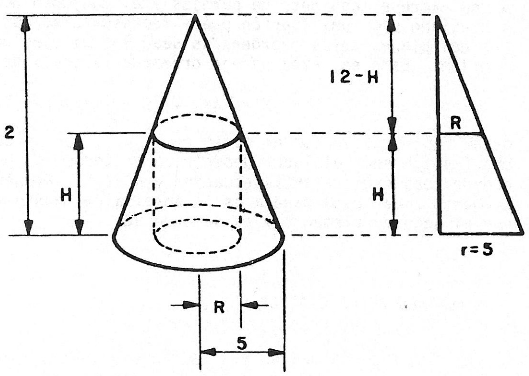


Figura I.17

La siguiente fórmula expresa el volumen del cilindro en términos de R y H:

$$V = \pi R^2 H \qquad \ldots (a)$$

Es necesario establecer una expresión independiente de (a) que relacione a R y H. De la figura I.17, y usando triángulos semejantes:

$$\frac{12 - H}{R} = \frac{12}{5}$$

despejando H:

$$H = \frac{60 - 12R}{5} \qquad \ldots(b)$$

sustituyendo (b) en (a) y desarrollando, se tiene finalmente:

$$V = \frac{\pi}{5}\,(60\,R^2 - 12\,R^3)$$

Ejemplo I.20

En el proyecto de una cafetería se estima que si existen lugares para 40 a 80 personas, la ganancia semanal será de \$ 8.00 por lugar. Sin embargo, si la capacidad de asientos sobrepasa los 80 lugares, la ganancia semanal en cada lugar estará reducida en 4 centavos por el número de lugares excedentes. Encuentre una función que relacione el número de asientos con la ganancia de la semana.

Solución

Si se llama a x el número de lugares y a G la ganancia semanal, se tiene que cuando $40 \leq x \leq 80$ la ganancia por lugar será de 8 y por lo tanto $G = 8x$.

Sin embargo, cuando $x > 80$ la ganancia por lugar equivale a:

$$[8 - 0.04\,(x - 80)]$$

y la ganancia por todos los lugares es:

$$G = x\,[8 - 0.04\,(x - 80)]$$

y desarrollando:

$$G = 11.20x - 0.04x^2$$

Como se puede observar, la función pedida no se puede representar con una sola fórmula para todo su dominio. Por lo que quedará formulada como:

$$G = \begin{cases} 8x & \text{si } 40 \leq x \leq 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 & \text{si } x > 80 \end{cases}$$

Ejemplo I.21

En la figura I.18, el punto A representa una isla que se encuentra a 6 kilómetros del punto B, el cual es el punto más cercano sobre una playa recta. Un almacén está en el punto C a 7 kilómetros de B, sobre la playa. Si un hombre puede remar a razón de 4 km/h y caminar a razón de 5 kilómetros por hora, establezca una expresión que relacione a la posición del punto de desembarco P con el tiempo que tarde en llegar de A a C.

Solución

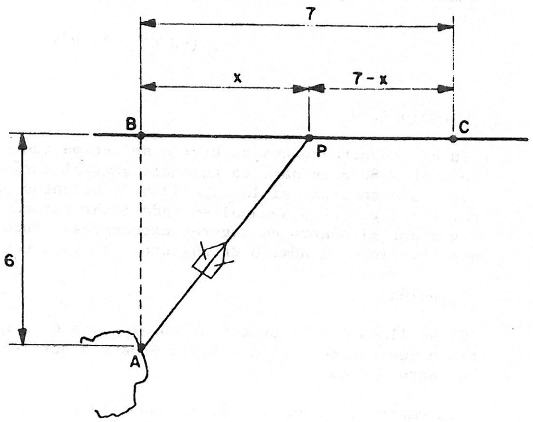


Figura I.18

De acuerdo a la figura, el hombre rema de A a P y camina de P a C.

Sea: x la distancia en kilómetros de B a P.

T el tiempo en horas que le tome al hombre hacer el viaje de A a C.

Entonces T es el tiempo para ir de A a P más el tiempo de P a C. Como el tiempo se obtiene al dividir la distancia entre la velocidad:

$$T = \frac{|\overline{AP}|}{4} + \frac{|\overline{PC}|}{5} \qquad \dots (a)$$

Como $|\overline{AP}|$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo ABP:

$$|\overline{AP}| = \sqrt{x^2 + 36}$$

y además:

$$|\overline{PC}| = 7 - x$$

Sustituyendo en (a) queda finalmente:

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 36}}{4} + \frac{7 - x}{5}$$

I.1.4 REPRESENTACION GRAFICA

En el estudio de los tópicos de las matemáticas es de gran ayuda poder realizar ilustraciones que tengan alguna significación con el tema en cuestión. En el caso de una función, además de un diagrama que ilustre la correspondencia o dependencia entre las variables que intervienen en ella, puede darse una representación geométrica de la misma. Muchas veces la ayuda que proporciona la gráfica de una función es clave para su estudio y para la solución del problema en que interviene.

Dado que una función real de variable real es un conjunto de parejas ordenadas de números reales (x, y), y como existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de parejas y el conjunto de puntos de un plano cartesiano $x\,y$, una función puede representarse por el conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas sean las parejas que constituyen la función. Esto es, cada pareja ordenada (x_1, y_1) de la función:

$$f = \{(x, y)\,|\,y = f(x);\ x \in D_f\}$$

queda representada por el punto $P(x_1, y_1)$, por lo cual, la gráfica de dicha función será el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$. Recuérdese que el primer elemento x de cada pareja es la abscisa del punto que la representa y que el segundo elemento y es su ordenada.

PROPIEDADES DE LA GRAFICA

1. La gráfica de una función es uno de los subconjuntos del producto A x B, del dominio por el codominio.

2. Los puntos que forman la gráfica de la función son todos aquellos puntos del producto A x B que tengan como primera coordenada a un elemento x contenido en A, y como segunda coordenada, al elemento de B que la regla de correspondencia asocia a x.

3. Basta con trazar una perpendicular al conjunto A que pase por "x" y el punto en que corta a la gráfica tendrá a "x" como primera coordenada y como "y" la del punto de la gráfica.

Ejemplo I.22

Sea la función del ejemplo I.16

$$f(x) = +\sqrt{5-x}$$

En seguida se muestra una tabla con algunos valores de x en el dominio de la función y sus correspondientes imágenes f(x).

x	-4	-1	0	1	2	3	4	5
y = f(x)	3	$+\sqrt{6}$	$+\sqrt{5}$	2	$+\sqrt{3}$	$+\sqrt{2}$	1	0

Tabla I.2

En la figura I.19, está representado el conjunto de parejas (x, y) de la tabla I.2.

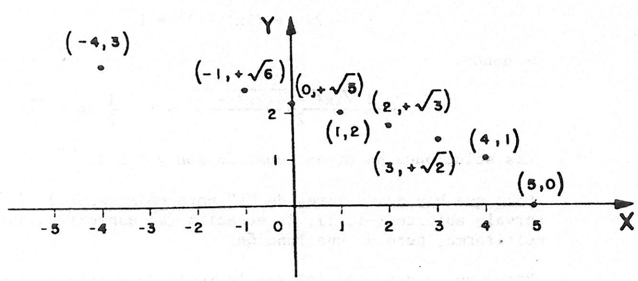


Figura I.19

Trazando una curva por todos los puntos mostrados en la figura I.19, se obtendrá la representación geométrica de la función propuesta, como se ve en la figura I.20.

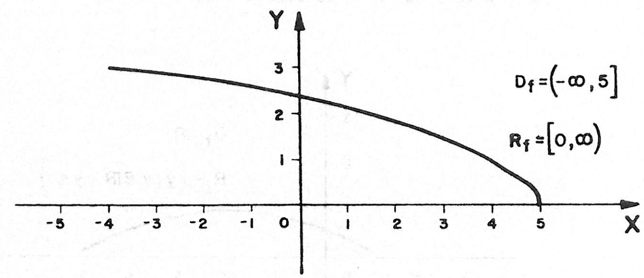


Figura I.20

Ejemplo I.23

Sea la función dada por:

$$y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2+9}$$

Para trazar su gráfica puede transformarse antes la ecuación dada para ver qué tipo de curva representa, dado que es una ecuación de segundo grado en "x" y "y". Así se pueden determinar sus elementos característicos. Esto es:

$$y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2+9} \Longrightarrow 3(y-3) = -2\sqrt{(x-2)^2+9}$$

$$\Longrightarrow 9(y-3)^2 = 4(x-2)^2 + 36 \Longrightarrow 9(y-3)^2 - 4(x-2)^2 = 36$$

$$\Longrightarrow \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$$

Esta ecuación representa una hipérbola con eje focal paralelo al eje Y, centro en c(2, 3), semieje transverso a = 2, semieje conjugado b = 3 y vértices $V_1(2, 1)$ y $V_2(2, 5)$.

Teniendo en cuenta la regla de correspondencia dada:

$$y = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^2+9}$$

la gráfica de la función consiste en la rama inferior de dicha hipérbola como se ve en la figura I.21.

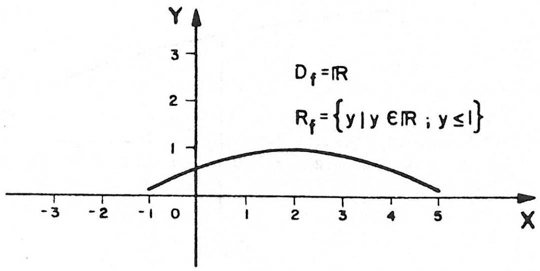


Figura I.21

En ocasiones aun no sabiendo de qué curva se trata se puede determinar su dominio partiendo de una desigualdad y luego proceder al trazo de la gráfica mediante una simple tabulación con los valores del dominio.

I.2 FORMAS IMPLICITA, EXPLICITA Y PARAMETRICA

I.2.1 FUNCIONES EXPLICITAS

Sea la función dada por $y = f(x)$, donde como se sabe $f(x)$ indica cómo calcular el valor de la variable dependiente y directamente en términos de la variable independiente x. Toda función especificada así se llama *función explícita*.

En otras palabras, una función es explícita cuando en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, se tiene despejada la variable dependiente y en términos de la variable independiente x.

Ejemplo I.24

La función $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es una función explícita, dado que la ecuación, que es la regla de correspondencia, permite calcular directamente para cualquier valor "x" del dominio, su imagen correspondiente "y" en el codominio.

En el caso de que en la expresión que define la función, la variable dependiente no se encuentre despejada, se trata de una función implícita, cuyo estudio se verá a continuación.

I.2.2 FUNCIONES IMPLICITAS

Considérese ahora a $f(x, y)$ como representación de una expresión en x, y; en tal forma que $f(x, y) = 0 \ldots (1)$ es una ecuación en x, y, no resuelta para y, es decir que no está despejada y.

Ejemplo I.25

La ecuación $2x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \quad \ldots (a)$
es una ecuación del tipo $f(x, y) = 0 \quad \ldots (1)$
donde $f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1$

En este ejemplo se puede despejar y considerando que se trata de una ecuación de segundo grado en "y".

$$y^2 - 2xy + (2x^2 - 1) = 0$$

de donde:

$$y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 1)}}{2} = x \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - 4x^2}$$

Las soluciones de dicha ecuación son $y = x \pm \sqrt{1 - x^2}$

Dado que hay dos valores de "y" para cada valor de "x" en el intervalo abierto $(-1, 1)$, la ecuación (a) especifica una relación multiforme, pero no una función.

Para que la ecuación (a) sea la regla de correspondencia de una función, basta con precisar el signo que ha de afectar a la raíz. De este modo se tendrán dos funciones:

$$f_1(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$$

$$f_2(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$$

Según lo anterior, una ecuación $f(x, y) = 0$ puede implicar una o más relaciones funcionales. Ante esto es necesario tener cuidado, ya que hay ecuaciones del tipo (1) que no se satisfacen para ningún par de números reales x, y, por lo cual no representan ninguna función real de variable real, como es el caso del siguiente ejemplo.

Ejemplo I.26

Dada la ecuación $x^2 + y^2 + 9 = 0$, obsérvese que no se satisface para ningún par de números reales (x, y).

Esto se ve claramente en la expresión que resulta al despejar "y".

$$y = \pm \sqrt{-(x^2 + 9)}$$

Evidentemente al sustituir en esta expresión a x por cualquier número real queda la raíz cuadrada de un número negativo que no es un número real.

Aquí se considerará que una ecuación del tipo (1) define una relación, misma que si no es una función, puede definirse a partir de ella una función adaptando condiciones adecuadas como en el caso del ejemplo en que:

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 1$$

Una función cuya regla de correspondencia sea una ecuación del tipo (1), se llama función implícita. O sea que una función implícita se caracteriza porque en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, la variable dependiente y no se encuentra despejada.

Ejemplo I.27

En las siguientes expresiones, "y" es función implícita de "x".

a) $x^2 - 3y + 1 = 0$

b) $xy = 1, \quad x \neq 0$

c) $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 1 = 0; \; y > 0$

d) $y = + \sqrt{(x - y)}$

e) $y = x^2(x + y)$

f) $y^3 = x - 2$

g) $y^3 = x^2$

I.2.3 FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA PARAMETRICA

En el siguiente ejemplo se ilustra el significado de la representación paramétrica.

Ejemplo I.28

Dadas las ecuaciones:

$$x = 2t - 2; \qquad y = 4 - t \qquad \ldots \text{(a)}$$

el parámetro t puede eliminarse por igualación, habiéndolo despejado previamente:

$$t = \frac{x + 2}{2}, \quad t = 4 - y; \quad \frac{x + 2}{2} = 4 - y; \quad x + 2y - 6 = 0 \qquad \ldots \text{(b)}$$

(b) es la ecuación de la recta que se ve en la figura I.22.

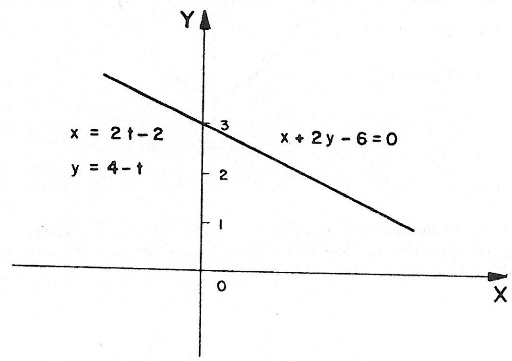


Figura I.22

Obsérvese que para cada valor de t en las ecuaciones (a) se tiene un valor de x y un valor de y, que considerados como pareja ordenada de números reales (x, y), constituyen las coordenadas de un punto P(x, y) de la recta de ecuación (b).

Ejemplo I.29

$x = 2t + 2; \; y = 2t^2 + 4t$ son las ecuaciones paramétricas de la parábola de ecuación, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$, figura I.23.

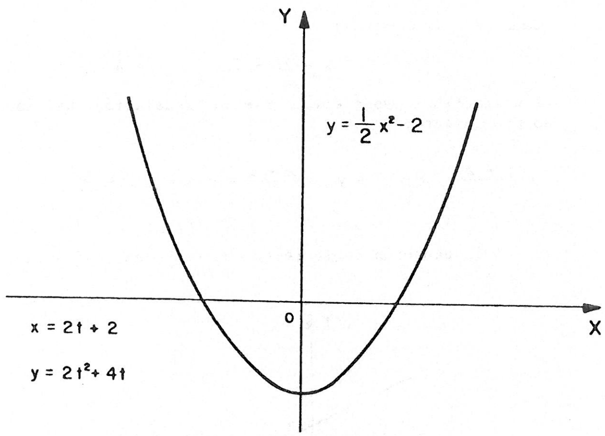


Figura I.23

Ejemplo I.30

Las ecuaciones $x = 2t^2$; $y = \frac{3}{t^2}$, con el parámetro t, son una representación paramétrica de la hipérbola cuya ecuación cartesiana es $xy = 6$, figura I.24.

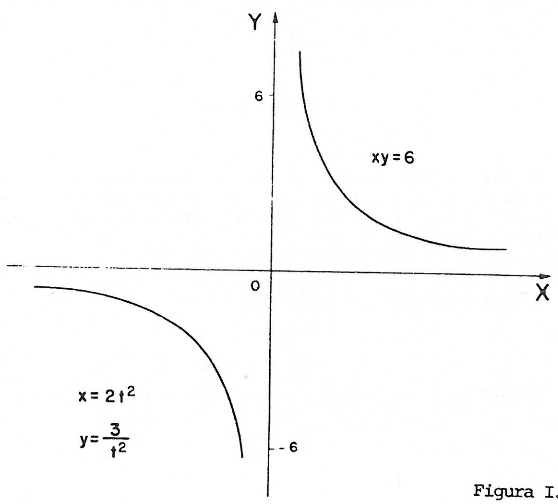


Figura I.24

Una representación paramétrica frecuentemente puede constituir la regla de correspondencia de una función, como es el caso de los ejemplos anteriores, donde las funciones respectivas se pueden escribir:

$$f_1 = \{(x, y) | x = 2t - 2, \ y = 4 - t, \ t \in \mathbb{R}\}$$
$$f_2 = \{(x, y) | x = 2t + 2, y = 2t^2 + 4t, \ t \in \mathbb{R}\}$$
$$f_3 = \{(x, y) | x = 2t^2, \ y = \frac{3}{t^2} \ , \ t \in \mathbb{R} \ \ t \neq 0\}$$

A veces un par de ecuaciones paramétricas representa una relación multiforme que puede descomponerse en más de una función.

Este es el caso de las ecuaciones del siguiente ejemplo.

Ejemplo I.31

Las ecuaciones $x = 3 \cos \theta$; $y = 2 \operatorname{sen} \theta$, en las que θ es el parámetro, corresponden a la elipse de la ecuación cartesiana.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Desde luego estas ecuaciones definen una relación multiforme en el intervalo abierto $-3 < x < 3$, que puede descomponerse en las dos siguientes funciones:

$$f_1 = \{(x, y) | x = 3 \cos \theta, \ y = 2 \operatorname{sen} \theta, \ -3 < x < 3, \ y > 0\}$$
$$f_2 = \{(x, y) | x = 3 \cos \theta, \ y = 2 \operatorname{sen} \theta, \ -3 < x < 3, \ y < 0\}$$

cuyas gráficas se ven en la figura I.25.

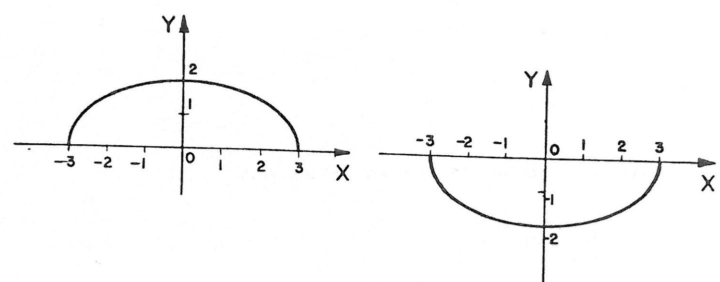


Figura I.25

Una función expresada en forma paramétrica es pues:

$$f = \{(x, y) | x = f(t),\ y = g(t),\ t \in D_f \cap D_g \neq \phi\}$$

Debe tenerse cuidado en identificar las ecuaciones paramétricas que no definan una función. Esto puede suceder si $D_f \cap D_g = \phi$ como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.32

Dadas $x = f(t) = \sqrt{4 - t}$ $\qquad$ $y = g(t) = \sqrt{t - 6}$

donde:

$$D_f = \{t | t \in \mathbb{R},\ t \leq 4\} \quad y \quad D_g = \{t | t \in \mathbb{R},\ t \geq 6\}$$

se ve que:

$$D_f \cap D_g = \phi$$

Lo cual hace que ningún valor de t defina un par de números reales ordenados (x, y). Esto implica que estas ecuaciones no definen una función.

Una aplicación útil de las representaciones paramétricas se presenta en problemas de movimiento curvilíneo, donde comúnmente se considera que (x, y) son las coordenadas cartesianas del punto móvil y el parámetro t es el tiempo.

A las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, suele llamárseles en ese caso ecuaciones del movimiento y a la gráfica correspondiente, trayectoria del movimiento.

Otro empleo interesante de las ecuaciones paramétricas se tiene para simplificar los cálculos al determinar las coordenadas de los puntos de una curva, dada su ecuación, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.33

Para obtener puntos de la curva de ecuación $4y^3 = 27x^2$ puede hacerse $x = 2t^3$, lo cual da $y^3 = 27t^6$, en otra ecuación $y \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$ luego puede simplificarse para tener $y = 3t^2$.

Es evidente, que si se usan las ecuaciones paramétricas $x = 2t^3$, $y = 3t^2$ en lugar de la ecuación $4y^3 = 27x^2$ pueden tabularse con más facilidad los pares (x, y) deseados.

I.2.4 FUNCIONES CONSTANTE E IDENTIDAD

La función constante es aquella en la que todos los valores del dominio se asocian con un único valor c del codominio.

En este caso, su dominio está constituido por el conjunto de los números reales y su recorrido consta únicamente del valor c.

La gráfica de la función constante es una recta paralela al eje de las abscisas, con ordenada c, como se ve en la figura I.26.

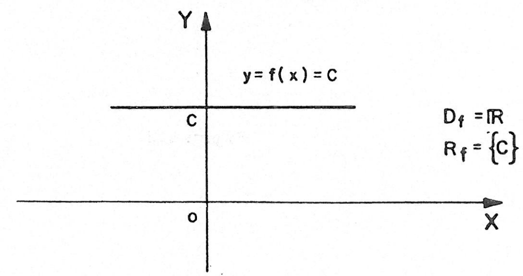


Figura I.26

La función identidad es la que tiene como dominio al conjunto de los números reales y en la que para cada valor de la variable independiente x le corresponde el mismo valor de la variable dependiente y, de modo que su recorrido es también el conjunto de los números reales. Comúnmente la función identidad se representa con I.

Así:

$$I = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}\ ;\ y = x\} = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$$

La gráfica de la función identidad es una recta que pasa por el origen y que tiene un ángulo de inclinación de 45°, como se ve en la figura I.27.

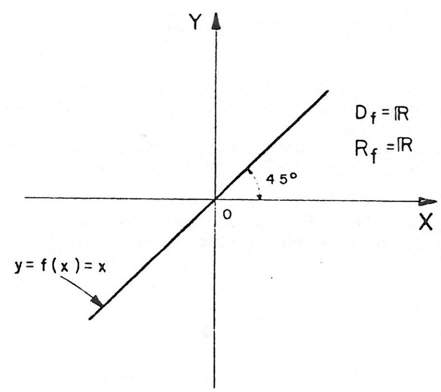


Figura I.27

I.2.5 FUNCIONES DEFINIDAS EN DIFERENTES INTERVALOS

Frecuentemente la regla de correspondencia de una función está especificada por varias ecuaciones, cada una de las cuales establece la asignación de la función en cuanto al vínculo entre las variables x y y en diferentes intervalos del dominio. A continuación se presentan algunos ejemplos para ilustrar esto, así como algunos casos especiales de funciones que tienen mucha utilidad en las matemáticas.

Ejemplo I.34

Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \leq 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x \end{cases}$$

Puede verse que la regla de correspondencia está formada por tres ecuaciones, las cuales establecen el vínculo entre x y y para diferentes partes del dominio. (Véase figura I.28).

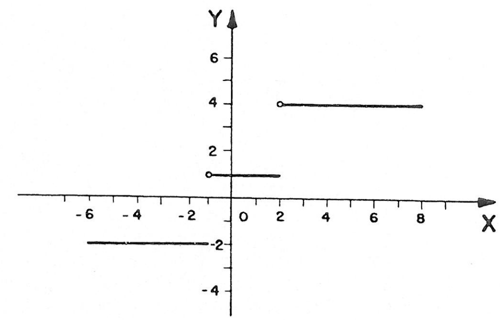


Figura I.28

En esta función se puede ver que el dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el conjunto formado por los valores -2, 1 y 4. A funciones de este tipo se les llama *funciones escalonadas*.

Ejemplo I.35

Sea la función *valor absoluto* dada por $y = |x|$, cuya regla de correspondencia es equivalente a:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales y el recorrido es el conjunto de todos los números reales no negativos. (Véase figura I.29).

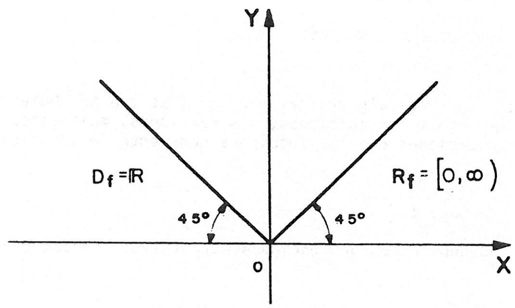


Figura I.29

Ejemplo I.36

Sea la función llamada *parte entera* de "x" y que se denota como: $f(x) = [x]$.

Esta $[x]$ es el entero que satisface la desigualdad: $[x] \leq x < [x] + 1$.

El dominio de esta función son los números reales y el recorrido lo constituye el conjunto de los números enteros. La gráfica de una parte de esta función se presenta a continuación en la figura I.30.

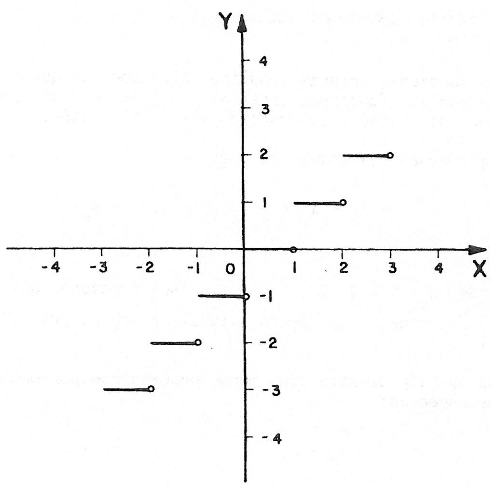


Figura I.30

Ejemplo I.37

Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ -1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

El dominio de esta función está dado por el conjunto de los números reales y el recorrido lo constituyen los valores 1 y -1. Su gráfica se muestra en la figura I.31.

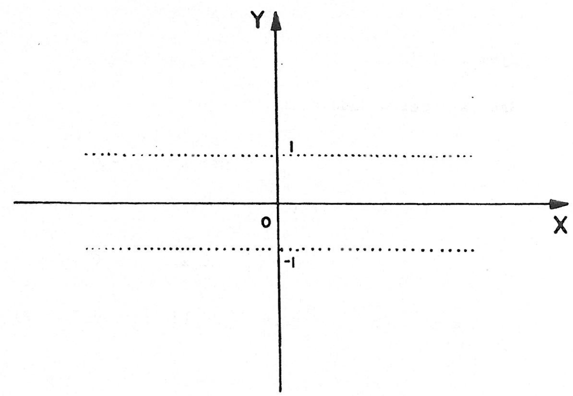


Figura I.31

Ejemplo I.38

Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & -2 \leq x < 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ 4 - \frac{x^2}{2} & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$D_f = \{ x \mid x \in \mathbb{R};\ \ -2 \leq x \leq 4,\ \ x \neq 0 \} = [-2, 4] - \{0\}$

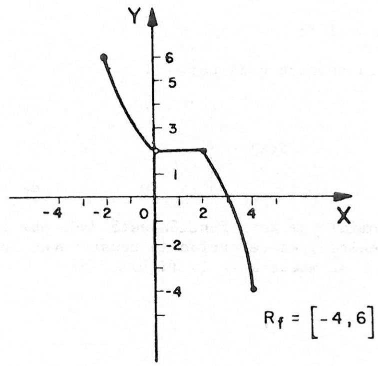


Figura I.32

Ejemplo I.39

Sea la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & -\pi < x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

El dominio será el intervalo de los reales $(-\pi, 2)$ y la gráfica la siguiente:

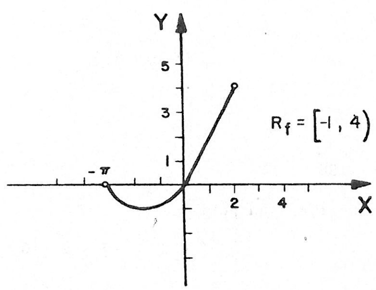


Figura I.33

I.3 ALGUNOS TIPOS DE FUNCIONES

I.3.1 FUNCIONES ALGEBRAICAS

Las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen al realizar un número finito de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones y radicaciones con las funciones constante e identidad.

Ejemplo I.40

Algunos casos de funciones algebraicas podrían ser las siguientes:

a) $f(x) = +\sqrt{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x - 2}{4 + x}$

I.3.2 FUNCIONES ENTERAS O POLINOMIALES

Las funciones enteras o polinomiales son las que se obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad un número finito de operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Una función polinomial es pues:

$$P = a_o + a_1 I + a_2 I^2 + \ldots + a_n I^n$$

donde a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ son funciones constantes, I es la función identidad y el número natural n es el grado de la función polinomial.

Una función de este tipo puede describirse por medio de su regla de correspondencia:

$$P(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y en donde $a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es el grado si $a_n \neq 0$.

Si el grado de una función entera es 1, entonces se llama función lineal. Esta función lineal, en forma general viene dada por:

$$f(x) = mx + b$$

donde m y b son constantes y $m \neq 0$.

Una función entera de grado 2 se llama función cuadrática, y su expresión general es:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Una función entera es cúbica si es de grado 3.

Ejemplo I.41

Las siguientes reglas de correspondencia son de funciones enteras:

a) $f_1(x) = 3x - 2$ (lineal)

b) $f_2(x) = 2x^2 - 5x + 6$ (cuadrática)

c) $f_3(x) = 4 - 6x + 2x^2 - x^3$ (cúbica)

d) $f_4(x) = 5x^6 - 2x^4 + x - 9$ (de sexto grado)

I.3.3 FUNCIONES RACIONALES E IRRACIONALES

El cociente de dos funciones enteras es una función racional. Las funciones racionales son de la forma:

$$r = \frac{P_1}{P_2}$$

en donde P_1 y P_2 son funciones enteras.

Una función racional puede escribirse como:

$$r(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m}$$

en donde $P_2(x) \neq 0$.

Ejemplo I.42

Son funciones racionales las definidas por:

a) $r_1(x) = \dfrac{4x^3 - x + 5}{x^2 + 1}$

b) $r_2(x) = \dfrac{x^3 - 3}{x - 2}$; $x \neq 2$

c) $r_3(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$; $x \neq 3$, $x \neq -3$

Nótese que una función racional se obtiene efectuando, con las funciones constante e identidad, un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Las funciones polinomiales son casos particulares de funciones racionales. En efecto, si en la expresión general que define a la función racional, $m = 0$, la función se reduce a:

$$r(x) = \frac{a_o}{b_o} + \frac{a_1}{b_o}x + \frac{a_2}{b_o}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{b_o}x^n \; ; \; b_o \neq 0$$

que es la regla de correspondencia de una función polinomial.

Son funciones irracionales aquellas en donde además de poder intervenir operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación, interviene la radicación.

Ejemplo I.43

Las siguientes reglas de correspondencia definen funciones irracionales.

a) $f_1(x) = + \sqrt{x^2 + 16}$

b) $f_2(x) = \dfrac{5x - \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{2x-3}} \quad ; \quad x \neq \dfrac{3}{2}$

c) $f_3(x) = 6 + \dfrac{\sqrt{2x}}{3} - \dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{5}} \quad ; \quad x \geq 0$

Una función algebraica simple es una función donde interviene, como ya se vio, un número finito de operaciones algebraicas. En general pueden definirse como soluciones de ecuaciones del tipo:

$$P_o(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + P_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + P_n(x) = 0$$

donde $P_o(x)$, $P_1(x)$, ... , $P_n(x)$ son polinomios en x y n es natural.

Obsérvese que si en esta ecuación $P_o(x) = C$ y $n = 1$, la ecuación se reduce a:

$$Cy + P_1(x) = 0$$

cuya solución es:

$$y = -\frac{P_1(x)}{C}$$

que es la regla de correspondencia de una función entera.

Si en la misma ecuación el grado de $P_o(x)$ es 1 o mayor que 1 y $n = 1$, la ecuación queda como:

$$P_o(x)\, y + P_1(x) = 0$$

y su solución:

$$y = -\frac{P_1(x)}{P_o(x)}$$

que es una función racional.

Por último si en la misma ecuación $n > 1$ se tendrá con la solución de dicha ecuación una función irracional.

I.3.4 FUNCIONES TRASCENDENTES

Después de ver las funciones algebraicas, se puede decir que aquellas que no lo son, se llaman trascendentes. Es decir que son aquellas que en su definición no se expresan por medio de operaciones algebraicas. Estas funciones incluyen las circulares directas, las circulares inversas y las funciones logarítmica y exponencial. En este tema sólo se verán las funciones circulares directas y las otras serán tratadas en temas posteriores.

I.3.5 FUNCIONES PERIODICAS

Una función f se dice que es periódica con período $P \neq 0$, si siempre que x esté en el dominio de f, entonces $x + P$ también está en el dominio de f, y se cumple que:

$$f(x + P) = f(x)$$

Gráficamente se muestra en la figura I.34, una función periódica.

Las funciones periódicas tienen importantes aplicaciones en física e ingeniería, en lo que se refiere a fenómenos que se repiten periódicamente, tales como el movimiento ondulatorio, vibraciones, etc.

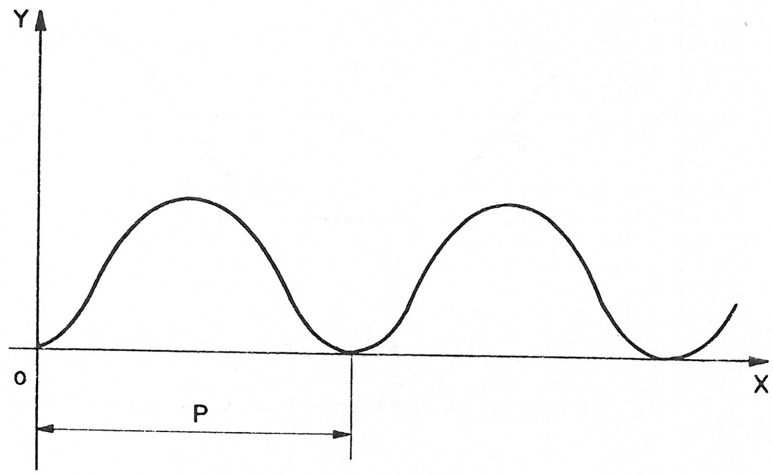


Figura I.34

I.3.6 FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS

Se definirán las funciones circulares directas a partir de un círculo unitario de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Sea θ un número real, que tiene medida en radianes. Trácese un ángulo de θ radianes cuyo primer lado coincide con el semieje positivo "x" y su vértice con el origen (0,0). El segundo lado del ángulo cortará la circunferencia unitaria en el punto P. Si P es el punto de coordenadas (x, y), entonces la función coseno está definida por:

$$\cos \theta = x$$

y la función seno por:

$$\operatorname{sen} \theta = y$$

Véase figura I.35.

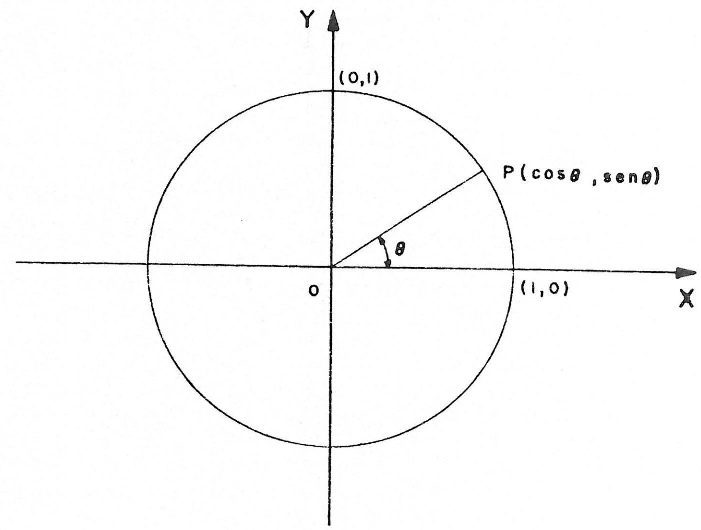


Figura I.35

De la definición anterior se deduce que seno θ y coseno θ están definidas para cualquier valor de θ. Por lo que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales. Se ve que el máximo valor que pueden tomar estas funciones es 1 y el mínimo es -1. Y como las funciones seno y coseno son continuas para cualquier valor de θ, entonces el rango es el conjunto de todos los números reales del intervalo $[-1, 1]$.

Dado que el punto P se encuentra sobre el círculo unitario de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, o bien:

$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$$

resulta que:

$$\operatorname{sen} \theta > 0 \qquad \text{para} \qquad 0 \leq \theta < \pi$$

La definición implica que seno y coseno son periódicas con período 2π teniéndose que:

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$$

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen} \theta$$

La figura I.36 muestra ángulos que tienen una medida negativa de θ en radianes y ángulos correspondientes que tienen una medida positiva de + θ en radianes.

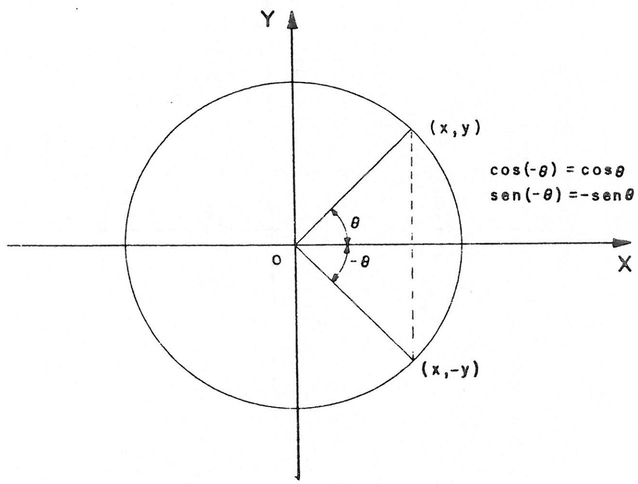


Figura I.36

Geométricamente es evidente que las funciones seno y coseno son continuas en cualquier intervalo de θ.

La función seno es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y la función coseno es decreciente en el intervalo (0, π). (Ver figuras I.37 y I.38).

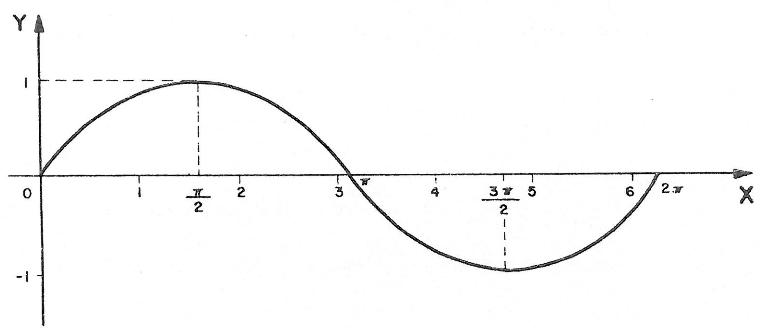


Figura I.37

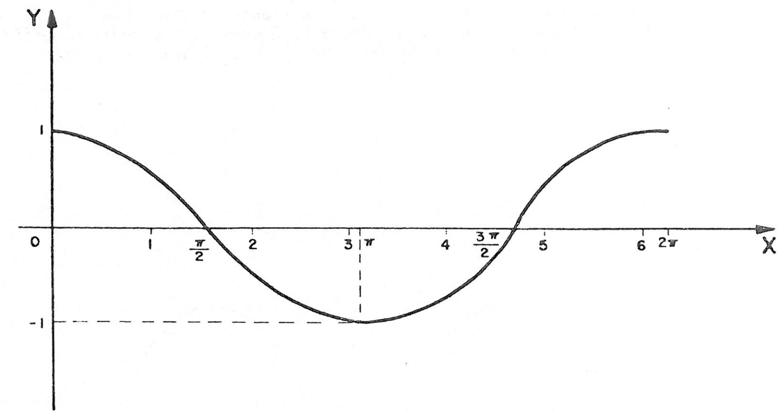


Figura I.38

Por propiedades de las funciones seno y coseno dadas por las ecuaciones:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

se puede obtener la gráfica de las curvas para el intervalo $[-\pi, \pi]$ como se muestra en la figura I.39.

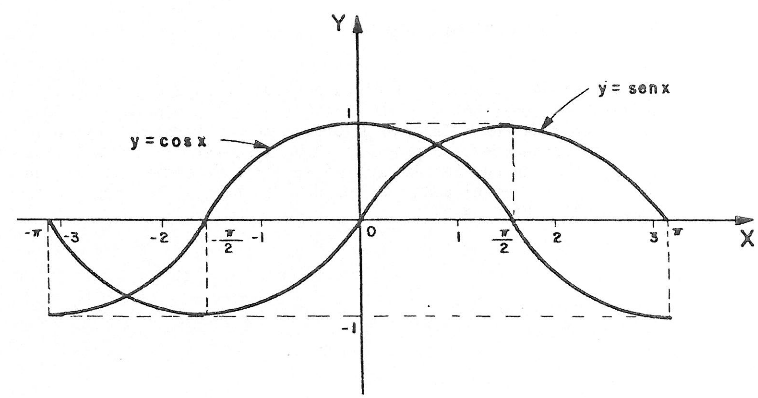


Figura I.39

A partir de las funciones seno y coseno se define la función tangente como:

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

para todo valor real de θ para los cuales $\cos \theta \neq 0$.

La función tangente no está definida cuando $\cos \theta = 0$ y esto sucede cuando θ toma cualquiera de los valores $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, o en general $\frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, etc. De esta manera el dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales excluyendo los valores $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, etc., para los cuales la función tangente no está definida.

La función tangente es una función periódica con período π dado que:

$$\tan (\theta + \pi) = \frac{\text{sen } (\theta + \pi)}{\cos (\theta + \pi)} = \frac{-\text{sen } \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$$

Nótese además que para valores negativos de θ se tiene:

$$\tan (-\theta) = \frac{\text{sen } (-\theta)}{\cos (-\theta)} = \frac{-\text{sen } \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

y en general en todos los intervalos:

$$\left(n\pi - \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{etc.}$$

La función tangente es positiva y creciente para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y los valores de $\tan \theta$ van aumentando cuando θ se aproxima a $\frac{\pi}{2}$ por la izquierda, ya que $\text{sen } \theta = 1$ y $\cos \theta = 0$ y por lo tanto el cociente tiende a crecer.

Lo mismo ocurre cuando $\tan \theta$ toma valores grandes y negativos si θ se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$ por la derecha. La gráfica de $\tan \theta$ se muestra en la figura I.40

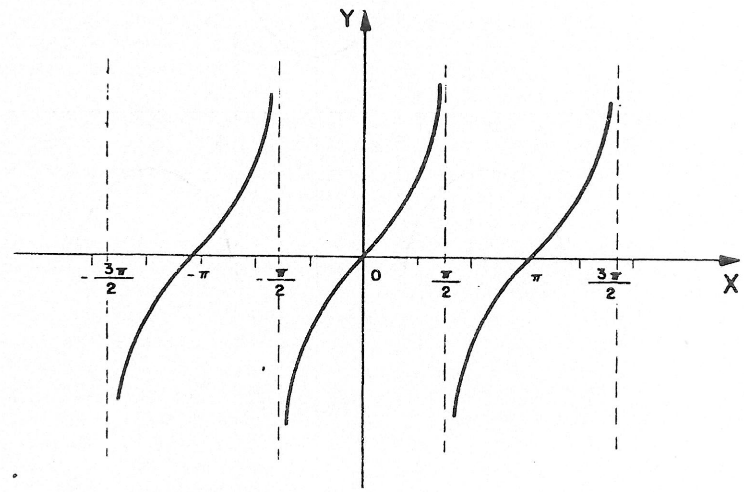


Figura I.40

Además de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, se definen las funciones secante, cosecante y cotangente como sigue:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}\ ; \quad \csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}\ ; \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

Sus gráficas se ven en las figuras I.41, I.42 y I.43 .

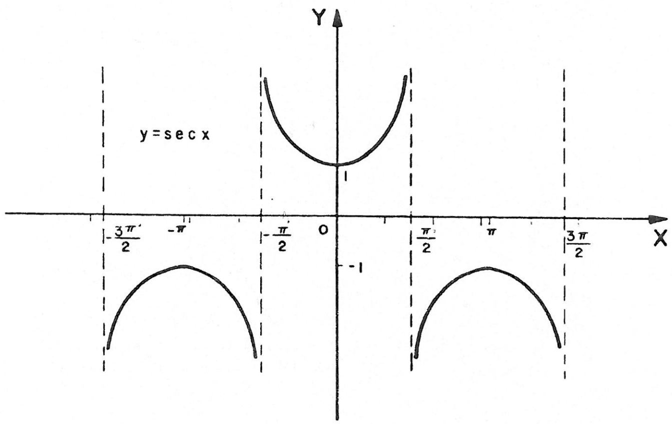


Figura I.41

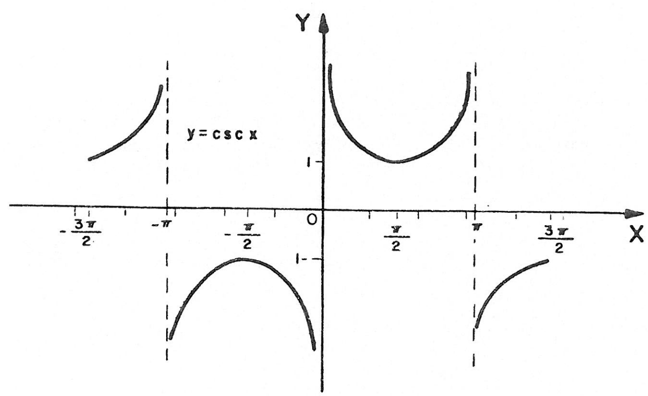


Figura I.42

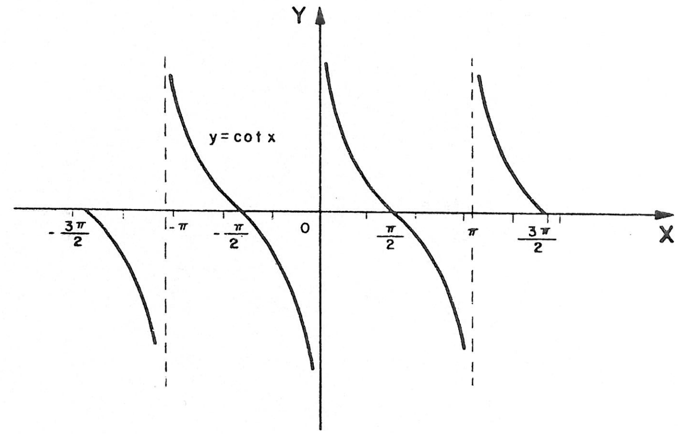


Figura I.43

I.4 OPERACIONES CON FUNCIONES

I.4.1 IGUALDAD

Se dice que dos funciones f y g son iguales si tienen la misma regla de correspondencia y están definidas en el mismo dominio con mapeo en el mismo contradominio.

I.4.2 ADICION

Se define como suma de las funciones f y g a la función denotada con $f + g$ con dominio $D = D_f \cap D_g$ tal que:

$$(f + g)\ (x) = f(x) + g(x) \quad ; \quad x \in D$$

Esto es, el valor de $f + g$ en $x \in D$, es igual a la suma de los valores de f y g en $x \in D$.

Ejemplo I.44

Sean las funciones:

$$f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 11), (5, 13), (6, 17)\}$$

$$g = \{(-2, -5), (0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1)\}$$

evidentemente:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad y \quad D_g = \{-2, 0, 2, 4, 6\}$$

luego:

$$D = D_f \cap D_g = \{2, 4, 6\}$$

entonces:

$$f + g = \{(2, 8), (4, 13), (6, 18)\}$$

Ejemplo I.45

Considérense las funciones dadas por:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad y \quad g(x) = +\sqrt{x - 3}$$

para las que:

$$D_f = \mathbb{R} \quad y \quad D_g = [3, \infty)$$

respectivamente.

Luego:

$$D = D_f \cap D_g = [3, \infty)$$

por lo que:

$$(f + g)(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x - 3} \quad ; x \in D$$

I.4.3 SUSTRACCION

Se llama diferencia de la función f menos la función g y se denota por $f - g$ a la función dada por:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x); \quad x \in D = D_f \cap D_g$$

donde $D = D_f \cap D_g$ es el dominio de la función $f - g$.

Ejemplo I.46

Dadas las funciones del ejemplo I.44 se tendrá que:

$$f - g = \{(2, 2), (4, 9), (6, 16)\}$$

Ejemplo I.47

Si f y g son dos funciones dadas por:

$$f(x) = 3x^2 + x \quad y \quad g(x) = x^2 + \sqrt{x^3}$$

se tiene que:

$$D_f = \mathbb{R} \quad y \quad D_g = [0, \infty)$$

entonces: $D = D_f \cap D_g = [0, \infty)$ y $f - g$ estará dada por:

$$(f - g)(x) = 2x^2 + x - \sqrt{x^3} \quad ; x \in D$$

I.4.4 MULTIPLICACION

El producto de las funciones f y g es la función con dominio $D = D_f \cap D_g$, denotada como fg y dada por:

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) \quad ; \quad x \in D$$

Ejemplo I.48

Tomando las funciones f y g del ejemplo I.44, se tiene que:

$$fg = \{(2, 15), (4, 22), (6, 17)\}$$

Ejemplo I.49

Si f_1 y f_2 son funciones tales que:

$$f_1(x) = +\sqrt{x-1} \quad \text{y} \quad f_2(x) = +\sqrt{9-x^2}$$

entonces:

$$D_{f_1} = [1, \infty) \quad \text{y} \quad D_{f_2} = [-3, 3]$$

de donde:

$$D = D_{f_1} \cap D_{f_2} = [1, 3]$$

finalmente:

$$(fg)(x) = +\sqrt{x-1}\,\sqrt{9-x^2}; \quad x \in D$$

I.4.5 DIVISION

Se llama cociente de la función f entre la función g a la función $\frac{f}{g}$ tal que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para : $x \in D = D_f \cap D_g$

y además: $g(x) \neq 0$

Ejemplo I.50

Para las funciones del ejemplo I.44 se tendrá que:

$$\frac{f}{g} = \left\{\left(2, \frac{5}{3}\right), \left(4, \frac{11}{2}\right), \left(6, 17\right)\right\}$$

Ejemplo I.51

Sean las funciones dadas por:

$$f(x) = +\sqrt{(x+2)^3} \quad \text{y} \quad g(x) = +\sqrt{(x+3)(5-x)}$$

entonces: $D_f = [-2, \infty)$ y $D_g = [-3, 5]$

por lo que: $D_f \cap D_g = [-2, 5]$

pero: $g(-3) = g(5) = 0$

entonces: $D = [-2, 5)$

y la función será:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{+\sqrt{(x+2)^3}}{+\sqrt{(x+3)(5-x)}}$$

De las definiciones de suma y producto de dos funciones se tiene que:

La suma de n funciones reales de variable real: $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ es una función real.

El producto de n funciones reales de variable real: $f_1 f_2 \ldots f_n$ es una función real.

Si se suma n veces una misma función f, se tiene:

$$f + f + \ldots + f = nf \; ; \qquad (n \text{ sumandos})$$

Si se multiplica n veces por sí misma la función f resulta:

$$f \cdot f \cdot \ldots \cdot f = f^n \; ; \qquad (n \text{ factores})$$

Desde luego si m y n son números naturales, entonces:

$$f^n \, f^m = f^{n+m}$$

Definiendo $f^0 = 1$ y $f^{-n} = \frac{1}{f^n}$ en que n es natural, entonces, para todos los números enteros n y m se verificará que:

$$f^n \, f^m = f^{n+m} \qquad \text{sobre} \quad D_{f^n} \cap D_{f^m}$$

I.4.6 COMPOSICION

Dadas las funciones f y g con dominios D_f y D_g respectivamente, se define como la composición de la función f con la función g a la función denotada por $f \circ g$ tal que:

$$[f \circ g](x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ se lee f *composición* g y se trata de la función cuyo dominio está formado por todos los elementos x que pertenecen al dominio g, para los cuales $g(x)$ pertenece al dominio de f.

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g; \; g(x) \in D_f\}$$

Si g tiene dominio en el conjunto A y rango en el conjunto B y f tiene dominio en B y rango en C, entonces $f \circ g$ tendrá su dominio en A y su rango en C. En la figura I.44 se ve un diagrama esquemático de la función f *composición* g.

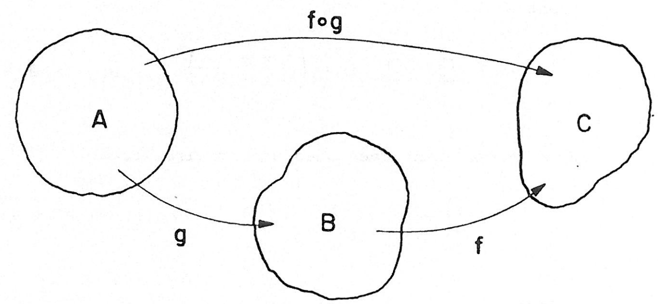


Figura I.44

El concepto de composición de funciones es de gran utilidad en el tratamiento de funciones que se presentan frecuentemente, las que pueden establecerse en base a otras funciones más simples, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo I.52

La función definida por $y = +\sqrt{x^2+1}$ puede comprenderse pensando que $y = +\sqrt{u}$ y $u = x^2 + 1$.

Esto es, si:

$$y = f(u) = +\sqrt{u} \qquad \text{y} \qquad u = g(x) = x^2 + 1$$

entonces:

$$y = f(g(x)) = [f \circ g](x)$$

por lo que:

$$y = f o g = +\sqrt{x^2 + 1} \quad ; \quad D = \mathbb{R}$$

Ejemplo I.53

Si: $y = f(u) = u^4$ y $u = g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

entonces:

$$y = [f \circ g]\,(x) = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^4 \qquad D_{f\,o\,g} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Estas mismas funciones pueden escribirse como:

$$f = \{(u, y) \mid y = u^4\} \qquad y \qquad g = \left\{(x, u) \mid u = \frac{x - 1}{x + 1}\right\}$$

de donde:

$$f o g = \left\{(x, y) \mid y = \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^4\right\} \qquad D_{f\,o\,g} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Ejemplo I.54

Dadas:

$$f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2x + 3\} \quad y \quad g = \{(x, y) \mid y = x^3 - 4\}$$

entonces: $h = f o g$ vendrá dada por:

$$h = \{(x, y) \mid y = (x^3 - 4)^2 - 2(x^3 - 4) + 3\} \; ; \; D_h = \mathbb{R}$$

y la función $j = g o f$ será:

$$j = \{(x, y) \mid y = (x^2 - 2x + 3)^3 - 4\} \; ; \; D_j = \mathbb{R}$$

Ejemplo I.55

Sean las funciones dadas por:

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

$$y \qquad g = \{(0, -3), (3, 2), (4, 1)\}$$

entonces:

$$f o g = \{(3, 4), (4, 3)\}$$

y

$$g o f = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Aquí se ve con claridad que:

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g \;\forall\; g(x) \in D_f\}$$

$$y \qquad D_{gof} = \{x \mid x \in D_f \;\forall\; f(x) \in D_g\}$$

También es notorio aquí que $f o g \neq g o f$. Es decir que generalmente la composición de funciones no es conmutativa.

Si f y g son dos funciones reales de variable real, la gráfica de $f o g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g como se indica a continuación:

Tómese un número $x \in D_g$. Trácese una recta paralela al eje de las ordenadas que pase por el punto $(x, 0)$. Esta recta intersecta a la gráfica de g en el punto $(x, g(x))$. La recta paralela al eje de las abscisas que pasa por el punto $(x, g(x))$ intersecta a la recta $y = x$ en el punto $(g(x), g(x))$. Si $x \in D_{f\,o\,g}$ entonces $g(x) \in D_f$ y la recta paralela al eje de las ordenadas que pasa por el punto $(g(x), g(x))$ intersectará a la gráfica de f en el punto $(g(x), f(g(x)))$. El punto $(x, f(g(x)))$ de $f o g$ correspondiente, es la intersección de la recta paralela al eje de las abscisas que pasa por el punto $(g(x), f(g(x)))$ y la recta parale la al eje de las ordenadas que pasa por el punto (x, 0). (Véase figura I.45).

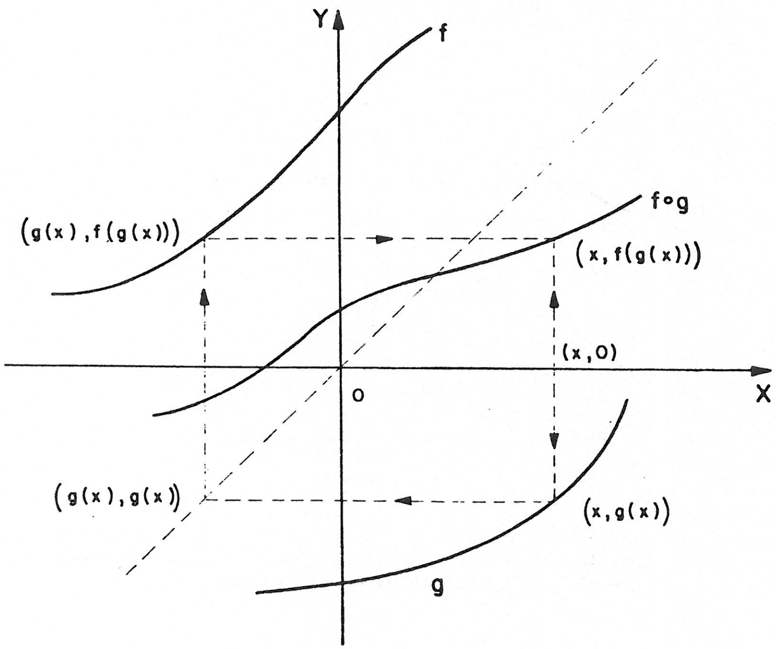


Figura I.45

Ejemplo I.56

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Trazar la gráfica de la función f o g.

Como: $D_f = D_g = \mathbb{R}$

se tiene que: $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$

La regla de correspondencia es $\left[f \circ g \right](x) = (x + 2)^2$ y en la figura I.46 se muestra la gráfica.

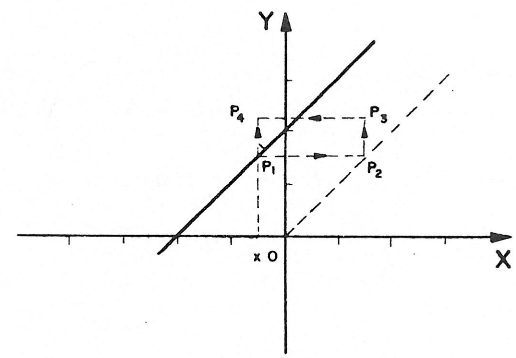


Figura I.46

$P_1(x, g(x))$, $P_2(g(x), g(x))$, $P_3(g(x), f(g(x)))$ y $P_4(x, f(g(x)))$

I.4.7 FUNCION PAR Y FUNCION NON

Definición:	Sea una función f valuada en los reales y definida en uno o más intervalos de "x", y supóngase que siempre que "x" está en el dominio de f, también - x lo está.

Entonces:

1. Se dice que f es par si: $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

2. Se dice que f es non si: $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.

Ejemplo I.57

Si: $f(x) = x^2$

entonces: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Por lo que se trata de una función par.

Ejemplo I.58

Si: $f(x) = x^3$

entonces: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Por lo tanto es una función non.

Ejemplo I.59

En forma general si:

$$f(x) = x^n \qquad n, \text{ entero}$$

Entonces la función f es par si n es par, y es non si n es non. Esto explica los nombres dados a las funciones.

Cabe observar que la gráfica de una función par presenta simetría con respecto al eje de las ordenadas y en cambio la gráfica de una función non es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo I.60

Sea la función $f(x) = \text{sen } x$:

de donde: $f(-x) = \text{sen }(-x) = -\text{sen } x$

y además: $-f(x) = -\text{sen } x$

por lo que $f(-x) = -f(x)$ y la función es non, lo que se comprueba gráficamente, ya que la curva es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo I.61

Sea $f(x) = \cos x$:

de donde: $f(-x) = \cos(-x) = \cos x$

y además: $f(x) = \cos x$

por lo que $f(-x) = f(x)$ y la función es par; gráficamente se ve que es simétrica con respecto al eje Y.

Estos tipos de funciones cumplen estas propiedades:

(Par)(Par) = Par

(Non)(Non) = Par

(Non)(Par) = (Par)(Non) = Non

I.4.8 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES INYECTIVA, SUPRAYECTIVA Y BIYECTIVA

UNO - UNO.- Sea la terna (A, B, f); como ya se vio representa una función de acuerdo a la siguiente notación:

$$\boxed{f : A \longrightarrow B}$$

en donde f representa la regla de correspondencia, A el dominio y B el codominio.

Una función es *uno a uno* o *inyectiva* y se denota 1 - 1 si sucede que a elementos distintos de A les corresponden distintos elementos de B, y recíprocamente, distintos elementos de B están asociados a distintos elementos de A.

Definición: Se dice que $f: A \to B$ es 1 - 1 si para a_1 y $a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ entonces se cumple que: $$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

Ejemplo I.62

La función $f(x) = 2x$ es una función 1 - 1, ya que si se define de los reales a los reales se tendrá que a diferentes elementos del dominio les corresponden diferentes elementos del codominio.

Ejemplo I.63

Sea A el conjunto de mujeres que tienen hijos, B el conjunto de los hijos y f la función que asocia a cada mujer con su hijo primogénito. Se ve claramente que se trata de una función 1 - 1 o inyectiva.

Ejemplo I.64

Sea $f(x) = x^2$ definida de los reales a los reales, es decir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; no se trata de una función 1 - 1 y para demostrarlo basta con dar un contra ejemplo.

Para $-1 \in \mathbb{R}$ y $1 \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$-1 \neq 1 \quad \text{y} \quad f(-1) = f(1)$$

lo que contradice la definición de función inyectiva. Recordando que $f(x) = x^2$ es una parábola con vértice en el origen y que se abre en el sentido positivo del eje Y, se observa que toda recta paralela al eje X corta a la gráfica en dos puntos lo que hace que la función no sea 1 - 1. (Véase la figura I.47).

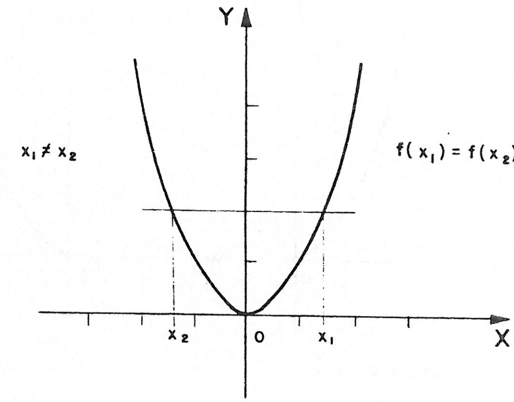


Figura I.47

De aquí sale la siguiente aseveración: Una función es inyectiva si toda recta paralela al eje X corta a la gráfica de la función en un solo punto.

Ejemplo I.65

Si en la función del ejemplo anterior la definición es:

$$f(x) = x^2 \; ; \quad f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

o bien: $\quad f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$

se tendrá entonces una función 1 - 1 y esto se aprecia claramente en la figura I.48 (a) y (b).

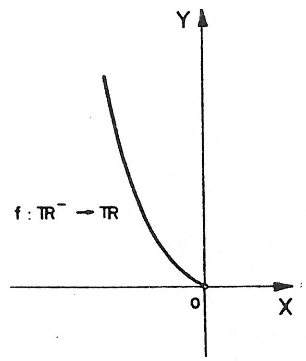


Figura I.48(a)

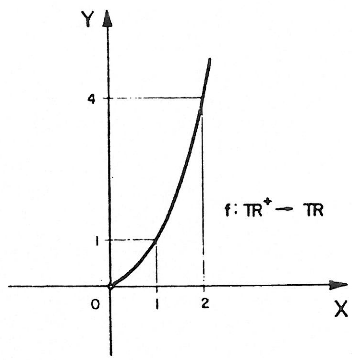
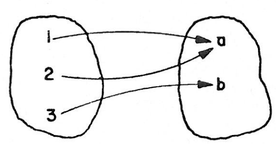


Figura I.48(b)

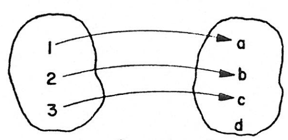
Ejemplo I.66

Una forma de ilustrar lo expresado es a través de los diagramas de Venn. (Ver figura I.49(a) y (b)).



no es 1 - 1

Figura I.49(a)



sí es 1 - 1

Figura I.49(b)

Ejemplo I.67

Demostrar que la función $f(x) = 2x - 1$ con definición $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva.

Demostración:

Se demuestra por reducción al absurdo. Supóngase que la función no es inyectiva, esto es, que dadas $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ se tiene que:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

pero:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow$$

$$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

que es una contradicción, ya que se había supuesto $x_1 \neq x_2$. Por lo tanto la suposición es falsa y $f(x)$ es inyectiva.

SOBRE.- Una función $f : A \to B$ es *sobre* o bien *suprayectiva* si sucede que todo elemento de B es imagen de por lo menos un elemento del dominio A de la función.

Definición: Sea $f: A \to B$.
Si $\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A$ tal que $f(a) = b$, entonces f es sobre.

Ejemplo I.68

Sea $f(x) = 3x + 1$ definida como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En este caso se ve que todo número real es imagen de algún otro número real bajo la función f. Por lo que se trata de una función sobre o suprayectiva.

Ejemplo I.69

Sea $f(x) = x^2$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

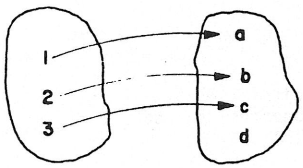
Esta función no es suprayectiva ya que todo real negativo no es imagen de ningún elemento del dominio. Esto se ve claramente en la gráfica de esta parábola; figura I.47.

Es evidente entonces que en ocasiones limitando el codominio en la definición se puede lograr que la función sea suprayectiva. Así en el caso de la parábola, la función $f(x) = x^2$ sería sobre si su definición fuera:

$$f(x) = x^2 \quad ; \quad f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$$

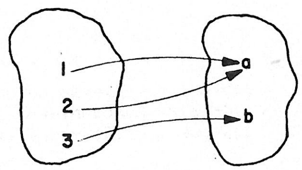
Ejemplo I.70

Aquí se presentan dos casos utilizando diagramas de Venn. Figura I.50(a) y (b).



no es sobre

Figura I.50(a)



sí es sobre

Figura I.50(b)

Ejemplo I.71

Demostrar que la función $f(x) = 2x$ con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es suprayectiva.

Demostración:

Para todo valor del codominio, es decir, $\forall\, y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y}{2}$ tal que:

$$f(x) = 2 \ \frac{y}{2} = y$$

por lo que se trata de una función suprayectiva.

BIYECTIVA.- Si una función cumple con ser inyectiva y suprayectiva se dice entonces que se trata de una función biyectiva y la regla de correspondencia es biunívoca.

Ejemplo I.72

La función $f(x) = x^2$ definida en $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es una función inyectiva (para ello se limita el dominio) y suprayectiva (para ello se limita el codominio). Por lo tanto se trata de una función biyectiva.

Hay funciones que son:

a) Ni 1 - 1, ni sobre.

b) 1 - 1, pero no sobre.

c) No 1 - 1, pero sí sobre.

d) 1 - 1 y sobre (biyectivas).

Ejemplo I.73

Sean: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

tales que: $f(a) = 1$; $f(b) = 1$; $f(c) = 2$

$f: A \to B$ sí es función, pero no es 1 - 1 ni sobre. Con diagramas de Venn quedará como se ve en la figura I.51.

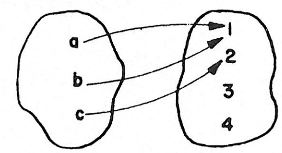


Figura I.51

Ejemplo I.74

Sean: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

tales que: $g(a) = 3$; $g(b) = 4$; $g(c) = 2$

$g: A \to B$ es una función 1 - 1, pero no sobre. Con diagramas de Venn quedará como se ve en la figura I.52.

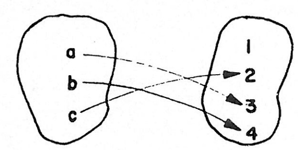


Figura I.52

Ejemplo I.75

Sean: $A = \{a, b, c, d, \}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

tales que: $f(a) = 1$; $f(b) = 1$; $f(c) = 2$; $f(d) = 3$

$f: A \to B$ es una función sobre, pero no 1 - 1. Con diagramas de Venn quedará según se ve en la figura I.53.

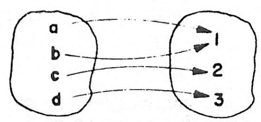


Figura I.53

Ejemplo I.76

Sean: $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

tales que: $f(a) = 3$; $f(b) = 1$; $f(c) = 2$

$f: A \to B$ es una función 1 - 1 y sobre por lo que se trata de una función biyectiva. Con diagramas de Venn quedará como en la figura I.54.

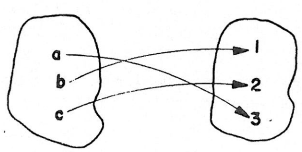


Figura I.54

I.4.9 FUNCION INVERSA

Si f es una función inyectiva, entonces la inversa de f es la función f^{-1} definida por la siguiente condición:

$$(x, y) \in f^{-1} \text{ si y sólo si } (y, x) \in f$$

Esto es, la inversa de una función inyectiva f es la función f^{-1} obtenida al intercambiar las componentes de cada una de las parejas ordenadas que constituyen a la función f.

Debe aclararse que en este concepto, en la notación f^{-1}, el índice -1 no tiene el significado dado en álgebra como exponente.

Ejemplo I.77

Sea:

$$f = \{(0,1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$$

Evidentemente f es una función inyectiva, dado que no se repite el segundo elemento en dos parejas distintas.

La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \{(1, 0), (3, 1), (5, 2), (7, 3)\}$$

De la definición de función inversa se deduce con facilidad que si f^{-1} es la inversa de f, el dominio de f es el recorrido de f^{-1} y el recorrido de f es el dominio de f^{-1}

Es importante destacar como condición necesaria para que una función f tenga función inversa f^{-1} el ser inyectiva o uno a uno.

En efecto si una función no es uno a uno, es decir, si una función F es una relación unívoca o uniforme, se presentarán parejas distintas $(x, y) \in F$ con el mismo segundo elemento y, mismas que al intercambiar sus elementos darán lugar a parejas distintas ahora con el mismo primer elemento. Estas últimas parejas no pueden pertenecer a una función F^{-1}

Ejemplo I.78

Sea la función f dada por $f(x) = 3x - 3$ y cuyo dominio es $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$.

Se trata de obtener la función inversa de f si ésta es inyectiva; hallar dominio y recorrido de f^{-1} y las gráficas de ambas funciones trazadas en un mismo sistema de referencia.

Se puede ver claramente que f es inyectiva. El recorrido de f es:

$$R_f = \{ 3, 6, 9, 12 \}$$

Describiendo f por extensión se tiene:

$$f = \{(2, 3), (3, 6), (4, 9), (5, 12)\}$$

luego:

$$f^{-1} = \{(3, 2), (6, 3), (9, 4), (12, 5)\}$$

El dominio de f^{-1} es $D_{f^{-1}} = \{ 3, 6, 9, 12 \} = R_f$ y el recorrido de f^{-1} es $R_{f^{-1}} = \{ 2, 3, 4, 5, \} = D_f$.

Las gráficas de f y f^{-1} se ven en la figura I.55.

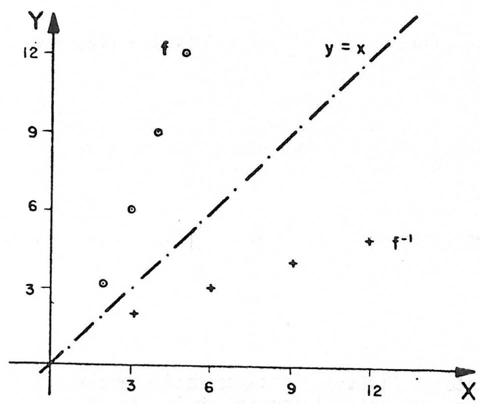


Figura I.55

Puede observarse en la figura anterior que las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad I o sea la recta $y = x$. Esto se confirmará más adelante.

Dada una función $f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in D_f\}$ si es inyectiva, su inversa f^{-1} puede obtenerse intercambiando los papeles que desempeñan la variable independiente y la variable dependiente.

Esto es:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = f(y) \ ; \quad y \in D_f = R_{f^{-1}}\}$$

Nótese cómo en esta última expresión, la ecuación $x = f(y)$ establece que y es función implícita de x.

Ejemplo I.79

Sea la función:

$$f = \{(x, y) \mid y = 2x + 3 \ ; \quad x \in [-2, 2]\}$$

Se trata de investigar si f es inyectiva, y en caso afirmativo, hallar su función inversa, trazar las gráficas de ambas funciones y observar que éstas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

En efecto $y = 2x + 3$ es la regla de correspondencia de una función uno a uno, ya que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y.

Esto también puede constatarse viendo que se trata de una función que solamente crece dado que si $x_2 > x_1$ entonces $y_2 > y_1$.

Así que f tiene como función inversa:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = 2y + 3 \ ; \quad y \in [-2, 2]\}$$

puede escribirse:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = \frac{x - 3}{2}, \quad x \in [-1, 7]\}$$

y

$$D_f = R_{f^{-1}} = [-2, 2] \quad \text{y} \quad R_f = D_{f^{-1}} = [-1, 7]$$

Las gráficas de $y = 2x + 3$, $x \in [-2, 2]$ y de $y = \frac{x - 3}{2}$; $x \in [-1, 7]$ se ven en la figura I.56, donde es obvia la simetría de ellas respecto a la recta $y = x$.

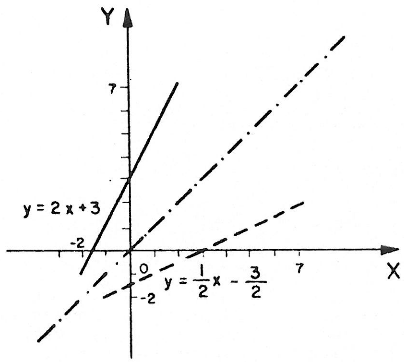


Figura I.56

Una interesante propiedad de las funciones inversas se da en el siguiente teorema:

> TEOREMA I.1
>
> Hipótesis:
>
> La función f es inyectiva y su función inversa es f^{-1}.
>
> Tesis:
>
> Se tendrá:
>
> 1. $f \circ f^{-1} = I$ donde el dominio de I es el recorrido de f, $D_I = R_f = D_{f^{-1}}$
>
> 2. $f^{-1} \circ f = I$ donde el dominio de I es el dominio de f, $D_I = D_f = R_{f^{-1}}$

Demostración:

1. Sea: $a \in R_f$

luego: $a \in D_{f^{-1}}$

entonces: $f^{-1}(a) = b$

donde: $(a, b) \in f^{-1}$

lo que implica: $(b, a) \in f$

esto es: $f(b) = a$

por lo tanto como: $a \in R_f$

se tiene: $[f \circ f^{-1}](a) = f(b) = a$

y si: $x \in R_f$

entonces: $[f \circ f^{-1}](x) = x : \quad x \in D_{f^{-1}}$

Intentando ilustrar la demostración anterior de la parte (1) del teorema, se presenta el esquema de la figura I.57.

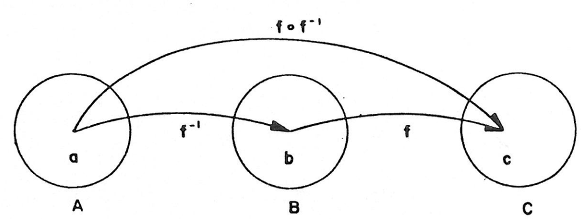


Figura I.57

2. Sea: $a \in D_f$

entonces: $f(a) = b$

donde: $(a, b) \in f$

luego: $(b, a) \in f^{-1}$

o sea que: $f^{-1}(b) = a$

por lo tanto si: $a \in D_f$

entonces: $[f^{-1} \circ f](a) = f(b) = a$

y si: $x \in D_f$

se tendrá: $[f^{-1} \circ f](x) = x : x \in R_{f^{-1}}$

Ejemplo I.80

Aplicar el teorema anterior a las funciones del ejemplo I.79.

Las reglas de correspondencia son:

$$f(x) = 2x + 3$$

$$D_f = [-2, 2]$$

$$R_f = [-1, 7]$$

y

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$D_{f^{-1}} = [-1, 7]$$

$$R_{f^{-1}} = [-2, 2]$$

Se tiene:

$$[f \circ f^{-1}](x) = f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) + 3 = x$$

para

$x \in [-1, 7]$

$$[f^{-1} \circ f](x) = f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}(2x + 3) - \frac{3}{2} = x$$

para $x \in [-2, 2]$

Estas conclusiones pueden verificarse gráficamente en la figura I.56 interpretando la composición de las funciones como se vio en el inciso I.4.6.

Ejemplo I.81

Sea la función:

$$f = \{(x, y) \mid y = +\sqrt{x - 2} \quad x \in [2, 6)\}$$

Hacer ver que es inyectiva, hallar su función inversa, trazar las gráficas de ambas funciones. Verificar que $f(f^{-1}(x)) = x$ para $x \in R_f$; que $f^{-1}(f(x)) = x$ para $x \in D_f$ como se visualiza en las gráficas.

A cada valor de x en el intervalo $[2, 6)$ corresponde un solo valor de "y", así que f es una función inyectiva y por lo tanto tiene función inversa.

El recorrido de f es $R_f = [0, 2)$ ya que $f(2) = 0$ y $f(6) = 2$.

La función inversa de f es:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid x = +\sqrt{y - 2},\ \ y \in [2, 6)\}$$

o bien:

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2;\ x \in [0, 2)\},\ D_{f^{-1}} = [0, 2)$$

$$R_{f^{-1}} = [2, 6)$$

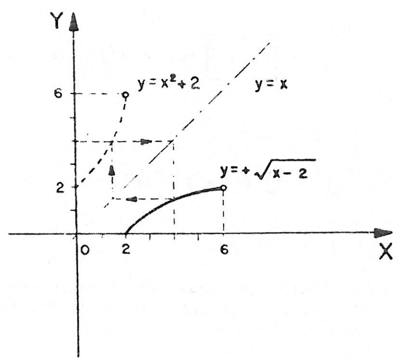


Figura I.58

$$f(f^{-1}(x)) = +\sqrt{(x^2 + 2) - 2} = +\sqrt{x^2} = x \quad \text{para} \quad x \in [0, 2)$$

$$f^{-1}(f(x)) = (+\sqrt{x - 2}\,)^2 + 2 = x - 2 + 2 = x \quad \text{para} \quad x \in [2, 6)$$

Ejemplo I.82

Si f es la función dada por $f(x) = 2 + 2x - x^2$

Siendo $D_f = [-1, 3]$, trazar su gráfica y si no es inyectiva, descomponer su dominio de modo que resulte inyectiva en cada intervalo de la descomposición del dominio. Hallar la función inversa correspondiente a cada parte inyectiva de la función dada y trazar la gráfica de la inversa.

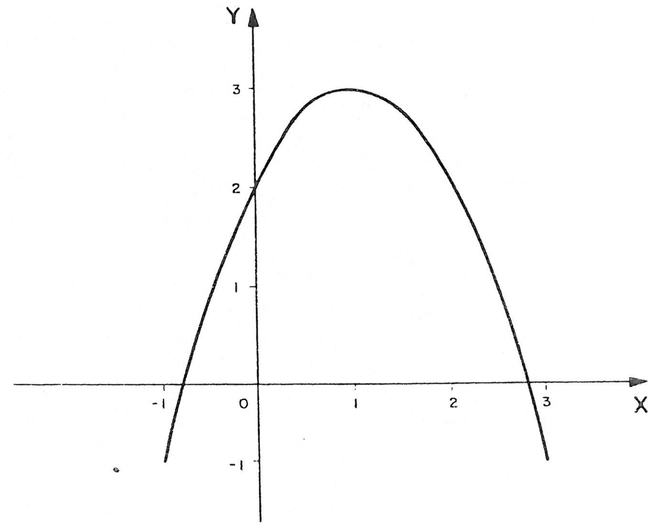


Figura I.59

Reduciendo la ecuación $y = 2 + 2x - x^2$ a la forma ordinaria de la ecuación de la parábola se tiene:

$$y = -(x^2 - 2x + 1) + 2 + 1$$

$$(x - 1)^2 = -(y - 3)$$

La gráfica de la función es el arco de la parábola de vértice $V(1, 3)$ y parámetro $p = -\frac{1}{4}$ comprendido entre los puntos $(-1, -1)$ y $(3, -1)$. (Véase figura I.59).

Evidentemente la función no es uno a uno en el intervalo $[-1, 3]$. Sin embargo, si dicho intervalo se descompone en los intervalos $[-1, 1]$ y $(1, 3]$, la función en estos intervalos es creciente y decreciente respectivamente por lo cual, considerada separadamente en $[-1, 1]$ y $(1, 3]$ resulta uno a uno.

La función inversa correspondiente a f en cada intervalo donde f es inyectiva, tiene como regla de correspondencia:
$x = 2 + 2y - y^2$ de donde despejando y:

$$(y-1)^2 = 3 - x \; ; \quad y - 1 = \sqrt{3-x} \; ; \quad y = 1 \pm \sqrt{3-x}$$

De aquí se ve que la función inversa de f en $[-1, 1]$ es:

$$f_1^{-1}(x) = 1 - \sqrt{3-x} \quad ; \quad x \in [-1, 3]$$

y la función inversa de f en $(1, 3]$ es:

$$f_2^{-1}(x) = 1 + \sqrt{3-x} \quad ; \quad x \in [-1, 3)$$

Las gráficas para ambas partes y sus inversas se ven las figuras I.60 y I.61.

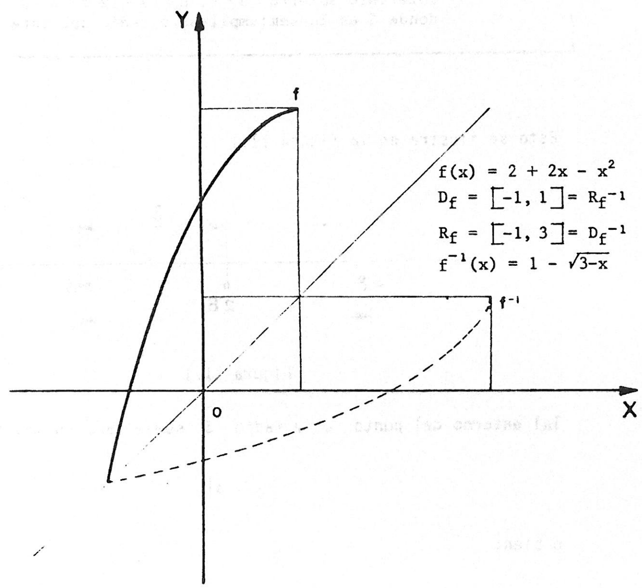


Figura I.60

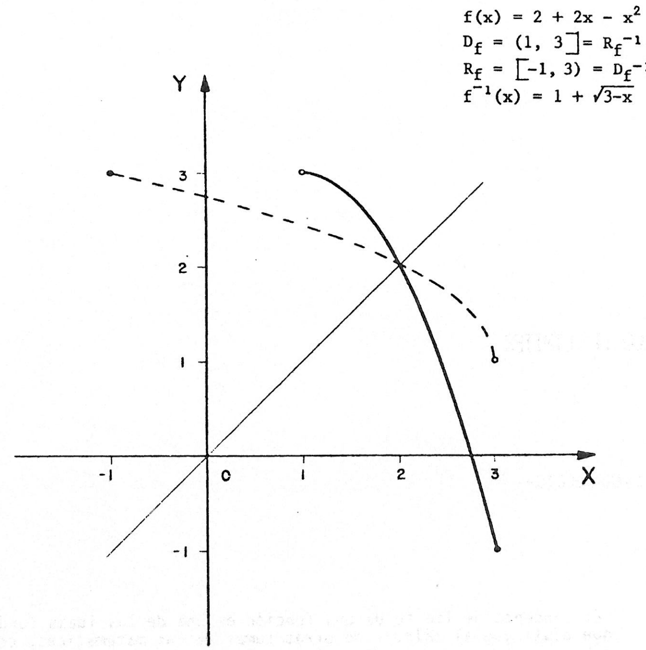


Figura I.61

CAPITULO II LIMITES

INTRODUCCION

El concepto de límite de una función es una de las ideas fundamentales que distingue al cálculo de otras ramas de las matemáticas, como el álgebra o la geometría. El estudiante debe estar consciente que la noción de límite no es fácilmente entendible, por lo que se hace necesario estudiar su definición varias veces y con varios enfoques, antes de que su significado resulte claro. Sin embargo es fácil desarrollar una idea intuitiva del límite, por lo que al principio la discusión no será tan rigurosa. Más adelante se verá la descripción matemática precisa del límite y después se tratarán conceptos y teoremas pertenecientes al estudio de límites y continuidad de funciones.

Teniendo presente lo visto en el tema anterior, se hace notar que en el cálculo y sus aplicaciones con frecuencia interesan los valores $f(x)$ de una cierta función f cuando x está muy cercana a un número "a", pero no necesariamente igual a "a". En muchas ocasiones el número "a" no se encuentra en el dominio de f, es decir que $f(a)$ no está definida. Entonces cabe hacer la siguiente pregunta: ¿Así como x se va acercando más y más a "a" (pero $x \neq a$), de la misma manera se irá acercando $f(x)$ a algún valor L? Si la respuesta es afirmativa, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a "a", es igual a L y se denota como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Antes de darle rigor a esta idea intuitiva del límite, es necesario entender qué es un entorno y cómo se interpreta el límite de una variable, aspectos que se tratarán a continuación.

II.1 DEFINICION DE LIMITE

II.1.1 ENTORNOS

Definición: Se llama entorno o vecindad de un punto "a" en $\mathbb{R}$, al intervalo abierto $(a - \delta,\ a + \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$, en donde δ es la semiamplitud o radio del intervalo.

Esto se ilustra en la figura II.1.

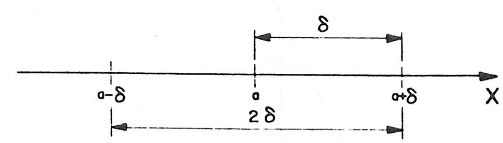


Figura II.1

Tal entorno del punto a y radio δ suele también indicarse como:

$$|x - a| < \delta ,$$

o bien:

$$Q\ (a,\ \delta)$$

> **Definición:** Se llama entorno reducido aquel en el que se excluye el punto "a", y se representa como:
>
> $Q'\ (a,\ \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta;\ x \neq a\}$

es decir:

$$0 < |x - a| < \delta$$

II.1.2 LIMITE DE UNA VARIABLE

Antes de dar una definición, considérense los siguientes ejemplos:

Ejemplo II.1

Sea x la variable cuyo campo de variabilidad es la sucesión:

$$2 + \frac{1}{2}\ ,\ 2 + \frac{1}{4}\ ,\ 2 + \frac{1}{8}\ ,\ \ldots\ldots,\ \ 2 + \frac{1}{2^n}\ ,\ \ldots$$

Si x toma valores cada vez más avanzados, resulta evidente que su valor se va acercando a 2 y se dice entonces que x tiende a 2, lo cual se escribe como:

$$x \to 2\ ,$$

o bien:

$$\lim\ x = 2$$

Si $x \to 2$, entonces la diferencia $x - 2$ tiende a cero. Esto se puede expresar indicando que siempre se puede tener $x - 2 < \delta$. Donde δ es un número positivo tan pequeño como se quiera.

Si:

$$\delta = 0.1\ ,$$

basta con tomar a:

$$x = 2 + \frac{1}{2^4} = 2 + \frac{1}{16}\ ,$$

con lo cual se cumple:

$$x - 2 < \delta;\quad 2 + \frac{1}{16} - 2 = \frac{1}{16}\ ;\ \frac{1}{16} < 0.1$$

ahora, si:

$$\delta = 0.02 = \frac{1}{50}\ ,$$

tomando:

$$x = 2 + \frac{1}{2^6}\ ;\ \ x = 2 + \frac{1}{64}\ ,$$

se tiene:

$$x - 2 = 2 + \frac{1}{64} - 2 = \frac{1}{64} < \frac{1}{50} = \delta$$

Obsérvese que x no llegará a tomar el valor de 2, sin embargo, su valor puede estar tan cercano a 2 como se desee.

Ejemplo II.2

Sea un círculo fijo cuya área constante es "a" (ver figura II.2). Considérese inscrito en el círculo un polígono regular cuyo número de lados va en aumento; obviamente, el área "v" del polígono es variable y al crecer, con el aumento del número de sus lados, su valor se acerca al número "a", sin llegar a ser v = a, es decir:

$v \to a$ o bien: $\lim\ v = a$

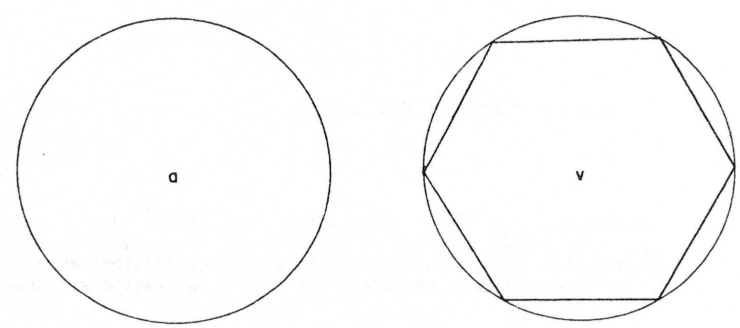


Figura II.2

Para expresar la condición en que se basa este hecho, se puede escribir $v - a \to 0$, o bien $|v - a| < \delta$, siendo δ un número positivo tan pequeño como se quiera. Es necesario tomar el valor absoluto de la diferencia $v - a$, cuando se compara ésta con el valor de δ, porque en el presente caso se tiene siempre $v - a < 0$, y si no se considerara valor absoluto no tendría ningún objeto la comparación de un número negativo $v - a$ con cualquier número positivo δ, ya que realmente el interés está en la comparación entre la magnitud de estas dos cantidades.

En general tomando $|v - a|$ en cualquier caso, si $|v - a| < \delta$, para todo $\delta > 0$; por pequeño que éste sea, se tendrá:

$$v \to a$$

o bien:

$$\lim v = a$$

> **Definición:** La variable x tiende a la constante "a", o bien, el límite de x es "a", si para todo número $\delta > 0$, por pequeño que sea éste, siempre se verifica: $|x - a| < \delta$.

A continuación se presentará el concepto de límite en un punto de una función real de variable real. Antes de exponer la definición formal se hará una introducción del concepto para lograr un mejor entendimiento.

II.1.3 NOCION DE LIMITE DE UNA FUNCION

Supóngase que un físico desea obtener una cierta medida cuando la presión del aire es cero. Como resulta imposible lograr un vacío perfecto en el laboratorio, una manera de atacar el problema es obtener mediciones para presiones pequeñas. Si cuando la presión se aproxima a cero, la medición correspondiente se aproxima a un número L, se puede decir que la presión en el vacío es también L. Además, si para una presión de x gr/cm², la medición está dada por $f(x)$, donde f es una función, entonces este resultado experimental puede ser expresado como:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = L}$$

Nótese que para este experimento la presión x nunca es igual a cero, sin embargo, modernos equipos de vacío pueden lograr presiones cercanas a cero.

Otra ilustración podrá ser la famosa paradoja de Zenón. Este personaje griego quiso ir de la ciudad A a la ciudad B y se dijo que cada día caminaría la mitad de lo que le faltaba. Ver figura II.3.

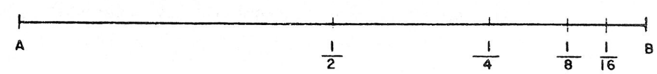


Figura II.3

El primer día caminó $\frac{1}{2}$, el segundo $\frac{1}{4}$, el tercero $\frac{1}{8}$, el cuarto $\frac{1}{16}$, y así sucesivamente. Si se suman las cantidades, se tiene que hasta el cuarto día había caminado $0.5 + 0.25 + 0.125 + 0.0625 = 0.9375$. Si se continuara la suma se vería que se aproxima a 1, aunque nunca toma este valor, sin embargo, si se toma un número de sumandos suficientemente grande, la diferencia entre 1 y la suma puede hacerse tan pequeña como se quiera. Por lo tanto, si S es la suma y n el número de sumandos, se puede escribir:

$$\lim_{n \to \infty} S = 1$$

Considérese ahora la función dada por:

$$y = f(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

y concéntrese la atención en una vecindad del valor $x = 3$.

Será necesario considerar los valores que toma la función cuando x toma valores en diversos entornos del punto $x = 3$.

Para ello selecciónese el entorno $Q(3, 1)$, es decir, $2 < x < 4$. La gráfica de la función en este entorno, muestra que para $x = 2$ se tiene $f(2) = 4$ y para $x = 4$, $f(4) = -4$. (Véase figura II.4).

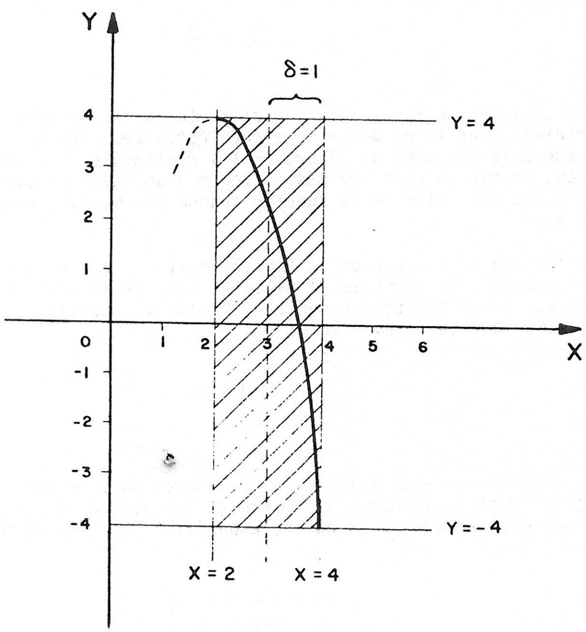


Figura II.4

En otras palabras, la gráfica de la función se encuentra en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2$, $x = 4$, $y = 4$, $y = -4$.

