



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

*ACTUALIZACIÓN DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA*

Del 10 al 14 de Marzo de 2003

APUNTES GENERALES

CI - 045

Instructor: Ing. Constantino Gutiérrez Palacios
DGCOH
MARZO DEL 2003

CAPÍTULO 1

ASPECTOS GENERALES SOBRE EL FLUJO PERMANENTE EN CANALES

De manera elemental, podría definirse un *canal* como una estructura que conduce un líquido por efecto exclusivo de la acción de la gravedad. Obsérvese que esta definición nada tiene que ver con la forma geométrica de la estructura.

Esto significa que, desde el punto de vista hidráulico, son *canales* aquellos conductos cuyas secciones transversales sean como las mostradas en la figura 1.1, y tubos aquellos como los indicados en la figura 1.2.

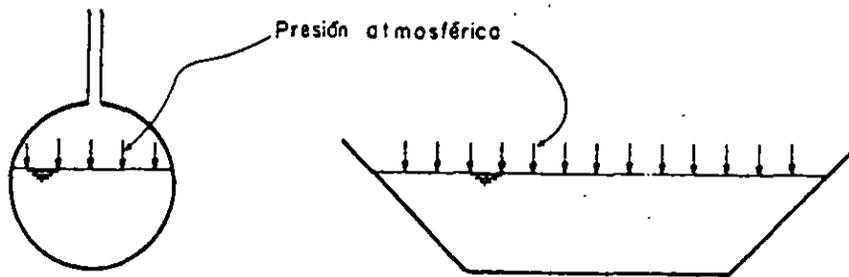


FIGURA 1.1 Canales

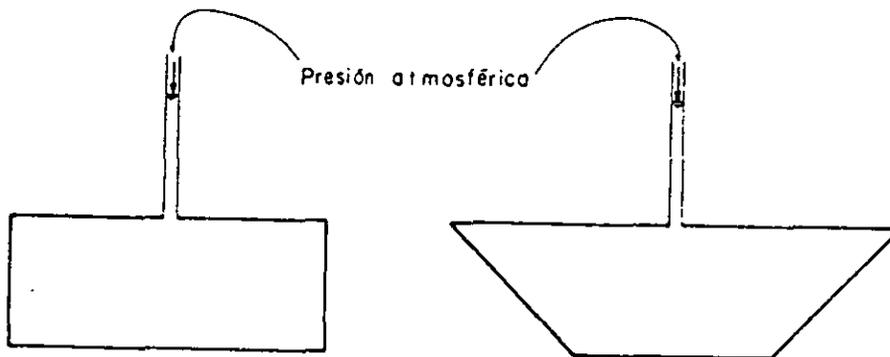


FIGURA 1.2 Tubos

1.1 Características generales del flujo en un canal

Supóngase que un observador se encuentra inmóvil frente a una sección de un escurrimiento a superficie libre. Si al transcurrir el tiempo, el área hidráulica A en esa sección no cambia, se dice que el flujo es *permanente* o *estacionario*.

Con base en esta definición, puede concluirse lo siguiente: si el área hidráulica de la sección es constante, necesariamente el gasto Q será siempre el mismo y, por consiguiente, la velocidad V y el tirante h en la sección tampoco variarán con el tiempo (figura 1.3.a).

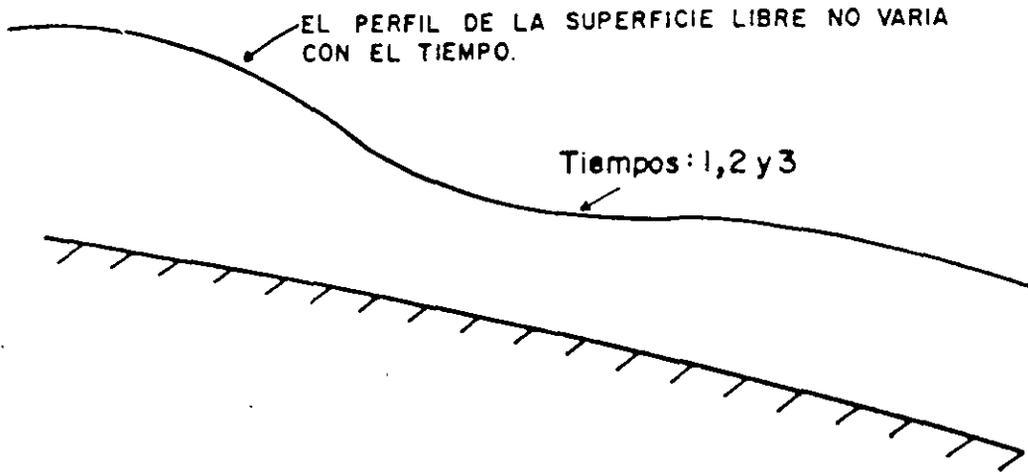
Todas estas características se pueden representar en la siguiente forma:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1.1.a)$$

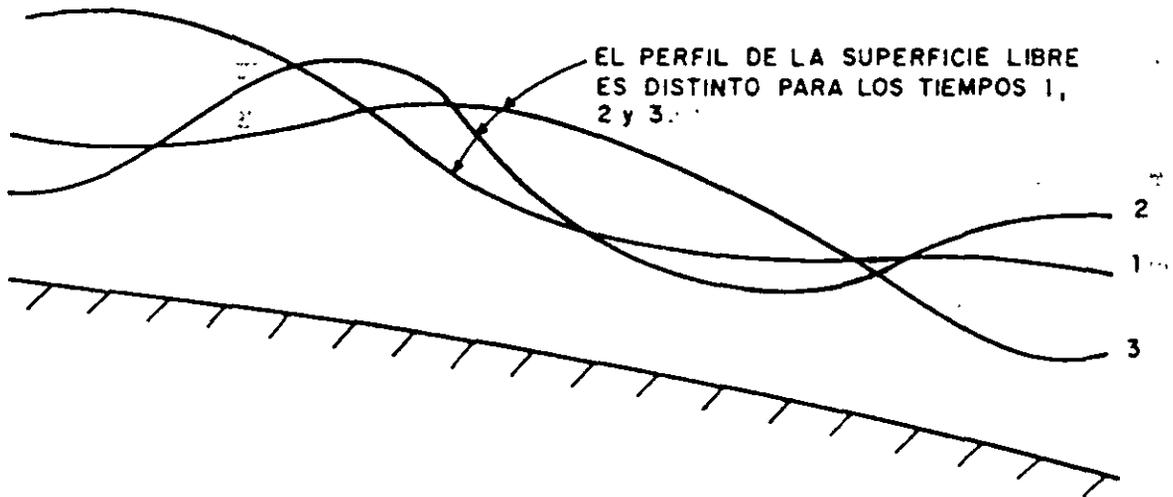
es decir, los parámetros indicados son independientes del tiempo para cada sección.

Desde luego, como se explicará posteriormente, el hecho de que un flujo sea permanente no implica que todas las secciones sean iguales entre sí. Cuando esto último sucede, en realidad se trata de un caso particular del flujo permanente que se llama *uniforme*.

Cuando el flujo varía con el tiempo, se denomina *no permanente* o *no estacionario*. En la figura 1.3 se representan los flujos permanente y no permanente, indicando con los números 1, 2 y 3 el perfil de la superficie libre en un canal en tres momentos diferentes.



a) Flujo permanente



b) Flujo no permanente

FIGURA 1.3

1.2 Tipos de flujo permanente

En flujo permanente en canales pueden presentarse dos tipos de escurrimientos, a saber: *uniforme* y *no uniforme*.

En el cuadro 1.1 se indica una clasificación de las posibilidades de flujo permanente que puedan presentarse y a continuación se hará una breve explicación de cada una de ellas.

	Uniforme		
FLUJO			
PERMANENTE		Gradualmente variado	Acelerado Retardado ("remanso")
O	No uniforme o variado		
ESTACIONARIO		Bruscamente variado	

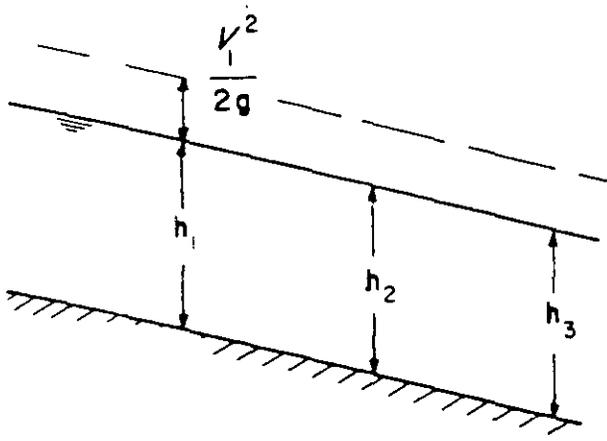
CUADRO 1.1

El *flujo uniforme* es aquel en que todas las secciones del canal tienen exactamente iguales características hidráulicas. Esto es factible sólo en canales prismáticos* de sección constante, ya que si hay cambios geométricos de una sección a otra es imposible que todas las secciones tengan la misma área hidráulica. Una consecuencia de esta condición es que, en un canal con régimen uniforme, las trazas de la plantilla y de la superficie del agua con un plano vertical alojado en la dirección del flujo son líneas paralelas, lo que sucede también con la línea de la energía debido a que la velocidad media del agua en el canal es constante (figura 1.4.a).

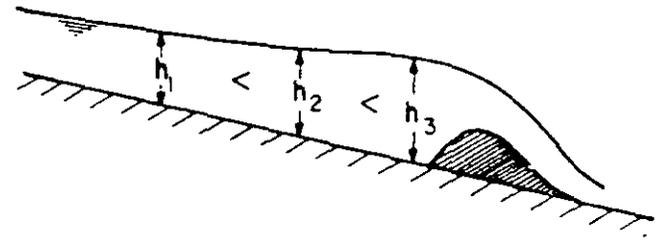
El *flujo no uniforme o variado* es aquel en que las condiciones hidráulicas son diferentes de una sección a otra, y se subdivide en dos tipos: *gradualmente variado* y *bruscamente variado*.

Si la sección y la pendiente de la plantilla del canal son constantes, se puede formar un *flujo gradualmente variado* que se caracteriza porque sus tirantes cambian en forma continua a lo largo del escurrimiento.

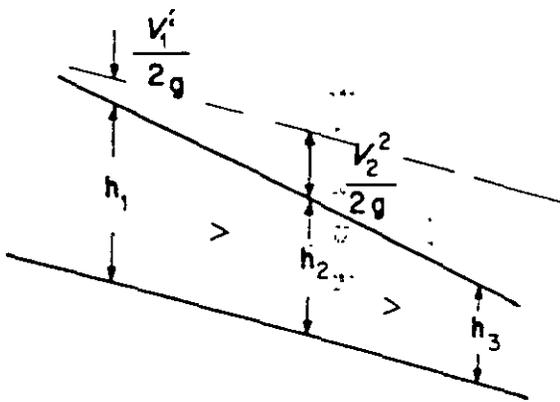
*Canales prismáticos son aquellos cuya sección transversal y pendiente longitudinal son constantes y además tanto su plantilla como sus paredes son planas y están formadas por generatrices longitudinales, rectas y paralelas.



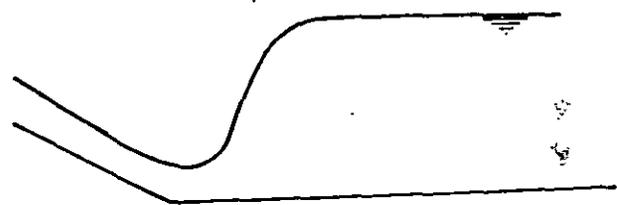
a) Flujo uniforme



c) Flujo gradualmente retardado o remanso



b) Flujo gradualmente acelerado



d) Flujo bruscamente variado (salto hidráulico)

FIGURA 1.4

Por otra parte, en algunas alteraciones bruscas de sección, de pendiente o simplemente cuando existe contacto entre dos masas de agua diferentes, se presenta el *flujo bruscamente variado* que es un fenómeno local, del que el salto hidráulico es un caso típico (figura 1.4.d). Este fenómeno se discutirá con detalle en el capítulo 5.

El flujo gradualmente variado puede ser *acelerado* o *retardado*. El primero se presenta cuando los tirantes en la dirección del escurrimiento van disminuyendo (figura 1.4.b) y el segundo, llamado también *remanso* existe cuando sucede el fenómeno contrario. Un caso muy típico de remanso es el que se presenta aguas arriba de un vertedor o cualquier obstrucción semejante, como se muestra en la figura 1.4.c.

1.3 Ecuaciones fundamentales para flujo permanente en escurrimientos a superficie libre

Un flujo permanente se puede caracterizar con las siguientes tres leyes físicas:

- Principio de continuidad
- Ecuación de la energía
- Ley del impulso o de la cantidad de movimiento.

Enseguida se expondrá una explicación de estas leyes.

1.3.1 Principio de continuidad

La velocidad media V en una sección de un escurrimiento es aquella que al multiplicarse por el área hidráulica A da por resultado el gasto Q que pasa en ese instante por la sección, es decir:

$$V A = Q$$

Como se señaló anteriormente, en un flujo permanente el gasto Q es constante en cualquier sección. Es decir en dos secciones, 1 y 2, escogidas al azar en un mismo escurrimiento, es válida la relación:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (1.3.a)$$

Asimismo, el concepto de flujo permanente implica también que el fluido pueda considerarse incompresible, como sucede en los problemas de canales a que se enfrenta el ingeniero hidráulico. Además, la ecuación 1.3.a se cumple sólo que no haya entradas o salidas entre las secciones 1 y 2, debido a que si eso sucediera, el gasto no sería el mismo entre dichas secciones.

1.3.2 Teorema de Bernoulli. Ecuación de la energía

Supóngase que en un fluido perfecto en movimiento se toma un elemento diferencial de ancho unitario cuyas dimensiones están referidas al plano "N-S", como se indica en la figura 1.5. El elemento se desplaza en la dirección positiva del eje S con una velocidad instantánea V y está sometido a la acción de su propio peso y de las presiones indicadas. En estas condiciones, la segunda ley de Newton ($\bar{F} = m\bar{a}$) dice:

$$\sum F_s = \frac{\gamma}{g} dn ds \frac{dV}{dt}$$

siendo $\sum F_s$, la suma de fuerzas en la dirección del eje S.

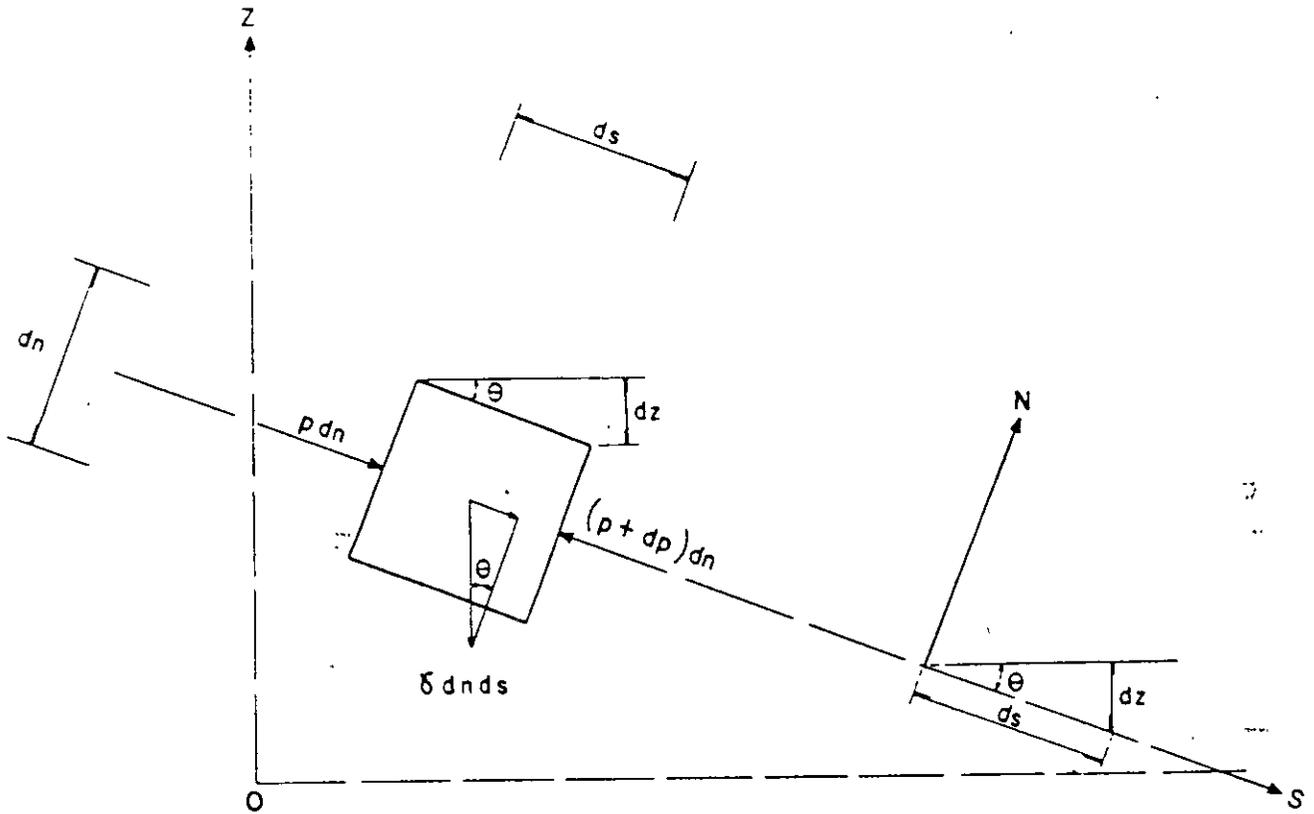


FIGURA 1.5

De acuerdo con la figura 1.5 y en la dirección mencionada, la expresión anterior conduce a:

$$[p - (p + dp)] dn + \gamma dn ds \text{ sen } \theta = \frac{\gamma}{g} dn ds \frac{dV}{dt}$$

que simplificando, queda:

$$-\frac{dp}{ds} + \gamma \text{ sen } \theta - \frac{\gamma}{g} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (1.3.b)$$

y según la figura 1.5: $\text{sen } \theta = -\frac{dz}{ds}$

por lo que 1.3.b equivale a:

$$\frac{dp}{ds} - \gamma \frac{dz}{ds} + \frac{\gamma}{g} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (1.3.b')$$

que es la ecuación de Euler.

Por otra parte, siendo que en general, la velocidad V del elemento es una función del tiempo t y de su posición s , es decir $V = f(t,s)$, por definición de derivada total se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial s} \quad (1.3.b'')$$

y como el flujo es sólo en la dirección positiva del eje arbitrario S , se cumple:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{dV}{ds}$$

tratándose de flujo permanente y, de acuerdo con 1.1.a, la expresión 1.3.b'' se reduce a: $dV/dt = V dV/ds$, que sustituida en la ecuación 1.3.b' y después de simplificar permite escribir:

$$dp + \gamma dz + \frac{\gamma}{g} V dV = 0$$

al integrar esta ecuación diferencial se obtiene:

$$p + \gamma z + \gamma \frac{V^2}{2g} = cte.$$

que puede escribirse:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cte. \quad (1.3.c)$$

Si se acepta, por ahora, que todas las partículas del escurrimiento se desplazan como el elemento analizado, puede considerarse que esta expresión es válida para cualquier sección de un escurrimiento permanente, ya que no ha sido demostrada para una en particular. Esto significa que la suma de los tres términos indicados es igual en todas las secciones de un mismo escurrimiento permanente. Así, para las secciones 1, 2, 3, ..., i , la ecuación 1.3.c se escribe:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} = \dots$$

$$= z_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{V_i^2}{2g} = \text{cte.}$$

que es el *teorema de Bernoulli*, obtenido por el matemático suizo Daniel Bernoulli, en 1732.

A los términos de la expresión anterior se les llama respectivamente: *carga de posición*, *carga de presión* y *carga de velocidad*. Como es fácil comprobar, estas cargas corresponden, respectivamente, a las energías: potencial, de presión y cinética por unidad de peso de la partícula del fluido cuyo movimiento estudiamos.

Recuérdese que se ha supuesto un fluido perfecto, pero si se hace referencia a un líquido real, es necesario considerar todas las pérdidas de carga $h_{f_{1-2}}$ entre las secciones 1 y 2, agregándolas al segundo miembro de la ecuación en la forma:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{f_{1-2}} \quad (1.3.d)$$

conocida como *ecuación de la energía*.

1.3.3 Ley del impulso o de la cantidad de movimiento

Si una partícula de masa m se mueve experimentando un cambio de velocidad \overline{dV} en un tiempo dt , este fenómeno ha sido provocado por una fuerza \overline{F} que, en general, es la resultante de un sistema de fuerzas \overline{F}_i que actúa sobre la partícula.

La segunda ley de Newton señala que los elementos anteriores están ligados por la expresión:

$$\bar{F} = m \frac{d\bar{V}}{dt}$$

o

$$\bar{F} dt = m d\bar{V}$$

Al primer término se le llama *impulso* y al segundo *cantidad de movimiento*. La ley del impulso expresada por la ecuación anterior indica que ambos términos deben ser iguales cuando se refieren a una partícula en movimiento.

Si se considera ahora un escurrimiento permanente con gasto Q y se escogen dos secciones, 1 y 2, de dicho escurrimiento, la masa que fluye por cualquiera de ellas en un tiempo Δt , es:

$$m = \frac{\gamma Q}{g} \Delta t$$

Y si $\Delta \bar{V}$ es la diferencia de las velocidades medias de ambas secciones, la segunda ley de Newton puede escribirse:

$$\bar{F} = \frac{\gamma Q}{g} \Delta \bar{V} \quad (1.3.e)$$

o bien, separadamente:

$$\sum_{i=1}^2 \bar{F}_i = \frac{\gamma Q}{g} (\bar{V}_2 - \bar{V}_1) \quad (1.3.e')$$

Es importante observar que el carácter vectorial de esta expresión exige que ambos miembros tengan la misma dirección y sentido. Cuando $\sum_{i=1}^2 \bar{F}_i$, \bar{V}_1 y \bar{V}_2 sean vectores paralelos, pueden manejarse como escalares, cuidando únicamente que el signo sea el mismo en los dos miembros.

1.4 Distribución de velocidades en la sección de un canal. Flujos laminar y turbulento

La distribución de velocidades, en un escurrimiento cualquiera, está relacionada íntimamente al hecho de que la viscosidad de las partículas fluidas sea o no preponderante en el fenómeno.

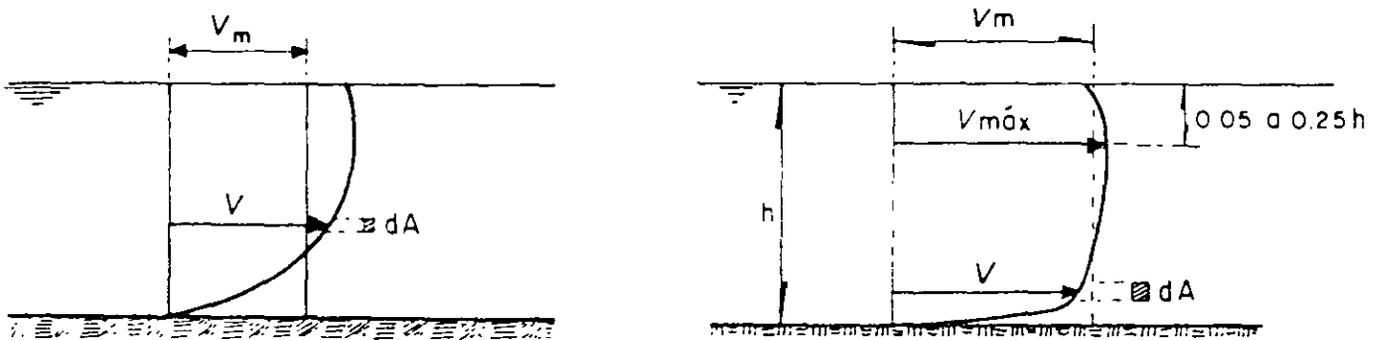
La acción viscosa, tanto entre las mismas partículas fluidas como entre éstas y las paredes del conducto, se manifiesta con números de Reynolds pequeños. Para calcular el número de Reynolds en canales, se acostumbra utilizar como longitud característica el radio hidráulico R de la sección, por lo que $Re = VR/\nu$ (ν es la viscosidad cinemática, para agua en condiciones normales: $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$).

Cuando Re es pequeño se presenta el llamado *régimen laminar*, que se caracteriza porque el líquido fluye en capas paralelas cuyas velocidades son sensiblemente diferentes entre sí y aumentan a medida que los puntos se encuentran más alejados de las paredes.

Al aumentar la velocidad del fluido y, por consiguiente Re , llega un momento en que pierde importancia el efecto de la viscosidad, rompiéndose así la cohesión entre las partículas en movimiento y, en consecuencia, éstas se desplazan en forma caótica y provocan el llamado *régimen turbulento*.

Una característica muy importante del régimen turbulento es que su coeficiente de fricción no depende de Re , sino únicamente de la rugosidad relativa de las paredes del conducto. Esto lo contrapone al régimen laminar en el que dicho coeficiente es función exclusiva del Re e independiente del material de que está hecho el conducto.

Vista en dos dimensiones, la distribución de velocidades en un régimen laminar es de tipo parabólico y en régimen turbulento se aproxima a un rectángulo. En la figura 1.6 se representan las distribuciones de velocidades en canales para los regímenes mencionados, ambas curvas pueden explicarse si se piensa en el mecanismo del flujo descrito anteriormente.



a) Régimen laminar

b) Régimen turbulento

FIGURA 1.6

El investigador ruso Zegzda, inspirado en los experimentos que hizo Nikuradse para tubos, efectuó en 1938 una serie de ensayos tendientes a determinar las zonas laminar, de transición y turbulenta en canales para distintas rugosidades y números de Reynolds.

La gráfica que obtuvo Zegzda (figura 1.7) es análoga a la de Nikuradse y claramente se observa que para $Re > 60,000$ se está ya en la zona turbulenta. No se entrará en más detalles sobre lo que sería el flujo laminar en canales porque, como puede comprobarse con facilidad, es prácticamente imposible que se presente un flujo laminar en los problemas que afronta el ingeniero hidráulico que trabaja con canales.

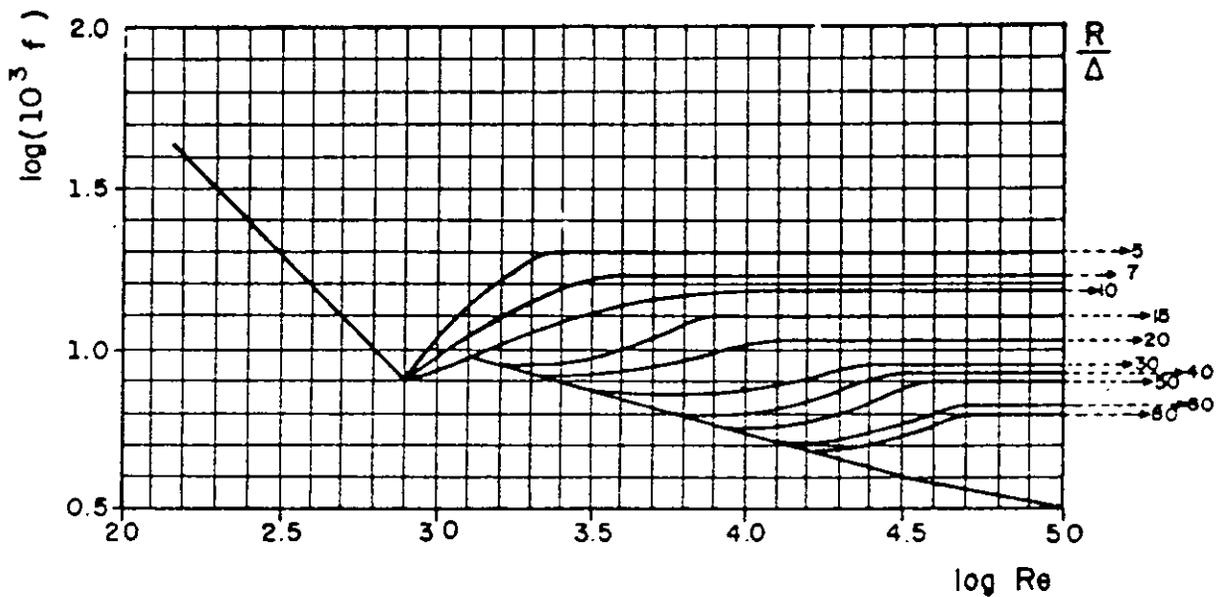


FIGURA 1.7 Experimentos de Zegzda (Rusia, 1938)

Sin embargo, es importante conocer el tipo de distribución de velocidades que se tiene en una sección, ya que siempre se habla de una sola velocidad representativa, que es la velocidad media, y en general sólo se presenta en algunos puntos de dicha sección. Esta particularidad hace necesario efectuar una corrección a la carga de velocidad calculada con la velocidad media en la forma que se explicará a continuación.

1.4.1 Coeficiente de Coriolis

Observando la figura 1.6, considérese un elemento diferencial de fluido que pasa por un área dA con una velocidad V , su gasto es $dQ = V dA$ y, por definición, la energía cinética que desarrolla este volumen, cuya masa es dm , tiene el valor:

$$dE_c = \frac{1}{2} dm V^2$$

y como $dm = \frac{\gamma}{g} dQ dt$, la energía cinética desarrollada en el tiempo dt es:

$$dE_c = \frac{V^2}{2g} \gamma dQ = \gamma \frac{V^2}{2g} V dA = \frac{\gamma}{2g} V^3 dA \quad (1.4.a)$$

y la energía cinética en toda el área A será entonces:

$$E_c = \frac{\gamma}{2g} \int_A V^3 dA \quad (1.4.b)$$

Si se desea calcular la energía cinética con la velocidad media V_m , como se hace al aplicar la ecuación de la energía, es necesario afectarla con un coeficiente que depende del tipo de distribución de velocidades existente en la sección. A este factor correctivo se le llama *coeficiente de Coriolis* y se designa con la letra griega α .

En esta forma se tiene, de acuerdo con la expresión 1.4.a, que la energía cinética en toda la sección de área hidráulica A se puede determinar con la expresión:

$$E_c = \alpha \frac{\gamma}{2g} V_m^3 A \quad (1.4.c)$$

Igualando ahora 1.4.c con 1.4.b, para α se obtiene el siguiente valor:

$$\alpha = \frac{\int_A V^3 dA}{V_m^3 A} \quad (1.4.d)$$

entonces, la ecuación de la energía 1.3.d al aplicarse entre las secciones 1 y 2 debe escribirse con todo rigor en la forma:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + h_{L..} \quad (1.4.e)$$

En que V_1 y V_2 son las velocidades *medias* de las secciones correspondientes. En adelante se designará con V (no con V_m) la velocidad media de una sección, a menos que se indique lo contrario. Casi siempre α se omite, debido a que para el flujo turbulento (prácticamente el único que se le presenta al ingeniero civil) su valor es muy cercano a 1 en la mayoría de los casos y el grado de precisión que normalmente se tiene en los demás datos no justifica tanto rigor. En efecto, en flujo turbulento para canales prismáticos rectos, α varía de 1.02 a 1.20 aproximadamente.

Desde luego, si se presentara un flujo laminar sería indispensable conocer el valor real de α y tomarlo en cuenta, ya que sería mayor y nunca podría soslayarse sin cometer un error importante.

Debe señalarse que, aun tratándose de flujo turbulento, el coeficiente de Coriolis puede ser importante si se tienen secciones muy irregulares, porque en estos casos las velocidades cambian también mucho en la misma sección. Un canal de este tipo es el de sección compuesta, representado en la figura 1.8.

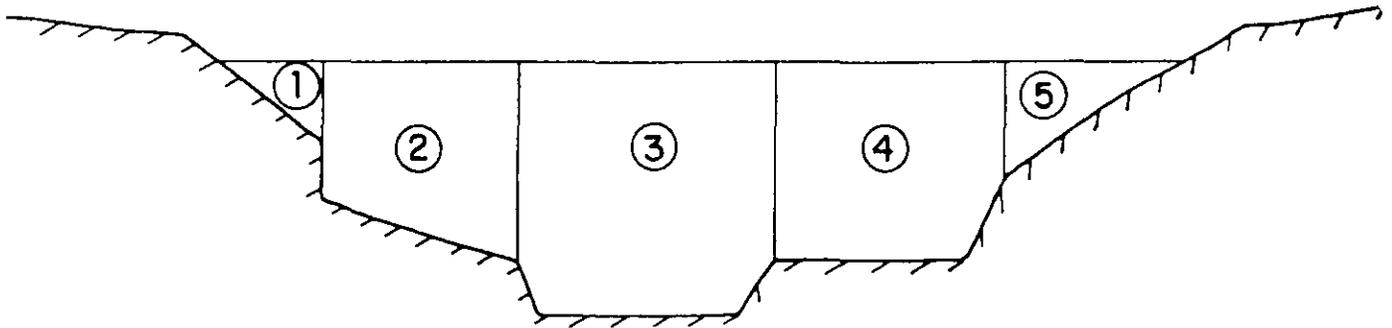


FIGURA 1.8

En un caso como éste, puede dividirse la sección en zonas que tengan una velocidad constante y calcularse α utilizando elementos finitos con la expresión 1.4.d, es decir, en la forma:

$$\alpha = \frac{V_1^3 A_1 + V_2^3 A_2 \dots + V_5^3 A_5}{V_m^3 \sum_{i=1}^5 A_i}$$

siendo:

$$V_m = \frac{Q}{\sum_{i=1}^5 A_i}$$

Como se estudiará en el siguiente capítulo, las secciones compuestas del tipo mostrado en la figura 1.8 se calculan generalmente como si fueran varios canales (cinco en el caso del ejemplo), haciendo algunas consideraciones para definir el perímetro mojado de cada "canal".

1.4.2 Coeficiente de Boussinesq

Una idea análoga a la anterior es la del llamado *coeficiente de Boussinesq*, que se designa con la letra griega β y sirve para corregir la cantidad de movimiento cuando se calcula con la velocidad media de una sección.

En efecto, el impulso desarrollado por un escurrimiento en una sección de área hidráulica A durante un tiempo dt , de acuerdo con 1.3.e y recordando que $dQ = V dA$, puede escribirse:

$$I = \int_A \frac{\gamma dQ}{g} V = \int_A \frac{\gamma}{g} V^2 dA \quad (1.4.f)$$

y si se calcula con la velocidad media para toda la sección A , habrá que corregirlo con un coeficiente β de manera que:

$$I = \beta \frac{\gamma}{g} V_m^2 A \quad (1.4.g)$$

Después de igualar 1.4.f y 1.4.g, puede despejarse β y se obtiene:

$$\beta = \frac{\int_A V^2 dA}{V_m^2 A} \quad (1.4.h)$$

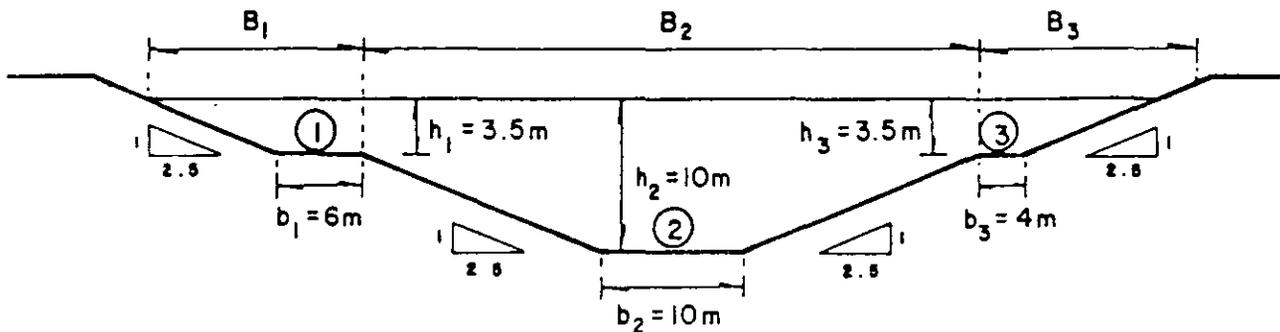
Los valores de β son generalmente menores que los de α y para flujo turbulento en canales prismáticos rectos varían de 1.01 a 1.15 aproximadamente.

Ejemplo 1.1

Para la sección del canal representado en la figura se tienen, además de los datos ahí mostrados, los siguientes:

$$V_1 = 3 \text{ m/s}, \quad V_2 = 5 \text{ m/s}, \quad V_3 = 2.75 \text{ m/s}, \quad \nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$$

- Determine si es régimen laminar o turbulento.
- Calcule α (coeficiente de Coriolis).
- Calcule β (coeficiente de Boussinesq).



Solución:

- Cálculo del área de cada sección:

$$A_1 = \left[\frac{b_1 + b_2 + mh_1}{2} \right] h_1 = \left[\frac{6 + 6 + 2.5 \times 3.5}{2} \right] 3.5 = 36.312 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \left[\frac{b_2 + b_3 + 2m(h_2 - h_1)}{2} \right] (h_2 - h_1) + \left[b_3 + 2m(h_2 - h_1) \right] h_1$$

$$A_2 = \left[\frac{10 + 10 + 2 \times 2.5 \times 6.5}{2} \right] 6.5 + (10 + 2 \times 2.5 \times 6.5) 3.5 = 319.375 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \left[\frac{b_3 + b_3 + mh_1}{2} \right] h_1 = \left[\frac{4 + 4 + 2.5 \times 3.5}{2} \right] 3.5 = 29.313 \text{ m}^2$$

El área total es:

$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 = 385 \text{ m}^2$$

La velocidad media es:

$$V_m = \frac{Q_T}{A_T} \quad \dots (1)$$

donde:

$$Q_T = A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3$$

Sustituyendo en esta expresión los valores indicados:

$$Q_T = 36.312 \times 3 + 319.375 \times 5 + 29.313 \times 2.75 = 1786.42 \text{ m}^3/\text{s}$$

Por lo que en la ecuación (1)

$$V_m = \frac{1786.422}{385} = 4.64 \text{ m/s}$$

El perímetro mojado del canal es:

$$P_T = b_1 + b_2 + b_3 + 2 (m^2 + 1)^{1/2} h_2$$

$$P_T = 6 + 10 + 4 + 2 (2.5^2 + 1)^{1/2} \times 10 = 73.852 \text{ m}$$

donde:

$$R = \frac{A_T}{P_T} = \frac{385}{73.852} = 5.213 \text{ m}$$

entonces:

$$Re = \frac{V_m R}{\nu} = \frac{4.64(5.213)}{0.01} = 24\,189\,033.65$$

como $Re > 60,000 \therefore$ el régimen es turbulento.

b)

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n A_i V_i^3}{V_m^3 \sum_{i=1}^n A_i}$$

sustituyendo valores:

$$\alpha = \frac{36.31 (3)^3 + 319.375 (5)^3 + 29.31 (2.75)^3}{4.64^3 \times 385} = 1.079$$

c)

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n A_i V_i^2}{V_m^2 \sum_{i=1}^n A_i}$$

$$\beta = \frac{36.31 (3)^2 + 319.375 (5)^2 + 29.31 (2.75)^2}{4.64^2 \times 385} = 1.029$$

1.5 Efecto de la pendiente longitudinal sobre la presión en el fondo de un canal

La ecuación de Euler 1.3.b' puede escribirse, cuando no existe aceleración, en la forma:

$$\frac{d}{ds} (p + \gamma z) = 0 \quad (1.5.a)$$

Esto significa que, en flujo uniforme, la distribución vertical de presiones en cualquier sección sigue una ley lineal y la presión en el fondo de un canal, cuyo tirante es h , está dada por la expresión:

$$p = \gamma h \quad (1.5.a')$$

Este valor es aplicable también a un líquido en reposo ($V = 0$).

1.5.a' corresponde a la presión ejercida por una columna vertical de sección transversal Δa y altura h sobre la plantilla de un canal horizontal o que tenga una pendiente longitudinal tan pequeña que pueda considerarse nula (figura 1.9).

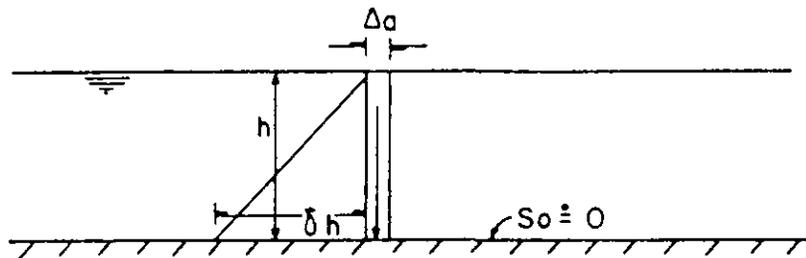


FIGURA 1.9

En efecto, el peso de la columna es $\gamma h \Delta a$ y la presión que ejerce sobre el área Δa tiene el valor

$$p = \frac{\gamma h \Delta a}{\Delta a} = \gamma h$$

Sin embargo, a medida que aumenta la pendiente del canal se observa que la presión en el fondo disminuye, lo que es fácil imaginar si se piensa en el caso extremo de un "canal" cuyo fondo fuera vertical ($S_0 = \infty$). En tal situación, todas las columnas de agua, como las indicadas en la figura 1.9, son paralelas a la plantilla y, por lo tanto, no ejercen ninguna presión sobre ella.

Entonces, en casos intermedios a los señalados, es decir, cuando las pendientes longitudinales son grandes, se deben establecer algunas consideraciones que tomen en cuenta el efecto de la presión sobre el fondo.

En la figura 1.10 se representa un canal con régimen uniforme, ancho unitario y una pendiente longitudinal muy pronunciada. Supóngase que el tirante se mide en el punto B del fondo. Por costumbre, dicha magnitud se mide siempre perpendicular a la plantilla; luego el mencionado tirante en B es la línea BC de la figura.

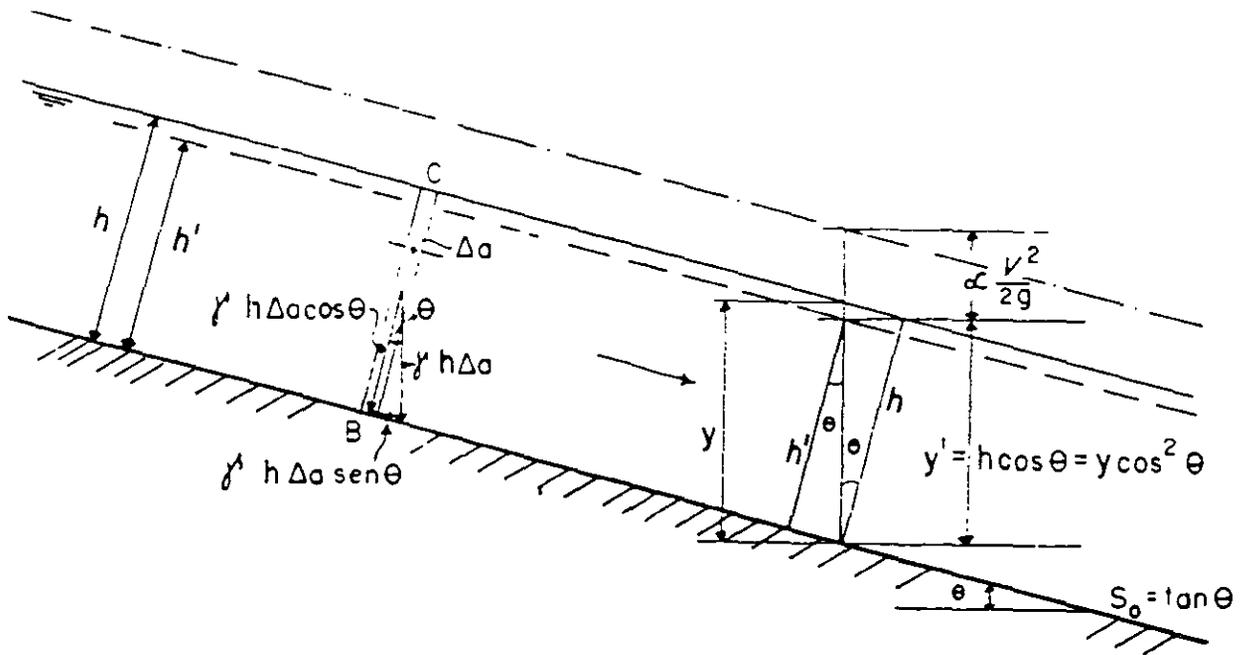


FIGURA 1.10

El peso de la columna BC es $\gamma h \Delta a$ y la plantilla recibe la componente normal de dicho peso, es decir: $\gamma h \Delta a \cos \theta$, por lo que la presión real en el punto B está dada por

$$p = \gamma h \cos \theta \quad (1.5.b)$$

En la figura se observa que la otra componente $\gamma h \Delta a \sin \theta$ es paralela a la plantilla y tiene la misma dirección que el flujo, por lo que no ejerce ninguna presión sobre el fondo. De lo anterior se desprende que la línea real de presiones no es la de la superficie, sino la indicada en la figura con línea interrumpida, como si el tirante fuera h' en vez de h . Según la figura 1.10, el valor de h' es:

$$h' = h \cos^2 \theta$$

Y su proyección vertical, que debe usarse en la ecuación de la energía como tirante real, tiene el valor:

$$y' = h \cos \theta = y \cos^2 \theta \quad (1.5.c)$$

Además se concluye que la energía real E en la sección BC , medida a partir del punto B es, en términos del teorema de Bernoulli, la dada por la expresión:

$$E = h \cos\theta + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

y así debe considerarse en la ecuación de la energía cuando la magnitud de la pendiente lo requiera.

En la mayoría de los casos el ángulo θ es muy pequeño y no se justifica ninguna corrección, pero cuando dicho ángulo sea mayor de 10° , lo que es muy común en canales de descarga en las obras de excedencias, la corrección sí debe efectuarse. En general, el proyectista es el responsable de tomar esta decisión, de acuerdo con el caso particular que esté resolviendo.

Distribución de presiones en curvas verticales

Cuando el escurrimiento a superficie libre pasa sobre una curva vertical, la distribución de presiones también se afecta por la fuerza centrífuga, según se indica en la figura 1.11.

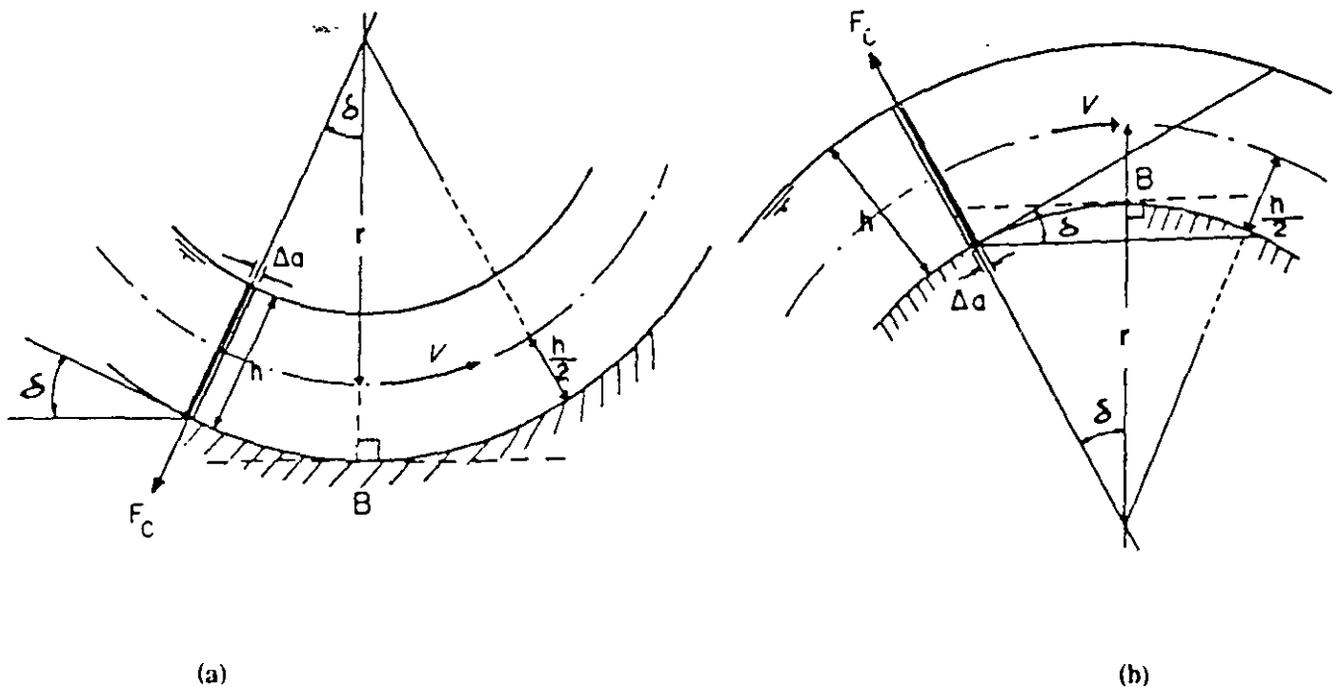


FIGURA 1.11

Aceptando que en el centro del flujo se tiene la velocidad media V , es decir, cuando el radio es r , pueden presentarse los casos que se describirán a continuación:

- a) Si la curva es como en la figura 1.11.a y aceptamos que $\alpha = 1$, la presión incrementada por la aceleración centrífuga V^2/r , que corresponde a una fuerza F_c , que vale ($F = ma$):

$$F_c = \frac{\gamma h \Delta a}{g} \frac{V^2}{r}$$

Por lo que, la presión resultante en el fondo, usando la expresión anterior y la 1.5.b, es:

$$p = \gamma h \cos\delta + \frac{\gamma h}{g} \frac{V^2}{r}$$

o

$$p = \gamma h \left[\cos\delta + \frac{V^2}{gr} \right] \quad (1.5.d)$$

- b) Si la curva es como la indicada en la figura 1.11.b, la fuerza centrífuga tiene efecto contrario al caso anterior y la presión en el fondo es entonces:

$$p = \gamma h \left[\cos\delta - \frac{V^2}{gr} \right] \quad (1.5.e)$$

El caso de la figura 1.11.a es común al pie de los cimacios cuando debe cambiar la curvatura de la plantilla hasta llegar a la horizontal que da la posición del tanque amortiguador, como se verá posteriormente.

Una situación semejante sucede en las estructuras llamadas de *salto de esquí*, que se construyen al final de algunos canales de descarga en obras de excedencias. En estos casos, la presión real sobre el fondo corresponde a un tirante mayor que el aparente, según se indica en la expresión 1.5.d. Por otra parte, en el caso representado en la figura 1.11.b, la presión real es menor que la correspondiente al tirante h , como se señala en la expresión 1.5.e.

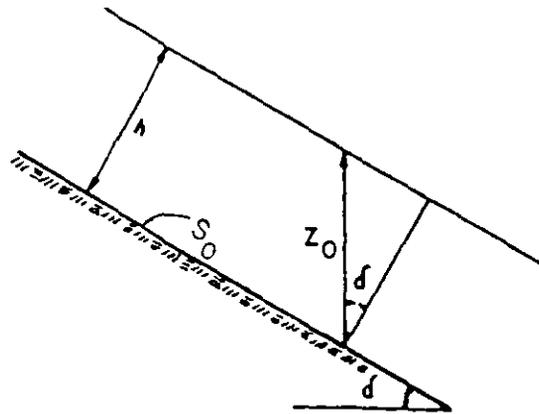
Obsérvese que el efecto de la presión debido a la fuerza centrífuga es el mismo en toda la curva si su radio es constante, lo cual no sucede con la presión hidrostática en el fondo, $\gamma h \cos\delta$, que obviamente alcanza su valor máximo en el punto B donde la tangente a la plantilla es horizontal (figura 1.11).

Ejemplo 1.2

Calcule la presión p en el fondo de los siguientes canales, si los datos comunes son:

$$h = 4 \text{ m}, \quad b = 10 \text{ m}, \quad Q = 450 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Sección rectangular, considerando un fondo plano con $S_o = 0.001$.
- Sección rectangular con plantilla plana y $S_o = 0.56$.
- Canal de trazo circular cóncavo hacia arriba con $r = 30 \text{ m}$ (radio de curvatura) y $\delta = 60^\circ$.
- Canal de trazo circular cóncavo hacia abajo con $r = 30 \text{ m}$ y $\delta = 60^\circ$.



Solución:

$$a) \quad \delta = \text{ang tan } S_o = \text{ang tan } 0.001 = 0.057^\circ.$$

La presión en el fondo según 1.5.b es:

$$p = \gamma h \cos\delta = 1000 \times 4 \times \cos 0.057 = 4000 \text{ kg/m}^2.$$

b)
$$\delta = \text{ang tan } S_0 = \text{ang tan } 0.56 = 29.25^\circ$$

$$p = \gamma h \cos\delta = 1\,000 \times 4 \times \cos 29.25^\circ = 3490.02 \text{ kg/m}^2$$

c) Siendo la velocidad media:

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{450}{10 \times 4} = 11.25 \text{ m/s}$$

y según la expresión 1.5.d:

$$p = 1000 \times 4 \left[\cos 60^\circ + \frac{11.25^2}{9.81 \times 30} \right] = 3720.18 \text{ kg/m}^2$$

d) Para trazo circular cóncavo hacia abajo, de 1.5.e se obtiene:

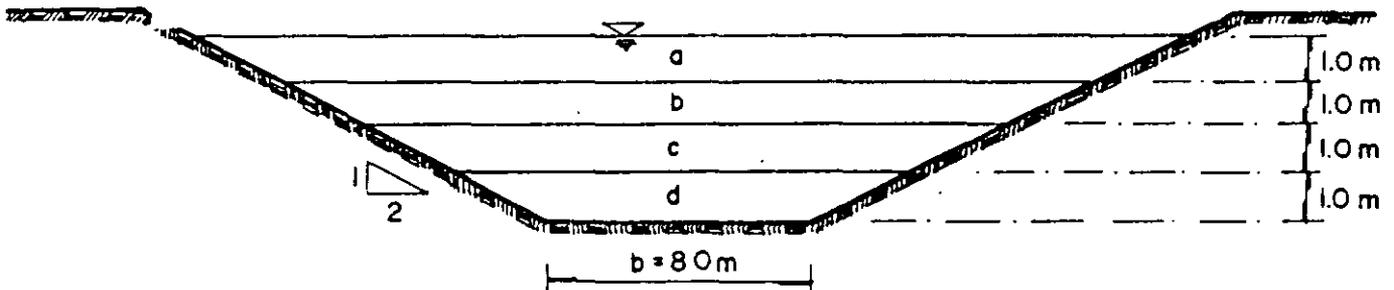
$$p = 1000 \times 4.0 \left[\cos 60^\circ - \frac{11.25^2}{9.81 \times 30} \right] = 279.82 \text{ kg/m}^2$$

Ejercicios propuestos

- 1.1 Considérese la sección de un canal como se muestra en la figura con los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} V_a = 2.15 \text{ m/s} & V_b = 2.05 \text{ m/s} & V_c = 2.00 \text{ m/s} \\ V_d = 1.90 \text{ m/s} & m = 2 & \nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s} \end{array}$$

- Determine si el tipo de régimen es laminar o turbulento.
- Calcule el coeficiente de Coriolis α .
- Calcule el coeficiente de Boussinesq β .



- 1.2 Se desea que la presión sobre el fondo de un canal cóncavo hacia arriba no exceda de $10 \text{ ton}/\text{m}^2$. Si $\delta = 45^\circ$, $V = 30 \text{ m/s}$ y $h = 2.15 \text{ m}$, calcule el radio de curvatura mínimo.
- 1.3 Calcule la velocidad máxima de un canal cuyo trazo longitudinal es convexo hacia arriba, tal que en su fondo no existan depresiones, si: $\delta = 35^\circ$ y $r = 40 \text{ m}$.

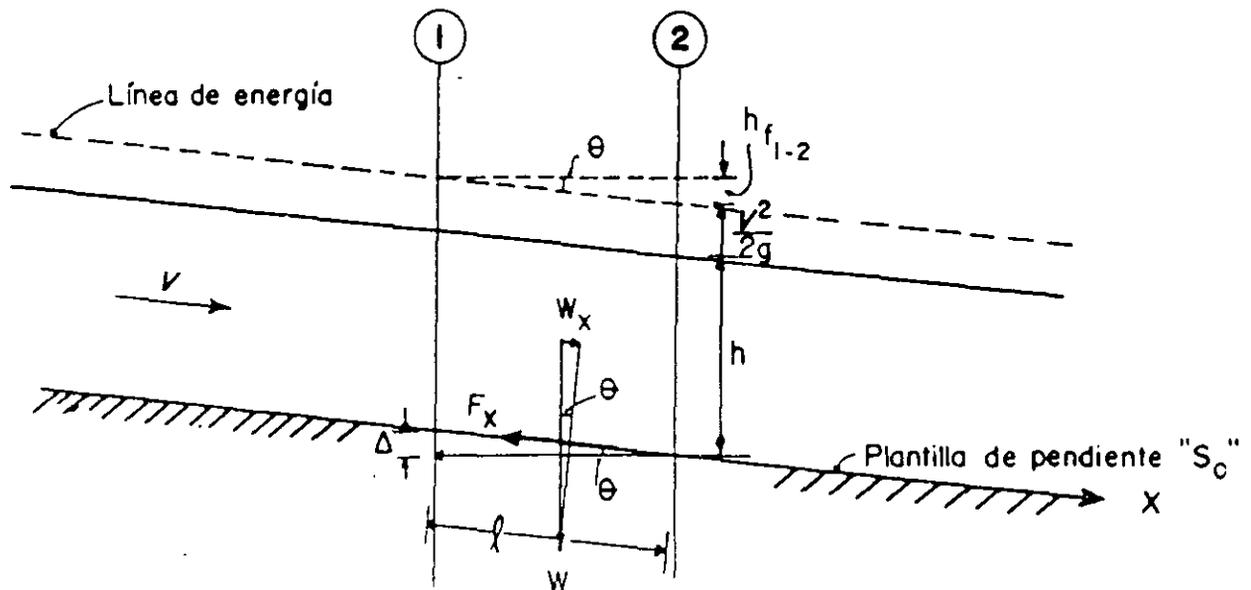
CAPÍTULO 2

FLUJO UNIFORME

Como se explicó en el capítulo anterior, el flujo uniforme se presenta únicamente en canales prismáticos de sección constante y se caracteriza porque las condiciones hidráulicas de todas y cada una de las secciones son iguales entre sí. Esto da por resultado que la plantilla y la superficie libre sean planos paralelos y que la línea de la energía o "gradiente hidráulico" también sea paralela a dichos planos.

Si se analiza el comportamiento físico de un canal con flujo uniforme, se concluye enseguida que la única forma de que no ocurran cambios de velocidad a lo largo del escurrimiento, es que no haya ninguna fuerza resultante en la dirección del flujo, es decir, que exista equilibrio dinámico.

En efecto, consideremos un canal con flujo uniforme como el representado en la figura 2.1. El volumen confinado entre las secciones 1 y 2 se mueve con una velocidad constante V que sólo puede existir si la suma total de fuerzas que afectan el movimiento es cero.



Ahora bien, el volumen tiene un peso W y su componente W_x es la que lo hace moverse. Pero si el flujo es uniforme, debe existir otra fuerza de igual magnitud y dirección opuesta de manera que no haya ninguna resultante en la dirección del movimiento. Dicha fuerza es la debida a la fricción F_x que, relacionada con W_x , permite plantear las siguientes definiciones:

TIPO DE FLUJO	CONDICIÓN DE FUERZAS
Uniforme	$W_x = F_x$
Gradualmente acelerado	$W_x > F_x$
Gradualmente retardado (remanso)	$W_x < F_x$

Posteriormente se estudiará que cualquier flujo en canales siempre tiende a hacerse uniforme y, por tal razón, al flujo uniforme se le llama también *flujo establecido o normal*.

2.1 Fórmula de Chézy

Considérese un canal con flujo uniforme como el representado en la figura 2.2.

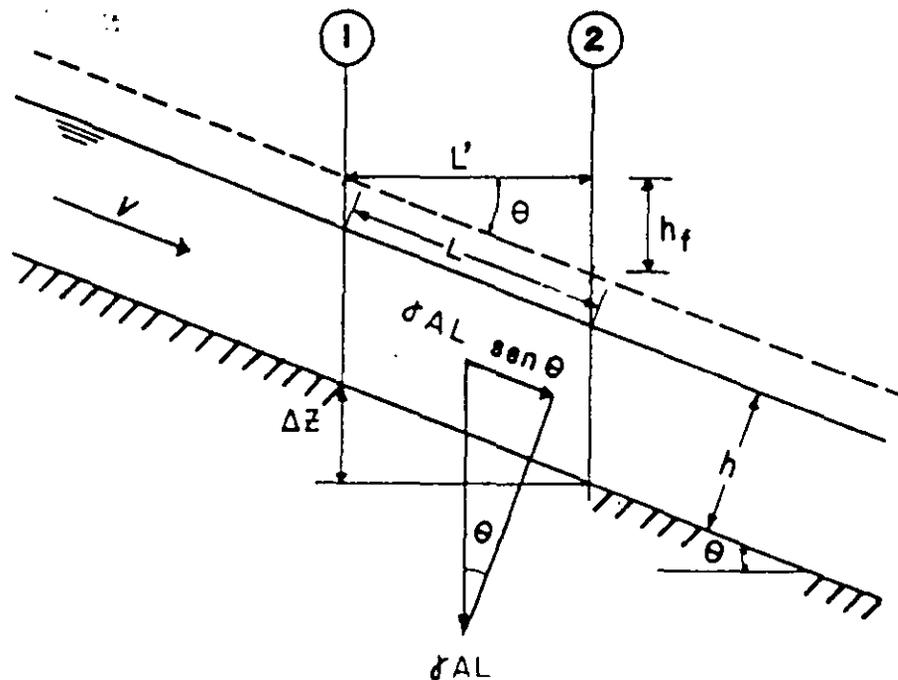


FIGURA 2.2

En la figura se ha delimitado un tramo del canal por dos secciones, 1 y 2, de área hidráulica A y separadas una distancia L .

La única fuerza que contribuye al movimiento del tramo de fluido analizado es la componente del peso de dicho tramo en la dirección del movimiento, es decir:

$$\gamma A L \operatorname{sen}\theta \quad (2.1.a)$$

Según se explicó al inicio de este capítulo, si no hay aceleración debe existir una fuerza colineal con dirección opuesta y de igual magnitud para que el flujo sea uniforme. Dicha fuerza es la debida a la fricción que ejerce el fluido con las paredes y el fondo del canal.

Por otra parte, los experimentos han demostrado que el esfuerzo de fricción f en régimen turbulento es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f = cV^2$. Además, como el área de contacto entre el fluido y el conducto es PL , siendo P el perímetro mojado y L la distancia entre las secciones analizadas, tal como se indica en la figura 2.2, la fuerza de fricción es:

$$cV^2 PL \quad (2.1.b)$$

y como la pendiente hidráulica es $S = \operatorname{sen}\theta$ y el radio hidráulico de la sección $R = A/P$, al igualar 2.1.a y 2.1.b, y despejar V :

$$V = \sqrt{\gamma/c} \sqrt{R S}$$

Llamando ahora C al término $\sqrt{\gamma/c}$, puede escribirse:

$$V = C \sqrt{R S} \quad (2.1.c)$$

Y, según el principio de continuidad equivale a:

$$Q = CA \sqrt{R S} \quad (2.1.c')$$

que es la fórmula obtenida por Chézy en 1768. Esta expresión tiene una gran importancia en la historia de la hidráulica, ya que de ella se derivan todas las fórmulas modernas para el cálculo del flujo uniforme. Sin embargo, quedaba aún el problema de saber cómo valuar la constante C . Chézy sólo dijo que ese valor se encuentra entre 30 y 50.

Un siglo después (1869) en Berna, dos investigadores suizos Ganguillet y Kutter obtuvieron una expresión para determinar el valor de C en función del tipo de material y de otras características del flujo. La fórmula de Ganguillet y Kutter es la siguiente:

$$C = \frac{23 - 1/n + 0.00155/S}{1 + n(23 + 0.00155/S) / \sqrt{R}}$$

n es un coeficiente que depende exclusivamente del material y siempre se da en Sistema Métrico, tal como se determinó originalmente por ser dicho sistema el vigente en Suiza. En la tabla 2.1 se presentan algunos de los valores más comunes del coeficiente n .

MATERIAL	n	γ
Paredes muy lisas (esfaltadas)	0.009	
Cemento bien pulido	0.010	
Acero bien acabado y pulido	0.011	0.06
Concreto acabado normal	0.014	0.46
Grava bien acomodada	0.023	
Tierra bien limpia	0.028	1.30
Tierra con piedras y plantas (ríos)	0.040	1.75

TABLA 2.1 Valores de n para las fórmulas de Ganguillet-Kutter o de Manning.*

La fórmula de Ganguillet y Kutter quedó muy simplificada cuando Manning (irlandés) observó en 1890 que:**

$$C = \frac{R^{1/6}}{n}$$

lo cual permite escribir la fórmula de Chézy en la forma:

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (2.1.d)$$

* Mayores detalles sobre la utilización del coeficiente n se indican en la tabla 2.2.

** F.M. Henderson atribuye la observación de que C es proporcional a $R^{1/6}$ a Gauckler (1868) y a Hagen (1881), que la obtuvieron independientemente, y que fue Flamant quien equivocadamente la atribuyó a Manning.

expresión conocida en América y en los países de habla inglesa como *fórmula de Manning* y en Europa Continental como *fórmula de Strickler*.

La fórmula de Manning tiene el gran atractivo de que, para canales prismáticos, el coeficiente de rugosidad depende exclusivamente del material de que esté hecho el conducto, lo que no sucede en la fórmula original de Ganguillet y Kutter.

Por otra parte, los ingenieros ingleses probablemente pensaron que hacían justicia a sus colegas suizos, Ganguillet y Kutter si no cambiaban en absoluto los valores del coeficiente n que ellos obtuvieron. Por tal razón, dichos valores aparecen siempre en Sistema Métrico, aun en la literatura inglesa, en la que se corrige la fórmula de Manning con un factor para adaptar la n al Sistema Inglés.

La comodidad que implica el uso de la fórmula de Manning, sobre todo en épocas cuando la regla de cálculo era el instrumento imprescindible del ingeniero (los exponentes que aparecen son de fácil manejo con escalas logarítmicas) le dio tal popularidad a dicha expresión que los técnicos olvidaron la paternidad del coeficiente n y aún en nuestros tiempos se le llama erróneamente *coeficiente de Manning* o *n de Manning*.

Desde luego no debe culparse a Manning por este error, porque nunca pretendió adjudicarse la obtención de estos coeficientes.

Posteriormente apareció la *fórmula de Bazin* (1897) que tiene la forma:

$$C = \frac{87 \sqrt{R}}{\gamma + \sqrt{R}}$$

en que γ es un coeficiente (no el peso específico del agua), algunos de cuyos valores aparecen en la tabla 2.1. Esta fórmula no es muy usada actualmente.

Enseguida se presentan otras dos fórmulas para determinar C :

$$\text{Forchheimer (1923): } C = \frac{R^{0.2}}{n}$$

$$\text{Agroskin (1949): } C = \frac{1}{n} + 17.72 \log R$$

La sencillez de la fórmula de Manning la convierte en un elemento de cálculo muy usado, por lo que será utilizada en este libro en la mayoría de los casos, tomando en cuenta además que el grado de precisión obtenido con ella en canales prismáticos rectos es aceptable.

Cuando se trata de cálculos en ríos, algunos autores, entre ellos V. Kolař, proponen calcular el coeficiente n en la siguiente forma:

$$n = (n_0 + n_1 + n_2 + n_3 + n_4) k \quad (2.1.e)$$

En la tabla 2.2 se indican los valores de estos parámetros y su significado.

Material (n_0)	Tierra	0.020
	Roca	0.025
	Arena 1-2 mm	0.024
	Grava 2-20 mm	0.028
Irregularidades en el fondo y las paredes del cauce (n_1)	Liso	0.000
	Irregularidades pequeñas	0.005
	Irregularidades medias	0.010
	Irregularidades grandes	0.020
Cambios en la forma del área hidráulica a lo largo del cauce (n_2)	Perfil uniforme	0.000
	Pocos cambios	0.005
	Cambios frecuentes	0.010-0.015
Obstáculos (n_3)	Despreciables	0.000
	Suaves	0.010-0.015
	Notables	0.020-0.030
	Bruscos	0.040-0.060
Vegetación (n_4)	Poca	0.005-0.010
	Mediana	0.010-0.025
	Mucha	0.025-0.050
	Demasiada	0.050-0.100
Trazo longitudinal (λ)	Aproximadamente recto	1.000
	Curvas suaves	1.150
	Curvas notables	1.200

TABLA 2.2. Coeficiente de rugosidad n en cauces naturales

2.2 Cálculo del flujo uniforme. Problemas de diseño y de revisión

El cálculo de este tipo de régimen puede plantearse con base en la fórmula 2.1.d, que el principio de continuidad permite presentar en la forma:

$$Q = \frac{A}{n} R^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.d')$$

Como $S = S_0$ en el caso común en que $\theta < 10^\circ$ (figura 2.1) en el flujo uniforme, puede sustituirse en esta fórmula el valor de la pendiente longitudinal S_0 del canal.

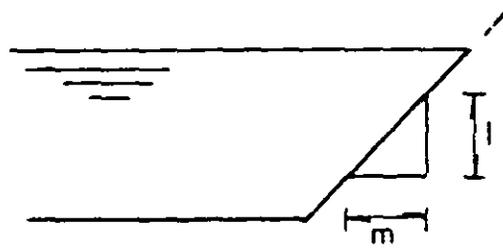
Podemos preguntarnos ahora qué tipo de problemas se plantean en el proyecto de un canal con flujo uniforme. El enfoque, llamado en ingeniería "de diseño", consiste en determinar las características geométricas de la estructura que son necesarias para transportar un cierto gasto, una vez conocida la pendiente longitudinal y el tipo de material que se utilizará. En estas condiciones los datos son Q , n y S_0 , y las incógnitas son A y $R^{2/3}$ que despejadas de la fórmula 2.1.d' quedan:

$$AR^{\frac{2}{3}} = \frac{Qn}{S_0^{1/2}} = cte.$$

Es factible resolver por tanteos este problema una vez definidos los elementos básicos de la sección, que son el ancho de la plantilla y la inclinación de sus taludes. El talud depende fundamentalmente del material usado en el canal (tabla 2.3). El ancho de la plantilla está relacionado con otros factores, como son: la topografía, el gasto, la geología de la zona, el procedimiento constructivo, etc. Existen, desde luego, gráficas para apresurar los tanteos pero el procedimiento general es necesariamente el descrito.

Un problema mucho más simple es el llamado "de revisión", que consiste en saber qué gasto transporta un canal cuando se conocen la sección, la pendiente y el material usado en su construcción, es decir, A , R , S_0 y n . Otros problemas menos típicos se pueden plantear simplemente escogiendo algunas de las variables de la fórmula como datos.

MATERIAL	m
Roca	0.0 (o valores cercanos)
Suelo relleno	0.25
Arcilla consolidada	0.50 - 1.0
Tierra	1.5
Tierra arenosa suelta	2.0 - 3.0

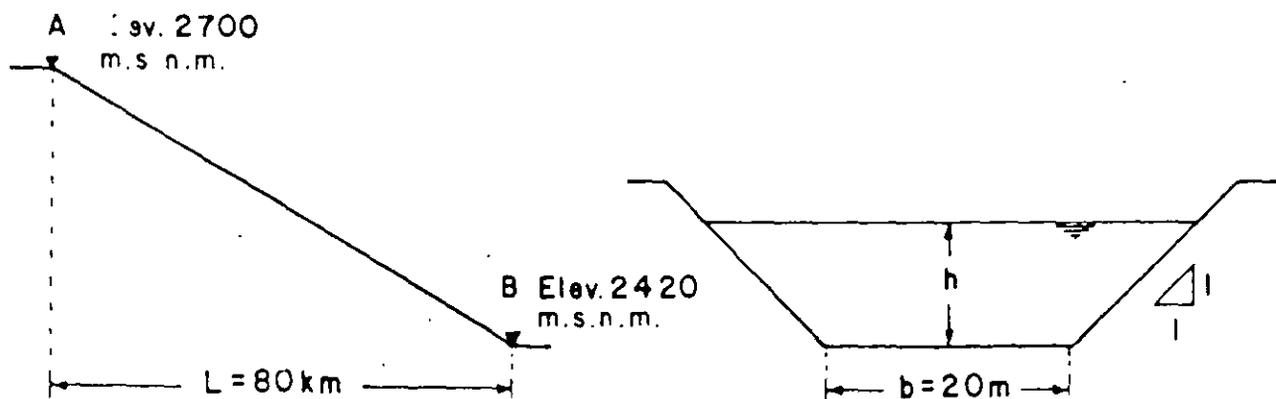


NOTA: m es la designación del talud, definida según la figura.

TABLA 2.3. Taludes apropiados en canales

Ejemplo 2.1

Se desea conocer el tirante normal h_0 de un canal de sección trapezoidal que se construirá en el tramo $A-B$, el ancho de la plantilla permanecerá constante $b = 20 \text{ m}$ y sus taludes: $m = 1$. Se quiere transportar un gasto de $500 \text{ m}^3/\text{s}$. El material será concreto de acabado normal.



Solución:

De la tabla 2.1:

$$n = 0.014$$

de la figura tenemos:

$$S_0 = \frac{2700 - 2420}{80000} = 0.0035$$

Como es sección trapezoidal:

$$A = b h + m h^2 = 20 \times h + 1 \times h^2 \quad \dots (a)$$

$$P = b + 2h (m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 20 + 2h (1^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (b)$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{20h + h^2}{20 + 2.8284h} \quad \dots (c)$$

De la fórmula de Manning:

$$\frac{Qn}{S^{1/2}} = A R^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{500 \times 0.014}{0.0035^{1/2}} = A R^{\frac{2}{3}} = 118.3216 \quad \dots (d)$$

Iterando con las expresiones obtenidas encontramos A , P , R y los sustituimos en (d) hasta cumplir la igualdad. En este ejemplo se presentan cuatro valores del tirante h usados en el cálculo, tal como se indica en la siguiente tabla:

$h(m)$	$A(m^2)$	$P(m)$	$R(m)$	$AR^{2/3}$
3.00	69.0000	28.4852	2.4223	124.4558
2.90	66.4100	28.2024	2.3548	117.5469
2.92	66.9264	28.2589	2.3683	118.9153
2.91	66.6681	28.2306	2.3616	118.2303

≈ 118.3216

Por lo tanto, el resultado es: $h_0 = 2.91 \text{ m}$.

2.3 Velocidades permisibles en canales

Existe un rango adecuado para la velocidad del agua en un canal. La razón es que después de cierto tiempo de funcionamiento, el canal puede cambiar su forma geométrica ya sea debido a que materiales en suspensión se depositen cuando la velocidad del agua no es suficientemente grande para arrastrarlos o porque las velocidades sean tan altas que causen erosiones importantes. En ambos casos se tendrá un canal que después de operar por algún tiempo, es en realidad otro distinto al que se calculó originalmente.

B. Boor (1963) recomienda los valores límites que se indican en la tabla 2.4 para las velocidades máximas permisibles en algunos materiales y también para las velocidades mínimas aceptables, según el tipo de material en suspensión y la profundidad del agua en el canal (tabla 2.5).

MATERIAL	V (m/s)
Arena muy fina	0.15 - 0.25
Arena gruesa	0.45 - 0.60
Arcilla y tierra arcillosa suelta	0.60 - 0.90
Tierra arcillosa apisonada	1.20 - 1.80
Tierra apisonada con grava	1.50 - 2.10
Recubrimiento de piedra suave	1.80 - 2.40
Roca dura	< 5
Madera	< 6
Concreto	< 30

TABLA 2.4. Velocidades máximas permisibles en canales

DIÁMETRO MEDIO (mm)	VELOCIDAD MÍNIMA (m/s) PARA UN TIRANTE h		
	$h = 1$ m	$h = 2$ m	$h = 3$ m
0.2 - 0.3	0.25 - 0.40	0.31 - 0.46	0.33 - 0.50
0.3 - 0.4	0.36 - 0.55	0.46 - 0.62	0.50 - 0.67
0.4 - 0.5	0.45 - 0.69	0.62 - 0.78	0.67 - 0.83
0.5 - 1.0	0.69 - 0.90	0.78 - 1.34	0.83 - 1.46

TABLA 2.5 Velocidades mínimas permisibles en canales según el tipo de material en suspensión

2.4 Canales de sección compuesta

En un canal como el de la figura 2.3, se tienen en realidad tres escurrimientos definidos que pueden considerarse como tres canales, a saber: los de los extremos 1 y 3, y el 2 en el centro en que el volumen es mucho mayor que el de los extremos. Por otra parte, la relación entre las masas transportadas y sus respectivas áreas de contacto entre el fluido y el canal, son menores en los extremos que en el centro o, dicho en otras palabras, el fluido pasa con mayor facilidad por la sección 2 que por la 1 o 3.

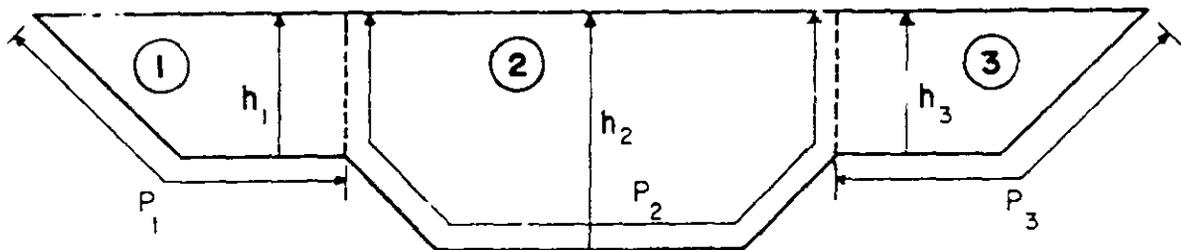


FIGURA 2.3

De manera general, lo anterior redonda en que se tiene en el canal central 2 una velocidad sustancialmente mayor que en los laterales, por lo que para el cálculo de este tipo de estructuras se aplica el siguiente artificio:

1. Para el canal central se determina el perímetro mojado como si hubiera una pared divisoria entre el canal 2 y los laterales 1 y 3.
2. En los canales laterales se utiliza el perímetro mojado real. En la figura 2.3, se indican estos valores como P_1 , P_2 y P_3 .

Así, el gasto que pasa por este canal es el siguiente:

$$Q = \frac{A_1}{n_1} R_1^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}} + \frac{A_2}{n_2} R_2^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}} + \frac{A_3}{n_3} R_3^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}}$$

Si por alguna razón es necesario aplicar la ecuación de la energía en un canal de este tipo, utilizando toda la sección a la vez, no puede omitirse el uso del coeficiente de Coriolis, ta como se explica en el subtema 1.4.1.

Ejemplo 2.2

Un canal de sección trapecial constante, cuyo talud es $m = 2$, tiene obstáculos suaves en su trazo, área hidráulica aproximadamente constante y además las siguientes características:

- Canal de tierra arcillosa suelta: $(n_0 = 0.020)$
- Trazo recto: $(k = 1)$ Tabla 2.2
- Fondo y paredes lisas: $(n_1 = 0)$
- Poca vegetación: $(n_4 = 0.007)$
- Material en suspensión: $dm = 0.35 \text{ mm}$

$b = 40 \text{ m}$, $S_0 = 0.0002$ (constante), y de acuerdo con la tabla 2.2: $n_3 = 0.01$ y $n_2 = 0$

- a) Determine el gasto máximo que puede pasar.
- b) Si $h = 1 \text{ m}$, ¿existe peligro de que se sedimente el material en suspensión?

Solución:

- a) En la tabla 2.4 se observa que $V_{max} = 0.6 \sim 0.9 \text{ m/s}$. El gasto máximo corresponde lógicamente al límite superior, por lo que éste se sustituye en la fórmula de Manning 2.1.d, es decir:

$$0.9 = \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} (0.0002)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (1)$$

Utilizando la fórmula 2.1.e y la tabla 2.4, se obtiene:

$$n = (0.02 + 0 + 0 + 0.01 + 0.007) 1 = 0.037$$

Por otra parte, el área hidráulica y el perímetro mojado tienen los siguientes valores:

$$A = bh + mh^2 = 40h + 2h^2 \quad \dots (2)$$

$$P = b + 2h(m^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = 40 + 2h(2^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \quad \dots (3)$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{40h + 2h^2}{40 + 4.4721h} \quad \dots (4)$$

Y según la fórmula (1), el radio hidráulico tiene el valor:

$$R = \left[\frac{0.9 \times 0.037}{0.0002^{1/2}} \right]^{3/2} = 3.613 \text{ m}$$

Ahora la expresión (4) puede escribirse:

$$40h + 2h^2 = 3.613(40 + 4.4721 h)$$

que equivale a:

$$h^2 + 11.9212h - 72.2600 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son las siguientes:

$$h_1 = 4.42 \text{ m} \quad h_2 = -16.36 \text{ m}$$

Evidentemente sólo tiene sentido el valor:

$$h_1 = 4.42 \text{ m}$$

que según la expresión (2) corresponde a un área hidráulica:

$$A = 215.87 \text{ m}^2$$

por lo que el gasto buscado, de acuerdo con la fórmula de Manning, es:

$$Q = \frac{215.87}{0.037} (3.61)^{2/3} (0.0002)^{1/2} = 194.17 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Para $h = 1 \text{ m}$, las expresiones 2, 3 y 4 dan los siguientes resultados:

$$A = 42 \text{ m}^2, \quad P = 44.47 \text{ m}, \quad R = 0.94 \text{ m}$$

y de acuerdo con la fórmula 2.1.d, la velocidad del agua en el canal tiene el valor:

$$V = \frac{1}{0.037} (0.94)^{2/3} (0.0002)^{1/2}$$

$$V = 0.37 \text{ m/s}$$

Comparando esta velocidad con el rango $V_{mn} = 0.36 \sim 0.55 \text{ m/s}$, que señala la tabla 2.5 para los valores $h = 1 \text{ m}$ y $dm = 0.35 \text{ mm}$, se concluye que la velocidad obtenida está en el límite inferior del rango especificado, por lo que el material en suspensión sí se sedimentará.

2.5 Conductos circulares parcialmente llenos

Ya se explicó en el capítulo anterior que independientemente de la forma de la sección, si un conducto cerrado no trabaja sometido a diferencia de presiones es en realidad un canal y debe tratarse como tal en el cálculo.

Es muy común que haya túneles, generalmente de sección circular que trabajan parcialmente llenos, por ejemplo en obras de excedencias o de desvío. Se trata entonces de canales y, por tal razón, su cálculo corresponde a este tipo de estructuras.

Por otra parte, aunque las primeras fórmulas se dedujeron para canales prismáticos, pueden usarse para una sección circular una vez determinados los parámetros A y P , con expresiones como las 2.5.a y 2.5.b. obtenidas de acuerdo con la figura 2.4.

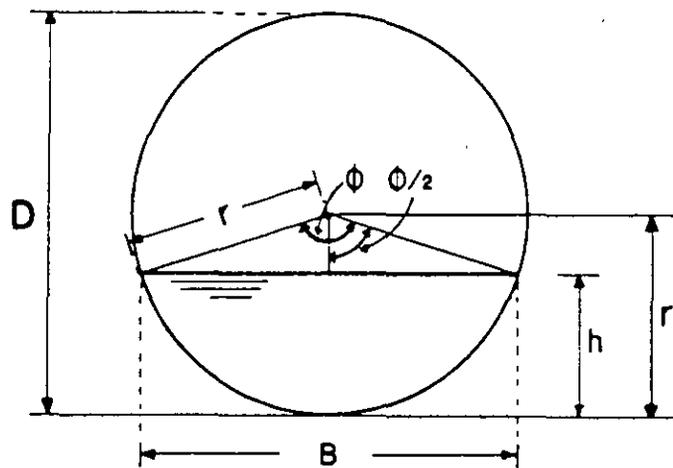


FIGURA 2.4

$$A = \frac{\pi r^2}{180} \cos^{-1} \left[\frac{r-h}{r} \right] - (r-h) \sqrt{h(D-h)} \quad (2.5.a)$$

$$P = \frac{\pi r}{90} \cos^{-1} \left[\frac{r-h}{r} \right] \quad (2.5.b)$$

$$B = 2 \sqrt{h(D-h)} \quad (2.5.c)$$

También puede aplicarse la fórmula de Kozeny, obtenida especialmente para este caso y que es la siguiente:

$$V = (8.86 \log h - N_K) \left(\frac{h}{D}\right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{S D} \quad (2.5.d)$$

Algunos valores del coeficiente N_K son los consignados en la tabla 2.6 (Sistema Métrico).

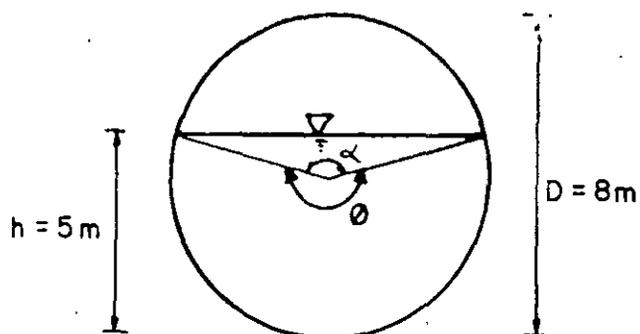
MATERIAL	N_K
Fierro fundido nuevo	35
Fierro fundido viejo	30
Acero limpio	36
Barro vitrificado	34
Concreto bien acabado	38

TABLA 2.6 Valores del coeficiente de rugosidad para la fórmula de kozeny

Ejemplo 2.3

El conducto circular parcialmente lleno que se muestra en la figura tiene un flujo uniforme y está fabricado con concreto. Los demás datos son los siguientes:

$$D = 8.00 \text{ m}, S_0 = 0.009, h_0 = 5 \text{ m}, n = 0.014, N_K = 38$$



Calcule el gasto Q , utilizando las siguientes fórmulas:

- Manning.
- Kozeny.

Solución:

a) De acuerdo con las expresiones 2.5.a y 2.5.b, se tiene respectivamente:

$$A = \frac{\pi(4)^2}{180} \cos^{-1} \left[\frac{4-5}{4} \right] - (4-5) \sqrt{5(8-5)} = 33.0486 \text{ m}^2$$

$$P = \frac{\pi(4)}{90} \cos^{-1} \left[\frac{4-5}{4} \right] = 14.5878 \text{ m}$$

$$R = \frac{A}{P} = \frac{33.0486}{14.5878} = 2.2655 \text{ m}$$

$$\therefore Q = \frac{33.0486}{0.014} (2.2655)^{\frac{2}{3}} (0.009)^{\frac{1}{2}} = 386.30 \text{ m}^3/\text{s}$$

b) Sustituyendo valores en la fórmula 2.5.d:

$$V = (8.86 \log 5 + 38) (5/8)^{\frac{1}{6}} (0.009 \times 8)^{\frac{1}{2}} = 10.9647 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = 33.0486 \times 10.9647 = 362.37 \text{ m}^3/\text{s}$$

2.6 Sección de máxima eficiencia en canales

Si se observa la fórmula de Manning en la forma 2.1.d', podemos preguntarnos lo siguiente: Para un canal en que se conozca A , n y S_0 (A es en general una consecuencia del gasto deseado y de la velocidad permisible), ¿cuál es la sección que permite que pase un gasto máximo? En el miembro de la derecha de la fórmula de Manning ha quedado como variable únicamente R . Por consiguiente $Q_{m\acute{a}x}$ sólo podrá presentarse cuando se tenga el valor máximo posible de R . A la sección que cumple con esa condición se le llama *sección de máxima eficiencia*.

Enseguida se examinará qué características debe tener una sección de máxima eficiencia para un canal trapecial.

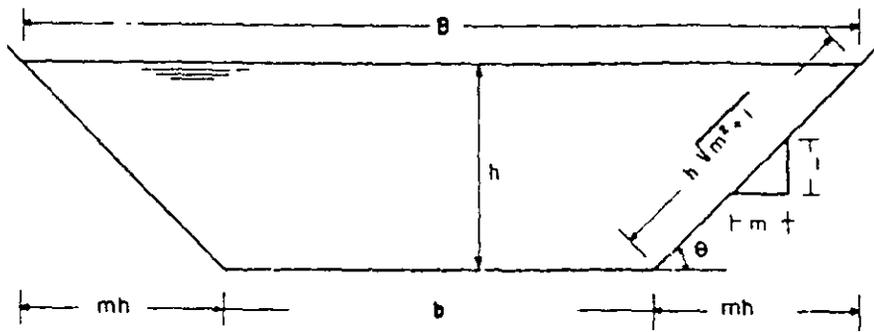


FIGURA 2.5

El radio hidráulico R es máximo cuando el perímetro mojado P es el menor posible, ya que por definición: $R = A/P$ y A se supone constante.

Según la figura 2.5, son válidas las expresiones siguientes:

$$A = bh + mh^2 \quad (2.6.a)$$

$$P = b + 2h \sqrt{m^2 + 1} \quad (2.6.b)$$

Si se sustituye b , despejado de la expresión 2.6.a, en la 2.6.b:

$$P = \frac{A}{h} - mh + 2h \sqrt{m^2 + 1} \quad (2.6.c)$$

derivando ahora con respecto a h , se tiene.

$$\frac{\partial P}{\partial h} = -\frac{A}{h^2} - m + 2 \sqrt{m^2 + 1}$$

al igualar este valor a cero se tiene el valor mínimo de P que se busca (puede comprobarse que la segunda derivada es positiva, lo que garantiza que se trata de un mínimo).

Después de igualar a cero la derivada anterior, y de sustituir en ella el valor de A , indicado en 2.6.a, se obtiene:

$$\frac{b}{h} + m = -m + 2 \sqrt{m^2 + 1}$$

equivalente a:

$$b = 2h (\sqrt{m^2 + 1} - m) \quad (2.6.d)$$

que es la condición necesaria para que un canal funcione con máxima eficiencia hidráulica, cuando se conoce la inclinación m de sus taludes.

Las secciones de máxima eficiencia en canales trapeziales implican anchos de plantilla b muy pequeños y aún menores que el tirante cuando $m > 0.75$, que es un caso muy común en la práctica. Esta característica significa normalmente problemas para la construcción, debido a que el espacio para colocar la maquinaria no es suficiente y se requieren excavaciones muy profundas. Por esta razón, las secciones de máxima eficiencia no se construyen a menudo y sólo podrían convenir en casos en que el revestimiento sea demasiado caro, ya que el área de contacto entre el agua y el canal es la mínima posible. En canales rectangulares, sí puede convenir este tipo de sección en que: $b = 2 h$, según 2.6.d.

Sección de máxima eficiencia cuando el talud no está fijo

Si se desea conocer el ángulo de inclinación del talud para que un canal funcione con su máxima eficiencia hidráulica, se debe considerar a m como variable y h como constante. En esta forma, derivando la expresión 2.6 c respecto de m , se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -h + \frac{2 m h}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

y el valor mínimo de P se encuentra al igualar la derivada anterior a cero, con lo que se reconoce fácilmente que el valor de m para la sección de máxima eficiencia es:

$$m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot \theta \therefore \theta = 60^\circ \quad (\text{Véase la figura 2.5})$$

es decir, la sección buscada sería la parte inferior de un hexágono regular.

En forma semejante, se pueden determinar secciones más eficientes para otras figuras geométricas, por ejemplo: para el círculo es un semicírculo y para el triángulo, la mitad de un cuadrado apoyado en uno de sus vértices, por supuesto, y con un talud $m = 1$.

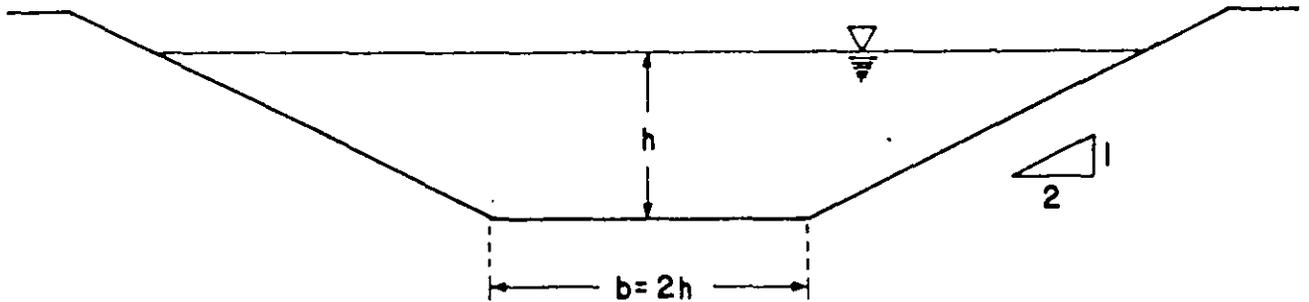
Ejercicios propuestos

- 2.1 Sea un canal de sección trapezoidal, construido en tierra, por el cual se quiere transportar un gasto $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, la pendiente de la plantilla es:

$$S_0 = 0.0004, \quad m = 2 \quad \text{y} \quad n = 0.020$$

Determine el ancho de la plantilla b y el tirante normal h_0 si:

$$h = \frac{b}{2}$$

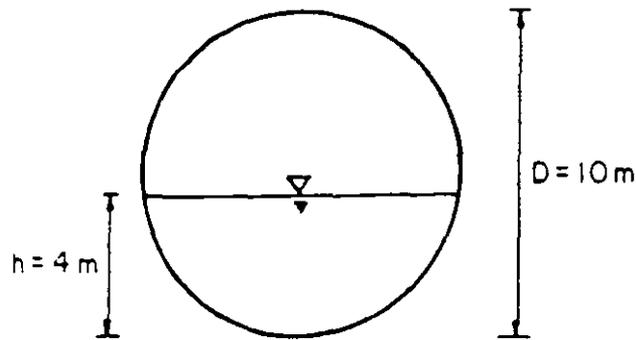


- 2.2 Se desea transportar un gasto $Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$ por un canal de sección trapezoidal, construido en tierra ($n = 0.020$), con una designación de talud $m = 2.5$ y $S_0 = 0.00008$.

Determine:

- El tirante h_0 , si el ancho de la plantilla es $b = 40 \text{ m}$.
 - El ancho de la plantilla, de la superficie libre y el tirante del canal, si la velocidad es $V = 1.20 \text{ m/s}$.
- 2.3 Calcule el valor del coeficiente N_k de la fórmula de Kozeny para una sección circular y diga a qué material corresponde si se tienen los siguientes datos:

$$D = 10 \text{ m}, \quad S_0 = 0.0009, \quad h_0 = 4.0 \text{ m}, \quad n = 0.014$$



2.4 Se desea transportar un gasto $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ por un canal trapecial con velocidad $V = 16 \text{ m/s}$, revestido con concreto ($n = 0.014$) y talud $m = 0.25$.

- Calcule para la sección de máxima eficiencia el ancho de la plantilla b , el tirante normal h y la pendiente longitudinal del canal S_0 .
- Si $b = 6.0 \text{ m}$ y con la S_0 calculada en el inciso anterior, ¿qué gasto puede llevar la nueva sección de máxima eficiencia?

2.5 Un canal de sección rectangular con revestimiento de concreto de acabado normal tiene sección de máxima eficiencia y debe transportar un gasto $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ con un tirante normal $h_0 = 2.0 \text{ m}$.

- Calcule la pendiente S_0 necesaria para obtener las condiciones que se enuncian.
- Si $S_0 = 0.001$, ¿cuál es el nuevo gasto?
- Calcule el gasto con la pendiente que se obtuvo en el inciso *a* y con un ancho de plantilla $b = 6.0 \text{ m}$.

CAPÍTULO 3

ENERGÍA ESPECÍFICA

3.1 Concepto de energía específica en un canal

En una sección cualquiera de un canal, se llama *energía específica* E a la suma del tirante más la carga de velocidad en esa sección. De acuerdo con lo expuesto en el subtema 1.3.2 y lo señalado en el 1.4.1 y en 1.5, la energía específica es entonces la suma de las energías de presión y cinética por unidad de peso del conjunto de partículas del fluido que forman la sección mencionada, es decir:

$$E = h \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} \quad (3.1.a)$$

expresión que puede también escribirse en la forma:

$$E = h \cos \theta + \alpha \frac{Q^2}{2g A^2} \quad (3.1.a')$$

Es posible analizar la expresión anterior según dos puntos de vista, a saber:

1. Para un gasto constante Q_0 , estudiar la relación $h = f(E)$ y
2. Para una energía específica constante E_0 , estudiar la relación $h = f(Q)$.

El primer enfoque nos permite observar que para un gasto dado existen tres tipos de régimen, que se denominan: *crítico*, *subcrítico* y *supercrítico*.

El segundo punto de vista es de utilidad cuando se desea estudiar el comportamiento hidráulico de dos secciones de un escurrimiento en que la energía específica sea constante (E_0), o pueda considerarse como tal sin cometer error apreciable.

Enseguida se describirán cada uno de los tres tipos de régimen mencionados en el primer enfoque.

3.2 Relación $h = f(E)$ para un valor Q_0 conocido

El lugar geométrico de la expresión 3.1.a' es una curva con dos asíntotas que pueden precisarse observando dicha expresión. En efecto:

Si $h \rightarrow \infty \therefore E \rightarrow \infty$, la asíntota es una línea a 45° con los ejes "E - h".

Si $h \rightarrow 0 \therefore E \rightarrow \infty$, la asíntota es el eje "E".

Lo anterior queda expresado en la figura 3.1.

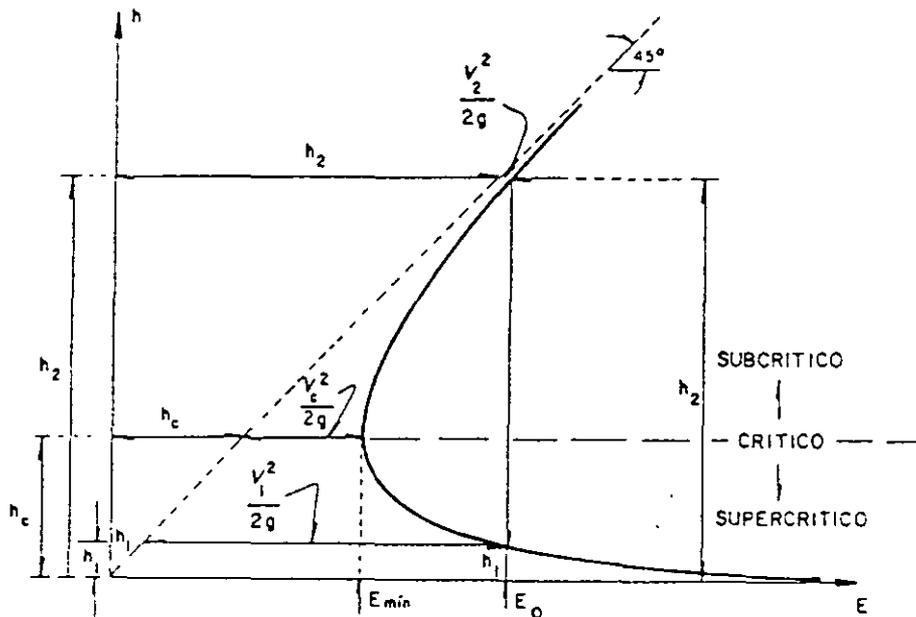


FIGURA 3.1 Variación "h-E" para Q constante

Examinando la figura 3.1 pueden obtenerse algunas conclusiones importantes. Por ejemplo, para una energía específica cualquiera E_0 , existen dos posibles tipos de escurrimiento: uno con un tirante h_1 y una velocidad V_1 , y otro con un tirante mayor h_2 y una velocidad menor V_2 . Además, existe un punto singular que corresponde a la energía específica mínima posible y que se caracteriza porque está representada por un solo tirante (h_c , en la figura) a diferencia de todos los demás casos en los que $E \neq E_{min}$.

Se llama *sección crítica* en un escurrimiento a superficie libre a aquella en que la energía específica es la mínima posible para el gasto de dicho escurrimiento. Si el régimen está establecido, se dice que es *crítico* cuando dicha energía es la mínima posible a lo largo de todo el canal, y con ese nombre se designan todas sus características hidráulicas "tirante crítico" (h_c), "pendiente hidráulica crítica" (S_c), "velocidad crítica" (V_c), etc.

Si el tirante es mayor que el crítico (h_2), el régimen se denomina *subcrítico* o *lento*, y cuando es menor (h_1), *supercrítico* o *rápido*.

El comportamiento de un escurrimiento está íntimamente relacionado al tipo de régimen a que esté sometido y por esta razón es importante conocer dicho régimen. La forma más sencilla de identificar un determinado régimen, es compararlo con las características que dicho régimen tendría si fuera crítico. Es decir, una vez determinado el tirante crítico h_c , se compara con el disponible h y se concluye lo siguiente:

$$h > h_c \text{ régimen subcrítico o lento}$$

$$h = h_c \text{ régimen crítico} \tag{3.2.a}$$

$$h < h_c \text{ régimen supercrítico o rápido}$$

Por otra parte, la sección crítica puede garantizarse siempre que en un canal con flujo uniforme se pase de una pendiente menor que la crítica o una mayor, tal como se indica en la figura 3.2. A estas secciones se les llama *secciones de control*.

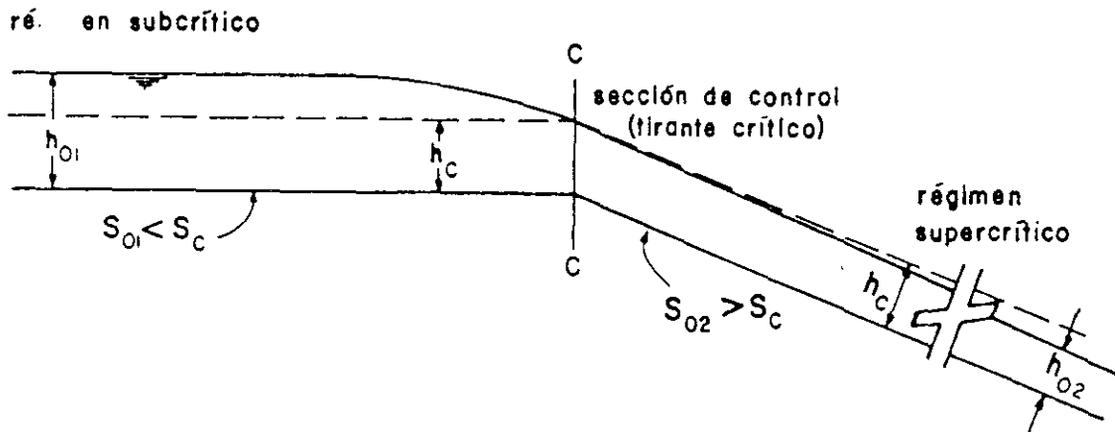
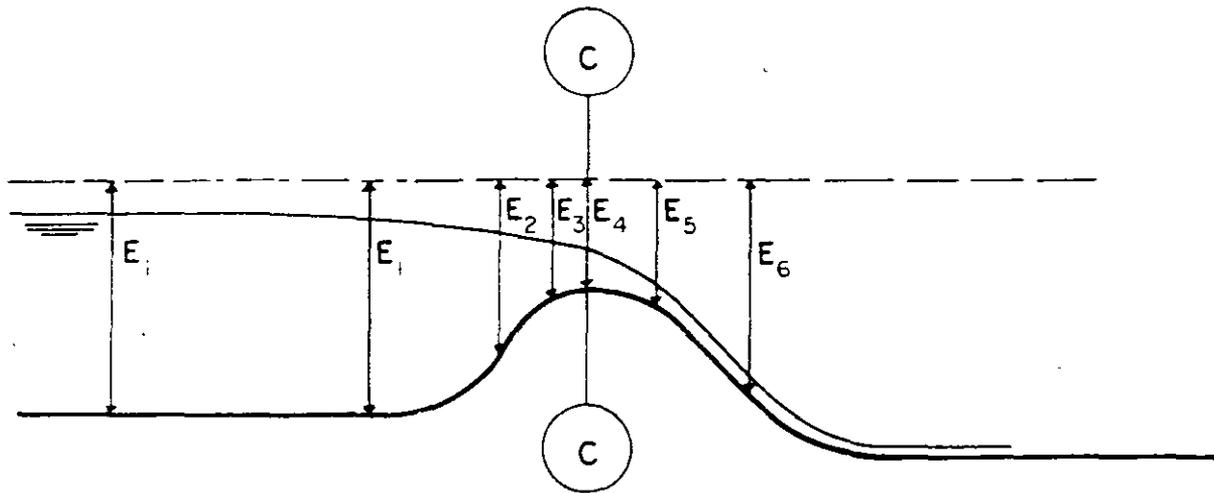


FIGURA 3.2 Sección de control

En la figura 3.2 se ha designado con h_{01} al tirante normal a régimen subcrítico (con la pendiente S_{01}) y con h_{02} al tirante normal a régimen supercrítico, correspondiente a S_{02} .

Teóricamente, en la cresta de un vertedor, cuando aguas arriba el flujo está en la zona subcrítica, también se presenta el tirante crítico, lo que puede comprobarse con un análisis semejante al anterior u observando que es precisamente en dicha cresta donde se presenta la energía específica mínima, como se distingue claramente en la figura 3.3.



$$E_1 > E_2 > E_3 > E_4 < E_5 < E_6 ; \quad E \text{ mínima} = E_4 \text{ (en la cresta)}$$

FIGURA 3.3 Sección crítica en la cresta de un vertedor

3.2.1 Determinación de la sección crítica

Un escurrimiento se comporta en forma particular según el tipo de régimen a que esté sometido, especialmente en casos de cambios de sección o de pendiente como se estudiará después.

Si la sección crítica, tal como se definió en el tema 3.2, se presenta cuando la energía específica es la mínima posible para un gasto dado, pueden encontrarse sus características aplicando el criterio de la primera derivada a la expresión 3.1.a'. En efecto, derivando E con respecto a h , se tiene:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} \quad (3.2.b)$$

Ahora bien, en la figura 3.4 se observa que, para una sección cualquiera, si se llama B al ancho de la superficie libre, se cumple:

$$dA = B dh$$

o

(3.2.b')

$$\frac{dA}{dh} = B$$

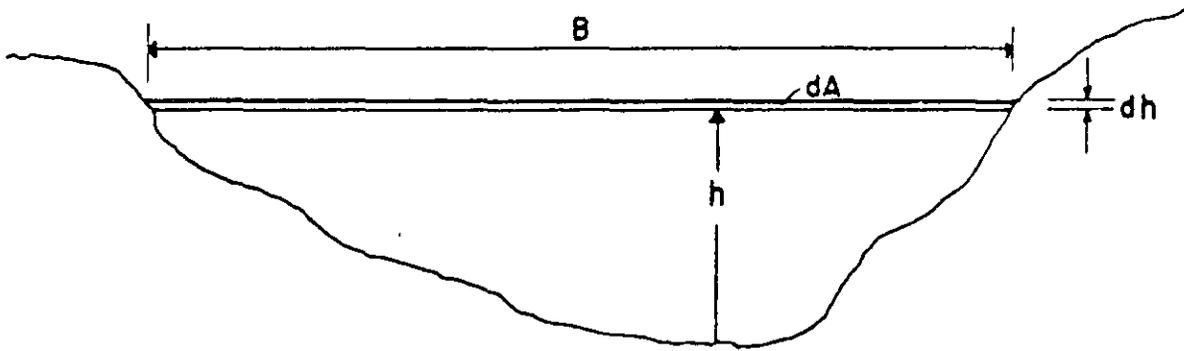


FIGURA 3.4

Al sustituir la expresión anterior en 3.2.b e igualarla a cero, se obtiene que en la sección donde la energía específica es mínima, se cumple:

$$\alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{A_c^3}{B_c} \quad (3.2.c)$$

Esta igualdad nos permite calcular el tirante crítico para cualquier sección, si conocemos el gasto Q , desde luego, la geometría de dicha sección.

Como el término de la izquierda es constante, puede resolverse el problema por tanteos o dibujando una gráfica del tipo que se indica en la figura 3.5, en la cual se representa la curva $h = f(A^3/B)$ para la sección deseada y cuando este valor es igual a Q^2/g , se tiene h_c en el eje de las abscisas.

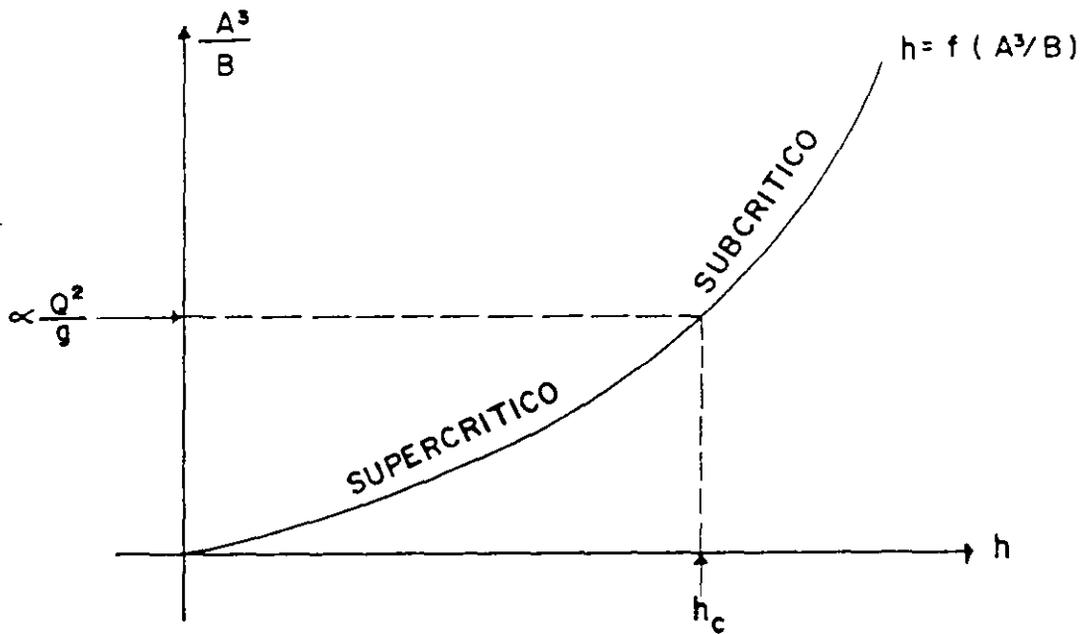


FIGURA 3.5

En realidad, el cálculo del tirante crítico por tanteos no es tan rápido como podría desearse. por lo que en algunas secciones geométricas especiales se reduce la fórmula 3.2.c a expresiones sencillas como se expondrá más adelante.

Por otra parte, si se llama tirante medio a la relación:

$$h_m = \frac{A}{B} \quad (3.2.d)$$

Y si nos referimos a la sección crítica. al sustituir esta expresión en la 3.2.c y aplicar el principio de continuidad, se comprueba la validez de la relación:

$$\frac{h_{mc}}{2} = \alpha \frac{V_c^2}{2g} \quad (3.2.e)$$

Es decir, la carga de velocidad en una sección crítica es igual a la mitad del tirante medio en dicha sección.

De la expresión anterior, puede también despejarse la velocidad crítica, cuyo valor es entonces:

$$V_c = \sqrt{\frac{g}{\alpha} h_{mc}} \quad (3.2.f)$$

y en forma semejante se obtienen otros parámetros para la sección crítica como es, por ejemplo, la pendiente hidráulica crítica S_c .

3.2.2 Cálculo del tirante crítico

La solución de este problema parte siempre de la condición general 3.2.c, pero en ocasiones pueden evitarse los tanteos, como sucede en los siguientes casos:

a) Sección rectangular

Si la sección es rectangular: $h_{mc} = h_c$, por lo que las expresiones 3.2.d y 3.2.e son válidas para el tirante crítico real.

Por otra parte, en las secciones rectangulares a menudo conviene usar el concepto de gasto por unidad de ancho del canal, llamado *gasto unitario* y se designa con la letra q , luego su valor es:

$$q = \frac{Q}{B} \quad (3.2.g)$$

que equivale a:

$$q = \frac{BhV}{B} = hV \quad (3.2.g')$$

Sustituyendo esta definición en 3.2.e (para canales rectangulares) se tiene que el tirante crítico en un canal rectangular puede calcularse con la expresión:

$$h_c = \sqrt[3]{\alpha \frac{q^2}{g}} \quad (3.2.h)$$

Otra característica de la sección crítica en un canal rectangular es que en ella se cumple la condición:

$$h_c = \frac{2}{3} E \quad (3.2.i)$$

lo que puede comprobarse fácilmente con las relaciones 3.1.a y 3.2.e. Esto quiere decir que teóricamente, este es el valor del tirante en la cresta de un vertedor, ya que ahí se tiene una sección crítica, tal como se explicó anteriormente. En realidad, el tirante crítico se presenta ligeramente aguas abajo de la cresta.

En ocasiones es conveniente referirse al número de Froude para saber qué tipo de régimen se tiene, sobre todo en canales rectangulares. En efecto, el número de Froude es por definición:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

y la condición 3.2.f para la sección crítica puede escribirse, aceptando que $\alpha = 1$:

$$\frac{V_c^2}{gh_c} = 1, \quad \text{o} \quad Fr^2 = 1, \quad \text{o} \quad Fr = 1$$

lo que permite decir que una vez calculado el Fr para un caso específico, se cumple lo siguiente:

- Si $Fr > 1$, el régimen es supercrítico o rápido
 - Si $Fr = 1$, el régimen es crítico
 - Si $Fr < 1$, el régimen es subcrítico o lento
- (3.2.j)

Desde luego, es posible aplicar estas condiciones a una sección distinta de la rectangular, si se refieren al tirante medio, tal como se definió en 3.2.d.

b) Sección triangular

Para una sección triangular, como la de la figura 3.6, la condición general 3.2.c toma la forma:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{(m h_c^2)^3}{2m h_c} = m^2 \frac{h_c^5}{2}$$

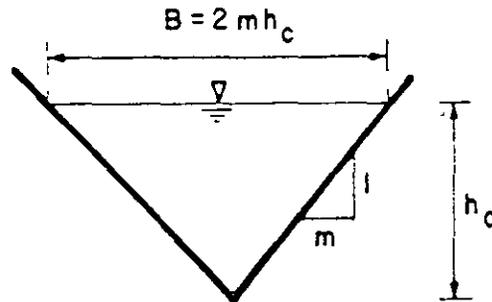


FIGURA 3.6

luego, el tirante crítico es:

$$h_c = \sqrt[5]{\frac{2\alpha}{g} \left(\frac{Q}{m}\right)^2} \quad (3.2.k)$$

c) Sección trapecial

Para el caso de la sección trapecial, que quizá sea la más usada, el tirante crítico no puede obtenerse explícitamente como en los dos casos anteriores. Sin embargo, en un gran número de casos, puede reducirse el número de tanteos si se usa la fórmula aproximada de Agroskin (1944) que dice:

$$h_{CT} = \left[1 - \frac{\sigma}{3} + 0.105 \sigma^2 \right] h_{CR} \quad (3.2.l)$$

en que h_{CT} es el tirante crítico que se busca (canal trapecial) y h_{CR} es el crítico que tendría un canal rectangular de ancho igual al ancho de plantilla del canal en estudio con el gasto total Q .

Así, según la figura 3.7:

$$h_{CR} = \sqrt[3]{\alpha \frac{Q^2}{gb^2}} \quad (3.2.m)$$

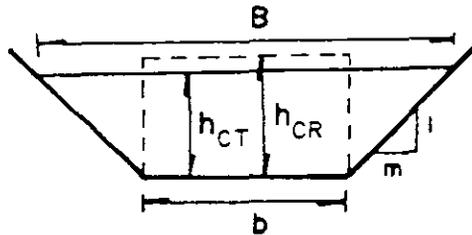


FIGURA 3.7

σ es un coeficiente cuyo valor es:

$$\sigma = \frac{mh_{CR}}{b}$$

Esta fórmula no es utilizable cuando $\sigma > 1$, además en el rango de $\sigma \leq 1$ da resultados generalmente un poco menores que los reales, por lo que es recomendable comprobar siempre con la expresión general 3.2.c. Pueden también usarse gráficas como la que presenta Chow (1959). Cuando $\sigma > 1$, se recomienda empezar los tanteos (utilizando 3.2.c) con un 90% del valor obtenido con la expresión 3.2.m.

3.2.3 Relación $h = f(E)$ para diferentes gastos

De acuerdo con la expresión 3.2.c, para cada gasto que pase por un cierto canal, se tiene un tirante crítico diferente. Una observación rápida de dicha expresión, nos llevará a la conclusión de que mientras mayor sea el gasto en una sección, los tirantes críticos correspondientes serán más grandes, y una serie de gastos haría que las funciones $h = f(E)$ fueran una familia de curvas, como la que se indica en la figura 3.8 para el caso de sección rectangular.

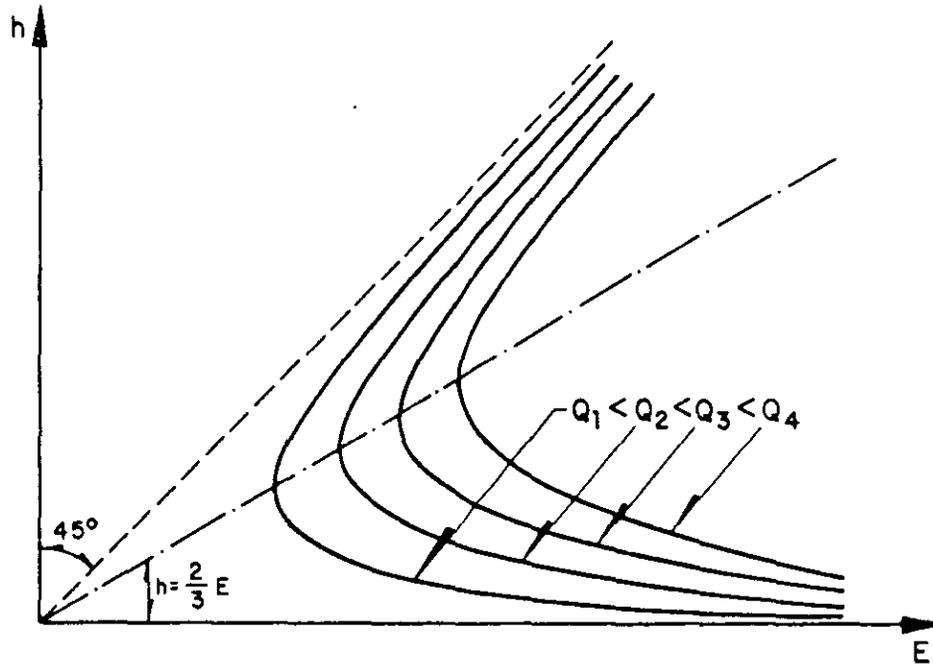


FIGURA 3.8

3.3 Relación $h = f(Q)$ para un valor E_0 conocido. Principio del gasto máximo

Supongamos que en una sección se tiene una energía específica E_0 , ($\cos \theta \sim 1$), es decir:

$$E_0 = h + \alpha \frac{Q^2}{2g A^2} \quad (3.1.a'')$$

si se despeja Q se tiene:

$$Q = A \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E_0 - h)} \quad (3.3.a)$$

donde se observa que hay un valor distinto de Q para cada h . El lugar geométrico es una curva de tipo parabólico, que para $Q = 0$ implica:

$$h = E_0 \quad \text{y} \quad h = 0$$

ya que en este último caso, el área hidráulica A es nula.

Además, la parábola tiene un valor de Q máximo que puede determinarse con el criterio de la primera derivada en la siguiente forma:

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{dA}{dh} \left[\frac{2g}{\alpha} (E_0 - h) \right]^{1/2} + \frac{A}{2} \left[\frac{2g}{\alpha} (E_0 - h) \right]^{-1/2} \left(-\frac{2g}{\alpha} \right)$$

Simplificando y recordando que

$$\frac{dA}{dh} = B \quad (3.2.b')$$

se llega a:

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\frac{2g}{\alpha} B (E_0 - h) - \frac{g}{\alpha} A}{\sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E_0 - h)}}$$

e igualando a cero se obtiene el valor de Q máximo buscado, es decir:

$$2B (E_0 - h) = A$$

Al sustituir el valor de E_0 , según la definición 3.1.a. y aplicar el principio de continuidad, se deduce que el gasto máximo se presenta cuando se cumple la condición:

$$\alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{B}$$

es decir, cuando el régimen es el crítico, según se demostró en 3.2.1 (expresión 3.2.c).

Lo anterior significa que en las secciones críticas, además de que se tiene la energía específica mínima para un gasto dado, dicho gasto es el máximo que puede pasar por esa sección, propiedad conocida como *principio del gasto máximo*.

En la figura 3.9 se representa la parábola $h - Q$ con las características señaladas.

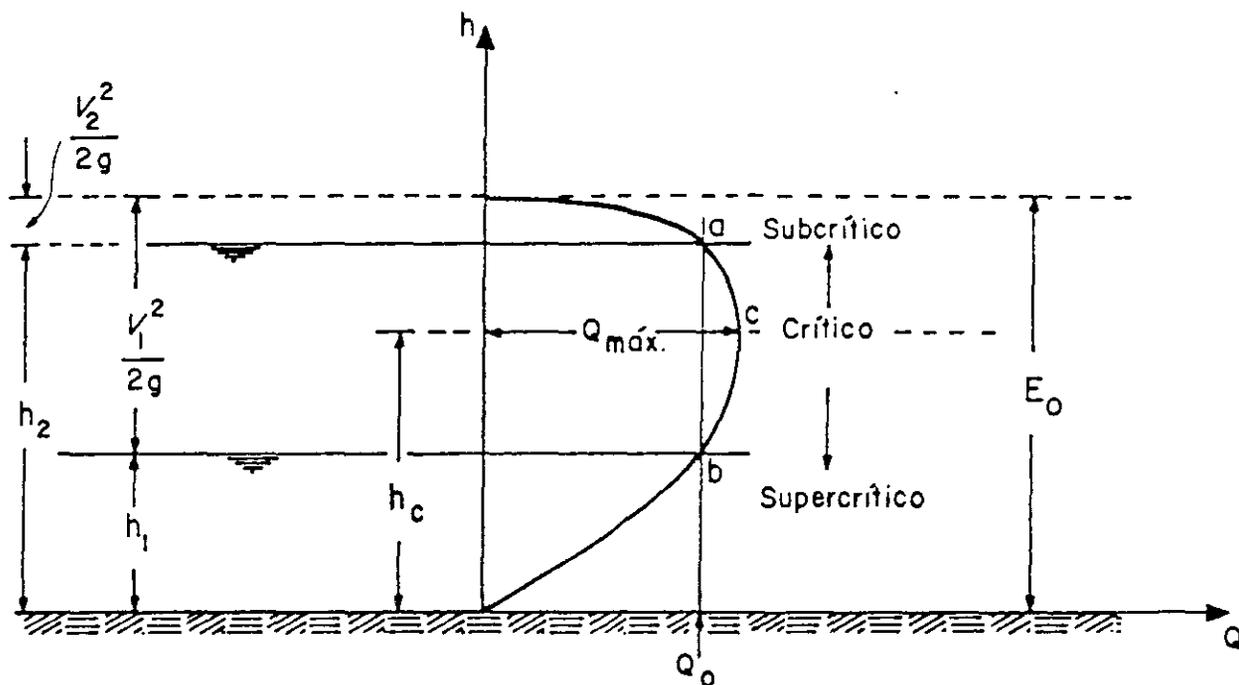


FIGURA 3.9

Sección rectangular

Desde luego, si la sección transversal del canal es rectangular, siendo $A = Bh$, la expresión 3.3.a puede escribirse usando la definición (3.2.g):

$$q = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (E_0 h^2 - h^3)} \quad (3.3.a')$$

expresión que derivada respecto a h e igualada a cero conduce a la determinación del tirante h , correspondiente al de q máximo posible para la energía específica constante E_0 . Dicho tirante es, entonces:

$$h = \frac{2}{3} E_0 = h_c \quad (3.2.i)$$

propiedad de la sección rectangular para una sección crítica que ya se había demostrado. En la figura 3.10 se expresa la ley $h - q$ para este caso.

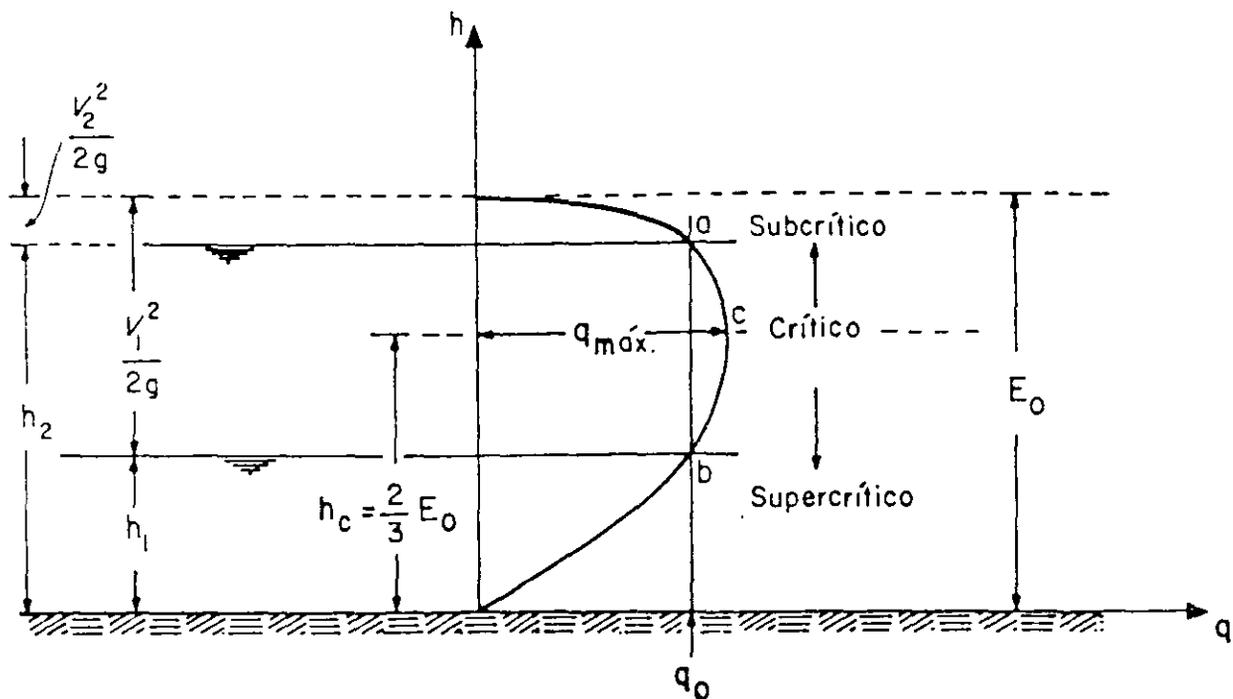


FIGURA 3.10

Y al sustituir 3.2.i en 3.3.a' y realizar los cálculos indicados, se obtiene la expresión:

$$q_{m\acute{a}x} = 1.705 \sqrt{\frac{E_0^3}{\alpha}} \quad (3.3.b)$$

Observando ahora las figuras 3.9 y 3.10, válidas para una energía específica E_0 fija, conviene hacer los siguientes comentarios:

1. Dado el gasto Q_0 existen dos posibilidades de tirante h_2 o h_1 , según sea el régimen subcrítico o supercrítico, respectivamente.
2. La excepción a lo anterior es cuando el régimen es el crítico en que hay un solo tirante h_c y E_0 es la mínima posible en la sección para el gasto Q_0 dado.
3. La parábola debe entonces interpretarse como válida en uno o dos puntos (a y b o c), respectivamente en las figuras 3.9 y 3.10 para una E_0 y un Q_0 dado, y se comete un grave error de concepto si se usa para calcular tirantes críticos usando propiedades como la 3.2.i, ya que eso sería válido sólo en el caso de que, tratándose de un canal rectangular, la E_0 fuera la mínima posible para el gasto Q_0 (Véanse las figuras 3.1 y 3.8). Entonces, los tirantes críticos deben calcularse únicamente como se explica en 3.2.2.

Para aclarar mejor la tercera observación, se analizará el siguiente ejemplo numérico.

Ejemplo 3.1

Un canal rectangular tiene los siguientes datos:

$$\begin{aligned} Q &= 20 \text{ m}^3/\text{s} \\ h &= 4 \text{ m} \\ B &= 16 \text{ m} \end{aligned}$$

Calcule:

- La energía específica.
- Las zonas de régimen subcrítico, crítico y supercrítico.

Solución:

- Para la energía específica habrá que calcular primero la velocidad, luego:

$$\begin{aligned} V &= \frac{20}{16 \times 4} = 0.3125 \text{ m/s} ; \quad \frac{V^2}{2g} = 0.00498 \text{ m} \\ E &= h + \frac{V^2}{2g} = 4.00498 \text{ m} \end{aligned}$$

- El tirante crítico está dado por la expresión 3.2.h:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{1.5625}{9.81}} = 0.54 \text{ m} ; \quad \left[q = \frac{20}{16} = 1.25 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m} \right]$$

Luego, si:

$$\begin{aligned} h &> 0.54, \text{ el régimen es subcrítico} \\ h &< 0.54, \text{ el régimen es supercrítico} \\ h &= 0.54, \text{ el régimen es crítico} \end{aligned}$$

Comentarios:

- Como $h = 4 \text{ m} > 0.54$, el régimen es subcrítico.

- 2) El máximo de la parábola se presenta para $h = 2/3 E$, es decir, para $h = 2.67 \text{ m}$, pero este tirante de ninguna manera es el crítico, ya que la energía específica no es la mínima posible para ese gasto. En efecto, la energía específica mínima de que se habla es:

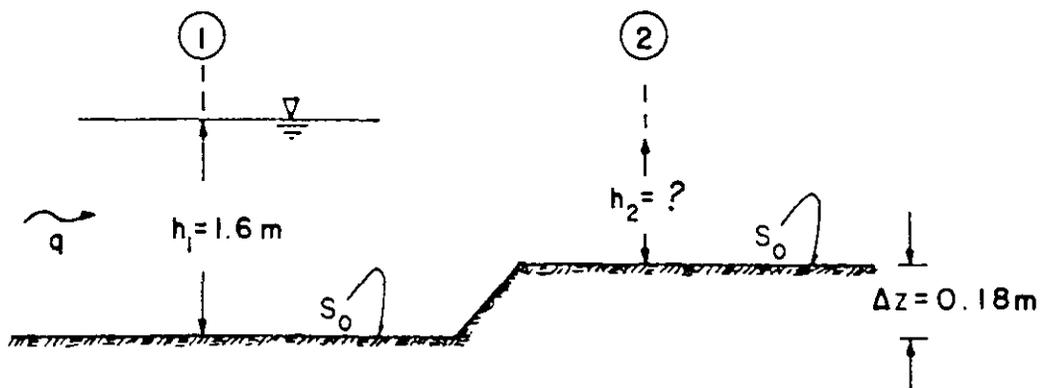
$$E_{\min} = 0.54 - \left[\frac{20}{16 \times 0.54} \right]^2 \frac{1}{19.62} = 0.813 \text{ m}$$

- 3) Por otra parte, como puede deducirse usando la expresión 3.3.b para $\alpha = 1$, el tirante $h = 2.67 \text{ m}$ sólo sería crítico si el gasto fuera $q = 13.665 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ y no $1.25 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, como es el caso de este ejemplo (Véase el tercer comentario del tema 3.3 referido a las figuras 3.9 y 3.10). Con el fin de aclarar más las propiedades de la energía específica, se presenta el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2

El canal de la figura es de sección rectangular y ancho constante. Tiene un gasto unitario $q = 2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$.

Determine h_2 si $h_{f_{1-2}} = 0$ y $S_0 = 0$.



Solución:

La energía específica en la sección 1 es:

$$E_1 = h_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

y según 3.2.g':

$$V_1 = \frac{q}{h_1} = \frac{2}{1.6} = 1.25 \text{ m/s}$$

$$E_1 = 1.6 + \frac{(1.25)^2}{2(9.81)}$$

$$E_1 = 1.679 \text{ m}$$

Aplicando ahora la ecuación de la energía entre 1 y 2, se tiene:

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta z ; (h_{f_{1-2}} = 0)$$

donde.

$$V_2 = \frac{q}{h_2} = \frac{2}{h_2} \quad \text{y} \quad E_2 = 1.679 - 0.18 = 1.499 \text{ m}$$

Sustituyendo valores:

$$1.499 = h_2 + \frac{(2/h_2)^2}{2(9.81)}$$

$$1.499 = h_2 + \frac{0.203}{h_2^2}$$

Así:

$$h_2^3 - 1.499 h_2^2 + 0.203 = 0$$

Las raíces del polinomio son:

$$h_2' = 0.4373 \quad h_2'' = 1.3946 \quad h_2''' = -0.3329$$

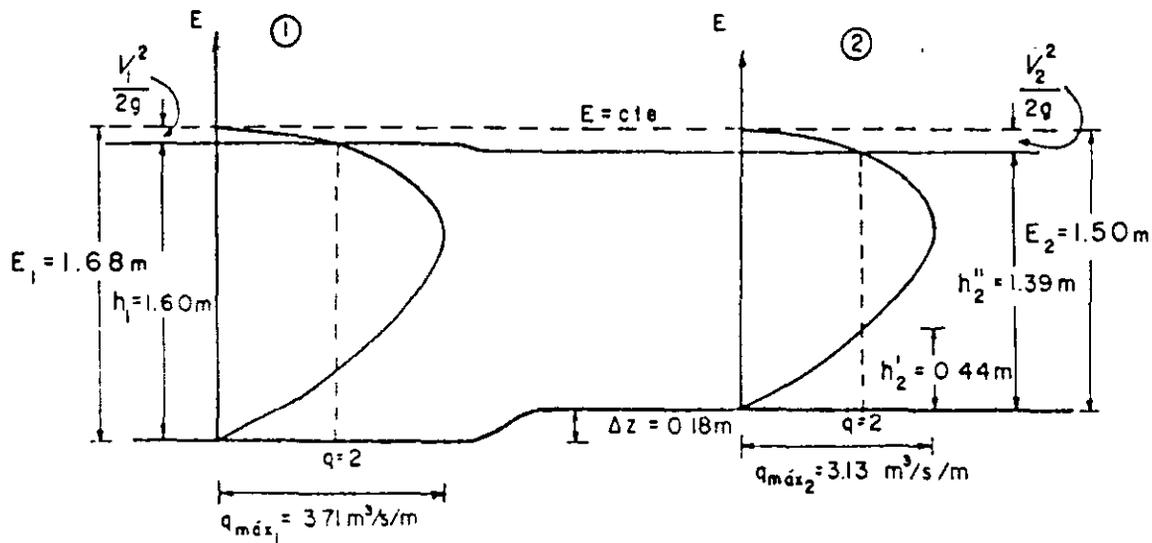
Para saber cuál es el valor correcto es necesario calcular el tirante crítico (canal rectangular):

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{(2)^2}{9.81}} = 0.7415 \text{ m}$$

$h_c < h_1 = 1.6 \text{ m} \therefore$ es régimen subcrítico.

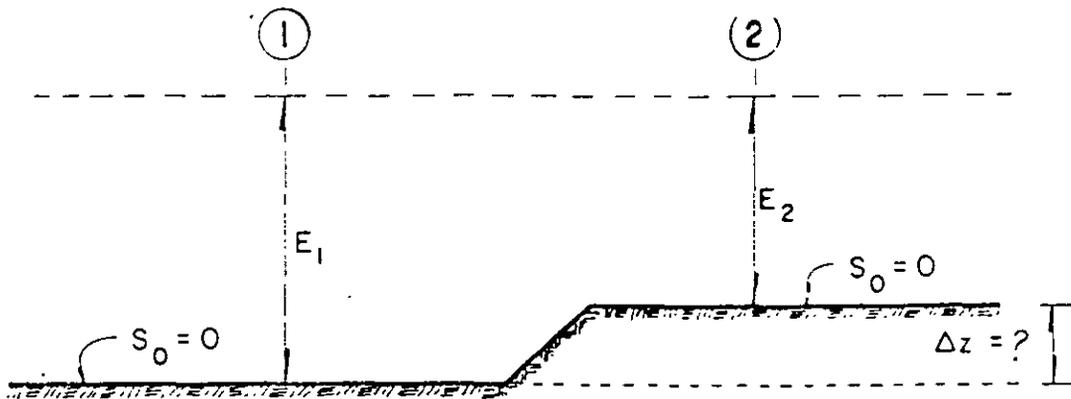
Desde luego, se descarta h''' ya que se trata de un valor negativo. El valor correcto puede definirse con ayuda de las curvas $h - Q$ para las dos energías específicas E_1 y E_2 .

En efecto, en el dibujo se puede observar que si el nivel llegara hasta el tirante h_2' en la sección 2, en alguna sección intermedia de la sobreelevación el gasto unitario q tendría que ser mayor que $2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, alcanzar el valor máximo y empezar a disminuir hasta llegar nuevamente en la zona supercrítica a $q = 2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. Esto no es posible, ya que el ancho es constante y por lo tanto q también lo es. Entonces, la solución correcta es $h_2' = 1.39 \text{ m}$.



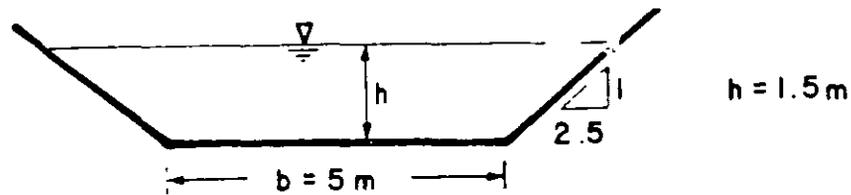
Ejercicios propuestos

- 3.1 En la figura se representa un canal rectangular de ancho constante e igual a 10 m. Encuentre la altura máxima del escalón (Δz) si se tiene un gasto de $25 \text{ m}^3/\text{s}$ y la energía específica en la sección 1 es igual a 1.50 m. Las pérdidas son despreciables.

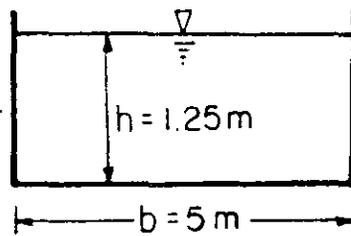


- 3.2 En los siguientes casos se presenta la energía específica mínima posible. Determine el gasto correspondiente y el número de Froude para el inciso b.

a)



b)



CAPÍTULO 4

FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

En el capítulo 2 se explicó que el flujo gradualmente variado es producto de un desequilibrio entre las fuerzas de gravedad que provocan el escurrimiento y las de fricción que se oponen a él. A continuación se hará referencia a flujos de este tipo en canales prismáticos (véase nota al pie de la página 4).

Generalmente la existencia de un cambio de pendiente o de una alteración en alguna sección de un canal es la causa de la formación del régimen gradualmente variado; aunque no se presenta en la parte alterada sino en las zonas aguas arriba y aguas abajo de ella.

Las características atribuidas a los conductos, en donde típicamente se presenta el flujo que nos ocupa, no son obviamente cauces naturales, sino necesariamente canales construidos por el hombre. Esto hace que el conocimiento de las leyes a que está sometido el flujo gradualmente variado sea de gran importancia para el ingeniero.

4.1 Ecuación dinámica del flujo gradualmente variado

Consideremos dos secciones de un flujo gradualmente variado separadas una distancia dx tal como se indica en la figura 4.1, y tomemos un eje vertical Y , medido a partir de la plantilla, y otro longitudinal X alojado en el plano de dicha plantilla, de manera que el origen de ambos ejes esté localizado en la sección a partir de la cual deseamos hacer el análisis.

De acuerdo con esto, en la figura se describe con la variable y , el desnivel entre la plantilla y la superficie libre del agua y se indica su valor en las dos secciones mencionadas siguiendo las leyes del cálculo diferencial.*

*Respetando la costumbre, se considerarán las pendientes como positivas cuando están como las que se indican en la figura 4.1, independientemente del signo que tengan de acuerdo con los ejes X-Y.

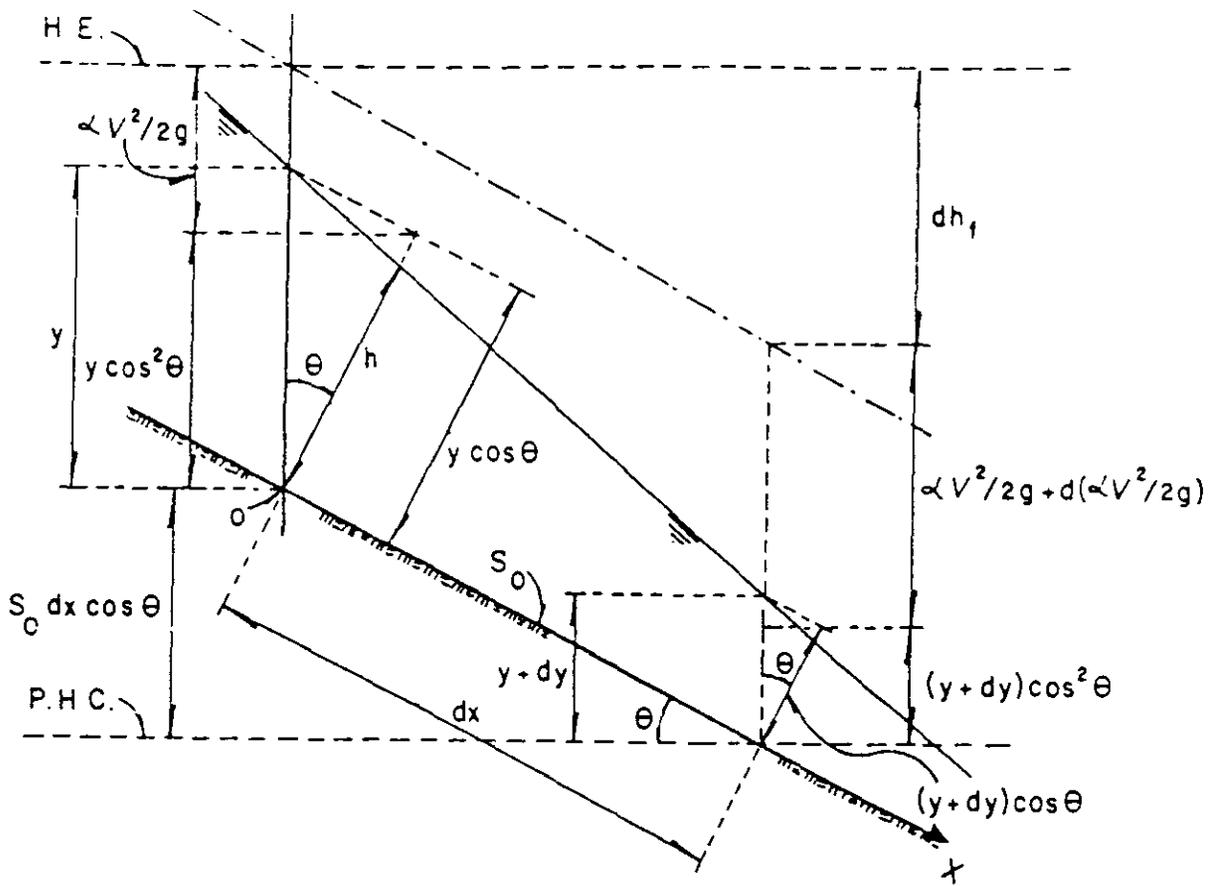


FIGURA 4.1

Si se desea aplicar la ecuación de la energía entre las dos secciones indicadas en la figura, debe observarse que para cada desnivel y , la carga de presión real en la plantilla es $y \cos^2 \theta$ como puede verse en la figura 4.1 y de acuerdo con lo señalado en el tema 1.5 (expresión 1.5.c). Con base en estas consideraciones, la ecuación de la energía adquiere la forma:

$$S_0 dx \cos \theta + y \cos^2 \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} = (y + dy) \cos^2 \theta + \alpha \frac{V^2}{2g} + \alpha d \left[\frac{V^2}{2g} \right] + dh_f$$

que simplificado queda:

$$\frac{dy}{dx} \cos^2 \theta + \frac{\alpha}{2g} \frac{d}{dx} (V^2) = S_0 \cos \theta - \frac{dh_f}{dx} \quad (4.1.a)$$

ahora bien, el término $\frac{d}{dx} (V^2)$ que equivale a:

$$\frac{d}{dx} (V^2) = \frac{d}{dx} \left[\frac{Q}{A} \right]^2 = - \frac{2Q^2}{A^3} \frac{dA}{dx} \quad (4.1.b)$$

y como:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{dA}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx}$$

si θ es pequeño de manera que puedan confundirse su seno y su tangente, es posible aceptar que $h = y \cos\theta$ (véase figura 4.1), por lo que:

$$\frac{dh}{dy} = \cos\theta$$

Utilizando esta consideración y la 3.2.b', la expresión anterior equivale a:

$$\frac{dA}{dx} = B \cos\theta \frac{dy}{dx}$$

que sustituida en 4.1.b, da como resultado:

$$\frac{d}{dx} (V^2) = - \frac{2 Q^2 B}{A^3} \cos\theta \frac{dy}{dx} \quad (4.1.b')$$

y como dh_f/dx es, por definición, la pendiente hidráulica S en el tramo considerado, al sustituir esta definición y la expresión 4.1.b' en la 4.1.a, y al hacer las simplificaciones convenientes, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} \cos^2\theta - \alpha \frac{Q^2 B}{g A^3} \cos\theta \frac{dy}{dx} = S_0 \cos\theta - S$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha \frac{Q^2 B}{g A^3} \cos\theta} \quad (4.1.c)$$

que es la ecuación del flujo gradualmente variado.

Si recordamos que el tirante medio es:

$$h_m = \frac{A}{B} \quad (3.2.d)$$

puede escribirse la expresión 4.1.c:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha \frac{Q^2 \cos\theta}{A^2 g h_m}} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha \frac{Q^2 \cos\theta}{A^2 g h_m}}$$

y expresando el número de Froude en la forma:

$$Fr_m = \frac{V}{\sqrt{gh_m}}$$

la ecuación del flujo puede escribirse:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 \cos\theta - S}{\cos^2\theta - \alpha Fr_m^2 \cos\theta} \quad (4.1.d)$$

y si θ es menor de 10° , $\cos\theta \approx 1$ y la ecuación se simplifica a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \alpha Fr_m^2} \quad (4.1.d')$$

Desde luego, si el canal es rectangular, $h = h_m$ y $Fr_m = Fr$.

La ecuación del flujo variado, en su forma 4.1.d o 4.1.d', describe el perfil de la superficie del agua según se comporten las variables Fr_m y S a lo largo del eje X , en relación con la pendiente longitudinal constante S_0 . En efecto, observando la figura 4.1 y la ecuación 4.1.d' puede deducirse que los distintos tipos de flujo gradualmente variado son:

- a) Si $\frac{dy}{dx} < 0$ o flujo gradualmente acelerado.
- b) Si $\frac{dy}{dx} > 0$ o flujo gradualmente retardado.
- c) Si $\frac{dy}{dx} = 0$, $y = cte.$ y por consiguiente, también $h = cte.$
Se tiene un flujo uniforme, que con base en la ecuación 4.1.d' puede concluirse que en realidad es un caso particular del flujo gradualmente variado, en el que, además, S_0 puede considerarse igual a S , si su valor es menor de 10° , como se supuso al escribir dicha expresión.

- d) Si $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ se tendrá una discontinuidad en el perfil de la superficie libre, tendiendo ésta a hacerse vertical. Esto sucede cuando el denominador de la ecuación 4.1.d' se acerca a cero, es decir, cuando el segundo término del denominador es prácticamente 1, o lo que es lo mismo, en el instante en que la sección se hace crítica, ya que allí habrá de cumplirse la condición 3.2.j para que esto suceda ($Fr = 1$).

4.2 Concepto de pendiente hidráulica en flujo variado

Antes de analizar detenidamente la ecuación del flujo variado (4.1.d'), obsérvese que en este tipo de flujo los parámetros Fr_m y S cambian de una sección a otra. Por lo que respecta al número de Froude Fr_m , no hay duda que es una característica de cada sección del escurrimiento. Pero, ¿cuál es la pendiente hidráulica S en una sección determinada?

Recurriendo al cálculo diferencial podemos definir a la *pendiente hidráulica* como la derivada de la pérdida por fricción con respecto a la variable que indica el desplazamiento del flujo. Desde luego, para calcular dicha derivada habría que conocer de antemano la función que relacione ambas variables. Como esta función generalmente no se conoce, sigue la duda: ¿cómo calcular la pendiente hidráulica en una sección de un flujo variado, si sólo se dispone de fórmulas para flujo uniforme?

Lo que se hace es suponer que, aunque de una sección a otra varíen los tirantes, si nos referimos a un tramo suficientemente corto para que sus dos tirantes puedan considerarse iguales, en ese pequeño tramo podemos aceptar que existe un flujo uniforme y calcular el valor de S para la sección en estudio, aplicando fórmulas del tipo de las 2.1.c o 2.1.d con los valores de R y V que corresponden a dicha sección.