El siguiente paso es seleccionar un entorno de $x = 3$ con menor amplitud, por ejemplo: $Q(3, 0.5)$, es decir, $2.5 < x < 3.5$. Considérese la gráfica en este entorno. Véase figura II.5.

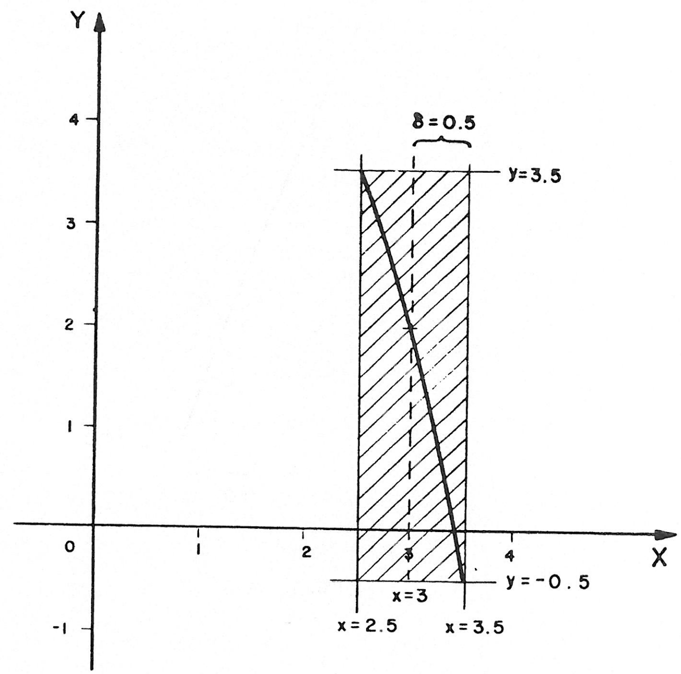


Figura II.5

La gráfica se encuentra ahora en el rectángulo limitado por las rectas $x = 2.5$, $x = 3.5$, $y = -0.5$ $y = 3.5$. Continuando de esta manera, tómese un entorno aún menor, sea éste $Q(3, 0.1)$, o sea $2.9 < x < 3.1$; la gráfica se encuentra ahora en el rectángulo formado por las rectas $x = 2.9$, $x = 3.1$, $y = 2.38$, $y = 1.58$, como se muestra amplificadamente en la figura II.6.

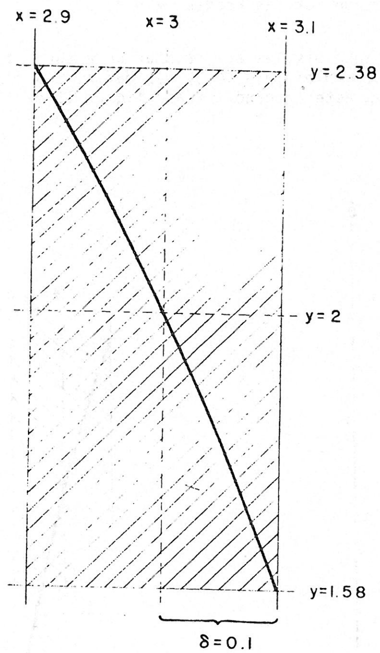


Figura II.6

El aspecto principal a recalcar es la altura de estos rectángulos; a medida que el ancho de éstos disminuye, la altura también se reduce.

Si ahora se toma el entorno $Q(3,0.01)$, o sea, $2.99 < x < 3.01$, el rectángulo que contiene la gráfica de la función está limitado por las rectas $x = 2.99$, $x = 3.01$, $y = 1.96$, $y = 2.04$.

De lo anterior se deduce que conforme las rectas $x = cte$ se aproximan al valor $x = 3$, las rectas $y = cte$ se acercan al valor $y = 2$. Cabe preguntarse cuál es el objeto de toda esta complicación, pues por sustitución directa se podría obtener $y = 2$ cuando $x = 3$. Obsérvese cómo en toda la discusión no se ha utilizado este hecho; mas aun, se ha evitado toda consideración de lo que sucede cuando $x = 3$.

Así, interesa solamente el comportamiento de y cuando x está en algún intervalo alrededor del valor tres.

En todos los casos tratados hasta ahora, se distingue el comportamiento de la función en un punto, por ejemplo $x = a$, y para una sucesión de entornos cada vez más pequeños de ese punto. Sin embargo, ocurre un cambio sorprendente cuando se estudian funciones cuyo comportamiento no puede determinarse por sustitución directa, por ejemplo la función:

$$y = f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$$

está definida para todo valor de x, excepto para $x = 0$; la sustitución directa en $x = 0$ daría:

$$y = f(0) = \frac{0}{0}$$

No obstante, como se verá más adelante, si se estudia una sucesión de intervalos en torno a $x = 0$, siendo éstos cada vez más pequeños, se puede observar cómo la altura de los rectángulos que contienen a la función, disminuye cada vez más en torno a un valor particular de y. No se habla del valor de la función cuando $x = 0$, sino cuando x se aproxima a cero.

Volviendo al ejemplo de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, se observa que cuando x se aproxima al valor 3, $f(x)$ se aproxima o tiende al valor 2. Se dice entonces que $f(x)$ tiende a 2 cuando x tiende a 3, proposición que se abrevia como:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

Si una función está definida para valores de x en torno a un número fijo a, y si al tender x al número a, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más cercanos a un número específico L, se puede escribir:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \qquad \ldots (1)$$

lo cual se lee el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L.

Geométricamente esto significa que la sucesión de rectángulos alrededor de a, cuyos anchos son cada vez más pequeños, tienen alturas cada vez menores y se acumulan en torno al punto (a, L).

Todas las proposiciones anteriores que contienen expresiones como *más cercano*, *más pequeño*, etc., son bastante imprecisas y sólo pretenden dar una idea intuitiva de lo que ocurre.

Considérese ahora la siguiente función:

$$y = f(x) = \frac{x - 2}{2\,|x - 2|}$$

determinada para todo valor de x, excepto $x = 2$, ya que para este valor la sustitución directa da:

$$y = \frac{0}{0}$$

La gráfica de la función es muy simple y se muestra en la figura II.7.

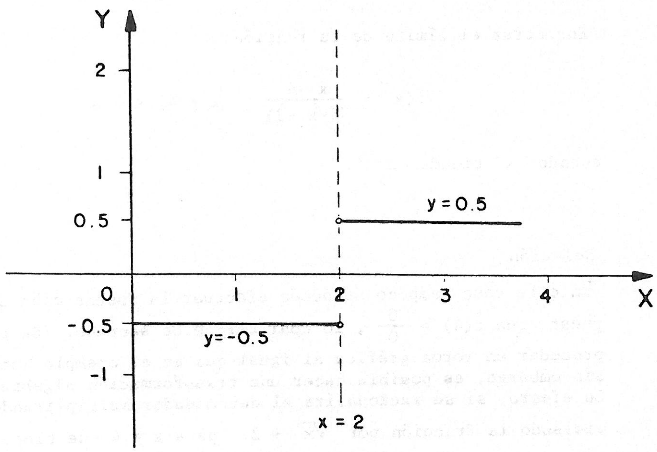


Figura II.7

Si $x > 2$, entonces $|x - 2| = x - 2$ y la función toma el valor $+ 0.5$; si $x < 2$, $|x - 2| = -(x - 2)$ y la función vale $- 0.5$. Se quiere estudiar el comportamiento de la función cuando x tiende a 2. Seleccionando un entorno para $x = 2$, por ejemplo $Q(2, 0.6)$, o sea $1.4 < x < 2.6$, se ve que la función está contenida en el rectángulo limitado por las rectas $x = 1.4$, $x = 2.6$, $y = 0.5$, $y = -0.5$. (Véase figura II.8).

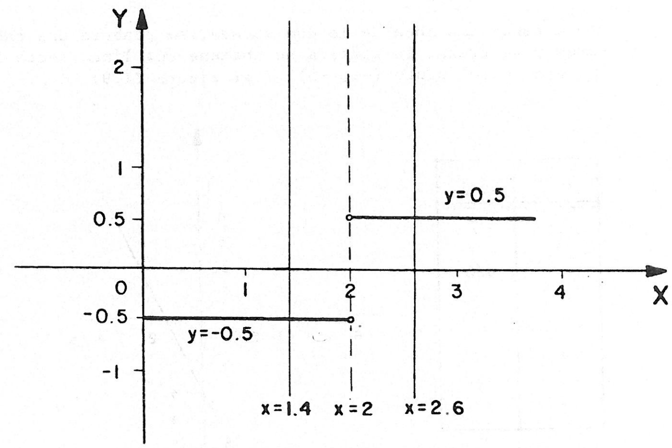


Figura II.8

En la figura II.8, se observa que no importa qué tan angosto se haga el entorno de $x = 2$, la altura del rectángulo será siempre igual a 1; esto es, no hay límite cuando x tiende a 2 y se dice que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{2\,|x - 2|} \quad \text{No existe}$$

Se estudiarán a continuación diversos ejemplos de funciones, con el objeto de determinar lo que sucede en la vecindad de un valor particular de x, cuando la función no queda definida mediante la sustitución directa de ese valor.

Ejemplo II.3

La función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1}$ está definida para todo valor de x, excepto para $x = -1$, puesto que para este valor, tanto el numerador como el denominador se anulan. ¿Existe $\lim_{x \to -1} f(x)$?

Solución

Para tener una idea de lo que sucede, se elabora una tabla de valores y al trazar la gráfica se obtiene una línea recta con un agujero en el punto (-1, -5). (Ver figura II.9).

x	f(x)
-2	-7
-1	0/0
0	-3
1	-1
2	1

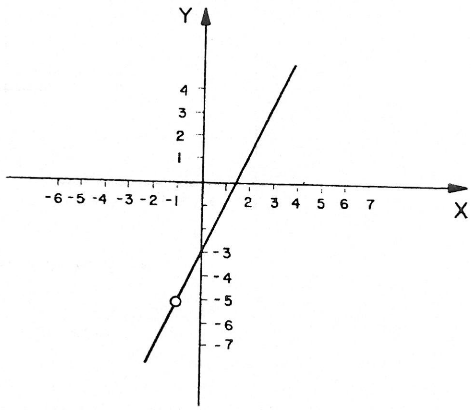


Figura II.9

Con una discusión geométrica sobre los rectángulos como la realizada con la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 4$, se concluye para este caso que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Sin embargo, es necesario disponer de un método más sistemático, sin necesidad de recurrir a representaciones gráficas y consideraciones intuitivas.

Por ejemplo, se puede factorizar el numerador y la función se escribe como:

$$f(x) = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$

Ahora, si: $x \neq -1$

se puede simplificar, quedando:

$$f(x) = 2x - 3, \quad \text{si: } x \neq -1$$

Esta función tiende a (-5) cuando x tiende a (-1), porque ahora se puede efectuar la sustitución directa. Por lo tanto se concluye que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -5$$

Obsérvese que en ningún momento se sustituye el valor $x = -1$ en la expresión original.

Ejemplo II.4

Encontrar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{x - 4}{3(\sqrt{x} - 2)}, \quad x \neq 4, \ x > 0$$

cuando x tiende a 4.

Solución

En este caso tampoco se puede efectuar la sustitución directa, puesto que $f(4) = \frac{0}{0}$, lo cual carece de sentido. Se podría proceder en forma gráfica al igual que en el ejemplo anterior, sin embargo, es posible hacer una transformación algebraica. En efecto, si se racionaliza el denominador multiplicando y dividiendo la fracción por $\sqrt{x} + 2$, para $x \neq 4$, se tiene:

$$\frac{x - 4}{3(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{3(x - 4)}$$

y simplificando se tiene:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{3} \quad ; \text{ si } x \neq 4$$

El límite de esta expresión puede encontrarse sustituyendo directamente $x = 4$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}+2}{3} = \frac{\sqrt{4}+2}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo II.5

Encontrar el límite de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1} \quad ; \quad x \neq -1, \; x \geq -2$$

cuando x tiende a -1.

Solución

Como la sustitución directa da una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se efectúa la racionalización del numerador. Así, multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{2+x}+1)$, resulta:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2+x}-1)(\sqrt{2+x}+1)}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} = \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{2+x}+1)} \; ;$$

$$x \neq -1$$

simplificando queda:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x}+1}; \quad \text{para: } x \neq -1, \; x \geq -2$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{2+x}+1} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo II.6

Encontrar:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} \quad ; \quad h \neq 0$$

donde:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Solución

La sustitución directa de $h = 0$ da:

$$\frac{f(4)-f(4)}{0} = \frac{0}{0}$$

sin embargo:

$$f(4) = \frac{1}{25}$$

$$f(4+h) = \frac{1}{(4+h+1)^2} = \frac{1}{(5+h)^2}$$

por tanto:

$$\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{\frac{1}{(5+h)^2} - \frac{1}{25}}{h} = \frac{25-(5+h)^2}{25h\,(5+h)^2}$$

$$= \frac{-(10h+h^2)}{25h\,(5+h)^2} = \frac{-h\,(10+h)}{25h\,(5+h)^2} = -\frac{(10+h)}{25\,(5+h)^2}$$

así:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(10+h)}{25(5+h)^2} = \frac{-10}{25^2} = \frac{-2}{125}$$

Ejemplo II.7

Encontrar el $\lim_{x\to 3} f(x)$, donde $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Solución

Dibujando la gráfica de esta función en un entorno de $x = 3$, se ve cómo crece sin límite cuando x tiende a 3. (Ver figura II.10). De acuerdo con la noción de límite antes expuesta, si se toma un intervalo de valores de x en torno a 3 y se busca en qué rectángulo están contenidos los valores de la función, se observará claramente la no existencia de tales rectángulos por pequeños que sean los intervalos escogidos alrededor de $x = 3$. En tal caso se dice que:

$$\lim_{x\to 3} f(x) \qquad \text{No existe}$$

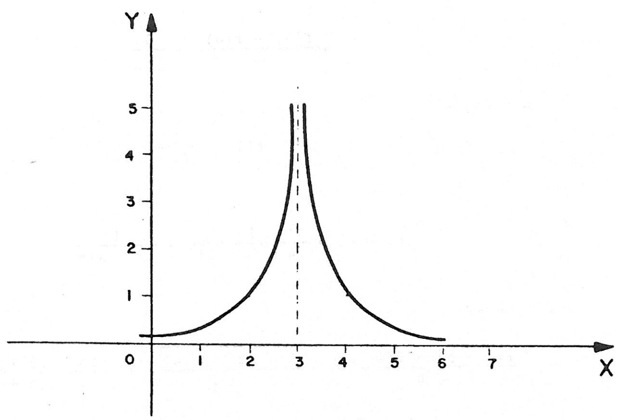


Figura II.10

II.1.4 DEFINICION DE LIMITE DE UNA FUNCION

Anteriormente se presentó la noción de límite de una manera informal, con expresiones tales como *entornos pequeños*, *números cercanos a otros*, *cantidades acercándose a cero*, etc. Sin embargo, estas expresiones no matemáticas tienen diferentes significados para cada persona y no pueden ser la base de una estructura matemática. Por lo tanto, a continuación se establece la definición formal.

Definición: Dados una función f, y los números "a" y "L", se dice que el límite de f(x) cuando x tiende a "a" es "L", si para todo número positivo ε y tan pequeño como se desee, existe un número positivo δ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \,, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

La proposición $\lim_{x\to a} f(x) = L$, es una notación abreviada para la definición anterior.

En otras palabras, la anterior definición establece que los valores de la función f(x) se aproximan a un límite L, a medida que x se aproxima a un número a, si el valor absoluto de la diferencia entre f(x) y L, se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando x suficientemente cercana a a, pero no igual a a.

Es importante darse cuenta de que en esta definición nada se menciona del valor de la función cuando $x = a$, esto es, no es necesaria la definición de la función para $x = a$ como condición para que el $\lim_{x\to a} f(x)$ exista.

Ahora se entrará en detalles acerca de esta definición y paralelamente se ilustrará la representación geométrica del concepto.

II.1.5 INTERPRETACION GEOMETRICA

Recuérdese que $|x-a| < \delta$ es equivalente a la doble desigualdad:

$$a - \delta < x < a + \delta$$

Esta doble desigualdad expresa cómo debe estar contenida x en un entorno $Q'(a, \delta)$.

La parte de la desigualdad expresada por $0 < |x-a|$ significa simplemente que x no puede tomar el valor a, es decir, se trata de un entorno reducido del punto a, ya que este valor se excluye de él.

La desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ equivalente a $L-\varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, expresa que la función f está por encima de la recta $y = L - \varepsilon$ y por debajo de la recta $y = L + \varepsilon$. (Véase figura II.11).

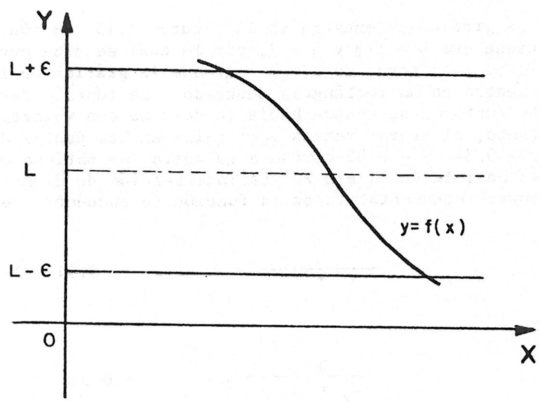


Figura II.11

La definición misma puede ser interpretada como un criterio. Dado un número positivo arbitrario ε, el criterio consiste en encontrar un número positivo δ tal que $f(x)$ se encuentre entre $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$, siempre que x esté en el entorno reducido de a : $a - \delta < x < a + \delta$; $x \neq a$. Si se puede encontrar un δ tal para todo número positivo ε, entonces se dice que $f(x)$ tiene el límite L cuando x tiende a a.

Obsérvese que el valor δ puede ser diferente para distintos valores de ε; además, el criterio debe ser aplicable a todo $\delta > 0$.

La interpretación geométrica expresa cómo dado un ε, debe ser posible encontrar un δ tal que la función f se encuentre en el rectángulo limitado por las rectas $x = a - \delta$, $x = a + \delta$, $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. (Ver figura II.12). Nada se dice acerca del valor de f cuando x es a.

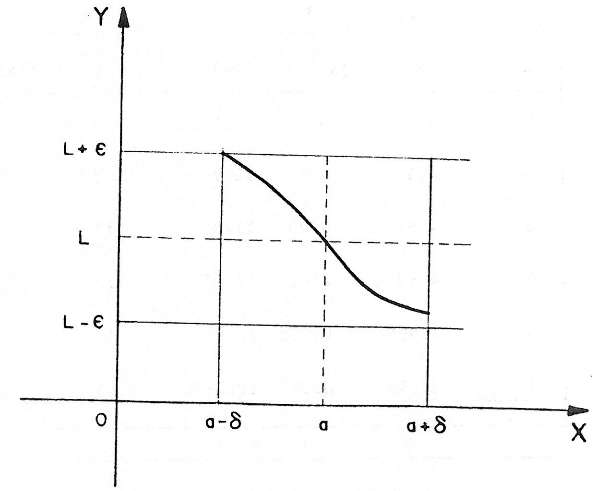


Figura II.12

Es conveniente adquirir cierta práctica para encontrar el δ que corresponde a un ε dado. Esto puede empezarse partiendo de algunos casos muy simples.

Considérese un caso sencillo: sea $f(x) = 3x - 2$ y tómese $a = 5$.

Obténgase el límite de la función en $a = 5$; para ello utilícese un entorno del punto a; sea éste $Q(5, 1)$, o sea $4 < x < 6$.

Ahora se formará una tabla con las siguientes columnas:

1. Valor de x en estudio (a)
2. Valor contenido en el entorno reducido de "a" (x)
3. Valor absoluto de la diferencia $x - a$ $|x - a|$
4. Valor de la función en x $f(x)$

1	2	3	4	5	6
a	x	$\|x - a\|$	f(x)	L	$\|f(x) - L\|$
5	4.5	0.5	11.5	13	1.5
5	4.9	0.1	12.7	13	0.3
5	4.95	0.05	12.85	13	0.15
5	4.99	0.01	12.97	13	0.03
5	4.995	0.005	12.99	13	0.01
5	4.999	0.001	12.997	13	0.003
	↓	↓	↓		↓
	5	0	13		0

Tabla II.1

Al observar las cuatro primeras columnas de la tabla, se ve cómo a medida que el valor de $|x - a|$ tiende a cero, la función tiende al valor 13, por esto se escribe:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 13$$

Aumentándole ahora a la tabla las columnas 5 y 6, o sea:

5. El valor del límite de la función (L)
6. El valor absoluto de la diferencia $f(x) - L$ $|f(x) - L|$

Se observa que para cada valor $|x-a|$ de la tabla, existe un valor $|f(x) - L|$, y ambos tienden a cero.

Se requiere hacer ver cómo dado un $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que:

$$|3x - 2 - 13| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x - 5| < \delta$$

Como $|3x - 15| = |3(x - 5)|$, si se da un ε, se toma simplemente $\delta = \varepsilon/3$; entonces si $|x-5| < \delta = \varepsilon/3$, se encuentra $3|x-5| < \varepsilon$, que equivale al resultado buscado, $|3x-15| < \varepsilon$.

Ejemplo II.8

Trazar la gráfica de $f(x) = \frac{3}{x+2}$, donde $x \neq -2$, y encontrar un δ tal que:

$$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| < 0.01 \quad \text{si} \quad |x-7| < \delta$$

Solución

La gráfica se muestra en la figura II.13. Según la definición, se tiene que $L = 1/3$ y $a = 7$, por lo cual se debe encontrar un intervalo de x en torno de $a = 7$ tal que la gráfica de la función se encuentre en un rectángulo adecuado. La función decrece monótonamente conforme se avanza hacia la derecha con valores de x y por lo tanto, al trazar rectas verticales en los puntos donde las rectas $y = 0.34$, $y = 0.32$ cortan a la curva, se obtiene el mayor intervalo posible en el eje X. La intersección de dichas rectas con la curva representativa de la función se encuentra resolviendo:

$$\frac{3}{x_1 + 2} = L + \varepsilon = 0.343333 \qquad \ldots(a)$$

$$\frac{3}{x_2 + 2} = L - \varepsilon = 0.323333 \qquad \ldots(b)$$

despejando x de (a):

$$3 = 0.3433\,(x_1 + 2)\,, \quad x_1 = 6.7379$$

despejando x de (b):

$$3 = 0.3233\,(x_2 + 2)\,, \quad x_2 = 7.2784$$

En la figura II.13, se muestran estos valores a una escala muy amplificada; puesto que la función decrece monótonamente hacia la derecha, un valor adecuado para δ es 0.25, ya que si la función se encuentra en un rectángulo, con este valor también se encuentra en otro rectángulo de la misma altura pero más angosto. En otras palabras, se cumple:

$$\left|f(x) - \frac{1}{3}\right| < 0.01, \quad \text{cuando:} \quad 0 < |x - 7| < 0.25$$

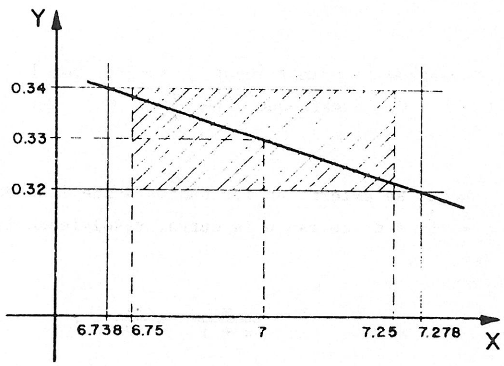


Figura II.13

Ejemplo II.9

Si $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}$, $a = 2$, $\varepsilon = 0.01$, $x \neq 2$. Determinar un número $\delta > 0$, tal que se cumpla la definición de límite. Dibujar una gráfica aproximada.

Solución

La función no está definida para $x = 2$, pero para $x \neq 2$, se tiene:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2x} - 2)\ (\sqrt{2x} + 2)}{(x-2)\ (\sqrt{2x} + 2)} = \frac{2x - 4}{(x-2)\ (\sqrt{2x} + 2)} = \frac{2\ (x-2)}{(x-2)\ (\sqrt{2x} + 2)}$$

quedando:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} \quad ; \quad \text{para} \quad x \neq 2$$

entonces:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2}{\sqrt{2x} + 2} = \frac{1}{2} = L$$

Esta función está representada en la figura II.14, en donde también se representan las rectas:

$$y = L + \varepsilon = 0.51 \quad y \quad y = L - \varepsilon = 0.49$$

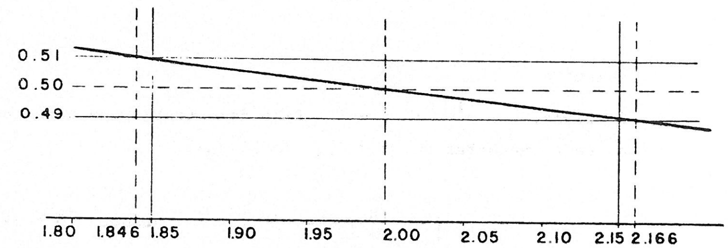


Figura II.14

$$\frac{2}{\sqrt{2x_1} + 2} = L + \varepsilon = 0.51 \qquad \text{... (a)}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x_2} + 2} = L - \varepsilon = 0.49 \qquad \text{... (b)}$$

despejando x de las ecuaciones (a) y (b):

de (a):

$$\sqrt{2x_1} + 2 = \frac{2}{0.51} \quad ; \quad \sqrt{2x_1} = 1.92157 \ ; \ 2x_1 = 3.69243$$

$$x_1 = 1.84621$$

de (b):

$$\sqrt{2x_2} + 2 = \frac{2}{0.49} \quad ; \quad \sqrt{2x_2} = 2.08163 \ ; \ 2x_2 = 4.33319$$

$$x_2 = 2.1666$$

Como la función decrece monótonamente, un valor adecuado para δ es 0.15, ya que:

$$1.846 < 1.850 \quad y \quad 2.166 > 2.15$$

Ejemplo II.10

Demostrar por medio de la definición que :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Solución

Se tiene, $L = \frac{1}{2}$ y $a = 1$. Debe demostrarse que para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $\delta > 0$, para el cual:

$$\left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x-1| < \delta$$

Para formarse una idea del aspecto de la función, se traza su gráfica (ver figura II.15), en la cual se observa cómo la función crece monótonamente. Esto se verifica escribiendo la identidad:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

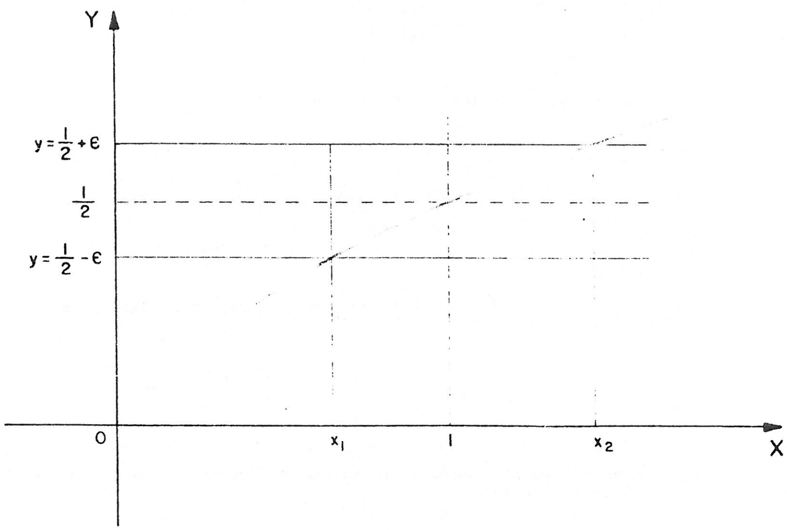


Figura II.15

Como al crecer x, decrece $\frac{1}{x+1}$, entonces $1 - \frac{1}{x+1}$ crece.

Supóngase en primer lugar $\varepsilon < \frac{1}{2}$, por lo tanto $L + \varepsilon < 1$ y $L - \varepsilon > 0$, puesto que $L = \frac{1}{2}$.

Ahora, se determinan los puntos donde las rectas $y = \frac{1}{2} - \varepsilon$ y $y = \frac{1}{2} + \varepsilon$ cortan a la curva, resolviendo las ecuaciones (a) y (b) :

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad \text{... (a)}$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} + \varepsilon \qquad \text{... (b)}$$

de (a):

$$x = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)(x+1) \; ; \; \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) x = \frac{1}{2} - \varepsilon \; ;$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

similarmente, de la ecuación (b) se obtiene:

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

Tomando δ igual a la menor distancia entre 1 y x_1, así como entre 1 y x_2, se puede verificar que $1-x_1$ es menor que x_2-1, por lo tanto:

$$\delta = 1 - x_1 = 1 - \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{2\,\varepsilon}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{4\,\varepsilon}{1 + 2\,\varepsilon}$$

Si bien la definición básica establece que debe encontrarse un δ para todo ε, en realidad se observa cómo una vez encontrado un δ para un ε determinado, se puede emplear el mismo δ para todos los ε mayores. Geométricamente esto significa lo siguiente: Una vez que se sabe que la función se encuentra en un rectángulo, evidentemente estará contenida en todo rectángulo del mismo ancho pero de mayor altura.

II.2 CALCULO DE LIMITES

II.2.1 LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE

Recuérdese que la función constante es aquella que no varía, o sea, conserva un mismo valor para cualquier valor de la variable independiente, es decir:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f;\ f(x) = K\}$$

y cuya gráfica se muestra en la figura II.16.

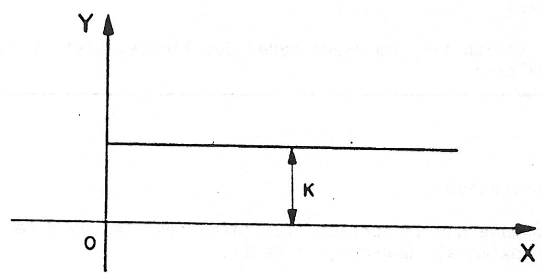


Figura II.16

De esta misma figura resulta obvio establecer la siguiente proposición para determinar su límite.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$$

Para demostrar esta proposición se tomará como base la definición de límite establecida en el inciso anterior:

basta que exista un $\delta > 0$, tal que para un $\varepsilon > 0$ dado, se cumple:

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon,$$

siempre que:

$$0 < |x - a| < \delta$$

para cualquier número $\delta > 0$ seleccionado, siempre se tendrá:

$$|f(x) - k| < \varepsilon$$

siendo $\varepsilon > 0$ y tan pequeño como se quiera.

Por lo anterior se establece el siguiente teorema:

TEOREMA II.1 LIMITE DE LA FUNCION CONSTANTE

Hipótesis:

$f(x)$ es una función constante.

Tesis:

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a un número cualquiera, es igual a la constante.

Esto es: Si $f(x) = k$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} k = k$

II.2.2 LIMITE DE LA FUNCION IDENTIDAD

Siguiendo un proceso análogo al del punto anterior, recuérdese que la función identidad es aquella cuyo valor equivale al que toma la variable independiente, es decir:

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f,\ f(x) = x\}$$

La gráfica se muestra a continuación en la figura II.17.

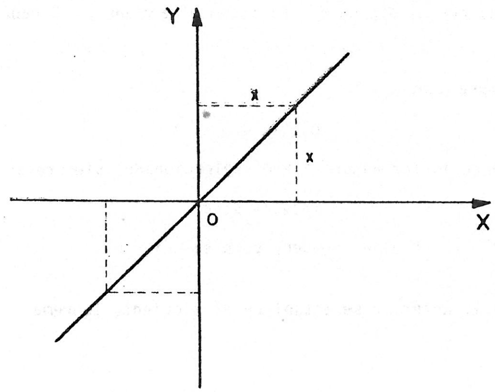


Figura II.17

En la gráfica se puede observar cómo se cumple la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

Se comprobará la veracidad de esta igualdad recurriendo a la definición de límite. Así, se debe encontrar un número $\delta > 0$ para cada $\varepsilon > 0$, tal que:

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \text{ siempre que: } 0 < |x - a| < \delta$$

dado que $f(x) = x$, se tiene $|x - a| < \varepsilon = \delta$

Por lo anterior, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, siempre existe un número $\delta = \varepsilon > 0$ que cumple con las condiciones establecidas, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$$

TEOREMA II.2 LIMITE DE LA FUNCION IDENTIDAD

Hipótesis:

$f(x)$ es la función identidad.

Tesis:

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a cualquier número a, es igual al número a.

Esto es: Si $f(x) = x$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a$

II.2.3 TEOREMAS SOBRE LIMITES

Anteriormente se estableció el concepto de límite de una función y se calcularon numéricamente algunos ejemplos de límites utilizando diversos artificios y manipulaciones algebraicas. El estudiante escéptico se dará cuenta de que cada una de ellas necesita justificarse, aun cuando parecen obvias. Por este motivo y para proporcionar un mayor vigor matemático, se expondrán a continuación los teoremas que sirven de base para el cálculo de límites de funciones.

TEOREMA II.3 UNICIDAD DE LOS LIMITES

Hipótesis:

Una función $f(x)$ está definida en un entorno del punto $x = a$.

Tesis:

La función $f(x)$ no puede tener dos límites distintos, cuando x tiende al valor a.

Demostración:

Supóngase que la función $f(x)$ tiene dos límites diferentes cuando x se aproxima al número a, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 ; \quad \lim_{x \to a} f(x) = L_2 \text{ y } L_1 \neq L_2$$

se demostrará cómo esta suposición lleva a una contradicción:

Sea $\varepsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$; por lo que $\varepsilon > 0$

Por definición deberá existir un δ tal que:

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

$$|f(x) - L_2| < \varepsilon \qquad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Entonces se tiene: $\delta_1 \leq \delta_2$ ó $\delta_2 < \delta_1$. Supóngase por conveniencia que $\delta_1 \leq \delta_2$, entonces:

$$L_1 - L_2 = L_1 - f(x) + f(x) - L_2$$

por lo tanto:

$$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)|$$

y por un teorema de valores absolutos:

$$|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2|$$

Dividiendo entre dos la expresión anterior:

$$\frac{|L_1 - L_2|}{2} \leq \frac{|L_1 - f(x)|}{2} + \frac{|f(x) - L_2|}{2}$$

pero:

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon \ \text{ y } \ |f(x) - L_2| < \varepsilon,$$

de modo que:

$$\frac{|L_1 - L_2|}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Sin embargo se había definido $\varepsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$ y se obtiene $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual resulta absurdo y de esta manera la suposición $L_1 \neq L_2$ no puede sostenerse, quedando demostrado el teorema.

TEOREMA II.4

Hipótesis:

Una función $f(x)$ es positiva o nula en un entorno del punto a.

Tesis:

El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a, no puede ser negativo.

Demostración:

Sea la función $f(x)$ tal que: $f(x) \geq 0$, si $|x - a| < \delta$ y sea N un número negativo tal que $|N| = |P|$, donde P es un número positivo, por lo tanto $N = -P$, o bien, $-N = P$.

Así, $f(x) - N \geq P$ ... (2)

ya que: $f(x) \geq 0$ y $-N > 0$

entonces:

$f(x) - N > 0$, por lo cual, $f(x) - N = |f(x) - N|$ ...(3)

Si se supone que N es el límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a teniendo en cuenta las expresiones (2) y (3), y haciendo $\varepsilon = P > 0$, se tiene:

$$|f(x) - N| \geq P = \varepsilon, \quad \text{cuando } 0 < |x - a| < \delta$$

lo cual contradice la definición de límite, por lo que un número negativo como $N < 0$ no puede ser el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ si $f(x) \geq 0$ para $|x - a| < \delta$.

TEOREMA II.5

Hipótesis:

Una función $f(x)$ es negativa o nula en un entorno del punto $x = a$.

Tesis:

El límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor a no puede ser positivo.

La demostración de este teorema resulta semejante a la del teorema anterior, por lo que no se desarrolla aquí.

TEOREMA II.6

Hipótesis:

Dos funciones de x, $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen los mismos valores para valores iguales de x en un entorno reducido del punto $x = a$ y $f_2(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a.

Tesis:

La función $f_1(x)$ tiene límite cuando x tiende al número a y este límite es igual al límite de la función $f_2(x)$ en dicho punto.

Esto es: Si $f_1(x) = f_2(x)\ \forall\, x \in 0 < |x - a| < \delta$, y si $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$, entonces existe: $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$

Demostración:

Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones tales que $f_1(x) = f_2(x)$ para todo valor de x en el entorno $0 < |x - a| < \delta_1$; además sea $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$

Por la definición de límite debe tenerse que:

$$|f_1(x) - L_1| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Tomando un δ menor que δ_1, se puede sustituir $f_1(x)$ por $f_2(x)$ en la última expresión, para así obtener:

$$|f_2(x) - L_1| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

lo cual significa que $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_1 = \lim\limits_{x \to a} f_1(x)$

quedando demostrado el teorema.

TEOREMA II.7

Hipótesis:

Para un entorno del punto a se tiene que $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$ y además $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tienen límite cuando x tiende al valor a y sus límites son iguales.

Tesis:

El límite cuando x tiende al número a de la función $f(x)$ existe, y es igual al límite de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en el punto considerado.

Esto es:

$$\text{si} \quad f_1(x) < f(x) < f_2(x),\ \forall\, x \in 0 < |x - a| < \delta$$

y si:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x) = L\,,$$

entonces existe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Demostración:

Por la definición de límite de una función, para un $\varepsilon > 0$, se debe cumplir:

$$|f_1(x) - L| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

lo cual es equivalente a: $-\varepsilon < (f_1(x) - L) < \varepsilon$

o bien:

$$L - \varepsilon < f_1(x) < L + \varepsilon, \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$

Por la definición de límite de $f_2(x)$ se tiene:

$$|f_2(x) - L| < \varepsilon \quad \text{si } 0 < |x - a| < \delta_2$$

o bien:

$$-\varepsilon < (f_2(x) - L) < \varepsilon,$$

por lo cual:

$$L - \varepsilon < f_2(x) < L + \varepsilon, \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Tomando un δ de tal manera que $\delta < \delta_1$ y $\delta < \delta_2$, se puede escribir:

$$L - \varepsilon < f_1(x) < f(x) < f_2(x) < L + \varepsilon, \text{ si } 0 < |x - a| < \delta$$

y por lo anterior: $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, que se puede transformar en:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

y esto significa:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

quedando demostrado el teorema.

II.2.4 TEOREMAS SOBRE OPERACIONES CON LIMITES

TEOREMA II.8 LIMITE DE UNA SUMA

Hipótesis:

$f(x)$ es la suma de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a.

Tesis:

$f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a, y dicho límite es igual a la suma de los límites cuando x tiende al valor a de las funciones sumadas.

Esto es: si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots.. + f_n(x)$

y si: $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$; ... $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

Entonces: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Demostración:

Considérense solamente dos funciones: sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tales que:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$$

Se demostrará que:

$$\lim_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = L_1 + L_2$$

Usando la definición de límite, se debe demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f_1(x) + f_2(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

Según la definición de límite para $f_1(x)$, tomando $\varepsilon/2 > 0$ en lugar de $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$|f_1(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1$$

y para $f_2(x)$:

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Si se considera un δ menor que δ_1 y δ_2, queda:

$$\left| [f_1(x) + f_2(x)] - [L_1 + L_2] \right| = \left| [f_1(x) - L_1] + [f_2(x) - L_2] \right|$$

$$\leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2|$$

y $\qquad |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$

cuando: $\qquad 0 < |x - a| < \delta$

lo cual implica que: $\lim\limits_{x \to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{x \to a} f_1(x) + \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$

TEOREMA II.9 LIMITE DE UN PRODUCTO

Hipótesis:

Una función $f(x)$ es el producto de un número finito de funciones de x que tienen límite cuando x tiende al valor a.

Tesis:

El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a existe y es igual al producto de los límites en este punto, de las funciones que se multiplican.

Esto es: si $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots. \cdot f_n(x)$

y si: $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$; .. ; $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$

entonces: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots. \cdot f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$

Demostración:

Considérense dos funciones, sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ tales que:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$$

se demostrará que:

$$\lim_{x \to a} [f_1(x)\ f_2(x)] = L_1 \cdot L_2$$

considerando la identidad:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2 = f_1(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot L_2 + f_1(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 =$$

$$= f_1(x)\ [f_2(x) - L_2] + L_2[f_1(x) - L_1]$$

y por la teoría de los valores absolutos:

$$|f_1(x)\cdot f_2(x)-L_1\cdot L_2| \le |f_1(x)||f_2(x)-L_2| + |L_2||f_1(x)-L_1|$$

por otra parte:

$$f_1(x) = f_1(x) - L_1 + L_1$$

por lo cual:

$$f_1(x) \le |f_1(x) - L_1| + |L_1|$$

Considerando el límite de $f_1(x)$ y tomando $\varepsilon = 1$, se tiene por lo anterior:

$$|f_1(x) - L_1| < 1,$$

siempre que:

$$0 < |x - a| < \delta$$

luego: $|f_1(x)| < 1 + |L_1|$, y haciendo $1 + |L_1| = k$,

queda: $|f_1(x)| < k$, si: $0 < |x - a| < \delta_1$

Tomando en cuenta esta última expresión:

$$|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2| < k\,|f_2(x) - L_2| + |L_2||f_1(x) - L_1|$$

si: $0 < |x - a| < \delta_1$

tomando $\frac{\varepsilon}{2|L_2|}$ en lugar de ε, se tiene

$$|f_1(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2|L_2|}, \quad \text{si:} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

Ahora, considerando el límite de $f_2(x)$ y tomando $\frac{\varepsilon}{2k}$ en lugar de ε:

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2k} \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_3$$

si se considera un $\delta < \delta_1$, $\delta < \delta_2$, $\delta < \delta_3$, se puede sustituir

$|f_2(x) - L_2|$ por $\frac{\varepsilon}{2k}$, que es mayor, y a $|f_1(x) - L_1|$, por $\frac{\varepsilon}{2|L_2|}$

que es mayor, así: $|f_1(x) \cdot f_2(x) - L_1 \cdot L_2| < k\,\frac{\varepsilon}{2k} + |L_2|\,\frac{\varepsilon}{2|L_2|} = \varepsilon$

esto es: $|f_1(x) \cdot f_2(x) + L_1 \cdot L_2| < \varepsilon$, si $0 < |x - a| < \delta$

lo cual indica que: $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = L_1 \cdot L_2$,

o sea:

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$$

Como un caso particular, el límite en un punto del producto de una constante por una función, es igual a la constante multiplicada por el límite de la función en ese punto. Esto es:

$$\lim_{x\to a} [k\, f(x)] = k \lim_{x\to a} f(x)$$

TEOREMA II.10 LIMITE DE UN COCIENTE

Hipótesis:

$f(x)$ es el cociente de dos funciones de x que tienen límite cuando x tiende al número a, y el límite del denominador no es cero.

Tesis:

El límite de $f(x)$ cuando x tiende al número a, existe y es igual al cociente de los límites de dichas funciones en dicho punto.

Esto es: si $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$; $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2 \neq 0$,

entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{para} \quad L_2 \neq 0$$

Demostración:

Sean: $f_1(x)$ y $f_2(x)$ dos funciones tales que

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1 \quad y \quad \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2 \neq 0$$

se demostrará que: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Primero ha de verse que: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f_2(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} f_2(x)} = \dfrac{1}{L_2}$

según la definición de límite, para la función $f_2(x)$, tomando $\dfrac{|L_2|}{2}$ por ε, se tiene:

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}, \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

por otra parte: $|L_2| = |f_2(x) - [f_2(x) - L_2]|$

Teniendo en cuenta un teorema de valores absolutos:

$$|L_2| \leq |f_2(x)| + |f_2(x) - L_2|, \qquad \text{y así:}$$

$$|L_2| < |f_2(x)| + \frac{|L_2|}{2}, \qquad \text{por lo tanto:}$$

$$\frac{|L_2|}{2} < |f_2(x)| \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta$$

ahora:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - f_2(x)}{L_2 f_2(x)}\right| = \frac{|L_2 - f_2(x)|}{|L_2 f_2(x)|}$$

pero:

$$|L_2 - f_2(x)| = |f_2(x) - L_2| \text{ y } |L_2 f_2(x)| = |L_2||f_2(x)|$$

entonces:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|f_2(x) - L_2|}{|L_2||f_2(x)|}$$

y ahora sustituyendo:

$$|f_2(x)| \text{ por } \frac{|L_2|}{2}, \qquad \text{se tiene.}$$

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \frac{|f_2(x) - L_2|}{|L_2| \frac{|L_2|}{2}} = \frac{2|f_2(x) - L_2|}{|L_2|^2}$$

y según la definición de límite, para $f_2(x)$ se puede hacer:

$$|f_2(x) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2}\varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

esto es:

$$\left|\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2$$

que demuestra la primera parte propuesta.

Ahora, si $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, por el teorema II.9, se tiene:

$$\lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \frac{2}{f_2(x)} = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{1}{f_2(x)} = L_1 \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}\ ; \ L_2 \neq 0$$

por lo que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}\ ; \quad L_2 \neq 0$$

quedando demostrado el teorema.

TEOREMA II.11 LIMITE DE UNA RAIZ

Hipótesis:

n es un número entero positivo y el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende al valor a es positivo. O n es impar positivo y el límite es negativo o cero.

Tesis:

El límite de la raíz enésima de $f(x)$ cuando x tiende al valor a es igual a la raíz enésima del límite de $f(x)$ en ese punto.

O sea, si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

entonces:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

La demostración de este teorema está fuera del alcance de estos apuntes.

Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de los teoremas anteriores. Para indicar el teorema que se está aplicando, se anotará la letra T, seguida del número del teorema.

Ejemplo II.11

Encontrar el valor de:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$$

Solución

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 2x - \lim_{x \to 2} 1 = \quad ..(T.II.8)$$

$$= (2)^2 + (2)(2) - 1 = 4 + 4 - 1 = 7 \quad ..(T.II.1) \text{ y } (T.II.9)$$

Ejemplo II.12

Encontrar:

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$$

Solución

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \sqrt{\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} \quad ...(T.II.11)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \to -3} (2x^2+7x+3)}} \quad ...(T.II.10)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} x^2 - \lim_{x \to -3} 9}{\lim_{x \to -3} 2x^2 + \lim_{x \to -3} 7x + \lim_{x \to -3} 3}} = \quad ...(T.II.8)$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x \to -3} x \cdot \lim_{x \to -3} x - \lim_{x \to -3} 9}{2 \lim_{x \to -3} x \cdot \lim_{x \to -3} x + 7 \lim_{x \to -3} x + \lim_{x \to -3} 3}} = \quad ...(T.II.9)$$

$$= \sqrt{\frac{(-3)(-3) - 9}{2(-3)(-3) + 7(-3) + 3}} = \quad ...(T.II.1) \text{ y } (T.II.2)$$

$$= \sqrt{\frac{9 - 9}{18 - 21 + 3}} = \sqrt{\frac{0}{0}} = \frac{0}{0}$$

Lo obtenido representa una indeterminación, lo cual carece de sentido; sin embargo, esto no significa que el límite buscado no exista. La función para la cual se trata de encontrar el límite para cuando $x \to -3$, simplemente no está definida para ese valor de x, por lo tanto, para $x \neq -3$ se puede utilizar la siguiente transformación algebraica, apoyándose en el teorema II.6.

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{(2x + 1)(x + 3)} = \frac{x - 3}{2x + 1} \quad ; \quad (x \neq -3)$$

entonces:

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}} = \lim_{x \to -3} \sqrt{\frac{x - 3}{2x + 1}} = \sqrt{\lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{2x + 1}}$$

$$= \sqrt{\frac{-3 - 3}{-6 + 1}} = \sqrt{\frac{-6}{-5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Ejemplo II.13

Encontrar: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

Solución

En este caso, al igual que en el ejemplo anterior, no es posible aplicar el teorema II.10 al cociente, ya que el denominador se anula cuando $x \to -2$. Sin embargo, factorizando el numerador se tiene:

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} \qquad \text{...(T.II.7)}$$

Este cociente es $(x^2 - 2x + 4)$ si $x \neq -2$. Entonces la solución de este límite toma la siguiente forma:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x^2 - 2x + 4), \quad \text{si } x \neq -2$$

$$= \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 2x + \lim_{x \to -2} 4 \qquad \text{..(T.II.8)}$$

$$= \lim_{x \to -2} x \cdot \lim_{x \to -2} x - 2 \lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 4 \qquad \text{..(T.II.1) y (T.II.9)}$$

$$= (-2)(-2) - 2(-2) + 4 \qquad \text{..(T.II.2)}$$

$$= 12$$

luego:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$$

II.3 CONTINUIDAD

II.3.1 LIMITES LATERALES

Al estudiar el concepto de límite de una función, se hizo especial mención del interés por analizar los valores que puede tomar la variable independiente x en un intervalo abierto que contiene al valor a; pero no en a misma, esto es, en valores de x próximos a a, ya sean mayores o menores al valor a (es decir, en un entorno reducido de a). Sin embargo, supóngase por ejemplo la función:

$$f(x) = 5\sqrt{x - 3}$$

Como $f(x)$ no está definida para $x < 3$, la función no se define en cualquier intervalo abierto que contenga a 3. De aquí se puede considerar:

$$\lim_{x \to 3} 5\sqrt{x - 3}, \qquad \text{no existe}$$

Sin embargo, si x está restringida a valores mayores que 3, el valor de $\sqrt{x - 3}$ se puede hacer tan cercano a cero como se quiera, tomando x suficientemente cercano a 3, pero mayor.

En un caso como éste se aproxima x a 3 por la derecha, y entonces se considera el límite lateral por la derecha, el cual se define formalmente a continuación.

Límite lateral por la derecha.- Considérese una cierta función $y = f(x)$, donde x está definida en el intervalo abierto $(a, a + h)$, donde $h \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, según se observa en la figura II.18.

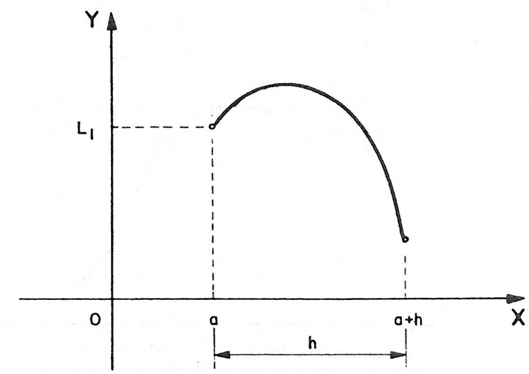


Figura II.18

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la derecha es L_1, y se denota:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1 \qquad \text{... (4)}$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < x - a < \delta \qquad \text{... (5)}$$

Nótese cómo en (5) no hay barras de valor absoluto para $x - a$, ya que si $x > a$, $x - a > 0$.

Se sigue de la expresión (4) para el ejemplo analizado:

$$\lim_{x \to 3^+} 5\sqrt{x - 3} = 0$$

Si al considerar el límite de la función, la variable independiente x está restringida a valores menores al valor a, se dice que x se aproxima a a por la izquierda, entonces el límite se llama límite lateral por la izquierda.

Límite lateral por la izquierda.- Considérese ahora la misma función $y = f(x)$, pero x está definida ahora en el intervalo $(a - h, a)$, donde como antes, $h \in \mathbb{R}$ y $h > 0$, según se muestra en la figura II.19.

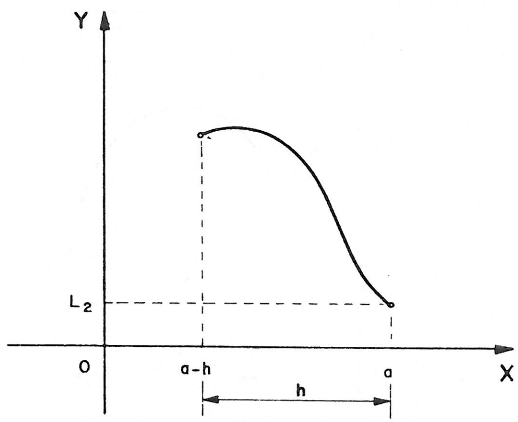


Figura II.19

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al valor a por la izquierda es L_2, y se denota:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_2 \qquad \ldots (6)$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < a - x < \delta \qquad \ldots (7)$$

Se puede ahora llamar al $\lim_{x \to a} f(x) = L$, límite bilateral o no dirigido, para distinguirlo de los límites laterales.

TEOREMA II.12

Hipótesis:

$f(x)$ tiene límite cuando x tiende al valor a y este límite es el número L.

Tesis:

Los límites cuando x tiende al número a por la izquierda y por la derecha, existen y ambos son iguales al número L.

La demostración de este teorema es semejante a la de los anteriores es decir, se ha explicado.

La interpretación geométrica de lo anterior se muestra a continuación en las figuras II.20(a) y II.20(b), donde puede observarse que x puede tender al número a, bien sea por la izquierda o bien por la derecha de a, teniéndose para ambos casos la posibilidad de que los límites sean diferentes ($L_1 \neq L_2$).

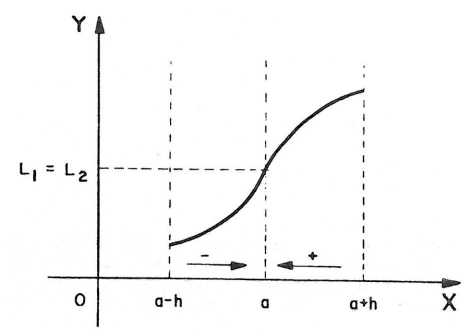


Figura II.20 (a)

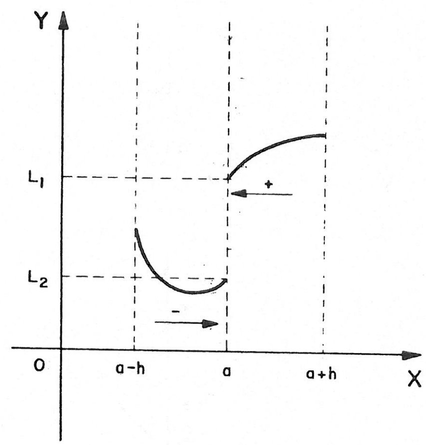


Figura II.20 (b)

En la figura II.20(a) $L_1 = L_2$: $\lim_{x \to a} f(x) = L_1 = L_2$, en cambio en la figura 20(b) $L_1 \neq L_2$, por lo tanto: $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

Ejemplo II.14

Sea h una función definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 3 \\ 10 - x & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Trazar la gráfica de h.

b) Encontrar $\lim_{x \to 3} h(x)$, si éste existe.

Solución

a) La gráfica de la función se muestra en la figura II.21.

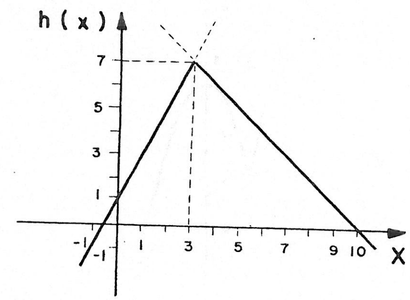


Figura II.21

b) $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x + 1) = 7 = L_2$

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = \lim_{x \to 3^+} (10 - x) = 7 = L_1$

Según el teorema II.12, como $L_1 = L_2$, $\lim_{x \to 3} h(x)$ existe y es igual a 7.

Ejemplo II.15

Sea g una función definida por:

$$g(t) = \begin{cases} 4 + t^2 & \text{si} \quad t < -2 \\ 5 & \text{si} \quad t = -2 \\ 12 - t^2 & \text{si} \quad t > -2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica y encontrar $\lim_{t \to -2} g(t)$ si existe.

Solución

La gráfica de la función g, se muestra en la figura II.22.

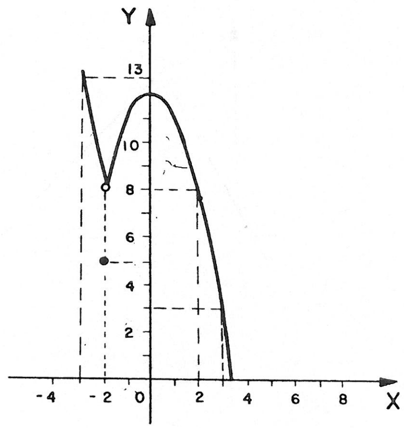


Figura II.22

$$\lim_{t \to -2^+} g(t) = \lim_{t \to -2^+} (12 - t^2) = 8 = L_1$$

$$\lim_{t \to -2^-} g(t) = \lim_{t \to -2^-} (4 + t^2) = 8 = L_2$$

Por lo tanto, por el teorema II.12, $\lim_{t \to -2} g(t)$ existe y es igual a 8.

Nótese que $g(-2) = 5$, lo cual no afecta a $\lim_{t \to -2} g(t) = 8$

Ejemplo II.16

Considérese la siguiente función definida por:

$$f(r) = \begin{cases} r + 2 & -3 < r \leq 1 \\ \frac{1}{2} r^2 - 3 & 1 < r \leq 4 \end{cases}$$

Investigar si existe $\lim_{r \to 1} f(r)$ y trazar su gráfica.

Solución

$$\lim_{r \to 1^+} f(r) = \lim_{r \to 1^+} \left(\frac{1}{2} r^2 - 3\right) = -\frac{5}{2} = L_1$$

$$\lim_{r \to 1^-} f(r) = \lim_{r \to 1^-} (r + 2) = 3 = L_2$$

Por lo tanto como $L_1 \neq L_2$, $\lim_{r \to 1} f(r)$ no existe, como se muestra en la figura II.23.

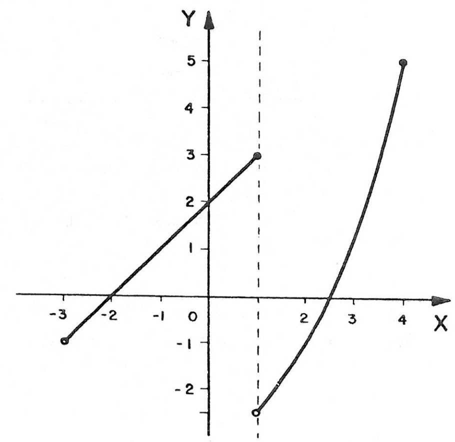


Figura II.23

Ejemplo II.17

Para la siguiente función dada por tres reglas de correspondencia, determinar sus límites laterales para los puntos $x = -2$ y $x = 5$. Hacer la gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{para } -4 \leq x \leq -2 \\ -3 & \text{para } -2 < x \leq 5 \\ 2x - 13 & \text{para } 5 < x < 10 \end{cases}$$

Solución

Para una mejor visualización del problema, se traza primeramente la gráfica, mostrada en la figura II.24.

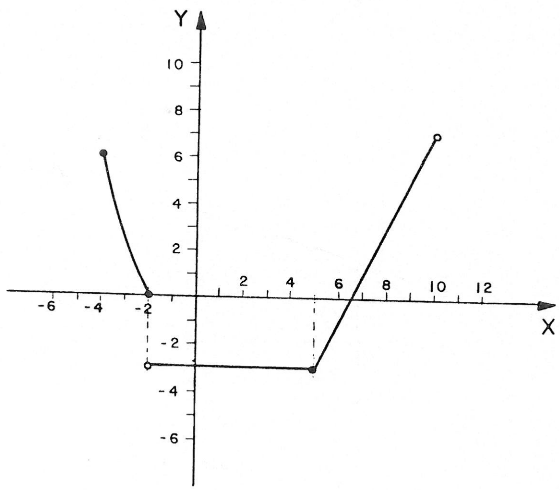


Figura II.24

Investigando si se cumple el teorema II.12:

a) Si $a = -2$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x^2 + 3x + 2) = 4 - 6 + 2 = 0 = L_1$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (-3) = -3 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2$, $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe

b) Si $a = 5$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (-3) = -3 = L_3$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (2x - 13) = 10 - 13 = -3 = L_4$$

Como $L_3 = L_4 = -3$, el límite de la función existe y vale:

$$\lim_{x \to 5} f(x) = -3$$

II.3.2 CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

La idea intuitiva de continuidad sugiere que la trayectoria de la gráfica de la función no presente cortes, huecos o saltos bruscos en el punto estudiado.

Para formalizar el concepto de continuidad conviene analizar los siguientes casos para una determinada función.

Primer Caso.

Sea f una función cuya representación gráfica es la siguiente:

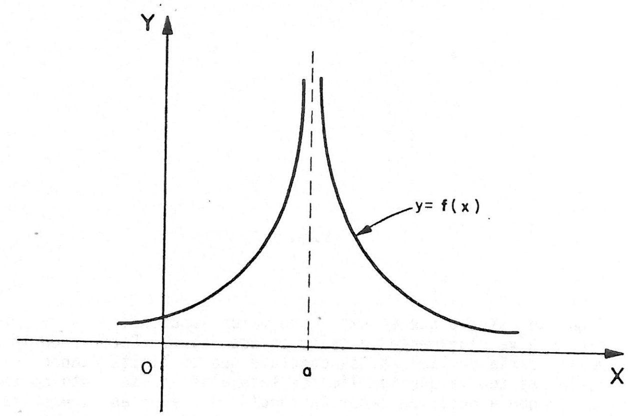


Figura II.25

Se puede ver que en $x = a$ no existe un valor funcional, provocando esto que la función f sea discontinua en dicho punto. Lo cual se expresa:

$f(a)$ no existe

luego: $f(x)$ no es continua en $x = a$

Segundo Caso.

Sea f una función representada gráficamente en la figura II.26.

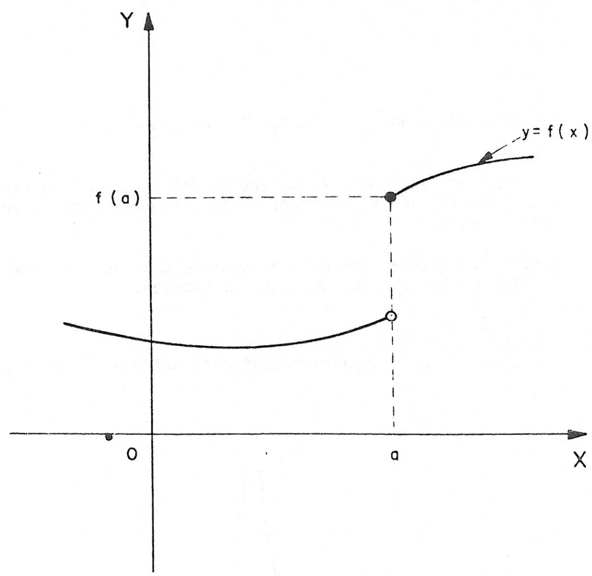


Figura II.26

Aquí se observa que sí existe un valor funcional para $x = a$. Sin embargo se ve claramente un salto en ese valor. Recordando lo expresado en la teoría de límites, se concluye que el límite cuando x tiende a a no existe, ya que los límites laterales en ese punto no son iguales. Por lo que a pesar de tener la función un valor en $x = a$ es discontinua en ese punto. Esto se puede expresar de la manera siguiente:

$f(a)$	existe
$\lim_{x \to a} f(x)$	no existe

luego: $f(x)$ no es continua en $x = a$

Tercer Caso.

Sea la función f cuya gráfica viene dada en la figura II.27.

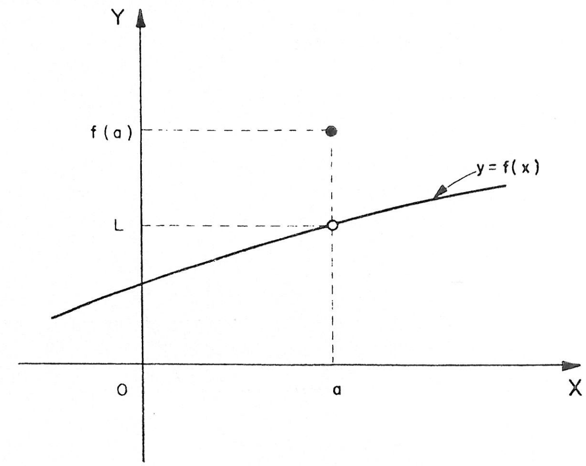


Figura II.27

Como se aprecia en la figura II.27 y recordando lo expresado en límites laterales, se tiene que la función y el límite en $x = a$ existen y sus valores son $f(a)$ y L respectivamente. A pesar de esto, se ve un hueco que manifiesta la discontinuidad, pero que invita a pensar en la igualdad del valor funcional y del límite para condicionar la continuidad.

Para este tercer caso las expresiones serán:

$f(a)$	existe
$\lim_{x \to a} f(x)$	existe

$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

luego: $f(x)$ no es continua en $x = a$

Los tres casos expuestos llevan a la definición siguiente, que resulta fundamental en el estudio de la continuidad de una función en un punto de su dominio.

Definición: Sea una función f definida en un cierto dominio D_f. Se dice que f es continua en x = a siendo que $a \in D_f$, si se cumplen las condiciones siguientes:

1. $f(a)$ exista
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ exista
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

Estas condiciones se pueden expresar simplemente en la tercera, es decir:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \ldots (8)$$

ya que su presencia en la igualdad implica necesariamente su existencia.

Basta con que una de las tres condiciones anteriores no se cumpla para que la función no sea continua en el valor a . La condición (8) es necesaria y suficiente para que la función y = f(x) sea continua en el punto a .

Ejemplo II.18

Sea la función f definida con:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica e investigar si es continua en el punto donde x = - 2.

Solución

En la figura II.28, se muestra la gráfica de la función, en la cual hay un salto en el punto x = - 2.

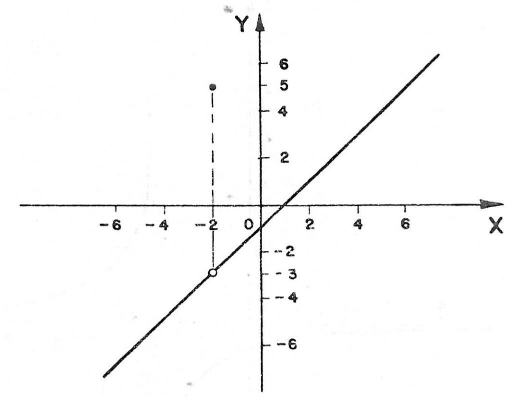


Figura II.28

Investigando paso a paso la condición de continuidad para x = - 2

$f(-2) = 5$ se satisface la primera condición.

$\lim_{x \to -2} f(x) = -3$ se satisface la segunda condición.

pero como:

$f(-2) \neq \lim_{x \to -2} f(x)$ la tercera condición no se satisface.

Luego se concluye que f es discontinua cuando x = - 2.

Ejemplo II.19

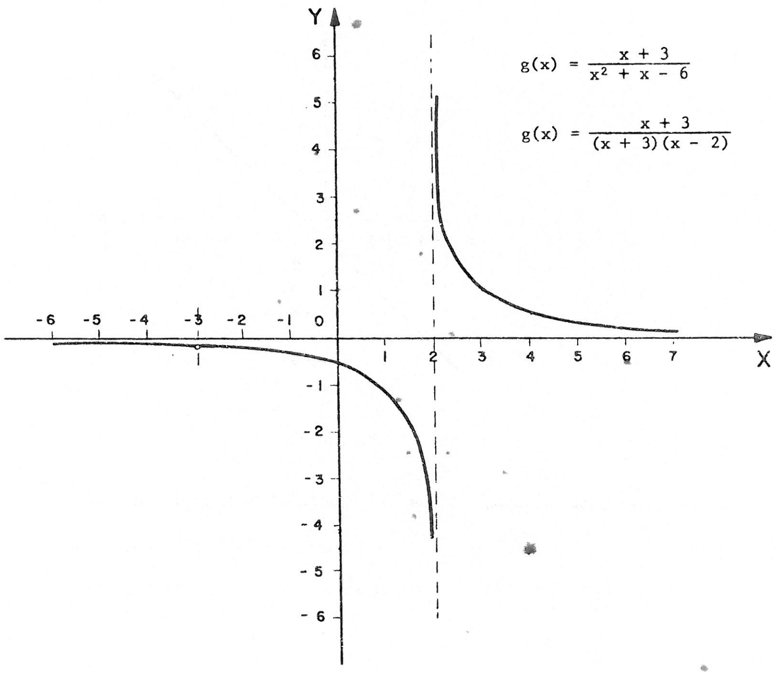
Considérese la siguiente función:

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

Investigar si existe algún punto de discontinuidad para dicha función.

Solución

En la figura II.29 se muestra la gráfica de g.



$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

$$g(x) = \frac{x + 3}{(x + 3)(x - 2)}$$

Figura II.29

Analizando la función g, se observa que no se encuentra definida para x = - 3, por tanto:

$$g(x) = \frac{1}{x - 2} \qquad \text{para} \quad x \neq -3$$

Esto se ve claramente como una interrupción en la gráfica de g cuando x = - 3, y así, al no existir f(-3), se concluye que la función es discontinua para x = - 3.

Además, existe otro punto de discontinuidad, ya que cuando x = 2 el denominador de la regla de correspondencia de la función se anula, no quedando definida para ese valor. Nuevamente se concluye que dicha función no es continua al no cumplirse la condición (1), o sea, al no existir f(2). Este último caso, también se puede verificar observando el comportamiento de g(x) en la figura II.29.

Ejemplo II.20

Sea la función h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ -\frac{x}{2} - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Trazar su gráfica e investigar si se cumple la condición de continuidad en el punto x = 2

Solución

En la figura II.30 se encuentra representada gráficamente la función h, donde se observa que en x = 2, hay una interrupción.

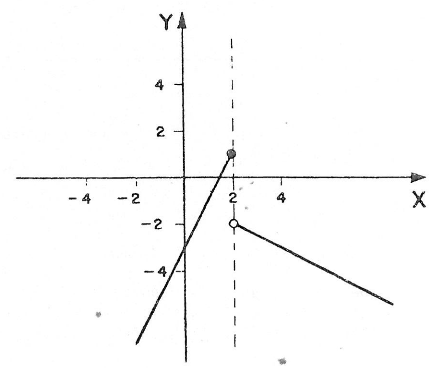


Figura II.30

Investigando paso a paso la condición de continuidad para x = 2, se tiene:

$$f(2) = 2(2) - 3 = 1,$$

por lo que satisface la primera condición.

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 3) = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^+} h(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(-\frac{x}{2} - 1\right) = -1 - 1 = -2$$

Ya que:

$$\lim_{x \to 2^-} h(x) \neq \lim_{x \to 2^+} h(x)$$

se concluye que:

$$\lim_{x \to 2} h(x)$$

no existe, por lo que la segunda condición de continuidad no se satisface y la función h es discontinua en $x = 2$

Ejemplo II.21

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x \leq 4 \\ kx - 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Encontrar el valor de la constante k, de tal manera que la función sea continua en $x = 4$.

Solución

Para que f(x) sea continua en $x = 4$, debe cumplirse:

a) $f(4) = 3(4) + 7 = 19$, por lo que se cumple la primera condición.

b) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x + 7) = 12 + 7 = 19$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx - 1) = 4k - 1$

Para que se cumpla la segunda condición, debe tenerse que:

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x)$, o sea:

$4k - 1 = 19$,

por lo tanto:

$k = 5$

así:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x) = 19 \Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 19$$

c) $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) = 19$

y f(x) es continua en $x = 4$

DISCONTINUIDAD REMOVIBLE

En los ejemplos anteriores se han analizado funciones que presentan discontinuidad para algún punto.

Si se analiza detenidamente cada caso, para ver la causa que origina la discontinuidad, se podrá observar cuándo ésta es originada al no cumplirse alguna de las tres condiciones de continuidad. Cuando la función es discontinua en $x = a$ y $f(a)$ no existe pero el límite

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

sí existe; o bien, cuando $f(a)$ y el límite existen pero no son iguales, entonces a la discontinuidad se le conoce como *discontinuidad removible*, pues basta redefinir

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

para que la discontinuidad desaparezca.

Pero se ha de recalcar que en esta forma se estaría definiendo una *nueva función*, siendo la *nueva función* idéntica a la anterior, excepto en el punto $x = a$.

En el caso en que la discontinuidad sea originada por la no existencia del

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

entonces no es removible, se llama discontinuidad esencial y no se podrá eliminar de ninguna manera.

Ejemplo II.22

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

estudiada en el ejemplo II.18. Indicar si la discontinuidad en el punto en que $x = -2$ es removible, y en caso afirmativo, removerla.

Solución

En el ejemplo II.18, se pudo observar (figura II.28), que la función f(x) presenta un salto para $x = -2$. Asimismo, se pudo observar que la función cumple para $x = -2$, las dos primeras partes de la condición de continuidad, es decir:

a) f(x) está definida para $x = -2$, vale $f(-2) = 5$

b) $\lim_{x \to -2} f(x)$ existe y vale: $L = -3$

Pero la tercera parte no se cumple, puesto que:

c) $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$; $-3 \neq 5$

Entonces la discontinuidad sí es removible, puesto que basta con redefinir $f(-2) = -3$, para que se cumpla la tercera parte, quedando la función continua para $x = -2$.

Si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2} & \text{si } x \neq -2 \\ -3 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Ejemplo II.23

Sea la función:

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^2 + x - 6}$$

estudiada en el ejemplo II.19. Indicar si la discontinuidad en el punto $x = 2$ es removible, y en caso de serlo, removerla.

Solución

La función g(x) no cumple con la primera parte, tal como se vio en dicho ejemplo.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2} \quad \text{no existe}$$

Obviamente, la función presenta una discontinuidad esencial, puesto que no es posible redefinir la función en $x = 2$ y que sea igual al valor del límite, puesto que el límite no existe.

II.3.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO

Hasta ahora se ha tratado únicamente la continuidad de una función en un punto, sin embargo es indispensable establecer el concepto de continuidad de una función en un intervalo.

Si se trata de un intervalo abierto se tiene la siguiente:

Definición:	Se dice que una función f es continua en un intervalo abierto (a, b), si y sólo si es continua en todos los puntos del intervalo.

Esto es, si se cumple la condición de continuidad en todo valor x tal que $a < x < b$.

Para establecer la continuidad de una función en un intervalo cerrado, es necesario definir antes la continuidad por la derecha y por la izquierda en un punto.

Definición:	Se dice que la función f es continua por la derecha del valor $x = a$, si y sólo si se satisfacen las tres condiciones: 1. f(a) existe 2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe 3. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Definición:	Se dice que la función f es continua por la izquierda del valor $x = b$, si y sólo si se satisfacen las tres condiciones: 1. f(b) existe 2. $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existe 3. $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Evidentemente, las definiciones anteriores no presentan ninguna novedad respecto al concepto de continuidad de una función en un punto. Unicamente se emplean límites laterales en lugar de límites comunes.

Definición:	Se dice que una función f cuyo dominio incluye al intervalo cerrado $[a, b]$ es continua en éste, si y sólo si es continua en el intervalo abierto (a, b) y es continua por la derecha de "a" y por la izquierda de "b".

II.3.4 TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

Las funciones continuas tienen un buen número de propiedades importantes, algunas de las cuales son consecuencia de las propiedades de los límites. Aplicando la definición de continuidad y los teoremas de operaciones con límites antes vistos, se tienen los siguientes teoremas sobre funciones continuas:

> TEOREMA II.13
>
> Hipótesis:
>
> f y g son dos funciones continuas en $x = a$.
>
> Tesis:
>
> 1. $f + g$ es continua en $x = a$
> 2. $f - g$ es continua en $x = a$
> 3. $f \cdot g$ es continua en $x = a$
> 4. $f \div g$ es continua en $x = a$, siempre que $g(a) \neq 0$

Demostración:

Se demostrará el inciso (1) de este teorema, para ilustrar el procedimiento para la prueba de los otros.

Ya que f y g son continuas en a, de la definición de continuidad se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

por lo tanto, del teorema II.8 se tiene:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = f(a) + g(a)$$

La ecuación anterior es la condición para que $f + g$ sea continua en $x = a$, lo cual proporciona la demostración del teorema II.13.

> TEOREMA II.14
>
> Hipótesis:
>
> f es una función polinomial.
>
> Tesis:
>
> f es continua en todo punto de su dominio.

Demostración:

Para demostrar este teorema considérese la función polinomial f, definida por:

$$f(x) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

en donde:

$b_o \neq 0$, n es un entero no negativo y $b_o, b_1, \ldots, b_n$ son números reales.

Con aplicaciones sucesivas de los teoremas de límites, se puede demostrar que si a es cualquier número del dominio de f entones:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b_o a^n + b_1 a^{n-1} + b_2 a^{n-2} + \ldots + b_{n-1} a + b_n$$

de donde se sigue que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

queda demostrado.

> TEOREMA II.15
>
> Hipótesis:
>
> $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ es una función racional.
>
> Tesis:
>
> $f(x)$ es continua para toda x de su dominio, siempre que $h(x) \neq 0$.

Demostración:

Como se vio en el capítulo I, una función racional puede ser expresada como el cociente de dos funciones polinomiales. Así, f queda definida como:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

donde g y h son dos funciones polinomiales; el dominio de f está formado por todos los números reales, excepto aquellos para los cuales $h(x) = 0$.

Si a es cualquier número en el dominio de f, entonces $h(a) \neq 0$. Así, por el teorema II.10:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} g(x)}{\displaystyle\lim_{x \to a} h(x)}$$

Ya que g y h son funciones polinomiales, por el teorema II.14, son continuas en a, y así:

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \quad y \quad \lim_{x \to a} h(x) = h(a)$$

y consecuentemente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{g(a)}{h(a)}$$

queda demostrado.

De acuerdo con las definiciones dadas en II.3.2 y II.3.3 para investigar la continuidad de una función en un intervalo, es necesario el análisis en todos los puntos en ese intervalo. Este trabajo será lógicamente imposible dada su magnitud. Sin embargo apoyándose en los teoremas sobre funciones continuas, el problema se reduce a analizar solamente los valores en los cuales no se cumplan las hipótesis de los teoremas, o bien aquellos en los que haya duda, por ejemplo, en donde haya cambio de regla de correspondencia.

Ejemplo II.24

Sea la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

determinar los intervalos para los cuales es continua.

Solución

g(x) es una función racional y de acuerdo al teorema II.15 será continua para todo valor de x, excepto aquellos que anulan al denominador. Por lo anterior, igualando a cero el denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \implies x = \pm 2$$

Para $x = -2$ ó $x = 2$, la función g no es continua. Entonces, los intervalos en que sí es continua son:

$$(-\infty, -2),\ (-2, 2)\ y\ (2, \infty)$$

Ejemplo II.25

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

investigar para qué valores de x es continua y dibujar su gráfica.

Solución

Apoyándose en el teorema II.14 puede fácilmente deducirse que f(x) es continua en los intervalos (-1, 1), (1, 2) y (2, 3) puesto que sus tres reglas de correspondencia son polinomios; sin embargo, existe duda cuando x = 1 y x = 2. Analizando los puntos dudosos:

a) Cuando x = 1

$$f(1) = 2(1) - 4 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 3) = 1 - 3 = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2x - 4) = 2 - 4 = -2$$

por lo tanto, como:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \quad \text{entonces existe}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -2$$

finalmente:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

por lo tanto se cumple la condición de continuidad y así, se concluye que la función f es continua, cuando x = 1.

b) Cuando x = 2

$$f(2) = 5 - (2)^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x - 4) = 2(2) - 4 = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x^2) = 5 - 4 = 1$$

luego, como:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

el $\lim_{x \to 2} f(x)$; no existe

y por lo tanto se concluye que f no es continua cuando $x = 2$. En la figura II.31, aparece la gráfica de dicha función.

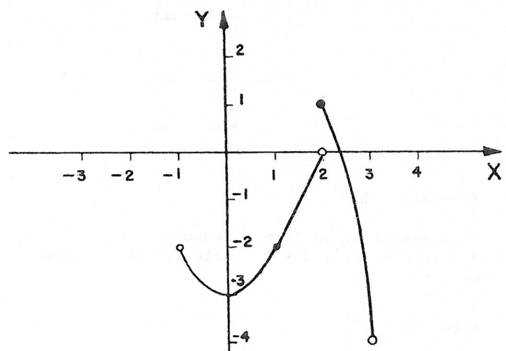


Figura II.31

Ejemplo II.26

Analizar la continuidad de la función h(t), indicando los valores para los cuales es discontinua y los intervalos donde es continua. Dibujar su gráfica.

$$h(t) = \begin{cases} \cot t & \text{si} \quad -\pi < t \leq -\frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} t + 1 & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ t^2 + 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Solución

Las reglas de correspondencia que forman h(t) representan algunas de las funciones trascendentes estudiadas en el capítulo I, por lo cual se puede afirmar:

a) La función cotangente es continua, excepto en los puntos en que

$t = \pm n\,\pi$, en donde n es un número entero positivo. En este caso no presenta ningún punto de discontinuidad porque su intervalo de definición no incluye a los valores señalados.

b) La función seno siempre es continua.

c) La suma de la función seno más la función constante $t = 1$, también es continua, de acuerdo con el teorema II.13.

d) La función $t^2 + 1$ siempre será continua por el teorema II.14. pues es una función polinómica.

e) Los únicos valores dudosos son cuando $t = -\frac{\pi}{2}$ y cuando $t = 0$.

Analizando los puntos dudosos:

a) Cuando $t = -\frac{\pi}{2}$

h(t) está definida por medio de la primera regla de correspondencia y vale:

$$h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^-} h(t) = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^-} \cot t = 0$$

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} h(t) = \lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{sen} t + 1) = 0$$

por lo tanto el límite existe y vale $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} h(t) = 0$

Por último:

$$\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}} h(t) = h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

luego la función es continua en $t = -\frac{\pi}{2}$

b) Cuando $t = 0$

h(t) no está definida puesto que ningún intervalo de definición de las tres reglas de correspondencia incluye al valor $t = 0$. Al no cumplirse la primera parte de la condición de continuidad, h(t) no es continua para $t = 0$.

Se hace notar que el límite en ese punto sí existe, como se puede comprobar, es decir, los límites laterales son iguales:

$$\lim_{t \to 0^-} h(t) = \lim_{t \to 0^+} h(t) = 1$$

Sin embargo, al no poder igualar el valor del límite, que sí existe, con el valor de la función en ese punto, por no estar definida, la condición de continuidad no se cumple y la función $h(t)$ es discontinua para $t = 0$.

Resumiendo:

$h(t)$ es continua para los siguientes intervalos:

$$(-\pi, 0) \quad y \quad (0, \infty)$$

o bien $h(t)$ es discontinua para $t = 0$.

La gráfica de la función puede observarse en la figura II.32.

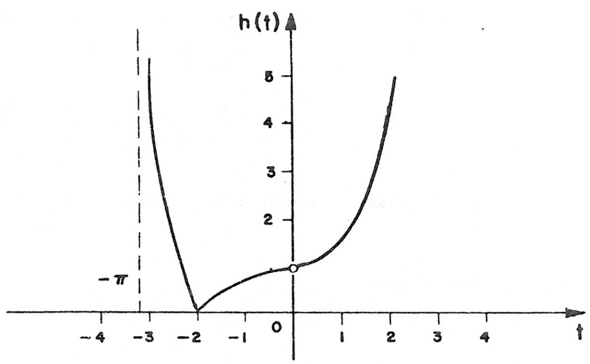


Figura II.32

II.3.5 INCREMENTOS

Sea $f = \{(x, y) \mid y = f(x);\ x \in D_f\}$ y sean x_1 y x_2 dos elementos del dominio de la función. Llámese a x_1 *valor inicial de* x y a x_2 *valor final de* x. Si la variable independiente x pasa de un valor inicial x_1 a un valor final x_2, tal que se tenga $x_2 = x_1 + \Delta x$, a la diferencia:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \dots (9)$$

se le llama *incremento de* x y debe leerse *delta equis*. Este incremento indica el cambio en el valor de x y puede ser un número cualquiera, con la condición de que $(x_1 + \Delta x)$ esté en el dominio de la función.

Dicho incremento podrá ser:

$$\Delta x > 0 \implies x_1 < x_2$$

$$\Delta x < 0 \implies x_1 > x_2$$

$$\Delta x = 0 \implies x_1 = x_2$$

Ejemplo II.27

Si a partir de la pareja ordenada (3, 7) la variable x adquiere los valores 4.1, 2 y 3. Calcular los incrementos correspondientes Δx.

Solución

Sea:

$$x_1 = 3$$

si: $x_2 = 4.1$; $\Delta x = x_2 - x_1 = 4.1 - 3 = 1.1 > 0$ ya que $x_1 < x_2$

si: $x_2 = 2$; $\Delta x = x_2 - x_1 = 2 - 3 = -1 < 0$, ya que $x_1 > x_2$

si: $x_2 = 3$; $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 3 = 0 = 0$, ya que $x_1 = x_2$

De manera similar, si la función $y = f(x)$ pasa del valor inicial y_1 a un valor final y_2, la diferencia:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

se denomina *incremento de la variable dependiente*. El valor inicial de la variable dependiente (y_1), es aquel valor que adquiere la función $y = f(x)$ cuando la variable independiente x toma el valor inicial x_1.

El valor final de la variable dependiente (y_2) es aquel que adquiere la función $y = f(x)$ cuando a la variable independiente x se le asigna un valor final x_2.

Por lo tanto:

$$y_1 = f(x_1)$$

si el valor de x cambia de x_1 a $x_2 = x_1 + \Delta x$, entonces se tendrá el correspondiente incremento de la variable dependiente.

O sea:

$$y_1 + \Delta y = f(x_1 + \Delta x)$$

de donde:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

Es decir, el incremento de "y" es igual a su valor final menos su valor inicial.

Al igual que con la variable independiente, el incremento Δy podrá ser:

$$\Delta y > 0 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

$$\Delta y < 0 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Delta y = 0 \implies f(x_1) = f(x_2)$$

Ejemplo II.28

Sea la función $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 4x + 12\}$, si x cambia de $x_1 = -2$ a $x_2 = 3$, calcular los incrementos de las dos variables.

Solución

Para la variable x:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta x = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

para la variable y:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

$$\Delta y = f(3) - f(-2)$$

$$\Delta y = \left[(3)^2 - 4(3) + 12\right] - \left[(-2)^2 - 4(-2) + 12\right]$$

$$\Delta y = 9 - 24 \implies \Delta y = -15$$

La representación geométrica de estos resultados se muestra en la figura II.33, en donde puede observarse que:

$$\Delta x > 0 \quad \text{ya que} \quad x_2 > x_1$$

$$\Delta y < 0 \quad \text{ya que} \quad f(x_2) < f(x_1)$$

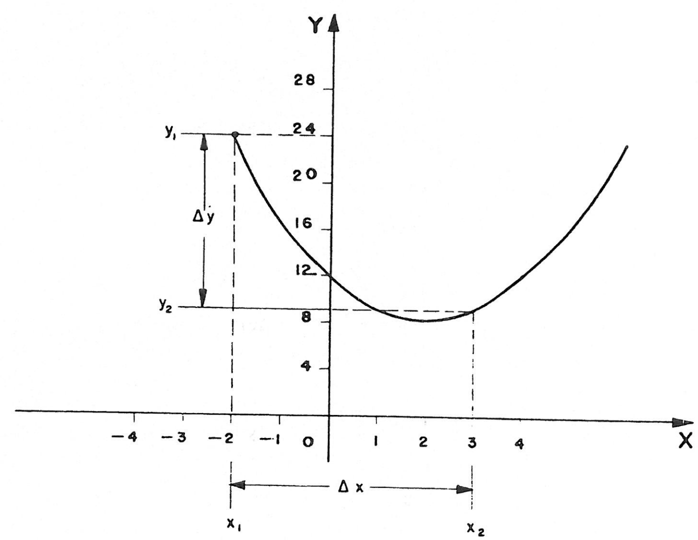


Figura II.33

Ejemplo II.29

Supóngase una esfera metálica de radio $r = 25$ cm. Si por efectos de variación de temperatura su diámetro aumenta en 0.002 cm., ¿cuál será la variación de su volumen y de su superficie?.

Solución

El volumen de la esfera está dado por:

$$v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Delta v = v(r_1 + \Delta r) - v(r_1)$$

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi (r_1 + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

donde:

$$r_1 = 25 \ , \quad \Delta r = \frac{\Delta d}{2} = 0.001$$

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi (25.001)^3 - \frac{4}{3}\pi (25)^3$$

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi (15,626.87507 - 15,625)$$

$$\Delta v = \frac{4}{3}\pi (1.87507) \Longrightarrow \Delta v = 7.85429 \text{ cm}^3$$

El área de la esfera está dada por:

$$s(r) = 4\pi r^2$$

$$\Delta s = s(r_1 + \Delta r) - s(r_1)$$

$$\Delta s = 4\pi (r_1 + \Delta r)^2 - 4\pi r_1^2$$

donde:

$$r_1 = 25 \text{ cm} \quad \text{y} \quad \Delta r = 0.001 \text{ cm.}$$

$$\Delta s = 4\pi (25.001)^2 - 4\pi (25)^2 \ ; \quad \Delta s = 4\pi (625.05 - 625)$$

$$\Delta s = 4\pi (0.05) \Longrightarrow \Delta s = 0.62832 \text{ cm}^2$$

II.3.6 CONTINUIDAD POR MEDIO DE INCREMENTOS

Definición: Se dice que una función es continua para un cierto valor de la variable independiente, si el incremento de la variable dependiente tiende a cero, al tender a cero el incremento de la variable independiente.

Esto es, en notación de incrementos, el hecho de que la función $y = f(x)$ sea continua para un cierto valor de x, se expresa de la siguiente manera:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Ejemplo II.30

Averiguar si la función $f(x) = 3x^2 - 2x$ es continua en el punto (2, 8); utilizar para ello el concepto de continuidad por medio de incrementos.

Solución

El problema consiste en darle a x incrementos Δx cada vez más pequeños a partir del valor dado de x en el punto en estudio, y observar si el correspondiente incremento Δy de la función también tiende a cero.

Para ello constrúyase una tabla con las siguientes columnas:

x_1 = valor inicial de x ; $f(x_1)$ = valor inicial de f(x)

Δx = incremento de x ; $\Delta f(x)$ = incremento de f(x)

x_2 = valor final de x ; $f(x_2)$ = valor final de f(x)

x_1	Δx	$x_2 = x_1 + \Delta x$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$
2	1.0	3.0	8	21.0	13.00
2	0.8	2.8	8	17.92	9.92
2	0.6	2.6	8	15.08	7.08
2	0.4	2.4	8	12.48	4.48
2	0.2	2.2	8	10.12	2.12
2	0.1	2.1	8	9.03	1.03
2	0.01	2.01	8	8.1003	0.1003
	↓	↓		↓	↓
	0	2		8	0

De la tabla anterior se observa que cuando Δx tiende a cero (esto se logra haciendo x_2 cada vez más próximo a x_1), el incremento correspondiente de $f(x)$ también tiende a cero, y por lo tanto se concluye que la función f es continua en el punto (2, 8).

Ejemplo II.31

Considérese la siguiente función:

$$y = f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Trazar la gráfica de f.

b) Demostrar que la función es discontinua para $x = 1$, aplicando el concepto de continuidad por incrementos.

Solución

a) A continuación, en la figura II.34, se muestra la gráfica de f.

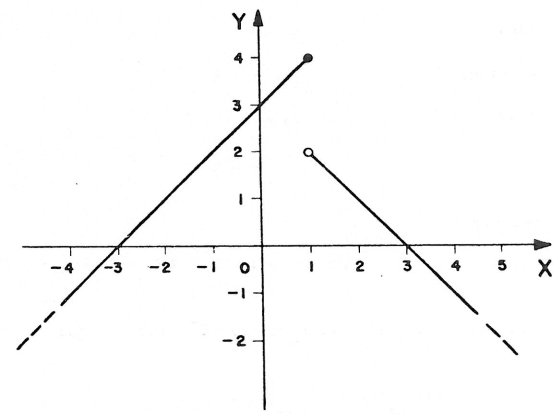


Figura II.34

b) Se demostrará ahora que f es discontinua en $x = 1$

Para que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y$ exista y sea igual a cero, es necesario que:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y = 0$$

El $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \Delta y$ puede obtenerse sabiendo que para $x \leq 1$, $y = 3 + x$, de donde:

$$\Delta y = 3 + (x + \Delta x) - 3 - x$$

$$\Delta y = \Delta x \implies \lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0^-} \Delta x = 0$$

El $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \Delta y$ puede calcularse recordando que:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

para: $x > 1$

se tiene: $y = 3 - x$

o sea: $y_2 = 3 - x$

$$y_1 = f(x_1) = 4$$

entonces:

$$\Delta y = 3 - x - 4 \implies \Delta y = -x - 1$$

Por otro lado, la condición $\Delta x \to 0^+$ implica que $x \to 1^+$, así:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 1^+} (-x - 1) = -1 - 1 = -2$$

finalmente, como $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \Delta y \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \Delta y \neq 0$, el límite no existe

y se concluye que la función no es continua para $x = 1$.

Se demostrará ahora que el concepto de continuidad por incrementos es equivalente al definido anteriormente.

Se estableció que para que una función sea continua se debe cumplir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

El incremento de la función también se puede expresar como la diferencia entre el valor final de la función y su valor inicial, es decir:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

donde "a" es el valor inicial de la variable independiente x.

Así:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(a + \Delta x) - f(a) \right] = 0$$

Según las propiedades de los límites, o sea, aplicando el teorema II.8:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(a + \Delta x) - f(a) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(a) = 0$$

es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(a)$$

ahora, si $\Delta x = x - a$, entonces el hecho de que $\Delta x \to 0$ implica que $x \to a$, por lo tanto:

$$\lim_{x \to a} f(a + x - a) = f(a)$$

ya que $f(a)$ es independiente de Δx.

Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

que es precisamente la condición de continuidad de una función en un punto, anteriormente estudiada.

Tal vez el concepto de *continuidad por medio de incrementos* permita tener una idea más clara acerca de la continuidad de una función.

Resulta claro que una función continua no puede adquirir dos valores enteros sucesivos por medio de *saltos bruscos*, ya que pueden dársele incrementos a la variable independiente en cantidades tan pequeñas como se desee, con lo cual la función variará en valores tan pequeños como se quiera, tendiendo ambos a cero de acuerdo a la condición de continuidad últimamente analizada.

Las figuras II.35 y II.36 expresan gráficamente la idea mencionada.

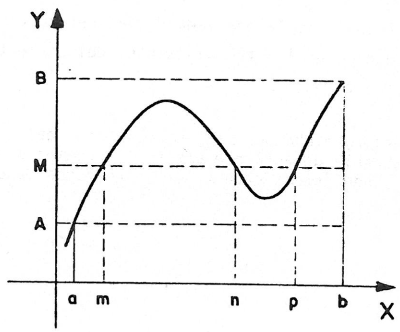


Figura II.35

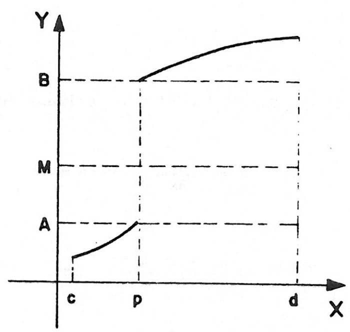


Figura II.36

Nótese cómo en la figura II.35 la función f toma el valor de B a partir del de A, después de adquirir todos los valores comprendidos entre A y B; es decir, si la función f tiene un valor A cuando x = a y un valor B cuando x = b, la función tomará un valor cualquiera M comprendido entre A y B para por lo menos un valor de x comprendido entre a y b.

Por el contrario, en la figura II.36 se observa cómo la función *salta* bruscamente desde A hacia B, cuando x = p.

CAPITULO III LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES

INTRODUCCION

El presente capítulo se dedica al estudio del concepto *derivada de una función*. Este concepto unido al de función y límite constituyen la parte medular del Cálculo Diferencial.

La derivada es en esencia un límite muy especial y de múltiples aplicaciones en el campo de la Ingeniería. La invención de esta valiosa herramienta matemática se debió a los trabajos de dos notables matemáticos: Gottfried W. Leibniz e Isaac Newton en el siglo XVII.

III.1 DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Sea la función $y = f(x)$. Como se sabe, al darle a x un incremento Δx en un punto x_o, le corresponderá a y un incremento.

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$$

Al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ suele llamársele cociente incremental o cociente de los incrementos.

Se define como la derivada de la función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto x_o al límite, si existe, del cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando Δx tiende a cero.

Es decir, dicha derivada es el límite del cociente del incremento de la variable dependiente entre el incremento de la variable independiente, cuando éste tiende a cero y se puede denotar por $f'(x_o)$.

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Ejemplo III.1

Dada la función $f(x) = x^2$, su derivada en el punto $x_o = 3$ es:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3 + \Delta x)^2 - (3)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 6\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 9}{\Delta x} \implies f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6; \quad f'(3) = 6$$

Con esto se observa que el valor de la derivada de una función, depende del punto en donde se calcule; así, para el ejemplo anterior, si se calcula la derivada para cualquier valor de x se tiene:

Para $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

III.1.1 INTERPRETACION FISICA DE LA DERIVADA

Supóngase que se deja caer un cuerpo desde una altura de 25 metros y que se desea conocer la velocidad del móvil cuando ha transcurrido un segundo.

La altura del cuerpo $(y = f(t))$ será según las ecuaciones de caída libre:

$$f(t) = y_o - \frac{1}{2} gt^2$$

Considerando: $g = 9.81 \text{ m/s}^2; \quad y_o = 25 \text{ m}$

queda: $f(t) = 25 - 4.905\, t^2$

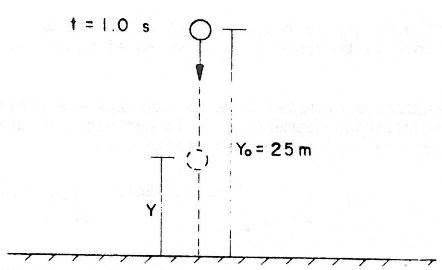


Figura III.1

El problema consiste en encontrar la velocidad en un instante determinado. Para esto hay que entender primeramente, lo que es la velocidad media durante un intervalo de tiempo, o sea, desde el instante t hasta $t + \Delta t$, definiéndola como el cociente:

$$\boxed{\begin{aligned} V_m &= \frac{\text{diferencia de distancias en el tiempo transcurrido}}{\text{tiempo transcurrido}} \\ &= \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \end{aligned}}$$

Considerando el instante $t = 1.0$ s ; la distancia recorrida después de 0.5 s es:

$$f(1.5) - f(1) = \left[25 - 4.905\,(1.5)^2\right] - \left[25 - 4.905\,(1)^2\right] = -6.13$$

(el signo menos del resultado significa que el cuerpo está bajando).

Así la velocidad media en el intervalo $[1,\ 1.5]$ será:

$$V_m = \frac{-6.13}{0.5} = -12.26 \text{ m/s}$$

Ahora, considerando el instante $t = 1$ y después de haber transcurrido Δt segundos, la distancia será:

$$V_m = \frac{-9.81\,\Delta t - 4.905\,(\Delta t)^2}{\Delta t} = -9.81 - 4.905\,\Delta t$$

Tomando valores de Δt cada vez menores, la velocidad media se acerca cada vez más a -9.81 m/s. Por ejemplo si $\Delta t = 0.1$, la velocidad es -10.30 m/s. Si $\Delta t = 0.01$ será -9.86 m/s.

Lo importante es que se puede obtener la velocidad media tan cerca de -9.81 como se desee, con sólo tomar a Δt lo suficientemente pequeño. O sea que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} (-9.81 - 4.905\,\Delta t) = -9.81 \text{ m/s}$$

y es lógico llamar a este límite, velocidad instantánea en $t = 1.0$ s.

Con esto se puede concluir que, para obtener una velocidad instantánea en cualquier instante t, bastará obtener el límite de la velocidad media cuando $\Delta t \to 0$.

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} V_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

La expresión anterior es claramente la definición de derivada aplicada a la función $f(t)$: $f'(t) = V(t)$.

Se escogió un problema de velocidad por la familiaridad que el alumno tiene con este tipo de fenómenos, pero existen infinidad de problemas físicos y geométricos en donde el concepto de derivada surge en el solo análisis del problema.

III.1.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA

TANGENTE A UNA CURVA.- El trazo de la recta tangente a una curva en un punto dado de ella, es una herramienta importante en la resolución de muchos problemas geométricos y matemáticos en general.

Antes de la invención del cálculo diferencial, el problema de trazo de la recta tangente pudo ser resuelto sólo para algunos casos especiales. Por ejemplo, la recta tangente a una circunferencia en un punto de ella se llegó a trazar, sabiendo que ésta era perpendicular al radio correspondiente en dicho punto. Sin embargo para otro tipo de curvas la solución al problema no había sido satisfactoria.

Fue hasta la aparición del matemático francés Pierre de Fermat, cuando se concibió la recta tangente a una curva, como la posición límite de la recta secante a dicha curva cuando los dos puntos de intersección de la secante con la curva se aproximan uno al otro.

La idea que tenía Fermat acerca de lo que debía entenderse por *posición límite de la secante*, era vaga e imprecisa y no llegó a establecerse un método generalizado que pudiera ser aplicable a cualquier caso.

No fue sino hasta la publicación de los trabajos de los matemáticos Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz, relativos a la formalización de los conceptos de límite y derivada, cuando se dispuso de las herramientas necesarias para precisar la solución del problema de la recta tangente a una curva en un punto.

Consideremos una curva continua y en ella un punto fijo P. La recta que pasa por el punto P y corta a la curva en otro punto Q, se llama secante de la curva. (Véase figura III.2.).

Si se mueve el punto Q sobre la curva acercándose al punto P, la secante gira alrededor de P, y tiende a una posición límite que es la recta PT.

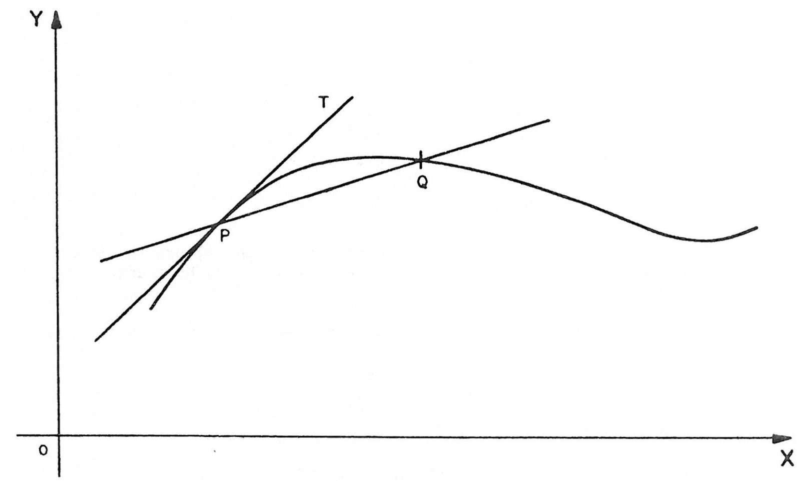


Figura III.2

Se considera que la recta PT es el límite de la secante PQ y se define como la tangente a la curva en el punto P.

INTERPRETACIÓN GEOMETRICA DE LA DERIVADA.- A continuación se analizará el significado geométrico de la derivada de una función en un punto cualquiera x_0, teniendo presente que:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Para ello considérese una curva C que sea la gráfica de una función continua f cuya ecuación sea $y = f(x)$.

Considérese además sobre la curva C:

- un punto P (x_o, y_o).
- un punto Q (x, y).
- la recta tangente PT a la curva C en x_o.
- la recta secante PQ a la curva C, tal y como se muestra en la figura III.3.

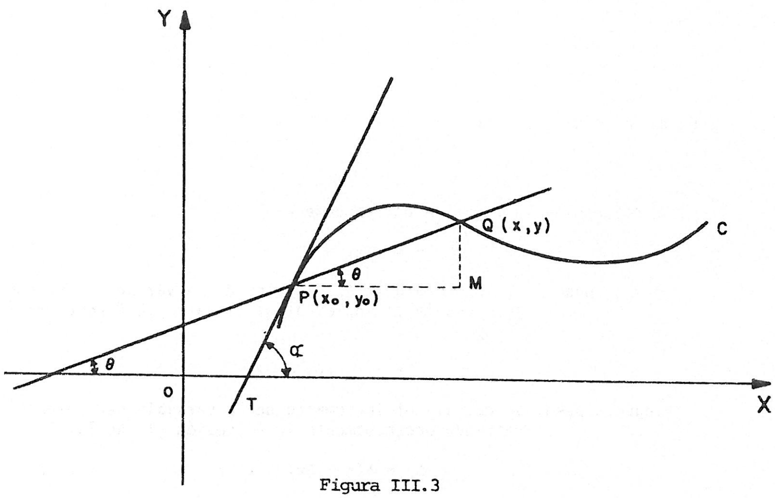


Figura III.3

De la figura anterior se puede observar que:

- Si el punto Q se mueve sobre la curva C, el ángulo de inclinación θ de la secante PQ es variable. Si Q se acerca a P, entonces el ángulo θ se aproxima al ángulo de inclinación α de la recta tangente PT. Lo anterior se puede escribir simbólicamente como:

$$\lim_{Q \to P} \theta = \alpha$$

que se lee:

el ángulo θ tiende al valor del ángulo α cuando el punto Q tiende a la posición de P.

- El hecho de que Q tienda a P implica que x tienda a x_o, es decir:

$$Q \to P \Leftrightarrow x \to x_o$$

Considerando el triángulo rectángulo PQM se tiene:

$$\frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{y - y_o}{x - x_o} = \tan \theta$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se tendrá:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \tan \theta$$

Considerando que la función tangente es continua en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ se tendrá:

$$\lim_{x \to x_o} \tan \theta = \tan \alpha = m_{pt}$$

lo cual significa que la tangente del ángulo de inclinación de la recta secante, o sea la pendiente de PQ tiende a la pendiente de la recta tangente PT si el punto Q tiende a P.

De lo anterior, se puede concluir:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = m_{pt}$$

lo que significa que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto, es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

III.1.3 NOTACIONES

Hasta este momento se ha utilizado como notación para la derivada de una función $f(x)$, a $f'(x)$. Pero existen otras notaciones las cuales indican lo mismo. Así la derivada de una función $y = f(x)$ se puede escribir:

y' o bien $f'(x)$ que es la notación de Lagrange.

$D_x y$ ó $D_x f(x)$ que es la notación de Cauchy.

$\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{d}{dx} f(x)$ que es la notación de Leibniz.

$\dot{y}$ ó $\dot{f}(x)$ que es la notación de Newton.

La notación de Lagrange sugiere que al derivar una función $y = f(x)$ en todos los puntos de su dominio, se obtiene otra función $y' = f'(x)$, cuyo dominio está constituido por todos los puntos del dominio de la función $y = f(x)$ para los cuales existe la derivada.

Esta notación resulta útil también al representar el valor de la derivada $f'(x)$ para un valor de x determinado $x = x_0$, escribiendo $f'(x_0)$, como es el caso del ejemplo III.1 donde $f'(3) = 6$ es el valor de la derivada de $f(x) = x^2$ cuando $x_0 = 3$.

La notación de Cauchy permite representar el proceso de obtención de la derivada de una función como un operador (D_x) que aplicado a la función $y = f(x)$ la transforma en la función $y' = f(x)$:

$$D_x f(x) = f'(x)$$

Respecto a la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}$, aunque tiene la forma de un cociente, por ahora se considerará que dicho cociente representa un solo ente.

NOTA: En el capítulo VI se verá que la derivada en sí es un cociente y se aplicará este hecho a fines específicos.

Esta notación también permite representar el proceso de derivación con el operador $\frac{d}{dx}$, que aplicado a una función, la transforma en su derivada.

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

Newton utilizó su notación primordialmente en problemas físicos, donde la variable independiente es el tiempo, por lo que por costumbre, esta notación se usa frecuentemente en mecánica y en general en problemas donde el tiempo es la variable independiente.

En el desarrollo de estos apuntes se emplearán indistintamente las notaciones anteriores según la conveniencia que presenta cada una.

III.1.4 CALCULO DE LA DERIVADA A PARTIR DE LA DEFINICION

Como se ha visto, la derivada de una función $y = f(x)$, es:

$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, por lo que para obtener la derivada de una función, es necesario calcular el límite anterior. Una forma de hacerlo es sustituir los elementos necesarios dentro de la expresión de la definición, hacer las simplificaciones adecuadas y calcular el límite.

Otra forma es aplicar el método de los cuatro pasos, que es solamente un procedimiento ordenado y posiblemente más cómodo, para obtener la derivada de una función por medio de la definición.

METODO DE LOS CUATRO PASOS:

Partiendo de la regla de correspondencia:

$$y = f(x) \qquad \ldots (1)$$

Primer paso: Se incrementa en Δx el valor de la variable independiente, resultando incrementada la variable dependiente y, en Δy.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad \ldots (2)$$

Segundo paso: Se calcula el incremento de la variable dependiente, restando ordenadamente la expresión (1) de la (2).

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \ldots (3)$$

Tercer paso: Se calcula el cociente de los incrementos, dividiendo la expresión (3) entre Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \ldots (4)$$

Cuarto paso: Se calcula el límite del cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, cuando el incremento Δx tiende a cero.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \ldots (5)$$

Si este límite existe, entonces dicho límite es la derivada deseada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = D_x y$$

y se dice que la función $y = f(x)$ es derivable.

Es conveniente observar cómo los tres primeros pasos son puramente mecánicos y se hacen en forma rutinaria. El cuarto paso requiere un poco más de ingenio y manipulación algebraica para calcular el límite.

Si $y = f(x)$ es una función continua, se tiene $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ con lo que en (5) se tendrá el límite de un cociente donde el numerador y denominador tienden a cero, y sin embargo, puede existir el límite.

Ejemplo III.2

Calcular la derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$

Solución

1°) $f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 1 = 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 1$

2°) $f(x + \Delta x) - f(x) = 3x^2 + 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 1 - (3x^2 + 1)$

$= 6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2$

3°) $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{6x\,\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

4°) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) = 6x$

esto es:

$$f'(x) = 6x$$

Ejemplo III.3

Obtener: $D_x\left(\dfrac{1}{x}\right)$

tómese: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución

1°) $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$

2°) $f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x + \Delta x)}{x^2 + x\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}$

3°) $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\dfrac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x}}{\Delta x} = \dfrac{-1}{x^2 + x\Delta x}$

4°) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x^2 + x\Delta x} = \dfrac{-1}{x^2}$

O sea:

$$D_x\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Es conveniente, observar que este procedimiento para el cálculo de la derivada, es la reafirmación del concepto de derivada, y no es un método práctico para derivar. Más adelante se encontrarán fórmulas de derivación generalizadas para cualquier tipo de función, mismas que se deducen a partir de la definición.

Ejemplo III.4

Calcular: $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x - 2}$

Sea: $y = \sqrt{x - 2}$

Solución

1°) $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x - 2}$

2°) $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x - 2}$

3°) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x - 2}}{\Delta x}$

4°) $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + \Delta x - 2} - \sqrt{x - 2}}{\Delta x}$

Para calcular este límite conviene racionalizar el numerador del cociente incremental. Esto se logra multiplicando y dividiendo por el conjugado de dicho numerador.

$$\frac{\sqrt{x+\Delta x-2}-\sqrt{x-2}}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x+\Delta x-2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2})}$$

$$=\frac{x+\Delta x-2-(x-2)}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2})}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2}}$$

entonces:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x-2}+\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-2}}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

esto es:

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

Ejemplo III.5

Aplicando la definición de derivada (método de los cuatro pasos); hallar la derivada de la función:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

Solución

1°) $y+\Delta y=\dfrac{2(x+\Delta x)+3}{x+\Delta x-1}$

2°) $\Delta y=\dfrac{2x+2\Delta x+3}{x+\Delta x-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{(2x+2\Delta x+3)(x-1)-(2x+3)(x+\Delta x-1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

$$=\frac{2x^2-2x+2x\Delta x-2\Delta x+3x-3-2x^2-2x\Delta x+2x-3x-3\Delta x+3}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

$$=\frac{-5\,\Delta x}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$

3°) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-5\,\Delta x}{\Delta x\,(x+\Delta x-1)(x-1)}=\dfrac{-5}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$

4°) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-5}{(x+\Delta x-1)(x-1)}=\dfrac{-5}{(x-1)(x-1)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

III.1.5 FUNCION DERIVADA

En los temas anteriores se han tratado derivadas de funciones algebraicas por ejemplo:

$$D_x\sqrt{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}} \quad \text{ó} \quad D_x x^2=2x$$

En este tema se debe puntualizar que la derivada de cualquier función es otra función. Así la derivada de la función $f(x)=x^3$ es la función $f'(x)=3x^2$.

Al derivar una función $f(x)$, se obtiene otra función $f'(x)$ llamada *función derivada* que tiene regla de correspondencia al límite:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

siendo su dominio el conjunto de valores x del dominio de $y=f(x)$ en donde el límite anterior existe, o sea, donde la función $y=f(x)$ es derivable.

Entonces de la función:

$$f = \left\{ (x,\ y)\ \middle|\ y = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},\ x \in D_f \right\}$$

$$D_{f'} \subset D_f$$

El proceso de derivación se puede entender ahora como un operador "D" que transforma una función en su derivada.

Función	Operador	Función derivada
$y = f(x)$	D_x	$y' = f'(x) = D_x\ f(x)$

La notación de Cauchy para la derivada es apropiada cuando a la derivación se le trata expresamente como el operador que realiza la transformación.

Ejemplo III.6

Obtener la función derivada y el dominio de:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2;\quad x \in (-3,\ 2)$$

graficar $\qquad y = f(x)$ y $y' = f'(x)$

Solución

Si $y = \frac{1}{2}x^2$; aplicando el método de los 4 pasos se tiene:

1°) $y + \Delta y = \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 = \frac{1}{2}\left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right]$

2°) $\Delta y = \frac{1}{2}\left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right] - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(2x\Delta x + (\Delta x)^2)$

3°) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}\right] = x + \frac{\Delta x}{2}$

4°) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = x$

$$y' = D_x \frac{1}{2}x^2 = x \implies f'(x) = x$$

El dominio de $y' = f'(x)$ está determinado por todos los valores de x donde es derivable $y = f(x)$ y por ser ésta un polinomio, es derivable en todo su dominio, siendo el dominio de $y' = f'(x)$ el mismo que el de $y = f(x)$.

$$Df = Df' = \{x | x \in (-3,\ 2)\}$$

Las gráficas de $y = f(x)$ y $y' = f'(x)$ se muestran en la figura III.4.

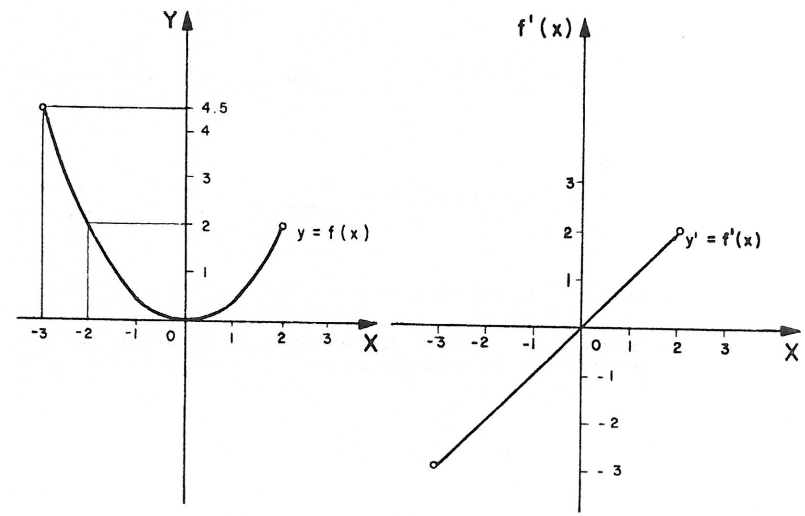


Figura III.4

Ejemplo III.7

Obtener la función derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$

Solución

Aplicando el método de los 4 pasos se tiene:

1°) $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$

2°) $f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$

3°) $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

4°) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

Racionalizando el numerador se tiene:

$$\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{\Delta x}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

entonces:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La función derivada es: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Obsérvese que el dominio de $y=f(x)$ es el conjunto de los reales positivos y el cero; sin embargo para $x=0$, $y'=f'(x)$ no existe, luego:

$$Df'=\{x \mid x\in(0,\infty)\}$$

III.1.6 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Anteriormente quedó establecido el concepto de derivada de una función $y=f(x)$ mediante la expresión:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Si esta nueva función $y'=f'(x)$ es derivable, entonces al derivarla se obtiene otra función de x que puede representarse con $f''(x)$ y que se llama *segunda derivada de la función* $y=f(x)$.

Esto es:

$$f''(x)=D_x\,f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

Las notaciones que representan a la segunda derivada de la función $y=f(x)$ y que son consecuencia de las ya conocidas para la primera derivada son:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\quad\text{o}\quad\frac{d^2}{dx^2}f(x)\;;\quad y''\ \text{ó}\ f''(x),\ D_x^2y\ \text{ó}\ D_x^2f(x);\ \ddot{y}$$

De la misma manera, si la segunda derivada de una función es derivable, se obtiene al derivarla, la tercera derivada de la función original, que se representa con:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3}{dx^3}f(x),\ y'''=f'''(x)\;;\quad D_x^3\,y=D_x^3\,f(x)\;;\quad \dddot{y}$$

Al seguir derivando sucesivamente una función $y=f(x)$, la enésima derivada, donde $n\in N$ $n>1$, es la primera derivada de la $(n-1)$ derivada de $y=f(x)$. Es decir, si todas las derivadas sucesivas hasta la de orden $n-1$ son derivables, la enésima derivada de $y=f(x)$ (o de orden n) se obtiene aplicando el operador derivada a la función obtenida al calcular la derivada de orden $n-1$.

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{d}{dx}\left[f^{(n-1)}(x)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

Obviamente las notaciones que se emplean para la derivada de orden n de la función $y=f(x)$ son:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}f(x)\;;\qquad y^{(n)}=f^{(n)}(x);\ D_x^n\,y=f^{(n)}(x)$$

En la notación de Lagrange por comodidad se emplea un número romano cuando el orden es mayor que tres y la notación de Newton no se emplea para derivadas sucesivas después de la tercera.

Ejemplo III.8

Calcular todas las derivadas de orden superior de la función:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$$

Solución

Aplicando el concepto de derivada de una función sabemos que:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

entonces:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 + 1 - (2x^3 + x^2 + 1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\left[x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right] + x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - 2x^3 - x^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\,\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 2x + \Delta x\right]$$

$\frac{d}{dx} f(x) = 6x^2 + 2x$ que será la primera derivada.

Derivando nuevamente obtendremos:

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = D_x \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - (6x^2 + 2x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\left[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right] + 2(x+\Delta x) - 6x^2 - 2x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x\Delta x + 6(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12x + 6\Delta x + 2)$$

esto es:

$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 12x + 2$ siendo ésta la segunda derivada.

Procediendo de igual forma obtendremos $\frac{d^3}{dx^3} f(x)$, como:

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = D_x \frac{d^2}{dx^2} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f''(x+\Delta x) - f''(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12(x+\Delta x) + 2 - (12x + 2)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12x + 12\Delta x + 2 - 12x - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (12) = 12$$

o sea:

$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 12$ que es la tercera derivada.

Habiéndose obtenido todas las derivadas sucesivas diferentes de cero, si se aplica nuevamente el operador derivada a la función $f'''(x)$ se obtiene la cuarta derivada:

$$\frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right] = \frac{d}{dx}(12) = 0$$

Se observa que todas las derivadas sucesivas de orden superior al tercero serán iguales a cero.

Por tanto se puede inferir que cuando se tiene una función polinómica, la derivada sucesiva distinta de cero de mayor orden que se puede obtener, es de orden igual al grado del polinomio.

Así en el ejemplo anterior se tiene un polinomio de tercer grado, por lo que las derivadas sucesivas serán diferentes de cero, sólo hasta la tercera derivada.

Ejemplo III.9

Obtener la segunda derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución

Según el ejemplo III.3, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$

Derivando ahora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ por el método de los 4 pasos:

1°) $f'(x+\Delta x) = -\frac{1}{(x+\Delta x)^2}$

2°) $$f'(x+\Delta x) - f'(x) = -\frac{1}{(x+\Delta x)^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 + (x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2\, x^2} =$$

$$= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2\, x^2}$$

3°) $$\frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x(x+\Delta x)^2\, x^2} =$$

$$= \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^2\, x^2}$$

4°) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = \frac{2x}{(x)^2\, x^2} = \frac{2}{x^3}$$

Esto es:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3}$$

Se observa en el ejemplo anterior que al aumentar el orden de las derivadas sucesivas, el exponente negativo de la variable independiente también aumenta en valor absoluto, lo cual hace ver que la función dada tiene una infinidad de derivadas sucesivas.

Se dice que una función $f(x)$ es infinitamente derivable en un punto si existen todas las derivadas de orden superior para dicho punto x, es decir, si $f^{(n)}(x)$ existe para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Una función $f(x)$ será infinitamente derivable en un intervalo, si es infinitamente derivable en cada punto de dicho intervalo.

La función del ejemplo III.9, es infinitamente derivable para toda $x \neq 0$.

Cuando se vean las derivadas de las funciones transcendentes se tendrán otros casos de funciones infinitamente derivables.

III.2 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

III.2.1 DERIVADAS LATERALES

De la definición de derivada y por los conceptos de límites laterales estudiados en el capítulo anterior, se infiere que la existencia de la derivada, siendo ésta un límite, está relacionada con la existencia de los límites laterales y con la igualdad entre ellos:

si:
$$D_x\, f(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Por su estructura, es lógico llamar a estos límites laterales, derivada lateral por la izquierda y derivada lateral por la derecha, respectivamente.

Derivada lateral por la izquierda:

$$f'_-(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Derivada lateral por la derecha:

$$f'_+(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

Con lo anterior:

$$\text{si } f'(x_o)\ \exists \implies f'(x_o) = f'_+(x_o) = f'_-(x_o)$$

Ejemplo III.10

Calcular las derivadas laterales de la función $f(x) = 2x + 1$; para $x_o = 3$.

Solución

Para calcular la derivada por la izquierda $f'_-(3)$ se requiere hacer $\Delta x \to 0^-$, lo cual implica que $\Delta x < 0$, entonces:

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2(3+\Delta x) + 1 - 2(3) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{6 + 2\Delta x + 1 - 6 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \to 0^-} 2 = 2, \qquad \text{por lo tanto,} \qquad f'_-(3) = 2$$

Para calcular la derivada por la derecha $f'_+(3)$ se requiere hacer $\Delta x \to 0^+$ o sea $\Delta x > 0$.

$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{6 + 2\Delta x + 1 - 6 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (2) = 2,$$

por lo tanto, $f'_+(3) = 2$

Evidentemente:

$$f'_-(3) = f'_+(3) \quad \Longrightarrow \quad f'(3) = 2$$

Ejemplo III.11

Calcular las derivadas laterales de la función $f(x) = x^{2/3}$, para $x_1 = 0$.

Solución

Haciendo $x = x_o + \Delta x$, si $\Delta x \to 0$ entonces $x \to x_o$

Una expresión equivalente a:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x}$$

es:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

la cual se puede aplicar en este caso, así:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - 0} \; ; \quad f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \; ;$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

por lo tanto:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^{2/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \to -\infty$$

y

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{2/3} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \to +\infty$$

La función $f(x) = x^{2/3}$ no es derivable para $x_o = 0$

DERIVABILIDAD DE UNA FUNCION EN UN INTERVALO.- Se sabe que una función $y = f(x)$ es derivable para un valor x_o de la variable independiente, si existe la derivada:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

y la existencia de ésta implica el cumplimiento de $f'_-(x_o) = f'_+(x_o)$.

Obsérvese, para que la función sea derivable en x_o debe estar definida en un entorno de x_o. Si no estuviera definida por ejemplo a la izquierda de x_o, no existiría $f'(x_o)$.

Si la derivada $f'(x)$ existe en todos los puntos de un intervalo abierto (a, b), se dice que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo (a, b).

Cuando la derivada $f'(x)$ no existe en uno o más puntos del intervalo (a, b), la función $y = f(x)$ no es derivable en dicho intervalo.

Si el dominio de una función continua $y = f(x)$ es el intervalo cerrado $[a, b]$ no puede hablarse de derivabilidad de la función en el intervalo $[a, b]$ dado que:

$$f'_-(a) \nexists \Longrightarrow f'(a) \nexists \text{ y que } f'_+(b) \nexists \Longrightarrow f'(b) \nexists$$

Ejemplo III.12

Dada la función $f(x) = 3x^2 + 1$, investigar si es derivable en el intervalo $(-2, 5)$.

Solución

Según el ejemplo III.2, la derivada de la función es $f'(x) = 6x$, y esta derivada sí existe para todo valor de x, luego la función $f(x) = 3x^2 + 1$ sí es derivable en el intervalo $(-2, 5)$.

Ejemplo III.13

Investigar si la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es derivable en el intervalo $(-1, 3)$.

Solución

Tomando en cuenta que la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ según se vio en el ejemplo III.3, puede observarse que $f'(x_0)$ no existe para $x_0 = 0$ y como $x_0 = 0$ pertenece al intervalo $(-1, 3)$ se concluye que la función dada no es derivable en el intervalo $(-1, 3)$.

Ejemplo III.14

Dada la función $f(x) = +\sqrt{x-2}$, decir si es derivable en el intervalo $(1, 4)$.

Solución

La derivada de esta función se obtuvo en el ejemplo III.4, y es $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$. Esta derivada no existe si $x \leq 2$, luego la función dada no es derivable en todo el intervalo $(1, 4)$.

III.2.2 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

El hecho de tener una función continua en un punto implica que la función cumple con ciertas condiciones en ese punto y si es derivable en el mismo punto, significa que tiene ciertas propiedades en el punto. Por lo tanto, es lógico cuestionar si hay alguna conexión entre el concepto de continuidad y el de derivabilidad de una función en un punto.

Una respuesta a esta cuestión está incluida en el siguiente teorema:

> TEOREMA III.1
>
> Hipótesis:
>
> La función $y = f(x)$ es derivable en el punto $x = x_1$.
>
> Tesis:
>
> La función $y = f(x)$ es continua en $x = x_1$.

Demostración:

Como la función es derivable en el punto $x = x_1$, existe

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ahora bien el incremento de la variable dependiente Δy que corresponde a Δx en ese punto es:

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

multiplicando y dividiendo el segundo miembro de esta igualdad por Δx queda:

$$\Delta y = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \Delta x$$

tomando límites cuando Δx tiende a cero queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_1)\ (0) = 0$$

esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Lo cual significa, según lo tratado en el capítulo II, que la función $y = f(x)$ es continua en el punto $x = x_1$, quedando así demostrado el teorema.

Con este teorema se ve que toda función derivable en un punto es continua en él, pero la afirmación inversa no es verdadera, no toda función continua en un punto es derivable en el mismo.

Esto se evidencia en los dos siguientes ejemplos:

Ejemplo III.15

Hacer ver que la función $y = |x - 2|$ es continua para $x_1 = 2$ pero no es derivable en este punto.

En efecto para hacer ver que la función $y = |x - 2|$ es continua para $x_1 = 2$ basta demostrar que en ese punto se cumple:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Se tiene para cualquier valor de x que:

$$\Delta y = |x + \Delta x - 2| - |x - 2|$$

y para $x_1 = 2$: $\quad \Delta y = |2 + \Delta x - 2| - |2 - 2| = |\Delta x|$

luego:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0 \qquad \text{Q.D.}$$

Para demostrar que la función $y = |x - 2|$ no es derivable para $x_1 = 2$ considérese el hecho de que dicha función puede escribirse:

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{si} \quad x \le 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

y calcúlense las derivadas laterales de la función en el punto dado.

La condición $\Delta x \to 0^-$ implica $\Delta x < 0$ y $|\Delta x| = -\Delta x$ por lo cual:

$$f'_-(2) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1; \; f'_-(2) = -1$$

Ahora $\Delta x \to 0^+$ implica $\Delta x > 0$ y $|\Delta x| = \Delta x$

luego:

$$f'_+(2) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} (1) = 1 \qquad f'_+(2) = 1$$

Como las derivadas laterales son distintas: $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, la función $y = |x - 2|$ no es derivable para $x_1 = 2$.

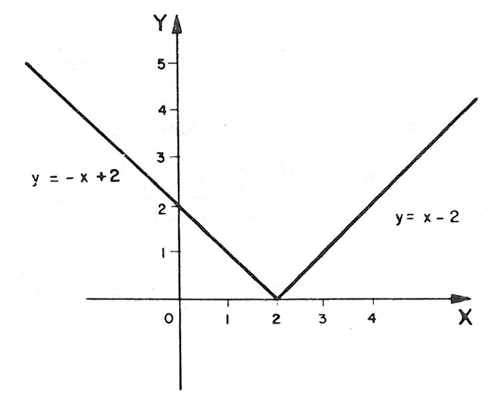


Figura III.5

Se confirma con el ejemplo anterior que no toda función continua en un punto es derivable en el mismo, y se insiste un poco en esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo III.16

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = x^{2/3}$ en el punto $x_1 = 0$

La continuidad en $x_1 = 0$ puede estudiarse investigando si se cumple la condición de continuidad:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

para lo cual se procede siguiendo los pasos:

a) $f(0) = 0^{2/3} = 0 \quad \exists$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^{2/3} = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$

luego la función es continua para $x_1 = 0$

La derivabilidad de la función se estudia ahora calculando, primeramente la derivada para cualquier valor de x aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^{2/3} - x^{2/3}}{\Delta x}$$

racionalizando el numerador para poder calcular el límite:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x + \Delta x)^{2/3} - x^{2/3}\right]\left[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}{\Delta x \left[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \left[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x \left[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x \left[(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{(x + \Delta x)^{4/3} + (x + \Delta x)^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}}$$

obteniendo el límite anterior:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^{4/3} + x^{2/3} x^{2/3} + x^{4/3}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{3\, x^{4/3}}$$

por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{2}{3\, x^{1/3}}$$

Como se puede apreciar en el resultado anterior, $f'(x)$ no existe para $x_1 = 0$, por lo que $f(x) = x^{2/3}$ no es derivable para dicho valor, no obstante que sí es continua.

La condición de continuidad es necesaria para la existencia de la derivada, pero no es condición suficiente.

Concluyendo, toda función derivable es continua. Pero el hecho de contar con una función continua es sólo una condición necesaria, pero no suficiente para ser derivable. La otra condición necesaria para poder asegurar la existencia de la derivada, es que las derivadas laterales existan y sean iguales entre sí. (Véase inciso III.2.1, de este capítulo).

Así una función $y = f(x)$, es derivable en x_1, si y sólo si las dos condiciones siguientes se cumplen:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ y = f(x) \text{ sea continua en } x_1 \\ \\ 2)\ \ f'_-(x_1) = f'_+(x_1) \end{array}\right| \Longrightarrow \quad f'(x_1)\ \exists$$

y con cualquiera de ellas que no se verifique entonces $f'(x_1) \nexists$.

Ejemplo III.17

Trazar la gráfica de la función dada, determinar si es continua en $x_1 = 4$, encontrar $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$, si existen, y determinar si la función es derivable en $x_1 = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \le -4 \\ -x - 6 & \text{si} \quad x > -4 \end{cases}$$

Solución

La gráfica se ve en la figura III.6.

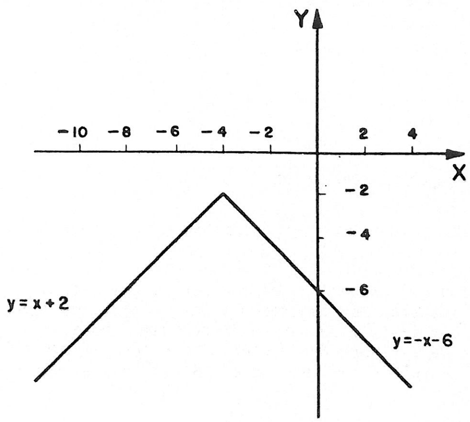


Figura III.6

Primeramente se estudiará la continuidad de la función para $x_1 = -4$ para lo cual habrá que probar el cumplimiento de:

a) Existencia de $f(x_1)$:

$$f(-4) = -4 + 2 = -2$$

b) $\lim\limits_{x \to x_1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_1^+} f(x) \implies \lim\limits_{x \to x_1} f(x) \ \exists$

$$\lim_{x \to -4^-} (x + 2) = -4 + 2 = -2 \ ; \quad \lim_{x \to -4^+} (-x - 6) = -(-4) - 6 = -2$$

$$\lim_{x \to -4} f(x) = -2$$

c) $f(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} f(x)$

$$f(-4) = \lim_{x \to -4} f(x) = -2$$

De lo anterior se concluye que las tres condiciones de continuidad se cumplen para $x_1 = -4$ y $y = f(x)$ es continua en dicho valor de x.

Se calculan ahora las derivadas $f'_-(x_1)$ y $f'_+(x_1)$, si existen:

$$f'_-(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(-4)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(-4 + \Delta x + 2) - (-4 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-2 + \Delta x + 4 - 2}{\Delta x}$$

$$f'_-(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} \ ; \quad \text{para } \Delta x \neq 0, \text{ se tiene } \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'_-(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^-} 1 = 1$$

$$f'_+(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'_+(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{-(-4 + \Delta x) - 6 - [-(-4) - 6]}{\Delta x}$$

$$f'_+(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{4 - \Delta x - 6 - 4 + 6}{\Delta x}$$

$$f'_+(-4) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(- \frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0^+} (-1)$$

$$f'_+(-4) = -1$$

Conclusión: puesto que $f'_-(-4) \neq f'_+(-4)$, la función dada no es derivable para $x_1 = -4$

Ejemplo III.18

Investigar la derivabilidad en $x_1 = 0$ de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución

Esta función puede escribirse:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, la función es derivable por ser polinómica.

Para investigar la derivabilidad para $x_1 = 0$, primero se confirma que la función es continua para $x_1 = 0$.

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0 \implies \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Por lo cual se concluye que la función sí es continua para $x_1 = 0$.

Ahora para investigar la derivabilidad en $x_1 = 0$, hay que proceder empleando derivadas laterales.

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Como:

$$f'_-(0) \neq f'_+(0) \implies f'(0) \nexists$$

El cálculo de la derivada de una función para cualquier valor de su dominio, por el método de los cuatro pasos no es práctico, así que después de haber obtenido las fórmulas para derivar diversas funciones (III.3, III.4) se presentan ejemplos del estudio de la derivabilidad de una función aplicando dichas fórmulas.

III.3 FORMULAS DE DERIVACION

III.3.1 DERIVADA DE LA SUMA, EL PRODUCTO Y EL COCIENTE DE FUNCIONES

Dado que el proceso de derivación por el método de los cuatro pasos puede resultar muy laborioso si no se trata de funciones tan sencillas como las que se han derivado hasta ahora, se establecerán algunos teoremas sobre derivación de funciones típicas que generan fórmulas cuya aplicación permite el cálculo de derivadas, con relativa facilidad.

TEOREMA III.2 DERIVADA DE LA FUNCION CONSTANTE

Hipótesis:

Sea la función constante $f(x) = C$.

Tesis:

La derivada de la función constante vale cero.

$$D_x C = 0 \qquad \text{.... (1)}$$

Demostración:

Derivando dicha función por el método de los cuatro pasos:

1°) $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$

2°) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$

3°) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

4°) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (0) = 0$

esto es:

$$D_x C = 0 \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA III.3 DERIVADA DE LA FUNCION IDENTIDAD Hipótesis: Dada la función identidad $y = x$. Tesis: La derivada de la función identidad es igual a la unidad: $D_x x = 1 \qquad \ldots (2)$

Demostración:

Aplicando el método de los cuatro pasos:

1°) $y + \Delta y = x + \Delta x$

2°) $\Delta y = x + \Delta x - x = \Delta x$

3°) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$

4°) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (1) = 1,$

luego: $D_x x = 1$ o bien: $\frac{dx}{dx} = 1$ Q.D.

En lo que sigue, $u = f(x)$, $v = g(x)$ y $w = h(x)$ son funciones derivables y sus derivadas:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = g'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = h'(x)$$

son tales que la intersección de sus dominios $D_{f'}$, $D_{g'}$, $D_{h'}$, no es el conjunto vacío.

TEOREMA III.4 DERIVADA DE UNA SUMA DE FUNCIONES Hipótesis: Si $y = u + v - w$. Tesis: $D_x (u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w \qquad \ldots (3)$

Demostración:

Cuando a la variable independiente x se le da un incremento Δx a las funciones u, v y w les corresponden los incrementos Δu, Δv y Δw, así que al aplicar el método de los cuatro pasos a la función dada se tiene:

1°) $y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - (w + \Delta w)$

2°) $\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w - u - v + w = \Delta u + \Delta v - \Delta w$

3°) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$

4°) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$

esto es:

$$D_x (u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w \qquad \text{Q.D.}$$

o bien:

$$D_x [f(x) + g(x) - h(x)] = D_x f(x) + D_x g(x) - D_x h(x)$$

Esta fórmula se generaliza siguiendo el mismo criterio para un número fijo cualquiera de funciones derivables. Luego se dice que la derivada de la suma algebraica de un número fijo de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.

TEOREMA III.5 DERIVADA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES

Hipótesis:

Si $y = uv$

Tesis:

$$D_x\,(uv) = u\,D_x v + v\,D_x u \qquad \ldots (4)$$

Demostración:

Se hace aplicando el método de los cuatro pasos:

1°) $y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

2°) $\Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$

3°) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

4°) $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} u \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0} v \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta u \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

pero:

$$\lim_{\Delta x\to 0} u = u\,, \quad \lim_{\Delta x\to 0} v = v \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \Delta u = 0$$

dado que $u = f(x)$ es derivable y por lo tanto continua, entonces:

$$D_x y = u\,D_x v + v\,D_x u + (0)\,D_x v \implies$$

$$D_x\,(uv) = u\,D_x v + v\,D_x u \qquad \text{Q.D.}$$

o bien:

$$D_x \left[\, f(x)\; g(x) \,\right] = f(x)\; g'(x) + g(x)\; f'(x)$$

La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

Esta fórmula puede aplicarse más de una vez si se trata del producto de n funciones derivables, haciendo uso de la ley asociativa de la multiplicación.

Corolario.- La derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

En efecto, al aplicar (4) y (1) a la función $y = Cv$

queda:

$$D_x\,(Cv) = C\,D_x v + v\,D_x C = C\,D_x v + v\,(0)$$

$$D_x\,(Cv) = C\,D_x v \qquad \ldots (4a)$$

TEOREMA III.6 DERIVADA DEL COCIENTE DE DOS FUNCIONES

Hipótesis:

Se tiene $y = \dfrac{u}{v}$, $v \neq 0$.

Tesis:

$$D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,D_x u - u\,D_x v}{v^2} \qquad \ldots (5)$$

Demostración:

Se deriva la función $y = \dfrac{u}{v}$ aplicando la definición de derivada:

1°) $y + \Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$

2°) $\Delta y = \dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \dfrac{u}{v} = \dfrac{v(u + \Delta u) - u(v + \Delta v)}{(v + \Delta v)\,v} =$

$= \dfrac{vu + v\Delta u - uv - u\Delta v}{(v + \Delta v)\,v} = \dfrac{v\Delta u - u\Delta v}{(v + \Delta v)\,v}$

$$3°)\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x\ (v + \Delta v)v} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v + \Delta v)\ v}$$

$$4°)\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} v\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} u\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)\ \lim\limits_{\Delta x \to 0} v}$$

Sabiendo que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} v = v\ , \quad \lim_{\Delta x \to 0} u = u$$

y que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$$

porque v es derivable y continua, resulta que:

$$D_x\ y = \frac{v\ D_x\ u - u\ D_x\ v}{v\ \ v} \Longrightarrow$$

$$D_x\ \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\ D_x\ u - u\ D_x\ v}{v^2} \qquad \text{Q.D.}$$

o bien:

$$D_x\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\ f'(x) - f(x)\ g'(x)}{[g(x)]^2}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador y todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Corolario.- La derivada del cociente de una constante entre una función es igual al producto del simétrico de la constante por la derivada de la función dividida entre el cuadrado de la función.

Efectivamente aplicando (5) y (1) a la función $y = \frac{C}{v}$ resulta:

$$D_x \left(\frac{C}{v}\right) = \frac{v\ D_x\ C - C\ D_x\ v}{v^2} = \frac{v(0) - C\ D_x\ v}{v^2} \Longrightarrow D_x \left(\frac{C}{v}\right) = -\frac{C\ D_x\ v}{v^2} \qquad \text{...(5a)}$$

Observe que la derivada del cociente de una función u entre una constante $C \neq 0$ puede calcularse aplicando (4a):

$$D_x\ \left(\frac{u}{C}\right) = D_x\ \left(\frac{1}{C}\ u\right) = \frac{D_x\ u}{C}$$

III.3.2 DERIVADA DE UNA FUNCION ELEVADA A UN EXPONENTE NATURAL

TEOREMA III.7 DERIVADA DE LA POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL DE UNA FUNCION

Hipótesis:

Sea $y = u^n$

Tesis:

$$D_x\ u^n = n\ u^{n-1}\ D_x u \qquad \text{... (6)}$$

Demostración:

Considerando primero la función $z = x^n$ y derivándola por el método de los cuatro pasos:

$$1°)\ z + \Delta z = (x + \Delta x)^n$$

$$2°)\ \Delta z = (x + \Delta x)^n - x^n$$

aplicando el binomio de Newton y simplificando:

$$\Delta z = x^n + n\,x^{n-1}\ \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}\ x^{n-2}\ (\Delta x)^2 + - - - + n\,x\ (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta z = n\ x^{n-1}\ \Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}\ x^{n-2}\ (\Delta x)^2 + - - - + n\ x\ (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n$$

$$3°)\ \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta x \left[n\ x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\ x^{n-2}\ \Delta x + --- + n\ x\ (\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\,\Delta x + --- + n\,x\,(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}$$

4°) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\,\Delta x + --- + n\,x\,(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

$$= n\,x^{n-1} + 0 + - - - + 0 + 0$$

esto es: $D_x\, x^n = n\, x^{n-1}$ ... (6a)

de aquí que: $D_u\, u^n = n\, u^{n-1}$

ahora si: $y = u^n$

como: $D_x\, y = D_u\, y \cdot D_x\, u$ según se demuestra en el teorema III.8.

$$D_x\, u^n = n\, u^{n-1}\, D_x\, u \qquad \text{Q.D.}$$

La derivada de la potencia de una función elevada a un exponente natural, es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido en la unidad y por la derivada de la función.

En este teorema se estableció la fórmula para la derivada de una potencia solamente para exponentes enteros y positivos. Sin embargo, la misma fórmula vale para todos los exponentes reales, hecho que se puede demostrar después de que se considere la función logarítmica. Por ahora se aceptará este hecho.

Corolario.- La derivada de la raíz cuadrada de una función es igual al cociente de la derivada del subradical entre el doble de la misma raíz.

Esto se verifica al aplicar (6) a la función $y = \sqrt{u} = u^{1/2}$

$$D_x u^{1/2} = \frac{1}{2}\, u^{\frac{1}{2}-1}\, D_x u \;;\; D_x u^{1/2} = \frac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}}\, D_x u \;;\; D_x u^{1/2} = \frac{D_x u}{2\, u^{1/2}}$$

esto es:

$$D_x \sqrt{u} = \frac{D_x u}{2\sqrt{u}} \qquad .... (6b)$$

Resumiendo las fórmulas obtenidas:

$D_x C = 0$ (1)

$D_x x = 1$ (2)

$D_x (u + v - w) = D_x u + D_x v - D_x w$ (3)

$D_x (uv) = u\, D_x v + v\, D_x u$ (4)

$D_x C v = C\, D_x v$ (4a)

$D_x \dfrac{u}{v} = \dfrac{v\, D_x u - u\, D_x v}{v^2}$ (5)

$D_x \dfrac{C}{v} = -\dfrac{C\, D_x v}{v^2}$ (5a)

$D_x u^n = n\, u^{n-1}\, D_x u$ (6)

$D_x x^n = n\, x^{n-1}$ (6a)

$D_x \sqrt{u} = \dfrac{D_x u}{2\sqrt{u}}$ (6b)

Ejemplo III.19

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = 2 + x^3 - 5\, x^4$

Aplicando (3), (1), (6a) y (4a):

$$D_x\, y = D_x\,(2) + D_x\,(x^3) - D_x\,(5\,x^4) = 0 + 3x^2 - 20x^3 = 3x^2 - 20x^3$$

b) $\quad f(x) = (x^2 + 1)^{3/2}$

Empleando (6), (3), (1) y (6a):

$$f'(x) = \frac{3}{2}\,(x^2 + 1)^{1/2}\; D_x\,(x^2 + 1) = \frac{3}{2}\,(x^2 + 1)^{1/2}\;(2x + 0) = 3x\,(x^2 + 1)^{1/2}$$

c) $\quad g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

Usando (5), (3), (6a) y (1):

$$D_x\, g(x) = \frac{(x^2 + 3)\, D_x\,(x^2 - 3) - (x^2 - 3)\, D_x(x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{(x^2 + 3)\,2x - (x^2 - 3)\,2x}{(x^2 + 3)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x - 2x^3 + 6x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12\,x}{(x^2 + 3)^2}$$

d) $\quad r = \dfrac{\sqrt{a^2 + \theta^2}}{\theta}$; a es constante

Se aplican (5), (6b), (1), (2), (3) y (6a);

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\theta\, D_\theta \sqrt{a^2 + \theta^2} - \sqrt{a^2 + \theta^2}\; D_\theta\,\theta}{\theta^2} = \frac{\theta\,\dfrac{D_\theta\,(a^2 + \theta^2)}{2\sqrt{a^2 + \theta^2}} - \sqrt{a^2 + \theta^2}\;(1)}{\theta^2} =$$

$$= \frac{\theta\,\dfrac{2\theta}{2\,\sqrt{a^2 + \theta^2}} - \sqrt{a^2 + \theta^2}}{\theta^2} = \frac{\dfrac{\theta^2 - a^2 - \theta^2}{\sqrt{a^2 + \theta^2}}}{\theta^2} = \frac{-\,a^2}{\theta^2\,\sqrt{a^2 + \theta^2}}$$

Ejemplo III.20

Obtener el valor de la derivada para el valor indicado de la variable independiente.

a) $\quad y = \sqrt{\dfrac{5 - 2x}{5 + 2x}}$, para $x_1 = 2$

Se tiene:

$$y = \frac{\sqrt{5 - 2x}}{\sqrt{5 + 2x}}$$

luego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{5 + 2x}\left(\dfrac{-\,2}{2\sqrt{5 - 2x}}\right) - \sqrt{5 - 2x}\left(\dfrac{2}{2\sqrt{5 + 2x}}\right)}{(\sqrt{5 + 2x})^2} = \frac{\dfrac{-\sqrt{5 + 2x}}{\sqrt{5 - 2x}} - \dfrac{\sqrt{5 - 2x}}{\sqrt{5 + 2x}}}{5 + 2x} =$$

$$= \frac{\dfrac{-5 - 2x - 5 + 2x}{\sqrt{5 - 2x}\;\sqrt{5 + 2x}}}{5 + 2x} = \frac{-\,10}{(5 + 2x)\;\sqrt{5 - 2x}\;\sqrt{5 + 2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,10}{(5 + 2x)\;\sqrt{25 - 4x^2}}$$

Para:

$$x_1 = 2:\ \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 = 2} = \frac{-\,10}{(5 + 4)\;\sqrt{25 - 16}} = \frac{-\,10}{9\,\sqrt{9}} = \frac{-10}{9(3)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x_1 = 2} = \frac{-\,10}{27}$$

b) $f(x) = \left(\frac{2x + 1}{x + 5}\right)(3x - 1)$ para $x = -3$

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{x + 5}(3) + (3x - 1)\frac{(x + 5)(2) - (2x + 1)(1)}{(x + 5)^2} =$$

$$= \frac{6x + 3}{x + 5} + \frac{(3x - 1)(2x + 10 - 2x - 1)}{(x + 5)^2} = \frac{6x + 3}{x + 5} + \frac{27x - 9}{(x + 5)^2} =$$

$$= \frac{(6x + 3)(x + 5) + 27x - 9}{(x + 5)^2} = \frac{6x^2 + 30x + 3x + 15 + 27x - 9}{(x + 5)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 60x + 6}{(x + 5)^2} = \frac{6(x^2 + 10x + 1)}{(x + 5)^2}$$

$$f'(-3) = \frac{6(9 - 30 + 1)}{(-3 + 5)^2} = \frac{6(-20)}{2^2} = -30 \; ; \; f'(-3) = -30$$

Ejemplo III.21

Dada la función $y = f(x)$, trazar su gráfica, determinar en qué valores de x es continua y en qué otros es discontinua, así como su derivabilidad, argumentando todas las respuestas.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 6x & \text{para} \quad -5 \le x < -3 \\ 3\left(\dfrac{-x + 2}{x + 3}\right) & \text{para} \quad -3 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{4x^3}{3} - \dfrac{123x}{5} + \dfrac{518}{15} & \text{para} \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Continuidad en el intervalo $[-5, -3)$.

En virtud de que la función es polinomial, en este intervalo la función es continua.

Continuidad en el intervalo $(-3, 2)$.

Por inspección de la regla $y = 3\left(\frac{-x + 2}{x + 3}\right)$ se observa que es discontinua para el valor $x_1 = -3$ solamente.

Continuidad en el intervalo $(2, 3]$

Puesto que la función en este intervalo es polinomial, la función es continua.

Continuidad en $x_1 = -3$

Para verificar la continuidad en $x_1 = -3$, deberán probarse las tres condiciones para la existencia de continuidad en un punto.

$f(-3) = 3\left[\frac{-(-3) + 2}{-3 + 3}\right] = \frac{15}{0}$; $f(-3) \nexists$, luego la función es discontinua para $x_1 = -3$

Continuidad para $x_2 = 2$

$$f(2) = 3\left(\frac{-2 + 2}{2 + 3}\right) = 0 \qquad \ldots \text{(a)}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-}\left[3\left(\frac{-x + 2}{x + 3}\right)\right] = 0 \qquad \ldots \text{(b)}$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+}\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{123x}{5} + \frac{518}{15}\right]$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{2^4}{4} + \frac{4(2)^3}{3} - \frac{123(2)}{5} + \frac{518}{15} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 \qquad \ldots \text{(c)}$$

Por (b) y (c):

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$$

luego:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0 \qquad \ldots \text{(d)}$$

Comparando (a) con (d), se tiene que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$$

de lo cual se concluye que la función es continua para $x_2 = 2$. Como en $x_1 = -3$ no hay continuidad, la función no es derivable en este punto.

En $x_2 = 2$ sí hay continuidad, por lo cual la función puede ser derivable en dicho punto.

Para investigar esto, se procede a comparar las derivadas laterales de la función en el punto.

$$D_x\left[3\left(\frac{-x+2}{x+3}\right)\right] = 3\left[\frac{(x+3)(-1)-(-x+2)(1)}{(x+3)^2}\right] = 3\left[\frac{-x-3+x-2}{(x+3)^2}\right]$$

$$= 3\left[\frac{-5}{(x+3)^2}\right] = \frac{-15}{(x+3)^2}$$

$$f'_-(2) = \frac{-15}{(2+3)^2} = \frac{-15}{25} = -\frac{3}{5}$$

$$D_x\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{123x}{5} + \frac{518}{15}\right] = x^3 + 4x^2 - \frac{123}{5}$$

$$f'_+(2) = 2^3 + 4(2)^2 - \frac{123}{5} = 8 + 16 - \frac{123}{5} = \frac{40+80-123}{5}$$

$$f'_+(2) = -\frac{3}{5}$$

$$f'_-(2) = f'_+(2) = f'(2) = -\frac{3}{5} \quad \exists$$

La función sí es derivable para $x_2 = 2$.

Concluyendo, la función es continua en el intervalo $[-5, 3]$, $x \neq -3$ y es derivable en el intervalo $(-5, 3)$, $x \neq -3$.

Para el trazo de la gráfica, que se ve en la figura III.7 se presenta una tabla de valores x y $f(x)$.

x	f(x)
3	16.98
2.5	3.63
2	0.00
1.5	0.33
1	0.75
0.5	1.28
0	2
- 0.5	3
- 1	4.5
- 1.5	7
- 2	12
- 2.5	27
- 3	∞
- 3.5	3.5
- 4	8
- 4.5	13.5
- 5	20

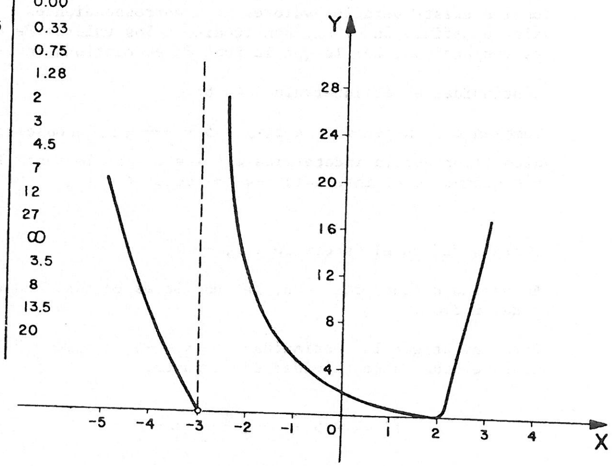


Figura III.7

Ejemplo III.22

Dada la función $y = f(x)$ definida por las siguientes reglas de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} +\sqrt{\dfrac{-x^3}{4}} & \text{para} \quad -\infty < x < -4 \\ 5 + \dfrac{6}{x-2} & \text{para} \quad -4 \leq x \leq 8 \\ 6 & \text{para} \quad 8 < x < \infty \end{cases}$$

determinar los intervalos de continuidad de la función, así como los puntos de discontinuidad y establecer si la función es derivable en los puntos $x_1 = 4$ y $x_2 = 8$. Fundamentar las respuestas y dibujar la gráfica correspondiente.

Solución

Continuidad en el intervalo $(-\infty, -4)$.

Por inspección de ecuación $f(x) = +\sqrt{\frac{-x^3}{4}}$ se aprecia que la función existe para los valores de x correspondientes a su intervalo de definición, y que son iguales a los valores de los límites respectivos, por lo que la función es continua en $(-\infty, -4)$.

Continuidad en el intervalo $(-4, 8)$.

También por inspección de $f(x) = 5 + \frac{6}{x-2}$, se observa que el único valor que la indetermina es $x = 2$; por lo tanto la función es continua en el intervalo $(-4, 8)$ donde $x \neq 2$.

Continuidad en el intervalo $(8, +\infty)$.

En virtud de que $f(x) = 6$, la función es continua en su intervalo de definición.

Para investigar la continuidad en $x = -4$, se probará la condición que determina la continuidad en un punto.

$$f(-4) = 5 + \frac{6}{-4-2} = 4 \qquad \ldots (a)$$

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^-} + \sqrt{\frac{-x^3}{4}} = +\sqrt{\frac{64}{4}} = 4$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = 5 + \frac{6}{-4-2} = 4$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to -4} f(x) = 4 \qquad \ldots (b)$$

Según (a) y (b) la función es continua en $x = -4$

Para investigar la continuidad en $x = 8$:

$$f(8) = 5 + \frac{6}{8-2} = 6 \qquad \ldots (c)$$

$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^-} \left(5 + \frac{6}{x-2}\right) = 5 + \frac{6}{8-2} = 6 \qquad \ldots (d)$$

$$\lim_{x \to 8^+} f(x) = 6 \qquad \ldots (e)$$

Por (d) y (e):

$$\lim_{x \to 8} f(x) = f(8) = 6 \qquad \ldots (f)$$

Según (f), la función es continua en $x = 8$

Por lo tanto la función será continua en $-\infty < x < \infty$, $x \neq 2$; o bien es continua en $-\infty < x < 2$ y $2 < x < \infty$, y es discontinua en $x = 2$.

Existe continuidad en $x = -4$ y $x = 8$, por lo que pudiera existir derivabilidad en tales puntos.

Si $x < -4$:

$$f'_-(x) = \frac{-3x^2}{4\sqrt{-x^3}} = \frac{-3x}{4\sqrt{-x}} \implies f'_-(-4) = -\frac{3}{2} \qquad \ldots (g)$$

Si $-4 < x < 8$:

$$f'_+(x) = -\frac{6}{(x-2)^2} \implies f'_+(-4) = -\frac{6}{(-6)^2} = -\frac{1}{6} \qquad \ldots (h)$$

Por (g) y (h) la función no es derivable en $x = -4$.

Ahora:

para $-4 < x < 8$:

$$f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2}\ ; \quad f'_-(8) = -\frac{6}{6^2} = -\frac{1}{6} \qquad \ldots (i)$$

Si $x > 8$:

$$f'(x) = 0 \implies f'_+(8) = 0 \qquad \ldots (j)$$

Por (i) y (j) la función no es derivable en $x = 8$.

La gráfica de la función se presenta en la figura III.8.

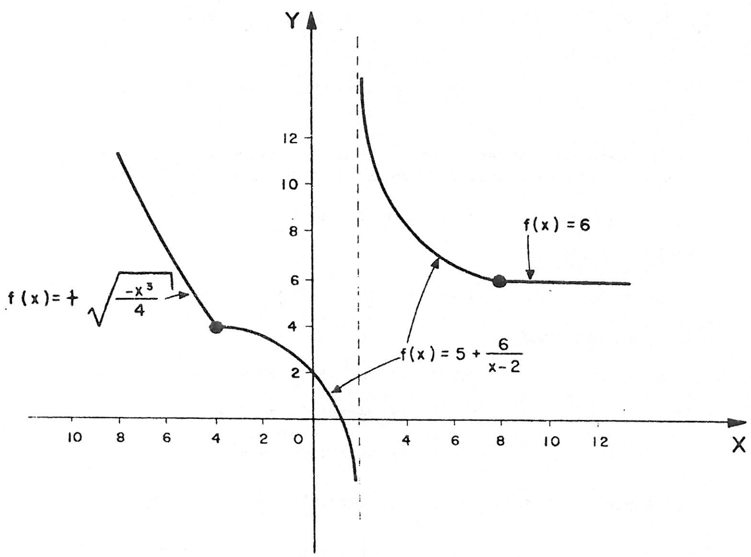


Figura III.8

III.4 DERIVADA DE LA FUNCION COMPUESTA. DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA

III.4.1 DERIVADA DE LA FUNCION COMPUESTA

Si se tienen las funciones $y = f(u)$ y $u = g(x)$, se sabe que $y = f(g(x))$ es una función de función, o bien es la composición de las funciones dadas, definida para todo valor de x del dominio D_g de $u = g(x)$ que hace que u pertenezca al dominio D_f de $y = f(u)$.

Es necesario saber calcular la derivada de y con respecto a x sin sustituir a u por $g(x)$ en $y = f(u)$, para lo cual se presenta el siguiente teorema:

TEOREMA III.8 DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION

Hipótesis:

Sean las funciones $y = f(u)$, $u = g(x)$ derivables, tales que $y = f(g(x))$ $\forall$ $x \in D_g$ que hace $g(x) \in D_f$.

Tesis:

La derivada de y con respecto a x está dada por:

$$D_x y = D_u y \; D_x u$$

Demostración:

A cada incremento Δx de la variable independiente x corresponde un incremento Δu de la variable intermedia u y un Δy de la variable dependiente y.

Multiplicando y dividiendo por Δu al cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ queda la identidad:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \; \frac{\Delta u}{\Delta x} \; ; \quad \Delta u \neq 0 \qquad \ldots (A)$$

Como $u = g(x)$ es derivable, será también continua por lo cual si $\Delta x \to 0$, entonces $\Delta u \to 0$.

Entonces tomando límites cuando $\Delta x \to 0$ en la expresión (A) queda:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \ldots (B)$$

y teniendo en cuenta la definición de derivada, la ecuación (B) equivale a:

$$D_x y = D_u y \; D_x u$$

que usando la notación de Leibniz puede escribirse:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \; \frac{du}{dx}$$

La tesis de este teorema se conoce también como regla de la cadena.

Ejemplo III.23

Hallar $D_x y$ para $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Solución

Aquí se puede hacer:

$$y = \frac{1}{u}; \quad u = \sqrt{x-2}$$

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los ejemplos III.3, y III.4, se pueden escribir las derivadas de estas funciones así:

$$D_u y = -\frac{1}{u^2}; \qquad D_x u = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

y aplicando la regla de la cadena:

$$D_x y = D_u y \; D_x u$$

resulta:

$$D_x y = -\frac{1}{u^2}\,\frac{1}{2\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{2u^2\,\sqrt{x-2}}$$

Sustituyendo $u = \sqrt{x-2}$:

$$D_x y = -\frac{1}{2(x-2)\,\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{2(x-2)^{3/2}}$$

El proceso de composición de funciones puede repetirse cualquier número de veces, obteniéndose siempre nuevas funciones; por ejemplo, si se tiene:

$$f(x) = x^3 + 7, \quad g(x) = \text{sen } x, \quad h(x) = x^5, \quad x \in \mathbb{R}$$

la función compuesta $\emptyset(x) = h\,[g(f(x))]$ **será**:

$$\emptyset(x) = h\,[g(f(x))] = \text{sen}^5\,(x^3 + 7).$$

Aplicando dos veces el mismo criterio, se obtiene la regla de la cadena para las funciones compuestas de tres funciones, a saber:

Generalización de la regla de la cadena.

Sea:

$$\emptyset(x) = h\,[g(f(x))]$$

si se cumple que:

a) f es derivable en x.

b) g es derivable en $f(x)$.

c) h es derivable en $g\,[f(x)]$.

entonces la función $\emptyset(x)$ es derivable en x y la derivada es:

$$\emptyset(x) = h'\,[g(f(x))]\;\; g'\,[f(x)]\;\; f'(x)$$

o con la notación de Leibniz si:

$$y = h(u); \quad u = g(v), \quad v = f(x)$$

quedará:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx}$$

o bien con la notación de Cauchy:

$$D_x y = D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v$$

Ejemplo III.24

Hallar $\frac{dy}{dx}$ siendo $y = +\sqrt{(3x^2+1)^2 - 2}$

En este caso se puede considerar que:

$$y = \sqrt{u - 2}; \quad u = v^2; \quad v = 3x^2 + 1$$

Las derivadas de estas funciones se calcularon en los ejemplos III.2 y III.4, respectivamente; pudiendo escribirse entonces:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u-2}} \; ; \quad \frac{du}{dv} = 2v \; ; \quad \frac{dv}{dx} = 6x$$

y como $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u-2}}\,(2v)\,6x = \frac{6x\,v}{\sqrt{u-2}}$$

sustituyendo a "u" y "v" en términos de x:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x\,(3x^2+1)}{\sqrt{(3x^2+1)^2 - 2}}$$

que es la derivada pedida.

III.4.2 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA

Si se trata de calcular la derivada de la función inversa de una función dada, es posible obtenerla a partir de la derivada de la función dada, sin tener que determinar la inversa.

Esto es, si $y = f(x)$ es una función biunívoca derivable, la derivada de su inversa puede calcularse en términos de la derivada $D_x y = f'(x)$, sin tener que despejar x de la función dada para tener primeramente la inversa $x = f^{-1}(y)$.

Para esto se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA III.9

Hipótesis:

$y = f(x)$ es una función biunívoca, derivable y $f'(x) \neq 0$, siendo su función inversa $x = f^{-1}(y)$.

Tesis:

La derivada de la inversa es:

$$D_y x = \frac{1}{D_x y}$$

Demostración:

Efectivamente, para todo $\Delta x \neq 0$ y $\Delta y \neq 0$ se tiene:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

como $y = f(x)$ es derivable, $\Delta x \to 0 \iff \Delta y \to 0$

tomando límites cuando $\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

de aquí por la definición de derivada se tiene:

$$D_y x = \frac{1}{D_x y}$$

o bien:

$$D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{D_x f(x)}$$

Ejemplo III.25

Dada la función $y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ ... (a)

Investigar si cumple con la hipótesis del teorema anterior y en caso afirmativo, hallar la derivada de su función inversa aplicando dicho teorema.

Verificar el resultado obteniendo la función inversa primeramente.

Al calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ en el ejemplo III.5 se obtuvo:

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2} = D_x y \quad \text{... (b)}$$

Se ve que $f'(x)$ existe para toda $x \neq 1$, por lo que la función $y = f(x)$ es derivable para toda $x \neq 1$.

Además $f'(x) < 0$ si $x \neq 1$ luego $y = f(x)$ es biunívoca si $x \neq 1$.

Se cumplen las condiciones de la hipótesis del teorema III.9 por lo que la derivada de la inversa según (b) es:

$$D_y x = \frac{1}{D_x y} = \frac{1}{\dfrac{-5}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{-5} \quad \text{... (c)}$$

ahora bien si se despeja x de (a):

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$$

calculando la derivada de esta función se obtiene:

$$D_y x = \frac{-5}{(y-2)^2} \quad \text{... (d)}$$

si en (c) se sustituye x en términos de y queda:

$$D_y x = \frac{\left(\dfrac{y+3}{y-2} - 1\right)^2}{-5} = \frac{\dfrac{(y+3-y+2)^2}{(y-2)^2}}{-5} = \frac{5^2}{-5(y-2)^2} = \frac{-5}{(y-2)^2} \quad \text{...(e)}$$

Comparando (d) con (e) se verifica el resultado.

III.5 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES CIRCULARES

III.5.1 LIMITE DEL COCIENTE DE SEN X ENTRE X, CUANDO X TIENDE A CERO

Haciendo $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$, se ve que $f(0)$ no está definida, sin embargo se demostrará que su límite existe.

Supóngase:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}$$

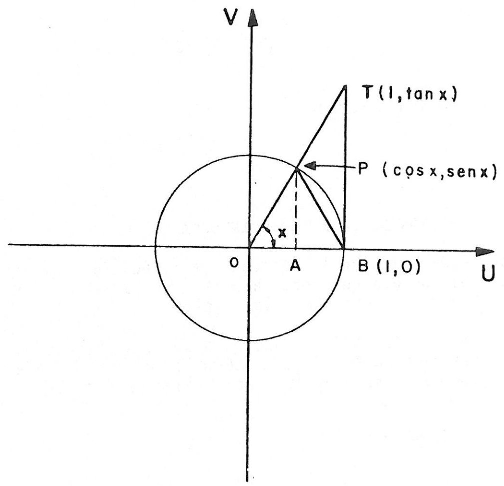


Figura III.9

La figura III.9 muestra un círculo de radio unitario cuya ecuación es:

$$u^2 + v^2 = 1$$

en él se puede distinguir el sector circular BOP cuyo ángulo central, medido en radianes es x, y cuya área está determinada por $\frac{1}{2}(1)$ x. De esta manera si s unidades cuadradas es el área del sector BOP, entonces $s = \frac{1}{2}x$.

También se observan la cuerda BP y la tangente BT en el punto B.

Llámese k_1 al área del triángulo OBP, donde $k_1 = \frac{1}{2}$ sen x, y k_2 al área del triángulo OBT, donde $k_2 = \frac{1}{2}$ tan x.

Por geometría elemental se tiene:

$$k_1 < s < k_2$$

esto es:

$$\frac{1}{2}\text{ sen } x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x \qquad \ldots (6)$$

o sea:

$$\text{sen } x < x < \tan x \qquad \ldots (7)$$

y dividiendo (7) entre sen x, queda:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\tan x}{\text{sen } x} \Longrightarrow 1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

de donde:

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \qquad \ldots (8)$$

Por otra parte:

$$1 - \cos x = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x}$$

o sea:

$$1 - \cos x = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x}$$

Como:

$$0 < \cos x < 1 \Longrightarrow \frac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x} < \text{sen}^2 x$$

por lo tanto:

$$1 - \cos x < \text{sen}^2 x$$

De (7):

$$\text{sen}^2 x < x^2;$$

ya que:

$$\text{sen } x > 0 \quad \text{y} \quad x > 0$$

por lo tanto:

$$1 - \cos x < \text{sen}^2 x < x^2 \Longrightarrow 1 - x^2 < \cos x:$$

llevado a (8) este resultado:

$$1 - x^2 < \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \qquad \ldots (9)$$

Tomando límites cuando $x \to 0$, se tiene:

$$\lim_{x \to 0} (1 - x^2) < \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} < \lim_{x \to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} < 1 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad \ldots (10)$$

TEOREMA III.10 DERIVADA DE LA FUNCION SENO

Hipótesis:

Se tiene la función $y = \text{sen } u$.

Tesis:

$$D_x \text{ sen } u = \cos u \, D_x u \qquad \ldots (7)$$

Demostración: Aplicando el método de los cuatro pasos para calcular primero D_u sen u.

1°) $y + \Delta y = \operatorname{sen}(u + \Delta u)$

2°) $\Delta y = \operatorname{sen}(u + \Delta u) - \operatorname{sen} u$

$$= 2\cos\left(\frac{2u + \Delta u}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}$$

$$= 2\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}$$

3°) $\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{2}{\Delta u}\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}$

$$= \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}$$

4°) $\lim\limits_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim\limits_{\Delta u \to 0}\cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right) \cdot \lim\limits_{\Delta u \to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta u}{2}}{\frac{\Delta u}{2}}$

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos u \ (1)$$

$$= \cos u$$

esto es:

$$D_u y = D_u \operatorname{sen} u = \cos u$$

finalmente sabiendo que $D_x y = D_u y \, D_x u$

se tiene:

$$D_x \operatorname{sen} u = \cos u \, D_x u \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA III.11 DERIVADA DE LA FUNCION COSENO

Hipótesis:

Sea la función $y = \cos u$.

Tesis:

$D_x \cos u = - \operatorname{sen} u \, D_x u.$ ... (8)

Demostración:

Se sabe que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento, entonces:

$$\cos u = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \Longrightarrow y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

Aplicando a esta función la fórmula (7)

$$D_x y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) D_x\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(D_x \frac{\pi}{2} - D_x u\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\left(0 - D_x u\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) D_x u$$

Teniendo en cuenta que:

$$y = \cos u$$

y que también:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u,$$

resulta:

$$D_x \cos u = - \operatorname{sen} u \, D_x u \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA III.12 DERIVADA DE LA FUNCION TANGENTE

Hipótesis:

Dada $y = \tan u$.

Tesis:

$D_x \tan u = \sec^2 u \, D_x u$ ... (9)

Demostración:

Considerando que $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$ y aplicando la fórmula (5):

$$D_x \tan u = D_x \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\cos u \, D_x \operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u \, D_x \cos u}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos u \cos u\, D_x u - \operatorname{sen} u\,(-\operatorname{sen} u)\, D_x u}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u} D_x u = \frac{1}{\cos^2 u} D_x u$$

$D_x \tan u = \sec^2 u\, D_x u$ Q.D.

TEOREMA III.13 DERIVADA DE LA FUNCION COTANGENTE

Hipótesis:

Se tiene $y = \cot u.$

Tesis:

$D_x \cot u = - \csc^2 D_x u$ ... (10)

Demostración:

Como $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$, al aplicar la fórmula (5) queda:

$$D_x \cot u = D_x \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u\, D_x \cos u - \cos u\, D_x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 u} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(-\operatorname{sen} u)\, D_x u - \cos\,(\cos u)\, D_x u}{\operatorname{sen}^2 u} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} D_x u$$

$$= - \frac{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u} = - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} D_x u$$

$\boxed{D_x \cot u = - \csc^2 u\, D_x u}$ Q.D.

TEOREMA III.14 DERIVADA DE LA FUNCION SECANTE

Hipótesis:

Si $y = \sec u.$

Tesis:

$D_x \sec u = \sec u \tan u\, D_x u$ ... (11)

Demostración:

Ya que:

$$\sec u = \frac{1}{\cos u}$$

aplicando (5a)

$$D_x \sec u = D_x \frac{1}{\cos u} = \frac{-1}{\cos^2 u} D_x \cos u$$

$$= \frac{-1}{\cos^2 u} (-\operatorname{sen} u)\, D_x u = \frac{1}{\cos u} \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} D_x u$$

$D_x \sec u = \sec u \tan u\, D_x u$ Q.D.

TEOREMA III.15 DERIVADA DE LA FUNCION COSECANTE

Hipótesis:

Si $y = \csc u.$

Tesis:

$D_x \csc u = - \csc u \cot u\, D_x u$ ... (12)

Demostración:

Recordando que $\csc u = \dfrac{1}{\operatorname{sen} u}$ al aplicar (5a) queda:

$$D_x \csc u = D_x \frac{1}{\operatorname{sen} u} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} D_x \operatorname{sen} u =$$

$$= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} \cos u \, D_x u = -\frac{1}{\operatorname{sen} u} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} D_x u$$

$$D_x \csc u = -\csc u \cot u \, D_x u \qquad \text{Q.D.}$$

A continuación se agrupan las fórmulas para derivar funciones circulares directas:

$$D_x \operatorname{sen} u = \cos u \, D_x u \tag{7}$$

$$D_x \cos u = -\operatorname{sen} u \, D_x u \tag{8}$$

$$D_x \tan u = \sec^2 u \, D_x u \tag{9}$$

$$D_x \cot u = -\csc^2 u \, D_x u \tag{10}$$

$$D_x \sec u = \sec u \tan u \, D_x u \tag{11}$$

$$D_x \csc u = -\csc u \cot u \, D_x u \tag{12}$$

Ejemplo III.26

Obtener la derivada de cada función.

a) $y = \operatorname{sen} 2x^2$

Al aplicar (7) $D_x \operatorname{sen} 2x^2 = \cos 2x^2 \, D_x 2x^2 =$

$= \cos 2x^2 (4x) = 4x \cos 2x^2$

b) $f(x) = \tan x^2$

Al aplicar (9) queda: $f'(x) = \sec^2 x^2 \, D_x (x^2)$

$f'(x) = 2x \sec^2 x^2$

c) $g(x) = \sec \sqrt{x}$

Al aplicar (11) $\dfrac{d}{dx} \sec \sqrt{x} = \sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$\frac{d}{dx} \sec \sqrt{x} = \frac{\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

d) $r = \cos \dfrac{\theta^2}{2}$

Empleando (8): $\dfrac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen} \dfrac{\theta^2}{2} \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\theta^2}{2}\right) =$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen} \frac{\theta^2}{2} \left(\frac{2\theta}{2}\right) = -\theta \operatorname{sen} \frac{\theta^2}{2}$$

e) $u = \cot \dfrac{1}{v}$

Usando (10): $\dfrac{du}{dv} = -\csc^2 \dfrac{1}{v} \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{1}{v}\right) =$

$$\frac{du}{dv} = -\csc^2 \frac{1}{v}\left(-\frac{1}{v^2}\right) = \frac{1}{v^2} \csc^2 \frac{1}{v}$$

f) $y = x^2 \sec x^2$

Se aplican (4) y (11)

$D_x y = x^2 D_x \sec x^2 + \sec x^2 D_x x^2 =$

$= x^2 \sec x^2 \tan x^2 \, D_x x^2 + \sec x^2 (2x) =$

$= x^2 \sec x^2 \tan x^2 (2x) + 2x \sec x^2 =$

$= 2x \sec x^2 (x^2 \tan x^2 + 1)$

Ejemplo III.27

Hallar la derivada de la función dada y valuarla para el valor indicado de la variable independiente.

a) $y = x \cos x$ para $x_1 = 0$

Se aplican (4) y (8): $\dfrac{dy}{dx} = x(-\operatorname{sen} x) + \cos x \, (1)$

$\dfrac{dy}{dx} = \cos x - x \operatorname{sen} x$; para $x_1 = 0$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x_1=0} = \cos(0) - \operatorname{sen}(0) = 1 - 0 = 1$$

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$

Empleando: (5) y (7); $f'(x) = \dfrac{x \cos x - \operatorname{sen} x \, (1)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} \quad y \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2}(0) - 1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}$$

c) $F(\theta) = \frac{1}{3}\tan^3\theta - \tan\theta + \theta \qquad \text{para } \theta = \frac{\pi}{6}$

Aplicando (4a, 6 y 9).

$$F'(\theta) = \frac{1}{3}\,3\tan^2\theta\sec^2\theta - \sec^2\theta + 1$$

$$F'(\theta) = \tan^2\theta\sec^2\theta - (\sec^2\theta - 1)$$

$$F'(\theta) = \tan^2\theta\sec^2\theta - \tan^2\theta$$

$$F'(\theta) = \tan^2\theta(\sec^2\theta - 1)$$

$$F'(\theta) = \tan^4\theta$$

$$F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4; \quad F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{9}$$

d) $\psi = \sec\alpha\tan\alpha \qquad \text{para } \alpha = \frac{\pi}{3}$

Se aplican (4), (9) y (11)

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \sec\alpha\sec^2\alpha + \tan\alpha\sec\alpha\tan\alpha =$$

$$= \sec^3\alpha + \sec\alpha\tan^2\alpha = \sec^3\alpha + \sec\alpha(\sec^2\alpha - 1)$$

$$= \sec^3\alpha + \sec^3\alpha - \sec\alpha$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = 2\sec^3\alpha - \sec\alpha$$

$$y \text{ para } \alpha = \frac{\pi}{3}: \left.\frac{d\psi}{d\alpha}\right]_{\alpha=\frac{\pi}{3}} = 2\sec^3\frac{\pi}{3} - \sec\frac{\pi}{3} = 2(2)^3 - 2 =$$

$$= 16 - 2 = 14$$

III.5.2 FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS Y SUS GRAFICAS

Las seis funciones trigonométricas descritas en el capítulo I, son periódicas y por tanto no son biunívocas. Luego la inversa de una función trigonométrica no es función. No obstante, es posible obtener una función biunívoca de una función trigonométrica dada, restringiendo el dominio en forma apropiada y entonces la inversa de tal función será una función.

Así $y = \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$ no es biunívoca pero la función: $y = \operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \in [-1, 1]$, sí lo es. La gráfica de esta función se ve en la figura III.10. A esta parte de la gráfica se le conoce como la *rama principal*.

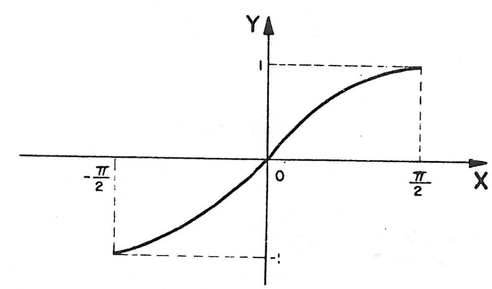


Figura III.10

La función $y = \operatorname{sen} x$ anteriormente definida es biunívoca, y por tanto tiene una inversa que es función. Esta función inversa se escribirá como ang sen x, que se lee *ángulo cuyo seno* y es la función seno inverso.

$$x = \operatorname{sen} y, \; y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; x \in [-1, 1]$$

por lo tanto:

$$y = \text{ang sen } x, \; y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

La gráfica de y = ang sen x se muestra en la figura III.11: ang sen x representará la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a ang sen x y cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang sen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } y;\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

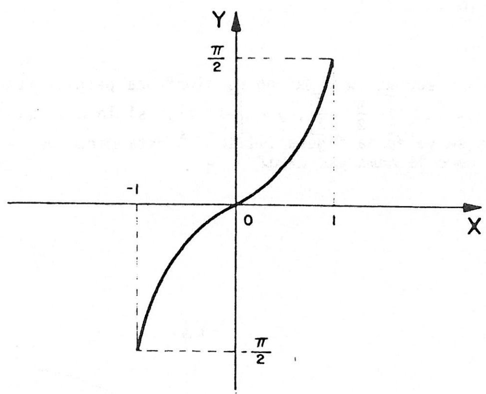


Figura III.11

Considérese ahora la función:

$$y = \cos x,\ x \in [0, \pi],\ y \in [-1, 1]$$

cuya gráfica se muestra en la figura III.12. Puesto que la función recién definida es biunívoca, su inversa es una función. Dicha función inversa se designa por ángulo coseno y es la función coseno inverso.

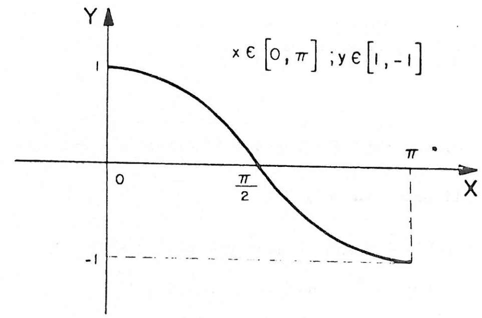


Figura III.12

La gráfica de ángulo coseno se muestra en la figura III.13; se escribirá ángulo coseno para designar la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a ángulo coseno y cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang cos } x \Leftrightarrow x = \cos y,\ y \in [0, \pi]$$

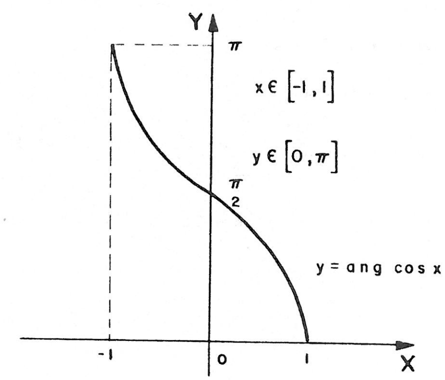


Figura III.13

La función tangente no es biunívoca, sin embargo, se puede expresar el dominio en condiciones tales que la función tangente sea biunívoca, como:

$$y = \tan x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\ ;\ y \in \mathbb{R}$$

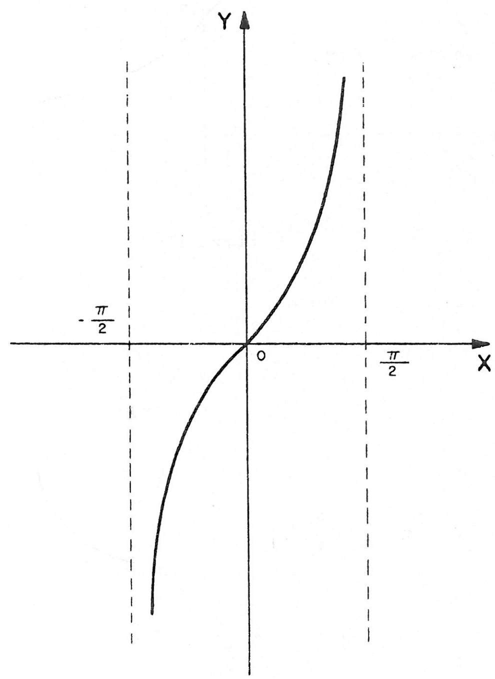


Figura III.14

La función tangente así definida es biunívoca y de ahí que su inversa sea función, donde se designa como ang tan, a la función tangente inversa.

$$x = \tan y,\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\ x \in \mathbb{R}$$

La gráfica de la función ang tan se muestra en la figura III.15 ang tan representará la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a ang tan cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang tan } x \iff x = \tan y \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

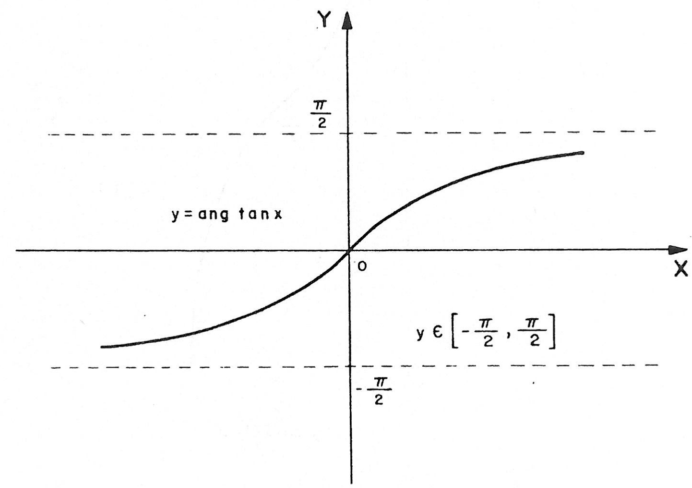


Figura III.15

Considérese la función cotangente definida por:

$$y = \cot x,\ x \in (0, \pi),\ y \in \mathbb{R}$$

cuya gráfica se muestra en la figura III.16, esta función cotangente así definida es biunívoca y de ahí que su inversa sea una función. La inversa se designará como ang cot x, es la función cotangente inversa.

$$x = \cot y\ ,\quad y \in (0, \pi),\ x \in \mathbb{R}$$

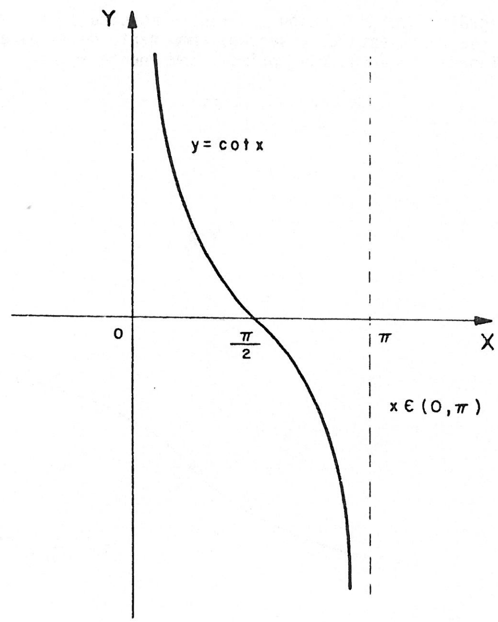


Figura III.16

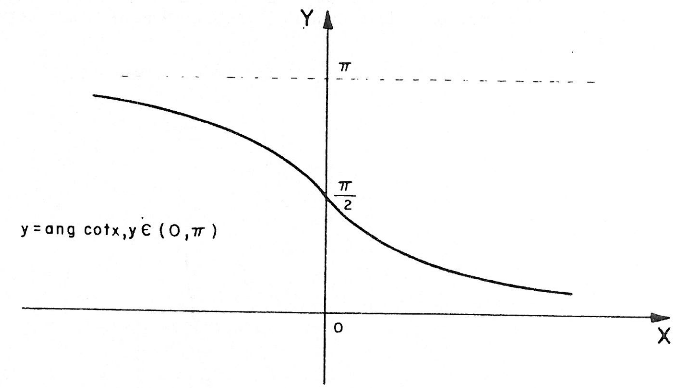


Figura III.17

La gráfica de ang cot x se muestra en la figura III.17, ang cot x representará la segunda componente de la pareja ordenada que pertenece a ang cot y cuya primera componente es x.

$$y = \text{ang cot } x \iff x = \cot y \quad \text{y} \quad y \in (0, \pi)$$

Puesto que las funciones secante y cosecante no son biunívocas, el dominio de dichas funciones se seleccionará apropiadamente, el dominio seleccionado para tener una función biunívoca consistirá en la unión de dos intervalos. La selección se hace tomando en cuenta el resultado más sencillo para más adelante definir las derivadas de las funciones inversas.