4.3 Características y clasificación de perfiles en flujo gradualmente variado

Cuando se conoce el tirante en una sección de un escurrimiento gradualmente variado y se desea determinar todo el perfil de la superficie del flujo, partiendo de este tirante, el camino más lógico es dividir el canal en tramos longitudinales y aplicar entre ellos la ecuación de la energía en forma sucesiva. El procedimiento se describirá con detalle al final de este capítulo, pero basta por ahora observar que a partir de una sección 1 conocida se puede calcular el tirante de otra sección 2 resolviendo la ecuación (véase figura 4.2):

$$Z_1 + h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{V_2^2}{2g} + h_{f_{1-2}}$$

que resulta aplicable para pendientes pequeñas ($\theta < 10^\circ$) donde se puede considerar que $h \doteq y$

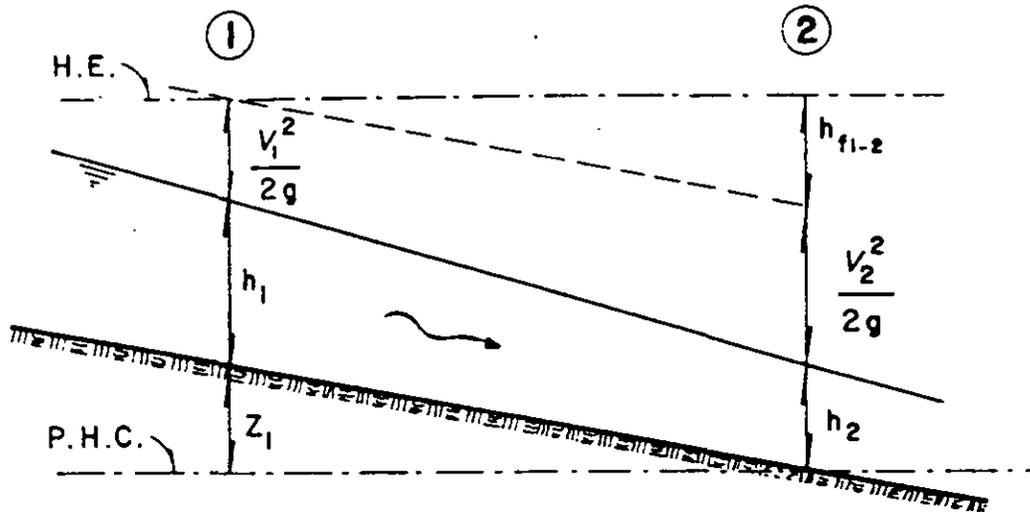


FIGURA 4.2

La pérdida por fricción $h_{f_{1-2}}$ puede determinarse con los datos conocidos de la sección 1 y si el tramo no es muy largo, prácticamente no difiere del valor real (después se mostrará que debe calcularse con los datos de ambas secciones). Esto reduce la ecuación anterior a:

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2g} = cte.$$

Ecuación que se satisface para dos valores positivos del tirante h_2 . Obviamente sólo uno de estos tirantes es el correcto y habrá que definir cuál es.

Un análisis de la ecuación 4.1.d' nos muestra claramente el perfil que debe seguir la superficie del agua a partir de la sección en estudio, cuyo tirante es h_1 , y con esta información podemos seleccionar fácilmente el tirante correcto entre las dos posibilidades que se mencionan. Como se verá, la probabilidad de equivocarse en el cálculo de h_2 , es tanto mayor cuanto se esté más cerca del tirante crítico h_c .

A continuación se describen los tipos de perfiles que pueden presentarse en un escurrimiento

Caso 1. Pendiente longitudinal del canal S_0 menor que la pendiente crítica S_c del escurrimiento

Cuando un canal funciona en estas condiciones, indicadas en la figura 4.3, es evidente que si el régimen estuviera establecido sería subcrítico. En adelante, llamaremos h_0 al tirante correspondiente a un régimen uniforme o establecido en un canal cuya pendiente longitudinal sea S_0 , tal como se hizo en el tema 3.2.

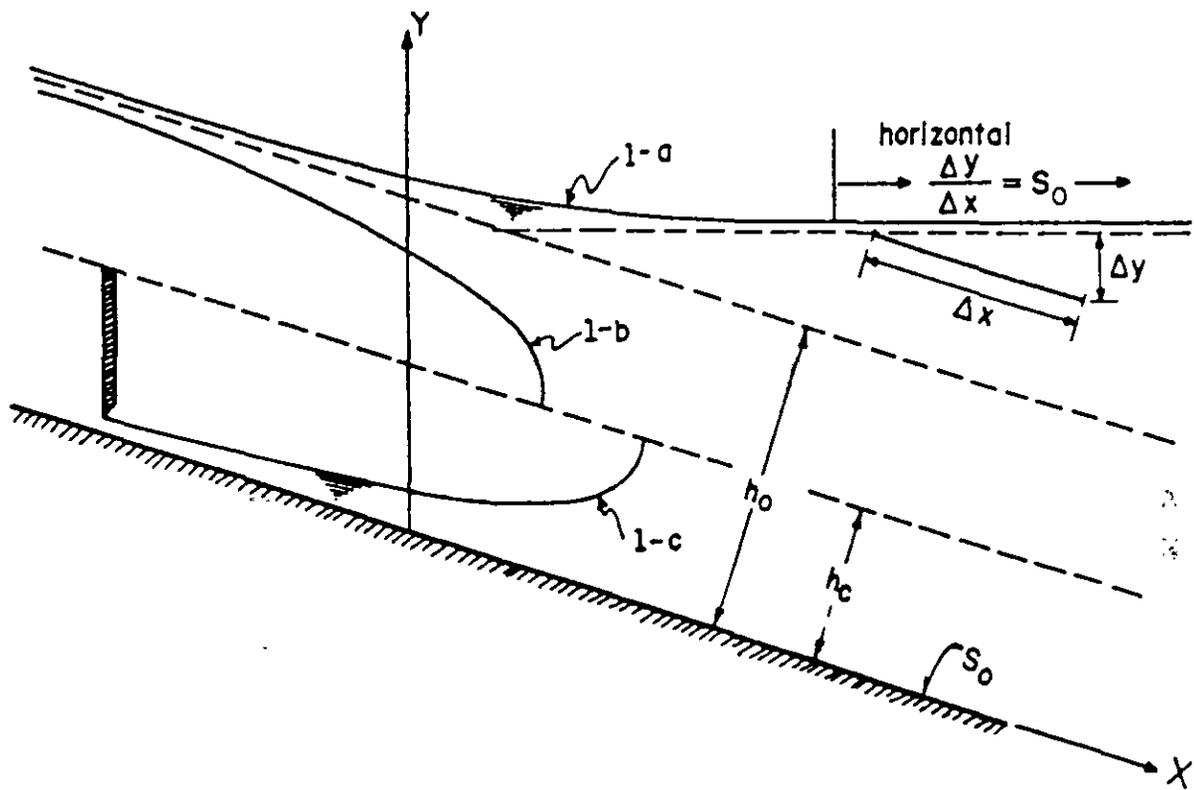


FIGURA 4.3

Como ya ha sido señalado, el régimen variado se caracteriza porque sus tirantes son diferentes del normal, por lo que pueden encontrarse en las siguientes tres posiciones:

POSICIONES:	(Figura 4.3)
Primera (perfil 1-a)	$h > h_0$
Segunda (perfil 1-b)	$h_0 > h > h_c$
Tercera (perfil 1-c)	$h < h_c$

Para valores pequeños de S_0 ($\theta < 10^\circ$), el escurrimiento puede analizarse con base en la ecuación del flujo gradualmente variado que, para estas condiciones, tiene la forma (véase tema 4.1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \alpha Fr_m^2} \quad (4.1.d')$$

En efecto, enseguida se determinará el tipo de perfil que tiene la superficie del agua para cada posición del tirante.

a) Primera posición

En esta posición se tienen las siguientes características: $h > h_0 > h_c$.

Por consiguiente:

$S < S_0$ Ya que la pendiente hidráulica, que tendría un canal con flujo establecido y tirante h , sería forzosamente inferior a la correspondiente al tirante h_0 para el mismo caso.

$Fr_m < 1$ Con el tirante h el flujo establecido sería subcrítico y debe cumplirse esta condición (3.2.j).

Aceptando $\alpha \doteq 1$, las dos conclusiones anteriores nos indican que tanto el numerador como el denominador de la ecuación 4.1.d' son positivos y, por consiguiente, también lo es la derivada, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+ (\quad)}{- (\quad)} = + (\quad) *$$

Esto significa que en la dirección del eje X (hacia la derecha del dibujo), el tirante h debe ir aumentando. Ahora bien, ¿hasta dónde aumenta? Un razonamiento sencillo nos da la respuesta. En efecto, si h aumenta, S y Fr_m van a disminuir y llegarán juntos a cero cuando no haya movimiento ($V = 0$). En ese momento el perfil estará descrito por la ecuación:

* El paréntesis indica que el valor numérico no nos interesa, si sólo se desea conocer el signo de la derivada.

$$\frac{dy}{dx} = S_0$$

es decir, el perfil se acerca asintóticamente a una línea horizontal, ya que el tirante aumenta debido exclusivamente a lo que baja longitudinalmente la plantilla del canal (véase figura 4.3).

El hecho de que la derivada sea positiva, significa también que hacia la izquierda de la figura 4.3, en dirección opuesta al flujo, el tirante debe disminuir. Luego, esto implica que aumente S y Fr_m , es decir, que S se acerque a S_0 y Fr_m se aproxime a 1; pero, ¿qué sucede primero? El tirante llega antes a la línea de los tirantes normales que a la de los críticos; después, en el límite S llegará a ser igual a S_0 antes de que Fr_m llegue a ser igual a 1 (lo que no sucede nunca), y la ecuación tendrá la forma:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

o $h = cte. = h_0$ (flujo uniforme), esto es, el flujo hacia la izquierda tiende a hacerse uniforme, acercándose suavemente a la línea $h = h_0$ y allí se establece el equilibrio que lo convierte en flujo uniforme o establecido. El perfil para este caso se ha indicado en la figura 4.3 con la curva 1-a y en la figura 4.4.a se indica para un caso real.

b) Segunda posición

Si $h_0 > h > h_c$, se cumple:

$$\begin{aligned} S &> S_0 \\ Fr_m &< 1 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{- (\quad)}{- (\quad)} = - (\quad)$$

El tirante decrece hacia la derecha y cuando se acerca al nivel del tirante crítico:

$Fr_m \approx 1$, la derivada se aproxima al valor infinito, es decir:

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty ,$$

lo que significa que existe una discontinuidad con tendencia a que el perfil sea vertical. Hacia la izquierda, el nivel sube hasta que $S = S_0$ y el flujo tiende asintóticamente a hacerse uniforme como en el caso anterior. El perfil descrito corresponde a la curva 1-b de la figura 4.3, y un ejemplo real es el indicado en la figura 4.4.b.

c) Tercera posición

Si $h < h_c$, el flujo tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} S &> S_0 \\ Fr_m &> 1 \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{- (\quad)}{- (\quad)} + (\quad)$$

El tirante aumenta hacia la derecha, cuando llega a la línea de los tirantes críticos: $Fr_m = 1$ y aparece una discontinuidad con tendencia a la vertical. Hacia la izquierda aumentan Fr_m y S , alejándose cada vez más de sus límites. Este es el caso típico de perfil que se forma a la salida de una descarga de fondo cuando el canal tiene pendiente subcrítica (curva 1-c de la figura 4.3). En la figura 4.4.c se indican un perfil real para este caso.

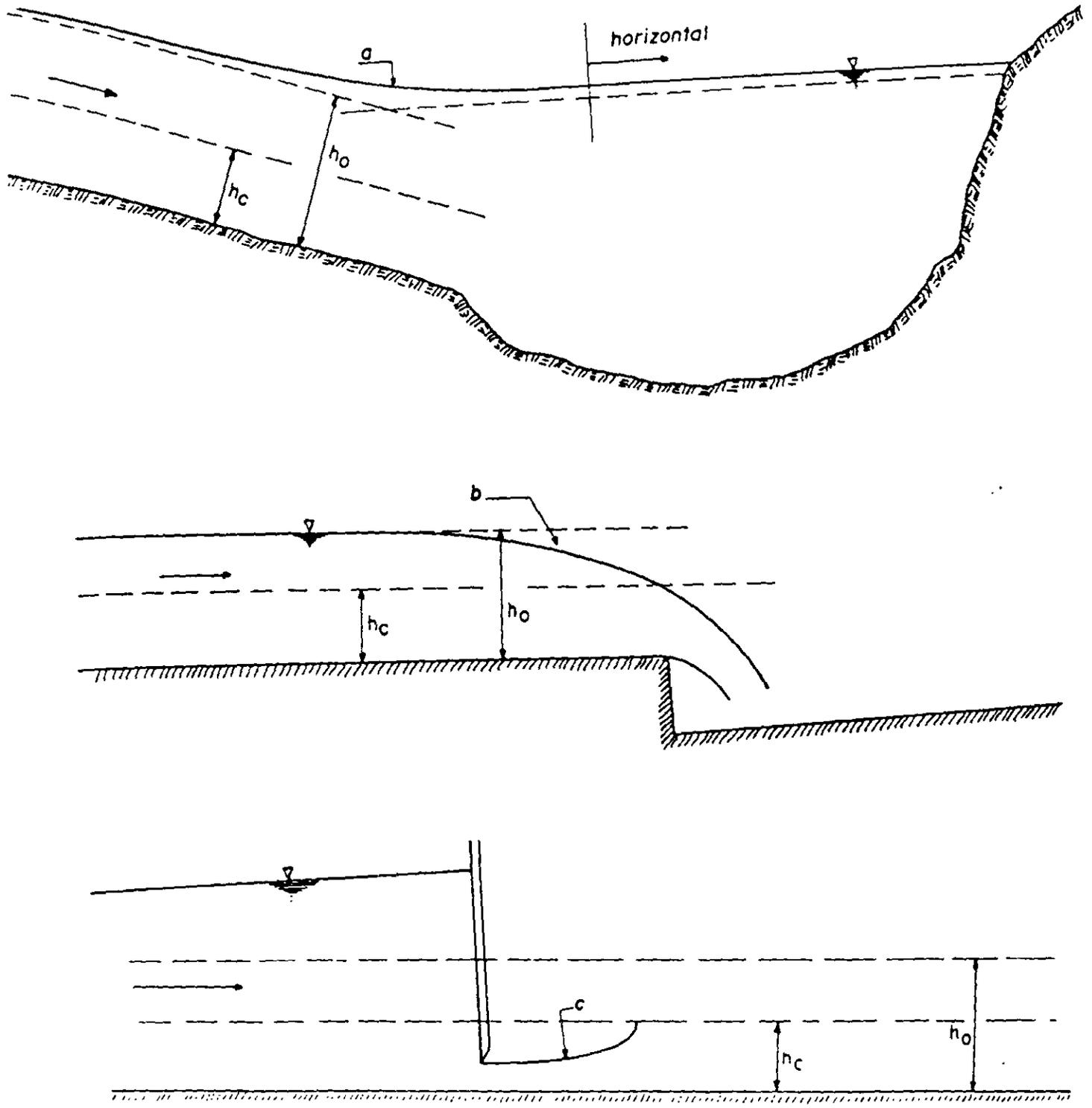


FIGURA 4.4 Ejemplos de perfiles del caso 1 ($S_0 < S_c$).

Caso 2. Pendiente longitudinal del canal S_0 mayor que la pendiente crítica S_c del escurrimiento

En este caso el flujo establecido sería supercrítico. Esto significa que el tirante normal h_0 es menor que el crítico, lo que equivale a que la pendiente hidráulica a régimen establecido S_0 es mayor que la pendiente correspondiente a régimen crítico S_c .

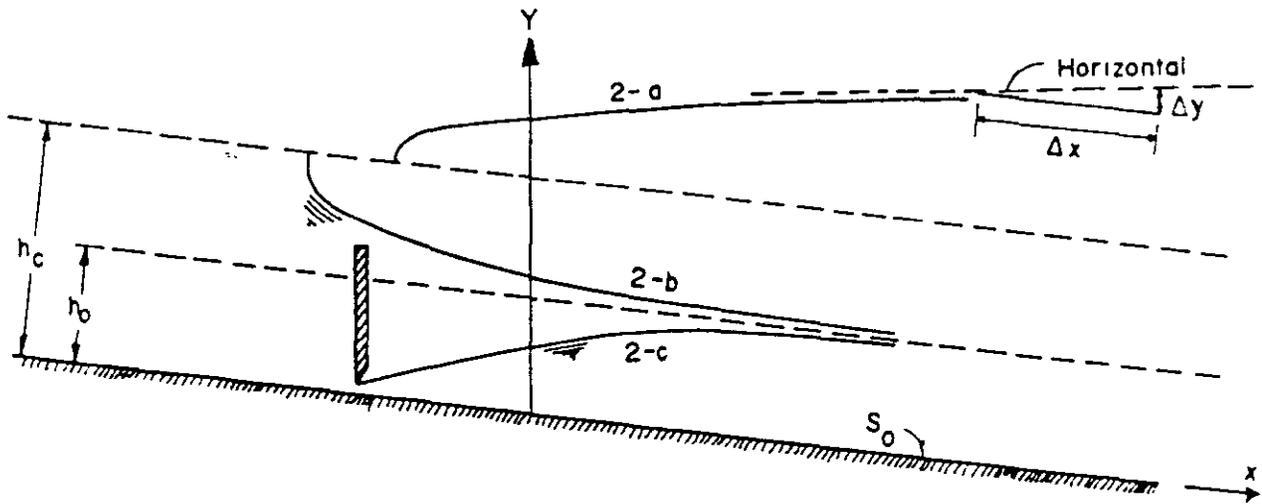


FIGURA 4.5

Las posiciones que pueden presentarse son:

POSICIONES:	(Figura 4.5)
Primera (perfil 2-a)	$h > h_c$
Segunda (perfil 2-b)	$h_c > h > h_0$
Tercera (perfil 2-c)	$h < h_0$

Al analizar cada posición se observa lo siguiente:

a) Primera posición, $h > h_c$

En esta situación se tienen las características:

$$S < S_0$$

$$Fr_m < 1$$

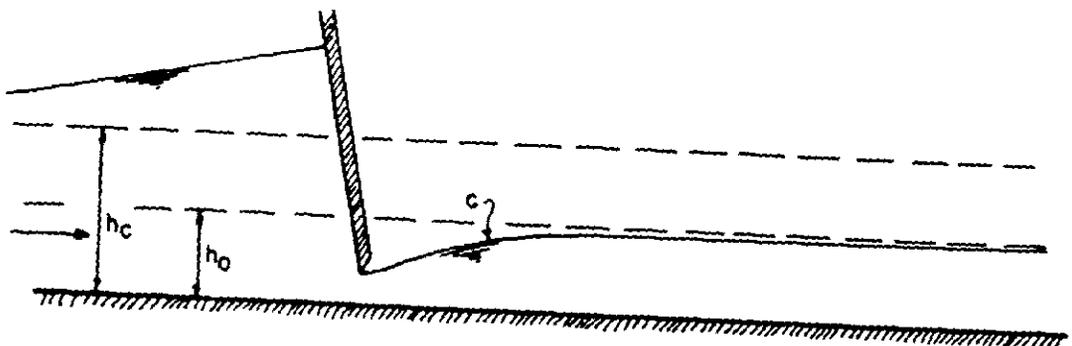
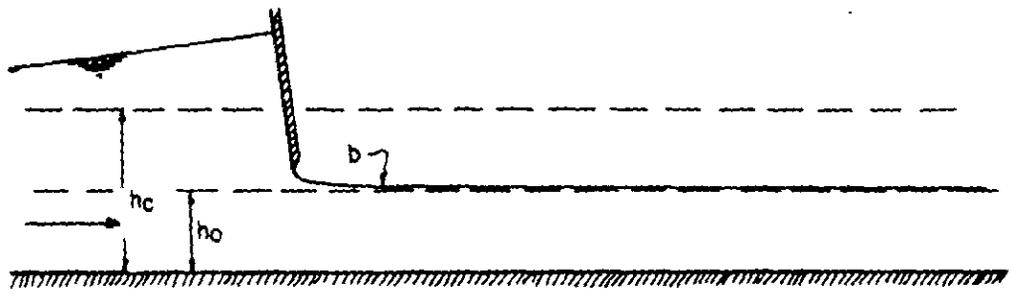
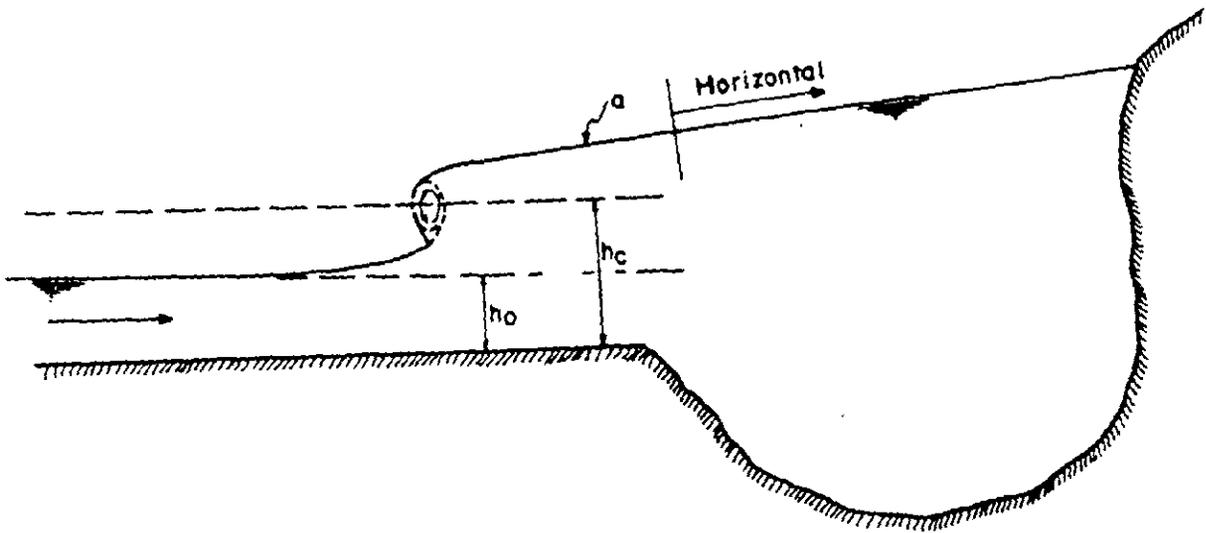


FIGURA 4.6. Ejemplos de perfiles del caso 2 ($S_0 > S_c$)

Luego, la ecuación 4.1.d' quedaría:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+ (\quad)}{+ (\quad)} = + (\quad)$$

El tirante aumenta hacia la derecha, lo que implica que en esa dirección disminuya S y Fr_m . Estos valores llegan a ser nulos como en el caso del perfil 1-a, ya que, en el límite:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 ; \quad (S = Fr_m = 0)$$

Hacia la izquierda el tirante baja y, cuando llega al nivel del tirante crítico, aparece una discontinuidad con tendencia a hacerse vertical, tal como se indica en el perfil 2-a de la figura 4.5 y en el caso real mostrado en la figura 4.6.a.

b) Segunda posición

Si $h_c > h > h_0$, el flujo tiene las características:

$$S < S_0$$

$$Fr_m > 1$$

Luego, la ecuación 4.1.d' queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+ (\quad)}{- (\quad)} = - (\quad)$$

lo cual significa que, hacia la derecha, el tirante debe bajar. Esto implica que en esta dirección S aumenta y al llegar al valor de S_0 , la ecuación del flujo es:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \therefore h = cte. = h_0$$

es decir, el flujo tiende a hacerse uniforme de acuerdo con las características del canal. De la sección en estudio hacia la izquierda, el tirante debe aumentar, lo cual significa que,

en cada sección sucesiva, Fr_m irá disminuyendo y al tocar la curva del tirante crítico tendrá el valor 1, por lo que:

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$$

y aparece una discontinuidad con tendencia a que el flujo se haga vertical (perfil 2-b de la figura 4.5 y en el ejemplo señalado en el perfil b de la figura 4.6.b).

c) Tercera posición

Si $h < h_0$, se tiene:

$$\begin{aligned} S &> S_0 \\ Fr_m &> 1 \end{aligned}$$

por lo que la ecuación 4.1.d' tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(\quad\right)}{-\left(\quad\right)} = +\left(\quad\right)$$

Entonces, el tirante aumenta hacia la derecha y al llegar a la línea del tirante normal S alcanza el valor S_0 , por lo que:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \therefore h = cte. = h_0$$

Luego, el flujo "se estabiliza" o se hace uniforme. A la izquierda los valores de Fr_m y S aumentan constantemente. Este caso, que es también similar al anterior (figura 4.3, curva 1-c), es típico de una descarga de fondo, aunque la concavidad del perfil es contraria a la vista antes. Este caso se representa con el perfil 2-c de la figura 4.5 y un ejemplo real se indica en la figura 4.6.c.

Caso 3. Canal cuya plantilla es horizontal

En este caso, figura 4.7, se tiene:

$$S_0 = 0$$

La ecuación 4.1.d' queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 - S}{1 - \alpha Fr_m^2}$$

Y el tirante puede estar en las siguientes posiciones:

- 1a. $h > h_c \therefore Fr_m < 1$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{-S}{+(\quad)} = -(\quad)$
- 2a. $h = h_c \therefore Fr_m = 1$ y $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ (posición inestable)
- 3a. $h < h_c \therefore Fr_m > 1$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{-S}{-(\quad)} = +(\quad)$

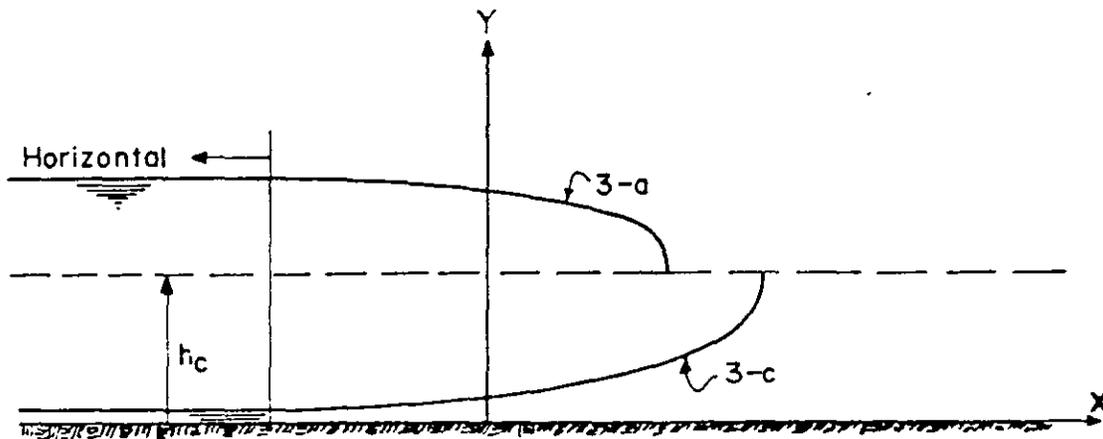


FIGURA 4.7

Un análisis semejante a los anteriores llevará a que la primera y tercera posiciones correspondan a los perfiles 3-a y 3-c respectivamente, tal como se indican en la figura 4.7. El perfil asociado a la segunda posición es claramente inexistente, lo que significa que si en alguna sección se forzara este tirante, inmediatamente cambiaría su valor quedando en alguno de los otros dos casos.

Como ejercicio se recomienda al lector demostrar que los perfiles correspondientes a los casos 4 y 5, que se especifican a continuación, son los indicados en las figuras 4.8 y 4.9, respectivamente.

Caso 4. Canal con pendiente crítica

En esta situación, el tirante normal h_0 es igual al crítico h_c y por consiguiente $S_0 = S_c$.

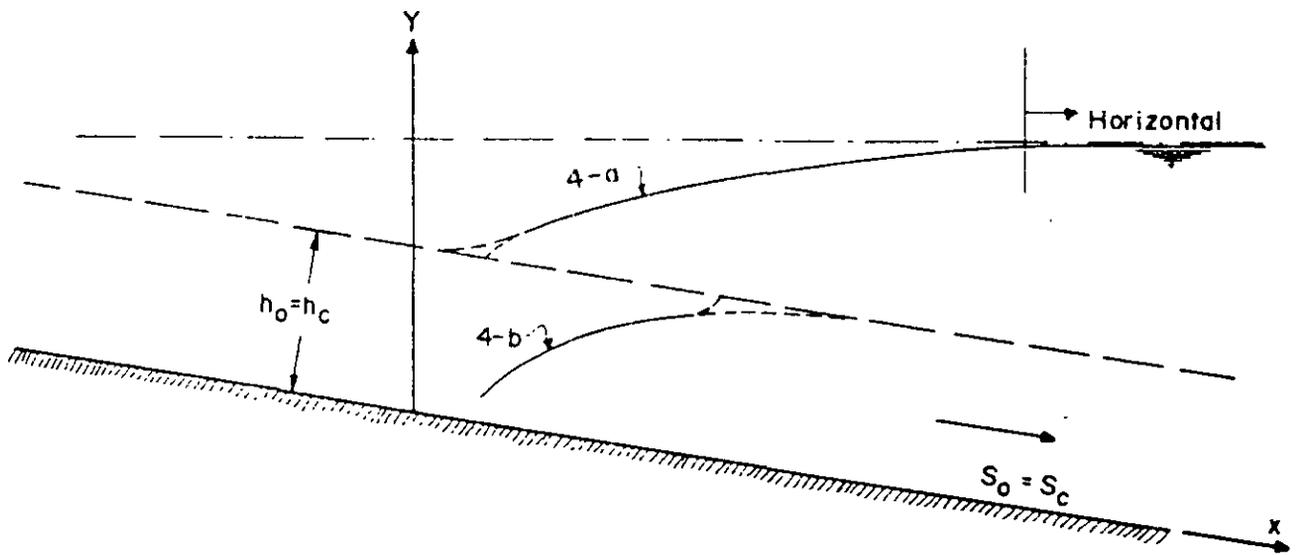


FIGURA 4.8

En este caso, al acercarse h a h_c , existen las dos tendencias, a saber: perfil vertical y asíntota a la línea de los tirantes críticos. Lo que realmente sucede, es que en ese punto hay una indeterminación que trae por consecuencia que esta zona sea inestable.

Se ha visto que el flujo variado se presenta siempre que $S \neq S_0$, sin importar los valores que adquieran estos parámetros. En realidad, lo verdaderamente necesario para que el agua fluya por una sección, es que la pendiente hidráulica S sea positiva ya que la pendiente longitudinal S_0 puede ser inclusive nula o aún negativa, como en los casos 3 y 5, respectivamente.

Caso 5. Canal con pendiente negativa ($S_0 < 0$)

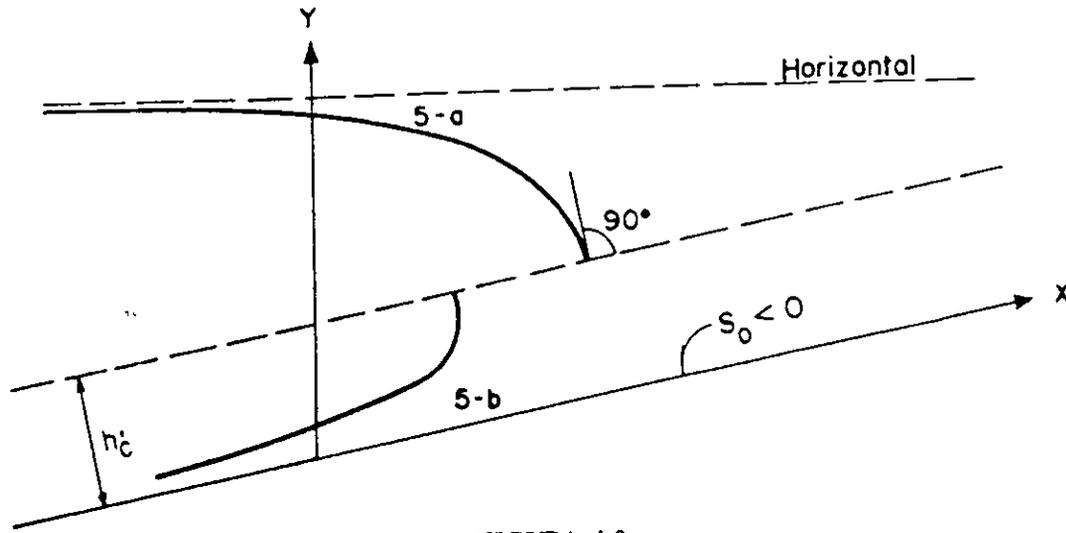


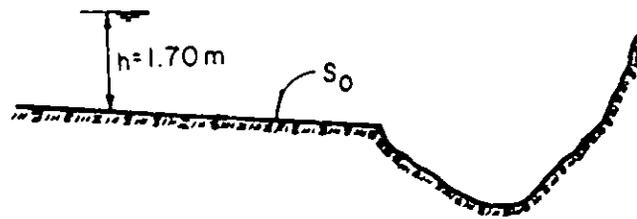
FIGURA 4.9

Ejemplo 4.1

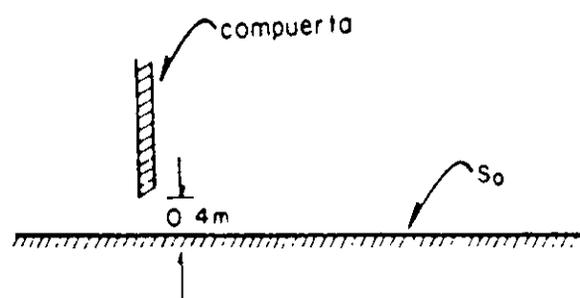
Identifique el tipo de perfil para cada uno de los siguientes casos si:

$$Q = 273.4 \text{ m}^3/\text{s}, \quad n = 0.016, \quad B = b = 48 \text{ m} \quad \text{y} \quad S_0 = 0.02$$

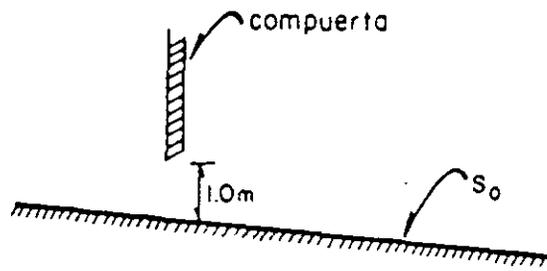
a)



b)



c)



Solución:

a)

$$A = 81.6 \text{ m}^2; \quad P = 51.40 \text{ m}; \quad R = \frac{81.6}{51.40} = 1.5875 \text{ m}$$

$$S = \left[\frac{Qn}{AR^{2/3}} \right]^2 = 0.0015; \quad q = \frac{Q}{B} = 5.70 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$$

$$h_c = \left[\frac{q^2}{g} \right]^{1/3} = 1.49 \text{ m}; \quad A_c = 71.52 \text{ m}^2; \quad P_c = 50.98 \text{ m}$$

$$R_c = \frac{71.52}{50.98} = 1.403 \text{ m}; \quad S_c = 0.00238$$

Cálculo de h_0 :

$$A = 48 h; \quad P = 48 + 2h; \quad R = \frac{48h}{48 + 2h}$$

$$AR^{2/3} = \frac{Qn}{S_0^{1/2}} = 30.93 \tag{1}$$

Iterando hasta cumplir con la igualdad (1)

$h_0(m)$	$A(m^2)$	$P(m)$	$R^{2/3}$	$AR^{2/3}$
0.50	24.00	49.00	0.62	14.91
0.80	38.40	49.60	0.84	32.38
0.78	37.44	49.56	0.83	31.06

≈ 30.93

Por lo tanto $h_0 = 0.78 \text{ m}$.

Entonces como $S_0 > S_c > S \rightarrow h_0 < h_c < h$; $Fr < 1$, nos encontramos en la zona

subcrítica del caso 2. Ahora, de la ecuación 4.1.d' puede concluirse:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = + \quad (\text{Figura 4.5, curva 2-a})$$

- b) Si $h = 0.4 \text{ m}$, $h_c = 1.49 \text{ m}$ y $S_c = 0.00238$, siendo $h_c > h$; $S_c < S$, por lo tanto $Fr > 1$ (zona supercrítica) y como también $S_0 > S_c$, $h_0 < h_c$ y al ser $h_0 > h$, $S_0 < S$, que resumiendo, significa:

$$S_c < S_0 < S; Fr > 1 \text{ y los tirantes } h_c > h_0 > h.$$

Valores que en la ecuación dinámica 4.1.d' conducen a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = + \quad (\text{Figura 4.5, curva 2-c})$$

- c) Si $h = 1.00 \text{ m}$:

como $h < h_c$, $S > S_c$ y siendo que $h_0 < h$, $S_0 > S$; luego, $S_c < S < S_0$ y $Fr > 1$ (zona supercrítica) y la ecuación (4.1.d') indicará el siguiente signo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{-} = - \quad (\text{Figura 4.5, curva 2-b})$$

4.4 Secciones de control

Cuando en un escurrimiento se presenta un cambio de régimen subcrítico a supercrítico, la sección donde esto sucede es una sección crítica, ya que es la única que puede pertenecer simultáneamente a los dos regímenes.

Según ya se explicó en el capítulo 3, esta sección se presenta, por ejemplo, en la cresta de un vertedor o en casos como el de la figura 4.10 (sección C) provocada por un cambio brusco de la pendiente longitudinal del canal, al pasar de un valor menor que la pendiente crítica S_c a otro mayor que ella.

Por las mismas razones expuestas, la sección crítica también se presenta en la naturaleza, por ejemplo, en el origen de las cascadas o en ríos en que haya cambios bruscos de pendiente.

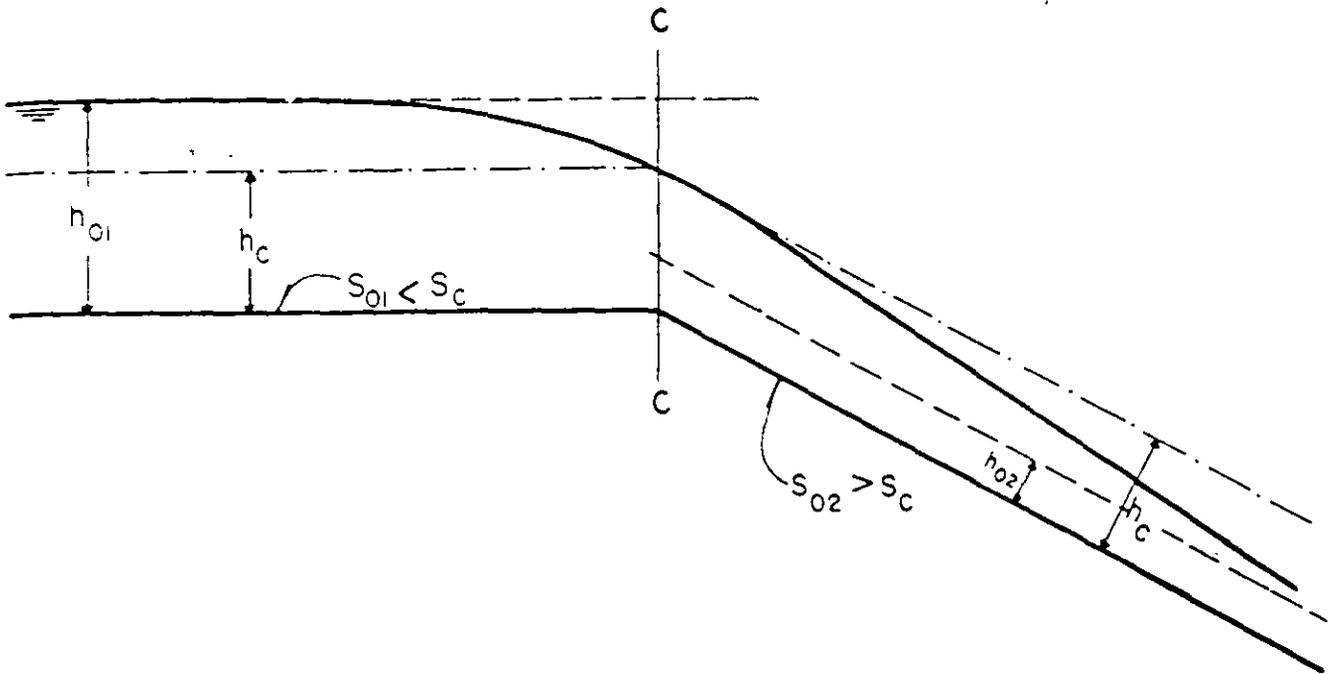


FIGURA 4.10

La sección crítica se provoca artificialmente en algunas obras de ingeniería como sucede al principio de los canales de descarga, comúnmente llamados "rápidas", los cuales trabajan a régimen supercrítico y se usan con frecuencia en las obras de excedencia. En este tipo de obras, a menudo se fuerza al flujo a cambiar bruscamente de subcrítico a supercrítico (al empezar la rápida propiamente dicha) haciendo el cambio de pendiente necesario.

Es precisamente en estos casos cuando a estas secciones críticas se les llama "secciones de control", nombre que se justifica por la razón que se expondrá a continuación.

La importancia de la sección de control radica en el hecho de que, sabiendo de antemano que allí se va a tener siempre un tirante crítico, puede utilizarse como sección de aforos. En efecto, si se pinta una escala lineal en las paredes de la sección de control de manera que se pueda leer el tirante en cualquier momento, para conocer el gasto basta sustituir el tirante y las características geométricas de la sección en la fórmula 3.2.c. O, inversamente, si se conoce el gasto, puede determinarse el tirante correspondiente utilizando la misma fórmula ya que sabemos de antemano que siempre será el tirante crítico el que se presente en esa sección específica.

Un caso común donde se utilizan las secciones de control, es en las obras de excedencia cuando se provoca un salto hidráulico (capítulo 5) y después se construye un canal de descarga. En estos casos la sección de control se proyecta precisamente al empezar la rápida, tal como se indica en la figura 4.11 (sección C).

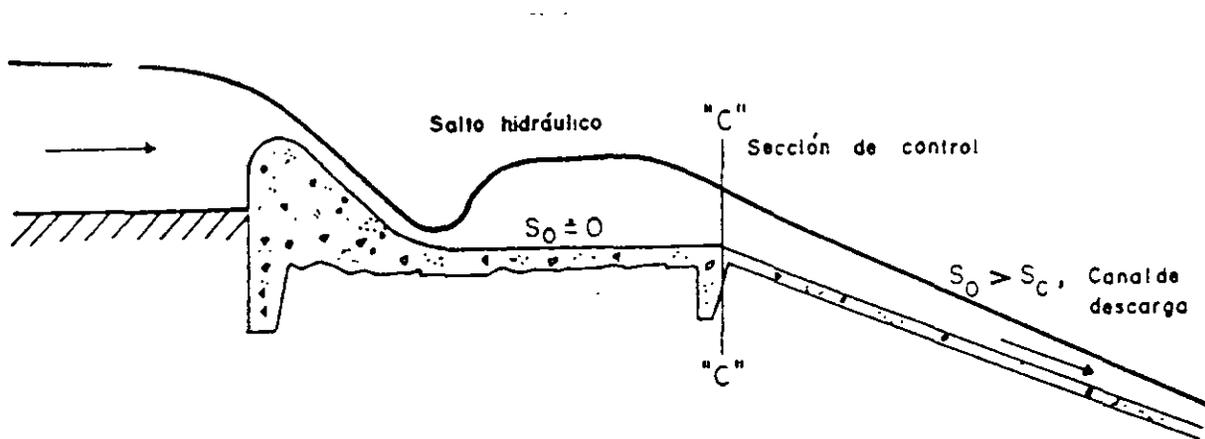


FIGURA 4.11

En estas estructuras, la sección de control puede utilizarse en el proyecto como sección inicial en el cálculo de los tirantes a lo largo del canal de descarga, y disponer así de una serie de perfiles de la superficie libre para distintos gastos, mismos que son necesarios tanto para diseñar las estructuras finales de descarga, como para conocer la altura necesaria del revestimiento a lo largo del canal.

4.5 Integración de la ecuación dinámica

El problema consiste en obtener la función $h = f(x)$ a lo largo de un canal prismático con flujo gradualmente variado.

La ecuación dinámica del flujo gradualmente variado (4.1.c) para pendientes pequeñas ($\cos \theta \approx 1$, $h \approx y$) puede escribirse en la forma:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S_0 - S}{1 - \alpha \frac{Q^2 B}{g A^3}} \quad (4.5.a)$$

y siendo que:

$$S = f_1(\text{coeficiente de rugosidad, } R, V)$$

y R , en un canal prismático varía sólo con el tirante h , que a su vez, en el flujo gradualmente variado, es función únicamente de x . Por otra parte, para un caso dado, es válido el mismo razonamiento para la velocidad V , es decir, también ésta es una función de x . Aceptando además que en el canal en estudio, el coeficiente de rugosidad es constante, la expresión anterior puede escribirse.

$$S = f_2(x)$$

y utilizando esta propiedad, se puede representar la expresión 4.5.a, en la forma:

$$dh = f(x) dx \quad (4.5.b)$$

que es una expresión teóricamente integrable, aunque esto es posible sólo con base en ciertas consideraciones especiales, tal como lo han hecho algunos investigadores según se explicará a continuación.

Entre los métodos de integración de la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado, pueden mencionarse los debidos a Bresse (1860), Rühlmann (1880) y Bajmetev (1912). Estos métodos tuvieron una gran importancia en su tiempo, ya que el otro camino es el de aplicar sucesivamente la ecuación de la energía en tramos más o menos cortos (véase tema 4.6) y esto implica hacer un número grande de operaciones. Sin embargo, en los últimos 25 años ya no hay razón para detenerse ante este problema, debido a que el ingeniero tiene fácil acceso a computadoras electrónicas y puede obtener la precisión que desee en sus resultados, sin ninguna dificultad.

No obstante, se considera de interés presentar el razonamiento seguido al menos por uno de los investigadores mencionados, ya que esto ayuda a comprender mejor algunas peculiaridades del fenómeno. Con este fin, se expondrá a continuación el método desarrollado en Rusia por Boris Bajmetev. Se escogió este método, por considerarlo uno de los más generales y porque algunas de sus hipótesis pueden ser útiles en otras aplicaciones.

* f_1 , f_2 y f significan: "función de" (_, _, _).

Método de Bajmetev

Entre dos secciones de un escurrimiento con flujo gradualmente variado en un canal, la fórmula de Chézy (2.1.c') nos garantiza que se cumple la relación:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{C_2 A_2 \sqrt{R_2}}{C_1 A_1 \sqrt{R_1}} \right]^2 \quad (4.5.c)$$

Bajmetev observó que para cualquier sección son válidas en forma aproximada las relaciones:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left[\frac{h_2}{h_1} \right]^x \quad (4.5.d)$$

en que x , llamado por el autor "coeficiente hidráulico", depende del tipo de sección.

Por otra parte, la condición para sección crítica 3.2.c exige que se cumpla (usando 2.1.c'):

$$\frac{A_c^3}{B_c} = \frac{Q^2}{g} = \frac{C^2 A_0^2 R_0 S_0}{g}; \quad (\alpha = 1)$$

(los subíndices 0 se refieren a flujo establecido).

Si ahora se multiplica esta expresión por B/A^3 y se recuerda que $A = RP$, puede escribirse:

$$\frac{A_c^3 B}{B_c A^3} = \frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{C^2 A_0^2 R_0 S_0}{g} \frac{B}{RPA^2}$$

que, una vez multiplicado el último término por C^2/C^2 y ordenando sus factores, equivale a:

$$\frac{Q^2 B}{g A^3} = \frac{A_c^3}{B_c} \frac{B}{A^3} = \left[\frac{C^2 S_0 B}{g P} \right] \left[\frac{C^2 A_0^2 R_0}{C^2 A^2 R} \right]$$

Llamando j al primer factor y recordando la fórmula de Chézy (2.1.c'), la expresión anterior puede escribirse para el gasto Q en estudio:

$$\frac{A_c^3}{B_c} \frac{B}{A^3} = \frac{Q^2 B}{g A^3} = j \frac{S}{S_0}$$

ahora puede expresarse la ecuación original 4.5.a para $\alpha = 1$:

$$\frac{dh}{dx} = S_0 \frac{1 - \frac{S}{S_0}}{1 - j \frac{S}{S_0}} \quad (4.5.e)$$

y según la propiedad 4.5.d:

$$\frac{dh}{dx} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{h_0}{h}\right)^x}{1 - j \left(\frac{h_0}{h}\right)^x} \quad (4.5.f)$$

llamando:

$$\eta = \frac{h}{h_0} ; \quad dh = h_0 d\eta$$

al sustituir esta variable en la expresión 4.5.f, multiplicar su segundo miembro por $(h/h_0)^x$ y despejar se tiene:

$$\frac{S_0 dx}{h_0} = \frac{\eta^x - j}{\eta^x - 1} d\eta = d\eta + \frac{1 - j}{\eta^x - 1} d\eta$$

y al integrar entre dos secciones 1 y 2 del escurrimiento, queda:

$$S_0 l_{1-2} = h_2 - h_1 + (1 - j) h_0 \int_1^2 \frac{d\eta}{\eta^x - 1} \quad (4.5.g)$$

en que l_{1-2} es la distancia entre las secciones cuyos tirantes son h_1 y h_2 .

La integral se encuentra en la literatura técnica para distintos valores de η o puede calcularse numéricamente.

El valor de j corresponde a la sección que es incógnita o, como recomiendan algunos autores, debe calcularse con los valores medios de ambas secciones.

4.6 Método de incrementos finitos

Si regresamos a la deducción de la ecuación dinámica, recordando que $S = dh_f / dx$ y tomando incrementos finitos, la ecuación 4.1.a puede escribirse en la forma:

($h \doteq y$, $\cos \theta \doteq 1$).

$$(S_0 - \bar{S}) \Delta x = \Delta \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) + \Delta h \quad (4.6.a)$$

Esta expresión se refiere entonces a un tramo del escurrimiento y se interpreta de acuerdo con la figura 4.12. El valor \bar{S} corresponde a la pendiente hidráulica media del tramo de longitud Δx .

Es decir:

$$\bar{S} = \frac{h_{f1-2}}{\Delta x} ; \quad \Delta \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) = \frac{\alpha_2 V_2^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g}$$

y:

$$\Delta h = h_2 - h_1$$

Aceptando que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, al sustituir estas expresiones en 4.6.a y despejar, se tiene:

$$\Delta x = \frac{\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + h_2 - h_1}{S_0 - \bar{S}} \quad (4.6.b)$$

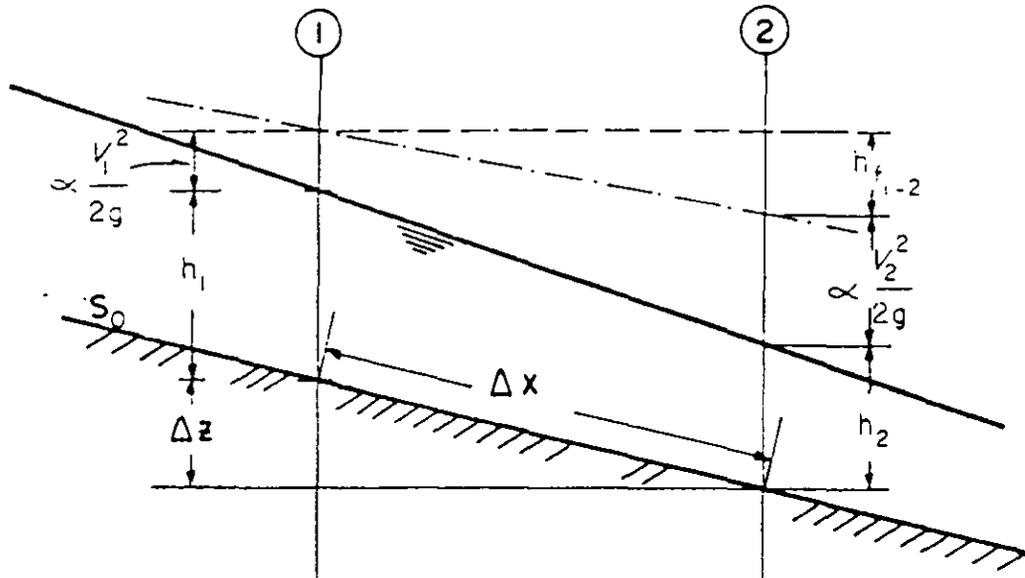


FIGURA 4.12

La pendiente hidráulica media \bar{S} , habrá que obtenerla en la forma:

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

El perfil puede calcularse con la ecuación 4.6.b, aplicada en tramos sucesivos. En efecto, conocidas las características de la sección 1, se escoge una sección 2 y aplicando la ecuación 4.6.b se determina la distancia Δx entre ambas secciones. Posteriormente, la sección 2 se convierte en la 1 para el siguiente tramo y se continúa el procedimiento a lo largo del canal.

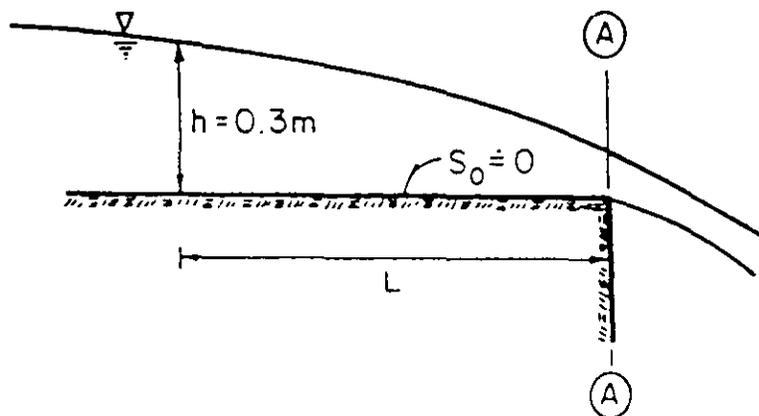
Desde luego, el procedimiento es tanto más preciso cuanto más cortos sean los tramos escogidos. El criterio para seleccionar las secciones es entonces una decisión del proyectista, pero como una regla general pueden escogerse secciones cuyas velocidades no varíen en más de un 5%; además, tal como se dijo en el inciso anterior, el número de operaciones no es un problema, ya que normalmente se dispone de una computadora electrónica y basta elaborar un sencillo programa para aplicar sucesivamente la expresión 4.6.b.

Debe aclararse que para orientar adecuadamente los cálculos es conveniente, antes de empezarlos, hacer un análisis para determinar el tipo de perfil que se tendrá siguiendo los lineamientos discutidos en 4.3, de manera que se sepa de antemano si los tirantes van a aumentar o a disminuir en la dirección que interese y además saber cuál será su límite.

Por otra parte, obsérvese que el procedimiento descrito es totalmente general y puede aplicarse inclusive a escurrimientos en cauces naturales, aunque en este caso la incógnita es el tirante ya que los tramos Δx se seleccionan previamente de acuerdo con la morfología del cauce.

Ejemplo 4.2

Calcule la longitud necesaria desde la sección en que $h = 0.3 \text{ m}$ hasta la descarga libre. $B = b = 0.245 \text{ m}$, $n = 0.011$, $S_0 = 0$, $Q = 0.06 \text{ m}^3/\text{s}$. Utilice el método de incrementos finitos (use tramos contiguos cuyas diferencias de velocidades sean como máximo 10%).

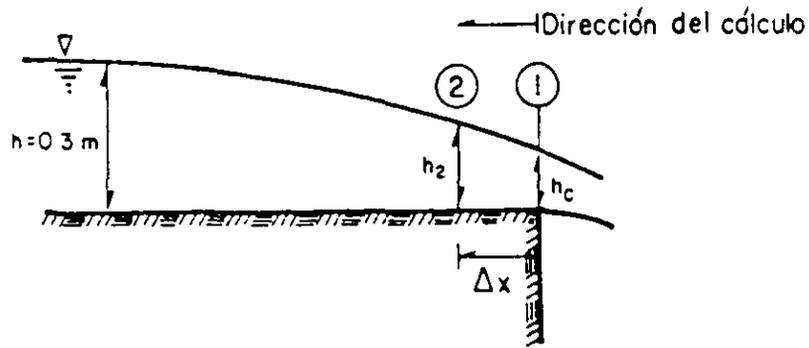


Solución:

Cálculo de h_c :

$$h_c = \left[\frac{q^2}{g} \right]^{1/3} = \left[\left(\frac{0.06}{0.245} \right)^2 \frac{1}{9.81} \right]^{1/3} = 0.1829 \text{ m}$$

Como $h > h_c$ y $S_0 = 0$, en la sección A - A el tirante debe ser crítico y se tendrá el caso de la figura 4.7 (perfil 3-a).



De la ecuación 4.6.b y proponiendo $h_2 = 0.20 \text{ m}$ y para $h_c = h_1$ tenemos:

$$A_c = 0.0448 \text{ m}^2$$

$$P_c = 0.6108 \text{ m}$$

$$R = \frac{0.0448}{0.6108} = 0.0734 \text{ m}$$

$$V_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{0.06}{0.0448} = 1.3393 \text{ m/s}$$

$$E_{\min} = 0.1829 + \frac{1.3393^2}{2 \times 9.81} = 0.2743 = E_1$$

$$S_c = \left[\frac{1.3393 \times 0.011}{(0.0734)^{2/3}} \right]^2 = 0.00706 = S_1$$

Para h_2 :

$$A_2 = 0.245 \times 0.2 = 0.0490 \text{ m}^2$$

$$P_2 = 0.6450 \text{ m}$$

$$R_2 = \frac{0.049}{0.6450} = 0.0760 \text{ m}$$

$$V_2 = 1.2245 \text{ m/s} ; (\text{diferencia con } V_c = 8.6\% < 10\%)$$

$$E_2 = 0.2764 \text{ m}$$

$$S_2 = 0.00564$$

Ahora aplicando la fórmula

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{0.00706 + 0.00564}{2} = 0.00635$$

por lo tanto, según (4.6.b), tomando en consideración que la dirección del cálculo es opuesta a la del flujo:

$$\Delta x = \frac{E_1 - E_2}{S_0 - \bar{S}} = \frac{0.2743 - 0.2764}{0.0 - 0.00635} = 0.3306 \text{ m}$$

El procedimiento es iterativo, por lo tanto, haremos una tabla con valores de h incrementándolos.

h (m)	A (m ²)	P (m)	R (m)	V (m/s)	E (m)	S	\bar{S}	Δx (m)
0.1829	0.0448	0.6108	0.0734	1.3390	0.2743	0.00706	0.00635	0.3306
0.2000	0.0490	0.6450	0.0760	1.2245	0.2764	0.00564	0.00504	1.3482
0.2200	0.0539	0.6850	0.0787	1.1132	0.2832	0.00445	0.00402	2.4636
0.2400	0.0588	0.7250	0.0811	1.0204	0.2931	0.00359	0.00327	3.6990
0.2600	0.0637	0.7650	0.0833	0.9419	0.3052	0.00295	0.00271	5.0908
0.2800	0.0686	0.8050	0.0852	0.8746	0.3190	0.00247	0.00228	6.5771
0.3000	0.0735	0.8450	0.0870	0.8163	0.3340	0.00209		

$$L = \Sigma \Delta x = 19.5093$$

Por lo tanto la respuesta es: $L = 19.51 \text{ m}$.

Ejemplo 4.3

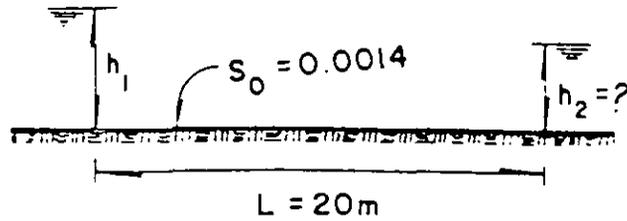
Se tiene un canal de sección rectangular donde:

$$B = 8.00 \text{ m}, \quad n = 0.016, \quad S_0 = 0.0014, \quad h_0 = 2.00 \text{ m}, \quad L = 20 \text{ m}$$

Calcule el tirante h_2 , si en la sección 1 se tienen los siguientes casos:

- $h_1 = 2.60 \text{ m}$
- $h_1 = 1.70 \text{ m}$
- $h_1 = 0.90 \text{ m}$

Se utilizará un solo tramo.



Solución:

Cálculo del gasto:

$$A_0 = 16\text{ m}^2$$

$$P_0 = 12\text{ m}$$

$$R_0 = 1.3333\text{ m}$$

$$Q = \frac{16}{0.016} (1.3333)^{2/3} (0.0014)^{1/2} = 45.3266\text{ m}^3/\text{s}$$

$$h_c = \left[\frac{45.3266^2}{8^2 \times 9.81} \right]^{1/3} = 1.4846\text{ m}$$

a) $h_1 = 2.6\text{ m}$

como $h_1 > h_0 > h_c \rightarrow S < S_0 < S_c$; por lo tanto $Fr < 1$.

Luego, el signo de $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación (4.1.d') es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{+}{+} = + ; \text{ figura 4.3 (perfil 1-a)}$$

Ecuación de la energía entre (1) y (2):

$$E_1 + S_0 L = E_2 + h_{f_{1-2}}$$

$$h_{f_{1-2}} = \left[\frac{S_1 + S_2}{2} \right] L$$

$$E_2 + \frac{S_2}{2} L = E_1 + S_0 L - \frac{S_1}{2} L$$

Cálculo de A , P y R con el tirante h_1 :

$$A = 20.8\text{ m}^2, \quad P = 13.20\text{ m} \quad \text{y} \quad R = 1.576\text{ m}$$

$$V_1 = \frac{45.3266}{20.80} = 2.1792 \text{ m/s}$$

$$E_1 = h_1 + \frac{V_1^2}{2g} = 2.60 + \frac{2.1792^2}{19.62} = 2.8420 \text{ m}$$

$$S_1 = \left[\frac{2.1792 \times 0.016}{1.576^{2/3}} \right]^2 = 0.00066$$

$$E_1 + S_0 L - \frac{S_1}{2} L = 2.842 + 0.028 - 0.0066 = 2.8634 \text{ m}$$

$$\therefore E_2 + \frac{S_2}{2} L = 2.8634 \text{ m} \quad \dots \text{ (A)}$$

Proponiendo tirantes en la sección 2 hasta cumplir con la ecuación A. se obtiene:

h_2	A_2	P_2	$R_2^{2/3}$	V_2	S_2	$E_2 + \frac{S_2}{2} L$
3.00	24.00	14.00	1.4324	1.889	0.00045	3.1863
2.80	22.40	13.60	1.3947	2.024	0.00054	3.0141
2.70	21.60	13.40	1.3748	2.098	0.00060	2.9304
2.63	21.04	13.26	1.3604	2.154	0.00064	2.8730
2.62	20.96	13.24	1.3583	2.163	0.00065	2.8648
2.618	20.94	13.24	1.3579	2.164	0.00065	2.8632 \approx 2.8634

Por lo tanto, el resultado es:

$$h_2 = 2.62 \text{ m (0.7\% de diferencia de velocidades):}$$

$$\left[\left[1 - \frac{2.164}{2.179} \right] 100 \right]$$

b) $h_1 = 1.70 \text{ m}$

De manera similar al inciso anterior:

$$A_1 = 13.60 \text{ m}^2 \quad P_1 = 11.40 \text{ m} \quad R_1 = 1.1930 \text{ m}$$

$$V_1 = \frac{45.3266}{13.60} = 3.333 \text{ m/s}$$

$$S_1 = \left[\frac{3.333 \times 0.016}{(1.1930)^{2/3}} \right]^2 = 0.00225 > S_0$$

como $h_0 > h_1 > h_c \rightarrow S_0 < S < S_c$

Por lo tanto, $Fr < 1$.

Luego, el signo en la ecuación 4.1.d' es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{+} = - ; \text{ Figura 4.3 (perfil 1-b)}$$

$$E_1 + S_0 L - \frac{S_1}{2} L = E_2 + \frac{S_2}{2} L$$

$$1.7 + \frac{3.333^2}{19.62} + 0.0014 (20) - \frac{0.00225}{2} (20) = 2.2722 \text{ m}$$

entonces:

$$E_2 + \frac{S_2}{2} L = 2.2722 \text{ m} \quad \dots \text{ (B)}$$

Proponiendo h para cumplir con la ecuación (B):

h_2	A_2	P_2	$R_2^{2/3}$	V_2	S_2	$E_2 + \frac{S_2}{2} L$
1.50	12.00	11.00	1.0597	3.7772	0.00325	2.2597
1.55	12.40	11.10	1.0766	3.6554	0.00295	2.2605
1.60	12.80	11.20	1.0930	3.5411	0.00269	2.2660
1.63	13.04	11.26	1.1028	3.4760	0.00254	2.2713
1.635	13.08	11.27	1.1044	3.4653	0.00252	2.2723 \approx 2.2722

$\therefore h_2 = 1.635 \text{ m}$ (4% de diferencia de velocidades).

c)

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0.90 \text{ m} \\
 A_1 &= 7.20 \text{ m}^2 \\
 P_1 &= 9.80 \text{ m} \\
 R_1 &= 0.7347 \text{ m} \\
 V_1 &= 6.2954 \text{ m/s} \\
 S_1 &= 0.01530 > S_0
 \end{aligned}$$

como $h_0 > h_c > h_1 \rightarrow S_0 < S_c < S$

luego $Fr > 1$, el signo en la ecuación dinámica es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-}{-} = + \quad \text{Figura 4.3 (perfil 1-c)}$$

$$E_1 + S_0 L - \frac{S_1}{2} L = E_2 + \frac{S_2}{2} L$$

$$0.9 + \frac{6.2954^2}{19.62} + 0.0014 (20) - \frac{0.0153}{2} (20) = 2.7950 \text{ m}$$

$$E_2 + \frac{S_2}{2} L = 2.7950 \quad \dots (C)$$

Proponiendo h_2 para cumplir con la igualdad C:

h_2	A	P	$R^{2/3}$	V_2	S_2	$E_2 + \frac{S_2}{2} L$
1.00	8.00	10.00	0.8618	5.6658	0.01107	2.7468
0.95	7.60	9.90	0.8384	5.9640	0.01295	2.8925
0.97	7.76	9.94	0.8480	5.8411	0.01215	2.8304
0.98	7.84	9.96	0.8525	5.7815	0.01177	2.8014
0.984	7.87	9.97	0.8544	5.7580	0.01163	2.79008 = 2.7950

Por lo tanto, el resultado es:

$$h_2 = 0.984 \text{ m (8.5\% de diferencia de velocidades).}$$

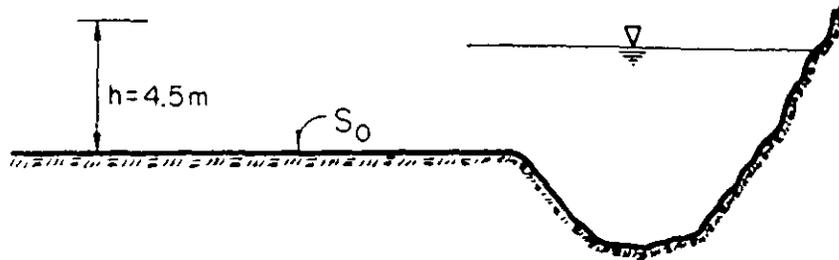
Ejercicios propuestos

4.1 Un canal tiene las siguientes características:

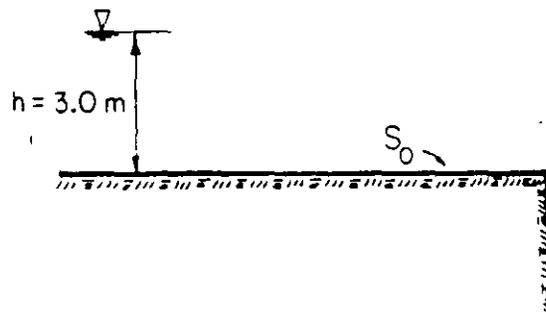
$$Q = 273.4 \text{ m}^3/\text{s}, \quad B = b = 48 \text{ m}, \quad n = 0.016, \quad S_0 = 0.000121$$

Por medio del análisis de la ecuación dinámica del flujo gradualmente variado, identifique los siguientes perfiles:

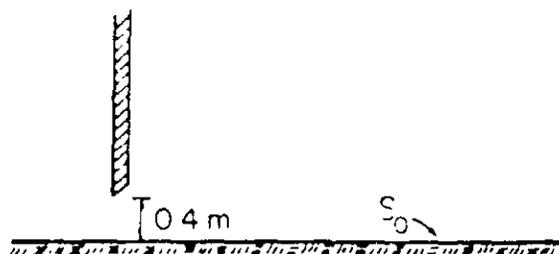
a)



b)



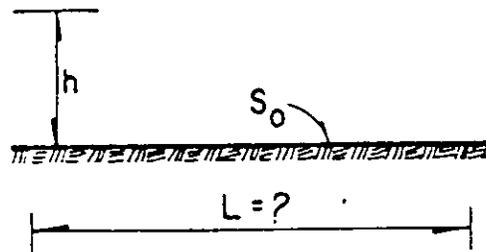
c)



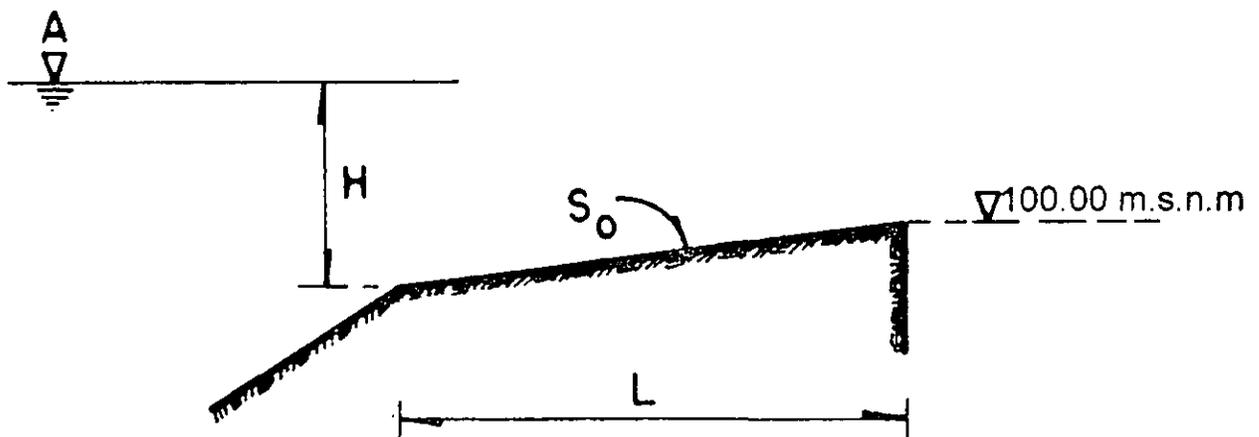
4.2 Sea un canal de sección trapecial donde:

$$b = 5 \text{ m}, S_0 = 0.1759, Q = 10.60 \text{ m}^3/\text{s}, n = 0.015, m = 1.$$

Calcule la longitud L desde $h = 0.95 h_c$ hasta $1.05 h_0$, utilizando el método de incrementos finitos, con diferencias de velocidades menores o iguales a 5%. Dibuje a escala el perfil.

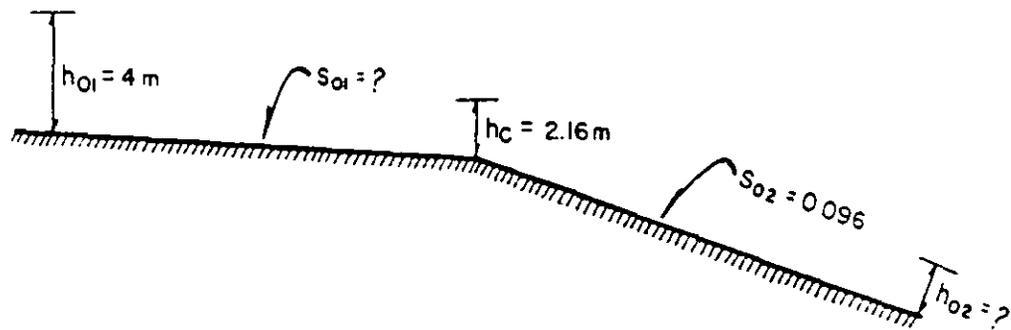


4.3 Calcule la cota A en el embalse para que un canal de 150 m de longitud descargue libremente como se muestra en la figura. El canal es de sección rectangular con $b = 5 \text{ m}$, $n = 0.014$, $S_0 = -0.0014$ y $Q = 10 \text{ m}^3/\text{s}$ (escoja tramos cuyas velocidades difieran 5% o menos).

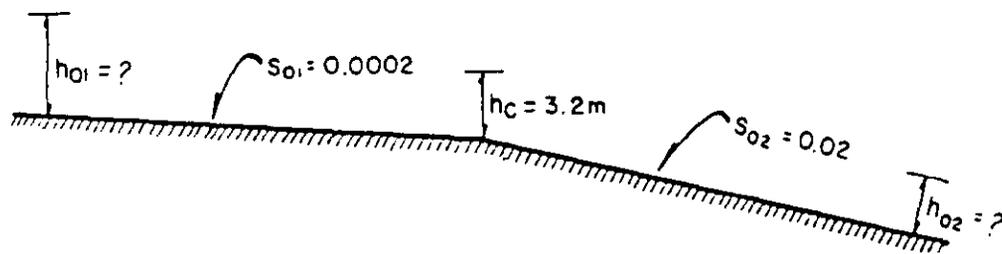


4.4 El canal que se muestra en la figura es de sección rectangular, de ancho constante igual a 5.50 m , construido con un material que tiene un coeficiente de rugosidad $n = 0.015$. Con los datos que se indican, calcule:

- La pendiente de la plantilla S_{01} .
- El tirante h_{02} (donde $S_{02} = 0.096$).
- Compruebe que el tirante h_c es realmente el crítico.



4.5 En la figura se representa un tramo de un canal de sección rectangular, donde $b = 10\text{ m}$, $n = 0.014$ y con las características que se indican, determine el valor de h_{01} y h_{02} .

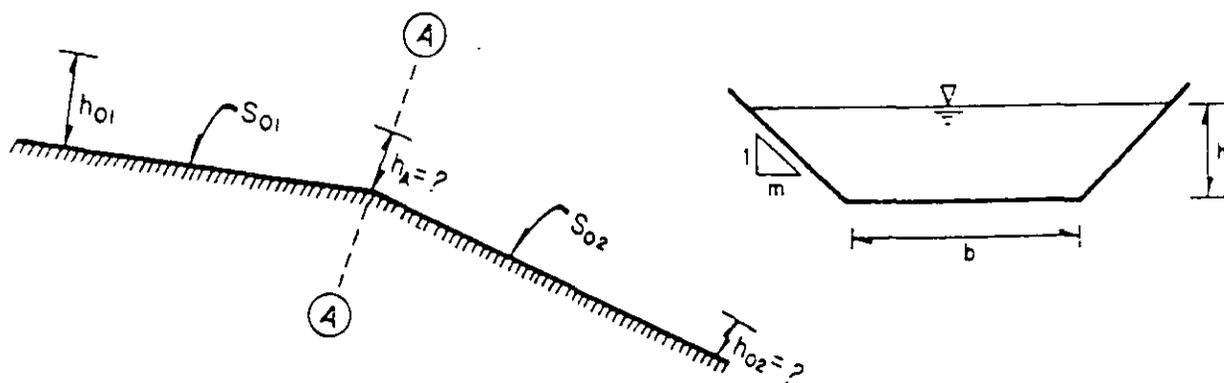


4.6 Considere un canal trapecial con los siguientes datos:

$$m = 1, b = 10\text{ m}, h_{01} = 4.50\text{ m}, n = 0.015, S_{01} = 0.0002, S_{02} = 0.08.$$

Calcule:

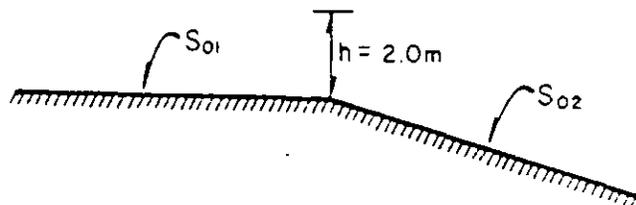
- El tirante en la sección A.
- El tirante h_{02} .



4.7 Se tiene un canal rectangular con los siguientes datos:

$$B = b = 12.00 \text{ m}, n = 0.016, S_{01} = 0.0004, S_{02} = 0.04.$$

a) Calcule los tirantes h_{01} y h_{02} , así como el gasto.



b) Si $S_{02} = 0.0006$. ¿se puede resolver el problema? Explique su respuesta.

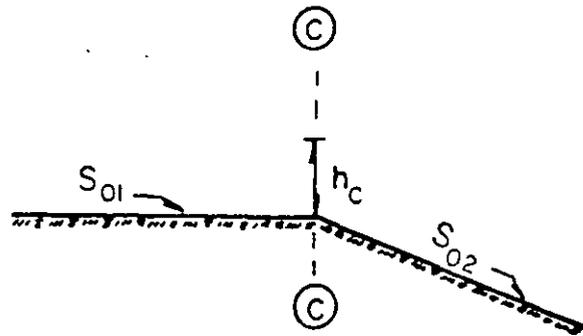
4.8 En un canal circula un gasto de $1650 \text{ m}^3/\text{s}$ con las siguientes características:

$$B = b = 30 \text{ m}, h_0 = 2.80 \text{ m} \text{ y } n = 0.018.$$

En una sección A del canal el tirante es $h = 3.50 \text{ m}$.

- Identifique el perfil explicando su razonamiento.
- Calcule la posición del tirante h_b aguas arriba de la sección, de tal manera que la velocidad en ambas secciones difiera en un 10%.

- 4.9 Determine el rango de valores de S_{01} y S_{02} para que la sección C-C de un canal trapecial con $Q = 60 \text{ m}^3/\text{s}$, $m = 1$, $n = 0.018$ y $b = 8 \text{ m}$ sea de control.





FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

*ACTUALIZACIÓN DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA*

Del 10 al 14 de Marzo de 2003

*APUNTES GENERALES
SEGUNDA PARTE*

CI - 045

Instructor: Ing. Constantino Gutiérrez Palacios
D G C O H

APUNTES TOMADOS DEL LIBRO **HIDRÁULICA GENERAL**
VOLUMEN I. FUNDAMENTOS GILBERTO SOTELO AVILA EDITORIAL LIMUSA

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRAULICA

4.1 Aspectos generales

4.1.1 Principios básicos en el análisis

En la mecánica de fluidos los métodos de análisis consideran la capacidad de un flujo para transportar materia y el mecanismo por el que cambia sus propiedades de un lugar a otro, para lo cual se establece como axioma que en los fluidos se satisfagan los principios básicos de la mecánica del medio continuo, a saber:

- a) Conservación de la materia (principio de continuidad).
- b) Segunda ley de Newton (impulso y cantidad de movimiento).
- c) Conservación de la energía (primera ley de la termodinámica).
- d) Segunda ley de la termodinámica.

El principio de la conservación de la materia o del transporte de masa permite derivar la primera ecuación fundamental o *de continuidad*, que admite diferentes simplificaciones de acuerdo con el tipo de flujo de que se trate o de las hipótesis que se deseen considerar.

La segunda ley de Newton establece la relación fundamental entre la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula y la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento. De acuerdo con la forma en que se aplique, puede conducir a dos ecuaciones: la primera (componente escalar según el flujo) llamada *de la energía*, permite calcular las diferentes transformaciones de la energía mecánica dentro del flujo y las cantidades disipadas en energía calorífica que, en el caso de los líquidos, no se aprovecha. La segunda, de tipo vectorial llamada del impulso y cantidad de movimiento, permite determinar alguna de las fuerzas que producen el flujo si se conoce el cambio en la cantidad de movimiento y las restantes fuerzas.

En la dinámica de fluidos (especialmente en el flujo de gases) el análisis requiere, además, la inclusión de leyes termodinámicas referentes al transporte de calor debido al flujo y, para ello, el principio de la conservación de la energía permite derivar una ecuación que relaciona la presión, densidad, temperatura, velocidad, elevación, trabajo mecánico y la cantidad de calor comunicado al flujo (o el que éste cede). Esta ecua-

ción admite simplificaciones importantes al analizar el flujo de líquidos, al punto en que se obtiene la misma ecuación de energía que resulta de la ecuación componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. La segunda ley de la termodinámica tiene menos interés en el flujo de líquidos.

Puesto que el interés principal de este libro es estudiar el escurrimiento de líquidos, se considera suficiente la obtención de las tres ecuaciones fundamentales de la hidráulica a partir de los dos primeros principios y es el objeto de este capítulo.

4.1.2 Flujo con potencial

Otro método aplicado a la solución de problemas en la dinámica de fluidos y que se presenta en el capítulo 10, consiste en la elaboración de un modelo matemático basado en considerar la existencia de un *flujo con potencial*. Para este tipo de flujo la hipótesis consiste en tratarlo como irrotacional, lo que constituye la base de la hidrodinámica clásica, una rama de la mecánica de fluidos que ocupó la atención de eminentes matemáticos como Stokes, Rayleigh, Rankine, Kelvin y Lamb. En una gran cantidad de problemas prácticos de interés en la hidráulica, esta suposición puede ser aceptada debido a que el agua posee una viscosidad muy pequeña y se acerca a la condición de fluido ideal. En otros problemas, es necesario considerar los efectos viscosos y estudiar las fuerzas de fricción originadas por la turbulencia que acompaña al movimiento. Una parte de la energía de la corriente se utiliza para vencer las fuerzas de resistencia originadas por estos efectos o las debidas a cambios en la geometría de la conducción (cambios de dirección, ampliaciones, reducciones, etc.); también se utiliza en órganos de cierre (válvulas, compuertas, etc.) para regular el gasto.

Esa parte de la energía de la corriente se transforma en otro tipo de energía que en los problemas de hidráulica se considera como energía *perdida* en el movimiento y, por supuesto, es necesario determinar.

4.1.3 Método experimental

El tratamiento de un flujo con base exclusivamente en el análisis matemático es insuficiente para resolver todos los problemas, si no es con el auxilio de *métodos experimentales*. El planteamiento racional de un experimento permite continuar, complementar o substituir el análisis en aquellos puntos en que la solución matemática se torna imposible o muy compleja, a tal grado que para obtenerla, sea necesario conceder hipótesis simplificadoras; éstas, además de restar generalidad a la misma, pueden llegar a falsear resultados al punto en que ellos no tengan semejanza alguna con la situación real del problema.

Debido a su importancia, la *teoría de la semejanza*, básica para el método experimental, se presenta en el capítulo 5.

4.2 Métodos de análisis

Los métodos de análisis en la mecánica de fluidos se basan en una extensión de los puntos de vista lagrangiano y euleriano, para describir un flujo, referidos ahora a regiones dentro del mismo sobre las cuales se satisfacen los principios fundamentales enunciados en el inciso 4.1.1.

En el análisis lagrangiano los principios básicos se aplican a una cantidad definida de materia que ocupa cierta región del flujo y que recibe el nombre de *sistema*. Éste puede cambiar de forma, posición y condición térmica dentro del flujo pero debe contener siempre la misma cantidad

de masa en cualquier instante que se considere. La finalidad de tal análisis será predecir el estado del sistema, esto es, determinar sus propiedades siguiendo su movimiento en el espacio dentro del flujo. Se utiliza invariablemente en la mecánica del cuerpo rígido donde el sistema se conoce como *cuerpo libre* y en la termodinámica donde se le llama *sistema cerrado*. Aunque a primera vista parece razonable utilizar el análisis lagrangiano, éste se aplica sólo en casos especiales debido a la dificultad física y matemática para identificar los sistemas de fluidos, a medida que pasan por las distintas configuraciones de frontera. Además, el tipo de información suministrada por esta forma de análisis no siempre es el que se necesita:

El segundo método de análisis tiene aquí mayor aplicación; se llama euleriano y estudia el flujo con base en el análisis de un volumen adecuado de fluido llamado *volumen de control* fijo respecto de un sistema coordenado y de forma y magnitud constantes. El contorno de dicho volumen se llama *superficie de control*.

En el análisis se considera el intercambio de masa, energía y cantidad de movimiento, a través de las fronteras del volumen de control que puede ser de tamaño diferencial o de magnitud finita. El primer tipo ha sido tradicional en la mecánica de fluidos cuando se aplica a volúmenes de control de tamaño muy pequeño —de dimensiones Δx , Δy , Δz — que en el límite expresan las condiciones en el punto de coordenadas (x, y, z) encerrado por dicho volumen. Este tratamiento equivale a describir las características del flujo en un punto fijo (x, y, z) , observando el movimiento instantáneo de una partícula del fluido de masa diferencial representada por el punto considerado.

Al aplicar la ley de la conservación de la materia, al volumen de control diferencial, se obtiene la ecuación diferencial de

continuidad; si se aplica la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación diferencial de Navier-Stokes, cuya derivación puede consultarse en la Ref. 19. En este capítulo se presentan la *ecuación diferencial de continuidad* y las *ecuaciones del movimiento* para un volumen de control diferencial orientado según una línea de corriente; tienen utilidad posterior en la solución de algunos problemas locales de flujo. Sin embargo, el intento de una integración general torna las soluciones muy complejas y, por lo mismo, de poca utilidad práctica. Por otra parte, de acuerdo con la naturaleza del problema la información requerida con frecuencia se refiere a resultados gruesos de las características en el conjunto, más que a las variaciones de un punto a otro.

La integración aproximada de las ecuaciones del movimiento dentro de una vena líquida, simplifica la solución y equivale a utilizar volúmenes finitos de control. El procedimiento consiste en suponer que el movimiento de un líquido —en cualquier conducción— se estudie como si fuera una vena líquida limitada, tanto en el caso de conducciones forzadas o a presión (tuberías) por las paredes rígidas de frontera, como en el caso de conducciones abiertas (canales): en parte por paredes rígidas y en parte por la superficie libre del líquido en contacto con la atmósfera. En estas condiciones, la frontera de la vena líquida admite cierta deformación parcial o totalmente y el problema se reduce a estudiar el movimiento a lo largo de una sola dimensión (unidimensional), que corresponde a la dirección en que se produce el flujo, eliminando con ello las complejidades del tratamiento tridimensional. De este modo, las variables características del flujo (velocidad, gasto, presión) se representan a través de la media de los valores que hay en los puntos de una misma sección transversal de la con-

ducción y las magnitudes de dichos promedios concentrados en el centro de gravedad de la sección. De este modo, hay variación de los mismos sólo en la dirección del movimiento general y en el tiempo, aun cuando existan cambios en el área de una sección a otra (que pueden también depender del tiempo). La dirección en que ocurre la variación no es necesariamente rectilínea sino a lo largo del eje del conducto. Esto equivale a estudiar el escurrimiento sobre la línea de corriente hipotética que coincide con dicho eje, y los valores medios de las características en un punto sobre el mismo serán representativos de la sección que contiene al punto tratado, mediante términos correctivos que tomen en consideración la distribución real de velocidades en toda la sección.

En este capítulo se establecen las ecuaciones fundamentales de la hidráulica, referidas al flujo unidimensional; ellas son: *la de continuidad, la de energía y la de impulso y cantidad de movimiento*. Para el establecimiento de estas ecuaciones no se hace distinción entre flujo laminar y flujo turbulento, pues en ambos casos son válidas. En el capítulo 8 correspondiente a la teoría de la resistencia al flujo se dará mayor importancia a esta manera de clasificar los flujos. Análogamente, puesto que las ecuaciones obtenidas para el flujo unidimensional se refieren al movimiento de un líquido real dentro de la vena líquida, la clasificación en flujos —rotacional e irrotacional— basada en el tipo de deformación de cada partícula, carece de aplicación en estas ecuaciones.

En la deducción de las mismas, las pérdidas de energía antes mencionadas se tomarán en consideración empleando una fuerza de resistencia, que comprende las fuerzas viscosas y de fricción, sujeta a una valuación empírica o semiempírica. Su importancia y efectos se exponen

en los subsiguientes capítulos. En las ecuaciones se incluyen los coeficientes de corrección necesarios para tomar en cuenta la distribución real de velocidades en una sección y se evalúan sus efectos.

4.3 Ecuación de continuidad

4.3.1 Principio de conservación de la materia

De acuerdo con éste, de la masa de fluido que en la unidad de tiempo entra a un volumen especificado dentro del flujo, una parte se queda almacenada en su interior y el resto sale del volumen. Si el volumen que se estudia es de forma y magnitud constantes (volumen de control), el almacenaje no puede ser indefinido.

Matemáticamente es preferible tratar con la cantidad neta de masa que sale — que entra, sumadas algebraicamente; ; el principio de la conservación de la materia, aplicado a un volumen de control fijo completamente arbitrario dentro del flujo, se expresa en la forma siguiente:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Cantidad neta de masa} \\ \text{que atraviesa la superficie} \\ \text{de frontera del volumen,} \\ \text{en la unidad de tiempo.} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Rapidez de variación} \\ \text{de la masa contenida} \\ \text{en el volumen} \end{array} \right] = 0$$

Este principio se aplica lo mismo a un volumen de control de tamaño diferencial que a uno finito, de lo cual se deriva la llamada ecuación de continuidad.

4.3.2 Ecuación diferencial de continui

Si bien esta ecuación no tiene mucha aplicación en los problemas de flujo uni-

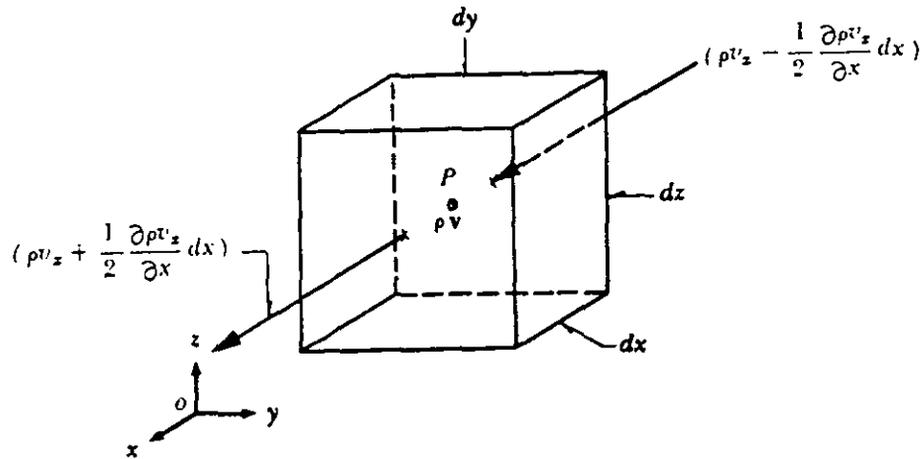


Figura 4.1. Derivación de la ecuación diferencial de continuidad.

dimensional en hidráulica, aquí se presenta su derivación para ser utilizada en los problemas de flujo con potencial. Para obtenerla se aplica el principio de conservación de la materia al volumen de control diferencial, mostrado en la Fig. 4.1 (de lados dx, dy, dz).

En el centro de masa P del volumen considerado corresponden los valores ρ y \mathbf{v} como funciones de punto y del tiempo, o bien, el producto $\rho\mathbf{v}$ como función vectorial.

Al pasar a las caras normales al eje x , que limitan al elemento de fluido, la función $\rho\mathbf{v}$ se incrementa y decrementa en la misma cantidad:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx, \dots$$

donde el subíndice x indica la componente de la función $\rho\mathbf{v}$ según x . De este modo, considerando positiva la masa que sale del volumen y negativa la que entra, la cantidad neta de masa que atraviesa estas caras es:

$$(\rho v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx) dy dz -$$

$$- (\rho v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx) dy dz =$$

$$= \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dy dz$$

Por un razonamiento semejante, la cantidad neta de masa que atraviesa las caras normales al eje y es:

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx dy dz;$$

y, la que atraviesa a las normales al eje z :

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx dy dz.$$

Finalmente, la rapidez de variación de la masa contenida en el volumen elemental es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz);$$

de tal manera que el principio de conservación de la masa establece lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx dy dz +$$

$$+ \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx dy dz + \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) = 0$$

y, puesto que el volumen elemental escogido no cambia con el tiempo, la ecuación anterior se puede simplificar y resulta:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.1a)$$

O bien, recordando que

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z},$$

la ecuación anterior también se expresa en la forma

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.1b)$$

Las Ecs. (4.1a y b) son dos formas de expresar la ecuación diferencial de continuidad, que es la más general para un flujo compresible no permanente; admite las siguientes simplificaciones:

a) Flujo compresible permanente

$$(\partial \rho / \partial t = 0)$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.2)$$

b) Flujo incompresible no permanente
($\rho = \text{constante}$)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$

c) Flujo incompresible permanente

$$(\rho = \text{constante}, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

igual que la Ec. (4.3) para un flujo incompresible, sea o no permanente.

Problema 4.1. Un flujo incompresible permanente, con simetría axial respecto al eje z (Fig. 4.2), está limitado por una superficie sólida (con la misma simetría) cuya forma está definida por la ecuación $z r^2 = b$ (r , radio medido desde el eje z , y b una constante) y tiene un campo de velocidades dado por las componentes en coordenadas cilíndricas: $v_r = a r$; $v_\theta = 0$; $v_z = -2 a z$.

a) Demostrar que se satisface la ecuación diferencial de continuidad.

b) Determinar la expresión para el gasto a través de la sección horizontal A-A y de la sección cilíndrica B-B.

c) Determinar la velocidad en el punto P ($r = z = 1.5 \text{ m}$) cuando $Q = 10.64 \text{ m}^3/\text{seg}$ (Ref. 20).

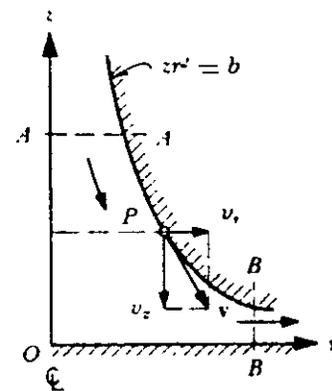


Figura 4.2. Flujo del problema 4.1.

Solución a). El campo de velocidades, definido en coordenadas cilíndricas, equivale a las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas

$$v_x = a x$$

$$v_y = a y$$

$$v_z = -2 a z$$

Resulta entonces que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = a + a - 2a = 0$$

esto es, se satisface la ecuación de continuidad (4.3) y se verifica que el flujo es incompresible.

Para los restantes puntos conviene más utilizar las coordenadas polares.

Solución b). Para la sección horizontal A-A, el gasto es

$$Q = - \int_0^{\sqrt{b/z}} 2\pi r (-2az) dr$$

$$Q = 4\pi az \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{b/z}} = 2\pi ab$$

Para la sección cilíndrica B-B se tiene:

$$Q = \int_0^{b/r^2} 2\pi r (ar) dz = 2\pi ar^2 [z]_0^{b/r^2}$$

$$Q = 2\pi ab$$

c) Para el punto P:

$$b = zr^2 = 1.5 \times 2.25 = 3.375 \text{ m}^2$$

y, considerando el valor de Q, se tiene entonces que

$$a = \frac{Q}{2\pi b} = \frac{10.64}{2 \times 3.1416 \times 3.375} = 0.502 \text{ seg}^{-1}$$

por tanto, la magnitud de la velocidad en el punto P, es:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_z^2} = a \sqrt{r^2 + 4z^2} =$$

$$= 0.502 \sqrt{2.25 + 4 \times 2.25}$$

$$v = 1.684 \text{ m/seg}$$

Problema 4.2. Determinar, para los siguientes campos de flujo incompresible, aquellos que satisfagan la ecuación de continuidad e indicar cuáles son rotacionales (típicos de un fluido viscoso) y cuáles irrotacionales (típicos de un fluido no viscoso).

a) $v_x = (x-2y)t$; $v_y = -(2x+y)t$

b) $v_x = x^2 \cos y$; $v_y = -2x \operatorname{sen} y$

c) $v_x = x+y$; $v_y = x-y$

d) $v_x = \ln x+y$; $v_y = xy - \frac{y}{x}$

e) El flujo indicado en el problema 3.2a.

Solución a). En todos los casos la ecuación a satisfacer es la (4.3):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = t; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -t$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = t - t = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -2t; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2t$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_z = 0; \quad [\operatorname{rot} \mathbf{v}]_y = 0; \quad [\operatorname{rot} \mathbf{v}]_x =$$

$$= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_z = -2t + 2t = 0$$

El flujo es no permanente, incompresible e irrotacional.

Solución b).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2x \cos y; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2x \cos y$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -2 \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_z = (x^2 - 2) \operatorname{sen} y \neq 0$$

El flujo es permanente, incompresible y rotacional.

Solución c).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -1; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 1; \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0$$

El flujo es permanente, incompresible e irrotacional.

Solución d).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = x - \frac{1}{x};$$

$$\text{div } \mathbf{v} = x$$

no satisface la ecuación de continuidad, por lo cual no puede existir un flujo incompresible con el campo de velocidades propuesto.

Solución e). En el problema 3.2a se demostró que el flujo es rotacional para el campo de velocidades propuesto. Además:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -A; \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

luego, el flujo es permanente, incompresible y rotacional.

4.3.3 Ecuación de continuidad para una vena líquida

La vena líquida mostrada en la Fig. 4.3 está limitada por la superficie 3 (que generalmente coincide con una frontera sólida, o por ésta y una superficie libre) y por las secciones transversales 1 y 2, normales al eje que une los centros de gravedad de

todas las secciones. Las velocidades en cada punto de una misma sección transversal poseen un valor medio V , que se considera representativo de toda la sección y de dirección tangencial al eje de la vena.

Se considera el volumen elemental de líquido —mostrado en la Fig. 4.3— limitado lateralmente por la superficie que envuelve a la vena líquida, así como por dos secciones transversales normales al eje de la vena, separadas la distancia ds , donde s representa la coordenada curvilínea siguiendo el eje de la vena.

La cantidad neta de masa que atraviesa la superficie de frontera, del volumen elemental en estudio, es:

$$\left[\rho V A + \frac{\partial (\rho V A)}{\partial s} ds \right]$$

$$- \rho V A = \frac{\partial (\rho V A)}{\partial s} ds$$

y, la rapidez con que varía la masa dentro del mismo, es $\partial (\rho A ds) / \partial t$. Por tanto, el principio de conservación de la masa establece que

$$\frac{\partial (\rho V A)}{\partial s} ds + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A ds) = 0 \quad (4.4)$$

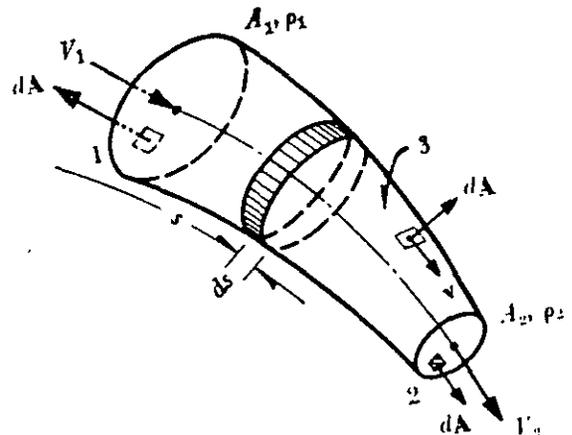


Figura 4.3. Ecuación de continuidad para una vena líquida.

Sin cometer prácticamente error se puede aceptar, en la mayoría de los problemas, que la longitud ds del elemento de volumen considerado, no depende del tiempo. Éste puede salir de la derivada del segundo término de la ecuación anterior y simplificarse con el que aparece en el primero, de lo cual resulta:

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (4.5a)$$

Recordando que ρ , V , A son funciones de s y t , al desarrollar las derivadas parciales indicadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho V \frac{\partial A}{\partial s} + V A \frac{\partial \rho}{\partial s} + \\ + \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (4.5b)$$

o bien, con $V = ds/dt$:

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho \left(\frac{\partial A}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \\ + A \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5c)$$

Dividiendo la Ec. (4.5c) entre ρA y recordando el desarrollo de la derivada total, resulta entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4.5d)$$

que es la ecuación de continuidad para una vena líquida donde se produce un flujo no permanente y compresible. Un ejemplo clásico de su aplicación lo constituye el problema de golpe de ariete. En problemas de flujo no permanente a superficie libre (tránsito de ondas de avenida en canales y de mareas en estuarios), donde se considera que el líquido es incompresible, desaparece el último término de la Ec. (4.5d).

Si el escurrimiento es permanente las derivadas con respecto a t que aparecen en la Ec. (4.5a) se eliminan y esta ecuación resulta:

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s} = 0 \quad (4.6a)$$

o bien,

$$\rho V A = \text{constante} \quad (4.6b)$$

Si, además, el fluido es incompresible:

$$V A = \text{constante} \quad (4.7a)$$

Esto significa que es constante el gasto que circula por cada sección de la vena líquida en un flujo permanente; o bien, que para dos secciones transversales 1 y 2 de la misma, se cumple lo siguiente:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (4.7b)$$

Problema 4.3. En la Fig. 4.4 se muestra la bifurcación de un tubo circular que tie-

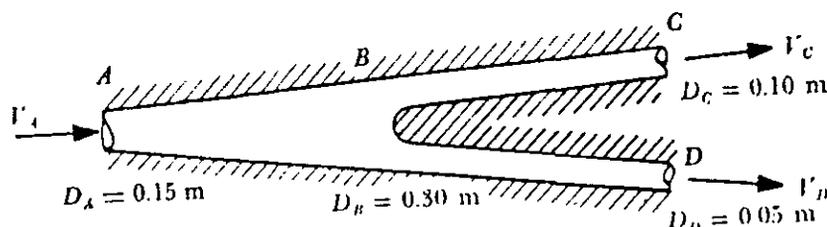


Figura 4.4. Flujo en la bifurcación del problema 4.3.

ne los diámetros indicados. El agua que escurre dentro del tubo, entra en *A* y sale en *C* y *D*. Si la velocidad media en *B* es de 0.60 m/seg, y en *C* es de 2.70 m/seg, calcular las velocidades medias en *A* y *D*; el gasto total; y el gasto en cada rama de la tubería.

Solución. La ecuación de continuidad (4.7) aplicada a la vena líquida, considerada en la Fig. 4.4, conduce a que:

$$V_A \frac{\pi D_A^2}{4} = V_B \frac{\pi D_B^2}{4}$$

de donde

$$V_A = 0.60 \left(\frac{0.30}{0.15} \right)^2 = 2.40 \text{ m/seg}$$

En forma análoga:

$$V_B \frac{\pi D_B^2}{4} = V_C \frac{\pi D_C^2}{4} + V_D \frac{\pi D_D^2}{4}$$

$$V_D = 0.60 \left(\frac{0.30}{0.05} \right)^2 - 2.7 \left(\frac{0.10}{0.05} \right)^2 =$$

$$= 21.6 - 10.8 = 10.8 \text{ m/seg}$$

El gasto total es

$$Q = V_A \frac{\pi D_A^2}{4} = V_C \frac{\pi D_C^2}{4} + V_D \frac{\pi D_D^2}{4}$$

$$Q = 2.4 \times 0.785 \times 0.0225 = 0.042 \text{ m}^3/\text{seg}$$

El gasto por el tubo *C* es entonces:

$$Q_C = V_C \frac{\pi D_C^2}{4} = 2.70 \times 0.785 \times$$

$$\times 0.01 = 0.021 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y, el gasto por el tubo *D*, el siguiente:

$$Q_D = V_D \frac{\pi D_D^2}{4} = 10.8 \times 0.785 \times$$

$$\times 0.0025 = 0.021 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Esto es, el gasto total vale

$$Q = Q_C + Q_D = 0.021 + 0.021 =$$

$$= 0.042 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que comprueba el resultado anterior.

Problema 4.4 En la contracción del ducto, mostrado en la Fig. 4.5, encontrar la relación que debe existir entre *d* y *s* para proporcionar una aceleración uniforme de la sección 1 a la 2. Suponer que el flujo es permanente y unidimensional (Ref. 12).

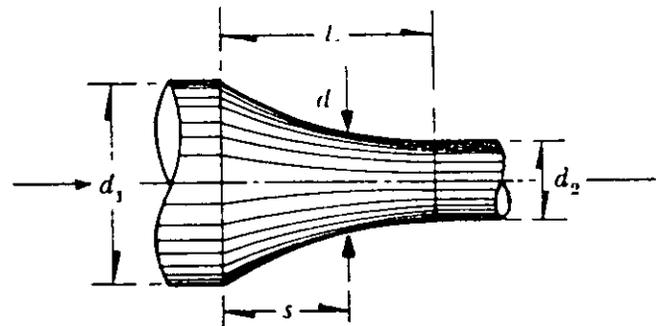


Figura 4.5. Esquema aclaratorio del problema 4.4.

Solución. Considerando que el flujo es unidimensional, las velocidades en cada sección transversal, normal al eje del conducto, quedan representadas por la velocidad media *V*. La aceleración para flujo permanente es (Ec. 3.5a):

$$a = \frac{d}{ds} \left(\frac{V^2}{2} \right) = C_1$$

y, para ser uniforme a lo largo de la contracción, se requiere que sea constante. Integrando resulta

$$\frac{V^2}{2} = C_1 s + C_2$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes que se obtienen de las condiciones de frontera, a saber:

$$\text{para } s = 0; \quad V = V_1; \quad C_2 = \frac{V_1^2}{2}$$

$$\text{para } s = L; \quad V = V_2; \quad C_1 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2L}$$

Luego:

$$V^2 = (V_2^2 - V_1^2) \frac{s}{L} + V_1^2$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad

$$V = \left(\frac{d_1}{d} \right)^2 V_1$$

$$V_2 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 V_1$$

que, substituidas en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{d_1^4}{d^4} V_1^2 = \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} V_1^2 - V_1^2 \right) \frac{s}{L} + V_1^2$$

y, de aquí, la relación buscada es:

$$d = d_1 \sqrt[4]{\frac{1}{(d_1^4/d_2^4 - 1) \frac{s}{L} + 1}}$$

4.4 Ecuación de la energía

4.4.1 Ecuaciones del movimiento

Si no se incluyen los efectos termodinámicos en el flujo ni la adición o extracción mecánica desde el exterior (bomba o turbina), es posible derivar las ecuaciones del movimiento —aplicables al flujo

de líquidos— a partir de la segunda ley de Newton. Para ello es necesario considerar las fuerzas que se oponen al movimiento, las cuales desarrollan un trabajo mecánico equivalente a la energía disipada al vencer dichas fuerzas.

Cuando se aplica la segunda ley de Newton a un elemento diferencial de masa de líquido, en la forma $dF = dm a$, se obtienen las ecuaciones del movimiento —a lo largo de una línea de corriente— para el flujo de un líquido real, no permanente; puede generalizarse para una vena líquida en flujo unidimensional. La derivación de dicha ecuación corresponde a las condiciones particulares del movimiento según el sistema natural de coordenadas explicado en el subcapítulo 3.3 al derivar las componentes de la aceleración dadas por las Ecs. (3.5), con las características del movimiento en la forma ahí explicada.

Para el planteo de las ecuaciones es necesario establecer el equilibrio dinámico de las fuerzas en las direcciones tangencial, normal y binormal, que actúan sobre el elemento líquido (mostrado en las figuras 4.6), con la fuerza de peso como única fuerza de cuerpo. Dicho elemento encierra al punto P , en el cual existen los valores v , p , ρ , τ (velocidad, presión, densidad, esfuerzo de fricción). Las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento en la dirección $+s$ son las siguientes:

a) La fuerza de superficie resultante de un gradiente de presiones en la dirección del movimiento; para la dirección positiva de la coordenada curvilínea s (Fig. 4.6b) es:

$$\begin{aligned} & \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dn db - \\ & - \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dn db = - \\ & = - \frac{\partial p}{\partial s} ds dn db \end{aligned}$$

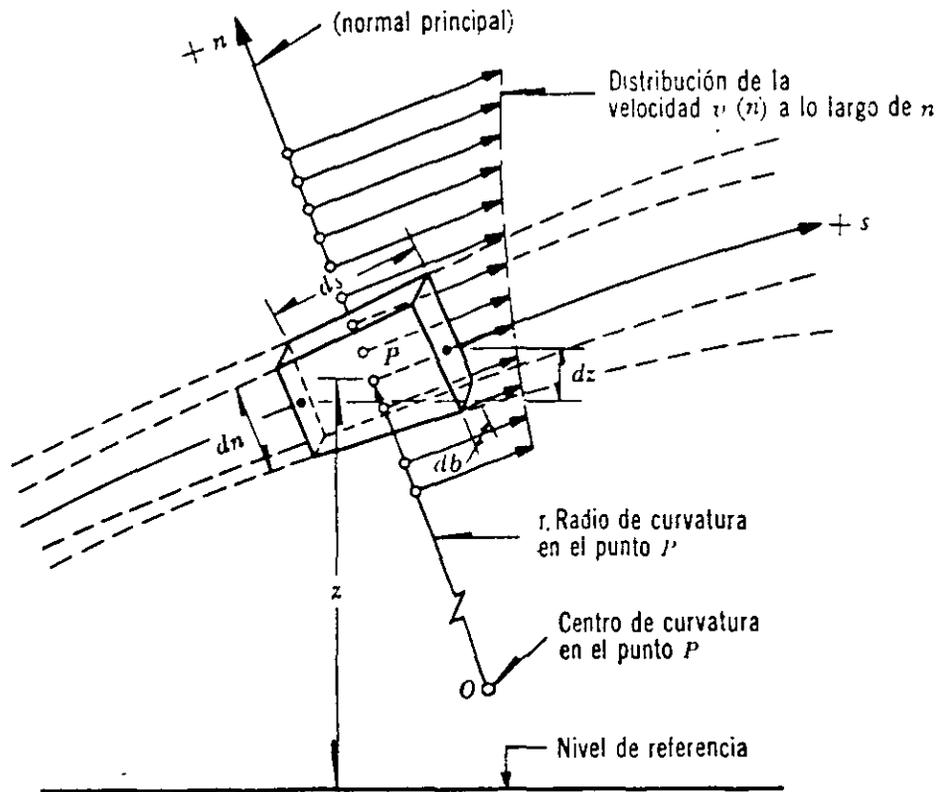


Figura 4.6 a). Elemento de líquido en un campo de flujo.

b) La fuerza de superficie, debida a la resistencia al movimiento, se puede evaluar en términos del esfuerzo tangencial de fricción τ , el cual varía únicamente en la dirección n dado que en la inmediata vecindad del punto P no hay variación de la velocidad en la dirección b . Esta fuerza es:

$$\left(\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn \right) ds \cdot db - \left(\tau - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial n} dn \right) ds \cdot db = \frac{\partial \tau}{\partial n} dn \cdot ds \cdot db$$

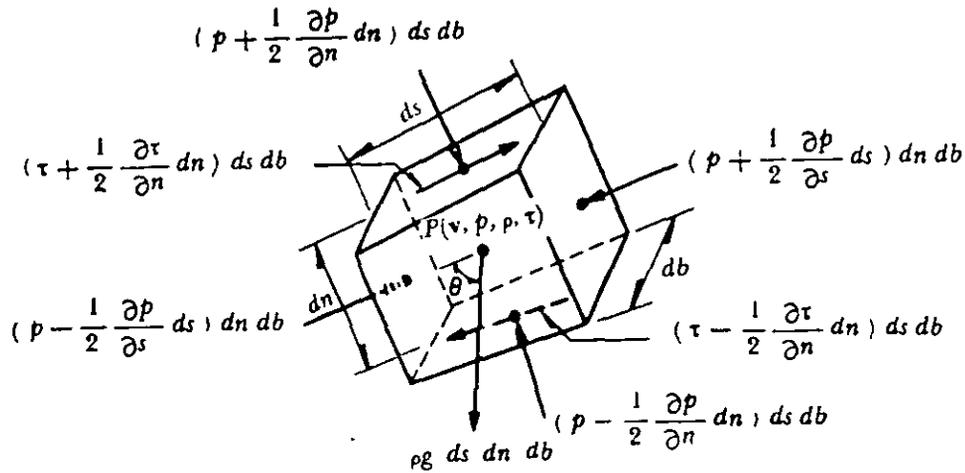
c) La componente de la fuerza de cuerpo, debida al propio peso del elemento. Con $\cos \theta = \partial z / \partial s$, vale:

$$-\rho g ds \cdot dn \cdot db \cos \theta = -\rho g ds \cdot dn \cdot db \frac{\partial z}{\partial s}$$

La segunda ley de Newton —aplicada al elemento— establece que la suma de estas fuerzas es igual a la masa del elemento, multiplicada por la componente a_s de la aceleración dada por la Ec. (3.5a). Puesto que en todos los términos que representan fuerzas aparece el volumen del elemento $ds \cdot dn \cdot db$, resulta entonces:

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s} \right] ds \cdot dn \cdot db = \rho \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \right] ds \cdot dn \cdot db$$

Dado que $\rho \cdot ds \cdot dn \cdot db$ representa la masa del elemento, si los términos de la ecuación anterior se dividen entre aquella cada término representará una fuerza por unidad de masa. Resulta entonces que



NOTA: Las dimensiones del elemento son ds , dn y db , medidas a través de su centro; v , p , ρ y τ , los valores medidos en P .

Figura 4.6 b). Componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial n} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.8a)$$

ésta es la primera ecuación diferencial del movimiento. El primer término es debido al gradiente de presiones en la dirección de la línea de corriente; el segundo, la fuerza de resistencia causada por la fricción interna y que induce la disipación de energía; el tercero, la fuerza de peso (todas estas fuerzas son por unidad de masa); finalmente, el cuarto término (segundo miembro) es el cambio de energía cinética (aceleración convectiva) que experimenta la unidad de masa a lo largo de la línea de corriente; y, el último, la aceleración local de la misma.

La Ec. (4.8a) se ha derivado por simplicidad para un elemento de área transversal constante. Sin embargo, el mismo resultado se obtiene si el elemento es divergente (Ref. 12).

En la misma forma se establece el equi-

librio dinámico del elemento, ahora en la dirección de la normal principal a la línea de corriente, sobre la cual la componente de la aceleración está dirigida en sentido negativo de n y está expresada por la Ec. (3.5b) y donde, además, no existe fuerza de fricción. Resulta:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} dn ds db - \rho g ds dn db \frac{\partial z}{\partial n} = -\rho \frac{v^2}{r} ds dn db$$

donde r es el radio local de curvatura de la línea de corriente. Dividiendo entre $\rho ds dn db$, se tiene:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - g \frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{v^2}{r} \quad (4.8b)$$

La Ec. (4.8b) permite determinar la distribución de la presión en la dirección de la normal principal de la línea de corriente, si se conoce la distribución de v sobre la misma. Es válida para el flujo compre-

sible permanente o no permanente y sus diferentes términos representan a las fuerzas por unidad de masa.

En el caso de que la línea de corriente sea de curvatura despreciable ($r = \infty$), el segundo término de la Ec. (4.8b) vale cero.

Finalmente, del equilibrio dinámico según la dirección de la binormal, resultaría:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} - g \frac{\partial z}{\partial b} = 0 \quad (4.8c)$$

debido a que $a_b = 0$ Ec. (3.5c). La ecuación (4.8c) es válida para el flujo permanente o no permanente y sus términos también representan a fuerzas por unidad de masa.

Si se trata del flujo de líquidos los efectos térmicos no tienen influencia en ρ y, además, es común que los cambios de p y τ , con la posición del punto, sean más importantes que los que pueda experimentar ρ (aun en golpe de ariete). Por tanto, las Ecs. (4.8) para el flujo de líquidos se pueden escribir en la forma:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} \right) - g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.9a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} \right) - g \frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{v^2}{r} \quad (4.9b)$$

$$-\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} \right) - g \frac{\partial z}{\partial b} = 0 \quad (4.9c)$$

Todavía más, considerando las ecuaciones (3.6) y (3.8), la forma vectorial de las ecuaciones del movimiento (4.9a, b, c) es (Ref. 12):

$$-\text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) \mathbf{s} =$$

$$= \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (4.9)$$

4.4.2 Ecuaciones del movimiento sobre una línea de corriente

Es importante el poder efectuar la integración de la Ec. (4.9a) a lo largo de una línea de corriente. Sin embargo, debido al carácter tensorial del esfuerzo de fricción τ , dicha integración es compleja si no se hacen consideraciones simplificatorias.

Puesto que los términos de la Ec. (4.9a) representan fuerzas por unidad de masa, al dividir la misma entre g dichos términos expresarán ahora fuerzas por unidad de peso. Haciendo esta operación con $\gamma = \rho g$, y ordenando, resulta:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.10a)$$

Si, además, los términos de la ecuación anterior se multiplican por ds , los resultantes expresarán los trabajos mecánicos realizados por las fuerzas (por unidad de peso) a lo largo de la línea de corriente, o bien, las energías equivalentes (también por unidad de peso):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) ds + \\ & + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) ds = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} ds \end{aligned} \quad (4.10b)$$

La integración de esta ecuación sobre una línea de corriente conduce a que:

$$\begin{aligned} & z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - \int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) ds = \\ & = C(t) - \frac{1}{g} \int_s \frac{\partial v}{\partial t} ds \end{aligned}$$

El término $-\int_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\tau}{\gamma} \right) ds$ se interpreta como la energía, por unidad de peso, utilizada para vencer las fuerzas de fricción y que se transforma en energía calorífica no aprovechable en el movimiento. Por esta razón se considera una *pérdida de energía* que se designará por h_r . De esta manera, la Ec. (4.10) será:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_r = C(t) - \frac{1}{g} \int_s \frac{\partial v}{\partial t} ds \quad (4.11)$$

donde $C(t)$ es una constante de integración que es función únicamente del tiempo. Esta es la *ecuación del movimiento para una línea de corriente* en un flujo de un líquido real (rotacional) no permanente; asimismo, relaciona las diferentes transformaciones de la energía por unidad de peso a lo largo de una misma línea de corriente. Su forma diferencial, equivalente a la Ec. (4.10b), es

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_r \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.12)$$

La Ec. 4.11 admite las siguientes simplificaciones:

a) Si el flujo es permanente, la integral de la Ec. (4.11) desaparece y $C(t) = C_1$ (constante).

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_r = C_1 \quad (4.13)$$

b) Si en el flujo, además, no hay fricción, la Ec. (4.13) toma la expresión:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_2 \quad (4.14)$$

que es la *ecuación de Bernoulli* para una línea de corriente.

Por lo que respecta a la componente dada por la Ec. (4.9b), es interesante la integración para el caso en que las líneas de corriente fuesen rectas o de curvatura despreciable, en un flujo permanente. Para este caso, $r = \infty$ o muy grande y dicha ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$$

Por tanto, la integración en la dirección de la normal a la línea de corriente conduce a:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \quad (4.15)$$

lo cual significa que la presión se distribuye de manera hidrostática en la dirección de la normal principal. Un resultado análogo se obtiene para la componente en la dirección de la binormal.

4.4.3 Ecuación de la energía para una vena líquida

El considerar que los valores de z , ρ , p , h_r y v , sobre una línea de corriente ideal que coincidiera con el eje de una vena líquida, fueran representativos de cada sección, no implicaría un error apreciable y la Ec. (4.12) sería igualmente válida para la vena líquida de la Fig. 4.3. Esta consideración es suficientemente precisa por lo que respecta a los términos que contienen las cuatro primeras magnitudes, pero será menos exacta en lo que se refiere a los que contienen a v . En efecto; al existir una distribución de velocidades en la sección, que además se aparta del valor medio V (Fig. 4.7), se comete un error en el cálculo de dicho valor medio.

Puesto que en las ecuaciones (4.11) y (4.12) el término $v^2/2g$ representa la energía cinética que posee la unidad de peso,

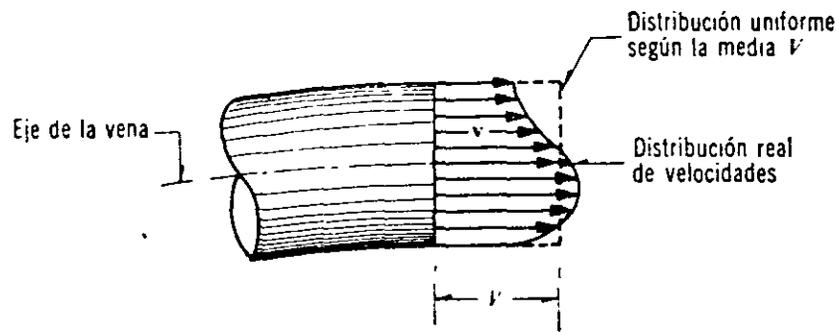


Figura 4.7. Distribución de velocidades en una sección.

la que corresponde al peso del líquido que atraviesa el área dA en la unidad de tiempo será: $\gamma v dA v^2/2g$. En la misma forma, la energía cinética que posee todo el peso del líquido que fluye a través de una sección de la vena líquida, en la unidad de tiempo, es $\gamma VA \alpha V^2/2g$, donde α corrige el error de considerar el valor medio de la velocidad. Se debe entonces satisfacer lo siguiente:

$$\alpha \frac{V^2}{2g} \gamma VA = \iint_A \frac{v^2}{2g} \gamma v dA$$

Puesto que γ representa el valor medio del peso específico en toda la sección, resulta que

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V} \right)^3 dA \quad (4.16)$$

Por un razonamiento análogo con el último término de la Ec. (4.12), se tiene

$$\beta V \rho VA = \iint_A v \rho v dA$$

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V} \right)^2 dA \quad (4.17)$$

Los coeficientes α y β se conocen como *coeficientes de Coriolis y de Boussinesq*, respectivamente. Con estas correcciones la Ec. (4.12) resulta así:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{z}{\gamma} + p + \alpha \frac{V^2}{2g} + h_r \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial \beta V}{\partial t} \quad (4.18)$$

que es la *ecuación diferencial de la energía para una vena líquida*, llamada también *ecuación dinámica*. Si esta ecuación se integra entre dos secciones, 1 y 2 de la vena líquida, se obtiene:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial(\beta V)}{\partial t} ds \quad (4.19)$$

es decir, *la ecuación general de la energía para una vena líquida*, donde $\sum_1^2 h_r$ representa la disipación de energía interna del flujo, entre las secciones 1 y 2, que además, incluye la constante de integración $C(t)$.

4.4.4 Interpretación de la ecuación de la energía

Con el objeto de entender mejor las diferentes aplicaciones de la Ec. (4.19), es adecuado hacer una interpretación física de los diferentes términos que intervienen en ella. El análisis de cada uno de sus

términos muestra que corresponden a los de una longitud o *carga*. El término z , medido desde un plano horizontal de referencia, se llama *carga de posición*; p/γ es la *carga de presión*; $\alpha \frac{V^2}{2g}$ la *carga de velocidad*; $\sum_1^2 h_r$ la *pérdida de carga* y $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial \beta V}{\partial t} ds$ la *carga correspondiente al cambio local de la velocidad*.

La Ec. (4.19) establece las relaciones entre las diferentes transformaciones de la energía mecánica del líquido, por unidad de peso del mismo [$F L/F$]. La carga de posición es la *energía potencial*; la carga de presión es la energía correspondiente al *trabajo mecánico ejecutado por las fuerzas debidas a la presión*; la carga de velocidad es la *energía cinética* de toda la vena líquida; la pérdida de carga es la *energía transformada en otro tipo de energía* (transferencia de calor) que, en el caso de los líquidos, no es utilizable en el movimiento; y, finalmente, la carga correspondiente al cambio local de la velocidad es la energía utilizada para efectuar dicho cambio.

a) Si el flujo es permanente, $\frac{\partial \beta V}{\partial t} = 0$ y la Ec. (4.19) se reduce a la expresión:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \quad (4.20)$$

b) Si, además, no hay pérdida de energía, $\sum_1^2 h_r = 0$ y los coeficientes $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la Ec. (4.20) adopta la forma llamada *ecuación de Bernoulli para una vena líquida*, esto es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} =$$

$$= z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (4.21)$$

c) Si $H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g}$ representa la energía por unidad de peso que tiene el líquido en una determinada sección, la cual es medida desde el plano horizontal de referencia, la Ec. (4.20) se simplifica así:

$$H_1 = H_2 + \sum_1^2 h_r \quad (4.22)$$

En una determinada sección la energía de un volumen v del líquido, respecto del plano horizontal de referencia, es:

$$E = \gamma H v$$

y, por definición de energía y potencia, en esa sección esta última vale:

$$P = \frac{dE}{dt} = \gamma H \frac{dv}{dt}$$

Además, por definición de gasto, la *energía del líquido en la unidad de tiempo*, esto es, su *potencia*, vale

$$P = \gamma Q H \quad (4.23)$$

donde:

γ peso específico del líquido, en kg/m^3 ;

H energía total respecto del plano de referencia, en m;

Q gasto en la sección considerada, en m^3/seg ;

P potencia del líquido, en kg m/seg .

Esto es, si se multiplican ambos miembros de la Ec. (4.23) por γQ , para el flujo permanente, esta ecuación se puede también expresar en la forma

$$P_1 = P_2 + \sum_1^2 P_r \quad (4.24)$$

Una interpretación física de cada uno de los términos de la Ec. (4.19) para una conducción forzada con escurrimiento no permanente, se muestra en la Fig. 4.8, la cual tendría validez para un instante determinado. Con este esquema se pueden hacer las siguientes definiciones.

1. La *línea de energía* une los puntos que indican en cada sección la energía de la corriente.

2. La *línea de cargas piezométricas* o gradiente de cargas de presión, une los puntos que marcan en cada sección la suma de las cargas $z + \frac{p}{\gamma}$ por arriba del plano de referencia.

De acuerdo con estas definiciones la línea de cargas piezométricas está separada de la línea de energía, una distancia vertical $\alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial \beta V}{\partial t} ds$, correspon-

diente a cada sección. Al mismo tiempo se pueden hacer las siguientes generalizaciones.

1. La línea de energía no puede ser horizontal o con inclinación ascendente en la dirección del escurrimiento, si el líquido es real y no adquiere energía adicional desde el exterior. La diferencia de nivel de la línea de energía en dos puntos distintos representa la pérdida de carga o disipación de energía por unidad de peso del líquido fluyente.

2. La línea de energía y la de cargas piezométricas coinciden y quedan al nivel de la superficie libre para un volumen de líquido en reposo (por ejemplo, un depósito o un embalse).

3. En el caso de que la línea de cargas piezométricas quede en algún tramo por debajo del eje de la vena líquida, las presiones locales en ese tramo son menores que la presión cero de referencia que se utilice (comúnmente la presión atmosférica).

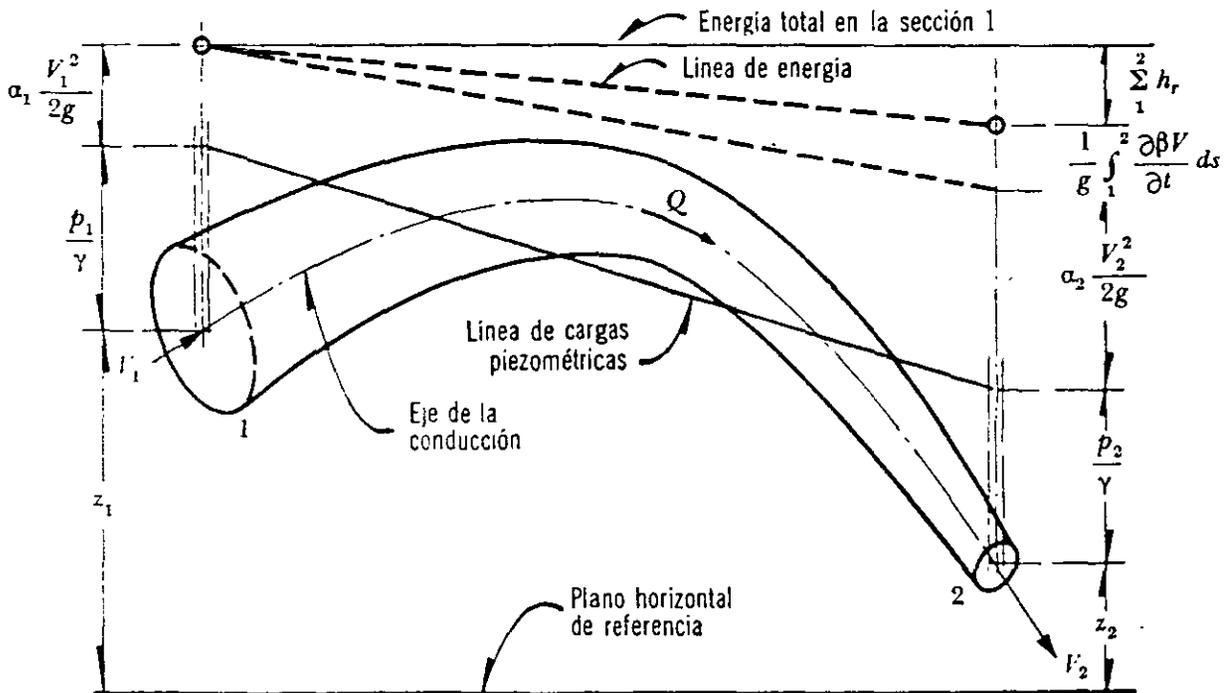


Figura 4.8. Interpretación de la ecuación de la energía para una conducción forzada.

En la Fig. 4.9 se muestra la disposición de las líneas de energía, y de cargas piezométricas, de una instalación hidroeléctrica donde el flujo es permanente; la turbina aprovecha la energía disponible $H_{a,b}$. En la Fig. 4.10 se muestra el mismo esquema, pero en este caso se trata de una instalación de bombeo. Para los dos casos la Ec. (4.19) se escribe como sigue:

$$z_1 + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \sum_1^a h_r + H_{a,b} = z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_b^2 h_r \quad (4.25)$$

En la instalación hidroeléctrica la turbina queda generalmente muy próxima a la sección 2 y el término $\sum_b^2 h_r$ es despreciable.

Por lo que respecta al término $H_{a,b}$ éste se ha empleado en la Ec. (4.25) como una energía cedida o añadida al flujo y tiene las dimensiones de una longitud. En efecto, por definición de potencia (Ec. 4.23) tenemos que:

$$H_{a,b} = \frac{P}{\gamma Q}$$

es la energía neta por unidad de peso que cede o se transmite al líquido por efecto de la máquina; tiene signo positivo en la Ec. (4.25) cuando el líquido cede energía (turbina) o negativo cuando la recibe (bomba). Aún más, si P_n es la potencia nominal de la máquina y η su eficiencia, entonces

$$H_{a,b} = \frac{P_n}{\eta \gamma Q} \quad (4.26a)$$

si se trata de una turbina; y

$$H_{a,b} = - \frac{\eta P_n}{\gamma Q} \quad (4.26b)$$

si es una bomba.

En el caso de una conducción a superficie libre en escurrimiento continuo (figura 4.11), con líneas de corriente de curvatura despreciable y paralelas, es más adecuado medir la carga de posición desde el plano de referencia hasta el punto más bajo de la sección transversal, esto es, hasta la plantilla del canal. La carga de presión coincide con el tirante y de la sección, es decir, con el desnivel entre

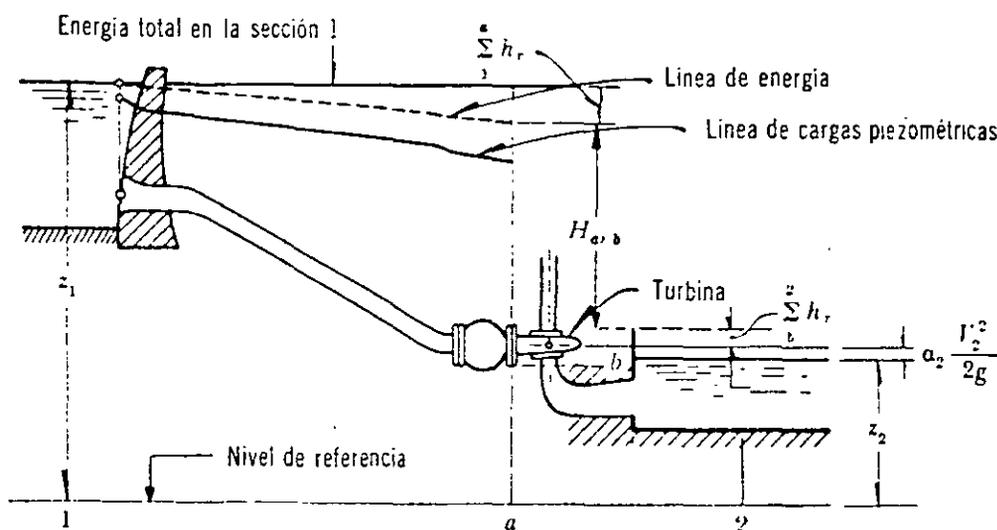


Figura 4.9. Líneas de energía y de cargas piezométricas en una instalación hidroeléctrica.

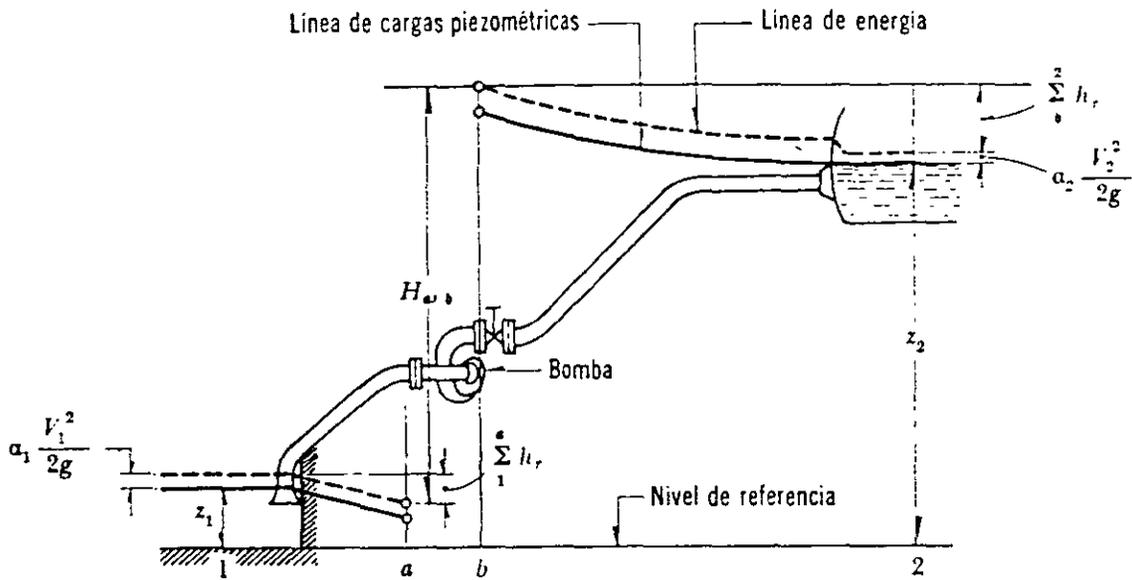


Figura 4.10. Líneas de energía y de cargas piezométricas en una instalación de bombeo.

la superficie libre y la plantilla, siempre que sea pequeño el ángulo θ de inclinación de la plantilla. Esto equivale a considerar que la distribución de presiones es hidrostática y que no existen componentes de la aceleración normales a la dirección del flujo.

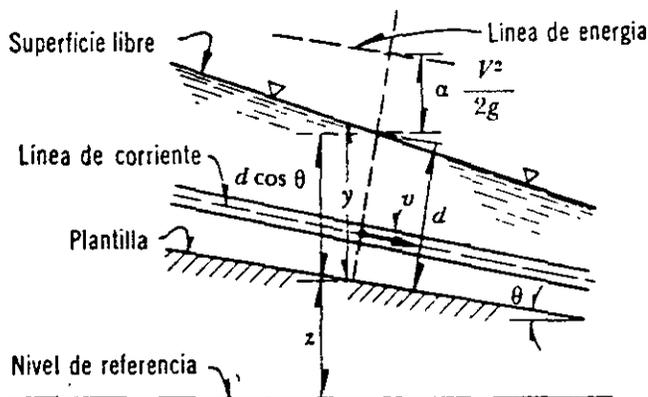


Figura 4.11. Cargas de posición, presión y de velocidad en un escurrimiento a superficie libre.

Finalmente, la carga de velocidad se mide desde el nivel de la superficie libre del agua hasta la línea de energía. En el caso de que sean los ángulos $\theta > 10^\circ$, la carga de presión es distinta y se evalúa

como $\frac{p}{\gamma} = d \cos \theta$, en que d es el tirante medido en dirección perpendicular a la plantilla del canal; o bien, siendo $y \cos \theta = d$, $\frac{p}{\gamma} = y \cos^2 \theta$, donde y es el tirante medido verticalmente. De este modo, la suma de las cargas de posición, presión y velocidad es

$$H = z + d \cos \theta + \frac{V^2}{2g} \quad (4.27a)$$

o bien

$$H = z + y \cos^2 \theta + \frac{V^2}{2g} \quad (4.27b)$$

donde V representa la velocidad media en la sección perpendicular a la plantilla correspondiente al tirante d .

La pérdida de energía que se produce al escurrir un líquido real puede deberse no sólo al efecto de fricción entre las partículas del líquido y las fronteras que confinan a la vena líquida, sino —además— a efecto de separación o turbulencias inducidas en el movimiento al presentarse obs-

táculos o cambios bruscos en la geometría. El primer tipo de pérdida se conoce como *pérdida de energía por fricción*; es proporcional a la longitud de recorrido y suele adquirir gran importancia en estructuras largas. El segundo tipo de pérdida se conoce como *pérdida menor* y se concentra en el sitio mismo en que se origina.

4.5 Ecuación de la cantidad de movimiento

La ecuación de la cantidad de movimiento en un cuerpo libre o volumen de control se deriva de la segunda ley de Newton. Se conoce como la cantidad de movimiento de un elemento de masa M al producto de ésta por su velocidad. Por tanto, la segunda ley de Newton establece lo que sigue.

La suma vectorial de todas las fuerzas \mathbf{F} que actúan sobre una masa de fluido es igual a la rapidez del cambio del vector

lineal *cantidad de movimiento de la masa de fluido*, es decir:

$$\mathbf{F} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} \quad (4.28)$$

Las fuerzas externas son de dos tipos:

a) Fuerzas de superficie que actúan sobre la masa de fluido y, a su vez, pueden ser (subcapítulo 1.2):

Fuerzas F_p , normales a la frontera de la masa, que se pueden evaluar en términos de las intensidades de presión sobre la misma. Conviene aquí observar que la presión comprende, además de la presión estática, la dinámica ejercida por el flujo.

Fuerzas F_τ , tangenciales a las fronteras de la masa, que se pueden medir en términos del esfuerzo tangencial sobre la misma.

b) Fuerzas de cuerpo F_c , generalmente las de peso propio.

La masa que fluye en la unidad de tiempo, a través de un elemento de superficie dA de la que encierra al volumen de con-

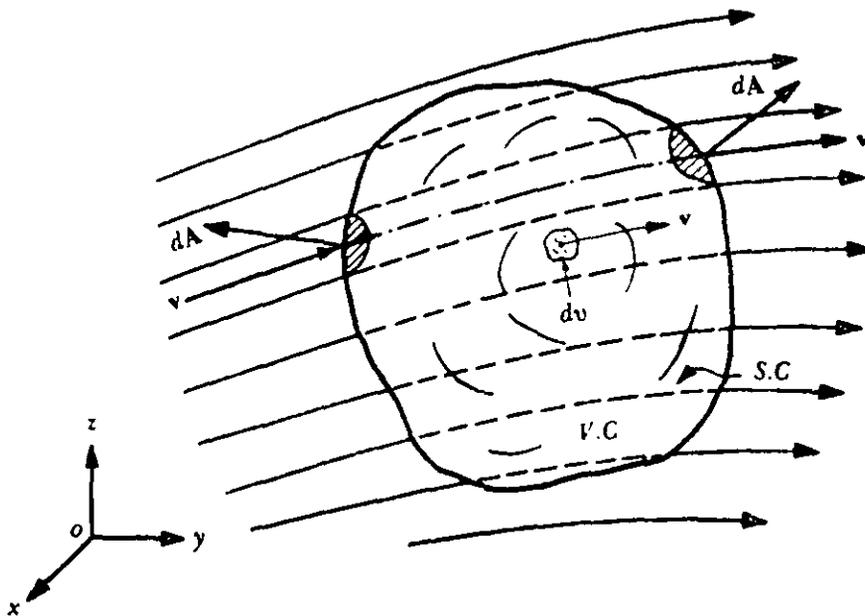


Figura 4.12. Derivación de la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control.

ORIFICIOS Y COMPUERTAS

6.1 Ecuación general de los orificios

Considere un recipiente lleno de un líquido, en cuya pared lateral se ha practicado un orificio de pequeñas dimensiones (en comparación con su profundidad H) y cualquier forma, además de una área A . El orificio descarga un gasto Q cuya magnitud se desea calcular, para lo cual se supone que el nivel del agua en el recipiente permanece constante por efecto de la entrada de un gasto idéntico al que sale; o bien porque posea un volumen muy grande. Además, el único contacto entre el líquido y la pared debe ser alrededor de una arista afilada como se muestra en la Fig. 6.1; esto es, el orificio es *de pared delgada*. Las partículas de líquido en la proximidad del orificio se mueven aproximadamente en dirección al centro del mismo, de modo que, por efecto de su inercia, la deflexión brusca que sufren produce una contracción del chorro, la cual se alcanza en la sección 2. A esta sección se le llama *contraída* y tiene una área A_c inferior al área A del orificio. En ella las velocidades de las partículas son prácticamente uniformes y con un valor medio V .

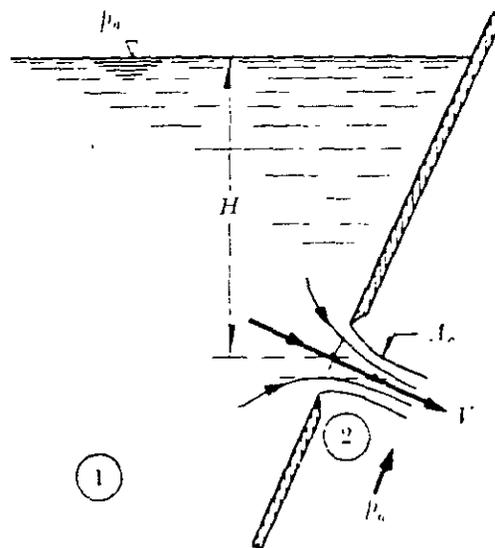


Figura 6.1. Orificio de pared delgada.

Suponiendo un plano de referencia que coincida con el centro de gravedad del orificio, la aplicación de la ecuación de Bernoulli (4.21) entre las secciones 1 y 2 de una vena líquida, además de considerar despreciable la velocidad de llegada al orificio, conduce a la expresión:

$$H = \frac{V^2}{2g}$$

donde se ha despreciado el desnivel entre los centros de gravedad del orificio y de la sección contraída. De aquí se obtiene:

$$V = \sqrt{2gH} \quad (6.1)$$

La ecuación se llama de Torricelli y puede también obtenerse de la ecuación (4.14) de Bernoulli entre dos puntos: uno dentro del recipiente y otro en el centro de gravedad de la sección contraída. Esto es, la Ec. (6.1) indica que la velocidad sigue una ley parabólica con la profundidad y en este caso la velocidad media V , se calcula con la profundidad media del orificio y corresponde a su centro de gravedad, no obstante que las velocidades de las partículas arriba de este punto son menores y, abajo, mayores. Esto tendrá por supuesto mayor validez a medida que la dimensión transversal, no horizontal, del orificio sea mucho menor que la profundidad H del mismo. Es más, los resultados obtenidos de la Ec. (6.1) concuerdan con los obtenidos experimentalmente sólo si se corrigen, mediante un coeficiente C_v , llamado de velocidad, en la forma:

$$V = C_v \sqrt{2gH} \quad (6.2)$$

donde C_v , coeficiente sin dimensiones muy próximo a 1, es de tipo experimental y además corrige el error de no considerar en la Ec. (6.1), tanto la pérdida de energía Δh_r , como los coeficientes α_1 y α_2 .

Si el área de la sección contraída se

calcula en términos de la del orificio, por medio de un coeficiente C_c llamado de contracción (también sin dimensiones), en la forma:

$$A_c = C_c A$$

el gasto descargado por el orificio es entonces

$$Q = C_v C_c A \sqrt{2gH} \quad (6.3)$$

o bien, con $C_d = C_v C_c$ (coeficiente de gasto), el gasto se calcula finalmente con la ecuación general de un orificio de pared delgada, a saber:

$$Q = C_d A \sqrt{2gH} \quad (6.4)$$

Conviene aclarar que en las ecuaciones anteriores se consideró H como el desnivel entre la superficie libre y el centro de gravedad del orificio. Esto resultó de suponer que era despreciable la velocidad de llegada al orificio y que la presión sobre la superficie libre corresponde a la atmosférica. Cuando ello no acontece, H corresponde a la energía total; esto es, a la suma de la profundidad del orificio, de la carga de velocidad de llegada y de la carga de presión sobre la superficie del agua:

$$E = H + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} \quad (6.5)$$

6.2 Coeficientes de velocidad, contracción y gasto, en orificios de pared delgada

Los coeficientes de velocidad, contracción y gasto, en un orificio, son básicamente experimentales. Sin embargo, en teoría es posible encontrar la magnitud del coeficiente de gasto para un orificio circular a partir de la ecuación de la cantidad de movimiento aplicada sobre un volumen de control limitado por la fron-

tera del chorro en contacto con el aire, la sección contraída y, dentro del recipiente, por una superficie semiesférica de radio igual al del orificio (Fig. 6.2). Para hacer lo anterior, se designa como v_1 la velocidad de una partícula sobre la semiesfera de radio R , trazada en la Fig. 6.2, cuya dirección es radial al centro de la semiesfera.

La superficie de la semiesfera vale

$$A_1 = 2 \pi R^2 \quad (6.6)$$

y la correspondiente a la sección contraída:

$$A_c = C_c A = C_c \pi R^2 \quad (6.7)$$

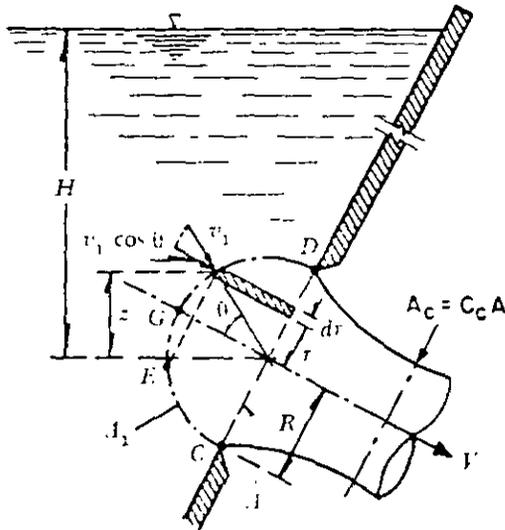


Figura 6.2. Derivación del coeficiente de contracción para un orificio de pared delgada.