Considerando el segmento de la función secante definida por: $y = \sec x,\ x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [0, \pi/2]$; ver figura III.18. La función secante así definida es biunívoca y de ahí que su inversa sea una función secante inversa.

$$x = \sec y, \quad y \in [-\pi, -\pi/2) \cup [0, \pi/2)$$

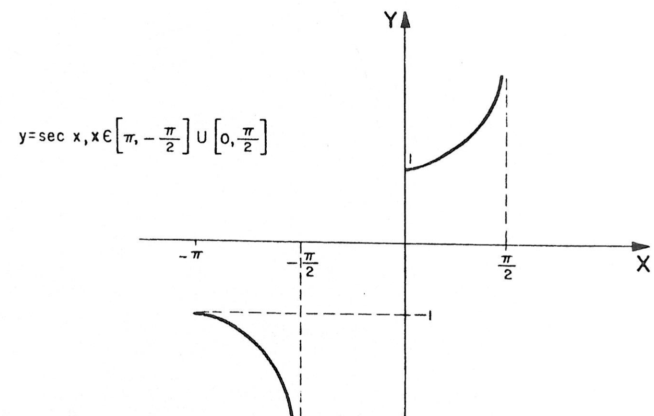


Figura III.18

La gráfica de ang sec x se muestra en la figura III.19.

$$y = \text{ang sec } x \Leftrightarrow x = \sec y; \quad y \in [-\pi, -\pi/2) \cup [0, \pi/2)$$

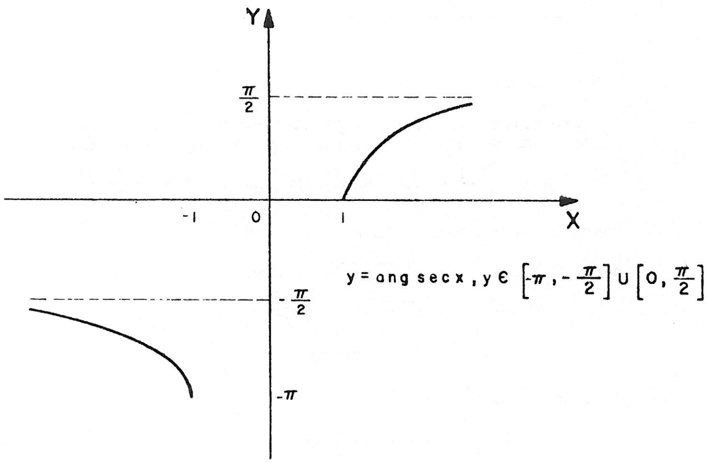


Figura III.19

La función cosecante cuyo dominio se seleccionará como:

$$y = \csc x, \quad x \in (-\pi, -\pi/2] \cup (0, \pi/2]$$

se representa en la gráfica de la figura III.20. La función cosecante así definida es biunívoca, y de ahí que su inversa es una función. La inversa se expresa como ang csc, es la función cosecante inversa.

$$x = \csc y, \quad y \in (-\pi, -\pi/2] \cup (0, \pi/2]$$

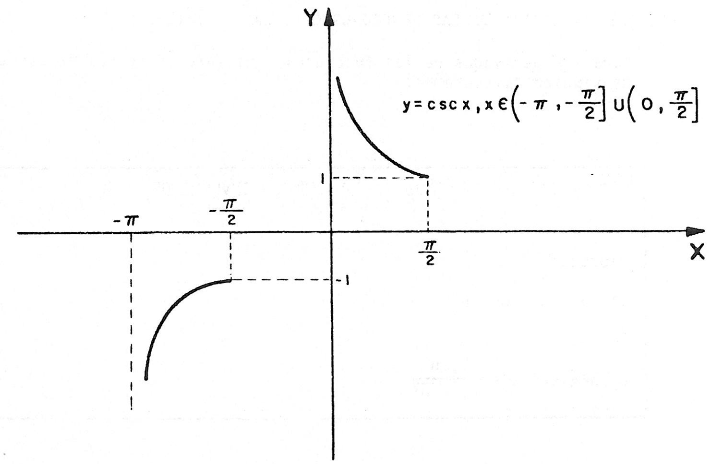


Figura III.20

La gráfica de ang csc se muestra en la figura III.21.

$$y = \text{ang csc } x \Leftrightarrow x = \csc y \quad y \in (-\pi, -\pi/2] \cup (0, \pi/2]$$

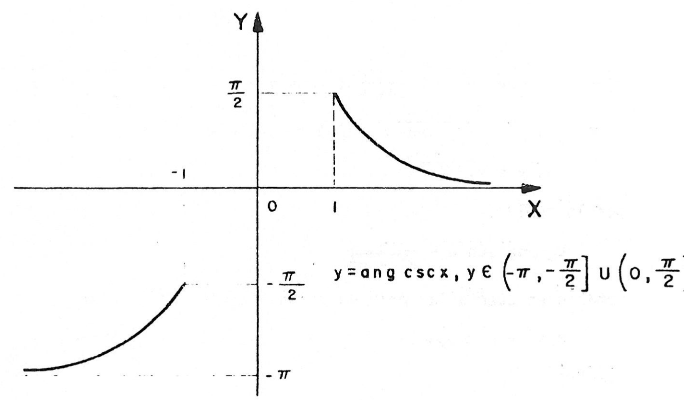


Figura III.21

III.5.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS

Para las derivadas de las funciones circulares inversas se presentan los siguientes teoremas:

TEOREMA III.16 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA DEL SENO

Hipótesis:

Si $y = \text{ang sen } u$

Tesis:

$$D_x \text{ ang sen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \ldots (13)$$

Demostración:

$y = \text{ang sen } u$ es equivalente a: $u = \text{sen } y$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, y la derivada de ésta con respecto a y es: $D_y u = \cos y > 0$.

Ahora bien, teniendo en cuenta la derivada de una función inversa:

$$D_u y = \frac{1}{D_y u} \quad \text{resulta:}$$

$$D_u y = D_u \text{ ang sen } u = \frac{1}{\cos y} \; ; \quad \cos y > 0 \text{ ya que } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

pero $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$ y como $\text{sen } y = u$

$$\cos y = \sqrt{1 - u^2}$$

por lo cual:

$$D_u \text{ ang sen } u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

tomando en cuenta la derivada de una función de función:

$$D_x y = D_u y \, D_x u \, ,$$

resulta:

$$D_x \text{ ang sen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Q.D.

TEOREMA III.17 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA DEL COSENO

Hipótesis:

Si $y = \text{ang cos } u$

Tesis:

$$D_x \text{ ang cos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}} \qquad \ldots (14)$$

Demostración:

La expresión $y = \text{ang cos } u$ es equivalente a: $u = \cos y$ para $0 \leq y \leq \pi$. La derivada de ésta con respecto a y es: $D_y u = -\text{sen } y$.

Como $D_u y = \frac{1}{D_y u}$ $\qquad D_u y = D_u \text{ ang sen } u = \frac{1}{-\text{sen } y}$

donde: $-\text{sen } y < 0$ porque $0 < y < \pi$

pero: $-\text{sen } y = -\sqrt{1 - \cos^2 y}$ y como $\cos y = u$

$-\text{sen } y = -\sqrt{1 - u^2}$, luego:

$$D_u \text{ ang cos } u = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

de donde se obtiene:

$$D_x \text{ ang cos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Q.D.

TEOREMA III.18 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA DE LA TANGENTE

Hipótesis:

Si $y = \text{ang tan } u$

Tesis:

$$D_x \text{ ang tan } u = \frac{D_x u}{1 = u^2} \qquad \ldots (15)$$

Demostración:

$y = \text{ang tan } u$ es equivalente a la función $u = \tan y;\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ y la derivada de ésta con respecto a y es:

$$D_y u = \sec^2 y\text{, se tiene:}$$

$$D_u y = \frac{1}{D_y u} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Empleando la identidad trigonométrica $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, teniendo en cuenta que $\tan y = u$: $\sec^2 y = 1 + u^2$ por lo cual:

$$D_u y = D_u \text{ ang tan } u = \frac{1}{1 + u^2}$$

luego:

$$D_x \text{ ang tan } u = \frac{D_x u}{1 + u^2} \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA III.19 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA DE LA COTANGENTE

Hipótesis:

Si $y = \text{ang cot } u$

Tesis:

$$D_x \text{ ang cot } u = -\frac{D_x u}{1 + u^2} \qquad \dots (16)$$

Demostración:

La función inversa de $y = \text{ang cot } u$ es: $u = \cot y;\ 0 < y < \pi$, para la cual: $D_y u = -\csc^2 y$

ya que $D_u y = \frac{1}{D_y u}$:

$$D_u \text{ ang cot} = -\frac{1}{\csc^2 y}$$

pero: $\csc^2 y = 1 + \cot^2 y = 1 + u^2$ porque $\cot y = u$

entonces: $D_u \text{ ang cot } u = -\frac{1}{1 + u^2}$ de lo cual se sigue que:

$$D_x \text{ ang cot } u = -\frac{D_x u}{1 + u^2} \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA III.20 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA DE LA SECANTE

Hipótesis:

Si $y = \text{ang sec } u$

Tesis:

$$D_x \text{ ang sec } u = \frac{D_x u}{u\sqrt{u^2 - 1}} \qquad \dots (17)$$

Demostración:

Sabiendo que la función inversa de $y = \text{ang sec } u$ es: $u = \sec y$, $y \in (-\pi, -\pi/2] \cup (0, \pi/2]$ y que la derivada de ésta con respecto a y es: $D_y u = \sec y \tan y$, se tiene:

$$D_u y = \frac{1}{D_y u} \qquad D_u \text{ ang sec } u = \frac{1}{\sec y \ \tan y}$$

ahora, $\tan^2 y = \sec^2 y - 1 \qquad \tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$

y como $\sec y = u$, se tendrá:

$$D_u \text{ ang sec } u = \frac{1}{u(\pm\sqrt{u^2 - 1})}$$

además, si $u > 1 \Longrightarrow \sec y > 0, \tan y > 0 \qquad \sec y \tan y > 0$

si $u < 1 \qquad \sec y < 0, \tan y < 0 \qquad \sec y \tan y > 0$

entonces:

$$D_u \text{ ang sec } u = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

por lo cual:

$$D_x \text{ ang sec } u = \frac{D_x u}{u\sqrt{u^2 - 1}} \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA III.21 DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA DE LA COSECANTE

Hipótesis:

Si $y = \text{ang csc } u$

Tesis:

$$D_x \text{ ang csc } u = -\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}} \quad \ldots (18)$$

Demostración:

Como la función inversa de $y = \text{ang csc } u$ es $u = \csc y$, $y \in (-\pi, -\pi/2] \cup (0, \pi/2]$ y la derivada de $u = \csc y$ con respecto a y es $D_y u = -\csc y \cot y$, se tiene que:

$$D_u y = \frac{1}{D_y u} \Longrightarrow D_u \text{ ang csc } u = -\frac{1}{\csc y \cot y}$$

pero $\cot^2 y = \csc^2 y - 1$ $\quad$ $\cot y = \pm\sqrt{\csc^2 y - 1}$

y como $\csc y = u$ resulta que $\csc y \cot y = u(\pm\sqrt{u^2-1})$

así: $D_u \text{ ang csc } u = -\dfrac{1}{u(\pm\sqrt{u^2-1})}$

además, si $u > 1$ $\quad$ $\csc y > 0$, $\cot y > 0$ $\quad$ $\csc y \cot y > 0$

si $u < 1$ $\quad$ $\csc y < 0$, $\cot y < 0$ $\quad$ $\csc y \cot y > 0$

entonces: $D_u \text{ ang csc } u = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$

y la derivada con respecto a x es:

$$D_x \text{ ang csc } u = -\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}} \qquad \text{Q.D.}$$

Las fórmulas para derivar funciones circulares inversas se resumen a continuación:

$$D_x \text{ ang sen } u = \frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (13)$$

$$D_x \text{ ang cos } u = -\frac{D_x u}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (14)$$

$$D_x \text{ ang tan } u = \frac{D_x u}{1+u^2} \qquad (15)$$

$$D_x \text{ ang cot } u = -\frac{D_x u}{1+u^2} \qquad (16)$$

$$D_x \text{ ang sec } u = \frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}} \qquad (17)$$

$$D_x \text{ ang csc } u = -\frac{D_x u}{u\sqrt{u^2-1}} \qquad (18)$$

Ejemplo III.28

Derivar cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \text{ang sen } x^2$

Aplicando (13):

$$D_x \text{ ang sen } x^2 = \frac{D_x x^2}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

b) $y = \text{ang tan } \sqrt{x}$

Aplicando (15):

$$D_x \text{ ang tan } \sqrt{x} = \frac{D_x \sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

c) $y = \text{ang cot } x^3$

Aplicando (16):

$$D_x \text{ ang cot } x^3 = -\frac{D_x x^3}{1+(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{1+x^6}$$

d) $y = \text{ang cos } \frac{x}{a}$

Aplicando (14):

$$D_x \text{ ang cos } \frac{x}{a} = -\frac{D_x\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{-\frac{1}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}} =$$

$$D_x \text{ ang cos } \frac{x}{a} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

e) $y = \frac{1}{2} \text{ ang sec } 2x$

Aplicando (4a) y (17):

$$D_x \frac{1}{2} \text{ ang sec } 2x = \frac{1}{2}\left(\frac{D_x (2x)}{2x\sqrt{(2x)^2-1}}\right) = \frac{2}{4x\sqrt{4x^2-1}} = \frac{1}{2x\sqrt{4x^2-1}}$$

f) $y = x \text{ ang csc } x$

Aplicando (4) y (18):

$$D_x(x \text{ ang csc } x) = x\left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) + \text{ang csc } x \;(1)$$

$$D_x(x \text{ ang csc } x) = \text{ang csc } x - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ejemplo III.29

Hallar cada una de las derivadas indicadas y valuarla para el valor dado de la variable independiente.

a) Si $f(x) = \text{ang sen } \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$, hallar $f'(a)$

Se emplearán (3), (13), (5), (6a) y (2)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} + \frac{x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\right) - \sqrt{a^2 - x^2}\,(1)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}} + \frac{\frac{-x^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{-a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x^2 - a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$$

y el valor de $f'(x)$ para $x = a$ es:

$$f'(a) = -\frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a^2} = 0$$

b) Hallar $g'(0)$, si $g(r) = \text{ang tan } \frac{a + r}{1 - ar}$

Aplicando (15) y (5):

$$g'(r) = \frac{\frac{d}{dr}\left[\frac{a + r}{1 - ar}\right]}{1 + \left[\frac{a + r}{1 - ar}\right]^2} = \frac{\frac{(1 - ar)(1) - (a + r)(-a)}{(1 - ar)^2}}{1 + \frac{(a + r)^2}{(1 - ar)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{1 - ar + a^2 + ar}{(1 - ar)^2}}{\frac{(1 - ar)^2 + (a + r)^2}{(1 - ar)^2}} = \frac{1 + a^2}{1 - 2\,ar + a^2r^2 + a^2 + 2\,ar + r^2}$$

$$= \frac{1 + a^2}{a^2r^2 + r^2 + a^2 + 1} = \frac{1 + a^2}{(a^2 + 1)(r^2 + 1)} = \frac{1}{r^2 + 1}$$

$$g'(r) = \frac{1}{r^2 + 1} \quad \Longrightarrow \quad g'(0) = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

III.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES EXPRESADAS EN FORMA IMPLICITA Y EN FORMA PARAMETRICA

III.6.1 DERIVADA DE LA FUNCION IMPLICITA

Recordando que en una función presentada en forma implícita la variable dependiente no está despejada, como en la ecuación:

$$2x^5 - x = 3y^3 + 2y + 8 \qquad \ldots \text{(A)}$$

y considerando que esta ecuación define a y como una o más funciones derivables de x, se puede hallar la derivada de y con respecto a x por el proceso llamado *derivación implícita*, el cual se presenta a continuación:

el primer miembro de la ecuación (A) es una función de x; sea:

$$F(x) = 2x^5 - x$$

el segundo miembro de (A) es una función de y, sea:

$$G(y) = 3y^3 + 2y + 8$$

donde y es función de x, es decir:

$$y = f(x)$$

por lo que la ecuación (A) se puede escribir como:

$$F(x) = G(y) \quad \text{o bien} \quad F(x) = G(f(x))$$

entonces se tiene:

$$D_x\, F(x) = D_x\, G(y) \qquad \ldots \text{(B)}$$

$$D_x\left[2x^5 - x\right] = D_x\left[3y^3 + 2y + 8\right]$$

la derivada de $F(x)$ se puede obtener fácilmente:

$$D_x\, F(x) = D_x\,(2x^5 - x) = 10x^4 - 1 \qquad \ldots \text{(C)}$$

la derivada de $G(y)$ se debe obtener usando la regla de la cadena, ya que $G(y) = 3y^3 + 2y + 8$ y se pretende derivar con respecto a x:

$$D_x\, G(y) = D_x(3y^3 + 2y + 8) = 9y^2\, D_x y + 2D_x y \quad \ldots (D)$$

sustituyendo los valores de (C) y (D) en (B) se tiene:

$$10x^4 - 1 = 9y^2\, D_x y + 2D_x y = D_x y \; (9y^2 + 2)$$

despejando D_x y se tiene:

$$D_x y = \frac{10x^4 - 1}{9y^2 + 2}$$

La ecuación (A) es un caso especial donde todos los términos en x están separados de los términos en y. Sin embargo, la idea de la derivación implícita es general y lo importante es derivar cada uno de los términos de la ecuación tomando en cuenta que y no es la variable independiente y de ahí la necesidad de usar la regla de la cadena.

Ejemplo III.30

Usando la derivación implícita, hallar $D_x y$ de:

$$2x^4 y^2 - xy^3 + 8y = 4\sqrt{y} \quad \ldots (a)$$

Suponiendo que existen una o más funciones derivables tales que si $y = f(x)$ la ecuación (a) se verifica, al derivar ambos miembros con respecto a x se tiene:

$$D_x\, (2x^4y^2 - xy^3 + 8y) = D_x\, (4\sqrt{y})$$

$$D_x\, (2x^4y^2) - D_x\, (xy^3) + D_x\, (8y) = D_x\, (4\sqrt{y}) \quad \ldots (b)$$

Calculando por separado cada una de las derivadas:

$$D_x\, (2x^4y^2) = 2x^4\, D_x y^2 + y^2\, D_x\, 2x^4 = 2x^4\, 2y\, D_x y + y^2\, 8x^3 =$$

$$= 4x^4 y\, D_x y + 8x^3 y^2$$

$$D_x\, (xy^3) = x\, D_x y^3 + y^3\, D_x x = 3xy^2\, D_x y + y^3$$

$$D_x\, 8y = 8\, D_x y$$

$$D_x\, (4\sqrt{y}) = \frac{4}{2\sqrt{y}}\, D_x y = \frac{2}{\sqrt{y}}\, D_x y$$

Sustituyendo estos resultados en (b):

$$4x^4y\, D_x y + 8x^3y^2 - 3xy^2\, D_x y - y^3 + 8\, D_x y = \frac{2}{\sqrt{x}}\, D_x y \quad \ldots (c)$$

Despejando $D_x y$ de la ecuación (c):

$$D_x y\, \left(4x^4y - 3xy^2 + 8 - \frac{2}{\sqrt{y}}\right) = y^3 - 8x^3y^2$$

$$D_x y = \frac{y^3 - 8x^3y^2}{4x^4y - 3xy^2 + 8 - \frac{2}{\sqrt{y}}}$$

$$D_x y = \frac{y^3\sqrt{y} - 8x^3y^2\sqrt{y}}{4x^4y\,\sqrt{y} - 3xy^2\sqrt{y} + 8\,\sqrt{y} - 2}$$

Es conveniente notar cómo aun cuando de la ecuación que define una función implícita no sea posible despejar la variable dependiente y, su derivada $D_x y$ siempre se puede despejar después de derivar, pues queda de primer grado. Además, en general, el resultado contiene tanto a x como a y.

Ejemplo III.31

Encontrar $D_x y$ de la ecuación:

$$\text{sen}\, (xy) = x^2 + y$$

$$D_x\, [\text{sen}\, (xy)] = D_x\, (x^2) + D_x\, (y)$$

$$[\cos\, (xy)]\; D_x\, (xy) = 2x + D_x y$$

$$[\cos\, (xy)]\; (y + x\, D_x y) = 2x + D_x y$$

$$D_x y\, [x \cos\, (xy) - 1] = 2x - y \cos\, (xy)$$

$$D_x y = \frac{2x - y \cos\, (xy)}{x \cos\, (xy) - 1}$$

Ejemplo III.32

Encontrar $D_x y = y'$ de la ecuación $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$, y calcular su valor en el punto P(2, -1).

$$3x^2 - (3y^2 + 6xy\, y') + 3y^2y' = 0$$

$$y'\, (3y^2 - 6xy) = 3y^2 - 3x^2$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{y^2 - 2xy}$$

$$y'\Big]_P = \frac{(-1)^2 - 2^2}{(-1)^2 - 2(2)\,(-1)} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$$

III.6.2 DERIVADA DE LA FUNCION DEFINIDA EN FORMA PARAMETRICA

Se ha visto la derivación de funciones explícitas y de funciones dadas en forma implícita. Como se vio en el capítulo I, existe otra forma de presentar una función $y = F(x)$, que es la forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(t) & \dots (11) \\ y = g(t) & \dots (12) \end{cases}$$

En esta parte se trata de calcular la derivada de y con respecto a x: $D_x y$ de una función dada en forma paramétrica, para lo cual se aplicará el siguiente razonamiento.

De la regla de la cadena:

$$D_x y = D_t y \; D_x t \qquad \dots (13)$$

en donde $D_x t$ se puede calcular despejando t de la ecuación (11), lo cual no siempre es fácil y a veces es imposible. Otra forma de calcular $D_x t$ es usando la derivada de la función inversa, o sea:

$$D_x t = \frac{1}{D_t x}$$

con lo que la ecuación (13) se puede escribir:

$$D_x y = D_t y \; \frac{1}{D_t x}$$

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

La fórmula anterior permite calcular la derivada de una función paramétrica, sin tener que llegar a la ecuación cartesiana de la función.

Ejemplo III.33

Encontrar $D_x y$ de la siguiente función:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - t \\ y = +\sqrt{t} - 1 \end{cases}$$

a) Usando la fórmula anterior.

b) Eliminando el parámetro t y derivando el resultado.

Solución

a) $D_x y = \dfrac{D_t(+\sqrt{t} - 1)}{D_t(2t^2 - t)} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{4t - 1} = \dfrac{1}{8t\sqrt{t} - 2\sqrt{t}}$

$$D_x y = \frac{1}{8t\sqrt{t} - 2\sqrt{t}} \qquad \dots (c)$$

b) De (b): $t = (y + 1)^2$ $\qquad \dots (d)$

sustituyendo en (a):

$$x = 2\left[(y+1)^2\right]^2 - (y+1)^2 \qquad x = 2(y+1)^4 - (y+1)^2 \qquad \dots (e)$$

De la ecuación (e) se puede obtener $D_x y$ derivando implícitamente:

$$D_x x = D_x\left[2(y+1)^4 - (y+1)^2\right]$$

$$1 = 8(y+1)^3 D_x y - 2(y+1) D_x y$$

$$D_x y = \frac{1}{8(y+1)^3 - 2(y+1)} \qquad \dots (f)$$

Los resultados (c) y (f) son equivalentes.

En efecto, sustituyendo (d) en (c):

$$D_x y = \frac{1}{8(y+1)^2\sqrt{(y+1)^2} - 2\sqrt{(y+1)^2}} = \frac{1}{8(y+1)^3 - 2(y+1)}$$

que comprueba el resultado obtenido.

Ejemplo III.34

De las ecuaciones paramétricas de la cicloide:

$$\begin{cases} x = 2(\phi - \text{sen}\,\phi) \\ y = 2(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

calcular la derivada $D_x y$ y valuarla para $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$D_x y = \frac{D_\phi\, 2(1 - \cos\phi)}{D_\phi\, 2(\phi - \text{sen}\,\phi)} = \frac{2(\text{sen}\,\phi)}{2(1 - \cos\phi)} = \frac{\text{sen}\,\phi}{1 - \cos\phi}$$

$$D_x y = \frac{\text{sen}\,\phi}{1 - \cos\phi}$$

$$D_x y\Big]_{\phi = \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}; \quad D_x y\Big]_{\phi = \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

III.6.3 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE FUNCIONES IMPLICITAS

En el inciso III.6.1 se presentó el procedimiento para obtener la primera derivada de una función implícita.

Una vez obtenida la primera derivada en términos tanto de la variable independiente como de la dependiente, la segunda derivada se encuentra derivando ambos miembros de la ecuación obtenida, tomando en cuenta que en el segundo miembro puede aparecer la variable dependiente teniéndose que aplicar en estos casos la regla de la cadena.

Ejemplo III.35

Encontrar la segunda derivada y" de:

$$xy - y^2 + 2 = 0$$

Solución

Derivando implícitamente para encontrar y':

$$xy' + y - 2yy' = 0$$

despejando y':

$$y' = \frac{-y}{x - 2y}$$

derivando en la ecuación anterior para obtener y":

$$y'' = \frac{(x - 2y)(-y') - (-y)(1 - 2y')}{(x - 2y)^2}$$

$$y'' = \frac{2yy' - xy' + y - 2yy'}{(x - 2y)^2} = \frac{y - xy'}{(x - 2y)^2}$$

Con esta ecuación se tiene la segunda derivada y se puede observar que ésta queda en términos de x y y'. Será conveniente tener a y" como función de x y de y únicamente, para lo cual bastará sustituir el valor de y' en la última ecuación.

$$y'' = \frac{y - x\left(\frac{-y}{x - 2y}\right)}{(x - 2y)^2}$$

$$y'' = \frac{y + \frac{xy}{x - 2y}}{(x - 2y)^2} \; ; \qquad y'' = \frac{\frac{(x - 2y)y + xy}{(x - 2y)}}{(x - 2y)^2}$$

$$y'' = \frac{2xy - 2y^2}{(x - 2y)^3}$$

Es posible encontrar la segunda derivada sin necesidad de tener una ecuación explícita para la primera derivada. Para esto sólo es necesario tener una ecuación que contenga la primera derivada y derivarla implícitamente.

Ejemplo III.36

Del ejemplo anterior, obtener y" a partir de la ecuación:

$$xy' + y - 2yy' = 0$$

Derivando implícitamente:

$$x\,D_x y' + y' D_x x + D_x y - 2D_x (yy') = 0$$

$$xy'' + y' + y' - 2(yy'' + y'y') = 0 \qquad \ldots (a)$$

despejando y":

$$y''(x - 2y) = 2(y')^2 - 2y'$$

$$y'' = \frac{2(y')^2 - 2y'}{x - 2y} \qquad \ldots (b)$$

en esta expresión y" se encuentra también en términos de x, y, y'.

Sustituyendo:

$$y'' = \frac{2\left(\frac{-y}{x - 2y}\right)^2 - 2\left(\frac{-y}{x - 2y}\right)}{x - 2y}$$

$$y'' = \frac{\frac{2y^2}{(x - 2y)^2} + \frac{2y(x - 2y)}{(x - 2y)^2}}{x - 2y} = \frac{2y^2 + 2xy - 4y^2}{(x - 2y)^3}$$

$$y'' = \frac{2xy - 2y^2}{(x - 2y)^3} \qquad \ldots (c)$$

Los resultados obtenidos para y" son equivalentes obviamente.

El procedimiento para obtener la derivada enésima de una función implícita es derivar la ecuación que contenga a la derivada de orden (n - 1) ya sea que esté despejada o no.

Ejemplo III.37

Del ejemplo anterior obtener la tercera derivada y'''

Solución

Partiendo de la ecuación (a):

$$xy'' + 2y' - 2yy'' - 2(y')^2 = 0$$

derivando implícitamente:

$$xy''' + y'' + 2y'' - 2yy''' - 2y'y'' - 4y'y'' = 0$$

$$xy''' + 3y'' - 2yy''' - 6y'y'' = 0$$

despejando y''':

$$y'''\ (x - 2y) = 6y'y'' - 3y'' \implies y''' = \frac{6y'y'' - 3y''}{x - 2y}$$

sustituyendo las expresiones de y' y y'' obtenidas antes:

$$y''' = \frac{6\left(\frac{-y}{x - 2y}\right)\left[\frac{2xy - 2y^2}{(x - 2y)^3}\right] - 3\left[\frac{2xy - 2y^2}{(x - 2y)^3}\right]}{x - 2y}$$

$$= \frac{\frac{-6y\ (2xy - 2y^2)}{(x - 2y)^4} - \frac{6xy - 6y^2}{(x - 2y)^3}}{x - 2y} =$$

$$= \frac{\frac{-6y\ (2xy - 2y^2) - (x - 2y)(6xy - 6y^2)}{(x - 2y)^4}}{x - 2y}$$

$$= \frac{-12xy^2 + 12y^3 - 6x^2y + 12xy^2 + 6xy^2 - 12y^3}{(x - 2y)^5}$$

$$= \frac{-6x^2y + 6xy^2}{(x - 2y)^5} \qquad y''' = \frac{6xy^2 - 6x^2y}{(x - 2y)^5}$$

III.6.4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE FUNCIONES DEFINIDAS PARAMETRICAMENTE

En el inciso III.6.2, se estudió la derivación de funciones dadas paramétricamente y se demostró que:

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} \qquad \ldots (14)$$

El objetivo de este tema es encontrar una forma para obtener las derivadas de orden superior de una función definida paramétricamente.

Se sabe que:

$$D_x^2 y = D_x(D_x y) \qquad \ldots (15)$$

Cuando se utiliza la expresión (14) la derivada $D_x y$ es en general función de t y no de x, entonces existe la necesidad de aplicar la regla de la cadena para aplicar (15).

$$D_x^2 y = D_t\ (D_x y)\ \ D_x t$$

pero:

$$D_x t = \frac{1}{D_t x}$$

entonces:

$$D_x^2 y = \frac{D_t\ (D_x y)}{D_t x} \qquad \ldots (16)$$

La ecuación (16) permite calcular la derivada segunda de una función paramétrica, para lo cual es necesario conocer la primera $D_x y$ como función de t.

Siguiendo un procedimiento análogo para determinar la enésima derivada, por definición se tiene:

$$D_x^n y = D_x\left(D_x^{n-1} y\right)$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$D_x^n y = D_t\left(D_x^{n-1} y\right) D_x t$$

$$D_x^n y = \frac{D_t\,(D_x^{n-1} y)}{D_t\, x}$$

o bien:

$$\frac{d^n y}{d^n x} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Es claro que para obtener la enésima derivada es necesario conocer todas las derivadas anteriores.

Ejemplo III.38

Calcular $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ para la función definida por:

$$x = \frac{3t + t^3}{54} \quad ; \quad y = \frac{t^3 - 9t}{9}$$

Solución

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 + t^2}{18} \; ; \; \frac{dy}{dt} = \frac{t^2 - 3}{3},$$

luego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{t^2 - 3}{3}}{\frac{1 + t^2}{18}} = \frac{6(t^2 - 3)}{1 + t^2} = \frac{6t^2 - 18}{t^2 + 1}$$

calculando:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{6t^2 - 18}{t^2 + 1}\right]}{\frac{t^2 + 1}{18}}$$

$$= \frac{\frac{(t^2 + 1)(12t) - (6t^2 - 18)(2t)}{(t^2 + 1)^2}}{\frac{t^2 + 1}{18}} =$$

$$= \frac{18(12t^3 + 12t - 12t^3 + 36t)}{(t^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{18(48t)}{(t^2 + 1)^3} \implies \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{864\, t}{(t^2 + 1)^3}$$

Ejemplo III.39

Calcular $D_x^2 y$ de la función dada por:

$$x = \text{sen } t; \qquad y = \cos^2 t$$

Solución

Como: $D_t x = \cos t$; $\qquad D_t y = -2 \cos t \text{ sen } t$

$$D_x y = \frac{-2 \cos t \text{ sen} t}{\cos t} = -2 \text{ sen } t$$

$$D_x^2 y = \frac{-2 \cos t}{\cos t} = -2$$

Ejemplo III.40

Calcular $D_x^3 y$ y valuarla para $t = 1$, si la función se da con:

$$x = \text{ang tan } t^2 \qquad y = t^2 + 2$$

$$D_x y = \frac{D_t\, y}{D_t\, x} = \frac{2t}{\frac{2t}{1 + t^4}} = 1 + t^4$$

$$D_x^2 y = \frac{D_t\,(D_x\, y)}{D_t\, x} = \frac{4t^3}{\frac{2t}{1 + t^4}} = 2t^2(1 + t^4) = 2t^2 + 2t^6$$

$$D_x^3 y = \frac{D_t\,(D_x^2\, y)}{D_t\, x} = \frac{4t + 12t^5}{\frac{2t}{1 + t^4}} = (2 + 6t^4)(1 + t^4)$$

$$D_x^3 y = 6t^8 + 8t^4 + 2$$

$$D_x^3 y\Big]_{t=1} = 6 + 8 + 2 = 16$$

III.7 APLICACIONES GEOMETRICAS DE LA DERIVADA

Como ya se vio en la interpretación geométrica de la derivada, ésta representa la pendiente de la recta tangente a la curva en estudio en el punto en el que se ha valuado dicha derivada. Ahora se hará uso de este hecho para ejemplificar algunas de las aplicaciones geométricas de la derivada.

Ejemplo III.41

Hallar la pendiente de la tangente a la curva de ecuación

$$y = x^2 - 3$$

en el punto P(1, - 2). Ver figura III.22.

Solución

$$m = \frac{dy}{dx}; \quad m = 2x; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x\,=\,1} = 2(1) = 2$$

y por tanto: $m = 2$

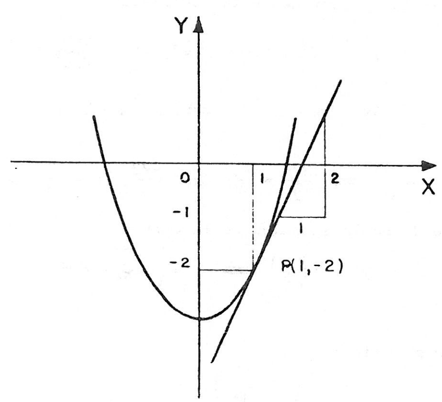


Figura III.22

Ejemplo III.42

Determinar los puntos de la curva de ecuación $y = \frac{5}{1 - 2x}$ donde la tangente es paralela a la recta de ecuación $2x - 5y + 5 = 0$.

Solución

La ecuación de la recta puede escribirse $y = \frac{2}{5}x + 1$ de donde se deduce que su pendiente es: $m_1 = \frac{2}{5}$

La pendiente de la tangente a la curva en cada punto es:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{10}{(1 - 2x)^2}$$

Como la condición de paralelismo entre dos rectas de pendientes m_1 y m_2 es $m_1 = m_2$, se tiene:

$$\frac{2}{5} = \frac{10}{(1 - 2x)^2}$$

Resolviendo esta ecuación:

$$(1 - 2x)^2 = 25 \Longrightarrow 1 - 4x + 4x^2 = 25 \Longrightarrow x^2 - x - 6 = 0,$$

de donde:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -2$$

Para $x_1 = 3$:

$$y_1 = \frac{5}{1 - 2(3)} = \frac{5}{-5} = -1$$

Para $x_2 = -2$:

$$y_2 = \frac{5}{1 - 2(-2)} = \frac{5}{5} = 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1\ (3, -1) \quad y \quad P_2(-2, 1)$$

Ver la figura III.23.

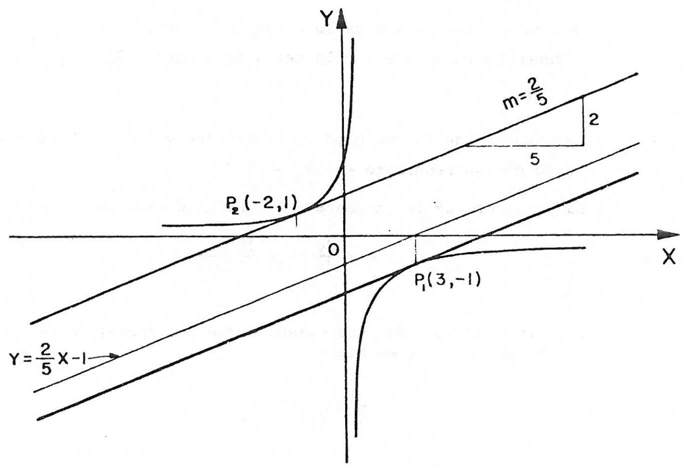


Figura III.23

Ejemplo III.43

Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1, 1)$.

Solución

Como la parábola debe pasar por el punto $P(1, 1)$ las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la misma.

$$1 = (1)^2 + b(1) + c \qquad b + c = 0 \qquad \ldots (a)$$

Puesto que la parábola y la recta deben ser tangentes en P, debe tenerse en dicho punto $m_1 = m_2$

$$y = x \implies m_1 = y' = 1 \qquad \ldots (b)$$

De la ecuación de la parábola:

$$D_x y = 2x + b$$

Para el punto (1,1):

$$D_x y \Big]_{(1,1)} = m_2 = 2(1) + b = 2 + b \qquad \ldots (c)$$

de las ecuaciones (b) y (c):

$$m_1 = m_2 \implies 1 = 2 + b$$

por lo tanto:

$$b = -1$$

y con la ecuación (a) $c = 1$

de donde la ecuación de la parábola es:

$$y = x^2 - x + 1$$

Ejemplo III.44

Encontrar el punto de la curva $y^2 = 2x^3$ para el cual su tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$.

Solución

La condición de perpendicularidad es: $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ por lo que es necesario hallar primeramente las derivadas.

$$y^2 = 2x^3 \implies y = \sqrt{2x^3};\; y' = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x} \implies m_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x}$$

$$4x - 3y + 2 = 0 \implies y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3};\; y' = \frac{4}{3} \implies m_2 = \frac{4}{3}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \implies \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{4};\; \sqrt{x} = \frac{-\sqrt{2}}{4};\; x = \frac{2}{16} \implies x = \frac{1}{8}$$

sustituyendo en la ecuación de la curva:

$$y^2 = 2\left(\frac{1}{8}\right)^3 \implies y = \sqrt{\frac{1}{256}} = \frac{1}{16}$$

El punto buscado es

$$P\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$$

III.7.1 ECUACIONES DE LA TANGENTE Y LA NORMAL A UNA CURVA EN UN PUNTO DADO

Una aplicación geométrica de la derivada, en la que se aprecia claramente su interpretación como *la pendiente de la tangente*, es aquella en la que se buscan las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a una curva en un punto dado.

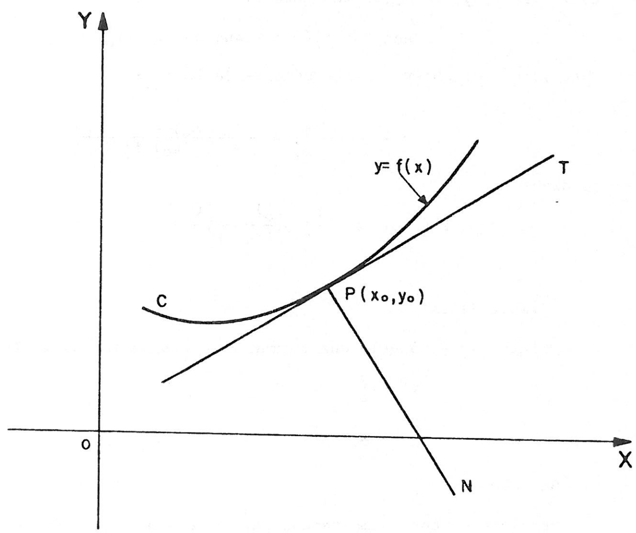


Figura III.24

En efecto, sea la función f representada por la curva C en la figura III.24, y sea un punto $P(x_o, y_o)$ de ella. De acuerdo a lo tratado con anterioridad, la derivada de la función f valuada en el punto P, es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Con ese valor de la pendiente y con el punto P, queda definida la ecuación de la recta tangente, mediante la ecuación:

$$y - y_o = m_T\ (x - x_o)$$

en donde: $\quad m_T = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right]_P$

La recta normal a C en P es la recta perpendicular a la tangente y que pasa por P.

Como las pendientes de dos rectas perpendiculares son recíprocas y de signo contrario, la pendiente de la recta normal vendrá dada por:

$$m_N = -\frac{1}{m_T}$$

Con este valor y el punto P, queda definida la ecuación de la recta normal a la curva, a partir de la ecuación:

$$y - y_o = m_N\ (x - x_o)$$

Ejemplo III.45

Encontrar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva dada en el punto indicado.

a) $y = x^2 - 4x + 3$ en $P(4, 3)$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_P = 4 \Longrightarrow m_T = 4$$

de donde:

$$y - 3 = 4\ (x - 4)$$

$$y - 3 = 4x - 16$$

$$4x - y - 13 = 0 \text{ (ecuación de la tangente)}$$

Ahora: $\quad m_N = -\frac{1}{4}$

por lo que:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 4)$$

$$4y - 12 = -x + 4$$

$$x + 4y - 16 = 0 \text{ (ecuación de la normal)}$$

b) $y = \sqrt{x - 3}$ en $P(4, 1)$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right]_P = \frac{1}{2} \Longrightarrow m_T = \frac{1}{2}$$

de donde:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4)$$

$$2y - 2 = x - 4$$

$$x - 2y - 2 = 0 \text{ (ecuación de la tangente)}$$

se tiene: $m_N = -2$

por lo que:

$$y - 1 = -2(x - 4)$$

$$y - 1 = -2x + 8$$

$$2x + y - 9 = 0 \text{ (ecuación de la normal)}$$

III.7.2 ANGULO DE INTERSECCION ENTRE DOS CURVAS

La dirección de una curva en un punto se define como la dirección de su recta tangente en ese punto.

Así, la dirección de la curva C de ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(x_o, y_o)$ está dada por el ángulo de inclinación de la recta tangente PT o bien por la pendiente de ésta:

$$m = \tan \alpha = f'(x_o)$$

Ahora es fácil definir el ángulo formado por dos curvas C_1 y C_2 al cortarse en el punto $P(x_o, y_o)$ como el ángulo ϕ que determinan las tangentes a las curvas en P. (Véase figura III.25).

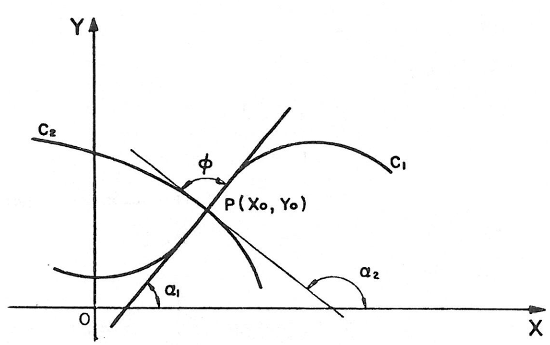


Figura III.25

Sean $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ las ecuaciones de C_1 y C_2 respectivamente, se tendrá:

$$m_1 = \tan \alpha_1 = f_1'(x_o); \quad m_2 = \tan \alpha_2 = f_2'(x_o)$$

En la figura III.25, es evidente que $\phi = \alpha_2 - \alpha_1$

con lo que el ángulo ϕ puede determinarse por medio de las derivadas de $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ teniéndose:

$$\phi = \text{ang tan } f_2'(x_o) - \text{ang tan } f_1'(x_o)$$

Otra forma de obtener ϕ es mediante la fórmula:

$$\tan \phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{f_2'(x_o) - f_1'(x_o)}{1 + f_1'(x_o)\, f_2'(x_o)}$$

de donde:

$$\phi = \text{ang tan } \frac{f_2'(x_o) - f_1'(x_o)}{1 + f_1'(x_o)\, f_2'(x_o)}$$

Ejemplo III.46

Determinar el ángulo que forman al cortarse las parábolas

$$y^2 = \frac{x}{2} \qquad \ldots (a)$$

$$y = \frac{x^2}{4} \qquad \ldots (b)$$

Solución

Resolviendo como simultáneas las ecuaciones (a) y (b) para determinar los puntos de intersección:

De (b):

$$y^2 = \frac{x^4}{16} \qquad \ldots (c)$$

igualando (a) y (c):

$$\frac{x}{2} = \frac{x^4}{16}$$

$$x^4 - 8x = 0 \Longrightarrow x(x^3 - 8) = 0$$

de aquí:

$$x_1 = 0 \; ; \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = 0 \; ; \quad y_2 = 1$$

Las parábolas se cortan en el origen y en el punto P(2, 1). Ahora dado que las tangentes a las parábolas en el origen son los propios ejes coordenados, el ángulo que forman en este punto es de 90°, (ver la figura III.26). Se determinará ahora el ángulo en P:

De (a), derivando implícitamente:

$$2y\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y} \Longrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right]_{y\,=\,1} = \frac{1}{4} = f_1'(x_o) \Longrightarrow m_1 = \frac{1}{4}$$

De(b), se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} \Longrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x\,=\,2} = \frac{2}{2} = f_2'(x_o) \Longrightarrow m_2 = 1$$

$$\phi = \text{ang tan } 1 - \text{ang tan } \frac{1}{4}$$

$$= 45° - 14.03°$$

$$= 30.97°$$

$$= 30°58'$$

o bien:

$$\tan\phi = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + (1)\,\frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \phi = \text{ang tan } \frac{3}{5} = 30°58'$$

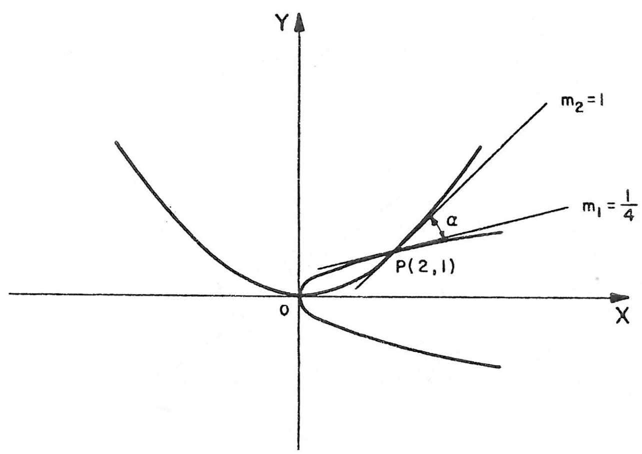


Figura III.26

Ejemplo III.47

Calcular el ángulo de intersección de las curvas $y = x^2$; $y = x^3$

Solución

Puntos de intersección. Resolviendo las ecuaciones como simultáneas por igualación:

$$x^2 = x^3 \Longrightarrow x^2(x - 1) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1$$

Los puntos de intersección son:

$$P_1(0,\ 0), \qquad P_2(1,\ 1)$$

Cálculo de las pendientes:

$$y = x^2 \Longrightarrow y' = 2x; \quad m_1 = 2x$$

$$y = x^3 \Longrightarrow y' = 3x^2; \quad m_2 = 3x^2$$

Cálculo de los ángulos de intersección:

para $P_1(0,\ 0)$

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0$$

por lo tanto:

$$\alpha_1 = \text{ang tan } 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0$$

para $P_2(1,\ 1)$

$$m_1 = 2,\ m_2 = 3; \quad \tan\alpha_2 = \frac{m_2\ m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{3 - 2}{1 + 6} = \frac{1}{7}$$

$$\alpha_2 = \text{ang tan } \frac{1}{7} = 8°8'$$

III.8 APLICACIONES FISICAS DE LA DERIVADA: RAZONES DE VARIACION Y VARIABLES RELACIONADAS

III.8.1 LA DERIVADA COMO RAZON DE CAMBIO

Sea una función $y = f(x)$, si para un valor de la variable independiente x, se da a ésta un incremento Δx y se calcula el correspondiente incremento Δy de la variable dependiente, al dividir Δy entre Δx se tiene la razón de cambio promedio de y con respecto a x, cuando la variable independiente cambia de x a x + Δx. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es la razón de cambio promedio de y con respecto a x, para el valor de x determinado y el Δx dado.

Por ejemplo para la función $y = \frac{x^2}{2}$, se tiene:

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}; \quad \Delta y = \frac{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{2} - \frac{x^2}{2};$$

$$\Delta y = x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2$$

Si se divide entre Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x + \frac{1}{2}(\Delta x), \text{ si y cambia de 2 a 3, } \Delta x = 1$$

luego: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \frac{1}{2}(1) = 2.5$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.5$ indica que la razón de cambio promedio de y con respecto a x es igual a 2.5 cuando x aumenta de 2 a 3.

Si el intervalo de x a x + Δx disminuye, es decir si Δx tiende a cero, al calcular el límite cuando $\Delta x \to 0$ la razón de cambio promedio de y con respecto a x se convierte en razón de cambio en un punto.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

La derivada de y con respecto a x es la razón de cambio de y con respecto a x para un valor definido de x.

En el ejemplo anterior la razón de cambio de y con respecto a x es:

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x$$

en cada punto y para $x = 2$ vale $\frac{dy}{dx} = 2$

Cuando la variable independiente es el tiempo t, como en una función $y = f(t)$, se tiene que: $\frac{dy}{dt}$ es la rapidez de variación de y para un valor definido de t.

Si en un problema intervienen variables que son funciones del tiempo y dichas variables se pueden relacionar, entonces derivando respecto al tiempo es posible hallar una relación entre la rapidez de variación de las variables consideradas. Por ejemplo si $x = g(t)$; $y = h(t)$, $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx} f(x) \frac{dx}{dt}$$

Una sugestión para proceder a resolver problemas de esta índole, son los siguientes pasos:

1. Enlistar los datos y las magnitudes buscadas.
2. Trazar una figura representativa del enunciado del problema y donde se establezca una convención para indicar con qué letra se está representando cada variable involucrada.
3. Escribir la relación que ligue a las variables involucradas.
4. Derivar con respecto al tiempo.
5. Sustituir en el resultado del paso anterior las magnitudes incluidas en los datos y despejar las que se buscan.

Desde luego que, según el caso, pueden combinarse entre sí estos pasos sugeridos.

Ejemplo III.48

Una escalera de 3.00 mts. de longitud está apoyada sobre un piso horizontal y contra un muro vertical. Si el extremo inferior de la escalera se aleja del muro a una velocidad de 1.20 m/s, ¿a qué velocidad desciende el extremo superior en el instante en que su altura sobre el suelo es de 2.40 m.?

Solución

1. Datos $\ell = 3.00$ m; $\frac{dx}{dt} = 1.20$ m/s, $y_1 = 2.40$ m.

Incógnita $\frac{dy}{dt}$

2. Figura:

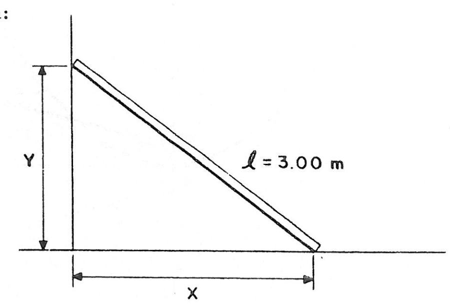


Figura III.27

cuando $y_1 = 2.40$ m.

$x_1 = \sqrt{9 - (2.40)^2} = 1.80$ m.

3. $x^2 + y^2 = 9$

4. Derivando con respecto al tiempo:

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$$

5. Sustituyendo valores:

$$1.80\ (1.20) + 2.40 \frac{dy}{dt} = 0 \Longrightarrow 2.40 \frac{dy}{dt} = -\ 2.16$$

$$\frac{dy}{dt} = -\ \frac{2.16}{2.40} = -\ 0.90 \text{ m/s}$$

que es la velocidad de descenso del extremo superior.

Ejemplo III.49

El foco de un arbotante está a 4.5 metros de altura sobre una banqueta horizontal. Un hombre de 1.75 m. de altura camina alejándose del arbotante a una velocidad de 44 metros por minuto. ¿A razón de cuántos metros por minuto crece su sombra?.

Solución

1. Datos: $H = 4.5$ m., $h = 1.75$ m., $\frac{dx}{dt} = 44$ m/min.

Incógnita: $\frac{dy}{dt}$

2. Figura:

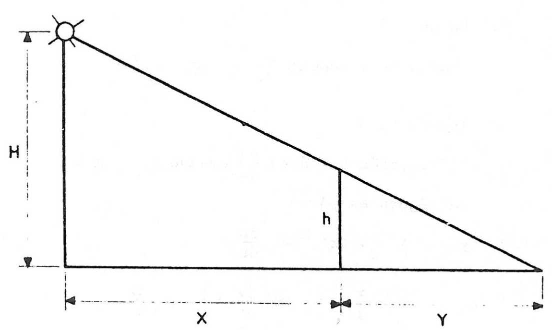


Figura III.28

3. Por semejanza de triángulos en la figura III.28.

$$\frac{y}{h} = \frac{x + y}{H}\ , \quad \text{esto es} \quad \frac{y}{1.75} = \frac{x + y}{4.5};$$

$$4.5y = 1.75x + 1.75y; \quad 2.75y = 1.75x; \quad y = \frac{1.75}{2.75}\ x$$

$$y = \frac{7}{11}\ x$$

4. Derivando respecto a t:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{7}{11}\ \frac{dx}{dt}$$

5. Para $\frac{dx}{dt} = 44$ m/min.; $\frac{dy}{dt} = \frac{7}{11}\ (44) = 28$ m/min.

La sombra se alarga a razón de 28 m/min.

Ejemplo III.50

Un papalote está a 30 metros de altura sobre el nivel del suelo y se aleja horizontalmente a una velocidad de 10 metros por segundo del niño que lo sostiene. ¿A razón de cuántos metros por segundo está soltando la cuerda el niño, cuando la distancia entre éste y el papalote es de 50 metros?.

Solución

1. Datos:

Altura $h = 30$ m.

Velocidad horizontal $\frac{dx}{dt} = 10$ m/s

Distancia inclinada $z_1 = 50$ m.

Incógnita: $\frac{dz}{dt}$

2. Figura:

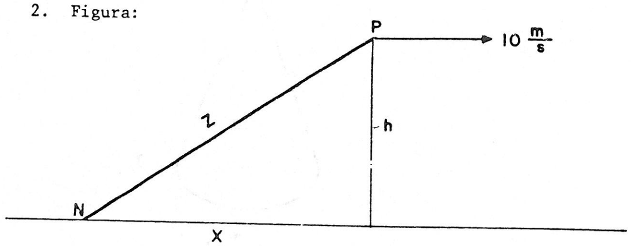


Figura III.29

3. De la figura III.29, y por el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + h^2 \Longrightarrow z^2 = x^2 + 900 \qquad \ldots (a)$$

4. Derivando respecto al tiempo t:

$$2z\,\frac{dz}{dt} = 2x\,\frac{dx}{dt}\ ; \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{x}{z}\,\frac{dx}{dt} \qquad \ldots (b)$$

5. De (a): $x = \sqrt{z^2 - 900}$.

Para $z_1 = 50$ m, $\quad x_1 = \sqrt{(50)^2 - 900} = \sqrt{1600} = 40$ m.

Luego sustituyendo valores en (b):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40\text{ m}}{50\text{ m}}\,(10\text{ m/s}) = 8\text{ m/s}$$

El niño está soltando la cuerda a razón de 8 m/s

Ejemplo III.51

En una fábrica de cemento se deposita arena de tal modo que se forma de una pila cónica, cuya altura es siempre igual a los 4/3 del radio de la base. Sabiendo que el radio de la base aumenta a razón de 1/8 cm/s, ¿con qué rapidez aumenta el volumen de la pila cuando el radio de la base es de 90 cm.?

Solución

1. Datos:

$$h = \frac{4}{3}\,r; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}\text{ cm/s}$$

Se busca $\frac{dV}{dt}$ cuando r = 90 cm.

2. Figura:

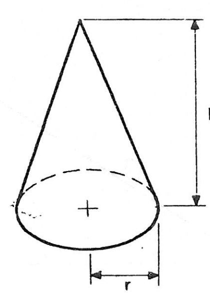


Figura III.30

3. En la fórmula que da el volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h$$

Se sustituye $h = \frac{4}{3}r$ para tener una función de una variable:

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2\,\frac{4}{3}\,r; \qquad V = \frac{4}{9}\,\pi r^3$$

4. Derivando respecto a t:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\,\pi r^2\,\frac{dr}{dt}$$

5. Para r = 90 cm y $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ cm/s:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\,\pi\,(90)^2\,\frac{1}{8} = 1350\,\pi\text{ cm}^3\text{/s} = 4241.16\text{ cm}^3\text{/s}$$

Se concluye que la rapidez con que aumenta el volumen de arena cuando r = 90 cm. es:

$$\frac{dV}{dt} = 4241.16\text{ cm}^3\text{/s}$$

Ejemplo III.52

El aire de un globo esférico escapa haciendo que el volumen del globo disminuya a razón de 400 cm^3 por segundo, ¿con qué rapidez disminuye el área de la superficie del globo cuando su radio mide 20 cm.?

Solución

1. Datos:

Cambio de volumen: $\frac{dV}{dt} = -\ 400\text{ cm}^3\text{/s}$

Incógnita:

Disminución del área $\frac{dA}{dt}$ cuando $r_1 = 20$ cm

2. La figura es obvia.

3. y 4. $A = 4\,\pi r^2 \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = 8\,\pi r\,\frac{dr}{dt} \qquad \ldots (a)$

$$V = \frac{4}{3}\,\pi r^3 \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = 4\,\pi r^2\,\frac{dr}{dt} \qquad \ldots (b)$$

Despejando $\frac{dr}{dt}$ de la ecuación (b):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\ \pi r^2} \left(\frac{dV}{dt}\right)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (a):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{8\ \pi r}{4\ \pi r^2} \left(\frac{dV}{dt}\right) \Longrightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{2}{r}\ \frac{dV}{dt}$$

5. Para $r_1 = 20$ cm y $\frac{dV}{dt} = -\ 400\ cm^3/s$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{20\ cm}\ (-400\ cm^3/s) = -\ 40\ cm^2/s$$

$$\frac{dA}{dt} = -\ 40\ cm^2/s$$

El área disminuye a razón de 40 cm^2/s

CAPITULO IV VARIACION DE FUNCIONES

INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se tocaron los conceptos de función, límite, continuidad y derivada, así como ejercicios de aplicación de los mismos. De esta forma ya se tienen herramientas para el estudio de la variación de una función, por lo que en una primera parte se tratarán algunos teoremas de apoyo para más adelante introducir las características fundamentales de variación como son los intervalos en los que una función crece o decrece, sus extremos, sus puntos de inflexión y el sentido de su concavidad. Y así se podrá proceder al trazo de su gráfica sin necesidad del uso de la tabulación.

Cabe hacer notar que este capítulo también contempla problemas relacionados con aspectos físicos y geométricos, en los cuales el estudiante debe construir el modelo matemático para llegar a su solución.

IV.1 TEOREMA DE WEIERSTRASS, TEOREMA DE BOLZANO, TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

La demostración de los teoremas de Weierstrass y de Bolzano, cae fuera de los propósitos de estos apuntes, por lo cual se da solamente su enunciado e ilustración geométrica.

Estos teoremas son necesarios para el mejor entendimiento de los conceptos que se estudian en el desarrollo de este capítulo y principalmente sirven de fundamento en la comprensión del teorema de Rolle, el cual es a su vez la base para el estudio del teorema del *Valor Medio del Cálculo Diferencial*.

> TEOREMA IV.1 DE WEIERSTRASS
>
> Hipótesis:
>
> La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
>
> Tesis:
>
> Entre todos los valores de $f(x)$, en el intervalo $[a, b]$, hay un valor $M = f(x_1)$, llamado máximo absoluto, que no es superado por ningún otro valor de $f(x)$ en $[a, b]$ y un valor $m = f(x_2)$, llamado mínimo absoluto, que no supera a ninguno de los valores de $f(x)$ en $[a, b]$.

Esto es:

$$m = f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) = M$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DE WEIERSTRASS

En la figura IV.1, se ven dos ilustraciones geométricas de este teorema; en ellas la curva C es la gráfica de la función $y = f(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$.

Debe observarse que tanto el máximo absoluto M, como el mínimo absoluto m pueden presentarse para los valores de x extremos del intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura IV.1, donde $M = f(a)$ y $m = f(b)$ y que M ó m pueden presentarse para más de un valor de x en $[a, b]$.

Para el caso particular de la función constante $y = k$, se tiene que:

$$M = m = k$$

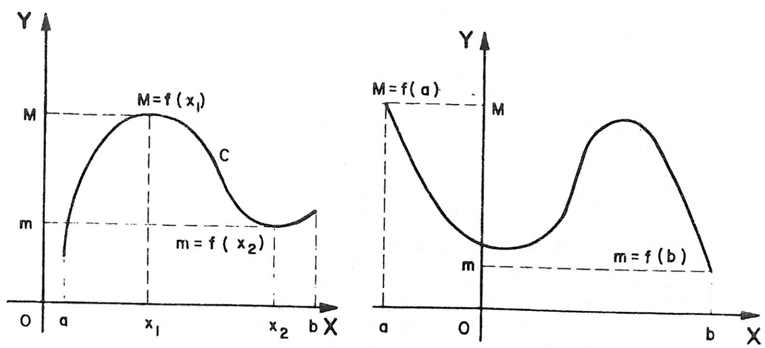


Figura IV.1

TEOREMA IV.2 DE BOLZANO

Hipótesis:

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea y_0 un valor de $f(x)$ tal que:

$$m \leq y_0 \leq M$$

Tesis:

Cuando menos para un valor x_0 de x en $[a, b]$, se tiene que $y_0 = f(x_0)$.

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DE BOLZANO

Una ilustración de este teorema se presenta en la figura IV.2, en la cual dicho teorema se cumple para dos valores de x:

$$x_0 \in [a, b] \quad y \quad x_1 \in [a, b] \quad y_0 = f(x_0) = f(x_1)$$

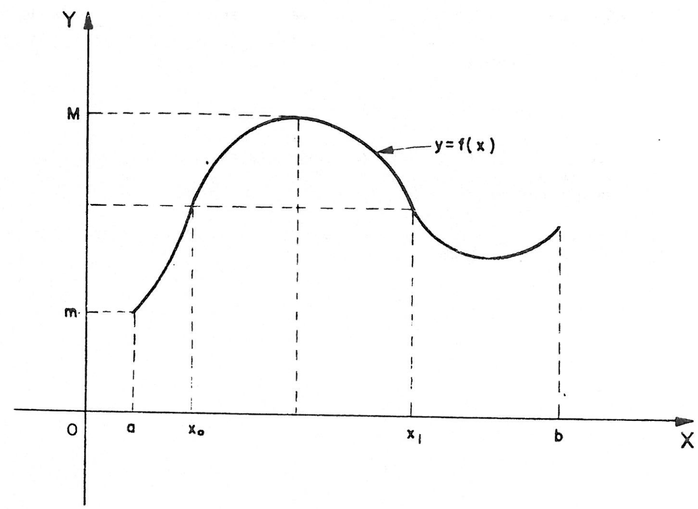


Figura IV.2

TEOREMA IV.3 DE ROLLE

Hipótesis:

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones siguientes:

1. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

2. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b).

3. $f(a) = f(b)$.

Tesis:

Existe por lo menos un valor $x_1 \in (a, b)$ para el cual:

$$f'(x_1) = 0$$

Demostración:

Como $y = f(x)$, es continua en $[a, b]$, según la condición (1) de la hipótesis, por el teorema de Weierstrass se garantiza la existencia de un mínimo absoluto m y un máximo absoluto M en $[a, b]$.

Considérese primero el caso particular en que los valores m y M, se presentan en los extremos a y b del intervalo $[a, b]$, es decir que $m = f(a)$ y $M = f(b)$, figura IV.3. Entonces por la condición (3) de la hipótesis, se tendrá:

$$m = f(a) = f(b) = M = k \quad (k \text{ es una constante})$$

Esto corresponde al caso de una función constante $f(x) = k$ para la cual a todo valor $x_1 \in (a, b)$ corresponde $f'(x_1) = 0$ ya que la derivada de una constante vale cero.

Obsérvese que en este caso particular, el teorema se cumple para todo valor de x en el intervalo (a, b).

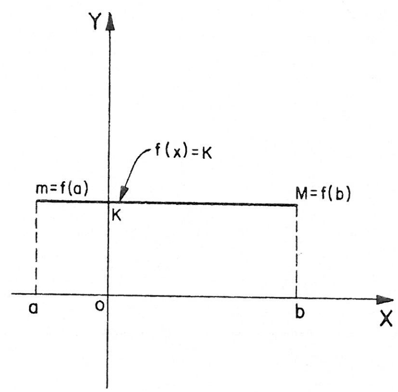


Figura IV.3

Considérese ahora que al menos uno de los valores m ó M corresponde a un punto interior del intervalo $[a, b]$. Para fijar ideas, supóngase que $M = f(x_1)$ donde $a \le x_1 \le b$.

Según el teorema de Weierstrass el valor máximo absoluto $M = f(x_1)$ no es superado por ningún valor de $f(x)$ en $[a, b]$, por consiguiente se tendrá:

$$f(x_1 + \Delta x) \le f(x_1), \quad a < x_1 < b, \quad (x_1 + \Delta x) \in (a, b)$$

por lo cual:

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \le 0$$

Dividiendo ambos miembros de esta desigualdad entre $\Delta x \neq 0$ resulta:

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \ge 0 \quad \text{si} \quad \Delta x < 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \le 0 \quad \text{si} \quad \Delta x > 0 \qquad \ldots (2)$$

si $\Delta x \to 0^-$ por (1), y por la definición de derivada lateral por la izquierda:

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \ge 0 \implies f'_-(x_1) \ge 0 \qquad \ldots (3)$$

si $\Delta x \to 0^+$ por (2), y por la definición de derivada lateral por la derecha:

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \le 0 \implies f'_+(x_1) \le 0 \qquad \ldots (4)$$

Según (3) la derivada lateral por la izquierda para $x = x_1$ es positiva o nula, y según (4) la derivada lateral por la derecha para $x = x_1$ es negativa o nula; pero por la condición (2) de la hipótesis, la función es derivable en (a, b) por lo que es derivable para $x = x_1$. Esto implica lo siguiente: las derivadas laterales para este valor de x deben ser iguales, así que la única posibilidad es:

$$f'_-(x_1) = f'_+(x_1) = 0 \implies f'(x_1) = 0, \quad a < x_1 < b$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DE ROLLE

Sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones de la hipótesis del teorema. Esto implica lo siguiente:

Por la condición (1), la gráfica de $y = f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.

Por la condición (2), dicha gráfica es una curva que tiene tangente en cada uno de sus puntos en (a, b). Tal vez no admita tangente en los pun tos extremos de abscisas $x = a$ y $x = b$ y por la condición (3), los puntos extremos A y B de abscisas $x = a$, $x = b$, tienen la misma ordenada.

$$A(a,\ c) \qquad B(b,\ c)$$

El teorema demuestra que existe por lo menos un punto de la gráfica de $y = f(x)$, en (a, b) en donde la tangente a ella es paralela al eje de las abscisas, es decir de pendiente cero.

En la figura IV.4, se ilustra el caso en que el teorema se cumple para dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

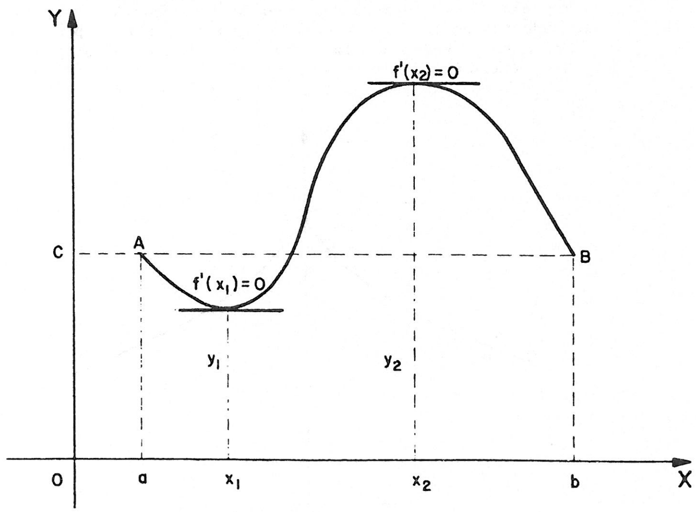


Figura IV.4

Ejemplo IV.1

Investigar si la función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ cumple con las condiciones del teorema de Rolle, en el intervalo $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$ Si cumple, determinar los valores de $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ para los cuales se verifica el teorema.

Solución

Primero se investiga si la función cumple con las condiciones de la hipótesis del teorema:

1. La función dada es continua en el intervalo $[-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$ ya que se trata de una función polinómica, la cual es continua para todo valor de x.

2. La función dada es derivable en el intervalo $(-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$, porque siendo polinómica es derivable para todo valor de x.

3. $f(a) = f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3 = 3$

   $f(b) = f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3 = 3$

   luego $f(a) = f(b)$

La función $f(x) = x^3 - 3x + 3$ sí cumple con las condiciones de la hipótesis en el intervalo propuesto.

La derivada de la función es: $f'(x) = 3x^2 - 3$, así que:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

por lo cual:

$$f'(-1) = 0, \qquad f'(1) = 0$$

y como:

$$-\sqrt{3} < 1 < +\sqrt{3}, \qquad -\sqrt{3} < -1 < +\sqrt{3}$$

se concluye que el teorema se verifica para:

$$x_1 = -1 \ \text{ y } \ x_2 = 1$$

en el intervalo:

$$[-\sqrt{3},\ +\sqrt{3}]$$

Para ilustrar geométricamente este ejemplo, se presenta la figura IV.5.

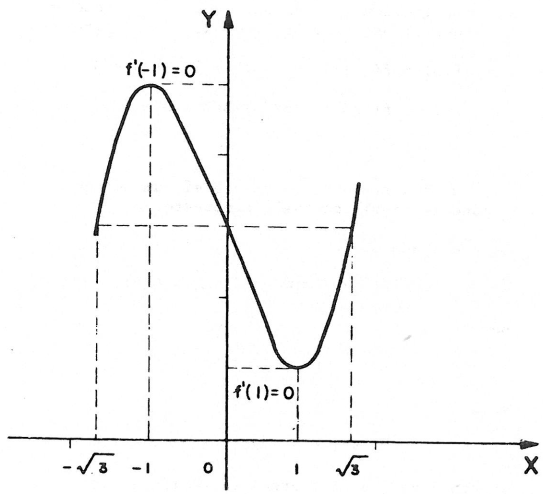


Figura IV.5

Ejemplo IV.2

Si la función $f(x) = 4 - x^{2/3}$ cumple con las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$, hallar los valores de $x \in (-3, 3)$ para los que se verifica el teorema. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución

Si se aplican las condiciones de la hipótesis del teorema se ve que:

1. La función es continua en el intervalo $[-3, 3]$ dado que siempre se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0} (4 - x^{2/3}) = 4 - x_0^{2/3} \quad \text{es decir, } \forall x_0 \in [-3, 3]$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. La derivada de la función es:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Se observa que $f'(x)$ no está definida para $x_1 = 0$ y $0 \in (-3, 3)$, luego la función no es derivable en el intervalo $(-3, 3)$, y por lo tanto no cumple con la segunda condición de la hipótesis del teorema.

Esto implica que el teorema de Rolle, no es aplicable a la función:

$$f(x) = 4 - x^{2/3} \quad \text{en } [-3, 3]$$

En la figura IV.6, se observa que, aun cuando la gráfica de la función es una curva continua y los puntos extremos A y B en el intervalo dado tienen la misma ordenada, no existe ningún punto de la gráfica entre A y B donde la recta tangente a ella sea paralela al eje de las abscisas.

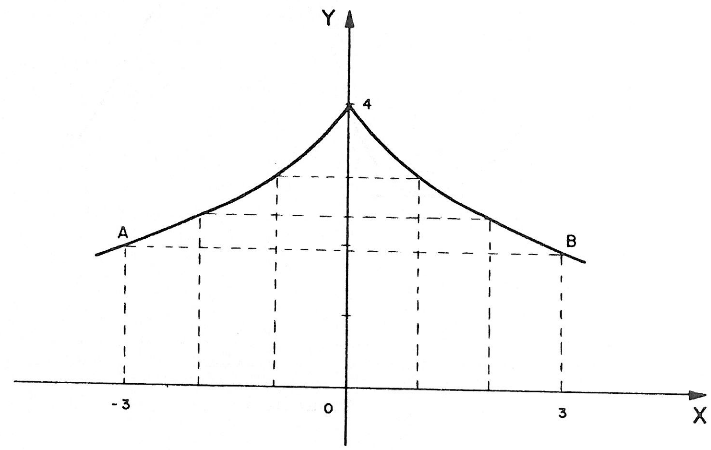


Figura IV.6

Ejemplo IV.3

Dada la función $f(x) = |x - 2|$, y el intervalo $[-2, 6]$, si es aplicable el teorema de Rolle, determinar el o los puntos donde se verifica.

Solución

Para ver si se cumplen las condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle es necesario ver primero si la función es continua en el intervalo considerado. Su representación gráfica es:

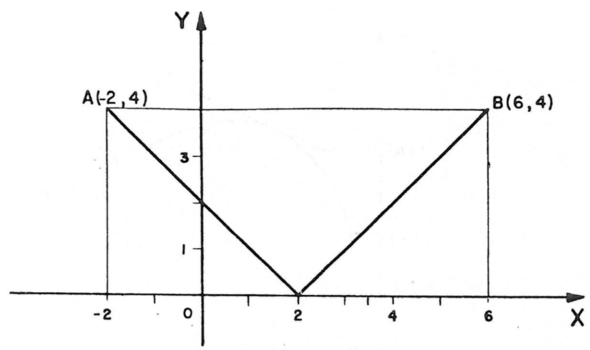


Figura IV.7

Continuidad. El único punto de sospecha es $x = 2$, en donde se tiene que:

1. $f(2) = 0$ cumple

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ cumple

3. $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ cumple

Por lo que $f(x)$ es continua en $x = 2$ y por consiguiente en $[-2, 6]$

Derivabilidad. Para $x = 2$

$f'_-(x) = -1$ $\quad$ $f'_+(x) = 1$

de donde:

$$f'_-(2) = -1 \quad \text{y} \quad f'_+(2) = 1$$

como:

$$f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$

De dichas conclusiones se tiene:

1. La función es continua en $[-2, 6]$

2. La función no es derivable para $x_1 = 2 \in (-2, 6)$, luego no es derivable en el intervalo abierto $(-2, 6)$.

Esto hace que el teorema de Rolle no sea aplicable en este caso.

La figura IV.7 muestra la gráfica de la función dada, en la cual se ve que entre los puntos $A(-2, 4)$ y $B(6, 4)$, no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela al eje de las abscisas.

TEOREMA IV.4 DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

Hipótesis:

Sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones:

1. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Tesis:

Existe por lo menos un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual:

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad a < x_1 < b$$

Demostración:

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones de la hipótesis del teorema y considérese la función auxiliar:

$$\Psi(x) = f(x) - Ax \qquad \dots (5)$$

en la cual A es constante.

Esta función es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), dado que es la suma algebraica de dos funciones que lo son.

Por lo mismo, la función (5) cumple con las dos primeras condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle y para que también cumpla con la tercera condición de dicha hipótesis, basta determinar el valor adecuado de A, estableciendo la condición:

$$\Psi(a) = \Psi(b) \qquad \dots (6)$$

Como $\Psi(a) = f(a) - Aa$ y $\Psi(b) = f(b) - Ab$, se tendrá según la expresión (6).

$$f(a) - Aa = f(b) - Ab \Longrightarrow A(b - a) = f(b) - f(a)$$

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \ldots (7)$$

Así que para este valor de A, la función $\Psi(x) = f(x) - Ax$ satisface las tres condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle.

Según la tesis del mismo teorema, existirá por lo menos un valor

$$x_1 \in (a, b)$$

para el cual:

$$\Psi'(x_1) = 0 \qquad a < x_1 < b \qquad \ldots (8)$$

pero de (5):

$$\Psi'(x) = f'(x) - A$$

y para:

$$x = x_1$$

queda:

$$\Psi'(x_1) = f'(x_1) - A$$

lo cual por (7) y (8) da:

$$f'(x_1) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad x_1 \in (a, b) \qquad \text{Q.D.}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

Sea el arco $\widehat{AB}$ de la figura IV.8, la gráfica de la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[a, b]$.

Entonces por las condiciones de la hipótesis del teorema, dicha gráfica será una curva continua y admitirá tangente en cada uno de sus puntos entre A y B (excepto tal vez en los puntos A y B).

El teorema establece que existe cuando menos un punto $P_1(x_1, y_1)$ de la curva entre los puntos A y B, en el cual la recta tangente es paralela a la secante que pasa por los puntos A y B.

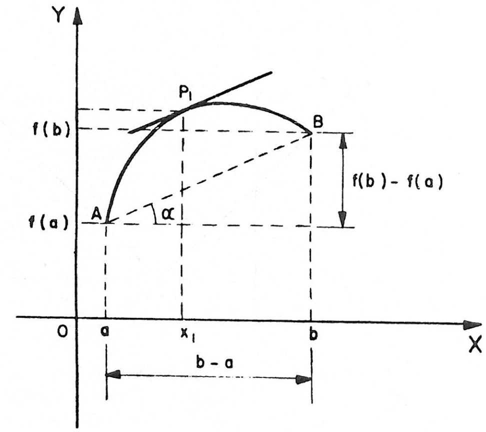


Figura IV.8

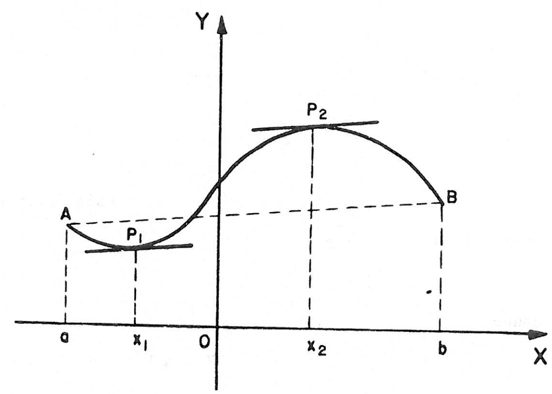


Figura IV.8.1

En efecto, la pendiente de dicha secante es:

$$m_{AB} = \tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como se puede ver en la figura IV.8, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P_1 es:

$$m = f'(x_1)$$

Y por la tesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial se tiene:

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que equivale a la condición de paralelismo $m_{AB} = m$.

Desde luego, este teorema puede verificarse en más de un punto del arco $\widehat{AB}$ como es el caso de la figura IV.8.1, en donde las rectas tangentes a la curva, en P_1 y P_2, son paralelas a la secante que pasa por los puntos A y B.

Corolario.- Una función $y = f(x)$ cuya derivada es nula en un intervalo, es necesariamente una función constante en este intervalo.

En efecto sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[a, b]$, además sea:

$$f'(x) = 0, \qquad \forall\, x \in (a, b)$$

En el intervalo $[a, x]$ donde $a < x < b$, se cumplen las condiciones anteriores, por lo cual según la tesis de dicho teorema, aplicado en el intervalo $[a, x]$ se tiene:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(x_1) \qquad a < x_1 < x$$

pero como $f'(x) = 0$, se tendrá $f'(x_1) = 0$, por lo cual:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Longrightarrow f(x) - f(a) = 0 \Longrightarrow f(x) = f(a)$$

como:

$$f(a) = k$$

es constante:

$$f(x) = k$$

Corolario.- Si dos funciones $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ tienen sus derivadas iguales en un intervalo, difieren en una constante en dicho intervalo.

Efectivamente, sean las funciones $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ continuas en $[a, b]$ y tales que $f_1'(x) = f_2'(x)$ en (a, b); considérese la función $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. La función $g(x)$ cumple con las condiciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial.

Además:

$$g'(x) = f_1'(x) - f_2'(x)$$

pero como:

$$f_1'(x) = f_2'(x)$$

se tendrá:

$$g'(x) = 0$$

entonces por el primer corolario:

$$g(x) = k \Longrightarrow f_1(x) - f_2(x) = k$$

Ejemplo IV.4

Investigar si es aplicable el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ en el intervalo $[1, 3]$. Si lo es, hallar el o los valores de x para los cuales se cumple dicho teorema en (1, 3).

Solución

Al aplicar las condiciones de la hipótesis del teorema se concluye lo siguiente:

1. La función dada es continua en el intervalo $[1, 3]$ ya que es una función polinómica y por lo tanto es continua para todo valor de x.

2. La función dada es derivable en el intervalo (1, 3), porque es derivable para todo valor de x por ser polinómica.

Entonces sí es aplicable el teorema, y deberá tenerse, según la tesis del mismo:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(x_1); \quad 1 < x_1 < 3$$

ya que:

$$a = 1 \text{ y } b = 3$$

$$f(3) = 3^3 - 5(3)^2 - 3(3) = -27 \qquad f(1) = 1 - 5(1) - 3(1) = -7$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10$$

por otro lado:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

luego:

$$3x^2 - 10x - 3 = -10 \Longrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0$$

resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$x_1 = \frac{7}{3};\ x_2 = 1$$

como:

$$\frac{7}{3} \in (1, 3) \text{ y } 1 \notin (1, 3),$$

el único valor para el cual se cumple el teorema en (1,3) es $x_1 = \frac{7}{3}$

Ejemplo IV.5

¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función $f(x) = 2/x$ en el intervalo $[-1, 2]$? En caso afirmativo, determinar el o los valores de x donde se cumple el teorema.

Solución

Aplicando las condiciones de la hipótesis del teorema, se ve que:

1. La función $f(x) = 2/x$ es discontinua para $x = 0$ y $x = 0 \in [-1, 2]$, luego la función no es continua en el intervalo cerrado $[-1, 2]$. No cumpliéndose la primera condición de la hipótesis, se concluye que el teorema no es aplicable en el intervalo mencionado.

Gráficamente se puede constatar con mucha facilidad esta conclusión, observando en la figura IV.9, que no existe ningún punto de la gráfica de $y = 2/x$ entre los puntos A(-1, -2) y B(2, 1) en donde la recta tangente sea paralela a la cuerda que pasa por A y B.

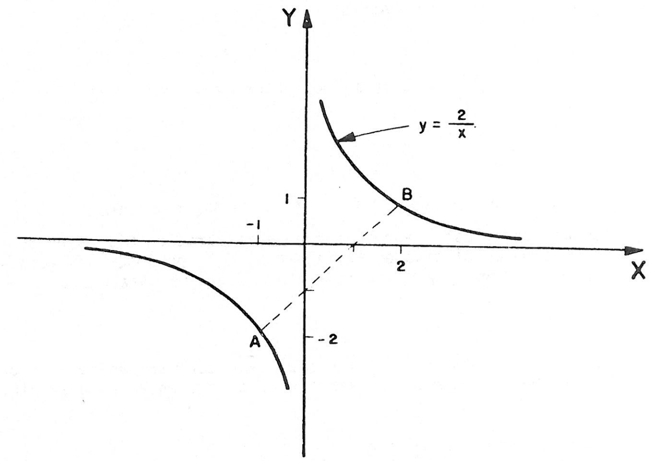


Figura IV.9

Ejemplo IV.6

Hacer ver que el teorema del valor medio del cálculo diferencial no es aplicable a la función $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ en el intervalo $[0, 3]$, indicando por qué y trazando la gráfica correspondiente.

Solución

La función $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ es continua para todo valor de x, ya que siempre se tiene:

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$$

luego la primera condición de la hipótesis del teorema sí se cumple.

1. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ es continua en $[0, 3]$

   La derivada de la función es:

   $$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

Se observa que esta derivada no existe para $x = 2$ y $2 \in (0, 3)$, luego no se cumple la segunda condición de la hipótesis del teorema.

2. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ no es derivable en $(0, 3)$.

Por esto no es aplicable el teorema.

En la figura IV.10, se ilustra este ejemplo. Puede observarse que es imposible que la recta tangente a la curva en algún punto entre A y B, sea paralela a la secante $\overline{AB}$.

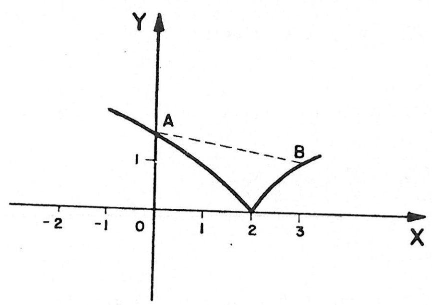


Figura IV.10

Otra forma en que suele presentarse la tesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial es la siguiente:

Si de:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1); \quad a < x_1 < b$$

se despeja $f(b)$, queda:

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(x_1); \quad a < x_1 < b$$

$$a < x_1 < b \implies x_1 - a > 0, \quad b - a > 0 \implies 0 < \frac{x_1 - a}{b - a} < 1 \quad \ldots (9)$$

sea:

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \theta,$$

se tendrá:

$$0 < \theta < 1$$

luego:

$$x_1 = a + (b - a)\,\theta, \qquad \text{y si} \quad b - a = h; \; b = a + h$$

y

$$x = a + h\,\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

Considerando esto en la expresión (9)

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + h\theta) \qquad 0 < \theta < 1 \quad \ldots (10)$$

Obsérvese que las expresiones (9) y (10) son equivalentes.

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, puede ser muy útil para estimar la magnitud de la variable dependiente y hacer aproximaciones numéricas.

Ejemplo IV.7

Empleando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, estimar $\sqrt[3]{28}$.

Solución

Tomando

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; \; f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}; \quad a = 27, \quad b = 28$$

y aplicando lo visto con anterioridad, queda:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + [(28 - 27)] \left[\frac{1}{3x_1^{2/3}}\right]; \quad 27 < x_1 < 28$$

esto es:

$$\sqrt[3]{28} = 3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} \quad \ldots (a)$$

pero como:

$$27 < x_1 \implies \frac{1}{3x_1^{2/3}} < \frac{1}{3(27)^{2/3}} = \frac{1}{3(9)} = \frac{1}{27}$$

$$3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} < 3 + \frac{1}{27}$$

luego por (a):

$$3 < \sqrt[3]{28} < 3 + \frac{1}{27}$$

Para mostrar una aplicación del teorema del valor medio del cálculo diferencial expresado en la ecuación (10) se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.8

Demostrar que:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20}$$

Solución

Sea :

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 100 \quad h = 1$$

entonces $a + h = 101$

$$f(a + h) = \sqrt{101}, \; f(a) = \sqrt{100}$$

como:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies f'(a + h\theta) = f'(100 + \theta) = \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} \; ; \; 0 < \theta < 1$$

aplicando (10):

$$\sqrt{101} = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}; \quad 0 < \theta < 1$$

esto es:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}$$

pero:

$$\frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} < \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$$

luego:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL PARA DOS FUNCIONES

Este teorema conocido también como *teorema de Cauchy*, es fundamental para estudiar la *Regla de L' Hôpital* que se ve en el siguiente inciso.

TEOREMA IV.5 DE CAUCHY

Hipótesis:

Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$ dos funciones que cumplen con las condiciones:

1. $y = f(x)$, $y = g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$.
2. $y = f(x)$, $y = g(x)$ son derivables en el intervalo (a, b).
3. $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en (a, b).

Tesis:

Existe por lo menos un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \; ; \quad a < x_1 < b \qquad \ldots (11)$$

Demostración:

Conviene primero hacer ver que $g(b) \neq g(a)$ para que la expresión (11) tenga sentido.

En efecto la función $y = g(x)$ cumple con las condiciones de la hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[a, b]$, luego se tiene:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x_1); \quad a < x_1 < b$$

pero:

$$g'(x) \neq 0 \;\forall\, x \in (a, b) \implies g'(x_1) \neq 0$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \neq 0 \implies g(b) - g(a) \neq 0 \implies g(b) \neq g(a)$$

Ahora bien, considérese la función auxiliar

$$\phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left[g(x) - g(a)\right] - \left[f(x) - f(a)\right] \quad \ldots (12)$$

Como puede observarse, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, entonces la función (12) cumple con las tres condiciones del teorema de Rolle.

Como:

$$\phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) - f'(x) \qquad \ldots (13)$$

Según la tesis del teorema de Rolle:

$$\phi'(x_1) = 0; \qquad a < x_1 < b$$

lo cual implica por (13):

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(x_1) - f'(x_1) = 0 \qquad \ldots (14)$$

Como $g'(x_1) \neq 0$, al dividir por la expresión (14) $g'(x_1)$ queda:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} - \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = 0 \Longrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}\,; \qquad a < x_1 < b$$

IV.2 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Al estudiar la variación de una función, es de principal importancia saber si es creciente o si es decreciente. A continuación se estudian estas características de las funciones.

La idea de función creciente y de función decreciente puede introducirse diciendo:

Una función es creciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, también aumenta el valor de la variable dependiente. Una función es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, disminuye el valor de la variable dependiente. Esto se concreta en las siguientes definiciones:

Definición: Una función $y = f(x)$, es creciente en un intervalo $[a, b]$ si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es positivo en el intervalo. Es decir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} > 0$$

siendo x_o y $x_o + \Delta x$ dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$

Nótese que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \Longleftrightarrow \Delta x > 0,\ \Delta y > 0$$

o bien que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \Longleftrightarrow \Delta x < 0,\ \Delta y < 0$$

lo que evidentemente concuerda con la idea expresada anteriormente.

En la figura IV.11, se ilustra el caso de una función creciente.

Definición: Una función $y = f(x)$, es decreciente en un intervalo $[a, b]$, si el cociente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es negativo en el intervalo. Esto es, si:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} < 0$$

siendo x_o y $x_o + \Delta x$, dos valores cualesquiera de x en $[a, b]$.

Se puede observar que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \Longleftrightarrow \Delta x > 0,\ \Delta y < 0$$

o bien que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \Longleftrightarrow \Delta x < 0,\ \Delta y > 0$$

La figura IV.12, muestra la gráfica de una función decreciente.

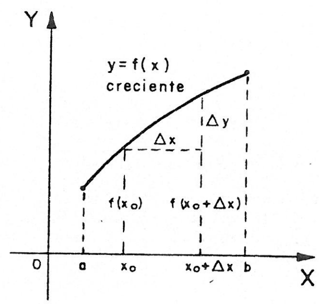


Figura IV.11

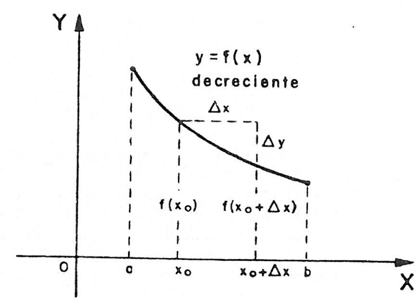


Figura IV.12

Para condicionar analíticamente la existencia de una función creciente o de una decreciente, se presentan los siguientes teoremas:

TEOREMA IV.6

Hipótesis:

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f'(x) > 0$ en (a, b).

Tesis:

La función es creciente en (a, b).

Demostración:

La función $y = f(x)$ satisface las condiciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial en $[a, b]$, por lo que si x_0 y $x_0 + \Delta x$ son dos valores de x en $[a, b]$, dicha función satisface las mismas condiciones en el intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

De acuerdo a la tesis del teorema mencionado se tendrá:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_1) \qquad x_0 < x_1 < x_0 + \Delta x$$

pero según la hipótesis del teorema en demostración:

$$f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b),$$

entonces:

$$f'(x_1) > 0; \quad x_0 < x_1 < x_0 + \Delta x$$

por lo cual:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

y esto implica que la función $y = f(x)$ es creciente en $[a, b]$.

En la figura IV.13 se tiene la gráfica de una función creciente en un intervalo $[a, b]$ y se ve que la pendiente $m = f'(x_1)$ de la recta tangente en cualquier punto $P_1(x_1, y_1)$ del arco $\widehat{AB}$ es positiva.

TEOREMA IV.7

Hipótesis:

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f'(x) < 0$ en (a, b).

Tesis:

La función es decreciente en (a, b).

Demostración:

La demostración de este teorema es totalmente similar a la del teorema IV.6, por lo que no se desarrollará, pero se ilustra en la figura IV.14.

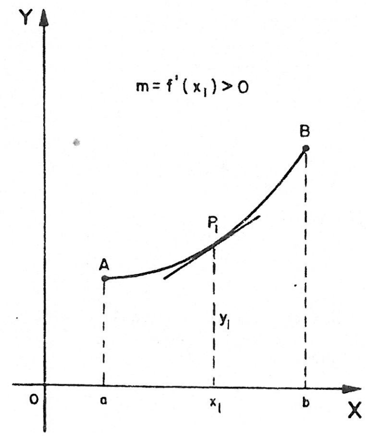


Figura IV.13

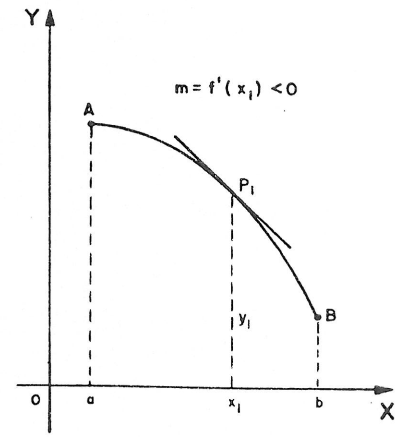


Figura IV.14

Un criterio general basado en lo anterior, para determinar la naturaleza creciente o decreciente de una función, consiste en determinar el signo de su derivada a lo largo de su dominio, sabiendo que si en un intervalo la derivada es positiva, la función es creciente y si la derivada es negativa, la función es decreciente.

Ejemplo IV.9

Investigar para qué intervalos de x la siguiente función es creciente y para cuáles es decreciente:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

Solución

La derivada de la función es:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 \qquad \ldots (a)$$

Esta función derivada es continua para todo valor de x, por lo cual, el valor de f'(x), solamente cambiará de signo pasando por el valor cero, por lo que es necesario determinar los valores de x que hacen f'(x) = 0.

Factorizando en (a):

$$f'(x) = 6(x - 1)(x - 2) \qquad \ldots (b)$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 6(x - 1)(x - 2) = 0 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

A continuación se obtiene el signo de f'(x) a la izquierda y a la derecha de x_1 y x_2 (esto se facilita si se emplea la expresión (b), para determinar la naturaleza de la función dada.

Si: $x < 1 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow y = f(x)$ es creciente

si: $1 < x < 2 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow y = f(x)$ es decreciente

si: $x > 2 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow y = f(x)$ es creciente

Como un complemento a la solución de este ejemplo se da la gráfica en la figura IV.15.

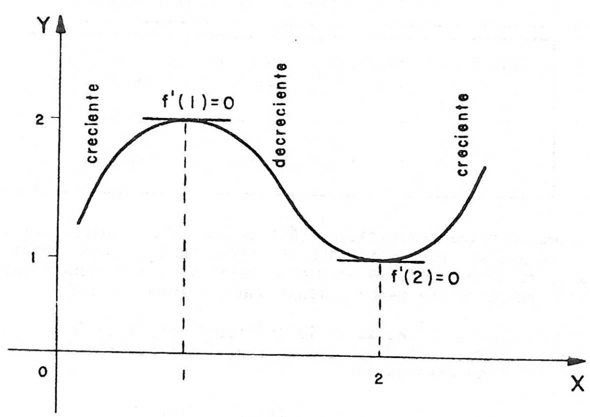


Figura IV.15

Ejemplo IV.10

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, determinar en qué intervalos es creciente y en cuáles es decreciente.

Solución

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3(x - 1)(x - 3) = 0 \Longrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$$

Desde luego, si f'(x) no se puede factorizar, los valores que la anulan pueden obtenerse resolviendo la ecuación f'(x) = 0 como convenga.

La obtención del signo de la derivada y las conclusiones pueden obtenerse haciendo el siguiente cuadro:

x	(x-1)	(x-3)	f'(x)	f(x)
$-\infty < x < 1$	-	-	+	creciente
$1 < x < 3$	+	-	-	decreciente
$3 < x < \infty$	+	+	+	creciente

IV.2.1 SIGNO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION BIYECTIVA

Como se recordará una función biyectiva es aquella que cumple con ser inyectiva y suprayectiva, por lo cual se puede afirmar que a lo largo de su dominio se trata de una función creciente o decreciente. Esto lleva a pensar en su derivada con dos opciones de signo.

$$f'(x) \geq 0$$

o bien:

$$f'(x) \leq 0$$

Para ilustrar esto supóngase la función $f(x) = x^2 + 1$ definida por:

$$f\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$$

Se observa cómo su dominio y codominio de definición la obligan a ser uno - uno y sobre, por lo tanto cumple con ser biyectiva. Si se estudia su representación gráfica se verá que se trata de una función netamente creciente a lo largo de su dominio, por lo cual su derivada, como se había visto es cero o mayor que; es decir, $f'(x) \geq 0$.

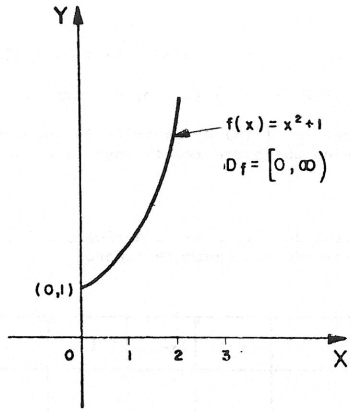


Figura IV.16

Esto también se demuestra a través de la derivada:

$$f'(x) = 2x, \qquad x \in [0, \infty)$$

que siempre es positiva o cero.

Otro ejemplo podría ser el de la función $f(x) = \cos x$ definida por:

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

cuya gráfica se ve en la figura IV.17

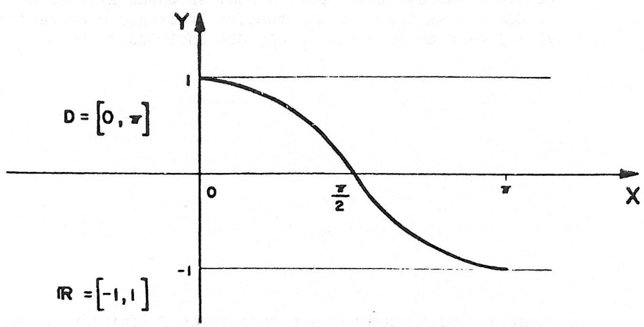


Figura IV.17

Por las limitaciones en su dominio y codominio se tiene que la función es biyectiva, es decir uno - uno y sobre.

La función es decreciente a lo largo de su dominio y por lo tanto su derivada es $f'(x) \leq 0$, lo que se comprobaría también derivando en el intervalo considerado.

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad x \in [0, \pi]$$

$$f'(x) \leq 0$$

IV.3 MAXIMOS Y MINIMOS

La determinación de los valores máximos y mínimos de una función es de suma importancia en el estudio de la variación de la misma y conduce a una aplicación inmediata del cálculo diferencial en la solución de muchos problemas prácticos.

Definición: $f(x_o)$ es un valor máximo relativo de la función continua $y = f(x)$, si existe un entorno.

$x_o - \delta < x < x_o + \delta$ de x_o para el cual:

$f(x_o + \Delta x) < f(x_o)$ cuando $|\Delta x| < \delta$

Definición: $f(x_o)$ es un valor mínimo relativo de la función continua $y = f(x)$, si existe un entorno.

$x_o - \delta < x < x_o + \delta$ de x_o para el cual:

$f(x_o + \Delta x) > f(x_o)$ si $|\Delta x| < \delta$

Como en estas definiciones sólo se consideran valores de x en un entorno de x_o, se puede notar que una misma función puede tener más de un máximo relativo y más de un mínimo relativo y aún puede suceder que un máximo relativo sea menor o igual que un mínimo relativo.

En la figura IV.18, se ve la gráfica de una función $y = f(x)$, la cual tiene máximos relativos para x_1 y x_3, presenta mínimos relativos para x_2 y x_4 y se observa que:

$$f(x_1) < f(x_4)$$

TEOREMA IV.8

Hipótesis:

Sea la función continua $y = f(x)$ y un entorno $x_o - \delta < x < x_o + \delta$ del valor x_o de su dominio en el cual se tiene:

$$f'(x_0 + \Delta x) > 0 \quad \text{si} \quad \Delta x < 0; \quad |\Delta x| < \delta \quad \ldots (15)$$

$$f'(x_0 + \Delta x) < 0 \quad \text{si} \quad \Delta x > 0; \quad |\Delta x| < \delta \quad \ldots (16)$$

Tesis:

$f(x_0)$ es un valor máximo relativo de la función $y = f(x)$.

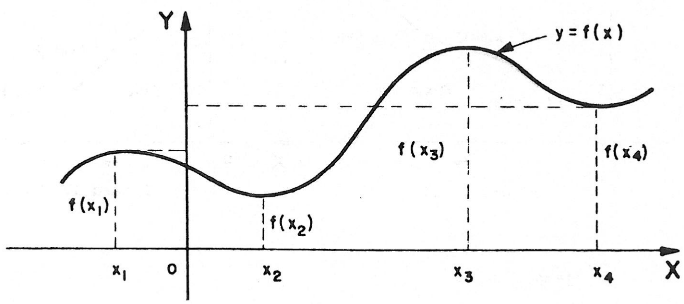


Figura IV.18

Demostración:

Por el teorema IV.6 y por la expresión (15) de la hipótesis, se deduce que la función $y = f(x)$ es creciente en el intervalo $x_0 - \delta < x \leq x_0$ por lo cual en este mismo intervalo:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \ldots (17)$$

Ahora, por el teorema IV.7, y por expresión (16) de la hipótesis, se deduce que $y = f(x)$ es decreciente en el intervalo $x_0 \leq x < x_0 + \delta$, luego en este otro intervalo se tiene:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \ldots (18)$$

teniendo en cuenta (17) y (18) simultáneamente se concluye que:

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0), \quad \text{si} \quad |\Delta x| < \delta$$

luego $f(x_0)$ es un máximo relativo de la función $y = f(x)$ que se presenta para $x = x_0$.

Este teorema se ilustra en las figuras IV.19 y IV.19.1.

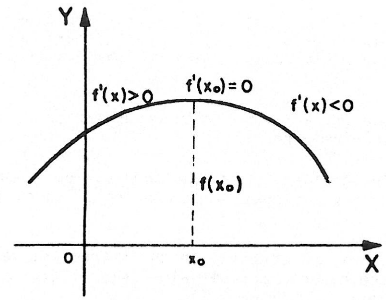


Figura IV.19

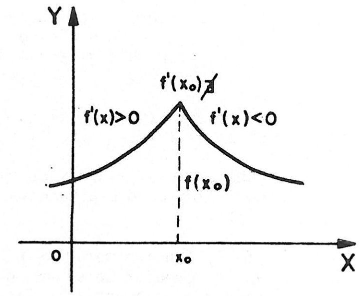


Figura IV.19.1

TEOREMA IV.9

Hipótesis:

Sea la función continua $y = f(x)$, y un entorno $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ del valor x_0 de su dominio en el cual se tiene:

$$f'(x_0 + \Delta x) < 0 \quad \text{si} \quad \Delta x < 0, \quad |\Delta x| < \delta \quad \ldots (19)$$

$$f'(x_0 + \Delta x) > 0 \quad \text{si} \quad \Delta x > 0 \quad |\Delta x| < \delta \quad \ldots (20)$$

Tesis:

$f(x_0)$ es un valor mínimo relativo de la función $y = f(x)$.

Demostración:

La demostración de este teorema es totalmente similar a la del teorema IV.8, y se basa alternativamente en los teoremas IV.6 y IV.7, por lo que no se demostrará. Geométricamente el teorema IV.9, se ilustra en las figuras IV.20 y IV.20.1.

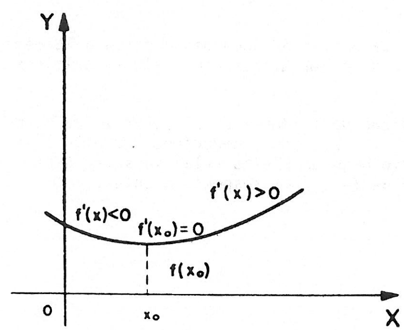


Figura IV.20

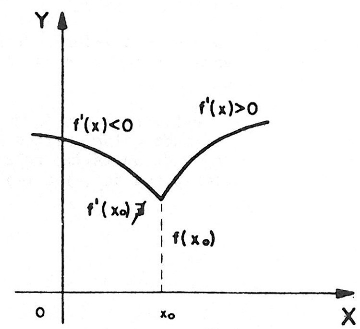


Figura IV.20.1

Por lo anterior, se observa que lo que garantiza la existencia de un máximo relativo o un mínimo relativo de una función $y = f(x)$ para un valor x_o, es el cambio de signo de su derivada $y' = f'(x)$ al pasar x creciendo por el valor x_o.

Si dicho cambio de signo es de (+) a (-) se trata de un máximo relativo, si es de (-) a (+) se tiene un mínimo relativo.

Ahora bien, la derivada puede cambiar de signo pasando por el valor cero o cambiando bruscamente de un valor positivo a otro negativo o viceversa.

Si la función derivada $y' = f'(x)$ es continua en un entorno del valor x_o, al cambiar de signo lo hace pasando por el valor cero. Este es el caso que se ilustra en las figuras IV.19 y IV.20.

Si la función derivada $y' = f'(x)$ es discontinua en x_o, puede cambiar de signo bruscamente como sucede en los casos ilustrados en las figuras IV.19.1 y IV.20.1.

Al estudiar una función para determinar sus máximos y mínimos relativos conviene proceder en un orden lógico, para lo cual se presenta el siguiente criterio.

IV.3.1 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Criterio de la primera derivada para determinar los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$.

1. Hallar la derivada $y' = f'(x)$.
2. Obtener los valores de x que anulan o hacen discontinua a la derivada. Estos valores se conocen comúnmente como valores críticos de x.
3. Investigar el cambio de signo de la derivada al pasar x creciendo por cada valor crítico x_o, x_1, x_2, etc., deduciendo de ello si se trata de un máximo relativo o de un mínimo relativo según dicho cambio sea de (+) a (-) o de (-) a (+) respectivamente.

Si al realizar esto último en un punto, la derivada no cambia de signo, la función $y = f(x)$ no tiene máximo ni mínimo relativo. Este caso se muestra en las figuras IV.21 y IV.21.1.

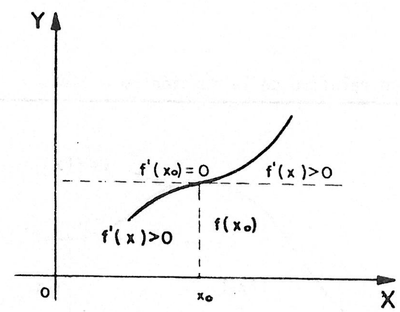


Figura IV.21

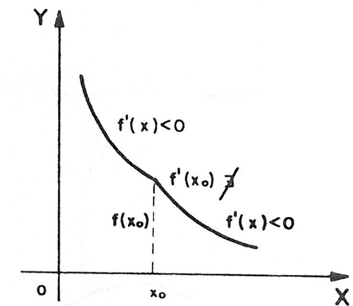


Figura IV.21.1

Ejemplo IV.11

Estudiar la función $f(x) = x^2 + 2x + 4$ determinando sus máximos y mínimos relativos. Trazar su gráfica.

Solución

1. $f'(x) = 2x + 2$
2. $f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x + 2 = 0 \Longrightarrow x_o = -1$

   El único valor crítico que se presenta es $x_o = -1$

3. Si $x < -1$ $\quad f'(x) < 0$ $\quad$ (tiene signo (-)).

   Si $x > -1$ $\quad f'(x) > 0$ $\quad$ (tiene signo (+)).

Como el cambio de signo es de (-) a (+) se deduce que la función $f(x) = x^2 + 2x + 4$, tiene un valor mínimo relativo para el valor crítico $x_o = -1$.

El valor del mínimo es: $f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 4 = 3$

La gráfica se ve en la figura IV.22.

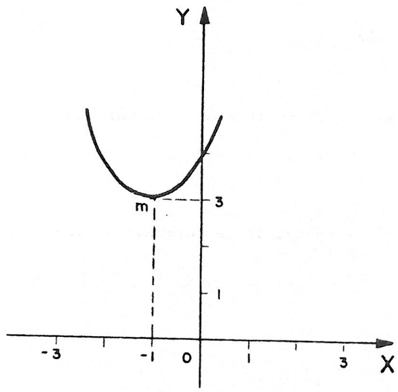


Figura IV.22

Ejemplo IV.12

Determinar los valores máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$.

Solución

1. $f'(x) = 12 - 6x - 6x^2$

   Factorizando: $f'(x) = -6(x^2 + x - 2) = -6(x + 2)(x - 1)$

2. Como la función derivada es continua, se buscan los valores que la anulan únicamente.

   $f'(x) = 0 \Longrightarrow -6(x + 2)(x - 1) = 0 \Longrightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1$

   Los valores críticos son $x_1 = -2$ y $x_2 = 1$

3. La investigación del cambio de signo de la derivada puede hacerse con el siguiente cuadro:

x	$-6(x + 2)$	$(x - 1)$	$f'(x)$	$f(x)$
$-\infty < x < -2$	+	-	-	
$x = -2$				Hay un mínimo
$-2 < x < 1$	-	-	+	
$x = 1$				Hay un máximo
$1 < x < \infty$	-	+	-	

El valor del mínimo es: $f(-2) = 10 - 24 - 12 + 16 = -10$

El valor del máximo es: $f(1) = 10 + 12 - 3 - 2 = 17$

Ejemplo IV.13

Dada la función $f(x) = 3 - (x - 2)^{2/3}$, hallar sus máximos y mínimos relativos si los tiene.

Solución

1. $f'(x) = -\frac{2}{3}(x - 2)^{-1/3} = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x - 2}}$

2. No existen valores de x que anulen a la derivada, pero $x_1 = 2$ la hace discontinua, luego el valor crítico es x_1.

3. $x < 2 \Longrightarrow x - 2 < 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{x - 2} < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$ (+)

   $x > 2 \Longrightarrow x - 2 > 0 \Longrightarrow \sqrt[3]{x - 2} > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$ (-)

Evidentemente se tiene un máximo relativo para $x_1 = 2$ cuyo valor es $f(2) = 3$.

En la figura IV.23, se ve la gráfica correspondiente.

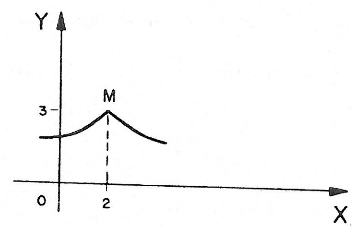


Figura IV.23

Ejemplo IV.14

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Trazar la gráfica correspondiente.

Solución

Si $x < 2$: $f'(x) = -2x$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2x = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$ que es un valor crítico.

Si $x > 2$; $f'(x) = \frac{1}{2}$; no hay valor de x que anule o haga discontinua a la derivada.

Para $x_2 = 2$: $f(2) = 1 = \lim_{x \to 2} f(x)$, $f(x)$ es continua en $x = 2$

y $f'_-(2) = -2x\Big]_{x=2} = -4 < 0$

$f'_+(2) = \frac{1}{2} > 0$

Esto implica que $f'(2)$ no existe, así que $x_2 = 2$ es otro valor crítico. Además por lo anterior se ve que al pasar x creciendo por el valor $x_2 = 2$, la derivada cambia de signo de (-) a (+), luego $f(2) = 1$ es un valor mínimo relativo.

Para el valor crítico:

$x_1 = 0$ se tiene

$x < 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$ (+)

$x > 0 \Longrightarrow f'(x) < 0$ (-)

Así que $f(o) = 5$ es un valor máximo relativo.

La gráfica de esta función se ve en la figura IV. 24.

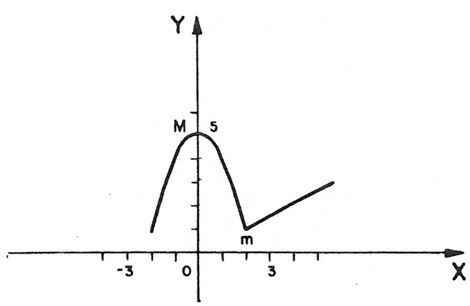


Figura IV.24

Ejemplo IV.15

Estudiar la siguiente función para máximos y mínimos:

$$f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$$

Solución

Si se deriva y se iguala la derivada a cero:

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$$

de donde:

$$\frac{2\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}} = 0; \quad x = -1 \quad \text{(punto crítico)},$$

igualando el denominador a cero, ya que de esta manera se hace tender la derivada a ∞, se tiene que:

$$\sqrt[3]{x} = 0: \quad x = 0 \quad \text{(punto crítico)},$$

para:

$x = -1$

si:

$x = -2$; $f'(x) > 0$

si:

$x = -\frac{1}{2}$; $f'(x) < 0$

por lo que se trata de un máximo relativo $M_r(-1, 1)$

para:

$x = 0$

si:

$x = -\frac{1}{2}$; $f'(x) < 0$

si:

$x = 1$; $f'(x) > 0$

por lo que se trata de un mínimo relativo $m_r(0, 0)$

La gráfica de esta función ilustra los resultados obtenidos analíticamente.

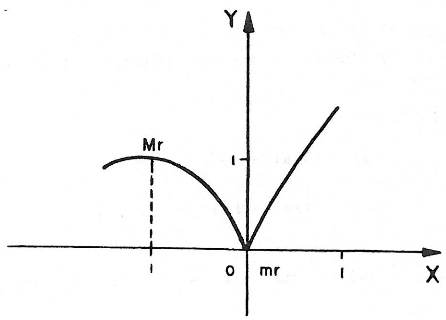


Figura IV.25

IV.3.2 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA MAXIMOS Y MINIMOS

Otra forma de analizar una función para máximos y mínimos relativos incluye el empleo de la segunda derivada de la función como se ve a continuación:

TEOREMA IV.10

Hipótesis:

La función $y = f(x)$ es derivable en x_0, además $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$.

Tesis:

La función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo para $x = x_0$.

Demostración:

Como $f''(x_0) < 0$, existe un entorno $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ de x_0 en el cual la función derivada $y' = f'(x)$ es decreciente, luego:

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x_0 + \Delta x) > f'(x_0) & \text{si} & \Delta x < 0 \\ f'(x_0 + \Delta x) < f'(x_0) & \text{si} & \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

pero como $f'(x_0) = 0$, lo anterior implica:

$$\left.\begin{array}{lll} f'(x_0 + \Delta x) > 0 \ (+) & \text{si} & \Delta x < 0 \\ f'(x_0 + \Delta x) < 0 \ (-) & \text{si} & \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

Esto hace ver que la derivada cambia de signo de (+) a (-), al pasar x creciendo por x_0, luego hay un máximo relativo para $x = x_0$, cuyo valor es $f(x_0)$.

TEOREMA IV.11

Hipótesis:

La función $y = f(x)$ es derivable en x_0, además $f'(x_0) = 0$ y $f'' > 0$.

Tesis:

La función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo para $x = x_0$.

Demostración:

Este teorema se demuestra en forma totalmente semejante al anterior.

Con base en los teoremas IV.10 y IV.11, se da ahora el siguiente:

Criterio de la segunda derivada para determinar los máximos y mínimos relativos de una función $y = f(x)$.

1. Obtener la primera y segunda derivada de la función.
2. Hallar los valores críticos que anulan a la primera derivada.
3. Calcular el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores obtenidos antes como críticos, deduciendo que si para un valor crítico $x = x_0$, se tiene $f'(x_0) = 0$, entonces $f(x_0)$ es máximo relativo si $f''(x_0) < 0$ y mínimo relativo si $f''(x_0) > 0$.

En el caso en que $f''(x_0) = 0$ ó $f''(x_0)$ no exista este criterio no es aplicable, teniéndose el recurso de aplicar el criterio de la primera derivada.

Ejemplo IV.16

Aplicando el criterio de la segunda derivada, determinar los máximos y mínimos relativos de la función:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

Solución

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x \qquad f''(x) = 6x + 6$

b) $f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Longrightarrow 3x(x+2) = 0$

$x_1 = -2, \quad x_2 = 0$ que son los valores críticos.

c) Para $x_1 = -2, \quad f''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0$

luego $f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 2 = 2$ es un máximo relativo.

Para $x_2 = 0, \quad f''(0) = 6 > 0$ por lo cual $f(0) = -2$ es mínimo relativo.

Ejemplo IV.17

Estudiar la función $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ encontrando sus máximos y mínimos relativos, aplicando el criterio de la segunda derivada.

Solución

a) $f'(x) = 6x^3 - x^2 - 2x;$

$f''(x) = 18x^2 - 2x - 2$

b) $f'(x)\ 0 \Longrightarrow 6x^3 - x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x(6x^2 - x - 2) = 0$

$x_1 = 0; \quad 6x^2 - x - 2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(6)(-2)}}{2(6)} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3} \qquad x_3 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$$

Los valores críticos son:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{2}{3}; \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

c) Para $x_3 = -\frac{1}{2}$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$

$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} > 0$

luego hay mínimo relativo para $x_3 = -\frac{1}{2}$ cuyo valor es:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{96}$$

para:

$x_1 = 0, \quad f''(0) = -2 < 0$

luego hay máximo relativo para $x_1 = 0$ cuyo valor es $f(0) = 0$

para:

$$x_2 = \frac{2}{3}, \quad f''\left(\frac{2}{3}\right) = 18\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = \frac{14}{3} > 0$$

luego hay mínimo relativo para $x_2 = \frac{2}{3}$ cuyo valor es:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{20}{81}$$

IV.3.3 PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS

En la ingeniería y en las ciencias, así como en la industria y en nuestra vida cotidiana, suelen presentarse ciertos problemas matemáticos llamados *problemas de máximos y mínimos*. He aquí unos cuantos ejemplos:

1. Una viga rectangular debe cortarse de un tronco de árbol circular, de manera que se tenga el menor desperdicio posible.

2. De un material disponible puede construirse una cerca de 200 m de largo. Con ésta debe cercarse un terreno rectangular que tenga la mayor área posible, usando la pared de una fábrica como uno de los lados del terreno.

3. Un cuadro está colgado sobre la pared, más arriba del nivel de los ojos de un observador. A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que el ángulo subtendido por el cuadro sea el menor posible.

4. ¿A qué altura arriba del centro de una mesa redonda debe colgarse una lámpara para obtener la máxima iluminación posible de la orilla de la mesa?

Todos estos problemas tienen algo en común, no obstante sus diferencias. Cada uno requiere que se determine la forma de lograr un efecto óptimo mediante la selección de una entre varias posibilidades. No es necesario insistir en lo importante que es resolver tales problemas. Las matemáticas han creado algunos métodos generales muy útiles para resolverlos. Estos métodos se estudian en el *cálculo diferencial*.

Comúnmente lo primero que hay que hacer al resolver un problema de máximos y mínimos es establecer el modelo matemático que representa la función cuyos valores máximos o mínimos se desean determinar.

Aquí tiene una amplia aplicación de lo tratado en el capítulo I.

No hay una regla aplicable a la solución de todos los problemas de máximos y mínimos, pero en la mayoría de ellos se observa el siguiente orden:

1° Determinar la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener, trazando un croquis cuando convenga.

2° Si la expresión resultante contiene más de una variable, las condiciones del problema proporcionarán suficientes relaciones entre éstas, para que la función pueda expresarse en términos de una sola variable.

3° A la función resultante se le aplican los criterios tratados anteriormente para el cálculo de máximos y mínimos.

4° En los problemas prácticos, muchas veces se ve con facilidad cuáles de los valores críticos darán un máximo o un mínimo, en consecuencia no siempre es necesario aplicar completo el paso anterior.

5° Conviene construir la gráfica de la función para comprobar el resultado obtenido.

El cálculo de los máximos y mínimos puede simplificarse con ayuda de los siguientes principios:

1. Los máximos y mínimos de una función continua se presentan alternativamente.

2. Cuando c es una constante positiva, $cf(x)$ es un máximo o un mínimo para los valores críticos de x que hacen a $f(x)$ máximo o mínimo y no para otros. Cuando c es negativa, $c(fx)$ es un máximo cuando $f(x)$ es mínimo y recíprocamente.

3. Si c es constante, $f(x)$ y $c + f(x)$ tienen valores máximos y mínimos para los mismos valores críticos de x.

Ejemplo IV.18

Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada sin tapa. Calcular el volumen de la caja que se puede obtener de $1{,}200\ cm^2$ de material, con la mayor capacidad posible.

Solución

Un croquis del desarrollo de la caja se muestra en la figura IV.26.

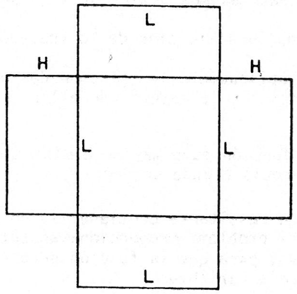


Figura IV.26

Se ve que:

$$4\ L\ h + L^2 = 1{,}200\ cm^2$$

despejando h queda:

$$h = \frac{1{,}200 - L^2}{4\ L}$$

sustituyendo en $V = L^2\ h$:

$$V = L^2 \left[\frac{1{,}200 - L^2}{4\ L} \right] = \frac{1{,}200\ L}{4} - \frac{L^3}{4} = 300\ L - \frac{L^3}{4}$$

derivando:

$$\frac{dV}{dL} = 300 - \frac{3}{4}\ L^2$$

$$\frac{dV}{dL} = 0 \Longrightarrow -\frac{3}{4}\ L^2 + 300 = 0 \Longrightarrow L^2 = \frac{(300)\ 4}{3} = 400$$

$$L = \sqrt{400}$$

$L = 20$ cm (que es el único valor crítico)

calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2V}{dL^2} = -\frac{6}{4}\ L = -\frac{3}{2}\ L$$

sustituyendo $L = 20$ quedará:

$$\frac{d^2V}{dL^2} = -30 < 0 \Longrightarrow V \text{ será máximo cuando } L = 20$$

sustituyendo en V el valor crítico:

$$V = \frac{(1{,}200)\ 20}{4} - \frac{(20)^3}{4} = 6{,}000 - 2{,}000 = 4{,}000$$

$V = 4{,}000\ cm^3$ es la capacidad máxima de la caja.

Ejemplo IV.19

De un tronco redondo, de diámetro d, hay que cortar una viga de sección rectangular. ¿Qué anchura x y qué altura "y" deberá tener esta sección, para que la viga tenga la resistencia máxima posible?

a) a la compresión, y

b) a la flexión.

NOTA: La resistencia de la viga a la compresión es proporcional al área de su sección transversal, mientras que a la flexión, es proporcional al producto de la anchura de esta sección por el cuadrado de su altura.

$$R_c = K\ x\ y \qquad R_f = K\ x\ y^2$$

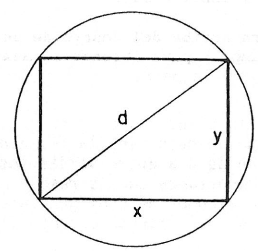


Figura IV.27

De la figura IV.27:

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$y^2 = d^2 - x^2 \quad ; \qquad y = \sqrt{d^2 - x^2}$$

Compresión

$$R_c = K x \sqrt{d^2 - x^2}$$

$$R'_c = - \frac{K x^2}{\sqrt{d^2 - x^2}} + K \sqrt{d^2 - x^2}$$

$$- K x^2 + K d^2 - K x^2 = 0$$

$$x = \pm \frac{d}{\sqrt{2}}$$

de donde $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Por lo que las dimensiones serán:

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

Flexión

$$R_f = K x \ (d^2 - x^2)$$

$$R'_f = K d^2 - 3 K x^2$$

$$K d^2 - 3 K x^2 = 0$$

$$x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}$$

de donde $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$

Por lo que las dimensiones serán:

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}} \ d$$

Ejemplo IV.20

En el segmento recto $\overline{AB} = a$ que une entre sí dos focos luminosos A (de intensidad p) y B (de intensidad q), hallar el punto menos iluminado M. (La iluminación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco luminoso). Ver figura IV.28.

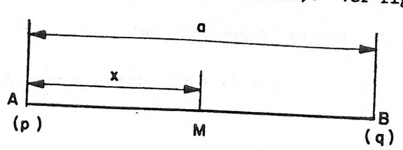


Figura IV.28

$$I_M = k \frac{p}{x^2} + k \frac{q}{(a - x)^2}$$

$$I'_M = \frac{-2 k p}{x^3} + \frac{2 k q}{(a - x)^3}$$

$$- 2 k p \ (a - x)^3 + 2 k q \ x^3 = 0$$

$$- p \ (a - x)^3 + q \ x^3 = 0$$

$$\sqrt[3]{q} \ x = \sqrt[3]{p} \ (a - x)$$

$$\sqrt[3]{q} \ x + \sqrt[3]{p} \ x = a \sqrt[3]{p}$$

$$\therefore \ x = a \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{p}} \qquad \therefore \ AM = x = a \frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}}$$

Ejemplo IV.21

Hallar el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, en el que la tangente forme con el eje OX el ángulo de mayor valor posible.

Solución

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$T = \tan \alpha$$

$$y' = - \frac{2 x}{(1 + x^2)^2} = \tan \alpha$$

entonces:

$$T' = \frac{- 2 \ (1 + x^2)^2 + 2 x \left[2 \ (1 + x^2) \ 2 x \right]}{(1 + x^2)^4}$$

$$T' = \frac{6 x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

igualando la derivada a cero se tiene que:

$$\frac{6\,x^2 - 2}{(1 + x^2)^3} = 0 \quad ; \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

para:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \begin{array}{l} \text{si} \quad x = -1,\ T' > 0 \\ \text{si} \quad x = 0\ ,\ T' < 0 \end{array} \qquad \therefore \quad \text{Máximo}$$

para:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \begin{array}{l} \text{si} \quad x = 0,\ T' < 0 \\ \text{si} \quad x = 1,\ T' > 0 \end{array} \qquad \therefore \quad \text{Mínimo}$$

Para $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ se tiene la máxima tangente y para $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, la mínima tangente, pero para ambos valores, el ángulo es el de mayor valor absoluto posible. Por lo tanto la solución del problema es:

$$\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{3}{4}\right)$$

Ejemplo IV.22

Un hombre tiene un muro de piedra en un costado de un terreno. Dispone de 1,200 m de material para cercar, y desea hacer un corral rectangular utilizando el muro como uno de sus lados. ¿Qué dimensiones debe tener el corral para encerrar la mayor área posible?

Solución

La figura IV.29 muestra un croquis del terreno.

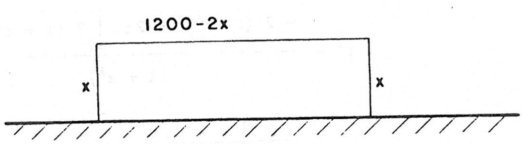


Figura IV.29

El área es:

$$A = A(x) = x\ (1{,}200 - 2\ x) = 1{,}200\ x - 2\ x^2$$

derivando:

$$A'(x) = 1{,}200 - 4\ x$$

$$A'(x) = 0 \implies 1{,}200 - 4\ x = 0 \implies x_1 = 300\ \text{m} \quad \text{(valor crítico).}$$

La segunda derivada es constante y negativa:

$$A''(x) = -4 < 0$$

luego se trata de un máximo.

El ancho del corral debe ser:

$$x_1 = 300\ \text{m}$$

y el largo:

$$1{,}200 - 2\ (300) = 600\ \text{m}$$

Ejemplo IV.23

La suma de un número y el triple de un segundo número es 60. Encontrar entre todos los pares de números que satisfacen esta condición aquel cuyo producto sea el máximo posible.

Solución

El producto P se puede representar como:

$$P = x\,y$$

por la primera proposición del problema se tiene que:

$$x + 3y = 60 \implies y = \frac{1}{3}\ (60 - x)$$

sustituyendo y en $P = xy$:

$$P = x \cdot \frac{1}{3}(60 - x) = 20x - \frac{1}{3}x^2 = P(x)$$

como P es función de x_1, derivando con respecto a x:

$$P'(x) = 20 - \frac{2}{3}x$$

igualando esta expresión a cero:

$$20 - \frac{2}{3}x = 0 \Longrightarrow x_1 = 30$$

sustituyendo en:

$$y = \frac{1}{3}(60 - x)$$

queda:

$$y_1 = 10$$

los números pedidos son:

$$x_1 = 30, \quad y_1 = 10$$

Ejemplo IV.24

Al proyectar un estacionamiento se estima que si se disponen de 40 a 80 casilleros para automóviles la utilidad diaria será de \$ 8.00 por casillero. Sin embargo, si en el proyecto se aumenta el número a más de 80, la utilidad se reducirá en \$ 0.04 por cada casillero de los que excedan a 80. ¿Cuál debe ser el número de casilleros proyectados para obtener la máxima utilidad?

Solución

Sea x el número de casilleros y F la utilidad diaria en pesos.

Evidentemente F depende de x. Cuando $40 \leq x \leq 80$, F se obtiene multiplicando x por 8.00, es decir:

$$\text{Si} \quad 40 \leq x \leq 80, \quad F(x) = 8x$$

Cuando $x > 80$ la utilidad por cada casillero es $8 - 0.04(x - 80)$, por lo que la utilidad por x casilleros es:

$$\text{Si} \quad x > 80, \quad F(x) = x\left[8 - 0.04\ (x - 80)\right] = 11.20x - 0.04x^2$$

Obsérvese que la utilidad disminuirá hasta anularse cuando:

$$11.20x - 0.04x^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación resulta:

$$x_1 = 280$$

Esto quiere decir que si se dispusieran más de 280 casilleros habría pérdida en lugar de utilidad.

De lo anterior, se deduce que la función que hay que estudiar para máximos y mínimos es:

$$F(x) = \begin{cases} 8x & \text{si} \quad 40 \leq x \leq 80 \\ 11.20x - 0.04x^2 & \text{si} \quad 80 < x \leq 280 \end{cases}$$

Aunque por la naturaleza del problema x es un número entero positivo, para tener una función continua se considera que x es un número real, teniéndose como dominio de la función el intervalo $[40, 280]$.

Ahora bien:

$$\text{si} \quad 40 \leq x \leq 80, \quad F'(x) = 8$$

$$\text{si} \quad 80 < x \leq 280, \quad F'(x) = 11.20 - 0.08x$$

para:

$$x = 80, \quad F'_-(80) = 8 \quad \text{y} \quad F'_+(80) = 11.20 - 0.08\ (80) = 4.80$$

Como $F'_-(80) \neq F'_+(80) \Longrightarrow F'(80)$ no existe, así que $x_1 = 80$ es un valor crítico de x, pero se observa que $F'_-(80) > 0$ y

$F'_+(80) > 0$, no hay cambio de signo de la derivada, luego para $x_1 = 80$ no hay máximo ni mínimo.

Para:

$$F'(x) = 11.20 - 0.08\,x \qquad \text{si} \qquad 80 < x \leq 280$$

$$F(x) = 0 \implies 11.20 - 0.08\,x = 0 \implies x_2 = 140$$

que es otro valor crítico al cual debe corresponder el máximo.

Aplicando el criterio de la segunda derivada, se ve que:

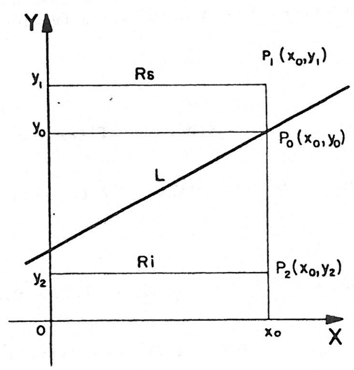
$$F''(x) = -0.08 \qquad \text{si} \qquad 80 < x \leq 280$$

$$F''(140) = -0.08 < 0$$

Así que esto confirma que para $x_2 = 140$, $F(140)$ es máximo.

IV.3.4 CONCAVIDAD DE UNA CURVA. PUNTOS DE INFLEXION

Sea una recta L como la indicada en la figura IV.30, no perpendicular al eje X, entonces se tienen las siguientes definiciones:



Rs= Región superior
Ri= Región inferior

Figura IV.30

Definición: Se dice que los puntos $P_1(x_0, y_1)$ se encuentran en la región superior R_s de la recta L si sus ordenadas son mayores que las ordenadas correspondientes del punto P_0 de la recta L que tiene la misma abscisa que P_1 (en la figura IV.30, $P_1 \in R_s$).

Definición: Se dice que los puntos $P_2(x_0, y_2)$ pertenecen a la región inferior R_i de la recta L si sus ordenadas son menores que las ordenadas del punto de la recta para la misma abscisa (en la figura IV.30, $P_2 \in R_i$).

Con esta base se pueden definir las concavidades de una curva como sigue:

Definición: La curva de ecuación $y = f(x)$ que es continua en el punto $P(x_0, y_0)$ tiene su concavidad hacia arriba en P si existe un entorno de dicho punto en el cual todos los puntos de la curva, excepto el punto P se encuentran en la región superior de la tangente a la misma en el punto $P(x_0, y_0)$.

La figura IV.31 muestra la interpretación geométrica de esta definición.

Definición: La curva C cuya ecuación es: $y = f(x)$ que es continua en P, tiene su concavidad hacia abajo en este punto si existe un entorno del punto P, tal que todos los puntos de la curva, con excepción del punto P, se encuentran en la región inferior de la tangente a la curva en dicho punto. (Ver figura IV.32).

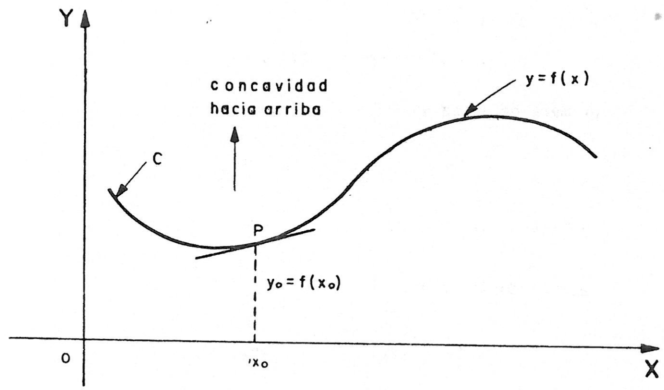


Figura IV.31

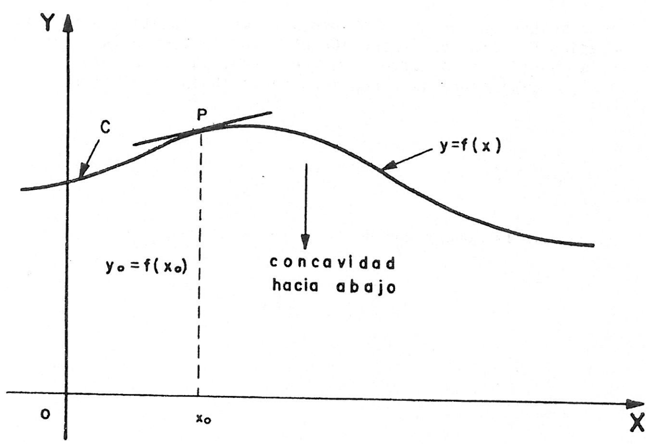


Figura IV.32

TEOREMA IV.12 Hipótesis: La ecuación de la curva C es $y = f(x)$; esta función tiene segunda derivada y se cumple que: $$f''(x_o) > 0$$ Tesis: La curva C tiene su concavidad hacia arriba en el punto $P(x_o, y_o)$.

Demostración:

La ecuación de la recta tangente a la curva C en el punto P es:

$$y - y_o = f'(x_o)\,(x - x_o) \quad \Longrightarrow \quad y = f'(x_o)\,(x - x_o) + y_o$$

y es la ordenada de un punto de la tangente con abscisa x; $f(x)$ es la ordenada del punto de la curva con la misma abscisa x.

Considérese la función $f(x) - y$

$$f(x) - y = f(x) - f'(x_o)\,(x - x_o) - y_o$$

Como esta función es dependiente de x, entonces es válido calcular con respecto a x, la primera derivada:

$$\frac{d}{dx}\Big[\, f(x) - y \,\Big] = f'(x) - f'(x_o)$$

Si $x = x_o$:

$$\frac{d}{dx}\Big[\, f(x) - y \,\Big] = 0$$

calculando la segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big[\, f(x) - y \,\Big] = f''(x)$$

Según la hipótesis:

$$f''(x_o) > 0$$

entonces por el teorema IV.11, la función:

$$\left[f(x) - y \right]$$

tiene un mínimo para $x = x_o$.

El valor de este mínimo es:

$$\left[f(x) - y \right]_{x = x_o} = f(x_o) = 0$$

luego existe una vecindad del punto P, en la que a excepción de este punto, se tiene que:

$$f(x) - y > 0$$

lo que implica que $f(x) > y$; luego en dicha vecindad todos los puntos de la curva excepto el punto P se encuentran en la región superior de la tangente a la curva en el punto P, de donde se concluye que la curva C de la ecuación $y = f(x)$ tiene su concavidad hacia arriba en ese punto.

TEOREMA IV.13

Hipótesis:

La ecuación de la curva C es $y = f(x)$; esta función tiene segunda derivada y se cumple:

$$f''(x_o) < 0$$

Tesis:

La curva C tiene su concavidad hacia abajo en el punto $P(x_o, y_o)$.

Demostración:

La tangente a la curva en el punto P es:

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o) \implies y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$$

Considérese la función:

$$(f(x) - y) = f(x) - f'(x_o)(x - x_o) - y_o$$

su primera derivada será:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) - y \right] = f'(x) - f'(x_o)$$

que se anula para $x = x_o$

la segunda derivada es:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[f(x) - y \right] = f''(x)$$

Según la hipótesis $f''(x_o) < 0$ por lo cual, según el teorema IV.10, $\left[f(x) - y \right]$ tiene un máximo relativo para $x = x_o$, entonces existe un entorno del punto P en que sólo exceptuando éste, se tiene que:

$$f(x) - y < 0 \implies f(x) < y$$

Se concluye que en dicho entorno, todos los puntos de la curva C de ecuación $y = f(x)$ con excepción de P, pertenecen a la región inferior de la tangente a la curva en dicho punto, luego la curva C de ecuación $y = f(x)$ tiene su concavidad hacia abajo en dicho punto.

Ejemplo IV.25

Examinar la concavidad de la curva de ecuación $y = f(x) = x^2 - 4x^{1/2}$

Solución

$$y' = 2x - 2x^{-1/2}$$

$$y'' = 2 + x^{-3/2} \qquad y'' = 2 + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

El dominio de $y = f(x)$ es:

$$x \geq 0$$

y el dominio de $y' = f'(x)$ y $y'' = f''(x)$ es para ambas:

$$x > 0$$

Es claro que si $x > 0$, se tiene que $f''(x) > 0$, por lo cual la curva es cóncava hacia arriba.

Puede verse que si $x \to 0^+$, esta curva se aproxima tangencialmente al eje de las y. Dado que $f(o) = 0$, la curva inicia en el origen pero ésta no se extiende a la izquierda de este punto como se ve en la figura IV.33.

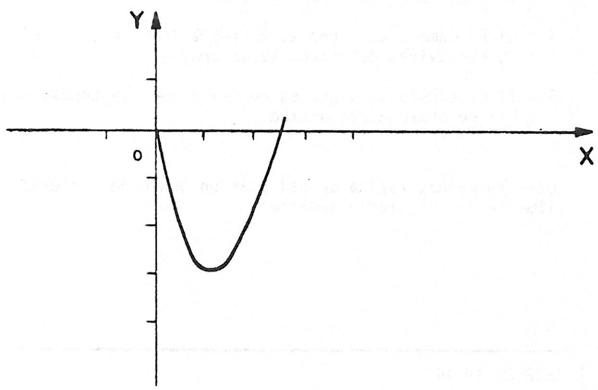


Figura IV.33

Ejemplo IV.26

Encontrar los puntos donde la curva de ecuación:

$$24\,y = x^3 - 6\,x^2 - 36\,x + 16$$

es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

Solución

Derivando:

$$24\,y' = 3\,x^2 - 12\,x - 36 = 3\,(x + 2)\,(x - 6)$$

derivando nuevamente:

$$24\,y'' = 6\,x - 12 = 6\,(x - 2)$$

se ve que:

$y'' > 0$ si $x > 2$

$y'' < 0$ si $x < 2$

Por este motivo la curva es cóncava hacia abajo para $x < 2$, y cóncava hacia arriba para $x > 2$ como se ve en la figura IV.34

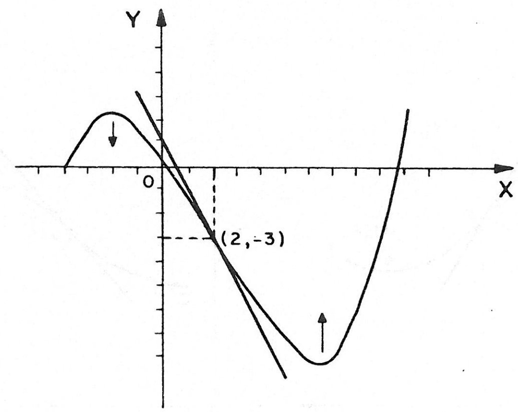


Figura IV.34

Se observa que $y'' = 0$ para $x = 2$ y el punto $(2, -3)$ sobre la curva separa la porción de la curva que es cóncava hacia arriba de la que es cóncava hacia abajo.

PUNTOS DE INFLEXION

Definición: Si existe una vecindad del punto $P(x_o, y_o)$ en la curva C y en esta vecindad todos los puntos de la curva que están a un lado de P pertenecen a la región superior de la tangente a la curva en dicho punto P, y todos los puntos de la curva al otro lado de P pertenecen a la región inferior de la misma tangente, entonces el punto $P(x_o, y_o)$ se conoce como punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.

De lo anterior resulta claro que un punto de inflexión de una curva es aquel en el cual cambia el sentido de la concavidad de la misma, como se ve en las figuras IV.35 y IV.35.1.

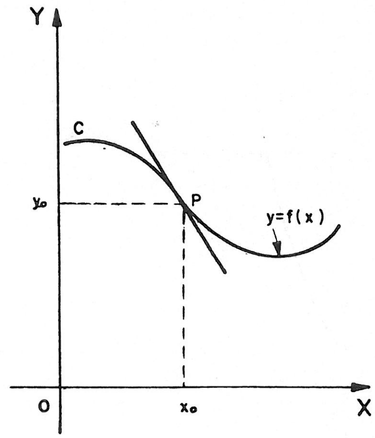


Figura IV.35

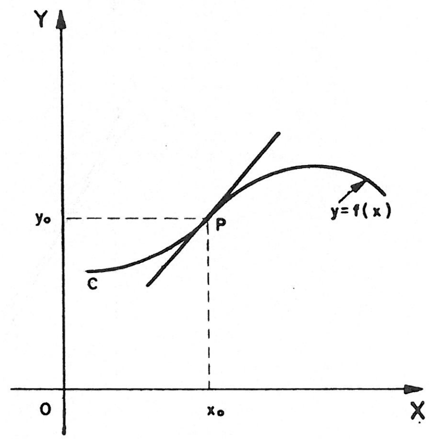


Figura IV.35.1

Por lo anterior y del estudio sobre concavidad se sigue que en el punto de inflexión la segunda derivada debe cambiar de signo.

Por el procedimiento visto en el estudio de los valores extremos de una función (máximos y mínimos), se ve que para analizar el cambio de signo de $f''(x)$ se requiere calcular los valores de x que anulen esta derivada segunda o los valores de x que la hagan discontinua, dado que esta condición es esencial para que exista el cambio de signo. Más aún, la función $y'' = f''(x)$ puede anularse o ser discontinua sin que ocurra el cambio de signo.

Así pues, para encontrar los puntos de inflexión de una curva dada $y = f(x)$ se procede como sigue:

1. Calcular la segunda derivada $f''(x)$.
2. Calcular los valores de x que anulen o hagan discontinua a $f''(x)$.
3. Si al pasar x por dichos valores hay un cambio de signo de $f''(x)$, entonces la curva tendrá un punto de inflexión para el valor de x considerado.
4. Si el cambio de signo es de (+) a (-), la curva cambia su concavidad de *arriba hacia abajo*.
5. Si el cambio de signo es de (-) a (+), la concavidad cambia de *abajo hacia arriba*.

Otra forma más rápida de calcular un punto de inflexión se infiere fácilmente del siguiente teorema:

TEOREMA IV.14

Hipótesis:

$y = f(x)$ es la ecuación de la curva C; para $x = x_o$ se tiene:

$$f''(x_o) = 0 \quad \text{y} \quad f'''(x_o) \neq 0$$

Tesis:

El punto $P(x_o, y_o)$ de la curva C es un punto de inflexión.

Demostración:

Se consideran dos casos:

PRIMER CASO:

$$f'''(x_o) > 0$$

Esto implica que en un entorno $x_o - \delta < x < x + \delta$, la función $y'' = f''(x)$ es creciente, luego:

$$\left.\begin{array}{lll} f''(x_o + \Delta x) \;>\; f''(x_o) = 0 & \text{si} & \Delta x < 0 \\ f''(x_o + \Delta x) \;<\; f''(x_o) = 0 & \text{si} & \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

Entonces la segunda derivada $f''(x)$ cambia de (-) a (+) y la curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $P(x_o, y_o)$ como se ve en la figura IV.36.

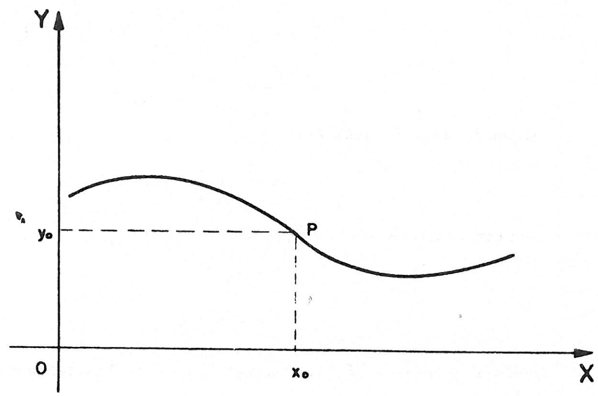


Figura IV.36

SEGUNDO CASO:

$$f''(x_o) < 0$$

Esto implica que en un entorno $x_o - \delta < x < x_o + \delta$, la función $y'' = f''(x)$ es decreciente, luego:

$$\left.\begin{array}{lll} f''(x_o + \Delta x) \;<\; f''(x_o) = 0 & \text{si} & \Delta x < 0 \\ f''(x_o + \Delta x) \;>\; f''(x_o) = 0 & \text{si} & \Delta x > 0 \end{array}\right\} |\Delta x| < \delta$$

Entonces $f''(x)$ cambia de signo de (+) a (-) y la curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en $P(x_o, y_o)$, ver la figura IV.37.

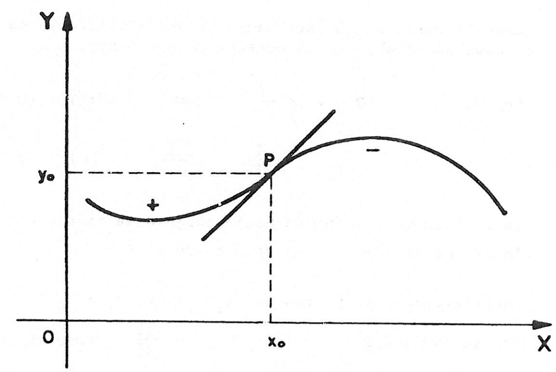


Figura IV.37

Ejemplo IV.27

Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de la curva de ecuación:

$$y = 3x^4 - 4x^3 + 1$$

Solución

$$y' = 12x^3 - 12x^2$$

$$y'' = 36x^2 - 24x \implies y'' = f''(x) = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$f''(x) = 0 \implies 36x\left(x - \frac{2}{3}\right) = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior se tiene:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

como:

$$f''(x) = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

cuando:

$$x < 0 \implies f''(x) > 0 : \quad \underset{\smile}{+}$$

cuando:

$$0 < x < \frac{2}{3} \implies f''(x) < 0 ; \quad \overset{\frown}{-}$$

luego la curva es cóncava hacia arriba a la izquierda de $x_1 = 0$ y cóncava hacia abajo a la derecha de ese punto.

Cuando: $0 < x < \frac{2}{3} \implies f''(x) < 0 ;$ $\frown$

y: $x > \frac{2}{3} \implies f''(x) > 0 ;$ $\underset{\smile}{+}$

luego la curva es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x_2 = \frac{2}{3}$ y cóncava hacia arriba a la derecha de $x_2 = \frac{2}{3}$.

Sustituyendo los valores de $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{2}{3}$ en la ecuación dada se obtienen: $y_1 = 1$ y $y_2 = \frac{11}{27}$ respectivamente.

Por lo tanto, los puntos $I_1(0\ ,1)$ e $I_2\left(\frac{2}{3}\ ,\ \frac{11}{27}\right)$ son los puntos de inflexión, como puede verse en la figura IV.38.

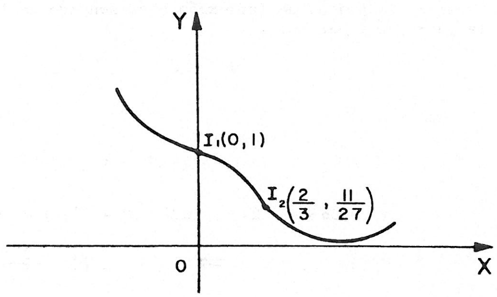


Figura IV.38

Ejemplo IV.28

Hallar los puntos de inflexión y concavidad de la curva de ecuación:

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$$

Solución

$$y' = 6x^2 - 6x - 36$$

$$y'' = 12x - 6$$

$$y'' = 0 \implies 12x - 6 = 0 \implies x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y''' = f'''(x) = 12 > 0 \implies f'''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

luego sí hay punto de inflexión.

Sustituyendo $x_1 = \frac{1}{2}$ en la ecuación dada:

$$y_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 36\left(\frac{1}{2}\right) + 25$$

$$y_1 = \frac{13}{2}$$

el punto de inflexión es:

$$I\left(\frac{1}{2}\ ,\ \frac{13}{2}\right)$$

Sustituyendo $x = 0 < \frac{1}{2}$ en y''

$$y'' = 12\ (0) - 6$$

$$y'' = -6 < 0$$

luego la curva es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x_1 = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo $x = 1 > \frac{1}{2}$ en y''

$$y'' = 12\ (1) - 6$$

$$y'' = 6 > 0$$

luego la curva es cóncava hacia arriba a la derecha de $x_1 = \frac{1}{2}$.

IV.3.5 REPRESENTACION DE LA FUNCION ORIGINAL Y SUS DERIVADAS

El siguiente ejemplo ilustra gráficamente la transformación que toma una función dada al aplicarse sobre ella el operador derivada por tres ocasiones, es decir, hasta obtener su derivada de tercer orden. Asimismo es posible observar cómo se cumplen los conceptos estudiados anteriormente, sobre la representación y significado de la primera, segunda y tercera derivada respectivamente, relacionándolos con el comportamiento que tiene la función original, identificando los elementos y puntos críticos de la misma.

Ejemplo IV.29

Representación gráfica de una función original y sus derivadas hasta de tercer orden. (Véase la figura IV.39).

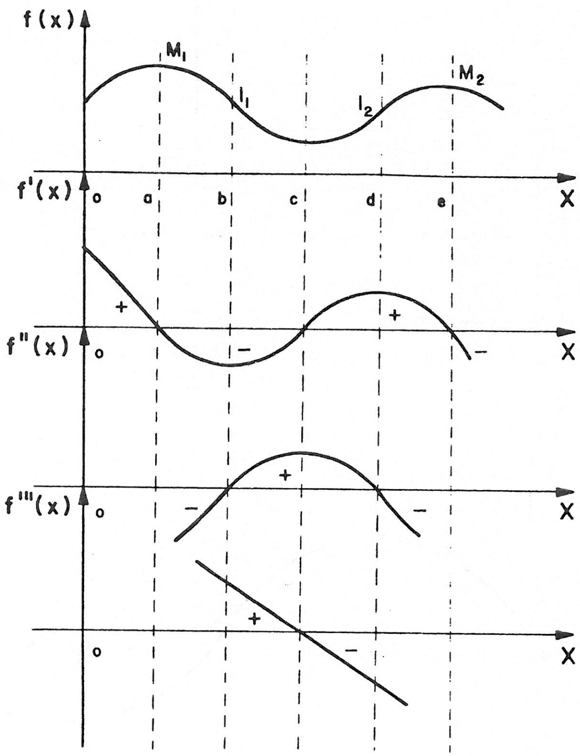


Figura IV.39

En las gráficas anteriores se puede observar lo siguiente:

En los intervalos $(-\infty, a)$ y (c, e) donde $y = f(x)$ es creciente, $y' = f'(x)$ es positiva y en los intervalos (a, c) y $(e, +\infty)$ donde $y = f(x)$ es decreciente, se tiene que $y' = f'(x)$ es negativa.

Para los valores críticos $x = a$, $x = e$ en los que hay máximo relativo, y $x = c$ que corresponde a un mínimo relativo, se tiene que $f'(x) = 0$.

Para $x = b$ y $x = d$ donde se presentan puntos de inflexión, $f''(x) = 0$ en el intervalo (b, d) donde la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba, $f''(x)$ es positiva. Si $x < b$ y $x > d$ donde dicha gráfica es cóncava hacia abajo se tiene que $f''(x)$ es negativa.

Si se toma como función original $y' = f'(x)$ se cumplen las mismas propiedades anteriores, respecto a $y'' = f''(x)$ y $y''' = f'''(x)$ como se puede observar en las gráficas correspondientes del ejemplo anterior.

En los ejemplos que se presentan a continuación se muestra la representación gráfica de algunas funciones y de su primera derivada, con objeto de complementar el análisis de la interpretación gráfica de una función original y de sus derivadas.

Ejemplo IV.30

$f(x) = -x^2 + 2$

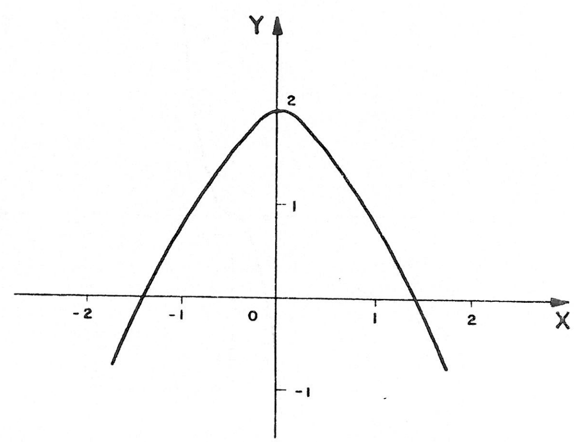


Figura IV.40

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 2) = -2x$$

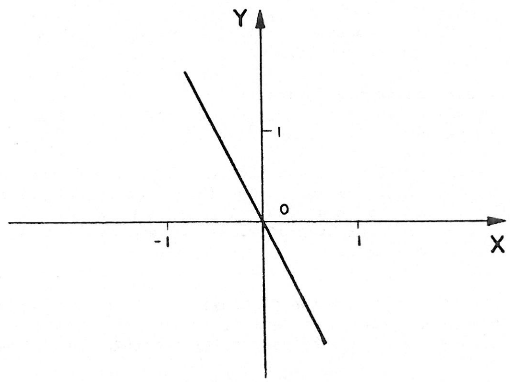


Figura IV.41

Ejemplo IV.31

$$f(x) = x^3 + 3x$$

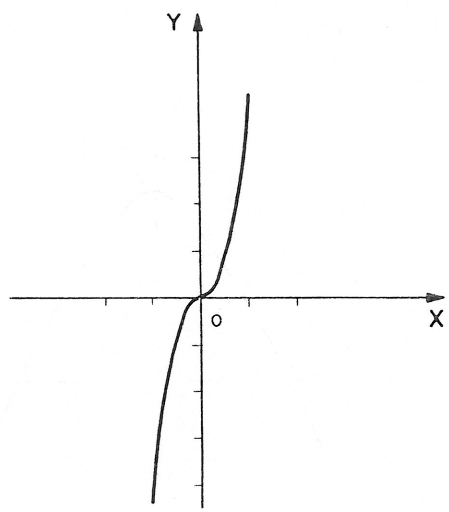


Figura IV.42

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 3x) = 3x^2 + 3$$

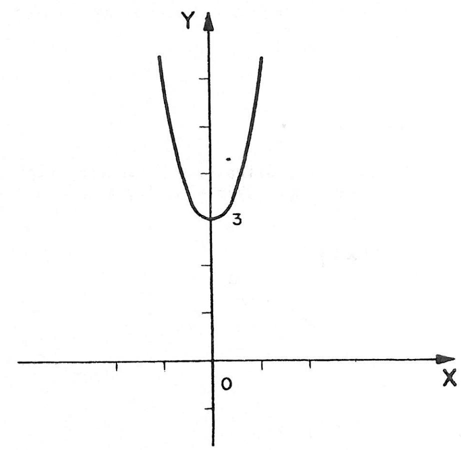


Figura IV.43

Ejemplo IV.32

$f(x) = \text{sen } x$

si $0 \leq x \leq 2\pi$

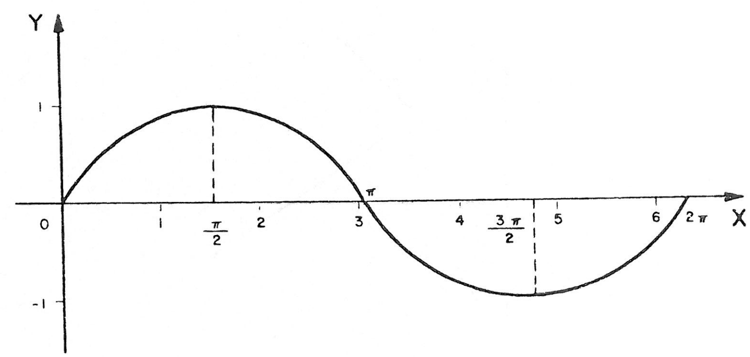


Figura IV.44

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[\ \text{sen } x\ \right] = \cos x$$

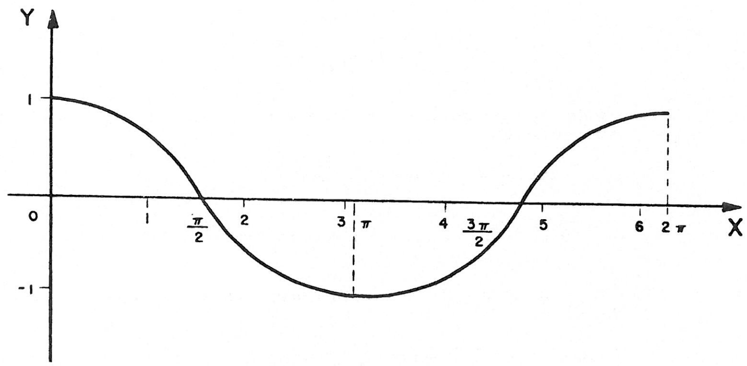


Figura IV.45

Ejemplo IV.33

$f(x) = \text{Ln } x$

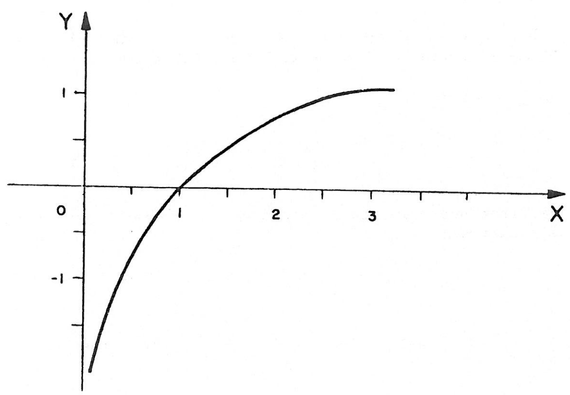


Figura IV.46

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

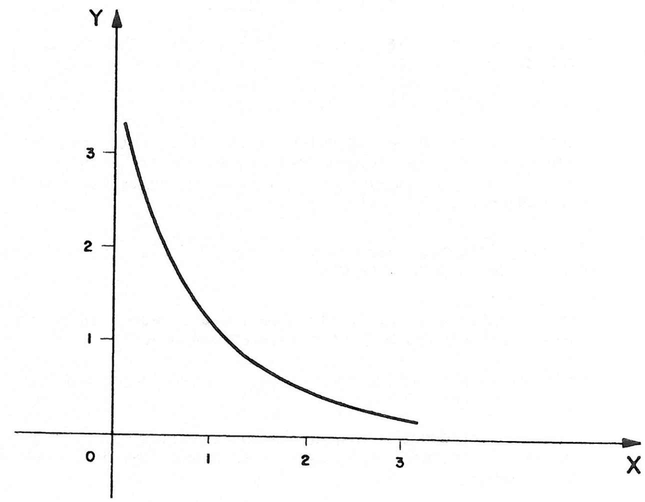


Figura IV.47

IV.4 ESTUDIO DE LA VARIACION DE UNA FUNCION. PROBLEMAS DE APLICACION

Como una de las aplicaciones más importantes de los conceptos analizados en este capítulo, se tiene el estudio de la variación (o comportamiento) de una función dada, la cual resulta más evidente cuando se discute gráficamente.

De esta manera, resulta deseable obtener el menor número de puntos que permitan tener una visión clara de la gráfica de una función en estudio, procurando evitar la obtención de aquellos que no sean necesarios o importantes; es decir, aquellos cuya información no resulta trascendente en el estudio del comportamiento de la función. Con la práctica es posible efectuar croquis correctos marcando tan solo unos cuantos puntos.

En los cursos de geometría analítica, el estudio de la discusión de la ecuación de una curva tan solo se limita a la obtención de los siguientes aspectos:

1) Intersección con los ejes coordenados.

2) Determinación de la simetría con respecto a los ejes coordenados y al origen.

3) Determinación de las asíntotas verticales y horizontales.

4) Determinación de la extensión de la curva, esto es, definir el conjunto de valores reales de x para los cuales y es real y el conjunto de los valores reales de y para los cuales x es real.

Con los conocimientos adquiridos en este capítulo, ahora se dispone además de un criterio para determinar:

5) En qué intervalos la función que se va a representar gráficamente es creciente y en cuáles es decreciente.

6) También es posible determinar los máximos y mínimos relativos y absolutos.

7) Asimismo, el conocimiento de la concavidad y los puntos de inflexión concretan características esenciales de la gráfica en estudio.

El siguiente ejemplo muestra cómo desarrollar el procedimiento descrito anteriormente en el análisis de la variación de una función.

Ejemplo IV.34

Discutir y trazar la gráfica de la función

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Solución

1) Intersecciones con los ejes:

$$\text{si} \quad x = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\text{si} \quad y = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Por lo tanto, la curva intersecta a los ejes en el punto O(0,0) exclusivamente.

2) Simetría:

Al sustituir a x por $-x$ queda:

$$y = \frac{-x}{x^2 + 1}$$

Por consiguiente se altera la ecuación, luego no hay simetría respecto al eje y.

Al sustituir a y por $-y$ queda:

$$-y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Por consiguiente se altera la ecuación y no hay simetría respecto al eje x.

Al sustituirse simultáneamente a x por $-x$ y a y por $-y$ queda:

$$-y = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

Por lo que la ecuación no se altera. Esto indica que sí hay simetría respecto al origen.

3) Asíntotas:

Cabe hacer notar que para la determinación de las asíntotas de una curva la teoría de límites resulta de gran ayuda.

Si se cumple que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$$

Se tiene una asíntota paralela al eje de las abscisas: la recta de ecuación $y = a$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \text{o sea} \qquad \underset{x \to a}{f(x) \to \infty}$$

Se tiene una asíntota paralela al eje de las ordenadas: la recta $x = a$.

$$\text{Si} \quad x \to +\infty : \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

esto es:

$$x \to \infty \implies y \to 0^+$$

$$\text{Si} \quad x \to -\infty \implies \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

por lo cual:

$$x \to -\infty \implies y \to 0^-$$

Por lo tanto el propio eje de las x es asíntota en ambos sentidos.

No hay asíntotas verticales ya que no hay algún valor al que tienda la x que haga a la función tender a infinito.

4) Extensión de la curva:

Observando la ecuación se ve que no hay restricciones para los valores de x, es decir, que cualquier valor real de x hace que y sea real. Sin embargo, si se resuelve la ecuación para x se define:

$$y x^2 + y = x$$

$$y x^2 - x + y = 0$$

por lo tanto:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 y^2}}{2 y}$$

La ecuación anterior muestra que para que x sea real debe cumplirse que:

$$1 - 4 y^2 \geq 0 \implies 4 y^2 \leq 1 \implies |2 y| \leq 1$$

o sea que: $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ será el intervalo de valores reales de y que hacen que x sea real.

5) Derivando $y = f(x)$ se tiene:

$$y' = f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Al igualar $f'(x)$ con cero, se obtienen como valores críticos de x los siguientes:

$$\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm \sqrt{1} = \pm 1$$

por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ \\ x_2 = -1 \end{array}\right\} \text{son los valores críticos de } x$$

En esta forma, obteniendo sus correspondientes ordenadas se tiene:

$$\text{Si} \quad x_1 = 1 \implies y_1 = f(1) = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Y

$$\text{Si} \quad x_2 = -1 \implies y_2 = f(-1) = \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

Por lo que los puntos $P_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $P_2\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ son característicos, ya que las tangentes a la curva en P_1 y P_2 son paralelas al eje X.

En conclusión, analizando la función para valores de:

$x < -1 \implies f'(x) < 0 \implies$ que $f(x)$ es decreciente

$-1 < x < 1 \implies f'(x) > 0 \implies$ que $f(x)$ es creciente

$x > 1 \implies f'(x) < 0 \implies$ que $f(x)$ es decreciente

6) Máximos y mínimos:

Una vez determinados los puntos característicos en los cuales la tangente a la curva es paralela al eje x, aplicando el criterio de la segunda derivada se obtiene:

$$y'' = f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Por lo tanto para $x_1 = 1$

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \implies$ que para $x = 1$, la función $y = f(x)$ tiene un valor máximo en $P_1\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y para $x_2 = -1$.

$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0 \implies$ que para $x_2 = -1$, la función $y = f(x)$ tiene un valor mínimo en $P_2\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

7) Puntos de inflexión y sentido de concavidad:

A partir de la segunda derivada de $y = f(x)$, obtenida anteriormente e igualándola a cero, resulta:

$$y'' = f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$2x(x^2-3) = 0$$

$$2x = 0 \implies x_3 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \implies x^2 = 3 \implies x_4 = +\sqrt{3}, \; x_5 = -\sqrt{3}$$

En esta forma, obteniendo las correspondientes ordenadas para $x_3 = 0$, $x_4 = \sqrt{3}$ y $x_5 = -\sqrt{3}$ se obtiene:

$$\text{Si } x_3 = 0 \implies y_3 = f(0) = 0$$

$$\text{Si } x_4 = \sqrt{3} \implies y_4 = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3+1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Si } x_5 = -\sqrt{3} \implies y_5 = f(-\sqrt{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3+1} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Por lo tanto, los puntos $P_3\,(0, 0)$, $P_4\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $P_5\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ son los puntos de inflexión de la gráfica de la función.

Analizando el cambio de signo de $f''(x)$ para los valores $x_3 = 0$, $x_4 = \sqrt{3}$ y $x_5 = -\sqrt{3}$, se tiene:

$-\infty < x < -\sqrt{3} \implies f''(x) < 0 \implies$ la concavidad es hacia abajo.

$-\sqrt{3} < x < 0 \implies f''(x) > 0 \implies$ la concavidad es hacia arriba.

$0 < x < \sqrt{3} \implies f''(x) < 0 \implies$ la concavidad es hacia abajo.

$\sqrt{3} < x < +\infty \implies f''(x) > 0 \implies$ la concavidad es hacia arriba.

De este modo, resumiendo la información obtenida en los puntos 5, 6 y 7 se tiene la siguiente tabla:

valores de x	y = f(x)	y' = f'(x)	y'' = f''(x)	Característica
$-\infty < x < -\sqrt{3}$	decrece	-	-	concavidad hacia abajo.
$x = -\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	punto de inflexión.
$-\sqrt{3} < x < -1$	decrece	-	+	concavidad hacia arriba.
$x = -1$	$-\frac{1}{2}$	0	+	mínimo.
$-1 < x < 0$	crece	+	+	concavidad hacia arriba.
$x = 0$	0	1	0	punto de inflexión.
$0 < x < 1$	crece	+	-	concavidad hacia abajo.
$x = 1$	$\frac{1}{2}$	0	-	máximo.
$1 < x < \sqrt{3}$	decrece	-	-	concavidad hacia abajo.
$x = \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	punto de inflexión.
$\sqrt{3} < x < +\infty$	decrece	-	+	concavidad hacia arriba.

Con la información de la tabla y los datos complementarios obtenidos en los pasos 1 hasta el 4, es posible construir la gráfica de:

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

como se muestra en la figura IV.48.

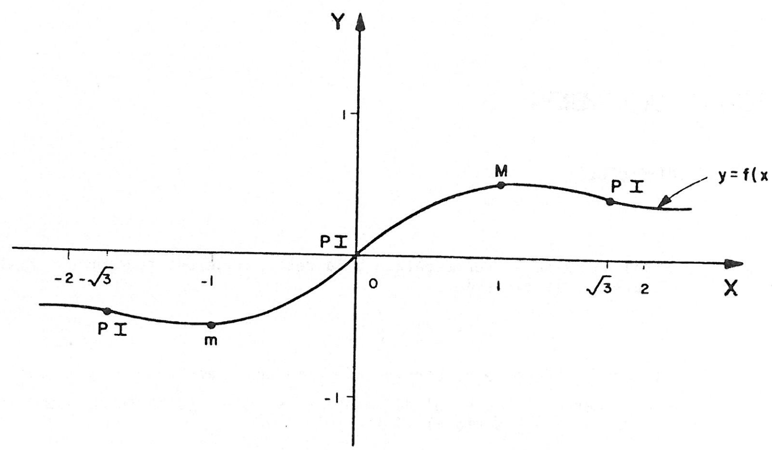


Figura IV.48

CAPITULO V LA DIFERENCIAL

INTRODUCCION

Hasta ahora se ha representado a la derivada de una función $y = f(x)$ a través de la expresión:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

El símbolo $\frac{dy}{dx}$ no se ha considerado como una fracción ordinaria con dy en el numerador y dx en el denominador, sino que se ha tomado como un operador que representa al límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

que como se observa, define a la derivada.

En ocasiones resulta importante para algunos problemas de interés, considerar por separado a dx y a dy, lo que da pauta para el estudio de un nuevo concepto conocido como *la diferencial*.

Cabe hacer notar, en lo que se refiere a la principal aplicación de la diferencial, es decir, en la aproximación de incrementos funcionales, que existe en la actualidad el poderoso auxilio de la calculadora electrónica, cuyo uso se ha generalizado dejando a esta aplicación de la derivada como simple herramienta de ayuda para ciertos problemas.

V.1 LA DIFERENCIAL DE UNA FUNCION

V.1.1 FUNCION DIFERENCIABLE

Sea $y = f(x)$ una función derivable para un cierto valor x, en donde se cumple que:

$$f'(x) \neq 0$$

luego, por la definición de derivada se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

en donde, de acuerdo a la definición de límite:

$$\left| \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |\Delta x| < \delta$$

Teniendo presente el concepto de límite, se entiende que si el incremento Δx es menor que δ, hace pensar en un valor muy pequeño, entonces la diferencia

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

resulta también una cantidad muy reducida. Por lo que puede escribirse:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \eta$$

donde:

$$|\eta| < \varepsilon$$

de esta expresión se tiene que:

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + \eta\,\Delta x \qquad \ldots(1)$$

donde:

$$\eta \to 0$$

cuando:

$$\Delta x \to 0$$

Recordando lo visto en incrementos (capítulo II), se observa claramente que la expresión (1) define al incremento de la función, y consta de dos sumandos. El término $f'(x)\,\Delta x$ se conoce como la parte principal del incremento y es una buena aproximación de su valor, ya que el otro sumando, es decir $\eta\Delta x$, es una cantidad muy reducida siempre y cuando se tengan valores del incremento Δx.

Por otra parte:

$$\eta \to 0$$

cuando:

$$\Delta x \to 0$$

es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$$

Con base en lo anterior, se concluye que una función $y = f(x)$ es diferenciable para un valor de x, si para un incremento Δx, el incremento de la función $\Delta f(x)$ puede escribirse en la forma indicada en la expresión (1), es decir:

$$\Delta f(x) = f'(x)\ \Delta x + \eta\ \Delta x$$

Como se observa, para cumplirse la condición establecida por esta última expresión, es necesario que exista cada uno de los términos del segundo miembro. De donde se concluye que la existencia de la derivada de la función es condición necesaria y suficiente para la diferenciabilidad de la función.

V.1.2 LA DIFERENCIAL

Definición:	**Se llama diferencial de una función f en un punto x a la parte principal del incremento de la función diferenciable, y se denota con "dy".**

De donde:

$$dy = df(x) = f'(x)\ \Delta x \qquad \ldots(2)$$

Ejemplo V.1

Demostrar que la función $y = x^2 - 4x$, definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es diferenciable, y obtener su diferencial.

Solución

Para ser diferenciable, el incremento de la función debe poder expresarse como:

$$\Delta y = f'(x)\ \Delta x + \eta\ \Delta x \qquad \ldots.(a)$$

Ahora bien, si se incrementa la función y después se resta al incremento la función original, se tiene que:

$$y = x^2 - 4x$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) - (x^2 - 4x)$$

$$\Delta y = x^2 + 2x\ \Delta x + (\Delta x)^2 - 4x - 4\Delta x - x^2 + 4x$$

$$\Delta y = 2\ x\ \Delta x + (\Delta x)^2 - 4\Delta x$$

esta expresión se puede escribir como:

$$\Delta y = (2x - 4)\ \Delta x + \Delta x\ \Delta x$$

se observa que el incremento Δy está escrito en la forma de la ecuación (a), por lo que:

$$f'(x) = 2x - 4$$

y

$$\eta\ \Delta x = \Delta x\ \Delta x \implies \eta = \Delta x$$

por lo tanto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

entonces la función es diferenciable, y su diferencial es:

$$dy = f'(x)\ \Delta x$$

$$dy = (2x - 4)\ \Delta x$$

Ejemplo V.2

Demostrar que la función $y = \frac{1}{x}$, definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $x \neq 0$, es diferenciable, y obtener su diferencial.

Solución

Si se sigue el mismo procedimiento del ejemplo V.1, se tiene:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}$$

$$\Delta y = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}$$

$$\Delta y = \frac{-\Delta x}{x^2 + x\,\Delta x}$$

este incremento se puede escribir como:

$$\Delta y = -\frac{1}{x^2}\Delta x + \frac{1}{x^2}\Delta x - \frac{\Delta x}{x^2 + x\,\Delta x}$$

de donde:

$$\Delta y = -\frac{1}{x^2}\Delta x + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x\,\Delta x}\right)\Delta x$$

o sea:

$$\eta = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x\,\Delta x}$$

Para que la función sea diferenciable se deberá cumplir el siguiente límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \eta = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x\,\Delta x}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + x(0)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$$

por lo tanto la función es diferenciable, y su diferencial es:

$$dy = -\frac{1}{x^2}\Delta x$$

V.1.3 DIFERENCIAL DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea la función identidad $y = f(x) = x$, cuya diferencial es:

$$dy = f'(x)\,\Delta x$$

la derivada de esta función es:

$$f'(x) = 1$$

sustituyendo este valor en la diferencial de la función, se tiene:

$$dy = \Delta x \qquad \ldots.(3)$$

como:

$$y = x \quad \Longrightarrow \quad dy = dx$$

sustituyendo este resultado en el primer miembro de (3), queda:

$$dx = \Delta x$$

de aquí se concluye que la diferencial de la variable independiente es igual a su incremento.

Si se tiene en cuenta este resultado en la ecuación (2), que define la diferencial de una función, se tiene:

$$dy = f'(x)\;dx \qquad \ldots(4)$$

esta expresión permite establecer la siguiente definición.

Definición:	La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

Ejemplo V.3

Hallar la diferencial de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + 5x^2 + 10x - 18$

b) $y = \text{sen } x + \cos^3 x$

c) $y = \text{ang cos } \frac{x}{a}$

Solución

La diferencial de una función se obtiene aplicando la expresión (4), es decir:

$$dy = f'(x)\;dx$$

por lo que:

a) $f'(x) = 3x^2 + 10x + 10 \Longrightarrow dy = (3x^2 + 10x + 10)\;dx$

b) $f'(x) = \cos x - 3\cos^2 x \text{ sen } x \Longrightarrow dy = (\cos x - 3\cos^2 x \text{ sen } x)\;dx$

c) $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Longrightarrow dy = -\dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Cuando se presenta una función en forma implícita se trabaja de manera semejante, utilizando la derivación implítica.

Se puede decir que todas las fórmulas para derivar pueden transformarse en fórmulas para diferenciar.

Ejemplo V.4

Usando diferenciales calcular $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación $y^3 = x^2 + xy + y^2$

Solución

Si se toman diferenciales en ambos miembros de la ecuación dada, se tiene:

$$3y^2\, dy = 2x\, dx + (x\, dy + y\, dx) + 2y\, dy$$

agrupando:

$$(3y^2 - x - 2y)dy = (2x + y)\, dx$$

Finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3y^2 - x - 2y}$$

V.1.4 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL

Sea una función $y = f(x)$, cuya gráfica es la curva C de la figura V.1, y en ella el punto $P(x, y)$.

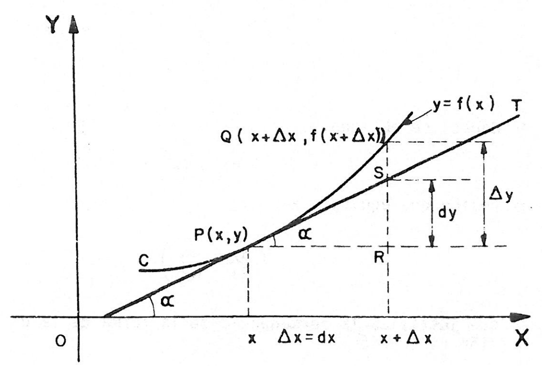


Figura V.1

Para un incremento $\Delta x \neq 0$ existe un valor $x + \Delta x$ del dominio de la función al cual le corresponde un valor $f(x + \Delta x)$ del recorrido, por lo que se tiene el punto Q de coordenadas $(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$.

Trácese la tangente T a la curva C en el punto P, siendo α su ángulo de inclinación, o sea $\tan \alpha = f'(x)$.

Si se considera el triángulo PRS formado por T, la recta que pasa por P paralela al eje X y la recta que pasa por Q paralela al eje Y, se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{|RS|}{|PR|}$$

teniendo en cuenta que $\tan \alpha = f'(x)$ y que $|PR| = \Delta x$ la expresión anterior queda como:

$$f'(x) = \frac{|RS|}{\Delta x}$$

de donde:

$$|RS| = f'(x)\, \Delta x$$

y como, por definición:

$$dy = f'(x)\, dx,$$

se tiene que:

$$dy = |RS|$$

Por otro lado, es claro que el incremento Δy es:

$$\Delta y = |RQ|$$

en donde se ve que dy es el incremento de la ordenada de la tangente T a la curva C y Δy es el incremento de la ordenada de la curva C.

En la figura V.1, se observa que $dy < \Delta y$, sin embargo puede suceder lo contrario, o sea, $dy > \Delta y$ como se ve en la figura V.2, o que dy y Δy sean negativas (puede suceder que Δy y dy tengan signos opuestos).

Para cualquier caso se pueden dibujar figuras apropiadas y verificar qué tanto la interpretación de dy como la del incremento Δy permanecen válidas.

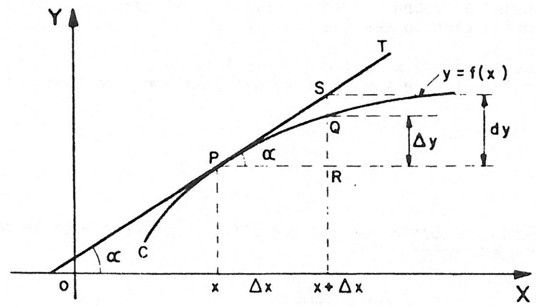


Figura V.2

En cualquiera de los casos se observa que el incremento Δy es diferente a la diferencial dy. La magnitud de la diferencia depende de cuánto se separe la curva de su tangente, lo que hace ver cómo dy aproxima más a Δy a medida que Δx se hace más pequeño.

Esta diferencia entre Δy y dy se aprecia en la expresión (1):

$$\Delta y = f'(x)\ \Delta x + \eta\ \Delta x$$

en donde se ve que mientras más pequeño es el incremento Δx, más se aproxima $f'(x)\ \Delta x$, que es la diferencial, a Δy, que es el incremento de la función.

V.1.5 LA DERIVADA COMO COCIENTE DE DIFERENCIALES

Según se estudió anteriormente, la diferencial de una función $y = f(x)$ está dada por la ecuación:

$$dy = f'(x)\ \Delta x$$

además como el incremento de la variable independiente Δx es igual a su diferencial, se determinó que:

$$dy = f'(x)\ dx$$

Si se dividen ambos miembros de esta expresión entre dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Por lo que se concluye que la derivada de una función es igual al cociente de la diferencial de la variable dependiente entre la diferencial de la variable independiente.

V.1.6 PERMANENCIA DE LA FORMA DE LA DIFERENCIAL PARA UNA FUNCION DE FUNCION

Sea la función $y = f(u)$ donde $u = g(x)$

la composición de estas funciones da lugar a la función de función:

$$y = f(g(x))$$

cuya derivada se obtiene aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}$$

Por otro lado, y de acuerdo con la definición de diferencial se tiene que:

$$y = f(u) \qquad u = g(x)$$

$$dy = f'(u)\ du \qquad du = g'(x)\ dx$$

de donde se obtiene:

$$dy = f'(u)\ g'(x)\ dx$$

expresión que equivale a:

$$dy = \left(\frac{dy}{du}\ \frac{du}{dx}\right)\ dx$$

lo que justifica la permanencia de la forma de la diferencial para una función de función.

V.1.7 DIFERENCIALES SUCESIVAS

Como la diferencial es el producto de la derivada de la función por la diferencial de la variable independiente, se puede pensar en el caso de diferenciales de orden superior, utilizando para ello las técnicas vistas en lo referente a derivadas de órdenes superiores. Así, se puede escribir:

$$dy = f'(x)\ dx$$

$$d^2y = f''(x)\ dx^2$$

$$d^3y = f'''(x)\ dx^3$$

$$\vdots$$

$$d^{(n)}\ y = f^{(n)}(x)\ dx^{(n)} \qquad \ldots(5)$$

Ejemplo V.5

Calcular la diferencial de segundo orden para la función

$$y = \text{sen } x^2$$

Solución

Aplicando la expresión (5)

$$y = \text{sen } x^2$$

$$dy = 2x \cos x^2\ dx$$

$$d^2y = (-4x^2 \text{ sen } x^2 + 2\cos x^2)\ dx^2$$

V.2 APLICACIONES DE LA DIFERENCIAL

V.2.1 RELACION ENTRE LA DIFERENCIAL Y EL INCREMENTO

Como se vio anteriormente, una función es diferenciable cuando su incremento puede escribirse en la forma:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f'(x)\ \Delta x + \eta\ \Delta x \qquad \ldots\ (6)$$

donde la diferencial de la función es:

$$dy = f'(x)\ \Delta x \qquad \ldots\ (7)$$

De las dos ecuaciones anteriores es posible deducir la relación existente entre el incremento Δy de una función y su diferencial dy. Esta diferencia se encuentra sustituyendo la ecuación (7) en la (6):

$$\Delta y = dy + \eta\ \Delta x$$

La diferencia entre el incremento y la diferencial de la función es:

$$\Delta y - dy = \eta\ \Delta x$$

La diferencia $\eta\ \Delta y$ entre Δy y dy será menor mientras más pequeño sea el valor de Δx, luego será posible tomar el valor de dy en lugar del valor de Δy en problemas donde $\eta\ \Delta x$ sea lo suficientemente pequeño. Esto es útil, porque comúnmente es más rápido y fácil obtener el valor aproximado que proporciona la diferencial que el valor del incremento de la función.

V.2.2 ERRORES Y VALORES APROXIMADOS, APLICACIONES

A la diferencia en valor absoluto del incremento y la diferencial de la función, se le denomina *error absoluto*.

$$|\Delta y - dy| = |\eta\,\Delta x| = \varepsilon \qquad \ldots\ (8)$$

a la relación $\dfrac{\varepsilon}{\Delta y}$ se le llama *error relativo*, cuya expresión es:

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = \frac{\eta\ \Delta x}{f'(x)\ \Delta x + \eta\ \Delta x} = \frac{\eta}{f'(x) + \eta} \qquad \ldots\ (9)$$

y a la expresión $\dfrac{\varepsilon}{\Delta y}\ 100$, se le llama *el porcentaje de error*.

Si al calcular $y = f(x)$, se tiene un error dx en la medida de x, esto llevará un error aproximado dy en la cantidad y. Por lo tanto el error relativo es:

$$\frac{dy}{y} \qquad \ldots (10)$$

y

$$\frac{dy}{y}\, 100 \quad \text{es el porcentaje de error} \quad \ldots (11)$$

Ejemplo V.6

Encontrar el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^2$ para $x = 20$ y $\Delta x = 0.1$. Calcular el porcentaje de error de la aproximación $\Delta y \doteq dy$.

Solución

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = 2x\,\Delta x$$

sustituyendo valores:

$$\Delta y = 2(20)\,(0.1) + (0.1)^2 = 4.01$$

$$dy = 2(20)\,(0.1) = 4.00$$

Para estos valores el porcentaje de error de la aproximación $\Delta y \doteq dy$ es:

$$\left[\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|\right](100) = \left[\left|\frac{4.01 - 4.00}{4.01}\right|\right](100) = 0.25\%$$

Reemplazar Δy por dy es equivalente a reemplazar el área rayada verticalmente de la figura V.3, por los dos rectángulos rayados diagonalmente de área $x\,\Delta x$, despreciando el pequeño cuadrado de área $(\Delta x)^2$.

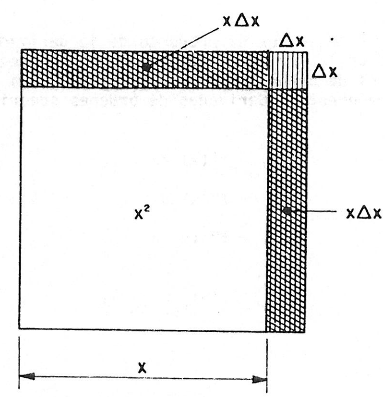


Figura V.3

Ejemplo V.7

Sea la función $y = 3x^2 - x$; hallar Δy, dy y el error absoluto:

a) Para cualquier valor de x

b) Para $x = 1$ y $\Delta x = -0.1$

c) Para $x = 1$ y $\Delta x = 0.1$

d) Para $x = 1$ y $\Delta x = 0.01$

e) Para $x = 1$ y $\Delta x = 0.001$

Solución

a) Como $y = 3x^2 - x$, entonces:

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x$$

$$\Delta y = (6x - 1)\,\Delta x + 3\,\Delta x\,\Delta x \qquad \ldots (a)$$

La diferencial de la función será:

$$dy = (6x - 1)\ \Delta x = (6x - 1)\ dx \qquad \ldots (b)$$

por tanto:

$$|\eta\ \Delta x| = |\Delta y - dy| = \varepsilon \qquad \ldots (c)$$

Las ecuaciones (a) y (b) proporcionan el incremento Δy y la diferencial dy de la función, respectivamente, y con la ecuación (c) dan la solución del inciso a).

El resultado de los incisos b, c, d y e están en la siguiente tabla, donde Δy, dy y ε se obtienen según las ecuaciones (a), (b), y (c), respectivamente.

x	Δx	Δy	dy	ε
1	- 0.1	- 0.47	- 0.5	0.03
1	0.1	0.53	0.5	0.03
1	0.01	0.0503	0.0500	0.0003
1	0.001	0.005003	0.00500	0.000003

Tabla V.1

Ejemplo V.8

Calcular aproximadamente la raíz cúbica de 200, usando diferenciales. Considerando que el valor exacto de dicha raíz es 5.8480 compararlo con el valor aproximado obtenido. Calcular el error absoluto y el error relativo que se cometería al tomar el valor obtenido con diferenciales en lugar del exacto.

Solución

Sea:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

considerando que:

$$x_1 = 216 \qquad y_1 = \sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{216} = 6.0000$$

$$x_2 = 200 \qquad y_2 = \sqrt[3]{x_2} = \sqrt[3]{200} = \quad ?$$

así:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 200 - 216 = -16$$

y:

$$\Delta y = y_2 - y_1 \implies y_2 = y_1 + \Delta y \qquad \ldots (a)$$

si:

$$\Delta y \doteq dy$$

la ecuación (a) queda:

$$y_2 \doteq y_1 + dy \implies y_2 \doteq 6.0000 + dy \qquad \ldots (b)$$

la diferencial de la función es:

$$dy = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad \ldots (c)$$

sustituyendo los valores de dx y x_1 en la ecuación (c), se obtiene:

$$dy = \frac{-16}{3\sqrt[3]{(216)^2}} = \frac{-16}{3\ (36)}$$

luego:

$$dy = -0.1481$$

sustituyendo este valor en la ecuación (b):

$$y_2 \doteq 6.0000 - 0.1481 = 5.8519$$

y

$$y_2 = \sqrt[3]{200} \doteq 5.8519$$

el error absoluto es:

$$|5.8519 - 5.8480| = 0.0039 = \varepsilon$$

el error relativo es:

$$\frac{0.0039}{5.8480} = 0.00066$$

y el error porcentual es:

$$100\ (0.00066) = 0.066\ \%$$

Ejemplo V.9

Usando diferenciales, encontrar un algoritmo que permita calcular en forma aproximada, la raíz cuadrada de un número N.

Solución

Sea N el número cuya raíz cuadrada se desea obtener. Si r_1 es la raíz exacta más cercana a N, para lo cual $r_1 = \sqrt{N_1}$ y r_2 es la raíz aproximada de N, entonces: $r_2 = \sqrt{N}$.