De la ecuación de continuidad se obtiene

$$v_1 = \frac{A_c}{A_1} V$$

Substituyendo en esta ecuación a las Ecs. (6.6) y (6.7) resulta que

$$v_1 = \frac{1}{2} C_c V \quad (6.8)$$

Para aplicar la ecuación de la cantidad

de movimiento, es necesario conocer la velocidad media sobre la semiesfera en la dirección del escurrimiento. La componente paralela al eje del orificio de las velocidades v_1 , sobre la superficie de la semiesfera, vale $v_1 \cos \theta$; es decir, que la variación es según una ley cosenoidal como se muestra en la Fig. 6.3. De este modo, la media de las componentes de la velocidad, sobre la superficie semiesférica, se obtiene por la igualación del volumen del cilindro $V_s \pi R^2$ con el volumen encerrado por la superficie de ley cosenoidal; o sea

$$V_s = \frac{v_1}{\pi R^2} \iint_A \cos \theta \, dA$$

y, con $\cos \theta = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$, $dA = 2 \pi r \, dr$; entonces

$$V_s = \frac{2 v_1}{R^3} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \, r \, dr$$

la integración conduce al resultado siguiente:

$$\begin{aligned} V_s &= -\frac{2 v_1}{3 R^3} [(R^2 - r^2)^{3/2}]_0^R = \\ &= -\frac{2 v_1}{3 R^3} [-R^3] \end{aligned}$$

finalmente, se tiene que

$$V_s = \frac{2}{3} v_1 \quad (6.9)$$

Substituyendo la Ec. (6.8) en la (6.9) resulta:

$$V_s = \frac{C_c}{3} V \quad (6.10)$$

Por tanto, es posible evaluar los coeficientes β que intervienen en la ecuación de la cantidad de movimiento. Por una parte, el coeficiente β para la sección contraída

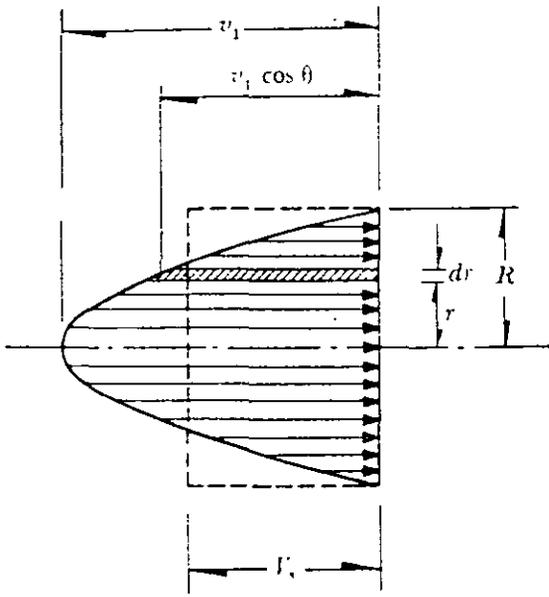


Figura 6.3. Distribución de las componentes de la velocidad normales a la sección del orificio.

vale 1, pues se supone que la distribución de la velocidad coincide con la media; sin embargo, el coeficiente β para la semiesfera tiene un valor distinto de 1 y resulta de la Ec. (4.17), a saber:

$$\beta_1 = \frac{\iint_A v_1^2 \cos^2 \theta \, dA}{A V_s^2} \quad (6.11)$$

De la Fig. 6.3, $dA = 2\pi r \, dr$ y además

$$\sin^2 \theta = \frac{r^2}{R^2}; \quad \cos^2 \theta = 1 - \frac{r^2}{R^2}$$

Con estas expresiones y considerando la Ec. (6.8) el valor de β_1 es:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{A V_s^2} \int_0^R \frac{C_c^2 V^2}{3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r \, dr = \\ &= \frac{1}{A V_s^2} \frac{C_c^2 V^2}{2} \left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4} \right] \end{aligned}$$

y de la Ec. (6.10) resulta entonces que

$$\beta_1 = \frac{9}{\pi R^2 C_c^2 V^2} C_c^2 V^2 \frac{\pi R^2}{8} = \frac{9}{8} = 1.125 \quad (6.12)$$

Es necesario conocer las fuerzas que impulsan al volumen de agua limitado por la sección contraída y las secciones de la esfera; en un punto E sobre la semiesfera actúa la presión p . La ecuación de Bernoulli para una línea de corriente (ecuación 4.14), aplicada a este punto, es

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

Si se acepta que la carga H es muy grande en comparación con el radio del orificio, puede entonces despreciarse z y, por tanto, sobre toda la semiesfera la presión será constante y de valor:

$$p = \gamma \left(H - \frac{v_1^2}{2g} \right)$$

Por lo cual la componente en la dirección del movimiento del empuje o fuerza total, sobre la superficie de la semiesfera, es

$$p A = \gamma \left(H - \frac{v_1^2}{2g} \right) A \quad (6.13)$$

En la sección contraída actúa la presión atmosférica, por lo que la fuerza sobre dicha sección será cero. La masa del líquido descargada a través del orificio es

$$\frac{\gamma}{g} C_c A V$$

la cual se acelera desde la velocidad media V_s sobre la semiesfera, expresada por la Ec. (6.10), hasta la velocidad media V en la sección contraída. Así, de acuerdo con las Ecs. (6.8), (6.10), (6.12) y (6.13), la ecuación de la cantidad de movimiento se expresa como sigue:

$$\gamma A \left[H - \frac{1}{2g} \left(\frac{C_c V}{2} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\gamma}{g} A C_c V \left(V - \frac{9}{8} \frac{C_c}{3} V \right)$$

Por otra parte, de la Ec. (6.2) se tiene que

$$H = \frac{1}{C_v^2} \frac{V^2}{2g}$$

con lo cual resulta:

$$\frac{V^2}{2g} \left[2 C_c - \frac{3}{4} C_c^2 + \frac{1}{4} C_c^2 - \frac{1}{C_v^2} \right] = 0$$

o bien, eliminando la carga de velocidad, se tiene que

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) C_c^2 - 2 C_c + \frac{1}{C_v^2} = 0$$

por tanto:

$$C_c^2 - 4 C_c + \frac{2}{C_v^2} = 0$$

Debido a que C_c debe ser menor que 1, la raíz válida en esta ecuación es la correspondiente al signo negativo del radical; así, se obtiene la ecuación:

$$C_c = 2 - \sqrt{4 - \frac{2}{C_v^2}} \quad (6.14)$$

En la tabla 6.1 se presentan los valores de C_c y C_d calculados de la Ec. (6.14), para diferentes valores de C_v y de la definición de C_d .

TABLA 6.1. Coeficientes de gasto de la Ec. 6.14

C_v	1	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95
C_c	0.586	0.60	0.615	0.631	0.647	0.664
C_d	0.586	0.594	0.603	0.612	0.621	0.631

Mediante un análisis dimensional se comprueba (problema A.8, apéndice A) que los coeficientes de velocidad, contrac-

ción y gasto, son función exclusivamente del número de Reynolds. De acuerdo con los resultados de diferentes investigadores (Refs. 21, 22 y 23), para orificios circulares sus valores tienen la variación mostrada en la Fig. 6.4. Se observa que para números de Reynolds $Re > 10^5$, los coeficientes C_v , C_c y C_d son independientes de dicho número y adquieren los valores constantes siguientes:

$$C_v = 0.99$$

$$C_c = 0.605$$

$$C_d = 0.60$$

De la tabla 6.1 se tiene que para $C_v = 0.99$, la Ec. (6.14) proporciona los valores $C_c = 0.60$ y $C_d = 0.594$ que coinciden prácticamente con los coeficientes experimentales arriba indicados.

Por definición de coeficientes de contracción, para un orificio circular se obtiene

$$D = \sqrt{\frac{1}{C_c}} D_c \quad (6.15)$$

y con $C_c = 0.605$, $D = 1.285 D_c$; o bien, $D_c = 0.778 D$.

Cuando se trata de orificios rectangulares de poca altura los coeficientes C_v , C_c y C_d , son prácticamente los mismos en la Fig. 6.4. En este caso (en lugar de D) en el número de Reynolds se utilizó la mínima dimensión a del orificio y en la ecuación (6.4) corresponde a su área $A = ab$ (b es la dimensión máxima del orificio).

Los resultados de la Fig. 6.4 son válidos siempre que se tenga una contracción completa, que se logra si la distancia entre los cantos del orificio y las fronteras del recipiente (pared lateral, fondo o superficie libre) es por lo menos $3D$ en orificios circulares, o $3a$ en orificios rectangulares.

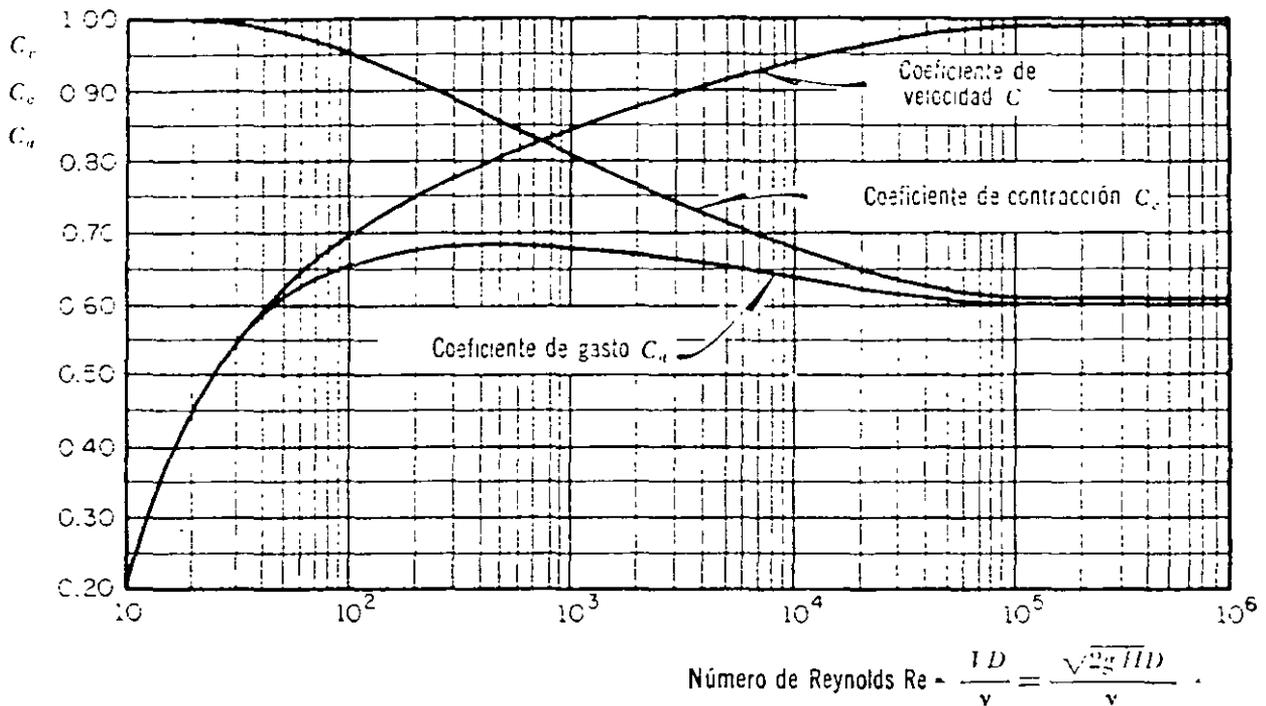


Figura 6.4. Variación de los coeficientes de velocidad, contracción y gasto, con el número de Reynolds en un orificio circular.

6.3 Pérdida de energía

Si al establecer la ecuación de Bernoulli para deducir la Ec. (6.1), se incluye el término de pérdida de energía, entonces,

$$H = \frac{V^2}{2g} + \Delta h_r$$

Por otra parte, de la Ec. (6.2) resulta:

$$H = \frac{1}{C_v^2} \frac{V^2}{2g}$$

que, substituida en la ecuación anterior, da

$$\Delta h_r = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right) \frac{V^2}{2g} = K \frac{V^2}{2g} \quad (6.16)$$

La Ec. (6.16) indica que la pérdida de energía es proporcional a la carga de velo-

cidad media en la sección contraída. El coeficiente de pérdida K no tiene dimensiones y es función sólo del coeficiente de velocidad siguiente:

$$K = \frac{1}{C_v^2} - 1 \quad (6.17a)$$

Así, para $C_v = 0.99$, $K = 0.02$. De la ecuación (6.17a) se tiene también que

$$C_v = \sqrt{\frac{1}{K + 1}} \quad (6.17b)$$

El perfil de la trayectoria del chorro queda determinado por la Ec. (c) del problema 4.13, en que V_1 se calcula de la Ec. (6.2).

Problema 6.1. El orificio circular practicado en la pared vertical de un recipiente que contiene agua tiene un diámetro $D =$

= 0.10 m y desaloja un gasto $Q = 29.5$ lt/seg con una carga $H = 2$ m. Con el sistema de coordenadas indicado en la Fig. 6.5, se ha medido en el laboratorio que $x = 3$ m y $y = 1.15$ m, para el punto 1. Calcular los coeficientes de contracción, gasto y velocidad.

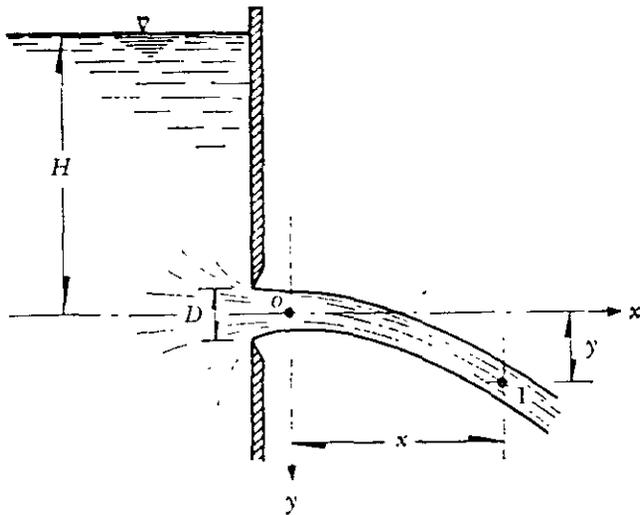


Figura 6.5. Ilustración del problema 6.1.

Solución. Debido a que en la sección contraída el ángulo de inclinación del chorro es $\theta = 0$, además de que en esa sección las componentes de la velocidad son $V_{1x} = V$ y $V_{1y} = 0$, de la Ec. (c) del problema 4.13 y, de acuerdo con la orientación de los ejes, se tiene a

$$y = \frac{g}{2} \frac{x^2}{V^2}$$

Por lo que la velocidad media en la sección contraída vale:

$$V = x \sqrt{\frac{g}{2y}} = 3 \sqrt{\frac{9.8}{2 \times 1.15}} = 6.194 \text{ m/seg}$$

De la Ec. (6.2) el coeficiente de velocidad resulta ser

$$C_v = \frac{V}{\sqrt{2gH}} = \frac{6.194}{\sqrt{2 \times 9.8 \times 2}} =$$

$$C_v = \frac{6.194}{6.261} = 0.989$$

De la Ec. (6.4) el coeficiente de gasto es entonces:

$$C_d = \frac{Q}{A \sqrt{2gH}} = \frac{0.0295}{0.785 \times (0.10)^2 \times 6.261} = 0.60$$

El coeficiente de contracción, por otra parte, será

$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = 0.607$$

Finalmente, de la Ec. (6.17a) el coeficiente de pérdida de energía vale

$$K = \frac{1}{(0.989)^2} - 1 = 0.022$$

Para el agua —a 15°C— el coeficiente de viscosidad cinemática es $\nu = 0.0175 \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$ (Fig. 1.8); luego entonces, en el orificio el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{\sqrt{2gHD}}{\nu} = \frac{626 \times 10}{0.0175} = 3.578 \times 10^5$$

Con este número de Reynolds se comprueban en la Fig. 6.4 los coeficientes antes obtenidos.

6.4 Orificios de grandes dimensiones o cargas pequeñas

En la deducción de la ecuación general de los orificios se ha supuesto que la velocidad media de todas las partículas se

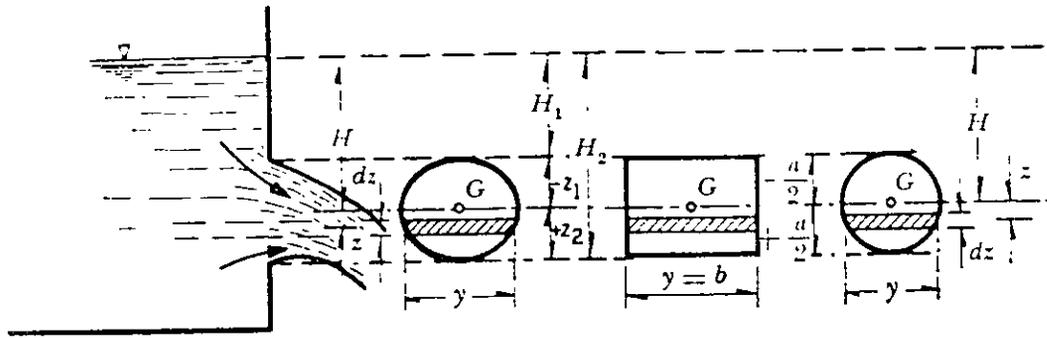


Figura 6.6. Orificios de grandes dimensiones o poca carga.

puede calcular a partir de la energía total H , al centro de gravedad de la sección contraída, lo cual es válido cuando el orificio es de pequeñas dimensiones en comparación con su profundidad. Resulta conveniente investigar lo que sucede cuando el orificio es de grandes dimensiones y se encuentra a poca profundidad. Para lo anterior debe considerarse un orificio de forma cualquiera practicado en la pared vertical de un recipiente y la notación que se indica en la Fig. 6.6.

De acuerdo con la Ec. (6.3) el gasto que pasa por un elemento diferencial de área es

$$dQ = C_d \sqrt{2g} (H + z)^{\frac{1}{2}} y dz$$

donde H es la carga al centro de gravedad del orificio.

El gasto total que pasa por el orificio es entonces:

$$\begin{aligned} Q &= C_d \sqrt{2g} \int_{-z_1}^{+z_2} (H + z)^{\frac{1}{2}} y dz = \\ &= C_d \sqrt{2gH} \int_{-z_1}^{+z_2} \left(1 + \frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{2}} y dz \end{aligned}$$

Al desarrollar el binomio del integrando, si despreciamos los términos de orden superior, resulta:

$$Q' = C_d \sqrt{2gH} \int_{-z_1}^{+z_2}$$

$$\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{H}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{z}{H}\right)^2 + \dots\right] y dz$$

Esta ecuación, dividida entre la (6.4), resulta ser

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = \frac{1}{A} \int_{-z_1}^{+z_2}$$

$$\left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{H}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{z}{H}\right)^2 + \dots\right] y dz$$

Como la integral del primer término es A y la del segundo vale cero por tratarse del momento estático del área respecto a su eje centroidal, resulta entonces:

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{8AH^2} \int_{-z_1}^{+z_2} z^2 y dz + \dots$$

Para el orificio rectangular, $y = b$ (constante), $z_1 = z_2 = \frac{a}{2}$; el valor de ϕ será:

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{96} \left(\frac{a}{H}\right)^2 \quad (6.18)$$

Para el orificio circular, $y dz = dA$, $z_1 = z_2 = \frac{D}{2} = \frac{D}{2}$; el valor de ϕ es

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{128} \left(\frac{D}{H}\right)^2 \quad (6.19)$$

A continuación se incluyen algunos valores de ϕ para los orificios rectangular y circular, obtenidos de las Ecs. (6.18) y (6.19).

$\frac{a}{H}$ ó $\frac{D}{H}$	O R I F I C I O	
	Rectangular	Circular
2	0.94	0.95
1	0.99	0.99
0.67	1	1

El valor $a/H = D/H = 2$ equivale al caso extremo en el que el nivel del agua en el recipiente coincide con el canto superior del orificio. En dichas condiciones el orificio no funciona como tal, sino como un vertedor de pared delgada (capítulo 7). En los restantes casos el coeficiente que corrige a C_d de la Ec. (6.4), resulta despreciable y esta última puede utilizarse con la misma precisión en orificios de grandes dimensiones o de poca carga.

6.5 Orificios con contracción incompleta

Se puede hablar de dos tipos de contracción incompleta en un orificio.

a) Cuando las paredes o el fondo del recipiente se encuentran a distancias inferiores a $3D$ (D es el diámetro de los orificios) o bien, a $3a$ (a , dimensión mínima en orificios rectangulares), se dice que la contracción en el orificio es parcialmente suprimida.

b) Si se llega al caso extremo en que una de las fronteras del recipiente coincide con una arista del orificio, se dice que la contracción es suprimida en esa arista;

en tal caso el orificio se apoya sobre la pared del recipiente.

En cualquiera de los ejemplos anteriores deben corregirse los valores señalados en la Fig. 6.4.

En el caso de contracción parcialmente suprimida, se puede utilizar la siguiente ecuación empírica para calcular el coeficiente de gasto (Ref. 21), a saber:

$$C_d = C_{d0} \left[1 + 0.641 \left(\frac{A_0}{A_T} \right)^2 \right] \quad (6.20)$$

donde C_d es el coeficiente de gasto del orificio; C_{d0} el coeficiente de gasto del mismo orificio con contracción completa; A_0 el área del orificio; A_T el área de la pared del recipiente en contacto con el agua (Fig. 6.7).

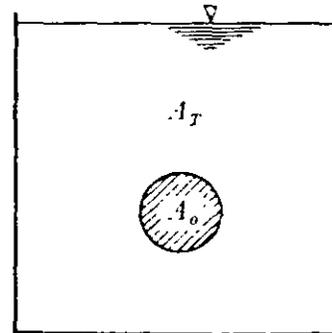


Figura 6.7. Contracción parcialmente suprimida en un orificio.

En el caso de contracción suprimida nos interesan los problemas de orificios de fondo relacionados con compuertas, los cuales se tratarán más adelante.

Problema 6.2. El orificio de pared delgada, de la Fig. 6.8, es cuadrado ($a=0.18$ m) y trabaja con una carga $h = 0.5$ m. Sobre la superficie libre del líquido actúa una presión de $p_0 = 1.45$ kg/cm². Determinar el gasto que descarga el orificio.

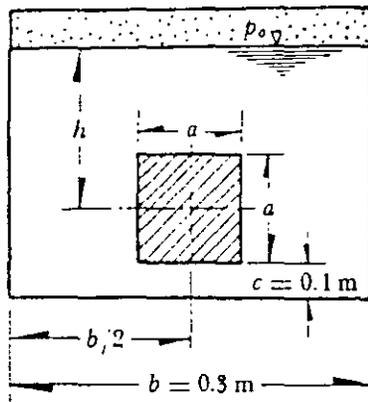


Figura 6.8. Del problema 6.2.

Solución. De acuerdo con la Fig. 6.8 las distancias desde los cantos del orificio a las paredes más próximas del recipiente, son menores de $3a$, por lo cual se trata de una contracción parcialmente suprimida. El coeficiente de gasto para el caso normal de contracción completa es: $C_d = 0.60$; para hacer uso de la Ec. (6.20) tenemos que

$$A_0 = a^2 = 0.0324 \text{ m}^2$$

y

$$\begin{aligned} A_T &= b \left(h + \frac{a}{2} + c \right) = \\ &= 0.3 (0.5 + 0.09 + 0.1) = 0.207 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

luego entonces:

$$C_d = 0.60 \left[1 + 0.641 \times \left(\frac{0.0324}{0.207} \right)^2 \right] = 0.609$$

Además, la carga total que actúa sobre el orificio es:

$$H = h + \frac{p_0}{\gamma} = 0.5 + 1.45 = 15 \text{ m}$$

de la Ec. (6.4), el gasto vale

$$\begin{aligned} Q &= 0.609 \times 0.0324 \sqrt{2 \times 9.8 \times 15} = \\ &= 0.338 \text{ m}^3/\text{seg} \end{aligned}$$

6.6 Orificios con descarga sumergida

Cuando el orificio descarga a otro tanque cuyo nivel está por arriba del canto inferior del orificio, se dice que la descarga es ahogada. El ahogamiento puede ser total (Fig. 6.9) o parcial (Fig. 6.10).

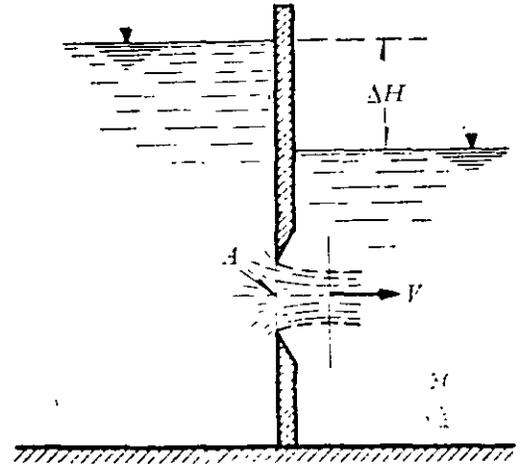


Figura 6.9. Ahogamiento total.

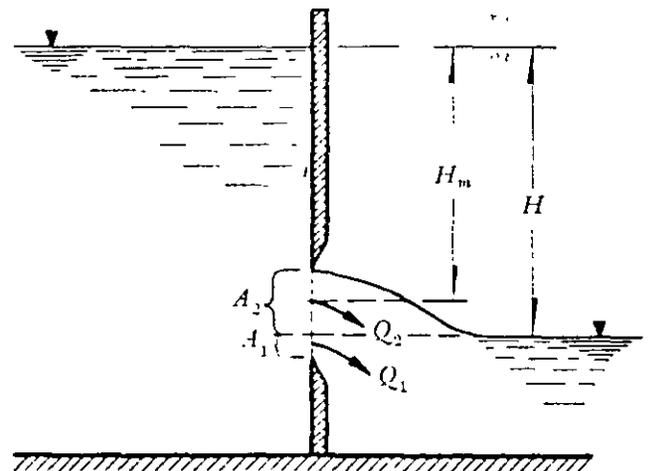


Figura 6.10. Ahogamiento parcial.

En el caso de descarga ahogada total se puede derivar una ecuación análoga a la general (6.4), con la única diferencia, que la energía total H es entonces ΔH (diferencia de niveles entre los dos recipientes); el gasto es entonces:

$$Q = C_d A \sqrt{2 g \Delta H} \quad (6.21)$$

Se recomienda utilizar el mismo coeficiente de gasto C_d que el de un orificio de descarga libre.

Cuando el ahogamiento es parcial, como en la Fig. 6.10, el gasto total descargado por el orificio se puede expresar como la suma Q_1 y Q_2 , donde Q_1 es el gasto correspondiente a la porción del orificio con descarga ahogada, es decir:

$$Q_1 = C_{d1} A_1 \sqrt{2 g H}$$

y Q_2 es el gasto de la porción del orificio con descarga libre, a saber:

$$Q_2 = C_{d2} A_2 \sqrt{2 g H_m}$$

No hay investigaciones confiables acerca de los coeficientes de gasto C_{d1} y C_{d2} ; al respecto, Schlag (Ref. 22) propone que $C_{d1} = 0.70$ y $C_{d2} = 0.675$, en el caso de que el orificio tenga un umbral en el fondo, como en la Fig. 6.10.

6.7 Compuertas

Una compuerta consiste en una placa móvil, plana o curva, que al levantarse permite graduar la altura del orificio que se va descubriendo, a la vez que controlar la descarga producida. El orificio general-

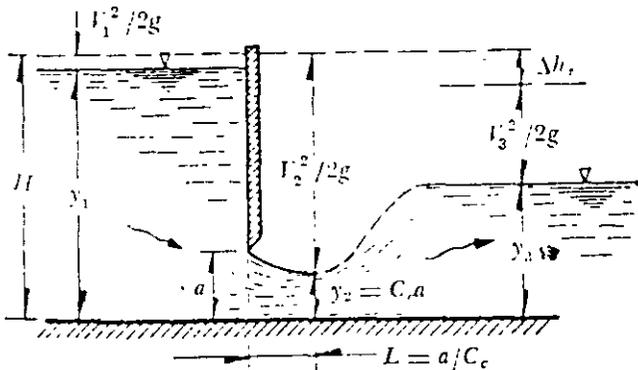


Figura 6.11. Compuerta plana.

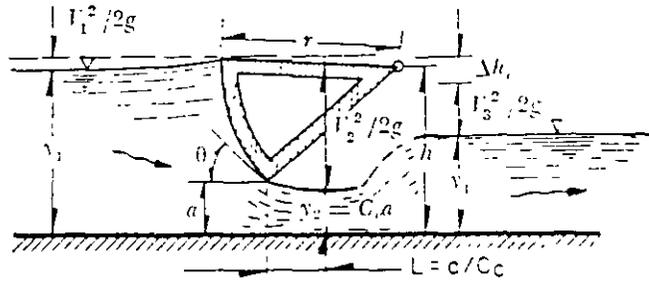


Figura 6.12. Compuerta radial.

mente se hace entre el piso de un canal y el borde inferior de la compuerta, por lo que su ancho coincide con el del canal; en estas condiciones el flujo puede considerarse bidimensional (Figs. 6.11 y 6.12).

El gasto de una compuerta y las características hidráulicas de su descarga se pueden conocer a partir del estudio de una red de flujo obtenida por cualquiera de los métodos expuestos en el capítulo 10. La red de flujo de la compuerta plana, de la figura 6.13, permite explicar con claridad la contracción que experimenta el chorro descargado por el orificio de altura a , hasta alcanzar un valor $C_c a$ en una distancia L en la que las líneas de corriente se vuelven horizontales y tienen por ello una distribución hidrostática de presiones. Debido al fenómeno de contracción y a la fricción con el piso, se produce una pérdida de carga Δh_r , que influye en el cálculo del gasto. Asimismo, la carga de velocidad $V_1^2/2g$ con que llega el agua en el canal, aguas arriba de la compuerta, tiene mayor importancia a medida que la relación y_1/a disminuye.

En el canto inferior de la compuerta las líneas de corriente tienden a unirse y es ahí donde la velocidad adquiere su máximo valor. Debido a la curvatura de las líneas de corriente una gran presión actúa sobre la línea de intersección del plano de la compuerta, razón por la cual se tiene una velocidad pequeña.

Para obtener la ecuación que proporcione el gasto, aquí se considerará el caso

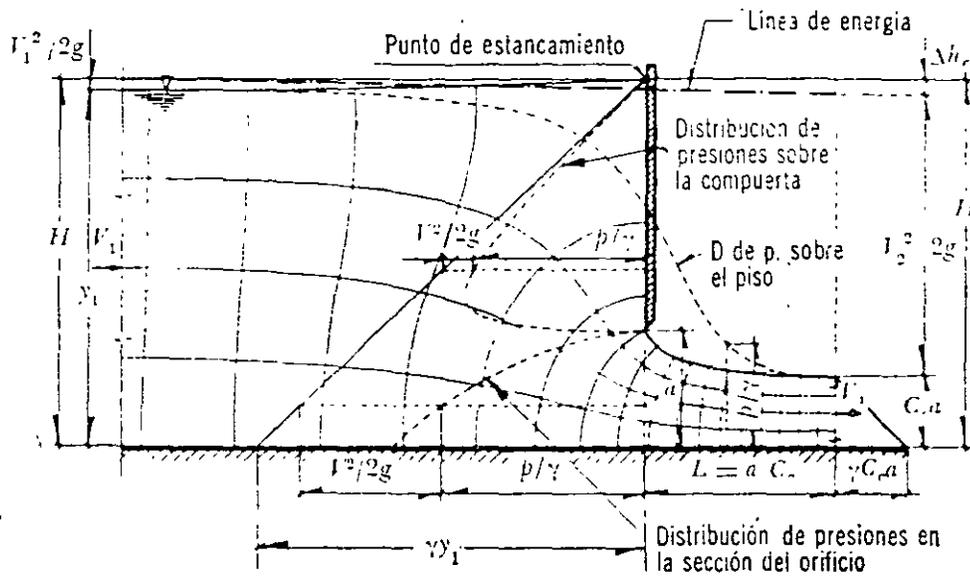


Figura 6.13. Red de flujo para una compuerta plana.

más general de una compuerta plana, con una inclinación θ° respecto de la horizontal (Fig. 6.14) y un ancho b . La inclinación θ° es equivalente a la de la tangente en el labio de la compuerta radial, de la Fig. 6.12, y con $\theta = 90^\circ$ incluye el caso de la compuerta vertical de la Fig. 6.11. Se establece la ecuación de la energía entre una sección 1, aguas arriba, de la compuerta y la sección contraída, a saber:

$$H = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = C_c a + \frac{V_2^2}{2g} \quad (6.22)$$

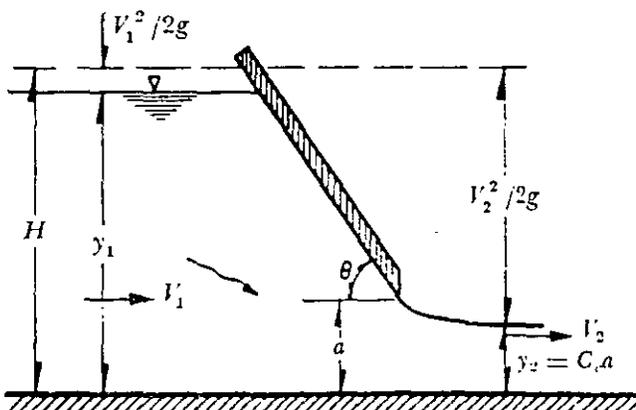


Figura 6.14. Compuerta plana inclinada.

Por otra parte, de la ecuación de continuidad se tiene:

$$V_1 = \frac{C_c a}{y_1} V_2 \quad (6.23)$$

que substituida en la Ec. (6.22) conduce a:

$$y_1 + \left(\frac{C_c a}{y_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = C_c a + \frac{V_2^2}{2g}$$

y de aquí, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{V_2^2}{2g} &= \frac{y_1 - C_c a}{1 - \left(\frac{C_c a}{y_1}\right)^2} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{C_c a}{y_1}\right) y_1}{\left(1 + \frac{C_c a}{y_1}\right) \left(1 - \frac{C_c a}{y_1}\right)} \end{aligned}$$

Por tanto, la velocidad media real en la sección contraída es:

$$V_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \sqrt{2g y_1} \quad (6.24)$$

en que C_v es el coeficiente de velocidad.
El gasto es

$$Q = \frac{C_c C_v b a}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \sqrt{2g y_1}$$

$$Q = C_d b a \sqrt{2g y_1} \quad (6.25)$$

donde:

$$C_d = \frac{C_c C_v}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \quad (6.26a)$$

o bien

$$C_c = \frac{1}{2} \frac{a}{y_1} \left(\frac{C_d}{C_v} \right)^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{2} \frac{a}{y_1} \left(\frac{C_d}{C_v} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{C_d}{C_v} \right)^2} \quad (6.26b)$$

En la Ec. (6.26a) $\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}$ sirve para

considerar el empleo de y_1 en lugar de H .

Si la descarga es sumergida con un tirante y_3 en el canal, aguas abajo de la compuerta, se puede hacer un desarrollo análogo al anterior y obtener una expresión idéntica a la Ec. (6.25) para cualquier tipo de compuerta.

Los coeficientes de velocidad, contracción y gasto los han obtenido experimentalmente muchos investigadores; sin embargo, en ningún caso se ha encontrado coincidencia en los resultados.

Los coeficientes C_v , C_c y C_d dependen, desde luego, de la geometría del flujo y del número de Reynolds. De acuerdo con los resultados presentados por Domínguez (Ref. 24) en la mayoría de los problemas, en la práctica, se supera el número de Reynolds a partir del cual el flujo se torna independiente de él.

Gentilini (Ref. 25) realizó investigaciones en compuertas planas inclinadas y radiales, con descarga libre. En la Fig. 6.15 se presentan los coeficientes de gasto C_d obtenidos en compuertas planas con un ángulo de inclinación θ en términos de la relación y_1/a .

Las experiencias de Gentilini incluyen el caso de la compuerta plana vertical $\theta = 90^\circ$, tipo del cual se han ocupado in-

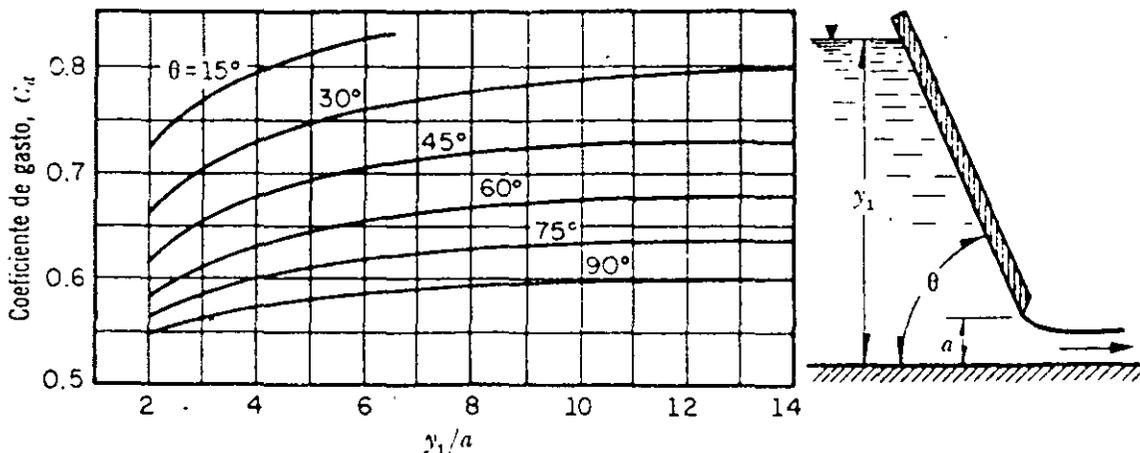


Figura 6.15. Coeficientes de gasto para compuertas planas inclinadas con descarga libre.

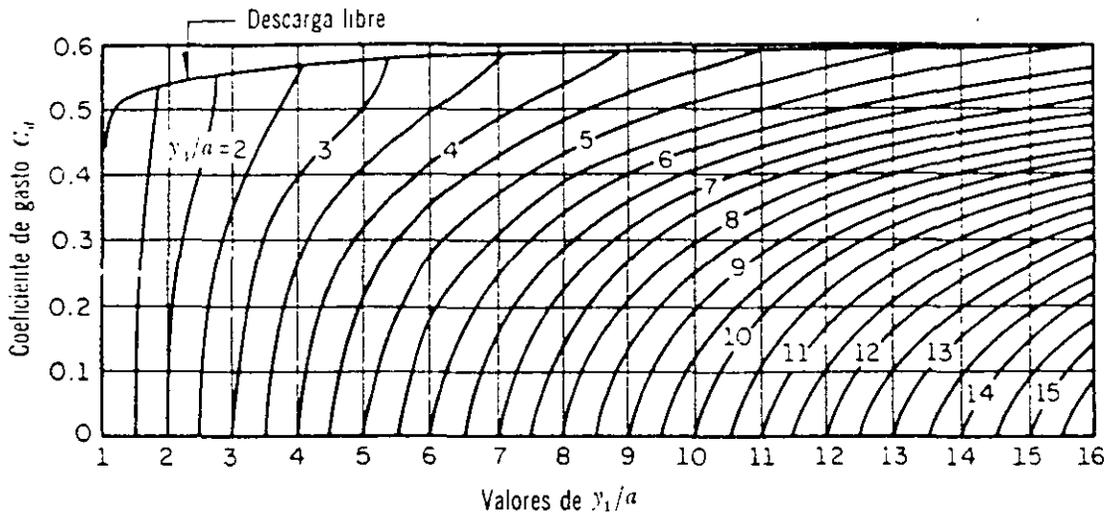


Figura 6.16. Coeficiente de gasto de una compuerta plana vertical según Cofré y Buchheister (Ref. 24).

investigadores como Joukowski y Vedernikov (Ref. 6) de la Unión Soviética, Franke de Alemania (Ref. 1), Henry de Estados Unidos de Norteamérica (Ref. 26) y Cofré y Buchheister de Chile (Ref. 24). Knapp (Ref. 23) y Henderson (Ref. 27) exponen una comparación interesante de algunos de estos resultados que presentan discrepancias importantes atribuibles, según Knapp, al grado de agudeza del canto afilado de la compuerta. Henderson, por el contrario, concluye que esto se debe a la manera como se desarrolla la capa límite a partir del plano de la compuerta.

Con base en las experiencias de Gentilini, Knapp propone una ecuación para calcular el coeficiente de velocidad en compuertas verticales con descarga libre, en función de a/H . Para ser congruentes con los anteriores desarrollos, el autor de este libro ha modificado la ecuación para que la dependencia sea con a/y_1 :

$$C_v = 0.960 + 0.0979 \frac{a}{y_1} \quad (6.27)$$

Tiene como límite superior $C_v = 1$, el cual se alcanza para $a/y_1 = 0.408$. Por lo que

respecta a los coeficientes de gasto, Cofré y Buchheister (Ref. 24) comprobaron y ampliaron los resultados obtenidos por Henry (Fig. 6.16). Se incluye aquí el caso de las compuertas con descarga ahogada en el que se ha calculado el coeficiente de gasto C_d para que siga siendo válida la Ec. (6.25). Aquí, dicho coeficiente depende de y_1/a y además de y_3/a , esto es, del tirante y_3 en el canal aguas abajo de la compuerta. El criterio para estudiar el tipo de descarga se presentará en el Vol. 2 de este libro.

Como se observa en las Figs. 6.15 y 6.16, los resultados para $\theta = 90^\circ$ en la primera concuerdan bastante con los de descarga libre en la segunda.

Con los coeficientes de gasto para descarga libre (tomados de la Fig. 6.16) y los de velocidad, calculados de la ecuación (6.27), se obtuvieron los correspondientes a C_e , a partir de la Ec. (6.26b), los cuales mostraron sólo ligeras variaciones en torno al valor 0.62. Para fines prácticos, se recomienda un valor $C_e = 0.62$ para cualquier relación y_1/a , inclusive para descarga sumergida.

De acuerdo con la Fig. 6.13 la distancia

horizontal, desde el plano de una compuerta vertical hasta la sección contraída, alcanza el valor

$$L = \frac{a}{C_c} \quad (6.28)$$

Según Joukowski y Vedérnikov, esta distancia debe ser igual a la abertura de la compuerta.

En compuertas planas verticales, cuando $y_1/a < 1.35$, se inicia el despegamiento del chorro desde el canto de la compuerta, además del arrastre del aire al interior, por lo que en ese caso deja de ser válida la Ec. (6.25).

Cuando el labio inferior de la compuerta se redondee, como en la Fig. 6.17, los coeficientes de contracción y de gasto —correspondientes a la arista afilada— se multiplican por un coeficiente ϵ (Ref. 28) que varía de acuerdo con la relación r/a como sigue:

r/a	0.1	0.2	0.3	0.4
ϵ	1.03	1.13	1.25	1.25

donde r es el radio con el cual se redondea la arista.

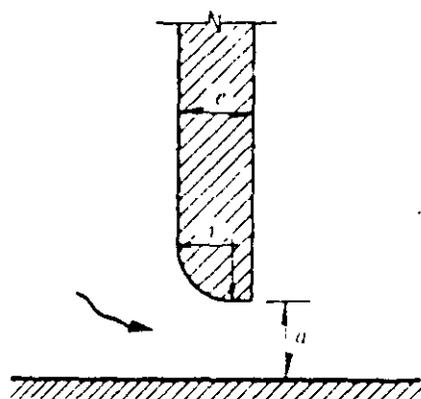


Figura 6.14. Redondeo en el labio inferior de una compuerta.

Para compuertas radiales Knapp encon-

tró una ecuación, semejante a la (6.27), para calcular el coeficiente de velocidad el cual queda también en función del ángulo de inclinación θ , de la tangente al labio inferior de la compuerta (Fig. 6.12). Dicha ecuación modificada es:

$$C_v = 0.960 + (0.001615 \theta^\circ - 0.0475) \frac{a}{y_1} \quad (6.29)$$

donde C_v tiene nuevamente como límite superior $C_v = 1$. Esta ecuación proporciona valores muy aproximados en compuertas planas e inclinadas al mismo ángulo θ .

En la Fig. 6.18 se presentan los valores del coeficiente de gasto obtenidos por Gentilini en compuertas radiales con descarga libre y en función del ángulo θ y de la relación y_1/a , que son aplicables a la Ec. (6.25).

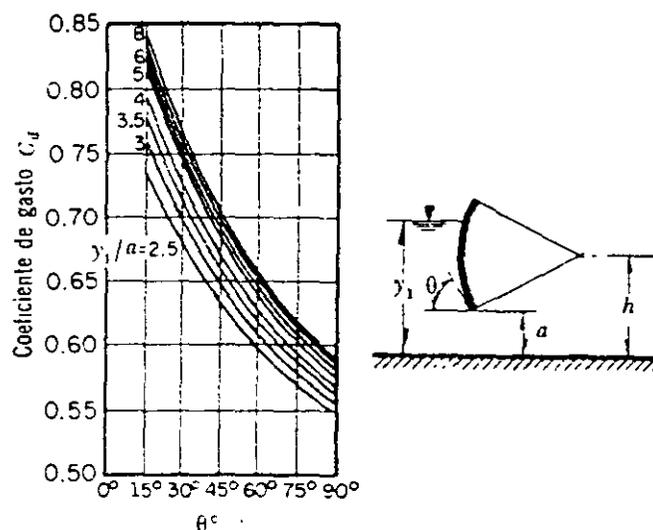


Figura 6.18. Coeficientes de gasto en compuertas radiales con descarga libre, según Gentilini.

Con los valores de C_v de la Ec. (6.29), así como de C_d de la Fig. 6.18, con el auxilio de la Ec. (6.26b) se puede obtener el valor de C_c para cada condición de func

namiento, que se puede suponer válido cuando la descarga es sumergida. Knapp (Ref. 23) ha desarrollado una ecuación teórica para calcular C_c ; sin embargo, sus resultados no son congruentes con las experiencias. Henderson (Ref. 27), por su parte, propone una ecuación empírica aproximada para el mismo objeto:

$$C_c = 1 - 0.00833 \theta^\circ + 0.0000445 (\theta^\circ)^2 \quad (6.30)$$

Quizá las experiencias de Toch (Ref. 29) hasta ahora son las más completas en lo que se refiere a las compuertas radiales, pues incluyen el caso de descarga sumergida. En la Fig. 6.19 se presentan los valores del coeficiente de gasto obtenidos por Toch, los cuales se han relacionado con y_1/r , a/r , y_3/r para cada valor de h/r , tanto en descarga libre como en sumergida, donde h es la altura del perno de la compuerta. Esta forma de presentación resulta más cómoda de utilizar que la de Gentilini. Los coeficientes son por supuesto aplicables a la Ec. (6.25).

Sin embargo, Toch no presenta los re-

sultados correspondientes al coeficiente de contracción, en cuyo caso se recomienda calcularlos en forma semejante a las Ecs. (6.26b), (6.29) y Fig. 6.19, tomando en cuenta que

$$\cos \theta = \frac{h}{r} - \frac{a}{r}$$

y

$$\frac{a}{y_1} = \frac{a/r}{y_1/r}$$

Problema 6.3. En la compuerta del problema 4.16 calcular: a) la abertura que debe tener para descargar un gasto de $7 \text{ m}^3/\text{seg}$; b) con esta misma abertura, calcular el gasto que descarga cuando el tirante, aguas abajo, es $y_3 = 1.80 \text{ m}$.

Solución a). De la Ec. (6.25) la abertura de la compuerta es:

$$a = \frac{Q}{C_d b \sqrt{2g y_1}} =$$

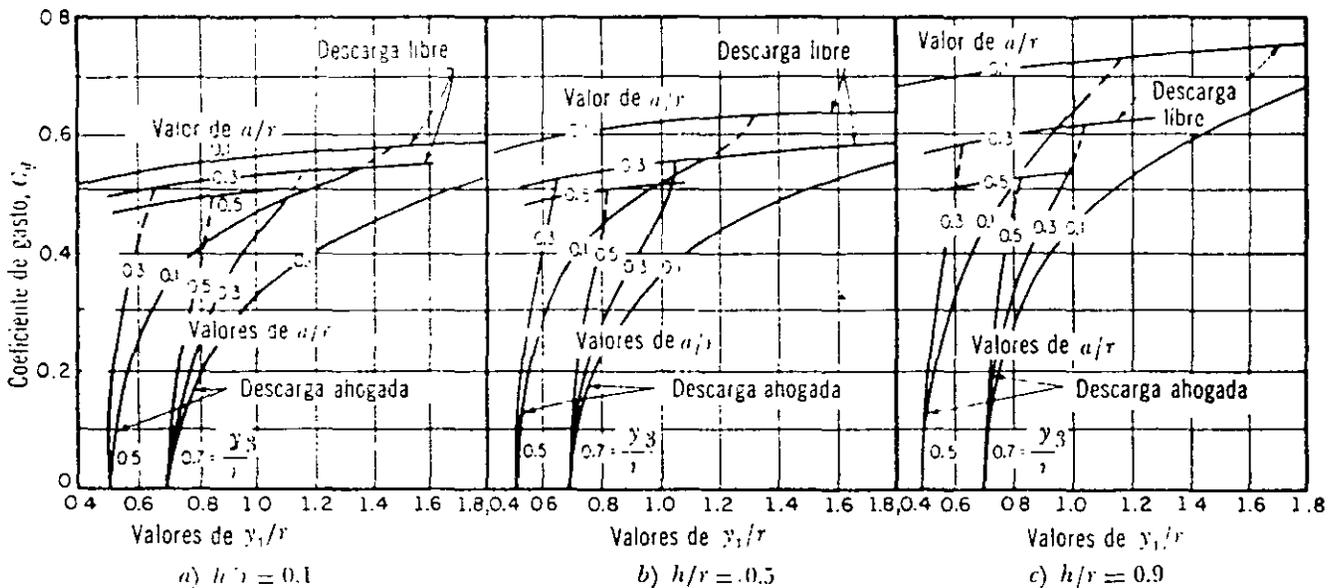


Figura 6.19. Coeficiente de gasto de una compuerta radial, según A. Toch (Ref. 29).

$$= \frac{7}{C_d \times 3 \sqrt{19.6 \times 2.4}} = \frac{0.34}{C_d}$$

Suponiendo un coeficiente de gasto para descarga libre $C_d = 0.56$, se tiene que

$$a = \frac{0.34}{0.56} = 0.607$$

entonces

$$\frac{y_1}{a} = \frac{2.4}{0.607} = 3.95$$

Para esta relación, de la Fig. 6.16 un coeficiente de gasto más aproximado es 0.57; la abertura correcta de la compuerta vale:

$$a = \frac{0.34}{0.57} \approx 0.60 \text{ m}$$

De la Ec. (6.27) se obtiene un coeficiente de velocidad $C_v = 0.985$ y de la ecuación (6.26b), $C_c = 0.62$, siendo el tirante en la sección contraída:

$$y_2 = 0.62 \times 0.60 = 0.372 \text{ m}$$

Solución b). Con $y_1/a = 4$, $y_3/a = 1.80/0.60 = 3$; de la Fig. 6.16 el coeficiente de gasto es $C_d = 0.39$ y el gasto descargado por la compuerta vale entonces:

$$Q = 0.39 \times 3 \times 0.6 \sqrt{2 \times 9.8 \times 2.40} = 4.81 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema 6.4. Una compuerta radial de 4.5 m de radio y altura del perno $h = 4$ m debe descargar un gasto por unidad de ancho $q = 2.60 \text{ m}^3/\text{seg}/\text{m}$, con un tirante, aguas arriba, $y_1 = 4.50$ m y otro, aguas abajo, $y_3 = 3.45$ m. a) Calcular la abertura de la compuerta para las condiciones de descarga ahogada; b) Calcular el gasto, por unidad de ancho de la compuerta, con

la misma abertura si la descarga es libre, así como los coeficientes de contracción y gasto correspondientes.

Solución a). Siendo la relación $h/r = 0.89$, se puede usar la gráfica al extremo derecho de la Fig. 6.19. Además, $y_1/r = 1$ y $y_3/r = 0.767$.

De la Ec. (6.25) la abertura de la compuerta es

$$a = \frac{q}{C_d \sqrt{2g y_1}} = \frac{2.60}{C_d \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.5}} = \frac{0.277}{C_d}$$

Para una relación $a/r = 0.2$ y, por extrapolación, $C_d = 0.41$; resulta que

$$a = \frac{0.277}{0.41} = 0.675 \text{ m.}$$

Un valor más exacto de $\frac{a}{r} = \frac{0.675}{4.5} = 0.15$ y $C_d = 0.37$, siendo

$$a = 0.75 \text{ m}$$

Solución b). Para esta abertura, tenemos:

$$\frac{a}{r} = \frac{0.75}{4.5} = 0.167$$

$$\cos \theta = 0.89 - 0.167 = 0.723$$

$$\theta \approx 44^\circ$$

y con

$$\frac{a}{y_1} = \frac{a/r}{y_1/r} = \frac{0.167}{1} = 0.167$$

entonces:

$$C_v = 0.96 + (0.001615 \times 45^\circ - 0.0475) 0.167 = 0.964$$

Además, de la Fig. 6.19c, el coeficiente para descarga libre es 0.68 y el gasto

$$q = 0.68 \times 0.75 \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.5} = 4.79 \text{ m}^3/\text{seg}/\text{m}.$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{2} \frac{a}{y_1} \left(\frac{C_d}{C_v} \right)^2 = \frac{0.167 \times 0.704^2}{2} = 0.0498$$

y de la Ec. (6.26b) resulta:

$$C_c = 0.0498 + \sqrt{0.00248 + 0.496} = 0.755$$

6.8 Orificios de pared gruesa

Cuando la pared en el contorno de un orificio no tiene aristas afiladas, el orificio es *de pared gruesa* o *tubo corto* (Fig. 6.20).

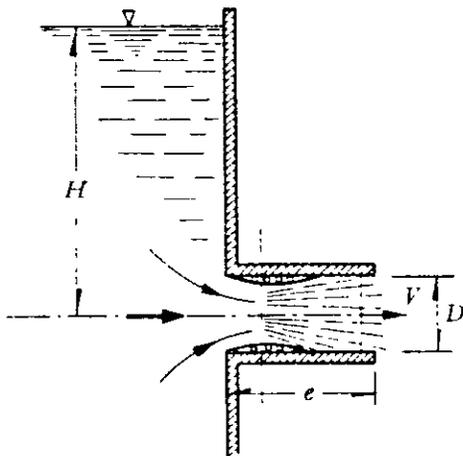


Figura 6.20. Descarga a través de un tubo corto.

En este tipo de orificio se observa que el chorro, una vez que ha pasado la sec-

ción contraída, tiene todavía espacio dentro del tubo para expandirse y llenar la totalidad de la sección. Entre la sección contraída y la final ocurre un rápido descenso de la velocidad acompañado de turbulencia y fuerte pérdida de energía.

Por un razonamiento análogo al de los orificios de pared delgada, se concluye que la velocidad de salida del líquido se puede calcular con la misma Ec. (6.2):

$$V = C_v \sqrt{2gH}$$

donde el coeficiente de velocidad C_v se reduce ahora hasta el valor 0.82, encontrado experimentalmente por diferentes investigadores, cuando $e/D = 3$. Además, siendo ahora $C_c = 1$ la ecuación (6.4) del gasto es la misma, con la única circunstancia que $C_d = C_v = 0.82$, esto es, el gasto es, aproximadamente, un tercio mayor que en un orificio de pared delgada. Lo anterior se explica debido a que en la sección contraída se forma un vacío parcial con presión ligeramente menor que la atmosférica e incrementa el valor efectivo de la carga H . De la Ec. (6.16) la pérdida de energía es ahora:

$$\Delta h_r = \left(\frac{1}{(0.82)^2} - 1 \right) \frac{V^2}{2g} = 0.49 \frac{V^2}{2g}$$

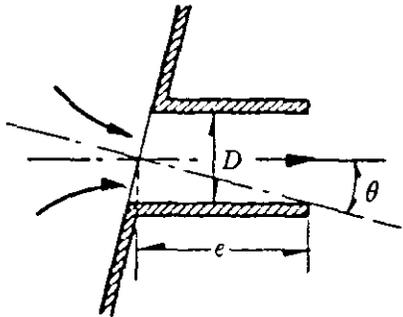
Cuando $e/D > 3$, empieza a tener influencia la fricción y el tubo corto debe considerarse como un conducto a presión, incluyendo todas sus pérdidas de energía.

En la tabla 6.2 se presentan los coeficientes de gasto C_d para aplicarse en la Ec. (6.4), valores que han sido encontrados por diferentes investigadores para los tubos cortos más comunes en la práctica.

TABLA 6.2. Coeficientes de gasto para diferentes tipos de orificios de pared gruesa

a) Tubo corto.

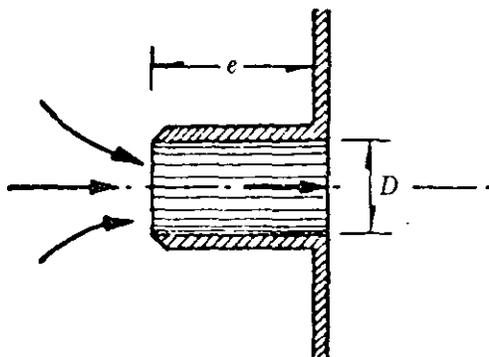
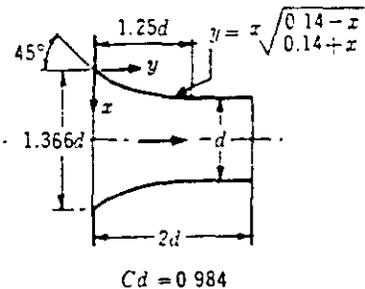
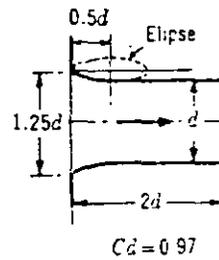
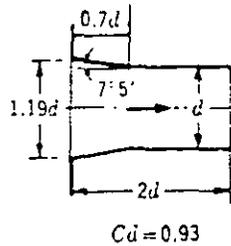
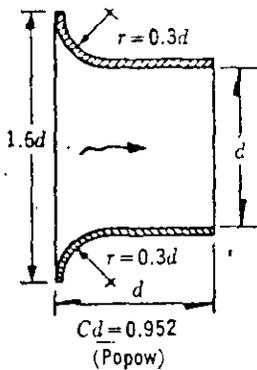
Para $\theta = 0^\circ$ (Domínguez, Eytelwein y Schurinu).



$e/d \leq 0.5$	1	1.5	2.0	2.5	3	5	
C_d	0.60	0.75	0.78	0.79	0.80	0.82	0.79
e/d	12	25	36	50	60	75	100
C_d	0.77	0.71	0.68	0.64	0.60	0.59	0.55

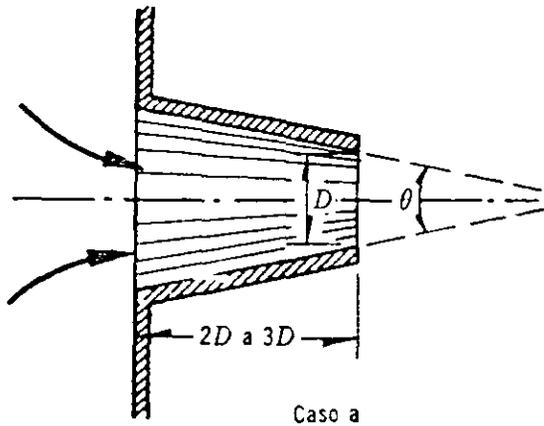
Para $e/D = 3$ el coeficiente C_d , según Weisbach, se obtiene de los siguientes valores en función de θ :

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
C_d	0.82	0.80	0.78	0.76	0.75	0.73	0.72

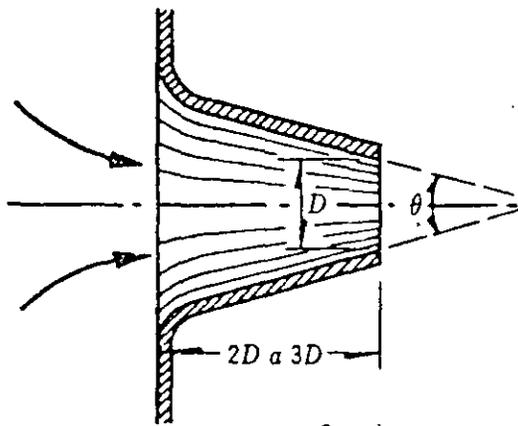


b) Tubos cilíndricos reentrantes (tubos de Borda)

	C_d	C_v	C_c
$e > 3D$	0.71	0.71	1.00
$e < 3D$	0.51	0.97	0.53



Caso a



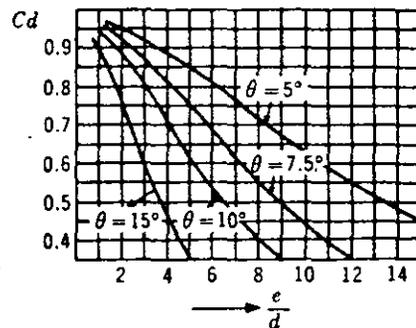
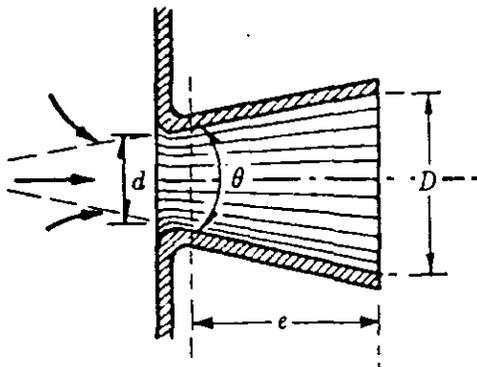
Caso b

c) Tubos convergentes para aristas agudas y redondeadas, respectivamente.

θ	0°	4°	8°	12°	16°	30°
C_d (Caso a)	0.82	0.916	0.942	0.95	0.941	0.92
C_d (Caso b)	0.96	0.96	0.959	0.955	0.941	0.92

	45°	60°	75°	90°	
	0.87	0.82	0.78	0.74	←(Caso a)
	0.87	0.82	0.78	0.74	←(Caso b)

d) Tubos divergentes. Si $\theta \geq 8^\circ$ la vena líquida no llena toda la sección y ocurre la separación. En el caso de aristas redondeadas el coeficiente C_d , referido a la sección de salida, se obtiene de la siguiente gráfica, donde



el coeficiente de gasto máximo se obtiene para $\theta = 5^\circ$.

VERTEDORES

7.1 Introducción

Cuando la descarga del líquido se efectúa por encima de un muro o una placa y a superficie libre, la estructura hidráulica en la que ocurre se llama vertedor; éste puede presentar diferentes formas según las finalidades a que se destine. Así, cuando la descarga se efectúa sobre una placa con perfil de cualquier forma, pero con arista aguda, el vertedor se llama de pared delgada; por el contrario, cuando el contacto entre la pared y la lámina vertiente es más bien toda una superficie, el vertedor es de pared gruesa. Ambos tipos pueden utilizarse como dispositivos de aforo en laboratorio o en canales de pequeñas dimensiones, pero el segundo puede emplearse como obra de control o de excedencias en una presa y también de aforo en canales grandes.

El punto o arista más bajo de la pared en contacto con la lámina vertiente, se conoce como cresta del vertedor; el desnivel entre la superficie libre, aguas arriba del vertedor y su cresta, se conoce como carga (Fig. 7.1).

7.2 Vertedores de pared delgada

7.2.1 Ecuación general del gasto

Considere un vertedor de pared delgada y sección geométrica, como se observa en la Fig. 7.1, cuya cresta se encuentra a una altura w , medida desde la plantilla del canal de alimentación. El desnivel entre la superficie inalterada del agua, antes del vertedor y la cresta, es h y la velocidad uniforme de llegada del agua es V_0 , de tal modo que:

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} \quad (7.1)$$

Si w es muy grande, $V_0^2/2g$ es despreciable y $H = h$.

De acuerdo con la nomenclatura de la Fig. 7.1b, el perfil de las formas usuales de vertedores de pared delgada se puede representar por la ecuación general:

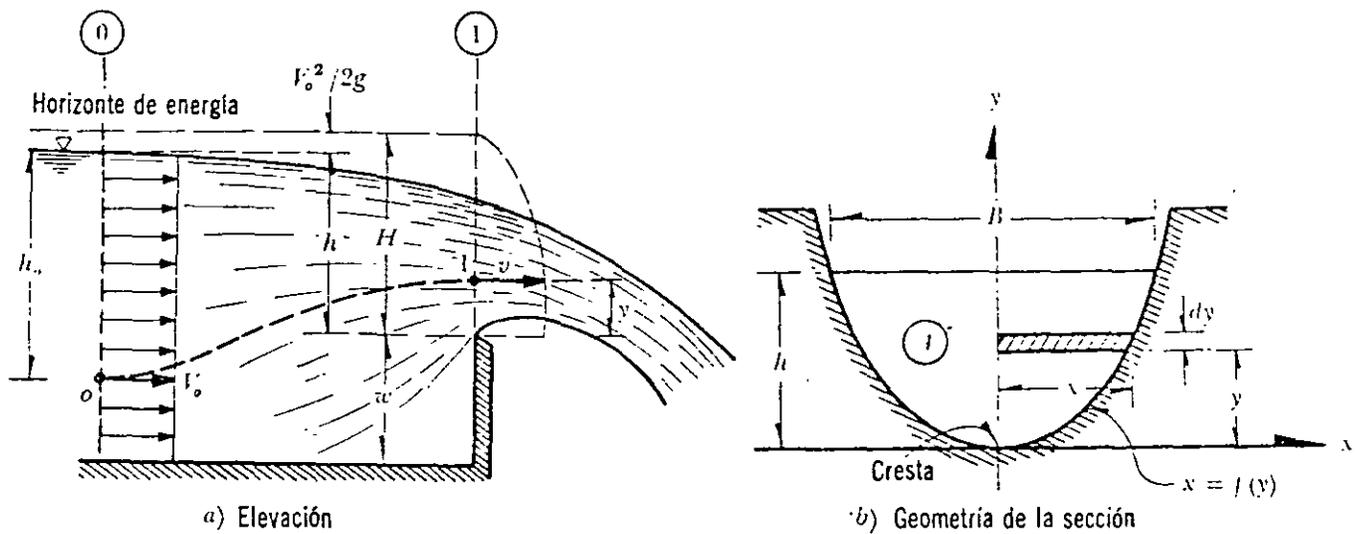


Figura 7.1. Vertedor de pared delgada de forma general.

$$x = f(y) \tag{7.2}$$

que, normalmente, será conocida.

Aplicando la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente entre los puntos 0 y 1, de la Fig. 7.1, se tiene:

$$h_0 + \frac{V_0^2}{2g} = h_0 - h + y + \frac{v^2}{2g}$$

o bien

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} = y + \frac{v^2}{2g} \tag{7.3a}$$

Si $V_0^2/2g$ es despreciable, la velocidad en cualquier punto de la sección 1 vale

$$v = \sqrt{2g(h-y)} \tag{7.3b}$$

El gasto a través del área elemental, de la Fig. 7.1b, es entonces:

$$dQ = 2 \sqrt{2g} \mu x \sqrt{h-y} dy$$

donde μ considera el efecto de contrac-

ción de la lámina vertiente. El gasto total vale:

$$Q = 2 \sqrt{2g} \mu \int_0^h x (h-y)^{\frac{1}{2}} dy \tag{7.4}$$

que sería la ecuación general del gasto para un vertedor de pared delgada, la cual es posible integrar si se conoce la forma del vertedor.

En la deducción de la ecuación se han considerado hipótesis únicamente aproximadas, como la omisión de la pérdida de energía que se considera incluida en el coeficiente μ , pero quizá la más importante que se ha supuesto, es la que en todos los puntos de la sección 1 las velocidades tienen dirección horizontal y con una distribución parabólica, Ec. (7.3b), efectuando la integración entre los límites 0 y h . Esto equivale a que en la sección mencionada el tirante debe alcanzar la magnitud h . Por otra parte, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos 0 y 1 se ha supuesto una distribución hidrostática de presiones. Esto implica una distribución uniforme de las velocidades V_0 y v para todos los puntos de las sec-

ciones 0 y 1, respectivamente, lo cual está en contraposición con la distribución parabólica que se ha supuesto para derivar la Ec. (7.3b).

La red de flujo de un vertedor rectangular (Fig. 10.12) muestra que las líneas de corriente sobre la cresta poseen una curvatura que modifica la distribución de presiones hidrostáticas, según la ley dada por la Ec. (7.3). En la Fig. 7.2 se presenta la verdadera distribución, tanto de presiones como de velocidades. La red de flujo indica, a su vez, que la lámina vertiente sufre contracciones en su frontera superior e inferior, por lo que existe una sección contraída X sobre el punto de máxima altura alcanzado por la frontera inferior de la lámina vertiente, donde se presentan velocidades cuyas componentes horizontales se apartan de la ley parabólica; además, hay una distribución de presiones también distinta de la hidrostática, como se muestra en la Fig. 7.2.

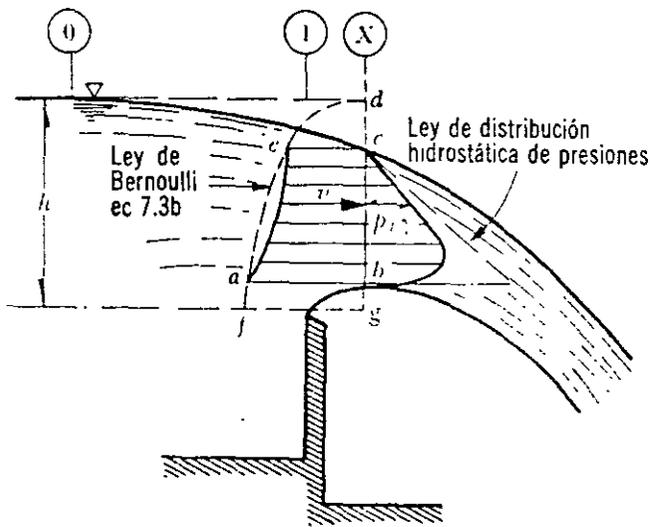


Figura 7.2. Aspecto real del flujo.

Por último, el coeficiente μ de gasto que aparece en la Ec. (7.4) representa la relación entre el área sombreada a, b, c, e de la Fig. 7.2, correspondiente a la verdadera distribución de velocidades; y la $f,$

$g, d,$ correspondiente a la parábola de distribución hipotética de velocidades, a saber:

$$\mu = \frac{\text{área achurada } a, b, c, e}{\text{área de la parábola } f, g, d}$$

Debe ser de tipo experimental y próximo a 0.60, que corresponde al de un orificio de pared delgada.

7.2.2 Vertedor rectangular

Para esta forma de vertedor la ecuación (7.2) es del tipo $x = b/2$ donde b es la longitud de cresta (Fig. 7.3).

Luego, la Ec. (7.4) es:

$$Q = -\mu \sqrt{2g} b \int_0^h (h-y)^{\frac{1}{2}} (-dy)$$

y efectuando la integración es:

$$Q = -\frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} b [(h-y)^{3/2}]_0^h$$

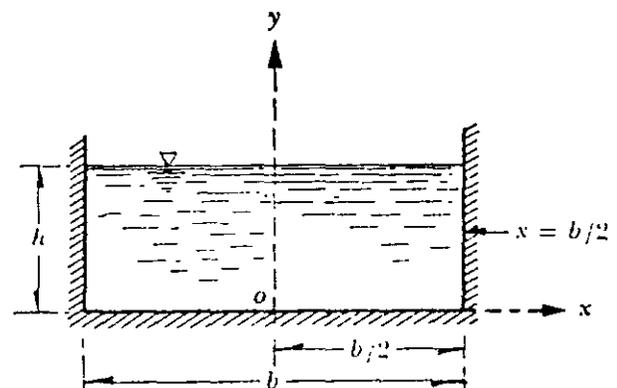


Figura 7.3. Vertedor rectangular.

y finalmente:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu b h^{3/2} \quad (7.5)$$

que es la ecuación general para calcula

el gasto en un vertedor rectangular cuya carga de velocidad de llegada es despreciable. En los países que utilizan el sistema inglés de unidades se acostumbra agrupar los términos $\frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu$, en un solo coeficiente C , de tal manera que

$$Q = C b h^{3/2} \quad (7.6)$$

Esta ecuación es más sencilla que la (7.5) si bien no es homogénea, es decir, que el coeficiente C tiene las dimensiones $[L^{1/2} T^{-1}]$ y vale:

$$C = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu = 2.952 \mu \quad (7.7)$$

A pesar de que las ecuaciones (7.5) o (7.6) valen únicamente en el caso de una velocidad de llegada despreciable, diferentes autores han investigado y obtenido fórmulas experimentales para evaluar μ , en las cuales se incluya dicho efecto para permitir que tales ecuaciones conserven su validez. En efecto, cuando el vertedor rectangular se encuentra al centro de un canal, de ancho B mayor que la longitud de cresta b del vertedor (Fig. 7.4), se pro-

ducen contracciones laterales semejantes a las de un orificio. En la Ec. (7.5) se utiliza la carga total $H = h + \frac{V^2}{2g}$ (ecuación 7.6a) en lugar de h :

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} b \left(h + \frac{V_0^2}{2g} \right)^{3/2} \quad (7.8a)$$

Esta ecuación se puede también escribir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} \mu \left(1 + \frac{V_0^2}{2gh} \right)^{3/2} \sqrt{2g} b h^{3/2} = \\ &= \kappa \sqrt{2g} b h^{3/2} \end{aligned} \quad (7.8b)$$

El paréntesis en la ecuación anterior se puede desarrollar en forma aproximada como sigue:

$$\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh} \right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{V_0^2}{2gh} + \dots$$

Como el área en la sección 0 es $A_0 = B(h + w)$, resulta que

$$\frac{V_0^2}{2gh} = \frac{Q^2}{2gB^2(h+w)^2h}$$

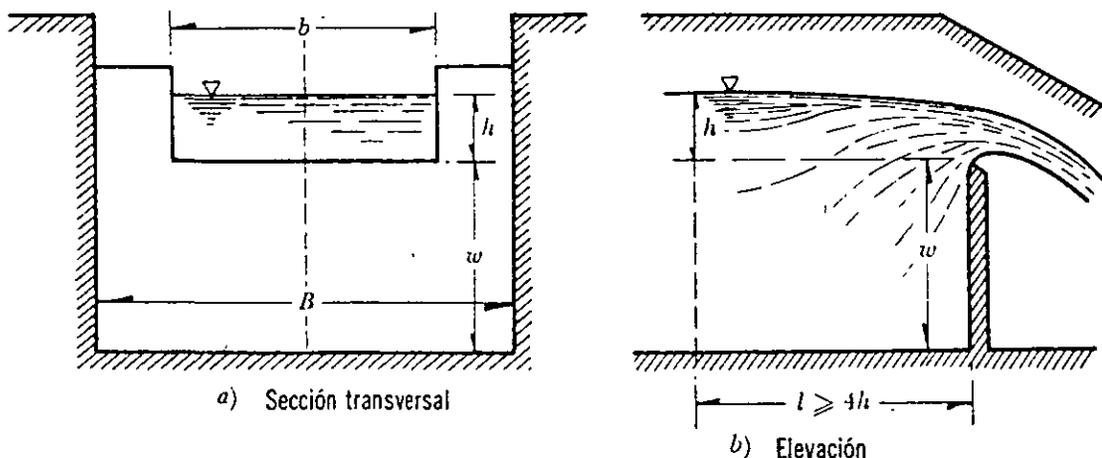


Figura 7.4. Vertedor rectangular con contracciones laterales.

Además,

$$\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \frac{Q^2}{2gB^2(h+w)^2h}$$

Por otra parte, de la Ec. (7.8 b) se tiene:

$$Q^2 = \kappa^2 2g b^2 h^3$$

que substituida en la anterior resulta:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} &= \\ &= 1 + \frac{3}{2} \frac{\kappa^2 2g b^2 h^3}{2gB^2(h+w)^2h} = \\ &= 1 + \frac{3}{2} \kappa^2 \left(\frac{b}{B}\right)^2 \left(\frac{h}{h+w}\right)^2 \end{aligned}$$

Substituyendo en la Ec. (7.8b) resulta finalmente:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu \\ \left[1 + \frac{3}{2} \kappa^2 \left(\frac{b}{B}\right)^2 \left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right] b h^{3/2} & \quad (7.9) \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que el gasto se puede seguir calculando con la Ec. (7.5) siempre que en el coeficiente μ se incluyan los efectos de b/B y de w .

Cuando el ancho del canal de llegada es igual que el de la cresta (esto es, que el vertido se efectúa sin contracciones laterales) es suficiente hacer $b = B$ en la Ec. (7.9) para llegar a conclusiones semejantes en el uso de la Ec. (7.5).

En la tabla 7.1 se presentan las fórmulas experimentales más conocidas para calcular μ de la Ec. (7.5) aplicables a vertedores con contracciones laterales o sin ellas, que tienen validez únicamente cuando la superficie inferior de la lámina vertiente se ventila correctamente. Cuando no es el caso, en la Ref. 7 se pueden obtener

fórmulas adecuadas y, en la Ref. 24, una descripción detallada del funcionamiento para estas condiciones.

Además de respetar los límites de aplicación de las fórmulas, para obtener mejores resultados en la medición de gastos con vertedores rectangulares se recomienda que la cresta del vertedor sea perfectamente horizontal, con un espesor no mayor de 2 mm en bisel y la altura desde el fondo del canal $0.30 \text{ m} \leq w \leq 2h$. El plano del vertedor debe ser normal al flujo y la cara, aguas arriba, perfectamente vertical, plana y lisa. El vertedor deberá instalarse al centro de un canal recto que tenga una longitud mínima de diez veces la longitud de cresta del vertedor y un área de, por lo menos, $8bh$. Si el vertedor tiene contracciones, la distancia entre los extremos del vertedor y el costado del canal no debe ser menor que 0.30 m. Si no tiene contracciones laterales debe hacerse una ventilación eficiente de la superficie inferior de la lámina vertiente. En cualquier caso, la carga sobre la cresta se debe medir en un punto a , por lo menos, cuatro veces la carga máxima hacia aguas arriba.

Cuando el vertedor rectangular sin contracciones laterales tiene una inclinación θ con respecto a la horizontal (Fig. 7.5), el coeficiente de gasto μ de la tabla 7.1 debe multiplicarse por un coeficiente C_θ que depende del ángulo de inclinación θ y que, según Boussinesq (Ref. 30), es:

$$C_\theta = 1.1951 - 0.3902 \frac{\theta^\circ}{180^\circ} \quad (7.10)$$

Esta ecuación es válida únicamente en el caso de que la lámina se encuentre bien ventilada y presenta mayor interés en el caso que la cresta sea móvil; por ejemplo, es conveniente una compuerta articulada en el apoyo inferior.

TABLEA 7.1. Fórmulas experimentales para determinar el coeficiente de gasto μ aplicable a la Ec. (7.5) para vertedores rectangulares con contracciones laterales o sin ellas. En el caso de vertedores sin contracciones laterales haga $b = B$, en las fórmulas.

Autor	Fórmula	Límites de aplicación	Observaciones
Hegly (Ref. 30) (1921)	$\mu = \left[0.6075 - 0.045 \left(\frac{B-b}{B} \right) + \frac{0.0041}{h} \right] \times$ $\times \left[1 + 0.55 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{h}{h-w} \right)^2 \right]$	$0.10 \text{ m} \leq h \leq 0.60 \text{ m}$ $0.50 \text{ m} \leq b \leq 2.00 \text{ m}$ $0.20 \text{ m} \leq w \leq 1.13 \text{ m}$	El primer límite de aplicación es el más importante. Para $h/b > 0.13$ tiene mayor precisión que la fórmula SIAS
Sociedad de Ingenieros y Arquitectos Suizos (1924) (Ref. 9) (Fórmula SIAS)	$\mu = \left[0.578 + 0.037 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \pm \frac{3.615 - 3(b/B)^2}{1000h + 1.6} \right] \times$ $\times \left[1 + 0.5 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{h}{h+w} \right)^2 \right]$	$0.025 \leq h \leq 0.80 \text{ m}$ $b \leq 0.3 B$ $w \geq 0.30 \text{ m}$ $\frac{h}{w} \leq 1$ en el caso de contracciones laterales	Para vertedores sin contracciones laterales los límites son: $0.025 \text{ m} \leq h \leq 0.80 \text{ m}$ $0.30 \text{ m} \leq w$ $\frac{h}{w} \leq 1$ Para $h/b \leq 0.13$, es más precisa que la de Hegly.
Hamilton-Smith	$\mu = 0.616 \left(1 - \frac{b}{10B} \right)$	$0.075 \text{ m} \leq h \leq 0.60 \text{ m}$ $0.30 \text{ m} \leq b$ $0.30 \text{ m} \leq w$ $h \leq \frac{w}{2}$ $b \leq (B - 2h)$ $\frac{h}{b} \leq 0.5$	Si $B(h+w) < 10bh$, se deberá reemplazar en la Ec. (7.5) el valor de h por h' donde $h' = h + 1.4 \left(\frac{V_0^2}{2g} \right)$ donde: $V_0 = \left[\frac{Q}{B(h+w)} \right]$ es la velocidad de llegada
Francis (Ref. 31)	$\mu = 0.623 \left[1 - 0.1 \ln \frac{h}{b} \right] \left[\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh} \right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2gh} \right)^{3/2} \right]$	$0.18 \text{ m} \leq h \leq 0.50 \text{ m}$ $2.40 \text{ m} \leq b \leq 3.00 \text{ m}$ $0.60 \text{ m} \leq w \leq 1.50 \text{ m}$ $b \geq 3h$	$V_0 = \frac{Q}{B(h+w)}$ velocidad de llegada. $n = 2$ en vertedores con contracciones laterales $n = 0$ en vertedores sin contracciones laterales.
Rehbock (1929) (Ref. 9)	$\mu = \left[0.6035 + 0.0813 \left(\frac{h - 0.0011}{w} \right) \right] \left[1 + \frac{0.0011}{h} \right]^{3/2}$	$0.01 \text{ m} \leq h \leq 0.80 \text{ m}$ $b \geq 0.30 \text{ m}$ $w \geq 0.06 \text{ m}$ $\frac{h}{w} \leq 1$	Vale sólo para vertedores sin contracciones laterales. Es muy precisa y de las más utilizadas, por su sencillez.

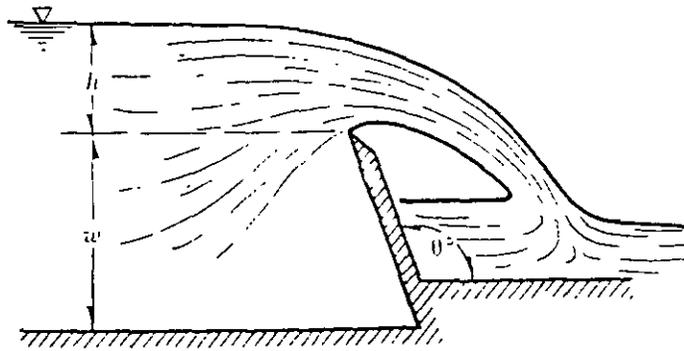


Figura 7.5. Vertedor inclinado.

Problema 7.1. Calcular el gasto en un vertedor rectangular de pared delgada en un canal del mismo ancho de la cresta $b = 2.5$ m, que trabaja con una carga $h = 0.42$ m, cuya cresta se encuentra a $w = 1.00$ m del piso del canal.

Solución. De la fórmula de Hegly (tabla 7.1) para $b = B$, tenemos:

$$\mu = \left[0.6075 + \frac{0.0041}{0.42} \right]$$

$$\left[1 + 0.55 \left(\frac{0.42}{0.42 + 1.00} \right)^2 \right] = 0.647$$

$$C = 2.952 \times 0.647 = 1.910$$

Substituyendo en la Ec. (7.5):

$$Q = 1.910 \times 2.5 \times (0.42)^{3/2} = 1.299 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Utilizando la fórmula de Rehbock resulta:

$$Q = 2.952 \left(0.6035 + 0.0813 \frac{0.42 + 0.0011}{1.00} \right)$$

$$\left(1 + \frac{0.0011}{0.42} \right)^{3/2} 2.5 (0.42)^{3/2}$$

Finalmente se tiene

$$Q = 1.286 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Esto es, una diferencia de 1.1% entre ambos resultados.

Problema 7.2. Calcular la carga necesaria en el vertedor del problema anterior, si se desea un gasto de $2 \text{ m}^3/\text{seg}$ en las mismas condiciones de descarga libre.

Solución. Se procede por tanteos suponiendo que con $C \approx 1.92$ en la Ec. (7.6), el gasto es aproximadamente $Q = 1.92 \times 2.5 \times h^{3/2}$.

Se empezará a calcular con

$$h = \left(\frac{2}{1.92 \times 2.5} \right)^{2/3} = 0.56 \text{ m}$$

Como C aumenta con h^2 , es de esperarse que sea mayor que $C = 1.91$ del problema anterior; así, para este caso los valores h deben ser menores de 0.56 m.

De lo anterior, con $h = 0.555$ m, de la fórmula Hegly, resulta $C = 1.944$, siendo el gasto:

$$Q = 1.944 \times 2.5 (0.555)^{3/2} = 2.009 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el valor buscado.

Problema 7.3. ¿Cuál sería el gasto en el problema 7.1 si el vertedor tuviera una inclinación $\theta = 45^\circ$ (Fig. 7.5)?

10-25

Solución. De la Ec. (7.10) tenemos que

$$C_{\theta} = 1.1951 - 0.3902 \times \frac{45}{180} = 1.0976$$

y resulta:

$$Q = 1.0976 \times 1.299 = 1.426 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema 7.4. Calcular la descarga libre de un vertedor rectangular de 3 m de longitud con una carga de 0.60 m, ubicado en un canal de forma rectangular que tiene 5 m de ancho, en el que la elevación de la cresta es de 0.80 m sobre el fondo.

Solución. La relación h/b es

$$\frac{h}{b} = \frac{0.60}{3} = 0.2 > 0.13$$

luego, de la fórmula de Hegly:

$$\mu = \left(0.6075 - 0.045 \frac{5 - 3}{5} + \frac{0.0041}{0.60} \right) \left[1 + 0.55 \left(\frac{3}{5} \right)^2 \left(\frac{0.60}{0.6 + 0.8} \right)^2 \right]$$

$$\mu = 0.618$$

y, finalmente,

$$Q = 2.952 \times 0.618 \times 3 \times (0.60)^{3/2}$$

$$Q = 2.544 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para utilizar la fórmula de Francis es necesario calcular la carga de velocidad de llegada, lo cual significa conocer previamente el gasto y seguir un procedimiento de tanteos. Suponiendo, por ejemplo, que Q fuera el calculado anteriormente, entonces

$$V_0 = \frac{2.56}{5(0.8 + 0.6)} = 0.366 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0.366)^2}{19.6} = 0.0068 \text{ m}$$

$$Q = 2.952 \times 0.623 \left[1 - 0.2 \frac{0.60}{3} \right]$$

$$\left[\left(1 + \frac{0.0068}{0.6} \right)^{3/2} - \left(\frac{0.0068}{0.6} \right)^{3/2} \right]$$

$$3 \times (0.60)^{3/2}$$

Por último:

$$Q = 2.501 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el valor antes obtenido.

Problema 7.5. Sobre una placa con las dimensiones que se presentan en la figura 7.6 se produce un vertido superior y una descarga por el orificio del fondo. El ancho de la placa es de 1.00 m y es igual al del canal. Determinar cuál es el gasto de vertido si el del orificio es $Q_o = 0.3 \text{ m}^3/\text{seg}$, suponiendo que en ambos la descarga es libre.

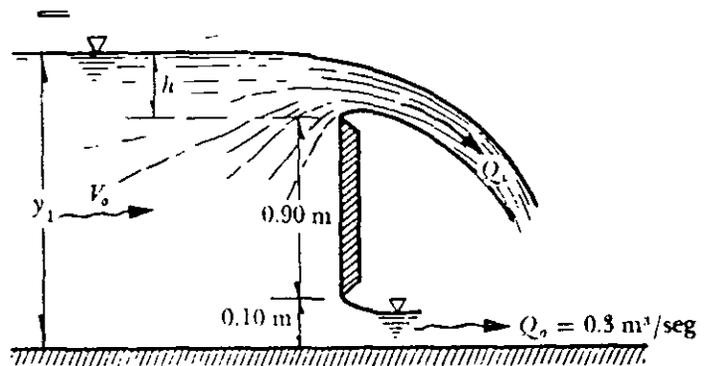


Figura 7.6. Del problema 7.5.

Solución. Es necesario determinar el tirante total que debe existir, aguas arriba de la placa, para lo cual se debe suponer inicialmente un coeficiente de gasto $C_u = 0.595$ para el orificio (Fig. 6.16) en la Ec. (6.25), de la que

$$y_1 = \left(\frac{Q_0}{C_d b a \sqrt{2g}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{0.30}{0.595 \times 1 \times 0.10 \sqrt{19.62}} \right)^2$$

$y_1 \approx 1.30 \text{ m}$

Nuevamente se calcula $y_1/a = 13$; de la Fig. 6.16, se tiene que $C_d = 0.595$, que es el resultado anterior. La carga sobre la cresta sería entonces:

$$h = 1.30 - 0.90 - 0.10 = 0.30 \text{ m}$$

Puesto que la descarga del vertedor se hace sin contracciones laterales, la ecuación de Rehbock sería válida, a saber:

$$Q_v = 2.952 \left(0.6035 + 0.0813 \frac{0.301}{1} \right)$$

$$\left(1 + \frac{0.0011}{0.30} \right)^{3/2} \times 1 \times (0.30)^{3/2}$$

$$Q_v = 0.306 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La velocidad de llegada para el gasto total es

$$V_0 = \frac{0.606}{1 \times 1.30} = 0.466 \text{ m/seg}$$

y la carga de velocidad de llegada:

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0.466)^2}{19.6} = 0.01 \text{ m}$$

que es insignificante en comparación de y_1 , siendo entonces válidos los resultados anteriores.

Problema 7.6. Si en la instalación de la Fig. 7.7 el gasto que proporciona la bomba es $Q = 1.00 \text{ m}^3/\text{seg}$ y la longitud de cresta de ambos vertedores es $b = 1.30 \text{ m}$, determinar las condiciones de funcionamiento para los siguientes casos:

a) Para $d = 0.50 \text{ m}$ (diámetro del orificio), calcular los gastos en los vertedores Q_A y Q_B .

b) Conocidos $Q_A = 0.900 \text{ m}^3/\text{seg}$ y $Q_B = 0.100 \text{ m}^3/\text{seg}$, calcular el diámetro d del orificio.

En ambos casos, de la fórmula de Francis, el coeficiente de gasto de los vertedores es

$$C_d = 2.952 \mu = 1.84$$

y el del orificio:

$$C_d = 0.60$$

Solución a) Si el área del orificio es $A = 0.7854 \times (0.50)^2 = 0.1963 \text{ m}^2$ y el gasto descargado por el mismo, es función de ΔH , de acuerdo con la Ec. (6.21) da

$$Q_0 = 0.6 \times 0.1965 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times \Delta h} =$$

$$= 0.522 \sqrt{\Delta h} \quad (a)$$

y el gasto descargado por los vertedores será:

$$Q_A = 1.84 \times 1.3 h_A^{3/2} = 2.392 h_A^{3/2} \quad (b)$$

y

$$Q_B = 2.392 h_B^{3/2} \quad (c)$$

Además:

$$Q_0 = Q_B \quad (d)$$

$$Q_A + Q_B = 1.00 \quad (e)$$

$$0.10 + h_A = h_B + \Delta h \quad (f)$$

Primer tanteo. La variación del gasto en el orificio es menos sensible que en los vertedores al cambiar los niveles en

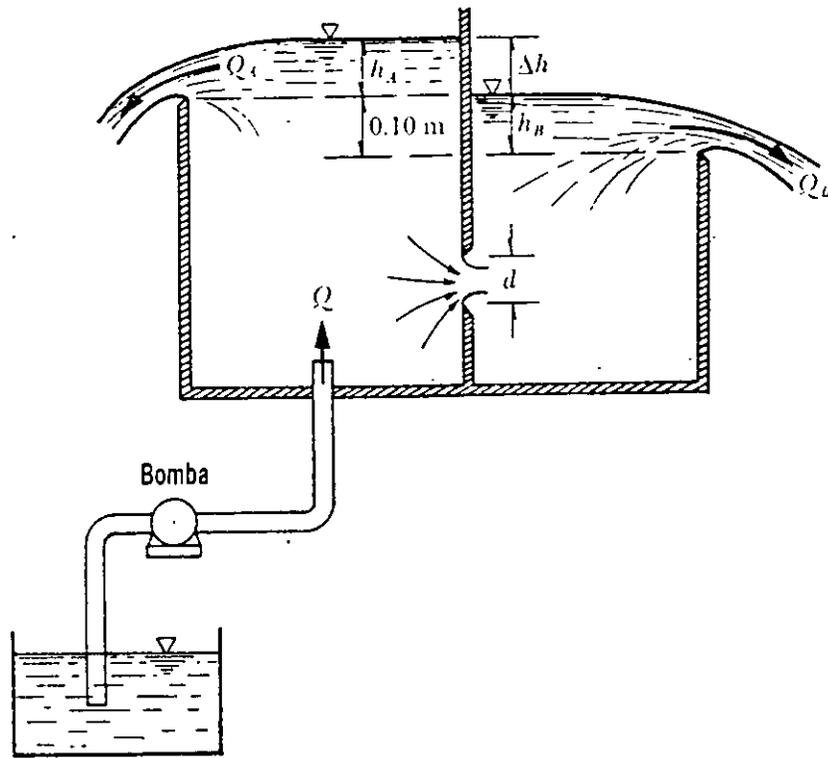


Figura 7.7. Del problema 7.6.

los tanques; por lo tanto, el gasto Q_B será, seguramente, menor que Q_A . De lo anterior se deduce que $\Delta h > 0.10$ m, pero no mayor que

$$h_A = \left(\frac{1}{2.39}\right)^{2/3} = 0.56 \text{ m}$$

Si

$$\Delta h = 0.30 \text{ m}$$

De la Ec. (a) se obtiene:

$$Q_0 = Q_B = 0.522 \sqrt{0.3} = 0.286 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y por lo tanto de la Ec. (e) resulta:

$$Q_A = 1 - 0.286 = 0.714 = 2.392 h_A^{3/2}$$

De la Ec. (b) tenemos:

$$h_A = \left(\frac{0.714}{2.392}\right)^{2/3} = 0.447$$

y, finalmente, de la Ec. (f)

$$h_B = \left(\frac{0.286}{2.392}\right)^{2/3} = 0.243 \text{ m}$$

Un valor más aproximado para Δh sería:

$$\Delta h = 0.10 + 0.447 - 0.243 = 0.304 \text{ m}$$

que es prácticamente el supuesto, luego el tanteo es correcto. De no haber resultado así, se hubiera repetido el tanteo, siendo de cualquier manera muy rápida la convergencia, a saber:

$$Q_A = 0.714 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_B = 0.286 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Solución b) Resulta más sencillo y las ecuaciones aplicables son de (b) a (f), pero no la (a); entonces, de las Ecs. (b) y (c) resulta:

$$h_A = \left(\frac{0.900}{2.39} \right)^{2/3} = 0.52 \text{ m}$$

$$h_B = \left(\frac{0.100}{2.39} \right)^{2/3} = 0.12 \text{ m}$$

De la Ec. (f):

$$\Delta h = 0.10 + 0.52 - 0.12 = 0.50 \text{ m}$$

y para el orificio, su diámetro es

$$0.10 = 0.6 \times \pi d^2/4 \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.50}$$

$$d = \sqrt{\frac{0.10}{1.475}} = 0.26 \text{ m}$$

7.2.3 Vertedor triangular

Cuando el vertedor es de sección triangular (Fig. 7.8), simétrica respecto del eje vertical y con ángulo en el vértice θ , el valor x de la Ec. (7.2) es:

$$x = y \tan \frac{\theta}{2}$$

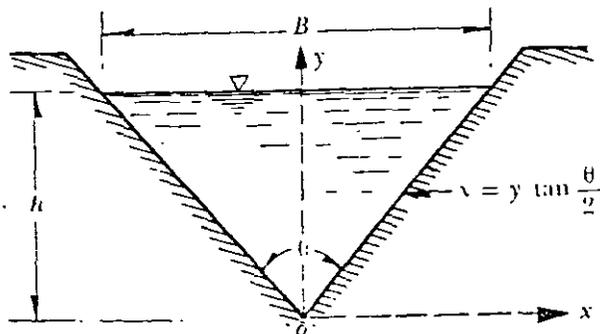


Figura 7.8. Vertedor triangular.

y la ecuación del gasto (7.4) es

$$Q = 2 \sqrt{2g} \mu \tan(\theta/2) \int_0^h (h-y)^{1/2} y dy$$

la cual se puede integrar por un procedimiento de sustitución. En efecto, hacien-

do $z = h - y$, entonces $y = h - z$, $dy = -dz$. Los límites de integración serían: para $y = 0$, $z = h$ y para $y = h$, $z = 0$; la ecuación anterior sería entonces:

$$Q = -2\sqrt{2g} \mu \tan(\theta/2) \int_h^0 z^{1/2} (h-z) dz = -2\sqrt{2g} \mu \tan(\theta/2) \left[\frac{2hz^{3/2}}{3} - \frac{2}{5}z^{5/2} \right]_h^0$$

Tomando límites y substituyendo nuevamente a z , se obtiene

$$Q = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) \mu h^{5/2} \quad (7.11a)$$

o bien

$$Q = C h^{5/2} \quad (7.11b)$$

donde C depende de θ , μ y g . Así, por ejemplo, con $\theta = 90^\circ$ vemos que

$$C = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \mu = 2.362 \mu$$

En la tabla 7.2 se presentan las fórmulas experimentales más conocidas para calcular μ ó C de las Ecs. (7.11) y son válidas para diferentes ángulos θ en el vértice.

Si w es pequeña, el vertedor triangular puede funcionar ahogado. Si h_1 representa la carga, aguas abajo (Fig. 7.11), el coeficiente de gasto con descarga libre deberá multiplicarse por un coeficiente k independiente del ángulo θ , que vale:

$$k = \sqrt{1 - \frac{h_1}{h}} \left[1 + \frac{h_1}{2h} + \frac{3}{8} \left(\frac{h_1}{h} \right)^2 \right] \quad (7.12)$$

Los vertedores triangulares se recomiendan para el aforo de gastos inferiores

TABLA 7.2. Fórmulas experimentales para determinar los coeficientes de gasto μ o C aplicables a las Ecs. (7.11a) o (7.11b) para vertedores triangulares con diferentes ángulos θ en el vértice. B representa el ancho del canal de llegada y w el desnivel entre el vértice del vertedor y el fondo de dicho canal. En cualquier caso, las fórmulas se expresan en el sistema MKS

Autor	Fórmula	Límites de aplicación	Observaciones
Universidad Católica de Chile (Ref. 24).	$C = \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) \mu K$	Vale para $15^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ La profundidad w no tiene influencia en el coeficiente de gasto.	μ , coeficiente experimental que depende de h y θ según la Fig. 7.9. K es otro coeficiente que depende de B/h según la Fig. 7.10 y vale 1 si $B/h \geq 5$ para $\theta = 90^\circ$ y si $B/h \geq 2.75$ para $\theta = 45^\circ$.
Gourley y Crimp (Ref. 31).	$C = \frac{1.32 \tan(\theta/2)}{h^{0.02}}$	Vale para ángulos θ de 45° , 60° y 90° y para profundidades w grandes.	Esta fórmula, substituida en la ecuación (7.11b), conduce a la ecuación: $Q = 1.32 \tan(\theta/2) h^{2.48}$
Hegly (1921) (Ref. 30).	$\mu = \left[0.5812 + \frac{0.00375}{h} \right] \left\{ 1 + \left[\frac{h^2}{B(h+w)} \right]^2 \right\}$	Vale para $\theta = 90^\circ$ $0.10 \text{ m} \leq h \leq 0.50 \text{ m}$ y profundidades w pequeñas	Es de las fórmulas más precisas para vertedores con ángulo en el vértice $\theta = 90^\circ$.
Barr (1909) (Ref. 30).	$\mu = 0.565 + \frac{0.0087}{h^{0.5}}$	Vale para $\theta = 90^\circ$ con cargas $0.05 \text{ m} \leq h \leq 0.25 \text{ m}$ $w \geq 3h$ $B \geq 8h$	El valor medio $\mu = 0.593$ que resulta de esta fórmula corresponde bastante al resultado de Thompson (1861) y que substituido en la Ec. (7.11a), conduce a la ecuación: $Q = 1.4 h^{3/2}$
Koch (1923) Yarnall (1926)	$\mu = 0.58$	Vale para $\theta = 90^\circ$ con cargas muy grandes. $w \geq 3h$ $B \geq 8h$	No se limita con precisión el rango de validez.
Heyndrickx (Ref. 30).	$\mu = [0.5775 + 0.214 h^{1.00}] \dots$ $\left\{ 1 + \left[\frac{h^2}{B(h+w)} \right] \right\}$	Vale para $\theta = 60^\circ$ y cargas normales.	Es bastante precisa.

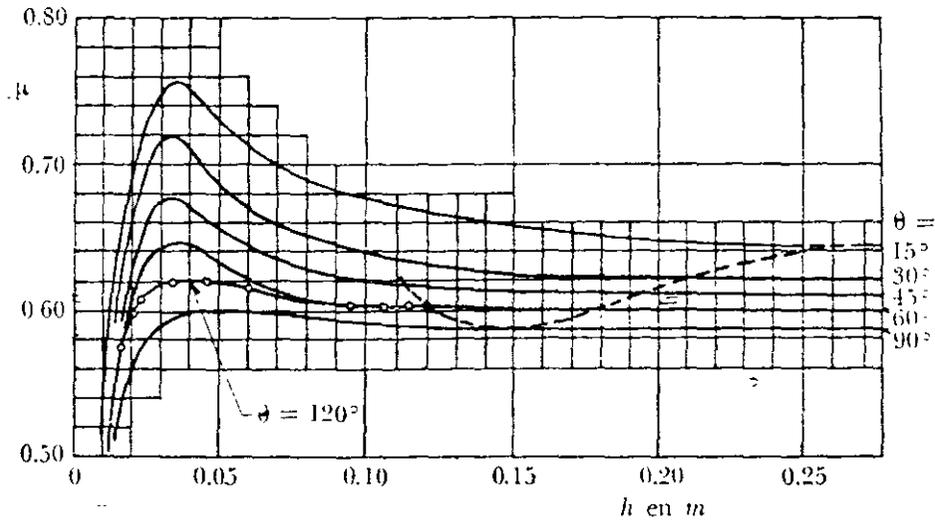


Figura 7.9. Coeficiente de gasto μ de vertedores triangulares en la fórmula de la Universidad Católica de Chile (Ref. 24).

a 30 lt/seg y cargas superiores a 6 cm y hasta de 60 cm. Su precisión es mejor que la del rectangular, para gastos pequeños, e incluso para gastos comprendidos entre 40 y 300 lt/seg. Para gastos mayores es recomendable el rectangular debido a que el triangular es más sensible a cualquier cambio en la rugosidad de la placa y, también, porque requiere mayor exac-

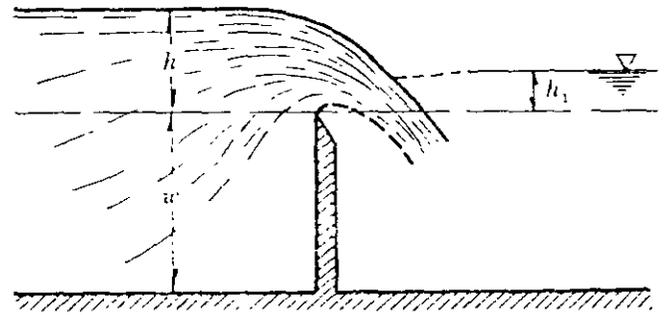


Figura 7.11. Descarga ahogada de un vertedor triangular.

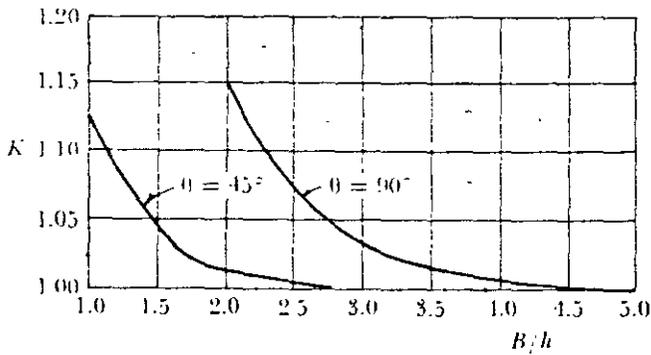


Figura 7.10. Valores de K en la fórmula de la Universidad Católica de Chile para vertedores triangulares (Ref. 24).

titud en la medición de las cargas, pues el gasto varía con la potencia 5/2 de la misma.

7.2.4 Vertedor trapecial

El gasto de un vertedor trapecial, como el mostrado en la Fig. 7.12, se puede calcular suponiendo la suma del gasto correspondiente a uno rectangular con longitud de cresta b y el triangular formado con las dos orillas. Esto es, de las Ecs. (7.5) y (7.11a) se tiene:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu_r b h^{3/2} + \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan(\theta/2) \mu_t b^{5/2}$$

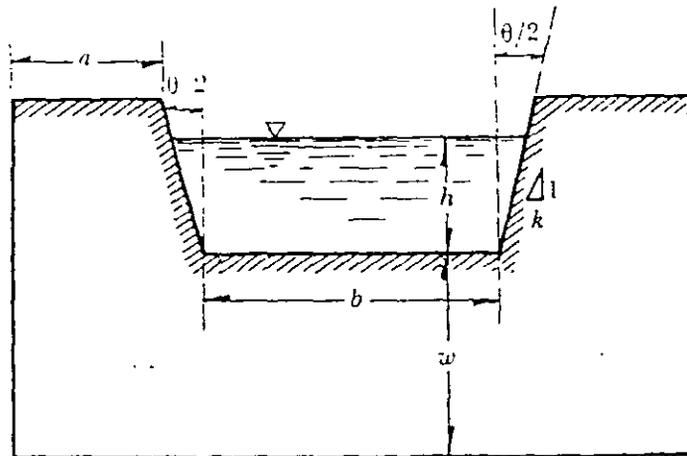


Figura 7.12. Vertedor trapecial.

o bien en la forma:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \left[\mu_r + \frac{4}{5} \frac{h}{b} \mu_t \tan(\theta/2) \right] b h^{3/2}$$

y

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu b h^{3/2} \quad (7.13)$$

donde μ agrupa todos los términos del paréntesis.

Debido a que el vertedor trapecial tiene escaso interés, ha sido poco estudiado. Únicamente se le ha dado importancia al llamado de Cipolletti que tiene el trazo de un trapecio regular con taludes en los lados $k = 0.25$ (0.25 horizontal y uno vertical) y que encuentra aplicación como aforador en canales. La geometría de este vertedor ha sido obtenida de manera que las ampliaciones laterales compensen el gasto disminuido por las contracciones laterales de un vertedor rectangular, de longitud de cresta b en igualdad de condiciones de carga. Sin embargo, este hecho no ha sido plenamente comprobado. Se ha encontrado experimentalmente que el coeficiente u de un vertedor Cipolletti vale 0.63 y el gasto se determina con la ecuación:

$$Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \times 0.63 b h^{3/2} = 1.861 b h^{3/2} \quad (7.14)$$

la cual es válida si $0.08 \text{ m} \leq h \leq 0.60 \text{ m}$; $a \geq 2h$; $b \geq 3h$; $w \geq 3h$ y, además, para anchos de canal de 30 a $60h$. Cuando no se satisfacen estas condiciones, se puede substituir $H = h + V_0^2/2g$ por h en la Ec. (7.14), para tomar en cuenta el efecto de la velocidad de llegada.

7.2.5 Vertedor circular

Stauss (1931) derivó una ecuación teórica para determinar el gasto en vertedores de forma circular (Fig. 7.13).

De la ecuación de la circunferencia, en la Fig. 7.13, se tiene que $x = \sqrt{y(D-y)}$, y de la Ec. (7.4) el gasto total es:

$$Q = 2 \sqrt{2g} \mu \int_0^h [y(D-y)(h-y)]^{1/2} dy$$

o bien

$$Q = 2 \sqrt{2g} \mu D^{5/2} \times \int_0^h [(y/D)(1 - y/D)(h/D - y/D)]^{1/2} d(y/D)$$

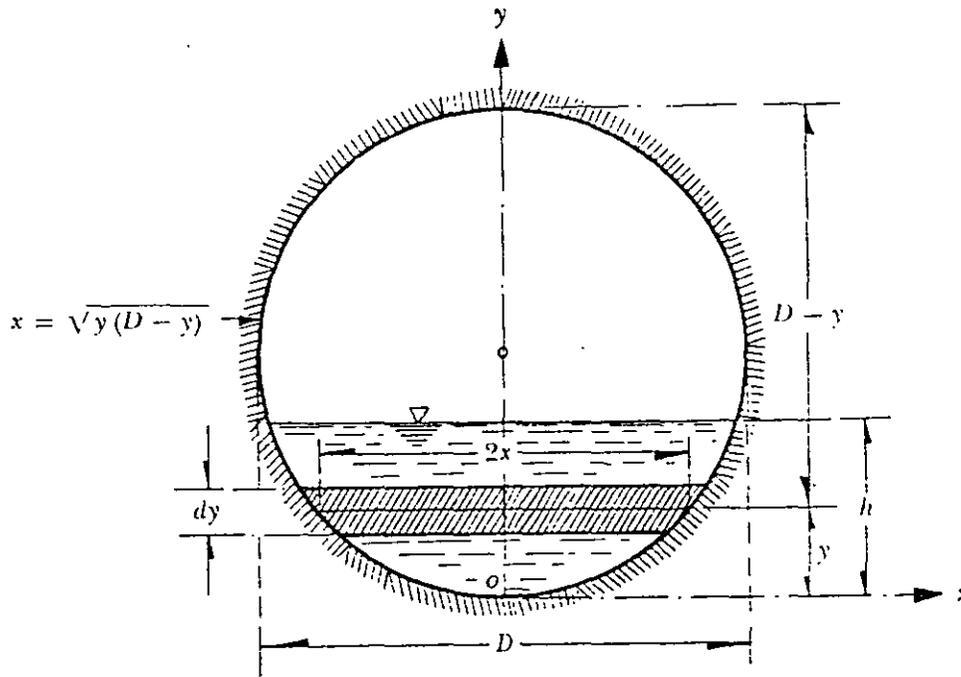


Figura 7.13. Vertedor circular.

Con $t = h/D$ y cambiando la variable de integración $z = y/D$, resulta:

$$\mu = 0.555 + \frac{D}{110h} + 0.041 \frac{h}{D}$$

$$Q = 2\sqrt{2g}\mu D^{5/2} \int_0^t \sqrt{z(1-z)(t-z)} dz$$

la cual vale para $0.20 \text{ m} \leq D \leq 0.30 \text{ m}$
 $0.075 < h/D < 1$, y para distancias mínimas a la frontera del canal de llegada de $3D$ desde los cantos del vertedor.

La integración de la ecuación anterior conduce a

$$Q = \frac{4}{15} \sqrt{2g} \times [2(1-t+t^2)E - (2-3t+t^2)K] \mu D^{5/2}$$

donde E y K son dos integrales elípticas.

La ecuación anterior resulta, finalmente:

$$Q = \phi \mu D^{5/2} \quad (7.15)$$

donde D se expresa en decímetros y Q se obtiene en lt/seg. En esta fórmula ϕ es la función de h/D dada por la tabla 7.3 y μ el coeficiente de gasto determinado de la fórmula de Stauss y Jorissen (Ref. 30), a saber:

TABLA 7.3. Coeficiente ϕ de la Ec. (7.15)

h/D	ϕ	h/D	ϕ
0.05	0.0272	0.55	2.8205
0.10	0.1072	0.60	3.2939
0.15	0.2380	0.65	3.7900
0.20	0.4173	0.70	4.3047
0.25	0.6428	0.75	4.8336
0.30	0.9119	0.80	5.3718
0.35	1.2223	0.85	5.9133
0.40	1.5713	0.90	6.4511
0.45	1.9559	0.95	6.9756
0.50	2.3734	1.00	7.4705

Ramponi propone una fórmula aproximada para calcular ϕ en la Ec. (7.15), como sigue:

$$\varphi = 10.12 (h/D)^{1.975} - 2.66 (h/D)^{8.78}$$

En caso de que el vertedor tenga diámetros hasta de 1.00 m y que no cumpla con las especificaciones de distancia del mismo a la pared del canal, se recomienda la fórmula de Ramponi para calcular μ en la Ec. (7.15):

$$\mu = \left(0.350 + 0.002 \frac{D}{h} \right) \left[1 + \left(\frac{A}{A_0} \right)^2 \right]$$

donde

- A área del vertedor comprendida entre la cresta y el nivel correspondiente a la carga h ;
- A_0 área hidráulica del canal de llegada;
- h carga sobre la cresta, expresada en m.

Cuando la cresta del vertedor tiene forma circular en planta (Fig. 7.14), según Gourley (Ref. 9) el gasto (en sistema métrico) vale

$$Q = C l h^{1.42}$$

donde h es la carga sobre la cresta, l la longitud de desarrollo de la misma ($l = 2\pi D$) y C un coeficiente que depende del diámetro del vertedor (tabla 7.4).

TABLA 7.4. Coeficiente C en la fórmula de Gourley.

D	0.172	0.252	0.343	0.485	0.648
C	1.471	1.477	1.492	1.502	1.522

Estos resultados son válidos cuando $h < D/5$, de lo contrario se ahoga el vertedor.

Los vertedores de planta circular que descargan del interior hacia afuera, son

útiles como aforadores en pozos artesianos para extraer agua del subsuelo (figura 7.15). En la Universidad de Cornell se hicieron pruebas con este tipo de vertedores para diámetros de tubos de 0.3 a 0.5 m y se encontró que su funcionamiento es efectivamente el de un vertedor cuando la relación $h/D < 0.027$; asimismo, se comporta como un chorro que sale de una tubería (flujo fuente) cuando $h/D = 1.05$, y existe un escurrimiento de transición entre ambos valores.

En el laboratorio del Instituto de Ingeniería de la UNAM, C. Cruickshank (Ref. 32) realizó investigaciones con objeto de comprobar dichos resultados y ampliar el intervalo de valores de h/D hasta 0.0015. Comprobó que el flujo de vertedor se presenta para relaciones $h/D < 0.2$ y el de chorro para relaciones $h/D > 2$, con el de transición entre los dos valores.

Para el flujo tipo vertedor se recomienda utilizar la Ec. (7.5), donde b es la longitud de cresta igual a la circunferencia interior del tubo; esto es, $b = \pi D$ y μ un coeficiente experimental que depende del tipo de vertido que se presente. En efecto, en un vertedor de este tipo es difícil obtener flujo de lámina libre si no se toman precauciones para ventilarla y, en ocasiones —para cargas pequeñas— resulta muy difícil lograr que la lámina de agua se desprenda de la pared del cilindro. Se presentan así los tres tipos de lámina: adherente, deprimida y libre, encontradas por Bazin en vertedores rectangulares (Ref. 24); cada tipo de lámina depende del diámetro de la tubería. Cuando la lámina es libre el coeficiente μ vale 0.63 y 0.705 cuando es deprimida. Si resulta imposible evitar que la lámina se adhiera, el vertido se produce normalmente en condiciones cercanas a un vertedor de cresta ancha, siendo para esa condición $\mu = 0.60$.

En la Fig. 7.16 se presenta un resumen de lo encontrado por diferentes investiga-

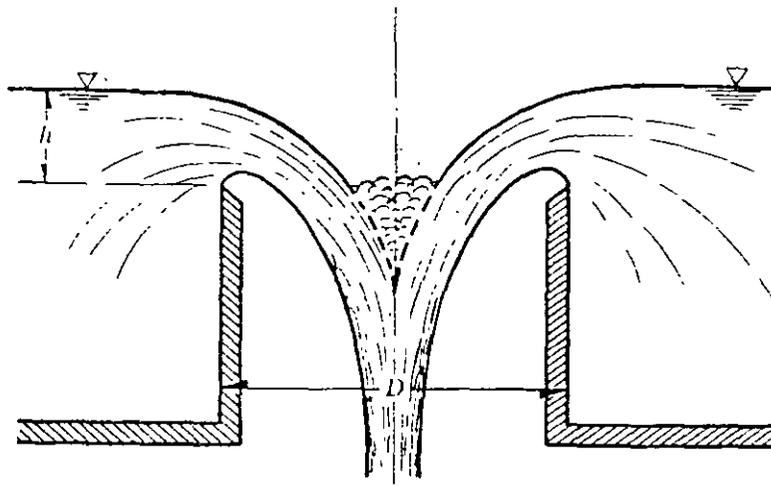


Figura 7.14. Vertedor de planta circular.

dores (Refs. 24, 32 y 33) para las tres condiciones de flujo mencionadas, en las que la selección de μ depende de los parámetros h/D y Q^2/ghD^4 . Con la relación h/D y la curva de trazo continuo de la Fig. 7.16, se calcula el gasto en términos de Q^2/ghD^4 , para las tres condiciones de flujo.

Siempre que exista la condición de vertido, conviene ventilar la lámina del agua después de que ha pasado el brocal del pozo, para evitar la condición de lámina deprimida cuyo coeficiente μ no está bien definido.

Para el funcionamiento de chorro la variación coincide con la ley teórica de proporcionalidad de su altura con el cuadrado de la velocidad. La curva con trazo continuo, de la Fig. 7.16, indica que para $h/D > 2$ el parámetro Q^2/ghD^4 se vuelve constante e igual a uno, aproximadamente.

7.2.6 Vertedor parabólico

La geometría de un vertedor de forma parabólica, como el mostrado en la figura 7.17, sigue la ecuación $x = \sqrt{y/a}$.

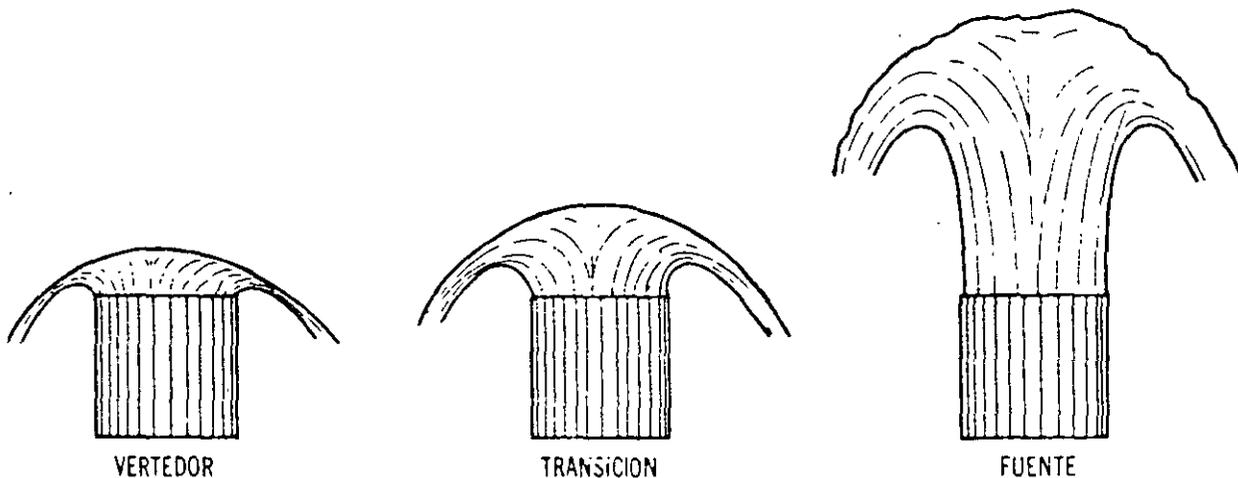


Figura 7.15. Tipos de funcionamiento del flujo fuente en pozos.

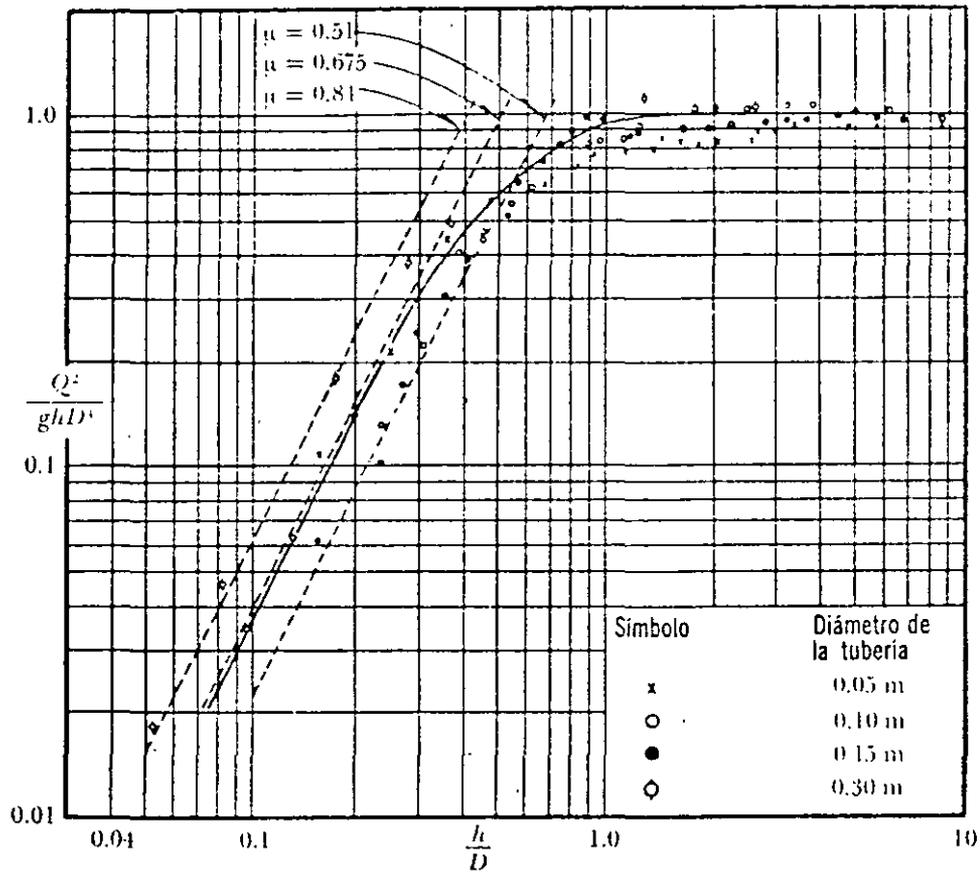


Figura 7.16. Flujo fuente en pozos; resumen de resultados experimentales.

De la Ec. (7.4) el gasto es:

$$Q = \frac{2}{a^{1/2}} \sqrt{2g} \mu \int_0^h (hy - y^2)^{1/2} dy$$

Resolviendo la integral resulta

$$Q = \frac{2}{a^{1/2}} \sqrt{2g} \mu \times \left[\frac{1}{2} (y - h/2) (hy - y^2)^{1/2} + h^2/8 \operatorname{ang} \operatorname{sen} \frac{y-h/2}{h/2} \right]_0^h$$

$$Q = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2g} \mu}{a^{1/2}} h^2 = C h^2 \quad (7.16)$$

donde:

$$C = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2g} \mu}{a^{1/2}} \quad (7.17)$$

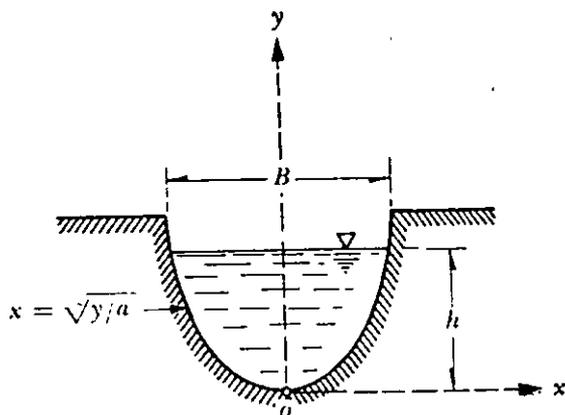


Figura 7.17. Vertedor parabólico.

Las experiencias presentadas por Mostkow (Ref. 7) indican que el coeficiente C

se puede evaluar de la fórmula experimental siguiente:

$$C = \frac{2.088}{a^{0.458}} \quad (7.18)$$

que es prácticamente el valor teórico de la Ec. (7.17); comparando las Ecs. (7.17) y (7.18), el coeficiente μ es

$$\mu = \frac{a^{1/2}}{0.7854 \sqrt{2g}} C = \frac{2.658}{\sqrt{2g}} a^{0.012} \quad (7.19)$$

TABLA 7.5. Coeficientes C y μ de la Ec. (7.19) para vertedores parabólicos según Mostkow (Ref. 7).

a	C	μ
0.625	2.6	0.592
0.5	2.9	0.591
0.333	3.6	0.598
0.25	4.1	0.595
0.20	4.6	0.592
0.167	5.0	0.589
0.143	5.4	0.588
0.125	5.7	0.587
0.111	6.1	0.585
0.10	6.4	0.582

En la tabla 7.5 se encuentran tabulados los coeficientes C y μ indicados por Mostkow, en términos de a , para vertedores parabólicos.

Americo experimentó con un vertedor parabólico de ecuación $y = 9.85 x^2$, obteniendo para el gasto (en sistema métrico) la siguiente ecuación (Ref. 30):

$$Q = 0.606 h^{1.98}$$

que se aproxima a la Ec. (7.16), si bien C es ahora dependiente también de h .

Si se calcula C de la ecuación general (7.18), para $a = 9.85$, resulta el valor 0.682 con una discrepancia de 11 % respecto del obtenido por Americo.

7.2.7. Vertedores proporcionales

Esta clase de vertedor, llamado también *Sutro*, es aquél cuya forma hace que el gasto de vertido sea proporcional a la carga h . Por esta característica de ley de descarga, su interés estriba en considerarlo en un laboratorio como vertedor de aforo o en canales pequeños, cuando se desea este tipo de ley para facilitar las medi-

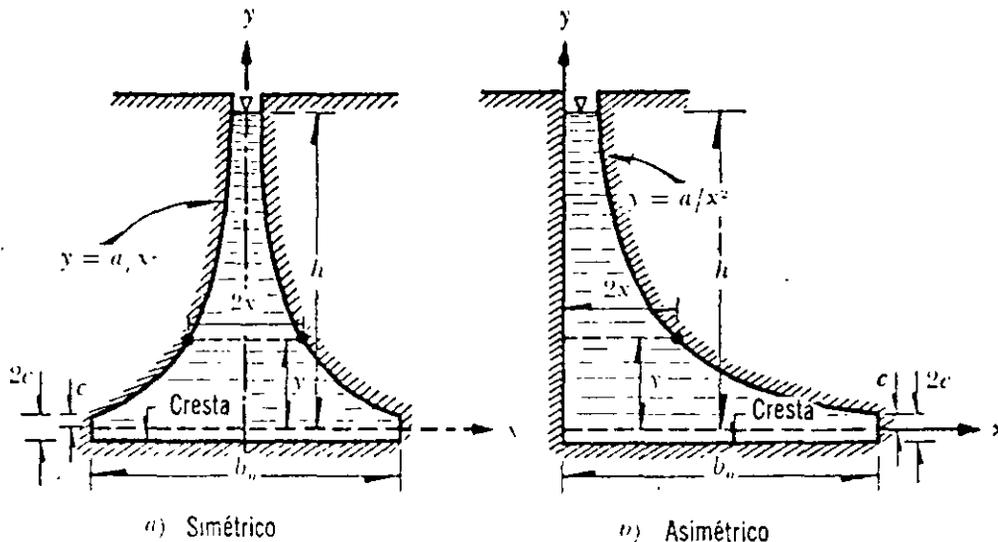


Figura 7.18. Tipos de vertedor Sutro.

ciones. Ha sido estudiado por diferentes investigadores, entre otros Mavis, Soucek, Howe y di Ricco.

La geometría del vertedor proporcional puede ser de cualquiera de las formas presentadas en la Fig. 7.18. Para seguir usando la Ec. (7.4), la correspondiente al vertedor simétrico es:

$$x = (a/y)^{1/2}$$

y el gasto es entonces:

$$Q = 2 \sqrt{2g} a^{1/2} \mu \int_0^h \left(\frac{h-y}{y} \right)^{1/2} dy =$$

$$= 2 \sqrt{2g} a^{1/2} \mu \int_0^h (h/y - 1)^{1/2} dy$$

Cambiando de variable, con $y/h = \text{sen}^2 \theta$, $dy = 2h \text{sen} \theta \cos \theta d\theta$; ahora entre los límites θ y $\pi/2$, la integral sería:

$$\int_0^h (h/y - 1)^{1/2} dy = \int$$

$$= 2h \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2 \theta} - 1 \right)^{1/2} \text{sen} \theta \cos \theta d\theta =$$

$$= 2h \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \int_0^h (h/y - 1)^{1/2} dy =$$

$$= 2h \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen} 2\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \pi/2 h$$

La ecuación para el gasto resulta entonces

$$Q = \pi \sqrt{2g} \mu a^{1/2} h \quad (7.20)$$

esto es, efectivamente el gasto es proporcional a la carga.

La forma que adquiere el perfil del vertedor se muestra en la Fig. 7.19, donde se observa que la curva se vuelve asintótica con el eje x lo cual haría impráctica su construcción. Para eliminar este problema, se limita el perfil del vertedor en la parte inferior, hasta un ancho finito b_0 , para $y = c$ (Fig. 7.19); además, que el área de la superficie del vertedor, reducida por este concepto, se compense bajando la cresta por debajo del eje x en una cantidad d , de tal manera que el

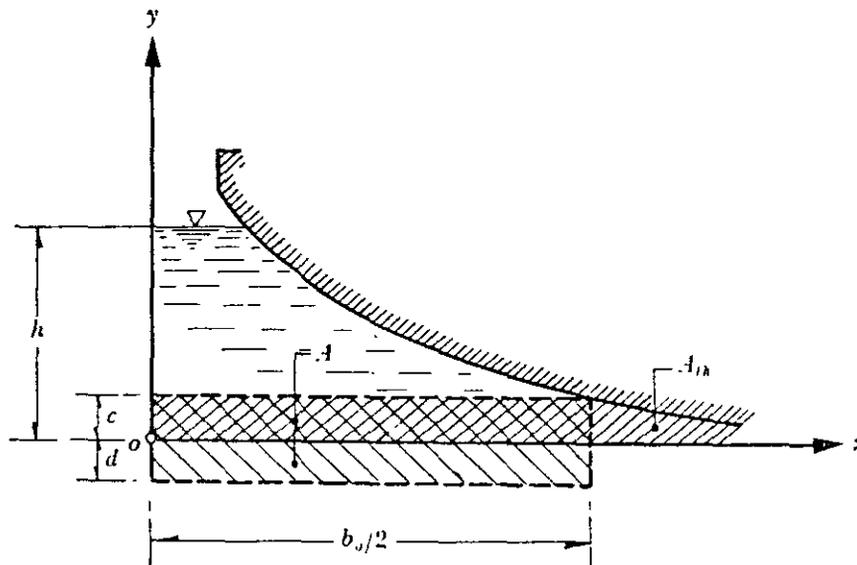


Figura 7.19. Forma de la frontera inferior del vertedor Sutro, simétrico.

área $b_0(c+d)/2$ sea igual al área teórica bajo el perfil entre $x = 0$ y $x = c$.

El área teórica bajo el perfil sería

$$A_{th} = \int_0^c 2x \, dy = a^{1/2} \int_0^c \frac{dy}{y^{1/2}} = 2 a^{1/2} [y^{1/2}]_0^c = 2 a^{1/2} c^{1/2}$$

Por otra parte, de la ecuación del perfil:

para $x = b_0/2$, $y = c$, $a^{1/2} = \frac{b_0 c^{1/2}}{2}$

entonces el área teórica será

$$A_{th} = b_0 c$$

de tal manera que al igualar las áreas resulta:

$$\frac{b_0}{2} (c + d) = b_0 c$$

$$d = c = \frac{4a}{b_0^2}$$

Esto es, el nivel de la cresta del vertedor debe bajar en una cantidad igual a c , la cual depende del ancho b_0 inicial que se desee considerar como límite inferior del vertedor. Sin embargo, experimentalmente se ha encontrado que debe agregarse todavía a d aproximadamente 3 mm más para satisfacer la ley lineal de gastos para cargas pequeñas. En rigor, la Ec. (7.20) es válida para $h \geq c$.

De acuerdo con las mediciones efectuadas en 1915 por diferentes investigadores (Ref. 9), el coeficiente μ varía poco con la carga h (tabla 7.6).

Pudiendo considerarse el valor medio $\mu = 0.62$ cuando el canal de llegada tiene dimensiones grandes; y $\mu = 0.67$ cuando la plantilla del canal de llegada coincide con la cresta del vertedor y su ancho

TABLA 7.6. Valores de μ en la Ec. (7.20) para vertedores proporcionales.

h , en m	μ
0.061	0.656
0.122	0.628
0.183	0.617
0.244	0.610
0.305	0.606
0.458	0.607
0.61	0.608
0.76	0.610
0.915	0.611

con b_0 (Ref. 34) para el vertedor simétrico de la Fig. 7.18a. Estos resultados son válidos para $h \geq c$.

Se han realizado estudios con vertedores logarítmicos cuya descarga sigue la ley $Q = \ln(2h/b_0)$ y también del tipo $Q = B\sqrt{h}$. Los resultados se pueden consultar en las Refs. 35 y 36.

7.2.8 Comparación de características de vertedores de pared delgada más usuales

La mayoría de las formas geométricas de los vertedores de pared delgada, hasta aquí estudiados, se adaptan al perfil dado por la ecuación

$$y = a x^r \tag{7.21a}$$

o sea, la Ec. (7.2) es:

$$x = (y/a)^{1/r} \tag{7.21b}$$

Si el exponente es $r = 1$ se tiene el vertedor triangular, correspondiendo $r = \infty$ al rectangular; $r = 2$ al parabólico; $r = -2$ al proporcional y así sucesivamente. En la Fig. 7.20 se presentan gráficamente las diferentes formas adoptadas, donde por facilidad se ha considerado $a = 1$.

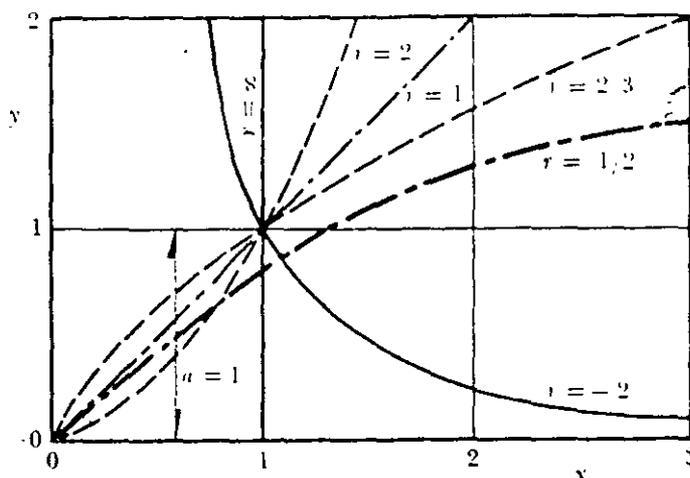


Figura 7.20. La ecuación $y = a x^r$ del perfil de un vertedor, para $a = 1$.

El área de la superficie ocupada por la lámina vertiente, de altura igual a la carga h (Fig. 7.1), se puede calcular con la Ec. (7.21b) en la siguiente forma:

$$A = \int_0^h 2x \, dy = \frac{2}{a^{1/r}} \int_0^h y^{1/r} \, dy = \frac{2}{a^{1/r}} \left[\frac{y^{(1/r+1)}}{1/r+1} \right]_0^h$$

al tomar los límites de integración resulta:

$$A = \frac{2}{a^{1/r} (1/r + 1)} h^{(1/r+1)} = k h^f \quad (7.22)$$

donde f recibe el nombre de exponente de forma y vale:

$$f = \frac{1}{r} + 1 \quad (7.23)$$

Además,

$$k = \frac{2}{a^{1/r} (1/r + 1)} = \frac{2}{f a^{1/r}} \quad (7.24)$$

Esto significa que si el perfil de un vertedor tiene por ecuación a (7.21) el área de la superficie A depende de la carga h ; y si la dependencia entre ambos se presenta gráficamente sobre un plano coordenado con escalas logarítmicas, el exponente f es igual a la pendiente de la recta que representa a la Ec. (7.22).

En la Ec. (7.21) para $y = h$, $x = B/2$ (Fig. 7.1b), por lo cual:

$$a^{1/r} = \frac{2h^{1/r}}{B} \quad (7.25)$$

siendo entonces

$$k = \frac{B}{f} \frac{1}{h^{1/r}}$$

Con la Ec. (7.23), A de la (7.22), resulta

$$A = \frac{B h^f}{f h^{1/r}} = \frac{B h^{(1/r+1)}}{f h^{1/r}} = \frac{B h}{f} \quad (7.26a)$$

o bien

$$f = \frac{B h}{A} = \frac{A'}{A} \quad (7.26b)$$

donde $A' = B h$ representa el área de un rectángulo de base B y altura h ; de este modo, el exponente de forma de un vertedor cualquiera representa la relación entre el área del rectángulo $A' = B h$ y el área de la sección. Esto es, si se conoce la carga h de vertido y el ancho B de la superficie de un vertedor cuya forma sigue la Ec. (7.21), se puede calcular el área de la sección a través del exponente de forma f , con la Ec. (7.26a) sin necesidad de efectuar la integración sobre la superficie. El cálculo en sentido contrario es también posible; esto es, cuando el perfil sigue la Ec. (7.21) se puede calcular el exponente de forma f a partir del ancho de la superficie libre y del área de la sección vertedora.

Por lo que respecta a la ecuación general del gasto, al substituir la Ec. (7.21b) en la (7.4) se pueden hacer las siguientes transformaciones:

$$Q = \frac{2 \sqrt{2g} \mu}{a^{1/r}} \int_0^h y^{1/r} (h - y)^{1/2} dy =$$

$$= \left[\frac{2 \sqrt{2g} \mu}{a^{1/r}} h^{(3/2+1/r)} \right] \times$$

$$\times \left[\int_0^1 (y/h)^{1/r} (1 - y/h)^{1/2} d(y/h) \right]$$

Si se substituye $y/h = z$, la ecuación anterior se puede escribir así:

$$Q = \frac{2 \sqrt{2g} \mu}{a^{1/r}} F h^{(3/2+1/r)} \quad (7.27)$$

donde

$$F = \int_0^1 z^{1/r} (1 - z)^{1/2} dz \quad (7.28)$$

en la cual se han transformado los límites

de integración al cambiar de variable: de $0/h = 0$ a $h/h = 1$.

Haciendo

$$m = \mu \sqrt{2g} F f \quad (7.29)$$

y tomando en consideración las ecuaciones (7.22) y (7.24), la Ec. (7.27) se puede también expresar en las siguientes formas:

$$Q = \frac{2 m}{a^{1/r} f} h^{(3/2+1/r)} =$$

$$= m k h^{(3/2+1/r)} = m A h^{1/2} \quad (7.30)$$

o bien, con

$$n = \frac{3}{2} + \frac{1}{r} = f + \frac{1}{2} \quad (7.31)$$

también en la forma

$$Q = m k h^n \quad (7.32)$$

ecuaciones con las cuales se podría resolver el problema inverso, es decir, que especificada una ley de variación de gastos de vertido (Ec. 7.32), se puede determinar teóricamente la forma del perfil geométrico de la sección vertedora que la satisfaga.

El valor del exponente de forma f posee un límite inferior. Puesto que un orificio practicado en la pared vertical de la placa tiene dimensiones constantes e independientes de la carga de vertido h , el exponente de forma f (Ec. 7.23) debe ser cero; $r = -1$ y, por lo mismo, de la Ec. (7.28) $F = 1$. Además, en la Ec. (7.30) A tiene que representar el área constante A' del orificio, siendo la ecuación de gasto:

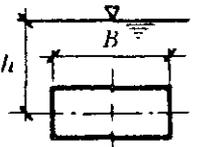
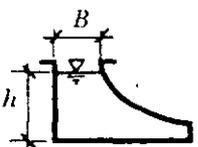
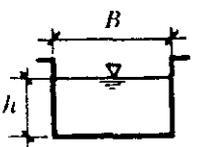
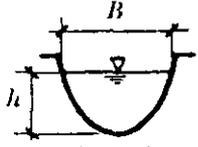
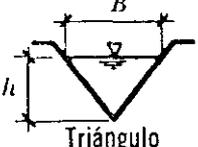
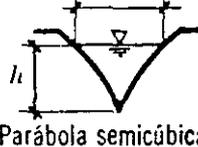
$$Q = m' A' \sqrt{h}$$

en la cual m' , A' son cantidades constai

tes, mientras que m , A son variables en la Ec. (7.30) de acuerdo con la forma del perfil del vertedor. Si se comparan las ecuaciones de gasto: (7.5) para el rectangular, (7.11a) para el triangular, (7.16) para el parabólico y (7.20) para el proporcional [con geometría que sigue la

Ec. (7.21)], se pueden obtener los resultados que se anotan en la tabla 7.7 con un resumen de los valores característicos de las diferentes secciones geométricas para fines comparativos. En la Fig. 7.21 se presenta la variación del coeficiente m y del exponente n , en la Ec. (7.32), en fun-

TABLA 7.7. Valores característicos de los vertedores de forma usual

Sección	Exp de forma f	i	n	F	$\frac{m}{\mu} = \sqrt{2g F i}$	$m = \mu \sqrt{2g F i}$		
						$\mu = 0,58$	$\mu = 0,60$	$\mu = 0,62$
 Orificio	0	-1	0.5	1	4.4343	2.569	2.658	2.746
 Proporcional	0.5	-2.0	1.0	$\pi/2$	3.7489	2.0178	2.0873	2.1569
 Rectángulo	1.0	∞	1.5	2/3	2.9530	1.7127	1.7718	1.8309
 Parábola	1.5	2.0	2.0	0.3927	2.6092	1.5133	1.5655	1.6177
 Triángulo	2.0	1.0	2.5	0.2667	2.3627	1.3704	1.4176	1.4649
 Parábola semicúbica	2.5	2/3	3.0	0.1963	2.1738	1.2608	1.3043	1.3478

ción del exponente de forma f y para los valores más comunes del coeficiente $\mu = 0.58, 0.60$ y 0.62 . Se observa claramente la eficiencia de las diferentes formas de sección del vertedor, las cuales son útiles para conocer el valor del coeficiente n aun en aquellos vertedores cuya geometría no sigue la Ec. (7.21), bastando para ello saber cuál es el exponente de forma f a partir de la Ec. (7.26b).

7.2.9 Vertedores con descarga sumergida

Cuando es sumergida la descarga de los vertedores de pared delgada, de cualquiera de las formas hasta ahora discutidas, la ecuación de Villemonte (Ref. 20):

$$Q = Q_1 (1 - S^n)^{0.385} \quad (7.33)$$

proporciona un método simple para evaluar el efecto de sumersión. En dicha ecuación, Q es el gasto del vertedor con descarga sumergida; Q_1 el gasto del mismo vertedor con igual carga en el supuesto de descarga libre, S es la relación de sumersión (relación de cargas aguas abajo y arriba sobre la cresta); y n el exponente de la carga h sobre la cresta en la ecuación correspondiente a Q_1 ($3/2$ para vertedor rectangular, $5/2$ para triangular, etcétera). La carga de sumersión deberá medirse desde la superficie, aguas abajo (fuera de la zona de disturbios) hasta la cresta.

7.2.10 Vertedores con cresta oblicua a la corriente

En los casos en los cuales se desea in-

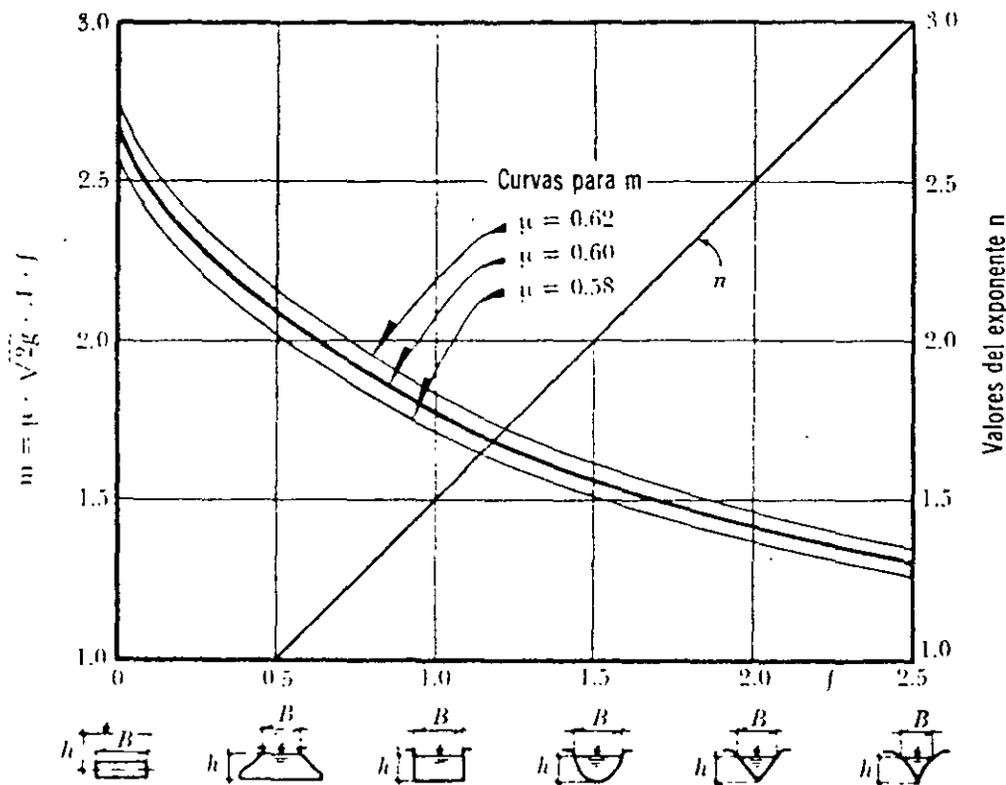


Figura 7.21. Valores de m y n en la Ec. (7.32) para las formas más comunes del vertedor de pared delgada (Ref. 23).

crementar la longitud de cresta de un vertedor, para reducir la carga del mismo y aumentar su eficiencia, se puede utilizar un vertedor oblicuo respecto al eje del canal. En la Fig. 7.22 se presenta este tipo de vertedor para la forma rectangular con un ángulo de inclinación θ respecto a la corriente. Así, la longitud de cresta es:

$$b_0 = \frac{b}{\sin \theta}$$

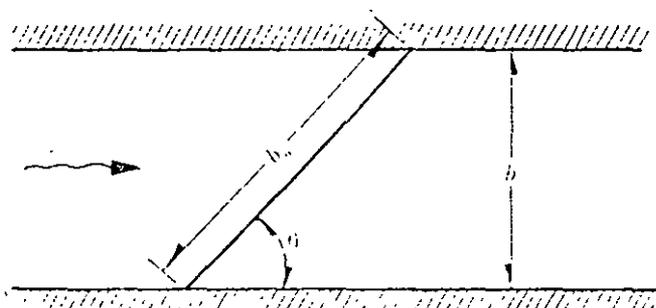


Figura 7.22. Vertedor oblicuo.

Diferentes autores han experimentado con estos vertedores, y han llegado a resultados diferentes. En cualquier caso, se ha observado que la aparente ganancia en longitud de cresta se ve reducida por una disminución en el coeficiente de gasto, por efecto de la inclinación con respecto a la cresta del flujo de llegada, de tal manera que los resultados obtenidos con la ecuación general (7.5) para vertedores rectangulares se ve afectada por un coeficiente de reducción $k < 1$ en la forma:

$$Q = k \frac{2}{3} \sqrt{2g} \mu b_0 h^{3/2} \quad (7.34)$$

En esta ecuación se obtiene μ con una ecuación de las indicadas en la tabla 7.1. Según Aichel, el coeficiente k vale

$$k = 1 - a \frac{h}{w} \quad (7.35)$$

donde a depende del ángulo θ y de la relación b/w , como se indica en la tabla 7.8 (Ref. 7), con la condición de que $h/w \leq 0.62$.

TABLA 7.8. Valores del coeficiente a en la fórmula de Aichel para vertedores oblicuos.

θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$b/w = 1$	0.82	0.47	0.28	0.13	0.04	0
$b/w = 2$	0.69	0.36	0.20	0.11	0.04	0

7.3. Vertedores de pared gruesa

En forma semejante a los orificios, si la cresta del vertedor no es una arista afilada, se presenta entonces el vertedor de pared gruesa que puede adquirir varias formas. En las figuras 7.23 se presenta la forma más sencilla, la cual consiste en aumentar el espesor de la cresta en un vertedor rectangular sin contracciones laterales.

Cuando $e/h < 0.67$, el chorro se separa de la cresta y el funcionamiento es idéntico al del vertedor de pared delgada (Fig. 7.23a).

Cuando $e/h > 0.67$ el funcionamiento es diferente, pues la lámina vertiente se adhiere a la cresta del vertedor (figura 7.23b). Se presentan también distintos funcionamientos, dependiendo de la altura w de la cresta sobre el fondo del canal. Cabe aclarar que los valores del coeficiente de gasto obtenidos por diferentes autores difieren entre sí, de ahí que el procedimiento comúnmente aceptado para evaluarlo, en el caso de que $e/h > 0.67$ y el vertedor sea rectangular, es el de Bazin; éste consiste en utilizar la ecuación de los vertedores rectangulares, (7.6), afectada de un coeficiente de reducción ϵ_1 , a saber:

$$Q = \epsilon_1 C b h^{3/2} \quad (7.36)$$

donde C es el coeficiente adecuado de un

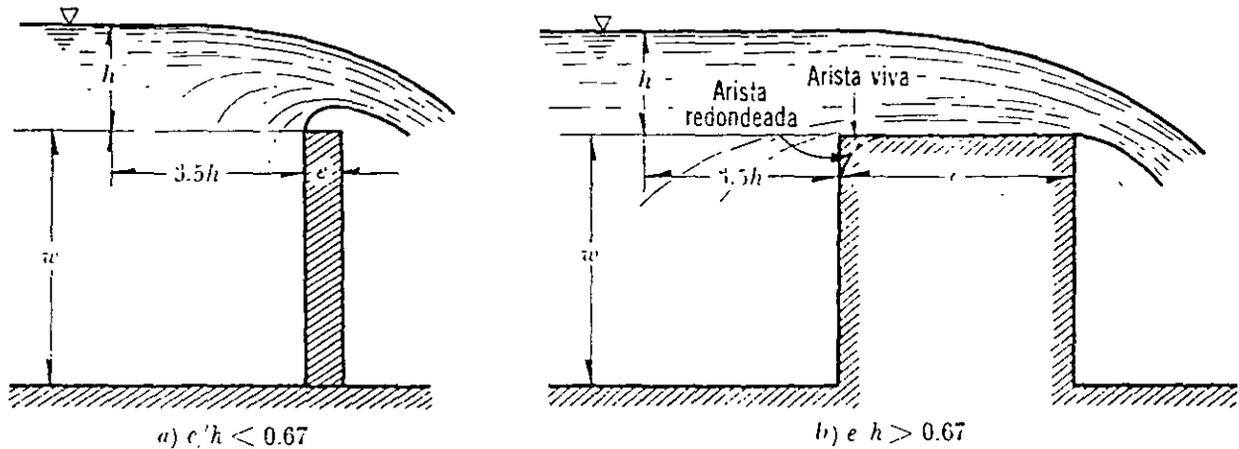


Figura 7.23. Vertedor rectangular de pared gruesa.

vertedor de pared delgada sin contracciones laterales, en iguales condiciones de descarga libre, que se evalúa con las ecuaciones de la tabla 7.1 y que toma en cuenta la altura w de la cresta sobre el fondo del canal de acceso. El coeficiente ϵ_1 depende de la relación e/h según la ecuación

$$\epsilon_1 = 0.7 + \frac{0.185}{e/h} \quad (7.37)$$

válida para relaciones con un valor hasta de $e/h = 3$.

Sin embargo, existen diferentes formas de funcionamiento de acuerdo con las relaciones e/h y w/h , las que se resumen en la Fig. 7.24 (Ref. 24), preparada con los resultados de Bazin; los valores de ϵ_1 se obtienen de la misma figura.

En problemas que se presentan dentro de la práctica es frecuente encontrar que este tipo de vertedores trabajen ahogados; es decir, los casos en que se presenta mayor reducción en el coeficiente de gasto por la influencia de la carga aguas abajo, de tal modo que la Ec. (7.36) se ve afectada de un segundo coeficiente ϵ_2 , que toma en cuenta dicho efecto. Los valores ϵ_2 se obtienen de la Fig. 7.25 (Ref.

24) en razón de la relación $(h - h')/h$, donde h' es la diferencia entre la cresta y la altura de la superficie, aguas abajo, del vertedor; h' es negativo cuando el nivel está por debajo de la cresta y positivo en caso contrario. La figura mencionada se ha elaborado con los resultados de Bazin y en ella se manifiesta la poca influencia del nivel, aguas abajo, hasta valores de $h' \leq 0.5 h$.

Cuando $e/h > 3$ se establecen, sobre la plataforma del vertedor, condiciones de flujo con líneas de corriente paralelas a ella y de distribución de presiones hidrostática; además, se deja sentir la influencia de las pérdidas de energía por fricción y de entrada. En este caso, los resultados experimentales concuerdan (Ref. 24) con la fórmula de Gibson, para ϵ_1 :

$$\epsilon_1 = 0.75 + \frac{0.1}{e/h} \quad (7.38)$$

que es válida hasta valores $e/h = 10$ y para vertedores con descarga libre.

Hay fórmulas generales que permiten tomar en consideración las pérdidas por fricción en el caso de que e sea grande, así como la posibilidad de redondear

umbral de entrada (Fig. 7.23b). Considerando válida la Ec. (7.6) el coeficiente C es ahora:

$$C = \frac{\left[1 + 0.26 \left(\frac{h}{h+w} \right)^2 \right] \sqrt{g}}{\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_e}{2} + 0.004 n \right)^{3/2}} \quad (7.39)$$

en el caso de arista viva y con $\lambda_e = 0$, en esta misma ecuación, para el caso de entrada redondeada. Esto último significa que el redondeo del umbral compensa la pérdida por fricción. En la Ec. (7.39) λ_e es un factor de fricción que depende de w/h , según la tabla 7.9. n representa la relación:

$$n = \frac{e}{y_c} \quad (7.40)$$

donde y_c es el llamado tirante crítico, que

$$n = \varphi \frac{e}{h} \quad (7.42)$$

TABLA 7.9. Valores de λ_e en la Ec. (7.39).

$\frac{w}{y_c} \cong$	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0.25
$\frac{w}{h} \cong$	2.04	1.78	1.48	1.19	0.91	0.67	0.314	0.162
λ_e	0.33	0.328	0.315	0.282	0.240	0.188	0.110	0.056

se presenta sobre la cresta y se calcula de la ecuación

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}} \quad (7.41)$$

Observe que para calcular y_c se requiere conocer previamente el gasto vertido y ello da lugar a un procedimiento de iteración, el cual se puede simplificar notablemente si se utilizan las siguientes relaciones. Haciendo $h = \varphi y_c$, entonces:

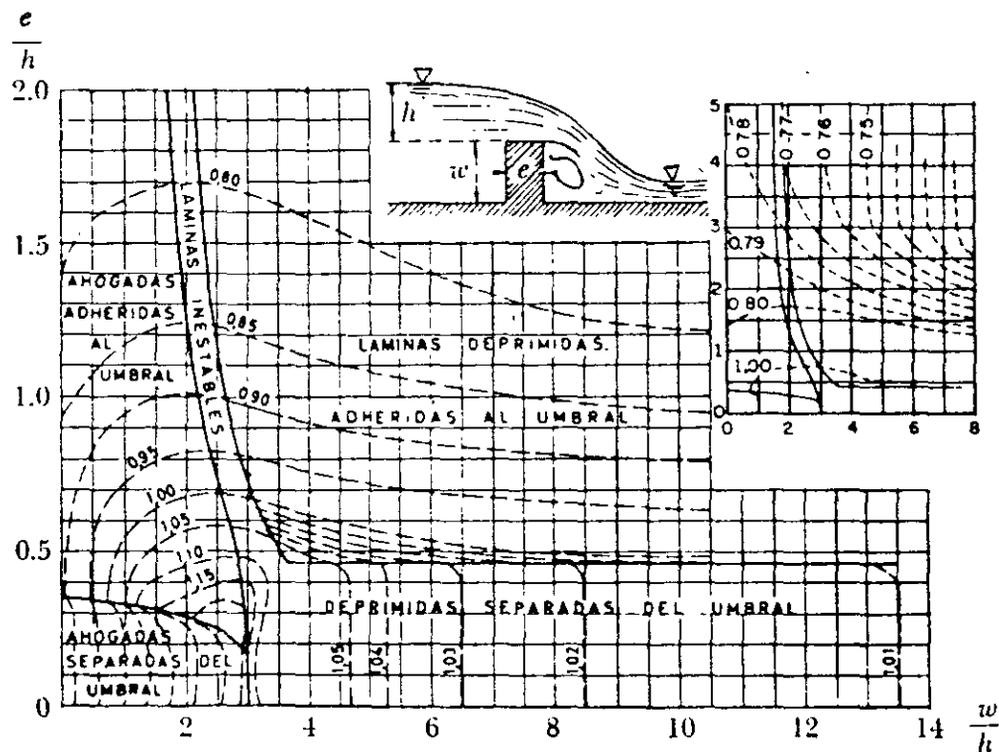


Figura 7.24. Coeficientes ϵ_1 de la Ec. (7.36) para vertedores de pared gruesa con descarga libre, según F. Domínguez (Ref. 24).

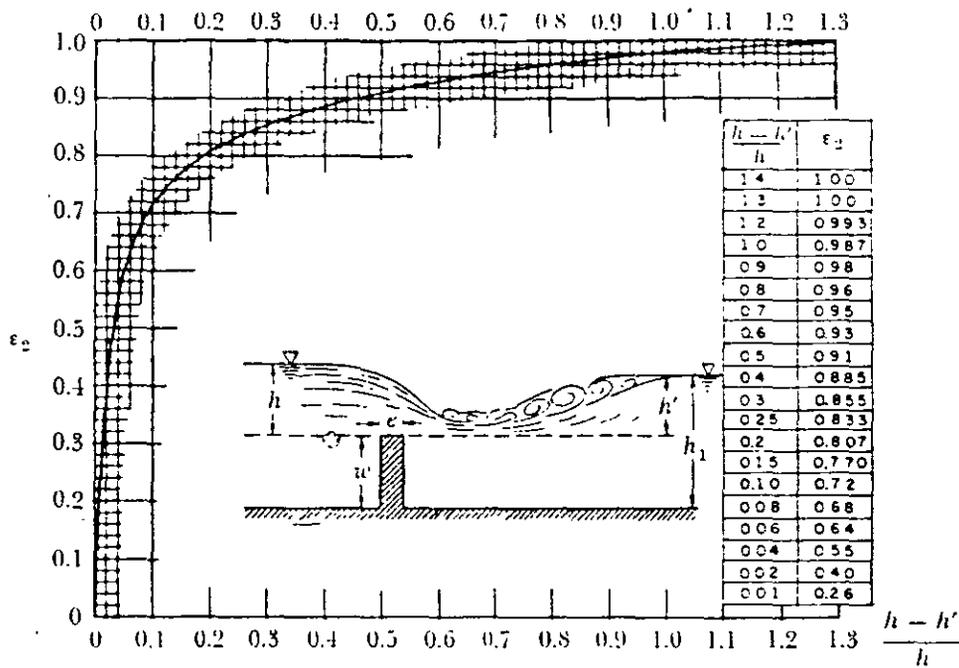


Figura 7.25. Coeficientes ϵ_2 para vertedores de pared gruesa con descarga ahogada, según F. Domínguez (Ref. 24).

Los valores aproximados de φ se presentan en la tabla 7.10 para entradas de arista viva. Si la entrada es redondeada, φ tiene el valor aproximado de 1.5.

TABLA 7.10. Valores de φ aplicables a la Ec. (7.42) para entradas de arista viva.

$\frac{h}{h+w}$	0.33	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
φ	1.71	1.68	1.65	1.62	1.60	1.56	1.53	1.52

Problema 7.7. Un vertedor rectangular de pared gruesa cuyo espesor $e = 0.45$ m y longitud $b = 2.5$ m, trabaja con una carga $h = 0.30$ m y una profundidad $w = 0.60$ m. Determinar el gasto vertido.

Solución. Las relaciones e/h y w/h valen:

$$\frac{e}{h} = \frac{0.45}{0.30} = 1.5 > 0.67$$

$$\frac{w}{h} = \frac{0.60}{0.30} = 2$$

Por tanto, de la Fig. 7.24, $\epsilon_1 = 0.82$ y de la ecuación de Rehbock (tabla 7.1), tomando en cuenta ϵ_1 , resulta:

$$Q = 0.82 \times \frac{2}{3} \left(0.6035 + 0.0813 \frac{0.301}{0.60} \right) \left(1 + \frac{0.0011}{0.30} \right)^{8/2} \sqrt{2 \times 9.8} \times 2.5 (0.30)^{3/2}$$

donde

$$Q = 0.625 \text{ m}^3/\text{seg}$$

7.4. Vertedores con cresta redondeada

Quando la cresta del vertedor se redondea, el coeficiente de gasto C aumenta considerablemente respecto del calculado para uno de pared gruesa. Esto se explic:

por una baja en la contracción del chorro sobre el vertedor, pues actúa sobre las partículas una aceleración centrífuga debido a la curvatura de las líneas de corriente.

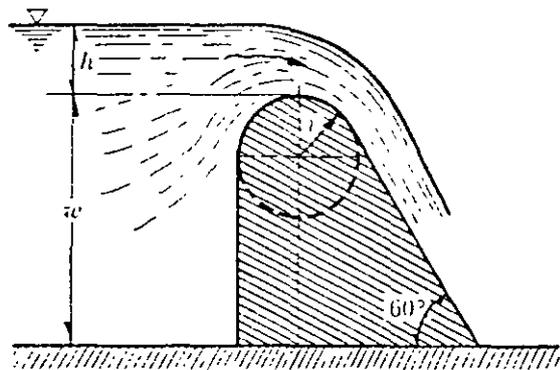


Figura 7.26. Vertedor de cresta circular y talud inclinado, aguas abajo.

En el caso del vertedor de la Fig. 7.26 el coeficiente μ , de la Ec. 7.5, según Rehbock (Ref. 30), es:

$$\mu = 0.312 + 0.09 \frac{h}{w} + \sqrt{0.30 - 0.01 (5 - \frac{h}{r})^2}$$

que vale para

$$\frac{h}{w} \leq 1, w > r > 0.02 \text{ m,}$$

$$\frac{h}{r} \leq \left(6 - \frac{20r}{w + 3r} \right)$$

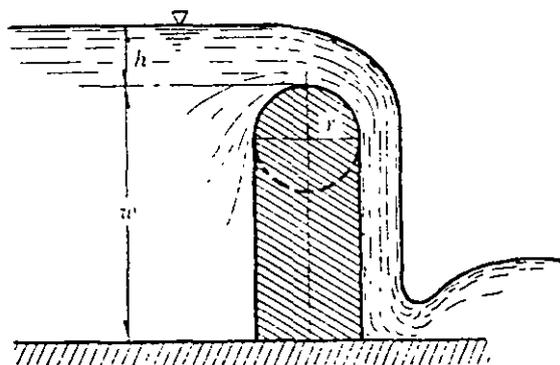


Figura 7.27. Vertedor de cresta circular y talud vertical, aguas abajo.

En el caso de vertedores como el de la

Fig. 7.27, Kramer encontró experimentalmente que:

$$\mu = 1.02 \frac{1.015}{\frac{h}{r} + 2.08} + [0.04 (\frac{h}{r} + 0.19)^2 + 0.0223] \frac{r}{w}$$

el cual vale para

$$\frac{h}{r} \leq 4.2$$

y

$$\frac{h}{r} \leq 0.4 + 0.32 \frac{w}{r} + 0.06 \sqrt{r - 12.5}$$

Este tipo de vertedor es importante en el caso de compuertas cilíndricas con vertido superior.

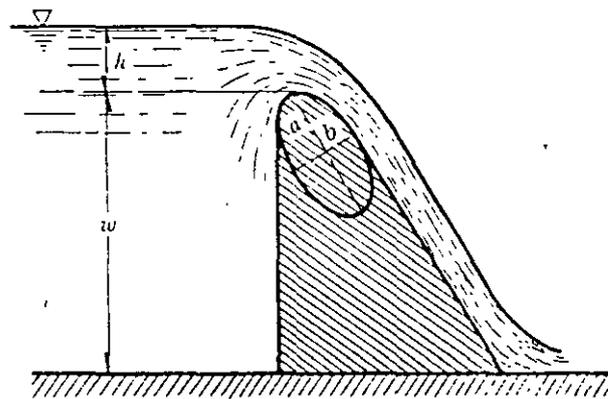


Figura 7.28. Vertedor de cresta elíptica y talud inclinado, aguas abajo.

Para vertedores como el de la Fig. 7.28, Kramer propone el empleo de la ecuación anterior, considerando que el radio r en ella se calcule con la expresión:

$$r = \left(\frac{4.57}{2 \frac{a}{b} + 1} + \frac{a}{20b} - 0.573 \right) b$$

donde a y b son las longitudes de los ejes de la elipse. Esta fórmula ha sido verificada para valores de $a = b/2$, $a = b$, $a = 2b$ y $a = 6b$.

Otros resultados para vertedores de pared gruesa, con trazo trapezoidal y formas especiales, se pueden consultar en la Ref. 31.

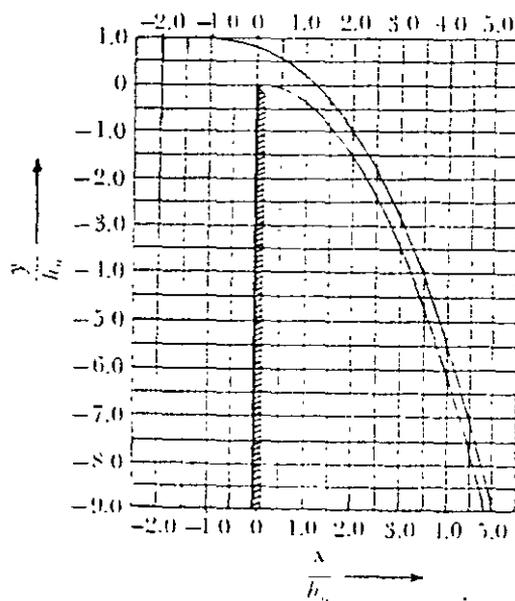
Cabe mencionar que el vertedor de pared gruesa más importante es aquél cuyo perfil se diseña de modo que coincida con la forma de perfil inferior de la lámina vertiente, sobre un vertedor de pared delgada hipotético. Fue Creager el primero que ideó este tipo de vertedores a los cuales se les ha dado el nombre de "cimacios". Bazin y Scimemi, entre otros, han estudiado dicho perfil, pero quizá el U. S. Bureau of Reclamation es el que lo ha hecho en forma exhaustiva (Ref. 37). En la Fig. 7.29 se presentan sus resultados para el caso de un vertedor rectangular de pared delgada sin contracciones laterales, perfectamente ventilado por debajo del chorro. En dicha figura se presentan las coordenadas de los perfiles, superior e inferior, del chorro que vierte sobre un vertedor rectangular (que trabaja con una

carga h), referidas a la carga h_0 medida hasta el punto más alto del perfil inferior. Esto es:

$$h_0 = 0.88889 h$$

Si se llena de mampostería la porción existente entre el vertedor de pared delgada hipotético y el perfil inferior de la lámina vertiente, al funcionar el cimacio con una carga igual a aquella con la cual se diseñó, es de esperarse el mismo coeficiente de gasto que el de pared delgada; además, sobre la espalda de este vertedor se presentan presiones nulas cuando la carga de vertido coincide con la carga de diseño. Por ser el más utilizado en obras de excedencias y el que ha tenido más evolución, posteriormente se hará una explicación más detallada del mismo (referencia 37).

Por lo que corresponde a los vertedores de cresta redondeada, que trabajan ahogados, Keutner realizó experimentos con



Horizontales $\frac{x}{h_0}$	Verticales	
	Perfil superior $\frac{y}{h_0}$	Perfil inferior $\frac{y}{h_0}$
-2.4	0.989	
-2.0	0.984	
-1.6	0.975	
-1.2	0.961	
-0.8	0.938	
-0.4	0.898	
-0.2	0.870	
0.0	0.831	-0.125
0.05	0.819	-0.066
0.10	0.807	-0.053
0.15	0.793	-0.044
0.20	0.779	-0.004
0.30	0.747	0.000
0.40	0.710	-0.011
0.50	0.668	-0.034
0.75	0.539	-0.129
1.00	0.373	-0.283
2.00	-0.743	-1.393
3.00	-2.653	-3.303
4.00	-5.363	-6.013
5.00	-8.878	-9.523

Figura 7.29. Coordenadas de los perfiles, superior e inferior, de la lámina vertiente sobre un vertedor rectangular de pared delgada, sin contracciones laterales, según U. S. Bureau of Reclamation

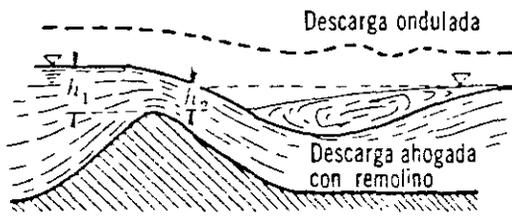


Figura 7.30. Descarga ahogada de un vertedor de cresta redondeada.

uno semejante al de la Fig. 7.30, obteniendo diferentes formas de funcionamiento de acuerdo con la magnitud de la carga, aguas arriba h_1 y la de aguas abajo, h_2 . Los resultados para el coeficiente de vertido μ de la ecuación:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2g} b h_1^{3/2} \quad (7.43)$$

se muestran en la Fig. 7.31 en razón de la relación h_1/h_2 . Keutner observó que la descarga ahogada corresponde a valores de $h_1/h_2 > 1.16$ y descargas de forma ondulada, como se indica en la misma figura para $h_1/h_2 < 1.16$ (Ref. 9).

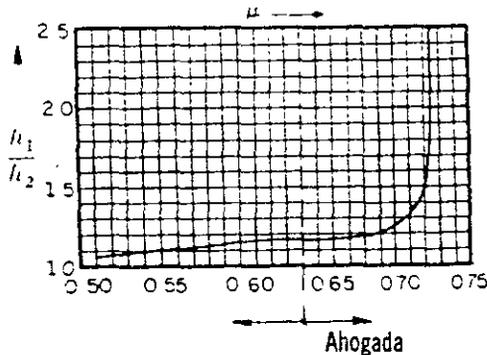


Figura 7.31. Coeficiente μ de la ecuación (7.43), para vertedores de cresta redondeada con descarga ahogada, según Keutner (Ref. 9).

PROBLEMAS

1. a) Un vertedor rectangular de pared delgada, con contracciones laterales, tiene una longitud de 1 m. ¿A qué altura w se debe

colocar en un canal, de ancho $B = 2$ m, para conseguir un tirante en el canal de llegada $h + w = 2$ m y un gasto $Q = 0.25$ m³/seg? b) ¿Cuál sería la carga sobre un vertedor triangular $\theta = 90^\circ$ para descargar el mismo gasto?

2. Se han realizado experimentos con un vertedor rectangular de pared delgada, con una longitud de cresta de 0.92 m, colocado en un canal de 1.22 m de ancho, a una elevación $w = 0.61$ m de la cresta al piso del canal, obteniendo los siguientes resultados:

Q (en m ³ /seg)	0.286	0.538	0.835
h (en m)	0.305	0.458	0.61

Demostrar que estas observaciones son consistentes con la fórmula: $Q = C b H^n$, si $H = h + V_0^2/2g$, donde V_0 es la velocidad de llegada en el canal. Determinar los valores de C y n .

3. Un canal de sección rectangular, de 18 m de ancho, transporta un gasto máximo de 25 m³/seg, con un tirante de 1.50 m. Se desea colocar un vertedor rectangular de pared delgada (10 m de longitud de cresta) de modo que el tirante del río, aguas arriba del vertedor, aumente —cuando más— a 2.25 m. Determinar el nivel necesario de la cresta vertedora.

4. Un canal rectangular de 10 m de ancho transporta 30 m³/seg. Por medio de una pantalla vertical se proporciona, en su parte inferior, una abertura de ancho (igual al del canal) de 1.50 m de altura. El nivel de la superficie libre, aguas abajo, se encuentra a 1 m por encima del borde superior del orificio. Calcular el tirante del canal, aguas arriba de la pantalla.

5. Se desea un croquis de la instalación de un vertedor de pared delgada destinado a aforar un gasto de agua con un máximo de 70 lt/seg. Este vertedor será instalado dentro de una zanja, de 1 m de ancho, para coleccionar las infiltraciones provenientes de la

RESISTENCIA AL FLUJO EN CONDUCTOS A PRESIÓN

8.1 Aspectos generales

En la aplicación de los métodos de análisis, de los capítulos 6 y 7, no ha sido necesario el cálculo de las pérdidas de energía por fricción, debido a que se trata de problemas locales de flujo donde las pérdidas que se han evaluado se deben más bien a efectos de aceleraciones súbitas del flujo o a separaciones del mismo. Sin embargo, en estructuras largas, la pérdida por fricción es muy importante, por lo que ha sido objeto de investigaciones teóricoexperimentales para llegar a soluciones satisfactorias de fácil aplicación.

Para estudiar el problema de la resistencia al flujo resulta necesario volver a la clasificación inicial de los flujos y considerar las grandes diferencias de su comportamiento entre los flujos laminar y turbulento.

Osborne Reynolds (1883) en base a sus experimentos fue el primero que propuso el criterio para distinguir ambos tipos de flujo mediante el número que lleva su nombre, el cual permite evaluar la preponderancia de las fuerzas viscosas sobre las de inercia.

En el caso de un conducto cilíndrico a presión, el número de Reynolds se define así:

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \quad (8.1)$$

donde V es la velocidad media, D el diámetro del conducto y ν la viscosidad cinemática del fluido.

Reynolds encontró que en un tubo el flujo laminar se vuelve inestable cuando R_e ha rebasado un valor crítico, para tornarse después en turbulento. De acuerdo con diferentes investigadores el número crítico de Reynolds adquiere valores muy distintos que van desde 2 000 (determinado por el mismo Reynolds) hasta 40 000 (calculado por Eckman). De ello se deduce que dicho valor depende en mucho de los disturbios iniciales y define además un cierto límite, abajo del cual éstos se amortiguan, estabilizando al flujo laminar.

Es interesante observar que, tanto el flujo laminar como el turbulento, resultan propiamente de la viscosidad del fluido por lo que, er.

ausencia de la misma, no habría distinción entre ambos. Es más, aun en flujo turbulento el esfuerzo tangencial o de fricción, producido por el intercambio en la cantidad de movimiento entre partículas que fluctúan lateralmente, en cierto modo es resultado de los efectos viscosos.

En este capítulo se presentan los resultados experimentales más importantes para el cálculo de la resistencia al flujo de líquidos, en conductos sencillos a presión, para después poder analizar sistemas más complejos.

Los resultados que aquí se presentan son los de mayor interés práctico. Sin embargo, si el lector desea un estudio más profundo de la teoría de la resistencia al flujo, se recomienda la lectura del Apéndice B, en el cual se desarrolla la teoría semiempírica de Prandtl - von Kármán, que es clásica de los flujos viscosos.

Finalmente, conviene presentar aquí algunos conceptos importantes que serán utilizados posteriormente.

Cuando la superficie de la pared de un conducto se amplifica, observamos que está formada por irregularidades o asperezas de diferentes alturas y con distribución irregular o aleatoria. Dicha característica es difícil de definir científicamente pues depende de factores como la altura media de las irregularidades de la superficie, la variación de la altura efectiva respecto de la altura media, la forma y distribución geométrica, la distancia entre dos irregularidades vecinas, etcétera.

Puesto que prácticamente es imposible tomar en consideración todos esos factores, se admite que la rugosidad puede expresarse por la altura media ϵ de las asperezas (*rugosidad absoluta*), como un promedio obtenido del resultado de un cálculo con las características del flujo, mas no propiamente por el obtenido como la media de las alturas determina-

das físicamente de la pared, en cada conducción. Es más importante la relación que la rugosidad absoluta guarda con el diámetro del tubo, esto es, la relación ϵ/D , que se conoce como *rugosidad relativa*.

Existen tubos, como los de asbesto-cemento, cuya rugosidad es de forma ondulada y que se comportan *hidráulicamente* como si fueran *tubos lisos* (vidrio o plástico).

Tres conceptos geométricos de la sección de una conducción hidráulica, muy importantes en el cálculo de las pérdidas de fricción, son los siguientes.

Area hidráulica A, es decir, el área de la sección transversal ocupada por el líquido dentro del conducto.

Perímetro mojado P, que es el perímetro de la sección transversal del conducto en el que hay contacto del líquido con la pared (no incluye la superficie libre si ésta existe).

Radio hidráulico R_h , o sea la relación entre el área hidráulica y el perímetro mojado de la sección ($R_h = A/P$).

8.2 Fórmula de Darcy-Weisbach

Para un flujo permanente, en un tubo de diámetro constante, la línea de cargas piezométricas es paralela a la línea de energía e inclinada en la dirección del movimiento. En 1850, Darcy, Weisbach y otros, dedujeron experimentalmente una fórmula para calcular en un tubo la pérdida por fricción:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (8.2a)$$

donde

f factor de fricción, sin dimensiones;

g aceleración de la gravedad, en m/seg²;

h_f pérdida por fricción, en m;
 D diámetro, en m;
 L longitud del tubo, en m;
 V velocidad media, en m/seg.

El factor de fricción es función de la rugosidad ϵ y del número de Reynolds R_e en el tubo, esto es:

$$f = f(\epsilon, R_e)$$

La fórmula de Darcy-Weisbach, ecuación (8.2a), se puede derivar por medio del análisis dimensional (Apéndice A).

Si S_f representa la relación entre la pérdida de energía y la longitud del tubo en que ésta ocurre (*pendiente de fricción*), la Ec. (8.2a) también es

$$S_f = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (8.2b)$$

8.3 Investigaciones experimentales sobre las pérdidas por fricción en tubos

Poiseuille, en 1846, fue el primero en determinar matemáticamente el factor de fricción en flujo laminar y obtuvo una ecuación para determinar dicho factor, que es:

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{VD/\nu} \quad (8.3)$$

la cual es válida para tubos lisos o rugosos, en los cuales el número de Reynolds no rebasa el valor crítico 2 300.

A partir de los resultados experimentales, acumulados hasta el año de 1913, Blasius llegó a la importante conclusión de que existen dos tipos de fricción para el flujo turbulento en tubos. El primero está asociado con tubos lisos donde los efectos de viscosidad predominan y el factor

de fricción depende únicamente del número de Reynolds. El segundo tipo se refiere a tubos rugosos donde la viscosidad y los efectos de rugosidad influye en el flujo, además de que el factor de fricción depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

En base a sus propias experiencias y con los datos experimentales de Saph y Schoder, Blasius formuló la siguiente expresión para tubos lisos:

$$f = \frac{0.3164}{R_e^{1/4}} \quad (8.4)$$

al sustituirla en la ecuación de Darcy-Weisbach, resulta que $h_f \sim V^{1.75}$.

Años más tarde, Stanton y Pannell, después de investigar detalladamente el flujo del aire y del agua en tubos lisos de latón, encontraron que al llevar sus resultados sobre una gráfica, de f contra R_e , los puntos se agrupaban a lo largo de una curva que —en la zona turbulenta— concuerda bastante con la fórmula de Blasius para $R_e > 10^5$. Sin embargo, atrás de este límite existía una gran divergencia indicando que el exponente de V , en la relación h_f contra V , aumentaba con R_e ; ello fue confirmado por otros investigadores.

Las contribuciones más importantes las realizó Nikuradse, en Gotinga, alrededor de 1920 (Ref. 38). Este investigador obtuvo resultados de f contra R_e , en tubos lisos, que comprendían hasta valores de $R_e = 3 \times 10^6$, obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log R_e \sqrt{f} - 0.8 \quad (8.5a)$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{R_e \sqrt{f}}{2.51} \quad (8.5b)$$

También efectuó mediciones de la distribución de velocidades, en secciones transversales del tubo, que tuvieron gran valor en el desarrollo de la teoría semiempírica del flujo turbulento en tubos, especialmente los rugosos.

Nikuradse trabajó con tubos de rugosidad artificial perfectamente verificada en el laboratorio, mediante granos uniformes de arena adheridos con diferente distribución sobre la superficie interna del tubo. Una combinación juiciosa de ϵ y D le permitieron establecer seis valores distintos de la rugosidad relativa ϵ/D , que van de 1/30 hasta 1/1014. Además, obtuvo la ecuación que lleva su nombre, válida para tubos rugosos en la zona turbulenta y que es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{2\epsilon} + 1.74 \quad (8.6a)$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71 D}{\epsilon} \quad (8.6b)$$

Los resultados de los experimentos de Nikuradse y la representación gráfica de la Ec. (8.3) para comparación, se presentan en el diagrama de la Fig. 8.1.

El diagrama de Nikuradse comprueba la validez de la ecuación siguiente.

$$f = f(R_e, \epsilon/D)$$

Además, corrobora los siguientes puntos importantes.

a) Dentro del intervalo $R_e < 2300$ para flujo laminar, f depende exclusivamente del número de Reynolds y no de la rugosidad del tubo. La recta en torno de la cual se agrupan los puntos para flujo laminar en la Fig. 8.1, corresponde a la Ec. (8.3). Substituida esta ecuación en la de Darcy-Weisbach, el coeficiente f depende directamente de la velocidad media en el tubo.

b) A partir de $R_e = 2300$ se inicia la zona de transición de flujo laminar a turbulento, sin poder establecer una ley general de variación. Dentro de esta zona, f depende, tanto de R_e como de ϵ/D .

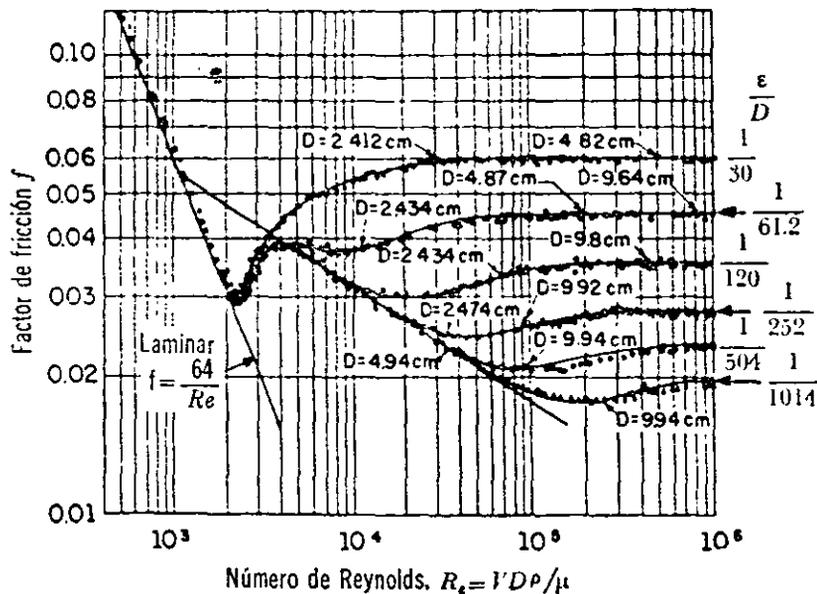


Figura 8.1. Diagrama de Nikuradse para tubos con rugosidad uniforme.

c) De acuerdo con el valor de ϵ/D la zona turbulenta se inicia con diferentes valores de Re ; es decir, que el número de Reynolds, como límite superior para la zona de transición, depende de la rugosidad del tubo.

d) Dentro de la zona turbulenta, esto es, para números de Reynolds grandes, f es independiente de Re y varía exclusivamente con la rugosidad relativa ϵ/D . De acuerdo con la fórmula de Darcy-Weisbach, ello significa que f depende del cuadrado de la velocidad.

Como se mostrará posteriormente, la evidencia experimental obtenida por Nikuradse proporcionó la información que Prandtl y von Kármán necesitaron para apoyar y completar las fórmulas teóricas que definen el flujo turbulento en tubos lisos y rugosos. Sin embargo, el valor práctico directo de los resultados de Nikuradse tuvo algunas limitaciones debido a que era difícil correlacionar la rugosidad artificial uniforme, con el tipo irregular y ondulado de los tubos comerciales.

8.4 Resistencia al flujo en tubos comerciales

La rugosidad de los tubos comerciales no es homogénea, razón por la cual es difícil de definir científicamente. Sin embargo, se puede caracterizar por un valor medio que, desde el punto de vista de pérdida, es equivalente a una rugosidad uniformemente distribuida. Conviene aclarar que en dicho valor intervienen, además, otros factores como la frecuencia y alineamiento de las juntas en los conductos de concreto y asbesto-cemento, o bien el tipo de costura o de remachado en los tubos de acero y, finalmente, el efecto de incrustaciones y acumulamientos en los conductos, principalmente metálicos, por la acción corrosiva del agua.

Con el fin de comprobar los resultados en tuberías comerciales, diferentes investigadores hicieron estudios posteriores a los de Nikuradse y aceptaron el concepto —de rugosidad media— usado por éste, la cual determinaron por un proceso inverso. Es decir, una vez que obtuvieron experimentalmente la pérdida de fricción en una tubería de características hidráu-

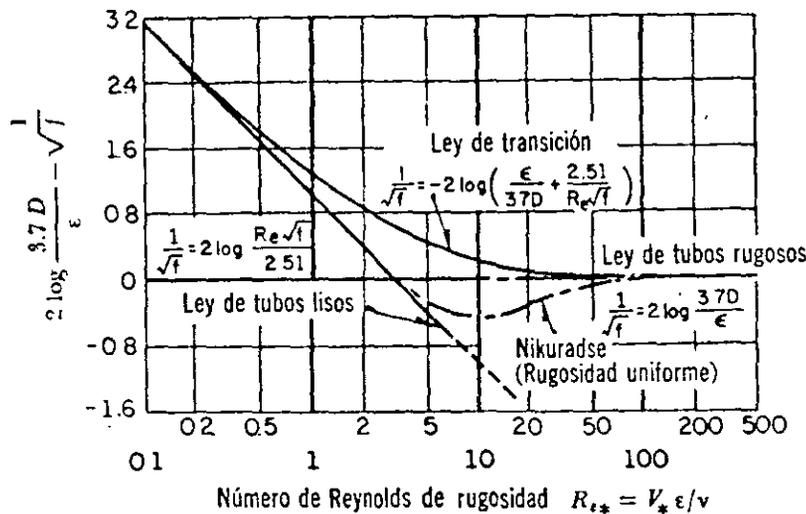


Figura 8.2. Comparación entre las curvas, en la zona de transición, para tubos comerciales y de rugosidad uniforme.

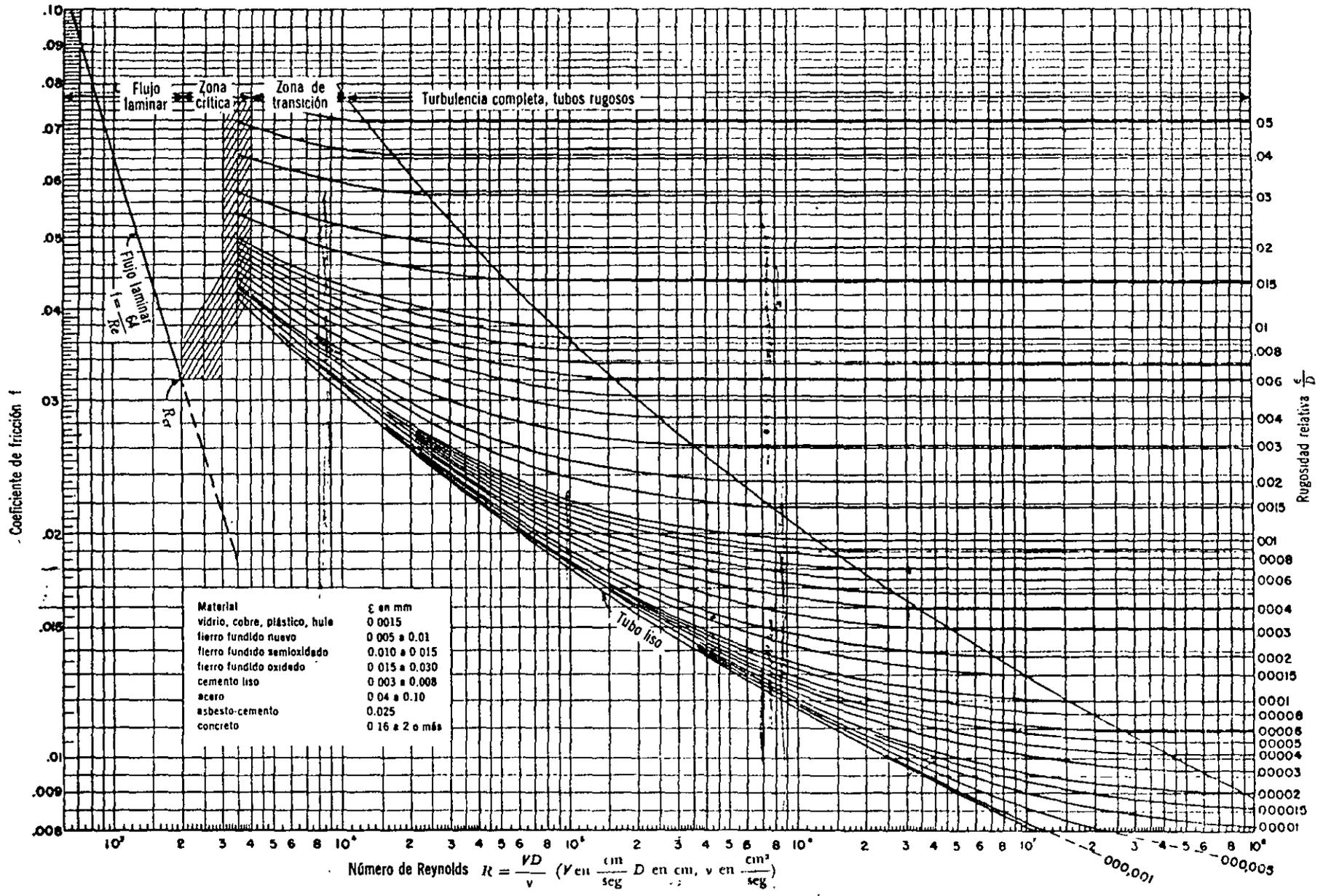


Figura 8.3. Coeficiente de fricción para cualquier tipo y tamaño de tubo; diagrama universal de Moody.

licas y geométricas conocidas, determinaron el coeficiente f de la fórmula de Darcy-Weisbach y obtuvieron, a partir de la Ec. (8.6), el valor de ϵ con números grandes de Reynolds.

Colebrook y White comprobaron los mismos resultados de Nikuradse, para las zonas laminar y turbulenta en tubos de *rugosidad comercial*, lo cual permite extender la validez de las Ecs. (8.3) y (8.6) a tubos comerciales. Sin embargo, dentro de la zona de transición encontraron discrepancias con los resultados en la Fig. 8.1, mismos que se muestran, comparativamente, en la Fig. 8.2.

Colebrook y White presentaron la siguiente fórmula empírica para la zona de transición de flujo laminar a turbulento en tubos comerciales, a saber:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) \quad (8.7)$$

Con base en estos resultados Moody preparó el *diagrama universal*, que lleva su nombre, para determinar el coeficiente de fricción f en tuberías de rugosidad comercial que transportan cualquier líquido (Fig. 8.3).

En dicho diagrama se comprueban también los mismos aspectos para los tubos de rugosidad comercial, que con el diagrama de Nikuradse de la Fig. 8.1. La curva límite inferior corresponde a los lisos y coincide parcialmente con la ecuación de Blasius (8.4).

La precisión en el uso del diagrama universal de Moody depende de la selección de ϵ , según el material de que está construido el tubo. En la tabla 8.1 se presentan los valores de ϵ para tubos comerciales y, en la Fig. 8.4, los valores de la rugosidad relativa ϵ/D para los materiales más comunes.

Distintos intentos de evaluar el efecto

corrosivo del agua en conductos se han llevado a cabo, basándose en la reducción del gasto calculado teóricamente, de acuerdo con el PH del agua y el número de años de servicio de la tubería (Ref. 40). Sin embargo, el criterio que parece más efectivo es el de Genijew (Ref. 7) al modificar la rugosidad absoluta del tubo nuevo, de acuerdo con el tipo de agua que va a escurrir y el número de años de servicio; esto es:

$$\epsilon_t = \epsilon_0 + a t \quad (8.8)$$

donde

- ϵ_0 rugosidad del tubo (nuevo), en mm;
- a coeficiente que depende del grupo en el que se clasifique el agua que va a escurrir, según la tabla 8.2;
- t número de años de servicio de la tubería;
- ϵ_t rugosidad del conducto, después de t años de servicio, en mm.

Problema 8.1. Determinar la dirección del flujo en el tubo mostrado en la figura 8.5, así como el gasto que transporta, donde $\gamma = 800 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.14 \times 10^{-2} \text{ kg seg/m}^2$.

Solución. Con el plano horizontal de referencia al nivel del punto 2, la suma de las cargas de posición y de presión, en el punto 1, es

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{14\,000}{800} + 4.6 = 22.10 \text{ m}$$

y la carga de presión, en el 2, la siguiente:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{21\,000}{800} = 26.25 \text{ m} > 22.10 \text{ m}$$

luego, el flujo es necesariamente de 2 a

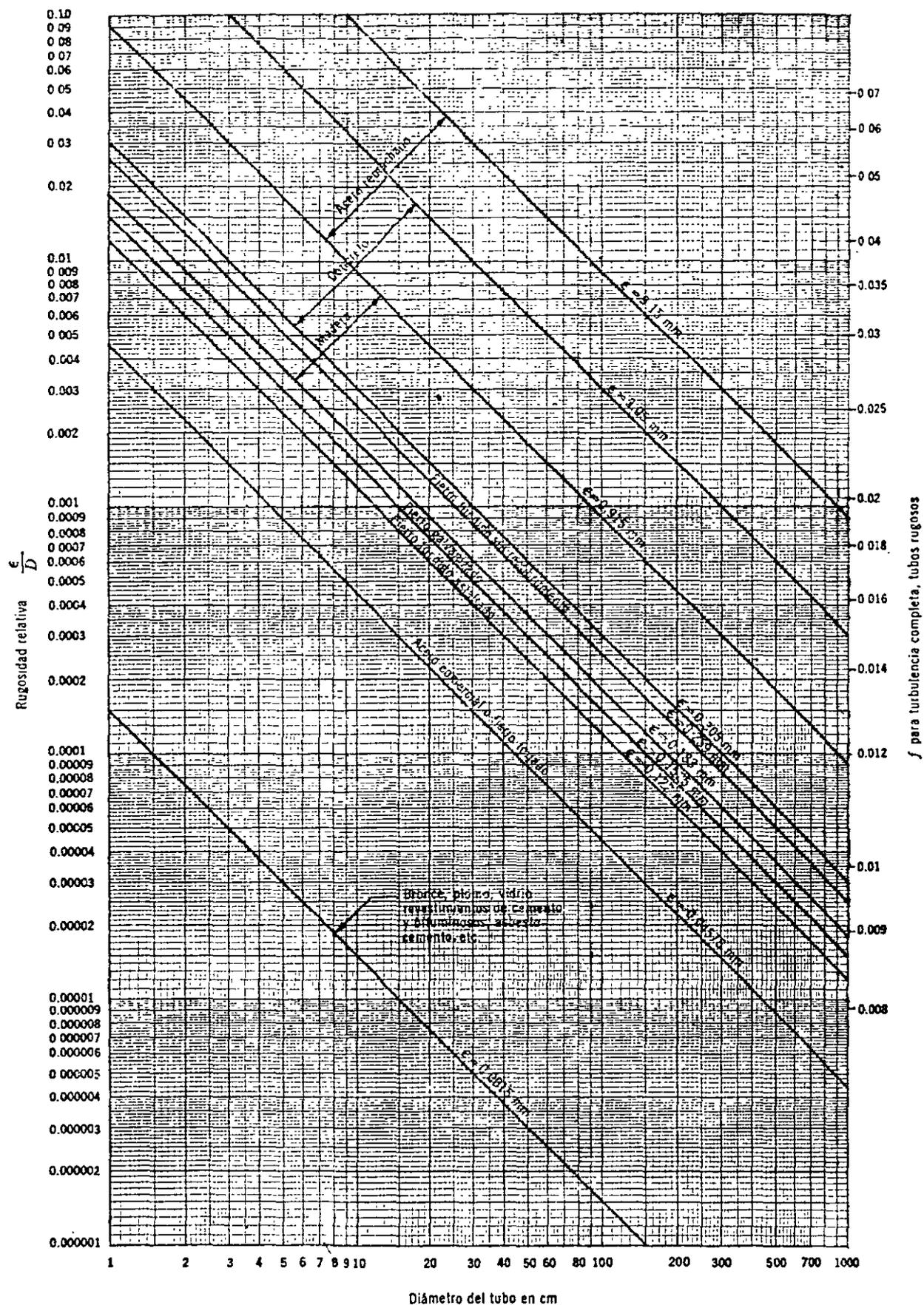


Figura 8.4. Rugosidad relativa para tubos nuevos limpios.

TABLA 8.1 Rugosidad absoluta ϵ en tubos comerciales

<i>Material</i>	ϵ , en mm		
<i>Tubos lisos</i>			
De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura; tubos de acero de precisión sin costura, serpentines industriales, plástico, hule	0.0015		
Tubos industriales de latón	0.025		
Tubos de madera	0.2	a	1
Hierro forjado	0.05		
Fierro fundido nuevo	0.25		
Fierro fundido, con protección interior de asfalto	0.12		
Fierro fundido oxidado	1	a	1.5
Fierro fundido, con incrustaciones	1.5	a	3
Fierro fundido, centrifugado	0.05		
Fierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y campana	0.15	a	0.3
Fierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y campana	2	a	3.5
Fierro fundido para agua potable, con bastantes incrustaciones y diámetro de 50 a 125 mm	1	a	40
Fierro galvanizado	0.15		
Acero rolado, nuevo	0.05		
Acero laminado, nuevo	0.04	a	0.1
Acero laminado con protección interior de asfalto	0.05		
<i>Tubos de acero soldado de calidad normal</i>			
Nuevo	0.05	a	0.10
Limpiado después de mucho uso	0.15	a	0.20
Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones	0.4		
Con muchas incrustaciones	3		
Con remaches transversales, en buen estado	0.1		
Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente	0.3	a	0.4
Con líneas transversales de remaches, sencilla o doble; o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla, sin incrustaciones	0.6	a	0.7
Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior, sin oxidaciones, con circulación de agua turbia	1		

TABLA 8.1 (Continuación)

<i>Material</i>	ϵ , en mm	
Acero soldado, con doble hilera transversal de pernos, agua turbia, tuberías remachadas con doble costura longitudinal de remaches y transversal sencilla, interior asfaltado o laqueado	1.2	a 1.3
Acero soldado, con costura doble de remaches transversales, muy oxidado. Acero remachado, de cuatro a seis filas longitudinales de remaches, con mucho tiempo de servicio	2	
<i>Tubos remachados, con filas longitudinales y transversales</i>		
a) Espesor de lámina < 5 mm	0.65	
b) Espesor de lámina de 5 a 12 mm	1.95	
c) Espesor de lámina > 12 mm, o entre 6 y 12 mm, si las hileras de pernos tienen cubrejuntas	3	
d) Espesor de lámina > 12 mm con cubrejuntas	5.5	
Tubos remachados, con cuatro filas transversales y seis longitudinales con cubrejuntas interiores	4	
Asbesto-cemento nuevo	0.025	
Asbesto-cemento, con protección interior de asfalto	0.0015	
Concreto centrifugado, nuevo	0.16	
Concreto centrifugado, con protección bituminosa	0.0015	a 0.125
Concreto en galerías, colado con cimbra normal de madera	1	a 2
Concreto en galerías, colado con cimbra rugosa de madera	10	
Concreto armado en tubos y galerías, con acabado interior cuidadosamente terminado a mano	0.01	
Concreto de acabado liso	0.025	
Conductos de concreto armado, con acabado liso y varios años de servicio	0.2	a 0.3
Concreto alisado interiormente con cemento	0.25	
Galerías con acabado interior de cemento	1.5	a 1.6
Concreto con acabado normal	1	a 3
Concreto con acabado rugoso	10	
Cemento liso	0.3	a 0.8
Cemento no pulido	1	a 2
Concreto presforzado Freyssinet	0.04	
Concreto presforzado Bona y Socoman	0.25	
Mampostería de piedra, bien junteada	1.2	a 2.5
Mampostería de piedra rugosa, sin juntear	8	a 15
Mampostería de piedra, mal acabada	1.5	a 3

TABLA 8.2 Coeficientes a de la fórmula de Genijew**Grupo I**

Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua con un pequeño contenido de materia orgánica y de solución de hierro:

a varía de 0.005 a 0.55; valor medio, 0.025.

Grupo II

Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua que contiene menos de 3 mg/lit de materias orgánicas y hierro en solución:

a varía de 0.055 a 0.18; valor medio, 0.07.

Grupo III

Agua que origina fuerte corrosión y con escaso contenido de cloruros y sulfatos (menos de 100 a 150 mg/lit). Agua con un contenido de hierro de más de 3 mg/lit:

a varía de 0.18 a 0.40; valor medio, 0.20.

Grupo IV

Agua que origina corrosión, con un gran contenido de sulfato y cloruros (más de 500 a 700 mg/lit). Agua turbia con una gran cantidad de materia orgánica:

a varía de 0.40 a 0.60; valor medio, 0.51.

Grupo V

Agua con cantidades importantes de carbonatos, pero de dureza pequeña permanente, con residuo espeso de 2 000 mg/lit:

a varía de 0.6 a más que 1.

dado que la carga de velocidad es la misma en ambos puntos.

La pendiente de fricción de 1 a 2 es constante y vale:

$$S_f = \frac{d}{ds} \left(\frac{p}{\gamma} + z \right)$$

$$= \frac{26.25 - 22.10}{9.2} = 0.451$$

Substituyendo la ecuación (8.3) en la Ec. (8.2b) y despejando a V , resulta:

$$V = \frac{\gamma S_f D^2}{32 \mu} =$$

$$= \frac{800 \times 0.451 \times (0.0125)^2}{32 \times 0.14 \times 10^{-2}} = 0.43 \text{ m/seg}$$

y el gasto será entonces:

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 V = \frac{\pi(0.0125)^2 \times 0.43}{4} = 0.527 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$f = \frac{64}{107.1} = 0.60$$

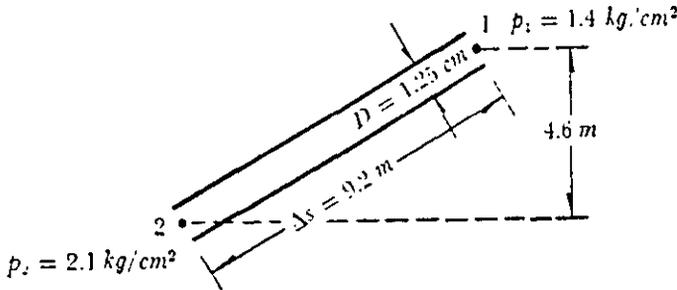


Figura 8.5. Ilustración al problema 8.1.

y el número de Reynolds se determina, una vez calculados ρ y V , así:

$$\rho = \frac{800}{9.8} = 81.63 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

$$v = \frac{0.41 \times 10^{-2}}{81.63} = 0.502 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{seg}$$

$$Re = \frac{0.430 \times 0.0125}{0.502 \times 10^{-4}} = 107.1 < 2\ 300$$

luego entonces el flujo es efectivamente laminar.

De la Ec. (8.3) el factor de fricción vale

Problema 8.2. En la Fig. 8.6 se muestra un dispositivo utilizado en el laboratorio para medir la viscosidad de los líquidos. Consiste en un recipiente a superficie libre o a presión con descarga al medio ambiente, mediante un tubo horizontal de diámetro pequeño. Dentro del recipiente se ha vaciado un líquido cuyo peso específico es $\gamma = 950 \text{ kg/m}^3$ y alcanza una altura $h = 0.80 \text{ m}$; hay una presión manométrica $p_0 = 0.1 \text{ kg/cm}^2$ sobre la superficie libre. El diámetro del tubo es $D = 5 \text{ cm}$ y su longitud $L = 6 \text{ m}$; el gasto descargado es de 182 kg/min . Determinar la viscosidad del líquido.

Solución. El gasto y la velocidad son los siguientes:

$$Q = \frac{182}{950 \times 60} = 0.00319 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 0.00319}{\pi \times (0.05)^2} = 1.625 \text{ m/seg}$$

Puesto que el tubo descarga al medio ambiente, la pérdida por fricción será:

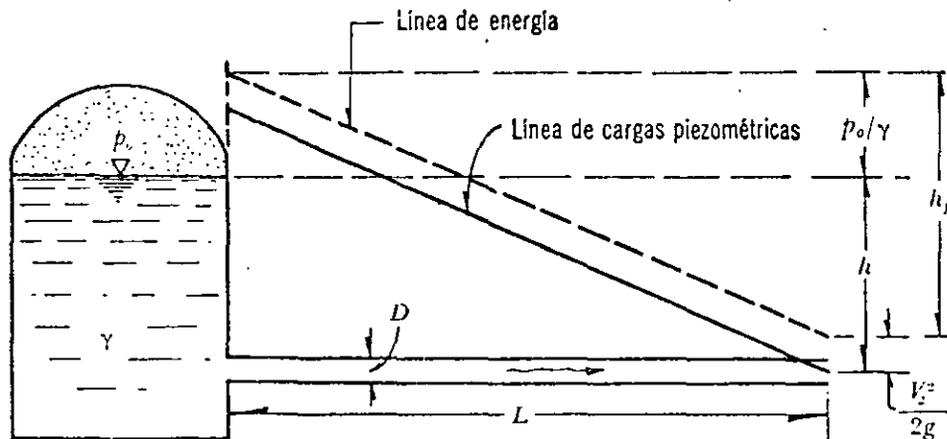


Figura 8.6. Ilustración del problema 8.2.

$$h_f = h + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{V^2}{2g} =$$

$$= 0.8 + \frac{0.1 \times 10^4}{950} - \frac{(1.625)^2}{19.6} = 1.718 \text{ m}$$

y la pendiente de fricción es:

$$S_f = \frac{1.718}{6} = 0.2863$$

Si suponemos que el flujo es laminar, de la ecuación que proporcionó la velocidad en el problema 8.1 la viscosidad dinámica resulta ser:

$$\mu = \frac{\gamma S_f D^2}{32 V} =$$

$$= \frac{950 \times 0.2863 \times (0.05)^2}{32 \times 1.625} =$$

$$= 0.013 \text{ kg seg/m}^2$$

Faltaría verificar si el flujo es efectivamente laminar. Con $\rho = \gamma/g$, el número de Reynolds vale:

$$R_e = \frac{V D \rho}{\mu} =$$

$$= \frac{1.625 \times 0.05 \times 950}{0.013 \times 9.8} = 606 < 2,000$$

luego, el flujo es laminar y los resultados anteriores son correctos.

Problema 8.3. Determinar el diámetro adecuado para una tubería de 305 m de longitud que transporta 57 lt/seg de aceite, en la cual se debe vencer una carga de 13.6 m, debida a las pérdidas por fricción. A la temperatura de trabajo, el peso específico del aceite es de 900 kg/m³ y la viscosidad dinámica de 0.14646 kg seg/m².

Calcular también la potencia hidráulica que la bomba debe proporcionar al fluido.

Solución. La pendiente de fricción vale

$$S_f = \frac{13.6}{305} = 0.0446$$

De la ecuación de continuidad y de la que proporcionó la velocidad media en el problema 8.1, resulta:

$$D = \left(\frac{128 \mu Q}{\pi \gamma S_f} \right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$\left(\frac{128 \times 0.14646 \times 0.057}{\pi \times 900 \times 0.0446} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$D = 0.304 \text{ m}$$

Es necesario verificar que el flujo sea efectivamente laminar. La velocidad media vale

$$V = \frac{0.057 \times 4}{\pi \times (0.304)^2} = 0.786 \text{ m/seg}$$

con $\rho = \gamma/g$, el número de Reynolds será:

$$R_e = \frac{0.786 \times 0.304 \times 900}{0.14646 \times 9.8} = 150$$

donde, por ser menor de 2 000, es correcto haber supuesto que el flujo es laminar.

La potencia que debe suministrar la bomba está dada por

$$P = \gamma Q H = 900 \times 0.057 \times 13.6$$

$$P = 697.68 \text{ kg m/seg}$$

o bien

$$P = \frac{697.68}{75} = 9.3 \text{ CV}$$

Problema 8.4. Calcular la pérdida de energía por fricción en un tramo de tubo liso de 153 m de longitud y 0.10 m de diámetro, donde fluye aceite de peso específico $\gamma = 930 \text{ kg/m}^3$, viscosidad $\mu = 0.00486 \text{ kg-seg/m}^2$, si la velocidad media es: a) $V = 0.60 \text{ m/seg}$; b) $V = 3 \text{ m/seg}$.

Solución a). El número de Reynolds es:

$$R_e = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.60 \times 0.10 \times 930}{9.8 \times 0.00486} = 1172 < 2000$$

luego el flujo es laminar y vale la ecuación (8.3), a saber:

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{1172} = 0.0546$$

La pérdida por fricción es

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{0.0546 \times 153 \times 0.36}{0.1 \times 19.6} = 1.535 \text{ m}$$

Solución b). Siguiendo un procedimiento semejante, tenemos que

$$R_e = \frac{3 \times 0.10 \times 930}{9.8 \times 0.00486} = 5858$$

Del diagrama de Moody, para un tubo liso $f = 0.0356$, resulta:

$$h_f = \frac{0.0356 \times 153 \times 9}{0.1 \times 19.6} = 25.01 \text{ m}$$

Problema 8.5. Determinar el gasto que fluye en un tubo de acero de 0.30 m de diámetro, que conduce agua potable con temperatura de 15°C , si se especifica que la pérdida de fricción sea de 1.20 m por cada 100 m de tubería ($\epsilon/D = 0.00085$).

Solución: Se supone $f = 0.0188$ para un número de Reynolds grande. De la fórmula de Darcy-Weisbach, tenemos:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{h_f D}{f L} = \frac{1.20 \times 0.30}{0.0188 \times 100} = 0.1915 \text{ m}$$

$$V = 1.939 \text{ m/seg}$$

Para el agua de 15°C , $\nu = 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$, el número de Reynolds resulta ser:

$$R_e = \frac{1.939 \times 0.30 \times 10^6}{1.145} = 508035$$

y del diagrama de Moody $f = 0.0195$, luego:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1.20 \times 0.30}{0.0195 \times 100} = 0.185 \text{ m}$$

$$V = 1.905 \text{ m/seg}$$

El nuevo número de Reynolds es $R_e = 499130$; por lo tanto, $f = 0.0195$.

El gasto vale, finalmente:

$$Q = \frac{\pi \times 0.09}{4} \times 1.905 = 0.135 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Problema 8.6. Determinar el diámetro de un tubo de acero ($\epsilon = 0.0000458 \text{ m}$), necesario para transportar $0.250 \text{ m}^3/\text{seg}$ de aceite, de viscosidad cinemática $\nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{seg}$, a una distancia de 3000 m con una pérdida de fricción de 23 m.

Solución. De la fórmula de Darcy-Weisbach tenemos:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{16 Q^2}{2g \pi^2 D^4}$$

Por lo tanto,

$$D^5 = \frac{8 L Q^2}{g \pi^2 h_f} f =$$

$$= \frac{8 \times 3000 \times 0.0625}{9.8 \times \pi^2 \times 23} f = 0.674 f$$

además:

$$R_e = \frac{4 Q D}{\pi v D^2}$$

$$= \frac{4 \times 0.250}{\pi \times 0.00001} \frac{1}{D} = \frac{31831}{D}$$

Si $f = 0.02$, entonces

$$D = \sqrt[5]{0.674 \times 0.02} = 0.423 \text{ m}$$

Con el valor aproximado de D , se obtiene:

$$R_e = \frac{31831}{0.423} = 75251$$

asimismo:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.0000458}{0.423} = 0.0000108$$

Del diagrama de Moody $f = 0.0195$, el diámetro será:

$$D = \sqrt[5]{0.674 \times 0.0195} = 0.42 \text{ m}$$

Es decir, prácticamente el mismo valor que en el caso anterior, el cual corresponde al diámetro definitivo de la tubería.

8.5 Tubos de sección no circular

En el caso de tubos de sección no circular, con esquinas pronunciadas, el esfuerzo cortante en la dirección del flujo es menor en las mismas que a lo largo de las paredes. Lo anterior provoca la formación

de corrientes secundarias desde la zona de alto cortante hacia el centro del tubo, mientras ocurre un flujo de circulación hacia las esquinas, con la tendencia a uniformar el cortante en la pared. El estudio fue hecho por Schiller y Nikuradse, mismos que determinaron la ley de fricción y la distribución de velocidades para tubos de sección rectangular, triangular, trapezoidal y circular, esta última con escotadura. Como conclusión a sus estudios encontraron que en estas secciones con poca simetría el factor de fricción podía calcularse, en las tres distintas zonas de escurrimiento, con las fórmulas obtenidas para tubos de sección circular; sólo basta cambiar D (diámetro del tubo circular) por $4 R_h$, donde R_h representa el radio hidráulico de la sección transversal del tubo.

Sin embargo, en 1963 J. Malaika (Ref. 41) realizó experimentos en tubos de sección no circular, con objeto de encontrar fórmulas para el factor de fricción f . La idea se basó en que un mismo valor de radio hidráulico puede caracterizar a un número ilimitado de geometrías de la sección, por lo que deberían intervenir otros parámetros (de la sección) capaces de tomar en cuenta esta contingencia. Malaika encontró que los errores causados al desprestigiar los efectos geométricos son, a menudo, más pequeños que los cometidos en la apreciación de la rugosidad del conducto; sin embargo, dichos efectos pueden inducir errores en el factor de fricción hasta de 35 %, dependiendo su magnitud del gasto y de las condiciones de frontera.

Las conclusiones de Malaika fueron las siguientes.

a) Como el diámetro del círculo inscrito en una sección cualquiera es una dimensión lineal más representativa de la sección (para ser usada en los números

de Reynolds y en la rugosidad relativa en el diagrama universal de Moody) es posible utilizar las ecuaciones antes obtenidas si en lugar del diámetro D se usa el diámetro d del círculo inscrito en las secciones (Fig. 8.7).

b) La eficacia hidráulica relativa, de una variedad de formas de secciones transversales de conductos, puede expresarse por la relación adimensional entre el diámetro del círculo inscrito y el radio hidráulico.

En la Fig. 8.7 se muestran cuatro formas distintas de la sección transversal de conductos, incluyendo el diámetro d del círculo inscrito en ellas.

8.6 Fórmulas empíricas de fricción

Antes de que se conocieran las fórmulas de tipo logarítmico, las únicas disponibles para el diseño eran las de tipo exponencial, puramente empíricas, cuyo solo mérito estriba en su sencillez. Sin embargo, fueron y siguen siendo usadas. Para tubos que transportan agua, dichas ecuaciones toman la expresión general:

$$V = a D^x S_f^y \quad (8.9a)$$

o bien, con $S_f = h_f/L$ (pendiente de fricción):

$$h_f = \left(\frac{V}{a D^x} \right)^{1/y} L = \left[\frac{4Q}{\pi a D^{(x+2)}} \right]^{1/y} L \quad (8.9b)$$

donde el coeficiente a y los exponentes x , y son empíricos. La expresión no es adimensional, por lo que se debe tener cuidado en la conversión de unidades.

Es conveniente investigar la relación entre el factor de fricción f y los términos anteriores. Para ello, si se iguala la ecuación (8.2a) de Darcy-Weisbach con la (8.9b) y se despeja a f resulta:

$$f = 2g \frac{D^{(1-x/y)}}{a^{1/y} V^{(2-1/y)}} \quad (8.10)$$

Dado que a normalmente varía con la rugosidad y la viscosidad, tiene por ello las mismas características que f .

Cuando las fórmulas exponenciales se representan gráficamente en el diagrama estándar $f - R_e$, aparecen como líneas rectas con diferentes pendientes. Debido a que la verdadera forma de la ecuación del factor de fricción es del tipo logarítmico, de concavidad hacia arriba (excepto en tubos rugosos en la zona turbulenta), la fórmula exponencial es aproximadamente válida únicamente en un intervalo limitado. En sus extremos, la línea recta queda debajo de la curva, con la que resulta una subestimación de la pérdida por fricción; por lo tanto, es importante tener cuidado con el intervalo en el cual se puede aplicar cada fórmula exponencial, dado que cualquier intento de extrapolación puede conducir a serios errores. Normalmente, la desviación máxima no excede de un 3%, lo cual está dentro de los límites de seguridad en la estimación de

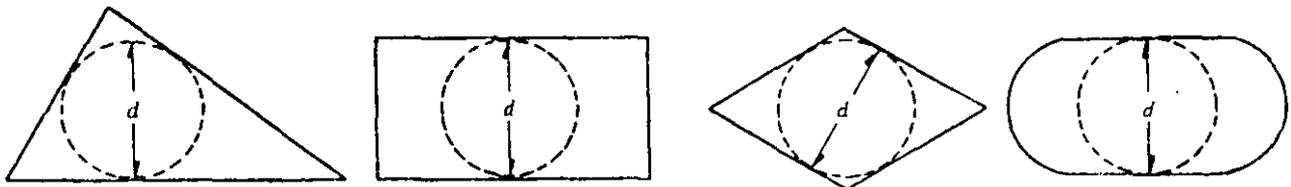


Figura 8.7. Círculo inscrito en las formas geométricas de secciones en tubos.

TABLA 8.3. Resumen de las fórmulas para el cálculo de pérdidas por fricción, aplicables al flujo de agua en conductos a presión. Las unidades se expresan en sistema MKS

Tipo de tubería y flujo	Autor	Fórmula	Observaciones
Cualquier tipo de tubo y flujo.	Darcy-Weisbach	$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$	Es la Ec. (8.2) y es de tipo universal; f se obtiene del diagrama universal de Moody, o de alguna de las fórmulas indicadas a continuación.
Tubos lisos o rugosos en la zona laminar.	Poiseuille	$f = \frac{64}{R_e}$	Es la Ec. (8.3) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach y vale para $R_e < 2300$.
Tubos lisos en la zona de transición o turbulenta.	Blasius	$f = \frac{0.3164}{R_e^{0.25}}$	Es la Ec. (8.4) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach. Vale para tubos de aluminio, latón, cobre, plomo, plástico, vidrio y asbesto-cemento para $R_e > 10^5$.
	Nikuradse	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left(\frac{R_e \sqrt{f}}{2.51} \right)$	Es la Ec. (8.5b) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach. Vale para $2.3 \times 10^4 \leq R_e \leq 3.4 \times 10^6$.
	Kozeny (Ref. 9)	$f = \frac{2g}{(7.78 \log R_e - 5.95)^2}$	Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach y vale para tubos de asbesto-cemento y para $R_e > 4000$.
	Richter (Ref. 43)	$f = 0.01113 + 0.917/R_e^{0.41}$	Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach y vale para tubos de hule y para $R_e > 4000$.
	Ludin (Ref. 42)	$V = 140 R_h^{0.045} S_f^{5/9}$	Equivale a usar la Ec. (8.9b) con $a = 57.37$, $x = 0.645$, $y = 5/9$. Vale para tubos de asbesto-cemento. En esta fórmula R_h es el radio hidráulico del tubo.

TABLA 8.3 (Continuación)

Tubos rugosos en la zona de transición o turbulenta.	Colebrook-White	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right)$	Es la Ec. (8.7) y vale para tubos lisos o rugosos en la zona de transición o turbulenta y con $R_e > 4000$. Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach.
	Hazen-Williams (Ref. 44)	$V = 0.355 C_H D^{0.63} S_f^{0.54}$	Equivale a usar la Ec. (8.9a) con $a = 0.355 C_H$; $x = 0.63$, $y = 0.54$. Es la fórmula más común para tubos rugosos. C_H depende del material del tubo de acuerdo con la tabla 8.4.
Tubos rugosos en la zona turbulenta.	Nikuradse	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71 D}{\epsilon}$	Es la Ec. (8.6b) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach.
	Kozeny (Ref. 9)	$f = \frac{2g}{(8.86 \log D + N)^2}$	Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach. N depende del material en la tubería según la tabla 8.4.
	Chezy	$V = C \sqrt{R_h S_f}$	Es la fórmula general para este tipo de tubos y se obtiene de la fórmula de Darcy-Weisbach haciendo $D = 4 R_h$. Equivale a usar la Ec. (8.9a) con $a = 0.5 C$; $x = y = 0.5 C$ es un coeficiente que se obtiene de las fórmulas de Bazin, Kutter o Manning.
	Bazin (Ref. 31)	$C = \frac{87}{1 + \Delta/\sqrt{R_h}}$	Se aplica a la fórmula de Chezy, donde Δ depende del material de que está construido el tubo de acuerdo con la tabla 8.4.
	Kutter (Ref. 45)	$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}}$	Se aplica a la fórmula de Chezy, donde m depende del material de que está construido el tubo de acuerdo con la tabla 8.4.
	Manning (Ref. 42)	$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2}$	Resulta de la fórmula de Chezy al considerar que $C = R_h^{1/6}/n$. Equivale a usar la Ec. (8.9a) con $a = 0.397/n$, $x = 2/3$, $y = 1/2$. n depende del material de que está construido el tubo de acuerdo con la tabla 8.4.

TABLA 8.4 Valores de C_H , Δ , m , n y N aplicables a las fórmulas de la tabla 8.3 de acuerdo con el material de que está construido el tubo

<i>Material</i>	C_H	Δ	m	n	N
Acero corrugado	60	—	—	—	—
Acero con juntas <i>lock-bar</i> (nuevo).	135	—	—	—	—
Acero galvanizado (nuevo y usado).	125	—	—	0.014	—
Acero remachado (nuevo).	110	—	—	0.015 a 0.016	31
Acero remachado (usado).	85	—	—	—	28 a 26
Acero soldado o con remache avellanado y embutido (nuevo).	120	—	—	0.012 a 0.013	34
Acero soldado o con remache avellanado y embutido (usado).	90	—	—	—	31 a 27
Acero sin costura (nuevo).	—	0.10	0.25	—	38
Acero sin costura (usado).	—	—	0.35	—	36
Acero soldado, con revestimiento especial (nuevo y usado).	130	—	—	—	—
Fierro fundido limpio (nuevo).	130	0.16	0.25	0.013	35
Fierro fundido, sin incrustaciones (usado).	110	0.23	0.275	—	—
Fierro fundido, con incrustaciones (viejo).	90	0.36	0.35	—	30
Plástico.	150	—	—	—	—
Asbesto-cemento (nuevo).	135	0.06	—	—	—
Cobre y latón.	130	—	—	—	—
Conductos con acabado interior de cemento pulido.	100	—	0.10	—	—
Concreto, acabado liso.	130	—	0.20	—	38
Concreto, acabado común.	120	0.18	—	—	—
Concreto monolítico, colado con cimbras deslizantes ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.010 a 0.011	—
Concreto monolítico bien cimbrado y pulido ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.011 a 0.0123	—
Concreto monolítico bien cimbrado y sin pulir ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.014 a 0.015	—
Concreto con acabado tosco ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.015 a 0.017	27 a 26
Concreto con juntas de macho y campana ($D > 0.8$ m).	—	—	—	0.0105 a 0.012	—
Concreto con juntas toscas ($D > 0.5$ m).	—	—	—	0.0125 a 0.014	30
Concreto con juntas toscas ($D < 0.5$ m).	—	—	—	0.014 a 0.017	—
Conductos para alcantarillado.	—	—	—	—	28
Tubos de barro vitrificado (drenes).	110	—	—	0.011	34
Túneles perforados en roca sin revestimiento.	—	—	—	0.025 a 0.040	—
Madera cepillada o en duelas.	120	—	0.10	0.0105 a 0.012	—

la rugosidad. En la tabla 8.3 se presenta un resumen de las principales fórmulas experimentales para el cálculo de la pérdida por fricción en tuberías.

Problema 8.7. Un tubo de acero transporta $0.152 \text{ m}^3/\text{seg}$ de agua. Si $S_f = 0.0025$, determinar el diámetro del tubo requerido de acuerdo con las fórmulas de: a) Colebrook-White ($\epsilon = 0.3 \text{ mm}$); b) Hazen-Williams ($C_H = 135$); c) Manning ($n = 0.01$). Suponer $\nu = 0.0114 \text{ cm}^2/\text{seg}$.

Solución a). En cualquier caso la velocidad vale:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{0.194}{D^2}$$

Substituyendo en la fórmula de Colebrook-White, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{14.75 \times 10^{-6} \times D}{\sqrt{f}} + \frac{80.9 \times 10^{-6}}{D} \right) \quad (a)$$

De la fórmula de Darcy-Weisbach (Ec. 8.2 b) se obtiene:

$$0.0025 = \frac{f}{19.61 D} \left(\frac{0.194}{D^2} \right)^2$$

de tal manera que: $\sqrt{f} = D^{2.5}/0.877$, y substituida en la Ec. (a) resulta:

$$\frac{0.877}{D^{2.5}} = -2 \log \left(\frac{12.94 \times 10^{-6}}{D^{1.5}} + \frac{80.9 \times 10^{-6}}{D} \right)$$

Por un procedimiento de iteraciones resulta $D = 0.425 \text{ m}$.

Solución b). Substituyendo en la fórmula de Hazen-Williams (tabla 8.3), tenemos:

$$\frac{0.194}{D^2} = 0.355 \times 135 (0.0025)^{0.54} D^{0.63}$$

de la cual, $D = 0.420 \text{ m}$.

Solución c). Substituyendo en la fórmula de Manning (tabla 8.3):

$$\frac{0.194}{D^2} = \frac{0.397 D^{2/3} (0.0025)^{1/2}}{0.01}$$

de la cual, $D = 0.417 \text{ m}$.

En la práctica, un diámetro comercial de 457 mm sería apropiado para todos los valores de D que han sido obtenidos. Para $D = 0.425 \text{ m}$, $V = 1.07 \text{ m/seg}$ y $R_e = 4 \times 10^5$; del diagrama universal de Moody: $f = 0.0182$. Esto indica que el tubo opera en la zona de transición.

8.7 Pérdidas locales

8.7.1 Fórmula general

Las tuberías de conducción que se utilizan en la práctica están compuestas, generalmente, por tramos rectos y curvos para ajustarse a los accidentes topográficos del terreno, así como a los cambios que se presentan en la geometría de la sección y de los distintos dispositivos para el control de las descargas (válvulas y compuertas). Estos cambios originan pérdidas de energía, distintas a las de fricción, localizadas en el sitio mismo del cambio de geometría o de la alteración del flujo. Tal tipo de pérdida se conoce como *pérdida local*. Su magnitud se expresa como una fracción de la carga de velocidad, inmediatamente aguas abajo

del sitio donde se produjo la pérdida; la fórmula general de pérdida local es:

$$h = K \frac{V^2}{2g} \quad (8.11)$$

donde

- h pérdida de energía, en m;
- K coeficiente sin dimensiones que depende del tipo de pérdida que se trate, del número de Reynolds y de la rugosidad del tubo;
- $V^2/2g$ la carga de velocidad, aguas abajo, de la zona de alteración del flujo (salvo aclaración en contrario) en m.

En los siguientes incisos se presentan los valores del coeficiente K , de acuerdo con el tipo de perturbación.

8.7.2 Pérdida por entrada

A la entrada de las tuberías se produce una pérdida por el efecto de contracción que sufre la vena líquida y la formación de zonas de separación; el coeficiente K depende, principalmente, de la brusquedad con que se efectúa la contracción del chorro. En la Fig. 8.8 se muestran algunos valores tomados de las Refs. 1 y 6.

La entrada elíptica (Fig. 8.8 h) es la que produce el mínimo de pérdidas. Si el tubo es de sección circular la ecuación de la elipse de entrada es (Ref. 37), (ver también capítulo 6):

$$\frac{x^2}{(0.5 D)^2} + \frac{y^2}{(0.15 D)^2} = 1 \quad (8.12)$$

Si es de sección rectangular la ecuación resulta ser:

$$\frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{(0.33 H)^2} = 1 \quad (8.13)$$

donde H es la dimensión vertical del conducto, para definir la forma del perfil superior e inferior o la dimensión horizontal para la forma de las entradas laterales.

8.7.3 Pérdida por rejilla

Con objeto de impedir la entrada de cuerpos sólidos a las tuberías, suelen utilizarse estructuras de rejillas formadas por un sistema de barras o soleras verticales, regularmente espaciadas, que se apoyan sobre miembros estructurales; dichas rejillas obstaculizan el flujo y producen una pérdida de energía. Cuando están parcialmente sumergidas y sobresalen del nivel de la superficie del agua, el coeficiente K puede calcularse con la fórmula de Kirschmer que está de acuerdo con las experiencias de Fellenius y Spangler, además de ser válida para el flujo normal al plano de rejillas:

$$K = C_f (s/b)^{4/3} \text{ sen } \theta \quad (8.14)$$

donde C_f es un coeficiente que depende de la forma de la reja; V , en la Ec. 8.11, es la velocidad V_0 frente a las rejas como si éstas no existieran.

En la Fig. 8.9 se indica el significado de cada término.

Cuando la dirección del flujo no es normal al plano de rejillas, la pérdida es mayor y el coeficiente K se calcula con la fórmula de Mosonyi (Ref. 46), a saber:

$$K = K_0 \beta \quad (8.15)$$

donde K_0 es el coeficiente de pérdida para flujo normal al plano de reja y β otro coeficiente que depende del cociente s/b y del ángulo δ de inclinación del flujo, cuyos valores se presentan en la Fig. 8.10.

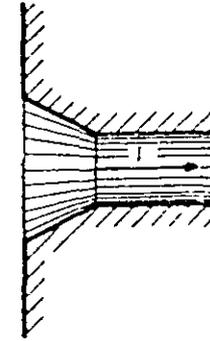
Como se desconoce el grado de aplica-



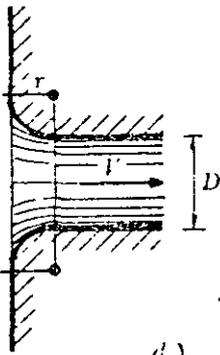
a) $K = 0.5$



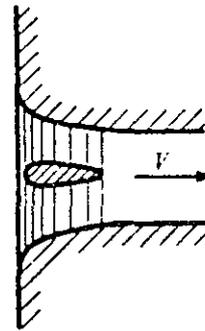
b) $K = 0.5 + 0.3 \cos\theta + 0.2 \cos^2\theta$



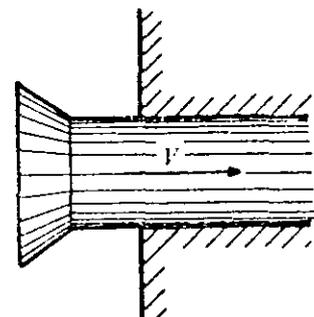
c) $K = 0.15$ a 0.25



d)

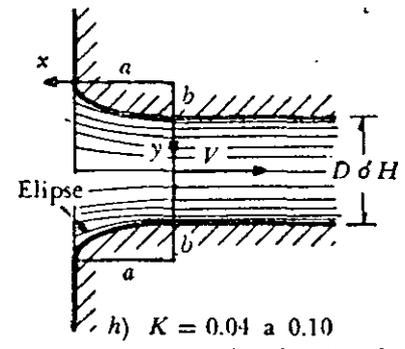
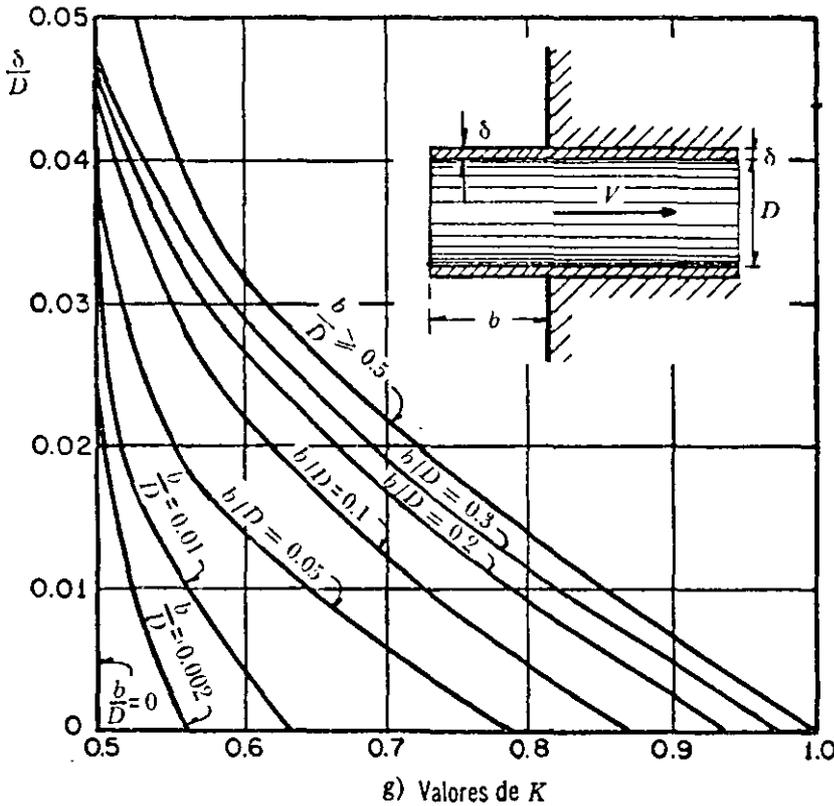


e) $K = 0.06$ a 0.10

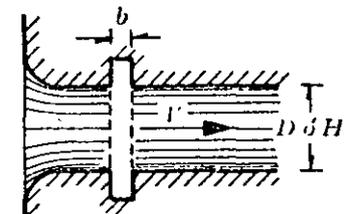


f) $K = 0.5$

r/D	0	0.04	0.08	0.12	0.16	>0.2
K	0	0.26	0.15	0.09	0.06	>0.03



h) $K = 0.04$ a 0.10
para tubo circular; δ
de 0.07 a 0.2 para
tubo rectangular.



i) Coeficientes de pérdida por escotadura
 $K = 0.05$ a 0.10 ,
si $b/D > 1$ $\delta b/H > 0.2$
y $V > 2$ m/seg.
De lo contrario, $K \approx 0$.

Figura 8.8. Coeficientes de pérdida —por entrada— para diferentes formas.

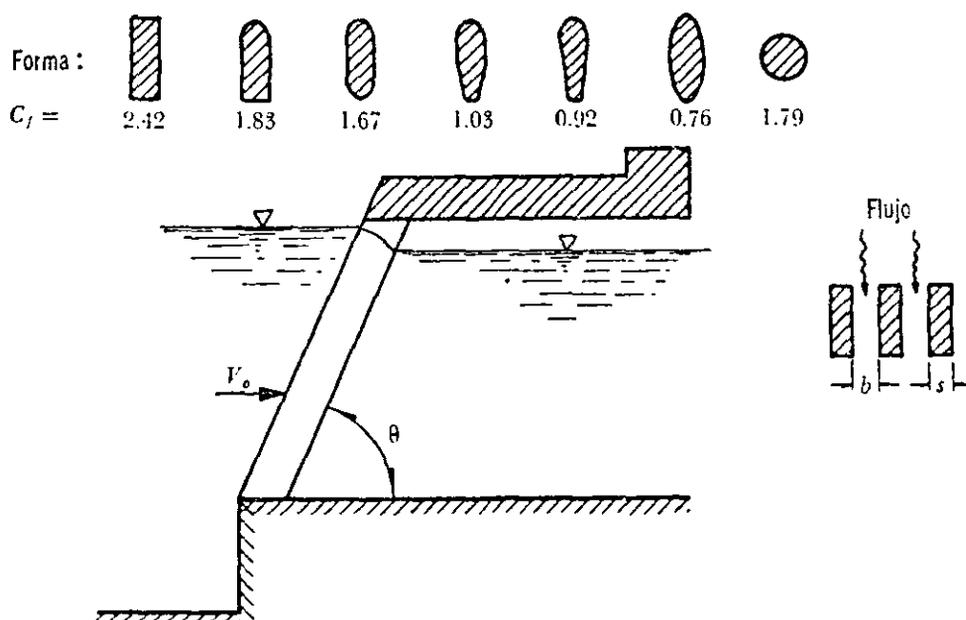


Figura 8.9. Coeficientes C_f aplicables a la fórmula de Kirschmer de acuerdo con la forma de las barras.

ción de las fórmulas anteriores a rejillas completamente sumergidas, se puede obtener una aproximación media con la fórmula de Creager (Ref. 37), siguiente:

$$K = 1.45 - 0.45 (A_n/A_b) - (A_n/A_b)^2 \quad (8.16)$$

donde:

- A_n área neta de paso entre rejillas;
- A_b área bruta de la estructura de rejillas.

Debe aclararse que, al aplicar la Ec. (8.16) en la Ec. (8.11), V es la velocidad neta a través de las rejillas.

8.7.4 Pérdida por ampliación

Esta se origina al producirse una ampliación de la sección transversal del tubo. El coeficiente K depende de la brusquedad de la ampliación y para encontrarlo se usa la fórmula de Borda-Carnot (Ec. 4.45b):

$$K = C_a \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \quad (8.17)$$

donde C_a depende del ángulo θ del difusor, como se muestra en la Fig. 8.11, la cual incluye los resultados de Gibson. Para ampliaciones bruscas se usa la misma fórmula con $C_a = 1$.

La pérdida mínima de energía se obtiene para ángulos de difusión $\theta = 8^\circ$; para $\theta \geq 50^\circ$ una ampliación brusca es tan confiable como la gradual.

A fin de evitar separaciones y cavitaciones, el ángulo θ del difusor debe ser

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{gD}}{2V} \text{ para } \theta < 20^\circ$$

donde:

$$D = (D_1 + D_2)/2 \text{ y } V = (V_1 + V_2)/2.$$

Según Hutarew (Ref. 3) el ángulo θ óptimo depende del número de Reynolds (Fig. 8.12). Para calcular θ en transiciones c

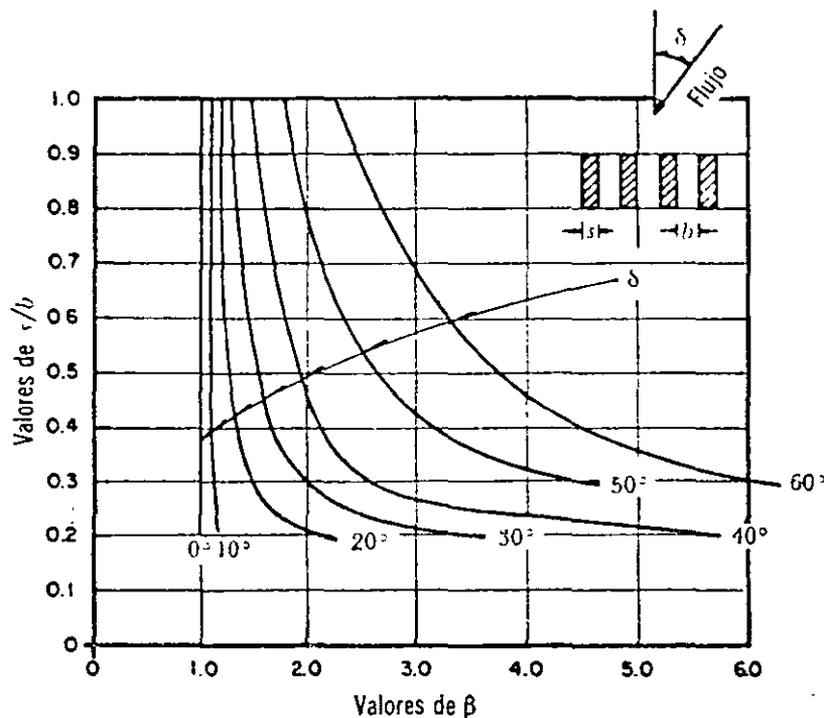


Figura 8.10. Valores de β para flujo inclinado, según Mosonyi.

sección distinta de la circular, se usa el criterio del cono equivalente, es decir, un cono truncado o limitado por áreas circulares, de la misma magnitud que las reales, en los extremos de la transición.

8.7.5 Pérdida por reducción

En este caso se produce un fenómeno

de contracción semejante al de entrada a la tubería, el cual también conviene que sea gradual. Si bien en este caso la pérdida es inferior a la de la ampliación, dependiendo de la brusquedad con que se efectúa la contracción, el coeficiente de pérdida está supeditado al ángulo θ al cual ésta se produzca, de acuerdo con la tabla 8.5 de Kisieliev (Ref. 6).

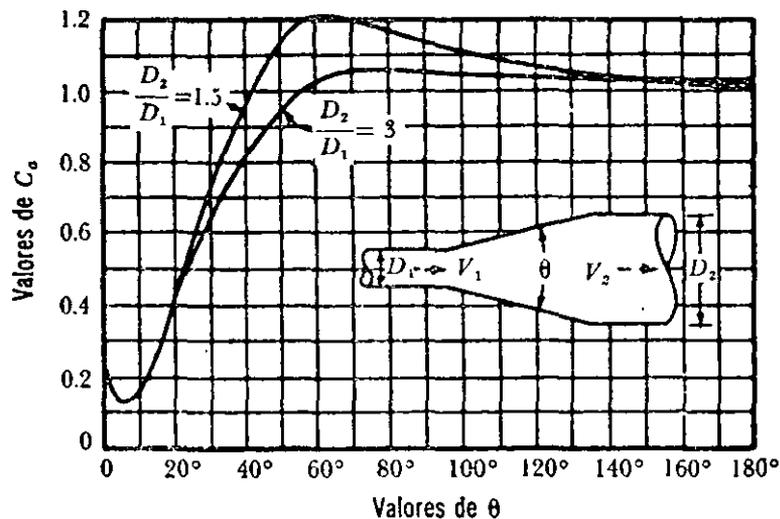


Figura 8.11. Coeficientes de pérdida para ampliaciones graduales.

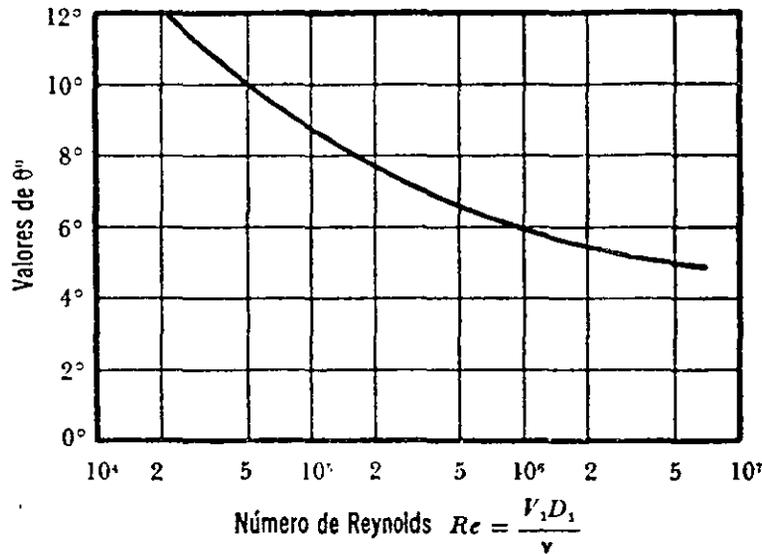


Figura 8.12. Ángulo óptimo del difusor, en función del número de Reynolds.

TABLA 8.5. Coeficiente de pérdida por reducción gradual de ángulo θ , según Kisieliev

θ	4 a 5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°
K	0.060												
	0.005	0.16	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

Con objeto de evitar pérdidas grandes, el ángulo de reducción no debe exceder de un valor especificado (Fig. 8.13).

Dicho ángulo vale:

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{gD}{V}}$$

en que

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}; \quad V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

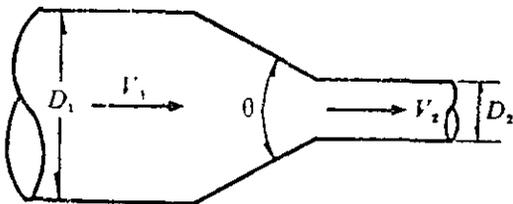


Figura 8.13. Reducción gradual.

y en este caso, $K_r = 0.1$.

Si la contracción es brusca se usan los coeficientes de Weisbach, mostrados en la Fig. 8.14, en la que aparece también la curva de Kisieliev (Ref. 6), la cual pretende dar los valores medios de todos los autores que han estudiado el problema. En el caso de tubos de pequeño diámetro, un cople reductor tiene un coeficiente de pérdida K que varía de 0.05 a 2; y para un cople que una dos tubos del mismo diámetro, K varía de 0.35 a 0.9 para diámetros variando de 100 mm a 25 mm, respectivamente.

Cuando la contracción brusca contenga un diafragma como el que aparece en la Fig. 8.15, el coeficiente de pérdida vale (Ref. 43):

$$K = \left(\frac{A_2}{\mu A_0} - 1 \right)^2 + 0.04 \left(\frac{A_2}{A_0} \right)^2 \quad (8.18)$$

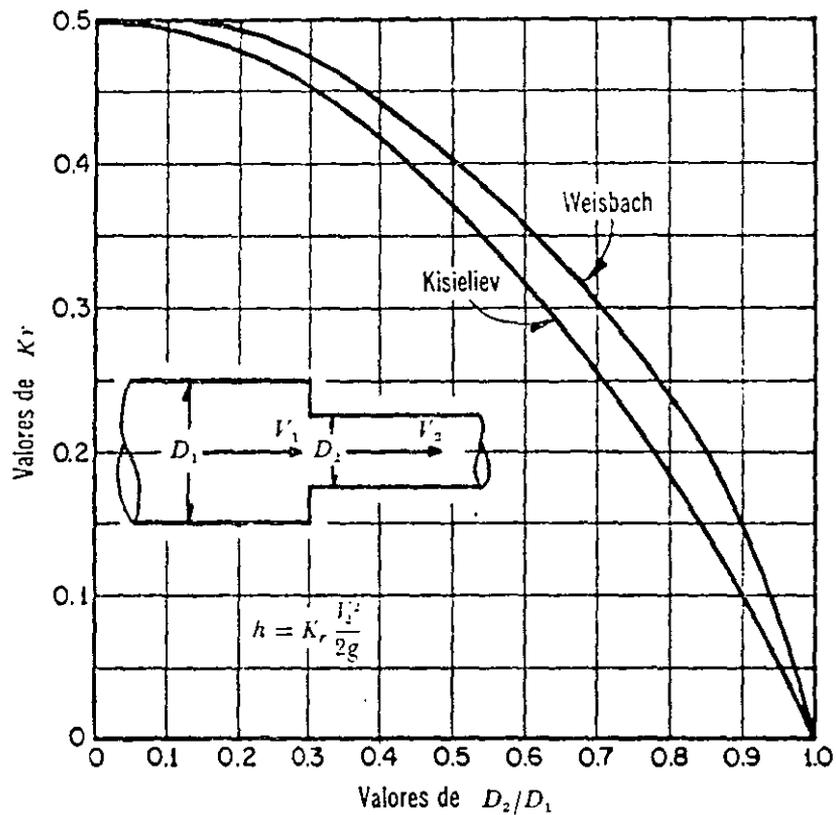


Figura 8.14. Pérdida de energía en una contracción brusca.

Siendo la pérdida $h = K V_2^2 / 2g$.

Si $A_0 < 0.1 A_1$ y el diafragma tiene cantos afilados, los valores de μ y K de la Ec. 8.18 se muestran en la tabla 8.6 (Ref. 43):

TABLA 8.6. Coeficientes μ y K para el cálculo de la pérdida en una contracción brusca con diafragma, para $A_0 < 0.1 A_1$

A_0/A_2	μ	K
0.1	0.616	231.7
0.2	0.614	51
0.3	0.612	19.78
0.4	0.610	9.61
0.5	0.607	5.26
0.6	0.605	3.08
0.7	0.603	1.88
0.8	0.601	1.17
0.9	0.598	0.73
1	0.596	0.48

Si $A_0 \geq 0.1 A_1$ y el diafragma tiene can-

tos afilados, los valores de μ de la Ec. 8.18 se presentan en la tabla 8.7 (Ref. 43).

TABLA 8.7. Coeficientes μ y K para el cálculo de la pérdida en una contracción brusca con diafragma, para $A_0 \geq 0.1 A_1$

A_0/A_1	μ
0.1	0.63
0.2	0.64
0.3	0.65
0.4	0.67
0.5	0.69
0.6	0.72
0.7	0.77
0.8	0.85
0.9	0.92
1	1

Si $A_1 = A_2$ y el diafragma tiene cantos afilados ($A_0/A_1 = A_0/A_2 > 0.1$), los valores de μ y K se presentan en la tabla 8.8 (Ref. 43):

TABLA 8.8. Coeficientes de μ y K para un diafragma en un tubo de diámetro constante

A_0/A_1	μ	K
0.05	—	1 070
0.1	0.624	226
0.2	0.632	47.8
0.3	0.643	17.5
0.4	0.659	7.8
0.5	0.681	3.76
0.6	0.712	1.79
0.7	0.755	0.80
0.8	0.813	0.29
0.9	0.892	0.09
1	1.0	0

Si A_1 es muy grande, $\mu \approx 0.60$; según Weisbach (Ref. 9) los valores de K se presentan en la tabla 8.9 y siguen la ecuación

$$K = \left(\frac{A_2}{\mu A_0} - 1 \right)^2$$

TABLA 8.9. Coeficiente de pérdida para un diafragma a la entrada de un tubo

A_2/A_0	K
1	0.44
1.25	1.17
1.5	2.25
2	5.44
3	16
5	53.7
10	245.5

8.7.6 Pérdida por cambio de dirección

Si se visualiza el flujo en un cambio de dirección, se observa que los filetes tienden a conservar su movimiento rectilíneo en razón de su inercia. Esto modifica la distribución de velocidades y produce zonas de separación en el lado interior y aumentos de presión en el exterior, con

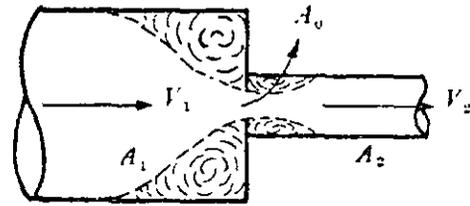


Figura 8.15. Reducción con diafragma.

un movimiento espiral que persiste en una distancia de 50 veces el diámetro. Si el cambio de dirección es gradual con una curva circular de radio medio R y rugosidad absoluta ϵ , para obtener el coeficiente de pérdida K se usa la gráfica de Hoffman (Fig. 8.16a) que, además, toma en cuenta la fricción en la curva (Ref. 47), donde

$$K = C_c \frac{\theta^\circ}{90^\circ} \quad (8.19)$$

Si el tubo es liso se usa la gráfica (de la Fig. 8.16b) de Wasiliewski (Ref. 47).

Para curvas en ductos rectangulares, se emplea la fórmula de Abramovich (Ref. 6), a saber:

$$K = 0.73 C D E \quad (8.20)$$

donde C , D y E son coeficientes que se obtienen de las Figs. 8.17

Los coeficientes de las Figs. 8.17a, b y c, son válidos para curvas en tubos de gran diámetro. Si se trata de curvas en tubos de menor diámetro, se usan los resultados de la Fig. 8.18 (Ref. 47) de acuerdo con el diámetro nominal del tubo.

Si el cambio de dirección es brusco, el coeficiente de pérdida depende del número de Reynolds —como se muestra en la Fig. 8.19 (Ref. 47)—, de Kirchbach y Schubart, para diferentes ángulos. Si el cambio de dirección es a base de pequeños tramos rectos, los coeficientes de pérdida se obtienen de la Fig. 8.20 (Ref. 47)

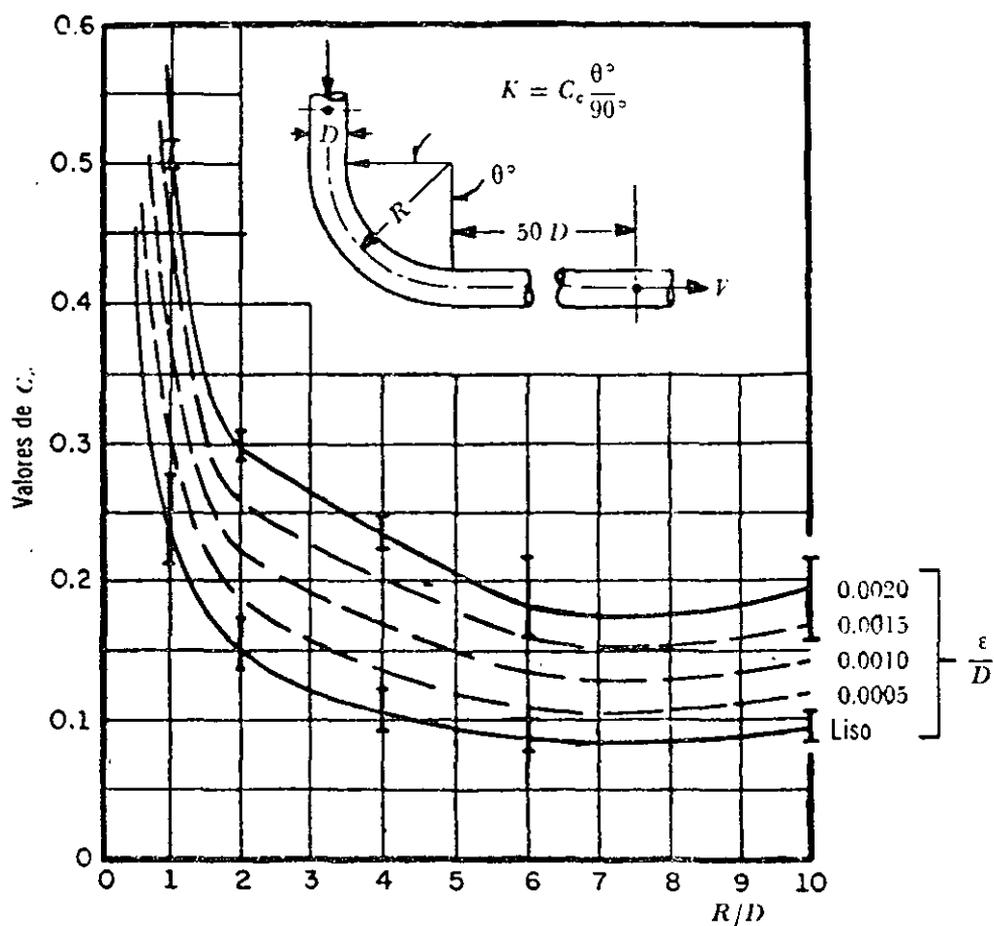


Figura 8.16a. Coeficientes C_c para curvas de diámetro constante y $R_e > 2.2 \times 10^5$, en tubos rugosos.

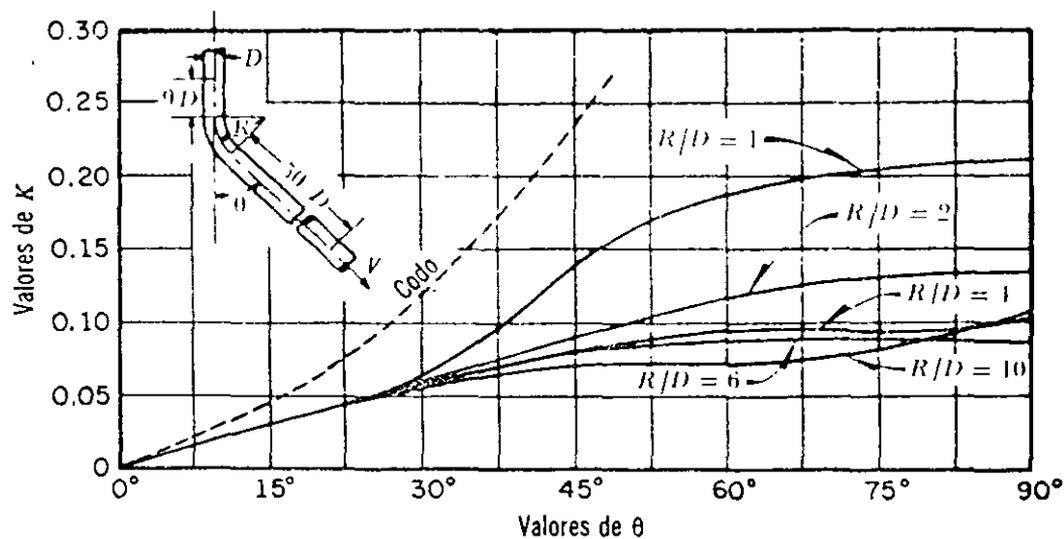


Figura 8.16b. Coeficientes de pérdida en curvas de diámetro constante con superficie lisa y número de Reynolds de 2.25×10^5 .

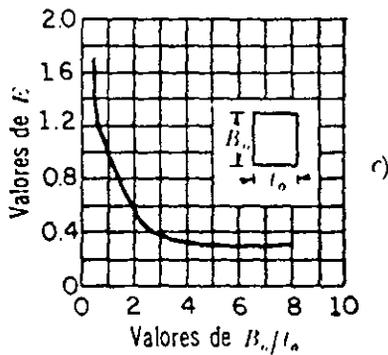
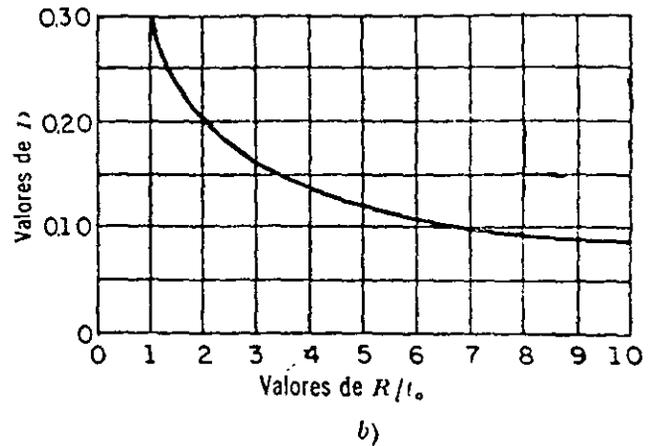
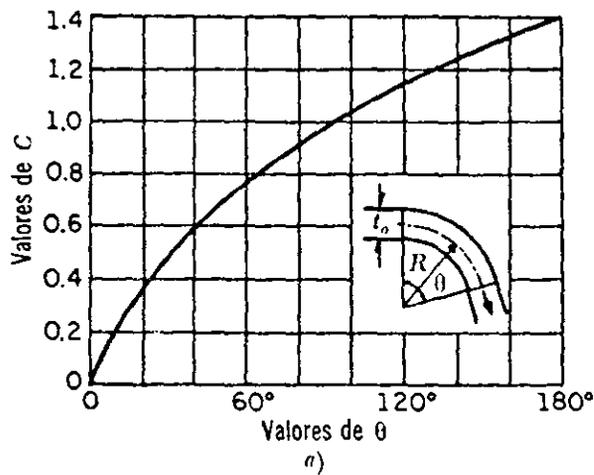


Figura 8.17. Coeficientes C , D y E , para el cálculo de la pérdida, en una curva de un tubo de sección rectangular.

que contiene los resultados, de diferentes investigadores, para tubos lisos y rugosos.

8.7.7 Pérdida por válvulas

Los coeficientes de pérdida por válvulas varían de acuerdo con el tipo, para

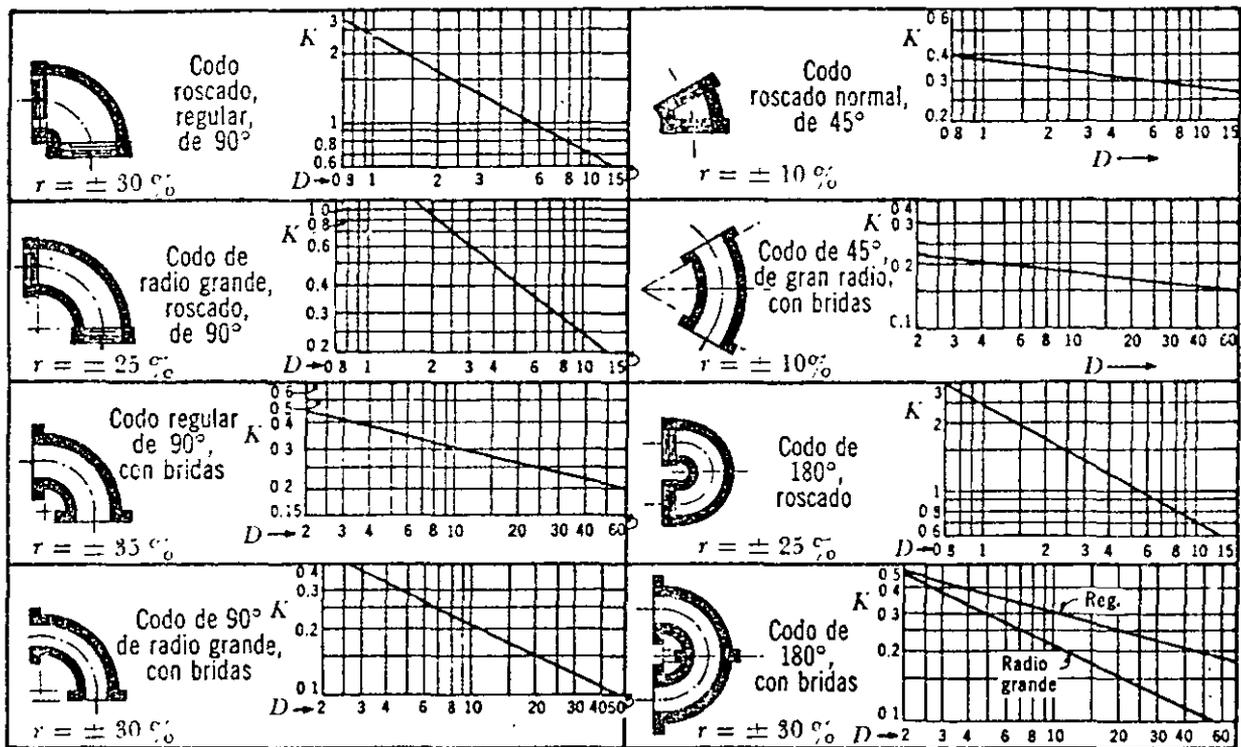
TABLA 8.10. Coeficientes de pérdida para válvulas de compuerta de diámetro $D = 50$ mm.

c	K	A/A_0
1/8	0.07	0.949
2/8	0.26	0.856
3/8	0.81	0.74
4/8	2.06	0.609
5/8	5.52	0.466
6/8	17	0.315
7/8	97.8	0.159
31/32	159	—

distintas posiciones, deben ser proporcionados por los fabricantes. A falta de estos datos, se pueden utilizar los valores medios que a continuación se indican.

TABLA 8.11. Coeficientes de pérdida para válvulas de compuerta cuyo diámetro es menor o mayor de 50 mm

D mm	25	100	150	300	900	
Valores de c	0.95	—	—	850	680	—
	0.9	—	—	215	165	—
	0.8	—	—	47	35	28
	0.75	32	16	—	—	—
	0.7	—	—	16	12	9
	0.6	—	—	7	5.5	4
	0.5	4.1	2.6	3.3	2.7	1.8
	0.4	—	—	1.7	1.3	—
	0.3	—	—	1.05	0.65	—
	0.25	0.23	0.14	—	—	—
	0.2	—	—	0.68	0.29	—
	0	0.23	0.14	—	—	—



Nota: El diámetro D corresponde al nominal y se mide en centímetros, r es el intervalo aproximado de variación para K .

Figura 8.18. Coeficientes de pérdida para los codos.

Para válvulas de compuerta (Fig. 8.21), los coeficientes de pérdida, así como la relación del área abierta, al área total del

conducto, varía de acuerdo con la tabla 8.10, válida para $D = 50$ mm (Ref. 45.)

TABLA 8.12. Coeficientes de pérdida para válvulas esféricas

θ°	K	A/A_0
5	0.05	0.926
10	0.29	0.85
15	0.75	0.772
20	1.56	0.692
25	3.10	0.613
30	5.17	0.535
35	9.68	0.458
40	17.3	0.385
45	31.2	0.315
50	52.6	0.25
55	106	0.19
60	206	0.137
65	486	0.091
82	∞	0

TABLA 8.13. Coeficientes de pérdida para válvulas de lenteja

θ°	K	A/A_0
5	0.24	0.913
10	0.52	0.826
15	0.90	0.741
20	1.54	0.658
25	2.51	0.577
30	3.91	0.500
35	6.22	0.426
40	10.8	0.357
45	18.7	0.293
50	32.6	0.234
55	58.8	0.181
60	118	0.124
65	256	0.094
70	751	0.06
90	∞	0

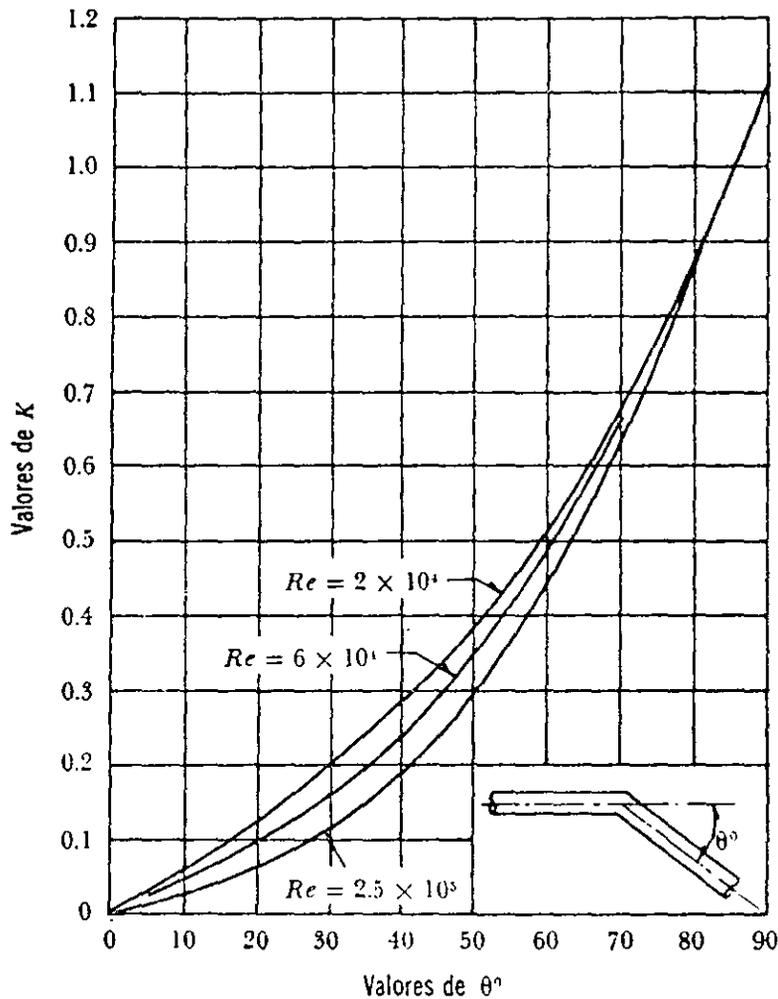


Figura 8.19. Coeficiente de pérdida por codo, K .

Si la válvula de compuerta es de diámetro inferior o mayor de 50 mm, la tabla 8.11 sirve para seleccionar el coeficiente K , de pérdida, adecuado.

Los coeficientes de pérdida, para válvulas esféricas (Fig. 8.22), dependen del ángulo de abertura θ , como se indica en la tabla 8.12.

Para válvulas de mariposa o de lenteja (Fig. 8.23), K se obtiene de la tabla 8.13.

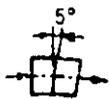
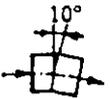
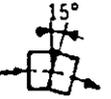
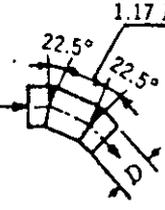
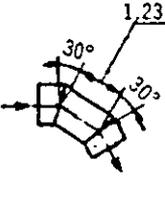
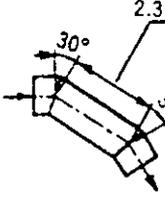
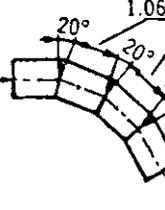
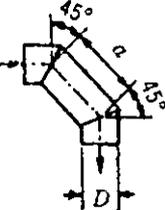
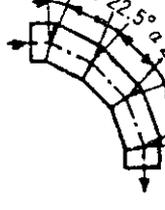
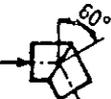
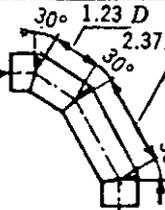
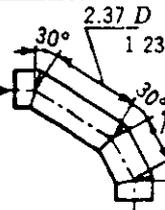
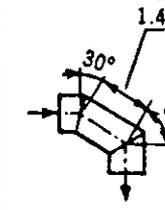
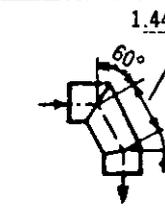
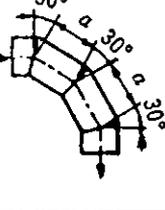
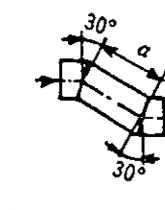
Si la válvula de mariposa está completamente abierta, el coeficiente de pérdida se obtiene de la siguiente fórmula (Ref. 6):

$$K = t/d = \frac{\text{espesor de la hoja}}{\text{diámetro}} \quad (8.21)$$

Cuando se utilice una compuerta radial (Fig. 8.24) para controlar la descarga

TABLA 8.14. Coeficientes de pérdida para compuertas radiales en una tubería

ϕ/ϕ_0	b/W	K
0.10	0.07	128
0.2	0.15	30.2
0.3	0.24	12.2
0.4	0.34	6.03
0.5	0.43	3.23
0.6	0.54	1.79
0.7	0.65	0.99
0.8	0.77	0.56
0.9	0.86	0.36
0.95	0.94	0.31
1.00	1.00	0.30

 $K_s = 0.016$ $K_r = 0.024$	 $K_s = 0.034$ $K_r = 0.044$	 $K_s = 0.042$ $K_r = 0.062$	 $K_s = 0.066$ $K_r = 0.154$																																																																											
 $K_s = 0.112$ $K_r = 0.284$	 $K_s = 0.150$ $K_r = 0.268$	 $K_s = 0.143$ $K_r = 0.227$	 $K_s = 0.108$ $K_r = 0.236$																																																																											
 K_s K_r	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/D</th> <th>K_s</th> <th>K_r</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.71</td><td>0.507</td><td>0.510</td></tr> <tr><td>0.943</td><td>0.350</td><td>0.415</td></tr> <tr><td>1.174</td><td>0.333</td><td>0.384</td></tr> <tr><td>1.42</td><td>0.261</td><td>0.377</td></tr> <tr><td>1.50*</td><td>0.280</td><td>0.376</td></tr> <tr><td>1.86</td><td>0.289</td><td>0.390</td></tr> <tr><td>2.56</td><td>0.356</td><td>0.429</td></tr> <tr><td>3.14</td><td>0.345</td><td>0.426</td></tr> <tr><td>3.72</td><td>0.356</td><td>0.460</td></tr> <tr><td>4.89</td><td>0.389</td><td>0.455</td></tr> <tr><td>5.59</td><td>0.392</td><td>0.444</td></tr> <tr><td>6.28</td><td>0.399</td><td>0.444</td></tr> </tbody> </table>	a/D	K_s	K_r	0.71	0.507	0.510	0.943	0.350	0.415	1.174	0.333	0.384	1.42	0.261	0.377	1.50*	0.280	0.376	1.86	0.289	0.390	2.56	0.356	0.429	3.14	0.345	0.426	3.72	0.356	0.460	4.89	0.389	0.455	5.59	0.392	0.444	6.28	0.399	0.444	 K_s K_r	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/b</th> <th>K_s</th> <th>K_r</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.186</td><td>0.120</td><td>0.294</td></tr> <tr><td>1.40</td><td>0.125</td><td>0.252</td></tr> <tr><td>1.50*</td><td>—</td><td>0.260</td></tr> <tr><td>1.63</td><td>0.124</td><td>0.266</td></tr> <tr><td>1.86</td><td>0.117</td><td>0.272</td></tr> <tr><td>2.325</td><td>0.096</td><td>0.317</td></tr> <tr><td>2.40*</td><td>0.095</td><td>—</td></tr> <tr><td>2.91</td><td>0.108</td><td>0.317</td></tr> <tr><td>3.49</td><td>0.130</td><td>0.318</td></tr> <tr><td>4.65</td><td>0.148</td><td>0.310</td></tr> <tr><td>6.05</td><td>0.142</td><td>0.313</td></tr> </tbody> </table>	a/b	K_s	K_r	1.186	0.120	0.294	1.40	0.125	0.252	1.50*	—	0.260	1.63	0.124	0.266	1.86	0.117	0.272	2.325	0.096	0.317	2.40*	0.095	—	2.91	0.108	0.317	3.49	0.130	0.318	4.65	0.148	0.310	6.05	0.142	0.313
a/D	K_s	K_r																																																																												
0.71	0.507	0.510																																																																												
0.943	0.350	0.415																																																																												
1.174	0.333	0.384																																																																												
1.42	0.261	0.377																																																																												
1.50*	0.280	0.376																																																																												
1.86	0.289	0.390																																																																												
2.56	0.356	0.429																																																																												
3.14	0.345	0.426																																																																												
3.72	0.356	0.460																																																																												
4.89	0.389	0.455																																																																												
5.59	0.392	0.444																																																																												
6.28	0.399	0.444																																																																												
a/b	K_s	K_r																																																																												
1.186	0.120	0.294																																																																												
1.40	0.125	0.252																																																																												
1.50*	—	0.260																																																																												
1.63	0.124	0.266																																																																												
1.86	0.117	0.272																																																																												
2.325	0.096	0.317																																																																												
2.40*	0.095	—																																																																												
2.91	0.108	0.317																																																																												
3.49	0.130	0.318																																																																												
4.65	0.148	0.310																																																																												
6.05	0.142	0.313																																																																												
*Valor óptimo de a , interpolado																																																																														
 $K_s = 0.130$ $K_r = 0.165$	 $K_s = 0.236$ $K_r = 0.320$	 $K_s = 0.471$ $K_r = 0.684$	 $K_s = 1.129$ $K_r = 1.265$																																																																											
 $K_s = 0.188$ $K_r = 0.320$	 $K_s = 0.202$ $K_r = 0.323$	 $K_s = 0.400$ $K_r = 0.534$	 $K_s = 0.400$ $K_r = 0.601$																																																																											
 K_s K_r	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/D</th> <th>K_s</th> <th>K_r</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.23</td><td>0.195</td><td>0.347</td></tr> <tr><td>1.44</td><td>0.196</td><td>0.320</td></tr> <tr><td>1.67</td><td>0.150</td><td>0.300</td></tr> <tr><td>1.70*</td><td>0.149</td><td>0.299</td></tr> <tr><td>1.91</td><td>0.154</td><td>0.312</td></tr> <tr><td>2.37</td><td>0.167</td><td>0.337</td></tr> <tr><td>2.96</td><td>0.172</td><td>0.342</td></tr> <tr><td>4.11</td><td>0.190</td><td>0.354</td></tr> <tr><td>4.70</td><td>0.192</td><td>0.360</td></tr> <tr><td>6.10</td><td>0.201</td><td>0.360</td></tr> </tbody> </table>	a/D	K_s	K_r	1.23	0.195	0.347	1.44	0.196	0.320	1.67	0.150	0.300	1.70*	0.149	0.299	1.91	0.154	0.312	2.37	0.167	0.337	2.96	0.172	0.342	4.11	0.190	0.354	4.70	0.192	0.360	6.10	0.201	0.360	 K_s K_r	<table border="1"> <thead> <tr> <th>a/D</th> <th>K_s</th> <th>K_r</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.23</td><td>0.157</td><td>0.300</td></tr> <tr><td>1.67</td><td>0.156</td><td>0.378</td></tr> <tr><td>2.37</td><td>0.143</td><td>0.264</td></tr> <tr><td>3.77</td><td>0.160</td><td>0.242</td></tr> </tbody> </table>	a/D	K_s	K_r	1.23	0.157	0.300	1.67	0.156	0.378	2.37	0.143	0.264	3.77	0.160	0.242																											
a/D	K_s	K_r																																																																												
1.23	0.195	0.347																																																																												
1.44	0.196	0.320																																																																												
1.67	0.150	0.300																																																																												
1.70*	0.149	0.299																																																																												
1.91	0.154	0.312																																																																												
2.37	0.167	0.337																																																																												
2.96	0.172	0.342																																																																												
4.11	0.190	0.354																																																																												
4.70	0.192	0.360																																																																												
6.10	0.201	0.360																																																																												
a/D	K_s	K_r																																																																												
1.23	0.157	0.300																																																																												
1.67	0.156	0.378																																																																												
2.37	0.143	0.264																																																																												
3.77	0.160	0.242																																																																												

K_s = Coeficiente de pérdida para una superficie lisa.

K_r = Coeficiente de pérdida para una superficie rugosa, $\frac{\epsilon}{D} = 0.0022$.

Figura 8.20. Coeficiente de pérdida para curvas compuestas y número de Reynolds de 2.25×10^5 .

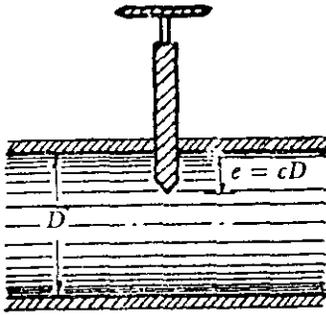


Figura 8.21. Válvula de compuerta.

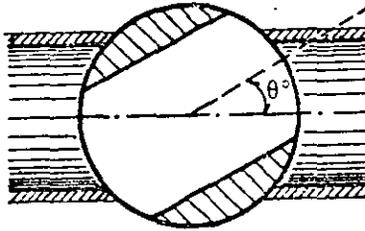


Figura 8.22. Válvula esférica.

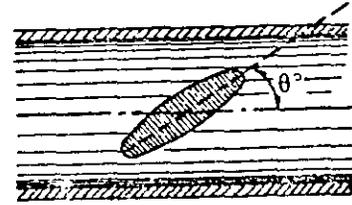


Figura 8.23. Válvula de lenteja.

en una conducción a presión, el coeficiente de pérdida, según Abeljew (Ref. 7), depende de ϕ/ϕ_0 , o bien de b/w , de acuerdo con la tabla 8.14.

de la relación de abertura b/W , sino también de la forma del lado inferior de la compuerta (Fig. 8.25b). El coeficiente de pérdida se obtiene de la tabla 8.15.

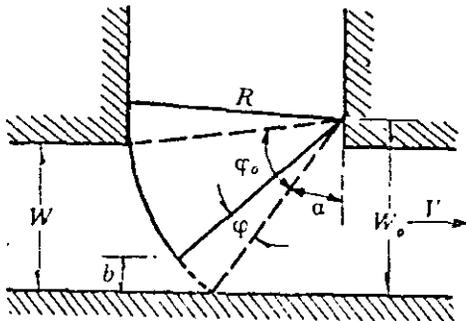


Figura 8.24. Compuerta radial en una tubería.

Si se utilizan compuertas deslizantes, como la mostrada en la Fig. 8.25a, el coeficiente de pérdida depende no sólo

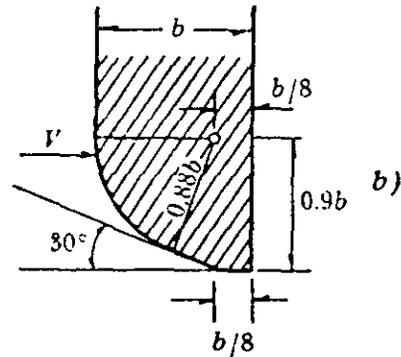
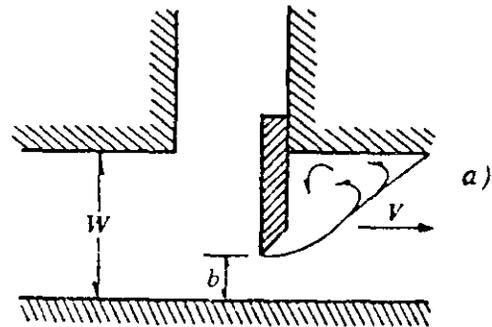


TABLA 8.15. Coeficientes de pérdida para compuertas deslizantes en una tubería.

b/W	K canto afilado	K canto redondo
0.1	186.5	—
0.2	44.1	23.2
0.3	17.8	10.8
0.4	8.68	4.95
0.5	4.57	2.7
0.6	2.43	1.48
0.7	1.31	0.96
0.8	0.68	0.58
0.9	0.38	0.36
1	0.3	0.24

Figura 8.25. Compuertas deslizantes en una tubería.

Para válvulas de pie (Fig. 8.26) con pichanca, completamente abierta, el coeficiente de pérdida depende del diámetro (referencia 48), como se indica en la tabla 8.16.

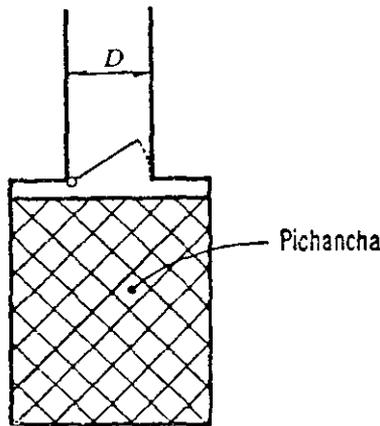


Figura 8.26. Válvula de pie con pichancha abierta.

TABLA 8.16. Coeficientes de pérdida para válvulas de pie con pichancha abierta

D, en m	K	D, en m	K
0.040	12.9	0.20	5.2
0.050	10.0	0.25	4.4
0.065	8.8	0.30	3.7
0.080	8.0	0.35	3.4
0.100	7.0	0.40	3.1
0.125	6.5	0.45	2.8
0.150	6.0	0.50	2.5

Para calcular la pérdida, exclusivamente, en la *pichancha*, el coeficiente vale (Ref. 21):

$$K = (0.675 \text{ a } 1.575) \left(\frac{A}{A_c} \right)^2 \quad (8.22)$$

donde

- A área del tubo;
- A_c área neta (únicamente las perforaciones de la pichancha).

Para una válvula *check* o de retención (Fig. 8.27), completamente abierta, el coeficiente de pérdida depende del diámetro (Ref. 48) como se indica en la tabla 8.17.

TABLA 8.17. Coeficientes de pérdida para válvulas de retención completamente abiertas

D en m	K
0.05	18
0.075	11
0.10	8
0.15	6.5
0.2	5.5
0.25	4.5
0.3	3.5
0.35	3
0.4	2.5
0.5	0.8

Si la válvula de retención está, parcialmente, abierta entonces K es como se indica en la tabla 8.18 (Ref. 30).

TABLA 8.18. Coeficientes de pérdida para válvulas de retención parcialmente abiertas

δ°	K
15	90
20	62
25	42
30	30
35	20
40	14
45	9.5
50	6.6
55	4.6
60	3.2
65	2.3
70	1.7

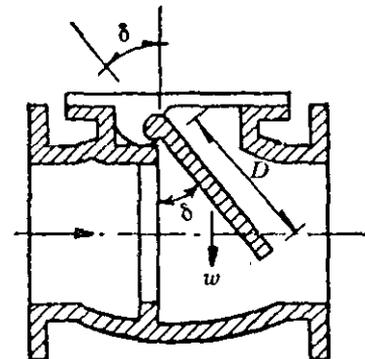


Figura 8.27. Válvula de retención.

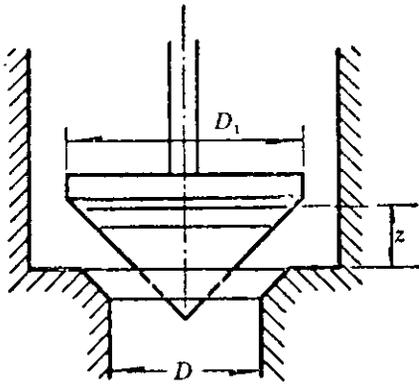


Figura 8.28. Válvula de alivio de forma cónica.

Para válvulas de alivio (Fig. 8.28) resulta conveniente emplear la fórmula (Ref. 30) siguiente:

$$K = 2.6 - 0.8 \frac{D}{z} + 0.14 \left(\frac{D}{z} \right)^2 \quad (8.23)$$

Si la válvula es semejante a la de la figura 8.29 (Ref. 40), entonces tenemos que:

$$K = 0.6 + 0.15 \left(\frac{D}{z} \right)^2 \quad (8.24)$$

Para válvulas de pequeño diámetro totalmente abiertas, se deben usar los coeficientes de pérdida indicados en la figura 8.30.

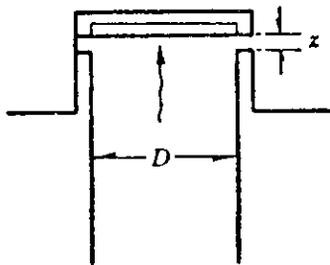


Figura 8.29. Válvula de alivio plana.

Para el control de gasto, en tuberías de gran diámetro se utilizan válvulas de aguja, en puntos intermedios o en el extremo final del conducto. La Fig. 8.31 muestra una válvula —del primer tipo— para

la cual, en posición de apertura total, el gasto está expresado por la ecuación:

$$Q_{m\acute{a}x} = C_d \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2 g H} \quad (8.25)$$

donde

- $C_d = 0.58$, coeficiente de gasto;
- D diámetro a la entrada de la válvula, en m;
- H energía total antes de la válvula,

Cuando el diámetro de la válvula de aguja (del lado de la descarga) es $0.833 D$; en la Ec. (8.25), $C_d = 0.503$.

La Fig. 8.32 muestra las dimensiones de una válvula de aguja, del tipo utilizado en el extremo final de un conducto para controlar las descargas. El coeficiente máximo de velocidad para este tipo de válvulas, totalmente abiertas, es $C_v \approx 0.96$ a 0.98 .

Esto es, la velocidad del agua en la sección contracta del chorro descargado es:

$$V_s = C_v \sqrt{2 g H}$$

o sea, el coeficiente de pérdida de energía quedaría expresado por la ecuación siguiente:

$$K = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1 \right)$$

que afectaría a la carga de velocidad, $V_s^2/2g$, para obtener la pérdida.

En el caso de válvulas de chorro hueco, como la de la Fig. 8.33a, usadas en el extremo final de un conducto para controlar descargas, según la firma alemana Voith, $C_d = 0.808$ en la Ec. (8.25) para válvula totalmente abierta. Para estas mismas condiciones (de válvula totalmente abierta), la firma norteamericana U. S.

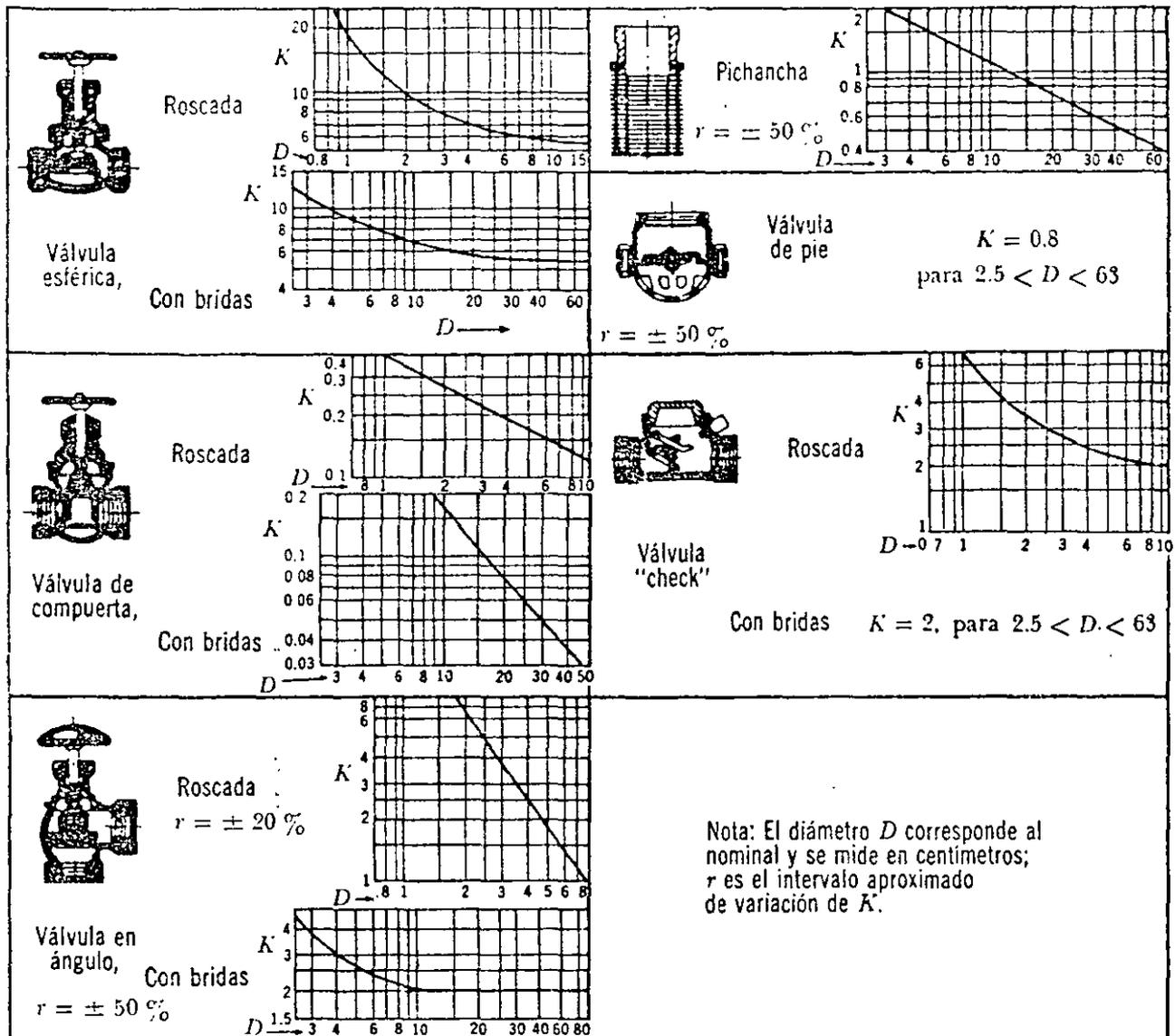


Figura 8.30. Coeficientes de pérdida para válvulas completamente abiertas.

Morgan Smith propone que $C_s = 0.85$ para las válvulas que fabrica.

El U. S. Bureau of Reclamation estudió la válvula de chorro hueco mostrada en la figura 8.33b, para la cual $C_d = 0.70$ en la Ec. (8.25); H deberá medirse un diámetro, aguas arriba, de la sección de entrada.

8.7.8 Pérdida por salida

Esta pérdida vale:

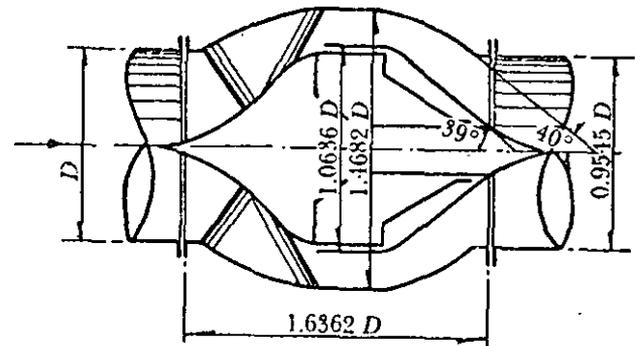


Figura 8.31. Válvula interior de aguja (U.S.B.R.).

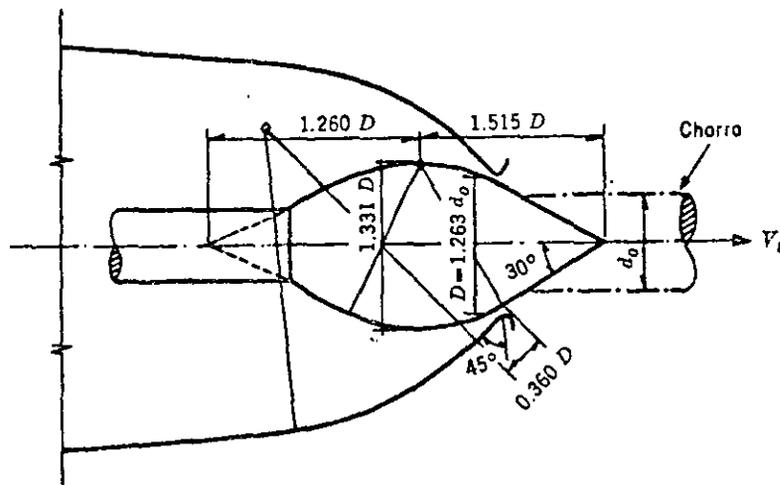


Figura 8.32. Válvula de aguja, según Escher.

$$h_s = K \frac{(V_s - V_2)^2}{2g} \quad (8.26)$$

donde K se obtiene de la tabla 8.19 (referencia 7) (Fig. 8.34).

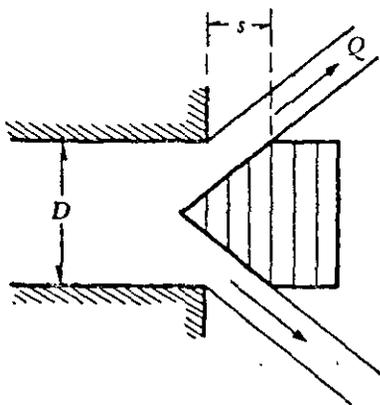


Figura 8.33a. Válvula de chorro hueco.

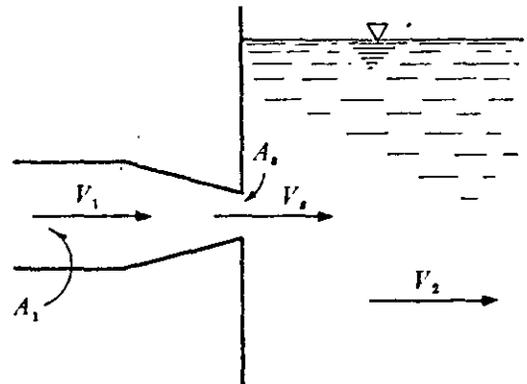


Figura 8.34. Pérdida por salida.

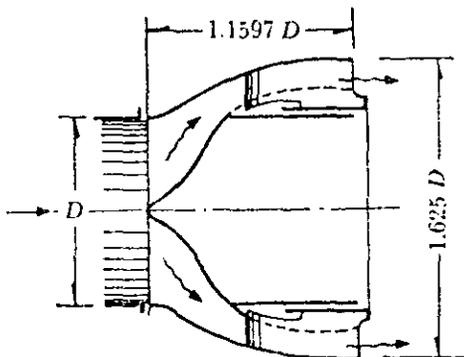


Figura 8.33b. Válvula de chorro hueco (U.S.B.R.).

TABLA 8.19. Coeficientes de pérdida por salida

$\frac{A_2}{A_1}$	K
0.1	0.83
0.2	0.84
0.3	0.85
0.4	0.87
0.5	0.88
0.6	0.90
0.7	0.92
0.8	0.94
0.9	0.965
1	1.0

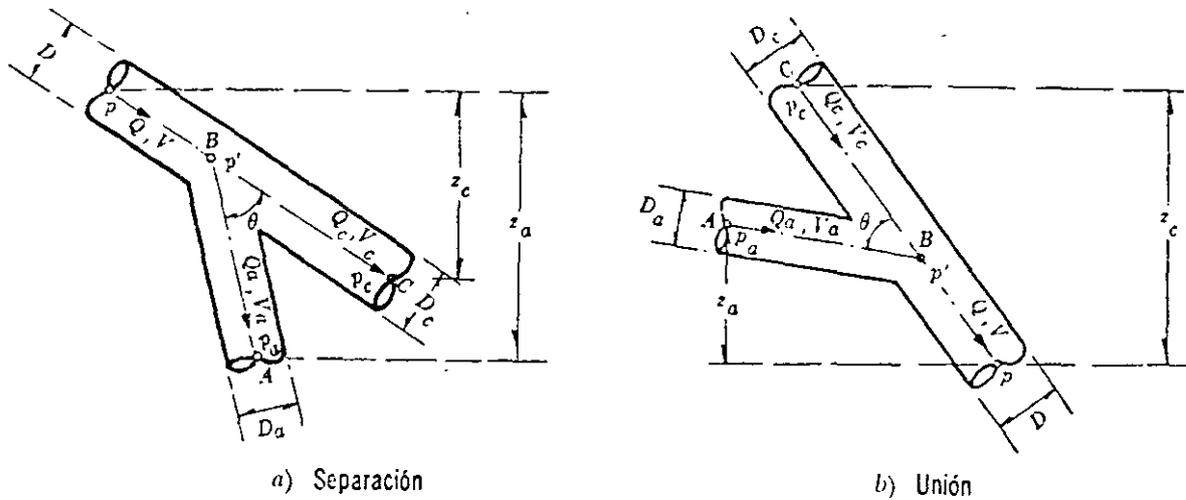


Figura 8.35. Pérdida por bifurcación.

Si la descarga es al medio ambiente, $V_2 = 0$ y $h_s = V_s^2/2g$ para $A_s = A_1$.

8.7.9 Pérdidas por bifurcación

La pérdida de energía en una bifurcación de conductos depende —además del ángulo que forman la tubería secundaria con la maestra— de la relación entre los diámetros de ambas tuberías y de la dirección de la corriente. Dicha pérdida es mayor en la unión que en la bifurcación (Figs. 8.35 a y b) y se expresa como un porcentaje de la carga de velocidad, lo que demuestra que el coeficiente K es independiente del número de Reynolds.

Con las designaciones indicadas en la Fig. 8.35a para la separación y con las secciones próximas al punto en que se realiza la bifurcación, la ecuación de la energía entre la corriente principal y la sección C (suponiendo que la pérdida por fricción es pequeña), conduce a:

$$z_c + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g} + K_c \frac{V^2}{2g}$$

o bien:

$$\frac{p - p_c}{\gamma} + z_c = \frac{V_c^2}{2g} + (K_c - 1) \frac{V^2}{2g}$$

En la misma manera, de la ecuación de la energía, entre la corriente principal y la sección A , tenemos:

$$\frac{p - p_a}{\gamma} + z_a = \frac{V_a^2}{2g} + (K_a - 1) \frac{V^2}{2g}$$

En el caso de la unión, en la Fig. 8.35b, las ecuaciones son:

$$\frac{p_c - p}{\gamma} + z_c = (K_c + 1) \frac{V^2}{2g} - \frac{V_c^2}{2g}$$

$$\frac{p_a - p}{\gamma} + z_a = (K_a + 1) \frac{V^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g}$$

además, en ambos casos son válidas las siguientes ecuaciones:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2}, \quad V_c = \frac{4Q_c}{\pi D_c^2}, \quad V_a = \frac{4Q_a}{\pi D_a^2}$$

$$Q = Q_a + Q_c$$

Los coeficientes K_a y K_c , antes definidos, son dependientes de la relación entre gas-

tos Q_a/Q y entre los diámetros; del ángulo con que se realiza la bifurcación y del grado de redondez de los cantos en los tubos. Para el caso de cantos agudos, como los de la Fig. 8.35 y $D = D_c$, los autores Vogel, Petermann y Kinne, obtuvieron los resultados de la tabla 8.20 (Ref. 1).

cientes de pérdida K , para bifurcaciones de diámetro pequeño:

En obras hidroeléctricas son de especial interés las bifurcaciones simétricas mostradas en la Fig. 8.37.