Sea la función:

$$r = \sqrt{N}$$

si:

$$\Delta N = dN = N - N_1$$

y:

$$\Delta r = r_2 - r_1 \implies r_2 = r_1 + \Delta r$$

pero si:

$$\Delta r \doteq dr$$

se tiene:

$$r_2 \doteq r_1 + dr \qquad \ldots (a)$$

diferenciando la función:

$$dr = \frac{dN}{2\sqrt{N_1}} = \frac{\Delta N}{2\sqrt{N_1}} = \frac{N - N_1}{2\sqrt{N_1}}$$

$$dr = \frac{N}{2\sqrt{N_1}} - \frac{N_1}{2\sqrt{N_1}} = \frac{N}{2\sqrt{N_1}} - \frac{\sqrt{N_1}}{2}$$

como $\sqrt{N_1} = r_1$, queda:

$$dr = \frac{N}{2\,r_1} - \frac{r_1}{2} \qquad \ldots (b)$$

sustituyendo (b) en (a):

$$r_2 \doteq r_1 + \frac{N}{2\,r_1} - \frac{r_1}{2}$$

finalmente:

$$r_2 \doteq \frac{1}{2}\left(r_1 + \frac{N}{r_1}\right) \qquad \ldots (12)$$

La ecuación (12) es el algoritmo que permite calcular la raíz cuadrada de un número N en forma aproximada.

Ejemplo V.10

Empleando el algoritmo de la ecuación (12), calcular aproximadamente $\sqrt{72}$.

Solución

Para aplicar la fórmula (12) considérese: $r_1 = 8$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(8 + \frac{72}{8}\right) = \frac{1}{2}\,(17), \implies r_2 = 8.5$$

nótese que:

$$(8.5)^2 = 72.25$$

En una segunda aplicación de la fórmula (12), considérese $r_1 = 8.5$, ahora:

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(8.5 + \frac{72}{8.5}\right) = \frac{1}{2}\,16.97 \implies r_2 = 8.49$$

obsérvese que:

$$(8.49)^2 = 72.08$$

Sí se aplica la fórmula (12) más de una vez, se verá que cada raíz que se obtenga será mucho más aproximada que la anterior.

Ejemplo V.11

Calcular cos 61° aproximadamente, usando diferenciales.

Solución

Sea la función:

$$y = \cos x$$

si:

$$x_1 = 60°, \quad y_1 = \cos x_1 = \cos 60° = 0.5$$

$$x_2 = 61°, \quad y_2 = \cos x_2 = \cos 61° = \ ?$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 61° - 60° = 1°$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 \implies y_2 = y_1 + \Delta y \qquad \ldots (a)$$

si se considera $\Delta y \doteq dy$, la ecuación (a) queda:

$$y_2 \doteq y_1 + dy \implies y_2 \doteq 0.5 + dy \qquad \ldots (b)$$

la diferencial de la función es:

$$dy = -\operatorname{sen} x \, dx \qquad \ldots (c)$$

sustituyendo los valores de dx y x_1 en la ecuación (c), se obtiene:

$$dy = (-\operatorname{sen} 60°)\ (1°)$$

se sabe que:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

$$1° = 0.01745 \text{ rad}$$

luego:

$$dy = -(0.866)\ (0.01745)$$

$$dy = -\ 0.0151$$

sustituyendo este valor en la ecuación (b):

$$y_2 \doteq 0.5 - 0.0151 = 0.4849$$

y

$$y_2 = \cos 61° \doteq 0.4849$$

Ejemplo V.12

¿Cuánto aumentará aproximadamente, el lado de un cuadrado, si su área aumenta de 9 m² a 9.1 m² ?

Solución

Si x es el área del cuadrado y el lado del mismo es y, se tiene:

$$y = \sqrt{x} \qquad \ldots (a)$$

por las condiciones del problema:

$$x_1 = 9 \qquad \Delta x = 0.1$$

se sabe que:

$$\Delta y \doteq dy = f'(x)\ dx \qquad \ldots (b)$$

diferenciando (a):

$$dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

entonces:

$$dy = \frac{0.1}{2\sqrt{9}} \quad ; \quad dy = 0.0166 \text{ m}$$

el lado del cuadrado aumenta aproximadamente en 1.66 cm.

Ejemplo V.13

Las fórmulas para el área y el volumen de una esfera son, respectivamente:

$$S = 4\pi r^2 \qquad y \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

si al medir el radio se obtiene r = 3 m.

a) ¿Cuáles son los errores máximos aproximados de S y V, si las medidas son seguras hasta 0.01 m ?

b) ¿Cuál es en cada caso el error relativo máximo expresado en porciento?

Solución

Tomando las diferenciales del área y del volumen se encuentra el error aproximado que se comete al calcular el área y el volumen, respectivamente.

Para el área:

$$S = 4\pi r^2$$

diferenciando:

$$dS = 8\pi r\ dr \qquad \ldots (a)$$

sustituyendo en (a):

$$r = 3 \qquad y \qquad dr = 0.01.$$

$$ds = 8\pi (3)(0.1) \implies ds \doteq 0.75398 \text{ m}^2$$

siendo éste el error aproximado que se comete al calcular el área.

para el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

diferenciando:

$$dV = 4\pi r^2\ dr \qquad \ldots (b)$$

sustituyendo en (b):

$$r = 3 \qquad y \qquad dr = 0.01$$

$$dV = 4\pi (3)^2 (0.01) \implies dV = 1.13097 \text{ m}^3$$

siendo éste el error aproximado que se comete al calcular el volumen.

El error relativo para el área y el volumen se encuentra según la ecuación (10).

Si:

$$S = 4\pi r^2 \qquad y \qquad dS = 8\pi r\ dr$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{8\pi r\ dr}{4\pi r^2} = \frac{2\ dr}{r} \qquad \ldots (c)$$

sustituyendo en (c) r = 3 m y dr = 0.01 m.

$$\frac{dS}{S} = \frac{2(0.01)}{3} \implies \frac{dS}{S} = 0.00667$$

el error máximo en porciento es:

$$100\ \frac{dS}{S} = 0.67\ \%$$

ahora para el volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad y \quad dV = 4\pi r^2\ dr$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\,\pi\, r^2\, dr}{\frac{4}{3}\,\pi\, r^3} = \frac{3\, dr}{r} \qquad \ldots \text{(d)}$$

sustituyendo en (d) $r = 3$ m y $dr = 0.01$

$$\frac{dV}{V} = \frac{3\,(0.01)}{3} = 0.01$$

y

$$100\,\frac{dV}{V} = 1\ \%$$

CAPITULO VI LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

INTRODUCCION

Después de estudiar en los cinco capítulos anteriores lo más relevante del cálculo diferencial para funciones con una sola variable independiente, ahora se presentará el estudio del cálculo integral para esas funciones.

En este capítulo se tratarán fundamentalmente los conceptos de integral definida e integral indefinida, así como sus propiedades y teoremas que les son afines. Tal es el caso del teorema fundamental del cálculo, que establece y justifica la relación entre la derivada y la integral.

Al final se presentan algunas técnicas de integración directa o por cambio de variable, así como diversos ejemplos de aplicación.

VI.1 INTEGRAL DEFINIDA. FUNCION INTEGRABLE

VI.1.1 SUMA DE RIEMANN

Sea el intervalo $[a, b]$. El conjunto de puntos:

$$P_n = \{ x_o, x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

donde:

$$x_o = a, \quad x_n = b, \quad x_i - 1 < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

se llama partición o red del intervalo $[a, b]$.

Se puede observar que una partición de un intervalo lo divide en n subintervalos, y a cada uno de ellos se le llama también *celda*.

A la distancia entre los puntos extremos de cada celda se le llama *amplitud de la celda*, es decir:

la amplitud de la celda uno es:

$$\Delta_1 x = x_1 - x_o$$

la amplitud de la celda dos es:

$$\Delta_2 x = x_2 - x_1$$

en general la amplitud de la celda *i-ésima* es:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$$

Al definir partición de un intervalo no se hizo referencia a las amplitudes de la celda, esto es, que en un mismo intervalo $[a, b]$, puede existir una infinidad de particiones ya que el tamaño de las celdas es arbitrario.

A la mayor amplitud de las celdas de una partición se le llama *norma de la partición* y se representa por medio del símbolo:

$$\|\Delta\| \quad \text{ó a veces con} \quad \Delta\,(R)$$

Ejemplo VI.1

Dado el intervalo $[0, 10]$, efectuar dos particiones diferentes de 10 celdas y en cada caso decir cuál es la norma.

Solución

a) La primera partición se hará de diez celdas de igual amplitud como se indica en la figura VI.1.

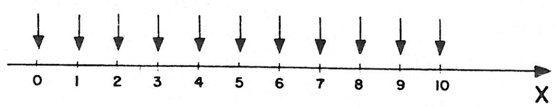


Figura VI.1

Las diez celdas tienen la misma amplitud que vale la unidad.

$\Delta_1 x = 1 - 0 = 1$	$\Delta_6 x = 6 - 5 = 1$
$\Delta_2 x = 2 - 1 = 1$	$\Delta_7 x = 7 - 6 = 1$
$\Delta_3 x = 3 - 2 = 1$	$\Delta_8 x = 8 - 7 = 1$
$\Delta_4 x = 4 - 3 = 1$	$\Delta_9 x = 9 - 8 = 1$
$\Delta_5 x = 5 - 4 = 1$	$\Delta_{10} x = 10 - 9 = 1$

La norma de esta partición es $\|\Delta\| = 1$.

b) La segunda partición se efectuará de la manera que se indica en la figura VI.2.

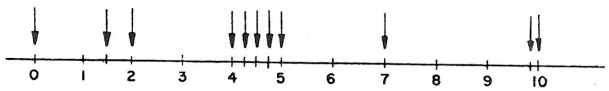


Figura VI.2

Las amplitudes de cada celda se indican a continuación:

$\Delta_1 x = 1.5 - 0 = 1.5$	$\Delta_6 x = 4.75 - 4.5 = 0.25$
$\Delta_2 x = 2 - 1.5 = 0.5$	$\Delta_7 x = 5.0 - 4.75 = 0.25$
$\Delta_3 x = 4 - 2 = 2.0$	$\Delta_8 x = 7.0 - 5.0 = 2.0$
$\Delta_4 x = 4.25 - 4.0 = 0.25$	$\Delta_9 x = 9.9 - 7.0 = 2.9$
$\Delta_5 x = 4.5 - 4.25 = 0.25$	$\Delta_{10} x = 10 - 9.9 = 0.1$

La norma de esta partición es $\|\Delta\| = 2.9$

Supóngase que la función $y = f(x)$ está definida y limitada en el conjunto D y considérese una partición en dicho conjunto que contenga n subintervalos.

Si se escoge un punto ξ en cada subintervalo de la partición de tal forma que:

$\xi_1 \in [x_0, x_1]$ donde $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1$

$\xi_2 \in [x_1, x_2]$ donde $x_1 \leq \xi_2 \leq x_2$

$\vdots$

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ donde $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$

y se forma la suma de productos del valor de f en cada punto ξ por la amplitud de la celda respectiva, se tendrá:

$$f(\xi_1)\ \Delta_1 x + f(\xi_2)\ \Delta_2 x + \cdot\ \cdot\ \cdot + f(\xi_i)\ \Delta_i x + \cdot\ \cdot\ \cdot f(\xi_n)\ \Delta_n x$$

En forma condensada se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta_i x$$

A esta suma se le llama una *suma de Riemann* en honor al matemático alemán, Bernard Riemann (1826 - 1866), quien fue profesor de la Universidad de Göttingen e hizo muchas aportaciones a las matemáticas y físicomatemáticas.

Ejemplo VI.2

Dada $f(x) = 5 - \frac{x^2}{4}$, con $\frac{1}{4} \leq x \leq 3$, encuentre la suma de Riemann para la función f dada la partición:

$$x_o = \frac{1}{4},\quad x_1 = 1,\quad x_2 = 1.5,\quad x_3 = 1.75,\ x_4 = 2.25,\ x_5 = 3$$

Los puntos elegidos en cada celda son:

$$\xi_1 = 0.5,\quad \xi_2 = 1.25,\quad \xi_3 = 1.75,\quad \xi_4 = 2,\quad \xi_5 = 2.75$$

Trazar la gráfica de la función en $[1/4, 3]$ y mostrar los rectángulos cuyas áreas son los términos de la suma de Riemann. Indicar también cuál es la norma de la partición.

Solución

La figura VI.3 muestra la gráfica y los cinco rectángulos.

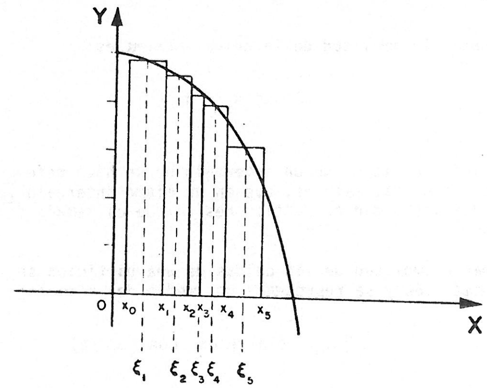


Figura VI.3

La suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{5} f(\xi_i)\ \Delta_i x = f(\xi_1)\ \Delta_1 x + f(\xi_2)\ \Delta_2 x + f(\xi_3)\ \Delta_3 x + f(\xi_4)\ \Delta_4 x + f(\xi_5)\ \Delta_5 x =$$

$$= f(0.5)(1 - 0.25) + f(1.25)(1.5 - 1) + f(1.75)(1.75 - 1.5) + f(2)(2.25 - 1.75) +$$

$$+ f(2.75)(3 - 2.25) =$$

$$= (9.75)(0.75) + (8.4375)(0.5) + (6.9375)(0.25) + (6)(0.5) + (2.4375)(0.75) =$$

$$= 18.09375$$

La norma $\|\Delta\|$ es la longitud de la celda más larga. Por lo tanto $\|\Delta\| = 0.75$.

Como los valores de la función $f(x)$ no se restringen a valores no negativos, algunos de los $f(\xi_i)$ podrían ser negativos. En tal caso, la interpretación geométrica de la suma de Riemann sería:

La suma de las medidas de las áreas de los rectángulos que están sobre el eje X, más los negativos de las medidas de las áreas de los rectángulos que están bajo el eje X. Esta situación se ilustra en la figura VI.4.

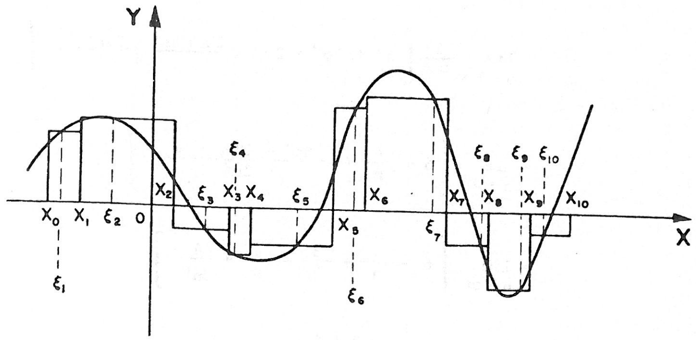


Figura VI.4

Una suma de Riemann es:

$$\sum_{i=1}^{10} f(\xi_i)\ \Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6 + A_7 - A_8 - A_9 - A_{10}$$

ya que $f(\xi_3)$, $f(\xi_4)$, $f(\xi_5)$, $f(\xi_8)$, $f(\xi_9)$, $f(\xi_{10})$ son números negativos.

Por esta razón, en el establecimiento de las sumas de Riemann, y enseguida, de la integral definida, se debe tener muy en cuenta el signo.

VI.1.2 INTEGRAL DEFINIDA

Si f es una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la integral definida de f de a a b, denotada por:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

está dada por:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta_i x$$

si existe este límite.

En la notación anterior, $f(x)$ se llama *el integrando*, a y b son los *extremos de integración*; el valor a es el *extremo inferior* y el valor b es el *extremo superior*.

El símbolo $\int dx$ es el llamado *signo de integración*. Obsérvese que el signo de integración siempre contiene al de diferenciación.

Cuando se trató el concepto de las sumas de Riemann, se vio que para una función dada, el valor de una suma de Riemann es igual a la suma de los valores de las áreas de los rectángulos formados de acuerdo a la partición elegida y a los valores ξ_i seleccionados. De hecho, históricamente, Riemann llevó a cabo sus cálculos para obtener una aproximación del *área bajo la curva*. Es claro que si se elige una partición en donde la norma es más pequeña la aproximación será mejor, puesto que el número de rectángulos será mayor y éstos se *acercarán* más a la función.

Desde luego, como se trató en el Capítulo II, los términos *se acercan, la norma es cada vez más pequeña*, etc., no tienen un carácter matemático riguroso. Sin embargo, se les dio justificación al definir el concepto de límite y es por ello que en la definición de integral definida se aplica un límite perfectamente válido.

De todo esto se desprende que si ese límite existe, representa el valor del área comprendida entre la curva, el eje de las abscisas, y las rectas $x = a$ y $x = b$. Obviamente, como en el caso de las sumas de Riemann (figura VI.4), se debe considerar el signo de los valores $f(\xi_i)$ ya que en algunos casos se pueden tener áreas negativas, cuando la gráfica se encuentra abajo del eje X.

En la figura VI. 5 se tiene representada la función $y = f(x)$. El área entre la curva, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, se ha nombrado el área A. Entonces de acuerdo con el razonamiento anterior:

$$A = \int_a^b f(x)\ dx$$

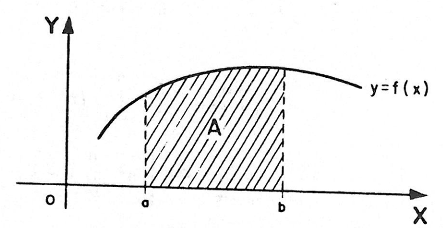


Figura VI.5

Ejemplo VI.3

Encontrar el valor de la integral definida $\int_1^3 x^2\,dx$

Solución

La partición elegida será una partición regular del intervalo cerrado $[1,\ 3]$. Se subdividirá en n celdas iguales, por lo tanto $\Delta x = \frac{2}{n}$.

Si se elige ξ_i como el punto extremo derecho de cada celda se tiene:

$$\xi_1 = 1 + \frac{2}{n},\ \xi_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right),\ \xi_3 = 1 + 3\left(\frac{2}{n}\right), \ldots,\ \xi_i = 1 + i\left(\frac{2}{n}\right),$$

$$\ldots, \xi_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

como $f(x) = x^2$:

$$f(\xi_i) = \left[1 + \frac{2i}{n}\right]^2 = \left[\frac{n + 2i}{n}\right]^2$$

la norma de la partición vale $\|\Delta\| = \Delta x = \frac{2}{n}$

obsérvese que si $\|\Delta\| \to 0$ equivale a:

$$n \longrightarrow +\infty$$

por lo tanto, la integral definida buscada será:

$$\int_1^3 x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left(n^2 + 4ni + 4i^2\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 + 4n \sum_{i=1}^{n} i + 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^2 n + 4n\,\frac{n(n+1)}{2} + \frac{4n\,(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3} \left[n^3 + 2n^3 + 2n^2 + \frac{2n\,(2n^2 + 3n + 1)}{3} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right]$$

$$= 6 + 0 + \frac{8}{3} + 0 + 0$$

$$= \frac{26}{3}$$

Como $x^2 \geq 0$ para toda $x \in [1,\ 3]$, la interpretación geométrica del resultado anterior será la siguiente:

La región acotada por la curva $y = x^2$, el eje X, y las rectas $x = 1$, $x = 3$, tiene un área de $\frac{26}{3}$ unidades de longitud al cuadrado. La región se muestra en la figura VI.6.

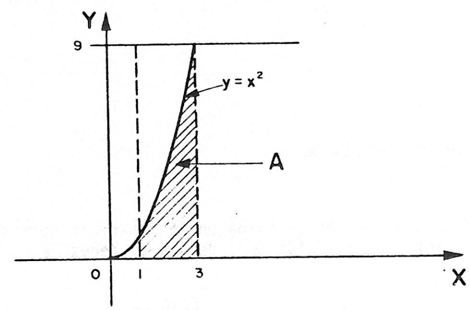


Figura VI.6

En todo el razonamiento anterior se ha supuesto que $a < b$.

Para explicar qué sucede en el cálculo de la integral definida cuando $a > b$ o cuando $a = b$, se tienen las siguientes definiciones:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ello se debe a que cada $\Delta_i x$ es negativo cuando $a > b$.

$$\int_b^a f(x)\,dx = 0$$

Este es un resultado obvio, ya que para cualquier partición, $\Delta_i x$ vale cero si $a = b$.

Además se pueden enunciar las siguientes propiedades que son:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f\left(\frac{x}{c}\right) dx \quad \text{(Contracción del intervalo)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \quad \text{(Traslación del intervalo)}$$

VI.1.3 INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Se puede partir de la siguiente suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

o bien:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

en donde se ha escogido ξ_i tal que:

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

La siguiente figura VI.7 ilustra la interpretación geométrica de esta suma, en donde, como ya se había visto, se nota claramente que el límite cuando $\|\Delta x\| \to 0$ en esa sumatoria da como resultado el área bajo la curva, sobre el eje X y entre las rectas $x = a$ y $x = b$. Es decir:

$$\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx$$

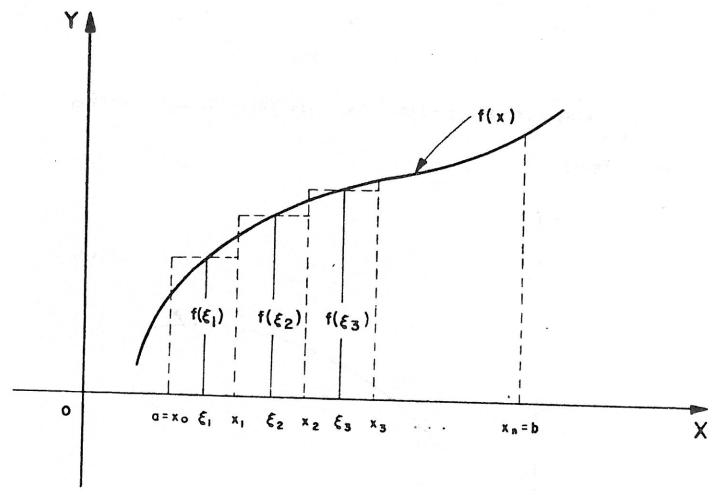


Figura VI.7

Por otro lado se pueden manejar la suma superior y la suma inferior expresadas por las siguientes sumas de Riemann e ilustradas en las figuras VI.8 y VI.9, respectivamente.

Suma superior:

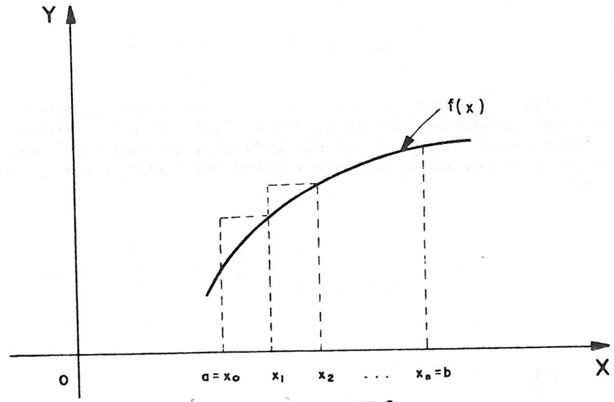


Figura VI.8

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ (x_i-x_{i-1}) = f(x_1)\ (x_1-x_o)+f(x_2)\ (x_2-x_1)+\ldots+f(x_n)\ (x_n-x_{n-1})$$

Suma inferior:

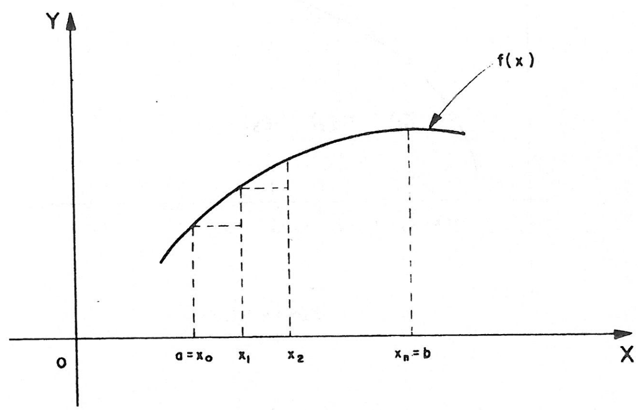


Figura VI.9

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) = f(x_o)(x_1-x_o) + f(x_1)(x_2-x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

Se observa que ambas sumatorias, al tender a cero la norma de la partición, tienen un límite común que es el área bajo la curva. Por lo que:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ (x_i-x_{i-1}) = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{i=o}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Tanto en la figura VI.7 como en las figuras VI.8 y VI.9 se puede ver cómo al tender a cero la norma de la partición, se tiene una interpretación geométrica de la integral definida, en la que se aprecia claramente, en el límite, su aproximación al área bajo la curva.

VI.1.4 FUNCION INTEGRABLE

Dado que la integral definida se ha establecido como un límite, la existencia de esta integral será la consecuencia directa de la existencia del límite, luego entonces, se puede afirmar que una función es integrable si el límite existe. Todo esto puede expresarse por medio de la siguiente definición:

> Sea una función f cuyo dominio incluye al intervalo $[a, b]$. Se dice que f es integrable en $[a, b]$ si existe un número L que satisface la condición de que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:
>
> $$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x - L \right| < \varepsilon$$
>
> Para toda partición en que $\|\Delta\| < \delta$ y para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se puede observar que la definición anterior es análoga a la definición de límite del capítulo II.

También se puede concluir que no importa qué partición se escoja, ni qué valores ξ_i se seleccionen, el valor del límite será siempre el mismo.

Obviamente el valor L será el valor de la integral definida.

A continuación se enuncia un teorema útil, pero no se demuestra por estar fuera de los objetivos del curso.

> TEOREMA VI.1
>
> Hipótesis:
>
> $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$
>
> Tesis:
>
> $y = f(x)$ es integrable en $[a, b]$

Es conveniente aclarar que este teorema garantiza la existencia de

$\int_b^a f(x)\, dx$ cuando $f(x)$ es continua en $[a, b]$, pero en algunos casos puede existir esta integral aun cuando la función sea discontinua en algunos puntos de $[a, b]$.

En otras palabras, la condición de continuidad en un intervalo es suficiente pero no necesaria.

VI.2 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Lo mismo que para otros conceptos vistos en este curso, el cálculo de la integral definida por medio de su definición propiamente dicha, resulta laborioso y algunas veces complicado.

Por otra parte, se trata de un concepto que no sólo sirve para la determinación de áreas, sino que tiene múltiples aplicaciones, algunas de las cuales se tratarán en los capítulos subsecuentes. Por todo esto es necesario establecer un método más sencillo para el cálculo de las integrales y en buena parte lo que ayudará a ello será el conocimiento de sus propiedades.

A continuación se enuncian, en forma de teoremas y se demuestran algunas de las propiedades más usuales.

> TEOREMA VI.2
>
> Hipótesis:
>
> $y = f(x)$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ y k es una constante cualquiera.
>
> Tesis:
>
> $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$

Demostración:

Como $y = f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \quad \text{existe}$$

Por otra parte, es claro que:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\, \Delta_i x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \qquad \ldots (1)$$

puesto que k puede salir como factor común de cada uno de los sumandos.

Además por algunos teoremas de límites vistos en el capítulo II:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} k \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x =$$

$$= k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \qquad \ldots (2)$$

entonces de (1) y (2):

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\, f(\xi_i)\, \Delta_i x = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

se puede concluir que:

$$\boxed{\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx} \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA VI.3

Hipótesis:

Las funciones f y g son integrables en $[a, b]$

Tesis:

La función $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Demostración:

Como las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, entonces se llamarán:

$$\int_a^b f(x)\, dx = M \qquad y \qquad \int_a^b g(x)\, dx = N$$

De acuerdo a la definición de integral definida, en el que $f + g$ sea integrable y que $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = M + N$ quiere decir que para cualquier $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\, \Delta_i x - (M + N) \right| < \varepsilon$$

Para todas las particiones en que $\|\Delta\| < \delta$ y para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, puesto que:

$$M = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \quad ; \quad N = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x$$

por lo tanto para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tales que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todas las particiones en que $\|\Delta\| < \delta_1$ y $\|\Delta\| < \delta_2$ y para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Entonces si δ es el mínimo de δ_1, δ_2 para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \ldots (3)$$

para todas las particiones en que $\|\Delta\| < \delta$ y para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por una propiedad de las desigualdades se tiene:

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x - M \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x - N \right) \right| \le \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x \right| \qquad \ldots (4)$$

de las desigualdades (3) y (4):

$$\left| \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x \right) - (M + N) \right| < \varepsilon \qquad \ldots (5)$$

por una de las propiedades de la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\, \Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)]\, \Delta_i x \qquad \ldots (6)$$

entonces de (5) y (6), se tiene que para cualquier $\xi > 0$:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) + g(\xi_i)] \Delta_i x - (M + N) \right| < \varepsilon$$

para todas las particiones en que $\| \Delta \| < \delta$, donde $\delta = \min (\delta_1, \delta_2)$ y para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Por lo tanto:

$$\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx} \quad \text{Q.D.}$$

Este teorema puede generalizarse para cualquier número de funciones. Es decir, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones integrales en $[a, b]$, entonces $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$ es también integrable en $[a, b]$ y:

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots f_n(x)] \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx + \int_a^b f_2(x) \, dx) + $$

$$+ \ldots + \int_a^b f_n(x) \, dx$$

Por otra parte utilizando el teorema VI.2, el signo *más* puede convertirse a signo *menos* si la constante $k = -1$.

Es decir:

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] \, dx = \int_a^b f_1(x) \, dx - \int_a^b f_2(x) \, dx}$$

TEOREMA VI.4

Hipótesis:

$y = f(x)$ es integrable en los intervalos $[a, b]$, $[a, c]$ y $[c, b]$.

Tesis:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \qquad (a < c < b)$$

Demostración:

Elíjase una partición Δ en $[a, b]$. Fórmese otra partición Δ' de la siguiente manera:

si $c = x_i$ es decir, que c es uno de los extremos de una celda, entonces Δ' es exactamente la misma partición Δ. Si por el contrario c no es un punto de la partición, pero pertenece al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la partición Δ' será la misma que la partición Δ pero también incluirá al punto c. Entonces las celdas de la partición Δ' son iguales a la de Δ exceptuando a la celda $[x_{i-1}, x_i]$ de Δ que se divide en las dos celdas $[x_{i-1}, c]$, $[c, x_i]$.

Si $\|\Delta'\|$ es la norma de Δ' y $\|\Delta\|$ es la norma de Δ:

$$\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$$

Ahora si en la partición Δ' al intervalo $[a, c]$ se divide en n subintervalos, y el intervalo $[c, b]$ se divide en $(n - r)$ subintervalos, la parte de la partición Δ' que va de a a c da una suma de Riemann de la forma:

$$\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i) \Delta_i x$$

mientras que la otra parte de Δ', es decir de c a b tendrá una suma de Riemann de la forma:

$$\sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x$$

De acuerdo con la definición de integral definida y algunas propiedades de la sumatoria, se tiene:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \left[\sum_{i=1}^{r} f(\xi_i) \Delta_i x + \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x \right]$$

$$= \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i) \Delta_i x + \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i) \Delta_i x$$

dado que $0 < \|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$, se puede reemplazar $\|\Delta\| \to 0$ por $\|\Delta'\| \to 0$

entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta'\| \to 0} \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)\,\Delta_i x + \lim_{\|\Delta'\| \to 0} \sum_{i=r+1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

por lo tanto de la definición de integral definida:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b)}$$ Q.D.

TEOREMA VI.5

Hipótesis:

$y = f(x)$ es integrable en un intervalo cerrado que contiene los tres números a, b y c.

Tesis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

sin importar el orden de a, b y c.

Demostración:

El número de posibilidades distintas que existen de ordenar estos tres números, si son diferentes, es seis:

$a < b < c$	$b < a < c$	$c < a < b$
$a < c < b$	$b < c < a$	$c < b < a$

La forma $a < b < c$ es la analizada por medio del teorema VI.4. Con ese mismo teorema se demostrará que cualquier otro orden también conduce a conclusiones válidas.

Suponiendo que $a < b < c$, por el teorema VI.4

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

como se sabe:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx$$

sustituyendo valores:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

despejando:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$ Q.D.

Para las otras ordenaciones el teorema se demuestra de manera similar.

También puede suceder que dos números sean iguales; por ejemplo:

$$a = c < b$$

como se sabe:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

por lo que:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

además:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

por lo tanto:

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$ Q.D.

TEOREMA VI.6

Hipótesis:

$y = f(x)$ es una función tal que $f(x) = k$, en donde k es una constante cualquiera.

Tesis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b k\,dx = k\,(b - a)$$

Demostracion:

De acuerdo a la definición de integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i x$$

para el caso que se quiere demostrar:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\,\Delta_i x$$

por el teorema VI.2:

$$\int_a^b f(x)\,dx = k \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x$$

entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = k\int_a^b dx = k\,(b - a)} \qquad \text{Q.D.}$$

Una interpretación geométrica de este teorema se muestra en la figura VI.10. En ese caso $k > 0$ y la integral definida $\int_a^b k\,dx$ proporciona la medida del área del rectángulo cuya base vale $(b - a)$ y cuya altura es k.

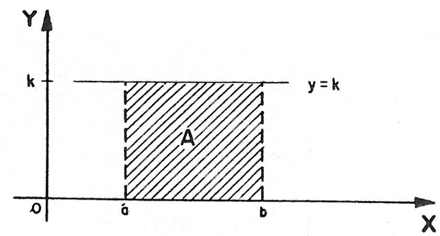


Figura VI.10

TEOREMA VI.7

Hipótesis:

1) $y = f(x)$, $y = g(x)$ son dos funciones integrables en $[a, b]$.

2) $f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$

Tesis:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Demostración:

Como f y g son integrables en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen.

Por el teorema VI.3:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \left[-g(x)\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Si definimos con h una función tal que:

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

se tiene:

$$h(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$$

puesto que:

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$$

se quiere demostrar que:

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx \geq 0$$

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_a^b h(x)\, dx = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x \qquad \ldots (7)$$

suponiendo que:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x = L < 0 \qquad \ldots (8)$$

de acuerdo a la definición de integral definida:

Con $\varepsilon = -L$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L \right| < -L \quad \text{para} \quad \|\Delta\| < \delta \qquad \ldots (9)$$

además se sabe que:

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L \leq \left| \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L \right|$$

de la desigualdad (9):

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x - L < -L \quad \text{para} \quad \|\Delta\| < \delta$$

o bien:

$$\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x < 0 \quad \text{para} \quad \|\Delta\| < \delta \qquad \ldots (10)$$

Esta afirmación es imposible, puesto que $h(\xi_i)$ es no negativo para toda i y cada $\Delta_i x > 0$, entonces, existe una contradicción a la desigualdad (8) y por lo tanto es falsa.

Luego:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\, \Delta_i x \geq 0 \qquad \ldots (11)$$

de (7) y (11):

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] \geq 0$$

del teorema VI.3:

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx \geq 0$$

y entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx \geq 0} \qquad \text{Q.D.}$$

TEOREMA VI.8

Hipótesis:

$y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, M y m son el máximo y el mínimo absoluto respectivamente, de la función f en $[a, b]$; o sea:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Tesis:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M\,(b - a)$$

Demostración:

Por el teorema VI.6:

$$\int_a^b m dx = m(b-a) \qquad \ldots (12)$$

Y

$$\int_a^b M dx = M(b-a) \qquad \ldots (13)$$

Como $f(x) \geq m \quad \forall x \in [a, b]$, por el teorema VI.7:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b m dx$$

tomando en cuenta (12):

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq m(b-a) \qquad \ldots (14)$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a))$$

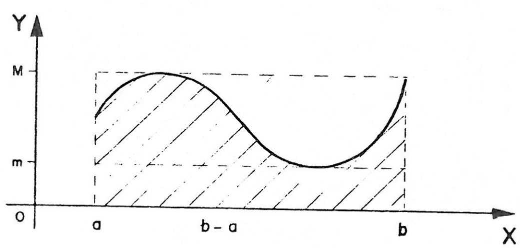


Figura VI.11

De la misma forma, como $M \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$, por el teorema VI.7:

$$\int_a^b M dx \geq \int_a^b f(x)\, dx$$

por (13):

$$M(b-a) \geq \int_a^b f(x)\, dx \qquad \ldots (15)$$

de (14) y (15):

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)} \qquad \text{Q.D.}$$

En la figura VI.11 se puede observar una representación geométrica de este teorema. La integral $\int_a^b f(x)\, dx$ da la medida del área comprendida entre la curva de ecuación $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$. Dicha área es menor que la del rectángulo cuya base es $(b-a)$ y altura M; pero mayor que la del rectángulo con la misma base y altura m.

VI.3 TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO INTEGRAL

TEOREMA VI.9

Hipótesis:

$y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, m es el mínimo absoluto que ocurre en x_m, M es el máximo absoluto que ocurre en x_M

Es decir:

$$f(x_m) = m \qquad a \leq x_m \leq b \qquad \ldots (16)$$

$$f(x_M) = M \qquad a \leq x_M \leq b \qquad \dots (17)$$

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Tesis:

Existe un número $x_o \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_o)\,(b - a); \qquad a \leq x_o \leq b$$
$$m \leq f(x_o) \leq M$$

Demostración:

Por el teorema VI.8:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$$

dado que $b - a \neq 0$, se puede dividir entre ese valor:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} \leq M$$

de las expresiones (16) y (17), se tiene:

$$f(x_m) \leq \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a} \leq f(x_M) \qquad \dots (18)$$

Tomando en cuenta en esta última expresión (18) el teorema de Weierstrass visto en el capítulo IV, se sabe que existe un número $x_o \in [a, b]$ de tal manera que:

$$f(x_o) = \frac{\int_a^b f(x)\, dx}{b - a}$$

despejando:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = f(x_o)(b - a); \; a \leq x_o \leq b} \qquad \text{Q.D.}$$

En la figura VI.12, se tiene una representación geométrica del teorema anterior, donde se puede ver la gráfica de la función $y = f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$.

La integral $\int_a^b f(x)\, dx$ da la medida del área comprendida entre la curva, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$. Por otra parte, la expresión $f(x_o)(b - a)$ representa la medida del área del rectángulo que tiene como base el valor $b - a$, y como altura $f(x_o)$.

Entonces la igualdad $\int_a^b f(x)\, dx = f(x_o)(b - a)$ se puede interpretar observando que en toda función continua, el área bajo la curva siempre podrá igualar el área de un rectángulo que tenga como base la amplitud del intervalo de definición de la función y como altura el valor de la función en algún punto del intervalo.

Este resultado es importante, pues resuelve un problema que históricamente preocupó a muchos matemáticos que es el de la cuadratura del círculo.

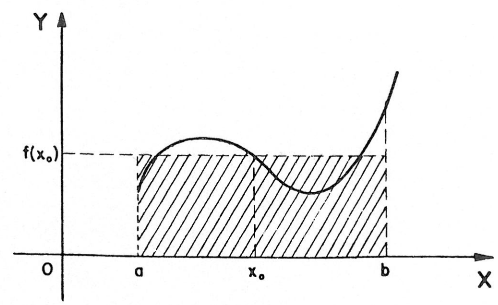


Figura VI.12

Ejemplo VI.4

Encontrar el valor de x_o tal que $\int_a^b x^3\, dx = f(x_o)(2 - 1)$ si se sabe que:

$$\int_1^2 x^3\, dx = \frac{15}{4}$$

Solución

$$\frac{15}{4} = f(x_o)(2 - 1)$$

$$f(x_o) = \frac{15}{4} \implies x_o = \sqrt[3]{\frac{15}{4}} = 1.5536$$

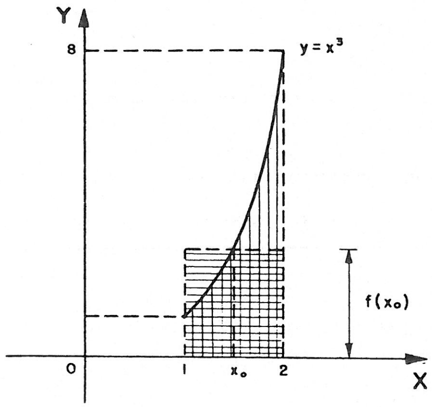


Figura VI.13

De acuerdo con el teorema del valor medio del cálculo integral y observando la figura VI.13, puede verse que el área comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje de las X y las rectas $x = 1$, $x = 2$ y que está representada por un rayado vertical, tiene el mismo valor que el área del rectángulo que tiene como base $(2 - 1) = 1$ y como altura $f(x_0) = 15/4$ y que está representado con un rayado horizontal.

Algunos autores llaman al valor $f(x_0)$ el valor medio o promedio de la función y que es una generalización de la media aritmética usada en estadística.

VI.4 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO. INTEGRAL INDEFINIDA

El problema del cálculo del área bajo una curva ha sido estudiado desde hace muchos años. Quizas los griegos fueron los primeros que lo trataron un poco más formalmente, usando los elementos de la integral definida. Más adelante se hizo intervenir el concepto de *antiderivada*, que en el siglo XVII, Newton y Leibniz utilizaron para calcular algunas áreas. Este concepto evolucionó hasta llegar a lo que se conoce como el *teorema fundamental del cálculo*.

VI.4.1 LA ANTIDERIVADA

Para una mayor comprensión de estos temas, se tratará primero el concepto de antiderivada.

Definición: Una función F será antiderivada de otra función f en un intervalo $[a, b]$, si $F'(x) = f(x)$ para todo valor de x en un intervalo.

Ejemplo VI.5

Sea $F(x) = x^2 + 2$; entonces $F'(x) = 2x$. Por la definición anterior, si $f(x) = F'(x)$, se tiene que $f(x) = 2x$. Se observa que $f(x)$ es la derivada de $F(x)$ y por lo tanto $F(x)$ será antiderivada de $f(x)$.

Ejemplo VI.6

Obtener una antiderivada de $f(x) = 2x$.

Solución

Una antiderivada de $f(x) = 2x$ podría ser $F(x) = x^2$. Como se puede observar, tanto $F(x) = x^2$, como $F(x) = x^2 + 2$, dada en el ejemplo VI.5, podrían ser antiderivadas de $f(x) = 2x$.

Más adelante se demostrará que si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, sólo difieren en una constante aditiva.

TEOREMA VI.10

Hipótesis:

$y = f(x)$ es una función tal que $f'(x) = 0$, para todo valor de x de un intervalo $[a, b]$

Tesis:

$y = f(x)$ es una función constante para todo valor de x en $[a, b]$.

Demostración:

Para demostrar este teorema se usará el *método de reducción al absurdo*, es decir, se supondrá como hipótesis algo falso y se llegará a una contradicción, con lo cual se demostrará que la suposición es absurda.

Suponiendo que $f(x)$ no es constante en $[a, b]$; por lo tanto existen dos valores x_1, $x_2 \in [a, b]$ en donde $x_1 < x_2$ de tal manera que:

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Por la hipótesis:

$$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a, b];$$

por lo que la derivada también será nula para los valores x_1 y x_2. Como la derivada existe en todo el intervalo la función también es continua, por lo que se satisfacen las condiciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial (teorema de Lagrange). Por lo anterior se puede asegurar que existe un valor x_0 dentro del intervalo tal que:

$$x_1 < x_0 < x_2$$

para el cual:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

por la hipótesis:

$$f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$$

por lo tanto:

$$f'(x_0) = 0$$

lo cual implica que:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

que es contradictorio con la suposición hecha, por lo que se concluye que ésta es absurda y necesariamente $f(x)$ es una constante, quedando demostrado el teorema.

TEOREMA VI.11

Hipótesis:

f y g son dos funciones para las cuales $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Tesis:

Existe una constante C tal que:

$$f(x) = g(x) + C \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Demostración:

Sea la función:

$$h(x) = f(x) - g(x) \qquad \ldots (19)$$

derivando:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

por la hipótesis del teorema:

$$f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$$

por lo tanto:

$$h'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$$

del teorema VI.10, se sigue que:

$$h(x) = C$$

sustituyendo este valor y despejando $f(x)$ en la ecuación (19), se tiene:

$$\boxed{f(x) = g(x) + C \quad \forall\, x \in [a, b]}$$

quedando demostrado el teorema.

TEOREMA VI.12

Hipótesis:

La función $f(x)$ tiene una antiderivada particular en $[a, b]$ que es $F(x)$.

Tesis:

La antiderivada general de $f(x)$ es:

$$F(x) + C \qquad \dots (20)$$

donde C es una constante arbitraria y todas las antiderivadas de $f(x)$ se pueden obtener asignándole algún valor particular a C.

Demostración:

Suponiendo que $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Por lo tanto:

$$G'(x) = f(x) \quad \text{en} \quad [a, b] \qquad \dots (21)$$

por la hipótesis del teorema se tiene:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{en} \quad [a, b] \qquad \dots (22)$$

de (21) y (22):

$$G'(x) = F'(x) \quad \text{en} \quad [a, b]$$

Del teorema VI.11 se tiene:

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall\, x \quad [a, b]$$

Como se supuso que $G(x)$ es una antiderivada cualquiera de $f(x)$, es claro que todas sus antiderivadas se pueden obtener por medio de $F(x) + C$, dándole algún valor particular a la constante arbitraria C. Queda demostrado el teorema.

Si F es una antiderivada de f, entonces:

$$F'(x) = f(x)$$

diferenciando:

$$d(F(x)) = f(x)\, dx$$

Obsérvese que el *proceso de antidiferenciar* equivale a encontrar la antiderivada general de una función dada.

Ejemplo VI.7

Obtener la antiderivada general de la función $f(x) = \cos x$

Solución

Dado que:

$$D_x \operatorname{sen} x = \cos x$$

una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es precisamente:

$$F(x) = \operatorname{sen} x$$

de aquí se sigue que la antiderivada general de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x + c$.

Volviendo al caso de la integral definida, es conveniente señalar que la variable de integración es *muda*, es decir, que el símbolo con que se representa no interviene en el resultado de la integral definida. El valor de dicha integral no cambia si se usan distintos símbolos para representar a la variable de integración:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(w)\, dw = \qquad \dots (23)$$

en donde f representa la misma función.

VI.4.2 INTEGRAL DEFINIDA CON EXTREMO SUPERIOR VARIABLE. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO. REGLA DE BARROW.

Antes de demostrar el teorema fundamental del cálculo, se establecerá el concepto de la integral definida con extremo superior variable y se demostrará un teorema importante.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Al ser una función continua es integrable en ese mismo intervalo. Por lo anterior

$\int_a^b f(t)dt$ existe y proporciona un valor único.

Si x es un número en $[a, b]$ se sigue que $f(x)$ es continua en $[a, x]$ entonces:

$$\int_a^x f(t)\, dt$$

define una función F cuyo dominio son todos los valores del intervalo $[a, b]$. El valor de la función para cualquier $x \in [a, b]$ será:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Para evitar confusiones, se ha empleado a t como variable de integración, dado que se está considerando el extremo superior variable y ha sido representado con x.

TEOREMA VI.13

Hipótesis:

La función $y = f(t)$ es continua en el intervalo $[a, b]$; x es un valor cualquiera del intervalo $[a, b]$ y F es la función definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \ldots (24)$$

Tesis:

$$F'(x) = f(x) \qquad \ldots (25)$$

Para la ecuación (25), si se considera que $x = a$, la derivada podrá ser por la derecha de a y si $x = b$ la derivada será por la izquierda de b.

Demostración:

Sean x y $x + \Delta x$ dos valores del intervalo cerrado $[a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{y} \quad F(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

entonces:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \qquad \ldots (26)$$

sabiendo que:

$$-\int_a^x f(t)\, dt = \int_x^a f(t)\, dt$$

se tiene:

$$\int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_x^a f(t)\, dt + \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

lo cual por el teorema VI.5, se puede escribir:

$$\int_x^a f(t)\, dt + \int_a^{x + \Delta x} f(t)\, dt = \int_x^{x + \Delta x} f(t)\, dt$$

teniendo en cuenta esto en la expresión (26) queda:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x + \Delta x} f(t)\, dt \qquad \ldots (27)$$

Por el teorema del valor medio del cálculo integral, se puede asegurar la existencia de un valor $x_o \in [x, x + \Delta x]$ tal que:

$$\int_x^{x + \Delta x} f(t)\, dt = f(x_o)(x + \Delta x - x) = f(x_o)\, \Delta x \qquad \ldots (28)$$

de las expresiones (27) y (28):

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x_o)\, \Delta x$$

dividiendo entre Δx:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x_o)$$

tomando límites cuando $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_o) \qquad \ldots (29)$$

obsérvese que el límite del primer miembro de la ecuación (29) es una derivada, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

por otro lado, como $x_o \in [x, x + \Delta x]$, al tender $\Delta x \to 0$, implica que $x_o \to x$ y por tanto el límite del segundo miembro de la ecuación (29) se puede escribir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_o) = \lim_{x_o \to x} f(x_o) = f(x)$$

por lo tanto, según (29):

$$F'(x) = f(x) \qquad \ldots (30)$$

con lo que queda demostrado el teorema.

La expresión (30) puede escribirse:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

en donde se ve que si en la integral definida

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

se considera variable el extremo superior de integración, se obtiene una función de él:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

cuya derivada es igual al integrando como función de dicho extremo:

$$f(x)$$

En la figura VI.14, se ilustra el contenido del teorema.

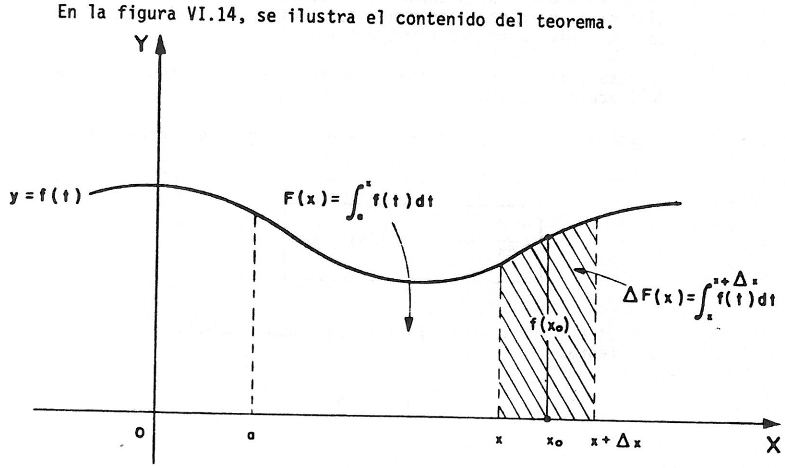


Figura VI.14

TEOREMA VI.14 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Hipótesis:

1) La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.

2) Sea la función $g(x)$ tal que $g'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Tesis:

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a)$$

Demostración:

Se tiene que la integral $\int_a^x f(t)\, dt$, con extremo superior variable, de una función F cuya derivada en el intervalo $[a, b]$ es f.

Por otra parte, la hipótesis de este teorema, establece que:

$$g'(x) = f(x)$$

por el teorema VI.11:

$$g(t) = \int_a^x f(t)\, dt + k \qquad (k = \text{constante}) \qquad \ldots (31)$$

si en la ecuación (31) $x = b$

$$g(b) = \int_a^b f(t)\, dt + k \qquad \ldots (32)$$

ahora si $x = a$ en la misma ecuación:

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt + k \qquad \ldots (33)$$

de las ecuaciones (32) y (33):

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt$$

pero:

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0$$

por lo tanto:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a)}$$

quedando demostrado el teorema.

Este teorema da la posibilidad de determinar el valor exacto de una integral definida y al aplicarlo se usará la notación:

$$g(x)\Big]_a^b = g(b) - g(a)$$

esta aplicación se conoce como regla de Barrow.

Ejemplo VI.8

Usando el teorema fundamental del cálculo, obtener:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$$

Solución

En el ejemplo VI.7, se vio que una antiderivada del cos x es sen x, por lo tanto:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1 - 0 = 1$$

Ejemplo VI.9

Calcular:

$$\int_{-1}^{3} x^2 dx$$

Solución

Como una antiderivada de x^2 es $\frac{x^3}{3}$, se tiene:

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{3} = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 9.33$$

:.4.3 LA INTEGRAL INDEFINIDA

Se llama integral indefinida de la función continua f(x), a:

$$\int_a^x f(u)\,du + C$$

como se sabe según el teorema VI.14:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)\,du = f(x)$$

se ve que la integral $\int_a^x f(u)\,du$ es una antiderivada de f(x), luego:

$$\int_a^x f(u)\,du + C$$

es la antiderivada general de f(x).

Para representar la integral indefinida de la función f(x) se escribe:

$$\int f(x)\,dx$$

Obsérvese que los conceptos de integral indefinida y antiderivada son distintos, pero para las funciones continuas, la integral indefinida y la antiderivada son la misma función.

En las aplicaciones se trata con funciones que tienen derivada y esta derivada es continua.

Supongamos que f(x) tiene derivada continua, entonces existe:

$$\boxed{\int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x) + C} \qquad \dots (34)$$

Por otra parte como f(x) tiene derivada, también es continua y existe la integral:

$$\int f(x)\,dx$$

cuya derivada es:

$$\boxed{\int \frac{d}{dx} f(x)\, dx = f(x)} \qquad \ldots (35)$$

Comparando (34) y (35) se ve que $\int \ldots dx$ y $\frac{d}{dx}$ representan operaciones inversas. Aplicadas sucesivamente a la función $f(x)$, destruyen sus efectos. Unicamente hay que observar que si se aplica primero $\frac{d}{dx}$ y luego $\ldots dx$, se debe sumar una constante arbitraria.

El símbolo $\int \ldots dx$ expresa la operación de antiderivada.

Diferenciando a $\int f(x)\, dx$ se obtiene:

$$\boxed{d \int f(x)\, dx = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] dx = f(x)\, dx} \qquad \ldots (36)$$

según esto se puede considerar representada la antidiferenciación con el símbolo $\int$.

También se tiene que:

$$\boxed{\int d\, f(x) = f(x) + C} \qquad \ldots (37)$$

comparando (36) y (37) se ve que los símbolos $\int$ y d representan operaciones inversas.

Como la primera aplicación importante del teorema fundamental del cálculo, es que por ser operaciones inversas la derivación y la integración, las fórmulas para derivar vistas anteriormente, pueden usarse para encontrar las correspondientes de integración. Así, dado que $D_x\, x^n = nx^{n-1}$, se puede deducir fácilmente que:

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

A continuación se presentan las fórmulas de integración más elementales, ya que existe una gran cantidad de ellas; basta mencionar que hay libros que contienen solamente fórmulas de integración.

$$\int du = u + C \qquad (38)$$

$$\int (u + v - w)\, dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx \qquad (39)$$

$$\int au\, du = a \int u\, du \quad (a = \text{constante}) \qquad (40)$$

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1 \qquad (41)$$

$$\int \text{sen } u\, du = -\cos u + C \qquad (42)$$

$$\int \cos u\, du = \text{sen } u + C \qquad (43)$$

$$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C \qquad (44)$$

$$\int \csc^2 u\, du = -\cot u + C \qquad (45)$$

$$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C \qquad (46)$$

$$\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C \qquad (47)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{ang sen } u + C \qquad (48)$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \text{ang tan } \frac{u}{a} + C \qquad (49)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{ang sec } \frac{u}{a} + C \qquad (50)$$

5 INTEGRALES INMEDIATAS E INTEGRALES QUE SE TRANSFORMAN EN INMEDIATAS COMPLETANDO LA DIFERENCIAL

Ya se habrá observado que el determinar una integral puede no ser siempre sencillo. En el capítulo VIII se establecerán algunos de los métodos existentes de integración. El más sencillo de ellos, de hecho ya se ha explicado, y es el de comparar directamente el integrando dado con el de una de las fórmulas. A este procedimiento se le conoce como integración inmediata. A continuación se desarrollarán ejemplos de integrales inmediatas.

Antes de integrar deberá estar completa la diferencial du, por lo cual si hace falta una constante como factor se multiplica y divide la integral por dicha constante, sacando de la integral la constante que no haga falta para completar la diferencial du, tal y como lo indica la fórmula (40).

Ejemplo VI.10

Calcular:

$$\int x^4 \, dx$$

Solución

Aplicando la fórmula (41):

$$\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Ejemplo VI.11 .

Calcular:

$$\int \frac{dx}{x^2}$$

Solución

Utilizando otra vez la fórmula (41):

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

Ejemplo VI.12

Calcular:

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} \, dx$$

Solución

Separando en varios sumandos y efectuando el cociente:

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} \, dx = \int \left(x + 5 - \frac{4}{x^2} \right) dx$$

aplicando las fórmulas (39) y (40):

$$\int (x + 5 - 4x^{-2}) \, dx = \int x dx + 5 \int dx - 4 \int x^{-2} \, dx$$

finalmente:

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$$

Ejemplo VI.13

Calcular:

$$\int \sec x \tan x \, dx$$

Solución

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$$

Ejemplo VI.14

Calcular:

$$\int \frac{dw}{4 + w^2}$$

Solución

$$\int \frac{dw}{4 + w^2} = \frac{1}{2} \text{ ang tan } \frac{w}{2} + C$$

Ejemplo VI.15

Calcular:

$$\int_0^4 (1 - x) \sqrt{x} \, dx$$

Solución

Aplicando las leyes de los exponentes:

$$\int_0^4 (1 - x) \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 (x^{1/2} - x^{3/2}) \, dx = \left. \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{2x^{5/2}}{5} \right]_0^4$$

$$= \frac{2(4)^{3/2}}{3} - \frac{2(4)^{5/2}}{5} - \frac{2(0)^{3/2}}{3} + \frac{2(0)^{5/2}}{5} = \frac{16}{3} - \frac{64}{5} = -\frac{112}{15}$$

$$\therefore \int_0^4 (1 - x) \sqrt{x} \, dx = -\frac{112}{15}$$

Ejemplo VI.16

Calcular:

$$\int \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \, dx$$

Solución

En este caso no es posible aplicar directamente la fórmula (42), ya que es necesario que el argumento de la función seno, tenga completa su diferencial, es decir, si:

$$u = \frac{1}{2} x$$

su diferencial será:

$$du = \frac{1}{2} dx$$

entonces, para poder aplicar la fórmula se multiplica y se divide por dos y así la diferencial estará completa:

$$I = \int \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \, dx = \int \left[\operatorname{sen} \frac{1}{2} x\right] (2) \frac{1}{2} dx$$

el dos que está multiplicando a la expresión, puede ser sacado de la integral por la fórmula (40):

$$I = 2 \int \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \frac{1}{2} dx$$

en este caso ya es posible aplicar la fórmula (42):

$$I = 2 \int \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \frac{1}{2} dx = 2(-\cos \frac{1}{2} x) + C$$

$$I = -2\cos \frac{1}{2} x + C$$

En algunos casos no es posible aplicar directamente las fórmulas de integración, pero por medio de alguna transformación algebraica sencilla se puede llegar a una forma en la que sí están todos los elementos de la fórmula.

Ejemplo VI.17

Calcular:

$$\int (x^3 + 2)^{1/2} x^2 \, dx$$

Solución

$$\text{si} = u = x^3 + 2 \quad du = 3x^2 \, dx$$

Obsérvese que para aplicar la fórmula (41), es necesario completar la diferencial de u.

$$\int (x^3 + 2)^{1/2} x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{1/2} \, 3x^2 \, dx$$

Aquí ya es posible aplicar la fórmula:

$$I = \frac{1}{3} \int (x^3 + 2)^{1/2} \, 3x^2 \, dx = \frac{1}{3} \frac{2(x^3 + 2)^{3/2}}{3} + C$$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{9} (x^3 + 2)^{3/2} + C$$

Ejemplo VI.18

Calcular:

$$\int 3x \sqrt{1 - 2x^2} \, dx$$

Solución

Si:

$$u = 1 - 2x^2 \Longrightarrow du = -4x \, dx$$

por tanto:

$$I = \int 3x \sqrt{1 - 2x^2} \, dx = -\frac{3}{4} \int \sqrt{1 - 2x^2} \, (-4x \, dx)$$

$$I = -\frac{3}{4} \frac{2(1 - 2x^2)^{3/2}}{3} + C = -\frac{1}{2} (1 - 2x^2)^{3/2} + C$$

Ejemplo VI.19

Calcular:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

Solución

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} dx = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x} dx$$

$$= \int \csc^2 x \, dx - \int \cot x \csc x \, dx = -\cot x + \csc x + C$$

Ejemplo VI.20

Calcular:

$$\int \sec^2 2ax\ dx$$

Solución

$$\int \sec^2 2ax\ dx = \frac{1}{2a} \int \sec^2 2ax\ 2a\ dx = \frac{1}{2a} \tan 2ax + C$$

Ejemplo VI.21

Calcular:

$$\int \frac{\text{sen } x\ dx}{\cos^2 x}$$

Solución

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}\ dx = \int \tan x \sec x\ dx = \sec x + C$$

Ejemplo VI.22

Calcular:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9}$$

Solución

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \int \frac{dx}{(2x)^2 + (3)^2}$$

$\therefore$ si $u = 2x$ $\quad du = 2dx$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x)^2 + (3)^2} = \frac{1}{6} \text{ ang tan } \frac{2x}{3} + C$$

Ejemplo VI.23

Calcular:

$$\int \frac{\sec x \tan x\ dx}{9 + 4 \sec^2 x}$$

Solución

$$\int \frac{\sec x \tan x\ dx}{9 + 4\sec^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{2 \sec x \tan x\ dx}{(3)^2 + (2 \sec x)^2} = \frac{1}{6} \text{ ang tan } \frac{2 \sec x}{3} + C$$

Ejemplo VI.24

Calcular:

$$\int \frac{(x + 3)\ dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Solución

$$\int \frac{(x + 3)\ dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2xdx}{\sqrt{1 - x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2} + 3 \text{ ang sen } x + C$$

$$\therefore \quad I = 3 \text{ ang sen } x - \sqrt{1 - x^2} + C$$

CAPITULO VII FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL E INTEGRALES IMPROPIAS

INTRODUCCION

En este capítulo se tratará primero la función logaritmo natural cuya definición se apoya en una integral. Después, el estudio de la función exponencial hará ver que ésta y la logarítmica son mutuamente inversas. Aquí reviste interés ver la similitud entre las propiedades de la función logaritmo natural y el logaritmo elemental estudiado en cursos anteriores.

También se contemplan los procesos de derivación e integración para ambas funciones, y se hace un breve análisis de las funciones hiperbólicas.

Por otro lado se estudia la Regla de L' Hôpital para resolver límites; se ven los diferentes casos del límite de una función cuando la variable tiende al infinito y por último se presenta el concepto de integral impropia.

VII.1 LA FUNCION LOGARITMO NATURAL

VII.1.1 DEFINICION DE LA FUNCION LOGARITMO NATURAL

La principal herramienta para calcular integrales definidas ha sido la regla de Barrow, la cual expresa que:

si

$$\frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$$

entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Para poder utilizar esta regla es necesario primero encontrar una integral indefinida F para f.

Por otro lado se sabe que para $f(x) = x^n$ se tiene que:

$$\int f(x)\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

esta expresión es válida para $n \neq -1$, lo que hace ver que no se cuenta con una integral indefinida para la función $f(x) = x^{-1}$.

Si esta función $f(x) = x^{-1}$, la cual no tiene una antidiferencial o función primitiva conocida, apareciera raramente, se podría uno contentar con integrarla utilizando métodos aproximados, pero como aparece con relativa frecuencia, se ve la necesidad de estudiar el problema detalladamente y la importancia de poder integrar una función como la expuesta estriba en que definirá una función especial la cual rige multitud de fenómenos naturales totalmente diferentes.

Se puede comenzar definiendo una cierta función de una integral indefinida para la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

Esto es factible si se tiene presente el significado geométrico de la integral definida y si se sabe además que $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en el intervalo $(0, \infty)$.

Definición: Para $x > 0$ $$L(x) = \int_1^x \frac{du}{u}$$ define una función $L(x)$ tal que $\frac{d\,L(x)}{dx} = \frac{1}{x}$ en $(0, \infty)$

En esta definición hay que aclarar que la elección del 1 como límite inferior de integración es conveniente, pero arbitraria.

VII.1.2 PROPIEDADES

A continuación se estudiarán las propiedades de esta función $L(x)$.

TEOREMA VII.1
Si u y v son números positivos cualesquiera, entonces se cumple que:
A. $L(1) = 0$
B. $L(uv) = L(u) + L(v)$
C. $L\left(\frac{1}{u}\right) = -L(u)$
D. $L\left(\frac{u}{v}\right) = L(u) - L(v)$
E. $L(u^r) = r\,L(u)$

Demostración:

De acuerdo a la definición anterior se tiene:

$$L(x) = \int_1^x \frac{du}{u} \quad ; \quad x > 0$$

si se sustituye en esta expresión x por 1 se tendrá:

$$L(1) = \int_1^1 \frac{du}{u} = 0$$

por tanto demostramos que:

$$\boxed{L(1) = 0} \qquad \ldots (A)$$

Según la definición de la función L:

$$\frac{d\,L(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

por lo cual esta expresión, que define a la derivada de $L(x)$, siempre será positiva para $x > 0$. También se puede ver en la expresión que define a la función $L(x)$ y recordando las propiedades de la integral definida, que:

$$L(x) < 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < 1$$

y

$$L(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$

Si se tiene un cierto valor fijo $a > 0$, se ve que la función:

$$L(ax)$$

está definida para todo valor de $x > 0$. Si se deriva se tendrá:

$$\frac{d\,L(ax)}{dx} = \frac{1}{ax}\,(a)$$

por lo tanto:

$$\frac{d\,L(ax)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Se observa que la derivada de esta función es igual a la derivada de $L(x)$ y recordando que una diferencial puede corresponder a varias funciones primitivas, existe entonces una constante C tal que:

$$L(ax) = L(x) + C$$

Si se aprovecha que $L(1) = 0$ se puede valuar ahora la constante. Entonces para $x = 1$:

$$L(a) = L(1) + C$$

de donde:

$$L(a) = C$$

por lo que:

$$L(ax) = L(x) + L(a)$$

esta expresión se puede generalizar como:

$$\boxed{L(uv) = L(u) + L(v)} \qquad \dots (B)$$

para todo valor de u y v positivas.

Si en (B) se sustituye ahora a v por $\frac{1}{u}$ se tendrá:

$$L(1) = L(u) + L\left(\frac{1}{u}\right)$$

y como $L(1) = 0$, entonces:

$$\boxed{L\left(\frac{1}{u}\right) = -L(u)} \qquad \dots (C)$$

por otro lado se puede escribir:

$$L\left(\frac{u}{v}\right) = L\left(u\,\frac{1}{v}\right)$$

y a través de la expresión (B):

$$L\left(\frac{u}{v}\right) = L(u) + L\left(\frac{1}{v}\right)$$

y considerando (C):

$$\boxed{L\left(\frac{u}{v}\right) = L(u) - L(v)} \qquad \dots (D)$$

para todo valor positivo de u y de v.

Ahora si se tiene cualquier número racional r y se pretende derivar la expresión u^r se tendrá:

$$\frac{d(Lu^r)}{du} = \frac{1}{u^r}\left(ru^{r-1}\right)$$

$$\frac{d(Lu^r)}{du} = r\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\therefore \frac{d(Lu^r)}{du} = \frac{d\,r\,L(u)}{du}$$

entonces existe una constante C tal que:

$$L(u^r) = r\,L(u) + C$$

nuevamente utilizando $u = 1$ se tiene $C = 0$, y finalmente queda:

$$\boxed{L(u^r) = r\,L(u)} \qquad \dots (E)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Se podrían comparar las propiedades de esta función L con algunas propiedades de una función usada en álgebra elemental como es el logaritmo de base positiva y arbitraria $b \neq 1$.

Función "L"	"Logaritmo"
$L(1) = 0$	$\log_b 1 = 0$
$L(uv) = L(u) + L(v)$	$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$
$L\left(\frac{1}{u}\right) = -L(u)$	$\log_b\left(\frac{1}{u}\right) = -\log_b u$
$L\left(\frac{u}{v}\right) = L(u) - L(v)$	$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$
$L(u^r) = r\,L(u)$	$\log_b (u^r) = r \log_b u$

Aquí se observa que sin tomar en cuenta la notación, las expresiones de ambas columnas son idénticas. Por esta razón a la función L se le llama *función logarítmica*.

Realmente se tiene en L una herramienta matemática de mayor utilidad que el logaritmo del álgebra elemental, el cual está definido en términos de exponentes: $\log_b x$ es un número n tal que $b^n = x$, en donde b es llamada la *base*. La potencia b^n está definida, sin embargo, solamente para valores racionales de n; su gráfica entonces está llena de *agujeros* y no es derivable ni integrable, por lo que se ve que tratada como función tiene muy poca utilidad en cálculo.

Por otro lado, la función L, además de tener las mismas propiedades del logaritmo elemental, es diferenciable e integrable ya que en su intervalo de definición $(0,\infty)$, es continua y está representada por una sola regla de correspondencia. Por ésta y otras razones la función L es la *natural* función logarítmica que se utiliza en cálculo y a la cual se le llama *logaritmo natural*. Al logaritmo base 10 se le llama *logaritmo vulgar* para enfatizar la distinción y en términos de notación se utilizan los siguientes símbolos:

logaritmo natural = ln   logaritmo vulgar = log

Entonces la definición de la función L quedaría como:

$$\boxed{\ln x = \int_1^x \frac{du}{u}}$$

Si se desea calcular $\ln x$ para cualquier valor arbitrario $x > 0$, se hace lo siguiente: si se sustituye x por $1 + x$ en la definición, se tiene:

$$\ln(1 + x) = \int_1^{1+x} \frac{du}{u}$$

en donde esta integral puede ser interpretada como el área sombreada de la figura VII.1.

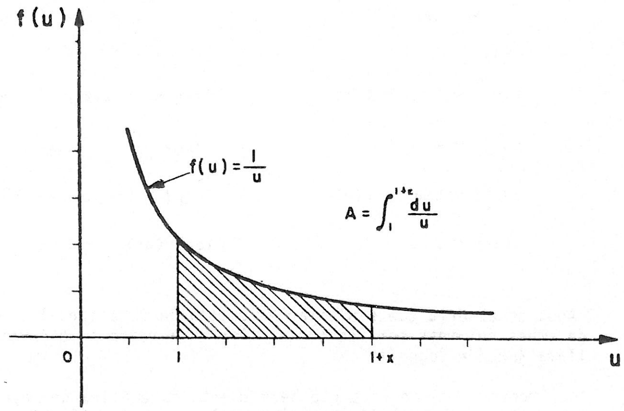


Figura VII.1

Si se recorre toda la gráfica una unidad hacia la izquierda, la gráfica de $\frac{1}{u}$ se convierte en la gráfica de $\frac{1}{1 + u}$ y la nueva área será la de la figura VII.2.

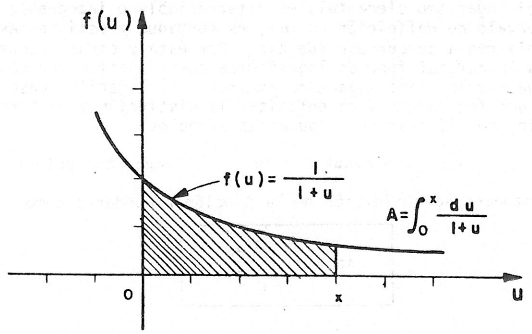


Figura VII.2

Por lo que se puede escribir finalmente la expresión para evaluar $\ln x$ para cualquier $x > 0$

$$\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{du}{1 + u}$$

Es evidente, por la definición, que el dominio de la función $\ln x$ es el conjunto de todos los reales positivos.

$$D_f = (0, \infty)$$

En el siguiente teorema se establecen otras propiedades básicas de esta función y también se concluye que la imagen de la función $\ln x$ es el conjunto de todos los números reales.

TEOREMA VII.2

Si $f(x) = \ln x$, entonces:

A. $f'(x) = \frac{1}{x}$ para toda $x > 0$

B. f es una función creciente.

C. $\frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$

D. $\ln x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$

E. $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$

F. $R_f = \mathbb{R}$

Demostración:

A. Aquí se expresa algo ya tratado y se fundamenta en el teorema principal del cálculo integral ya que:

si

$$\int_1^x \frac{du}{u} = \ln x \quad \text{entonces} \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

B. Sabiendo que si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$ y recordando lo visto con anterioridad, se sabe que la derivada de la función $\ln x$ es siempre positiva para $x > 0$, hecho que conduce a afirmar que la función es creciente a lo largo de todo su dominio, por lo que se trata de una función uno a uno.

C. Si se piensa en la integral de acuerdo a su interpretación como un área, el valor de:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{du}{u}$$

está representado por el área de la región sombreada de la figura VII.3.

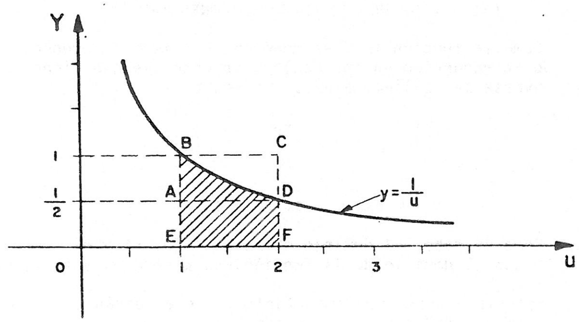


Figura VII.3

Por el teorema referente a las integrales, que da una cota superior y una inferior, se tiene:

$$\text{área ADFE} \leq \int_1^2 \frac{du}{u} \leq \text{área BCFE} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$$

D. Se debe demostrar que $\ln x$ crece sin límite cuando x crece indefinidamente.

Si n es un entero positivo cualquiera y si $x > 2^n$, entonces, como se trata de una función creciente, se cumple que:

$$\ln x > \ln (2^n)$$

aprovechando propiedades de $\ln x$ y utilizando (C) se tiene:

$$\ln x > n \ln 2 \quad \text{y como} \quad \frac{1}{2} \leq \ln 2 \leq 1$$

entonces:

$$\ln x > \ln 2^n = n \ln 2 \geq \frac{1}{2} n$$

como:

$$\frac{1}{2} n \to +\infty$$

cuando:

$$n \to +\infty$$

se tiene que:

$$\boxed{\ln x \to +\infty \quad \text{cuando} \quad x \to +\infty}$$

E. De manera similar, si n es un entero positivo,

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to +\infty$$

si $0 < x < \frac{1}{2^n}$, como la función $\ln x$ es creciente:

$$\ln x < \ln \left(\frac{1}{2^n}\right) = -n \ln 2$$

como $\ln 2 > \frac{1}{2}$ se puede decir que:

$$\ln x < -\frac{1}{2} n$$

como $x < \frac{1}{2^n}$ se sabe que $x \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Cuando $n \to +\infty$, $-\frac{1}{2} n \to -\infty$ y por lo tanto:

$$\boxed{\ln x \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+}$$

F. Las propiedades (D) y (E) hacen patente que la función $\ln$ toma todos los valores reales desde $-\infty$ a $+\infty$ por lo que:

$$\boxed{R_f = \mathbb{R}}$$

y así queda demostrado el teorema VII.2.

VII.1.3 GRAFICA

En el análisis de esta función $\ln x$ ya se vio que su domino es el intervalo $(0, \infty)$ en los números reales y que su recorrido es el conjunto $\mathbb{R}$.
Para facilitar el trazo de su gráfica, se debe recordar que se trata de una función uno a uno creciente. Por otro lado si se obtiene la segunda derivada:

$$f(x) = \ln x; \quad f'(x) = \frac{1}{x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

para: $\quad x > 0$

se ve que siempre es negativa, por lo cual lleva a pensar que la función en su gráfica es siempre cóncava hacia abajo. Además, el hecho de que en su definición:

$$\int_1^x \frac{du}{u} = \ln x$$

la integral representa un área, la cual cada vez aumenta con mayor lentitud, manifestando un incremento constante, pero con más suavidad conforme se incrementa x. A continuación, en la figura VII.4, se presenta la gráfica de la función $f(x) = \ln x$.

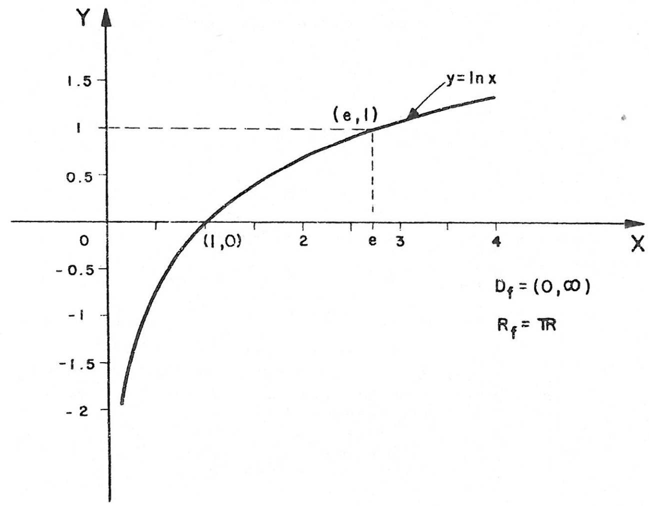


Figura VII.4

En la gráfica se observa que la función vale 1 cuando x es aproximadamente 2.71. Entonces se puede asumir que existe un número e tal que:

$$\ln e = 1$$

Este número, único porque la función $\ln x$ es uno a uno, es de los más importantes números de las matemáticas. Por razones que se aclararán posteriormente, es llamado *la base de los logaritmos naturales y de la función exponencial*. Se puede probar que e es irracional. Un valor aproximado de e es:

$$e \simeq 2.718281828$$

VII.2 LA FUNCION EXPONENCIAL. FUNCIONES HIPERBOLICAS

VII.2.1 DEFINICION DE LA FUNCION EXPONENCIAL

Como la función $\ln x$ es monótona creciente, entonces es uno a uno y dado su recorrido en los reales, se concluye que tiene inversa. Y a esta inversa se le llamará exp. Es decir:

$$\exp = \ln^{-1}$$

y se sigue:

$$y = \exp x \quad \text{si y solo si} \quad \ln y = x$$

Como se sabe, el dominio de $\ln x$ es $(0, \infty)$ y el recorrido es $\mathbb{R}$, por lo que el dominio de la función $\exp x$ será $\mathbb{R}$ y su recorrido $(0, \infty)$.

Dos expresiones muy importantes, que ayudarán en la demostración de algunas propiedades de $\exp x$ son:

$$\exp(\ln x) = x \qquad \forall\, x > 0$$

$$\ln(\exp x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

VII.2.2 PROPIEDADES

Las propiedades básicas de la función $\exp x$ están dadas en el siguiente teorema:

> TEOREMA VII.3 Si $f(x) = \exp x$, entonces:
>
> A. f es creciente para todos los valores de x
>
> B. $(\exp u)(\exp v) = \exp(u + v)$
>
> C. $\dfrac{\exp u}{\exp v} = \exp(u - v)$
>
> D. $(\exp u)^v = \exp uv$
>
> E. $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$
>
> F. $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$

Demostración:

Sean: u y $v \in \mathbb{R}$

B. $\ln[(\exp u)(\exp v)] = \ln(\exp u) + \ln(\exp v)$

$= u + v$

$= \ln[\exp(u + v)]$

y por lo tanto:

$$(\exp u)(\exp v) = \exp (u + v)$$

C. De manera similar:

$$\ln\left(\frac{\exp u}{\exp v}\right) = \ln (\exp u) - \ln (\exp v)$$

$$= u - v$$

$$= \ln [\exp (u - v)]$$

y por lo tanto:

$$\frac{\exp u}{\exp v} = \exp (u - v)$$

D. De la misma manera para cualquier número real u y para cualquier racional v:

$$\ln \left[(\exp u)^v\right] = v \ln (\exp u)$$

$$= uv$$

$$= \ln (\exp uv)$$

y por lo tanto:

$$(\exp u)^v = \exp uv$$

E. $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$

F. $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$

Estas dos propiedades se demuestran análogamente a las correspondientes para la función $\ln x$. Todo esto se fundamenta en el hecho de que la función $\exp x$ es la inversa de la función $\ln x$, ya que:

$$D_{\ln} = (0, \infty) = R_{\exp} \quad y \quad R_{\ln} = R = D_{\exp}$$

Para demostrar la propiedad (A), sean $y_1 = \exp x_1$ y $y_2 = \exp x_2$, con $x_2 > x_1$ se debe probar que $y_2 > y_1$. Por la definición de la función inversa se tiene que:

$$x_1 = \ln y_1 \quad y \quad x_2 = \ln y_2$$

Como la función $\ln$ es creciente, la única forma de que se cumpla la desigualdad $x_2 > x_1$ es que $y_2 > y_1$.

Se puede ver ahora por qué a esta función se le llama *exponencial*.

Para cualquier racional x, la cantidad e^x está definida por las reglas del álgebra elemental y,

$$\ln e^x = x \ln e$$

$$\ln e^x = x$$

por lo que: $\quad e^x = \exp x \quad$ para todo número racional x.

Las potencias irracionales no están definidas en el álgebra elemental; ningún significado es asignado, por ejemplo, a $2^{\sqrt{2}}$ o a 5^{π}. Entonces e^x no está definida para valores irracionales de x, y por lo tanto se está en libertad para implementar una definición si así se desea. Como $\exp x$ está definida para todo valor real de x, y como $\exp x = e^x$ para valores racionales de x, se podría tomar esta última expresión para hacer una definición en el caso de que x sea irracional. Entonces, con la validez de que para toda $x \in \mathbb{R}$ se tiene $e^x = \exp x$, todo valor de la función exponencial puede por lo tanto ser escrito como una potencia de e, de ahí el nombre de *exponencial*. Y como la forma e^x es más nítida que $\exp x$, se usará comúnmente. Estas serían entonces las propiedades de notación exponencial:

$$y = e^x \iff x = \ln y$$

$$e^{\ln x} = x; \quad x > 0$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(e^x)^y = e^{xy}$$

La ecuación $(\exp u)^v = \exp uv$, que en notación exponencial se escribe como $(e^x)^y = e^{xy}$ se ha comprobado sólo para valores y racionales; pero se podría demostrar para todo número real y.

VII.2.3 GRAFICA

Para facilitar la construcción de la gráfica se puede tocar ligeramente el concepto de derivada para la función exponencial. Si se tiene:

$$y = e^x$$

o bien:

$$\ln y = x$$

si se deriva esta expresión en forma implícita:

$$\frac{1}{y}\, y' = 1$$

$$y' = y$$

por lo que:

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

donde se ve que la función exponencial tiene la notable propiedad de ser igual a su derivada. De la misma forma:

$$\frac{d^2e^x}{dx^2} = e^x > 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Como las dos derivadas son siempre positivas, se trata de una función siempre creciente y cóncava hacia arriba. Su gráfica es la siguiente:

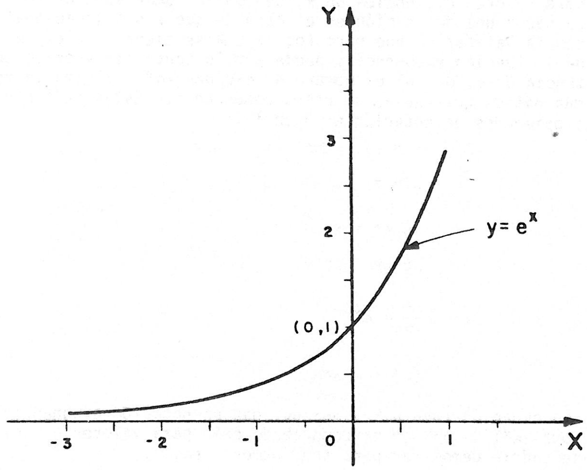


Figura VII.5

Esta gráfica también puede obtenerse a partir de la gráfica de la función $\ln x$ haciendo una reflexión en la recta $y = x$ (función identidad).

A continuación se presenta una figura donde se muestran las dos funciones en estudio y en la cual se puede apreciar claramente que una es inversa de la otra y viceversa.

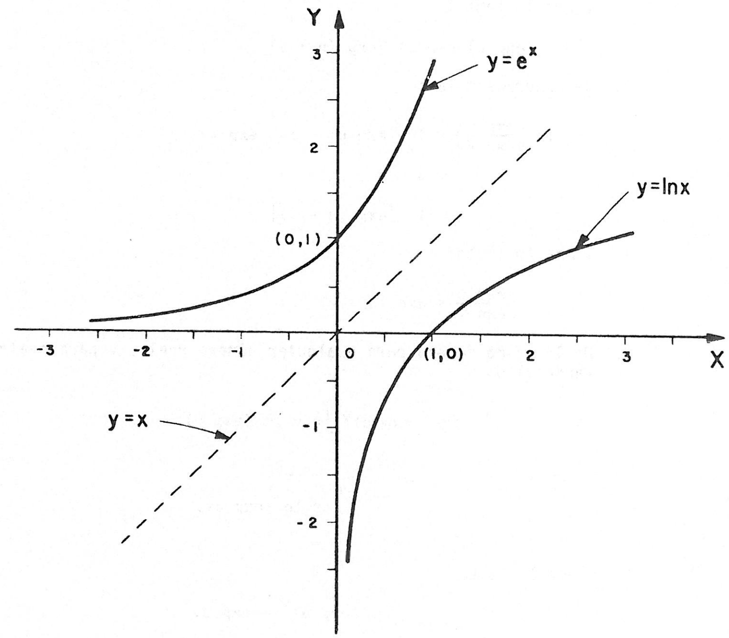


Figura VII.6

Ahora se procederá a realizar un breve análisis de las funciones hiperbólicas, para más adelante estudiar todo lo concerniente a la derivación e integración de las funciones $\ln x$ y e^x.

VII.2.4 FUNCIONES HIPERBOLICAS

Relación entre las funciones circulares y las hiperbólicas.

Las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante se definieron en relación con la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 1$$

y se llaman *funciones trigonométricas circulares*.

Las funciones hiperbólicas, en cambio, se definirán en relación con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, de ahí su nombre.

En la figura VII.7, se tiene una circunferencia de radio uno y cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Sea $P(x, y)$ un punto de ella.

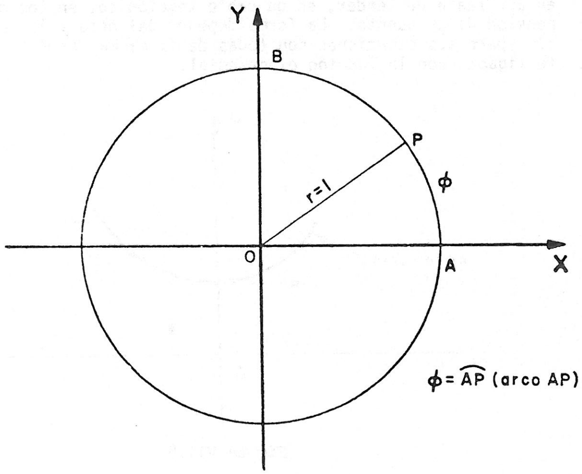


Figura VII.7

Area del sector circular $OAP = \frac{\pi\, r^2\, \phi}{2\pi} = \frac{r^2\, \phi}{2}\, u^2$

como:

$$r = 1$$

área del sector circular:

$$OAP = \frac{\phi}{2}\, u^2; \qquad \phi = 2 \text{ Area } OAP$$

también se tiene que:

área del Δ $OAB = \frac{1}{2}\, u^2$

por lo tanto:

$$\phi = \frac{\text{área del sector } OAP}{\text{área del } \Delta \ OAB} = \frac{\frac{\phi}{2}}{\frac{1}{2}} = \phi$$

Entonces el número ϕ puede tomarse como la razón entre el área del sector OAP y el área del triángulo OAB, la medida del ángulo ϕ puede definirse como el doble del área del sector circular OAP que el ángulo determina en el círculo unitario.

Este enfoque de ϕ permite desarrollar una trigonometría basada en la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

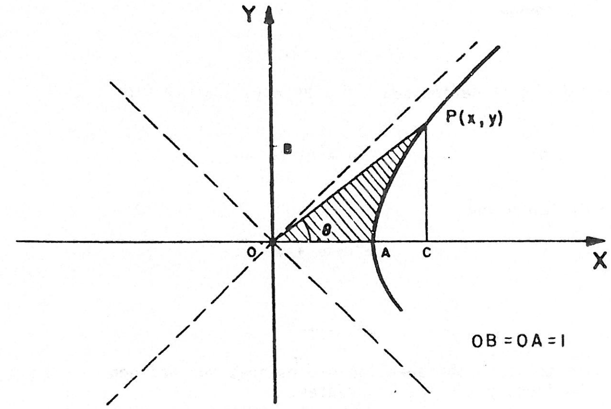


Figura VII.8

Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola en el primer cuadrante. Razonando en forma análoga a la anterior, se tiene que:

El número real θ se define como el doble del área del sector hiperbólico OAP. Este número θ se llama la *medida hiperbólica* del ángulo AOP, con arco AP de la hipérbola. $\therefore \ \theta = \frac{\text{área del sector } OAP}{\text{área del } \Delta \ OAB} = \frac{\text{área del sector } OAP}{\frac{1}{2}}$

Si se calcula el área del sector OAP:

Area OAP = Area del Δ OCP − (área bajo la hipérbola de A a C)

luego:

$$\text{Area del } \Delta \ OCP = \frac{xy}{2}$$

$$\text{Area } ACP = \int_1^x \sqrt{u^2 - 1}\, du$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

por lo que:

$$\text{Area OAP} = \frac{xy}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x + y)$$

de donde:

$$\theta = \ln(x + y)$$

Ahora se define $\operatorname{sen} h\ \theta = PC = y$; $\cos h\ \theta = OC = x$

como: $\theta = \ln(x + y)$,

se tiene que:

$$e^{\theta} = x + y$$

y

$$e^{-\theta} = \frac{1}{x + y}$$

de donde se obtienen las expresiones que definen al seno y coseno hiperbólicos, y son las siguientes:

$$\boxed{\operatorname{sen} h\ \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}}$$

y

$$\boxed{\cos h\ \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}}$$

Como prueba de lo expresado se tiene que:

$$\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \frac{x + y - \frac{1}{x + y}}{2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 1}{2(x + y)}$$

como:

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x^2 = 1 + y^2$$

$$\operatorname{sen} h\ \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \frac{2xy + 2y^2}{2(x + y)} = y$$

así también:

$$\frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \frac{x + y + \frac{1}{x + y}}{2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 + 1}{2(x + y)}$$

$$\cos h\ \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \frac{2x^2 + 2xy}{2(x + y)} = x$$

VII.2.5 LA CATENARIA Y LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

Si se deja colgar en forma libre una cadena o un cable entre dos soportes, se forma una curva llamada *catenaria* (del griego katena que significa cadena). Las catenarias se encuentran por donde uno mira, en una reata de tender, en un cable telefónico, en los cables de suspensión de un puente. La forma depende del peso y la tensión del cable, pero sus ecuaciones son todas de la misma forma y están íntimamente ligadas con la función exponencial.

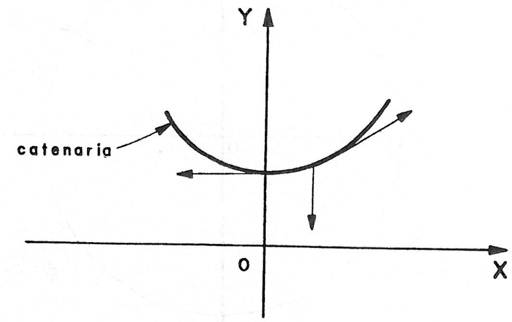


Figura VII.9

Haciendo un análisis de las fuerzas que actúan en un cierto arco de la catenaria (cuyo desarrollo no forma parte del curso), se llega a la ecuación cartesiana de la catenaria:

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

expresión que define al coseno hiperbólico de x.

Además de las dos funciones hiperbólicas ya tratadas se tienen otras cuatro definidas en términos de aquéllas:

la tangente hiperbólica	$\tan h\ x = \dfrac{\operatorname{sen} h\ x}{\cos h\ x}$	
la cotangente hiperbólica	$\cot h\ x = \dfrac{\cos h\ x}{\operatorname{sen} h\ x}$	$x \neq 0$
la secante hiperbólica	$\sec h\ x = \dfrac{1}{\cos h\ x}$	
la cosecante hiperbólica	$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} h\ x}$	$x \neq 0$

A continuación se presentan las gráficas de sen h x (figura VII.10), cos h x (figura VII.11) y tan h x (figura VII.12), así como algunas identidades fundamentales.

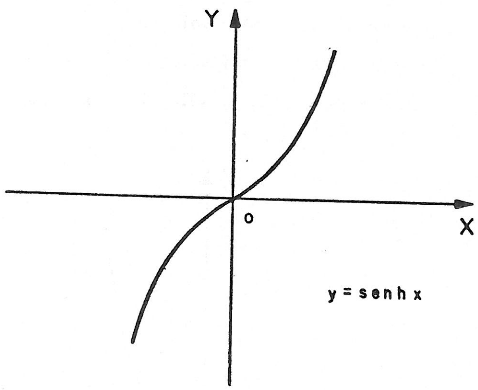


Figura VII.10

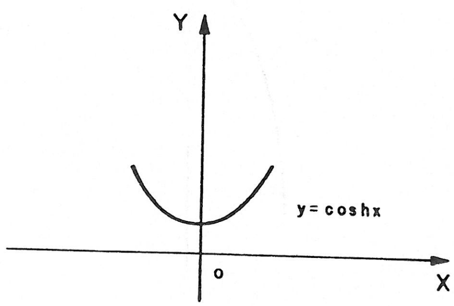


Figura VII.11

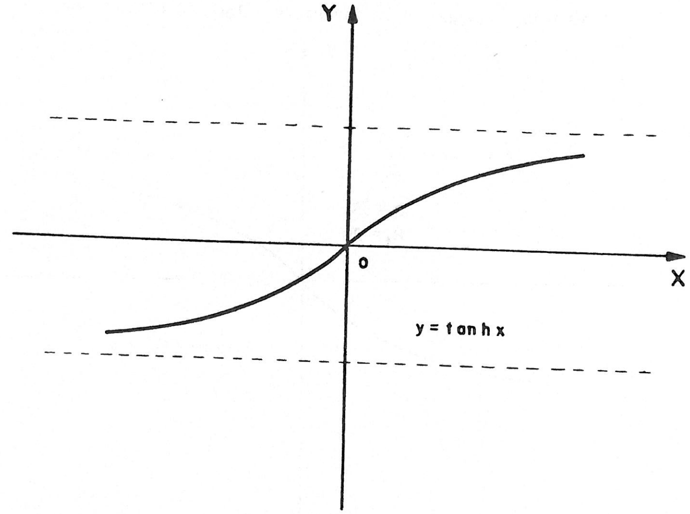


Figura VII.12

$$\tan h\ x = \frac{\operatorname{sen} h\ x}{\cos h\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cot h\ x = \frac{\cos h\ x}{\operatorname{sen} h\ x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sec h\ x = \frac{1}{\cos h\ x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \csc h\ x = \frac{1}{\operatorname{sen} h\ x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = 1$$

$$1 - \tan h^2 x = \sec h^2 x$$

$$1 - \cot h^2 x = -\csc h^2 x$$

$$\operatorname{sen} h\ \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos h\ x - 1}{2}} \qquad \cos h\ \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cos h\ x + 1}{2}}$$

VII.2.6 INVERSAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

Como la función sen h x es inyectiva con dominio e imagen en los reales, su inversa, que se denota sen h^{-1} se define como:

$$y = \operatorname{sen} h^{-1} x \quad \text{si y solo si} \quad x = \operatorname{sen} h\ y$$

y el dominio e imagen de la inversa son los reales.