Para la bifurcación del tipo 1 (Fig. 8.37a) ($D = \text{constante}$), con una distribución

TABLA 8.20. Coeficientes de pérdida para bifurcaciones en tuberías (cantos agudos)

$\frac{Q_a}{Q}$	Separación				Unión			
	$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$		$\theta = 90^\circ$		$\theta = 45^\circ$	
	K_a	K_c	K_a	K_c	K_a	K_c	K_a	K_c
0.0	0.95	0.04	0.90	0.04	-1.20	0.04	-0.92	0.04
0.2	0.88	-0.08	0.68	-0.06	-0.40	0.17	-0.38	0.17
0.4	0.89	-0.05	0.50	-0.04	0.08	0.30	0.00	0.19
0.6	0.95	0.07	0.38	0.07	0.47	0.40	0.22	0.09
0.8	1.10	0.21	0.35	0.20	0.72	0.51	0.37	-0.17
1.0	1.28	0.35	0.48	0.33	0.91	0.60	0.37	-0.54

Por otra parte, las relaciones más adecuadas para una separación en tubos, con cantos redondeados (redondeo con $0.1 D_a$), son las indicadas en la tabla 8.21 (Ref. 43).

TABLA 8.21. Coeficientes de pérdida para bifurcaciones en tuberías (cantos redondeados)

Q_a/Q	θ	D_a/D	V_a/v	K_a
0.3	90°	1	0.3	0.76
	60°	0.61	0.8	0.59
	45°	0.58	0.9	0.35
0.5	90°	1	0.5	0.74
	60°	0.79	0.8	0.54
	45°	0.75	0.9	0.32
0.7	90°	1	0.7	0.88
	60°	1	0.7	0.52
	45°	1	0.7	0.30

En la Fig. 8.36 se presentan los coefi-

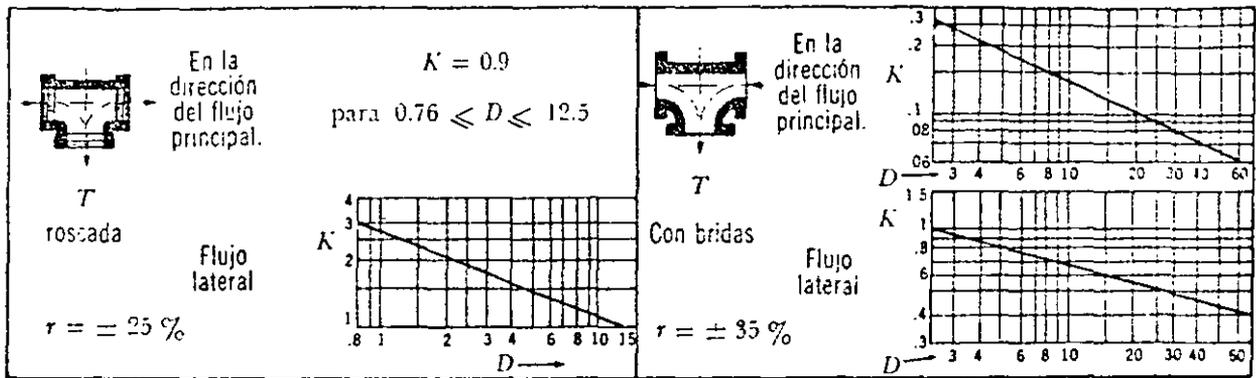
simétrica del gasto ($Q_a/Q = 0.5$), los coeficientes de pérdida definidos en cualquiera de las dos siguientes expresiones:

$$h = K_a \frac{V^2}{2g}; \quad h = K_a' \frac{V_a^2}{2g},$$

se obtienen de la tabla 8.22, en la cual se incluyen también los correspondientes al tipo 2, para diferentes valores de θ (referencia 1).

TABLA 8.22. Coeficientes de pérdida para las bifurcaciones tipos 1 y 2 (Fig. 8.37)

R_m/D	Tipo 1		θ	Tipo 2	
	K_a	K_a'		K_a	K_a'
0.50	1.10	4.4	10°	0.1	0.4
0.75	0.60	2.4	30°	0.3	1.2
1.00	0.40	1.6	45°	0.7	2.8
1.5	0.25	1.0	60°	1.0	4.0
2.0	0.20	0.8	90°	1.4	5.6



Nota: El diámetro corresponde al nominal y se mide en centímetros; r es el intervalo aproximado de variación para K .

Figura 8.36. Coeficientes de pérdida en bifurcaciones de diámetro pequeño.

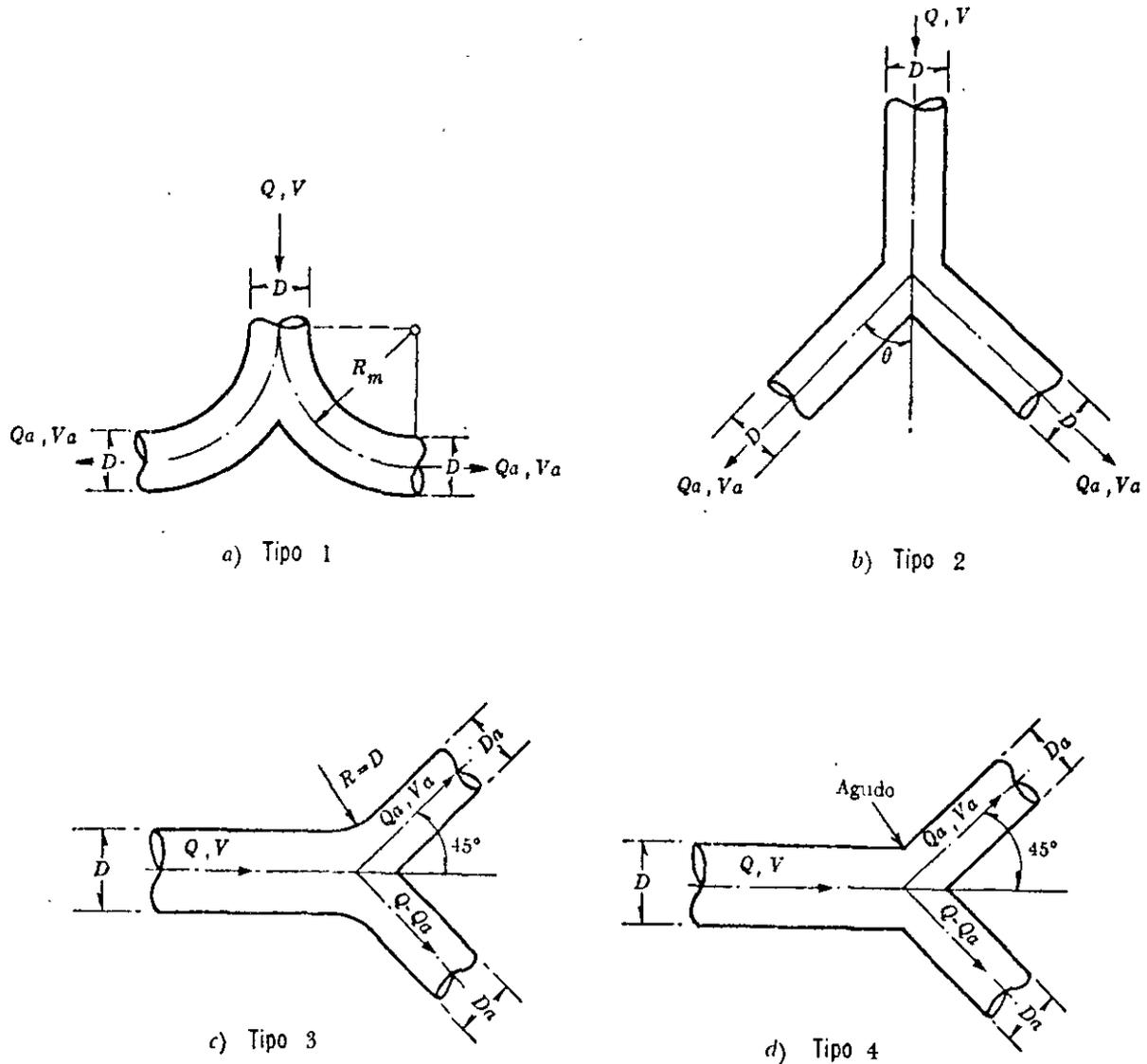


Figura 8.37. Bifurcaciones simétricas.

Por otra parte, para las bifurcaciones de los tipos 3 y 4, los correspondientes coeficientes de pérdida se presentan en la tabla 8.23.

TABLA 8.23 Coeficientes de pérdida para las bifurcaciones tipos 3 y 4 (Fig. 8.37)

Tipo	D_a/D	Q_c/Q_d	0.5	1.0
1	1	K_a	0.40	0.30
		K_a'	1.60	0.30
3	0.707	K_a	0.40	0.85
		K_a'	0.40	0.21
1	1	K_a	0.55	0.50
		K_a'	2.20	0.50
4	0.707	K_a	0.75	1.35
		K_a'	0.75	0.34

Gráficas de valores, más amplias, para estos coeficientes se pueden consultar en la Ref. 50.

PROBLEMAS

1. Si la velocidad crítica del agua, en un tubo de 5 cm de diámetro, es de 0.0488 m/seg, determinar la velocidad crítica del aire en un tubo de 15 cm de diámetro, ambos a 15°C de temperatura.
2. Calcular la potencia —en CV— requerida para bombear 50 tons de aceite por hora, a lo largo de una tubería de 0.10 m de diámetro y 1609 m de longitud, si el aceite pesa 916 kg/m³ y tiene una viscosidad cinemática $\nu = 0.00186$ m²/seg.
3. Agua a 10°C es forzada a fluir en un tubo capilar $D = 0.8$ mm y 70 m de longitud. La diferencia de presiones entre los extremos del tubo es de 0.02 kg/cm². Determinar la velocidad media, el gasto y el número de Reynolds para $\nu = 0.0133$ cm²/seg.
4. Comparar las pérdidas de fricción, en 100 m de longitud, en un tubo de 2.5 cm de diámetro

metro donde fluye agua con una viscosidad 0.013 poises con gastos de: a) 0.159 m³/h; b) 0.682 m³/h. Calcular el factor de fricción adecuado con la fórmula de Poiseuille, si el flujo es laminar; y, la de Blasius, si es turbulento.

5. Un enfriador de aceite consiste de tubos de 1.25 cm de diámetro interior y 3.65 m de longitud. El aceite, con un peso específico de 900 kg/m³, es forzado a una velocidad de 1.83 m/seg. El coeficiente de viscosidad a la entrada es 0.28 poises y, a la salida, de 1 poise; puede considerarse que dicho coeficiente varía como una función lineal de la longitud. Determinar la potencia requerida para forzar el aceite a través de un grupo de 200 tubos semejantes.
6. Agua a 5°C es bombeada a un tubo de cobre, liso, a una velocidad de 1.53 m/seg. Si el tubo tiene 2.5 cm de diámetro y 46 m de longitud, calcular la diferencia de presiones requerida entre los extremos del tubo; use la fórmula de Nikuradse, para tubos lisos.
7. Los siguientes datos fueron obtenidos de una prueba en un tubo liso de 3.05 m de longitud y un cm de diámetro, usando agua cuya viscosidad fue 0.013 poises; la velocidad fue gradualmente incrementada, como sigue:

Velocidad (m/seg)						
0.183	0.214	0.244	0.274	0.305	0.335	
Pérdida (m)						
0.0226	0.0265	0.0305	0.0342	0.0376	0.0506	
Velocidad (m/seg)						
0.381	0.458	0.610	0.915	1.525	3.05	
Pérdida (m)						
0.084	0.149	0.300	0.61	1.49	5.03	

Dibujando la curva adecuada, estimar el valor del número de Reynolds R_e , para el cual probablemente ocurra la velocidad crítica y, también, mostrar que el factor de fricción f para $R_e > 5000$, está dado aproximadamente por $f = 0.44/R_e^{1/4}$.

8. Un aceite, de peso específico de 801 kg/m³,

ANÁLISIS DE SISTEMAS DE TUBOS

9.1 Introducción

En este capítulo se hace una presentación detallada de los métodos de aforo y de análisis de sistemas de conductos a presión, que van desde el tubo único hasta el de redes de agua potable. El análisis se realiza utilizando las ecuaciones de continuidad y de energía, tomando en consideración las pérdidas por fricción y locales, cuya forma de cuantificación ha sido presentada en el capítulo 8. Dicho análisis se refiere únicamente al caso de flujo permanente.

9.2 Dispositivos de aforo en tuberías

El gasto en la sección de una tubería se puede medir indirectamente con *dispositivos de aforo*, en el sitio en el que se desea conocer. Los más comunes son los venturímetros, toberas y diafragmas, que se adaptan generalmente a tuberías de medianas y grandes dimensiones, donde es necesario llevar un control de los gastos, como en el caso de redes de abastecimiento de agua.

9.2.1 Venturímetros

La función básica de los *venturímetros* consiste en producir un estrangulamiento en la sección transversal de la tubería, el cual modifica las presiones. Con la medición de ese cambio es posible conocer el gasto que circula por la sección; el estrangulamiento de ésta es muy brusco, pero la ampliación hasta la sección original es, por el contrario, gradual.

En la Fig 9.1 se presenta el corte longitudinal de un venturímetro para una tubería, con algunos detalles sobre su geometría. En la deducción de la fórmula se supone despreciable la pérdida de energía, además de que los coeficientes α de corrección son iguales a 1.

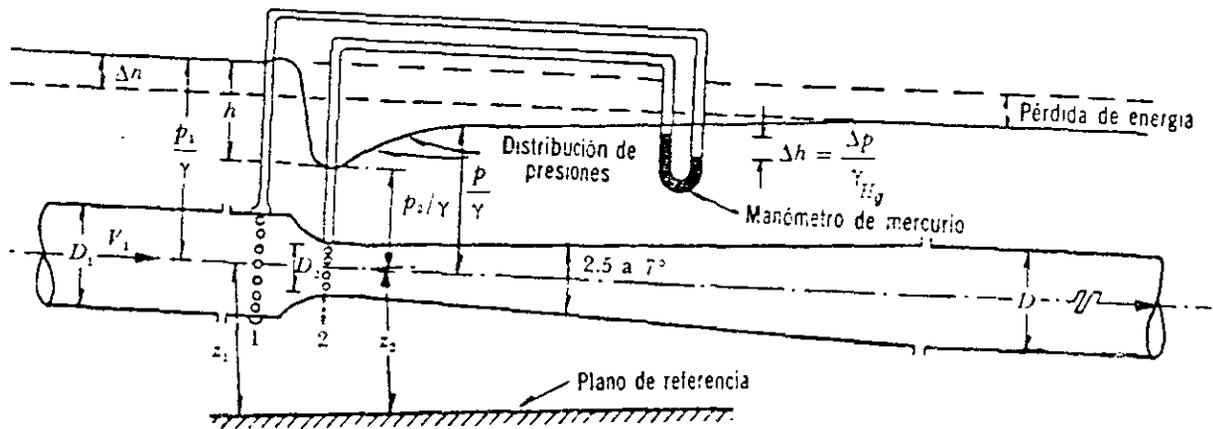


Figura 9.1. Venturímetro en una tubería.

Con z_1 y z_2 como cargas de posición de las secciones 1 y 2, respecto de un plano de referencia cualquiera, la ecuación de Bernoulli resulta ser:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (9.1)$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad, tenemos que

$$V_1 = \frac{V_2 A_2}{A_1} \quad (9.2)$$

Con $h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)$; substituyendo la Ec. (9.2) en la Ec. (9.1), se obtiene:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

y en términos de la deflexión en el manómetro de mercurio, el gasto es

$$Q = \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2gh} =$$

$$= \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \times \sqrt{2g \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)}$$

Para corregir los errores cometidos, en la no inclusión de la pérdida de carga y que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la ecuación anterior se afecta de un coeficiente C_v . Además, con:

$$C_d = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} = \frac{C_v}{\sqrt{1 - m^2}} \quad (9.3)$$

donde $m = \frac{A_2}{A_1}$ es el grado de estrangulamiento, se obtiene finalmente:

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2g \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)} \quad (9.4)$$

Por un análisis dimensional (ver apéndice A), se demuestra que el coeficiente C_d depende del grado de estrangulamiento m , de los efectos viscosos rugosidad del tubo, contenidos en términos de pérdida de energía y, además, del tipo de venturímetro. Valores típicos

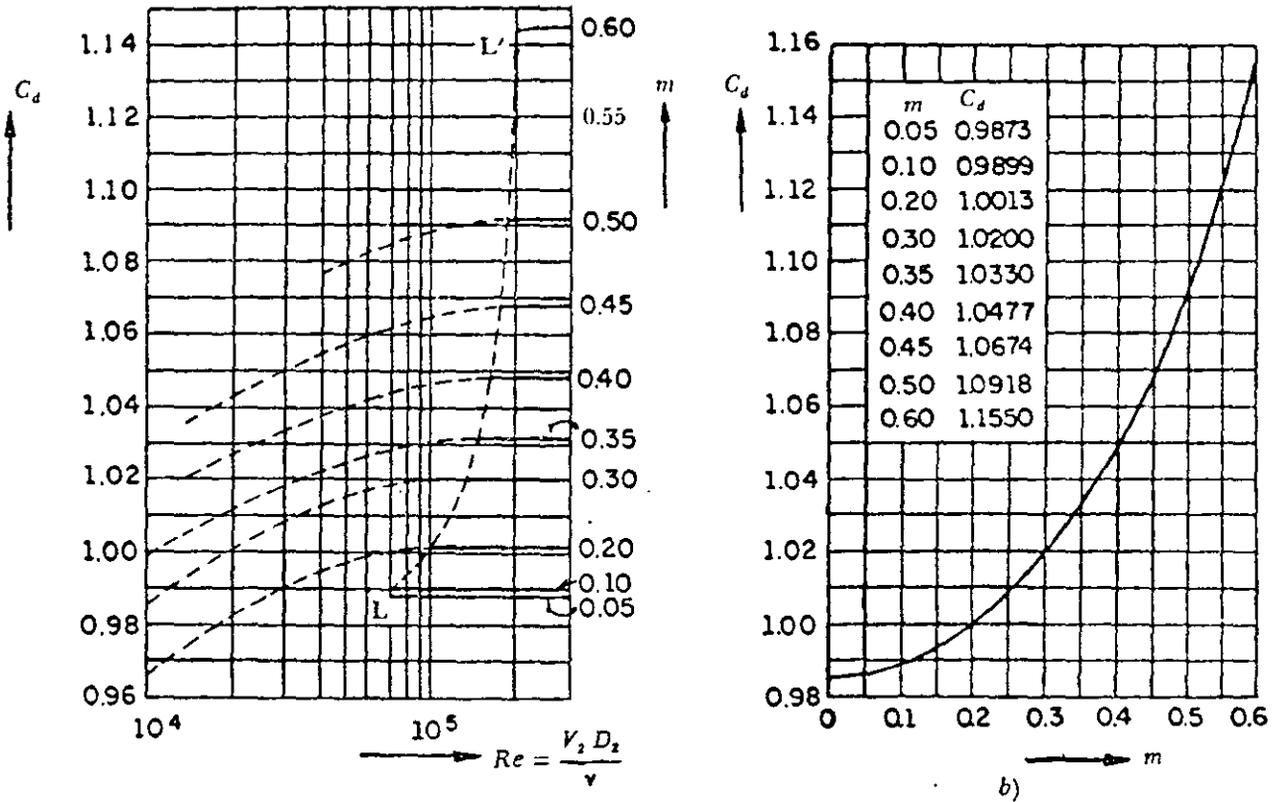


Figura 9.2. Coeficiente C_d para un venturímetro (Ec. 9.4).

medios fueron determinados experimentalmente y se presentan en la Fig. 9.2a (Ref. 30), la cual muestra que C_d depende de m y de Re hasta el límite fijado por la línea LL' , a la derecha de la cual, C_d es independiente de Re y dependiente sólo de m , como se presenta en la Fig. 9.2b. En estas figuras el número de Reynolds es

$$Re = \frac{V_2 D_2}{\nu}$$

donde D_2 es el diámetro de la sección estrangulada, V_2 la velocidad media en la misma, y ν la viscosidad cinemática del líquido.

Problema 9.1. Un venturímetro tiene un diámetro a la entrada $D_1 = 0.15$ m y un diámetro en el estrangulamiento $D_2 = 0.075$ m. La deflexión en el manómetro de mercurio es de 0.15 m. Calcular

el gasto para una temperatura del agua de 10° .

Solución. El peso específico del mercurio es $\gamma_m = 13\,560$ kg/m³ y la viscosidad cinemática del agua a 10°C es $\nu = 0.013$ cm²/seg.

El área de las secciones transversales vale:

$$A_1 = \pi/4 \times (0.15)^2 = 0.01767 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi/4 \times (0.075)^2 = 0.00442 \text{ m}^2$$

El grado de estrangulamiento es igual a

$$m = \frac{A_2}{A_1} = 0.25$$

Considerando inicialmente que C_d es independiente de Re , de la Fig. 9.2b se obtiene que $C_d = 1.009$. De la Ec. (9.4) resulta entonces:

$$Q = 1.009 \times 0.00442 \sqrt{19.6 \times 0.15 \left(\frac{13.56}{1} - 1 \right)}$$

$$Q = 0.0271 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para este gasto, la velocidad en la sección 2 sería así:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.0271}{0.00442} = 6.13 \text{ m/seg}$$

y el número de Reynolds:

$$R_e = \frac{V_2 D_2}{\nu} = \frac{613 \times 7.5}{0.013} = 3.54 \times 10^5$$

Con este valor de R_e y con $m = 0.25$, se obtiene el mismo valor $C_d = 1.009$ de la Fig. 9.2a, lo cual comprueba el resultado obtenido para $Q = 0.0271 \text{ m}^3/\text{seg}$. En caso de que se hubiera obtenido un valor distinto de C_d , en la Fig. 9.2a, con este nuevo coeficiente se corregiría el gasto y se obtendría otro R_e hasta ajustar todos los valores.

9.2.2 Diafragmas

En tuberías donde se permita una gran pérdida de energía para efectuar el aforo, se puede utilizar un diafragma para estrangular la sección (Fig. 9.3). Éste consiste en una placa, donde se practica un orificio de área A_o , la cual se inserta dentro de la tubería en la sección deseada. La modificación en las velocidades ocasiona un cambio de presiones, antes y después del diafragma, cuyo valor determina el gasto.

Las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli para las secciones 1 y 2 de la Fig. 9.3 son

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

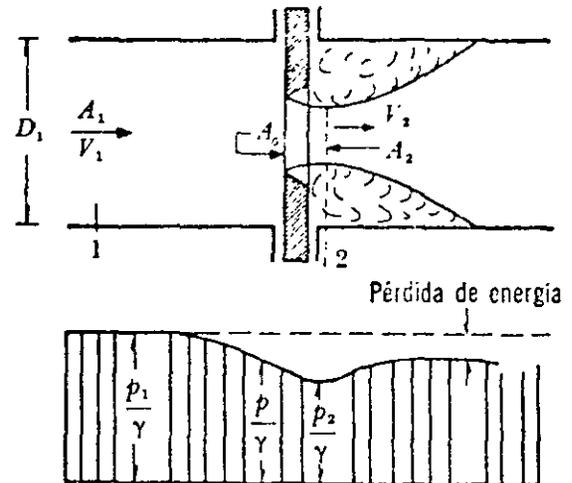


Figura 9.3. Diafragma en una tubería.

Con substituciones análogas a las del venturímetro, el gasto teórico es:

$$Q = \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2}} \sqrt{2g \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}}$$

Con los coeficientes de contracción $C_c = A_2/A_o$ y de abertura $C_A = A_o/A_1$, de la ecuación anterior se obtiene:

$$Q = \frac{C_c C_v A_o}{\sqrt{1 - C_c^2 C_A^2}} \sqrt{2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right)}$$

Al incluir el coeficiente de gasto C_d y medir la diferencia de presiones, en términos de la deflexión Δh , en un manómetro de mercurio, el gasto real es finalmente:

$$Q = C_d A_o \sqrt{2g \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)} \quad (9.5)$$

El coeficiente C_d depende no sólo de geometría del diafragma y de la rugosidad de las paredes, sino también del núme-

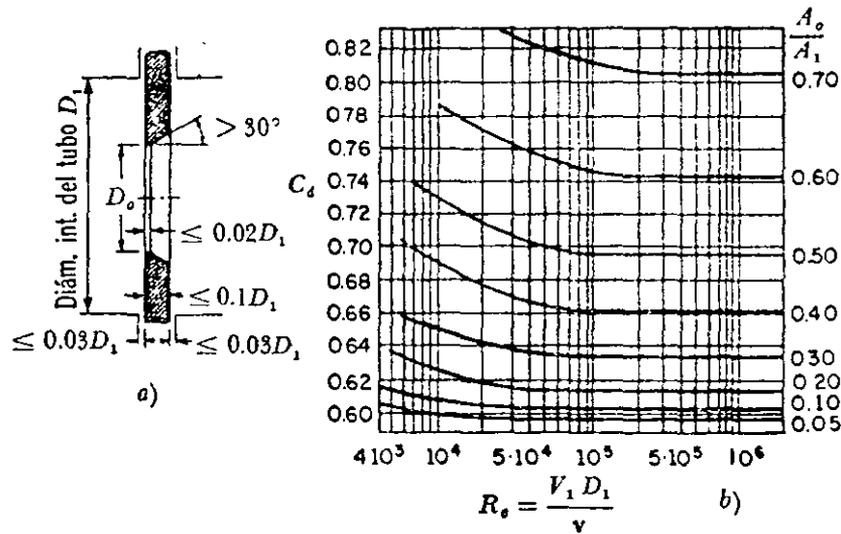


Figura 9.4. Diafragma tipo VDI y coeficientes de gasto (Ref. 39).

ro de Reynolds que incluye el efecto de viscosidad del flujo. De la figura 9.4 se pueden obtener los valores de C_d para el diafragma estándar tipo VDI (Verein Deutscher Ingenieure). Para este tipo de diafragma, las tomas piezométricas deben quedar localizadas 2.5 cm, antes y después de la placa. Se observa que para $R_e \geq 10^5$, C_d es prácticamente independiente de R_e .

9.2.3 Toberas

En el caso de tuberías con diámetros mayores de 30 cm, se emplean toberas en lugar de diafragmas. Dos formas comúnmente usadas se muestran en las Figs. 9.5a y 9.6. La primera ha sido estudiada y sus dimensiones especificadas por la Verein Deutscher Ingenieure; su forma elimina el coeficiente de contracción haciéndolo igual a uno. Esto es, las dimensiones del orificio coinciden con las del área contraída de la Fig. 9.3 y vale la Ec. (9.5) con la única salvedad que $A_0 = A_2$ y $C_c = 1$. De la Fig. 9.4b se puede obtener el valor de C_d en la ecuación siguiente:

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2 g \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)} \quad (9.6)$$

Para la tobera de la Fig. 9.6, C_d varía aproximadamente entre 0.95 para $R_e = V_2 D_2 / \nu = 10^5$ hasta 0.98 para $R_e = 10^6$, a partir del cual conserva constante este último valor.

Para lograr mejor precisión en los aforos con estos dispositivos, se recomienda tener un tramo de tubería recta —de por lo menos 10 a 40 D — antes de ellos y —de por lo menos 5 D — después de los mismos.

Problema 9.2. Determinar el gasto en una tubería de 0.15 m de diámetro en la cual se ha insertado una tobera de 0.10 m de diámetro. El manómetro diferencial de mercurio marca una deflexión de 0.25 m y la temperatura del agua es de 15°C.

Solución. De los datos se obtiene que $A_2 = 0.00785 \text{ m}^2$, $A_1 = 0.01767 \text{ m}^2$; y para agua a 15°C $\nu = 0.0114 \text{ cm}^2/\text{seg}$ y $A_2/A_1 = 0.444$. Suponiendo inicialmente que C_d no depende de R_e , de la Fig. 9.5b $C_d = 1.056$ y de la Ec. (9.6) el gasto vale:

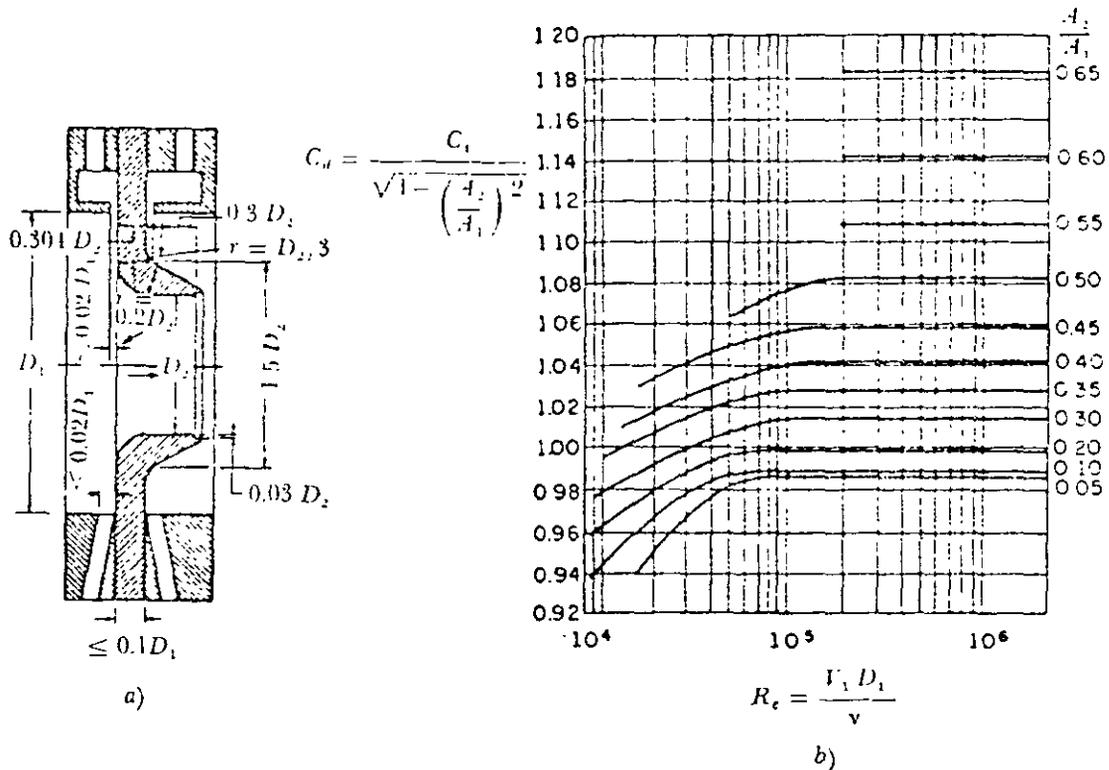


Figura 9.5. Tobera VDI y sus coeficientes de gasto (Ref. 51).

$$Q = 1.056 \times 0.00785 \sqrt{19.6 \times 0.25 \left(\frac{13.56}{1} - 1\right)} = 0.065 \text{ m}^3/\text{seg}$$

entonces:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.065}{0.01767} = 3.68 \text{ m/seg}$$

y el número de Reynolds es

$$Re = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{368 \times 15}{0.0114} = 4.84 \times 10^5$$

De la Fig. 9.5b resulta que C_d es efectivamente independiente de Re y el gasto es $0.065 \text{ m}^3/\text{seg}$.

9.2.4 Aforador de codo

Otro tipo de aforador es el llamado *de codo* y consiste en medir la diferencia de presiones que se genera entre el intradós y el extradós de una curva en una tubería. En la Fig. 9.7 se detalla la disposición de las tomas piezométricas.

El gasto se obtiene de la ecuación:

$$Q = C_d K A \sqrt{2 g \Delta h} \quad (9.7)$$

donde A es el área de la tubería; $\Delta h = h_2 - h_1$ la diferencia en cargas de presión (expresada en metros de columna de agua) entre el extradós y el intradós; g la aceleración de la gravedad; C_d y K son coeficientes sin dimensiones (el primero de gasto y el segundo de forma) que dependen de la relación R/D radio del codo a diámetro del tubo, de acuerdo con la tabla 9.1.

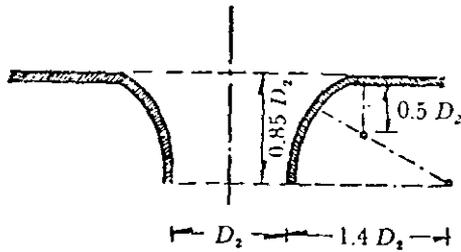


Figura 9.6. Diagrama de una tobera.

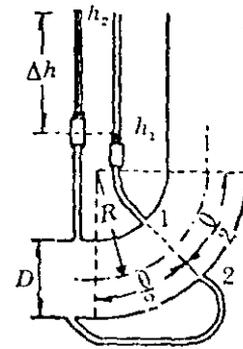


Figura 9.7. Aforador de codo.

TABLA 9.1. Coeficientes K para el aforador de codo, según Addison (Ref. 31)

R/D	C_d	K
1.0	1.23	0.570
1.25	1.10	0.697
1.50	1.07	0.794
1.75	1.05	0.880
2.00	1.04	0.954
2.25	1.03	1.02
2.50	1.03	1.02
2.75	1.02	1.14
3.00	1.02	1.20

9.3 Conducto sencillo

Es el más sencillo de los sistemas. Consiste de un conducto único alimentado en el extremo, aguas arriba, por un recipiente o una bomba y con descarga libre o a otro recipiente. El conducto puede tener cambios geométricos u obstrucciones que producen pérdidas locales de energía, además de la propia de fricción.

En la Fig. 9.8 se muestra el comportamiento de las líneas de energía y gradiente hidráulico, para el tubo que conecta dos recipientes; ambas líneas interpretan el significado físico de los términos en la ecuación de la energía. En la Fig. 4.10 se presenta el sistema alimentado por una bomba.

Para el análisis del conducto sencillo se utiliza la ecuación de continuidad y la de

energía: La primera establece la invariabilidad del gasto en cualquier sección i del conducto; a saber:

$$Q = A_i V_i$$

La segunda establece la constancia de la energía entre dos secciones transversales 1 y 2 del conducto, para lo cual se acepta, usualmente, que el coeficiente α en dichas secciones valga uno. Esto es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_f + \sum_1^2 h_l$$

donde

$\sum_1^2 h_f$ = suma de las pérdidas de fricción h_f , en cada tramo de la sección 1 a la 2;

$\sum_1^2 h_l$ = suma de las pérdidas locales que ocurren de la sección 1 a la 2 debidas a entrada, cambios de sección, válvulas, etcétera.

Los dos términos se expresan en razón de la carga de velocidad dentro del tramo de sección constante, si la pérdida es de fricción o aguas abajo del punto donde se produce la pérdida local. Por esta cau-

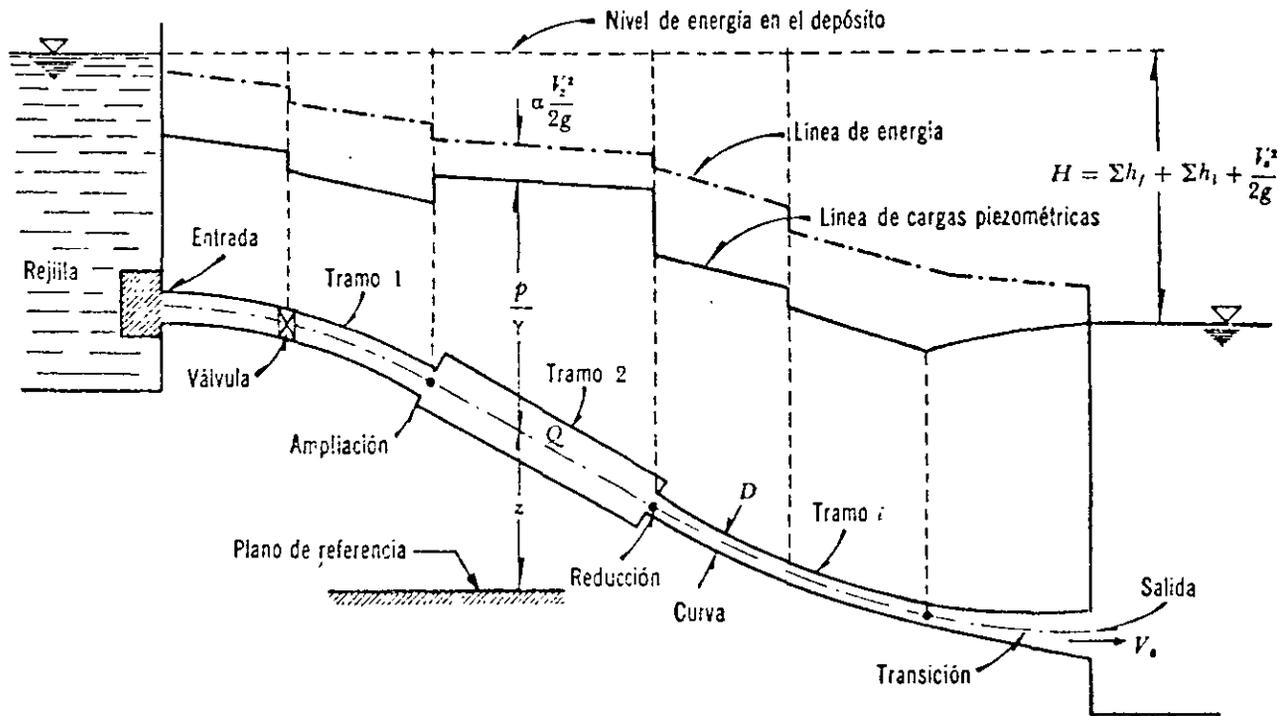


Figura 9.8. Conducto sencillo.

sa, la ecuación de la energía contendrá los valores de la velocidad, en distintas secciones del conducto, mismos que se pueden substituir por la velocidad, en un sólo tramo, utilizando la ecuación de continuidad.

Si en el sistema de la Fig. 9.8, el recipiente de aguas abajo no existe, es decir, si el conducto descarga libremente a la atmósfera, el desnivel H se mide como la diferencia de niveles entre la superficie libre en el depósito superior y el centro de gravedad de la sección final del tubo. En cualquier caso, dicho desnivel será:

$$H = \sum h_f + \sum h_l + \frac{V_s^2}{2g}$$

donde $V_s^2/2g$ es la carga de velocidad en la sección final del conducto, considerada como energía final en el caso de descarga libre, o como pérdida en el caso de descarga a otro recipiente. Se presentan dos tipos de problema:

a) *Revisión.* Conociendo H , la geometría y rugosidad del tubo, se desea calcular el gasto.

Solución. Supuesto que se desconoce la zona de flujo (laminar, transición o turbulento) en la que trabaja el tubo, la velocidad y los coeficientes de pérdida son incógnitas. Si la sección 1 se elige dentro del depósito superior y la 2 dentro del inferior, de tal manera que la velocidad de llegada sea despreciable. De la ecuación de la energía se tiene:

$$\begin{aligned} H &= \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \\ &= \frac{V_s^2}{2g} + \sum_1^2 h_f + \sum_1^2 h_l \end{aligned}$$

en que V_s es la velocidad en la sección final de la tubería.

Por la fórmula de Darcy-Weisbach y de pérdidas menores vemos que:

$$H = \frac{V_s^2}{2g} + \left(f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \dots \right) + \left(K_1 \frac{V_1^2}{2g} + K_2 \frac{V_2^2}{2g} + \dots \right)$$

y debido a que $V_s A_s = V_i A_i$, entonces resulta:

$$H = \frac{V_s^2}{2g} \left(1 + \frac{f_1 L_1}{D_1} \frac{A_s^2}{A_1^2} + \frac{f_2 L_2}{D_2} \frac{A_s^2}{A_2^2} + \dots + K_1 \frac{A_s^2}{A_1^2} + K_2 \frac{A_s^2}{A_2^2} + \dots \right)$$

la velocidad en la sección final vale

$$V_s = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_i L_i}{D_i} \frac{A_s^2}{A_i^2} + K_i \frac{A_s^2}{A_i^2} \right)}} \quad (9.8)$$

y el gasto:

$$Q = V_s A_s$$

Puesto que se conoce ϵ_i/D_i , se puede estimar un valor para cada f_i , por inspección del diagrama de Moody, así como los K_i . Con dichos coeficientes, substituidos en la Ec. (9.8), se determina el gasto; de éste, $V_i = 4Q/\pi D_i$, y con los números de Reynolds, se obtienen nuevos valores f_i . El proceso se repite.

b) *Diseño*. Conociendo H , la geometría (con excepción de uno de los diámetros), la rugosidad y el gasto, se desea calcular uno de los diámetros (con más de un diámetro como incógnita, la solución es imposible).

Solución. Igual que el problema anterior —se utiliza la Ec. (9.8)— estimando f y D desconocidos, que se substituyen reitera-

damente hasta obtener el gasto. Este problema es poco común.

Por ejemplo, en el caso de una tubería de diámetro constante y pérdidas locales despreciables, de la Ec. (9.8) vemos:

$$Q \approx \frac{\pi \sqrt{2gH}}{4fL/D^5}$$

$$D \approx \sqrt[5]{\frac{8LQ^2}{g\pi^2 H} f} = \sqrt[5]{\frac{0.0827LQ^2}{H} f} \quad (9.9)$$

también en el número de Reynolds, nos da

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{4Q}{\pi\nu} \frac{1}{D} = \frac{C_2}{D} \quad (9.10)$$

en el que se conoce a

$$C_2 = 4Q/\pi\nu$$

La solución consiste en los siguientes pasos:

- a) Se estima un valor de f (por ejemplo 0.02).
- b) Se calcula D de la Ec. (9.9).
- c) Se calcula R_e de la Ec. (9.10).
- d) Con R_e y ϵ/D , del diagrama de Moody, se determina un nuevo valor de f .
- e) Con el nuevo valor de f se repite el procedimiento hasta que ésta no cambie en más de dos ciclos sucesivos.

Problema 9.3. En la Fig. 9.9 se presenta una tubería horizontal, para la descarga de fondo, de una presa con una derivación lateral. Los datos son: $H_0 = 150$ m, $L_B = 20$ m, $L_0 = 60$ m, $L_1 = 40$ m, $D_0 = 4$ m, $D_1 = 3$ m, $D_2 = 2$ m, $A_0 = 12.57$ m², $A_1 = 7.07$ m², $A_2 = 3.14$ m², $A_R = 120$ m²; rejillas con $s/b = 0.1$, $C_f = 1.67$ y $\theta = 70^\circ$; en la válvula de mariposa $A_V = 30$ m², ancho de escotaduras $b/h = 0.2$, rugosidad del tubo $\epsilon = 0.5$ mm.

Como únicamente se considera la pérdida por fricción, de la fórmula de Darcy-Weisbach, tenemos:

$$(\Delta H)_4 = 0.02 \frac{400}{0.20} \times 0.083 = 3.306 \text{ m}$$

y, de las Ecs. (9.11b) y (9.12), resulta:

$$Q_3 = 0.7854 (0.1)^2 \times \sqrt{\frac{19.6 \times 3.306 \times 0.1}{0.025 \times 50}} = 0.01791 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 0.7854 (0.1)^2 \times \sqrt{\frac{19.6 \times 3.306 \times 0.1}{0.025 \times 180}} = 0.0094 \text{ m}^3/\text{seg}$$

conduce a un gasto total, igual a

$$Q_1 = 0.040 + 0.01791 + 0.0094 = 0.06731 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La velocidad, carga de velocidad y pérdida en el tubo 1 son:

$$V_1 = \frac{0.06731}{0.0314} = 2.14 \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4.59}{19.6} = 0.234 \text{ m}$$

$$(\Delta H)_1 = 0.02 \frac{400}{0.2} \times 0.234 = 9.36 \text{ m}$$

finalmente, la carga de presión en el recipiente A, vale:

$$\frac{p}{\gamma} = 9.36 + 3.304 + 0.083 = 12.75 \text{ m}$$

o bien,

$$1.275 \text{ kg/cm}^2$$

Problema 9.10. El sistema mostrado en la Fig. 9.17 tiene la siguiente geometría: $H = 24 \text{ m}$; $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 100 \text{ m}$; $D_1 = D_2 = D_4 = 100 \text{ mm}$; $D_3 = 200 \text{ mm}$; además, $f_1 = f_2 = f_4 = 0.025$ y $f_3 = 0.02$; el coeficiente de pérdida en la válvula $K_v = 30$. Calcular los gastos en cada tubo, despreciando las pérdidas locales.

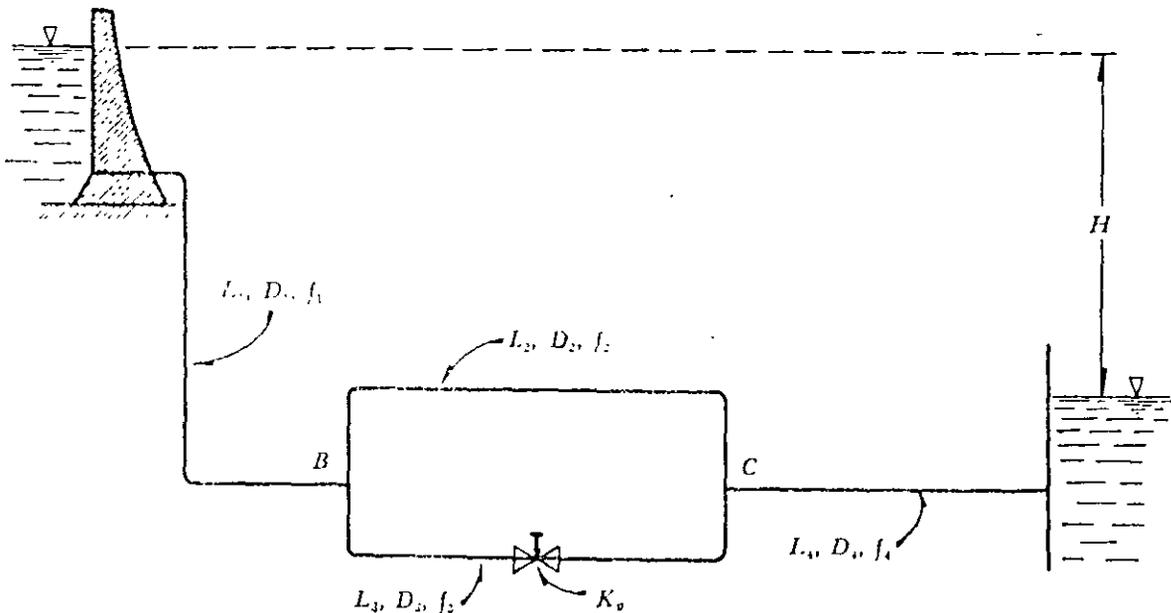


Figura 9.17. Tubería del problema 9.10.

Solución. La pérdida de energía entre B y C está dada por la Ec. (9.14). Como en los tubos uno, dos y cuatro, únicamente hay pérdidas por fricción, resulta entonces:

$$K_2 = f_2 \frac{L_2}{D_2} = 0.025 \frac{100}{0.1} = 25$$

$$K_1 = K_4 = 25$$

En el tubo tres, tenemos:

$$K_3 = f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_v = \frac{0.02 \times 100}{0.2} + 30 = 40$$

Para la Ec. (9.14), nos resulta así:

$$\sum_{i=1}^n \frac{D_i^2}{\sqrt{K_i}} = \frac{0.01}{\sqrt{25}} + \frac{0.04}{\sqrt{40}} = 0.00833$$

$$\left[\pi \sum_{i=1}^n \frac{D_i^2}{\sqrt{K_i}} \right]^2 = (3.14 \times 0.00833)^2 = 0.000685$$

De la Ec. (9.14), por otra parte:

$$\Delta H = \frac{8}{0.000685 \times 9.8} Q_4^2 = 1192 Q_4^2$$

Además, con $D_1 = D_4$, en la ecuación de continuidad, obtenemos:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{D_4}{D_1} \right)^4 \frac{V_4^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g}$$

$$\frac{V_4^2}{2g} = \frac{Q_4^2}{2g (\pi D_1^2/4)^2} =$$

$$= \frac{Q_4^2}{19.6 (0.7854 \times 0.01)^2} = 828 Q_4^2$$

De la ecuación de la energía entre A y D , nos da:

$$24 = K_1 \frac{V_4^2}{2g} + 1192 Q_4^2 + K_4 \frac{V_4^2}{2g} + \frac{V_4^2}{2g}$$

Substituyendo términos:

$$24 = (2 \times 25 \times 828 + 1192 + 828) Q_4^2$$

$$Q_4 = \sqrt{\frac{24}{43420}} = 0.0235 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La pérdida de energía entre B y C , será

$$\Delta H = 1191 (0.0235)^2 = 0.658 \text{ m}$$

Para el tubo 2, lo siguiente:

$$0.658 = 25 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.658}{25}} = 0.718 \text{ m/seg}$$

$$Q_2 = 0.7854 \times 0.01 \times 0.718 = 0.00564 \text{ m}^3/\text{seg}$$

En la misma forma:

$$Q_3 = 0.7854 \times 0.04 \sqrt{\frac{19.6 \times 0.658}{40}} =$$

$$= 0.01784 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y como comprobación:

$$Q = 0.00564 + 0.01784 = 0.02348 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el gasto total.

9.5 Redes abiertas

Decimos que una red es abierta cuando los tubos que la componen se ramifican, sucesivamente, sin intersectarse después para formar circuitos. Los extremos finales de las ramificaciones pueden terminar

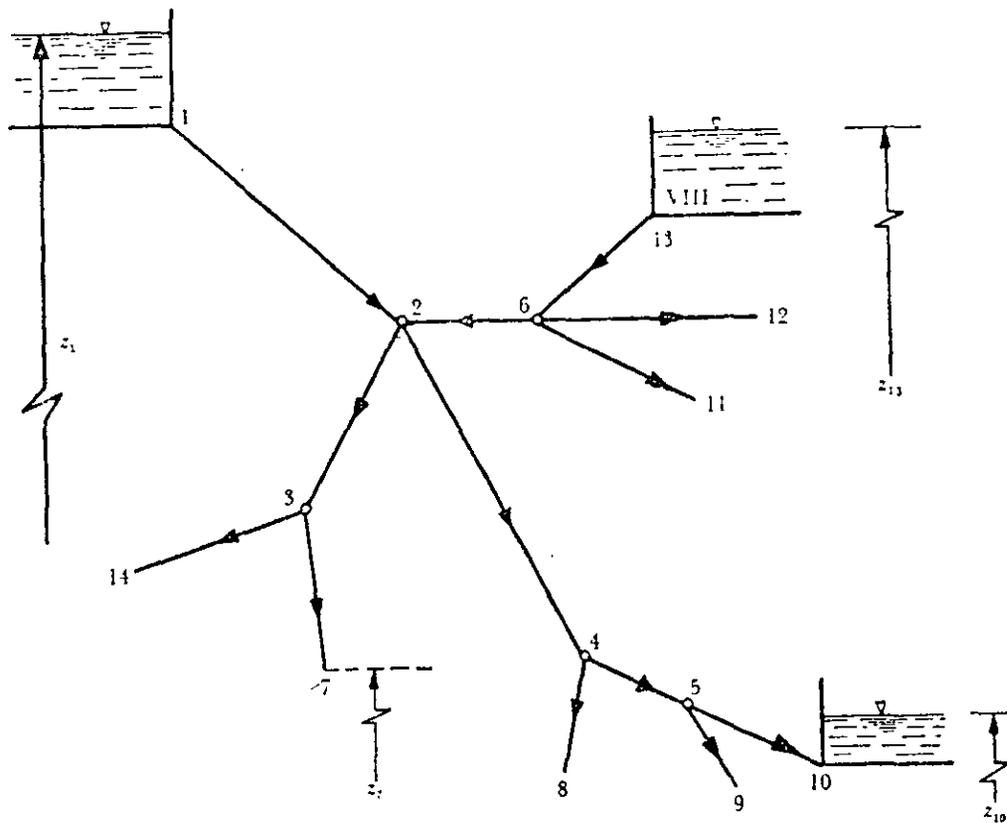


Figura 9.18. Ejemplo de red abierta.

en un recipiente o descargar libremente a la atmósfera.

Un ejemplo de red abierta se esquematiza en la Fig. 9.18. De acuerdo con los niveles de los distintos recipientes y la longitud de los tubos, se deberá conocer o suponer la dirección del gasto en los diversos tramos.

De la ecuación de la energía, entre el recipiente superior y los extremos de los tubos, resulta entonces:

$$z_1 - \left(z_j + \frac{V_j^2}{2g} \right) = \sum_{i=1}^j h \quad (9.15)$$

donde z_j es el nivel de la superficie libre del agua si el tubo descarga a un recipiente o bien, el nivel del centro de gravedad de la sección final, si el tubo descarga a la atmósfera; el subíndice j corresponde a las características hidráulicas en el punto

to j . El término $\sum_{i=1}^j h$ es la suma de las pérdidas de energía de los tubos que se encuentran en el recorrido, desde el punto 1 hasta el extremo j ; toma signo positivo para h en aquellos elementos en que la dirección del gasto coincide con la dirección del recorrido y negativo en caso contrario.

Por ejemplo, para el extremo 7, la Ec. (9.15) es:

$$z_1 - \left(z_7 + \frac{V_7^2}{2g} \right) = h_{12} + h_{23} + h_{37}$$

y de acuerdo con la dirección supuesta de los gastos en la Fig. 9.17, para el extremo 13, se obtiene:

$$z_1 - \left(z_{13} + \frac{V_{13}^2}{2g} \right) = h_{12} - h_{26} - h_{613}$$

donde h_{ij} representa la suma de las pérdidas locales y de fricción en el tramo que va del nudo i al nudo j .

Además, en cada punto de ramificación (nudo) se satisface la ecuación de continuidad, siguiente:

$$\Sigma Q = 0 \quad (9.16)$$

y se establece como convención que los gastos que lleguen al nudo tengan signo negativo; y positivo los que salgan del nudo.

Si el problema es de revisión, el resultado será un sistema de tantas ecuaciones, del tipo (9.15), como extremos finales tenga la red; y de tantas ecuaciones del tipo (9.16) como nudos existan. Para la red de la Fig. 9.18 se pueden establecer ocho ecuaciones del primer tipo y cinco del segundo.

Si el problema es el diseño de una red

en la que se conoce su geometría y los gastos de cada tubo, se deberán elegir —por lo menos— $(l-m)$ diámetros de los l tramos que componen la red (m , número de extremos finales), para evitar la indeterminación del problema, ya que las ecuaciones de nudo se convierten en identidades.

Problema 9.11. Determinar la magnitud y sentido de los gastos en los tubos que forman el sistema mostrado en la Fig. 9.19. Los tubos son de hierro fundido, con 15 años de servicio (N de Kozeny = 30) y tienen la siguiente geometría:

$D_1 = 0.55 \text{ m}$	$L_1 = 680 \text{ m}$
$D_2 = 0.60 \text{ m}$	$L_2 = 520 \text{ m}$
$D_3 = 0.80 \text{ m}$	$L_3 = 800 \text{ m}$

Solución. Primero, es necesario suponer un sentido de los gastos en el nudo D y

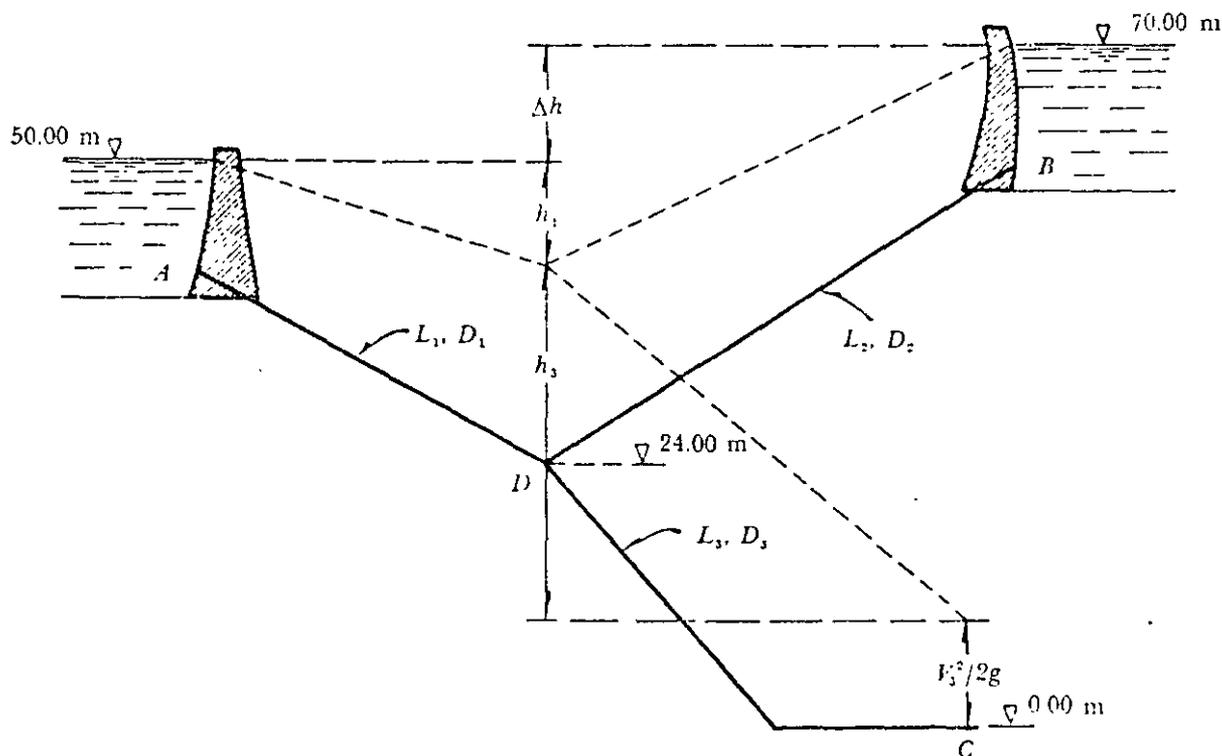


Figura 9.19. Sistema de tubos del problema 9.11.



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

*ACTUALIZACIÓN DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA*

Del 10 al 14 de Marzo de 2003

*APUNTES GENERALES
TERCERA PARTE*

CI - 045

Instructor: Ing. Constantino Gutiérrez Palacios
D.G.C.O.H

APUNTES TOMADOS DEL LIBRO **TEORÍA DEL GOLPE DE ARIETE Y SUS
APLICACIONES EN INGENIERÍA HIDRÁULICA**
URIEL MANCEBO DEL CASTILLO EDITORIAL LIMUSA

3.1 INTRODUCCIÓN

Es frecuente que en líneas de conducción por gravedad para el abastecimiento de agua a poblaciones, en las obras de toma de algunas presas y en los conductos de alimentación y desfogue en plantas hidroeléctricas ocurran perturbaciones en el flujo permanente inicial debido a los procesos de regulación del gasto, mediante maniobras de cierre o apertura de órganos de control como válvulas o compuertas. A estas perturbaciones que dan origen a un flujo transitorio en los conductos se les denomina comúnmente como *golpe de ariete*, y el conocimiento de sus efectos es de gran importancia en el diseño de las obras hidráulicas antes mencionadas.

En este capítulo se hará la descripción de este fenómeno en un conducto por gravedad y se llevará a cabo el análisis de las teorías de la columna rígida y la columna elástica; en base a esta última se establecen las ecuaciones de Allievi y las propuestas por Angus para la cuantificación de los efectos del fenómeno en estudio.

Por otra parte, es necesario señalar que tanto en este capítulo como en el resto del libro se utiliza el concepto *carga piezométrica* H , a la que se ha definido como la suma de la carga de presión h_p y la carga de posición Z_p en el eje del conducto, referida a un determinado plano horizontal de comparación.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO EN UN CONDUCTO POR GRAVEDAD

Con el fin de poder describir el fenómeno del golpe de ariete en un conducto por gravedad, por facilidad, se puede considerar un conducto con sección

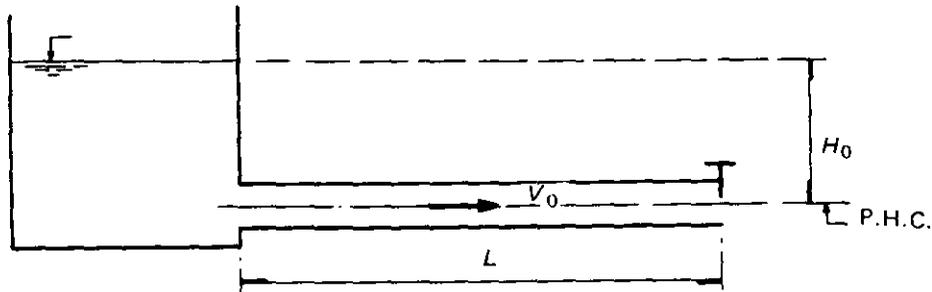


Figura 3.1

transversal y espesor constantes, con eje horizontal y longitud L tal como el mostrado en la figura 3.1, en el cual se tiene un flujo permanente cuando $t = 0$, con una válvula o compuerta (órgano de control) situada en el extremo aguas abajo que permite regular la magnitud del gasto y que es alimentado por un depósito que contiene una gran masa de agua cuya superficie libre tiene un nivel constante.

Suponiendo que se lleva a cabo una maniobra de cierre instantáneo total en el órgano de control, la energía cinética del agua en esta sección del conducto se transformará en energía potencial, que a su vez, dará origen a un incremento en la carga piezométrica original, llevándose a cabo un trabajo elástico de deformación en las paredes del conducto y en el agua. Esta conversión de energía constituye lo que se conoce como onda de presión positiva o directa que se propaga hacia aguas arriba con velocidad o celeridad a .

Esta onda modifica totalmente las condiciones originales del conducto aguas arriba del frente de la misma ocasionando, como ya se dijo, una deformación en las paredes del mismo, el agua al comprimirse aumenta su densidad y la velocidad en esta zona se reduce a cero. Aguas abajo del frente de onda, el conducto, el agua, la carga piezométrica y la velocidad del escurrimiento, permanecen en su estado original (figura 3.2a).

Cuando el frente de onda llega al depósito en un tiempo $t = \frac{L}{a}$, la totalidad del conducto se encuentra deformado (figura 3.2b) la velocidad de flujo es igual a cero, la carga piezométrica es mayor que la original y el agua se encuentra comprimida.

Como el nivel del agua en el depósito permanece constante, en esta zona no pueden presentarse modificaciones de ninguna especie, permaneciendo la misma carga; en esta forma el depósito actúa como una pantalla que refleja totalmente la onda de presión y en este instante se produce la traslación de una onda negativa hacia el órgano de control (figura 3.2c), ocasionando que aguas abajo del frente el agua fluya hacia el depósito con una velocidad V_0 idéntica en magnitud a la inicial, dando lugar a que el conducto y el agua adquirieran sus propiedades iniciales en esta región, y cuando la onda llega al órgano en el instante $t = \frac{2L}{a}$, todo el conducto y el agua contenida por éste se encuentran

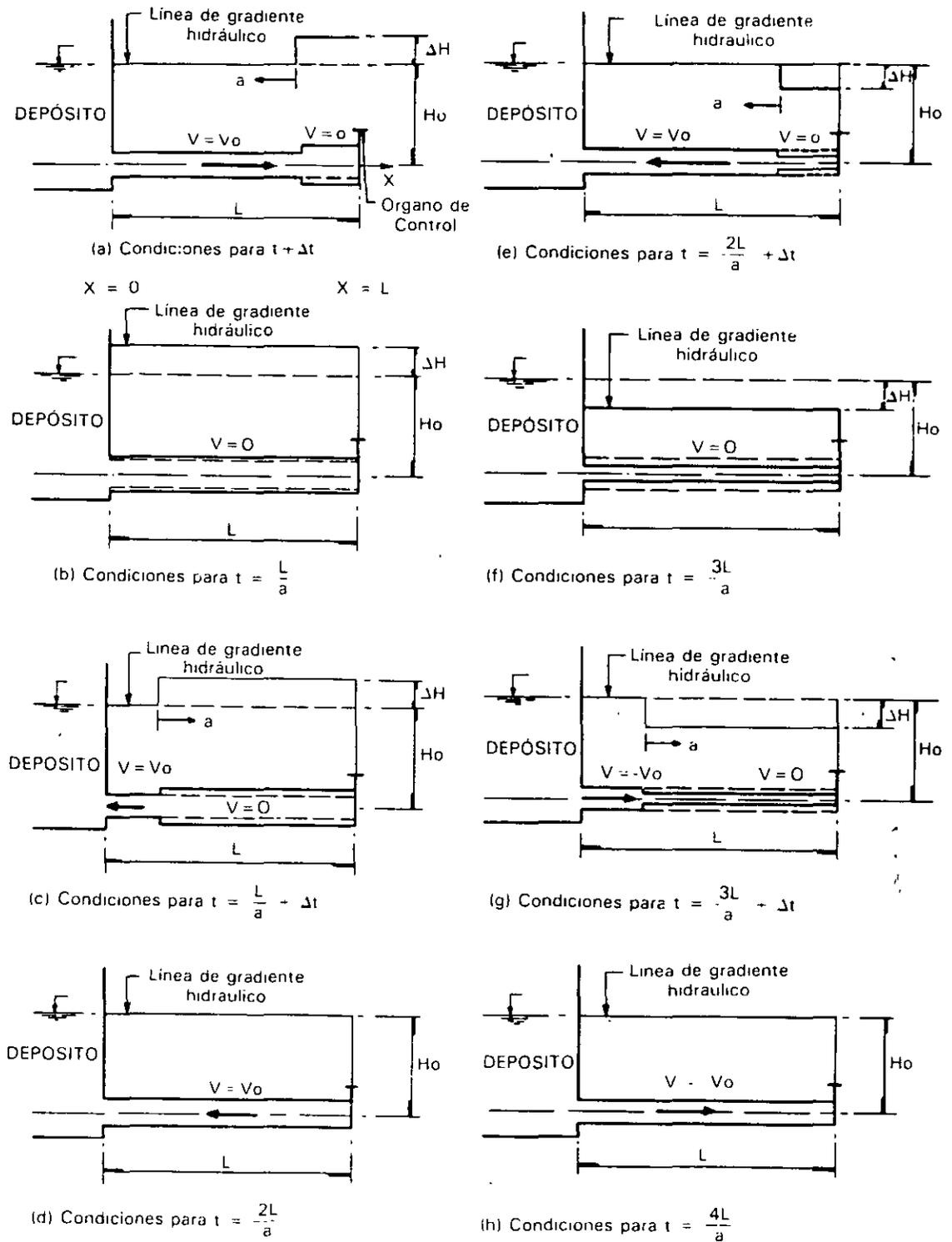


Figura 3.2 Propagación de la onda de presión en un conducto causada por un cierre instantáneo del órgano de control.

en su estado original, pero con escurrimiento del órgano hacia el depósito (figura 3.2d).

A esta primera serie de eventos que consisten en la formación de un frente de onda positivo que viaja del órgano de control hacia el depósito y un frente de onda negativo que viaja de este último hacia el primero, se le conoce como fase directa del golpe de ariete.

Ahora bien, como consecuencia del flujo de agua hacia el depósito, se origina una caída de carga y una contracción de las paredes del conducto, que adopta dimensiones inferiores a las del estado original, y una reducción a cero de la velocidad en la zona aguas abajo del frente de onda negativa que viaja hacia el depósito (figura 3.2 e), al que llega en el instante $t = \frac{3L}{a}$ cuando el conducto se encuentra contraído en su totalidad, la velocidad del agua es nula y la densidad de la misma es mayor que la original (figura 3.2f).

A partir del instante $t = \frac{3L}{a}$, el depósito funciona nuevamente como una pantalla y refleja una onda positiva, volviendo el conducto a su estado original aguas arriba del frente de ésta, con un escurrimiento hacia el órgano y con velocidad V_0 , de tal manera que en el instante $t = \frac{4L}{a}$ el conducto vuelve a tener las características iniciales en toda su longitud (figura 3.2h).

A esta segunda serie de eventos se le conoce como fase inversa del golpe de ariete que, al igual que la fase directa, tiene una duración $t = \frac{2L}{a}$, a la que se conoce como periodo del conducto T .

Finalmente, es necesario señalar que si no existiese el efecto de la fricción en el conducto que transforma la energía en forma de calor, el ciclo de eventos antes descrito se repetiría indefinidamente dando lugar a una variación de la carga piezométrica con respecto al tiempo en el órgano de control, tal como se indica en la figura 3.3. Sin embargo, dado que prácticamente todos los conductos son hidráulicamente rugosos, la variación de la carga corresponde a la mostrada en la figura 3.4.

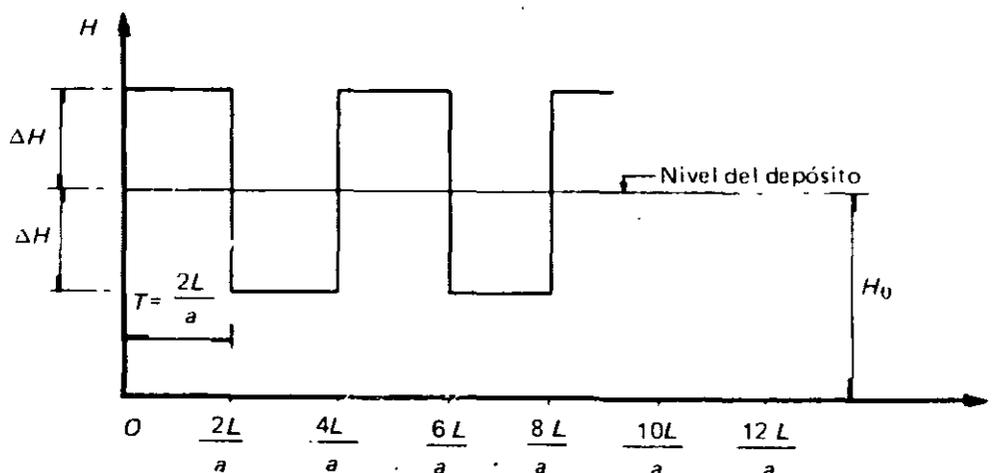


Figura 3.3 Variación de la carga piezométrica en el órgano de control sin considerar pérdidas por fricción.

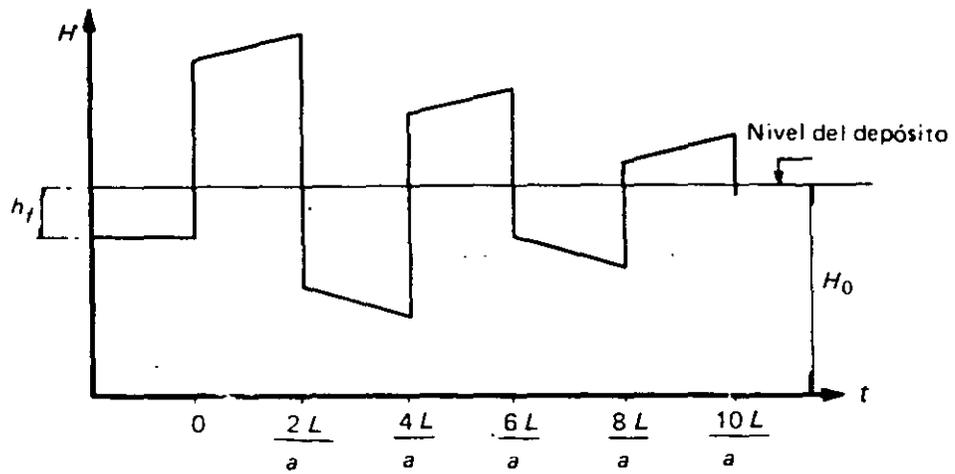


Figura 3.4 Variación de la carga piezométrica en el órgano de control considerando pérdidas por fricción.

3.3 TEORÍA DE LA COLUMNA RÍGIDA

La teoría de la columna rígida fue desarrollada para cuantificar la magnitud de los efectos del golpe de ariete en un túnel o en un conducto a presión con una misma sección transversal en todo su desarrollo con un depósito de nivel constante y un órgano de control, situados en los extremos aguas arriba y

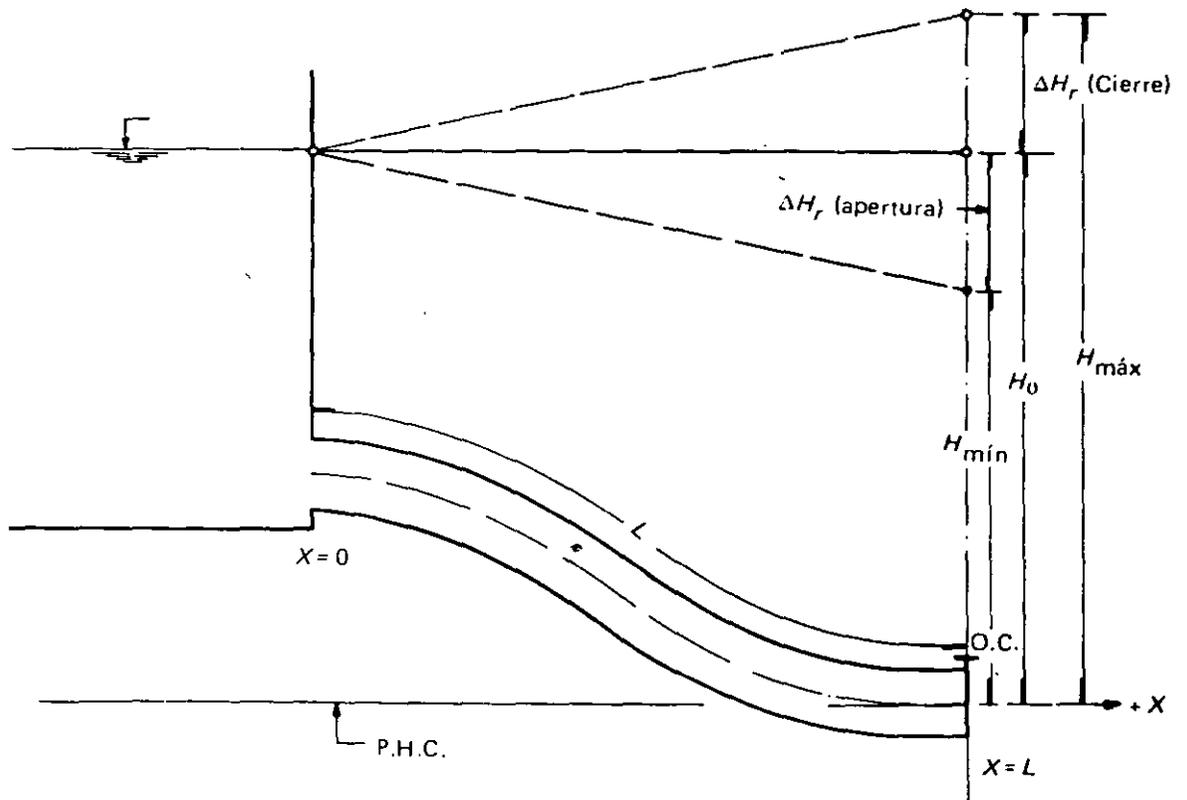


Figura 3.5

aguas abajo respectivamente, tal como se indica en la figura 3.5. Esta teoría está basada en las siguientes hipótesis simplificadoras:

- a) El flujo en el conducto es incompresible.
- b) Las paredes del conducto se consideran rígidas o indeformables.
- c) El conducto permanece lleno de agua todo el tiempo y la presión mínima en cualquier sección de éste siempre es mayor que la presión de vaporización del agua.
- d) Las pérdidas de carga por fricción y la carga de velocidad son despreciables en comparación con los cambios de presión en el conducto.
- e) Las distribuciones de velocidad y presión en cualquier sección del conducto son uniformes.
- f) El nivel del depósito permanece constante durante el tiempo que dura el fenómeno.
- g) La carga piezométrica varía linealmente con respecto a la coordenada curvilínea x .

3.3.1 Ecuación de continuidad

De acuerdo con las hipótesis *a* y *b* mencionadas en la sección anterior, la ecuación (2.15) se puede escribir como:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

Por otra parte, cuando el órgano de control que se muestra en la figura 3.6 se somete a una maniobra de cierre o apertura siguiendo una determinada ley, la ecuación de continuidad aplicada en una sección transversal ubicada aguas arriba del mismo conduce a lo siguiente:

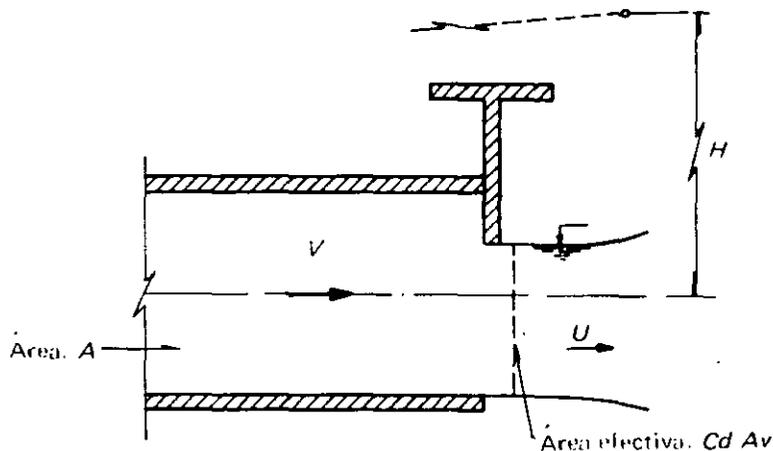


Figura 3.6

Antes de iniciarse la maniobra, cuando el flujo en el conducto es permanente se tendrá que:

$$AV_0 = (A_v U)_0 = (C_d A_v)_0 \sqrt{2g H_0} \quad (3.2)$$

y al iniciarse la maniobra:

$$AV = A_v U = (C_d A_v) \sqrt{2g H} \quad (3.3)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (3.3) y (3.2):

$$\frac{V}{V_0} = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_0} \sqrt{\frac{H}{H_0}} \quad (3.4)$$

o bien, si $H = H_0 + \Delta H_r$:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_0} \sqrt{1 + \frac{\Delta H_r}{H_0}} \quad (3.4a)$$

Si en la ecuación (3.4a) se define $\eta = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_0}$ y $Z_r = \frac{\Delta H_r}{H_0}$, ésta se puede escribir como:

$$V = V_0 \eta \sqrt{1 + Z_r} \quad (3.5)$$

Para el caso de una maniobra de cierre lineal o uniforme, es decir, cuando el área efectiva del órgano varía linealmente con respecto al tiempo, el valor de η será (figura 3.7a):

$$\eta = 1 - (1 - \eta_f) \frac{t}{\tau}, \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (3.6)$$

$$\eta = \eta_f, \quad t \geq \tau \quad (3.6a)$$

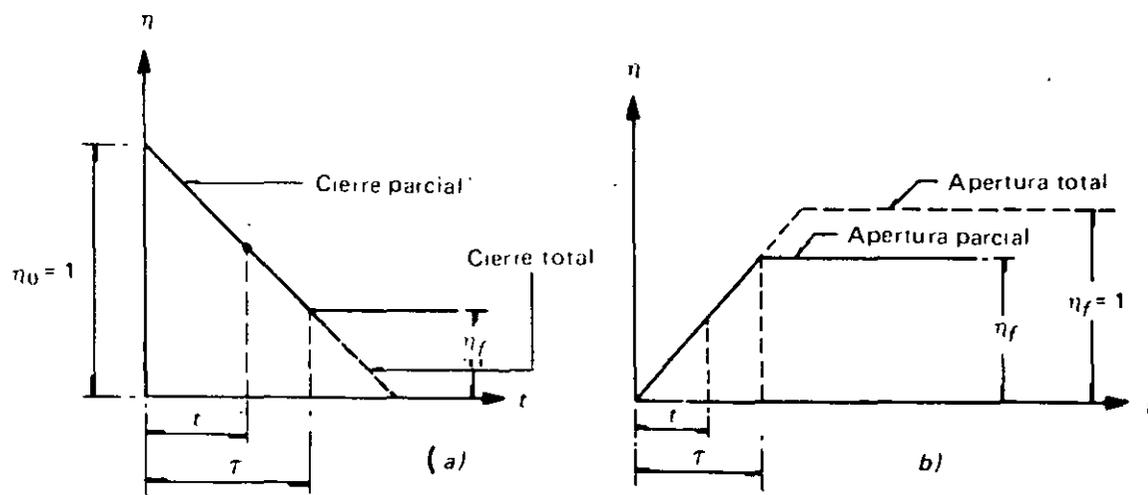


Figura 3.7 Leyes para maniobras de cierre o apertura uniformes.

Ahora bien, al inicio de la maniobra cuando el flujo es permanente en el conducto, según la ecuación (3.5) $V = V_0$, ya que $\eta_0 = 1$ y $Z_r = 0$ y, en forma análoga, la velocidad al término de la misma cuando el flujo es nuevamente permanente es $V_f = V_0 \eta_f$. De acuerdo con esto la ecuación (3.6) se puede expresar como:

$$\eta = 1 - \left(1 - \frac{V_f}{V_0}\right) \frac{t}{\tau} \quad (3.6b)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la (3.5) resulta:

$$V = \frac{V_0 t}{\tau} \left[1 - \left(1 - \frac{V_f}{V_0}\right)\right] \sqrt{1 + Z_r} \quad (3.7)$$

3.3.2 Ecuación dinámica

Tomando en cuenta la ecuación (3.1) y las hipótesis d y g establecidas en la sección 3.3, la ecuación (2.21) se reduce a:

$$\frac{\Delta H_r}{L} + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = 0, \Delta H_r = - \frac{L}{g} \frac{dV}{dt}$$

o bien:

$$Z_r = - \frac{L}{gH_0} \frac{dV}{dt} \quad (3.8)$$

Sustituyendo la ecuación (3.5) en la (3.8), después de hacer operaciones el valor de la derivada $\frac{dZ_r}{dt}$ es:

$$\frac{dZ_r}{dt} = \frac{-2\sqrt{1+Z_r}}{\eta} \left[\sqrt{1+Z_r} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{gH_0}{LV_0}\right) Z_r \right] \quad (3.9)$$

Si se sustituye la ecuación (3.6b) en la (3.9), al igualar a cero $\frac{dZ_r}{dt}$ se obtiene:

$$Z_r = \frac{K_r}{2} \pm \sqrt{K_r + \frac{K_r^2}{4}} \quad (3.10)$$

donde

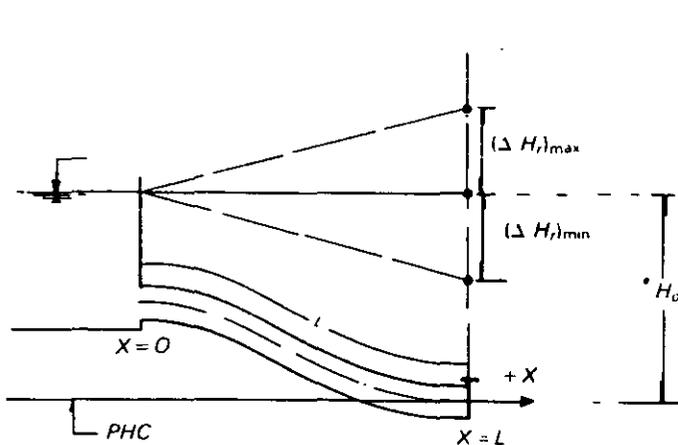
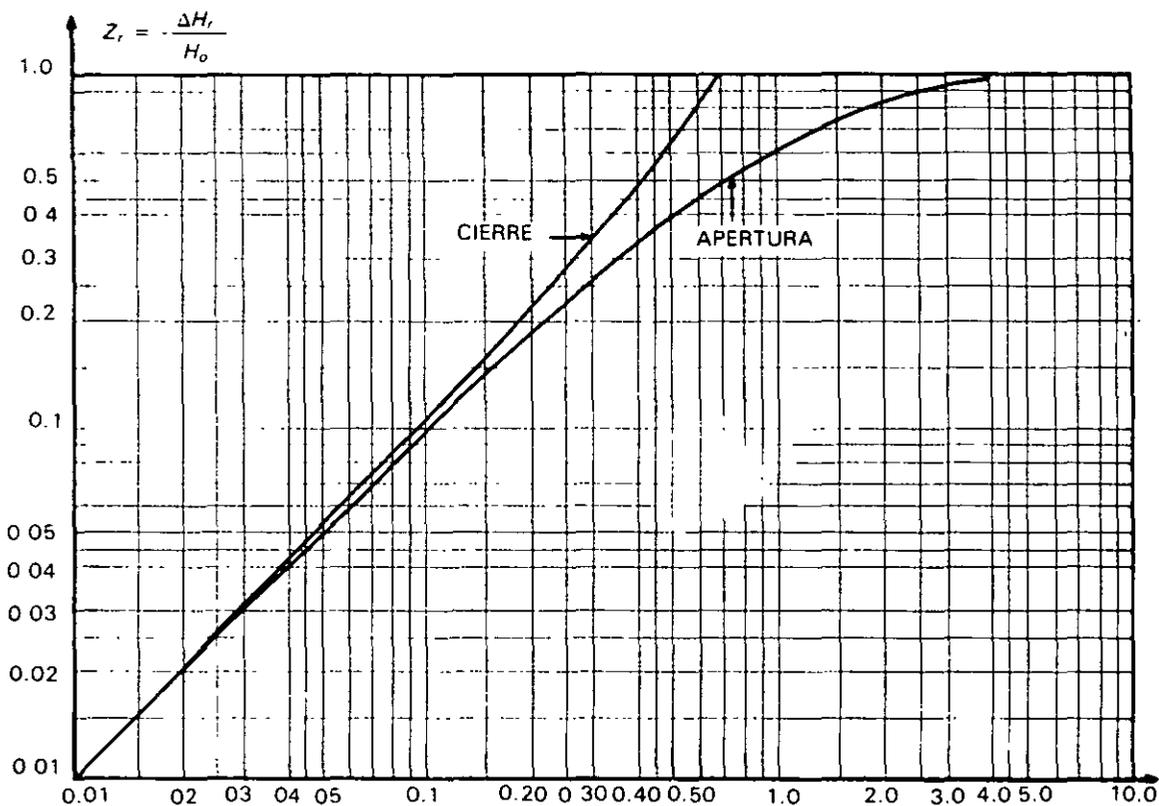
$$K_r = \left(\frac{L \Delta V_r}{g H_0 \tau}\right)^2 \quad \text{y} \quad \Delta V_r = V_0 - V_f$$

De la ecuación (3.10), la magnitud de la sobrepresión máxima es:

$$(\Delta H_r)_{m\acute{a}x} = H_0 (Z_r)_{m\acute{a}x} = \left[\frac{K_r}{2} + \sqrt{K_r + \frac{K_r^2}{4}} \right] H_0 \quad (3.10a)$$

y para el caso de una maniobra de apertura lineal (figura 3.7b), se deduce fácilmente que la depresión es:

$$(\Delta H_r)_{m\acute{i}n} = H_0 (Z_r)_{m\acute{i}n} = \left[\frac{K_r}{2} - \sqrt{K_r + \frac{K_r^2}{4}} \right] H_0 \quad (3.10b)$$



- $\left| \frac{L\Delta V_r}{gH_0\tau} \right|$
- L = Longitud de la línea de conducción en m.
 - ΔV_r = Diferencia entre las velocidades inicial y final para flujo permanente.
 $V_0 - V_r$, en m./seg.
 - g = Aceleración de la gravedad, en m./seg²
 - H_0 = Carga piezométrica en m.
 - τ = Tiempo de cierre o apertura, en seg.

Gráfica 3.1 Valores de sobrepresión y depresión máxima para maniobras de cierre o apertura lineal. Teoría de la columna rígida.

La solución de las ecuaciones (3.10 *a* y *b*) se encuentra en la gráfica 3.1 en función del valor absoluto del parámetro $\left| \frac{L \Delta V_f}{g H_0 \tau} \right|$

3.3.3 Limitaciones de la teoría de la columna rígida

Como pudo verse en la teoría analizada, se supone que el flujo en el conducto es uniforme, no permanente e incompresible, lo cual resulta aplicable sólo a conductos tal como el mostrado en la figura 3.5 cuando la maniobra de cierre o apertura del órgano de control es relativamente lenta, es decir, donde $\tau > \frac{L}{73}$ y para una relación de carga y velocidad para el flujo permanente inicial, tal que $\frac{H_0}{V_0} \leq 50$.¹

En términos generales, para maniobras de cierre o apertura rápida es conveniente aplicar la teoría de la columna elástica, que se estudia en la siguiente sección.

3.4 TEORÍA DE LA COLUMNA ELÁSTICA

Esta teoría se acerca más al comportamiento real del fenómeno y ha sido comprobada en laboratorio. Las ecuaciones de continuidad y dinámica en este caso están sujetas a las siguientes hipótesis simplificadoras:

1. El conducto permanece lleno de agua todo el tiempo y la presión mínima en cualquier sección siempre es mayor que la de vaporización del fluido.
2. Las distribuciones de velocidad y presión en cualquier sección del conducto son uniformes.
3. Las fórmulas para el cálculo de pérdidas de carga cuando el flujo es permanente, también son válidas cuando éste es transitorio.
4. La pared del conducto y el fluido se comportan de una manera elástica lineal y tienen pequeñas deformaciones.
5. El incremento de la presión con respecto a la coordenada curvilínea x resulta pequeño comparado con el incremento de la misma con respecto al tiempo.

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{\partial p}{\partial t}$$

6. El incremento de la carga de velocidad y la densidad del fluido resulta pequeño comparado con el de la carga piezométrica.

$$\frac{\partial H_T}{\partial x} + \frac{h_p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \approx \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \approx \rho g \frac{\partial H}{\partial t}$$

3.4.1 Ecuación de continuidad

De acuerdo con la hipótesis 5, la ecuación (2.7) se puede escribir como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{E_t} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.11)$$

Por otra parte, el incremento de la sección transversal del conducto se puede expresar como (figura 2.6):

$$dA = 2\pi r \delta r = 2A \frac{\delta r}{r} \quad (3.12)$$

Según la Ley de Hooke para sólidos que tienen un comportamiento elástico lineal se tiene que⁵:

$$d\sigma = \left(\frac{\delta r}{r} \right) E_t \quad (3.13)$$

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la (3.12) resulta:

$$dA = \frac{2A}{E_t} d\sigma \quad (3.14)$$

Observando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 3.8 se deduce que*:

$$\sigma = \frac{pr}{e}, \quad \Delta\sigma = \frac{1}{e} (p \Delta r + r \Delta p)$$

como $p \Delta r \ll r \Delta p, \quad \Delta\sigma = \frac{r \Delta p}{e}$

o bien: $d\sigma = \frac{r}{e} dp \quad (3.15)$

Esta última ecuación, al ser sustituida en la ecuación (3.14) da como resultado:

$$dA = \frac{AD}{eE_t} dp$$

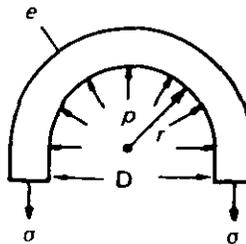


Figura 3.8

*Con objeto de simplificar la deducción de la ecuación en estudio, no se toma en cuenta la deformación asociada a la relación de Poisson.

o bien, según la hipótesis 5:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eE_t} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.11) y (3.16) en la (2.15), y tomando en cuenta la hipótesis 6, esta última ecuación queda como:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \rho g \left(\frac{1}{E_v} + \frac{D}{eE_t} \right) \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.17)$$

Recordando que $Q = VA$ y ordenando términos, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

donde el parámetro a se define como la celeridad de la onda de presión en el conducto y su valor es:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\rho \left(\frac{1}{E_v} + \frac{D}{eE_t} \right)}} \quad (3.19)$$

3.4.2 Ecuación dinámica

La ecuación dinámica para esta teoría puede deducirse fácilmente de la ecuación (2.21) si se considera la hipótesis 6, la definición de carga piezométrica H y la relación $Q = VA$, las que después de ordenar términos permiten escribir:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \quad (3.20)$$

Finalmente, es necesario destacar que para el cálculo de las pérdidas por fricción en el conducto, como ya se mencionó anteriormente, se ha utilizado la fórmula de Darcy-Weisbach; no obstante, es posible utilizar cualquier expresión de la forma $K_1 Q |Q|^m D^b$ con valores de K_1 , m y b que dependen de la fórmula utilizada; así, para la fórmula de Manning que en la práctica también se aplica a los conductos a presión $K_1 = 8.08 \text{ gn}^2$, $m = 1$ y $b = -10/3$, siendo n el coeficiente de rugosidad.

3.5 ECUACIONES DIFERENCIALES DEL GOLPE DE ARIETE

Con base en las ecuaciones de continuidad y dinámica establecidas para la teoría de la columna elástica, despreciando el efecto de la fricción y haciendo $Q = VA$, las ecuaciones (3.18) y (3.20) se pueden escribir como:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.21)$$

y

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

que se conocen como las ecuaciones de continuidad y dinámica del golpe de ariete que se pueden transformar en las siguientes si se recuerda que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial t \partial x} :$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (3.21a)$$

y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad (3.22a)$$

Para el caso particular de un conducto con eje horizontal y la carga piezométrica H valuada con respecto a un plano horizontal de comparación que contiene a dicho eje, ésta resultará igual a la carga de presión h_p , con lo que la ecuación (3.21a) se simplifica como:

$$\frac{\partial^2 h_p}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 h_p}{\partial x^2} = 0 \quad (3.23)$$

que es la ecuación diferencial utilizada por Allievi para conductos con eje horizontal y sección transversal constante.

Sin embargo, con el fin de obtener el valor de la carga piezométrica H en cualquier sección del conducto, independientemente del perfil de su eje, a continuación se analiza la solución e interpretación física de las ecuaciones (3.21a y 3.22a), la carga de presión h_p se obtiene con sólo restar la carga de posición Z_p de la piezométrica correspondiente.

Las ecuaciones antes mencionadas tienen la forma de la ecuación denominada de D'Alambert, cuya solución^{9,18} simultánea general fue obtenida por Riemann y para un sistema tal como el mostrado en la figura 3.9 resulta (ver problema 3.11):

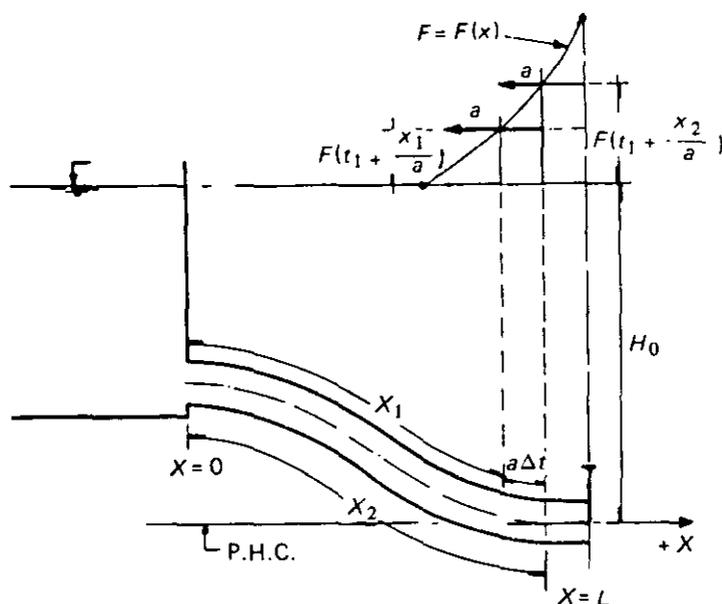


Figura 3.9

$$H = H_0 + F\left(t + \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (3.24)$$

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right) \right] \quad (3.24a)$$

$$\text{para } t \geq \frac{x}{a}$$

Las expresiones anteriores son las ecuaciones integrales del golpe de ariete que permiten determinar la carga piezométrica y la velocidad en cualquier sección de un conducto durante el flujo transitorio en función de la coordenada curvilínea x con origen en el depósito y el tiempo t .

3.6 INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DEL GOLPE DE ARIETE

Con el fin de ayudar a la mejor comprensión del fenómeno en estudio y deducir ecuaciones de tipo práctico que permitan la cuantificación de sus efectos, resulta conveniente interpretar el significado de las funciones $F\left(t + \frac{x}{a}\right)$ y $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$.

Considerando que por alguna razón pudiera justificarse que la función $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ fuese nula, es posible encontrar el efecto que la existencia de

$F(t + \frac{x}{a})$ traería consigo. De esta manera las ecuaciones (3.24) y (3.24a) tomarían la forma:

$$H = H_0 + F(t + \frac{x}{a}) \quad (3.25)$$

$$V = V_0 - \frac{g}{a} F(t + \frac{x}{a}) \quad (3.25a)$$

Si se despeja $F(t + \frac{x}{a})$ en la ecuación (3.25a) y se substituye su valor en la (3.25) resulta:

$$H = H_0 + \frac{a}{g} (V_0 - V) \quad (3.25b)$$

Al realizar una maniobra de cierre en el órgano de control de la figura (3.9) cuando $t = 0$, se tendrá que la velocidad para el flujo permanente inicial V_0 será siempre mayor que la velocidad para el flujo transitorio V , es decir, $V_0 - V > 0$ y por lo tanto $H > H_0$.

Ahora bien, para un observador que partiera del órgano de control cuando $t = t_0$ y viajara a lo largo del conducto en la dirección $-x$ con una velocidad $-a$, en un instante t_1 se encontraría en la sección $x_1 = L - a(t_1 - t_0)$, donde el valor de la función $F(t + \frac{x}{a})$ sería (figura 3.9):

$$F(t_1 + \frac{x_1}{a}) = F\left(\frac{L}{a} + t_0\right) = \text{cte.}$$

y para otro observador que partiera cuando $t = t_0 + \Delta t$ y viajara en las mismas condiciones, en el mismo instante t_1 se encontraría en la sección $x_2 = L - a(t_1 - t_0 - \Delta t)$ resultando entonces que:

$$F(t_1 + \frac{x_2}{a}) = F\left(\frac{L}{a} + t_0 + \Delta t\right) = \text{cte.}$$

De acuerdo con lo anterior se deduce que $F(t + \frac{x}{a})$ representa una onda de carga positiva que se propaga con dirección al depósito, de tal manera que para un observador que viaja en la misma dirección con velocidad $-a$, su magnitud permanecerá constante.

Una consideración similar con $F(t + \frac{x}{a}) = 0$, aceptando que sólo existiera $f(t - \frac{x}{a})$, conduce a la conclusión de que esta última función representa una onda de carga negativa que se propaga del depósito hacia el órgano de control, con un valor constante para un observador que viaja en la dirección $+x$ con velocidad a .

Por otra parte, como la magnitud de la carga piezométrica H_0 permanece constante en el depósito, de la ecuación (3.24) se obtiene para $x = 0$ y el instante t :

$$f(t) = -F(t) \quad (3.26)$$

Además, si se considera una onda directa F que parte del órgano de control en el instante t , llega al depósito cuando $t = t + \frac{L}{a}$, y se refleja dando origen a una onda f con la misma magnitud pero con signo opuesto que viaja hacia al órgano al que llega en el instante $t = t + \frac{2L}{a}$, puede afirmarse que en la sección del conducto correspondiente a este último resulta válida la siguiente relación*:

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right) \quad (3.27)$$

Es decir, la magnitud de la onda f en el órgano de control para el instante t es igual a la de la onda F con signo opuesto que partió del mismo con dirección al depósito $\frac{2L}{a}$ segundos antes.

3.7 ECUACIONES GENERALES DE ALLIEVI

El conocimiento de las funciones F y f es difícil tenerlo a mano para resolver un determinado problema, sin embargo, Allievi propuso un sistema de ecuaciones muy simple cuya solución permite calcular la variación de la carga piezométrica y la velocidad en la sección adyacente inmediatamente aguas arriba del órgano de control que se muestra en la figura 3.9. Si en las ecuaciones (3.24) y (3.24a) se hace $x = L$, resulta:

$$H = H_0 + F\left(t + \frac{L}{a}\right) + f\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (3.28)$$

y

$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t + \frac{L}{a}\right) - f\left(t - \frac{L}{a}\right) \right] \quad (3.29)$$

expresiones que se conocen con el nombre de *Ecuaciones de Allievi*.

Por otra parte, si se hace $i = \frac{t}{T}$ la ecuación (3.27) puede escribirse como:

$$f(iT) = -F[(i-1)T]$$

* Esta relación es equivalente a $f\left(t - \frac{L}{a}\right) = -F\left(t + \frac{L}{a} - \frac{2L}{a}\right)$ si se hace $t = t - \frac{L}{a}$.

donde i es un número adimensional entero o fraccionario, además, si se define $f(i T) = f_i$ y $F[(i-1)T] = F_{i-1}$, la ecuación anterior queda:

$$f_i = -F_{i-1} \quad (3.30)$$

Al sustituir esta ecuación en la (3.28) para instantes i e $i-1$ se obtiene:

$$H_i = H_0 - F_{i-1} + F_i \quad (3.31)$$

y

$$H_{i-1} = H_0 - F_{i-2} + F_{i-1} \quad (3.32)$$

sumando miembro a miembro estas últimas ecuaciones y haciendo operaciones resulta:

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = F_i - F_{i-2} \quad (3.33)$$

Si se hace un razonamiento semejante con la ecuación (3.29) se llega a:

$$\frac{a}{g} (V_{i-1} - V_i) = F_i - F_{i-2} \quad (3.34)$$

y al igualar las ecuaciones (3.33) y (3.34) resulta finalmente:

$$H_i + H_{i-1} - 2H_0 = \frac{a}{g} (V_{i-1} - V_i) \quad (3.35)$$

La ecuación anterior es la fórmula clásica de Allievi y permite llevar a cabo un desarrollo en cadena mediante el cual se puede obtener la carga piezométrica en la sección adyacente al órgano de control para el instante i , si se conoce su valor para el instante $i-1$, y el incremento de velocidad entre dichos instantes, mismo que está determinado por la ley de cierre o apertura en el órgano que se analiza más adelante.

Es necesario subrayar que en la ecuación original de Allievi el valor de la carga piezométrica H que aparece en la ecuación (3.35), corresponde al de la carga de presión h_p en un conducto de eje horizontal; no obstante, esta última ecuación es válida para cualquier perfil del eje y se reduce a la de Allievi, si el plano horizontal de comparación se elige de tal manera que contenga al menos un punto del primero en la sección en estudio (figura 3.9), lo que da como resultado que en el órgano de control se tenga entonces que $H = h_p$.

3.8 DESARROLLO EN CADENAS DE ALLIEVI

Si se dividen ambos miembros de la ecuación (3.35) entre H_0 se obtiene:

$$\frac{H_i}{H_0} + \frac{H_{i-1}}{H_0} - \frac{2H_0}{H_0} = \frac{a}{gH_0} (V_{i-1} - V_i)$$

al introducir el valor de V_0 en el segundo miembro de la ecuación anterior resulta:

$$\frac{H_i}{H_0} + \frac{H_{i-1}}{H_0} - 2 = \frac{a V_0}{g H_0} \left(\frac{V_{i-1}}{V_0} - \frac{V_i}{V_0} \right)$$

haciendo $Z_i^2 = \frac{H_i}{H_0}$ y $\epsilon = \frac{a V_0}{2gH_0}$, esta última ecuación toma la forma:

$$Z_i^2 + Z_{i-1}^2 - 2 = 2\epsilon \left(\frac{V_{i-1}}{V_0} - \frac{V_i}{V_0} \right) \quad (3.36)$$

Ahora bien, si se aplica la ecuación de continuidad para una sección transversal ubicada inmediatamente aguas arriba del órgano de control tal como se hizo en la sección 3.3.1, y se toma en cuenta lo ya indicado acerca del plano horizontal de comparación, se puede escribir:

$$\frac{V_i}{V_0} = \frac{(C_d A_v)_i}{(C_d A_v)_0} \sqrt{\frac{H_i}{H_0}}$$

o bien

$$\frac{V_i}{V_0} = \eta_i Z_i \quad (3.37)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (3.36), se tendrá:

$$\boxed{Z_i^2 + Z_{i-1}^2 - 2 = 2\epsilon (\eta_{i-1} Z_{i-1} - \eta_i Z_i)} \quad (3.38)$$

ecuación que se conoce con el nombre de *Ecuación Adimensional de Allievi*.

3.9 LEYES PARA MANIOBRAS DE CIERRE Y APERTURA

Como ya se mencionó anteriormente, para poder obtener los valores de la carga piezométrica y la velocidad en el órgano de control cuando éste se somete

a una maniobra de cierre o apertura, es necesario conocer la ley con la cual se efectúa dicha maniobra; para tal fin, a continuación se indican las ecuaciones que pueden utilizarse para los casos más comunes que corresponden a condiciones iniciales de apertura o cierre total.

3.9.1 Ley para una maniobra de cierre uniforme o lineal

Si en las ecuaciones (3.6) y (3.6a), se hace $\eta = \eta_i$, $i = \frac{t}{T}$ y $\theta = \frac{\tau}{T}$ éstas toman la forma (figura 3.7a):

$$\eta_i = 1 - (1 - \eta_f) \frac{i}{\theta}, 0 \leq i \leq \theta \quad (3.39)$$

$$\eta_i = \eta_f, i \geq \theta \quad (3.39a)$$

donde $\eta_f > 0$ para un cierre parcial, e igual a cero si éste es total.

3.9.2 Ley para una maniobra de apertura uniforme o lineal

Para una ley uniforme de apertura, ya sea parcial ($\eta_f < 1$) o total ($\eta_f = 1$), se puede demostrar fácilmente que (figura 3.7b):

$$\eta_i = \frac{i}{\theta} \eta_f, 0 \leq i \leq \theta \quad (3.40)$$

$$\eta_i = \eta_f, i \geq \theta \quad (3.40a)$$

3.9.3 Leyes para maniobras de cierre o apertura no uniformes

Cuando la ley de cierre o apertura no es uniforme, se tendrá una variación de η con respecto al tiempo tal como la mostrada en la figura 3.10; en este caso resulta conveniente hacer una gráfica semejante a las que se indican de acuerdo con las características de la maniobra e interpolar de ésta el valor deseado de η , o bien, si se dispone de una computadora se puede simular la maniobra mediante líneas rectas como las que se muestran en la misma figura (ver capítulo 5).

3.10 CELERIDAD DE ONDA

La celeridad de las ondas de presión en un conducto quedó definida por la ecuación (3.19), en la cual puede verse que su valor depende tanto de las propiedades elásticas del conducto y el fluido, como de la geometría del primero. Cuando el líquido fluyente es agua dulce y en la mencionada ecuación se

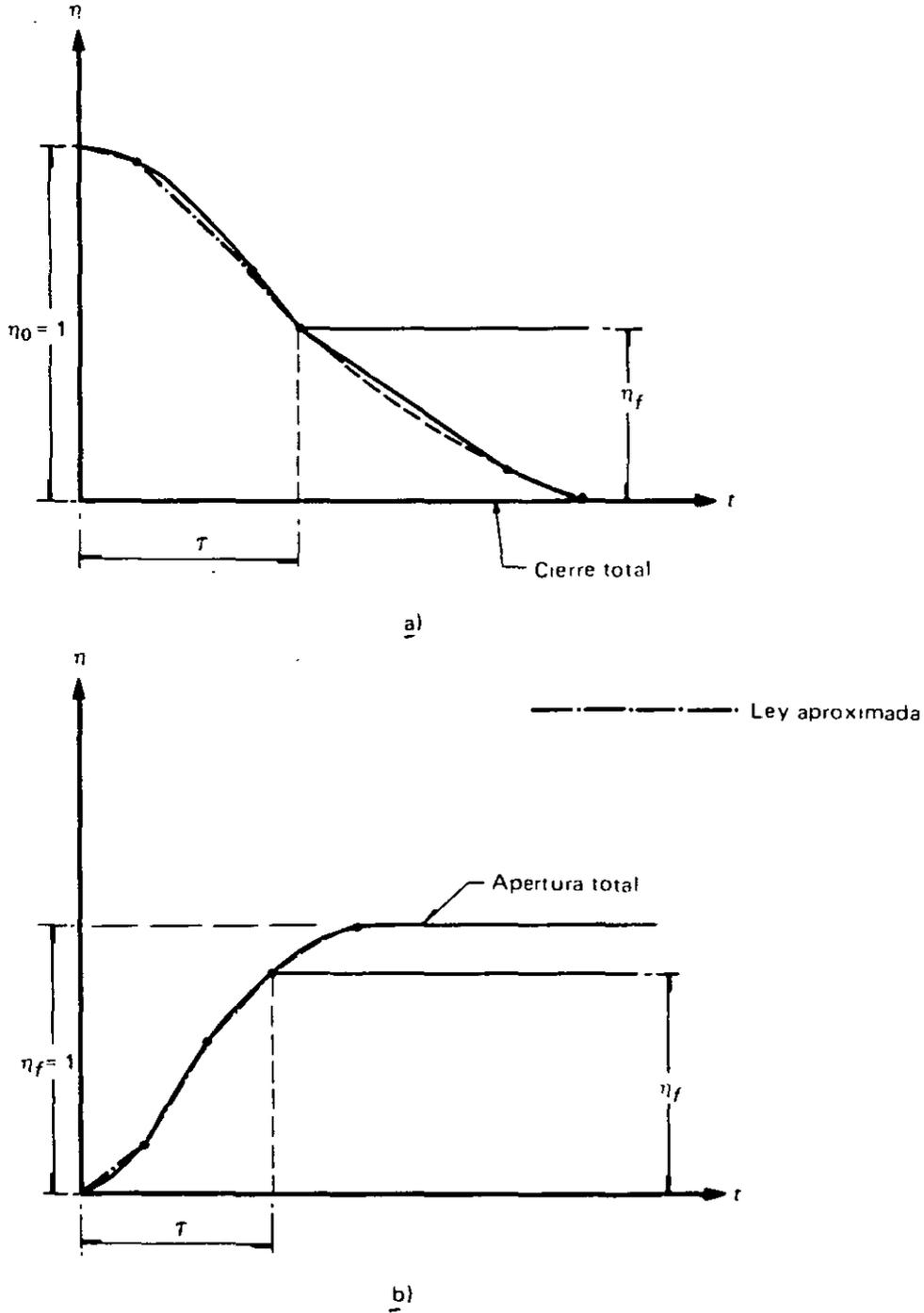


Figura 3.10 Leyes para maniobras de cierre o apertura no uniformes

aceptan valores prácticos de $E_v = 2.24 \times 10^8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ y $\rho = 101.94 \frac{\text{kg}_f \text{seg}^2}{\text{m}^4}$ se obtiene:

$$a = \frac{1,482}{\sqrt{1 + \frac{E_v D}{E_t e}}} \quad (3.41)$$

Tabla 3.1 Valores del módulo de elasticidad E_t para algunos materiales.^{1, 16}

<i>Material</i>	$E_t \left(\frac{Kg}{m^2} \right)$
Acero	2.10×10^{10}
Asbesto-cemento	2.45×10^9
P. V. C.	1.124×10^8
Fierro fundido	9.30×10^9
Cobre	1.30×10^{10}
Bronce	1.05×10^{10}
Latón	1.05×10^{10}
Zinc	3.70×10^9
Plomo	1.40×10^9
Estaño	1.30×10^{10}
Aluminio	7.20×10^9
Concreto simple	1.25×10^9
Madera	7.00×10^8
Hule	3.50×10^8
Vidrio	7.00×10^9

La ecuación anterior permite calcular la magnitud de la celeridad de la onda de presión en un conducto de pared delgada, cuyo espesor es menor o igual a la décima parte del diámetro, es decir, si $\frac{e}{D} \leq 0.10$. En la tabla 3.1 se indican los valores del módulo de elasticidad E_t para algunos materiales usados en conductos, y en la tabla 3.2 se proporcionan valores del módulo de elasticidad volumétrico E_v y la densidad ρ para algunos líquidos.

Por otro lado, es necesario señalar que algunos autores sugieren la aplicación de la siguiente ecuación para el cálculo de la celeridad de onda:

$$a = \sqrt{\frac{E_v / \rho}{1 + \frac{E_v D}{E_t e} C_1}} \quad (3.41a)$$

donde C_1 es un parámetro que depende de la relación de Poisson μ del material con que está hecho el conducto y de sus condiciones de apoyo.*

Tabla 3.2 Valores comúnmente usados del módulo de elasticidad volumétrico E_v y de la densidad ρ para algunos líquidos.^{1, 17}

<i>Líquido</i>	$E_v \text{ (kg/m}^2\text{)}$	$\rho \left(\frac{kgf \cdot seg^2}{m^4} \right)$	<i>Temperatura (°C)</i>
Agua dulce	2.24×10^8	101.94	20
Agua salada	2.38×10^8	104.60	15
Petróleo	2.10×10^8	91.80	15
Gasolina	1.42×10^8	76.46	15

*Ver referencia 9.

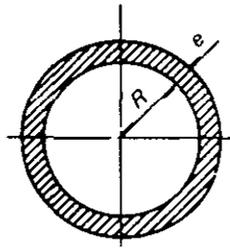


Figura 3.11 Tubo de pared gruesa.

Sin embargo, puede aceptarse un valor práctico de C igual a la unidad para la gran mayoría de los conductos, con lo que la ecuación (3.41a) se reduce a la (3.41).

Para algunos de los materiales más comunes en conductos de pared delgada, a partir de esta última ecuación, se puede obtener la siguiente expresión:

$$a = \frac{1,482}{\sqrt{1 + K_a \frac{D}{e}}} \quad (3.42)$$

donde $K_a = 0.0106, 0.091$ y 1.993 para conductos de acero, asbesto cemento y P. V. C. respectivamente. Obsérvese que si el valor de K_a fuese igual a cero, para un material con módulo de elasticidad infinito, el valor máximo de la celeridad sería de $1,482$ m/seg, que es la velocidad con la cual se propaga el sonido en el agua a una temperatura de 20°C .

Tratándose de conductos de pared gruesa (figura 3.11), si se desprecia el efecto de la relación de Poisson μ , la celeridad de onda^{5,17} se define como:

$$a = \sqrt{\frac{E_v / \rho}{1 + \frac{2E_v}{E_t} \left[\frac{(R + e)^2 + R^2}{(R + e)^2 - R^2} \right]}} \quad (3.43)$$

donde R es el radio interior del conducto.

Para conductos de concreto reforzado existe alguna incertidumbre debido a la heterogeneidad del material; sin embargo, para valuar la celeridad de onda se recurre a un conducto de acero equivalente con un espesor virtual e_v , dado por la siguiente fórmula:

$$e_v = e_a \left(1 + \frac{E_c}{E_a} \frac{e_c}{e_a} \right) \quad (3.44)$$

siendo e_c el espesor del tubo de concreto, e_a el de una placa continua de acero equivalente al refuerzo, E_c y E_a los módulos de elasticidad del concreto y acero de refuerzo respectivamente.

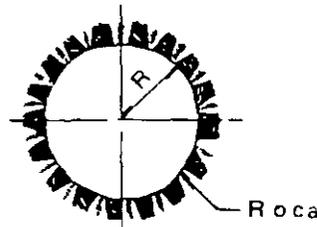


Figura 3.12 Galería en roca sana.

En el caso de galerías a presión no revestidas y excavadas en roca sana (figura 3.12) la celeridad vale^{5,17}:

$$a = \sqrt{\frac{E_r / \rho}{1 + 2 \frac{E_v}{E_r}}} \quad (3.45)$$

donde E_r es el módulo de elasticidad de la roca (tabla 3.3).

Si la galería está revestida con una camisa de acero de espesor e y módulo de elasticidad E_a (figura 3.13)¹⁷:

$$a = \sqrt{\frac{E_r / \rho}{1 + \frac{E_v D}{E_r D + E_a e}}} \quad (3.46)$$

Por último, para un túnel excavado en roca con relación de Poisson μ_r , con revestimiento de concreto de radio exterior e interior R_e y R_i respectivamente, y una camisa de acero de espesor e (figura 3.14), la celeridad de onda es^{5,17}:

$$a = \sqrt{\frac{E_r / \rho}{1 + \frac{2 E_v R_i}{e E_a} (1 - \varphi)}} \quad (3.47)$$

Tabla 3.3 Valores del módulo de elasticidad E_r y relación de Poisson μ_r para algunas rocas¹⁷.

Roca	E_r (Kg/m ²)	μ_r
Granito	5.10×10^9	0.28
Caliza	5.16×10^9	0.21
Arenisca	3.85×10^8	0.28

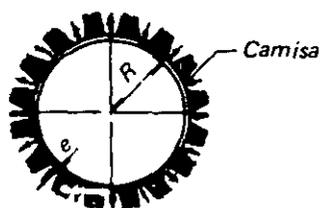


Figura 3.13 Galería en roca sana revestida.

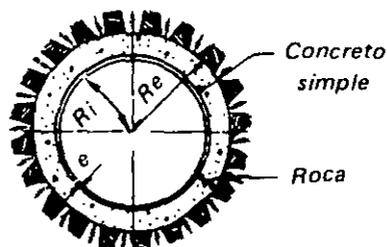


Figura 3.14 Túnel excavado en roca con revestimiento de concreto y una camisa de lámina.

donde

$$\varphi = \frac{\frac{R_i}{e}}{\frac{R_i}{e} + \frac{Ea}{E_c} \left(\frac{R_e^2 - R_i^2}{2R_i R_e} \right) + (1 + \mu_r) \frac{Ea}{E_r}}$$

3.11 GOLPE DE ARIETE EN EL ÓRGANO DE CONTROL

3.11.1 Golpe de ariete para maniobras rápidas

Cuando el tiempo de cierre o apertura τ es menor o igual al período de conducto T ($\tau \leq T$, $\theta \leq 1$), se dice que la maniobra total o parcial es rápida o brusca, y el valor de la carga piezométrica que se origina en el órgano de control se obtiene de la ecuación (3.38) aplicada para los instantes $i=0$ e $i=\theta$, mismos que corresponden a las condiciones inicial y final respectivamente.

Si en esta ecuación se hace $Z_0^2 = 1$ y se recuerda que $2\epsilon = \frac{aV_0}{gH_0}$ y $V_i = \eta_i Z_i V_0$, ordenando términos resulta:

$$\frac{H_m}{H_0} = 1 + \frac{a}{gH_0} (V_0 - V_f) \quad (3.48)$$

En la ecuación anterior H_m representa la carga piezométrica máxima o mínima, ya sea que la maniobra sea de cierre o apertura, las velocidades V_0 y V_f corresponden al flujo permanente inicial y final respectivamente. Así, para una maniobra de cierre total ($V_f = 0$), la ecuación (3.48) se reduce a:

$$H_m = \left(1 + \frac{aV_0}{gH_0} \right) H_0 \quad (3.49)$$

o bien, si $\Delta H = H_m - H_0$

$$\Delta H = \frac{aV_0}{g} \quad (3.49a)$$

expresión que se conoce como *Ecuación de Joukowsky*.

Si la maniobra es de apertura y se inicia cuando el órgano de control está totalmente cerrado ($V_0 = 0$) se obtiene:

$$H_m = \left(1 - \frac{aV_f}{gH_0} \right) H_0 \quad (3.50)$$

Además, se puede demostrar que para una maniobra brusca la magnitud de las cargas extremas que se originan en el órgano de control no dependen de la ley de cierre o apertura y se presentan en los instantes $i = \theta$ e $i = \theta + 1$ respectivamente (ver problema 3.12).

3.11.2 Golpe de ariete en maniobras lentas

Si el tiempo que dura la maniobra es mayor que el período T , es decir, si $\tau > T$ y $\theta > 1$ se dice entonces que ésta es lenta y la variación de la carga con respecto al tiempo se obtiene de la ecuación (3.38), que permite conocer el valor de Z_i conocido el de Z_{i-1} de acuerdo con la ley de cierre o apertura. Si en esta ecuación se despeja Z_i^2 resulta:

$$Z_i^2 = \left[\sqrt{(\epsilon \eta_i)^2 + 2 \epsilon \eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2 - \epsilon \eta_i} \right]^2 \quad (3.51)$$

Aquí, es necesario subrayar que los instantes $i - 1$, i e $i + 1$ son números adimensionales enteros o fraccionarios que difieren entre sí una unidad que representa un incremento de T seg. Allievi denominó como *instantes de período entero* a la serie de valores particulares:

$$0, i, 2i, 3i, \dots ni$$

Para el caso particular de una maniobra de apertura uniforme parcial o total iniciada desde un grado de cierre completo en el órgano ($\eta_0 = 0$), Allievi demostró que, independientemente del tiempo empleado para llevar a cabo la citada maniobra, si $\tau > T$, el valor mínimo de la carga se presenta siempre al final del primer instante de período entero ($i = 1$); así, si se sustituye la ecuación (3.40) con $\eta_i = \frac{\eta_f}{\theta}$ en la (3.51) con $\eta_0 = 0$ y $Z_0 = 1$ se obtiene:

$$Z_{\min}^2 = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon \eta_f}{\theta} \right)^2} - \frac{\epsilon \eta_f}{\theta} \right]^2 \quad (3.52)$$

y si la apertura es total ($\eta_f = 1$):

$$Z_{\min}^2 = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{\theta}\right)^2} - \frac{\epsilon}{\theta} \right]^2 \quad (3.52a)$$

tomando en cuenta que el valor de V que interviene en el parámetro 2ϵ corresponde al flujo permanente final.

Por lo que se refiere a otros tipos de maniobras lentas diferentes a la anterior, la carga extrema (máxima o mínima) se puede presentar en cualquier instante $i > 1$ por lo que se sugiere aplicar la ecuación (3.51) de manera que el incremento entre dos instantes sucesivos sea igual a 0.25 ($\Delta t = \frac{T}{4}$ seg.) desde $i = 0$ hasta $i = \theta + 2.00$, ya que además de obtener la variación de carga en el órgano de control, este incremento permite obtener las cargas extremas en las secciones correspondientes a $x = 0.25 L$, $0.50 L$ y $0.75 L$ como se demostrará en la sección 3.13.

Finalmente, para citar un ejemplo, la ecuación (3.51) puede escribirse como sigue para los instantes 0.250, 1.000 y 1.250:

para $i = 0.250$

$$Z_{0.250}^2 = \left[\sqrt{(\epsilon \eta_{0.250})^2 + 2 \epsilon \eta_{-0.750} Z_{-0.750} - Z_{-0.750}^2 + 2} - \epsilon \eta_{0.250} \right]^2$$

para $i = 1.000$

$$Z_{1.000}^2 = \left[\sqrt{(\epsilon \eta_{1.000})^2 + 2 \epsilon \eta_{0.000} Z_{0.000} - Z_{0.000}^2 + 2} - \epsilon \eta_{1.000} \right]^2$$

para $i = 1.250$

$$Z_{1.250}^2 = \left[\sqrt{(\epsilon \eta_{1.250})^2 + 2 \epsilon \eta_{0.250} Z_{0.250} - Z_{0.250}^2 + 2} - \epsilon \eta_{1.250} \right]^2$$

3.12 CARTAS DE ALLIEVI PARA MANIOBRAS DE CIERRE O APERTURA UNIFORME

Las cartas elaboradas por Allievi son de gran utilidad para estudios preliminares, ya que proporcionan un valor aproximado de la carga piezométrica máxima o mínima en el órgano de control mediante un procedimiento bastante rápido. Sin embargo, estos diagramas fueron realizados bajo la hipótesis de que el área efectiva en el órgano tiene una variación uniforme o lineal con respecto al tiempo y, en consecuencia, no dan una estimación exacta de la carga piezométrica cuando la maniobra no es uniforme, así como tampoco se toma en consideración el efecto de la fricción en el conducto.

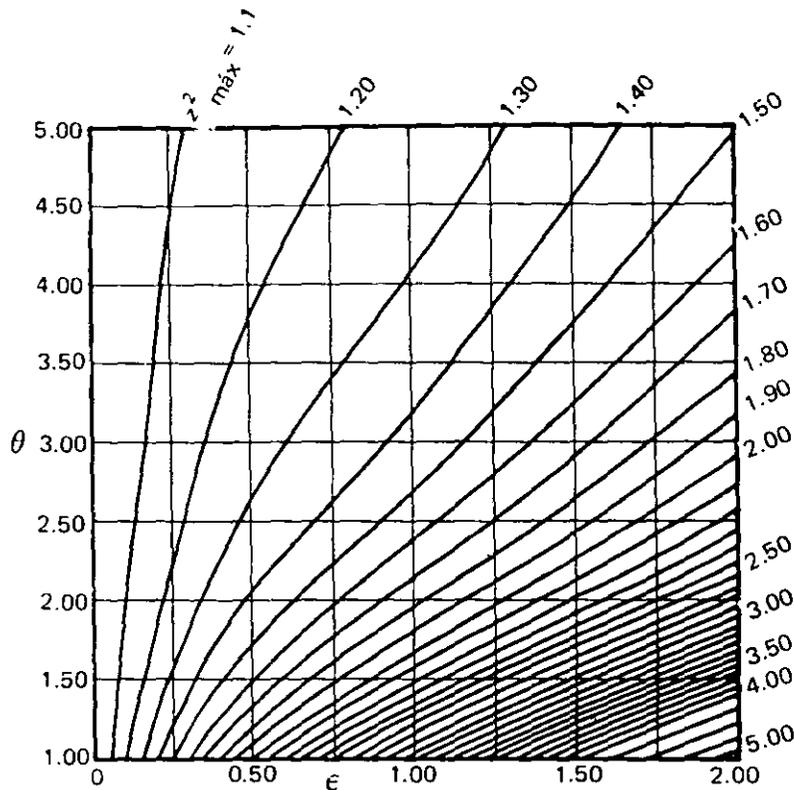


Figura 3.15 Carga piezométrica máxima para valores de ϵ y θ pequeños.

Con base en la ecuación (3.38) Allievi realizó unas cartas o ábacos, mediante los cuales se obtiene la carga adimensional máxima $Z_{m\acute{a}x}^2$ para una maniobra de cierre uniforme en función de los parámetros ϵ y θ . La primera de éstas se muestra en la figura 3.15 donde pueden observarse los valores de $Z_{m\acute{a}x}^2$ que sirven para el cálculo de la carga piezométrica máxima de acuerdo con la expresión $H_{m\acute{a}x} = H_0 Z_{m\acute{a}x}^2$, y se utiliza para valores pequeños de ϵ y θ .

En la segunda carta, que se muestra en la figura 3.16, se proporciona la magnitud de $Z_{m\acute{a}x}^2$ resultante de una maniobra de cierre uniforme para valores intermedios de ϵ y θ , así como el instante al final del cual tiene lugar dicha carga.

Para determinar este instante, se hace uso de la familia de curvas S que indican el tiempo en unidades $t = \frac{2L}{a}$ seg que transcurre desde el inicio de la maniobra hasta el momento en el que se presenta $Z_{m\acute{a}x}^2$.

Para el caso de un cierre uniforme parcial, en la expresión $\theta = \frac{\tau}{T}$, τ deberá ser tomado como el tiempo necesario para realizar una maniobra de cierre completo con la misma velocidad con la que se efectúa el primero; en estas condiciones, si el tiempo t_s indicado por la curva S para dar lugar a $Z_{m\acute{a}x}^2$ es menor que el tiempo empleado para la última maniobra ($t_s < \tau$), dicha carga será igual a la producida por un cierre completo y, en algunos casos, puede

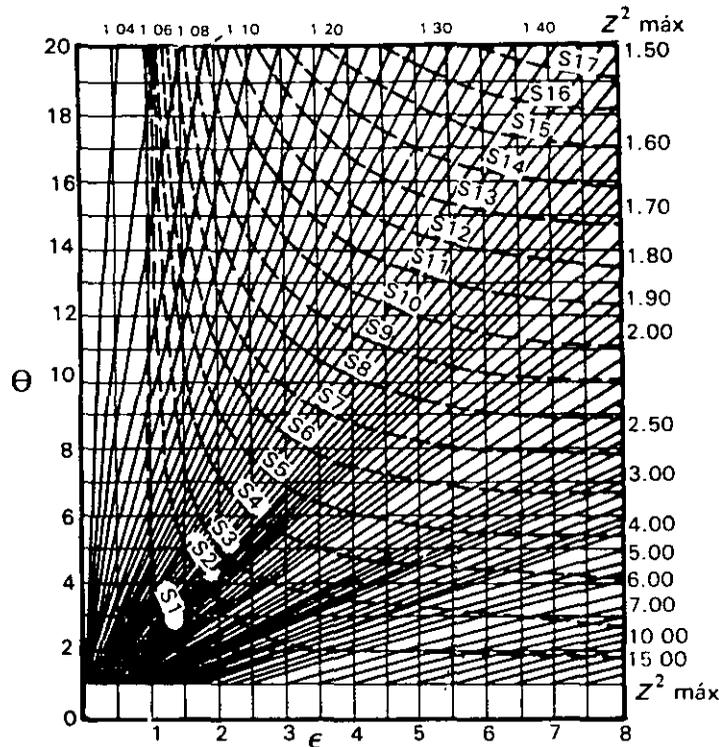


Figura 3.16 Carga piezométrica máxima para valores de ϵ y θ intermedios.

ser mayor aún que el obtenido mediante esta gráfica. Por el contrario, si el tiempo t_s es mayor que τ , esta carga no será alcanzada en este caso particular de maniobra.

De la figura 3.16 puede comprobarse que si $\theta \leq 1$, $Z_{\text{máx}}^2$ ocurre antes o al final de la primera fase sin depender del tiempo empleado para llevar a cabo la maniobra (cierre brusco), y si $\theta > 1$ dicho valor máximo ocurre en alguna de las fases posteriores (cierre lento); además, si $\epsilon < 1$, independientemente del valor de θ , $Z_{\text{máx}}$ se presenta antes de la primera fase.

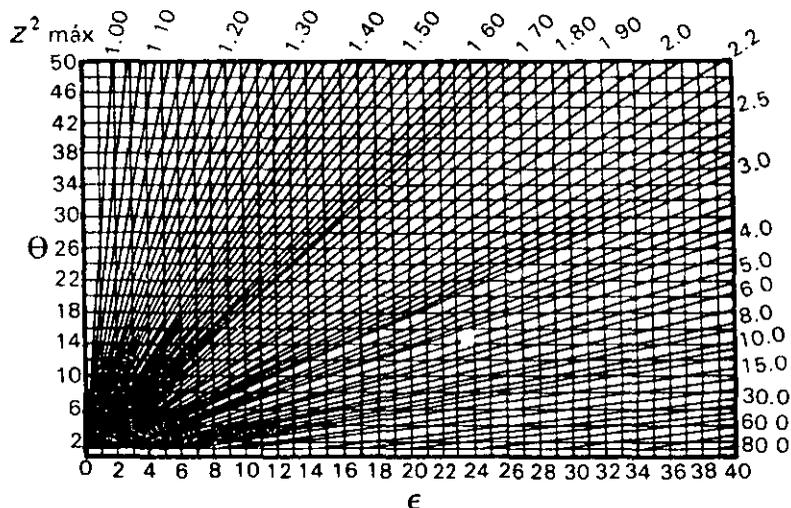


Figura 3.17 Carga piezométrica máxima para valores de ϵ y θ grandes.

También resulta interesante observar en esta última figura que si $\theta = 1$ y, por ejemplo, $\epsilon = 2$ el valor de $Z_{m\acute{a}x}^2$ es igual a 5.00; para el mismo valor ϵ pero con $\theta = 5$, la magnitud de $Z_{m\acute{a}x}^2$ disminuye hasta 1.5 y para $\theta = 20$ se reduce hasta 1.11, lo cual proporciona una idea clara de la disminución del efecto del golpe de ariete con el aumento del tiempo de cierre.

La tercera carta, que se muestra en la figura 3.17, define la magnitud de $Z_{m\acute{a}x}^2$ para valores grandes de ϵ y θ .

También Allievi resolvió el problema para una maniobra de apertura uniforme del órgano de control, y también elaboró cartas para este caso; así, mediante la figura 3.18a se puede encontrar el valor de la carga piezométrica mínima $Z_{m\acute{i}n}^2$, originada por una maniobra de apertura uniforme iniciada desde una posición de cierre total hasta cualquier grado de la primera, para valores pequeños de ϵ y θ , donde ϵ deberá ser igual a $\frac{aV_f}{2gH_0}$. Obsérvese en esta figura

que si $\theta \leq 1$, la magnitud de $Z_{m\acute{i}n}^2$ es independiente del tiempo que dure la maniobra (apertura brusca).

Finalmente, con relación a la figura 3.18b puede verse que indica la magnitud de $Z_{m\acute{i}n}^2$ para valores grandes de ϵ y θ .

3.13 GOLPE DE ARIETE EN CUALQUIER SECCIÓN DEL CONDUCTO

3.13.1 Ecuaciones de Angus

La ecuación adimensional de Allievi (ecuación 3.38), como ya se dijo, sólo sirve para definir las oscilaciones de la carga piezométrica en una sección del conducto adyacente al órgano de control; no obstante, en cualquier sección se pueden calcular dichas oscilaciones mediante las ecuaciones de Angus.

En efecto, si se recurre a la ecuación (3.24a) y se despeja el valor $-\frac{a}{g}(V - V_0)$ resulta:

$$-\frac{a}{g}(V - V_0) = F\left(t + \frac{x}{a}\right) - f\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Si se suma miembro a miembro esta última ecuación con la ecuación (3.24), se obtiene:

$$H - H_0 - \frac{a}{g}(V - V_0) = 2F\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (3.53)$$

y si se resta de la misma ecuación permite escribir:

$$H - H_0 + \frac{a}{g}(V - V_0) = 2f\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (3.54)$$

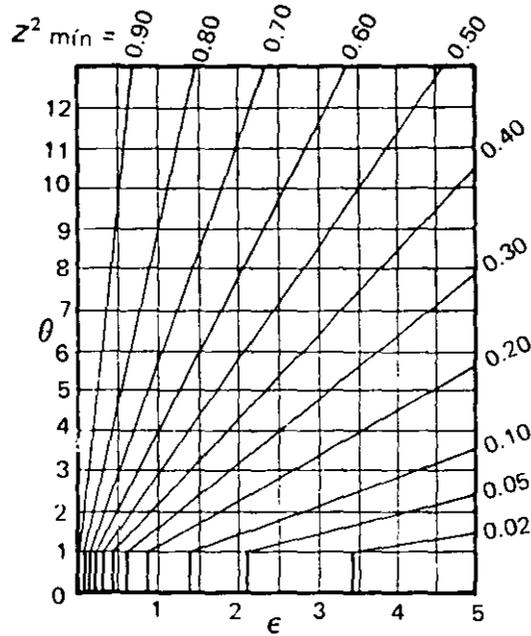
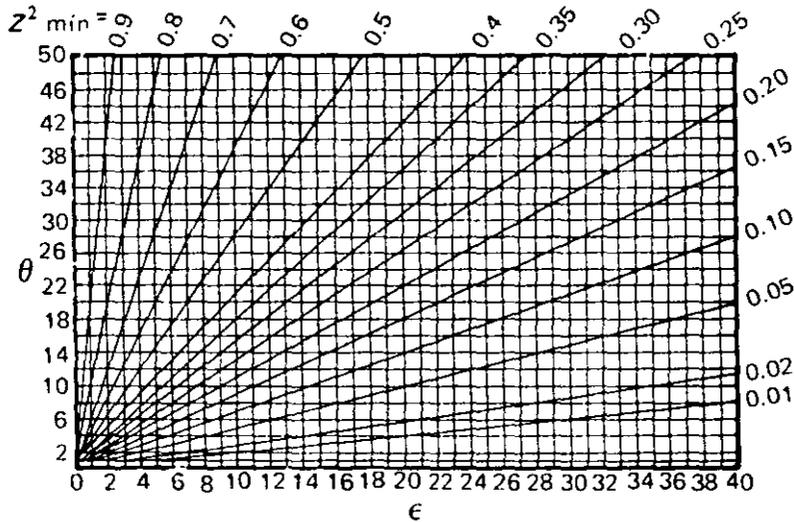
a) Valores θ y ϵ pequeñosb) Valores θ y ϵ grandes

Figura 3.18 Carga piezométrica mínima.

Las dos últimas ecuaciones son de carácter completamente general y por tanto son válidas para cualquier sección del conducto; así, por ejemplo, si se aplica la ecuación (3.53) en las secciones de coordenadas x_2 y x_1 para los instantes t_1 y t_2 respectivamente (figura 3.19), se tendrá que:

$$H(x_2, t_1) - H_0 - \frac{a}{g} [V(x_2, t_1) - V_0] = 2F\left(t_1 + \frac{x_2}{a}\right) \quad (3.55)$$

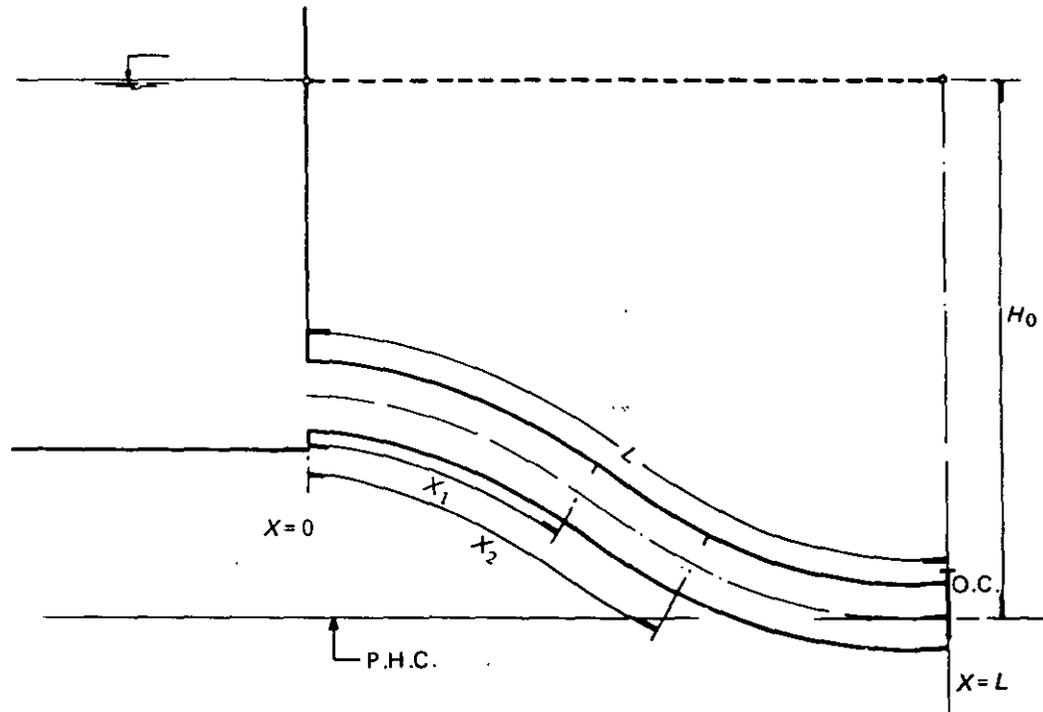


Figura 3.19

y

$$H(x_1, t_2) - H_0 - \frac{a}{g} [V(x_1, t_2) - V_0] = 2F\left(t_2 + \frac{x_1}{a}\right) \quad (3.55a)$$

Para poder igualar las ecuaciones anteriores es necesario que F adopte el mismo valor en las secciones consideradas y para que esto suceda los argumentos deben ser iguales, es decir:

$$t_1 + \frac{x_2}{a} = t_2 + \frac{x_1}{a}$$

o bien

$$\frac{t_1}{T} + \frac{x_2}{aT} = \frac{t_2}{T} + \frac{x_1}{aT}$$

Si los instantes t_1 y t_2 se eligen de tal manera que sean múltiplos del período T , de modo que $t_1 = hT$ y $t_2 = iT$ y se recuerda que $aT = 2L$, de la expresión anterior se deduce que:

$$h = i - \frac{x_2 - x_1}{2L} \quad (3.56)$$

Al igualar las ecuaciones (3.55) y (3.55a) y denotar los instantes t_1 y t_2 por sus equivalentes adimensionales h e i , se puede escribir:

$$H(x_2, h) - H(x_1, i) = \frac{a}{g} [V(x_2, h) - V(x_1, i)] \quad (3.57)$$

Aplicando la ecuación (3.54) a las mismas secciones x_1 y x_2 para los instantes $t_1 = iT$ y $t_2 = jT$, un razonamiento semejante al anterior conduce a:

$$H(x_2, j) - H(x_1, i) = \frac{a}{g} [V(x_1, i) - V(x_2, j)] \quad (3.58)$$

donde

$$j = i + \frac{x_2 - x_1}{2L} \quad (3.59)$$

A las ecuaciones (3.57) y (3.58) se les conoce como *Ecuaciones Conjugadas del Golpe de Ariete* o *Ecuaciones de Angus*, y permiten el cálculo de la carga piezométrica en una sección de coordenada x_1 para el instante i , si se conoce el valor de la velocidad en esta sección para el mismo instante y los de la carga y velocidad en otra sección x_2 para los instantes h y j .

No obstante, es posible simplificar el problema planteado en el párrafo anterior si se elimina el valor de la velocidad en la sección x_1 sumando miembro a miembro las ecuaciones mencionadas, lo que da como resultado la siguiente ecuación:

$$H(x_2, h) + H(x_2, j) - 2H(x_1, i) = \frac{a}{g} [V(x_2, h) - V(x_2, j)] \quad (3.60)$$

En el caso común es posible conocer la variación de la carga y velocidad en el órgano de control a partir de las ecuaciones de Allievi, por lo que si en las ecuaciones (3.56), (3.59) y (3.60) se hace $x_2 = L$, $x_1 = x$, se denotan las cargas y velocidades en el órgano como $H(L, h) = H_h$, $H(L, j) = H_j$, $V(L, h) = V_h$, $V(L, j) = V_j$, y se despeja el valor $H(x, i)$ resulta:

$$H(x, i) = \frac{1}{2} [H_h + H_j - \frac{a}{g} (V_h - V_j)] \quad (3.61)$$

y

$$h = i - \frac{L - x}{2L} \quad (3.62)$$

$$j = i + \frac{L - x}{2L} \quad (3.63)$$

o bien, tomando en cuenta la ecuación (3.37), recordando que $Z_i^2 = \frac{H_i}{H_0}$, y $2\epsilon = \frac{aV_0}{gH_0}$, la ecuación (3.61) se puede escribir como:

$$\boxed{Z^2(x, i) = \frac{1}{2} [Z_h^2 + Z_j^2 - 2\epsilon (\eta_h Z_h - \eta_j Z_j)]} \quad (3.64)$$

donde

$$Z^2(x, i) = \frac{H(x, i)}{H_0}$$

3.13.2 Golpe de ariete en maniobras rápidas

De acuerdo con lo indicado en la sección 3.11, cuando en el órgano de control se lleva a cabo una maniobra en un tiempo $\tau \leq T$, el valor de la carga piezométrica extrema en el órgano de control, es independiente tanto de τ como de la ley con la que se efectúe la maniobra.

Ahora bien, si se recuerda que $\theta = \frac{\tau}{T}$, como $\theta \leq 1$ para este caso particular de maniobra, si en la ecuación (3.64) se hace que $h = \theta$ y $j = 1$, se tendrá que $Z_h^2 = Z_j^2 = Z_m^2$ y $\eta_h Z_h = \eta_j Z_j$, y en estas condiciones, para una determinada sección $x = x_m$ del conducto se cumplirá que:

$$Z^2(x_m, i) = Z_m^2 \quad (3.65)$$

además, como $\theta < i \leq 1$, en el órgano de control ($x = L$) resulta:

$$Z_i^2 = Z_m^2 \quad (3.65a)$$

y de acuerdo con estas dos últimas ecuaciones se puede escribir:

$$Z^2(x, i) = Z_m^2, \quad x_m \leq x \leq L \quad (3.66)$$

Por otra parte, si se resta la ecuación (3.62) de la (3.63) y se sustituyen los valores de $h = \theta$ y $j = 1$, se obtiene:

$$x_m = \theta L, \quad \theta \leq 1 \quad (3.67)$$

Si se suman las mismas ecuaciones se tiene como resultado;

$$i = \frac{1 + \theta}{2} \quad (3.67a)$$

Tomando en cuenta lo anterior, y como $Z^2(0, i) = 1$ para $\theta > 0$, se puede afirmar que la carga que se presenta en el órgano de control se propagará hasta una determinada sección $x = x_m$, en la cual existirá un punto de discontinuidad en la línea de cargas en el instante dado por la ecuación (3.67a) y el valor de esta coordenada dependerá del que adquiera el parámetro θ ; así cuando $\theta = 0$ (maniobra instantánea), el valor de la carga que se origina en el órgano

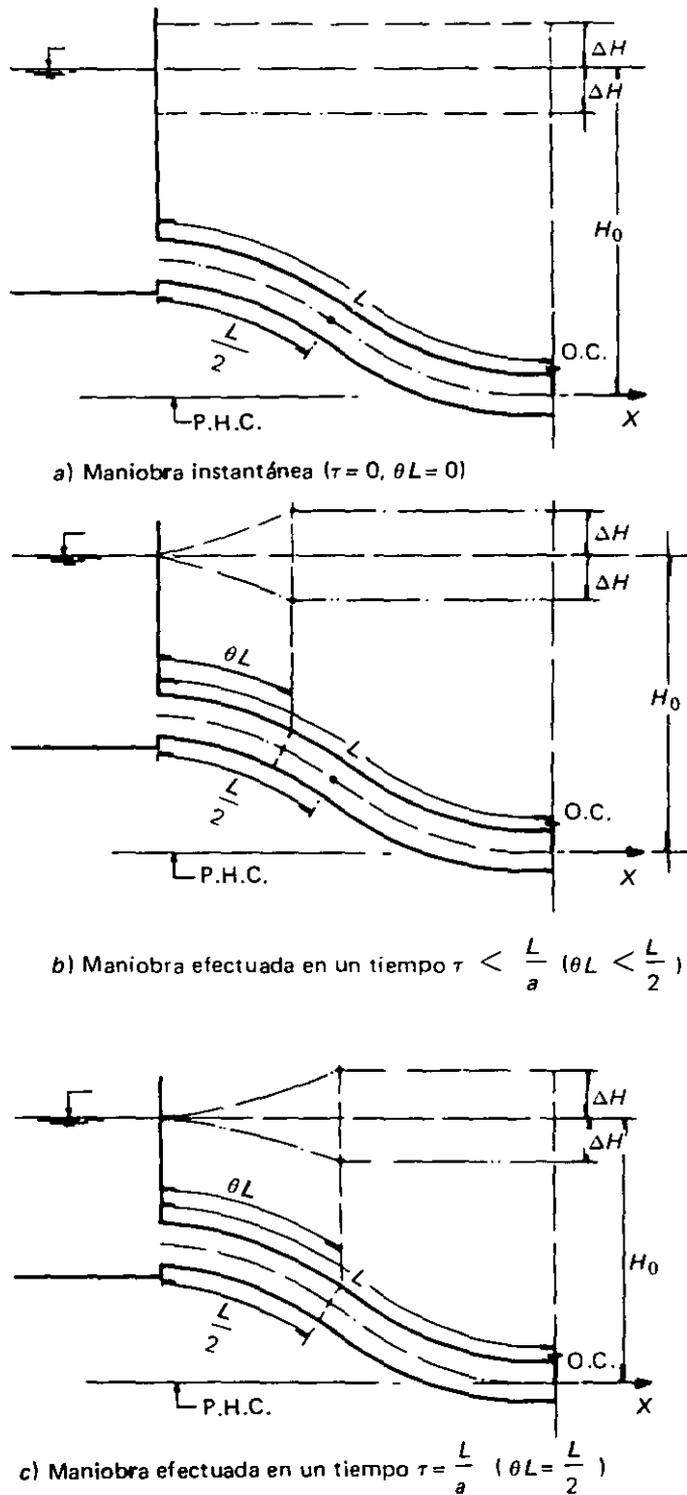
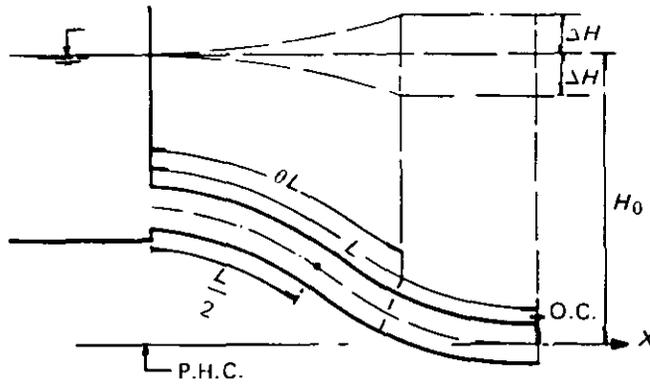
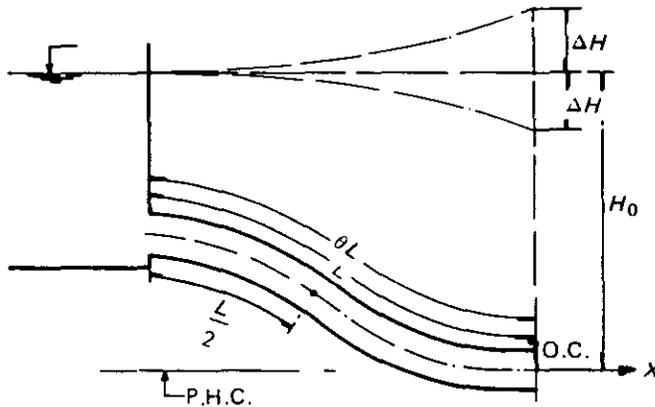


Figura 3.20 Variación de la carga piezométrica en un conducto para maniobras bruscas en el órgano de control.

será el mismo en todo el conducto (figura 3.20a) y si $\theta = 1$ dicho valor disminuirá en forma continua desde el primero hasta el depósito (figura 3.20e).



d) Maniobra efectuada en un tiempo $\frac{L}{a} < \tau < \frac{2L}{a}$ ($\frac{L}{2} < \theta L < L$)



e) Maniobra efectuada en un tiempo $\tau = \frac{2L}{a}$ ($\theta L = L$)

Carga piezométrica para una maniobra de cierre _____

Carga piezométrica para una maniobra de apertura _____

Órgano de control _____ O.C.

$$\theta = \frac{\tau}{T} \quad T = \frac{2L}{a}$$

Figura 3.20 Variación de la carga piezométrica en un conducto para maniobras bruscas en el órgano de control (continuación).