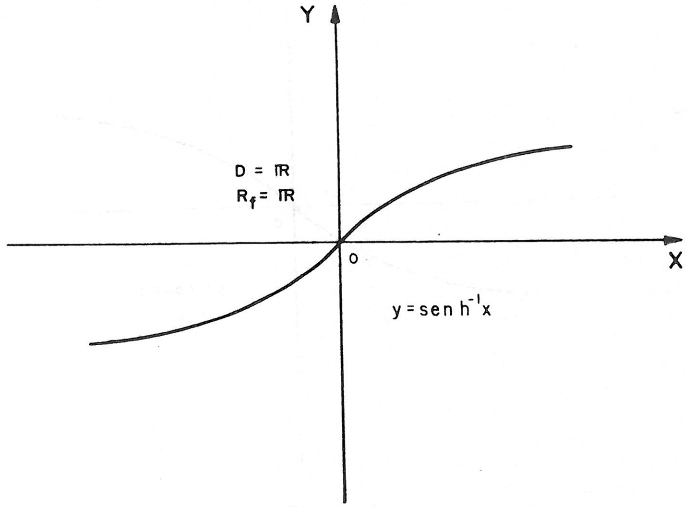


Figura VII.13

Siendo la función coseno hiperbólico una función par, no es inyectiva y por lo tanto no tiene inversa. Sin embargo, si se define:

$$f(x) = \cos h\ x\ ; \quad x \geq 0$$

entonces, se tiene una función uno-uno que tiene inversa y se conoce como la función coseno hiperbólica inversa:

$$y = \cos h^{-1} x \quad \text{si y solo si} \quad x = \cos h\ y \quad y \geq 0$$

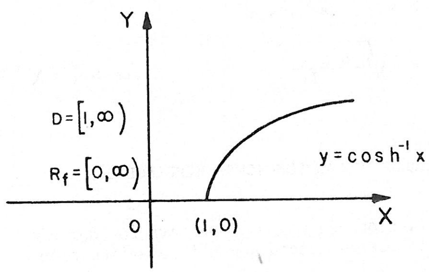


Figura VII.14

Las funciones tangente hiperbólica, cotangente hiperbólica y cosecante hiperbólica son continuas y monótonas, por lo que admiten inversas, y se definen como:

$$y = \tan h^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \tan h\ y$$

$$y = \cot h^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \cot h\ y$$

$$y = \csc h^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \csc h\ y$$

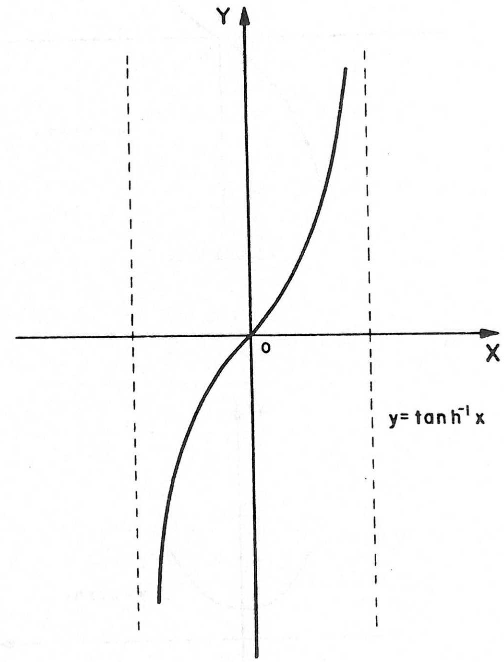


Figura VII.15

La función secante hiperbólica no tiene inversa. Sin embargo, si se define como $f(x) = \sec h\ x;\ x \geq 0$, entonces es continua y monótona en todo su dominio y su inversa será:

$$y = \sec h^{-1} x \quad \text{si y sólo si} \quad x = \sec h\ y \quad y \geq 0$$

Las funciones hiperbólicas inversas pueden ser expresadas en funciones de logaritmos naturales, debido a que la función logarítmica es la inversa de la exponencial. Así por ejemplo, para citar alguna se tiene que:

$$\operatorname{sen} h^{-1}x = \ln\,(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$$

VII.3 DERIVACION E INTEGRACION DE LAS FUNCIONES LOGARITMO, EXPONENCIAL Y DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

VII.3.1 DERIVACION E INTEGRACION DE LAS FUNCIONES LOGARITMO Y EXPONENCIAL

Partiendo de la definición de la función logarítmica:

$$\ln x = \int_1^x \frac{du}{u} \qquad x > 0$$

y aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}; \qquad x > 0$$

si $x < 0$ entonces $\ln x$ no está definida, sin embargo $\ln(-x)$ existe, y si se deriva aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{d\,[\ln(-x)]}{dx} = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

como la derivada es $\frac{1}{x}$ para cada caso, se pueden combinar estos resultados:

$$\frac{d\,[\ln|x|]}{dx} = \frac{1}{x}$$

válida para toda $x \neq 0$. En forma más general, si u y $|u|$ son ambas diferenciables y $u \neq 0$, entonces se llega a la siguiente expresión:

$$\boxed{\frac{d\,[\ln|u|]}{dx} = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}}$$

Se pueden ver algunos ejemplos en los cuales, aparte de utilizar este proceso de derivación, se usarán propiedades de la función ya conocidas.

Ejemplo VII.1

Calcular la derivada de $y = \ln|x^2 - 1|$

Solución

$$\frac{d(\ln|x^2 - 1|)}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1}(2x)$$

$$= \frac{2x}{x^2 - 1} \qquad (x \neq \pm 1)$$

Ejemplo VII.2

Derivar $\ln\sqrt{x(x^2 + 3)}$

Solución

$$y = \ln\sqrt{x(x^2 + 3)} = \frac{1}{2}[\ln x + \ln(x^2 + 3)]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}(1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + 3}(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + \frac{x}{x^2 + 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x^2 + 1)}{2x(x^2 + 3)}$$

Ejemplo VII.3

Derivar $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

Solución

Tomando logaritmo y derivando implícitamente:

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)]$$

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x^2 + 1}\right]$$

$$\frac{1}{y}\,y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^{1/2}\,(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Si $u = f(x)$; entonces la fórmula de integración correspondiente es la siguiente:

$$\boxed{\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C}$$

Ejemplo VII.4

Evaluar $\int \cot x \, dx$

Solución

Se sabe que:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

y además:

$$\frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x;$$

entonces, a través de un cambio de variable se tiene:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx \; ; \; u = \operatorname{sen} x \; ; \; du = \cos x \, dx$$

por lo que:

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$$

de donde:

$$\int \cot x \, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$$

de manera similar se podría demostrar que:

$$\int \tan x \, dx = - \ln |\cos x| + C$$

Ejemplo VII.5

Se desea calcular el valor de:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx$$

Solución

Mediante un cambio de variable:

$$u = x^2 - 2x + 5$$

$$du = 2(x - 1) \, dx$$

por lo que queda:

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + C$$

$$\therefore \int \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 - 2x + 5) + C$$

Si se tiene la función exponencial:

$$y = e^x \qquad x \in \mathbb{R}$$

y como se vio con anterioridad, su derivada es la misma función, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

y lo mismo sucedería con todas sus derivadas sucesivas. Para generalizar la expresión que define la derivada de la función exponencial se utiliza $u = f(x)$ y la regla de la cadena, por lo cual:

$$y = e^u; \qquad u = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo VII.6

Se trata de encontrar la derivada de:

$$y = e^{-3x}$$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = e^{-3x} (-3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -3e^{-3x}$$

Ejemplo VII.7

Calcular la derivada de:

$$e^{\tan x}$$

Solución

$$y = e^{\tan x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \frac{d \tan x}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \sec^2 x$$

La fórmula para la integral de la función exponencial es en consecuencia:

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

y generalizando quedaría como:

$$\boxed{\int e^u\, du = e^u + C}$$

Ejemplo VII.8

Calcular $\int x\, e^{-1+x^2}\, dx$

Solución

Con un cambio de variable se tiene que:

$$u = -1 + x^2; \quad du = 2x\, dx$$

de donde:

$$\int x\, e^{-1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2} e^u + C$$

por lo tanto:

$$\int x\, e^{-1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{-1+x^2} + C$$

Ejemplo VII.9

Evaluar la siguiente integral:

$$\int e^{-\text{sen } x} (\cos x)\, dx$$

Solución

Si se hace:

$$u = -\text{sen } x$$

$$du = -\cos x\, dx$$

con lo cual:

$$\int e^{-\text{sen } x} (\cos x)\, dx = -\int e^u\, du$$

$$= -e^u + C$$

$$\therefore \int e^{-\text{sen } x} (\cos x)\, dx = -e^{-\text{sen } x} + C$$

VII.3.2 DERIVACION E INTEGRACION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

El proceso de derivación e integración de las funciones hiperbólicas, se puede deducir de una manera muy simple acudiendo a sus formas exponenciales y cuando se habla de las inversas, recordando sus formas logarítmicas. Es por ello y por las limitaciones del curso que se tratarán muy brevemente la derivación y la integración de estas funciones.

Derivación. Se puede comenzar con la función $y = \cos h\, x$

Se sabe que:

$$y = \cos h\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

con lo cual:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sen } h\, x$$

Análogamente

$$y = \text{sen } h\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos h\, x$$

$$y = \tan h\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec h^2 x$$

$$y = \sec h\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sec h\, x \tan h\, x$$

$$y = \cot h\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc h^2 x$$

$$y = \csc h\, x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc h\, x \cot h\, x$$

INTEGRACION.- Ahora se presentará una serie de fórmulas para integrar funciones hiperbólicas y algunas otras que revisten mucha utilidad. Hay que recordar que este tipo de funciones son una herramienta muy importante y sirven para simplificar otros procesos matemáticos en este curso y en cursos más avanzados.

$\int \operatorname{sen} hu\, du = \cos hu + C$ $\qquad$ $\int \cos hu\, du = \operatorname{sen} hu + C$

$\int \tan hu\, du = \ln \cos hu + C$ $\qquad$ $\int \cot hu\, du = \ln|\operatorname{sen} hu| + C$

$\int \sec h^2u\, du = \tan hu + C$ $\qquad$ $\int \csc h^2u\, du = -\cot hu + C$

$\int \sec hu \tan hu\, du = -\sec hu + C$ $\qquad$ $\int \csc hu \cot hu\, du = -\csc hu + C$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \operatorname{sen} h^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \cos h^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \tan h^{-1} \frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \cot h^{-1} \frac{u}{a} + C$$

$$u^2 < a^2 \qquad\qquad u^2 > a^2$$

Ahora se verá qué sucede con las funciones logarítmica y exponencial al entrar en juego otras *bases*.

VII.4 DERIVADA DE UNA FUNCION ELEVADA A OTRA FUNCION

VII.4.1 CAMBIOS DE BASE

Habiendo definido e^x para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pueden definir ahora potencias reales de bases diferentes de e. Si $b > 0$ y x es racional, entonces b^x tiene significado del álgebra elemental.

Si

$$y = b^x$$

y se toman ln

$$\ln y = x \ln b \implies$$

$$e^{\ln y} = e^{x \ln b} \implies$$

$$y = e^{x \ln b} \quad \forall\, x \in Q$$

pero el lado derecho está definido $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto puede tomarse esta ecuación como definición de b^x cuando x es irracional.

Definición: Para toda $b > 0$ y $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $b^x = e^{x \ln b}$

Para cada valor de b, la función $f(x) = b^x$, se llama *función exponencial*; cuando $b = e$ la función correspondiente, se llama *función exponencial* por ser la más importante y la más usada en diferentes aplicaciones.

Las propiedades elementales de los exponentes se conservan, es decir:

$$b^x\, b^y = b^{x+y}$$

$$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$(ab)^x = a^x\, b^x$$

$$(b^x)^y = b^{xy}$$

Como la función b^u es derivable si u lo es, entonces b^x es derivable y:

$$\frac{d(b^x)}{dx} = \frac{d(e^{x \ln b})}{dx}$$

$$= e^{x \ln b} \ln b$$

$$= b^x \ln b$$

Puede llegarse a este mismo resultado si se deriva en forma logarítmica

$$y = b^x$$

$$\ln y = x \ln b$$

$$\frac{1}{y}\, y' = \ln b$$

$$y' = y \ln b$$

$$\therefore\ y' = b^x \ln b$$

y en forma general:

$$y = b^u\ ; \quad u = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = b^u \ln b \frac{du}{dx}$$

también se tiene:

$$\int b^u\, du = \frac{b^u}{\ln b} + C$$

expresión que resulta fácil de comprobar si se deriva el segundo miembro.

Si $b > 1$, entonces $\ln b > 0$ y se concluye que b^x es creciente; si $0 < b < 1$, entonces $\ln b < 0$ y b^x es una función decreciente. La figura VII.16 muestra la gráfica de $y = b^x$ para determinados valores de b. Nótese que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

y por lo tanto la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ puede obtenerse de la gráfica de $y = 2^x$ haciendo una reflexión en el eje Y.

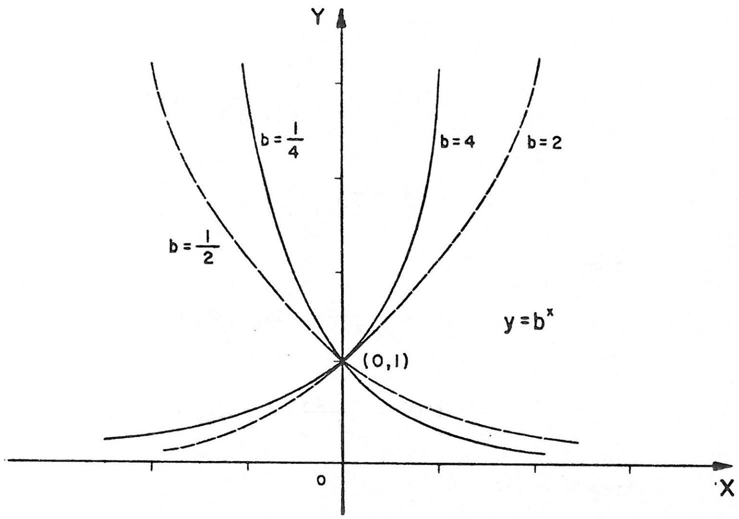


Figura VII.16

Se ve que la función $y = b^x$ siempre es monótona, ya sea creciente o decreciente, por lo que admite inversa. Esta inversa se llama el logaritmo de base b y se denota $\log_b$

Definición: Si $b > 0$, $b \neq 1$, entonces $y = \log_b x \quad x = b^y$.

Para cada valor de b se define una función logarítmica, véase figura VII.17.

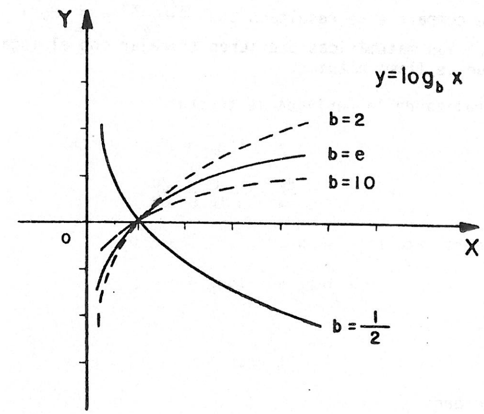


Figura VII.17

Como $\log_b x$ y b^x son inversas, la gráfica de $y = \log_b x$ puede obtenerse de la gráfica de $y = b^x$ haciendo una reflexión en la recta $y = x$.

Si: $\qquad x = b^y$

entonces:

$$\ln x = y \ln b$$

de donde:

$$y = \frac{\ln x}{\ln b}\ ; \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

en particular si $b = e$;

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

por lo tanto, el logaritmo natural es el logaritmo base e y si $b = 10$, se tiene el logaritmo vulgar. Para encontrar la derivada de la función $y = \log_b x$ se tiene que:

$$y = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}}$$

Si se compara este resultado con $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$ da al menos una idea de por qué las matemáticas prefieren trabajar con el logaritmo natural, y por qué se llama *natural*.

Generalizando la derivada se tendrá:

$$y = \log_b u \ ; \quad u = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u \ln b} \frac{du}{dx}$$

Por otro lado si $e^x = N$

$$x \log_b e = \log_b N$$

pero:

$$x = \ln N$$

por lo que:

$$\ln N \log_b e = \log_b N$$

luego:

$$y = \log_b u = \ln u \log_b e \ ; \quad u = f(x)$$

derivando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \log_b e$$

por lo que cualquiera de las dos expresiones puede ser indistintamente empleada. Ahora se presentan algunos ejercicios de aplicación.

Ejemplo VII.10

Derivar: $f(x) = 3^{5x}$

Solución

$$f(x) = 3^{5x}$$

$$f'(x) = 3^{5x} \ \ln 3 \cdot 5$$

$$\therefore \ f'(x) = 3^{5x} \ 5 \ln 3$$

Ejemplo VII.11

Calcular la derivada de $f(x) = \log_3 (x^2 - 1)$

Solución

$$f(x) = \log_3 (x^2 - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 1) \ln 3} (2x)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 1) \ln 3}$$

o bien:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} (2x) \ \log_3 e$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \ \log_3 e$$

Ejemplo VII.12

Calcular $\int x^2 \ 5^{2x^3} dx$

Solución

$$\int x^2 \ 5^{2x^3} dx$$

Mediante un cambio de variable:

$$u = 2x^3$$

$$du = 6x^2 \, dx$$

de donde:

$$\int x^2\, 5^{2x^3}\, dx = \frac{1}{6} \int 5^u\, du$$

$$= \frac{1}{6}\, \frac{5^u}{\ln 5} + C$$

$$\therefore \int x^2\, 5^{2x^3}\, dx = \frac{5^{2x^3}}{6 \ln 5} + C$$

VII.4.2 DERIVADA DE UNA FUNCION ELEVADA A OTRA FUNCION

Se tiene una función $f(x) = U^V$ en donde U y V son funciones de x, es decir:

$$U = u(x) \qquad y \qquad V = v(x)$$

A esta función se le conoce como *función exponencial general* y para derivarla se procede como sigue:

$$y = U^V\ ; \quad U = u(x) \qquad y \qquad V = v(x)$$

$$\ln y = V \ln U$$

$$e^{\ln y} = e^{V \ln U}$$

de donde:

$$y = e^{V \ln U}$$

derivando se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = e^{V \ln U} \left(V \cdot \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \ln U \frac{dV}{dx} \right)$$

como $y = e^{V \ln U}$, sustituyendo $y = e^{V \ln U} = U^V$

$$\frac{dy}{dx} = U^V \left(\frac{V}{U} \frac{dU}{dx} + \ln U \frac{dV}{dx} \right)$$

y finalmente:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = V U^{V-1} \frac{dU}{dx} + U^V \ln U \frac{dV}{dx}}$$

En esta expresión, el primer sumando equivale a derivar U^V considerando como constante a V, el segundo sumando es la derivada de U^V considerando a U como constante.

Ejemplo VII.13

Derivar $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Solución

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x}\; x^{\sqrt{x} - 1}\,(1) + x^{\sqrt{x}} \ln x\, \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right)$$

$$f'(x) = \frac{x^{\sqrt{x}+1}}{2x\sqrt{x}}\,(2 + \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{x^{\sqrt{x} - 1/2}}{2}\,(2 + \ln x)$$

Ejemplo VII.14

Calcular la derivada de $(\operatorname{sen} x)^x$

Solución

$$y = (\operatorname{sen} x)^x$$

$$\frac{dy}{dx} = x\,(\text{sen}\ x)^{x-1}\ \cos x + (\text{sen}\ x)^{x}\ \ln \text{sen}\ x \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = (\text{sen}\ x)^{x}\left(\frac{x \cos x}{\text{sen}\ x} + \ln\ \text{sen}\ x\right)$$

Ejemplo VII.15

Calcular $f'(x)$ para $f(x) = x^{x^{x}}$

Solución

$$f(x) = x^{x^{x}}$$

$$f'(x) = x^{x}\ x^{x^{x}-1} + x^{x^{x}}\ \ln x\ (x\, x^{x-1} + x^{x}\ \ln x)$$

$$f'(x) = x^{x^{x}+x-1} + x^{x^{x}+x}\ \ln x + x^{x^{x}+x}\ (\ln x)^{2}$$

tomando $x^{x^{x}+x}$ como factor común queda:

$$f'(x) = x^{x^{x}+x}\left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^{2}\right)$$

VII.4.3 DERIVADA DE UNA FUNCION ELEVADA A UN EXPONENTE REAL

En el capítulo III se trató la derivada de una función elevada a un exponente natural y se hizo notar que la fórmula de derivación obtenida era válida para todo exponente real, aunque sin demostrarlo.

Con el auxilio de la función *logaritmo natural* se puede demostrar fácilmente cómo la expresión vista en el capítulo III se cumple para cualquier exponente que pertenezca a los números reales.

En efecto, sea la función identidad elevada a un exponente real:

$$y = x^{r} \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$

si se aplica la función logaritmo natural y sus propiedades en ambos miembros, se tendrá:

$$\ln y = \ln x^{r}$$

$$\ln y = r \ln x$$

si se deriva:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = r\,\frac{1}{x}$$

de donde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{x}\,y$$

y sustituyendo $y = x^{r}$ se tiene finalmente:

$$\frac{dy}{dx} = r\,x^{r-1}$$

que es la fórmula ya conocida.

Para el caso de otro tipo de funciones, se procede de la misma manera, utilizando la regla de la cadena, es decir la derivación de una función de función.

Así:

$$y = u^{r} \quad ; \quad u = f(x) \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$

entonces:

$$\frac{dy}{dx} = r\,u^{r-1}\ \frac{du}{dx}$$

VII.5 LIMITE DE UNA FUNCION CUANDO LA VARIABLE TIENDE AL INFINITO. REGLA DE L'HÔPITAL. INTEGRALES IMPROPIAS

VII.5.1 LIMITE DE UNA FUNCION CUANDO LA VARIABLE TIENDE AL INFINITO

Aunque en el inciso VII.2, se trató la no existencia del límite, es decir, cuando la función tiene como límite a: $+\infty$ ó $-\infty$, y también se vio lo que sucedía mecánicamente cuando la variable independiente tendía a $+\infty$ ó $-\infty$; cabe citar aquí con rigor en la definición, cuándo la función tiene como límite al infinito y cuándo la variable tiende al infinito. El problema se enmarca en cuatro casos que a continuación se tratarán. Durante este estudio se debe tomar en cuenta que es distinto el tratamiento de un límite cuando el argumento tiende a infinito y cuando tiende a cualquier valor real, ya que en el primer caso no sería aplicable siquiera la existencia del límite a través de la igualdad de los límites.

PRIMER CASO

Sea $y = f(x)$ una función definida en los reales cuya gráfica se ve en la figura VII. 18.

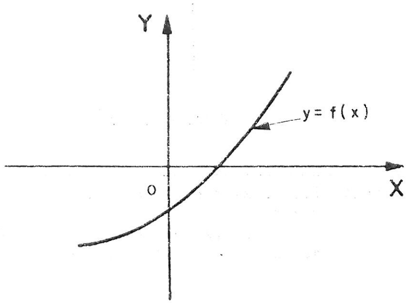


Figura VII.18

Definición: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ si para todo número M tan grande como se quiera, existe un valor N (que depende de M y de f(x)) tal que: $f(x) > M$ siempre que $x > N$

Ejemplo VII.16

Sea $f(x) = x^3$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Solución

Para todo número M, tan grande como se quiera, existe N tal que:

$$f(x) > M \quad \text{siempre que} \quad x > N$$

en efecto si:

$$N = \sqrt[3]{M}$$

por hipótesis:

$$x > N$$

$$x > \sqrt[3]{M}$$

$$x^3 > M$$

$$f(x) > M$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura VII.19.

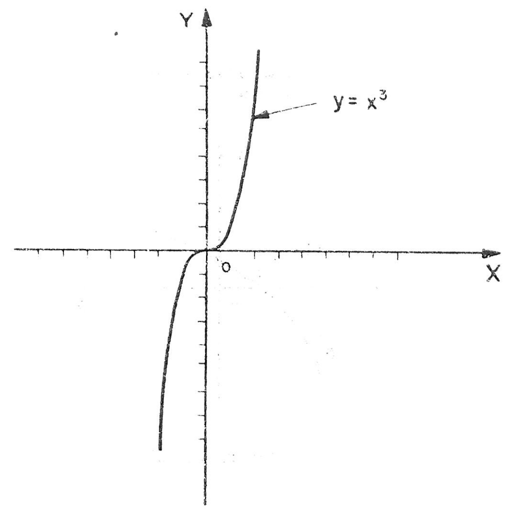


Figura VII.19

En forma análoga se definiría:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

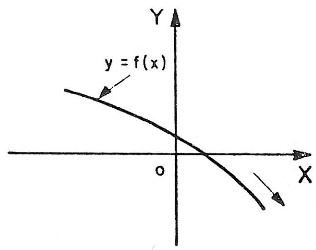


Figura VII.20

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

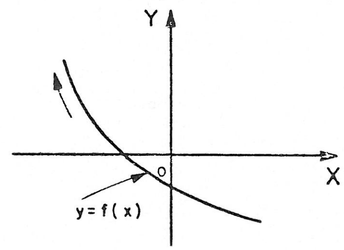


Figura VII.21

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

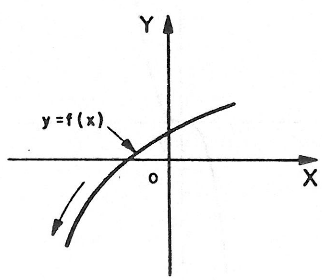


Figura VII.22

SEGUNDO CASO

Sea $y = f(x)$ una función continua, definida en los reales y cuya gráfica se ve en la figura VII. 23.

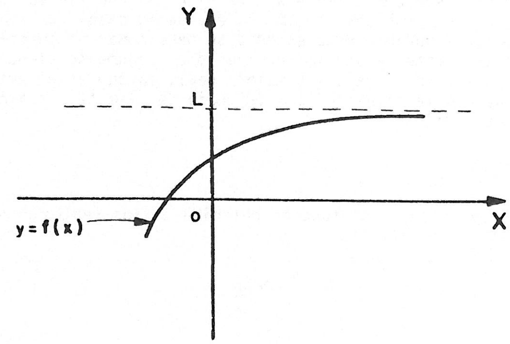


Figura VII.23

Definición:	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ si para toda $\varepsilon > 0$ y tan pequeña como se quiera, existe un número N (que es función de ε y de $f(x)$) tal que: $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ siempre que $x > N$

La recta $y = L$ es una asíntota paralela al eje X.

Ejemplo VII.17

Sea $f(x) = \dfrac{2\,x^2}{x^2 + 2}$; $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, demostrar que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$

Solución

Para toda $\varepsilon > 0$ y tan pequeña como se quiera existe un valor N tal que:

$$\lvert f(x) - 2 \rvert < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad x > N$$

en efecto:

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{2x^2}{x^2 + 2} - 2 \right| =$$

$$\left| \frac{2x^2 - 2x^2 - 4}{x^2 + 2} \right| = \left| \frac{-4}{x^2 + 2} \right| = \frac{4}{x^2 + 2}$$

Ahora bien si $N = \sqrt{\dfrac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}}$ entonces por hipótesis:

$$x > N \implies x > \sqrt{\frac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}}$$

$$x^2 > \frac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$x^2 + 2 > \frac{4 - 2\varepsilon}{\varepsilon} + 2$$

$$x^2 + 2 > \frac{4 - 2\varepsilon + 2\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$x^2 + 2 > \frac{4}{\varepsilon}$$

$$\frac{x^2 + 2}{4} > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{y como} \qquad \varepsilon > 0$$

$$\frac{4}{x^2 + 2} < \varepsilon$$

de donde:

$$|f(x) - 2| = \frac{4}{x^2 + 2} < \varepsilon$$

siempre que:

$$x > N$$

La gráfica correspondiente se ve en la figura VII. 24

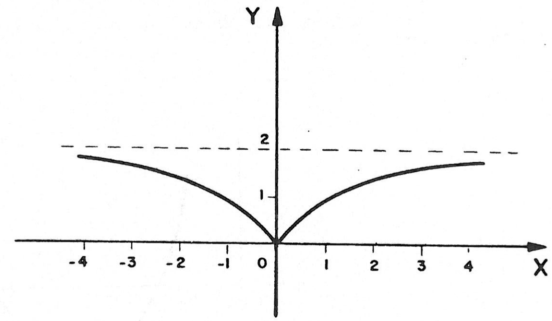


Figura VII.24

La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Casos análogos a éste se observan en las figuras VII.25, VII.26 y VII.27.

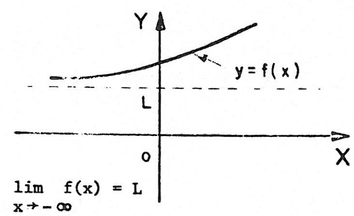


Figura VII.25

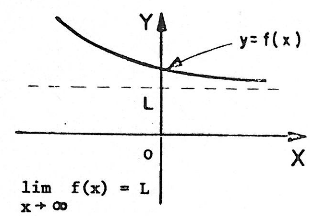


Figura VII.26

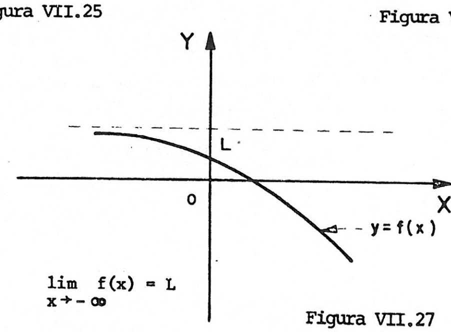


Figura VII.27

CAPITULO IV VARIACION DE FUNCIONES

INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se tocaron los conceptos de función, límite, continuidad y derivada, así como ejercicios de aplicación de los mismos. De esta forma ya se tienen herramientas para el estudio de la variación de una función, por lo que en una primera parte se tratarán algunos teoremas de apoyo para más adelante introducir las características fundamentales de variación como son los intervalos en los que una función crece o decrece, sus extremos, sus puntos de inflexión y el sentido de su concavidad. Y así se podrá proceder al trazo de su gráfica sin necesidad del uso de la tabulación.

Cabe hacer notar que este capítulo también contempla problemas relacionados con aspectos físicos y geométricos, en los cuales el estudiante debe construir el modelo matemático para llegar a su solución.

IV.1 TEOREMA DE WEIERSTRASS, TEOREMA DE BOLZANO, TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

La demostración de los teoremas de Weierstrass y de Bolzano, cae fuera de los propósitos de estos apuntes, por lo cual se da solamente su enunciado e ilustración geométrica.

Estos teoremas son necesarios para el mejor entendimiento de los conceptos que se estudian en el desarrollo de este capítulo y principalmente sirven de fundamento en la comprensión del teorema de Rolle, el cual es a su vez la base para el estudio del teorema del *Valor Medio del Cálculo Diferencial.*

TEOREMA IV.1 DE WEIERSTRASS

Hipótesis:

La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Tesis:

Entre todos los valores de $f(x)$, en el intervalo $[a, b]$, hay un valor $M = f(x_1)$, llamado máximo absoluto, que no es superado por ningún otro valor de $f(x)$ en $[a, b]$ y un valor $m = f(x_2)$, llamado mínimo absoluto, que no supera a ninguno de los valores de $f(x)$ en $[a, b]$.

Esto es:

$$m = f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1) = M$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DE WEIERSTRASS

En la figura IV.1, se ven dos ilustraciones geométricas de este teorema; en ellas la curva C es la gráfica de la función $y = f(x)$, continua en el intervalo $[a, b]$.

Debe observarse que tanto el máximo absoluto M, como el mínimo absoluto m pueden presentarse para los valores de x extremos del intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura IV.1, donde $M = f(a)$ y $m = f(b)$ y que M ó m pueden presentarse para más de un valor de x en $[a, b]$.

Para el caso particular de la función constante $y = k$, se tiene que:

$$M = m = k$$

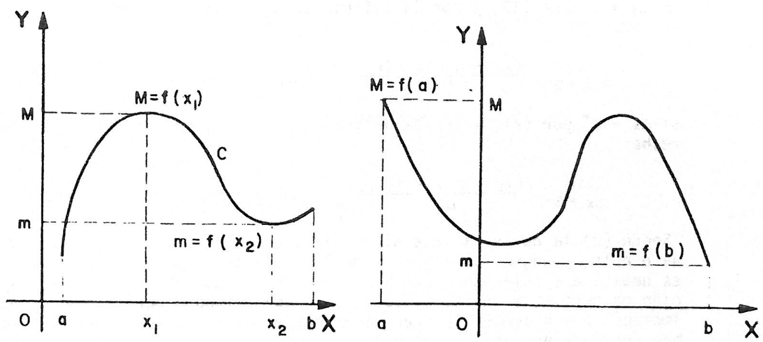


Figura IV.1

TEOREMA IV.2 DE BOLZANO

Hipótesis:

Sea $y = f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea y_0 un valor de $f(x)$ tal que:

$$m \leq y_0 \leq M$$

Tesis:

Cuando menos para un valor x_0 de x en $[a, b]$, se tiene que $y_0 = f(x_0)$.

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA DE BOLZANO

Una ilustración de este teorema se presenta en la figura IV.2, en la cual dicho teorema se cumple para dos valores de x:

$$x_0 \in [a, b] \quad y \quad x_1 \in [a, b] \quad y_0 = f(x_0) = f(x_1)$$

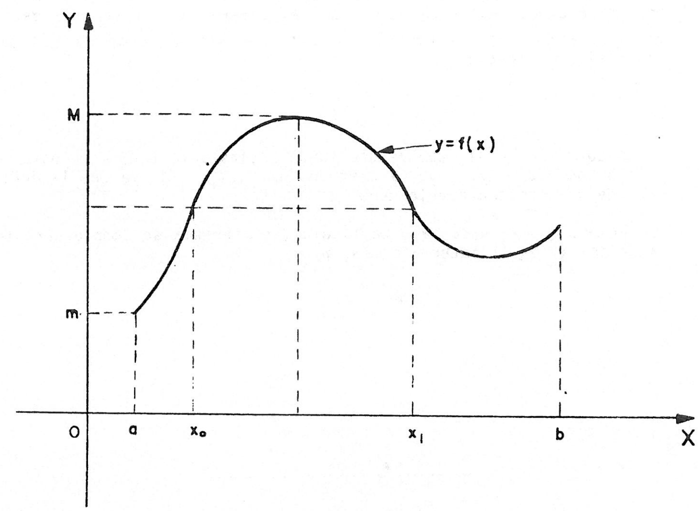


Figura IV.2

TEOREMA IV.3 DE ROLLE

Hipótesis:

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones siguientes:

1. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.

La gráfica se ve en la figura VII. 33.

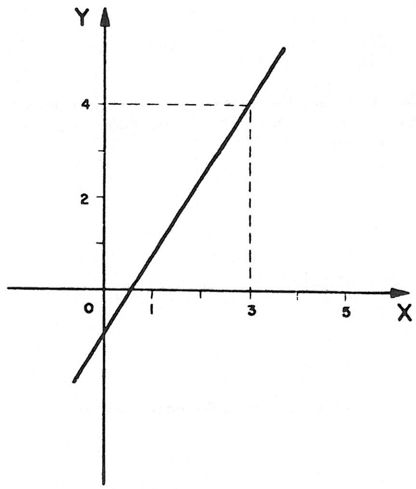


Figura VII.33

Ejemplo VII.20

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ con $x \neq 1$ demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

Solución

Para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - 2| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - 1| < \delta$$

$$|f(x) - 2| = \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right|$$

$$= \left| \frac{x^2 - 1 - 2x + 2}{x - 1} \right|$$

$$= \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \right|$$

$$= \left| \frac{(x - 1)(x - 1)}{x - 1} \right|$$

$$= |x - 1| < \delta$$

luego: $\delta = \varepsilon$

La gráfica se muestra en la figura VII. 34.

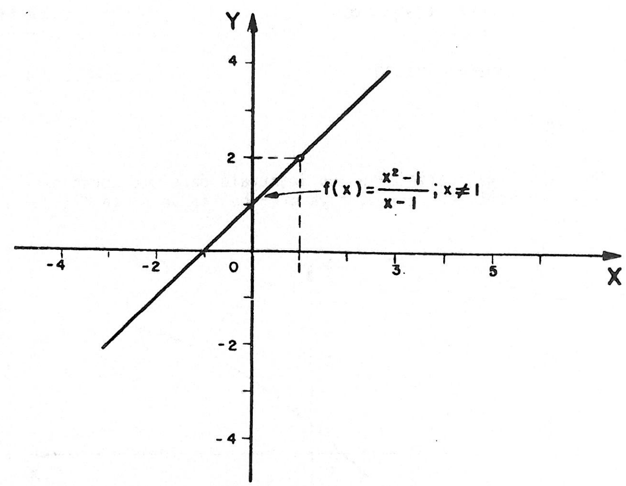


Figura VII.34

VII.5.2 REGLA DE L'HÔPITAL. FORMAS INDETERMINADAS

Cuando una función $y = f(x)$, toma una de las siguientes formas para un determinado valor de x:

$$f(x) = \frac{0}{0}\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ (0)(\infty),\quad \infty - \infty\ ,\ 0^{\circ}\ ,\ 1^{\infty}$$

se dice que la función $y = f(x)$ toma una *forma indeterminada.*

Al estudiar el capítulo II en el cálculo de algunos límites, cuando resultaba $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se vieron varios casos en los cuales se mostró la forma de eliminar dicha indeterminación. Es decir, dada una función $y = f(x)$, si para algún valor de la variable independiente el límite de la función toma una de las dos formas anteriores de indeterminación, ya sea $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se ha visto cómo conocer el valor de dicho límite, mediante una transformación o procedimiento algebraico.

Sin embargo, una de las aplicaciones de la derivada, es precisamente poder eliminar dicha indeterminación en una forma más sencilla, a través de la regla de L'Hôpital, la cual se describe a continuación:

REGLA DE L'HÔPITAL

Dada la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$, si $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$, se presenta en el cociente una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, para $x = a$.

El problema que se plantea consiste en encontrar:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

para ello, se hará uso del siguiente teorema:

TEOREMA VII.4. REGLA DE L'HÔPITAL

Hipótesis:

A. Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$, dos funciones derivables en el intervalo abierto I, excepto posiblemente en el número $a \in I$.

B. Para toda $x \neq a$ en I, $g'(x) \neq 0$.

C. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

D. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Tesis:

Se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El teorema anterior es válido si los límites a los que se hace mención son todos límites derechos, límites izquierdos o límites totales.

Demostración:

Para la demostración del teorema anterior, se distinguen tres casos:

Caso 1. $x \to a^{+}$

Caso 2. $x \to a^{-}$

Caso 3. $x \to a$

Analizando la demostración del primer caso, se observa que en las condiciones del teorema no se supone que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ están definidos en a, por tal motivo, considerando que:

para $x \neq a$ $\quad y = f(x)$ $\quad$ y $\quad y = g(x)$

y

para $x = a$ $\quad y = f(a) = 0$ $\quad$ y $\quad y = g(a) = 0$ $\quad \ldots (1)$

Sea b el punto extremo derecho del intervalo abierto I dado en las condiciones del teorema. Puesto que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas derivables en I, excepto posiblemente en a, se concluye que $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas derivables en el intervalo $(a, x]$, donde $a < x \leq b$.

Así que, $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son ambas continuas en el intervalo $(a, x]$. Las funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son también continuas a la derecha de a ya que:

$$\lim_{x \to a^{+}} f(x) = 0 = f(a)$$

y

$$\lim_{x \to a^{+}} g(x) = 0 = g(a) \qquad \ldots (2)$$

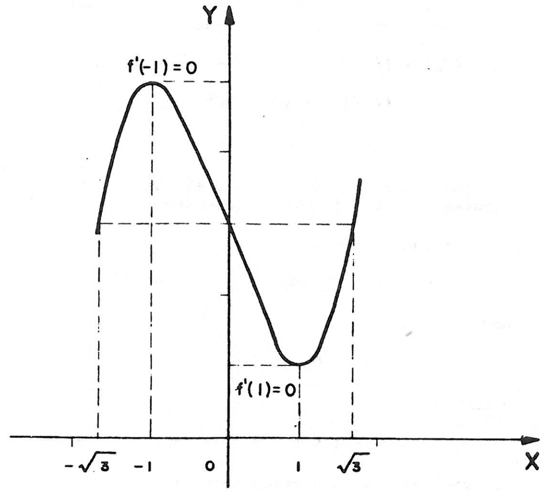


Figura IV.5

Ejemplo IV.2

Si la función $f(x) = 4 - x^{2/3}$ cumple con las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$, hallar los valores de $x \in (-3, 3)$ para los que se verifica el teorema. Trazar la gráfica correspondiente.

Solución

Si se aplican las condiciones de la hipótesis del teorema se ve que:

1. La función es continua en el intervalo $[-3, 3]$ dado que siempre se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0} (4 - x^{2/3}) = 4 - x_0^{2/3} \quad \text{es decir, } \forall x_0 \in [-3, 3]$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. La derivada de la función es:

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Se observa que $f'(x)$ no está definida para $x_1 = 0$ y $0 \in (-3, 3)$, luego la función no es derivable en el intervalo $(-3, 3)$, y por lo tanto no cumple con la segunda condición de la hipótesis del teorema.

Esto implica que el teorema de Rolle, no es aplicable a la función:

$$f(x) = 4 - x^{2/3} \quad \text{en } [-3, 3]$$

En la figura IV.6, se observa que, aun cuando la gráfica de la función es una curva continua y los puntos extremos A y B en el intervalo dado tienen la misma ordenada, no existe ningún punto de la gráfica entre A y B donde la recta tangente a ella sea paralela al eje de las abscisas.

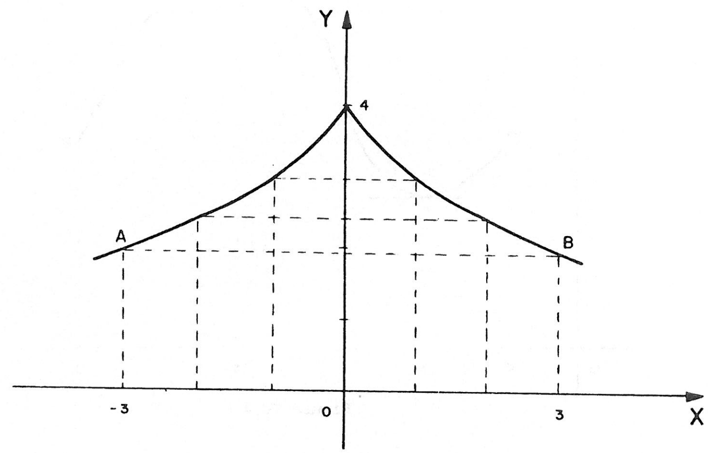


Figura IV.6

Ejemplo IV.3

Dada la función $f(x) = |x - 2|$, y el intervalo $[-2, 6]$, si es aplicable el teorema de Rolle, determinar el o los puntos donde se verifica.

Solución

Para ver si se cumplen las condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle es necesario ver primero si la función es continua en el intervalo considerado. Su representación gráfica es:

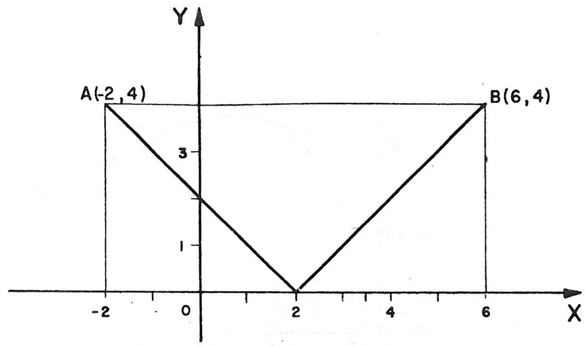


Figura IV.7

Continuidad. El único punto de sospecha es $x = 2$, en donde se tiene que:

1. $f(2) = 0$ cumple

2. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$ cumple

3. $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$ cumple

Por lo que $f(x)$ es continua en $x = 2$ y por consiguiente en $[-2, 6]$

Derivabilidad. Para $x = 2$

$f'_-(x) = -1$ $\qquad f'_+(x) = 1$

de donde:

$$f'_-(2) = -1 \quad \text{y} \quad f'_+(2) = 1$$

como:

$$f'_-(2) \neq f'_+(2)$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$

De dichas conclusiones se tiene:

1. La función es continua en $[-2, 6]$

2. La función no es derivable para $x_1 = 2 \in (-2, 6)$, luego no es derivable en el intervalo abierto $(-2, 6)$.

Esto hace que el teorema de Rolle no sea aplicable en este caso.

La figura IV.7 muestra la gráfica de la función dada, en la cual se ve que entre los puntos $A(-2, 4)$ y $B(6, 4)$, no hay ningún punto donde la recta tangente sea paralela al eje de las abscisas.

TEOREMA IV.4 DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL

Hipótesis:

Sea la función $y = f(x)$ que cumple con las condiciones:

1. $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. $y = f(x)$ es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Tesis:

Existe por lo menos un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual:

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad a < x_1 < b$$

Demostración:

Sea $y = f(x)$ una función que cumple con las condiciones de la hipótesis del teorema y considérese la función auxiliar:

$$\Psi(x) = f(x) - Ax \qquad \ldots (5)$$

en la cual A es constante.

Esta función es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), dado que es la suma algebraica de dos funciones que lo son.

Por lo mismo, la función (5) cumple con las dos primeras condiciones de la hipótesis del teorema de Rolle y para que también cumpla con la tercera condición de dicha hipótesis, basta determinar el valor adecuado de A, estableciendo la condición:

$$\Psi(a) = \Psi(b) \qquad \ldots (6)$$

Como $\Psi(a) = f(a) - Aa$ y $\Psi(b) = f(b) - Ab$, se tendrá según la expresión (6).

Como puede observarse, la indeterminación persiste una vez que se ha aplicado la regla, de esta manera, aplicándola por segunda vez, resulta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-0}{1} = \frac{1}{2}$$

finalmente, se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{1-\cos x} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo VII.24

Dada la función:

$$F(x) = \frac{L\ x}{\csc x}$$

hallar:

$$\lim_{x\to 0} F(x)$$

Solución

Considerando a la función $F(x) = \frac{L\ x}{\csc x}$ como un cociente de dos funciones, es decir:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L\ x}{\csc x}$$

y tomando límites cuando $x \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\ x}{\csc x} = \frac{-\infty}{\infty}$$

dado que:

$$L\ x \to -\infty \qquad \text{si} \qquad x \to 0^+$$

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \to \infty \qquad \text{si} \qquad x \to 0$$

Entonces para eliminar la indeterminación, se hace uso de la regla de L'Hôpital, teniendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\ x}{\csc x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}$$

como:

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad y \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\ x}{\csc x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \frac{0}{0}$$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{(-x\operatorname{sen} x+\cos x)} = \frac{0}{1} = 0$$

finalmente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{L\ x}{\csc x} = 0$$

Tal como puede apreciarse, los ejemplos anteriores muestran la aplicación de la regla de L'Hôpital, en los casos en que únicamente se presentan indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

DETERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $(0)(\infty)$

Si una función $F(x)$ considerada como el producto de dos funciones, $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, toma la forma indeterminada $(0)(\infty)$, para un valor de x, la función dada puede escribirse en la forma:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Esto se hace con el objeto de llegar a obtener una de las formas vistas anteriormente y de esta manera poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Ejemplo VII.25

Calcular:

$$\lim_{x \to 0^+} x\, L\, x$$

Solución

Considerando a: $\lim_{x \to 0^+} x\, L\, x$ como:

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to 0^+} x\, L\, x$$

donde:

$$F(x) = x, \qquad g(x) = L\, x$$

se obtiene que:

$$\lim_{x \to 0^+} x\, L\, x = 0 \cdot \infty$$

por lo tanto, haciendo:

$$\lim_{x \to 0^+} x\, L\, x = \lim_{x \to 0^+} \frac{L\, x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

La forma de la indeterminación anterior, permite el empleo de la regla de L'Hôpital, es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{L\, x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

por lo cual $\lim_{x \to 0^+} x\, L\, x = 0$

ERMINACION DEL VALOR DE LA FORMA $\infty - \infty$

Si una función $F(x)$, considerada como la diferencia de dos funciones $F(x) = f(x) - g(x)$, toma la forma indeterminada $\infty - \infty$ para un valor de x, en general es posible transformarla en una fracción que tomará la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, mediante algún procedimiento algebraico, y de esta manera, es posible aplicar la regla de L'Hôpital y encontrar un valor determinado.

Ejemplo VII.26

Calcular:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right)$$

Solución

Considerando a $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right)$ como:

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \left[f(x) - g(x) \right] = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{L\, x} \right)$$

por otro lado:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

luego:

$$3x^2 - 10x - 3 = -10 \Longrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0$$

resolviendo esta ecuación se obtiene:

$$x_1 = \frac{7}{3};\ x_2 = 1$$

como:

$$\frac{7}{3} \in (1,\ 3) \text{ y } 1 \notin (1,\ 3),$$

el único valor para el cual se cumple el teorema en (1,3) es $x_1 = \frac{7}{3}$

Ejemplo IV.5

¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo diferencial a la función $f(x) = 2/x$ en el intervalo $[-1,\ 2]$? En caso afirmativo, determinar el o los valores de x donde se cumple el teorema.

Solución

Aplicando las condiciones de la hipótesis del teorema, se ve que:

1. La función $f(x) = 2/x$ es discontinua para $x = 0$ y $x = 0 \in [-1,\ 2]$, luego la función no es continua en el intervalo cerrado $[-1,\ 2]$. No cumpliéndose la primera condición de la hipótesis, se concluye que el teorema no es aplicable en el intervalo mencionado.

Gráficamente se puede constatar con mucha facilidad esta conclusión, observando en la figura IV.9, que no existe ningún punto de la gráfica de $y = 2/x$ entre los puntos A(-1, -2) y B(2, 1) en donde la recta tangente sea paralela a la cuerda que pasa por A y B.

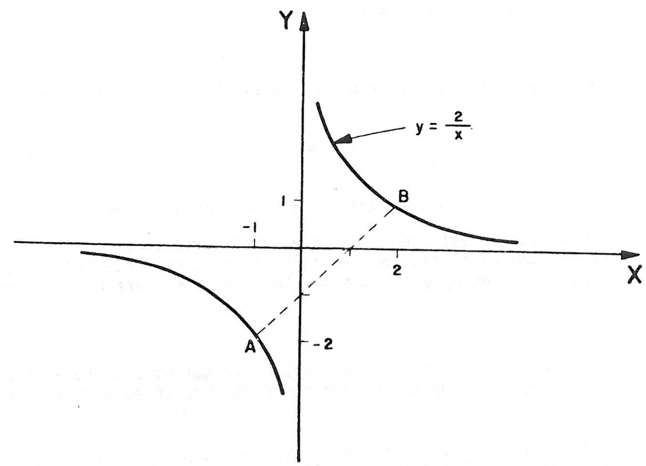


Figura IV.9

Ejemplo IV.6

Hacer ver que el teorema del valor medio del cálculo diferencial no es aplicable a la función $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ en el intervalo $[0,\ 3]$, indicando por qué y trazando la gráfica correspondiente.

Solución

La función $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ es continua para todo valor de x, ya que siempre se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

luego la primera condición de la hipótesis del teorema sí se cumple.

1. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ es continua en $[0,\ 3]$

   La derivada de la función es:

$$f'(x) = \frac{2}{3(x - 2)^{1/3}}$$

Se observa que esta derivada no existe para $x = 2$ y $2 \in (0, 3)$, luego no se cumple la segunda condición de la hipótesis del teorema.

2. $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ no es derivable en $(0, 3)$.

Por esto no es aplicable el teorema.

En la figura IV.10, se ilustra este ejemplo. Puede observarse que es imposible que la recta tangente a la curva en algún punto entre A y B, sea paralela a la secante $\overline{AB}$.

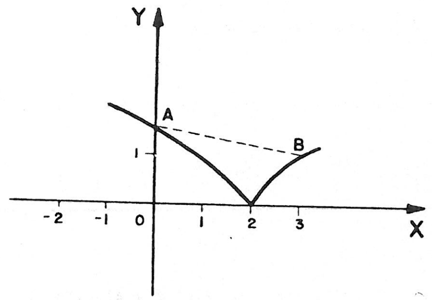


Figura IV.10

Otra forma en que suele presentarse la tesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial es la siguiente:

Si de:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1); \qquad a < x_1 < b$$

se despeja $f(b)$, queda:

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(x_1); \quad a < x_1 < b$$

$$a < x_1 < b \implies x_1 - a > 0, \quad b - a > 0 \implies 0 < \frac{x_1 - a}{b - a} < 1 \quad \ldots (9)$$

sea:

$$\frac{x_1 - a}{b - a} = \theta,$$

se tendrá:

$$0 < \theta < 1$$

luego:

$$x_1 = a + (b - a)\,\theta, \qquad \text{y si} \quad b - a = h;\ b = a + h$$

y

$$x = a + h\,\theta, \quad 0 < \theta < 1$$

Considerando esto en la expresión (9)

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + h\theta) \qquad 0 < \theta < 1 \quad \ldots (10)$$

Obsérvese que las expresiones (9) y (10) son equivalentes.

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, puede ser muy útil para estimar la magnitud de la variable dependiente y hacer aproximaciones numéricas.

Ejemplo IV.7

Empleando el teorema del valor medio del cálculo diferencial, estimar $\sqrt[3]{28}$.

Solución

Tomando

$$f(x) = \sqrt[3]{x};\ f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}; \quad a = 27, \quad b = 28$$

y aplicando lo visto con anterioridad, queda:

$$\sqrt[3]{28} = \sqrt[3]{27} + [(28 - 27)] \left[\frac{1}{3x_1^{2/3}}\right]; \quad 27 < x_1 < 28$$

esto es:

$$\sqrt[3]{28} = 3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} \qquad \ldots (a)$$

pero como:

$$27 < x_1 \implies \frac{1}{3x_1^{2/3}} < \frac{1}{3(27)^{2/3}} = \frac{1}{3(9)} = \frac{1}{27}$$

$$3 + \frac{1}{3x_1^{2/3}} < 3 + \frac{1}{27}$$

luego por (a):

$$3 < \sqrt[3]{28} < 3 + \frac{1}{27}$$

Para mostrar una aplicación del teorema del valor medio del cálculo diferencial expresado en la ecuación (10) se da el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.8

Demostrar que:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20}$$

Solución

Sea :

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad a = 100 \quad h = 1$$

entonces $a + h = 101$

$$f(a + h) = \sqrt{101}, \; f(a) = \sqrt{100}$$

como:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow f'(a + h\theta) = f'(100 + \theta) = \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} \; ; \; 0 < \theta < 1$$

aplicando (10):

$$\sqrt{101} = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}; \quad 0 < \theta < 1$$

esto es:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} = \frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}}$$

pero:

$$\frac{1}{2\sqrt{100 + \theta}} < \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$$

luego:

$$\sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20}$$

TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CALCULO DIFERENCIAL PARA DOS FUNCIONES

Este teorema conocido también como *teorema de Cauchy*, es fundamental para estudiar la *Regla de L' Hôpital* que se ve en el siguiente inciso.

TEOREMA IV.5 DE CAUCHY

Hipótesis:

Sean $y = f(x)$, $y = g(x)$ dos funciones que cumplen con las condiciones:

1. $y = f(x)$, $y = g(x)$ son continuas en el intervalo $[a, b]$.
2. $y = f(x)$, $y = g(x)$ son derivables en el intervalo (a, b).
3. $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en (a, b).

Tesis:

Existe por lo menos un valor x_1 en el intervalo abierto (a, b) para el cual:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} \; ; \quad a < x_1 < b \qquad \ldots (11)$$

Demostración:

Conviene primero hacer ver que $g(b) \neq g(a)$ para que la expresión (11) tenga sentido.

En efecto la función $y = g(x)$ cumple con las condiciones de la hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[a, b]$, luego se tiene:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x_1); \quad a < x_1 < b$$

pero:

$$g'(x) \neq 0 \;\forall\; x \in (a, b) \Longrightarrow g'(x_1) \neq 0$$

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \neq 0 \Longrightarrow g(b) - g(a) \neq 0 \Longrightarrow g(b) \neq g(a)$$

Ahora bien, considérese la función auxiliar

$$\phi(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left[g(x) - g(a)\right] - \left[f(x) - f(a)\right] \quad \ldots (12)$$

Como puede observarse, $\phi(a) = \phi(b) = 0$, entonces la función (12) cumple con las tres condiciones del teorema de Rolle.

Como:

$$\phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) - f'(x) \qquad \ldots (13)$$

de esta manera:

$$\lim_{x\to\infty^+} L\ \phi(x) = \lim_{x\to\infty^+} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

como el límite que se busca es $\lim_{x\to+\infty} \phi(x)$, finalmente queda:

$$\lim_{x\to\infty^+} \phi(x) = \lim_{x\to\infty^+} f(x)^{g(x)} = e^1 = e$$

Ejemplo VII.29

Calcular:

$$\lim_{x\to\infty} x^{e^{-x}}$$

Solución

Considerando a $\lim_{x\to\infty} x^{e^{-x}}$ como:

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{e^{-x}} = \infty^\circ$$

tomando logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty} L\ \phi(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\, L\, x = 0 \cdot \infty$$

aplicando el método para eliminar dicha indeterminación, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L\ x}{\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{L\ x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

utilizando la regla de L'Hôpital y calculando el límite se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L\ x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ e^x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

así pues, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} L\ \phi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\ x}{e^x} = 0$$

finalmente:

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty} x^{e^{-x}} = e^\circ = 1$$

Ejemplo VII.30

Hallar:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$$

Solución

Si $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 0^\circ$

tomando logaritmos:

$$L\ x^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x\ L\ x \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} L\ x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x\ L\ x$$

$$\lim_{x\to 0^+} L\ \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{L\ x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} L\,\phi(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}$$

aplicando nuevamente la regla:

$$\lim_{x\to 0^+} L\,\phi(x) = -\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = -\frac{2(0)}{1-0} = 0$$

luego:

$$\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$$

VII.5.3 INTEGRALES IMPROPIAS

Sea una función f continua en un cierto intervalo $[a, \infty)$, siempre positiva y que cumpla el siguiente límite. (Véase figura VII. 35).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

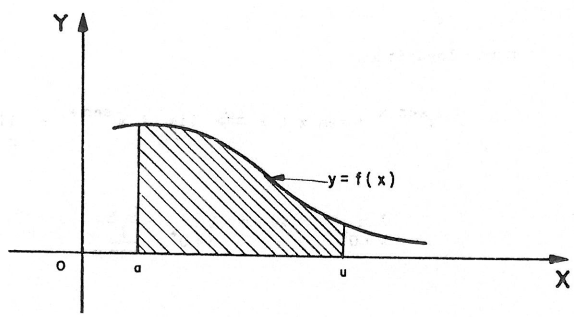


Figura VII.35

Si $u > a$, donde $u, a \in D_f$, entonces el área $A(u)$ bajo la curva entre a y u está dada por la expresión:

$$\boxed{A(u) = \int_a^u f(x)\,dx}$$

Si en esta expresión $\lim_{u\to\infty} A(u)$ existe; entonces el límite puede ser interpretado como el área de la región limitada bajo la curva $y = f(x)$, sobre el eje X y hacia la derecha de $x = a$. El símbolo $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se usa para denotar este valor.

Más generalmente, si se tiene una función f, continua en el intervalo $[a, \infty)$, entonces por definición:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx}$$

si el límite existe.

De manera similar, si f es continua en el intervalo $(-\infty, a]$, se define entonces:

$$\boxed{\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty} \int_u^a f(x)\,dx}$$

Si $f(x) \geq 0$ para toda x, entonces esta expresión puede ser tomada como el área bajo la curva, sobre el eje x y a la izquierda de $x = a$.

Estas expresiones son llamadas *integrales impropias*. La diferencia de estas integrales con las integrales definidas se debe a que uno de los límites de integración no es un número real. Estas integrales se dice que *convergen* cuando $u \to \infty$ ó $u \to -\infty$, el límite del lado derecho de la ecuación existe. De otro modo, se dice que la integral *diverge*. Las integrales impropias también se presentan con dos límites infinitos de integración. Específicamente, si f es continua para toda x y a es cualquier número real, entonces por definición:

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx}$$

si las dos integrales laterales convergen. Si una de ellas diverge, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ se dice que diverge. Se puede probar que esta última expresión es independiente del valor real de a. También se puede probar que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ no es necesariamente lo mismo que $\lim_{u \to \infty} \int_{-u}^{u} f(x)\,dx$

Ejemplo VII.31

Determinar si las siguientes integrales impropias convergen o divergen.

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx$

Solución

a) $$\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_2^{u} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \left[\frac{-1}{x-1}\right]_2^u =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \left(\frac{-1}{u-1} + \frac{1}{2-1}\right) =$$

$$= 1$$

por lo tanto la integral converge y tiene el valor de 1.

b) $$\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_2^{u} \frac{1}{x-1}\,dx =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \Big[\ln(x-1)\Big]_2^u =$$

$$= \lim_{u\to\infty} \Big(\ln(u-1) - \ln(2-1)\Big) = \infty$$

por lo que la integral diverge.

Las gráficas de las dos funciones se muestran a continuación. Véanse figuras VII.36 y VII.36.1.

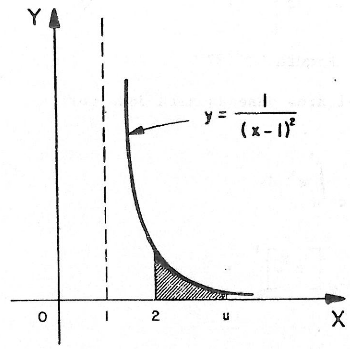


Figura VII.36

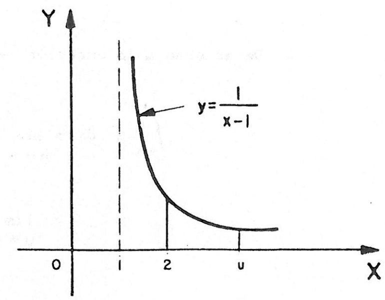


Figura VII.36.1

Nótese que así como las dos gráficas tienen la misma forma general para $x \geq 2$, se le asigna un área a la región bajo la curva en (VII.36), lo que no resulta verdadero para la curva en (VII.36.1).

Ejemplo VII. 32.

Asignar un área a la región que queda comprendida bajo la curva $y = e^x$, sobre el eje x y a la izquierda de $x = 1$.

Solución

Esta región, limitada por $y = e^x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = u$, donde $u < 1$ se muestra en la siguiente gráfica. Figura VII.37.

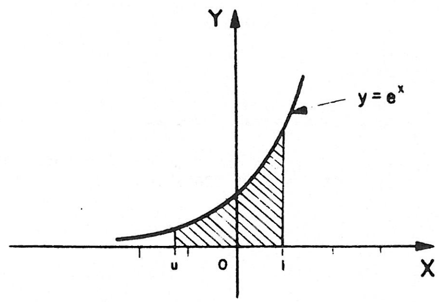


Figura VII.37

De acuerdo a lo anterior, el área deseada está dada por:

$$\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^1 e^x\,dx =$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[e^x \right]_u^1 =$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left(e - e^u \right) = e - 0 = e$$

Ejemplo VII.33

Calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx$$

y trazar la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ e interpretar la integral como un área.

Solución

Utilizando la integral impropia con $a = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \int_u^0 \frac{1}{1 + x^2}\,dx + \lim_{v \to -\infty} \int_0^v \frac{1}{1 + x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{u \to -\infty} \left[\text{ang tan } x \right]_u^0 + \lim_{v \to \infty} \left[\text{ang tang } x \right]_0^v =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Consecuentemente, la integral impropia dada converge y tiene el valor de π. La gráfica se muestra a continuación. Figura VII.38.

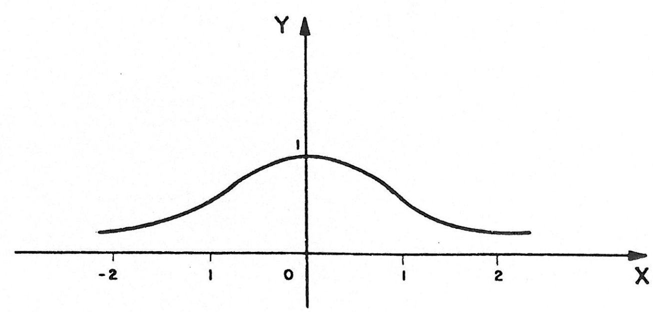


Figura VII.38

Puede suceder también, que el intervalo de integración sea de longitud finita, pero que la función f a integrar no sea acotada en algún punto del intervalo de integración. Por ejemplo la integral:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx$$

no está definida porque:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1$$

Como esta función no está definida para valores de x menores que 1, queda sobreentendido que la anterior expresión $x \to 1$ significa que x tiende a 1 tomando valores mayores que 1. Con más precisión se puede escribir $x \to 1^+$. Se puede entonces usar el criterio de la integral impropia como:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx = \lim_{u \to 1^+} \int_u^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx =$$

$$= \lim_{u \to 1^+} \Big[2\sqrt{x-1} \Big]_u^3 =$$

$$= \lim_{u \to 1^+} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{u-1}) =$$

$$= 2\sqrt{2}$$

por lo que la integral converge y tiene como valor a $2\sqrt{2}$.

También se puede presentar el caso de que la función por integrar sea discontinua para alguno de los límites de integración, y en este caso se puede utilizar de igual manera el límite que da la integral impropia.

Ejemplo VII.34

Determinar si $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}}$ es convergente y en caso afirmativo, hallar su valor.

Solución

$$\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}} = \lim_{u \to 3} \int_0^u \frac{dx}{(3-x)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{u \to 3} \Big[-3\sqrt[3]{3-x} \Big]_0^u =$$

$$= \lim_{u \to 3} \left(-3\sqrt[3]{3-u} + 3\sqrt[3]{3} \right) =$$

$$= 3\sqrt[3]{3}$$

por lo que la integral converge y tiene como valor a $3 \cdot \sqrt[3]{3}$

CAPITULO VIII METODOS DE INTEGRACION Y APLICACIONES

INTRODUCCION

En el capítulo VI se trataron los aspectos teóricos que fundamentan el estudio de la integral definida y de la integral indefinida. También se comenzó el estudio de algunos procesos de integración tales como las integrales llamadas inmediatas, así como aquellas que se transforman en inmediatas completando la diferencial. Una de las primeras fórmulas que se ven es $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}$; $n \neq -1$. Aquí se observa que al no poder tomar n el valor de -1 se manifiesta una interrogante en la expresión. Este problema queda resuelto en el capítulo VII, donde se define la fórmula $\int \frac{du}{u} = L\,u + C$ que da lugar a la función logaritmo natural. Asimismo se vio la función exponencial, las funciones hiperbólicas y sus respectivas formas de derivación e integración.

En el capítulo VIII, se presentarán algunos de los diferentes procesos y métodos de integración que existen y se estudiarán diversas aplicaciones de la integral definida. Finalmente se hará una breve introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales, haciendo ver cómo interviene la integral definida en la solución de ellas. Dado el alcance del curso únicamente se tratarán aquí aquellas ecuaciones diferenciales cuyas variables se pueden separar, dando origen al método conocido como separación de variables.

VIII.1 CAMBIO DE VARIABLE Y CAMBIO DE LIMITES EN LA INTEGRAL DEFINIDA

VIII.1.1 INTEGRACION CON FUNCIONES LOGARITMICAS Y DE ALGUNAS EXPRESIONES TRIGONOMETRICAS

Antes de tratar la integración por cambio de variable es conveniente establecer algunas fórmulas de integración inmediata que involucran funciones logarítmicas.

En el capítulo anterior se presentó la fórmula:

$$\int \frac{du}{u} = L u + C$$

Ahora bien, la integral: $\int \tan u\, du$ se resuelve fácilmente teniendo en cuenta que:

$$\tan u = \frac{\text{sen } u}{\cos u}$$

$$\int \tan u\, du = \int \frac{\text{sen } u\, du}{\cos u} = -\int \frac{-\text{sen } u\, du}{\cos u}$$

si se efectúa la siguiente sustitución:

$$v = \cos u$$

$$dv = -\text{sen } u\, du$$

$$-\int \frac{dv}{v} = -L\,v + C = -L \cos u + C = I$$

y, por las propiedades de los logaritmos:

$$I = L(\cos u)^{-1} + C = L \sec u + C$$

Esto es:

$$\boxed{\int \tan u \, du = L \sec u + C} \qquad \dots (1)$$

en forma semejante, dado que:

$$\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

se tiene:

$$\int \cot u \, du = \int \frac{\cos u \, du}{\operatorname{sen} u} = \int \frac{d \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} u} = L \operatorname{sen} u + C$$

o sea:

$$\boxed{\int \cot u \, du = L \operatorname{sen} u + C} \qquad \dots (2)$$

Para resolver $\int \sec u \, du$ se puede multiplicar y dividir por el binomio $\sec u + \tan u$:

$$\int \sec u \, du = \int \frac{\sec u(\sec u + \tan u) \, du}{\sec u + \tan u} =$$

$$= \int \frac{(\sec^2 u + \sec u \tan u) \, du}{\sec u + \tan u} = \int \frac{d(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u} =$$

$$= L(\sec u + \tan u) + C$$

queda:

$$\boxed{\int \sec u \, du = L(\sec u + \tan u) + C} \qquad \dots (3)$$

multiplicando y dividiendo por $\csc u - \cot u$ se puede resolver:

$$\int \csc u \, du = \int \frac{\csc u(\csc u - \cot u) \, du}{\csc u - \cot u} =$$

$$= \int \frac{(\csc^2 u - \csc u \cot u) \, du}{\csc u - \cot u} =$$

$$= \int \frac{d(\csc u - \cot u)}{\csc u - \cot u} = L(\csc u - \cot u) + C$$

por lo cual:

$$\boxed{\int \csc u \, du = L(\csc u - \cot u) + C} \qquad \dots (4)$$

Se presentan a continuación algunos ejemplos relativos a las fórmulas vistas, en los que se puede observar cómo se completa la diferencial.

Ejemplo VIII.1

$$\int \tan(2x + 1) \, dx = \frac{1}{2} \int \tan(2x + 1) \, 2dx =$$

$$= \frac{1}{2} L \sec(2x + 1) + C$$

Ejemplo VIII.2

$$\int x^2 \cot x^3 \, dx = \frac{1}{3} \int \cot x^3 \, (3x^2) \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} L \operatorname{sen} x^3 + C$$

Ejemplo VIII.3

$$\int \frac{1}{x^2} \sec \frac{1}{x} \, dx = - \int \sec \frac{1}{x} \left(- \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= - L\left(\sec \frac{1}{x} + \tan \frac{1}{x}\right) + C$$

Ejemplo VIII.4

$$\int \frac{3x \, dx}{\operatorname{sen} x^2} = 3 \int x \csc x^2 \, dx = \frac{3}{2} \int \csc x^2 \, (2x) \, dx =$$

$$= \frac{3}{2} L (\csc x^2 - \cot x^2) + C$$

La integral: $\int \frac{du}{u^2 - a^2}$ en que a es constante o independiente de u se resuelve usando la identidad:

$$\frac{1}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{u - a} - \frac{1}{u + a}\right)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{du}{u - a} - \int \frac{du}{u + a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a} \Big[L(u - a) - L(u + a)\Big] + C = \frac{1}{2a} L \frac{u - a}{u + a} + C$$

esto es:

$$\boxed{\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} L \frac{u - a}{u + a} + C} \qquad \dots (5)$$

ahora bien, por medio de la identidad:

$$\frac{1}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a + u} + \frac{1}{a - u}\right)$$

se resuelve la integral:

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{du}{a + u} - \int \frac{-du}{a - u}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[L(a + u) - L(a - u)\right] + C = \frac{1}{2a} L \frac{a + u}{a - u} + C$$

o sea:

$$\boxed{\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} L \frac{a + u}{a - u} + C} \qquad \ldots (6)$$

Ejemplo VIII.5

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 25} = \int \frac{dx}{(2x)^2 - 5^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x)^2 - 5^2}$$

Donde:

$$u = 2x, \quad du = 2dx \quad y \quad a = 5,$$

luego:

$$\int \frac{dx}{4x^2 - 25} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2(5)}\, L \frac{2x - 5}{2x + 5} + C = \frac{1}{20} L \frac{2x - 5}{2x + 5} + C$$

Ejemplo VIII.6

$$\int \frac{dx}{4 - 3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\, dx}{2^2 - (\sqrt{3}\, x)^2}$$

Donde:

$$a = 2, \quad u = \sqrt{3}\, x \quad y \quad du = \sqrt{3}\, dx,$$

así que:

$$\int \frac{dx}{4 - 3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2(2)}\, L \frac{2 + \sqrt{3}\, x}{2 - \sqrt{3}\, x} + C = \frac{1}{4\sqrt{3}} L \frac{2 + \sqrt{3}\, x}{2 - \sqrt{3}\, x} + C$$

Recordando una propiedad de las proporciones:

sea:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

luego:

$$a = bk \quad y \quad c = dk$$

entonces:

$$a + c = bk + dk = (b + d)k$$

despejando k:

$$k = \frac{a + c}{b + d}$$

por lo cual:

$$\frac{a + c}{b + d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \qquad \ldots (A)$$

esta expresión permite la solución de la integral:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$$

haciendo:

$$\sqrt{u^2 \pm a^2} = z,$$

al elevar al cuadrado queda:

$$u^2 \pm a^2 = z^2$$

diferenciando ambos miembros de esta igualdad queda:

$$2u\, du = 2z\, dz$$

de donde:

$$\frac{du}{z} = \frac{dz}{u} \qquad \ldots (B)$$

por (A) y (B):

$$\frac{du}{z} = \frac{du + dz}{u + z} = \frac{d\,(u + z)}{u + z}$$

según esto:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \int \frac{du}{z} = \int \frac{d\,(u + z)}{u + z} = L\,(u + z) + C$$

sustituyendo el valor de z queda:

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = L\,(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C} \qquad \ldots (7)$$

Ejemplo VIII.7

$$\int \frac{2\, dx}{\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{2}{3}\int \frac{3\, dx}{\sqrt{(3x)^2 - 4^2}}$$

Siendo:

$$u = 3x, \quad a = 4 \quad y \quad du = 3\, dx,$$

entonces: $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\sqrt{9x^2 - 16}} = \frac{2}{3}\, L\,(3x + \sqrt{9x^2 - 16}) + C$

Las integrales:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \qquad \ldots (C)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \qquad \ldots (D)$$

se resuelven completando un trinomio cuadrado perfecto, transformación que conduce a la aplicación de las fórmulas (VI.49), (VIII.5) ó (VIII.6) en el caso de la integral (C) y (VI.48) ó (VIII.7) si se trata de la integral (D).

Ejemplo VIII.8

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \int \frac{dx}{x^2 - 8x + 16 + 9} = \int \frac{dx}{(x-4)^2 + 3^2}$$

Aplicando (VI.49) resulta:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 25} = \frac{1}{3} \text{ ang tan } \frac{x-4}{3} + C$$

Ejemplo VIII.9

$$\int \frac{3\,dx}{x^2 - 6x + 5} = \int \frac{3\,dx}{x^2 - 6x + 9 - 4} = 3 \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 2^2}$$

Usando (5) queda:

$$\int \frac{3\,dx}{x^2 - 6x + 5} = \frac{3}{2(2)}\, L\, \frac{x - 3 - 2}{x - 3 + 2} + C = \frac{3}{4}\, L\, \frac{x-5}{x-1} + C$$

Ejemplo VIII.10

$$\int \frac{13\,dx}{1 + 3x - x^2} = \int \frac{13\,dx}{1 - \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= 13 \int \frac{dx}{1 + \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} = 13 \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}$$

Aplicando aquí (6):

$$\int \frac{13\,dx}{1 + 3x - x^2} = 13\, \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}\, L\, \frac{\frac{\sqrt{13}}{2} + \left(x - \frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{13}}{2} - \left(x - \frac{3}{2}\right)} + C =$$

$$= \sqrt{13}\, L\, \frac{\sqrt{13} + 2x - 3}{\sqrt{13} - 2x + 3} + C$$

Ejemplo VIII.11

Resolver:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}}$$

dado que:

$$2 - 3x - 4x^2 = 2 - 4\left[x^2 + \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2\right] + 4\left(\frac{3}{8}\right)^2 =$$

$$= 2 + \frac{9}{16} - 4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{41}{16} - 4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2$$

aplicando la fórmula VI.48, se tiene:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)^2 - \left[2\left(x + \frac{3}{8}\right)\right]^2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ang sen } \frac{2\left(x + \frac{3}{8}\right)}{\frac{\sqrt{41}}{4}} + C = \frac{1}{2} \text{ ang sen } \frac{8x + 3}{\sqrt{41}} + C$$

Ejemplo VIII.12

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\,\sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}}}$$

Aplicando (7)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, L\left(x + \frac{1}{3} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, L\left(\frac{3x+1}{3} + \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}\right) + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, L\, \frac{\frac{3x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2 + 2x + 1}}{\sqrt{3}} + C_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, L\left(\frac{3x+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2 + 2x + 1}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, L\,\sqrt{3} + C_1$$

haciendo:

$$C = -\frac{1}{\sqrt{3}} L \sqrt{3} + C_1$$

queda:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} L \left(\frac{3x + 1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3x^2 + 2x + 1} \right) + C$$

Para resolver integrales de los tipos:

$$\int \frac{(Ax + B)\, dx}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{... (E)}$$

$$\int \frac{(Ax + B)\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \qquad \text{... (F)}$$

se pueden resolver haciendo uso de la identidad:

$$Ax + B = \frac{A}{2a} (2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right)$$

que permite descomponer la integral en dos integrales, una inmediata y la otra del tipo (C) si se trata de (E) o la otra del tipo (D) si se trata de (F).

Ejemplo VIII.13

$$\int \frac{(2x + 5)\, dx}{x^2 + 2x + 5} = I$$

Solución

Como: $2x + 5 = \frac{2}{2} (2x + 2) + (5 - 2) = (2x + 2) + 3$

$$\int \frac{(2x + 5)\, dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{(2x + 2)\, dx}{x^2 + 2x + 5} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} =$$

$$= \int \frac{d\,(x^2 + 2x + 5)}{x^2 + 2x + 5} + 3 \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 4} =$$

$$= L\,(x^2 + 2x + 5) + 3 \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 2^2} =$$

$$= L\,(x^2 + 2x + 5) + \frac{3}{2} \text{ ang tan } \frac{x + 1}{2} + C$$

Ejemplo VIII.14

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}}$$

donde:

$$Ax + B = x \implies A = 1, \quad B = 0$$

Solución

$$x = \frac{1}{-2} (-2x + 6) + (0 + 3)$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} = -\int \frac{(-2x + 6)\, dx}{2\sqrt{27 + 6x - x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{27 + 6x - x^2}} =$$

$$= -\int \frac{d\,\sqrt{27 + 6x - x^2}}{2\sqrt{27 + 6x - x^2}} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 27 + 9}} =$$

$$= -\sqrt{27 + 6x - x^2} + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{6^2 - (x-3)^2}} =$$

$$= -\sqrt{27 + 6x - x^2} + \frac{3}{2} \text{ ang sen } \frac{x - 3}{6} + C$$

INTEGRACION DE ALGUNAS EXPRESIONES TRIGONOMETRICAS

Sea la integral del tipo:

$$\int \text{sen}^m u \cos^n u \; du$$

Se tienen tres casos:

> Caso 1. m es entero positivo impar, n es cualquier número (puede ser inclusive $n = 0$). $m - 1$ será par y $\frac{m - 1}{2}$ será entero.

Se toma el factor $\text{sen } u$ para formar $d \cos u = -\text{sen } u\, du$ y la potencia que queda de $\text{sen } u$ se expresa en términos de $\cos u$ empleando la identidad $\text{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u$ y se desarrolla para tener una suma de potencias de $\cos u$ multiplicadas por $d \cos u$.

Ejemplo VIII.15

$$\int \text{sen}^3 x \cos^{-2} x\, dx = \int \text{sen}^2 x \cos^{-2} x \text{ sen } x\, dx =$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^{-2} x\, (-\text{sen } x)\, dx =$$

$$= -\int (\cos^{-2} x - 1)\, d \cos x = -\frac{\cos^{-1} x}{-1} + \int d \cos x =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C = \sec x + \cos x + C$$

Caso 2. n es entero positivo impar, m puede ser cualquiera (cero inclusive). $n-1$ será par y $\frac{n-1}{2}$ será entero.

Se toma el factor $\cos u$ para formar $d \operatorname{sen} u = \cos u \, du$, la potencia restante de $\cos u$ se escribe en términos de $\operatorname{sen} u$ por medio de la identidad: $\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u$. Desarrollando se tiene una suma de potencias de $\operatorname{sen} u$ multiplicadas por $d \operatorname{sen} u$.

Ejemplo VIII.16

$$\int \frac{\cos^5\phi \, d\phi}{\sqrt{\operatorname{sen}\phi}} = \int \cos^4\phi \ \operatorname{sen}^{-1/2}\phi \ \cos\phi \ d\phi =$$

$$= \int (\cos^2\phi)^2 \operatorname{sen}^{-1/2}\phi \ d \operatorname{sen}\phi = \int (1 - \operatorname{sen}^2\phi)^2 \operatorname{sen}^{-1/2}\phi \ d \operatorname{sen}\phi =$$

$$= \int (1 - 2\operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}^4\phi) \operatorname{sen}^{-1/2}\phi \ d \operatorname{sen}\phi =$$

$$= \int (\operatorname{sen}^{-1/2}\phi - 2\operatorname{sen}^{3/2}\phi + \operatorname{sen}^{7/2}\phi) \ d \operatorname{sen}\phi =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{1/2}\phi}{\frac{1}{2}} - 2\frac{\operatorname{sen}^{5/2}\phi}{\frac{5}{2}} + \frac{\operatorname{sen}^{9/2}\phi}{\frac{9}{2}} + C =$$

$$= 2\operatorname{sen}^{1/2}\phi - \frac{4}{5}\operatorname{sen}^{5/2}\phi + \frac{2}{9}\operatorname{sen}^{9/2}\phi + C$$

Caso 3. Tanto m como n son enteros positivos pares o cero.

Se disminuye el grado del integrando usando las fórmulas del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \ ; \quad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \ ; \quad \operatorname{sen} u \cos u = \frac{\operatorname{sen} 2u}{2}$$

Ejemplo VIII.17

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 2x \, dx}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{(1 - \cos 4x)\,dx}{2} =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\frac{1}{4}\int \cos 4x \, 4dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\cos 4x + C$$

Ejemplo VIII.18

$$\int \operatorname{sen}^4 3\theta \, d\theta = \int \frac{(1 - \cos 6\theta)^2 \, d\theta}{2^2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 6\theta + \cos^2 6\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int d\theta - \frac{1}{12}\int \cos 6\theta \, 6d\theta + \frac{1}{4}\int \frac{(1 + \cos 12\theta)\, d\theta}{2} =$$

$$= \frac{\theta}{4} - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6\theta + \frac{1}{8}\int d\theta + \frac{1}{8}\frac{1}{12}\int \cos 12\theta \ 12 \, d\theta =$$

$$= \frac{3\theta}{8} - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6\theta + \frac{1}{96}\operatorname{sen} 12\theta + C$$

Integración de potencias de exponente entero de tangente y cotangente:

$$\int \tan^n u \, du \qquad y \qquad \int \cot^n u \, du$$

Considérese primero que n es positivo.

Como $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$, se tiene:

$$\int \tan^n u \, du = \int \tan^{n-2} u \tan^2 u \, du = \int \tan^{n-2} u (\sec^2 u - 1) \, du =$$

$$= \int \tan^{n-2} u \sec^2 u \, du - \int \tan^{n-2} u \, du = \frac{\tan^{n-1} u}{n - 1} - \int \tan^{n-2} u \, du$$

Este procedimiento de reducción del grado de $\tan u$, aplicado un número conveniente de veces conduce a obtener una suma de fracciones más $\int du = u + C$ si n es par o bien $\int \tan u \, du = L \sec u + C$ cuando n es impar.

Dado que $\cot^2 u = \csc^2 u - 1$, un proceso semejante permite obtener:

$$\boxed{\int \cot^n u \, du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n - 1} - \int \cot^{n-2} u \, du}$$

que conduce a la obtención de una suma de fracciones menos $\int du = u + C$ si n es par, o menos $\int \cot u \, du = L \operatorname{sen} u + C$ si n es impar.

Cuando n sea negativo, $-n$ será positivo y como $\tan^n u = \cot^{-n} u$ y $\cot^n u = \tan^{-n} u$, el uso de estas identidades permite la aplicación de los mismos procesos anteriores.

Ejemplo VIII.19

$$\int \tan^4 x \, dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x \, dx =$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + \int dx =$$

$$= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C$$

Ejemplo VIII.20

$$\int \tan^{-5}\phi \, d\phi = \int \cot^5\phi \, d\phi =$$

$$= -\frac{\cot^4\phi}{4} - \int \cot^3\phi \, d\phi =$$

$$= -\frac{\cot^4\phi}{4} + \frac{\cot^2\phi}{2} + \int \cot\phi \, d\phi =$$

$$= -\frac{\cot^4\phi}{4} + \frac{\cot^2\phi}{2} + L \,\mathrm{sen}\phi + C$$

Las integrales:

$$\int \sec^n u \, du \qquad y \qquad \int \csc^n u \, du$$

se resuelven fácilmente si n es entero positivo par, ya que el empleo de las identidades:

$$\sec^2 u = \tan^2 u + 1, \qquad \csc^2 u = \cot^2 u + 1$$

permite transformarlas como sigue:

$$\int \sec^n u \, du = \int \sec^{n-2} u \sec^2 u \, du = \int (\sec^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u \, du =$$

$$= \int (\tan^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \, d \tan u$$

$$\int \csc^n u \, du = \int (\csc^2 u)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 u \, du = -\int (\cot^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} (-\csc^2 u) \, du$$

$$= -\int (\cot^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \, d \cot u$$

desarrollando en ambos casos, la solución es obvia.

Ejemplo VIII.21

$$\int \sec^4 x \, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int (\tan^2 x + 1) \, d \tan x =$$

$$= \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x + C$$

Ejemplo VIII.22

$$\int \csc^6 v \, dv = \int (\csc^2 v)^2 \csc^2 v \, dv =$$

$$= -\int (\cot^2 v + 1)^2 (-\csc^2 v) dv = -\int (\cot^4 v + 2\cot^2 v + 1) \, d \cot v$$

$$= -\frac{1}{5} \cot^5 v - \frac{2}{3} \cot^3 v - \cot v + C$$

Las integrales:

$$\int \sec^m u \tan^n u \, du \qquad y \qquad \int \csc^m u \cot^n u \, du$$

se pueden resolver según los casos siguientes:

Caso 1. m es entero positivo par y n puede ser cualquier número.

a) $\int \sec^m u \tan^n u \, du = \int \sec^{m-2} u \tan^n u \sec^2 u \, du =$

$$= \int (\sec^2 u)^{\frac{m-2}{2}} \tan^n u \sec^2 u \, du =$$

$$= \boxed{\int (\tan^2 u + 1)^{\frac{m-2}{2}} \tan^n u \, d \tan u}$$

Desarrollando se tiene en el integrando una suma de potencias de $\tan u$ multiplicadas por $d \tan u$ cuya integración es inmediata.

b) $\int \csc^m u \cot^n u \, du = \int \csc^{m-2} u \cot^n u \csc^2 u \, du =$

$$= -\int (\csc^2 u)^{\frac{m-2}{2}} \cot^n u \, (-\csc^2 u) \, du =$$

$$= \boxed{-\int (\cot^2 u + 1)^{\frac{m-2}{2}} \cot^n u \, d \cot u}$$

El integrando de esta integral resulta una suma de potencias de $\cot u$ multiplicadas por $d \cot u$.

Ejemplo VIII.23

$$\int \frac{\sec^4 x \, dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \sec^2 x \tan^{-1/2} x \sec^2 x \, dx =$$

$$= \int (\tan^2 x + 1) \tan^{-1/2} x \, d \tan x = \int (\tan^{3/2} x + \tan^{-1/2} x) \, d \tan x =$$

$$= \frac{2}{5} \tan^{5/2} x + 2\tan^{1/2} x + C$$

Ejemplo VIII.24

$$\int \sqrt[3]{\cot 2\phi}\ \csc^6 2\phi\ d\phi = \int \cot^{1/3} 2\phi\ (\csc^2 2\phi)^2\ \csc^2 2\phi\ d\phi =$$

$$= \int \cot^{1/3} 2\phi\ (\cot^2 2\phi + 1)^2 \csc^2 2\phi\ d\phi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \cot^{1/3} 2\phi (\cot^4 2\phi + 2\cot^2 2\phi + 1)(-\csc^2 2\phi)\ 2d\phi =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (\cot^{13/3} 2\phi + 2\cot^{7/3} 2\phi + \cot^{1/3} 2\phi)\ d \cot 2\phi =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{16} \cot^{16/3} 2\phi + \frac{2(3)}{10} \cot^{10/3} 2\phi + \frac{3}{4} \cot^{4/3} 2\phi\right) + C =$$

$$= -\frac{3}{2} \cot^{4/3} 2\phi \left(\frac{1}{16} \cot^4 2\phi + \frac{1}{5} \cot^2 2\phi + \frac{1}{4}\right) + C$$

Caso 2. n es entero positivo impar y m puede ser cualquier número.

a) $\int \sec^m u\ \tan^n u\ du = \int \sec^{m-1} u\ \tan^{n-1} u\ \sec u \tan u\ du =$

$$= \int \sec^{m-1} u\ (\tan^2 u)^{\frac{n-1}{2}} \sec u \tan u\ du =$$

$$= \boxed{\int \sec^{m-1} u\ (\sec^2 u - 1)^{\frac{n-1}{2}}\ d \sec u}$$

Se desarrolla para obtener por descomposición una suma de integrales inmediatas.

b) $\int \csc^m u\ \cot^n u\ du = \int \csc^{m-1} u\ \cot^{n-1} u\ \csc u \cot u\ du =$

$$= -\int \csc^{m-1} u\ (\cot^2 u)^{\frac{n-1}{2}} (-\csc u \cot u)\ du =$$

$$= \boxed{-\int \csc^{m-1} u\ (\csc^2 u - 1)^{\frac{n-1}{2}}\ d \csc u}$$

Al desarrollar resulta una suma de integrales de potencias de csc u multiplicadas por d csc u.