3.13.3 Golpe de ariete en maniobras lentas

Para poder conocer la variación de la carga adimensional $Z^2(x)$ con respecto al tiempo en una sección x del conducto, cuando la maniobra en el órgano de control es lenta, es necesario conocer previamente dicha variación en este último y aplicar posteriormente la ecuación (3.64) para los instantes:

$i = -\frac{L-x}{2L}, 0.00, \frac{L-x}{2L}, 0.250 - \frac{L-x}{2L}, 0.250, 0.250 + \frac{L-x}{2L}, 0.500 - \frac{L-x}{2L}, 0.500, 0.500 + \frac{L-x}{2L}, \dots, n - \frac{L-x}{2L}, n, n + \frac{L-x}{2L}$, donde $n \leq \theta + 2$ y el orden progresivo de los instantes dependerá del valor de x .

Sin embargo, generalmente sólo resulta de interés el conocimiento de las cargas adimensionales extremas en una o varias secciones del conducto. Así, por ejemplo, si se conocen las primeras en las secciones $x = 0, \frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}$ y L , es posible trazar envolventes y obtener de éstas los valores en otra sección x diferente a las que se indican, o bien, efectuando una interpolación lineal o una parabólica entre los valores correspondientes a las secciones más próximas a esta última.

Por otra parte, el valor de las cargas mencionadas en el párrafo anterior puede estar asociado a la onda directa que parte del órgano de control con dirección al depósito en el instante en que se presenta en el primero una de las cargas, o bien, a la onda reflejada que se origina en el depósito y viaja hacia el órgano, al que llega en el instante correspondiente al de una carga extrema.

De acuerdo con lo anterior, si para el primer caso se considera que la onda directa asociada a la carga extrema Z_d^2 , que se presenta en el órgano en el instante i_d , llega a una sección x del conducto cuando $i = i_d + \frac{L-x}{2L}$, este valor sustituido en las ecuaciones (3.62) y (3.63), permite escribir:

$$h = i_d \quad (3.68)$$

$$j = i_d + \frac{L-x}{L} \quad (3.69)$$

Si se suman miembro a miembro las ecuaciones (3.62) y (3.63), se despeja el valor de i y se toman en cuenta las dos últimas ecuaciones deducidas resulta:

$$i = i_d + \frac{L-x}{2L} \quad (3.70)$$

y de la ecuación (3.64), con $Z_h^2 = Z_d^2$ se obtiene:

$$Z_d^2(x, i) = \frac{1}{2} [Z_d^2 + Z_j^2 - 2\epsilon(\eta_h Z_h - \eta_j Z_j)] \quad (3.71)$$

En cuanto al segundo caso, la onda reflejada asociada a la carga extrema Z_r^2 que parte del depósito en el instante $i = i_r - \frac{1}{2}$, pasará por una sección x del conducto cuando $i = i_r - \frac{L-x}{2L}$, valor que con un razonamiento análogo al

realizado para la onda directa y haciendo $Z_j^2 = Z_r^2$, conduce a las siguientes expresiones:

$$h = i_r - \frac{L-x}{L} \quad (3.72)$$

$$j = i_r \quad (3.73)$$

$$i = i_r - \frac{L-x}{2L} \quad (3.74)$$

$$Z_r^2(x, i) = \frac{1}{2} [Z_h^2 + Z_r^2 - 2\epsilon (\eta_h Z_h - \eta_j Z_j)] \quad (3.75)$$

Ahora bien, si en las ecuaciones (3.69) y (3.72) se sustituyen los valores de $x = \frac{L}{4}, \frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$, se obtiene que $j = i_d + 0.750, i_d + 0.500, i_d + 0.250$ y $h = i_r - 0.750, i_r - 0.500$ e $i_r - 0.250$ respectivamente, lo cual permite deducir que al efectuar el cálculo de la variación de cargas en el órgano de control mediante la aplicación de la ecuación (3.51), desde $i = 0.000$ hasta $i \leq \theta + 2$ con un incremento de tiempo entre dos instantes sucesivos igual a 0.250 ($\Delta t = \frac{T}{4}$ seg), es posible determinar las magnitudes de Z_r^2 y Z_d^2 en las secciones citadas de acuerdo con el siguiente procedimiento:

1. Después de realizar el cálculo hidráulico en el órgano de control, el instante i_m en el cual se presenta la carga extrema Z_m^2 , máxima o mínima, se designa como i_d y se sustituye en las expresiones $h = i_d$ y $j = i_d + \frac{L-x}{L}$.
2. Conocidos los valores de h y j , se encuentran los de $Z_j^2, 2\epsilon\eta_j Z_j, Z_d^2$ y $2\epsilon\eta_h Z_h$, con $Z_d^2 = Z_m^2$ y se sustituyen en la ecuación (3.71), obteniéndose así la carga $Z_d^2(x, i)$, donde $i = i_d + \frac{L-x}{2L}$.
3. Se repite el paso No. 1, haciendo $i_m = i_r$ en las expresiones $j = i_r$ y $h = i_r - \frac{L-x}{L}$.
4. Se encuentran los valores de $Z_h^2, 2\epsilon\eta_h Z_h, Z_r^2$ y $2\epsilon\eta_j Z_j$, con $Z_r^2 = Z_m^2$ y se sustituyen en la ecuación (3.75), que da como resultado la carga $Z_r^2(x, i)$, donde $i = i_r - \frac{L-x}{2L}$.
5. Si la carga extrema en el órgano de control es máxima, la correspondiente a cada sección en estudio será la que resulte mayor al comparar $Z_d^2(x, i)$ y $Z_r^2(x, i)$, y en caso contrario será la menor.

Es necesario señalar que el método de cálculo anteriormente descrito es de carácter completamente general, y aunque en algunos casos es relativa-

mente fácil identificar el tipo de onda al que está asociado un determinado valor extremo de la carga. se recomienda aplicarlo por su sencillez y con el fin de evitar algún error.

3.14 ANÁLISIS APROXIMADO DE CONDUCTOS CON CARACTERÍSTICAS VARIABLES

Hasta ahora, se han considerado conductos con diámetro, espesor y propiedades elásticas constantes, pero existen casos en los que el conducto varía sus características geométricas y/o elásticas a lo largo de su desarrollo (figura 3.21), y en estas condiciones se pueden aplicar los métodos antes expuestos para determinar la magnitud de la carga piezométrica en cualquier sección del conducto partiendo de algunas hipótesis simplificadoras mediante las que se substituye el conducto real por otro equivalente, cuyas propiedades dependerán de la teoría que se elija para cuantificar los efectos del golpe de ariete.

3.14.1 Conducto equivalente según la teoría de la columna rígida

El análisis de un conducto con características geométricas variables, en base a la teoría de la columna rígida, se lleva a cabo partiendo de la hipótesis de que la energía cinética del agua para el flujo permanente es la misma en los conductos real y equivalente.

De acuerdo con lo anterior, la energía cinética para el conducto real E_r se puede expresar como:

$$E_r = \frac{\gamma}{2g} (L_1 A_1 V_1^2 + L_2 A_2 V_2^2 + \dots + L_n A_n V_n^2) \quad (3.76)$$

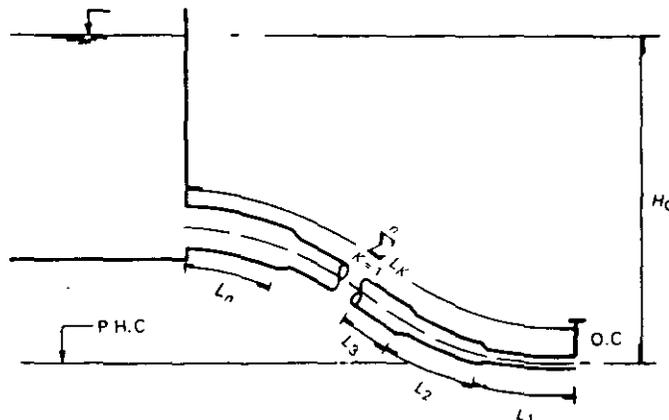


Figura 3.21

y para el conducto equivalente en términos de la energía cinética del primer tramo (figura 3.21):

$$E_c = \frac{\gamma}{2g} L_e A_1 V_1^2 \quad (3.77)$$

donde L_e es la longitud equivalente.

Al igualar las dos últimas ecuaciones, recordando que por continuidad $\frac{V_n}{V_1} = \frac{A_1}{A_n}$, y después de efectuar operaciones resulta:

$$L_e = L_1 + A_1 \sum_{k=2}^n \frac{L_k}{A_k} \quad (3.78)$$

luego, para obtener el valor de la carga piezométrica mediante las ecuaciones (3.10a) o (3.10b), o bien de la gráfica 3.1, el valor de la longitud L que aparece en el parámetro K_r , deberá ser sustituido por el de la ecuación (3.78).

3.14.2 Conducto equivalente según la teoría de la columna elástica

En este caso, además de la hipótesis referente a la energía cinética antes considerada, se supone que el tiempo de traslación de la onda de presión para el flujo transitorio es el mismo para los conductos real y equivalente.

Para el conducto equivalente la energía cinética E_c puede expresarse como:

$$E_c = \frac{\gamma}{2g} (L_1 A_1 + L_2 A_2 + \dots + L_n A_n) V_e^2 \quad (3.79)$$

donde V_e es la velocidad equivalente.

Si se igualan las ecuaciones (3.76) y (3.79), se recuerda que $Q = A_n V_n$ y se despeja el valor de V_e , se obtiene:

$$V_e = \sqrt{\frac{Q \sum_{k=1}^n L_k V_k}{\sum_{k=1}^n L_k A_k}} \quad (3.80)$$

Por otra parte, de acuerdo con la hipótesis referente al tiempo de traslación se puede escribir:

$$\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2} + \dots + \frac{L_n}{a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n L_k}{a_e}$$

o bien

$$a_e = \frac{\sum_{k=1}^n L_k}{\sum_{k=1}^n \frac{L_k}{a_k}} \quad (3.81)$$

siendo a_e la celeridad de onda en el conducto equivalente.

Una vez obtenidos los valores de V_e y a_e se puede definir el parámetro $2\epsilon'$ como:

$$2\epsilon' = \frac{a_e V_e}{gH_0} \quad (3.82)$$

y un valor del periodo equivalente:

$$T_e = \frac{2 \sum_{k=1}^n L_k}{a_e} \quad (3.83)$$

que permiten el análisis de este último conducto mediante las ecuaciones de Allievi y Angus, o bien, con las cartas elaboradas por el primero.

Sin embargo, es necesario señalar que los resultados obtenidos con los parámetros antes deducidos son aproximados y distarán más de los verdaderos conforme aumente el número de características diferentes en el conducto.

3.15 CAVITACIÓN Y SEPARACIÓN DE COLUMNA EN CONDUCTOS

Cuando en el perfil de un conducto existen puntos altos como el A de la figura 3.22, los gases y aire disueltos en el agua que contiene el primero forman burbujas que se acumulan en dichos puntos, donde además la carga de presión frecuentemente tiene un valor reducido y las líneas de corriente tienden a separarse de la pared superior del conducto, aunque en esta zona para condiciones normales de operación exista flujo turbulento y una carga de presión superior a la de vaporización del agua.

Ahora bien, cuando por efecto de alguna de las maniobras en el órgano de control descritas en secciones anteriores, se presenta el fenómeno de golpe de ariete y el gradiente hidráulico resultante es tal que la carga de presión en el punto A resulta ser menor o igual que la de vaporización P_v , tendrá lugar el fenómeno de cavitación visto en la sección 2.4. Si además, el tamaño de las cavidades o burbujas de vapor permite abarcar la totalidad de la sección del conducto, se presentará otro fenómeno que se conoce como *separación de columna de agua* (figura 3.22), originando que una zona del conducto situada en la vecindad de dicho punto sea ocupada por vapor y que se formen dos columnas de agua en la frontera de la misma que se vuelven a unir en forma

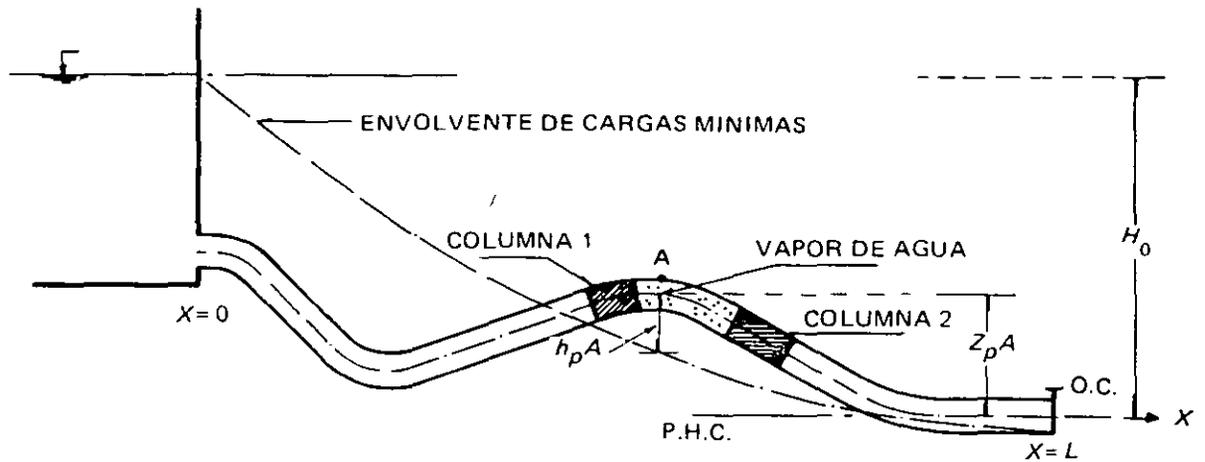


Figura 3.22 Cavitación y separación de columna en un conducto por gravedad.

violenta cuando la presión es superior a P_v , lo cual provocará que se generen cargas de presión muy grandes que pueden dañar seriamente al conducto.

Es necesario señalar que el fenómeno de cavitación puede presentarse en cualquier sección del conducto, tal como la correspondiente al órgano de control, siempre que la presión sea lo suficientemente reducida, y no necesariamente tendrá lugar el de separación de columna de acuerdo con lo explicado en relación al tamaño de las cavidades de vapor.

Por otra parte, ante la presencia de estos fenómenos ya no resultan válidas las ecuaciones para obtener las presiones extremas que se indicaron anteriormente y sólo puede detectarse la posibilidad de su existencia de los resultados del cálculo del golpe de ariete, que necesariamente debe efectuarse cuando se lleve a cabo el proyecto para un conducto, y con esto se podrán tomar las medidas necesarias para evitar dichos fenómenos durante la operación del mismo.*

3.16 EJEMPLOS

Ejemplo 3.1

Si en la válvula situada en el extremo aguas abajo del conducto de asbesto cemento que se muestra en la figura E3.1 se lleva a cabo una maniobra de cierre lineal total a partir de un grado de apertura total, calcular:

- La carga de presión máxima en la válvula y las secciones $x = \frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$, de acuerdo con la teoría de la columna rígida, para un tiempo de cierre $\tau = 16$ seg.
- La carga de presión máxima y mínima en la válvula, efectuando un desarrollo en cadenas de Allievi y en las secciones $x = \frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$, de

* Ver referencia 3.

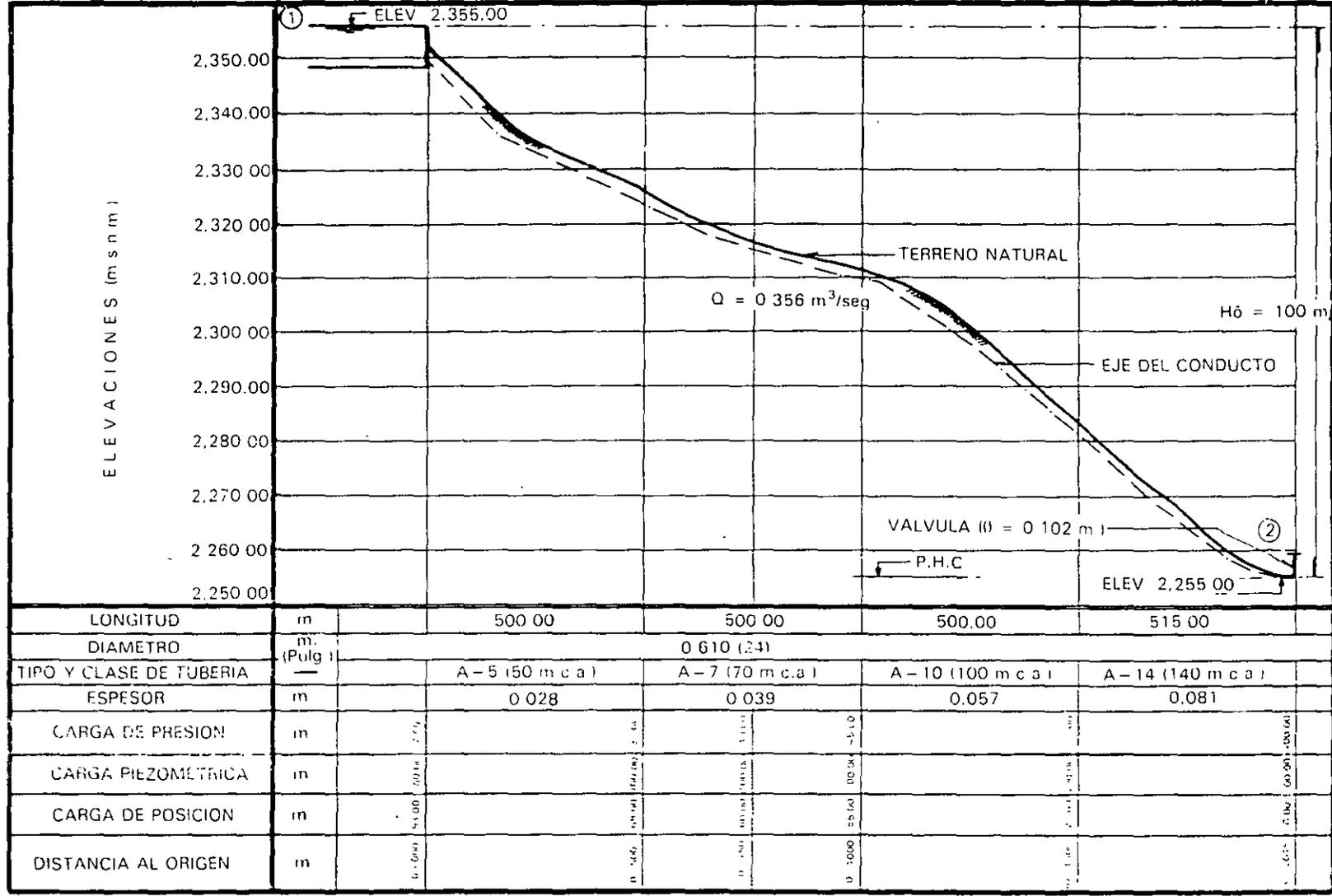


Figura E3.1

acuerdo con las ecuaciones de Angus, para un tiempo de cierre $\tau = 3.96 Te$.

c) La carga de presión máxima en la válvula mediante el uso de las cartas de Allievi.

Solución

a) De acuerdo con la ecuación (3.10a) se tiene:

$$(\Delta H_r)_{\text{máx}} = \left[\frac{K_r}{2} + \sqrt{K_r + \frac{K_r^2}{4}} \right] H_0$$

con $K_r = \left(\frac{L \Delta V_r}{g H_0 \tau} \right)^2$, y de la ecuación (3.78), $L = Le$ ya que $A_k = A_1$.

$$V_r = V_o - V_f; V_o = \frac{0.356}{(0.785)(0.610)^2} = 1.218 \text{ m/seg}, V_f = 0 \therefore \Delta V_r = 1.218 \text{ m/seg}, K_r = \left(\frac{(2,015)(1.218)}{(9.81)(100)(16)} \right)^2 = 0.024$$

$$(\Delta H_r)_{\text{máx}} = \left[\frac{0.024}{2} + \sqrt{0.024 + \frac{(0.024)^2}{4}} \right] 100 = 16.70$$

$$h_{p \text{ máx}} = 100.00 + 16.70 - 0.00 = 116.70 \text{ m}, 117 \text{ m}.$$

Además, de la gráfica 3.1, con $\frac{L \Delta V_r}{g H_0 \tau} = 0.156$ se obtiene que $\frac{\Delta H_r}{H_0} = 0.17 \therefore (\Delta H_r)_{\text{máx}} = 17.00 \text{ m}$.

Por otra parte, como la variación de presiones a lo largo del eje del conducto, de acuerdo con esta teoría, es lineal, para cualquier sección x se deduce que:

$$(\Delta H_r)_{\text{máx}}(x) = \frac{x}{L} (\Delta H_r)_{\text{máx}}$$

donde $(\Delta H_r)_{\text{máx}}(x)$ es el incremento máximo de la carga piezométrica en la sección x , así:

para $x = \frac{L}{4}$:

$$(\Delta H_r)_{\text{máx}} \left(\frac{L}{4} \right) = (0.25) (16.70) = 4.18 \text{ m};$$

$$h_{p \text{ máx}} \left(\frac{L}{4} \right) = 100.00 + 4.18 - 68.00 = 36.18 \text{ m}, 36 \text{ m}.$$

para $x = \frac{L}{2}$:

$$(\Delta H_r)_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \left(\frac{L}{2}\right) = (0.50) (16.70) = 8.35 \text{ m};$$

$$h_{p \text{ m}\acute{\text{a}}\text{x}} \left(\frac{L}{2}\right) = 100.00 + 8.35 - 55.00 = 53.35 \text{ m}, 53 \text{ m}.$$

para $x = \frac{3L}{4}$

$$(\Delta H_r)_{\text{m}\acute{\text{a}}\text{x}} \left(\frac{3L}{4}\right) = (0.75) (16.70) = 12.53 \text{ m};$$

$$h_{p \text{ m}\acute{\text{a}}\text{x}} \left(\frac{3L}{4}\right) = 100.00 + 12.53 - 27.00 = 85.53 \text{ m}, 85 \text{ m}.$$

b)

b.1) Cálculo del conducto equivalente según la teoría de la columna elástica.

De acuerdo con la ecuación (3.80), considerando que el diámetro del conducto es constante se tendrá:

$$V_e = V_o = 1.218 \text{ m/seg.}$$

Por lo que se refiere a la celeridad equivalente, de acuerdo con los espesores que se indican en la figura E3.1 se deduce que con excepción del tramo de tubería con clase A-14, los restantes son de pared delgada, por lo que según la ecuación (3.42) se obtiene lo siguiente:

para el tramo con clase A-5:

$$a = \frac{1,482}{\frac{\sqrt{1 + \frac{(0.0910)(0.610)}{0.028}}}{0.028}} = 858 \text{ m/seg.}$$

para el tramo con clase A-7:

$$a = \frac{1,482}{\frac{\sqrt{1 + \frac{(0.0910)(0.610)}{0.039}}}{0.039}} = 952 \text{ m/seg.}$$

para el tramo con clase A-10:

$$a = \frac{1,482}{\frac{\sqrt{1 + \frac{(0.0910)(0.610)}{0.057}}}{0.057}} = 1,055 \text{ m/seg.}$$

para el tramo con clase A-14, de acuerdo con la ecuación (3.43):

$$a = \frac{1,482}{\sqrt{1 + \frac{4.48 \times 10^8}{2.45 \times 10^9} \left[\frac{0.149 + 0.093}{0.149 - 0.093} \right]}} = 1,108 \text{ m/seg.}$$

luego, de la ecuación (3.81):

$$a_e = \frac{2,015}{500 \left[\frac{1}{858} + \frac{1}{952} + \frac{1}{1,055} \right] + \frac{515}{1,108}} = 984 \text{ m/seg.}$$

y de las ecuaciones (3.82) y (3.83)

$$2\epsilon = \frac{(984)(1.218)}{(9.81)(100.00)} = 1.222$$

$$Te = \frac{(2)(2,015)}{984} = 4.10 \text{ seg.}$$

b.2) Desarrollo en cadenas de Allievi:

de la ecuación (3.39) con $\eta_f = 0$

$$\eta_i = 1 - \frac{i}{\theta}; \theta = \frac{\tau}{Te} = \frac{3.96 Te}{Te} = 3.96 \therefore \eta_i = 1 - \frac{i}{3.96} \quad (\text{ecuación 1})$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.51), ésta se puede escribir como:

$$Z_i^2 = \left[\sqrt{b^2 + c} - b \right]^2 \quad (\text{ecuación 2})$$

donde

$$b = \epsilon \eta_i = 0.611 \eta_i$$

$$c = 2\epsilon \eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2 = 1.222 \eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2$$

La solución de las ecuaciones (1) y (2) se puede llevar a cabo en forma tabular como se indica en la página siguiente.

Así, por ejemplo, para el instante $i = 0.250$ (columna 1), se tendrá: $\eta_i = 0.937$, $\eta_{i-1} = 1.00$ (columna 2), $Z_{i-1} = 1.00$ (columna 6), ya que $i - 1 = 0.250 - 1.00 = -0.750$, y para $i \leq 0$ $Z_i = \eta_i = 1.000$.

$$b = (0.611)(0.937) = 0.573 \quad (\text{columna 3})$$

$$c = (1.222)(1.00)(1.00) - 1.00 + 2 = 2.222 \quad (\text{columna 5})$$

$$Z_i^2 = \left[\sqrt{(0.573)^2 + 2.222} - 0.573 \right]^2 = 1.048 \quad (\text{columna 7})$$

$$Z_i = \sqrt{1.048} = 1.024 \quad (\text{columna 6})$$

para $i = 1.250$

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
i	η_i	b	b^2	c	Z_i	Z_i^2	$2\epsilon\eta_i Z_i$
≤ 0	1.000	0.611	0.373	2.222	1.000	1.000	1.222
0.250	0.937	0.573	0.328	2.222	1.024	1.048	1.172
0.500	0.874	0.534	0.285	2.222	1.049	1.101	1.121
0.750	0.811	0.496	0.246	2.222	1.075	1.156	1.066
1.000	0.747	0.456	0.208	2.222	1.103	1.216	1.007
1.250	0.684	0.418	0.175	2.124	1.098	1.206	0.918
1.500	0.621	0.379	0.144	2.020	1.092	1.192	0.829
1.750	0.558	0.341	0.116	1.910	1.082	1.171	0.738
2.000	0.495	0.302	0.091	1.791	1.070	1.145	0.648
2.250	0.432	0.264	0.070	1.712	1.071	1.147	0.566
2.500	0.369	0.225	0.051	1.637	1.074	1.154	0.484
2.750	0.306	0.187	0.035	1.567	1.079	1.164	0.403
3.000	0.242	0.148	0.022	1.503	1.087	1.180	0.321
3.250	0.179	0.109	0.012	1.419	1.087	1.181	0.238
3.500	0.116	0.071	0.005	1.330	1.084	1.176	0.154
3.750	0.053	0.032	0.001	1.239	1.082	1.170	0.070
4.000	0.000	0.000	0.000	1.141	1.068	1.141	0.000
4.250	0.000	0.000	0.000	1.057	---	1.057	0.000
4.500	0.000	0.000	0.000	0.978	---	0.978	0.000
4.750	0.000	0.000	0.000	0.900	---	0.900	0.000
5.000	0.000	0.000	0.000	0.859	---	0.859	0.000
5.250	0.000	0.000	0.000	0.943	---	0.943	0.000
5.500	0.000	0.000	0.000	1.022	---	1.022	0.000
5.750	0.000	0.000	0.000	1.100	---	1.100	0.000
6.000	0.000	0.000	0.000	1.141	---	1.141	0.000

$$\eta_i = 0.684, \eta_{i-1} = 0.937, Z_{i-1} = 1.024$$

$$b = (0.611)(0.684) = 0.418$$

$$c = (1.222)(0.937)(1.024) - 1.048 + 2 = 2.124$$

$$Z_i^2 = [\sqrt{(0.418)^2 + 2.124} - 0.418]^2 = 1.206$$

$$Z_i = \sqrt{1.206} = 1.098$$

para $i = 4.250$

$$\eta_i = 0.000, \eta_{i-1} = 0.179, Z_{i-1} = 1.087$$

$$b = 0.000$$

$$c = (1.222)(0.179)(1.087) - 1.181 + 2 = 1.057$$

$$Z_i^2 = c = 1.057$$

etc.

Como puede observarse en la tabla de cálculo, el valor máximo de Z^2 se presenta en el instante $i = 1.000$ y su valor es $Z_{\text{máx}}^2 = 1.216$, por lo que la carga piezométrica máxima en la válvula es $H_{\text{máx}} = (1.216)(100) = 121.60$ m y la carga de presión máxima $hp_{\text{máx}} = H_{\text{máx}} - Z_p$, $hp_{\text{máx}} = 121.60 - 0.00 = 121.60$ m.

La carga piezométrica mínima se presenta cuando $i = 5.000$ y su valor es $Z_{\text{mín}}^2 = 0.859$, lo cual conduce a $hp_{\text{mín}} = (0.859)(100) = 85.90$ m.

Es necesario señalar que si solamente se hubiese deseado conocer el valor de la carga de presión máxima, sólo habría sido necesario efectuar el cálculo hasta el instante $i = 1.000$, partiendo de $i = 0.000$ con $\Delta i = 0.25$.

b.3) De acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 3.13.3, de los pasos 1 y 2, resulta la siguiente tabla:

Onda directa								
Carga Extrema	Sección	i_d	i	Z_j^2	$2e\eta_j Z_j$	$Z_d^2 - 2e\eta_h Z_h$	$Z_d^2(x,i)$	i
Máxima	L/4	1.000	1.750	1.171	0.738	0.209	1.059	1.375
	L/2	1.000	1.500	1.192	0.829	0.209	1.115	1.250
	3L/4	1.000	1.250	1.206	0.918	0.209	1.167	1.125
	L	1.000	1.000	1.216	1.007	0.209	1.216	1.000
Mínima	L/4	5.000	5.750	1.100	0.000	0.859	0.980	5.375
	L/2	5.000	5.500	1.022	0.000	0.859	0.941	5.250
	3L/4	5.000	5.250	0.943	0.000	0.859	0.901	5.125
	L	5.000	5.000	0.859	0.000	0.859	0.859	5.000

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)

y de los pasos 3 y 4:

Onda reflejada								
Carga Extrema	Sección	i_r	h	Z_h^2	$-2e\eta_h Z_h$	$Z_r^2 + 2e\eta_j Z_j$	$Z_r^2(x,i)$	i
Máxima	L/4	1.000	0.250	1.048	-1.172	2.223	1.050	0.625
	L/2	1.000	0.500	1.101	-1.121	2.223	1.102	0.750
	3L/4	1.000	0.750	1.156	-1.066	2.223	1.157	0.875
	L	1.000	1.000	1.216	-1.007	2.223	1.216	1.000

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9)

Onda Reflejada								
Carga Extrema	Sección	i_r	h	Z_h^2	$-2\epsilon\eta_h Z_h$	$Z_r^2 - 2\epsilon\eta_j Z_j$	$Z_r^2(x,i)$	i
Mínima	$L/4$	5.000	4.250	1.057	0.000	0.859	0.958	4.625
	$L/2$	5.000	4.500	0.978	0.000	0.859	0.919	4.750
	$3L/4$	5.000	4.750	0.900	0.000	0.859	0.880	4.875
	L	5.000	5.000	0.859	0.000	0.859	0.859	5.000

Así, por ejemplo, para la sección $x = \frac{L}{4}$, por lo que se refiere a la tabla de cálculo para la onda directa del paso 1, para $Z_m^2 = Z_{máx}^2$, resulta:

$$i_d = 1.000 = i_m \quad (\text{columna 3})$$

$$h = i_d = 1.000$$

$$j = i_d + \frac{L-x}{L} = 1.000 + 0.750 = 1.750 \quad (\text{columna 4})$$

y del paso 2:

$Z_j^2 = 1.171$ (columna 5), $2\epsilon\eta_j Z_j = 0.738$ (columna 6), $Z_d^2 = 1.216 = Z_m^2$, $2\epsilon\eta_h Z_h = 1.007$, y de la ecuación (3.71) se obtiene:

$$Z_d^2(x,i) = \frac{1}{2} \left[Z_j^2 + 2\epsilon\eta_j Z_j + (Z_d^2 - 2\epsilon\eta_h Z_h) \right],$$

$$Z_d^2\left(\frac{L}{4}, i\right) = \frac{1}{2} (1.171 + 0.738 + 0.209) = 1.059 \quad (\text{columna 8})$$

$$\left[\text{Columna (8)} = \frac{\text{columna (5)} + \text{columna (6)} + \text{columna (7)}}{2} \right]$$

donde $i = i_d + \frac{L-x}{2L} = 1.000 + 0.375 = 1.375$ (columna 9)

En cuanto a la tabla para la onda reflejada siguiendo el paso 3, para $Z_m^2 = Z_{máx}^2$ conduce a:

$$i_r = 1.000 = i_m \quad (\text{columna 3})$$

$$j = i_r = 1.000$$

$$h = i_r - \frac{L-x}{L} = 1.000 - 0.750 = 0.250 \quad (\text{columna 4})$$

y el paso 4 a:

$$Z_h^2 = 1.048 \text{ (columna 5), } 2\epsilon\eta_h Z_h = 1.172 \quad (\text{columna 6})$$

$Z_r^2 = 1.216 = Z_m^2$, $2\epsilon\eta_j Z_j = 1.007$, luego de la ecuación (3.75):

$$Z_r^2(x, i) = \frac{1}{2} [Z_h^2 - 2 \epsilon\eta_h Z_h + (Z_r^2 + 2\epsilon\eta_j Z_j)],$$

$$Z_r^2\left(\frac{L}{4}, i\right) = \frac{1}{2} (1.048 - 1.172 + 2.223) = 1.050 \quad (\text{columna 8})$$

$$\left[\text{Columna (8)} = \frac{\text{columna (5)} + \text{columna (6)} + \text{columna (7)}}{2} \right]$$

$$\text{con } i = i_r - \frac{L-x}{2L} = 1.000 - 0.375 = 0.625 \quad (\text{columna 9})$$

Finalmente, de acuerdo con el paso 5, si se examinan las dos tablas anteriores se puede elaborar la siguiente:

Sección	$Z^2_{\text{máx}}$	$Z^2_{\text{mín}}$	$H_{\text{máx}}$ (m)	$H_{\text{mín}}$ (m)	Z_ρ (m)	$hp_{\text{máx}}$ (m)	$hp_{\text{mín}}$ (m)
$L/4$	1.059	0.958	106	96	68	38	28
$L/2$	1.115	0.919	112	92	55	57	37
$3L/4$	1.167	0.880	117	88	27	90	61
L	1.216	0.859	122	86	0	122	86

En la figura E3.1a puede observarse la evolución en tiempo de la carga Z^2 en la sección $x = L$ y en la figura E3.1b las envolventes de las cargas extremas.

- c) De la figura 3.15 con $\theta = 3.96$ y $\epsilon = 0.611$, resulta $Z^2_{\text{máx}} = 1.21$, \therefore
 $hp_{\text{máx}} = (1.21)(100) = 121$ m.

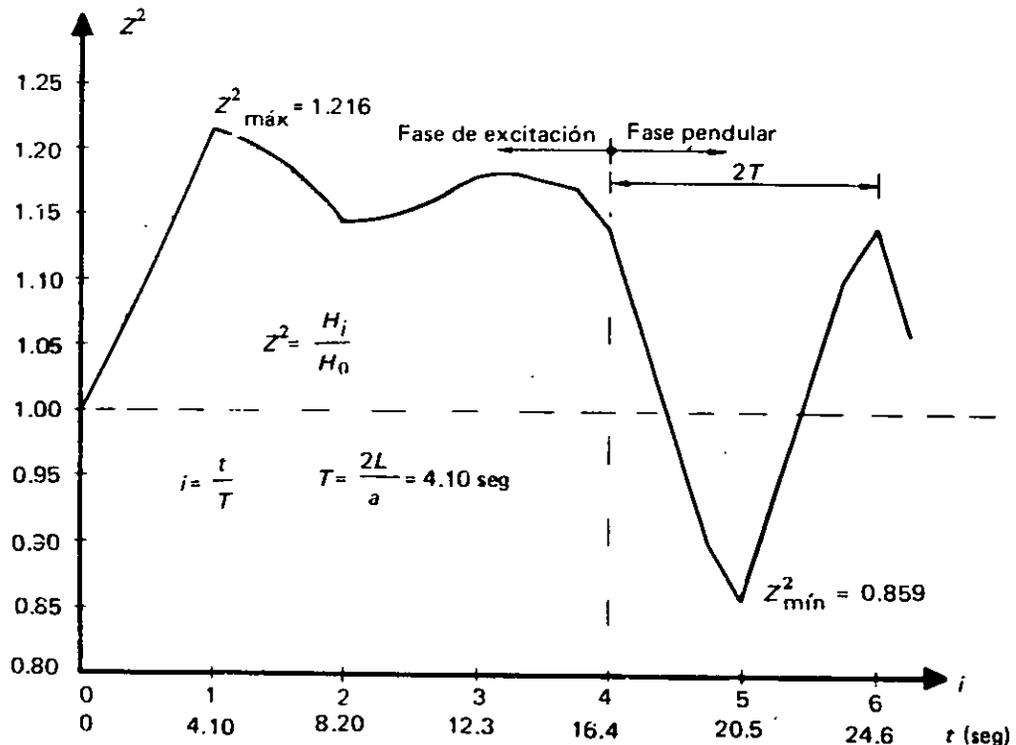


Figura E3-1a

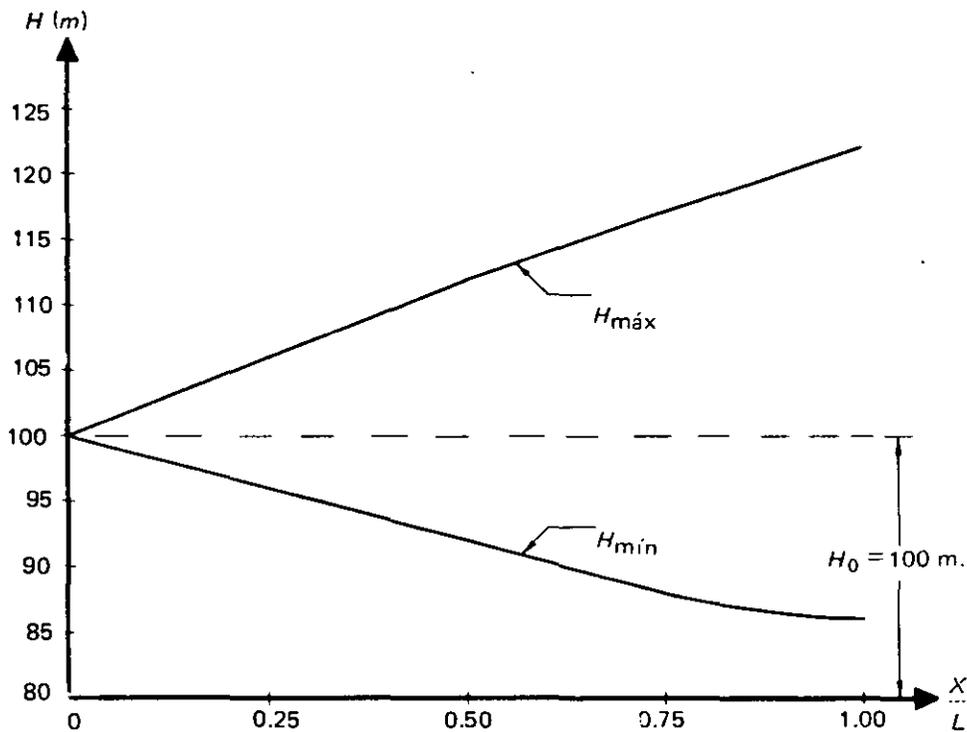


Figura E3-1b

Ejemplo 3.2

Si en el ejemplo anterior, debido a una falla mecánica en la válvula resulta que $\tau = 0.80 T$, determinar:

- La carga de presión máxima en la válvula.
- La coordenada x hasta la cual se propaga la onda de presión máxima y la carga de presión en esta sección.
- Indicar las modificaciones que requiere el conducto en estas condiciones.

Solución

- Como $\tau < T$ se tendrá el caso de una maniobra rápida de cierre en la válvula y en consecuencia de la ecuación (3.49):

$$H_{\text{máx}} = \left(1 + \frac{aV_o}{gH_o}\right) H_o = \left(1 + \frac{(984)(1.218)}{(9.81)(100.00)}\right) (100) = 222.17 \text{ m.}$$

- $x = \theta L; x = \frac{0.80T}{T} (2,015) = 1,612 \text{ m.}$

de la figura E3.1, $Z_p (x = 1,612.00) = 23.00 \text{ m.}$

Luego $hp_{\text{máx}} = 222.17 - 23.00 = 199.17 \text{ m, } 199 \text{ m.}$

- c) Como la carga de presión resultante en la válvula y la sección hasta la cual se propaga la onda es superior a la máxima que se especifica para el conducto se requiere la instalación de un dispositivo de alivio ubicado aguas arriba de la mencionada válvula, mediante el cual se pueda reducir el valor de la carga.

El análisis de estos dispositivos se estudiará en el capítulo 6.

Ejemplo 3.3

Si el gasto en el conducto de acero que se muestra en la figura 3.21 es de $8.50 \text{ m}^3/\text{seg.}$ para condiciones de flujo permanente con la compuerta totalmente abierta, $L_1 = 48 \text{ m}$, $L_2 = L_n = 74 \text{ m}$, $D_1 = 1.83 \text{ m}$, $D_2 = 2.44 \text{ m}$ y $H_o = 28.96 \text{ m}$, determinar la carga máxima de presión en la compuerta, si se lleva a cabo una maniobra de cierre parcial con $\eta_f = 0.50$ y $\tau = 3.00 \text{ seg.}$, de acuerdo con la teoría de la columna rígida.

Solución

De acuerdo con la ecuación (3.78), el conducto equivalente resulta:

$$Le = L_1 + \frac{A_1 L_2}{A_2} = 48.00 + \left(\frac{1.83}{2.44}\right)^2 \cdot 74.00 = 89.63 \text{ m.}$$

$$V_o = \frac{8.50}{(0.785)(1.83)^2} = 3.23 \text{ m/seg., como } \eta_f = 0.50;$$

$$V_f = \frac{3.23}{2} = 1.62 \text{ m/seg.; } \Delta V_r = 3.23 - 1.62 = 1.61 \text{ m/seg.,}$$

$$\frac{L \Delta V_r}{g H_o \tau} = \frac{(89.63)(1.61)}{(9.81)(28.96)(3.00)} = 0.17, \text{ y de la gráfica 3.1, se obtiene:}$$

$$(Z_r)_{\text{máx}} \doteq 0.18; (\Delta H_r)_{\text{máx}} \doteq (0.18)(28.96) \doteq 5.21 \text{ m.}$$

$$hp_{\text{máx}} \doteq 28.96 + 5.21 \doteq 34.17 \text{ m, } 34 \text{ m.}$$

Ejemplo 3.4

Resolver el problema anterior mediante el uso de las cartas de Allievi.

Solución

Cálculo del conducto equivalente:

para el tramo con $D = 2.44 \text{ m}$:

$A = 4.67 \text{ m}^2$, $V = 1.82 \text{ m/seg.}$, $e = 0.0094 \text{ m}$
de la ecuación (3.42):

$$a = \frac{1.482}{\sqrt{1 + \frac{(0.0106)(2.44)}{0.0094}}} = 765 \text{ m/seg.}$$

para el tramo con $D = 1.83$ m.:

$$A = 2.63 \text{ m}^2, V = 3.23 \text{ m/seg.}, e = 0.0063 \text{ m}$$

$$a = \frac{1.482}{\sqrt{1 + \frac{(0.0106)(1.83)}{0.0063}}} = 734 \text{ m/seg.}$$

de las ecuaciones (3.80) a (3.83):

$$V_e = \sqrt{\frac{(8.50)[(74.00)(1.82) + (48.00)(3.23)]}{(74.00)(4.67) + (48.00)(2.63)}} = 2.28 \text{ m/seg.}$$

$$a_e = \frac{\frac{74.00}{765} + \frac{48.00}{734}}{\frac{74.00}{765} + \frac{48.00}{734}} = 753 \text{ m/seg.}$$

$$\epsilon' = \frac{(753)(2.28)}{(19.6)(28.96)} = 3.02, T_e = \frac{(2)(122)}{753} = 0.32 \text{ seg.}$$

Para el uso de las cartas de Allievi en este caso particular de cierre, de acuerdo con lo indicado en la sección 3.12 para $\eta_f = 0.50$, se tendrá:

$$\tau = (2)(3.00) = 6.00 \text{ seg.}, \theta = \frac{6.00}{0.32} = 18.75$$

de la figura 3.16, con $\epsilon = 3.02$ y $\theta = 18.75$:

$$Z_{\text{máx}}^2 = 1.18 \text{ y } t_s = (13)(0.32) = 4.16 \text{ seg.}, \text{ luego } t_s < \tau \text{ y}$$

$$H_{\text{máx}} = h_{p_{\text{máx}}} = (1.18)(28.96) = 34.17 \text{ m. } 34 \text{ m.}$$

Ejemplo 3.5

Para el conducto y la ley de cierre que se indican en la figura E3.5 determinar:

a) La carga piezométrica máxima y mínima en las secciones $x = \frac{L}{4}, \frac{L}{3}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}$ y L .

b) Si la presión atmosférica del lugar es de 1.030 kg/cm^2 . ¿Qué valor de Z_p dará lugar a una presión absoluta de 1.50 kg/cm^2 en la sección $x = \frac{L}{3}$, cuando en ésta se presenta la carga piezométrica mínima?

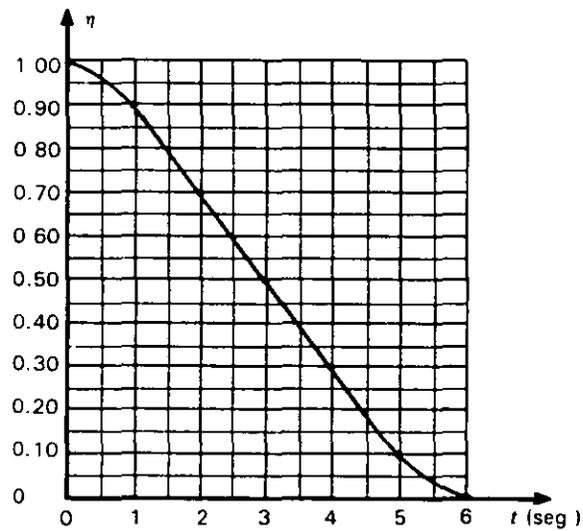
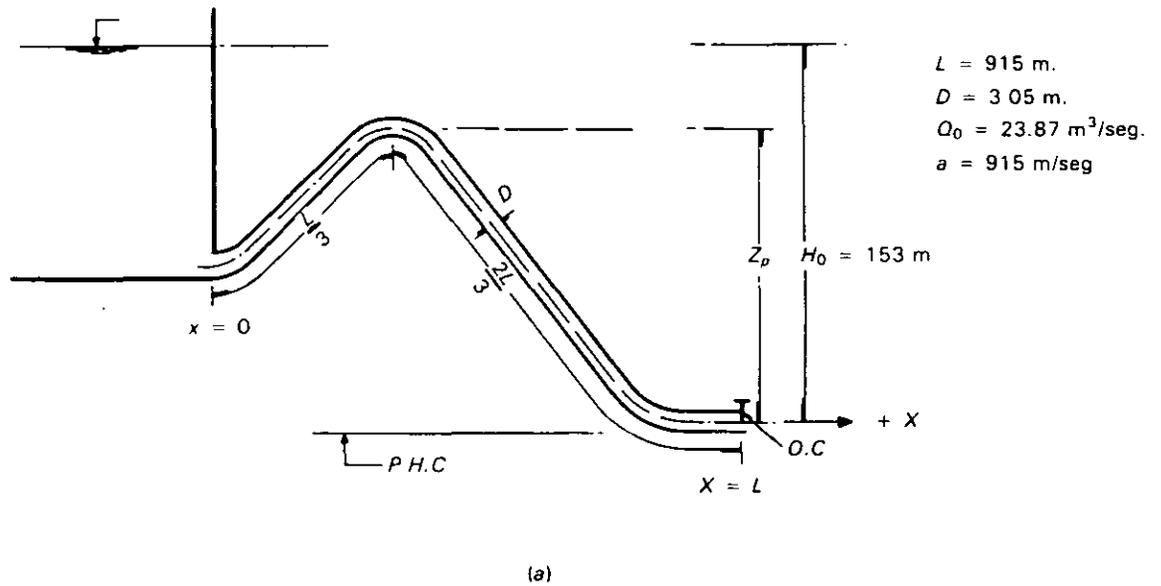


Figura E3.5

Solución

$$a) \quad V_o = \frac{23.87}{(0.785)(3.05)^2} = 3.27 \text{ m/seg.}$$

$$2\epsilon = \frac{(915)(3.27)}{(9.81)(153)} = 1.993, \quad T = \frac{(2)(915)}{915} = 2.00 \text{ seg.}, \quad \theta = \frac{6.00}{2.00} = 3.00 \text{ de la ecuación (3.51) resulta:}$$

$$Z_i^2 = [\sqrt{b^2 + c} - b]^2$$

$$b = \epsilon\eta_i = 0.997\eta_i$$

y

$$c = 2\epsilon\eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2 = 1.993\eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2$$

En forma análoga al ejemplo 3.1 se lleva a cabo la solución de la ecuación anterior de acuerdo con la siguiente tabla:

i	$t(\text{seg})$	η_i	b	b^2	c	Z_i	Z_i^2	$2\epsilon\eta_i Z_i$
≤ 0.000	0.000	1.000	0.997	0.993	2.993	1.000	1.000	1.993
0.250	0.500	0.950	0.947	0.897	2.993	1.025	1.051	1.941
0.500	1.000	0.900	0.897	0.805	2.993	1.052	1.106	1.887
0.750	1.500	0.790	0.788	0.620	2.993	1.113	1.238	1.752
1.000	2.000	0.700	0.698	0.487	2.993	1.167	1.363	1.628
1.250	2.500	0.600	0.598	0.358	2.890	1.204	1.450	1.440
1.500	3.000	0.500	0.499	0.249	2.781	1.242	1.542	1.238
1.750	3.500	0.400	0.399	0.159	2.514	1.236	1.528	0.985
2.000	4.000	0.300	0.299	0.089	2.265	1.235	1.526	0.738
2.250	4.500	0.200	0.199	0.040	1.990	1.226	1.503	0.489
2.500	5.000	0.100	0.100	0.010	1.696	1.206	1.455	0.240
2.750	5.500	0.040	0.040	0.002	1.457	1.168	1.364	0.093
3.000	6.000	0.000	0.000	0.000	1.212	—	1.212	0.000
3.250	6.500	0.000	0.000	0.000	0.986	—	0.986	0.000
3.500	7.000	0.000	0.000	0.000	0.785	—	0.785	0.000
3.750	7.500	0.000	0.000	0.000	0.729	—	0.729	0.000
4.000	8.000	0.000	0.000	0.000	0.788	—	0.788	0.000
4.250	8.500	0.000	0.000	0.000	1.014	—	1.014	0.000
4.500	9.000	0.000	0.000	0.000	1.215	—	1.215	0.000

Como puede verse en la tabla, la carga adimensional máxima y mínima en la compuerta se presenta en los instantes $t = 1.500$ y 3.750 con valores de Z^2 de 1.542 y 0.729 respectivamente, luego:

$$H_{\text{máx}} = (1.542)(153) = 236 \text{ m.}$$

y

$$H_{\text{mín}} = (0.729)(153) = 112 \text{ m.}$$

En la figura E3.5a puede verse la evolución en el tiempo de la carga Z^2 .

De acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 3.13.3 para la onda directa se tendrá:

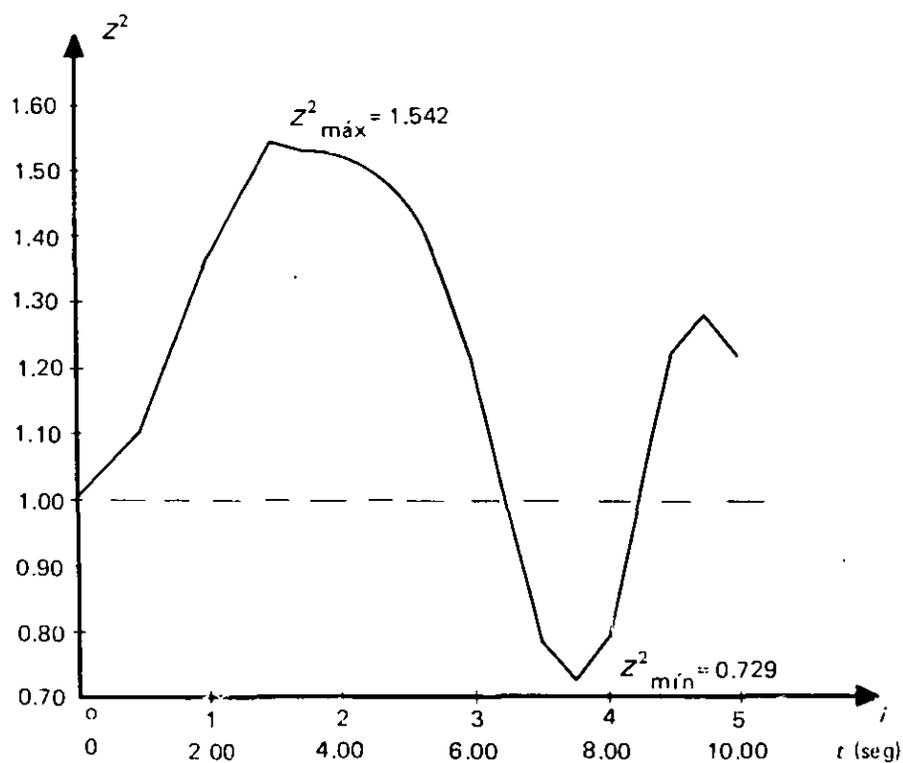


Figura E3.5a

Onda directa								
Carga Extrema	Sección	i_d	j	Z_j^2	$2\epsilon\eta_j Z_j$	$\frac{Z_d^2 - 2\epsilon\eta_h Z_h}{2\epsilon\eta_h Z_h}$	$Z_d^2(x,i)$	i
Máxima	$L/4$	1.500	2.500	1.503	0.489	0.304	1.148	1.875
	$L/2$	1.500	2.000	1.526	0.738	0.304	1.284	1.750
	$3L/4$	1.500	1.750	1.528	0.985	0.304	1.409	1.625
	L	1.500	1.500	1.542	1.238	0.304	1.542	1.500
Mínima	$L/4$	3.750	4.500	1.215	0.000	0.729	0.972	4.125
	$L/2$	3.700	4.250	1.014	0.000	0.729	0.872	4.000
	$3L/4$	3.750	4.000	0.788	0.000	0.729	0.759	3.875
	L	3.750	3.750	0.729	0.000	0.729	0.729	3.750

y para la onda reflejada:

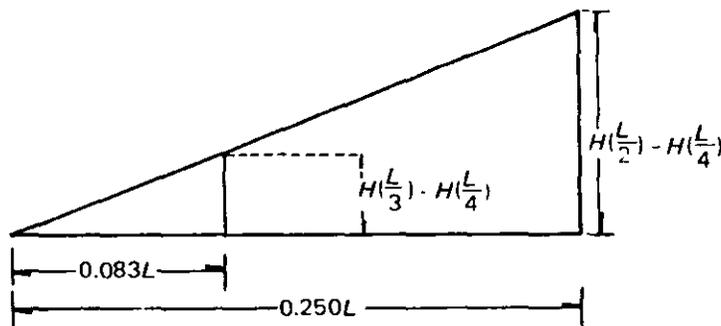
Onda reflejada								
Carga Extrema	Sección	i_r	h	Z_h^2	$-2\epsilon\eta_h Z_h$	$\frac{Z_r^2 + 2\epsilon\eta_j Z_j}{2\epsilon\eta_j Z_j}$	$Z_r^2(x,i)$	i
	$L/4$	1.500	0.750	1.238	-1.752	2.780	1.133	1.125
	$L/2$	1.500	1.000	1.363	-1.628	2.780	1.258	1.250

Onda reflejada								
Carga Extrema	Sección	i_r	h	Z_h^2	$-2\epsilon\eta_h Z_h$	$Z_r^2 + 2\epsilon\eta_j Z_j$	$Z_r^2(x, i)$	i
Máxima	3L/4	1.500	1.250	1.450	-1.440	2.780	1.395	1.375
	L	1.500	1.500	1.542	-1.238	2.780	1.542	1.500
Mínima	L/4	3.750	3.000	1.212	0.000	0.729	0.971	3.375
	L/2	3.750	3.250	0.986	0.000	0.729	0.858	3.500
	3L/4	3.750	3.500	0.785	0.000	0.729	0.757	3.625
	L	3.750	3.750	0.729	0.000	0.729	0.729	3.750

Del paso 5 resulta:

Sección	$Z_{mín}^2$	$Z_{máx}^2$	$H_{máx}$ (m)	$H_{mín}$ (m)
L/4	1.148	0.971	176	149
L/2	1.284	0.858	196	131
3L/4	1.409	0.757	216	116
L	1.542	0.729	236	112

Por lo que se refiere a la sección $x = \frac{L}{3}$, los valores de la carga piezométrica máxima y mínima, se obtienen interpolando linealmente entre los correspondientes a las secciones $x = \frac{L}{4}$ y $x = \frac{L}{2}$:



de la figura anterior se deduce que:

$$H\left(\frac{L}{3}\right) = H\left(\frac{L}{4}\right) + 0.333 \left[H\left(\frac{L}{2}\right) - H\left(\frac{L}{4}\right) \right]$$

así, para la carga máxima:

$$H_{máx}\left(\frac{L}{3}\right) = 176 + 0.333(196 - 176) = 183 \text{ m.}$$

y para la mínima:

$$H_{\min}\left(\frac{L}{3}\right) = 149 + 0.333(131 - 149) = 143 \text{ m.}$$

b) La carga piezométrica absoluta en la sección $x = \frac{L}{3}$, $H\left(x = \frac{L}{3}\right)$ es igual a la suma de la carga piezométrica más $\frac{p_a}{\gamma}$, donde p_a es la presión atmosférica del lugar, es decir:

$$H\left(\frac{L}{3}\right) = H\left(\frac{L}{3}\right) + \frac{p_a}{\gamma}$$

y la carga de presión absoluta:

$$h_p\left(\frac{L}{3}\right) = H\left(\frac{L}{3}\right) + \frac{p_a}{\gamma} - Z_p; \text{ luego}$$

$$15.00 = 143 + 10.30 - Z_p; Z_p = 138.30 \text{ m}$$

y con este valor resulta una carga de presión relativa:

$$h_p\left(\frac{L}{3}\right) = 143.00 - 138.30 = 4.70 \text{ m.}$$

Ejemplo 3.6

Para el conducto que se muestra en la figura E3.6 determinar las cargas de presión máxima y mínima resultantes de la siguiente maniobra de apertura:

$t(\text{seg})$	η
0.00	0.000
0.50	0.050
1.00	0.100
1.50	0.200
2.00	0.300
2.50	0.400
3.00	0.500
3.50	0.600
4.00	0.700
4.50	0.800
5.00	0.900
5.50	0.950
6.00	1.000

Solución

$$T = \frac{2L}{a} = \frac{(2)(914)}{914} = 2.00 \text{ seg.}; \theta = \frac{\tau}{T} = \frac{6.00}{2.00} = 3.00;$$

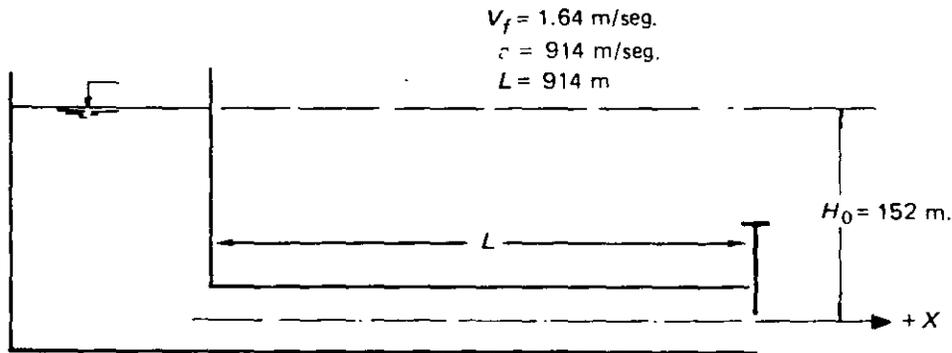


Figura E3.6

$$2\epsilon = \frac{(914)(1.64)}{(9.81)(152)} = 1.005; \text{ de la ecuación (3.51), se obtiene:}$$

$$Z_j^2 = \left[\sqrt{b^2 + c} - b \right]^2$$

donde $b = \epsilon \eta_i$ y $c = 2\epsilon \eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2$

Procediendo de la misma forma que en los ejemplos anteriores, la ecuación anterior se puede resolver haciendo la siguiente tabla:

i	$t(\text{seg})$	η_i	b	b^2	c	Z_i	Z_i^2	$2\epsilon \eta_i Z_i$
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	0.000
0.250	0.500	0.050	0.025	0.001	1.000	0.975	0.952	0.049
0.500	1.000	0.100	0.050	0.003	1.000	0.951	0.905	0.096
0.750	1.500	0.200	0.101	0.010	1.000	0.904	0.817	0.182
1.000	2.000	0.300	0.151	0.023	1.000	0.860	0.740	0.259
1.250	2.500	0.400	0.201	0.040	1.097	0.865	0.749	0.348
1.500	3.000	0.500	0.251	0.063	1.191	0.869	0.755	0.437
1.750	3.500	0.600	0.302	0.091	1.365	0.905	0.818	0.546
2.000	4.000	0.700	0.352	0.124	1.519	0.930	0.865	0.654
2.250	4.500	0.800	0.402	0.162	1.599	0.925	0.856	0.744
2.500	5.000	0.900	0.452	0.205	1.682	0.922	0.849	0.834
2.750	5.500	0.950	0.477	0.228	1.728	0.922	0.849	0.880
3.000	6.000	1.000	0.503	0.253	1.789	0.926	0.857	0.931
3.250	6.500	1.000	0.503	0.253	1.888	0.960	0.922	0.965
3.500	7.000	1.000	0.503	0.253	1.985	0.993	0.986	0.998
3.750	7.500	1.000	0.503	0.253	2.031	1.008	1.017	1.013
4.000	8.000	1.000	0.503	0.253	2.074	1.022	1.045	1.027
4.250	8.500	1.000	0.503	0.253	2.043	1.012	1.025	1.017
4.500	9.000	1.000	0.503	0.253	2.012	1.002	1.004	1.009
4.750	9.500	1.000	0.503	0.253	1.996	0.997	0.993	0.998
5.000	10.000	1.000	0.503	0.253	1.982	0.992	0.984	0.989

En la figura E3.6a puede verse la evolución en el tiempo de la carga Z^2 .

Siguiendo el procedimiento indicado en la sección 3.13.3 para la onda directa resulta:

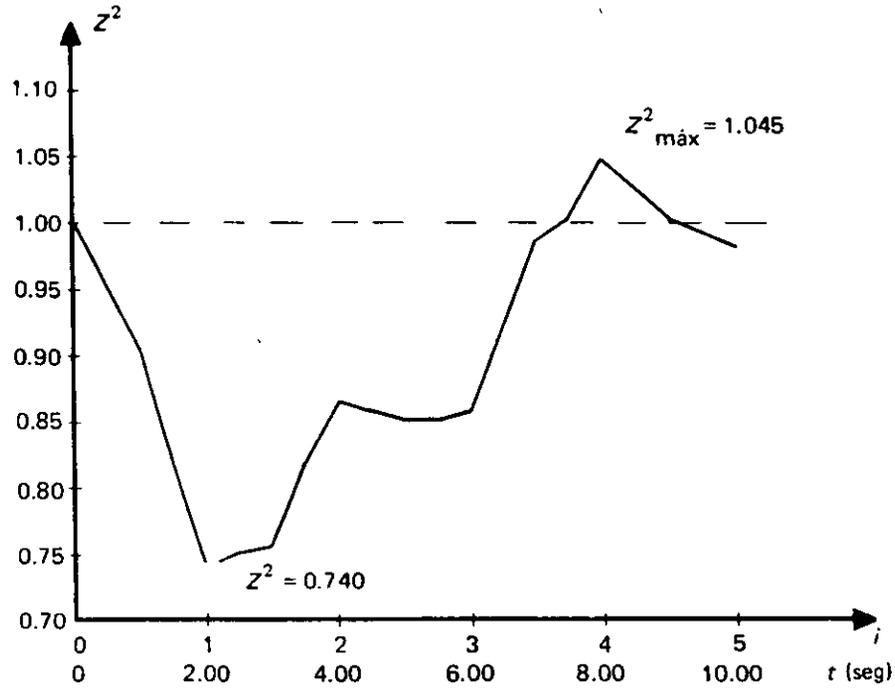


Figura E3.6a

Onda directa								
Carga Extrema	Sección	i_d	j	Z_j^2	$2\epsilon\eta_j Z_j$	$Z_d^2 - 2\epsilon\eta_h Z_h$	$Z_d^2(x, i)$	i'
Máxima	L/4	4.000	4.750	0.993	0.998	0.018	1.005	4.500
	L/2	4.000	4.500	1.004	1.009	0.018	1.016	4.250
	3L/4	4.000	4.250	1.025	1.017	0.018	1.030	4.125
	L	4.000	4.000	1.045	1.027	0.018	1.045	4.000
Mínima	L/4	1.000	1.750	0.818	0.546	0.481	0.923	1.375
	L/2	1.000	1.500	0.755	0.437	0.481	0.837	1.250
	3L/4	1.000	1.250	0.749	0.348	0.481	0.789	1.125
	L	1.000	1.000	0.740	0.259	0.481	0.740	1.000

y para la onda reflejada:

Onda reflejada								
Carga Extrema	Sección	i_r	h	Z_h^2	$-2\epsilon\eta_h Z_h$	$Z_r^2 + 2\epsilon\eta_j Z_j$	$Z_r^2(x, i)$	i
Máxima	L/4	4.000	3.250	0.922	-0.965	2.072	1.015	3.625
	L/2	4.000	3.500	0.986	-0.998	2.072	1.030	3.750
	3L/4	4.000	3.750	1.017	-1.013	2.072	1.038	3.875
	L	4.000	4.000	1.045	-1.027	2.072	1.045	4.000

Onda reflejada								
Carga Extrema	Sección	i_r	h	Z_h^2	$-2\epsilon\eta_h Z_h$	$Z_r^2 + 2\epsilon\eta_j Z_j$	$Z_r^2(x,i)$	i
Mínima	$L/4$	1.000	0.250	0.952	-0.049	0.999	0.951	0.625
	$L/2$	1.000	0.500	0.905	-0.096	0.999	0.904	0.750
	$3L/4$	1.000	0.750	0.817	-0.182	0.999	0.817	0.875
	L	1.000	1.000	0.740	-0.259	0.999	0.740	1.000

Finalmente del paso 5 se obtiene:

Sección	$Z^2_{m\acute{a}x}$	$Z^2_{m\acute{i}n}$	$hp_{m\acute{a}x}$	$hp_{m\acute{i}n}$
$L/4$	1.015	0.923	154	140
$L/2$	1.030	0.837	157	127
$3L/4$	1.038	0.789	158	120
L	1.045	0.740	159	112

3.17 PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 3.1

De acuerdo con la teoría de la columna elástica, determinar la carga mínima de presión en las secciones $x = \frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}$ y L del conducto que se muestra en

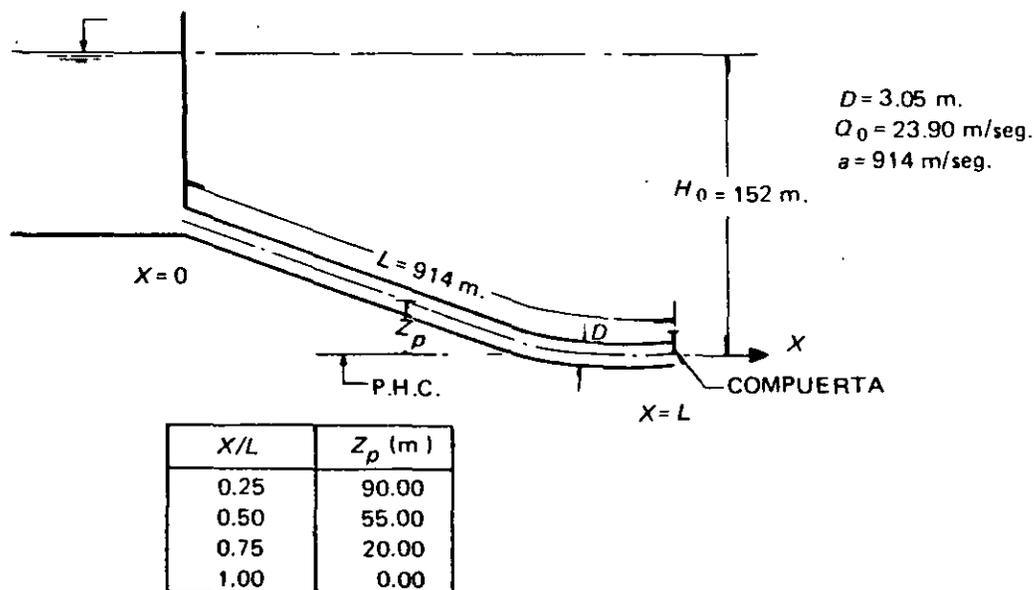


Figura P3.1

la figura P3.1 si en la compuerta se lleva a cabo una maniobra de apertura con la siguiente ley.

$t(\text{seg})$	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00
η	0.000	0.106	0.213	0.330	0.670	0.809	0.894	0.957	1.000

(Respuesta: 36, 49, 75 y 87 m.)

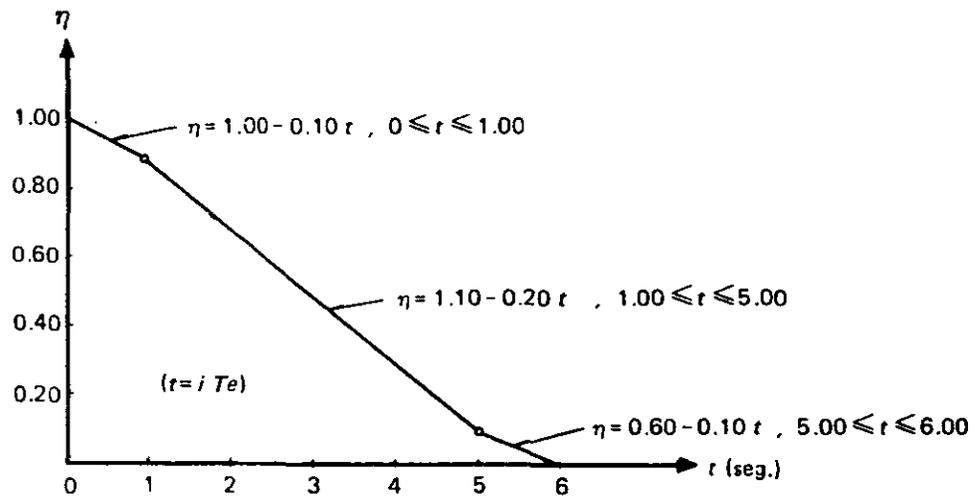
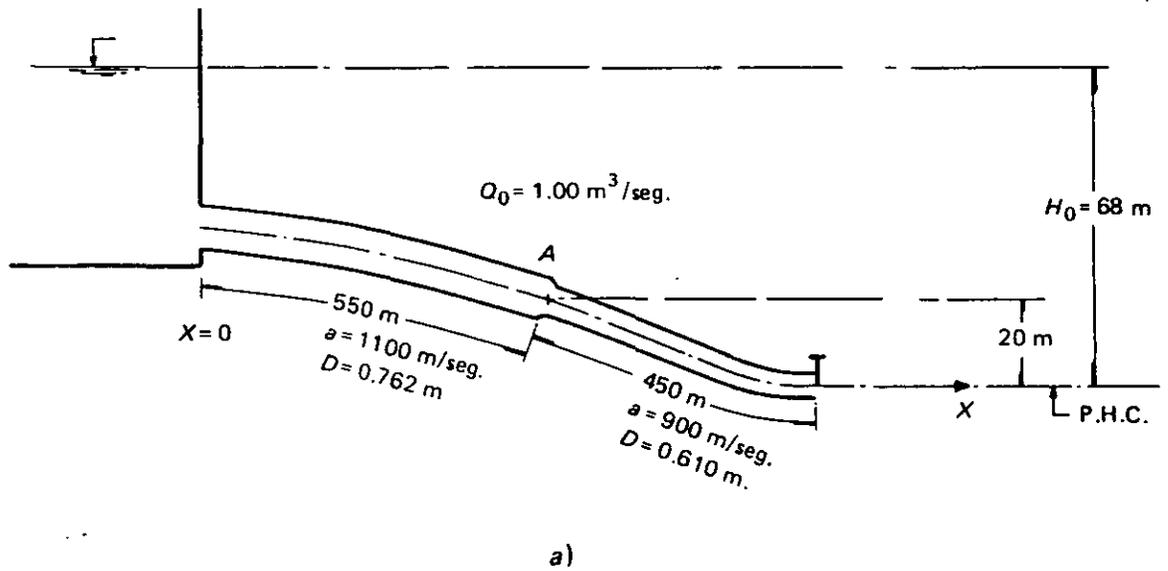


Figura P3.2 y P3.3

Problema 3.2

Para el conducto que se muestra en la figura, determinar las cargas de presión máxima y mínima en la válvula y la sección A, cuando en la primera se efectúa la maniobra de cierre cuya ley se indica.

(Respuesta: 154 y 22 m.; 90 y 19 m.)

Problema 3.3

Resolver el problema anterior aplicando la teoría de la columna rígida, suponiendo una maniobra de cierre uniforme total en un tiempo $\tau = 6.00$ seg.

(Respuesta: 133 y 35 m.; 77 y 33 m.)

Problema 3.4

Determinar la carga de presión máxima y mínima en la compuerta y las secciones $x = \frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$ del conducto que se muestra en la figura, si la primera se somete a una maniobra de cierre con la siguiente ley:

$t(\text{seg})$	0.000	0.750	1.500	2.250	3.000	3.750	4.500	5.250	6.000
η	1.000	0.975	0.925	0.850	0.800	0.650	0.500	0.350	0.00

(Respuesta: 80, 33, 53 y 67 m.; 12, 13, 15 y 13 m.)

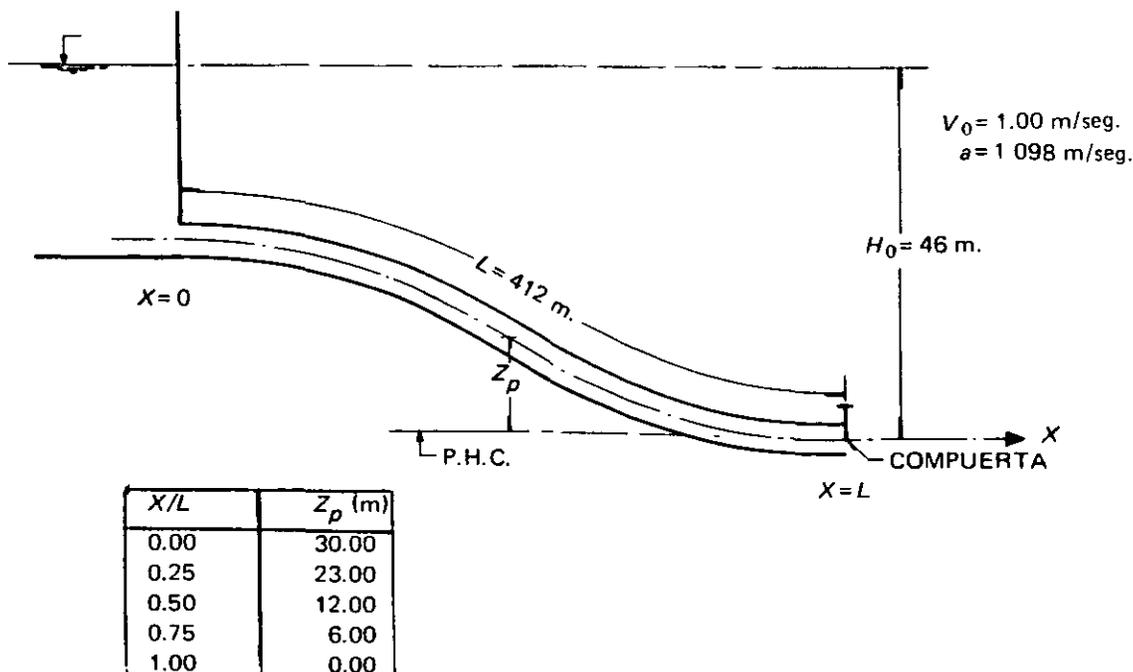


Figura P3.4

Problema 3.5

Si en el problema anterior, por una falla en la compuerta ésta se cierra en un tiempo $\tau = 0.75 T$, determinar el valor de la carga de presión máxima en la misma y la coordenada x hasta la cual se propaga la onda de presión.

(Respuesta: 158 y 309 m.)

Problema 3.6

Para el conducto que se muestra en la figura, de acuerdo con la teoría de la columna elástica, determinar la carga máxima de presión en la compuerta y las secciones $x = \frac{L}{3}$ y $\frac{2L}{3}$, para un cierre uniforme de la primera partiendo de un grado de apertura total hasta llegar a un valor $\eta_f = 0.50$ en un tiempo $\tau = 3$ seg.

(Respuesta: 126, 110 y 118 m.)

Problema 3.7

Si la velocidad en la sección 1 del conducto que se muestra en la figura se puede expresar como:

$$V_i = V_o \eta_i \sqrt{\frac{H_i - h_{pl}}{H_o}}$$

donde h_{pl} es la carga de presión inmediatamente aguas abajo del órgano de control (sección 2) que permanece constante, y H_i es la carga piezométrica en la sección 1, partiendo de la ecuación (3.35) demostrar que:

$$Z_i^2 = (\sqrt{(\epsilon \eta_i)^2 + 2\epsilon \eta_{i-1} Z_{i-1} - Z_{i-1}^2 + 2} - \epsilon \eta_i)^2$$

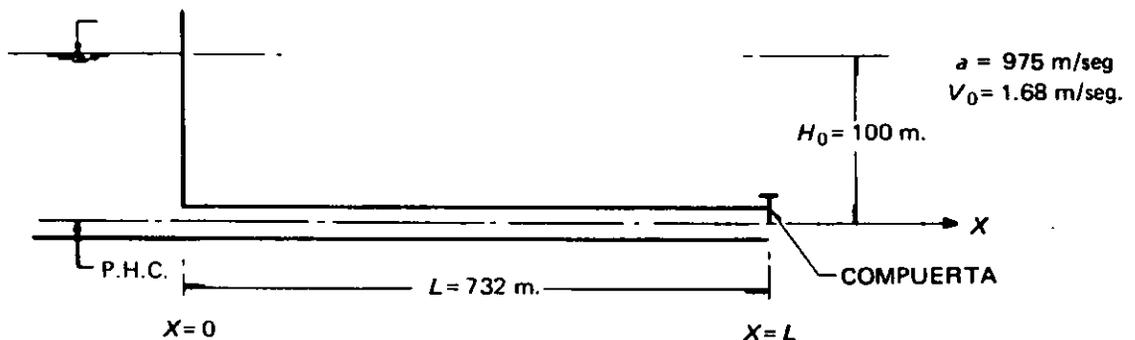


Figura P3.6

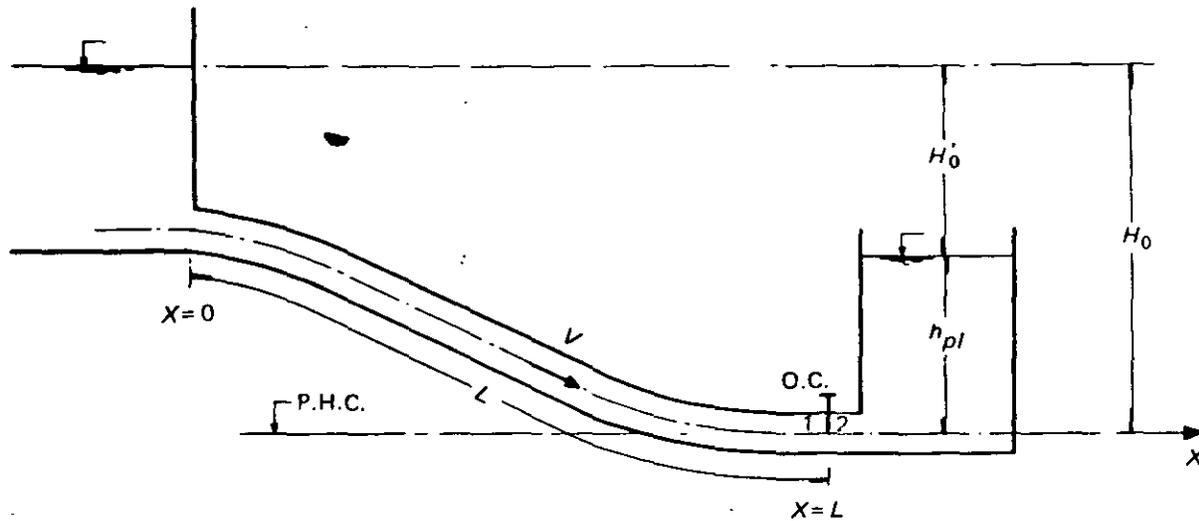


Figura P3.7

siendo

$$Z_i^2 = \frac{H_i - h_{pl}}{H_0} \text{ y } 2\epsilon = \frac{aV_0}{gH_0}$$

Problema 3.8

Calcular la carga máxima de presión en la válvula del problema 3.3, utilizando las cartas de Allievi.

(Respuesta: 133 m)

Problema 3.9

Calcular la carga máxima de presión en la compuerta del problema 3.6, utilizando las cartas de Allievi.

(Respuesta: 128 m)

Problema 3.10

Si en el conducto mostrado en la figura 3.5 se efectúa una maniobra de cierre total en el órgano de control, con base en la teoría de la columna rígida y suponiendo que la carga piezométrica en la sección ubicada inmediatamente aguas arriba de $x = L$, se puede expresar mediante la relación lineal (ver figura P3.10):

$$H = H_0 + (H_{\text{máx}} - H_0) \frac{t}{\tau}$$

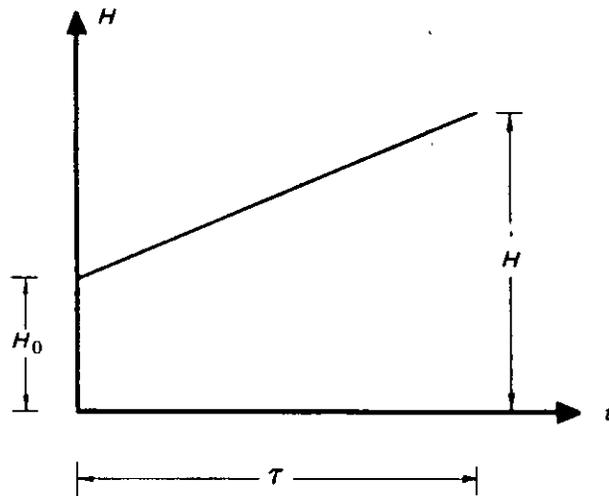


Figura P3.10

demostrar que:

$$H_{\text{máx}} = H_0 + \frac{2LV_0}{g\tau}$$

donde $H_{\text{máx}}$ es la carga máxima en el órgano que se presenta en el instante $t = \tau$. Esta ecuación se conoce en la literatura técnica como *Fórmula de Michaud*^{5,17} (ver capítulo 1), y resulta aplicable para valores de $\frac{LV_0}{g\tau H_0} \leq 1.5$.

Problema 3.11

Verificar que las ecuaciones (3.24) y (3.24a) son soluciones generales de las ecuaciones (3.21a y 3.22a).

Problema 3.12

Con base en la ecuación (3.38) demostrar que si se efectúa una maniobra de cierre brusco ($\theta \leq 1$) en el órgano de control de la figura 3.9, de acuerdo con la ley que se indica en la figura P3.12 las cargas extremas en el órgano resultan:

$$Z_{\text{máx}}^2 = 1 + 2\epsilon$$

y

$$Z_{\text{mín}}^2 = 1 - 2\epsilon$$

siendo su magnitud independiente de la ley de cierre y se presentan cuando $i = \theta$ e $i = \theta + 1$.

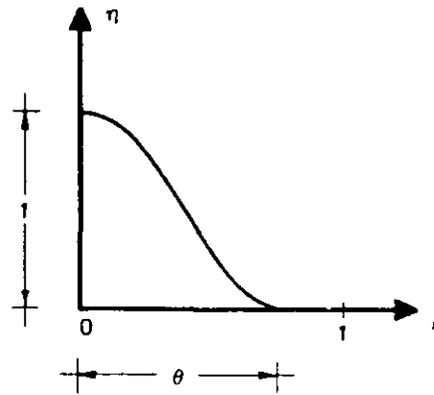


Figura P3.12

Problema 3.13

Verificar que la evolución de carga en el órgano de control de la figura 3.9 es de la forma que se indica en la figura P3.13 para las condiciones $\theta = 0$, $0 < \theta < 1$ y $\theta = 1$.

Problema 3.14

Verificar que la evolución de carga en las secciones $x = 0$ (inmediatamente aguas abajo del depósito), $0.25 L$, $0.50 L$ y $0.75 L$ de la figura 3.2 es la que se indica en la figura P3.14.

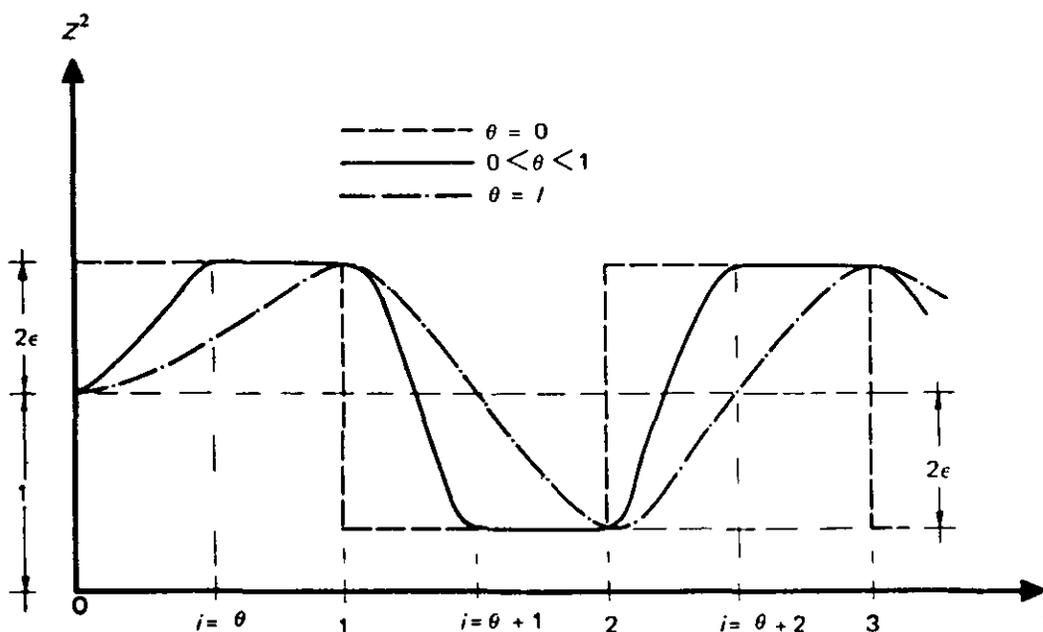


Figura P3.13

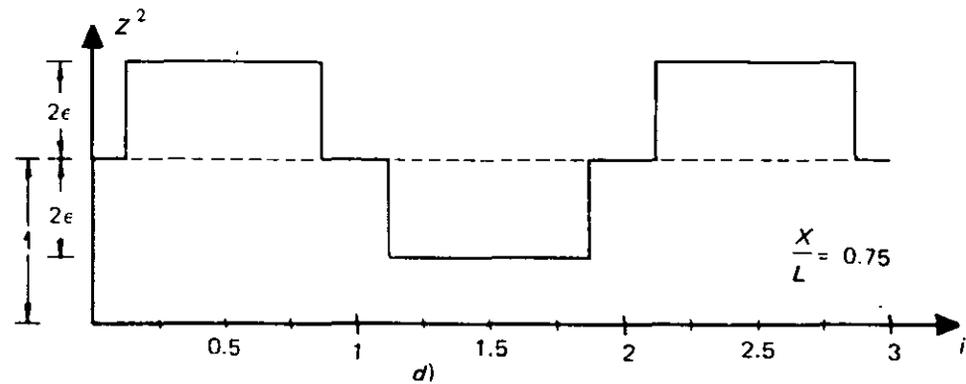
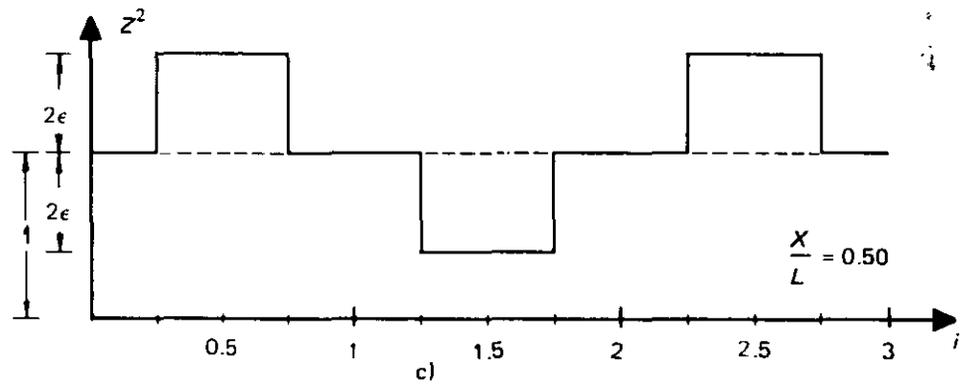
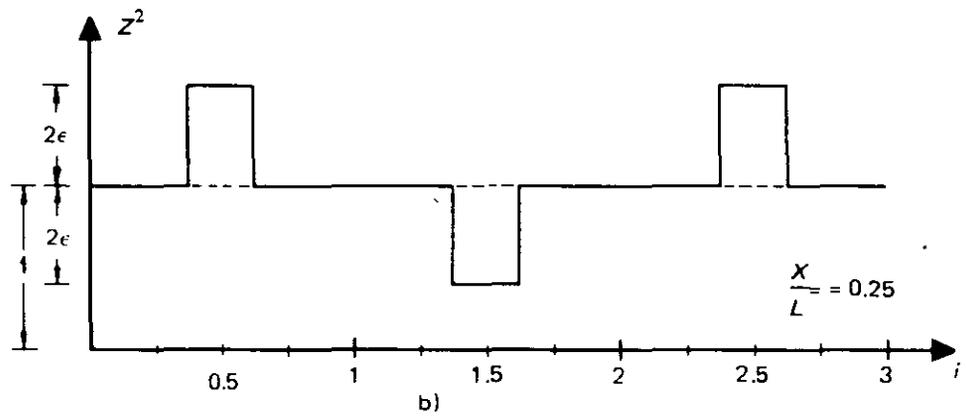
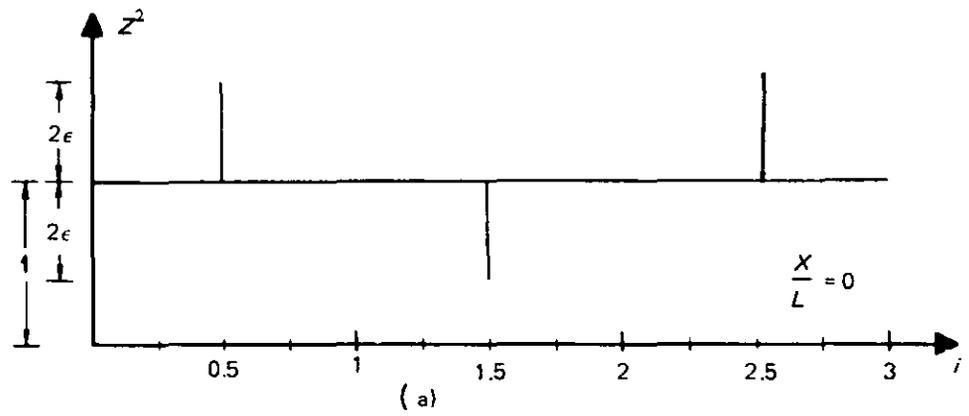


Figura P3.14

4

Golpe de ariete en plantas de bombeo

4.1 INTRODUCCIÓN

El golpe de ariete en plantas de bombeo puede presentarse como resultado de diversas condiciones de operación que modifican el régimen de flujo permanente a través de los equipos y las tuberías de succión y descarga, dando lugar a oscilaciones del gasto y la carga piezométrica.

Dentro de las causas que originan la presencia del fenómeno en estudio pueden citarse las maniobras de cierre o apertura de válvulas de seccionamiento en la tubería de descarga que se efectúan antes del paro o después del arranque de una bomba respectivamente, el arranque o paro de una bomba sin válvulas en la tubería de descarga, las fallas mecánicas en la bomba, y el paro ocasionado por una interrupción brusca de energía eléctrica al motor.

En nuestro medio, la condición que se presenta con más frecuencia es aquella en la que se instala una válvula de no retorno en la tubería de descarga para impedir la inversión del flujo en la bomba y para cuantificar los efectos del golpe de ariete en este caso,* sólo se requiere conocer el comportamiento de la bomba cuando el flujo conserva su dirección original. Por la importancia de esta condición en la práctica, en este capítulo se describirán los métodos para obtener el valor de la carga piezométrica tanto en la bomba ($x = 0$) como en cualquier sección de la tubería de descarga, para el caso de plantas de bombeo con equipos iguales operando en paralelo, a partir de las leyes de semejanza para máquinas hidráulicas, y la aplicación de las ecuaciones de Allievi y Angus establecidas en los dos últimos capítulos. Es importante señalar que en este capítulo no se considera el efecto de la fricción y, por tal motivo, la carga piezométrica en cualquier sección del conducto $H(x)$ se considera constante e igual a H_0 para las condiciones de flujo permanente inicial (figura 4.1).

*Para los lectores interesados en el cálculo del golpe de ariete sin la presencia de una válvula de no retorno en la tubería de descarga se recomiendan las referencias 1, 3, 8 y 9.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL FENÓMENO

En la sección 3.2 se llevó a cabo la descripción del fenómeno en estudio para el caso de un conducto con un depósito de nivel constante y un órgano de control situados en los extremos aguas arriba y aguas abajo respectivamente, lo que permitió tener un conocimiento cualitativo del mismo para este caso particular.

Sin embargo, ahora es necesario efectuar una nueva descripción para otro caso que se presenta con frecuencia en la práctica y que consiste en la interrupción instantánea del suministro de potencia en una planta de bombeo tal como la mostrada en la figura 4.1, donde puede verse una bomba que opera en condiciones normales antes de la interrupción y un depósito de nivel constante situados en los extremos aguas arriba y aguas abajo de una tubería de descarga desprovista de válvulas respectivamente.

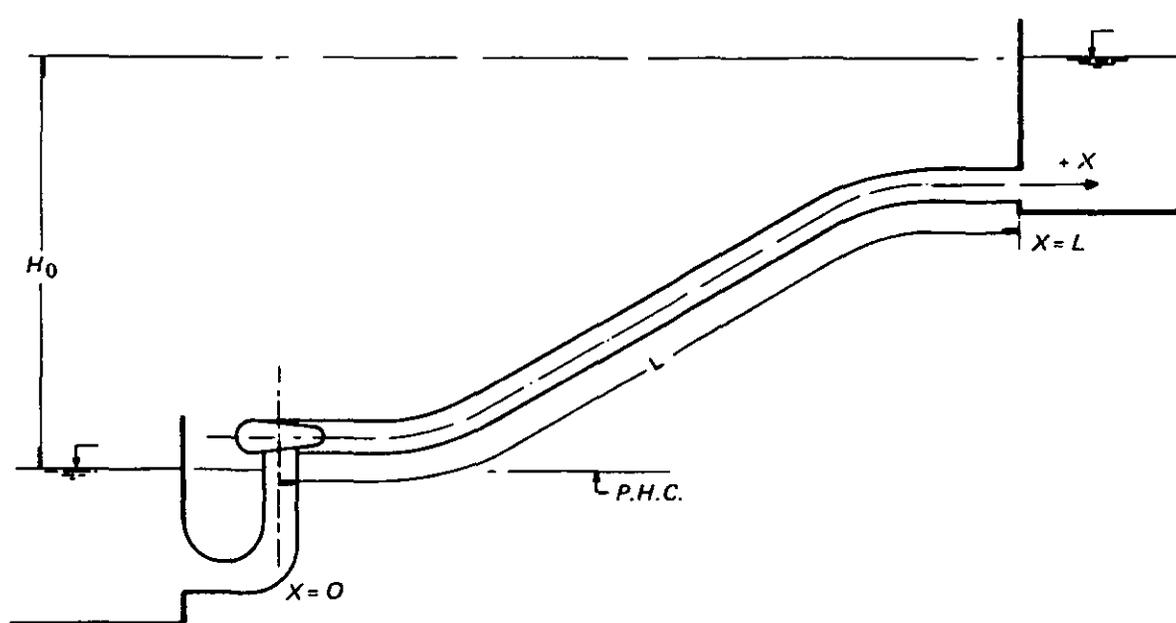


Figura 4.1

En el instante en que se presenta la interrupción citada en el párrafo anterior, se inicia la denominada *Zona de operación de bomba* (figura 4.2) donde la única energía que permite seguir girando a los elementos rotatorios del conjunto bomba-motor es la cinética de estos últimos, pero debido a que ésta es muy pequeña comparada con la requerida para las condiciones normales de operación, la velocidad angular de tales elementos disminuye rápidamente; tan pronto como esto acontece, la carga piezométrica y el gasto suministrado por la bomba también decrecen y se generan ondas de presión que partiendo de ésta viajan por la tubería hasta llegar al depósito donde se reflejan.

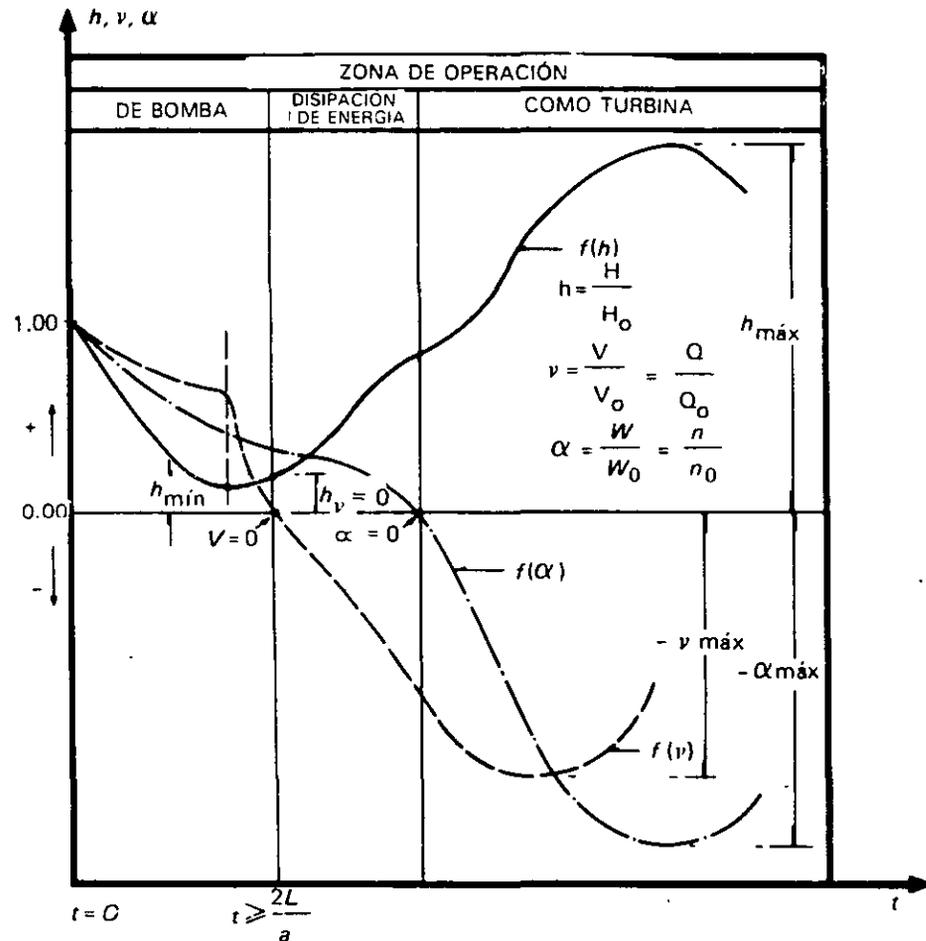


Figura 4.2 Zonas de operación de una bomba después de la interrupción instantánea del suministro de energía.

Mientras tanto, la disminución de la velocidad angular sigue progresando rápidamente hasta un límite en que la bomba no puede seguir alimentando a la tubería de descarga, y como no existe una válvula que lo impida el flujo a través de la carcasa de la bomba invierte su dirección, aunque los elementos rotatorios todavía giren en el sentido original, iniciándose con esto la llamada Zona de disipación de energía.

A partir del instante anterior la velocidad angular disminuye aún más rápidamente hasta llegar a un valor igual a cero, terminando con esto la zona de disipación e iniciándose la operación de la bomba como turbina denominada como Zona de operación de turbina, y a medida que la velocidad de rotación inversa de los elementos de la bomba se aproxima a su valor máximo, el flujo invertido que circula a través de ella se reduce rápidamente.

En consecuencia, puede verse que existen tres zonas de funcionamiento de la bomba perfectamente bien definidas que son: las de operación de bomba, disipación de energía y operación de turbina. La primera se caracteriza por un decremento tanto en la carga piezométrica, que alcanza su valor mínimo en esta zona, como en el gasto bombeado que se reduce hasta cero;

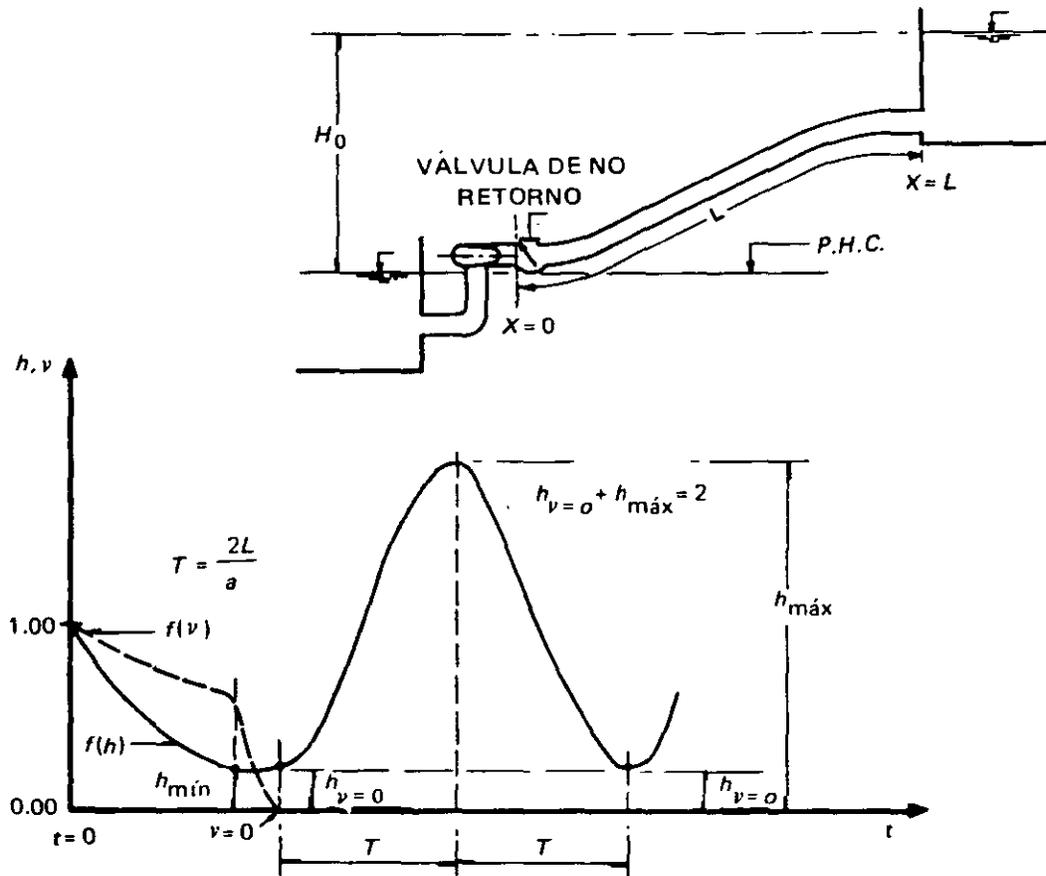


Figura 4.3 Variación de h y v en la bomba cuando existe una válvula de no retorno en la tubería de descarga.

la segunda y tercera, por el incremento tanto en el flujo invertido como en la carga que llegan hasta su valor máximo en la última zona.

Ahora bien, si en la tubería de descarga existe una válvula de no retroceso que cierra cuando se invierte el flujo en la bomba (figura 4.3), ésta sólo trabajará en la primera zona y, en el instante de cierre, tendrá origen la oscilación asociada a la carga máxima que se presentará en la bomba T seg después, y si en lugar de esta válvula hay una de seccionamiento en la que se inicia una maniobra automática de cierre en el instante correspondiente a la interrupción de energía, dependiendo de la ley con la que se lleve a cabo dicha maniobra, serán las zonas en las que opere la bomba y la magnitud de las oscilaciones de carga y gasto.

Por otra parte, para la condición de paro normal de una bomba el efecto del golpe de ariete puede atenuarse si se instala una válvula de seccionamiento en la tubería de descarga que se cierra lentamente antes de la interrupción de energía.

4.3 EFECTO DE LA INERCIA DEL CONJUNTO BOMBA-MOTOR

Cuando se interrumpe el suministro de energía al motor de una bomba, la rapidez de variación de la velocidad angular w de los elementos giratorios del conjunto bomba-motor dependerá del momento de inercia de los mismos I , que a su vez está relacionado con el par motor Tr de acuerdo con la siguiente expresión:

$$Tr = -I \frac{dw}{dt}, \quad w = \frac{\pi n^*}{30} \quad (4.1)$$

recordando que la potencia suministrada por el motor está determinada como:

$$P = wTr \quad (4.2)$$

de las dos últimas ecuaciones resulta:

$$P = -Iw \frac{dw}{dt} \quad (4.3)$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (2.34) se puede escribir:

$$P = P_o \alpha^3 \quad (4.4)$$

y

$$w = w_o \alpha \quad (4.5)$$

donde $P_o = \frac{\gamma Q_o H_o}{\lambda_o}$ y el subíndice o denota las condiciones para el flujo permanente inicial.

Al sustituir las ecuaciones (4.4) y (4.5) en la (4.3) se obtiene:

$$\alpha^3 = - \frac{\lambda_o (\pi n_o)^2 I}{900 \gamma Q_o H_o} \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

* w está expresada en seg^{-1} y n en r.p.m.

si la ecuación anterior se integra tomando como límites las condiciones iniciales ($\alpha = 1$, $t = 0$), y las correspondientes a cualquier instante de la primera zona de operación de la bomba (α , t):

$$\int_1^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha^2} = - \frac{900\gamma Q_o H_o}{\lambda_o I (\pi n_o)^2} \int_0^t dt$$

da como resultado:

$$\boxed{\alpha_i = \frac{1}{K_b T i + 1}} \quad (4.6)$$

donde

$$i = \frac{t}{T} \text{ y } K_b = \frac{900\gamma Q_o H_o}{\lambda_o I (\pi n_o)^2}$$

Como puede observarse, la ecuación anterior permite obtener el valor de α_i conocido el período T y el parámetro K_b , que depende de las condiciones iniciales de operación de la bomba (Q_o , H_o , n_o y λ_o), y del momento de inercia proporcionado por el fabricante.

Es importante señalar que generalmente el procedimiento a seguir para obtener la variación de α con respecto al tiempo, implica el conocimiento del par Tr , también como una función del tiempo, o bien, del parámetro adimensional

$\beta = \frac{Tr}{(Tr)_o}$, que difícilmente se encuentra disponible en la práctica. No obstante, de acuerdo con los cálculos de golpe de ariete realizados por el autor, para valores de $K_b T$ comprendidos entre 0.10 y 5.00, la ecuación (4.6) proporciona resultados precisos para la primera zona de operación de la bomba, o sea, cuando $Q \geq 0$.

4.4 ECUACIÓN DE ALLIEVI PARA PLANTAS DE BOMBEO

Para determinar los efectos del golpe de ariete en el equipo de bombeo sin considerar el efecto de la fricción, además de la ecuación (4.6), es necesario recurrir a la fórmula clásica de Allievi (ecuación 3.35), sólo que en este caso como la dirección del flujo para las condiciones iniciales coincide con la de propagación de la onda directa de presión, el segundo miembro de esta ecuación es negativo y entonces adquiere la forma:

$$H_i + H_{i-1} - 2H_o = \frac{a}{g} (V_i - V_{i-1}) \quad (4.7)$$

si en la expresión anterior se hace $h_i = \frac{H_i}{H_o}$, $v_i = \frac{V_i}{V_o}$, y se recuerda que $2\epsilon = \frac{aV_o}{gH_o}$, se puede escribir:

$$\boxed{h_i + h_{i-1} - 2 = 2\epsilon(v_i - v_{i-1})} \quad (4.8)$$

que es la ecuación general que rige el fenómeno de golpe de ariete en la bomba. En forma semejante a lo visto en el capítulo anterior, los valores de v_i dependerán de la ley con la cual se modifique el gasto en la tubería de descarga a través del tiempo.

Para el caso de una planta de bombeo tal como la mostrada en la figura 4.3, donde los equipos de bombeo son iguales y operan en paralelo, el valor de V_o requerido para el cálculo de 2ϵ , deberá ser el correspondiente al número de equipos que operen en la planta sin considerar el efecto de la fricción, por ejemplo, si sólo opera un equipo que proporciona un gasto Q_o , la velocidad será V_o , si operan dos equipos el gasto será igual a $2Q_o$ y la velocidad a $2V_o$; asimismo, la carga suministrada por los equipos será siempre igual a H_o .

4.5 CURVAS CARACTERÍSTICAS DE UNA BOMBA

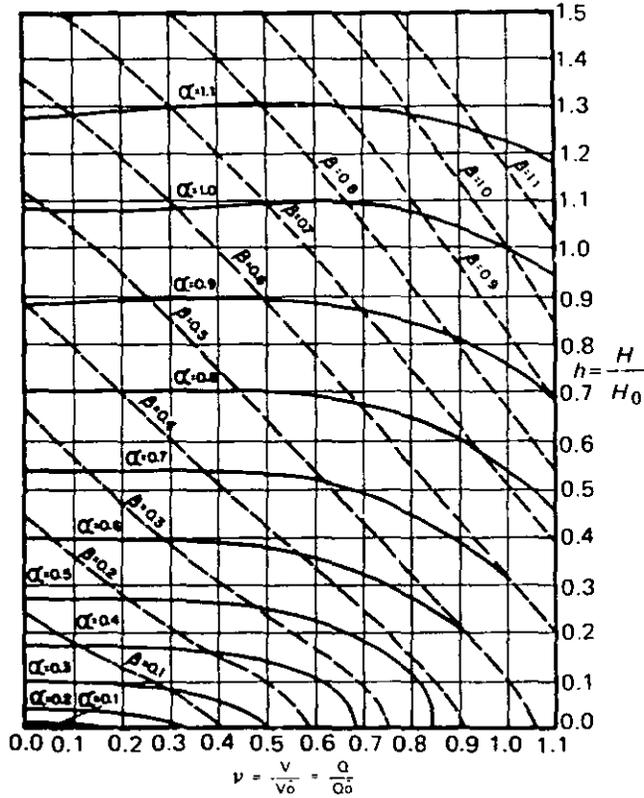
Las curvas características que debe proporcionar el fabricante para el equipo de bombeo cuando éste opera en las zonas descritas en la sección 4.2, son semejantes a las que se muestran en las figuras 4.4a a 4.4d.

Por otra parte, para poder cuantificar los efectos del fenómeno en estudio cuando existe una válvula de no retorno en la tubería de descarga es necesario disponer de las curvas correspondientes a la primera zona de operación (figuras 4.4a y 4.4d); sin embargo, con excepción de las curvas para las condiciones de operación normal de la bomba, con frecuencia no se dispone de las restantes y es necesario obtenerlas a partir de las leyes de semejanza que se vieron en el capítulo 2.

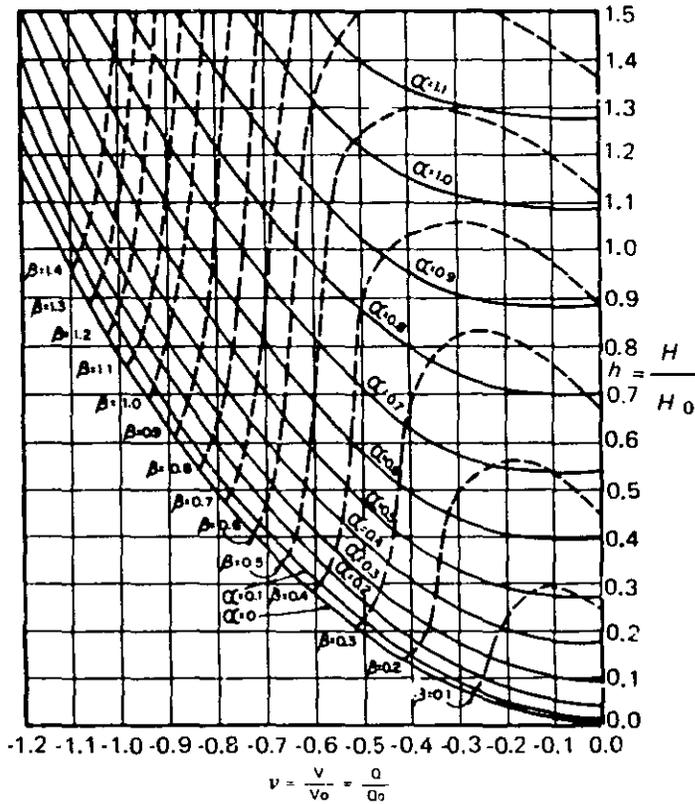
En efecto, si se considera la curva carga-gasto para la condición de operación normal, generalmente es posible expresarla mediante una ecuación parabólica de la forma:

$$H = a + bQ + cQ^2, \quad Q \geq 0, \quad n = n_o$$

donde a , b y c son constantes que pueden ser obtenidas mediante una regresión de tipo parabólico. Asimismo, para la operación de N equipos en paralelo, de la ecuación anterior se deduce fácilmente que:

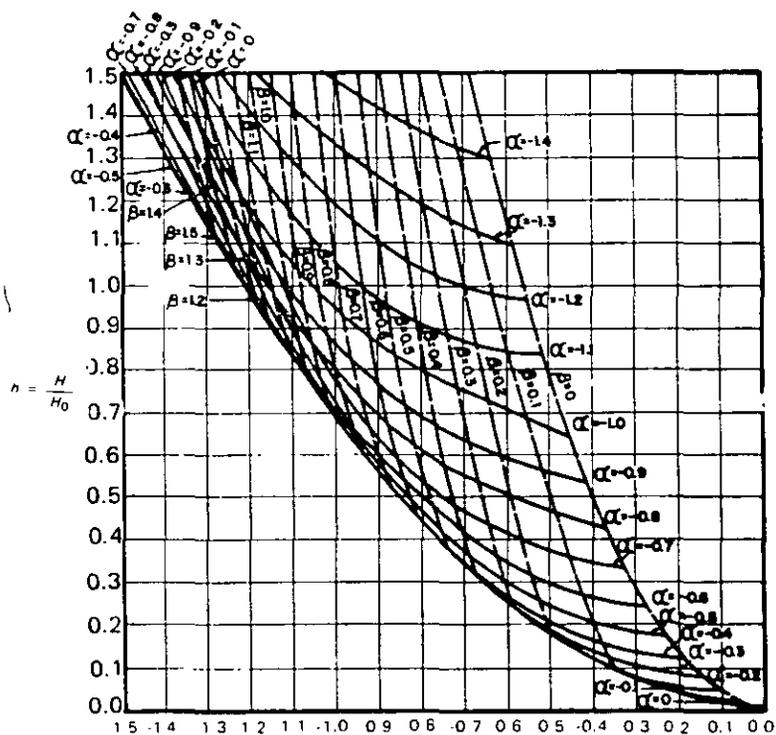


a) Zona de operación de bomba



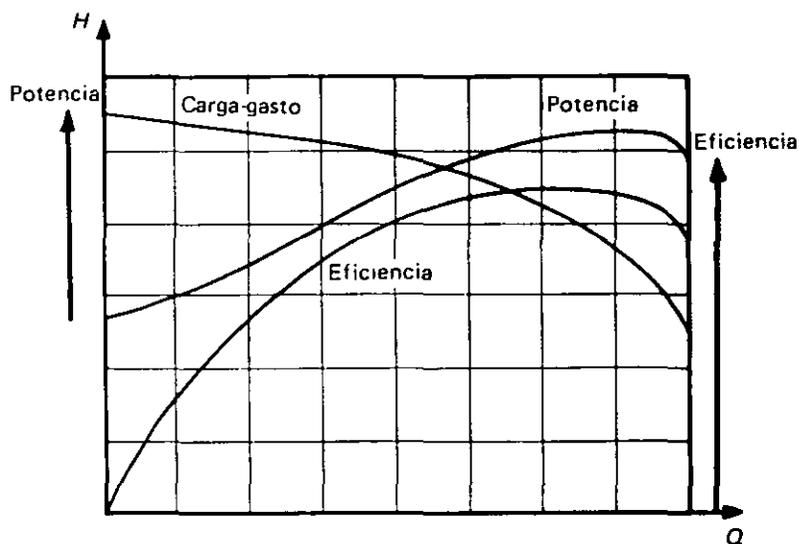
b) Zona de disipación de energía

Figura 4.4 (Referencia 9).



$$v = \frac{V}{V_0} = \frac{Q}{Q_0}$$

c) Zona de operación como turbina



d) Curvas para la velocidad angular normal de operación

Figura 4.4 (continuación)

$$H = a + \frac{b}{N}Q + \frac{c}{N^2}Q^2 \quad (4.9)$$

Por otra parte, con base en las ecuaciones (2.32) y (2.33) se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{H_i}{H} = \alpha_i^2 \quad \text{y} \quad \frac{Q_i}{Q} = \alpha_i$$

que sustituidas en la (4.9) da como resultado:

$$H_i = a\alpha_i^2 + \frac{b}{N}\alpha_i Q_i + \frac{c}{N^2}Q_i^2 \quad (4.9a)$$

Introduciendo los parámetros adimensionales $h_i = \frac{H_i}{H_o}$ y $v_i = \frac{Q_i}{NQ_o}$ siendo Q_o el gasto suministrado por cada bomba y H_o la carga normal de operación, la ecuación anterior adquiere la forma adimensional:

$$h_i = A_b \alpha_i^2 + B_b \alpha_i v_i + C_b v_i^2, \quad \alpha_i > 0, v_i \geq 0 \quad (4.10)$$

donde

$$A_b = \frac{a}{H_o}, \quad B_b = \frac{bQ_o}{H_o} \quad \text{y} \quad C_b = \frac{cQ_o^2}{H_o}$$

y representa a una familia de curvas con parámetro α semejante a la que se muestra en la figura 4.4a.

Una vez determinada la ecuación anterior, si ésta se sustituye en la 4.8, después de hacer operaciones y despejar a v_i se obtiene:

$$v_i = \frac{-(B_b \alpha_i - 2\epsilon) + \sqrt{(B_b \alpha_i - 2\epsilon)^2 - 4C_b(A_b \alpha_i^2 + h_{i-1} + 2\epsilon v_{i-1} - 2)}}{2C_b} \quad (4.11)$$

ecuación que permite obtener la magnitud de v_i a partir de las constantes A_b , B_b y C_b , así como de los valores h_{i-1} , v_{i-1} , 2ϵ y α_i previamente calculados, y determinar después el de h_i de la ecuación (4.8) para la zona de operación de bomba.

4.6 GOLPE DE ARIETE EN LA BOMBA CUANDO EXISTE VÁLVULA DE NO RETROCESO EN LA TUBERÍA DE DESCARGA

Si en la tubería de descarga existe una válvula de no retroceso y se parte de la hipótesis de que ésta cierra instantáneamente cuando se invierte el flujo en la bomba, el golpe de ariete en esta última estará regido por las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.11) y el tiempo t_o que transcurre desde la interrupción de energía hasta el cierre de la válvula dependerá de la inercia de los elementos giratorios, de la eficiencia, gasto, carga de operación del equipo y la magnitud de la celeridad de onda en la tubería. De acuerdo con lo anterior y por la definición de los parámetros K_b y 2ϵ se puede escribir:

$$t_o = f(K_b, T, 2\epsilon)$$

Así, cuando el valor de t_o resulta ser menor o igual al período T , se dice que el paro de la bomba es rápido, y si $t_o > T$ éste se conoce como lento.

Aquí, es importante subrayar que la magnitud de la carga mínima h_{\min} en la bomba ($x = 0$), es independiente de la presencia de la válvula de no retroceso si el paro es lento.

4.6.1 Golpe de ariete en paros rápidos

Si el valor de v_i dado por la ecuación (4.11) es igual a cero cuando $i \leq 1$, se tendrá que $h_{i-1} = v_{i-1} = 1$, lo cual conduce a:

$$A_b \alpha_i^2 + 2\epsilon - 1 = 0 \quad (4.12)$$

sustituyendo en esta ecuación la (4.6), el valor de $K_b T i$ resulta:

$$K_b T i = \sqrt{\frac{A_b}{1 - 2\epsilon}} - 1 \quad (4.13)$$

donde puede verse que el parámetro 2ϵ deberá ser menor que la unidad. Si el segundo miembro de esta ecuación se designa como f_p se obtiene:

$$f_p = K_b T i \quad (4.14)$$

que es la ecuación de una hipérbola equilátera en el plano $K_b T - i$, cuya representación se muestra en la figura 4.5 donde el valor mínimo de $K_b T$ corresponde a un valor de $i = 1$, y el máximo es del orden de 5.00.

Por otra parte, si en la ecuación (4.8) se hace $h_i = h_{\min}$, $h_{i-1} = v_{i-1} = 1$ y $v_i = 0$, se tendrá:

$$h_{\min} = 1 - 2\epsilon \quad (4.15)$$

Al sustituir esta última en la misma ecuación, con $v_i = v_{i-1} = 0$, resulta:

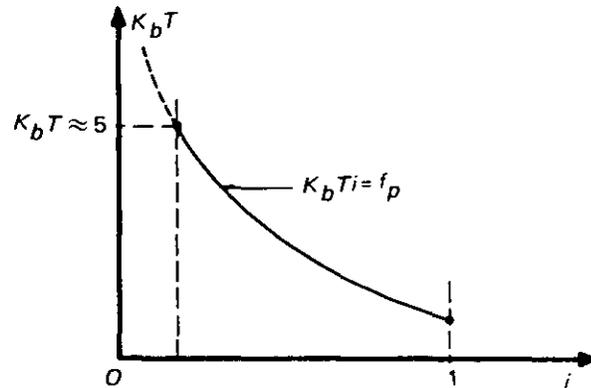


Figura 4.5

$$h_{\text{máx}} = 1 + 2\epsilon \quad (4.16)$$

y de estas dos últimas ecuaciones se deduce que:

$$h_{\text{mín}} + h_{\text{máx}} = 2 \quad (4.16a)$$

De acuerdo con lo anterior, se concluye que la existencia de un paro rápido en un equipo de bombeo implica necesariamente que $2\epsilon < 1$, y valores de $K_b T$ tales que $K_b T \geq f_p$; además, en este caso particular de paro, es importante destacar que la magnitud de las cargas extremas $h_{\text{máx}}$ y $h_{\text{mín}}$ no depende del momento de inercia del conjunto bomba-motor.

Finalmente, si en la ecuación (4.14) se hace $i = \frac{t_o}{T}$ se tendrá:

$$t_o = \frac{f_p}{K_b} \quad (4.17)$$

4.6.2 Golpe de ariete en paros lentos

De acuerdo a lo señalado en la sección anterior, se deduce que cuando $2\epsilon \geq 1$ y $K_b T < f_p$, se tendrá un paro lento en el equipo de bombeo. En estas condiciones el gasto suministrado por la bomba será mayor que cero cuando $i = 1$ y el valor de la carga h seguirá disminuyendo después de este instante hasta llegar a un mínimo en otro posterior, en el cual se pueden distinguir dos casos:

- El instante $i > 1$ asociado a la carga mínima, corresponde aproximadamente al de la condición de gasto igual a cero (figura 4.6a).
- El instante $i > 1$ asociado a la carga mínima no corresponde a la condición $v = 0$, misma que tendrá lugar en un instante posterior (figura 4.6b).

En el primer caso, el valor de esta carga siempre será positivo, y puede aceptarse que coincide con el de la condición $v = 0$; en el segundo caso el valor puede ser incluso negativo, aunque siempre alcanzará uno positivo cuando $v = 0$.

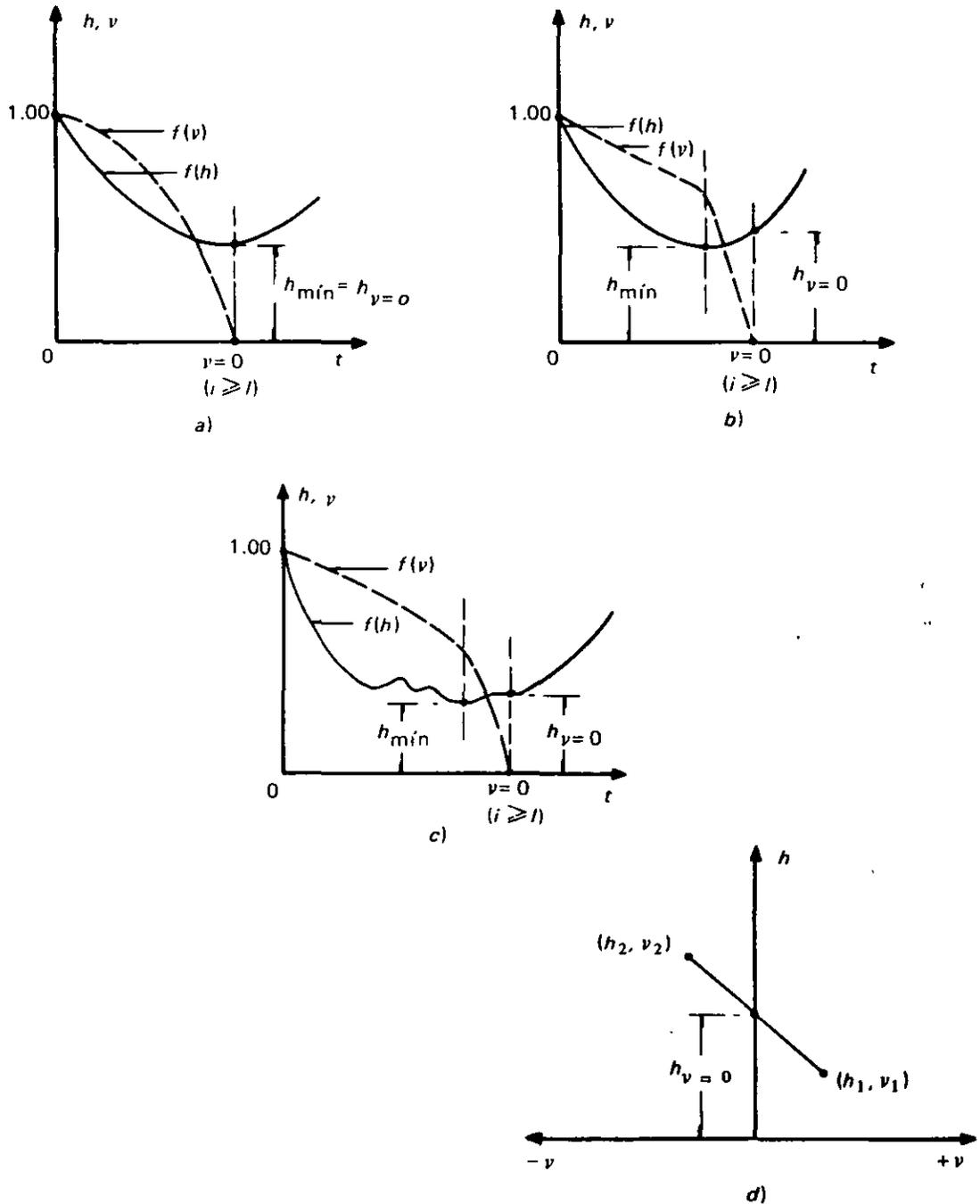


Figura 4.6

El procedimiento de cálculo para las cargas $h_{m\acute{i}n}$ y la asociada a la condición $v = 0$ que se designa como $h_{v=0}$, y tiene lugar en el instante $i_{v=0}$, consiste en aplicar las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.11) con $\Delta i = 0.250$ desde $i = 0.000$ hasta $i = i_{v=0}$, y se pueden obtener en algunos casos pequeñas oscilaciones de carga en la bomba antes de conocer la magnitud de la carga mínima en esta última (figura 4.6c); además, con relación al cálculo de $h_{v=0}$, rara vez se llegará a un valor de v exactamente igual a cero y generalmente se obtendrá un par de valores h_1 y v_1 positivos en el instante $i_{v=0} - 0.250$, que en el siguiente $i = i_{v=0}$, conducirán a otro donde $v_2 < 0$ y $h_2 > 0$. Para fines prácticos es posible realizar una interpolación lineal entre los puntos que definen ambos pares en el plano $h - v$, tal como se muestra en la figura 4.6d, de la que se deduce:

$$h_{v=0} = h_1 - \left(\frac{h_1 - h_2}{v_1 - v_2} \right) v_1 \quad (4.18)$$

Por lo que se refiere a la carga máxima, ésta se presentará en la bomba T seg después del cierre de la válvula, y el procedimiento de cálculo sugerido es el mismo que antes se describió para determinar $h_{m\acute{i}n}$ y $h_{v=0}$, pero por el efecto de la válvula se tendrá ahora que $v_i = 0$ y sólo se requiere la aplicación de la ecuación (4.8) desde el instante $i_{v=0}$ hasta $i \leq i_{v=0} + 2.00$, con lo que dicha ecuación adquiere la forma:

$$h_i = 2 - h_{i-1} - 2\epsilon v_{i-1} \quad (4.19)$$

o bien, si $h_{i-1} = h_{v=0}$ y $v_{i-1} = 0$ resulta:

$$h_{v=0} + h_{m\acute{a}x} = 2 \quad (4.20)$$

Como puede verse, en la última ecuación el cálculo de $h_{m\acute{a}x}$ se puede efectuar fácilmente una vez que ha sido determinada $h_{v=0}$, y su aplicación en lugar de la (4.19) es conveniente cuando sólo se desea determinar la carga en la bomba. Obsérvese que si $h_{v=0} = h_{m\acute{i}n}$, la ecuación (4.20) se reduce a la (4.16a).

Con la finalidad de conocer la magnitud aproximada de $h_{m\acute{i}n}$ y $h_{m\acute{a}x}$ en el equipo de bombeo, en las figuras 4.7a y b se presentan unas cartas elaboradas por el autor que se pueden utilizar cuando se presenta una interrupción brusca en la operación y existe una válvula de no retorno en la tubería de descarga, para valores de $0.10 \leq K_b T \leq 5.00$ y $0.50 \leq 2\epsilon \leq 8$. Estas cartas fueron realizadas en base a datos obtenidos de la referencia 8, para bombas centrífugas con una velocidad específica $n_s = 25$ y mediante la aplicación del método de las características, cuya descripción se realizará en el capítulo 5. Aquí es importante aclarar que los resultados obtenidos de

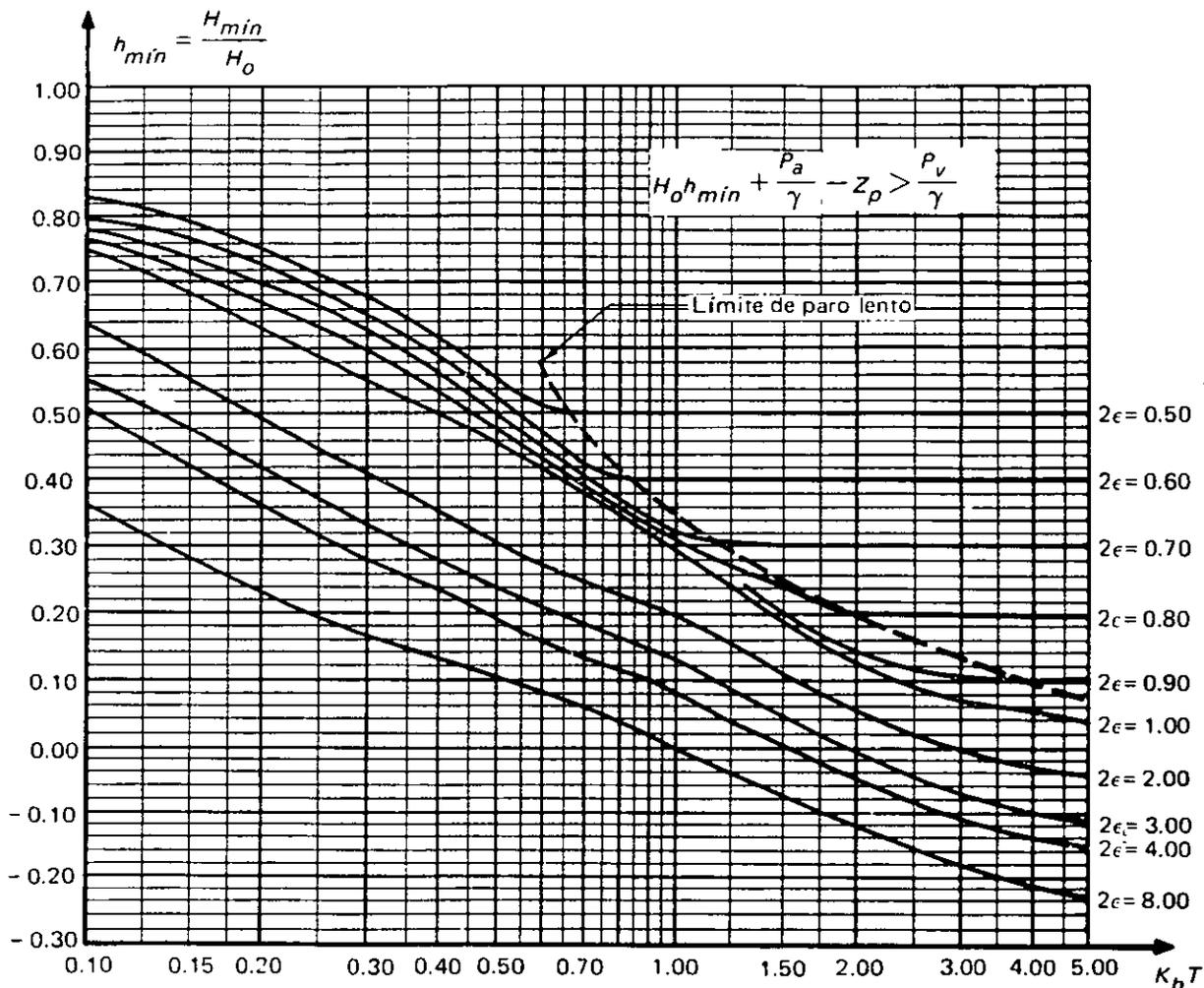


Figura 4.7 Cartas para bombas cuando se presenta una interrupción brusca en la operación y existe una válvula de no retorno en la tubería de descarga, a) Carga mínima en la bomba.

la figura 4.7a sólo son aplicables si la carga mínima absoluta de presión resultante, es mayor que la de vaporización del agua, es decir si:

$$H_0 h_{\min} + \frac{P_a}{\gamma} - Z_p > \frac{P_v}{\gamma}$$

donde P_a es la presión atmosférica y Z_p la carga de posición en la sección $x = 0$.

4.7 GOLPE DE ARIETE EN CUALQUIER SECCIÓN DE LA TUBERÍA DE DESCARGA

En forma semejante a lo visto en la sección 3.13.1, a partir de las ecuaciones de Allievi (3.28) y (3.29), se puede demostrar que las ecuaciones de Angus para el caso en estudio adquieren la forma:

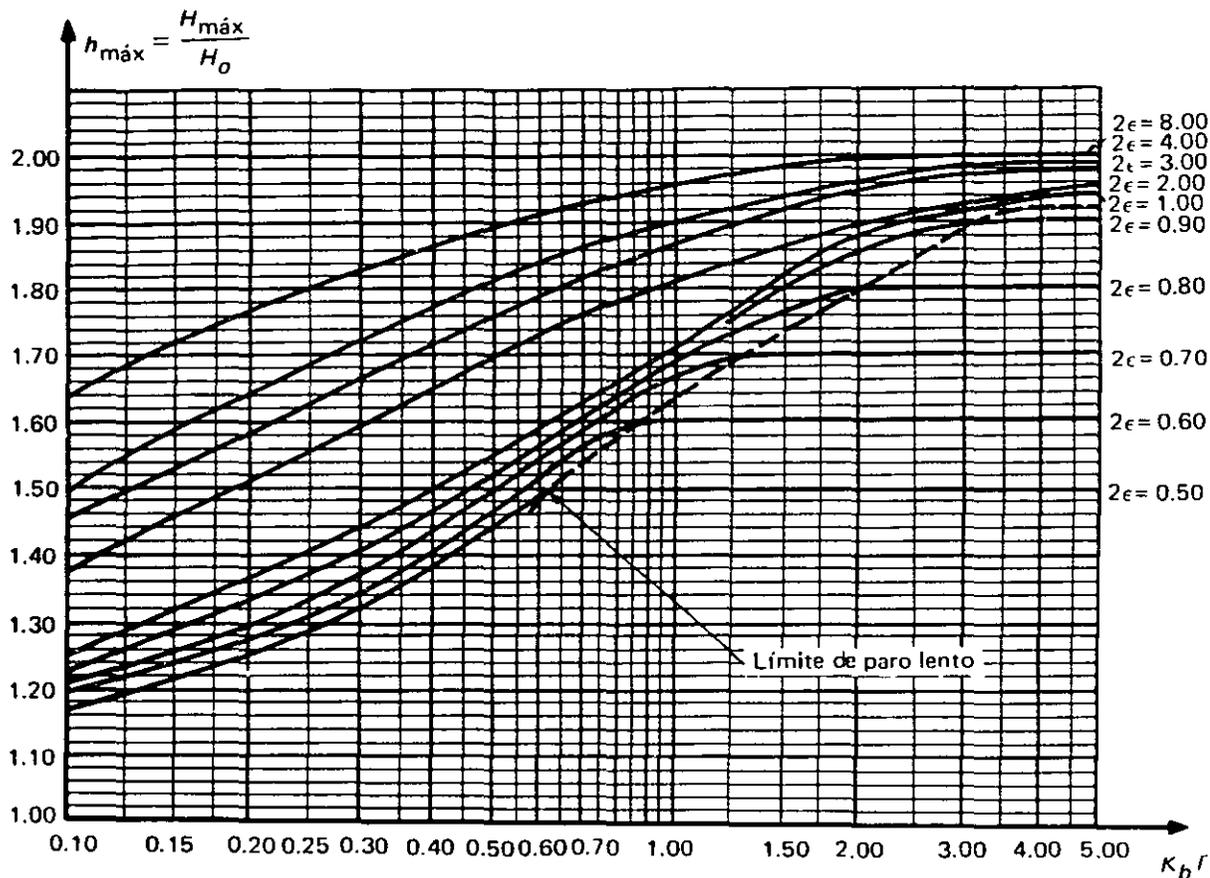


Figura 4.7 b) Carga máxima en la bomba.

$$h(x, i) = \frac{1}{2} [h_h + h_j - 2\epsilon (v_j - v_h)] \quad (4.21)$$

con

$$h = i - \frac{x}{2L} \quad (4.22)$$

y

$$j = i + \frac{x}{2L} \quad (4.23)$$

donde $h(x, i)$ es la carga piezométrica adimensional en la sección x y el instante i (figura 4.8), que depende de la carga y velocidad adimensionales en la bomba para los instantes h y j , mismas que se denotan como h_h, v_h, h_j y v_j respectivamente.

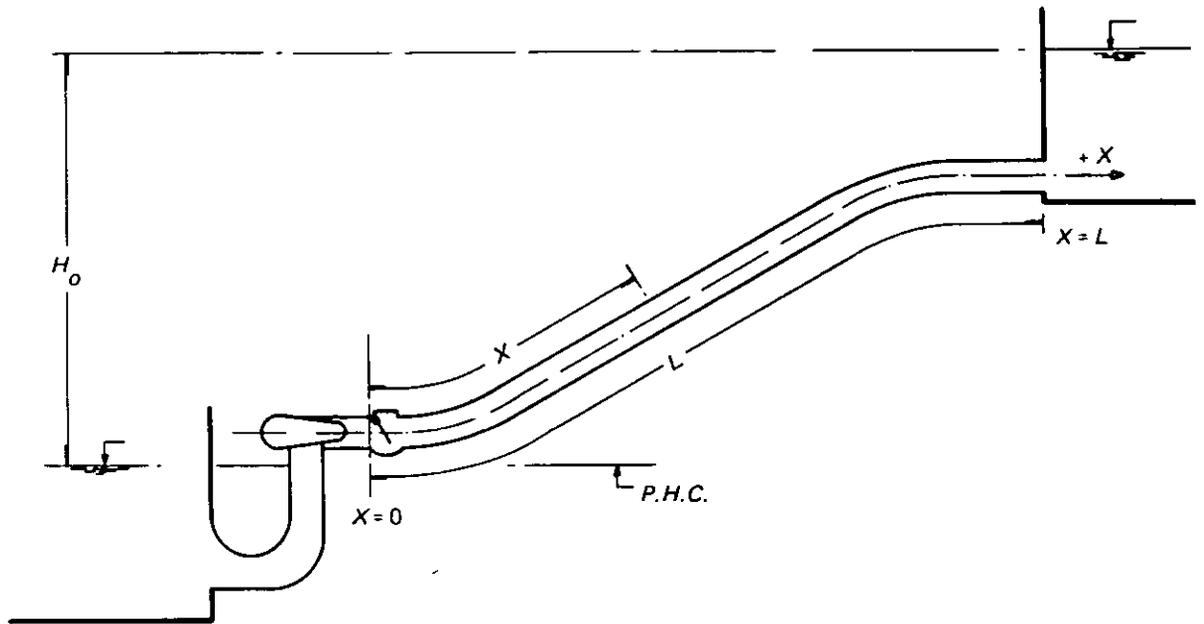


Figura 4.8

4.7.1 Golpe de ariete en paros rápidos

En la sección 3.13.2 se trató el caso de maniobras rápidas en el órgano de control de un conducto por gravedad y se vio que existe un punto de discontinuidad en la línea de cargas cuya ubicación depende del tiempo empleado para llevar a cabo la maniobra. En la tubería de descarga de una planta de bombeo, cuando el paro de los equipos es rápido, se presenta un fenómeno con características muy semejantes a las del conducto antes mencionado, de tal manera que la magnitud de las cargas máxima y mínima que tienen lugar en los equipos será la misma a lo largo de la tubería hasta una sección x donde existirá un punto de discontinuidad en la línea de cargas. El valor de x se deduce de las ecuaciones (4.22), (4.23) y (4.14) haciendo $h = \frac{f_p}{K_b T}$, $j = 1$ y con un razonamiento análogo al efectuado en la citada sección, mismo que permite escribir:

$$x_m = \left(1 - \frac{f_p}{K_b T}\right)L, \quad \frac{f_p}{K_b T} \leq 1 \quad (4.24)$$

De esta ecuación y la (4.14), puede concluirse que si $\frac{f_p}{K_b T} = 1$, ($h = 1$) se tendrá el límite de transición entre un paro rápido y uno lento que conduce a un valor de $x_m = 0$, y con esto la magnitud de la carga en la bomba evolucionará en forma gradual desde ésta hasta el depósito (figura 4.9a); asimismo, si se acepta un valor máximo de $K_b T$ del orden de 5, la coordenada x asociada a éste resulta (figura 4.9b):

$$x_{m\acute{a}x} = \left(1 - \frac{f_p}{5}\right)L \quad (4.25)$$

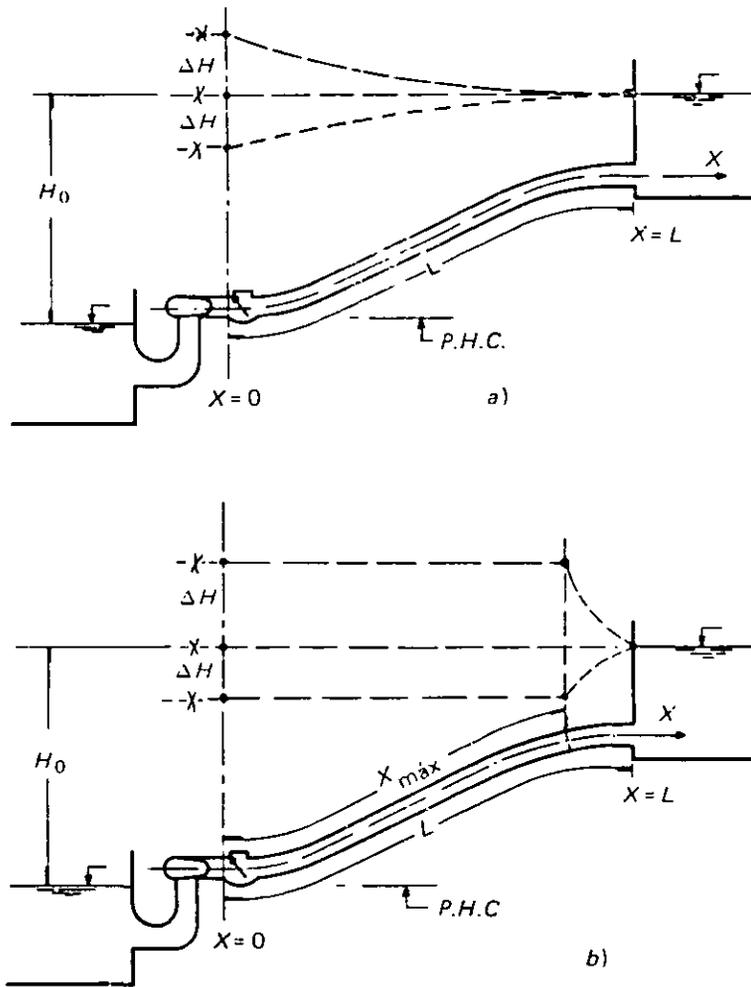


Figura 4.9

De acuerdo con lo anterior, de las ecuaciones (4.21) a (4.23) con $h_n = h_j = h_m$, $v_n = v_j = 0$, y definiendo a h_m como la carga máxima o mínima en la bomba se obtiene:

$$h(x, i) = h_m \quad (4.26)$$

con

$$i = \frac{1 + \frac{f_p}{K_b T}}{2} \quad (4.27)$$

para la carga mínima o:

$$i = \frac{3 + \frac{f_p}{K_b T}}{2} \quad (4.28)$$

para la carga máxima con valores de x tal que:

$$0 \leq x \leq \left(1 - \frac{f_p}{K_b T}\right)L$$

4.7.2 Golpe de ariete en paros lentos

Para esta condición de paro la variación de la carga adimensional h respecto al tiempo en una sección x de la tubería de descarga, se determina con la aplicación de la ecuación (4.21), en base al cálculo previo de dicha variación en la bomba para los instantes:

$$i = -\frac{x}{2L}, 0.00, \frac{x}{2L}, 0.250 - \frac{x}{2L}, 0.250, 0.250 + \frac{x}{2L}, 0.500 - \frac{x}{2L}, \\ 0.500, 0.500 + \frac{x}{2L}, \dots, n - \frac{x}{2L}, n, n + \frac{x}{2L}$$

donde

$$n \leq i_{v=0} + 2.00$$

y el orden progresivo de los instantes dependerá del valor de x .