Ejemplo VIII.25

$$\int \sec^3 x \tan^3 x\ dx = \int \sec^2 x \tan^2 x \sec x \tan x\ dx =$$

$$= \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1)\ d \sec x = \int (\sec^4 x - \sec^2 x)\ d \sec x =$$

$$= \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

Ejemplo VIII.26

$$\int \frac{\csc \sqrt{x}\ dx}{\sqrt{x} \tan^3 \sqrt{x}} = \int \cot^2 \sqrt{x}\ \csc \sqrt{x}\ \cot \sqrt{x}\ \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= -2 \int (\csc^2 \sqrt{x} - 1)(-\csc \sqrt{x} \cot \sqrt{x})\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} =$$

$$= -2 \int (\csc^2 \sqrt{x} - 1)\ d \csc \sqrt{x} = -\frac{2}{3} \csc^3 \sqrt{x} + 2 \csc \sqrt{x} + C$$

Solución de las integrales:

$$\int \operatorname{sen} mu \cos nu\ du$$

$$\int \cos mu \cos nu\ du$$

$$\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\ du$$

Las identidades trigonométricas de seno y coseno de la suma y de la diferencia de dos ángulos pueden escribirse como sigue:

$$\operatorname{sen} (m + n) u = \operatorname{sen} mu \cos nu + \operatorname{sen} nu \cos mu \qquad \ldots (G)$$

$$\operatorname{sen} (m - n) u = \operatorname{sen} mu \cos nu - \operatorname{sen} nu \cos mu \qquad \ldots (H)$$

$$\cos (m + n) u = \cos mu \cos nu - \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu \qquad \ldots (I)$$

$$\cos (m - n) u = \cos mu \cos nu + \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu \qquad \ldots (J)$$

Sumando miembro a miembro (G) y (H) y despejando sen mu cos nu se obtiene:

$$\operatorname{sen} mu \cos nu = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} (m + n) u + \operatorname{sen} (m - n) u\right]$$, por lo cual:

$$\int \operatorname{sen} mu \cos nu\ du = \frac{1}{2}\left[\int \operatorname{sen} (m + n) u\ du + \int \operatorname{sen} (m - n) u\ du\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m + n} \int \operatorname{sen} (m + n) u\ (m + n)\ du + \frac{1}{m - n} \int \operatorname{sen} (m - n) u\ (m - n)\ du\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (m + n) u}{m + n} - \frac{\cos (m - n) u}{m - n}\right] + C$$

esto es:

$$\boxed{\int \operatorname{sen} mu \cos nu\ du = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (m + n) u}{m + n} - \frac{\cos (m - n) u}{m - n}\right] + C}$$

Sumando miembro a miembro (I) y (J) y despejando cos mu cos nu:

$$\cos mu \cos nu = \frac{1}{2}\left[\cos (m+n)\, u + \cos (m-n)\, u\right]$$

entonces:

$$\int \cos mu \cos nu\, du = \frac{1}{2}\left[\int \cos (m+n)\, u\, du + \int \cos (m-n)\, u\, du\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\int \cos (m+n)\, u\, (m+n)\, u\, du + \frac{1}{m-n}\int \cos (m-n)\, u\, (m-n) du\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} (m+n)\, u}{m+n} + \frac{\operatorname{sen} (m-n)\, u}{m-n}\right] + C, \quad \text{o sea:}$$

$$\boxed{\int \cos mu \cos nu\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} (m+n)\, u}{m+n} + \frac{\operatorname{sen} (m-n)\, u}{m-n}\right] + C}$$

Restando (I) de (J) miembro a miembro y despejando sen mu sen nu se obtiene:

$$\operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu = \frac{1}{2}\left[\cos (m-n)\, u - \cos (m+n)\, u\right]$$

por lo que:

$$\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = \frac{1}{2}\left[\int \cos (m-n)\, u\, du - \int \cos (m+n)\, u\, du\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\int \cos (m-n)\, u\, (m-n)\, du - \frac{1}{m+n}\int \cos (m+n)\, u\, (m+n)\, du\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} (m-n)\, u}{m-n} - \frac{\operatorname{sen} (m+n)\, u}{m+n}\right] + C$$

que puede escribirse:

$$\boxed{\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu\, du = -\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen} (m+n)\, u}{m+n} - \frac{\operatorname{sen} (m-n)\, u}{m-n}\right] + C}$$

Ejemplo VIII.27

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (4+3)\, x}{4+3} - \frac{\cos (4-3)\, x}{4-3}\right] + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 7x}{7} - \cos x\right) + C$$

$$= -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos x}{2} + C$$

Ejemplo VIII.28

$$\int \cos 5x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 8x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 8x}{16} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

Ejemplo VIII.29

$$\int \operatorname{sen} 3\phi \operatorname{sen} 2\phi\, d\phi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} 5\phi}{5} - \operatorname{sen} \phi\right) + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \phi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 5\phi}{10} + C$$

VIII.1.2 CAMBIO DE VARIABLE Y CAMBIO DE LIMITES EN LA INTEGRAL DEFINIDA

Con anterioridad se vio que toda función continua en un intervalo cerrado puede ser integrada. Esto tiene gran importancia desde el punto de vista teórico, pero no da ningún lineamiento o indicación acerca de la forma en que puede calcularse la integral.

Se sabe por ejemplo que:

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

pero la integral:

$$\int (3x-2)^3\, dx$$

no tiene exactamente la misma forma.

Si se hace $u = 3x - 2$, $du = 3dx$, la integral se transforma en:

$$\frac{1}{3}\int u^3\, du = \frac{1}{12}\, u^4 + c = \frac{1}{12}\,(3x-2)^4 + 4$$

Un cambio de variable transformó la integral propuesta en otra de forma conocida, misma que se resolvió con facilidad.

Si se trata de una integral definida que se resuelve por cambio de variable, se pueden cambiar también los límites de integración para terminar de calcularla sin deshacer la sustitución empleada.

Sea la integral:

$$\int_a^b u \, du$$

si $u = \phi(z)$ es derivable, $du = \phi'(z)\, dz$ y si $a = \phi(c)$ y $b = \phi(d)$ queda:

$$\int_a^b u \, du = \int_c^d \phi(z) \quad \phi'(z)\, dz$$

Ejemplo VIII.30

Calcular:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x \, dx$$

Solución

Si se hace:

$$u = \tan x, \qquad du = \sec^2 x \, dx$$

Debe observarse que $u(0) = 0$ y $u\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ por lo cual:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x \, dx = \int_0^1 u^2 \, du = \left.\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

VIII.1.3 METODO DE INTEGRACION POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

Cuando el integrando contiene expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{u^2 + a^2}$ o $\sqrt{u^2 - a^2}$, frecuentemente es posible transformar la integral en una de las formas vistas anteriormente, por medio de una sustitución trigonométrica.

Si aparece una expresión de la forma $\sqrt{a^2 - u^2}$ se emplea la sustitución $u = a \text{ sen } \phi$, por lo cual $du = a \cos \phi \, d\phi$ y $\frac{u}{a} = \text{sen } \phi$

El trazo de un triángulo rectángulo como el de la figura VIII.1 ayuda a completar los datos de la sustitución.

Como:

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a}$$

resulta:

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \phi$$

también:

$$\phi = \text{ang sen } \frac{u}{a}$$

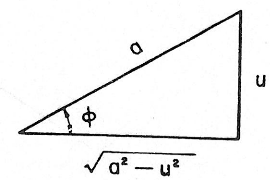


Figura VIII.1

Ejemplo VIII.31

Calcular:

$$\int \sqrt{9 - x^2} \quad dx$$

Solución

Se hace:

$$x = 3\text{sen } \phi, \qquad \frac{x}{3} = \text{sen } \phi$$

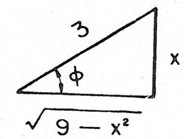


Figura VIII.2

$dx = 3 \cos \phi \, d\phi$

$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cos \phi$

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int 3\cos\phi\ 3\cos\phi\ d\phi =$$

$$= 9 \int \cos^2\phi\ d\phi = \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2\phi)\ d\phi =$$

$$= \frac{9}{2} \int d\phi + \frac{9}{4} \int \cos 2\phi\ 2d\phi = \frac{9}{2}\ \phi + \frac{9}{4}\ \text{sen } 2\phi + C$$

$$= \frac{9}{2}\ \phi + \frac{9}{2}\ \text{sen } \phi \cos \phi + C =$$

$$= \frac{9}{2}\ \text{ang sen } \frac{x}{3} + \frac{9}{2}\,\frac{x}{3}\,\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} + C =$$

$$= \frac{9}{2}\ \text{ang sen } \frac{x}{3} + \frac{x}{2}\ \sqrt{9 - x^2} + C$$

Cuando aparece $\sqrt{u^2 + a^2}$, se usa $u = a \tan\phi$; $du = a \sec^2 \phi\ d\phi$

$$\frac{u}{a} = \tan \phi$$

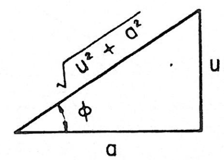


Figura VIII.3

De la figura VIII.3

$$\sqrt{u^2 + a^2} = a \sec \phi$$

$$\phi = \text{ang sec } \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{a}$$

Ejemplo VIII.32

Calcular:

$$\int \frac{dx}{x\ \sqrt{4x^2 + 9}}$$

Solución

Ahora, haciendo $2x = u$, $a = 3$, se toma:

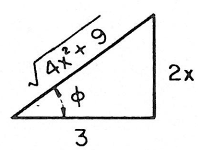


Figura VIII.4

$$2x = 3 \tan \phi$$

$$\frac{2x}{3} = \tan \phi$$

$$x = \frac{3}{2} \tan \phi$$

$$dx = \frac{3}{2} \sec^2 \phi\ d\phi; \quad \sqrt{4x^2 + 9} = 3 \sec \phi$$

sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}} = \int \frac{\frac{3}{2} \sec^2 \phi\ d\phi}{\frac{3}{2} \tan\phi\ 3\sec\phi} = \frac{1}{3} \int \frac{\sec \phi\ d\phi}{\tan \phi} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{d\phi}{\text{sen } \phi} = \frac{1}{3} \int \csc \phi\ d\phi = \frac{1}{3}\ L\ (\csc \phi - \cot \phi) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ L \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 9}}{2x} - \frac{3}{2x} \right) + C = \frac{1}{3}\ L\ \frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 3}{2x} + C$$

En el caso en que se presente $\sqrt{u^2 - a^2}$, se usa la sustitución $u = a \sec \phi$.

De donde:

$$\frac{u}{a} = \sec \phi,$$

$$du = a \sec \phi \tan \phi\ d\phi$$

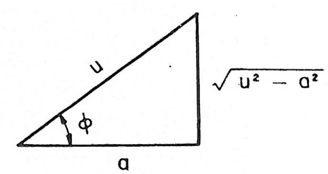


Figura VIII.5

De la figura VIII.5

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \phi$$

$$\phi = \text{ang tan } \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}$$

Ejemplo VIII.33

Calcular:

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}\ dx$$

haciendo:

$$x = 3 \sec \phi, \quad \frac{x}{3} = \sec \phi, \quad dx = 3\sec \phi \tan \phi \, d\phi$$

$$\sqrt{x^2 - 9} = 3\tan \phi$$

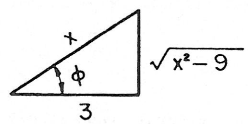


Figura VIII.6

para:

$$x = 3, \ \sec \phi = 1 \ \text{ y } \ \phi_1 = 0$$

para:

$$x = 6, \ \sec \phi = 2 \ \text{ y } \ \phi_2 = \frac{\pi}{3} \ ;$$

luego:

$$\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3 \tan \phi}{3 \sec \phi} 3 \sec \phi \tan \phi \, d\phi =$$

$$= 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 \phi \, d\phi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2\phi - 1) \, d\phi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\phi \, d\phi - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\phi$$

$$= 3 \Big[\tan \phi - \phi\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 3\left(\tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 3\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} - \pi$$

VIII.2 INTEGRACION POR PARTES, INTEGRACION POR DESCOMPOSICION EN FRACCIONES RACIONALES, USO DE TABLAS

VIII.2.1 INTEGRACION POR PARTES

Sean u y v dos funciones de la misma variable independiente. Al diferenciar el producto de ellas se obtiene:

$$d(u\,v) = udv + vdu$$

donde al despejar udv queda:

$$udv = d(uv) - vdu \qquad \ldots (K)$$

integrando en ambos lados de (K) se tiene:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \qquad \ldots (L)$$

como:

$$\int d(uv) = uv + C \qquad \ldots (M)$$

Se puede sustituir (M) en (L) y considerar que la constante de integración de (M) queda incorporada a la constante arbitraria de la última integral de (L), quedando:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

La aplicación de esta fórmula constituye el método de integración por partes en el cual se consideran en la integral por resolver los factores u y dv.

Diferenciando u se obtiene du y dv debe poderse integrar fácilmente para obtener v. Si la integral del segundo miembro de la fórmula es más simple que la propuesta, el método se habrá aplicado ventajosamente.

En los siguientes ejemplos se ilustra la aplicación de este método.

Ejemplo VIII.34

Calcular:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx$$

Solución

Sea:

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx$$

entonces:

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -\cos x$$

así:

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Ejemplo VIII.35

Encontrar:

$$\int Lx \, dx$$

Solución

La única posibilidad de aplicación del método es hacer:

$$u = Lx \quad y \quad dv = dx$$

por lo cual:

$$du = \frac{dx}{x} \quad y \quad v = x \text{ , luego:}$$

$$\int Lx\, dx = xLx - \int x \frac{dx}{x} = xLx - x + C$$

Ejemplo VIII.36

Resolver:

$$\int \text{ang tan } x\, dx$$

Solución

Tomando:

$$u = \text{ang tan } x, \quad dv = dx$$

se tiene:

$$du = \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad v = x$$

y aplicando el método:

$$\int \text{ang tan } x\, dx = x \text{ ang tan } x - \int \frac{xdx}{x^2 + 1} =$$

$$= x \text{ ang tan } x - \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{x^2 + 1} = x \text{ ang tan } x - \frac{1}{2} L\,(x^2 + 1) + C$$

En algunos casos es necesario efectuar la integración por partes más de una vez, como se ejemplifica a continuación.

Ejemplo VIII.37

Encontrar:

$$\int x^2 e^{ax}\, dx$$

Solución

Haciendo:

$$u = x^2 \quad y \quad dv = e^{ax}\, dx$$

se tendrá:

$$du = 2xdx \quad y \quad v = \int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 e^{ax}\, dx = x^2 \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} 2xdx =$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \int x\, e^{ax}\, dx$$

Esta última integral puede resolverse aplicando nuevamente el método que se está ilustrando.

Ahora:

$$u = x, \quad dv = e^{ax}\, dx,$$

por lo que:

$$du = dx \quad y \quad v = \frac{e^{ax}}{a},$$

así que:

$$\int x\, e^{ax}\, dx = x \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx =$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a^2} \int e^{ax}\, adx =$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + C_1$$

La integral propuesta queda:

$$\int x^2 e^{ax}\, dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a} \left(\frac{x\, e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} \right) + C$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2} \right) + C$$

Ocasionalmente es posible hacer aparecer la integral que se está resolviendo, después de aplicar la fórmula de integración por partes y esto permite resolver dicha integral como se ejemplifica a continuación.

Ejemplo VIII.38

Resolver:

$$\int \text{sen}^2 x\, dx \quad \text{por partes}$$

Solución

Sea:

$$u = \text{sen } x, \quad dv = \text{sen } x\, dx,$$

entonces:

$$du = \cos u\ du, \quad v = -\cos x,$$

por lo que:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x + x - \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$$

sumando esta última integral en ambos miembros y despejando la integral propuesta:

$$2 \int \operatorname{sen}^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x + C_1$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \cos x + C$$

aquí se consideró que:

$$\frac{C_1}{2} = C$$

Ejemplo VIII.39

Encontrar:

$$\int \sec^3 x\, dx$$

Solución

Tomando:

$$u = \sec x, \qquad dv = \sec^2 x\, dx,$$

$$du = \sec x \tan x\, dx, \qquad v = \tan x$$

aplicando la fórmula:

$$\int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x\, dx =$$

$$= \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx =$$

$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

luego:

$$2 \int \sec^3 x\, dx = \sec x \tan x + L\ (\sec x + \tan x) + C_1$$

quedando:

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} L\ (\sec x + \tan x) + C$$

II.2.2 INTEGRACION POR DESCOMPOSICION EN FRACCIONES RACIONALES

Si P y Q son funciones polinómicas, siempre es teóricamente posible resolver las integrales de la forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

en la práctica, la obtención de dichas integrales depende de que sea posible factorizar el denominador $Q(x)$.

A continuación se enuncian, sin demostrarlos, tres teoremas de álgebra que son necesarios para desarrollar el método de integración que nos ocupa.

TEOREMA VIII.1

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

en donde $G(x)$ y $R(x)$ son polinomios en que el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$.

Evidentemente $G(x)$ será distinto de cero si el grado de $P(x)$ es mayor o igual que el grado de $Q(x)$, y efectuando la división se obtiene el cociente $G(x)$ y el residuo $R(x)$.

TEOREMA VIII.2

Todo polinomio $Q(x)$ se puede expresar como un producto, cada uno de cuyos factores es lineal de la forma $ax + b$, o es cuadrático de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$.

Los factores de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$ que no pueden factorizarse en dos factores lineales, se caracterizan por el hecho de que $b^2 - 4ac$ es negativo.

TEOREMA VIII.3

Si $R(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en que el grado de $R(x)$ es menor que el de $Q(x)$, entonces el cociente de $R(x)$ entre $Q(x)$ se puede expresar como una suma $S(x)$ de fracciones de las formas:

$$\frac{A}{ax+b}, \quad \frac{A}{(ax+b)^n}, \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Se distinguen los cuatro casos siguientes:

Caso 1. A cada factor lineal $ax + b$ que aparezca una sola vez en la factorización de $Q(x)$, le corresponde un término de la forma $\frac{A}{ax+b}$ en la suma $S(x)$.

Caso 2. Para cada factor lineal $ax + b$ que aparezca repetido n veces al factorizar $Q(x)$, habrá en $S(x)$ una suma de n términos.

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Caso 3. A cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$; $(b^2 - 4ac < 0)$ que aparezca sin repetirse al factorizar $Q(x)$, le corresponde en la suma $S(x)$ un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Caso 4. Para cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ que aparezca en la factorización de $Q(x)$ repetido n veces, habrá en $S(x)$ una suma de n términos:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Considerando todo lo anterior se deduce que el cálculo de integrales de funciones racionales:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

se puede hacer a través de integrales de las formas:

$\int G(x)\, dx$, en que $G(x)$ es un polinomio

$$\int \frac{A}{ax+b}\, dx, \quad \int \frac{A}{(ax+b)^n}\, dx, \quad \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}\, dx, \quad \text{en donde } b^2 - 4ac < 0$$

Para ilustrar este método, también llamado integración de funciones racionales, se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo VIII.40

Calcular:

$$\int \frac{(2x+3)\, dx}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Solución

Como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, no procede efectuar división alguna; más bien habrá que empezar factorizando el denominador:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$$

por lo cual:

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

que es una identidad para la cual hay que determinar adecuadamente los valores de A, B y C.

Dicha identidad puede escribirse:

$$2x + 3 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)$$

Como debe cumplirse para todo valor de x, la determinación de los valores de A, B y C puede llevarse a cabo dando a x valores arbitrarios que se eligen convenientemente:

Si $x = 0$, $2(0) + 3 = A(0-1)(0+2)$ y $A = -\frac{3}{2}$

Si $x = 1$, $2(1) + 3 = B(1)(1+2)$, luego $B = \frac{5}{3}$

Si $x = -2$, $2(-2) + 3 = C(-2)(-2-1)$, entonces, $C = -\frac{1}{6}$

La descomposición de la función racional por integrar es por consiguiente:

$$\frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

así que:

$$\int \frac{(2x+3)\, dx}{x^3 + x^2 - 2x} = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= -\frac{3}{2} Lx + \frac{5}{3} L(x-1) - \frac{1}{6} L(x+2) + C$$

por las propiedades de los logaritmos puede escribirse:

$$\int \frac{(2x+3)\, dx}{x^3 + x^2 - 2x} = L\, \frac{(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}} + C$$

Ejemplo VIII.41

Obtener:

$$\int \frac{(x+5)\, dx}{x^3 - 3x + 2}$$

Solución

El numerador es de grado menor que el grado del denominador. Se procede a factorizar el denominador:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

Se observa que el factor lineal $x - 1$ se repite dos veces, por lo cual la descomposición en fracciones racionales es:

$$\frac{x+5}{(x-1)^2\,(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

multiplicando ambos miembros por $(x - 1)^2\ (x + 2)$ queda:

$$x + 5 = A\,(x-1)\,(x+2) + B\,(x+2) + C\,(x-1)^2$$

Si $x = 1 \implies 6 = 3B \implies B = 2$

Si $x = -2 \implies 3 = 9C \implies C = \frac{1}{3}$

Si $x = 0 \implies 5 = -2A + 2B + C \implies A = -\frac{1}{3}$

así que:

$$\int \frac{(x+5)\ dx}{x^3 - 3x + 2} = \int \frac{(x+5)\ dx}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{3}\,L\,(x-1) - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{3}\,L\,(x+2) + C$$

Ejemplo VIII.42

Resolver: $\displaystyle\int \frac{(x^4 - x^3 - 21x)\ dx}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$

Solución

Al efectuar la división resulta:

$$\frac{x^4 - x^3 - 21x}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = x^2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

por lo cual:

$$\int \frac{(x^4 - x^3 - 21x)\ dx}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \int x^2 dx + \int \frac{(x^2 - x - 21)\ dx}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

La solución de la primera integral del segundo miembro es obvia. Para resolver la segunda, la factorización del denominador es:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x^2 + 4)(2x - 1)\text{, por lo cual:}$$

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}$$

$$x^2 - x - 21 = (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4)$$

Otro procedimiento para determinar los valores de A, B y C que hacen que la igualdad anterior sea una identidad, consiste en desarrollar en el segundo miembro, agrupar los términos de acuerdo a

las diferentes potencias de x e igualar los coeficientes de éstas con los correspondientes coeficientes de las mismas potencias en el primer miembro. En este ejemplo queda:

$$x^2 - x - 21 = 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C$$

$$x^2 - x - 21 = (2A + C)\ x^2 + (2B - A) + (4C - B)$$

igualando los coeficientes de x^2: $\quad 2A + C = 1$

igualando los coeficientes de x: $\quad 2B - A = -1$

igualando los términos independientes:: $\quad 4C - B = -21$

Al resolver el sistema formado por estas tres ecuaciones se obtienen:

$$A = 3, \qquad B = 1, \qquad C = -5$$

por lo cual la descomposición queda:

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 4} - \frac{5}{2x - 1}$$

entonces:

$$\int \frac{(x^2 - x - 21)\ dx}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \int \frac{(3x + 1)\ dx}{x^2 + 4} - 5\int\frac{dx}{2x - 1} =$$

$$= \frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2 + 4} + \int\frac{dx}{x^2 + 4} - \frac{5}{2}\int\frac{2x\,dx}{2x - 1} =$$

$$= \frac{3}{2}\,L\,(x^2 + 4) + \frac{1}{2}\text{ ang tan }\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\,L\,(2x - 1) + C_1 =$$

$$= L\,\frac{(x^2 + 4)^{3/2}}{(2x - 1)^{5/2}} + \frac{1}{2}\text{ ang tan }\frac{x}{2} + C_1$$

Teniendo en cuenta este resultado en la integral propuesta se tiene finalmente:

$$\int \frac{(x^4 - x^3 - 21x)\ dx}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{x^3}{3} + L\,\frac{(x^2 + 4)^{3/2}}{(2x - 1)^{5/2}} + \frac{1}{2}\text{ ang tan }\frac{x}{2} + C$$

Ejemplo VIII.43

Calcular:

$$\int \frac{(2x^3 + 3x^2 + x - 1)\ dx}{(x^2 + 2x + 2)^2\ (x + 1)}$$

Solución

No hay que dividir y el denominador ya está factorizado, así que la descomposición es:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x - 1}{(x^2 + 2x + 2)^2\ (x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2x + 2)^2} + \frac{E}{x + 1}$$

luego:

$$2x^3 + 3x^2 + x - 1 = (Ax + B)(x^2 + 2x + 2)(x + 1) + (Cx + D)(x + 1) +$$
$$+ E\ (x^2 + 2x + 2)^2$$

cuando:

$$x = -1: \quad 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 - 1 = E\ (1 - 2 + 2)^2 \text{ y } E = -1$$

Si $x = 0$: $-1 = 2B + D + 4E$ $\qquad 2B + D = 3$

Si $x = 1$: $5 = (A + B)(10) + (C + D)(2) + 25E$ $\qquad 5A + 5B + C + D = 15$

Si $x = 2$: $\qquad 20A + 10B + 2C + D = 43$

Si $x = -2$: $\qquad 4A - 2B + 2C - D = -3$

Resolviendo este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se obtienen:

$$A = 1, \quad B = 3, \quad C = -2, \quad D = -3$$

considerando estos valores en la descomposición e integrando:

$$\int \frac{(2x^3 \quad + x - 1)dx}{(x^2 + 2x + 2)^2\ (x + 1)} = \int \frac{(x + 3)\ dx}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{(2x + 3)\ dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} - \int \frac{dx}{x + 1} \qquad \ldots (a)$$

A continuación se resuelve cada una de estas tres integrales.

Para:

$$\int \frac{(x + 3)\ dx}{x^2 + 2x + 2}$$

se tiene:

$$x + 3 = \frac{1}{2}(2x + 2) + 3 - \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{2}(2x + 2) + 2$$

y

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1$$

por lo cual:

$$\int \frac{(x + 3)\ dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x + 2)\ dx}{x^2 + 2x + 2} + 2\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ L\ (x^2 + 2x + 2) + 2 \text{ ang tan } (x + 1) + C_1 \qquad \ldots (b)$$

ahora:

$$\int \frac{(2x + 3)\ dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \int \frac{(2x + 2 + 1)\ dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} =$$

$$= \int (x^2 + 2x + 2)^{-2}(2x + 2)\ dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 1]^2} \qquad \ldots (c)$$

Esta última integral se puede resolver por sustitución trigonométrica, haciendo $x + 1 = (1) \tan \phi$

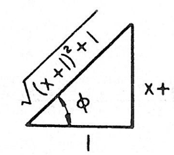


Figura VIII.7

$$x = \tan \phi + 1; \quad dx = \sec^2\phi\ d\phi$$

$$\sqrt{(x + 1)^2 + 1} = \sec \phi; \quad [(x + 1)^2 + 1]^2 = \sec^4\phi$$

luego:

$$\int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 1]^2} = \int \frac{\sec^2\phi\ d\phi}{\sec^4\phi} = \int \frac{d\phi}{\sec^2\phi} =$$

$$= \int \cos^2\phi\ d\phi = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2\phi)\ d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\int d\phi + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int \cos 2\phi\ 2d\phi =$$

$$= \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4} \text{ sen } 2\phi + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\,\phi + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\phi\,\cos\,\phi + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ang tan}\,(x+1) + \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}\;\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}} + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{ang tan}\,(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C_2$$

Teniendo en cuenta este resultado en (c), queda:

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{1}{x^2+2x+2} + \frac{1}{2}\,\text{ang tan}\,(x+1) + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C_2 \qquad \ldots (d)$$

por último se sabe que:

$$\int \frac{dx}{x+1} = L\,(x+1) + C_3 \qquad \ldots (e)$$

sustituyendo en (a) los resultados obtenidos en (b), (d), (e) y simplificando se tiene finalmente:

$$\int \frac{(2x^3+3x^2+x-1)\,dx}{(x^2+2x+2)^2\,(x+1)} = \frac{1}{2}\,L\,(x^2+2x+2) + \frac{3}{2}\,\text{ang tan}\,(x+1) +$$

$$+ \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} - L\,(x+1) + C$$

TRES SUSTITUCIONES DE RACIONALIZACION

Respecto a la integración de funciones irracionales, se han considerado anteriormente contados casos. En otros muchos se puede transformar la integral dada mediante una adecuada sustitución, en otra que pueda resolverse en alguna de las formas ya tratadas. Este procedimiento suele llamarse: *integración por racionalización.*

A continuación se presentan tres casos de integración por racionalización.

Caso 1. Cuando el integrando contiene solamente potencias fraccionarias, puede transformarse en una expresión racional empleando la sustitución: $z^n = x$, en que n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes de x.

Ejemplo VIII.44

Resolver:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

Como se trata de:

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/3}}$$

y el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6, la sustitución adecuada es:

$$z^6 = x$$

por lo cual:

$$x^{1/2} = z^3, \quad x^{1/3} = z^2 \quad \text{y} \quad dx = 6z^5 dz$$

entonces:

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/3}} = \int \frac{6z^5\,dz}{z^3 + z^2} = 6\int \frac{z^3 dz}{z+1}$$

efectuando la división de z^3 entre $z + 1$ se tiene:

$$\frac{z^3}{z+1} = z^2 - z + 1 - \frac{1}{z+1}$$

por lo que:

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/3}} = 6\int (z^2 - z + 1)\,dz - 6\int \frac{dz}{z+1} =$$

$$= 6\left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\right) - 6\,L\,(z+1) + C$$

$$= 2z^3 - 3z^2 + 6z - 6\,L\,(z+1) + C$$

sustituyendo ahora z en términos de x resulta:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\,\sqrt[3]{x} + 6\,\sqrt[6]{x} - 6L\,(\sqrt[6]{x} + 1) + C$$

Caso 2. Si se tienen solamente potencias fraccionarias de binomios de la forma $ax + b$, puede emplearse la sustitución: $z^n = ax + b$, donde n es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes de $ax + b$.

Ejemplo VIII.45

Calcular:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$$

Como:

$$\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2} \quad \text{y} \quad \sqrt{(x+1)^3} = (x+1)^{3/2}$$

la sustitución conveniente es:

$$z^2 = x + 1$$

así que:

$$dx = 2z\,dz, \qquad \sqrt{x+1} = z, \qquad \sqrt{(x+1)^3} = z^3$$

efectuando la sustitución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} = \int \frac{2z\,dz}{z + z^3} = 2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2 \text{ ang tan } z + C$$

sustituyendo por último a z en términos de x:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} = 2 \text{ ang tan } \sqrt{x+1} + C$$

Caso 3. Cuando se presenta una expresión irracional de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ó $\sqrt{x^2 - a^2}$ acompañada de una potencia impar de x fuera del radical, la sustitución conveniente es:

$z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\quad z = \sqrt{a^2 + x^2}\quad$ ó $\quad z = \sqrt{x^2 - a^2}\quad$ según el caso.

Ejemplo VIII.46

Resolver:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx$$

Se adopta la sustitución:

$$z = \sqrt{x^2 + a^2}$$

por la que:

$$z^2 = x^2 + a^2 \quad \text{y} \quad zdz = xdx$$

teniendo en cuenta esto se puede escribir:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2}\,xdx = \int \frac{z^2\,dz}{z^2 - a^2} =$$

$$= \int \left(1 + \frac{a^2}{z^2 - a^2}\right) dz = z + \frac{a^2}{2a}\,L\,\frac{z - a}{z + a} + C$$

$$= z + \frac{a}{2}\,L\,\frac{z - a}{z + a} + C$$

al sustituir:

$$z = \sqrt{x^2 + a^2}$$

resulta:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a}{2}\,L\,\frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{\sqrt{x^2 + a^2} + a} + C$$

VIII.2.3 USO DE TABLAS DE INTEGRALES

Los métodos y procedimientos presentados hasta aquí, son de suma importancia, ya que tienen por objeto transformar una integral dada en alguna o algunas de las integrales inmediatas elementales.

Dichos métodos permiten calcular una gran parte de las integrales que se presentan comúnmente en las aplicaciones del cálculo. En la práctica, cuando un ingeniero requiera calcular una integral indefinida no muy simple, acudirá a consultar alguna tabla de integrales, misma que generalmente tendrá una gran cantidad de fórmulas de reducción y de integrales resueltas.

Prácticamente todas las tablas de integrales están organizadas, presentando en forma clasificada las integrales según su naturaleza.

Para el uso adecuado de una tabla de integrales hay que estar familiarizado con los métodos de integración que se han tratado y se debe poner especial atención a las restricciones del conjunto sobre el que es válido cada resultado.

El primer paso para resolver una integral con auxilio de una tabla de integrales, es buscar en la tabla una fórmula por medio de la cual pueda resolverse la integral dada sin la necesidad de ninguna transformación.

Muchas veces la integral que se desea calcular no aparece en la tabla tal y como está presentada, será entonces necesario hacer una transformación antes de poder usar la tabla.

En estos casos se busca una fórmula de la tabla que se asemeje a la integral por resolver, de tal modo que la integral dada pueda transformarse a una expresión como la de la fórmula por un cambio sencillo de variable.

Si no puede aplicarse ninguna fórmula de la tabla, queda aún la posibilidad de emplear alguno de los métodos como el de integración por partes, que conduzca a otras integrales que puedan resolverse haciendo uso de la tabla.

En muchos libros de cálculo se presentan listas de integrales que constituyen en sí, tablas de integrales más o menos numerosas y hay obras que de por sí son tablas de integrales.

NOTA: Al final del capítulo se mencionan algunos libros donde se encuentran tablas de integrales.

VIII.3 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

VIII.3.1 CALCULO DE AREAS

Area de una región en un plano.

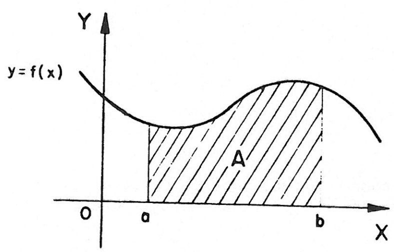
En el subtema VI.1.3, se definió:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta_i x$$

que es igual a la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

y es la medida del área de la región comprendida entre la curva de ecuación $y = f(x)$, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$, si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y si $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$. Véase figura VIII.8.



$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

Figura VIII.8

Si $f(x) < 0$ para toda x en $[a, b]$, cada $f(\xi_i)$ es un número negativo, y se define la medida del área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ como:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[- f(\xi_i)\right] \Delta_i x$$

que es igual a:

$$- \int_a^b f(x)\, dx$$

Ejemplo VIII.47

Obtener el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2 - 4x + 1$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

En la figura VIII.9, se ve la gráfica de región indicada. Si en el intervalo $[1, 3]$ se considera una partición con celdas de igual amplitud, $\Delta_i x = \|\Delta\|$, y como $f(x) = x^2 - 4x + 1 < 0$ en $[1, 3]$, cada rectángulo de la interpretación geométrica tiene de base $\Delta_i x$ y de altura $- f(\xi_i) = - (\xi_i^2 - 4\xi_i + 1) = - \xi_i^2 + 4\xi_i - 1$, luego la suma de las medidas de las áreas de los n rectángulos correspondientes a la partición que se tome es:

$$\sum_{i=1}^{n} (- \xi_i^2 + 4\xi_i - 1)\, \Delta_i x$$

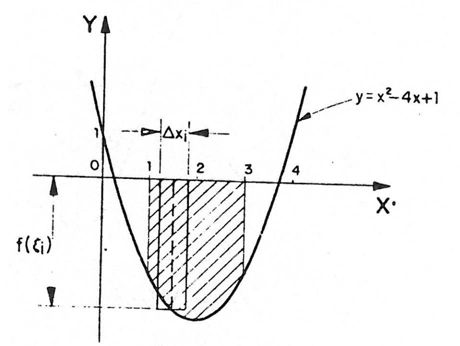


Figura VIII.9

entonces la medida A del área deseada está dada por:

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (- \xi_i^2 + 4\xi_i - 1)\ \Delta_i x = \int_1^3 (- x^2 + 4x - 1)\ dx$$

$$= - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - x \Big]_1^3 = \frac{16}{3}$$

esto es:

$$A = \frac{16}{3} u^2 \ ; \quad (u^2 = \text{unidades cuadradas})$$

Ejemplo VIII. 48.

Encontrar el área de la región comprendida entre la curva de ecuación $y = x^3 - 3x^2 + 2$ el eje x y las rectas $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 2$.

Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, entonces se tiene que $f(x) \geq 0$ en el intervalo cerrado $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ y $f(x) \leq 0$ en el intervalo $[1, 2]$ como se ve en la figura VIII.10.

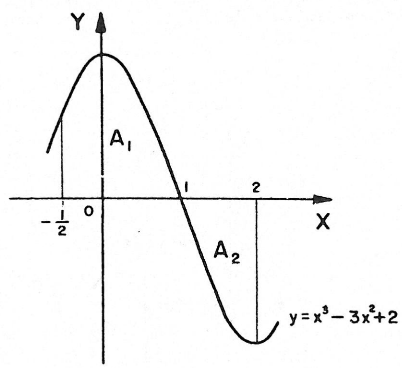


Figura VIII.10

Hay que separar la región en dos partes. Si A_1 es el número de unidades cuadradas del área de la región cuando x está en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ y A_2 es el número de unidades cuadradas en el área de la región cuando x pertenece al intervalo $[1, 2]$, entonces:

$$A_1 = \int_{-1/2}^{1} f(x)\ dx = \int_{-1/2}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2)\ dx$$

y

$$A_2 = - \int_1^2 f(x)\ dx = - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)\ dx$$

$A = A_1 + A_2$ es el número de unidades cuadradas del área de la región total.

$$A = \int_{-1/2}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2)\ dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2)\ dx =$$

$$A = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \Big]_{-\frac{1}{2}}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_1^2 =$$

$$= \frac{135}{64} + \frac{5}{4} = \frac{215}{64}$$

$$A = \frac{215}{64} u^2$$

Considérese ahora la necesidad de calcular el área de una región comprendida entre dos curvas y dos rectas paralelas al eje de las ordenadas.

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$, tales que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$. Se trata de obtener el área de la región comprendida entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, que se muestran en la figura VIII.11.

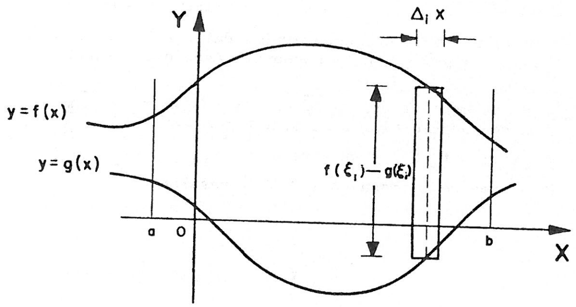


Figura VIII.11

Si se toma una partición de n celdas con norma $\|\Delta\| = \Delta_i x$ en el intervalo $[a, b]$ y en cada celda se escoge un punto ξ_i, se puede considerar en cada celda un rectángulo de base $\Delta_i x$ y altura $f(\xi_i) - g(\xi_i)$.

La suma de Riemann correspondiente a la suma de las áreas de dichos rectángulos es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - g(\xi_i) \right] \Delta_i x$$

Esta suma de Riemann da un valor que intuitivamente se ve que es cada vez más aproximado al número que representa la medida del área de la región, mientras mayor sea n.

Si A es el número de unidades cuadradas del área de la región, se tiene:

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - g(\xi_i) \right] \Delta_i x$$

Dado que f y g son continuas en $[a, b]$, $(f - g)$ también es una función continua en el mismo intervalo, por lo tanto, el límite anterior es igual a la integral definida que aparece en la siguiente expresión:

$$\boxed{A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx}$$

Ejemplo VIII. 49.

Encontrar el área de la región comprendida entre la curva $y = 6x - x^2$ y la recta $y = x$.

Es necesario determinar los puntos de intersección de la curva y la recta para conocer el intervalo en el que se encuentra la región. Esto se logra como es sabido, resolviendo como simultáneas sus ecuaciones.

Procediendo por igualación:

$$x = 6x - x^2 ; \quad x^2 - 5x = 0 ; \quad x(x - 5) = 0$$

luego:

$$x_1 = 0 , \quad x_2 = 5$$

para los cuales:

$$y_1 = 0 , \quad y_2 = 5$$

Así que los puntos de intersección son: O (0, 0) y P_1 (5, 5). Ver la figura VIII.12.

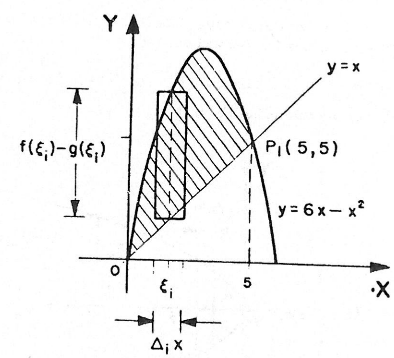


Figura VIII.12

Sea $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = 5$.

El área buscada estará dada por:

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx = \int_0^5 (6x - x^2 - x)\, dx =$$

$$= \int_0^5 (5x - x^2)\, dx = \left. \frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 =$$

$$= \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$$

$A = \frac{125}{6}\ u^2$ es el área deseada

Ejemplo VIII. 50

Calcular el área de la región limitada por la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x - y = 4$.

Al resolver como simultáneas las ecuaciones de la parábola y la recta se obtienen como puntos de intersección $P_1(2, -2)$ y $P_2(8, 4)$. La región cuya área se va a obtener se ve en la figura VIII.13, donde se observa que es necesario descomponer la región en dos partes: la comprendida en $[0, 2]$ y la que se ubica en $[2, 8]$, ya que la curva que limita a la región inferior no es la misma en estos dos intervalos.

Sea $A = A_1 + A_2$, siendo A_1 el área de la región en $[0, 2]$ y A_2 la correspondiente a $[2, 8]$.

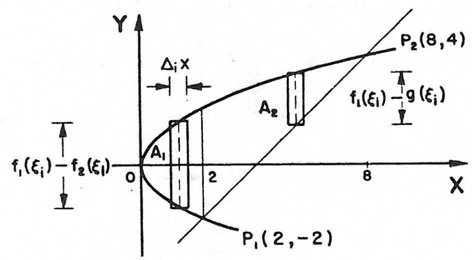


Figura VIII.13

Para calcular A_1 se observa que $y^2 = 2x$ no es la regla de correspondencia de una función, sino que involucra dos funciones:

$y = \sqrt{2x}$ y $y = -\sqrt{2x}$, la primera tiene como gráfica la parte de la parábola que está arriba del eje X y a la segunda le corresponde la parte que se encuentra debajo del eje X.

Si se hace $f_1(x) = \sqrt{2x}$ y $f_2(x) = -\sqrt{2x}$, la altura de un rectángulo típico de base $\Delta_i x$ en $[0, 2]$ viene a ser $f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i)$ y su área es $\left[f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i) \right] \Delta_i x$, así que la suma de Riemann en $[0, 2]$ resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f_1(\xi_i) - f_2(\xi_i) \right] \Delta_i x$$

por lo cual según el razonamiento ya conocido se tendrá:

$$A_1 = \int_0^2 \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} + \sqrt{2x} \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \sqrt{2x}\ 2\, dx = \left. \frac{2}{3} (2x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{16}{3}\ ; \quad A_1 = \frac{16}{3}\ u^2$$

Para calcular A_2 de la ecuación de la recta, que puede escribirse $y = x - 4$, se hace $g(x) = x - 4$.

Entonces según el procedimiento conocido, el área de un rectángulo típico en $[2, 8]$ es $\left[f_1(\xi_i) - g(\xi_i) \right] \Delta_i x$, por lo cual:

$$A_2 = \int_2^8 \left[f_1(x) - g(x) \right] dx = \int_2^8 \left[\sqrt{2x} - (x - 4) \right] dx =$$

$$= \left. \frac{1}{3} (2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} (x - 4)^2 \right]_2^8 = \frac{64}{3} - 8 - \left(\frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{38}{3}$$

$$A_2 = \frac{38}{3}\ u^2$$

finalmente:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + \frac{38}{3} = \frac{54}{3} = 18$$

$$A = 18 \text{ u}^2$$

Este mismo problema puede resolverse orientando horizontalmente los rectángulos cuyas áreas sumadas representan la suma de Riemann. Es decir, tomando como variable de integración a "y" y como intervalo de integración a $[-2, 4]$.

De la ecuación de la recta se hace $f(y) = y + 4$, y de la ecuación de la parábola, $g_1(y) = \frac{y^2}{2}$, entonces como se ve en la figura VIII.14, el área de un rectángulo típico es:

$$\left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta_i y$$

La suma de las áreas de los n rectángulos correspondientes a una partición de n celdas en $[-2, 4]$ es:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta_i y$$

por lo cual:

$$A = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\xi_i) - g(\xi_i)\right] \Delta_i y$$

entonces:

$$A = \int_{-2}^{4} \left[f(y) - g(y)\right] dy =$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\Big]_{-2}^{4}$$

$$= 24 - \frac{32}{3} - \left(-6 + \frac{4}{3}\right) = 30 - \frac{36}{3} = 18$$

$$A = 18 \text{ u}^2$$

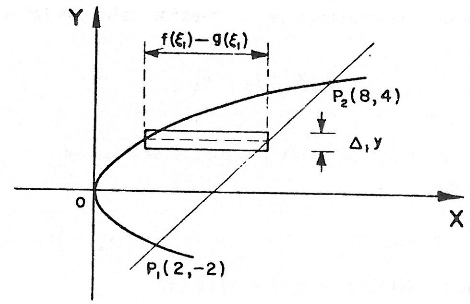


Figura VIII.14

VIII.3.2 CALCULO DE LONGITUDES

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PLANA.- Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y su gráfica la curva de ecuación $y = f(x)$ según se ve en la figura VIII.15.

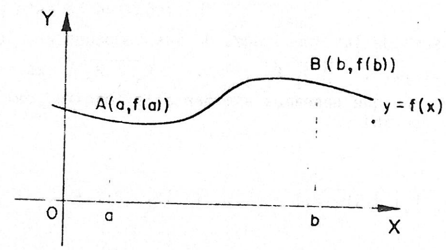


Figura VIII.15

La porción de curva desde el punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$ se llama un arco. Se desea asignar un número a lo que intuitivamente se considera como la longitud de ese arco.

Tómese en $[a, b]$ una partición de n celdas por medio de los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$, siendo $\|\Delta\|$ la norma de la red. Como se sabe, la amplitud de la i-ésima celda de la partición es:

$$\Delta_i x = x_i - x_{i-1} \leq \|\Delta\|$$

Al trazar sobre la curva los puntos de abscisas $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ se obtienen:

$$A = P_0 (x_0, y_0), \quad P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2), \quad \ldots, \quad B = P_n(x_n, y_n)$$

como se muestra en la figura VIII.16.

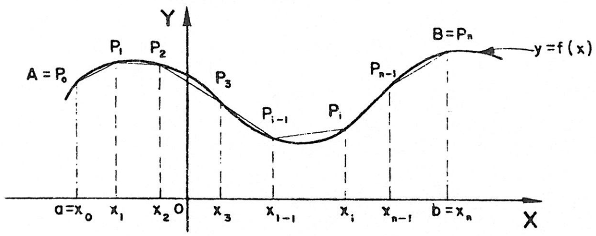


Figura VIII.16

Se traza la poligonal definida por los puntos $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_i, \ldots, P_{n-1}, P_n$. La longitud de esta poligonal, que es igual a la suma de las longitudes de sus componentes, los segmentos $\overline{P_0 P_1}$, $\overline{P_1 P_2}, \ldots, \overline{P_{i-1} P_i}, \ldots, \overline{P_{n-1} P_n}$, es un valor aproximado del número L que deseamos asignar a la longitud del arco AB. Dicha suma puede escribirse:

$$|\overline{P_0 P_1}| + |\overline{P_1 P_2}| + \ldots + |\overline{P_{i-1} P_i}| + \ldots + |\overline{P_{n-1} P_n}| = \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1} P_i}|$$

El valor de $\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1} - P_i}|$ será tanto más aproximado al valor de L, mientras mayor sea n, es decir mientras menor sea $\|\Delta\|$, de modo que la longitud L del arco AB se define como el límite de la suma anterior cuando la norma $\|\Delta\|$ tiende a cero.

> Definición: Si f es una función continua en $[a, b]$ y si existe un número L de modo que para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:
>
> $$\left| \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1} P_i}| - L \right| < \varepsilon$$
>
> Para toda participación del intervalo $[a, b]$ para la cual $\|\Delta\| < \delta$, entonces:
>
> $$L = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1} P_i}| \quad \ldots (9)$$
>
> y L se llama la longitud del arco de la curva $y = f(x)$ comprendida entre los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.

Cuando L existe, se dice que el arco en cuestión es rectificable.

Se necesita ahora obtener una fórmula que permita calcular la longitud L de un arco rectificable, de una curva de ecuación $y = f(x)$, para lo cual se requiere que la derivada de f sea continua en $[a, b]$.

Considérese una parte de la poligonal mencionada antes, que incluye a la componente $\overline{P_{i-1} P_i}$, ilustrada en la figura VIII.17.

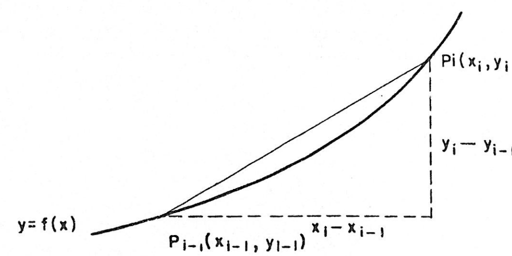


Figura VIII.17

La longitud de la cuerda $\overline{P_{i-1}\,P_i}$ está dada por:

$$|\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

si se hace $x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$ y $y_i - y_{i-1} = \Delta_i y$, se tiene:

$$|\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2}$$

donde al sacar del radical a $\Delta_i x$, queda:

$$|\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x}\right)^2}\ \Delta_i x \qquad \ldots (10)$$

Como se consideró que la derivada de f es continua en $[a, b]$, entonces se satisfacen las condiciones de la hipótesis del *Valor Medio del Cálculo Diferencial* para f en $[x_{i-1}, x_i]$, así que existe un número ξ_i en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i) tal que:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1})$$

como:

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta_i y \quad \text{y} \quad x_i - x_{i-1} = \Delta_i x$$

puede escribirse:

$$\Delta_i y = f'(\xi_i)\ \Delta_i x$$

de donde:

$$\frac{\Delta_i y}{\Delta_i x} = f'(\xi_i) \quad ; \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

sustituyendo este valor en (10) se obtiene:

$$|\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\ \Delta_i x \qquad \ldots (11)$$

donde:

$$x_{i-1} < \xi_i < x_i$$

para cada i desde 1 a n existe un valor dado por (11), así que al sumar todos esos valores puede escribirse:

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)^2\right]^2}\ \Delta_i x$$

tomando límites en ambos miembros de la expresión anterior, cuando la norma $\|\Delta\|$ tiende a cero, se escribe:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\ \Delta_i x$$

como $f'(x)$ es continua en $[a, b]$, la función $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ también lo es, entonces:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\ \Delta_i x = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\ dx$$

o sea:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}\,P_i}| = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\ dx$$

teniendo en cuenta este resultado en (9) se puede escribir finalmente:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\ dx} \qquad \ldots (12)$$

Fórmula que permite calcular la longitud del arco de la curva $y = f(x)$ del punto $A(a, f(a))$ al punto $B(b, f(b))$ siempre que f y f' sean continuas en $[a, b]$.

De modo semejante se puede obtener la fórmula:

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\, dy$$

para determinar la longitud de un arco de la curva de ecuación $x = g(y)$, si g y g' son funciones continuas en $[c, d]$.

Ejemplo VIII. 51

Calcular la longitud de la circunferencia de radio r.

La ecuación de la circunferencia de radio r y centro en el origen es $x^2 + y^2 = r^2$, de donde al despejar "y", se obtienen las funciones:

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Como se sabe, $y = f_1(x)$ es la ecuación del arco de la circunferencia que se encuentra en el primero y segundo cuadrantes.

Dada la simetría de la circunferencia, puede obtenerse la cuarta parte de su longitud calculando:

$$\frac{L}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + \left[f_1'(x)\right]^2}\, dx$$

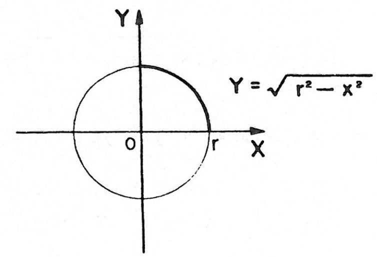


Figura VIII.18

En la figura VIII.18, se visualiza lo anterior.

Como:

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{y} \quad \left[f_1'(x)\right]^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

luego:

$$\frac{L}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + \left[f_1'(x)\right]^2}\, dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_0^r \frac{r\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= r \text{ ang sen } \frac{x}{r}\Big]_0^r = r\,(\text{ang sen } 1 - \text{ang sen } 0) = r\,\frac{\pi}{2}$$

luego:

$$L = 2\pi r$$

Ejemplo VIII.52

Encontrar la longitud del arco de la curva $y = x^{2/3}$ del punto (1, 1), al punto (8, 4).

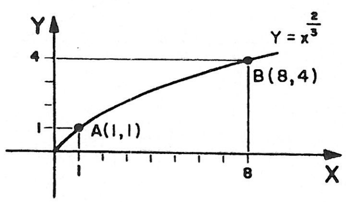


Figura VIII.19

En la figura VIII.19, se ve el arco cuya longitud se desea calcular. Para ello, haciendo $f(x) = x^{2/3}$ se tiene $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ entonces:

$$L = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}}\,dx$$

Haciendo $u = 9x^{2/3} + 4$, se tiene: $du = \frac{6\,dx}{x^{1/3}}$ y como $u = 13$ cuando $x = 1$ y $u = 40$ cuando $x = 8$:

$$L = \frac{1}{18}\int_{13}^{40} u^{1/2}\,du = \frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13}^{40} = \frac{1}{27}\,(40^{3/2} - 13^{3/2}) \doteq 7.6,\ L \doteq 7.6$$

VIII.3.3 VOLUMENES DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Si una región en un plano se gira con respecto a un eje del plano se genera un volumen conocido como *sólido de revolución* y al eje se le llama *eje de revolución*.

Si se tiene la región limitada por la gráfica de una función positiva f, el eje de las abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$ y se gira esta región alrededor del eje X, se generará un sólido de revolución. Ver figuras VIII.20 y VIII.20.1.

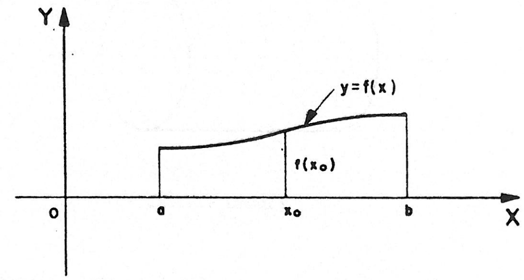


Figura VIII.20

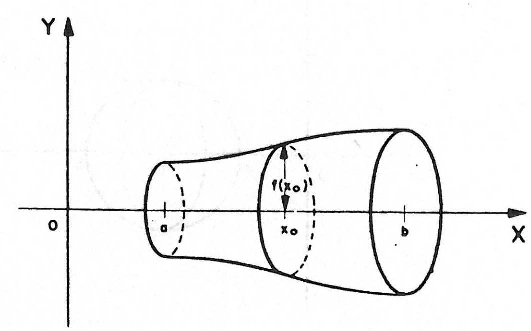


Figura VIII.20.1

En el caso de que f sea una función constante, la sección es rectangular y el sólido generado será un cilindro. Ver figura VIII.21.

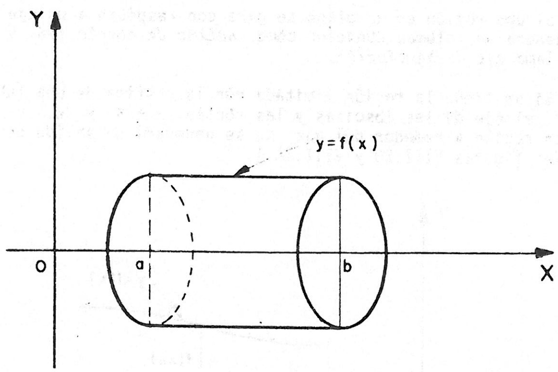


Figura VIII.21

Si la gráfica de f es un semicírculo y gira alrededor de uno de sus diámetros, entonces el sólido generado es una esfera. Ver figura VIII.22.

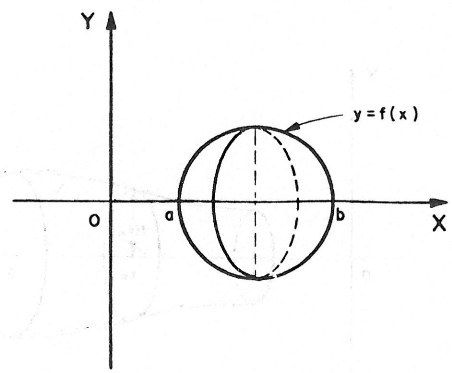


Figura VIII.22

Si f está representada por un triángulo rectángulo como el de la figura VIII.23, entonces la figura generada al girar la región alrededor del eje X será un cono. Ver figura VIII.23.1.

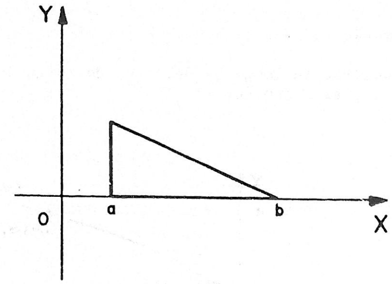


Figura VIII.23

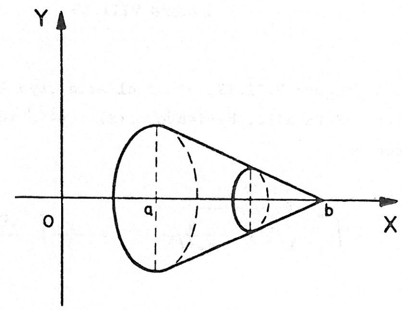


Figura VIII.23.1

Para definir el volumen de un sólido de revolución se puede usar la sumatoria de Riemann como sigue:

Supóngase que se tiene una función f como la de la figura VIII.24. Si se considera una partición en el intervalo $[a, b]$, la suma de Riemann que da una aproximación del área bajo la curva sería:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \;; \qquad \xi_i \in \left[x_{i-1}\,,\; x_i\right]$$

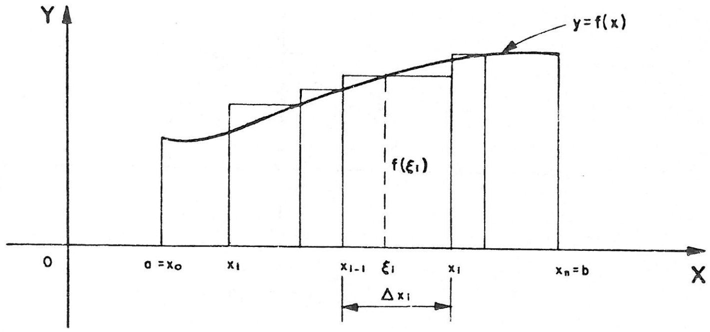


Figura VIII.24

El sólido generado por estos rectángulos al girar alrededor del eje X está formado por cilindros cuyas alturas son Δx_i y cuyos radios son iguales a $f(\xi_i)$. Ver figura VIII.25.

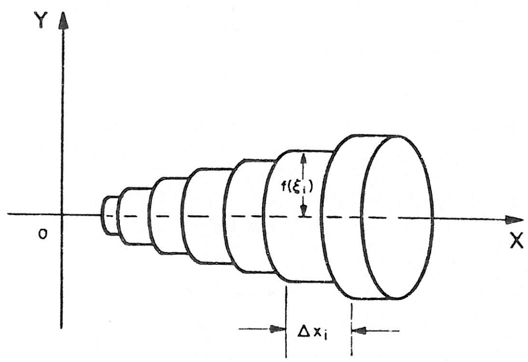


Figura VIII.25

El volumen de cada cilindro estará dado por la expresión:

$$v_i = \pi \left[f(\xi_i) \right]^2 \Delta x_i$$

Si la norma de la partición tiende a cero, o el número de subintervalos tiende a infinito, la suma de los volúmenes de los cilindros, que es una sumatoria de Riemann, se aproximará al volumen del sólido que se genera al girar la gráfica de f alrededor del eje X en el intervalo $[a, b]$.

Definición: Sea una función f continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar alrededor del eje X la región limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje X, está dado por:

$$v = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(\xi_i) \right]^2 \Delta x_i \doteq \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx \qquad \ldots (13)$$

donde n es el número de subintervalos de la partición.

El eje de revolución puede ser cualquier recta, pero el estudio se limitará a los ejes coordenados y a rectas paralelas a ellos.

En el caso de que el eje Y sea alrededor del cual gire la región, el volumen será:

$$v = \int_c^d \pi \left[f(y) \right]^2 dy$$

Ejemplo VIII.53

Calcular el volumen del sólido generado al hacer girar alrededor del eje X la región limitada por $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$ y el eje X.

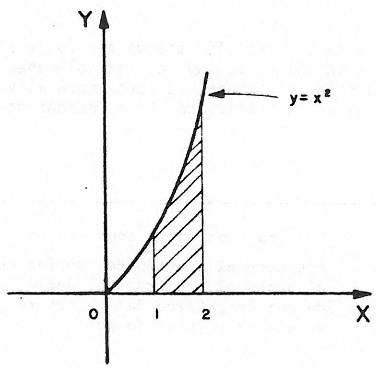


Figura VIII.26

Solución

$$v = \pi \int_1^2 y^2 \, dx$$

$$v = \pi \int_1^2 x^4 \, dx$$

$$v = \frac{\pi x^5}{5} \Big]_1^2$$

$$v = \frac{31 \pi}{5} \quad u^3$$

Ejemplo VIII.54

Encontrar el volumen de una esfera con centro en el origen y radio igual a "a".

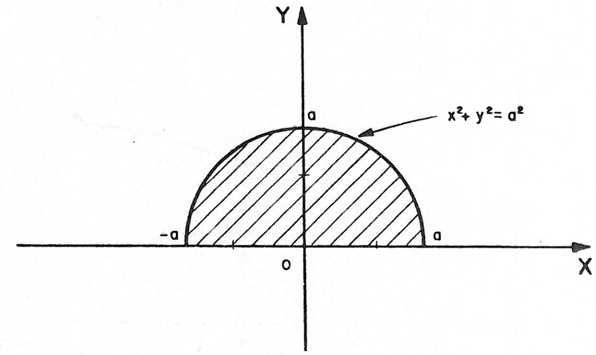


Figura VIII.27

Solución

Si se toma la región mostrada en la figura VIII.27, y se gira alrededor del eje X se tendrá el volumen pedido.

$$v = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) \, dx$$

$$v = \pi \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-a}^{a}$$

$$v = \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right)$$

$$v = \frac{4}{3} \pi a^3$$

Ejemplo VIII.55

Calcular el volumen del cono truncado que se genera al hacer girar alrededor del eje Y, la región limitada por las rectas $y = 2x$, $y = 2$, $y = 4$ y el eje Y.

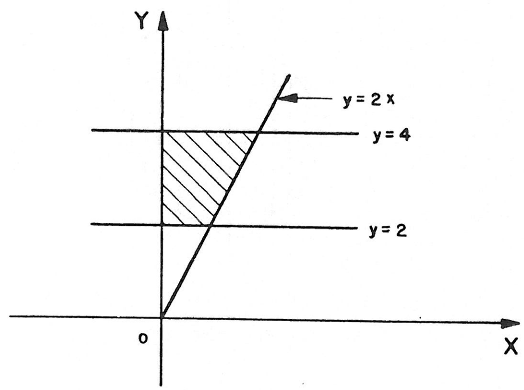


Figura VIII.28

Solución

$$v = \pi \int_2^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$v = \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^2 \, dy$$

$$v = \frac{\pi y^3}{12} \Big]_2^4$$

$$v = \frac{14 \pi}{3} u^3$$

Ejemplo VIII.56

Calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región limitada por $x = 2$, el eje X y la parábola $y = x^2$.

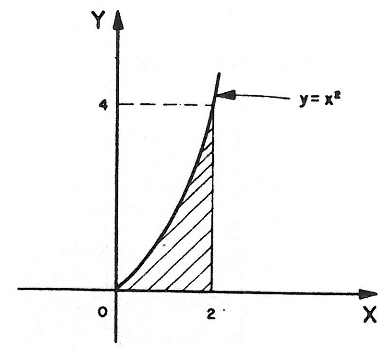


Figura VIII.29

Solución

$$v = \pi \int_0^4 (2 - x)^2 \, dy$$

$$v = \pi \int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 dy$$

$$v = \pi \int_0^4 \left(4 - 4\sqrt{y} + y\right) dy$$

$$v = \pi \left[4y - \frac{8}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^2}{2} \right]_0^4$$

$$v = \frac{8 \pi}{3} u^3$$

En ocasiones los volúmenes pueden ser calculados usando *conchas cilíndricas* . A continuación se explica este procedimiento.

Si se tiene un cilindro con altura fija h cuyo radio se incrementa en un Δr, entonces el incremento en su volumen será aproximadamente el valor de la diferencial dv.

Luego:

$$v = \pi r^2 h$$

$$dv = 2\pi \; r\,h\,dr$$

por lo que:

$$\Delta v \approx 2\pi \; r\,h\,\Delta r$$

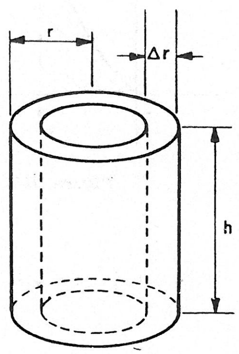


Figura VIII.30

Como el cascarón es delgado (el interés es el límite cuando $\Delta r \to 0$) no existe diferencia al tomar a r como el radio interno, el externo o alguno intermedio.

Nótese que si el cascarón cilíndrico de la figura VIII.30, es cortado a lo largo de una línea paralela a su eje y después es aplanado, el resultado será un sólido rectangular de longitud $2\pi r$, altura h y espesor Δr, y por lo tanto con volumen $2\pi rh\,\Delta r$ como antes.

Ejemplo VIII. 57

Un agujero de radio a es perforado simétricamente a través de una esfera de radio $2a$.

Encontrar el volumen del sólido restante.

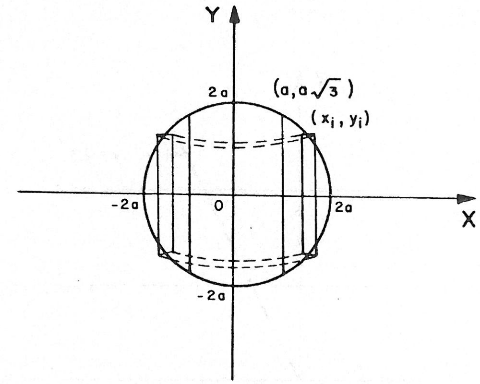


Figura VIII.31

Solución

Cuando el rectángulo gira alrededor del eje Y, se genera un cascarón cilíndrico con altura $2y_i$, radio aproximadamente x_i y espesor Δx_i. Entonces:

$$\Delta v_i \approx 2\pi \; x_i \; (2\,y_i)\;\Delta x_i \;=\; 4\pi \; x_i \; y_i \; \Delta x_i$$

por lo que el volumen deseado será:

$$v = 4\pi \int_a^{2a} xy \; dx$$

$$v = 4\pi \int_a^{2a} x\,\sqrt{4\,a^2 - x^2} \; dx$$

$$v = -2\pi\left[\frac{2}{3}\left(4a^2 - x^2\right)^{3/2}\right]_a^{2a}$$

$$v = 4\sqrt{3}\ \pi a^3$$

Ejemplo VIII.58

Encontrar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje X, la región limitada por la parabola $x = y^2 - 2y$ **y** la recta $y = x$.

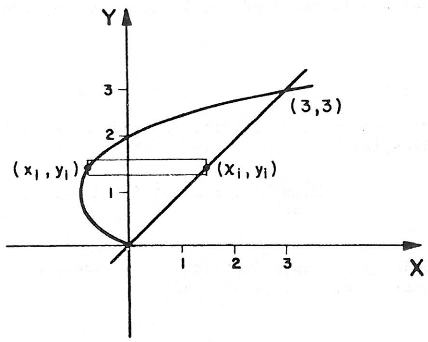


Figura VIII.32

Solución

Primero se resuelven las ecuaciones para localizar sus puntos de intersección, en este caso (0, 0), y (3, 3).

La recta $y = y_i$ corta a la parábola en el punto (x_i, y_i) y a la recta dada en (x_i, y_i) y un rectángulo de espesor Δy_i y que se extiende de una a otra de las intersecciónes. Cuando se gira alrededor del eje X, se genera un cascarón cilíndrico de altura $x_i - \mathrm{x}_i$, radio aproximadamente y_i y espesor Δy_i.

Por lo que:

$$\Delta v_i \approx 2\pi\ y_i\left(x_i - \mathrm{x}_i\right)\ \Delta y_i$$

Entonces, para el problema planteado:

$$v = 2\pi\int_0^3 y\left(x - \mathrm{x}\right)dy$$

$$v = 2\pi\int_0^3 y\left[y - \left(y^2 - 2y\right)\right]dy$$

$$v = 2\pi\int_0^3 \left(3y^2 - y^3\right)dy$$

$$v = 2\pi\left[y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^3$$

$$v = \frac{27}{2}\pi u^3$$

VIII.4 APLICACIONES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA A LA FORMULACION Y SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES SENCILLAS

Una ecuación que contiene derivadas o diferenciales se llama *ecuación diferencial*. Una ecuación de este tipo que implica una función desconocida y su derivada es frecuentemente una expresión de un problema físico, de ingeniería o de ciencias sociales en forma matemática. El problema de determinar la función desconocida, es decir, de resolver la ecuación diferencial, se convierte en un problema de matemáticas.

Issac Newton y Gottfried Leibniz, quienes independientemente desarrollaron las ideas fundamentales del cálculo, fueron también los primeros en considerar las ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, la segunda ley de la mecánica de Newton puede expresarse por medio de una ecuación diferencial. Esta ley dice, esencialmente:

La masa de una partícula en movimiento multiplicada por su aceleración, es igual a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la partícula. Esto puede expresarse por medio de la ecuación:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = F \left[t,\ u\ (t),\ \frac{d\ u(t)}{dt} \right].$$

para la posición $u(t)$ de una partícula sobre la que actúa una fuerza F que puede ser función del tiempo t, de la posición $u(t)$ y de la velocidad $\frac{d\ u(t)}{dt}$.

Para determinar el movimiento de la partícula sobre la que actúa una fuerza dada F, se necesita una función u que satisfaga la ley de Newton. Si F se debe únicamente a la gravedad, se tiene:

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = -\ mg$$

simplificando e integrando:

$$\frac{d\ u(t)}{dt} = -\ gt + C_1$$

volviendo a integrar:

$$u(t) = -\ \frac{1}{2}\ gt^2 + C_1\ t\ + C_2$$

donde las constantes de integración C_1 y C_2 aún no están determinadas.

Para determinar $u(t)$ completamente, se necesitan dos condiciones, la posición y la velocidad de la partícula en algún instante. Con estas condiciones se determinan las constantes C_1 y C_2.

Una de las formas de clasificar las ecuaciones diferenciales es en función de cuántas variables independientes depende la función desconocida. Cuando aparecen derivadas ordinarias, se dice que se trata de una ecuación diferencial ordinaria y cuando aparecen derivadas parciales (que se presentan en el curso de Cálculo Vectorial), se le llama ecuación diferencial parcial.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan ciertos fenómenos, son:

Ejemplo VIII.59

Si se observa la transformación radiactiva del radio en otras sustancias, se puede notar que la velocidad a la que se efectúa la transformación es proporcional a la cantidad de radio presente en cada instante. Si $R(t)$ representa la cantidad de radio presente en el tiempo t, entonces $\frac{d\ R(t)}{dt}$ representa la razón de cambio de $R(t)$ respecto al tiempo. Por consiguiente, la formulación del modelo matemático representante del fenómeno observado puede escribirse:

$$\frac{d\ R(t)}{dt} = -\ k\ R(t)$$

donde k es una constante de proporcionalidad y el signo menos indica que la cantidad $R(t)$ decrece respecto al tiempo.

Ejemplo VIII.60

Un fenómeno de electricidad queda representado con la ecuación diferencial:

$$L \frac{d^2\ Q(t)}{dt^2} + R \frac{d\ Q(t)}{dt} + \frac{1}{C}\ Q(t) = E(t)$$

donde L es la inductancia; Q, carga; R, resistencia; C, capacitancia y E, voltaje aplicado.

VIII.4.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El orden de una ecuación diferencial es igual al de la derivada de más alto orden que aparece en la ecuación.

Así:

$$F \left[x,\ u(x),\ u'(x),\ \dots\ ,\ u^{[n]}(x) \right] = 0$$

es una ecuación diferencial ordinaria de enésimo orden y representa una relación entre la variable independiente x y los valores de la función u y sus primeras n derivadas u', u'', $\dots$, $u^{[n]}$:

$$F(x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{[n]}) = 0$$

El grado de una ecuación diferencial es el exponente mayor de la derivada de mayor orden de la ecuación.

Ejemplo VIII.61

a) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ es de segundo orden y de primer grado.

b) $(y''' + 1)^2 - (2y'')^4 + 3xy = 0$ es de tercer orden y de segundo grado.

En una ecuación diferencial se supone que siempre se puede despejar la derivada de más alto orden, pudiendo escribirse:

$$y^{[n]} = f\left(x, y, y' \, y'', \ldots, y^{[n-1]}\right)$$

La solución de una ecuación diferencial ordinaria sobre el intervalo $\alpha < x < \beta$, es una función ϕ tal que existan $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{[n]}$ y satisfaga a:

$$\phi^{[n]}(x) = f\left[x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{[n-1]}(x)\right]$$

para cualquier x en $\alpha < x < \beta$. Si no se especifica otra cosa, se tiene una función f de valores reales y nos interesa obtener las soluciones $y = \phi(x)$ de valores reales.

Ejemplo VIII.62

La ecuación diferencial ordinaria de primer orden $\frac{dR}{dt} = -kR$, tiene la solución:

$$R = \phi(t) = Ce^{-kt}, \quad -\infty < t < \infty$$

donde C es una constante arbitraria.

Comprobación:

$$R = Ce^{-kt} \qquad -\infty < t < \infty$$

$$\frac{dR}{dt} = -kCe^{-kt}$$

$$\therefore \frac{dR}{dt} = -kR$$

Ejemplo VIII.63

La ecuación diferencial ordinaria de segundo orden $y'' + y = 0$, tiene como soluciones:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Comprobación:

$$y_1(x) = \cos x \;;\; x \in \mathbb{R} \qquad y_2(x) = \operatorname{sen} x \;;\; x \in \mathbb{R}$$

$$y_1'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad y_2'(x) = \cos x$$

$$y_1''(x) = -\cos x \qquad y_2''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\therefore -\cos x + \cos x = 0 \qquad \therefore -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0$$

$$0 \equiv 0 \qquad 0 \equiv 0$$

Ejemplo VIII.64

Las funciones: $\phi_1(x) = x^2 \, Lx$ y $\phi_2(x) = x^2$ son soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \qquad x > 0$$

Comprobación:

$$\phi_1(x) = x^2 \, Lx \;;\; x > 0 \qquad \phi_2(x) = x^2 \;;\; x > 0$$

$$\phi_1'(x) = x + 2x \, Lx \qquad \phi_2'(x) = 2x$$

$$\phi_1''(x) = 3 + 2 \, Lx \qquad \phi_2''(x) = 2$$

$$\therefore x^2(3 + 2Lx) - 3x(x + 2x\,Lx) + 4x^2\,Lx = 0 \qquad \therefore x^2(2) - 3x(2x) + 4x^2 = 0$$

$$3x^2 + 2x^2\,Lx - 3x^2 - 6x^2\,Lx + 4x^2\,Lx = 0 \qquad 2x^2 - 6x^2 + 4x^2 = 0$$

$$0 \equiv 0 \qquad 0 \equiv 0$$

Para saber si una ecuación diferencial tiene solución, se presenta el problema de la *existencia* de una solución. Y suponiendo que tiene una solución, cabe preguntarse: ¿Tendrá otras soluciones? ¿Qué tipo de condiciones adicionales deben especificarse para determinar una única solución particular? Este es el problema de la *unicidad* en una ecuación diferencial. Otra pregunta es: ¿Cómo se determina realmente una solución?. Aun sabiendo que una solución existe, puede suceder que no pueda expresarse en términos de las funciones elementales usuales: *polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas* e *hiperbólicas*.

Estas interrogantes, así como el teorema de existencia y unicidad para la solución de una ecuación diferencial son tratadas en asignaturas posteriores.

VIII.4.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES Y NO LINEALES

Otra clasificación importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se basa en determinar si son lineales o no lineales.

Una ecuación $F(x, y, y', \ldots, y^{[n]}) = 0$ es lineal cuando F es una función lineal en las variables $y, y' \ldots, y^{[n]}$, por lo que una ecuación diferencial lineal de orden n puede escribirse:

$$a_0(x)\, y^{[n]} + a_1(x)\, y^{[n-1]} + \ldots + a_n(x) = g(x)$$

Ejemplo VIII.65

a) $x^2 y'' + x y' - y = 0$ es una ecuación lineal.

b) $y'' - 2e^x y' + y y' = x^3$ es una ecuación no lineal.

Toda ecuación diferencial ordinaria que sea lineal debe cumplir con las propiedades siguientes:

1) Homogeneidad $g(\lambda x) = \lambda g(x)$

2) Aditividad $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$

Si no cumple con una o con las dos propiedades, es no lineal.

Ejemplo VIII.66

Investigar si la siguiente ecuación diferencial ordinaria es lineal o no lineal:

$$2x^3 - y(x)\frac{dy(x)}{dx} = 0$$

cuya solución es:

$$y = x^2$$

Analizando la homogeneidad para el segundo término:

$$y(\lambda x)\frac{d\,y(\lambda x)}{dx} \neq \lambda y(x)\,\lambda\frac{d\,y(x)}{dx}$$

Como no cumple con la propiedad probada se dice que esta ecuación diferencial ordinaria es no lineal.

Se puede decir que aquellas ecuaciones en las que aparezcan potencias de las derivadas, productos de las derivadas por la función y y funciones de y no lineales, son ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Ejemplo VIII.67

Determinar el orden de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales y especificar si la ecuación es lineal o no.

a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 2y = \operatorname{sen} x$ lineal de segundo orden.

b) $(1 + y^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x$ no lineal de segundo orden.

c) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1$ lineal de cuarto orden.

d) $\frac{dy}{dx} + x y^2 = 0$ no lineal de primer orden.

e) $\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x$ no lineal de segundo orden.

f) $\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + (\cos^2 x)\, y = x^3$ lineal de tercer orden.

Ejemplo VIII.68

Para cada una de las siguientes ecuaciones verificar si la función o funciones dadas son soluciones de la ecuación diferencial.

a) $y'' - y = o$

Soluciones:

$$y_1(x) = e^x \; ; \; y_2(x) = \cos h\, x$$

Para:

$$y_1(x) = e^x\ ,\quad y_1'(x) = e^x,\quad y_1''(x) = e^x$$

sustituyendo en la ecuación original:

$$e^x - e^x = 0$$

Para:

$$y_2(x) = \cosh x,\quad y_2'(x) = \operatorname{senh} x,\quad y_2''(x) = \cosh x$$

$$\cosh x - \cosh x = 0$$

b) $y''' + 2y' - 3y = 0$

Soluciones

$$y_1(x) = e^{-3x}\quad ;\quad y_2(x) = e^x$$

Para:

$$y_1(x) = e^{-3x}\ ,\quad y_1'(x) = -3e^{-3x},\quad y_1''(x) = 9e^{-3x}\ ;\quad y_1'''(x) = -27^{-3x}$$

sustituyendo en la ecuación original:

$$-27e^{-3x} - 6e^{-3x} - 3e^{-3x} \neq 0$$

luego $y_1(x) = e^{-3x}$ no es solución.

Para:

$$y_2(x) = e^x,\quad y_2'(x) = e^x,\quad y_2''(x) = e^x,\quad y_2'''(x) = e^x$$

sustituyendo en la ecuación original:

$$e^x + 2e^x - 3e^x = 0$$

luego $y_2(x) = e^x$ sí es solución.

c) $x^2 y'' + 5x\,y' + 4y = 0,\quad x > 0$

Soluciones

$$y_1(x) = x^{-2},\quad y_2(x) = x^{-2}\,Lx$$

Para:

$$y_1(x) = x^{-2}\ ,\quad y_1'(x) = -2x^{-3},\quad y_1''(x) = 6x^{-4}$$

sustituyendo en la ecuación original:

$$x^2 \cdot 6x^{-4} + 5x(-2x^{-3}) + 4x^{-2} = 0$$

$$6x^{-2} - 10x^{-2} + 4x^{-2} = 0$$

luego $y_1(x) = x^{-2}$ sí es solución.

Para:

$$y_2(x) = x^{-2}Lx,\quad y_2'(x) = x^{-2}\frac{1}{x} + Lx\,(-2x^{-3}) = x^{-3} - 2x^{-3}\,Lx$$

$$y_2''(x) = -3x^{-4} - \left[2x^{-3}\frac{1}{x} + Lx\,(-6x^{-4})\right] = -5x^{-4} + 6x^{-4}\,Lx$$

sustituyendo en la ecuación original:

$$x^2(-5x^{-4} + 6x^{-4}\,Lx) + 5x\,(x^{-3} - 2x^{-3}\,Lx) + 4x^{-2}\,Lx = 0$$

$$-5x^{-2} + 6x^{-2}\,Lx + 5x^{-2} - 10x^{-2}\,Lx + 4x^{-2}\,Lx = 0$$

luego $y_2(x) = x^{-2}\,Lx$ sí es solución.

d) $y'' + y = \sec x\ ,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

Solución

$$y(x) = \cos x\ L\cos x + x\operatorname{sen} x$$

$$y'(x) = \cos x\,\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x\ L\cos x + x\cos x + \operatorname{sen} x$$

$$y'(x) = -\operatorname{sen} x\ L\cos x + x\cos x$$

$$y''(x) = -\operatorname{sen} x\,\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} - \cos x\ L\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x$$

$$y''(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} - \cos x\ L\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x$$

sustituyendo en la ecuación original queda:

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} - \cos x \; L \cos x - x \,\text{sen}\, x + \cos x + \cos x \; L \cos x + x \,\text{sen}\, x = \sec x$$

$$\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = \sec x$$

multiplicando ambos miembros por cos x:

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

luego $y(x) = \cos x \; L \cos x + x \,\text{sen}\, x$ sí es solución.

e) $y' - 2xy = 1 \; ; \quad y = \phi(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}$

$$y' = e^{x^2} e^{-x^2} + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2xe^{x^2}$$

$$y' = 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2xe^{x^2}$$

$$1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{x^2} = 1$$

$$1 = 1$$

luego $y = \phi(x)$ sí es solución.

VIII.4.3 SOLUCION EXPLICITA Y SOLUCION IMPLICITA

Hay ocasiones en que las soluciones de ecuaciones diferenciales vienen dadas explícitamente como funciones de la variable independiente, pero en otros casos, sobre todo en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, al resolver la ecuación se puede llegar a una expresión que representa implícitamente a una infinidad de funciones escalares de una sola variable.

Ejemplo VIII.69

Sea la ecuación diferencial:

$$y y' + x = 0$$

La ecuación $x^2 + y^2 = C^2$ donde C^2 es una constante esencial y arbitraria, satisface a la ecuación diferencial considerada.

$$2x + 2yy' = 0 \; ; \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

luego:

$$-y\frac{x}{y} + x = 0 \; ; \qquad 0 \equiv 0$$

Se puede verificar que $x^2 + y^2 = C^2$ expresa implícitamente una infinidad de soluciones, (funciones de x), para la ecuación diferencial.

Dependiendo de las condiciones del problema, cada una de las funciones será solución. Por ejemplo una solución que pase por (0, 3) da:

$$0 + 9 = C^2$$

por lo que:

$$x^2 + y^2 = 9$$

y de aquí:

$$y_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \; ; \quad -3 < x < 3$$

En este caso ha sido sencillo resolver la ecuación y encontrar $y = y(x)$. Frecuentemente es imposible resolver la ecuación implícita para obtener una función explícita, debiendo recurrir generalmente a procedimientos numéricos para tabular la solución explícita:

$$y = y(x)$$

Entonces, toda función $\phi(x, y) = C$ que satisfaga a la ecuación $F(x, y, y', \ldots, y^{[n]}) = 0$ y además defina una función $y = y(x)$ que también satisfaga a la ecuación diferencial, se dice que representa una solución implícita de ella.

Las ecuaciones diferenciales lineales siempre conducen a funciones explícitas y las no lineales, generalmente a funciones implícitas.

VIII.4.4 ELIMINACION DE CONSTANTES ARBITRARIAS

Las ecuaciones diferenciales aparecen de muchas formas y hay un camino para llegar a ellas. Sea una ecuación solución con constantes arbitrarias. Si se eliminan las constantes se llegará a una ecuación diferencial satisfecha por la solución original.

Hay diferentes métodos para eliminar las constantes, pero se cumple que el número de derivadas que necesitan usarse es el mismo que el de constantes arbitrarias que se eliminan.

Entonces la ecuación diferencial a la que se llega es de orden igual al número de constantes arbitrarias de la ecuación solución dada. Además se satisface con la solución dada y está libre de constantes arbitrarias.

Ejemplo VIII.70

Eliminar la constante arbitraria de:

$$y \operatorname{sen} x - x y^2 = C$$

Derivando:

$$y \cos x + y' \operatorname{sen} x - 2x y y' - y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (\operatorname{sen} x - 2 x y) = y^2 - y \cos x$$

$$y (\cos x - y)\, dx + (\operatorname{sen} x - 2 x y)\, dy = 0$$

Ejemplo VIII.71

Eliminar las constantes arbitrarias de:

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \beta) \; ; \quad \omega \text{ es un parámetro.}$$

Derivando:

$$\frac{dx}{dt} = \omega A \cos (\omega t + \beta)$$

derivando nuevamente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \omega^2 A \operatorname{sen} (\omega t + \beta)$$

sustituyendo el valor de $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \beta)$ queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

VIII.4.5 FAMILIAS DE CURVAS

Una ecuación que contiene un parámetro, así como una o ambas coordenadas de un punto en un plano, representa una familia de curvas.

Ejemplo VIII.72

La ecuación:

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = 2 c^2$$

o bien:

$$x^2 + y^2 - 2 c (x + y) = 0 \qquad \ldots (a)$$

representa una familia de circunferencias cuyos centros están sobre la recta $y = x$ y que pasan por el origen, figura VIII.33.

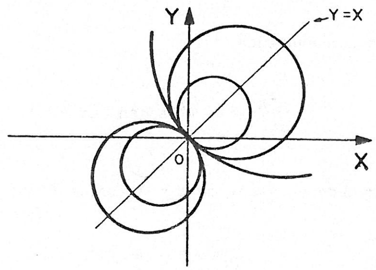


Figura VIII.33

Si se elimina C tomándola como constante arbitraria se llega a la *ecuación diferencial de la familia.*

La ecuación (a) puede escribirse:

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = 2c$$

Derivando con respecto a x, agrupando términos y multiplicando por dx queda:

$$(x^2 + 2xy - y^2)\,dx - (x^2 - 2xy - y^2)\,dy = 0$$

Esta expresión es la ecuación diferencial de la familia de circunferencias representadas por la ecuación:

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = 2c^2$$

En dicha ecuación diferencial se ve que se define la pendiente de la tangente para un punto (x, y):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - 2xy - y^2}$$

Cuando una familia de curvas está representada por una ecuación con dos parámetros, la ecuación diferencial será de segundo orden y la representación geométrica resulta muy complicada.

Ejemplo VIII.73

Obtener la ecuación diferencial de la familia de rectas con la suma algebraica de sus intersecciones con los ejes coordenados igual a k:

Solución

$$a + b = k, \quad \text{por lo que} \quad a = k - b$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b, \qquad y = -\frac{b}{k-b}x + b$$

Derivando:

$$y' = -\frac{b}{k-b}$$

de donde despejando b:

$$y'k - by' = -b, \quad b(y' - 1) = y'k, \quad b = \frac{y'k}{y' - 1}$$

como:

$$a = k - b, \qquad a = k - \frac{y'k}{y'-1}, \qquad a = \frac{y'k - k - y'k}{y' - 1}, \qquad a = -\frac{k}{y' - 1}$$

sustituyendo los valores obtenidos de a y b en:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

queda:

$$y = -\frac{\frac{y'k}{y'-1}}{-\frac{k}{y'-1}}x + \frac{y'k}{y'-1}$$

$$y = y'x + \frac{y'k}{y'-1}$$

y finalmente:

$$(xy' - y)(y' - 1) + ky' = 0$$

VIII.4.6 SOLUCION GENERAL Y SOLUCION SINGULAR

Toda ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden tiene una solución que contiene n constantes arbitrarias. A esta solución se le llama *solución general*. Geométricamente define una familia de curvas en las que cada una representa una solución particular de la ecuación diferencial. La solución particular se obtiene de valuar las constantes esenciales y arbitrarias, dependiendo de las condiciones del problema en cuestión.

En ocasiones hay ecuaciones diferenciales no lineales que tienen soluciones que no provienen de la solución general y por esto se les llama *soluciones singulares*.

> Definición: Las ecuaciones diferenciales lineales no poseen soluciones singulares. Unicamente las poseen las ecuaciones diferenciales no lineales de grado $k \geq 2$.

VIII.4.7 SEPARACION DE VARIABLES

Una ecuación general de primer orden y primer grado puede ser:

$$M dx + N dy = 0$$

en donde M y N pueden ser funciones de x y y.

Algunas ecuaciones de este tipo son tan simples que se pueden escribir como:

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

es decir que las variables pueden separarse y entonces es posible que la solución pueda obtenerse rápidamente.

Se trataría entonces de efectuar dos integrales indefinidas, cada una en función de una sola variable independiente.

Entonces $F = C$, donde C es una constante arbitraria y es el resultado deseado. Esta constante engloba a las dos constantes de las integrales.

> Definición: Toda ecuación diferencial ordinaria de primer orden que puede ser escrita como:
>
> $$f(x)dx + g(y)dy = 0$$
>
> se llama ecuación de variables separables.

Ejemplo VIII.74

Resolver la ecuación:

$$2(y + 3)dx - xy\, dy = 0$$

Solución

Si se separan las variables:

$$\frac{2\, dx}{x} - \frac{y\, dy}{y+3} = 0$$

que también se pueden escribir como:

$$\frac{2\, dx}{x} - \left(1 - \frac{3}{y+3}\right) dy = 0$$

integrando:

$$2\, Lx - y + 3\, L\,(y + 3) = C \qquad \ldots (a)$$

En esta solución también se puede escribir la constante arbitraria en forma logarítmica:

$$2\, Lx - y + 3\, L(y + 3) + L C_1 = 0$$

de donde:

$$y = 2\, Lx + 3L(y + 3) + L C_1.$$

$$y = L C_1\, x^2\, (y + 3)^3$$

$$e^y = C_1\, x^2\, (y + 3)^3$$

Como puede observarse esta solución es más compacta que la obtenida en (a) y también puede llegarse a ella en la siguiente forma:

De (a):

$$y + C = 2\,Lx + 3\,L(y+3) = L\left[x^2\,(y+3)^3\right]$$

$$e^{y+C} = x^2\,(y+3)^3$$

$$e^y\,e^C = x^2\,(y+3)^3$$

si se hace $e^C = \frac{1}{C_1}$, queda:

$$e^y = C_1\,x^2(y+3)^3$$

Ejemplo VIII.75

Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$1 + y' = e^y$$

Solución

Separando las variables:

$$1 - e^y + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$dx - e^y\,dx + dy = 0 \quad ; \quad dx\,(1 - e^y) + dy = 0$$

$$dx + \frac{dy}{1-e^y} = 0$$

multiplicando numerador y denominador de la fracción por e^{-y}:

$$dx + \frac{e^{-y}\,dy}{e^{-y} - 1} = 0$$

integrando se tiene:

$$x - L(e^{-y} - 1) = C$$

$$x - C = L\,(e^{-y} - 1); \qquad e^{x-C} = e^{-y} - 1; \qquad e^x\,e^{-C} = e^{-y} - 1$$

si:

$$e^{-C} = C_1\,, \quad C_1\,e^x = e^{-y} - 1$$

luego la solución general es:

$$e^{-y} = C_1\,e^x + 1$$

Ejemplo VIII.76

Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y\,dx + (x^2+1)\,dy = 0$$

Solución

Separando las variables:

$$\frac{dx}{x^2+1} + \frac{dy}{y} = 0$$

integrando se tiene:

$$\text{ang tan } x + \ln y = C$$

$$\ln y = C - \text{ang tan } x$$

$$y = e^{C - \text{ang tan } x}$$

$$y = e^C\,e^{-\text{ang tan } x}$$

$$C_1 = e^C$$

luego la solución general es:

$$y = \frac{C_1}{e^{\text{ang tan } x}}$$

Ejemplo VIII.77

Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + \frac{x\,e^x}{y} = 0$$

Solución

Separando las variables:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x\,e^x}{y} = 0$$

$$x\,e^x\ dx + y\ dy = 0$$

integrando se tiene:

$$\int x\ e^x\ dx + \int y\ dy = 0$$

$$u = x \qquad dv = e^x\ dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$xe^x - \int e^x\ dx$$

por lo que:

$$xe^x - e^x + \frac{y^2}{2} = C$$

$$\frac{y^2}{2} = C + e^x - xe^x \ ; \qquad C_1 = 2C$$

luego la solución general es:

$$y^2 = C_1 + 2e^x - 2xe^x$$

BIBLIOGRAFIA PARA CONSULTA DE LISTAS O TABLAS DE INTEGRALES

J.F. RANDOLPH Y M. KAC.
Analytic Geometry and Calculus
The Macmillan Company. (157 fórmulas)

W. A. GRANVILLE, P.F. SMITH, W.R. LONGLEY
Cálculo Diferencial e Integral
U. T. E. H. A. (210 fórmulas)

M.H. PROTTER, C.B. MORREY
Cálculo con Geometría Analítica
Fondo Educativo Interamericano S. A. (65 fórmulas)

EDWIN J. PURCEL
Cálculo y Geometría Analítica
Editorial Norma (118 fórmulas)

A. ALBERT KLAF
Whittlesey House
Calculus Refresher for Technical Men
Mc Graw - Hill Book Company (201 fórmulas)

WILLIAM K. MORRIL
Calculus
D. Van Nostrand Company Inc. (110 fórmulas)

H. P. GREENSPAN, D. J. BENNEY
Calculus. An introduction to Applied Mathematics
Mc Graw - Hill Kogakusha Ltd (80 fórmulas)

SHERMAN K. STEIN
Calculus and Analytic Geometry
Mc Graw - Hill Book Company (65 fórmulas)

JOHN F. RANDOLPH
Cálculo, Geometría Analítica , Vectores
Compañía Editorial Continental, S. A. (100 fórmulas)

Cinco obras donde se encuentran tablas de integrales más o menos numerosas son:

CHARLES D. HODGEMAN
Mathematical Tables From Handbook of
Chemistry And Phisics.
Chemical Rubber Publishing Co.

RICHARD STEVENS BURINGTON
Manual de Tablas y Fórmulas Matemáticas
Montaner y Simón, S. A.

RALPH G. HUDSON Y JOSEPH LIPKA
Manual de Matemáticas
Limusa Wiley, S. A.

B. O. PIERCE
A Short Table of Integrals
Ginn and Company.

H. B. DWIGHT
Tables of Integrals and Other Mathematical Data
The Macmillan Company.

B I B L I O G R A F I A

LOUIS LEITHOLD
El Cálculo con Geometría Analítica
Editorial Harper and Row Latinoamericana
2a. Edición, 1973.

EARL W. SWOKOWSKI
Cálculo con Geometría Analítica
Editorial Wadsworth Internacional Iberoamérica
2a. Edición, 1982.

BRITTON, KRIEGH, RUTLAND
Matemáticas Universitarias, Vol. I
Editorial CECSA, 1970.

M.H. PROTTER Y C.B. MORREY
Cálculo y Geometría Analítica
Primer Curso.
Editorial Addison Wesley, 1967.

TOM. M. APOSTOL
Calculus, Vol. I
Editorial Reverté, S.A.
2a. Edición, 1977.

JAMES E. SHOCKLEY
Calculus and Analytic Geometry
Editorial Saunders College Publishing
1a. Edición, 1982.