Ahora bien, si se efectúa un razonamiento semejante al realizado en la sección 3.13.3, se obtienen las siguientes ecuaciones para el caso de la onda directa con $h = i_d$ y $h_h = h_d$.

$$h = i_d \quad (4.29)$$

$$j = i_d + \frac{x}{L} \quad (4.30)$$

$$i = i_d + \frac{x}{2L} \quad (4.31)$$

$$h_d(x, i) = \frac{1}{2} [h_d + h_j - 2\epsilon(v_j - v_h)] \quad (4.32)$$

y para la onda reflejada con $j = i_r$ y $h_j = h_r$:

$$h = i_r - \frac{x}{L} \quad (4.33)$$

$$j = i_r \quad (4.34)$$

$$i = i_r - \frac{x}{2L} \quad (4.35)$$

$$h_r(x, i) = \frac{1}{2} [h_h + h_r - 2\epsilon(v_j - v_h)] \quad (4.36)$$

En consecuencia, si el cálculo hidráulico en la bomba se lleva a cabo para los instantes $i = 0.000, 0.250, 0.500, \dots, n - 0.250, n$ donde $n \leq i_{v=0} + 2.000$, es posible conocer los valores de la carga máxima y mínima en las secciones $x = \frac{L}{4}, \frac{L}{2}, \frac{3L}{4}$ y L de la tubería de descarga, mediante la aplicación del siguiente procedimiento:

1. Una vez efectuado el cálculo hidráulico en la bomba, el instante i_m en el cual se presenta en la carga extrema h_m máxima o mínima se designa como i_d y se sustituye en las expresiones $h = i_d, j = i_d + \frac{x}{L}$.
2. Conocidos los valores de h y j , se encuentran los de $h_j, 2\epsilon v_j, 2\epsilon v_h$ y h_d con $h_d = h_m$ y se sustituyen en la ecuación (4.32), con lo cual se obtiene la carga $h_d(x, i)$, donde $i = i_d + \frac{x}{L}$.
3. Se repite el paso No. 1, haciendo $i_m = i_r$ en las expresiones $j = i_r$ y $h = i_r - \frac{x}{L}$.
4. Se encuentran los valores de $h_h, 2\epsilon v_h, 2\epsilon v_j$ y h_r con $h_r = h_m$ y se sustituyen en la ecuación (4.36), que da como resultado la magnitud de la carga $h_r(x, i)$, donde $i = i_r - \frac{x}{L}$.
5. Si la carga extrema en la bomba h_m es máxima, la correspondiente a la sección que se analiza será la que resulte mayor al comparar h_d y h_r , y en caso contrario será la menor.

4.8 ANÁLISIS APROXIMADO EN PLANTAS DE BOMBEO CUANDO LA TUBERÍA DE DESCARGA TIENE CARACTERÍSTICAS VARIABLES

Como pudo verse en la sección 3.14, los procedimientos para hacer el análisis de conductos por gravedad con características geométricas y/o elásticas variables, no dependen de los elementos ubicados en las fronteras (depósito y órgano de control), por lo que también pueden ser aplicados al caso de una planta de bombeo que tenga una línea de descarga con características variables.

4.9 CAVITACIÓN Y SEPARACIÓN DE COLUMNA EN PLANTAS DE BOMBEO

Estos fenómenos definidos en la sección 3.15 para el caso de conductos por gravedad, también se pueden presentar en los equipos de bombeo y las tuberías de succión y descarga de los mismos, en situaciones tales como una falla en el suministro de energía, causando en ocasiones graves daños. Las secciones de esta última tubería que son más susceptibles a la presencia de la cavitación y separación de columna, son las indicadas como A y B respectivamente en la figura 4.10.

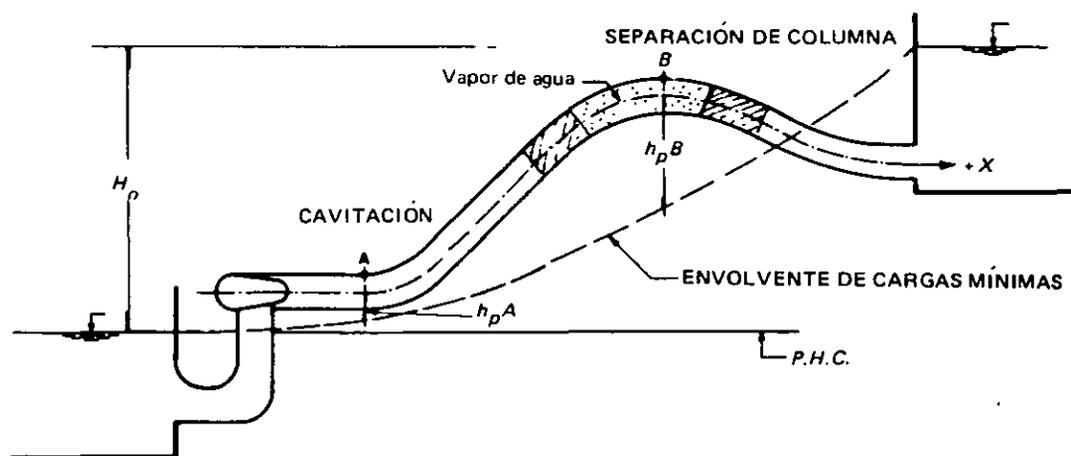


Figura 4.10 Cavitación y separación de columna en plantas de bombeo.

4.10 GOLPE DE ARIETE DURANTE EL ARRANQUE DE UN BOMBA

Los efectos del golpe de ariete debidos al arranque normal de una bomba centrífuga generalmente son despreciables. Sin embargo, con objeto de reducir tales efectos, generalmente se instala una válvula de seccionamiento en la tubería de descarga inmediatamente aguas abajo de los equipos que permanece cerrada durante el proceso de arranque y aceleración de los mismos hasta llegar a la velocidad normal de operación.

Posteriormente, se abre la válvula lentamente hasta llegar a la condición de flujo permanente, lo cual se logra con un grado de apertura menor del 10% del total debido a que las pérdidas de carga después de éste se reducen considerablemente.

4.11 GOLPE DE ARIETE EN LA TUBERÍA DE SUCCIÓN

En las secciones anteriores se ha concentrado la atención al golpe de ariete exclusivamente en la bomba y la tubería de descarga. No obstante, cualquier cambio de la magnitud del gasto en esta última se presenta también en la de succión y como consecuencia el golpe de ariete. Sin embargo, si se toma en cuenta que su longitud es generalmente pequeña, los efectos que produce el fenómeno resultan despreciables y es poco frecuente que ocurra una falla por esta causa.

4.12 EJEMPLOS

Ejemplo 4.1

Determinar la carga de presión máxima y mínima en las secciones $x = 0, \frac{L}{4}, \frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$, en la tubería de descarga de la planta de bombeo que se muestra en la figura, cuando en ésta se presenta una interrupción brusca en el suministro de energía considerando que sólo existe un equipo en operación cuya curva característica adimensional está definida como:*

$$h_i = 1.333\alpha_i^2 - 0.056 \alpha_i v_i - 0.278 v_i^2, \alpha_i > 0, v_i \geq 0$$

donde la carga H_o está referida al P.H.C. que se indica.

Solución

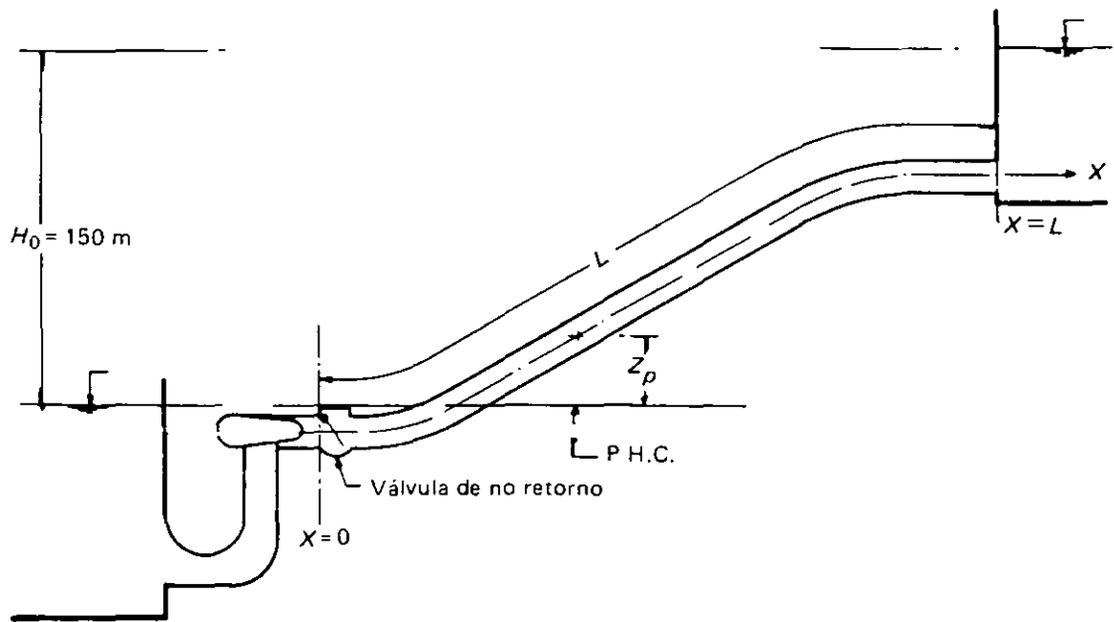
De acuerdo con la definición del parámetro 2ϵ y el período T se obtiene:

$$2\epsilon = \frac{(1.000)(1.77)}{(9.81)(150)} = 1.203, T = \frac{(2)(386)}{1.000} = 0.772 \text{ seg}$$

luego, según lo indicado en la sección 4.7.2 se tendrá un paro lento del equipo de bombeo. De la ecuación (4.6) resulta:

$$\alpha_i = \frac{1}{K_b T i + 1} \quad (\text{ecuación 1})$$

*Se considera que el gasto de operación corresponde aproximadamente a la carga sin tomar en cuenta el efecto de fricción.



$D = 0.610 \text{ m.}$
 $L = 386 \text{ m.}$
 $a = 1,000 \text{ m/seg.}$
 $Q_0 = 0.517 \text{ m}^3/\text{seg. por bomba.}$
 $V_0 = 1.77 \text{ m/seg}$
 $\frac{WR^2}{g} = 18 \text{ kg m seg}^2, \text{ por bomba}$
 $n_0 = 1,440 \text{ r.p.m.}$
 $\lambda_0 = 0.80$

NÚMERO DE EQUIPOS EN OPERACIÓN : 1

X/L	Z _p (m.)
0	-3.00
L/4	0.00
L/2	65.00
3L/4	125.00

Figura E4.1 y E4.2

donde

$$K_b T = \frac{(900) (1,000) (0.517) (150) (0.772)}{(0.80) (18) [(\pi) (1,440)]^2} = 0.183$$

y de las ecuaciones (4.8) y (4.11):

$$h_i = (2 - 2\epsilon v_{i-1}) + (2\epsilon v_i - h_{i-1}) \quad (\text{ecuación 2})$$

$$v_i = \sqrt{b^2 + c} - b \quad (\text{ecuación 3})$$

con:

$$b = \frac{B_b \alpha_i - 2\epsilon}{2C_b} = \frac{-0.056 \alpha_i - 1.203}{-0.556}$$

$$c = \frac{2 - 2\epsilon v_{i-1} - A_b \alpha_i^2 - h_{i-1}}{C_b} = \frac{2 - 1.203 v_{i-1} - 1.333 \alpha_i^2 - h_{i-1}}{-0.278}$$

En forma semejante al caso de conductos por gravedad, aquí también se resuelven las ecuaciones (1), (2) y (3) de acuerdo con la siguiente tabla de cálculo:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
i	α_i	b	b^2	c	$2 - \frac{2\epsilon v_{i-1}}{h_{i-1}}$	$A_b \alpha_i^2$	$2\epsilon v_{i-1} - h_{i-1}$	h_i	v_i
0.000	1.000	2.264	5.127	5.525	0.797	1.333	0.203	1.000	1.000
0.250	0.956	2.260	5.107	5.112	0.797	1.218	0.217	0.924	0.937
0.500	0.916	2.256	5.089	4.752	0.797	1.118	0.060	0.857	0.881
0.750	0.879	2.252	5.072	4.435	0.797	1.030	0.000	0.797	0.831
1.000	0.845	2.249	5.057	4.155	0.797	0.952	-0.054	0.743	0.786
1.250	0.814	2.246	5.043	3.360	0.873	0.883	-0.138	0.735	0.653
1.500	0.785	2.243	5.030	2.655	0.940	0.821	-2.221	0.719	0.529
1.750	0.757	2.240	5.017	2.018	1.000	0.764	-0.301	0.699	0.412
2.000	0.732	2.237	5.006	1.450	1.054	0.714	-0.377	0.677	0.304
2.250	0.708	2.235	4.995	0.680	1.214	0.668	-0.558	0.656	0.147
2.500	0.686	2.233	4.985	-0.065	1.364	0.627	-0.737	0.627*	-0.015
2.750	—	—	—	—	1.504	—	-0.699	0.805	0.000
3.000	—	—	—	—	1.634	—	-0.677	0.957	0.000
3.250	—	—	—	—	1.823	—	-0.656	1.167	0.000
3.500	—	—	—	—	2.000	—	-0.630	1.370	0.000
3.750	—	—	—	—	2.000	—	-0.805	1.195	0.000
4.000	—	—	—	—	2.000	—	-0.957	1.043	0.000
4.250	—	—	—	—	2.000	—	-1.167	0.833	0.000
4.500	—	—	—	—	2.000	—	-1.370	0.630	0.000

*Se considera que $v_i = 0$ y $h_i = 0.630$ (cierra válvula de no retorno).

En la columna (1) se indican los instantes i con un incremento $\Delta i = 0.250$, desde $i \leq 0.000$ hasta $i = 4.500$.

En la columna (2) se resuelve la ecuación (1), en las (3) y (4) se calculan los valores de b y b^2 respectivamente; en las (6) y (7) se anotan los correspondientes a $2 - 2\epsilon v_{i-1}$ y $A_b \alpha_i^2$, que junto con el de h_{i-1} permiten calcular el valor de c que aparece en la columna (5), y en la (10) el valor de v_i que resulta de la ecuación (3).

Finalmente, en la columna (8) se calcula el valor de $2\epsilon v_i - h_{i-1}$ que conduce al de h_i que aparece en la (9) como resultado de la aplicación de la ecuación 2.

Así, por ejemplo, para $i = 0.250$ se tendrá:

$$\alpha_i = \frac{1}{(0.183)(0.250) + 1} = 0.956,$$

$$b = \frac{(0.056)(0.956) + 1.203}{0.556} = 2.260, \quad b^2 = 5.107,$$

$$2 - 2\epsilon v_{i-1} = 2 - 2\epsilon v_{0.750} = 2 - (1.203)(1.000) = 0.797,$$

$$A_b \alpha_i^2 = (1.333)(0.956)^2 = 1.218,$$

$$c = \frac{2 - 2\epsilon v_{i-1} - A_b \alpha_i^2 - h_{i-1}}{C_b} = \frac{0.797 - 1.218 - 1.000}{-0.278} = 5.112$$

$$v_i = \sqrt{5.107 + 5.112} - 2.260 = 0.937, \quad (\text{ecuación 3})$$

$$2\epsilon v_i - h_{i-1} = (1.203)(0.937) - 1.000 = 0.127,$$

$$h_i = 0.797 + 0.127 = 0.924 \quad (\text{ecuación 2})$$

para $i = 2.500$:

$$\alpha_i = \frac{1}{(0.183)(2.500) + 1} = 0.686$$

$$b = \frac{(0.056)(0.686) + 1.203}{0.556} = 2.233, \quad b^2 = 4.985$$

$$2 - 2\epsilon v_{i-1} = 2 - (1.203)(0.529) = 1.364$$

$$A_b \alpha_i^2 = (1.333)(0.686)^2 = 0.627$$

$$c = \frac{1.364 - 0.627 - 0.719}{-0.278} = -0.065$$

$$v_i = \sqrt{4.985 - 0.065} - 2.233 = -0.015$$

$$2ev_i - h_{i-1} = -(1.203)(0.015) - 0.719 = -0.737$$

$$h_i = 1.364 - 0.737 = 0.627$$

Como puede observarse, en este instante se presenta la inversión del flujo en la bomba, por lo que de la ecuación (4.18) se obtiene:

$$h_{v=0} = 0.656 - \left(\frac{0.656 - 0.627}{0.147 + 0.015} \right) (0.147) = 0.630$$

con

$$i_{v=0} = 2.500$$

A partir de este instante se tendrá que $v_i = 0$ y la ecuación (2) se reduce a:

$$h_i = 2 - 2ev_{i-1} - h_{i-1}$$

resultando que para $i = 3.500$:

$$h_{3.500} = 2 - 2ev_{2.500} - h_{2.500} = 2.000 - 0.630 = 1.370$$

De acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 4.7.2, de los pasos 1 y 2, resulta la siguiente tabla:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
<i>Onda directa</i>								
<i>Carga Extrema</i>	<i>Sección</i>	i_d	j	h_j	$-2ev_j$	$h_d + 2ev_h$	$h_d(x, i)$	i
Máxima	0	3.500	3.500	1.370	0.000	1.370	1.370	3.500
	L/4	3.500	3.750	1.195	0.000	1.370	1.283	3.625
	L/2	3.500	4.000	1.043	0.000	1.370	1.207	3.750
	3L/4	3.500	4.250	0.833	0.000	1.370	1.102	3.875
Mínima	0	2.500	2.500	0.630	0.000	0.630	0.630	2.500
	L/4	2.500	2.750	0.805	0.000	0.630	0.718	2.625
	L/2	2.500	3.000	0.957	0.000	0.630	0.794	2.750
	3L/4	2.500	3.250	1.167	0.000	0.630	0.899	2.875

y de los pasos 3 y 4:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
<i>Onda reflejada</i>								
<i>Carga extrema</i>	<i>Sección</i>	i_r	h	h_h	$2\epsilon v_h$	$h_r - 2\epsilon v_j$	$h_r(x, i)$	i
Máxima	0	3.500	3.500	1.370	0.000	1.370	1.370	3.500
	L/4	3.500	3.250	1.167	0.000	1.370	1.269	3.375
	L/2	3.500	3.000	0.957	0.000	1.370	1.164	3.250
	3L/4	3.500	2.750	0.805	0.000	1.370	1.088	3.125
Mínima	0	2.500	2.500	0.630	0.000	0.630	0.630	2.500
	L/4	2.500	2.250	0.656	0.177	0.630	0.732	2.375
	L/2	2.500	2.000	0.677	0.366	0.630	0.837	2.250
	3L/4	2.500	1.750	0.699	0.496	0.630	0.913	2.125

Así, por ejemplo, para la sección $x = \frac{L}{4}$, con relación a la tabla de cálculo para la onda directa del paso 1, para $h_m = h_{\text{máx}}$, se obtiene:

$$i_d = 3.500 = i_m \quad (\text{columna 3})$$

$$h = i_d = 3.500$$

$$j = i_d + \frac{x}{L} = 3.500 + 0.250 = 3.750 \quad (\text{columna 4})$$

y del paso 2:

$$h_j = 1.195 \text{ columna (5), } 2\epsilon v_j = 0.000 \quad (\text{columna 6})$$

$$h_d = 1.370, 2\epsilon v_h = 0.000$$

y de la ecuación (4.32) resulta:

$$h_d(x, i) = \frac{1}{2} \left[(h_j - 2\epsilon v_j) + (h_d + 2\epsilon v_h) \right],$$

$$h_d\left(\frac{L}{4}, i\right) = \frac{1}{2} (1.195 + 1.370) = 1.283 \quad (\text{columna 8})$$

$$\left[\frac{\text{columna (8)} = \text{columna (5)} + \text{columna (6)} + \text{columna (7)}}{2} \right]$$

$$\text{donde } i = i_d + \frac{x}{2L} = 3.500 + 0.125 = 3.625 \quad (\text{columna 9})$$

Por lo que se refiere a la onda reflejada, siguiendo el paso 3, para $h_m = h_{m\acute{a}x}$, se tiene:

$$i_r = 3.500 = i_m \quad (\text{columna 3})$$

$$j = i_r = 3.500$$

$$h = i_r - \frac{x}{L} = 3.500 - 0.250 = 3.250 \quad (\text{columna 4})$$

y el paso 4 a:

$$h_h = 1.167 \text{ (columna 5), } 2\epsilon v_h = 0.000 \text{ (columna 6), } h_r = 1.370 = h_m,$$

$2\epsilon v_j = 0.000$, luego de la ecuación (4.36):

$$h_r(x, i) = \frac{1}{2} \left[(h_h + 2\epsilon v_h) + (h_r - 2\epsilon v_j) \right],$$

$$h\left(\frac{L}{4}, i\right) = \frac{1}{2} (1.167 + 1.370) = 1.269 \quad (\text{columna 8})$$

$$\left[\frac{\text{columna (8)} = \text{columna (5)} + \text{columna (6)} + \text{columna (7)}}{2} \right]$$

$$\text{donde } i = i_d - \frac{x}{2L} = 3.500 - 0.125 = 3.375 \quad (\text{columna 9})$$

De acuerdo con el paso 5, si se examinan las dos tablas anteriores se puede elaborar la siguiente:

Sección	$h_{m\acute{a}x}$	$h_{m\acute{i}n}$	$H_{m\acute{a}x}$ (m)	$H_{m\acute{i}n}$ (m)	Z_p (m)	$hp_{m\acute{a}x}$ (m)	$hp_{m\acute{i}n}$ (m)
0	1.370	0.630	206	95	-3	209	98
L/4	1.283	0.718	192	108	0	192	108
L/2	1.207	0.794	181	119	65	116	54
3L/4	1.102	0.899	165	135	125	40	10

Finalmente, en la figura E4- 1a puede verse la evolución en el tiempo de la carga h y en la figura E- 1b las envolventes de cargas extremas.

Ejemplo 4.2

Si en el problema anterior, el diámetro de la tubería de descarga es de 0.762 m, la longitud es de 3,300 m y la celeridad de onda es 985 m/seg, calcular la carga piezométrica máxima y mínima en la bomba y la coordenada x hasta la cual se propagan éstas.

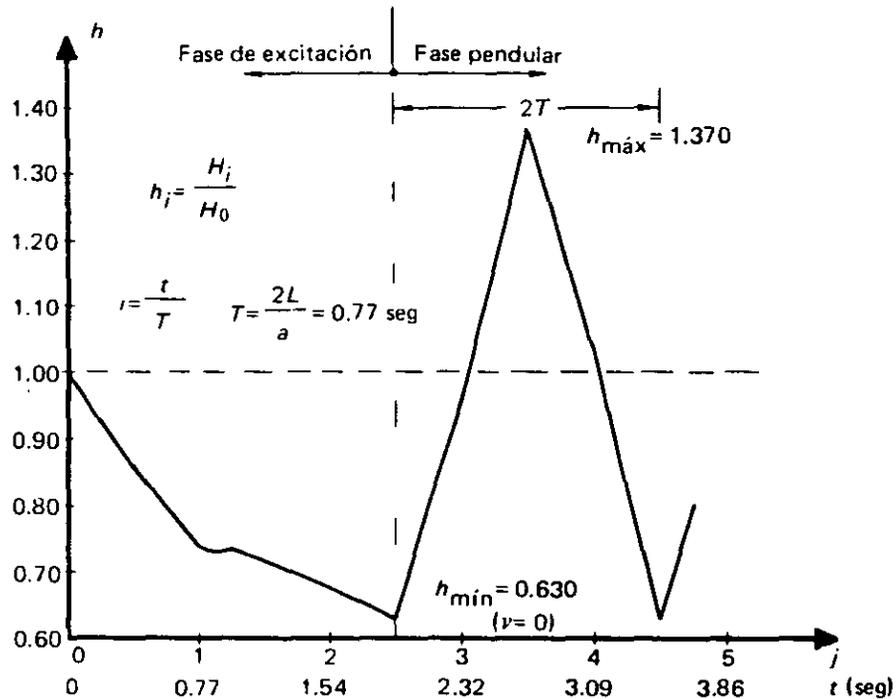


Figura E4-1a

Solución

Con estos valores resulta:

$$A = (0.785) (0.762)^2 = 0.456 \text{ m}^2, \quad V_o = \frac{0.517}{0.456} = 1.134 \text{ m/seg}$$

$$2\epsilon = \frac{(985) (1.134)}{(9.81) (150)} = 0.759 \quad T = \frac{(2) (3,300)}{985} = 6.701 \text{ seg}$$

$$K_b T = \frac{(900) (1,000) (0.517) (150) (6.701)}{(0.80) (18) [(\pi) (1,440)]^2} = 1.587$$

de las ecuaciones 4.13 y 4.14 se obtiene:

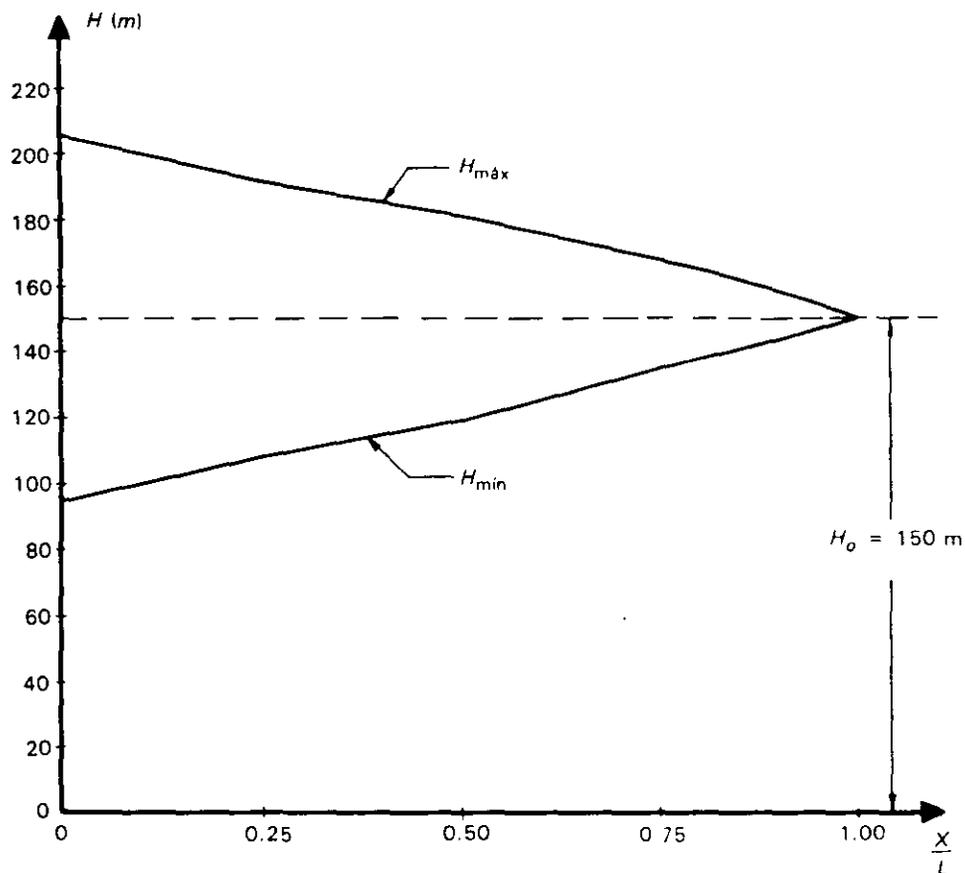


Figura E4-1b

$$f_p = \sqrt{\frac{1.333}{1 - 0.759}} - 1 = 1.351$$

$$i = \frac{1.351}{1.587} = 0.851$$

en consecuencia, como $2\epsilon < 1$ y $K_b T > f_p$, se tendrá el caso de un paro rápido cuando $i = 0.851$, y de las ecuaciones (4.15) y (4.16) para la sección $x = 0$ se tendrá:

$$h_{m\text{in}} = 1 - 0.759 = 0.241$$

y

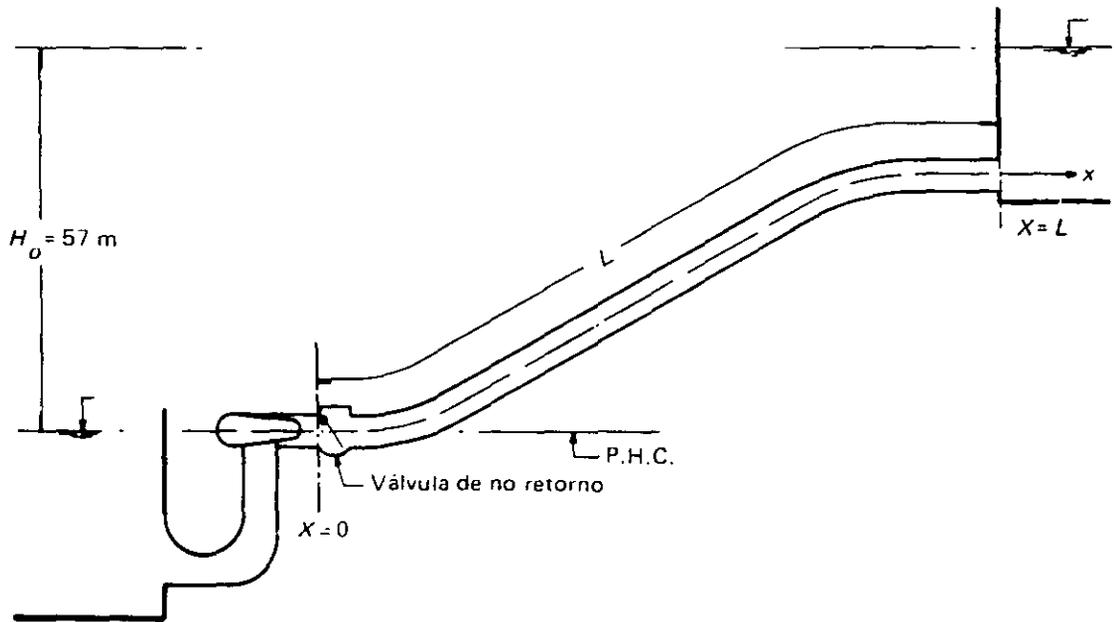
$$h_{m\text{ax}} = 1 + 0.759 = 1.759$$

por lo que se refiere a la sección x hasta la cual se propagan las cargas anteriores, la ecuación (4.24) conduce a:

$$x = \left(1 - \frac{1.351}{1.587}\right)(3.300) = 491 \text{ m}$$

Ejemplo 4.3

Calcular la carga de presión máxima y mínima en las secciones $x = 0$, $\frac{L}{4}$, $\frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$ de la tubería de descarga correspondiente a la planta de bombeo que se



$D = 3.35 \text{ m}$

$L = 1463 \text{ m}$.

$a = 1219 \text{ m/seg.}$

$Q_o = 5.81 \text{ m}^3/\text{seg.}$, por bomba.

$$\frac{WR^2}{g} = 1,397 \text{ Kg. m. seg}^2, \text{ por bomba.}$$

$n_o = 327 \text{ r.p.m.}$

$\lambda_o = 0.89$.

NÚMERO DE EQUIPOS EN OPERACIÓN. 2

X/L	Z_p (m)
0	0.00
$L/4$	1.00
$L/2$	22.00
$3L/4$	33.00

Figura E4.3

muestra en la figura E4.3 cuando en ésta se presenta una interrupción brusca de energía, considerando que existen dos equipos en operación, cuya curva característica adimensional se puede expresar como:

$$h_i = 1.29 \alpha_i^2 + 0.10 \alpha_i v_i - 0.39 v_i^2, \quad v_i \geq 0, \alpha_i > 0$$

Solución

$$A = (3.35)^2 (0.785) = 8.81 \text{ m}^2, \quad V_o = \frac{(2)(5.81)}{8.81} = 1.319 \text{ m/seg}$$

$$2\epsilon = \frac{(1,219)(1,319)}{(9.81)(57)} = 2.875, \quad T = \frac{(2)(1,463)}{1,219} = 2.40 \text{ seg}$$

$$K_b T = \frac{(900)(1,000)(5.81)(57)(2.40)}{(0.89)(1,397) [(\pi)(327)]^2} = 0.545$$

De las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.11) resulta:

$$\alpha_i = \frac{1}{K_b T i + 1} = \frac{1}{0.545 i + 1} \quad (\text{ecuación 1})$$

$$h_i = (2 - 2\epsilon v_{i-1}) + (2\epsilon v_i - h_{i-1}) = (2 - 2.875 v_{i-1}) + (2.875 v_i - h_{i-1}) \quad (\text{ecuación 2})$$

$$v_i = \sqrt{b^2 + c} - b \quad (\text{ecuación 3})$$

$$b = \frac{B_b \alpha_i - 2\epsilon}{2C_b} = \frac{0.10 \alpha_i - 2.875}{-0.780}$$

$$c = \frac{2 - 2\epsilon v_{i-1} - A_b \alpha_i^2 - h_{i-1}}{C_b} = \frac{2 - 2.875 v_{i-1} - 1.29 \alpha_i^2 - h_{i-1}}{-0.39}$$

En forma semejante al ejemplo 4.1; la solución de las ecuaciones (1) a (3) se lleva a cabo mediante la siguiente tabla:

t	α_i	b	b^2	c	$2-2\epsilon v_{i-1}$	$A_b \alpha_i^2$	$2\epsilon v_i - h_{i-1}$	h_i	v_i
0.000	1.000	3.558	12.657	8.115	-0.875	1.290	1.875	1.000	1.000
0.250	0.880	3.573	12.767	7.369	-0.875	0.999	1.628	0.753	0.914
0.500	0.786	3.585	12.853	6.851	-0.875	0.797	1.455	0.580	0.854
0.750	0.710	3.595	12.923	6.474	-0.875	0.650	1.326	0.451	0.809
1.000	0.647	3.603	12.981	6.192	-0.875	0.540	1.231	0.356	0.776
1.250	0.595	3.610	13.029	4.713	-0.628	0.457	0.978	0.350	0.602
1.500	0.550	3.615	13.071	3.654	-0.455	0.390	0.786	0.331	0.475
1.750	0.512	3.620	13.106	2.859	-0.326	0.338	0.630	0.304	0.376
2.000	0.478	3.625	13.138	2.262	-0.231	0.295	0.504	0.273	0.299
2.250	0.449	3.628	13.165	0.874	0.269	0.260	-0.008	0.261	0.119
2.500	0.423	3.632	13.189	-0.185	0.634	0.231	-0.406	0.228	-0.026*
2.750	—	—	—	—	0.919	—	-0.304	0.615	0.000
3.000	—	—	—	—	1.140	—	-0.273	0.867	0.000
3.250	—	—	—	—	1.658	—	-0.261	1.397	0.000
3.500	—	—	—	—	2.000	—	-0.234	1.766	0.000
3.750	—	—	—	—	2.000	—	-0.615	1.385	0.000
4.000	—	—	—	—	2.000	—	-0.867	1.133	0.000
4.250	—	—	—	—	2.000	—	-1.397	0.603	0.000
4.500	—	—	—	—	2.000	—	-1.766	0.234	0.000

*Se considera que $v_i = 0$ y $h_i = 0.234$

*Se considera que $v_i = 0$ y $h_i = 0.234$

Como puede observarse en la tabla anterior la inversión del flujo en la bomba se presenta cuando $i = 2.500$, de tal manera que la ecuación (4.18) conduce a:

$$h_{v=0} = 0.261 - \left[\frac{0.261 - 0.228}{0.119 + 0.026} \right] (0.119) = 0.234$$

Aplicando el procedimiento descrito en la sección 4.7.2 resultan las siguientes tablas:

Onda directa								
Carga Extrema	Sección	i_d	j	h_j	$-2\epsilon v_j$	$h_d + 2\epsilon v_h$	$h_d(x, i)$	i
Máxima	0	3.500	3.500	1.766	0.000	1.766	1.766	3.500
	L/4	3.500	3.750	1.385	0.000	1.766	1.576	3.625
	L/2	3.500	4.000	1.133	0.000	1.766	1.450	3.750
	3L/4	3.500	4.250	0.603	0.000	1.766	1.185	3.875
Mínima	0	2.500	2.500	0.234	0.000	0.234	0.234	2.500
	L/4	2.500	2.750	0.615	0.000	0.234	0.425	2.625
	L/2	2.500	3.000	0.867	0.000	0.234	0.551	2.750
	3L/4	2.500	3.250	1.397	0.000	0.234	0.816	2.875

Onda reflejada								
Carga extrema	Sección	i_r	h	h_h	$2\epsilon v_h$	$h_r - 2\epsilon v_j$	$h_r(x, i)$	i
Máxima	0	3.500	3.500	1.766	0.000	1.766	1.766	3.500
	L/4	3.500	3.250	1.397	0.000	1.766	1.582	3.375
	L/2	3.500	3.000	0.867	0.000	1.766	1.317	3.250
	3L/4	3.500	2.750	0.615	0.000	1.766	1.191	3.125
Mínima	0	2.500	2.500	0.234	0.000	0.234	0.234	2.500
	L/4	2.500	2.250	0.261	0.342	0.234	0.419	2.375
	L/2	2.500	2.000	0.273	0.860	0.234	0.684	2.250
	3L/4	2.500	1.750	0.304	1.081	0.234	0.810	2.125

Sección	$h_{m\acute{a}x}$	$h_{m\acute{i}n}$	$H_{m\acute{a}x}$ (m)	$H_{m\acute{i}n}$ (m)	Z_p (m)	$h_{p\ m\acute{a}x}$ (m)	$h_{p\ m\acute{i}n}$ (m)
0	1.766	0.234	101	13	0	101	13
L/4	1.582	0.419	90	24	11	79	13
L/2	1.450	0.551	83	31	22	61	9
3L/4	1.191	0.810	68	46	33	35	13

4.13 PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 4.1

Calcular la carga de presión máxima y mínima en las secciones $x = 0, \frac{L}{4}, \frac{L}{2}$ y $\frac{3L}{4}$ en la tubería de descarga de la planta de bombeo que se muestra en la figura P4.1 cuando en ésta se presenta una interrupción brusca de energía, considerando que existen dos equipos en operación, cuya curva característica adimensional se puede expresar como:

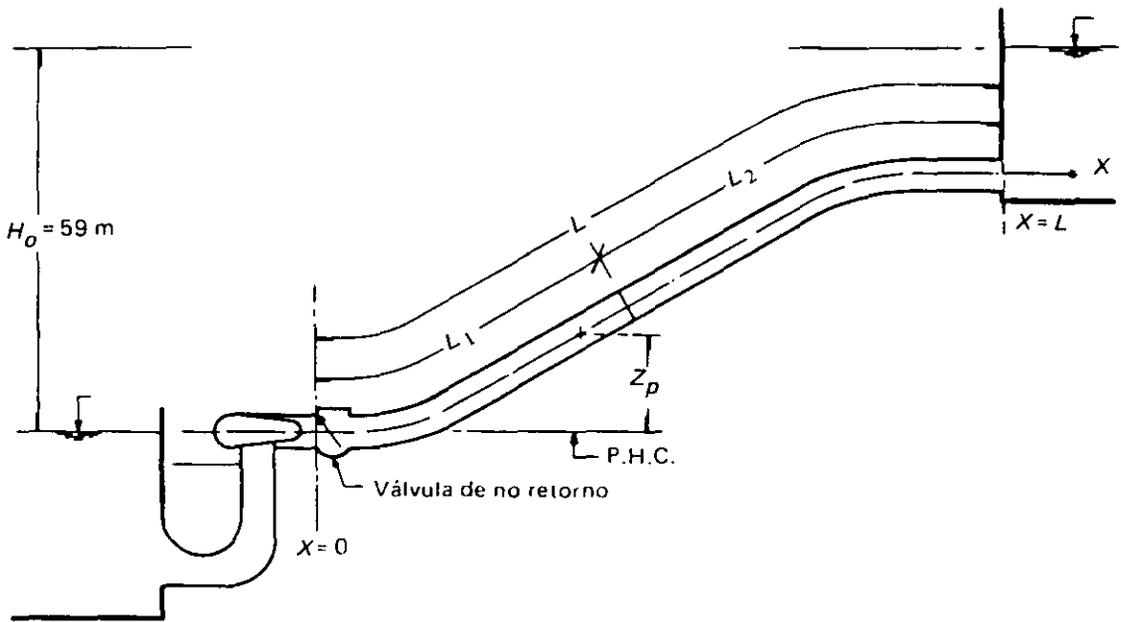
$$h_i = 1.29 \alpha_i^2 + 0.10 \alpha_i v_i - 0.39 v_i^2, \quad v_i \geq 0, \quad \alpha_i > 0$$

Respuesta (111, 94, 79 y 62 m; 6, 3, 2 y 2 m)

Problema 4.2

Determinar la carga de presión máxima y mínima en la bomba. ($x = 0$) del problema anterior, mediante las cartas de la figura 4.7.

(Respuesta 110 y 6 m)



$L_1 = 450 \text{ m}$ $L_2 = 550 \text{ m}$.
 $D_1 = 0.75 \text{ m}$ $D_2 = 0.75 \text{ m}$.
 $a_1 = 900 \text{ m/seg}$ $a_2 = 1,100 \text{ m/seg}$.

$Q_0 = 0.250 \text{ m}^3/\text{seg}$, por bomba.

$\frac{WR^2}{g} = 1.72 \text{ kg m seg}^2$, por bomba.

$n_0 = 1,100 \text{ r.p.m.}$

$\lambda_0 = 0.84$

NÚMERO DE EQUIPOS EN OPERACIÓN: 2

X/L	Z_p (m)
0	0.00
L/4	7.00
L/2	15.00
3L/4	28.00

Figura P4.1

Problema 4.3

Demostrar las ecuaciones 4.21 a 4.23.

Problema 4.4

Demostrar la ecuación (4.24)

6

Dispositivos de alivio

6.1 INTRODUCCIÓN

Una de las formas de cuantificar la importancia de los problemas que se presentan en la operación de un sistema hidráulico, es pensar en los daños que en ocasiones produce el golpe de ariete cuando se presenta en un conducto por el que diariamente circula una gran cantidad de agua. Controlar los efectos asociados a este fenómeno requiere del estudio tanto de su mecanismo como de los dispositivos de alivio que deberán adoptarse para su control.

Así, un sistema hidráulico puede ser diseñado con un factor de seguridad relativamente grande para poder soportar las cargas máximas y mínimas que se presentan, por ejemplo, en una planta de bombeo ante la interrupción en el suministro de energía a las bombas, o en un conducto cuando se lleva a cabo una determinada maniobra de cierre en algún órgano de control ubicado en cualquier sección del mismo.

Sin embargo, para el diseño óptimo de un sistema deberá tomarse en cuenta la instalación de uno o varios dispositivos de alivio, analizando un número conveniente de alternativas que permitan seleccionar aquella que presente la mejor respuesta ante el fenómeno en estudio y, a su vez, resulte factible económicamente.

En términos generales, las cargas de presión indeseables en un sistema se pueden evitar modificando el trazo de los conductos que lo componen, reduciendo el valor de la velocidad durante el flujo permanente, o bien, instalando dispositivos de alivio.

Por lo que se refiere a la reducción de la velocidad, si en la ecuación (3.48) se hace $\Delta H = H_m - H_0$ y $\Delta V = V_f - V_0$, ésta se puede escribir como:

$$\Delta H = - \frac{a}{g} \Delta V$$

expresión de la que fácilmente se deduce que al disminuir el valor de V_0 , cualquiera que sea el de V_f , da como resultado una reducción en el de ΔH .

En cuanto a los dispositivos de alivio, los de uso más común son las válvulas y, en algunos casos que así lo requieren, los tanques de oscilación, los tanques unidireccionales y las cámaras de aire.

En este capítulo se hace una descripción de los dispositivos antes mencionados, se propone un método basado en las ecuaciones de Allievi para la selección de válvulas, se obtienen las soluciones analíticas para cuatro condiciones de operación de sistemas hidráulicos con tanques de oscilación y cámaras de aire, y se presentan unas cartas para tanques de oscilación y cámaras de aire que permiten estimar en forma aproximada las cargas extremas en estos dos últimos dispositivos.

Finalmente, se establecen las condiciones de frontera que permiten simular el comportamiento de válvulas, tanques de oscilación y cámaras de aire, con objeto de poder efectuar el diseño definitivo de los sistemas hidráulicos que se estudian en este libro.

6.2 DESCRIPCIÓN DE VÁLVULAS¹⁹

6.2.1 Válvulas de no retorno

Estas válvulas se encuentran representadas esquemáticamente en la figura 6.1, y sirven para impedir la inversión del flujo en un conducto. En general, una válvula de este tipo deberá instalarse siempre en la tubería de descarga de una bomba para evitar el flujo en dirección opuesta a la original en los impulsores de ésta, también se instalan en el extremo aguas abajo del conducto que une a un tanque unidireccional con la tubería de descarga de una planta de bombeo, lo cual se verá en la sección 6.10.

Es muy importante destacar que estas válvulas normalmente cierran en forma instantánea cuando se presenta la inversión del flujo y, en algunos casos, su diseño permite que el cierre sea lento y se lleve a cabo un poco antes de la inversión, con objeto de reducir la magnitud de la sobrepresión asociada a un cierre instantáneo, pero si por alguna causa una bomba opera en la zona de disipación de energía durante un determinado intervalo de tiempo

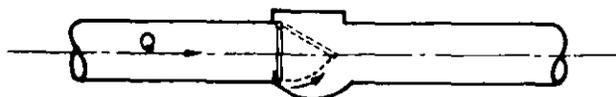


Figura 6.1 Válvula de no retorno.

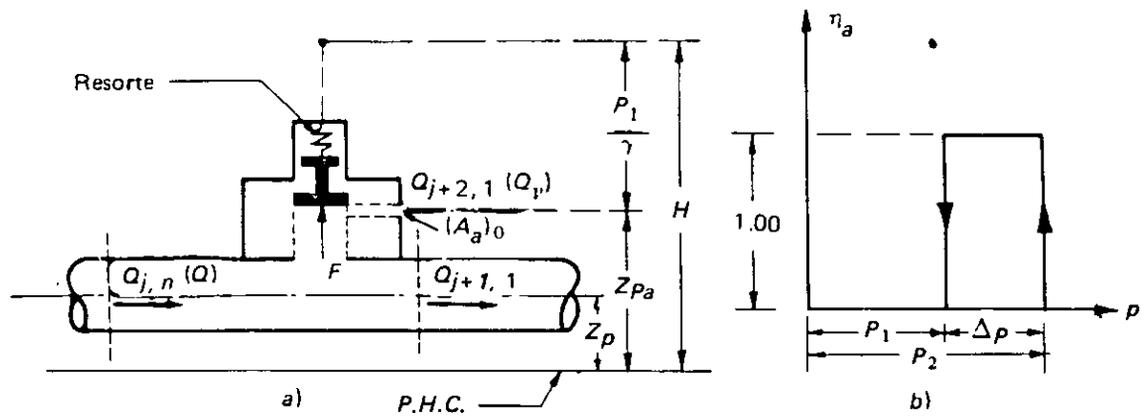


Figura 6.2 Válvula de seguridad.

antes del cierre de la válvula, el aumento de carga será bastante mayor que el producido por cualquier tipo de cierre ya sea lento o instantáneo.⁹

6.2.2 Válvulas de seguridad

Estas válvulas se indican en forma esquemática en la figura 6.2a y sirven para disminuir el incremento de presión asociado al golpe de ariete.

Cuando se alcanza una presión p_2 en el conducto de tal manera que la fuerza generada supera a la resistencia del resorte, la válvula abre totalmente en forma instantánea (figura 6.2b) y permite la salida de un determinado volumen de agua hasta que la presión disminuye y adquiere un valor igual a p_1 cerrando totalmente y también en forma instantánea. Estas válvulas operan totalmente abiertas o totalmente cerradas.

6.2.3 Válvulas aliviadoras de presión o supresoras de oscilaciones

Este tipo de válvulas están constituidas por los elementos que esquemáticamente se indican en la figura 6.3a y su funcionamiento es el siguiente:

En condiciones normales de operación la válvula ① permanece con un grado de apertura previamente calibrado, mientras que la ②, constituida por un mecanismo de resorte, se encuentra cerrada; así, la carga de presión que existe en el conducto es la misma a la que se encuentran sujetas tanto la cámara ④ como el mecanismo de la válvula principal ③, prevaleciendo un equilibrio de fuerzas que permite a esta última permanecer también cerrada. Al producirse un aumento de la presión en el conducto que sobrepasa la prefijada para mantener cerrada la válvula ②, es decir, cuando $p > p_1$ (figura 6.3b), se genera una fuerza F_2 y esta última se abre parcialmente y permite tanto el flujo a través de ella hacia la descarga como una reducción de la presión en la cámara, y la generación de una fuerza F_1 en el mecanismo de la válvula principal ③ que da lugar a que ésta inicie su apertura, la cual aumen-

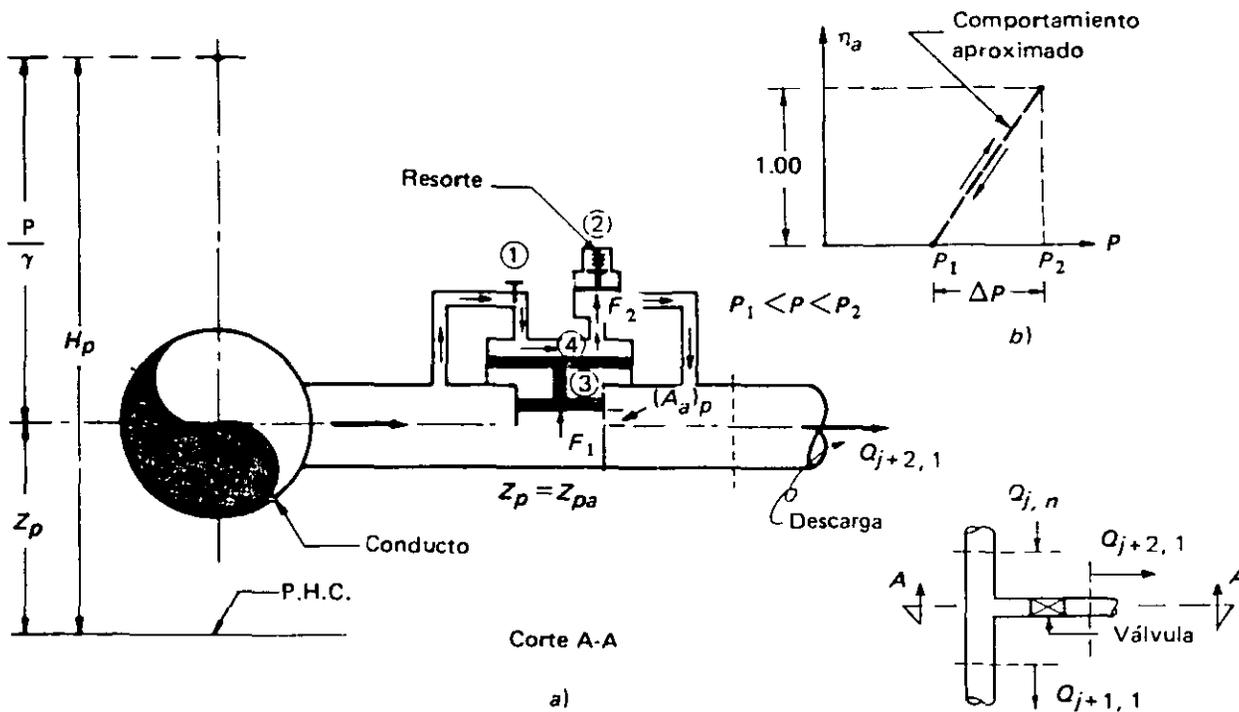


Figura 6.3 Válvula aliviadora de presión o supresora de oscilaciones.

ta gradualmente conforme el valor de la presión en el conducto se aproxima a un valor igual a p_2 , instante en el que se presenta la apertura total y el valor del gasto máximo a través de dicha válvula.

Posteriormente, como consecuencia del volumen descargado por la válvula principal la presión en el conducto disminuye, y cuando tiene un valor igual a p_1 la válvula (2) cierra y se establece un nuevo equilibrio de fuerzas en el mecanismo de la válvula principal que da lugar al cierre de ésta.

6.2.4 Válvulas reguladoras de presión

Estas válvulas tienen un funcionamiento semejante al de las vistas en la sección anterior, sólo que tanto la apertura como el cierre de las mismas se lleva a cabo mediante la acción de un servomotor, y se caracterizan porque el tiempo de apertura es relativamente pequeño comparado con el de cierre (figura 6.4a), lo cual ocasiona incrementos de presión despreciables en el sistema por causa de esta última maniobra.

En la figura 6.4b se puede apreciar el efecto de una válvula de este tipo ubicada inmediatamente aguas arriba del órgano de control situado en el extremo de un conducto por gravedad, transformando una maniobra de cierre total del primero en otra de cierre parcial, atenuando con esto el incremento de presión a lo largo del conducto.

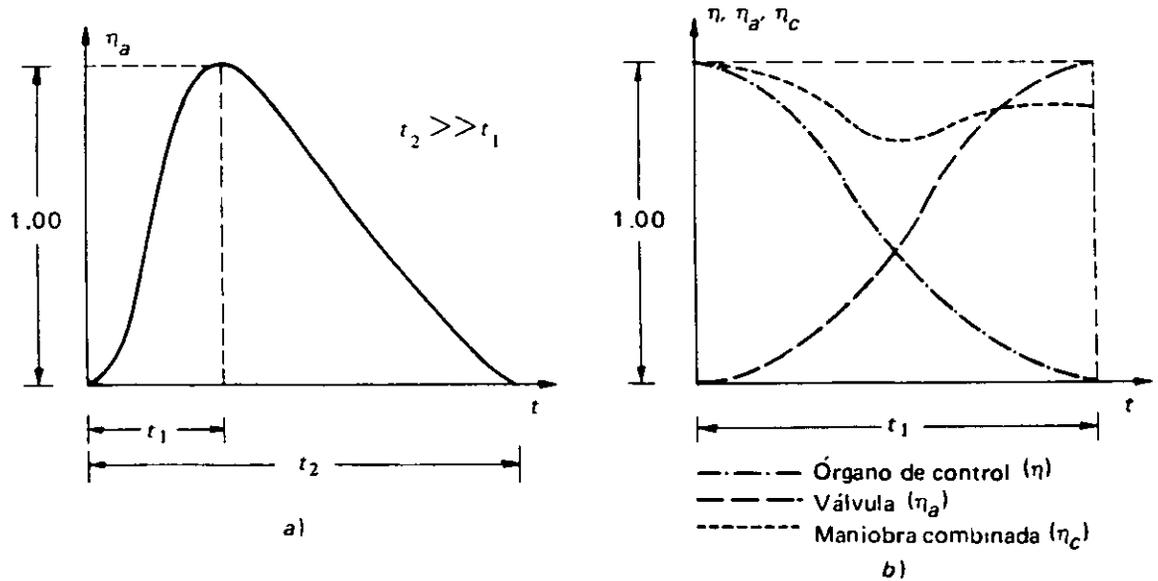


Figura 6.4 Operación de una válvula reguladora de presión.

6.2.5 Válvulas de admisión de aire*

Son como se muestra esquemáticamente en la figura 6.5 y su funcionamiento es el siguiente:

El orificio de admisión de aire, que en condiciones de flujo permanente se encuentra cerrado, se abre cuando por efecto del golpe de ariete la presión en la sección donde se encuentra ubicada la válvula desciende por debajo de un límite prescrito y permite la entrada de una determinada cantidad de aire que evita la formación de un vacío para prevenir el colapso del conducto, cerrándose nuevamente cuando la presión aumenta.

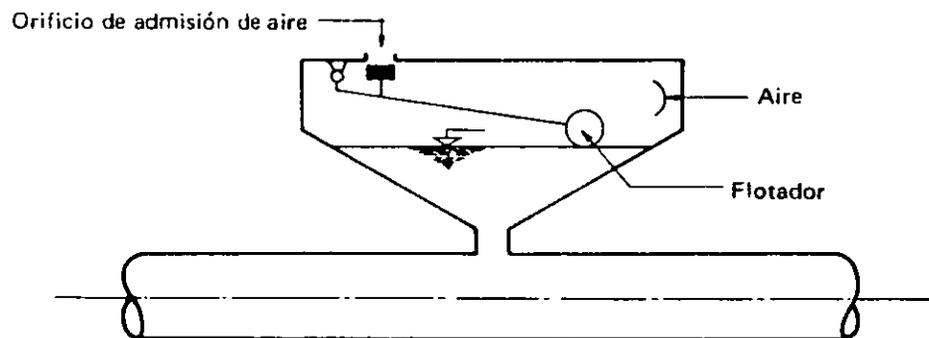


Figura 6.5 Válvulas de admisión de aire.

* Para los lectores interesados en la simulación de este tipo de válvulas y las consecuencias que trae consigo la admisión de aire en un conducto, se recomienda consultar las referencias 3 y 8.

6.2.6 Instalación adecuada de válvulas

Una instalación adecuada de válvulas en un conducto por gravedad es como se muestra en la figura 6.6a.

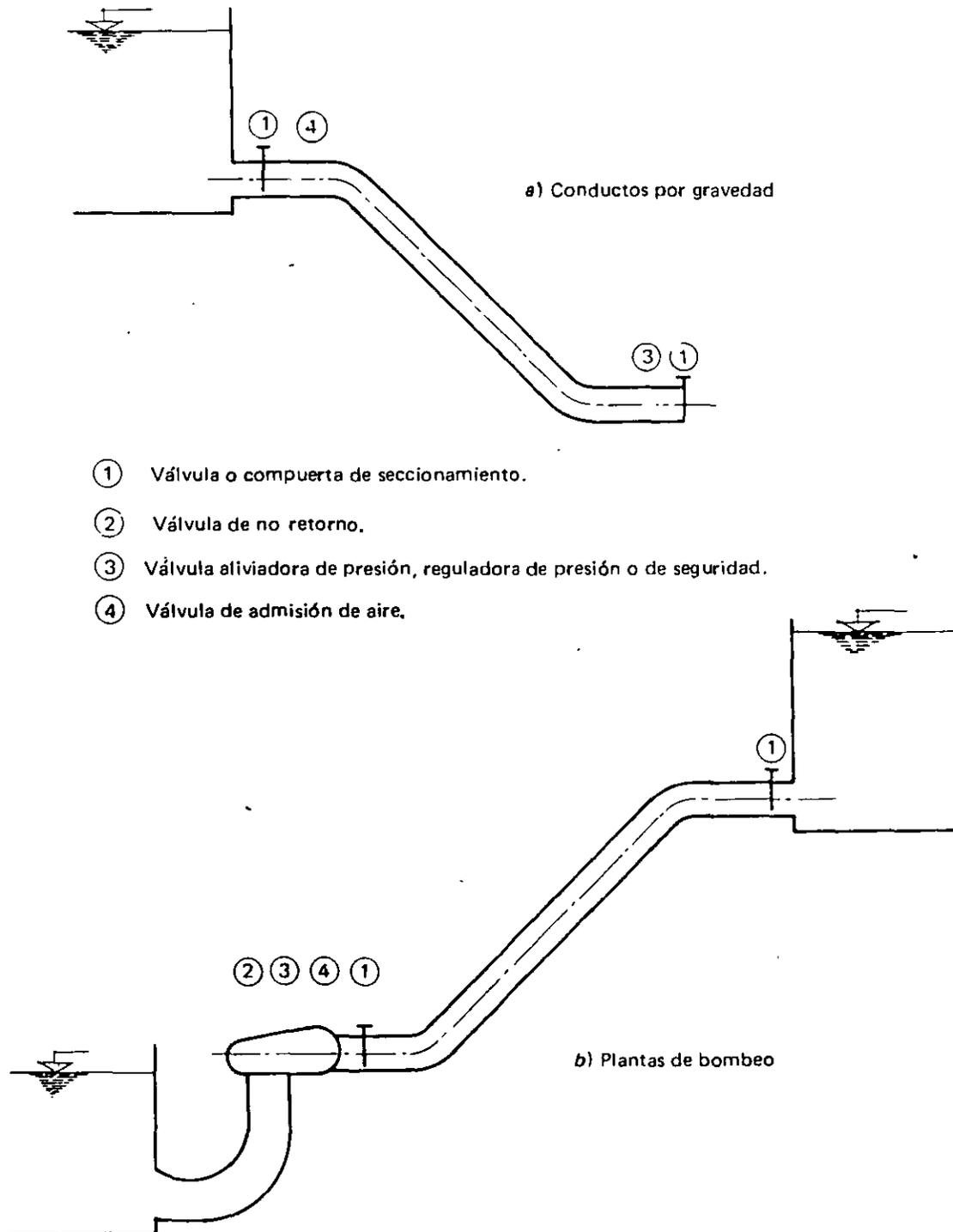


Figura 6.6 Instalación adecuada de válvulas.

Así, con las válvulas o compuertas de seccionamiento se puede regular el gasto y es posible efectuar trabajos de mantenimiento en el conducto cuando éste así lo requiera; con la válvula de admisión de aire se evita la posibilidad de formación de un vacío cuando se cierra la válvula de seccionamiento ubicada aguas arriba y con la válvula del tipo aliviadora de presión, reguladora de presión o de seguridad, se reduce la magnitud de la sobrepresión si la de seccionamiento que se encuentra aguas abajo se cierra. En cuanto a las plantas de bombeo, la ubicación de válvulas se indica en la figura 6.6*b*. Sin embargo, es necesario destacar que la ubicación de válvulas propuesta puede variar de acuerdo con las condiciones particulares de cada sistema y, en algunos casos, podría resultar necesaria la instalación de válvulas de los tipos mencionados en secciones adicionales a las que se indican, por ejemplo, de una válvula de admisión de aire en un punto alto de la tubería de descarga en una planta de bombeo.

Asimismo, es posible que la carga de presión máxima resultante por efecto del golpe de ariete en los sistemas en estudio, sea de una magnitud tal que no se requiera de la instalación de válvulas para la reducción de ésta.

Finalmente, es necesario mencionar que de cada uno de los tipos de válvulas descritas existe una gran variedad en el mercado, y las características especiales de cada una de ellas deben ser proporcionadas por el fabricante.

6.3 MÉTODO PARA LA SELECCIÓN DE VÁLVULAS DE SEGURIDAD

6.3.1 Válvulas en conductos por gravedad

De acuerdo con lo indicado en la figura 6.2 el gasto total Q_v que pasa por una válvula y el grado de apertura de la misma η_a , se pueden expresar como:

$$Q_{v_i} = (C_{d_a} A_a)_i \sqrt{2g(H_i - Z_{pa})} \quad (6.1)$$

y

$$\eta_{a_i} = \frac{(C_{d_a} A_a)_i}{(C_{d_a} A_a)_m} \quad (6.2)$$

donde los subíndices a y m denotan a la válvula y el grado máximo de apertura de ésta.

Por otra parte, si se aplica la ecuación de continuidad y se elige el plano horizontal de comparación de tal manera que $H \gg Z_{pa}$, se obtiene:

$$Q_i = [(C_d A)_i + (C_{d_a} A_a)_i] \sqrt{2gH_i}$$

Si se dividen ambos miembros de la expresión anterior entre

$$Q_0 = (C_d A) \sqrt{2gH_0}$$

se recuerdan las definiciones de v_i , η_i y Z_i , después de sustituir la ecuación (6.2) y efectuar operaciones, resulta:

$$v_i = [\eta_i + r_a \eta_{a_i}] Z_i \quad (6.3)$$

donde

$$r_a = \frac{\sqrt{2gH_0}}{Q_0} (C_d A_a)_m \quad (6.3a)$$

De acuerdo con lo anterior, si se lleva a cabo una maniobra de cierre en el órgano de control de un conducto tal como el mostrado en la figura 3.1 en cuyo extremo aguas abajo existe una válvula de seguridad, al sustituir la ecuación anterior en la (3.38) se puede escribir:

$$Z_i^2 + Z_{i-1}^2 + 2 = 2\epsilon[(\eta_{i-1} + r_a \eta_{a_{i-1}})Z_{i-1} - (\eta_i + r_a \eta_{a_i})Z_i] \quad (6.4)$$

Ahora bien, si se considera que en el instante i la válvula se encuentra totalmente abierta, la carga piezométrica adimensional adquiere un valor máximo permisible Z_{perm}^2 , y si en el instante anterior, $i - 1$, la válvula se encuentra totalmente cerrada, la ecuación (6.4) se reduce a:

$$Z_{perm}^2 + Z_{i-1}^2 - 2 = 2\epsilon[\eta_{i-1} Z_{i-1} - (\eta_i + r_a)Z_{perm}] \quad (6.5)$$

de la ecuación (3.38), con $Z_i = Z_{máx}$ y $\eta_i = \eta_{Z_{máx}}$, se obtiene:

$$Z_{i-1}^2 - 2 - 2\epsilon\eta_{i-1} Z_{i-1} = - (Z_{máx}^2 + 2\epsilon\eta_{Z_{máx}} Z_{máx}) \quad (6.6)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la (6.5) y haciendo operaciones resulta finalmente:

$$\frac{Z_{perm}^2}{Z_{máx}^2} = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\left[2\epsilon \left(\frac{\eta_{Z_{máx}} + r_a}{Z_{máx}} \right) \right]^2 + 4 \left(1 + \frac{2\epsilon \eta_{Z_{máx}}}{Z_{máx}} \right)} - 2\epsilon \left(\frac{\eta_{Z_{máx}} + r_a}{Z_{máx}} \right) \right]^2 \quad (6.7)$$

expresión que permite calcular la relación entre las cargas piezométricas adi-

mensionales permisible y máxima en el órgano de control, si se conoce el valor de r_a definido por la ecuación (6.3a). Obsérvese que si

$$r_a = 0, Z_{perm}^2 = Z_{máx}^2$$

En la figura 6.7 se presenta una familia de curvas para diferentes valores del parámetro $K_v = \frac{2\epsilon\eta_{zmáx}}{Z_{máx}}$ que permiten obtener la relación de cargas mencionadas en el párrafo anterior en función del parámetro $\frac{2\epsilon r_a}{Z_{máx}}$.

En consecuencia, el procedimiento para seleccionar una válvula de seguridad será el siguiente:

- Efectuar el cálculo hidráulico para obtener los valores de $Z_{máx}^2$, $\eta_{zmáx}$ y K_v .
- Establecer de acuerdo con las necesidades de proyecto el valor de Z_{perm}^2 , de la figura 6.7, determinar el valor de $\frac{2\epsilon r_a}{Z_{máx}}$ y de éste el de r_a .

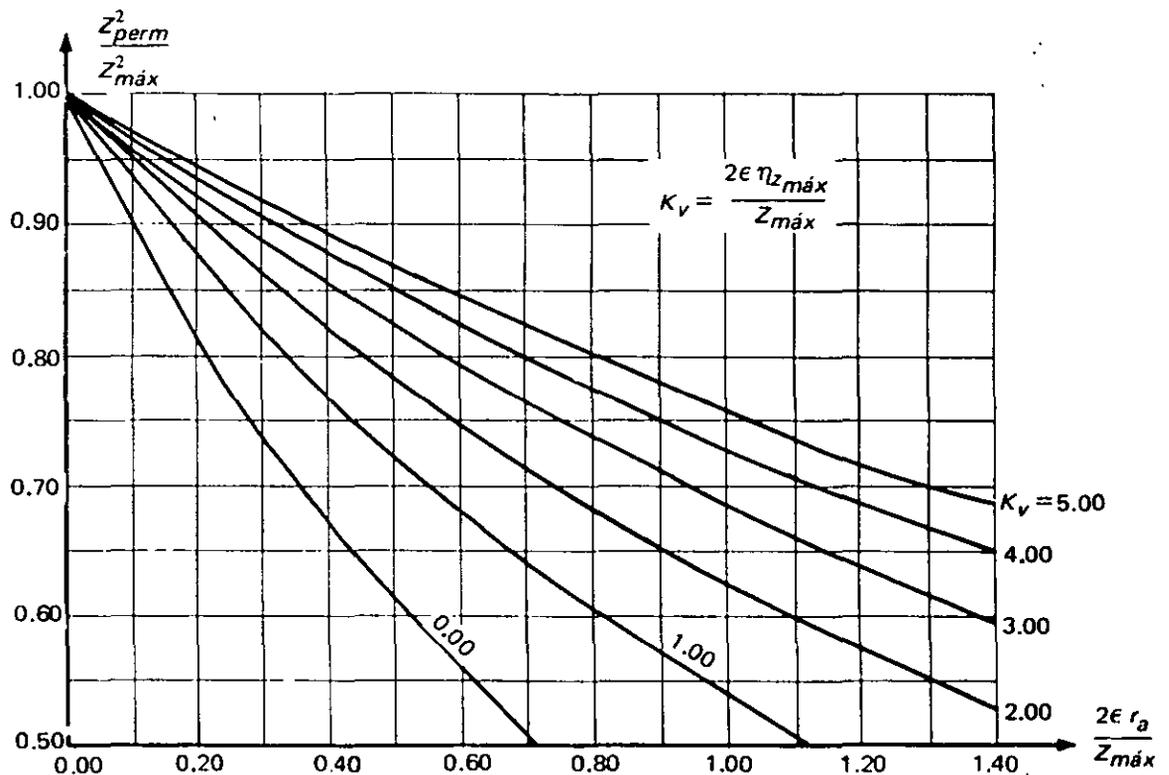


Figura 6.7 Curvas para la selección de una válvula de seguridad en un conducto por gravedad.

- c) Determinar el gasto que debe desalojar cada válvula y el área efectiva requerida de acuerdo con las expresiones:

$$Q_v = \frac{Q_0 r_a Z_{perm}}{N_v}$$

y

$$(C d_a A_a) = \frac{r_a Q_0}{N_v \sqrt{2g H_0}}$$

siendo N_v el número total de válvulas.

Por último, es importante señalar que el área y diámetro nominales definitivos de la válvula dependerán de las especificaciones establecidas por el fabricante. El procedimiento para la selección de válvulas de seguridad también puede ser aplicado en forma conservadora al caso de válvulas aliviadoras de presión.

6.3.2 Válvulas en plantas de bombeo

Si se lleva a cabo un razonamiento semejante al de la sección anterior para la tubería de descarga de una planta de bombeo, tal como la indicada en la figura 4.3, al presentarse una falla en el suministro de energía a la planta, y suponiendo que inmediatamente aguas abajo de la válvula de no retorno se instala una de seguridad, a partir del instante de cierre de la primera $i_v = 0$ se puede escribir:*

$$v_i = -r_a \eta_{a_i} \sqrt{h_i}, \quad i \geq i_v = 0 \quad (6.8)$$

Si se sustituye la ecuación anterior en la (4.8) con $h_i = h_{perm}$ y $\eta_{a_i} = 1$, ésta adquiere la forma:

$$h_{perm} + h_{i-1} - 2 = -2\epsilon(r_a \sqrt{h_{perm}} + v_{i-1}) \quad (6.9)$$

de la ecuación (4.8), con $h_i = h_{máx}$ resulta:

$$h_{i-1} + 2\epsilon v_{i-1} - 2 = -h_{máx} \quad (6.10)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la (6.9), después de hacer operaciones, se obtiene:

$$\frac{h_{perm}}{h_{máx}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{(2\epsilon r_a)^2}{h_{máx}} + 2 \right) - \sqrt{\left(\frac{(2\epsilon r_a)^2}{h_{máx}} + 2 \right)^2 - 4} \right] \quad (6.11)$$

* Aquí es importante aclarar que la variable v_i queda definida como $v_i = \frac{Q_i}{N Q_0}$ siendo N el número de bombas que operan en paralelo y Q_0 el gasto suministrado por cada bomba.

expresión mediante la cual se puede determinar la relación de cargas piezo-métricas adimensionales permisible y máxima en la bomba, si se conoce el valor de r_a . En la figura 6.8 se presenta una curva que permite obtener dicha relación en función del parámetro $\frac{2\epsilon r_a}{\sqrt{h_{m\acute{a}x}}}$.

En forma semejante a la sección anterior, el procedimiento para seleccionar una válvula de seguridad en una planta de bombeo, tomando en cuenta lo ya mencionado con relación a sus dimensiones definitivas, es el siguiente (figura 6.2):

- Efectuar el cálculo hidráulico para obtener el valor de $h_{m\acute{a}x}$
- Establecer de acuerdo con las necesidades de proyecto el valor de h_{perm} , de la figura 6.8, determinar el valor de $\frac{2\epsilon r_a}{\sqrt{h_{m\acute{a}x}}}$ y de éste el de r_a
- Determinar el gasto que debe desalojar cada válvula y el área efectiva requerida de acuerdo con las expresiones:

$$Q_v = \frac{NQ_0 r_a \sqrt{h_{perm}}}{N_v}$$

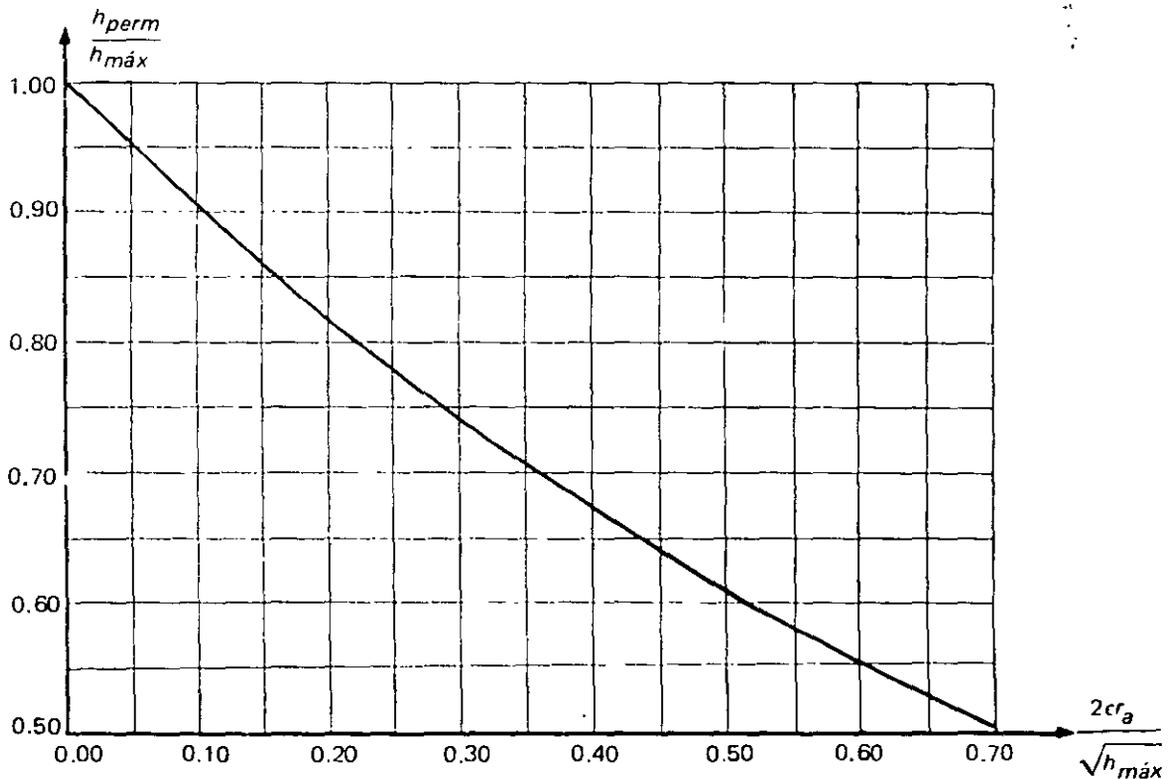


Figura 6.8 Curva para la selección de una válvula de seguridad en una planta de bombeo.

y

$$(C_{d_a} A_a) = \frac{NQ_0 r_a}{N_v \sqrt{2g H_0}}$$

donde N es el número de bombas que operan en paralelo, Q_0 el gasto suministrado por cada bomba y N_v el número total de válvulas que deben ser instaladas en la planta.

6.4 TANQUES DE OSCILACIÓN

6.4.1 Descripción

Un tanque de oscilación es un dispositivo de alivio frecuentemente utilizado en estaciones hidroeléctricas y en plantas de bombeo para reducir el efecto producido por el golpe de ariete.

Con objeto de analizar el funcionamiento de estas estructuras se pueden considerar los sistemas que se muestran en las figuras 6.9a y b, en los que existe un tanque de oscilación con un orificio en su parte inferior, en la sección del conducto inmediatamente aguas arriba o aguas abajo de un órgano de control o una válvula de no retorno respectivamente, y un depósito con nivel constante situado en el otro extremo.

Con relación a la estación hidroeléctrica de la figura 6.9b, cuando se efectúa una maniobra de cierre total en el órgano de control el nivel del agua en el tanque aumenta en forma gradual transformándose la energía cinética del agua en potencial, y con esto se reduce el efecto del golpe de ariete en el tramo del conducto situado aguas arriba del tanque; asimismo, cuando la maniobra en el órgano es de apertura, el nivel del agua en el tanque desciende y contribuye junto con el conducto a la demanda inmediata de agua por parte de la turbina.

Por lo que se refiere a la planta de bombeo de la figura 6.9a, al presentarse una interrupción en el suministro de energía o una falla mecánica en la bomba, ante la reducción de la carga en esta última, el nivel del agua en el tanque desciende y da lugar a una disminución en la variación del gasto en la tubería de descarga, disminuyendo con esto también el valor de la depresión en esta última; posteriormente, cuando se invierte el flujo en la tubería y cierra la válvula de no retorno, el nivel del agua en el tanque empieza a subir y se transforma la energía tal como se mencionó en el párrafo anterior, reduciéndose con esto el valor de la sobrepresión en la bomba y la tubería de descarga.

Por otra parte, cuando se presenta el arranque de la bomba la mayor parte del flujo inicial penetra en el tanque, lo que reduce tanto el aumento súbito del gasto en la tubería como el incremento de carga en la misma.

6.4.2 Tipos principales de tanques de oscilación

Básicamente los tanques de oscilación se clasifican en vertedores y no vertedores. Los primeros tienen una altura menor que la que alcanzaría el nivel máximo del agua en el tanque, lo que provoca el vertido del agua, y se utilizan cuando las condiciones topográficas del terreno lo permiten sin ocasionar problemas.

Dentro de los dos tipos existen varios modelos, los principales son:

- *Tanque de tipo simple.* Consiste en un cilindro abierto en la parte superior que se une con el conducto en su parte inferior (figura 6.10a).
- *Tanque con orificio diferencial.* Es semejante al tanque de tipo simple, sólo que en la parte inferior tiene un estrechamiento conocido como orificio diferencial, que produce pérdidas de carga que resultan mayores cuando el agua entra al tanque que cuando sale de éste, por lo que ofrece una operación más ventajosa que la del tipo simple (figura 6.10c).

En algunos casos, además del orificio diferencial existe una tubería de unión como la mostrada en la figura 6.10d.

- *Tanque diferencial o tipo Johnson.* Está constituido por un tanque principal donde se aloja un tubo central o tubo elevador, con orificios en su parte inferior (figura 6.10e), y un diámetro aproximado al del conducto (80% como mínimo).¹

Cuando existe un incremento de carga en el conducto, por cualquiera de las causas descritas en la sección 6.4.1, el agua sube rápidamente en el tubo elevador y se vierte en el principal, iniciándose un ascenso del agua con menor rapidez hasta llegar a un determinado nivel máximo; asimismo, cuando se requiere el suministro instantáneo de agua en el conducto, el agua desciende rápidamente por el tubo elevador y, en cualquier caso, la amortiguación de las oscilaciones se verifica en forma efectiva gracias al efecto del tanque principal.

6.4.3 Requisitos para la operación correcta de un tanque de oscilación

Con el fin de que un tanque de oscilación opere con efectividad, su localización y dimensiones deberán estar basados en las siguientes consideraciones:^{4, 16}

- a) En una estación hidroeléctrica donde la descarga está controlada por un gobernador, el tanque debe tener suficiente área transversal para ser estable, de manera que las oscilaciones del nivel del agua en el mismo se amortigüen durante el tiempo que dure la descarga. En caso de que el área sea muy pequeña, un cambio en la carga de la turbina puede originar oscilaciones continuas o crecientes.

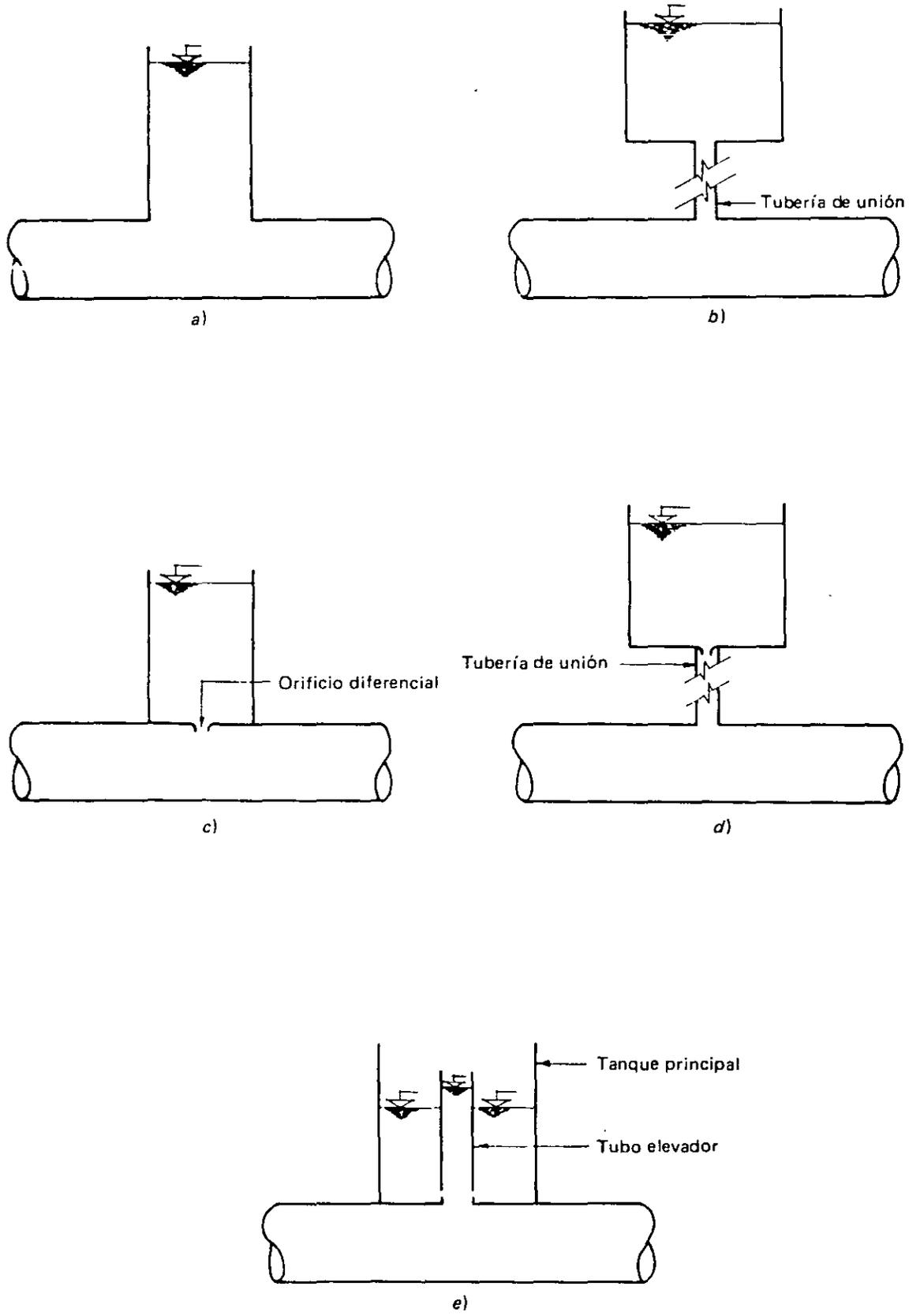


Figura 6.10 Tipos principales de tanques de oscilación.

El área mínima se puede calcular de acuerdo con la siguiente expresión:

$$A_{Tmin} = C_T \frac{LA}{H_{f_1} (H_0 - H_{f_1})} \frac{V_0^2}{2g} \quad (6.12)$$

la cual se conoce como *Condición de Thoma*, donde A_T es el área mínima del tanque, en m^2 , C_T es un coeficiente cuyo valor según Rich es de 1.5 y H_{f_1} es la pérdida de carga en el conducto. El resto de las variables que aparecen en esta ecuación ya han sido definidas anteriormente.

- b) El tanque de oscilación deberá estar situado lo más cerca posible de la estación hidroeléctrica o planta de bombeo, ya que el efecto del golpe de ariete será de una intensidad bastante mayor en el tramo del conducto comprendido entre el tanque y el órgano de control (figura 6.9b), o bien, entre éste y la válvula de no retorno (figura 6.9a).
- c) Debe tener una altura suficiente para evitar derrames que se puedan presentar en cualquier condición de operación, excepto cuando el tanque sea de tipo vertedor.
- d) El nivel mínimo del agua en el tanque no deberá permitir el vaciado del mismo, y con esto la entrada de aire al conducto.

6.5 ECUACIONES DIFERENCIALES PARA SISTEMAS HIDRÁULICOS CON TANQUES DE OSCILACIÓN

6.5.1 Ecuación dinámica

Con objeto de simplificar y poder obtener una solución analítica de las ecuaciones dinámica y de continuidad para un sistema hidráulico de características geométricas constantes, tal como los que se muestran en las figuras 6.9a y b, se pueden hacer las siguientes hipótesis:

- a) El flujo en el conducto es incompresible.
- b) Las paredes del conducto se consideran rígidas o indeformables.
- c) Las cargas de velocidad en el conducto y el tanque de oscilación son despreciables comparadas con las de presión que se generan en los mismos.
- d) Las distribuciones de velocidad y presión en cualquier sección del conducto son uniformes.
- e) El nivel del agua en el depósito situado en el extremo opuesto del tanque de oscilación permanece constante.
- f) Las fórmulas para el cálculo de pérdidas de carga utilizadas cuando el flujo es permanente en el sistema, también son válidas durante el flujo transitorio.

- g) La carga piezométrica varía linealmente con respecto a la coordenada curvilínea x .
- h) El gasto suministrado por las bombas o el proporcionado a las turbinas es una constante.

Tomando en cuenta las hipótesis anteriores y de acuerdo con las figuras 6.9a y b, si se sustituye la ecuación de continuidad para el conducto (ecuación 2.15) en la dinámica (ecuación 2.21), y se efectúan operaciones, se obtiene

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \pm \left(S + K \frac{V_1 |V_1|}{2g} \right) + f \frac{L}{D} \frac{V|V|}{2g} = 0 \quad (6.13)$$

donde el signo de los términos entre paréntesis es positivo o negativo, según se trate de una estación hidroeléctrica (figura 6.9b) o una planta de bombeo (figura 6.9a) respectivamente.

El término $K \frac{V_1 |V_1|}{2g}$ representa la pérdida de carga debida al orificio diferencial, siendo K un parámetro que depende de la geometría de éste y la del tanque.* El valor de la velocidad V_1 se considera positivo si el agua entra al tanque y negativo en caso contrario.

6.5.2 Ecuación de continuidad del sistema

De acuerdo con lo indicado en las figuras 6.9a y b se puede escribir:

$$VA \pm A_T \frac{dS}{dt} = Q_{b,t} \quad (6.14)$$

donde el signo positivo corresponde a la planta de bombeo, el negativo a la estación hidroeléctrica y el término $Q_{b,t}$ es el gasto suministrado por las bombas (Q_b), o el proporcionado a las turbinas (Q_t).

6.5.3 Sistemas sin fricción

Con el fin de conocer el comportamiento ideal de los sistemas hidráulicos en estudio se pueden despreciar los efectos de la fricción en el conducto y la

* La pérdida de carga en el orificio generalmente se expresa como $K_0 \frac{Q_T |Q_T|}{2gA_0^2}$, donde K_0 es un parámetro que depende de la geometría del orificio, A_0 el área de éste y Q_T es el gasto que entra o sale del tanque. Sin embargo, por conveniencia para la solución analítica de las ecuaciones diferenciales que se estudian, se utiliza la expresión equivalente que se indica.

pérdida de carga debida al orificio diferencial, y de esta manera la ecuación (6.13) se reduce a:

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} \pm S = 0 \quad (6.15)$$

Por otra parte, si se derivan con respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación (6.14) y se toma en cuenta la hipótesis h de la sección 6.5.1, resulta:

$$A \frac{dV}{dt} \pm A_T \frac{d^2S}{dt^2} = 0 \quad (6.16)$$

Al sustituir la ecuación anterior en la (6.15), y al recordar lo ya mencionado acerca de los signos de los segundos términos de estas ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \frac{gA}{LA_T} S = 0 \quad (6.17)$$

que es una ecuación diferencial de primer grado y segundo orden, que tiene la siguiente solución general:¹⁰

$$S = C_1 \cos \sqrt{\frac{gA}{LA_T}} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{gA}{LA_T}} t \quad (6.18)$$

La ecuación anterior fue resuelta para cuatro condiciones extremas de operación de los sistemas en estudio:

1. Cierre total instantáneo del órgano de control en una estación hidroeléctrica.
2. Apertura total instantánea del órgano de control en una estación hidroeléctrica.
3. Arranque instantáneo de los equipos en una planta de bombeo con una válvula de seccionamiento instalada en la tubería de descarga que permanece totalmente abierta.
4. Paro instantáneo de los equipos en una planta de bombeo con una válvula de no retorno instalada en la tubería de descarga que cierra en forma instantánea.

Los resultados obtenidos se resumen en la figura 6.11 donde pueden verse los valores de la sobrelevación máxima S_0 y el periodo de oscilación del tanque T para las cuatro condiciones de operación antes mencionadas.

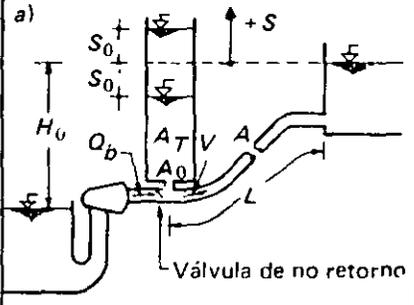
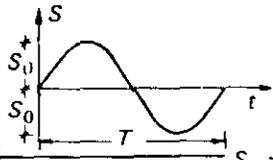
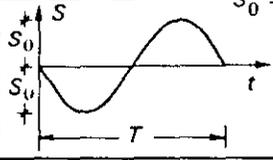
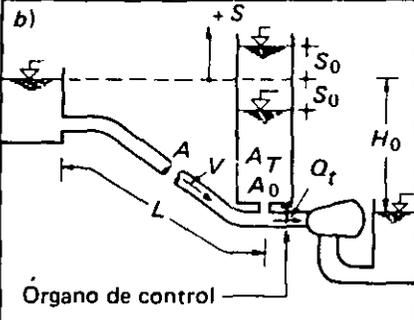
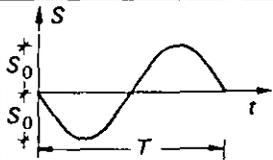
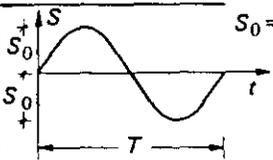
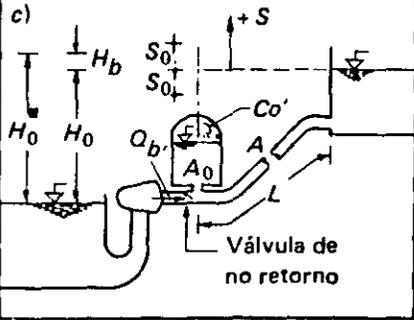
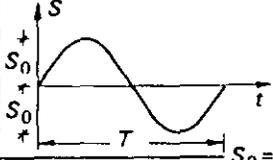
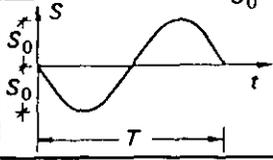
Sistema	Condición de operación	Ecuación diferencial	Condiciones de frontera y solución analítica	Representación gráfica
	Arranque instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.	$\frac{d^2 S}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 S = 0$	$t = 0; S = 0, \frac{dS}{dt} = \frac{Q_b}{A_T}$ $S = S_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$	
	Paro instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.		$t = 0; S = 0, \frac{dS}{dt} = -\frac{Q_b}{A_T}$ $S = -S_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$	
	Apertura total instantánea del órgano de control en una estación hidroeléctrica.	$T = 2\pi \sqrt{\frac{LA_T}{gA}}$	$t = 0; S = 0, \frac{dS}{dt} = -\frac{Q_t}{A_T}$ $S = -S_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$	
	Cierre total instantáneo del órgano de control en una estación hidroeléctrica.		$t = 0; S = 0, \frac{dS}{dt} = \frac{Q_t}{A_T}$ $S = S_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$	
	Arranque instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.	$\frac{d^2 S}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 S = 0$	$t = 0; S = 0, \frac{dS}{dt} = 1.2 \left(\frac{Q_b H^*}{C}\right)_0$ $S = S_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$	
	Paro instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.		$t = 0; S = 0, \frac{dS}{dt} = 1.2 \left(\frac{Q_b H_b^*}{C}\right)_0$ $S = -S_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$	

Figura 6.11 Solución de ecuaciones diferenciales de sistemas hidráulicos sin considerar el efecto de la fricción.

6.5.4 Sistemas con fricción

Para poder encontrar una solución analítica de las ecuaciones (6.13) y (6.14), considerando los efectos de la fricción en el conducto y la pérdida de carga debida al orificio diferencial, éstas se pueden escribir en la siguiente forma:

$$\frac{L}{g} \frac{dS}{dt} \frac{dV}{dS} \pm \left(S + K \frac{V_1 |V_1|}{2g} \right) + f \frac{L}{D} \frac{V|V|}{2g} = 0 \quad (6.19)$$

y

$$\frac{dS}{dt} = \pm \frac{1}{A_T} (Q_{b,t} - VA) = V_1 \quad (6.20)$$

Si en las últimas ecuaciones* se hace $v = \frac{V}{V_0}$, $Q_0 = V_0 A$, $q = \frac{Q_{b,t}}{Q_0}$, $H_{f_1} = f \frac{L}{D} \frac{V_0^2}{2g}$, $H_{f_2} = K \left(\frac{A}{A_T}\right)^2 \frac{V_0^2}{2g}$, $S_a = \frac{S}{H_{f_1}}$ y $r_f = \frac{H_{f_2}}{H_{f_1}}$, se sustituye la ecuación (6.20) en la (6.19) y se efectúan operaciones, recordando la convención de signos establecida en la sección anterior, se obtiene para $v \geq 0$:

$$\left(\frac{LQ_0^2}{gAA_T} \right) (q - v) \frac{dv}{dS_a} - H_{f_1}^2 [S_a \pm r_f (q - v)^2] - H_{f_1}^2 v^2 = 0; V_1 \geq 0$$

para estaciones hidroeléctricas y

$$\left(\frac{LQ_0^2}{gAA_T} \right) (q - v) \frac{dv}{dS_a} - H_{f_1}^2 [S_a \pm r_f (q - v)^2] + H_{f_1}^2 v^2 = 0; V_1 \geq 0$$

para plantas de bombeo.

Sustituyendo el valor de $S_0^2 = \frac{LQ_0^2}{gAA_T}$ (figura 6.11) en las ecuaciones anteriores y ordenando términos, resulta finalmente:

$$\frac{dv}{dS_a} - \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f_1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{q-v} \pm r_f (q-v) + \frac{v^2}{q-v} \right] = 0, V_1 \geq 0 \quad (6.21)$$

y

$$\frac{dv}{dS_a} - \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f_1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{q-v} \pm r_f (q-v) - \frac{v^2}{q-v} \right] = 0, V_1 \geq 0 \quad (6.22)$$

*El valor de H_{f_2} que se indica es equivalente a $H_{f_2} = K_0 \frac{Q_0^2}{2gA_0^2}$ si se hace $K = K_0 \left(\frac{A_T}{A_0}\right)^2$.

Por otra parte, si en las condiciones extremas de operación 1 y 4 mencionadas en la sección 6.5.3 se supone que $Q_b, t = 0$, las ecuaciones (6.21) y (6.22) se escriben como:

$$\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{v} + (r_f + 1)v \right] = 0; v \geq 0 \quad (6.23)$$

y

$$\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{v} - (r_f + 1)v \right] = 0; v \geq 0 \quad (6.24)$$

mismas que pueden reducirse a dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, cuya solución se indica en las figuras 6.12 y 6.13.

En cuanto a las condiciones 2 y 3 de la citada sección, si $Q_{b,t} = Q_0$ las ecuaciones (6.21) y (6.22) adquieren la forma:

$$\frac{dv}{dS_a} - \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{1-v} - \left(\frac{r_f(1-v)^2 - v^2}{1-v} \right) \right] = 0; v \geq 0 \quad (6.25)$$

y

$$\frac{dv}{dS_a} - \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{1-v} + \left(\frac{r_f(1-v)^2 - v^2}{1-v} \right) \right] = 0; v \geq 0 \quad (6.26)$$

para la cual no se dispone de una solución analítica.⁴

Sin embargo, es posible efectuar una integración numérica de las ecuaciones anteriores mediante alguno de los métodos que existen para tal fin.⁴

Tomando en cuenta lo anterior, en las figuras 6.12 y 6.13 se muestran las soluciones de las ecuaciones (6.25) y (6.26), obtenidas con base a las siguientes sustituciones:

$$\frac{dv}{dS_a} = \frac{\Delta v}{S_{aj} - S_{aj-1}}, \Delta v = v_j - v_{j-1}, j = 1, 2, 3 \dots \frac{1}{\Delta v}$$

$$S_{a0} = 0, v_0 = 0$$

que permiten obtener un esquema de cálculo convergente para los valores extremos de S_a si $\Delta v \leq 0.010$.

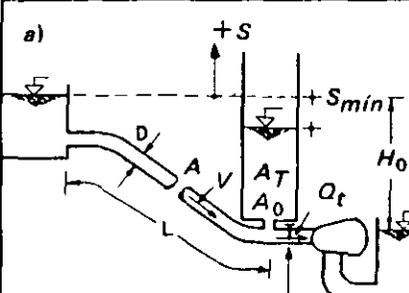
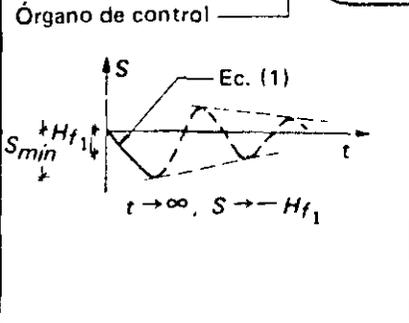
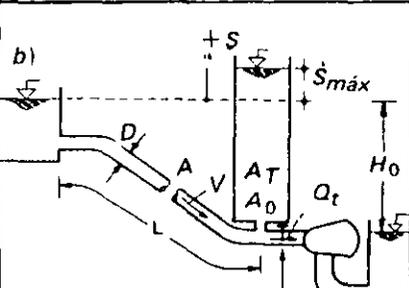
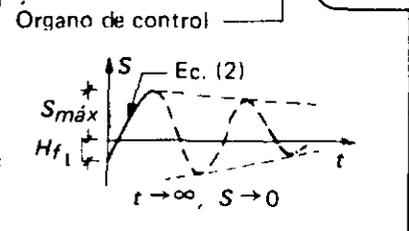
Sistema	Condiciones de operación	Ecuación diferencial
 <p>Órgano de control</p>  <p>Ec. (1)</p>	<p>Apertura total instantánea del órgano de control en una estación hidroeléctrica.</p>	$\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{1-v} - \left(\frac{r_f(1-v)^2 - v^2}{1-v} \right) \right] = 0; 0 \leq v \leq 1 \quad (1)$ $H_{f1} = f \frac{L}{D} \frac{V_0^2}{2g} \quad H_{f2} = \frac{K_0 Q_t^2}{2g A_0^2}$ $v = \frac{V}{V_0}, \quad S_0 = Q_b \sqrt{\frac{L}{g A A_T}}, \quad S_a = \frac{S}{H_{f1}}, \quad r_f = \frac{H_{f2}}{H_{f1}}$ <p>Condiciones de frontera y solución numérica</p> $t=0: S_{a0}=0; v_0=0; S_{a\min}, v_j=1$ $S_{aj} = -\frac{1}{2} \left[\sqrt{B^2 - 4C} + B \right], j=1, 2, 3, \dots \frac{1}{\Delta v}$ $B = v_j - r_f(1-v_j)^2 - S_{aj-1}$ $C = [v_j - r_f(1-v_j)^2] S_{aj-1} + (1-v_j) \left(\frac{S_0}{H_{f1}} \right)^2 \Delta v$ $v_j = v_{j-1} + \Delta v \quad \Delta v \leq 0.01$
 <p>Órgano de control</p>  <p>Ec. (2)</p>	<p>Cierre total instantáneo de órgano de control en una estación hidroeléctrica.</p>	<p>Ecuación diferencial</p> $\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{v} + (r_f + 1)v \right] = 0; 0 \leq v \leq 1 \quad (2)$ <p>Condiciones de frontera y solución analítica</p> $t=0: S_a = -1, v = 1; S_{a\max}, v = 0$ $v^2 = A(1 - B S_a) + \left[1 - A(B+1) \right] e^{-B(1+S_a)}$ $A = \frac{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2}{2(r_f + 1)^2} \quad B = \frac{2(r_f + 1)}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2}$

Figura 6.12 Solución de ecuaciones diferenciales para determinar cargas extremas en estaciones hidroeléctricas con tanques de oscilación considerando el efecto de la fricción.

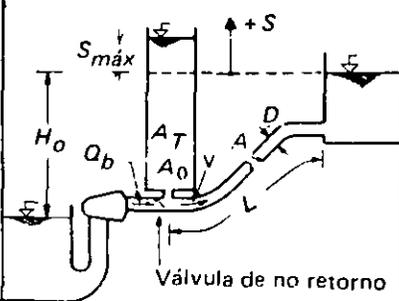
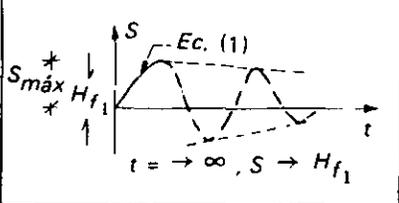
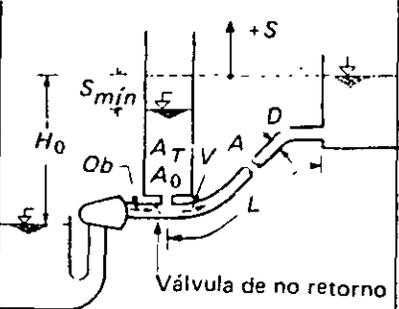
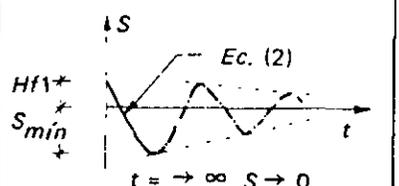
Sistema	Condición de operación	Condiciones de operación
	<p>Airranque instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.</p>	$\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{1-v} + \left(\frac{r_f(1-v)^2 - v^2}{1-v} \right) \right] = 0; 0 \leq v \leq 1 \quad (1)$ $H_{f1} = f \frac{L}{D} \frac{V_0^2}{2g}, \quad H_{f2} = \frac{K_0 Q_b^2}{2g A_0^2}, \quad v = \frac{V}{V_0}, \quad S_0 = Q_b \sqrt{\frac{L}{g A A_T}}, \quad S_a = \frac{S}{H_{f1}}, \quad r_f = \frac{H_{f2}}{H_{f1}}$ <p style="text-align: center;"><i>Condiciones de frontera y solución numérica</i></p> $t=0; S_{a0}=0, v_0=0; S_{am\acute{a}x} \quad v=1 \quad S_{aj} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{B^2 - 4C} - B \right], j=1, 2, 3, \dots \frac{1}{\Delta v}$ $B = r_f(1-v_j)^2 - v_j^2 - S_{aj-1} \quad C = [v_j^2 - r_f(1-v_j)^2] S_{aj-1} - v_j \left(\frac{S_0}{H_{f1}} \right)^2 \Delta v$ $v_j = v_{j-1} + \Delta v \quad \Delta v \leq 0.01$
		
	<p>Paro instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.</p>	<p style="text-align: center;"><i>Ecuación diferencial</i></p> $\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{v} - (r_f + 1)v \right] = 0; 0 \leq v \leq 1 \quad (2)$ <p style="text-align: center;"><i>Condiciones de frontera y solución analítica</i></p> $t=0; S_a=1, v=1; S_{m\acute{i}n} \quad v=0$ $v^2 = A(1 + B S_a) + [1 - A(B + 1)] e^{-B(1 - S_a)}$ $A = \frac{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2}{2(r_f + 1)^2}, \quad B = \frac{2(r_f + 1)}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2}$
		

Figura 6.13 Solución de ecuaciones diferenciales para determinar cargas extremas en plantas de bombeo con tanques de oscilación considerando el efecto de la fricción.

Finalmente, es importante señalar que la evolución en el tiempo de la carga piezométrica en los tanques de oscilación que han sido estudiados y en las cámaras de aire que se analizan en la siguiente sección, puede ser obtenida mediante la solución de las ecuaciones (6.21), (6.22), (6.36) y (6.37) de acuerdo con los procedimientos antes descritos y llevando a cabo la integración gráfica o numérica de las siguientes expresiones:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} dt = \pm \frac{H_{f_1} A_T}{Q_0} \int_{S_{a_j}}^{S_{a_{j-1}}} \frac{dS_a}{v}$$

para las condiciones extremas 1 y 4, o bien:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} dt = \pm \frac{H_{f_1} A_T}{Q_0} \int_{S_{a_{j-1}}}^{S_{a_j}} \frac{dS_a}{1-v}$$

para las 2 y 3 tomando en cuenta la convención de signos establecida en la sección 6.5.2.

6.6 CÁMARAS DE AIRE

Un dispositivo eficaz para el control de las oscilaciones de carga que se originan en una planta de bombeo, al presentarse una falla en el suministro de energía a la misma, es la llamada cámara de aire que generalmente se instala inmediatamente aguas abajo de una válvula de no retorno colocada en la tubería de descarga (figura 6.14).

Como puede verse, la parte inferior de la cámara contiene agua, mientras que la superior posee aire, que para las condiciones del flujo permanente inicial se encuentra comprimido bajo la carga de operación normal y almacena energía en forma análoga a un resorte. Al ocurrir la falla de energía, la presión en las bombas disminuye, el aire se expande y el agua sale de la cámara a través del orificio situado en el fondo, reduciendo con esto el cambio de velocidad y la caída de carga en la tubería. Una vez que la válvula de no retorno cierra, cuando el flujo en la tubería se invierte, el agua penetra en la cámara y el aire se comprime bajo una carga superior a la del flujo permanente inicial.

Las cámaras de aire deben ser abastecidas constantemente con pequeñas cantidades de aire comprimido para reemplazar el que se disuelve en el agua, lo cual constituye su principal desventaja; asimismo, para lograr un funcionamiento más efectivo se requiere de un orificio diferencial en la cámara tal como el que se ilustra en la figura 6.14, donde el flujo de la tubería a la cámara proporciona una pérdida de carga generalmente 2.5 veces mayor que para el flujo en la dirección opuesta,⁹ logrando con esto una mejor amortiguación.

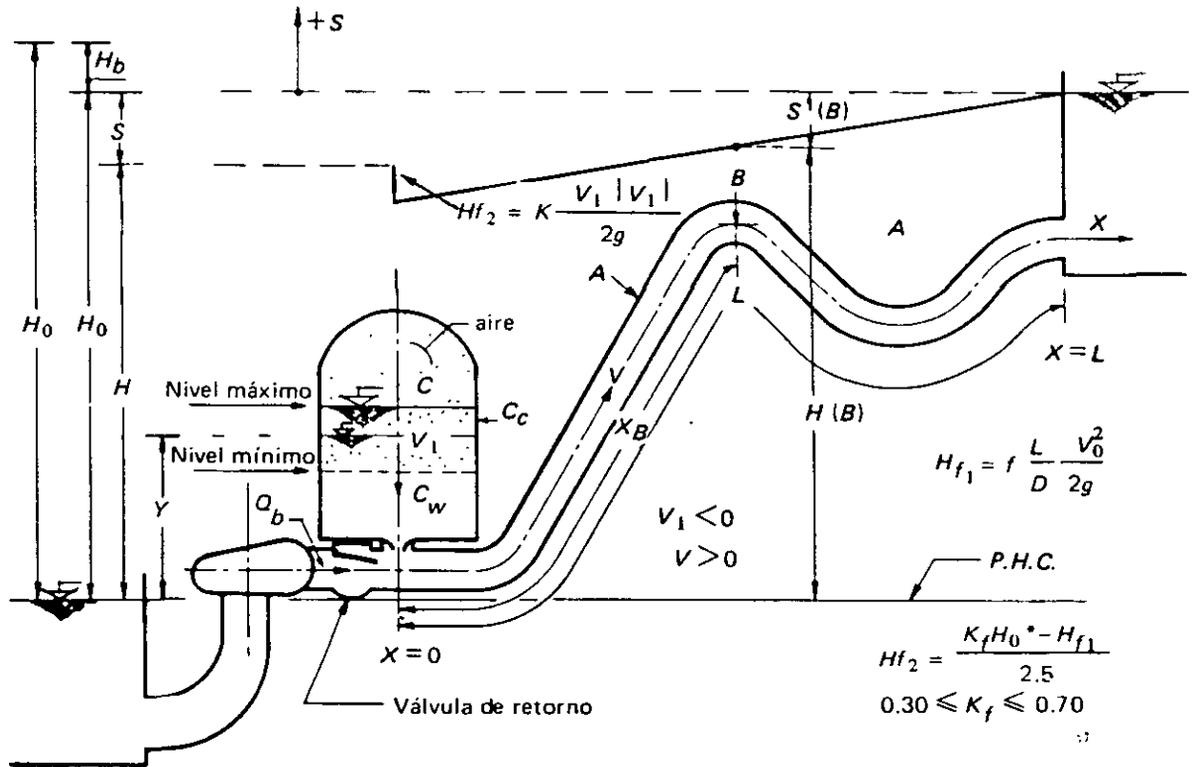


Figura 6.14 Cámara de aire.

6.7 ECUACIONES DIFERENCIALES PARA PLANTAS DE BOMBEO CON CÁMARAS DE AIRE

6.7.1 Ecuaciones dinámica y de continuidad

Procediendo en forma semejante a la sección 6.5.1 y de acuerdo con la figura 6.14, las ecuaciones dinámica y de continuidad para una planta de bombeo adquieren la forma:

$$\frac{L}{g} \frac{dV}{dt} - \left(S + K \frac{V_1 |V_1|}{2g} \right) + f \frac{L}{D} \frac{|V| |V|}{2g} = 0 \quad (6.27)$$

y

$$VA + \frac{dC_\omega}{dt} = Q_b \quad (6.28)$$

donde dC_ω es el volumen de agua contenido por la cámara.

6.7.2 Ecuación de proceso del aire en la cámara

El proceso de compresión y expansión del aire dentro de la cámara se puede considerar como uno intermedio entre un proceso adiabático y otro isotérmico,⁸ de tal manera que la relación entre la carga de presión absoluta H_a^* en la cámara y el volumen C del aire dentro de la misma, se puede expresar como:

$$H_a^* C^{1.2} = (H_a^* C^{1.2})_0 = \text{cte.} \quad (6.29)$$

donde el subíndice 0 denota las condiciones para el flujo permanente inicial, y la carga de presión absoluta se puede definir como (ver figura 6.14):

$$H_a^* = H - Y + H_b - K_1 \frac{V_1 |V_1|}{2g} \quad (6.30)$$

Sin embargo, el empleo directo de las dos últimas ecuaciones no permite obtener una solución analítica de las ecuaciones diferenciales que se establecen en esta sección, por lo que se requiere hacer las siguientes hipótesis simplificadoras:

- a) Durante el proceso de compresión y expansión del aire dentro de la cámara se acepta que:¹²

$$\frac{C}{H_a^*} \approx \left(\frac{C}{H_a^*} \right)_0$$

y

$$\frac{dH_a^*}{dt} \approx \frac{dH}{dt}$$

De acuerdo con lo anterior, si se derivan ambos miembros de la ecuación (6.29) con respecto al tiempo y se efectúan operaciones, con $\frac{dH_a^*}{dt} = \frac{dS}{dt}$ se obtiene:

$$\frac{dC}{dt} = - \left(\frac{C}{1.2 H_a^*} \right)_0 \frac{dS}{dt} \quad (6.31)$$

Por otra parte, si el volumen total de la cámara es de C_c resulta:

$$C + C_\omega = C_c$$

*Aunque en la segunda hipótesis simplificatoria es posible tomar en cuenta el nivel del agua en la cámara Y , se considera que su efecto puede ser omitido.

o bien

$$\frac{dC}{dt} = - \frac{dC_{\omega}}{dt}$$

sustituyendo la ecuación anterior en la (6.31) se puede escribir:

$$\frac{dC_{\omega}}{dt} = \left(\frac{C}{1.2 H_a^*} \right)_0 \frac{dS}{dt} \quad (6.32)$$

6.7.3 Plantas de bombeo sin fricción

Si se sustituye la ecuación (6.32) en la (6.28) y se derivan con respecto al tiempo los dos miembros de la ecuación resultante, se tendrá que:

$$A \frac{dV}{dt} + \left(\frac{C}{1.2 H_a^*} \right)_0 \frac{d^2 S}{dt^2} = 0 \quad (6.33)$$

ecuación que sustituida en la (6.27) con $K = f = 0$ y $H_a^* = H_0^*$ da como resultado:

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + 1.2 \frac{Ag}{L} \left(\frac{H_a^*}{C} \right)_0 S = 0 \quad (6.34)$$

que es una ecuación totalmente semejante a la (6.17), con la siguiente solución general;

$$S = C_1 \cos \sqrt{1.2 \frac{Ag}{L} \left(\frac{H^*}{C} \right)_0} t + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{1.2 \frac{Ag}{L} \left(\frac{H^*}{C} \right)_0} t \quad (6.35)$$

La solución de la ecuación anterior, para las condiciones extremas (3) y (4) de la sección 6.5.3, se muestra en la figura 6.11.

6.7.4 Plantas de bombeo con fricción

Si la ecuación (6.27) se escribe en la misma forma que la (6.19), se sustituyen en la ecuación resultante las (6.28) y (6.32) y se utilizan los parámetros definidos en la sección 6.5.4 con $H_{f2} = K \left[\frac{1.2 AH_0^*}{C_0} \right]^2 \frac{V_0^2}{2g}$ se pueden escribir las siguientes ecuaciones para $v \geq 0$:

$$\frac{dv}{dS_a} - \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}} \right)^2} \left[\frac{S_a}{1-v} + \left(\frac{r_f (1-v)^2 - v^2}{1-v} \right) \right] = 0 \quad (6.36)$$

El valor de H_{f2} que se indica es equivalente a $H_{f2} = K_0 \frac{Q_0^2}{2gA_0^2}$ si se hace $K_1 = K_0 \left(\frac{C_0}{1.2 H_0^ A_0} \right)^2$

Sistema	Condición de operación	Ecuación diferencial
	<p>Arranque instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.</p>	$\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{1-v} + \left(\frac{r_f(1-v)^2 - v^2}{1-v} \right) \right] = 0; 0 \leq v \leq 1 \quad (1)$ $H_{f1} = f \frac{L}{D} \frac{v_0^2}{2g}, H_{f2} = \frac{K_0 Q_b}{2g A_0^2}$ $v = \frac{v}{v_0}, S_0 = 1.10 Q_b \sqrt{\frac{L}{gA} \left(\frac{H^*}{C}\right)_0}, S_a = \frac{S}{H_{f1}}, r_f = \frac{H_{f2}}{H_{f1}}$ <p>Condiciones de frontera y solución numérica</p> $t=0; S_{a0}=0, v_0=0, S_{a\max}, v=1$ $S_{aj} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{B^2 - 4C} - B \right], j=1, 2, 3 \dots \frac{1}{\Delta v}$ $B = r_f(1-v_j)^2 - v_j^2 - S_{aj-1}$ $C = [v_j^2 - r_f(1-v_j)^2] S_{aj-1} - (1-v_j) \left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2 \Delta v$ $v_j = v_{j-1} + \Delta v, \Delta v \leq 0.01$
	<p>Paro instantáneo de los equipos en una planta de bombeo.</p>	<p>Ecuación diferencial</p> $\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{v} - (r_f + 1)v \right] = 0; 0 \leq v \leq 1 \quad (2)$ <p>Condiciones de frontera y solución analítica</p> $t=0; S_a=1, v=1; S_{a\min}, v=0$ $v^2 = A(1 + B S_a) + [1 - A(B + 1)] e^{-B(1 - S_a)}$ $A = \frac{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2}{2(r_f + 1)^2}, B = \frac{2(r_f + 1)}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2}$

Figura 6.15 Solución de ecuaciones diferenciales para determinar cargas extremas en plantas de bombeo con cámaras de aire considerando el efecto de la fricción.

para la condición extrema 3, y

$$\frac{dv}{dS_a} + \frac{1}{\left(\frac{S_0}{H_{f1}}\right)^2} \left[\frac{S_a}{v} - (r_f + 1)v \right] = 0 \quad (6.37)$$

para la condición extrema 4, siendo $S_0 = 1.10 Q_b \sqrt{\frac{L}{gA} \left(\frac{H^*}{C}\right)_0}$ (figura 6.11).

La solución de las ecuaciones anteriores, se muestra en la figura 6.15.

6.8 CARTAS PARA DETERMINAR CARGAS EXTREMAS EN TANQUES DE OSCILACIÓN Y CÁMARAS DE AIRE

Con base a la solución de las ecuaciones diferenciales establecidas para sistemas hidráulicos con fricción, correspondientes a las condiciones extremas de operación mencionadas en la sección 6.5.3, se obtuvieron las cartas que se muestran en las figuras 6.16 y 6.17.

Mediante la carta de la figura 6.16 pueden calcularse los valores de la sobrelevación máxima del nivel del agua en un tanque de oscilación o de la carga en una cámara de aire situados inmediatamente aguas abajo de una válvula de no retorno, para la condición de un arranque instantáneo de los equipos de bombeo, si se conocen los valores de S_0 , H_{f1} y r_f anteriormente definidos (ver ejemplo 6.4).

Asimismo, en esta carta también se puede determinar la sobrelevación mínima en un tanque de oscilación situado inmediatamente aguas arriba del órgano de control de una estación hidroeléctrica, para la condición de una apertura total instantánea de este último.

Por lo que se refiere a la carta de la figura 6.17, permite conocer los valores de la sobrelevación mínima del nivel del agua en un tanque de oscilación o de la carga en una cámara de aire ubicados en la misma forma que se mencionó en el párrafo anterior, para la condición de un paro instantáneo de los equipos de bombeo, o bien, la sobrelevación máxima en un tanque de oscilación de una estación hidroeléctrica, para un cierre total instantáneo del órgano de control (ver ejemplos 6.3 y 6.5).

6.9 DIMENSIONES APROXIMADAS DE UNA CÁMARA DE AIRE

Para determinar las dimensiones aproximadas de una cámara de aire se propone el siguiente procedimiento:

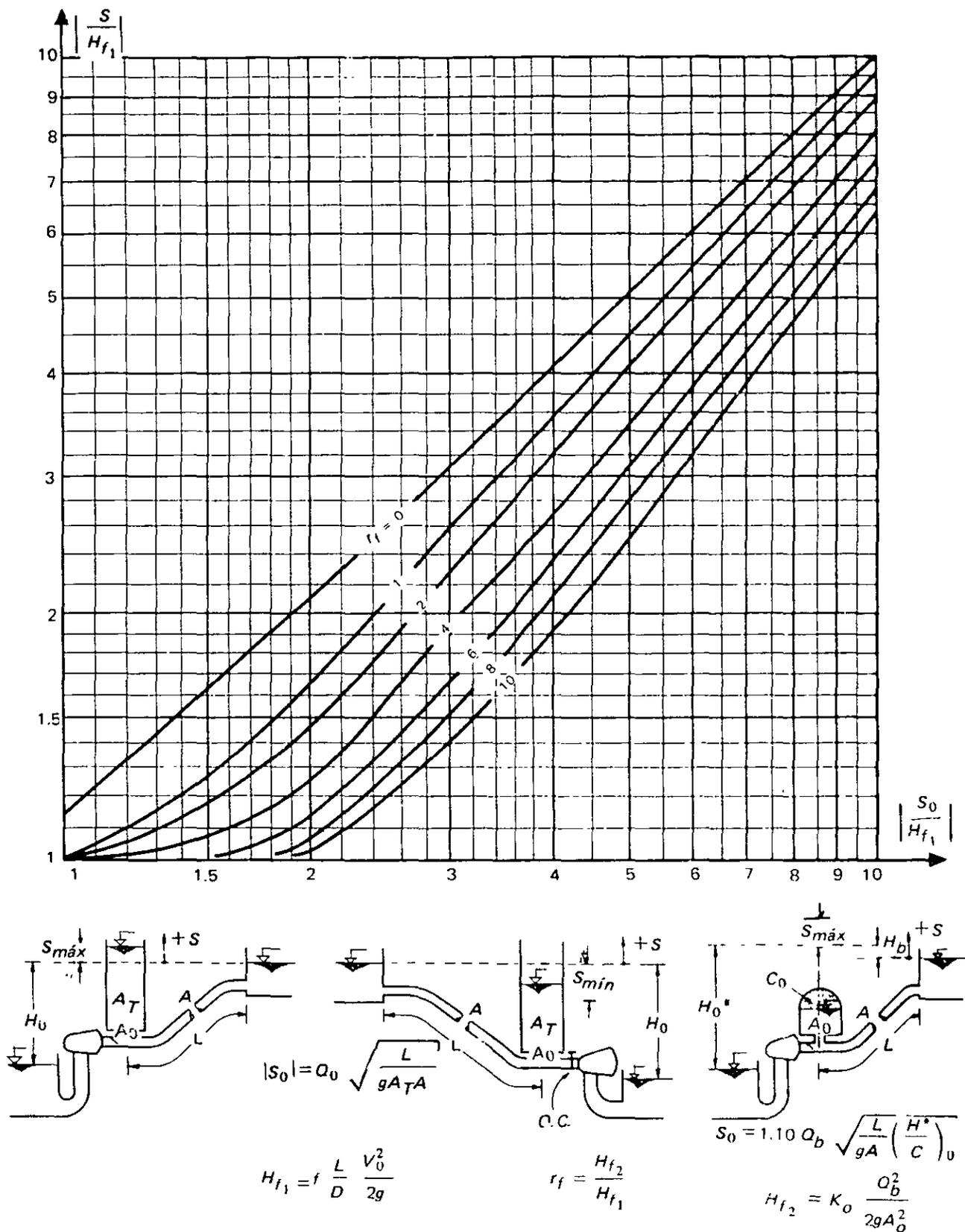


Figura 6.16 Cartas para tanques de oscilación y cámaras de aire cuando se presenta un arranque instantáneo de los equipos en una planta de bombeo o una apertura total instantánea del órgano de control en una estación hidroeléctrica.

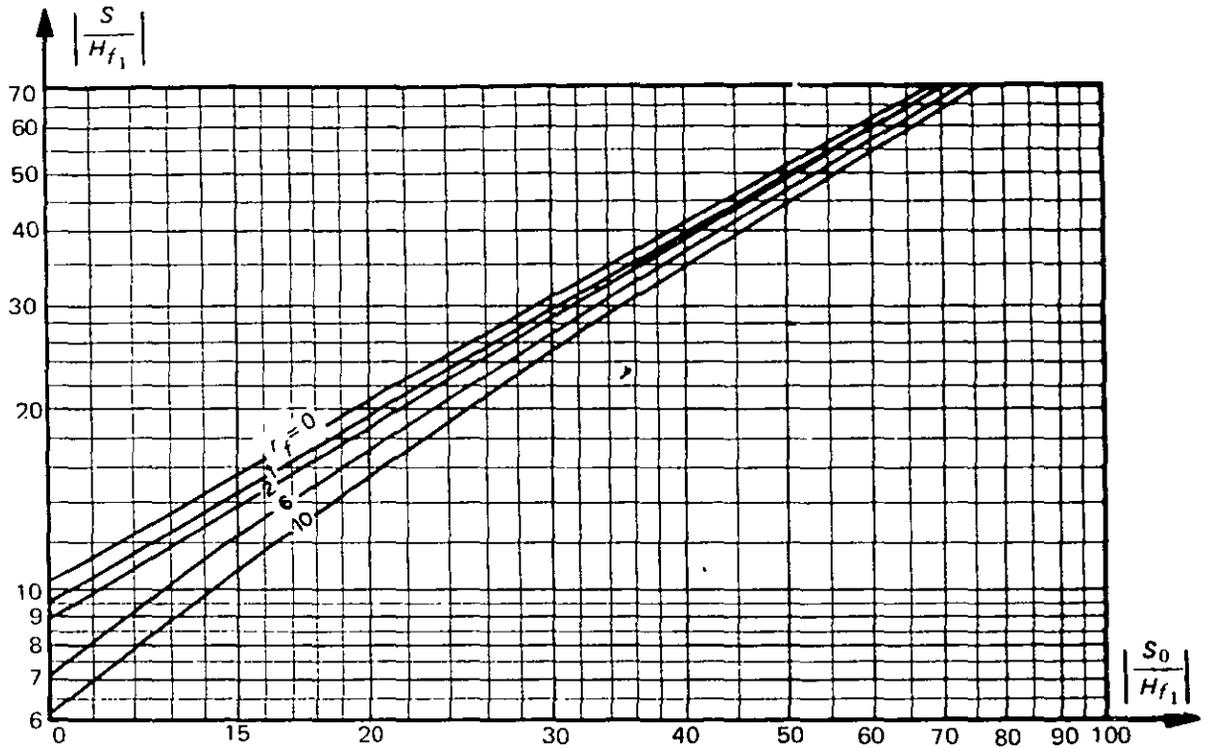


Figura 6.16 (continuación)

- a) Se determina la depresión mínima que puede aceptarse en una sección crítica de la tubería de descarga, tal como la B de la figura 6.14, y se calcula la correspondiente a la cámara mediante la expresión:*

$$|S_{min}| = \left(\frac{L}{L - x_B} \right) |S_{min}|_B - H_{f_2}$$

- b) Se calcula el valor de $\left| \frac{S_{min}}{H_{f_1}} \right|$ y de la figura 6.17 se obtiene el de $\left| \frac{S_{0min}}{H_{f_1}} \right|$.
- c) Se obtiene el valor de C_{0min} que será el volumen mínimo de aire para el flujo permanente inicial correspondiente al nivel máximo del agua que se indica en la figura 6.14, de acuerdo con la expresión:

$$C_{0min} = \frac{H_0^* L}{gA \left(\frac{H_{f_1}}{1.10 Q_b} \right)^2 \left(\frac{S_{0min}}{H_{f_1}} \right)^2}$$

- d) Conocido el valor de C_{0min} se determina el volumen de aire correspondiente al nivel mínimo del agua en la cámara de acuerdo con la expresión:

* El valor de H_{f_2} puede suponerse igual a $\frac{K_f H_0^* - H_{f_1}}{2.5}$ donde K_f varía entre 0.3 y 0.7.

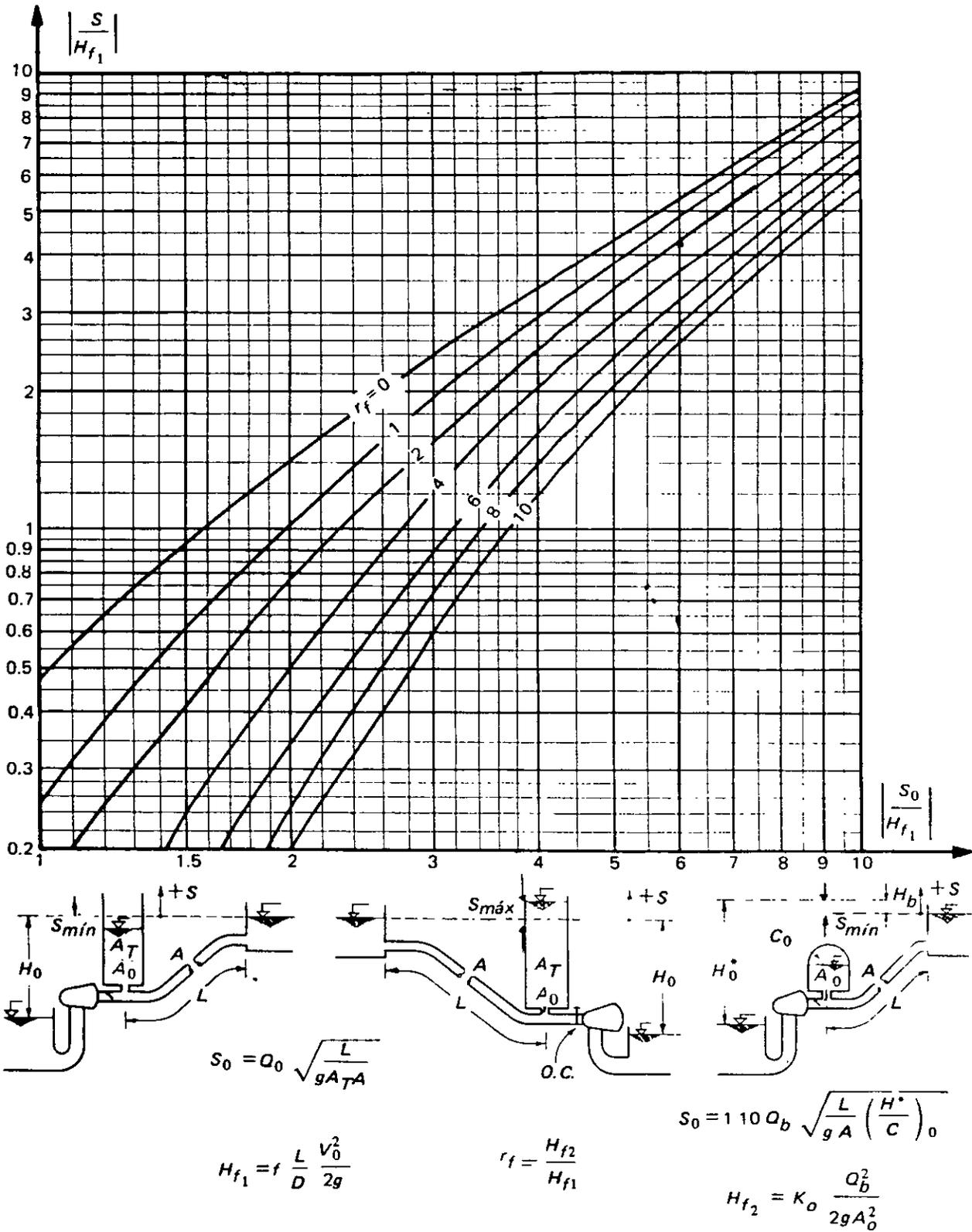


Figura 6.17 Cartas para tanques de oscilación y cámaras de aire cuando se presenta un paro instantáneo de los equipos de una planta de bombeo o un cierre total instantáneo del órgano de control en una estación hidroeléctrica.

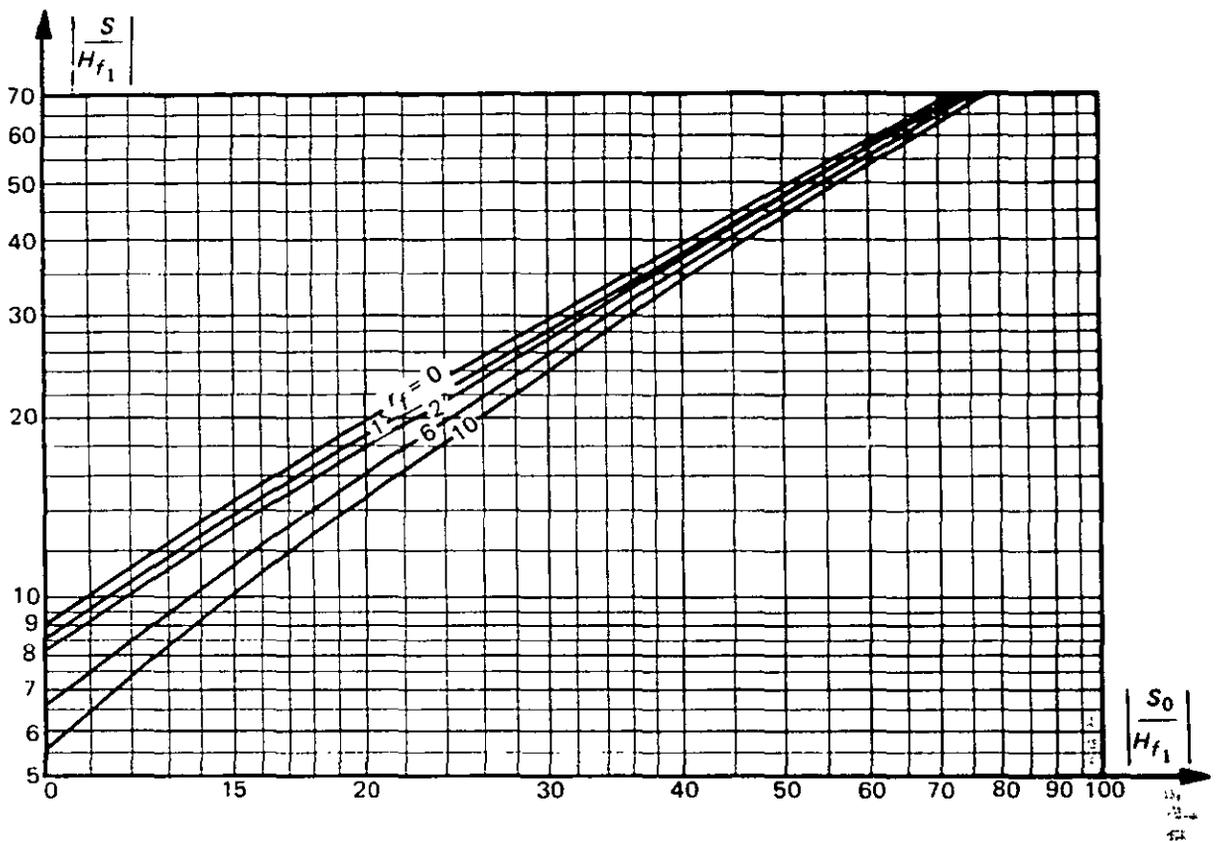


Figura 6.17 (continuación)

$$C_{0\text{máx}} = 1.10 C_{0\text{mín}}$$

y para este volumen máximo se calcula la depresión mínima $S'_{\text{mín}}$ en la cámara con base en la figura 6.17 y la expresión:

$$\left| \frac{S'_{\text{mín}}}{H_{f1}} \right| = \frac{1.10 Q_b}{H_{f1}} \sqrt{\frac{LH_0^*}{gAC_{0\text{máx}}}}$$

e) Conocidos los valores de $C_{0\text{máx}}$ y $S'_{\text{mín}}$ se obtiene el volumen de aire máximo para el flujo transitorio mediante la expresión:

$$C_{\text{máx}} = C_{0\text{máx}} \left[\frac{H_0^* + H_{f1}}{H_0^* - |S'_{\text{mín}}|} \right]^{0.83}$$

f) Con el fin de no permitir la entrada de aire en la tubería de descarga el volumen de la cámara se calcula como:

$$C_c = 1.10 C_{\text{máx}}$$

6.10 TANQUES UNIDIRECCIONALES

Los tanques unidireccionales son dispositivos de alivio que tienen un funcionamiento hidráulico semejante a los de oscilación, pero sólo sirven para atenuar la depresión que tiene lugar en la tubería de descarga de una planta de bombeo al presentarse una falla en el suministro de energía a la misma.

Como puede verse en la figura 6.18, están conectados a la tubería de descarga mediante un conducto que tiene en su extremo aguas abajo una válvula de no retorno que cumple con la función de impedir el flujo hacia el tanque, y otro de menor sección con una válvula de flotador que cierra una vez que el tanque se llena cuando las condiciones de operación de la planta son nuevamente las normales.

6.10.1 Dimensiones aproximadas de un tanque unidireccional

Con objeto de obtener en forma aproximada el área requerida por un tanque unidireccional, supóngase que para condiciones de flujo permanente éste opera con una carga piezométrica $Y_0 = H_0$, de tal manera que al presentarse una falla en el suministro de energía a la planta se comporta como un tanque de oscilación, y en estas condiciones, si la carga piezométrica mínima permisible en la sección $x = 0$ de la figura 6.18 es $H_{mín} > Y_b$, se puede demostrar que el área mínima requerida por éste resulta:

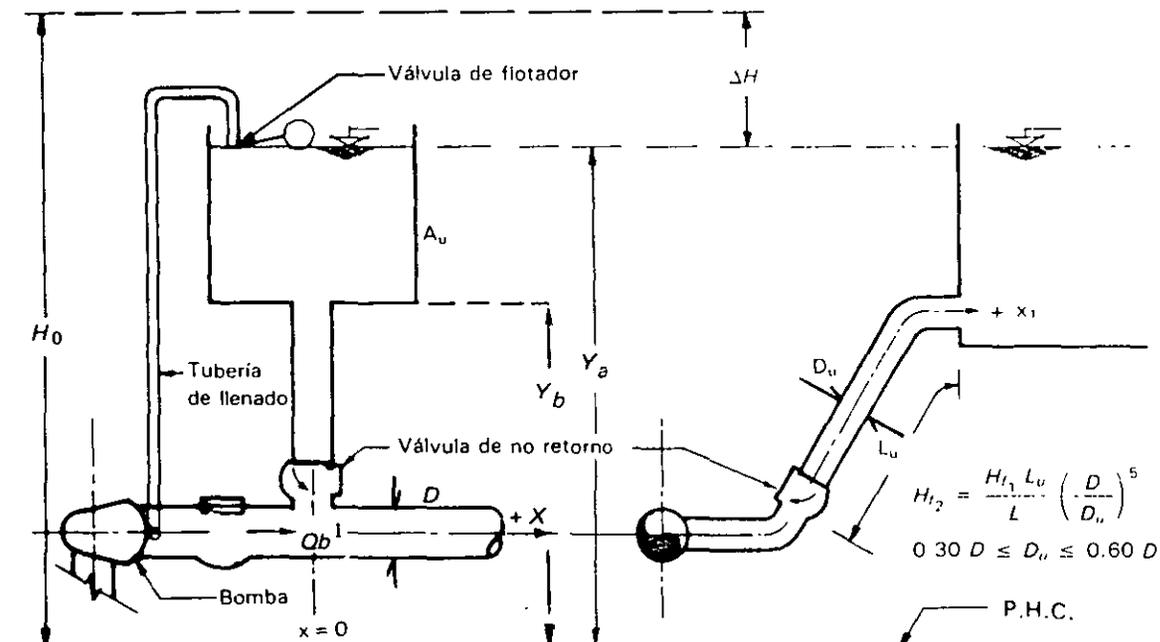


Figura 6.18 Tanque unidireccional.

$$A_T = \left[\frac{Q_0}{H_{f_1} \left| \frac{S_0}{H_{f_1}} \right|} \right]^2 \frac{L}{gA}$$

donde el término $\left| \frac{S_0}{H_{f_1}} \right|$ se obtiene de la figura 6.17 en función de los valores de $\left| \frac{S_{mín}}{H_{f_1}} \right|$ y r_f , siendo* $|S_{mín}| = H_0 - Y_{mín}$ y $Y_{mín} = H_{mín} + H_{f_2}$

Por otra parte, si se considera que la energía potencial del agua contenida en el tanque que se transforma en energía cinética resulta ser:

$$E_P = \frac{\gamma A_T}{2} S_{mín}^2$$

y se hace la hipótesis de que con otro tanque que tenga una carga normal de operación $Y_0 = H_0 - \Delta H$ y un área A_{Tu} , se alcanza la misma carga mínima si en este último se transforma la misma cantidad de energía, se obtiene que:

$$A_{Tu} = \left(\frac{|S_{mín}|}{|S_{mín}| - \Delta H} \right)^2 A_T$$

Finalmente, es necesario subrayar que las dimensiones de los dispositivos de alivio que han sido analizados hasta aquí, **son solamente aproximadas**, y sólo sirven como datos de partida para una simulación con las condiciones de frontera que se establecen en las siguientes secciones, misma que permitirá obtener las dimensiones definitivas.

6.11 CONDICIONES DE FRONTERA PARA VÁLVULAS

6.11.1 Válvula aliviadora de presión situada en el extremo aguas abajo de un conducto por gravedad

Para este caso, de la figura 6.3a se puede escribir:

$$Q_{P_{j,n}} = Q_{P_{j+1,1}} + Q_{P_{j+2,1}} \quad (6.38)$$

Por otra parte, si se recuerda que $Q_{P_{j+2,1}} = (C_d A_v)_P \sqrt{2g H_P}$ se sustituye la ecuación (6.1) en la (6.38), y se considera que $H_{P_{j,n}} = H_{P_{j+2,1}} = H_P$ después de efectuar operaciones con $Z_{P_a} = 0$ resulta

$$Q_{P_{j+1,1}} = \left[(C_d A_v)_P + (C_{d_a} A_a)_P \right] \sqrt{2g H_P} \quad (6.39)$$

* El valor de H_{f_2} puede suponerse igual a $\frac{H_{f_1} L_u}{L} \left(\frac{D}{D_u} \right)^5$ donde L_u y D_u son la longitud y el diámetro de la tubería de unión entre el tanque y el conducto respectivamente, $0.30D \leq D_u \leq 0.60D$

Si ahora se sustituye en la ecuación anterior la (6.2), y se hace

$$v_p = v_{p_{j+1,1}}$$

después de hacer operaciones ésta adquiere la forma:

$$v_p = (\eta_p + r_a \eta_{ap}) \sqrt{h_p} \quad (6.40)$$

igualando la última ecuación con la (5.24), con $C_{pa} = C_{pa_j}$ se obtiene:

$$(\eta_p + r_a \eta_{ap}) \sqrt{h_p} + \frac{h_p}{2\epsilon} - C_{pa} = 0 \quad (6.41)$$

donde los valores de η_p dependerán de la ley de cierre en el órgano de control, y los de η_{ap} se deducen de la figura 6.3b, de tal manera que:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{ap} &= \frac{h_p - h_1}{h_2 - h_1}, p_1 < p < p_2 \\ \eta_{ap} &= 1, p \geq p_2 \\ \eta_{ap} &= 0, p \leq p_1 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Como puede verse, al sustituir cualquiera de las ecuaciones del sistema (I) en la (6.41) permite la solución de esta última para obtener el valor de h_p , y la de (6.40) el de v_p .

6.11.2 Válvula aliviadora de presión situada en el extremo aguas arriba de la tubería de descarga de una bomba

En este caso, aceptando que la válvula aliviadora opera una vez que la de no retorno se encuentra cerrada, de la figura 6.3 se deduce que $Q_{p_{j+1,1}} = 0$, lo que da como resultado:

$$Q_{p_{j,n}} = Q_{p_{j+2,1}}$$

Siguiendo un procedimiento semejante al de la sección anterior, con $v_{p_{j,n}} = v_{p_{j+2,1}} = v_p$, de la ecuación anterior y la (6.8) se obtiene que:

$$v_p = -r_a \eta_{ap} \sqrt{h_p} \quad (6.42)$$

y de la ecuación (5.25) con $C_{na_j} = C_{na}$ resulta:

$$r_a \eta_{ap} \sqrt{h_p} + \frac{h_p}{2\epsilon} + C_{na} = 0 \quad (6.43)$$

Así, en base a la ecuación anterior y al sistema (I) es posible determinar el valor de h_p , y de la (6.42) el de r_p .

6.11.3 Válvula reguladora de presión

Como puede deducirse fácilmente, las condiciones de frontera para una válvula reguladora de presión son las mismas que las correspondientes a las aliviadoras de presión, sólo que en este caso los valores de η_{ap} dependerán de la ley de apertura de la válvula y sustituyen a los proporcionados por el sistema (I) (ver ejemplo 6.6).

6.12 CONDICIONES DE FRONTERA PARA TANQUES DE OSCILACIÓN Y CÁMARAS DE AIRE

6.12.1 Tanque de oscilación situado en cualquier sección del conducto

Para establecer las condiciones de frontera en un tanque de oscilación se puede considerar un sistema tal como el que se muestra en la figura 6.19a donde puede observarse que existe una tubería de unión entre el tanque y el conducto, cuya longitud L_u es pequeña comparada con la de este último, y un orificio diferencial en la entrada del tanque.

Las ecuaciones requeridas en la tubería de unión son las siguientes:

- Ecuación de cargas. Si las pérdidas de carga entre las secciones (j, n) , y $(j + 1, 1)$ son despreciables, recordando que $h_p = \frac{H_p}{H_0}$ resulta:

$$h_{p_{j,n}} = h_{p_{j+1,1}} = h_p \quad (6.44)$$

- Ecuación característica adimensional positiva para la sección (j, n) :

$$v_{p_{j,n}} = C_{paj} \frac{h_{p_{j,n}}}{2\epsilon_j} \quad (6.45)$$

- Ecuación característica adimensional negativa para la sección $(j + 1, 1)$:

$$v_{p_{j+1,1}} = C_{nai+1} + \frac{h_{p_{j+1,1}}}{2\epsilon_{j+1}} \quad (6.46)$$

- Ecuación de continuidad:

$$v_{p_{j+1,1}} = v_{p_{j,n}} - v_{up} \quad (6.47)$$

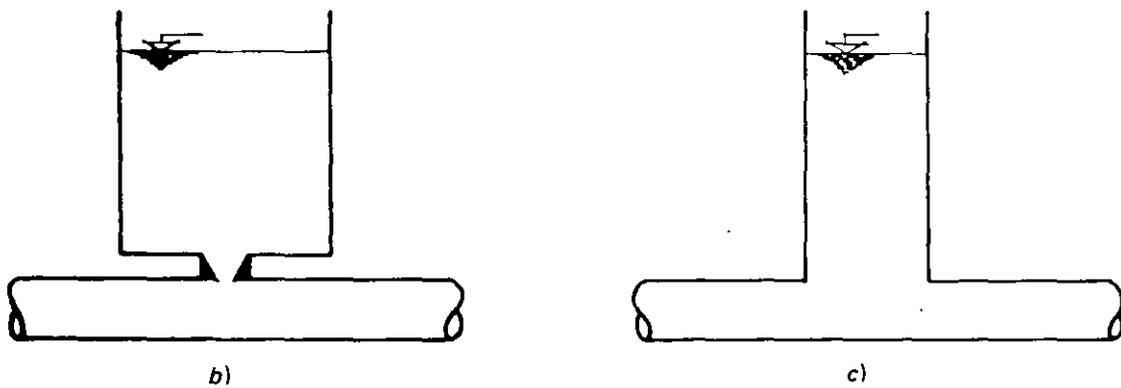
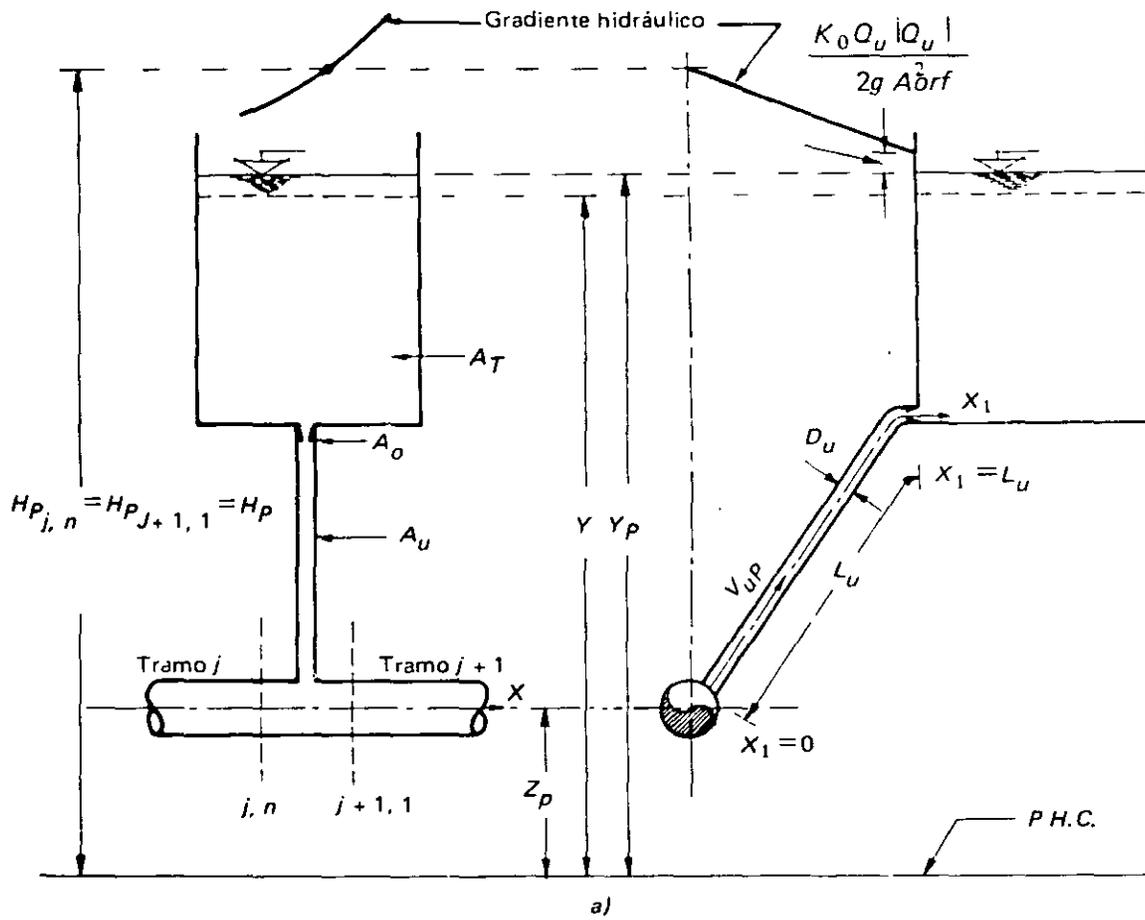


Figura 6.19 Condiciones de frontera para un tanque de oscilación.

donde

$$v_{uP} = \frac{H_0 A_T}{Q_0} \frac{dy}{dt} \quad (6.47a)$$

En la ecuación anterior y es la carga piezométrica adimensional en el tanque, definida como $y = \frac{Y}{H_0}$, y v_{uP} es el gasto adimensional en la tubería de unión definido como $v_{uP} = \frac{Q_{uP}}{Q_0}$ que se considera positivo si el flujo es hacia el tanque y negativo en caso contrario.

Por otra parte, si se consideran como indeformables las paredes de la tubería anteriormente citada, y el flujo a través de ésta como incompresible, las ecuaciones (2.21) y (3.1) permiten escribir:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} + \frac{Q_0}{gA_u H_0} \frac{dv_u}{dt} + \frac{f_u Q_0^2 v_u |v_u|}{2g H_0 A_u^2 D_u} = 0 \quad (6.48)$$

si en la ecuación anterior se acepta que:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{1}{L_u} \left(y_P + \frac{K_0 Q_0^2}{2g H_0 A_0^2} v_{uP} |v_{uP}| - h_P \right) \quad (6.49)$$

y

$$\frac{dv_u}{dt} = \frac{v_{uP} - v_u}{\Delta t} \quad (6.50)$$

y se considera que para el cálculo de pérdidas por fricción $v_{uP} \approx v_u$, después de sustituir las dos últimas ecuaciones en la (6.48) y hacer operaciones resulta:

$$v_{uP} = v_u + K_u \Delta t (h_P - y_P - [C_{ort.} + F_u] v_u |v_u|) \quad (6.51)$$

donde

$$K_u = \frac{gA_u H_0}{Q_0 L_u}$$

$$F_u = \frac{f_u L_u Q_0^2}{2g H_0 D_u A_u^2}$$

$$C_{ort.} = \frac{K_0 Q_0^2}{2g H_0 A_0^2}$$

y de la ecuación (6.47a) con $v_{uP} = \frac{v_u + v_{uP}}{2}$ y $\frac{dy}{dt} = \frac{y_P - y}{\Delta t}$, se obtiene:

$$y_P = y + \frac{Q_0 \Delta t}{2 H_0 A_T} (v_{uP} + v_u) \quad (6.52)$$

Aquí, es necesario señalar que el parámetro K_0 tendrá dos valores diferentes para las condiciones de entrada y salida al tanque respectivamente, y si no existe orificio diferencial, $K_0 = 0$.

Como puede verse, se dispone de un sistema de 6 ecuaciones lineales (ecuaciones 6.44 a 6.47, 6.51 y 6.52) con 6 incógnitas ($h_{p_{j,n}}$, $h_{p_{j+1,1}}$, $v_{p_{j,n}}$, $v_{p_{j+1,1}}$, v_{u_p} y y_p), mismo que puede ser resuelto mediante el uso de algún método numérico destinado para tal fin.

Cuando el tanque de oscilación está conectado al conducto sólo con un orificio diferencial, de la figura 6.19b se deduce que:

$$h_p = y_p + C_{orf.} v_u |v_u| \quad (6.53)$$

donde v_u representa en este caso el gasto adimensional en el orificio.

De esta manera, el sistema de 6 ecuaciones lineales con 6 incógnitas es el mismo que se estableció anteriormente, sólo que ahora la ecuación (6.51) debe ser reemplazada por la (6.53).

Finalmente, cuando el tanque de oscilación es del tipo simple (figura 6.19c), se tendrá que $h_p = y_p$, y esto da como resultado un sistema de 5 ecuaciones lineales (ecuaciones 6.44 a 6.47 y 6.52) con 5 incógnitas ($h_{p_{j,n}}$, $h_{p_{j+1,1}}$, $v_{p_{j,n}}$, $v_{p_{j+1,1}}$ y v_{u_p}).

6.12.2 Cámara de aire situada en cualquier sección del conducto

En forma semejante al caso de un tanque de oscilación, para analizar las condiciones de frontera de una cámara de aire se puede tomar en cuenta una instalación tal como la mostrada en la figura 6.20 donde puede verse una tubería de unión cuya longitud debe ser lo más pequeña posible y un orificio diferencial en la entrada a la cámara.

Las ecuaciones que se requieren en este caso son las siguientes:

- Ecuación de cargas. Despreciando las pérdidas de carga entre las secciones (j,n) y $(j+1,1)$, se obtiene

$$h_{p_{j,n}} = h_{p_{j+1,1}} = y_p \quad (6.54)$$

- Ecuación característica adimensional positiva para la sección (j,n) :

$$v_{p_{j,n}} = C_{pa_j} - \frac{h_{p_{j,n}}}{2\epsilon_j} \quad (6.55)$$

- Ecuación característica adimensional negativa para la sección $(j+1,1)$:

$$v_{p_{j+1,1}} = C_{na_{j+1}} + \frac{h_{p_{j+1,1}}}{2\epsilon_{j+1}} \quad (6.56)$$

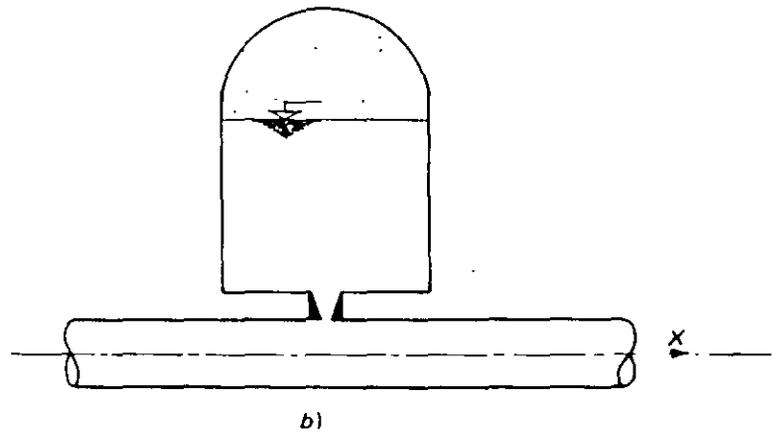
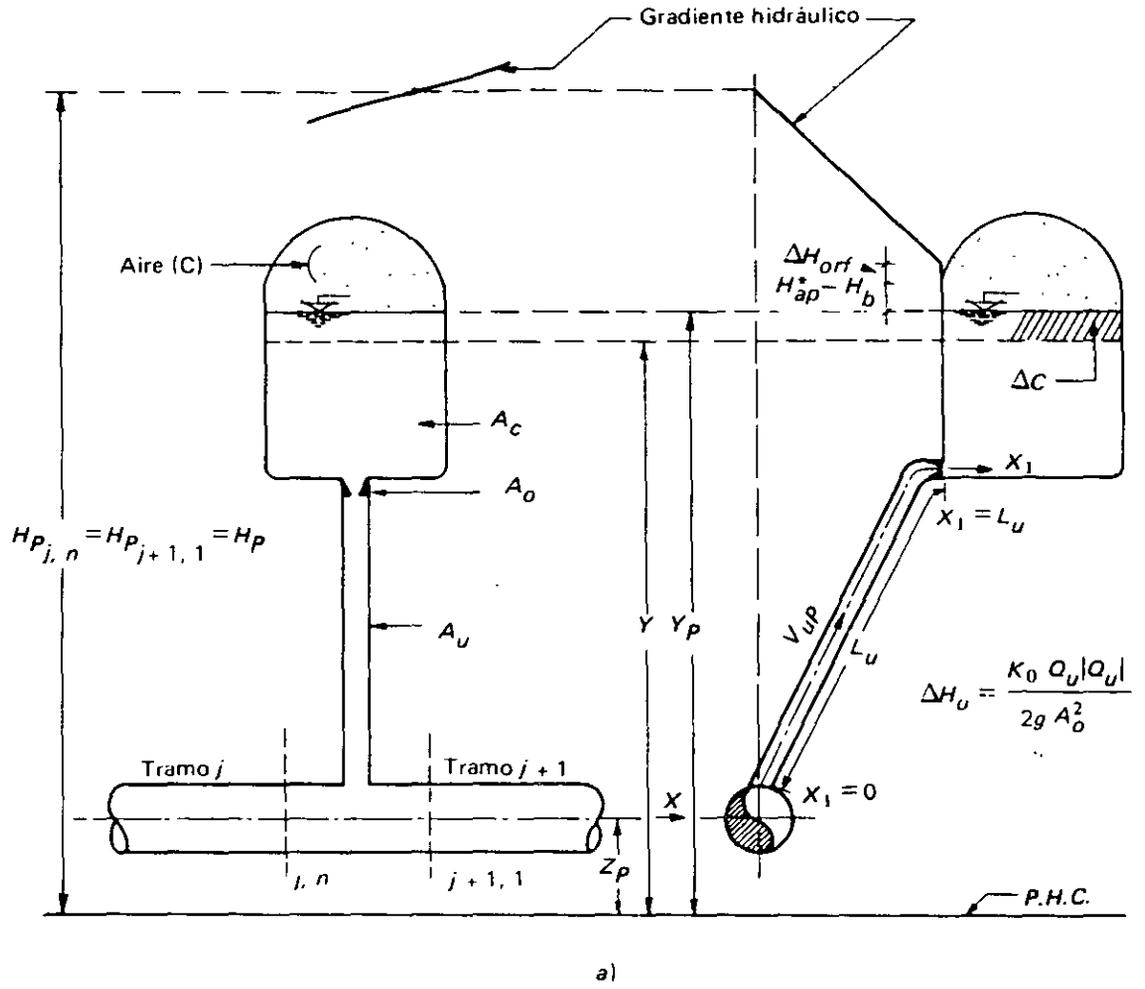


Figura 6.20 Condiciones de frontera para una cámara de aire.

- Ecuación de continuidad:

$$v_{p_{j+1,1}} = v_{p_{j,n}} - v_{u_p} \quad (6.57)$$

- Ecuación de proceso del aire en la cámara (ecuación 6.29):

$$h_{a_p}^* c_p^{1,2} = h_{a_0}^* \quad (6.58)$$

donde

$$h_{a_p}^* = \frac{H_{a_p}^*}{H_0}, c_p = \frac{C_p}{C_0} \text{ y } h_{a_0}^* = \left(\frac{H_a^*}{H} \right)_0$$

- Ecuación para el nivel del agua en la cámara:

$$y_p = y + \frac{Q_0 \Delta t}{2 H_0 A_c} (v_{u_p} + v_u) \quad (6.59)$$

- Ecuación para el volumen del aire en la cámara (ver figura 6.20):

$$c_p = c - \frac{A_c H_0}{C_0} (y_p - y) \quad (6.60)$$

donde A_c es el área de la sección transversal de la cámara.

Por otra parte, si se lleva a cabo un razonamiento análogo al de la sección anterior para la tubería de unión, con base a la ecuación (6.49) y haciendo

$$h_b = \frac{H_b}{H_0} \text{ y } v_u = \frac{Q_u}{Q_0} \text{ que obtiene:}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{1}{L_U} \left(y_p + h_{a_p}^* - h_b + \frac{K_0 Q_0^2}{2g H_0 A_c^2} v_{u_p} |v_{u_p}| - h_p \right) \quad (6.61)$$

Sustituyendo esta ecuación y la (6.50) en la (6.48), con $v_{u_p} \approx v_u$ resulta:

$$v_{u_p} = v_u + K_u \Delta t \left[h_p + h_b - y_p - h_{a_p}^* - (C_{orf.} + F_u) v_u |v_u| \right] \quad (6.62)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (6.54) a (6.57) se obtiene:

$$h_p = \frac{C_{pa_j} - C_{na_{j+1}} - v_{u_p}}{\frac{1}{2\epsilon_j} + \frac{1}{2\epsilon_{j+1}}} \quad (6.63)$$

y de las ecuaciones (6.58) a (6.60):

$$h_{a_p}^* \left[c - \frac{A_c H_0}{C_0} (y_p - y) \right]^{1.2} = h_{a_0}^* \quad (6.64)$$

Como puede observarse se dispone de un sistema de 4 ecuaciones (ecuaciones 6.59 y 6.62 a 6.64) con 4 incógnitas (y_p , v_{u_p} , h_p y $h_{a_p}^*$) y, debido a que la ecuación (6.64) no es lineal, es necesario recurrir a un método interactivo para la solución de dicho sistema, tal como el de Newton-Raphson. Los valores de $v_{p_{j,n}}$, $v_{p_{j+1,1}}$ y c_p se determinan de las ecuaciones (6.55), (6.56) y (6.60).

Si la cámara de aire está conectada al conducto de manera semejante a la indicada en la figura 6.20b, se deduce que:

$$h_{a_p}^* = h_p + h_b - y_p - C_{orf} v_{u_p} |v_{u_p}| \quad (6.65)$$

Sustituyendo la ecuación anterior y la (6.60) en la (6.58) da como resultado.

$$\left(h_p + h_b - y_p - C_{orf} v_{u_p} |v_{u_p}| \right) \left[c - \frac{A_c H_0}{C_0} (y_p - y) \right]^{1.2} = h_{a_0}^* \quad (6.66)$$

Así, para este caso, el sistema se reduce a 3 ecuaciones (6.59, 6.63 y 6.66) con 3 incógnitas (y_p , h_p y v_{u_p}).

6.13 EJEMPLOS

Ejemplo 6.1

Determinar el gasto que debe desalojar y el área efectiva requerida por una válvula aliviadora de presión que será instalada inmediatamente aguas arriba del órgano de control del conducto del ejemplo 3.5, considerando que la carga piezométrica adimensional permisible es igual a 1.15.

Solución

De acuerdo con los datos del ejemplo 3.5 se tiene que:

$$2\epsilon = 1.993, H_0 = 153.00 \text{ m. } Q_0 = 23.87 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

$Z_{máx}^2 = 1.542$ y $\eta_{z_{máx}} = 0.500$ luego, según lo indicado en la sección 6.3.1 resulta:

$$\begin{aligned}
 a) \quad Z_{m\acute{a}x}^2 &= 1.542, \eta_{z_{m\acute{a}x}} = 0.500, K_V = \frac{2\epsilon\eta_{z_{m\acute{a}x}}}{Z_{m\acute{a}x}}, \\
 K_V &= \frac{(1.993)(0.500)}{\sqrt{1.542}} = 0.80 \\
 b) \quad Z_{perm}^2 &= 1.15, \frac{Z_{perm}^2}{Z_{m\acute{a}x}^2} = \frac{1.15}{1.542} = 0.75, \text{ de la figura 6.7, } \frac{2\epsilon r_a}{Z_{m\acute{a}x}} = 0.40, \\
 r_a &= \frac{(0.40)\sqrt{1.542}}{(1.993)} = 0.25 \\
 c) \quad Q_v &= \frac{Q_0 r_a Z_{perm}}{N_v}, Q_v = (23.87)(0.25)\sqrt{1.542} = 7.41 \text{ m}^3/\text{seg.} \\
 (C_{d_a} A_a) &= \frac{r_a Q_0}{N_v \sqrt{2gH_0}} = \frac{(0.25)(23.87)}{\sqrt{(19.6)(153.00)}} = 0.109 \text{ m}^2.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2

Determinar el gasto que debe desalojar y el área efectiva requerida por una válvula aliviadora de presión instalada inmediatamente aguas abajo de la válvula de no retorno del ejemplo 4.1, considerando que la carga piezométrica adimensional permisible es igual a 1.05.

Solución

De acuerdo con los datos del ejemplo 4.1 se tiene que:

$$2\epsilon = 1.203, H_0 = 150.00 \text{ m}, Q_0 = 0.517 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

y $h_{m\acute{a}x} = 1.370$ luego, según lo indicado en la sección 6.3.2 resulta:

$$\begin{aligned}
 a) \quad h_{m\acute{a}x} &= 1.370 \\
 b) \quad \frac{h_{perm}}{h_{m\acute{a}x}} &= \frac{1.05}{1.37} = 0.77, \text{ de la figura 6.8, } \frac{2\epsilon r_a}{\sqrt{h_{m\acute{a}x}}} = 0.26, \\
 r_a &= \frac{(0.26)\sqrt{1.37}}{1.203} = 0.25. \\
 c) \quad Q_v &= \frac{NQ_0 r_a h_{perm}}{N_v} = (0.517)(0.25)\sqrt{1.05} = 0.132 \text{ m}^3/\text{seg.} \\
 (C_{d_a} A_a) &= \frac{NQ_0 r_a}{N_v \sqrt{2gH_0}} = \frac{(0.25)(0.517)}{\sqrt{(19.6)(150.00)}} = 0.0024 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.3

Calcular la sobrelevación máxima en el tanque de oscilación de la figura 6.9b, producida por un cierre total instantáneo del órgano de control para las siguientes condiciones:

- Despreciando los efectos de la fricción en el conducto y la pérdida de carga en el orificio.
- Tomando en cuenta la fricción y la pérdida de carga.
- Considerando que el tanque de oscilación es del tipo simple.

Los datos de proyecto son los siguientes:

$$\begin{aligned} H_0 &= 152 \text{ m.} \\ L &= 914 \text{ m.} \\ A_T &= 29 \text{ m}^2. \\ D &= 3.05 \text{ m.} \\ Q_t &= 24 \text{ m}^3/\text{seg.} \\ H_{f1} &= 4.08 \text{ m.} \\ H_{f2} &= 6.12 \text{ m.} \end{aligned}$$

Solución

- De acuerdo con lo indicado en la figura 6.11, para el sistema b), se tiene que:

$$S_0 = Q_t \sqrt{\frac{L}{gA \cdot A_T}}; A = \frac{(\pi)(3.05)^2}{4} = 7.31 \text{ m}^2$$

$$S_0 = (24) \sqrt{\frac{914}{(9.81)(7.31)(29)}} = 15.91 \text{ m.}$$

$$b) \left| \frac{S_0}{H_{f1}} \right| = \frac{15.91}{4.08} = 3.90, r_f = \frac{H_{f2}}{H_{f1}} = \frac{6.12}{4.08} = 1.50,$$

luego, de la figura 6.17 resulta:

$$\left| \frac{S_{m\acute{a}x}}{H_{f1}} \right| = 2.50; S_{m\acute{a}x} = (2.50)(4.08) = 10.20 \text{ m.}$$

- Para un tanque de oscilación del tipo simple se tendrá que $r_f = 0$ y de la figura 6.17 con $\left| \frac{S_0}{H_{f1}} \right| = 3.90$ resulta:

$$S_{m\acute{a}x} = (3.20)(4.08) = 13.06 \text{ m.}$$

Ejemplo 6.4

Calcular la sobrelevación máxima en el tanque de oscilación de la figura 6.9a, producida por un arranque instantáneo de los equipos de la planta, para las mismas condiciones del ejemplo anterior y los siguientes datos de proyecto:

$$\begin{aligned} H_0 &= 100 \text{ m.} \\ L &= 1,500 \text{ m.} \\ A_T &= 3.14 \text{ m}^2. \\ D &= 0.910 \text{ m.} \\ Q_b &= 1.30 \text{ m}^3/\text{seg.} \\ H_{f1} &= 4.04 \text{ m.} \\ H_{f2} &= 5.25 \text{ m.} \end{aligned}$$

Solución

- a) De acuerdo con lo indicado en la figura 6.11 para el sistema a) se tiene que:

$$S_0 = Q_b \sqrt{\frac{L}{gA \cdot A_T}}, \quad A = \frac{(\pi)(0.910)^2}{4} = 0.650 \text{ m}^2.$$

$$S_0 = (1.30) \sqrt{\frac{1,500}{(9.81)(0.650)(3.14)}} = 11.25 \text{ m.}$$

b) $\left| \frac{S_0}{H_{f1}} \right| = \frac{11.25}{4.04} = 2.79; r_f = \frac{5.25}{4.04} = 1.30$

luego, de la figura 6.16 resulta:

$$\left| \frac{S_{máx}}{H_{f1}} \right| = 2.20; S_{máx} = (2.20)(4.04) = 8.89 \text{ m.}$$

- c) con $r_f = 0$ y $\left| \frac{S_0}{H_{f1}} \right| = 2.79$, se obtiene:

$$\left| \frac{S_{máx}}{H_{f1}} \right| = 2.90; S_{máx} = (2.90)(4.04) = 11.72 \text{ m.}$$

Obsérvese que el resultado anterior es mayor que el calculado en el inciso a, y esto se debe al efecto de la fricción en el conducto que ocasiona un incremento del gasto que entra al tanque.

Ejemplo 6.5

Determinar el volumen de una cámara de aire, tal como la mostrada en la figura 6.14, de tal manera que la depresión mínima en la sección B no exceda

el valor de $0.28 H_0^*$ cuando se presenta un paro instantáneo de los equipos, considerando un valor $r_f = 10$ y para los siguientes datos de proyecto:

$$\begin{aligned} H_0 &= 60 \text{ m.} \\ L &= 610 \text{ m.} \\ X_B &= 305 \text{ m.} \\ A &= 1.82 \text{ m}^2. \\ Q_b &= 2.83 \text{ m}^3/\text{seg.} \\ H_{f1} &= 0.91 \text{ m.} \\ H_b &= 10.36 \text{ m.} \end{aligned}$$

Solución

De acuerdo con el procedimiento propuesto en la sección 6.9 se tiene lo siguiente:

$$a) |S_{min}| = \left(\frac{610}{610 - 305} \right) (0.28) (60 + 10.36) - 9.10 = 30.30 \text{ m.}$$

$$b) \left| \frac{S_{min}}{H_{f1}} \right| = \frac{30.30}{0.91} = 33.30 \text{ y para } r_f = 10 \text{ de la figura 6.17 se obtiene}$$

$$\left| \frac{S_{0min}}{H_{f1}} \right| = 40$$

$$c) C_{0min} = \frac{(70.36)(610)}{(9.81)(1.82) \left(\frac{0.91}{(1.10)(2.83)} \right)^2 (40)^2} = 17.58 \text{ m}^3.$$

$$d) C_{0max} = (1.10)(17.58) = 19.34 \text{ m}^3.$$

$$\left| \frac{S'_{0min}}{H_{f1}} \right| = \frac{(1.10)(2.83)}{0.91} \sqrt{\frac{(610)(70.36)}{(9.81)(1.82)(19.34)}} = 38.14,$$

$$\text{de la figura 6.17 } \left| \frac{S'_{min}}{H_{f1}} \right| = 32;$$

$$\left| S'_{min} \right| = (32)(0.91) = 29.12 \text{ m.}$$

$$e) C_{max} = 19.34 \left[\frac{70.36 + 0.91}{70.36 - 29.12} \right]^{0.83} = 30.45 \text{ m}^3.$$

$$f) C_c = (1.10)(30.45) = 34 \text{ m}^3.$$

Ejemplo 6.6

Deducir las condiciones de frontera para el caso particular de un conducto por gravedad con un órgano de control y una válvula reguladora de presión situada en el extremo aguas abajo.

Solución

De acuerdo con la ecuación (6.40):

$$V_p = (\eta_p + r_a \eta_{a_p}) \sqrt{h_p} \quad (1)$$

donde η_p y η_{a_p} son funciones del tiempo para el tipo de válvula que se analiza; asimismo si se hace:

$$\eta_{e_p} = \eta_p + r_a \eta_{a_p}$$

donde η_{e_p} es el grado de apertura efectivo del órgano de control, la ecuación (1) se reduce a:

$$V_p = \eta_{e_p} \sqrt{h_p} \quad (2)$$

En consecuencia, la simulación del efecto de la válvula reguladora se puede realizar mediante la aplicación del programa del apéndice B para una maniobra de cierre parcial con $\eta_0 = 1.00$ y $\eta_f = r_a$, lo cual resulta válido tomando en cuenta lo ya mencionado con relación al tiempo de cierre de la válvula en la sección 6.2.4.

Ejemplo 6.7

Determinar la carga piezométrica máxima y mínima que se presenta en la compuerta de la figura E6.7, para las siguientes condiciones:

- a) Sin considerar ningún dispositivo de alivio en el conducto, y la compuerta se somete a la siguiente ley de cierre:

t (seg)	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00
η	1.00	0.58	0.30	0.13	0.00

- b) Considerando que existe una válvula reguladora de presión ubicada inmediatamente aguas arriba de la compuerta, con un valor de $r_a = 0.80$, que se somete a una maniobra de apertura con la siguiente ley:

t (seg)	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00
η_a	0.00	0.175	0.500	0.813	1.000

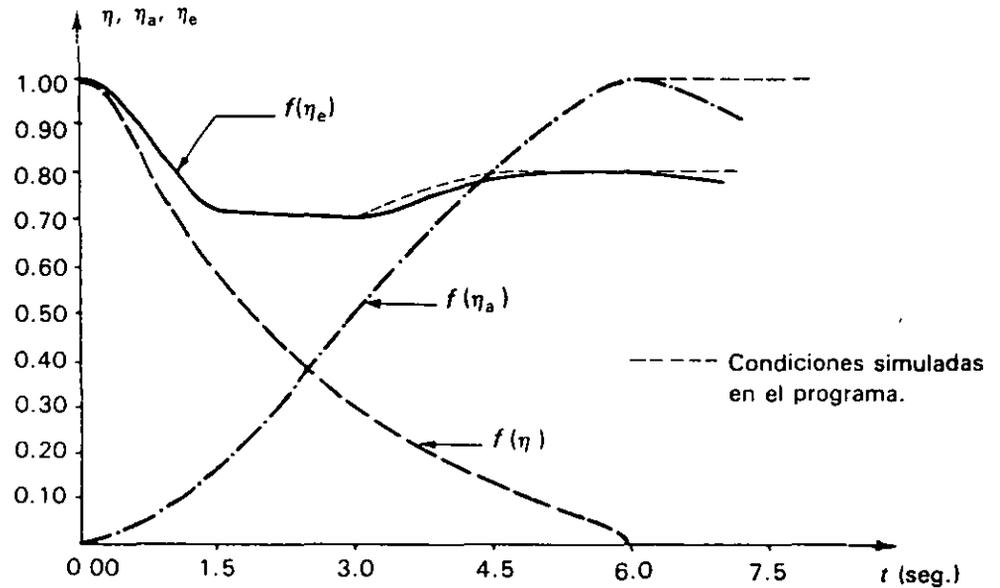
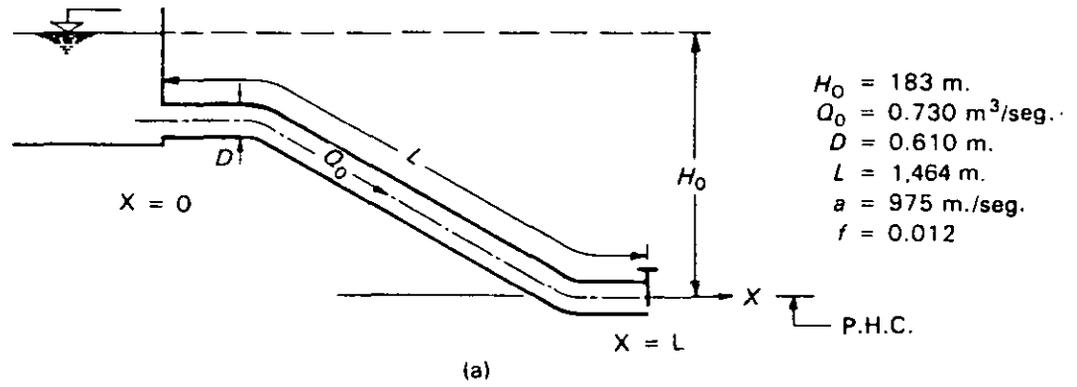
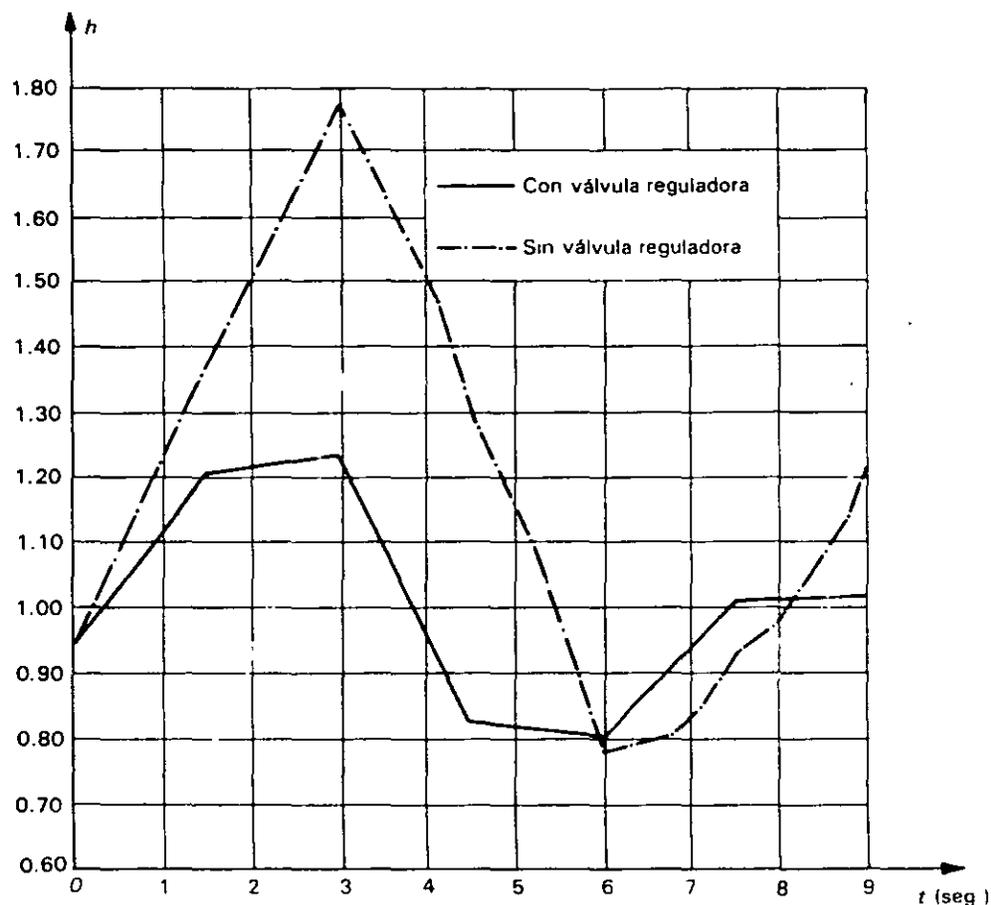


Figura E6.7

Solución

a) De acuerdo con lo indicado en el apéndice A, los datos requeridos para utilizar el programa son:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 183.00 \text{ m.} \\
 VA\phi &= 1.00 \\
 Q_0 &= 0.730 \text{ m}^3/\text{seg.} \\
 L_1 &= 732.00 \text{ m.} \\
 D_1 &= 0.610 \text{ m.} \\
 a_1 &= 975 \text{ m/seg.} \\
 f_1 &= 0.012 \\
 L_2 &= 732.00 \text{ m.}
 \end{aligned}$$



(C)

Figura E6.7

$$\begin{aligned}
 D_2 &= 0.610 \text{ m.} \\
 a_2 &= 975 \text{ m/seg.} \\
 f_2 &= 0.012 \\
 \Delta t &= 0.375 \text{ seg.} \\
 \eta_0 &= 1.00 \\
 \eta_1 &= 0.58 \\
 \eta_2 &= 0.30 \\
 \eta_f &= 0.00 \\
 t_1 &= 1.50 \text{ seg.} \\
 t_2 &= 3.00 \text{ seg.} \\
 \tau &= 6.00 \text{ seg.}
 \end{aligned}$$

Tiempo de impresión: = 9.00 seg.

De los resultados del programa se obtiene que para la compuerta $h_{m\acute{a}x} = 1.769$ y $h_{m\acute{i}n} = 0.784$. La variaci3n de la carga piezom3trica adimensional con respecto al tiempo se muestra en la figura E6.7.c.

- b) De las maniobras que se llevan a cabo en la compuerta y la válvula reguladora, recordando del problema anterior que $\eta_{ep} = \eta_P + r_a \eta_{aP}$, se obtiene la siguiente tabla:

t (seg)	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00
η_e	1.000	0.720	0.700	0.780	0.800

Sin embargo, con objeto de poder utilizar el citado programa, se consideró la siguiente ley equivalente de cierre parcial:

t (seg)	0.00	1.50	3.00	4.50	6.00
η_e	1.000	0.720	0.700	0.800	0.800

de acuerdo con lo anterior, los datos requeridos por el programa para la condición en estudio son los mismos que los requeridos para el inciso anterior, con excepción de los siguientes:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1.000 \\ \eta_1 &= 0.720 \\ \eta_2 &= 0.700 \\ \eta_f &= 0.800 \\ t_1 &= 1.50 \text{ seg.} \\ t_2 &= 3.00 \text{ seg.} \\ \tau &= 4.50 \text{ seg.} \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos en este caso son $h_{m\acute{a}x} = 1.235$ y $h_{m\acute{i}n} = 0.803$ y la variación de carga se indica en la figura E6.7c.

6.14 PROBLEMAS PROPUESTOS

Problema 6.1

Determinar el gasto y el área efectiva requerida por una válvula aliviadora de presión que debe ser instalada inmediatamente aguas arriba del órgano de control del conducto por gravedad del ejemplo 3.1, considerando que la carga piezométrica adimensional permisible en esa sección es 1.05.

(Respuesta: $0.068 \text{ m}^3/\text{seg}$, 0.0015 m^2 .)

Problema 6.2

Determinar el gasto y el área efectiva requerida por una válvula aliviadora de presión que debe ser instalada inmediatamente aguas abajo de la válvula de no retorno de cada una de las tuberías de descarga de las bombas del ejemplo 4.3, si la carga piezométrica adimensional permisible es 1.20.

(Respuesta: 1.09 m³/seg, 0.030 m²)

Problema 6.3

Calcular la sobrelevación máxima en el tanque de oscilación de la figura 6.9b producida por un cierre total instantáneo del órgano de control para las siguientes condiciones:

- a) Despreciando los efectos de la fricción en el conducto y la pérdida de carga en el orificio.
- b) Tomando en cuenta la fricción y la pérdida de carga.
- c) Considerando que el tanque de oscilación es del tipo simple.

Los datos de proyecto son los siguientes:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 61 \text{ m.} \\
 L &= 610 \text{ m.} \\
 A_T &= 19 \text{ m}^2. \\
 D &= 2.44 \text{ m.} \\
 Q_f &= 17 \text{ m}^3/\text{seg.} \\
 H_{f1} &= 2.60 \text{ m.} \\
 H_{f2} &= 12.20 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

(Respuesta: a) 14.22 m, b) 8.10 m y c) 12.50 m.)

Problema 6.4

Determinar el volumen de una cámara de aire, tal como la mostrada en la figura 6.14, de tal manera que la depresión mínima en la sección B no exceda el valor de 28 m cuando se presenta un paro instantáneo de los equipos, considerando un valor de $r_f = 0.9$ y para los siguientes datos de proyecto:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 76 \text{ m.} \\
 L &= 1370 \text{ m.} \\
 x_B &= 460 \text{ m.} \\
 A &= 0.657 \text{ m}^2. \\
 Q_b &= 1.28 \text{ m}^3/\text{seg.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{f1} &= 8.50 \text{ m.} \\H_b &= 10.36 \text{ m.}\end{aligned}$$

(Respuesta: 38 m³.)

Problema 6.5

Demostrar la ecuación (6.18).

Problema 6.6

Demostrar la ecuación (6.21) y su solución.

Problema 6.7

Demostrar la ecuación (6.24) y su solución.



FACULTAD DE INGENIERÍA UNAM
DIVISIÓN DE EDUCACIÓN CONTINUA

CURSOS INSTITUCIONALES

*ACTUALIZACIÓN DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA*

Del 10 al 14 de Marzo de 2003

ANEXOS

CI - 045

Instructor: Ing. Constantino Gutiérrez Palacios
D G C O H

APUNTES TOMADOS DEL LIBRO **DISCHARGE MEASUREMENT STRUCTURES**
M.G. BOS EDITORIAL ILRI

7.3 Throatless flumes with broken plane transition

7.3.1 Description

The geometry of the throatless flume with broken plane transition was first developed in irrigation practice in the Punjab and as such is described by Harvey (1912). Later, Blau (1960) reports on two geometries of this flume type. Both sources relate discharge and modular limit to heads upstream and downstream of the flume, h_1 and h_2 respectively. Available data are not sufficient to warrant inclusion in this manual.

Since 1967 Skogerboe et al. have published a number of papers on the same flume, referring to it as the 'cutthroat flume'. In the cutthroat flume, however, the flume discharge and modular limit are related to the piezometric heads at two points, in the converging section (h_a) and in the downstream expansion (h_b) as with the Parshall flume. Cutthroat flumes have been tested with a flat bottom only. A dimension sketch of this structure is shown in Figure 7.8.

Because of gaps in the research performed on cutthroat flumes, reliable head-discharge data are only available for one of the tested geometries ($b_c = 0.305$ m, overall length is 2.743 m). Because of the non-availability of discharge data as a function of h_1 and h_2 (or H_1 and H_2) the required loss of head over the flume to maintain modularity is difficult to determine.

In the original cutthroat flume design, various discharge capacities were obtained by simply changing the throat width b_c . Flumes with a throat width of 1, 2, 3, 4, 5, and 6 feet (1 ft = 0.3048 m) were tested for heads h_1 ranging from 0.06 to 0.76 m. All flumes were placed in a rectangular channel 2.44 m wide. The upstream wingwall had an abrupt transition to this channel as shown in Figure 7.8.

Obviously, the flow pattern at the upstream piezometer tap is influenced by the ratio b_c/B_1 . Eggleston (1967) reports on this influence for a 0.3048 m wide flume. A variation of discharge at constant h_1 up to 2 percent was found. We expect, however, that this variation will increase with increasing width b_c and upstream head. Owing to the changing entrance conditions it even is possible that the piezometer tap for

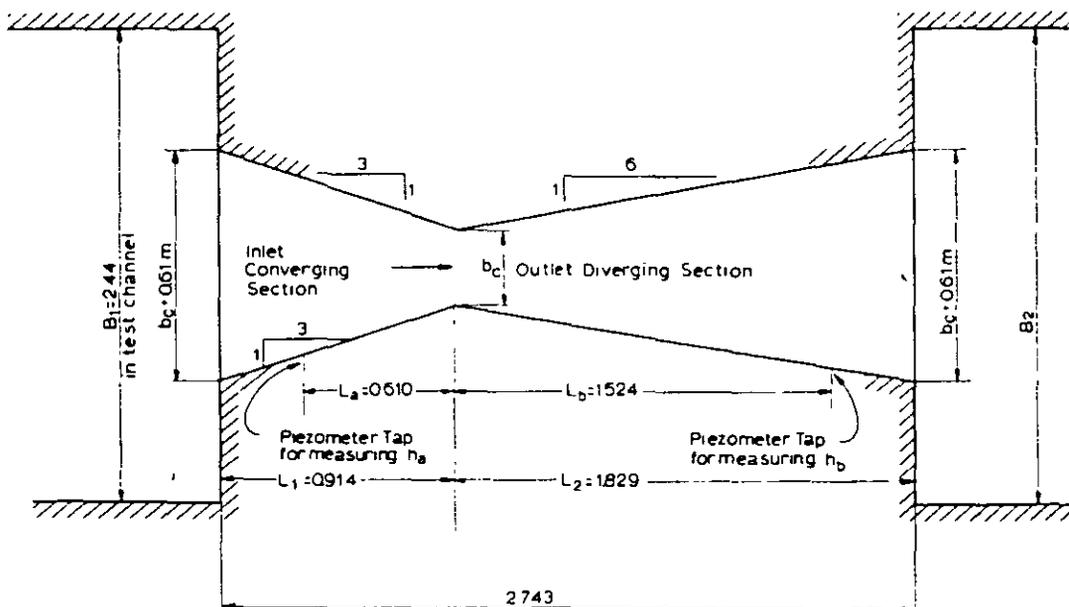


Figure 7.8 Cutthroat flume dimensions (after Skogerboe et al. 1967)

measuring h_u will be in a zone of flow separation. As already mentioned in Section 7.2.3, the ratios b_c/B_2 and b_c/L_2 are also expected to influence the head-discharge relationship.

Bennett (1972) calibrated a number of cutthroat flumes having other overall lengths than 2.743 m. He reported large scale effects between geometrically identical cutthroat flumes, each of them having sufficiently large dimensions (b_c ranged from 0.05 to 0.30⁵ m). Those scale effects were also mentioned by Eggleston (1967), Skogerboe and Hyatt (1969), and Skogerboe, Bennett, and Walker (1972). In all cases, however, the reported large scale effects are attributed to the improper procedure of comparing measurements with extrapolated relations. As a consequence of the foregoing, no head-discharge relations of cutthroat flumes are given here. Because of their complex hydraulic behaviour, the use of cutthroat flumes is not recommended by the present writers.

7.4 Parshall flumes

7.4.1 Description

Parshall flumes are calibrated devices for the measurement of water in open channels. They were developed by Parshall (1922) after whom the device was named. The flume consists of a converging section with a level floor, a throat section with a downward sloping floor, and a diverging section with an upward sloping floor. Because of this unconventional design, the control section of the flume is not situated in the throat but near the end of the level 'crest' in the converging section. The modular limit of the Parshall flume is lower than that of the other long-throated flumes described in Section 7.1.

In deviation from the general rule for long-throated flumes where the upstream head must be measured in the approach channel, Parshall flumes are calibrated again: a piezometric head, h_u , measured at a prescribed location in the converging section. The 'downstream' piezometric head h_p is measured in the throat. This typical American practice is also used in the cutthroat and H-flumes.

Parshall flumes were developed in various sizes, the dimensions of which are given in Table 7.3. Care must be taken to construct the flumes exactly in accordance with the structural dimensions given for each of the 22 flumes, because the flumes are not hydraulic scale models of each other. Since throat length and throat bottom slope remain constant for series of flumes while other dimensions are varied, each of the 22 flumes is an entirely different device. For example, it cannot be assumed that a dimension in the 12-ft flume will be three times the corresponding dimension in the 4-ft flume.

On the basis of throat width, Parshall flumes have been somewhat arbitrarily classified into three main groups for the convenience of discussing them, selecting sizes, and determining discharges. These groups are 'very small' for 1-, 2-, and 3-in flumes, 'small' for 6-in through 8-ft flumes and 'large' for 10-ft up to 50-ft flumes (USBR 1971).

Table 7.3 Parshall flume dimensions (millimetres)

Dimensions as shown in Figure 7.9

	b _c	A	a	B	C	D	E	L	G	H	K	M	N	P	R	X	Y	Z
1"	25.4	363	242	356	93	167	229	76	203	206	19	-	29	-	-	8	13	3
2"	50.8	414	276	406	135	214	254	114	254	257	22	-	43	-	-	16	25	6
3"	76.2	467	311	457	178	259	457	152	305	309	25	-	57	-	-	25	38	13
6"	152.4	621	414	610	394	397	610	305	610	-	76	305	114	902	406	51	76	-
9"	228.6	879	587	864	381	575	762	305	457	-	76	305	114	1080	406	51	76	-
1'	304.8	1372	914	1343	610	845	914	610	914	-	76	381	229	1492	508	51	76	-
1'6"	457.2	1448	965	1419	762	1026	914	610	914	-	76	381	229	1676	508	51	76	-
2'	609.6	1524	1016	1495	914	1206	914	610	914	-	76	381	229	1854	508	51	76	-
3'	914.4	1676	1118	1645	1219	1572	914	610	914	-	76	381	229	2222	508	51	76	-
4'	1219.2	1829	1219	1794	1524	1937	914	610	914	-	76	457	229	2711	610	51	76	-
5'	1524.0	1981	1321	1943	1829	2302	914	610	914	-	76	457	229	3080	610	51	76	-
6'	1828.0	2134	1422	2092	2134	2667	914	610	914	-	76	457	229	3442	610	51	76	-
7'	2133.6	2286	1524	2242	2438	3032	914	610	914	-	76	457	229	3810	610	51	76	-
8'	2438.4	2438	1626	2391	2743	3397	914	610	914	-	76	457	229	4172	610	51	76	-
10'	3048	-	1829	4267	3658	4756	1219	914	1829	-	152	-	343	-	-	305	229	-
12'	3658	-	2032	4877	4470	5607	1524	914	2438	-	152	-	343	-	-	305	229	-
15'	4572	-	2337	7620	5588	7620	1829	1219	3048	-	229	-	457	-	-	305	229	-
20'	6096	-	2845	7620	7315	9144	2134	1829	3658	-	305	-	686	-	-	305	229	-
25'	7620	-	3353	7620	8941	10668	2134	1829	3962	-	305	-	686	-	-	305	229	-
30'	9144	-	3861	7925	10566	12313	2134	1829	4267	-	305	-	686	-	-	305	229	-
40'	12191	-	4877	8230	13818	15481	2134	1829	4877	-	305	-	686	-	-	305	229	-
50'	15240	-	5893	8230	17272	18529	2134	1829	6096	-	305	-	686	-	-	305	229	-

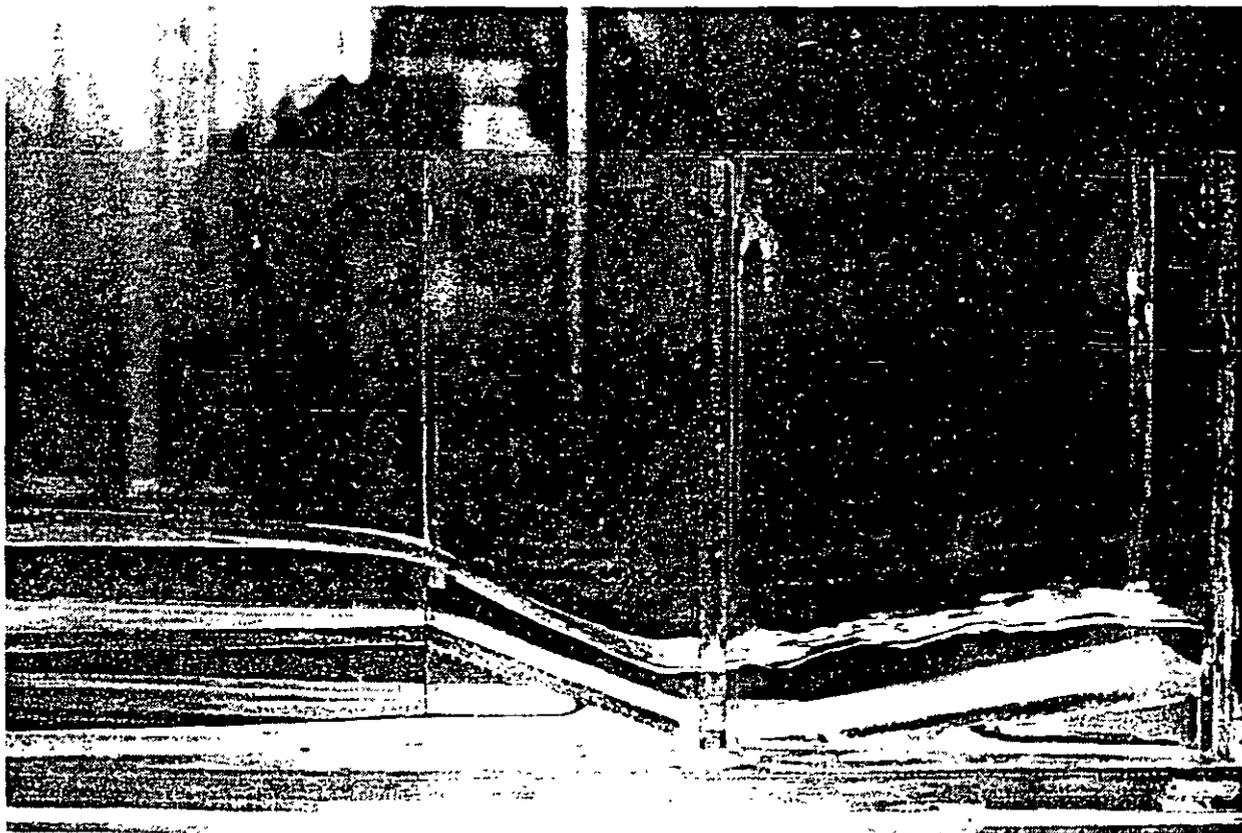


Photo 3 Transparent model of a Parshall flume

Very small flumes (1", 2", and 3")

The discharge capacity of the very small flumes ranges from 0.09 l/s to 32 l/s. The capacity of each flume overlaps that of the next size by about one-half the discharge range (see Table 7.4). The flumes must be carefully constructed. The exact dimensions of each flume are listed in Table 7.3. The maximum tolerance on the throat width b_c equals ± 0.0005 m.

The relatively deep and narrow throat section causes turbulence and makes the h_b gauge difficult to read in the very small flumes. Consequently, an h_c -gauge, located near the downstream end of the diverging section of the flume is added. Under submerged flow conditions, this gauge may be read instead of the h_b -gauge. The h_c readings are converted to h_b readings by using a graph, as will be explained in Section 7.4.3, and the converted h_b readings are then used to determine the discharge.

Small flumes (6", 9", 1', 1'6", 2' up to 8')

The discharge capacity of the small flumes ranges from 0.0015 m³/s to 3.95 m³/s. The capacity of each size of flume considerably overlaps that of the next size. The length of the side wall of the converging section, A, of the flumes with 1' up to 8' throat width is in metres:

$$A = \frac{b_c}{2} + 1.219 \quad (7-3)$$

where b_c is the throat width in metres. The piezometer tap for the upstream head, h_a , is located in one of the converging walls a distance of $a = \sqrt[2]{3} A$ upstream from the end of the horizontal crest (see Figure 7.9). The location of the piezometer tap for the downstream head, h_b , is the same in all the 'small' flumes, being 51 mm ($X = 2$ inch) upstream from the low point in the sloping throat floor and 76 mm ($Y = 3$ inch) above it. The exact dimensions of each size of flume are listed in Table 7.3.

Large flumes (10' up to 50')

The discharge capacity of the large flumes ranges from 0.16 m³/s to 93.04 m³/s. The capacity of each size of flume considerably overlaps that of the next size. The axial length of the converging section is considerably longer than it is in the small flumes to obtain an adequately smooth flow pattern in the upstream part of the structure. The measuring station for the upstream head, h_a , however, is maintained at $a = b_c/3 + 0.813$ m upstream from the end of the horizontal crest. The location of the piezometer tap for the downstream head, h_b , is the same in all the 'large' flumes, being 305 mm (12 in) upstream from the floor at the downstream edge of the throat and 229 mm (9 in) above it. The exact dimensions of each size of flume are listed in Table 7.3.

All flumes must be carefully constructed to the dimensions listed, and careful leveling is necessary in both longitudinal and transverse directions if the standard discharge table is to be used. When gauge zeros are established, they should be set so that the h_a -, h_b -, and h_c -gauges give the depth of water above the level crest – not the depths above pressure taps.

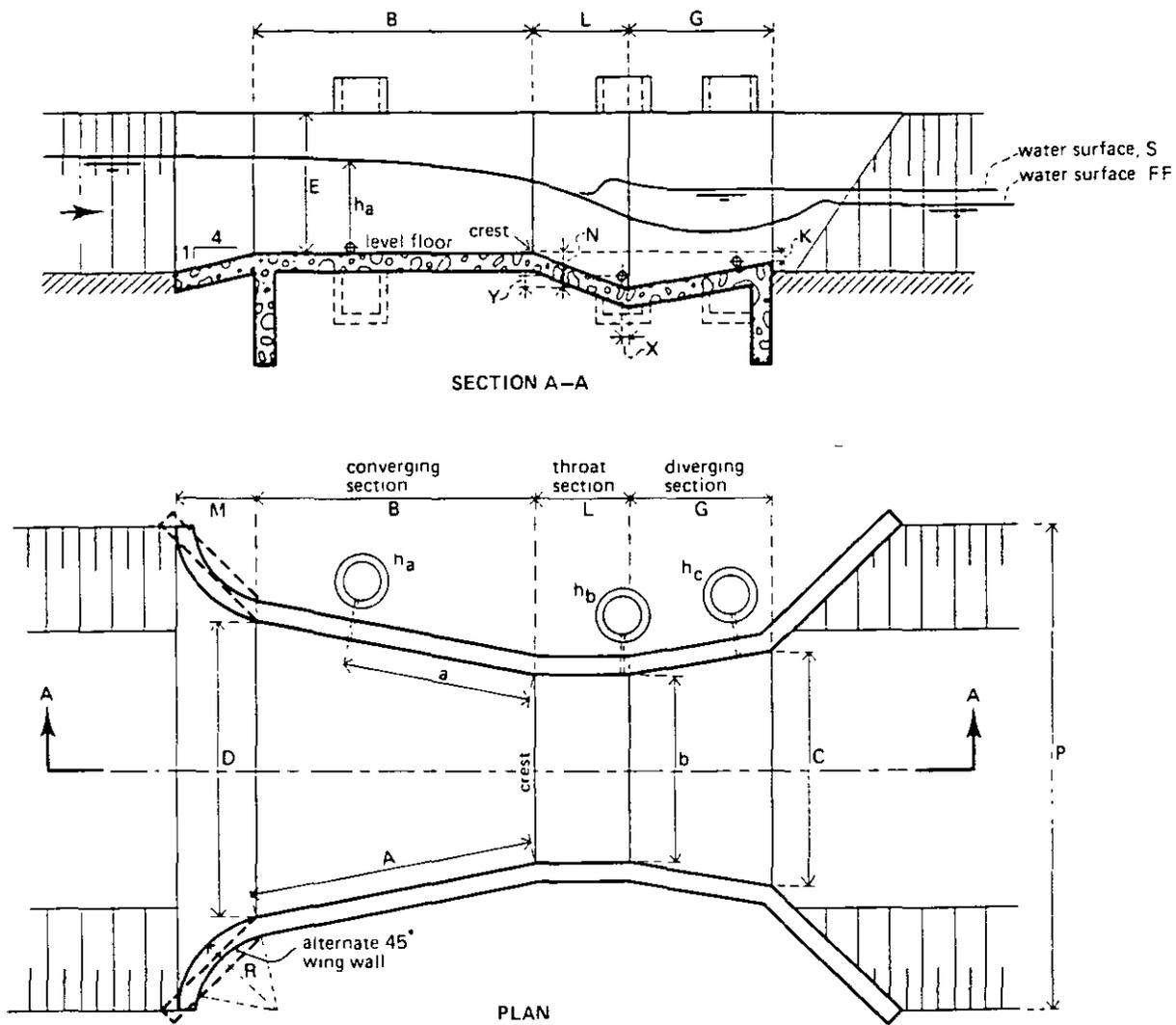


Figure 7.9 Parshall flume dimensions

If the Parshall flume is never to be operated above the 0.60 submergence limit, there is no need to construct the portion downstream of the throat. The truncated Parshall flume (without diverging section) has the same modular flow characteristics as the standard flume. The truncated flume is sometimes referred to as the 'Montana flume'.

7.4.2 Evaluation of discharge

The upstream head-discharge (h_u - Q) relationship of Parshall flume of various sizes, as calibrated empirically, is represented by an equation, having the form

$$Q = Kh_u^u \quad (7-4)$$

where K denotes a dimensional factor which is a function of the throat width. The power u varies between 1.522 and 1.60. Values of K and u for each size of flume are given in Table 7.4. In the listed equations Q is the modular discharge in m^3/s , and h_u is the upstream gauge reading in metres.

The flumes cover a range of discharges from 0.09 l/s to 93.04 m^3/s and have overlap-

ping capacities to facilitate the selection of a suitable size. Each of the flumes listed in Table 7.4 is a standard device and has been calibrated for the range of discharges shown in the table. Detailed information on the modular discharge for each size of flume as a function of h_u are presented in the Tables 7.5 to 7.11.

Table 7.4 Discharge characteristics of Parshall flumes

Throat width b_c in feet or inches	Discharge range in $m^3/s \times 10^{-3}$		Equation $Q = K h_u^m$ (Q in m^3/s)	Head range in metres		Modular limit h_b/h_u
	minimum	maximum		minimum	maximum	
1"	0.09	5.4	$0.0604 h_u^{1.55}$	0.015	0.21	0.50
2"	0.18	13.2	$0.1207 h_u^{1.55}$	0.015	0.24	0.50
3"	0.77	32.1	$0.1771 h_u^{1.55}$	0.03	0.33	0.50
6"	1.50	111	$0.3812 h_u^{1.58}$	0.03	0.45	0.60
9"	2.50	251	$0.5354 h_u^{1.53}$	0.03	0.61	0.60
1'	3.32	457	$0.6909 h_u^{1.522}$	0.03	0.76	0.70
1'6"	4.80	695	$1.056 h_u^{1.538}$	0.03	0.76	0.70
2'	12.1	937	$1.428 h_u^{1.550}$	0.046	0.76	0.70
3'	17.6	1427	$2.184 h_u^{1.566}$	0.046	0.76	0.70
4'	35.8	1923	$2.953 h_u^{1.578}$	0.06	0.76	0.70
5'	44.1	2424	$3.732 h_u^{1.587}$	0.06	0.76	0.70
6'	74.1	2929	$4.519 h_u^{1.595}$	0.076	0.76	0.70
7'	85.8	3438	$5.312 h_u^{1.601}$	0.076	0.76	0.70
8'	97.2	3949	$6.112 h_u^{1.607}$	0.076	0.76	0.70
	in m^3/s					
10'	0.16	8.28	$7.463 h_u^{1.60}$	0.09	1.07	0.80
12'	0.19	14.68	$8.859 h_u^{1.60}$	0.09	1.37	0.80
15'	0.23	25.04	$10.96 h_u^{1.60}$	0.09	1.67	0.80
20'	0.31	37.97	$14.45 h_u^{1.60}$	0.09	1.83	0.80
25'	0.38	47.14	$17.94 h_u^{1.60}$	0.09	1.83	0.80
30'	0.46	56.33	$21.44 h_u^{1.60}$	0.09	1.83	0.80
40'	0.60	74.70	$28.43 h_u^{1.60}$	0.09	1.83	0.80
50'	0.75	93.04	$35.41 h_u^{1.60}$	0.09	1.83	0.80

Table 7.5 Free-flow discharge through 1" Parshall measuring flume in l/s computed from the formula
 $Q = 0.0604 h_a^{1.55}$

Head h_a (m)	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.01						0.09	0.10	0.11	0.12	0.13
.02	0.14	0.15	0.16	0.17	0.19	0.20	0.21	0.22	0.24	0.25
.03	0.26	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33	0.35	0.36	0.38	0.40
.04	0.41	0.43	0.44	0.46	0.48	0.49	0.51	0.53	0.55	0.56
.05	0.58	0.60	0.62	0.64	0.66	0.67	0.69	0.71	0.73	0.75
.06	0.77	0.79	0.81	0.83	0.85	0.87	0.89	0.92	0.94	0.96
.07	0.98	1.00	1.02	1.05	1.07	1.09	1.11	1.14	1.16	1.18
.08	1.20	1.23	1.25	1.28	1.30	1.32	1.35	1.37	1.40	1.42
.09	1.45	1.47	1.50	1.52	1.55	1.57	1.60	1.62	1.65	1.68
.10	1.70	1.73	1.76	1.78	1.81	1.84	1.86	1.89	1.92	1.95
.11	1.97	2.00	2.03	2.06	2.09	2.11	2.14	2.17	2.20	2.23
.12	2.26	2.29	2.32	2.35	2.38	2.41	2.44	2.47	2.50	2.53
.13	2.56	2.59	2.62	2.65	2.68	2.71	2.74	2.77	2.80	2.84
.14	2.87	2.90	2.93	2.96	3.00	3.03	3.06	3.09	3.13	3.16
.15	3.19	3.22	3.26	3.29	3.32	3.36	3.39	3.43	3.46	3.49
.16	3.53	3.56	3.60	3.63	3.66	3.70	3.73	3.77	3.80	3.84
.17	3.87	3.91	3.95	3.98	4.02	4.05	4.09	4.12	4.16	4.20
.18	4.23	4.27	4.31	4.34	4.38	4.42	4.45	4.49	4.53	4.57
.19	4.60	4.64	4.68	4.72	4.75	4.79	4.83	4.87	4.91	4.95
.20	4.98	5.02	5.06	5.10	5.14	5.18	5.22	5.26	5.30	5.34
.21	5.38									

Table 7.6 Free-flow discharge through 2" Parshall measuring flume in l/s computed from the formula
 $Q = 0.1207 h_a^{1.550}$

Head h_a (m)	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.01						0.18	0.20	0.22	0.24	0.26
.02	0.28	0.30	0.33	0.35	0.37	0.40	0.42	0.45	0.47	0.50
.03	0.53	0.55	0.58	0.61	0.64	0.67	0.70	0.73	0.76	0.79
.04	0.82	0.85	0.89	0.92	0.95	0.99	1.02	1.06	1.09	1.13
.05	1.16	1.20	1.23	1.27	1.31	1.35	1.38	1.42	1.46	1.50
.06	1.54	1.58	1.62	1.66	1.70	1.74	1.79	1.83	1.87	1.91
.07	1.96	2.00	2.04	2.09	2.13	2.18	2.22	2.27	2.31	2.36
.08	2.41	2.45	2.50	2.55	2.60	2.64	2.69	2.74	2.79	2.84
.09	2.89	2.94	2.99	3.04	3.09	3.14	3.19	3.24	3.30	3.35
.10	3.40	3.45	3.51	3.56	3.62	3.67	3.72	3.78	3.83	3.89
.11	3.94	4.00	4.06	4.11	4.17	4.22	4.28	4.34	4.40	4.45
.12	4.51	4.57	4.63	4.69	4.75	4.81	4.87	4.93	4.99	5.05
.13	5.11	5.17	5.23	5.29	5.35	5.42	5.48	5.54	5.60	5.67
.14	5.73	5.79	5.86	5.92	5.99	6.05	6.12	6.18	6.25	6.31
.15	6.38	6.44	6.51	6.58	6.64	6.71	6.78	6.84	6.91	6.98
.16	7.05	7.12	7.19	7.25	7.32	7.39	7.46	7.53	7.60	7.67
.17	7.74	7.81	7.88	7.96	8.03	8.10	8.17	8.24	8.31	8.39
.18	8.46	8.53	8.61	8.68	8.75	8.83	8.90	8.98	9.05	9.12
.19	9.20	9.27	9.35	9.43	9.50	9.58	9.65	9.73	9.81	9.88
.20	9.96	10.04	10.12	10.19	10.27	10.35	10.43	10.51	10.59	10.66
.21	10.74	10.82	10.90	10.98	11.06	11.14	11.22	11.30	11.38	11.47
.22	11.55	11.63	11.71	11.79	11.87	11.96	12.04	12.12	12.20	12.29
.23	12.37	12.45	12.54	12.62	12.71	12.79	12.87	12.96	13.04	13.13
.24	13.21									

Table 7.7 Free-flow discharge through 3" Parshall measuring flume in l/s computed from the formula
 $Q = 0.1771 h_a^{1.550}$

Upper-head h_a (m)	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.03	0.77	0.81	0.85	0.90	0.94	0.98	1.02	1.07	1.11	1.16
.04	1.21	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55	1.60	1.65
.05	1.70	1.76	1.81	1.87	1.92	1.98	2.03	2.09	2.15	2.20
.06	2.26	2.32	2.38	2.44	2.50	2.56	2.62	2.68	2.75	2.81
.07	2.87	2.94	3.00	3.06	3.13	3.20	3.26	3.33	3.40	3.46
.08	3.53	3.60	3.67	3.74	3.81	3.88	3.95	4.02	4.09	4.17
.09	4.24	4.31	4.39	4.46	4.53	4.61	4.69	4.76	4.84	4.91
.10	4.99	5.07	5.15	5.23	5.30	5.38	5.46	5.54	5.62	5.70
.11	5.79	5.87	5.95	6.03	6.12	6.20	6.28	6.37	6.45	6.54
.12	6.62	6.71	6.79	6.88	6.97	7.05	7.14	7.23	7.32	7.41
.13	7.50	7.59	7.68	7.77	7.80	7.95	8.04	8.13	8.22	8.32
.14	8.41	8.50	8.60	8.69	8.78	8.88	8.97	9.07	9.16	9.26
.15	9.36	9.45	9.55	9.65	9.75	9.85	9.94	10.04	10.14	10.24
.16	10.34	10.44	10.54	10.64	10.75	10.85	10.95	11.05	11.15	11.26
.17	11.36	11.46	11.57	11.67	11.78	11.88	11.99	12.09	12.20	12.31
.18	12.41	12.52	12.63	12.74	12.84	12.95	13.06	13.17	13.28	13.39
.19	13.50	13.61	13.72	13.83	13.94	14.05	14.16	14.28	14.39	14.50
.20	14.62	14.73	14.84	14.96	15.07	15.19	15.30	15.42	15.53	15.65
.21	15.76	15.88	16.00	16.11	16.23	16.35	16.47	16.59	16.70	16.82
.22	16.94	17.06	17.18	17.30	17.42	17.54	17.66	17.79	17.91	18.03
.23	18.15	18.27	18.40	18.52	18.64	18.77	18.89	19.01	19.14	19.26
.24	19.39	19.51	19.64	19.77	19.89	20.02	20.15	20.27	20.40	20.53
.25	20.66	20.78	20.91	21.04	21.17	21.30	21.43	21.56	21.69	21.82
.26	21.95	22.08	22.21	22.34	22.48	22.61	22.74	22.87	23.01	23.14
.27	23.27	23.41	23.54	23.67	23.81	23.94	24.08	24.21	24.35	24.49
.28	24.62	24.76	24.89	25.03	25.17	25.31	25.44	25.58	25.72	25.86
.29	26.00	26.14	26.28	26.42	26.56	26.70	26.84	26.98	27.12	27.26
.30	27.40	27.54	27.68	27.83	27.97	28.11	28.25	28.40	28.54	28.68
.31	28.83	28.97	29.12	29.26	29.41	29.55	29.70	29.84	29.99	30.14
.32	30.28	30.43	30.58	30.72	30.87	31.02	31.17	31.32	31.46	31.61
.33	31.76	31.91	32.06							

Table 7.8 Free-flow discharge through 6" Parshall measuring flume in l/s computed from the formula
 $Q = 0.3812 h_a^{1.580}$

Upper-head h_a (m)	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.03	1.5	1.6	1.7	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3
.04	2.4	2.4	2.6	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2
.05	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0	4.1	4.2	4.4
.06	4.5	4.6	4.7	4.8	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.6
.07	5.7	5.8	6.0	6.1	6.2	6.4	6.5	6.6	6.8	6.9
.08	7.0	7.2	7.3	7.5	7.6	7.8	7.9	8.0	8.2	8.3
.09	8.5	8.6	8.8	8.9	9.1	9.2	9.4	9.6	9.7	9.9
.10	10.0	10.2	10.4	10.5	10.7	10.8	11.0	11.2	11.3	11.5
.11	11.7	11.8	12.0	12.2	12.3	12.5	12.7	12.8	13.0	13.2
.12	13.4	13.6	13.7	13.9	14.1	14.3	14.4	14.6	14.8	15.0
.13	15.2	15.4	15.6	15.7	15.9	16.1	16.3	16.5	16.7	16.9
.14	17.1	17.3	17.4	17.6	17.8	18.0	18.2	18.4	18.6	18.8
.15	19.0	19.2	19.4	19.6	19.8	20.0	20.2	20.4	20.7	20.9
.16	21.1	21.3	21.5	21.7	21.9	22.1	22.3	22.5	22.8	23.0
.17	23.2	23.4	23.6	23.8	24.1	24.3	24.5	24.7	24.9	25.2
.18	25.4	25.6	25.8	26.0	26.3	26.5	26.7	27.0	27.2	27.4
.19	27.6	27.9	28.1	28.3	28.6	28.8	29.0	29.3	29.5	29.7
.20	30.0	30.2	30.4	30.7	30.9	31.2	31.4	31.6	31.9	32.1
.21	32.4	32.6	32.9	33.1	33.4	33.6	33.8	34.1	34.4	34.6
.22	34.8	35.1	35.4	35.6	35.8	36.1	36.4	36.6	36.9	37.1
.23	37.4	37.6	37.9	38.2	38.4	38.7	38.9	39.2	39.5	39.7
.24	40.0	40.2	40.5	40.8	41.0	41.3	41.6	41.8	42.1	42.4
.25	42.6	42.9	43.2	43.5	43.7	44.0	44.3	44.6	44.8	45.1
.26	45.4	45.6	45.9	46.2	46.5	46.8	47.0	47.3	47.6	47.9
.27	48.2	48.4	48.7	49.0	49.3	49.6	49.9	50.2	50.4	50.7
.28	51.0	51.3	51.6	51.9	52.2	52.5	52.8	53.0	53.3	53.6
.29	53.9	54.2	54.5	54.8	55.1	55.4	55.7	56.0	56.3	56.6
.30	56.9	57.2	57.5	57.8	58.1	58.4	58.7	59.0	59.3	59.6
.31	59.9	60.2	60.5	60.8	61.1	61.4	61.8	62.1	62.4	62.7
.32	62.0	63.3	63.6	63.9	64.2	64.6	64.9	65.2	65.5	65.8
.33	66.1	66.4	66.8	67.1	67.4	67.7	68.0	68.4	68.7	69.0
.34	69.3	69.6	70.0	70.3	70.6	70.9	71.3	71.6	71.9	72.2
.35	72.6	72.9	73.2	73.6	73.9	74.2	74.6	74.9	75.2	75.5
.36	75.9	76.2	76.5	76.9	77.2	77.6	77.9	78.2	78.6	78.9
.37	79.2	79.6	79.9	80.2	80.6	80.9	81.3	81.6	82.0	82.3
.38	82.6	83.0	83.3	83.7	84.0	84.4	84.7	85.1	85.4	85.8
.39	86.1	86.5	86.8	87.2	87.5	87.9	88.2	88.6	88.9	89.3
.40	89.6	90.0	90.3	90.7	91.0	91.4	91.8	92.1	92.5	92.8
.41	93.2	93.6	93.9	94.3	94.6	95.0	95.4	95.7	96.1	96.4
.42	96.8	97.2	97.5	97.9	98.3	98.6	99.0	99.4	99.7	100.1
.43	100.5	100.8	101.2	101.6	102.0	102.3	102.7	103.1	103.4	103.8
.44	104.2	104.6	104.9	105.3	105.7	106.1	106.4	106.8	107.2	107.6
.45	108.0	108.3	108.7	109.1	109.5	109.8	110.2	110.6		

Table 7.9 Free-flow discharge through 9" Parshall measuring flume in l/s computed from the formula
 $Q = 0.5354 h_u^{1.530}$

Upper-head h_u (m)	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
.03	2.5	2.6	2.8	2.9	3.0	3.2	3.3	3.4	3.6	3.7
.04	3.9	4.0	4.2	4.3	4.5	4.7	4.8	5.0	5.1	5.3
.05	5.5	5.6	5.8	6.0	6.2	6.3	6.5	6.7	6.9	7.0
.06	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0
.07	9.2	9.4	9.6	9.8	10.0	10.2	10.4	10.6	10.8	11.0
.08	11.2	11.4	11.7	11.9	12.1	12.3	12.5	12.8	13.0	13.2
.09	13.4	13.7	13.9	14.1	14.4	14.6	14.8	15.1	15.3	15.6
.10	15.8	16.0	16.3	16.5	16.8	17.0	17.3	17.5	17.8	18.0
.11	18.3	18.5	18.8	19.0	19.3	19.6	19.8	20.1	20.4	20.6
.12	20.9	21.2	21.4	21.7	22.0	22.2	22.5	22.8	23.0	23.3
.13	23.6	23.9	24.2	24.4	24.7	25.0	25.3	25.6	25.9	26.2
.14	26.4	26.7	27.0	27.3	27.6	27.9	28.2	28.5	28.8	29.1
.15	29.4	29.7	30.0	30.3	30.6	30.9	31.2	31.5	31.8	32.1
.16	32.4	32.7	33.0	33.4	33.7	34.0	34.3	34.6	35.0	35.3
.17	35.6	35.9	36.2	36.6	36.9	37.2	37.5	37.8	38.2	38.5
.18	38.8	39.2	39.5	39.8	40.2	40.5	40.8	41.2	41.5	41.8
.19	42.2	42.5	42.9	43.2	43.6	43.9	44.2	44.6	44.9	45.3
.20	45.6	46.0	46.3	46.7	47.0	47.4	47.7	48.1	48.4	48.8
.21	49.2	49.5	49.9	50.2	50.6	51.0	51.3	51.7	52.1	52.4
.22	52.8	53.2	53.5	53.9	54.3	54.6	55.0	55.4	55.8	56.1
.23	56.5	56.9	57.3	57.6	58.0	58.4	58.8	59.2	59.5	59.9
.24	60.3	60.7	61.1	61.5	61.9	62.2	62.6	63.0	63.4	63.8
.25	64.2	64.6	65.0	65.4	65.8	66.2	66.6	67.0	67.4	67.8
.26	68.2	68.6	69.0	69.4	69.8	70.2	70.6	71.0	71.4	71.8
.27	72.2	72.6	73.0	73.4	73.9	74.3	74.7	75.1	75.5	75.9
.28	76.4	76.8	77.2	77.6	78.0	78.4	78.9	79.3	79.7	80.1
.29	80.6	81.0	81.4	81.8	82.3	82.7	83.1	83.6	84.0	84.4
.30	84.8	85.3	85.7	86.2	86.6	87.0	87.5	87.9	88.3	88.8
.31	89.2	89.7	90.1	90.5	91.0	91.4	91.9	92.3	92.8	93.2
.32	93.7	94.1	94.6	95.0	95.5	95.9	96.4	96.8	97.3	97.7
.33	98.2	98.6	99.1	99.5	100.0	100.5	100.9	101.4	101.8	102.3
.34	102.8	103.2	103.7	104.2	104.6	105.1	105.6	106.0	106.5	107.0
.35	107.4	107.9	108.4	108.8	109.3	109.8	110.2	110.7	111.2	111.7
.36	112.2	112.6	113.1	113.6	114.1	114.6	115.0	115.5	116.0	116.5
.37	117.0	117.4	117.9	118.4	118.9	119.4	119.9	120.4	120.8	121.3
.38	121.8	122.3	122.8	123.3	123.8	124.3	124.8	125.3	125.8	126.3
.39	126.8	127.3	127.8	128.3	128.8	129.3	129.8	130.3	130.8	131.3
.40	131.8	132.3	132.8	133.3	133.8	134.3	134.8	135.3	135.8	136.3
.41	136.8	137.4	137.9	138.4	138.9	139.4	139.9	140.4	141.0	141.5
.42	142.0	142.5	143.0	143.5	144.1	144.6	145.1	145.6	146.2	146.7
.43	147.2	147.7	148.2	148.8	149.3	149.8	150.4	150.9	151.4	151.9
.44	152.5	153.0	153.5	154.1	154.6	155.1	155.6	156.2	156.7	157.3
.45	157.8	158.3	158.9	159.4	160.0	160.5	161.0	161.6	162.1	162.6
.46	163.2	163.7	164.3	164.8	165.4	165.9	166.5	167.0	167.6	168.1
.47	168.6	169.2	169.8	170.3	170.8	171.4	172.0	172.5	173.1	173.6
.48	174.2	174.7	175.3	175.8	176.4	177.0	177.5	178.1	178.6	179.2
.49	179.8	180.3	180.9	181.4	182.0	182.6	183.1	183.7	184.3	184.8
.50	185.4	186.0	186.5	187.1	187.7	188.2	188.8	189.4	190.0	190.5
.51	191.1	191.7	192.2	192.8	193.4	194.0	194.6	195.1	195.7	196.3
.52	196.9	197.4	198.0	198.6	199.2	199.8	200.4	200.9	201.5	202.1
.53	202.7	203.3	203.9	204.4	205.0	205.6	206.2	206.8	207.4	208.0
.54	208.6	209.2	209.8	210.3	210.9	211.5	212.1	212.7	213.3	213.9
.55	214.5	215.1	215.7	216.3	216.9	217.5	218.1	218.7	219.3	219.9
.56	220.5	221.1	221.7	222.3	222.9	223.5	224.1	224.7	225.3	225.9
.57	226.6	227.2	227.8	228.4	229.0	229.6	230.2	230.8	231.4	232.0
.58	232.7	233.3	233.9	234.5	235.1	235.7	236.4	237.0	237.6	238.2
.59	238.8	239.4	240.1	240.7	241.3	241.9	242.6	243.2	243.8	244.4
.60	245.0	245.7	246.3	246.0	247.6	248.2	248.8	249.4	250.1	250.7
.61	251.3									

Table 7.10 Free-flow discharge through Parshall measuring flumes 1-to-8 foot size in l/s computed from the formulae as shown in Table 7.4

Upper-head h_a (mm)	Discharge in l/s for flumes of various throat widths								
	1 feet	1.5 feet	2 feet	3 feet	4 feet	5 feet	6 feet	7 feet	8 feet
30	3.3	4.8							
32	3.7	5.3							
34	4.0	5.8							
36	4.4	6.4							
38	4.8	6.9							
40	5.2	7.5							
42	5.6	8.1							
44	6.0	8.7							
46	6.4	9.3	12.1	17.6					
48	6.8	9.9	12.9	18.8					
50	7.2	10.5	13.7	20.0					
52	7.7	11.2	14.6	21.3					
54	8.1	11.9	15.5	22.6					
56	8.6	12.5	16.4	23.9					
58	9.1	13.2	17.3	25.3					
60	9.5	14.0	18.2	26.7					
62	10.0	14.7	19.2	28.1	36.7	45.2			
64	10.5	15.4	20.2	29.5	38.6	47.6			
66	11.0	16.2	21.1	31.0	40.5	50.0			
68	11.6	16.9	22.1	32.4	42.5	52.4			
70	12.1	17.7	23.2	33.9	44.4	54.8			
72	12.6	18.5	24.2	35.5	46.5	57.4			
74	13.1	19.2	25.2	37.0	48.5	59.9			
76	13.7	20.1	26.3	38.6	50.6	62.5	74.1	85.8	97.2
78	14.2	20.9	27.4	40.2	52.7	65.1	77.3	89.4	101.3
80	14.8	21.7	28.5	41.8	54.9	67.8	80.4	93.1	105.6
82	15.4	22.0	29.6	43.5	57.0	70.5	83.7	96.9	109.8
84	15.9	23.4	30.7	45.2	59.3	73.2	87.0	100.7	114.2
86	16.5	24.3	31.9	46.8	61.5	76.0	90.3	104.6	118.6
88	17.1	25.1	33.0	48.6	63.8	78.9	93.6	108.5	123.0
90	17.7	26.0	34.2	50.3	66.1	81.7	97.1	112.5	127.5
92	18.3	26.9	35.4	52.1	68.4	84.6	100.5	116.5	132.1
94	18.9	27.8	36.6	53.8	70.8	87.6	104.0	120.6	136.8
96	19.5	28.7	37.8	55.6	73.2	90.5	107.6	124.7	141.5
98	20.1	29.7	39.0	57.5	75.6	93.5	111.2	128.9	146.2
100	20.8	30.6	40.2	59.3	78.0	96.6	114.8	133.1	151.1
102	21.4	31.5	41.5	61.2	80.5	99.7	118.5	137.4	156.0
104	22.0	32.5	42.8	63.1	83.0	102.8	122.2	141.8	160.9
106	22.7	33.5	44.0	65.0	85.6	106.0	126.0	146.1	165.9
108	23.4	34.4	45.4	66.9	88.1	109.1	129.8	150.6	171.0
110	24.0	35.4	46.6	68.9	90.7	112.4	133.7	155.1	176.1
112	24.7	36.4	48.0	70.8	93.3	115.6	137.6	159.6	181.2
114	25.4	37.4	49.3	72.8	96.0	118.9	141.5	164.2	186.5
116	26.0	38.4	50.7	74.8	98.6	122.2	145.5	168.8	191.8
118	26.7	39.5	52.0	76.9	101.3	125.6	149.5	173.5	197.1
120	27.4	40.5	53.4	78.9	104.0	129.0	153.6	178.2	202.5
122	28.1	41.5	54.8	81.0	106.8	132.4	157.7	183.0	208.0
124	28.8	42.6	56.2	83.1	109.6	135.9	161.8	187.9	213.5
126	29.5	43.6	57.6	85.2	112.4	139.4	166.0	192.7	219.0
128	30.2	44.7	59.0	87.3	115.2	142.9	170.2	197.6	224.6
130	31.0	45.8	60.4	89.5	118.0	146.5	174.5	202.6	230.3
132	31.7	46.9	61.9	91.6	120.9	150.1	178.8	207.6	236.0
134	32.4	48.0	63.4	93.8	123.8	153.7	183.1	212.7	241.8
136	33.2	49.1	64.8	96.0	126.8	157.4	187.5	217.8	247.6
138	33.9	50.2	66.3	98.2	129.7	161.0	191.9	223.0	253.5
140	34.7	51.3	67.8	100.5	132.7	164.8	196.4	228.1	259.4
142	35.4	52.5	69.3	102.7	135.7	168.5	200.9	233.4	265.4
144	36.2	53.6	70.8	105.0	138.7	172.3	205.4	238.7	271.4
146	37.0	54.8	72.4	107.3	141.8	176.1	210.0	244.0	277.5
148	37.7	55.9	73.9	109.6	144.9	180.0	214.6	249.4	283.7
150	38.5	57.1	75.4	112.0	148.0	183.8	219.2	254.8	289.8

Table 7.10 continued

Upper-head h_a (mm)	Discharge in l/s for flumes of various throat widths								
	1 feet	1.5 feet	2 feet	3 feet	4 feet	5 feet	6 feet	7 feet	8 feet
152	39.3	58.3	77.0	114.3	151.1	187.7	223.9	260.2	296.1
154	40.1	59.4	78.6	116.7	154.2	191.7	228.6	265.8	302.4
156	40.9	60.6	80.2	119.0	157.4	195.6	233.4	271.3	308.7
158	41.7	61.8	81.8	121.4	160.6	199.6	238.2	276.9	315.1
160	42.5	63.0	83.4	123.8	163.8	203.6	243.0	282.5	321.5
162	43.3	64.2	85.0	126.3	167.1	207.7	247.9	288.2	328.0
164	44.1	65.5	86.6	128.7	170.3	211.8	252.8	293.9	334.5
166	44.9	66.7	88.3	131.2	173.6	215.9	257.7	299.7	341.1
168	45.7	68.0	89.9	133.7	176.9	220.0	262.7	305.5	347.7
170	46.6	69.2	91.6	136.2	180.3	224.2	267.7	311.3	354.4
172	47.4	70.4	93.3	138.7	183.6	228.4	272.7	317.2	361.1
174	48.2	71.7	95.0	141.2	187.0	232.6	277.8	323.1	367.9
176	49.1	73.0	96.7	143.8	190.4	236.9	282.9	329.1	374.7
178	50.0	74.3	98.4	146.4	193.8	241.2	288.0	335.1	381.6
180	50.8	75.6	100.1	148.9	197.3	245.5	293.2	341.2	388.5
182	51.7	76.8	101.8	151.5	200.8	249.8	298.4	347.2	395.5
184	52.5	78.2	103.6	154.2	204.2	254.2	303.7	353.4	402.5
186	53.4	79.5	105.3	156.8	207.8	258.6	309.0	359.5	409.5
188	54.3	80.8	107.1	159.4	211.3	263.0	314.3	365.8	416.6
190	55.2	82.1	108.8	162.1	214.8	267.5	319.6	372.0	423.8
192	56.0	83.4	110.6	164.8	218.4	272.0	325.0	378.3	431.0
194	56.9	84.8	112.4	167.5	222.0	276.5	330.4	384.6	438.2
196	57.8	86.1	114.2	170.2	225.6	281.0	335.9	391.0	445.5
198	58.7	87.5	116.0	172.9	229.3	285.6	341.4	397.4	452.8
200	59.6	88.8	117.8	175.7	233.0	290.2	346.9	403.8	460.2
202	60.6	90.2	119.7	178.4	236.6	294.8	352.4	410.3	467.6
204	61.5	91.6	121.5	181.2	240.4	299.4	358.0	416.8	475.1
206	62.4	93.0	123.4	184.0	244.1	304.1	363.6	423.4	482.6
208	63.3	94.4	125.2	186.8	247.8	308.8	369.3	430.0	490.1
210	64.2	95.8	127.1	189.6	251.6	313.6	375.0	436.6	497.7
212	65.2	97.2	129.0	192.4	255.4	318.3	380.7	443.3	505.4
214	66.1	98.6	130.9	195.3	259.2	323.1	386.4	450.0	513.0
216	67.1	100.0	132.8	198.2	263.0	327.9	392.2	456.8	520.8
218	68.0	101.4	134.7	201.0	266.9	332.7	398.0	463.6	528.6
220	69.0	102.9	136.6	203.9	270.8	337.6	403.8	470.4	536.4
222	69.9	104.3	138.5	206.8	274.7	342.5	409.7	477.3	544.2
224	70.9	105.8	140.5	209.8	278.6	347.4	415.6	484.2	552.1
226	71.8	107.2	142.4	212.7	282.3	352.3	421.6	491.1	560.1
228	72.8	108.7	144.4	215.7	286.5	357.3	427.5	498.1	568.0
230	73.8	110.2	146.4	218.6	290.4	362.2	433.5	505.1	576.1
232	74.8	111.6	148.3	221.6	294.4	367.3	439.5	512.2	584.2
234	75.8	113.1	150.3	224.6	298.5	372.3	445.6	519.2	592.3
236	76.7	114.6	152.3	227.6	302.5	377.4	451.7	526.4	600.4
238	77.7	116.1	154.3	230.7	306.6	382.4	447.8	533.5	608.6
240	78.7	117.6	156.3	233.7	310.6	387.6	464.0	540.7	616.8
245	81.2	121.4	161.4	241.4	320.9	400.4	479.5	558.9	637.6
250	83.8	125.2	166.6	249.1	331.3	413.5	495.2	577.2	658.7
255	86.3	129.1	171.7	257.0	341.8	426.7	511.1	595.8	680.0
260	88.9	133.0	177.0	264.9	352.4	440.0	527.1	614.6	701.5
265	91.5	137.0	182.3	272.9	363.2	453.6	543.4	633.7	723.3
270	94.2	141.0	187.6	281.0	374.1	467.2	559.8	652.9	745.4
275	96.8	145.0	193.1	289.2	385.1	481.1	576.5	672.4	767.7
280	99.5	149.1	198.5	297.5	396.2	495.0	593.3	692.1	790.2
285	102.3	153.2	204.0	305.9	407.4	509.1	610.3	712.0	813.0
290	105.0	157.3	209.6	314.3	418.7	523.3	627.4	732.1	836.1
295	107.8	161.5	215.2	322.8	430.2	537.7	644.8	752.4	859.4
300	110.6	165.8	220.9	331.4	441.7	552.2	662.3	772.9	882.9

Table 7.10 continued

Upper- head h_a (mm)	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8
305	113.4	170.0	226.7	340.2	453.4	566.9	680.0	793.6	906.7
310	116.2	174.3	232.4	348.9	465.2	581.7	697.8	814.6	930.7
315	119.1	178.7	238.3	357.8	477.1	596.7	715.9	835.7	954.9
320	122.0	183.1	244.2	366.7	489.1	611.8	734.1	857.0	979.4
325	124.9	187.5	250.1	375.7	501.2	627.0	752.5	878.6	1004
330	127.8	191.9	256.1	384.8	513.4	642.4	771.0	900.3	1029
335	130.8	196.4	262.2	394.0	525.8	657.9	789.8	922.3	1054
340	133.8	201.0	268.2	403.2	538.2	673.6	808.6	944.4	1080
345	136.8	205.5	274.4	412.6	550.7	689.4	827.7	966.7	1105
350	139.8	210.1	280.6	422.0	563.4	705.3	846.9	989.3	1131
355	142.8	214.7	286.8	431.3	576.1	721.4	866.3	1012	1157
360	145.9	219.4	293.1	441.0	589.0	737.6	885.8	1035	1183
365	149.0	224.1	299.4	450.6	602.0	753.9	905.5	1058	1210
370	152.1	228.8	305.8	460.3	615.0	770.3	925.4	1081	1237
375	155.3	233.6	312.2	470.1	628.2	786.9	945.4	1105	1264
380	158.4	238.4	318.7	480.0	641.4	803.6	965.6	1128	1291
385	161.6	243.3	325.2	489.9	654.8	820.5	985.9	1152	1318
390	164.8	248.2	331.8	499.9	668.3	837.4	1006	1176	1346
395	168.0	253.1	338.4	510.0	681.9	854.6	1027	1201	1374
400	171.3	258.0	345.1	520.1	695.5	871.8	1048	1225	1402
405	174.6	263.0	351.8	530.3	709.3	889.2	1069	1250	1430
410	177.9	268.0	358.5	540.6	723.2	906.6	1090	1274	1459
415	181.2	273.0	365.3	551.0	737.1	924.2	1111	1299	1487
420	184.5	278.1	372.2	561.4	751.2	942.0	1133	1325	1516
425	187.9	283.2	379.1	571.9	765.4	959.8	1154	1350	1545
430	191.2	288.4	386.0	582.5	779.6	977.8	1176	1375	1575
435	194.6	293.5	393.0	593.1	794.0	995.9	1198	1401	1604
440	198.0	298.7	400.0	603.8	808.4	1014	1220	1427	1634
445	201.5	304.0	407.1	614.6	823.0	1032	1242	1453	1664
450	204.9	309.2	414.2	625.4	837.6	1051	1264	1479	1694
455	208.4	314.6	421.4	636.4	852.3	1070	1287	1506	1724
460	211.9	319.9	428.6	647.3	867.2	1088	1310	1532	1755
465	215.4	325.2	435.8	658.4	882.1	1107	1332	1559	1786
470	219.0	330.6	443.1	669.5	897.1	1126	1355	1586	1817
475	222.5	336.1	450.4	680.7	912.2	1145	1378	1613	1848
480	226.1	341.5	457.8	692.0	927.4	1164	1402	1640	1879
485	229.7	347.0	465.2	703.3	942.7	1184	1425	1668	1911
490	233.3	352.5	472.6	714.7	958.1	1203	1448	1695	1942
495	236.9	358.1	480.1	726.1	973.5	1223	1472	1723	1974
500	240.6	363.6	487.7	737.6	989.1	1242	1496	1751	2006
505	244.2	369.2	495.3	749.2	1005	1262	1520	1779	2039
510	247.9	374.9	502.9	760.9	1020	1282	1544	1808	2071
515	251.6	380.6	510.5	772.6	1036	1302	1568	1836	2104
520	255.4	386.3	518.2	784.4	1052	1322	1592	1865	2137
525	259.1	392.0	526.0	796.2	1068	1342	1617	1893	2170
530	262.9	397.7	533.8	808.1	1084	1363	1642	1922	2203
535	266.7	403.5	541.6	820.1	1101	1383	1666	1951	2239
540	270.5	409.3	549.3	832.1	1117	1404	1691	1981	2271
545	274.3	415.2	557.4	844.2	1133	1424	1716	2010	2303
550	278.1	421.1	565.3	856.4	1150	1445	1741	2040	2339
555	282.0	427.0	573.3	868.6	1166	1466	1767	2070	2373
560	285.9	432.9	581.3	880.9	1183	1487	1792	2099	2407
565	289.8	438.8	589.4	893.2	1199	1508	1818	2130	2442
570	293.7	444.8	597.5	905.6	1216	1529	1844	2160	2477
575	297.6	450.8	605.6	918.1	1233	1551	1869	2190	2512
580	301.6	456.9	613.8	930.6	1250	1572	1895	2221	2547
585	305.5	463.0	622.0	943.2	1267	1594	1922	2252	2582
590	309.5	469.1	630.3	955.9	1284	1615	1948	2282	2618
595	313.5	475.2	638.6	968.6	1302	1637	1974	2313	2654
600	317.5	481.4	646.9	981.4	1319	1659	2001	2345	2690

Table 7.10 continued

Upper-head h_u (mm)	Discharge in l/s for flumes of various throat widths								
	1 feet	1.5 feet	2 feet	3 feet	4 feet	5 feet	6 feet	7 feet	8 feet
605	321.6	487.5	655.3	994.2	1336	1681	2027	2376	2726
610	325.6	493.7	663.7	1007	1354	1703	2054	2408	2762
615	329.7	500.0	672.2	1020	1371	1725	2081	2439	2798
620	333.8	506.2	680.7	1033	1389	1748	2108	2471	2835
625	337.9	512.5	689.2	1046	1407	1770	2135	2503	2872
630	342.0	518.9	697.8	1059	1424	1793	2163	2535	2909
635	346.1	525.2	706.4	1072	1442	1815	2190	2567	2946
640	350.3	531.6	715.0	1086	1460	1838	2218	2600	2983
645	354.5	538.0	723.7	1099	1478	1861	2245	2632	3021
650	358.6	544.4	732.4	1112	1496	1884	2273	2665	3059
655	362.9	550.9	741.1	1126	1515	1907	2301	2698	3097
660	367.1	557.3	749.9	1139	1533	1930	2329	2731	3135
665	371.3	563.8	758.8	1153	1551	1953	2357	2764	3173
670	375.6	570.4	767.6	1166	1570	1977	2386	2798	3211
675	379.8	576.9	776.5	1180	1588	2000	2414	2831	3250
680	384.1	583.5	785.4	1194	1607	2024	2443	2865	3289
685	388.4	599.1	794.4	1208	1625	2047	2472	2899	3328
690	392.8	596.8	803.4	1221	1644	2071	2500	2933	3367
695	397.1	603.4	812.5	1235	1663	2095	2529	2967	3406
700	401.5	610.1	821.5	1249	1682	2119	2558	3001	3446
705	405.8	616.8	839.7	1263	1701	2143	2588	3035	3485
710	410.2	623.6	839.8	1277	1720	2167	2617	3070	3525
715	414.6	630.4	849.0	1292	1739	2191	2646	3105	3565
720	419.1	637.2	858.2	1306	1758	2216	2676	3139	3605
725	423.5	644.0	867.5	1320	1778	2240	2706	3174	3645
730	428.0	650.8	876.8	1334	1797	2265	2736	3210	3686
735	432.4	657.7	886.1	1349	1817	2289	2765	3245	3727
740	436.9	664.6	895.4	1363	1836	2314	2796	3280	3767
745	441.4	671.5	904.8	1377	1856	2339	2826	3316	3808
750	445.9	678.4	914.3	1392	1875	2364	2856	3351	3850
755	450.4	685.4	923.7	1406	1895	2389	2886	3387	3891
760	455.0	692.4	933.2	1421	1915	2414	2917	3423	3932

Table 7.11 Free-flow discharge through Parshall measuring flumes 10 to 50 feet size in m³/s. Computed from the formulae as shown in Table 7.4

Upper-head h_u (mm)	Discharge per m ³ /s for flumes of various throat widths							
	10 feet	12 feet	15 feet	20 feet	25 feet	30 feet	40 feet	50 feet
90	0.158	0.188	0.233	0.307	0.381	0.455	0.603	0.751
95	0.173	0.205	0.254	0.334	0.415	0.496	0.658	0.819
100	0.187	0.223	0.275	0.363	0.451	0.539	0.714	0.889
105	0.203	0.241	0.298	0.392	0.487	0.582	0.772	0.962
110	0.218	0.259	0.321	0.423	0.525	0.627	0.832	1.04
115	0.234	0.278	0.344	0.454	0.564	0.674	0.893	1.11
120	0.251	0.298	0.369	0.486	0.603	0.721	0.956	1.19
125	0.268	0.318	0.393	0.519	0.644	0.770	1.02	1.27
130	0.285	0.339	0.419	0.552	0.686	0.819	1.09	1.35
135	0.303	0.360	0.445	0.587	0.728	0.870	1.15	1.44
140	0.321	0.381	0.472	0.622	0.772	0.923	1.22	1.52
145	0.340	0.403	0.499	0.658	0.817	0.976	1.29	1.61
150	0.359	0.426	0.527	0.694	0.862	1.03	1.37	1.70
155	0.378	0.449	0.555	0.732	0.909	1.09	1.44	1.79
160	0.398	0.472	0.584	0.770	0.956	1.14	1.51	1.89
165	0.418	0.496	0.613	0.809	1.00	1.20	1.59	1.98
170	0.438	0.520	0.643	0.848	1.05	1.26	1.67	2.08
175	0.459	0.545	0.674	0.889	1.10	1.32	1.75	2.18
180	0.480	0.570	0.705	0.930	1.15	1.38	1.83	2.28
185	0.502	0.595	0.737	0.971	1.21	1.44	1.91	2.38
190	0.524	0.621	0.769	1.01	1.26	1.50	1.99	2.48
195	0.546	0.648	0.801	1.06	1.31	1.57	2.08	2.59
200	0.568	0.675	0.835	1.10	1.37	1.63	2.16	2.70
205	0.591	0.702	0.868	1.14	1.42	1.70	2.25	2.80
210	0.614	0.739	0.902	1.19	1.48	1.77	2.34	2.92
215	0.638	0.757	0.937	1.24	1.53	1.83	2.43	3.03
220	0.662	0.786	0.972	1.28	1.59	1.90	2.52	3.14
225	0.686	0.814	1.01	1.33	1.65	1.97	2.61	3.26
230	0.711	0.844	1.04	1.38	1.71	2.04	2.71	3.37
235	0.736	0.873	1.08	1.42	1.77	2.11	2.80	3.49
240	0.761	0.903	1.12	1.47	1.83	2.19	2.90	3.61
245	0.786	0.933	1.15	1.52	1.89	2.26	3.00	3.73
250	0.812	0.964	1.19	1.57	1.95	2.33	3.09	3.85
255	0.838	0.995	1.23	1.62	2.02	2.41	3.19	3.98
260	0.865	1.03	1.27	1.67	2.08	2.48	3.29	4.10
265	0.891	1.06	1.31	1.73	2.14	2.56	3.40	4.23
270	0.919	1.09	1.35	1.78	2.21	2.64	3.50	4.36
275	0.946	1.12	1.39	1.83	2.27	2.72	3.60	4.49
280	0.974	1.16	1.43	1.89	2.34	2.80	3.71	4.62
285	1.002	1.19	1.47	1.94	2.41	2.88	3.82	4.75
290	1.030	1.22	1.51	1.99	2.48	2.96	3.92	4.89
295	1.058	1.26	1.55	2.05	2.54	3.04	4.03	5.02
300	1.087	1.29	1.60	2.11	2.61	3.12	4.14	5.16
305	1.116	1.33	1.64	2.16	2.68	3.21	4.25	5.30
310	1.146	1.36	1.68	2.22	2.75	3.29	4.36	5.44
315	1.175	1.40	1.73	2.28	2.83	3.38	4.48	5.58
320	1.205	1.43	1.77	2.33	2.90	3.46	4.59	5.72
325	1.236	1.47	1.81	2.39	2.97	3.55	4.71	5.86
330	1.266	1.50	1.86	2.45	3.04	3.64	4.82	6.01
335	1.297	1.54	1.90	2.51	3.12	3.73	4.94	6.15
340	1.328	1.58	1.95	2.57	3.19	3.82	5.06	6.30
345	1.360	1.61	2.00	2.63	3.27	3.91	5.18	6.45
350	1.391	1.65	2.04	2.69	3.34	4.00	5.30	6.60
355	1.423	1.69	2.09	2.76	3.42	4.09	5.42	6.75
360	1.455	1.73	2.14	2.82	3.50	4.18	5.54	6.91
365	1.488	1.77	2.19	2.88	3.58	4.27	5.67	7.06
370	1.521	1.81	2.23	2.94	3.66	4.37	5.79	7.22
375	1.554	1.84	2.28	3.01	3.73	4.46	5.92	7.37
380	1.587	1.88	2.33	3.07	3.81	4.56	6.05	7.53
385	1.621	1.92	3.38	3.14	3.90	4.66	6.17	7.69
390	1.65	1.96	2.43	3.20	3.98	4.75	6.30	7.85
395	1.69	2.00	2.48	3.27	4.06	4.85	6.43	8.01

Table 7.11 continued

Upper-head h_u (mm)	Discharge in m^3/s for flumes of various throat widths							
	10 feet	12 feet	15 feet	20 feet	25 feet	30 feet	40 feet	50 feet
400	1.72	2.04	2.53	3.34	4.14	4.95	6.56	8.17
405	1.76	2.09	2.58	3.40	4.22	5.05	6.69	8.34
410	1.79	2.13	2.63	3.47	4.31	5.15	6.83	8.50
415	1.83	2.17	2.68	3.54	4.39	5.25	6.96	8.67
420	1.86	2.21	2.74	3.61	4.48	5.35	7.10	8.84
425	1.90	2.25	2.79	3.68	4.56	5.45	7.23	9.01
430	1.93	2.30	2.84	3.74	4.65	5.56	7.37	9.18
435	1.97	2.34	2.89	3.81	4.74	5.66	7.51	9.35
440	2.01	2.38	2.95	3.89	4.82	5.76	7.64	9.52
445	2.04	2.43	3.00	3.96	4.91	5.87	7.78	9.69
450	2.08	2.47	3.05	4.03	5.00	5.98	7.92	9.87
455	2.12	2.51	3.11	4.10	5.09	6.08	8.06	10.0
460	2.15	2.56	3.16	4.17	5.18	6.19	8.21	10.2
465	2.19	2.60	3.22	4.24	5.27	6.30	8.35	10.4
470	2.23	2.65	3.27	4.32	5.36	6.41	8.49	10.6
475	2.27	2.69	3.33	4.39	5.45	6.52	8.64	10.8
480	2.31	2.74	3.39	4.47	5.54	6.63	8.79	10.9
485	2.34	2.78	3.44	4.54	5.64	6.74	8.93	11.1
490	2.38	2.83	3.50	4.62	5.73	6.85	9.08	11.3
495	2.42	2.88	3.56	4.69	5.82	6.96	9.23	11.5
500	2.46	2.92	3.62	4.77	5.92	7.07	9.38	11.7
505	2.50	2.97	3.67	4.84	6.01	7.19	9.53	11.9
510	2.54	3.02	3.73	4.92	6.11	7.30	9.68	12.1
515	2.58	3.06	3.79	5.00	6.20	7.42	9.83	12.2
520	2.62	3.11	3.85	5.08	6.30	7.53	9.99	12.4
525	2.66	3.16	3.91	5.15	6.40	7.65	10.1	12.6
530	2.70	3.21	3.97	5.23	6.50	7.76	10.3	12.8
535	2.74	3.26	4.03	5.31	6.59	7.88	10.5	13.6
540	2.78	3.31	4.09	5.39	6.69	8.00	10.6	13.0
550	2.87	3.40	4.21	5.55	6.89	8.24	10.9	13.6
560	2.95	3.50	4.33	5.71	7.09	8.48	11.2	14.0
570	3.04	3.60	4.46	5.88	7.30	8.72	11.6	14.4
580	3.12	3.71	4.58	6.04	7.50	8.97	11.9	14.8
590	3.21	3.81	4.71	6.21	7.71	9.22	12.2	15.2
600	3.30	3.91	4.84	6.38	7.92	9.47	12.6	15.6
610	3.38	4.02	4.97	6.55	8.13	9.72	12.9	16.1
620	3.47	4.12	5.10	6.73	8.35	9.98	13.2	16.5
630	3.56	4.23	5.23	6.90	8.57	10.2	13.6	16.9
640	3.65	4.34	5.37	7.08	8.78	10.5	13.9	17.3
650	3.75	4.45	5.50	7.25	9.00	10.8	14.3	17.8
660	3.84	4.56	5.64	7.43	9.23	11.0	14.6	18.2
670	3.93	4.67	5.77	7.61	9.45	11.3	15.0	18.7
680	4.03	4.78	5.91	7.80	9.68	11.6	15.3	19.1
690	4.12	4.89	6.05	7.98	9.91	11.8	15.7	19.6
700	4.22	5.01	6.19	8.17	10.1	12.1	16.1	20.0
710	4.31	5.12	6.34	8.35	10.4	12.4	16.4	20.5
720	4.41	5.24	6.48	8.54	10.6	12.7	16.8	20.9
730	4.51	5.35	6.62	8.73	10.8	13.0	17.2	21.4
740	4.61	5.47	6.77	8.93	11.1	13.2	17.6	21.9
750	4.71	5.59	6.92	9.12	11.3	13.5	17.9	22.3
760	4.81	5.71	7.06	9.31	11.6	13.8	18.3	22.8
770	4.91	5.83	7.21	9.51	11.8	14.1	18.7	23.3
780	5.01	5.95	7.36	9.71	12.1	14.4	19.1	23.8
790	5.12	6.08	7.52	9.91	12.3	14.7	19.5	24.3
800	5.22	6.20	7.67	10.1	12.6	15.0	19.9	24.8
810	5.33	6.32	7.82	10.3	12.8	15.3	20.3	25.3
820	5.43	6.45	7.98	10.5	13.1	15.6	20.7	25.8
830	5.54	6.58	8.13	10.7	13.3	15.9	21.1	26.3
840	5.65	6.70	8.29	10.9	13.6	16.2	21.5	26.8
850	5.75	6.83	8.45	11.1	13.8	16.5	21.9	27.3
860	5.86	6.96	8.61	11.4	14.1	16.8	22.3	27.8
870	5.97	7.09	8.77	11.6	14.4	17.2	22.8	28.3
880	6.08	7.22	8.93	11.8	14.6	17.5	23.2	28.9
890	6.19	7.35	9.10	12.0	14.9	17.8	23.6	29.4

Table 7.11 continued

Upper-head h_a (mm)	Discharge in m^3/s for flumes of various throat widths							
	10 feet	12 feet	15 feet	20 feet	25 feet	30 feet	40 feet	50 feet
900	6.31	7.48	9.26	12.2	15.2	18.1	24.0	29.9
910	6.42	7.62	9.42	12.4	15.4	18.4	24.4	30.5
920	6.53	7.75	9.59	12.6	15.7	18.8	24.9	31.0
930	6.64	7.89	9.76	12.9	16.0	19.1	25.3	31.5
940	6.76	8.02	9.93	13.1	16.2	19.4	25.8	32.1
950	6.87	8.16	10.1	13.3	16.5	19.8	26.2	32.6
960	6.99	8.30	10.3	13.5	16.8	20.1	26.6	33.2
970	7.11	8.44	10.4	13.8	17.1	20.4	27.1	33.7
980	7.23	8.58	10.6	14.0	17.4	20.8	27.5	34.3
990	7.34	8.72	10.8	14.2	17.7	21.1	28.0	34.8
1000	7.46	8.86	11.0	14.4	17.9	21.4	28.4	35.4
1010	7.58	9.00	11.1	14.7	18.2	21.8	28.9	36.0
1020	7.70	9.14	11.3	14.9	18.5	22.1	29.3	36.5
1030	7.82	9.29	11.5	15.1	18.8	22.5	29.8	37.1
1040	7.95	9.43	11.7	15.4	19.1	22.8	30.3	37.7
1050	8.07	9.58	11.8	15.6	19.4	23.2	30.7	38.3
1060	8.19	9.72	12.0	15.9	19.7	23.5	31.2	38.9
1070		9.87	12.2	16.1	20.0	23.9	31.7	39.5
1080		10.0	12.4	16.3	20.3	24.2	32.2	40.1
1090		10.2	12.6	16.6	20.6	24.6	32.6	40.6
1100		10.3	12.8	16.8	20.9	25.0	33.1	41.2
1110		10.5	13.0	17.1	21.2	25.3	33.6	41.8
1120		10.6	13.1	17.3	21.5	25.7	34.1	42.4
1130		10.8	13.3	17.6	21.8	26.1	34.6	43.1
1140		10.9	13.5	17.8	22.1	26.4	35.1	43.7
1150		11.1	13.7	18.1	22.4	26.8	35.6	44.3
1160		11.2	13.9	18.3	22.7	27.2	36.1	44.9
1170		11.4	14.1	18.6	23.1	27.6	36.5	45.5
1180		11.5	14.3	18.8	23.4	27.9	37.0	46.1
1190		11.7	14.5	19.1	23.7	28.3	37.6	46.8
1200		11.9	14.7	19.3	24.0	28.7	38.1	47.4
1210		12.0	14.9	19.6	24.3	29.1	38.6	48.0
1220		12.2	15.1	19.9	24.7	29.5	39.1	48.7
1230		12.3	15.3	20.1	25.0	29.9	39.6	49.3
1240		12.5	15.5	20.4	25.3	30.2	40.1	50.0
1250		12.7	15.7	20.7	25.6	30.6	40.6	50.6
1260		12.8	15.9	20.9	26.0	31.0	41.1	51.3
1270		13.0	16.1	21.2	26.3	31.4	41.7	51.9
1280		13.1	16.3	21.4	26.6	31.8	42.2	52.6
1290		13.3	16.5	21.7	27.0	32.2	42.7	53.2
1300		13.5	16.7	22.0	27.3	32.6	43.3	53.9
1310		13.6	16.9	22.3	27.6	33.0	43.8	54.5
1320		13.8	17.1	22.5	28.0	33.4	44.3	55.2
1330		14.0	17.3	22.8	28.3	33.8	44.9	55.9
1340		14.1	17.5	23.1	28.7	34.2	45.4	56.6
1350		14.3	17.9	23.4	29.0	34.7	46.0	57.2
1360		14.5	17.9	23.6	29.3	35.1	46.5	57.9
1370		14.7	18.1	23.9	29.7	35.5	47.0	58.6
1380			18.3	24.2	30.0	35.9	47.6	59.3
1390			18.6	24.5	30.4	36.3	48.2	60.0
1400			18.8	24.8	30.7	36.7	48.7	60.7
1410			19.0	25.0	31.1	37.2	49.3	61.4
1420			19.2	25.3	31.4	37.6	49.8	62.1
1430			19.4	25.6	31.8	38.0	50.4	62.8
1440			19.6	25.9	32.2	38.4	51.0	63.5
1450			19.9	26.2	32.5	38.9	51.5	64.2
1460			20.1	26.5	32.9	39.3	52.1	64.9
1470			20.3	26.8	33.2	39.7	52.7	65.7
1480			20.5	27.1	33.6	40.1	53.2	66.3
1490			20.7	27.4	34.0	40.6	53.8	67.0
1500			21.0	27.6	34.3	41.0	54.4	67.7
1510			21.2	27.9	34.7	41.5	55.0	68.5
1420			21.4	28.2	35.1	41.9	55.6	69.2
1530			21.6	28.5	35.4	42.3	56.1	69.9

Table 7.11 continued

Upper-head h_u (mm)	Discharge in m^3/s for flumes of various throat widths							
	10 feet	12 feet	15 feet	20 feet	25 feet	30 feet	40 feet	50 feet
1540			21.9	28.8	35.8	42.8	56.7	70.7
1550			22.1	29.1	36.2	43.2	57.3	71.4
1560			22.3	29.4	36.5	43.7	57.9	72.1
1570			22.6	29.7	36.9	44.1	58.5	72.9
1580			22.8	30.0	37.3	44.6	59.1	73.6
1590			23.0	30.3	37.7	45.0	59.7	74.4
1600			23.2	30.7	38.1	45.5	60.3	75.1
1610			23.5	31.0	38.4	45.9	60.9	75.9
1620			23.7	31.3	38.8	46.4	61.5	76.6
1630			24.0	31.6	39.2	46.9	62.1	77.4
1640			24.2	31.9	39.6	47.3	62.7	78.1
1650			24.4	32.2	40.0	47.8	63.4	78.9
1660			24.7	32.5	40.4	48.2	64.0	79.7
1670			24.9	32.8	40.8	48.7	64.6	80.4
1680				33.1	41.1	49.2	65.2	81.2
1690				33.5	41.5	49.6	65.8	82.0
1700				33.8	41.9	50.1	66.5	82.8
1710				34.1	42.3	50.6	67.1	83.5
1720				34.4	42.7	51.1	67.7	84.3
1730				34.7	43.1	51.5	68.3	85.1
1740				35.1	43.5	52.0	69.0	85.9
1750				35.4	43.9	52.5	69.6	86.7
1760				35.7	44.3	53.0	70.2	87.5
1770				36.0	44.7	53.5	70.9	88.3
1780				36.4	45.1	53.9	71.5	89.1
1790				36.7	45.5	54.4	72.2	89.9
1800				37.0	45.9	54.9	72.8	90.7
1810				37.3	46.4	55.4	73.5	91.5
1820				37.7	46.8	55.9	74.1	92.3

7.4.3 Submerged flow

When the ratio of gauge reading h_b to h_u exceeds the limits of 0.60 for 3-, 6-, and 9-in flumes, 0.70 for 1- to 8-ft flumes and 0.80 for 10- to 50-ft flumes, the modular flume discharge is reduced due to submergence. The non-modular discharge of Parshall flumes equals

$$Q_s = Q - Q_E \quad (7-5)$$

where Q equals the modular discharge (Tables 7.5 to 7.11) and Q_E is the reduction on the modular discharge due to submergence.

The diagrams in Figures 7.10 to 7.16 give the corrections, Q_E , for submergence for Parshall flumes of various sizes. The correction for the 1-ft flume is made applicable to the 1.5-ft up to 8-ft flumes by multiplying the correction Q_E for the 1-ft flume by the factor given below for the particular size of the flume in use.

Size of flume		correction factor
b_c in ft	b_c in m	
1	0.3048	1.0
1.5	0.4572	1.4
2	0.6096	1.8
3	0.9144	2.4
4	1.2191	3.1
5	1.5240	3.7
6	1.8288	4.3
7	2.1336	4.9
8	2.4384	5.4

Similarly, the correction for the 10-ft flumes is made applicable to the larger flumes by multiplying the correction for the 10-ft flume by the factor given below for the particular flume in use.

Size of flume		correction factor
b_c in ft	b_c in m	
10	3.048	1.0
12	3.658	1.2
15	4.572	1.5
20	6.096	2.0
25	7.620	2.5
30	9.144	3.0
40	12.192	4.0
50	15.240	5.0

If the size and elevation of the flume cannot be selected to permit modular-flow operation, the submergence ratio h_b/h_u should be kept below the practical limit of 0.90.

UPSTREAM HEAD
 h_d in metres

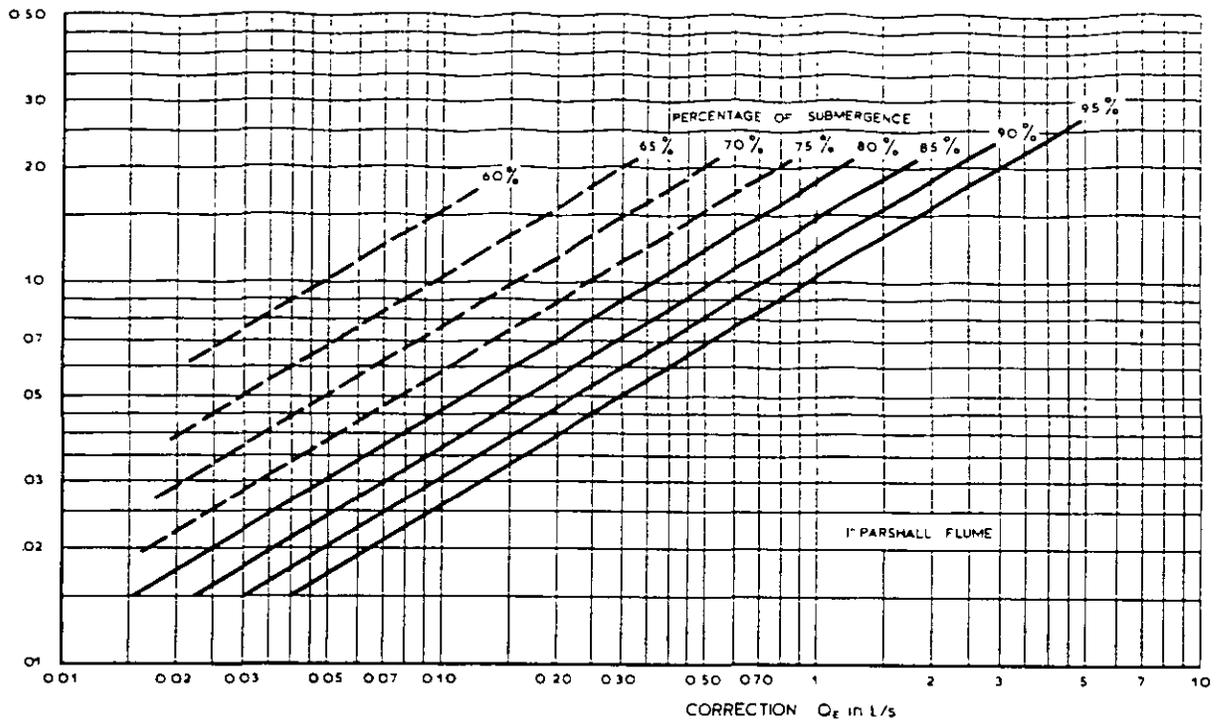


Figure 7.10 Discharge correction for submerged flow, 1" Parshall flume

UPSTREAM HEAD
 h_d in metres

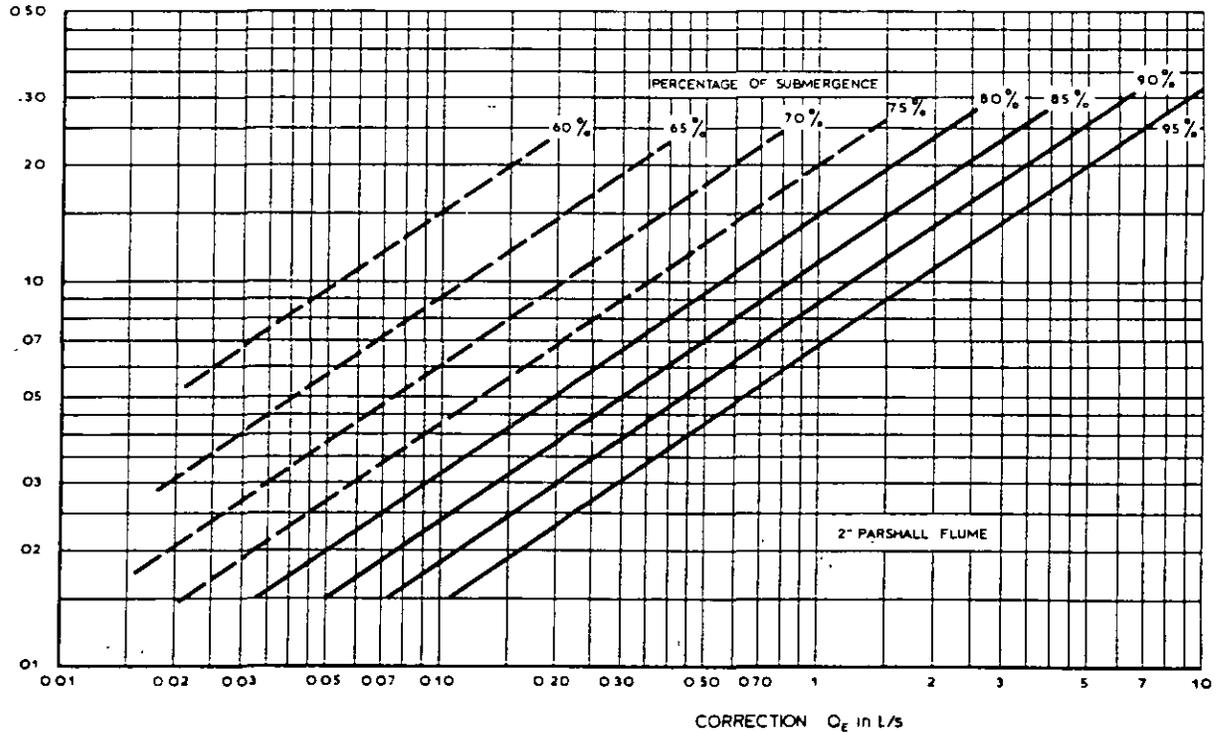


Figure 7.11 Discharge correction for submerged flow; 2" Parshall flume

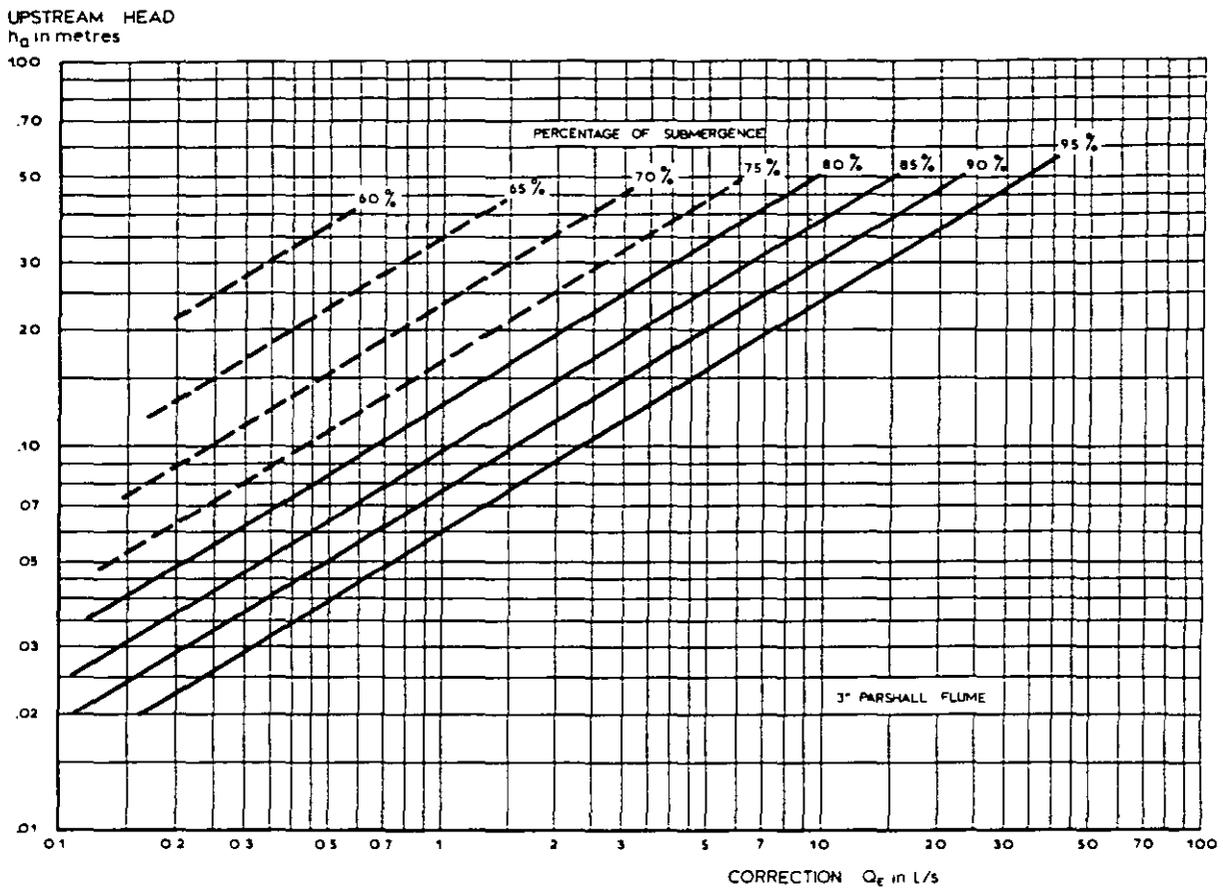


Figure 7.12 Discharge correction for submerged flow, 3" Parshall flume

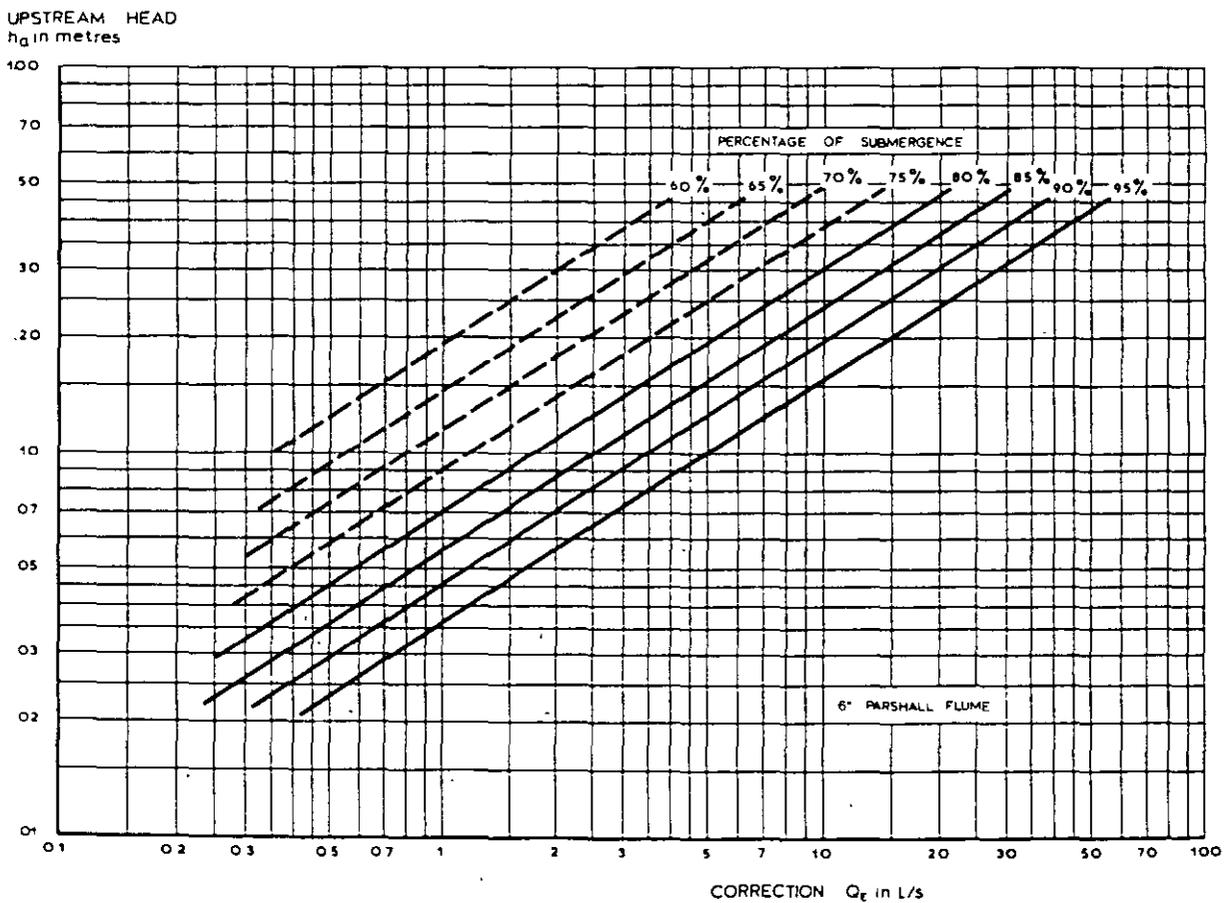


Figure 7.13 Discharge correction for submerged flow: 6" Parshall flume

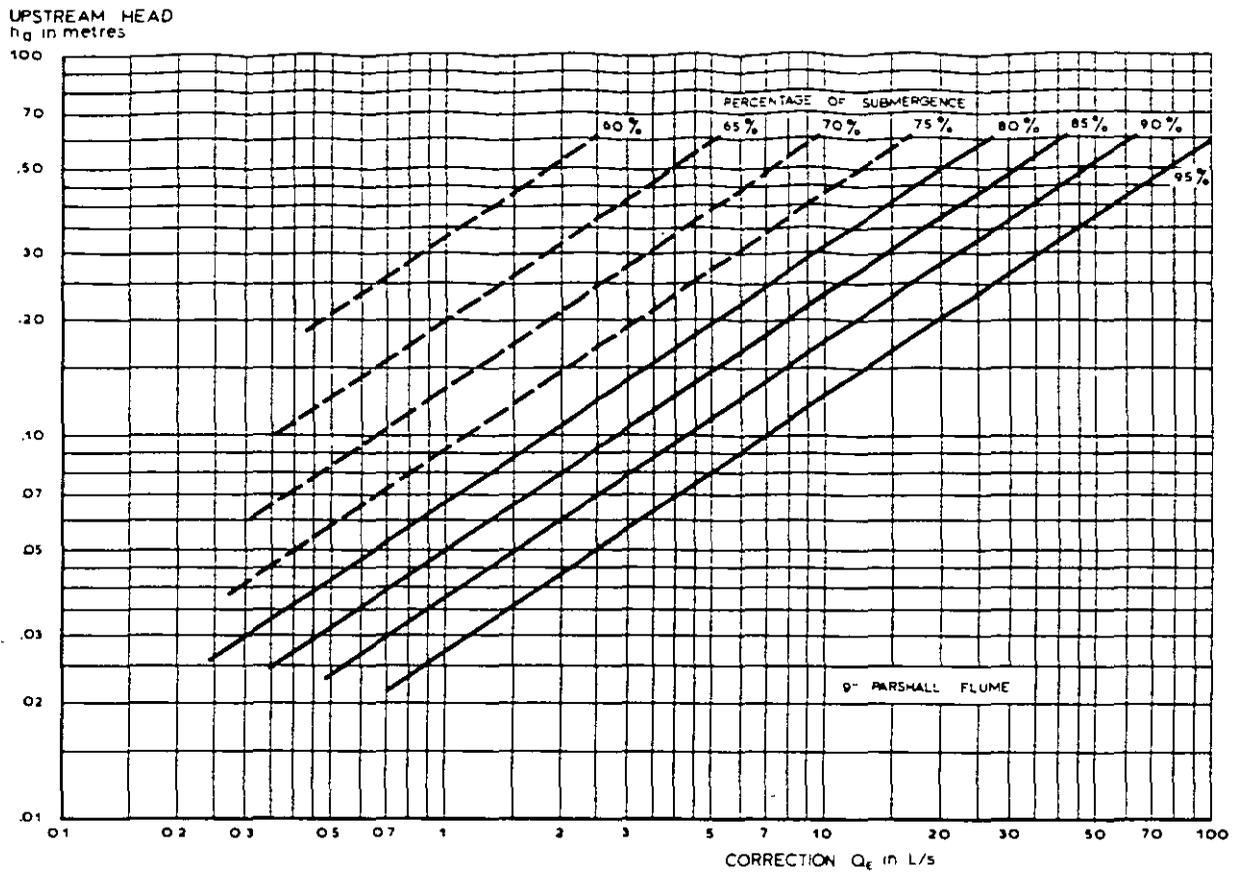


Figure 7.14 Discharge correction for submerged flow; 9" Parshall flume

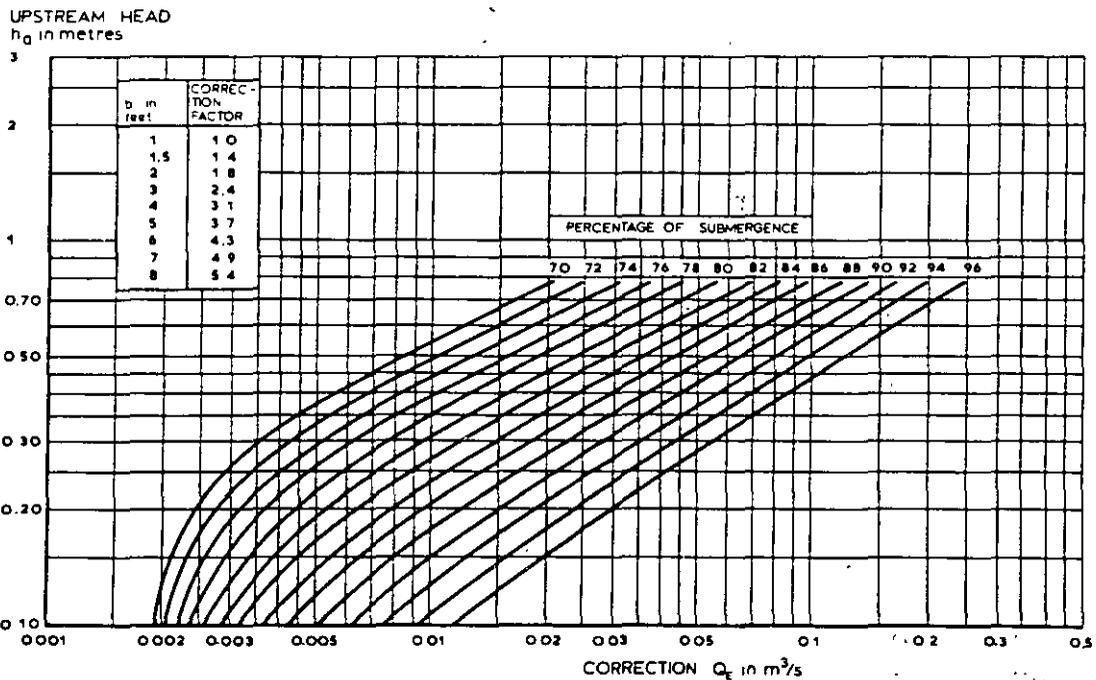


Figure 7.15 Discharge correction for submerged flow; 1' Parshall flume, correction Q_c (m^3/s)

UPSTREAM HEAD
 h_u in metres

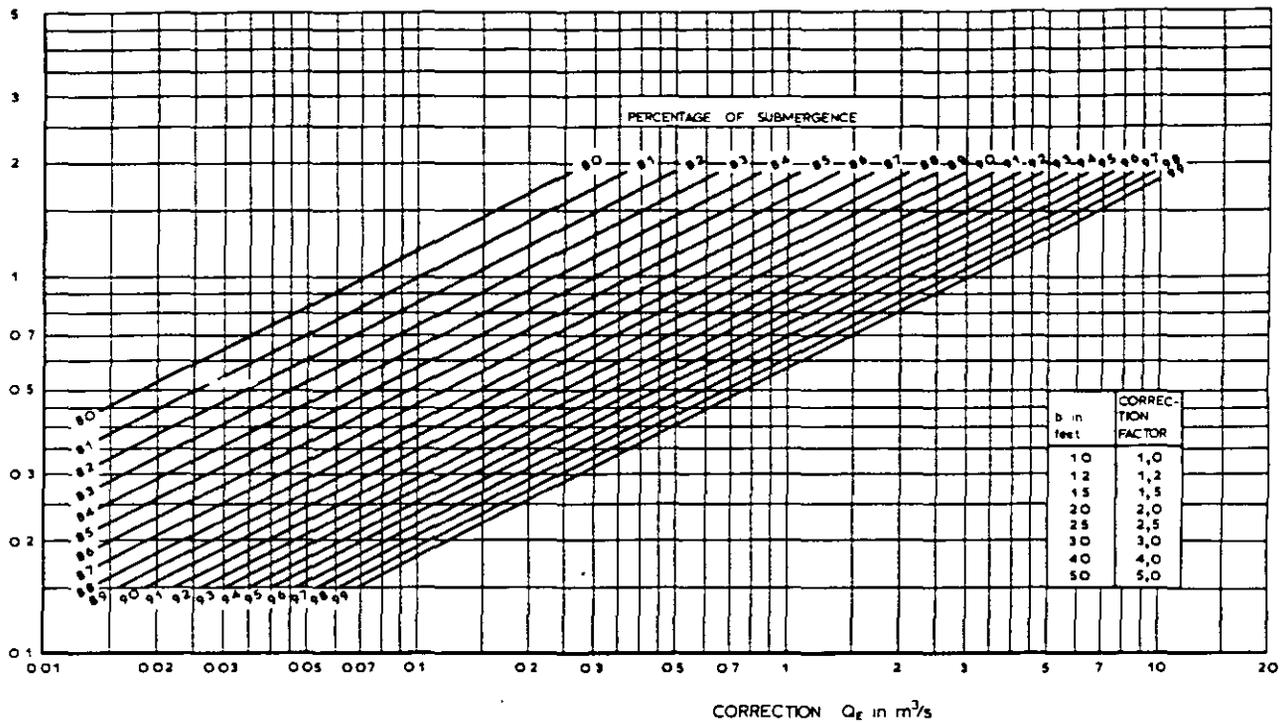


Figure 7.16 Diagram for determining correction to be subtracted from free-discharge flow to obtain submerged flow discharge through 10' Parshall flumes

since the flume ceases to be a measuring device if submergence exceeds this limit. It is recommended to use a long-throated flume (Section 7.1) instead of a non-modular Parshall flume.

As mentioned, turbulence in the relatively deep and narrow throat of the 'very small' flumes makes the h_b -gauge difficult to read. If an h_c -gauge is used under submerged flow conditions, the h_c -readings should be converted to h_b -readings with the aid of Figure 7.17, and the converted h_b -values are then used to determine the submerged discharge with the aid of Figures 7.10 to 7.14.

7.4.4 Accuracy of discharge measurement

The error in the modular discharge read from the Tables 7.5 to 7.11 is expected to be about 3%. Under submerged flow conditions the error in the discharge becomes greater, until at 90% submergence the flume ceases to be a measuring device. The method by which this discharge error is to be combined with errors in h_u , h_b , and the flume dimensions are shown in Annex 2.

7.4.5 Loss of head-through the flume

The size and elevation of the crest of the flume depend on the available loss of head through the flume $\Delta h (\approx \Delta H)$. Since for the Parshall flume h_u and h_b are measured at rather arbitrary locations, the loss of head through the flume Δh is not equal to

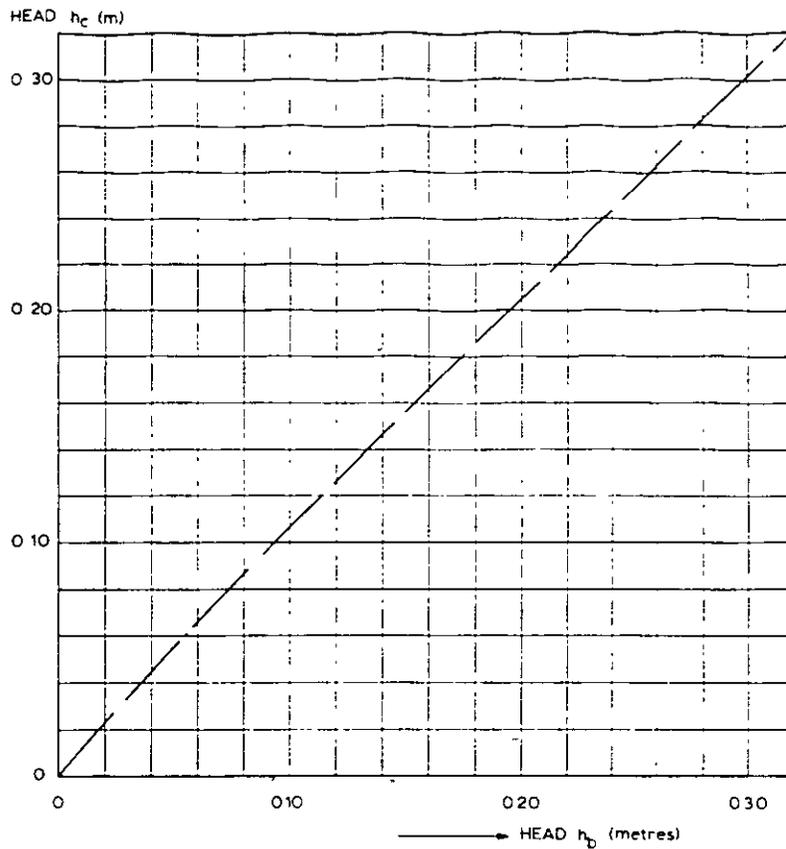


Figure 7.17 Relationship of h_c and h_b gauges for 1", 2" and 3" Parshall flumes for submergences greater than 50 percent (after Parshall-1953)

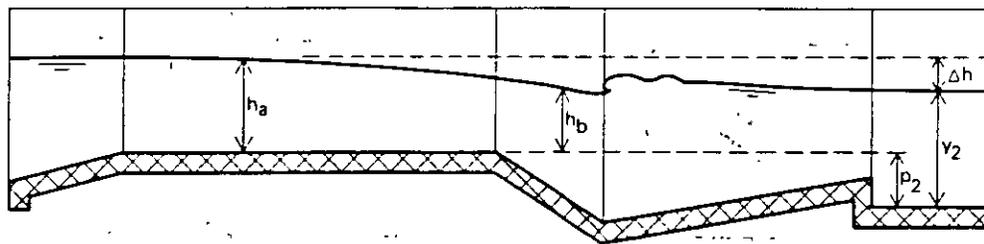


Figure 7.18 Section of Parshall flume

the difference between h_a and h_b but has a greater value (Figure 7.18). The head loss Δh can be determined from the diagrams in Figures 7.19 and 7.20 for small and large flumes. For very small flumes no data on Δh are available.

7.4.6 Limits of application

The limits of application of the Parshall measuring flumes essential for reasonable accuracy are:

- a. Each type of flume should be constructed exactly to the dimensions listed in Table 7.3;

- b. The flume should be carefully levelled in both longitudinal and transverse directions;
- c. The practical range of heads h_a for each type of flume as listed in Table 7.4 is recommended as a limit on h_a ;
- d. The submergence ratio h_b/h_a should not exceed 0.90.

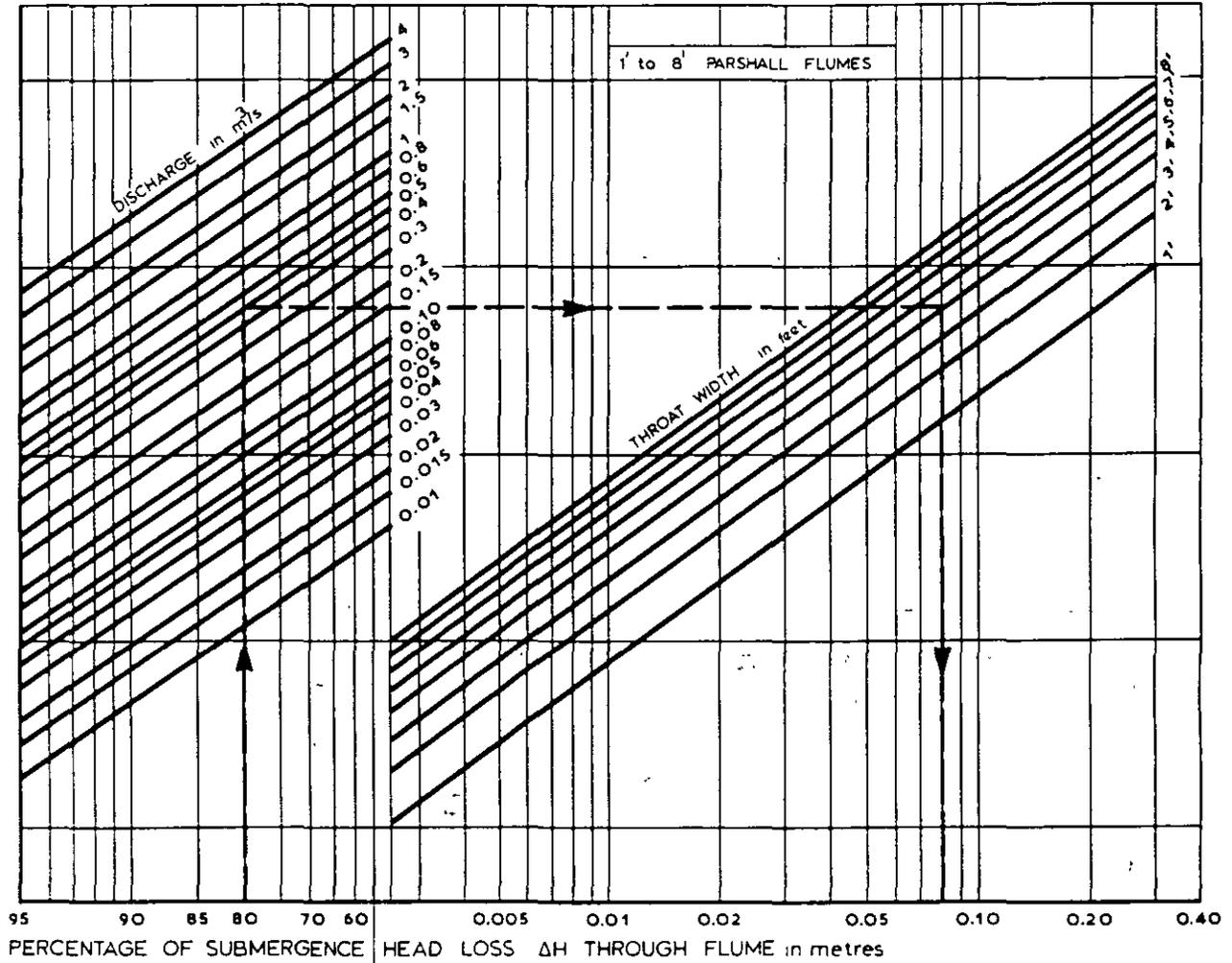


Figure 7.19 Head-loss through Parshall flumes 1' up to 8' Parshall flumes

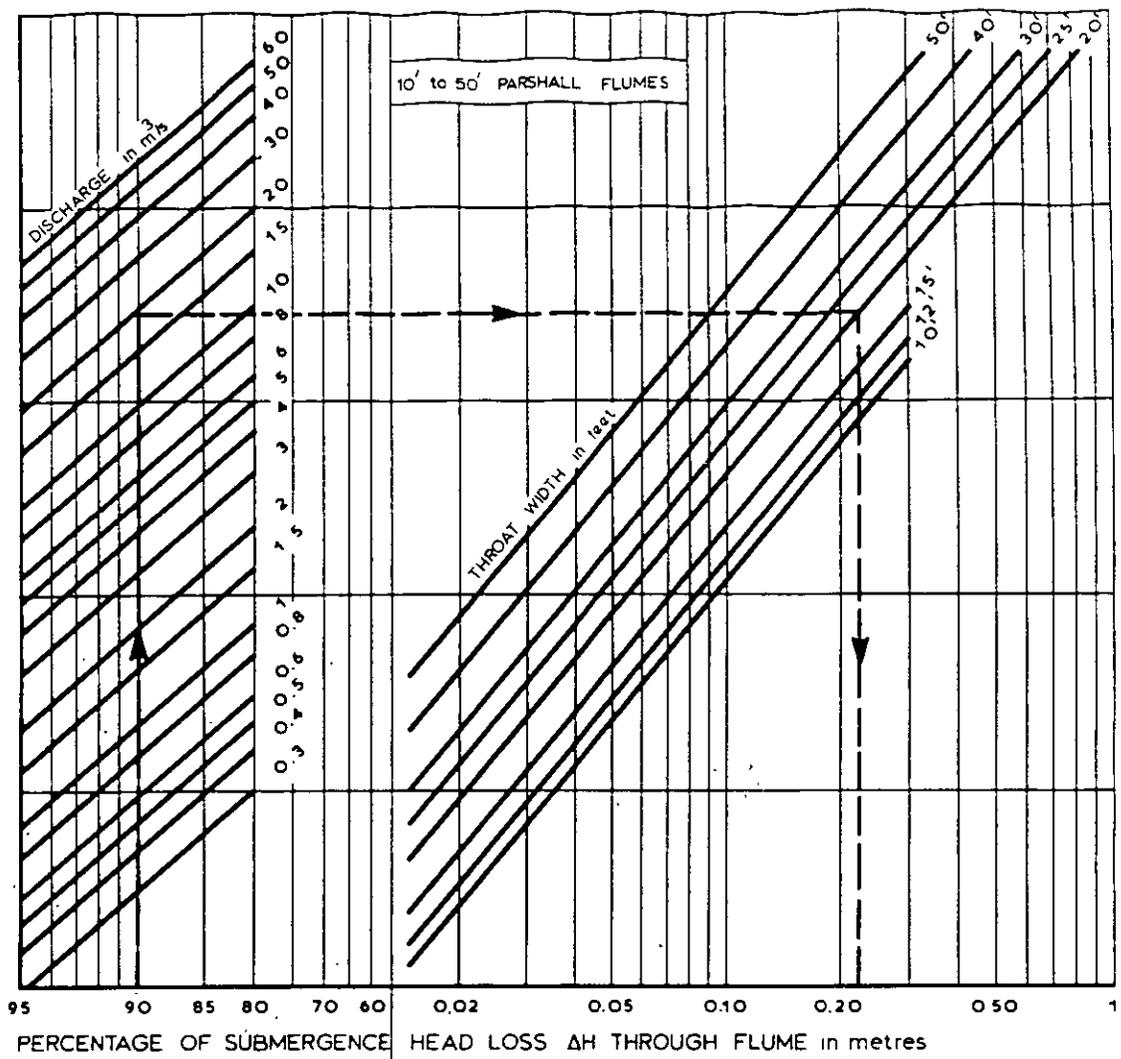


Figure 7.20 Head-loss through Parshall flumes (10-50 feet wide)

7.5 H-flumes

7.5.1 Description

On natural streams where it is necessary to measure a wide range of discharges, a structure with a V-type control has the advantage of providing a wide opening at high flows so that it causes no excessive backwater effects, whereas at low flows its opening is reduced so that the sensitivity of the structure remains acceptable. To serve this purpose the U.S. Soil Conservation Service developed the H-type flume, of which three geometrically different types are available. Their proportions are shown in Figure 7.21. They are:

HS-flumes

Of this 'small' flume, the largest size has a depth D equal to 0.305 m (1 ft) and a maximum capacity of 0.022 m^3/s .